తెలంగాణ ప్రభుత్వం
మహిళాభివృద్ధి మరియు శిశుసంక్షేమ శాఖ - చైల్డ్ లైన్ ఫౌండేషన్

బడిలోగానీ, బడి బయటగానీ వేధింపులకు గురవుతున్నా

ఆపదలో, కష్టాలలో ఉన్న పిల్లలను రక్షించదానికి

CHILD LINE 1098
NIGHT & DAY
24 HOUR NATIONAL HELPLINE

పిల్లలతో పనిచేయిస్తున్నా, వారిని బడికి పంపకుండా వేరే కార్యక్రమాలకు ఉపయోగిస్తున్నా

కుటుంబ సభ్యులు గానీ, బంధువులు గానీ ఇబ్బందికరంగా, అసభ్యంగా ప్రవర్తిస్తున్నా

1098 (పది-తొమ్మిది-ఎనిమిది) ఉచిత టెలిఫోన్ సేవా సౌకర్యానికి ఫోన్ చేయండి

రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ,
తెలంగాణ రాష్ట్రం, హైదరాబాదు

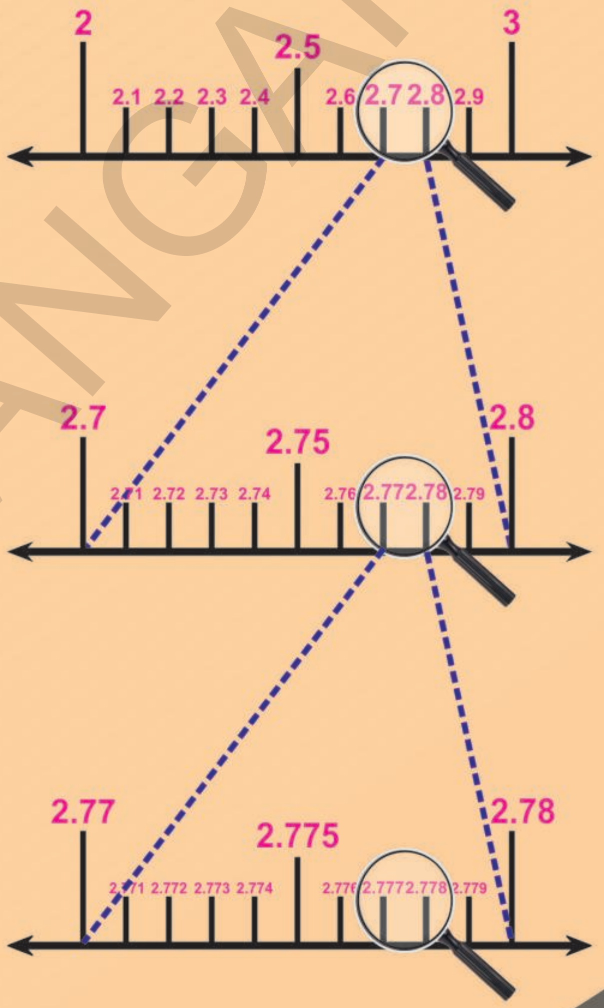
తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

గణితం
9వ తరగతి

FREE

గణితం

9వ తరగతి


2
2.1
2.2
2.3
2.4
2.5
2.6
2.7
2.8
2.9
3
2.7
2.71
2.72
2.73
2.74
2.75
2.76
2.77
2.78
2.79
2.8
2.77
2.771
2.772
2.773
2.774
2.775
2.776
2.777
2.778
2.779
2.78

తెలంగాణ రాష్ట్ర పభుత్వ ప్రచురణ,
హైదరాబాదు

తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

పిల్లలూ! మీ కోసమే ఈ సూచనలు...

- పాఠ్యపుస్తకంలో ప్రతి భావన అవగాహన కోసం సందర్భం లేదా ఉదాహరణలు లేదా సమస్యలు లేదా ఆటలు మొదలగునవి దానికి సంబంధించిన బొమ్మలు/పటాలు ఇవ్వబడినవి. సందర్భాన్ని పటంతో/బొమ్మతో పాటుచదివి భావనను అవగాహన చేసుకొనుటకు ప్రయత్నించాలి.
- భావనలు అవగాహన చేసుకోవడానికి నిర్వహిస్తున్న కృత్యాలలో పాల్గొంటున్న సందర్భంలో మీకు వచ్చే అనుమానాలను వెంటనే మీ ఉపాధ్యాయులను అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- భావన అవగహన అయినది అని తెలుసుకొనుటకు "ఇవి చేయండి"లోని సమస్యలను మీరు స్వంతంగా సాధించాలి. ఒకవేల సాధించలేకపోతే మాదిరి సమస్యను పరిశీలించి అవగాహన పొందాలి. లేదా ఉపాధ్యాయున్ని అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- "ప్రయత్నించండి" శీర్షిక కింద ఉన్న సమస్యలు మీ ఆలోచనలను పదునుపెట్టడానికి ఉపయోగపడతాయి. అనగా మీకు ఆలోచన నైపుణ్యలను పెంపొందిస్తాయి. వీటిని స్వయంగా సాధించలేనపుడు తోటివిద్యార్థులతో కలిసి జట్లలో సాధించడానికి ప్రయత్నించాలి. లేదా ఉపాధ్యాయులతో చర్చించి సాధనను తెలుసుకోవాలి.
- "ఆలోచించండి-చర్చించండి"లోని కృత్యాలు మీరు భావనను మరింత లోతుగా విస్తృతంగా అవగాహన చేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. కావున వీటిని మీ మిత్రులతో కలిసి చర్చిస్తూ, ప్రశ్నిస్తూ అవగాహన పొందండి.
- అధ్యాయం చివరన ఇచ్చిన అభ్యాసంలోని సమస్యలు మీరు అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న అన్ని భావనలకు సంబంధించినవి. ఈ సమస్యలన్ని ఒకే విధంగా ఉండవు. వీటిని మీరు స్వయంగా ఇంటిపనిగా గాని లేదా విరామ సమయంలో గాని సాధించవచ్చు. వీటిని సాధించేటప్పుడు గైడులో కాని, మరొకరి కాపీలో కాని చూసి చేయరాదు.
- "ఇవి చేయండి" "ప్రయత్నించండి"లోని సమస్యలు మాత్రం పాఠశాలలోనే ఉపాధ్యాయుల సమక్షంలో తప్పక సాధించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో ఎక్కడైతే ప్రాజెక్టులు ఇవ్వబడినవో వాటిని మీరు జట్లలో చేయవలసి ఉంటుంది. అయితే వీటి నివేదికలు మీరు వ్యక్తిగతంగా రాసివ్వవలసి ఉంటుంది.
- భావన అవగాహన కోసం నిర్వహించే కృత్యాలు, అభ్యాసాలలో ఉండే సమస్యలలో మీ ప్రతిస్పందనలను పాఠ్యపుస్తకంలోనే రాయవలసి ఉంటే వాటిని అక్కడే రాయాలి.
- మీరు ఏరోజు సాధించవలసిన సమస్యలను ఆ రోజే పూర్తిచేసి మీ ఉపాధ్యాయునితో తప్పక సరిచేయించుకోవాలి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో మీరు నేర్చుకున్న భావనలకు సంబంధించిన సమస్యలను మరికొన్నింటిని సేకరించి లేదా మీరు స్వయంగా తయారుచేసి గాని మీ ఉపాధ్యాయునికి, తోటి విద్యార్థులకు చూపించండి. అందరు కలిసి వాటిని సాధించండి.
- గణిత భావనలకు సంబంధించి పాఠ్యపుస్తకంలో ఇచ్చిన ఆటలు, పజిల్స్, ఆసక్తికరమైన విషయాలు అవగాహన చేసుకొని అలాంటివి మరికొన్ని సేకరించి సాధించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకం ద్వారా తరగతిగదిలో నేర్చుకున్న భావనలను తరగతిగదికే పరిమితం చేయకుండా జీవితంలో (తరగతి బయట) వివిధ సందర్భాలకు వాటిని జోడించడం, ఉపయోగించడం వంటివి చేయాలి.
- గణితంలో మీరు ముఖ్యంగా సమస్యసాధన, కారణాలు చెప్పడం-నిరూపణలు చేయడం, గణితభాషలో వ్యక్తపరచడం, గణిత భావనలను, అవగహనను వివిధ సందర్భంలో, విషయాలలో, నిత్య జీవితంలో అనుసందానం చేయడం, ప్రాతినిధ్యపరచడం వంటి సామర్థ్యాలను సాధించాలి.
- పై గణిత సామర్థ్యాలను సాధించడంలో భావనల అవగాహన పరంగా ఏవైనా ఇబ్బందులు ఎదురైతే ఎప్పటికప్పుడు ఉపాధ్యాయుల సహకారం తీసుకోవాలి.

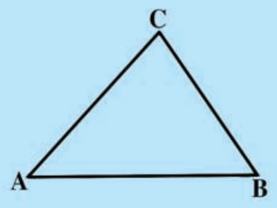
అద్భుత వృత్తం

త్రిభుజముపై తొమ్మిది బిందువుల వృత్తం నిర్మించుట

ఒక త్రిభుజం యొక్క శీర్షాల నుండి ఎదుటి భుజం పై గీసిన లంబాలు తాకే బిందువులు, త్రిభుజ భుజాల మధ్యబిందువుల మరియు లంబకేంద్రానికి, శీర్షాలకు గల మధ్యబిందువులు అన్నింటినీ తాకుతూ గీయగలిగే వృత్తమే అద్భుత వృత్తం. దీనినే తొమ్మిది బిందువుల వృత్తం (nine point circle) అంటారు. దీనిని మొట్టమొదట 1765 సం॥లో లెనార్ ఆయిలర్ కనుగొన్నాడు. దీనిని మెరుగు పరిచి సిద్ధాంత పరంగా 1882 సం॥లో గణిత శాస్త్రవేత్త కార్ల్ ప్యూయర్‌బాచ్ నిరూపించాడు.

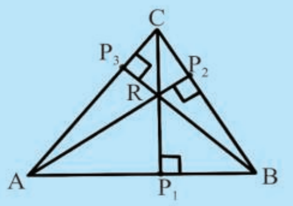
ఈ తొమ్మిది బిందువుల వృత్తాన్ని నిర్మించడం జ్యామితీయ పటాల నిర్మాణ కౌశలానిక ఒక పరీక్ష. దీనిని మీరు స్వయంగా నిర్మించడానికి కింది సోపానాలు దోహదపడతాయి. ప్రయత్నించి చూడండి.

సోపానం 1



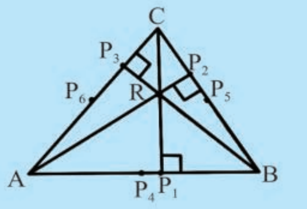
ఒక పెద్దదైన విషయబాహు త్రిభుజంను ఛార్టుపై (చక్కని వృత్తం కొరకు) గీయండి. దానికి ΔABC అని పేరు పెట్టండి.

సోపానం 2



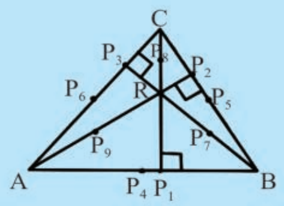
త్రిభుజ ప్రతి భుజముపైకి ఎదుటి శీర్షాల నుండి లంబాలు గీచి, ఆ బిందువులకు P_1, P_2 మరియు P_3 అని గుర్తించండి. లంబకేంద్రాన్ని R అని గుర్తించండి.

సోపానం 3



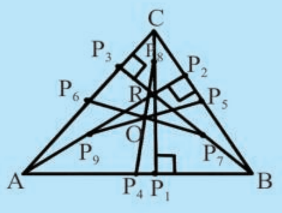
త్రిభుజ ప్రతి భుజం యొక్క మధ్యబిందులను గుర్తించి వరుసగా P_4, P_5 మరియు P_6 లుగా గుర్తించండి. అంటే AB మధ్యబిందువు P_4, BC మధ్యబిందువు P_5 ఇలా.....

సోపానం 4



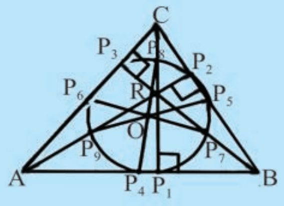
BR, CR మరియు AR అ యొక్క మధ్య బిందువులను గుర్తించి వాటికి P_7, P_8 మరియు P_9 అని గుర్తించండి. అంటే BR మధ్యబిందువు P_7, CR మధ్యబిందువు P_8 ఇలా.....

సోపానం 5



P_4 నుండి P_8, P_5 నుండి P_9 మరియు P_6 నుండి P_7 కలుపుతూ రేఖాఖండాలు గీయండి. అవి కలుసుకొన్న బిందువును 'O'గా గుర్తించండి.

సోపానం 6



'O' కేంద్రంగా OP_1 వ్యాసార్ధంతో వృత్తాన్ని గీయండి. ఈ వృత్తం P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 మరియు P_9 బిందువుల గుండా పోతుంది.

ఇదే మీరు గీచిన అద్భుత వృత్తం!

ఈ జ్యామితి పట నిర్మాణంలో "వృత్తలేఖిని" ప్రాధాన్యతను మీరు గుర్తించే ఉంటారు.

గణితం

9వ తరగతి

పాఠ్య పుస్తక అభివృద్ధి, ప్రచురణ కమిటీ

ప్రధాన నిర్వహణాధికారి : **శ్రీ ఎ.సత్యనారాయణ రెడ్డి**
సంచాలకులు, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ,
హైదరాబాదు.

ప్రధాన వ్యవహారనిర్వాహకులు : **శ్రీ బి.సుధాకర్**
సంచాలకులు, ప్రభుత్వ పాఠ్యపుస్తక ముద్రణాలయం
హైదరాబాదు.

కార్యనిర్వాహకులు : **డా. నన్నూరు ఉపేందర్ రెడ్డి**
ప్రొఫెసర్, పాఠ్యప్రణాళిక మరియు పాఠ్యపుస్తక విభాగం
రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ,
హైదరాబాదు.

ఛైర్మన్, గణిత ఆధార పత్రం, గణిత పాఠ్యప్రణాళిక, పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ

ప్రొఫెసర్. వి.కన్నన్,
గణితం – సాంఖ్యకశాస్త్రవిభాగం, హైదరాబాదు విశ్వవిద్యాలయం.

ముఖ్యసలహాదారులు

శ్రీ చుక్కా రామయ్య, విద్యావేత్త,
తెలంగాణ, హైదరాబాదు.

డా. హెచ్. కె.దివాన్, విద్యా సలహాదారు,
విద్యాభవన్ సొసైటి రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్తాన్.

తెలంగాణ ప్రభుత్వ ప్రచురణ, హైదరాబాదు.

చట్టాలను గౌరవించండి
హక్కులను పొందండి

విద్యవల్ల ఎదగాలి
వినయంతో మెలగాలి

© Government of Telangana, Hyderabad.

First Published 2013
New Impressions 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019

All rights reserved.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Director of School Education, Hyderabad, Telangana.

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

తెలంగాణ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ 2019-20

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

పాఠ్య పుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ సభ్యులు

రచయితలు

శ్రీ తాతా వెంకట రామకుమార్,
హెచ్.యం., జి.ప.ఉ.పా.ములుమూడి, నెల్లూరు జిల్లా.

శ్రీ సోమ ప్రసాద్ బాబు,
పి.జి.టి., ఎ.పి.టి.డబ్ల్యూ.ఆర్. చంద్రశేఖరపురం, నెల్లూరు జిల్లా.

శ్రీ కొమండూరి మురళి శ్రీనివాస్,
పి.జి.టి., ఎ.పి.టి.డబ్ల్యూ.ఆర్. స్కూల్ ఆఫ్ ఎక్సలెన్స్, శ్రీశైలం.

శ్రీ పడాల సురేష్ కుమార్,
ఎస్.ఎ., బా.ఉ.పా., విజయనగర్ కాలనీ, హైదరాబాద్.

శ్రీ పి.పి.యల్.గణపతి శర్మ
ఎస్.ఎ., బా.ఉ.పా., జమిస్తాన్‌పూర్, మానికేశ్వర్ నగర్, హైదరాబాద్.

శ్రీ దుగ్గరాజు వేణు,
ఎస్.ఎ., ఉ.పా., అల్లవాడ, చేవెల్ల మండలం, రంగారెడ్డి జిల్లా.

శ్రీ పి.ఆంథోని రెడ్డి,
ప్రధానోపాధ్యాయుడు, సెయింట్ పీటర్స్ ఉ.పా, ఆర్.ఎస్.పేట, నెల్లూరు జిల్లా.

శ్రీ డి.మనోహర్,
ఎస్.ఎ., జి.ప.ఉ.పా., బ్రాహ్మణపల్లి, తాడ్‌వాయి (మం.), నిజామాబాద్ జిల్లా.

శ్రీ గొట్టుముక్కల వి.బి.యస్.యన్.రాజు,
ఎస్.ఎ., పురపాలక ఉన్నత పాఠశాల, కస్పా, విజయనగరం.

శ్రీ కె.వరదసుందర్‌రెడ్డి,
ఎస్.ఎ., మం.ఉ.పా., తక్కశిల, ఆలంపూర్ మండలం, మహబూబ్‌నగర్ జిల్లా.

శ్రీ అబ్బరాజు కిశోర్,
ఎస్.జి.టి., మం.ఉ.పా., చమల్లపూడి, గుంటూరు జిల్లా.

శ్రీ జి. అనంత రెడ్డి
విశ్రాంత ప్రధానోపాధ్యాయులు, రంగారెడ్డి జిల్లా.

శ్రీ ఎమ్.రామాంజనేయులు,
లెక్చరర్, గవర్నమెంట్ డైట్, వికారాబాద్, రంగారెడ్డి జిల్లా.

శ్రీ ఎమ్.రామాచారి,
లెక్చరర్, గరవ్నమెంట్ డైట్, వికారాబాద్, రంగారెడ్డి జిల్లా.

డా॥ ఎ.రాంబాబు,
లెక్చరర్, గవర్నమెంట్ సి.టి.ఇ., వరంగల్ జిల్లా.

డా॥ పూండ్ల రమేష్,
లెక్చరర్, గవర్నమెంట్ ఐ.ఎ.ఎస్.ఇ., నెల్లూరు జిల్లా.

సంపాదకులు

శ్రీ ఎస్.సురేష్ బాబు,
ప్రొఫెసర్, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణా సంస్థ,
హైదరాబాదు.

ప్రొ॥ వి.శివరామప్రసాద్, (రిటైర్ట్)
డిపార్ట్‌మెంట్ ఆఫ్ మాథమాటిక్స్,
ఉస్మానియా యూనివర్సిటీ, హైదరాబాదు.

శ్రీ ఎన్.సి.హెచ్.పట్టాభి రామాచార్యులు,(రిటైర్డ్)
ప్రొఫెసర్, నేషనల్ ఇన్సిట్యూట్ ఆఫ్ టెక్నాలజీ,
వరంగల్.

శ్రీ ఎ.పద్మనాభం, (రిటైర్ట్)
హెచ్.ఓ.డి. ఆఫ్ మాథమాటిక్స్,
మహారాణి కాలేజ్, పెద్దాపురం.

శ్రీ కె.బ్రహ్మయ్య,
ప్రొఫెసర్, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణా సంస్థ,
హైదరాబాదు.

శ్రీ జి.ఎస్.ఎన్.మూర్తి, (రిటైర్ట్)
రీడర్ ఇన్ మాథమాటిక్స్,
రాజ ఆర్.ఎస్.ఆర్.కె.ఆర్.ఆర్. కాలేజ్, బొబ్బిలి.

కోఆర్డినేటర్లు

శ్రీ కాకుళవరం రాజేందర్ రెడ్డి,
కో-ఆర్డినేటర్, గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., హైదరాబాదు.

శ్రీ కె.కె.వి.రాయలు,
లెక్చరర్, ఐ.ఎ.ఎస్.ఇ., మాసబ్ టాంక్, హైదరాబాదు.

విద్యావిషయక సహకారం అందించినవారు

శ్రీ ఇందర్ మోహన్ **శ్రీ యశ్వంత్‌కుమార్ ధవే** **శ్రీ హనీఫ్ పాలివల్,** **శ్రీ ఆశిష్ చౌర్ధయా**

విద్యాభవన్ సొసైటి, రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్తాన్.

శ్రీ శరణ్ గోపాల్ **కుమారి ఎమ్.అర్చన,** **శ్రీ పి.చిరంజీవి,**

గణితం – సాంఖ్యకశాస్త్రవిభాగం, హైదరాబాదు విశ్వవిద్యాలయం.

బొమ్మలు, డిజైనింగు సభ్యులు.

శ్రీ ప్రశాంత్ సోని **శ్రీ షేక్ షకీర్ అహమ్మద్** **శ్రీ ఎస్.ఎమ్.ఇక్రాం**

విద్యాభవన్ సొసైటి, రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్తాన్.

కవర్‌పేజ్ డిజైనింగ్

శ్రీ కె.సుధాకరాచారి, హెడ్‌మాస్టర్, యు.పి.ఎస్.నీలికుర్తి, మం.మరిపెడ, జి.వరంగల్

ముందుమాట

మానవ వికాసానికి, స్వయం సిద్ధమైన అభివృద్ధికి 'విద్య' ఒక మూలాధారం. విద్యకు గల ఈ అద్భుతమైన శక్తిని గుర్తించి పురోగమించే అన్ని సమాజాలు సార్వజనీన ప్రాథమిక విద్యకు అత్యంత ప్రాధాన్యత ఇచ్చి, ప్రతి ఒక్కరికీ గుణాత్మక విద్యను అందించాలనే దృక్పథంతో ముందుకు పోతున్నాయి. దీనికి కొనసాగింపుగా సెకండరీ విద్యను కూడా సార్వజనీనం చేయాల్సిన ఆవశ్యకత ఏర్పడింది.

విద్యార్థి ప్రాథమికోన్నత స్థాయి వరకు నేర్చుకున్న భావనలను, గణిత ప్రక్రియలను సమ్మిళితం చేసి గణితీకరణం చెందే విధంగా సెకండరీ స్థాయి దోహదపడుతుంది. గణితాంశాలను హేతుబద్ధంగా నేర్చుకోవడం, సమస్యలు విశ్లేషించి సాధించడం, సిద్ధాంతాలు నిరూపించడం వంటి వాటిని ఈ స్థాయిలో ప్రవేశపెట్టారు. ఈ దశలో గణితం ఒక ప్రత్యేక బోధనా విషయంగానే కాకుండా ఇతర విషయాలతో అవినాభావ సంబంధం కలిగి ఉండే విధంగా కారణాలతో కూడిన విశ్లేషణలు చేయుటకు ఉపకరిస్తుంది.

మన రాష్ట్రంలో చదువుతున్న విద్యార్థులందరూ గణితాన్ని ఆనందంతో నేర్చుకోవడానికి, వారి జీవిత అనుభవాలను జోడించి సమస్యలు రూపొందించడానికి, సాధించడానికి ఈ గణిత పాఠ్యపుస్తకంలో మౌలిక భావనలు తోడ్పడుతాయని ప్రగాఢంగా విశ్వసిస్తున్నాము.

విద్యార్థులు గణితాన్ని మార్కులు సంపాదించుకొనుట కొరకు మాత్రమే కాకుండా గణిత పాఠ్యప్రణాళికలో ఇమిడి ఉన్న అమూర్త కీలక భావనలను నేర్చుకునే విధంగా ఉపాధ్యాయులు ప్రోత్సహించవలసి ఉంది. బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో అన్ని స్థాయిల విద్యార్థులు భాగస్వాములు అయ్యే విధంగా కృషిచేయాలి. విద్యార్థులలో గణిత పఠనం పట్ల అనుకూల దృక్పథాన్ని పెంపొందించి, వారిలో విశ్వాసం కలిగించేట్లు బోధన కొనసాగితే అది వారి జీవన గమ్యానికి దారితీస్తుంది. ఈ విధమైన జ్ఞాన నిర్మాణానికి ఈ పాఠ్యపుస్తకం దోహదపడుతుంది. అందుకనువైన రీతిలో దీన్ని వినియోగించాలి.

రాష్ట్ర విద్యా ప్రణాళిక పరిధి పత్రం 2011 (SCF 2011) యొక్క విశాల దృక్పథానికి అనుగుణంగా రూపొందిన గణిత ఆధార పత్రం లోని అంశాల ఆధారంగా నిర్ధారించిన విద్యాప్రమాణాలను ప్రతీస్థాయిలో సాధించాల్సి ఉంది.

గణిత పాఠ్యపుస్తకాన్ని ఆకర్షణీయంగా, ప్రమాణాలకు అనుగుణంగా తీర్చిదిద్దడంలో అవిరళ కృషి చేసిన పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ సభ్యులను, పుస్తక రూపకల్పనలో పాలుపంచుకున్న ఉపాధ్యాయులను, అధ్యాపకులను రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ అభినందిస్తుంది. ఇదే విధంగా పాఠ్యపుస్తకాల రూపకల్పనకు పరిపాలనా పరంగా సహకరించిన జిల్లా విద్యాశాఖాధికారులు, మండల విద్యాశాఖాధికారులు, పాఠశాలల ప్రధానాచార్యులకు ప్రత్యేక ధన్యవాదాలు. పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధిలో మమ్ములను ముందుండి ప్రోత్సహించిన కమీషనర్ మరియు డైరెక్టరు, పాఠశాల విద్య మరియు విద్యాభవన్ సొసైటీ రాజస్థాన్, ఉదయ్‌పూర్‌కు కృతజ్ఞతలు. రాబోయే కాలంలో పాఠ్యపుస్తకం మరింత గుణాత్మకంగా అభివృద్ధి చెందడానికి మీ అందరి నుండి సలహాలు, సూచనలు ఆహ్వానిస్తున్నాం.

స్థలం : హైదరాబాదు.
తేది : డిసెంబర్ 3, 2012

సంచాలకులు
రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ
హైదరాబాద్

పీఠిక

రాష్ట్ర విద్యా ప్రణాళికా పరిధిపత్రం (SCF - 2011) లో సూచించిన అనేక సిఫార్సులలో ప్రధానమైనది "పాఠశాలలో విద్యార్థుల అభ్యసనం, పాఠశాల బయట జీవితం (నిజ జీవితం)తో ముడిపడి ఉండాలి". దీని కనుగుణంగా మన రాష్ట్ర ప్రభుత్వం అన్ని తరగతులకు దశల వారీగా అన్ని పాఠ్యాంశాలలోనూ విద్యాప్రణాళికను సవరించుటకు నిర్ణయించారు.

విద్యాహక్కు చట్టం (RTE - 2009) ప్రకారం 14 సంవత్సరాల వయస్సువరకు పాఠశాలలో చేరిన ప్రతీ బిడ్డ, అన్నిస్థాయిల్లో నిర్ధారించిన నైపుణ్యాలను, ప్రమాణాలను తప్పనిసరిగా పొందాలని సూచిస్తున్నది. జాతీయ స్థాయిలో రూపొందించిన సిలబస్ ప్రకారం మన రాష్ట్రంలోని విద్యార్థులు కూడా గణితం, విజ్ఞాన శాస్త్రాలలోని అంశాలు నేర్చుకోవాల్సిన అవసరం ఏర్పడింది. జాతీయ స్థాయి, అర్హత, ప్రవేశ పరీక్షలకు మన రాష్ట్రంలోని పిల్లలుకూడా సిద్ధం కావాల్సిఉంది. ఇందుకనుగుణంగా మనరాష్ట్రంలో మార్పులు చేర్పులు చేపట్టుట అత్యంత ఆవశ్యకం. అవసరాలను దృష్టియందుంచుకొని విజ్ఞాన, సాంకేతిక రంగాల అభివృద్ధిని అంచనావేసి తదనుగుణంగా బలీయమైన సాంకేతిక యుగానికి విద్యార్థిని తయారుచేయవలసిన అవసరము కూడా ఎంతైనా ఉన్నది. ఇందుకనుగుణంగా గణిత పాఠ్యప్రణాళికను సంస్కరించాల్సిన అవసరం ఏర్పడింది.

గణిత విద్యా ప్రణాళిక ప్రధానంగా మూడు దశలు అంటే ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత మరియు సెకండరీ స్థాయిలలో శీర్షిక మరియు సర్పిల విధానాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. గణిత ఉపాధ్యాయులు ఉన్నత తరగతుల గణిత పాఠ్యప్రణాళికను ఈ దృష్టితో అధ్యయనంచేయాలి. విద్యార్థులు ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత దశలలో నేర్చుకున్న గణిత భావనల అవగాహన, వినియోగాలను మరింత విస్తృత పరుచుకోవడానికి సెకండరీ స్థాయిలోని పాఠ్యప్రణాళిక తోడ్పడాలి.

పాఠ్య విషయాలు అన్నీ ప్రాథమిక గణిత భావనలు, సాధారణీకరణాల ద్వారా అన్వేషణ, అవగాహనలపై ఊహించి మౌలిక నిర్మాణ విధాన పద్ధతిలో రూపొందించారు. ఈ విధానం వల్ల విద్యార్థులు గణిత అభ్యసనంలో చురుకుగా పాల్గొనేటట్లు, సమవయస్కులతో చర్చించేటట్లు, ప్రశ్నించుకొనేటట్లు దోహదపడి, బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలలో మార్పుకు దోహదపడుతుంది.

ప్రస్తుత 9వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకం రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణా సంస్థ వారు రూపొందించిన గణిత విద్యా ప్రణాళికను, విద్యా ప్రమాణాలను దృష్టయందుంచుకొని రూపొందించారు.

ఈ తరగతి పాఠ్యప్రణాళికలో ప్రధానంగా (1) సంఖ్యా వ్యస్థ (2) బీజగణితం (3) రేఖాగణితం, (4) క్షేత్రమితి (5) సాంఖ్యకశాస్త్రం (6) నిరూపక జ్యామితి అనే రంగాలుగా ఉండి నిర్దేశిత స్థాయిలో రూపొందించిన విద్యాప్రమాణాలను సాధించడానికి తోడ్పడుతుంది.

ఈ పాఠ్యపుస్తకంలోని అంశాలు అన్నీ విద్యార్థులు చక్కని స్వేచ్ఛాయుత వాతావరణంలో నేర్చుకునే విధంగా పొందుపర్చారు. విద్యార్థులు చిన్న చిన్న బృందాలలో చర్చించి సమస్యలు సాధించుటకు వీలుగా "ఇవి చేయండి", "ప్రయత్నించండి" వంటి శీర్షికలను చేర్చారు.

ఈ పాఠ్యపుస్తకంలోని కొన్ని ప్రత్యేకతలు :

- పాఠ్య ప్రణాళికలోని వివిధ అంశాలను ఒకేసారి ప్రవేశపెట్టకుండా ప్రతి టర్మ్‌లోనూ మళ్లీ మళ్లీ నేర్చుకోవడానికి వీలుగా పొందుపర్చారు.
- జ్యామితిలోని భావనలను ప్రాథమికోన్నత స్థాయి వరకు విద్యార్థులు సహజ సిద్ధమైన ఆలోచనా ధృక్పథానికి అనుగుణంగా కొలతలు కొనడం, కాగితాలు మడవడం వంటి కృత్యాల ద్వారా నేర్చుకొనేలా ఉన్నాయి. ఇక ఈ దశ నుండి జ్యామితిని స్వీకృతాధార పద్ధతిలో అధ్యయనం చేస్తారు. నిర్వచిత, అనిర్వచిత పదాలను, స్వీకృతాలను వాటి నుండి ఏర్పడే కొత్త సంబంధాలను సిద్ధాంతాలుగా ఏర్పరచి వాటి నిరూపణలు తెలుసుకుంటారు. జ్యామితి పటాల నిర్మాణాలను ప్రధానంగా వృత్తలేఖిని వినియోగించడం మరొక ప్రత్యేక ఆకర్షణ.

- “ఇవి చేయండి”, “ప్రయత్నించండి” మరియు “ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి” అనే శీర్షికలు తరగతి గదిలో విద్యార్థులను నిరంతరం సమగ్రంగా మూల్యాంకనం చేయుటకు దోహదపడతాయి. కొన్ని ఉప అంశాలు చర్చించిన పిదప ఇచ్చిన అభ్యాసాలు విద్యార్థులు స్వయంగా సాధించుటకు తద్వారా ప్రతి విద్యార్థి యొక్క అభ్యసన సామర్థ్యాన్ని అంచనా వేయడానికి అవకాశం కలుగుతుంది.

- మొత్తం పాఠ్యాంశాలను 15 అధ్యాయాలుగా విభజించారు. విద్యార్థులు ప్రతీ అంశాన్ని కూలంకషముగా అవగాహన చేసుకొనుటకు, హేతుబద్ధంగా ఆలోచించుటకు, అంశాలపై సమగ్రంగా పట్టు సాధించుటకు, సులభంగా నేర్చుకొనుటకు, గణిత అధ్యయనం పట్ల ఆసక్తిని పెంచడానికి దోహదపడతాయి.

- “మెదడుకు మేత”, “మీకు తెలుసా?” వంటి శీర్షికల ద్వారా విద్యార్థులలో దాగివున్న సృజనాత్మకతను, ఆలోచనా విధానాలను వెలికి తీయుటకు సహాయపడతాయి.

- రంగుల వర్ణ చిత్రాలు, పటాలు, చదవగలిగేలా అక్షరాలసైజు, తగ్గిన పాఠ్యపుస్తకం పేజీల సంఖ్య విద్యార్థులను గణిత పాఠ్యపుస్తకం పట్ల భయం పోగొట్టి స్వయం అభ్యసనానికి ప్రేరేపిస్తుంది.

అధ్యాయం(1)లో వాస్తవ సంఖ్యల పరిధి గురించి విస్తృతంగా చర్చించారు. వాస్తవ సంఖ్యారేఖపై కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించే వివిధ పద్ధతులు ఉన్నాయి. ఈ సందర్భంలో విద్యార్థుల్లో ఆసక్తీ పెంపొందడానికి సంఖ్యల చరిత్రను ప్రస్తావించారు. సంఖ్యారేఖపై కుంభాకార దర్పణంతో కరణీయ అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించుటలో విద్యార్థుల ఊహాశక్తికి, అంతర్ దృష్టికి అవకాశం ఏర్పడి దశాంశ భిన్నాల విస్తరణకు దోహదం చేస్తుంది.

అధ్యాయం(2)లో బహుపదులు మరియు కారణాంకాల విభజనలో బీజగణిత మౌలిక భావనలను విశ్లేషణాత్మకంగా వివరించారు. జరిగింది. బీజీయ సమాసాలకు, బహుపదులకు గల సున్నితమైన భేదాన్ని ఉదాహరణల ద్వారా వివరించారు. శేష సిద్ధాంతం, కారణాంక సిద్ధాంతాల ద్వారా బహుపదుల కారణ రాశులను తెలుసుకొనేలా ప్రవేశపెట్టారు. వర్గ బహుపదిని కారణాంక విభజన చేయుటలో మధ్యపదంను ఎందుకు విడదీయవలసి వచ్చిందో సకారణంగా వివరించారు. ఇదే విధంగా బీజీయ సమాసాల్లో మరిన్ని సర్వ సమీకరణాల గురించి చర్చించి, వాటి ద్వారా కారణాంక విభజన పద్ధతులను చేర్చారు.

అధ్యాయం(3)లో రెండు చరరాశుల్లో రేఖీయ సమీకరణాలు కూడా బీజగణిత రంగంలో ప్రాధాన్యత పెంపొందించే అధ్యాయం. వివిధ ఉదాహరణల ద్వారా నిత్యజీవిత సమస్యల ద్వారా సమీకరణాలను రాబట్టుట, వాటిని సాధించే వివిధ పద్ధతులు విస్తృతంగా చర్చించడం జరిగింది. రేఖా చిత్రాలు (గ్రాఫ్‌లు) ద్వారా సమీకరణాల సాధన విద్యార్థులను గణితీకరణం దిశగా పరివర్తన చేయుటలో కీలక పాత్రవహిస్తాయి.

రేఖాగణితంలో మొత్తం ఏడు అధ్యాయాలు (అంటే 3, 4, 7, 8, 11, 12 మరియు 13) ఉన్నాయి. ఈ జ్యామితి అధ్యాయాలన్నింటిలో సమస్యలను హేతుబద్ధంగా ఆలోచించడం, అంతఃదృష్టితో పరిశీలించడం నిజజీవిత సంఘటనలతో అర్థం చేసుకోవడం కొరకు అనేక ఉదాహరణలో పరిచయంచేశారు. వివిధ సమతల పటాల మధ్య ఉండే సంబంధాలను తార్కికంగా నిరూపించే విధానాలు ఉన్నాయి. ప్రాచీన కాలం నుండి జ్యామితి అభివృద్ధి చెందిన విధం, ప్రత్యేకంగా సమతల రేఖాగణితంలో యూక్లిడ్ రాసిన గ్రంథం “ది ఎలిమెంట్స్” లో గల స్వీకృతాలను చర్చించారు. రేఖలు, కోణాలు, త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాలు, వృత్తాలు, వాటి వైశాల్యాలు వంటి అధ్యాయాల్లో వివిధ సిద్ధాంతాలను కృత్యాల రూపంలో సిద్ధాంతీకరణకు దారి తీసే విధంగా ఉన్నాయి. స్వీకృతాధార విధానాన్ని పాటించినప్పటికీ అనవసరంగా అన్ని సిద్ధాంతాలను రుజువు చేయడంవల్ల కలిగేభారాన్ని తగ్గించి విద్యార్థులలో ఆగమన, నిగమన విధానాలతోబాటు విశ్లేషణాత్మకంగా అర్థం చేసుకొనేలా కృత్యాలు ఉన్నాయి. జ్యామితి నిర్మాణాలకు ముఖ్యంగా వృత్తలేఖిని, కొలబద్దలను వాడడం జరిగింది. దీనివల్ల నిర్మాణాలకు ఖచ్చితత్వం వస్తుందని గ్రహించవచ్చు.

అధ్యాయం(5)లో కొత్తగా నిరూపక రేఖాగతాన్ని యూక్లిడ్ రేఖాగణితానికి ప్రత్యామ్నాయంగా చర్చించబడింది. బీజగణితం ఆధారంగా రేఖాగణిత భావాలు ఏ విధంగా సంబంధం కలిగి ఉంటాయో చెప్పడమే కాకుండా నిరూపక తలంలో (గ్రాఫ్) బిందువులను ఏ విధంగా గుర్తించవచ్చో విస్తారంగా అనేక విధానాలలో చర్చించారు.

అధ్యాయం(9)లో సాంఖ్యకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యత, వర్గీకృత అవర్గీకృత దత్తాంశాల సేకరణ గురించి చర్చించి, కేంద్రీయమాన విలువలైన అంకగణిత సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకంలను కనుగొనే పద్ధతులను, జీవిత సందర్భాలను జోడించి పరిచయం చేశారు.

అధ్యాయం(14)లో సంభావ్యత అనేది పూర్తిగా క్రొత్త అధ్యాయం. వివిధ సందర్భాల్లో సంభావ్యత భావన ఏవిధంగా ఏర్పడుతుందో వివిధ ఉదాహరణల ద్వారా విస్తృతంగా చర్చించారు. అవకాశాలకు, ఫలితాలకు మధ్య సంబంధాలను ఏర్పరుచుటలో సంభావ్యత ఏ విధంగా ఉపయోగపడుతుందో వివరించారు.

అధ్యాయం(10)లో వైశాల్యాలు, ఘనపరిమాణాలలో ప్రధానంగా స్థూపం, శంఖువు మరియు గోళం యొక్క పక్కతల (వక్రతల) వైశాల్యాలు, సంపూర్ణ తలవైశాల్యాలు, ఘనపరిమాణాలను గురించి చర్చించారు. వివిధ ఘనాకార వస్తువుల ఘనపరిమాణాల మధ్యగల సంబంధాల ఆధారంగా సూత్రాలు ఆవిష్కరించారు.

అధ్యాయం(15)లో గణితంలో నిరూపణలు అనే కొత్త అధ్యాయం ద్వారా గణిత ప్రవచనానికి, సాధారణ ప్రవచనానికి బేధాన్ని తెలుపడమేకాక ఒక గణిత ప్రవచనం ఎన్ని రకాలుగా నిరూపించవచ్చు ఉదాహరణల ద్వారా వివరించారు. ఈ సందర్భంలో స్వీకృతాలు ప్రతిపాదనల వివరణలతోబాటు సిద్ధాంత నిరూపణలో వివిధ దశలను చర్చించారు.

ఉపాధ్యాయుడు ఈ 15 అధ్యాయాలలో పేపర్-1లో భాగంగా వాస్తవ సంఖ్యలు, బహుపదులు మరియు కారణాంక విభజన. నిరూపక జ్యామితి; రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు; త్రిభుజం, చతుర్భుజాలు మరియు వైశాల్యాలు అనే అధ్యాయాలను పేపరు-2లో భాగంగా జ్యామితీయ మూలాలు, సరళరేఖలు మరియు కోణములు సాంఖ్యక శాస్త్రం, ఉపరితలం వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు; వృత్తాలు, జామితీయ నిర్మాణలు మరియు సంభావ్యత అనే అధ్యాయాలను బోధించాలి.

ఏ పాఠ్య విషయంలోనైనా విజయ సాధన అనేది పాఠ్యప్రణాళిక కంటే ఎక్కువగా ఉపాధ్యాయుడు అవలంభించే బోధనా పద్ధతులపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఒక మంచి పాఠ్యపుస్తకంతో మాత్రమే విద్యార్థులలో గుణాత్మకమైన మార్పులను ఆశించలేం. తరగతిగదిలోనూ ఉత్తమ బోధన మాత్రమే పాఠ్యాప్రణాళికకు నూతన అర్థాన్ని కల్పించి వాంఛనీయమైన మార్పులను తేగలుగుతుంది. అందువల్ల గణిత బోధన అంటే అభ్యాసాలను సాధింపచేయడమే కాకుండా మౌలిక భావనలను అవగాహన పర్చడం ద్వారా సమస్యాసాధన నైపుణ్యాలు పెంపొందుతాయని గ్రహించాలి. ఇటువంటి మార్పు గణిత బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో రావాలని ఆశిద్దాం.

- పాఠ్య పుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ

చరిత్రలో ఒక ముఖ్యాంశం "Highlight from History"

(అన్వేషణలో అద్భుతాలు ముఖ్యంగా చిన్నతనంలోనే బయటపడతాయి.)

Ramanujan

రామానుజన్ అనే బాలుడు ప్రఖ్యాత గణిత శాస్త్రజ్ఞుడుగా ఎలా మారాడు? శ్రీనివాస రామానుజన్ కొత్త విషయాలు నేర్చుకోవడంలో ఆసక్తిని ఎప్పుడూ కోల్పోలేదు. చిన్నతనంలోనే తన ప్రతిభ, ఆలోచనలతో తోటి స్నేహితులను, పెద్దవారిని, ఉపాధ్యాయులను ఆశ్చర్యపరిచేవాడు. ఒకరోజు తరగతిలో ఉపాధ్యాయుడు అంకగణితంలో "మూడు అరటి పండ్లను ముగ్గురికి పంచితే ప్రతి ఒక్కొరికి ఒక్కొక్క అరటి పండు వస్తుందని" చెప్పి తద్వారా భాగహారం నియమాలు చెప్పాడు. రామానుజన్ వెంటనే "సర్, ఏ ఒక్క అరటిపండునూ, ఏ ఒక్కరికీ పంచకపోతే ఏమౌతుంది?" అని ప్రశ్నించాడు. అంటే సున్నను సున్నచే భాగిస్తే ఏమౌతుందనే భాగహార లోపాన్ని ఎత్తిచూపాడు. రామానుజన్ తన గణిత ప్రతిభతో ఎంతోమంది స్నేహితులను సంపాదించాడు. ఒకసారి తన పై తరగతి విద్యార్థి ఒక సమస్య $\sqrt{x}+y=7$ మరియు $x+\sqrt{y}=11$ అయితే x, y ల విలువలు ఎంత అవుతా"యని అడిగితే వెంటనే $x=9$ మరియు $y=4$ అని సమాధానం ఇచ్చి అతడిని ఆశ్చర్యచకితున్ని చేసి మంచి స్నేహితుడయ్యాడు.

పాఠశాలలో చదువుతున్న రోజులలో, పాఠశాలలో ఇచ్చే ఇంటిపని పూర్తిచేయడంతోపాటు తనకు ఇష్టమైన గణితంలో అనేక కొత్త అమరికలు, ఆవిష్కరణలు చేసేవాడు. ఉదాహరణకు...

$$
\begin{aligned}
3 = \sqrt{9} &= \sqrt{1+8} \\
&= \sqrt{1+(2\times 4)} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{16}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+15}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+(3\times 5)}}
\end{aligned}
$$

మరియు ఇలా...

ఇదే విధంగా

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}+2=\left(1\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\frac{1}{4}+(2\times 3)=\left(2\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5)=\left(5\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5\times 7)=\left(14\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

మరియు ఇలా...

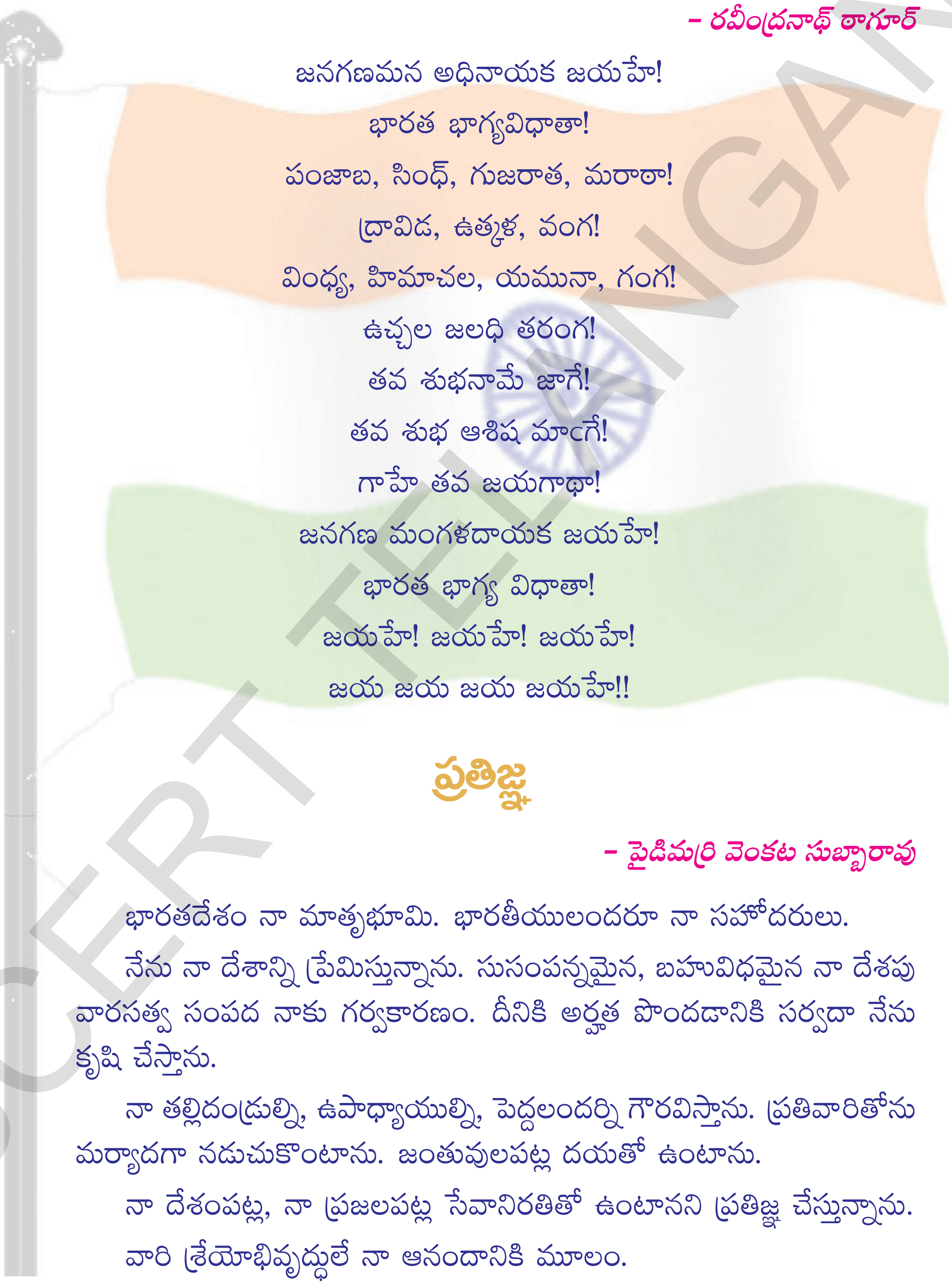
శ్రీనివాస రామానుజన్ అయ్యంగార్ భారతీయులు ఎన్నదగిన ఒక గణిత మేధావి. ఇతడు డిశంబర్ 22, 1887 సంవత్సరంలో తమిళనాడు రాష్ట్రం 'ఈరోడ్'లో ఒక పేద కుటుంబంలో జన్మించాడు. బాల మేధావి అయిన రామానుజన్ తన 13వ ఏటనే **"లోని త్రికోణమితి"**ని ఔపోసన పట్టాడు. తన 15వ ఏట తన సహచర స్నేహితులు జార్జికార్ రాసిన **"శుద్ధ, అనువర్తన గణితశాస్త్ర గ్రంథం"** ఇస్తే, దానిలో అనేక సిద్ధాంతాలకు విశ్లేషణాత్మకంగా, సూక్ష్మంగా వివరణలు రాసాడు. తన ఆలోచనలను, ఫలితాలను చిత్తు ప్రతులపైన రాసేవాడు. ఇటువంటి చిత్తుప్రతులే తర్వాత కాలంలో రామానుజన్ ప్రతిభను గుర్తించే **"ఫ్రెయిడ్ నోట్ బుక్స్"**గా ప్రాముఖ్యత చెందాయి. తనకు సంప్రదాయకమైన పట్టాలేకున్ననూ, మద్రాస్ విశ్వవిద్యాలయం ఇతని ప్రతిభను గుర్తించి 1913 సం॥లో నెలకు 75 రూపాయిల ఉపకారవేతనాన్ని మంజూరు చేసింది. మరింత ఉత్సాహంతో రామానుజున్ సుమారు 120 సిద్ధాంతాలను, అనేక సూత్రాలను ప్రఖ్యాతగణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన జి.హెచ్.హార్డీ (కేంబ్రిడ్జి విశ్వవిద్యాలయం – లండన్) కు పంపించాడు. వీటిని అధ్యయనం చేసి, వీటి ప్రాముఖ్యతను గుర్తించి, రామానుజాన్ని లండన్ ఆహ్వానించారు. ఇంగ్లాండులో హార్డీతో కలసి రామానుజన్ అనేక సిద్ధాంతాలు ముఖ్యంగా సంఖ్యా వ్యవస్థలో సర్పిల పద్ధతి, బీజగణిత అసమీకరణాలు దీర్ఘవృత్తాకార ప్రమేయాలు వంటివి అనేకం రాసాడు. ఇతనిని 1918 సం॥లో **"ఫెలో ఆఫ్ రాయల్ సొసైటీ"**గా బ్రిటిష్ ప్రభుత్వం గుర్తించింది. ఫెలో ఆఫ్ ట్రినిటీ కాలేజ్, కేంబ్రిడ్జ్ కాలేజీలకు ఎంపికైన మొదటి భారతీయుడయ్యాడు. తను జబ్బు పడిన కాలంలోనూ సంఖ్యల గురించి గణిత ఆలోచనల నుండి దూరం కాలేదు. ఒకనాడు తనను పరామర్శించడానికి వచ్చిన హార్డీ కారు నెంబరు 1729ను గుర్తించి దీన్ని అసాధారణ సంఖ్యగా తెలిపాడు. దీనిని రెండు ఘనాల మొత్తంగా రెండు విధాలుగా రాయగలిగే అతి చిన్న ధనపూర్ణ సంఖ్యగా చెప్పాడు ($1729 = 1^3+12^3+=9^3+10^3$). దురదృష్టవశాత్తు క్షయ వ్యాధి సోకి 26 ఏప్రిల్ 1920 సం॥లో మద్రాస్‌లో తుది శ్వాస విడిచాడు. భారతప్రభుత్వం రామానుజన్ గణితానికి చేసిన అమోఘమైన సేవలు గుర్తించి అతని పేరున తపాలాబిళ్ల ముద్రించడమే కాకుండా అతని 125వ జయంతి సందర్భంగా 2012 సంవత్సరాన్ని **"గణిత సంవత్సరం"**గా ప్రకటించింది.

విషయసూచిక

అధ్యాయం సంఖ్య	విషయము	పాఠ్యప్రణాళిక పూర్తిచేయుకాలం	పేజీసంఖ్య
1	వాస్తవ సంఖ్యలు	జూన్	1-26
2	బహుపదులు మరియు కారణాంక విభజన	జూన్, జూలై	27-58
3	జ్యామితీయ మూలాలు	జూలై	59-70
4	సరళ రేఖలు మరియు కోణములు	ఆగష్టు	71-106
5	నిరూపక జ్యామితి	డిసెంబర్	107-123
6	రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు	ఆగష్టు, సెప్టెంబర్	124-147
7	త్రిభుజాలు	అక్టోబర్, నవంబర్	148-173
8	చతుర్భుజాలు	నవంబర్	174-193
9	సాంఖ్యక శాస్త్రము	జూలై	194-213
10	ఉపరితల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణములు	సెప్టెంబర్	214-243
11	వైశాల్యాలు	డిసెంబర్	244-259
12	వృత్తాలు	జనవరి	260-279
13	జ్యామితీయ నిర్మాణాలు	ఫిబ్రవరి	280-291
14	సంభావ్యత	ఫిబ్రవరి	292-309
15	గణితములో నిరూపణలు పునఃశ్చరణ	ఫిబ్రవరి మార్చి	310-327

పేపర్–I :	వాస్తవ సంఖ్యలు, బహుపదులు మరియు కారణాంక విభజన, నిరూపక జ్యామితి, రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు, త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాలు మరియు వైశాల్యాలు.
పేపర్–II :	జ్యామితీయ మూలాలు, సరళరేఖలు మరియు కోణములు, సాంఖ్యక శాస్త్రం, ఉపరితలవైశ్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు, వృత్తాలు, జ్యామితీయ నిర్మాణాలు మరియు సంభావ్యత.

జాతీయ గీతం



– రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ, సింధ్, గుజరాత, మరాఠా!
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగ!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగ!
ఉచ్ఛల జలధి తరంగ!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాఁగే!
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

ప్రతిజ్ఞ

– పైడిమర్రి వెంకట సుబ్బారావు

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.

నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశపు వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.

నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.

నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.

వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

వాస్తవ సంఖ్యలు
(Real Numbers)

01

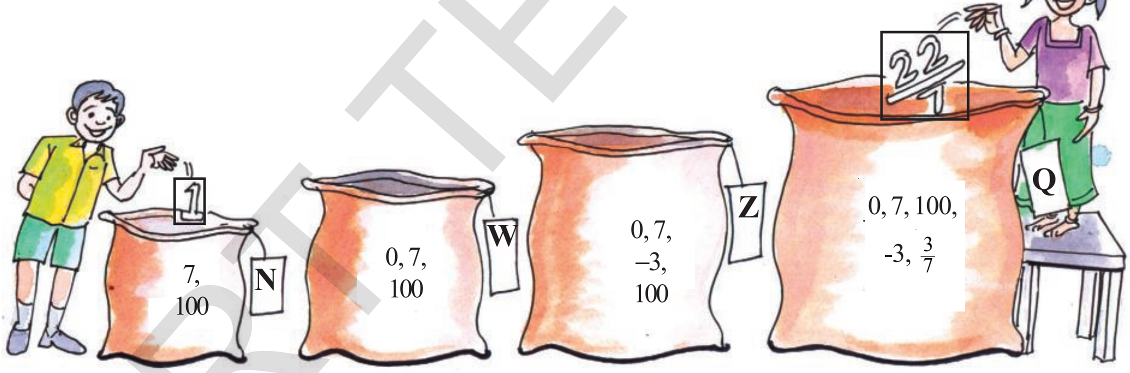
1.1 పరిచయం

మనం వివిధ రకాల సంఖ్యలను ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

కింది సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

$$7, 100, 9, 11, -3, 0, -\frac{1}{4}, 5, 1, \frac{3}{7}, -1, 0.12, -\frac{13}{17}, 13.222 \ldots, 19, \frac{-5}{3}, \frac{213}{4}, \frac{-69}{1}, \frac{22}{7}, 5.\overline{6}$$

ఈ సంఖ్యలు ఏ సంఖ్యా సమితికి చెందుతాయో నిర్ణయించి కాగితముపై రాసి వాటిని కింద ఇచ్చిన సరియైన సంచులలోకి వేయండి. స్నేహ మరియు జాన్‌లు పై సంఖ్యల్లో ఆ సంఖ్యలు ఏ సమితికి చెందుతాయో ఆ సంచులలోకి చేర్చారు. ఒకే సంఖ్యను ఒకటి కంటే ఎక్కువ సంచులలో వేయవలసివచ్చిన ఆ సంఖ్య కాపీలు తయారుచేసి సంబంధిత సంచులలో వేయండి.



N సంచిలో సహజ సంఖ్యలు, W సంచిలో పూర్ణాంకాలు, Z సంచిలో పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు Q సంచిలో అకరణీయ సంఖ్యలుండటాన్ని మనం గమనించవచ్చు.

Z సంచిలో పూర్ణాంకాలకు రుణ పూర్ణ సంఖ్యలను చేర్చితే పూర్ణ సంఖ్యలు అగుట మనం గమనించవచ్చు. పూర్ణ సంఖ్యలను I లేదా Z తో సూచిస్తారు.

$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

అదే విధంగా p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలై $q \neq 0$ గా $\frac{p}{q}$ రూపంతో ఉండే సంఖ్యలన్నీ Q సంచిలో ఉన్నాయి.

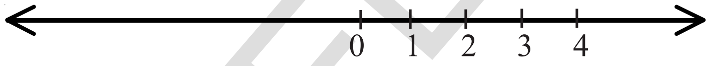
ఇంకా సంచి N, సంచి W, సంచి Z లోని అన్ని సంఖ్యలు Q సంచి లో ఉన్నాయి అని మనం గమనించవచ్చు.

ప్రతి సహజసంఖ్య, ప్రతి పూర్ణాంకం మరియు ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. కాబట్టి వీటన్నింటిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయవచ్చు, ఇక్కడ p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

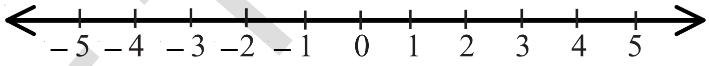
ఉదాహరణకు -15ను గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $p = -15$ మరియు $q = 1$.

ఇప్పుడు మనం కొన్ని భిన్నాలను పరిశీలిద్దాం. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{50}{100}$ ... ఇవన్నీ సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు (లేదా భిన్నాలు). అకరణీయ సంఖ్యలన్నింటినీ $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచుట ఏకైకం కాదు అని మనం గమనించవచ్చు. కాబట్టి $\frac{p}{q}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని $\frac{p}{q}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచిస్తున్నామని అంటే p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు, $q \neq 0$ మరియు p మరియు q లలో ఉమ్మడి కారణాంకం 1 తప్ప ఏ ఇతర సామాన్య కారణాంకములు లేవు అన్నమాట (అనగా p, q లు రెండు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలని భావించాలి) కాబట్టి $\frac{1}{2}$ను సంఖ్యారేఖపై సూచించుట అంటే దానికి సమానమయిన అనంతమైన భిన్నాలకు బదులుగా వాటి సూక్ష్మరూపమైన $\frac{1}{2}$ ను సూచిస్తున్నామని అర్థం.

ఒక సంఖ్యారేఖ పై పూర్ణాంకాలను ఎలా గుర్తించాలో మీకు తెలుసు. ఒక సరళరేఖను గీసి దానిపై ఒక చోట 0 (సున్నా)ను గుర్తించాలి. '0' కు కుడివైపునకు 1, 2, 3, 4, ... లను సమాన దూరంలో ఆ రేఖపై గుర్తించాలి.



పూర్ణసంఖ్యారేఖను కింది విధంగా గీయవచ్చు.

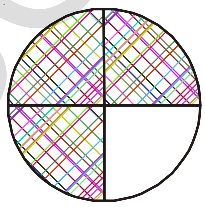


అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ఎలాగుర్తిస్తారో ఒకసారి గుర్తుకుతెచ్చుకోండి.

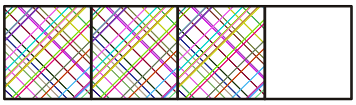
అనే అకరణీయ సంఖ్యను తీసుకుందాం. దానిని చిత్రరూపంలోనూ మరియు సంఖ్యారేఖపైనా ఎలా సూచిస్తారో చూద్దాం.

$\frac{3}{4}$ లో 3 లవం అని 4 హారం అని మనకు తెలుసు.

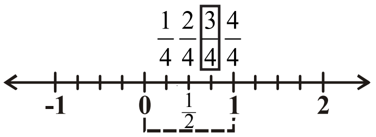
$\frac{3}{4}$ అంటే మొత్తంలోని నాలుగు సమాన భాగాలలో మూడు భాగాలు తీసుకోవడం


$\frac{3}{4}$

ఇక్కడ $\frac{3}{4}$ కు కొన్ని చిత్రరూపాలు ఇవ్వబడ్డాయి.


$\frac{3}{4}$

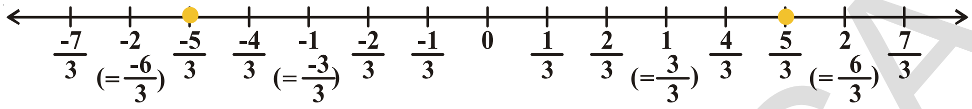
(చిత్రరూపం)



(సంఖ్యారూపం)

ఉదాహరణ-1 : $\frac{5}{3}$ మరియు $-\frac{5}{3}$ లను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

సాధన : −2, −1, 0, 1, 2 లను సూచిస్తూ ఒక పూర్ణ సంఖ్యా రేఖ గీయండి.


$\frac{-7}{3}$
-2 $(=\frac{-6}{3})$
$\frac{-5}{3}$
$\frac{-4}{3}$
-1 $(=\frac{-3}{3})$
$\frac{-2}{3}$
$\frac{-1}{3}$
0
$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$
1 $(=\frac{3}{3})$
$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{3}$
2 $(=\frac{6}{3})$
$\frac{7}{3}$

సున్నాకు కుడి మరియు ఎడమల వైపు ప్రతి యూనిట్‌ను మూడు సమాన భాగాలుగా చేయండి. ఇందునుంచి 5 భాగాలను తీసుకోండి. సున్నా నుంచి కుడివైపుగల ఐదవ బిందువు $\frac{5}{3}$ ను మరియు ఎడమవైపుగల ఐదవ బిందువు $\frac{-5}{3}$ ను సూచిస్తుంది.

ఇవి చేయండి

1. $\frac{-3}{4}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.
2. 0, 7, 10, -4 లను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి.
3. **నేననుకున్న సంఖ్యను చెప్పండి:** మీ స్నేహితుడు 0 నుంచి 100 మధ్యలో ఒక పూర్ణసంఖ్యను మనసులో అనుకున్నాడు. అతడనుకున్న సంఖ్యను నీవు అతి తక్కువ ప్రశ్నలడుగుతూ ఎలారాబట్టగలవు? నీవడిగిన ప్రశ్నలకు మీ స్నేహితుడు కేవలం "అవును" లేదా "కాదు" అని మాత్రమే సమాధానమిస్తాడు.

ఉదాహరణ-2 : కింది వాక్యాలలో సరియైనవి ఏవి? మీ జవాబును ఒక ఉదాహరణతో సమర్థించండి.

i. ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

ii. ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

iii. సున్నా ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

సాధన : i. సరికాదు. ఉదాహరణకు $\frac{7}{8}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య కాని పూర్ణ సంఖ్య కాదు.

ii. సరియైనది. ఎందుకంటే ఏ పూర్ణ సంఖ్యనయినా $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ రూపంలో రాయవచ్చు. ఉదాహరణకు −2 ఒక పూర్ణ సంఖ్య. $-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

(ఏదేని పూర్ణసంఖ్య 'b' ని $\frac{b}{1}$ గా రాయవచ్చు.)

iii. సరియైనది : ఎందుకంటే 0ను $\frac{0}{2}, \frac{0}{7}, \frac{0}{13}$ గా రాయవచ్చు.

('0' ను $\frac{0}{x}$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ 'x' పూర్ణసంఖ్య మరియు $x \neq 0$)

ఉదాహరణ-3 : 3 మరియు 4ల మధ్య రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను సగటు పద్ధతిలో కనుగొనండి.

సాధన :

1వ పద్ధతి : a మరియు b ల మధ్య $\frac{a+b}{2}$ అను అకరణీయ సంఖ్య ఉంటుంది.

ఇక్కడ a = 3 మరియు b = 4, ($\frac{a+b}{2}$, 'a', 'b' ల సగటు అని అది 'a', 'b' ల మధ్య ఉండునని మనకు తెలుసు.)

కాబట్టి, $\frac{(3+4)}{2} = \frac{7}{2}$ అను అకరణీయ సంఖ్య 3 మరియు 4ల మధ్య ఉంటుంది. $3 < \frac{7}{2} < 4$

ఈ పద్ధతిని కొనసాగిస్తే మనం 3 మరియు 4 ల మధ్య మరికొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలనుంచవచ్చు.

$$\frac{3+\frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{6+7}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{2\times 2} = \frac{13}{4}$$

$$3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < 4$$

2వ పద్ధతి : మరొక సులభమయిన పద్ధతిని గమనిద్దాం.

మనం రెండు అకరణీయ సంఖ్యలుంచాలి కాబట్టి 3, 4లను 2 + 1 = 3 హారాలుగా గల అకరణీయ సంఖ్యలుగా రాస్తాము.

అనగా $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}$ మరియు $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4}$

కాబట్టి 3 మరియు 4ల మధ్య $\frac{10}{3}, \frac{11}{3}$ లు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయి.

$$3 = \frac{9}{3} < \left(\frac{10}{3} < \frac{11}{3}\right) < \frac{12}{3} = 4$$

ఇప్పుడు మనం 3, 4 ల మధ్య ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలుంచాలి అంటే 3, 4 లను 5 + 1 = 6 హారాలుగాగల అకరణీయ సంఖ్యలుగా రాస్తాము.

అనగా $3 = \frac{18}{6}$ మరియు $4 = \frac{24}{6}$ $\qquad 3 = \frac{18}{6} < \left(\frac{19}{6}, \frac{20}{6}, \frac{21}{6}, \frac{22}{6}, \frac{23}{6}\right) < \frac{24}{6} = 4$

ఈ విధంగా 3, 4ల మధ్య అనంతమయిన అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని మనకు తెలుస్తుంది. మరి ఏవైనా రెండు వేరే అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య కూడా ఇదే విధంగా లెక్కలేనన్ని అకరణీయసంఖ్యలుంటాయని చూపవచ్చా? ప్రయత్నించండి. దీనినుండి మనం ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనైనా అనంతమైన సంఖ్యలో అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవస్థితమవుతాయని చెప్పవచ్చు.

ఇవి చేయండి

i. 2, 3ల మధ్య సగటు పద్ధతి ద్వారా ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలుంచండి.

ii. $-\frac{3}{11}$ మరియు $\frac{8}{11}$ ల మధ్య పది అకరణీయ సంఖ్యలుంచండి.

ఉదాహరణ-4 : $\frac{7}{16}, \frac{10}{7}$ మరియు $\frac{2}{3}$ లను దశాంశ భిన్నాలుగా రాయండి.

సాధన :

$$\begin{array}{r} 0.4375 \\ 16\overline{)7.00000} \\ 0 \\ \hline 70 \\ 64 \\ \hline 60 \\ 48 \\ \hline 120 \\ 112 \\ \hline 80 \\ 80 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.428571 \\ 7\overline{)10} \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.666 \\ 3\overline{)2.0000} \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

$\therefore \frac{7}{16} = 0.4375$

అంతమయ్యే దశాంశం

$\therefore \frac{10}{7} = 1.\overline{428571}$

అంతంకాని ఆవర్తితదశాంశం

$\therefore \frac{2}{3} = 0.666 = 0.\overline{6}$

అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం

పై ఉదాహరణల నుంచి – ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యను అంతమయ్యే దశాంశంగాను లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశంగానూ రాయవచ్చు అని గమనించండి.

ఇవి చేయండి

(i) $\frac{1}{17}$ (ii) $\frac{1}{19}$ లను దశాంశరూపంలో రాయండి.

ఉదాహరణ-5 : 3.28 ని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి. (ఇక్కడ $q \neq 0$ మరియు p, qలు పూర్ణ సంఖ్యలు).

సాధన :

$$\begin{aligned} 3.28 &= \frac{328}{100} \\ &= \frac{328 \div 2}{100 \div 2} = \frac{164}{50} \\ &= \frac{164 \div 2}{50 \div 2} = \frac{82}{25} \end{aligned}$$

(లవహారాలు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు)

$$\therefore\ 3.28 = \frac{82}{25}$$

ఉదాహరణ-6 : $1.\overline{62}$ ను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి. p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

సాధన : $x = 1.626262.....$ (1) అనుకొనుము.

సమీకరణం (1) ని ఇరువైపులా 100చే గుణించగా

$100x = 162.6262...$ (2)

సమీకరణం (2) నుంచి (1) ని తీసివేయగా

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 162.6262... \\ x & = & 1.6262... \\ - & & - \\ \hline 99x & = & 161 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{161}{99}$$

$$\therefore 1.\overline{62} = \frac{161}{99}$$

ప్రయత్నించండి

I. కింది సంఖ్యల దశాంశ విలువలను కనుగొనండి.

i. $\frac{1}{2}$ ii. $\frac{1}{2^2}$ iii. $\frac{1}{5}$ iv. $\frac{1}{5 \times 2}$

v. $\frac{3}{10}$ vi. $\frac{27}{25}$ vii. $\frac{1}{3}$ viii. $\frac{7}{6}$

ix. $\frac{5}{12}$ x. $\frac{1}{7}$

కింది దశాంశాలను పరిశీలించండి.

$\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{1}{10} = 0.1$ $\frac{32}{5} = 6.4$ $\frac{1}{3} = 0.333...$ $\frac{4}{15} = 0.2\overline{6}$

ఒక కనిష్ట రూపంలోని భిన్నం అంతమయ్యే దశాంశభిన్నం లేదా అంతంలేని ఆవర్తిత దశాంశ భిన్నం కావాలంటే ఆ భిన్నం యొక్క హారం పాటించాల్సిన ధర్మమేమిటి?

హారాన్ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసి నియమాన్ని రాబట్టండి.

నీవు ఏమి గమనించావు?

అభ్యాసము 1.1

1. (a) ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.

(b) అకరణీయ సంఖ్యను మీ సొంత మాటలలో వివరించండి.

2. కింది వాక్యాలకు ఒక్కొక్క ఉదాహరణను ఇవ్వండి.

i. అకరణీయ సంఖ్య అయి పూర్ణ సంఖ్య కాని సంఖ్య.

ii. పూర్ణాంకమయి సహజ సంఖ్య కాని సంఖ్య.

iii. పూర్ణ సంఖ్యయై పూర్ణాంకం కాని సంఖ్య

iv. సహజ సంఖ్య, పూర్ణాంకము, పూర్ణ సంఖ్య మరియు అకరణీయ సంఖ్య అన్నీ అయ్యే సంఖ్య.

v. పూర్ణ సంఖ్యయై సహజ సంఖ్య కాని సంఖ్య.

3. 1 మరియు 2ల మధ్యగల ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలు కనుగొనండి.

4. $\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{2}{3}$ ల మధ్య మూడు అకరణీయ సంఖ్య లుంచుము.

5. $\frac{8}{5}$ మరియు $\frac{-8}{5}$ లను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

6. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో రాయండి.

I. i) $\frac{242}{1000}$ ii) $\frac{354}{500}$ iii) $\frac{2}{5}$ iv) $\frac{115}{4}$

II. i) $\frac{2}{3}$ ii) $-\frac{25}{36}$ iii) $\frac{22}{7}$ iv) $\frac{11}{9}$

7. కింది వాటిని $\frac{p}{q}$ (p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$) రూపంలో రాయండి.

i) 0.36 ii) 15.4 iii) 10.25 iv) 3.25

8. కింది వాటిని $\frac{p}{q}$ (p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$) రూపంలో రాయండి.

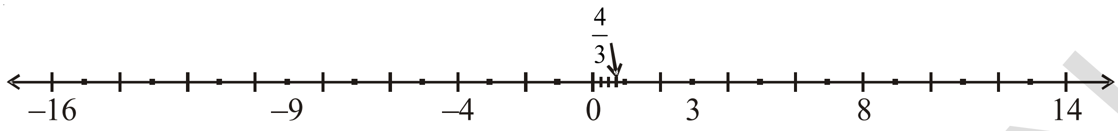
i) $0.\overline{5}$ ii) $3.\overline{8}$ iii) $0.\overline{36}$ iv) $3.12\overline{7}$

9. కింద ఇచ్చిన ఏ సంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశాలో భాగహారం చేయకుండానే గుర్తించండి.

(i) $\frac{3}{25}$ (ii) $\frac{11}{18}$ (iii) $\frac{13}{20}$ (iv) $\frac{41}{42}$

1.2 కరణీయ సంఖ్యలు

మరొకసారి సంఖ్యారేఖను గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. సంఖ్యారేఖపై మనం అన్ని సంఖ్యలనూ సూచించామా? లేదు. సంఖ్యారేఖపై సూచించబడని సంఖ్యలు ఇంకా చాలా ఉన్నాయి. ఇప్పుడు ఆ సంఖ్యలు ఏవో చూద్దాం.



కింది సమీకరణాలను పరిశీలించండి.

(i) $x^2 = 4$ (ii) $3x = 4$ (iii) $x^2 = 2$

సమీకరణం (i) ని తృప్తిపరిచే x యొక్క విలువలు 2 మరియు –2. 2 మరియు –2లను మనం సంఖ్యారేఖపై సూచించగలం.

సమీకరణం (ii) $3x = 4$ ఇరువైపులా 3 చే భాగించగా $\frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ ను మనం సంఖ్యారేఖపై సూచించగలం.

సమీకరణం (iii) $x^2 = 2$ కు ఇరువైపులా వర్గమూలాన్ని తీసుకొనగా $\sqrt{x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించగలమా? $\sqrt{2}$ విలువ ఎంత?

$\sqrt{2}$ ఏ సంఖ్యా సమితికి చెందుతుంది? దీనిని గురించి చర్చిద్దాం.

$\sqrt{2}$ యొక్క విలువను మనం భాగహార పద్ధతిలో తెలుసుకుందాం.

	1.4142135
1	$2.\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{00}$
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
28284270	17611775

సోపానం 1 : 2 తరువాత దశాంశ బిందువునుంచుము.

సోపానం 2 : దశాంశ బిందువు తరువాత ‘0’ (సున్న)లు రాయుము.

సోపానం 3 : ‘0’ లను జతలుగా చేసి పైన బార్‌ను గీయుము.

సోపానం 4 : పిదప సంపూర్ణ వర్గ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలమును కనుగొను పద్ధతిని అనుసరించుము

$\therefore \sqrt{2} = 1.4142135 \ldots$

భాగహారపద్ధతిని ఇదే విధంగా కొసాగిస్తే $\sqrt{2}$ యొక్క విలువ అంతమూ కాదు మరియు ఆవర్తితమూ కాదు. $\sqrt{2}$ =1.4142135623731..... అని గమనించండి.

ఇంతవరకు మనం అంతమయ్యే దశాంశాలను లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాలను మాత్రమే చూసాం మరియు వీటిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలం. వీటిని అకరణీయ సంఖ్యలు అని తెలుసుకున్నాం.

కాని $\sqrt{2}$ యొక్క దశాంశరూపం అంతంకాదు మరియు ఆవర్తితంకాదు. $\sqrt{2}$ =1.414213..... దీనిని గీతనుపయోగించి రాయగలమా? దీనిని గీతనుపయోగించి రాయలేము. ఇలాంటి సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలు అని అంటాం. కరణీయ సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ రూపంలో రాయలేము. ఇక్కడ p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలు $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$. (p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$).

అదేవిధంగా $\sqrt{3} = 1.7320508075689.....$

$\sqrt{5} = 2.2360679774998.....$

ఇవన్నీ అంతము మరియు ఆవర్తితం కాని దశాంశాలు. వీటిని కరణీయ సంఖ్యలు అని అంటారు. కరణీయ సంఖ్యల సమితిని 'S' లేదా 'Q^1' తో సూచిస్తారు.

కరణీయ సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు.

(1) 2.1356217528..., (2) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$, మొదలగునవి.

క్రీ.పూ. 5వ శతాబ్దంలో గ్రీకు ప్రఖ్యాత గణితవేత్త మరియు వేదాంతి అయిన పైథాగరస్ యొక్క అనుయాయులు పైథాగోరియన్‌లు మొదటిసారి అకరణీయ సంఖ్యలు కాని సంఖ్యలను కనుగొన్నారు. వీటిని కరణీయ సంఖ్యలు అని పేరుపెట్టారు. $\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని పైథాగరియన్‌లు నిరూపించారు. తరువాత సైరెన్‌కు చెందిన థియోడరస్ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ మరియు $\sqrt{17}$ లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలు అని నిరూపించాడు.

క్రీ.పూ. 800 కాలం నాటి "శుల్బ సూత్రముల"లో వర్గమూలము కనుగొనుటలో కరణీయ సంఖ్యల గురించిన సూచన కలదు.

కింది వాటిని గమనించండి.

$\sqrt{1}$	=	1
$\sqrt{2}$	=	1.414213.....
$\sqrt{3}$	=	1.7320508.....
$\sqrt{4}$	=	2
$\sqrt{5}$	=	2.2360679.....
$\sqrt{6}$	=	
$\sqrt{7}$	=	
$\sqrt{8}$	=	
$\sqrt{9}$	=	3

'n' ఒక పరిపూర్ణ వర్గం కాని సహజ సంఖ్య అయితే $\sqrt{n}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

పై వాటిలో ఏవి కరణీయ సంఖ్యలు? ఏవి అకరణీయ సంఖ్యలు?

$\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ - అకరణీయ సంఖ్యలు.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ - కరణీయ సంఖ్యలు.

ఆలోచించండి, చర్చించి రాయండి

$\sqrt{2}$ ను $\frac{\sqrt{2}}{1}$ గా అంటే $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయవచ్చు కనుక ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని కృతి చెప్పింది. నీవు ఆమె వాదనతో ఏకీభవిస్తావా?

π గురించి తెలుసుకోండి.

ఒక వృత్త పరిధికి మరియు దాని వ్యాసానికి గల నిష్పత్తిని π అని నిర్వచిస్తాం. $\pi = \frac{c}{d}$. π అనునది $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉన్నందున అది కరణీయ సంఖ్య కాదేమో అని పొరబడతాం. వృత్తపరిధి (c) మరియు వ్యాసము (d) లు పోల్చదగిన పొడవులు కావు. అనగా ఆరెండింటిని కచ్చితంగా కొలిచే మాపనము (ప్రమాణ కొలత) లేదు. కాబట్టి π ను కరణీయసంఖ్యగా పరిగణిస్తారు.

π విలువను గణించటంలో ఆద్యుడు గ్రీక్కు చెందిన శాస్త్రవేత్త ఆర్కిమిడిస్, దీని విలువ సుమారుగా 3.140845 మరియు 3.142857 ల మధ్య ఉంటుంది ($3.140845 < \pi < 3.142857$) అని అతను నిరూపించాడు. π విలువను నాలుగవ దశాంశ స్థానం వరకు కనుగొన్న భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్త ఆర్యభట్ట (476-550 క్రీ.శ.). ప్రస్తుతం అత్యంతవేగంగా పనిచేసే కంప్యూటర్లనుపయోగించి π విలువను 1.24 ట్రిలియన్ దశాంశ స్థానాల వరకు కనుగొన్నారు.

π =3.14159265358979323846264338327950 ….. π యొక్క దశాంశ రూపము అంతము మరియు ఆవర్తితం కాదు. కావున అది కరణీయ సంఖ్య. మనం తరచుగా $\frac{22}{7}$ ను π విలువను ఉజ్జాయింపుగా తీసుకుంటాము. కాని $\pi \neq \frac{22}{7}$.

ప్రతి సంవత్సరం మార్చి నెల 14వ తేదిన π దినము జరుపుతారు. ఎందుకనగా $\pi = 3.14$ ($\pi = 3.14159....$). ఆహా! ఎంతటి కాకతాళీయం, అల్బర్ట్ ఐన్‌స్టీన్ జన్మదినము కూడా మార్చి 14, 1879 కదా!

ప్రయత్నించండి

$\sqrt{3}$ యొక్క విలువను ఆరు దశాంశ స్థానాల వరకు భాగహార పద్ధతిలో కనుక్కోండి.

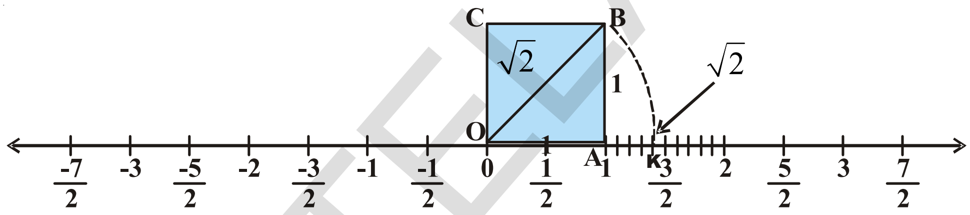
1.3 కరణీయ సంఖ్యలు సంఖ్యారేఖపై సూచించడం

ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనైనా అనంతమైన సంఖ్యలో అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని తెలుసు. అంటే దీనిని బట్టి సంఖ్యా రేఖపై ఏవయినా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించే బిందువుల మధ్య అనంతమయిన సంఖ్యలో అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించే బిందువులుంటాయని మనకు తెలుస్తుంది. చూడటానికి సంఖ్యారేఖ అంతా అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించే బిందువుల మయం అని మనకు అనిపిస్తుంది. ఇది సత్యమేనా? $\sqrt{2}$ ను నీవు సంఖ్యా రేఖపై సూచించలేవా? ఇప్పుడు మనం $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ లాంటి కరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ఎలా సూచించాలో చర్చిద్దాం.

ఉదాహరణ-7 : $\sqrt{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

సాధన : ఒక యూనిట్ భుజముగాగల చతురస్రం OABC ని సంఖ్యారేఖపై 0 వద్ద గీయండి.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం OB = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$


C
B
O
A
K
$\sqrt{2}$
1
$-\frac{7}{2}$ -3 $-\frac{5}{2}$ -2 $-\frac{3}{2}$ -1 $-\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$ 2 $\frac{5}{2}$ 3 $\frac{7}{2}$

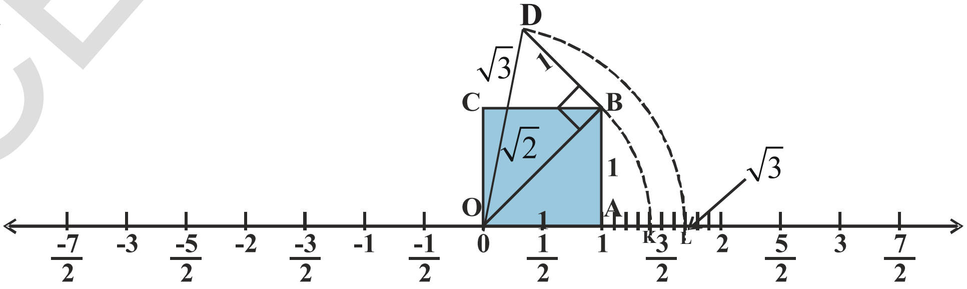
పటం (i)

OB = $\sqrt{2}$ అని మనకు తెలుసు. ఒక వృత్తలేఖినిని ఉపయోగించి O కేంద్రంగా OB వ్యాసార్థంతో సంఖ్యారేఖపై O కు కుడివైపున K వద్ద ఖండించునట్లుగా ఒక చాపాన్ని గీయండి.

K అనునది సంఖ్యారేఖపై $\sqrt{2}$ ను సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ-8 : $\sqrt{3}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

సాధన : పటం (i) ను ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.


D
C
B
O
A
K
L
$\sqrt{3}$
$\sqrt{2}$
1
$-\frac{7}{2}$ -3 $-\frac{5}{2}$ -2 $-\frac{3}{2}$ -1 $-\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$ 2 $\frac{5}{2}$ 3 $\frac{7}{2}$

పటం (ii)

పటం (ii) లో 1 యూనిట్ ప్రమాణంలో BD ని OB కి లంబంగా ఉండే విధంగా గీయండి. O, D లను కలపండి.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారం OD = $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

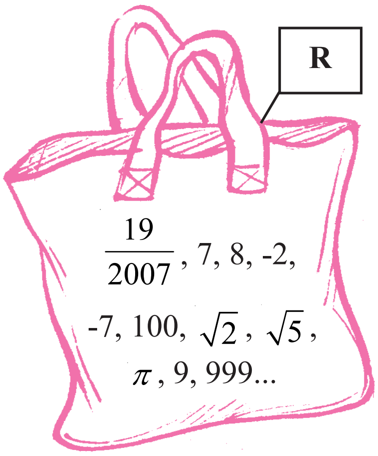
ఒక వృత్తలేఖినిని ఉపయోగించి O కేంద్రంగా OD వ్యాసార్థంతో సంఖ్యారేఖపై 0 కు కుడివైపున 'L' వద్ద ఖండించునట్లు ఒక చాపాన్ని గీయండి. 'L' అనునది సంఖ్యారేఖపై $\sqrt{3}$ ను సూచిస్తుంది. ఈ విధంగా ఏదైనా ధనపూర్ణసంఖ్య n కు $\sqrt{n-1}$ ను సంఖ్యా రేఖపై సూచించిన తరువాత $\sqrt{n}$ ను సూచించవచ్చు.

ప్రయత్నించండి

$\sqrt{5}$ మరియు $-\sqrt{5}$ లను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి. [**సూచన** : $5 = (2)^2 + (1)^2$]

1.3 వాస్తవ సంఖ్యలు :

అన్ని అకరణీయసంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయవచ్చు. ఇక్కడ $q \neq 0$ మరియు p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు. అదే విధంగా కొన్ని సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేమని అలాంటి సంఖ్యలను కరణీయసంఖ్యలు అంటామని తెలుసుకున్నాం. ఒకవేళ కరణీయ సంఖ్యలు, అకరణీయసంఖ్యలన్నింటిని సంఖ్యారేఖపై సూచిస్తే ఇంకా సంఖ్యారేఖపై సూచించకుండా మిగిలిపోయిన సంఖ్యలేవయినా ఉన్నాయా? ఏమీలేవు. ఒక సంఖ్యా రేఖపైన ఉన్న అన్ని బిందువులు అకరణీయసంఖ్యలనుగాని లేదా కరణీయసంఖ్యలనుగాని సూచిస్తాయి. అకరణీయసంఖ్యలు సమితి మరియు కరణీయ సంఖ్యల సమితి కలిపి వాస్తవసంఖ్యాసమితి అని అంటాము. వాస్తవ సంఖ్యా సమితిని R అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు. సంఖ్యారేఖపైన ఉండే ప్రతిబిందువు ఏకైక వాస్తవసంఖ్యను సూచిస్తుంది. అదేవిధంగా సంఖ్యారేఖపై ఏ వాస్తవ సంఖ్యనైనా సూచించే బిందువు ఏకైకంగా ఉంటుంది. అందువల్ల సంఖ్యారేఖను వాస్తవ సంఖ్యారేఖ అని అంటాం.


R
$\frac{19}{2007}$, 7, 8, -2,
-7, 100, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$,
π, 9, 999...

వాస్తవ సంఖ్యలకు కొన్ని ఉదాహరణలు.

$-5.6, \sqrt{21}, -2, 0, 1, \frac{1}{5}, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{9}$, 12.5, 12.5123..... మొదలగునవి. వీనిలో అకరణీయ సంఖ్యలు, కరణీయ సంఖ్యలు కలిసి ఉన్నాయని మీరు గమనించే ఉంటారు.

ఉదాహరణ-9 : $\frac{1}{5}$ మరియు $\frac{2}{7}$ ల మధ్యగల రెండు కరణీయసంఖ్యలు కనుగొండి.

సాధన : $\frac{1}{5} = 0.20$ అని మనకు తెలుసు.

$$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

$\frac{1}{5}$ మరియు $\frac{2}{7}$ ల దశాంశ రూపాలను పరిశీలించండి. ఈ రెండింటిమధ్య అనంతమయిన కరణీయసంఖ్యలుంచవచ్చు.

ఉదాహరణకు..

0.201201120111..., 0.24114111411114…, 0.25231617181912..., 0.267812147512 …

ఇలాగే $\frac{1}{5}$ మరియు $\frac{2}{7}$ ల మధ్య మరో నాలుగు కరణీయసంఖ్యలు రాయగలవా?

ఉదాహరణ-10 : 3 మరియు 4 ల మధ్యగల ఒక కరణీయసంఖ్యను రాయండి.

సాధన :

ab ఒక సంపూర్ణ వర్గం కాకుండునట్లు a, b లు ఏవయినా రెండు ధన అకరణీయసంఖ్యలయితే $\sqrt{ab}$ అనునది a, b ల మధ్య ఉండే కరణీయసంఖ్య అవుతుంది.

$\therefore$ 3 మరియు 4 ల మధ్య కరణీయ సంఖ్య $= \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{3} \times \sqrt{4}$

$= \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$

ఉదాహరణ-11 : కింది లబ్ధాలు కరణీయసంఖ్యలు అవుతాయో లేక అకరణీయసంఖ్యలవుతాయో తెలపండి.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)$

(ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\frac{10}{2\sqrt{5}}$

(iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2$

సాధన :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right) = 3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}$

$= 6$, ఒక అకరణీయసంఖ్య.

(ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ అని మనకు తెలుసు.

$(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) = 3^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$ ఒక అకరణీయసంఖ్య.

(iii) $\frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{10 \div 2}{2\sqrt{5} \div 2} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ కరణీయసంఖ్య.

(iv) $(\sqrt{2}+2)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2.\sqrt{2}\ .2 + 2^2 = 2 + 4\sqrt{2} + 4$

$= 6 + 4\sqrt{2}$, కరణీయసంఖ్య.

అభ్యాసము 1.2

1. కింది సంఖ్యలను కరణీయ మరియు అకరణీయసంఖ్యలుగా వర్గీకరించండి.

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{441}$ (iii) 30.232342345…

(iv) 7.484848… (v) 11.2132435465 (vi) 0.3030030003.....

2. అకరణీయసంఖ్యలకు మరియు కరణీయసంఖ్యలకు నాలుగు ఉదాహరణలను తెలుపండి.

3. $\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{7}{9}$ ల మధ్య గల ఒక కరణీయసంఖ్య కనుగొనండి.

4. 0.7 మరియు 0.77 ల మధ్య గల రెండు కరణీయసంఖ్యలు కనుగొనండి,

5. $\sqrt{5}$ విలువను 3 దశాంశ ఆ స్థానాలవరకు కనుగొనండి.

6. భాగహారపద్ధతిలో $\sqrt{7}$ విలువను ఆరుదశాంశస్థానాలవరకు కనుగొనండి.

7. $\sqrt{10}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

8. 2, 3 ల మధ్య గల రెండు కరణీయసంఖ్యలు కనుగొనండి.

9. కింది వాక్యాలు సత్యమా? అసత్యమా? ఒక ఉదాహరణతో సమర్థించండి.

(i) ప్రతి కరణీయసంఖ్య ఒక వాస్తవసంఖ్య అవుతుంది.

(ii) ప్రతి అకరణీయసంఖ్య ఒక వాస్తవసంఖ్య అగును.

(iii) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య అకరణీయసంఖ్య కానవసరంలేదు.

(iv) n ఒక సంపూర్ణవర్గం అయితే $\sqrt{n}$ ఒక కరణీయసంఖ్య కాదు.

(v) n ఒక సంపూర్ణవర్గం అయితే $\sqrt{n}$ ఒక కరణీయసంఖ్య.

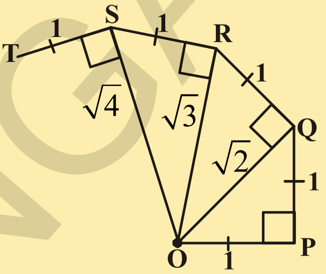
(vi) ప్రతి వాస్తవసంఖ్య ఒక కరణీయ సంఖ్యయే.

తరగతి కృత్యం

“వర్గమూల సర్పిలం” నిర్మించుట.

వర్గమూల సర్పిలాన్ని నిర్మించుటకు పెద్ద సైజు కాగితాన్ని తీసుకొని కింద సూచించిన సోపానాలను అనుసరించండి.

సోపానం 1 : ‘O’ బిందువు నుంచి ప్రారంభించి 1 సెం.మీ. పొడవుగల రేఖా ఖండం $\overline{OP}$ ని గీయండి.



సోపానం 2 : $\overline{OP}$ కి లంబంగా 1 సెం.మీ పొడవుతో $\overline{PQ}$ ను గీయండి.
(ఇక్కడ OP = PQ = 1 సెం.మీ.)

సోపానం 3 : O, Q లను కలపండి. (OQ = $\sqrt{2}$)

సోపానం 4 : QR=1 సెం.మీ. పొడవుతో OQ కు లంబంగా రేఖాఖండాన్ని గీయండి.

సోపానం 5 : O, R లను కలపండి. (OR = $\sqrt{3}$)

సోపానం 6 : RS=1 సెం.మీ. పొడవుతో $\overline{OR}$ కు లంబంగా RS రేఖాఖండాన్ని గీయండి.

సోపానం 7 : ఇదే పద్ధతిని మరికొన్ని సోపానాలకు కొనసాగించండి. అప్పుడు $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TU}$ ... రేఖాఖండాలచే ఒక అందమయిన సర్పిలాకారం ఏర్పడుటను చూడవచ్చు. ఇక్కడ $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, $\overline{OS}$, $\overline{OT}$, $\overline{OU}$ లు వరుసగా $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ లను సూచిస్తాయి.

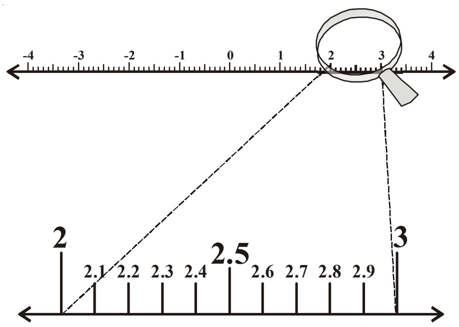
1.4 వాస్తవసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగత వర్ధనం ద్వారా చూపించడం :

ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యను దశాంశ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చని మనం గతంలో తెలుసుకున్నాం.

ఇప్పుడు మనం సంఖ్యారేఖపై అంతమయ్యే దశాంశాలను క్రమానుగత వర్ధన పద్ధతిలో ఎలా చూపించవచ్చో తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణకు 2.776 ను సంఖ్యారేఖపై సూచిద్దాం.

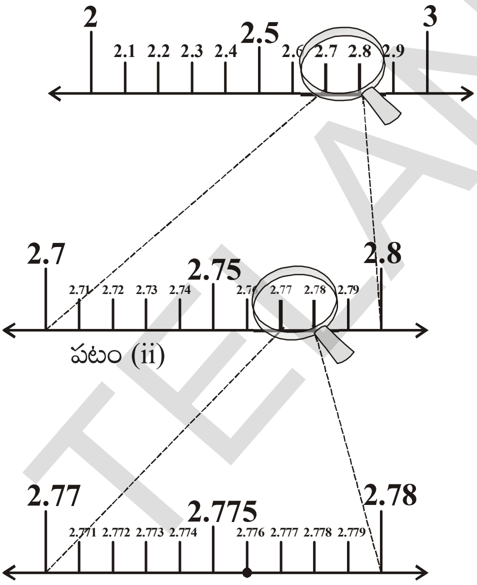
ఈ దశాంశం 2, 3 ల మధ్యన ఉంటుందని మరియు ఇది అంతమయ్యే దశాంశమని మనకు తెలుసు.



పటం (i)

మన చేతిలో భూతద్దం ఉంది అనుకోండి. భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి సంఖ్యారేఖపై 2 మరియు 3 ల మధ్య ప్రాంతంలోని సంఖ్యలను గమనించండి. సంఖ్యా రేఖపై 2 మరియు 3 ల మధ్య పది సమాన భాగాలు ఊహించండి. అవి వరుసగా 2.1, 2.2, 2.3...... 2.9. పటం (i) లో మనం వీటిని స్పష్టంగా చూడవచ్చు.

2.776 అనునది 2.7 మరియు 2.8 ల మధ్యన ఉంటుంది అని గమనించండి. కాబట్టి మీ చేతిలోని భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి 2.7 మరియు 2.8 పటం (ii) ల మధ్య గల ప్రాంతంపై దృష్టిసారించండి. ఈ ప్రాంతాన్ని తిరిగి పది సమాన భాగాలుగా విభజించినట్లుగా ఊహించండి. అవి వరుసగా 2.71, 2.72, 2.73 .... పటం (ii) లో మనం వీటిని స్పష్టంగా చూడవచ్చు.


2
2.1 2.2 2.3 2.4
2.5
2.6 2.7 2.8 2.9
3
2.7
2.71 2.72 2.73 2.74
2.75
2.76 2.77 2.78 2.79
2.8
2.77
2.771 2.772 2.773 2.774
2.775
2.776 2.777 2.778 2.779
2.78

పటం (ii)

పటం (iii)

ఇప్పుడు 2.776 అనునది 2.77 మరియు 2.78 ల మధ్యన ఉంటుంది అని గమనించండి. కాబట్టి మీ చేతిలోని భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి 2.77 మరియు 2.78 పటం (iii) ల మధ్య గల ప్రాంతంపై దృష్టిసారించండి. ఈ ప్రాంతాన్ని తిరిగి పది సమాన భాగాలుగా విభజించినట్లుగా ఊహించండి పటం (iii) లో సూచించిన విధంగా సంఖ్యలను పెద్దవిచేసి చూడండి.

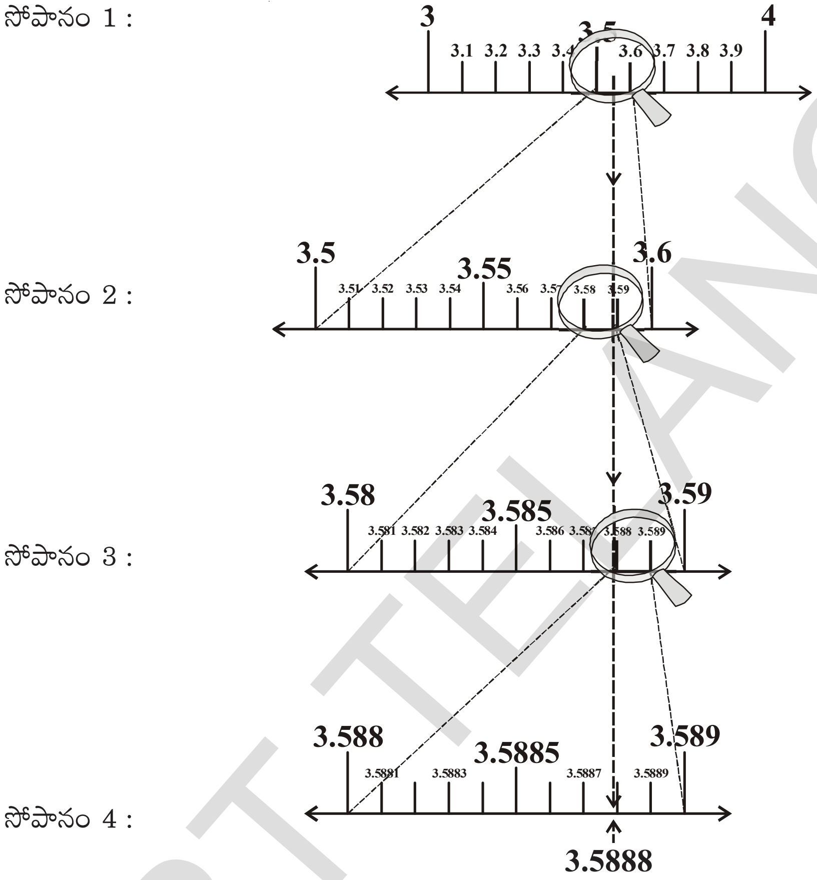
మొదటి బిందువు 2.771 ను, రెండవ బిందువు 2.772 ను .... ఇలా సూచిస్తాయి. 6వ బిందువు 2.776 ను సూచిస్తుంది.

సంఖ్యారేఖపై సంఖ్యలను ఈ విధంగా భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి పెద్దదిగా చేస్తూ బిందువుల ద్వారా చూపించే విధానాన్ని క్రమానుగత వర్ధనం అని అంటారు.

ఇప్పుడు మనం క్రమానుగతవర్ధనం పద్ధతిని ఉపయోగించి సంఖ్యారేఖపై ఒక అంతం కాని ఆవర్తిత దశాంశాన్ని చూపిద్దాం.

ఉదాహరణ-12 : $3.5\overline{8}$ ను 4 దశాంశ స్థానాల వరకు క్రమానుగత వర్ధన పద్ధతిలో సంఖ్యారేఖపై చూపించండి.

సాధన : క్రమానుగత వర్ధన పద్ధతిని 3.5888 ని గుర్తించండి.


సోపానం 1 :
3
3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 3.7 3.8 3.9
4
సోపానం 2 :
3.5
3.51 3.52 3.53 3.54 3.55 3.56 3.57 3.58 3.59
3.6
సోపానం 3 :
3.58
3.581 3.582 3.583 3.584 3.585 3.586 3.587 3.588 3.589
3.59
సోపానం 4 :
3.588
3.5881 3.5883 3.5885 3.5887 3.5889
3.589
3.5888

అభ్యాసము 1.3

1. 2.874 ను సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగతవర్ధనపద్ధతిలో చూపించండి.
2. $5.\overline{28}$ సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగతవర్ధనపద్ధతిలో 2 స్థానాల వరకు చూపించండి.

1.5 వాస్తవ సంఖ్యలపై పరిక్రియలు

ముందు తరగతుల్లో మనం అకరణీయసంఖ్యలు; సంకలనం మరియు గుణకారం దృష్ట్యా స్థిత్యంతర ధర్మము, సహచరధర్మం మరియు విభాగన్యాయాలు పాటిస్తాయని తెలుసుకున్నాం. అదే విధంగా సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారాలదృష్ట్యా అకరణీయసంఖ్యలు సంవృతధర్మాన్ని పాటిస్తాయని తెలుసుకున్నాం. చతుర్విదపరిక్రియల దృష్ట్యా కరణీయ సంఖ్యలు కూడా సంవృత ధర్మంను పాటిస్తాయని నీవు చెప్పగలవా?

కింది ఉదాహరణలు గమనించండి.

$\left(\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}\right)=0$. ఇక్కడ 0 ఒక అకరణీయసంఖ్య.

$\left(\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}\right)=0$. ఇక్కడ 0 ఒక అకరణీయసంఖ్య.

$\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)=2$. ఇక్కడ 2 ఒక అకరణీయసంఖ్య.

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=1$. ఇక్కడ 1 ఒక అకరణీయసంఖ్య.

మీరు ఏం గమనించారు? కరణీయసంఖ్యల మొత్తం, బేధం, లబ్ధం మరియు భాగఫలం తిరిగి కరణీయ సంఖ్య కానవసరం లేదు.

కాబట్టి సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము మరియు భాగహారాల దృష్ట్యా కరణీయసంఖ్యలు సంవృతధర్మాన్ని పాటించవని మనకు తెలుస్తుంది.

కరణీయ సంఖ్యలపై కొన్ని సమస్యలను చేద్దాం.

ఉదాహరణ-13 : (i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (iii) $21+\sqrt{3}$ (iv) $\pi+3$ లు కరణీయసంఖ్యాలవుతాయేమో చూడండి.

సాధన : ‘ $\sqrt{2}=1.414\ldots$, $\sqrt{3}=1.732\ldots$, $\pi=3.1415\ldots$ అని మనకు తెలుసు.

(i) $5\sqrt{2} = 5(1.414\ldots)=7.070\ldots$

(ii) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{7.070}{2}=3.535\ldots$ (i నుంచి)

(iii) $21+\sqrt{3} = 21+1.732\ldots=22.732\ldots$

(iv) $\pi+3 = 3.1415\ldots+3=6.1415\ldots$

ఇవన్నీ అంతము మరియు ఆవర్తితం కాని దశాంశాలు.

కాబట్టి ఇవి కరణీయసంఖ్యలు.

> q అకరణీయసంఖ్య, s కరణీయసంఖ్యలయితే $q+s$, $q-s$, qs మరియు $\frac{q}{s}$ లన్నీ కరణీయసంఖ్యలే.

ఉదాహరణ-14 : $5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$ ను $3\sqrt{5}-7\sqrt{3}$ నుండి తీసివేయండి.

సాధన : $(3\sqrt{5}-7\sqrt{3})-(5\sqrt{3}+7\sqrt{5})$

$= 3\sqrt{5}-7\sqrt{3}-5\sqrt{3}-7\sqrt{5}$

$= -4\sqrt{5}-12\sqrt{3}$

$= -(4\sqrt{5}+12\sqrt{3})$

ఉదాహరణ-15 : $6\sqrt{3}$ ను $13\sqrt{3}$ తో గుణించండి.

సాధన : $6\sqrt{3}\times 13\sqrt{3} = 6\times 13\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 78\times 3 = 234$

వర్గమూలాలకుసంబంధించిన కొన్ని ధర్మాలు కింద ఇవ్వబడినవి.

a, b లు ఏవైనా రెండు ధన వాస్తవసంఖ్యలు అయితే

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; if $b \neq 0$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

(vii) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

ఈ ధర్మాలనుపయోగించే వివిధ సందర్భాలను ఇప్పుడు మనం చూద్దాం.

ఉదాహరణ-16 : కింది సమాసాలను సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$

(ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$

(iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

సాధన :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) = 6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

(ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5+2\sqrt{10}+2 = 7+2\sqrt{10}$

(iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5-2 = 3$

ఉదాహరణ-17 : $5+2\sqrt{6}$ యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనండి.

సాధన : $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

$= \sqrt{3+2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}$ $\qquad \because \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$= \sqrt{3}+\sqrt{2}$

1.5.1 హారాన్ని అకరణీయం చేయటం

మనం $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించగలమా?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ విలువ ఎంతో చెప్పగలరా?

$\sqrt{2} = 1.4142135.....$ ఒక అంతము మరియు ఆవర్తితంకాని దశాంశము. మరి దీనితో 1 ని దీనిని భాగించగలమా?

కాబట్టి $\frac{1}{\sqrt{2}}$ విలువ కనుగొనడం అంత సులభంకాదు అని తెలుస్తుంది.

ఇప్పుడు $\frac{1}{\sqrt{2}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయ రూపంలోనికి మార్చుటానికి ప్రయత్నిద్దాం. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయంచేయుటకు దాని లవహారాలను $\sqrt{2}$ చే గుణిద్దాం.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ అంటే $\sqrt{2}$ లో సగం అని అర్థం.

ఇప్పుడు మనం $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై చూపగలమా? అది '0' కు $\sqrt{2}$ సరిగ్గా మధ్యలో ఉంటుంది.

కిందివాటిని పరిశీలించండి.

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. ఇక్కడ 2 ఒక అకరణీయసంఖ్య. కాబట్టి $\sqrt{2}$ ను అకరణీయకారణాంకం అని అంటాం.

అలాగే $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$. కాబట్టి $\sqrt{2}$ అకరణీయకారణాంకం $\sqrt{8}$. ఇంకా $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$, కాబట్టి $\sqrt{2}$ ఒక అకరణీయకారణాంకం $\sqrt{18}$.

పై ఉదాహరణలలో $\sqrt{2}$ యొక్క అకరణీయ కారణాంకాలు $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}$...... మొదలగునవి. వీటిలో $\sqrt{2}$ ను $\sqrt{2}$ యొక్క అతి చిన్న అకరణీయ కారణాంకం అంటారు. ఏదైనా రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం అకరణీయ సంఖ్య అయితే ఆ రెండు కరణీయ సంఖ్యలు పరస్పరం ఒకదానికొకటి అకరణీయ కారణాంకాలవుతాయి. అదే విధంగా ఒక కరణీయ సంఖ్య యొక్క అకరణీయ కారణాంకం ఏకైకం కాదు అని గమనించండి. సమస్యల సాధనలలో ఎల్లప్పుడు ఇచ్చిన కరణీయ సంఖ్య యొక్క అతిచిన్న అకరణీయ కారణాంకాన్ని తీసుకోవడం సులభంగా ఉంటుంది.

ఇవి చేయండి

ప్రక్కన ఇవ్వబడిన సంఖ్యల హారాలకు అకరణీయ కారణాంకాలు కనుగొనండి. (i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

ఉదాహరణ-18 : $\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన : $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$ అని మనకు తెలుసు.

$\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ యొక్క లవహారాలను $4-\sqrt{5}$ తో గుణించగా.

$$\frac{1}{4+\sqrt{5}}\times\frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=\frac{4-\sqrt{5}}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4-\sqrt{5}}{16-5}=\frac{4-\sqrt{5}}{11}$$

ఉదాహరణ-19 : $x=7+4\sqrt{3}$ అయితే $x+\frac{1}{x}$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చినది $x=7+4\sqrt{3}$

ఇచ్చుట $\frac{1}{x}=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}=\frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-16\times 3}$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}=7-4\sqrt{3}$$

$$\therefore x+\frac{1}{x}=7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}=14$$

ఉదాహరణ-20 : $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ ను సూక్ష్మీకరించండి.

సాధన : $7+4\sqrt{3}$ యొక్క అకరణీయకారణాంకం $7-4\sqrt{3}$ మరియు $2+\sqrt{5}$ యొక్క అకరణీయకారణాంకం $2-\sqrt{5}$.

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}\times\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-(4\sqrt{3})^2}+\frac{2-\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}+\frac{2-\sqrt{5}}{(4-5)}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{1}+\frac{2-\sqrt{5}}{(-1)}$$

$$=7-4\sqrt{3}-2+\sqrt{5}=5-4\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

1.5.2 వాస్తవ సంఖ్యలపై ఘాతాంక న్యాయాలు

మనము ఘాతాంకన్యాయాలను ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & m > n \text{ అయితే} \\ 1 & m = n \text{ అయితే} \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & m < n \text{ అయితే} \end{cases}$

iv) $a^m b^m = (ab)^m$ v) $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ vi) $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

ఇక్కడ 'a', 'b', 'm' మరియు 'n' లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a, b \neq 0$. 'a', 'b' లను భూమి అని m, n లను ఘాతాంకాలు అని అంటాము.

ఉదాహరణలు పరిశీలించండి.

i) $7^3.7^{-3} = 7^{3+(-3)} = 7^0 = 1$ ii) $(2^3)^{-7} = 2^{-21} = \dfrac{1}{2^{21}}$

iii) $\dfrac{23^{-7}}{23^4} = 23^{-7-4} = 23^{-11}$ iv) $(7)^{-13}.(3)^{-13} = (7 \times 3)^{-13} = (21)^{-13}$

కింది వాటిని గణిద్దాం.

i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}}$

పై ఉదాహరణలలో భూములు మరియు ఘాతాంకాలు అకరణీయసంఖ్యలని గమనించండి. వీటిని ఇంతవరకు మనకు తెలిసిన ఘాతాంక న్యాయాలనుపయోగించి కనుగొనలేము. కాబట్టి ధనవాస్తవసంఖ్య భూములకు మరియు అకరణీయ ఘాతాంకాలకు ఈ న్యాయాలను విస్తృతపరచాల్సిన అవసరం ఎంతయినా ఉంది. దీనిని అర్థం చేసుకోవడానికి ముందుగా మనం వాస్తవసంఖ్య యొక్క n వ మూలం అంటే ఏమిటో తెలుసుకోవాలి.

$3^2 = 9$ అయితే $\sqrt{9} = 3$ అని మనకు తెలుసు. (9 యొక్క వర్గమూలము 3)

అనగా $\sqrt[2]{9} = 3$

అదేవిధంగా $5^2 = 25$ అయితే $\sqrt{25} = 5$ అనగా $\sqrt[2]{25} = 5$ అదేవిధంగా $\sqrt[2]{25} = (25)^{\frac{1}{2}} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5$ అని రాయవచ్చు.

కింది వానిని పరిశీలించండి.

$2^3 = 8$ అయితే $\sqrt[3]{8} = 2$ (8 యొక్క ఘనమూలం 2); $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2$

$2^4 = 16$ అయితే $\sqrt[4]{16} = 2$ (16 యొక్క 4వ మూలం 2); $\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 2$

$2^5 = 32$ అయితే $\sqrt[5]{32} = 2$ (32 యొక్క 5వ మూలం 2); $\sqrt[5]{32} = (32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2$

$2^6 = 64$ అయితే $\sqrt[6]{64} = 2$ (64 యొక్క 6వ మూలం 2); $\sqrt[6]{64} = (64)^{\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2$

……

అదేవిధంగా $\mathbf{a^n = b}$ అయితే $\mathbf{\sqrt[n]{b} = a}$ (b యొక్క n వ మూలం a); $\sqrt[n]{b} = (b)^{\frac{1}{n}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$

$\mathbf{a} > 0$ ఒక వాస్తవసంఖ్య మరియు '**n**' ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య అనుకోండి.

ఒకవేళ ఏదయినా ధనవాస్తవసంఖ్య b కు $\mathbf{b^n = a}$ అయితే **b** ను **a** యొక్క n వ మూలం అని అంటాం మరియు $\mathbf{\sqrt[n]{a} = b}$ అని రాస్తాం. ఇప్పుడు ఘాతాంకన్యాయాలను ధనవాస్తవసంఖ్యల భూములు మరియు అకరణీయ ఘాతాంకాలకు విస్తరిద్దాం.

$a > 0$ ఒక ధనవాస్తవసంఖ్య మరియు p, q లు అకరణీయసంఖ్యలు అనుకొనుము. అప్పుడు

i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ iv) $a^p.b^p = (ab)^p$ v) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

ఈ న్యాయాలను ఇంతకు ముందు ప్రశ్నల సాధనకు ఉపయోగించవచ్చు.

ఉదాహరణ-21 : సూక్ష్మీకరించండి.

i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}}$

సాధన : i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{7}}$

iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{3-5}{15}} = 3^{\frac{-2}{15}} = \frac{1}{3^{2/15}}$

iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}} = (7\times 11)^{\frac{1}{17}} = 77^{\frac{1}{17}}$

ఇవి చేయండి

సూక్ష్మీకరించండి:

i. $(16)^{\frac{1}{2}}$ ii. $(128)^{\frac{1}{7}}$

iii. $(343)^{\frac{1}{5}}$

కరణి :

'**n**' అనేది 1 కంటే పెద్దదయిన ధనపూర్ణసంఖ్య మరియు '**a**' అనేది ఏ అకరణీయసంఖ్యకు **n** వ ఘాతంకాని ధనఅకరణీయసంఖ్య అయితే $\sqrt[n]{a}$ లేదా $a^{1/n}$ ను **n** వ పరిమాణ కరణి అని అంటారు. సాధారణంగా a యొక్క ధన **n** వ మూలాన్ని కరణి లేదా రాడికల్ అని అంటాము. ఇక్కడ **a** ను రాడికెండ్ అని $\sqrt[n]{\;}$ ను రాడికల్ గుర్తుగాను మరియు **n** ను రాడికల్ పరిమాణం అని అంటాము.

కరణి యొక్క రూపం

ఘాతరూపం $a^{\frac{1}{n}}$

రాడికల్‌రూపం $\sqrt[n]{a}$

కరణి యొక్క ఉదాహరణలు కింద ఇవ్వబడినవి.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}$, ... మొదలగునవి.

ఒక వాస్తవసంఖ్య $\sqrt{7}$ ను తీసుకుందాం. దానిని $7^{\frac{1}{2}}$ గానూ $\sqrt[2]{7}$ గానూ రాయవచ్చు. 7 అనునది ఏ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క వర్గంకాదు. కాబట్టి $\sqrt{7}$ అనునది రెండవ పరిమాణ కరణి.

ఒక వాస్తవసంఖ్య $\sqrt[3]{8}$ ను తీసుకుందాం. 8 ను 2 యొక్క ఘనంగా రాయవచ్చు కాబట్టి $\sqrt[3]{8}$ అనునది కరణికాదు.

$\sqrt{\sqrt{2}}$ అనునది కరణియా? కాదా? $\sqrt{\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$. 2ను ఏ అకరణీయసంఖ్య యొక్క నాలుగవఘాతంగా రాయలేము. కావున ఇది 4వ పరిమాణం కరణి.

ఇవి చేయండి

1. కింది కరణులను ఘాతరూపంలో రాయండి.

i. $\sqrt{2}$ ii. $\sqrt[3]{9}$ iii. $\sqrt[5]{20}$ iv $\sqrt[17]{19}$

2. కింది కరణులను రాడికల్ రూపంలో రాయండి.

i. $5^{\frac{1}{7}}$ ii. $17^{\frac{1}{6}}$ iii. $5^{\frac{2}{5}}$ iv $142^{\frac{1}{2}}$

అభ్యాసం 1.4

1. కింది వానిని సూక్ష్మీకరించండి.

i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

2. కింది వానిలో అకరణీయసంఖ్యలేవి? కరణీయసంఖ్యలేవి?

i) $5-\sqrt{3}$ ii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ iii) $\left(\sqrt{2}-2\right)^2$

iv) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ v) 2π vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vii) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

3. కింది సమీకరణాలలో x, y, z మొదలగు చరరాశులు అకరణీయ సంఖ్యలను సూచిస్తాయా? కరణీయ సంఖ్యలను సూచిస్తాయా?

i) $x^2 = 7$ ii) $y^2 = 16$ iii) $z^2 = 0.02$

iv) $u^2 = \frac{17}{4}$ v) $w^2 = 27$ vi) $t^4 = 256$

4. ప్రతీ కరణి ఒక కరణీయ సంఖ్యకాని, ప్రతీ కరణీయ సంఖ్య కరణి కానవసరంలేదు? మీ సమాధానమును సమర్థించండి.

5. హారాలను అకరణీయం చేయండి.

i) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ iii) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ iv) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6. హారాలను అకరణీయం చేసి సూక్ష్మీకరించండి.

i) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ ii) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ iii) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ iv) $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. $\sqrt{2} = 1.414$ మరియు $\sqrt{5} = 2.236$ అయితే $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ విలువను మూడు దశాంశ స్థానాల వరకు కనుగొనండి.

8. విలువలు కనుగొనండి.

i) $64^{\frac{1}{6}}$ ii) $32^{\frac{1}{5}}$ iii) $625^{\frac{1}{4}}$

iv) $16^{\frac{3}{2}}$ v) $243^{\frac{2}{5}}$ vi) $(46656)^{\frac{-1}{6}}$

9. $\sqrt[4]{81} - 8\sqrt[3]{343} + 15\sqrt[5]{32} + \sqrt{225}$ ను సూక్ష్మీకరించండి.

10. 'a' మరియు 'b' లు ఏవైనా అకరణీయసంఖ్యలు అయితే కింది సమీకరణాలలో a, b విలువలు కనుక్కోండి.

i) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a+b\sqrt{6}$ ii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}} = a-b\sqrt{15}$

11. $11+2\sqrt{30}$ యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనండి.

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

ఈ అధ్యాయంలో మనం కింది అంశాలను చర్చించాం.

1. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయసంఖ్యలు అంటారు. ఇక్కడ p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.
2. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేని వాస్తవ సంఖ్యలను కరణీయసంఖ్యలు అంటారు.
3. ఒక అకరణీయసంఖ్య దశాంశ రూపం అంతం లేదా ఆవర్తిత దశాంశంగా ఉండును.
4. కరణీయ సంఖ్య దశాంశ రూపం అంతంకాని ఆవర్తితం కాని దశాంశంగా ఉండదు.
5. అకరణీయసంఖ్యలను మరియు కరణీయసంఖ్యల సముదాయాన్ని వాస్తవసంఖ్యలు అని అంటాం.
6. సంఖ్యారేఖపై ప్రతి బిందువుకు సదృశ్యంగా ఏకైక వాస్తవసంఖ్య ఉంటుంది. అదేవిధంగా ప్రతి వాస్తవసంఖ్యకు సదృశ్యంగా సంఖ్యారేఖపై ఏకైక బిందువు ఉంటుంది.
7. q ఒక అకరణీయసంఖ్య మరియు s ఒక కరణీయసంఖ్య అయితే q+s, q-s, qs మరియు $\frac{q}{s}$ లన్నీ కరణీయసంఖ్యలే.
8. n ఒక సంపూర్ణ వర్గంకాని సహజసంఖ్య అయితే $\sqrt{n}$ ఒక కరణీయసంఖ్య అవుతుంది.
9. a, b లు ఏవైనా రెండు ధనవాస్తవసంఖ్యలు అయితే

   i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

   iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$ iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

   v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$ vi) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$
10. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ భిన్నం యొక్క హారాన్ని అకరణీయం చేయడానికి లవహారాలను $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ చే గుణించాలి. ఇక్కడ a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు.
11. $a > 0$ ఒక ధనవాస్తవసంఖ్య మరియు p, q లు రెండు అకరణీయసంఖ్యలు అయితే

    i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$ iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

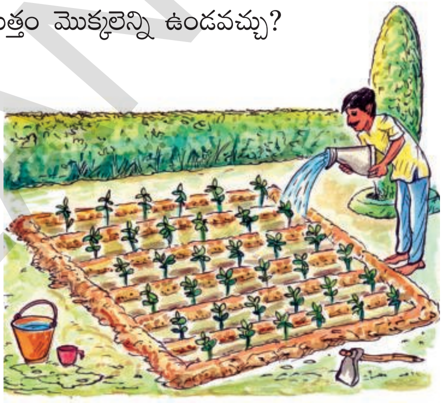
    iv) $a^p.b^p = (ab)^p$
12. 'n' అనేది 1 కంటే పెద్దదయిన ధనపూర్ణసంఖ్య మరియు 'a' అనేది ఏ అకరణీయసంఖ్యకు n వ ఘాతంగా రాయవీలులేని ధనఅకరణీయసంఖ్య అయితే $\sqrt[n]{a}$ లేదా $a^{\frac{1}{n}}$ ను n వ పరిమాణ కరణి అని అంటారు.

బహుపదులు మరియు కారణాంక విభజన (Polynomials and Factorisation)

02

2.1 పరిచయం

ఒక తోట మడిలో ఆరువరుసలలో, ప్రతీవరుసలో ఆరు మొక్కల చొప్పున నాటబడినవి. అయిన మొత్తం మడిలో నాటిన మొక్కలెన్ని? ఒకవేళ 'x' మొక్కల చొప్పున 'x' వరుసలలో నాటబడితే మొత్తం మొక్కలెన్ని ఉండవచ్చు? స్పష్టంగా ఇవి x^2 అని తెలుస్తున్నది.



1 కి.గ్రా. ఉల్లి ఖరీదు ₹10. ఇందర్ p కి.గ్రా. ఉల్లి కొన్నాడు. రాజు q కి.గ్రా. మరియు హనీఫ్ r కి.గ్రా. చొప్పున కొన్నారు. ప్రతీ ఒక్కరు ఎంతెంత డబ్బు చెల్లించారు? వారు చెల్లించినవి వరుసగా ₹10p, ₹10q మరియు ₹10r అవుతాయి. ఇటువంటి ఉదాహరణలన్నియూ బీజీయసమాసాల వినియోగాన్ని తెలుపుతున్నాయి.

ఇదే విధంగా మనం చతురస్ర వైశాల్యానికి 's^2', దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యానికి 'lb', దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణానికి 'lbh' వంటి బీజీయ సమాసాలు ఉపయోగిస్తుంటాం. ఇటువంటి మరికొన్ని బీజీయ సమాసాలు మనం ఉపయోగిస్తామా?

$3xy$, x^2+2x, $x^3 - x^2 + 4x + 3$, πr^2, $ax + b$ మొదలగు బీజీయ సమాసాలను బహుపదులు అంటాం. మనం ఇంతవరకు చర్చించిన బీజీయ సమాసాలన్నింటిలోనూ చరరాశుల ఘాతాంకాలన్నియు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలని మీరు గమనించే ఉంటారు.

కింది బీజీయ సమాసాలలో బహుపదులు ఏవో గుర్తించండి.

$$x^2, \quad x^{\frac{1}{2}} + 3, \quad 2x^2 - \frac{3}{x} + 5; \quad x^2 + xy + y^2$$

పై సమాసాలలో $x^{\frac{1}{2}} + 3$ మరియు $2x^2 - \frac{3}{x} + 5$ అనేవి బహుపదులు కావు. ఎందుకనగా మొదటి సమాసం $x^{\frac{1}{2}} + 3$ లో ఒక పదం $x^{\frac{1}{2}}$ యొక్క చరరాశి ఘాతాంకం రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యకాదు (అనగా $\frac{1}{2}$) మరియు రెండవ సమాసం $2x^2 - \frac{3}{x} + 5$ కూడా బహుపది కాలేదు. ఎందుకనగా దీనిని $2x^2 - 3x^{-1} + 5$ అని రాస్తే, రెండవ పదం $(3x^{-1})$ లో ఘాతాంకం రుణ సంఖ్య అయినది (అనగా -1). కావున ఒక బీజీయ సమాసంలో చరరాశుల యొక్క ఘాతాంకాలు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలైనప్పుడు ఆ సమాసాలను బహుపదులు అంటారు.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

కింది సమాసాలలో ఏవి బహుపదులు? ఏవి కావు? కారణాలు తెలపండి.

(i) $4x^2 + 5x - 2$ (ii) $y^2 - 8$ (iii) 5 (iv) $2x^2 + \frac{3}{x} - 5 \ (x \neq 0)$

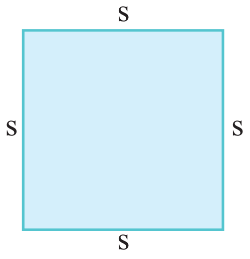
(v) $\sqrt{3}x^2 + 5y$ (vi) $\frac{1}{x} + 1 \ (x \neq 0)$ (vii) $\sqrt{x} \ (x > 0)$ (viii) $3xyz$

ఇప్పుడు బహుపదుల యొక్క వివిధ రూపాలను నేర్చుకుంటాం. ఇదేవిధంగా శేష సిద్ధాంతం మరియు కారణాంక సిద్ధాంతాల ఆధారంగా బహుపదులను కారణాంక విభజన చేయడం తెలుసుకుంటాం.

2.2 ఏక చరరాశిలో బహుపదులు

ప్రతి చరరాశిని సూచించడానికి ఒక గుర్తు (అక్షరం) వాడతామని, చరరాశి ఏ వాస్తవ విలువనైనా తీసుకుంటుందని మనకు తెలుసు. మనం సాధారణంగా చరరాశులను సూచించడానికి x, y, z మొదలగు అక్షరాలు వాడతాం.

అందుచే $2x$, $3x$, $-x$, $\frac{3}{4}x$ .... వంటివాటిని చరరాశి x లో గల బీజీయ సమాసాలంటాము. ఈ సమాసాలన్నీ (ఒక స్థిరరాశి) × (ఘాతరూపంలోగల ఒక చరరాశి) రూపంలో ఉంటాయి. ఉదాహరణకు చతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత కనుగొనడానికి మనం $P = 4s$ అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాము.



ఇచ్చట '4' స్థిరరాశి కాగా, 's' అనే చరరాశి చతురస్ర భుజాన్ని సూచిస్తుంది. వివిధ రకాల చతురస్రాలకు భుజాల కొలతలు మారవచ్చు.

కింది పట్టికను పరిశీలించండి.

చతురస్రభుజం	**చుట్టుకొలత**
(s)	(4s)
4 సెం.మీ.	$P = 4 \times 4 = 16$ సెం.మీ.
5 సెం.మీ.	$P = 4 \times 5 = 20$ సెం.మీ.
10 సెం.మీ.	$P = 4 \times 10 = 40$ సెం.మీ.

ఇచ్చట స్థిరరాశి విలువ '4' అన్ని సందర్భాలలోనూ మార్పుచెందలేదని తెలుస్తుంది. అంటే ఒక సమస్యలో గల బీజీయ సమాసంలో స్థిరరాశి విలువ ఎల్లప్పుడూ స్థిరంగా ఉంటుంది. కాని చరరాశి విలువ (లు) ఎప్పుడూ మారుతూ ఉంటుంది.

మనం ఒక సమాసాన్ని (ఒక స్థిరరాశి) × (ఒక చరరాశి) రూపంలో రాయాలనుకున్నప్పుడు, స్థిరరాశులు కూడా తెలియని సందర్భంలో స్థిరరాశుల కింద a, b, c ... మొదలగు అక్షరాలను వాడతాం. కావున సమాసాలను సాధారణంగా ax, by, cz, ...

మొదలగు విధంగా రాస్తాం. ఇచ్చట a, b, c ... వంటి స్థిరరాశులను విచక్షణాపరమైన స్థిరరాశులు అంటారు. మిగిలిన బీజీయ సమాసాలైన x^2, $x^2 + 2x + 1$, $x^3 + 3x^2 - 4x + 5$. వంటి వాటి గురించి మీకు పరిచయం ఉంటుంది. ఇవన్నియూ ఏకచరరాశిలో గల బహుపదులే.

ఇవి చేయండి

- 'x' చరరాశితో కూడిన రెండు బహుపదులు రాయండి.
- 'y' చరరాశితో కూడిన మూడు బహుపదులు రాయండి.
- $2x^2 + 3xy + 5y^2$ అనే బహుపది ఒక చరరాశితో ఉన్నదా?
- వివిధ రకాల ఘనాకార వస్తువులకు వైశాల్యం, ఘనపరిమాణం కనుగొనే సూత్రాలు రాయండి. వాటిలో చరరాశులను, స్థిరరాశులను తెలపండి.

2.3 బహుపది యొక్క పరిమాణం

బహుపదిలో ప్రతిపదం, స్థిరరాశి మరియు కొన్ని రుణేతర పూర్ణసంఖ్యల ఘాతాంకాలతో కూడిన చరరాశుల లబ్ధాలుగా ఉంటాయి. దీనిలో స్థిరరాశిని చరరాశి యొక్క **గుణకం** అంటాం. అదే విధంగా పదాలలో గల చరరాశుల యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాంకంను బహుపది **పరిమాణం** అంటారు.

కింది బహుపదులలో పదాల యొక్క గుణకాలను, పరిమాణాలను కనుగొందాం.

(i) $3x^2 + 7x + 5$ (ii) $3x^2y^2 + 4xy + 7$

$3x^2 + 7x + 5$ అనే బహుపదిలో, $3x^2$, $7x$ మరియు 5 లను సమాసంలో గల పదాలు. దీనిలో ప్రతి పదానికి గుణకం ఉంటుంది. $3x^2 + 7x + 5$ లో x^2 యొక్క గుణకం '3', $7x$ లో x యొక్క గుణకం '7' మరియు x^0 యొక్క గుణకం '5' (x^0=1 అని గుర్తుకుతెచ్చుకోండి)

ఒక బహుపది యొక్క పరిమాణం అంటే చరరాశి 'x' యొక్క అత్యధిక ఘాతాంకం అని మీకు తెలుసు.

ఇచ్చిన సమాసం $3x^2 + 7x + 5$ లో x యొక్క అత్యధిక ఘాతాంకం కలిగిన పదం $3x^2$ కావున దీని పరిమాణం '2' అవుతుంది. ఇప్పుడు రెండవ బహుపది $3x^2y^3 + 4xy + 7$ యొక్క గుణకాలు, పరిమాణం ఎలా తెలుస్తుంది? ఇందులో రెండేసి చరరాశులున్నాయి.

అందుచే మొదటి పదంలో x^2y^3 యొక్క గుణకం 3, రెండవపదం లో xy గుణకం 4 మరియు మూడవపదంలో x^0y^0 గుణకం 7 అవుతుంది.

ఇదేవిధంగా సమాసంలో ప్రతి పదంలో గల చరరాశుల ఘాతాంకాల మొత్తం ఆ పదం యొక్క పరిమాణంకు అవుతుంది. ఇందులో $3x^2y^3$ యొక్క పరిమాణం $2 + 3 = 5$ అగును. ఇది బహుపదిలో మిగిలిన పదాల పరిమాణాలలో అత్యధికం కావున, బహుపది $3x^2y^3 + 4xy + 7$ యొక్క పరిమాణం '5' అవుతుంది.

స్థిరరాశి పరిమాణం ఎంత ఉంటుందో ఆలోచించండి. స్థిరరాశిలో ఎటువంటి చరరాశి ఉన్నట్లు కనిపించదు. అందుచే దీనిని ఒక చరరాశి x లో x^0 మరియు ఆ స్థిరరాశి లబ్ధంగా రాయవచ్చు. ఉదాహరణకు స్థిరరాశి 5 యొక్క పరిమాణం 'సున్న'

ఎందుకనగా దీనిని $5x^0$ అని రాయవచ్చు. మీరు పరిమాణాలు 1, 2 లేదా 3 కలిగిన బహుపదులను పరిశీలించారు. ఇదే విధంగా ఏక చరరాశిలో n వ పరిమాణ బహుపదిని రాయగలరా? ఏక చరరాశి 'x' లో n వ పరిమాణ బహుపద సమాసాన్ని

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + . . . + a_1x + a_0$$

ఇందులో $a_0, a_1, a_2, . . ., a_n$ లు స్థిరరాశులు మరియు $a_n \neq 0$ రూపంలో రాయవచ్చు.

ప్రత్యేక సందర్భంలో $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = . . . = a_n = 0$ (అంటే అన్ని గుణకాలు సున్నలు), అయితే మనకు **శూన్యబహుపది** వస్తుంది. దీనిని '**0**' గా సూచిస్తాం.

'సున్న' యొక్క పరిమాణాన్ని చెప్పగలరా? దీనిని నిర్వచించలేము. ఎందుకనగా సున్నను చరరాశి యొక్క ఏ ఘాతాంకానికి హెచ్చించి లబ్దంగా రాయలేము.

ఇవి చేయండి

1. కింది ఇవ్వబడిన ప్రతి బహుపది యొక్క పరిమాణాలు రాయండి.
   - (i) $7x^3 + 5x^2 + 2x - 6$
   - (ii) $7 - x + 3x^2$
   - (iii) $5p - \sqrt{3}$
   - (iv) 2
   - (v) $-5xy^2$
2. కింది వానిలో x^2 యొక్క గుణకాలను రాయండి.
   - (i) $15 - 3x + 2x^2$
   - (ii) $1 - x^2$
   - (iii) $\pi x^2 - 3x + 5$
   - (iv) $\sqrt{2}x^2 + 5x - 1$

కింది పట్టికలను పరిశీలించి ఖాళీలను పూరించండి.

(i) పరిమాణాల ఆధారంగా బహుపదులలో రకాలు

బహుపది పరిమాణం	**బహుపది పేరు**	**ఉదాహరణ**
నిర్వచించబడదు	శూన్య బహుపది	0
సున్న	స్థిర బహుపది	$-12; 5; \frac{3}{4}$ మొ॥నది
1	....	$x - 12; -7x + 8; ax + b$ మొ॥నది
2	వర్గ బహుపది	....
3	ఘన బహుపది	$3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$

సాధారణంగా బహుపది పరిమాణం 'n' అయిన దానిని n వ పరిమాణ బహుపది అంటారు.

(ii) పదాల సంఖ్యను బట్టి బహుపదులలో రకాలు :

శూన్యేతర పదాల సంఖ్య	**బహుపది పేరు**	**ఉదాహరణ**	**పదాలు**
1	ఏకపది	$-3x$	$-3x$
2	ద్విపది	$3x + 5$	$3x, 5$
3	త్రిపది	$2x^2 + 5x + 1$	....
3 కన్నా ఎక్కువ	బహుళపది	....	$3x^3, 2x^2, -7x, 5$

సూచన : ఒక బహుపది, బహుళపది కావచ్చును. కాని అన్ని బహుళపదులు బహుపదులు కానవసరంలేదు.

ఒక చరరాశితో కూడిన రేఖీయ బహుపది ఒక ఏకపది అయిననూ లేదా ద్విపది అయిననూ కావచ్చు.

ఉదా : $3x$ లేదా $2x - 5$

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

ఒక చరరాశితో కూడిన 3వ పరిమాణ ఘనబహుపదిలో ఎన్ని పదాలుంటాయి?

కొన్ని ఉదాహరణలివ్వండి.

ఒక బహుపదిలో చరరాశి 'x' తో కలిగి ఉంటే, అటువంటి బహుపదులను $p(x)$, $q(x)$ లేదా $r(x)$ వంటి వాటిగా తెలుపుతాము. మనం కొన్ని బహుపదులను ఏకచరరాశులలో కింది విధంగా రాస్తాం.

$p(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$q(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7$

$r(y) = y^4 - 1$

$t(z) = z^2 + 5z + 3$

బహుపదిలో ఎన్ని పదాలైనా ఉండవచ్చు.

ప్రయత్నించండి.

1. x చరరాశితో కూడిన ద్విపదిని రాయండి.
2. p చరరాశితో కూడిన 15 పదాలుండే బహుపదిని మీరు ఎలా రాస్తారు?

మనం ఇంతవరకు ఏకచరరాశితో కూడిన బహుపదుల గురించి చర్చించాం. ఒక చరరాశి కన్నా ఎక్కువ చరరాశులతో కూడిన బహుపదులు కూడా అనేకం ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - y^2$ వంటి బహుపదులు x, y. అనే రెండు చరరాశులలో ఉన్నాయి. ఇదేవిధంగా $x^2 + y^2 + z^2$, $x^3 + y^3 + z^3$ వంటి బహుపదులు మూడు చరరాశులతో కూడివున్నవి. ఇటువంటి బహుపదులను గూర్చి వివరంగా తర్వాత తరగతులలో నేర్చుకుంటారు.

అభ్యాసం- 2.1

1. కింది ఇవ్వబడిన ప్రతి బహుపది యొక్క పరిమాణం కొనుగొనండి

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $x^2 + x - 5$ (iii) 5

(iv) $3x^6 + 6y^3 - 7$ (v) $4 - y^2$ (vi) $5t - \sqrt{3}$

2. కింది బహుపదులలో ఏక చరరాశితో కూడిన బహుపదులేవి? ఏవికావు? సకారణంగా తెలపండి.

(i) $3x^2 - 2x + 5$ (ii) $x^2 + \sqrt{2}$ (iii) $p^2 - 3p + q$ (iv) $y + \frac{2}{y}\ (y \neq 0)$

(v) $5\sqrt{x} + x\sqrt{5}\ (x>0)$ (vi) $x^{100} + y^{100}$

3. కింది వానిలో x^3 యొక్క గుణకాలను రాయండి.

(i) $x^3 + x + 1$ (ii) $2 - x^3 + x^2$ (iii) $\sqrt{2}x^3 + 5$ (iv) $2x^3 + 5$

(v) $\frac{\pi}{2}x^3 + x$ (vi) $-\frac{2}{3}x^3$ (vii) $2x^2 + 5$ (vi) 4

4. కింద వానిలో బహుపదులను రేఖీయ, వర్గ మరియు ఘన బహుపదులుగా వర్గీకరించండి.

(i) $5x^2 + x - 7$ (ii) $x - x^3$ (iii) $x^2 + x + 4$ (iv) $x - 1$

(v) $3p$ (vi) πr^2

5. కింది ప్రవచనాలు సత్యమో, అసత్యమో తెల్పండి. సమాధానాలకు కారణాలు తెలపండి.

(i) ద్విపదిలో కనీసం రెండు పదాలుంటాయి.

(ii) ప్రతి బహుపది ఒక ద్విపది అవుతుంది.

(iii) ద్విపది యొక్క పరిమాణం 3 కూడా కావచ్చు.

(iv) శూన్య బహుపది యొక్క పరిమాణం సున్న.

(v) $x^2 + 2xy + y^2$ బహుపది పరిమాణం 2

(vi) πr^2 అనేది ఒక ఏకపది.

6. 10వ పరిమాణం కలిగిన ఒక ఏకపదికి, త్రిపదికి ఒక్కొక్క ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

2.4 బహుపది శూన్య విలువలు

- $p(x) = x^2 + 5x + 4$ అనే బహుపదిని తీసుకోండి.

$x = 1$ అయిన $p(x)$ విలువ ఎంత?

దీని కొరకు మనం $p(x)$ లో ప్రతి x కు 1 ని ప్రతిక్షేపించాలి.

ఇది చేయడంవల్ల $p(1) = (1)^2 + 5(1) + 4,$

$= 1 + 5 + 4 = 10$ వస్తుంది.

కావున $x = 1$ వద్ద $p(x)$ యొక్క విలువ 10 అయింది.

ఇదేవిధంగా $p(x)$ లో $x = 0$ మరియు $x = -1$ తీసుకోండి.

$$p(0) = (0)^2 + 5(0) + 4 = 0 + 0 + 4 = 4$$

$$p(-1) = (-1)^2 + 5(-1) + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$$

$p(-4)$ విలువను కూడా కనుగొనగలరా?

- మరొక బహుపదిని పరిశీలిద్దాం.

$$\begin{aligned} s(y) &= 4y^4 - 5y^3 - y^2 + 6 \\ s(1) &= 4(1)^4 - 5(1)^3 - (1)^2 + 6 \\ &= 4(1) - 5(1) - 1 + 6 \\ &= 4 - 5 - 1 + 6 \\ &= 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

s(−1) విలువను మీరు కనుగొనగలరా?

ఇవి చేయండి

కింద ఇవ్వబడిన బహుపదులలో సూచించిన చరరాశి విలువను ప్రతిక్షేపించి విలువలు కనుగొనండి.

(i) $x = 1$ వద్ద $p(x) = 4x^2 - 3x + 7$

(ii) $y = 1$ వద్ద $q(y) = 2y^3 - 4y + \sqrt{11}$

(iii) $t = p,\ (t \in \mathrm{R})$ వద్ద $r(t) = 4t^4 + 3t^3 - t^2 + 6$

(iv) $z = 1$ వద్ద $s(z) = z^3 - 1$

(v) $x = 1$ వద్ద $p(x) = 3x^2 + 5x - 7$

(vi) $z = 2$ వద్ద $q(z) = 5z^3 - 4z + \sqrt{2}$

- తిరిగి ఇప్పుడు మరొక బహుపది $r(t) = t - 1$ ను తీసుకోండి.

$r(1)$ విలువ ఎంత? $r(1) = 1 - 1 = 0$

$r(1) = 0$ కావున $r(t)$ అనే బహుపదికి శూన్యవిలువ '1' అగును.

మనం సాధారణంగా x చరరాశితో కూడిన బహుపది $p(x) = 0$ అయినపుడు x ను బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ అంటారు.

ఈ బహుపది శూన్యవిలువను బహుపది సమీకరణం $p\,(x)=0$ యొక్క మూలం అనికూడా అంటాం.

$f(x) \ = x + 1$ అనే బహుపది శూన్యవిలువ ఎంత?

బహుపది $x + 1$ యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనుటలో దీనిని సున్నకు సమానం చేయుట ద్వారా వచ్చిందని పరిశీలించే ఉంటారు. అంటే $x + 1 = 0$ అయినప్పుడు $x = -1$ వచ్చింది. కావున $f(x)$ అనేది x చరరాశిలో గల బహుపది అయితే $f(x) = 0$ ను x లో బహుపది సమీకరణం అంటారు. పై ఉదాహరణలో $f(x) = 0$ అయిన సందర్భంలో '-1' ను బహుపది $x + 1=0$ యొక్క మూలం అంటాం.

- ఇప్పుడు ఒక స్థిర బహుపది 3 ను పరిశీలిద్దాం. దీని యొక్క శూన్యవిలువను చెప్పగలరా? దీనికి శూన్యవిలువ లేదు. $3 = 3x^0$ కావున x యొక్క ఏ వాస్తవ విలువకూ $3x^0$ సున్న కానేరదు. అందుచే స్థిర బహుపది (స్థిరరాశి) కి శూన్యవిలువలు ఉండవు.

ప్రయత్నించండి

కింది బహుపదుల శూన్య విలువలు కనుగొనండి.

1. $2x - 3$
2. $x^2 - 5x + 6$
3. $x + 5$

ఉదాహరణ-1 : $p(x) = x + 2$ అయిన $p(1), p(2), p(-1)$ మరియు $p(-2)$ లను కనుగొనండి. వాటి నుండి బహుపది $x + 2$ యొక్క శూన్య విలువలను తెలపండి.

సాధన : $p(x) \ = x + 2$ తీసుకోండి.

x కు బదులు 1 ను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$p(1) = 1 + 2 = 3$$

అలాగే x కు బదులు 2 ను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$p(2) = 2 + 2 = 4$$

x కు బదులు -1 ను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$p(-1) = -1 + 2 = 1$$

x కు బదులు -2 ను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$p(-2) = -2 + 2 = 0$$

దీనినిబట్టి 1 , 2, -1 అనేవి ఇచ్చిన బహుపదికి శూన్యవిలువలు కాలేదు. $p(-2) = 0$ అయినది కావున -2 బహుపది శూన్యవిలువ అయినది.

ఉదాహరణ-2 : $p(x) = 3x + 1$ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనండి.

సాధన : $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనడం అంటే బహుపది సమీకరణం $p(x) \ = \ 0$ ను సాధన చేయడమే.

అనగా
$$3x + 1 = 0$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

కావున $3x + 1$ బహుపది శూన్యవిలువ $-\frac{1}{3}$ అయినది.

ఉదాహరణ-3 : బహుపది $2x - 1$ యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనండి.

సాధన : $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనడం అంటే బహుపది సమీకరణం $p(x) = 0$ ను సాధించడమే.

కనుక $p(x) = 2x - 1$ అనుకోండి. $2x - 1 = 0$ అవుతుంది.

$$x = \frac{1}{2}$$ (ఎలా?)

$P\left(\frac{1}{2}\right)$ విలువను బహుపదిలో ప్రతిక్షేపించి సరిచూడండి.

ఇప్పుడు $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, అయితే దీనిని రేఖీయ బహుపది అంటారు. దీనియొక్క శూన్యవిలువను ఎలా కనుగొంటారు?

$p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువను కనుగొనాలంటే, $p(x) = 0$ బహుపది సమీకరణాన్ని సాధించాలి.

అంటే $ax + b = 0$, $a \neq 0$

కావున $ax = -b$

అనగా $x = \frac{-b}{a}$

అందుచే $x = \frac{-b}{a}$ అనేది $p(x) = ax + b$ యొక్క ఒకే ఒక శూన్యవిలువ అయినది. **ఏక చరరాశిలోగల రేఖీయ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్య విలువ ఉంటుంది.**

ఇవి చేయండి

కింది ఖాళీలను పూరించండి.

రేఖీయ బహుపది	**బహుపది శూన్యవిలువ**
$x + a$	$-a$
$x - a$	-------------
$ax + b$	-------------
$ax - b$	$\frac{b}{a}$

ఉదాహరణ-4 : $x^2 - 3x + 2$ అనే బహుపదికి 2 మరియు 1 అనే విలువలు శూన్యాలవుతాయో, లేదో సరిచూడండి.

సాధన : $p(x) = x^2 - 3x + 2$ అనుకొనుము

x కు బదులు 2 ను ప్రతిక్షేపించగా

$$p(2) = (2)^2 - 3(2) + 2$$
$$= 4 - 6 + 2 = 0$$

అలాగే x ను 1 తో మార్చగా

$$p(1) = (1)^2 - 3(1) + 2$$
$$= 1 - 3 + 2$$
$$= 0$$

కావున 2 మరియు 1 అనేవి రెండునూ $x^2 - 3x + 2$ యొక్క శూన్యవిలువలు అయినాయి.

శూన్యవిలువలు సరిచూడడానికి మరేమైనా విధానం ఉన్నదా?

$x^2 - 3x + 2$ అనే బహుపది పరిమాణం ఎంత? ఇది రేఖీయ బహుపది అవుతుందా? కాదు. ఇది వర్గ బహుపది. కావున వర్గబహుపదికి రెండు శూన్యవిలువలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ-5 : $x^2 + 2x - a$ అనే బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ 3 అయితే 'a' విలువ కనుగొనండి.

సాధన : $p(x) = x^2 + 2x - a$ అనుకొనుము.

బహుపది శూన్యవిలువ 3 కావున $p(3) = 0$.

$$x^2 + 2x - a = 0$$

$x = 3$ విలువ ప్రతిక్షేపించగా $(3)^2 + 2(3) - a = 0$

$$9 + 6 - a = 0$$
$$15 - a = 0$$
$$-a = -15$$

లేదా $a = 15$

ఆలోచించండి, చర్చించి రాయండి

1. $x^2 + 1$ అనే బహుపదికి వాస్తవ శూన్యవిలువలు వ్యవస్థితం కావు? ఎందుకు?
2. n వ పరిమాణ బహుపదికి ఎన్ని శూన్యవిలువలు ఉంటాయో చెప్పగలరా?

అభ్యాసం 2.2

1. $4x^2 - 5x + 3$ అనేది బహుపది విలువలను కింది విలువల వద్ద కనుగొనండి.

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = \frac{1}{2}$

2. కింది బహుపదులలో $p(0), p(1)$ మరియు $p(2)$ విలువలు కనుగొనుము.

(i) $p(x) = x^2 - x + 1$ (ii) $p(y) = 2 + y + 2y^2 - y^3$

(iii) $p(z) = z^3$ (iv) $p(t) = (t - 1)(t + 1)$

(v) $p(x) = x^2 - 3x + 2$

3. కింది ఇవ్వబడిన బహుపదులలో x యొక్క ఏ విలువలకు బహుపది శూన్యమగునో లేదో సరిచూడండి.

(i) $p(x) = 2x + 1;\ x = -\dfrac{1}{2}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi;\ x = \dfrac{-3}{2}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1;\ x = \pm 1$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 2);\ x = -1, -2$

(v) $p(y) = y^2;\ y = 0$ (vi) $p(x) = ax + b;\ x = -\dfrac{b}{a}$

(vii) $f(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $f(x) = 2x - 1,\ x = \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}$

4. కింది బహుపదులకు శూన్య విలువలు కనుగొనండి.

(i) $f(x) = x + 2$ (ii) $f(x) = x - 2$ (iii) $f(x) = 2x + 3$

(iv) $f(x) = 2x - 3$ (v) $f(x) = x^2$ (vi) $f(x) = px,\ p \neq 0$

(vii) $f(x) = px + q,\ \ p \neq 0$ మరియు $p\ q$ లు వాస్తవాలు.

5. $p(x) = 2x^2 - 3x + 7a$ అనే బహుపదికి శూన్యవిలువ ‘2’ అయిన ‘a’ యొక్క విలువను కనుగొనండి.

6. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ అనే బహుపదికి 0 మరియు 1 అనేవి శూన్యవిలువలు అయితే a, b ల విలువలు కనుగొనండి.

2.5 బహుపదులను భాగించుట

కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

(i) 25 మరియు 3 అనే సంఖ్యలను తీసుకోండి. 25 ను 3 చే భాగించండి, మనకు భాగఫలం ‘8’ మరియు శేషం ‘1’ వస్తుంది.

దీనిని విభాజ్యం = (విభాజకం × భాగఫలం) + శేషం రూపంలో రాస్తే

$25 = (8 \times 3) + 1$ అవుతుంది.

ఇదేవిధంగా 20 ను 5 చే భాగిస్తే, మనకు $20 = (4 \times 5) + 0$ అని వస్తుంది.

ఇచ్చట శేషం “సున్న” అయింది. ఈ సందర్భంలో 5 ను 20 యొక్క కారణాంకం అనియూ లేక 20 ని 5 యొక్క గుణిజం అనియూ అంటాం.

సంఖ్యలను భాగించినట్లుగానే బహుపదులను కూడా వేరొక బహుపదులతో భాగించగలమా? చూద్దాం.

(ii) $3x^3 + x^2 + x$ అనే బహుపదిని, ఏకపదితో భాగిద్దాం ($x \neq 0$).

మనకు $$(3x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{3x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$
$$= 3x^2 + x + 1$$

x అనేది ఇచ్చిన బహుపది $3x^3 + x^2 + x$ యొక్క అన్ని పదాలకు ఉమ్మడి కారణాంకం కావున, మనం

$3x^3 + x^2 + x$ ను $x(3x^2 + x + 1)$ అని రాయవచ్చు.

మరి $3x^3 + x^2 + x$ యొక్క కారణాంకాలేవి?

(iii) మరొక ఉదాహరణ $(2x^2 + x + 1) \div x$ ను చూద్దాం ($x \neq 0$).

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ \hline x & 2x^2+x+1 \\ & -2x^2 \\ \hline & \quad\; x+1 \\ & \quad\; -x \\ \hline & \qquad 1 \\ \hline \end{array}$$

ఇచ్చుట $$(2x^2 + x + 1) \div x = \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$$
$$= 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

ఇది బహుపది అవుతుందా?

ఈ సమాసంలో ఒక పదం $\frac{1}{x}$ అనేది ఋణేతర పూర్ణ సంఖ్య ఘాతాంకం కాని చరరాశిని కలిగివున్నది (అనగా $\frac{1}{x} = x^{-1}$)

$\therefore\; 2x + 1 + \frac{1}{x}$ అనేది బహుపది కాదు.

అయితే ఈ భాగహారాన్ని నియమం ప్రకారం

$(2x^2 + x + 1) = [x \times (2x + 1)] + 1$ అని రాయవచ్చు.

ఇందులో '1' ని మినహాయిస్తే, మిగిలిన బహుపదిని రెండు బహుపదుల లబ్ధంగా రాయవచ్చు.

ఇచ్చట మనం $(2x + 1)$ ని భాగఫలం, 'x' ను విభాజకం మరియు '1' శేషం అంటాము. అందుచే భాగహారంలో శేషం 'సున్న' కానందున x ను $2x^2 + x + 1$ అనే బహుపదికి కారణాంకం కాదని మనం గుర్తుంచుకోవాలి.

ఇవి చేయండి

1. $3y^3 + 2y^2 + y$ బహుపదిని 'y' చే భాగించి భాగహార సత్యాన్ని రాయండి ($y \neq 0$).
2. $4p^2 + 2p + 2$ ను '$2p$' చే భాగించి భాగహార సత్యాన్ని రాయండి ($p \neq 0$).

ఉదాహరణ-6 : $3x^2 + x - 1$ ను $x + 1$ చే భాగించండి.

సాధన : $p(x) = 3x^2 + x - 1$ మరియు $q(x) = x + 1$ అని తీసుకోండి.

$p(x)$ ను $q(x)$ చే భాగించాలి. మీరు ముందు తరగతులలో నేర్చుకున్న భాగహార విధానం గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

సోపానం 1 : $\frac{3x^2}{x} = 3x$ భాగించగా ఇది భాగఫలంలో మొదటి పదం అగును.

$$\begin{array}{r} 3x-2 \\ x+1\overline{)3x^2+x-1} \\ 3x^2+3x \\ \underline{-\quad\;\; -\;} \\ -2x-1 \\ -2x-2 \\ \underline{+\quad\;\; +\;} \\ +1 \\ \hline \end{array}$$

సోపానం 2 : $(x+1)\ 3x = 3x^2 + 3x$ (గుణించగా)

$3x^2 + 3x$ నుండి $3x^2 + x$, తీసివేయగా $(-2x)$ వచ్చింది.

సోపానం 3 : $\dfrac{-2x}{x} = -2$ (భాగించగా) ఇది భాగఫలంలో రెండవ పదం అయింది.

సోపానం 4 : $(x+1)(-2) = -2x-2$ (గుణించగా), దీనిని

$(-2x-1)$, నుండి తీసివేయగా '1' వస్తుంది.

సోపానం 5 : భాగహారం ఆపివేసాం. శేషం 1 వచ్చింది. ఇది స్థిరరాశి.

(స్థిరరాశిని ఎందుకు బహుపదితో భాగించలేమో చెప్పగలరా?)

దీని నుండి మనకు భాగఫలం $(3x-2)$ మరియు శేషం $(+1)$ వచ్చాయి.

గమనిక : భాగహార ప్రక్రియలో శేషం 'సున్న' గాని లేదా శేషం యొక్క పరిమాణం, విభాజక పరిమాణం కన్నా తక్కువైన సందర్భంలో ప్రక్రియ పూర్తయినదిగా భావిస్తాం.

ఇప్పుడు, దీని నుండి భాగహార సత్యాన్ని కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$3x^2 + x - 1 = (x+1)(3x-2) + 1$$

అంటే విభాజ్యం = (విభాజకం × భాగఫలం) + శేషం.

ఈ బహుపది $p(x)$ లో x కు బదులు -1 ప్రతిక్షేపించగా

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 + x - 1 \\ p(-1) &= 3(-1)^2 + (-1) - 1 \\ &= 3(+1) + (-1) - 1 = 1. \end{aligned}$$

$p(-1)$ యొక్క విలువ, భాగహారంలో శేషం (1) సమానమైనాయని మీరు భాగహారంచేసి పరిశీలించవచ్చు.

కావున $p(x) = 3x^2 + x - 1$ ను $(x+1)$ చే భాగించగా వచ్చిన శేషం, $p(-1)$ యొక్క విలువ అంటే $x+1$ యొక్క శూన్య విలువ (i.e. $x = -1$) సమానం అయినాయి.

మనం మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-7 : $2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ అనే బహుపదిని $(x-1)$ చే భాగించి శేషాన్ని, విభాజకం యొక్క శూన్యవిలువతో సరిచూడండి.

సాధన : $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ అనుకోండి.

పొడవు భాగహార పద్ధతిలో, మనం మొదట $2x^4$, x ను ఎన్నిసార్లు హెచ్చిస్తే వస్తుందో చూడాలి.

$$\frac{2x^4}{x} = 2x^3$$

ఇప్పుడు $(x-1)(2x^3) = 2x^4 - 2x^3$ గా గుణించాలి.

తిరిగి శేషంలో మొదటి పదం చూడాలి. (అంటే $-2x^3$) ఈ విధంగా భాగహారం పూర్తిచేయాలి.

$$\begin{array}{r} 2x^3-2x^2-2x-5 \\ x-1\overline{)2x^4-4x^3-3x-1} \\ 2x^4-2x^3 \qquad\qquad\quad \\ \underline{-\qquad +\qquad\qquad\qquad\;} \\ -2x^3-3x-1 \\ -2x^3+2x^2 \qquad\; \\ \underline{+\qquad -\qquad\qquad\;} \\ -2x^2-3x-1 \\ -2x^2+2x \quad\; \\ \underline{+\qquad -\qquad\;} \\ -5x-1 \\ -5x+5 \\ \underline{+\qquad -\;} \\ -6 \\ \hline \end{array}$$

ఇచ్చట భాగఫలం $2x^3 - 2x^2 - 2x - 5$ మరియు శేషం -6 వచ్చింది.

ఇప్పుడు $(x - 1)$ యొక్క శూన్య విలువ 1 కావున

$x = 1$ ని $f(x)$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1 \\ &= 2(1) - 4(1) - 3(1) - 1 \\ &= 2 - 4 - 3 - 1 \\ &= -6 \end{aligned}$$

భాగహారంలో వచ్చిన శేషం మరియు బహుపది $f(x)$ నకు $(x - 1)$ యొక్క శూన్యవిలువ సమానమేనా?

పై ఉదాహరణల ఆధారంగా ఒక బహుపదిని ఏకచరరాశి రేఖీయ బహుపదితో భాగించునప్పుడు వచ్చు శేషాన్ని, భాగహారం చేయకుండానే పొందే సిద్ధాంతాన్ని రాబట్టవచ్చు.

శేష సిద్ధాంతం :

$p(x)$ అనేది ఒక ఏక పరిమాణ లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ గరిష్ఠ పరిమాణంగల బహుపది మరియు 'a' అనేది వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు $p(x)$ ను రేఖీయ బహుపది $(x - a)$ చే భాగిస్తే వచ్చు శేషం $p(a)$ అగును.

పై సిద్ధాంత నిరూపణను పరిశీలిద్దాం.

ఉపపత్తి : ఏకపరిమాణ లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ గరిష్ఠ పరిమాణంగల బహుపది $p(x)$ ను తీసుకుందాం.

$p(x)$ ను రేఖీయ బహుపది $g(x) = (x - a)$ చే భాగించునప్పుడు భాగఫలం $q(x)$ మరియు శేషం $r(x)$ అనుకుందాం. అంటే $p(x)$ మరియు $g(x)$ అనేవి రెండు బహుపదులు అయిన సందర్భంలో $p(x)$ యొక్క పరిమాణం $\geq$ $g(x)$ యొక్క పరిమాణం మరియు $g(x) \neq 0$ అయితే మనకు $q(x)$ మరియు $r(x)$ అనే మరొక రెండు బహుపదులు వస్తాయి. ఇందులో $r(x) = 0$ లేదా $r(x)$ పరిమాణం ఎప్పుడూ $g(x)$ పరిమాణం కన్నా తక్కువగా ఉంటుంది.

భాగహార నియమం ప్రకారం

$p(x) = g(x) \,.\, q(x) + r(x)$ గా రాయవచ్చు.

$\therefore \; p(x) = (x - a) \,.\, q(x) + r(x)$ $\qquad \because \; g(x) = (x - a)$

$(x - a)$ పరిమాణం 1 మరియు $r(x)$ పరిమాణం $(x - a)$ పరిమాణం కన్నా తక్కువ కనుక.

$\therefore$ $r(x)$ పరిమాణం $= 0$, అంటే $r(x)$ ఒక స్థిరరాశి.

దీనిని 'K' అనుకుంటే, ప్రతి వాస్తవ విలువ x కు $r(x) = \mathrm{K}$.

కావున

$p(x) = (x - a)\, q(x) + \mathrm{K}$ అగును

$x = a$ అయిన $p(a) = (a - a)\, q(a) + \mathrm{K}$

$$\begin{aligned} &= 0 + \mathrm{K} \\ &= \mathrm{K} \end{aligned}$$

కావున సిద్ధాంతం నిరూపించబడినది.

ఇప్పుడు మనం ఒక బహుపదిని మరొక రేఖీయ బహుపదిచే భాగించునపుడు వచ్చే శేషాలను భాగహారంచేయకుండానే సిద్ధాంతం ఆధారంగా ఎలా కనుక్కొంటారో ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-8 : $x^3 + 1$ ను $(x + 1)$ తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చుట $p(x) = x^3 + 1$

రేఖీయ బహుపది $x + 1$ శూన్య విలువ -1 $[x + 1 = 0$ కావున $x = -1]$

x కు బదులు -1 ను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

కావున శేష సిద్ధాంతం ప్రకారం $(x^3 + 1)$ ను $(x + 1)$ చే భాగించగా 'సున్న' శేషం వచ్చింది.

దీనికొరకు $x^3 + 1$ ను $x + 1$ చే భాగహారం చేసి సరిచూడవచ్చు.

ఇక్కడ $(x + 1)$ ను $(x^3 + 1)$ కు కారణాంకమని నీవు చెప్పగలవా?

ఉదాహరణ-9 : $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ బహుపదికి $(x - 2)$ కారణాంకమా? సరిచూడండి.

సాధన : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ అనుకోండి.

ఇచ్చిన బహుపదికి $(x - 2)$ కారణాంకం అవునో లేదో తెలుసుకోవాలంటే

$(x - 2)$ యొక్క శూన్యవిలువ 2ను x కు బదులు ప్రతిక్షేపించాలి. అనగా $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

$$\begin{aligned} p(2) &= (2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 4 \\ &= 8 - 2(4) - 10 + 4 \\ &= 8 - 8 - 10 + 4 \\ &= -6. \end{aligned}$$

శేషం 'సున్న' కానందున $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ బహుపదికి $(x - 2)$ కారణాంకం కాదు.

ఉదాహరణ-10 : $p(y) = 4y^3 + 4y^2 - y - 1$ అను బహుపది $(2y + 1)$ నకు గుణిజం అవుతుందా? సరిచూడండి.

సాధన : $p(y)$ ను $(2y + 1)$ ఖచ్చితంగా భాగిస్తే $p(y)$ కు $(2y + 1)$ గుణిజం అవుతుందని మీకు తెలుసు.

అందువలన $2y + 1$ యొక్క శూన్యవిలువ అనగా $y = \frac{-1}{2}$,

$p(y)$ లో y కు బదులు $\frac{-1}{2}$ ను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$p\left(\frac{-1}{2}\right)=4\left(\frac{-1}{2}\right)^3+4\left(\frac{-1}{2}\right)^2-\left(\frac{-1}{2}\right)-1$$

$$=4\left(\frac{-1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}-1$$

$$=\frac{-1}{2}+1+\frac{1}{2}-1$$

$$=0$$

కావున $(2y+1)$ అనేది $p(y)$ కు కారణాంకం అయినది. దీనిని బట్టి $p(y)$ అనేది $(2y+1)$ కి గుణిజం అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ-10 : $ax^3 + 3x^2 - 13$ మరియు $2x^3 - 5x + a$ అనుబహుపదులు $(x - 2)$ చే భాగించునప్పుడు శేషాలు సమానం అయితే 'a' విలువ కనుగొనండి.

సాధన : $p(x) = ax^3 + 3x^2 - 13$ మరియు $q(x) = 2x^3 - 5x + a$ అనుకుందాం.

$\because$ $p(x)$ మరియు $q(x)$ లను $(x-2)$ చే భాగిస్తే శేషాలు సమానం.

$\therefore$ $p(2) = q(2)$

$$a(2)^3 + 3(2)^2 - 13 = 2(2)^3 - 5(2) + a$$

$$8a + 12 - 13 = 16 - 10 + a$$

$$8a - 1 = a + 6$$

$$8a - a = 6 + 1$$

$$7a = 7$$

$$a = 1$$

అభ్యాసం 2.3

1. x^3+3x^2+3x+1 ను కింది రేఖీయ బహుపదులతో భాగించునప్పుడు వచ్చే శేషాలు కనుగొనండి.
   - (i) $x + 1$
   - (ii) $x - \frac{1}{2}$
   - (iii) x
   - (iv) $x + \pi$
   - (v) $5 + 2x$
2. $x^3 - px^2 + 6x - p$ ను $x - p$ తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం ఎంత?

3. $2x^2 - 3x + 5$ ను $2x - 3$ చే భాగిస్తే వచ్చే శేషం ఎంత? ఇది బహుపదిని ఖచ్చితంగా భాగించిందా? కారణాలు తెలపండి.

4. $9x^3 - 3x^2 + x - 5$ ను $x - \frac{2}{3}$ చే భాగిస్తే వచ్చే శేషం ఎంత?

5. $2x^3 + ax^2 + 3x - 5$ మరియు $x^3 + x^2 - 4x + a$ బహుపదులను $(x - 2)$ చే భాగించునప్పుడు వచ్చే శేషాలు సమానం అయితే 'a' విలువ కనుగొనుము.

6. $x^3 + ax^2 + 5$ మరియు $x^3 - 2x^2 + a$ బహుపదులను $(x + 2)$ చే భాగించునపుడు వచ్చే శేషాలు సమానం అయితే 'a' విలువ కనుగొనుము.

7. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ ను $g(x) = x - 2$ చే భాగిస్తే వచ్చే శేషం కనుగొనండి. ఫలితాన్ని భాగహారం చేసి సరిచూడండి.

8. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 3$ ను $g(x) = 1 - 2x$ చే భాగిస్తే వచ్చే శేషం ఎంత? ఫలితాన్ని భాగహారం చేసి సరిచూడండి.

9. $2x^3 + 3x^2 + ax + b$ అను బహుపదిని $(x - 2)$ చే భాగిస్తే శేషం 2 మరియు $(x + 2)$ చే భాగిస్తే శేషం -2 వస్తే a, b ల విలువలు కనుగొనండి.

2.6 బహుపది యొక్క కారణాంక విభజన

$p(x)$ అనే బహుపదిని $q(x)$ అనే బహుపది భాగించునపుడు శేషం 'సున్న' వస్తే $q(x)$ ను $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అంటారని మీకు తెలుసు.

ఉదాహరణకు $p(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$ ను $g(x) = 2x + 1$ భాగించునపుడు శేషం 'సున్న' వస్తే
$4x^3 + 4x^2 - x - 1 = q(x)\,(2x + 1) + 0$ అని భాగహార సత్యంగా రాస్తాము.

కావున $p(x) = q(x)\,(2x + 1)$

అందుచే $g(x) = 2x + 1$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అయినది.

మీరు ఇప్పుడు శేషసిద్ధాంతం ఆధారంగా ఒక బహుపది యొక్క కారణాంకాలు కనుగొనడానికి కారణాంక సిద్ధాంతాన్ని ప్రతిపాదించగలరా?

కారణాంక సిద్ధాంతం : బహుపది పరిమాణం $n \geq 1$ గా గల బహుపది $p(x)$ మరియు 'a' ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు (i) $p(a) = 0$ అయిన $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అగును మరియు (ii) $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అగును.

ఈ సిద్ధాంతం యొక్క సరళతరమైన నిరూపణ పరిశీలిద్దాం.

ఉపపత్తి : శేషసిద్ధాంతం ప్రకారం

$$p(x) = (x - a)\,q(x) + p(a)$$

(i) $p(a) = 0$ అయిన సందర్భంలో $p(x) = (x - a)\,q(x) + 0$ అగును.

$$= (x - a)\,q(x)$$

దీనినిబట్టి $p(x)$ కు $(x - a)$ కారణాంకమని చెప్పవచ్చు.

నిరూపించబడింది.

(ii) ఇదేవిధంగా $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం కావున $p(x) = (x - a)\, q(x)$ సత్యం అవుతుంది $q(x)$ అనేది మరొక బహుపది.

$$\therefore \; p(a) = (a - a)\, q(a) = 0$$

∴ కావున $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అయినది.

ఈ విధంగా సిద్ధాంతం నిరూపించబడింది.

మనం కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \; (a \neq 0)$ నకు $(x - 1)$ ఒక కారణాంకం అయితే $p(1) = 0$ $\Rightarrow a + b + c + d = 0$ అనగా ఒక బహుపదిలో పదముల గుణకముల మొత్తం శూన్యం అయితే $(x - 1)$ ఒక కారణాంకం అవుతుంది.

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \; (a \neq 0)$ కు $(x + 1)$ ఒక కారణాంకం అయితే $p(-1) = 0$ $\Rightarrow b + d = a + c$ అనగా సరిఘాతం గల పదముల గుణకముల మొత్తం, బేసిఘాత గుణకముల మొత్తం గల పదముల గుణకముల మొత్తంనకు సమానమైయితే $(x + 1)$ ఒక కారణాంకం అవుతుంది.

ఉదాహరణ-12 : $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ అనే బహుపదికి $(x + 2)$ కారణాకం అవుతుందా?

సాధన : $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ మరియు $g(x) = x + 2$ అనుకొనుము.

$g(x)$ యొక్క శూన్యవిలువ -2

కావున
$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) + 6 \\ &= -8 + 2(4) - 6 + 6 \\ &= -8 + 8 - 6 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

కావున, కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రకారం ఇచ్చిన బహుపది $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ కు $(x + 2)$ కారణాంకం అవుతుంది.

ఉదాహరణ-13 : $2x^3 - 9x^2 + x + K$ అనుబహుపది సమాసానికి $(2x - 3)$ కారణాంకం అయితే K విలువ కనుగొనండి.

సాధన : $(2x - 3)$ అనేది $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + K$ బహుపదికి కారణాంకం.

$(2x - 3) = 0$ అయితే $x = \frac{3}{2}$

∴ $(2x - 3)$ యొక్క శూన్యవిలువ $\frac{3}{2}$

అందుచే $(2x - 3)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ అగును.

$$p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + K,$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + K = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} + K = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + K = 0\right) \times 4$$

$$27 - 81 + 6 + 4K = 0$$

$$-48 + 4K = 0$$

$$4K = 48$$

కావున $K = 12$

ఉదాహరణ-14 : $(x-1)$ అనేది $x^{10} - 1$ అనే బహుపది కారణాంకమని నిరూపించండి. ఇదే విధంగా $x^{11} - 1$ కు కూడా కారణాంకమని చూపండి.

సాధన : $p(x) = x^{10} - 1$ మరియు $g(x) = x^{11} - 1$ అనుకొనుము.

$(x-1)$ రెండు బహుపదులు $p(x)$ మరియు $g(x)$ లకు కారణాంకమౌతుందని చూపాలంటే $p(1) = 0$ మరియు $g(1) = 0$ అని చూపితే సరిపోతుంది.

ఇప్పుడు

$p(x) = x^{10} - 1$ మరియు $g(x) = x^{11} - 1$

$p(1) = (1)^{10} - 1$ మరియు $g(1) = (1)^{11} - 1$

$= 1 - 1$ $= 1 - 1$

$= 0$ $= 0$

కనుక కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రకారం

ప్రయత్నించండి

$x^n - 1$ అను బహుపదికి $(x-1)$ ఒక కారణాంకమని చూపండి

$(x-1)$ అనేది $p(x)$ మరియు $g(x)$ లకు కారణాంకం అయినది. మనం ఇప్పుడు వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$ మరియు a, b, c లు స్థిరాంకాలు) ను ఏవిధంగా కారణాంక విభజన చేస్తారో తెలుసుకుందాం.

వర్గ బహుపదికి $(px + q)$ మరియు $(rx + s)$ అనేవి కారణాంకాలనుకుందాం.

కావున $ax^2 + bx + c = (px + q)\ (rx + s)$

$$= prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

x^2, x మరియు స్థిరపదాల గుణకాలను సరిపోల్చగా, మనకు

$a = pr$

$b = ps + qr$

$c = qs$ అని వస్తాయి.

దీని నుండి మనకు x గుణకం 'b' అనేది ps మరియు qr ల మొత్తమని తెలుస్తున్నది. వీటి లబ్ధం

$(ps)\,(qr) = (pr)(qs)$

$= ac$ అని రాయవచ్చు.

దీనిని బట్టి $ax^2 + bx + c$ వర్గబహుపది కారణాంక విభజనలో b అనేది రెండు సంఖ్యల మొత్తం అని, వాటి లబ్ధం ac అని తెలుస్తున్నది.

ఉదాహరణ-15 : $3x^2 + 11x + 6$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : p, q లు అనేవి రెండు సంఖ్యలు మరియు $p + q = 11$ మరియు $pq = 3 \times 6 = 18$ సందర్భంలో p, q లను కనుగొనాలంటే

18 లబ్ధంగా రాయగలిగే కారణాంకాల జతలను పరిశీలిస్తే.

(1, 18), (2, 9), (3, 6) జతలలో, (2, 9) జత $p + q = 11$ ను తృప్తి పరుస్తాయి.

కావున $3x^2 + 11x + 6 = 3x^2 + 2x + 9x + 6$

$= x(3x + 2) + 3(3x + 2)$

$= (3x + 2)(x + 3).$

ఇవి చేయండి

కింది వానిని కారణాంకాలుగా విభజించండి.

1. $6x^2 + 19x + 15$
2. $10m^2 - 31m - 132$
3. $12x^2 + 11x + 2$

ఇప్పుడు మరొక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-16 : $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ అనే బహుపది $x^2 - 3x + 2$ చే భాగింపబడుతుందా? సరిచూడండి. కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి ఏవిధంగా సరిచూస్తారు?

సాధన : విభాజకం ఒక రేఖీయ బహుపది కాదు. ఇది ఒక వర్గ బహుపది. వర్గబహుపది యొక్క మధ్య పదాన్ని విభజించి కారణాంకాలుగా కనుగొనుట మీరు నేర్చుకున్నారుకదా! ఆ విధంగా చేస్తే

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2$

$= x(x - 2) - 1(x - 2)$

$= (x - 2)(x - 1).$

$2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ అనే బహుపదికి $x^2 - 3x + 2$ వర్గబహుపది కారణాంకమని చూపాలంటే, $(x - 2)$ మరియు $(x - 1)$ లను కారణాంకాలుగా చూపాలి.

కావున $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ తీసుకుంటే

$p(x)$ కు $(x - 2)$ కారణాంక అయిన $p(2) = 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2$

$= 2(16) - 6(8) + 3(4) + 6 - 2$

$= 32 - 48 + 12 + 6 - 2$

$= 50 - 50$

$= 0$

$p(2) = 0$ కావున $p(x)$ కు $(x - 2)$ కారణాంకం అవుతుంది.

మరొక కారణాంకం $(x - 1)$, $p(x)$ కు కారణాంకం కావాలంటే

$$\begin{aligned} p(1) &= 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2 \\ &= 2(1) - 6(1) + 3(1) + 3 - 2 \\ &= 2 - 6 + 3 + 3 - 2 \\ &= 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore\ p(1) = 0$ అయినందున $(x - 1)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయింది.

$(x - 2)$ మరియు $(x - 1)$ రెండునూ $p(x)$ కు కారణాంకాలైనందున వాటి లబ్ధం $x^2 - 3x + 2$ కూడా $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ కు కారణాంకం అవుతుంది.

ఉదాహరణ-17 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

- $(x - y) \mid (x^n - y^n)$, ప్రతీ $n \in \mathrm{N}$
- $(x + y) \mid (x^n - y^n)$, ఇచ్చుట n ఒక సరిసంఖ్య
- $(x + y) \mid (x^n + y^n)$, ఇచ్చుట n ఒక బేసిసంఖ్య
- $(x - y) \nmid (x^n + y^n)$, ప్రతి $n \in \mathrm{N}$

సాధన : $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ అనుకొనండి.

వీటితో ప్రయత్నిస్తే మనకు $p(1) = 0$ అవుతుంది (సరిచూడండి)

కావున $p(x)$ కు $(x - 1)$ కారణాంకం అవుతుంది.

తర్వాత $p(x)$ ను $(x - 1)$ చే భాగిస్తే మనకు $x^2 - 22x + 120$ వస్తుంది.

ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి:

$$\begin{aligned} x^3 - 23x^2 + 142x - 120 &= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120 \\ &= x^2(x - 1) - 22x\,(x - 1) + 120\,(x - 1) \quad \text{(ఎలా?)} \\ &= (x - 1)\,(x^2 - 22x + 120) \end{aligned}$$

ఇప్పుడు $x^2 - 22x + 120$ వర్గబహుపది కావున, మధ్యపదంను విడదీసి కారణాంకాలు కనుగొందాం.

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x - 12) - 10\,(x - 12) \\ &= (x - 12)\,(x - 10) \end{aligned}$$

కావున $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x - 1)\,(x - 10)\,(x - 12)$ అయినది.

గమనిక : $a \mid b$ అనగా a, b ని నిశ్శేషంగా భాగించును.

- $a \nmid b$ అనగా a, b ని భాగించదు.

అభ్యాసం 2.4

1. కింది బహుపదులకు $(x + 1)$ కారణాంక మగునో, లేదో నిర్ధారించండి.
   (i) $x^3 - x^2 - x + 1$ (ii) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
   (iii) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (3 - \sqrt{3})\,x + \sqrt{3}$

2. కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి, కింది బహుపదులలో ప్రతి సందర్భంలోనూ $f(x)$ కు $g(x)$ కారణాంకమగునో లేదో తెలపండి.
   (i) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 5x - 1,\ g(x) = x + 1$
   (ii) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 1$
   (iii) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 2$
   (iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12,\ g(x) = 3x - 2$
   (v) $f(x) = 4x^3 + 20x^2 + 33x + 18,\ g(x) = 2x + 3$

3. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ నకు $(x - 2), (x + 3)$ మరియు $(x - 4)$ లు కారణాంకాలు అవుతాయని చూపండి.

4. $x^3 - 6x^2 - 19x + 84$ నకు $(x + 4), (x - 3)$ మరియు $(x - 7)$ లు కారణాంకాలు అవుతాయని చూపండి.

5. $px^2 + 5x + r$ అనే బహుపదికి $(x - 2)$ మరియు $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ కారణాంకములైతే $p = r$ అని చూపండి.

6. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ బహుపదికి $(x^2 - 1)$ కారణాంకం అయితే $a + c + e = b + d = 0$

7. కారణాంకాలుగా విభజించండి (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$
   (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $y^3 + y^2 - y - 1$

8. $ax^2 + bx + c$ మరియు $bx^2 + ax + c$ అను బహుపదులకు ఉమ్మడి కారణాకం $x + 1$ అయిన $c = 0$ మరియు $a = b$ అని చూపండి.

9. $x^2 - x - 6$ మరియు $x^2 + 3x - 18$ లకు $(x - a)$ ఉమ్మడి కారణాంకం అయిన 'a' విలువ కనుగొనుము.

10. $y^3 - 2y^2 - 9y + 18$ యొక్క ఒక కారణాంకం $(y - 3)$ అయిన మిగిలిన రెండు కారణాంకాలు కనుగొనండి.

2.7 బీజగణిత సర్వసమీకరణాలు

ఒక బీజగణిత సమీకరణంలోగల చరరాశులకు ఏ విలువలు ప్రతిక్షేపించిననూ ఎల్లవేళలా సత్యమయ్యే దానిని సర్వసమీకరణ మంటారని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. మీరు కింది తరగతులలో కింది బీజగణిత సర్వ సమీకరణాలను నేర్చుకున్నారు.

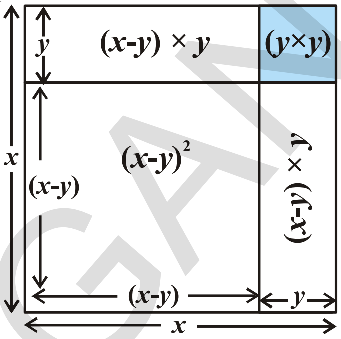
సర్వసమీకరణం I : $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

సర్వసమీకరణం II : $(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$

సర్వసమీకరణం III : $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

సర్వసమీకరణం IV : $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab.$

జ్యామితీయ నిరూపణ :



సర్వసమీకరణం $(x - y)^2$ నకు

సోపానం 1 : భుజం 'x'గా గల చతురస్రం గీయాలి..

సోపానం 2 : 'x' నుండి 'y' పొడవును తీసివేయాలి.

సోపానం 3 : $(x - y)^2$ ను గుణించాలి.

$$= x^2 - [(x - y)y + (x - y)y + y^2]$$
$$= x^2 - xy + y^2 - xy + y^2 - y^2$$
$$= x^2 - 2xy + y^2$$

ప్రయత్నించండి

కింది సర్వసమీకరణాలకు కూడా పటాలను గీచి నిరూపించండి.

(i) $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ (ii) $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

(iii) $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

(iv) $(x + a)(x + b)(x + c) \equiv x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$

ఇవి చేయండి

కింది సమాసాలకు సర్వసమీకరణాలనుపయోగించి లబ్దాలు కనుగొనండి.

(i) $(x + 5)(x + 5)$ (ii) $(p - 3)(p + 3)$ (iii) $(y - 1)(y - 1)$

(iv) $(t + 2)(t + 4)$ (v) 102×98 (vi) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన చేయుటలో సర్వసమీకరణాలు ఉపయోగపడతాయి. ఇటువంటి ఉదాహరణలు కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-18 : కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $x^2 + 5x + 4$ (ii) $9x^2 - 25$

(iii) $25a^2 + 40ab + 16b^2$ (iv) $49x^2 - 112xy + 64y^2$

సాధన :

(i) ఇచ్చుట $x^2 + 5x + 4 = x^2 + (4 + 1)x + (4)(1)$

ఈ బహుపదిని $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$ అనే సర్వసమీకరణంతో పోల్చగా

మనకు $(x + 4)(x + 1)$ వస్తుంది.

(ii) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2$

దీనిని $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$ అను సర్వసమీకరణంతో పోల్చగా

$\therefore 9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5)$ అగును.

(iii) ఇచ్చట బహుపది

$25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a)^2 + 2(5a)(4b) + (4b)^2$

ఈ సమాసాన్ని $x^2 + 2xy + y^2$ తో పోల్చగా,

$x = 5a$ మరియు $y = 4b$ అని పరిశీలించవచ్చు.

$\mathbf{(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2}$ సర్వసమీకరణము వినియోగిస్తే

మనకు $25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a + 4b)^2$

$= (5a + 4b)(5a + 4b)$ అగును.

- $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$
- $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

(iv) ఇచ్చట $49x^2 - 112xy + 64y^2$, మనకు

$49x^2 = (7x)^2$, $64y^2 = (8y)^2$ మరియు

$112\,xy = 2(7x)(8y)$ అని తెలుస్తున్నది.

దీనిని సర్వసమీకరణం

$\mathbf{(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2}$ తో పోల్చగా

మనకు $49x^2 - 112xy + 64y^2 = (7x)^2 - 2(7x)(8y) + (8y)^2$

$= (7x - 8y)^2$

$= (7x - 8y)(7x - 8y)$ అయినది.

ఇవి చేయండి

కింది వానిని తగిన సర్వసమీకరణాలనుపయోగించి కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{y^2}{9}$

(iii) $t^2 - 2t + 1$ (iv) $x^2 + 3x + 2$

ఇంతవరకు మనం వాడిన సర్వసమీకరణాలన్నియూ ద్విపదుల లబ్దాలకు సంబంధించినవి. ఇప్పుడు మనం మొదటి సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి త్రిపది $x + y + z$ యొక్క వర్గం $(x + y + z)^2$ విస్తరించడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

$x + y = t$, అయిన $(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + z^2$ (మొదటి సర్వసమీకరణం ఆధారంగా)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ ('t' విలువను ప్రతిక్షేపించగా)

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$

పదాలను క్రమం మార్చి రాయగా = $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ అయినది.

ప్రత్యామ్నాయపద్ధతి:

$(x+y+z)^2$ ను పదాల పునర్వర్గీకరణ ద్వారా కూడా గణించవచ్చు.

$$[(x+y)+z]^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)(z) + (z)^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \qquad \text{[మొదటి సర్వసమీకరణం నుండి]}$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

మరి ఏ ఇతర విధాలుగా పదాలను పునర్వర్గీకరణ చేసి విస్తరణ చేయవచ్చు?

కావున, సర్వసమీకరణంను మనం ఇలా రాయవచ్చు.

సర్వసమీకరణం V : $(x+y+z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

ఉదాహరణ-19 : $(2a+3b+5)^2$ ను సర్వసమీకరణం ద్వారా విస్తరించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమాసంను $(x+y+z)^2$ తో పోల్చగా, మనకు

$x = 2a,\ y = 3b$ మరియు $z = 5$ వస్తాయి.

అందువలన సర్వసమీకరణం V, ద్వారా మనం

$$(2a+3b+5)^2 = (2a)^2 + (3b)^2 + (5)^2 + 2(2a)(3b) + 2(3b)(5) + 2(5)(2a)$$

$$= 4a^2 + 9b^2 + 25 + 12ab + 30b + 20a.$$

ఉదాహరణ-20 : $(5x-y+z)(5x-y+z)$ యొక్క లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చుట $(5x-y+z)(5x-y+z) = (5x-y+z)^2$

$$= [5x+(-y)+z]^2$$

అందువలన మనం సర్వసమీకరణం V, $(x+y+z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$, తో పోల్చగా

మనకు $(5x+(-y)+z)^2 = (5x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(5x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(5x)$

$$= 25x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 2yz + 10zx.$$

ఉదాహరణ-21 : $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : మనకు

$$4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$$

$$= [(2x)^2 + (-3y)^2 + (5z)^2 + 2(2x)(-3y) + 2(-3y)(5z) + 2(5z)(2x)]$$

సర్వసమీకరణం V తో పోల్చగా

$(x+y+z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$, మనకు

$$= (2x-3y+5z)^2$$
$$= (2x-3y+5z)\,(2x-3y+5z).$$

ఇవి చేయండి

(i) $(p+2q+r)^2$ ను విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

(ii) $(4x-2y-3z)^2$ ను సూత్రం ద్వారా విస్తరించండి.

(iii) $4a^2+b^2+c^2-4ab+2bc-4ca$ ను సూత్రం ద్వారా కారణాంకాలుగా విభజించండి.

మనం ఇంతవరకు రెండవ పరిమాణ పదాలతో కూడివున్న సర్వసమీకరణాలను చర్చించాం. ఇప్పుడు మనం సర్వసమీకరణం (1)ని వినియోగించి $(x+y)^3$ విస్తరణ చేద్దాం.

మనకు

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)^2\,(x+y)\\ &= (x^2+2xy+y^2)\,(x+y)\\ &= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)\\ &= x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\ &= x^3+3xy\,(x+y)+y^3\\ &= x^3+y^3+3xy(x+y).\end{aligned}$$

కనుక, మనం మరొక సర్వసమీకరణంను ఇలా రాయవచ్చు.

సర్వసమీకరణం VI : $(x+y)^3 \equiv x^3+y^3+3xy\,(x+y)$.

ప్రయత్నించండి

$(x-y)^3$ లబ్దంను గుణకారం చేయకుండా ఎలా కనుగొంటారు?

లబ్దాన్ని గుణకారంచేసి సరిచూడండి.

దీని నుండి తర్వాత సర్వసమీకరణం కింది విధంగా రాయవచ్చు.

సర్వసమీకరణం VII : $(x-y)^3 \equiv x^3-y^3-3xy\,(x-y)$.

$$\equiv x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

పై సర్వసమీకరణాలను వినియోగించి ఫలితాలు రాబట్టే కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-22 : కింది ఘనాలను విస్తరించండి.

(i) $(2a+3b)^3$ (ii) $(2p-5)^3$

సాధన : (i) ఇచ్చిన సమాసాన్ని $(x+y)^3$ తో పోల్చగా, మనకు $x = 2a$ మరియు $y = 3b$ అగును.

కావున, సర్వసమీకరణం VI, వాడితే,

$$\begin{aligned}(2a+3b)^3 &= (2a)^3 + (3b)^3 + 3(2a)(3b)\,(2a+3b)\\ &= 8a^3 + 27b^3 + 18ab\,(2a+3b)\\ &= 8a^3 + 27b^3 + 36a^2b + 54\,ab^2\\ &= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.\end{aligned}$$

(ii) ఇచ్చిన సమాసాన్ని $(x-y)^3$, తో పోల్చగా, మనకు $x = 2p$ మరియు $y = 5$ అగును.

కావున, సర్వసమీకరణం VII , వాడితే,

$$\begin{aligned}(2p-5)^3 &= (2p)^3 - (5)^3 - 3(2p)(5)\,(2p-5)\\ &= 8p^3 - 125 - 30p\,(2p-5)\\ &= 8p^3 - 125 - 60p^2 + 150p\\ &= 8p^3 - 60p^2 + 150p - 125.\end{aligned}$$

ఉదాహరణ-23 : కింది వానిని తగిన సర్వసమీకరణాలుపయోగించి గణించండి.

(i) $(103)^3$ (ii) $(99)^3$

సాధన : (i) మనకు

$(103)^3 = (100+3)^3$ వచ్చును.

దీనిని $(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ తో పోల్చగా, మనకు

$$\begin{aligned}&= (100)^3 + (3)^3 + 3(100)\,(3)\,(100+3)\\ &= 1000000 + 27 + 900(103)\\ &= 1000000 + 27 + 92700\\ &= 1092727.\end{aligned}$$

(ii) మనకు $(99)^3 = (100-1)^3$

దీనిని $(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$ తో పోల్చగా, మనకు

$$\begin{aligned}&= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)\,(100-1)\\ &= 1000000 - 1 - 300\,(99)\end{aligned}$$

$= 1000000 - 1 - 29700$

$= 970299.$

ఉదాహరణ-24 : $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమాసాన్ని మనం దిగువ విధంగా రాస్తే

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2\,(3y) + 3(2x)\,(3y)^2 + (3y)^3$$

దీనిని సర్వసమీకరణం VI తో పోల్చగా

$$(x + y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

మనకు $= (2x + 3y)^3$

$= (2x + 3y)\,(2x + 3y)\,(2x + 3y).$ కారణాంకాలుగా వస్తాయి.

ఇవి చేయండి

1. $(x + 1)^3$ ను సర్వసమీకరణం ఉపయోగించి విస్తరించండి.
2. $(3m - 2n)^3$ ను గణించండి.
3. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

ఇప్పుడు $(x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ ను తీసుకోండి.

దీనిని విస్తరించే, మనకు లబ్ధం

$$= x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$+ z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= x^3 + \cancel{xy^2} + \cancel{xz^2} - \cancel{x^2y} - xyz - \cancel{x^2z} + \cancel{x^2y} + y^3 + \cancel{yz^2} - \cancel{xy^2} - \cancel{y^2z} - xyz + \cancel{x^2z}$$
$$+ \cancel{y^2z} + z^3 - xyz - \cancel{yz^2} - \cancel{xz^2}$$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (సూక్ష్మీకరించగా) వచ్చును.

కావున

సర్వసమీకరణం VIII : $(x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

ఉదాహరణ-25 : లబ్ధం కనుగొనండి.

$$(2a + b + c)\,(4a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - bc - 2ca)$$

సాధన : ఇవ్వబడిన లబ్ధాన్ని దిగువ విధంగా రాయవచ్చు.

$$= (2a+b+c)\,[(2a)^2+b^2+c^2-(2a)(b)-(b)(c)-(c)\,(2a)]$$

సర్వసమీకరణం VIII తో పోల్చగా

$$(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \equiv x^3+y^3+z^3-3xyz$$

$$= (2a)^3+(b)^3+(c)^3-3(2a)\,(b)\,(c)$$

$$= 8a^3+b^3+c^3-6abc$$

ఉదాహరణ-26 : $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : ఇవ్వబడిన సమాసం

$$a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc = (a)^3+(-2b)^3+(-4c)^3 - 3(a)(-2b)(-4c)$$

దీనిని సర్వసమీకరణం VIII తో సరిపోల్చగా

$$x^3+y^3+z^3 - 3xyz \equiv (x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx)$$

మనకు

$$= (a-2b-4c)\,[(a)^2+(-2b)^2+(-4c)^2 - (a)\,(-2b) - (-2b)\,(-4c) - (-4c)\,(a)]$$

$= (a-2b-4c)\,(a^2+4b^2+16c^2+2ab-8bc+4ca)$ కారణాంకాలుగా వస్తాయి.

ఇవి చేయండి

1. గుణకారం చేయకుండానే $(a-b-c)\,(a^2+b^2+c^2-ab+bc-ca)$ లబ్ధం కనుగొనండి.
2. సర్వసమీకరణం ఉపయోగించి $27a^3+b^3+8c^3-18abc$ ని కారణాంకాలుగా విభజించండి.

ఉదాహరణ-27 : ఒక దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $2x^2+9x-5$ అయిన దీర్ఘచతురస్ర పొడవు, వెడల్పులకు తగిన అనుకూల కొలతలు విలువలు కనుగొనండి.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పులను l, b లుగా తీసుకోండి.

దీర్ఘ చతురస్రవైశాల్యం $= 2x^2+9x-5$

$$\begin{aligned} lb &= 2x^2+9x-5 \\ &= 2x^2+10x-x-5 \\ &= 2x(x+5)-1(x+5) \\ &= (x+5)\,(2x-1) \end{aligned}$$

l, b లకు తగిన అనుకూల కొలతల విలువలు తీసుకుంటే

∴ పొడవు = $(x + 5)$

వెడల్పు = $(2x - 1)$

$x = 1$ అయిన $l = 6,\ b = 1$

$x = 2$ అయిన $l = 7,\ b = 3$

$x = 3$ అయిన $l = 8,\ b = 5$

....

....

ఈ విధంగా మరికొన్ని విలువలు కనుగొనగలరా?

అభ్యాసం 2.5

1. తగిన సమీకరణాలను ఉపయోగించి కింది లబ్దాలు కనుగొనుము.

(i) $(x + 5)(x + 2)$ (ii) $(x - 5)(x - 5)$ (iii) $(3x + 2)(3x - 2)$

(iv) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ (v) $(1 + x)(1 + x)$

2. గుణకారం చేయకుండానే కింది లబ్దాలను గణించండి.

(i) 101×99 (ii) 999×999 (iii) $50\frac{1}{2} \times 49\frac{1}{2}$

(iv) 501×501 (v) 30.5×29.5

3. కింది బహుపదులను తగిన సర్వసమీకరణములనుపయోగించి కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$

(iii) $4x^2 - \frac{y^2}{25}$ (iv) $18a^2 - 50$

(v) $x^2 + 5x + 6$ (vi) $3p^2 - 24p + 36$

4. కింది వానిని తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి విస్తరించండి.

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $(-2a + 5b - 3c)^2$

(iv) $\left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + 1\right)^2$ (v) $(p + 1)^3$ (vi) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$

5. కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $25x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 40xy + 16yz - 20xz$

(ii) $9a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 12ab - 16bc - 24ca$

6. $a + b + c = 9$ మరియు $ab + bc + ca = 26$ అయిన $a^2 + b^2 + c^2$ విలువ కనుగొనండి.

7. కింది వానిని సర్వసమీకరణాలనుపయోగించి గణించండి.

   (i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$ (iv) $(1001)^3$

8. కింది వానిని కారణాంకాలుగా విభజించండి.

   (i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

   (iii) $1 - 64a^3 - 12a + 48a^2$ (iv) $8p^3 - \frac{12}{5}p^2 + \frac{6}{25}p - \frac{1}{125}$

9. (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

   లను సరిచూడండి. అదే విధంగా గుణకారంచేసి లబ్ధాన్ని పరిశీలించండి. వీటిని కూడా సర్వసమీకరణములని భావించవచ్చునా?

10. 9వ సమస్యలో ఫలితాల ఆధారంగా (i) $27a^3 + 64b^3$ (ii) $343y^3 - 1000$ కారణాంకాలుగా విభజించండి.

11. సర్వసమీకరణం ఉపయోగించి $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

12. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$ సరిచూడండి.

13. (a) $x + y + z = 0$ అయితే $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ అని నిరూపించండి.

    (b) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$ అని నిరూపించండి.

14. కింది సమాసాలలో ఘనాలను గణించకుండానే, ఫలితాలను కనుగొనండి.

    (i) $(-10)^3 + (7)^3 + (3)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

    (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$ (iv) $(0.2)^3 - (0.3)^3 + (0.1)^3$

15. కింది దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాలకు ఇవ్వబడిన సమాసాలను బట్టి పొడవు, వెడల్పులకు తగిన అనుకూల కొలతలు విలువలు తెలపండి.

    (i) $4a^2 + 4a - 3$ (ii) $25a^2 - 35a + 12$

16. కింది దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణాలకు ఇవ్వబడిన సమాసాలను బట్టి దీర్ఘఘనం యొక్క అనుకూల కొలతలు తెలపండి.

    (i) $3x^3 - 12x$ (ii) $12y^2 + 8y - 20$.

17. $2(a^2+b^2) = (a+b)^2$ అయిన $a = b$ అని చూపండి.

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

ఈ అధ్యాయంలో మీరు దిగువ విషయాలను అధ్యయనం చేసారు.

1. ఏక చరరాశి ‘x’ లో n వ పరిమాణ బహుపద సమాసం $p(x)$ ను $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1 x + a_0$ అని చూపుతాం. ఇందులో $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ లను $x^0, x^1, x^2, ... x^n$ ల యొక్క గుణకాలంటాం. సమాసంలో a_nx^n ; $a_{n-1}x^{n-1}$; .... a_0 $(a_n \neq 0)$ బహుపది యొక్క పదాలంటాం.
2. బహుపదులను ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది మొ॥లగు వాటిగా పదాల సంఖ్యను బట్టి వర్గీకరిస్తాం.
3. బహుపదులను రేఖీయ బహుపది, వర్గబహుపది, ఘనబహుపది మొ॥లగు వాటిగా పరిమాణాలను బట్టి వర్గీకరిస్తాం.
4. $p(x)$ అనే బహుపదిలో ఏదైనా వాస్తవసంఖ్య ‘a’ కు $p(a) = 0$ అయితే ‘a’ ను బహుపది శూన్యవిలువ అంటారు. ఈ సందర్భంలో ‘a’ ను బహుపది సమీకరణం $p(x) = 0$ కు మూలం అని కూడా అంటారు.
5. ఏక చరరాశి కలిగిన ప్రతి రేఖీయ బహుపదికి శూన్యవిలువ ఏకైకంగా ఉంటుంది. శూన్యేతర స్థిరరాశికి బహుపది శూన్యవిలువ నిర్వచించబడదు.
6. శేష సిద్ధాంతం : $p(x)$ అనేది ఏకపరిమాణ లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ గరిష్ఠ పరిమాణం గల బహుపది మరియు ‘a’ అనేది వాస్తవసంఖ్య అయినప్పుడు $p(x)$ ను రేఖీయ బహుపది $(x - a)$ చే భాగిస్తే వచ్చుశేషం $p(a)$ అగును.
7. కారణాంక సిద్ధాంతం : బహుపది పరిమాణం $n \geq 1$ గా గల బహుపది $p(x)$ మరియు ‘a’ ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు (i) $p(a) = 0$ అయిన $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అగును మరియు (ii) $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అగును.
8. మరికొన్ని బీజీయ సర్వసమీకరణాలు :
   (i) $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
   (ii) $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
   (iii) $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
   (iv) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ also
   (v) $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
   (vi) $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
   (vii) $x^4 + 4y^4 = [(x + y)^2 + y^2][(x - y)^2 + y^2]$

మెదడుకు మేత

$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ...}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x ...}}}$ అయితే x విలువ కనుగొనండి.

జ్యామితీయ మూలాలు
(The Elements of Geometry)

03

3.1 పరిచయం

వంతెనలు, ఆనకట్టలు, పాఠశాల భవనాలు, వసతి గృహాలు మరియు ఆసుపత్రులు వంటి పెద్ద పెద్ద కట్టడాలను మీరు గమనించి ఉంటారు. వీటన్నింటినీ నిర్మించడం ప్రభుత్వానికి ఒక పెద్ద బాధ్యతతో కూడిన పని.

వీటిని నిర్మించేందుకు అయ్యే ఖర్చును ఎలా అంచనా వేస్తారో మీకు తెలుసా? దీనికి అగు ఖర్చు సిమెంటు, కాంక్రీటు, కూలీ ఖర్చు వంటి వాటితో పాటు దీని ఆకారము మరియు పరిమాణాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఒక కట్టడం యొక్క ఆకారము మరియు పరిమాణాలలో దాని పునాది, నిర్మాణ స్థల వైశాల్యం, గోడల పరిమాణం, పైకప్పు మరియు ఉద్ధరణ/ఎత్తు మొదలగునవి కలసి ఉంటాయి. వీటి నిర్మాణాలలో ఇమిడియున్న జ్యామితీయ సూత్రాలను అర్థంచేసుకొనుటకు జ్యామితి యొక్క ప్రాథమిక భావనలను మరియు వాటి అనువర్తనాలను తెలుసుకోవాలి.

జ్యామితి సూత్రాలను మన దైనందిన కార్యక్రమాలైన చిత్రలేఖనం, హస్తకళలు, గదుల నేలమీద రాళ్లను పరచడం, పొలాలను దున్నడం, విత్తనాలను నాటడం వంటి వాటిలో ఉపయోగిస్తామని మనకు తెలుసు. ఒక్క మాటలో చెప్పాలంటే జ్యామితి లేని జీవితాన్ని ఊహించలేము.

ఈజిప్ట్‌లోని పిరమిడ్లు, చైనా కుడ్యము, భారతదేశంలో ఆలయాలు మరియు యజ్ఞవాటికలు, ఫ్రాన్స్‌లోని ఈఫిల్‌టవర్ వంటి ప్రసిద్ధ కట్టడాలు కొన్నింటిని జ్యామితి అనువర్తనాలకు ఉదాహరణలుగా చెప్పవచ్చు.

ఈ అధ్యాయంలో మనం జ్యామితి మూలాలను అర్థంచేసుకోవడానికి జ్యామితి చరిత్రను, జ్యామితిలోని వివిధ ఆలోచనా విధానాలు, జ్యామితిని అభివృద్ధి పరచిన తీరును మరియు ఆధునిక జ్యామితితో పోల్చి అధ్యయనం చేస్తాము.

3.2 చరిత్ర

నిర్మాణాల యొక్క ఆకారము మరియు పరిమాణాలను గణితపరంగా అనేక విధాలుగా అధ్యయనం చేయవచ్చు. ఈ విధానాలు అన్నీ జ్యామితి పరిధిలోనికి వస్తాయి. 'జ్యామెట్రీ' అనే ఆంగ్ల పదం గ్రీకు పదాలైన 'జియో' అంటే భూమి మరియు 'మెట్రియన్' అంటే కొలచుట అనే రెండు పదాల నుండి సంగ్రహించబడినది.

ప్రాచీన జ్యామితి అవశేషాలను సింధూలోయ నాగరికత, బాబిలోనియా నాగరికత ప్రజాజీవనంలో గుర్తించవచ్చు. వారికి అధికకోణ త్రిభుజాల గురించి తెలుసు. "భక్ష్యాలి" వ్రాతప్రతి అనేక జ్యామితి సమస్యల ప్రస్తావనతో పాటు అక్రమాకార వస్తువుల ఘనపరిమాణాలకు సంబంధించిన లెక్కలను కలిగియుంది. సింధూలోయ నాగరికత ప్రజల జ్యామితీయ అవశేషాలు హరప్పా, మొహంజోదారోలలో జరిపిన త్రవ్వకాల ద్వారా బయల్పడుచున్నవి. క్రీ.పూ. 2500 నాటికే వృత్తమును నిర్మించే సాధనాలున్నట్లుగా సాక్ష్యాలు లభిస్తున్నాయి.

వైదిక సంస్కృతంలో గల శుల్బ సూత్రాలలో యజ్ఞవాటికలు మరియు హోమగుండాలు నిర్మించుటలో ఇమిడియున్న జ్యామితీయ సూత్రాలు పొందుపరచబడినవి. ఈ యజ్ఞవాటికల నిర్మాణం వెనుక గల అద్భుతమైన విషయం అవన్నీ వివిధ ఆకారాలలో ఉన్నప్పటికీ అవి ఆక్రమించే వైశాల్యాలు సమానంగా ఉండటమే. క్రీ.పూ. 8వ శతాబ్దం నాటి బౌద్ధాయనుడు సంకలనం చేసిన అత్యంత ప్రసిద్ధమైన "బౌద్ధాయన శుల్బ సూత్రాల"లో సాధారణ పైథాగరస్ త్రికములైన (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) మొదలగు వాటిని మరియు దీర్ఘ చతురస్ర భుజాలు, కర్ణాలకు పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఆపాదించుటను గమనించవచ్చు.

ప్రాచీన గ్రీకు గణితవేత్తలు జ్యామితిని తమ శాస్త్రాలన్నింటికీ తలమానికంగా భావించారు. వారు జ్యామితి పరిధిని అనేక కొత్త రకాలైన పటాలకు, వక్రాలకు, ఉపరితలాలకు మరియు ఘనాలకు విస్తరింపచేసారు. వారు ప్రతిపాదిత ప్రవచనాన్ని సార్వజనీన సత్యంగా నిరూపించవలసిన ఆవశ్యకతను గుర్తించారు. ఈ భావన గ్రీకు గణిత వేత్త అయిన థేల్స్ "నిగమన నిరూపణ పద్ధతి" గురించి ఆలోచించుటకు దారితీసింది.

అయోనియాకు చెందిన పైథాగరస్‌ను థేల్స్ శిష్యునిగా భావిస్తారు. ఈయన పేరుమీద "పైథాగరస్ సిద్ధాంతం"గా ప్రాచుర్యం పొందిన సిద్ధాంతం పైథాగరస్ కనుగొనియుండకపోవచ్చు. కానీ ఈ సిద్ధాంతాన్ని నిగమన పద్ధతిలో నిరూపించిన వారిలో ఒకడై ఉండవచ్చు. క్రీ.పూ. 325-265 కాలంలో ఈజిప్టులోని అలెగ్జాండ్రియాకు చెందిన యూక్లిడ్ "ఎలిమెంట్స్" పేరుతో 13 పుస్తకాలను సంకలనం చేసాడు. దీనిలో ప్రాథమిక భావనలు, స్వీకృతాలు, ప్రతిపాదనలు, అనుమితి సూత్రాలు లేదా తర్కంపై ఆధారపడిన మొట్టమొదటి వ్యవస్థీకృత ఆలోచనా విధానాన్ని సృష్టించాడు.

3.3 యూక్లిడ్ జ్యామితీయమూలాలు (Euclid's Elements of Geometry)

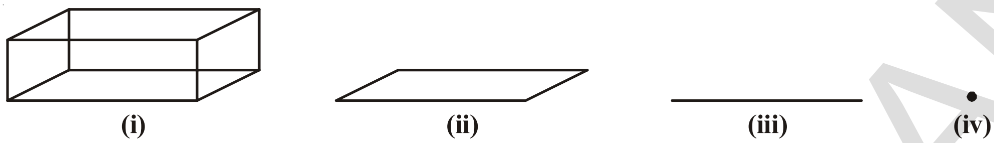
యూక్లిడ్ జ్యామితిని తాము జీవిస్తున్న ప్రపంచానికి ఒక అమూర్త నమూనాగా భావించాడు. తమ పరిసరాల నుండి బిందువు, రేఖ, తలం లేదా ఉపరితలం వంటి అనేక ఊహాజనిత భావనలను సంగ్రహించాడు. పరిసరాలలోని ఘనాలు మరియు అంతరాళము నుండి ఘనాల యొక్క అమూర్త భావన అభివృద్ధి చేయబడినది. ప్రతి ఘనము ఒక ఘనపరిమాణాన్ని, స్థితిని కలిగి యుండి ఒక చోటు నుండి మరొక చోటుకు కదల్చటానికి వీలగుతుంది. దాని హద్దులు, తలాలుగా ఉంటాయి. ఈ తలాలు ఘనంలోని భాగాలను ఒక దాని నుండి మరొక దానిని వేరు చేస్తాయి.

ఈ తలాలలకు మందం ఉండదని చెప్పబడతాయి. తలాల యొక్క హద్దులుగా వక్రాలు గాని సరళ రేఖలుగాని ఉంటాయి. ఈ రేఖలు బిందువుల వద్ద అంతమవుతాయి. ఘనాలు నుండి బిందువుల వరకు గల మూడు దశలను / సోపానాలను గమనించండి (ఘనాలు - తలాలు - రేఖలు - బిందువు).

పక్కపేజీలో ఈయబడిన పటాన్ని పరిశీలించండి. ఇది ఒక దీర్ఘఘనం యొక్క పటము. దీనికి మూడు మితులు (కొలతలు) అంటే పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు (పటం-i) కలవు. ఇది ఒక మితిని అంటే ఎత్తును కోల్పోతే, అప్పుడు తలాలు మాత్రమే మిగులుతాయి అంటే అవి దీర్ఘ చతురస్రాలు. దీర్ఘ చతురస్రానికి పొడవు మరియు వెడల్పు అనే రెండు మితులు (పటం-ii) మాత్రమే ఉంటాయని మీకు తెలుసు. ఇది ఇంకనూ ఒక మితిని అంటే వెడల్పును కోల్పోతే అప్పుడు సరళ రేఖలు మాత్రమే మిగిలి ఉంటాయి (పటం-iii), ఇంకనూ ఒక మితిని కోల్పోవలసి ఉంటే చివరగా బిందువులు మాత్రమే ఉంటాయి. ఒక బిందువుకు ఎటువంటి మితులు (కొలతలు) (పటం-iv) ఉండవు. ఇదే విధంగా మనం ఒక బల్ల లేదా పుస్తకం అంచును గమనిస్తే దానిని రేఖగా పోల్చవచ్చు.

ఒక రేఖ యొక్క అంత్యము లేదా రెండు రేఖలు కలిసే చోటును బిందువుగా చెప్తాం.

పటం



ఘనాలు →	తలాలు / వక్రాలు →	రేఖలు →	బిందువులు
3-D	2-D	1-D	(మితులు లేవు)

ఇవి జ్యామితి యొక్క మౌళిక పదాలు. వీటి సహాయంతో ఇతర పదాలైన రేఖా ఖండము, కోణము, త్రిభుజం వంటి వాటిని నిర్వచిస్తారు.

పై పరిశీలనలు ఆధారంగా అన్ని ప్రవచనాలను యూక్లిడ్ నిర్వచనాలుగా నిర్ధారించాడు.

యూక్లిడ్ 'ఎలిమెంట్స్' లోని 1వ పుస్తకంలో 23 నిర్వచనాల జాబితాను రూపొందించాడు. వాటిలో కొన్ని కింద ఈయబడినాయి. (యూక్లిడ్ పదాలలో)

- బిందువు అంటే ఎటువంటి భాగాలు లేనిది.
- రేఖ అంటే వెడల్పు లేని పొడవు.
- ఒక రేఖ యొక్క అంత్యాలు బిందువులు.
- ఒక సరళ రేఖ అంటే బిందువుల సమంగా / తుల్యంగా కలిగియున్న రేఖ.
- ఒక తలం అంటే పొడవు మరియు వెడల్పులను మాత్రమే కలిగియున్నది.
- తలం యొక్క అంచులు రేఖలు.
- ఒక సమ తలం అంటే (హెచ్చు, తగ్గులు లేకుండా) తుల్యంగా సరళ రేఖలను దానిపై కలిగి యుండునది.

యూక్లిడ్ (300 BC)
రేఖాగణిత పితామహుడు

బిందువు, రేఖ మరియు తలం వంటి పదాలను నిర్వచించడంలో యూక్లిడ్ స్పష్టత కోసం మరలా నిర్వచించవలసిన అవసరం గల లేదా వివరణ ఇవ్వవలసిన పదాలు లేదా పద బంధాలైన 'భాగం', 'వెడల్పు' తుల్యం (హెచ్చు, తగ్గులు లేకుండా) వంటి వాటిని వినియోగించాడు. 'భాగం' వంటి పదాలను నిర్వచిస్తూ 'భాగం' కొంత 'వైశాల్యాన్ని' ఆక్రమిస్తుందని అంటే మరలా వైశాల్యాన్ని గూర్చిన స్పష్టతను ఇవ్వాలి. ఈ విధంగా ఒక పదాన్ని నిర్వచించుటకు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ పదాలు గల సమాహారాన్ని అంతులేకుండా నిర్వచిస్తూపోవాలి. అందువలన అటువంటి పదాలను 'అనిర్వచిత పదాలు' గా వదిలివేయాలని గణిత వేత్తలు అభిప్రాయపడినారు. ఏమైనప్పటికీ జ్యామితి భావనయైన 'బిందువు'ను పైన ఇచ్చిన నిర్వచనం కంటే మెరుగైన ఊహాజనిత భావన మనకు ఉంది. ఒక చుక్కకు కొలతలు ఉన్నప్పటికి బిందువును సూచించడానికి ఉపయోగిస్తాము. చైనాలోని మోహి (మోజి) తత్వవేత్తలు "ఒక రేఖను విభజించుకుంటూపోతే చివరగా మిగిలి అవిభాజ్య భాగాన్ని బిందువు" అని చెప్పారు. పైన గల రెండవ నిర్వచనంలో కూడా ఇటువంటి సమస్యేకలదు. ఆ నిర్వచనంలో వెడల్పు, పొడవులు రెండూ నిర్వచింపబడలేదు. అందువల్ల ఏదేని అధ్యయనంలో పరిమితంగా కొన్ని పదాలు అనిర్వచిత పదాలుగా వదిలి వేయబడ్డాయి. మనం జ్యామితిలో 'బిందువు', 'రేఖ'

మరియు ‘తలము (యూక్లిడ్ పదాలలో ఉపరితలం) లను అనిర్వచిత పదాలుగా స్వీకరిస్తాము. అంటే వాటిని అంతఃబుద్ధితో మాత్రమే వ్యక్తపరచగలం లేదా భౌతిక సమూనాల సహాయంతో వివరించగలము.

యూక్లిడ్ తన నిర్వచిత పదాలను నిరూపణలు అవసరంలేని జ్యామితి అనుకృతులను (ధర్మాలను) ప్రతిపాదించాడు.

ఈ ధర్మాలన్నీ స్వయం నిర్దేశిత సత్యాలు, యూక్లిడ్ వీటిని రెండు రకాలుగా విభజించాడు. అవి స్వీకృతాలు మరియు సాధారణ భావనలు.

3.3.1 స్వీకృతములు మరియు ప్రతిపాదనలు (Axioms and postulates)

ఒక నిర్దేశిత గణిత వ్యవస్థలో సందర్భానుసారం స్వయం నిర్దేశిత సత్యప్రవచనాలను లేదా సత్యమని భావించే ప్రవచనాలను సామాన్య భావనలు అంటారు. ఉదాహరణకు “మొత్తం, ‘భాగం’ కన్నా ఎల్లప్పుడూ పెద్దదే” అని మనం చెప్పవచ్చు. ఇది స్వయం నిర్దేశిత సత్యప్రవచనం. దీనికి ఎటువంటి నిరూపణ అవసరం లేదు. ఈ సామాన్య భావన ‘కంటే పెద్దది’ అనే పదాన్ని నిర్వచిస్తుంది. అలాగే P అనే రాశి C రాశిలో భాగమైన, అప్పుడు C ని P రాశి మరియు మరొక రాశి R ల మొత్తంగా రాయవచ్చు. సంకేత రూపంలో $C > P$ అయిన $C = P + R$ అగునట్లు R ఉంటుంది.

ఈ సామాన్య భావన అనే పదాన్ని యూక్లిడ్ ఒక్క జ్యామితిలో మాత్రమేకాక గణితం అంతటిలోనూ ఉపయోగించాడు. కానీ స్వీకృతాలు పదాన్ని జ్యామితిలోని భావనలకు మాత్రమే ఉపయోగించాడు. జ్యామితి ‘స్వీకృతాలు’ అనే పునాది మీద నిర్మించబడి అభివృద్ధి చెందినది. ఈ స్వీకృతాలు వివిధ సందర్భాలలో ఎదురవుతాయి. (ప్రస్తుతము సామాన్య భావనలను, స్వీకృతాలను స్వీకృతాలుగానే స్వీకరిస్తున్నారు.)

యూక్లిడ్ స్వీకృతములలో కొన్ని కిందనీయబడినాయి.

- ఒకే రాశి సమానమైన రాశులు ఒకదానికొకటి సమానాలు.
- సమాన రాశులను, సమానరాశులకు కూడినచో వాటి మొత్తాలు సమానం.
- సమాన రాశులను, సమానరాశుల నుండి తీసివేయబడినచో మిగిలిన శేషాలు సమానం.
- ఒకదానితో మరొకటి ఏకీభవించు వస్తువులు పరస్పరం సమానాలు.
- సమానరాశుల రెట్టింపులు సమానాలు.
- సమాన రాశులలో సగాలు సమానం.

ఈ సామాన్య భావనలు కొన్ని పరిమాణాత్మక విలువలను సూచిస్తాయి. మొదట సామాన్య భావనను సమతల పటాలకు అన్వయించవచ్చు. ఉదాహరణకు A వైశాల్యం B కు సమానమై, B వైశాల్యం ఒక చతురస్ర వైశాల్యానికి సమమైన, A వైశాల్యం, చతురస్ర వైశాల్యానికి సమానమవుతుంది.

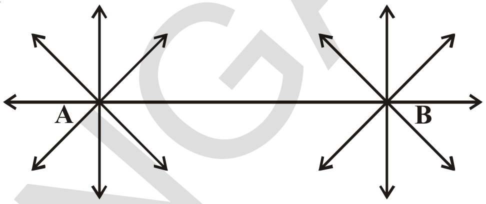
ఒకే రకమైన పరిమాణాత్మక విలువలను పోల్చవచ్చు, కూడవచ్చు కానీ వేర్వేరు పరిమాణాత్మక విలువలను పోల్చలేము. ఉదాహరణకు ఒక రేఖను ఇంకొక పట వైశాల్యానికి కూడలేము లేదా ఒక కోణాన్ని పంచభుజితో పోల్చలేము.

ప్రయత్నించండి

నిత్య జీవిత సందర్భాల నుండి ఏవేని రెండు స్వీకృతాలను తెల్పండి.

యూక్లిడ్ తెల్పిన ప్రతిపాదనలలో మొదటి ఐదింటిని చర్చిద్దాం :

1. A మరియు B అనే వేర్వేరు బిందువులను ఒక కాగితంపై గుర్తించండి.



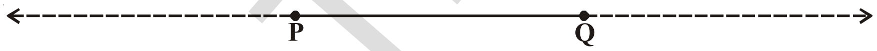
A మరియు B ల గుండా పోయేట్లు ఒక సరళరేఖను గీయండి. ఇటువంటి సరళ రేఖలు ఎన్నింటిని గీయవచ్చు? ఒకటి కన్నా ఎక్కువ సరళ రేఖలను రెండు వేర్వేరు బిందువులగుండా పోయేట్లు గీయలేము.

యూక్లిడ్ యొక్క మొదటి స్వీకృతం పై అంశాన్ని తెలియజేస్తుంది. అది ఈ కింది విధంగా ఉంది.

స్వీకృతం – 1 : రెండు వేర్వేరు బిందుల గుండా పోయే సరళరేఖ ఏకైకంగా ఉంటుంది.

యూక్లిడ్ మాటలలో "ఒక బిందువు నుండి మరొక బిందువుకు ఒక సరళ రేఖ ఉంటుంది."

2. రేఖా ఖండము PQ ను ఒక కాగితంపై గీయండి. P నుండి ఎడమవైపుకు, Q నుండి కుడి వైపుకు నిరంతరంగా పొడిగించండి.

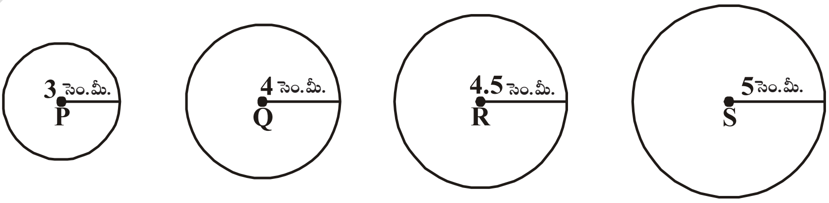


రేఖా ఖండం PQ రెండు వైపులా ఎంత వరకు పొడిగించవచ్చు? దీనికి ఏమైనా అంత్య బిందువులు ఉన్నాయా? PQ రేఖా ఖండమును అనంతంగా ఎంతమేరకైనా పొడిగించవచ్చు. మరియు PQ రేఖకు అంత్యబిందువులు లేకుండుటను మనము గమనించగలము. ఈ భావన యూక్లిడ్ తన రెండవ స్వీకృతంగా పొందుపరచాడు.

స్వీకృతం – 2 : ఒక రేఖా ఖండమును ఇరువైపులా పొడిగించిన అది సరళరేఖ అవుతుంది.

యూక్లిడ్ మాటలలో "ఒక పరిమిత రేఖను నిరంతరంగా ఒక సరళరేఖలో పొడిగించవచ్చు".

3. వ్యాసార్థాలు 3 సెం.మీ. 4 సెం.మీ., 4.5 సెం.మీ. మరియు 5 సెం.మీ. గా గల నాలుగు వృత్తాలను వృత్తలేఖిని సాయంతో P, Q, R మరియు S లు కేంద్రాలుగా వృత్తాలను గీయండి.



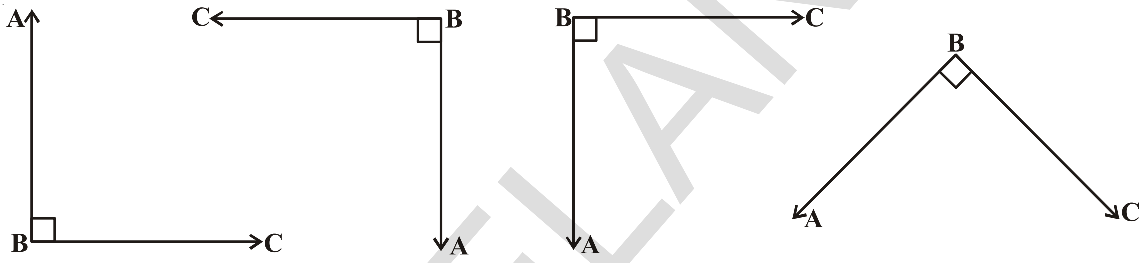
ఒక వృత్తం యొక్క కేంద్రం మరియు వ్యాసార్థాలు ఇచ్చిన వృత్తం గీయగలమా? ఒక వృత్తాన్ని ఏ కేంద్రంతోనైనా ఏ వ్యాసార్థంతోనైనా మనం గీయగలం.

యూక్లిడ్ మూడవ స్వీకృతం పై విషయాన్ని తెలియచేస్తుంది.

(ఇదే యూక్లిడ్ మాటలలో ఒక బిందువు దగ్గర ఏ దూరముతోనైనను వృత్తాన్ని గీయవచ్చు.)

స్వీకృతం - 3 : ఇచ్చిన వ్యాసార్థం మరియు కేంద్రములతో వృత్తాన్ని గీయవచ్చు.

4. ఒక గళ్ల కాగితం తీసుకోండి. లంబకోణాలను సూచించే పటాలను కొన్నింటిని గీయండి. వాటిని కోణ భుజాల వెంబడి కత్తిరించి అన్నింటిని ఒకదానిపై మరొకటి పేర్చండి. మీరేమి గమనిస్తారు?



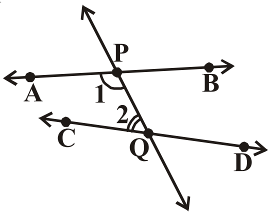
మీరు ఒక లంబకోణం యొక్క కోణ భుజాలు మరొక లంబకోణ భుజాలతో ఏకీభవించినట్లు గమనిస్తారు. ఇదే యూక్లిడ్ యొక్క నాల్గవ స్వీకృతం యూక్లిడ్ 'లంబకోణాన్ని' మిగిలిన అన్ని సందర్భాలలో కోణాల ప్రస్తావనకు సూచికగా తీసుకొన్నాడు.

స్వీకృతం - 4 : లంబకోణాలన్నీ ఒక దానితో మరొకటి సమానం.

ఇప్పుడు యూక్లిడ్ 5వ స్వీకృతం మరియు దాని (సమానార్థక) తుల్య ప్రవచనాలను గమనిద్దాం.

స్వీకృతం - 5 : రెండు దత్త సరళ రేఖలను ఖండించు సరళరేఖ దానికి ఒకే వైపున ఉన్న అంతర కోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాలు కన్నా తక్కువగా ఉండునట్లు చేస్తే అప్పుడు దత్త సరళరేఖలను నిరంతరం పొడిగిస్తే అవి రెండు లంబకోణాల కన్నా తక్కువైన మొత్తం గల కోణాల వైపున కలుసుకొంటాము.

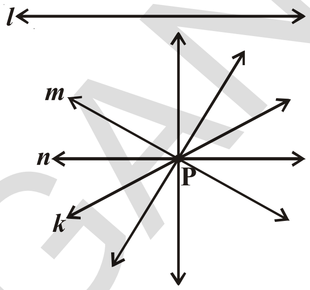
గమనిక : పటంలో PQ అనే రేఖ AB మరియు CD రేఖలపై తనకు ఎడమవైపుగల $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ అంతర కోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాలు (180°) కన్నా తక్కువగునట్లుగా ఖండించుచున్నది. అందువల్ల PQ కు ఎడమవైపు AB మరియు CD రేఖలు ఖండించుకొనును.



ఈ స్వీకృతాన్ని యూక్లిడ్‌తో పాటు అనేక మంది గణిత శాస్త్రవేత్తలు కూడా దీనిని 'సిద్ధాంతం' గా భావించడం వలన అధిక ప్రాధాన్యతను సంతరించుకొంది. దీనికి పర్యవసానంగా సుమారు రెండు వేల సంవత్సరాల పాటు గణిత శాస్త్రవేత్తలు యూక్లిడ్ 5వ స్వీకృతం మిగిలిన తొమ్మిది స్వీకృతాల ఫలితంగా నిరూపించుటకు ప్రయత్నించారు. దీనికి సమానార్థకంగా ఉన్న ఇతర స్వీకృతాలు (ప్లే ఫెయిర్ స్వీకృతం) ఆధారంగా నిరూపణకు ప్రయత్నించారు.

3.3.2 5వ స్వీకృతానికి సమానార్థక ప్రవచనాలు లేదా 5వ ప్రవచనం యొక్క తుల్య ప్రవచనాలు.

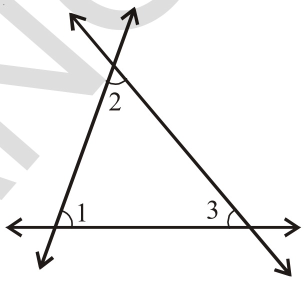
తరువాత గణితశాస్త్రజ్ఞులు ప్రతిపాదించిన కొన్ని చెప్పుకోదగిన ప్రత్యామ్నాయాలు



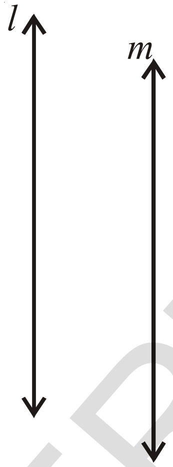
ఒక సరళ రేఖకు దానిపై లేనటువంటి ఏదేని బిందువు గుండా ఒకే ఒక సమాంతర రేఖను గీయవచ్చు. 'l' అనునది ఒక సరళరేఖ మరియు 'P' అనునది 'l' పై లేనట్టి ఏదేని ఒక బిందువు. అయిన 'l' కు సమాంతరంగా P ద్వారా పోయే ఒకే ఒక సరళరేఖ వ్యవస్థితమవుతుంది. దీనిని 'ప్లే ఫెయిర్ స్వీకృతం' అంటారు. (జాన్ ప్లే ఫెయిర్ : 1748`1819 John Playfair)

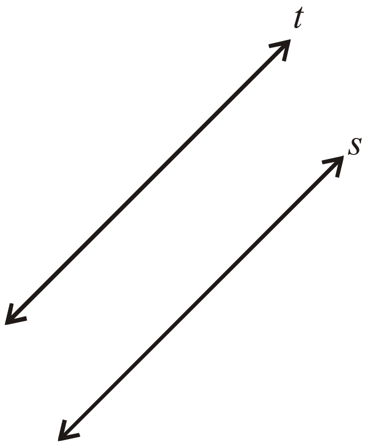
- ఒక త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ స్థిరంగా ఉంటుంది మరియు ఇది రెండు లంబకోణాలకు సమానం. (లెజెండర్ (Legendre)) అంటే

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$



- రెండు రేఖలు వాటి మధ్య దూరం సమానంగా ఉండునట్లు అంతటా వ్యవస్థితమవుతాయి. (పొసిడోమినస్ (Posidominus))





- ఒక జత సమాంతర రేఖలలో ఒక దానిని ఏదేని సరళ రేఖ ఖండించిన, అది సమాంతర రేఖలలో రెండవదానిని కూడా ఖండిస్తుంది. (ప్రోక్లస్ (Proclus))
- రెండు రేఖలు ఒకే రేఖకు సమాంతరమైన అవి ఒకదానికి మరొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి.

పై తుల్య ప్రవచనాలలో దేనినైనా యూక్లిడ్ 5వ స్వీకృతానికి బదులుగా ప్రతిక్షేపించిన తిరిగి యూక్లిడ్ జ్యామితిని పొందగలము.

యూక్లిడ్ పైన పేర్కొనిన ఐదు స్వీకృతాలను పొందుపరచిన తర్వాత, వాటిని అనేక ఫలితాలను నిగమనపద్ధతి ద్వారా నిరూపించుటయందు వినియోగించాడు. ఈ రకంగా నిరూపితమైన ప్రతిపాదనలను సిద్ధాంతాలు అంటారు.

కొన్ని ప్రవచనాలను మనం పరిశీలనల ద్వారా, వివేచనతో, సత్యమని భావించి ఊహాత్మకంగా నిర్ణయిస్తాము. ఈ విధంగా సత్యమనిగానీ, అసత్యమనిగానీ నిరూపించబడని ప్రవచనాలను పరికల్పనలు అంటారు. గణిత ఆవిష్కరణలన్నీ తరచుగా పరికల్పనలతో ప్రారంభమవుతాయి.

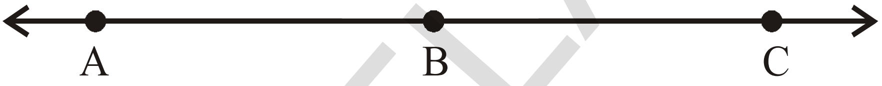
గోల్డ్‌బ్యాక్ (Gold Bach) పరికల్పన : 4 లేదా అంతకన్నా పెద్దదైన ప్రతీ సరిసంఖ్యను రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మొత్తంగా రాయవచ్చు అని 'గోల్డ్‌బ్యాక్ తెలిపాడు.

సత్యమని నిరూపించబడిన పరికల్పనలన్నీ సిద్ధాంతాలుగా రూపొందుతాయి. ఒక సిద్ధాంతాన్ని తార్కిక సోపానాల క్రమంతో నిరూపిస్తాము. 'సిద్ధాంత నిరూపణ' అనేది సిద్ధాంతం యొక్క సత్యవిలువను సందేహానికి తావులేకుండా నిరూపించే ఒక 'తార్కిక వాద ప్రక్రియ'.

నిర్వచిత పదాలు, స్వీకృతాలు మరియు అప్పటికే నిరూపించబడిన సిద్ధాంతాల సహాయంతో యూక్లిడ్ సుమారు 465 పరికల్పనలను తార్కిక వాద క్రమంలో సిద్ధాంతాలుగా ఉత్పాదించాడు.

ఫలితాల నిరూపణలో యూక్లిడ్ స్వీకృతాలు మరియు సాధారణ భావనలు ఎలా ఉపయోగపడతాయో అధ్యయనం చేద్దాం.

ఉదాహరణ-1 : A, B మరియు C లు ఒకే సరళరేఖపై గల బిందువులు, B బిందువు A మరియు C ల మధ్య ఉన్నచో AC - AB = BC అని నిరూపించుము.



సాధన : AC మరియు AB+BC లు ఏకీభవిస్తాయి.

యూక్లిడ్ – 4 వ స్వీకృతం ద్వారా “ఒక దానితో మరొకటి ఏకీభవించునవి సమానాలు” కావున

AB + BC = AC అని చెప్పవచ్చు.

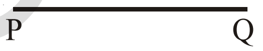
దీనిని AC లో ప్రతిక్షేపించగా AC - AB = BC

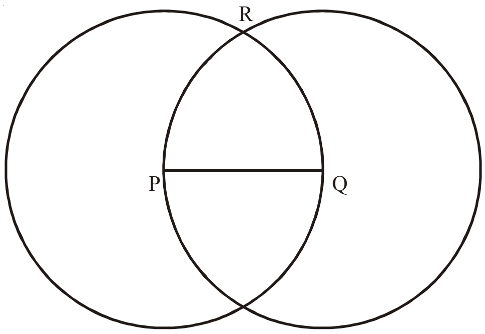
$\cancel{AB} + BC - \cancel{AB} = BC$

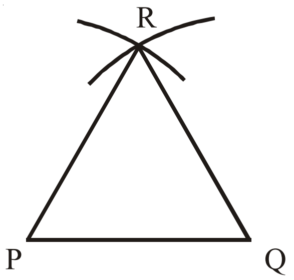
ఇక్కడ మనం రెండు బిందువుల గుండా ఒకే ఒక రేఖ ఉంటుందని తీసుకొనుటను గమనించండి.

ఉదాహరణ-2 : ఇచ్చిన ఏ రేఖా ఖండము పైన అయినా సమబాహు త్రిభుజం నిర్మించవచ్చు అని నిరూపించండి.

సాధన : ఏదేని పొడవుగల ఒక రేఖా ఖండము PQ ఈయబడినది.







యూక్లిడ్ మూడవ స్వీకృతం భావన నుండి "ఇచ్చిన కేంద్రం, వ్యాసార్ధాలతో వృత్తాన్ని నిర్మించగలం". కావున P కేంద్రంగా మరియు PQ వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. అదే విధంగా Q కేంద్రంగా QP వ్యాసార్ధంతో మరొక వృత్తాన్ని గీయండి. ఈ రెండు వృత్తాలు R వద్ద ఖండించుకొంటాయి. 'R' ను P మరియు Q లతో కలుపగా Δ PQR ఏర్పడుతుంది.

ఇప్పుడు ఈ విధంగా ఏర్పడిన త్రిభుజం సమబాహు త్రిభుజమని నిరూపించాలి. అంటే $PQ = QR = RP$ అని చూపాలి.

$PQ = PR$ (P కేంద్రంగా గల వృత్త వ్యాసార్ధాలు). $PQ = QR$ (Q కేంద్రంగా గల వృత్త వ్యాసార్ధాలు)

యూక్లిడ్ సామాన్య భావనల నుండి "ఒకే రాశులకు సమానమైన రాశులు ఒకదానికి మరొకటి సమానాలు" కావున $PQ = QR = RP$. అందువలన ΔPQR ఒక సమబాహు త్రిభుజం P మరియు Q కేంద్రాలుగా గల వృత్తాలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయి అనే విషయాన్ని ప్రస్తావించకుండా యూక్లిడ్ తన నిరూపణలో వినియోగించడం గమనించండి.

ఇంకొక సిద్ధాంత నిరూపణను గమనిద్దాం.

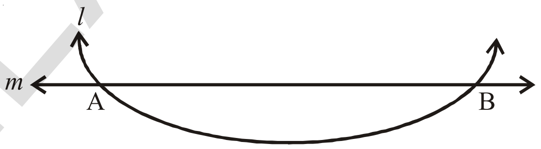
ఉదాహరణ-3 : రెండు వేర్వేరు రేఖలు ఒకటికన్నా ఎక్కువ ఉమ్మడి బిందువులను కలిగియుండవు.

దత్తాంశం : దత్తరేఖలు *l* మరియు *m*.

సారాంశం (నిరూపించవలసినది) **:** *l* మరియు *m* రేఖలకు ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు ఉంటుంది.

నిరూపణ : ఆ రెండు రేఖలు రెండు వేర్వేరు బిందువులు A మరియు B వద్ద ఖండించుకొనును అని అనుకొనుము.

ఇప్పుడు మనకు A మరియు B బిందువుల గుండాపోయే రేఖలు రెండు కలవు. ఇది యూక్లిడ్ స్వీకృతం "రెండు వేర్వేరు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ ఒకే ఒకటి ఉంటుంది"కి విరుద్ధంగా ఉంది. ఈ విరుద్ధత "రెండు బిందువుల గుండా రెండు వేర్వేరు రేఖలు కలవు" అని మనం అనుకొన్న ఊహవలన వచ్చింది. కావున రెండు వేర్వేరు రేఖలు ఒకటి కన్నా మించి ఉమ్మడి బిందువులను కలిగియుండవు.



ఈ ధర్మము సరళరేఖలకు మాత్రమే, వక్రరేఖలను కాదని యూక్లిడ్ ప్రతిపాదన. రేఖ అని రాసిన ప్రతిచోట సరళరేఖగా భావించాలి.

ఉదాహరణ-4 : పక్క పటంలో $AC = XD$; C మరియు D లు AB మరియు XY ల మధ్య బిందువులు అయిన $AB = XY$ అని చూపుము.

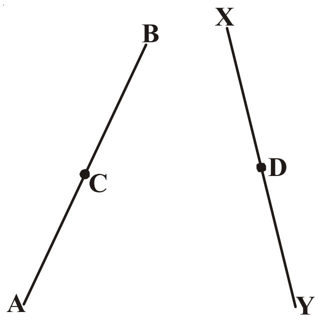
సాధన : $AB = 2\,AC$ (AB మధ్యబిందువు C)

$XY = 2\,XD$ (XY మధ్యబిందువు D)

మరియు $AC = XD$ (దత్తాంశం)

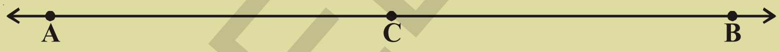
$\therefore AB = XY$

ఎందుకంటే "సమాన రాశుల రెట్టింపులు కూడా సమానమే" – యూక్లిడ్ 'సామాన్య భావన'.

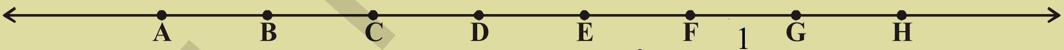


అభ్యాసం 3.1

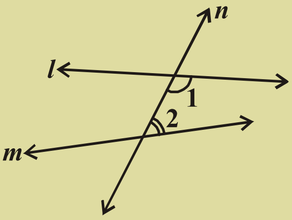
1. కింది వానికి జవాబులు ఇవ్వండి.
   - i. ఘనాలకు ఎన్ని కొలతలు ఉంటాయి?
   - ii. "యూక్లిడ్ ఎలిమెంట్స్" అనే గ్రంథంలో ఎన్ని పుస్తకములు ఉన్నాయి?
   - iii. ఘనము మరియు దీర్ఘ ఘనంలలో ఎన్ని తలములు ఉన్నాయి?
   - iv. త్రిభుజ అంతర కోణాల మొత్తం ఎంత?
   - v. జ్యామితిలోని మూడు అనిర్వచిత పదాలను రాయండి.
2. కింది ప్రవచనాలు సత్యమో కాదో చెప్పండి. కారణాలు వివరించండి.
   - a) దత్త బిందువు గుండా పోతూ ఒకే ఒక రేఖ ఉంటుంది.
   - b) అన్ని లంబ కోణాలు సమానం.
   - c) సమాన వ్యాసార్ధాలు గల వృత్తాలు సమానం.
   - d) రేఖాఖండాన్ని ఇరువైపులా నిరంతరంగా పొడిగించి 'రేఖ' ను పొందగలం.

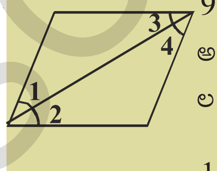


   - e) పటం నుండి $AB > AC$
3. పటంలో $AH > AB + BC + CD$ అని చూపండి.

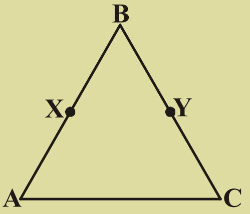


4. Q బిందువు P మరియు R బిందువుల మధ్య $PQ = QR$ అగునట్లు ఉంటే $PQ = \frac{1}{2}$ PR అని నిరూపించుము.
5. 5.2 సెం.మీ. భుజముగా గల ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.
6. పరికల్పన అంటే ఏమిటి? ఒక ఉదాహరణను ఇవ్వండి.
7. P మరియు Q బిందువులను గుర్తించండి. P మరియు Q ల గుండా పోయే రేఖను గీయండి. PQ రేఖకు ఎన్ని సమాంతర రేఖలు గీయగలరు?
8. పటంలో రెండు రేఖలు l మరియు m లపై మరొక రేఖ n కలదు. అంతరకోణాలు $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ ల మొత్తం $180°$ కన్నా తక్కువ అయిన l మరియు m రేఖల గురించి నీవేమి చెప్పగలవు?

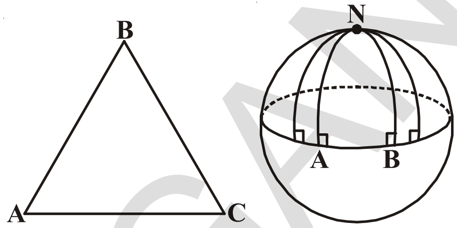




9. పక్క పటంలో $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ మరియు $\angle 3 = \angle 4$, అయిన యూక్లిడ్ సామాన్య భావనలను అనుసరించి $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ ల మధ్య సంబంధాన్ని రాయండి.
10. పక్క పటంలో, $BX = \frac{1}{2} AB$, $BY = \frac{1}{2} BC$ మరియు $AB = BC$ అయిన $BX = BY$ అని చూపండి.



యూక్లిడేతర జ్యామితి :



(i) (ii)

యూక్లిడ్ జ్యామితిలోని ఐదవ స్వీకృతం నిరూపించే అన్ని విఫల ప్రయత్నాలు కార్ల్ ఫ్రెడ్రిక్ గౌస్, బొలే వంటి గణిత శాస్త్ర వేత్తలకు కొత్త ఆలోచనలను రేకెత్తించాయి. వారు 5వ భావన సత్యం లేదా దానిని వ్యతిరేక భావనలు 5వ స్వీకృతంనకు బదులుగా ప్రతిక్షేపించవచ్చు అని భావించారు. ఐదవ స్వీకృతంనకు బదులుగా వేరే స్వీకృతాలను ప్రతిక్షేపిస్తే అవి యూక్లిడ్‌యేతర జ్యామితులు అంటారు.

యూక్లిడ్ జ్యామితిలోని తలం, సమతలం కానిచో ఏమి జరుగగుతుంది?

ఈ విషయాన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఒక బంతిని తీసుకొని దానిపై ఒక త్రిభుజాన్ని గీయడానికి ప్రయత్నించండి. ఒక సమతలంపై గల త్రిభుజానికి, బంతిపై గల త్రిభుజానికి మధ్యగల భేదం ఏమిటి?

పటం (ii) లో AN మరియు BN రేఖలు ఒకే రేఖ AB కు లంబంగా ఉన్నాయి. వాటికి ఒకే వైపున గల అంతర కోణాల మొత్తం 180° కంటే తక్కువ కానప్పటికీ ఆ రెండు రేఖలు ఖండించుకొంటున్నాయి. (కాని $90° + 90° = 180°$). అంతేగాక గోళంపైగల త్రిభుజం NAB లోని కోణాల మొత్తం 180° కన్నా ఎక్కువ ($\angle A + \angle B = 180°$ కనుక) అని గమనించవచ్చు.

పై చర్చలోని తలం సమాంతర రేఖలు వ్యవస్థితం గాని గోళము కనుక ఈ జ్యామితిని గోళీయ (spherical geometry) జ్యామితి అని అంటారు అదే విధంగా వేర్వేరు తలాలు మరియు స్వీకృతాలను తీసుకుంటే వేర్వేరు రకాల జ్యామితులు ఉత్పన్నమవుతాయి.

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

- అనిర్వచిత పదాలైన ‘బిందువు’, ‘రేఖ’ మరియు ‘తలము’ అను జ్యామితి యొక్క పునాది రాళ్లుగా చెప్తాము.
- ‘బిందువు’, ‘రేఖ’ మరియు ‘తలం’ వంటి అనిర్వచిత పదాలను యూక్లిడ్‌తో సహా అనేకమంది గణితశాస్త్ర వేత్తలు నిర్వచించడానికి ప్రయత్నించారు.
- యూక్లిడ్ తన “ఎలిమెంట్స్” సంకలనంలో ఒక నూతన ఆలోచన విధానాన్ని అభివృద్ధి చేసాడు. ఈ వ్యవస్థ తర్వాతి గణిత అభివృద్ధికి పునాదిగా నిలచింది.
- యూక్లిడ్ సామాన్య భావనలలో కొన్ని
  - ఒకే రాశులకు సమానమైన రాశులు సమానం.
  - సమాన రాశులను సమాన రాశులకు కూడినచో వచ్చు మొత్తాలు సమానం.
  - సమాన రాశులను, సమాన రాశుల నుండి తీసివేసినచో వాటి బేధాలు సమానం.

- ఒక దానితో మరొకటి ఏకీభవించుపటాలు సమానాలు.
- ఒక వస్తువు దాని భాగముకంటే పెద్దది.
- సమాన రాశుల రెట్టింపులు సమానాలు.
- సమాన రాశులలో సగాలు సమానం.

- యూక్లిడ్ జ్యామితీయ స్వీకృతాలు

స్వీకృతం-1 : ఒక బిందువు నుండి ఏ బిందువునకైనను రేఖ గీయుము.

స్వీకృతం-2 : రేఖా ఖండాన్ని ఇరువైపులా అనంతంగా పొడిగించవచ్చు.

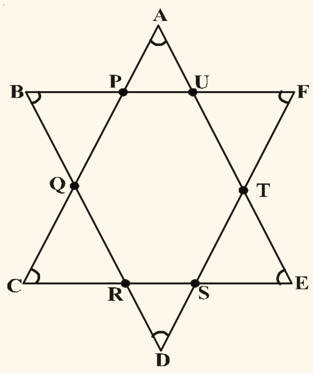
స్వీకృతం-3 : ఇచ్చిన కేంద్రం మరియు వ్యాసార్థాలతో వృత్తాన్ని నిర్మించగలం.

స్వీకృతం-4 : లంబకోణాలన్నీ ఒకదానికి మరొకటి సమానం.

స్వీకృతం-5 : రెండు దత్త సరళ రేఖలను ఖండించు సరళరేఖ దానికి ఒకే వైపున ఉన్న అంతర కోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాలు కన్నా తక్కువగా ఉండునట్లు చేస్తే అప్పుడు దత్త సరళరేఖలను నిరంతరం పొడిగిస్తే అవి రెండు లంబకోణాల కన్నా తక్కువైన మొత్తం గల కోణాల వైపున కలుసుకొంటాయి.

మెదడుకు మేత

1. కింది పటంలో $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ కొలత ఎంత? నీ జవాబుకు కారణము తెల్పుము.



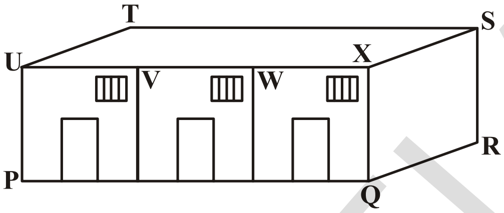
ఒక చతురస్రపు కర్ణము పొడవు 'a' యూనిట్లయిన దానికి రెండింతల వైశాల్యము గల చతురస్రం కర్ణము పొడవు ఎంత?

సరళ రేఖలు మరియు కోణములు
(Lines and Angles)

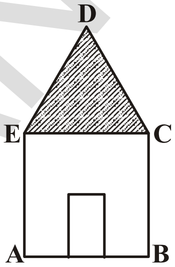
04

4.1 పరిచయం

రేష్మా తన పాఠశాల పటాన్ని గోపి తన ఇంటి పటాన్ని ఈ కింది విధంగా గీసారు. ఈ పటాలలో కొన్ని కోణాలను, రేఖా ఖండాలను మీరు గుర్తించగలరా?



(i)



(ii)

పై పటాలలో (PQ, RS, ST, ...) మరియు (AB, BC, CD, ...) మొదలగునవి రేఖాఖండములకు ఉదాహరణలు. అలాగే ∠UPQ, ∠PQR, ... మరియు ∠EAB, ∠ABC, ... మొదలగునవి కొన్ని కోణములకు ఉదాహరణలు.

ఒక వాస్తుశిల్పి (ఆర్కిటెక్ట్) ఇళ్లు, వంతెనలు, గోపురాలు మొదలగు వాటికి ప్లానులు గీసినప్పుడు సరళరేఖలను, సమాంతర రేఖలను వివిధ కోణాలతో గీస్తాడు.

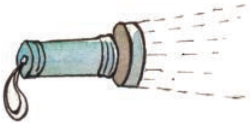
భౌతిక శాస్త్రంలో కాంతిని గురించి చదివేటప్పుడు, కాంతి మార్గమును ఊహించడానికి ఫలితంగా ఏర్పడే పరావర్తనము, వక్రీభవనము, పరిక్షేపనముల ప్రతిబింబాలను సూచించడానికి సరళరేఖలను, కోణములను ఉపయోగించుకొంటాము. అదే విధంగా ఒక వస్తువుపై పనిచేసే వివిధ బలాల వలన ఎంత పని జరిగిందో తెలుసుకోవడానికి బలదిశకు, వస్తువు కదిలిన దిశకు మధ్యగల కోణాన్ని పరిగణనలోనికి తీసుకొని ఫలితాన్ని కనుగొంటాము. అంతే కాక ఒక ప్రదేశము ఎత్తును తెలుసుకోవడానికి మనకు సరళ రేఖలు మరియు కోణములు రెండూ కావాలి. ఇలా మన నిత్య జీవితంలో జ్యామితి యొక్క ప్రాథమిక భావనలు అనేక సందర్భాలలో గమనిస్తాము.

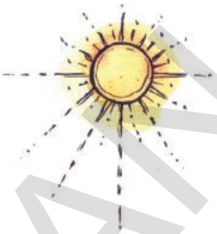
ఇవిచేయండి

మీ చుట్టు పక్కల జాగ్రత్తగా పరిశీలించి సరళరేఖలు మరియు కోణములను ఉపయోగించుకొనే ఏవైనా మూడు సందర్భాలను రాయండి.

వాటి బొమ్మలను మీ నోట్ పుస్తకములో గీయండి. అటువంటి కొన్ని చిత్రములను సేకరించండి.

4.2 జ్యామితిలోని మౌళిక పదాలు





సూర్యుడి నుండి లేదా టార్చిలైటు నుండి వెలువడే కాంతి పుంజం గురించి ఆలోచించండి. ఈ కాంతి పుంజాన్ని మనము ఎలా సూచిస్తాము? ఇది సూర్యుని నుండి ప్రారంభమయ్యే ఒక కిరణము "ఒక **కిరణము** అనేది సరళరేఖలో భాగము. ఇది ఒక బిందువు వద్ద ప్రారంభమై నిర్దేశితదిశలో అనంతంగా కొనసాగుతుంది" అనే విషయాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. అలాగే సరళరేఖ రెండువైపులా అనంతంగా పొడిగించబడుతుంది.

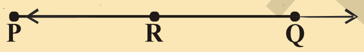
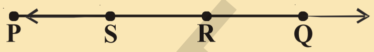
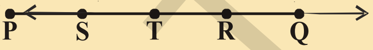
ఒక సరళరేఖలో రెండు బిందువులు అంత్య బిందువులుగా కలిగిన భాగాన్ని **రేఖాఖండము** అంటారు.

సాధారణంగా రేఖా ఖండము AB ని $\overline{AB}$ గాను మరియు ఈ రేఖా ఖండము పొడవును AB అని రాస్తాము. కిరణము AB ని $\overrightarrow{AB}$ అని, సరళరేఖ AB ని $\overleftrightarrow{AB}$ అని సూచిస్తాము. కాని సాధారణంగా అన్ని సరళరేఖలను $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ అని లేదా కొన్ని సార్లు l, m, n వంటి అక్షరాలతోగాని సూచిస్తారు.

మూడు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ బిందువుల ఒకే సరళరేఖపై ఉంటే ఆ బిందువులను సరేఖీయ బిందువులని, కానిచో సరేఖీయలు కాని బిందువులు అని అంటాము.

శేఖర్ ఒక సరళరేఖపై కొన్ని బిందువులను గుర్తించి వాటివల్ల ఏర్పడే రేఖా ఖండములను లెక్కించడానికి ప్రయత్నించాడు.

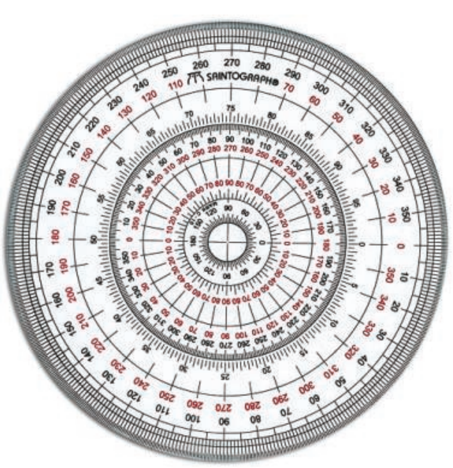
(*గమనిక* : $\overline{PQ}$ మరియు $\overline{QP}$ లు ఒకే రేఖాఖండమును సూచిస్తాయి.)

క్ర.సంఖ్య	సరళరేఖపై బిందువులు	రేఖా ఖండములు	సంఖ్య
1.		$\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{RQ}$	3
2.		$\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{PS}$, $\overline{SR}$, $\overline{SQ}$, $\overline{RQ}$	6
3.		....	

సరళరేఖపై బిందువుల సంఖ్యను, ఏర్పడిన రేఖా ఖండముల సంఖ్యకు మధ్య మీరు ఏమైనా అనుక్రమాన్ని కనుగొన్నారా?

సరళరేఖపై మరికొన్ని బిందువులను తీసుకొని, అనుక్రమాన్ని పరిశీలించండి.

సరళరేఖపై బిందువుల సంఖ్య	2	3	4	5	6	7
మొత్తం రేఖా ఖండాల సంఖ్య	1	3	6	.....	.....	.....

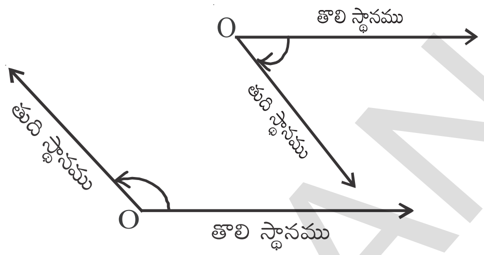


పటంలో చూపినట్లు ఒక వృత్తమును 360 సమాన భాగములు చేయుము.

ప్రతీ భాగముచే ఏర్పడే కోణము కొలత ఒక డిగ్రీ.

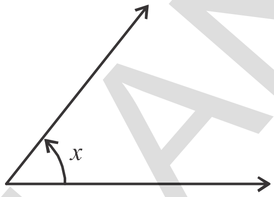
ఒక కిరణమును తొలిస్థానమును నుండి తుది స్థానమునకు భ్రమణం చేయడం వలన కోణం ఏర్పడుతుంది.

స్థిర బిందువు 'O' ఆధారంగా, ఒక కిరణము యొక్క తొలి స్థానము నుండి, తుది స్థానమునకు కలిగే మార్పును **భ్రమణము** అంటారు. ఈ భ్రమణము కొలతను కోణమానినితో కొలవగా వచ్చిన విలువను కోణము అంటారు.

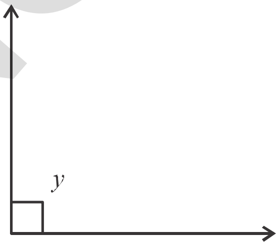


ఒక పూర్తి భ్రమణము విలువ 360^0. ఒక కోణమును మనం వృత్తలేఖినితో కూడా నిర్మించవచ్చును.

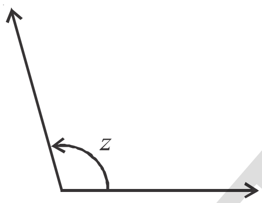
ఒకే బిందువు నుండి రెండు కిరణములు వెలువడినప్పుడు కోణము ఏర్పడుతుంది. ఈ కోణాన్ని ఏర్పరచే కిరణాలను కోణభుజాలు అని, ఆ ఉమ్మడి బిందువును కోణశీర్షము అని అంటారు. మీరు వివిధ కోణాలను గురించి ఇది వరకు నేర్చుకొన్నారు. అవి **అల్పకోణము, లంబకోణము, అధికకోణము, సరళకోణము** మరియు **పరావర్తన** కోణములు.



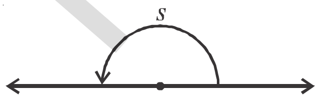
అల్ప కోణము : $0° < x < 90°$



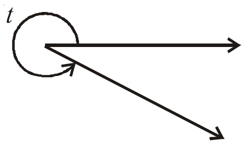
లంబ కోణము $y = 90°$



అధిక కోణము : $90° < z < 180°$



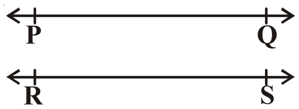
సరళ కోణము : $s = 180°$



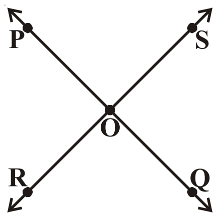
పరావర్తన కోణము : $180° < t < 360°$

4.2.1 ఖండనరేఖలు మరియు ఖండించుకొనని రేఖలు

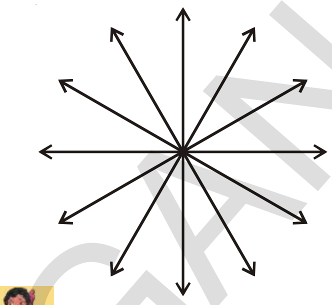
పక్క పటాన్ని పరిశీలించుంటే $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ సరళరేఖలు ఏవైనా ఉమ్మడి బిందువులను కలిగివున్నాయా? (వాటిని అనంతంగా పొడిగించిననూ ఏదైనా బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయా?) ఇటువంటి సరళరేఖలను ఏమని పిలుస్తారు? వీటిని **సమాంతర రేఖలు** అంటారు.



అలాకాక ఆ రెండు సరళరేఖలు ఏదైనా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించు కొంటే వాటిని **ఖండనరేఖలు** అంటారు.



4.2.2 మిళిత రేఖలు



ఒక బిందువు వద్ద ఎన్ని సరళరేఖలు ఖండించుకొంటాయి? అటువంటి సరళరేఖలను ఏమంటారో మీకు తెలుసా? మూడు అంతకన్నా ఎక్కువ సరళరేఖలు ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటే ఆ సరళరేఖలను **మిళిత రేఖలు** అని, ఆ బిందువును **మిళిత బిందువు** అని అంటారు.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

ఖండనరేఖలకు, మిళిత రేఖలకు గల భేదమేమిటి?

అభ్యాసం 4.1

1. ఇచ్చిన పటంలో కింది వానిని గుర్తించి రాయుము.

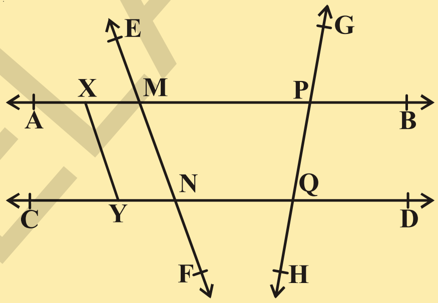
   (i) ఏవైనా ఆరు బిందువులు

   (ii) ఏవైనా ఐదు రేఖాఖండములు

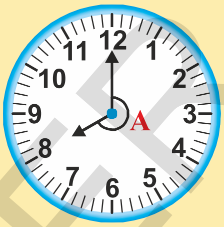
   (iii) ఏవైనా నాలుగు కిరణములు

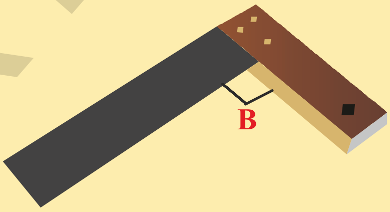
   (iv) ఏవైనా నాలుగు సరళరేఖలు

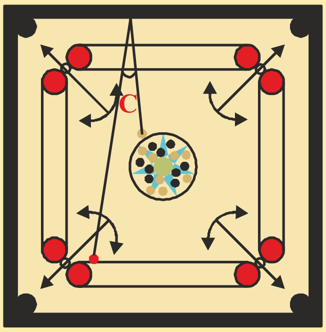
   (v) ఏవైనా నాలుగు సరేఖీయ బిందువులు



2. కింది పటాలను పరిశీలించి వాటిలోని కోణములు ఏరకమైనవో గుర్తించండి.







3. కింది ప్రవచనాలు సత్యమో, అసత్యమో తెలపండి.

   (i) ఒక కిరణమునకు అంత్యబిందువు లేదు.

   (ii) సరళరేఖ $\overleftrightarrow{AB}$ మరియు సరళరేఖ $\overleftrightarrow{BA}$ లు ఒక్కటే.

   (iii) కిరణము $\overrightarrow{AB}$ మరియు కిరణము $\overrightarrow{BA}$ లు ఒక్కటే.

   (iv) ఒక సరళరేఖకు పరిమిత పొడవు ఉండును.

   (v) ఒక తలమునకు పొడవు, వెడల్పులు ఉంటాయి. కాని మందము ఉండదు.

(vi) రెండు వేరు వేరు బిందువుల గుండా ఒకే ఒక సరళరేఖను గీయగలము.

(vii) రెండు సరళరేఖలు రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనును.

(viii) రెండు ఖండనరేఖలు, ఒకే రేఖకు సమాంతర రేఖలు కాలేవు.

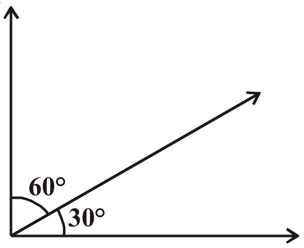
4. ఒక గడియారములో కింద ఇచ్చిన కాలము సూచింపబడునపుడు ఆ రెండు గడియారపు ముళ్ల మధ్య ఏర్పడు కోణము ఎంత?

(a) 9'O గంటలు (b) 6'O గంటలు (c) సా॥ 7:00 గంటలు

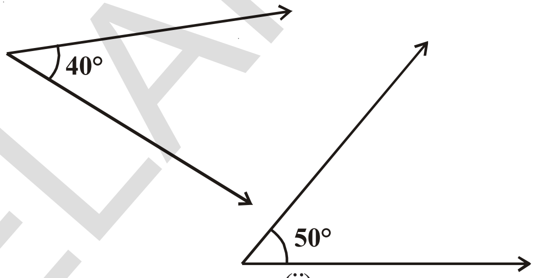
4.3 కోణాల జతలు

ఇప్పుడు మనం కొన్ని కోణాల జతలను గూర్చి చర్చిద్దాం.

కింది పటములలోని కోణములను పరిశీలించి వాటి మొత్తములను కనుగొనండి.



(i)



(ii)

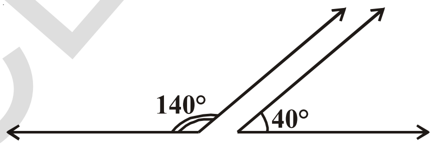
ప్రతి పటములోని రెండు కోణముల మొత్తము ఎంత? అది 90^0 కదా! అటువంటి కోణాల జతలను ఏమని పిలుస్తారో మీకు తెలుసా? వాటిని **పూరకకోణాలు** అంటారు.

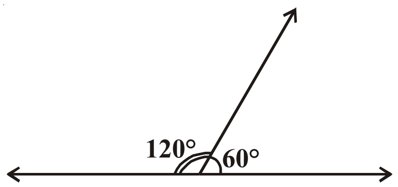
ఇచ్చిన కోణము x^0 అయిన దాని పూరకకోణము ఎంత? x^0 కోణము యొక్క పూరకకోణము $(90^0 - x^0)$.

ఉదాహరణ-1 : ఒక కోణము కొలత 62° అయిన దాని పూరకకోణము విలువ ఎంత?

సాధన : పూరక కోణముల మొత్తము 90° కావున 62° కోణము యొక్క పూరక కోణము $90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$

మరల ఈ కింది పటములను పరిశీలించి ప్రతి పటములోని కోణముల మొత్తము కనుగొనండి.





ప్రతి పటములో సూచించిన రెండు కోణముల మొత్తము ఎంత? 180^0 కదా! అటువంటి కోణాల జతలను ఏమని పిలుస్తారో మీకు తెలుసా? వాటిని సంపూరక కోణాలు అంటారు. ఇచ్చిన కోణము x^0 అయిన దాని సంపూరక కోణము ఎంత? x^0 కోణము యొక్క సంపూరక కోణము $(180^\circ - x^\circ)$.

ఉదాహరణ-2 : రెండు పూరక కోణముల నిష్పత్తి 4:5. అయిన ఆ కోణములు కనుగొనండి.

సాధన : కావలసిన కోణములను $4x$ మరియు $5x$ అనుకొనుము.

కావున $4x + 5x = 90^0$ (ఎందుకు?)

$9x = 90^0 \Rightarrow x = 10^0$

కాబట్టి కావలసిన కోణములు 40^0 మరియు 50^0.

ఇప్పుడు (120°, 240°) (100°, 260°) (180°, 180°) (50°, 310°) ..... మొదలగు కోణాల జతలను పరిశీలించండి. అటువంటి కోణాల జతలను ఏమని పిలుస్తాము? రెండు కోణాల మొత్తము 360° అయిన ఆ కోణాలను సంయుగ్మ కోణాలు అంటారు. 270° కోణమునకు సంయుగ్మకోణము నీవు చెప్పగలవా? x° కోణమునకు సంయుగ్మ కోణము ఎంత?

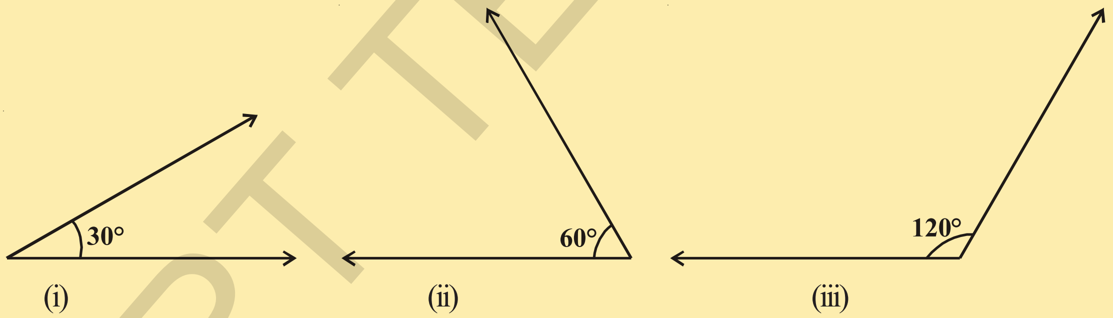
ఇవిచేయండి

1. కింది కోణములకు పూరక, సంపూరక మరియు సంయుగ్మ కోణములను రాయండి.

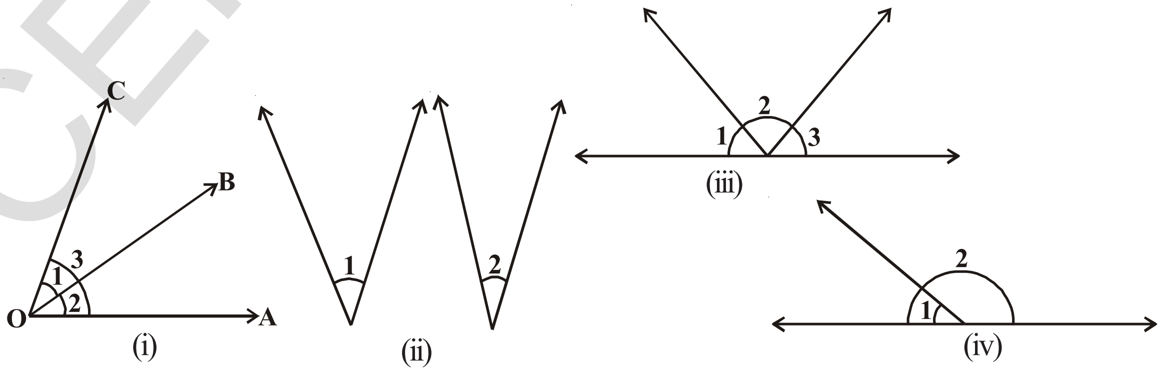
(a) 45^0 (b) 75^0 (c) 54° (d) 30^0

(e) 60^0 (f) 90° (g) 0°

2. కింది కోణములలో ఏ కోణాల జతలు పూరక మరియు సంపూరక కోణాల జతలు అవుతాయి.



కింది పటములను పరిశీలించండి. ఆ కోణములకు ఏవైనా ఉమ్మడిగా ఉన్నాయా?



(i) వ పటంలో $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ లకు శీర్షము 'O', శీర్షభుజము '$\overrightarrow{OB}$' లు ఉమ్మడిగా ఉండడాన్ని గమనించవచ్చును. ఆ రెండు కోణముల ఉమ్మడిగా లేని భుజముల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? అవి ఎలా అమర్చబడివున్నాయి? ఆ భుజములు ఉమ్మడి భుజమునకు రెండు పక్కలా అమర్చబడి ఉన్నాయి. అటువంటి కోణాల జతలను ఏమని పిలుస్తారు?

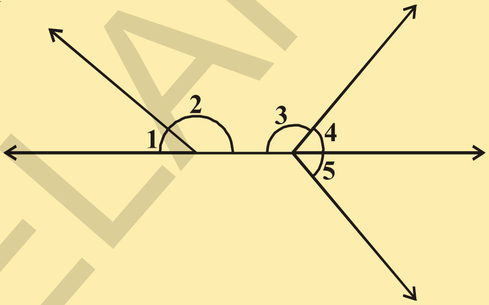
వాటిని ఆసన్న కోణాల జత అంటాము.

(ii) వ పటంలో $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ లు ఈయబడ్డాయి. ఈ కోణములకు ఉమ్మడి శీర్షముగాని, ఉమ్మడి భుజముగాని లేవు. కావున ఇవి ఆసన్న కోణములు కావు.

ప్రయత్నించండి

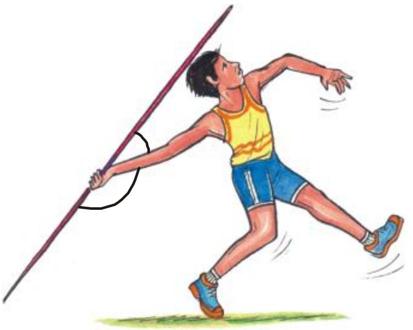
(i) పైన ఇచ్చిన (i, ii, iii మరియు iv) పటములలో ఆసన్న కోణాల జతలను, ఆసన్న కోణములు కాని జతలను గుర్తించి రాయండి.

(ii) పక్క పటములోని ఆసన్న కోణాల జతలను గుర్తించి రాయండి.



ఒక కోణాల జత, ఉమ్మడి శీర్షము, ఉమ్మడి భుజము కలిగి ఉండి, ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు, ఉమ్మడి భుజమునకు చెరియొక వైపున ఉన్న, ఆ కోణాల జతను ఆసన్న కోణాల జత అంటాము.

ఇచ్చిన పటాన్ని పరిశీలించండి. ఒక ఆటగాడి చెయ్యి జావెలిన్‌తో కోణములు చేయుచున్నది. అవి ఎటువంటి కోణములు? అవి ఆసన్న కోణములని మనకు తెలుసును. మరి ఆ రెండు కోణముల మొత్తము ఎంతో మీరు చెప్పగలరా? అది సరళరేఖపై ఉన్నాయి కావున ఆ కోణాల మొత్తం 180^0. అటువంటి కోణాల జతలను ఏమని పిలుస్తాము? దానిని రేఖీయద్వయం అంటారు. కావున రెండు ఆసన్న కోణముల మొత్తము 180^0 అయిన దానిని మనం రేఖీయద్వయం అంటాము.

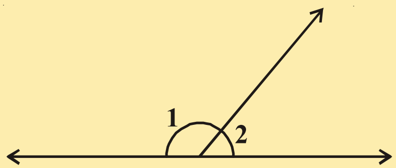


ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

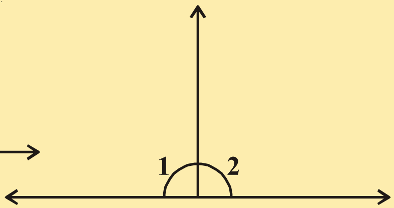
రేఖీయద్వయం ఎప్పుడూ సంపూరకకోణాలు అవుతాయి. కాని సంపూరక కోణాల జత రేఖీయద్వయం కానవసరం లేదు. ఎందుకు?

కృత్యం

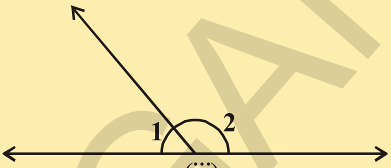
ఈ కింది పటములలోని కోణములను కొలిచి పట్టికలో నింపండి.



(i)



(ii)



(iii)

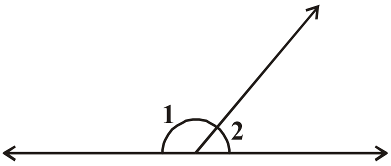
పటం	∠1	∠2	∠1 + ∠2
(i)			
(ii)			
(iii)			

4.3.1 రేఖీయద్వయ కోణాల స్వీకృతం

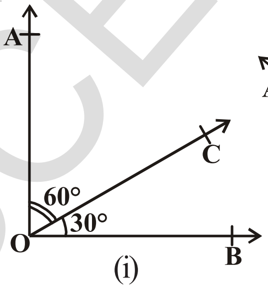
స్వీకృతం : ఒక కిరణము తొలి బిందువు ఒక సరళరేఖపై ఉన్నచో అప్పుడు ఏర్పడిన ఆసన్న కోణముల మొత్తం 180°.

రెండు ఆసన్న కోణముల మొత్తము 180° అయిన వాటిని రేఖీయద్వయం అంటాము.

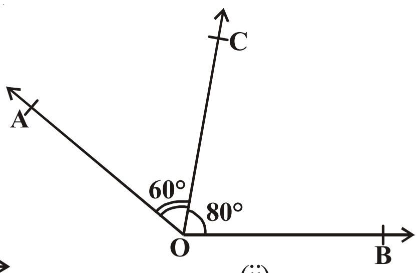
పటంలో $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$



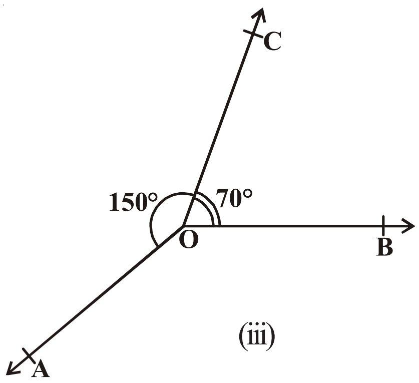
ఈ కింది కృత్యాన్ని చేయండి. పటంలో చూపినట్లు వేరువేరు కొలతలు గల ఆసన్నకోణముల గీయండి. ప్రతి సందర్భంలో ఉమ్మడిగాలేని రెండు భుజాలలో ఒక భుజము వెంబడి స్కేలును ఉంచండి. ఉమ్మడిగాలేని ఆ రెండవ భుజము కూడా స్కేలు వెంబడి ఉంటుందా?



(i)

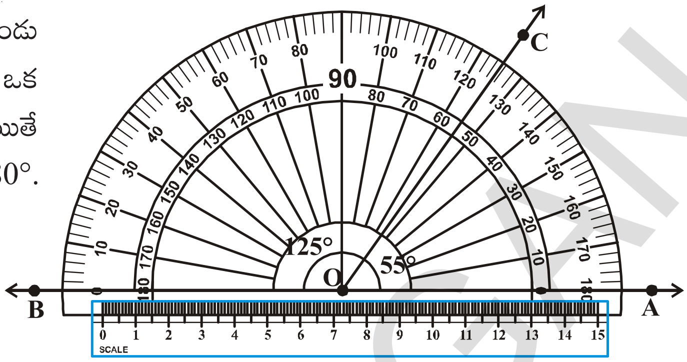


(ii)



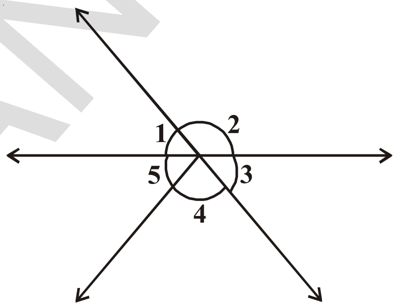
(iii)

కేవలం (iv) వ పటంలో మాత్రమే ఉమ్మడిగా లేని రెండు భుజాలు స్కేలు వెంబడి ఉంటాయి అనగా అవి ఒక సరళ రేఖను ఏర్పరుస్తాయి. ఇంకా పరిశీలించినట్లయితే $\angle AOC + \angle COB = 55° + 125° = 180°$. మిగిలిన పటములకు ఇది వర్తించదు.



పటం (iv)

స్వీకృతము : రెండు ఆసన్న కోణముల మొత్తము 180° అయిన ఆ రెండు కోణములలో ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు ఒక సరళరేఖను ఏర్పరుస్తాయి.

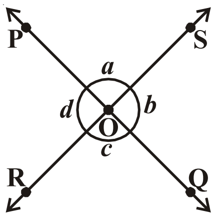


ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పడే కోణాలు : ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పడే అన్ని కోణాల మొత్తము ఎల్లప్పుడూ 360° ఉంటుంది.

ఇచ్చిన పటంలో $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^0$

4.3.2 ఖండన రేఖలతో ఏర్పడే కోణాలు

రెండు ఖండన రేఖలను గీసి వాటికి పేర్లు పెట్టండి. అందులో ఏర్పడిన రేఖీయ ద్వయాలను గుర్తించి మీ నోట్ పుస్తకములో రాయండి. ఎన్ని జతల రేఖీయద్వయ కోణాలు ఏర్పడ్డాయి?

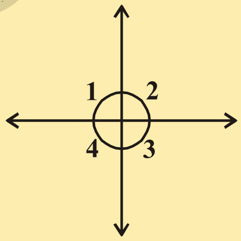


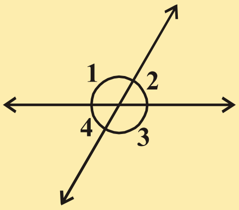
ఇచ్చిన పటంలో $\angle POS$ మరియు $\angle ROQ$ లు ఒకే శీర్షాన్ని కలిగిఉండి ఉమ్మడి భుజములేని అభిముఖ కోణాలు. అందుకే వీటిని శీర్షాభిముఖ కోణాలు అంటారు.

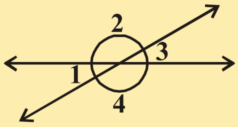
ఎన్ని జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలు ఉన్నాయి? వాటిని నీవు గుర్తించగలవా? (పటము చూడుము)

కృత్యం

కింద ఇచ్చిన పటములలో, ప్రతీ పటములోని నాలుగు కోణములు 1, 2, 3, 4 లను కొలిచి పట్టికలో రాయండి.





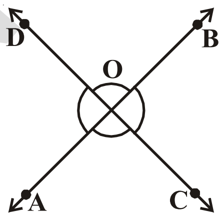


పటం	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
(i)				
(ii)				
(iii)				

శీర్షాభిముఖ కోణాల జతల గురించి నీవు ఏమి పరిశీలించావు? అవి సమానముగా ఉన్నాయా? సిద్ధాంత పరంగా దీనిని నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతము : రెండు సరళరేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటే ఏర్పడిన శీర్షాభిముఖ కోణాల కొలతలు సమానం.

దత్తాంశము : AB మరియు CD లు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనే రెండు సరళరేఖలు.



సారాంశము :

(i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle AOD = \angle BOC$.

ఉపపత్తి :

కిరణము $\overrightarrow{OA}$ సరళరేఖ $\overleftrightarrow{CD}$ పై నున్నది.

అందువలన, $\angle AOC + \angle AOD = 180°$ [రేఖీయద్వయ స్వీకృతం].... (1)

అలాగే $\angle AOD + \angle BOD = 180°$ [ఎందుకు?] .... (2)

$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ [(1) మరియు (2) ల నుండి]

$\angle AOC = \angle BOD$ [సమానంగానున్న కోణాలను రెండువైపులా తొలగించగా]

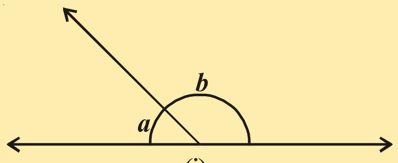
అదే విధంగా మనం

$\angle AOD = \angle BOC$ అని నిరూపించవచ్చును.

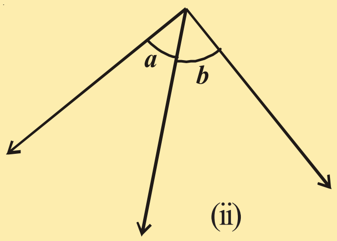
దీనిని నీవు స్వంతంగా ప్రయత్నించు.

ఇవిచేయండి

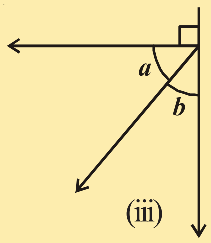
1. కింద ఇచ్చిన కోణాలను, పూరక కోణాలు, రేఖీయద్వయం, శీర్షాభిముఖ కోణాలు మరియు ఆసన్న కోణాల జతలుగా వర్గీకరించండి.



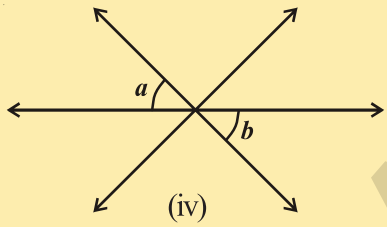
(i)



(ii)

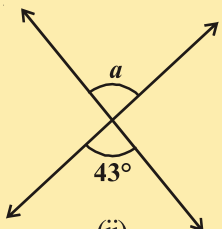


(iii)

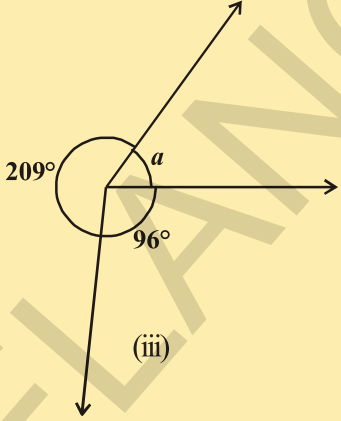


(iv)

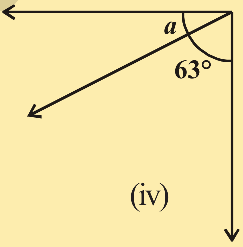
2. ప్రతి పటములో కోణము ‘a’ విలువను కనుగొని, కారణాలు వివరించండి.



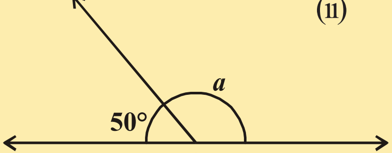
(ii)



(iii)

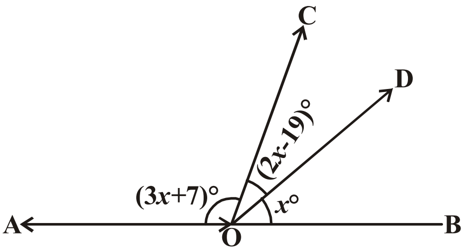


(iv)



(i)

ఇప్పుడు, కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.



ఉదాహరణ-3 : పక్క పటంలో $\overleftrightarrow{AB}$ ఒక సరళరేఖ. అయిన ‘x’ విలువను కనుగొని దాని సహాయంతో $\angle AOC$, $\angle COD$ మరియు $\angle BOD$ లను కనుగొనండి.

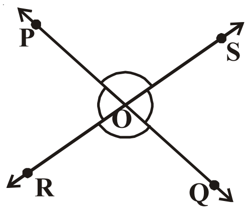
సాధన : $\overleftrightarrow{AB}$ అనేది ఒక సరళరేఖ. దీనిపై ‘O’ బిందువువద్ద ఏర్పడిన కోణముల మొత్తము 180^0.

$\therefore (3x + 7)^\circ + (2x - 19)^\circ + x = 180^\circ$ ($\therefore$రేఖీయ కోణాలు)

$\Rightarrow 6x - 12 = 180 \Rightarrow 6x = 192 \Rightarrow x = 32^\circ$.

కావున, $\angle AOC = (3x + 7)^\circ = (3 \times 32 + 7)^o = 103^o$,

$\angle COD = (2x - 19)^\circ = (2 \times 32 - 19)^o = 45^o$, $\angle BOD = 32^o$.



ఉదాహరణ-4 : పక్క పటంలో PQ మరియు RS సరళరేఖలు, బిందువు ‘O’ వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి. $\angle POR : \angle ROQ = 5: 7$ అయిన అన్ని కోణముల కొలతలు కనుగొనుము.

సాధన : $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$ (రేఖీయ ద్వయం)

కాని $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (దత్తాంశము)

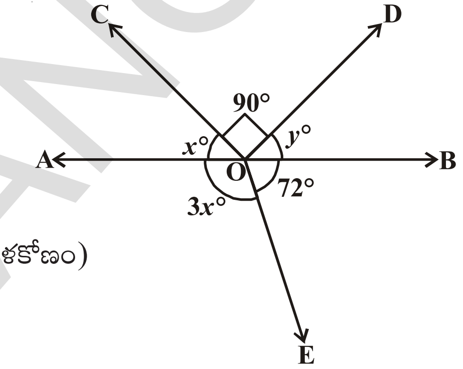
కావున, $\angle POR = \frac{5}{12}\times 180 = 75^\circ$

అదేవిధంగా, $\angle ROQ = \frac{7}{12}\times 180 = 105^\circ$

ఇప్పుడు, $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

మరియు $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

ఉదాహరణ-5 : పక్క పటంలో AOB ఒక సరళరేఖ. $\angle COD = 90^\circ$, $\angle BOE = 72^\circ$ అయిన $\angle AOC$, $\angle BOD$ మరియు $\angle AOE$ కోణముల కొలతలు లెక్కించండి.



సాధన : AOB ఒక సరళరేఖ కావున

$\angle AOE + \angle BOE = 180^\circ$ (రేఖీయద్వయం)

$\Rightarrow 3x^\circ + 72^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 3x^\circ = 108^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$.

$\therefore \angle AOC + \angle COD + \angle BOD = 180^0$ ($\because$ సరళకోణం)

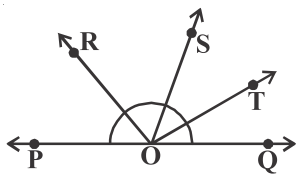
$\Rightarrow x^\circ + 90^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 36^\circ + 90^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$y^\circ = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$

$\therefore \angle AOC = 36^\circ$, $\angle BOD = 54^\circ$ మరియు $\angle AOE = 108^\circ$.

ఉదాహరణ-6 : ఇచ్చిన పటంలో కిరణము $\overrightarrow{OS}$ సరళరేఖ $\overleftrightarrow{PQ}$ పై ఉన్నది. కిరణము $\overrightarrow{OR}$ మరియు కిరణము $\overrightarrow{OT}$ లు వరుసగా $\angle POS$ మరియు $\angle SOQ$ ల కోణ సమద్విఖండన రేఖలు. అయిన $\angle ROT$ కొలతను కనుగొనండి.



సాధన : కిరణము $\overrightarrow{OS}$ సరళరేఖ $\overleftrightarrow{PQ}$ పై ఉన్నది.

కావున, $\angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$ (రేఖీయద్వయం)

$\angle POS = x^\circ$ అనుకొనుము.

$\therefore x^\circ + \angle SOQ = 180^\circ$ (ఎలా అయింది?)

కావున, $\angle SOQ = 180^\circ - x^\circ$

$\angle POS$ కు $\overrightarrow{OR}$ కోణ సమద్విఖండనరేఖ.

$$\therefore \angle ROS = \frac{1}{2}\times \angle POS$$

$$= \frac{1}{2}\times x = \frac{x}{2}$$

అదేవిధంగా, $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - x)$$

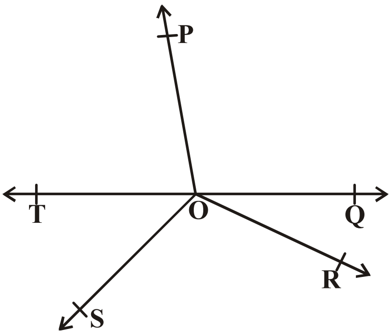
$$= 90^\circ - \frac{x^\circ}{2}$$

ఇప్పుడు, $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x^\circ}{2} + \left(90^\circ - \frac{x^\circ}{2}\right)$$

$$= 90^\circ$$

ఉదాహరణ-7 : పక్క పటంలో $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ మరియు $\overrightarrow{OS}$ లు నాలుగు కిరణములు అయిన $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$ అని నిరూపించుము.



సాధన : ఇచ్చిన పటంలో $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ లేదా $\overrightarrow{OS}$ లలో ఏదైనా ఒక కిరణమునకు వ్యతిరేక కిరణము గీయుము.

$\overleftrightarrow{TOQ}$ సరళరేఖ అగునట్లు కిరణము $\overrightarrow{OT}$ గీయుము. ఇప్పుడు కిరణము OP సరళరేఖ $\overleftrightarrow{TQ}$ పై ఉండును.

$\therefore \angle TOP + \angle POQ = 180^\circ$ .... (1) (రేఖీయద్వయం)

అదేవిధంగా $\overrightarrow{OS}$ సరళరేఖ $\overleftrightarrow{TQ}$ పై ఉన్నది.

$\therefore \angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ .... (2) (ఎందుకు?)

కాని $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

సమీకరణము (2) లో రాయగా

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^\circ$ .... (3)

(1) మరియు (3) సమీకరణములను కలుపగా

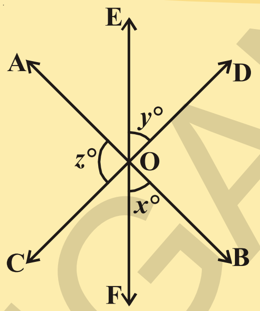
$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ$ .... (4)

కాని $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

అందువలన సమీకరణము (4) కింది విధముగా మారును.

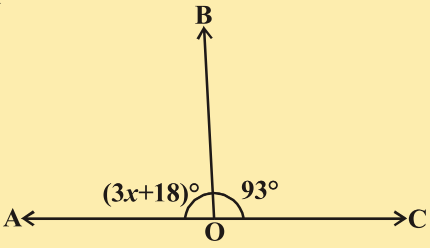
$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$

అభ్యాసం 4.2

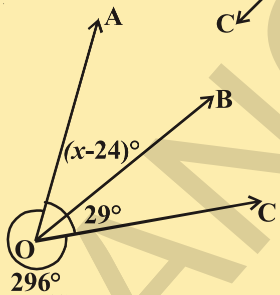

E
A
D
y°
z°
O
x°
C
B
F

1. ఇచ్చిన పటంలో $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ మరియు $\overleftrightarrow{EF}$ సరళరేఖలు 'O' వద్ద ఖండించుకొనును. $x : y : z = 2 : 3 : 5$ అయిన x, y మరియు z ల విలువలు కనుగొనండి.

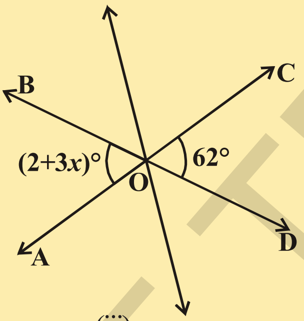
2. కింద ఇచ్చిన పటములలో x విలువను కనుగొనుము.


B
$(3x+18)^\circ$
93°
A
O
C

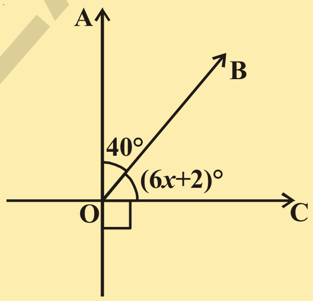
(i)


A
B
$(x-24)^\circ$
29°
C
O
296°

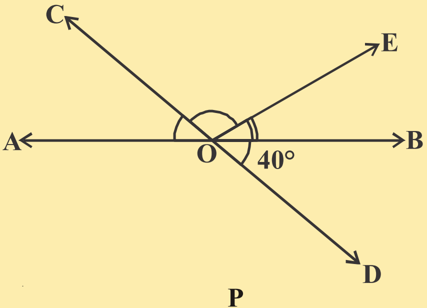
(ii)


B
C
$(2+3x)^\circ$
62°
O
A
D

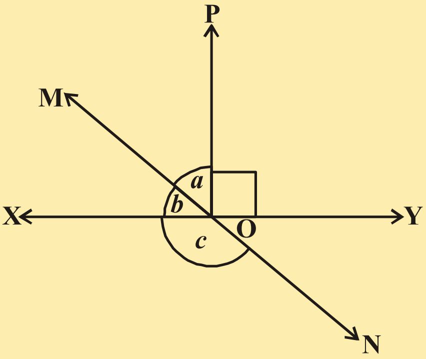
(iii)


A
B
40°
$(6x+2)^\circ$
O
C

(iv)

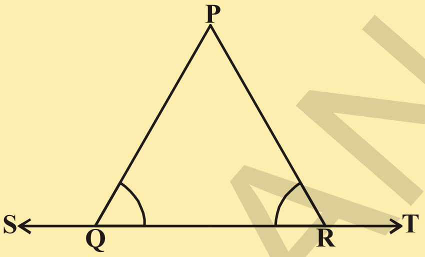


3. పక్క పటంలో సరళరేఖలు $\overleftrightarrow{AB}$ మరియు $\overleftrightarrow{CD}$ లు బిందువు 'O' వద్ద ఖండించుకొనును. $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ మరియు $\angle BOD = 40^\circ$. అయిన $\angle BOE$ మరియు పరావర్తనకోణం $\angle COE$ ల కొలతలు కనుగొనుము.

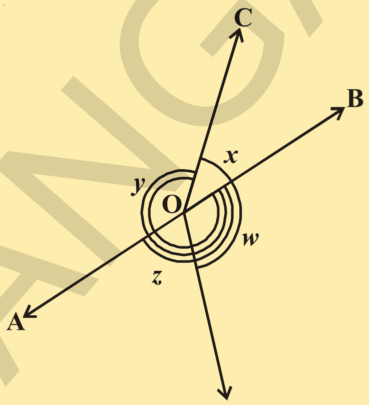


4. పక్క పటంలో సరళరేఖలు $\overleftrightarrow{XY}$ మరియు $\overleftrightarrow{MN}$ లు బిందువు 'O' వద్ద ఖండిచుకొనును. $\angle POY = 90^\circ$. $a : b = 2 : 3$, అయిన కోణము c కొలతలు కనుగొనుము.

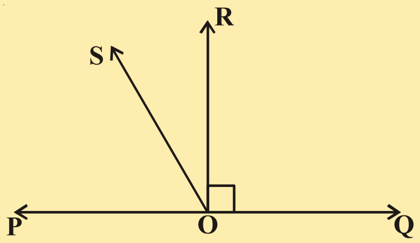
5. పక్క పటంలో $\angle PQR = \angle PRQ$ అయిన $\angle PQS = \angle PRT$ అని నిరూపించుము.



6. ఇచ్చిన పటంలో $x + y = w + z$ అయిన AOB ఒక సరళరేఖ అని నిరూపించండి.

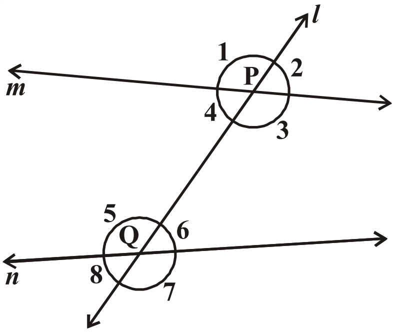


7. పక్క పటంలో $\overleftrightarrow{PQ}$ ఒక సరళరేఖ. కిరణము $\overrightarrow{OR}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ సరళరేఖకు లంబముగానున్నది. $\overrightarrow{OS}$ అనేది $\overrightarrow{OP}$ మరియు $\overrightarrow{OR}$ ల మధ్య నున్న వేరొక కిరణము అయిన $\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$ అని నిరూపించండి.



8. $\angle XYZ = 64°$. XY ని బిందువు 'P' వరకు పొడిగించినారు. $\angle ZYP$ ని కిరణము YQ సమద్విఖండన చేయును. ఈ సమాచారమును పటరూపములో చూపండి. అదేవిధంగా $\angle XYQ$ మరియు పరావర్తన కోణము $\angle QYP$ ల కొలతలు కనుగొనండి.

4.4 సరళరేఖలు మరియు తిర్యగ్రేఖ



ఇచ్చిన పటాన్ని పరిశీలించండి. సరళరేఖ 'l', మిగిలిన సరళరేఖలు 'm' మరియు 'n' లను ఎన్ని బిందువుల వద్ద ఖండించినది? సరళరేఖ 'l' మిగిలిన రెండు రేఖలను రెండు వేరువేరు బిందువుల వద్ద ఖండించినది. ఇటువంటి సరళరేఖను మనం ఏమని పిలుస్తాము? దీనిని మనం తిర్యగ్రేఖ అంటాము. రెండు వేరువేరు సరళరేఖలను 'l' వేరువేరు బిందువుల వద్ద ఖండించే సరళరేఖను తిర్యగ్రేఖ అంటారు. సరళరేఖ 'l' మిగిలిన సరళరేఖలు 'm' మరియు 'n' ను వరుసగా 'P' మరియు 'Q' బిందువులవద్ద ఖండించుచున్నది. కావున సరళరేఖ 'l', సరళరేఖలు m మరియు n లకు తిర్యగ్రేఖ.

రెండు సరళ రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడే కోణముల సంఖ్యను పరిశీలించండి.

ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు సరళ రేఖలను ఖండించగా 8 కోణములు ఏర్పడును.

ఈ కోణములను పటములో చూపినట్లు $\angle 1$, $\angle 2$. . . $\angle 8$ అని గుర్తించండి. ఈ కోణములను మనము వర్గీకరించగలమా? ఈ కోణములలో కొన్ని బాహ్యకోణములు మరియు కొన్ని అంతర కోణములు. $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ మరియు $\angle 8$ లు బాహ్యకోణములు, అదేవిధంగా $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ మరియు $\angle 6$ లు అంతరకోణములు.

తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున ఉండి, ఆసన్న కోణములుకానట్టి ఒక అంతర, ఒక బాహ్య కోణముల జతను సదృశకోణాలు అంటారు.

ఇచ్చిన పటములో

(a) సదృశకోణాలు (అనురూపకోణాలు) ఏవి?

(i) $\angle 1$ మరియు $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ మరియు $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ మరియు $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ మరియు $\angle 7$, కావున 4 జతల సదృశ కోణాలుఉన్నాయి.

(b) ఏకాంతర కోణాలు ఏవి?

(i) $\angle 4$ మరియు $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ మరియు $\angle 5$, లు రెండు జతల ఏకాంతర కోణాలు (ఎందుకు?)

(c) ఏక బాహ్యకోణాలు ఏవి?

(i) $\angle 1$ మరియు $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ మరియు $\angle 8$, లు రెండు జతల ఏక బాహ్య కోణాలు (ఎందుకు?)

(d) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపునున్న అంతరకోణాలు ఏవి?

(i) $\angle 4$ మరియు $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ మరియు $\angle 6$ లు తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపునున్న రెండు జతల అంతర కోణాలు (ఎందుకు?).

తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునున్న ఈ అంతర కోణాలను వరుస అంతరకోణాలు (లేదా) సహ అంతరకోణాలు (లేదా) అనుబంధిత అంతరకోణాలు అంటారు.

(e) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపునున్న బాహ్యకోణాలు ఏవి?

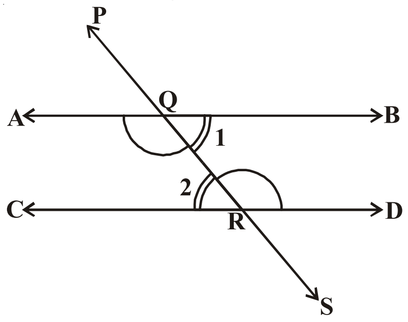
(i) $\angle 1, \angle 8$ (ii) $\angle 2, \angle 7$ లు రెండు జతల తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపునున్న బాహ్యకోణాలు (ఎందుకు?)

తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునున్న బాహ్యకోణాలను వరుస బాహ్య కోణాలు (లేదా) సహ బాహ్యకోణాలు (లేదా) అనుబంధిత బాహ్యకోణాలు అంటారు.

ఇచ్చిన రెండు సరళరేఖలు l మరియు m లు సమాంతర రేఖలైన సదృశకోణాల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? సరిచూడండి. అవి సమానంగా ఉంటాయా? అవును, అవి సమానములే.

సదృశకోణాల స్వీకృతము : ఒక జత సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడిన ప్రతి సదృశకోణాల జత సమానంగా ఉంటాయి.

ఇచ్చిన పటంలో ఏకాంతర కోణాల జతలు మధ్య ఎలాంటి సంబంధం ఉంది. (i) $\angle BQR$ మరియు $\angle QRC$ (ii) $\angle AQR$ మరియు $\angle QRD$?



వీటి మధ్య సంబంధము కనుగొనడానికి సదృశకోణాల స్వీకృతాన్ని ఉపయోగించవచ్చా?

ఇచ్చిన పటంలో తిర్యగ్రేఖ $\overleftrightarrow{PS}$ రెండు సమాంతరరేఖలు $\overleftrightarrow{AB}$ మరియు $\overleftrightarrow{CD}$ లను వరుస బిందువులు Q మరియు R ల వద్ద ఖండించుచున్నది.

$\angle BQR = \angle QRC$ మరియు $\angle AQR = \angle QRD$ అని కనుగొందాం.

మీకు తెలుసా $\angle PQA = \angle QRC$ ..... (1) (సదృశకోణాలస్వీకృతము)

మరియు $\angle PQA = \angle BQR$ ..... (2) (ఎందుకు?)

(1), (2) ల నుండి $\angle BQR = \angle QRC$ అని మనం చెప్పగలము.

అదేవిధంగా, $\angle AQR = \angle QRD$.

ఈ ఫలితాన్ని సిద్ధాంత రూపంలో కింది విధంగా ప్రవచించవచ్చును.

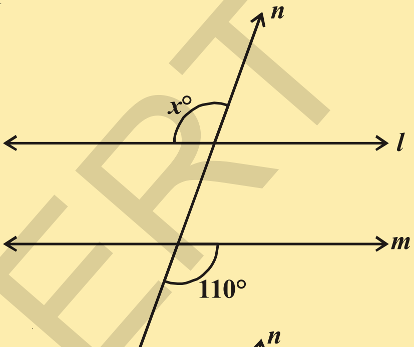
సిద్ధాంతము 4.2 : రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడిన ప్రతి ఏకాంతర కోణాల జత సమానము.

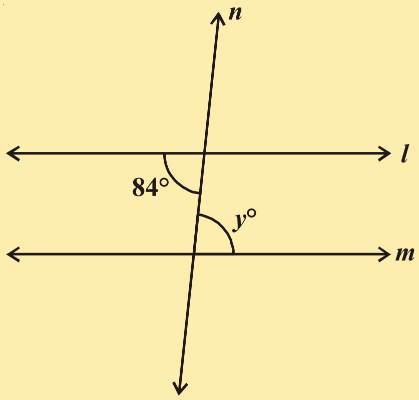
ఇదే విధంగా, తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునున్న అంతరకోణాలకు సంబంధించిన సిద్ధాంతాన్ని రాబట్టవచ్చును.

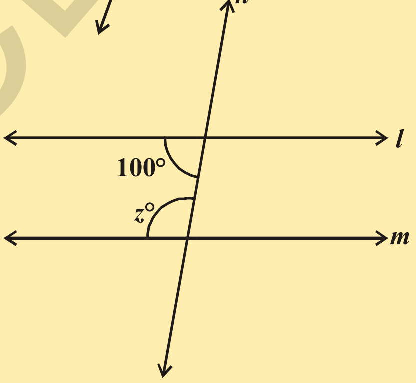
సిద్ధాంతము 4.3 : రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడిన తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునున్న ప్రతీ అంతరకోణాల జత సంపూరకాలు.

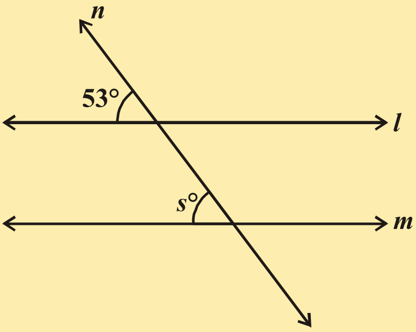
ఇవిచేయండి

1. కింది పటాలలో l, m లు రెండు సమాంతర రేఖలు మరియు n తిర్యగ్రేఖ. ప్రతి పటములోని సూచించబడిన కోణము విలువను కనుగొనండి.

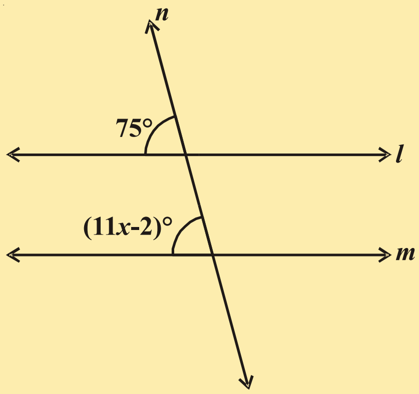


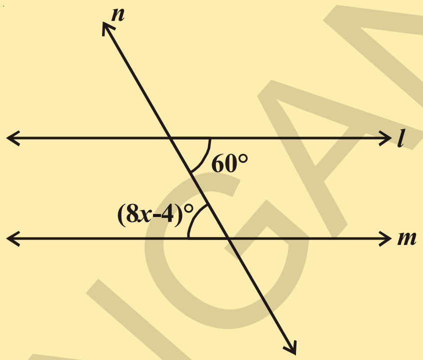


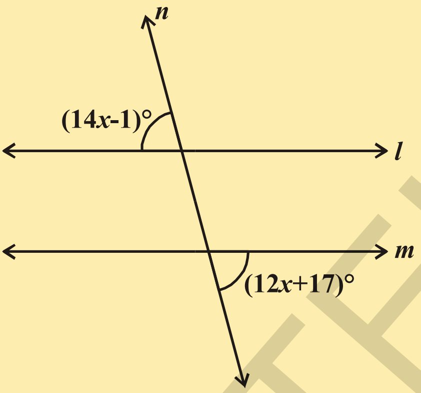


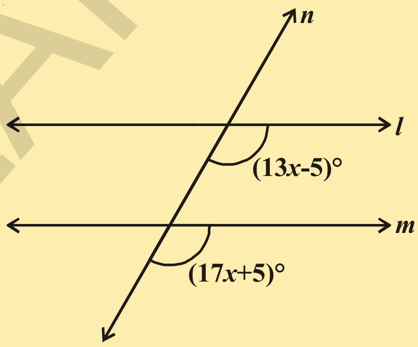


2. కింది వాటలో ‘x’ విలువను కనుగొనండి మరియు కారణములను తెల్పండి.



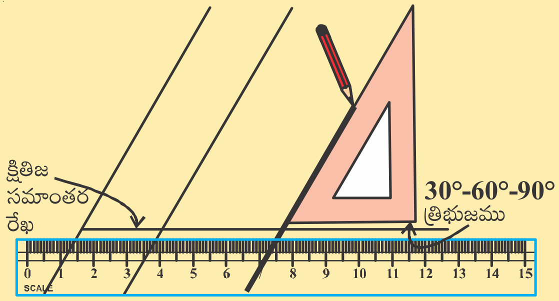



n
(14x-1)°
l
m
(12x+17)°


n
l
(13x-5)°
m
(17x+5)°

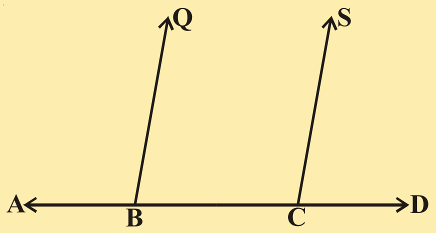
కృత్యం

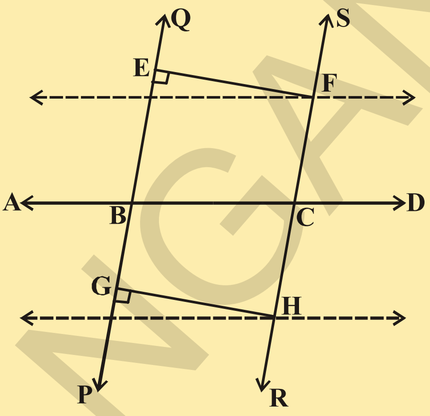
ఒక స్కేలును, మూలమట్టాన్ని తీసుకోండి. పటములో చూపినట్లు మూలమట్టాన్ని స్కేలుపై అమర్చండి. మూలమట్టము ఏటవాలు అంచు వెంబడి పెన్సిల్‌తో గీత గీయండి. ఇప్పుడు మూలమట్టాన్ని దాని క్షితిజ సమాంతర అంచు వెంబడి జరిపి, మరల ఏటవాలు అంచు వెంబడి గీత గీయండి. మనము గీసిన రెండు గీతలు సమాంతరంగా ఉండడాన్ని మనము గమనించవచ్చును? అవి ఎందుకు సమాంతరంగా ఉన్నాయి? ఆలోచించి, మీ మిత్రులతో చర్చించండి.


క్షితిజ సమాంతర రేఖ
30°-60°-90° త్రిభుజము
0 1 2 3 4 5 6 8 9 10 11 12 13 14 15
SCALE

ఇవిచేయండి

సరళరేఖ $\overleftrightarrow{AD}$ పై రెండు బిందువులు B, C లను గుర్తించండి. B, C ల వద్ద $\angle ABQ$, $\angle BCS$ సమాన కోణాలను నిర్మించండి. QB, SC లను AD కి అవతలి వైపు పొడిగించగా PQ, RS సరళరేఖలు ఏర్పడును.

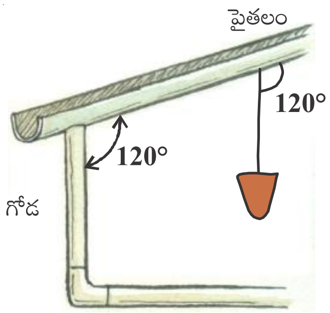




ఏర్పడిన $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ సరళరేఖలకు ఉమ్మడి లంబరేఖలు $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ లను గీయండి. $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ లను కొలవండి. మీరు ఏమిగమనిస్తారు? దాని నుండి మీరు ఏమి నిర్ధారిస్తారు? రెండు సరళరేఖల మధ్య లంబ దూరము సమానమైన ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరాలు అని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి.

స్వీకృతము : రెండు సరళరేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడిన ఒక జత సదృశ కోణాలు సమానమైన ఆ రెండు సరళరేఖలు సమాంతరరేఖలు. (సదృశకోణాల విపర్యయ స్వీకృతము)

వడంబము అనగా పురిలేని తాడుకు ఒక చివర సీసపు గుండు కట్టి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు గోడ, పైకప్పుల మధ్యకోణం 120^0 లు వున్నచో వడంబము మరియు పైకప్పుల మధ్య కోణము కూడా 120^o ఉంటుంది. దీనిని బట్టి మేస్త్రీ గోడ నిలువుగా ఉందని నిర్ధారించుకుంటాడు. అతను ఏరకంగా ఈ నిర్ధారణకు వచ్చాడో ఆలోచించండి.



పై సదృశకోణాల విపర్యయ స్వీకృతమునుపయోగించి మనము ఒక జత ఏకాంతర కోణాలు సమానమైన ఆ సరళరేఖలు సమాంతరరేఖలని చూపగలమా?

పటంలో, సరళరేఖలు $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ లను తిర్యగ్రేఖ $\overleftrightarrow{PS}$ వరుసగా Q, R బిందువులవద్ద ఖండించుచున్నది. మరియు ఏకాంతరకోణాలు $\angle BQR$, $\angle QRC$ లు సమానములు.

అనగా $\angle BQR = \angle QRC$.

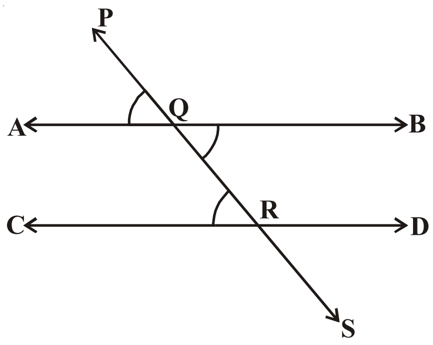
మనం ఇప్పుడు $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ అని నిరూపించవలసియుంది.

$\angle BQR = \angle PQA$ (ఎందుకు?) ... (1)

కాని $\angle BQR = \angle QRC$ (దత్తాంశము) ... (2)

(1), (2) ల నుండి

$\angle PQA = \angle QRC$



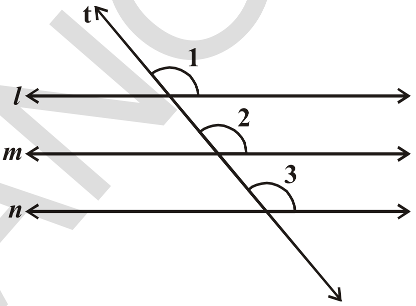
కాని ఇవి తిర్యగ్రేఖ $\overleftrightarrow{PS}$ చే ఖండించబడే సరళరేఖలు $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ లకు సదృశకోణాలు.

అందువలన $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (సదృశకోణాల విపర్యయ స్వీకృతము)

ఈ ఫలితాన్ని మనం కింది సిద్ధాంత రూపంలో ప్రవచించవచ్చును.

సిద్ధాంతము 4.4 : రెండు సరళరేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఒక జత ఏకాంతరకోణాలు సమానమైన ఆ రెండు సరళరేఖలు సమాంతర రేఖలు అవుతాయి.

4.4.1 ఒకే సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖలు



రెండు సరళరేఖలు ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే ఆ రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలు అవుతాయా?

దీనిని పరిశీలిద్దాం. $m \parallel l$ మరియు $n \parallel l$ అయ్యేటట్లు మూడు సరళరేఖలు l, m, n లను గీయండి.

ఈ మూడు సరళరేఖలు l, m, n లకు ఒకే తిర్యగ్రేఖ 't' ని గీయండి.

పటం నుండి, $\angle 1 = \angle 2$ అలాగే $\angle 1 = \angle 3$ (సదృశకోణాల స్వీకృతం)

అందువలన, $\angle 2 = \angle 3$ కాని ఈ రెండు కోణాలు సరళరేఖలు m, n లకు సదృశకోణాల జత అవుతాయి.

$\therefore m \parallel n$ చెప్పవచ్చును.

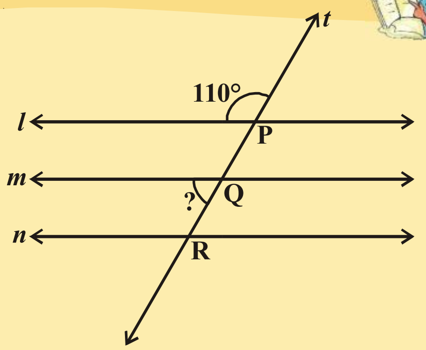
(సదృశకోణాల విపర్యయ స్వీకృతం)

సిద్ధాంతం 4.5 : ఒక సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖలు పరస్పర సమాంతరరేఖలు.

ప్రయత్నించండి

(i) ఇచ్చిన పటంలో ప్రశ్నార్థకం గుర్తు సూచించే కోణం విలువను కనుగొనండి.

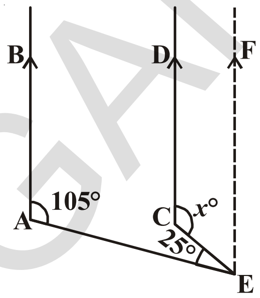
(ii) $\angle P$ విలుకు సమానంగా ఉండే కోణాలను కనుగొనండి.



ఇప్పుడు, సమాంతర రేఖలకు సంబంధించిన కొన్ని సమస్యలను సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ-8 : ఇచ్చిన పటంలో AB|| CD అయిన 'x' విలువను కనుగొనండి.

సాధన : E గుండా AB || CD లకు సమాంతరంగా ఉండేటట్లు EF సరళరేఖను గీయండి. EF || CD మరియు, CE తిర్యగ్రేఖ.



$\therefore\ \angle DCE + \angle CEF = 180^o$ [$\because$ తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునుండే అంతరకోణాలు]

$\Rightarrow\ x^o + \angle CEF = 180^o \Rightarrow \angle CEF = (180 - x^o)$.

మరల, EF || AB మరియు, AE ఒక తిర్యగ్రేఖ.

$\angle BAE + \angle AEF = 180^o$ [$\because$ తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపు నుండే అంతర కోణాలు]

$\Rightarrow 105^o + \angle AEC + \angle CEF = 180^o$

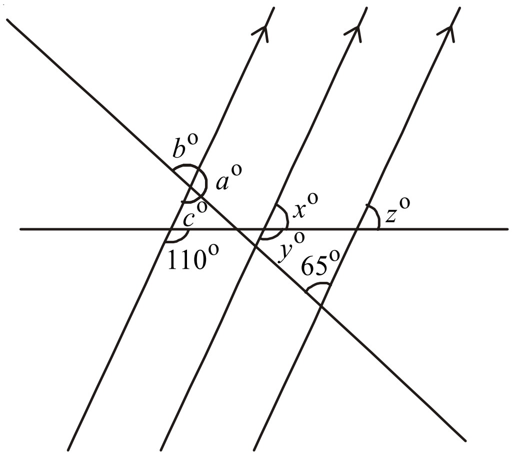
$\Rightarrow\ 105^o + 25^o + (180^o - x^o) = 180^o$

$\Rightarrow\ 310 - x^\circ = 180^\circ$

కావున, $x = 130^\circ$.

ఉదాహరణ-9 : పక్క పటంలో x, y, z మరియు a, b, c ల విలువలు కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చుట మనకు



$y^o = 110^o$ ($\because$ సదృశకోణాలు)

$\Rightarrow\ x^o + y^o = 180^o$ (రేఖీయద్వయం)

$\Rightarrow\ x^o + 110^o = 180^o$

$\Rightarrow\ x^o = (180^o - 110^o) = 70^o$.

$z^o = x^o = 70^o$ ($\because$ సదృశకోణాలు)

$c^o = 65^o$ (ఎలాగ?)

$a^o + c^o = 180^o$ [రేఖీయద్వయం]

$\Rightarrow\ a^o + 65^o = 180^o$

$\Rightarrow\ a^o = (180^o - 65^o) = 115^o$.

$b^o = c^o = 65^o$. [$\because$ శీర్షాభిముఖ కోణాలు]

అందువలన, $a = 115^\circ, b = 65^\circ, c = 65^\circ, x = 70^\circ, y = 110^\circ, z = 70^\circ$.

ఉదాహరణ-10 : పక్క పటంలో EF || GH, AB || CD అయిన x కనుగొనండి.

సాధన : $4x^\circ = \angle APR$ (ఎందుకు?)

$\angle APR = \angle PQS$ (ఎందుకు?)

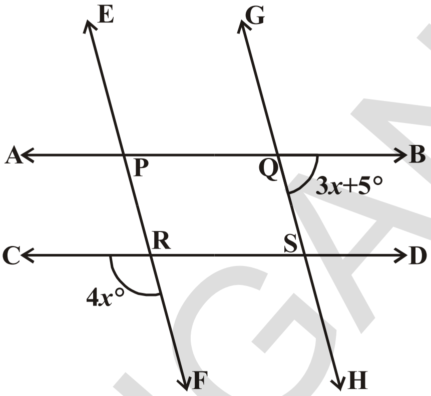
$\angle PQS + \angle SQB = 180°$ (ఎందుకు?)

$4x° + (3x + 5)° = 180°$

$7x° + 5° = 180°$

$$x° = \frac{180° - 5°}{7}$$

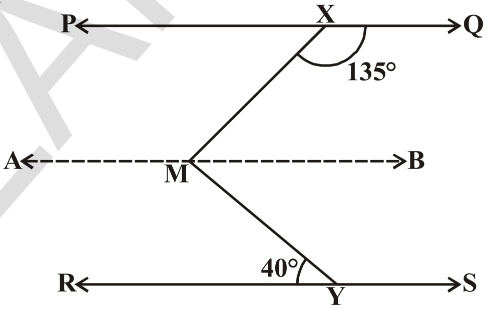
$= 25°$



ఉదాహరణ-11 : ఇచ్చిన పటంలో, PQ || RS. $\angle MXQ = 135^o$, $\angle MYR = 40^o$ అయిన $\angle XMY$ కొలతలు కనుగొనండి.

సాధన : బిందువు M ద్వారా PQ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండేటట్లు సరళరేఖ AB ని నిర్మించండి.

ఇప్పుడు, AB || PQ మరియు PQ || RS.



$\therefore$ AB || RS

ఇప్పుడు $\angle QXM + \angle XMB = 180^o$

($\therefore$ AB || PQ, మరియు XM తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునున్న అంతరకోణాలు)

అందుచేత, $135° + \angle XMB = 180°$

$\therefore \angle XMB = 45°$ ...(1)

అలాగే $\angle BMY = \angle MYR$ ($\because$ AB || RS ఏకాంతర కోణాలు)

$\therefore \angle BMY = 40°$ ...(2)

(1), (2) లను కలుపగా

$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$

అనగా $\angle XMY = 85°$

ఉదాహరణ-12 : రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడిన ఒక జత సదృశ కోణాల కోణ సమద్విఖండన రేఖలు సమాంతర రేఖలైన, ఆ రేఖలు కూడా సమాంతర రేఖలు అవుతాయి. అని నిరూపించండి.

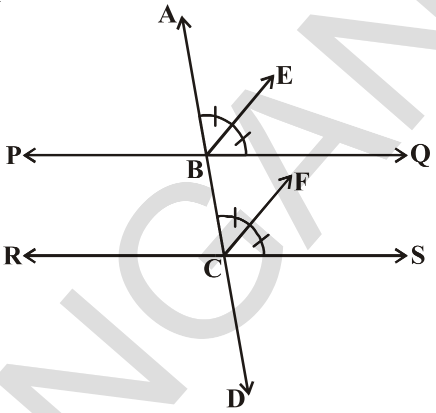
సాధన : ఇచ్చిన పటంలో తిర్యగ్రేఖ $\overleftrightarrow{AD}$ ఇచ్చిన రెండు రేఖలు $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ లను వరుసగా బిందువులు B, C లవద్ద ఖండించుచున్నది. $\angle ABQ$ కోణ సమద్విఖండన రేఖ $\overrightarrow{BE}$ అలాగే $\angle BCS$ కోణ సమద్విఖండనరఖ $\overrightarrow{CF}$ ఇంకా BE || CF. మనము PQ || RS అని నిరూపించాలి. ఈ కింది వానిలో ఏదైనా ఒక జత నిరూపించిన సరిపోతుంది.

i. సదృశకోణాలు సమానం.

ii. ఏకాంతర కోణాల జత లేదా ఏక బాహ్యకోణాల జత సమానము.

iii. తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునున్న అంతరకోణాలు సంపూరకాలు.

ఇచ్చిన పటములో, మనము ఒక జత సదృశకోణాలు సమానము అని నిరూపిద్దాము.



దత్తాంశము నుండి $\angle ABQ$ కు BE కోణ సమద్విఖండనరేఖ.

$$\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ. \qquad \ldots (1)$$

అదేవిధంగా, $\angle BCS$ కు CF కోణసమద్విఖండనరేఖ.

$$\therefore \quad \angle BCF = \frac{1}{2} \angle BCS \qquad \ldots (2)$$

కాని సమాంతర రేఖలు BE, CF లకు $\overleftrightarrow{AD}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ.

అందువలన $\angle ABE = \angle BCF$

(సదృశకోణాల స్వీకృతము) ... (3)

(1), (2), (3) సమీకరణముల నుండి

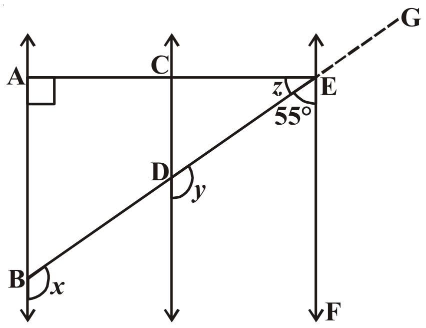
$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

$$\therefore \quad \angle ABQ = \angle BCS$$

కాని ఇవి $\overleftrightarrow{PQ}$ మరియు $\overleftrightarrow{RS}$ సరళరేఖలను తిర్యగ్రేఖ $\overleftrightarrow{AD}$ ఖండించగా ఏర్పడిన సదృశకోణాల జత, మరియు ఇవి సమానంగా ఉన్నాయి.

కావున $PQ \parallel RS$ (సదృశకోణాల విపర్యయ స్వీకృతము)

ఉదాహరణ-13 : పక్క పటంలో, $AB \parallel CD$ మరియు $CD \parallel EF$. అలాగే $EA \perp AB$. $\angle BEF = 55°$ అయిన x, y, z విలవలను కనుగొనండి.



సాధన : BE ని G దాకా పొడిగించుము.

ఇప్పుడు $\angle GEF = 180° - 55°$ (ఎందుకు?)

$= 125°$

అలాగే $\angle GEF = x = y = 125°$ (ఎందుకు?)

ఇప్పుడు $z = 90° - 55°$ (ఎందుకు?)

$= 35°$

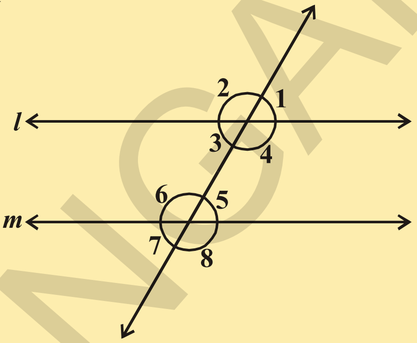
రెండు సరళ రేఖలు సమాంతర రేఖలని చూపు పద్ధతులు:

1. సదృశకోణాల జత సమానమని చూపుట.
2. ఏకాంతర కోణాల జత సమానమని చూపుట.
3. తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునున్న అంతరకోణాలు సంపూరకాలు అని చూపుట.
4. ఒక తలంలో ఇచ్చిన రెండు సరళరేఖలు, మూడవ రేఖకు లంబరేఖలని చూపుట.
5. ఇచ్చిన రెండు సరళరేఖలను, మూడవ రేఖకు సమాంతర రేఖలని చూపుట.

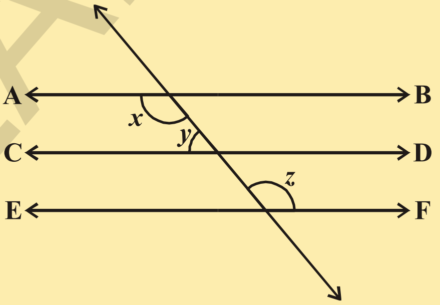
అభ్యాసం 4.3

1. $l \parallel m$ అయిన $\angle 1$ మరియు $\angle 8$ లు సంపూరక కోణాలని చూపుటలో ప్రతి ప్రవచనానికి కావలసిన కారణాలను రాయండి.

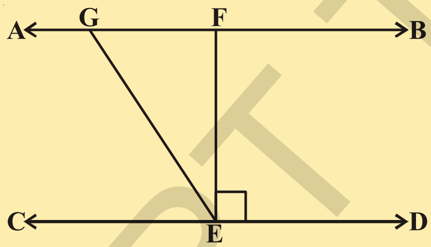
	ప్రవచనం	కారణాలు
i.	$l \parallel m$	__________
ii.	$\angle 1 = \angle 5$	__________
iii.	$\angle 5 + \angle 8 = 180°$	__________
iv.	$\angle 1 + \angle 8 = 180°$	__________
v.	$\angle 1, \angle 8$ సంపూరక కోణాలు	__________



2. పక్క పటంలో AB || CD; CD || EF మరియు $y : z = 3 : 7$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.

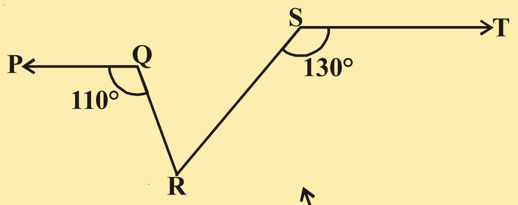


3. పక్క పటంలో AB || CD, EF ⊥ CD ఇంకనూ $\angle GED = 126°$. అయిన $\angle AGE$, $\angle GEF$ మరియు $\angle FGE$ కొలతలను కనుగొనండి.



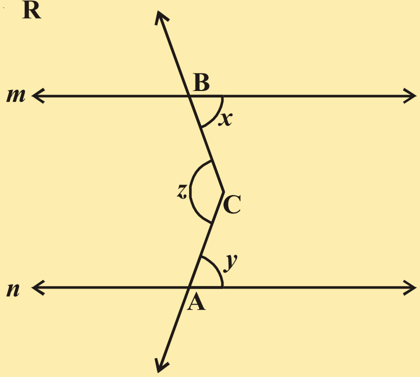
4. పక్క పటంలో PQ || ST, $\angle PQR = 110°$ మరియు $\angle RST = 130°$ అయిన $\angle QRS$ ను కనుగొనండి.

[సూచన : బిందువు R గుండా ST రేఖకు సమాంతరంగా ఒక సరళరేఖను గీయండి.]

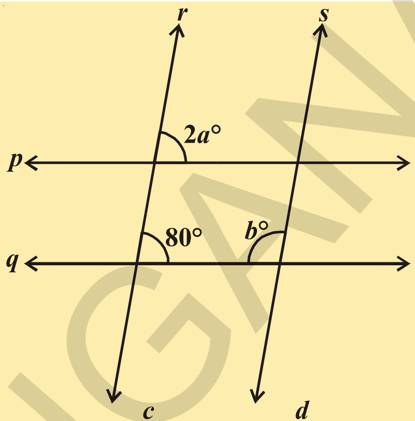


5. పక్క పటంలో $m \parallel n$ సరళరేఖలు. m, n లపై ఏవైనా రెండు బిందువులు, వరుసగా A మరియు B.

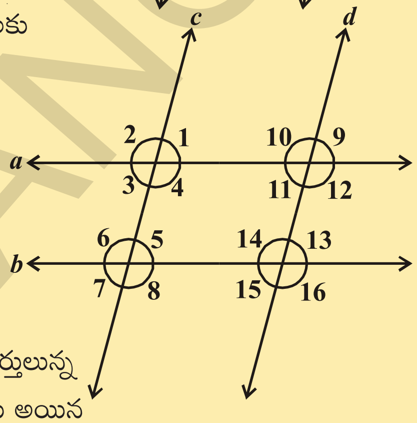
m, n రేఖల అంతరంలో 'C' ఏదైనా ఒక బిందువు అయిన $\angle ACB$ ని కనుగొనండి.

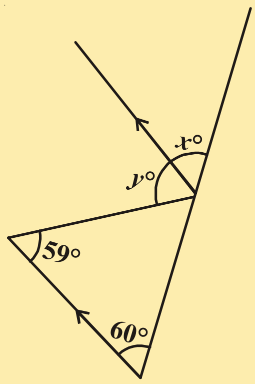


6. పక్క పటంలో $p \parallel q$ మరియు $r \parallel s$ అయిన a, b ల విలువలు కనుగొనండి.



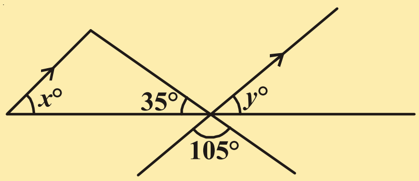
7. ఇచ్చిన పటంలో $a \parallel b$ మరియు $c \parallel d$ అయిన (i) $\angle 1$ (ii) $\angle 2$ లకు సర్వసమాన కోణాల పేర్లను రాయండి.

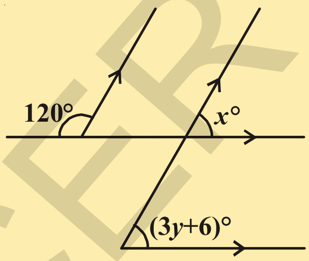

c
d
a
b
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16



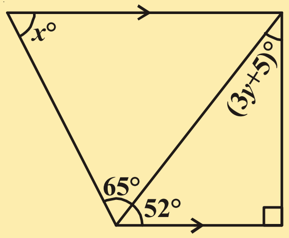
8. ఇచ్చిన పటంలో, బాణం గుర్తులున్న రేఖాఖండాలు సమాంతరాలు అయిన x, y విలువలు కనుగొనండి.

9. పక్క పటంలో బాణం గుర్తులున్న రేఖా ఖండాలు సమాంతరాలు అయిన x, y విలువలు కనుగొనండి.





10. పటం నుండి x, y విలువలను కనుగొనండి.

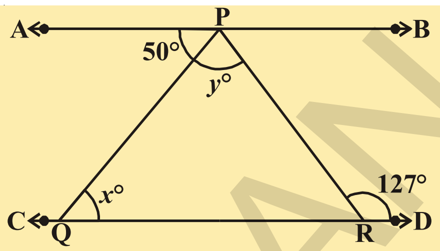


11. పటం నుండి x, y ల విలువలు కనుగొనండి.

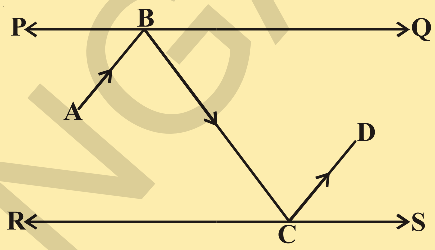
12. కింది ప్రవచనానికి తగిన పటాన్ని గీయండి.

"ఒక కోణము యొక్క రెండు భుజాలు వరుసగా వేరొక కోణము యొక్క రెండు భుజాలకు లంబరేఖలైన ఆ రెండు కోణములు సమానము లేదా సంపూరకాలు.

13. ఇచ్చిన పటంలో AB || CD, ∠APQ = 50° మరియు ∠PRD = 127° అయిన x, y విలువలను కనుగొనండి.

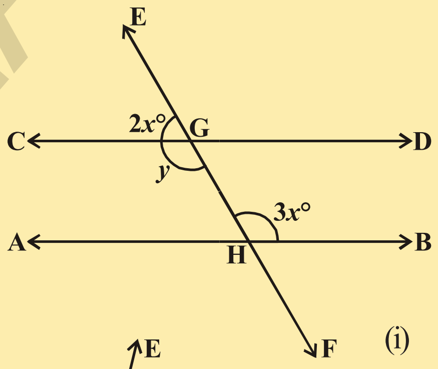

A
P
B
50°
y°
x°
127°
C
Q
R
D

14. పక్క పటంలో PQ మరియు RS లు సమాంతరంగా ఉంచబడిన రెండు దర్పణాలు. పతన కిరణము $\overrightarrow{AB}$ దర్పణము PQ ని బిందువు B వద్ద తాకును. పరావర్తనకిరణము $\overrightarrow{BC}$ దర్పణము RS ను C బిందువు వద్ద తాకి మరల $\overrightarrow{CD}$ గుండా పరావర్తనము చెందును. అయిన AB || CD అని చూపుము.

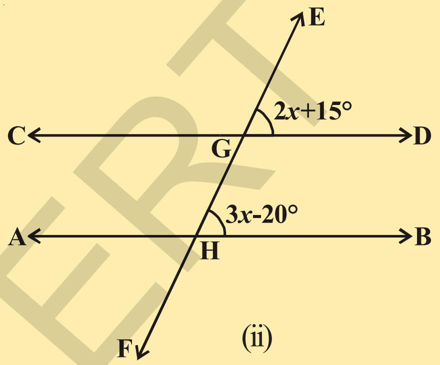


[సూచన : సమాంతర రేఖలకు గీసిన లంబరేఖలు కూడా సమాంతర రేఖలు అవుతాయి.]

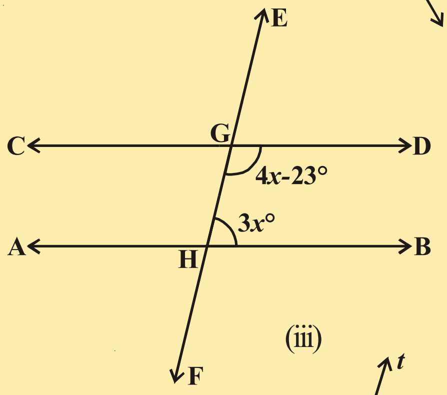
15. ఇచ్చిన పటాలలో AB || CD తిర్యగ్రేఖ EF సరళరేఖలు AB, CD లను వరుసగా G, H బిందువుల వద్ద ఖండించును. అయిన x, y విలువలు కనుగొనండి. కారణములను తెల్పుము.


E
C
2x°
G
D
y
3x°
A
H
B
F

(i)

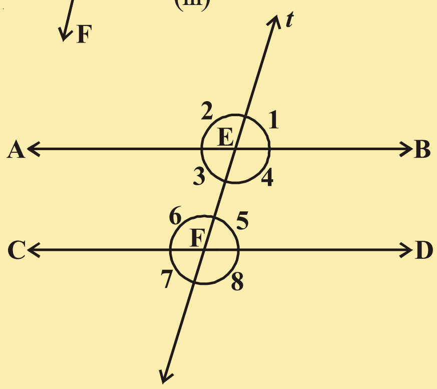

E
2x+15°
C
D
G
3x-20°
A
H
B
F

(ii)

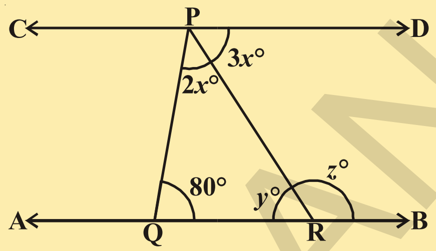

E
G
C
D
4x-23°
3x°
A
B
H
F

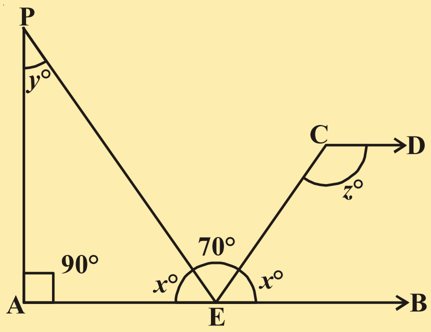
(iii)

16. పక్క పటంలో AB || CD. 't' అనే తిర్యగ్రేఖ వీటిని వరుసగా E మరియు F బిందువుల వద్ద ఖండించును. ∠2 : ∠1 = 5 : 4 అయిన మిగిలిన కోణాల విలువలు కనుగొనండి.


t
2
1
A
E
B
3
4
6
5
C
F
D
7
8

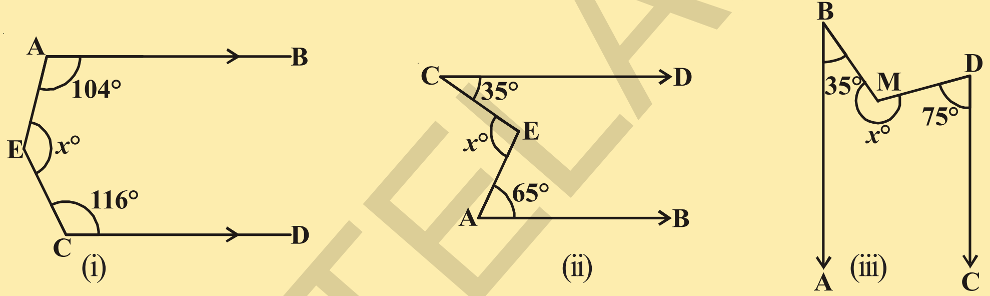
17. పక్క పటంలో AB || CD అయిన x, y, z ల విలువలు కనుగొనండి.


C
P
D
3x°
2x°
80°
y°
z°
A
Q
R
B


P
y°
C
D
z°
70°
90°
x°
x°
A
E
B

18. పక్క పటంలో AB || CD అయిన x, y, z విలువలు కనుగొనండి.

19. కింద ఇచ్చిన పటాలలో ప్రతి పటంలో AB || CD అయిన ప్రతీ సందర్భంలో x విలువను కనుగొనండి.


A
B
104°
E
x°
116°
C
D
C
35°
D
x°
E
65°
A
B
B
35°
M
D
75°
x°
A
C

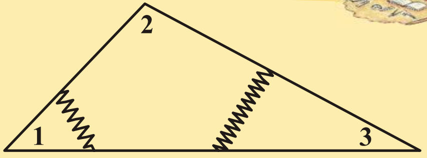
(i) (ii) (iii)

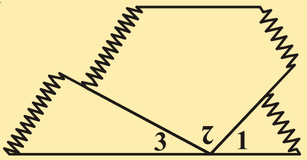
4.5 త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం ధర్మం

ఇప్పుడు మనం త్రిభుజంలోని అంతరకోణాల మొత్తం 180° అని నిరూపిద్దాం.

కృత్యం

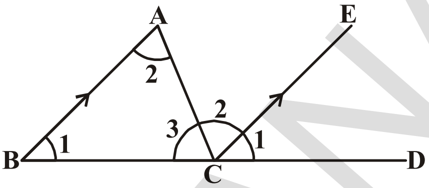
- పటంలో చూపినట్లు ఒక పెద్ద కాగితపు త్రిభుజాన్ని గీసి కత్తిరించండి..
- కోణాలను పటంలో చూపినట్లుగా కత్తిరించి సంఖ్యలచే సూచించండి.
- కుడి పక్క కింది పటంలో చూపినట్లు, ఈ మూడు కోణాలను పక్కపక్కన వచ్చునట్లు అమర్చండి.





1. ఈ మూడు ఆసన్న కోణములు కలిసి ఏర్పరచిన కోణము ఏదో కనుగొనుము. ఈ కోణము విలువ ఎంత?
2. ఒక త్రిభుజములోని కోణముల మొత్తమును గురించి రాయండి.

ఇప్పుడు సమాంతర రేఖలకు సంబంధించిన ప్రవచనాలను స్వీకృతులు మరియు సిద్ధాంతాల సహాయంతో రుజువు చేద్దాం.



సిద్ధాంతము 4.6 : త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తము 180°.

దత్తాంశము : ABC ఒక త్రిభుజం.

సారాంశము : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

నిర్మాణము : BC రేఖను 'D' బిందువు దాకా పొడిగించుము.

'C' బిందువు గుండా BA కి సమాంతరంగా CE రేఖను గీయండి.

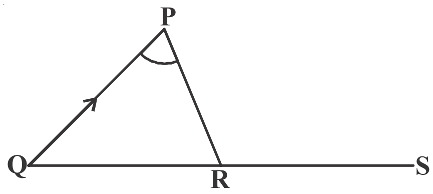
ఉపపత్తి :

$BA \parallel CE$	[నిర్మాణ ప్రకారం]
$\angle ABC = \angle ECD$ .....(1)	[సదృశకోణాల స్వీకృతము]
$\angle BAC = \angle ACE$ .....(2)	[AB, CE సమాంతరరేఖలతో ఏర్పడిన ఏకాంతర కోణములు]
$\angle ACB = \angle ACB$ .....(3)	[ఒకే కోణం] లేదా [పరావర్తన ధర్మం]
$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB =$ $\angle ECD + \angle ACE + \angle ACB$	[పై మూడు సమీకరణములను కలుపగా]
కాని $\angle ECD + \angle ACE + \angle ACB = 180^0$	[సరళరేఖపై ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పడు కోణం]
$\therefore \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^0$	
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$	

త్రిభుజములో ఒక భుజమును పొడిగించగా అక్కడ బాహ్యకోణము ఏర్పడుతుందని మీకు తెలుసు.

QR భుజమును S బిందువు వరకు పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణము $\angle PRS$.

$\angle PRQ + \angle PRS = 180°$? అవుతుందా? (ఎందుకు?) .....(1)



అలాగే

$\angle PRQ + \angle PQR + \angle QPR = 180°$ (ఎందుకు?) .....(2)

(1), (2) సమీకరణముల నుండి $\angle PRQ + \angle PRS = \angle PRQ + \angle PQR + \angle QPR$ గా రావయచ్చు.

$\therefore \angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

ఈ ఫలితాన్ని సిద్ధాంత రూపంలో కింది విధంగా ప్రవచించవచ్చును.

సిద్ధాంతం 4.7 : ఒక త్రిభుజ భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణం, ఆ త్రిభుజ అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

పై సిద్ధాంతము నుండి ఒక త్రిభుజ బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాలలో ప్రతీ కోణము కంటే పెద్దదని చెప్పవచ్చును.

పై విషయాల ఆధారంగా ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణ సమస్యలను సాధిస్తాం.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ఒక త్రిభుజ భుజాలను వరుసగా పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణాల మొత్తము ఎంత?

ఉదాహరణ-14 : ఒక త్రిభుజ కోణాలు $(2x)^\circ$, $(3x+5)^\circ$ మరియు $(4x - 14)^\circ$ అయిన x విలువను కనుగొని, దాని సహాయంతో త్రిభుజ కోణాల విలువలు కనుగొనండి.

సాధన : త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తం 180° అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore\ 2x^\circ + 3x^\circ + 5^\circ + 4x^\circ - 14^\circ = 180^\circ \Rightarrow 9x^\circ - 9^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 9x^\circ = 180^\circ + 9^\circ = 189^\circ$$

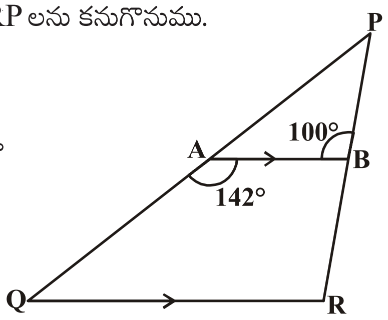
$$\Rightarrow x = \frac{189^\circ}{9^\circ} = 21.$$

$$\therefore\ 2x^\circ = (2\times21)^\circ = 42^\circ,\ (3x+5)^\circ = [(3\times21+5)]^\circ = 68^\circ.$$

$$(4x - 14)^\circ = [(4\times21) - 14]^\circ = 70^\circ$$

కావున ఆ త్రిభుజకోణాలు 42°, 68° మరియు 70°.

ఉదాహరణ-15 : ప్రక్క పటంలో $AB \parallel QR$, $\angle BAQ = 142^\circ$ మరియు $\angle ABP = 100^\circ$. అయిన (i) $\angle APB$ (ii) $\angle AQR$ మరియు (iii) $\angle QRP$ లను కనుగొనుము.



సాధన : (i) $\angle APB = x^\circ$ అనుకొనుము.

ΔPAB లో భుజము PA ను Q బిందువు దాకా పొడిగించగా ఏర్పడే బాహ్యకోణం $\angle BAQ = \angle ABP + \angle APB$

$\Rightarrow 142^\circ = 100^\circ + x^\circ$

$\Rightarrow x^\circ = (142^\circ - 100^\circ) = 42^\circ.$

$\therefore\ \angle APB = 42^\circ,$

(ii) ఇప్పుడు $AB \parallel QR$ మరియు PQ ఒక తిర్యగ్రేఖ

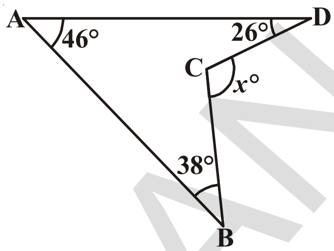
$\therefore\ \angle BAQ + \angle AQR = 180^0$ [తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునున్న అంతరకోణాల మొత్తం 180^0]

$\Rightarrow 142^\circ + \angle AQR = 180^\circ,$

$\therefore\ \angle AQR = (180^\circ - 142^\circ) = 38^\circ.$

(iii) $AB \parallel QR$ మరియు PR తిర్యగ్రేఖ కావున

$\angle QRP = \angle ABP = 100^\circ$ [సదృశ కోణాలు]

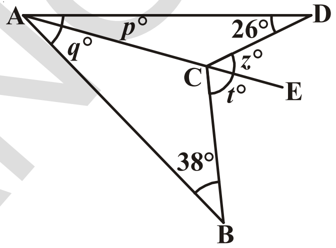


ఉదాహరణ-16 : పక్క పటములోని సమాచారము నుపయోగించి x విలువను కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన పటములో ABCD ఒక చతుర్భుజము. దీనిని రెండు త్రిభుజములుగా చేయడానికి ప్రయత్నించండి.

AC బిందువులను కలిపి దానిని బిందువు E దాకా పొడిగించండి.

$\angle DAE = p^\circ$, $\angle BAE = q^\circ$, $\angle DCE = z^\circ$ మరియు $\angle ECB = t^\circ$. ఒక త్రిభుజ బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖకోణముల మొత్తమునకు సమానము కావున



$z^\circ = p^\circ + 26^\circ$

$t^\circ = q^\circ + 38^\circ$

$\therefore\ z^\circ + t^\circ = p^\circ + q^\circ + (26 + 38)^\circ = p^\circ + q^\circ + 64^\circ$

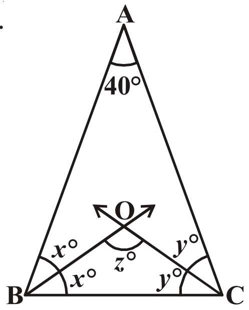
కాని $p^\circ + q^\circ = 46^\circ$. $\quad (\because \angle DAB = 46^\circ)$

కావున $z^\circ + t^\circ = 46^\circ + 64^\circ = 110^\circ$.

అందువలన $x^\circ = z^\circ + t^\circ = 110^\circ$.

ఉదాహరణ-17 : ఇచ్చిన పటంలో $\angle A = 40^\circ$. $\overrightarrow{BO}$ మరియు $\overrightarrow{CO}$ లు వరుసగా $\angle B$ మరియు $\angle C$ ల కోణ సమద్విఖండన రేఖలు అయిన $\angle BOC$ కొలతలు కనుగొనండి.

సాధన : BO అనేది $\angle B$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ. CO అనేది $\angle C$ యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖ.



$\angle CBO = \angle ABO = x^\circ$ అనుకోండి. $\angle BCO = \angle ACO = y^\circ$ అనుకోండి.

అప్పుడు $\angle B = (2x)^\circ$, $\angle C = (2y)^\circ$ మరియు $\angle A = 40^\circ$.

కాని $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. (ఎలా?)

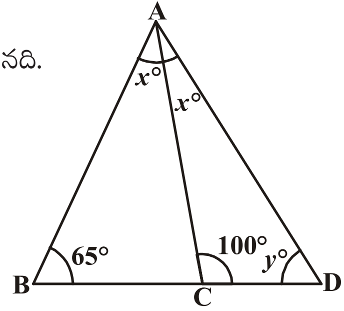
$2x^\circ + 2y^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 2(x + y)^\circ = 140^\circ$

$= x^\circ + y^\circ = \dfrac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$

కావున $\angle BOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

ఉదాహరణ-18 : పక్క పటంలో ఇచ్చిన సమాచారం ఆధారంగా x, y ల విలువలు కనుగొనండి.



సాధన : త్రిభుజము ΔABC యొక్క భుజము BC, బిందువు D వరకు పొడిగించబడినది.

బాహ్యకోణం $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

$\therefore\ 100^\circ = 65^\circ + x^\circ$

$\Rightarrow x^\circ = (100^\circ - 65^\circ) = 35^\circ.$

$\therefore\ \angle CAD = \angle BAC = 35^\circ$

ΔACD లో :

$\angle CAD + \angle ACD + \angle CDA = 180^\circ$ (త్రిభుజములోని కోణముల మొత్తం)

$\Rightarrow 35^\circ + 100^\circ + y^\circ = 180^\circ$

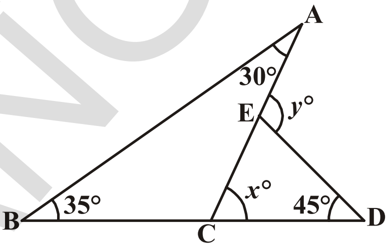
$\Rightarrow 135^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow y^\circ = (180^\circ - 135^\circ) = 45^\circ$

కావున $x = 35^\circ, y = 45^\circ$.

ఉదాహరణ-19 : పక్క పటంలో ఇచ్చిన సమాచారం ఆధారంగా x, y ల విలువలు కనుగొనండి.

సాధన : ΔABC యొక్క భుజము BC, బిందువు D వరకు పొడిగించబడినది.



∴ బాహ్యకోణము $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$

$\Rightarrow \quad x^\circ = 30^\circ + 35^\circ = 65^\circ$.

మరల ΔDCE లో భుజము CE బిందువు A వరకు పొడిగించబడినది.

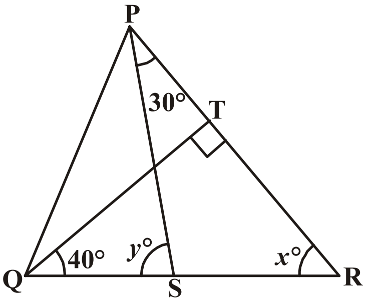
∴ బాహ్యకోణము $\angle DEA = \angle EDC + \angle ECD$

$\Rightarrow \quad y^\circ = 45 + x^\circ = 45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$.

కావున $x^\circ = 65^\circ$, $y = 110^\circ$.

ఉదాహరణ-20 : పక్క పటంలో $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40^\circ$ మరియు $\angle SPR = 30^\circ$ అయిన x, y ల విలువలు కనుగొనండి.

సాధన : ΔTQR లో



$90^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$ (త్రిభుజములోని కోణముల మొత్తం ధర్మం)

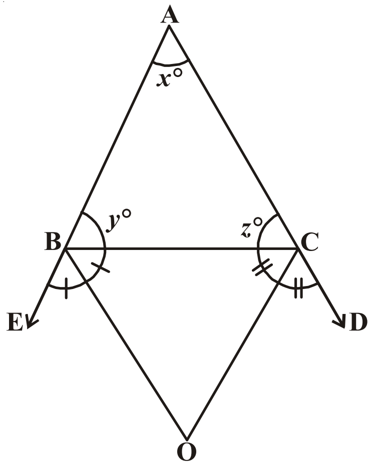
∴ $\quad x^\circ = 50^\circ$

ఇప్పుడు $\quad y^\circ = \angle SPR + x^\circ$ (త్రిభుజ బాహ్యకోణం)

∴ $\quad y^\circ = 30^\circ + 50^\circ$

$= 80^\circ$

ఉదాహరణ-21 : ఇచ్చిన పటంలో ΔABC భుజములు AB, AC లు వరుసగా E, D బిందువుల వద్దకు పొడిగించబడ్డాయి. $\angle CBE$, $\angle BCD$ కోణ సమద్విఖండన రేఖలు వరుసగా BO, CO లు బిందువు O వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి. అయిన $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ అని నిరూపించండి.



సాధన : $\angle CBE$ యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖ BO.

$$\therefore \quad \angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - y^\circ)$$

$$= 90^\circ - \frac{y^\circ}{2} \qquad \ldots(1)$$

అదేవిధంగా, $\angle BCD$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ CO.

$$\therefore \quad \angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - z^\circ)$$

$$= 90^\circ - \frac{z^\circ}{2} \qquad ...(2)$$

ΔBOC లో $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180^\circ$ ...(3)

(1), (2) సమీకరణాలను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\angle BOC + 90^\circ - \frac{z^\circ}{2} + 90^\circ - \frac{y^\circ}{2} = 180^\circ$$

కావున $\angle BOC = \dfrac{z^\circ}{2} + \dfrac{y^\circ}{2}$

లేదా, $\angle BOC = \dfrac{1}{2}(y^\circ + z^\circ)$ ... (4)

దీనిని $x^\circ + y^\circ + z^\circ = 180^\circ$ (త్రిభుజములోని కోణముల మొత్తం ధర్మం)

$\therefore \quad y^\circ + z^\circ = 180^\circ - x^\circ$

$\therefore$ (4) సమీకరణంలో రాయగా

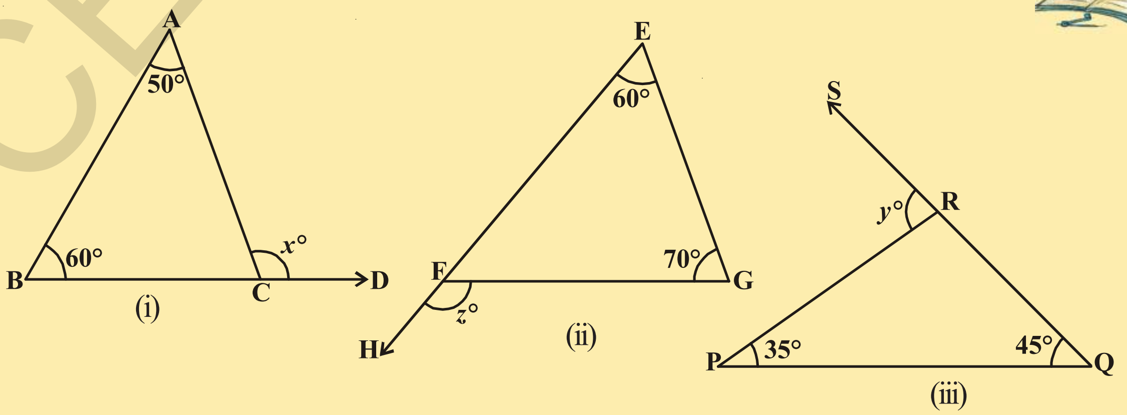
$$\angle BOC = \frac{1}{2}(180^\circ - x^\circ)$$

$$= 90^\circ - \frac{x^\circ}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$$

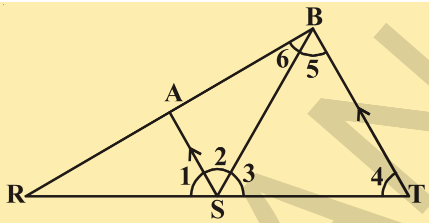
అభ్యాసం 4.4

1. ఇచ్చిన త్రిభుజములలో x, y మరియు z ల విలువలను కనుగొనుము.

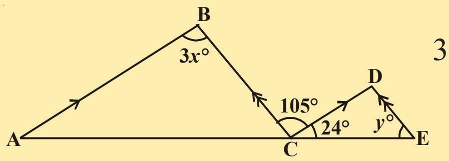


2. ఇచ్చిన పటంలో AS || BT; ∠4 = ∠5

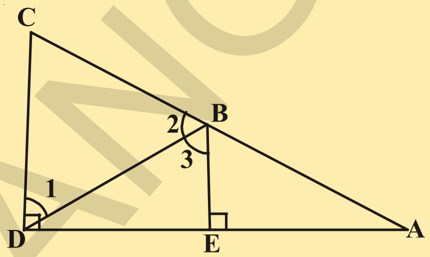
∠AST ని $\overrightarrow{SB}$ కోణసమద్విఖండన చేస్తుంది. అయిన ∠1 విలువను కనుగొనండి.


B
6
5
A
R
1
2
3
4
S
T

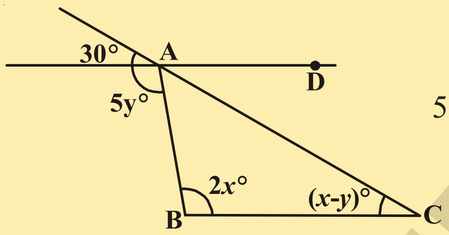
3. ఇచ్చిన పటంలో AB || CD; BC || DE అయిన x, y ల విలువలు కనుగొనండి.


B
3x°
A
105°
D
24°
y°
C
E

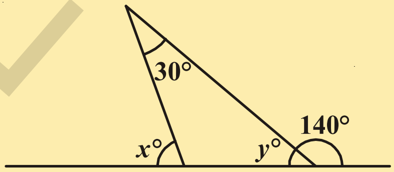
4. పక్క పటంలో BE ⊥ DA మరియు CD⊥DA అని ఇవ్వబడినది. అయిన ∠1 ≅ ∠3 అని చూపండి.



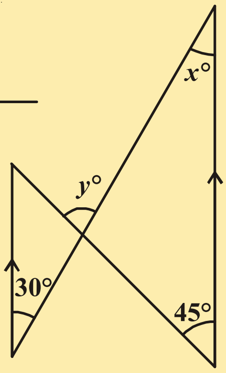
5. x, y ల ఏ విలువలకు, AD, BC రేఖలు సమాంతర రేఖలు అవుతాయి.

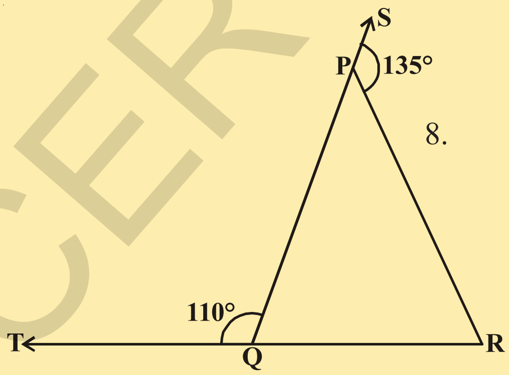

30°
A
D
5y°
2x°
(x-y)°
B
C

6. పటంలో x, y ల విలువలు కనుగొనండి.



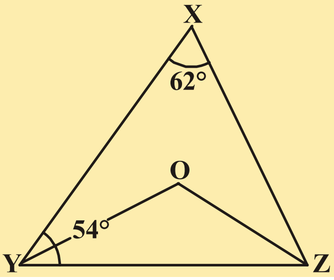
7. పక్క పటంలో, బాణం గుర్తులచే సూచింపబడిన రేఖా ఖండములు సమాంతరములు అయిన x, y ల విలువలు కనుగొనండి.



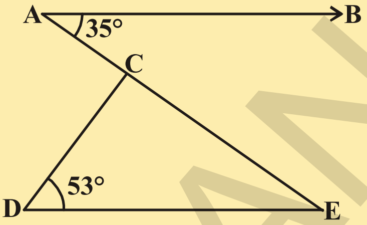

S
P
135°
110°
T
Q
R

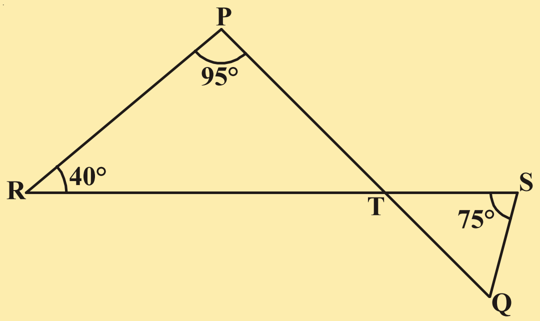
8. ఇచ్చిన పటంలో ΔPQR భుజాలు వరుసగా QP మరియు RQ, S మరియు T బిందువుల వద్దకు పొడిగించబడ్డాయి. ∠SPR = 135°, ∠PQT = 110°, అయిన ∠PRQ కొలతలు కనుగొనండి.

9. ఇచ్చిన పటంలో ∠X = 62°, ∠XYZ = 54°. ΔXYZ లో ∠XYZ మరియు ∠XZY ల కోణసమద్విఖండన రేఖలు వరుసగా YO మరియు ZO అయిన ∠OZY మరియు ∠YOZ ల కొలతలు కనుగొనండి.



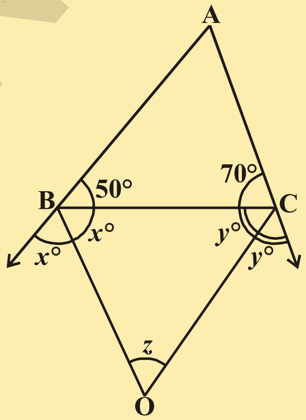
10. ఇచ్చిన పటంలో $AB \parallel DE$, $\angle BAC = 35^\circ$ మరియు $\angle CDE = 53^\circ$ అయిన $\angle DCE$ కొలతలు కనుగొనండి.

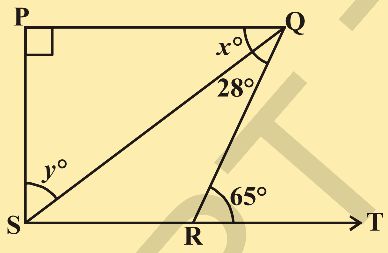




11. ఇచ్చిన పటంలో PQ, RS లు T బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయి. $\angle PRT = 40^\circ$, $\angle RPT = 95^\circ$ మరియు $\angle TSQ = 75^\circ$ అయిన $\angle SQT$ కొలతలు కనుగొనండి.

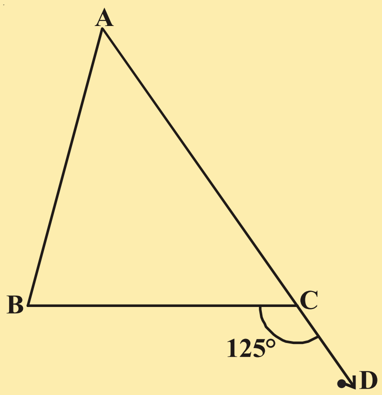
12. పక్క పటంలో ΔABC లో $\angle B = 50^\circ$ మరియు $\angle C = 70^\circ$. AB, AC భుజాలు పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణాల కోణసమద్విఖండన రేఖలు ఖండించుకొనగా 'z' ఏర్పడినది. 'z' విలువను కనుగొనండి.

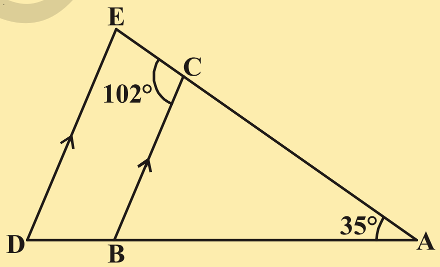




13. ఇచ్చిన పటంలో $PQ \perp PS$, $PQ \parallel SR$, $\angle SQR = 28^\circ$ మరియు $\angle QRT = 65^\circ$ అయిన x, y విలువలు కనుగొనుము.

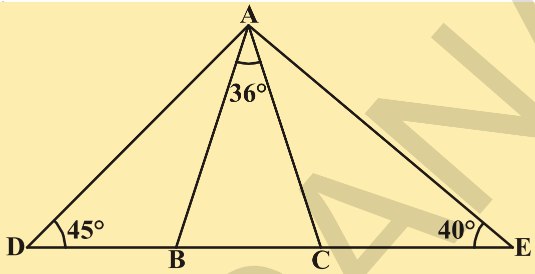
14. ఇచ్చిన పటంలో ΔABC భుజం AC బిందువు 'D' వరకు పొడిగించబడినది. $\angle BCD = 125^\circ$ అయిన $\angle A : \angle B = 2 : 3$ అయిన $m\angle A, m\angle B$ లను కనుగొనండి.



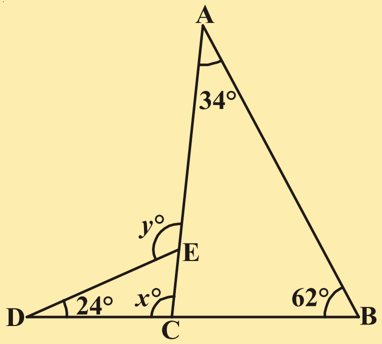


15. పక్క పటంలో $BC \parallel DE$, $\angle BAC = 35^\circ$ మరియు $\angle BCE = 102^\circ$ అని ఇవ్వబడినది. అయిన (i) $\angle BCA$ (ii) $\angle ADE$ మరియు (iii) $\angle CED$ ల కొలతలు కనుగొనండి.

16. పక్క పటంలో AB =AC, $\angle BAC = 36^o$, $\angle ADB = 45^o$ మరియు $\angle AEC = 40^o$ అని ఇవ్వబడినది. అయిన (i) $\angle ABC$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle DAB$ (iv) $\angle EAC$ ల విలువలు కనుగొనండి.



17. ఇచ్చిన పటములోని సమాచారము ఆధారంగా x, y ల విలువలు కనుగొనుము.



మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

- **రేఖీయద్వయం స్వీకృతము :** ఒక కిరణము తొలి బిందువు ఒక సరళరేఖపై ఉన్నచో అప్పుడు ఏర్పడిన ఆసన్న కోణముల మొత్తము 180°.
- **రేఖీయద్వయ విపర్యయ స్వీకృతము :**

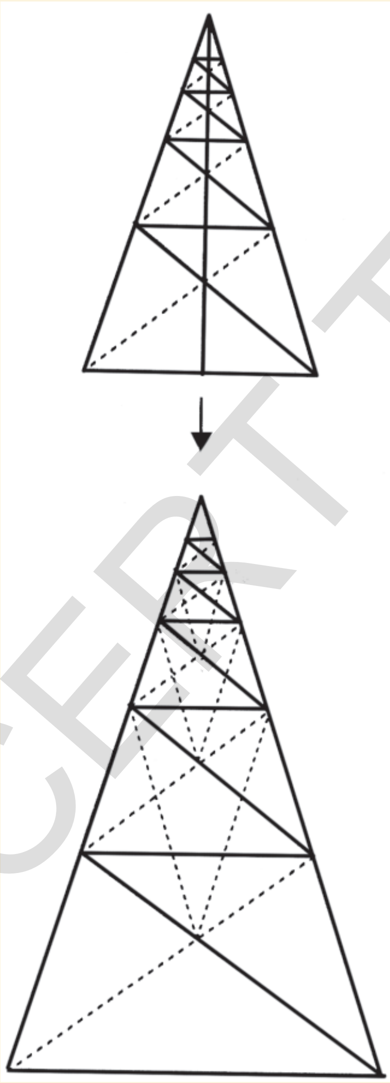
  రెండు ఆసన్న కోణముల మొత్తము 180° అయిన ఆ రెండు కోణములలో ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు ఒక సరళ రేఖను ఏర్పరుస్తాయి.
- **సిద్ధాంతము :** రెండు సరళరేఖలు ఖండించుకొనగా ఏర్పడిన శీర్షాభిముఖ కోణములు సమానము.
- **సదృశకోణాల స్వీకృతము :** ఒక జత సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడిన ప్రతీ సదృశ కోణాల జతలు సమానంగా ఉంటాయి.
- **సిద్ధాంతము :** రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడిన ప్రతీ ఏకాంతర కోణాల జత సమానము.
- **సిద్ధాంతము :** రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఒకేవైపునున్న ప్రతీ అంతర కోణాల జత సంపూరకాలు.
- **సదృశకోణాల విపర్యయ స్వీకృతము :**

  రెండు సరళ రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడిన ఒక జత సదృశకోణాలు సమానమైన ఆ రెండు సరళ రేఖలు సమాంతర రేఖలు.
- **సిద్ధాంతము :**

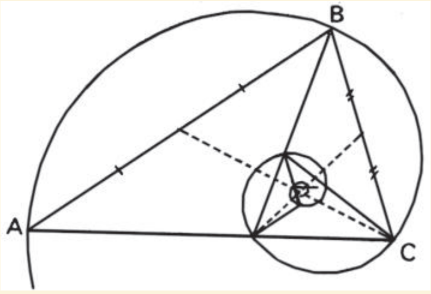
  రెండు సరళరేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడిన ఒక జత ఏకాంతర కోణాలు సమానమైన ఆరెండు సరళరేఖలు సమాంతర రేఖలు.

- **సిద్ధాంతము :** రెండు సరళరేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపునున్న ఒక జత అంతరకోణాలు సంపూరకాలు అయిన ఆ రెండు సరళ రేఖలు సమాంతర రేఖలు.
- **సిద్ధాంతము :** ఇచ్చిన సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండేటట్లు గీసిన సరళరేఖలు పరస్పర సమాంతర రేఖలు.
- **సిద్ధాంతము :** ఒక త్రిభుజములోని మూడు (అంతర) కోణముల మొత్తము 180^o.
- **సిద్ధాంతము :** ఒక త్రిభుజ భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణం ఆ త్రిభుజ అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

మీకు తెలుసా?



స్వయంగా రూపొందించగలిగే స్వర్ణత్రిభుజము. స్వర్ణత్రిభుజం అనేది ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము. దీనిలో భూకోణాలు 72^0 మరియు శీర్షకోణము 36^0. భూకోణాలకు సమద్విఖండన రేఖలు గీయగా ఏర్పడే త్రిభుజాలు కూడా స్వర్ణ త్రిభుజాలే. ఈ ప్రక్రియను అనంతంగా కొనసాగించవచ్చు.



ఈ త్రిభుజము సమకోణ సర్పిలాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. దీనిలో స్వర్ణ నిష్పత్తి $\phi = |AB| / |BC| = 1.618.........$ అగును.

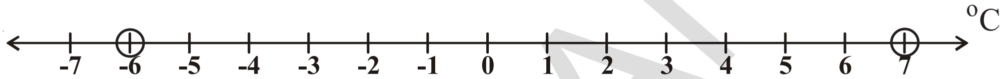
ఈ విధమైన అనంత ఆరోహణ స్వర్ణ త్రిభుజాల పైన అనంత ఆరోహణ పంచభుజాలను నిర్మించవచ్చు. పంచభుజాల యొక్క అయిదు బిందువులు కూడా స్వర్ణ త్రిభుజాలే!

05

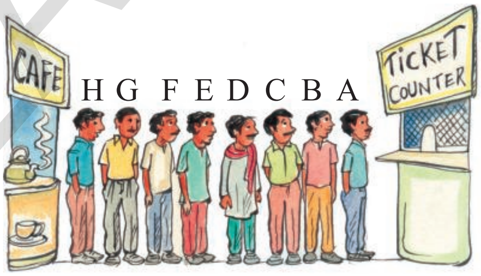
నిరూపక జ్యామితి (Co-Ordinate Geometry)

5.1 పరిచయం

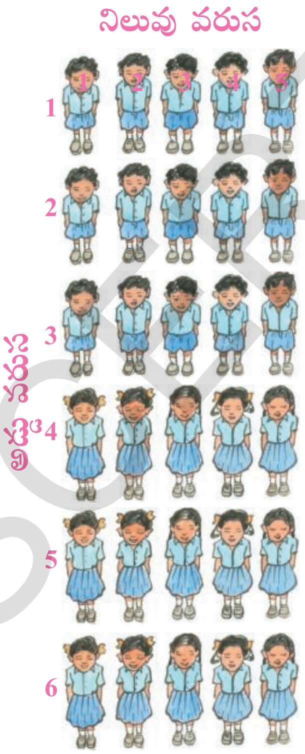
హిమాచల్ ప్రదేశ్ రాష్ట్రంలోని కుఫ్రీలో డిసెంబర్ నెలలో ఒకరోజు నమోదయిన కనిష్ట మరియు గరిష్ట ఉష్ణోగ్రతలు -6^oC మరియు 7^oC. వీటిని నీవు సంఖ్యారేఖపై సూచించగలవా?



ఇక్కడ సంఖ్యారేఖ అనునది ఒకరోజు నమోదయిన ఉష్ణోగ్రతల వివరాలు తెలిపే సూచికరేఖగా ఉపయోగపడింది.



కింది సందర్భాన్ని పరిశీలించండి. ఎనిమిది మంది వ్యక్తులు A,B,C,D,E,F, G మరియు H లు సినిమా థియేటర్ ముందుఒక వరుసలో నిలబడి ఉన్నారు. టికెట్ కౌంటర్ నుంచి లెక్కపెడితే A మొదటి వ్యక్తి మరియు H చివరివ్యక్తి అవుతాడు. ఒకవేళ కేఫ్‌ను (సూచిక) నిర్దేశంగా తీసుకుంటే 'H' మొదటి వ్యక్తి మరియు 'A' చివరివ్యక్తి అవుతాడు. నిర్దేశం మారినప్పుడు ఒక వస్తువు స్థానం యొక్క విలువ మారడాన్ని మనం గమనించవచ్చు.



మరొక ఉదాహరణను గమనిద్దాం. 9వ తరగతి విద్యార్థులు ఆటల పీరియడ్‌లో పటంలో చూపిన విధంగా నిలబడిఉన్నారు.

పటాన్ని చూసి సుధ నిలబడి ఉన్న స్థానమేదో నీవు చెప్పగలవా?

"సుధ 2వ నిలువువరుసలో నిలబడి ఉంది" అని రమ చెప్పింది.

"సుధ 4వ అడ్డువరుసలో నిలబడి ఉంది" అని పావని చెప్పింది.

"సుధ 2వ నిలువువరుసలో మరియు 4వ అడ్డువరుసలో నిలబడి ఉంది"' అని నసీమా చెప్పింది.

పై వారిలో ఎవరు సరియైన సమాచారం ఇచ్చారు? నసీమా ఇచ్చిన సమాచారం ఆధారంగా పటంలో సుధను నీవు గుర్తించగలవా?

1వ నిలువు వరుస మరియు 5వ అడ్డువరుసలో ఉన్న మాధవిని నీవు కనుగొనగలవా?

అదేవిధంగా క్రింది స్దానాలలో ఉన్న విద్యార్థులను మీరు గుర్తించండి.

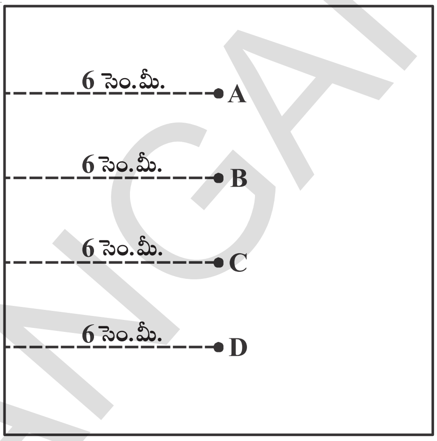
(i) (3వ నిలువువరుస, 6వ అడ్డువరుస) (ii) (5వ నిలువు వరుస, 2వ అడ్డువరుస)

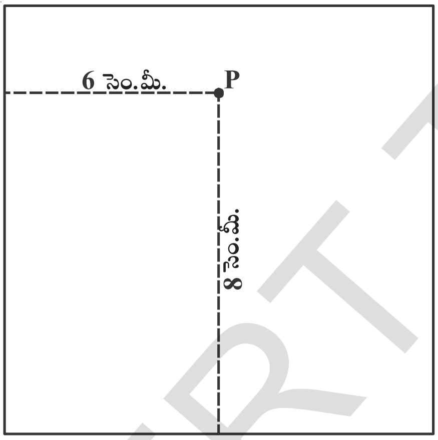
పై ఉదాహరణలోని ప్రతిసందర్భంలో నీవు ఎన్ని నిర్దేశాలను పరిగణనలోకి తీసుకున్నావు? అవి ఏవి?

మరొక సందర్భాన్ని చర్చిద్దాం.

ఒక కాగితాన్ని తీసుకొని దానిపై ఒక బిందువును ఉంచమని విద్యార్థులకు టీచర్ చెప్పింది. అయితే ఆ బిందువు కాగితం ఎడమ అంచునుంచి 6 సెం.మీల దూరంలో ఉండాలి అని ఆమె సూచించింది. కొంతమంది విద్యార్థులు పటంలో చూపినవిధంగా బిందువులను గుర్తించారు.

ప్రక్కపటంలో ఏ బిందువు ఇచ్చిన సూచన ప్రకారం గుర్తించబడినదని నీవు భావిస్తావు? పటంలోని ప్రతి బిందువు A,B,C, D లు కాగితపు ఎడమ అంచునుండి 6 సెం.మీ.ల దూరంలో ఉన్నాయి. కాబట్టి అన్ని బిందువులు సరియైనవే. దీనిని బట్టి బిందువు యొక్క సరియైన స్థానాన్ని నిర్ధారించుటకు మరొక సూచన అవసరము అని మనకు తెలుస్తుంది. కాగితము పై అంచునుంచి లేదా క్రింది అంచునుండి ఆ బిందువు ఎంత దూరంలో ఉంది అనే సూచన ఇస్తే మనం బిందువును సరిగ్గా గుర్తించగలం.





ఈ సారి బిందువు ఎడమ అంచునుంచి 6 సెం.మీ. మరియు క్రింది అంచునుంచి 8 సెం.మీ దూరంలో ఉంది అని టీచర్ చెప్పింది. ఈరెండు సూచనలతో కాగితంపై ఎన్ని బిందువులను గుర్తించవచ్చు?

కేవలం ఒకేఒక బిందువును గుర్తించగలం అని తెలుసుకోవచ్చు. కాబట్టి ఏదైనా బిందువు యొక్క స్థానాన్ని గుర్తించడానికి మనకు ఎన్ని నిర్దేశాలు (సూచనలు) అవసరమవుతాయి?

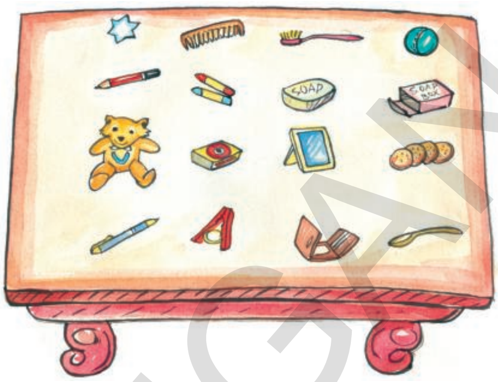
ఒక బిందువు యొక్క స్థానాన్ని సరిగ్గా గుర్తించడానికి మనకు రెండు నిర్దేశాలు అవసరం. పై బిందువు యొక్క స్థానాన్ని $(6,8)$ గా సూచిస్తాము. ఒక బిందువు పై అంచునుండి 7 సెం.మీల దూరంలో ఉంది. అని నీకు చెబితే ఆ బిందువును నీవు కాగితంపై సూచించగలవా?

ఇవిచేయండి

మీ తరగతి గదిలో ఎవరైనా ఐదుగురు విద్యార్థులు కూర్చునే స్థానాన్ని వివరించండి.

కృత్యం (రింగ్ ఆట)

జాతరలు, ఎగ్జిబిషన్‌లలో ఎప్పుడైనా నీవు “రింగ్ ఆట”ను చూశావా? కొన్ని వస్తువులు అడ్డువరసలోనూ మరియు నిలువు వరుసలలోనూ అమర్చి ఉంటాయి. వీటిపై మనం రింగ్‌లను విసురుతాం. పక్క చిత్రాన్ని గమనించండి.



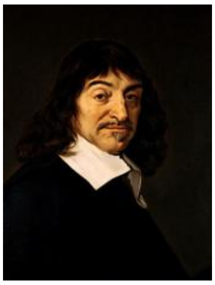
ఖాళీలను సరియైన సంఖ్యతో నింపండి.

వస్తువు	**నిలువు వరుస**	**అడ్డువరుస**	**స్థానం**
పర్సు	3	4	(3,4)
అగ్గిపెట్టి	....	3	(,3)
క్లిప్	....	....	....
ఆటబొమ్మ	....	....	....
సబ్బు	....	....	....

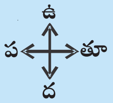
3 వ నిలువువరుస మరియు 4 వ అడ్డువరుసలో ఉన్నవస్తువు. 4 వ నిలువువరుస మరియు 3 వ అడ్డువరుసలో ఉన్నవస్తువు ఒకటేనా?

ఒక తలంలో ఏదైనా బిందువును రెండు నిర్దేశాల ఆధారంగా స్థాపించటం అనే భావన గణితంలో వైశ్లేషిక రేఖాగణితం అనే కొత్తశాఖను సృష్టించింది.

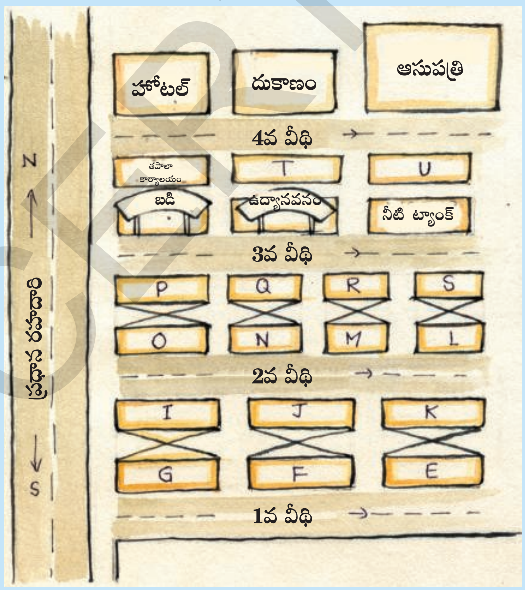
ఫ్రాన్స్‌కు చెందిన గణితశాస్త్రజ్ఞుడు మరియు ప్రముఖ వేదాంతియైన రేన్‌డెకార్టె (1596-1650) వైశ్లేషిక రేఖాగణితాన్ని అభివద్ధి చేశారు. వైశ్లేషిక రేఖాగణితాన్ని మనం నిరూపక రేఖాగణితం అని కూడా అంటాం. రేన్‌డెకార్టె బీజీయ సమీకరణాలకు మరియు రేఖాగణిత వక్రాలకు, పటాలకు మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొన్నాడు. ఈ అధ్యాయంలో నిరూపక తలంలో బిందువును గూర్చి మరియు దానిని స్థాపించడం గూర్చి మనం చర్చిస్తాము.



అభ్యాసం 5.1



1. ఒక ఆవాసప్రాంతంలో ప్రధాన రహదారి ఉత్తర-దక్షిణ దిశలలో ఉంది. దాని పటం కింద ఇవ్వబడినది. పటం సహాయంతో కింద ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి.


హోటల్
దుకాణం
ఆసుపత్రి
4వ వీథి
తపాలా కార్యాలయం
T
U
బడి
ఉద్యానవనం
నీటి ట్యాంక్
3వ వీథి
P
Q
R
S
O
N
M
L
2వ వీథి
I
J
K
G
F
E
1వ వీథి
N
S
ప్రధాన రహదారి

(i) మూడవవీధిలో ఎడమవైపు మూడోస్థానంలో ఏంవుంది?

(ii) రెండవవీథిలో కుడివైపు రెండవ ఇంటి పేరు ఏమిటి?

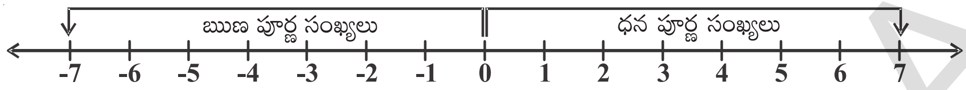
(iii) K గారి ఇల్లు ఏ స్థానంలో ఉందో వివరించండి.

(iv) తపాలకార్యాలయం యొక్క స్థానం ఎక్కడ ఉందో వివరించండి.

(v) ఆసుపత్రి స్థలం యొక్క స్థానం ఎక్కడ ఉందో వివరించండి.

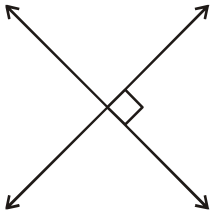
5.2 కార్టీజియన్ వ్యవస్థ

సంఖ్యారేఖపై వివిధరకాల సంఖ్యలను బిందువులను ఉపయోగించి సూచిస్తాము. కింది సంఖ్యారేఖను పరిశీలించండి.

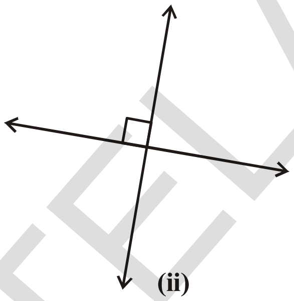

ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలు
ధన పూర్ణ సంఖ్యలు
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

సంఖ్యారేఖపై ఒకస్థిరబిందువు సున్నాకు ఇరువైపులా సమానదూరాలలో బిందువులు గుర్తించబడి ఉంటాయి. ఈ స్థిరబిందువు 'O' ను మూలబిందువు అని అంటారు. ధన సంఖ్యలన్నీ సున్నాకు కుడివైపున మరియు ఋణ సంఖ్యలన్నీ సున్నాకు ఎడమవైపున సూచిస్తాము.

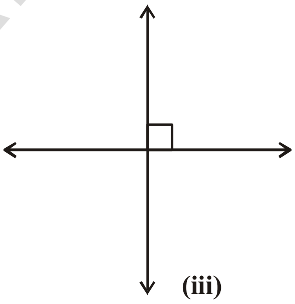
ఒకే తలంలోపరస్పరం లంబంగా ఉన్న అలాంటి రెండు సంఖ్యారేఖలను మనం తీసుకుంటాం. ఈ రేఖల ఆధారంగా చేసుకొని మనం బిందువులను గుర్తిస్తాము. కింది పటాన్ని పరిశీలించండి.



(i)



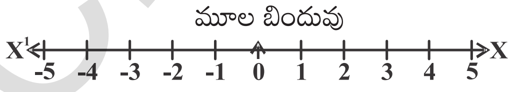
(ii)

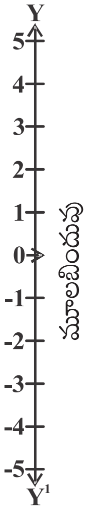


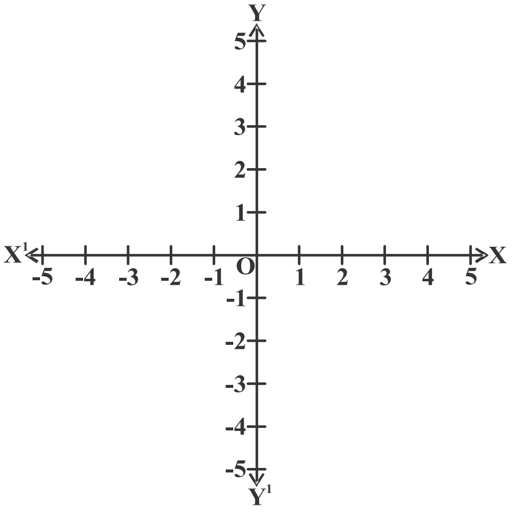
(iii)

పై పటంలో సూచించిన విధంగా లంబరేఖలు ఏదిశలోనైనా ఉండవచ్చు.

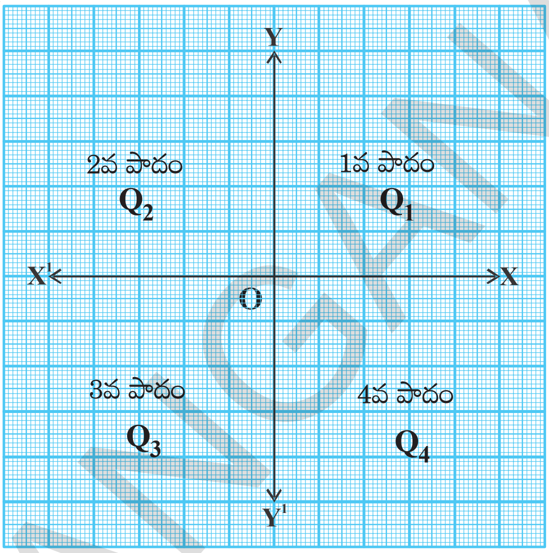
కాని ఈ ఆధ్యాయంలో మన సౌలభ్యం కొరకు పటం (iii) లో సూచించిన విధంగా ఒక రేఖను క్షితిజసమాంతరంగాను, మరొక రేఖను క్షితిజలంబం గాను గీచిన అవి ఒక బిందువు వద్ద పరస్పరంగా కలుస్తాయి. ఈ ఖండన బిందువునే 'O' మూలబిందువుగా సూచిస్తాము. క్షితిజసమాంతర రేఖ XX^1 ను X-అక్షం అని, క్షితిజలంబరేఖ YY^1 ను Y-అక్షం అని అంటాం.


మూల బిందువు
X'
X
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


Y
Y'
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
మూలబిందువు


Y
Y'
X'
X
O
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

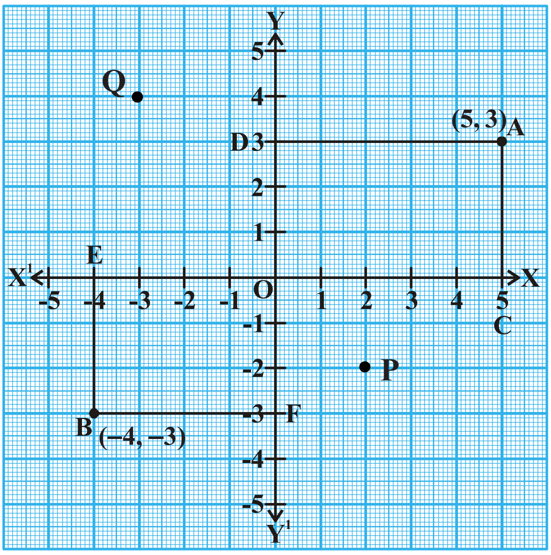
X^1X మరియు Y^1Y లు ఖండించుకునే బిందువును **మూలబిందువు** అని అంటారు. దీనిని 'O' చే సూచిస్తారు. $\overrightarrow{OX}$ యొక్క దిశలో ధన సంఖ్యలు ఉంటాయి కాబట్టి $\overrightarrow{OX}$ ను ధన X-అక్షం అని అలాగే $\overrightarrow{OY}$ దిశలో ధనసంఖ్యలు ఉంటాయి కాబట్టి $\overrightarrow{OY}$ ను ధన Y-అక్షం అని అంటారు. OX^1 యొక్క దిశలో ఋణసంఖ్యలు ఉంటాయి కాబట్టి OX^1 ను ఋణ X-అక్షం అని OY^1 దిశలో ఋణ సంఖ్యలు ఉంటాయి కాబట్టి OY^1 ను ఋణ Y-అక్షం అని పిలుస్తాము.



భాగాలను వరుసగా అపసవ్యదిశలో Q_1, Q_2, Q_3 మరియు Q_4 లతో సూచిస్తాము. వీటిని వరుసగా మొదటిపాదం, రెండవపాదం, మూడవపాదం మరియు నాలుగవపాదం అని పిలుస్తాము. ఈ తలాన్ని కార్టీజియన్ తలం (రెన్-డెకార్టె పేరుతో) అని లేదా నిరూపకతలం లేదా XY-తలం అని అంటాం. అలాగే X, Y అక్షాలను నిరూపకాక్షాలు అని అంటాం.

5.2.1 బిందువును కనుగొనుట

నిరూపకతలంలోని ఏదైనా బిందువును ఎలా నిర్ధారించాలో ఇప్పుడు చూద్దాం. క్రింది గ్రాఫ్‌పేపరు పై X, Y అక్షాలను తీసుకున్నాం. A మరియు B లు ఏవైనా రెండుబిందువులు అనుకోండి. A మరియు B బిందువులు ఏయే పాదాలలో ఉన్నాయో గమనించండి.



A బిందువు మొదటి పాదంలో (Q_1), B బిందువు మూడవపాదంలో (Q_3) ఉన్నాయి. ఇప్పుడు A, B లు అక్షాలనుంచి ఎంత దూరంలో ఉన్నాయో చూద్దాం. దీనికొరకు X-అక్షంపైకి AC లంబాన్ని మరియు Y-అక్షంపైకి AD లంబాన్ని గీద్దాం. అదేవిధంగా BE మరియు BF లంబాలను వరుసగా X మరియు Y అక్షాలపైకి గీద్దాం. ఇప్పుడు

(i) ధన X-అక్షందిశలో A బిందువు నుంచి Y-అక్షానికి గల లంబ దూరం AD=OC= 5 యూనిట్లు. దీనిని x-నిరూపకము అంటాం.

(ii) ధన Y-అక్షందిశలో A బిందువు నుంచి X-అక్షానికి గల లంబ దూరం AC=OD=3 యూనిట్లు. దీనిని y-నిరూపకము అంటాం.

కావున (5,3) ను A - యొక్క నిరూపకాలు అంటాం.

(iii) రుణ X-అక్షందిశలో B బిందువు నుంచి Y-అక్షానికి గల లంబ దూరం OE=BF= 4 యూనిట్లు. –4 ను B యొక్క X - అక్ష నిరూపకము అంటాం.

(iv) రుణ Y-అక్షందిశలో B బిందువు నుంచి X-అక్షానికి గల లంబ దూరం OF = EB = 3 యూనిట్లు. దీనిని మనము B యొక్క Y - అక్ష నిరూపకము అంటాం.

(–4, –3) ను B యొక్క నిరూపకాలు అంటాం.

ఈ లంబదూరాలను ఉపయోగించి ఒక బిందువుయొక్క నిరూపకాలు ఎలా రాయాలో ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

(i) X-అక్షంపై మూలబిందువునుంచి లంబపాదము వరకు గల దూరాన్ని ఆ బిందువు x-నిరూపకము అని అంటారు.

x-నిరూపకాన్ని ప్రథమ నిరూపకం అని కూడా అంటారు.

P యొక్క x-నిరూపకం $= 2$.

Q యొక్క x-నిరూపకం $= -3$.

(ii) Y-అక్షంపై మూలబిందువునుంచి లంబపాదము వరకు గల దూరాన్ని ఆ బిందువు y-నిరూపకము అని అంటారు.

y-నిరూపకాన్ని ద్వితీయ నిరూపకం అని కూడా అంటారు.

P యొక్క y-నిరూపకం $= -2$.

Q యొక్క y-నిరూపకం $= 4$.

కాబట్టి P బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (2, –2) మరియు Q బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (–3, 4) అవుతాయి.

ఒక తలంలోని ఏ బిందువు నిరూపకాలైనా ఏకైకం (unique) గా ఉంటాయి.

5.2.2. మూలబిందువు

1. X-అక్షం, Y-అక్షం ల ఖండన బిందువును మూలబిందువు లేదా ఆది బిందువు అని అంటాం. ఒక తలంలోని ఇతర బిందువులను స్థాపించడానికి, కనుగొనటానికి మూలబిందువును సూచిక బిందువుగా తీసుకుంటాం, మూలబిందువును 'O' చే సూచిస్తాము.

ఉదాహరణ-1 : (i) P(8,8) (ii) Q (6,–8) ల x నిరూపకం, y నిరూపకాలను వ్రాసి ప్రతి బిందువు యొక్క స్థానాన్ని కనుగొనుము.

సాధన : (i) P (8,8)

x - నిరూపకం (ప్రథమ నిరూపకం) = 8; y - నిరూపకం (ద్వితీయ నిరూపకం) = 8

P బిందువు X-అక్షం యొక్క ధనదిశలో Y-అక్షానికి 8 యూనిట్ల దూరంలో, మరియు Y-అక్షం యొక్క ధనదిశలో X-అక్షానికి 8 యూనిట్ల దూరంలో ఉంటుంది.

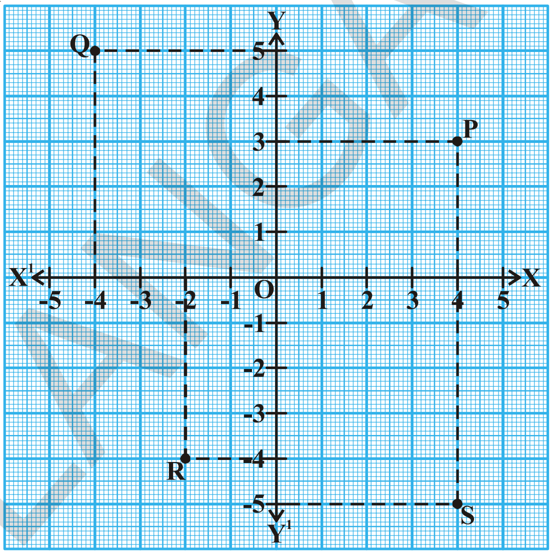
(ii) Q (6, –8)

x–నిరూపకం = 6 ; y–నిరూపకం = –8

Q బిందువు X-అక్షంయొక్క ధనదిశలో Y-అక్షానికి 6 యూనిట్ల దూరంలో మరియు Y-అక్షం రుణదిశలో X-అక్షానికి 8 యూనిట్ల దూరంలో ఉంటుంది.

ఉదాహరణ-2 : గ్రాఫ్ కాగితంలో సూచించిన బిందువుల నిరూపకాలు రాయండి.

సాధన : 1. P బిందువునుంచి X అక్షానికి లంబాన్ని గీయండి. లంబరేఖ X అక్షాన్ని 4 యూనిట్ల వద్ద ఖండించింది. కాబట్టి P యొక్క X నిరూపకం 4. అదేవిధంగా P బిందువునుండి Y అక్షానికి లంబాన్ని గీయండి. లంబరేఖ Y అక్షాన్ని 3 యూనిట్లవద్ద ఖండించింది. కాబట్టి P యొక్క Y నిరూకం 3. కాబట్టి P బిందువు నిరూపకాలు (4, 3).



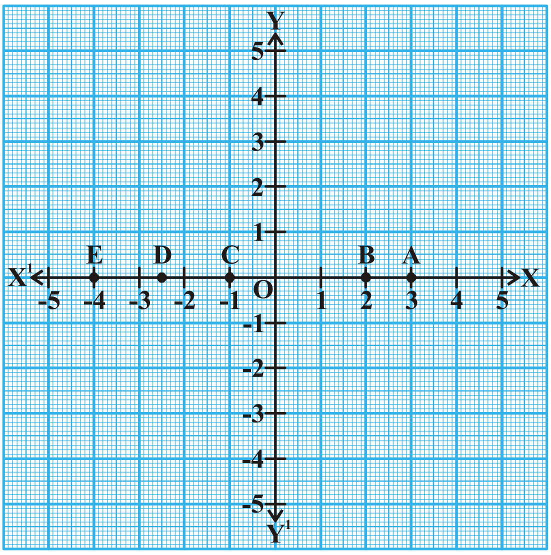
2. ఇదే పద్ధతి నుపయోగించిన Q బిందువు యొక్క X నిరూపకం –4 మరియు Y నిరూపకం 5. Q బిందువు నిరూపకాలు (–4, 5).

3. R బిందువు యొక్క x నిరూపకం (–2) మరియు y నిరూపకం (–4) R బిందువునిరూపకాలు (–2, –4).

4. S బిందువు నిరూపకాలు (4, –5)

ఉదాహరణ-3 : గ్రాఫ్‌కాగితంలో సూచించిన బిందువు నిరూపకాలు వ్రాయండి.

సాధన : A బిందువు Y- అక్షం నుంచి 3 యూనిట్ల దూరంలో మరియు X- అక్షం నుంచి 0 యూనిట్లదూరంలో ఉంది. కాబట్టి A యొక్క x- నిరూపకం 3 మరియు y నిరూపకం 0. A బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (3,0). ఆలోచించి చర్చించండి.



(i) B యొక్క నిరూపకాలు (2,0). ఎందుకు ?

(ii) C యొక్క నిరూపకాలు (–1,0). ఎందుకు ?

(iii) D యొక్క నిరూపకాలు (–2.5, 0). ఎందుకు ?

(iv) E యొక్క నిరూపకాలు (–4,0) ఎందుకు ?

పై గ్రాఫ్ నుంచి X- అక్షం పైగల ప్రతిబిందువు X- అక్షం నుంచి సున్నా దూరంలో కలవు. అని చెప్పవచ్చు. అందుచేత X- అక్షంపై ఉండే అన్ని బిందువుల y నిరూపకాలు 0.

X- అక్షం సమీకరణం $y = 0$ చే సూచింపబడును.

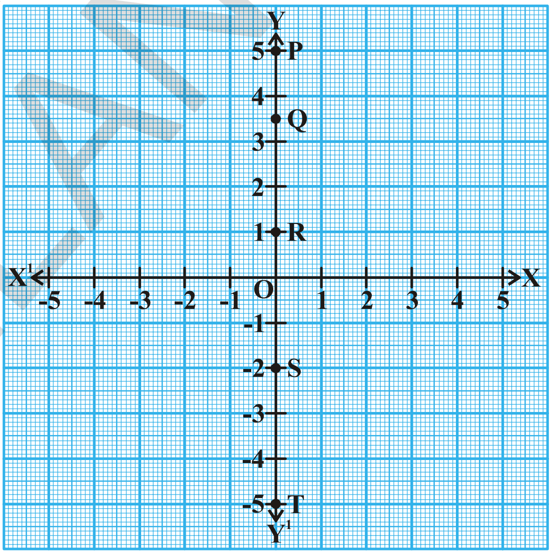
ఇవిచేయండి

కింద ఇచ్చిన బిందువులలో కొన్ని X- అక్షం పై ఉంటాయి. వాటిని గుర్తించండి.

(i) (0,5)
(ii) (0,0)
(iii) (3,0)
(iv) (-5,0)
(v) (-2,-3)
(vi) (-6,0)
(vii) (0,6)
(viii) (0,a)
(ix) (b,0)

ఉదాహరణ-4 : గ్రాఫ్ కాగితంపై గుర్తించబడిన బిందువుల నిరూపకాలు రాయండి.

సాధన :



(i) P బిందువు Y- అక్షం నుండి సున్నా యూనిట్ల దూరంలో ఉంది. కాబట్టి P యొక్క x నిరూపకం 0. P బిందువు X- అక్షం నుండి 5 యూనిట్ల దూరంలో ఉంది. కాబట్టి P యొక్క y నిరూపకం 5.

కాబట్టి P యొక్క నిరూపకాలు (0,5)

ఆలోచించండి, చర్చించండి :

(ii) Q యొక్క నిరూపకాలు (0, 3.5), ఎందుకు?

(iii) R యొక్క నిరూపకాలు (0,1), ఎందుకు?

(iv) S యొక్క నిరూపకాలు (0, –2), ఎందుకు?

(v) T యొక్క నిరూపకాలు (0, –5), ఎందుకు?

Y- అక్షంపై ఉండే ప్రతి బిందువు Y- అక్షం నుంచి 0 యూనిట్లదూరంలో ఉంటుంది. కాబట్టి Y- అక్షంపై ఉండే ప్రతి బిందువు x నిరూపకం సున్న.

Y- అక్షం సమీకరణం $x = 0$ చే సూచింపబడును.

5.2.3 మూలబిందువు నిరూపకాలు.

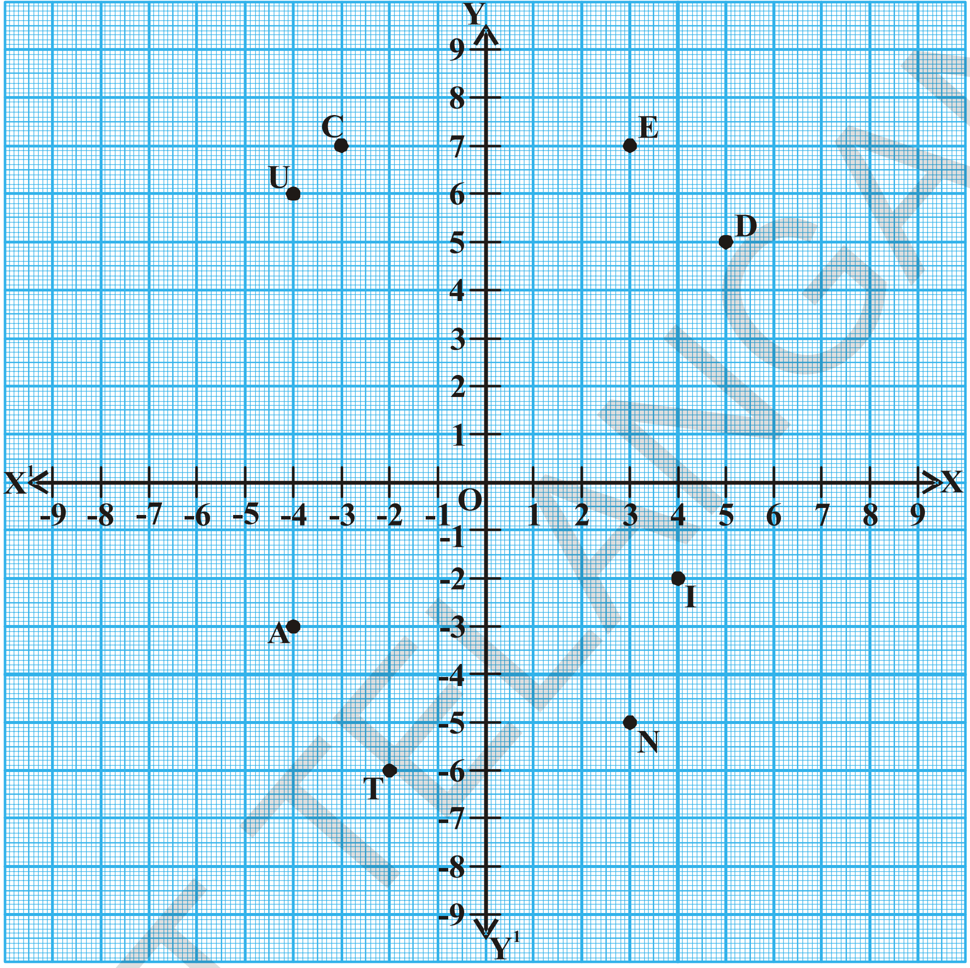
O బిందువు Y- అక్షంపై ఉంటుంది. కావున మూలబిందువు O యొక్క x నిరూపకం సున్న. అదేవిధంగా O బిందువు X- అక్షంపై కూడా ఉంటుంది. కావున మూలబిందువు y నిరూపకం సున్న.

అందుచేత మూలబిందువు నిరూపకాలు (0,0) అని చెప్పవచ్చు.

ప్రయత్నించండి.

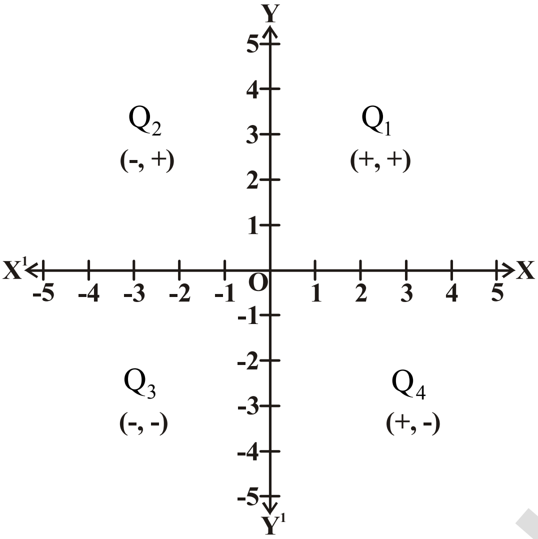
1. $(0, x)$ $(0, y)$ (0,2) మరియు (0,–5) లు ఏ అక్షంపై ఉంటాయి? ఎందుకు?
2. X- అక్షంపై ఉండే బిందువుల సాధారణరూపం వ్రాయండి.

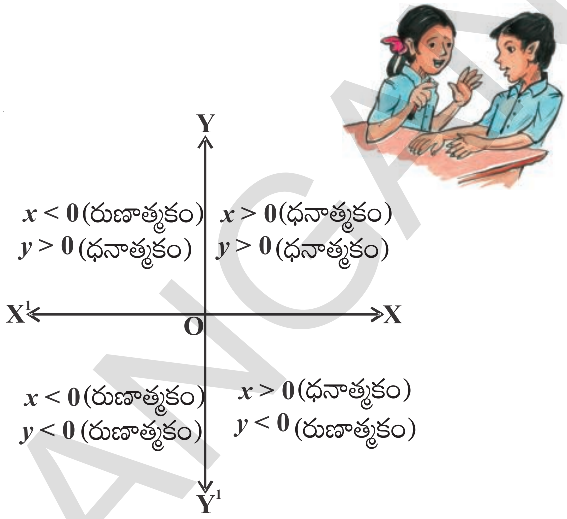
ఉదాహరణ-5 : కింది గ్రాఫ్‌లో బిందువులను పరిశీలించి పట్టికను పూర్తిచేయండి.



బిందువు	x-నిరూపకం	y-నిరూపకం	నిరూపకాలు	పాదము	నిరూపకాల గుర్తులు
E	3	7	E (3,7)	Q_1	(+, +)
D	.....	.....	.....	.....	.....
U	−4	6	U (−4,6)	.....	(−,+)
C	.....	.....	.....	.....	.....
A	−4	−3	A (−4, −3)	.....	(−,−)
T	.....	.....	.....	.....	.....
I	4	−2	I (4, −2)	.....	(+,−)
O	.....	.....	.....	.....	.....
N	.....	.....	.....	.....	.....

పై పట్టిక నుంచి బిందునిరూపకాల గుర్తులకు మరియు నిరూపకతలంలో ఆ బిందువు ఉండే పాదాలకు మధ్య సంబంధాన్ని మీరు పరిశీలించండి.


Y
5
4
3
2
1
Q₂
(-, +)
Q₁
(+, +)
X¹
-5 -4 -3 -2 -1
O
1 2 3 4 5
X
-1
-2
-3
-4
-5
Q₃
(-, -)
Q₄
(+, -)
Y¹


Y
x < 0 (రుణాత్మకం)
y > 0 (ధనాత్మకం)
x > 0 (ధనాత్మకం)
y > 0 (ధనాత్మకం)
X¹
O
X
x < 0 (రుణాత్మకం)
y < 0 (రుణాత్మకం)
x > 0 (ధనాత్మకం)
y < 0 (రుణాత్మకం)
Y¹

అభ్యాసం 5.2

1. నిరూపకతలంలో కింది బిందువులుండే పాదాలను రాయండి.

i) $(-2, 3)$ ii) $(5, -3)$ iii) $(4, 2)$ iv) $(-7, -6)$

v) $(0, 8)$ vi) $(3, 0)$ vii) $(-4, 0)$ viii) $(0, -6)$

2. కింది బిందువుల x నిరూపకం మరియు y నిరూపకాలు రాయండి.

i) $(4, -8)$ ii) $(-5, 3)$ iii) $(0, 0)$ iv) $(5, 0)$

v) $(0, -8)$

3. కింద ఇచ్చిన బిందువులలో ఏవి అక్షాలపై ఉంటాయి? అవి ఏ అక్షంపై ఉంటాయి?

i) $(-5, -8)$ ii) $(0, 13)$ iii) $(4, -2)$ iv) $(-2, 0)$

v) $(0, -8)$ vi) $(7, 0)$ vii) $(0, 0)$

4. కింది పటము నుపయోగించి కింది వానిని కనుగొనండి.

i) L యొక్క y నిరూపకం

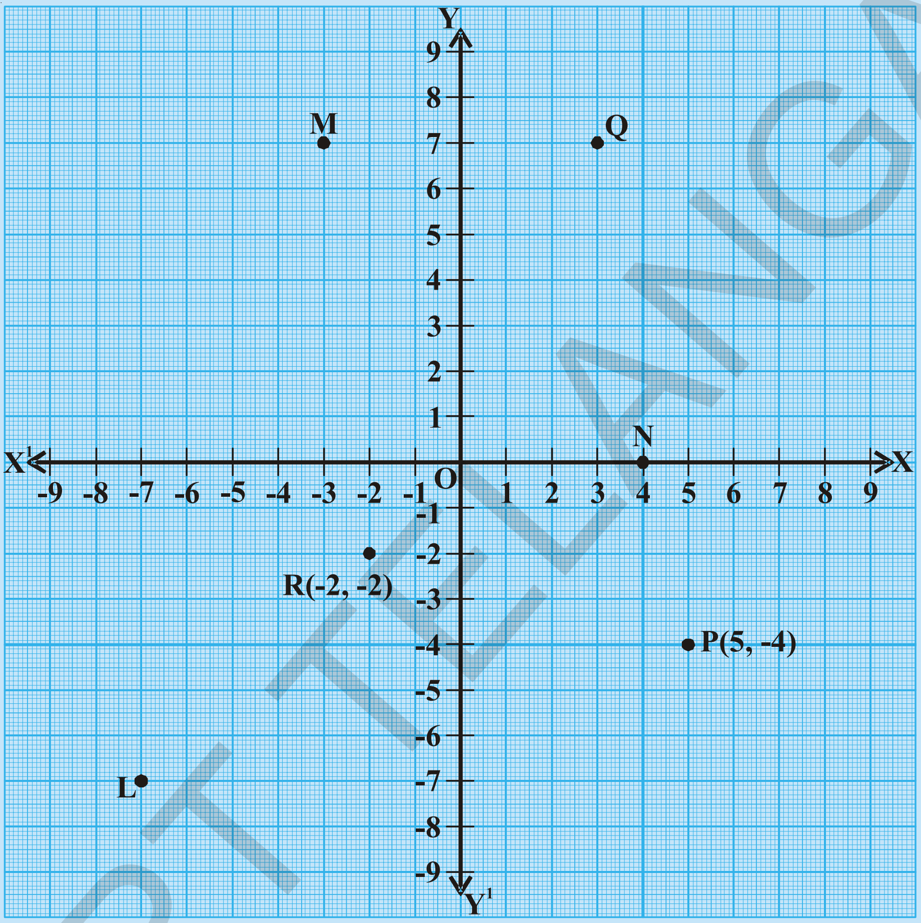
ii) Q యొక్క y నిరూపకం

iii) $(-2, -2)$ ను సూచించే బిందువు

iv) $(5, -4)$ ను సూచించే బిందువు

v) N బిందువు యొక్క x నిరూపకం

vi) M బిందువు యొక్క x నిరూపకం



5. కింది వాక్యాలు సత్యమా లేదా అసత్యమా తెలిపి వాక్యాన్ని సరిచేసి రాయండి.

i. నిరూపకతలంలో క్షితిజసమాంతరరేఖను Y - అక్షం అని అంటారు.

ii. నిరూపకతలంలో నిలువుగా ఉన్న రేఖను Y - అక్షం అని అంటారు.

iii. రెండు అక్షాలపై ఉన్న బిందువు మూలబిందువు.

iv. $(2, -3)$ బిందువు మూడవపాదంలో ఉంటుంది.

v. $(-5, -8)$ బిందువు నాలుగవ పాదంలో ఉంటుంది.

vi. $x < 0$, $y < 0$ అయితే $(-x , -y)$ అనే బిందువు ఒకటవ పాదంలో ఉంటుంది.

6. కింద ఇచ్చిన క్రమయుగ్మాలను గ్రాఫ్‌కాగితంపై గుర్తించి మీ పరిశీలనలు రాయండి.

i.. $(1, 0)$, $(3 , 0)$, $(-2 , 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(-6, 0)$

ii. $(0, 1)$, $(0 , 3)$, $(0 , -2)$, $(0, -5)$, $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(0, -6)$

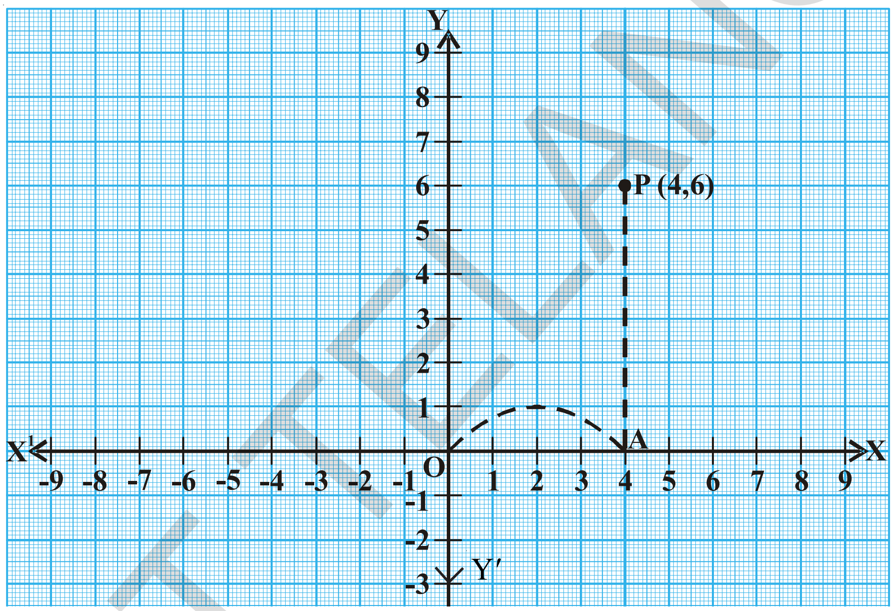
5.3 నిరూపకతలంలో బిందువును స్థాపించుట

ఇంత వరకు మనం నిరూపకతలంలో ఉన్న బిందువుల నిరూపకాలు ఎలా రాయాలో తెలుసుకున్నాం. ఇప్పుడు మనం బిందు నిరూపకాలు ఇస్తే వాటిని కార్టీజియన్ తలంలో ఎలా స్థాపించాలో నేర్చుకుందాం.

P (4, 6) అనే బిందువును గ్రాఫ్ కాగితంలో ఎలా స్థాపించాలో చూద్దాం.

P బిందువు ఏ పాదంలో ఉంటుందో ఊహించు.

P బిందువు యొక్క x-నిరూపకం 4 మరియు y-నిరూపకం 6.



∴ P బిందువు మొదటి పాదములో నుండును.

P (4, 6) బిందువును గ్రాఫ్ కాగితంలో స్థాపించటానికి కింది సోపానాలు పాటించండి.

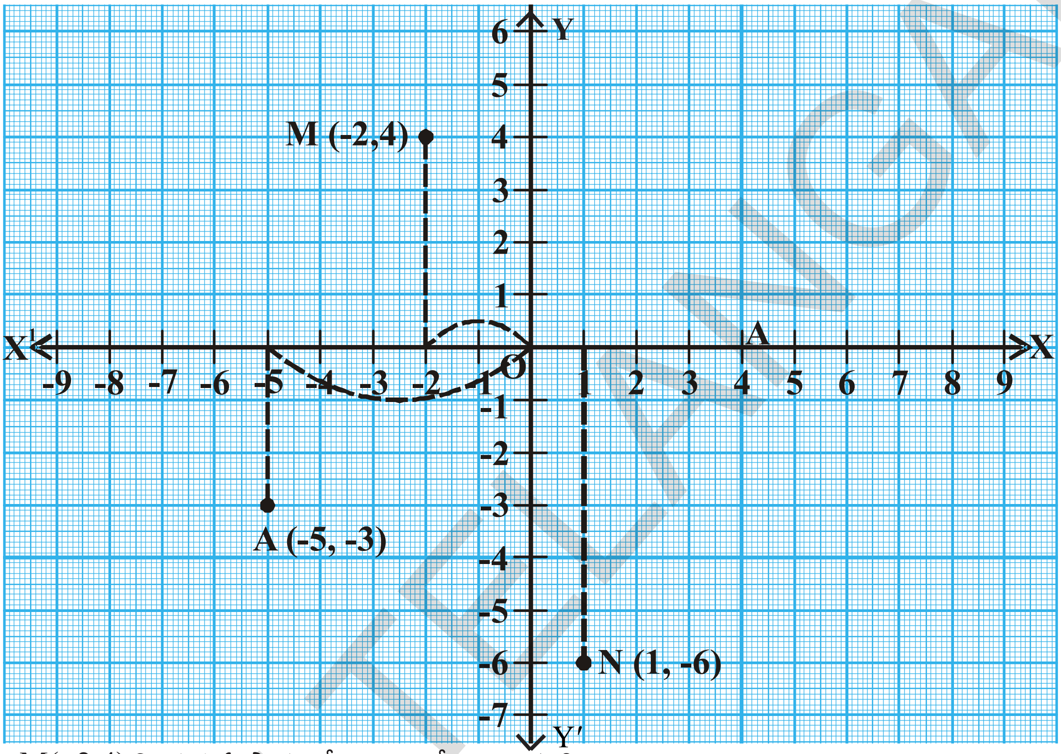
- గ్రాఫ్ కాగితంలో మూలబిందువు వద్ద లంబంగా ఖండించుకొనునట్లు రెండు సంఖ్యా రేఖలను గీయండి. క్షితిజసమాంతర రేఖను X-అక్షం అని, క్షితిజ లంబరేఖను Y-అక్షం అని పేరుపెట్టండి వీటి ఖండన బిందువును 'O' గా సూచించండి.
- X, Y - అక్షాలపై సంఖ్యలు రాయండి.
- x-నిరూపకాన్ని జ్ఞప్తిలో ఉంచుకొని మూలబిందువు నుంచి ప్రారంభించండి.
- x-నిరూపకం 4 గుర్తు + కాబట్టి ధన X-అక్షంవైపు 'O' కు కుడివైపునకు 4 యూనిట్లు A వరకు కదలండి.
- y-నిరూపకం 6 గుర్తు + కాబట్టి, A నుంచి ధన Y-అక్షందిశగా 'O' నుంచి పైకి 6 యూనిట్ల వరకు వెళ్లండి.
- ఈ బిందువును 'P' (4, 6) గా గుర్తించండి.

నిరూపకాల ఆధారంగా కార్టీజియన్ తలంలో ఈ విధంగా బిందువును స్థాపించడాన్ని బిందుస్థాపన అని అంటారు.

ఉదాహరణ-7 : కింది బిందువులను కార్టీజియన్ తలంలో స్థాపించండి.

(i) M (−2, 4), (ii) A (−5, -3), (iii) N (1, −6)

సాధన : గ్రాఫ్ కాగితంలో X-అక్షం మరియు Y-అక్షంను గీయండి.



(i) M(−2,4) బిందువు ఏ పాదంలో ఉంటుందో ఊహించండి.

$x < 0, y > 0$ కాబట్టి M రెండవ పాదంలో ఉంటుంది.

ఇప్పుడు బిందువును గుర్తిద్దాం.

M (−2,4) కావున మూలబిందువు 'O' నుంచి ప్రారంభించి X-అక్షం రుణదిశలో 2 వరకు వెళ్ళండి.

అక్కడి నుండి ధన Y-అక్షం దిశలో పైకి 4 యూనిట్ల వరకు వెళ్లి ఆగండి.

(ii) A (−5, −3) :

ఈ బిందువు మూడవ పాదంలో ఉంది.

మూలబిందువు 'O' నుంచి ప్రారంభించి X- అక్షం రుణదిశలో −5 వరకు వెళ్లి ఆగండి.

అక్కడి నుంచి రుణ Y-అక్షం దిశలో అంటే కిందివైపునకు 3 యూనిట్ల దూరం వరకు వెళ్లి ఆగండి. ఇదేమనకు కావలసిన బిందువు (−5, −3).

(iii) N (1, −6):

ఈ బిందువు ఏ పాదంలో ఉంటుంది?

మూలబిందువు O నుంచి ప్రారంభించి X-అక్షం ధనదిశలో 1 యూనిట్ వరకు వెళ్లి ఆగండి, అక్కడి నుంచి రుణ Y-అక్షం దిశలో కిందివైపునకు 6 యూనిట్ల దూరం వరకు వెళ్లి ఆగండి. ఇదే మనకు కావలసిన బిందువు. N (1, −6).

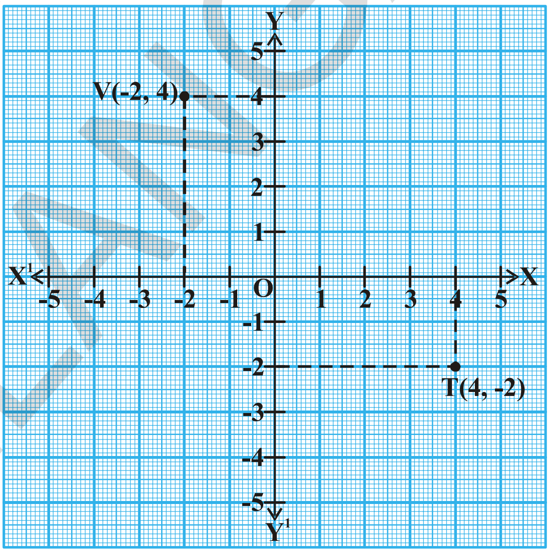
ఇవిచేయండి

కార్టీజియన్ తలంలో కింది బిందువులను స్థాపించండి.

1. B (–2, 3)   2. L (5, –8)   3. U (6, 4)   4. E (–3, –3)

ఉదాహరణ-8 : T(4, –2) మరియు V(–2, 4) లను కార్టీజియన్ తలంలో స్థాపించండి.

సాధన : గ్రాఫ్ కాగితంపై T (4, –2) మరియు V(–2, 4) లను గుర్తించుము.


Y
5
V(-2, 4)
4
3
2
1
X'
X
-5
-4
-3
-2
-1
O
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4
-5
T(4, -2)
Y'

(4, –2) మరియు (–2, 4) ఒకటేనా? విభిన్నాలా? ఆలోచించండి.

P (8, 3), Q(3, 8) లను గ్రాఫ్‌లో గుర్తించండి. A (4, –5) మరియు B(–5 , 4) లను గ్రాఫ్‌లో గుర్తించండి. దీని నుండి (x, y) బిందువు (y, x) బిందువులు విభిన్నాలా? కాదా? నిర్ణయించండి.

పై చర్చ నుంచి కార్టీజియన్ తలంలో (x, y) అనే బిందువు మరియు (y, x) అనే బిందువులు విభిన్నాలు అని మనం తెలుసుకున్నాం.

(x, y) లో x, y ల క్రమం ముఖ్యమైనది.

అని మనం గమనించవచ్చు. అందుచేత (x, y) ను క్రమయుగ్మం అని అంటారు.

$x \neq y$ అయితే $(x, y) \neq (y, x)$.

కాని $x = y$ అయితే $(x, y) = (y, x)$ అగును.

ఉదాహరణ-9 : ఒక గ్రాఫ్ కాగితంలో A(2, 2), B(6, 2), C (8, 5) మరియు D (4, 5) లను గుర్తించి అన్ని బిందువులను వరుసక్రమంలో సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడేలాగా కలపండి. సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : అన్ని బిందువులు Q_1 లో ఉన్నాయి.

గ్రాఫ్ నుంచి సమాంతర చతుర్భుజం భుజం

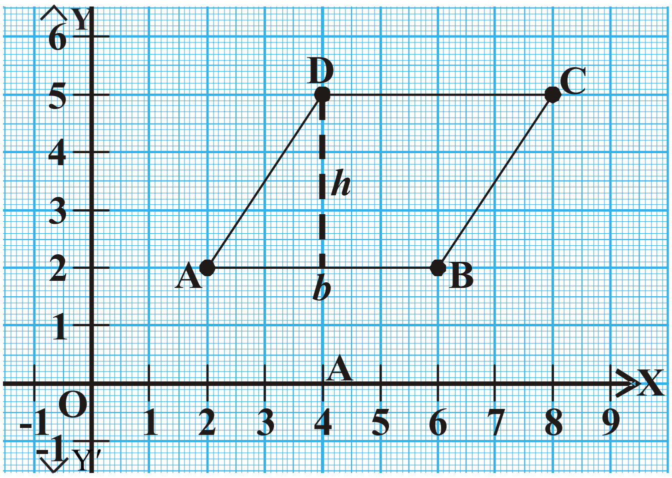
$b = AB = 4$ సెం.మీ.

ఎత్తు $h = 3$ సెం.మీ.

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

= భూమి × ఎత్తు = bh

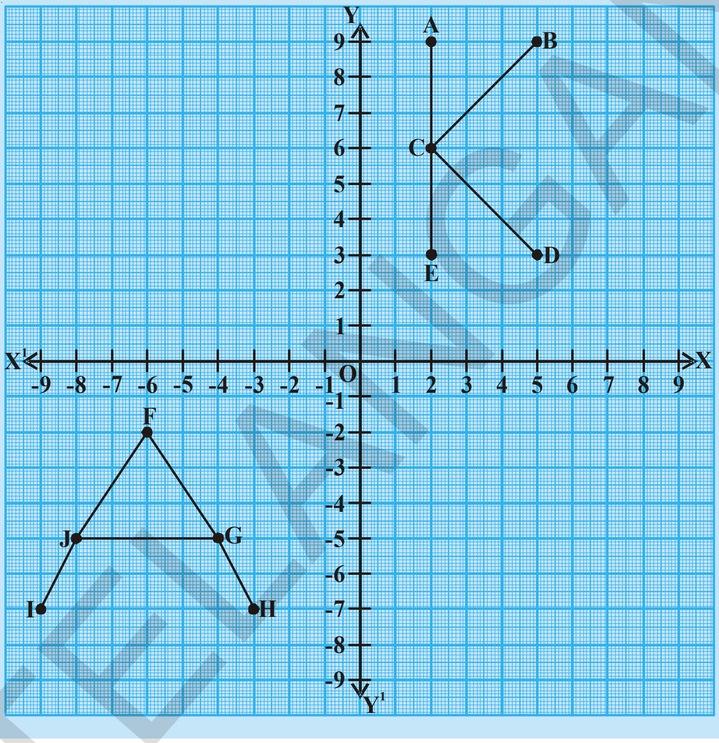
$= 4 \times 3 = 12$ చ.సెం.మీ


Y
6
D
C
5
4
h
3
2
A
B
b
1
A
X
-1
O
1
2
3
4
5
6
7
8
9
-1
Y'

ఇవిచేయండి

(i) A, B, C, D, E బిందువుల నిరూపకాలు రాయండి.

(ii) F, G, H, I, J బిందువుల నిరూపకాలు రాయండి.


Y
X
X'
Y'
O
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9
9 8 7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9

అభ్యాసం 5.3

1. కింద ఇచ్చిన బిందువులను క్రమయుగ్మంగారాసి కార్టీజియన్ తలంలో స్థాపించండి.

x	2	3	–1	0	–9	–4
y	–3	–3	4	11	0	–6
(x, y)						

2. (5, –8) మరియు (–8, 5) లు ఒకటేనా లేక విభిన్నాలా?

3. (1, 2), (1, 3), (1, –4), (1, 0) మరియు (1, 8) బిందువుల స్థానాన్ని వివరించండి. వీటిని గ్రాఫ్ కాగితంపై స్థాపించండి. మీరు ఏం గమనించారు?

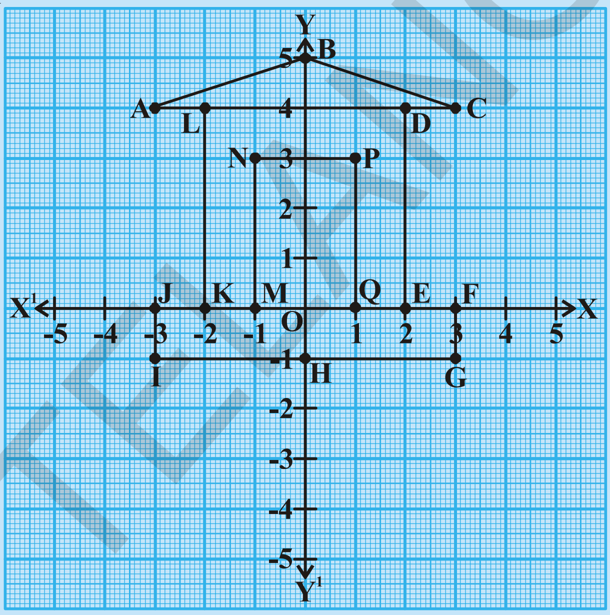
4. (5, 4), (8, 4), (3, 4), (0, 4), (–4, 4), (–2, 4) బిందువులను గ్రాఫ్ కాగితంపై గుర్తించండి. ఏం గమనించారు?

5. (0, 0) (0, 3) (4, 3) (4, 0) బిందువులను గ్రాఫ్ కాగితంపై గుర్తించి అదే వరుసక్రమంలో కలపండి. ఏర్పడిన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యమును కనుగొనండి.

6. (2, 3), (6, 3) మరియు (4, 7) బిందువులను నిరూపకతలంలో గుర్తించండి. ఈ బిందువులను రేఖా ఖండాలచే కలుపగా ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనండి.

7. కార్టీజియన్ తలంపై ప్రతి క్రమయుగ్మంలోని నిరూపకాల మొత్తం 5 అయ్యే విధంగా ఉండే ఆరు బిందువులను గుర్తించండి.
సూచన : (–2, 7) (1, 4) ....

8. కింది పటాన్ని పరిశీలించండి. పటం యొక్క శీర్షాలు A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, L, M. N, P, O మరియు Q బిందు నిరూపకాలు రాయండి.



9. ఒక గ్రాఫ్ కాగితంలో కింది క్రమయుగ్మాల జతలను బిందువులుగా గుర్తించి వాటిని రేఖా ఖండాలచే కలపండి.

i. (2, 5), (4, 7)
ii. (–3, 5), (–1, 7)
iii. (–3, –4), (2, –4)
iv. (–3, –5), (2, –5)
v. (4, –2), (4, –3)
vi. (–2, 4), (–2, 3)
vii. (–2, 1), (–2, 0)
viii. (4, 7), (4, –3)
ix. (4,–2), (2, –4)
x. (4, –3), (2,–5)
xi. (2, 5), (2, –5)
xii. (–3, 5), (–3, –5)
xiii. (–3, 5), (2, 5)
xiv. (–1, 7) (4, 7)

మీరేమి గమనించారు.

10. ఒక గ్రాఫ్ కాగితంపై కింద ఇవ్వబడిన బిందువుల జతలను అక్షములపై గుర్తించి రేఖా ఖండాలచే కలపండి.

(1, 0), (0, 9); (2, 0), (0, 8); (3, 0) (0, 7); (4, 0) (0, 6);

(5, 0) (0, 5); (6, 0) (0, 4); (7, 0) (0, 3); (8, 0) (0, 2);

(9, 0) (0, 1).

కృత్యం

గ్లోబును చూసి హైదరాబాద్, న్యూఢిల్లీ, చెన్నై మరియు విశాఖపట్నం నగరాలను అక్షాంశ, రేఖాంశాల ఆధారంగా గుర్తించండి.

సృజనాత్మక కృత్యం

ఒక గ్రాఫ్ కాగితంపై కింద ఇవ్వబడిన బిందువుల జతలను గుర్తించి రేఖాఖండాలచే కలపండి.

(–9, 0), (–6, 4), (–2, 5), (2, 4), (5, 0) (–2, 0),

(–2, –8), (–3, –9), (–4, –8).

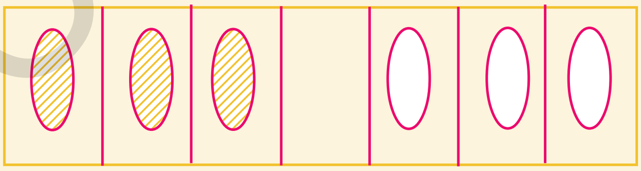
మీరు ఏమి గమనించారు?

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

- ఒక బిందువు యొక్క స్థానాన్ని గుర్తించుటకు మనకు రెండు నిర్దేశాలు (సూచనలు) అవసరం.
- పరస్పరం లంబంగా ఉండే రెండు సంఖ్యారేఖల ఆధారంగా మనం ఒక తలంలో ఏదైనా బిందువు లేదా వస్తువు స్థానాన్ని నిర్ధారించవచ్చు. క్షితిజసమాంతర రేఖను (X-అక్షం) అని నిలువు లంబరేఖను (Y-అక్షం) అని అంటారు.
- రెనె డెకార్టె శాస్త్రజ్ఞుడి పేరు మీదగా నిరూపకతలాన్ని కార్టీజియన్ తలం అని కూడా అంటారు.
- X, Y అక్షాల ఖండన బిందువును మూల బిందువు అని అంటారు. దీని నిరూపకాలు (0,0),
- (x, y) క్రమయుగ్మము (y, x) క్రమయుగ్మము ఒకటి కాదు.
- X-అక్షం యొక్క సమీకరణం $y = 0$.
- Y-అక్షం యొక్క సమీకరణం $x = 0$.

మెదడుకు మేత

కింద ఇచ్చిన కార్డులను పరిశీలిస్తే మీకు ఒక ప్రహేళిక (పజిల్) కనబడుతుంది.



దీర్ఘవృత్తాలు గల తెల్ల కార్డులు, నల్ల కార్డులను పరస్పరం ఇచ్చిన నియమాలకు లోబడి వాటి స్థానాలను మార్చాలి. (1) ఒకే రంగు గల కార్డులు ఒక దానిపై నుండి మరొకటి మార్చకూడదు. (2) ఏ కార్డు అయినా ఒక్కసారి మాత్రమే ఒక్క స్థానానికి మారేటట్లు కదపాలి. ఈ విధంగా రికార్డులను మార్పిడి చేసి పజిల్ పూర్తి చేయడానికి పట్టే కనిష్ఠ కదలకలు ఎన్ని?

కనిష్ఠ కదలికలు సుమారు 15–20 సార్లు కావచ్చు. మీరు మరిన్ని తక్కువ సార్లు మార్చడం ద్వారా మెరుగు పర్చగలరా? కార్డుల సంఖ్యను పెంచితే మరింత మెరుగైన పజిల్ తయారు చేయవచ్చు.

06

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు (Linear Equations in Two Variables)

6.1 పరిచయం

ఈ కింది సమస్యల లాంటివి మీకు అనేక సార్లు ఎదురయ్యే ఉంటాయి.

(i) ఐదు పెన్నుల వెల ₹ 60 అయిన ఒక్క పెన్ను వెల ఎంత?

(ii) ఒక సంఖ్యకు 7 కలిపిన ఫలితము 51 అవుతుంది. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సందర్భము (i) లో పెన్ను వెల తెలియదు. సందర్భం (ii) లో సంఖ్య ఎంతో తెలియదు. మరి ఇలాంటి సమస్యలను ఎలా సాధించగలుగుతాము? ఇలాంటి సందర్భాలలో తెలియని రాశులను x, y లేదా z లచే సూచిస్తూ సమీకరణాలను తయారుచేసుకుంటాం.

ఉదాహరణకి సందర్భాలు (i) కి

5 × పెన్ను వెల = ₹60 అని రాయవచ్చు.

పెన్ను వెల ₹'y' అనుకుంటే

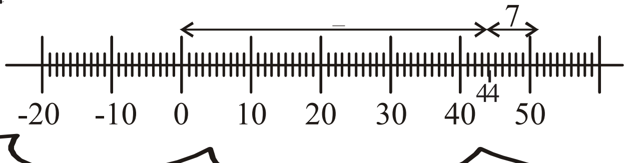
అప్పుడు $5 \times y = 60$ లేదా $5y = 60$ అవుతుంది.

దీనిని సాధించడం ద్వారా పెన్ను ఖరీదును కనుగొనవచ్చు.

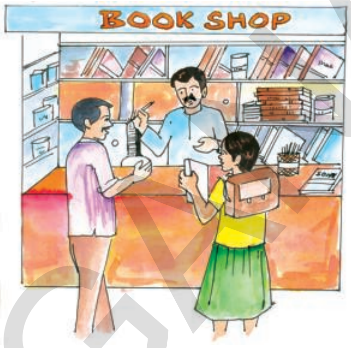
ఇదే విధంగా సందర్భం (ii) కు కూడా ఒక సమీకరణాన్ని తయారుచేసి దానిని సాధించడం ద్వారా సంఖ్యను కనుగొనవచ్చు.

$x + 3 = 0$, $x + \sqrt{3} = 0$ మరియు $\sqrt{2}\,x + 5 = 0$ వంటి సమీకరణాలు ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలకు ఉదాహరణలు. ఇలాంటి రేఖీయ సమీకరణాలకు ఒకే ఒక విలువ సాధనగా ఉంటుందనేది మీకు తెలుసు. ఈ సాధనను సంఖ్యారేఖపై ఎలా సూచించాలో కూడా మీరు నేర్చుకొని యున్నారు.

మూర్తి పై సందర్భము (ii) యొక్క సాధనను సంఖ్యారేఖపై ఈ కింది విధంగా సూచించాడు.



6.2 రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు



ఈ కింది సందర్భమును పరిశీలించండి.

కావ్య ఒకసారి వాళ్ల నాన్నగారితో కలిసి 4 నోటు పుస్తకాలు 2 పెన్నులు కొనడానికి పుస్తకాల దుకాణానికి వెళ్లింది. ఈ మొత్తం వస్తువులకు వాళ్ల నాన్నగారు ₹ 100 చెల్లించినాడు.

కావ్యకు ఒక్కొక్క నోటు పుస్తకము వెల, ఒక్కొక్క పెన్ను వెల విడివిడిగా తెలియదు. ఈ సమాచారమును మీరు సమీకరణ రూపంలో రాయగలరా?

ఇచ్చట మనకు ఒక్కొక్క నోటు పుస్తకము వెల కూడా తెలియదు. అనగా రెండు తెలియని రాశులు గలవు. వీనిని సూచించుటకు x మరియు y లను ఉపయోగిద్దాం. అనగా ఒక్కొక్క నోటు పుస్తకము వెల ₹x మరియు ఒక్కొక్క పెన్ను వెల ₹y అనుకొనిన పై సమాచారమును

సమీకరణ రూపంలో $4x + 2y = 100$ అని రాయవచ్చు.

పై సమీకరణంలో x మరియు y ల ఘాతాంకాలను పరిశీలించారా?

పై సమీకరించ 'x', 'y' చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణ రూపంలో ఉంది.

ఒక రేఖీయ సమీకరణములో రెండు చరరాశులు ఉంటే దానిని రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణము అంటాము.

అనగా $4x + 2y = 100$ అనునది రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణమునకు ఒక ఉదాహరణ.

సాధారణంగా చరరాశులను 'x' మరియు 'y' లచే సూచించడం సాంప్రదాయమైనప్పటికీ ఇతర అక్షరాలను కూడా వాడవచ్చు. ఉదాహరణకు

$p + 3q = 50$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v = \sqrt{11}$, $\frac{s}{2} - \frac{t}{3} = 5$ మరియు $3 = \sqrt{5}x - 7y$ ఇవన్నీ కూడా రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు అవుతాయి.

ఇవే సమీకరణాలను వరుసగా ఈ కింది విధంగా కూడా రాయవచ్చు అని గమనించండి.

$$p + 3q - 50 = 0,\ \sqrt{3}u + \sqrt{2}v - \sqrt{11} = 0,\ \frac{s}{2} - \frac{t}{3} - 5 = 0 \text{ మరియు } \sqrt{5}x - 7y - 3 = 0.$$

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణం యొక్క సాధారణ రూపము $ax + by + c = 0$. a, b, c లు వాస్తవసంఖ్యలు, a, b లు రెండూ ఒకేసారి సున్నాకావు.

ఉదాహరణ-1 : సచిన్ మరియు సెహ్వాగ్ కలిసి 137 పరుగుల చేశారు. ఈ సమాచారమును రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణంగా వ్యక్తపరచండి.

సాధన : సచిన్ చేసిన పరుగుల సంఖ్యను 'x' మరియు సెహ్వాగ్ చేసిన పరుగుల సంఖ్యను 'y' అనుకొనిన

పై దత్తాంశమును సమీకరణ రూపంలో

$x + y = 137$ గా రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ-2 : హేమ వయస్సు, మేరి వయస్సుకు 4 రెట్లు. ఈ దత్తాంశమునకు సరిపోవు రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణమును రాయుము?

సాధన : హేమ వయస్సును 'x' సంవత్సరాలు అని మేరి వయస్సును 'y' సంవత్సరాలు అనుకొనుము.

అయితే దత్తాంశము ప్రకారము

హేమ వయస్సు = మేరి వయస్సుకు 4 రెట్లు.

అనగా $x = 4y$

$\Rightarrow x - 4y = 0$ (ఎలా?)

ఇది ఒక రేఖీయ సమీకరణము అయినది.

ఉదాహరణ-3 : ఒక సంఖ్య, దానిలోని అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చే సంఖ్య కంటే 27 ఎక్కువ. సంఖ్యలోని ఒకట్ల, పదుల స్థానములోని అంకెలను వరుసగా x, y అనుకొని ఈ దత్తాంశమునకు సరిపోవు రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణమును రాయుము?

సాధన : ఒకట్ల స్థానములోని అంకె x మరియు పదుల స్థానములోని అంకె y అనుకొనిన ఆ సంఖ్య $= 10y + x$

సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చే సంఖ్య = $10x + y$ (రెండు అంకెల సంఖ్య యొక్క స్థానవిలువలు గుర్తుకు తెచ్చుకోండి).

$\therefore$ దత్తాంశము ప్రకారము

సంఖ్య $-$ తారుమారు చేయగా వచ్చే సంఖ్య $= 27$.

$\therefore\ 10y + x - (10x + y) = 27$

$\Rightarrow 10y + x - 10x - y - 27 = 0$

$\Rightarrow 9y - 9x - 27 = 0$

$\Rightarrow y - x - 3 = 0$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణము $x - y + 3 = 0$.

ఉదాహరణ-4 : కింది ప్రతి సమీకరణమును $ax + by + c = 0$ రూపంలో రాసి a, b మరియు c విలువలను కనుగొనుము?

i) $3x + 4y = 5$

ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$

iii) $3x = y$

iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$

v) $3x - 7 = 0$

సాధన : (i) $3x + 4y = 5$ ను

$3x + 4y - 5 = 0$ గా రాయవచ్చు.

ఇచ్చట $a = 3$, $b = 4$ మరియు $c = -5$.

(ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$ ని

$1.x - \sqrt{3}y - 5 = 0$ గా రాయవచ్చు.

ఇచ్చట $a = 1, b = -\sqrt{3}$ మరియు $c = -5$.

(iii) సమీకరణము $3x = y$ ని

$3x - y + 0 = 0$ గా రాయవచ్చు.

ఇచ్చట $a = 3, b = -1$ మరియు $c = 0$.

(iv) ఇచ్చిన సమీకరణము $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$.

$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{6} = 0$;

$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ మరియు $c = \frac{-1}{6}$

(v) $3x - 7 = 0$ ని

$3x + 0.y - 7 = 0$ గా రాయవచ్చు.

$\therefore a = 3, b = 0; c = -7$

ఉదాహరణ-5 : ఈ కింది ప్రతి సమీకరణము $ax + by + c = 0$ రూపంలోకి మార్చి a, b మరియు c విలువలను కనుగొనుము?

i) $x = -5$

ii) $y = 2$

iii) $2x = 3$

iv) $5y = -3$

సాధన :

వరుస సంఖ్య	ఇవ్వబడిన సమీకరణము	$ax + by + c = 0$ రూపము	a, b, c విలువలు		
			a	b	c
1	$x = -5$	$1.x + 0.y + 5 = 0$	1	0	5
2	$y = 2$	$0.x + 1.y - 2 = 0$	0	1	–2
3	$2x = 3$	---	---	---	---
4	$5y = -3$	----	----	---	---

ఇవి చేయండి

2. కింది రేఖాసమీకరణాలను $ax + by + c = 0$ రూపంలో రాసి, ప్రతి సందర్భంలోనూ a, b మరియు c విలువలు రాయండి.

i) $3x + 2y = 9$ ii) $-2x + 3y = 6$ iii) $9x - 5y = 10$

iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 5 = 0$ v) $2x = y$

అభ్యాసం 6.1

1. కింది సమీకరణాలను $ax+by+c=0$ రూపంలో రాసి a, b మరియు c విలువలను కనుగొనుము?

i) $8x + 5y - 3 = 0$ ii) $28x - 35y = -7$ iii) $93x = 12 - 15y$

iv) $2x = -5y$ v) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$ vi) $y = \frac{-3}{2}x$

vii) $3x + 5y = 12$

2. కింది ప్రతి సమీకరణమును $ax + by + c = 0$ గా రాసి a, b మరియు c విలువలను కనుగొనుము?

i) $2x = 5$ ii) $y - 2 = 0$ iii) $\frac{y}{7} = 3$ iv) $x = \frac{-14}{13}$

3. ఈ దత్తాంశమునకు సరిపోవు రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణమును రాయుము.

   (i) రెండు సంఖ్యల మొత్తము 34.

   (ii) ఒక బాల్ పెన్ను ఖరీదు, సిరాపెన్ను ఖరీదులో సగానికి కంటే ₹ 5 లు తక్కువ.

   (iii) భార్గవికి వచ్చిన మార్కులు, సింధు మార్కులకు రెట్టింపు కంటే 10 ఎక్కువ.

   (iv) ఒక పెన్సిల్ వెల ₹ 2 మరియు ఒక బాల్ పెన్ను వెల ₹ 15. షీలా కొన్ని పెన్సిల్స్‌ను, కొన్ని బాల్ పెన్నులను కొని ₹ 100 లు చెల్లించింది.

   (v) యామిని, ఫాతిమా 9వ తరగతి చదువుచున్నారు. వీరివురు కలసి ప్రధాన మంత్రి సహాయ నిధికి ₹ 200/- లు విరాళమిచ్చారు.

   (vi) ఒక సంఖ్య, దానిలోని అంకెలను తారుమారుచేయగా వచ్చే సంఖ్యల మొత్తము 121. (సూచన: మొదటి సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానములోని అంకె 'x' మరియు పదుల స్థానములోని అంకె 'y' అనుకొనుము)

6.3 రేఖీయ సమీకరణాల సాధన

$3x - 4 = 8$ వంటి ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలకు ఒకే ఒక సాధన ఉంటుందని మీకు తెలుసు.

$3x - 4 = 8$ సమీకరణానికి సాధన ఏమిటి?

$3x - 2y = 5$ సమీకరణాన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఇలాంటి సమీకరణాలకు సాధనను ఏ విధంగా కనుక్కోగలము? సాధనలో ఒకే ఒక విలువ ఉంటుందా? ఒకటి కంటే ఎక్కువ విలువలు అవసరమా? పరిశీలించండి.

$x = 3$ ఈ సమీకరణానికి ఒక సాధన అవుతుందని మీరు చెప్పగలరా? పరిశీలిద్దాం!

$x = 3$ ని పై సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించిన

$$3\,(3) - 2y = 5$$

$$9 - 2y = 5$$

అయితే y యొక్క అన్ని విలువలకు పై సమీకరణము తృప్తిపడుతుందని చెప్పలేము. అంటే ఇప్పటికీ ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క సాధనను కనుగొనలేము. 'x' తో పాటు 'y' విలువ కూడా తెలిసినప్పుడే అది సాధన అవుతుంది. y యొక్క విలువను పై $9 - 2y = 5$ నుంచి పొందగలము. $9 - 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4$ లేదా $y = 2$

అనగా $3x - 2y = 5$ సమీకరణంను తృప్తిపరిచే విలువలు $x = 3$ మరియు $y = 2$. అంటే రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణమును తృప్తిపరచడానికి 'x' కు ఒక విలువ, y కి ఒక విలువ, మొత్తం రెండు విలువలు అవసరము.

ఈ విధంగా రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణమును తృప్తిపరిచే ‘x’ మరియు ‘y’ విలువల జతను దాని సాధన అంటాము.

$3x - 2y = 5$ యొక్క సాధన $x = 3$ మరియు $y = 2$ అని మనము గమనించాము. దీనిని $(3, 2)$ గా రాస్తాము. ఇలా రాస్తున్నప్పుడు మొదట ‘x’ విలువనూ తరువాత ‘y’ విలువను రాస్తాము.

ఇదే సమీకరణానికి ఇతర సాధన ఏమైనా ఉన్నదా? ఏదైనా ఒక సంఖ్యను ఉదాహరణకు $x = 4$ తీసుకొని దీనిని $3x - 2y = 5$ లో ప్రతిక్షేపించిన ఈ సమీకరణము $12 - 2y = 5$ అవుతుంది. ఇది ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణమని గమనించగలరు. దీనిని సాధించుట ద్వారా y యొక్క విలువను కనుగొనుము.

$$y = \frac{12-5}{2} = \frac{7}{2}, \quad \text{కావున } \left(4, \frac{7}{2}\right) \text{ కూడా మరిఒక సాధన అవుతుంది } 3x - 2y = 5.$$

మీరు మరికొన్ని సాధనలను కనుగొనగలరా? $(1, -1)$ లో ప్రయత్నించండి. పై చర్చ నుంచి రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణానికి చాలా సాధనలు ఉండునని నిర్ధారించగలము.

సూచన : ఇలాంటి సమీకరణాలలో $x = 0$ ప్రతిక్షేపించి ‘y’ విలువను, $y = 0$ ప్రతిక్షేపించి ‘x’ విలువను కనుగొనుట ద్వారా రెండు సాధనలను సులభంగా పొందగలము.

ప్రయత్నించండి

పై సమీకరణమునకు 5 సాధనలను కనుగొనుము.

ఉదాహరణ-6 : $4x + y = 9$ సమీకరణమునకు 4 వేరువేరు సాధనలను కనుగొనుము. (పట్టికలో ఖాళీలను పూరింపుము)

సాధన :

వరుస సంఖ్య	x విలువ లేదా y విలువ	రెండవ చరరాశి విలువ		సాధన
1.	$x = 0$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4 \times 0 + y = 9$ $\Rightarrow y = 9$	(0,9)
2.	$y = 0$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4x + 0 = 9$ $\Rightarrow 4x = 9$ $\Rightarrow x = 9/4$	$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$
3.	$x = 1$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4 \times 1 + y = 9$ $\Rightarrow 4 + y = 9$ $\Rightarrow y = 5$	——
4.	$x = -1$		——	$(-1, 13)$

$\therefore (0, 9), \left(\frac{9}{4}, 0\right), (1, 5)$ మరియు $(-1, 13)$ లు కొన్ని సాధనలు.

ఉదాహరణ-7 : కింది వానిలో ఏవి $x + 2y = 4$ సమీకరణానికి సాధన అవుతాయి. (పట్టికలో ఖాళీలను పూరింపుము)

i) $(0, 2)$ ii) $(2, 0)$ iii) $(4, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

v) $(1, 1)$ vi) $(-2, 3)$

సాధన : ఒక జతను ఇచ్చిన సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించినపుడు LHS = RHS అయిన ఆ జతను ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క సాధన అంటామని మనకు తెలుసు.

ఇవ్వబడిన సమీకరణము $x + 2y = 4$

వరుస సంఖ్య	ఇవ్వబడిన జతలు	LHS యొక్క విలువ	RHS యొక్క విలువ	LHS, RHS ల మధ్య సంబంధం	సాధన అగును / సాధన కాదు
1.	$(0, 2)$	$x + 2y = 0 + (2 \times 2)$ $= 0 + 4 = 4$	4	$\therefore$ LHS=RHS	$\therefore (0, 2)$ సాధన అగును
2.	$(2, 0)$	$x + 2y = 2 + (2 \times 0)$ $= 2 + 0 = 2$	4	......	$(0, 2)$ సాధన కాదు
3.	$(4, 0)$	$x + 2y = 4 + (2 \times 0)$ $= 4 + 0 = 4$	4	LHS = RHS	సాధన అగును ____
4.	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$	$x + 2y = \sqrt{2} + 2(-3\sqrt{2})$ $= \sqrt{2} - 6\sqrt{2}$ $= -5\sqrt{2}$	____	LHS ≠ RHS	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ సాధన కాదు
5.	$(1, 1)$	____	4	LHS ≠ RHS	$(1, 1)$ సాధన కాదు
6.	____	$x + 2y = -2 + (2 \times 3)$ $= -2 + 6 = 4$	4	LHS = RHS	$(-2, 3)$ సాధన అగును

ఉదాహరణ-8 : $5x - 7y = k$ కు $x = 3, y = 2$ సాధన అయిన k విలువను కనుగొనుము. k విలువతో వచ్చే సమీకరణం రాయండి.

సాధన : $x = 3, y = 2$ సాధన అని ఇవ్వబడింది కనుక

$5x - 7y = k$ అయిన $5 \times 3 - 7 \times 2 = k$

$$\Rightarrow 15 - 14 = k$$

$$\Rightarrow 1 = k$$

$$\therefore k = 1$$

కావలసిన సమీకరణం $5x - 7y = 1$.

ఉదాహరణ-9 : $5x + 3y - 7 = 0$ యొక్క సాధన $x = 2k + 1$ మరియు $y = k$ అయిన k విలువ ఎంత?

సాధన : $5x + 3y - 7 = 0$ సమీకరణమునకు $x = 2k + 1; y = k$ సాధన ఇవ్వబడింది.

$$\Rightarrow 5(2k + 1) + 3k - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 10k + 5 + 3k - 7 = 0$$

$\Rightarrow 13k - 2 = 0$ (ఇది ఒక ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణము).

$$\Rightarrow 13k = 2$$

$$\therefore k = \frac{2}{13}$$

అభ్యాసం 6.2

1. కింది వానికి ప్రతీ సమీకరణానికి మూడు వేరువేరు సాధనలను కనుగొనుము.

   i) $3x + 4y = 7$ ii) $y = 6x$ iii) $2x - y = 7$

   iv) $13x - 12y = 25$ v) $10x + 11y = 21$ vi) $x + y = 0$

2. కింది సమీకరణాలకు (0, a) మరియు (b, 0) రూపంలోని సాధనలను కనుగొనండి.

   i) $8x - y = 34$ ii) $3x = 7y - 21$ iii) $5x - 2y + 3 = 0$

3. కింది వానిలో ఏవి $2x - 5y = 10$ సమీకరణానికి సాధనలు అవుతాయి.

   i) (0, 2) ii) (0, –2) iii) (5, 0) iv) $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ v) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

4. $2x + 3y = k$ సమీకరణానికి $x = 2, y = 1$ సాధన అయిన k విలువను కనుగొనుము. ఫలిత సమీకరణమునకు మరి రెండు సాధనలను కనుగొనుము?

5. $3x - 2y + 6 = 0$ కు $x = 2 - \alpha$ మరియు $y = 2 + \alpha$ సాధన అయిన 'α' విలువను కనుగొనుము? ఫలిత సమీకరణంనకు 3 సాధనలను కనుగొనుము.

6. $3x + ay = 6$ కు $x = 1, y = 1$ సాధన అయితే a విలువ ఎంత?

7. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలను ఏవైనా ఐదింటిని రాయండి. ప్రతి సమీకరణానికి 3 వేరువేరు సాధనలను కనుగొనండి.

6.4 రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణానికి గ్రాఫ్

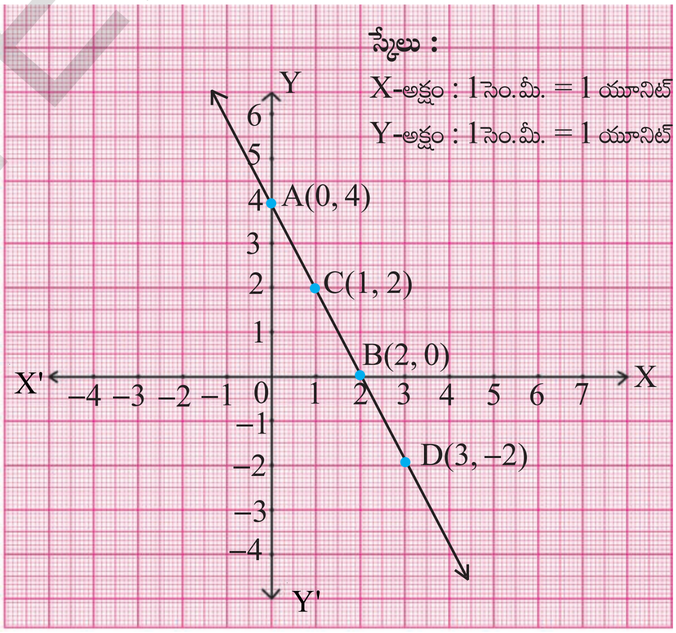
ప్రతి రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణానికి చాలా సాధనలు ఉంటాయని నేర్చుకున్నాం. అయితే ఈ సాధనలను గ్రాఫ్ పేపర్‌పై చూపగలమా? ప్రతీ సాధనలో రెండు విలువలుంటాయని మనకు తెలుసు. కనుక వీనిని గ్రాఫ్ పేపర్‌పై బిందువులుగా గుర్తించవచ్చు.

$4 = 2x + y$ ని తీసుకుందాం. దీనిని $y = 4 - 2x$ గా రాయవచ్చు. దీని ఆధారంగా ఒక నియమిత x విలువకు y విలువను కనుగొనవచ్చు. ఉదాహరణకు $x = 2$ అయిన $y = 0$. అనగా (2, 0) ఒక సాధన అవుతుంది. ఈ విధంగా పట్టికలో చూపిన విధంగా x, y విలువలు ఒకదాని కింద ఒకటి వచ్చునట్లు రాద్దాం.

సాధనల పట్టిక

x	$y = 4 - 2x$	(x, y)
0	$y = 4 - 2(0) = 4$	(0, 4)
2	$y = 4 - 2(2) = 0$	(2, 0)
1	$y = 4 - 2(1) = 2$	(1, 2)
3	$y = 4 - 2(3) = -2$	(3, –2)

ప్రతి x విలువకు ఒక y విలువ ఉండటం పట్టిక నుంచి మనం గమనించవచ్చు. X-అక్షం వెంట '*x*' విలువను Y-అక్షం వెంట y విలువను తీసుకొని (0, 4), (2, 0), (1, 2) మరియు (3, -2) బిందువులను గ్రాఫ్ పేపర్‌పై గుర్తించుము. నీవు ఏమి గమనించావు? ఈ బిందువులను కలిపిన పక్క పటములో చూపిన విధంగా $\overleftrightarrow{AD}$ రేఖ వస్తుంది.



$x = 0$ అయిన
$y = 4 - 2x = 4 - 2(0) = 4$
$x = 2$ అయిన
$y = 4 - 2(2) = 0$

మిగిలిన బిందువులు (సాధనలు) కూడా $\overleftrightarrow{AD}$ రేఖపైనే ఉంటాయా?

రేఖపై నున్న మరిఒక బిందువు (4, – 4) ను తీసుకోండి. ఇది సాధన అవుతుందా?

$\overleftrightarrow{AD}$ రేఖ మీద గల మరొక బిందువును తీసుకొనుము. ఈ బిందువు యొక్క నిరూపణలు సమీకరణంను తృప్తిపరుస్తాయో లేదో పరిశీలించుము. అనగా ఈ బిందువు సాధన అవుతుందో లేదో పరిశీలించుము.

ఇప్పుడు $\overleftrightarrow{AD}$ రేఖ మీద లేని మరొక బిందువును తీసుకొనుము. ఉదాహరణకు $(1, 1)$ తీసుకొనుము. ఇది సమీకరణమును తృప్తి పరుస్తుందా? అంటే సాధన అవుతుందా?

$\overleftrightarrow{AD}$ రేఖ మీద లేకుండా సమీకరణమును తృప్తిపరిచే బిందువును కనుగొనగలవా?

మన పరిశీలనలతో ఒక పట్టికను తయారుచేద్దాం :

1. సమీకరణం యొక్క ప్రతి సాధన, రేఖపై బిందువుగా ఉంటుంది.
2. రేఖపై ప్రతి బిందువు సమీకరణానికి సాధన అవుతుంది.
3. రేఖపై లేని బిందువు సమీకరణానికి సాధన కాదు మరియు సమీకరణానికి సాధన కాని బిందువు రేఖపై ఉండదు.
4. సమీకరణానికి సాధనలయ్యే అన్ని బిందువుల సముదాయమే ఆ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రము (గ్రాఫ్) అవుతుంది.

$ax + by + c = 0$ (a, b లు రెండూ ఒకేసారి సున్నాలు కావు) రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రము ఒక సరళరేఖ కావడం మనం గమనించాము. అందువలననే ఈ సమీకరణాలను రేఖీయ సమీకరణాలు అంటాం.

6.4.1 రేఖీయ సమీకరణాల రేఖాచిత్రం (గ్రాఫ్) :

సోపానాలు :

1. రేఖీయ సమీకరణాన్ని రాయండి.
2. సమీకరణంలో $x = 0$ ను ప్రతిక్షేపించి అనురూప y విలువను కనుగొనుము.
3. సమీకరణంలో $y = 0$ ను ప్రతిక్షేపించి అనురూప x విలువను కనుగొనుము.
4. సోపానాలు 2, 3 లలోని x, y విలువలను x, y నిరూపకాలుగా తీసుకొని బిందువులను రాయుము.
5. ఈ బిందువులను గ్రాఫ్ పేపరుపై గుర్తించుము.
6. బిందువులను కలుపుము.

గీయబడిన రేఖ రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణము యొక్క గ్రాఫ్‌ను ఇస్తుంది. అయితే ఈ రేఖ యొక్క ఖచ్చితత్వమును నిర్ధారించుటకు మరికొన్ని బిందువులు తీసుకోవడం మంచిది. మరికొన్ని సాధనలను కనుగొనుటకు 'x' కు వేరువేరు విలువలను తీసుకొని సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి వానికి అనురూపమైన 'y' విలువలను కనుగొనాలి.

ప్రయత్నించండి

ఒక గ్రాఫ్ పేపరుపై (2, 4) బిందువును గుర్తించుము. ఈ బిందువు గుండా ఒక రేఖను గీచి కింది ప్రశ్నలకు సమాధానమిమ్ము.

1. ఈ (2, 4) బిందువు గుండా మరిఒక రేఖను గీయగలవా?
2. ఇలాంటి ఎన్ని రేఖలను గీయగలము?
3. (2, 4) బిందువు సాధనగాగల రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు ఎన్ని ఉన్నాయి?

ఉదాహరణ-10 : $y - 2x = 4$ సమీకరణమునకు రేఖాచిత్రమును గీచి కింది ప్రశ్నలకు సమాధానమిమ్ము.

(i) (2, 8) బిందువు రేఖపై ఉన్నదా? (2, 8) సమీకరణం యొక్క సాధన అవుతుందా? (2, 8) ను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించుట ద్వారా సరిచూడుము.

(ii) (4, 2) బిందువు రేఖపై ఉన్నదా? బీజీయపద్ధతి ద్వారా (4, 2) సమీకరణానికి సాధన అవుతుందేమో సరిచూడుము.

(iii) రేఖాచిత్రము నుంచి మరొక మూడు సాధనలను కనుగొనుము. అదే విధముగా సాధనలు కాని వానిని మూడింటిని కనుగొనుము.

సాధన : ఇవ్వబడిన సమీకరణము $y - 2x = 4 \Rightarrow y = 2x + 4$

సాధనల పట్టిక

x	y = 2x + 4	(x, y)	బిందువు
0	$y = 2(0) + 4 = 4$	(0, 4)	A(0, 4)
–2	$y = 2(-2)+4 = 0$	(–2, 0)	B(–2, 0)
1	$y = 2(1) + 4 = 6$	(1, 6)	C(1, 6)

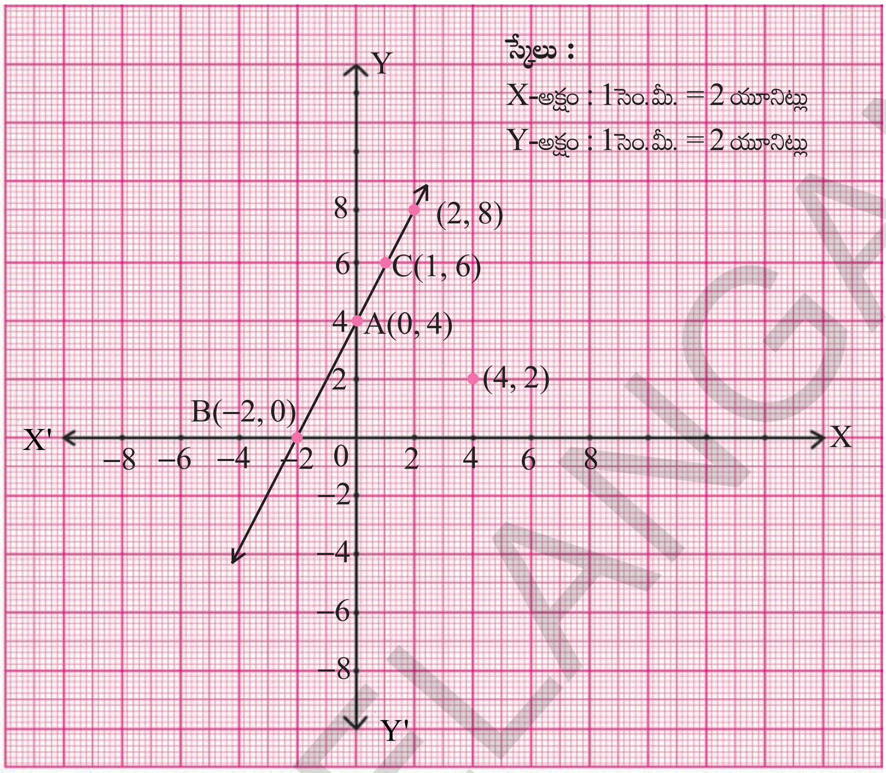
A, B మరియు C బిందువులను గ్రాఫ్ మీద గుర్తించి వానిని కలిపిన పటములో చూపించిన విధంగా కలిపితే $\overrightarrow{BC}$ రేఖ వస్తుంది. ఇదియే మనకు కావలసిన $y - 2x = 4$ యొక్క రేఖాచిత్రము అవుతుంది.

(i) (2, 8) బిందువును గ్రాఫ్ పేపరుపై గుర్తించిన BC రేఖపై ఉండడం గమనించవచ్చు.

బీజీయ పద్ధతిలో సరిచూచుట (2, 8) బిందువును సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించిన

$$\text{LHS} = y - 2x = 8 - 2x2 = 8 - 4 = 4 = \text{RHS},$$

కనుక (2, 8) సాధన అవుతుంది.



(ii) (4, 2) బిందువును గ్రాఫ్ పేపర్‌పై గుర్తించిన అది $\overleftrightarrow{BC}$ రేఖమీద లేకపోవడాన్ని మీరు గమనించవచ్చు.

బీజీయ పద్ధతిలో సరిచూచుట : (4, 2) ను ఇచ్చిన సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే.

$$LHS = y - 2x = 2 - 2\times4 = 2 - 8 = -6 \neq RHS, \therefore (4, 2)$$ సాధనకాదు.

(iii) ఒకరేఖ మీది ఏ బిందువైనా సమీకరణానికి సాధన అవుతుందని మనకు తెలుసు. కనుక రేఖ మీద ఏవైనా మూడు బిందువులు తీసుకుంటే అవి సాధనలు అవుతాయి ఉదాహరణకు (-4, -4)... అదేవిధంగా రేఖమీదలేని ఏ బిందువు కూడా సాధన కాదని తెలుసు. కనుక రేఖ మీద లేని ఏవైనా మూడు బిందువులను తీసుకుంటే అవి సాధనలు కావు. ఉదాహరణకు : (i) (1, 5); ....; ....

ఉదాహరణ-11 : $x - 2y = 3$ యొక్క రేఖాచిత్రమును గీయుము.

రేఖాచిత్రము నుంచి ఈ కింది వానిని కనుగొనుము?

(i) $x = -5$ అయ్యే విధంగా ఒక సాధన (x, y)

(ii) $y = 0$ అయ్యే విధంగా ఒక సాధన (x, y)

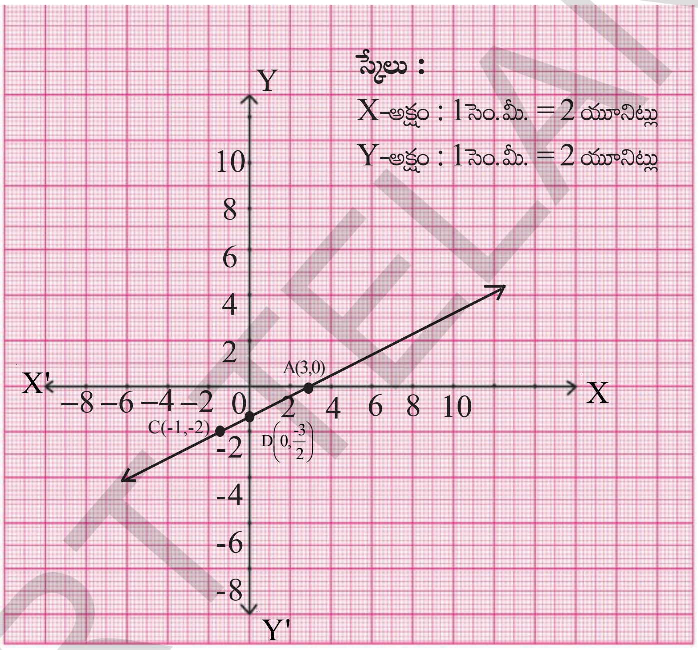
(iii) $x = 0$ అయ్యే విధంగా సాధన (x, y)

సాధన : $x - 2y = 3 \Rightarrow y = \dfrac{x-3}{2}$

సాధనల పట్టిక

x	$y = \frac{x-3}{2}$	(x, y)	బిందువు
3	0	(3, 0)	A
1	-1	$(1, -1)$	B
-1	-2	$(-1, -2)$	C

గ్రాఫ్ పేపరుపై A, B, C బిందువులు గుర్తించి వానిని కలిపిన కింది పటములో చూపిన విధంగా రేఖ వస్తుంది. ఈ రేఖయే కావలసిన $x - 2y = 3$ యొక్క రేఖాచిత్రము అవుతుంది.



(i) $x = -5$ అయ్యే ఒక సాధన (x, y) ని మనము కనుగొనవలె. అనగా రేఖమీద ఉంటూ దాని x-నిరూపకము '-5' అయ్యే బిందువును కనుగొనవలె. దీనిని కనుగొనుటకు $x = -5$ వద్ద నుంచి Y-అక్షమునకు సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయవలె. అది గ్రాఫ్‌ను 'P' వద్ద ఖండిస్తుంది అనుకొనుము. ఈ బిందువు 'P' నుంచి X-అక్షానికి సమాంతరంగా రేఖ గీచిన అది Y-అక్షమును -4 వద్ద ఖండిస్తుంది (తాకుతుంది).

కనుక P బిందువు నిరూపకాలు = $(-5, -4)$

$P(-5, -4)$ బిందువు $x - 2y = 3$ రేఖపై ఉన్నది కావున అది ఒక సాధన అవుతుంది.

(ii) $y = 0$ అయ్యే విధంగా ఒక సాధన (x, y) ని కనుగొనాలి.

$y = 0$ కనుక బిందువు (x, 0) అవుతుంది. కావున $y = 0$ కనుక బిందువు X-అక్షంపై ఉంటూ $x - 2y = 3$ రేఖాచిత్రము మీద ఉండే బిందువును కనుగొనాలి.

రేఖాచిత్రము నుంచి ఇలాంటి బిందువు (3, 0) అని గమనించగలము.

∴ సాధన = (3, 0).

(iii) $x = 0$ అయ్యే విధంగా ఒక సాధన (x, y) ని కనుగొనవలె.

$x = 0$ కనుక బిందువు $(0, y)$ అవుతుంది. అనగా బిందువు Y-అక్షంపై ఉంటుంది. అంటే Y-అక్షంపై ఉంటూ $x - 2y = 3$ గ్రాఫ్ మీద ఉండే బిందువును కనుగొనాలి.

రేఖాచిత్రము నుంచి ఇలాంటి బిందువు $\left(0,\frac{-3}{2}\right)$ అని గుర్తించగలము.

∴ సాధన = $\left(0,\frac{-3}{2}\right)$.

అభ్యాసం 6.3

1. కింది వాని యొక్క రేఖాచిత్రాలను గీయుము.

   i) $2y = -x + 1$ ii) $-x + y = 6$ iii) $3x + 5y = 15$ iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$

2. కింది వాని యొక్క రేఖాచిత్రాలను గీసి, ప్రశ్నలకు సమాధానమిమ్ము?

   i) $y = x$ ii) $y = 2x$ iii) $y = -2x$ iv) $y = 3x$ v) $y = -3x$

   - i) ఇవన్నీ $y = mx$ (m ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య) రూపంలో ఉన్నాయా?
   - ii) వీని రేఖాచిత్రాలన్నీ మూలబిందువుగుండా పోతున్నాయా?
   - iii) ఈ రేఖాచిత్రాల ఆధారంగా నీవేమి నిర్ధారించగలవు?

3. $2x + 3y = 11$ యొక్క రేఖాచిత్రాన్ని గీయుము? దీని నుంచి $x = 1$ అయిన y విలువ ఎంత కనుగొనుము?

4. $y - x = 2$ యొక్క రేఖాచిత్రాన్ని గీయుము? దీని నుంచి
   - i) $x = 4$ అయినప్పుడు y విలువను
   - ii) $y = -3$ అయినప్పుడు x విలువను కనుగొనుము.

5. $2x+3y=12$ యొక్క రేఖాచిత్రం గీయుము. దీని నుంచి
   - i) y-నిరూపకము 3 అయ్యే విధంగా
   - ii) x-నిరూపకము -3 అయ్యే విధంగా సాధనలను కనుగొనండి.

6. కింది సమీకరణాలను రేఖాచిత్రాలను గీయండి. ఇది నిరూపక అక్షాలను ఖండించే బిందువులను కనుగొనండి.

   i) $6x - 3y = 12$ ii) $-x + 4y = 8$ iii) $3x + 2y + 6 = 0$

7. రజియా మరియు ప్రీతి ఒక పాఠశాలలో 9వ తరగతి చదువుచున్నారు. వీరు సహజ విపత్తులు సంభవించినప్పుడు బాధితులకు సహాయం చేయుట కొరకు ఏర్పాటుచేసిన ప్రధానమంత్రి సహాయనిధికి ₹ 1000 ఇచ్చారు. ఈ సమాచారమునకు సరిపడు సమీకరణమును రూపొందించి దానికి రేఖాచిత్రమును గీయుము.

8. గోపయ్య తన మొత్తం 5000 చ.మీ. వైశాల్యం కలిగిన రెండు వేరువేరు పొలాలలో వరిని, గోధుమలను పండించాడు. దీనికి సరిపడు సమీకరణంను రూపొందించి దానికి రేఖాచిత్రమును గీయుము.

9. 6 కి.గ్రా. ద్రవ్యరాశిగల వస్తువుపై బలాన్ని ప్రయోగించినప్పుడు అది పొందిన త్వరణము, ప్రయోగించిన బలానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది. ఈ పరిశీలనకు సరిపడు సమీకరణమును రాసి, దానికి రేఖాచిత్రమును గీయుము.

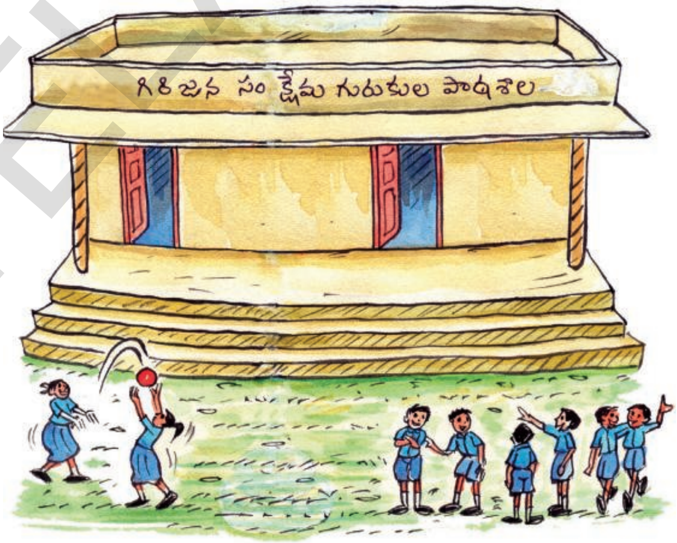
10. ఒక పర్వతము మీద నుంచి ఒక రాయి కింద పడుతూఉంది. దేనియొక్క వేగము $V = 9.8t$. (t = కాలము) దీనికి అనుగుణమైన రేఖాచిత్రమును గీచి, దాని నుంచి '4' సెకండ్ల సమయంలో దాని వేగమెంతో కనుగొనుము.

ఉదాహరణ-12 : ఒక పాఠశాలలో 25% బాలికలు. మిగిలినవారు బాలురు. ఈ సమాచారమునకు సరిపోవు రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణమును రూపొందించి దానికి రేఖాచిత్రము గీయుము. రేఖాచిత్రము నుంచి ఈ కింది ప్రశ్నలకు సమాధానమును రాబట్టుము.

(i) బాలికల సంఖ్య 25 అయిన బాలుర సంఖ్య ఎంత?

(ii) బాలుర సంఖ్య 45 అయిన బాలికల సంఖ్య ఎంత?

(iii) బాలుర సంఖ్యకు మూడు వేరువేరు విలువలను తీసుకొని అనురూపంగా బాలికల సంఖ్యను కనుగొనుము. అదే విధంగా బాలికల సంఖ్యకు మూడు వేరువేరు విలువలను తీసుకొని అనురూపంగా బాలుర సంఖ్యను కనుగొనుము.



సాధన : బాలికల సంఖ్యను 'x' మరియు బాలుర సంఖ్యను 'y' అనుకొనిన

మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య $= x + y$

ఇచ్చిన దత్తాంశము ప్రకారము బాలికల సంఖ్య మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్యలో $= 25\%$ అంటే,

$x = (x + y)$ లో 25%

$$= (x + y) \times \frac{25}{100} = \frac{1}{4}(x + y)$$

$$x = \frac{1}{4}(x + y)$$

$$\therefore \quad 4x = x + y$$

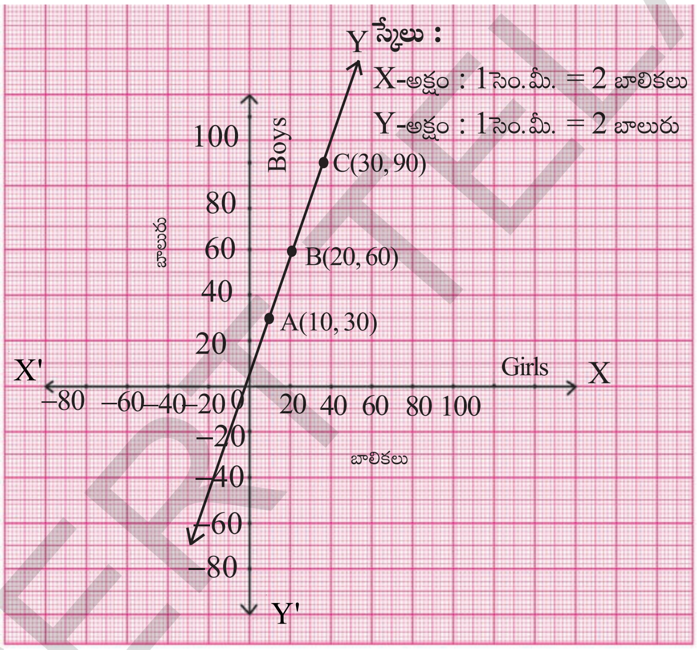
$$3x = y$$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణము $3x = y$ లేదా $3x - y = 0$.

సాధనల పట్టిక

x	$y = 3x$	(x, y)	బిందువు
10	30	(10, 30)	A
20	60	(20, 60)	B
30	90	(30, 90)	C

గ్రాఫ్ పై A, B మరియు C బిందువులను గుర్తించి వానిని కలిపిన కింది పటములో చూపిన విధంగా AB రేఖ ఏర్పడుతుంది.



రేఖాచిత్రము నుంచి ఈ కింది వానిని కనుగొనగలము.

(i) బాలికల సంఖ్య 25 అయిన బాలుర సంఖ్య 75.

(ii) బాలుర సంఖ్య 45 అయిన బాలికల సంఖ్య 15.

(iii) బాలుర సంఖ్యకు మీకు నచ్చిన మూడు వేరువేరు సంఖ్యలను తీసుకొని వానికి అనురూపమైన బాలిక సంఖ్యను, అదే విధంగా బాలికల సంఖ్యకు మీకు నచ్చిన మూడు వేరువేరు సంఖ్యలను తీసుకొని వానికి అనురూపమైన బాలుర సంఖ్యను కనుగొనుము. ఇచ్చట గ్రాఫ్‌ను, సమీకరణమును పరిశీలించండి. సమీకరణము $y = 3x$ రూపంలో ఉంది మరియు సరళరేఖ మూల బిందువుగుండా పోతుంది. $y = mx$ (m ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య) సమీకరణమునకు రేఖాచిత్రము గీచిన అది మూల బిందువు గుండా పోతుంది అని గమనిస్తారు.

ఉదాహరణ-13 : కింది ప్రతి రేఖాచిత్రానికి నాలుగు సమీకరణాలు ఇవ్వబడినాయి. వానిలో రేఖాచిత్రాన్ని సూచించు సరియైన సమీకరణమును గుర్తించుము.

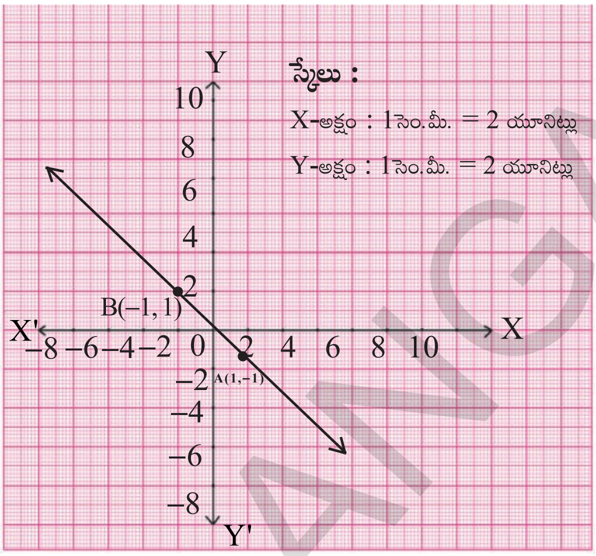
(i) సమీకరణాలు :

A) $y = x$

B) $x + y = 0$

C) $y = 2x$

D) $2 + 3y = 7x$



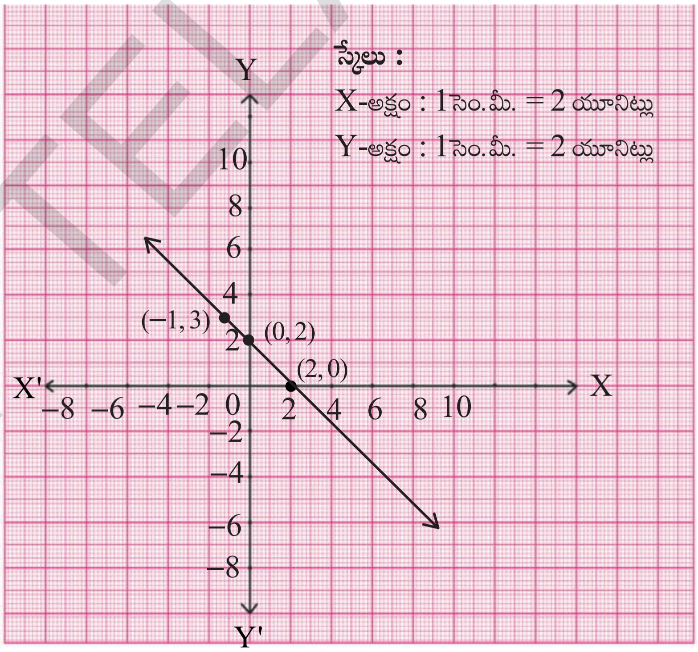
(ii) సమీకరణాలు :

A) $y = x + 2$

B) $y = x - 2$

C) $y = -x + 2$

D) $x + 2y = 6$



సాధన :

(i) రేఖాచిత్రము $(1, -1)$ $(0, 0)$ $(-1, 1)$ బిందువులు ఒకే రేఖపై ఉండడం మనం గమనించవచ్చు. అనగా ఇవి కావలసిన సమీకరణానికి సాధనలు అవుతాయి. అంటే ఈ బిందువులను కావలసిన సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే అది తృప్తి చెందుతుంది. మరి ఒక విధంగా చెప్పాలంటే ఈ బిందువులను ఏ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే అది తృప్తి చెందుతుందో అదియే కావలసిన సమీకరణము.

$(1, -1)$ బిందువును మొదటి సమీకరణము $y = x$ లో ప్రతిక్షేపించిన అది తృప్తి చెందదు. కనుక $y = x$ కావలసిన సమీకరణం కాదు. అయితే రెండవ సమీకరణము తృప్తి చెందుతుంది. నిజానికి పై మూడు బిందువులకు ఈ సమీకరణము తృప్తి చెందుతుంది. కనుక $x + y = 0$ కావలసిన సమీకరణం అవుతుంది.

మిగిలిన రెండు సమీకరణాలలో ఈ బిందువులను ప్రతిక్షేపించినప్పుడు అవి తృప్తి చెందవు. కనుక అవి కావలసిన సమీకరణాలుకావు.

(ii) రేఖాచిత్రములో (2, 0), (0, 2) మరియు (−1, 3) బిందువులు రేఖపై ఉన్నాయి. ఈ బిందువులు మొదటి, రెండవ సమీకరణాలను తృప్తిపరచవు. మూడవ సమీకరణము $y = -x + 2$ ను తీసుకుందాం. దీనిలో పై బిందువులను ప్రతిక్షేపించినప్పుడు అది తృప్తి చెందుతుంది. కనుక $y = -x + 2$ కావలసిన సమీకరణం అవుతుంది. ఈ బిందువులు $x + 2y = 6$ ను తృప్తిపరుస్తాయేమో పరిశీలించుము?

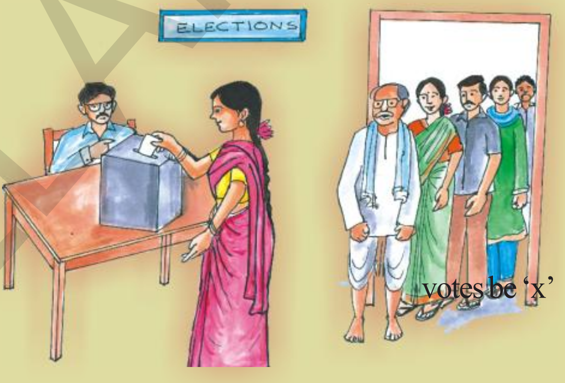
అభ్యాసం 6.4

1. ఒక ఎలక్షన్‌లో 60% ఓటర్లు తమ ఓటు హక్కును వినియోగించుకొనినారు. దీనికి సరిపడు రేఖాచిత్రముగీచి, దాని నుంచి కింది వానిని కనుగొనుము.

(i) 1200 ఓటర్లు మాత్రమే తమ ఓటు హక్కును వినియోగించుకొన్న మొత్తం ఓటర్లు ఎంత మంది?

(ii) మొత్తం ఓటర్ల సంఖ్య 800 అయిన ఓటు హక్కును వినియోగించుకున్నవారెందరు?

[**సూచన :** ఓటు హక్కు వినియోగించుకున్న వారి సంఖ్య 'x' మరియు మొత్తం ఓటర్ల సంఖ్య 'y' అనుకొనిన $x = 60\%\ y$]



2. రూప పుట్టినప్పుడు ఆమె తండ్రి 25 సం॥ల వయస్సు ఉంది. ఈ దత్తాంశమునకు సరిపోవు సమీకరణమును రాసి దానికి రేఖాచిత్రము గీసి దాని నుంచి ఈ కింది వానిని కనుగొనుము?

(i) రూపకు 25 సం॥ల వయస్సు ఉన్నప్పుడు ఆమె తండ్రి వయస్సు.

(ii) రూప తండ్రికి 40 సం॥ల వయస్సు ఉన్నప్పుడు రూప వయస్సు.

3. ఒక ఆటో మొదటి గంట ప్రయాణానికి ₹ 15, తరువాత ప్రతీ గంట ప్రయాణానికి ₹ 8 లు వసూలు చేయును. దూరమును 'x' కి.మీ.చ చెల్లించిన మొత్తం సొమ్మును 'y' అనుకొని ఈ సమాచారమునకు సరిపడు సమీకణమును రాసి దానికి రేఖాచిత్రము గీయుము.

రేఖాచిత్రము నుంచి చెల్లించిన మొత్తము ₹ 55 అయితే ప్రయోగించిన దూరమును మరియు 7 గంటలు ప్రయాణిస్తే చెల్లించవలసి మొత్తమును కనుగొనుము.

4. పుస్తకాలను అద్దెకిచ్చే ఒక లైబ్రరీ మొదటి మూడు రోజులకు ఒక స్థిర మొత్తాన్ని ఆ తరువాత ప్రతిరోజుకు కొంత అదనపు మొత్తాన్ని వసూలు చేస్తుంది. జాన్ ఒక పుస్తకాన్ని 7 రోజులు ఉంచుకొని ₹ 27 లు చెల్లించాడు. మొదటి మూడు రోజుల స్థిర మొత్తాన్ని x మరియు ఆ తరువాత ప్రతీరోజుకూ అదనంగా చెల్లించే మొత్తాన్ని y అనుకొని దీనిని తెలిపే సామాన్య సమీకరణాన్ని గ్రాఫ్ రూపంలో గీయండి. దీని ఆధారంగా చెల్లించే స్థిరమొత్తము ₹ 7 అయిన ప్రతీరోజూ అదనంగా చెల్లించే మొత్తాన్ని కనుగొనుము. అలాగే ప్రతీరోజూ అదనంగా చెల్లించే మొత్తము ₹ 4 అయిన మొదటి మూడు రోజులకు చెల్లించవలసిన స్థిరమొత్తమును కనుగొనుము.

5. హైదరాబాద్ రైల్వేస్టేషన్‌లో ఒక కారును నిలిపిఉంచినందుకు మొదటి రెండు గంటలకు ₹ 50 ఆ తరువాత ప్రతి గంటకు ₹10 లు చెల్లించవలెను. ఈ సమాచారమునకు సరిపడు సమీకరణమును రాసి, రేఖాచిత్రమును గీయుము. దాని నుంచి కింది వానిని కనుగొనుము.

   (i) 3 గం॥లు కారును ఉంచిన చెల్లించిన మొత్తము (ii) 6 గం॥లు కారును ఉంచిన చెల్లించిన మొత్తము

   (iii) రేఖ చెల్లించిన మొత్తము ₹ 80 అయిన ఆమె ఎన్ని గంటలు కారును నిలిపి ఉంచింది.

6. సమీరా కారును ఒకే వేగము 60 కి.మీ. / గంట వేగముతో నడుపుతుంది. అయిన దూరము – కాలమునకు రేఖాచిత్రము గీసి, దాని నుంచి ఈ కింది సమయాలలో సమీరా ప్రయాణించిన దూరమును కనుగొనుము.

   (i) $1\frac{1}{2}$ గంట (ii) 2 గంటలు (iii) $3\frac{1}{2}$ గంటలు

7. నీటిలో హైడ్రోజన్ మరియు ఆక్సిజన్‌ల అణుభారాల నిష్పత్తి 1:8. అయిన ఈ సమాచారాన్ని తెలియజేయు సమీకరణమును రూపొందించి దానికి రేఖాచిత్రం గీయించి. దీని నుంచి ఆక్సిజన్ పరిమాణము 12 గ్రా॥ అయిన హైడ్రోజన్ పరిమాణమును, హైడ్రోజన్ పరిమాణము $\frac{3}{2}$ గ్రా॥ అయినప్పుడు ఆక్సిజన్ పరిమాణమును కనుగొనుము.

   [**సూచన :** హైడ్రోజన్ మరియు ఆక్సిజన్ పరిమాణాలను వరుసగా ‘x’, ‘y’ అనుకొనిన $x : y = 1:8 \Rightarrow 8x = y$]

8. 28 లీటర్ల పాలు, నీళ్ల మిశ్రమములో వాని నిష్పత్తి 5:2. అయిన మిశ్రమమునకు, పాలకు మధ్యగల సంబంధంను తెలియజేయు సమీకరణమును రూపొందించి దానికి రేఖాచిత్రము గీయుము. దాని నుంచి పై మిశ్రమములో పాల పరిమాణమును కనుగొనుము.

   [**సూచన :** మిశ్రమమునకు, పాలకు మధ్యగల నిష్పత్తి $= 5 + 2 : 5 = 7 : 5$]

9. అమెరికా, కెనడా దేశాలలో ఉష్ణోగ్రతను ఫారన్‌హీట్ మానంలో కొలుస్తారు. అయితే ఇండియా లాంటి దేశాలలో సెల్సియస్ మానంలో కొలుస్తారు. ఫారన్‌హీట్ మానానికి సెల్సియస్ మానానికి సెల్సియస్ మానానికి మార్చగల సంబంధం కింది సమీకరణం తెలియజేస్తుంది.

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

   (i) సెల్సియస్ డిగ్రీలను x-అక్షం మీద, ఫారన్‌హీట్ డిగ్రీలలో y-అక్షం మీద తీసుకొని పై సమీకరణానికి రేఖాచిత్రము గీయుము.

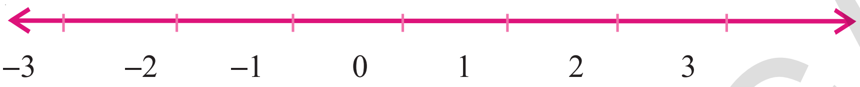
   (ii) 30°C కి సమానమైన ఫారన్‌హీట్ మానంలోని ఉష్ణోగ్రతలను కనుగొనుము.

   (iii) 95°F కు సమానమైన సెల్సియస్ మానంలోని ఉష్ణోగ్రతను కనుగొనుము.

   (iv) సెల్సియస్ మానములోనూ, ఫారన్‌హీట్ మానంలోనూ ఒక సంఖ్యా విలువలు కలిగిఉండే ఉష్ణోగ్రత ఏమైనా ఉందా? దాని విలువను కనుగొనుము.

6.5 X- అక్షము మరియు Y- అక్షములకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖల సమీకరణాలు

$x = 3$ సమీకరణాన్ని పరిశీలిద్దాం. దీనిని ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణంగా పరిగణించినప్పుడు దీనికి ఏకైక సాధన $x = 3$ ఉంటుంది. దీనిని సంఖ్యారేఖపై ఒక బిందువుగా కింద చూపిన విధంగా చూపవచ్చు.



అయితే ఇదే సమీకరణాన్ని రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణంగా భావించినప్పుడు దీనిని $x + 0.y - 3 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఈ సమీకరణానికి చాలా సాధనలు ఉంటాయి. వానిలో కొన్నింటిని కింది పట్టికలో పొందుపరుద్దాం.

ఇచ్చట y యొక్క గుణకము సున్నా కనుక y విలువ ఏదైనప్పటికీ x విలువ 3 అవుతుంది.

సాధనల పట్టిక

x	3	3	3	3	3	3	……
y	1	2	3	–1	–2	–3	…..
(x, y)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, –1)	(3, –2)	(3, –3)	…..
బిందువులు	A	B	C	D	E	F	…..

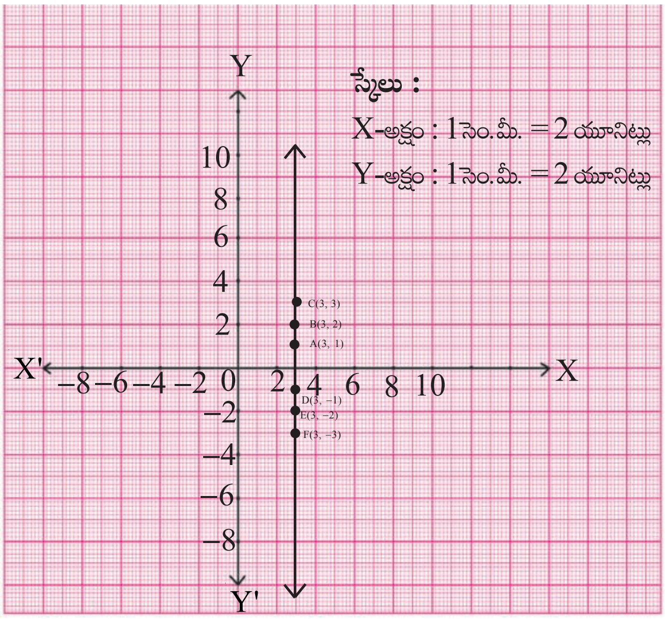
పై పట్టిక నుంచి ఈ సమీకరణము (3, a) రూపంలో అనంత సాధనలను కలిగి ఉంటుందని గమనించగలము. ఇచ్చట ‘a’ ఒక వాస్తవ సంఖ్య.

పై బిందువులను ఉపయోగించి రేఖాచిత్రము గీస్తే దాని నుంచి నీవేమి గమనించగలవు?

ఇది ఒక సరళరేఖయేనా? ఇది ఏదైనా ఒక రేఖకుగానీ, అక్షానికిగానీ సమాంతరంగా ఉందా? ఇది y-అక్షానికి సమాంతరంగా గల ఒక సరళరేఖ.

ఈ గ్రాఫ్ (రేఖ) y-అక్షం నుంచి ఎంత దూరంలో ఉంది?

$x = 3$ రేఖ, y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటూ y-అక్షం నుంచి ధనాత్మక దిశలో 3 యూనిట్ల దూరంలో ఉంటుంది.



ఇవిచేయండి

1. i) కింది సమీకరణాలకు రేఖాచిత్రాలు గీయండి.

   a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 4$ d) $x = -4$

   ii) ఈ రేఖాచిత్రాలన్నీ Y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్నాయా?

   iii) ప్రతీ సందర్భంలో రేఖాచిత్రానికి Y-అక్షానికి మధ్యగల దూరమును కనుగొనుము.

2. i) కింది సమీకరణాలకు రేఖాచిత్రాలను గీయండి.

   a) $y = 2$ b) $y = -2$ c) $y = 3$ d) $y = -3$

   ii) ఈ రేఖాచిత్రాలన్నీ X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్నాయా?

   iii) ప్రతీ సందర్భములో రేఖాచిత్రానికి X-అక్షానికి మధ్యగల దూరమును కనుగొనుము.

పై చర్చల నుంచి ఈ కింది విషయాలను నిర్ధారించగలము:

1. $x = k$ యొక్క రేఖాచిత్రము (సరళరేఖ) Y-అక్షానికి సమాంతరంగా, k యూనిట్ల దూరంలో ఉంటూ (k, 0) బిందువు గుండా పోల్చండి.
2. $y = k$ యొక్క రేఖాచిత్రము (సరళరేఖ) X-అక్షానికి సమాంతరంగా k యూనిట్ల దూరంలో ఉంటూ (0, k) బిందువు గుండా పోతుంది.

6.5.1 x-అక్షము మరియు y-అక్షాల సమీకరణాలు :

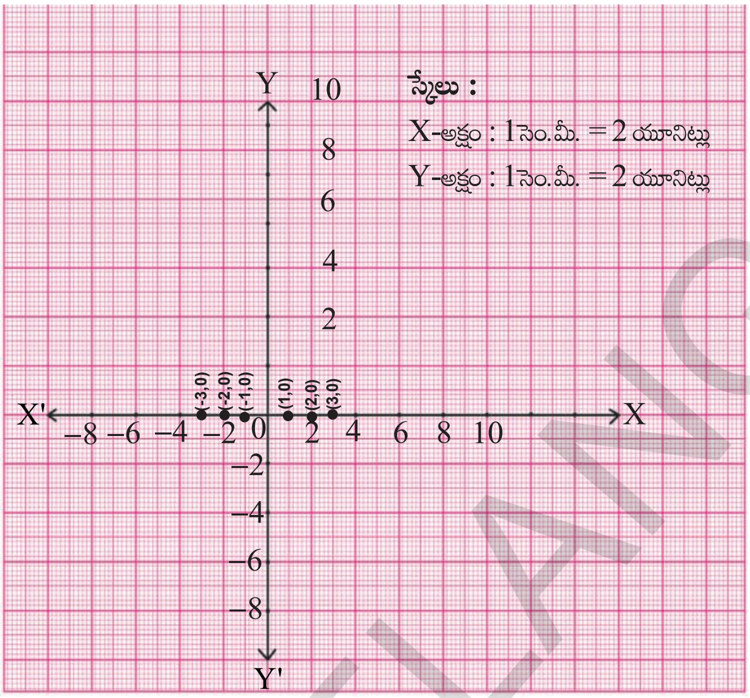
$y = 0$ సమీకరణమును పరిశీలిద్దాం. దీనిని $0.x + y = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇప్పుడు దీనికి రేఖాచిత్రమును గీద్దాం.

సాధనల పట్టిక

x	1	2	3	–1	–2	…...
y	0	0	0	0	0	…..
(x, y)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(–1, 0)	(–2, 0)	…..
బిందువులు	A	B	C	D	E	…..

పై పట్టికలోని బిందువులను గ్రాఫ్‌పై గుర్తించిన అవి రేఖాచిత్రములో చూపిన విధంగా ఉంటాయి.

దీని నుంచి నీవేమి గమనించావు?



ఈ బిందువులన్నీ X-అక్షంపై ఉండడం మనం గమనించవచ్చు.

అనగా $y = 0$ సమీకరణం X-అక్షాన్ని సూచిస్తుంది. మరిఒక విధంగా చెప్పాలంటే X-అక్ష సమీకరణం $y = 0$.

ప్రయత్నించండి

Y-అక్షం సమీకరణమును కనుగొనుము.

అభ్యాసం 6.5

1. ఈ కింది సమీకరణాలను

a) సంఖ్యారేఖపై సూచించండి మరియు b) కార్టీజియన్ తలముపై సూచించండి (గ్రాఫ్ గీయండి)

i) $x = 3$ ii) $y + 3 = 0$ iii) $y = 4$ iv) $2x - 9 = 0$

v) $3x + 5 = 0$

2. $2x - 11 = 0$ ను

i) ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణంగా భావించి ii) రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణంగా భావించి జ్యామితీయ రూపంలో వ్యక్తపరచండి. (గ్రాఫ్ గీయండి)

3. $3x + 2 = 8x - 8$ ను సాధించి సాధనను

   i) సంఖ్యారేఖపై   ii) కార్టీయన్ తలముపై సూచించాలి

4. కింది బిందువుల గుండాపోతూ X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖల సమీకరణాలను కనుగొనుము.

   i) $(0, -3)$ ii) $(0, 4)$ iii) $(2, -5)$ iv) $(3, 4)$

5. కింది బిందువుల గుండాపోతూ Y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖల సమీకరణాలను కనుగొనుము.

   i) $(-4, 0)$ ii) $(2, 0)$ iii) $(3, 5)$ iv) $(-4, -3)$

6. ఏవైనా మూడు సరళరేఖల సమీకరణాలను రాయుము.

   (i) X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే   (ii) Y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

1. ఒక రేఖీయ సమీకరణంలో రెండు చరరాశులున్న దానిని రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణము అంటాము.
2. సమీకరణమును తృప్తి పరిచే ఏ జత ‘x’, ‘y’ విలువలనైనా దానికి సాధన అవుతుంది.
3. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణమునకు చాలా సాధనలు ఉంటాయి.
4. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణానికి రేఖాచిత్రము గీసిన అది ఒక సరళరేఖ సూచిస్తుంది.
5. $y = mx$ రూపంలోని సమీకరణానికి రేఖాచిత్రము గీసిన అది మూల బిందువు గుండా పోతుంది.
6. $x = k$ రూపంలోని రేఖ Y - అక్షానికి సమాంతరంగా, k యూనిట్ల దూరంలో ఉంటూ $(k, 0)$ బిందువు గుండా పోతుంది.
7. $y = k$ రూపంలో ఉన్న సరళరేఖ X-అక్షానికి సమాంతరంగా k యూనిట్ల దూరంలో ఉంటూ $(0, k)$ బిందువు గుండా పోతుంది.
8. X-అక్షము సమీకరణం $y = 0$.
9. Y-అక్షము సమీకరణం $x = 0$.

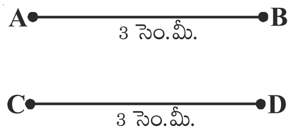
07

త్రిభుజాలు (Triangles)

7.1 పరిచయం

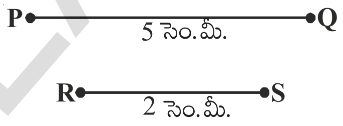
మనము సరళరేఖలు, వక్రరేఖలతో జ్యామితీయ పటాలను గీసి వాటి ధర్మాలను గురించి నేర్చుకున్నాము. కావలసిన పొడవుగల రేఖాఖండమును గీయడం ఎలాగో మీకు గుర్తుందా? అన్ని రేఖాఖండములు ఒకే పరిమాణము కలిగి వుండవు. వాటి పొడవులు వేరు వేరుగా వుండవచ్చును. అలాగే మనం వృత్తాలను గీస్తాం. ఒక వృత్తమును గీయడానికి మనకు ఏ కొలత కావాలి? వృత్తమును గీయాలంటే వృత్త విలువ గల కోణములను గీస్తాము.

రెండు రేఖాఖండముల పొడవులు సమానమైన అవి సర్వసమానములు.



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

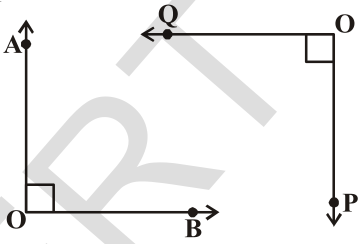
(సర్వసమానము)



$\overline{PQ} \ncong \overline{RS}$

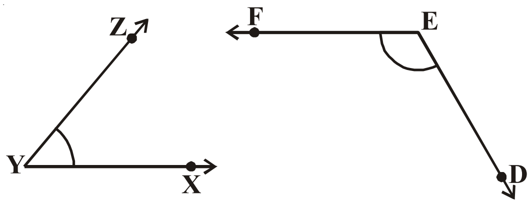
(సర్వసమానం కాదు)

రెండు కోణములు సర్వసమానం కావాలంటే ఆ కోణముల కొలతలు సమానము కావాలి.



$\angle AOB \cong \angle POQ$

(సర్వసమానము)



$\angle XYZ \ncong \angle DEF$

(సర్వసమానం కాదు)

పై ఉదాహరణలను బట్టి రెండు పటములు పరిమాణం సమానమా, కాదా? సరిచూడాలంటే, ఆ పటములను గురించి వివరించే కొంత ప్రత్యేక సమాచారం కావాలి.

ఒక చతురస్రాన్ని తీసుకుందాం:

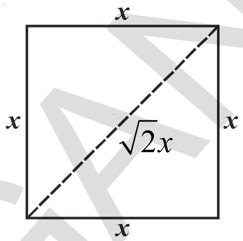
రెండు చతురస్రాలు ఒకే పరిమాణంలో వున్నాయా లేదా చెప్పాలంటే మనకు కావలసిన కనీస సమాచారము ఏమిటి?

నాకు ఇచ్చిన చతురస్రము భుజము కొలత మాత్రమే కావాలి అని సత్య చెప్పింది. రెండు చతురస్రాల భుజాలు సమానమైన అవి సమరూప పరిమాణ చతురస్రాలవుతాయి.

అది నిజమే కానీ రెండు చతురస్రాల కర్ణాలు సమానమైతే కూడా ఆ రెండు చతురస్రాలు సమరూపంగా వుంటాయి. మరియు ఒకే పరిమాణాన్ని కలిగి వుంటాయి. అని సిరి చెప్పింది.

వారిరువురూ చెప్పినది సత్యమని నీవు భావిస్తున్నావా?

చతురస్ర ధర్మాలను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఒక భుజము కొలతతో నీవు రెండు వేరు వేరు చతురస్రాలను నిర్మించలేవు. అవునా? అలాగే రెండు చతురస్రముల కర్ణములు సమానం కావాలంటే వాటి భుజముల కొలతలు సమానం కావాలి. ఇచ్చిన పటాన్ని చూడు.

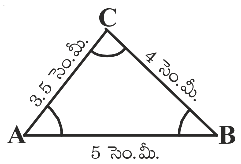


ఒకే ఆకారము, పరిమాణము కల పటాలను సర్వసమాన పటాలు అంటారు. (సర్వసమానము అనగా అన్ని రకాలుగా సమానము అని అర్థము) కావున ఒక భుజము కొలత సమానము లేదా కర్ణములు సమానముగా గల చతురస్రములు సర్వసమాన చతురస్రములు అవుతాయి.

గమనిక : సాధారణంగా భుజాలు పరిమాణమును, కోణాలు ఆకారమును నిర్ణయిస్తాయి.

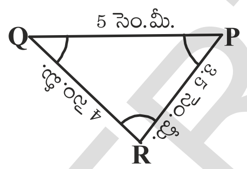
రెండు చతురస్రములు సర్వసమానమైన, ఆ రెండు చతురస్రములలో ఒక దానిని కాగితముపై నకలు చేసి వేరొక చతురస్రముపై ఉంచిన అది వేరొక చతురస్రంతో సరిగ్గా ఏకీభవిస్తుంది.

అప్పుడు మనం ఆ రెండు చతురస్రముల భుజములు, కోణములు, కర్ణముల కొలతలు సమానంగా ఉన్నాయని చెప్పగలము. ఇప్పుడు మనం రెండు త్రిభుజముల సర్వసమానత్వం గురించి చూద్దాం. ఒక త్రిభుజ భుజాలు, కోణాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజము సదృశ భుజాలు, కోణాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమాన త్రిభుజములని మనకు తెలుసు.

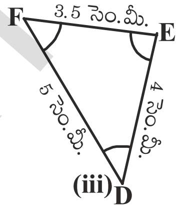


(i)

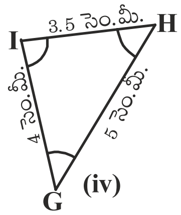
కింద ఇచ్చిన త్రిభుజములలో ఏవి పటం (i) లో ఇచ్చిన ΔABC కి సర్వసమానంగా ఉన్నాయి? పటం (ii) నుండి (v) వరకు ఇచ్చిన పటములలోని త్రిభుజములను మనం నకలు చేసి కత్తిరించి ΔABC పై ఉంచి ఏకీభవిస్తున్నాయో లేదో చూడుము. పటాలు (ii), (iii), (iv) లలో ఉన్న త్రిభుజములు ΔABC కి సర్వసమానమని, పటము (v) లోని ΔTSU త్రిభుజము ΔABC కి సర్వసమానము కాదు అని మీరు పరిశీలించవచ్చు.



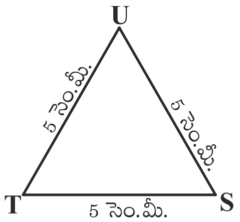
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

ΔPQR మరియు ΔABC లు సర్వసమానమైన మనం $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అని రాస్తాము.

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అయిన ΔPQR కోణములు, భుజములు వరుసగా ΔABC యొక్క సదృశకోణములు, భుజములకు సమానంగా ఉంటాయి.

అనగా PQ, AB తోను QR, BC తోను, RP, CA తోనూ ఏకీభవిస్తాయి. అలాగే $\angle P$, $\angle A$ తోను, $\angle Q$, $\angle B$ తోను, $\angle R$, $\angle C$ తోను ఏకీభవిస్తాయి. అనగా ఆ త్రిభుజ శీర్షములకు అన్వేక సాదృశ్యము ఉంటుంది. అనగా P శీర్షము A తోను, Q శీర్షము B తోను, R శీర్షము C తోను ఏకీభవిస్తాయి.

దీనిని మనం $P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$ అని రాస్తాము.

ఈ సాదృశ్యములో మీరు గుర్తు పెట్టుకోవలసినది $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అయిన దానిని $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ అని రాయుట సరికాదు. $QR = AB, RP = BC$ మరియు $QP = AC$ అని ఇచ్చిన పటాలలో ఏది సరైనది కాదు?

ఇదేవిధంగా పటము (iii) లో

$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC$ మరియు $EF \leftrightarrow CA$

మరియు $F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B$ మరియు $E \leftrightarrow C$

కావున $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ దీనిని $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ అని రాయుట సరికాదు.

అదే విధంగా పటము (iv) లోని త్రిభుజమునకు, ΔABC కి సాదృశ్యము రాయుము.

కాబట్టి త్రిభుజముల సర్వసమానత్వము రాయాలంటే శీర్షముల అన్వేక సాదృశ్యమును ఖచ్చితముగా రాయడం అనేది అత్యంత ఆవశ్యకము.

సర్వ సమాన త్రిభుజాలలో సదృశభాగాలు సమానంగా ఉంటాయి. "సర్వ సమాన త్రిభుజాల సదృశభాగాలు" అనే దానిని మనం క్లుప్తంగా 'CPCT' (Corresponding parts of congruent triangles) అని రాస్తాము.

ఇవి చేయండి

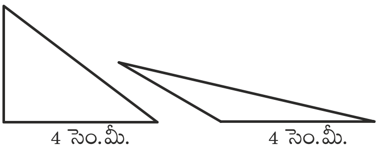
1. కింద కొన్ని ప్రవచనాలు ఇవ్వబడ్డాయి. అవి సత్యమో, కాదో సరిచూడము.
   - i. రెండు వృత్తములు ఎల్లప్పుడూ సర్వసమానము. ( )
   - ii. ఒకే పొడవు కలిగిన రెండు రేఖ ఖండములు ఎల్లప్పుడూ సర్వసమానము. ( )
   - iii. రెండు లంబకోణ త్రిభుజములు కొన్నిసార్లు సర్వసమానము. ( )
   - iv. భుజముల కొలతలు సమానముగాగల రెండు సమబాహు త్రిభుజములు ఎల్లప్పుడూ సర్వసమానము ( )
2. ఇచ్చిన పటములు సర్వసమానమో కాదో సరిచూచుటకు కావలసిన కనీస కొలతలు ఎన్ని?
   - i. రెండు దీర్ఘచతురస్రములు
   - ii. రెండు సమచతుర్భుజాలు

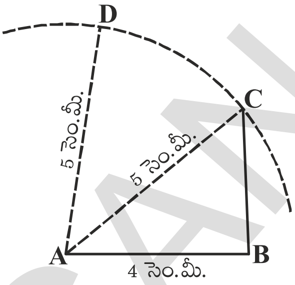
7.2 త్రిభుజాలు సర్వసమానం అవడానికి నియమాలు

త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావడానికి కావలసిన నియమాలను మీరు ముందు తరగతులలో నేర్చుకున్నారు. వాటిని ఒక్కసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

ఒక ఏకైక త్రిభుజాన్ని గీయాలంటే ఆ త్రిభుజం మూడు భుజాలు, మూడు కోణాల కొలతలు మనకు ఆవశ్యకమా? ఇచ్చిన కొలతలతో వేరు వేరు త్రిభుజాలను మీరు ఎప్పుడు చేయగలుగుతారు?

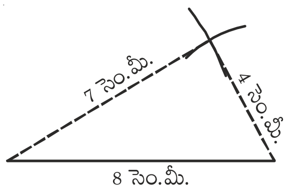
భుజము కొలత 4 సెం.మీ. ఉండునట్లు రెండు త్రిభుజాలు గీయుము. ఒక భుజము కొలత 4 సెం.మీ. ఉండేటట్లు రెండు వేర్వేరు త్రిభుజాలు మీరు నిర్మించగలరా? అందరికీ సర్వసమాన త్రిభుజాలు వస్తాయా? ఒక భుజము కొలత 4 సెం.మీ. ఉండునట్లు మీరు అనేక త్రిభుజాలను గీయగలరు.





ఇప్పుడు రెండు త్రిభుజ భుజాల కొలతలు 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. తీసుకొని నీవు గీయగలిగినన్ని త్రిభుజాలను గీయుము. ఏర్పడిన త్రిభుజాలు సర్వసమాన త్రిభుజాలు అవుతాయా?

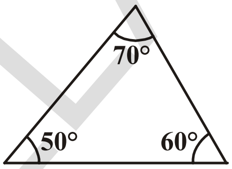
ఇచ్చిన ఈ రెండు భుజాల కొలతలతో కూడా మనం వేరు వేరు త్రిభుజాలను ఏర్పరచగలం.

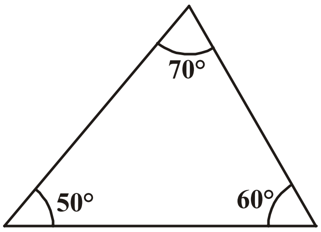


ఇప్పుడు భుజముల పొడవులు 4 సెం.మీ., 7 సెం.మీ., 8 సెం.మీ. కొలతలతో రెండు త్రిభుజాలను నిర్మించుము. మీరు రెండు వేర్వేరు త్రిభుజాలను గీయగలరా? మూడు భుజాల కొలతలు ఇచ్చినప్పుడు మనం ఒకే ఒక త్రిభుజాన్ని గీయగలమని మీరు గుర్తిస్తారు. గీసిన త్రిభుజాలన్నీ ఒక దాని కొకటి సర్వ సమానంగా ఉంటాయి.

ఇప్పుడు మీకు నచ్చిన ఏవైనా మూడు కోణాలను తీసుకోండి. అయితే ఆ మూడు కోణాల మొత్తం 180° ఉండాలి. మీరు ఎంచుకొన్న ఆ కొలతలతో రెండు త్రిభుజాలను గీయుము.

ఇచ్చిన మూడు కోణముల కొలతలతో రెండు వేరు వేరు త్రిభుజములను గీయగలనని మహిమ గమనించినది.





$\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$

కాబట్టి మూడు కోణములు తెలియడమన్నది ఏకైక త్రిభుజాన్ని నిర్మించడానికి సరిపోవు అని మనకు తెలుస్తుంది.

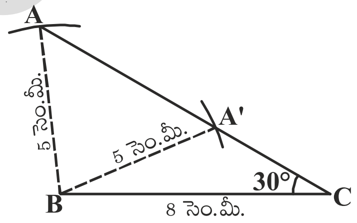
ఒక త్రిభుజంలో రెండు కోణముల కొలతలు ఇచ్చిన, త్రిభుజ కోణముల మొత్తము ధర్మము ఆధారంగా నేను మూడవకోణాన్ని కనుగొనగలనని షరీఫ్ భావిస్తున్నాడు. కాబట్టి ఒక త్రిభుజంలో రెండు కోణాల కొలతలు ఇచ్చిన మూడవ కోణం కొలత ఆ రెండింటిపై ఆధారపడిఉంటుంది. అందువలన మూడు కోణములు అన్నది సరిపోదు. అతను చెప్పినది నిజమే. ఒక ఏకైక త్రిభుజాన్ని నిర్మించాలంటే కనీసము మూడు ప్రత్యేక మరియు స్వతంత్ర్య కొలతలు కావాలి.

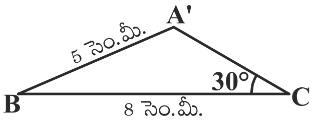
ఇప్పుడు కింద ఇచ్చిన కొలతలతో రెండు వేరు వేరు త్రిభుజాలను గీయండి.

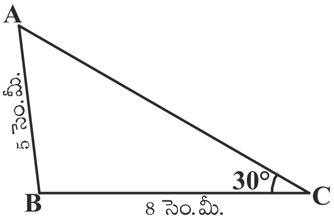
i. AB = 5 సెం.మీ., BC = 8 సెం.మీ.., $\angle C = 30°$ లతో ΔABC

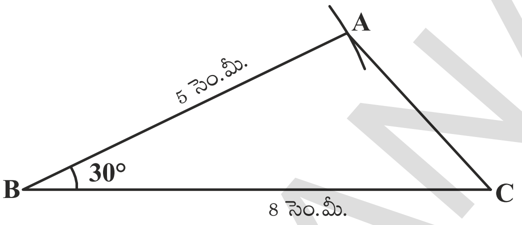
ii. AB = 5 సెం.మీ.., BC = 8 సెం.మీ., $\angle B = 30°$ లతో ΔABC

(i) మీరు (i) లో ఇచ్చిన కొలతలతో ఏకైక త్రిభుజాన్ని గీయగలరా? మీరు గీసి, మీ మిత్రులు చేసిన దానితో సరిచూడండి.









ఇక్కడ మనం ఇచ్చిన కొలతతో రెండు వేరువేరు త్రిభుజాలు ΔABC మరియు $\Delta A'BC$ లను గీయగలము. ఇప్పుడు మరల (ii) లో ఇచ్చిన కొలతలతో రెండు త్రిభుజాలను గీయండి. నీవు ఏమి గమనించావు? అవి సర్వసమాన త్రిభుజాలా? కావా?

దీనిని బట్టి మనం (ii) లో ఇచ్చిన కొలతలతో ఏకైక త్రిభుజం గీయవచ్చునని తెలుస్తుంది. (i), (ii) సందర్భాలలో ఇచ్చిన కొలతల వరుస క్రమం గమనించారా? (i) వ సందర్భంలో రెండు భుజాలు, ఒక కోణం ఇచ్చిననూ కోణం భుజాల మధ్యకోణం కాదు. (ii) వ సందర్భంలో రెండు భుజాల మధ్య కోణం ఇవ్వబడింది. అందుచే కొలతల క్రమం త్రిభుజ నిర్మాణాలకు ప్రత్యేకంగా ఏకైక త్రిభుజ నిర్మాణానికి అత్యంత ఆవశ్యకము.

7.3 త్రిభుజముల సర్వసమానత్వము

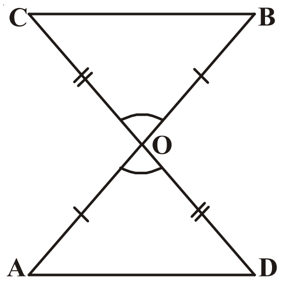
త్రిభుజముల సర్వసమానత్వము సరిచూడడానికి పై విధానాన్ని పాటించవచ్చును. మనకు ఒక భుజం సమానంగా ఉన్న లేదా మూడు కోణాలు సమానంగా ఉన్న రెండు త్రిభుజాలను మనం తీసుకొంటే అవి సర్వ సమానం కాదు. ఎందుకంటే ఈ ఇచ్చిన కొలతలతో మనం ఒకటి కంటే ఎక్కువ త్రిభుజాలను నిర్మించగలము. ఇంకా రెండు భుజాలు, ఒక కోణము కొలత ఇచ్చినప్పుడు కూడా అవి సర్వసమానమని చెప్పలేము. ఆ కోణము సమాన భుజాల మధ్య కోణము అయినప్పుడు మాత్రమే అవి సర్వసమానాలు. దీని నుండి మనం భుజం - కోణం - భుజం (భు.కో.భు.) సర్వసమానత్వం వర్తిస్తుంది కాని భుజం - భుజం - కోణం లేదా కోణం - భుజం - భుజం వర్తించవు అని చెప్పవచ్చును.

దీనిని త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమునకు మొదటి ప్రమాణముగా తీసుకొని దీని సహాయంతో మిగిలిన ప్రమాణాలను నిరూపిస్తాము.

స్వీకృతము (భుజము-కోణము-భుజము సర్వసమానత్వ నియమము (భు.కో.భు)) : *ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజములు వాటి మధ్య కోణము వరుసగా వేరొక త్రిభుజములో రెండు భుజములు వాటి మధ్య కోణమునకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానత్రిభుజములు.*

ఉదాహరణ-1 : ఇచ్చిన పటంలో AB మరియు CD లు 'O' వద్ద ఖండించుకొనుచున్నాయి. OA = OB మరియు OD = OC అయిన

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ మరియు (ii) $AD \parallel BC$ అని నిరూపించండి.



సాధన : (i) ΔAOD, ΔBOC లలో

OA = OB (దత్తాంశము)

OD = OC (దత్తాంశము)

$\angle AOD$, $\angle BOC$ లు ఒక జత శీర్షాభిముఖ కోణములను ఏర్పరచును.

అందువలన $\angle AOD = \angle BOC$.

కావున $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం)

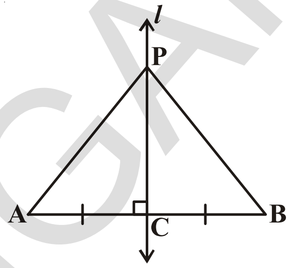
(ii) AOD, BOC సర్వసమానత్వ త్రిభుజాలలో సదృశభాగాలు సమానము

కావున $\angle OAD = \angle OBC$ మరియు ఇవి AD, BC రేఖాఖండములకు ఒక జత ఏకాంతరకోణములను ఏర్పరచును.

$\therefore AD \parallel BC$

ఉదాహరణ-2 : AB ఒక రేఖాఖండము సరళరఖ l దీనికి లంబ సమద్విఖండనరేఖ. ఈ రేఖపై P ఒక బిందువు అయిన ఈ P బిందువు A, B బిందువుల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుందని చూపుము.

సాధన : $l \perp AB$ మరియు ఈ రేఖ l, రేఖాఖండము AB మధ్యబిందువు C గుండా పోవును.



మనము PA = PB అని చూపాలి.

ΔPCA మరియు ΔPCB లను తీసుకొనుము.

AC = BC (AB నకు C మధ్యబిందువు)

$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (దత్తాంశము)

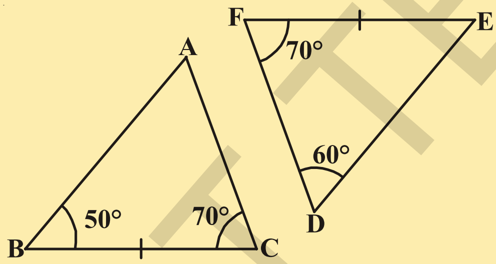
PC = PC (ఉమ్మడి బిందువు)

కావున, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (భు.కో.భు. నియమం)

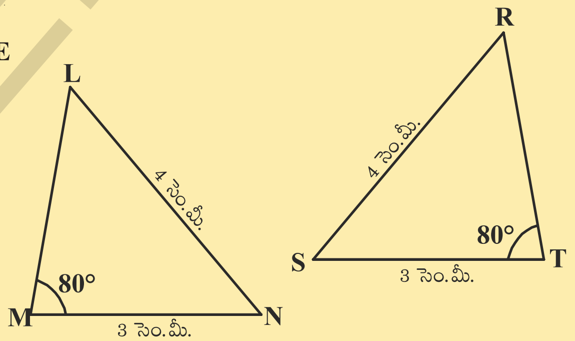
అందువలన PA = PB (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు కావున)

ఇవి చేయండి

1. ఈ కింది త్రిభుజములు సర్వసమానాలు అవునో కాదో తెలుపుము. దానికి కారణములను వివరించుము.

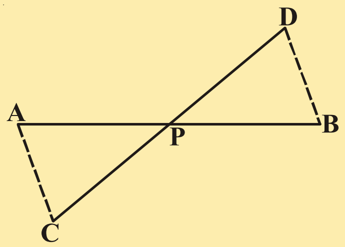


(i)



(ii)

2. ఇచ్చిన పటంలో AB, DC రేఖాఖండములను P బిందువు సమద్విఖండన చేయును అయిన $\Delta APC \cong \Delta BPD$ అని చూపుము.

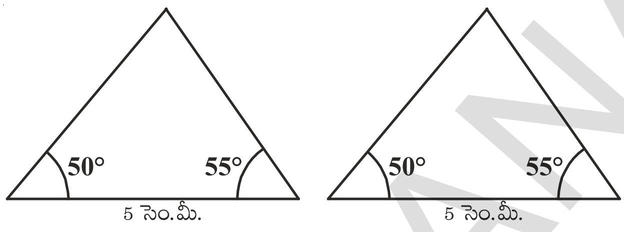


7.3.1 ఇతర సర్వసమానత్వ నియమములు

రెండు కోణములు 50°, 55° మరియు ఈ కోణములను కలిగిన భుజము పొడవు 5 సెం,మీ. కొలతలతో రెండు త్రిభుజములను నిర్మించడానికి ప్రయత్నించుము.

ఈ రెండు త్రిభుజములను కత్తిరించి ఒక దానిపై ఒకటి అమర్చుము. మీరు ఏమి గమనిస్తారు? ఈ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానమని మీరు గమనిస్తారు. ఈ ఫలితాన్ని మనం సర్వసమానత్వం యొక్క కోణమ–భుజము–కోణము నియమం అంటారు.

దీనిని మనం **కో.భు.కో.** నియమం అని రాస్తాము. ఈ ఫలితాన్ని ప్రవచించి రుజువు చేద్దాము. ఈ ఫలితాన్ని మనం రుజువు చేయగలం కావున దీనిని మనం సిద్ధాంతము అని పిలుస్తాము. దీనిని రుజువు చేయడానికి మనం సర్వసమానత్వ భు.కో.భు. స్వీకృతాన్ని ఉపయోగించుకొంటాము.



సిద్ధాంతము 7.1 (కో.భు.కో. సర్వసమానత్వ నియమము) : ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు, వాటి మధ్య భుజము వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు, వాటి మధ్య భజమునకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానములు.

దత్తాంశము : $\Delta ABC, \Delta DEF$ లలో

$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ మరియు $\overline{BC} = \overline{EF}$

సారాంశము : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

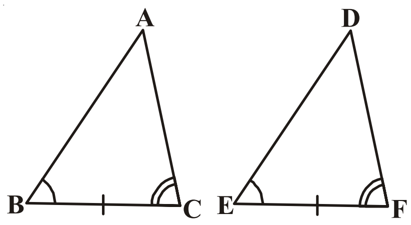
ఉపపత్తి : దీనికి మూడు సందర్భములున్నవి.

$\overline{AB}$ మరియు $\overline{DE}$ లకు సందర్భములు $\overline{AB} > \overline{DE}$ లేదా $\overline{DE} > \overline{AB}$ లేదా $\overline{DE} = \overline{AB}$.

మనము ఈ మూడు సందర్భములలలో $\Delta ABC, \Delta DEF$ ల సంబంధాన్ని పరిశీలిద్దాం.

సందర్భం (i): $\overline{AB} = \overline{DE}$ అనుకొనుము అయిన మనం ఏమి గమనించవచ్చును?

$\Delta ABC, \Delta DEF$ లను తీసుకొనుము.



$\overline{AB} = \overline{DE}$ (ఊహించినది)

$\angle B = \angle E$ (దత్తాంశము)

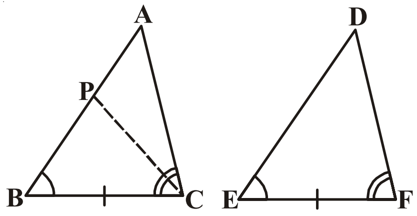
$\overline{BC} = \overline{EF}$ (దత్తాంశము)

కావున $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (భు.కో.భు. సర్వసమాన స్వీకృతం నుండి)

సందర్భం (ii): రెండవ సందర్భము $AB > DE$ అనుకొనుము.

$PB = DE$ అగునట్లు AB పై P బిందువును తీసుకొనుము.

ఇప్పుడు $\Delta PBC, \Delta DEF$



$\overline{PB} = \overline{DE}$ (నిర్మాణప్రకారం)

$\angle B = \angle E$ (దత్తాంశము)

$\overline{BC} = \overline{EF}$ (దత్తాంశము)

కావున $\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (భు.కో.భు. సర్వసమాన స్వీకృతం)

త్రిభుజములు సర్వసమానముకావున వాటి సదృశభాగాలు సమానం.

కావున $\angle PCB = \angle DFE$

కాని $\angle ACB = \angle DFE$ (దత్తాంశము)

అందువలన $\angle ACB = \angle PCB$ (పై సమాచారం నుండి)

కాని, ఇది సాధ్యమా?

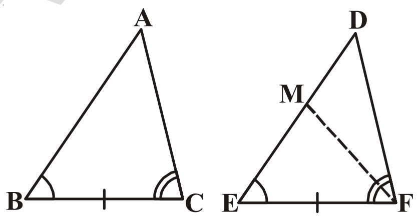
ఇది సాధ్యమవ్వాలంటే P బిందువు A తో ఏకీభవించాలి

(లేదా) $\overline{BA} = \overline{ED}$

అప్పుడు $\Delta ABC \cong \Delta DEF$(భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ స్వీకృతము నుండి)

(**గమనిక :** పై నిరూపణ నుండి మనం $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ మరియు $\overline{BC} = \overline{EF}$ అయిన $\overline{AB} = \overline{DE}$ అవుతాయి. అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమాన త్రిభుజాలు).

సందర్భం (iii): మూడవ సందర్భం $\overline{AB} < \overline{DE}$



ME = AB అగునట్లు ΔDEF లో DE పై M అనే బిందువును తీసుకొనుము. సందర్భం (ii) లో చెప్పిన వాదనను కొనసాగించిన $\overline{AB} = \overline{DE}$ అని చెప్పవచ్చును. అప్పుడు $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. పక్క పటములను పరిశీలించి దీనిని నీవు చేయుటకు ప్రయత్నించుము.

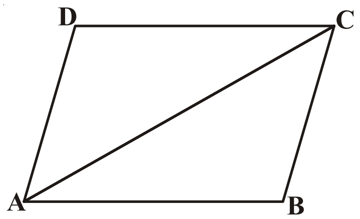
రెండు త్రిభుజములలో రెండు జతల కోణములు, ఒక జత భుజములు సమానము. ఇక్కడ ఆ భుజము సమానముగానున్న సదృశకోణాల జతల మధ్య భుజము కాదు. అయిననూ త్రిభుజములు సర్వసమానంగా ఉంటాయా? అవి రెండూ సర్వసమానంగా ఉంటాయని మీరు గమనించవచ్చును. ఎందుకో మీరు కారణము చెప్పగలరా?

ఒక త్రిభుజములోని కోణముల మొత్తము 180°. రెండు జతల కోణాలు సమానమైన మూడవజత కోణాలు కూడా సమానమవుతాయి. (180° – సమాన కోణాల మొత్తము).

రెండు త్రిభుజములలో రెండు జతల కోణములు మరియు ఒక జత సదృశభుజాలు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమాన త్రిభుజములు. దీనిని మనం **కో.కో.భు.** సర్వ సమాన నియమం అంటాము. ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణ-3 : ఇచ్చిన పటంలో $AB \parallel DC$ మరియు $AD \parallel BC$ అయిన $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ అని చూపుము.

సాధన : ΔABC, ΔCDA లను తీసుకొనుము.



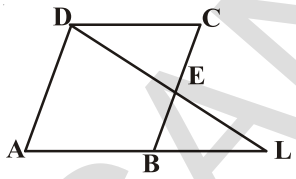
$\angle BAC = \angle DCA$ (ఏకాంతర కోణములు)

$AC = CA$ (ఉమ్మడి భుజం)

$\angle BCA = \angle DAC$ (ఏకాంతర కోణములు)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$(కో.భు.కో. సర్వసమానత్వం ప్రకారం)

ఉదాహరణ-4 : ఇచ్చిన పటంలో AL || DC, BC మధ్యబిందువు E అయిన $\Delta EBL \cong \Delta ECD$ అని చూపండి.



సాధన : ΔEBL మరియు ΔECD లలో

$\angle BEL = \angle CED$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$BE = CE$ (BC మధ్యబిందువు E కావున)

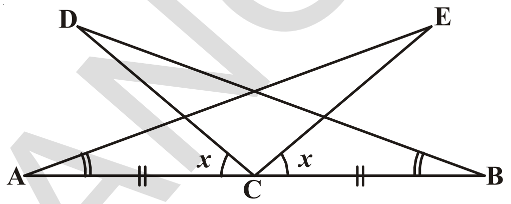
$\angle EBL = \angle ECD$ (ఏకాంతర కోణములు)

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$ (కో.భు.కో. సర్వసమానత్వం)

ఉదాహరణ-5 : పక్కపటంలోని సమాచారమును ఉపయోగించుకొని

(i) $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

(ii) $DC = EC$ అని రుజువుచేయుము.



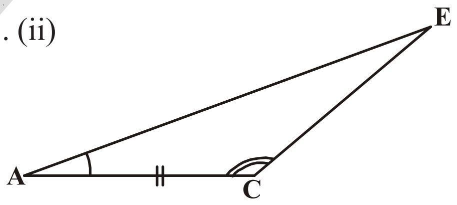
సాధన : Let $\angle ACD = \angle BCE = x$ అనుకొనుము

$\therefore \angle ACE = \angle DCE + \angle ACD = \angle DCE + x$ ...... (i)

$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = \angle DCE + x$ ...... (ii)

(i), (ii) ల నుండి $\angle ACE = \angle BCD$

ΔDBC మరియు ΔEAC లలో



$\angle ACE = \angle BCD$ (పైన నిరూపించబడినది)

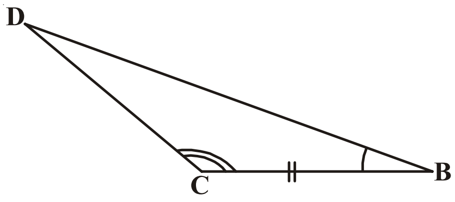
$BC = AC$ [దత్తాంశము]

$\angle CBD = \angle EAC$ [దత్తాంశము]

$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ [కో.భు.కో. ప్రకారం]

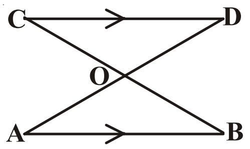
$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ కావున

$DC = EC$.(సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశభుజాలు సమానం)



ఉదాహరణ-6 : AB, CD లు సమాంతరాలు. AD మధ్యబిందువు O అయిన

(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) BC కి కూడా మధ్యబిందువు O అని నిరూపించుము.



సాధన : (i) ΔAOB మరియు ΔDOC లలో

$\angle ABO = \angle DCO$ (AB || CD, BC తిర్యగ్రేఖ ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle AOB = \angle DOC$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$OA = OD$ (దత్తాంశము)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta DOC$ (కో.కో.భు. నియమం ప్రకారం)

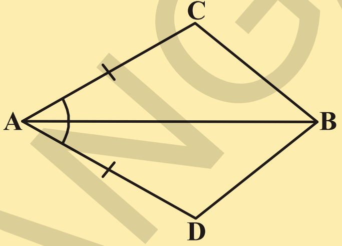
(ii) $OB = OC$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశభుజాలు సమానం)

కావున BC మధ్యబిందువు O.

అభ్యాసం 7.1

1. చతుర్భుజం ACBD లో, $AC = AD$ మరియు $\angle A$ కు AB కోణ సమద్విఖండనరేఖ అయిన $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.

   BC మరియు BD ల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

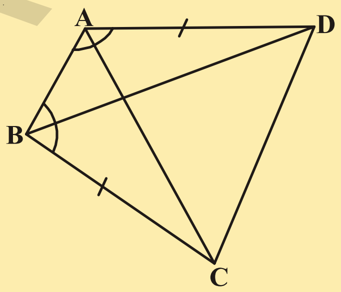


2. ABCD చతుర్భుజంలో $AD = BC$ మరియు $\angle DAB = \angle CBA$ అయిన

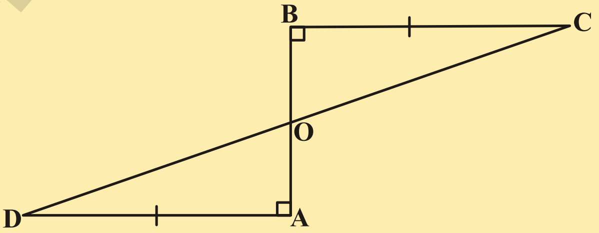
   (i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

   (ii) $BD = AC$

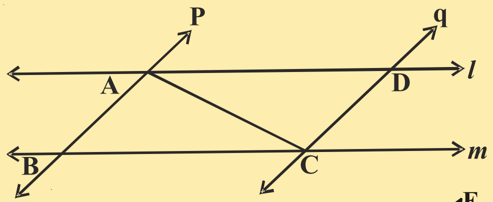
   (iii) $\angle ABD = \angle BAC$ అని నిరూపించుము.



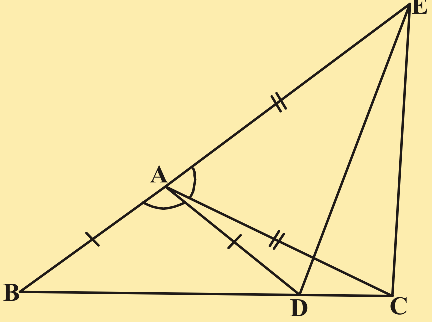
3. AD, BC లు సమానము మరియు రేఖా ఖండము AB కి లంబములు. అయిన CD రేఖాఖండము AB ని సమద్విఖండన చేయునని చూపుము.



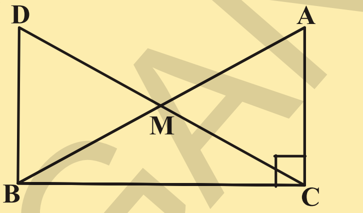
4. *l*, *m* అనే ఒక జత సమాంతర రేఖలు p మరియు q అనే వేరొక జత సమాంతర రేఖలచే ఖండించబడినవి అయిన $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ అని నిరూపించుము.



5. పక్క పటంలో $AC = AE$, $AB = AD$ మరియు $\angle BAD = \angle EAC$ అయిన $BC = DE$ అని నిరూపించుము.



6. లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో లంబకోణము C వద్ద ఉన్నది, కర్ణము AB యొక్క మధ్యబిందువు M. C బిందువును M కు కలిపి DM = CM అగునట్లు D బిందువు వద్దకు పొడిగించినారు. పటంలో చూపినట్లు D బిందువును B బిందువుకు కలిపినారు. అయిన



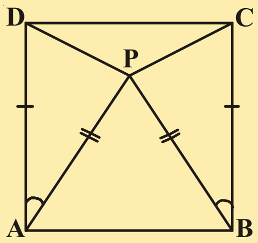
(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ ఒక లంబకోణము

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

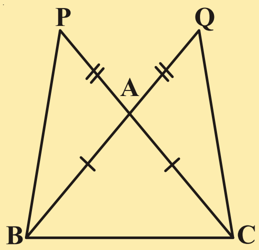
(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

7. పక్క పటంలో ABCD ఒక చతురస్రము మరియు ΔAPB ఒక సమబాహుత్రిభుజము అయిన $\Delta APD \cong \Delta BPC$ అని నిరూపించుము.



(సూచన : ΔAPD మరియు ΔBPC లలో $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AP} = \overline{BP}$ మరియు $\angle PAD = \angle PBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$]

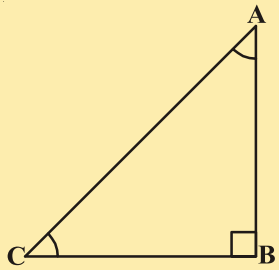
8. పక్క పటంలో AB = AC కావున ΔABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము BA మరియు $\overline{CA}$ లను $\overline{AQ} = \overline{AP}$ అగునట్లు వరుసగా Q, P బిందువుల వద్దకు పొడిగించిన $\overline{PB} = \overline{QC}$ అని నిరూపించుము.



(సూచన : ΔAPB మరియు ΔAQC లను పోల్చుము)

9. ఒక త్రిభుజములలో ఒక కోణం యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖ ఎదుటి భుజాన్ని కూడా సమద్విఖండన చేసిన ఆ త్రిభుజము సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపుము.

10. ఇచ్చిన పటంలో ABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజము. లంబకోణము శీర్షము B వద్ద కలదు మరియు $\angle BCA = 2\angle BAC$ అయిన కర్ణము $AC = 2BC$ అని చూపుము.



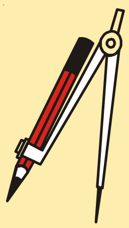
(సూచన : BC = BD అగునట్లు CB ని D బిందువు వద్దకు పొడిగించుము)

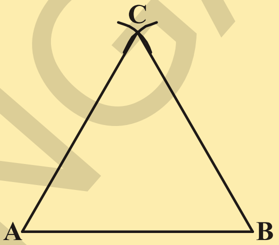
7.4 త్రిభుజము యొక్క కొన్ని ధర్మములు

ఇంతవరకు మనం త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం యొక్క రెండు నియమాల గురించి నేర్చుకున్నాము. మనం నేర్చుకున్న ఈ ఫలితాలను రెండు భుజాలు సమానంగాగల త్రిభుజ ధర్మాల అధ్యయనానికి ఉపయోగిద్దాము.

కృత్యము

i. వృత్తలేఖిని ఉపయోగించి త్రిభుజమును నిర్మించుటకు, ఏదేని కొంత కొలతతో రేఖాఖండము AB ని గీయుము. వృత్తలేఖిని తీసుకొని దానికి సరిపడినంత కొలత తీసుకొని బిందువులు A, B ల వద్ద ఉంచి చాపములు గీయుము. అప్పుడు మీకు ఏరకమైన త్రిభుజము ఏర్పడుతుంది? అవును. ఏర్పడినది ఒక సమద్విబాహుత్రిభుజము. అందువలన పటంలోని $\Delta ABC, AC = BC$ కలిగిన ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము. ఇప్పుడు కోణములు $\angle A. \angle B$ ల విలువలను కొలవండి. మీరు ఏమి గమనిస్తారు?



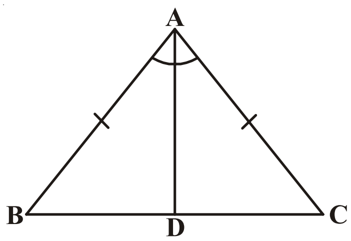


ii. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమును కత్తిరించుము.

సర్వసమాన భాగములు ఒకదానిపై ఒకటి ఏకీభవించునట్లు ఆ త్రిభుజమును మడవండి. $\angle A, \angle B$ ల గురించి మీరు ఏమి గమనించారు?

అటువంటి ప్రతీ త్రిభుజములో, సమాన భుజములకు ఎదురుగా ఉండే కోణములు సమానంగా ఉండడాన్ని మీరు గమనిస్తారు.

ఇలా చాలా ముఖ్యమైన ఫలితము మరియు ప్రతీ సమద్విబాహుత్రిభుజమునకు ఇది సత్యము. దీనిని కింది విధంగా నిరూపించవచ్చును.



సిద్ధాంతము : ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజములో సమానభుజములకు ఎదురుగానున్న కోణములు సమానము.

ఈ ఫలితాన్ని మనము అనేక పద్ధతులలో రుజువుచేయవచ్చును. ఇక్కడ ఆ నిరూపణలలో ఒకటి ఇవ్వబడినది.

దత్తాంశము : సమద్విబాహుత్రిభుజము ABC లో $AB = AC$.

సారాంశము : $\angle B = \angle C$.

నిర్మాణము : $\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ గీయుము.

ఇది భుజము BC ని D బిందువు వద్ద ఖండించును.

ఉపపత్తి : ΔBAD మరియు ΔCAD లలో

$AB = AC$ (దత్తాంశము)

$\angle BAD = \angle CAD$ (నిర్మాణం ప్రకారం)

$AD = AD$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ స్వీకృతం)

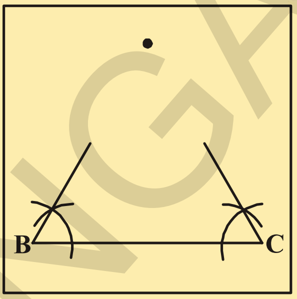
అందువలన $\angle ABD = \angle ACD$ (సర్వసమాన త్రిభుజ సదృశభుజాలు సమానం)

అనగా $\angle B = \angle C$ (సమాన కోణాలు)

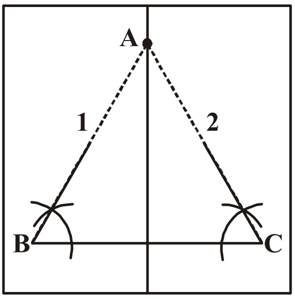
దీని విపర్యయం కూడా సత్యమేనా? అనగా "ఒక త్రిభుజములో రెండు కోణములు సమానమైన వాటి ఎదురుగా ఉండే భుజాలు కూడా సమానము" అని మీరు చెప్పగలరా?

కృత్యం

1. ఒక ఉల్లి పొర కాగితంపై 6 సెం.మీ. పొడవుగల రేఖా ఖండము BC ని గీయండి.
2. B మరియు C బిందువుల వద్ద నుండి 60^0 కోణము చేయునట్లు రెండు కిరణములను గీయండి. వాటి ఖండన బిందువునకు A అని పేరు పెట్టండి.
3. B, C బిందువులు ఒకదానిపై ఒకటి ఏకీభవించునట్లు కాగితాన్ని మడత పెట్టండి. మీరు ఏమి గమనిస్తారు? AB, AC లు సమానంగా ఉన్నాయా?



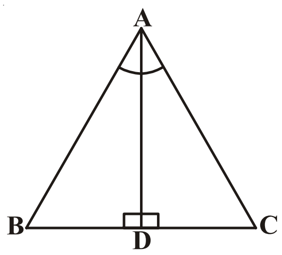
$\angle B$, $\angle C$ లకు ఒకే కోణాలు తీసుకొంటూ వేరువేరు విలువలతో ఈ కృత్యమును చేయండి. ప్రతీ సందర్భంలోను సమాన కోణాలకు ఎదురుగా ఉండే భుజాలు సమానము. దీని నుండి మనం కింది సిద్ధాంతము చెప్పవచ్చును.



సిద్ధాంతము 7.3 : ఒక త్రిభుజములో సమాన కోణాలకు ఎదురుగా ఉండే భుజాలు సమానము.

దీనిని మీరు ఇది ఇంతకుముందు మనం చెప్పుకున్న సిద్ధాంతానికి విపర్యయము. కో.భు.కో. సర్వసమానత్వ నియమాన్ని ఉపయోగించి రుజువు చేయండి.

ఉదాహరణ-7 : ΔABC లో $\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండనరేఖ AD, BC భుజానికి లంబంగానున్నది. అయిన $AB = AC$ అని ΔABC సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి.



సాధన : ΔABD మరియు ΔACD లో

$\angle BAD = \angle CAD$ (దత్తాంశము)

$AD = AD$ (ఉమ్మడి భుజం)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (దత్తాంశము)

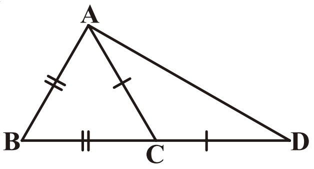
కావున $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (కో.భు.కో. నియమం)

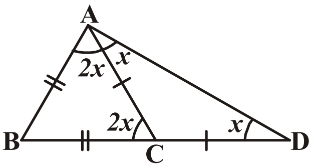
దానివలన $AB = AC$ (సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)

లేదా ΔABC సమద్విబాహుత్రిభుజము.

ఉదాహరణ-8 : పక్క పటంలో $AB = BC$ మరియు $AC = CD$.

అయిన $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1$ అని చూపండి.





సాధన : $\angle ADB = x$ అనుకొనుము.

ΔACD లో $AC = CD$

$\Rightarrow \quad \angle CAD = \angle CDA = x$

మరియు బాహ్యకోణం $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA$

$= x + x = 2x$

$\Rightarrow \quad \angle BAC = \angle ACB = 2x$. ($\because$ ΔABC లో $AB = BC$)

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$

$= 2x + x = 3x$

మరియు $\dfrac{\angle BAD}{\angle ADB} = \dfrac{3x}{x} = \dfrac{3}{1}$

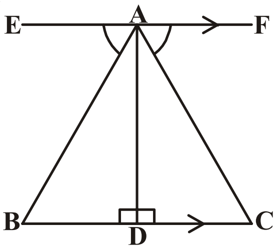
అనగా $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1$.

అందుచేత ఇది నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ-9 : ఇచ్చిన పటంలో AD అనేది BC మరియు EF లు రెండింటికీ లంబము. ఇంకా $\angle EAB = \angle FAC$, అయిన ΔABD మరియు ΔACD లు సర్వ సమానమని చూపుము.

ఇంకా $AB = 2x + 3$, $AC = 3y + 1$,

$BD = x$ మరియు $DC = y + 1$ అయిన x, y విలువలు కనుగొనండి.



సాధన : $AD \perp EF$

$\Rightarrow \quad \angle EAD = \angle FAD = 90^0$

$\angle EAB = \angle FAC$ (దత్తాంశము)

$\Rightarrow \quad \angle EAD - \angle EAB = \angle FAD - \angle FAC$

$\Rightarrow \quad \angle BAD = \angle CAD$

ΔABD మరియు ΔACD లలో

$\angle BAD = \angle CAD$ [పైన నిరూపించబడినది]

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ [$AD \perp BC$ దత్తాంశము]

మరియు $AD = AD$

$\therefore \quad \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [కో.భు.కో. నియమం]

ఇది నిరూపించబడినది.

$\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow AB = AC$ మరియు $BD = CD$ [సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశభాగాలు]

$\Rightarrow 2x + 3 = 3y + 1$ మరియు $x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - 3y = -2$ మరియు $x - y = 1$

సమీకరణాలను సాధించగా $2(1+y) - 3y = -2$ సమీకరణాలను సాధించగా $y = 4$ ను $x = 1 + y$

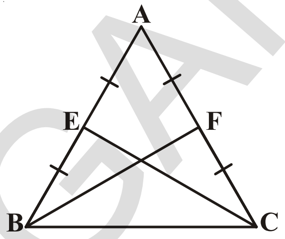
$x = 1 + y$ $\quad 2 + 2y - 3y = -2$ $\quad x = 1 + 4$ ప్రతిక్షేపించగా

$-y = -2 - 2$ $\quad x = 5$

$-y = -4$

ఉదాహరణ-10 : ΔABC లో సమాన భుజాలు AB, AC ల మధ్యబిందువులు వరుసగా E మరియు F (పటాన్ని చూడుము) BF = CE అని చూపండి.

సాధన : ΔABF మరియు ΔACE లలో



$AB = AC$ (దత్తాంశము)

$\angle A = \angle A$ (ఉమ్మడి కోణము)

$AF = AE$ (సమానభుజాలలో సగాలు)

కావున $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (భు.కో.భు. నియమం)

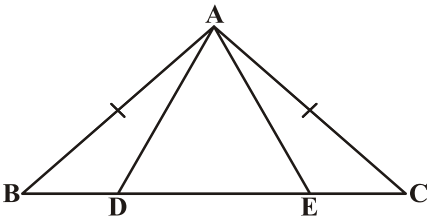
$\therefore BF = CE$ (సర్వసమాన త్రిభుజాలలోని సదృశ భుజాలు సమానం)

ఉదాహరణ-11 : ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము ABC లో AB = AC. D మరియు E బిందువులు BC పై BE = CD అయ్యేటట్లున్న బిందువులు. (పటాన్ని చూడండి) అయిన AD = AE అని చూపండి.

సాధన : ΔABD మరియు ΔACE లలో

$AB = AC$ (దత్తాంశము) .... (1)

$\angle B = \angle C$ (సమాన భుజాలకు ఎదురుగానున్న సమాన కోణాలు) .... (2)



ఇంకా $BE = CD$

కావున $BE - DE = CD - DE$

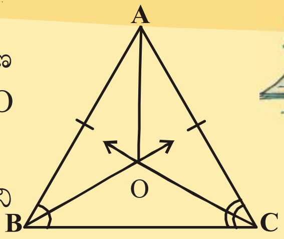
అనగా $BD = CE$ (3)

కావున $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

((1), (2), (3) ల నుండి మరియు భు.కో.భు. నియమం).

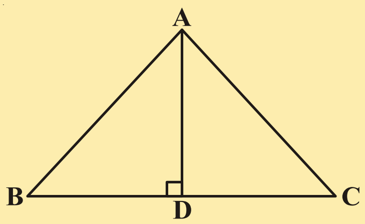
దీని నుండి $AD = AE$ (సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)

అభ్యాసం 7.2



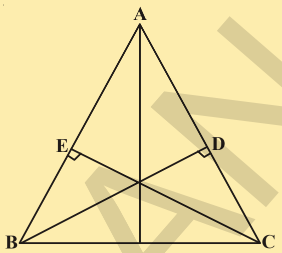
1. సమద్వి బాహుత్రిభుజము ABC లో AB = AC. $\angle B$, $\angle C$ ల కోణ సమద్విఖండన రేఖలు O బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయి. A మరియు O బిందువులను కలపండి.

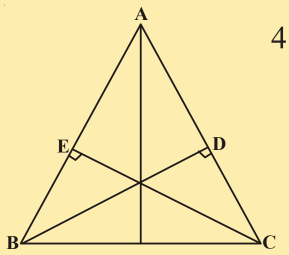
   (i) OB = OC (ii) AO, $\angle A$ కు కోణసమద్విఖండనరేఖ అని నిరూపించండి.



2. ΔABC లో AD అనేది BC భుజమునకు లంబ సమద్విఖండన రేఖ. (పక్క పటాన్ని చూడండి). ΔABC, AB = AC అయ్యేటట్లున్న సమద్వి బాహుత్రిభుజమని చూపండి.

3. ΔABC ఒక సమద్విబాహుత్రిభుజము. సమానభుజాలు AC, AB లకు గీసిన లంబాలు వరుసగా BD మరియు CE అయిన ఈ లంబాలు సమానమని చూపండి.



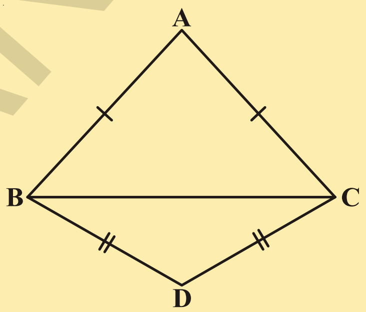


4. ΔABC లో AC, AB భుజాలకు గీసిన లంబాలు BD, CE లు సమానము (పటము చూడండి) అయిన

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

(ii) $AB = AC$ అనగా ΔABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి.

5. ΔABC, ΔDBC లు ఒకే భుజము BC పై నున్న రెండు సమద్విబాహుత్రిభుజములు (పటము చూడండి) అయిన $\angle ABD = \angle ACD$ అని చూపండి.



7.5 త్రిభుజముల సర్వసమానత్వమునకు మరికొన్ని నియమాలు

సిద్ధాంతము 7.4 : (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమము)

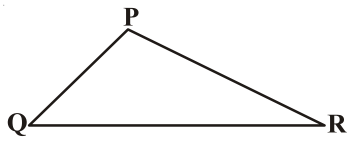
నిర్మాణముల ద్వారా భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమము వర్తిస్తుందని మనం నేర్చుకున్నాము. అనువైన నిర్మాణము చేసి దీనిని సిద్ధాంతములా నిరూపించవచ్చును. దీనిపై మనం కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

- **భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమం నిరూపణ**

దత్తాంశము : ΔPQR మరియు ΔXYZ లలో $PQ = XY$, $QR = YZ$ మరియు $PR = XZ$

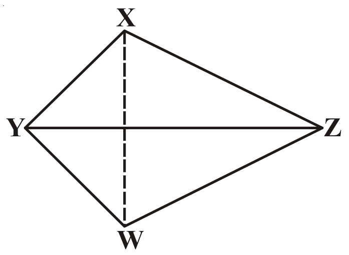
సారాంశము : $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

నిర్మాణము : $\angle ZYW = \angle PQR$ మరియు $WY = PQ$ అగునట్లు YW ని గీయుము. XW మరియు WZ లను కలుపుము.



ఉపపత్తి : ΔPQR మరియు ΔWYZ లలో

$QR = YZ$ (దత్తాంశము)
$\angle PQR = \angle ZYW$ (నిర్మాణం)
$PQ = YW$ (నిర్మాణం)
$\therefore \Delta PQR \cong \Delta WYZ$ (భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ స్వీకృతం)



$\Rightarrow \angle P = \angle W$ మరియు $PR = WZ$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశభాగాలు)

$PQ = XY$ (దత్తాంశము) మరియు $PQ = YW$ (నిర్మాణం)

$\therefore XY = YW$

అదేవిధంగా, $XZ = WZ$

ΔXYW లలో $XY = YW$

$\Rightarrow \angle YWX = \angle YXW$ (ఒక త్రిభుజంలో సమాన భుజాలకు ఎదురుగా నున్న కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి)

ఇదేవిధంగా, $\angle ZWX = \angle ZXW$

$\therefore \angle YWX + \angle ZWX = \angle YXW + \angle ZXW$

$\Rightarrow \angle W = \angle X$

ఇప్పుడు, $\angle W = \angle P$

$\therefore \angle P = \angle X$

ΔPQR మరియు ΔXYZ లలో

$PQ = XY$

$\angle P = \angle X$

$PR = XZ$

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ స్వీకృతం)

దీని ఆధారంగా ఇవ్వబడిన కింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఉదాహరణ-12 : ABCD చతుర్భుజంలో $AB = CD$, $BC=AD$ అయిన $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ అని నిరూపించండి.

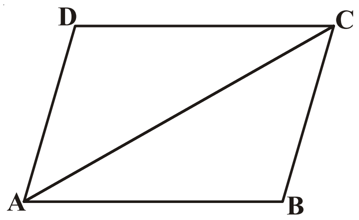
ΔABC మరియు ΔCDA లలో

$AB = CD$ (దత్తాంశము)

$AD = BC$ (దత్తాంశము)

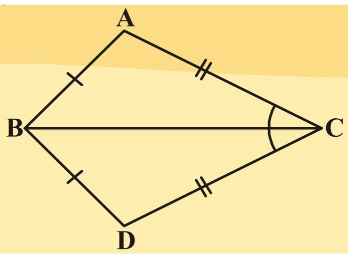
$AC = CA$ (ఉమ్మడి భుజం)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వనియమం)



ఇవి చేయండి

1. పక్క పటంలో ΔABC మరియు ΔDBC లు $\overline{AB} = \overline{BD}$ మరియు $\overline{AC} = \overline{CD}$ అయ్యేటట్లున్న రెండు త్రిభుజములు అయిన $\Delta ABC \cong \Delta DBC$ అని చూపండి.



భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ స్వీకృతంలో, సమాన కోణాల జత తప్పనిసరిగా సమాన సదృశ భుజాల జతల మధ్య కోణము అయిఉండాలి లేనిచో ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమాన త్రిభుజాలు కాకపోవచ్చు.

కృత్యం

కర్ణము 5 సెం.మీ. మరియు ఒక భుజము కొలత 3 సెం.మీ. ఉండేటట్లు ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. ఇటువంటి ఎన్ని వేర్వేరు త్రిభుజాలను మీరు నిర్మించగలరు? మీరు నిర్మించిన త్రిభుజాన్ని మీ తరగతిలోని ఇతర విద్యార్థుల త్రిభుజాలతో పోల్చి చూడండి. ఈ త్రిభుజాలు సర్వసమాన త్రిభుజాలు అవుతాయా? ఈ త్రిభుజాలను కత్తిరించి సమానభుజాలు ఒకదానిపై ఒకటి ఉండేటట్లు అమర్చండి. అవసరమైతే త్రిభుజాలను తిప్పండి. మీరు ఏమి పరిశీలిస్తారు? రెండు లంబకోణత్రిభుజాలు సర్వ సమానమని మీరు గమనిస్తారు. రెండు లంబకోణ త్రిభుజములలో ఒక త్రిభుజము లంబకోణంలోని కర్ణము, భుజము వరసగా రెండవ త్రిభుజంలోని కర్ణము, భుజములకు సమానం.

ఈ సందర్భంలో రెండు సమాన భుజాల మధ్యకోణంకాదని గమనిస్తారు. దీని నుండి మనం కింది సర్వసమానత్వ నియమాన్ని రాబట్టవచ్చును.

సిద్ధాంతము 7.5 (లం.క.భు. సర్వసమానత్వ నియమం) : రెండు లంబకోణ త్రిభుజములలో ఒక త్రిభుజములోని కర్ణము, భుజములు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని కర్ణము, భుజములకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమాన త్రిభుజములు.

లం.క.భు. అనగా లంబకోణము – కర్ణము – భుజము

ఇప్పుడు నిరూపణ చేద్దాం.

దత్తాంశము : రెండు లంబకోణ త్రిభుజములు ΔABC మరియు ΔDEF లలో

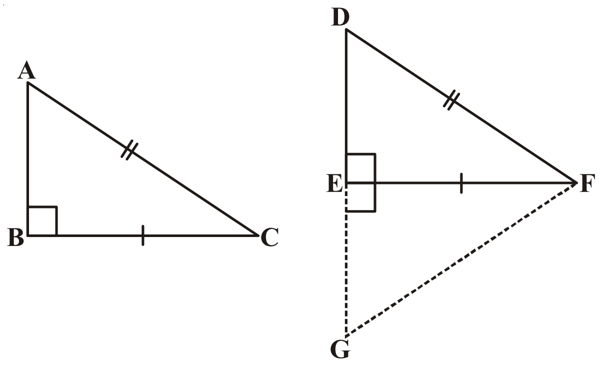
$\angle B = 90^\circ$ మరియు

$\angle E = 90^\circ; AC = DF$

మరియు $BC = EF$.

సారాంశము : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

నిర్మాణము : $EG = AB$ అగునట్లు DE ని G వద్దకు పొడిగించండి. G, F లను కలపండి.



ఉపపత్తి :

ΔABC మరియు ΔGEF లలో

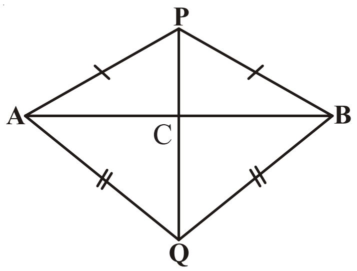
$AB = GE$	(నిర్మాణం ప్రకారం)
$\angle B = \angle FEG$	(ప్రతి కోణము లంబకోణము (90^0))
$BC = EF$	(దత్తాంశము)
$\Delta ABC \cong \Delta GEF$	(భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ స్వీకృతం)
కావున $\angle A = \angle G \ldots (1)$	(సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశ కోణాలు)

$AC = GF \dots (2)$	(సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)
ఇంకా $AC=DF$	((2) మరియు దత్తాంశం)
$\therefore DF = GF$	(పై వాటి నుండి)
కావున $\angle D = \angle G \dots (3)$	(సమానభుజాల కెదురుగానున్న కోణాలు సమానం)
మరల $\angle A = \angle D \dots (4)$	((1), (3) ల నుండి)
$\Delta ABC, \Delta DEF$ లలో $\angle A = \angle D$,	((4) నుండి)
$\angle B = \angle E$	(దత్తాంశము)
కావున $\angle A + \angle B = \angle D + \angle E$	(కలుపగా)
కాని $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ మరియు	(త్రిభుజకోణాల మొత్తం ధర్మం)
$\angle D + \angle E + \angle F = 180^0$	(త్రిభుజకోణాల మొత్తం ధర్మం)
$180 - \angle C = 180 - \angle F$	($\angle A + \angle B = 180^0 - \angle C$ మరియు $\angle D + \angle E = 180^0 - \angle F$)
కావున $\angle C = \angle F, \dots (5)$	(కొట్టివేత నియమాల ప్రకారం)
ఇప్పుడు $\Delta ABC, \Delta DEF$ లలో	
$BC = EF$	(దత్తాంశం)
$\angle C = \angle F$	((5) నుండి)
$AC = DF$	(దత్తాంశం)
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	(భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ స్వీకృతం)

ఉదాహరణ-13 : AB ఒక రేఖా ఖండము. P మరియు Q అనే బిందువులు AB కి రెండువైపులలో A, B లకు సమానదూరంలో ఉన్నాయి. (పటాన్ని చూడండి) అయిన PQ రేఖ AB కి లంబసమద్విఖండనరేఖ అని చూపండి.

సాధన : $PA = PB$ మరియు $QA = QB$ అని ఇవ్వబడినది. మీరు PQ, AB కి లంబమని మరియు దానిని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపాలి. PQ, AB ని C బిందువు వద్ద ఖండిచుననుకొనుము.

ఈ పటంలో రెండు సర్వసమానత్రిభుజాల గురించి మీరు ఆలోచించగలరా?



ΔPAQ మరియు ΔPBQ తీసుకోండి.

ఈ త్రిభుజములలో

$AP = BP$ (దత్తాంశము)

$AQ = BQ$ (దత్తాంశము)

$PQ = PQ$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమం)

$\therefore \angle APQ = \angle BPQ$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు).

ΔPAC మరియు ΔPBC లలో

$AP = BP$ (దత్తాంశము)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ పైన నిరూపించబడినది)

$PC = PC$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (భు.కో.భు. నియమం)

$\therefore$ $AC = BC$ (సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశ భుజాలు) .... (1)

మరియు $\angle ACP = \angle BCP$ (సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశ కోణాలు)

ఇంకా $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (రేఖీయద్వయం)

కావున $2\angle ACP = 180°$

లేదా $\angle ACP = 90°$ .... (2)

(1), (2) ల నుండి PQ, AB కి లంబసమద్విఖండన రేఖ అని చెప్పవచ్చును.

[గమనించవలసిన విషయమేమంటే ΔPAQ, ΔPBQ ల సర్వసమానత్వం రుజువు చేయకుండా $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ అని నిరూపించలేము.

$AP = BP$ (దత్తాంశము)

$PC = PC$ (ఉమ్మడి భుజము)

మరియు $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB లో సమాన భుజాలకు ఎదురుగానున్న సమానకోణాలు)

దీని నుండి ఇవి రెండూ సర్వసమానం కాదు ఎందుకంటే ఈ ఫలితము భు.భు.కో. నియమాన్ని ఇస్తుంది. కాని త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి ఈ నియమం ఎల్లప్పుడూ నిజంకాదు. ఇంకా కోణం జత సమానభుజాల జతల మధ్యకోణము కాదు.]

ఇప్పుడు కింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

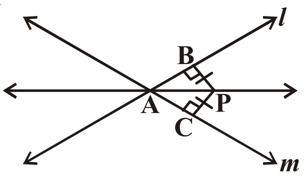
ఉదాహరణ-14 : l, m రేఖలు A బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి. P బిందువు ఈ రేఖలకు సమాన దూరంలో ఉంది (పటం చూడండి). AP రేఖ l, m ల మధ్య ఏర్పడిన కోణాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి.

సాధన : l, m రేఖలు A బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి.

$PB \perp l$ మరియు $PC \perp m$.

$PB = PC$ అని ఇవ్వబడినది.

$\angle PAB = \angle PAC$ అని చూపాలి.



ΔPAB, ΔPAC లలో

$PB = PC$ (దత్తాంశము)

$\angle PBA = \angle PCA = 90°$ (దత్తాంశము)

$PA = PA$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (లం.క.భు. నియమం)

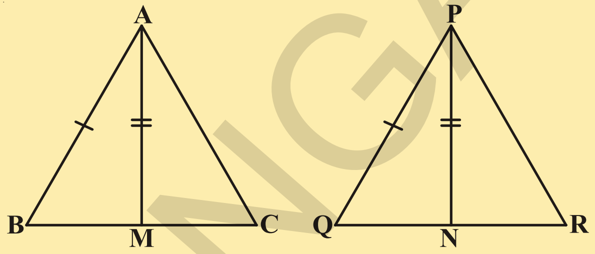
కావున $\angle PAB = \angle PAC$ (సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశకోణాలు)

అభ్యాసం 7.3

1. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము ABC లో $AB = AC$, AD అనేది A నుండి BC కి గీసిన లంబము అయిన

   (i) BC భుజాన్ని AD సమద్విఖండన చేయునని (ii) $\angle A$ ని AD కోణ సమద్విఖండన చేయునని చూపండి.

2. ΔABC లో రెండు భుజములు AB, BC మరియు మధ్యగతం AM వరుసగా ΔPQR లో రెండు భుజములు PQ, QR లు మరియు మధ్యగతం PN కు సమానము (పటము చూడండి). అయిన

   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

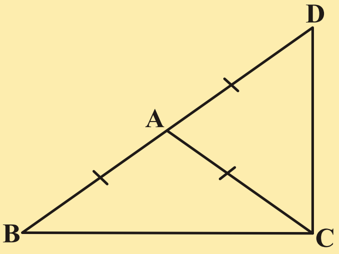
   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని చూడండి.

3. ΔABC లో BE, CF లు రెండు సమానలంబములు. లం.క.భు. సర్వసమానత్వ నియమాన్ని ఉపయోగించి ΔABC సమద్వి బాహుత్రిభుజమని చూపండి.

4. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము ABC లో $AB = AC$ అయిన $\angle B = \angle C$ అని నిరూపించండి.

   (గమనిక : $AP \perp BC$ అయేట్లు AP ని గీయండి, లం.క.భు. నియమాన్ని ఉపయోగించండి)

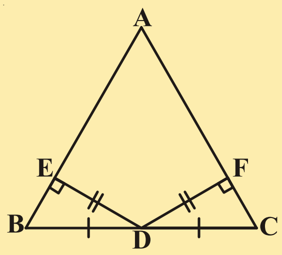
5. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము ABC లో $AB = AC$. $AD = AB$ అగునట్లు భుజము BA ని D బిందువు వద్దకు పొడిగించినారు (పటము చూడండి). $\angle BCD$ ఒక లంబకోణమని చూపండి.

6. ΔABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజము. దీనిలో $\angle A = 90^0$ మరియు $AB = AC$ అయిన $\angle B = \angle C$ అని చూపండి.

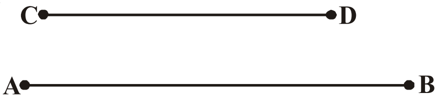
7. ఒక సమబాహు త్రిభుజములో ప్రతీ కోణము 60^0 అని చూపండి.

8. పక్క పటంలో ΔABC లో BC మధ్యబిందువు D. $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ మరియు $DE = DF$ అయిన $\Delta BED \cong \Delta CFD$ అని నిరూపించుము.

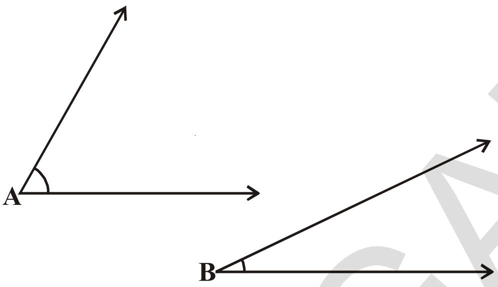
   

7.6 త్రిభుజ అసమానత్వములు

ఇప్పటిదాకా మనం త్రిభుజము లేదా త్రిభుజాల భుజాలు మరియు కోణాల సమానత్వం గురించి నేర్చుకున్నాం. కొన్నిసార్లు అసమానమైన పటాలు వచ్చినప్పుడు వాటిని పోల్చవలసి వస్తుంది. ఉదాహరణకు పటం (i) లో రేఖాఖండం AB పొడవు, రేఖాఖండం CD పొడవు కన్నా ఎక్కువ. పటం (ii) లో $\angle A$, $\angle B$ కన్నా పెద్దది.



(i)



(ii)

ఇప్పుడు మనం ఒక త్రిభుజంలో అసమానంగానున్న భుజాలు లేదా అసమానంగానున్న కోణాల మధ్య ఏదైనా సంబంధం ఉందా? పరీక్షిద్దాం. దాని కొరకు కింది కృత్యాన్ని చేద్దాం.

కృత్యం

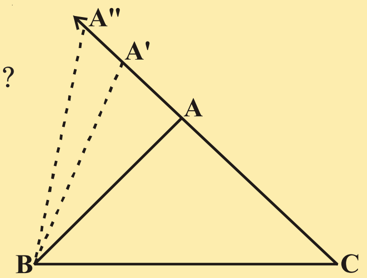
1. ABC త్రిభుజాన్ని గీసి CA ని A′ బిందువు వరకు పొడిగించండి. (కొత్తస్థానం)

కావున $A'C > AC$ (పొడవులను పోల్చిన)

A′, B లను కలిపి త్రిభుజము A′BC ని ఏర్పరచండి.

ఇప్పుడు మీరు $\angle A'BC$ మరియు $\angle ABC$ గురించి ఏమి చెప్పగలరు?

ఆ రెండు కోణములను పోల్చండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

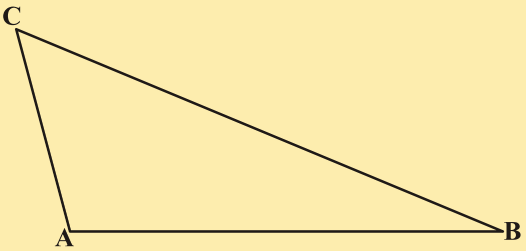


స్పష్టంగా, $\angle A'BC > \angle ABC$

ఇదే విధంగా CA ను పొడిగించి దానిపై అనేక బిందువులను గుర్తించండి. BC భుజంగా గుర్తించిన బిందువులను కలుపుతూ త్రిభుజాలను గీయండి.

భుజం AC పొడవు పెరుగుతున్నప్పుడు (బిందువు A కు వివిధ స్థానాలు తీసుకొంటున్నప్పుడు) దానికి ఎదురుగానున్న కోణము అనగా $\angle B$ కూడా పెరుగుతుంది.

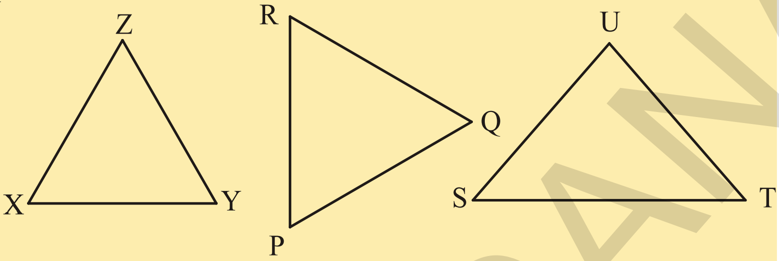
ఇప్పుడు మనం ఇంకొక కృత్యం చేద్దాం.



2. ఒక విషమ బాహుత్రిభుజాన్ని నిర్మించుము (ఒక త్రిభుజములో మూడు భుజాల పొడవులు వేర్వేరుగా ఉంటాయి.) భుజాల పొడవులను కొలవండి.

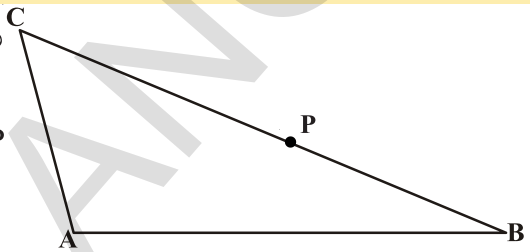
కోణాలను కొలవండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

ΔABC పటంలో BC ఎక్కువ పొడవుగల భుజం మరియు AC తక్కువ పొడవుగల భుజం. అదేవిధంగా $\angle A$ పెద్దకోణం మరియు $\angle B$ చిన్నకోణం.



పక్కన ఇచ్చిన త్రిభుజాలలో ప్రతి త్రిభుజానికి భుజాలు మరియు కోణాలను కొలవండి. భుజాన్ని దాని ఎదురుగా ఉండే కోణాన్ని వేరొక జతతో పోల్చినప్పుడు వాటిమధ్య ఏ సంబంధాన్ని మీరు గమనిస్తారు?

సిద్ధాంతము 7.6 : ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజములు అసమానముగానున్న పెద్ద భుజానికి ఎదురుగానున్న కోణము పెద్దది.

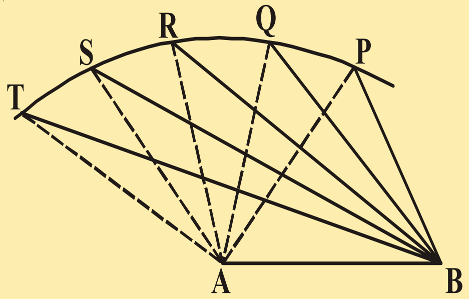


పటములో చూపినట్లు $CA = CP$ అయ్యేవిధంగా BC పై P బిందువును తీసుకొని ఈ సిద్ధాంతమును రుజువు చేయవచ్చును.

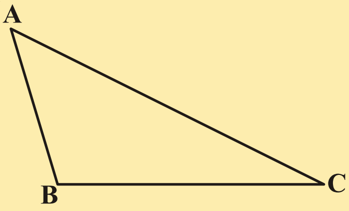
ఇప్పుడు మరొక కృత్యము చేద్దాము.

కృత్యం

AB రేఖా ఖండమును గీయుము. A కేంద్రంగా కొంత వ్యాసార్థముతో చాపమును గీసి దానిపై వేర్వేరు బిందువులు P, Q, R, S, T లను గుర్తించుము.



ఈ బిందువులన్నింటిని A, B బిందువులతో కలుపుము (పటం చూడండి). మనం P బిందువు నుండి T బిందువువైపు కదులుతున్నప్పుడు $\angle A$ క్రమంగా పెద్దదవుతుంది. దానికి ఎదురుగా ఉండే భుజం కొలత ఎలా ఉంటుంది? దాని ఎదురుగా ఉండే భుజం కొలత కూడా పెరుగుతూ ఉండడాన్ని గమనించవచ్చును. అనగా $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ మరియు $TB > SB > RB > QB > PB$.

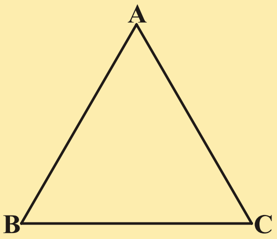


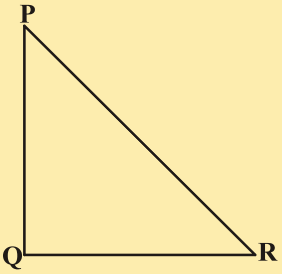
ఇప్పుడు వేరువేరు కోణముల కొలతలు గల ఒక త్రిభుజమును గీయుము. భుజాల పొడవులను కొలుచుము. (పటము చూడండి)

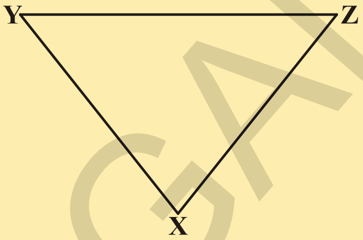
పెద్దకోణానికి ఎదురుగావున్న భుజము పొడవుగా ఉండడాన్ని గమనించవచ్చును. పటంలో, పెద్దకోణము $\angle B$ మరియు దాని ఎదురుగానున్న పొడవైన భుజము AC.

ఈ కృత్యమును వివిధ త్రిభుజములతో చేయుము. పై సిద్ధాంతము విపర్యయము సత్యమని గ్రహిస్తాము.

కింద ఇవ్వబడిన ప్రతి త్రిభుజం యొక్క కోణాలను, భుజాల పొడవులను కొలవండి. ప్రతి త్రిభుజంలోని ఒక్కొక్క భుజమునకు మరియు వాటి ఎదురుగానున్న కోణాలకు మధ్య గల సంబంధం ఏమై ఉంటుందనుకొంటున్నారు?







ఈ విధంగా మనకు కింది సిద్ధాంతము వస్తుంది.

సిద్ధాంతము 7.7 : ఒక త్రిభుజములో పెద్ద కోణానికి ఎదురుగానున్న భుజము పొడవైనది.

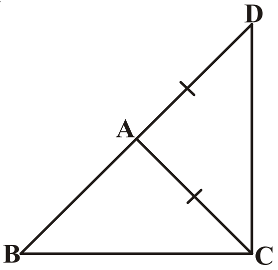
ఈ సిద్ధాంతమును మనం విరోధాభాసపద్ధతిద్వారా నిరూపించవచ్చును.

ఇవి చేయండి

ఇప్పుడు త్రిభుజము ABC గీసి వాటి భుజాల పొడవులు కొలవండి. దానిలో $AB + BC$, $BC + AC$ మరియు $AC + AB$ లను కనుగొని వాటి మూడు భుజాలతో పోల్చండి. మీరు ఏమి గమనిస్తారు?

$AB + BC > AC$, $BC + AC > AB$ మరియు $AC + AB > BC$ అని గమనిస్తారు. ఈ కృత్యమును వివిధ త్రిభుజములను తీసుకొని చేయడం ద్వారా ఈ కింది సిద్ధాంతమును రాబట్టవచ్చును.

సిద్ధాంతం 7.8 : ఒక త్రిభుజములో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము మూడవ భుజము పొడవుకన్నా ఎక్కువ.

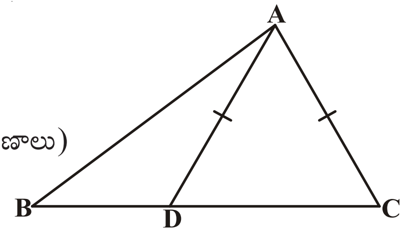


పక్క పటంలో ΔABC లో $AD = AC$ అగునట్లు భుజము BA బిందువు D వద్దకు పొడిగించబడినది. $\angle BCD > \angle BDC$ అని $BA + AC > BC$? అని మీరు చూపించగలరా?

పై సిద్ధాంతమునకు నిరూపణను రాబట్టగలరా?

ఈ ఫలితాలపై ఆధారపడి ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలే చేద్దాం.

ఉదాహరణ-15 : ΔABC లో $AD = AC$ అగునట్లు భుజం BC పై D ఒక బిందువు (పటం చూడండి). అయిన $AB > AD$ అని చూపండి.



సాధన : ΔDAC లలో

$AD = AC$ (దత్తాంశము)

కాని, $\angle ADC = \angle ACD$ (సమానభుజాలకు ఎదురుగానున్న కోణాలు)

ఇప్పుడు, $\angle ADC$, ΔABD కి బాహ్యాకోణము.

కావున $\angle ADC > \angle ABD$

లేదా $\angle ACD > \angle ABD$

లేదా $\angle ACB > \angle ABC$

అప్పుడు $AB > AC$ (ΔABC లో పెద్దకోణానికి ఎదుటి భుజం)

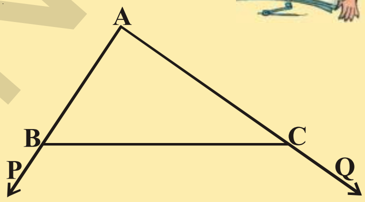
లేదా $AB > AD$ ($AD = AC$ కావున)

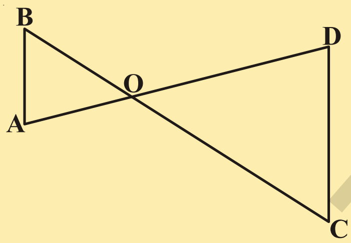
అభ్యాసం 7.4

1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము అతి పొడవైన భుజమని నిరూపించండి.

2. పక్క పటంలో ΔABC లో భుజాలు AB, AC లు వరుసగా P, Q బిందువులకు పొడిగించబడినవి.

   ఇంకనూ $\angle PBC < \angle QCB$. అయిన $AC > AB$ అని చూపండి.

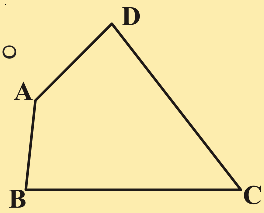


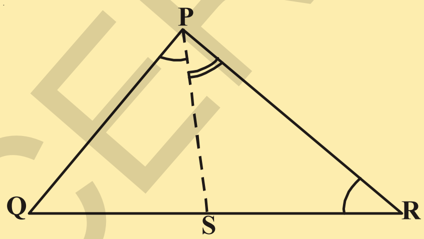


3. పక్క పటంలో $\angle B < \angle A$ మరియు $\angle C < \angle D$ అయిన $AD < BC$ అని చూపండి.

4. చతుర్భుజం ABCD లో AB అతి చిన్న భుజం మరియు CD అతి పొడవైన భుజం (పక్క పటమును చూడండి).

   అయిన $\angle A > \angle C$ మరియు $\angle B > \angle D$ అని చూపండి.





5. పక్క పటంలో $PR > PQ$ మరియు $\angle QPR$ కోణ సమద్విఖండనరేఖ PS అయిన $\angle PSR > \angle PSQ$ అని చూపండి.

6. ఒక త్రిభుజము రెండు భుజాల కొలతలు 4 సెం.మీ. మరియు 6 సెం.మీ. అయిన మూడవ భుజం కొలతగా ఉండడానికి సాధ్యమయ్యే అన్ని ధనాత్మక పూర్ణ సంఖ్యల విలువలు కనుగొనండి. అటువంటి ఎన్ని త్రిభుజాలు సాధ్యమవుతాయి?

7. 5 సెం.మీ., 8 సెం.మీ., 1 సెం.మీ. కొలతతో ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించడానికి ప్రయత్నించండి. ఈ నిర్మాణం సాధ్యమా? కాదా? మీ వివరణను రాయండి.

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

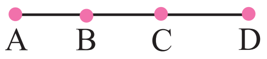
- సమరూప పటములు అనగా ఒకే ఆకారము ఒకే పరిమాణము గల పటములను సర్వసమాన పటములు అంటారు.
- ఒక ఏకైక త్రిభుజాన్ని నిర్మించడానికి మూడు స్వతంత్ర కొలతలు కావాలి.
- రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజములోని భుజాలు, కోణాలు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశభుజాలు, సదృశ కోణాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.
- ఇంకా వాటి శీర్షాల మధ్య అన్వేకసాదృశ్యము ఉంటుంది.
- రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సదృశ భాగాలు సమానము దీనిని మనం క్లుప్తంగా 'CPCT' అని రాస్తాము. అనగా సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశభాగాలు.
- భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమం : రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజాలు, వాటి మధ్య కోణం వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ భుజాలు, వాటి మధ్య కోణానికి సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.
- కో.భు.కో. సర్వసమానత్వ నియమం : రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలు, వాటి మధ్య భుజం వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ కోణాలు, వాటి మధ్య భూజానికి సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.
- ఒక సమద్విబాహుత్రిభుజంలో సమాన భుజాలకు ఎదురుగా నున్న కోణాలు సమానము.
- విపర్యయంగా, ఒక త్రిభుజంలో సమాన కోణాలకు ఎదురుగా నున్న భుజాలు సమానము.
- భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమం : ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజంలోని సదృశ భుజాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.
- లం.క.భు. సర్వసమానత్వ నియమం : రెండు లంబకోణ త్రిభుజములలో, ఒక త్రిభుజములోని కర్ణం, భుజం వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని కర్ణము, సదృశభుజాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.
- ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాలు అసమానంగా ఉన్న పొడవైన భుజానికి ఎదురుగానున్న కోణము పెద్దది.
- ఏ త్రిభుజంలోనైనా పెద్ద కోణానికి ఎదురుగా ఉండే భుజం పొడవైనది.
- ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం మూడవ భుజం పొడవు కన్నా ఎక్కువ.

08

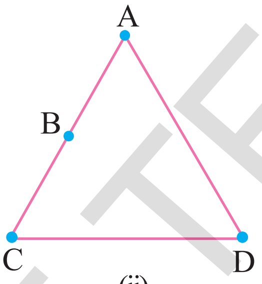
చతుర్భుజాలు (Quadrilaterals)

8.1 పరిచయం

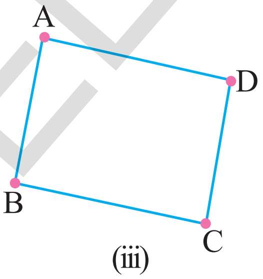
మీరు త్రిభుజ ధర్మాలను గురించి, వాటి నిరూపణలను గురించి ముందు అధ్యాయంలో నేర్చుకున్నారు. ఏవైనా మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువులను జతలుగా కలిపితే ఏర్పడే పటం త్రిభుజమని మీకు తెలుసు. మరి నాలుగు బిందువులతో ఏర్పడే పటం ఏదో మీకు తెలుసా? పటం (i) లో చూపిన విధంగా నాలుగు బిందువులు సరేఖీయాలు అయితే అది రేఖాఖండం అవుతుంది. పటం (ii) లో చూపినట్లు నాలుగు బిందువులలో ఏవైనా మూడు బిందువులు సరేఖీయాలైతే అది త్రిభుజం అవుతుంది. నాలుగు బిందువులలో రెండు బిందువుల కన్నా ఎక్కువగా సరేఖీయాలు కానిచో, ఎన్నిరకాలుగా జతపర్చిననూ మనకు వచ్చే పటాలు (iii), (iv) పటాలలో చూపిన విధంగా వస్తాయి. ఇటువంటి పటాలను మనం చతుర్భుజాలంటాం.



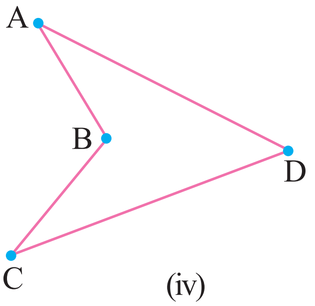
(i)



(ii)



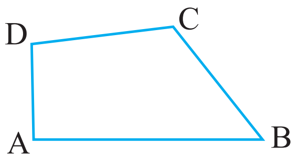
(iii)



(iv)

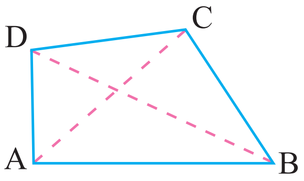
మీరు చతుర్భుజాలను ఎన్నైనా గీయగలరు. అదే విధంగా మన పరిసరాలలో వాటిని గుర్తించగలరు. పటం (iii) మరియు (iv) లలో ఏర్పడిన చతుర్భుజాలు ఒక అంశంలో తేడా స్పష్టంగా కనిపిస్తుంది. అది ఏ విధంగా విభిన్న చతుర్భుజాలో చెప్పగలరా?

మనం ఈ అధ్యాయంలో పటం (iii) లో ఏర్పడిన చతుర్భుజాల వంటి వాటిని గురించే అధ్యయనం చేస్తాము. వీటిని కుంభాకార చతుర్భుజాలంటారు.



సమతలంలో నాలుగు రేఖలతో ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటంను చతుర్భుజము అంటాం.

ABCD చతుర్భుజములో నాలుగు భుజాలు AB, BC, CD మరియు DA; A, B, C మరియు D అనేవి నాలుగు శీర్షాలు; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ మరియు $\angle D$ అనేవి శీర్షాల వద్ద ఏర్పడిన 4 కోణాలు.



A, C మరియు B, D ల వంటి ఎదుటి శీర్షాల జతలను కలిపితే వచ్చే AC, BD లను ABCD చతుర్భుజము యొక్క రెండు కర్ణాలు అంటాం.

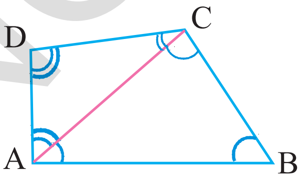
8.2 చతుర్భుజాల ధర్మాలు

చతుర్భుజానికి 4 అంతర కోణాలుంటాయి. ఈ నాలుగు కోణాల మొత్తం ఎంత అవుతుందో మనం కనుగొనగలమా? "త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తం" ధర్మాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. దీనిని చతుర్భుజములో నాలుగు కోణాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటలో ఉపయోగిస్తాం.

ABCD చతుర్భుజములో AC కర్ణం (పటం చూడండి).

ΔABC లో మూడు కోణాల మొత్తం

$\angle CAB + \angle B + \angle BCA = 180^o$ ...(1) (త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తం)



ఇదే విధంగా ΔADC లో

$$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^o \quad ...(2)$$

(1) మరియు (2) లను కూడగా

$$\angle CAB + \angle B + \angle BCA + \angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^o + 180^o$$

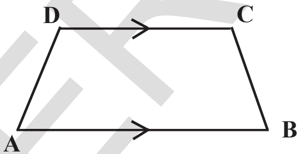
కాని $\angle CAB + \angle CAD = \angle A$ మరియు $\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

కావున $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$ అయినది.

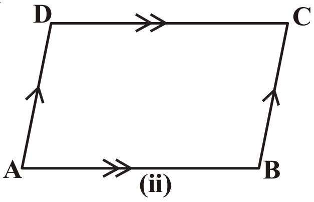
అంటే చతుర్భుజములో నాలుగు కోణాల మొత్తం 360^0 లేదా 4 లంబకోణాలని తెలుస్తున్నది.

8.3 చతుర్భుజాలు - రకాలు

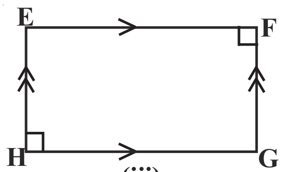
కింద గీయబడిన చతుర్భుజాలను పరిశీలించండి. ఇటువంటి పటాలను మీరు ఇదివరకు పరిశీలించే ఉన్నారు. అందుచే మనం ఈ పటాల ధర్మాల ఆధారంగా వీటి పేర్లు గుర్తించి రాద్దాం.



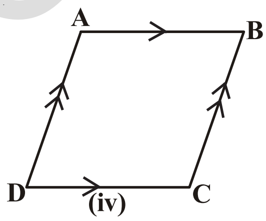
(i)



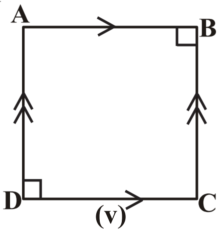
(ii)



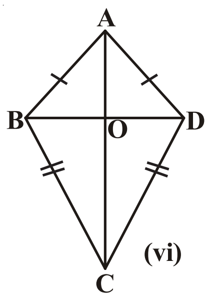
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

మనం పరిశీలించిన అంశాలను బట్టి.

- పటం (i) లో ABCD ఒక చతుర్భుజము మరియు ఒక జత ఎదుటి భుజాలు AB మరియు DC సమాంతరంగా ఉన్నాయి. ఇటువంటి చతుర్భుజాలను సమలంబ చతుర్భుజాలు (ట్రెపీజియాలు) అంటాము.

  ట్రెపీజియంలో ఒక జత ఎదుటి భుజాలు AB, DC లు సమాంతరాలుగా ఉండి మరొక జత AD = BC అయితే దానిని సమద్విబాహు ట్రెపీజియం అంటాము.

- పటం (ii) లో గల చతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలుగా ఉన్నాయి. ఇటువంటి చతుర్భుజాలను సమాంతర చతుర్భుజాలు అంటాము. పటం (iii), (iv) మరియు (v) కూడా సమాంతర చతుర్భుజాలే.
- పటం (iii) సమాంతర చతుర్భుజము EFGH లో అన్ని కోణాలు లంబకోణాలు. దీనిని దీర్ఘచతురస్రమంటారు.
- పటం (iv) సమాంతర చతుర్భుజములో ఆసన్న భుజాలు సమానం. అయితే దీనిని సమ చతుర్భుజము (రాంబస్) అంటాము.
- పటం (v) సమాంతర చతుర్భుజములో ఆసన్న భుజాలు సమానం మరియు ప్రతీకోణం 90° కావున ఇది చతురస్రము.
- పటం (vi) ABCD చతుర్భుజములో రెండు జతల ఆసన్నభుజాలు సమానం అంటే AB = AD మరియు BC = CD అయినవి. దీనిని మనం గాలిపటం అంటాము.

నిషా చెప్పినది పరిశీలించండి

రాంబస్ అనేది చతురస్రము కావచ్చు లేదా కాకపోవచ్చు కాని అన్ని చతురస్రాలు రాంబస్‌లే.

లలిత మరిన్ని అంశాలు జతచేసింది

అన్ని దీర్ఘ చతురస్రాలు, సమాంతర చతుర్భుజాలు కాని అన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలు దీర్ఘ చతురస్రాలు కావు.

వీరు చెప్పిన వాటిలో దేనితో మీరు ఏకీభవిస్తారు?

మీ జవాబులకు తగు కారణాలను తెలపండి. ఇటువంటి వాక్యాలను మిగిలిన చతుర్భుజాలకు మీరు రాయండి.

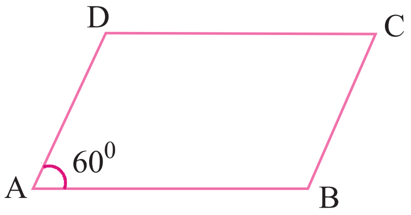
కొన్ని ఉదాహరణలు

ఉదాహరణ-1 : ABCD సమాంతర చతుర్భుజము మరియు $\angle A = 60^{o}$. మిగిలిన కోణాల కొలతలు కనుగొనండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజములో ఎదుటి కోణాలు సమానము.

కావున ABCD సమాంతర చతుర్భుజము

$\angle C = \angle A = 60^{o}$ మరియు $\angle B = \angle D$



సమాంతర చతుర్భుజములో పక్క కోణాల మొత్తం 180^{o}.

$\angle A$ మరియు $\angle B$ లు పక్క కోణాలు కావున

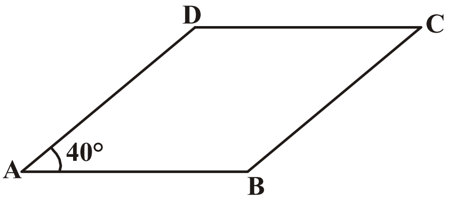
$$\angle D = \angle B = 180^{o} - \angle A$$

$$= 180^{o} - 60^{o} = 120^{o}.$$

అందుచే మిగిలిన కోణాలు $120^{o}, 60^{o}, 120^{o}$ అవుతాయి.

ఉదాహరణ-2 : ABCD సమాంతర చతుర్భుజము $\angle DAB = 40^o$ అయిన మిగిలిన కోణాలను కనుగొనండి.

సాధన :



ABCD సమాంతర చతుర్భుజము కావున

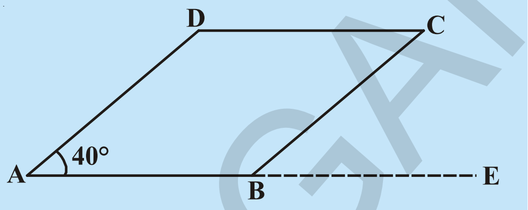
$\angle DAB = \angle BCD = 40°$ మరియు $AD \parallel BC$

పక్క కోణాల మొత్తము

$$\angle CBA + \angle DAB = 180°$$
$$\therefore \angle CBA = 180 - 40°$$
$$= 140°$$

దీనిద్వారా $\angle ADC = 140°$ అయితే $\angle BCD = 40°$

ప్రయత్నించండి



AB ని E వరకు పొడిగించండి. $\angle CBE$ ని కనుగొనండి. మీరు ఏమి గమనించారు? $\angle ABC$ మరియు $\angle CBE$ లు ఎటువంటి కోణాలు?

ఉదాహరణ-3 : సమాంతర చతుర్భుజములో రెండు ఆసన్నభుజాలు వరుసగా 4.5 సెం.మీ. మరియు 3 సెం.మీ. దాని చుట్టుకొలత కనుగొనుము.

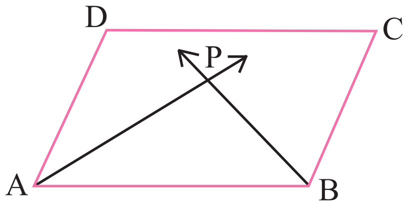
సాధన : సమాంతర చతుర్భుజము ఎదుటి భుజాల కొలతలు సమానము

కావున మిగిలిన రెండు భుజాలు 4.5 సెం.మీ. మరియు 3 సెం.మీ. కలిగి ఉంటాయి.

కావున, దీని చుట్టు కొలత $= 4.5 + 3 + 4.5 + 3 = 15$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ-4 : ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో పక్కకోణాలు $\angle A$ మరియు $\angle B$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు P వద్ద ఖండించుకున్నాయి. అయిన $\angle APB = 90^o$ అని చూపండి.

సాధన : ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము పక్క కోణాలు $\angle A$ మరియు $\angle B$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు $\overrightarrow{AP}$ మరియు $\overrightarrow{BP}$ లు సమాంతర చతుర్భుజములో పక్క కోణాలు సంపూరకాలు కావున



$$\angle A + \angle B = 180^o$$

$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180}{2}$$

$$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90^o$$

ΔAPB లో

$$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^o$$ (త్రిభుజము మూడు కోణాల మొత్తము)

$$\angle APB = 180^o - (\angle PAB + \angle PBA)$$
$$= 180^o - 90^o$$
$$= 90^o$$

నిరూపించబడినది.

అభ్యాసం 8.1

1. కింది ప్రవచనాలు 'సత్యమో' లేదా 'అసత్యమో' తెలపండి.

   (i) ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజము ఒక ట్రెపీజియం అగును. ( )

   (ii) అన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలు, చతుర్భుజాలే. ( )

   (iii) అన్ని ట్రెపీజియమ్‌లు, సమాంతర చతుర్భుజాలే. ( )

   (iv) చతురస్రము అనేది రాంబస్ అవుతుంది. ( )

   (v) ప్రతి రాంబస్ కూడా ఒక చతురస్రము. ( )

   (vi) అన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలు, దీర్ఘచతురస్రాలే. ( )

2. కింది పట్టికలో చతుర్భుజ ధర్మాలు ఆయా పటాలకు వర్తిస్తే "అవును" అనీ, వర్తించకపోతే "కాదు" అనీ రాయండి.

ధర్మాలు	ట్రెపీజియం	సమాంతర చతుర్భుజం	రాంబస్	దీర్ఘచతురస్రం	చతురస్రం
a. ఒక జత ఎదుటి భుజాలు మాత్రమే సమాంతరాలు	**అవును**				
b. రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలు					
c. ఎదుటి భుజాలు సమానాలు					
d. ఎదుటి కోణాలు సమానాలు					
e. పక్క కోణాలు సంపూరకాలు					
f. కర్ణాలు సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి					
g. కర్ణాలు సమానం					
h. అన్ని భుజాలు సమానం					
i. ప్రతి కోణం లంబకోణం					
j. కర్ణాలు పరస్పరం లంబాలు					

3. ABCD ట్రెపీజియంలో $AB \parallel CD$. $AD = BC$ అయితే $\angle A = \angle B$ మరియు $\angle C = \angle D$ అవుతాయని చూపండి.

4. చతుర్భుజములో కోణాల నిష్పత్తి 1: 2:3:4. అయిన ప్రతీ కోణం కొలతను కనుగొనండి.

5. ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రము AC కర్ణం అయిన ΔACD లో కోణాలను కనుగొనండి. కారణాలు తెలపండి.

8.4 సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలు

సమాంతర చతుర్భుజాలన్నియూ చతుర్భుజాలని మనం చూసాం సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలను ప్రత్యేకంగా పరిశీలించి చర్చిద్దాం.

కృత్యం

ఒక సమాంతర చతుర్భుజాకారంలో కాగితాన్ని కత్తిరించండి. దాని కర్ణం వెంబడి మరలా కత్తిరించండి. ఎటువంటి ఆకారాలు ఏర్పడ్డాయి? ఈ రెండు త్రిభుజాలను గూర్చి మీరు ఏమి చెబుతారు?

ఒక త్రిభుజం పై మరొక త్రిభుజాన్ని ఉంచండి. రెండు పటాలు ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించాయా? ఒకవేళ కానిచో భుజాల వెంబడి కదిపి చూడండి. ఈ రెండు త్రిభుజాలు ఒకదానితో మరొకటి ఖచ్చితంగా ఏకీభవించినందున వీటిని సర్వసమానపటాలంటాము.

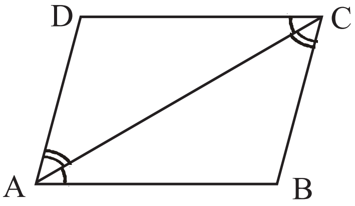
మరికొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలను తీసుకొని ఈ ఫలితాన్ని పరిశీలించండి. దీనికొరకు నీవు ఏ కర్ణంనైనా ఎన్నుకోవచ్చు.

దీని నుండి మనం సమాంతర చతుర్భుజంలోను ప్రతీ కర్ణం రెండు సర్వ సమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని చెప్పవచ్చు.

ఈ ఫలితాన్ని ఇప్పుడు నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతం 8.1 : సమాంతర చతుర్భుజమును కర్ణము రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

ఉపపత్తి : ABCD సమాంతర చతుర్భుజంను తీసుకోండి.



A, C లను కలపండి. సమాంతర చతుర్భుజానికి AC కర్ణం అవుతుంది.

$AB \parallel DC$ మరియు AC తిర్యగ్రేఖ కావున

$\angle DCA = \angle CAB$. (ఏకాంతర కోణాలు)

ఇదే విధంగా $DA \parallel CB$ మరియు AC తిర్యగ్రేఖ. కావున $\angle DAC = \angle BCA$ అయినది.

ఇప్పుడు ΔACD మరియు ΔCAB లలో

$\angle DCA = \angle CAB$ మరియు $\angle DAC = \angle BCA$

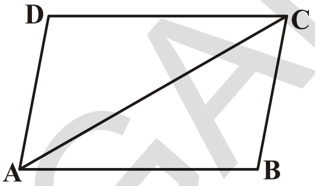
అలాగే $AC = CA$. (ఉమ్మడి భుజం)

అందువలన $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ అయినది.

దీని అర్థం ఈ రెండు త్రిభుజాలు కో.భు.కో నియమము (కోణం, భుజం మరియు కోణం) ప్రకారం సర్వసమానాలు. అందుచే కర్ణం AC సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన పటాలుగా విభజించిందని చెప్పవచ్చు.

సిద్ధాంతం 8.2 : సమాంతర చతుర్భుజము ఎదుటి భుజాలు సమానము.

ఉపపత్తి : కర్ణం, సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని మనం నిరూపించాం.



పటంలో $\Delta ACD \cong \Delta CAB$ అయినది.

అందువలన $AB = DC$ మరియు $\angle CBA = \angle ADC$ అగును.

అలాగే $AD = BC$ మరియు $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle CAB = \angle DCA$

$\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

అందుచే $\angle DCB = \angle DAB$

దీని నుండి సమాంతర చతుర్భుజంలో

i. ఎదుటి భుజాలు సమానమని

ii. ఎదుటి కోణాలు సమానమని చెప్పవచ్చు

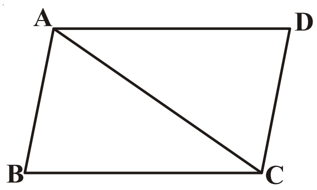
కుంభాకార చతుర్భుజములో ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలైన, మనం ఎదుటి భుజాలు మరియు ఎదుటి కోణాలు సమానమని చూపవచ్చునని తెలుస్తున్నది.

ఇప్పుడు ఈ సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయమును నిరూపించడానికి ప్రయత్నిద్దాం. అదేమంటే చతుర్భుజంలో ఎదుటి భుజాలు సమానము అయితే అది ఒక సమాంతర చతుర్భుజము.

సిద్ధాంతం 8.3 : ఒక చతుర్భుజములో ప్రతి జత ఎదుటి భుజాలు సమానము అయితే, అది సమాంతర చతుర్భుజమగును.

ఉపపత్తి : ABCD చతుర్భుజము $AB = DC$ మరియు $BC = AD$ అని తీసుకోండి.

కర్ణం AC ను గీయండి.



త్రిభుజాలు ΔABC మరియు ΔCDA పరిశీలించండి.

మనకు $BC = AD$, $AB = DC$ మరియు $AC = CA$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

అందువలన $\angle BCA = \angle DAC$, AC తిర్యగ్రేఖతో కలసి ఉన్నందున

$AB \parallel DC$ అగును ...(1)

ఇదేవిధంగా $\angle ACD = \angle CAB$, CA తిర్యగ్రేఖతో కలిసి ఉన్నందున

$BC \parallel AD$ అయినది ...(2)

(1), (2) లను బట్టి ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అయినది.

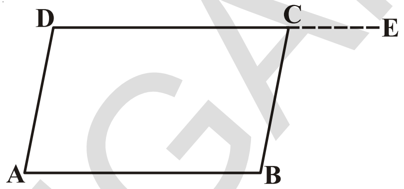
సమాంతర చతుర్భుజములో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానమని, విపర్యయంగా చతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానము అయితే అది సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుందని మనం తెలుసుకున్నాము.

ఇదే విధంగా ఒక చతుర్భుజములోని ఎదుటి కోణాల జతలు సమానమైతే అది సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించగలరా?

సిద్ధాంతం 8.4 : ఒక చతుర్భుజములో ప్రతి జత ఎదుటి కోణాలు సమానము అయితే అది సమాంతర చతుర్భుజము.

ఉపపత్తి : ABCD చతుర్భుజములో $\angle A = \angle C$ మరియు $\angle B = \angle D$ అయిన ABCD సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించాలి.

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ అని మనకు తెలుసు



$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \dfrac{360°}{2}$

i.e. $\angle A + \angle B = 180°$

DC ని E వైపు పొడిగించగా

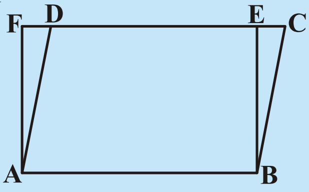
$\angle C + \angle BCE = 180°$ కావున $\angle BCE = \angle ADC$ అగును

$\angle BCE = \angle D$ అయితే $AD \parallel BC$ (ఎందుకు?)

DC ని తిర్యగ్రేఖగా తీసుకో

ఇదే విధంగా $AB \parallel DC$ అని నిరూపించవచ్చు. కావున ABCD సమాంతర చతుర్భుజము అయింది.

అభ్యాసం 8.2



1. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు ABEF ఒక దీర్ఘచతురస్రము అయిన $\Delta AFD \cong \Delta BEC$ అని చూపండి.
2. రాంబస్‌లో కర్ణాలు దానిని నాలుగు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయని నిరూపించండి.
3. ABCD చతుర్భుజములలో $\angle C$ మరియు $\angle D$ ల యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు O వద్ద ఖండించుకుంటే

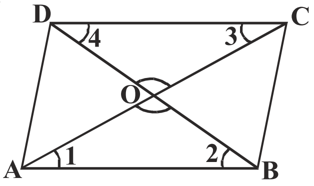
   $\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ అని చూపండి.

8.4 సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క కర్ణాలు

సిద్ధాంతం 8.5 : సమాంతర చతుర్భుజములో కర్ణాలు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

ఉపపత్తి : ABCD సమాంతర చతుర్భుజము గీయాలి.

రెండు కర్ణాలు AC మరియు BD లు ‘O’ వద్ద ఖండించుకున్నట్లు గీయాలి.



ΔOAB మరియు ΔOCD లలో

పటంలో ఏర్పడిన కోణాలను $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ గా గుర్తించాలి.

$\angle 1 = \angle 3$ ($AB \parallel CD$ మరియు AC తిర్యగ్రేఖ చేసిన ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle 2 = \angle 4$ (ఎలా?) (ఏకాంతర కోణాలు)

మరియు AB = CD (సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మం)

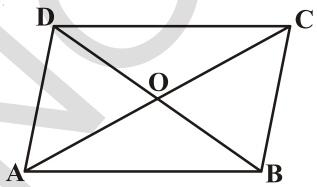
కావున కో.భు.కో. త్రిభుజ సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం

$\Delta OCD \cong \Delta OAB$ అగును

అందువలన CO= OA, DO = OB అయినవి

అంటే కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకున్నవి. మనం ఇప్పుడు దీని విపర్యయం కూడా సత్యమో, కాదో పరిశీలిద్దాం. అంటే దీని విపర్యయం "ఒక చతుర్భుజము కర్ణములు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకుంటే, అది సమాంతర చతుర్భుజం" అవుతుంది.

సిద్ధాంతం 8.6 : ఒక చతుర్భుజంలో కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటే అది సమాంతర చతుర్భుజము అగును.



ఉపపత్తి : ABCD ఒక చతుర్భుజం.

AC, BD కర్ణాలు 'O' వద్ద ఖండించుకున్నాయి.

OA = OC, OB = OD అగునట్లు

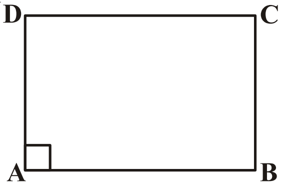
మనం ABCD ని ఒక సమాంతర చతుర్భుజమని చూపాలి.

గమనిక : ΔAOB మరియు ΔCOD లను తీసుకోండి. ఇవి సర్వసమానములేనా? అయితే దాని నుండి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

8.5.1. మరిన్ని జ్యామితీయ ప్రవచనాలు

ఇంతవరకు మనం నిరూపించిన సిద్ధాంతాలు కాని, ఉదాహరణలు కాని ఒక పటం (సమాంతర చతుర్భుజం) ఆధారంగా రూపొందించి కొన్ని ప్రవచనాలను రాబట్టడం జరిగింది. వీటిని కొలతల ఆధారంగా ప్రతిసారి నిరూపించనవసరంలేదు. సిద్ధాంత పరంగా నిరూపించినవి, అన్ని సందర్భాలలోనూ సత్యప్రవచనాలుగా రూపొందుతాయి. అయితే ప్రధాన సిద్ధాంతం నుండి ఎప్పటి కప్పుడు కొత్త వాటిని తిరిగి మరిన్ని కొత్త వాటిని ప్రతిపాదించి నిరూపిస్తాం. వీటిని ఉపసిద్ధాంతాలు అంటారు. ఒక నిరూపించబడిన ప్రతిపాదన లేదా సిద్ధాంతం నుండి రూపొందింది. సత్యమని భావింపబడే ప్రవచనాలను ఉపసిద్ధాంతాలుగా భావింపవచ్చు.

ఉపసిద్ధాంతం-1 : దీర్ఘచతురస్రంలో ప్రతికోణము లంబకోణము అని నిరూపించండి.



నిరూపణ : దీర్ఘచతుస్రమనేది ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు ఒక కోణము లంబకోణము.

ABCD ఒకదీర్ఘచతురస్రము. ఒక కోణం $\angle A = 90^o$ అనుకోండి.

మనం $\angle B = \angle C = \angle D = 90^o$ అని చూపాలి.

ABCD సమాంతర చతుర్భుజము కావున $AD \parallel BC$ మరియు AB తిర్యగ్రేఖ

కావున $\angle A + \angle B = 180^o$ (తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునగల అంతరకోణాల మొత్తం)

కాని $\angle A = 90^o$ (తీసుకోబడింది)

$$\therefore \angle B = 180^o - \angle A$$
$$= 180^o - 90^o = 90^o$$

ఇప్పుడు $\angle C = \angle A$ మరియు $\angle D = \angle B$ (సమాంతర చతుర్భుజంలో)

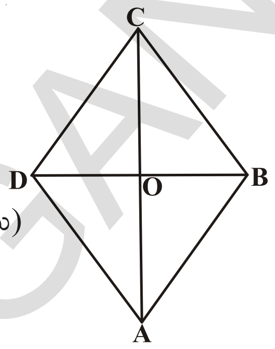
కావున $\angle C = 90^o$ మరియు $\angle D = 90^o$ అయింది.

అందుచే దీర్ఘచతురస్రములో ప్రతికోణం లంబకోణము అగును.

ఉపసిద్ధాంతం -2 : రాంబస్‌లో కర్ణాలు పరస్పరం లంబాలుగా ఉంటాయని చూపండి.

నిరూపణ : అన్ని భుజాలు సమానంగా గల సమాంతర చతుర్భుజమును రాంబస్ అంటారని మీకు తెలుసు.

ABCD ఒక రాంబస్ AC మరియు BD కర్ణాలు O వద్ద ఖండించుకున్నాయనుకొనండి.



మనం AC కర్ణం, BD కర్ణానికి లంబంగా ఉంటుందని చూపాలి.

ΔAOB మరియు ΔBOC లను తీసుకోండి.

$OA = OC$ (సమాంతర చతుర్భుజము కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును)

$OB = OB$ (ΔAOB మరియు ΔBOC ఉమ్మడి భుజం)

$AB = BC$ (రాంబస్‌లో భుజాలు)

అందువలన $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (భు.భు.భు. నియమము)

కావున $\angle AOB = \angle BOC$

కాని $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ (రేఖీయద్వయం)

అందుచే $2\angle AOB = 180^\circ$

లేదా $\angle AOB = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

ఈ విధంగా $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$ అయినది

కావున AC కర్ణం, BD కర్ణానికి లంబం అని తెలిసింది.

అందుచే రాంబస్‌లో కర్ణాలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉంటాయి.

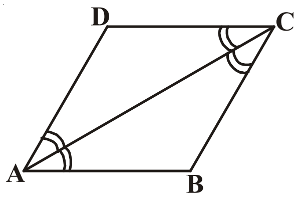
ఉపసిద్ధాంతం- 3 : ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో AC కర్ణం $\angle A$ ను సమద్విఖండన చేస్తే ABCD ఒక రాంబస్ అవుతుందని నిరూపించండి.

నిరూపణ : ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

అందుచే $AB \parallel DC$. AC తిర్యగ్రేఖ $\angle A$, $\angle C$ లను ఖండించింది.

కావున $\angle BAC = \angle DCA$ (ఏకాంతర కోణాలు) ...(1)

$\angle BCA = \angle DAC$ ...(2)



కాని AC కర్ణం, $\angle A$ ను సమద్విఖండన చేసింది.

కనుక $\angle BAC = \angle DAC$

$\therefore \angle DCA = \angle DAC$ ...(3)

అందుచే AC కర్ణం $\angle C$ ని కూడా సమద్విఖండన చేసింది.

(1), (2) మరియు (3) లను బట్టి, మనకు

$\angle BAC = \angle BCA$

ΔABC లో $\angle BAC = \angle BCA$ అంటే $BC = AB$ (సమద్విబాహుత్రిభుజము)

కాని $AB = DC$ మరియు $BC = AD$ (సమాంతర చతుర్భుజములో ABCD లో ఎదుటి భుజాలు సమానం)

$\therefore \; AB = BC = CD = DA$

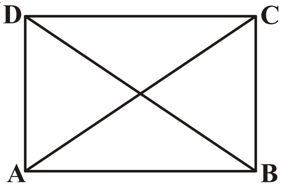
ఈవిధంగా ABCD రాంబస్ అయినది.

ఉపసిద్ధాంతం-4 : దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు సమానమని నిరూపించండి.

నిరూపణ : ABCD దీర్ఘచతురస్రము AC మరియు BD లు వాని కర్ణాలు

మనకు $AC = BD$ అని తెలియాలి.

ABCD దీర్ఘచతురస్రమంటే ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు దానిలో ప్రతీ కోణము ఒక లంబకోణము.



ΔABC మరియు ΔBAD లను తీసుకోండి.

$AB = BA$ (ఉమ్మడి భుజం)

$\angle B = \angle A = 90^o$ (దీర్ఘచతురస్రములోని ప్రతీ కోణం 90^o లంబకోణం)

$BC = AD$ (దీర్ఘచతురస్రములో ఎదుటి భుజాలు)

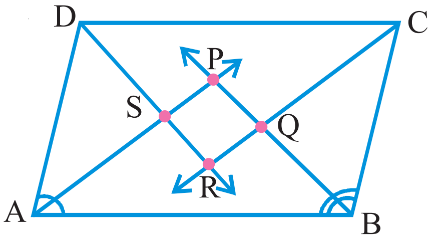
అందువలన $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (భు.కో.భు. నియమం) అగును.

దీని నుండి $AC = BD$

లేదా దీర్ఘచతురస్రములో కర్ణాలు సమానమని చెప్పవచ్చు.

ఉపసిద్ధాంతం-5 : సమాంతర చతుర్భుజములో కోణ సమద్విఖండన రేఖలు దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

నిరూపణ : ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ మరియు $\angle D$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖలు P, Q, R, S ల వద్ద ఖండించుకొని చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరిచాయి. (పటం చూడండి.)



ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో $AD \parallel BC$. AB ని తిర్యగ్రేఖగా తీసుకుంటే, $\angle A + \angle B = 180^o$(సమాంతర చతుర్భుజములో పక్క కోణాలు)

కాని $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle A$ మరియు $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle B$

[AP, BP లు $\angle A$ మరియు $\angle B$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\times 180^o$$

లేదా $\angle BAP + \angle ABP = 90^o \quad \ldots(1)$

కావున ΔAPB లో

$$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^o \text{ (త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తము)}$$

కావున $\angle APB = 180^o - (\angle BAP + \angle ABP)$

$\Rightarrow \angle APB = 180^o - 90^o$ ((1) నుండి)

$= 90^o$

అందుచే మనకు $\angle SPQ = \angle APB = 90°$ అయినది.

ఇదేవిధంగా $\angle CRD = \angle QRS = 90°$ (ఒకే కోణం)

కాని $\angle BQC = \angle PQR$ మరియు $\angle DSA = \angle PSR$ (ఎందుకు?)

$\therefore \angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90°$

కావున PQRS లో నాలుగు కోణాలు 90° కు సమానము

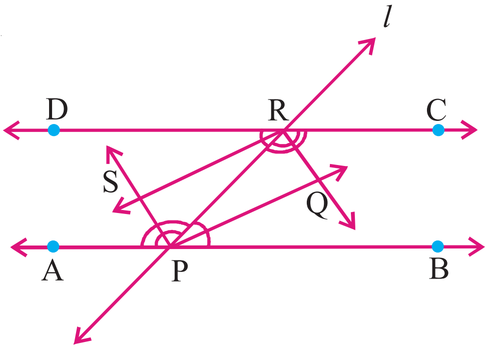
అందుచే PQRS ను దీర్ఘ చతురస్రమని చెప్పవచ్చు.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. చతురస్రంలో కర్ణాలు సమానమని, అవి పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని చూపండి.
2. రాంబస్‌లో కర్ణాలు దానిని నాలుగు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయని చూపండి.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు

ఉదాహరణ-5 : $\overleftrightarrow{AB}$ మరియు $\overleftrightarrow{DC}$ రెండు సమాంతర రేఖలు. తిర్యగ్రేఖ l, $\overleftrightarrow{AB}$ ని P వద్ద $\overleftrightarrow{DC}$ ని R వద్ద ఖండించింది. అయిన అంతరకోణాల సమద్విఖండనరేఖలు దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.



నిరూపణ : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, తిర్యగ్రేఖ l $\overleftrightarrow{AB}$ ని P వద్ద $\overleftrightarrow{DC}$ ని R వద్ద ఖండించింది.

$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}$ మరియు $\overrightarrow{PS}$ లు $\angle RPB, \angle CRP, \angle DRP$ మరియు $\angle APR$ ల యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు అనుకొనండి.

$\angle BPR = \angle DRP$ (ఏకాంతర కోణాలు) ...(1)

కాని $\angle RPQ = \frac{1}{2}\angle BPR$ ($\because \overrightarrow{PQ}$, $\angle BPR$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ)

అలాగే $\angle PRS = \frac{1}{2}\angle DRP$ ($\because \overrightarrow{RS}$, $\angle DPR$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ) ...(2)

(1), (2) లను బట్టి

$\angle RPQ = \angle PRS$

ఇవి $\overline{PR}$ తిర్యగ్రేఖగా $\overrightarrow{PQ}$ మరియు $\overrightarrow{RS}$ రేఖలపై ఏర్పరచిన ఏకాంతర కోణాలు, కావున

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$

ఇదేవిధంగా $\angle PRQ = \angle RPS$ కావున $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{RQ}$

అందువలన PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అయినది ...(3)

మనకు $\angle BPR + \angle CRP = 180^o$ (తిర్యగ్రేఖ (l) ఒకే వైపున ఏర్పరచిన అంతరకోణాలు కావున $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$)

$$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^o$$

$$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^o$$

కాని Δ PQR లో

$\angle RPQ + \angle PQR + \angle PRQ = 180^o$ (త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలు)

$\angle PQR = 180^o - (\angle RPQ + \angle PRQ)$

$= 180^o - 90^o = 90^o$ ...(4)

(3), (4) లను బట్టి

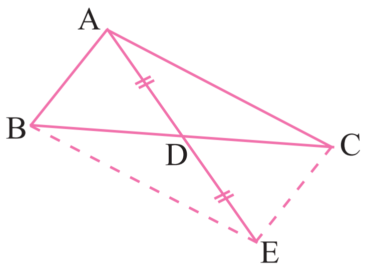
PQRS సమాంతర చతుర్భుజము మరియు ప్రతీకోణము లంబకోణము అయినది.

కావున PQRS ఒక దీర్ఘచతురస్రము

ఉదాహరణ-6 : ΔABC లో BC భుజం మీదకు మధ్యగతం AD గీయబడినది. AD = ED అగునట్లు E వరకు పొడిగించబడినది. అయిన ABEC ఒక సమాంతర చతుర్భుజాన్ని నిరూపించండి.

నిరూపణ : ΔABC త్రిభుజములో AD మధ్యగతం.

AD = ED అగునట్లు AD ని E వరకు పొడిగించబడింది.



BE మరియు CE లను కలపండి.

Δ^s ABD మరియు ECD లలో

BD = DC (BC మధ్య బిందువు D)

$\angle ADB = \angle EDC$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

AD = ED (ఇవ్వబడినది)

కావున $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ అయినది (భు.కో.భు. నియమము)

అందువలన AB = CE (సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సరూప భాగాలు)

అలాగే $\angle ABD = \angle ECD$

ఇవి $\overleftrightarrow{AB}$ మరియు $\overleftrightarrow{EC}$ రేఖలతో $\overline{BC}$ తిర్యగ్రేఖ చేసిన ఏకాంతర కోణాలు.

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

ABEC చతుర్భుజంలో

AB || CE మరియు AB = CE

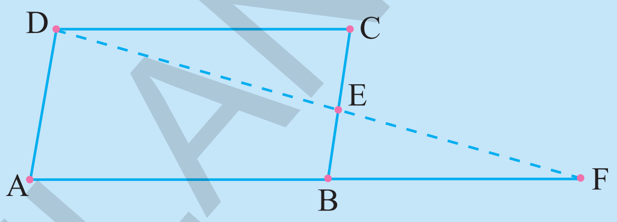
అయినందున ABEC ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అయినది.

అభ్యాసం 8.3

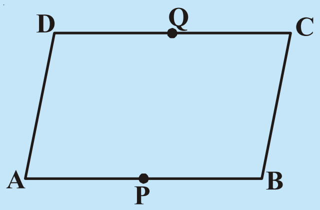
1. సమాంతర చతుర్భుజము ఎదుటి కోణాలు $(3x - 2)^o$ మరియు $(x + 48)^o$ అయిన సమాంతర చతుర్భుజములో ప్రతీ కోణాన్ని కనుగొనండి.

2. సమాంతర చతుర్భుజములో ఒక కోణం, అతి చిన్న కోణమునకు రెట్టింపు కన్నా 24^o తక్కువ అయిన సమాంతర చతుర్భుజంలో అన్ని కోణాలను కనుగొనుము.

3. పక్క పటంలో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు BC యొక్క మధ్యబిందువు E. AB మరియు DE లను F వరకు పొడిగించిన, AF = 2AB అని నిరూపించండి.



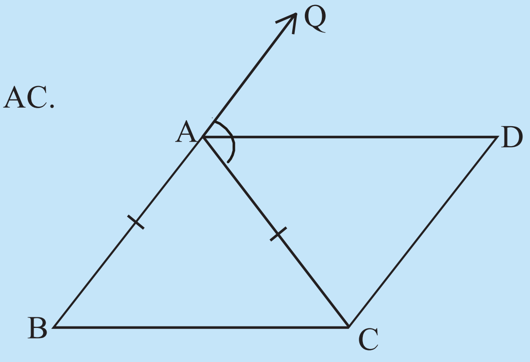
4. పక్క పటంలో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము. AB, DC ల యొక్క మధ్యబిందువు P మరియు Q లు అయిన PBCQ ఒక సమాంతర చతుర్భుజమని చూపండి.



5. ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము మరియు AB = AC. బాహ్యకోణం QAC నకు AD సమద్విఖండనరేఖ అయితే

   (i) ∠DAC = ∠BCA

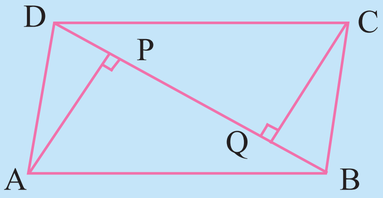
   (ii) ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజమని చూపండి.



6. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము AP మరియు CQ లు శీర్షాలు A మరియు C నుండి కర్ణం BD పైకి గీచిన లంబాలు (పటంలో చూడండి) అయిన

   (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

   (ii) AP = CQ అని చూపండి.



7. ΔABC మరియు ΔDEF లలో AB = DE; BC = EF మరియు

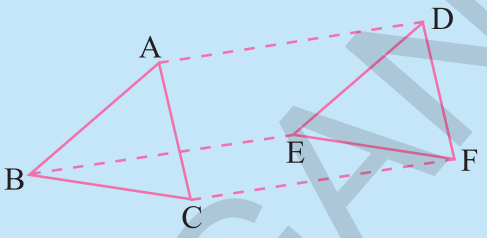
BC || EF. శీర్షాలు A, B మరియు C లు వరుసగా D, E మరియు F లకు కలుపబడినవి (పటం చూడండి) అయిన

(i) ABED ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

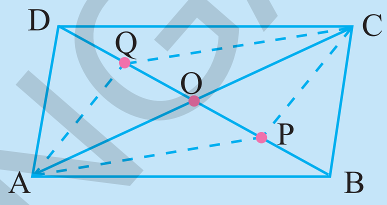
(ii) BCFE ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

(iii) AC = DF

(iv) ΔABC ≅ ΔDEF అని చూపండి.



8. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము. AC మరియు BD లు O వద్ద ఖండించుకున్నాయి. P, Q లు BD కర్ణంపై త్రిథాకరించబడిన బిందువులైన CQ || AP మరియు AC కర్ణం, PQ ను సమద్విఖండన చేయునని చూపండి (పటం చూడండి).



9. ABCD ఒక చతురస్రము. E, F, G మరియు H లు వరుసగా AB, BC, CD మరియు DA లపై గల బిందువులు AE = BF = CG = DH అయినచో EFGH ఒక చతురస్రమని చూపండి.

8.6 త్రిభుజ మధ్యబిందువు సిద్ధాంతము

మనం త్రిభుజం మరియు చతుర్భుజాల ధర్మాలను తెలుసుకున్నాము. త్రిభుజ భుజాల మధ్యబిందువుల ఆధారంగా, మనం మరికొన్ని నూతన సంబంధాలను రాబడదాం.

ప్రయత్నించండి

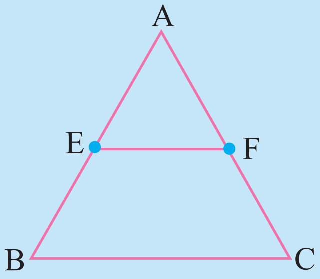
ΔABC త్రిభుజం గీయండి. $\overline{AB}$ మరియు $\overline{AC}$ మధ్యబిందువులుగా E మరియు F లుగా గుర్తించండి. E, F లను పటంలో చూపిన విధంగా కలపండి.

త్రిభుజములో EF కొలతను, మూడవ భుజం BC కొలతను కొలవండి. అదేవిధంగా ∠AEF మరియు ∠ABC కోణాలను కలపండి.

మనకు ∠AEF = ∠ABC, మరియు $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ అని వస్తుంది.

ఈ కోణాలు EF, BC రేఖలపై తిర్యగ్రేఖ AB తో ఏర్పడిన సదృశకోణాలు కావున మనం EF || BC అని చెప్పవచ్చు.

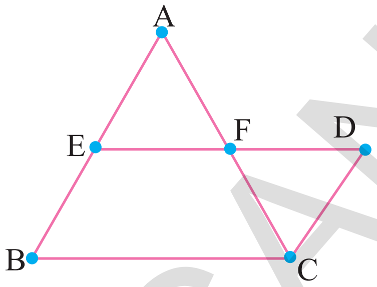
మరికొన్ని త్రిభుజాలు గీచి, ఫలితాలను సరిచూడండి.



దీని నుండి మనము సిద్ధాంతాన్ని రాబట్టవచ్చు.

సిద్ధాంతము 8.7 : ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరముగానూ, మరియు దానిలో సగము ఉంటుంది.

దత్తాంశం : ΔABC లో AB మధ్యబిందువు E మరియు AC మధ్యబిందువు F.



సారాంశం : (i) $EF \parallel BC$ (ii) $EF = \frac{1}{2}BC$

ఉపపత్తి : EF ను ని కలిపి పొడిగించి BA కు సమాంతరంగా C నుండి ఒక రేఖను గీస్తే, అది పొడిగించిన EF రేఖను D వద్ద ఖండిస్తుంది.

ΔAEF మరియు ΔCDF లలో

$AF = CF$ (AC మధ్యబిందువు)

$\angle AFE = \angle CFD$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

మరియు $\angle AEF = \angle CDF$ (CD || BA తో ED తిర్యగ్రేఖ చేసిన ఏకాంతర కోణాలు)

కో.భు.కో. సర్వసమానత్వ నియమము ప్రకారం

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta CDF$ అయినది

కావున $AE = CD$ మరియు $EF = DF$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సరూపభాగాలు)

$AE = BE$ అని మనకు ఇవ్వబడింది.

కనుక $BE = CD$ అయింది.

$BE \parallel CD$ మరియు $BE = CD$ కావున BCDE ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అయినది

అందుచే $ED \parallel BC$

$\Rightarrow EF \parallel BC$

BCDE సమాంతర చతుర్భుజము కావున $ED = BC$ (ఎలా?) ($\because DF = EF$)

$FD = EF$ అని చూపినందున

$\therefore 2EF = BC$ అగును

అందువలన $EF = \frac{1}{2}BC$ అయినది.

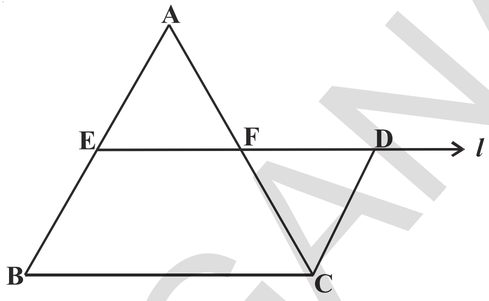
ఈ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయము కూడా సత్యమని మనకు తెలుస్తుంది. దీనిని ప్రతిపాదించి, ఎలా నిరూపించాలో పరిశీలిద్దాము.

సిద్ధాంతము 8.8 : ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము యొక్క మధ్యబిందువు నుండి వేరొక భుజానికి సమాంతరముగా గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

ఉపపత్తి : ΔABC గీయాలి. AB మధ్యబిందువుగా E ని గుర్తించాలి. E గుండా BC కి సమాంతరముగా 'l' అనే రేఖను గీయాలి. ఇది AC ని F వద్ద ఖండించిందనుకుందాము.

$CD \parallel BA$ ను నిర్మించాలి.

మనం $AF = CF$ అని చూపాలి.



అందుచే ΔAEF మరియు ΔCFD లను తీసుకోండి.

$\angle EAF = \angle DCF$ ($BA \parallel CD$ మరియు AC తిర్యగ్రేఖ) (ఎలా?)

$\angle AEF = \angle D$ ($BA \parallel CD$ మరియు ED తిర్యగ్రేఖ) (ఎలా?)

కాని ఏవైనా రెండు భుజాలను సమానంగా చూపలేదు.

కావున మనం వీటిని సర్వసమాన త్రిభుజాలని చెప్పలేము.

అందువలన $EB \parallel DC$ మరియు

$ED \parallel BC$ తీసుకోండి.

కావున EDCB ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అయినది దీని నుండి $BE = DC$ అయినది.

కాని $BE = AE$ కావున మనకు $AE = DC$ అని వచ్చింది.

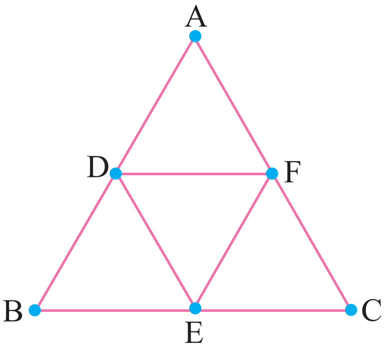
అందుచే కో.భు.కో. నియమం ప్రకారము

$\Delta AEF \cong \Delta CFD$ అయినది.

$\therefore AF = CF$ అగును.

మరిన్ని ఉదాహరణలు

ఉదాహరణ-7 : ΔABC లో D, E మరియు F లు వరుసగా AB, BC మరియు CA భుజాల మధ్యబిందువులు. వీటిని ఒకదానితో మరొకటి కలుపగా ఏర్పడిన నాలుగు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలని చూపండి.



నిరూపణ : ΔABC లో D, E లు వరుసగా $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ భుజాల మధ్యబిందువులు. కావున మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం ప్రకారము

$DE \parallel AC$

ఇదే విధంగా $DF \parallel BC$ మరియు $EF \parallel AB$ అగును.

అందువలన ADEF, BEFD మరియు CFDE లు సమాంతర చతుర్భుజాలు.

ఇప్పుడు ADEF సమాంతర చతుర్భుజములో DF కర్ణం.

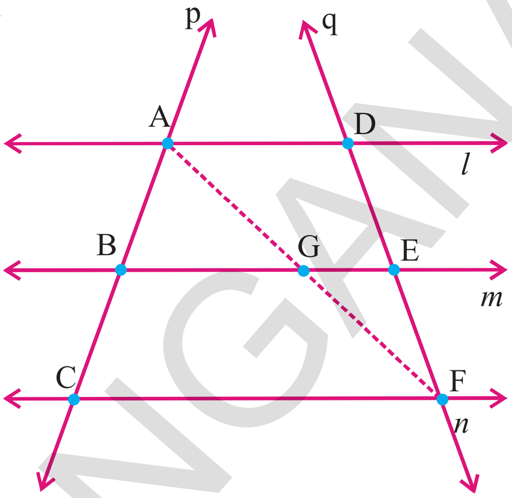
కావున $\Delta ADF \cong \Delta DEF$ (కర్ణం, సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా చేసింది)

ఇదే విధంగా $\Delta BDE \cong \Delta DEF$

మరియు $\Delta CEF \cong \Delta DEF$ అగును.

కనుక, నాలుగు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు అయినవి.

దీని నుండి "త్రిభుజ భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపగా ఏర్పడిన నాలుగు భుజాలు సర్వసమానములని" నిరూపించాము.



ఉదాహరణ-8 : l, m మరియు n అనే మూడు సమాంతర రేఖలను p మరియు q అనే రెండు తిర్యగ్రేఖలు A, B, C మరియు D,E, F ల వద్ద ఖండించాయి. తిర్యగ్రేఖ p, ఈ సమాంతర రేఖలను రెండు సమాన అంతరఖండాలు AB, BC లుగా విభజిస్తే q తిర్యగ్రేఖ కూడా సమాన అంతరఖండాలు DE మరియు EF లుగా విభజిస్తుందని చూపండి.

నిరూపణ : AB, BC మరియు DE, EF ల మధ్య సమానత్వ భావనతో సమన్వయ పరచాలి. A నుండి F కు రేఖను గీయగా అది 'm' రేఖను G వద్ద ఖండించిదనుకొనండి.

ΔACF లో AB = BC (దత్తాంశము)

కావున AC మధ్యబిందువు B

మరియు BG || CF (ఎలా?)

అందుచే AF యొక్క మధ్యబిందువు G అయినది (త్రిభుజ మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం).

ఇప్పుడు Δ AFD ఇదే రీతిలో పరిశీలించగా G అనేది AF కు మధ్యబిందువు మరియు GE || AD కావున DF మధ్యబిందువు E అగును.

ఇందు మూలంగా DE = EF అయినది.

ఈ విధంగా l, m మరియు n రేఖలు q తిర్యగ్రేఖపై కూడా సమాన అంతర ఖండాలు చేసాయి.

ఉదాహరణ-9 : ΔABC లో AD మరియు BE లు రెండు మధ్యగతరేఖలు మరియు BE || DF (పటంలో చూడండి).

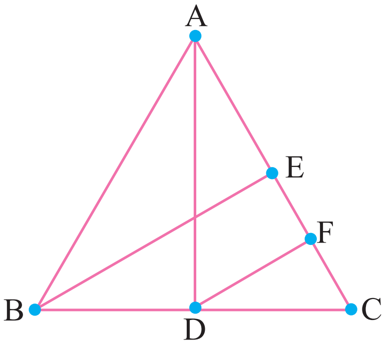
అయిన $CF = \frac{1}{4}AC$ అని చూపండి.

నిరూపణ : Δ ABC లో BC మధ్యబిందువు D మరియు BE || DF. మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం ప్రకారము CE మధ్యబిందువు F అగును.

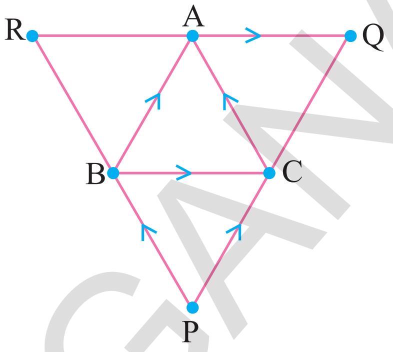
$$\therefore\ CF = \frac{1}{2}CE$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AC\right) \quad \text{(ఎలా?)}$$

కావున $CF = \frac{1}{4}AC$ అయినది.



ఉదాహరణ-10 : ABC త్రిభుజంలో BC, CA మరియు AB భుజాలకు సమాంతరంగా A, B మరియు C ల గుండా సమాంతర రేఖలు గీస్తే అవి P, Q మరియు R ల వద్ద ఖండించుకున్నాయి. ΔPQR త్రిభుజము చుట్టు కొలత ΔABC త్రిభుజము చుట్టుకొలతకు రెట్టింపు ఉంటుందని చూపండి.



నిరూపణ : AB || QP మరియు BC || RQ కావున ABCQ నొక సమాంతర చతుర్భుజము. ఇదేవిధంగా BCAR, ABPC లు కూడా సమాంతర చతుర్భుజాలు అవుతాయి.

∴ BC = AQ మరియు BC = RA

⇒ QR మధ్యబిందువు A అగును.

ఇదేవిధంగా B, C లు వరుసగా PR మరియు PQ ల మధ్యబిందువులు అవుతాయి.

$\therefore AB = \frac{1}{2}PQ;\quad BC = \frac{1}{2}QR$ మరియు $CA = \frac{1}{2}PR$ (ఎలా?)

(సంబంధిత సిద్ధాంతం చెప్పండి)

ఇప్పుడు ΔPQR చుట్టుకొలత $= PQ + QR + PR$

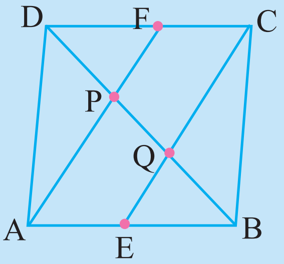
$= 2AB + 2BC + 2CA$

$= 2(AB + BC + CA)$

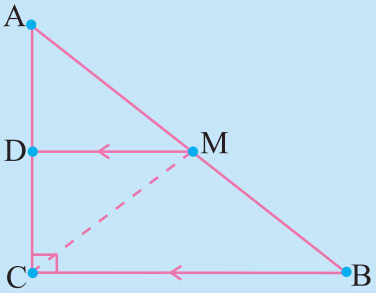
$= 2$ (ΔABC యొక్క చుట్టుకొలత).

అభ్యాసం 8.4

1. ABC త్రిభుజంలో AB పై D ఒక బిందువు మరియు $AD = \frac{1}{4}AB$. ఇదే విధంగా AC పై బిందువు E మరియు $AE = \frac{1}{4}AC$. DE = 2 సెం.మీ. అయిన BC ఎంత?
2. ABCD చతుర్భుజములో AB, BC, CD మరియు DA ల మధ్యబిందువులు E, F, G మరియు H లు అయిన EFGH సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించుము.
3. రాంబస్ యొక్క భుజాల మధ్యబిందువులను వరుసగా కలిపితే ఏర్పడే పటం దీర్ఘచతురస్రమని చూపండి.
4. ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో AB, DC ల మధ్యబిందువులు వరుసగా E మరియు F అయిన AF మరియు EC రేఖాఖండాలు కర్ణము BD ని త్రిథాకరిస్తాయని చూపండి.
5. చతుర్భుజములో ఎదుటి భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండాలు సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని చూపండి.



6. ABC లంబకోణ త్రిభుజములో C లంబకోణం. కర్ణము AB మధ్యబిందువు M గుండా BC కు సమాంతరముగా గీచిన రేఖ AC ని D వద్ద ఖండిస్తే కింది వానిని నిరూపించండి.
   (i) AC మధ్యబిందువు D
   (ii) $MD \perp AC$
   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$.

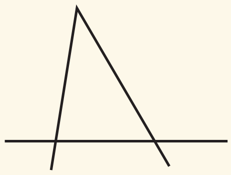


మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

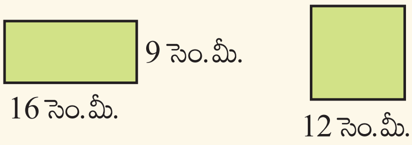
1. సమతలములో నాలుగు రేఖలతో ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటాలను చతుర్భుజాలు అంటారు.
2. చతుర్భుజములో నాలుగు కోణాల మొత్తం 360^0 లేదా 4 లంబకోణాలు.
3. చతుర్భుజాలలో సమలంబ చతుర్భుజం (ట్రెపీజియం), సమాంతర చతుర్భుజం, సమచతుర్భుజము (రాంబస్), దీర్ఘచతురస్రము, చతురస్రము మరియు గాలిపటము అనేవి ప్రత్యేక ధర్మాలను కలిగిన చతుర్భుజాలు.
4. సమాంతర చతుర్భుజము మరిన్ని ధర్మాలు కలిగిన ఒక ప్రత్యేక చతుర్భుజము. వీటి ధర్మాలను సిద్ధాంత పరంగా నిరూపించడము జరిగింది.
    - a) సమాంతర చతుర్భుజమును కర్ణము రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.
    - b) సమాంతర చతుర్భుజములోఎదుటి భుజాలు మరియు కోణాలు సమానము.
    - c) చతుర్భుజములో ప్రతి జత ఎదుటి భుజాలు సమానము అయితే అది సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.
    - d) ఒక చతుర్భుజములో ప్రతిజత ఎదుటి కోణాలు సమానము అయితే అది సమాంతర చతుర్భుజము అగును.
    - e) సమాంతర చతుర్భుజములో కర్ణాలు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
    - f) ఒక చతుర్భుజములో కర్ణములు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకుంటే అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.
5. త్రిభుజ భుజాల మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం, దాని విపర్యయము
    - a) ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరముగానూ మరియు దానిలో సగము ఉంటుంది.
    - b) ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము యొక్క మధ్యబిందువు నుండి వేరొక భుజానికి సమాంతరముగా గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

మెదడుకు మేత

1. త్రిభుజ పదకేళిని తయారుచేయండి. కింది పటానికి మరి రెండు రేఖలను జత చేస్తే 10 త్రిభుజాలు ఏర్పడాలి. పటం ఏర్పరచి త్రిభుజాలు లెక్కించండి.



2. 16 సెం.మీ. పొడవు, 9 సెం.మీ. వెడల్పు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితాన్ని తీసుకోండి. దానిని ఖచ్చితంగా రెండు భాగాలు (రెండే రెండు!) చేసి కలిపి, – చతురస్రంగా మార్చండి.



09

సాంఖ్యక శాస్త్రము
(Statistics)

9.1 ఉపోద్ఘాతం

ఒకరోజు ఆశిష్, వాళ్ల లెక్కల ఉపాధ్యాయునిగారి ఇంటికి వెళ్లాడు. ఆ సమయంలో ఉపాధ్యాయుడు భారతదేశ జనాభా గణన కొరకు తాను సేకరించిన వివరాలను సంగ్రహించుచున్నాడు.

ఆశిష్ : నమస్కారం సార్! మీరు పనిలో ఉన్నట్టున్నారు. మీ పనిలో నేనేమైనా సాయం చేయగలనా?

ఉపాధ్యాయుడు : రా! ఆశిష్, జన గణన కొరకు కుటుంబాల వివరాలు సేకరించాను గదా. అంటే ఒక ప్రాంతములో ఒక్కొక్క కుటుంబములోని సభ్యులు ఎందరు? వారి వయస్సులు ఎంతెంత? కుటుంబ ఆదాయం ఎంత? మొదలగు వివరాలు సేకరించాను.

ఆశిష్ : ఈ సమాచారము ఎందుకు ఉపయోగపడుతుంది?

ఉపాధ్యాయుడు : ఈ సమాచారమును ప్రభుత్వం, అభివృద్ధి ప్రణాళిక తయారికి మరియు వనరుల కేటాయింపులకు ఉపయోగిస్తుంది.

ఆశిష్ : ప్రభుత్వము ఈ సమాచారమును ఎట్లా ఉపయోగిస్తుంది?

ఉపాధ్యాయుడు : ప్రభుత్వ అధికారులు దత్తాంశ నిర్వహణలోని పద్ధతులను ఉపయోగించి ఈ దత్తాంశను విశ్లేషణ చేస్తారు. ఆ ఫలితాల సాయంతో క్రొత్త అంచనాలు తయారుచేస్తారు. నీవు కూడా ఇంతకు ముందు తరగతులలో దత్తాంశ నిర్వహణ గురించి నేర్చుకున్నావుకదా! ఇదియే ప్రాథమిక సాంఖ్యకశాస్త్రము.

ఆశిష్‌వలె మనము కూడా పలువస్తువుల ధరల గురించో, రోజువారీ ఉష్ణోగ్రతల గురించో, క్రికెట్ స్కోర్ గురించో లేక ఎన్నికల ఫలితాల గురించో రకరకాల సమాచారమును సంఖ్యాత్మక రూపంలో, వివరణాత్మక రూపంలో, పట్టికలుగా, గ్రాఫుల రూపములో చూస్తున్నాము కదా. ఇట్లు ఒక ప్రత్యేక ఉపయోగార్థం సేకరించబడిన విషయాలు లేక సంఖ్యాత్మక వివరాలను దత్తాంశము అంటారు. సేకరించిన సమాచారాన్ని అర్థవంతము చేయు గణితశాఖనే సాంఖ్యక శాస్త్రము అంటారు.

మనమిప్పుడు ఇంతకు ముందు తరగతులలో నేర్చుకొన్న సాంఖ్యకశాస్త్రం (దత్తాంశ నిర్వహణ) అంశాలను పునఃశ్చరణ చేసుకొందాం.

9.2 దత్తాంశ సేకరణ

సాంఖ్యక శాస్త్రంలో ఒక లక్ష్యంతో దత్తాంశము సేకరించుట మొదటి ప్రధాన సోపానము. దత్తాంశమును సేకరించుటలో మెలకువలను కింది కృత్యము ద్వారా చర్చిద్దాం.

కృత్యం

తరగతిలోని విద్యార్థులను నాలుగు బృందాలుగా విభజించి, ఒక్కొక్క బృందమునకు కింద చూపిన దత్తాంశముల సేకరణకు కేటాయించాను.

i. మీ తరగతిలోని అందరు విద్యార్థుల బరువులు.

ii. ఒక్కొక్క విద్యార్థి యొక్క (సోదరులు లేక సోదరిల సంఖ్య) తోబుట్టువుల సంఖ్య.

iii. గత మాసంలో రోజువారిగా గైరుహాజరయిన వారి సంఖ్య.

iv. తరగతిలో ప్రతి విద్యార్థి యొక్క ఇంటి నుండి పాఠశాల దూరము.

పై దత్తాంశములు సేకరించుటలో విద్యార్థులు ఉపయోగించిన పద్ధతులను చర్చిద్దాం.

1. వివరాలు సేకరించుట కొరకు ప్రతి విద్యార్థిని ప్రశ్నించి లేదా స్వయంగా వారి ఇళ్లకు వెళ్లి వివరాలు రాబట్టారా?
2. పాఠశాలలోని రికార్డులు లేక మరి ఏదైనా రికార్డుల నుండి వివరాలు సేకరించారా?

వీటిని పరిశీలిస్తే (i), (ii) మరియు (iv) వ దత్తాంశముల కొరకు ప్రతి విద్యార్థిని నేరుగా సంప్రదించి వివరాలు సేకరించవలసి ఉంటుంది. ఈ విధంగా దత్తాంశములోని రాశులను (విలువలను) మూలము నుండి నేరుగా సేకరించినచో దానిని 'ప్రాథమిక దత్తాంశము' (Primary Data) అంటారు.

(iii) వ దత్తాంశము కొరకు వివరాలను విద్యార్థుల నుండి కాకుండా అంతకు పూర్వమే రోజువారి హాజరు వివరాలు రికార్డు చేయబడిన హాజరు పట్టికల నుండి సేకరించవచ్చును. ఈ విధంగా ముందుగనే సేకరింపబడియున్న దత్తాంశము లేక దత్తాంశములనుండి సేకరించు దత్తాంశమును 'గౌణ దత్తాంశము' (Secondary Data) అంటారు.

ఇవి చేయండి

కింది వానిలో ఏది ప్రాథమిక, ఏది గౌణ దత్తాంశము?

i. 2001 నుండి 2010 వరకు మీ పాఠశాలలో నమోదు కాబడిన విద్యార్థుల వివరాలు

ii. వ్యాయామ ఉపాధ్యాయుడు నమోదు చేసిన మీ తరగతిలో విద్యార్థుల ఎత్తులు.

9.3 దత్తాంశమును ప్రదర్శించుట

దత్తాంశమును సేకరించిన అనంతరము విశ్లేషకుడు దత్తాంశమును విశ్లేషించి, దానిని అర్థవంతముగా, సమగ్రముగా ప్రదర్శించుట రెండవ ముఖ్య సోపానము. వివిధ సందర్భాలలో ప్రదర్శించదగు దత్తాంశమును తెలుసుకొందాము.

గణిత పరీక్షలో 15 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు (గరిష్టంగా 50) కింది విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

25, 34, 42, 20, 39, 50, 28, 30, 50, 11, 20, 42, 45, 40, 7.

ఇట్లు రాశులన్నింటి విడివిడిగా ప్రకటించు దత్తాంశమును 'ముడి దత్తాంశము' (Rawdata)) అంటాము.

ఈ దత్తాంశము నుండి కనిష్ట విలువ, గరిష్ట విలువ గల రాశులను సులభముగా గుర్తించవచ్చును. గరిష్ట, కనిష్ట రాశుల బేధమును ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క 'వ్యాప్తి' (Range) అంటారని మీకు జ్ఞాపకముండవచ్చు.

ఈ దత్తాంశము యొక్క వ్యాప్తి = గరిష్ట విలువగల రాశి - కనిష్ట విలువగల రాశి

$= 50 - 7 = 43,$

అనగా దత్తాంశములోని రాశులన్నీ 7, 50ల మధ్య ఉంటాయి.

ఈ దత్తాంశం పరంగా కింది ప్రశ్నలను చర్చించిన

i. దత్తాంశము యొక్క మధ్యరాశి ఏది?

ii. 60% లేక అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థులెందరు?

చర్చ :

(i) పరీక్షలో గరిష్టమార్కులు 50 కావున మధ్యమరాశి 25 అని ఇక్రమ్ అభిప్రాయపడ్డాడు. మేరి ఇది సరియైన మధ్యమరాశి కాదు అంటున్నది. మీ అభిప్రాయం ఏమిటి?

ఈ దత్తాంశములోని 15 రాశులను ఆరోహణ క్రమములో అమర్చగా

7, 11, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50

వీనిలో 8వ రాశి 34 దత్తాంశము యొక్క మధ్యమరాశి (మధ్యగతము) అవుతుంది.

(ii) 50 మార్కులకు 60% (అనగా $\frac{60}{100} \times 50 = 30$).

దత్తాంశములో (60%) 30 లేక అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు 9 మంది.

ఒక దత్తాంశములోని రాశులు ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు, వాటిని ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో రాయడం, విశ్లేషించడం ఎక్కువ సమయం తీసుకొంటుంది. ఈ విశ్లేషణను సులభతరం చేయడానికి దత్తాంశమును మరొక విధంగా ప్రదర్శించవలసి ఉంటుంది.

కింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ-1 : గణిత పరీక్షలో 50 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు ఈ విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

5, 8, 6, 4, 2, 5, 4, 9, 10, 2, 1, 1, 3, 4, 5,
8, 6, 7, 10, 2, 1, 1, 3, 4,4, 5, 8, 6, 7, 10,
2,8, 6, 4, 2, 5, 4, 9, 10, 2, 1, 1, 3, 4, 5,
8, 6,4, 5, 8

మార్కులు	గణన చిహ్నాలు	విద్యార్థుల సంఖ్య
1	𝍸 |	6
2	𝍸 |	6
3	|||	3
4	𝍸 ||||	9
5	𝍸 ||	7
6	𝍸	5
7	||	2
8	𝍸 |	6
9	||	2
10	||||	4
	Total	50

దత్తాంశమునకు గణన చిహ్నాలు ఉపయోగించి పట్టికలో చూపబడినది. ఒక మార్కును సాధించిన మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్యను ఆ మార్కు యొక్క పౌనఃపున్యం అందురు.

ఉదాహరణకు 4 మార్కులు సాధించిన విద్యార్థుల సంఖ్య 9, అంటే 4 మార్కుల యొక్క పౌనఃపున్యము 9.

ఈ పట్టికలోని గణన చిహ్నాలు ముడి దత్తాంశములోని రాశులను పోల్చి లెక్కించుటకు ఉపయోగపడతాయి.

పట్టికలోని అన్ని పౌనఃపున్యముల మొత్తము దత్తాంశములోని రాశుల మొత్తమును సూచిస్తుంది.

ఈ విధంగా దత్తాంశములోని అన్ని విభిన్నరాశులను పౌనఃపున్యములతో సూచించు పట్టికను 'అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక' లేక 'రాశుల భారత్వ పట్టిక' అంటారు.

కృత్యం

మీ తరగతిలోని విద్యార్థుల ఇంటి పేరులో (ఆంగ్లములో) మొదటి అక్షరాలు (*Initials*) సేకరించండి. అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజక పట్టిక తయారుచేసి కింది ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వండి.

(i) ఎక్కువ మంది విద్యార్థుల ఇంటిపేర్ల మొదటి అక్షరం ఏది?

(ii) ఎంతమంది విద్యార్థుల ఇంటిపేర్ల మొదటి అక్షరం 'I'?

(iii) ఏ అక్షరం అతి తక్కువ సార్లు ఉపయోగింపబడినది?

ప్రత్యేక అవసరార్థం విద్యార్థులను మూడు బృందాలుగా, అనగా (i) ప్రత్యేక తరగతులకు హాజరుకావలసినవారు (ii) సాధారణ విద్యార్థులు (iii) బాగుగా చదవగలిగిన విద్యార్థులు అనే విభాగాలుగా విభజింపదలిస్తే కింది విధంగా పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను చేయవచ్చును.

తరగతుల (మార్కులు)	బృందం రకం	గణన చిహ్నాలు	విద్యార్థుల సంఖ్య
1 - 3	(ప్రత్యేక బృందము)	𝍸 𝍸 𝍸	15
4 - 5	(సాధారణ బృందము)	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
6 - 10	(బాగుగా చదువు బృందము)	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	19

దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు సమాచార కుదింపుకు కూడా ఈ విధమైన పౌనఃపున్య విభాజనము ఎంతో ఉపయుక్తముగా ఉంటుంది. మరొక ఉదాహరణమును కూడా పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-2 : ఒక బుట్టలోని 50 నారింజ పండ్లు విడి విడి బరువులు (గ్రాములలో) కింది ఇవ్వబడ్డాయి.

35, 45, 55, 50, 30, 110, 95, 40, 70, 100, 60, 80, 85, 60, 52, 95, 98, 35, 47, 45, 105, 90, 30, 50, 75, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 115, 65, 60, 40, 100, 55, 75, 110, 85, 95, 55, 50

దత్తాంశములోని రాశులను ఒక్కసారిగా ప్రదర్శించుటకు, సమగ్రంగా, సులభంగా అర్థం చేసుకొనుటకు అనువుగా రాశులన్నింటిని తరగతులు, 30-39, 40-49, 50-59, ... 100-109, 110-119. గా విభజిస్తాం. ఈ చిన్న చిన్న వర్గములు లేక సమూహములను తరగతులు అంటారు. ఒక్కొక్క తరగతి యొక్క పరిమాణమును 'తరగతి పొడవు' లేక 'తరగతి వెడల్పు' అంటారు. ఉదాహరణకు తరగతి 30–39 లో 30ను 'దిగువ అవధి' అని, 39ను 'ఎగువ అవధి' అని అంటారు. ఈ తరగతి పొడవు 10 (దిగువ, ఎగువ అవధులతో సహా).

తరగతులు (నారింజపండు బరువు)	**గణన** చిహ్నాలు	**పౌనఃపున్యము** (నారింజపండ్ల సంఖ్య)
30 - 39	𝍸 |	6
40 - 49	𝍸 |||	8
50 - 59	𝍸 ||||	9
60 - 69	𝍸 |	6
70 - 79	|||	3
80 - 89	𝍸	5
90 - 99	𝍸 ||	7
100 - 109	|||	3
110 - 119	|||	3
	మొత్తం	50

దత్తాంశములోని రాశులను చిన్న చిన్న వర్గములుగా విభజించి పౌనఃపున్యములతో సూచించు పట్టికను 'వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక' అంటారు. ఇది దత్తాంశమును సమగ్రంగా, సంక్షిప్తంగా ప్రదర్శించి అర్థంచేసుకోవడం సులభతరం చేస్తుంది.

పై పౌనఃపున్య విభాజనములోని తరగతులు ఒకదానిపై ఒకటి అతిపాతం చెందుట లేదు అనగా ఏ విలువ రెండు తరగతులలో పునరావృతం కాదు. ఈ తరగతులను సమ్మిళిత తరగతులు అంటాం.

ఏ దత్తాంశములో అయినా ఎక్కువ తరగతి పొడవుతో తక్కువ తరగతులకు లేక తక్కువ తరగతి పొడవుతో ఎక్కువ తరగతులను ఏర్పాటుచేసుకొనవచ్చును. కానీ తరగతులు మాత్రం ఒకదానిపై ఒకటి అతిపాతం చెందకూడదు. సామాన్యంగా మొదట దత్తాంశపు వాప్తి (వ్యాప్తి = గరిష్ఠ దత్తాంశపు విలువ – కనిష్ఠ దత్తాంశపు విలువ) ని కనుగొందురు. వ్యాప్తిని ఉపయోగించి తరగతి పొడవు మరియు తరగతుల సంఖ్యను నిర్ణయింతురు. ఉదాహరణకు 30–35, 36–40..... గా విభజింపవచ్చును.

పై దత్తాంశంలో ఒక నారింజపండు భారము 39.5 గ్రా. అయినచో ఆ విలువను ఏ తరగతి చేర్చవలెను? 30–39 తరగతిలోనా లేక 40–49 తరగతిలోనా?

ఇటువంటి సందర్భములలో తరగతుల యొక్క నిజ అవధులు లేక హద్దులు సహాయపడతాయి. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి, తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధుల సరాసరిని ఆ తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు అంటారు. అదే విలువ తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు అవుతుంది. ఇదే విధంగా అన్ని తరగతుల యొక్క హద్దులను రాయవచ్చు.

తరగతులు	**తరగతి హద్దులు**
20 - 29	19.5 - 29.5
30 - 39	29.5 - 39.5
40 - 49	39.5 - 49.5
50 - 59	49.5 - 59.5
60 - 69	59.5 - 69.5
70 - 79	69.5 - 79.5
80 - 89	79.5 - 89.5
90 - 99	89.5 - 99.5
100 - 109	99.5-109.5
110 - 119	109.5-119.5
120 - 129	119.5 - 129.5•

మొదటి తరగతికి ముందు ఒక తరగతి ఊహించుకోవడం ద్వారా మొదటి తరగతి దిగువ హద్దును, అట్లే చివరి తరగతికి తరువాత ఒక తరగతిని ఊహించటం ద్వారా చివరి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దును లెక్కించవచ్చును.

హద్దులు ఏర్పరచిన తరువాత కూడా 39.5 ను ఏతరగతిలో అనగా 29.5 – 39.5 లేక 39.5 – 49.5 చేర్చవలెననే సంశయము ఏర్పడుతుంది. సాంప్రదాయకంగా తరగతి యొక్క ఎగువహద్దు ఆ తరగతికి చెందదు అని గ్రహించవలెను.

కావున 39.5 రాశి 39.5 – 49.5 తరగతికి చెందుతుంది.

30–40, 40–50, 50–60..... తరగతులు ఒక దానిపై ఒకటి అతిపాతం చెందుతాయి. ఈ తరగతులను 'మినహాయింపు తరగతులు' అంటారు. సమ్మిళిత తరగతుల హద్దులలో మినహాయింపు తరగతులు ఏర్పడుట గమనించవచ్చు. ఒక తరగతి ఎగువ మరియు దిగువ హద్దుల బేధము ఆ తరగతి అంతరము. కావున 90–99 తరగతి అంతరము 10. (ఎందుకనగా 99.5 – 89.5 = 10)

ఉదాహరణ–3 : సెప్టెంబరు నెలలో ఒక నగరము యొక్క సాపేక్ష ఆర్ద్రత (శాతములలో) విలువలు కింది విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.0	92.1	84.9	90.0	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) 84–86, 86–88 ..... తరగతి అంతరాలతో వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును నిర్మించండి.

(ii) దత్తాంశము వ్యాప్తి ఎంత?

సాధన : (i) ఇచ్చిన తరగతులతో గణన చిహ్నాల సహాయంతో నిర్మింపబడిన వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము.

సాపేక్ష ఆర్ద్రత	గణన చిహ్నాలు	(పౌనఃపున్యము) రోజులు
84-86	|	1
86-88	|	1
88-90	||	2
90-92	||	2
92-94	𝍸 ||	7
94-96	𝍸 |	6
96-98	𝍸 ||	7
98-100	||||	4

[సూచన : దత్తాంశము 90; 90-92 తరగతికి
96; 96-98 తరగతికి చెందును.]

(ii) దత్తాంశము యొక్క వ్యాప్తి = గరిష్ఠ విలువ – కనిష్ఠ విలువ
= 99.2 - 84.9 = 14.3

అభ్యాసం 9.1

1. కింది పౌనఃపున్య విభాజనము నుండి రాశులు, వాని పౌనఃపున్యములు గల పట్టిక తయారుచేయండి.

మార్కులు	5 వరకు	6 వరకు	7 వరకు	8 వరకు	9 వరకు	10 వరకు
విద్యార్థుల సంఖ్య	5	11	19	31	40	45

2. 9వ తరగతిలోని 36 మంది యొక్క రక్తం గ్రూపులు ఈ విధంగా ఉన్నవి.

A O A O A B O A B A B O B
O B O O A B O B AB O A O O
O A AB O A B O A O B

ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారుచేయండి. అతి సామాన్యమైన గ్రూపు ఏది? అరుదైన గ్రూపు ఏది?

3. ఒక్కొక్కసారికి మూడు నాణెముల చొప్పున 30 సార్లు ఎగురవేసి ఒక్కొక్కసారికి పడిన బొమ్మలను లెక్కించడం కింది విధంగా ఉంది.

1 2 3 2 3 1 1 1 0 3 2 1 2
2 1 1 2 3 2 0 3 0 1 2 3 2
2 3 1 1

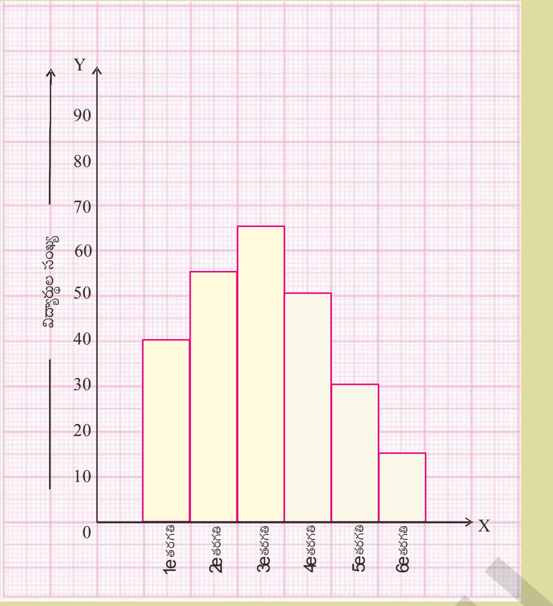
దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక తయారుచేయండి.

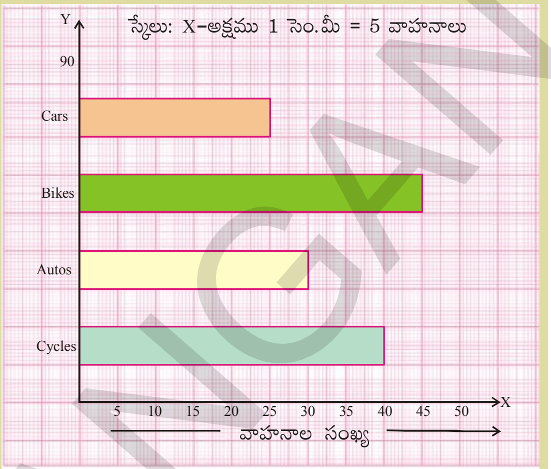
4. ఒక టి.వి. ఛానల్ వారు ధూమపాన నిషేధముపై SMS (సంక్షిప్త సందేశాలు) అభిప్రాయములను ఆహ్వానించిరి. ఇచ్చిన ఐచ్ఛికములు, A – పూర్తి నిషేధము, B – బహిరంగ ప్రదేశములలో నిషేధము, C – నిషేధము అవసరంలేదు. అని ఇవ్వగా SMS సమాధానములు ఇట్లున్నవి: A B A B C B

A B B A C C B B A B
B A B C B A B C B A
B B A B B C B A B A
B C B B A B C B B A
B B A B B A B C B A
B B A B C A B B A

దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము తయారుచేయండి. సరియైన SMS సమాధానములు ఎన్ని? వానిలో అధిక సంఖ్యాకుల అభిప్రాయము ఏది?

5. పక్క కమ్మీ రేఖ చిత్రము నుండి పౌనఃపున్య విభాజనపట్టికను రాయండి.





6. పక్క పటంలో ఇవ్వబడిన సోపాన రేఖాచిత్రము నుండి పౌనఃపున్య విభాజనమును తయారుచేయండి. రేఖా చిత్రములో ఉపయోగించిన (అక్షములపై) స్కేలును తెల్పండి.

7. 75 మార్కులకు రాయబడిన పరీక్షలో 30 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు ఇవ్వబడ్డాయి.

42, 21, 50, 37, 42, 37, 38, 42, 49, 52, 38, 53, 57, 47, 29

59, 61, 33, 17, 17, 39, 44, 42, 39, 14, 7, 27, 19, 54, 51.

ఈ దత్తాంశమునకు సమాన తరగతులతో (0-10, 10-20...) పౌనఃపున్య విభాజనపట్టిక తయారుచేయండి.

8. ఒక వీధిలోని 25 ఇండ్ల యొక్క నెలవారి విద్యుత్ వినియోగపు బిల్లులు (రూపాయలతో) ఇవ్వబడ్డాయి. తరగతి పొడవు రూ.75 ఉండునట్లుగా ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజనపట్టిక తయారుచేయండి.

170, 212, 252, 225, 310, 712, 412, 425, 322, 325, 192, 198, 230, 320, 412,

530, 602, 724, 370, 402, 317, 403, 405, 372, 413

9. ఒక సంస్థవారు తయరుచేసిన కారు బ్యాటరీలలో 40 బ్యాటరీల జీవిత కాలం (సంవత్సరాలలో) కింది విధంగా నమోదు చేసారు.

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

పై దత్తాంశమునకు తరగతులలో పౌనఃపున్య విభాజనం తయారుచేయండి. తరగతి అంతరం 0.5 గా తీసుకొని 2-2.5తరగతితో ప్రారంభించండి.

9.4 కేంద్రీయస్థానవిలువలు

కింది సందర్భములను పరిశీలించండి.

సందర్భం-1 : ఒక వసతి గృహంలోని 50 మంది విద్యార్థులు ఉదయం అల్పాహారంలో 200 ఇడ్లీలు తింటారు. మరొక 20 మంది వసతి గృహం చేరినచో ఎన్ని ఇడ్లీలు అవసరం?

సందర్భం-2 : ఒక పరిశ్రమలోని ఉద్యోగుల నెలవారి జీతములు (వేలల్లో) కింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. అందరు ఉద్యోగుల జీతములకు ప్రాతినిధ్యము వహించు జీతం ఏది?

ఉద్యోగి	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
జీతం (₹) (వేలలో)	12	14	15	15	15	16	17	18	90	95

సందర్భం-3 : ఒక నగరంలోని ప్రయాణసాధనాల వివరాలు (శాతములలో) ఇవ్వబడ్డాయి. అయిన ఆ నగరంలో ఎక్కువగా ఉపయోగించు ప్రయాణసాధన ఏది?

1.	కారు	15%
2.	రైలు	12%
3.	బస్సు	60%
4.	స్కూటరు	13%

మొదటి సందర్భములో దత్తాంశము యొక్క సరాసరి కనుగొని దానినుండి అవసరమగు అంచనాలను చేయవచ్చును.

రెండవ సందర్భములో సరాసరి రూ. 30.7 వేలు అవుతుంది. కానీ, దత్తాంశాన్ని పరిశీలిస్తే అది వారి ఆదాయములకు సరియగు అంచనా కాదు. ఉద్యోగుల జీతములు ఈ విలువకు దగ్గరలో లేవు. ఇంకనూ ఎక్కువమంది జీతములు 12 నుండి 18 వేలు మధ్యలో గలవు. కావున ఈ దత్తాంశమునకు మధ్యగతము తగిన సమాధానము అవుతుంది.

మూడవ సందర్భములో బాహుళకము సరియగు సమాధానము.

కావున దత్తాంశపు స్వభావం మరియు సేకరణ ఉద్దేశముల ననుగుణంగా సగటు కాని మధ్యగతము కాని బాహుళకము గణనకు తీసుకొందాము.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

1. అంకగణిత మధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము విడివిడిగా ఉపయోగించు సందర్భములను మూడింటిని రాయండి.

ఈ సందర్భమును గమనించండి. క్రికెట్ క్రీడాకారులు రఘు, గౌతమ్ ల క్రీడా సామర్థ్యం గురించి వారి అభిమానులు గత 5 పోటీల ఫలితాలను బట్టి చర్చిస్తున్నారు.

పోటీలు		1వ	2వ	3వ	4వ	5వ
పరుగుల	రఘు	50	50	76	31	100
సంఖ్య	గౌతమ్	65	23	100	100	10

ఇద్దరు ఆటగాళ్ల అభిమానుల పరుగుల సరాసరిలను కింది విధంగా లెక్కించారు.

$$\text{రఘు సరాసరి} = \frac{307}{5} = 61.4$$

$$\text{గౌతమ్ సరాసరి} = \frac{298}{5} = 59.6$$

రఘు సరాసరి గౌతమ్ సరాసరి కన్నా ఎక్కువ కాబట్టి రఘు గొప్పవాడని అతడి అభిమానులు వాదిస్తున్నారు.

కానీ గౌతమ్ అభిమానులు ఇన్నింగ్స్ వివరాలను అవరోహణ క్రమంలో అమర్చి పరిశీలించారు.

రఘు	100	76	50	50	31
గౌతమ్	100	100	65	23	10

పరుగులను పరిశీలించినచో గౌతమ్ యొక్క మధ్యమ పరుగులు 65, కానీ రఘు మధ్యమ పరుగులు 50 మాత్రమే కావున గౌతమ్ గొప్పవాడని అతడి అభిమానులు వాదిస్తున్నారు.

మరొక రకంగా పరిశీలిస్తే గౌతమ్ రెండు శతకాలు చేసాడు కావున అతడు గొప్పవాడనవచ్చును.

పై చర్చలోని సరాసరి అనగా అంకగణిత మధ్యమము, మధ్యమరాశి అనగా మధ్యగతము, ఎక్కువసార్లు అనగా బాహుళకములను లెక్కించటమే కదా! మరొకసారి ఈ విలువలను గణించుట గురించి చర్చిద్దాం.

పునరావృత స్కోరులు లెక్కించగా (బాహుళకము), రఘు యొక్క స్కోరు బాహుళకం 50. గౌతమ్ స్కోరు బాహుళకము 100. వీటన్నింటిలో ఏది సరియైన మాపకము.

సరాసరి, మధ్యగతం, బాహుళకములో దీనిని ఎప్పుడు వాడతాము?

ఇప్పుడు మనము సరాసరి అర్థం చేసుకొందాం.

9.4.1 అంకగణిత మధ్యమము / సరాసరి / సగటు (Arithmetic mean)

ఒక దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల మొత్తమును ఆ రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా ఫలితమును అంకగణిత మధ్యమము లేక సరాసరి లేక సగటు అంటారు.

$$\text{అంకగణిత మధ్యమము } \overline{x} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}} \quad \text{లేదా } \overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

9.4.1.1 ముడి దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమము

ఉదాహరణ-4 : ఒక వారము ఒక పట్టణపు వర్షపాతము 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ., 12 సెం.మీ., 3 సెం.మీ., 6 సెం.మీ., 8 సెం.మీ., 0.5 సెం.మీ. అని రికార్డు చేయబడినది. అయిన దినసరి సరాసరి వర్షపాతమెంత?

సాధన : వారంలో రోజువారీ వర్షపాతము (సెం.మీ.) = 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ., 12 సెం.మీ., 3 సెం.మీ., 6 సెం.మీ., 8 సెం.మీ., 0.5 సెం.మీ

దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య n=7

అంకగణిత మధ్యమము $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{\text{n}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n}{\text{n}}$. $x_1, x_2 ..... x_n$ రాశులు.

మరియు $\bar{x}$ వాటి సగటు $= \frac{4+5+12+3+6+8+0.5}{7} = \frac{38.5}{7} = 5.5$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ-5 : 10, 12, 18, 13 P మరియు 17 ల సరాసరి 15 అయిన P విలువను కనుగొనండి.

సాధన : సరాసరి $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{\text{n}}$

$$15 = \frac{10+12+18+13+\text{P}+17}{6}$$

$$90 = 70 + \text{P}$$

$$\text{P} = 20.$$

9.4.1.2 అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు అంకగణిత మధ్యమం

ఒక తరగతిలోని 40 మంది విద్యార్థుల బరువులు కింది అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

విద్యార్థి బరువు (కి.గ్రా.) (x)	30	32	33	35	37	41
విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	5	9	15	6	3	2

40 మంది విద్యార్థుల బరువుల అంకగణిత మధ్యమమెంత?

పట్టికను గమనిస్తే, మొదటి 5 మంది విద్యార్థులలో ఒక్కొక్కరి బరువు 30 కి.గ్రా. అనగా 5 మంది మొత్తం బరువు 5 × 30 = 150 కి.గ్రా. ఇదే విధంగా మిగిలిన బరువులు గల విద్యార్థుల బరువులు విడివిడిగా కనుగొని, ఆ లబ్ధముల మొత్తమును కూడగా రాశుల మొత్తము అవుతుంది.

అంకగణితమధ్యమం $(\bar{x}) = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$

కావున సరాసరి $= \frac{5 \times 30 + 9 \times 32 + 15 \times 33 + 6 \times 35 + 3 \times 37 + 2 \times 41}{5+9+15+6+3+2} = \frac{1336}{40} = 33.4$ కి.గ్రా.

దత్తాంశములోని విభిన్న రాశులు $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ మరియు వాని పౌనఃపున్యములు $\text{f}_1, \text{f}_2, \text{f}_3, \text{f}_4, \text{f}_5, \text{f}_6$ అయినచో

అంకగణితమధ్యమం $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

$$\therefore \ \bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$$

ఉదాహరణ-6 : కింది పౌనఃపున్య విభాజనమునకు అంకగణితమధ్యమం కనుగొనండి.

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

సాధన :

సోపానం-1 : ప్రతి వరుసలో $f_i \times x_i$ కనుగొనుము.

సోపానం-2 : పౌనఃపున్యముల మొత్తం (Σf_i)

మరియు $f_i \times x_i$ లబ్ధముల మొత్తం (Σf_ix_i) లను కనుగొనుము.

సోపానం-3 : అంకగణితమధ్యమము $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{755}{50} = 15.1$

x_i	f_i	f_ix_i
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma f_ix_i = 755$

ఉదాహరణ-7 : కింది పౌనఃపున్య విభాజనము యొక్క అంకగణిత మధ్యమం 7.5 అయిన, 'A' విలువను కనుగొనండి.

మార్కులు	5	6	7	8	9	10
విద్యార్థుల సంఖ్య	3	10	17	A	8	4

సాధన :

పౌనఃపున్యముల మొత్తం $(\Sigma f_i) = 42 + \text{A}$

రాశుల మొత్తం $(\Sigma f_ix_i) = 306 + 8\text{A}$

అంకగణితమధ్యమం $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_ixi}{\Sigma f_i}$

ఇచ్చిన విలువ ప్రకారం $= 7.5$

కావున $7.5 = \dfrac{306 + 8\text{A}}{42 + \text{A}}$

$$306 + 8\text{A} = 315 + 7.5\ \text{A}$$

మార్కులు (x_i)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	f_ix_i
5	3	15
6	10	60
7	17	119
8	A	8A
9	8	72
10	4	40
	42+A	306+8A

$$8A - 7.5\,A = 315 - 306$$

$$0.5\,A = 9$$

$$A = 18$$

9.4.1.3 విచలన పద్ధతిలో అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు అంకగణితమధ్యమం

ఉదాహరణ-8 : కింది అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు అంకగణితమధ్యమము కనుగొనండి.

x	10	12	14	16	18	20	22
f	4	5	8	10	7	4	2

సాధన :

(i) సాధారణ పద్ధతి

అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనపు సగటుకు కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి.

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	4	40
12	5	60
14	8	112
16	10	160
18	7	126
20	4	80
22	2	44
	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 622$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{622}{40} = 15.55$$

(ii) విచలన పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశములోని ఏదైనా ఒకరాశిని ఊహించిన అంకగణితమధ్యమంగా గుర్తించి అంకగణితమధ్యమం కనుగొంటారు. ఈ దత్తాంశమునకు ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమం A = 16 అనుకొని పట్టికను పూరించగా...

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
10	4	–6	–24
12	5	–4	–20
14	8	–2	–16
$\boxed{16}$ A	10	0	0
18	7	+2	+14
20	4	+4	+16
22	2	+6	+12
	40		–60+42=–18

పౌనఃపున్యముల మొత్తం = 40

విచలనముల $f_i \times d_i$ లబ్ధాల మొత్తం $= -60 + 42$

$$\Sigma f_i d_i = -18$$

అంకగణితమధ్యమం $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 16 + \frac{-18}{40}$

$= 16 - 0.45$

$= 15.55$

9.3.2 మధ్యగతము (Median)

దత్తాంశములోని రాశులను ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో రాసినప్పుడు మధ్యమ రాశి విలువను దత్తాంశపు మధ్యగతము అంటారు. ఇది దత్తాంశమును రెండు సమభాగములుగా విభజిస్తుంది. అంటే దత్తాంశములోని సగం రాశుల విలువలు మధ్యగతముకన్నా ఎక్కువ అయితే మిగిలిన సగం రాశుల విలువలు మధ్యగతము కన్నా తక్కువ.

కింది తరగతులలో నేర్చుకొన్న విధంగా ముడి దత్తాంశమునకు మధ్యగతము కింది విధంగా లెక్కిస్తాము.

అరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో రాసిన దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య ‘n’ మరియు

‘n’ బేసిసంఖ్య అయిన మధ్యగతము = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ రాశివిలువ.

‘n’ సరిసంఖ్య అయిన మధ్యగతము = $\left(\frac{n}{2}\right)$ వ మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ వ రాశుల సరాసరి.

ప్రయత్నించండి

1. 75, 21, 56, 36, 81, 05, 42 రాశుల మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి.
2. ఆరోహణ క్రమములో ఉన్న దత్తాంశం 7, 10, 15, x, y, 27, 30 యొక్క మధ్యగతము 17. ఈ దత్తాంశమునకు 50 అను రాశిని చేర్చగా మధ్యగతము 18 అయినచో x మరియు y లను కనుగొనుము.

9.4.2.1 పౌనఃపున్య విభాజనమునకు మధ్యగతము

భారత్వ దత్తాంశ రాశులు (అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము) మధ్యగతము కనుగొను పద్ధతిని ఉదాహరణ పూర్వకంగా చర్చిద్దాం. ఒక సంస్థలోని 100 మంది ఉద్యోగుల నెలసరి వేతనాల కింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

నెలసరివేతనం (in ₹)	7500	8000	8500	9000	9500	10000	11000
ఉద్యోగుల సంఖ్య	4	18	30	20	15	8	5

దత్తాంశములోని రాశులు ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో ఉండునట్లుగా విభాజన పట్టికను రాసి, సంచిత పౌనఃపున్యములను రాయవలెను. (ఏదైనా ఒక రాశి వరకు సంచిత పౌనఃపున్యము అనగా ఆరాశి పౌనఃపున్యము మరియు ముందు రాశి వరకు పౌనఃపున్యముల మొత్తమే. దత్తాంశములోని మొదటి రాశి యొక్క పౌనఃపున్యమే దాని సంచిత పౌనఃపున్యము అవుతుంది) పట్టికను గమనించండి.

వేతనాలు (x)	ఉద్యోగుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
7500	4	4
8000	18	22
8500	30	52
9000	20	72
9500	15	87
10000	8	95
11000	5	100
	100	

దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య N అయిన $\frac{N}{2}$ వ రాశిని కలిగి ఉన్న తరగతిని 'మధ్యగత తరగతి' అంటారు.

దత్తాంశంలోని రాశులసంఖ్య N= 100 కావున $\left(\frac{N}{2}\right)$ వ మరియు $\left(\frac{N}{2}+1\right)$ వ రాశులు.

అనగా 50, 51 వ రాశుల విలువలను పట్టిక నుండి గ్రహించండి. అంటే ఒక్కొక్క వేతనము 8500. అనగా 8500 దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము.

ప్రయత్నించండి

1. కింది దత్తాంశమునకు మధ్యగతము కనుగొనండి.

మార్కులు	15	20	10	25	5
విద్యార్థుల సంఖ్య	10	8	6	4	1

2. అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము యొక్క మధ్యగతము కనుగొనేప్పుడు విలువలను ఏ క్రమములో రాయవలెను? ఎందుకు?

9.4.3 బాహుళకము (Mode)

ఒక దత్తాంశములో మిగిలిన రాశులకన్నా ఎక్కువసార్లు పునరావృతమగు రాశిని అనగా ఎక్కువ పౌనఃపున్యముగల రాశిని ఆ దత్తాంశమునుకు బాహుళకము అంటారు.

ఉదాహరణ-9 : కింద ఒక రోజు దుకాణదారు అమ్మిన పాదరక్షల సైజు నంబర్లు ఇవ్వబడినవి. బాహుళకము కనుగొనండి.

6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 10, 7, 6, 7, 9, 7, 6.

సాధన : దత్తాంశ రాశులను ఆరోహణ క్రమంలో రాయగా 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10 లేక పౌనఃపున్య విభాజనము రాయగా

కొలత సంఖ్య	6	7	8	9	10
అమ్మిన చెప్పుల సంఖ్య	4	5	1	2	1

ఇచ్చట 7 అను సంఖ్య 5 సార్లు వచ్చింది.

∴ దత్తాంశము యొక్క బాహుళకము = 7

ఆలోచించండి, చర్చించండి

1. మీ తరగతిలోని విద్యార్థులను ఎత్తుల ఆధారంగా వర్గాలుగా విభజించండి. (ఉదాహరణకు బాలురు – బాలికలు) మరియు బాహుళకమును కనుగొనండి.
2. చెప్పుల దుకాణందారు చెప్పులు కొనుగోలు చేయునపుడు ఏ కొలత చెప్పులు ఎక్కువగా ఆర్డరు చేస్తాడు?

ఉదాహరణ-10 : 100 మార్కులకు నిర్వహించిన పరీక్షలో 20 మంది విద్యార్థుల మార్కులు

93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95

(a) 91-100, 81-90..... తరగతులతో పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక తయారుచేయండి.

(b) బాహుళక తరగతిని గుర్తించండి. (అత్యధిక పౌనఃపున్యం గల తరగతిని 'బాహుళక తరగతి' అంటారు.)

(c) మధ్యగతపు తరగతులను గుర్తించండి.

సాధన :

(a)

మార్కులు	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
91-100	9	20
81-90	6	11
71-80	3	5
61-70	0	2
51-60	2	2
మొత్తం	**20**	

(b) గరిష్ఠ పౌనఃపున్యాలు '9' గల తరగతి 91-100 కావున ఇదే బాహుళకపు తరగతి.

(c) 20లో మధ్యమరాశి 10.

దత్తాంశములోని రాశులను ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో ఎలా లెక్కించినను 10వ రాశి 81-90 తరగతిలో గలదు. కావున 81-90ను మధ్యగత తరగతి అంటారు.

9.5 కేంద్రస్థానపు కొలతలలో మార్పులు

దత్తాంశములోని రాశులన్నింటి ఒక స్థిరరాశిని కూడగా లేక అన్నింటిని ఒక స్థిరరాశిచే గుణించగా కేంద్రస్థాన కొలతలు ఏ విధంగా మార్పుచెందుతాయి? పరిశీలిద్దాం.

వివరము	దత్తాంశం	సరాసరి	బాహుళకం	మధ్యగతం
దత్తాంశ రాశులు	6, 7, 8, 10, 12, 14, 14, 15, 16, 20	12.2	14	13
అన్ని రాశులకు 3 కూడగా	9, 10, 11, 13, 15, 17, 17, 18, 19, 23	15.2	17	16
అన్ని రాశులను 2చే గుణించగా	12, 14, 16, 20, 24, 28, 28, 30, 32, 40	24.4	28	26

పై సందర్భాలను పరిశీలించగా

కూడినప్పుడు : దత్తాంశములోని అన్ని రాశులకు ఒక స్థిరరాశిని కూడిన లేక తీసివేసిన ఆ దత్తాంశము యొక్క కేంద్రస్థాన కొలతలు కూడా అంతే మార్పు పొందుతాయి. అనగా అన్ని రాశులకు 3 కూడగా సరాసరి, బాహుళకము, మధ్యగతములు కూడా 3 పెరిగినది.

గుణించినప్పుడు : దత్తాంశములోని అన్ని రాశులను ఒక స్థిరరాశిచే గుణించిన లేక శూన్యేతర స్థిరరాశిచే భాగించిన, ఆ దత్తాంశము యొక్క కేంద్రస్థాన కొలతలు కూడా అదే విధమైన హెచ్చింపు లేక విభజన పొందుతాయి. అనగా అన్ని రాశులను 2 చే గుణించగా దత్తాంశపు సరాసరి, బాహుళకము, మధ్యగతములు కూడా 2 రెట్లు అవుతాయి.

అభ్యాసం 9.2

1. ఒక సరుకుల రవాణా కార్యాలయంలోని పార్సిళ్ల బరువులు కింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఒక్కొక్క పార్సిలు యొక్క సరాసరి బరువెంత?

బరువు (కి.గ్రా)	50	65	75	90	110	120
పార్సిళ్ల సంఖ్య	25	34	38	40	47	16

2. ఒక గ్రామములోని ప్రతి కుటుంబములో గల పిల్లల వివరాలు కింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఒక్కొక్క కుటుంబములోని సరాసరి పిల్లల సంఖ్య కనుగొనండి.

పిల్లల సంఖ్య	0	1	2	3	4	5
కుటుంబముల సంఖ్య	11	25	32	10	5	1

3. కింది పౌనఃపున్య విభాజనము యొక్క సరాసరి 7.2 అయిన 'K' విలువను కనుగొనండి.

x	2	4	6	8	10	12
f	4	7	10	16	K	3

4. భారతదేశ జన గణన ప్రకారం గ్రామములు, జనాభా వివరాలు కింది విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి, (జనాభా దగ్గర వేలకు సవరించబడినది) ఒక్కొక్క గ్రామం యొక్క సరాసరి జనాభా ఎంత?

జనాభా (వేలల్లో)	12	5	30	20	15	8
గ్రామముల సంఖ్య	20	15	32	35	36	7

5. AFLATOUN అనే సాంఘిక, ఆర్థిక విద్యావిషయక సంస్థ హైదరాబాదు జిల్లాలోని ఉన్నత పాఠశాలల విద్యార్థులచే పొదుపు కార్యక్రమమును ప్రారంభించింది. మండలాలవారీగా ఒక్కనెలలో పొదుపు చేయబడిన మొత్తాలు ఇవ్వబడ్డాయి.

మండలం	**పాఠశాలల సంఖ్య**	**పొదుపు మొత్తం (రూ.లలో)**
అంబర్‌పేట్	6	2154
తిరుమలగిరి	6	2478
సైదాబాద్	5	975
ఖైరతాబాద్	4	912
సికింద్రాబాద్	3	600
బహదూర్‌పుర	9	7533

ఒక్కొక్క మండలంలో పాఠశాలవారీ సరాసరి పొదుపు మొత్తమెంత? జిల్లా మొత్తంమీద పాఠశాల సరాసరి పొదుపు ఎంత?

6. ఒక పాఠశాలలోని 9వ తరగతి బాల బాలికల ఎత్తుల వివరాలు ఈ విధంగా ఉన్నవి.

ఎత్తు (సెం.మీ.)	135	140	147	152	155	160
బాలురు	2	5	12	10	7	1
బాలికలు	1	2	10	5	6	5

బాల బాలికల ఎత్తులను పోల్చండి [**సూచన :** బాలబాలికల మధ్యగత ఎత్తును కనుగొనండి.]

7. ప్రపంచ క్రికెట్ ఆటగాళ్లలో శతకాలు (100 పరుగులు) చేసిన వారి సంఖ్యలు కింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

శతకాల సంఖ్య	5	10	15	20	25
ఆటగాళ్ల సంఖ్య	56	23	39	13	8

ఈ దత్తాంశమునకు సరాసరి, మధ్యగతము, బాహుళకములను కనుగొనండి.

8. కొత్త సంవత్సరాది సందర్భముగా ఒక మిఠాయి దుకాణం వారు మిఠాయి పొట్లాలను సిద్ధపరుచుచున్నారు. ఒక్కొక్క మిఠాయి పొట్లాం ధర, సిద్ధపరచిన పొట్లాల సంఖ్యలు కింది పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

మిఠాయిపొట్లాం వెల (రూపాయలలో)	₹25	₹50	₹75	₹100	₹125	₹ 150
పొట్లముల సంఖ్య	20	36	32	29	22	11

పై దత్తాంశమునకు అంకగణితమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములు కనుగొనండి.

9. ముగ్గురు విద్యార్థుల సగటు బరువు 40 కి.గ్రా. వారిలో రంగా బరువు 46 కి.గ్రా. మరియు మిగిలిన ఇద్దరు విద్యార్థుల రహీమ్, రేష్మాల బరువులు సమానం అయిన రహీమ్ బరువు ఎంత?

10. ఒక ఉన్నత పాఠశాలలోని వివిధ తరగతుల విద్యార్థులు ఒక అనాథశరణాలయంనకు ఇచ్చిన విరాళములు (రూపాయలలో) కింది విధంగా ఉన్నవి.

తరగతి	ఒక్కొక్క విద్యార్థి విరాళం (₹ లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య
VI	5	15
VII	7	15
VIII	10	20
IX	15	16
X	20	14

ఈ వివరాలకు అంకగణితమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములు కనుగొనండి.

11. నాలుగు సంఖ్యలలో మొదటి రెండింటి సరాసరి 4, మొదటి మూడింటి సరాసరి 9, అన్నింటి సరాసరి 15 మరియు ఆ సంఖ్యలలో ఒకటి 2 అయిన మిగిలిన సంఖ్యలను కనుగొనుము.

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

- దత్తాంశములోని అన్ని విభిన్న రాశులను పౌనఃపున్యములతో సూచించు పట్టికను ‘అవర్గీకృత విభాజన పట్టిక’ లేక ‘రాశుల భారత్వ పట్టిక’ అంటారు.
- ఎక్కువ రాశులు గల దత్తాంశమును పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో చూపుట వలన దత్తాంశమును మొత్తమును ఒకేసారి వీక్షించగలుగుట. దత్తాంశ వ్యాప్తిని గుర్తించుట, ఏయే రాశులు ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అవుతున్నవి గుర్తించుటకు మరియు దత్తాంశాన్ని విశ్లేషణచేసి సులభంగా వ్యాఖ్యానించవచ్చు.
- ఒక దత్తాంశములో ఏరాశి చుట్టూ మిగిలిన రాశులన్నీ కేంద్రీకృతమై ఉంటాయో ఆ రాశిని కేంద్రస్థానపు కొలత అంటారు.
- కేంద్రీయస్థాన విలువలు : అంకగణితమధ్యమము (సరాసరి/సగటు), మధ్యగతము, బాహుళకము.
- రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా ఫలితమును దత్తాంశము యొక్క అంకగణితమధ్యమము అంటారు.

$$\text{అంకగణితమధ్యమము} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}} \quad \text{లేక} \quad \overline{x} = \frac{\Sigma x_{\mathrm{i}}}{\mathrm{n}}$$

- వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు అంకగణితమధ్యమము $\overline{x} = \dfrac{\Sigma f_{\mathrm{i}} x_{\mathrm{i}}}{\Sigma\, f_{\mathrm{i}}}$.

- విచలన పద్ధతిలో అంకగణితమధ్యమము $=A+\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$ ఇచ్చట A ఊహించిన అంకగణితమధ్యమము, Σf_i పౌనఃపున్యముల మొత్తం మరియు $\Sigma f_i d_i$ పౌనఃపున్యము, విచలనాల లబ్దాల మొత్తం.
- ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో రాయబడిన దత్తాంశములోని మధ్యమరాశిని మధ్యగతము అంటారు.
- దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య ‘n’ బేసిసంఖ్య అయిన $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ రాశివిలువ మధ్యగతము అవుతుంది.
- దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య ‘n’ సరిసంఖ్య అయిన $\left(\frac{n}{2}\right)$ వ మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ వ రాశుల సరాసరి మధ్యగతము అవుతుంది.
- మధ్యగతము దత్తాంశమును, రెండు సమభాగములుగా విభజిస్తుంది. అంటే దత్తాంశంలోని సగం రాశుల విలువలు మధ్యగతం కన్నా ఎక్కువ మిగిలిన సగం రాశుల విలువలు దత్తాంశంకన్నా తక్కువ ఉంటాయి.
- ఒక దత్తాంశములో మిగిలిన రాశులకన్నా ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అగు రాశిని అనగా ఎక్కువ పౌనఃపున్యంగల రాశిని ఆ దత్తాంశమునకు బాహుళకము అంటారు.

మెదడుకు మేత

1. ఒక వరుసలో గోపి ఎడమ నుండి 7వ వాడు మరియు శంకర్ కుడి నుండి 5వ వాడు. వారు వారి స్థానాలు పరస్పరం మార్చుకున్న శంకర్ కుడి నుండి 8 వాడు అగును. అయిన వరుసలో ఎంత మంది కూర్చొని ఉన్నారు?
2. 4.5 మీ. ఎత్తునగల చెట్టు మొదలు నుండి 1.5 మీ ఎత్తులో చైతన్య తన పేరును బెరడు (కాండం) పై చెక్కాడు. 10 సంవత్సరాల తర్వాత ఆ చెట్టు 6.75 మీ ఎత్తు అయింది. మరి ఇప్పుడు చైతన్య పేరు ఎంత ఎత్తులో ఉంటుంది?

   మీ జవాబుకు తగు కారణాలు తెలపండి.

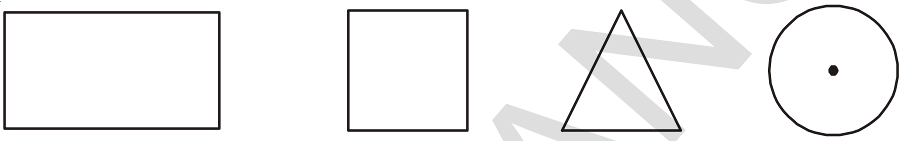
10

ఉపరితల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణములు (Surface Areas and Volumes)

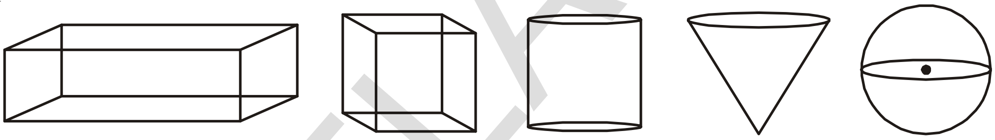
10.1 పరిచయం

ఈ కింది పటములను పరిశీలించండి.

(a)



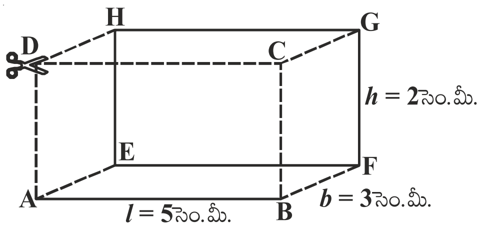
(b)



గ్రూపు (a) మరియు గ్రూపు (b) లలో ఉన్న పటాల మధ్య వ్యత్యాసములను మీరేమి గమనించారు?

పైన చూపబడిన పటాలలో గ్రూపు (a) లో చూపబడిన పటాలన్నింటిని మనం నోట్‌పుస్తకములో సులభంగా గీయగల్గుతాం. వీటిని సమతలపటాలు అంటాం. వీటికి పొడవు, వెడల్పు అను రెండు కొలతలు మాత్రమే ఉంటాయి. అందుచే వీటిని ద్విపరిమాణాత్మక వస్తువు లేదా 2-D వస్తువులు అని అంటాం. గ్రూపు (b) లో పటాలన్ని పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు కొలతలను కల్గియుంటాయి. అందుచే వీటిని త్రిపరిమాణాత్మక వస్తువులు లేదా 3-D వస్తువులు అని అంటాం. వాటినే ఘనాకార వస్తువులు అంటాం. ఈ వస్తువులను మన పరిసరాలలో గమనిస్తూంటాం. మీరు సమతల పటాలను గూర్చి, వాటి వైశాల్యములను కనుగొను విధానములను గూర్చి ఇదివరకే నేర్చుకొన్నారు. ఈ తరగతిలో స్థూపము, శంఖువు, గోళము వంటి ఘనాకార వస్తువులు లేదా త్రిపరిమాణాత్మక వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యములను, ఘనపరిమాణములను కనుగొను విధమును నేర్చుకుంటారు.

10.2 దీర్ఘఘన ఉపరితలవైశాల్యము

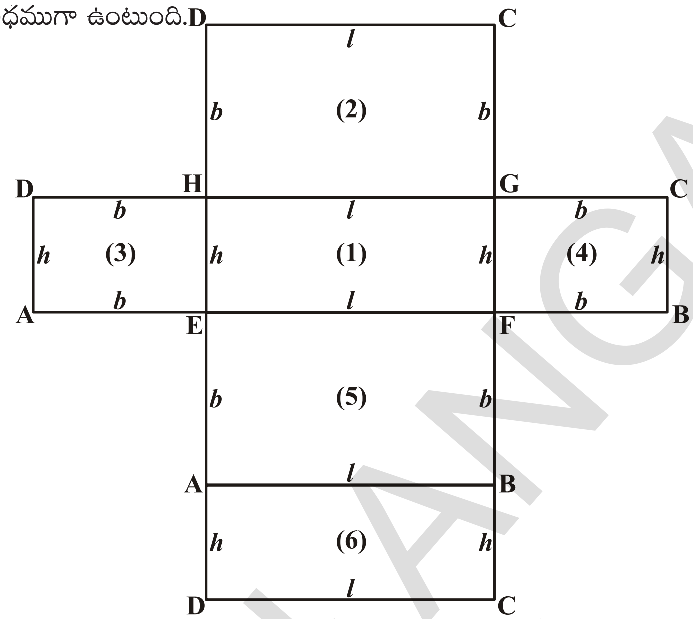


పక్క పటము ఇవ్వబడిన దీర్ఘ ఘనమును పరిశీలించండి. అది ఎన్ని ముఖాలను కల్గిఉంది? ఎన్ని మూలలు కల్గియుంది? ఎన్ని అంచులను కల్గిఉంది? ముఖాలను చూచి ఏవిధముగా కనబడుతున్నాయో చెప్పండి? ఏ ముఖాల జతలు ఒకే పరిమాణమును కల్గియున్నాయి? దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యమును ఏ విధంగా కనుగొనగలమో చెప్పగలరా?

ఇప్పుడు మనము దీర్ఘఘనముయొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొందాం.

పక్క పటములో ఉన్న దీర్ఘఘనము యొక్క పొడవు (l) = 5 సెం.మీ.; వెడల్పు (b) = 3 సెం.మీ.; ఎత్తు (h) = 2 సెం.మీ. గా ఇవ్వబడినది.

మనము ఇచ్చిన దీర్ఘఘనమును పటములో చూపిన విధముగా CD, ADHE మరియు BCGF వెంబడి కత్తిరించి తెరచి చూస్తే కింది పటములో చూపిన విధముగా ఉంటుంది.



ఈ పటము దీర్ఘఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం ఆరు దీర్ఘ చతురస్రములు లేదా సర్వసమానమైన మూడు జతల దీర్ఘచతురస్రముల వైశాల్యముతో ఏర్పడుతుందన్న విషయమును మనము గ్రహించవచ్చు. అందుచే దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యముకనుగొనేందుకు ఆరు దీర్ఘచతురస్రాల ముఖాల వైశాల్యములను కనుగొని దాని సంపూర్ణతలవైశాల్యమును కనుగొనాలి.

EFGH దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= l \times h = lh$ ....(1)

HGCD దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= l \times b = lb$ ....(2)

AEHD దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= b \times h = bh$ ....(3)

FBCG దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= b \times h = bh$ ....(4)

ABFE దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= l \times b = lb$ .... (5)

DCBA దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= l \times h = lh$ ....(6)

పై వైశాల్యములను కూడగా మనము దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతలవైశాల్యము కనుగొనవచ్చు.

దీర్ఘఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యం = వైశాల్యం $(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)$

$= lh + lb + bh + bh + lb + lh$

$= 2\,lb + 2lh + 2bh$

$= 2(lb + bh + lh)$

(1), (3), (4), (6) అనేవి దీర్ఘఘనం యొక్క ప్రక్క తలాలు

దీర్ఘఘన పక్కతలవైశాల్యము = (1) వై॥ + (3) వై॥ + (4)వై॥ + (6)వై॥

$= lh + bh + bh + lh$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h\,(l + b)$

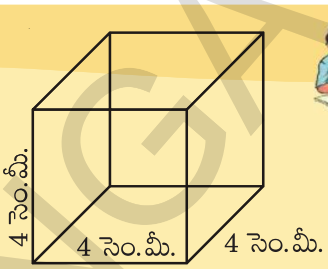
ఇప్పుడు దీర్ఘఘనంలో చూపిన విలువలనుపయోగించి పక్కతలవైశాల్యం, సంపూర్ణతల వైశాల్యములను కనుగొనండి. ఈ విధముగా కనుగొన్న సంపూర్ణతలవైశాల్యం 62 చదరపు సెంటీమీటర్లు మరియు పక్కతలవైశాల్యము 32 చ.సెం.మీ, అని నిర్ధారించుకొండి.

ప్రయత్నించండి

‘l’ సెం.మీ. పొడవైన భజం గల ఒక ఘనమును తీసుకోండి. ముందు కృత్యములో దీర్ఘఘనమును కత్తిరించిన విధంగానే చేసి దాని యొక్క పక్కతల వైశాల్యమును సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

ఇవి చేయండి

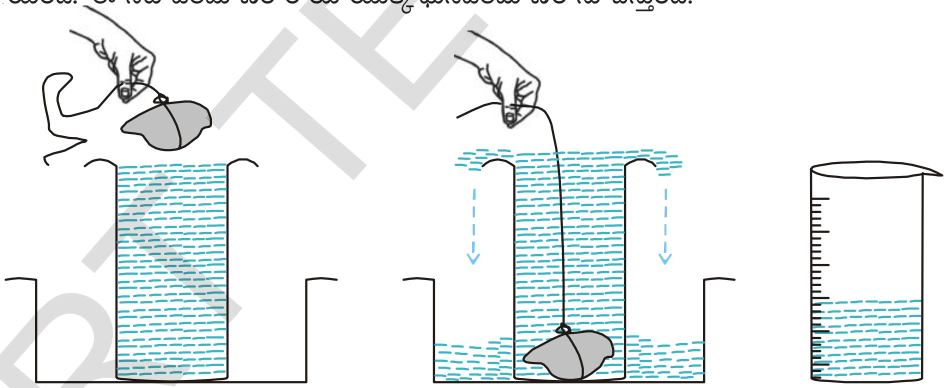
1. 4 సెం.మీ. భుజముగాగల ఘనము యొక్క పక్కతలవైశాల్యమును, సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.
2. ఒక ఘనము యొక్క భుజమును 50% పెంచితే ఎంత శాతము దాని యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము పెరుగుతుంది?



10.2.1 ఘనపరిమాణం

ఈ కింది కృత్యమును చేయండి.

ఒక గాజు బీకరును తీసుకొని ఒక కంటెయినర్‌లో పెట్టండి. బీకరును దాని అంచుల వరకు నీటితో నింపి దానిలో నెమ్మదిగా ఒక రాయిని ముంచండి. కొంత నీరు బీకరు నుండి కంటెయినర్‌లోకి పడుతుంది. కంటెయినర్‌లో పడిన నీటిని ఒక కొలపాత్రలోనికి పోయండి. ఈ నీటి పరిమాణం రాయి యొక్క ఘనపరిమాణం సూచిస్తుంది.

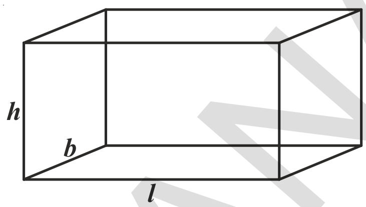


ప్రతీ వస్తువు కొంత అంతరాళమును ఆక్రమిస్తుంది. ఆ వస్తువు ఆక్రమించే అంతరాళ పరిమాణమును ‘ఘనపరిమాణం’ అంటారు. ‘ఘనపరిమాణం’ ను ఘనపు యూనిట్లలో కొలుస్తారు.

10.2.2 పాత్ర యొక్క సామర్థ్యం

ఒక గుల్లగానున్న వస్తువును తీసుకొంటే దానియొక్క లోపలి భాగమంతా ఖాళీగా ఉంటుంది. ఈ భాగము గాలి లేదా ఏదైనా ద్రవముచే నింపవచ్చు. ఈ విధముగా నింపడము వలన దానికి ఒక ఆకృతి వస్తుంది. అంతరముగా నింపబడిన ద్రవము లేదా గాలి యొక్క ఘనపరిమాణమును ఆ పాత్రయొక్క సామర్థ్యము అంటారు.

దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణం : ఒక కార్డు బోర్డును ఒకే సర్వసమాన దీర్ఘచతురస్రాలుగా కత్తిరించి ఒకదానిపై మరొకటి పేర్చండి. మీరు ఏమి గమనించారు? ఏ ఆకృతి ఏర్పడినది?



ఇది ఒక దీర్ఘఘనాకృతి.

ఇప్పుడు దీర్ఘఘనం యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొందాం.

దీనియొక్క పొడవు దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవునకు, వెడల్పు దీర్ఘ చతుస్రము యొక్క వెడల్పునకు సమానముగా ఉంటుంది.

దీర్ఘఘనము యొక్క ఎత్తు, పేర్చబడిన లేదా అమర్చబడిన దీర్ఘచతురస్రముల యొక్క ఎత్తునకు సమానముగా ఉంటుంది.

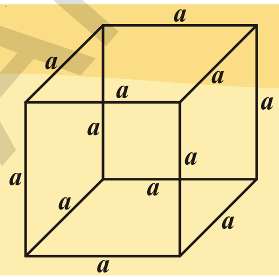
దీర్ఘఘనము ఆవరించిన అంతరాళము = దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యం × ఎత్తు

దీర్ఘఘనము ఘనపరిమాణం $= l\,b \times h = l\,bh$

$\therefore$ దీర్ఘఘనము ఘనపరిమాణం $= l\,bh$

ఇక్కడ l, b, h లు దీర్ఘఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు.

ప్రయత్నించండి



(a) 'a' భుజముగా ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుక్కోండి.

(b) అదేవిధముగా ఒక ఘనము ఘనపరిమాణం 1000 ఘనపు సెంటీమీటర్లు అయితే దాని యొక్క భుజమును కనుక్కోండి.

దీర్ఘఘనము మరియు సమఘనములు ఘనాకృతులు. వాటిని క్రమ పట్టకములుగా పిలువవచ్చా? దీర్ఘఘనమును సమఘనమును క్రమపట్టకములుగా పిలువవచ్చు.

పట్టకములో భూమి, పైభాగములు సర్వసమాన భుజాలుగాను పక్కతలాలు దీర్ఘచతురస్రాలు లేదా చతురస్రాలుగా గాను ఉంటుంది. సమాంతరముగానున్న తలాలమధ్య దూరమును ఎత్తు అంటారు.

దీర్ఘఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము, దీర్ఘ ఘనము యొక్క భూవైశాల్యం, ఎత్తుల లబ్ధమునకు సమానము అని మనకు తెలుసు.

దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణం = భూవైశాల్యం × ఎత్తు
$= lb \times h$
$= lbh$
ఘనములో $= l = b = h = \mathrm{s}$ (అన్ని కొలతలు సమానము)
సమ ఘనము ఘనపరిమాణం $= \mathrm{s}^2 \times \mathrm{s}$
$= \mathrm{s}^3$

క్రమపట్టకం ఘనపరిమాణం తెలుసుకోవడానికి దీర్ఘఘనం యొక్క ఘనపరిమాణం సూత్రం ఉపయోగపడుతోంది.

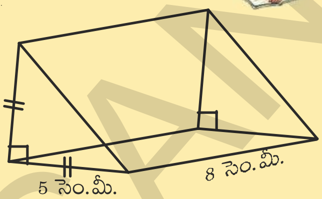
అందుచే క్రమ పట్టకము ఘనపరిమాణం = భూవైశాల్యం × ఎత్తు

క్రమపట్టకము భూమి సమబాహు త్రిభుజము కనుక దానిఘనపరిమాణం $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,a^2 \times \mathrm{h}.$

ఇక్కడ 'a' భూమి యొక్క భుజము పొడవు 'h' పట్టకము యొక్క ఎత్తు.

ఇవి చేయండి

1. ఒక్కో దీర్ఘఘనం యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు విలువలు $l = 12$ సెం.మీ.., $b = 10$ సెం.మీ. మరియు $h = 8$ సెం.మీ. అయిన ఆ దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనండి.
2. భుజం 10 సెం.మీ.గా గల సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము కనుగొనండి.
3. పటంలో చూపబడిన సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజాకార పట్టకము యొక్క ఘనపరిమాణము కనుక్కోండి.



పటం

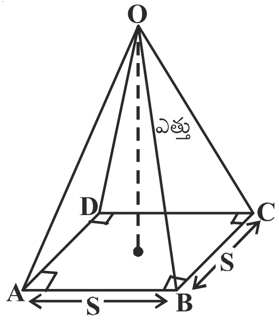
పట్టకమువలే, పిరమిడ్ కూడ త్రిపరిమాణ జ్యామితీయ వస్తువు. అనాదిగా మానవుడు పిరమిడ్ వంటి నిర్మాణములపై ఆసక్తి కనబరుస్తున్నారు. ప్రపంచ ఏడు వింతలలో ఒకటి అయిన ఈజిప్టు పిరమిడ్‌లను గూర్చి మీరు చదివి యున్నారుకదా! అవి చతురస్రాకార భూమి కల్గిన పిరమిడ్‌లకు చక్కని ఉదాహరణలు. వాటిని ఏవిధముగా నిర్మించారు అన్న అంశము నేటికీ ఒక చర్చనీయాంశమే!

కాని మీకు పిరమిడ్ ఆకృతిని గుర్తించడం, గీయడము తెలుసా!

పట్టకమునకు, పిరమిడ్‌నకు మధ్యగల వ్యత్యాసములను గమనించారా?

చతురస్రాకార భూమి కల్గిన పిరమిడ్‌ను ఏమని పిలుస్తాము?

'S' యూనిట్ల భుజం, h' యూనిట్ల ఎత్తు కల్గిన చతురస్రాకార పిరమిడ్ OABCD.

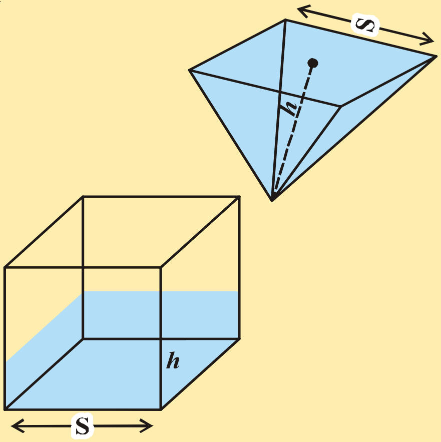


ఎత్తు, భూమి సమానముగా కల్గిన ఘనమునుండి పిరమిడ్ యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనగలరా? దీనికొరకు ఒక కృత్యాన్ని చేద్దాం.

కృత్యం

భూమి, ఎత్తు సమానముగాగల ఘనము, చతురస్రాకార పిరమిడ్‌లను తీసుకొందాం.

పిరమిడ్‌ను ఒక ద్రవముతో నింపి ఆ ద్రవమును ఘనములో పూర్తిగా నింపండి. ఘనము నింపడానికి ఎన్నిసార్లు పిరమిడ్‌నుపయోగించాలి? పరిశీలిస్తే మూడు సార్లు అని తెలుస్తుంది.



దీనిని బట్టి, పిరమిడ్ యొక్క ఘనపరిమాణం

$$= \frac{1}{3} \times \text{క్రమ పట్టకం ఘనపరిమాణం}$$

(ఒకే భూమి, ఒకే ఎత్తు)

$$= \frac{1}{3} \times \text{భూవైశాల్యం} \times \text{ఎత్తు}$$

సూచన : ఒక క్రమపట్టకము, భూమికి లంబంగా ఉండేలా పక్కతలాలను కల్గిఉంటుంది, మరియు ఆ పక్కతలాలన్నీ దీర్ఘచతురస్రాలే.

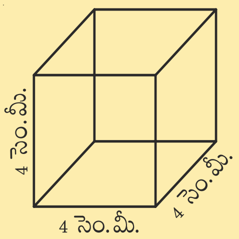
ఇవి చేయండి

1. 10 సెం.మీ. భుజముకల్గిన చతురస్రాకార భూమి మరియు 8 సెం.మీ. ఎత్తు కల్గిన పిరమిడ్ యొక్క ఘనపరిమాణము కనుక్కోండి.
2. సమ ఘనమ యొక్క ఘనపరిమాణము 1728 ఘనపుసెంటీమీటర్లు. సమఘనపు ఎత్తుతో సమాన ఎత్తు కల్గిన చతురస్రాకార పిరమిడ్ యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

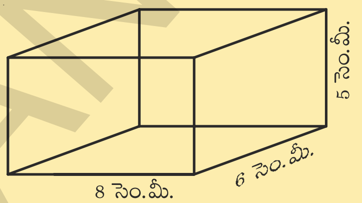
అభ్యాసం 10.1

1. ఈ కింది క్రమ పట్టకము యొక్క పక్కతలవైశాల్యము మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యములను కనుగొనండి.

(i)



(ii)



2. ఒక సమఘనము యొక్క సంపూర్ణతలవైశాల్యం 1350 చదరపు మీటర్లు. అయిన దాని ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

3. పొడవు 12 మీ., వెడల్పు 10మీ. మరియు 7.5 మీ. ఎత్తు కల్గిన గది యొక్క నాల్గు గోడల వైశాల్యమును కనుగొనండి. (ద్వారములు లేదా కిటికీలు లేని గదిగా ఊహించండి).

4. ఒక దీర్ఘఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం 1200 ఘనపు సెంటీమీటర్లు. దానియొక్క పొడవు 15 సెం.మీ., వెడల్పు 10 సెం.మీ. అయిన ఎత్తును కనుగొనుము.

5. ఒక పెట్టె యొక్క సంపూర్ణతలవైశాల్యము క్రింది సందర్భాలలో ఏ విధముగా మారుతుంది?

(i) ప్రతీ కొలత రెట్టింపు చేసినప్పుడు (ii) ప్రతీ కొలతను మూడు రెట్లుచేసినప్పుడు మాటలలో వ్యక్తపరచండి.

ప్రతీకొలత n సార్లు పెరిగినపుడు పెట్టె సంపూర్ణతల వైశాల్యం ఎన్ని రెట్లు ఉంటుంది. కనుగొనండి.

6. ఒక పట్టకపు భూమి త్రిభుజాకారములోయుండి భుజం కొలతలు వరుసగా 3 సెం.మీ, 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. కల్గియుండి దాని యొక్క ఎత్తు 10 సెం.మీ. అయిన పట్టకము యొక్క ఘనపరిమాణము ఎంత?

7. ఒక క్రమ చతురస్రాకార పిరమిడ్ యొక్క భూ చుట్టుకొలత 16 మీటర్లు, ఎత్తు 3 మీటర్లు అయిన దాని ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

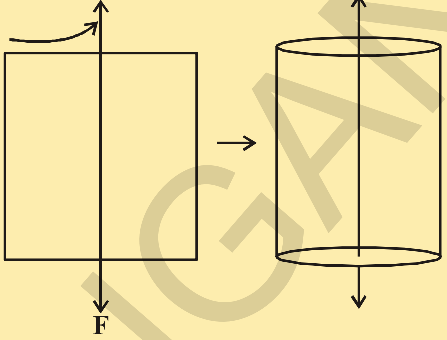
8. ఒలింపిక్స్‌లోని ఈతకొలను 50 మీటర్ల పొడవు, 25 మీటర్లు వెడల్పు మరియు 3 మీటర్ల లోతుగల దీర్ఘఘనాకృతిలోయుంది. అది ఎన్ని లీటర్ల నీటిని నింపే సామర్థ్యము కల్గిఉంది? (1 ఘ.మీ = 1000 లీటర్లు)

కృత్యం

ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పలుచని అట్ట లేక కాగితమును తీసుకోండి. ఒక పొడవాటి దళసరి తీగను తీసుకోని పటములో చూపిన విధంగా అతికింపుము. తీగయొక్క రెండు చివరలను పట్టుకొని దీర్ఘచతురస్రాకార అట్టను వేగముగా త్రిప్పండి.

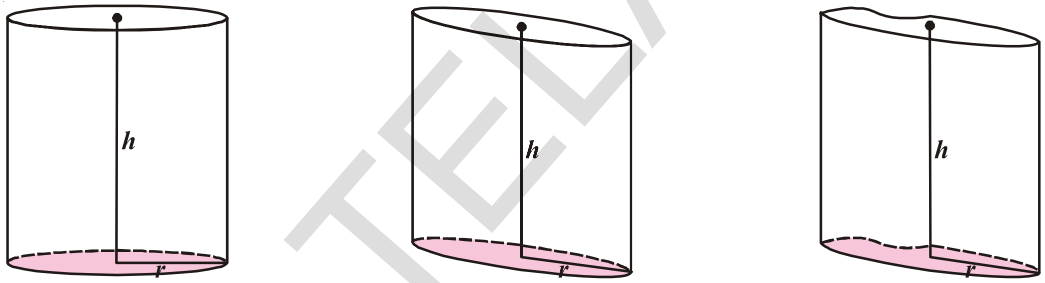
మీరు ఏమి గమనించారు? కంటికి కనబడిన ఆకృతి ఏమిటి?

దానిని స్థూపముగా మీరు గుర్తించారా?



10.3 క్రమ వృత్తాకార స్థూపం

ఈ కింది స్థూపములను గమనించండి.



(i) (ii) (iii)

(i) మూడు పటములలో మీరు గమనించిన సారూప్యతలు ఏవి?

(ii) మూడు పటముల మధ్యలో నున్న భేదములు ఏవి?

(iii) ఏ పటములో ఎత్తు, భూమికి లంబముగా ఉంది?

ప్రతీ స్థూపము ఒక వక్రతలం మరియు రెండు సర్వసమాన వృత్తాలను చివరలుగా కల్గియుంటుంది.. వీటిని క్లుప్తంగా స్థూపములందురు. వీటి వృత్తాకార చివరల మధ్యబిందువులను కలిపే రేఖ భూమికి లంబముగా ఉంటే ఆ స్థూపాన్ని క్రమ వృత్తాకార స్థూపం లేక 'క్రమస్థూపం' అంటాం.

పై పటములో ఏది క్రమస్థూపం, ఏవి క్రమస్థూపములు కావు? గుర్తించి కారణములు తెలుపండి.

ఇచ్చుట స్థూపమును , తయారుచేసే కృత్యమును చేద్దాం.

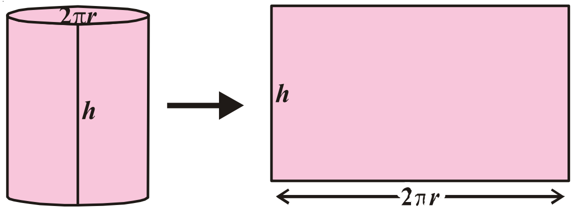
10.3.1 స్థూపము యొక్క పక్కతలవైశాల్యం

ఒక కార్ట్‌బోర్డునుపయోగించి క్రమవృత్తాకార స్థూపమును తయారుచేయండి. వక్రతలమును నిలువుగా కత్తిరించి విడవండి. స్థూపము దీర్ఘచతురస్రంగా మారుతుంది. స్థూపము యొక్క ఎత్తు, దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పుగాను: స్థూపము భూపరిధి, దీర్ఘచతుస్రము యొక్క పొడవుగాను మార్పు చెందుట మనము గమనించవచ్చును. స్థూపము, ఏ ఆకృతిలో మారింది?

మీరు పటము దీర్ఘచతురస్రాకారముగా ఉండుట గమనించి ఉంటారుకదా! దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యము, స్థూపము యొక్క పక్కతలవైశాల్యమునకు సమానం. దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పు స్థూపము యొక్క ఎత్తుగాను, పొడవు స్థూపము యొక్క భూ పరిధికి సమానముగా ఉంటుంది.

స్థూపపు ఎత్తు = దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పు $(h = b)$

స్థూపపు భూపరిధి 'r' = దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు $(2\pi r = l)$



స్థూపము యొక్క పక్కతలవైశాల్యం = దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యం

= పొడవు × వెడల్పు

$= 2\ \pi r \times h$

$= 2\pi rh$

అందుచే స్థూపము పక్కతలవైశాల్యం = $2\pi rh$

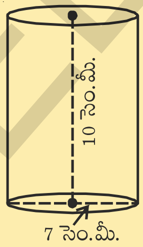
ఇవి చేయండి

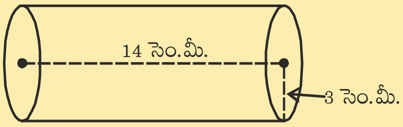
పక్క పటములో చూపబడిన స్థూపము యొక్క పక్కతల వైశాల్యంను కనుక్కోండి.

(i) $r = x$ సెం.మీ., $h = y$ సెం.మీ.

(ii) $d = 7$ సెం.మీ., $h = 10$ సెం.మీ.

(iii) $r = 3$ సెం.మీ., $h = 14$ సెం.మీ.

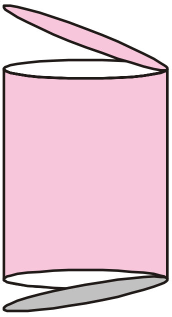




10.3.2 స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతలవైశాల్యం

ఈ పక్క పటమును పరిశీలించండి.

మీరు గమనించారా? ఈ పటము క్రమవృత్తాకార స్థూపం. ఏ తలముల వైశాల్యములను కూడితే మీకు స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతలవైశాల్యము వస్తుంది. స్థూపము పైభాగము, అడుగుభాగములో యున్న వృత్తాకార తలముల వైశాల్యములను, పక్కతలవైశాల్యముతో కూడితే మనకు స్థూపపు సంపూర్ణతల వైశాల్యము వస్తుంది.



స్థూపపు సంపూర్ణతల వైశాల్యం

= పక్కతలవైశాల్యం + పైభాగపు వైశాల్యం + భూవైశాల్యం

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

$= 2\pi r\,(r + h)$

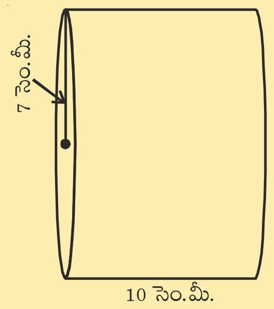
$\therefore$ స్థూపపు సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 2\pi r\,(r + h)$

ఇందులో 'r' స్థూపం వ్యాసార్థం మరియు 'h' స్థూపం ఎత్తు.

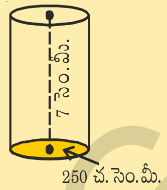
ఇవి చేయండి

ఈ కింది స్థూపముల యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

(i)



(ii)



10.3.3 స్థూపము ఘనపరిమాణం

సమాన వ్యాసార్థములు కల్గిన కొన్ని వృత్తములను తీసుకొని వాటిని ఒకదానిపై మరొకటిని పేర్చండి.

ఈ కృత్యము ద్వారా స్థూపము ఏర్పడడము గమనించారా?

పక్క పటములో వృత్త వ్యాసార్థము 'r' వృత్తాలను ఒక దానిపై మరొకటి అమర్చగా ఏర్పడు అమరిక యొక్క ఎత్తు 'h' అయిన

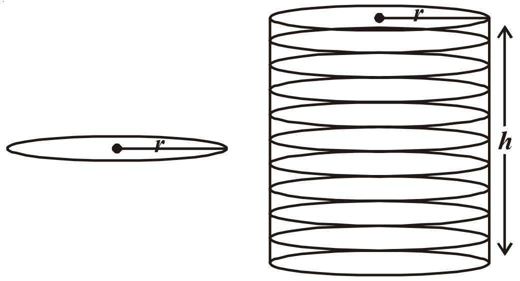
స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 \times$ ఎత్తు

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

స్థూపపు ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h$

'r' స్థూపపు వ్యాసార్థం మరియు 'h' ఎత్తు.



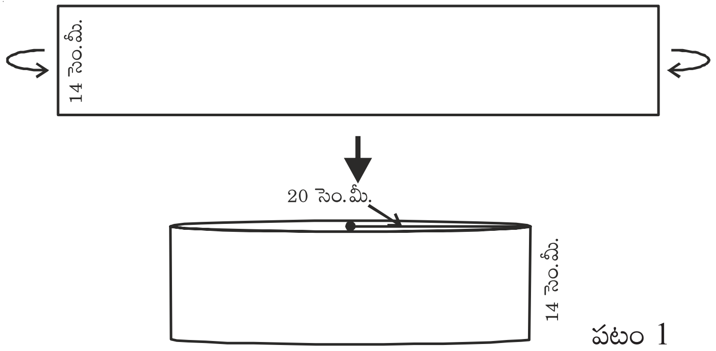
ఉదాహరణ-1 : 14 సెం.మీ. పొడవుగల దీర్ఘ చతురస్రాకార కాగితమునకు వెడల్పు వెంబడి రోల్ చేస్తే 20 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగాగల స్థూపం ఏర్పడింది. అయిన స్థూపము (పటం 1) యొక్క ఘనపరిమాణము కనుక్కోండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొండి.)

సాధన : దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితమును వెడల్పు వెంబడి రోల్ చేయగా ఏర్పడిన స్థూపము యొక్క ఎత్తు, కాగితపు వెడల్పునకు సమానంమవుతుంది. అయితే

స్థూపము యొక్క ఎత్తు = h = 14 సెం.మీ.

మరియు వ్యాసార్థం (r) = 20 సెం.మీ.

స్థూపము ఘనపరిమాణము $V = \pi r^2 h$



పటం 1

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14$$

= 17600 ఘనపు సెంటీమీటర్లు.

స్థూపపు ఘనపరిమాణము = 17600 ఘ.సెం.మీ.

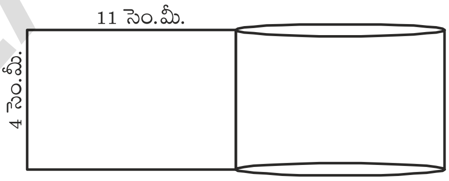
ఉదాహరణ-2 : ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు కాగితము 11 సెం.మీ. × 4 సెం.మీ. కొలతలను కల్గియుంది. దానిని అంచులు అధ్యారోహణము చెందకుండా ఉండే విధముగా, 4 సెం.మీ. ఎత్తు కల్గిన స్థూపముగా మలిస్తే, స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుక్కోండి.

సాధన : కాగితము యొక్క పొడవు, స్థూపము యొక్క భూపరిధికి సమానముగా, వెడల్పు ఎత్తునకు సమానముగా యుంటుంది.

స్థూపపు వ్యాసార్ధము = r మరియు ఎత్తు = h

స్థూపపు భూపరిధి = $2\pi r$ = 11 సెం.మీ.

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$



∴ $r = \frac{7}{4}$ సెం.మీ.

h = 4 సెం.మీ.

స్థూపపు ఘనపరిమాణం (V) = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4$$

= 38.5 ఘనపు సెంటీమీటర్లు.

ఉదాహరణ-3 : దీర్ఘచతురస్రాకారములో దళసరి కాగితము 44 సెం.మీ. × 18 సెం.మీ. కొలతలు కల్గియుంది. దానిని పొడవు వెంబడి చుట్టి స్థూపమును తయారుచేసాము. స్థూపమును ఘనముగా (పూర్తిగా నింపబడిన) భావిస్తే దాని యొక్క వ్యాసార్థమును, సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుమును.

సాధన : స్థూపము యొక్క ఎత్తు = 18 సెం.మీ.

స్థూపము యొక్క భూపరిధి = 44 సెం.మీ.

$2\pi r$ = 44 సెం.మీ.

$$r = \frac{44}{2 \times \pi} = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7 \text{ సెం.మీ.}$$

సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 2\pi r\,(r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(7+18)$

$= 1100$ చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ-4 : 5 మి.మీ. మందము కల్గిన వృత్తాకార ప్లేటులను ఒక దానిపై మరొకటి పేర్చి స్థూపముగా ఏర్పరిస్తే దానియొక్క పక్కతల వైశాల్యము 462 చ.సెం.మీ. స్థూపమును ఏర్పరిచేందుకు కావలసిన వృత్తాకార ప్లేటుల సంఖ్య ఎంత? ప్లేటు యొక్క వ్యాసార్థమును 3.5 సెం.మీ.గా తీసుకోండి.

సాధన : వృత్తాకార ప్లేటు యొక్క మందం $= 5$ మి.మీ. $= \frac{5}{10}$ సెం.మీ. $= 0.5$ సెం.మీ.

ప్లేటు యొక్క వ్యాసార్థము $= 3.5$ సెం.మీ.

స్థూపము యొక్క పక్కతలవైశాల్యము $= 462$ చ.సెం.మీ.

$\therefore\ 2\pi rh = 462$ ..... (i)

స్థూపము ఏర్పాటుకు అవసరమయ్యే ప్లేటుల సంఖ్య $= x$ అనుకొనుము.

$\therefore$ స్థూపము యొక్క ఎత్తు $= h =$ ప్లేటు యొక్క మందం × ప్లేటుల సంఖ్య

$= 0.5\,x$

$\therefore\ 2\,\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 0.5x$ ..... (ii)

(i) మరియు (ii) సమీకరణముల నుండి

$$2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 0.5x = 462$$

$$\therefore\ x = \frac{462 \times 7}{2 \times 22 \times 3.5 \times 0.5} = 42 \text{ ప్లేట్లు}$$

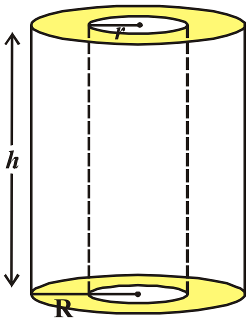
ఉదాహరణ-5 : ఒక గుల్ల లోహపు స్థూపము యొక్క బాహ్యవ్యాసార్థము 8 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 10 సెం.మీ. మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యము 338 π చ.సెం.మీ. గుల్ల లోహపు స్థూపము యొక్క మందమును కనుక్కోండి.

సాధన : బాహ్యవ్యాసార్థము $= R = 8$ సెం.మీ.

అంతర వ్యాసార్థము $= r$

ఎత్తు $= 10$ సెం.మీ.

సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 338\pi$ చ.సెం.మీ.



కాని సంపూర్ణతల వైశాల్యము = బయటి స్థూపము యొక్క పక్కతలవైశాల్యం (CSA)

\+ లోపల యున్న స్థూపము యొక్క పక్కతలవైశాల్యం (CSA)

\+ 2 × భూ వైశాల్యం (కంకణము)

$$= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi (R^2 - r^2)$$

$$= 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2)$$

$$\therefore \ 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2) = 338\,\pi$$

$$Rh + rh + R^2 - r^2 = 169$$

$$\Rightarrow \ (10 \times 8) + (r \times 10) + 8^2 - r^2 = 169$$

$$\Rightarrow \ r^2 - 10r + 25 = 0$$

$$\Rightarrow \ (r - 5)^2 = 0$$

$$\therefore \quad r = 5$$

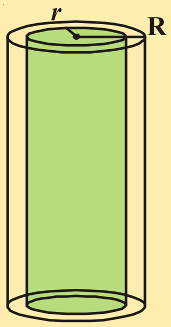
∴ లోహపు స్థూపము యొక్క మందం $= R - r = (8 - 5)$ సెం.మీ. $= 3$ సెం.మీ.

ప్రయత్నించండి

1. స్థూపము యొక్క పక్కతల వైశాల్యము మారకుండా దానియొక్క వ్యాసార్థమును రెట్టింపు చేస్తే దాని ఎత్తులో కలిగే మార్పు ఎంత?
2. వాటర్ హీటరు యొక్క స్థూపాకార పైపు యొక్క పొడవు 14 మీటర్లు మరియు వ్యాసము 5 సెం.మీ. అయితే నీటిని వేడిచేసే ఈహీటరు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

అభ్యాసం 10.2

1. రెండు వైపులా మూయబడిన స్థూపాకారపు ట్యాంకు యొక్క ఎత్తు 1.4 మీటర్లు మరియు దాని భూవ్యాసార్థము 56 సెం.మీ.గా యుండి లోహరేకుతో చేయబడియుంది. దీని సంపూర్ణతలవైశాల్యం ఎంత?
2. స్థూపము యొక్క ఘన పరిమాణము 308 ఘనపు సెంటీమీటర్లు. ఎత్తు 8 సెం.మీ. అయిన దాని పక్కతల వైశాల్యమును, సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.
3. ఒక లోహపు దీర్ఘఘనము 22 సెం.మీ. × 15 సెం.మీ. × 7.5 సెం.మీ. కొలతలను కల్గియుంది. దానిని కరిగించి 14 సెం.మీ. ఎత్తుగల ఒక స్థూపముగా చేసిన దాని వ్యాసార్థము ఎంత?
4. ఒక నీటితొట్టె స్థూపాకారముగా ఉంటూ 61.6 ఘ.మీ. సామర్థ్యమును కల్గియుంది. ట్యాంకు వ్యాసం 5.6 మీటర్లు అయిన ట్యాంకు ఎత్తును కనుగొనుము.
5. ఒక లోహపు గొట్టం యొక్క పొడవు 77 సెం.మీ. దాని మధ్యచ్ఛేద అంతర వ్యాసం 4 సెం.మీ. మరియు బాహ్యవ్యాసం 44సెం.మీ. (పటం చూడండి). అయిన క్రింది వానిని కనుగొనండి.
   - (i) లోపలి పక్కతల వైశాల్యము
   - (ii) బాహ్య పక్కతల వైశాల్యము
   - (iii) సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనండి.



6. ఒక భవనము చుట్టూ 16 స్థూపాకార స్థంభములున్నవి. ప్రతి స్థూపాకార స్థంభము 56 సెం.మీ. వ్యాసము మరియు 35 మీ.ల ఎత్తును కల్గియుంది. స్థంభముల పక్కతలవైశాల్యమునకు రంగువేసేందుకు చ.మీ.కు ₹5.50 వంతున ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?

7. ఒక రోడ్డురోలరు యొక్క వ్యాసము 84 సెం.మీ., పొడవు 120 సెం.మీ. ఒక ఆటస్థలమును చదునుచేయుటకు 500 సంపూర్ణభ్రమణములు చేయవలసియుంది. అయితే ఆటస్థల వైశాల్యమును చ.మీ.లలో కనుగొనండి.

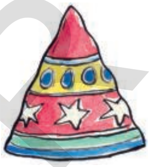
8. వృత్తాకార బావి యొక్క లోపలి వ్యాసము 3.5 మీ., లోతు 10 మీ. అయిన
   (i) లోపలి పక్కతల వైశాల్యము
   (ii) పక్కతలాలను ప్లాస్టిరింగ్ చేయుటకు చ.మీ.కు 40 రూపాయల వంతున ఎంత ఖర్చు అవుతుంది.

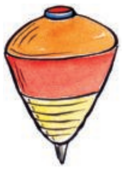
9. (i) ఒక స్థూపాకార పెట్రోలు ట్యాంకు భూవ్యాసం 4.2 మీ, ఎత్తు 4.5 మీ. అయిన ట్యాంకు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుక్కోండి.
   (ii) ట్యాంకును తయారుచేసేందుకు వాడిన స్టీలులో $\frac{1}{12}$ వ వంతు వృధా అయిన ఎంత పరిమాణపు స్టీలునుపయోగించారో లెక్కించుము.

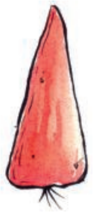
10. ఒకవైపు మూయబడి, స్థూపాకార డ్రమ్ యొక్క లోపలి వ్యాసార్థము 28 సెం.మీ., ఎత్తు 2.1 మీ. అయిన ఆ డ్రమ్‌లో నిల్వ చేయగల నీటి సామర్థ్యమును లీటర్లలో తెల్పుము. (1 లీటరు = 1000 ఘనపు సెంటీమీటర్లు)

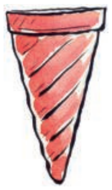
11. ఒక స్థూపాకార వస్తువు యొక్క పక్కతలవైశాల్యము 1760 చ.సెం.మీ. మరియు దాని ఘనపరిమాణము 12320 ఘనపు సెంటీమీటర్లు అయిన దాని ఎత్తును కనుగొనుము.

10.4 క్రమ వృత్తాకార శంఖువు





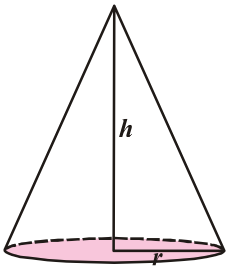




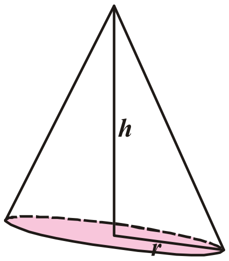
పైన చూపబడిన పటాలను పరిశీలించి ఆ పటాలు ఏఏ ఘనాకృతులను సూచిస్తున్నాయో చెప్పండి?

పైవన్నియు శంఖువు ఆకృతిలో యున్నవి.

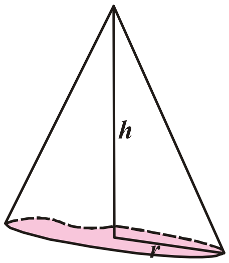
ఈ కింది శంఖువులను పరిశీలించండి.



(i)



(ii)



(iii)

(i) మీరు గమనించిన సామాన్య లక్షణములు ఏమిటి?

(ii) ఈ శంఖువు ఆకృతులలో మీరు గమనించిన వ్యత్యాసములు ఏవి?

మొదటి పటములో పక్కతలము వక్రతలంగా మరియు వృత్తాకార భూమి ఉన్నది. శంఖువు యొక్క శీర్షము, వృత్తాకార భూమి యొక్క కేంద్రమును కలిపే రేఖాఖండము, వృత్తాకార భూమి వ్యాసార్ధమునకు లంబముగా ఉంది.

ఈ విధమైన శంఖువును క్రమ వృత్తకార శంఖువు అంటారు. రెండవ పటము వృత్తాకార భూమి కల్గియుంది. కాని ఎత్తు దాని భూవ్యాసార్ధమునకు లంబముగా లేదు.

ఇటువంటి శంఖువులను క్రమవృత్తాకారముకాని శంఖువులందురు.

అదేవిధంముగా మూడవ పటములో ఎత్తు, దాని భూవ్యాసార్ధమునకు లంబముగా యుంది కాని భూమి వృత్తాకారముగాలేదు.

అందుచే ఈ శంఖువు క్రమవృత్త శంఖువు కాదు.

10.4.1 శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు

పక్క పటములో $\overline{AO}$, $\overline{OB}$ నకు లంబముగా యుంది.

ΔAOB లంబకోణ త్రిభుజము.

$\overline{AO}$, శంఖువు యొక్క ఎత్తు (h) మరియు $\overline{OB}$ శంఖువు వ్యాసార్ధము (r) నకు సమానము.

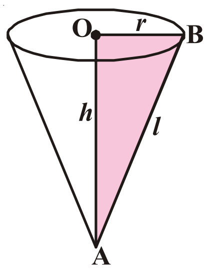
ΔAOB నుండి

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = h^2 + r^2$ (ఏటవాలు ఎత్తు $AB = l$)

$l^2 = h^2 + r^2$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$



కృత్యం

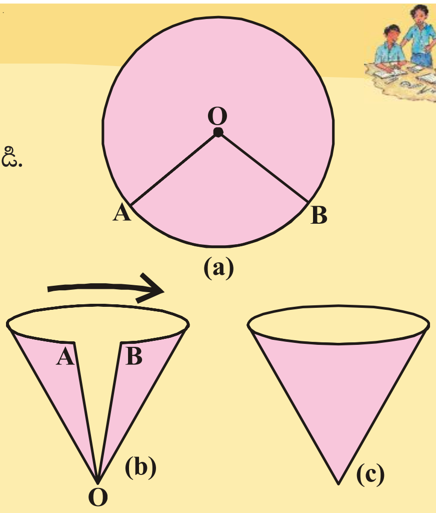
సెక్టరును శంఖువుగా మార్చే విధానం

ఈ కింది సూచనలను పాటిస్తూ పటములో చూపిన విధముగా చేయండి.

(i) పటం (a) చూపినవిధంగా ఒక దళసరి కాగితముపై వృత్తము ను గీయండి.

(ii) పటం (b). లో చూపినట్లు సెక్టరు AOB ను కత్తిరించండి.

(iii) పటం (c) లో చూపినట్లు A మరియు B చివరలను ఒకదానితో ఒకటి తాకేటట్లు నెమ్మదిగా పటములో చూపిన విధముగా కలుపుము. A, B లు అధ్యారోహణముకాకూడదు. A, B లును అతికింపుము.

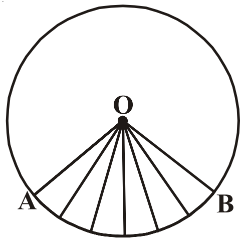


(iv) మీరు పొందిన ఆకృతి యొక్క లక్షణములు ఏమిటి?

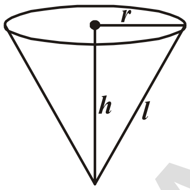
అది క్రమ వృత్తాకార శంఖువు అవుతుందా?

'OA' మరియు 'OB' లను కలిపి శంఖువు తయారుచేసేటప్పుడు OA, OB మరియు చాపము AB ల యొక్క పొడవులలో గమనించిన మార్పులు ఏమిటి?

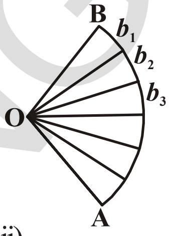
10.4.2 శంఖువు పక్కతల వైశాల్యము



(i)



(ii)



(iii)

కృత్యములో మనము ఉపయోగించిన కాగితపు క్రమ శంఖువు యొక్క పక్కతల వైశాల్యమును కనుగొందాం.

సెక్టరు OAB ను మడిచి శంఖువుగా మార్చే క్రమములో OA, OB లు ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించి ఏటవాలు ఎత్తుగా మారుతుంది. అదేవిధముగా శంఖువు భూ పరిధికి సెక్టరు చాపము AB పొడవు సమానముగా ఉంటుంది.

శంఖువును విప్పి పటములో చూపిన విధముగా AOB సెక్టరును కత్తిరించి చూస్తే ప్రతి కత్తిరింపబడిన భాగము సుమారుగా ఒక చిన్న త్రిభుజమును పోలియుంటుంది. వాటి యొక్క భూములను వరుసగా b_1, b_2, b_3 ..... గా చెప్పవచ్చు మరియు ఎత్తు శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు 'l' నకు సమానముగా ఉండుట గమనించవచ్చు.

శంఖువు వైశాల్యమును కనుగొనాలంటే ఈ త్రిభుజముల వైశాల్యములను కనుగొని వాటి మొత్తాన్ని కనుగొనడం ద్వారా పొందవచ్చు. మనము సెక్టరును శంఖువుగా మార్చాము కనుక సెక్టరు వైశాల్యము, శంఖువు యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యమునకు సమానము.

శంఖువు పక్కతలవైశాల్యం = త్రిభుజములన్నింటి వైశాల్యముల మొత్తం

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \frac{1}{2}b_4 l + ...$$

$$= \frac{1}{2}l(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...)$$

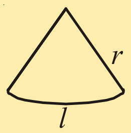
$= \frac{1}{2}l$ (A నుండి B వక్రతలం యొక్క పొడవు, లేదా శంఖువు యొక్క భూమి చుట్టుకొలత)

$= \frac{1}{2}l(2\pi r)$ $(\because b_1 + b_2 + b_3 + ... = 2\pi r$, ఇచ్చట 'r' శంఖువు భూ వ్యాసార్థం)

AB ఒక వృత్తాన్ని ఏర్పరుస్తుంది.

ప్రయత్నించండి

'r' వ్యాసార్థము, 'l' చాపము పొడవు గల సెక్టరును వృత్తాకార కాగితం నుండి కత్తిరించి శంఖువుగా తయారుచేయుము. శంఖువు యొక్క పక్కతలవైశాల్యం $A = \pi rl$ ను ఏ విధంగా ఉత్పాదిస్తావో చెప్పుము



కావున శంఖువు పక్కతల వైశాల్యం లేదా వక్రతల వైశాల్యం = $\pi r l$

ఇందులో 'l' – శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు 'r' – శంఖువు భూవ్యాసార్థం.

10.4.3 శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం

శంఖువు యొక్క పై/అడుగు భాగమును కప్పి ఉంచడానికి మనకు శంఖువు భూవ్యాసార్థముతో సమాన వ్యాసార్థముగల వృత్తాకార ఆకృతికావలెను.

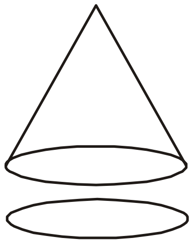
శంఖువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనడమెలా? ఎన్ని తలాలను కలిపితే శంఖువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము వస్తుంది.

వృత్త వైశాల్యము = πr^2

శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం = పక్కతల వైశాల్యము + భూవైశాల్యం

$$= \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r (l + r)$$



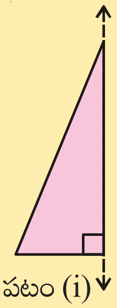
శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $\pi r (l + r)$

ఇందులో 'r' –శంఖువు భూ వ్యాసార్థం, 'l' – ఏటవాలు ఎత్తు.

ఇవి చేయండి

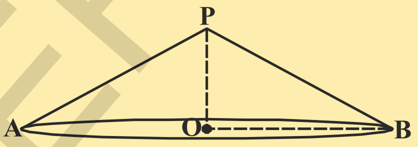
1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని తీసుకోండి / కత్తిరించండి. పటం (i) దానిని ఒక సన్నని వెదురుపుల్లను లంబాకార భుజమును అతికించండి. కర్రయొక్క రెండు వైపులను పట్టుకొని చుట్టూ తిప్పండి. తిప్పేవేగము స్థిరముగా యుండాలి.

   మీరు ఏమి గమనించారు?

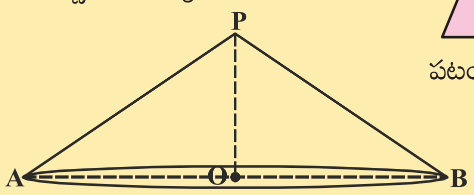


పటం (i)

2. ఈ కింది క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క పక్కతలవైశాల్యం, సంపూర్ణతల వైశాల్యములను కనుగొనుము.

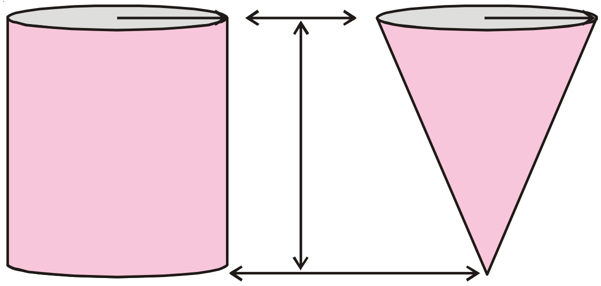


OP = 2సెం.మీ.**; OB = 3.5**సెం.మీ.

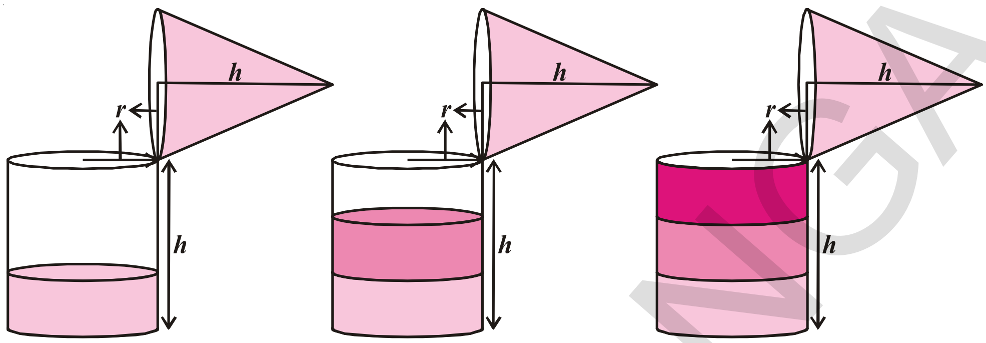


OP = 3.5సెం.మీ.**; AB = 10**సెం.మీ.

10.4.4 క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఘనపరిమాణం



ఒకే వ్యాసార్థము, ఒకే ఎత్తు కల్గిన స్థూపము, శంఖువులను తీసుకొని ఈ కింది ప్రయోగము చేసి శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనండి.



i. శంఖువును పూర్తిగా నీటితో నింపి, ఆ నీటిని స్థూపములోనికి పోయండి. స్థూపములో కొంత భాగమును నింపుతుంది.

ii. మరోసారి శంఖువును పూర్తిగా నీటితో నింపి, ఆ నీటిని స్థూపములో పోయండి. స్థూపము పూర్తిగా నిండదు.

iii. మూడోసారి శంఖువును పూర్తిగా నీటితో నింపి, ఆ నీటిని స్థూపముతో పోస్తే, స్థూపము పూర్తిగా నిండుతుంది.

ఈ ప్రయోగము నుండి మీరు ఏమి గమనించారు? స్థూపము ఘనపరిమాణమునకు శంఖువు ఘనపరిమాణము మధ్య సంబంధమును ఏమైనా గమనించారా?

మూడుసార్లు శంఖువును పూర్తిగా నింపిన తరువాత స్థూపము నిండింది. అనగా

ఒకే భూమి, ఒకే ఎత్తు కలిగిన స్థూపం ఘనపరిమాణం, శంఖువు ఘనపరిమాణానికి 3 రెట్లు ఉంటుంది.

$$\therefore \text{ శంఖువు ఘనపరిమాణం} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ఇక్కడ 'r' శంఖువు భూవ్యాసార్థము మరియు 'h' ఎత్తు.

ఉదాహరణ-6 : ఒక మొక్కజొన్న కంకి శంఖువు ఆకారములో యుంది. వెడల్పు ఎక్కువగా యున్న ప్రాంతపు వ్యాసార్థము 1.4 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు (పొడవు) 12 సెం.మీ. ప్రతి చ.సెం.మీ. ప్రాంతములో సుమారుగా 4 జొన్న గింజలుంటే మొత్తము ఎన్ని గింజలుంటాయి?

సాధన : ఇక్కడ $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(1.4)^2 + (12)^2}$ సెం.మీ.

$= \sqrt{145.96} = 12.08$ సెం.మీ. (సుమారుగా)

మొక్కజొన్న కంకి వక్రతల వైశాల్యం$= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 12.08$ చ.సెం.మీ.

$= 53.15$ చ.సెం.మీ.

$= 53.2$ చ.సెం.మీ (సుమారుగా)

మొక్కజొన్న కంకిలో 1 చ.సెం.మీ వైశాల్యములో గల జొన్న గింజల సంఖ్య = 4

$\therefore$ మొక్కజొన్న కంకి పక్కతల వైశాల్యములో గల మొత్తము జొన్న గింజల సంఖ్య

$= 53.2 \times 4 = 212.8 = 213$ (సుమారుగా)

అందుచే మొక్కజొన్న కంకి సుమారుగా 213 గింజలుంటాయి.

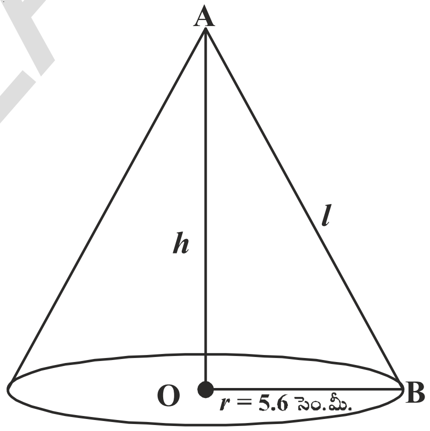
ఉదాహరణ-7 : 5.6 సెం.మీ. భూవ్యాసార్థము మరియు 158.4 చ.సెం.మీ. పక్కతల వైశాల్యము గల శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు మరియు శంఖువు ఎత్తులను కనుగొనుము.

సాధన : భూవ్యాసార్థము $= 5.6$ సెం.మీ., ఎత్తు $= h$, ఏటావాలు ఎత్తు $= l$

వక్రతల వైశాల్యము $= \pi r l = 158.4$ చ.సెం.మీ.

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 5.6 \times l = 158.4$$

$$\Rightarrow l = \frac{158.4 \times 7}{22 \times 5.6} = \frac{18}{2} = 9 \text{ సెం.మీ.}$$



$l^2 = r^2 + h^2$ అని మనకు తెలుసు

$$h^2 = l^2 - r^2 = 9^2 - (5.6)^2$$

$$= 81 - 31.36$$

$$= 49.64$$

$$h = \sqrt{49.64}$$

$h = 7.05$ సెం.మీ. (సుమారుగా)

ఉదాహరణ-8 : ఒక గుడారం స్థూపముపై శంఖువు వలె ఉంది. శంఖువు యొక్క వ్యాసము స్థూపము భూవ్యాసము 24 మీటర్లనకు సమానముగాయుంది. స్థూపము యొక్క ఎత్తు 11 మీ. మరియు శంఖువు యొక్క ఎత్తు 5 మీటర్లు. గుడారము తయారుచేయడానికి కావలసిన గుడ్డ చదరపు మీటరుకు ₹10 చొప్పున మొత్తము ఎంత ఖర్చవుతుంది?

సాధన : స్థూపపు భూవ్యాసము $=$ శంఖువు వ్యాసం $= 24$ మీ.

$\therefore$ భూవ్యాసార్థము $= 12$ మీ.

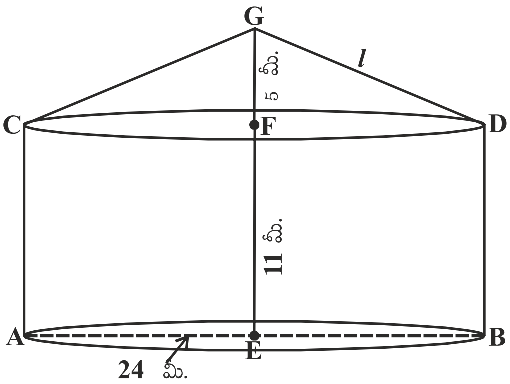
స్థూపము యొక్క ఎత్తు $= 11$ మీ. $= h_1$

శంఖము యొక్క ఎత్తు $= 5$ మీ. $= h_2$

శంఖము యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు 'l' అనుకొందాం.

$$l = GD = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{12^2+5^2} = 13 \text{ మీ.}$$

కావలసిన గుడ్డ వైశాల్యము = స్థూపము యొక్క పక్కతల వైశాల్యం + శంఖువు పక్కతల వైశాల్యం



$$= 2\pi r h_1 + \pi r l$$

$$= \pi r\,(2h_1 + l)$$

$$= \frac{22}{7}\times 12(2\times 11+13) \text{ చ.మీ.}$$

$$= \frac{22\times 12}{7}\times 35 \text{ చ.మీ.}$$

$$= 22 \times 60 \text{ చ.మీ.}$$

$$= 1320 \text{ చ.మీ.}$$

గుడ్డ యొక్క వెల = ₹10 చదరపు మీటరుకు

∴ గుడ్డ యొక్క మొత్తం ఖరీదు = వెల × గుడ్డ యొక్క వైశాల్యం

= ₹10 × 1320

= ₹13,200.

ఉదాహరణ-9 : సైన్యము తన బేస్‌క్యాంప్ కొరకు శంఖువు ఆకారములో ఎత్తు 3 మీ. మరియు భూవ్యాసము 8 మీ. గా యున్న గుడారమును ఏర్పాటుచేసిన

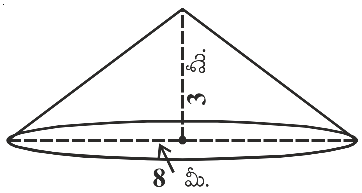
(i) గుడారం తయారుచేయడానికి కావలసిన బట్ట యొక్క వెల చ.మీ.నకు ₹70 అయిన మొత్తము ఖర్చు ఎంత?

(ii) ప్రతి వ్యక్తికి 3.5 ఘనపు మీటర్ల గాలి కావలసియుంటే గుడారములో కూర్చోగల వ్యక్తుల సంఖ్య ఎంత?

సాధన : గుడారం యొక్క వ్యాసం = 8 మీ.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ మీ.}$$

ఎత్తు = 3 మీ.



$$\text{ఏటవాలు ఎత్తు } (l) = \sqrt{h^2+r^2}$$

$$= \sqrt{3^2+4^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ మీ.}$$

∴ గుడారం యొక్క పక్కతల వైశాల్యం = $\pi r l$

$$= \frac{22}{7}\times 4\times 5 = \frac{440}{7} \text{ చ.మీ.}$$

$$\text{శంఖువు ఘనపరిమాణం} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$$

$$= \frac{352}{7} \text{ ఘనపుమీటర్లు}$$

(i) గుడారం తయారీకి కావలసిన గుడ్డ ఖరీదు

$$= \text{పక్కతల వైశాల్యం} \times \text{యూనిట్‌వెల}$$

$$= \frac{440}{7} \times 70$$

$$= ₹4400$$

(ii) గుడారంలో కూర్చోగల వ్యక్తుల సంఖ్య

$$= \frac{\text{శంఖాకార గుడారం ఘనపరిమాణం}}{\text{ప్రతి వ్యక్తికి కావల్సిన గాలి ఘనపరిమాణం}}$$

$$= \frac{352}{7} \div 3.5$$

$$= \frac{352}{7} \times \frac{1}{3.5} = 14.36$$

= 14 వ్యక్తులు (సుమారుగా)

అభ్యాసం 10.3

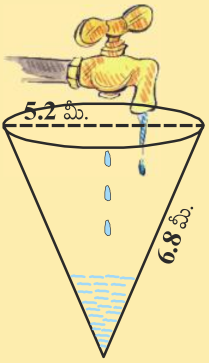
1. శంఖువు భూ వైశాల్యం 38.5 చ.సెం.మీ. ఘనపరిమాణం 77 ఘ.సెం.మీ. అయిన దాని యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము.
2. శంఖువు ఘనపరిమాణం 462 ఘనపు మీటర్లు. భూ వ్యాసార్ధం 7 మీటర్లు అయిన దాని ఎత్తును కనుగొనుము.
3. ఒక శంఖువు పక్కతల వైశాల్యం 308 చ.సెం.మీ. మరియు ఏటవాలు ఎత్తు 14 సెం.మీ. అయిన
   (i) భూ వ్యాసార్ధం (ii) శంఖువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుక్కోండి.
4. చ.సెం.మీ.కు 25 పైసల వంతున ఒక శంఖువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమంతటికి రంగువేయటానికి అయ్యేఖర్చు ₹176 అయిన, ఏటవాలు ఎత్తు 25 సెం.మీ. అయినప్పుడు దాని ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.
5. 15 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంగల ఒక వృత్తాకార దళసరికాగితం నుండి 216° సెక్టరు కోణం గల సెక్టరును కత్తిరించి దాని అంచులతోయున్న వ్యాసార్ధములను వంచి శంఖువుగా మలిస్తే దాని యొక్క ఘనపరిమాణం ఎంత?
6. ఒక గుడారం యొక్క ఎత్తు 9 మీ. దాని యొక్క వ్యాసం 24 మీ. అయిన దాని ఏటవాలు ఎత్తు ఎంత? గుడారంను తయరు చేయడానికి కావలసిన గుడ్డ వెల చ.మీ. ₹14 అయిన మొత్తం గుడ్డ వెల ఎంత?

7. శంఖువు యొక్క పక్కతల వైశాల్యం $1159\frac{5}{7}$ చ.సెం.మీ. దాని యొక్క భూవైశాల్యం $254\frac{4}{7}$ చ.సెం.మీ. అయిన దాని ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనుము.

8. ఒక గుడారం 4.8 మీ. ఎత్తుగల స్థూపాకారంగాయుంది. దానిపై 4.5 మీ. భూవ్యాసార్థం, కేంద్రంనుండి 10.8 మీ. ఎత్తు ఉండేవిధంగా ఒక శంఖువు అమర్చబడియుంది. అయిన గుడారం తయారుచేయుటకు కావలసిన గుడ్డ వైశాల్యం ఎంత?

9. 8 మీటర్ల ఎత్తు, 6 మీటర్ల భూవ్యాసార్థం కల్గిన శంఖువు ఆకృతి గుడారం తయారుచేయుటకు 3 మీ. వెడల్పు కల్గిన టార్పలిన్ గుడ్డ ఎంత పొడవును కల్గియుండాలి? (మార్జిన్లను, వృధా అయ్యే గుడ్డను కూడా పరిగణనలోకి తీసుకొంటే సుమారుగా 20 సెం.మీ. పొడవు గల టారాలిన్ అదనంగా వినియోగమవుతుంది). $(\pi = 3.14)$

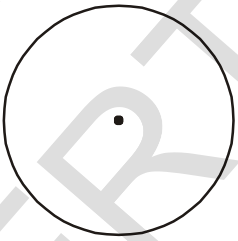
10. ఒక జోకర్ యొక్క టోపి 7 సెం.మీ. వ్యాసార్థము మరియు 27 సెం.మీ. ఎత్తు కల్గిన క్రమ వృత్త శంఖువు ఆకారంలో యుంది. అటువంటి 10 టోపీలను తయారుచేయడానికి ఎంత వైశాల్యంగల బట్ట అవసరం?

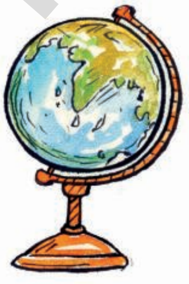


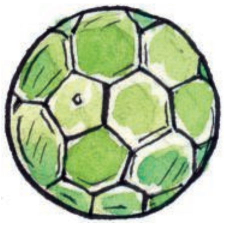
11. పటములో చూపిన విధముగా ఒక శంఖువు ఆకృతిలో ఉన్న పాత్ర భూవ్యాసం 5.2 మీ. మరియు ఏటవాలు ఎత్తు 6.8 మీ. కలిగి ఉంది. దానిలో నీరు నిమిషానికి 1.8 ఘనపుమీటర్ల చొప్పున నింపబడుతుంది. అయితే పాత్రను నింపడానికి పట్టేకాలం ఎంత?

12. రెండు సరూప శంఖువుల యొక్క ఘనపరిమాణములు 12π మరియు 96π ఘనపుయూనిట్లు శంఖువులలో ఒకదాని పక్కతలవైశాల్యం 15π చదరపుయూనిట్లు, అయిన రెండవదాని పక్కతల వైశాల్యం ఎంత? (సూచన: $\frac{r_1}{r_2}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{l_1}{l_2}=\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^3=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2$

10.5 గోళం


(i)


(ii)


(iii)

పై పటములన్నియూ మీకు తెలిసినవే కదా! వాటిమధ్య వ్యత్యాసములను గుర్తించగలరా?

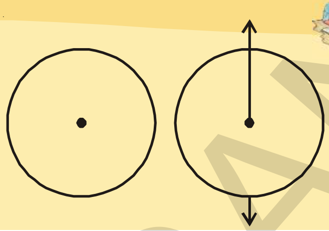
మొదటిపటం వృత్తం. దీనిని కాగితంపై సులభముగా గీయగలం. దీనికి గల కారణం అది సమతల పటం. ఒక సమతలములోని స్థిరబిందువు నుండి సమాన దూరములో యున్న బిందువుల బిందుపథం వృత్తం.

మిగిలిన పటములన్ని ఘనములు. ఈ ఆకృతులను 'గోళం' అంటారు.

గోళం త్రిమితీయం. త్రి పరిమాణ అంతరాళంలో ఒక దత్తబిందువు నుండి స్థిర దూరములో ఉండు బిందువుల సమితి గోళం. దత్త బిందువు గోళం కేంద్రం. స్థిరదూరం గోళం యొక్క వ్యాసార్థము.

కృత్యం

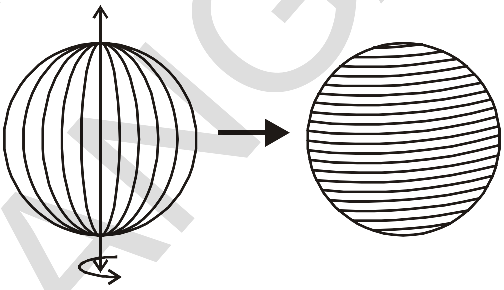
ఒక దళసరి కాగితంపై ఒక వృత్తమును గీయుము. దానిని కత్తిరింపుము. దాని వ్యాసము వెంబడి ఒక తీగను అతికింపుము. తీగ యొక్క రెండు చివరలు పట్టుకొని తిప్పుము. సమవేగముతో తిప్పితే మీరు ఏమి గమనించారు?

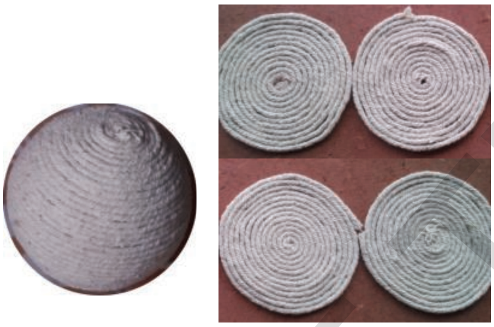


10.5.1 గోళం ఉపరితల వైశాల్యం

గోళం ఉపరితల వైశాల్యం ఈ కింద కృత్యము ద్వారా కనుగొందాం.

ఒక రబ్బరు బంతిని తీసుకొని ఒక సూదిని మధ్యలో గుచ్చండి. సూది సహాయముతో ఒక దారమును చుట్టండి. పిన్నులనుపయోగించి సూది సరైన స్థానములో ఉండేటట్లు చూడండి. సూది యొక్క స్థానమును దాని చివరలను గుర్తించండి. నెమ్మదిగా సూదిని తొలగించండి.





గోళము యొక్క వ్యాసార్థమును కనుక్కోండి మరియు బంతి యొక్క వ్యాసార్థమునకు సమాన వ్యాసార్థము కల్గిన నాల్గు వృత్తములను గీయండి. వృత్తములను దారమునుపయోగించి నింపండి.

మీరు ఏమి గమనించారు?

బంతిని పూర్తిగా కప్పిఉంచడానికి వాడే తీగ/ దారం నాల్గు సర్వసమాన వృత్తములను పూర్తిగా కప్పి ఉంచడానికి సరిపోతుంది. అనగా బంతి యొక్క ఉపరితలవైశాల్యం, నాల్గు సర్వసమాన వృత్తముల యొక్క వైశాల్యమునకు సమానం.

దీనివల్ల (r) వ్యాసార్థం కల్గిన గోళం ఉపరితలవైశాల్యం, అదే (r) వ్యాసార్థం కల్గిన వృత్తం వైశాల్యంనకు నాల్గురెట్లు ఉంటుంది అని తెలుస్తుంది.

∴ గోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= 4 \times$ వృత్తవైశాల్యం

$= 4\pi r^2$

గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\pi r^2$

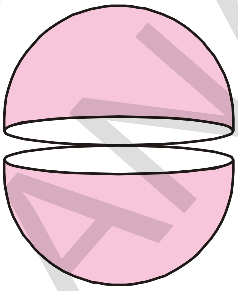
ఇక్కడ 'r' గోళం యొక్క వ్యాసార్థం.

ప్రయత్నించండి

గోళం ఉపరితలవైశాల్యాన్ని మీరు ఇంకేదైనా పద్ధతిలో కనుగొనగలరా?

10.5.2 అర్ధగోళం

ఒక గోళంను తీసుకొని గోళకేంద్రం గుండా పోయే సమతలంనుపయోగించి రెండు సమాన భాగాలుగా విభజింపుము.



గోళం రెండు సమాన భాగములుగా విభజింపబడింది.

ప్రతి భాగమును అర్ధగోళం అందురు.

గోళం కేవలం ఒక పక్కతల ముఖమును కల్గి యుంటుంది. గోళం రెండు సమాన భాగములుగా విభజింపబడితే వక్రతలం కూడా రెండు సమాన భాగములుగా విభజింపబడుతుంది.

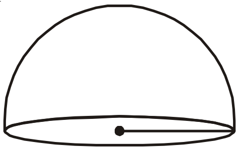
అర్ధగోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం ఎలా కనుగొందురు?

అర్ధగోళం యొక్క పక్కతల వైశాల్యం, గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యంలో సగముంటుంది.

కావున, అర్ధగోళం ఉపరితల వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × గోళం ఉపరితల వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$$

$$= 2\ \pi r^2$$



∴ **అర్ధగోళ ఉపరితల వైశాల్యం = $2\ \pi r^2$**

అర్ధగోళం యొక్క భూమి వృత్తాకారం.

అందుచే దాని వైశాల్యం = πr^2

అర్ధగోళం యొక్క పక్కతల వైశాల్యం మరియు భూవైశాల్యముల మొత్తం, అర్ధగోళం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము నిస్తుంది.

అర్ధగోళం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం = పక్కతల వైశాల్యం + భూవైశాల్యం

$$= 2\ \pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\ \pi r^2.$$

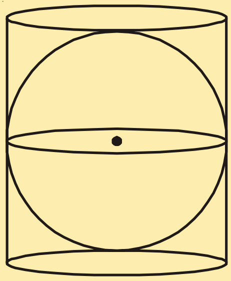
అర్ధగోళం సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $3\pi r^2$.

ఇవి చేయండి

1. ఒక క్రమ వృత్త స్థూపాకార వస్తువులో r వ్యాసార్ధముగా గల గోళం ఇమడ్చబడినది. అయితే (i) గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం

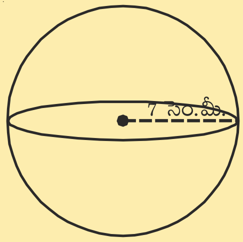
   (ii) స్థూపము యొక్క పక్కతల వైశాల్యం

   (iii) (i) మరియు (ii) వైశాల్యముల నిష్పత్తి కనుక్కోండి.

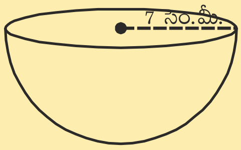


2. ఈ కింది పటముల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యములను కనుగొనండి.

(i)

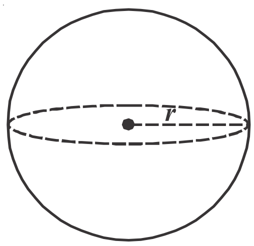


(ii)

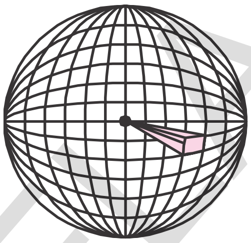


10.5.3 గోళం ఘనపరిమాణం

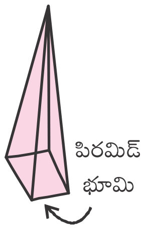
గోళం ఘనపరిమాణం కనుక్కోవటానికి, గోళమును సర్వసమాన పిరమిడ్‌ల యొక్క శీర్షములన్నీ గోళం యొక్క కేంద్రముతో ఏకీభవించేటట్లుగా ఊహిస్తే పటం ఈ కింది విధంగా యుంటుంది.



(i)



(ii)



(iii)

ఈ కింది సోపానములను పరిశీలించండి.

1. పటం (i) లో చూపిన ఘన గోళం యొక్క వ్యాసార్థమును ‘r’ అనుకొందాం.
2. ‘r’ వ్యాసార్థముగా గల గోళము ‘n’ సర్వసమాన పిరమిడ్‌లుగా పటం (ii) లో చూపినవిధంగా విభజించామని అనుకొందాం.
3. ఒక పిరమిడ్‌ను పరిశీలిద్దాం. ప్రతి పిరమిడ్ యొక్క భూమి మరియు ప్రతి పిరమిడ్ యొక్క భూవైశాల్యం వరుసగా $A_1, A_2, A_3.....$ అనుకొందాం.

   పిరమిడ్ యొక్క ఎత్తు, గోళం యొక్క వ్యాసార్థమునకు సమానం అయినా

   $$\text{పిరమిడ్ యొక్క ఘనపరిమాణం} = \frac{1}{3} \times \text{భూవైశాల్యం} \times \text{ఎత్తు}$$

   $$= \frac{1}{3} A_1 r$$

పిరమిడ్ భూమిగా
ఏ బహుభుజినైనా
తీసుకోవచ్చు.

4. ‘n’ పిరమిడ్‌లు కనుక

   $$\text{‘n’ పిరమిడ్‌ల యొక్క ఘనపరిమాణం} = \frac{1}{3} A_1 r + \frac{1}{3} A_2 r + \frac{1}{3} A_3 r + ... \text{n సార్లు}$$

   $$= \frac{1}{3} r\,[A_1 + A_2 + A_3 + ... \text{n సార్లు}]$$

   $$= \frac{1}{3} \times A\,r$$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + ...$ n సార్లు
= ‘n’ పిరమిడ్ల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము

5. అన్ని పిరమిడ్‌ల యొక్క ఘనపరిమాణముల మొత్తం, గోళములన్నింటి ఘనపరిమాణముల మొత్తమునకు సమానము మరియు పిరమిడ్‌ల యొక్క భూవైశాల్యములన్నింటి మొత్తము సుమారుగా గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యమునకు సమానము. (i.e. $4\pi r^2$).

$$\text{కావున గోళం ఘనపరిమాణం} = \frac{1}{3}(4\pi r^2)\,r$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ఘనపు యూనిట్లు}$$

గోళం ఘనపరిమాణం $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

ఇక్కడ 'r' - గోళం వ్యాసార్థం

అర్ధగోళం యొక్క ఘనపరిమాణమును ఏ విధంముగా కనుగొంటారు? దీని యొక్క ఘనపరిమాణము, గోళం ఘనపరిమాణములో సగముంటుందా?

$$\therefore \text{ అర్ధగోళ ఘనపరిమాణం} = \frac{1}{2} \times \text{గోళం ఘనపరిమాణం}$$

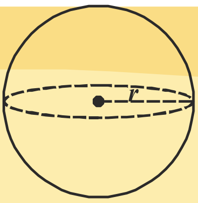
$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

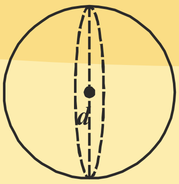
(సూచన: పుచ్చకాయ ఉపయోగించి పై సూత్రాలను రాబట్టడానికి మీరు కూడా ప్రయత్నించవచ్చు.)

ఇవి చేయండి

1. పక్కపటంలో చూపబడిన గోళముల యొక్క ఘనపరిమాణములను కనుక్కోండి.
2. 6.3 సెం.మీ. వ్యాసార్థంగా గల గోళ ఘనపరిమాణములను కనుక్కోండి.



$r = 3$సెం.మీ.



$d = 5.4$సెం.మీ.

ఉదాహరణ-10 : గోళం ఉపరితల వైశాల్యం = 154 చ.సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసార్థమును కనుగొనుము.

సాధన : గోళం ఉపరిత వైశాల్యం $= 4\pi r^2$

$$4\pi r^2 = 154 \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22} = \frac{7^2}{2^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ సెం.మీ.}$$

ఉదాహరణ-11 : ఒక అర్ధగోళాకారపు గిన్నె రాతితో తయారుచేయబడి 5 సెం.మీ. మందంను కల్గి యుంది. దాని లోపలి వ్యాసార్ధం 35 సెం.మీ. అయిన గిన్నె యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యంను కనుగొనుము.

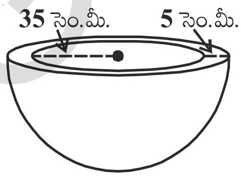
సాధన : వెలుపలి వ్యాసార్ధం R, లోపలి వ్యాసార్ధం 'r', మందం 5 సెం.మీ. అనుకొందాం.

$\therefore$ $R = (r + 5)$ సెం.మీ. $= (35 + 5)$ సెం.మీ. $= 40$ సెం.మీ.

సంపూర్ణతల వైశాల్యం = బయటి ఉపరితల వైశాల్యం + లోపలి ఉపరితల వైశాల్యం + కంకణ వైశాల్యం

$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \pi(2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2)$$



$$= \frac{22}{7}(3R^2 + r^2) = \frac{22}{7}\ (3\times 40^2 + 35^2) \text{ చ.సెం.మీ.}$$

$$= \frac{6025 \quad \times 22}{7} \text{ చ.సెం.మీ.}$$

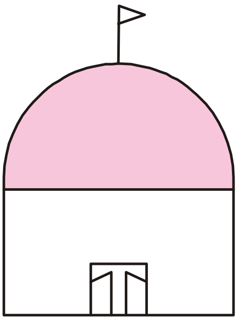
$$= 18935.71 \text{ చ.సెం.మీ. (సుమారుగా).}$$

ఉదాహరణ-12 : అర్ధగోళాకారపు పై కప్పు కల్గిన ఒక భవనం (పటములో చూపిన విధంగా) నకు రంగు వేయాలి. పై కప్పు యొక్క భూపరిధి 17.6 మీ. అయిన 10 చ.సెం.మీ.నకు రంగువేయుటకు 5 రూపాయలు చొప్పున భవనంనకు రంగువేయడానికి ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?

సాధన : భవనంలోని వృత్తాకార ఉపరితల వైశాల్యంనకు మాత్రమే రంగు వేయాలి కనుక. అర్ధగోళం యొక్క పక్కతల వైశాల్యం కనుగొనాలి. పైకప్పు యొక్క భూపరిధి = 17.6 మీ. $\therefore$ $17.6 = 2\pi r$

అందుచే పై కప్పు యొక్క వ్యాసార్థం $= 17.6 \quad \times \frac{7}{2\times 22}$ మీ.

$= 2.8$ మీ.



పటం

పై కప్పు యొక్క పక్కతల వైశాల్యం $= 2\pi r^2$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 2.8\times 2.8$ చ.మీ.

$= 49.28$ చ.మీ.

100 చ.సెం.మీ. ప్రాంతమునకు రంగువేయడానికి అయ్యేఖర్చు = ₹ 5

$\therefore$1 చ.మీ. ప్రాంతమునకు రంగు వేయడానికి అయ్యేఖర్చు = ₹ 500

$\therefore$ రంగువేయడానికి అయ్యే మొత్తం ఖర్చు = 500 × 49.28

= ₹ 24640

ఉదాహరణ-13 : ఒక సర్కస్‌లో మోటార్ సైకిలిస్టు ఒక గుల్ల గోళాకార ఆకృతిలో విన్యాసములు చేయుచున్నాడు. గుల్ల గోళము యొక్క వ్యాసం 7 మీ. సైకిలిస్టు విన్యాసంలో తిరిగేందుకు అవకాశము ఉండే ప్రాంత వైశాల్యము ఎంత?

సాధన : గోళం వ్యాసం = 7 మీ., వ్యాసార్ధం = 3.5 మీ. అందుచే విన్యాసకుడు తిరగగలిగే ప్రాంత వైశాల్యం గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యంనకు సమానం.

$$4\ \pi r^2 = 4\times\frac{22}{7}\times3.5\times3.5 \text{ చ.మీ.}$$

$$= 154 \text{ చ.మీ.}$$

ఉదాహరణ-14 : షాట్‌పుట్‌నకు ఉపయోగించే లోహపు గోళం యొక్క వ్యాసార్ధం 4.9 సెం.మీ. లోహం యొక్క సాంద్రత 7.8 గ్రా. ఘనపు సెం.మీ. అయిన షాట్‌పుట్ యొక్క ద్రవ్యరాశి కనుగొనుము.

సాధన : షాట్‌పుట్ లోహపు గోళము కనుక దాని ద్రవ్యరాశి గోళము యొక్క ఘనపరిమాణం మరియు సాంద్రతల లబ్ధమునకు సమానము. అందుచే మనము గోళము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనాలి.

ఇప్పుడు గోళం ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 4.9\times 4.9\times 4.9 \text{ ఘ.సెం.మీ.}$$

$= 493$ ఘన సెం.మీ. (సుమారుగా)

1 ఘనపు సెంటీ మీటరు లోహం యొక్క ద్రవ్యరాశి = 7.8 గ్రా.

అందుచే షాట్‌పుట్ యొక్క ద్రవ్యరాశి = 7.8 × 493 గ్రాములు

= 3845.44 గ్రా. = 3.85 కి.గ్రా. (సుమారుగా)

ఉదాహరణ-15 : ఒక అర్ధగోళాకారపు గిన్నె యొక్క వ్యాసార్ధం 3.5 సెం.మీ. దానిలో నింపగలిగే నీటి ఘనపరిమాణం ఎంత?

సాధన : గిన్నెలోని నీటి ఘనపరిమాణం = అర్ధగోళం ఘనపరిమాణం

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5 \text{ ఘ.సెం.మీ.}$$

$= 89.8$ ఘన సెం.మీ. (సుమారుగా).

అభ్యాసం 10.4

1. ఒక గోళపు వ్యాసార్థం 3.5 సెం.మీ. అయిన దాని ఉపరితల వైశాల్యం, ఘనపరిమాణం ఎంత?
2. ఒక గోళం ఉపరితల వైశాల్యం $1018\frac{2}{7}$ చ.సెం.మీ. అయిన దాని ఘనపరిమాణం ఎంత?
3. గ్లోబులో భూమధ్యరేఖ పొడవు 44 సెం.మీ. అయిన దాని ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత?
4. ఒక గోళాకారపు బంతి యొక్క వ్యాసం 21 సెం.మీ. ఇటువంటి 5 బంతులను తయారుచేయడానికి కావలసిన పదార్థ పరిమాణం ఎంత?
5. రెండు గోళముల వ్యాసార్థముల నిష్పత్తి 2 : 3. అయిన వాటి ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
6. 10 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగా గల అర్ధగోళం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యంను కనుగొనుము. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకొనుము)
7. ఒక గోళాకార బెలూన్ యొక్క వ్యాసం 14 సెం.మీ. నుండి 28 సెం.మీ. వరకు పెరిగే విధంగా గాలి నింపబడింది. ఈ రెండు సందర్భములలో గల ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
8. 0.25 సెం.మీ. మందం కల ఇత్తడితో ఒక అర్ధగోళాకార గిన్నెను తయారుచేశారు. గిన్నెలోపలి వ్యాసార్థం 5 సెం.మీ. గిన్నెయొక్క ఉపరితల వైశాల్యం మరియు లోపలితల వైశాల్యంనకు గల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
9. ఒక సీసపు బంతి యొక్క వ్యాసం 2.1 సెం.మీ. దానిని తయారు చేయడానికి ఉపయోగించే సీసం యొక్క సాంద్రత 11.34 గ్రాములు. అయిన బంతి యొక్క బరువు ఎంత?
10. ఒక స్థూపాకార లోహము యొక్క వ్యాసం 5 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు $3\frac{1}{3}$ సెం.మీ. దానిని కరిగించి ఒక గోళముగా తయారుచేస్తే దాని యొక్క వ్యాసం ఎంత?
11. 10.5 సెం.మీ. వ్యాసము గల అర్ధగోళాకారపు గిన్నెలో నింపగల పాల యొక్క సామర్థ్యం ఎంత?
12. ఒక అర్ధ గోళాకార గిన్నె యొక్క వ్యాసం 9 సెం.మీ. గిన్నెలోగల ద్రవమును 3 సెం.మీ. వ్యాసం మరియు 3 సెం.మీ. ఎత్తుగల స్థూపాకారపు సీసాలలో నింపుతూ యుంటే నిండుగా ఉన్న గిన్నెలోని ద్రవమును ఎన్ని సీసాలలో నింపవచ్చు.

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

1. సమఘనం, దీర్ఘఘనములు యొక్క ఆరుతలాలలో 4 పక్కతల ముఖాలు, పై ముఖము మరియు దిగువ ముఖము కల్గిన క్రమ పట్టకములు.
2. పొడవు 'l', వెడల్పు 'b', ఎత్తు 'h' గా గల్గిన దీర్ఘఘనము యొక్క

   సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 2\,(lb + bh + lh)$

   పక్కతల వైశాల్యం $= 2\,h\,(l + b)$

   ఘనపరిమాణం $= lbh$

3. ప్రతి భుజం కొలత 'l' గా గల సమఘనం యొక్క

సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 6l^2$
పక్కతల వైశాల్యం $= 4l^2$
ఘనపరిమాణం $= l^3$

4. ఒకే భూమి, ఎత్తు గల్గిన పిరమిడ్, క్రమపట్టకములను తీసుకొంటే, పిరమిడ్ ఘనపరిమాణం, పట్టక ఘనపరిమాణంలో మూడవ వంతు ఉంటుంది.

పిరమిడ్ ఘనపరిమాణం = $\frac{1}{3}$ × క్రమపట్టక ఘనపరిమాణం

5. పక్క తలాలు వక్ర (వక్రు) తలాలుగా, చివరలు సర్వసమాన వృత్తాలుగా గల జ్యామితీయ వస్తువును 'స్థూపము' అందురు. వీటి వృత్తాకార చివరలు మద్యబిందువులను కలుపురేఖ భూమికి లంబముగా ఉంటే ఆ పటాన్ని క్రమ వృత్తాకార స్థూపం లేక క్రమస్థూపం అంటాం.

6. 'r' వ్యాసార్థం, 'h' ఎత్తు కల్గిన స్థూపం యొక్క
   - పక్కతల వైశాల్యం $= 2\pi rh$
   - సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 2\pi r\,(r + h)$
   - ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h$

7. భూమి వృత్తంగా, దీనికి పై భాగమును దీర్షము కల్గిన జ్యామితీయ వస్తువును "శంఖువు" అందురు. శంఖువు నుండి శంఖువు భూమికి గీయబడిన లంబం, శంఖువు భూమి కేంద్రం గుండా పోవుచున్న శంఖువును "క్రమవృత్త శంఖువు" అంటాం.

8. శంఖువు భూమి అంచుపై ఏదో ఒక బిందువుతో శీర్షమును కలుపు రేఖాఖండమును 'ఏటవాలు ఎత్తు' (l) అంటాము.

$$l^2 = h^2 + r^2$$

9. 'r' వ్యాసార్థము, 'h' ఎత్తు, 'l' ఏటవాలు ఎత్తు గా గల శంఖువు యొక్క
   - పక్కతల వైశాల్యం $= \pi rl$
   - సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= \pi r\,(r + l)$

10. ఒకే భూమి, ఎత్తు కల్గిన శంఖువు, స్థూపములను తీసుకొంటే

శంఖువు ఘనపరిమాణం = $\frac{1}{3}$ × స్థూపం ఘనపరిమాణం

శంఖువు ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

11. త్రి పరిమాణ అంతరాళంలో ఒక దత్త బిందువు నుండి స్థిర దూరములో ఉండు బిందువుల సమితి గోళం. స్థిర బిందువును కేంద్రముగాను, స్థిర దూరమును వ్యాసార్థముగా పరిగణిస్తాం.

12. గోళం వ్యాసార్ధం ‘r’ అయిన

- ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\pi r^2$
- ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

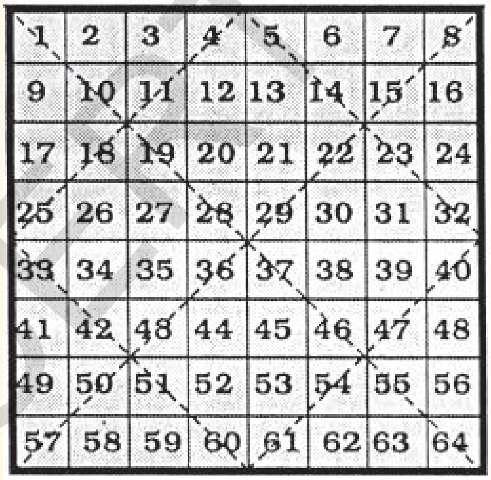
13. గోళకేంద్రం గుండా పోవు సమతలం గోళాన్ని చేసిన రెండు సమాన భాగాలలో ఒకటిని అర్ధగోళం అందురు.

- అర్ధగోళం పక్కతల వైశాల్యం $= 2\pi r^2$
- అర్ధగోళం సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 3\pi r^2$
- అర్ధగోళం ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3}\pi r^3$

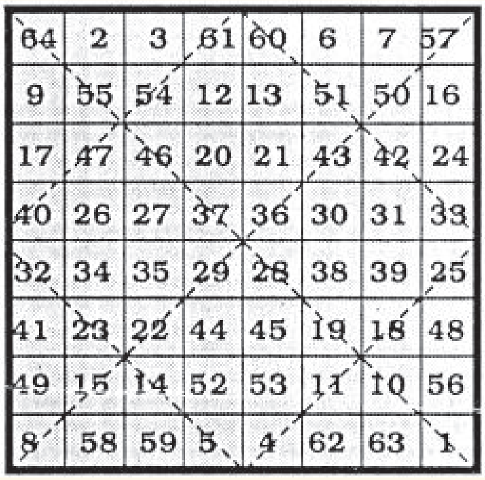
మీకు తెలుసా?

8 × 8 మ్యాజిక్ చదరాన్ని తయారు చేయగలరా?

1 నుండి 64 వరకు సంఖ్యలను పటం (i) లో చూపిన విధంగా చదరపుగదులలో వేయండి. కర్ణాలను కలుపుతూ గీతలు గీయండి. మ్యాజిక్ చదరపు ఏర్పడడానికి ఈ కర్ణాలపైగల సంఖ్యలను వాటి పూరకాలతో పటం (ii) లో చూపిన విధంగా తారుమారు చేయండి. (కనిష్ట, గరిష్ట సంఖ్యల జతల మొత్తాలు సమానమైనవాటిని మ్యాజిక్ చదరములో పూరకాలు అంటారు). ఇలా మీరు మరిన్ని మ్యాజిక్ చదరాలను రూపొందించగలరా?



1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64



64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

మ్యాజిక్ చదరము (Magic Square) అంటే చదరాలలో చూపే సంఖ్యల ప్రత్యేక అమరిక, దీనిలో అడ్డువరుసలు, నిలువు వరుసలు, కర్ణాలలో గల సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ సమానం)

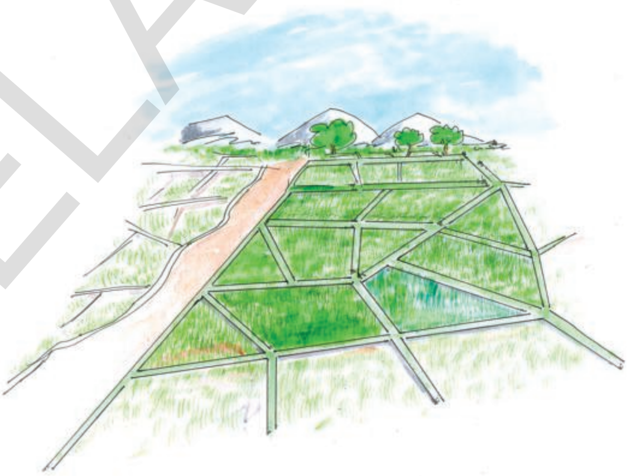
11

వైశాల్యాలు
(Areas)

11.1 పరిచయం

మీ గ్రామము లేదా పట్టణము సమీపంలోగల పంటపొలాలలను మీరు చూసారా? ఈ పొలాలు చాలా మంది రైతులకు చెందిన చాలా మడులు కలిసివున్నట్లుగా ఉంటాయి. అయితే ఈ మడులన్నీ ఒకే ఆకారములో ఉంటాయా? ఒకే వైశాల్యం కలిగి ఉంటాయా? ఈ పొలాలను ఇంకనూ విభజించి పంచుకోవాలంటే, వారు ఎలా చేస్తారు? వారికి సమాన వైశాల్య భాగాలు కావాలంటే ఏమి చేయాలి?

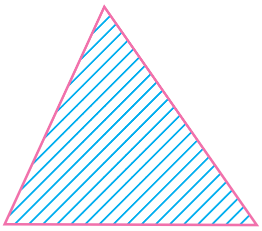
ఒక పొలములో ఎన్ని విత్తనాలు వేయాలో, ఎంత ఎరువు వేయాలో రైతుకు ఎలా తెలుస్తుంది? పంట పొలము వైశాల్యానికీ, దీనికి ఏమైనా సంబంధము ఉన్నదా?



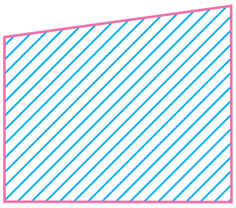
జ్యామితి అధ్యయనంలో, క్షేత్ర సరిహద్దుల పునవ్యవస్థీకరణ మరియు కావలసిన విభాగాలుగా విభజించే విధానంలో భూమిని కొలవడం అనేది శాస్త్రంగా అభివృద్ధి చెందుటకు కారణమైంది. ఈజిప్ట్‌లో నైలునది వరదలను గురించి తద్వారా కలిగిన సంఘటనలను చరిత్రలో మీరు చదివే ఉంటారు. నైలునది వరదల వలన భూమి సరిహద్దులు చెరిగిపోవడం, తిరిగి నిర్ణయించడం ఇందులో భాగం. కొన్ని పొలాలు (భాగాలు) మనకు మౌళిక ఆకారాలైన చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, ట్రెపీజియం మరియు సమాంతర చతుర్భుజాలుగా గోచరిస్తాయి. మరికొన్ని క్రమాకారంలేని వాటిగా ఉంటాయి. మౌళిక ఆకారాలకు గల కొలతల ఆధారంగా మనము సూత్రాలను రూపొందించి వైశాల్యాలు కనుగొంటాము. ఇటువంటి వాటిగురించి ఈ అధ్యాయములో మనం తెలుసుకుంటాము. మనము త్రిభుజము, చతురస్రము, దీర్ఘచతురస్రము మరియు వివిధ చతుర్భుజాల వైశాల్యములు సూత్రాలనుపయోగించి ఎలా కనుగొంటారో నేర్చుకుందాము. ఈ సూత్రాల రూపకల్పనకు తగిన ఆధారాలను అన్వేషిద్దాము. ఇవి ఎలా రూపొందాయి? అసలు వైశాల్యము అంటే ఏమిటి? అనేవి చర్చిద్దాము.

11.2 చతుర్భుజాల ధర్మాలు

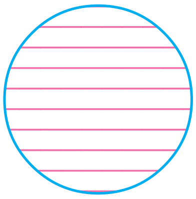
ఒక సమతలములో ఒక సరళ సంవృత పటంచే ఆక్రమింపబడిన భాగాన్ని ఆవరించబడిన దానిని సమతలప్రదేశం అంటారని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. దీని యొక్క కొలత లేదా పరిమాణాన్ని ఆ సమతల ప్రదేశము యొక్క వైశాల్యము అంటాము.



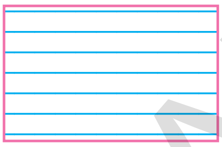
త్రిభుజాకార ప్రదేశము



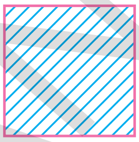
చతుర్భుజాకార ప్రదేశము



వృత్తాకార ప్రదేశము



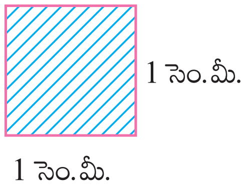
దీర్ఘచతురస్రాకార ప్రదేశము



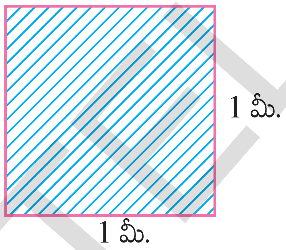
చతురస్రాకార ప్రదేశము

ఒక సమతల ప్రదేశము అనేది దాని సరిహద్దు మరియు అంతర ప్రదేశము కలిగి ఉంటుంది. దీని వైశాల్యమును ఎలా కనుగొంటారు? ఈ ప్రదేశాల పరిమాణాన్ని (వైశాల్యం) అంటే 10 చ.సెం.మీ, 215 చ.మీ, 2 చ.కి.మీ, 3 హెక్టార్లు మొ॥లగు వాటితో సూచిస్తాము. అందుచే ఒక పటము యొక్క వైశాల్యము అనేది ఏదో ఒక సమతల సంవృత భాగంతో ముడిపడి ఉంటుంది.

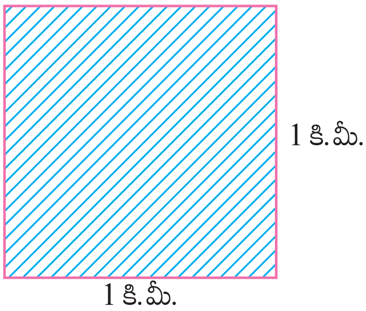
ఒక ప్రమాణ వైశాల్యము అనేది ఒక ప్రమాణ పొడవు భుజం గల చతురస్రం అగును. అందుచే 1 సెం.మీ. భుజముగా గల ఒక చతురస్రం ఏర్పరిస్తే, దాని వైశాల్యాన్ని 1 చదరపు సెంటీ మీటరు (లేదా 1 సెం.మీ.^{2} / 1 చ.సెం.మీ) అవుతుంది.



వైశాల్యము = 1 చ.సెం.మీ



వైశాల్యము = 1 చ.మీ

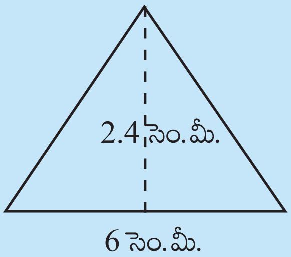


వైశాల్యము = 1 చ.కి.మీ.

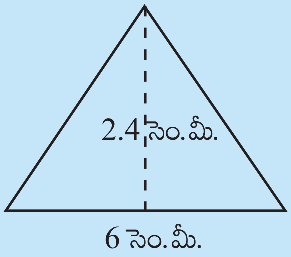
ఈ విధంగా వైశాల్యాలను 1 చదరపు మీటరు (1 చ.మీ.), 1 చదరపు కిలోమీటరు (1 చ.కి.మీ.), 1 చదరపు మిల్లీ మీటరు (1 చ.మి.మీ.) వంటి వాటిని అర్థము చేసుకోవాలి. సర్వసమాన పటాల భావన గురించి మనకు కింది తరగతులలో పరిచయము ఉన్నది. రెండు పటాలు ఒకే ఆకారము, ఒకే పరిమాణము ఉంటే వాటిని సర్వసమాన పటాలు అంటాము.

కృత్యం

ఒక ఉల్లిపొర కాగితం (ట్రేసింగ్ పేపర్) పై రెండు జతల త్రిభుజాలను పటంలో చూపినట్లు గీయండి. త్రిభుజాలు I, II లను ఒకదానిపై ఒకటి పూర్తిగా ఏకీభవించునట్లు ఉంచండి. త్రిభుజాలు III మరియు IV లు ఒకేభూమి, ఒకే ఎత్తును కలిగిన ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము మరియు ఒక లంబకోణ త్రిభుజము. III మరియు IV పటాలు ఒక దానితో మరొకటి పూర్తిగా ఏకీభవించలేదు. I, II పటాలు ఒక దానితో మరొకటి పూర్తిగా ఏకీభవించినాయి. కావున ఇవి సర్వసమాన



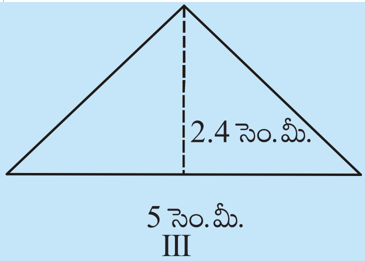
I



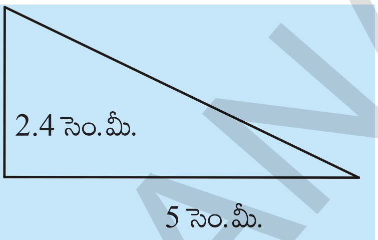
II

పటాలు, మరియు వీటి వైశాల్యాలు సమానము. ఎందుకనగా అవి ఆక్రమించిన ప్రదేశం సమానము. III, IV పటాలు ఒకదానితో మరొకటి ఏకీభవించలేదు. కనుక అవి సర్వసమాన పటాలుకావు.

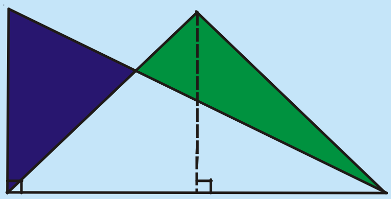
వీటి వైశాల్యాలు సమానమేనా?



III

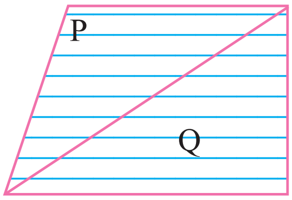


IV

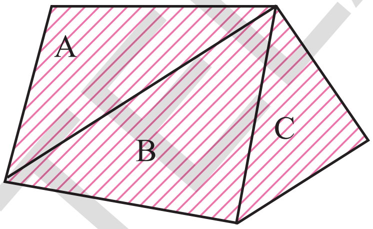

V

పటం (V) ను పరిశీలిస్తే ఈ పటాలు సర్వసమానం కానప్పటికీ, ఇవి సమాన వైశాల్యం కలిగి ఉన్నాయి. (ఈ పటాలను కాగితాలతో కత్తిరించి మరియు త్రిభుజ వైశాల్య సూత్రందా్వరా కనుగొని చూడండి) అందుచే III మరియు IV పటాలను సర్వసమాన పటాలుకానప్పటికీ, సమాన వైశాల్యాలు గల పటాలు అయినవి.

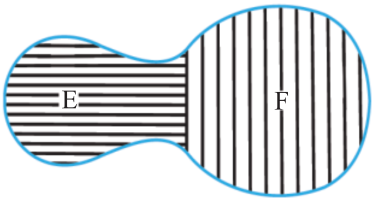
ఇప్పుడు దిగువ ఇవ్వబడిన పటాలను పరిశీలించండి.



X



Y



Z

సమతల పట ప్రదేశాలు X, Y మరియు Z లు రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ సమతల పట ప్రదేశాలుగా విభజింపబడినాయి. X పటములో P మరియు Q పటాలుగా, Y పటప్రదేశము A, B, C సమతల పటాలుగా Z పట ప్రదేశము E, F పట ప్రదేశాలుగాను విభజింపబడినవి.

X పట వైశాల్యము = P పట వైశాల్యము + Q పట వైశాల్యము అని సులభముగా గ్రహించవచ్చును.

(ఇక నుండి పట వైశాల్యంను సూక్ష్మంగా వై॥ అని రాస్తాము.)

ఇదే విధముగా (Y) పటం వై॥ = (A) పటం వై॥ + (B) పటం వై॥ + (C) పటం వై॥

(Z) పటం వై॥ = (E) పటం వై॥ + (F) పటం వై॥.

దీని నుండి ఒక పట వైశాల్యము అనేది ఒక సంఖ్య (ఏదేని ప్రమాణాలు) ఇది పటములో ప్రతీ భాగానికి చెందుతుంది. దీని నుండి కింది ధర్మాలు చెప్పవచ్చు.

(i) రెండు సర్వసమాన పటాల వైశాల్యాలు సమానము.

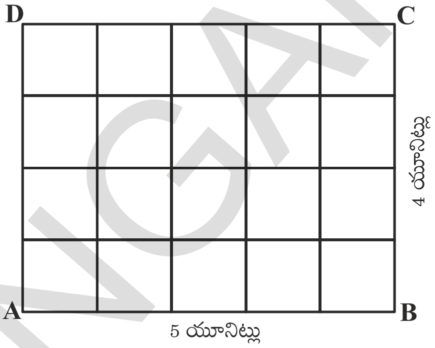
A, B లు రెండు సర్వసమాన పటాలైతే (A) పటం వై॥ = (B) పటం వై॥ అగును.

(ii) ఒక పట వైశాల్యం, ఆ పటములో పరిమిత భాగాలుగా ఏర్పడిన భాగాల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానము.

ఒక సమతల పట వైశాల్యం X అనేది రెండు అధ్యారోహణము కాని (non-overlapping) సమతల పటాలు P, Q ల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానము; కావున (X) పటం వై॥ = (P) పటం వై॥ + (Q) పటం వై॥ అగును.

11.3 దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము

ఒక దీర్ఘచతురస్రములో పొడవుకు సంబంధించిన ప్రమాణాల సంఖ్యను, వెడల్పుకు సంబంధించిన ప్రమాణాల సంఖ్యతో గుణిస్తే వచ్చు లబ్దము, ఆ దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము యొక్క చదరపు ప్రమాణాల సంఖ్యకు సమానము.

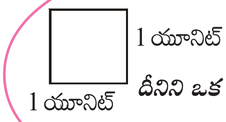


ABCD అనే దీర్ఘచతురస్రములో పొడవు $\overline{AB}$ = 5 యూనిట్లు; వెడల్పు $\overline{BC}$ = 4 యూనిట్లు సూచిస్తుందనుకొనండి.

$\overline{AB}$ ని 5 సమానభాగాలుగా, $\overline{BC}$ ని 4 సమాన భాగాలుగా విభజించి పొడవు, వెడల్పులకు సమాంతరముగా రేఖలుగీస్తే, ప్రతి విభాగము ఒక చదరపు యూనిట్ అవుతుంది. (ఎందుకు?)

కావున దీర్ఘచతురస్రములో 5 × 4 చదరపు యూనిట్లు ఉంటాయి. అంటే 20 చదరపు యూనిట్లకు సమానము.

ఇదే విధంగా, పొడవు 'l' యూనిట్లు, వెడల్పు 'b' యూనిట్లు అయితే దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము 'lb' చదరపు యూనిట్లు అవుతుంది. అంటే దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము దాని "పొడవు × వెడల్పు"కు సమానం అవుతుంది.



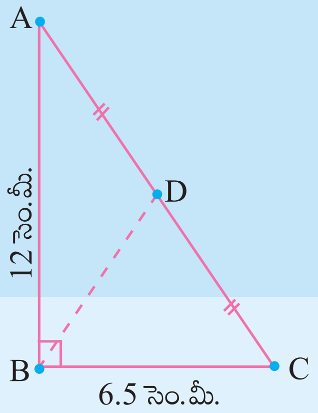
దీనిని ఒక చదరపు యూనిట్ అంటాము

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

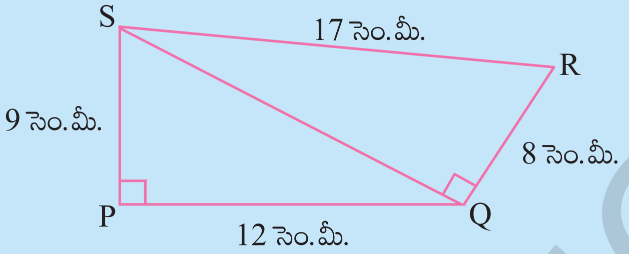
1. 1 సెం.మీ. ప్రమాణము 5 మీ లను సూచిస్తే, 6 చదరపు సెం.మీ. వైశాల్యము దేనిని సూచిస్తుంది?
2. 1 చ.మీ. = 100^2 చ.సెం.మీ. అని రజని అన్నది. నీవు ఏకీభవిస్తావా? వివరించుము.

అభ్యాసం 11.1

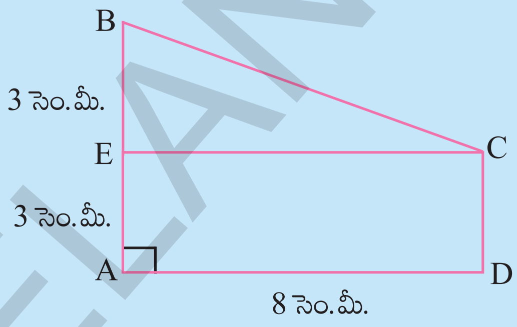
1. ΔABC లో $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = DC$, $AB = 12$ సెం.మీ. మరియు $BC = 6.5$ సెం.మీ. అయిన ΔADB వైశాల్యము కనుగొనండి.



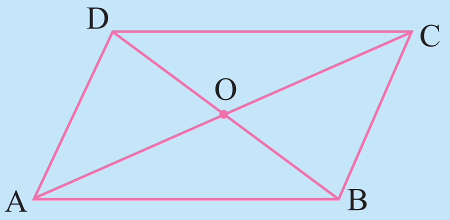
2. PQRS చతుర్భుజములో $\angle QPS = \angle SQR = 90°$, PQ = 12 సెం.మీ., PS = 9 సెం.మీ., QR = 8 సెం.మీ. మరియు SR = 17 సెం.మీ. అయిన PQRS వైశాల్యం కనుగొనండి. (**సూచన :** PQRS లో రెండు భాగాలున్నాయి.)


S
17 సెం.మీ.
R
9 సెం.మీ.
8 సెం.మీ.
P
Q
12 సెం.మీ.

3. కింది పటములో ADCE ఒక దీర్ఘ చతురస్రము అయిన ABCD ట్రెపీజియం వైశాల్యము కనుగొనండి. (**సూచన :** ABCD లో రెండు భాగాలున్నాయి)


B
3 సెం.మీ.
E
C
3 సెం.మీ.
A
D
8 సెం.మీ.

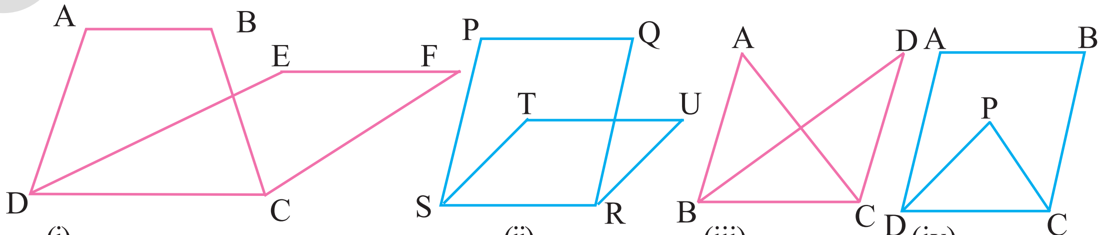
4. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము. కర్ణములు AC మరియు BD లు 'O' వద్ద ఖండించుకున్నాయి. (ΔAOD) వై॥ = (ΔBOC) వై॥ అని నిరూపించండి (**సూచన :** సర్వసమాన పటాలు సమాన వైశాల్యాలు కలిగి ఉంటాయి.)



11.4 ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల పటాలు

ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గల కొన్ని జ్యామితీయ పటాల వైశాల్యాల మధ్య గల సంబంధమును మనం ఇప్పుడు అధ్యయనం చేద్దాము. ఈ అధ్యయనం మనకు సరూప త్రిభుజాల ధర్మాలు అవగాహన చేసుకొనుటకు ఉపయోగపడతాయి.

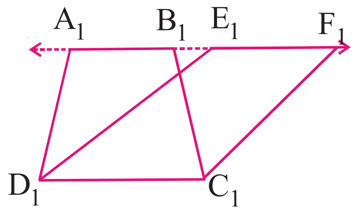
కింది పటాలను పరిశీలించండి.


A
B
E
F
D
C
P
Q
T
U
S
R
A
D
B
C
A
B
P
D
C

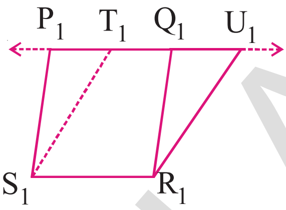
(i) (ii) (iii) (iv)

పటం (i) లో ట్రెపీజియం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజము EFCD రెండింటికి ఉమ్మడి భుజము CD. అందుచే ట్రెపీజియం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజము EFCD అనేవి ఒకే భూమి CD పై ఉన్నవి ఇదేవిధంగా పటం (ii) లో సమాంతర చతుర్భుజము PQRS మరియు TURS లకు ఒకే భూమి కలదు. పటం (iii) లో ABC మరియు DBC త్రిభుజాలకు ఒకే భూమి BC కలదు. పటం (iv) లో ABCD సమాంతర చతుర్భుజము, త్రిభుజము PCD ఒకే భూమి DC పై ఉన్నాయి. దీనిని బట్టి ఇవ్వబడిన నాలుగు జ్యామితీయ పటాలు ఒకే భూమిని కలిగి ఉన్నాయి. కానీ ఇవి ఒకే సమాంతర రేఖలమధ్యలేవు. ఎందుకంటే AB, EF మరియు PQ, TU పైనా అధ్యారోహణ జరిగి ఉండలేదు. అదే విధంగా పటం (i) లో A, B, E, F లు సరేఖీయాలు కావు. అదేవిధంగా P, Q, T, U కూడా పటం (iii) పటం (iv) గురించి మీరు ఏమి చెబుతారు?

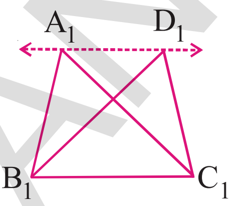
ఇప్పుడు కింది పటాలను పరిశీలించండి.



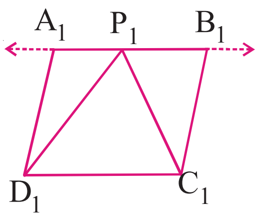
(v)



(vi)



(vii)



(viii)

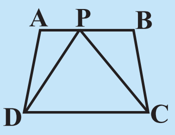
పటాల మధ్య ఏమి తేడాలను మీరు గమనించారు? పటం (v) లో ట్రెపీజియం $A_1B_1C_1D_1$ మరియు సమాంతర చతుర్భుజము $E_1F_1C_1D_1$ లు ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతరాలు A_1F_1 మరియు D_1C_1 ల మధ్య ఉన్నాయి. A_1, B_1, E_1, F_1 బిందువులు సరేఖీయాలు మరియు $A_1F_1 \parallel D_1C_1$ అయినవి. ఇదేవిధంగా పటం (vi) లో సమాంతర చతుర్భుజాలు $P_1Q_1R_1S_1$ మరియు $T_1U_1R_1S_1$ లు ఒకే భూమి S_1R_1 మరియు ఒకే సమాంతరాలు P_1U_1 మరియు S_1R_1 ల మధ్య ఉన్నాయి. పటం (vii) మరియు (viii) లలో ఏ పటాలు ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉన్నాయి?

కావున ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గల పటాలంటే, వాటికి ఒక ఉమ్మడి భుజం (భూమి) మరియు భూమికి ఎదురుగాగల శీర్షాలు అన్నియు భూమికి సమాంతరముగా గీచిన రేఖపై ఉండాలని తెలుస్తున్నది.

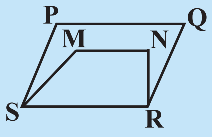
ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

కింది పటాలలో ఏవి ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉన్నాయి?

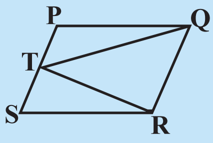
ఇటువంటి సందర్భములో భూమి (ఉమ్మడి భుజం) ని, రెండు సమాంతర రేఖలను తెలపండి.



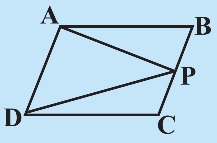
(a)



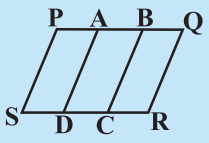
(b)



(c)



(d)



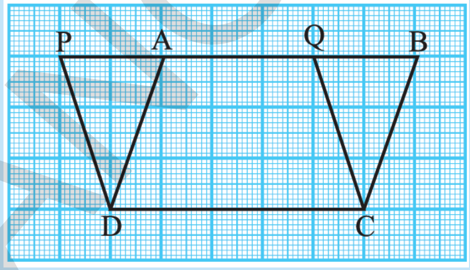
(e)

11.5 ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల సమాంతర చతుర్భుజాలు

ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల మధ్య ఏమైనా సంబంధం ఉన్నదా? ఉంటే దానిని తెలుసుకోవడానికి ముందుగా ఒక కృత్యము చేసి చూద్దాం.

కృత్యం

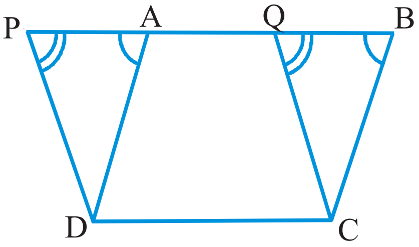
ఒక గ్రాఫ్ కాగితముపై రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ABCD మరియు PQCD లను పటంలో చూపిన విధంగా గీయాలి.



ఈ రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే భూమి DC పైన మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు PB మరియు DC ల మధ్య ఉన్నాయి. దీనిలో DCQA పట భాగము రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలలో ఉమ్మడి భాగమని స్పష్టమౌతున్నది. కావున మనము ΔDAP మరియు ΔCBQ లు ఒకే వైశాల్యం కలిగి ఉంటాయని చెప్పగలిగితే అప్పుడు (PQCD) వై॥ = (ABCD) వై॥ అవుతుంది.

సిద్ధాంతము : ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాతర రేఖల మధ్య గల సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానము.

ఉపపత్తి : ABCD మరియు PQCD అనే రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే భూమి DC మరియు రెండు సమాంతర రేఖలు DC మరియు PB ల మధ్య ఉన్నాయనుకుందాం.



ΔDAP మరియు ΔCBQ లలో

$PD \parallel CQ$ మరియు PB తిర్యగ్రేఖవలన $\angle DPA = \angle CQB$

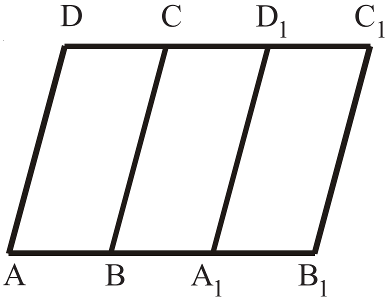
మరియు $AD \parallel CB$ మరియు PB తిర్యగ్రేఖవలన $\angle DAP = \angle CBQ$

ఇలాగే PQCD సమాంతర చతుర్భుజమైనందున $PD = QC$ అగును.

ఇందుచే ΔDAP, ΔCBQ లు రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలు మరియు వాటి వైశాల్యాలు సమానము.

కావున (PQCD) వై॥ = (AQCD) వై॥ + (DAP) వై॥

= (AQCD) వై॥ + (CBQ) వై॥ = (ABCD) వై॥ అగును.



గ్రాఫ్ కాగితములపై గీచిన సమాంతర చతుర్భుజాలలో చదరాల సంఖ్యను లెక్కించి ఫలితాన్ని సరిచూడవచ్చును.

రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉండడానికి అవి ఒకే సమాంతర రేఖలమధ్య ఉన్ననూ, ఒకే భూమిపై ఉండనవసరం లేదని రేష్మా వాదించింది. దానికి సమాన భూమి ఉంటే సరిపోతుందని అన్నది. ఆమె వాదన అవగాహనకొరకు పక్కపటము పరిశీలిద్దాము.

$AB = A_1B_1$ అయిన $A_1B_1C_1D_1$ సమాంతర చతుర్భుజాన్ని ABCD సమాంతర చతుర్భుజముపై ఏకీభవించునట్లు ఉంచితే A శీర్షం A_1 పైన B శీర్షం B_1 పైన వచ్చాయి. అదేవిధంగా $\overline{C_1D_1}$, CD పై ఏకీభవించింది. కావున వీటి వైశాల్యాలు సమానమైనాయి.

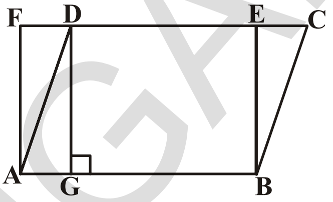
కావున సమాంతర చతుర్భుజాలు సమానభూములపై ఉన్ననూ, ఒకే భూమిపై ఉన్ననూ సమాన వైశాల్యాలు కలిగి ఉంటాయనేది జ్యామితీయ ధర్మాలను అధ్యయనం చేయుటలో ఉపయోగపడుతుంది.

ఇప్పుడు మనం పై సిద్ధాంతము ఆధారంగా నిరూపించే కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-1 : ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము ABEF ఒక దీర్ఘచతురస్రము DG, AB పైకి గీచిన లంబము అయిన

(i) (ABCD) వై॥ = (ABEF) వై॥

(ii) (ABCD) వై॥ = AB × DG అని చూపండి.



సాధన : (i) దీర్ఘచతురస్రము కూడా ఒక సమాంతర చతుర్భుజమే.

$\therefore$ (ABCD) వై॥ = (ABEF) వై॥ ..... (1)

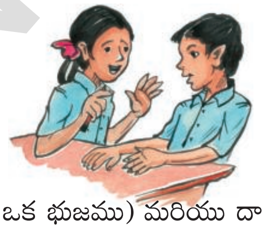
(ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉండే రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు)

(ii) (ABCD) వై॥ = (ABEF) వై॥ ($\because$ (1) నుండి)

= AB × BE ($\because$ ABEF దీర్ఘచతురస్రం కావున)

= AB × DG ($\because$ $DG \perp AB$ మరియు DG = BE)

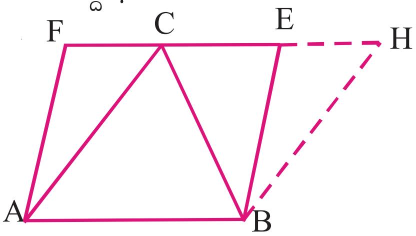
అందుచే (ABCD) వై॥ = AB × DG అయినది



పై ఫలితము బట్టి మనము “సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము. దాని భూమి (ఏదైనా ఒక భుజము) మరియు దానిపైకి గీయబడిన లంబాల పొడవుల లబ్ధానికి సమానము” అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ-2 : త్రిభుజము ABC మరియు సమాంతర చతుర్భుజము ABEF లు ఒకే భూమి AB మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు AB మరియు EF ల మధ్య ఉంటే (ΔABC) వై॥ = $\frac{1}{2}$(ABEF) వై॥ అని చూపండి.

సాధన : BH || AC అగునట్లు B గుండా ఒక రేఖను గీస్తే అది పొడిగించిన FE ని H వద్ద ఖండించింది.



$\therefore$ ABHC ఒక సమాంతర చతుర్భుజము.

BC కర్ణము దీనిని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజించింది కావున

$\therefore$ (ΔABC) వై॥ = (ΔBCH) వై॥

= $\frac{1}{2}$(ABHC) వై॥

కాని సమాంతర చతుర్భుజాలు ABHC మరియు ABEF లు ఒకే భూమి AB పైన AB || EF సమాంతరరేఖల మధ్య ఉన్నాయి. కావున

$\therefore$ (ABHC) వై॥ = (ABEF) వై॥

అందువలన (ΔABC) వై॥ = $\frac{1}{2}$(ABEF) వై॥ అయినది.

దీని నుండి మనం “ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యన ఒక త్రిభుజము, సమాంతర చతుర్భుజము ఉంటే, త్రిభుజ వైశాల్యము, సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యములో సగము ఉంటుంది” అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ-3 : ఒక రాంబస్‌లో కర్ణాలు 12 సెం.మీ. మరియు 16 సెం.మీ. దాని ఆసన్న భుజాల మధ్యబిందువులను వరుసక్రమములో కలుపగా ఏర్పడే పటము యొక్క వైశాల్యము ఎంత?

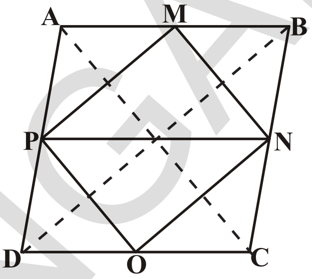
సాధన : ABCD రాంబస్ యొక్క భుజాలు AB, BC, CD మరియు DA ల మధ్యబిందువులు M, N, O మరియు P లను వరుసలో కలుపగా ఏర్పడిన పటము MNOP.

ఏర్పడిన MNOP ఏ ఆకారంలో ఉంది? ఎందుకు?

PN కలిపితే PN || AB మరియు PN || DC అవుతాయి (ఎలా?)

ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఒక త్రిభుజము, సమాంతర చతుర్భుజము ఉంటే త్రిభుజ వైశాల్యం, సమాంతర చతుర్భుజవైశాల్యంలో సగం ఉంటుందని మీకు తెలుసు.

పై ఫలితము బట్టి సమాంతరచతుర్భుజము ABNP మరియు త్రిభుజము MNP లు ఒకే భూమి PN పైన, ఒకే సమాంతరాలు PN మరియు AB ల మధ్య ఉన్నాయి.



$\therefore$ ΔMNP వై॥ $= \frac{1}{2}$ ABPN వై॥ .....(i)

ఇదే విధముగా ΔPON వై॥ $= \frac{1}{2}$ PNCD వై॥ .....(ii)

మరియు రాంబస్ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$ కావున

(i), (ii), (iii) లను బట్టి

(MNOP) వై॥ = (ΔMNP) వై॥ + (ΔPON) వై॥

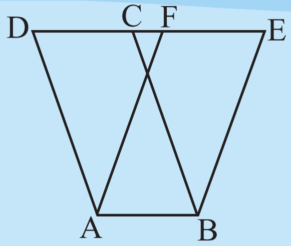
$= \frac{1}{2}$ (ABNP) వై॥ + $\frac{1}{2}$ (ABCD) వై॥

$= \frac{1}{2}$ (రాంబస్ABCD) వై॥

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16\right) = 48$ చ.సెం.మీ.

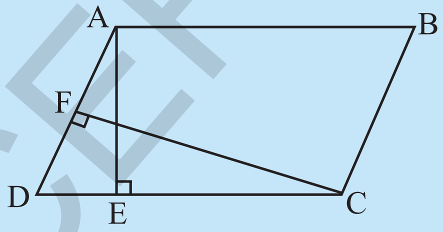
అభ్యాసం 11.2

1. ABCD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము 36 చ.సెం.మీ. . AB = 4.2 సెం.మీ. అయిన ABEF సమాంతర చతుర్భుజము ఎత్తును కనుగొనుము.

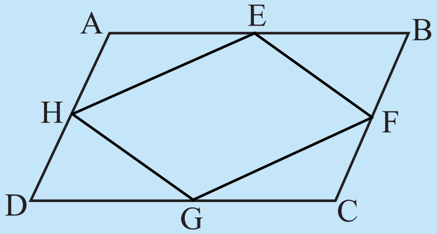


2. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము. DC భుజము పైకి గీయబడిన లంబము AE మరియు AD భుజముపైకి గీయబడిన లంబము CF .

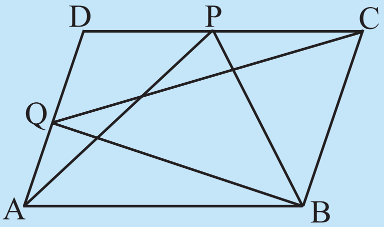
   AB = 10 సెం.మీ. AE = 8 సెం.మీ. మరియు CF = 12 సెం.మీ. అయిన AD కొలత కనుగొనుము.



3. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజములో AB, BC, CD మరియు AD భుజాల మధ్యబిందువులు వరుసగా E, F, G మరియు H లు అయిన (EFGH) వై॥ $= \frac{1}{2}$(ABCD) వై॥ అని చూపుము.



4. ΔAPM, ΔDPO, ΔOCN మరియు ΔMNB లను ఒకచోట చేర్చితే ఏ రకమైన చతుర్భుజం వస్తుంది?



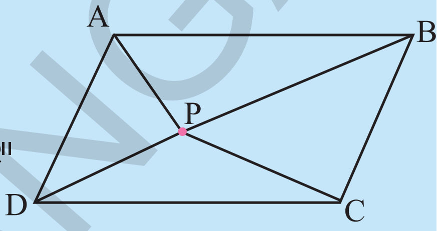
5. ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో P మరియు Q అను రెండు బిందువులు వరుసగా DC మరియు AD లపై ఉంటే ΔAPB వై॥ $= \Delta BQC$ వై॥ అని చూపండి.

6. ABCD సమాంతర చతుర్భుజము అంతరములో P అనేది ఒక బిందువు అయిన కింది వానిని నిరూపించండి.

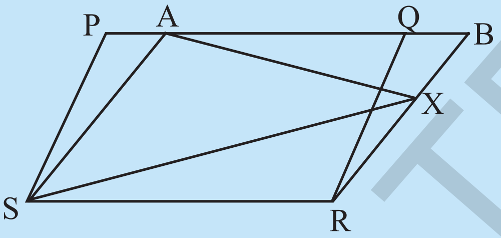
(i) (ΔAPB) వై॥ $+ (\Delta PCD)$ వై॥ $= \frac{1}{2}(ABCD)$ వై॥

(ii) (ΔAPD) వై॥ $+ (\Delta PBC)$ వై॥ $= (\Delta APB)$ వై॥ $+ (\Delta PCD)$ వై॥

(సూచన : AB కి సమాంతరముగా P నుండి ఒక రేఖను గీయుము)



7. ట్రెపీజియం యొక్క వైశాల్యము దాని సమాంతర భుజాల మొత్తాన్ని వాటి మధ్య దూరంతో గుణించగా వచ్చే లబ్ధంలో సగము ఉంటుదని నిరూపించండి.

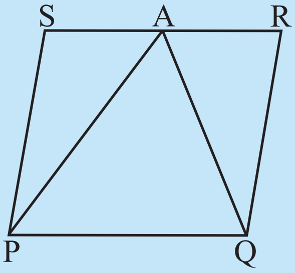


8. PQRS మరియు ABRS అనేవి రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు. BR భుజముపై X అనేది ఒక బిందువు. అయిన

(i) $(PQRS)$ వై॥ $= (ABRS)$ వై॥

(ii) (ΔAXS) వై॥ $= \frac{1}{2}(PQRS)$ వై॥

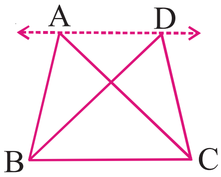
9. ఒక రైతుకు పటంలో చూపినట్లు PQRS సమాంతర చతుర్భుజ ఆకారములో పొలము ఉన్నది. RS భుజముపై మధ్యబిందువు నుండి P, Q బిందువులను కలిపారు. పొలము ఎన్ని భాగాలుగా విభజింపబడినది? ఏ భాగాలు ఏ ఆకారములో ఉన్నాయి? రైతు తన పొలములో వరి మరియు వేరుశెనగ పంటను సమాన భాగాలలో వేయాలనుకుంటే, ఏ విధంగా వేస్తాడు? కారణాలు తెలపండి.



10. రాంబస్ యొక్క వైశాల్యము, దాని కర్ణముల లబ్ధములో సగం ఉంటుందని నిరూపించండి.

11.6 ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యనగల త్రిభుజాలు

ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల పటాలను మీరు ఇంతవరకు పరిశీలించారు. రెండు త్రిభుజాలు ABC మరియు DBC లు ఒకే భూమి BC మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు AD మరియు BC మధ్య ఉన్నాయనుకుందాం.



ఈ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలను గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య అనేక జతల త్రిభుజాలను గీయవచ్చు.

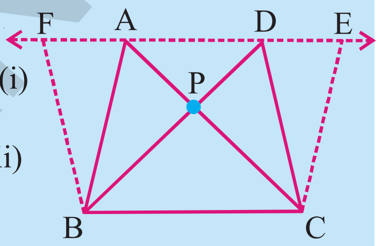
మనం ఒక కృత్యం చేసి చూద్దాం.

కృత్యం

పటంలో చూపిన విధంగా ఒక జత త్రిభుజాలను ఒకే భూమి లేదా సమాన భూములు, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యన గ్రాఫ్ కాగితంపై గీయండి.

ΔABC మరియు ΔDBC లు అనేవి రెండు త్రిభుజాలు ఒకే భూమి BC పైన, ఒకే సమాంతర రేఖలు BC, AD ల మధ్య ఉన్నాయి.

AD ని ఇరువైపులా పొడగించుము మరియు $CE \parallel AB$, $BF \parallel CD$ లను గీయండి. ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజాలు AECB మరియు FDCB లు ఒకే భూమి BC మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు BC మరియు EF ల మధ్య ఉన్నాయి.



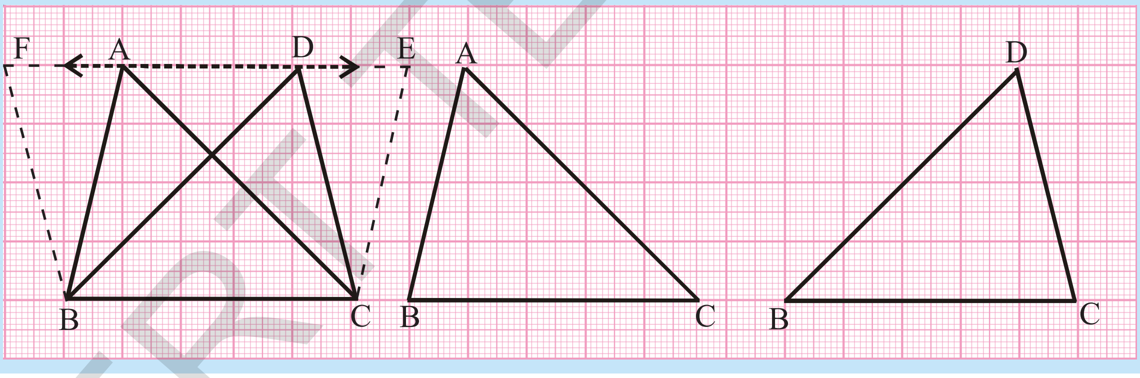
కావున (AECB) వై॥ = (FDCB) వై॥. (ఎలా?)

దీని నుండి మనకు (ΔABC) వై॥ $= \frac{1}{2}$ (సమాంతర చతుర్భుజం AECB) వై॥ ...(i)

మరియు (ΔDBC) వై॥ $= \frac{1}{2}$ (సమాంతర చతుర్భుజం FDCB) వై॥ అగును .... (ii)

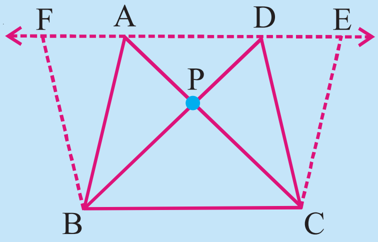
(i), (ii) నుండి, దీని నుండి (ΔABC) వై॥ $= (\Delta DBC)$ వై॥ అని చెప్పవచ్చు.

మనం ΔABC మరియు ΔDBC ల వైశాల్యాలను ముందు కృత్యములో చేసినట్లుగా చదరాలను లెక్కించు పద్ధతి ద్వారా గణించి వైశాల్యములు ఎలా సమానం అవుతాయో సరిచూడవచ్చు.



ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

రెండు త్రిభుజాలు ABC మరియు DBC లను ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉండునట్లు (పటంలో చూపిన విధంగా) గీయండి. AC మరియు BD ల ఖండన బిందువుకు P లని పేరు పెట్టండి. $CE \parallel BA$ మరియు $BF \parallel CD$ లను AD రేఖపై E మరియు F లు ఉన్నట్లు గీయండి.



(ΔPAB) వై॥ $= (\Delta PDC)$ వై॥ లని మీరు చూపగలరా?

సూచన : (ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు కానప్పటికీ సమాన వైశాల్యములు కలిగి ఉన్నాయి.)

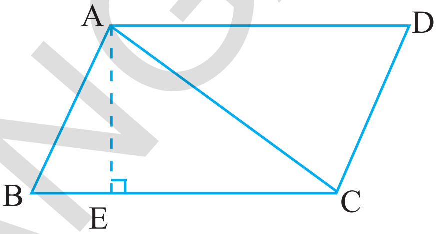
ఉపసిద్ధాంతం-1 : త్రిభుజ వైశాల్యము దాని యొక్క భూమి (లేదా ఏదైనా భుజం) మరియు దానిపైకి గీయబడిన లంబం (ఎత్తు) ల లబ్ధములో సగం ఉంటుందని నిరూపించండి.

నిరూపణ : ఒక త్రిభుజం ABC తీసుకోండి. $AD \parallel BC$ ని గీయండి $CD = BA$ అగునట్లు కలపండి.

ఇప్పుడు ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు AC ఒక కర్ణం.

$\Delta ABC \cong \Delta ACD$ మనకు తెలుసు

కావున ΔABC వై॥ $= \Delta ACD$ వై॥ (సర్వసమాన త్రిభుజాలు ఒకే వైశాల్యము కలిగి ఉంటాయి.)



అందువలన ΔABC వై॥ $= \frac{1}{2}(ABCD)$ వై॥

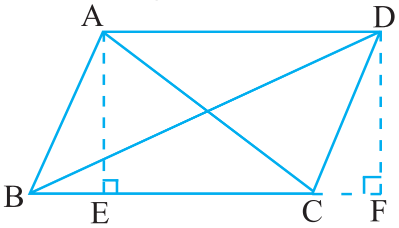
$AE \perp BC$ గీయండి.

$(ABCD)$ వై॥ $= BC \times AE$ అని మనకు తెలుసు.

అందుచే (ΔABC) వై॥ $= \frac{1}{2}$ $(ABCD)$ వై॥ అయినది $= \frac{1}{2} \times BC \times AE$

కావున ΔABC వై॥ $= \frac{1}{2} \times$ భూమి BC $\times$ భూమిపైకి గీచిన లంబం AE అగును.

సిద్ధాంతం-11.2 : రెండు త్రిభుజాలు ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూములు) మరియు ఒకే వైశాల్యాలు కలిగి ఉంటే అవి ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉంటాయి.



పటం పరిశీలించండి. BC భుజంపైన గల త్రిభుజాలు ఏవి? ΔABC, ΔDBC త్రిభుజాల ఎత్తులు ఏవి?

ఒకే భూమిని కలిగి, వైశాల్యాలు సమానం అయితే, వాటి ఎత్తులు ఎలా ఉంటాయి? A, D లు సరేఖీయాలేనా?

ఇప్పుడు మరి కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-4 : ఒక త్రిభుజాన్ని దాని మధ్యగతము సమానవైశాల్యాలు గల రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని చూపండి.

సాధన : త్రిభుజము ABC లో AD మధ్యగతం అనుకోండి.

ΔABD మరియు ΔADC లకు ఒకే ఉమ్మడి శీర్షం. దీని భూములు BD మరియు DC లు సమానము.

$AE \perp BC$. గీయండి.

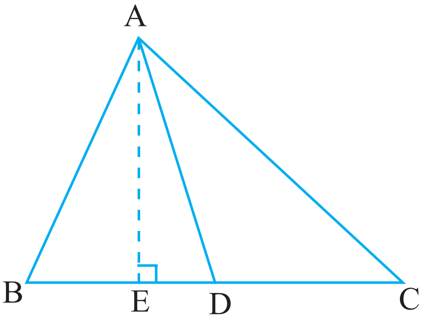
ఇప్పుడు . $(\Delta ABD) = \frac{1}{2} \times$ భూమి BD $\times$ ΔADB యొక్క ఎత్తు.

$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= \frac{1}{2} \times DC \times AE \quad (\because BD = DC)$

$= \frac{1}{2} \times$ భూమి DC $\times$ ΔACD యొక్క ఎత్తు

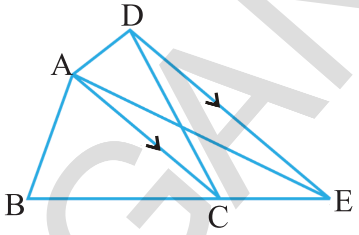
$= \Delta ACD$ వై॥



కావున (ΔABD) వై॥ $= (\Delta ACD)$ వై॥ అయినది.

ఉదాహరణ-5 : పక్క పటంలో ABCD ఒక చతుర్భుజం. AC ఒక కర్ణము, $DE \parallel AC$ మరియు BC ని పొడిగించగా అది E వద్ద ఖండించింది. అయిన $(ABCD)$ వై॥ = (ΔABE) వై॥ అని చూపండి.

సాధన : $(ABCD)$ వై॥ = (ΔABC) వై॥ + (ΔDAC) వై॥



ΔDAC మరియు ΔEAC లు ఒకే భూమి $\overline{AC}$

మరియు ఒకే సమాంతరాలు $DE \parallel AC$ మధ్యగలవు.

(ΔDAC) వై॥ = (ΔEAC) వై॥ (ఎందుకు?)

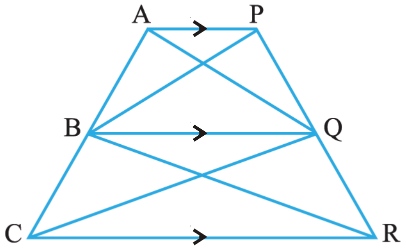
సమాన వైశాల్యాల పటాలను ఇరువైపులా కలుపగా

(ΔDAC) వై॥ + (ΔABC) వై॥ = (ΔEAC) వై॥ + (ΔABC) వై॥

కావున $(ABCD)$ వై॥ = (ΔABE) వై॥

ఉదాహరణ-6 : పక్క పటంలో $AP \parallel BQ \parallel CR$. (ΔAQC) వై॥ = (ΔPBR) వై॥ అని చూపండి.

సాధన : ΔABQ మరియు ΔPBQ లు ఒకే భూమి BQ మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు $AP \parallel BQ$ ల మధ్య ఉన్నాయి.



కావున (ΔABQ) వై॥ = (ΔPBQ) వై॥ ...(1)

ఇదేవిధంగా

(ΔCQB) వై॥ = (ΔRQB) వై॥ (ఒకే భూమి BQ మరియు $BQ \parallel CR$) ...(2)

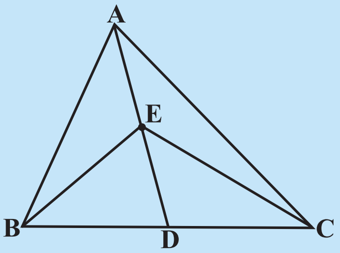
(1), (2) ఫలితాలను కలుపగా

(ΔABQ) వై॥ + (ΔCQB) వై॥ = (ΔPBQ) వై॥ + (ΔRQB) వై॥

అందుచే ΔAQC వై॥ = ΔPBR వై॥ అయినది.

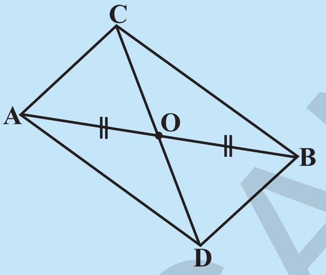
అభ్యాసం 11.3

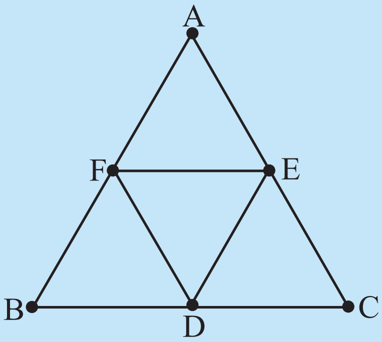
1. ΔABC లో (పటం చూడండి), మధ్యగతరేఖ AD యొక్క మధ్యబిందువు E అయిన
   (i) ΔABE వై॥ = ΔACE వై॥
   (ii) ΔABE వై॥ = $\frac{1}{4}(\Delta ABC)$ వై॥



2. సమాంతర చతుర్భుజములో కర్ణాలు, దానిని సమాన వైశాల్యం గల నాలుగు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయని చూపండి.

3. పటంలో త్రిభుజాలు ΔABC మరియు ΔABD ఒకే భూమి AB పైన ఉన్నాయి. CD రేఖాఖండం $\overline{AB}$ ని O వద్ద సమద్విఖండనచేస్తే (ΔABC) వై॥ $=$ (ΔABD) వై॥ అని చూపండి.





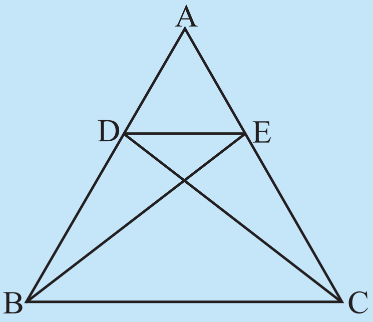
4. పటంలో చూపిన విధంగా ΔABC లో D, E, F లు వరుసగా భుజాలు BC, CA మరియు AB యొక్క మధ్యబిందువులు అయిన కింది వానిని నిరూపించండి.

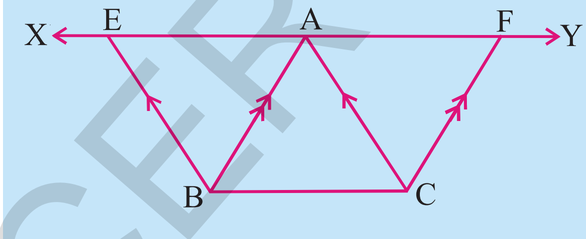
(i) $BDEF$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

(ii) (ΔDEF) వై॥ $= \frac{1}{4}(\Delta ABC)$ వై॥

(iii) $BDEF$ వై॥ $= \frac{1}{2}(\Delta ABC)$ వై॥

5. పటంలో చూపిన విధంగా ΔABC లో D మరియు E బిందువులు వరుసగా AB, AC భుజాలపైగల బిందువులు మరియు (ΔDBC) వై॥ $=$ (ΔEBC) వై॥ అయిన $DE \parallel BC$ అని చూపండి.

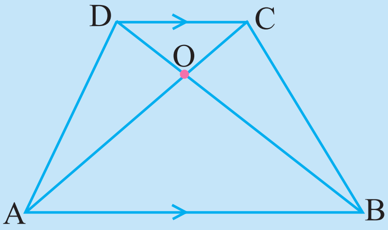


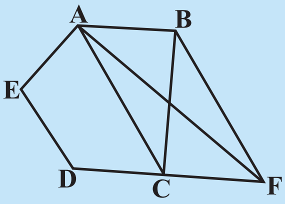


6. పక్క పటంలో BC కు సమాంతరంగా A గుండా XY అనే రేఖ గీయబడింది. $BE \parallel CA$ మరియు $CF \parallel BA$ లను గీస్తే అవి XY ను E మరియు F ల వద్ద వరుసగా ఖండిస్తే (ΔABE) వై॥ $= (\Delta ACF)$ వై॥ అని చూపండి.

7. పక్క పటంలో $ABCD$ ట్రెపీజియంలో $AB \parallel DC$ కర్ణాలు AC మరియు BD లు O వద్ద ఖండించుకున్నాయి.

(ΔAOD) వై॥ $= (\Delta BOC)$ వై॥ అని చూపండి.

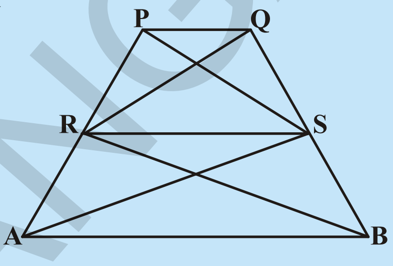




8. పక్క పటంలో ABCDE ఒక పంచభుజి. B గుండా AC కు సమాంతరంగా గీచిన రేఖ, పొడిగించిన DC ని F వద్ద ఖండించిన కింది వానిని నిరూపించుము.

(i) (ΔACB) వై॥ $= (\Delta ACF)$ వై॥

(ii) $(AEDF)$ వై॥ $= (ABCDE)$ వై॥



9. పక్క పటంలో ΔRAS వై॥ $= \Delta RBS$ వై॥ మరియు [(ΔQRB) వై॥ $= (\Delta PAS)$ వై॥ అయిన చతుర్భుజాలు PQSR మరియు RSBA లు రెండునూ ట్రెపీజియమ్‌లని చూపండి.

10. ఒక గ్రామంలో రామయ్య అనే వ్యక్తికి చతుర్భుజాకారంలో ఖాళీ స్థలం కలదు. ఆ గ్రామ పంచాయితీలో పాఠశాల నిర్మాణానికి అతని స్థలంలో ఒక మూలలో కొంత భాగం కావల్సివచ్చింది. ఆయన స్థలాన్ని ఇవ్వడానికి అంగీకరిస్తూ, దానికి బదులుగా అంతే వైశాల్యం గల స్థలాన్ని పొందితే ఏ విధంగా ఆ స్థలం వస్తుందో వివరించండి. (స్థలం యొక్క చిత్తు పటం గీయండి.)

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో A లంబకోణం. BC, CA మరియు AB లపై వరుసగా BCED, ACFG మరియు ABMN అనే చతురస్రాలు గీయబడ్డాయి. రేఖాఖండం $AX \perp DE$, BC ని Y వద్ద, DE ని X.వద్ద ఖండించింది. AD, AE లు కలుపబడ్డాయి. అదే విధంగా BF, CM లు కలుపబడ్డాయి. (పటంలో చూడండి).

అయితే కింద వానిని నిరూపించండి.

(i) $\Delta MBC \cong \Delta ABD$

(ii) $(BYXD)$ వై॥ $= 2\,(\Delta MBC)$ వై॥

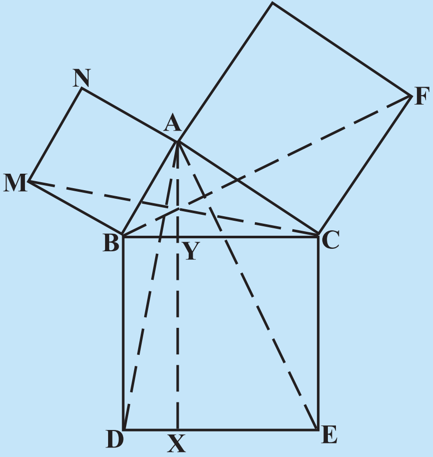
(iii) $(BYXD)$ వై॥ $= (ABMN)$ వై॥

(iv) $\Delta FCB \cong \Delta ACE$

(v) $(CYXE)$ వై॥ $= 2\,(FCB)$ వై॥

(vi) $(CYXE)$ వై॥ $= (ACFG)$ వై॥

(vii) $(BCED)$ వై॥ $= (ABMN)$ వై॥ $+ (ACFG)$ వై॥



ఫలితం (vii) ను మాటలలో రాయండి. ఇది ప్రఖ్యాతి గాంచిన పైథాగరస్ సిద్ధాంతం. దీనియొక్క సులభతరమైన నిరూపణను మీరు 10వ తరగతిలో నేర్చుకుంటారు.

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

ఈ అధ్యాయములో మనం కింది విషయాలను చర్చించాము.

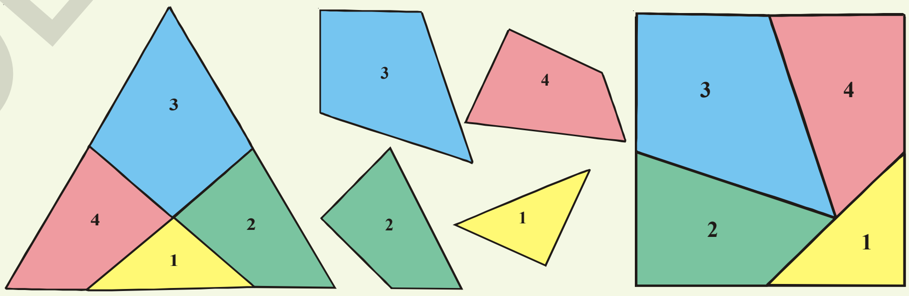
1. ఒక పటం యొక్క వైశాల్యము (ఏదో ఒక యూనిట్‌లో) అనేది ఒక ధన వాస్తవసంఖ్య. ఇది ఆ పటంచే ఆవరింపబడిన ప్రదేశాన్ని తెలుపుతుంది.
2. రెండు సర్వ సమాన పటాలు ఒకే వైశాల్యం కలిగి ఉంటాయి. అయితే దీని విపర్యయం ఎల్లప్పుడూ సత్యం కాదు.
3. X అనే సమతల ప్రదేశము రెండు అధ్యారోహణంకాని రెండు సమతల ప్రదేశాలు P మరియు Q లుగా విభజింపబడితే (X) పటం వై॥ = (P) పటం వై॥ + (Q) పటం వై॥ అవుతుంది.
4. ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య పటాలంటే, వాటికి ఒక ఉమ్మడి భుజం (భూమి) మరియు భుజానికి ఎదురుగా గల శీర్షాలు అన్నియూ భూమికి సమాంతరంగా గీచిన రేఖపై ఉంటాయి.
5. ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూములు), ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గల రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానము.
6. సమాంతర చతుర్భుజ చతుర్భుజాల వైశాల్యము దాని భూమి మరియు దానిపైకి గీయబడిన లంబం (ఎత్తు) ల లబ్దానికి సమానము.
7. ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూములు) మరియు సమానవైశాల్యాలు గల రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉంటాయి.
8. ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఒక త్రిభుజము, ఒక సమాంతర చతుర్భుజం ఉంటే త్రిభుజ వైశాల్యం, సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంలో సగం ఉంటుంది.
9. ఒకే భూమి (లేదా సమానభూములు) ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గల రెండు త్రిభుజ వైశాల్యాలు సమానం.
10. ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూములు) కలిగిన రెండు త్రిభుజ వైశాల్యాలు సమానం అయిన అవి ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉంటాయి.

మీకు తెలుసా?

ఒక ప్రహేళిక (వైశాల్యాలు)

జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్త డేవిడ్ హిల్బర్ట్ (1862–1943) మొట్టమొదటిసారిగా "ఒక బహుభుజిని, పరిమిత బహు భుజాలుగా విభజించి, కలిపితే, వాటి వైశాల్యాల మొత్తం మొదటి బహుభుజి వైశాల్యంనకు సమానమని" రుజువు చేసాడు.

దీని కనుగుణంగా ఆంగ్లేయుడు, హెన్రీ ఎర్నస్ట్‌డుడినీ (1847–1930) లో ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని 4 భాగాలుగా విభజించి తిరిగి వాటిని ఒక చతురస్రంగా అమర్చి ప్రహేళిక రూపొందించాడు.



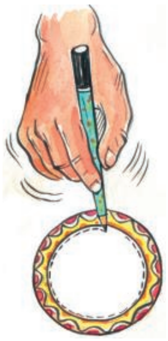
మీరు కూడా ఈ ఆలోచన ఆధారంగా మరిన్ని ప్రహేళికలు రూపొందించండి.

12

వృత్తాలు
(Circles)

12.1 పరిచయం

మనం మన పరిసరాలలో నాణెములు, గాజులు, గడియారాలు, చక్రాలు మరియు గుండీలు వంటి గుండ్రని ఆకారం గల వస్తువులను చూస్తూ ఉంటాం. ఈ వస్తువులు అన్నీ వృత్తాకారంలో ఉంటాయి.

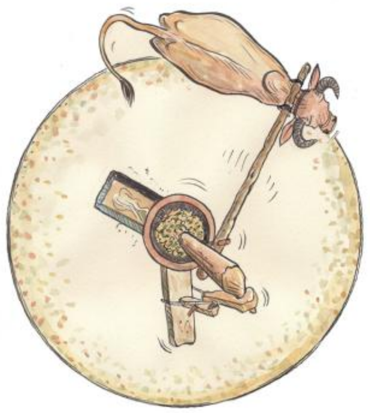


మీ బాల్యంలో వృత్తాలు గీయడానికి నాణెం, గాజు మరియు గుండీ వంటి వస్తువుల చుట్టూ పెన్సిల్‌తో గీచే ఉంటారు.

మరి మీరు గీచిన వృత్తాలకు, వృత్తాకార వస్తువులకు మధ్యగల బేధాన్ని చెప్పగలరా?

మనం పైన గమనించిన వృత్తాకార వస్తువులన్నీ మందంగల త్రిమితీయ వస్తువులు కాగా వృత్తాలన్నీ మందంలేని ద్విమితీయ ఆకారాలు.

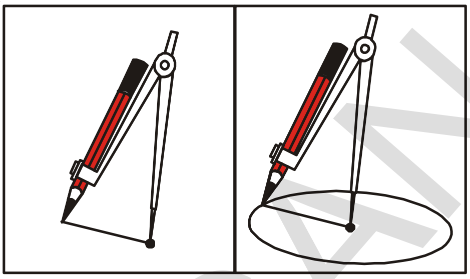
వృత్తానికి మరొక ఉదాహరణను తీసుకొందాం. మీరు నూనె గానుగను చూసే ఉంటారు. గానుగకు కట్టిన ఎద్దు తిరుగుచున్న మార్గం యొక్క ఆకారాన్ని మీరు గుర్తించగలరా. ఇది వృత్తాకారంలో ఉంటుంది.



ఎద్దు తిరుగుచున్న మార్గం వెంట గీతను గీస్తే అది ఒక వృత్తాకారం ఉంటుంది. ఎద్దు లాగుచున్న కర్ర ఒక చివర గానుగకు స్థిరంగా బిగించబడి ఉంటుంది. కర్ర రెండవ చివర ఎద్దు లాగుతూ ఉంటుంది. ఈ స్థిర బిందువే వృత్త కేంద్రం మరియు కర్ర పొడవు వ్యాసార్థం అవుతుంది.

నిత్య జీవితంలోగల ఇటువంటి ఉదాహరణలను మరికొన్నింటిని మీరు గుర్తించగలరేమో ప్రయత్నించండి.

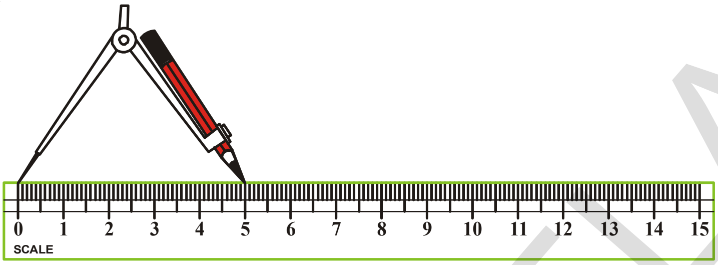
ముందుగా వృత్తలేఖిని సాయంతో ఒక వృత్తాన్ని గీయుటను గురించి తెలుసుకుందాం.

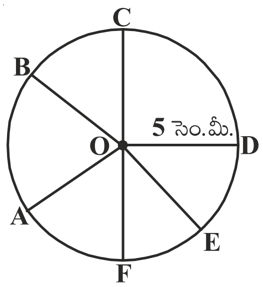


ఒక పెన్సిల్‌ను వృత్త లేఖినికి బిగించండి. వృత్త లేఖిని యొక్క వాడియైన కొన (చివర)ను కాగితంపై స్థిరంగా ఉంచండి. వృత్తాన్ని గీయుటకు ఈ కొనను స్థిరంగా ఉంచుతూ పెన్సిల్‌తో గుండ్రంగా కాగితంపై గీయండి.

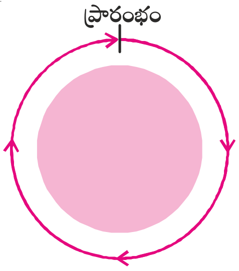
కావలసిన వ్యాసార్థంతో వృత్తాన్ని గీయటానికి మనకు కొలత అవసరమవుతుంది.

వృత్తలేఖిని కొన మరియు పెన్సిల్ కొనల మధ్య దూరం ఇచ్చిన వ్యాసార్థానికి సమానంగా ఉండునట్లు వృత్తలేఖినిని తెరచి. ఒక స్థిరబిందువు 'O' గుర్తించుము. (పటములోని వృత్త వ్యాసార్థం 5 సెం.మీ.) పైన వర్ణించిన విధంగా వృత్తాన్ని గీయండి.





పటంలో OA, OB, OC, OD, OE మరియు OF లను కొలిస్తే ప్రతి రేఖాఖండం పొడవు ఇచ్చిన వ్యాసార్థమైన 5 సెం.మీ.కు సమానంగా ఉండుటను మీరు గమనిస్తారు. వృత్తంపై మరికొన్ని బిందువులను గుర్తించి వాటి దూరాలను 'O' నుండి కొలిచి చూస్తే మీరేమి గమనిస్తారు? " 'వృత్తం" అనేది ఒక తలంలో ఒక స్థిర బిందువు నుండి స్థిరదూరంలోగల బిందువుల సముదాయం" గా గుర్తిస్తారు.



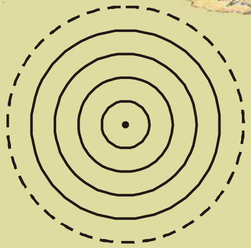
స్థిరబిందువు 'O' ను వృత్త కేంద్రం అని OA (OB లేక OC లేక....) స్థిర దూరాలను వ్యాసార్థం అని అంటారు.

నరసింహ ఒక వృత్తాకార పార్కులో ఒక చోటు నుండి నడవటం ప్రారంభించి ఒక చుట్టును పూర్తిచేసెను. నరసింహ నడచిన దూరాన్ని మీరేమి పిలుస్తారు? ఇది వృత్తాకార పార్కు చుట్టూ ఉండే హద్దు యొక్క మొత్తం పొడవు. దీనిని పార్కు యొక్క చుట్టుకొలత అంటారు.

కావున ఒక వృత్తం యొక్క మొత్తం పొడవును వృత్త పరిధి అంటారు.

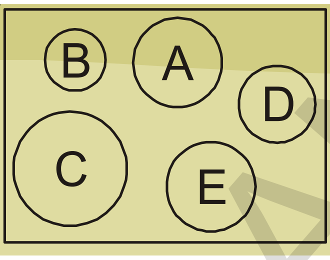
కృత్యం

ఈ కింది కృత్యాన్ని చేద్దాం. కాగితంపై ఒక బిందువును గుర్తించండి. ఈ బిందువును కేంద్రంగా తీసుకొని ఏదేని వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. ఇదే కేంద్రంతో వ్యాసార్థాన్ని పెంచి లేదా తగ్గించి మరికొన్ని వృత్తాలను గీయండి. ఈ కృత్యం ద్వారా గీచిన వృత్తాలను ఏమని పిలుస్తారు?

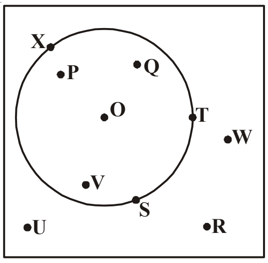


ఒకే కేంద్రం కలిగి వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు గల వృత్తాలను **ఏక కేంద్ర వృత్తాలు** అంటారు.

ఇది చేయండి



1. పటములో వృత్తం A నకు సర్వసమానంగా ఉన్న వృత్తాలను గుర్తించండి.
2. వృత్తాల యొక్క ఏ కొలత వాటిని సర్వసమానం చేస్తుంది.



ఒక వృత్తం అది ఉండే తలాన్ని మూడు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అవి (i) వృత్తం యొక్క లోపలి భాగం దీనినే వృత్త అంతరం అని కూడా అంటారు. (ii) వృత్తం రేఖ. దీనిని వృత్త పరిధి అని కూడా అంటారు. (iii) వృత్తం బయటి భాగం లేదా వృత్త బాహ్యము. పటంలో వృత్త అంతరం, వృత్త బాహ్యం మరియు వృత్త పరిధిపై గల బిందువులను రాయండి.

వృత్తము మరియు వృత్త అంతరం కలసి వృత్తాకార ప్రాంతాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

కృత్యం

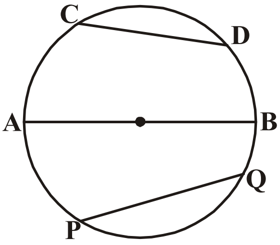
ఒక పలుచని గుండ్రని కాగితం (వృత్తాకార కాగితం) తీసుకొని, దానిని సగానికి (మధ్యకు) మడచి తెరవండి. మరలా మరొక సగానికి మడచి తెరవండి. ఇదే విధంగా అనేకసార్లు తిరిగి చేయండి. చివరికి తెరిచి చూస్తే మీరేమి గమనిస్తారు?

కాగితం మడతలన్నీ ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొనుటను మీరు గమనిస్తారు. ఈ ఖండన బిందువును ఏమంటారో జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. ఇది వృత్తం యొక్క కేంద్రం.

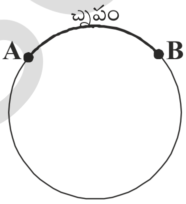
విభాగిని సహాయంతో ప్రతి మడత పొడవును కొలవండి. మీరేమి గమనిస్తారు? ఈ పొడవులన్నీ సమానం మరియు ప్రతి మడత వృత్తాన్ని రెండు సమాన అర్థభాగాలుగా విభజిస్తుంది. దీనిని వ్యాసము అంటారు. వ్యాసము వృత్త వ్యాసార్థానికి రెట్టింపు.

పై కృత్యంలో మనం కాగితాన్ని సగానికే కాక ఏ విధంగా మడచినను ఏర్పడే మడతలను గీతలుగా భావిస్తే అవి వృత్తజ్యాలు అగును.

కాబట్టి వృత్తంపై ఏవేని రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని 'వృత్తజ్యా' అంటారు.



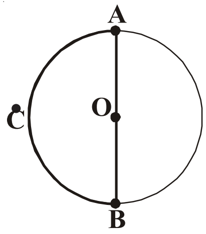
పటంలో CD, AB మరియు PQ లు వృత్తజ్యాలు. వృత్త కేంద్రం గుండా పోయే జ్యా వృత్త వ్యాసము అవుతుంది.



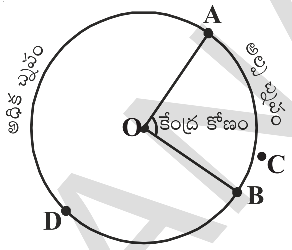
(i)

పటం (i) లో A మరియు B లు వృత్తంపై కల రెండు బిందువులు. అవి వృత్త పరిధిని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తున్నాయి. ఒక వృత్తంపై ఏవేని రెండు బిందువుల మధ్యగల భాగాము వృత్త చాపము పటం (i) లో AB ని చాపమని పిలుస్తాము. దీనిని $\overset{\frown}{AB}$ గా సూచిస్తాం. వృత్తం యొక్క చివరి బిందువులు, వ్యాసం చివరి

బిందువులు కూడా అయితే ఆ చాపాన్ని అర్ధవృత్త చాపము లేదా అర్ధవృత్తము అని పిలుస్తాం. పటం (ii)లో $\overset{\frown}{ACB}$ ఒక అర్ధ వృత్తం.

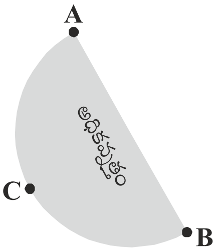


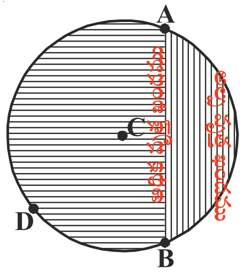
(ii)



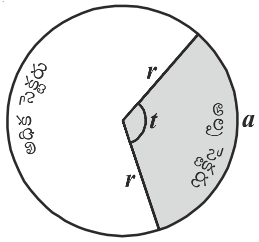
(iii)

ఒక చాపం పొడవు అర్ధవృత్తం కన్నా చిన్నది అయితే ఆ చాపానిన లఘు చాపం లేదా అల్ప చాపం అని, చాపం పొడవు అర్ధవృత్తం కన్నా పెద్దది అయితే ఆ చాపాన్ని అధిక చాపం అని పిలుస్తారు. పటం (iii). $\overset{\frown}{ACB}$ అల్పచాపం మరియు ADB అధిక చాపం.





చాపం చివరి బిందువులను ఒక జ్యాతో కలిపితే, ఆ జ్యా వృత్తాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అల్ప చాపానికి మరియు జ్యాకు మధ్యగల ప్రాంతాన్ని అల్పవృత్త ఖండమని మరియు జ్యాకు, అధిక చాపానికి మధ్యగల ప్రాంతాన్ని అధిక వృత్త ఖండమని పిలుస్తారు. ఒకవేళ జ్యా కనుక వ్యాసమైతే, అప్పుడు వ్యాసం వృత్తాన్ని రెండు సమాన వృత్త ఖండాలుగా విభజిస్తుంది.



ఒక చాపము మరియు దాని చివరి బిందువులను వృత్త కేంద్రంతో కలిపే వ్యాసార్ధాల చేత ఆవరింపబడిన ప్రాంతాన్ని సెక్టర్ అంటారు. వృత్తంలో ఒక సెక్టర్ అల్ప సెక్టర్ ఐన మిగిలినది అధిక సెక్టరు (సెక్టరును త్రిజ్యాంతరము అని కూడా అంటారు).

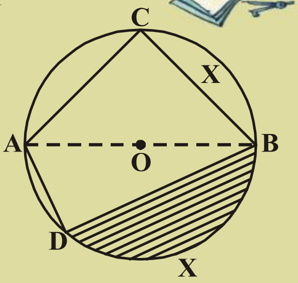
అభ్యాసం 12.1

1. పటంలో 'O' వృత్త కేంద్రం. అయిన దిగువ ఇవ్వబడిన భాగాల పేర్లు తెలపండి.

(i) $\overline{AO}$ (ii) $\overline{AB}$ (iii) $\overset{\frown}{BC}$

(iv) $\overline{AC}$ (v) $\overset{\frown}{DCB}$ (vi) $\overset{\frown}{ACB}$

(vii) $\overline{AD}$ (viii) షేడ్ చేసిన ప్రాంతం



2. సత్యమో, అసత్యమో తెల్పండి.

i. వృత్తం అది ఉండే తలాన్ని మూడు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. ( )

ii. ఒక జ్యా మరియు అల్పచాపలముల మధ్య ఆవరింపబడిన ప్రాంతమే అల్పవృత్తఖండం. ( )

iii. ఒక జ్యా మరియు అధిక చాపముల మధ్య ఆవరించబడిన ప్రాంతమే అధిక వృత్త ఖండం. ( )

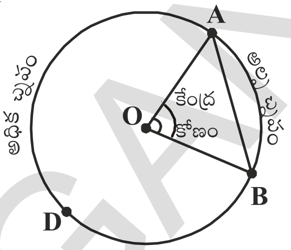
iv. వ్యాసము వృత్తాన్ని రెండు అసమ భాగాలుగా విభజిస్తుంది. ( )

v. రెండు వ్యాసార్ధాలు మరియు ఒక జ్యా చే ఆవరింపబడిన ప్రాంతమే సెక్టర్. ( )

vi. వృత్త జ్యాలన్నింటిలో పెద్ద దానిని వ్యాసం అంటారు. ( )

vii. ఏ వ్యాసం మధ్యబిందువైనా వృత్త కేంద్రం అవుతుంది. ( )

12.2 వృత్తం మీది ఏదేని బిందువు వద్ద జ్యా చే ఏర్పరచు కోణం

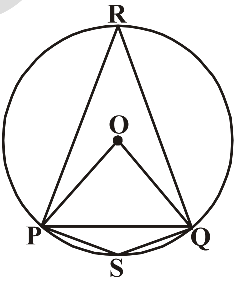


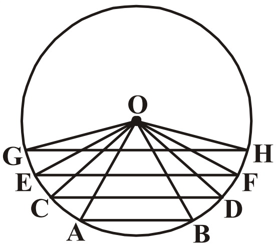
'O' కేంద్రంగా గల వృత్తంపై A మరియు B లు ఏవేని రెండు బిందువులు వృత్తకేంద్రం 'O' ను A, B లతో కలపండి. కేంద్రం వద్ద కోణం ఏర్పడుతుంది. $\angle AOB$ ను జ్యా $\overline{AB}$ కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణమని పిలుస్తారు.

పటంలోని కోణాలు $\angle POQ$, $\angle PSQ$ మరియు $\angle PRQ$ లను మీరు ఏమని పిలుస్తారు?

i. కేంద్రం 'O' వద్ద జ్యా PQ ఏర్పరచు కోణం $\angle POQ$.

ii. అదే విధంగా జ్యా PQ అల్ప వృత్త ఖండం మరియు అధిక వృత్త ఖండాలపై గల బిందువులు S మరియు R వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు వరుసగా $\angle PSQ$ మరియు $\angle PRQ$.





పటంలో వృత్త కేంద్రం 'O' మరియు AB, CD, EF మరియు GH లు వృత్త జ్యాలు.

పటం నుండి మీరేమి గమనించారు?

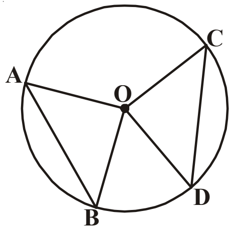
పటం నుండి $GH > EF > CD > AB$ అని గమనించగలం.

అయితే ఈ జ్యాలు కేంద్రము వద్ద ఏర్పరచుతున్న కోణాలను గూర్చి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

కోణాలను పరిశీలించడం ద్వారా జ్యా పొడవు పెరిగిన కొద్దీ అది కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం కొలత పెరుగుటను గమనిస్తాం.

మరి రెండు సమాన జ్యాలను తీసుకుంటే అది కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు ఎలా ఉంటాయో ఆలోచించండి.

'O' కేంద్రంగా గల వృత్తాన్ని నిర్మించి దానిపై వృత్తలేఖిని మరియు స్కేలు సహాయంతో రెండు సమాన జ్యాలు AB మరియు CD లను గీయండి.



కేంద్రం 'O' ను A, B, C మరియు D లతో కలపండి. ఇప్పుడు $\angle AOB$ మరియు $\angle COD$ కోణాల కొలతలు కనుగొనండి. అవి ఒకదానికి మరొకటి సమానమేనా?

ఇంకొక రెండు సమాన జ్యాలను గీచి అవి వృత్త కేంద్రం వద్ద చేయు కోణాలను కొలచి చూడండి. ఆ కోణాలు సమానంగా ఉండుటను మీరు గమనిస్తారు.

ఈ సత్యాన్నినిరూపించుటకు ప్రయత్నిద్దాం.

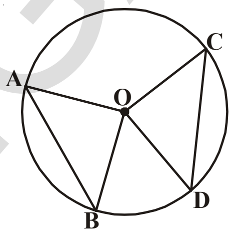
సిద్ధాంతం 12.1 : ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానం.

దత్తాంశం : 'O' కేంద్రంగా గల వృత్తలో $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ లు రెండు సమాన జ్యాలు. అవి కేంద్రంవద్ద ఏర్పరచిన కోణాలు $\angle AOB$ మరియు $\angle COD$.

సారాంశం : $\angle AOB = \angle COD$

నిర్మాణం : వృత్త కేంద్రాన్ని జ్యాల యొక్క అంత్య బిందువులతో కలుపుము. అప్పుడు ΔAOB మరియు ΔCOD లు ఏర్పడతాయి.

నిరూపణ : Δ AOB మరియు Δ COD లలో



AB = CD (దత్తాంశం)

OA = OC (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు)

OB = OD (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు)

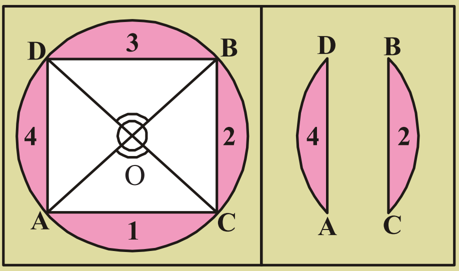
కావున $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (భు.భు.భు. నియమం)

కావున $\angle AOB \cong \angle COD$ (సర్వసమాన త్రిభుజపు అనురూప కోణాలు)

ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు సమానమైన, జ్యాల గురించి నీవేమి చెప్పగలవు? అవి సమానం అవుతాయా? లేదా? ఈ విషయాలన్నీ కింది కృత్యం ద్వారా అన్వేషిద్దాం.

కృత్యం

ఒక గుండ్రని (వృత్తాకార) కాగితాన్ని తీసుకోండి. వృత్త అంచులు ఏకీభవించునట్లు ఏదేని ఒక వ్యాసం వెంట మడవండి. మడతను తెరచి ఇంకొక వ్యాసం వెంబడి మడవండి. మడతను తెరచి చూచిన రెండు వ్యాసాలు కేంద్రం 'O' వద్ద ఖండించుకొనుటను గమనిస్తాం. రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలు ఏర్పడుతాయి. ఇవి సమానం. వ్యాసం చివరి బిందువుల A, B, C మరియు D అని పేర్లు పెట్టండి.



జ్యాలు $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ మరియు $\overline{AD}$ లను గీయండి.

నాలుగు వృత్త ఖండాలు 1, 2, 3 మరియు 4 లను కత్తిరించండి.

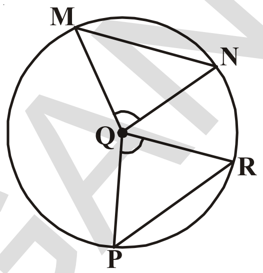
ఈ ఖండాలను జతలుగా ఒకదానిపై మరొకటి ఉంచిన, (1,3) మరియు (2,4) జతలు అంచులు ఏకీభవిస్తాయి.

అంటే $\overline{AD} = \overline{BC}$ మరియు $\overline{AC} = \overline{BD}$ అవుతాయా?

ఒక ప్రత్యేక సందర్భములో పై ధర్మాన్ని పరిశీలించారు. ఇదే విషయాన్ని వేర్వేరు కొలతలుగల సమాన కోణాలు తీసుకొని సరిచూసిన జ్యాలు సమానమగును. కింది సిద్ధాంతము ద్వారా గమనించగలం.

12.1 సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయమును ప్రవచించగలరా?

సిద్ధాంతం 12.2 : ఒక వృత్తంలోని జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు సమానమైన ఆ జ్యాలు సమానం.



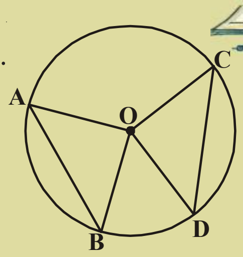
ఇది ఇంతకు ముందు చెప్పబడిన సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం ఇచ్చిన ప్రకారం $\angle PQR \cong \angle MQN$

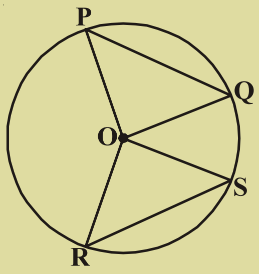
అని తీసుకుంటే $\Delta PQR \cong \Delta MQN$ అని మీరు గమనించగలరు (ఎందువలన?)

$PR = MN$? (ఎలా అయింది?)

అభ్యాసం 12.2

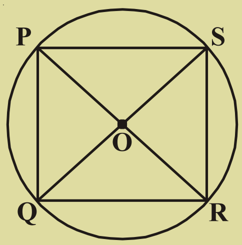
1. పటంలో $AB = CD$ మరియు $\angle AOB = 90^0$ అయిన $\angle COD$ ను కనుగొనండి.





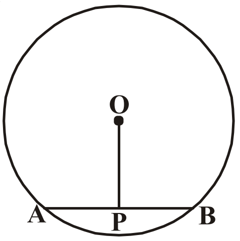
2. పటంలో $PQ = RS$ మరియు $\angle ORS = 48^0$. అయిన $\angle OPQ$ మరియు $\angle ROS$ లను కనుగొనండి.

3. పటంలో PR మరియు QS లు రెండు వ్యాసాలు అయిన $PQ = RS$ అగునా?



12.3 వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యాకు గీచిన లంబము

- 'O' కేంద్రంగా ఒక వృత్తాన్ని నిర్మించండి. జ్యా $\overline{AB}$ ని గీయండి. మరియు కేంద్రం 'O' నుండి జ్యా $\overline{AB}$ కి ఒక లంబాన్ని గీయండి.
- లంబం మరియు జ్యా $\overline{AB}$ ల ఖండన బిందువు P అనుకోండి.
- PA మరియు PB లను కొలచిన తర్వాత $PA = PB$ అగునేమో చూడండి.



సిద్ధాంతం 12.3 : ఒక వృత్త కేంద్రం నుండి ఏదేని జ్యాకు గీచిన లంబం, జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది.

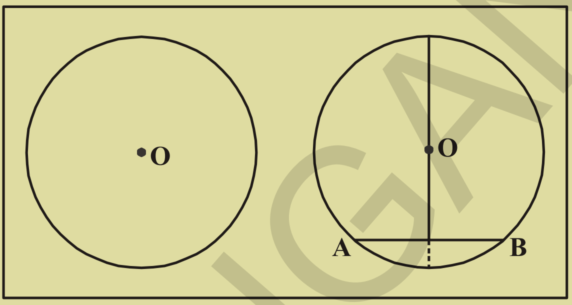
O ను A మరియు B లకు కలపటం ద్వారా 'నిరూపణ' ను రాసేందుకు ప్రయత్నించండి మరియు $\Delta OPA \cong \Delta OPB$ అని చూపండి.

12.3 సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం ఏమిటి?

"వృత్త కేంద్రం నుండి, జ్యాను సమద్విఖండన చేసే రేఖ జ్యాకు లంబంగా ఉంటుంది."

కృత్యం

వృత్తాకారంలోగల ఒక కాగితాన్ని తీసుకొని దాని కేంద్రం ‘O’ ను గుర్తించండి. వృత్తం యొక్క కొంత భాగాన్ని మడచి తిరిగి తెరవండి. ఏర్పడిన మడత జ్యా AB ను సూచిస్తుందనుకోండి. ఇంకొక మడత వృత్త కేంద్రం మరియు జ్యా మధ్య బిందువు ‘D’ గుండా పోయేటట్లు కాగితాన్ని మరల మడవండి. ఇప్పుడు మడతల మధ్య ఏర్పడిన కోణాలను కొలవండి. అవి లంబకోణాలు.

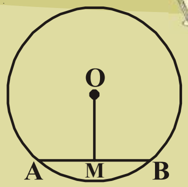


“కాబట్టి వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యాను సమద్విఖండన చేసే రేఖ జ్యాకు లంబంగా ఉంటుంది” అని పరికల్పన చేయవచ్చు.

ప్రయత్నించండి

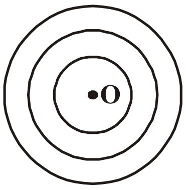
‘O’ కేంద్రంగా కల వృత్తంలో AB ఒక జ్యా మరియు ‘M’ జ్యా మధ్యబిందువు. అయినా $\overline{OM}$, AB కి లంబంగా ఉండునని నిరూపించండి.

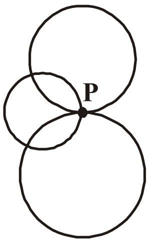
(**సూచన :** OA, OB లను కలిపి ΔOAM మరియు ΔOBM లను పోల్చండి.)



12.3.1 వృత్తాన్ని నిర్ధారించే మూడు బిందువులు

‘O’ అనునది ఒక తలంలోని బిందువు. ‘O’ కేంద్రంగా మనం గీయగల వృత్తాలు ఎన్ని? మనం వృత్తాలను ఎన్నింటినైనా గీయగలం. ఈ వృత్తాలన్నింటినీ ఏక కేంద్ర వృత్తాలంటారని తెలుసుకున్నాం. ‘P’ బిందువు వృత్త కేంద్రం కానప్పటికీ మనం ‘P’ గుండా అనేక వృత్తాలను గీయగలము.

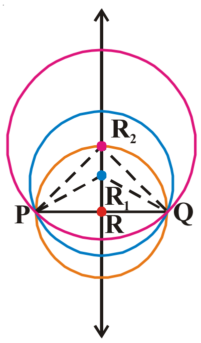


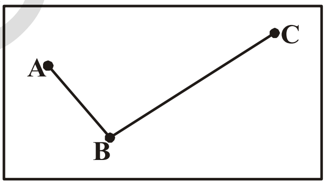


P మరియు Q బిందువులను తీసుకోండి.

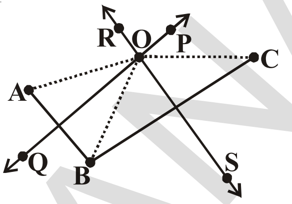
ఇచ్చిన రెండు బిందువుల గుండా పోయేటట్లు గీయగల వృత్తాలు ఎన్ని? P మరియు Q ల ద్వారా పోయేటట్లు చాలా వృత్తాలను గీయగలగడాన్ని గమనిస్తాం.

P మరియు Q లను కలిపి PQ కు లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయండి. ఈ లంబ సమద్విఖండన రేఖపై ఏదేని మూడు బిందువులు R, R_1 మరియు R_2 లను గుర్తించండి. R, R_1 మరియు R_2 కేంద్రాలలో వరుసగా RP, R_1P మరియు R_2P వ్యాసార్థాలతో వృత్తాలు గీయండి. ఈ వృత్తాలు గీయండి. ఈ వృత్తాలన్నీ ‘Q’ గుండా వెళ్లుచున్నాయా? (ఐతే ఎందువలన?)





మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువులు ఇస్తే, వాటి ద్వారా గీయగల వృత్తాలు ఎన్ని? దీనిని పరిశీలిద్దాం. సరేఖీయాలు కాని ఏవేని మూడు బిందువులు A, B మరియు C లను తీసుకోండి. AB మరియు BC లను కలపండి.



$\overline{AB}$ మరియు $\overline{BC}$ ల లంబసమద్విఖండన రేఖలు $\overleftrightarrow{PQ}$ మరియు $\overleftrightarrow{RS}$ లను గీయండి. అవి ఒకే ఒక బిందువు ‘O’ వద్ద ఖండించుకొంటాయి. (ఎందుకంటే “రెండు వేర్వేరు రేఖలు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ ఉమ్మడి బిందువులను కలిగియుండవు”)

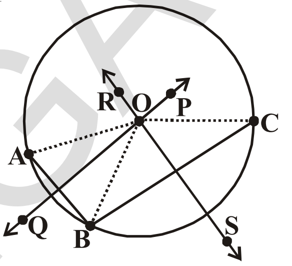
కనుక ఇప్పుడు ‘O’ బిందువు $\overline{AB}$ లంబసమద్విఖండన రేఖపై ఉంటుంది.

కాబట్టి $OA = OB.$ .....(i)

$\overleftrightarrow{PQ}$ పైగల ప్రతి బిందువు A, B ల నుండి సమదూరములో ఉండుట వలన)

అంతేగాక ‘O’ బిందువు $\overline{BC}$ లంబసమద్విఖండన రేఖపై కూడా ఉంటుంది.

కాబట్టి $OB = OC$ ..... (ii)



(i) మరియు (ii) సమీకరణాల నుండి

$OA = OB = OC$ అని చెప్పగలం. (సంక్రమణ ధర్మం)

కాబట్టి A, B మరియు C ల నుండి సమానదూరంలో ఉండే ఏకైక బిందువు ’O’. అందుచేత మనం ‘O’ కేంద్రంగా మరియు OA వ్యాసార్థంతో గీచిన వృత్తం B మరియు C బిందువుల ద్వారా కూడా పోతుంది. కావున A, B మరియు C ల ద్వారా పోయే వృత్తం ఒకే ఒకటి ఉంటుంది.

పై పరిశీలనల నుండి “మూడు సరేఖీయాలు కానీ బిందువుల ద్వారా పోయే ఏకైక వృత్తం ఉంటుంది అనే పరికల్పనను చేయవచ్చు.

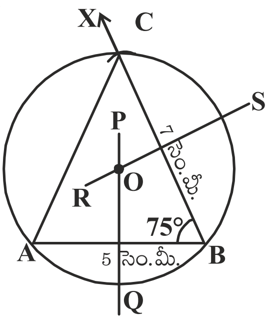
గమనిక : AC ని కలిపిన ΔABC ఏర్పడును. దాని అన్ని శీర్షాలు వృత్తముపై ఉండును. ఈ వృత్తాన్ని ఆ త్రిభుజపు పరివృత్తం అంటాం మరియు ‘O’ ను పరివృత్త కేంద్రం అంటాం. OA లేదా OB లేదా OC లు పరివృత్త వ్యాసార్ధం అగును. సాధారణంగా పరివృత్త వ్యాసార్ధాన్ని ‘R’ తో సూచిస్తారు.

ప్రయత్నించండి

మూడు బిందువులు సరేఖీయాలైన, వాటి గుండా పోయేట్లు గీయగల వృత్తాలెన్ని? ఒక రేఖపై ఏవేని మూడు బిందువులను తీసుకొని వాటి గుండా పోయేటట్లు వృత్తాలను గీయడానికి ప్రయత్నించండి.

ఉదాహరణ-1 : $AB = 5$సెం.మీ.; $\angle B = 75^0$ మరియు $BC = 7$సెం.మీ. లు గా గల ΔABC యొక్క పరివృత్తాన్ని గీయండి.

సాధన : $AB = 5$ సెం.మీ. పొడవుగల రేఖాఖండాన్ని గీయండి. $\angle B = 75^0$ ఉండునట్లు B వద్ద కోణకిరణం BX ను నిర్మించండి. B కేంద్రంగా 7సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపరేఖను గీయండి.చాపరేఖ $\overrightarrow{BX}$ ను C వద్ద ఖండించును. C మరియు A లను కలపగా ΔABC ఏర్పడుతుంది. $\overline{AB}$ మరియు $\overline{BC}$ లకు లంబసమద్విఖండన రేఖలు $\overleftrightarrow{PQ}$ మరియు $\overleftrightarrow{RS}$ లను గీయండి. $\overleftrightarrow{PQ}$ మరియు $\overleftrightarrow{RS}$ ల ఖండన బిందువు ‘O’. ఇప్పుడు ‘O’ ను కేంద్రంగా మరియు OA ను వ్యాసార్థంగా ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. B మరియు C బిందువుల ద్వారా కూడా పోతుంది. ఇదియే కావలసిన పరివృత్తం.

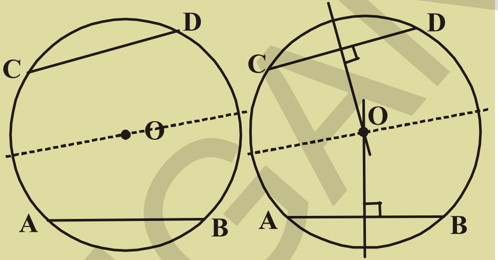


12.3.2 జ్యాలు మరియు కేంద్రం నుండి వాటికి గల దూరం

ఒక వృత్తానికి గల జ్యాలు అపరిమితం. మనం వృత్తంలో ఒకే పొడవులు గల అనేక జ్యాలను గీస్తే, కేంద్రం నుండి సమాన జ్యాలకు గల దూరం ఎలా ఉంటుంది? ఈ కింది కృత్యం ద్వారా ఈ విషయాన్ని పరిశీలిద్దాం.

కృత్యం

వృత్తాన్ని దానిని సగానికి మధ్యలో మడవండి. ఇప్పుడు. అర్థవృత్త చాపపు అంచు దగ్గర యుంచి మడత విప్పిన మీకు రెండు సర్వసమాన జ్యాల మడతలు వచ్చును వాటిని $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ లుగా గుర్తించండి. కేంద్రాన్ని 'O' గా గుర్తించండి. కేంద్రం 'O' నుండి ప్రతి జ్యాకు లంబపు మడత పెట్టండి. విభాగిని ఉపయోగించి వృత్త కేంద్రం 'O' నుండి జ్యాలకు గల లంబ దూరాలను పోల్చండి.

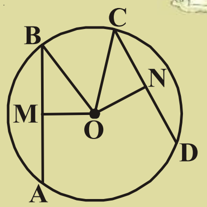


ఈ కృత్యాన్ని వృత్తం మడతల ద్వారా సమాన జ్యాలు ఏర్పరుస్తూ అనేకసార్లు మరలా చేయండి. మీ పరిశీలనలను ఒక పరికల్పగా తెల్పండి.

"సర్వసమాన జ్యాలు వృత్త కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

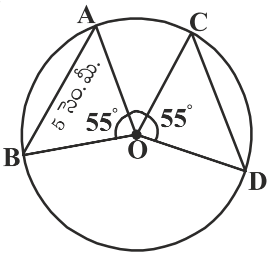
ప్రయత్నించండి

పటంలో 'O' వృత్త కేంద్రం మరియు AB = CD; OM మరియు ON లు వరుసగా $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ లకు కేంద్రం నుండి గీచిన లంబాలు. అయిన OM = ON అని నిరూపించండి.



పై పరికల్పన నిరూపించబడినది కావున ఇది "సమాన పొడవులు గల జ్యాలు కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి" అనే సిద్ధాంతంగా మారుతుంది.

ఉదాహరణ-2 : పటంలో 'O' వృత్త కేంద్రం అయిన CD పొడవును కనుక్కోండి.



సాధన : Δ AOB మరియు Δ COD లలో

OA = OC (ఎందువలన?)

OB = OD (ఎందువలన?)

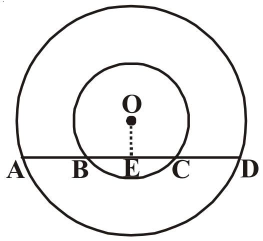
$\angle AOB = \angle COD$

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta COD$

$\because$ AB = CD (సర్వసమాన త్రిభుజముల సర్వసమాన భాగాలు)

AB = 5 సెం.మీ. కావున CD = 5 సెం.మీ.

ఉదాహరణ-3 : పక్క పటంలో 'O' కేంద్రంగా రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాలు కలవు. పెద్ద వృత్తం యొక్క జ్యా AD చిన్న వృత్తాన్ని B మరియు C ల వద్ద ఖండిస్తుంది. అయిన AB = CD అని చూపండి.



దత్తాంశం : 'O' కేంద్రంగా కల ఏక కేంద్ర వృత్తాలలో పెద్ద వృత్తం యొక్క జ్యా $\overline{AD}$ చిన్న వృత్తాన్ని B మరియు C ల వద్ద ఖండిస్తోంది.

సారాంశం : AB = CD

నిర్మాణం : $\overline{AD}$ కు లంబంగా $\overline{OE}$ ను గీయుము.

నిరూపణ : 'O' కేంద్రంగా గల పెద్ద వృత్తానికి AD ఒక జ్యా మరియు $\overline{OE}$, $\overline{AD}$ కి లంబము.

∵ $\overline{AD}$ ను $\overline{OE}$ సమద్విఖండన చేస్తుంది (కేంద్రం నుండి జ్యాకు గీచిన లంబం, జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది.)

∴ AE = ED ..... (i)

'O' కేంద్రంగా గల చిన్న వృత్తానికి $\overline{BC}$ ఒక జ్యా మరియు $\overline{AD}$ కు $\overline{OE}$ లంబం.

∵ $\overline{BC}$ ను $\overline{OE}$ సమద్విఖండన చేస్తుంది. (పై సిద్ధాంతం నుండి)

∴ BE = CE ..... (ii)

సమీకరణం (ii) ను (i) నుండి తీసివేయగా

AE - BE = ED - EC

AB = CD

అభ్యాసం 12.3

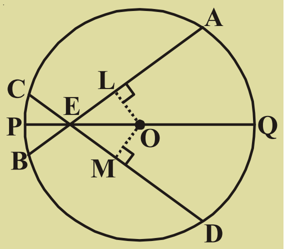
1. కింది త్రిభుజాలను గీచి వాటికి పరివృత్తాలను నిర్మించండి.

   (i) ΔABC లో $AB = 6$సెం.మీ., $BC = 7$సెం.మీ. మరియు $\angle A = 60^{\circ}$.

   (ii) ΔPQR లో $PQ = 5$సెం.మీ., $QR = 6$సెం.మీ. మరియు $RP = 8.2$సెం.మీ.

   (iii) ΔXYZ లో $XY = 4.8$సెం.మీ., $\angle X = 60^{\circ}$ మరియు $\angle Y = 70^{\circ}$.

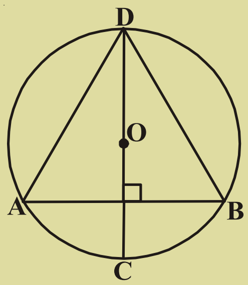
2. $AB = 5.4$సెం.మీ. గీచి A, B ల గుండా పోయే రెండు వృత్తాలను గీయండి.



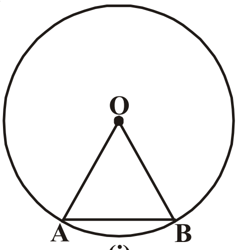
3. రెండు వృత్తాలు రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించుకుంటే వాటి కేంద్రాలు ఉమ్మడి జ్యా యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖపై ఉంటాయని నిరూపించండి.

4. ఒక వృత్తంలో ఖండించుకొనుచున్న రెండు జ్యాలు వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా పోయే వ్యాసంతో సమాన కోణాలు చేస్తే ఆ జ్యాల పొడవులు సమానమని నిరూపించండి.

5. పక్క పటంలో 'O' కేంద్రంగా గల వృత్తంలో AB ఒక జ్యా CD వ్యాసం AB కు లంబంగా ఉంది. అయిన AD = BD అని చూపండి.



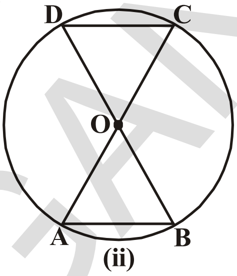
12.4 వృత్త చాపము ఏర్పరచే కోణం



(i)

పటం (i) లో $\overline{AB}$ ఒక జ్యా మరియు $\overset{\frown}{AB}$ ఒక చాప రేఖ (అల్ప చాపం) జ్యా మరియు చాపలు రేఖలకు ఒకే అంత్య బిందువులు A మరియు B లు ఉన్నాయి.

కావున జ్యా కేంద్రం 'O' వద్ద ఏర్పరచే కోణం, చాపరేఖ కేంద్రం 'O' వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి సమానం.



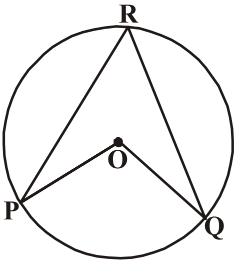
(ii)

పటం (ii) లో 'O' కేంద్రంగా గల వృత్తంలో $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ లు రెండు జ్యాలు. $AB = CD$ అయిన $\angle AOB = \angle COD$.

దీనిని బట్టి చాపరేఖ $\overset{\frown}{AB}$ కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణం, చాపరేఖ $\overset{\frown}{CD}$ కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి సమానమని చెప్పవచ్చు. (అంటే $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ అని నిరూపించాలి.)

పై పరిశీలనల నుండి సమాన పొడవులు గల చాపాలు కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానమని మనం నిర్ధారించవచ్చు.

12.4.1 ఒక చాప రేఖ మిగిలిన వృత్తభాగంపై ఏర్పరచు కోణము :

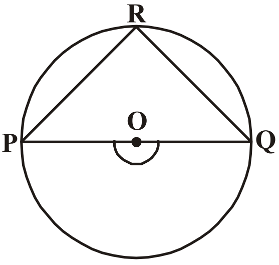


(i)

'O' కేంద్రం గల ఒక వృత్తాన్ని తీసుకోండి.

$\overset{\frown}{PQ}$ అనునది పటం (i) లో అల్పచాపం పటం (ii) లో అర్థవృత్తం మరియు పటం (iii) లో అధిక చాపంగాను ఉన్నాయి.

వృత్త పరిధి పై ఏదేని బిందువు R ను తీసుకోండి. R ను P, Q బిందువులతో కలపండి.

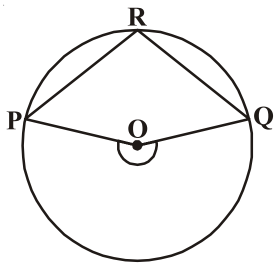


(ii)

PQ చాపము R బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణం $\angle PRQ$ కాగా కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణం $\angle POQ$.

కింది పట్టికను ఇచ్చిన పటాలకు నింపండి.

కోణం	పటం (i)	పటం (ii)	పటం (iii)
$\angle PRQ$			
$\angle POQ$			

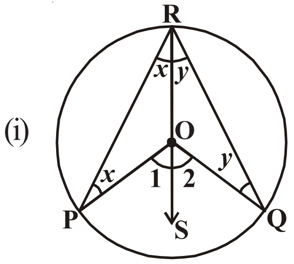


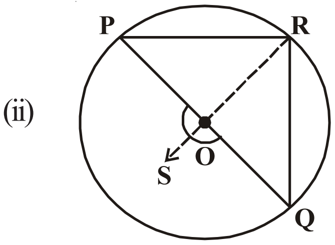
(iii)

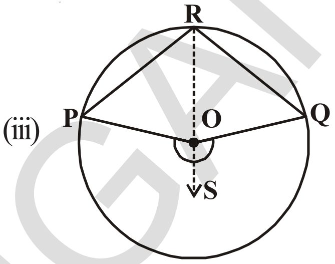
మరికొన్ని వృత్తాలను గీచి వృత్త పరిధిపై మరియు వృత్త కేంద్రం వద్ద కోణాలను ఏర్పరచండి. మీరేమి గమనిస్తారు? ఒక చాపము కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణానికి; అదే చాపము మిగిలిన వృత్తంపై ఏర్పరచు కోణానికి మధ్యగల సంబంధంపై ఒక పరికల్పనను తయారుచేయగలరా? పై పరిశీలనల నుండి ఒక చాపము కేంద్రం 'O' వద్ద ఏర్పరచే కోణం మిగిలిన వృత్తంపై ఏదేని బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి రెట్టింపు అని చెప్పవచ్చు.

మనం ఇప్పుడు ఈ పరికల్పనను సిద్ధాంత పరంగా నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతం : ఒక చాపము వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచుకోణం, ఆ చాపం మిగిలిన వృత్తంపై ఏదేని బిందువువద్ద ఏర్పరిచే కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది.







దత్తాంశం : 'O' అనునది వృత్తకేంద్రం.

చాపము $\overset{\frown}{PQ}$ కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణం $\angle POQ$.

R అనునది ($\overset{\frown}{PQ}$ పై లేనట్టి) మిగిలిన వృత్తం మీద ఏదేని ఒక బిందువు.

నిరూపణ : ఇక్కడ (i) $\overset{\frown}{PQ}$ ఒక అల్ప చాపం, (ii) $\overset{\frown}{PQ}$ ఒక అర్ధవృత్తం మరియు (iii) $\overset{\frown}{PQ}$ ఒక అధిక చాపం అయ్యే మూడు సందర్భాలు కలవు.

R బిందువును 'O' కలిపి S బిందువు దాకా పొడిగించడం ద్వారా నిరూపణను మొదలుపెడదాం. (అన్ని సందర్భాలలోనూ)

అన్ని సందర్భాలలోను ΔROP లో

$OP = OR$ (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు)

$\therefore \angle ORP = \angle OPR$ (సమద్విబాహు త్రిభుజంలో సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉండే కోణాలు సమానం).

$\angle POS$ కోణము ΔROP కు బాహ్య కోణం (నిర్మాణం)

$\angle POS = \angle ORP + \angle OPR$ లేదా $2\angle ORP$ ..... (1)

($\because$ బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

ఇదేవిధంగా ΔROQ లో

$\angle SOQ = \angle ORQ + \angle OQR$ లేదా $2\angle ORQ$ ..... (2)

($\because$ బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

(1) మరియు (2) ల నుండి

$\angle POS + \angle SOQ = 2(\angle ORP + \angle ORQ)$

అంటే ఇది $\angle POQ = 2\angle QRP$ తో సమానం ..... (3)

సౌలభ్యము కొరకు

$\angle ORP = \angle OPR = x$ అనుకోండి.

$\angle POS = \angle 1$

$\angle 1 = x + x = 2x$

$\angle ORQ = \angle OQR = y$ అనుకోండి.

$\angle SOQ = \angle 2$

$\angle 2 = y + y = 2y$

అంటే $\angle POQ = \angle 1 + \angle 2 = 2x + 2y$

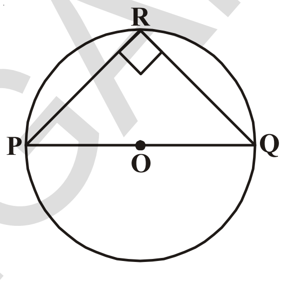
$= 2(x+y) = 2(\angle PRO + \angle ORQ)$

అంటే $\angle POQ = 2\angle PRQ$

కావున “ఒక చాపము వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణం, ఆ చాపం మిగిలిన వృత్తం పై ఏదేని బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది” అనే సిద్ధాంతం నిరూపించడమైనది.

ఉదాహరణ-4 : ‘O’ అనునది వృత్త కేంద్రం. PQ ఒక వ్యాసము. అయిన $\angle PRQ = 90^o$ అని నిరూపించుము. (లేదా)

అర్ధవృత్తం లోని కోణం లంబకోణమని చూపండి.



నిరూపణ : ‘O’ కేంద్రంగా కల వృత్తంలో PQ ఒక వ్యాసం అని ఈయబడినది.

$\because \angle POQ = 180^o$ [సరళరేఖపై ఏదేని బిందువు వద్ద కోణం 180^o]

మరియు $\angle POQ = 2\ \angle PRQ$ [ఒక చాపం వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరిచే కోణం, ఆచాపం మిగిలిన వృత్తంపై ఏదేని బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి రెట్టింపు.]

$$\therefore \angle PRQ = \frac{180^o}{2} = 90^o$$

ఉదాహరణ-5 : పక్క పటంలో x° విలువను కనుగొనండి.

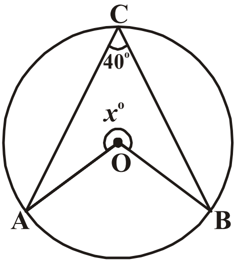
సాధన : $\angle ACB = 40^\circ$ కావున

సిద్ధాంతం ప్రకారం, AB చాపం కేంద్రం వద్ద చేయుకోణం

$$\angle AOB = 2\ \angle ACB = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$$

$$\because \quad x^\circ + \angle AOB = 360^\circ$$

కాబట్టి $x^\circ = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$



12.4.2 ఒకే వృత్త ఖండంలోని కోణాలు

మనం ఇప్పుడు ఒక చాపం ఒకే వృత్త ఖండంలో ఏర్పరచు కోణాల కొలతల గురించి చర్చిద్దాం.

‘O’ కేంద్రంగా గల ఒక వృత్తాన్ని మరియు దాని అల్పచాపం AB తీసుకోండి (పటాన్ని చూడండి). P, Q, R మరియు S లు అధిక చాపంపై అంటే మిగిలిన వృత్తంపై గల బిందువులు. AB అంత్య బిందువులను P, Q, R మరియు S లతో కలపండి. $\angle APB, \angle AQB, \angle ARB$ మరియు $\angle ASB$ లు ఏర్పడుతాయి.

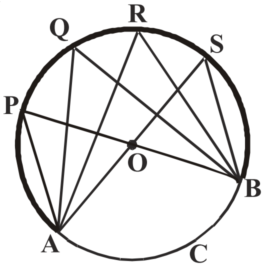
$\therefore \quad \angle AOB = 2\angle APB$ (ఎందువలన?)

$\angle AOB = 2\angle AQB$ (ఎందువలన?)

$\angle AOB = 2\angle ARB$ (ఎందువలన?)

$\angle AOB = 2\angle ASB$ (ఎందువలన?)

కాబట్టి $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \angle ASB$



అంటే ఒక చాపం ఒకే వృత్తం ఖండంలో ఏర్పరచే కోణాలు సమానం అని గమనించండి.

గమనిక : పైన పేర్కొన్న చర్చలోని బిందువులు P, Q, R, S మరియు A, B లన్నీ ఒకే వృత్తంపైన గల బిందువులని గమనించాం. వీటిని ఏమంటారు? ఒకే వృత్తంపై గల బిందువులను చక్రీయ బిందువులంటారు.

పై సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయాన్ని ఈ విధంగా చెప్పవచ్చు.

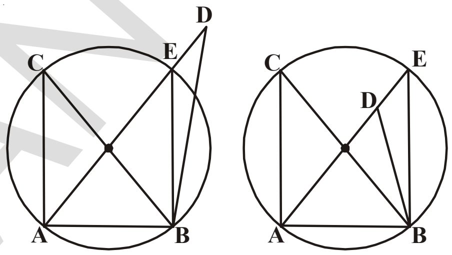
సిద్ధాంతం : రెండు బిందువుల కలిపే రేఖాఖండం (ఆ రేఖాఖండానికి ఒకే వైపునగల) ఏవేని రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు సమానం అయితే ఆ బిందువులన్నీ ఒకే వృత్తంపై ఉంటాయి. అంటే అవి చక్రీయాలు అవుతాయి.

దత్తాంశం : ఏవేని రెండు బిందువులు A, B లను కలుపు రేఖాఖండం $\overline{AB}$ నకు ఒకే వైపున గల రెండు బిందువులు C మరియు D ల వద్ద $\overline{AB}$ చేయు కోణాలు $\angle ACB$ మరియు $\angle ADB$ లు సమానమని ఈయబడినవి.

సారాంశం : A, B, C మరియు D లు ఒకే వృత్తం పైన బిందువులు అనగా చక్రీయ బిందువులు.

నిర్మాణం : సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువులు A, B మరియు C ల గుండా పోయేట్లు ఒక వృత్తాన్ని గీయండి.

నిరూపణ : $\angle ACB = \angle ADB$ అగునట్లుగా D = 'D' బిందువు వృత్తం పైన లేనట్లైతే



వృత్తంపై E లేదా 'E' అనే బిందువు, AD లేదా AD ని పొడిగించినప్పుడు ఖండన బిందువుగా వ్యవస్థితం అవుతుంది.

అంటే A, B, C మరియు E లు ఒకే వృత్తంపై ఉంటాయి కనుక

$\angle ACB = \angle AEB$ (ఎందువలన?)

కానీ $\angle ACB = \angle ADB$ అని ఈయబడినది.

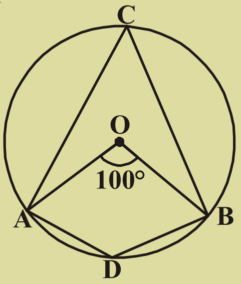
కాబట్టి $\angle AEB = \angle ADB$

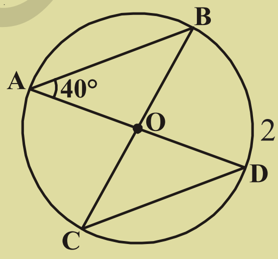
ఇది E మరియు D లు ఏకీభవిస్తే తప్ప సాధ్యం కాదు. (ఎందువలన?)

కావున E కూడా D తో ఏకీభవిస్తుంది.

అభ్యాసం 12.4

1. పటంలో 'O' వృత్తకేంద్రం మరియు $\angle AOB = 100^\circ$ అయిన $\angle ADB$ ని కనుక్కోండి.

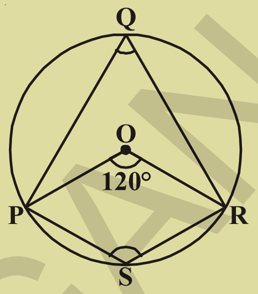


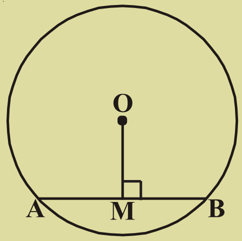


2. పటంలో $\angle BAD = 40^\circ$ అయిన $\angle BCD$ ని కనుగొనండి.

3. పటంలో 'O' వృత్త కేంద్రం మరియు $\angle POR = 120^\circ$ అయిన $\angle PQR$ మరియు $\angle PSR$ లను కనుగనండి.

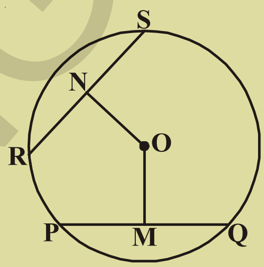
4. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం చక్రీయమైన, అది దీర్ఘచతురస్రం అవుతుంది. మీ జవాబును సమర్థించండి.

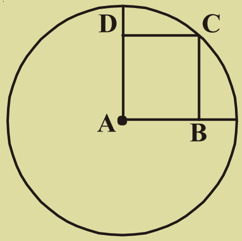




5. పటంలో 'O' వృత్తకేంద్రం OM = 3సెం.మీ. మరియు AB = 8సెం.మీ. అయిన వృత్త వ్యాసార్థాన్ని కనుక్కోండి.

6. పటంలో 'O' వృత్త కేంద్రం మరియు OM, ON లు జ్యాలు PQ, RS లపై కేంద్రం నుండి గీచిన లంబాలు. OM = ON మరియు PQ = 6సెం.మీ. అయిన RS ను కనుక్కోండి.

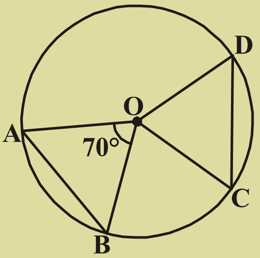




7. A వృత్తకేంద్రం మరియు ABCD ఒక చతురస్రము. BD = 4 సెం.మీ. అయిన వృత్త వ్యాసార్థం ఎంత?

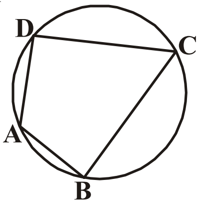
8. ఏదేని వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తాన్ని గీచి దాని కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉండేట్లు రెండు జ్యాలను గీయండి.

9. పటంలో 'O' వృత్త కేంద్రం; మరియు AB, CD లు సమాన పొడవులు గల జ్యాలు $\angle AOB = 70^\circ$ అయిన ΔOCD యొక్క కోణాలను కనుక్కోండి.



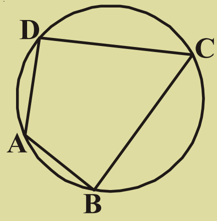
12.5 చక్రీయ చతుర్భుజం

పటంలో చతుర్భుజ శీర్షాలు A, B, C మరియు D లు ఒకే వృత్తంపైన గలవు; ఇటువంటి చతుర్భుజం ABCD ను చక్రీయ చతుర్భుజం అంటారు.



కృత్యం

పటంలో చతుర్భుజ శీర్షాలు A, B, C మరియు D లు ఒకే వృత్తం పైన గలవు, ఇటువంటి చతుర్భుజాలు ABCD లను మూడింటిని గీసి చతుర్భుజ కోణాలను కొలచి పట్టికను నింపండి.

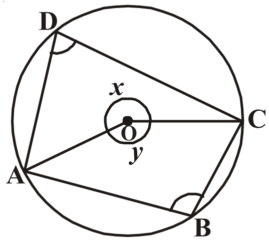


క్ర.సం.	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A+\angle C$	$\angle B+\angle D$
1						
2						
3						
4						

పట్టిక నుండి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

సిద్ధాంతం 12.5 : చక్రీయ చతుర్భుజంలోని ఎదుటి కోణాల జతలు సంపూరకాలు.

దత్తాంశం : ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం.



సారాంశం : $\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

నిర్మాణం : O,A; O,C లను కలుపుము.

ఉపపత్తి : $\angle D = \frac{1}{2}\angle y$ (ఎందువలన?) ..... (i)

$\angle B = \frac{1}{2}\angle x$ (ఎందువలన?) ..... (ii)

(i) మరియు (ii) లను కూడగా

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle x$$

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}(\angle y + \angle x)$$

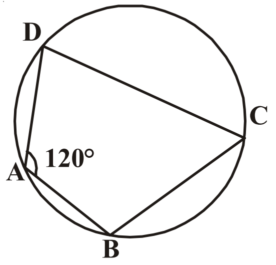
$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \times 360°$$

$$\angle B + \angle D = 180°$$

అదేవిధంగా $\angle A + \angle C = 180°$

ఉదాహరణ-6 : పటంలో $\angle A = 120^\circ$ అయిన $\angle C$ ను కనుగొనుము

సాధన : ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం



కావున $\angle A + \angle C = 180^\circ$

$120^0 + \angle C = 180^\circ$

కావున $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

పై సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయం ఏమిటి?

“ఒక చతుర్భుజంలోని ఏ రెండు ఎదుటి కోణాల మొత్తం 180° అయిన ఆ చతుర్భుజం చక్రీయ మవుతుంది.”

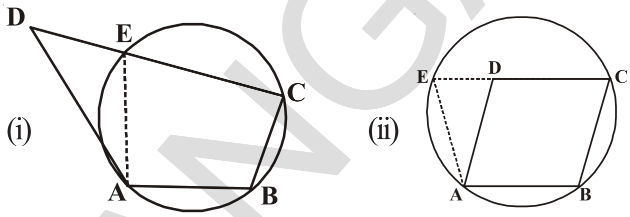
విపర్యయం కూడా ఎల్లప్పుడూ సత్యమే.

సిద్ధాంతం 12.6 : ఒక చతుర్భుజంలో ఏ రెండు ఎదుటి కోణాల మొత్తం అయినా 180° అయితే అది చక్రీయ చతుర్భుజం అవుతుంది.

దత్తాంశం : చతుర్భుజం ABCD లో

$\angle ABC + \angle ADC = 180^{\circ}$

$\angle DAB + \angle BCD = 180^{\circ}$



సారాంశం : ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం.

నిర్మాణం : సరేఖీయాలు కానీ బిందువులు A, B మరియు C ల గుండా ఒక వృత్తాన్ని గీయండి.

వృత్తం D ద్వారా పోయినట్లైతే A, B, C, D ల చక్రీయాలు కావున సిద్ధాంతము నిరూపించినట్లే.

ఈ వృత్తం D బిందువు ద్వారా పోనట్లైతే ఆ వృత్తం $\overline{CD}$ ను లేదా $\overline{CD}$ ను పొడిగించినప్పుడు D వద్ద ఖండిస్తుంది.

$\overline{AE}$ ను గీయండి.

నిరూపణ : ABCE ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం (నిర్మాణం)

$\angle AEC + \angle ABC = 180^{\circ}$ [చక్రీయ చతుర్భుజంలో ఎదుటి కోణాల మొత్తం]

కాని $\angle ABC + \angle ADC = 180^{\circ}$ (దత్తాంశం)

$\therefore \angle AEC + \angle ABC = \angle ABC + \angle ADC \Rightarrow \angle AEC = \angle ADC$

కానీ ఈ కోణాలలో ఒకటి ΔADE యొక్క అంతరకోణం మరియు రెండవది బాహ్యకోణం.

త్రిభుజ బాహ్య కోణం ఎల్లప్పుడూ దాని అంతరాభి ముఖ కోణాల కన్నా ఎక్కువ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$ అనునది ఒక విరుద్ధత.

అంటే A, B మరియు C ల ద్వారా గీచిన వృత్తం D ద్వారా పోవట్లేదనే మన కల్పన అసత్యం.

$\therefore$ A, B మరియు C ల ద్వారా గీచిన వృత్తం D ద్వారా కూడా పోవును.

$\therefore$ A, B, C మరియు D లు ఒకే వృత్తం పైని బిందువులు అంటే ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం.

ఉదాహరణ-7 : పటంలో $\overline{AB}$ వృత్తం యొక్క ఒక వ్యాసము. జ్యా $\overline{CD}$ వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానం. $\overrightarrow{AC}$ మరియు $\overrightarrow{BD}$ లు పొడిగించగా అవి E బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. అయిన $\angle AEB = 60^{\circ}$ అని చూపండి.

సాధన : OC, OD మరియు BC లను కలపండి.

ΔODC ఒక సమబాహు త్రిభుజం (ఎందువలన?)

$\therefore \quad \angle COD = 60°$

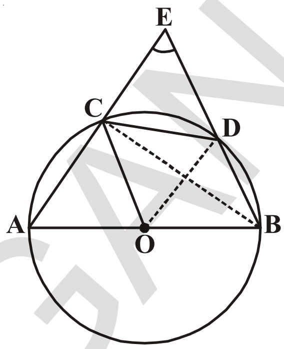
ఇప్పుడు $\quad \angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (ఎందువలన?)

దీని నుండి $\quad \angle CBD = 30°$

మరల $\quad \angle ACB = 90°$ (ఎందువలన?)

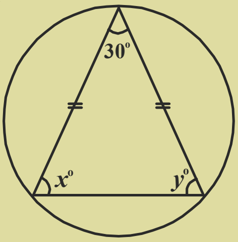
కావున $\quad \angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

దీని నుండి $\quad \angle CEB = 90° - 30° = 60°$, అంటే $\angle AEB = 60°$

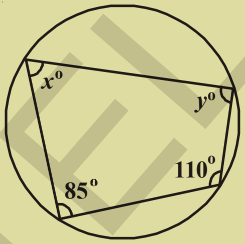


అభ్యాసం 12.5

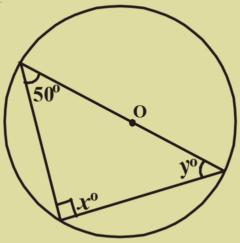
1. కింది పటాలలో x మరియు y విలువలు కనుక్కోండి.



(i)



(ii)



(iii)

2. ABCD చతుర్భుజంలోని A, B, C లు ఒకే వృత్తంపై ఉన్నాయి. మరియు $\angle A + \angle C = 180°$ అయిన శీర్షం D కూడా అదే వృత్తంపై ఉంటుందని నిరూపించండి.

3. ఒక చక్రీయ సమచతుర్భుజం చతురస్రం అవుతుందని నిరూపించండి.

4. కింది వాటిని అన్నింటినీ ఒక వృత్తాన్ని గీచి అందులో అంతర్లిఖించండి. అటువంటి బహుభుజిని నిర్మించలేనిచో 'సాధ్యం కాదు' అని రాయండి.
   (a) దీర్ఘచతురస్రం
   (b) ట్రెపీజియం
   (c) అధిక కోణ త్రిభుజం
   (d) దీర్ఘచతురస్రం కాని సమాంతర చతుర్భుజం
   (e) అల్పకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం
   (f) $\overline{PR}$ వ్యాసంగా PQRS చతుర్భుజం

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

- ఒక తలంలో ఒక స్థిర బిందువు నుండి స్థిర దూరంలో గల అదే తలానికి చెందిన బిందువుల సముదాయాన్ని వృత్తం అంటారు. ఈ స్థిర బిందువును వృత్త కేంద్రం అని స్థిర దూరాన్ని వృత్తవ్యాసార్ధం అని అంటారు.
- ఒక వృత్తంపై ఏదేని రెండు బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని జ్యా అంటారు.
- వ్యాసము జ్యాలన్నింటిలోకీ పొడవైనది మరియు వృత్త కేంద్రం గుండా కూడా పోయే జ్యాను వృత్త వ్యాసము అంటారు.
- ఒకే వ్యాసార్థం (సమాన వ్యాసార్థాలు) గల వృత్తాలను సర్వసమాన వృత్తాలు అంటారు.
- ఒకే కేంద్రం కలిగి విభిన్న వ్యాసార్థాలు గల వృత్తాలను ఏక కేంద్ర వృత్తాలు అంటారు.
- వ్యాసము, వృత్తాన్ని రెండు అర్ధ వృత్తాలుగా విభజిస్తుంది.
- వృత్తముపై గల ఏ రెండు బిందువుల మధ్యనైనా గల వృత్త భాగాన్ని చాపము అంటారు.
- ఒక జ్యా మరియు చాపరేఖల మధ్య ఆవరింపబడిన ప్రాంతాన్ని వృత్త ఖండము అంటారు. చాపరేఖ అల్పచాపమైతే అల్పవృత్తఖండమని, అధిక చాపమైతే అధికవృత్తఖండమని అంటారు.
- ఒక చాపరేఖ, మరియు దాని చివరి బిందువులను కేంద్రానికి కలిపే వ్యాసార్థాల మధ్య ఆవరింపబడిన ప్రాంతాన్ని సెక్టర్ (త్రిజ్యాంతరము) అంటారు.
- సమాన పొడవులు గల జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు సమానం.
- ఒకే వృత్త ఖండంలోని కోణాలు సమానం. అర్ధవృత్తంలోని కోణం లంబకోణం అవుతుంది.
- రెండు జ్యాలు వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు సమానమైన, ఆ జ్యాలు సమానం.
- వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యాకు గీచిన లంబం, జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది. దీని విపర్యయం కూడా సత్యమే.
- సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువులు గుండా పోయే ఒకే ఒక వృత్తం ఉంటుంది.
- త్రిభుజ శీర్షాల గుండా పోయే వృత్తాన్ని త్రిభుజ పరివృత్తం అంటారు.
- సమాన పొడవులు గల జ్యాలు వృత్త కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి. విపర్యయంగా వృత్త కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో గల జ్యాలు పొడవులు సమానం.
- ఒక చాపము వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణం, అదే చాపం మిగిలిన వృత్తంపై ఏదేని బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి రెట్టింపు.
- ఒక చాపము, మిగిలిన వృత్తంపై ఏదేని బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణం 90^0 అయిన, ఆ చాపం అర్ధవృత్తం అవుతుంది.
- రెండు బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండం, ఆ రేఖా ఖండానికి ఒకే వైపున గల రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానం అయిన, ఆ నాలుగు బిందువులు ఒకే వృత్తం పై ఉంటాయి.
- ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం లోని ఎదుటి జతల కోణాలు సంపూరకాలు.

13

జ్యామితీయ నిర్మాణాలు
(Geometrical Constructions)

13.1 పరిచయం

జ్యామితీయపటాలైన రేఖా ఖండం, కోణం, త్రిభుజం మరియు చతుర్భుజం వంటి వాటిని నిర్మించడానికి కొన్ని జ్యామితీయ పరికరాలు అవసరం. మీ వద్ద నున్న జ్యామితీయ పరికరాల పెట్టెలో ఒక స్కేలు (కొలబద్ద), ఒకజత మూలమట్టాలు, విభాగిని, వృత్తలేఖిని మరియు కోణమాని ఉంటాయి.

సాధారణంగా ఈ పరికరాలన్నీ పటాలు గీయడానికి ఉపయోగించేవే. అయితే జ్యామితీయ పట నిర్మాణానికి ప్రధానంగా మనం రెండు పరికరాలనుపయోగించి చేయవల్సి ఉంది. అవి కొలతలులేని కొలబద్ద మరియు వృత్తలేఖిని. మనం ముందు తరగతులలో త్రిభుజ నిర్మాణానికి, చతుర్భుజాల నిర్మాణాలకు వీటిని ఉపయోగించాం. కొన్ని సందర్భాలలో అవసరం మేరకు స్కేలు (కొలబద్ద)నూ, కోణమానిని ఉపయోగించుకున్నాం. కొన్ని నిర్మాణాలు, ఇచ్చిన కొలతలు తీసుకొని వెంటనే చేయడానికి వీలుగా ఉండవు. ఉదాహరణకు మూడు కొలతలు తెల్సిన త్రిభుజాన్ని అన్నివేళలా వెంటనే నిర్మించలేము. మనకు కావల్సిన కొలతలను విశ్లేషణద్వారా ఏ విధంగా కావల్సిన కొలతలు కనుగొని నిర్మాణంను పూర్తిచేస్తామో ఈ అధ్యాయంలో తెలుసుకుందాం.

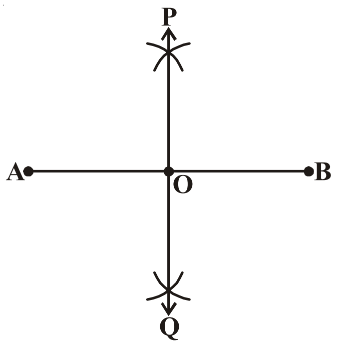
13.2 మౌళిక నిర్మాణాలు

మీరు (i) రేఖా ఖండానికి సమద్విఖండన రేఖను గీయుట (ii) ఇచ్చిన కోణాలైన $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ మరియు 120° లేదా ఏదైనా కోణానికి సమద్విఖండన రేఖను గీయుట క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్నారు. అయితే ఈ నిర్మాణాలకు సహేతుకమైన కారణాలను చర్చించలేదు. ఈ అధ్యాయంలో మనం ప్రతీ నిర్మాణాన్ని విశ్లేషణ చేసి, నిర్మించి, తగిన ఉపపత్తి ద్వారా మనం నిరూపిస్తాం.

13.2.1 దత్తరేఖా ఖండానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయుము

ఉదాహరణ-1 : AB అనే దత్తరేఖా ఖండానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీచి, నిర్మాణాన్ని తార్కికంగా సమర్థించుము.

సాధన : నిర్మాణ సోపానాలు



సోపానం 1 : దత్త రేఖాఖండం AB ను గీయండి.

సోపానం 2 : A, B కేంద్రాలుగా $\frac{1}{2}$ AB కన్నా ఎక్కువ వ్యాసార్థంతో రేఖాఖండానికి ఇరువైపులా రెండు చాపములు ఒకదానినొకటి ఖండించుకునేటట్లు గీయాలి.

సోపానం 3 : ‘B’ కేంద్రముగా, అదే వ్యాసార్థంతో మరి రెండు చాపములను మొదటి చాపములు ఖండించునట్లు గీయాలి.

సోపానం 4 : ఖండన బిందువులకు P మరియు Q అని పేర్లు పెట్టి P, Q లను కలపాలి.

సోపానం 5 : “$\overline{AB}$ యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖ PQ” అనే నిర్మాణాన్ని నీవు ఏ విధంగా సమర్థించగలవు?

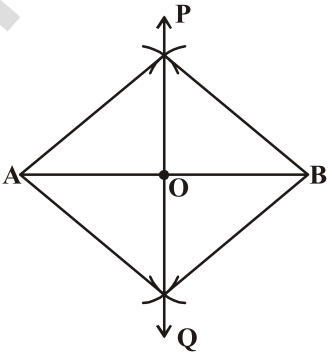
POQ రేఖ AB కి లంబసమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది.

పై నిర్మాణ క్రమము నుండి $\overline{AB}$ రేఖ ఖండమునకు, “PQ ఒక లంబ సమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది అని కారణాలతో ఎలా నిరూపించగలవు?

నిర్మాణం యొక్క పటంను గీచి, A ను P, Q లతోనూ B ను P మరియు Q లతోనూ కలపాలి.

త్రిభుజ సర్వసమాన నియమాల ఆధారంగా మనం ఈ ప్రవచనాన్ని నిరూపిస్తాం.

ఉపపత్తి :



సోపానాలు	**కారణాలు**
Δ^S PAQ మరియు ΔPBQ లో	(తీసుకున్న త్రిభుజాలు)
$AP = BP$; $AQ = BQ$	(సమాన వ్యాసార్థాలు)
$PQ = PQ$	(ఉమ్మడి భుజం)
$\therefore\ \Delta PAQ \cong \Delta PBQ$	(భు.భు.భు. నియమం)
కావున $\angle APO = \angle BPO$	(సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సదృశభాగాలు సమానం)
ఇప్పుడు Δ^S APO మరియు BPO లలో	(తీసుకున్న త్రిభుజాలు)
$AP = BP$	(ముందు తీసుకున్నట్లు సమాన వ్యాసార్థాలు)
$\angle APO = \angle BPO$	(నిరూపించబడింది)
$OP = OP$	(ఉమ్మడి భుజం)
$\therefore\ \Delta APO \cong \Delta BPO$	(భు.కో.భు. నియమం ప్రకారం)
కావున $OA = OB$ మరియు $\angle APO = \angle BPO$	(సర్వ సమాన త్రిభుజాలలో సదృశభాగాలు సమానం)
కాని $\angle AOP + \angle BOP = 180^\circ$	(రేఖీయద్వయం)
అందుచే $\angle AOP = \angle BOP = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$	(పై సోపానం ఆధారంగా ఫలితం)

కావున PO అంటే $\overleftrightarrow{POQ}$ రేఖ AB రేఖాఖండానికి లంబసమద్విఖండన రేఖ అయినది.

నిరూపించబడినది.

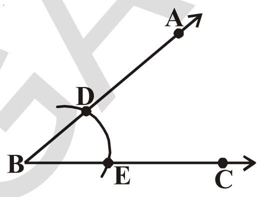
13.2.2 దత్తకోణానికి సమద్విఖండన రేఖను నిర్మించుట

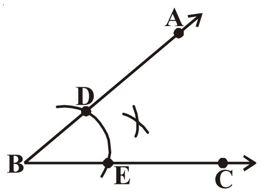
ఉదాహరణ-2 : దత్తకోణం ∠ABC కి సమద్విఖండన రేఖను గీయండి.

సాధన : నిర్మాణ సోపానాలు

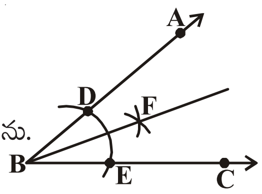
సోపానం 1 : దత్తకోణం ∠ABC ని తీసుకో.

సోపానం 2 : B కేంద్రంగా కొంత వ్యాసార్థంతో $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ కిరణాలను D, E ల వద్ద ఖండించునట్లు పటంలో చూపినట్లు చాపం గీయండి.





సోపానం 3 : E మరియు D లు కేంద్రములుగా సమాన వ్యాసార్థంతో రెండు చాపములు F వద్ద ఖండించునట్లు గీయండి.

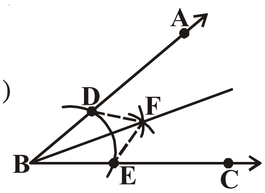


సోపానము 4 : BF కిరణం ను గీయండి. ఇదే ∠ABCకి కోణ సమద్విఖండన రేఖ అగును.

పై నిర్మాణాన్ని తార్కికంగా నిరూపించిన విధం పరిశీలిద్దాం. D, F మరియు E, F లను కలపండి. త్రిభుజ సర్వసమాన నియమాలనుబట్టి కింది విధంగా నిరూపిద్దాం.

ఉపపత్తి :

సోపానాలు	**కారణాలు**
Δ^s BDF మరియు ΔBEF లలో	(తీసుకున్న త్రిభుజాలు)
BD = BE	(గీచిన చాపాల వ్యాసార్థాలు సమానం)
DF = EF	(సమాన వ్యాసార్థాలు)
BF = BF	(ఉమ్మడి భుజం)
∴ ΔBDF ≅ ΔBEF	(భు.భు.భు. నియమం)
కావున ∠DBF = ∠EBF	(సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సదృశ భాగాలు)

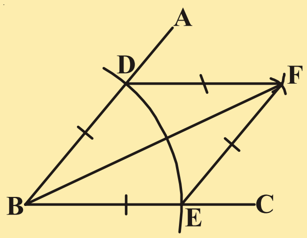


కావున BF అనేది ∠ABCయొక్క సమద్విఖండనరేఖ అయినది.
నిరూపించబడినది.

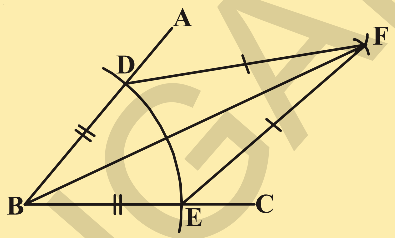
ప్రయత్నించండి

కింది పటాలలో భుజాలను, కోణాలను, కర్ణాలను పరిశీలించి వాటి పేర్లు తెలపండి. అదేవిధంగా వాటి ధర్మాలను రాయండి.

1.



2.

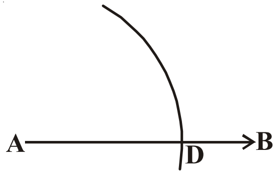


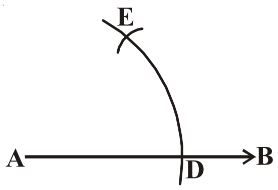
13.2.3 ఇచ్చిన కిరణం యొక్క తొలిబిందువు వద్ద 60° కోణం నిర్మించుట

ఉదాహరణ-3 : తొలిబిందువు A నుండి AB కిరణం గీచి, ∠BAC = 60° అగునట్లు AC కిరణాన్ని గీయండి.

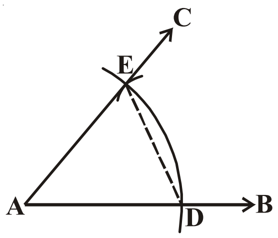
సాధన : నిర్మాణ సోపానాలు

సోపానం 1 : AB కిరణాన్ని గీచి కొంత వ్యాసార్థంతో A కేంద్రంగా AB ను D వద్ద ఖండించునట్లు ఒక చాపం గీయాలి.





సోపానం 2 : D కేంద్రంగా అదే వ్యాసార్థంతో మొదటి చాపాన్ని E వద్ద ఖండించునట్లు మరొక చాపాన్ని గీయాలి. (పటంలో చూపిన విధంగా)



సోపానం 3 : E గుండా పోతున్నట్లుగా AC కిరణాన్ని గీస్తే మనకు కావల్సిన కోణం ∠BAC= 60° వస్తుంది.

మనం చేసిన నిర్మాణంను నిరూపించాలంటే పటంలో D, E ని కలపాలి. నిరూపణను దిగువ విధంగా చేయవచ్చు.

ఉపపత్తి :

సోపానాలు	**కారణాలు**
Δ ADE లో	(ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు)
AE = AD	(నిర్మాణంలో తీసుకోబడినది)
AD = DE	(సమాన వ్యాసార్థాలు గలచాపాలు)
అందుచే AE = AD = DE	(సమాన చాపాలతో ఏర్పడిన భాగాలు)
కావున Δ ADE ఒక సమబాహు త్రిభుజం అగును	(అన్ని భుజాలు సమానం)
∴ ∠EAD = 60°	(సమబాహు త్రిభుజంలో ప్రతీకోణం)
∠BAC = ∠EAD	(∠EAD అనేది ∠BACలో ఒక భాగం)
∴ ∠BAC = 60°.	ఈ విధంగా నిరూపించబడినది.

ప్రయత్నించండి

ఒక వృత్తంపై ఏదేని బిందువు తీసుకొని వృత్త వ్యాసార్థంనకు సమాన వ్యాసార్థంతో ఎన్ని చాపాలను గీస్తే వృత్తం ఎన్ని సమానభాగాలుగా విభజింపబడుతుంది? నీవు ఎలా చెప్పగలవు? ఈ సందర్భంలో జ్యా యొక్క పొడవు ఎంత అవుతుంది?

అభ్యాసం 13.1

1. మూల బిందువు వద్ద దత్తకిరణంపై కింది కోణాలను నిర్మించి, నిరూపణ చేయండి.

   (a) 90^o　　(b) 45^o

2. కింది కోణాలను కొలబద్ద, వృత్తలేఖిని సహాయంతో నిర్మించి, కోణమానితో కొలిచి సరిచూడండి.

   (a) 30^o　　(b) $22\frac{1}{2}^o$　　(c) 15^o

   (d) 75^o　　(e) 105^o　　f) 135^o

3. దత్త భుజం 4.5 సెం.మీ. తీసుకొని ఒక సమబాహు త్రిభుజం నిర్మించి, నిర్మాణాన్ని నిరూపించండి.

4. దత్తభుజంను భూమిగా తీసుకొని, దత్తకోణం తెలిస్తే సమద్విబాహు త్రిభుజం నిర్మించి, నిర్మాణాన్ని నిరూపించండి.

   [సూచన : నిర్మాణాలకు మీకు నచ్చిన భుజం కొలత, కోణం కొలత తీసుకోవచ్చు]

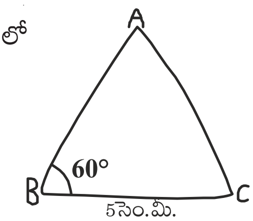
13.3 త్రిభుజాల నిర్మాణాలు (ప్రత్యేక సందర్భాలు)

మనం ఇప్పటి వరకు కొన్ని మౌళిక నిర్మాణాలను చేసి వాటిని నిరూపించి, నిర్మాణాలను సమర్థించాం. ఇప్పుడు కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో ఇచ్చిన కొలతలను ఆధారంగా కొన్ని త్రిభుజాల నిర్మాణాలను చేద్దాం. త్రిభుజ సర్వసమాన నియమాలైన భు.కో.భు.; భు.భు.భు.; కో.భు.కో. మరియు లం.క.భు. నియమాలను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. మీరు ఈ నియమాల ఆధారంగా త్రిభుజాల నిర్మాణాలను చేయడం 7వ తరగతిలో నేర్చుకున్నారు కదా!

త్రిభుజ నిర్మాణానికి కనీసం మూడు కొలతలు అవసరమని మనకు తెలుసు. అయితే ఏ మూడు కొలతలు అన్ని సందర్భాలలో త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచలేవు. ఉదాహరణకు రెండు భుజాలు మరియు ఒక కోణం (ఉమ్మడి కోణం కానిది) ఇస్తే, మనం త్రిభుజాన్ని ఏకైకంగా నిర్మించలేము. ఇటువంటి సందర్భాలలో త్రిభుజాల నిర్మాణాలకు మనం కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

13.3.1 నిర్మాణం : భూమి, భూకోణం మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల మొత్తం ఇచ్చిన త్రిభుజం నిర్మించుట

ఉదాహరణ-4 : $BC = 5$ సెం.మీ. $AB + AC = 8$ సెం.మీ. మరియు $\angle ABC = 60^o$ కొలతలలో ΔABC నిర్మించండి.



సాధన : నిర్మాణ సోపానాలు

సోపానం 1 : ΔABC యొక్క చిత్తు పటంను గీచి ఇవ్వబడడిన కొలతలు గుర్తించాలి.

($AB + AC = 8$సెం.మీ. కొలతను ఎందుకు గుర్తించలేకపోయారు?)

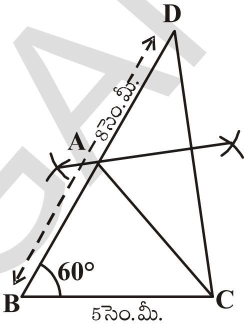
మరి త్రిభుజ మూడవ శీర్షం A ను నిర్మాణంలో ఎలా గుర్తిస్తారు?

విశ్లేషణ : $AB + AC = 8$ సెం.మీ. కావున BA ను D వరకు పొడిగిస్తే $BD = 8$ సెం.మీ. అవుతుంది.

$\therefore\ BD = BA + AD = 8$ సెం.మీ.

కాని $AB + AC = 8$ సెం.మీ. (దత్తాంశం)

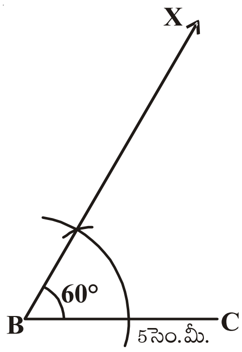
$\because\ AD = AC$



BD పైన A ను గుర్తించడానికి మీరు ఏమి చేస్తారు?

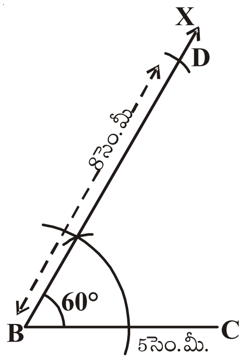
A బిందువు C మరియు D లకు సమాన దూరంలో ఉంటుంది కావున, $\overline{CD}$ యొక్క లంబ సమద్విఖండన BD ను ఖండించే బిందువు A అవుతుంది.

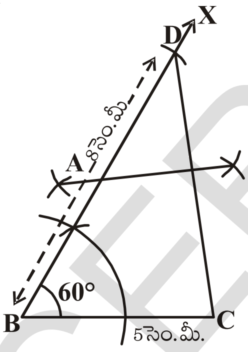
అయితే $AB + AC = BD$ అని ఎలా నిరూపిస్తారు?



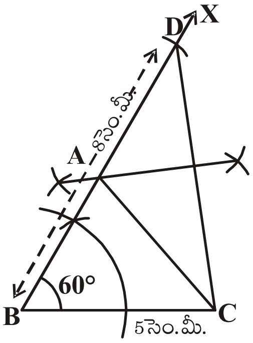
సోపానం 2 : $\overline{BC} = 5$ సెం.మీ. (త్రిభుజం భూమి) రేఖాఖండం గీచి B వద్ద $\angle CBX = 60^{\circ}$ కోణం నిర్మించాలి.

సోపానం 3 : B కేంద్రంగా 8 సెం.మీ. ($AB + AC = 8$ సెం.మీ.) $\overrightarrow{BX}$ ను D వద్ద ఖండించునట్లు ఒక చాపం గీయాలి.





సోపానం 4 : CD ని కలిపి CD కు లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీస్తే అది BD ని A వద్ద ఖండిస్తుంది.



సోపానం 5 : AC లను కలిపితే మనకు కావల్సిన ABC త్రిభుజం వస్తుంది.

మనం ఇప్పుడు నిర్మాణాన్ని నిరూపిద్దాం.

ఉపపత్తి : A బిందువు $\overline{CD}$ యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖపై ఉంది.

$\because\ AC = AD$ కావున

$$
\begin{aligned}
AB + AC &= AB + AD \\
&= BD \\
&= 8 \text{ సెం.మీ.}
\end{aligned}
$$

అందుచే ΔABC మనకు కావల్సిన త్రిభుజం అయింది.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

$BC = 6$ సెం.మీ., $\angle B = 60^\circ$ మరియు $AB + AC = 5$సెం.మీ. కొలతతో ΔABC త్రిభుజం నిర్మించగలరా? లేకపోతే, తగు కారణాలు తెలపండి.

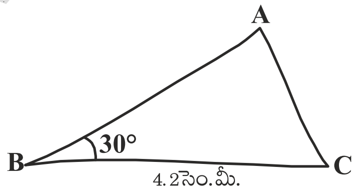
13.3.2 నిర్మాణం : భూమి, భూకోణం మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల భేదం ఇచ్చిన త్రిభుజం నిర్మించుట

ΔABC లో భూమి BC గా ఇచ్చి, భూ కోణం $\angle B$ మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల భేదం $AB>AC$ అయిన అది $AB - AC$ అవుతుంది లేదా $AB<AC$ అయితే $AC-AB$ అవుతుంది. అందుచే మనం ఈ రెండు సందర్భాలలోనూ త్రిభుజం నిర్మించడం కింది ఉదాహరణల ద్వారా తెలుసుకుందాం.

సందర్భం (i) $AB > AC$ అయిన

ఉదాహరణ-5: $BC = 4.2$ సెం.మీ., $\angle B = 30^0$ మరియు $AB - AC = 1.6$ సెం.మీ. కొలతలలో ΔABC నిర్మించండి.

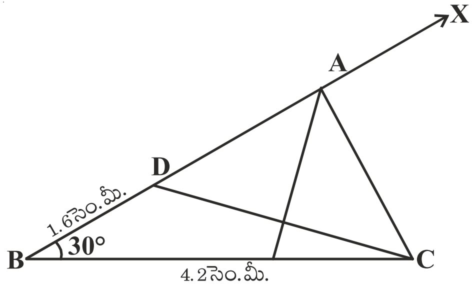
సాధన : నిర్మాణ సోపానాలు

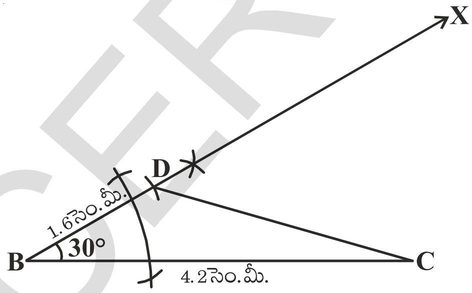


సోపానం 1 : ΔABC యొక్క చిత్తుపటం గీచి ఇవ్వబడిన కొలతలను గుర్తించాలి.

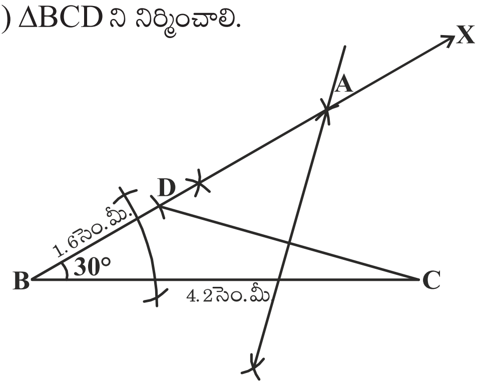
($AB - AC = 1.6$ సెం.మీ. కొలతను ఎలా గుర్తిస్తారు?)

విశ్లేషణ : $AB - AC = 1.6$ సెం.మీ. కావున $AB > AC$ అగును $AD = AC$ అగునట్లు AB పై D అని బిందువును గుర్తించాలి. ఇప్పుడు $BD = AB - AC = 1.6$ సెం.మీ. అందుచే C, D ని కలిపి దానికి లంబసమద్విఖండన చేస్తే మూడు శీర్షం A ను BD పై గుర్తించవచ్చు. అవసరమైతే BDని పొడిగించాలి. A, C ని కలిపితే కావలసిన త్రిభుజం ABC వస్తుంది.



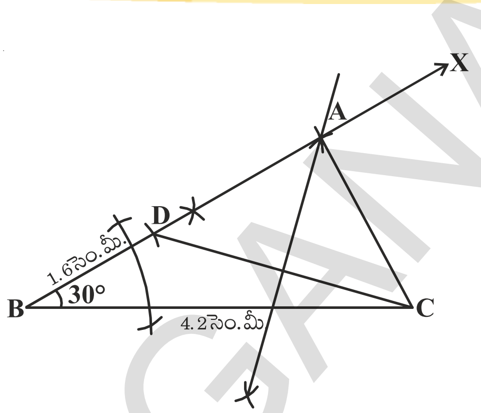


సోపానం 2 : భు.కో.భు. త్రిభుజ నియమం అనుసరించి $BC = 4.2$ సెం.మీ., $\angle B = 30^0$ మరియు $BD = 1.6$ సెం.మీ. (i.e. $AB - AC$) ΔBCD ని నిర్మించాలి.



సోపానం 3 : CD యొక్క లంబ సమద్విఖండనరేఖను గీస్తే అది BDX రేఖను A వద్ద ఖండిస్తుంది.

సోపానం 4 : A, C లను కలిపితే ΔABC వస్తుంది.



ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

ఉదాహరణలో ఇచ్చిన త్రిభుజం కొలతలలో కోణం $\angle B$ కి బదులు $\angle C$ తీసుకొని నిర్మిస్తే త్రిభుజం ఏర్పడుతుందా? చిత్తుపటం గీచి, నిర్మించి చూడండి.

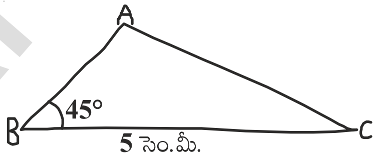
సందర్భం (ii) $AB < AC$ అయితే

ఉదాహరణ-6 : $BC = 5$ సెం.మీ., $\angle B = 45^o$ మరియు $AC - AB = 1.8$ సెం.మీ. కొలతలతో ΔABC నిర్మించండి.

సాధన : నిర్మాణ సోపానాలు

సోపానం 1 : ΔABC యొక్క చిత్తుపటాన్ని గీచి ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించాలి.

$AC - AB = 1.8$ సెం.మీ. కొలతను ఎలా గుర్తించగలరో విశ్లేషణ చేయండి.



విశ్లేషణ : $AB < AC$ కావున $AC - AB = 1.8$ సెం.మీ. ను BD గా తీసుకోవాలంటే $AD = AC$ అయినట్లు AB పై D బిందువును గుర్తించండి.

ఇప్పుడు $BD = AC - AB = 1.8$ అగును. ($\because$ $BD = AD - AB$ మరియు $AD = AC$)

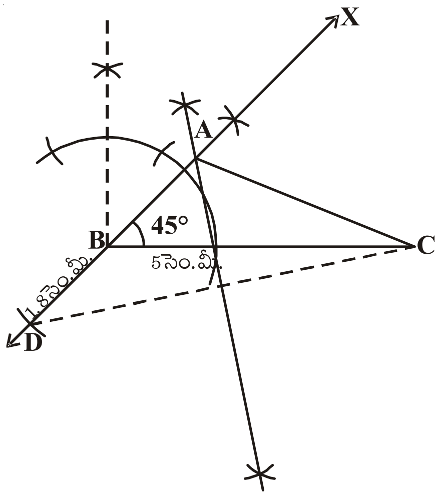
C, D ని కలిపి CD కి లంబసమద్విఖండన రేఖను గీస్తే దానిపై A ను గుర్తించవచ్చు.

సోపానం 2 : $BC = 5$ సెం.మీ. రేఖా ఖండం గీచి, $\angle CBX = 45°$ కోణం నిర్మించాలి.

B కేంద్రంగా 1.8 సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో ($BD = AC - AB$) ఒక చాపం గీయగా అది $\overrightarrow{BX}$ రేఖను BC కి ఎదురుగా పొడిగిస్తే దానిని D వద్ద ఖండిస్తుంది.

సోపానం 3 : D, C ని కలిపి దానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖగీయాలి.

సోపానం 4 : ఇది $\overrightarrow{BX}$ రేఖను A వద్ద ఖండిస్తుంది. AC ని కలిపితే మనకు కావలసిన త్రిభుజం ΔABC వస్తుంది.



ఇప్పుడు మనం పై నిర్మాణంను తార్కికంగా నిరూపిద్దాం.

విశ్లేషణ : ΔABC లో భూమి BC ని, $\angle B$ కోణాన్ని నిర్మించాం. DC యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖపై A బిందువు ఉన్నది కావున

$\therefore$ $AD = AC$ అగును

అంటే $AB + BD = AC$

కావున $BD = AC - AB$ అయినది

$= 1.8$ సెం.మీ.

ఇదే మనకు కావలసిన త్రిభుజం ΔABC అవుతుంది.

13.3.3 నిర్మాణం : త్రిభుజ చుట్టుకొలత మరియు రెండు భూకోణాలు ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజం నిర్మించుట.

ΔABC లో భూకోణాలు $\angle B$ మరియు $\angle C$ లు మరియు చుట్టుకొలత $AB + BC + CA$ గా ఇచ్చిన మీరు త్రిభుజాన్ని గీయగలరా? ప్రయత్నించండి.

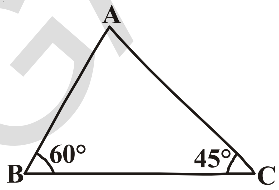
ఉదాహరణ-7 : ΔABC లో $\angle B = 60^o$, $\angle C = 45^o$ మరియు

$AB + BC + CA = 11$ సెం.మీ. అయిన త్రిభుజం నిర్మించండి.

సాధన : నిర్మాణ సోపానాలు

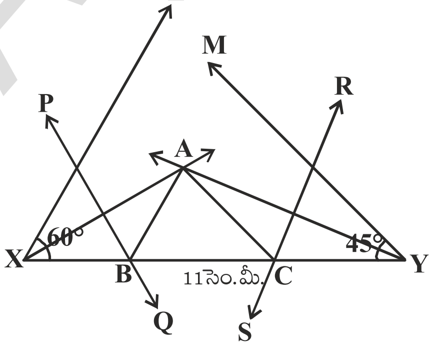
సోపానం 1 : ABC త్రిభుజం యొక్క చిత్తుపటంను గీచి ఇవ్వబడిన కొలతలు గుర్తించాలి.

(త్రిభుజ చుట్టుకొలతను ఎలా గుర్తిస్తారు?)



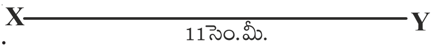
విశ్లేషణ : త్రిభుజ చుట్టుకొలత $AB + BC + CA$ కు సమానమయ్యే రేఖాఖండం XY గీయాలి. $\angle B$ కు సమానంగా $\angle YXL$ నూ, $\angle C$ కు సమానం అయ్యేటట్లు $\angle XYM$ ను నిర్మించి, వాటిని సమద్విఖండన చేయాలి. ఈ రెండు సమద్విఖండన రేఖలు A వద్ద ఖండించుకున్నాయనుకోండి.

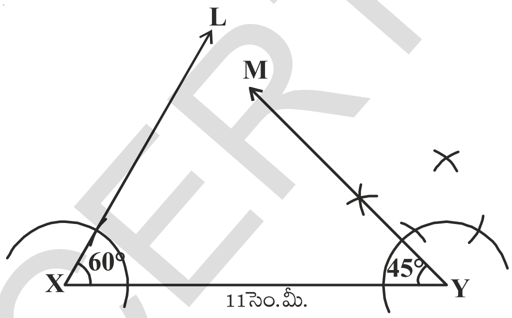
AX యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ XY ను B వద్ద, AY యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ C వద్ద ఖండిస్తాయి. AB, AC లను కలిపితే మనకు కావలసిన త్రిభుజం ABC వస్తుంది.



సోపానం 2 : $XY = 11$ సెం.మీ.

(ఎందుకంటే $XY = AB + BC + CA$) రేఖాఖండాన్ని గీయాలి.





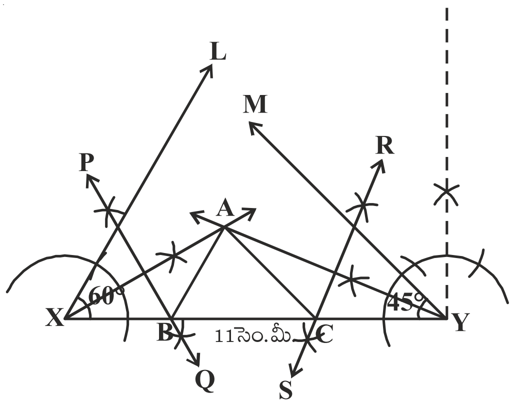
సోపానం 3 : $\angle YXL = 60^o$ మరియు $\angle XYM = 45^o$ కోణాలను నిర్మించి, వాటికి సమద్విఖండన రేఖలు గీయాలి.

సోపానం 4 : ఈ రెండు సమద్విఖండన రేఖల ఖండన బిందువుకు A అని పేరుపెట్టాలి.

సోపానం 5 : $\overline{AX}$ మరియు $\overline{AY}$ లకు లంబసమద్విఖండన రేఖలను గీస్తే అవి $\overrightarrow{XY}$ ను వరుసగా B మరియు C ల వద్ద ఖండిస్తాయి.

AB మరియు AC లను కలపాలి.

మనకు కావల్సిన త్రిభుజం ABC వస్తుంది.



ఈ నిర్మాణంను మనకు కింది విధంగా నిరూపిద్దాం.

ఉపపత్తి : AX యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖ PQ పై B ఉంటుంది.

$\therefore$ XB = AB మరియు అదేవిధంగా CY = AC

దీని నుండి $AB + BC + CA = XB + BC + CY$

$= XY$

తిరిగి $\angle BAX = \angle AXB$ ($\because$ ΔAXB లో $XB = AB$) మరియు

$\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB$

(ΔABC యొక్క బాహ్యకోణం).

$= 2\angle AXB$

$= \angle YXL$

$= 60^o$.

ఇదే విధంగా $\angle ACB = \angle XYM = 45^o$ అగును

$\therefore$ $\angle B = 60^\circ$ మరియు $\angle C = 45^\circ$ అయినది.

ప్రయత్నించండి

ఈ త్రిభుజాన్ని మీరు వేరొక పద్ధతిలో నిర్మించగలరా?

(సూచన : $\angle YXL = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

మరియు $\angle XYM = \dfrac{45^\circ}{2} = 22\frac{1}{2}^\circ$

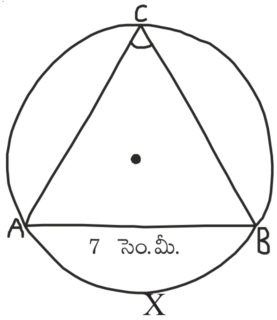
తీసుకోండి.)

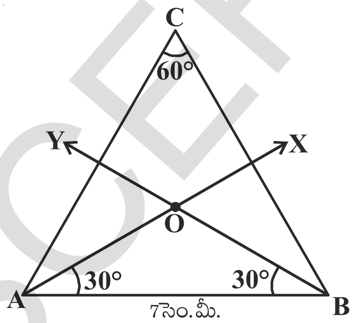
13.3.4 నిర్మాణం : దత్తజ్యా, దత్తకోణాన్ని కలిగి ఉండే వృత్తఖండాన్ని నిర్మించుట

ఉదాహరణ-8 : 7సెం.మీ. పొడవుగల వృత్తజ్యా పై 60° కోణములను కలిగి ఉండే వృత్త ఖండాన్ని నిర్మించండి.

సాధన : నిర్మాణ సోపానాలు

సోపానం 1 : ఒక వృత్తాన్ని, 60° కలిగి ఉండే వృత్తఖండం యొక్క (అధిక వృత్తఖండం గీయాలి. ఎందుకు?) చిత్తు పటం గీయాలి. కేంద్రం లేకుండా వృత్తాన్ని గీయగలవా?





విశ్లేషణ : 'O' కేంద్రంగాగల వృత్తం తీసుకోండి. AB అనేది దత్త వృత్త్యజ్యా మరియు $C = 60^\circ$ కోణంగల ACB వృత్తఖండం మనం నిర్మించవలసినది.

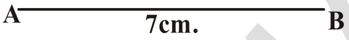
$\overset{\frown}{AXB}$ వృత్త చాపం వృత్తంపై C వద్ద చేసిన కోణం 60° అనుకోండి.

.$\angle ACB = 60^\circ$ కావున $\angle AOB = 60^\circ \times 2 = 120^\circ$ (ఎలా?)

ΔOAB లో OA=OB (సమాన వ్యాసార్థాలు) కావున

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

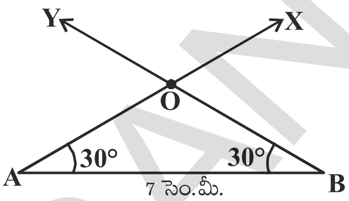
అందుచే మన ΔOAB గీయగలం. అప్పుడు వృత్తానికి OA = OB వ్యాసార్థం అవుతుంది.

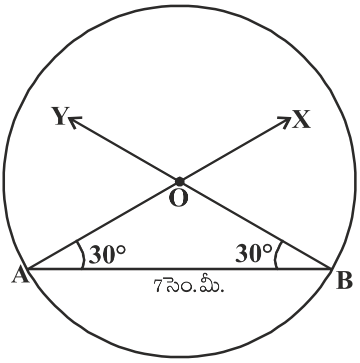


సోపానం 2 : $AB = 7$ సెం.మీ. రేఖాఖండం గీయండి.

సోపానం 3 : $\angle BAX = 30^\circ$ మరియు $\angle YBA = 30^\circ$ ఉండేటట్లు $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BY}$ కిరణాలను గీయగా అవి O వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

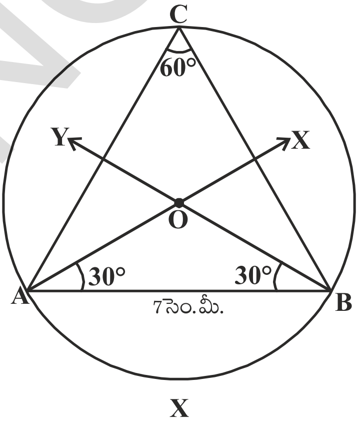
[సూచన : వృత్త లేఖిని ఉపయోగించి 60^0 కోణం నిర్మించి, దానిని సమద్విఖండన చేస్తే 30^0 కోణం వస్తుంది.]





సోపానం 4 : 'O' కేంద్రంగా $OA = OB = r$ వ్యాసార్ధంతో వృత్తం గీయాలి.

సోపానం 5 : అధిక వృత్త చాపంపై 'C' బిందువు గుర్తించాలి. A, C మరియు B, C లను కలిపితే $\angle ACB = 60^\circ$ వస్తుంది.



ఈ వృత్తఖండం మనకు కావలసిన వృత్తఖండం అవుతుంది.

పై నిర్మాణాన్ని నిరూపిద్దాం.

ఉపపత్తి : $OA = OB$ (వృత్త వ్యాసార్ధం).

$\therefore \quad \angle OAB + \angle OBA = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

$\therefore \quad \angle AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\overset{\frown}{AXB}$ చాపం వృత్త కేంద్రం వద్ద చేయుకోణం 120°.

$$\therefore \quad \angle ACB = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

కావున ACB మనకు కావలసిన వృత్తఖండం అగును.

ప్రయత్నించండి

ఇవ్వబడిన వృత్తఖండంలో కోణం 'లంబకోణం' అయితే అది ఎటువంటి వృత్తఖండం అవుతుంది? పటంగీచి, కారణాలు తెలపండి.

అభ్యాసం 13.2

1. $BC = 7$ సెం.మీ., $\angle B = 75^\circ$ మరియు $AB + AC = 12$ సెం.మీ., ΔABC నిర్మించండి.
2. $QR = 8$ సెం.మీ., $\angle Q = 60^\circ$ మరియు $PQ - PR = 3.5$ సెం.మీ., ΔPQR నిర్మించండి.
3. $\angle Y = 30^\circ$, $\angle Z = 60^\circ$ మరియు $XY + YZ + ZX = 10$ సెం.మీ., ΔXYZ నిర్మించండి.

4. భూమి 7.5 సెం.మీ. మరియు కర్ణం, మూడవ భుజం కొలతల మొత్తం 15 సెం.మీ. గాగల లంబకోణ త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

5. 5 సెం.మీ. పొడవుగల వృత్తజ్యా తీసుకొని కింది కోణాలను కలిగిఉండే వృత్త ఖండాలను నిర్మించండి.
   i. 90° ii. 45° iii. 120°

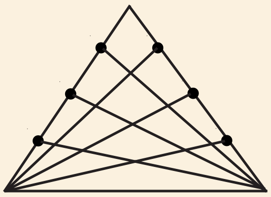
మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

1. జ్యామితీయ పటాల నిర్మాణంలో మనం ప్రధానంగా రెండు పరికరాలను వినియోగిస్తాం – కొలతలు లేని కొలబద్ద మరియు వృత్తలేఖిని.
2. కింది జ్యామితీయ పటాల నిర్మాణాలను నిర్మించుట, హేతుబద్ధంగా నిరూపించుట
   - దత్తరేఖా ఖండానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖ గీయుట.
   - దత్తకోణానికి సమద్విఖండనరేఖ గీయుట.
   - మూలబిందువు వద్ద, దత్త కిరణంపై 60° కోణం నిర్మించుట.
3. భూమి, భూకోణం మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల మొత్తం ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజం నిర్మించుట.
4. భూమి, భూకోణం మరియు రెండు భుజాల భేదం ఇచ్చిన త్రిభుజం నిర్మించుట.
5. త్రిభుజ చుట్టుకొలత మరియు రెండు భూకోణాలు ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజం నిర్మించుట.
6. దత్తజ్యా, దత్తకోణాన్ని కలిగిఉండే వృత్త ఖండాన్ని నిర్మించుట.

మెదడుకి మేత

కింది పటంలో మొత్తం ఎన్ని త్రిభుజాలు ఉన్నాయి? సూత్రాన్ని రాబట్టండి.

(దీనిని సివియన్ (Cevian) అంటారు. 'సివ' అనే గణిత శాస్త్రజ్ఞుని పేరుచే గుర్తించబడింది.)



(సూచన : ప్రతి శీర్షం నుండి ఎదుటి భుజానికి గీయబడిన రేఖాఖండాలను 'n' అనుకోండి.)

14

సంభావ్యత
(Probability)

"సాధారణ విచక్షణను గణనలలోకి మార్చడమే సంభావ్యత"

– పియరి – సైమన్ లాప్లస్

14.1 పరిచయం

సిద్దూ మరియు వివేక్ ఒకే తరగతి చదువుచున్నారు. ఒకరోజు భోజన విరామ సమయంలో కింది విధంగా మాట్లాడుకొంటున్నారు.

వారి సంభాషణను పరిశీలించండి.

సిద్దూ : హలో వివేక్, ఈ రోజు సాయంత్రం ఏమి చేస్తున్నావు?

వివేక్ : ఇంకా ఏమి నిర్ణయించుకోలేదు కాని, టి.వి.లో భారత్, ఆస్ట్రేలియా జట్ల మధ్య జరిగే క్రికెట్ మ్యాచ్ చూసే అవకాశం ఎక్కువ.

సిద్దూ : టాస్ ఎవరు గెలుస్తారని అనుకొంటున్నావు?

వివేక్ : ఇరుజట్లకు టాస్ గెలిచేందుకు సమాన అవకాశాలున్నాయి. నీవు మీ ఇంట్లో క్రికెట్ చూస్తావా?

సిద్దూ : మా ఇంట్లో క్రికెట్ మ్యాచ్ చూసే అవకాశం లేదు. ఎందుకంటే మా టి.వి.మరమ్మత్తులో ఉంది.

వివేక్ : అలాగా, అయితే మా ఇంటికి రావచ్చుగదా! మనిద్దరం కలిసి క్రికెట్ మ్యాచ్ చూడవచ్చు.

సిద్దూ : ఇంటిపని (హోంవర్క్) పూర్తి చేసుకొని వస్తా.

వివేక్ : రేపు అక్టోబరు 2, గాంధీజయంతి సందర్భంగా సెలవు కదా! నీవు హోంవర్క్ రేపు చేసుకోవచ్చు.

సిద్దూ : లేదు. మొదట హోంవర్క్ చేసిన తర్వాతే క్రికెట్టు చూస్తాను.

వివేక్ : సరేమరి.

పై సంభాషణలోని కింది వాక్యాలను గమనించండి.

"భారత్, ఆస్ట్రేలియా జట్ల మధ్య జరిగే క్రికెట్ మ్యాచ్ చూసే అవకాశం ఎక్కువ."

"మా ఇంట్లో క్రికెట్ మ్యాచ్ చూసే అవకాశం లేదు."

"టాస్ గెలవడానికి ఇరు జట్లకు సమాన అవకాశాలు ఉన్నాయి."

ఇక్కడ సిద్దూ మరియు వివేక్ జరగబోయే విషయాల గూర్చి, అవి ఏర్పడే అవకాశాల గూర్చి నిర్ణయాలు తీసుకొంటున్నారు.

చాలా సందర్భాలలో మనం నిర్ణయాలు తీసుకొనవలసి వచ్చినప్పుడు గత అనుభవాలను, స్వీయ విచక్షణను ఉపయోగిస్తాము. ఉదాహరణకు బయట ఆహ్లాదకరమైన వాతావరణం ఉంది. ఈ రోజు గొడుగు లేకుండా బయటకు వెళతాను.

మనం తీసుకున్న నిర్ణయాలు కొన్నిసార్లు మనకు అనుకూలంగా ఉండకపోవచ్చు. మరొక సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాము. మేరీ వర్షాకాలంలో ప్రతిరోజు తన గొడుగు తీసుకొని పాఠశాలకు నడచి వెళ్లేది. కాని ఏ రోజు కూడా వర్షం పడలేదు. అనుకోకుండా ఒకరోజు గొడుగు మరిచిపోయి పాఠశాలకు వెళ్లింది. ఆరోజే విపరీతమైన వర్షం కురిసింది.

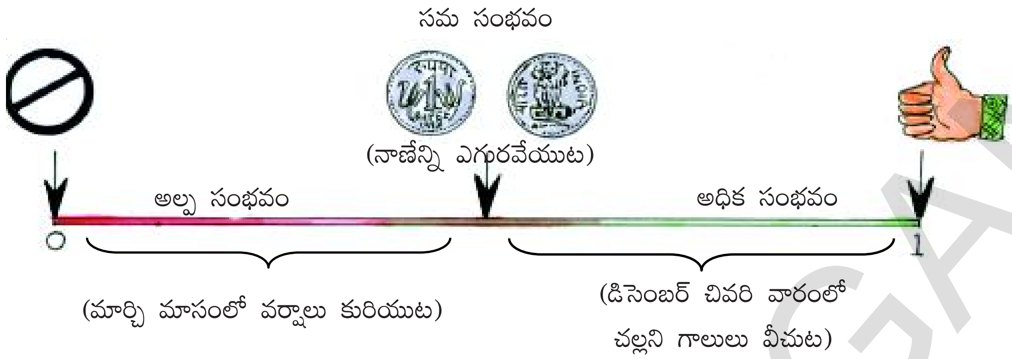
మరో సందర్భంలో మార్చినెలలో ఒక రోజు ఆకాశం మేఘావృతమై ఉందని మేరీ గమనించింది. అది వేసవికాలం అయినప్పటికి తన వెంట గొడుగు తీసుకొని బయటికి వెళ్లింది. కాసేపట్లోనే వర్షం జోరుగా కురిసింది. గొడుగు వెంట తెచ్చుకోవడం ఆమెకు ఎంతో ఉపయోగపడింది. ఆమె తడవకుండా ఇంటికి వచ్చింది.

భవిష్యత్తులో జరుగబోయే విషయాలు మనం తీసుకొనే నిర్ణయాలకు అనుగుణంగా జరగవచ్చు లేదా కొన్నిసార్లు జరగకపోవచ్చు. పై ఉదాహరణలో మేరీ ఒక సందర్భంలో వర్షం పడుతుందని, మరో సందర్భంలో వర్షం పడదని ఊహించింది. ఈ విధంగా మన నిర్ణయాలు కూడా కొన్నిసార్లు నిజమవుతాయి. మరికొన్ని సార్లు నిజంకావు (ఎందువల్ల?).

మనం నిత్య జీవితంలో పొడవు, ద్రవ్యరాశి లాంటి వాటిని ఏవిధంగా కొలుస్తామో, భవిష్యత్తులో సంభవించే సంఘటనలు, అవి జరిగే అవకాశం లేదా జరగకపోయే అవకాశాన్ని కూడా మాపనం చేయడానికి ప్రయత్నిస్తాము. ఈ మాపనం మనం క్రమబద్ధంగా నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి ఉపయోగపడుతుంది. కాబట్టి ఒక విషయం ఏర్పడడానికి ఎన్ని రకాల అవకాశాలు ఉన్నాయో గుర్తించడానికి మనం "సంభావ్యతను" అధ్యయనం చేస్తాము.

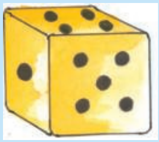
అవకాశాలను మాపనం చేయుటకు ముందు, వాటిని ఏవిధంగా శ్రేణీకరణ (గ్రేడింగ్) చేస్తామో కింది పట్టిక ద్వారా తెలుసుకొందాం. పట్టికను పరిశీలించండి.

పదం	**అవకాశం**	**సంభాషణ నుండి ఉదాహరణలు**
నిశ్చితం (ఖచ్చితం)	ఏదైనా విషయం తప్పకుండా జరిగే అవకాశం	గాంధీ జయంతిని అక్టోబర్ 2న జరుపుకుంటాం
అధిక సంభవం (అతి తరచుగా)	ఏదైన విషయం జరిగే అవకాశం చాలా ఎక్కువ	వివేక్ టి.వి.లో క్రికెట్ మ్యాచ్ చూడడం
సమసంభవం	కొన్ని విషయాలు జరిగేటందుకు సమాన అవకాశాలు ఉండుట	ఇరుజట్లకు టాస్ గెలిచే అవకాశం
అల్ప సంభవం (అతి తక్కువ)	ఏదైనా విషయం జరిగే అవకాశం చాలా తక్కువ	క్రికెట్ మ్యాచ్ రోజున వివేక్ ఇంటిపని చేయుట
అసంభవం	ఏదైనా విషయం జరిగే అవకాశం శూన్యం	సిద్ధూ తన ఇంట్లో టి.వి. లో క్రికెట్టు మ్యాచ్‌ని చూడడం.



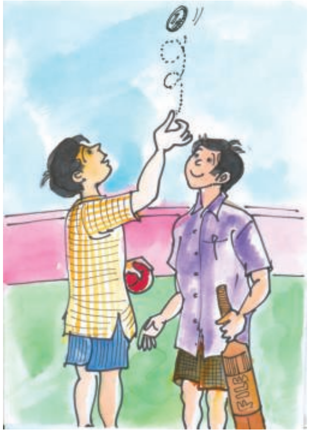
ఇవి చేయండి

1. పక్క పేజీలో ఇచ్చిన పట్టికలోని ప్రతి పదానికి మరికొన్ని ఉదాహరణలు రాయండి.
2. కింది వాక్యాలను అల్పసంభవం, సమసంభవం, అధికసంభవాలుగా వర్గీకరించండి.
   - a) ఒక * పాచికను దొర్లించినప్పుడు దాని ముఖంపై 5 వస్తుంది.
   - b) నవంబర్ మాసంలో మీ ఊరిలో చల్లని గాలులు వీస్తాయి.
   - c) భారత్ వచ్చే ఫుట్‌బాల్ వరల్డ్‌కప్‌ని గెల్చుకోవడం.
   - d) నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ లేదా బొరుసు రావడం.
   - e) నీవుకొన్న లాటరీ టికెట్టుకు బంపర్ బహుమతి రావడం.



14.2 సంభావ్యత (Probability)

14.2.1 యాదృశ్చిక ప్రయోగము మరియు పర్యవసానాలు (Random experiment and outcomes)



ఏదైన ఒక విషయం ఏర్పడే అవకాశాలను అర్థం చేసుకొనుటకు మరియు మాపనం చేయుటకు, మనం నాణేన్ని ఎగురవేయడం, పాచికను దొర్లించడం మరియు స్పిన్నర్‌ను త్రిప్పడం లాంటి ప్రయోగాలు చేస్తాము. ఒక నాణేన్ని ఎగురవేయునపుడు రెండు ఫలితాలు ఏర్పడే అవకాశం ఉంది. అవి బొమ్మ లేదా బొరుసు. ఉదాహరణకి మీ స్కూల్‌లో ఒక క్రికెట్ జట్టుకు నీవు కెప్టెన్‌గా మరొక జట్టుకు నీ మిత్రుడు కెప్టెన్ ఉన్నాడని – అనుకొందాం ఆటస్థలంలో నాణేన్ని పైకి ఎగురవేసి నీమిత్రుణ్ని బొమ్మా లేదా బొరుసు కోరుకొమ్మని అంటావు. ఆ టాస్ ఫలితం నీ ఆధీనంలో ఉంటుందా? ఒక వేళ నీకు బొమ్మ లేదా బొరుసు కావాలంటే అది దక్కుతుందా? మామూలు నాణెంతో ఇది అసంభవం. ఇక్కడ బొమ్మా మరియు బొరుసు ఏర్పడుటకు సమాన అవకాశం ఉంది కాని సరిగ్గా ఏది ఏర్పడుతుందో మాత్రం చెప్పలేము. ఈ విధమైన ప్రయోగాలనే "యాదృశ్చిక ప్రయోగాలు" అంటాము. ఇలాంటి ప్రయోగాలలో పర్యవసానాలన్నీ ముందే తెలిసినప్పటికి, ప్రయోగం చేసే సమయంలో ఏ పర్యవసానం ఏర్పడుతుందో ముందుగానే ఊహించలేము. యాదృశ్చిక ప్రయోగం యొక్క పర్యవసానాలు ఏర్పడే అవకాశం సమసంభవం కావచ్చు, కాకపోవచ్చు. నాణేన్ని ఎగురవేయునప్పుడు ఏర్పడే రెండు పర్యవసానాలు బొమ్మా లేదా బొరుసు మాత్రమే.

---

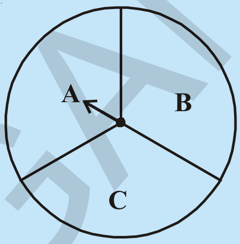
* పాచిక అంటే 6 ముఖాలు కల్గి ఒక్కొక్క ముఖంపై 1 నుండి 6 అంకెలు లేదా చుక్కలు గల సమఘనం.

ప్రయత్నించండి

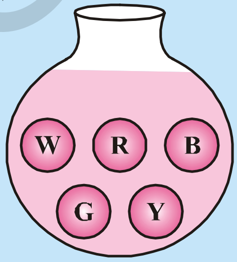
1. ఒక స్కూటరుని స్టార్ట్ చేయాలనుకొన్నప్పుడు సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు ఏవి?

2. పాచికను దొర్లించినప్పుడు సాధ్యమయ్యే పర్యవసానములు ఏవి?

3. పటంలో చూపిన చక్రాన్ని ఒకసారి తిప్పినప్పుడు సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు ఏవి? (సూచిక ఎక్కడైతే ఆగుతుందో దానిని పర్యవసానంగా తీసుకొంటాము)



4. ఒక జాడీలో 5 ఒకేరకమైన బంతులు గలవు. ఇవి తెలుపు, ఎరుపు, నీలం, బూడిద మరియు పసుపు రంగులలో కలవు. జాడివైపు చూడకుండా ఒక బంతిని తీయునప్పుడు సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు ఏవి?



ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు

- మొదటి ఆటగాడికి, పాచిక పైముఖం (Topface) పై 6 పడే అవకాశం ఎక్కువ.
- ఆ తర్వాత ఆటగాడికి పాచిక పైముఖం (Topface) పై 6 పడే అవకాశం తక్కువ.
- ఒకవేళ రెండో ఆటగాడికి పాచిక పైముఖం (Topface) పై 6 పడినట్లయితే, ఆ తర్వాత పాచిక దొర్లించే మూడో ఆటగాడికి పైముఖంపై 6 పడే అవకాశం అసలు లేదు.

14.2.2 సమసంభవ పర్యవసానాలు (Equally likely outcomes)

మనం ఒకనాణాన్ని ఎగురవేయునప్పుడు, పాచికను దొర్లించినప్పుడు నాణాన్ని, పాచికను నిష్పాక్షికమైనవిగా తీసుకొంటాము. (అనగా అన్ని పర్యవసానాలు ఏర్పడుటకు సమాన అవకాశాలు ఉంటాయి). మనం ప్రయోగాలుచేసి సమాచారం సేకరిస్తాము. ఈ సేకరించిన సమాచారాన్ని బట్టి అవి సాధ్యమయ్యే అవకాశాలను మాపనం చేస్తాము.

ఒక నాణాన్ని ఎగురవేసి బొమ్మ బొరుసులను పట్టికలో రాయడం జరిగింది. నాణేన్ని ఎక్కువసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు ఏర్పడిన ఫలితాలను పట్టికలో గమనించండి.

నాణాన్ని ఎగురవేసే సంఖ్య	గణన చిహ్నాలు (బొమ్మలు)	బొమ్మల సంఖ్య	గణన చిహ్నాలు (బొరుసులు)	బొరుసుల సంఖ్య
50	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	22	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	28
60	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	26	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	34
70	……	30	……	40
80	……	36	……	44
90	……	42	……	48
100	……	48	……	52

పై పట్టికను పరిశీలించిన నాణేన్ని మరిన్ని ఎక్కువసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మలసంఖ్య మరియు బొరుసుల సంఖ్య దాదాపు సమానంగా ఉంటాయి.

ఇవి చేయండి

ఒక నాణేన్ని తీసుకొని కింది పట్టికలో చూపిన విధంగా 10, 20, ... సార్లు ఎగురవేయండి. ఫలితాలను పట్టికలో రాయండి.

నాణేన్ని ఎగురవేసే సంఖ్య	బొమ్మల సంఖ్య	బొరుసుల సంఖ్య
10		
20		
30		
40		
50		

నాణేన్ని ఇంకా ఎక్కువసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు ఏమి జరుగుతుందో ఊహించండి.

పై ప్రయోగాలను నాణెంతోనే కాకుండా పాచికను దొర్లించి కూడా చేయవచ్చు. ఒక పాచికను ఎక్కువసార్లు దొర్లించిన ఏర్పడిన పర్యవసానాలను పట్టికలో పరిశీలించండి.

పాచిక దొర్లింపుల సంఖ్య	ప్రతి పర్యవసానం ఎన్ని సార్లు ఏర్పడిందో తెలిపే సంఖ్య (పై ముఖం మీద కనిపించే అంకె)					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
25	4	3	9	3	3	3
50	9	5	12	9	8	7
75	14	10	16	12	10	13
100	17	19	19	16	13	16
125	25	20	24	18	16	22
150	28	24	28	23	21	26
175	31	30	33	27	26	28
200	34	34	36	30	32	34
225	37	38	40	34	38	38
250	40	40	43	40	43	44
275	44	41	47	47	47	49
300	48	47	49	52	52	52

పై పట్టిక నుండి పాచిక దొర్లింపుల సంఖ్య పెరిగే కొద్ది, సాధ్యమయ్యే ఆరు పర్యవసానాల సంఖ్య దాదాపు సమానం. పై ప్రయోగాల ద్వారా ప్రతి పర్యవసానం ఏర్పడటానికి సమాన అవకాశాలు ఉన్నాయి అని తెలుస్తున్నది.

14.2.3 యత్నాలు మరియు ఘటనలు (Trials and events)

పై ప్రయోగాల నుండి ఒకసారి, నాణేన్ని ఎగురవేసిన లేదా పాచికను దొర్లించిన దానిని యత్నం (Trial) అని అంటారు. దీనినే యాదృశ్చిక ప్రయోగం అని కూడా చెప్పవచ్చు.

ఒక్కసారి పాచికను దొర్లించిన,

పాచిక పైముఖంపై 5గాని అంతకంటే ఎక్కువగాని సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు ఎన్ని?

రెండు పర్యవసనాలు సాధ్యము. (అవి 5,6)

పాచిక పైముఖంపై సరిసంఖ్య పడే పర్యవసానాలు ఎన్ని? అవిఏవి?

పర్యవసానాలు 3 (అవి 2, 4 మరియు 6).

ఈ విధంగా ప్రతి ప్రత్యేకయత్నాన్ని లేదా కొన్ని ప్రత్యేకయత్నాలను కలిపి. ఒక ఘటనగా పేర్కొంటాము.

పై యత్నాలలో పాచిక పైముఖంపై 5 కంటే ఎక్కువ అంకె ఏర్పడేది, మరియు సరిసంఖ్య ఏర్పడేవి ఘటనలకు ఉదాహరణలు. ప్రతి ఘటనలో ఒకే పర్యవసానం ఉండనక్కరలేదు. ఒక యాదృశ్చిక ప్రయోగం యొక్క ప్రతి పర్యవసానాన్ని ఘటన(Event)గా

చెప్పవచ్చు. ఇక్కడ ఘటన యొక్క ప్రాథమిక పరిజ్ఞానం ఇవ్వబడింది. ఘటనను గూర్చి మరింత క్షుణ్ణంగా పై తరగతులలో నేర్చుకొంటారు.

14.2.4 అవకాశాలను, సంభావ్యతకు అనుసంధానం చేయుట

నాణేన్ని ఎగురవేసే ప్రయోగాన్ని మరొకసారి గమనించండి. ఒకసారి నాణేన్ని ఎగురవేసిన ఎన్ని పర్యవసానాలుంటాయి? బొమ్మ లేదా బొరుసు అనే రెండు పర్యవసానాలుంటాయి. అవి రెండూ సమసంభవాన్ని కల్గి ఉంటాయి.

నాణేన్ని ఒకసారి ఎగురవేసిన బొమ్మవచ్చే అవకాశం ఎంత?

నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు సాధ్యమయ్యే రెండు అవకాశాలలో బొమ్మ వచ్చే అవకాశం 1 అనగా $\frac{1}{2}$ దీనినే కింది విధంగా కూడా చెప్పవచ్చు

నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ పడే సంభావ్యత $\frac{1}{2}$ దీనిని బొమ్మ యొక్క సంభావ్యత లేదా

క్లుప్తంగా $P(H) = \frac{1}{2} = 0.5$ లేదా 50% గా రాస్తాము.

బొరుసు పడే సంభావ్యత ఎంత?

ఇప్పుడు పాచికను దొర్లించే ఉదాహరణను తీసుకుందాం. ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు ఎన్ని? అవిఏవి?

ఆరు సమసంభవం కలిగిన పర్యవసానాలు సాధ్యం అవి 1, 2, 3, 4, 5 మరియు 6...

పాచికను దొర్లించినప్పుడు పై ముఖంపై బేసి సంఖ్య వచ్చే సంభావ్యత ఎంత?

మొత్తం సాధ్యమయ్యే 6 పర్యవసానాలలో 3 అనుకూల పర్యవసానాలు. (అవి 1, 3 లేదా 5). $\therefore$ సంభావ్యత $\frac{3}{6}$ లేదా $\frac{1}{2}$

A అనే ఘటన యొక్క సంభావ్యతను కింది విధంగా రాస్తాము.

$$P(A) = \frac{\text{ఘటన 'A' యొక్క అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాల సంఖ్య}}$$

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము

ఉదాహరణ-1 : రెండు నాణాలను (ఒకేవిధంగా ఉండే) ఒకేసారి పైకి ఎగురవేసిన (a) సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు (b) సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాల సంఖ్య (c) రెండూ బొమ్మలు వచ్చే సంభావ్యత, (d) కనిష్ఠంగా ఒక బొమ్మ వచ్చే సంభావ్యత (e) బొమ్మ పడని సంభావ్యత మరియు (f) ఒకే ఒక బొమ్మపడే సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

సాధన : (a) సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు

1వ నాణెం	2వ నాణెం
బొమ్మ	బొమ్మ
బొమ్మ	బొరుసు
బొరుసు	బొమ్మ
బొరుసు	బొరుసు

b) మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య 4

c) రెండూ బొమ్మ వచ్చే సంభావ్యత

$$= \frac{\text{రెండు బొమ్మలు వచ్చే అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాల సంఖ్య}} = \frac{1}{4}$$

d) కనీసం ఒక బొమ్మపడే సంభావ్యత $= \frac{3}{4}$

[కనీసం ఒక బొమ్మ అనగా ఒకటి లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ బొమ్మలు]

e) బొమ్మలేని పర్యవసానాల సంభావ్యత $= \frac{1}{4}$.

f) ఒకే ఒక్క బొమ్మ ఉండే పర్యవసానాలు సంభావ్యత $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

ఇవి చేయండి

1. మూడు నాణేలు (ఒకే విధమైనవి) ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు ఏర్పడే పర్యవసనాలు తెలపండి.
   a) మొత్తం సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు
   b) మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య
   c) కనీసం ఒక బొమ్మ వచ్చే సంభావ్యత
   (ఒకటి లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ బొమ్మలు)
   d) గరిష్ఠంగా రెండు బొమ్మలు పడే సంభావ్యత
   (రెండు లేదా అంతకన్నా తక్కువ బొమ్మలు)
   e) బొమ్మ లేదా బొరుసు పడే పర్యవసానాల సంభావ్యత

ఉదాహరణ-2 : ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు (a) దాని పైముఖంపై వచ్చే ప్రతి అంకె యొక్క సంభావ్యతను పట్టికలో రాయండి. (b) అన్ని సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాల సంభావ్యతల మొత్తం కనుక్కోండి.

సాధన : (a) పాచికను దొర్లించినప్పుడు సాధ్యమయ్యే మొత్తం ఆరు పర్యవసానాల్లో 4 అంకె ఒకసారి రావడానికి సాధ్యము కావున సంభావ్యత 1/6.

పర్యవసానం	1	2	3	4	5	6
సంభావ్యత (P)				1/6		

(b) అన్ని పర్యవసానాల సంభావ్యతల మొత్తం

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

మనం కింది విధంగా సాధారణీకరించవచ్చు.

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో అన్ని పర్యవసానాల సంభావ్యతల మొత్తం ఒకటి (1)

ప్రయత్నించండి

పాచికను ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు ఏర్పడే కింది ఘటనల సంభావ్యతలను పట్టికలో రాయండి.

ఘటన	అనుకూల పర్యవసానం(లు)	అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య	మొత్తం సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు	మొత్తం సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాల సంఖ్య	సంభావ్యత $\frac{\text{అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యమయ్యే మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}}$
పైముఖంపై పర్యవసానం 5 వచ్చేది	5	1	1, 2, 3, 4, 5 మరియు 6	6	1/6
పైముఖంపై పర్యవసానం 3 కంటే ఎక్కువ అంకె వచ్చేది					
పైముఖంపై పర్యవసానం ప్రధానసంఖ్య వచ్చేది					
పైముఖంపై పర్యవసానం 5 కంటే ఎక్కువ అంకె వచ్చేది					
పైముఖంపై పర్యవసానం 6 కంటే ఎక్కువ అంకె వచ్చేది					
పైముఖంపై పర్యవసానం 7 కంటే ఎక్కువ అంకె వచ్చేది					
పైముఖంపై పర్యవసానం 3 యొక్క గుణిజం వచ్చేది					
పైముఖంపై పర్యవసానం 6గాని అంతకంటే తక్కువ వచ్చే అంకె					

పై పట్టిక నుండి ఈ కింది వాటిని నీవు గమనిస్తావు.

ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత ఎల్లప్పుడు 0 నుండి 1 మధ్యలో ఉంటుంది. (0 మరియు 1 కలిపి)

$$0 \leq \text{ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత} \leq 1$$

a) నిశ్చితమైన ఘటన యొక్క సంభావ్యత = 1

b) అసంభవం అయిన ఘటన యొక్క సంభావ్యత = 0

14.2.5 కింది ప్రయోగాలు చేయండి.

1. ప్రతి సమూహంలో 3-4 విద్యార్థులు ఉండేటట్లు ఈ ప్రయోగం చేస్తాము. ప్రతి సమూహంనకు ఒక నాణేన్ని ఇవ్వాలి. (ఈ నాణెం అన్ని సమూహాలకు ఒకే విధంగా ఉంటుంది). ప్రతి సమూహం నుండి ఒక విద్యార్థి నాణేన్ని ఎగురవేస్తాడు. సమూహంలోని మిగతా విద్యార్థులు ఆ సమాచారాన్ని కింది పట్టికలో రాస్తారు.

సమూహం సంఖ్య	నాణేన్ని ఎగురవేసిన పౌనఃపున్యం	నాణేన్ని ఎగురవేసిన సంచిత పౌనఃపున్యం	బొమ్మల సంఖ్య	బొమ్మల సంఖ్య యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం	$\frac{\text{బొమ్మల సంచిత పౌనఃపున్యం}}{\text{నాణేన్ని ఎగురవేసిన సంచిత పౌనఃపున్యం}}$	$\frac{\text{బొరుసుల సంచిత పౌనఃపున్యం}}{\text{నాణేన్ని ఎగురవేసిన సంచిత పౌనఃపున్యం}}$
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
1	20	20	7	7	$\frac{7}{20}$	$\frac{20-7}{20}=\frac{13}{20}$
2	20	40	14	21	$\frac{21}{40}$	$\frac{40-21}{40}=\frac{19}{40}$
3	20	60				
4	20	80				
5	20	100				
6	.....	....				
7	....	....				

పై పట్టికలో నాణేన్ని ఎక్కువసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు (6) (7) నిలువు వరుసలో నున్న భిన్నాల విలువలు ఏ విధంగా మారుతున్నాయి? ఈ విలువలు నాణేన్ని ఒకసారి ఎగురవేసినప్పుడు వచ్చే బొమ్మ సంభావ్యత లేదా బొరుసు సంభావ్యతకు దగ్గరగా ఉన్నాయని గమనించావా?

2. ఈ ప్రయోగాన్ని కూడా 3-4 విద్యార్థుల సమూహాలుగా ఏర్పడి చేస్తారు. ప్రతి సమూహంలోని విద్యార్థి పాచికను 30 సార్లు దొర్లిస్తాడు. సమూహంలోని మిగతా విద్యార్థులు. ఆ సమాచారాన్ని కింది పట్టికలో రాస్తారు. (ఇక్కడ అన్ని సమూహాలకు ఒకే విధమైన పాచికను ఇవ్వాలి. అప్పుడు అన్ని దొర్లింపులు ఒకే పాచికకు చెందినవిగా తీసుకొని లెక్కిస్తాము.

పాచిక దొర్లింపుల సంఖ్య	పాచిక పైముఖంపై పడే పర్యవసానాల సంఖ్య					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

వివిధ సమూహాల నుండి సమాచారాన్ని సేకరించి కింది పెద్ద పట్టికను తయారుచేయండి.

సమూహము (లు)	పాచికపై ముఖంపై 1 వచ్చిన పౌనఃపున్యం	పాచికను దొర్లించిన పౌనఃపున్యం	$\frac{\text{పాచికపై ముఖంపై 1 వచ్చిన పౌనఃపున్యం}}{\text{పాచికను దొర్లించిన సంచిత పౌనఃపున్యం}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1వ			
1వ +2వ			
1వ+2వ+3వ			
1వ+2వ+3వ+4వ			
1వ+2వ +3వ+4వ+5వ			

పాచికను మరిన్ని ఎక్కువసార్లు దొర్లించిన (4)వ నిలువ వరుసలలోని విలువ $\frac{1}{6}$ కు దగ్గరగా సమీపిస్తుంది (ఎందుకు?). పై ప్రయోగం పాచిక పైముఖంపై పర్యవసానం 1 వచ్చినప్పుడు చేసారు. ఇదే ప్రయోగం పాచిక పైముఖంపై 2, పాచిక పైముఖంపై 5 వచ్చినప్పుడు చేసి ఈ విలువ కూడా $\frac{1}{6}$ సమీపిస్తుందేమో పరిశీలించండి.

ప్రతి సందర్భంలోనూ (4)వ నిలువు వరుసలో వచ్చే భిన్నాల విలువలు, పాచికను ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు 1, 2 లేదా 5 వచ్చే సంభావ్యతలతో పోల్చండి.

3. రెండూ ఒకే విధమైన నాణేలను, ఒకేసారి ఎగురవేయునప్పుడు ఏ పర్యవసానాలు వస్తాయి? పర్యవసానాలు రెండు బొమ్మలుగాని లేదా రెండు బొరుసులుగాని, లేదా బొమ్మ, బొరుసుగాని వస్తాయి. ఈ మూడు ఘటనలకు సమాన అవకాశాలు ఉన్నాయా ఆలోచించండి. మీ యొక్క జవాబును కింది ప్రయోగంతో సరిచూడండి.

తరగతిని 4గురు విద్యార్థులు గల సమూహాలుగా విభజించాలి. ప్రతి సమూహంనకు రెండు నాణేలు ఇవ్వడం జరుగును. (ఈ నాణేలు అన్ని సమూహాలకు ఒకే విధమైనవిగా ఉండాలి) ఇక్కడ ప్రతి సమూహ నాణేలను రెండింటిని కలిపి ఎగురవేస్తారు. ఈ విధంగా 20 సార్లు ప్రతి సమూహం ఎగురవేసి కింది పట్టికలో రాయండి.

రెండు నాణేలు ఎగురవేసిన పౌనఃపున్యం	బొమ్మరాని పౌనఃపున్యం	ఒక్క బొమ్మ వచ్చే పౌనఃపున్యం	రెండు బొమ్మలు వచ్చే పౌనఃపున్యం
20			

పై పట్టికలోని సమాచారాన్ని ఉపయోగించి అన్ని సమూహాలకు ఒక సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికను తయారుచేయాలి.

సమూహం (లు)	రెండు నాణేలు ఎగురవేసిన పౌనఃపున్యం	రెండు నాణేలపై బొమ్మరాని పౌనఃపున్యం	ఒక బొమ్మ వచ్చే పౌనఃపున్యం	రెండు బొమ్మలు బొమ్మలు వచ్చే పౌనఃపున్యం
1వ				
1వ + 2వ				
1వ + 2వ + 3వ				
1వ + 2వ + 3వ + 4వ				
....				

పై పట్టికలోని సమాచారాన్ని ఉపయోగించి. రెండు నాణేలపై బొమ్మరాని పౌనఃపున్యానికి, రెండు నాణేలు ఎగురవేసిన పౌనఃపున్యానికి నిష్పత్తిని లెక్కిస్తాము. ఈ విధంగా ఒక బొమ్మ వచ్చే పౌనఃపున్యం మరియు రెండు బొమ్మలు వచ్చే పౌనఃపున్యానికి కూడా నిష్పత్తులు లెక్కిస్తాము.

కింది పట్టికల నుండి పై నిష్పత్తులను లెక్కిస్తాము.

సమూహం (లు)	$\frac{\text{రెండు నాణేలపై బొమ్మరాని పౌనఃపున్యం}}{\text{రెండు నాణేలు ఎగురవేసిన పౌనఃపున్యం}}$	$\frac{\text{రెండు నాణేలపై పౌనఃపున్యం}}{\text{రెండు నాణేలు ఎగురవేసిన పౌనఃపున్యం}}$	$\frac{\text{రెండు నాణేలపై వచ్చే పౌనఃపున్యం}}{\text{రెండు నాణేలు ఎగురవేసిన పౌనఃపున్యం}}$
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**
1 వ సమూహం			
1 + 2 వ సమూహాలు			
1 + 2 + 3 వ సమూహాలు			
1 + 2 + 3 + 4 వ సమూహాలు			
....			

ఈ విధంగా ఎక్కువసార్లు రెండు నాణేలను (2), (3) (4) నిలువు వరుసలోని భిన్నాల దశాంశ విలువలు వరుసగా 0.25, 0.5, 0.25 కు సమీపిస్తాయని గమనించవచ్చు.

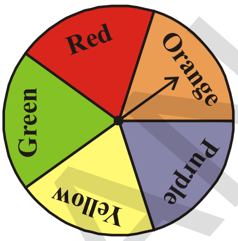
ఉదాహరణ-3 : ఒక స్పిన్నర్ (గుండ్రంగా తిప్పేందుకు వీలైన చక్రం) 1000 సార్లు తిప్పడం జరిగింది. ప్రతిసారి తిప్పినప్పుడు సూచిక ఆగే ప్రదేశం యొక్క రంగు పట్టికలో రాసినప్పుడు, వాటి పౌనఃపున్యం కింది విధంగా ఉంది.

పర్యవసానం	ఎరుపు (Red)	నారింజ(Orange)	వంగపండు(Purple)	పసుపు(Yellow)	ఆకుపచ్చ(Green)
పౌనఃపున్యం	185	195	210	206	204

(a) స్పిన్నర్ నుండి సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు ఎన్ని? అవి ఏవి? (b) ప్రతి రంగు పర్యవసానంగా వచ్చే సంభావ్యత కనుగొనండి.
(c) పట్టిక నుండి, ప్రతి రంగు యొక్క పౌనఃపున్యానికి, మొత్తం పౌనఃపున్యానికి నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

సాధన :

(a) స్పిన్నర్ చూసినప్పుడు 5 సెక్టర్లు ఒకే వైశాల్యం గల ప్రదేశాలుగా ఉన్నాయి. ఇవన్నియు 5 వేరు వేరు రంగులలో కలవు. అవి ఎరుపు, నారింజ, వంగపండు, పసుపు, ఆకుపచ్చ ఇవన్నియు సమసంభవం కల్గిన పర్యవసానాలు. మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య 5.



(స్పిన్నర్)
నమూనా

(b) ప్రతి ఘటన యొక్క సంభావ్యత.

$$\text{కావున } P(\text{ఎరుపు}) = \frac{\text{ఎరుపు వచ్చే పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{1}{5} = 0.2.$$

ఇదే విధంగా

$P(\text{నారింజ}), P(\text{వంగపండు}), P(\text{పసుపు})$ మరియు $P(\text{ఆకుపచ్చ})$ మరియు $\frac{1}{5}$ లేదా 0.2.

(c) పట్టిక నుండి 1000 సార్లు స్పిన్నర్ తిప్పినపుడు 185 సార్లు ఎరుపుకు అనుకూలంగా ఉంది.

$$\text{కావున ఎరుపు నిష్పత్తి} = \frac{\text{ప్రయోగాలలో ఎరుపు రంగు పౌనఃపున్యం}}{\text{మొత్తం స్పిన్నర్‌ను త్రిప్పిన సంఖ్య}}$$

$$= \frac{185}{1000} = 0.185$$

ఈ విధంగా మిగిలిన రంగులకి కూడా ఈ విధమైన నిష్పత్తులను రాసిన నారింజ, వంగపండు, పసుపు, ఆకుపచ్చలకు వరుసగా 0.195, 0.210, 0.206 మరియు 0.204 వచ్చింది.

(b) (c) లను పరిశీలించిన (c) లో కనుగొన్న నిష్పత్తులన్నీ (b) లోని ఆయారంగుల సంభావ్యతలకు దగ్గరగా ఉన్నాయి. అంటే మనం కనుగొన్న సంభావ్యత, ప్రయోగం తర్వాత కనుగొన్న నిష్పత్తులకు దాదాపు సమానంగా ఉన్నాయి.

ఉదాహరణ-4 : ఒక సినిమా థియేటర్‌కి విచ్చేసిన ప్రేక్షకుల సంఖ్య వయసుల వారీగా ఇవ్వబడ్డాయి. బంపర్ బహుమతి గెలుచుకోవడానికి ప్రతిప్రేక్షకుడికి టికెట్టుతోపాటు ఒక నెంబరు ఈయబడింది. నెంబర్లలో నుండి యాదృశ్చికంగా ఒక నెంబరును తీసినప్పుడు, కింది నీయబడిన ఘటనలకు సంభావ్యత కనుక్కోండి.

వయసు	పురుషులు	స్త్రీలు
2 సం॥ కన్నా తక్కువ	3	5
3 - 10 సం॥	24	35
11 - 16 సం॥	42	53
17 - 40 సం॥	121	97
41- 60 సం॥	51	43
60 సం॥ పైన	18	13

మొత్తం ప్రేక్షకుల సంఖ్య = 505

సాధన : ఆ నంబరు

a) వయసు 10 గాని అంతకంటే తక్కువగాని ఉన్న ప్రేక్షకుడిది అయ్యే సంభావ్యత

10 గాని అంతకంటే తక్కువ వయసు ఉన్న ప్రేక్షకులు $= 24 + 35 + 5 + 3 = 67$

మొత్తం ప్రేక్షకుల సంఖ్య $= 505$

$$P(\text{ ప్రేక్షకుని వయసు } \leq 10 \text{ సంవత్సరాలు }) = \frac{67}{505}$$

b) వయసు 16 గాని అంతకంటే తక్కువగాని ఉన్న స్త్రీ ప్రేక్షకులది అయ్యే సంభావ్యత

వయసు 16 గాని అంతకంటే తక్కువగాని ఉన్న స్త్రీ ప్రేక్షకులు $= 53 + 35 + 5 = 93$

$P(\text{ స్త్రీ ప్రేక్షకుల వయసు } \leq 16 \text{ సంవత్సరాలు }) = 93/505$

c) వయసు 17 గాని అంతకంటే ఎక్కువగాని ఉన్న పురుష ప్రేక్షకులది అయ్యే సంభావ్యత

వయసు 17 గాని అంతకంటే ఎక్కువగాని ఉన్న పురుష ప్రేక్షకులు $= 121 + 51 + 18 = 190$

$$P(\text{ పురుష ప్రేక్షకుల వయసు } \geq 17 \text{ సంవత్సరాలు }) = \frac{190}{505} = \frac{38}{101}$$

d) వయసు 40 సం॥రాలు పైబడిన ప్రేక్షకుల సంభావ్యత

వయసు 40 సం॥రాలు పైబడిన ప్రేక్షకుల సంభావ్యత $= 51+43+18+ 13 = 125$

$$P(\text{ ప్రేక్షకుల వయసు } > 40 \text{ సంవత్సరాలు }) = \frac{125}{505} = \frac{25}{101}$$

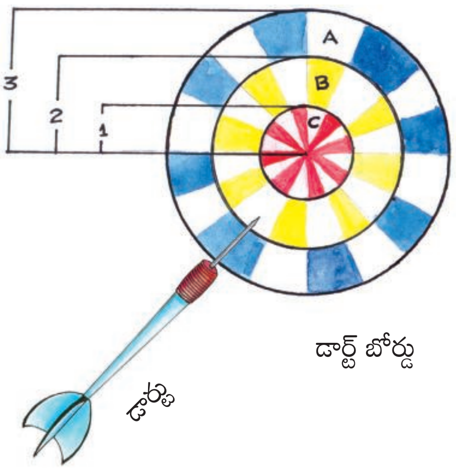
e) పురుషులు కాకుండా ఉన్న ప్రేక్షకుల సంభావ్యత

పురుషులు కాకుండా ఉన్న ప్రేక్షకులు $= 5 + 35 + 53 + 97 + 43 + 13 = 246$

$$P(\text{ పురుషుడు కాని ప్రేక్షకుల సంఖ్య }) = \frac{246}{505}$$

ఉదాహరణ-5 : మూడు ఏకకేంద్ర వృత్తాకారాలతో (వ్యాసార్థాలు వరుసగా 3 సెం.మీ., 2 సెం.మీ. మరియు 1 సెం.మీ.) తయారుచేయబడిన ఒక డార్ట్‌బోర్డు A, B మరియు C అనే ప్రాంతాలుగా విభజింపబడింది (పటం చూడండి).

మొనతేలిన ఒక బల్లెం (dart) ను బోర్డుపైకి విసిరిన అది ప్రాంతం A లో తగిలే సంభావ్యత ఎంత? A అనేది (బయటకంకణ కారప్రాంతం)



సాధర : A ప్రాంతంలో తగిలే ఘటన యొక్క సంభావ్యత.

మొత్తం వృత్తాకార ప్రాంత వైశాల్యం (వ్యాసార్థం 3 సెం.మీ.తో)

$$= \pi(3)^2$$

కంకణ ప్రాంతం (A) వైశాల్యం = $\pi(3)^2 - \pi(2)^2$

బల్లెం కంకణ ప్రాంతం (A) లో తగిలే సంభావ్యత P(A)

$$P(A) = \frac{\text{ప్రాంతం A వైశాల్యం}}{\text{మొత్తం వృత్తాకార వైశాల్యం}}$$

$$= \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2}$$

$$= \frac{9\pi - 4\pi}{9\pi}$$

$$\frac{5}{9} \quad = 0.556\%$$

వృత్త వైశాల్యం = πr^2

కంకణ వైశాల్యం = $\pi R^2 - \pi r^2$

అని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

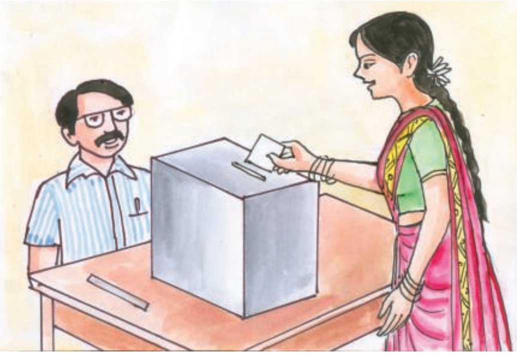
ప్రయత్నించండి

పక్క పేజీలో ఇచ్చిన వృత్తాకార పటం నుండి

1. కంకణ ప్రాంతం B లో బల్లెం తగిలే సంభావ్యత.
2. కంకణ ప్రాంతం C లో బల్లెం తగిలే సంభావ్యతను గణన చేయకుండానే శాతంలో తెల్పండి.

14.3 నిజ జీవితంలో సంభావ్యత

- అనేక సంవత్సరాలుగా సేకరించిన సమాచారాన్ని బట్టి వాతావరణశాఖ రాబోయే రోజులలో వాతావరణం ఏ విధంగా ఉంటుందో ఊహిస్తారు.
- భీమా (Insurance) సంస్థలు ప్రమాదాల మరియు మరణాల సంభావ్యతను పరిగణనలోకి తీసుకొని భీమా ప్రీమియంను నిర్ణయిస్తారు.
- ఎన్నికల ఓటింగ్ తర్వాత ఎగ్జిట్‌పోల్‌ని నిర్వహిస్తారు. దీనిని ఓటేసిన ప్రజలను దేనికి ఓటేసినారో తెలుసుకొని ఆ సమాచారాన్ని క్రోడీకరించి విశ్లేషిస్తారు. దీనిని ఉపయోగించి ఏ అభ్యర్థికి ఎన్నికలలో గెలుపొందే అవకాశం ఉందో ఫలితాల కంటే ముందే ఊహిస్తారు.



అభ్యాసం 14.1

1. 1-6 అంకెలు ముఖాలుగా గల ఒక పాచికను దొర్లించి, పై ముఖంపై వచ్చిన అంకెను గుర్తించారు. ఇది ఒక యాదృశ్చిక ప్రయోగంగా భావించిన

   a) సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు ఏవి?

   b) అవి సమ సంభవ పర్యవసానాలా? ఎందుకు?

   c) పాచిక పైముఖంపై సంయుక్త సంఖ్య వచ్చే సంభావ్యత ఎంత?

2. ఒక నాణేన్ని 100 సార్లు ఎగురవేసినప్పుడు పర్యవసానాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

   బొమ్మ : 45 సార్లు   బొరుసు : 55 సార్లు అయిన

   a) ప్రతి పర్యవసానం యొక్క సంభావ్యత కనుక్కోండి?

   b) ప్రయోగంలో అన్ని పర్యవసానాల సంభావ్యతల మొత్తం కనుక్కోండి.

3. నాలుగు రంగులు గల ఒక స్పిన్నర్‌ను (పటం చూడండి) ఒకసారి తిప్పినప్పుడు

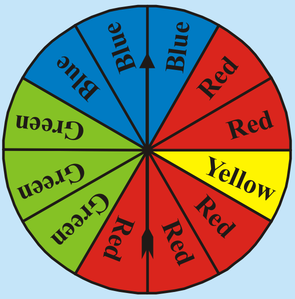
   a) సూచిక ఆగుటకు అధిక అవకాశం గల రంగు ఏది?

   b) సూచిక ఆగుటకు తక్కువ అవకాశం గల రంగు ఏది?

   c) సూచిక ఆగుటకు సమాన అవకాశం గల రంగు ఏది?

   d) తెలుపు రంగుపై సూచిక అగుటకు అవకాశం ఎంత?

   e) సూచిక ఏదైన రంగుపై ఖచ్చితంగా ఆగుతుందని చెప్పగలవా?



4. ఒక సంచిలో ఒకే సైజుగల 5 ఆకుపచ్చ రంగు గోళీలు, 3 నీలం రంగు గోళీలు, 2 ఎరుపు రంగు గోళీలు, మరియు 2 పసుపురంగు గోళీలు కలవు. వీటి నుండి యాదృశ్చికంగా ఒక గోళీని తీసిన

   a) అన్ని రంగుల పర్యవసానాలు సమ సంభవమా? వివరించండి.

   b) కింది రంగుల గోళీలు వచ్చు సంభావ్యత కనుక్కోండి.

      i.e. , P(ఆకుపచ్చ), P(నీలం), P(ఎరుపు) మరియు P(పసుపు)

   c) అన్ని పర్యవసానాల సంభావ్యతల మొత్తం ఎంత?

5. ఆంగ్ల భాషలోని అక్షరాలలో ఒక అక్షరాన్ని యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకొనిన, ఆ అక్షరం కిందనివ్వబడిన ఘటన అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?

   a) ఒక అచ్చు   b) P అనే అక్షరం తర్వాతవచ్చు అక్షరాలు

   c) అచ్చు లేదా హల్లు   d) అచ్చుకానిది

6. సంచిపై 5 కిలోలు అని రాయబడిన గోధుమపిండిగల సంచుల అసలు బరువులు కిందినివ్వబడ్డాయి. (కి.గ్రా.లలో)

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

వీటిల్లో యాదృశ్చికంగా ఒక సంచిని తీసినప్పుడు అది 5 కిలోల కంటే ఎక్కువ బరువు ఉండే సంభావ్యత కనుగొనుము?

7. ఒక పట్టణంలో భీమాసంస్థ 2000 మంది డ్రైవర్లను యాదృశ్చికంగా (ఏ డ్రైవరుకు కూడా ప్రత్యేక ప్రాముఖ్యత ఇవ్వకుండా) ఎంపిక చేసింది. వీరి వయసుకు, వీరుచేసిన ప్రమాదాలకు మధ్య ఏదైన సంబంధం అధ్యయనం చేయడంకోసం. కొంత సమాచారం సేకరించింది. ఆ సమాచారం కింది పట్టికలో రాయబడింది.

డ్రైవర్ల వయసు (సం॥ లలో)	**సంవత్సరానికి చేసిన ప్రమాదాలు**				**3 కంటే ఎక్కువ ప్రమాదాలు చేసిన డ్రైవర్లు**
	0	**1**	**2**	**3**	
18-29	440	160	110	61	35
30- 50	505	125	60	22	18
50 పైన	360	45	35	15	9

ఒక డ్రైవరును యాదృశ్చికంగా ఎంపికచేసిన

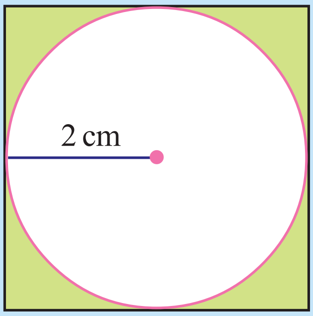
(i) డ్రైవరు 18-29 మధ్య వయసు కలిగి ఉండి మూడు ప్రమాదాలు చేసిన సంభావ్యత ఎంత?

(ii) డ్రైవరు 30-50 మధ్య వయసు కలిగి ఉండి 1 గాని అంతకన్నా ఎక్కువగాని ప్రమాదాలు చేసిన సంభావ్యత.

(iii) డ్రైవరు ప్రమాదాలు చేయని సంభావ్యత.

8. యాదృశ్చికంగా ఒక మొనతేలిన బల్లెం(డార్ట్)ను పటంలో చూపిన చతురస్రాకార బోర్డువైపు విసరగా అది షేడ్ చేసిన ప్రాంతంలో తగిలే సంభావ్యత ఎంత?

(π విలువ $= \frac{22}{7}$ తీసుకొని, జవాబును శాతంలో తెల్పండి.)



మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

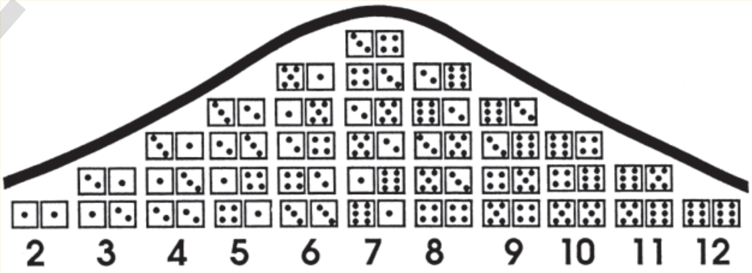
- నిత్యజీవితంలో మనం ఏదైన ఒక విషయం జరిగే అవకాశాలను వ్యక్తీకరించుటకు, అధిక సంభవం, అసంభవం, అల్పసంభవం లాంటి పదాలు ఉపయోగిస్తాము.
- కొన్ని ప్రయోగాలలో పర్యవసానాలన్ని ఏర్పడుటకు సమాన అవకాశాలు ఉంటాయి. ఆ పర్యవసానాలను సమసంభవ పర్యవసానాలు అంటారు.
- ఒక ప్రత్యేక పర్యవసానం లేదా కొన్ని ప్రత్యేక పర్యవసానాలను కలిపి ఘటనగా చెప్పవచ్చు.
- కొన్ని యాదృశ్చిక ప్రయోగంలో అన్ని పర్యవసానాలకు సమాన అవకాశాలు ఉంటాయి.
- ఒకే ప్రయోగాన్ని చాలా ఎక్కువసార్లు నిర్వహిస్తే ఆ ప్రయోగంలో సమాన అవకాశం గల పర్యవసానాల సంఖ్య దాదాపు సమానంగా ఉంటాయి.
- A అనే ఒక ఘటన సంభావ్యత

$$P(A) = \frac{\text{A యొక్క అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాల సంఖ్య}}$$

- ఖచ్చితమైన ఘటన సంభావ్యత = 1.
- అసంభవం అయిన ఘటన సంభావ్యత = 0
- ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0 మరియు 1ల మధ్య ఉంటుంది (0 మరియు 1 కలిపి)

మీకు తెలుసా?

ఒక జత పాచికలను ఎగురవేస్తే వచ్చే 36 పర్యవసానాలను కింది పటములో చూపబడినవి. 2 నుండి 12 వరకు గల పర్యవసానాల పౌనఃపున్యాన్ని కనుగొనుటలో ఇది ఆసక్తికరమైన అమరిక.



ఈ అమరికను “గాసియన్ వక్రము” అంటారు. 19వ శతాబ్దపు ప్రఖ్యాత గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు అయిన “కార్ల్ ఫ్రెడరిక్ గౌస్” దీనిని ప్రతిపాదించాడు.

15

గణితములో నిరూపణలు (Proofs in Mathematics)

15.1 పరిచయం

మనం, నిత్య జీవితంలో అనేక సందర్భాలలో అనేక మాటలు, వాక్యాలు చెబుతుంటాం. ఆ మాటలు లేక వాక్యాలు ఎంతవరకు నిజమో మనం తెలుసుకుంటూ ఉంటాం. కొన్ని వాక్యాలు మనం నిజము అని తెలుసుకుని స్వీకరిస్తూ ఉంటాం. మిగిలిన వాటిని మనం వదలి పెడతాం. కొన్ని వాక్యాలు నిజమో కాదో మనం నిర్ణయించలేము. అయితే ఈ వాక్యములు నిజమో కాదో మనం ఏవిధంగా తెలుసుకుంటాము? ఉదాహరణకు ఒక వ్యక్తి బ్యాంకు నుండి ఋణం తీసుకున్నప్పుడు అతడు బ్యాంకుకు కొంత సొమ్ము కట్టిన తరువాత మిగిలిన సొమ్ము ఎంత కట్టవలెను అనేది బ్యాంకు వారు ఇచ్చు స్టేట్‌మెంట్ ఆధారంగా, వారు చెప్పిన విషయము సత్యమో, అసత్యమో తెలుసుకుంటాము. అనగా మన జీవితంలో జరిగే సంఘటనలు సత్యమో, అసత్యమో తెలుసుకోవాలి అంటే ఋజువులు అవసరము. అయితే కొన్ని సందర్భముల లో మనం ఋజువులతో సంబంధం లేకుండా మనం అంగీకరిస్తాము. కాని, గణితము నందు ఈ విధానం అంగీకరించబడదు. కింది ఉదాహరణలు గమనించండి.

1. సూర్యుడు తూర్పున ఉదయించును.
2. $3 + 2 = 5$
3. అమెరికా సంయుక్త రాష్ట్రాల రాజధాని న్యూయార్క్
4. $4 > 8$
5. నీకు ఎంత మంది సహోదరులు కలరు?
6. బెంగాల్ కన్నా గోవాకు మంచి ఫుట్‌బాల్ టీమ్ కలదు
7. దీర్ఘచతురస్రము 4 సౌష్ఠవాక్షములు కలిగి ఉన్నది
8. $x + 2 = 7$
9. దయచేసి లోనికి రండి
10. వరసగా 6 ముఖములు కల పాచిక దొర్లించినపుడు రెండుసార్లు 6 వచ్చు సంభావ్యత
11. ఎలా ఉన్నారు?
12. సూర్యుడు స్థిరంగా ఉండక ఎల్లప్పుడు ఎక్కువ వేగముతో కదులుతున్నాడు.
13. $x < y$
14. మీరు ఎక్కడ నివసిస్తున్నారు?

పై వాక్యములలో కొన్ని వాక్యములు అసత్యము. ఉదాహరకు 4>8, అమెరికా సంయుక్త రాష్ట్రాల రాజధాని న్యూయార్క్ అనునవి అసత్యములు. కొన్ని మనకు తెలిసిన జ్ఞానము ద్వారా సత్యము అని చెప్పగలము.

సూర్యుడు తూర్పున ఉదయించును, వరుసగా రెండు సార్లు 6లు వచ్చు సంభావ్యత, సూర్యుడు స్థిరంగా ఉండక మొ॥వి.

కొన్ని కొన్ని వాక్యములు కొన్ని సంధర్భములలో సత్యము, మరికొన్ని సందర్భములో అసత్యము అగును. ఉదాహరణకు $x + 2 = 7$ అనునది $x = 5$ కు మాత్రమే సత్యము. $x < y$ అనునది x, y కన్నా చిన్న విలువ కలిగి ఉన్నప్పుడు మాత్రమే సత్యము..

ఈ వాక్యములో కొన్ని ఖచ్చితముగా సత్యములు, కొన్ని ఖచ్చితంగా అసత్యములు, ఇటువంటి వాక్యములను ప్రవచనములు అంటారు. కొన్ని నియమముల ద్వారా లేక నిబద్ధతకు లోబడి ఋజువు చేసే విధానము ఎటువంటిదైనను, మనము ఆవాక్యము సత్యమో లేక అసత్యమో నిర్ణయించగలము.

కింది వాక్యములను ఆలోచించండి

1. దయచేసి ఈ నోటీసును విస్మరించండి.
2. నేను చెబుతున్న విషయము తప్పు.
3. ఈ వాక్యములో కొన్ని పదములు కలవు.
4. నీవు చంద్రునిపై నీటి జాడలు కనుగొనగలవు.

పై వాక్యములు సత్యమో లేక అసత్యమో నీవు చెప్పగలవా? వాటిని సత్యమో లేక అసత్యమో నిర్ణయించుటకు ఏవైనా మార్గములు కలవా?

మొదటి వాక్యము గమనించినట్లయితే, నోటీసును విస్మరించిన అందు చెప్పిన విషయము పాటించినట్లు. విస్మరించనిచో నీవు దానిపై దృష్టిపెట్టినట్లు. అంటే మనం ఈ వాక్యమును సత్యమా / అసత్యమా అనునది నిర్ణయించలేము. అదే విధంగా 2, 3వ వాక్యములు, తన గురించి తాను చెప్పుకొనుచున్నవి. 4వ వాక్యము సత్యము అయితే కావచ్చు లేదంటే కాకపోవచ్చును. ఇందు సందిగ్దత నెలకొని ఉన్నది.

తన గురించి తాను తన చెప్పుకొను వాక్యములు, సందిగ్ధంగా చెప్పబడు వాక్యములు ప్రవచనములు కావు.

ఇవి చేయండి

ఏవైన 5 వాక్యములు రాసి అవి సత్యమో / అసత్యమో నిర్ణయించి, కారణాలు తెల్పండి.

15.2 గణిత ప్రవచనములు

మనం వాక్యములు అనేకం వ్రాయవచ్చు. వీటిలో మాట్లాడేవి కొన్ని అయితే వ్రాసేవి మరికొన్ని. వీటన్నింటిని సత్యమో , అసత్యమో నిర్ణయించము. ఉదా: పరిశీలించండి, దయచేసి లోనికి రండి, మీరు ఎక్కడ ఉంటున్నారు? ఇటువంటివి చాలా వుంటాయి

పై వాక్యములు అన్ని ప్రవచనములు కావు. సత్యమో లేక అసత్యమో ఏదో ఒకటి మాత్రమే అయ్యేటట్లు భావింపబడే వాక్యములను ప్రవచనములు అంటారు. గణిత ప్రవచనములు కూడా సత్యమో లేక అసత్యమో ఏదో ఒకటి మాత్రమే అగును అంతేగాని అది సందిగ్దంగా ఉండరాదు. కింది ప్రవచనములను పరిశీలించండి.

1. 3 ఒక ప్రధాన సంఖ్య
2. రెండు బేసి సంఖ్యల లబ్దము ఒక సరిసంఖ్య
3. x ఏదైనా ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయితే $4x + x = 5x$
4. భూమికి కల ఒకే ఒక ఉపగ్రహము చంద్రుడు
5. రాము ఒక మంచి డ్రైవరు
6. "లీలావతి" అను గ్రంథమును భాస్కరుడు రచించెను
7. అన్ని సరి సంఖ్యలు సంయుక్త సంఖ్యలు
8. రాంబస్ ఒక చతురస్రము
9. $x > 7$.
10. 4 మరియు 5 పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు

11. సిల్వర్ ఫిష్ అనుచేప సిల్వర్‌తో చేయబడింది 12. భూమిని పరిపాలించుటకు మనుష్యులు కలరు

13. x ఏదైనా ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయిన $2x > x$ 14. క్యూబా రాజధాని హవానా

పై ప్రవచనములలో ఏవి గణిత ప్రవచనములు ఏవి గణిత ప్రవచనములు కానివి?

15.3 ప్రవచనముల సత్య విలువలు సరిచూచుట

పై వాక్యములలో కొన్నింటిని తీసుకుని పరిశీలించి, చర్చిద్దాం

ఉదాహరణ-1 : ప్రధాన సంఖ్యల నిర్వచనము నుండి 3 ఒక ప్రధాన సంఖ్య అని చెప్పగలము. కావున ఇది ఒక ప్రవచనము.

మిగిలిన వాక్యములలో ప్రవచనములలో గణిత పరంగా నిరూపించ గలిగేవి ఏవి?

ఉదాహరణ-2 : రెండు బేసి సంఖ్యల లబ్ధము ఒక సరిసంఖ్య. ఏవైన రెండు బేసి సంఖ్యలు 3, 5 తీసుకొనుము. వాటి లబ్ధము $3 \times 5 = 15$ ఇది సరిసంఖ్యకాదు.

ఈ ప్రవచన సత్య విలువ అసత్యము. కనుక ఒక ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా మనము ఈ ప్రవచన సత్య విలువ నిర్ణయించగలము. ఒక ఉదాహరణ ద్వారా ఒక ప్రవచనం అసత్యము అని చెప్పవచ్చు. ఇటువంటి ఉదాహరణను ప్రత్యుదహరణ అంటారు.

ప్రయత్నించండి

పై వాక్యములలో ప్రత్యుదాహరణల ద్వారా, అసత్యమని నిర్ణయించగల ప్రవచనములు ఏవి?

ఉదాహరణ-3 : కింది వాక్యములను పరిశీలించండి. "భూమిని పరిపాలించుటకు మనుష్యులు కలరు", "రాము ఒక మంచి డ్రైవరు".

ఈ వాక్యములు సంధిగ్దతతో కూడి ఉన్న వాక్యములు. భూమిని పాలించుట అనునది ఖచ్చితముగా ఏ ప్రాంతము అనేది చెప్పబడలేదు. అదే విధముగా రెండవ వాక్యములో ఎటువంటి నైపుణ్యము మంచిదో అనేది స్పష్టంగా చెప్పబడలేదు.

గణిత ప్రవచనములు కొన్ని పదాల కలయికతో, అందరికి స్పష్టంగా అర్థమగుతూ అది సత్యమో అసత్యమో నిర్ణయించగలిగేలా ఉండాలి.

ఉదాహరణ-4 : మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

భూమికి కల ఒకే ఒక ఉపగ్రహం చంద్రుడు.

"లీలావతి అను గ్రంథమును భాస్కరుడు రచించెను.

ఈ వాక్యములు ప్రవచనములు అవునో కాదో ఎట్లు నిర్ణయించగలవు?

ఈ వాక్యములలో సందిగ్ధత లేదు, కాని కొంత నిరూపించవలసిన అవసరము కలదు. దీనిని నిర్ధారించుటకు పూర్వము నిరూపించబడిన అంశములపై సంబంధించిన అంశములు తెలిసి ఉండాలి. రెండవ వాక్యము కొరకు పుస్తక రచయితలు వాటికి సంబంధించిన అంశములు చారిత్రక గ్రంధములు తెలియవలెను.

అయితే గణిత ప్రవచనములు వీటికి భిన్నంగా ఉంటాయి. మనము చూసే అంశముల ఆధారంగా వాటిని సత్యములని చెప్పలేము. కొన్ని ప్రత్యుదాహరణల ద్వారా అవి అసత్యములని చూపగలము. x ఏదైనా ఒక వాస్తవసంఖ్య అయితే $2x > x$ అను

ప్రవచనము ధనవాస్తవ సంఖ్యలకు సత్యము, ఋణవాస్తవ సంఖ్యలకు $(x = -1 \text{ or } -\frac{1}{2} ....)$ అసత్యము అగును. కావున ఈ వాక్యం ప్రత్యుదాహరణతో అసత్యమని చెప్పవచ్చు. $2x > x$.అనేది అన్ని సహజసంఖ్యలు సత్యమగునని గ్రహించి వుంటావు.

ఉదాహరణ-5 : కింది ప్రవచనములు షరతులకు లోబడి సరియగు సత్య ప్రవచనములు అగునట్లుగా తిరిగి రాయండి.

i. ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు $3x > x$.

ii. ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు $x^2 \geq x$.

iii. ఒక సంఖ్యను 2తో భాగించగా వచ్చిన సంఖ్య మొదటి సంఖ్యలో సగముండును.

iv. ఒక వృత్తములో ఒక జ్యా వృత్తముపై ఏదైన ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణము 90°.

v. ఒక చతుర్భుజంలో అన్ని భుజాలు సమానమైన అది ఒక చతురస్రము.

సాధన :

i. $x > 0$ అయిన $3x > x$.

ii. $x \leq 0$ లేదా $x \geq 1$ అయిన $x^2 \geq x$.

iii. 0 తప్ప మిగిలిన సంఖ్యలను 2 తో భాగిస్తే, వచ్చు సంఖ్య మొదటి సంఖ్యలో సగముండును.

iv. ఒక వృత్తములో వృత్త వ్యాసము, వృత్తముపై ఏదైనా ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణము 90°.

v. ఒక చతుర్భుజంలోని అన్ని భుజాలు, కోణాలు సమానమైన అది ఒక చతురస్రము.

అభ్యాసం-15.1

1. కింది వాక్యములు సత్యమో లేక అసత్యమో లేక సందిగ్ధ వాక్యమో తెలియచేస్తూ వివరించండి.

i. ఒక నెలలో 27 రోజులు కలవు
ii. మకర సంక్రాంతి శుక్రవారము రోజున వచ్చును.
iii. హైదరాబాద్ నందు ఉష్ణోగ్రత 2°C.
iv. జీవరాశికల ఒకే ఒక గ్రహం భూమి.
v. కుక్కలు ఎగరగలవు.
vi. ఫిబ్రవరి నెలలో 28 రోజులు మాత్రమే ఉంటాయి.

2. కింది వాక్యములు సత్యమో లేదా అసత్యమో తెలియజేస్తూ వివరించండి.

i. చతుర్భుజంలోని అంతర కోణాల మొత్తం 350°.
ii. ఏదైనా ఒక వాస్తవ సంఖ్య x కు $x^2 \geq 0$.
iii. రాంబస్ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం
iv. రెండు సరిసంఖ్యల మొత్తము ఒక సరిసంఖ్య.
v. ఒక వర్గసంఖ్యను, రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా రాయవచ్చు.

3. కింది ప్రవచనములు సత్య ప్రవచనములు అగునట్లు, తగు నియమములు వినియోగించి తిరిగి రాయండి.

i. అన్ని సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధముగా రాయవచ్చును.
ii. ఒక వాస్తవ సంఖ్య యొక్క రెండు రెట్లు ఎల్లప్పుడు సరిసంఖ్య.
iii. ఏదైనా x కు $3x + 1 > 4$.
iv. ఏదైనా x కు $x^3 \geq 0$.
v. ప్రతి త్రిభుజంలోను మధ్యగతము కోణ సమద్విఖండన రేఖ అగును.

4. "అన్ని $x > y$ కు $x^2 > y^2$ అగును" అను ప్రవచనము అసత్యమనుటకు ప్రత్యుదాహరణనివ్వండి.

15.4 గణితములో కారణ నిరూపణ పద్ధతులు

మానవులు సాధారణంగా జిజ్ఞాస పరులు. ఈ జిజ్ఞాసే మనిషిని ప్రపంచంలోకల అనేక విషయములు తెలుసుకునేలాచేసింది. ఈ జిజ్ఞాస మనం పెంపొందించుకుంటే ఏం జరుగుతుంది? తెలుసుకోవాలనే ఆసక్తి పెంపొందించుకుంటే ఏం జరుగుతుందో? మన భావాలను ఇతరులతో పంచుకోవాలనుకుంటే ఏం జరుగుతుంది? ఈ రకమైన ప్రయత్నాలు, పరిశోధనలవలన, ప్రపంచంలో జరిగే వివిధ సంఘటనలు ఎందుకు అలా జరుగుతున్నాయి, అనేది అర్థం అవుతుంది. క్రమంగా అన్ని సందర్భాలలోను

అయినచో ఏమగును? అయినందువలన ఏమి జరుగుతుంది? అనే భావనకు మనం రాగలము

ఈ రకమైన పరిశోధనలు కొత్త భావాల ఆవిష్కరణకు, అంతకు ముందు మనకు తెలిసిన భావాలకు పదునుపెట్టుటకు ఉపయోగపడును. ఈ పరిశోధనలు, నమూనాలు దత్తాంశములు తయారుచేయుటకు, నిరూపించుటకు ఉపయోగపడును.

- మొదటగా కొన్ని పరిశీలనలు జరిపి, వాటికి సంబంధించిన దత్తాంశ సేకరణ చేయవలెను.
- దత్తాంశ విశ్లేషణ ఆధారముగా మన పరిశీలనలకు జవాబు కొరకు ఒక అభిప్రాయమునకు వచ్చుట.
- మరికొన్ని అంశాలను పరిశీలించడం ద్వారా, దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించుట.

అందుచే, మనం

- "కొన్ని ఆలోచనల పరిశీలన, విశ్లేషణల తుది రూపమును పరికల్పన (Hypothesis) అంటారు."

కొన్ని సందర్భములలో మరికొన్ని పరిశీలనల ద్వారా దత్తాంశమును తిరస్కరిస్తూ ఉంటాము. ఇది ఒక ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా జరుగును. సాధారణముగా మనము పరికల్పన బదులుగా ప్రాకల్పన (conjecture) అనుపదము ఉపయోగిస్తాము. ఈ రెండిటి మధ్య కల పోలికలు, భేదాలు తరువాత తరగతులలో నేర్చుకుంటారు.

15.4.1 పరికల్పనను సరిచూచుటకు నిగమన పద్ధతులు

పరికల్పనను నిరూపించుటకు గణితములో కల నిరూపణ పద్ధతులకు, సైన్స్‌నందు కల ప్రయోగ పరీక్షా పద్ధతులకు మధ్య భేదము స్పష్టంగా కలదు.

- గణితము నిగమన పద్ధతిపై ఆధారపడును. మనకు తెలిసిన కొన్ని సాక్ష్యాలను తీసుకోవడం ద్వారా తార్కిక విధానం ద్వారా పేరికల్పన చేస్తారు.
- సైన్స్‌నందు ఆగమన పద్ధతిపై ఆధారపడును. ప్రయోగ పద్ధతిద్వారా పరికల్పన తీసుకోవడం లేదా తిరస్కరించడం జరుగుతుంది.

సైన్స్‌నందు ప్రయోగ పద్ధతిలాగే, గణితము నందు నిగమన పద్ధతి మంచి ఫలితాలను ఇస్తుంది. అందుకు వారు గణిత శాస్త్రజ్ఞులు కానవసరంలేదు.

షెర్లాక్ హోమ్స్, హెర్కుల్‌పైరాట్ అను డిటెక్టివ్‌లు, సంఘటనా స్థలం వద్ద కల సాక్ష్యాల ఆధారంగా తార్కికమైన ఆలోచనల ద్వారా ఎవరు నేరానికి పాల్పడ్డారో నిర్ణయించేవారు. నేరం చేసిన వారు ఖచ్చితంగా ఏదోఒక ఆధారాన్ని వదులుతారు. ఆ ఆధారాలతో వారు "ఏ అనుమానాలకు తావులేని" కారణాలతో పరికల్పన చేస్తారు.

15.4.2 నిగమన నిరూపణ విధానము

సందిగ్ధం కానటువంటి ప్రవచనములు, సత్య విలువలు తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగించు తార్కిక విధానమే నిగమన పద్ధతి. నిగమన పద్ధతి. అర్థం చేసుకోవడానికి కింది పజిల్ పరిశీలించండి.

నీకు నాలుగు కార్డులు ఇవ్వబడనవి. దానిపై ఒకవైపు ఆంగ్ల అక్షరాలు, రెండవ వైపు అంకెలు కలవు.

$$\boxed{\text{A}}\qquad\boxed{\text{V}}\qquad\boxed{8}\qquad\boxed{5}$$

వాటికి సంబంధించిన నియమాలు చెప్పబడినవి.

“కార్డుకు ఒకవైపు బేసిసంఖ్య ఉన్న, రెండవవైపు ఆంగ్ల అక్షర అచ్చు కలదు. పై నియమం సరిగా ఉన్నది లేనిది తెలుసుకొనుటకు తక్కువలో తక్కువ ఎన్ని కార్డులు త్రిప్పి తెలుసుకోగలం?

అన్ని కార్డులు తిప్పి తెలుసుకో గల అవకాశం నీకు ఉన్నప్పటికి తక్కువ కార్డులు తిప్పడం ద్వారా తెలుసుకోవాలి.

ఇచ్చిన నియమం పరిశీలిస్తే, ఒక వైపు బేసిసంఖ్య ఉన్న, రెండవైపు అచ్చు (vowel) కలదు. అంతమాత్రంచేత, అచ్చులు ఉన్న ప్రతికార్డుకు రెండవ వైపు బేసిసంఖ్య ఉండనక్కర్లేదు. అదే విధంగా సరిసంఖ్య ఉన్న ప్రతి కార్డుకు రెండవవైపు హల్లులు ఉండనక్కర్లేదు.

కనుక మనం కార్డు $\boxed{\text{‘A’}}$ తిప్పితే, ఖచ్చితంగా పై నియమం ఉందని చెప్పలేము.

అదే విధంగా కార్డు $\boxed{\text{‘8’}}$ తిప్పితే, ఖచ్చితంగా పై నియమం ఉందని చెప్పలేము.

కనుక కార్డు $\boxed{\text{V}}$ మరియు $\boxed{5}$ తిప్పితే మనం తెలుసుకోగలం. ఈ రకమైన తార్కిక ఆలోచనల ద్వారా సమస్యను సాధించుటను “నిగమ పద్ధతి” అంటారు.

ముందుగా మనకు తెలిసిన కొన్ని వాక్యములు లేదా అంశముల ఆధారంగా ఒక నిర్ధారణకు వస్తాము. పై మజిలీ నందు అటువంటి విధానమే ఉపయోగించాం. కేవలం రెండు కార్డులు $\boxed{\text{V}}$ మరియు $\boxed{5}$ లలో ఏ ఒక్కటి నియమం పాటించకపోయినను, పై నియమం తప్పు అని తెలియును.

నిగమన పద్ధతి కొన్ని ప్రవచనములు నిజమోకాదో తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడును. ఎందువలన అంటే మనము సామాన్య నియమము ప్రత్యేక సందర్భంలో కూడ సత్యమే. ఉదాహరణకు, రెండు సరిసంఖ్యల లబ్ధము కూడా సరిసంఖ్య అని చెప్పినప్పుడు, మనము రెండు సరిసంఖ్యలు తీసుకొని వాటి లబ్దం కూడా సరిసంఖ్య అవునో కాదో గుణించకుండానే, పరిశీలించి వెంటనే ఆ వాక్యము నిజమని చెప్పగలము. ఉదా: 56702 × 19992 లబ్ధము కూడా సరిసంఖ్య

నిగమన పద్ధతిపై మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

i. ఒక సంఖ్య చివరి అంకె '0' అయితే అది 5 తో భాగింపబడుతుంది. 30 అనుసంఖ్యకు చివరి అంకె '0'.

పై రెండు ప్రవచనముల నుండి 30, 5 చే భాగింపబడుతుందని చెప్పవచ్చు. 30 చివరి అంకె '0' కావున 30, 5 చే భాగింపబడుతుంది.

ii. కొందరు గాయకులు కవులు. సాహిత్యకారులందరూ కవులే.

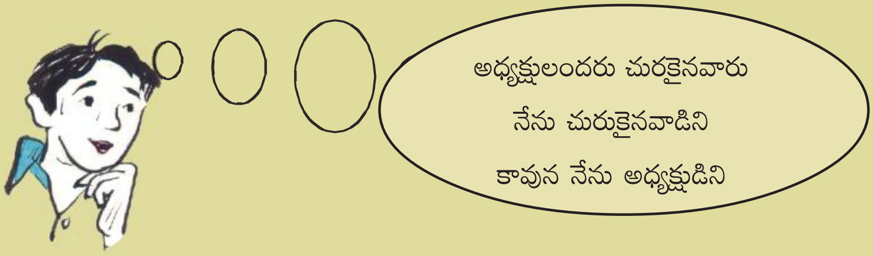
పై రెండు వాక్యాల ద్వారా గాయకులకు సాహిత్యకారులకు గల సంబంధమేమిటో చెప్పలేము. ఇచట మనకు ఎన్ని అవకాశాలున్నాయి. ఉదాహరణకు గాయకులందరు సాహిత్యకారులు కావచ్చు, లేదా గాయకులెవరు సాహిత్యకారులు కాకపోవచ్చు లేదా కొందరు గాయకులు సాహిత్యకారులు కావచ్చు మొ.

"అయితే-అప్పుడు" అను సంయోజకము ద్వారా నిగమన పద్ధతిలో మనము ప్రవచనాలు నిరూపించవచ్చు. గణితములో ఈ సంయోజకములను అనేక ప్రవచనముల యందు ఉపయోగిస్తాము. ఉదా: ఒక జత రేఖీయ కోణముల మొత్తము 180° అయితే, త్రిభుజంలో మూడు కోణముల మొత్తం 180°. దశాంశమానములో ఒక సంఖ్య 5 అయితే, ద్వి సంఖ్యా మానములో 101 అని రాస్తాము.

మన జీవితంలో కొన్ని సంఘటనలపై కూడా మనము సాధారణంగా ఎల్లప్పుడూ హేతుబద్ధంగా ఆలోచించము మన ఆలోచనలు ఒక్కొక్కసారి నిజం కావచ్చు లేక తప్పుకూడా కావచ్చు. నీ ఫ్రెండ్ నీతో ఒక రోజు మాట్లాడకపోతే, తనకు నీపై కోపం వచ్చి ఉంటుందని భావిస్తావు. కాని ఆమె తను పని ఒత్తిడితో ఉన్నందున నీతో మాట్లాడలేకపోవచ్చు. కావున రోజువారి సంఘటనలపై నీవు వచ్చిన నిర్ధారణలు సరిగాని కారణాలలో వచ్చినవని ఎందుకు? ఆలోచించు.

అభ్యాసం-15.2

1. కింది ప్రశ్నలను నిగమాను పద్ధతి ద్వారా ఆలోచించి సాధించండి.:
   i. మనుషులందరూ మరణం కలవారే, జీవన్, ఒక మనిషి. రెండు వాక్యముల నుండి జీవన్ గురించి ఏమి చెప్పగలరు?
   ii. తెలుగు ప్రజలందరూ భారతీయులే. X ఒక భారతీయుడు. X తెలుగువాడు అని చెప్పగలవా?
   iii. అంగారక గ్రహవాసుల నాలుకలు ఎర్రగా ఉంటాయి. గులాగ్ (Gulag) అంగారక గ్రహవాసి. రెండు వాక్యముల నుండి గులాగ్ గురించి ఏమి చెప్పగలవు?
   iv. కింది కార్టూన్ నందు ఇచ్చిన బొమ్మలో రాజు యొక్క వివేచన (ఆలోచన) గల తప్పును తెల్పండి.



2. నీకు నాలుగు కార్డులు ఇవ్వబడినవి. ప్రతి కార్డుపై ఒక వైపు అంకెలు రెండవ వైపు ఇంగ్లీషు అక్షరములు ఇవ్వబడింది. వీటికి “ఒక కార్డుకూ ఒకవైపు హల్లు ఉంటే, రెండవ వైపు బేసి సంఖ్య ఉంటుంది” అను నియమం కలదు. ఏ రెండు కార్డులను తిప్పిన మనము పైనియమము ఉన్నదో లేదోసరిచూడగలము?

B	3	U	8

3. కింది పట్టికలో కొన్ని సంఖ్యలు ఇవ్వబడినది. మనము అనుకున్న సంఖ్యను చెప్పుటకు 8 సూచనలు ఇవ్వబడ్డాయి. అందు నాలుగు సూచనలు సత్యము. కాని అవి సంఖ్యను కనుక్కోవడానికి ఉపయోగపడవు. నాలుగు సూచనలు సంఖ్యను కనుక్కోవడానికి ఖచ్చితంగా కావాలి. అయితే ఒక సంఖ్యను కనుగొనుటకు సూచనలు.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

a. ఆ సంఖ్య 9 కంటే పెద్దది.
b. ఆ సంఖ్య 10 యొక్క గుణిజము కాదు.
c. ఆ సంఖ్య 7 యొక్క గుణిజము.
d. ఆ సంఖ్య బేసిసంఖ్య.
e. ఆ సంఖ్య 11 యొక్క గుణిజము కాదు.
f. ఆ సంఖ్య 200 కంటే చిన్నది.
g. దాని ఒకట్ల స్థానములోని అంకె పదుల స్థానములోని అంకెకన్నా పెద్దది.
h. దాని పదుల స్థానములోని అంకె బేసిసంఖ్య.

ఆ సంఖ్య ఏది?

సంఖ్య కనుగొనుటలో ఉపయోగపడిన నాలుగు సూచనలు ఏవి? ఉపయోగపడని నాలుగు సూచనలు ఏవి? సూచనలను అనుసరించి, వాటని అనుగుణంగా లేని సంఖ్యను కొట్టివేయండి ఉదాహరణకు మొదటి సూచన ద్వారా అది 1 నుండి 9 వరకు కల సంఖ్య కాదు. కావున వాటిని కొట్టివేయండి. ఈ విధంగా మిగిలిన సూచనలనుపయోగించి ప్రయత్నించండి.

ప్రహేళిక పూర్తి అయిన పిదప మనకు ఉపయోగపడు సూచనలు, ఉపయోగపడని సూచనలు కనుక్కోండి.

15.5 సిద్ధాంతములు, నిరూపించబడని (భావనలు) వాక్యములు, స్వీకృతములు (THEOREMS, CONJECTURES AND AXIOMS)

ఇంతవరకు మనం ప్రవచనముల సత్య విలువలు పరిశీలించు విధానములు తెలుసుకున్నాం. ఇప్పుడు సిద్ధాంతములు, పరికల్పనలు, భావనలు స్వీకృతముల మధ్యగల భేదములు తెలుసుకుందాం.

ఇంతకు ముందు సిద్ధాంతముల గూర్చి మనము తెలుసుకుని ఉన్నాము. సిద్దాంతమంటే ఏమిటి? నిరూపించబడిన గణిత ప్రవచనము. ఉదాహరణకు కొన్ని సిద్ధాంతములను పరిశీలించండి.

సిద్ధాంతం 15.1 : త్రిభుజములోని మూడు కోణముల మొత్తం 180°.

సిద్ధాంతం 15.2 : రెండు బేసిసంఖ్యల లబ్ధం, బేసిసంఖ్య.

సిద్ధాంతం 15.3 : రెండు వరుస సరి సహజ సంఖ్యల లబ్ధం, 4చే భాగింపబడుతుంది.

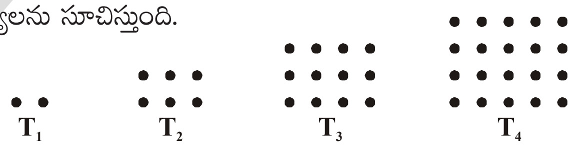
పరికల్పనలు అనేవి మనము నిజము అని భావించే వాక్యములు. ఇవి గణిత ప్రవచనములు, అవగాహన, పూర్వానుభవంపై ఆధారపడి చెప్పబడును. ఇవి సత్యములు కావచ్చు లేదా అసత్యాలు కావచ్చు అవి సత్యమని నిరూపించబడినప్పుడు వాటిని సిద్ధాంతములు అంటారు. ఇవి గణితములోకల నమూనాల ద్వారా ఊహల ద్వారా భావనలు రూపొందింపబడును. అటువంటి ఉదాహరణలు కొన్ని గమనించండి.

రాజు కొన్ని ఘన సంఖ్యలను పరిశీలిస్తూ, “మూడు వరుస సంఖ్యలు తీసుకొని వాటి లబ్ధమునకు మధ్యసంఖ్యను కలిపిన, మధ్యసంఖ్య యొక్క ఘనము వచ్చును” అని గమనించాడు. ఉదాహరణకు 3,4,5లు తీసుకొనిన 3×4×5+4=64 ఇది సంపూర్ణఘనము. ఇది ఎప్పుడు సాధ్యమెనా? ఈ భావన మరికొనిన మూడు వరుస సంఖ్యలు తీసుకుని పరిశీలించండి. ఏమి గమనించారు?

రఫీ- 6,7,8లతో పరికల్పనను పరీక్షించాడు. 7మధ్యపదము కావున 6×7×8+7=343 ఇది సంపూర్ణఘనము.

మూడు వరుస సంఖ్యలు n, $n+1, n+2$. తీసుకుని పై భావనను సాధారణీకరించండి.

ఉదాహరణ-6 : కింది వరుసల చుక్కలు ఒక వరుస క్రమ సంఖ్యలను సూచిస్తుంది.



(a) తరువాతి మూడు పదాలు కనుక్కోండి.

(b) 100 వ పదము కనుక్కోండి.

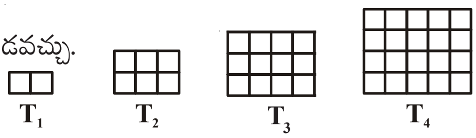
(c) n వ పదము కనుక్కోండి.

ఇచ్చట కల సంఖ్యలు $T_1 = 2, T_2 = 6, T_3 = 12, T_4 = 20$ గా కలదు. T_5, T_6, T_n పదములను ఊహించగలరా?

T_n అను పదమును ఒక భావనగా తీసుకుందాం.

పై విషయాన్ని తిరిగి ఇలా రాస్తె మన సాధనకు ఉపయోగపడవచ్చు.

$$\begin{array}{cccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \\ 2 & 6 & 12 & 20 & ? & \ldots\ldots \\ & +4 & +6 & +8 & +10 & \end{array}$$



సాధన :

కావున $T_5 = T_4 + 10 = 20 + 10 = 30 = 5 \times 6$

$T_6 = T_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6 \times 7$ ..... T_7 ఊహించండి,

$T_{100} = 100 \times 101 = 10, 100$

$T_n = n \times (n + 1) = n^2 + n$

ఈ రకమైన కారణాల నిరూపణలు కొన్ని పరిశీలనలు, అనుక్రమముల ద్వారా తెలిసిన దత్తాంశముల ద్వారా ఒక అవగాహనకు వస్తాయి. ఈ విధానమును ఆగమన పద్ధతి అంటారు.

కొన్ని భావనలు తయారుచేయుటకు ఆగమన పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.

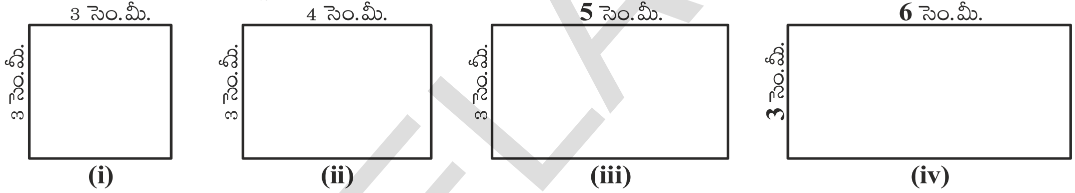
1743 లో గోల్డ్‌బాక్ అనే గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు చేసిన పరిశీలనలు గమనించండి.

$6 = 3 + 3$ $\quad$ $8 = 3 + 5$ $\quad$ $10 = 3 + 7$

$12 = 5 + 7$ $\quad$ $14 = 11 + 3$ $\quad$ $16 = 13 + 3 = 11 + 5$

4 గాని, 4కన్న పెద్దదైన సరి సంఖ్యను రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మొత్తముగా రాయవచ్చు. (రెండు వేర్వేరు ప్రధాన సంఖ్యలు కానవసరములేదు). అతని ఈ భావన ఇప్పటి వరకు సత్యము లేక అసత్యము అని ఋజువు కాలేదు. నీవు కనుక సత్యము లేక అసత్యము అని నిరూపించిన అది సిద్ధాంతము అవుతుంది.

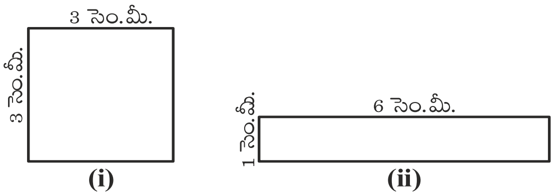
కొన్ని సందర్భములలో వరుస క్రమంలో వచ్చు అంకెల ఆధారంగా కొనిన సందర్భంలో అసత్య భావనలకు దాని తీయవచ్చు. జాహ్నవి మరియు కార్తీక్ వైశాల్యము, చుట్టుకొలతలపై కింది పరిశీలన చేసారు.



	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
చుట్టుకొలత :	12 సెం.మీ.	14 సెం.మీ.	**16** సెం.మీ.	**18** సెం.మీ.
వైశాల్యం :	9 చ.సెం.మీ.	12 చ.సెం.మీ.	**15** చ.సెం.మీ.	**18** చ.సెం.మీ.

వారు "చుట్టుకొలత పెరిగే కొలదీ వైశాల్యం కూడా పెరుగుతుందనే" భావనకు (ఊహ)కు వచ్చారు. నీవైతే ఏమి ఆలోచిస్తావు? వారిభావన సత్యమేనా? ఈ సమస్యను సాధిస్తూ ఇంకా కొన్ని దీర్ఘచతురస్రాలు గీసి వారి భావనలను అసత్యమని నిరూపించాడు.

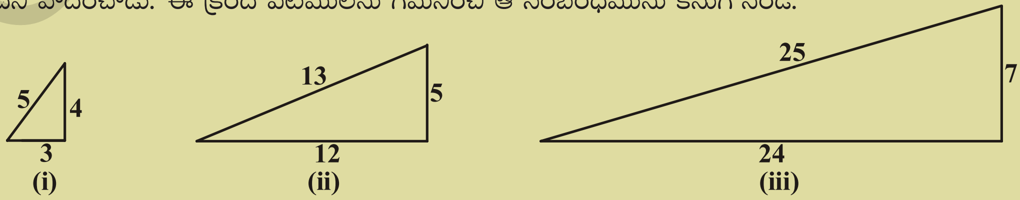
పక్కన గల పటం నుండి చుట్టుకొలత పెరిగిన, వైశాల్యము తగ్గినట్టు గమనించవచ్చు.



	(i)	(ii)
చుట్టుకొలత :	12 సెం.మీ.	14 సెం.మీ.
వైశాల్యం :	9 చ.సెం.మీ.	6 చ.సెం.మీ.

ప్రయత్నించండి

పైధాగరస్ యొక్క ప్రజాదరణ దృష్ట్యా వారి అనుయాయుడొకడు లంబకోణ త్రిభుజ భుజాలమధ్య మరొక సంబంధం కలదని వాదించాడు. ఈ క్రింది పటములను గమనించి ఆ సంబంధమును కనుగొనండి.



ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో అతి చిన్న భుజము యొక్క వర్గము, మిగిలిన రెండు భుజముల మొత్తమునకు సమానము. అనుభావన ప్రవేశపెట్టారు.

పై భావన నిజమో కాదో పరిశీలించండి.

గణితంలో ఏదైనా ఒక విషయము నిరూపించుటకు 'ఎప్పుడు కాదు', 'ఎందుకు కాదు' అని ప్రశ్నించుకోవాలి.

గణితములో కొన్ని ప్రవచనములు ఎల్లప్పుడు సత్యములని భావించబడును కాని నిరూపింపబడవు. అవి తమకు తామే సాటి సత్యాలు ఇటువంటి వాటిని "స్వీకృతములు" అంటారు. 3వ అధ్యాయం నందు యూక్లిడ్ స్వీకృతములు, గురించి, తెలుసుకుని యున్నారు.

యూక్లిడ్ యొక్క మొదటి స్వీకృతం.

"ఒక బిందువు నుండి వేరొక బిందువుకు ఒకే ఒక సరళ రేఖ గీయగలము

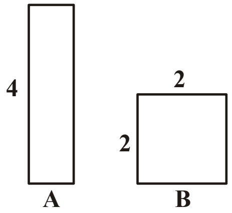
మూడవ స్వీకృతం

"ఒక బిందువు కేంద్రంగా ఏదైనా వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తం గీయగలము"

ఇవి నిత్యసత్యాలుగా కనిపించుచున్నవి. వీటిని యూక్లిడ్ సత్యాలుగా గ్రహించాడు. ఎందువల్ల? మనము ప్రతిదాన్ని నిరూపించలేము. కావున కొన్ని స్వీకృతాలను సత్యాలుగా తీసుకొని, వీటి ఆధారంగా మిగిలిన సిద్ధాంతములు భావనలు నిరూపించవచ్చు.

అన్ని ప్రవచనాలను సత్యాలుగా ఎందుకు గ్రహించమని నీవు ఆశ్చర్యపోవచ్చు. కొన్ని భావనలు ఎల్లప్పుడు నిజాలు కావు. మనం చూసే బొమ్మలు లేక వరుస క్రమం మనల్ని ఒక్కొక్కసారి మోసం చేస్తాయి. అందుకే మనము సత్యముగా భావించేవాటిని నిరూపించాలి. "రెండు సంఖ్యలను కలిపితే వచ్చు సంఖ్య ఆ సంఖ్యల కన్నా పెద్దది" అనుభావన ఎల్లప్పుడు సత్యము కాదు. $5 + (-5) = 0$; 0, 5 కన్న చిన్నది.

పక్క పటము నుండి దేని వైశాల్యము ఎక్కువో గమనించండి.



గమనించుటకు B పెద్దదిగా అగుపించును కాని రెండింటి వైశాల్యములు సమానము.

మన భావనలు, చిత్రముల ఆధారంగా కొన్ని మౌలిక సూత్రాలు స్వీకృతాలుగా భావిస్తాం. కాని తరువాత అది తప్పు అని కనుక్కుంటే మన స్వీకృతము పనికిరాకుండా పోతుంది. మరి స్వీకృతము తయారుచేయునపుడు తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలు ఏవి?

i. స్వీకృతములు చిన్నగా ఉండేట్లు తీసుకోవలెను. యూక్లిడ్ 5 స్వీకృతాల నుండి కొన్ని వందల సిద్ధాంతములు నిరూపించబడినవి.

ii. స్వీకృతము ఎటువంటి విరుద్ధత లేనిదిగా ఉండాలి.

ఒక స్వీకృతము ఉపయోగించి, వేరొక స్వీకృతము అసత్యమని చెప్పినచో దానిని విరుద్ధత అంటారు.

ప్రవచనము-1 : ఏదైనా పూర్ణాంకము దాని తరువాత వచ్చు పూర్ణాంకమునకు సమానము కాదు.

ప్రవచనము-2 : ఏదైనా పూర్ణాంకమును '0' తో భాగించిన మరల అదే సంఖ్య వచ్చును.

("సున్న" తో భాగహారము సాధ్యం కాదని గుర్తుంచుకోండి. అది సాధ్యమయిన ఏమి జరుగుతుందో గమనిద్దాం)

ప్రవచనము-2 లో $\frac{1}{0} = a$ అగునట్లు ఏదేని పూర్ణసంఖ్య 'a' కలదనుకొనిన $1=0$ అగును కాని ప్రవచనము-1 నుండి ఏ రెండు వరుస పూర్ణాంకములు సమానము కాదు. అను ప్రవచనమునకు విరుద్ధత అగును. కావున ప్రవచనము-2 తప్పు అగును.

iii. ఒక అసత్య స్వీకృతము, విరుద్ధమైన భావనకు దారితీస్తుంది. ఒక ప్రవచనము, దాని వ్యతిరేక ప్రవచనము రెండు కనుక సత్యములైన అవి విరుద్ధమైన భావన అంటారు.

పైన చెప్పబడిన ప్రవచనములు మరొక సారి పరిశీలించిన $2 \neq 1$ అని మనకు తెలియును.

$x = y$ అనుకొనుము

$x \times x = xy$

$x^2 = xy$

$x^2 - y^2 = xy - y^2$

$(x+y)(x-y) = y(x-y)$ ప్రవచనము (2) ననుసరించి ఇరువైపుల $(x-y)$ చే భాగించగా

$x + y = y$

కాని $x = y$

కావున $x + x = x$

$2x = x$

$2 = 1$

$2 = 1$ మరియు $2 \neq 1$ రెండు సత్యములని చెప్పబడుచున్నది కనుక దీనిని ఒక "విరోధాభాసము" అంటారు.

కావున ఒక స్వీకృతము తయారుచేయుటకు అనేక భావనలు లోతైన సునిశిత దృష్టి అవసరము. అవి మరే ఇతర విరుద్ధ భావాలకు దారి తీయకుండా జాగ్రత్త పడాలి. కొన్ని సందర్భములలో ఈ స్వీకృతములు నూతన భావాలను కనుగొనుటకు ఉపయోగపడాలి.

స్వీకృతము అనగా నిరూపణ అవసరంలేని సత్య ప్రవచనములు. పరికల్పనలు నిరూపణ కానటువంటి గణిత ప్రవచనాలని (అవి సత్యమైనా కావచ్చు లేక అసత్యమైనా కావచ్చు). సిద్ధాంతములు తార్కికంగా నిరూపణ అయినటువంటి ప్రవచనములు అని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం.

అభ్యాసం-15.3

1. (i) ఏవేని మూడు వరుస బేసిసంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనుము.

   ఉదా: $1 \times 3 \times 5 = 15$, $3 \times 5 \times 7 = 105$, $5 \times 7 \times 9$ - .....

   (ii) ఏవేని మూడు వరుస సరిసంఖ్యల మొత్తం కనుగొనుము.

   $2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$ and so on.

   పై ఉదాహరణలలో ఏదైనా క్రమ ధర్మాన్ని గుర్తించారా? మరి మీ పరికల్పన ఏమిటి?

2. పాస్కల్ త్రిభుజము గమనించండి.

   అడ్డ వరుస -1 : $1 = 11^0$

   అడ్డ వరుస -2 : $11 = 11^1$

   అడ్డ వరుస -3 : $121 = 11^2$

   అడ్డ వరుసలు -4, 5 గురించి ఊహించి, భావన తయారుచేయండి.

   అది అడ్డ వరుస -6 కు సరిపోతుందో లేదో గమనించండి.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

3. కింది వరుస క్రమాన్ని గమనించండి.

   i) $28 = 2^2 \times 7^1$; 28 కారణాంకాల సంఖ్య $(2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$

   28 కు కల 6 కారణాంకాలు 1, 2, 4, 7, 14, 28

   ii) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$, కారణాంకాల సంఖ్య $(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

   30 కు కల 8 కారణాంకాలు 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

   పై ఉదాహరణల లోని క్రమాన్ని గుర్తించండి.

   (**సూచన :** ప్రతిలబ్దంలో ప్రధానకారణంకఘాతాంకం+1 ఒక కారణాంకం గా గుర్తించండి)

4. కింది క్రమాన్ని గమనించండి.

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

క్రింది వాటిపై మీరు పరికల్పన చేయగలం?

$$111111^2 =$$

$$1111111^2 =$$

మీ పరికల్పన సరిచూచుకోండి.

5. ఈ పుస్తకంలోకల 5 స్వీకృతాలు సేకరించండి.

6. $p(x) = x^2 + x + 41$ బహుపదినందు x, యొక్క వివిధ సహజసంఖ్యలకు $p(x)$ ను కనుగునుము. x యొక్క అన్ని సహజసంఖ్యలకు పై బహుపది $p(x)$ ప్రధాన సంఖ్య అనగలమా? $x = 41$ తీసుకుని సరిచూడండి. ఏమి గమనించితిరి?

15.6 గణిత నిరూపణ అనగా నేమి?

గణిత నిరూపణలు తెలుసుకునేముందు, గణిత ప్రవచనములు పరిశీలించండి.

ఉదాహరణకు రెండు బేసిసంఖ్యల లబ్దము ఒక బేసిసంఖ్య అని చూపుటకు, రెండు బేసిసంఖ్యలు 15, 2005 తీసుకుని వాటి లబ్దము $15 \times 2005 = 30075$ బేసిసంఖ్య అని, మరికొన్ని ఉదాహరణలతో చెప్పగలవు.

ఇదే విధంగా "త్రిభుజంలోని మూడు కోణముల మొత్తము 180°" అని చెప్పుటకు వివిధ త్రిభుజములు గీసి వాటి కోణములు కొలిచి వాటి మొత్తము 180° అని చెప్పగలము (పరికరములో దోషము ఉన్నట్లయితే సుమారుగా మొత్తం 180° వచ్చును).

ఈ పద్ధతిలో గల దోషమేమి? సరిచూచుటలో ఎన్ని సమస్యలుండవచ్చు? ఇవి నీవు సత్యమనుకోని ప్రవచనమును రాయుటకో ఉపయోగపడవచ్చు. నా ప్రవచనము అన్ని సందర్భాలలో సత్యమని నీవు కచ్చితంగా చెప్పగలవా? ఉదాహరణ కొన్ని జతల సరిసంఖ్యల లబ్దము కనుగొని. రెండు సరిసంఖ్యల లబ్దము సరిసంఖ్య అని కచ్చితంగా చెప్పగలమా? సరిసంఖ్యలు అనంతాలు వాటినన్నిటిని పరీక్షించుట సాధ్యము కాదు. అదేవిధంగా కొన్ని త్రిభుజాలు, కోణాల మొత్తము 180°గా కానివి ఉండవచ్చు.

ఉదాహరణకు పాస్కల్ త్రిభుజంలో 6 వ అడ్డువరస = 15101051. కాని $11^5 = 161051$

కనుక ఇవి నిరూపించుటకు మనకు పరిశీలనలు, ఉదాహరణలపై ఆధారపడని వేరొక మార్గము కావలెను. దీనికి గల వేరే విధానమే "సిద్ధాంత నిరూపణ". తక్కువ విధానములు, ఇచ్చిన అంశముల ఆధారంగా స్వీకృతముల ఆధారంగా నిరూపించు విధానమే "గణితంలో నిరూపణలు".

గణిత ప్రవచనము అసత్యము అని చెప్పుటకు ఒక ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా చెప్పవచ్చు. కొన్ని వేల ఉదాహరణలలో సత్యము అని చెప్పుటకు సరిపోవు కాని ఒక ప్రత్యుదాహరణతో అసత్యము అని చెప్పగలము.

నిరూపించవలసిన విధానములోకల సోపానాలు చూడండి.

i. ముందుగా ఇచ్చిన ప్రవచనమును అర్థంచేసుకొని, నిరూపించవలసినదేది? తెలుసుకొనిన దానికి సంబంధించి కొంత మేరకు అవగాహన ఏర్పరుచుకొనవలె.

ii. నిరూపణ అనేది ప్రవచనముల క్రమము మనము వ్రాయు ప్రతి ప్రవచనము అంతకు ముందు నిరూపించబడిన సిద్ధాంతములు, స్వీకృతములు, పరికల్పనల నుండి తార్కికంగా పొందినది.

iii. ఏమని నిరూపించమని అడిగారో దానికి సంబంధించి సరియైన క్రమంలో తక్కిన పద్ధతిలో నిరూపించాలి.

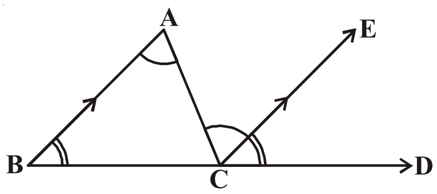
దీనిని అర్థం చేసుకొనుటకు 4వ అధ్యాయంలోని ఒక సిద్ధాంతమును విశ్లేషించి నిరూపణ పరిశీలిద్దాం.

సిద్ధాంతం 15.4 : ఒక త్రిభుజంలోని మూడు అంతరకోణముల మొత్తం 180°.

నిరూపణ : ABC ఒక త్రిభుజము.

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$$

అని నిరూపించవలెను.



BA కు సమాంతరంగా C నుండి CE అను రేఖను గీయుము.

BC ను D వరకు పొడిగించండి.

$CE \parallel BA$ మరియు AC ఒక తిర్యగ్రేఖ.

కావున $\angle CAB = \angle ACE$ (ఏకాంతర కోణాలు) ..... (1)

అదేవిధంగా $\angle ABC = \angle DCE$ (సదృశ కోణాలు) ..... (2)

నీవు ఈ సిద్ధాంతము 4వ అధ్యాయములో నేర్చుకొన్నదే. మనము సిద్ధాంతాల నిరూపణకు తరచుగా వాటి పటాలను గీయుట చాలా ముఖ్యము. అయినప్పటికి నిరూపణ అనునది తార్కికంగా ఉండవలెను. సామాన్యంగా ఆరెండు రేఖలు లంబంగా ఖండించుకొనునట్లు కన్పించుచున్నది కావున ఆరెండుకోణాల కొలతలు 90° అంటాం. ఇలాంటి తర్కములో మోసపోవచ్చు. కాబట్టి తగు జాగ్రత్త అవసరము.

(1) మరియు (2) కలుపగా

$$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE \qquad ..... (3)$$

రెండు వైపులా $\angle BCA$ కలుపగా

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ వచ్చును ..... (4)

కాని $\angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180^\circ$ (రేఖీయ కోణముల మొత్తం) ..... (5)

కావున $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$

పై నిరూపణలోని ప్రతి వివరణ వెనుక కల కారణాలు పరిశీలిద్దాము.

సోపానము1 : పై సిద్దాంతం త్రిభుజ ధర్మాలపై ఆధారపడి ఉన్నది. కావున త్రిభుజం ABC తో ప్రారంభిద్దాం.

సోపానము2 : సిద్ధాంతములో BA కు సమాంతరంగా CE గీసి, BC ను D వరకు పొడిగించితిమి. నిరూపణకు ఇది చాలా ముఖ్యమైన సోపానము.

సోపానము3 : మనకు తెలిసిన పూర్వ సిద్దాంతాల ఆధారంగా ఏకాంతర కోణాలు సదృశకోణాల ధర్మాల ఆధారంగా $\angle CAB = \angle ACE$ మరియు $\angle ABC = \angle DCE$ అని చెప్పగలము

సోపానము4 : "ఒక సమీకరణమునకు రెండువైపులా సమాన అంశములు కలిపిన ఆ సమీకరణములో మార్పు ఉండదు" అను యుక్లిడ్ సామాన్యభావన ఆధారంగా $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ అని రాసితిమి.

దీని నుండి త్రిభుజము మూడు కోణాల మొత్తం రేఖీయకోణముల మొత్తమునకు సమానమని చెప్పబడినది.

సోపానము 5 : "ఒక వస్తువుతో రెండు వస్తువులు సమానమైన, ఆ రెండు వస్తువులు సమానము" అను యూక్లిడ్ సామాన్యభావన ద్వారా మనము

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$$

అని చెప్పగలము

15.2 మరియు 15.3లోగల సిద్ధాంతాలను (విశ్లేషణ చేయకయే) నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతము 15.5 : రెండు బేసిసంఖ్యల లబ్దము బేసిసంఖ్య.

నిరూపణ : x మరియు y రెండు బేసిసంఖ్యలు అనుకొనుము.

మనము xy ఒక బేసిసంఖ్య అని చూపాలి.

x, y లు బేసిసంఖ్యలు అయిన $x = (2m - 1), y = 2n - 1$ (m, n లు ఏదైనా రెండు సహజసంఖ్యలు) గా రాయవచ్చు.

అప్పుడు $xy = (2m - 1)(2n - 1)$

$= 4mn - 2m - 2n + 1$

$= 4mn - 2m - 2n + 2 - 1$

$= 2(2mn - m - n + 1) - 1$

Let $2mn - m - n + 1 = l$, l ను ఏదేని సహజ సంఖ్య అనుకొనిన

$= 2l - 1, l \in \mathrm{N}$

ఇది ఖచ్చితంగా బేసి సంఖ్యయే

సిద్ధాంతం 15.6 : రెండు వరుస సరిసంఖ్యల లబ్దము, 4చే భాగింపబడును.

రెండు వరుస సరిసంఖ్యలు $2m$, $2m + 2$ (n ఏదైనా ఒక సహజసంఖ్య). వాటి లబ్దము $2m\ (2m + 2)$, 4 చే భాగింపబడును అని నిరూపించాలి. (నిరూపణకు మీరు సొంతంగా ప్రయత్నించండి.).

గణితశాస్త్రజ్ఞులు తమ ఫలితాలను ఎలా కనుగొంటారు? మరియు వాటికి ఖచ్చితమైన నిరూపణలు ఎలా రాస్తారు. వారికి అంతఃజ్ఞానముతో ఊహించుట చాలాముఖ్యము. ఒకే విషయాన్ని పలుమార్గాలలో ఉదాహరణలతో తార్కికంగా ఆలోచించి సరియైన నిరూపణకు వస్తారు. వారి సృజనాత్మక ఆలోచనలు అన్ని కలసి నిరూపణలుగా పరిణమిస్తాయి.

మనము నిగమనపద్ధతి, ఆగమన పద్ధతిపై కూడా కొన్ని ఉదాహరణలతో చర్చించడం జరిగినది.

ఇక్కడ మనం ప్రత్యేకంగా చెప్పుకోవలసినది. భారతదేశ ప్రఖ్యాత గణిత మేధావి శ్రీనివాసరామానుజన్‌కు ఉన్నత శ్రేణి సృజనాత్మకతయే అతని అనేక ప్రవచనాలు, ప్రవచిస్తే, అందులో చాలా ప్రవచనాలు సత్యాలై, నిరూపించబడి ప్రఖ్యాత సిద్ధాంతాలుగా ప్రాచుర్యంపొందాయి.

అభ్యాసం-15.4

1. కింది వాటిలో ఏవి ప్రవచనములు? ఏవి ప్రవచనములు కావో? కారణాలు తెల్పుతూ చెప్పండి.
   i. ఆమె కళ్లు నీలంగా కలవు
   ii. $x + 7 = 18$
   iii. ఈ రోజు ఆదివారము కాదు
   iv. x యొక్క అన్ని విలువలకు, $x + 0 = x$
   v. ఇప్పుడు సమయం ఎంత?
2. కింది ప్రవచనములను ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా అసత్యములని తెల్పండి.
   i. ప్రతి దీర్ఘచతురస్రము ఒక చతురస్రము.
   ii. ఏవైనా వాస్తవ సంఖ్యలు x, y లకు $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
   iii. n ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $2n^2 + 11$ ఒక ప్రధానాంకము.
   iv. రెండు త్రిభుజములలో అనురూపకోణాలు సమానమైన, ఆ త్రిభుజములు సర్వ సమానములు.
   v. ఒక చతుర్భుజంలోని అన్ని భుజాలు సమానములైన అది చతురస్రము.
3. రెండు బేసిసంఖ్యల మొత్తము ఒక సరిసంఖ్య అని నిరూపించండి.
4. రెండు సరిసంఖ్యల లబ్దము ఒక సరిసంఖ్య అని నిరూపించండి.

5. "x ఒక బేసిసంఖ్య అయిన x^2 కూడా ఒక బేసిసంఖ్య" నిరూపించండి.

6. కింది వాటిని పరిశీలించండి. వాటిలో ఏది సరియైనది సరిచూడండి.

   i. ఒక సంఖ్యను తలుచుకోండి. దానిని రెట్టింపుచేసి '9' కలపండి. దానికి తలచిన సంఖ్యను కలపండి. 3తో భాగించండి. తిరిగి '4' కలపండి. తిరిగి ఆ ఫలితము నుండి తలచిన సంఖ్యను తీసివేయండి. ఫలితం '7' వచ్చును.

   ii. ఒక 3-అంకెల సంఖ్యను రాసి, 6-అంకెల సంఖ్య అగునట్లు రెండుసార్లు రాయండి. (ఉదా: 425 ను 425425 గా రాయండి) ఈ 6-అంకెల సంఖ్య (425425) 7, 11 మరియు 13 చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడును.

మనం ఏం నేర్చుకున్నాం?

1. ప్రవచనములను కొన్ని ప్రమాణములకు అనుగుణంగా నిర్ణయించబడును. సత్యంలేక అసత్య నిరూపణకు ఈ పద్ధతితో సంబంధంలేదు.

2. సాధారణ ప్రవచనములకంటే గణిత ప్రవచనములు కొంత వైవిధ్యత కలిగి ఉంటాయి. అవి సాక్ష్యాల ఆధారంతో ఋజువు చేయలేము కాని ఒక ప్రత్యుదాహరణతో అసత్యమని చూపవచ్చు.

3. తార్కిక ఆలోచనలు, పరిశీలనలు, వరుస క్రమాల ఆధారంగా, గణిత ప్రవచనమును ప్రవచించును మన పరిశీలనలతో చేయు ఊహ పరికల్పనకు దారి తీయును.

4. గణిత ప్రవచనము కొన్ని తార్కిక అంశముల ఆధారంగా సత్యమని ఋజువు చేసిన దానిని గణిత ప్రవచన నిరూపణ అంటారు.

5. నిరూపణ లేకుండానే సత్యములుగా భావించే గణిత ప్రవచనములను స్వీకృతములు అంటారు.

6. సత్యములుగా భావిస్తూ, ఇంతవరకు నిరూపింపబడని గణిత ప్రవచనములు పరికల్పనలు (ఊహలు) అంటారు.

7. నిరూపింపబడిన గణిత ప్రవచనములను సిద్ధాంతములు అంటారు.

8. గణిత ప్రవచనములను తార్కిక ఆలోచనల ద్వారా నిరూపించుటను నిగమన పద్ధతి అంటారు.

9. నిరూపణ అనేది వరుస క్రమంలో వ్రాయబడిన గణిత ప్రవచనాల సమూహం.

10. సిద్ధాంతముల యందు ఇచ్చిన దత్తాంశము నుండి వరసక్రమంలో తార్కిక వివేచన ద్వారా నిరూపించవలసిన విషయమును చేరుటయే సిద్ధాంత నిరూపణ అగును.

11. నిరూపించవలసిన అంశమునకు వ్యతిరేకముగా తీసుకొని, దత్తాంశమునకు విరుద్ధముగా నిరూపణ వచ్చినప్పుడు, అసలు నిరూపించవలసిన అంశమే సరియైన దని నిరూపించుట ద్వారా తెలుసుకొను విధానమును పరోక్ష పద్ధతి అంటారు.

12. ఆసందిగ్ధ ప్రవచనాల నుండి తార్కికంగా సత్యత నిర్ధారించుటయే నిగమన తార్కికత.

13. వివిధ సందర్భాలలో సంగ్రహించిన సమాన క్రమము గల సామాన్యత మరియు అమరికలతో చేయు నిర్ణయమే అనుగమన తార్కికత.

సమాధానాలు

అభ్యాసం 1.1

1. a. $-5, \frac{22}{7}, \frac{-2013}{2014}$

b. $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0; p, q$ లు పూర్ణసంఖ్యలు) రూపంలో వ్రాయగలిగే సంఖ్యలను – అకరణీయ సంఖ్యలు అందురు. (p, q లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

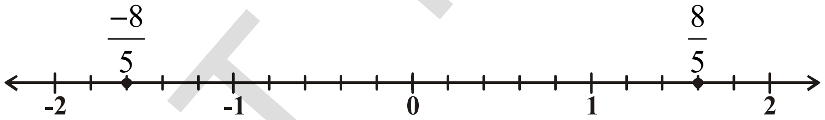
2. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) 0 (iii) -5

(iv) 7 (v) -3

3. $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{17}{16}, \frac{33}{32}$

4. $\frac{19}{30}, \frac{13}{20}, \frac{79}{120}$

5.



6. I. (i) 0.242 (ii) 0.708 (iii) 0.4 (iv) 28.75

II. (i) $0.\overline{6}$ (ii) $-0.69\overline{4}$ (iii) $3.\overline{142857}$ (iv) $1.\overline{2}$

7. (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{77}{5}$ (iii) $\frac{41}{4}$ (iv) $\frac{13}{4}$

8. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{35}{9}$ (iii) $\frac{4}{11}$ (iv) $\frac{563}{180}$

9. (i) అవును (ii) కాదు (iii) అవును (iv) కాదు

అభ్యాసం 1.2

1. (i) కరణీయ (ii) అకరణీయ (iii) కరణీయ

(iv) అకరణీయ (v) అకరణీయ (vi) కరణీయ

2. అకరణీయ సంఖ్యలు : $-1, \frac{13}{7}, 1.25, 21.\overline{8}, 0$

కరణీయ సంఖ్యలు : $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \pi$, 2.131415....., 1.1010010001.....

3. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. 0.71727374....., 0.761661666..... 5. $\sqrt{5} = 2.236$

6. 2.645751 8. $\sqrt{5}, \sqrt{6}$

9. (i) సత్యం (ii) సత్యం (iii) సత్యం ($\sqrt{3}$) (iv) సత్యం ($\sqrt{9}$)

(v) అసత్యం ($\sqrt{16}$) (vi) అసత్యం ($\frac{3}{7}$)

అభ్యాసం 1.4

1. (i) $10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$ (ii) 20

(iii) $10 + 2\sqrt{21}$ (iv) 4

2. (i) కరణీయ (ii) కరణీయ (iii) కరణీయ (iv) అకరణీయ

(v) కరణీయ (vi) కరణీయ (vii) అకరణీయ

3. (i) కరణీయ (ii) అకరణీయ (iii) కరణీయ (iv) కరణీయ

(v) కరణీయ (vi) అకరణీయ

4. π కరణీయ సంఖ్య కాని కరణీ కాదు.

5. (i) $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (iv) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

6. (i) $17-12\sqrt{2}$ (ii) $6-\sqrt{35}$ (iii) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$ (iv) $\frac{9\sqrt{15}-3\sqrt{10}-3\sqrt{21}+\sqrt{14}}{25}$

7. 0.3273 8. (i) 2 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 64 (v) 9 (vi) $\frac{1}{6}$ 9. -8

10. (i) $a = 5, b = 2$ (ii) $a = \frac{-19}{7}, b = \frac{5}{7}$ 11. $\sqrt{6}+\sqrt{5}$

అభ్యాసం 2.1

1. (i) 5 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 6

(v) 2 (vi) 1

2. (i) బహుపది (ii) బహుపది (iii) కాదు, ఎందుకనగా ఈ బహుపదిలో రెండు చరరాశు లున్నాయి.
   (iv) చరరాశి ఘాతాంకం రుణాత్మకం కావున ఇది బహుపది కాదు.
   (v) బహుపది కాదు ఎందుకనగా x యొక్క ఘాతాంకం రుణాత్మకం కాని పూర్ణసంఖ్య కాదు.
   (vi) ఏక చరరాశిలో బహుపది కాదు ఎందుకనగా దీనిలో రెండు చరరాశులు వున్నాయి.

3. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\sqrt{2}$ (iv) 2
   (v) $\frac{\pi}{2}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) 0 (viii) 0

4. (i) వర్గ (ii) ఘన (iii) వర్గ (iv) రేఖీయ
   (v) రేఖీయ (vi) వర్గ

5. (i) సత్యం (ii) అసత్యం (iii) సత్యం (iv) అసత్యం
   (v) సత్యం (vi) సత్యం

అభ్యాసం 2.2

1. (i) 3 (ii) 12 (iii) 9 (iv) $\frac{3}{2}$

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) -1, 0, 3
   (v) 2, 0, 0

3. (i) అవును (ii) కాదు (iii) అవును (iv) కాదు, అవును
   (v) అవును (vi) అవును (vii) అవును, కాదు (viii) అవును, కాదు

4. (i) -2 (ii) 2 (iii) $\frac{-3}{2}$ (iv) $\frac{3}{2}$
   (v) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-q}{p}$

5. $a = \frac{-2}{7}$ 6. $a = 1, b = 0$

అభ్యాసం 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1
   (iv) $-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$ (v) $\frac{-27}{8}$

2. $5p$ 3. శేషం 5 కాబట్టి కారణాంకం కాదు. 4. -3 5. $\frac{-13}{3}$

6. $\frac{-13}{3}$ 7. 8 8. $\frac{21}{8}$ 9. $a = -7, b = -12$

అభ్యాసం 2.4

1. (i) అవును (ii) కాదు (iii) కాదు (iv) కాదు

2. (i) అవును (ii) అవును (iii) అవును (iv) అవును

(v) అవును

7. (i) $(x-1)(x+1)(x-2)$ (ii) $(x+1)^2(x-5)$

(iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y+1)(y+1)(y-1)$

9. a = 3 10. $(y-2)(y+3)$

అభ్యాసం 2.5

1. (i) $x^2+7x+10$ (ii) $x^2 - 10x + 25$

(iii) $9x^2 - 4$ (iv) $x^4-\dfrac{1}{x^4}$ (v) $1+2x+x^2$

2. (i) 9999 (ii) 998001 (iii) $\dfrac{9999}{4} = 2499\dfrac{3}{4}$

(iv) 251001 (v) 899.75

3. (i) $(4x+3y)^2$ (ii) $(2y-1)^2$ (iii) $\left(2x+\dfrac{y}{5}\right)\left(2x-\dfrac{y}{5}\right)$

(iv) $2(3a+5)(3a-5)$ (v) $(x+3)(x+2)$

(vi) $3(P-6)(P-2)$

4. (i) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8xz$

(ii) $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$

(iii) $4a^2+25b^2+9c^2-20ab-30bc+12ac$

(iv) $\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{4}+1-\dfrac{ab}{4}-b+\dfrac{a}{2}$

(v) p^3+3p^2+3p+1 (vi) $x^3 - 2x^2y + \dfrac{4}{3}xy^2 - \dfrac{8}{27}y^3$

5. (i) $(-5x+4y+2z)^2$ (ii) $(3a+2b-4c)^2$

6. 29

7. (i) 9,70,299 (ii) 10,61,208 (iii) 99,40,11992 (iv) 100,30,03,001

8. (i) $(2a+b)^3$ (ii) $(2a-b)^3$ (iii) $(1-4a)^3$ (iv) $\left(2p-\dfrac{1}{5}\right)^3$

10. (i) $(3a+4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2)$ (ii) $(7y-10)(49y^2+70y+100)$

11. $(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz)$

14. (i) -630 (ii) 16380 (iii) $\frac{-5}{12}$ (iv) -0.018

15. (i) $(2a + 3)(2a - 1)$ (ii) $(5a - 3)(5a - 4)$

16. (i) $3x(x - 2)(x + 2)$ (ii) $4(3y + 5)(y - 1)$

అభ్యాసం 3.1

1. (i) 3 (ii) 13 (iii) 6 (iv) 180°

(v) తలం, బిందువు, రేఖ

2. a) అసత్యం b) సత్యం c) సత్యం d) సత్యం

e) సత్యం 7) అనంతం 8) 180° కన్నా తక్కువ వైపున రేఖలు ఖండించుకుంటాయి.

9. $\angle 1 = \angle 2$

అభ్యాసం 4.1

2. (i) పరావర్తన కోణం (ii) లంబకోణం (iii) అల్పకోణం

3. (i) అసత్యం (ii) సత్యం (iii) అసత్యం (iv) అసత్యం

(v) సత్యం (vi) సత్యం (vii) అసత్యం (viii) సత్యం

4. (i) 270° (ii) 180° (iii) 210°

అభ్యాసం 4.2

1. $x = 36°$ $y = 54°$ $z = 90°$

2. (i) $x = 23°$ (ii) $x = 59°$ (iii) $x = 20°$ (iv) $x = 8°$

3. $\angle BOE = 30°$; $\angle COE$ పరావర్తన కోణం $= 250°$

4. $\angle C = 126°$

8. $\angle XYQ = 122°$ $\angle QYP$ పరావర్తన కోణం $= 302°$

అభ్యాసం 4.3

2. $x = 126°$

3. $\angle AGE = 126°$ $\angle GEF = 36°$ $\angle FGE = 54°$

4. $\angle QRS = 60°$ 5. $\angle ACB = z° = x° + y°$

6. $a = 40°$; $b = 100°$

7. (i) $\angle 3, \angle 5, \angle 7, \angle 9, \angle 11, \angle 13, \angle 15$

(ii) $\angle 4, \angle 6, \angle 8, \angle 10, \angle 12, \angle 14, \angle 16$

8. $x = 60°$ $y = 59°$
9. $x = 40°$ $y = 40°$
10. $x = 60°$ $y = 18°$
11. $x = 63°$ $y = 11°$
13. $x = 50°$ $y = 77°$
15. (i) $x = 36°$; $y = 108°$ (ii) $x = 35°$ (iii) $x = 29°$
16. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 80°$; $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 100°$
17. $x = 20°$ $y = 60°$ $z = 120°$
18. $x = 55°$ $y = 35°$ $z = 125°$
19. (i) $x = 140°$ (ii) $x = 100°$ (iii) $x = 250°$

అభ్యాసం 4.4

1. (i) $x = 110°$ (ii) $z = 130°$ (iii) $y = 80°$
2. $\angle 1 = 60°$ 3. $x = 35°, y = 51°$ 5. $x = 50°$ $y = 20°$
6. $x = 70°$ $y = 40°$ 7. $x = 30°$ $y = 75°$
8. $\angle PRQ = 65°$ 9. $\angle OZY = 32°$; $\angle YOZ = 121°$
10. $\angle DCE = 92°$ 11. $\angle SQT = 60°$ 12. $z = 60°$
13. $x = 37°$ $y = 53°$ 14. $\angle A = 50°$; $\angle B = 75°$
15. (i) 78° (ii) $\angle ADE = 67°$ (iii) $\angle CED = 78°$
16. (i) $\angle ABC = 72°$ (ii) $\angle ACB = 72°$
(iii) $\angle DAB = 27°$ (iv) $\angle EAC = 32°$
17. $x = 96°$ $y = 120°$

అభ్యాసం 5.1

1. (i) నీటి ట్యాంక్ (ii) Mr. 'J' ఇల్లు
(iii) రెండవవీధిలో తూర్పుదిశగా వెళ్తే కుడివైపు మూడో ఇల్లు.
(iv) నాలుగవవీధిలో తూర్పుదిశగా వెళ్తే కుడివైపు ఒకటో ఇల్లు.
(v) నాలుగవవీధిలో తూర్పుదిశగా వెళ్తే ఎడమవైపు మూడో ఇల్లు.

అభ్యాసం 5.2

1. (i) Q_2 (ii) Q_4 (iii) Q_1 (iv) Q_3
(v) Y- అక్షం (vi) X-అక్షం (vii) X-అక్షం (viii) Y-అక్షం

2. (i) x-నిరూపకం : 4, y-నిరూపకం : -8 (ii) x-నిరూపకం : -5, y-నిరూపకం : 3 (iii) x-నిరూపకం : 0, y-నిరూపకం : 0 (iv) x-నిరూపకం : 5, y-నిరూపకం: 0
   (v) x-నిరూపకం : 0, y-నిరూపకం : -8
3. (ii) (0, 13) : Y-అక్షం (iv) (-2, 0) : X-అక్షం
   (v) (0, -8) : Y-అక్షం (vi) (7, 0) : X-అక్షం
   (vii) (0, 0) : రెండు అక్షాలపై ఉంటుంది.
4. (i) -7 (ii) 7 (iii) R (iv) P
   (v) 4 (vi) -3
5. (i) అసత్యం (ii) సత్యం (iii) సత్యం (iv) అసత్యం
   (v) అసత్యం (vi) సత్యం

అభ్యాసం 5.3

2. (5, -8), Q_4 లో మరియు (-8, 5),Q_2 లో ఉంది.
3. అన్ని బిందువులు Y- అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న రేఖపై 1 యూనిట్ ల దూరంలో ఉన్నాయి.
4. అన్ని బిందువులు X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న రేఖపై 4 యూనిట్ల దూరంలో ఉన్నాయి.
5. 12 చ.సెం.మీ

అభ్యాసం 6.1

1. (i) $a = 8$ $b = 5$ $c = -3$
   (ii) $a = 28$ $b = -35$ $c = 7$
   (iii) $a = 93$ $b = 15$ $c = -12$
   (iv) $a = 2$ $b = 5$ $c = 0$
   (v) $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{1}{4}$ $c = -7$
   (vi) $a = \frac{3}{2}$ $b = 1$ $c = 0$
   (vii) $a = 3$ $b = 5$ $c = -12$
2. (i) $a = 2$ $b = 0$ $c = -5$
   (ii) $a = 0$ $b = 1$ $c = -2$
   (iii) $a = 0$ $b = \frac{1}{7}$ $c = -3$
   (iv) $a = 1$ $b = 0$ $c = \frac{14}{13}$
3. (i) $x + y = 34$ (ii) $2x - y + 10 = 0$

(iii) $x - 2y - 10 = 0$ (iv) $2x + 15y - 100 = 0$

(v) $x + y - 200 = 0$ (vi) $x + y - 11 = 0$

అభ్యాసం 6.2

2. (i) $(0, -34); (\frac{17}{4}, 0)$ (ii) $(0, 3) ; (-7, 0)$

(iii) $(0, \frac{3}{2}) ; (\frac{-3}{5}, 0)$

3. (i) సాధన కాదు (ii) సాధన (iii) సాధన

(iv) సాధన కాదు (v) సాధన కాదు

4. k = 7 5. $\alpha = \frac{8}{5}$ 6. 3

అభ్యాసం 6.3

2. (i) అవును (ii) అవును
3. 3
4. (i) 6 (ii) -5
5. (i) $(\frac{3}{2}, 3)$ (ii) $(-3, 6)$
6. (i) $(2, 0) : (0, -4)$ (ii) $(-8, 0) ; (0, 2)$

(iii) $(-2, 0) ; (0, -3)$

7. $x + y = 1000$ 8. $x + y = 5000$ 9. $f = 6a$ 10. 39.2

అభ్యాసం 6.4

1. $5x = 3y$; 2000 ; 480 (ఓటు వినియోగించుకున్న ఓటర్లు $= x$, మొత్తం ఓటర్లు $= y$)
2. $x - y = 25$; 50; 15 (తండ్రి వయస్సు $= x$, రూపయొక్క వయస్సు $= y$)
3. $y = 8x + 7$; 6కి.మీ; ₹63 4. $x + 4y = 27$; 5, 11
5. $y = 10x + 30$; 60; 90; 5 hr. (మొత్తం గంటలు $= x$; పార్కింగ్ ఖర్చులు $= y$)
6. d = 60 t (d = దూరం, t = కాలం); 90 కి.మీ. ; 120 కి.మీ. ; 210 కి.మీ.
7. $y = 8x$; $\frac{3}{2}$ or $1\frac{1}{2}$; 12
8. $y = \frac{5}{7}x$ (మిశ్రమ పరిమాణం $= x$; పాలు పరిమాణం$= y$) ; 20
9. (ii) 86° F (iii) 35° C (iv) -40

అభ్యాసం 6.5

4. (i) $y = -3$ (ii) $y = 4$ (iii) $y = -5$ (iv) $y = 4$

5. (i) $x = -4$ (ii) $x = 2$ (iii) $x = 3$ (iv) $x = -4$

అభ్యాసం 7.4

6. 7 7. కాదు

అభ్యాసం 8.1

1. (i) సత్యం (ii) సత్యం (iii) అసత్యం (iv) సత్యం
   (v) అసత్యం (vi) అసత్యం

2. (a) అవును, కాదు, కాదు, కాదు, కాదు (b) కాదు, అవును, అవును, అవును, అవును
   (c) కాదు, అవును, అవును, అవును, అవును (d) కాదు, అవును, అవును, అవును, అవును
   (e) కాదు, అవును, అవును, అవును, అవును (f) కాదు, అవును, అవును, అవును, అవును
   (g) కాదు, కాదు, కాదు, అవును, అవును (h) కాదు, కాదు, అవును, కాదు, అవును
   (i) కాదు, కాదు, కాదు, అవును, అవును (j) కాదు, కాదు, అవును, కాదు, అవును

4. నాలుగు కోణాలు = 36°, 72°, 108°, 144°

అభ్యాసము 8.3

1. సమాంతర చతుర్భుజ కోణాలు = 73°, 107°, 73°, 107°
2. సమాంతర చతుర్భుజ కోణాలు = 78°, 112°, 78°, 112°

అభ్యాసం 8.4

1. BC = 8 సెం.మీ.

అభ్యాసం 9.1

1.

మార్కులు	5	6	7	8	9	10
పౌనఃపున్యం (f)	5	6	8	12	9	5

2.

రక్తం గ్రూపు	A	B	AB	O
పౌనఃపున్యం (f)	10	9	2	15

అతిసామాన్య రక్తం గ్రూపు = O ; అరుదైన రక్తంగ్రూపు = AB

3.

బొమ్మల సంఖ్య	0	1	2	3
పౌనఃపున్యం (f)	3	10	10	7

4.

ఐచ్ఛికములు	A	B	C
పౌనఃపున్యం (f)	19	36	10

సరియైన సమాధానములు = 65

అధికసంఖ్యాకుల అభిప్రాయం = B (బహిరంగ ప్రదేశములలో నిషేధము)

5.

వాహనము	కార్లు	మోటారు సైకిళ్లు	ఆటో	సైకిళ్లు
వాహనాల సంఖ్య (f)	25	45	30	40

6. సూచిక : X-అక్షం = 1 సెం.మీ. = 1 తరగతి

Y-అక్షం = 1 సెం.మీ. = 10 మంది విద్యార్థులు

తరగతి	I	II	III	IV	V	VI
విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	40	55	65	50	30	15

7.

మార్కులు (తరగతి అంతరం)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	1	4	3	7	7	7	1	0

8.

బిల్లు మొత్తం రూపాయలలో (₹) (తరగతి అంతరం)	ఇండ్ల సంఖ్య (f)
150 - 225	4
225 - 300	3
300 - 375	7
375 - 450	7
450 - 525	0
525 - 600	1
600 - 675	1
675 - 750	2

9.

జీవిత కాలం (సం॥లలో) (తరగతి అంతరం)	2-2.5	2.5-3.0	3.0-3.5	3.5-4.0	4.0-4.5	4.5-5.0
బ్యాటరీల సంఖ్య	2	6	14	11	4	3

అభ్యాసం 9.2

1. $\bar{x} = 85$ 2. $\bar{x} = 1.71$ 3. K = 10

4. $\bar{x} = 17.7$

5. (i) ₹ 359, ₹ 413, ₹ 195, ₹ 228, ₹ 200, ₹ 837

(ii) ₹444 (ప్రతి పాఠశాల పొదుపు చేసినది)

6. బాలుని ఎత్తు = 147 సెం.మీ. ; బాలిక ఎత్తు = 152 సెం.మీ.

7. $\bar{x}$ = 11.18 ; బాహుళకం = 5 ; మధ్యగతం = 10

8. $\bar{x}$ = 80 ; మధ్యగతం = 75 ; బాహుళకం = 50

9. 37 కి.గ్రా.లు 10. ₹11.25, మధ్యగతం = ₹ 10; బాహుళకం = ₹ 10

11. 1st = 2 ; 2nd = 6 ; 3rd = 19 ; 4th = 33

అభ్యాసం 10.1

1. (i) 64 చ.సెం.మీ ; 96 చ.సెం.మీ. (ii) 140 చ.సెం.మీ. ; 236 చ.సెం.మీ.

2. 3375 ఘ.మీ. 3. 330 ఘ.మీ. 4. 8 సెం.మీ.

5. (i) అసలు వైశాల్యానికి 4 రెట్లు (ii) అసలు వైశాల్యానికి 9 రెట్లు (iii) n^2 రెట్లు

6. 60 ఘ.సెం.మీ. 7. 16 ఘ.మీ. 8. 3750000 లీటర్లు

అభ్యాసం 10.2

1. 6.90 చ.మీ. 2. 176 చ.సెం.మీ., 253 చ.సెం.మీ.

3. 7.5 సెం.మీ. 4. h = 2.5 మీ.

5. (i) 968 చ.సెం.మీ. (ii) 10648 చ.సెం.మీ. (iii) 14633.14 చ.సెం.మీ.

6. ₹ 5420.8 7. 1584 చ.మీ.

8. (i) 110 చ.మీ. (ii) ₹4400

9. (i) 87.12 చ.మీ. (ii) 96.48 చ.మీ. 10. 517.44 లీటర్లు 11. h = 20 సెం.మీ.

అభ్యాసం 10.3

1. h = 6 సెం.మీ. 2. h = 9 సెం.మీ.

3. (i) 7 సెం.మీ. (ii) 462 చ.సెం.మీ. 4. 1232 ఘ.సెం.మీ.

5. 1018.3 ఘ.సెం.మీ. 6. ₹7920, 15m 7. $3394\frac{2}{7}$ ఘ.సెం.మీ.

8. 241.84 చ.మీ. (సుమారుగా) 9. 63 మీ. 10. 6135.8 చ.సెం.మీ 11. 24.7 ని॥ 12. 60π చ.యూనిట్లు

అభ్యాసం 10.4

1. 154 చ.సెం.మీ. ; 179.67 ఘ.సెం.మీ.   2. 3054.86 ఘ.సెం.మీ.
3. 616 చ.సెం.మీ.   4. 6930 చ.సెం.మీ.   5. 4 : 9 ; 8 : 27
6. $942\frac{6}{7}$ చ.సెం.మీ.   7. 1 : 4   8. 441 : 400   9. 55 గ్రా./0.055 కి.గ్రా.
10. 5 సెం.మీ.   11. 0.303 మీ.   12. సీసాల సంఖ్య = 9

అభ్యాసం 11.1

1. 19.5 చ.సెం.మీ.   2. 114 చ.సెం.మీ.   3. 36 చ.సెం.మీ.

అభ్యాసం 11.2

1. 8.57 సెం.మీ.   2. 6.67 సెం.మీ.

అభ్యాసం 12.1

1. (i) వ్యాసార్ధం   (ii) వ్యాసం   (iii) అల్పచాపం
   (iv) జ్యా   (v) అధిక చాపం   (vi) అర్ధ వృత్తం
   (vii) జ్యా   (viii) అల్పవృత్త ఖండం
2. (i) సత్యం   (ii) సత్యం   (iii) సత్యం   (iv) అసత్యం
   (v) అసత్యం   (vi) సత్యం   (vii) సత్యం

అభ్యాసం 12.2

1. 90°   2. 48°, 84°   3. అవును

అభ్యాసం 12.4

1. 130°   2. 40°   3. 60°, 120°   5. 5 సెం.మీ.
6. 6 సెం.మీ.   7. 4 సెం.మీ.   9. 70°, 55°, 55°

అభ్యాసం 12.5

1. (i) $x^\circ = 75^\circ ; y^\circ = 75^\circ$ (ii) $x^\circ = 70^\circ ; y^\circ = 95^\circ$
   (iii) $x^\circ = 90^\circ ; y^\circ = 40^\circ$
4. (a), (b), (c), (e), (f) లు సాధ్యము ; (d) సాధ్యం కాదు

అభ్యాసం 14.1

1. (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6 (b) అవును, $P(E) = \frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{3}$

2. (a) $\frac{9}{20}; \frac{11}{20}$ (b) 1

3. (a) ఎరుపు (b) పసుపు (c) నీలం, ఆకుపచ్చ (d) అవకాశం లేదు

(e) చెప్పలేము (ఇది యాదృశ్చిక ప్రయోగం)

4. (a) కాదు

(b) P (ఆకుపచ్చ) $= \frac{5}{12}$; P (నీలం) $= \frac{1}{4}$; P (ఎరుపు) $= \frac{1}{6}$; P (పసుపు) $= \frac{1}{6}$

(c) 1

5. (a) $P(E) = \frac{5}{26}$ (b) $P(E) = \frac{5}{13}$ (c) 1 (d) $\frac{21}{26}$

6. $P(E) = \frac{7}{11}$

7. (i) $P = \frac{61}{2000}$ (ii) $P = \frac{9}{80}$ (iii) $P = \frac{261}{400}$ 8. 21.5%

అభ్యాసం 15.1

1. (i) ఎల్లప్పుడూ అసత్యము. ప్రతి నెలకు కనీసం 28 రోజులు ఉంటాయి. సాధారణంగా ప్రతి నెలలో 30 లేదా 31 రోజులు ఉంటాయి.

(ii) సందిగ్ధత. ఒక సంవత్సరంలో మరక సంక్రాంతి శుక్రవారంనాడు రావచ్చు లేదా రాకపోవచ్చు.

(iii) సందిగ్ధత. శీతాకాలంలో ఏదో ఒక రోజున హైదరాబాదులో ఉష్ణోగ్రత 2°C కావచ్చు.

(iv) సత్యము. ఇప్పటి వరకు మనకు తెలిసిన దానినిబట్టి ఇది సత్యమగును. కాని భవిష్యత్‌లో శాస్త్రజ్ఞులు ఇతర గ్రహాలపైన జీవం ఉన్నట్లు గుర్తించవచ్చు.

(v) ఎల్లప్పుడూ అసత్యము, కుక్కలు ఎగరలేవు.

(vi) సందిగ్ధత. లీపు సంవత్సరం ఫిబ్రవరి నెలలో 29 రోజులంటాయి.

2. (i) అసత్యం (చతుర్భుజములో అంతరకోణాల మొత్తం 360°)

(ii) సత్యం (ఉదా: అన్ని సంఖ్యలు ఋణ సంఖ్యలే)

(iii) సత్యం (రాంబస్‌లో ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలు కావున ఇది సమాంతర చతుర్భుజము అగును.)

(iv) సత్యం

(v) కాదు. (అన్ని వర్గ సంఖ్యలను రెండు బేసిసంఖ్యల మొత్తంగా రాయలేము. ఉదా: $9 = 4+5$, కాని, అన్ని వర్గ సంఖ్యలను కొన్ని బేసిసంఖ్యల మొత్తంగా రాయవచ్చు. ఉదా: $9 = 1 + 3 + 5$)

3. (i) సహజ సంఖ్య మాత్రమే

(ii) సహజ సంఖ్య యొక్క రెట్టింపు సంఖ్య ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్యయే.

[ఉదా: $2 \times \frac{5}{2} = 5$ (బేసి సంఖ్య)]

(iii) ఏవైనా $x > 1, 3x + 1 > 4$ (iv) ఏవైనా $x \geq 0, x^3 \geq 0$

(v) సమ బాహు త్రిభుజంలో మధ్యగతం కూడా కోణ సమద్వి ఖండన రేఖ అగును.

4. ఏవైనా రెండు రుణ పూర్ణ సంఖ్యలు తీసుకోండి. x y

$-2 > -3$

$x^2 = -2 \times -2 = 4$

$y^2 = -3 \times -3 = 9$ (ఇక్కడ $x^2 < y^2$)

అభ్యాసం 15.2

1. (i) జీవన్ మరణిస్తాడు.

(ii) కాదు. X అనే వ్యక్తి మరాఠీ, గుజరాతి, పంజాబీ లేదా మరే ఇతర రాష్ట్రానికి చెందవచ్చు.

(iii) గులాగ్‌కు ఎరుపు నాలుక ఉంటుంది.

(iv) చురుకైనవారే అధ్యక్షులు కానక్కరలేదు. ఇచ్చట అధ్యక్షులు మాత్రమే చురుకైవారని పేర్కొన్నారు. ఉపాధ్యాయులు, విద్యార్థులు వంటివారు కూడా చురుకైనవారు కావచ్చు.

2. B ను 8 వైపు మార్చాలి. 8 కి మరొకవైపు సరిసంఖ్య వస్తే నియమం తప్పు అవుతుంది. ఇదేవిధంగా 8 కి మరొకవైపు హల్లు ఉంటే, అప్పుడు కూడా నియమం తప్పే.

3. 35 జవాబు అగును.

- 'a' ప్రవచనం సహాయపడదు. ఎందుకంటే మిగిలిన సూచనల నుండి ఒక అంకెకన్నా ఎక్కువ అవసరం.
- 'b' ప్రవచనం సహాయపడదు. ఎందుకంటే పదులస్థానంలో అంకెకన్నా ఇది పెద్దది కావాలి మరియు 7, 10 ల యొక్క గుణిజం కావాలి. అంటే 70 లో '0' అంకె '7' కన్నా చిన్నది.
- 'c' ప్రవచనం సహాయపడుతుంది. ఎందుకంటే 7 గుణిజం అంటే చాలా సంఖ్యలను తొలగించడానికి సహాయపడుతుంది.
- 'd' ప్రవచనం కూడా సహాయపడుతుంది. ఎందుకంటే ఇది బేసిసంఖ్య కావున దీనితో చాలా సంఖ్యలు తొలగించవచ్చు.
- 'e' ప్రవచనం సహాయపడదు. ఎందుకంటే 7, 11ల గుణిజం 77 మాత్రమే. ఇందులో ఒకట్లు, పదుల స్థానాలలో అంకెలు సమానం. ఏదీ ఒకదానికంటే మరొకటి పెద్దదికాదు.
- 'f' ప్రవచనం సహాయపడదు.
- 'g' ప్రవచనం సహాయపడుతుంది. ఎందుకంటే దీనివలన కొన్ని సంఖ్యలు మాత్రమే మిగులుతాయి.
- 'h' ప్రవచనం సహాయంవల్ల మనకు 35 మాత్రమే మిగులుతుంది.

కావున 3, 4, 7 మరియు 8 లు సహాయపడతాయి. వీటివలన మనకు కావల్సిన సంఖ్య వస్తుంది.

అభ్యాసం 15.3

1. (i) దీనికి అవకాశమైన ప్రతిపాదనలు:
   - a) ఏ మూడు వరుస బేసిసంఖ్యల లబ్ధమైననూ బేసిసంఖ్యయే.
   - b) ఏ మూడు వరుస బేసిసంఖ్యల లబ్దాన్ని అయిననూ '3' నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.
   - c) ఏ మూడు వరుస బేసిసంఖ్యల లబ్దంలో అంకెల మొత్తం సరిసంఖ్య అగును.

   (ii) దీనికి అవకాశమైన మూడు ప్రతిపాదనలు:
   - a) ఏ మూడు వరుస సంఖ్యల మొత్తమైననూ ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య అగును.
   - b) ఏ మూడు వరుస సంఖ్యల మొత్తమైననూ ఎల్లప్పుడు 3 చే భాగించబడును.
   - c) ఏ మూడు వరుస సంఖ్యల మొత్తమైననూ ఎల్లప్పుడూ 6 చే భాగించబడును.

4. $111111^2 = 12345654321$ $\quad$ $1111111^2 = 1234567654321$

   ప్రతిపాదన సత్యము.

6. ప్రతిపాదన అసత్యము. ఎందుకనగా $x = 41$ విలువకు ఒక ప్రధాన సంఖ్యను కనుగొనలేము.

అభ్యాసం 15.4

1. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) కాదు

   (iv) అవును (v) కాదు

2. (i) దీర్ఘచతురస్రంలో అన్ని కోణాలు సమానము కాని ఇది చతురస్రం కానేరదు.

   (ii) $x = 2; y = 3$, విలువలకు ప్రవచనం సత్యంకాదు.
   ($x = 0; y = 1$ లేదా $x = 0, y = 0$ లకు మాత్రమే ఇది సత్యం)

   (iii) $n = 11$ విలువకు $2n^2 + 11 = 253$. ఇది ప్రధానాంకం కానేరదు.

   (iv) సమాన కోణాలతో ఏ రెండు త్రిభుజాలునైనా గీయవచ్చు కాని భుజాలు వేరుగా ఉంటాయి.

   (v) రాంబస్‌లో భుజాలన్నీ సమానమే కాని ఇది చతురస్రం కాదు.

3. x, y లు ఏవైనా రెండు బేసిసంఖ్యలు. అయిన $x = 2m + 1$ (m ఒక సహజసంఖ్య) గానూ, $y = 2n + 1$ (n ఒక సహజసంఖ్య) గానూ రాయవచ్చు.

   $x + y = 2\,(m + n + 1)$. కావున $x + y$ అనేది 2 చే భాగించబడును. ఇది ఒక సరిసంఖ్య.

4. $x = 2m$ మరియు $y = 2n$ అయిన

   $xy = (2m)\,(2n)$

   $\quad = 4\,mn$

6. (i) మొదటి సంఖ్య 'n' అనుకొనుము. కింది ప్రక్రియలు చేయగా:

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n+9 \rightarrow +n = 3n+9 \rightarrow \frac{3n+9}{3} = n+3 \rightarrow n+3+4 = n+7 \rightarrow n+7-n = 7$$

   (ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$ అని గమనించు. ఏదైనా మూడంకెల సంఖ్య, abc తీసుకో. ఇప్పుడు abc × 1001 = $abcabc$. కావున ఆరు అంకెల సంఖ్య $abcabc$. ఇది 7, 11 మరియు 13 లచే భాగించబడును.

గణిత పాఠ్యప్రణాళిక

సంఖ్యా వ్యవస్థ (10 గంటలు) **(i) వాస్తవ సంఖ్యలు**	**(i) వాస్తవ సంఖ్యలు** • సంఖ్యారేఖపై సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణసంఖ్యలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించుట – పునర్విమర్శ. • అంతకాని ఆవర్తిత దశాంశాలు, అంతమయ్యే దశాంశాలను సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగత వర్ధనం పద్ధతిలో సూచించుట. • అంతమయ్యే ఆవర్తితమయ్యే దశాంశాలుగా అకరణీయ సంఖ్యలు. • $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ విలువలను ఆరుదశాంశాల వరకు భాగహారపద్ధతిలో కనుగొనుట. • అంతంకాని ఆవర్తితంకాని దశాంశాలు. ఉదా: 1.01011011101111— 1.12112111211112— మరియు $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ మొదలగునవి. • కరణీయసంఖ్యలు $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ లను సంఖ్యారేఖపై సూచించుట. • పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారం వాస్తవ సంఖ్యను సంఖ్యారేఖపై సూచించుట. • కరణి భావన. • ఏకపదకరణి, ద్విపదకరణులను అకరణీయంచేయుట. • $a+\sqrt{b}$ రూపంలో ఉన్న కరణి యొక్క వర్గమూలములు.
బీజగణితం (20 గంటలు) **(i) బహుపదులు మరియు కారణాంక విభజన** **(ii) రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు**	**(i) బహుపదులు మరియు కారణాంక విభజన** • ఏకచలరాశిలో బహుపది నిర్వచనం, బహుపది గుణకాలు, ఉదాహరణలు మరియు ప్రత్యుదాహరణలు, పదాలు, శూన్య బహుపది. • స్థిరసంఖ్య లేదా స్థిరాంకం, రేఖీయ, వర్గ, ఘన బహుపదులు, ఏకపదులు, ద్విపదులు, త్రిపదులు. బహుపది మూలాలు మరియు శూన్యవిలువలు మరియు బహుపది సమీకరణం. • శేష సిద్ధాంతం నిర్వచనం, ఉన్మకీకరణం, ఉదాహరణలతో వివరణ, ధన పూర్ణ సంఖ్యల అమరికలలోని సామ్యములతో శేషసిద్ధాంతం వివరించుట. • కారణాంక సిద్ధాంత నిర్వచనం మరియు సరిచూచుట. కారణాంక సిద్ధాంతం a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలుగా ఉన్న బహుపది $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ మరియు ఘన బహుపదుల కారణాంకవిభజన.

	• బీజీయ సర్వసమీకరణాల పునరావలోకనం . • మరిన్ని సర్వసమీకరణాలు: $(x+y+z)^2 \equiv x^2+y^2+x^2+2xy+2yz+2zx$ $(x \pm y)^3 \equiv x^3 \pm y^3 \pm 3xy\,(x \pm y)$ $x^3+y^3+z^3-3xyz \equiv (x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ $x^3+y^3 \equiv (x+y)(x^2-xy+y^2)$ $x^3-y^3 \equiv (x-y)(x^2+xy+y^2)$ మరియు వీటితో బీజీయసమాసాల కారణాంక విభజన. **(ii) రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు** • ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాల పునర్విమర్శ. • రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల పరిచయం. • రెండు చరరాశుల రేఖీయ సమీకరణాల సాధన. • రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలను రేఖా చిత్రాలతో సూచించడం. • x-అక్షం మరియు y-అక్షంనకు సమాంతరంగా ఉన్న రేఖాసమీకరణాలు. • x-అక్షం సమీకరణం మరియు y-అక్షం సమీకరణం.
నిరూపక రేఖాగణితం(5 గంటలు)	**నిరూపక రేఖాగణితం** • కార్టీజియన్ వ్యవస్థ. • నిరూపకాలు ఇచ్చినప్పుడు బిందువులను నిరూపకతలంలో స్థాపించుట.
రేఖాగణితం (40 గంటలు) **(i) జ్యామితీయ మూలాలు** **(ii) రేఖలు మరియు కోణాలు** **(iii) త్రిభుజాలు** **(iv) చతుర్భుజాలు** **(v) వైశాల్యాలు** **(vi) వృత్తాలు** **(vii) జ్యామితీయ నిర్మాణాలు**	**(i) జ్యామితీయ మూలాలు** • జ్యామితి చరిత్ర, భారతదేశంలో జ్యామితి, సామాన్య భావనలు, స్వీకృతాలు, నిర్వచనాలు ఉపయోగించి పరిశీలించిన విషయాలను లాక్షణిక గణిత పద్ధతుల ద్వారా సిద్ధాంతీకరించటం. యూక్లిడ్ 5వ స్వీకృతము మరియు దాని తుల్య ప్రవచనాలు. • రెండు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ ఏకైకం. • రెండు వేరువేరు రేఖలు ఒకటికన్నా మించి ఉమ్మడి బిందువులను కలిగివుండవు (నిరూపణ).

(ii) రేఖలు మరియు కోణాలు

- ఒక కిరణం ఒక రేఖపై ఉన్నప్పుడు ఏర్పడిన రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180^0 మరియు దాని విపర్యం (ఉన్ముఖీకరణం)
- రెండు రేఖలు ఖండించుకొన్నప్పుడు శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం (నిరూపణ).
- రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే సదృశ్య కోణాలు, ఏకాంతర కోణాలు, అంతరకోణాల ఫలితాలు మరియు ఉన్ముఖీకరణం.
- దత్తరేఖకు సమాంతరంగా ఉన్నరేఖలన్నీ సమాంతరాలు (ఉన్ముఖీకరణం)
- త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^0.
- ఒక త్రిభుజంలోని ఏదైనా భుజం పొడిగించినప్పుడు ఏర్పడిన బాహ్యకోణం దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం (ఉన్ముఖీకరణం).

(iii) త్రిభుజాలు

- (ఉన్ముఖీకరణం) ఒక త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాలు మరియు వాటిమధ్య కోణం మరొక త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్య కోణంనకు సమానం అయిన ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు (భు.కో.భు. సర్వసమానత్వం).
- (నిరూపణ) ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు మరియు వాటి మధ్య భుజాలు వరుసగా మరొక త్రిభుజంలోని ఏవేని రెండు కోణాలు మరియు వాటి మధ్య భుజానికి సమానం అయిన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు (కో.భు.కో. సర్వసమానత్వం).
- ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు వరుసగా మరొక త్రిభుజంలో మూడు భుజాలకు సమానం అయిన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వం).
- (ఉన్ముఖీకరణం) ఒక లంబకోణ త్రిభుజములోని కర్ణము, భుజములు వరుసగా వేరొక లంబకోణ త్రిభుజములోని కర్ణము, భుజములకు సమానమైన ఆ రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.
- (నిరూపణ) ఒక త్రిభుజములో సమాన భుజాలకెదురుగానున్న కోణాలు సమానం.
- (ఉన్ముఖీకరణం) ఒక త్రిభుజంలో సమానకోణాల కెదురుగానున్న భుజాల పొడవులు సమానం.
- (ఉన్ముఖీకరణం) త్రిభుజ అసమానత్వ ధర్మాలు, కోణము, దాని ఎదుటి భుజానికిగల సంబంధం, త్రిభుజంలోని అసమానత్వాలు.

(iv) చతుర్భుజాలు

- (నిరూపణ) ఒక సమాంతర చతుర్భుజాన్ని కర్ణము రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.
- (ఉన్మఖీకరణం) ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదుటి భుజాలు సమానము మరియు దాని విపర్యయం.
- (ఉన్మఖీకరణం) సమాంతర చతుర్భుజంలో అభిముఖ కోణాలు సమానం మరియు విపర్యయం.
- (ఉన్మఖీకరణం) ఒక చతుర్భుజంలో ఒక జత ఎదుటి భుజాలు సమాంతరం మరియు సమానమైన అది సమాంతర చతుర్భుజము.
- (ఉన్మఖీకరణం) ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణములు సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి మరియు దాని విపర్యయం.
- (ఉన్మఖీకరణం) ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపిన రేఖా ఖండము మూడవ భుజానికి సమాంతరం మరియు దాని విపర్యయానికి ఉన్మఖీకరణం.

(v) వైశాల్యాలు

- వైశాల్యభావన, సమతల ప్రాంత వైశాల్యము పునర్విమర్శ.
- దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనుట.
- ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య నున్న పటాలు.
- (నిరూపణ) ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యనున్న సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానం.
- (ఉన్మఖీకరణం) ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు మధ్యనున్న త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానం మరియు దాని విపర్యయం.

(vi) వృత్తాలు

- ఉదాహరణల ద్వారా వృత్తభావనలకు సంబంధింత నిర్వచనం, వ్యాసార్థము, వృత్తపరిధి, వ్యాసము, జ్యా, చాపము చేయుకోణం.
- (నిరూపణ) ఒక వృత్తములో సమాన పొడవుగల జ్యాలు వృత్తకేంద్రం వద్ద చేయు కోణాలు సమానం మరియు దాని విపర్యయం యొక్క ఉన్మఖీకరణం.
- (ఉన్మఖీకరణం) ఒక వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యాకు గీసిన లంబము దానిని సమద్విఖండన చేస్తుంది. విపర్యయంగా వృత్తకేంద్రము గుండా పోతూ ఒక జ్యాను సమద్విఖండన చేసే రేఖ ఆ జ్యాకు లంబంగా ఉంటుంది.

	• (ఉన్ముఖీకరణం) ఇచ్చిన మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువుల గుండా పోయేటట్లు ఒకే ఒక వృత్తాన్ని గీయగలము. • (ఉన్ముఖీకరణం) ఒక వృత్తములో (లేదా సర్వసమాన వృత్తాలలో) సమాన జ్యాలు వృత్త కేంద్రము (ల) నుండి సమాన దూరములో ఉంటాయి మరియు విపర్యయం. • (ఉన్ముఖీకరణం) ఒక చాపము వృత్తకేంద్రము వద్ద చేయుకోణం, వృత్తపరిధిపై ఏదైనా బిందువు వద్ద చేయు కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది. • (ఉన్ముఖీకరణం) ఒకే వృత్త ఖండంలోని కోణాలు సమానం. • (ఉన్ముఖీకరణం) ఏవైనా రెండు బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండానికి ఒకే వైపునున్న మరొక రెండు బిందువుల వద్ద సమాన కోణాలు చేసిన ఆ నాలుగు బిందువులు చక్రీయాలు. • (ఉన్ముఖీకరణం) ఒక చక్రీయ చతుర్భుజంలో ప్రతీ జత అభిముఖ కోణాలు సంపూరకాలు మరియు దాని విపర్యయం.
	(vii) జ్యామితీయ నిర్మాణాలు • భూమి, రెండు భుజముల మొత్తము లేదా భేదము మరియు భూకోణములు ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట. • చుట్టుకొలత మరియు భూకోణములు ఇచ్చిన త్రిభుజమును నిర్మించుట. • దత్త జ్యా మరియు దత్త కోణములను కలిగివుండే వృత్త ఖండమును నిర్మించుట.
క్షేత్రగణితం (15 గంటలు) **(i) ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు**	**(i) ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు** • దీర్ఘఘనము, సమఘనముల ఉపరితల వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణముల పునర్విమర్శ. • స్థూపము, శంఖువు, గోళము, అర్ధగోళముల ఉపరితల వైశాల్యములు. • స్థూపము, శంఖువు, గోళము (అర్ధగోళములతోసహా) మరియు క్రమ వృత్తాకార స్థూపము మరియు శంఖువుల ఘనపరిమాణము.
సాంఖ్యక శాస్త్రం మరియు సంభావ్యత (15 గంటలు) (i) సాంఖ్యక శాస్త్రం (ii) సంభావ్యత	**(i) సాంఖ్యక శాస్త్రం** • అవర్గీకృత మరియు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనాల పునర్విమర్శ. • అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనాల సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకము (భారత్వ అంశాలు)
	(ii) సంభావ్యత • ప్రయోగాల ద్వారా లభించిన దత్తాంశానికి సంభావ్యతానుభూతి. • నాణెములను ఎగురవేయుట, పాచికలను విసురుట ద్వారా ఘటన భావం.

	• అనేకసార్లు విసురుట ద్వారా 1 నుంచి 6 వరకు సంభవించిన ఘటనలను లెక్కించటం మరియు పట్టికలు తయారుచేయుట. • యాదృచ్ఛిక భావంను నాణెంను ఎగురవేయుట, పాచికను విసురటతో పోల్చుట. • నాణెం ఎగురవేయుట, పాచికలు విసురుట వంటి ప్రయోగాల ద్వారా సంభావ్యత భావన సాధారణీకరించుట మరియు సంగ్రహపరుచుట. • నాణెం మరియు పాచికల ద్వారా సంభవించిన ఘటనల పౌనఃపున్యాలను దృశ్యరూపంలో వ్యక్తపరచుట. ఒకే రకమయిన పాచికలు మరియు నాణేలను అధిక సంఖ్యలో విసిరి ఫలితాలను ప్రాథమిక ఘటనల కోసం మదింపు చేయటం. • పెద్ద సంఖ్యలో పునరావృత ఘటనలను మదింపుచేసి నాణెం యొక్క దత్తాంశమును, పాచికలను విసురుటతోనూ యాదృచ్ఛికభావనను పోల్చటం.
అనుబంధం: గణిత నిరూపణలు (5 గంటలు)	**(i) గణితములో నిరూపణలు** • గణిత ప్రవచనాలు వాటిని సరిచూసే విధానము. • గణితములో తర్కము నిగమన ఆలోచనా విధానములు. • సిద్ధాంతములు, ప్రతిపాదనలు మరియు స్వీకృతాలు. • గణితములో నిరూపణ విధానం, నిరూపణలో సోపానాలు

విద్యా ప్రమాణాలు

విద్యార్థులు ఒక తరగతిలో ఏమి చేయగలగాలి, ఏం తెలిసి యుండాలో స్పష్టంగా వివరించే ప్రవచనాలను ఆ తరగతి యొక్క 'విద్యాప్రమాణాలు' అంటాము. ఈ విద్యా ప్రమాణాలను కింది విభాగాలుగా వర్గీకరించడమైనది.

గణితంలోని వివిధ పాఠ్యాంశాలు (Content) ద్వారా కింద సూచించిన విద్యాప్రమాణాలు సాధించాలి.

1. సమస్యా సాధన

గణిత భావనలు, పద్ధతులను ఉపయోగించడం ద్వారా గణిత సమస్యలను సాధించడం.

(a) సమస్యలలో రకాలు

పజిల్స్, పదసమస్యలు, పటసమస్యలు, దత్తాంశ అవగాహన – విశ్లేషణ – పట్టికలు – గ్రాఫ్, పద్ధతి ప్రకారం చేయు సమస్యలు మొదలగు రకరకాలుగా గణిత సమస్యలుంటాయి.

(b) సమస్యా సాధన – సోపానాలు

- సమస్యలను చదవడం.
- దత్తాంశంలోని సమాచారం మొత్తాన్ని విడిభాగాలుగా గుర్తించడం.
- అనుబంధ విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్య విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్యలో ఇమిడియున్న గణిత భావనలను అవగాహన చేసుకోవడం.
- లెక్కచేయు పద్ధతి విధానాన్ని ఎంపిక చేయడం.
- ఎంపిక చేసిన పద్ధతి ప్రకారం సమస్యను సాధించడం.
- జ్యామితి ఫలితాలను సిద్ధాంతాల నుపయోగించి సరిచూచుట, సిద్ధాంతాలకు అనుగుణంగా సమస్యల సాధన.

(c) సంక్లిష్ట

సమస్య యొక్క సంక్లిష్టత అనునది కింది అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

- అనుసంధానం చేయడం (ఇది అనుసంధానం విభాగంలో నిర్వచించనైనది)
- సమస్యలో ఉన్న సోపానాల సంఖ్య.
- సమస్యలో ఉన్న ప్రక్రియల సంఖ్య.
- సమస్యా సాధనకు ఇవ్వబడిన సందర్భ సమాచారం ఏ మేరకు ఉన్నది?
- సమస్య సాధించే పద్ధతి యొక్క సహజత్వం.

2. కారణాలు చెప్పడం – నిరూపణ చేయడం

- దశల వారీగా ఉన్న సోపానాలకు కారణాలు వివరించడం.
- గణిత సాధారణీకరణలను మరియు ప్రకల్పనలను అర్థం చేసుకోవడం మరియు చేయగలగడం.

- పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడం మరియు సరిచూడడం.
- తార్కిక చర్యలను పరీక్షించడం.
- సమస్యా నిరూపణలోని క్రమాన్ని అర్థం చేసుకోవడం.
- ఆగమన, నిగమన పద్ధతులలో తార్కికతను వినియోగించడం.
- గణిత ప్రకల్పనలను పరీక్షించడం.

3. వ్యక్తపరచడం

- గణిత భావనలను, వాక్యాలను చదవగలగడం - రాయగలగడం.

  ఉదా : $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, త్రిభుజములోని మూడు కోణముల మొత్తం $= 180^0$
- గణిత వ్యక్తీకరణలను రూపొందించడం.
- గణితపరమైన ఆలోచనలను తన స్వంత మాటల్లో వివరించడం. ఉదా : చతురస్రం అనునది నాలుగు సమాన భుజాలు మరియు నాలుగు సమాన కోనాలు గల సంవృత పటం.
- పద్ధతిని వివరించడం. ఉదా : రెండంకెల సంఖ్యలను కూడడంలో మొదట ఒకట్లస్థానం అంకెలను కూడి తరువాత పదుల స్థానంలోని అంకెలను కూడడం / స్థానమార్పిడిని గుర్తుకు తెచ్చుకోగలగడం
- గణిత తార్కికతను వివరించడం.

4. అనుసంధానం

- అనుబంధ గణిత పాఠ్యవిభాగాలను - భావనలను అనుసంధానం చేయడం. ఉదా : గుణకారానికి, కూడికకు; మొత్తంలో భాగానికి - నిష్పత్తికి - భాగహారానికి; అమరికలకు - సౌష్ఠవమునకు; కొలతలు మరియు తలము/అంతరాళం.
- దైనందిన జీవితానికి గణితానికి అనుసంధానం చేయడం.
- వేర్వేరు సబ్జక్టులతో గణితాన్ని అనుసంధానం చేయడం.
- గణితంలోనే వేర్వేరు పాఠ్యాంశాలకు సంబంధించిన భావాలను అనుసంధానం చేయడం, ఉదా : దత్తాంశ సేకరణ మరియు అంకగణితం; అంకగణితం మరియు ప్రదేశం.
- భావనలను, బహుళ పద్ధతులకు అనుసంధానం చేయడం.

5. దృశ్యీకరణ మరియు ప్రాతినిధ్య పరచడం

- పట్టికలోని సమాచారం, సంఖ్యారేఖ, పటచిత్రం, దిమ్మ చిత్రం 2-D పటాలు, 3-D పటాలు మరియు పటాలను చదవడం.
- పట్టికలను రూపొందించడం, సంఖ్యారేఖపై చూపడం, పటచిత్రములు, దిమ్మ చిత్రములు, పటాలను గీయడం.
- గణిత పటాలు, గుర్తులు, అమరికలు.