

FREE

# MATHEMATICS ریاضی

Class X

جماعت دہم

ریاضی MATHEMATICS

جماعت دہم CLASS X

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$ax + by + c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

*Ardha-jya*

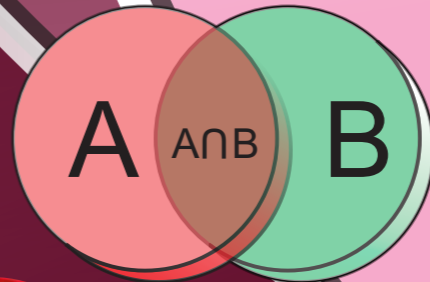
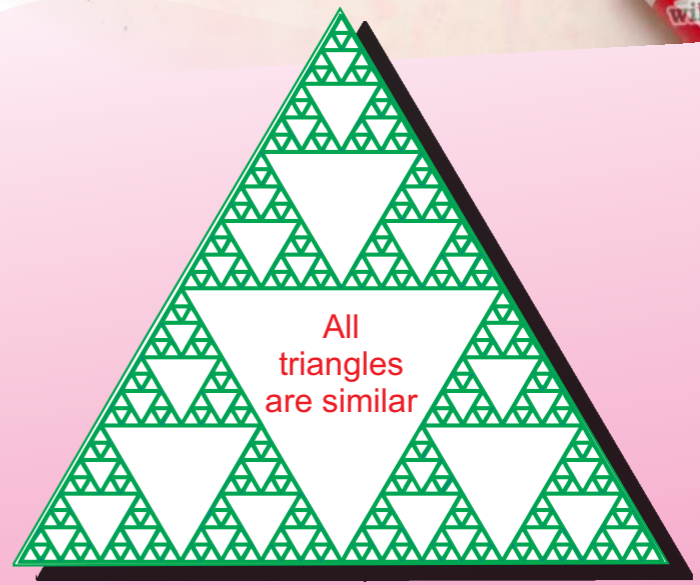
$\sin \theta$

GOVERNMENT OF TELANGANA

ناشر  
حکومت تلنگانہ، حیدرآباد

$$\log a^x = y$$

$$a^y = x$$



یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔



**SIGNS AND SYMBOLS OF SCHOOL MATHEMATICS**

Sign/symbol	Read as	Mathematical meaning
$\pm$	plus or minus	Either positive or negative
$\neq$	not equal to	unequal
$\therefore$	therefore	logical flow of a statement
$\infty$	infinite	uncountable, not defined
$\sim$	is similar to	same in geometrical shape
$\cong$	is congruent to	same shape and same size
$\equiv$	is identically equal to	equivalent statements
$\forall$	for all	universal quantifier
$\sqrt{\quad}$	square root of	square root of a number
$\sqrt[3]{\quad}$	cube root of	cube root of a number
$\cup$	cup of	union of sets
$\cap$	cap of	intersection of sets
$\phi$	phi	symbol for empty set
$\%$	percent of	per hundred
$^{\circ}$	degree	angle measure
$\Delta$	delta / triangle	symmetric difference in sets / symbol of triangle
$\in$	belongs to	an element belong to a particular set
$\leftrightarrow$	equivalent to	one to one correspondence
$\alpha, \beta, \gamma$	alfa, beta, gamma	greek letters to represent coefficients
$\mu$	mue	universal set symbol
$\pi$	pi	irrational number equal to 3.14159.....app=22/7
$\Sigma$	sigma	sum of scores
$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$	sin theta, cos theta, tan theta	trigonometric ratios
$\bar{x}$	x bar	arithmetic mean
$\log_x x$	log x to the base a	logarithmic function
$(a, b)$	point a, b	ordered pair a, b
$ x $	mod x	absolute value of a real number
$P(x)$	p of x	a polynomial function in x
$P(E)$	p of e	probability of an event
$\therefore$	Since	reasoning at a stage
$\₹$	rupee	symbol of Indian rupee
$\parallel$	is parallel to	parallel property of lines
$\perp$	is perpendicular to	making 90 degree with a line
$\{ \}$	flower bracket	used to set notation
$PQ$	arc PQ	arc of acircle
$a^2$	a square	square of a number
$\angle$	angle	symbol of angle
$\theta$	theta	measurement of an angle

**بچو! یہ ہدایتیں آپ کے لیے ہیں۔**

- ☆ درسی کتاب میں دیئے گئے ہر ایک تصور سے آگہی کے لیے Situations یا مثالیں یا سوالات یا کھیل وغیرہ دیئے گئے ہیں۔ ان سے متعلق تصویریں / خاکے بھی دیئے گئے ہیں۔ Situation کو خاکہ / تصویر سے جوڑتے ہوئے تصور کو جاننے کی کوشش کریں۔
- ☆ تصورات کی تفہیم کے لیے مشغلوں میں حصہ لینے کے دوران پیدا ہونے والے لشوک و شبہات کا ازالہ آپ اپنے معلم سے فوراً کر لیں۔
- ☆ تصورات کا فہم حاصل ہوا ہے یا نہیں جاننے کے لیے آپ ”یہ کیجیے“ کے تحت دیئے گئے سوالات خود حل کریں۔ اگر آپ حل نہ کر پائیں تو نمونہ کے طور پر دیا گیا مسئلہ حل کرتے ہوئے آگہی حاصل کریں۔ یا اپنے معلم سے معلوم کریں۔
- ☆ ”یہ کیجیے“ اور ”کوشش کیجیے“ کے تحت دیئے گئے سوالات معلم کی نگرانی میں اسکول ہی میں حل کریں۔
- ☆ سوچئے۔ بحث کیجئے“ کے تحت دیئے گئے مشغلے تصورات کو مزید کھرائی اور وسیع طور پر سمجھنے میں آپ کے لیے معاون ہوں گے۔ لہذا ان سے متعلق اپنے دوستوں سے مباحثہ کرتے ہوئے سوالات کرتے ہوئے آگہی حاصل کریں۔
- ☆ ”کوشش کیجیے“ عنوان کے تحت دیئے گئے سوالات آپ کی سوچ کو ابھارنے میں مدد و معاون ثابت ہوں گے۔ یعنی یہ آپ میں غور و فکر کو فروغ دینے کی صلاحیت کو فروغ دیں گے۔ یہ مسائل آپ خود سے حل نہ کر پائیں تو اپنے ساتھیوں کے ساتھ گروہی طور پر حل کرنے کی کوشش کریں، یا معلم سے گفتگو کرتے ہوئے کس طرح حل کیا جائے معلوم کریں۔
- ☆ ہر باب کے آخر میں ایک اختیاری مشق دی گئی ہے۔ اس مشق میں دیئے گئے سوالات آپ میں غور و فکر کو فروغ دیتے ہیں۔ ان سوالات کو آپ ہر صورت میں حل کریں۔ امتحانات میں یہ سوالات نہیں پوچھے جائیں گے اس کے باوجود قومی سطح پر منعقد ہونے والے امتحانات میں آپ کے مسابقتی جذبہ کو فروغ دیں گے۔
- ☆ ”درسی کتاب میں جہاں کہیں بھی منصوبہ کام دیا گیا ہے۔ اسکو گروہی طور پر حل کریں۔ لیکن اس سے متعلق رپورٹ آپ کو انفرادی طور پر لکھنا ہوگا۔
- ☆ تصورات کی تفہیم کے لیے منعقد کیے جانے والے مشغلوں اور مشقوں کے تحت جو سوالات ہیں۔ ان سے متعلق ردعمل اگر درسی کتاب میں لکھنا ہو تو وہیں پر لکھیں۔
- ☆ جس دن جو سوالات حل کرنا ہے ان کی تکمیل اسی روز کر لیں اور اپنے معلم سے تصحیح کروالیں۔
- ☆ آپ سیکھے ہوئے تصورات سے متعلق مسائل مزید چند حاصل کر کے یا خود سے تیار کر کے اپنے معلم یا ساتھیوں کو دکھائیں سب مل کر ان کو حل کریں۔
- ☆ ریاضی کے تصورات سے تعلق رکھنے والے کھیل، معے اور دلچسپی معلومات آپ کی درسی کتاب میں دیئے گئے ہیں۔ ان کے بارے میں آگہی حاصل کر کے ان جیسے مزید چند مسائل حاصل کر کے ان کو حل کریں۔
- ☆ درسی کتاب کے ذریعہ سیکھے ہوئے تصورات کو کمرہ جماعت محدود نہ رکھیں بلکہ ان کا استعمال اپنی روزمرہ زندگی میں موقع و محل کے اعتبار سے کریں۔
- ☆ ریاضی میں خاص طور پر مسئلہ کا حل و جوابات بیان کرنا، نتیجہ اخذ کرنا، ریاضی کی زبان میں اظہار ریاضی کے تصورات کا فہم حاصل کرتے ہوئے مختلف حالات اور روزمرہ زندگی سے جوڑتے ہوئے حل کرنا وغیرہ جیسی صلاحیتوں کے حاصل ہونا چاہئے۔
- ☆ ریاضی تصورات کو مزید بہتر انداز میں سمجھنے کے لیے، مسئلہ کا حل اور حل کرنے کے مختلف طریقوں کو جاننے کے لیے آپ حوالا جاتی کتب کا مطالعہ کریں اور انٹرنٹ کا استعمال ماہرین مضمون / اساتذہ / اپنے ساتھیوں سے مباحثہ کریں۔
- ☆ مذکورہ بالا ریاضی کے تصورات کے حصول کے لیے تصورات کی تفہیم کے تحت اگر آپ کو دشواریاں پیش آتی ہوں تو بروقت معلم کی مدد حاصل کریں۔
- ☆ ضمیمہ میں دیئے گئے ”ریاضی ماڈلنگ“ باب میں ریاضی کے تصورات کو استعمال کرتے ہوئے تجارت، زراعت، اسٹاک مارکٹ وغیرہ سے متعلق مسائل کی ترتیب اور حصول میں معاون ہونگے۔ اسی طرح ریاضی کے موضوعات و دیگر موضوعات سے کس طرح رشتہ قائم کرتے ہیں۔ آپ جانیں گے لہذا اس باب کا مطالعہ ضرور کریں۔
- ☆ درسی کتاب کے آخر میں نصاب، تعلیمی قدریں دی گئی ہیں۔ یہ اس بات کو ظاہر کریں گی کہ آپ نے کیا سیکھا ہے اور آپ کو کیا سیکھنا ہے؟ آپ کون سی تعلیمی قدروں کے حصول میں جاننے کے لیے بھی یہ آپ کی مدد کریں گی۔

**حکومت تلنگانہ**  
**محکمہ ترقی نسوان و بہبود اطفال - چائلڈ لائن فاؤنڈیشن**

جب اسکول یا اسکول سے باہر بدسلوکی ہو

خطروں اور مشکلوں سے بچوں کے تحفظ کے لیے



**CHILD LINE 1098**  
NIGHT & DAY  
24 گھنٹہ قومی ہلپ لائن

جب بچوں کو اسکول سے روک کر کام پر لگایا جائے

جب افراد خاندان یا رشتہ دار بدتمیزی سے پیش آئیں

مفت خدمات کے لیے (دس.....نو.....آٹھ) 1098 پڑائیل کریں

## ریاضی جماعت دہم

Mathematics - Class X

کمیٹی برائے فروغ و اشاعت درسی کتاب

سری جی۔ گوپال ریڈی : چیف پروڈکشن آفیسر  
ڈائریکٹر ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق و تربیت، حیدرآباد

سری بی۔ سدھاکر : ایگزیکٹو چیف آرگنائزر  
ڈائریکٹر گورنمنٹ ٹکسٹ بک پریس، حیدرآباد۔

ڈاکٹر این۔ اوپیندر ریڈی : آرگنائزر انچارج  
پروفیسر صدر شعبہ نصاب و درسی کتب،  
ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق و تربیت، حیدرآباد

چیرپرسن برائے ریاضی پوزیشن پیپرنصاب و فروغ درسی کتب

پروفیسر وی۔ کتن

شعبہ ریاضی و شماریات، حیدرآباد سنٹرل یونیورسٹی، حیدرآباد۔

چیف ڈوائزر

ڈاکٹر ایچ۔ کے۔ دیوان  
تعلیمی مشیر، ودیا بھون سوسائٹی،  
اودے پور، راجھستان۔



سری چٹکارامیا  
ممتاز اسکالر برائے ریاضی،  
تلنگانہ، حیدرآباد۔

تعلیم سے آگے بڑھیں  
عاجزی و انکساری کا اظہار کریں

ناشر

قانون کا احترام کریں  
اپنے حقوق حاصل کریں

حکومت تلنگانہ، حیدرآباد۔

(i) یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے 2019-20

© Government of Telangana, Hyderabad.

*First Published 2014*

*New Impressions 2015, 2016, 2017,2018,2019*

*All rights reserved.*

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Director of School Education, Hyderabad, Telangana.

**This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho  
Title Page 200 G.S.M. White Art Card**

**یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2019-20**

---

*Printed in India*

at the Telangana Govt. Text Book Press,  
Mint Compound, Hyderabad,  
Telangana

( ii ) یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے 2019-20



## کمیٹی برائے تشکیل درسی کتاب

### مصنفین

- سری ٹی ویٹکلار مناکما صدر مدرس، ضلع پریشڈ ہائی اسکول، ملو موڈی، ضلع نیلور۔  
 سری سوما پرساد بوبٹی جی ٹی، APTWR، چندر شیکھر راپورم، ضلع نیلور۔  
 سری جی۔ اے۔ اینتاریڈی، موظف صدر مدرس، ضلع رنگار یڈی  
 ڈاکٹر پونڈلا رمیش، لکچرر، گورنمنٹ IASE، ضلع نیلور۔  
 سری کے۔ سری دھراجا ریڈو، اے۔ اے۔ ZPHS، رنگائی پٹی، ضلع میدک۔  
 سری کانڈلارامیا، اے۔ اے۔ کام دیو پیٹ، ضلع ورنگل۔  
 سری جی۔ وی۔ بی۔ ایس۔ این راجو، اے۔ اے۔ ایم پی ایل ہائی اسکول، کاسپا، ضلع وجیا نگر۔  
 سری پاڈالاسریش کمار، اے۔ اے۔ گورنمنٹ ہائی اسکول، وجیا نگر کالونی، حیدرآباد۔  
 سری پی۔ ڈی۔ ایل۔ گنتی شرما، اے۔ اے۔ گورنمنٹ ہائی اسکول، زمستان پور، حیدرآباد۔  
 سری سردار دھرمیندر سنگھ، اے۔ اے۔ ZPHS، دانور (بی)، ضلع عادل آباد۔  
 سری ناگولاروی، اے۔ اے۔ ZPHS، لکیشورم، ضلع عادل آباد۔  
 سری کاکولادرم راجیو ریڈی، کوآرڈینیٹر، اے۔ اے۔ ای آر ٹی، اے۔ پی، حیدرآباد۔

### چیف ایڈیٹر

ڈاکٹر انج۔ کے۔ دیوان

تعلیمی مشیر، ودیا بھون سوسائٹی، اودے پور، راجھستان۔

### ایڈیٹرز

- پروفیسر وی۔ شیوارام پرساد  
 موظف شعبہ ریاضی، عثمانیہ یونیورسٹی، حیدرآباد۔  
 سری اے۔ پدمناہم (موظف)  
 صدر شعبہ ریاضی، مہارنس کالج، پراپورم، ضلع ایٹ گوداوری۔  
 پروفیسر این۔ پٹا بھی راما چاریلو  
 موظف نیشنل انسٹیٹیوٹ آف ٹکنالوجی، ورنگل۔  
 ڈاکٹر جی۔ ایس۔ این مورنی  
 موظف ریڈران میٹھا میٹکس، راجا آرا، اے۔ اے۔ آر کے رنگارا، کالج، بولینی، وجیا نگر۔

### ایڈیٹرز (اردو)

- سید حسن الدین  
 موظف ڈپٹی انسپکٹر آف اسکول، حیدرآباد۔  
 سید واجد ہاشمی  
 صدر مدرس، گورنمنٹ ہائی اسکول، بیتارام پیٹ، حیدرآباد۔  
 میر سجاد علی  
 موظف پرنسپل، اسلامیہ بوائز ہائی اسکول، سنڈر آباد۔

### کوآرڈینیٹر (اردو)

محمد افتخار الدین

کوآرڈینیٹر (اردو) ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق و تربیت، تلنگانہ، حیدرآباد۔

### مترجمین

- ابوظہر محمد عبدالشکور  
 اسکول اسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، اولڈ ملک پیٹ، حیدرآباد۔  
 محمد خواجہ مجتہد الدین  
 اسکول اسٹنٹ، ضلع پریشڈ ہائی اسکول، چنگاؤن، ورنگل۔  
 شیخ حبیب الرحمن  
 اسکول اسٹنٹ، ڈی ایٹ ایل ایم ڈی کالونی، کریم نگر۔  
 محمد ایوب احمد  
 اسکول اسٹنٹ، ضلع پریشڈ ہائی اسکول، آتما کوڑ، محبوب نگر۔  
 محمد محمود علی  
 اسکول اسٹنٹ، ضلع پریشڈ ہائی اسکول، 2'B، گڑھی، ظہیر آباد، سنگار یڈی  
 سید عمران  
 اسکول اسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، ڈی گتھ، محبوب نگر۔  
 ابو طاہر محمد عبدالشکور  
 اسکول اسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، اولڈ ملک پیٹ، حیدرآباد۔  
 خواجہ افتخار حسن  
 اسکول اسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، ڈی گتھ، حیدرآباد۔  
 محمد تقی الدین  
 اسکول اسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، معظم شاہی، حیدرآباد۔  
 احمد علی طیب  
 اسکول اسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، معظم شاہی، حیدرآباد۔  
 محمد عبدالروف  
 اسکول اسٹنٹ، ضلع پریشڈ ہائی اسکول، گاندھی پارک، گوداوری کھن، کریم نگر۔

### کمپوزنگ اینڈ ڈیزائن لے آؤٹ

- شیخ حاجی حسین، امپرنٹ کمپیوٹنگ، بالانگر، میڈ چل، حیدرآباد۔  
 نبی محمد مصطفیٰ، حبیب کمپیوٹرز، بھولکپور، مشیر آباد، حیدرآباد۔

( iii ) یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے 2019-20

## پیش لفظ

تعلیم، انسان کی بصیرت و آگہی اور اسے باختیار بنانے کا ایک طویل سلسلہ ہے۔ تعلیم کے لامحدود فوائد کے پیش نظر تمام ہی ترقی پزیر سماجوں نے ابتدائی تعلیم کو اقطاع عالم کے ہر گوشہ تک عام کر دینے کی ٹھان رکھی ہے اور اس عزم صمیم کا اظہار کیا ہے کہ سبھی کے لیے معیاری تعلیم یقینی بنائی جائے۔ عالمی سطح پر ثانوی تعلیم کا فروغ بھی اسی پالیسی پر عمل آواری کا ہی ایک حصہ ہے۔

پرائمری سطح تک روزمرہ زندگی کے لیے کارآمد حساب کی تدریس، ثانوی مرحلہ میں عبوری حیثیت سے ایک ضروری مضمون کی حیثیت اختیار کر لیتی ہے۔ ثانوی تعلیم کا مرحلہ ہی وہ مرحلہ ہے جہاں مفروضاتی اور بروکھوت کے ذریعہ منطقی انجام تک پہنچایا جاتا ہے اور ریاضیاتی مسئلے متعارف کئے جاتے ہیں۔ فی ثقیں اک خصوصی مضمون ہونے کے علاوہ ریاضی، تجزیاتی و تقابلی خصوصیت اور باہمی ہم رنگی کے سبب دیگر مضامین سے بھی مربوط ہوتا ہے۔ یہ امر اہمیت کا حامل ہے کہ ثانوی سطح پر طلباء میں ریاضی کے استعمالات و اطلاقات سے متعلق شعور اور اعتماد پیدا ہو، تاکہ اس مضمون سے متعلق اپنے تجربات کو مجتمع کرتے ہوئے اعلیٰ سطح پر اس کے مطالعہ کے لیے ذوق پیدا کر سکیں۔ اعلیٰ تعلیم کا یہ ذوق یقیناً انہیں ایک بہتر شہری بننے میں مددگار ثابت ہوگا۔

میں امید کرتا ہوں کہ ہماری ریاست میں بچے اس مضمون کو سیکھنے کا اشتیاق پیدا کرتے ہوئے ریاضی کو اپنی زندگی کا اک تجربہ بنائیں گے۔ اس کتاب کو وسیلہ بناتے ہوئے وہ با معنی مسائل کی تدبیر کریں اور اس کے بنیادی اصولوں کا فہم حاصل کریں گے۔

اساتذہ سے امید کی جاتی ہے کہ وہ نشانات کو مرکزیت دینے کے بجائے مضمون کے فہم پر ضروری توجہ دیں گے تاکہ نصابی اور نفسیاتی پہلوؤں کو جائز لیا جاسکے۔ درس و تدریس میں نصابی امور کی موثر منتقلی کے لیے ضروری ہے کہ کمرہ جماعت کے تقاضوں کو پورا کریں۔ اساتذہ کو یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ طلباء کی معلومات کو اک منطقی انجام تک پہنچانے کے مقصد سے طرز زندگی کے اختلافات اور اختلاف رائے کے کلاس روم کچھ میں طلباء کے اندر مثبت رجحانات پیدا کرنا ہی اصل تدریسی تقاضہ ہے۔ APSCF - 2011 میں پیش کردہ ریاضی کی تدریس کا ویژن، ریاضی کی تدریس سے متعلق اس کی دستاویزات میں واضح کر دیا گیا ہے۔ ان دستاویزات میں یہ امر بھی واضح کیا گیا ہے کہ ہماری ریاست میں ریاضی کی تدریس کے معیارات کیا ہونے چاہیں۔ اس کتاب میں انہی سب احساسات کو اک ٹھوس جہت دینے کی کوشش کی گئی ہے۔

اسٹیٹ کونسل فار ایجوکیشن ریسرچ اینڈ ٹریننگ، آندھرا پردیش، ٹکسٹ بک ڈیولپمنٹ کمیٹی اور ریاست کے مختلف مقامات سے تعلق رکھنے والے اساتذہ کی کوششوں کی ستائش کرتا ہے جنہوں نے اس کتاب کی تیاری میں اپنا حصہ ادا کیا ہے۔ میں اس سلسلہ میں ڈسٹرکٹ ایجوکیشنل آفیسر، منڈل ایجوکیشن آفیسر اور ہیڈ ماسٹرس کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ میں ان اداروں اور آرگنائزیشنز کا مشکور ہوں جنہوں نے اس مقصد کے لیے اپنا قیمتی وقت دیا۔ دسویں جماعت کی ریاضی کی اس کتاب کی تکمیل میں تعاون و اشتراک پر میں عہدیداران دفتر کمشنر و ڈائریکٹر ثانوی تعلیم کا بھی سپاگزار ہوں۔ کام کے معیار کو بہتر بنانے کی مسلسل سعی میں، میں آپ تمام کی تجاویز کا خیر مقدم کرونگا۔

ڈائریکٹر

ایس سی ای آر ٹی، اے۔ پی۔

حیدرآباد۔

حیدرآباد

مورخہ 17 / اکتوبر 2013ء



## دیباچہ

ہم امید کرتے ہیں کہ حساب کے سیکھنے کا عمل دسویں جماعت کے تمام طلباء کے لیے بھی جاری رہے گا۔ تاہم بعض بچے ایسے ضرور ہوں گے جن کے لئے مدرسہ کا یہ آخری سال ہوگا۔ لہذا یہ امر اہمیت رکھتا ہے کہ بچے اس اعتماد کے ساتھ ثانوی سطح کی تعلیم ختم کریں کہ اپنے تجربات کو جمع کرتے ہوئے تعلیم کے حصول میں اپنے ذوق کو قائم رکھنے کی غرض سے حساب کے مضمون کو بروئے کار لائیں۔

ثانوی سطح تک یہ مضمون سب کے لیے لازمی ہے۔ اور اسی لیے اسکولی تعلیم کے لیے بھی اسے ضروری حصہ کے طور پر شامل کیا گیا ہے لیکن دور حاضر میں حساب سیکھنے سے بچوں اور بڑوں میں نہ ہی وہ اطمینان پیدا ہوتا ہے اور نہ ہی اعتماد جو کہ مطلوب ہے۔ یہ خیال کیا جاتا ہے کہ حساب بہت ہی مشکل مضمون ہے اور محض بہت کم لوگ ہی اسے سیکھ سکتے ہیں۔ صرف بچے اور اساتذہ ہی نہیں بلکہ سارا سماج ہی اس سے خائف نظر آتا ہے۔ ایسے حالات میں جبکہ حساب ہماری زندگی میں زیادہ اہم ہوتا جا رہا ہے اور اعلیٰ تعلیم کے لیے ایک جزو لاینفک ہے، اس سے یہ خوف سی کیفیت ختم کرنا ضروری ہے۔ اسکول انتظامیہ کی یہ کوشش ہونی چاہیے کہ بچوں میں اسے سیکھنے اور اسے رو بہ عمل لانے کی صلاحیت اور اہلیت پیدا کرے کہ جماعت میں ہی وہ ریاضی سے خائف نہ ہوں بلکہ دنیا کا اپنے طور پر فہم کرنے کی خاطر اس کے نظریات اور اسکے منشاء کو وسیع تر انداز میں بروئے کار لائیں۔

دور حاضر میں حساب کی تدریس کو جن چیزوں کا سامنا ہے ان میں سے ایک یہ ہے کہ اس مضمون کی توجیح کس ڈھنگ سے کی گئی ہے۔ اس کا تصور اعداد، پیچیدہ عمل، ایک دوسرے سے مربوط محسوبات، توضیحات، ان کے پیچیدہ حل کو مختصر طریقوں تک ہی محدود کر دیا گیا ہے۔ حساب کی تدریس میں شعوری یا لاشعوری طور پر یہ غلط فہمی پیدا کر دی گئی ہے کہ کسی مسئلہ کو حل کرنے کا ایک ہی طریقہ ہو سکتا ہے اور یہ کہ اس مضمون میں کسی مسئلہ کے حل کے متعدد طریقے ممکن نہیں۔

اس کتاب کے ذریعہ ہم سوالات کو مختلف انداز میں حل کرنے کی ضرورت پر زور دینا چاہتے ہیں یہ واضح کرنا چاہتے ہیں کہ حساب وہ مضمون ہے جس میں امکانات تلاش کئے جاتے ہیں، نظریات کی ہم آہنگی کھوجی جاتی ہے اور منطقی انجام کی کڑیاں جوڑی جاتی ہیں۔ ہم اساتذہ سے یہ توقع رکھتے ہیں کہ وہ بچوں میں کتاب کے مطالعہ کا ماحول پیدا کرتے ہوئے مختلف تصورات کا اپنے طور پر فہم پیدا کرنے اور ان کی توجیحات مدون کرنے میں وہ طلباء مددگار ثابت ہوں گے۔ اساتذہ سے یہ امید بھی وابستہ کی جاتی ہے کہ وہ بچوں میں کسی مسئلہ کے مختلف النوع حل کھوجے، آگہی پیدا کریں۔ یہ کتاب اس انداز میں پر تیار کی گئی ہے کہ بچوں میں گروپس کی شکل میں حساب سیکھنے کا رجحان پیدا ہو اور وہ حسابی مسلوں کو اجتماعی طور پر حل کرنے کی کوشش کریں۔ ہم چاہتے ہیں کہ مضمون سے متعلق اپنے خیالات کا تبادلہ کریں اور یہ کہ جو کچھ بھی انہوں نے سیکھا ہے اس کی بنیاد پر مسئلے مدون کریں۔ درس و تدریس سے وابستہ ہر فرد پر یہ فرض عائد ہوتا ہے کہ وہ اس امر کو پہچانے کہ حساب دیگر کی جانب سے تدوین کردہ مسائل کو حل کرنے یا ان کی جانب سے طریقوں اور ثبوتوں کو سیکھنے سے ہی عبارت نہیں ہے بلکہ مزید تحقیق اور ٹھوس شواہد کی فراہمی پر زور دیتا ہے۔ حساب کرنا اور سیکھنا وہ کام ہے جس میں ہر ایک فرد اپنی توجیحات واضح کرے اور خود اپنے قواعد ترتیب دے۔

یاد رہے کہ دسویں جماعت ثانوی تعلیم کا آخری سال ہوتا ہے اور مرحلہ تک پہنچتے پہنچتے طلباء سے امید کجیاتی ہے تعلیم کے تئیں اپنے نظریات کا ایک خاکہ بنا لیا ہوگا۔ یقیناً انہوں نے یہ بھی سیکھ لیا ہوگا کہ حساب ان حقائق پر مشتمل ہوتا ہے کہ جنہیں زندگی کے کسی بھی شعبہ میں رو بہ عمل لایا جاسکتا ہے تاہم یہ ضروری نہیں کہ روزمرہ زندگی سے حسابی نظریات اجاگر ہوں۔ بچوں سے یہ توقع کجیاتی ہے کہ ثبوت کی فراہمی کے نظریہ کی اہمیت کو جانیں اور محسوس کریں کہ مثال قائم کر دینا ہی ثبوت کی فراہمی کا متبادل نہیں ہو سکتا۔

حساب کے مقصد جیسا کہ ہم نے دیباچہ کے علاوہ کتاب کے مختلف مقامات پر اجاگر کرنے کی کوشش کی ہے، انسانی تجربات کو ریاضیاتی کھوج تک وسعت دینا ہے۔ اس کا یہی مطلب ہوگا کہ طلباء کمرہ جماعت میں سیکھے ہوئے نظریات کو اپنے ذاتی تجربات کے آئینے میں دیکھنے کی کوشش کریں گے۔ بہ الفاظ دیگر وہ ان نظریات کو بروئے کار لاتے ہوئے اپنے تجربات کو مربوط کریں گے۔ اس کے لیے ضرورت ہے کہ وہ اپنے اطراف و اکناف کے مشاہدات و حالات پر ریاضیاتی نقطہ نگاہ سے غور کریں اور انہیں اپنے نظریات کے اظہار اور نئی تاویلات کا موقع فراہم ہو سکے۔ واضح رہے کہ ہم نے ہمیشہ ہی سے زبان وانی اور ریاضی کے راست تعلق کی اہمیت اجاگر کی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ بچوں کو زبان کے موزوں استعمال کے ذریعہ اپنے خیالات کے اظہار کا بھرپور موقع فراہم کرنے کی کوشش کی جائے۔ خصوصاً کمرہ جماعت میں اس امر کا خاص خیال رکھا جائے۔ ہم نے اس کتاب میں زبان کو آسان بنانے کی کوشش کی ہے تاکہ ایک طالب علم مطلوبہ درسی تصورات کا کامل فہم کر سکے۔ ہم اساتذہ اور ان تمام سے جو جانچ کے امور کے ذمہ دار ہوں امید کرتے ہیں کہ وہ اس جذبہ کا احترام کریں گے۔ یہ کتاب وسیع تر مشاہدات سے ہی اپنی تکمیل کو پہنچتی ہے اور اس سلسلہ میں ہم ان تمام کے مشکور ہیں جنہوں نے کتاب کی تیاری میں تعاون و اشتراک کیا ہے۔ مصنفین نے کتاب کو موجودہ شکل دینے کے لیے مشقت اٹھائی ہے ہم ان سب کے سپاسگزار ہیں اور توقع کرتے ہیں تمام ہی استفادہ کنندگان اس سلسلہ میں اپنی تجاویز اور آراء سے نوازیں گے۔

نقذ

ٹکسٹ بک ڈیولپمنٹ کمیٹی



جماعت: دہم

ریاضی

صفحہ نمبر	نصاب کی تکمیل	پی ریڈ کی تعداد	باب	باب نمبر
1-27	جون	15	حقیقی اعداد	01
28-50	جون	08	سٹس	02
51-76	جولائی	08	کثیر رکنیاں	03
77-104	ستمبر	15	دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ	04
105-128	اکٹوبر	12	دو درجی مساواتیں	05
129-162	جنوری	11	تصاعد	06
163-194	نومبر	12	تحلیلی جیومیٹری	07
195-228	جولائی/راگست	18	مشابہہ مثلثات	08
229-248	نومبر	15	دائرے کے مماس اور خطوط قاطع	09
249-272	ڈسمبر	10	مساحت	10
273-297	اگست	15	علم مثلث (Trigonometry)	11
298-308	ستمبر	08	علم مثلث کا اطلاق	12
309-326	جنوری	10	قیاسیات	13
327-356	جولائی	15	شماریات	14
357-369	فروری	08	ریاضیاتی ماڈلنگ	ضمیمہ
370-388	فروری		اعادہ	
			جوابات	

## قومی ترانہ

- راہندر ناتھ ٹیگور

جن گن من ادھی نایک جیا ہے  
بھارت بھاگیہ ودھاتا  
پنجاب، سندھ، گجرات، مراٹھا، ڈراوڈ، اتکل، ونگا  
وندھیا، ہماچل، مینا، گنگا، اُچ چھل جل دھی ترنگا  
تواشہ نامے جاگے، تواشہ آشش ماگے  
گا ہے توجیا گاتھا  
جن گن منگل دایک جیا ہے  
بھارت بھاگیہ ودھاتا  
جیا ہے جیا ہے جیا ہے  
جیا جیا جیا جیا ہے

### عہد

ہندوستان میرا وطن ہے۔ مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور میں اس کے عظیم اور گونا گوں ورثے پر فخر کرتا ہوں/کرتی ہوں۔ میں ہمیشہ اس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کرتا رہوں گا/کرتی رہوں گی۔ اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزت کروں گا/کروں گی اور ہر ایک کے ساتھ خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا/کروں گی۔ میں جانوروں کے تئیں رحم دلی کا برتاؤ رکھوں گا/رکھوں گی۔ میں اپنے وطن اور ہم وطنوں کی خدمت کے لیے اپنے آپ کو وقف کرنے کا عہد کرتا ہوں/کرتی ہوں۔



باب  
1

## حقیقی اعداد

## Real Numbers

## 1.1 تمہید/تعارف

”خدا نے صحیح اعداد بنائے ہیں۔ مابقی تمام انسان کا کام ہے“

لیوپولڈ کرائنیکر

زندگی اعداد سے بھری پڑی ہے۔ اس لمحہ کا تصور کیجیے جب آپ تولد ہوئے تھے ممکن ہے آپ کے والدین آپ کی ولادت کا وقت آپ کا وزن آپ کا قدر درج کیا ہوگا۔ اور خاص کر آپ کے ہاتھ کی انگلیوں اور پیر کی انگلیوں کی گنتی کی ہوگی۔ اعداد ہماری زندگی کے ساتھ جڑے ہیں۔

دوسرے پس منظر کیا ہو سکتے ہیں جہاں آپ کو اعداد سے سابقہ پڑتا ہے۔

ہم اعداد کا استعمال عمر کے اظہار کے لیے، کمائی کے شمار کے لیے، آمدنی میں خرچ کے بعد بچت کے لیے کرتے ہیں۔ ہم اپنی دولت کی بھی پیمائش کرتے ہیں۔

اس باب میں ہم اعداد کے مزید چند تصورات کی وضاحت کرتے ہیں۔ ریاضی میں اعداد بنیادی رول ادا کرتے ہیں۔ ہم اعداد کی وسعت اور گہرائی کی حیرت انگیز صفات کو دیکھتے ہیں۔ چند اعداد آپس میں اس طرح جڑتے ہیں کہ اس میں اعداد کی خوبصورتی نظر آتی ہے۔

آئیے ایک معمہ (Puzzle) پر غور کریں:

باغ میں سیر کرنے کے دوران آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ شہد کی مکھیوں کا جھنڈ پھولوں پر بیٹھتا ہے۔ اگر شہد کی مکھیوں کا جھنڈ 2 پھولوں پر مساوی تعداد میں بیٹھتا ہے تب ایک شہد کی مکھی باقی رہ جاتی ہے۔ اگر وہ مساوی تعداد میں تین پھولوں پر بیٹھتے ہیں تو دو مکھیاں باقی رہ جاتی ہیں۔ اور اگر شہد کی مکھیاں 4 پھولوں پر مساوی تعداد میں بیٹھتی ہیں تو باقی 3 رہ جاتی ہیں۔ اور اسی طرح وہ 5 پھولوں پر مساوی تعداد میں بیٹھتی ہیں تب کوئی مکھی باقی نہیں رہتی ہے۔

زیادہ سے زیادہ 50 مکھیاں ہوں تب، جھنڈ پائے جانے والے مکھیوں کی صحیح تعداد کیا ہوگی؟

آئیے اس مسئلہ کو حل کریں۔

فرض کیجیے کہ مکھیوں کی تعداد 'x' ہے۔ تب ہم دیکھتے ہیں کہ  $x \leq 50$

اگر مکھیوں کے جھنڈ کو 5 مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو، کوئی مکھی باقی نہیں رہ جاتی۔ جو ظاہر کرتا ہے کہ  $x = 5a + 0$  کسی

طبعی اعداد 'a' کے لیے۔

اگر شہد کی مکھیوں کے جھنڈ کو 4 مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو 3 مکھیاں باقی رہ جاتی ہیں۔ تب اس کو کسی طبعی اعداد 'b' کے لیے  $x=4b+3$  کے طور پر لکھا جاتا ہے۔

اگر شہد کی مکھیوں کے جھنڈ کو 3 مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو 2 مکھیاں باقی رہ جاتی ہیں تب اس کو کسی طبعی عدد C کے لیے  $x=3c+2$  کے طور پر لکھا جاتا ہے۔

اگر جھنڈ کو 2 مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو تب 1 مکھی باقی رہ جاتی ہے۔ یہ تب اس کو کسی طبعی اعداد d کے لیے  $x=2d+1$  کے طور پر لکھا جاتا ہے۔

یعنی ہر صورت میں ہمیں ایک مثبت صحیح عدد y حاصل ہوتا ہے۔ (اس مثال میں y کی قدر ترتیب وار 5، 4، 3 اور 2 ہے۔) جو x کو تقسیم کرتا ہے اور r باقی رہ جاتا ہے (اس صورت میں r کی قدر ترتیب وار 0، 1 اور 2 ہیں) یعنی y سے چھوٹے۔

مندرجہ بالا مساوات لکھنے کے دوران ہم غیر ارادی طور پر اقلیدس کے نظریہ تقسیم کا استعمال کئے ہیں۔

آئیے ہمارے مسئلہ کی جانب اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے ہمیں 5 کے ضعف پر غور کرنا ہوگا جو تمام شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔

کیونکہ  $x=5a+0$  ہے۔

اگر کسی عدد کو 2 سے تقسیم کرنے پر باقی 1 رہ جاتا ہے تب ہمیں صرف طاق ضعف پر غور کرنا ہوگا۔

اس صورت میں 5، 15، 25، 35 اور 45 وغیرہ ہے۔ اسی طرح اگر ہم باقی دو صورتوں پر غور کریں تب صرف عدد 35 حاصل ہوگا۔

اس طرح شہد کی مکھیوں کے جھنڈ میں 35 مکھیاں ہیں۔

آئیے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

35 کو 2 سے تقسیم کرنے پر باقی 1 رہیگا۔ اس کو اس طرح لکھتے ہیں

$$35=(2 \times 17)+1$$

35 کو 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 رہیگا۔ اس کو اس طرح لکھتے ہیں

$$35=(3 \times 11)+2$$

35 کو 4 سے تقسیم کرنے پر باقی 3 رہیگا۔ اس کو اس طرح لکھتے ہیں

$$35=(4 \times 8)+3$$

اور جب 35 کو 5 سے تقسیم کرتے ہیں تب باقی صفر 0 رہ جاتا ہے۔ اس کو اس طرح لکھتے ہیں

$$35=(5 \times 7)+0$$

آئیے نتیجہ اخذ کریں، کوئی دو مثبت صحیح اعداد a اور b کے لیے (جو بالترتیب مقسوم اور مقسوم علیہ ہیں) ہم کو q اور r مکمل اعداد

$$a=bq+r, 0 \leq r < b$$

حاصل ہوتے ہیں (بالترتیب خارج قسمت اور باقی) جو اس رشتہ کو مطمئن کرتا ہے

یہ کیجیے



دیے گئے مثبت صحیح اعداد 'a' اور 'b' کے جوڑ کے لیے 'q' اور 'r' معلوم کیجیے جو مساوات  $a = bq + r$  کو مطمئن کرتے ہیں

$$a=80, b=8 \text{ (ii)} \quad a=13, b=3 \text{ (i)}$$

$$a=132, b=11 \text{ (iv)} \quad a=125, b=5 \text{ (iii)}$$

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



مندرجہ بالا یہ کیجیے کہ تحت دیے گئے سوالات میں q اور r کی فطرت کیا ہے؟

### مسئلہ 1.1: اقلیدس کا نظریہ تقسیم (Euclid's Division Lemma)

دیے گئے مثبت صحیح اعداد a اور b کے لیے q اور r ایک منفرد جوڑ پایا جاتا ہے جو  $a = bq + r$  اور  $0 < r < b$  کو مطمئن کرتا ہے اس کے نتیجے کو پہلی مرتبہ اقلیدس کی کتاب (Euclid's Element) کے ساتویں باب میں درج کیا گیا تھا۔ اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم اس نظریہ پر منحصر ہے۔

اقلیدس کے تقسیم کا الگورتھم ایک حکمت عملی ہے جس سے دو صحیح اعداد کا عظیم مشترک (HCF) معلوم کیا جاتا ہے دو مثبت صحیح اعداد a اور b کا عظیم مشترک بڑے سے بڑا مثبت عدد d ہوتا ہے جو a اور b دونوں کو تقسیم کرتا ہے۔ آئیے دو اعداد 60 اور 100 کا عظیم مشترک ذیل کے مشغلے سے معلوم کریں گے۔

مشغلہ

60 سمر عرض اور 100 سمر طول والے دوکانغذ کی پٹیاں لیجیے ہمارا مقصد ایسی پٹی کا طول معلوم کرنا ہے جو ان دونوں پٹیوں کی پیمائش کر سکے اور کوئی حصہ باقی نہ بچے۔

60 سمر کی پٹی لیجیے اور اس سے 100 سمر کی پٹی کی پیمائش کیجیے باقی بچی ہوئی باقی بچی ہوئی 40 سمر کی پٹی کاٹ لیجیے اور اس سے 40 سمر کی پٹی سے 60 سمر کی پٹی کی پیمائش باقی بچی ہوئی 20 سمر کی پٹی کاٹ لیجیے اب یہ 20 سمر کی پٹی لیجیے اور 40 سمر کی پٹی کی پیمائش کیجیے۔ باقی بچی ہوئی پٹی کاٹ لیجیے اور پہلے سے موجود 20 سمر کی پٹی کی پیمائش کیجیے جو ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے یعنی کوئی حصہ باقی نہیں بچا۔

لہذا آپ یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔ 20 سمر کی پٹی وہ بڑی وہ بڑی سے بڑی پٹی ہے جو دی گئی دونوں پٹیوں کی پیمائش کر سکتے ہیں۔ کوئی بھی حصہ باقی نہیں رہنا۔

آئیے عدد 60 اور 100 کا عداً عظیم مشترک معلوم کرنے کے لیے مشغلہ میں موجود طریقہ کو اقلیدس کے نظریہ سے مربوط کریں۔  
عد 100 کو 60 سے تقسیم کرنے پر باقی 40 رہے گا۔

$$100 = (60 \times 1) + 40$$

اب 60 کو باقی عدد 40 سے تقسیم پر غور کریں اور اس پر اقلیدس کا نظریہ تقسیم کا اطلاق کریں۔

$$60 = (40 \times 1) + 20$$

اب عدد 40 کو باقی عدد 20 سے تقسیم پر غور کریں اور اس پر اقلیدس کا نظریہ تقسیم کا اطلاق کریں

$$40 = (20 \times 2) + 0$$

غور کیجیے کہ باقی '0' ہے۔ اب ہم عمل کو آگے نہیں بڑھا سکتے ہیں۔

اس مرحلے میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ 60 اور 100 کا عداً عظیم مقسوم علیہ یعنی 20 ہے۔

(آپ 60 اور 100 کے تمام اجزائے ضربی لکھ کر اس کی تصدیق کر سکتے ہیں)

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ عداً عظیم مشترک معلوم کرنے کے لیے متعینہ مراحل کا سلسلہ ہے۔ لہذا آئیے اقلیدس کے تقسیمی الگورتھم کی واضح تعریف کریں۔

دو مثبت صحیح اعداد مثلاً C اور D جہاں  $C > D$  کا ع۔ ا۔ م (HCF) معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل مراحل کو اپنائیے۔

مرحلہ 1: C اور D کو اقلیدس کا نظریہ تقسیم استعمال کیجیے ہمیں صحیح اعداد کا ایک واحد جوڑ q اور r حاصل ہوتا ہے اس طرح کو

$$0 \leq r < d, C = dq + r$$

مرحلہ 2: اگر  $r = 0$  ہو تو C اور d کا ع۔ ا۔ م ہے۔ اگر  $r \neq 0$  تو d اور r کے لیے اقلیدس کا نظریہ تقسیم استعمال کیجیے۔

مرحلہ 3: اس مرحلے کو اس وقت تک جاری رکھیے جب تک کہ باقی صفر (0) حاصل نہ ہو اس مرحلے پر مقسوم علیہ مطلوبہ ع۔ ا۔ م ہوگا۔

یہ الگورتھم استعمال ہوتا ہے کیونکہ  $HCF(c, d) = HCF(d, r)$  جہاں علامت  $HCF(c, d)$  کا مطلب دو مثبت صحیح اعداد c اور d کا

HCF ہے۔

یہ کیجیے



اقلیدس کے تقسیمی الگورتھم کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کا عداً عظیم مشترک معلوم کیجیے

(i) 50 اور 70 (ii) 72 اور 96 (iii) 550 اور 300 (iv) 2015 اور 1860



## سوچئے اور تبادلہ خیال کیجئے



کیا آپ 1.2 اور 0.12 کا عا د اعظم مشترک معلوم کر سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجئے۔

اقلیدس کے تقسیم کا الگور تھم بڑے اعداد HCF معلوم کرنے کیلئے کارآمد ہے بلکہ کمپیوٹر کے استعمال میں بھی کارآمد ہے۔

تبصرہ

1. اقلیدس کا نظریہ تقسیم اور الگور تھم ایک دوسرے سے بہت ہی زیادہ تعلق رکھتے ہیں۔ لوگ اکثر اقلیدس کے نظریہ تقسیم کو اقلیدس کا الگور تھم بھی کہتے ہیں۔

2. اقلیدس کا نظریہ تقسیم صرف مثبت صحیح اعداد کے لیے ہے اس کو تمام صحیح اعداد  $a$  اور  $b$  جہاں  $b \neq 0$  کے لیے وسعت دی جاسکتی ہے۔ اس تعلق سے ہم یہاں بحث نہیں کریں گے۔

اعداد کی خصوصیات کے متعلق اقلیدس کے نظریہ تقسیم کے کئی استعمالات ہیں۔ مندرجہ ذیل میں الگور تھم کے اطلاق کی چند مثالیں دیتے ہیں۔

**مثال 1.** ثابت کیجئے کہ ہر مثبت جفت صحیح عدد  $2q$  کی شکل میں ہوتا ہے اور ہر مثبت طاق صحیح عدد  $2q+1$  کی شکل میں ہوتا ہے۔ جہاں  $q$  ایک صحیح عدد ہے۔

**حل:** فرض کیجئے کہ  $a$  ایک مثبت صحیح عدد ہے اور  $b=2$  تب اقلیدس کے الگور تھم کے رو سے  $a=2q+r$  چند صحیح اعداد  $q \geq 0$  اور

$$r=1 \text{ یا } r=0 \text{ چونکہ } 0 \leq r < 2 \text{ اس لیے } a=2q \text{ یا } a=2q+1$$

اگر  $a$ ،  $2q$  کی شکل میں ہو تب  $a$  ایک جفت صحیح عدد ہے۔ اور ایک مثبت صحیح عدد یا تو جفت یا طاق ہو سکتا ہے۔ اس طرح ایک مثبت طاق عدد  $2q+1$  کی شکل میں ہوتا ہے۔

**مثال 2.** ثابت کیجئے کہ ہر ایک مثبت طاق صحیح عدد  $4q+1$  یا  $4q+3$  کی شکل میں ہوتا ہے۔ جہاں  $q$  چند صحیح اعداد ہیں۔

**حل:** فرض کیجئے کہ  $a$  مثبت طاق صحیح عدد ہے۔ اور  $b=4$  ہم تقسیم کے الگور تھم کا اطلاق  $a$  اور  $b=4$  پر کرتے ہیں۔  $a=4q+r$  تمام  $q \geq 0$  اور  $0 \leq r < 4$  ممکنہ باقی  $0$ ،  $1$ ،  $2$  یا  $3$  ہو سکتے ہیں۔

اس طرح  $a$ ،  $4q$  یا  $4q+1$  یا  $4q+2$  یا  $4q+3$  ہو سکتا ہے۔ جہاں  $q$  خارج قسمت ہے۔ چونکہ  $a$  طاق ہے۔  $a$ ،

$$4q=2(2q) \text{ اور } 4q+2=2(2q+1) \text{ نہیں ہو سکتا (چونکہ دونوں بھی عدد 2 سے قابل تقسیم ہیں)}$$

اس لیے کوئی بھی طاق صحیح عدد  $4q+1$  یا  $4q+3$  کی شکل میں ہوتا ہے۔

## مشق 1.1

1. اقلیدس کے تقسیمی الگورتھم کے استعمال سے عداً اعظم مشترک معلوم کیجیے۔  
(i) 270 اور 900 (ii) 38220 اور 196 (iii) 2032 اور 1651
2. اقلیدس کے نظریہ تقسیم کے استعمال سے ثابت کیجیے کہ کوئی بھی طاق صحیح عدد  $6q+1$  یا  $6q+3$  یا  $6q+5$  کی شکل میں ہوتا ہے۔ جہاں  $q$  ایک صحیح عدد ہے۔
3. اقلیدس کے نظریہ تقسیم کے استعمال سے ثابت کیجیے کہ کسی بھی مثبت صحیح عدد کا مربع  $3p$ ،  $3p+1$  کی شکل میں ہوتا ہے
4. اقلیدس کے نظریہ تقسیم کے استعمال سے ثابت کیجیے کہ کسی بھی مثبت صحیح عدد کا مکعب  $9m$ ،  $9m+1$  یا  $9m+8$  کی شکل میں ہوتا ہے۔
5. ثابت کیجیے کہ  $2n$  یا  $4n$  میں صرف اور صرف ایک ہی عدد 3 سے قابل تقسیم ہے جہاں  $n$  کوئی بھی مثبت صحیح عدد ہے۔

## 1.2 حساب کا بنیادی مسئلہ (The fundamental Theorem of Arithmetic)

اقلیدس کے نظریہ تقسیم سے مثبت صحیح عدد  $a$  اور  $b$  کے لیے ایک منفرد صحیح عدد  $q$  اور  $r$  وجود رکھتا ہے۔ جو ذیل کو مطمئن کرتا ہے

$$a = bq + r \quad 0 \leq r < b$$

سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے



اگر  $r=0$  ہو تب اقلیدس کے نظریہ تقسیم کے تحت  $a=bq+r$  میں  $a$  اور  $b$  کے درمیان کیا رشتہ ہے۔

مندرجہ بالا تبادلہ خیال سے آپ اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ اگر  $a$  اور  $b$  سے تقسیم پذیر ہے تب ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ  $a$  اور  $b$  کا جز ضربی ہے۔

مثلاً: ہم جانتے ہیں کہ

$$24 = 2 \times 12$$

$$24 = 2 \times 2 \times 6$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

ہم جانتے ہیں کہ اگر  $24 = 2 \times 12$  تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ 2 اور 12، 24 کے اجزائے ضربی ہیں۔

ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں  $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$  اور آپ جانتے ہیں کہ یہ 24 کے مفرد اجزائے ضربی ہیں۔

آئیے کوئی بھی مفرد اعداد لیں جیسے 2, 3, 7, 11 اور 23۔ اگر ہم ان میں چند یا تمام کو جتنی مرتبہ چاہیں دہراتے ہوئے ضرب دیں تو ہمیں لامتناہی بڑے مثبت صحیح اعداد حاصل ہوتے ہیں۔ آئیے غور کریں۔

$$2 \times 3 \times 11 = 66$$

$$7 \times 11 \times 23 = 1771$$

$$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$$

$$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$$

$$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$$

$$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$$

اب فرض کیجیے کہ آپ کے مفرد اعداد کے مجموعہ میں تمام ممکنہ مفرد اعداد شامل ہیں۔ اس مجموعہ کے سائز کے بارے میں آپ کیا اندازہ لگاتے ہیں کہ اس میں صرف متناہی صحیح اعداد ہیں یا لامتناہی صحیح اعداد موجود ہیں؟ حقیقت میں لامتناہی کئی مفرد اعداد ہیں۔ اس طرح، اگر ہم تمام مفرد اعداد کو ممکنہ طریقوں سے ضرب دیتے ہیں تب ہم کو غیر مفرد اعداد کا لامتناہی مجموعہ حاصل ہوتا ہے۔ آئیے اس بیان کے برعکس بیان پر غور کرتے ہیں اگر ہم ایک مرکب عدد لیتے ہیں تب اس کو کیا مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھ سکتے ہیں؟ ذیل کا نظریہ اس سوال جواب دیتا ہے۔

**مسئلہ 1.2:** (حساب کا بنیادی مسئلہ):

ہر مرکب اعداد (غیر مفرد اعداد) کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے اجزائے ضربی کا یہ عمل یکتا (Unique) ہوتا ہے۔ جفت اجزائے ضربی کی ترتیب چاہے کچھ بھی ہو۔

سوائے مفرد اعداد کے تسلسل کو چھوڑ کر۔ مثال کے طور پر اگر ہم 210 کے اجزاء بناتے ہیں اس طرح  $2 \times 3 \times 5 \times 7$  جیسا کہ  $3 \times 5 \times 7 \times 2$  یا کوئی بھی ممکنہ تسلسل جس میں یہ مفرد اعداد موجود ہوں۔

اس طرح دیے گئے کسی بھی غیر مفرد عدد کے لیے، مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کرنے کا صرف اور صرف ایک ہی طریقہ ہے جب تک کہ ہم یقینی طور پر مفرد اعداد کے تسلسل کی وضاحت نہیں کرتے ہیں۔

اس طرح دیے گئے غیر مفرد عدد  $x$  کو ہم اس طرح سے اجزاء بناتے ہیں  $x = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 \times \dots \times p_n$

جہاں  $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n$  مفرد عدد ہیں جنہیں اس کو نزولی ترتیب جیسا کہ  $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots \leq p_n$  میں لکھا جاتا ہے جب ہم مساوی مفرد اعداد کو جوڑتے ہیں ہم کو مفرد اعداد کے قوت نما حاصل ہوتے ہیں۔ جب ہم یقین کر لیتے ہیں کہ اعداد کا نزولی تسلسل ہے اس طرح اجزاء میں تبدیلی ہونے والا عدد ایک مفرد عدد ہے۔ مثلاً

$$163800 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 13$$

یہ کیجیے



2310 کو مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیجیے۔ اور غور کیجیے کہ آپ کے ساتھی اس عدد کے اجزاء کس طرح کرتے ہیں۔ کیا انہوں نے آپ ہی کی طرح کیے ہیں۔ آپ کے نتیجہ کو دوست کے حاصل ضرب کے طریقے سے جانچ کیجیے۔ اس کو مزید 3 یا 4 اعداد لے کر کوشش کیجیے۔ آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟

آئیے حساب کے بنیادی مسئلہ کا اطلاق کریں۔

**مثال 3-** عدد  $4^n$  پر غور کیجیے۔ جہاں پر  $n$  ایک طبعی عدد ہے۔ جانچ کیجیے کہ آیا  $n$  کی کوئی ایسی قدر ہے جس کے لیے  $4^n$  صفر ہندسہ پر ختم ہوتا ہے؟

**حل:** کسی بھی طبعی عدد  $n$  کے لیے  $4^n$  صفر پر ختم ہونے کے لیے ضروری ہے کہ وہ 2 اور 5 سے قابل تقسیم ہو۔ یعنی  $4^n$  کے مفرد اجزائے ضربی میں مفرد عدد 2 اور 5 موجود ہونا چاہیے لیکن یہ ممکن نہیں ہے کیونکہ  $4^n = (2)^{2n}$  لہذا عدد  $4^n$  کے اجزائے ضربی میں صرف مفرد عدد 2 واقع ہے عدد 5 نہیں ہے۔ اس طرح کسی طبعی عدد  $n$  کے لیے  $4^n$  ہندسہ صفر پر ختم نہیں ہوتا ہے۔ آپ نے حساب کے بنیادی مسئلہ کے استعمال سے دو مثبت صحیح اعداد کا H.C.F اور L.C.M معلوم کرنے کا طریقہ پچھلی جماعتوں میں سیکھ چکے ہیں۔ لیکن آپ اس مسئلہ سے واقف نہیں تھے اسی طریقہ کار کو مفرد اجزائے ضربی کا طریقہ بھی کہا جاسکتا ہے آئیے مندرجہ ذیل مثال کے ذریعہ اس کا اعادہ کریں۔

**مثال 4-** اعداد 12 اور 18 کا H.C.F اور L.C.M مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے پر معلوم کیجیے۔

**حل:** ہم جانتے ہیں کہ  $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$$

غور کریں کہ (12, 18) کا H.C.F =  $2^1 \times 3^1 = 6$  (دیے گئے اعداد کے مفرد اجزائے ضربی میں مشترک سب سے

چھوٹے قوت نما والے اعداد کا حاصل ضرب)

L.C.M (12, 18) =  $2^2 \times 3^2 = 36$  (دیے گئے اعداد کے مفرد اجزائے ضربی میں بڑی قوت

نما والے اعداد کا حاصل ضرب)

مندرجہ بالا مثال میں آپ مشاہدہ کر چکے ہیں کہ  $H.C.F(12, 18) \times L.C.M(12, 18) = 12 \times 18$

حقیقتاً کوئی بھی دو مثبت صحیح اعداد  $a$  اور  $b$  کے لیے  $a \times b = H.C.F(a, b) \times L.C.M(a, b)$

اس ضابطہ کی مدد سے اگر دو اعداد کا H.C.F دیا گیا ہے تب L.C.M معلوم کیا جاسکتا ہے۔

یہ کیجیے



مندرجہ ذیل میں دی گئی اعداد کی جوڑیوں کے H.C.F اور L.C.M مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

(i) 120, 90

(ii) 50, 60

(iii) 37, 49

کوشش کیجیے



بتلائیے کہ کسی بھی دو طبعی عدد  $n$  اور  $m$  کے لیے  $3^m \times 4^n$  صفر اور 5 پر ختم نہیں ہوتے ہیں



## مشق 1.2

- 1- مندرجہ ذیل میں دیے گئے اعداد کو مفرد اجزائے ضربی کے ضرب کی شکل میں ظاہر کیجیے
- (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429
- 2- مندرجہ ذیل اعداد کے L.C.M اور H.C.F مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجیے۔
- (i) 12, 15 اور 21 (ii) 17, 23 اور 29 (iii) 8, 9 اور 25 (iv) 72 اور 108 (v) 306 اور 657
- 3- کسی طبعی عدد  $n$  کے لیے جانچ کیجیے کہ آیا  $6^n$  کیا صفر پر ختم ہو سکتا ہے؟
- 4- وضاحت کیجیے کہ کیوں  $7 \times 11 \times 13 + 13$  اور  $7 \times 11 \times 13 + 13 + 5 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$  مرکب اعداد (غیر مفرد اعداد) ہیں؟
- 5- آپ کس طرح ثابت کریں گے کہ  $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$  ایک مرکب عدد (غیر مفرد عدد) ہے؟ سمجھائیے
- 6-  $6^{100}$  کا آخری ہندسہ کیا ہوگا۔
- آئیے حقیقی اعداد کی مزید وضاحت کے لیے حساب کے بنیادی مسئلہ کا اطلاق کریں۔ پہلے ہم اس مسئلہ کو اس وقت استعمال کریں گے جب ناطق اعداد کی اعشاری شکل مختتم ہے۔ اور غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہے۔
- اس مسئلہ کو غیر ناطق اعداد جیسے  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$  اور  $\sqrt{5}$  کو ثابت کرنے کے لیے بھی استعمال کرتے ہیں۔

## 1.2.1 ناطق اعداد اور ان کا اعشاری پھیلاؤ

اب تک ہم صحیح اعداد کے چند خصوصیات پر گفتگو کیے ہیں۔ دیے گئے صحیح اعداد میں پس رو اور پیش رو اعداد آپ کس طرح معلوم کر سکتے ہیں؟ آپ اعادہ کر چکے ہیں ایک صحیح عدد اور اس کے پس رو یا پیش رو کا فرق 1 ہوتا ہے۔ اسی خصوصیت کی بناء پر آپ مطلوبہ صحیح اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

جماعت نہم میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ ناطق اعداد میں یا تو مختتم اعشاریہ شکل میں ہوتے ہیں یا غیر مختتم تکراری اعشاریہ شکل میں ہوتے ہیں۔ اس باب میں ہم ناطق اعداد پر غور کریں گے جیسے  $\frac{p}{q}$  (q ≠ 0) اور یہ معلوم کریں گے کہ کب  $\frac{p}{q}$  عدد مختتم اعشاری اور کب غیر مختتم تکراری اعشاری ہوتا ہے۔

مندرجہ ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

آئیے مندرجہ ذیل مختتم اعشاریہ پر غور کریں

12.5 (iv) 0.0875 (iii) 1.04 (ii) 0.375 (i)

اب ان اعداد کو  $\frac{P}{q}$  کی شکل میں ظاہر کریں گے۔

$$1.04 = \frac{104}{100} = \frac{104}{10^2} \quad (\text{ii})$$

$$0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3} \quad (\text{i})$$

$$12.5 = \frac{125}{10} = \frac{125}{10^1} \quad (\text{iv})$$

$$0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4} \quad (\text{iii})$$

ہم دیکھتے ہیں کہ لیے گئے تمام مختتم اعشاری اعداد کو  $\frac{P}{q}$  شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جن کے نسب نما 10 کی قوت نما والے اعداد ہیں۔ آئیے اب ہم ان کے شمار کنندوں اور نسب نماؤں کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کریں گے اور ان ناطق اعداد کی اقل ترین شکل حاصل کریں گے۔

$$0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8} \quad (\text{i})$$

$$1.04 = \frac{104}{10^2} = \frac{2^3 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{26}{5^2} = \frac{26}{25} \quad (\text{ii})$$

$$0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{5^3 \times 7}{2^4 \times 5^4} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7}{80} \quad (\text{iii})$$

$$12.5 = \frac{125}{10} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{25}{2} \quad (\text{iv})$$

کیا آپ مندرجہ بالا نسب نماؤں میں پائے جانے والے اعداد میں کسی ترتیب کا مشاہدہ کیے ہیں؟ جب اعشاری اعداد کو اس کی سادہ ترین ناطق اعداد کی شکل میں ظاہر کریں تو q اور p ہم مفرد اعداد ہیں اور نسب نما میں صرف 2 کے قوت نما یا 5 کے قوت نما یا دونوں قوت نما ہیں۔ یہ اس لیے ہے کہ 10 کے صرف دو ہی مفرد اجزائے ضربی 2 اور 5 ہیں۔

مندرجہ بالا مثالوں میں آپ نے یہ مشاہدہ کیا کہ مختتم اعشاری ناطق عدد کو  $\frac{P}{q}$  شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جس کا نسب نما 2 کا قوت نما یا 5 کا قوت نما ہوتا ہے۔ لہذا q کے اجزائے ضربی  $2^n 5^m$  کی شکل میں ہوں گے جہاں پر m اور n مثبت صحیح اعداد ہیں۔ مندرجہ بالا نتیجہ کو ہم اس طرح مسئلہ کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

**مسئلہ - 1.3:** فرض کیجیے کہ  $x$  ایک ناطق عدد ہے جس کا اعشاریہ مختتم ہے تب 'x' کو  $\frac{P}{q}$  کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں  $p$  اور  $q$  ہم مفرد اعداد ہیں اور  $q$  کے مفرد اجزائے ضرب کی شکل  $2^n 5^m$  ہوتی ہے جہاں پر  $m$  اور  $n$  مثبت صحیح اعداد ہیں۔

یہ کیجیے



مندرجہ ذیل مختتم اعشاریہ  $P/q$  کی شکل میں لکھیے جہاں  $q \neq 0$  اور  $q$  ہم مفرد ہیں

- (i) 15.265    (ii) 0.1255    (iii) 0.4    (iv) 23.34    (v) 1215.8

نسب نماؤں کو  $2^n 5^m$  کی شکل میں لکھیے۔

آپ کو تعجب ہوگا کہ اگر ناطق عدد  $\frac{P}{q}$  ہے جس میں  $q$  کے مفرد اجزائے ضرب کی شکل  $2^n 5^m$  ہو، جہاں پر  $m$  اور  $n$  مثبت صحیح اعداد ہیں تب کیا  $\frac{P}{q}$  مختتم اعشاری عدد کی شکل میں ہوگا؟

ناطق اعداد  $\frac{P}{q}$  کو جہاں پر  $q$  کی شکل  $2^n 5^m$  ہے کو یہ معادل ناطق عدد  $\frac{a}{b}$  کی شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں پر  $b$  کی قوت نما ہے۔ آئیے ہماری اوپر کی مثالوں پر غور کریں اور الٹا عمل کریں۔

پچھلی مثالوں پر غور کرتے ہوئے مندرجہ ذیل نتائج حاصل ہوں گے۔

$$\frac{26}{25} = \frac{26}{5^2} = \frac{13 \times 2^3}{2^2 \times 5^2} = \frac{104}{10^2} = 1.04 \quad \text{(ii)} \quad \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375 \quad \text{(i)}$$


$$\frac{25}{2} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{125}{10} = 12.5 \quad \text{(iv)} \quad \frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875 \quad \text{(iii)}$$

مندرجہ بالا مثالیں یہ ظاہر کرتی ہیں کہ ہم کس طرح ناطق عدد جو  $\frac{P}{q}$  کی شکل میں ہو جہاں  $q$   $2^n 5^m$  کو معادل ناطق عدد  $\frac{a}{b}$  میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں  $b$  کی قوت نما ہے۔ ایک مختتم اعشاریہ ہے۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ناطق عدد جو  $\frac{P}{q}$  کی شکل ہے جہاں  $q$   $10$  کی قوت نما ہے ایک مختتم اعشاریہ ہے۔ اس طرح

مسئلہ 1.3 کا برعکس مسئلہ بھی درج ہے جس کو مندرجہ ذیل طریقہ سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

**مسئلہ: 1.4:** فرض کرو کہ  $x = \frac{p}{q}$  ایک ناطق عدد ہے۔ اس طرح کہ q کے مفرد اجزائے ضربی  $2^n 5^m$  کی شکل میں ہے۔ جہاں پرن 'n' اور 'm' مثبت صحیح اعداد ہوں تب 'x' مختتم اعشاری عدد ہوگا۔

**یہ کیجیے** 

مندرجہ ذیل میں دیے گئے ناطق اعداد کے نسب نما کو  $2^n 5^m$  کی شکل میں لکھیے جہاں پرن 'n'، 'm' مثبت صحیح اعداد ہیں۔ مزید ان اعداد اعشاری شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i)  $\frac{3}{4}$  (ii)  $\frac{7}{25}$  (iii)  $\frac{51}{64}$  (iv)  $\frac{14}{23}$  (v)  $\frac{80}{81}$

$$\begin{array}{r} 0.1428571 \\ 7 \overline{) 1.0000000} \\ \underline{7} \phantom{0000000} \\ \textcircled{3} 0 \phantom{000000} \\ \underline{28} \phantom{000000} \\ \textcircled{2} 0 \phantom{00000} \\ \underline{14} \phantom{00000} \\ \textcircled{6} 0 \phantom{0000} \\ \underline{56} \phantom{0000} \\ \textcircled{4} 0 \phantom{000} \\ \underline{35} \phantom{000} \\ \textcircled{5} 0 \phantom{00} \\ \underline{49} \phantom{00} \\ \textcircled{1} 0 \phantom{0} \\ \underline{7} \phantom{0} \\ \textcircled{3} 0 \end{array}$$

### 1.2.3: ناطق اعداد میں 'غیر مختتم'، 'تکراری اعشاریہ'


آئیے ناطق اعداد پر غور کریں جن کے اعشاریہ پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہیں۔

آئیے  $\frac{1}{7}$  کے اعشاری شکل پر غور کریں۔

$\frac{1}{7} = 0.1428571428571 \dots$  جو کہ ایک غیر مختتم اور تکراری اعشاریہ ہے۔

غور کیجیے خارج قسمت میں ہندسے "142857" دہرائے جارہے ہیں۔

نوٹ: غور کیجیے کہ نسب نما یعنی 7، کو  $2^n 5^m$  کی شکل میں نہیں کیا جاسکتا ہے

**یہ کیجیے** 

مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاری شکل میں ظاہر کیجیے اور خارج قسمت میں دہرائے جارہے ہندسے معلوم کیجیے

(i)  $\frac{1}{3}$  (ii)  $\frac{2}{7}$  (iii)  $\frac{5}{11}$  (iv)  $\frac{10}{13}$

مشق "یہ کیجیے" اور مندرجہ بالا مثالوں سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے

**مسئلہ - 1.5:** اگر  $x = \frac{p}{q}$  ناطق عدد ہے اس طرح کہ q کے مفرد اجزائے ضربی  $2^n 5^m$  کی شکل میں نہیں ہیں جہاں پرن 'n' اور 'm' مثبت صحیح اعداد ہیں۔ تب 'x' کا اعشاری پھیلاؤ غیر مختتم تکراری ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مباحثہ سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ہر ایک ناطق اعداد کی اعشاری یا تو مختتم یا غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہوتی ہے۔



مثال 5: مندرجہ بالا مسئلہ کے استعمال سے بغیر تقسیم کئے بتائیے کہ آیا دیئے گئے ناطق اعداد مختتم یا غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہیں۔

(i)  $\frac{16}{125}$       (ii)  $\frac{25}{32}$       (iii)  $\frac{100}{81}$       (iv)  $\frac{41}{75}$

(i)  $\frac{16}{125} = \frac{16}{5 \times 5 \times 5} = \frac{16}{5^3}$  یہ ایک مختتم اعشاریہ کی شکل ہے

(ii)  $\frac{25}{32} = \frac{25}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{25}{2^5}$  یہ ایک مختتم اعشاریہ کی شکل ہے

(iii)  $\frac{100}{81} = \frac{100}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{100}{3^4}$  یہ ایک غیر مختتم تکراری اعشاریہ کی شکل ہے

(iv)  $\frac{41}{75} = \frac{41}{3 \times 5 \times 5} = \frac{41}{3 \times 5^2}$  یہ ایک غیر مختتم تکراری اعشاریہ کی شکل ہے

مثال 6: مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو بغیر تقسیم کیے اعشاریہ شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i)  $\frac{35}{50}$       (ii)  $\frac{21}{25}$       (iii)  $\frac{7}{8}$

(i)  $\frac{35}{50} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10^1} = 0.7$

(ii)  $\frac{21}{25} = \frac{21}{5 \times 5} = \frac{21 \times 2^2}{5 \times 5 \times 2^2} = \frac{21 \times 4}{5^2 \times 2^2} = \frac{84}{10^2} = 0.84$

(iii)  $\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \times 2 \times 2} = \frac{7}{2^3} = \frac{7 \times 5^3}{(2^3 \times 5^3)} = \frac{7 \times 25}{(2 \times 5)^3} = \frac{875}{(10)^3} = 0.875$

مشق - 1.3:

1- مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاریہ شکل میں لکھیے اور ان میں کونسے مختتم اور غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہیں؟ معلوم کیجیے۔

(i)  $\frac{3}{8}$       (ii)  $\frac{229}{400}$       (iii)  $4\frac{1}{5}$       (iv)  $\frac{2}{11}$       (v)  $\frac{8}{125}$

2- مندرجہ ذیل میں دیئے گئے ناطق اعداد کو بغیر تقسیم کیے کہ بتائیے کہ کونسے مختتم اعشاریہ ہیں اور کونسے غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہیں۔

$\frac{29}{343}$  (v)       $\frac{15}{1600}$  (iv)       $\frac{64}{455}$  (iii)       $\frac{11}{12}$  (ii)       $\frac{13}{3125}$  (i)

$\frac{77}{210}$  (x)       $\frac{36}{100}$  (ix)       $\frac{9}{15}$  (viii)       $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$  (vii)       $\frac{23}{2^3 5^2}$  (vi)

- 3- مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو مسئلہ 1.4 کے استعمال کرتے ہوئے اعشاری شکل میں ظاہر کیجیے۔
- (i)  $\frac{13}{25}$  (ii)  $\frac{15}{16}$  (iii)  $\frac{23}{2^3 \cdot 5^2}$  (iv)  $\frac{7218}{3^2 \cdot 5^2}$  (v)  $\frac{143}{110}$
- 4- مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو  $\frac{p}{q}$  کی شکل میں ظاہر کیجیے۔ q کے مفرد اجزائے ضربی لکھیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔
- (i) 43.123456789 (ii) 0.1201200120001200000... (iii) 43.123456789

### 1.3 غیر ناطق اعداد Irrational Numbers

جماعت نہم میں آپ غیر ناطق اعداد اور ان کے چند خصوصیات کے بارے میں پڑھ چکے ہیں آپ ان اعداد کی وجودیت کے بارے میں اور کس طرح ناطق اور غیر ناطق اعداد کی حقیقی اعداد بناتے ہیں۔ پڑھ چکے ہیں کہ حتیٰ کہ آپ غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنے کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ حالانکہ ہم ثابت نہیں کیے کہ یہ غیر ناطق ہیں۔ اس باب میں ہم ثابت کریں گے کہ عموماً  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  اور  $\sqrt{p}$  غیر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ جہاں p مفرد عدد ہے۔ ثابت کرنے کے لیے ہم بطور مسئلہ ”حساب کا بنیادی مسئلہ“ استعمال کرتے ہیں۔

اعادہ کیجیے کہ ایک حقیقی عدد غیر ناطق عدد کہلاتا ہے۔ اگر اسکو  $\frac{p}{q}$  کی شکل میں نہیں لکھا جاسکتا۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور  $q \neq 0$  کہ۔ چند غیر ناطق عدد جن سے آپ واقف ہیں جیسے  $0.10110111011110.....$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{15}$  وغیرہ۔

$\sqrt{2}$  ایک غیر ناطق عدد ہے ثابت کرنے سے پہلے ایک نظر اس بیان پر ڈالیں گے جس کو حساب کا بنیادی مسئلہ کی مدد سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

**مسئلہ 1.6:** فرض کیجیے کہ p ایک مفرد عدد ہے، اگر  $a^2 = p$  کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے (جہاں 'a' ایک مثبت صحیح عدد ہے) تب 'p'، 'a' کو بھی مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ a کے مفرد اجزائے ضربی اس طرح  $a = p_1, p_2, \dots, p_n$

جہاں پر  $p_1, p_2, \dots, p_n$  مفرد اعداد ہیں۔ اور یہ ضروری نہیں کہ یہ تمام متفرق نہ ہوں۔

$$a^2 = (p_1, p_2, \dots, p_n)(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$$

دیا گیا ہے کہ p کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔ حساب کے بنیادی مسئلہ کی رو سے کہ p ایک مفرد جزو ضربی ہے  $a^2$  کا حساب

کے بنیادی مسئلہ کے استعمال سے ہم جانتے ہیں کہ  $a^2$  کے مفرد اجزائے ضربی صرف  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ہیں۔

اس طرح p ان اجزائے ضربی  $p_1, p_2, \dots, p_n$  میں کوئی ایک ہوگا۔

اب چونکہ  $a = p_1, p_2, \dots, p_n$  ہیں تب p کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔

یہ کیجیے



مندرجہ بالا ثابت کیے گئے بیان کو  $P=2$  اور  $p=5$  اور  $a^2=1,4,9,25,36,49,64,81$  لیتے ہوئے تصدیق کیجیے۔

اب ہم  $\sqrt{2}$  کو غیر ناطق عدد کے طور پر ثابت کریں گے  $\sqrt{2}$  غیر ناطق ثابت کرنے کے لیے "تضاد" کا طریقہ کار استعمال کریں گے  
**مثال - 7:** ثابت کیجیے کہ  $\sqrt{2}$  ایک غیر ناطق عدد ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ  $\sqrt{2}$  ایک ناطق عدد ہے۔

اگر یہ ناطق عدد ہے تب کوئی دو صحیح اعداد  $r$  اور  $s$  ( $s \neq 0$ ) وجود رکھتے ہیں اس طرح کہ  $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ ۔

اگر  $r$  اور  $s$  کے '1' کے علاوہ مشترک جز ضربی ہیں تب اعظم ترین مشترک اجزائے ضربی سے تقسیم کرتے ہوئے  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  حاصل کریں

۔ جہاں  $a$  پر  $a$  اور  $b$  ہم مفرد اعداد ہیں۔

اس طرح  $b\sqrt{2} = a$

دونوں جانب مربع کرتے ہوئے دوبارہ ترتیب دینے پر ہم کو  $2b^2 = a^2$  حاصل ہوگا۔ لہذا 2، تقسیم کرتا ہے  $a^2$  کو۔

اب مسئلہ 1-6 کی رو سے: اگر  $2$ ،  $a^2$  کو تقسیم کرتا ہے تب یہ  $a$  کو بھی تقسیم کرتا ہے۔

اس طرح ہم  $a=2c$  لکھ سکتے ہیں جہاں  $c$  کوئی صحیح عدد ہے۔

$a$  کی قدر درج کرنے پر  $2b^2 = 4c^2$  یعنی  $b^2 = 2c^2$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ  $2$ ،  $b^2$  کو تقسیم کرتا ہے یعنی  $2$ ،  $b$  کو بھی تقسیم کرتا ہے مسئلہ 1-6 کی مدد سے جہاں  $p=2$

یعنی  $a$  اور  $b$  دونوں کا مشترک جز  $2$  ہے۔

لیکن یہ ایک تضاد ہے کیونکہ حقیقتاً  $a$  اور  $b$  ہم مفرد اعداد ہیں۔ یہ تضاد اس لیے وجود میں آیا ہے کیونکہ ہم نے  $\sqrt{2}$  کو ناطق عدد فرض کیا ہے

جو غلط ہے اس لیے ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں  $\sqrt{2}$  ایک غیر ناطق عدد ہے۔

عموماً یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ  $\sqrt{d}$  ایک غیر ناطق ہوتا ہے جب کہ  $d$  ایک مثبت صحیح عدد ہے جو دوسرے عدد کا مربع نہ ہو۔ اس طرح

$\sqrt{24}$ ,  $\sqrt{15}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{6}$  وغیرہ وغیرہ غیر ناطق اعداد ہیں۔

جماعت نہم میں آپ نے پڑھا ہے کہ

● ایک ناطق عدد اور غیر ناطق عدد کا مجموعہ یا فرق غیر ناطق ہوتا ہے اور

● ایک غیر صفری ناطق اور غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب یا خارج قسمت بھی غیر ناطق عدد ہوتا ہے۔

اب ہم یہاں چند خاص مسائل ثابت کریں گے۔

**مثال - 8:** بتائیے کہ  $5 - \sqrt{3}$  ایک غیر ناطق عدد ہے۔

**حل:** فرض کرو کہ  $5 - \sqrt{3}$  ناطق عدد ہے تب  $a$  اور  $b$  کوئی ہم مفرد اعداد ( $b \neq 0$ ) کے لیے اس طرح

$$5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

$$\text{اس لیے } \sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5b - a}{b} \dots\dots\dots$$

چوں کہ  $a$  اور  $b$  صحیح اعداد ہیں یعنی  $5 - \frac{a}{b}$  ایک ناطق عدد ہوگا۔ اس طرح  $\sqrt{3}$  بھی ناطق عدد ہوگا۔

لیکن یہ تضاد ہے کہ حقیقتاً  $\sqrt{3}$  ایک غیر ناطق ہے۔

یہ تضاد اس لیے وجود میں آیا ہے کہ ہم نے  $5 - \sqrt{3}$  کو ناطق عدد فرض کیا تھا جو غلط ہے

اس طرح ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ  $5 - \sqrt{3}$  ایک غیر ناطق عدد ہے۔

**مثال - 9:** بتائیے کہ  $3\sqrt{2}$  ایک غیر ناطق عدد ہے۔

**حل:** آئیے اب ہم  $3\sqrt{2}$  کو متضاد طور پر ناطق عدد تصور کرتے ہیں۔

تب  $a$  اور  $b$  کوئی دو ہم مفرد اعداد ( $b \neq 0$ ) کے لیے اس طرح  $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  ہوگا۔

ہمیں حاصل ہوتا  $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$  چونکہ  $a$  اور  $b$  صحیح اعداد ہیں اس لیے  $\frac{a}{3b}$  ایک ناطق عدد ہوگا اس طرح  $\sqrt{2}$  بھی ناطق

عدد ہوگا۔

لیکن یہ تضاد ہے حقیقتاً عدد  $\sqrt{2}$  ایک غیر ناطق عدد ہے۔

اس طرح ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ  $3\sqrt{2}$  ایک غیر ناطق عدد ہے۔

**مثال - 10:** ثابت کیجیے کہ  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  ایک غیر ناطق عدد ہے۔

**حل:** فرض کرو کہ  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  ایک ناطق عدد ہے۔ جہاں پر  $a, b$  صحیح اعداد ہیں۔ اور  $b \neq 0$

$$\text{اس طرح } \sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - \sqrt{3}$$



دونوں جانب مربع کرنے پر حاصل ہوگا

$$2 = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2 \frac{a}{b} \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2a}{b} \sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2$$

$$\frac{2a}{b} \sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 1 \Rightarrow \frac{2a}{b} \sqrt{3} = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

اس لیے  $\frac{a^2 + b^2}{2ab}$  ناطق عدد ہوگا۔ چونکہ a, b صحیح اعداد ہیں

اور  $\sqrt{3}$  بھی ناطق ہوگا جو تضاد ہے۔

حقیقتاً  $\sqrt{3}$  ایک غیر ناطق عدد ہے۔ اس طرح  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  بھی ایک غیر ناطق عدد ہوگا۔

**نوٹ:**

1- دو غیر ناطق اعداد کا مجموعہ غیر ناطق ہی ہونا ضروری نہیں ہے۔

تب a اور b دونوں غیر ناطق اعداد ہیں مثلاً اگر  $a = \sqrt{2}$  اور  $b = -\sqrt{2}$

لیکن  $a + b = 0$  جو ایک ناطق عدد ہے۔

2- دو غیر ناطق اعداد کا حاصل ضرب 'غیر ناطق' ہی ہونا ضروری نہیں ہے

مثلاً  $a = \sqrt{2}$  اور  $b = 3\sqrt{2}$  جہاں p اور b دونوں غیر ناطق اعداد ہیں۔

لیکن  $ab = 6$  جو ایک ناطق عدد ہے۔

### مشق - 1.4:



1- ثابت کیجیے کہ مندرجہ ذیل غیر ناطق اعداد ہیں۔

(i)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (ii)  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  (iii)  $6 + \sqrt{2}$  (iv)  $\sqrt{5}$  (v)  $3 + 2\sqrt{5}$

2- ثابت کیجیے کہ  $\sqrt{p} + \sqrt{q}$  غیر ناطق عدد ہے، جبکہ p اور q مفرد اعداد ہیں۔

### Exponentials Revisted

### 1.4 قوت نما کا اعادہ

ہم جانتے ہیں

طبعی قوت نما n کے ساتھ a کا قوت نما  $a^n$  کے اجزا کا حاصل ضرب ہے یعنی  $a \underbrace{a.a.a \dots a}_{n \text{ factor}}$

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \dots \dots \dots$$

2 کے قوت نما

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3 \dots \dots \dots$$

3 کے قوت نما

ہم جانتے ہیں کہ 81 کو  $3^4$  لکھا جاتا ہے اس کو قوت نمائی شکل کہتے ہیں  $81=3^4$  عدد 4 قوت نما ہے اور 3 اساس ہے ہم اس کو اس طرح پڑھتے ہیں۔ ”اساس 3 کا چوتھا قوت نما 81 ہے۔ قوت نماؤں کے کلیات کی یاد دہانی کیجیے۔

اگر  $a, b$  حقیقی اعداد ہیں  $a \neq 0, b \neq 0$  اور صحیح اعداد سے تب۔

$$(i) a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (ii) (ab)^m = a^m \cdot b^m \quad (iii) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(iv) (a^m)^n = a^{mn}, \text{ اگر } a, b \text{ حقیقی اعداد ہیں } b \neq 0, a \neq 0 \text{ اور صحیح اعداد ہیں } n, m$$

$$(v) a^0 = 1 \text{ if } a \neq 0 \quad (vi) a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ } a \neq 0$$

یہ کیجیے



1- محسوب کیجیے۔

$$(i) 2^1 \quad (ii) (4.73)^0 \quad (iii) 0^3 \quad (iv) (-1)^4 \quad (v) (0.25)^{-1} \quad (vi) \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad (vii) \left(1\frac{1}{4}\right)^2$$

2- (a) 10, 100, 1000, 10000, 100000 کو قوت نمائی شکل میں لکھیے۔

(b) مندرجہ ذیل کو سادہ ترین قوت نمائی شکل میں لکھیے۔

$$(i) 16 \times 64 \quad (ii) 25 \times 125 \quad (iii) 128 \div 32$$

قوت نما اور لوگار تھم

آئیے مندرجہ ذیل پر غور کریں۔

$$2^x = 4 = 2^2 \text{ جس سے } x=2 \text{ حاصل ہوتا ہے۔}$$

$$3^y = 81 = 3^4 \text{ جس سے } y=4 \text{ حاصل ہوتا ہے۔}$$

$$10^z = 10000 = 10^5 \text{ جس سے } z=5 \text{ حاصل ہوتا ہے}$$

کیا ہم مندرجہ ذیل کے لیے  $x$  کی قدر معلوم کر سکتے ہیں؟

$$2^x = 5, 3^x = 7, 10^x = 5$$

اگر ہاں تو  $x$  کی قدریں کیا ہیں؟

$2^x = 5$  کے لیے 2 کو کس قوت پر اٹھایا جائے کہ 5 حاصل ہو؟ اس لیے  $x$  اور 5 کے درمیان نئے رشتے کو قائم کرنے کی ضرورت ہے۔

ایسی حالت میں ایک نئے رشتے لوگا رتھم کو متعارف کیا جاتا ہے۔ آئیے غور کریں۔

$y=2^x$  میں  $x$  کی کوئی قدر پر  $y=5$  ہوتا ہے؟

مشاہدہ کرنے سے اگر  $x=1$  تب  $y=2^1=2$ ، اگر  $x=2$  تب  $y=2^2=4$ ، اگر  $x=3$  تب  $y=2^3=8$  ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ  $x$  کی قدر 2 اور

3 کے درمیان ہوتی ہے۔ کیا  $x$  کی قدر 2 کے قریب ہے یا 3 کے قریب لیکن  $x$  کی قدر 2 کے قریب ہے۔

اگر  $2^x=5$  یہاں  $x$  کی تعریف "5 کا لوگا رتھم 2 کے اساس پر" کے طور پر کی جاتی ہے۔ علامتی طور پر اس کو  $x=\log_2 5$  لکھا جاتا ہے۔

## $2^x$ کا گراف

آئیے  $y=2^x$  کا گراف اتاریں

$x$  چند قدروں کا انتخاب کرتے ہوئے  $y$  کی قدر محسوب کرتے ہیں۔

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

ہم نقاط کو ترتیبی کاغذ پر نشانہ ہی کر کے انہیں منحنی کے ذریعے ملاتے ہیں۔

غور کیجیے کہ جیسے جیسے  $x$  کی قدر بڑھتی ہے۔  $y=2^x$  کی قدر بھی بڑھتی ہے اور جیسے جیسے  $x$  کی قدر گھٹتی ہے  $y=2^x$  کی قدر بھی گھٹتی ہوئی 0 کے

قریب پہنچتی ہے لیکن کبھی بھی صفر (0) نہیں ہوتی۔

آئیے غور کریں اگر  $y=2^x$  تب  $x$  کی کس قدر کے لیے  $y$  کی قدر 5

ہوتی ہے؟

ہم جانتے ہیں کہ گراف میں  $y$ -محور  $2^x$  کی قدر کو ظاہر کرتا ہے۔

$x$ -محور کس کو ظاہر کرتا ہے؟ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ  $x$ -محور  $x$  کی

قدر کو ظاہر کرتا ہے۔

$y$ -محور پر 5 کی نشانہ ہی کیجیے اور اس کو متعلقہ نقطہ P سے ظاہر کیجیے

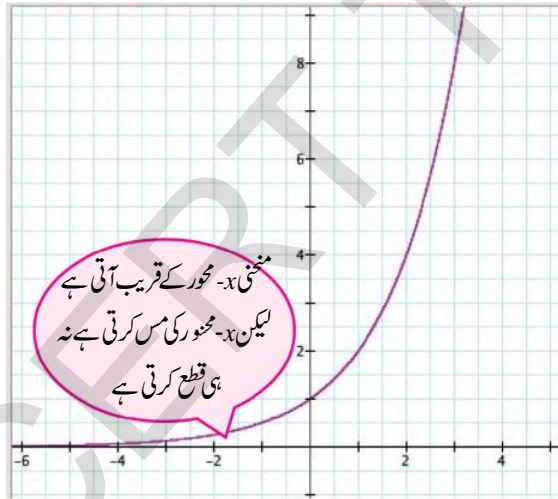
نقطہ P سے  $x$ -محور کے متوازی ایک خط کھینچئے جو منحنی کے نقطہ Q پر

ملتا ہے۔

اب  $x$  محور پر عمود QR کھینچئے۔ کیا ہم گراف کی مدد سے OR کا

طول معلوم کر سکتے ہیں؟ یا یہ کہاں ہوتا ہے؟ اس طرح ہم جانتے ہیں کہ  $x$  کی مطلوبہ قدر نقطہ P اور Q کے  $x$ -مختصات ہوتی ہے۔ جیسا کہ

$2^x=5$  اس طرح  $x$  کی قدر اساس 2 پر 5 کا لوگا رتھم کہلاتی ہے۔ اس کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔  $\log_2 5$



## سوئے اور تادلہ خیال کیجئے



اب آئیے اسکیل فیا کٹر کا مشاہدہ کریں

$x$ - محور پر (نسبت - تناسب حوالہ)

اگر 10 مقامات = '1' اکائی

20 مقامات = '1' اکائی

40 مقامات = '1' اکائی

کیا آپ  $y$ - محور پر 5 کے لحاظ سے  $x$ - محور پر متعلقہ قدر کا اندازہ کر سکتے ہیں۔

ہم مندرجہ بالا جدول کو دوبارہ اس طرح لکھتے ہیں۔

$x$	-2	-1	0	1	2	3		$y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8		$x = \log_2 y$	-2	-1	0	1	2	3

لوگار تھم کو تعریف کی رو سے گراف کا مشاہدہ کیجئے۔

$$\text{اگر } y = \frac{1}{4} ; x = -2 \quad \text{i.e.} \quad 2^{-2} = \frac{1}{4} \quad \text{and} \quad -2 = \log_2 \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{2} ; x = -1 \quad \text{i.e.} \quad 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad -1 = \log_2 \frac{1}{2}$$

$$y = 2 ; x = 1 \quad \text{i.e.} \quad 2^1 = 2 \quad \text{and} \quad 1 = \log_2 2$$

$$y = 4 ; x = 2 \quad \text{i.e.} \quad 2^2 = 4 \quad \text{and} \quad 2 = \log_2 4$$

$$y = 8 ; x = 3 \quad \text{i.e.} \quad 2^3 = 8 \quad \text{and} \quad 3 = \log_2 8$$

یعنی منحنی کے کسی بھی نقطہ کا  $y$  مختص 2 کی  $x$  میں قوت ہوتی ہے اور منحنی کے کسی بھی نقطہ کا  $x$ - مختص اساس 2 پر  $y$ - مختص کا لوگار تھم ہوتا ہے۔

آئیے ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

اگر  $10^y = 25$  تب اس کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے  $y = \log_{10} 25$  یا  $y = \log 25$

”کسی بھی عدد کا لوگار تھم اساس 10 پر عام لوگار تھم کہلاتا ہے“ اس صورت میں عموماً ہم اساس 10 کو نہیں لکھتے جیسا کہ  $\log_{10} 25$  کو اس

طرح لکھتے ہیں۔  $\log 25$

” $a$  اور  $N$  مثبت حقیقی اعداد ہیں اس طرح  $a \neq 1$  تب ہم اس کی تعریف عام طور پر اس طرح کرتے ہیں  $\log_a N = x \Leftrightarrow ax = N$ “

یہ کیجیے



1- حسب ذیل کو لوگار تھم کی شکل میں لکھیے۔

$$\frac{1}{257} = 4^a \text{ (v) } 100 = 10^z \text{ (iv) } \frac{1}{81} = 3^c \text{ (iii) } 10 = 5^b \text{ (ii) } 7 = 2^x \text{ (i)}$$

2- حسب ذیل کو قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

$$\log_2 2 = 1 \text{ (iii) } \log_5 25 = 2 \text{ (ii) } \log_{10} 100 = 2 \text{ (i)}$$

کوشش کیجیے



حسب ذیل کو حل کیجیے۔

$$\log_{10} 10000 = z \text{ (iii) } \log_5 625 = y \text{ (ii) } \log_2 32 = x \text{ (i)}$$

$$\log_x 16 = 2 \therefore x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ (iv)}$$

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ قوت نما کی شکل اور لوگار تھم کی شکل ایک دوسرے کی معکوس ہوتی ہیں۔ یہ مشاہدہ بھی کیا گیا ہے کہ ہر ایک مثبت حقیقی عدد ایک منفرد لوگار تھم قدر رکھتا ہے۔ کیونکہ کوئی بھی انتصابی خط ترسیم کے ایک نقطہ پر مس کرتا ہے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



کیا  $\log_2 0$  کا وجود ہے؟ وجہ بتائیے

$$2- \text{ ثابت کرو۔ (i) } \log_b b = 1 \text{ (ii) } \log_b 1 = 0 \text{ (iii) } \log_x b^x = x$$

لوگار تھم کی خصوصیت

کئی میدانوں میں لوگار تھم بہت ہی اہم ہے اور یہ جدید ریاضی ہے ہم اب لوگار تھم پر مشتمل عبارتوں کو سلجھانے کے لیے چند بنیادی خصوصیات اخذ کریں گے۔

(1) ضرب کا اصول

لوگار تھم کے خصوصیات قوت نما کے خصوصیات کے مشابہہ ہوتے ہیں مثلاً اگر ہم مساوی اساس والے قوت نمائی اعداد کو ضرب دیتے ہیں تو قوت نما کو جمع کرتے ہیں۔

$$\text{یعنی } a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

قوت نما کی یہ خصوصیت لوگار تھم سے منسلک ہوتی ہے کیوں کہ لوگار تھم بھی قوت نما ہے جس سے ضرب کا اصول حاصل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ  $a, x, y$  اور مثبت صحیح اعداد ہیں جہاں  $a \neq 1$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \text{ تب}$$

یعنی حاصل ضرب کا لوگار تھم، لوگار تھم کا مجموعہ ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ  $\log_a x = m$  اور  $\log_a y = n$  تب  $a^m = x$  اور  $a^n = y$



$$xy = a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\therefore \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

کوشش کیجیے



ہم جانتے ہیں۔  $\log 100000 = 5$

ثابت کیجیے کہ 100000 کو  $1000 \times 100$  لکھنے پر بھی وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ جواب کی تصدیق لوگار تھم کے ضرب کا اصول استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے۔

یہ کیجیے



مندرجہ ذیل کے لوگار تھم کو لوگار تھم کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

- (i)  $35 \times 46$  (ii)  $235 \times 437$  (iii)  $2437 \times 3568$

(ii) خارج قسمت کا اصول

جب ہم مساوی اساس والے قوت نمائی اعداد کو تقسیم کرتے ہیں تو قوت نما کو تفریق کرتے ہیں۔

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{یعنی}$$

یہ خاصیت خارج قسمت کے اصول کی جانب رہنمائی کرتا ہے۔

فرض کرو کہ  $a, n$  اور  $y$  مثبت صحیح اعداد ہیں جہاں  $a \neq 1$

$$\text{تب } \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

خارج قسمت کا لوگار تھم، دو اعداد کے لوگار تھم کا فرق ہے جبکہ اعداد وہی ترتیب میں لیے جائیں۔

کوشش کیجیے



ہم جانتے ہیں  $\log_2 32 = 5$  ثابت کیجیے کہ 32 کو  $64/2$  لکھنے پر بھی وہی جواب حاصل ہوتا ہے۔ لوگار تھم کے خارج

قسمت کا اصول استعمال کرتے ہوئے جواب کی تصدیق کیجیے۔

یہ کیجیے



1- مندرجہ ذیل لوگار تھم کو لوگار تھم کے فرق میں ظاہر کیجیے۔

- i)  $\log \frac{23}{34}$  ii)  $\log \frac{373}{275}$  iii)  $4525 \div 3734$  iv)  $5055 \div 3303$

## سوچے اور تبادلہ خیال کیجیے



$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  کو استعمال کرتے ہوئے خارج قسمت کے اصول کو ثابت کیجیے۔

## (iii) قوت نما کا اصول

جب کسی قوت نمائی عبارت کو قوت نما پراٹھایا جاتا ہے تو ہم قوت نما کو ضرب دیتے ہیں۔

$$\text{یعنی } (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

یہ خاصیت قوت نما کے اصول کی جانب رہنمائی کرتی ہے۔

فرض کرو کہ  $a, x, y$  مثبت صحیح اعداد ہیں جہاں  $a \neq 1$

$$\text{تب } \log_a x^n = n \log_a x$$

کسی عدد کا لوگار تھم قوت نما کے ساتھ، قوت نما اور اس عدد کے لوگار تھم کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

## کوشش کیجیے



ہمیں معلوم ہے کہ  $\log_2 32 = 5$  ثابت کیجیے کہ  $32 = 2^5$  لکھنے پر بھی وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اور لوگار تھم کے قوت نما

کے اصول کے استعمال سے جواب کی تصدیق کیجیے۔

اگر  $2^x = 3^5$  ہو تو کیا آپ  $x$  کی قدر معلوم کر سکتے ہیں؟ اس صورت حال میں ہم  $3^5 = 243$  کی قدر معلوم کرتے ہیں تب  $x$  کی قدر معلوم کر سکتے ہیں جس کے لیے  $2^x$  کی قدر 243 کے مساوی ہوتی ہے۔

لوگار تھم لیتے ہوئے اور ضابطہ  $\log_a x^n = n \log_a x$  کو استعمال کرتے ہوئے آسانی سے  $3^{33}, 3^{25}$  وغیرہ کی قدر معلوم کی

جاسکتی ہے۔

$$2^x = 3^5$$

لوگار تھم شکل میں لکھنے پر

$$\log_2 3^5 = x$$

$$5 \log_2 3 = x \quad (\because \log_a x^n = n \log_a x)$$

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ  $x$  کی قدر 5 اور  $\log_2 3$  کی قدر کا حاصل ضرب ہے۔

## یہ کیجیے



1- ضابطہ  $\log_a x^n - n \log_a x$  کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کو حل کیجیے۔

$$\log_2 7^{25} \quad \text{(i)} \quad \log_5 8^{50} \quad \text{(ii)} \quad \log_5 2^3 \quad \text{(iii)} \quad \log 1024 \quad \text{(iv)}$$

## سوچے اور تبادلہ خیال کیجیے



ہم  $\log \frac{x}{y} = \log xy^{-1}$  کے طور پر لکھتے ہیں کیا آپ ضرب اور قوت نما کے اصول کو استعمال کرتے ہوئے  $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$  ثابت کر سکتے ہو۔

## کوشش کیجیے



- (i)  $\log_2^{32}$  کی قدر معلوم کیجیے؟  
(ii)  $\log_c^{\sqrt{c}}$  کی قدر معلوم کیجیے؟  
(iii)  $\log_{10}^{0.001}$  کی قدر معلوم کیجیے؟  
(iv)  $\log_2 \frac{8}{27}$  کی قدر معلوم کرو؟

## سوچے اور تبادلہ خیال کیجیے



ہم جانتے ہیں کہ اگر  $7 = 2^x$  ہو تب  $x = \log_2 7$  کی قدر کیا ہوگی؟ آپ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔ چند مزید مثالیں  $a \log_a^N$  کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا کو کی تعیم کیجیے۔

مثال 11.  $\log \frac{343}{125}$  کو پھیلائیے۔

حل: جیسا کہ آپ جانتے ہیں  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$$\log \frac{343}{125} = \log 343 - \log 125 \quad \text{اس لیے}$$

$$= \log 7^3 - \log 5^3$$

$$\log_a x^m = m \log_a x \quad \text{کیوں کہ}$$

$$= 3 \log 7 - 3 \log 5$$

$$\log \frac{343}{125} = 3(\log 7 - \log 5) \quad \text{لہذا}$$

مثال 12.  $2 \log 3 + 3 \log 5 - 5 \log 2$  کو واحد لوگارٹھم کی شکل میں لکھئے۔

حل:

$$2 \log 3 + 3 \log 5 - 5 \log 2$$

$$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5 \quad (m \log_a x = \log_a x^m)$$

$$= \log 9 + \log 125 - \log 32$$

$$= \log (9 \times 125) - \log 32 \quad (\log_a x + \log_a y = \log_a xy)$$

$$= \log 1125 - \log 32$$

$$= \log \frac{1125}{32} \quad \left( \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \right) \quad \text{کیوں کہ}$$

(دونوں جانب log لینے پر  $\log 3^x = \log 5^{x-2}$ )

مثال 13. حل کیجیے۔  $3^x = 5^{x-2}$

حل:  $x \log_{10} 3 = (x-2) \log_{10} 5$

$$x \log_{10} 5 - 2 \log_{10} 5 = x \log_{10} 3$$

$$x \log_{10} 5 - x \log_{10} 3 = 2 \log_{10} 5$$

$$x(\log_{10} 5 - \log_{10} 3) = 2 \log_{10} 5$$

$$x = \frac{2 \log_{10} 5}{\log_{10} 5 - \log_{10} 3}$$

مثال 14. x کی قدر معلوم کیجیے۔ اگر  $2 \log 5 + \frac{1}{2} \log 9 - \log 3 = \log x$

حل:  $\log x = 2 \log 5 + \frac{1}{2} \log 9 - \log 3$

$$= \log 5^2 + \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log \sqrt{9} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log 3 - \log 3$$

$$\log x = \log 25$$

$$x = 25$$

مشق 1.5



(1) مندرجہ ذیل کے قدریں معلوم کیجیے؟

$$\log_2 \left( \frac{1}{16} \right) \text{ (iii)}$$

$$\log_{81} 3 \text{ (ii)}$$

$$\log_{25} 5 \text{ (i)}$$

$$\log_2 512 \text{ (vi)}$$

$$\log_x \sqrt{x} \text{ (v)}$$

$$\log_7 1 \text{ (iv)}$$

$$2^{2+\log_2 3} \text{ (ix)}$$

$$\log_{\frac{2}{3}} \left( \frac{8}{27} \right) \text{ (iii)}$$

$$\log_{10} 0.01 \text{ (vii)}$$

2. مندرجہ ذیل کی عبارتوں کو  $\log N$  کی شکل میں ظاہر کیجیے۔ اور ان کی قدریں معلوم کیجیے۔

$$3 \log_{64} 4 \text{ (iii)} \quad \log_2 16 - \log_2 2 \text{ (ii)} \quad \log 2 + \log 5 \text{ (i)}$$

$$\log_{10} 10 + 2 \log 3 - \log 2 \text{ (v)} \quad 2 \log 3 - 3 \log 2 \text{ (iv)}$$

3. مندرجہ ذیل کو  $x$  اور  $y$  کی رقوم میں ظاہر کیجیے اگر دیا گیا ہے کہ  $x = \log_2 3$  اور  $y = \log_2 5$

(i)  $\log_2 15$  (ii)  $\log_2 7.5$  (iii)  $\log_2 60$  (iv)  $\log_2 6750$

4. مندرجہ ذیل کو پھیلائیے۔

(i)  $\log 10000$  (ii)  $\log\left(\frac{128}{625}\right)$  (iii)  $\log x^2 y^3 z^4$  (iv)  $\log \frac{p^2 q^3}{r}$  (v)  $\log \sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

5. اگر  $x^2 + y^2 = 25xy$  ہو تو ثابت کیجیے کہ  $2 \log(x+y) = 3 \log 3 + \log x + \log y$

6. اگر  $10g\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ ، تب  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  کی قدر معلوم کیجیے؟

7. اگر  $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000$  ہو تب  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  کی قدر معلوم کیجیے؟

8. اگر  $2^{x+1} = 3^{1-x}$ ، تب  $x$  کی قدر معلوم کیجیے؟

9. کیا (i)  $\log 2$  ناطق ہے یا غیر ناطق؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے؟

(ii)  $\log 100$  ناطق ہے یا غیر ناطق؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے؟

مشق (اختیاری)

(جامع اکتساب کے لیے)

1- کیا عدد  $6^n$  ہندسہ 5 پر ختم ہوتا ہے۔ جبکہ  $n$  ایک طبعی عدد ہے۔ وجوہات بیان کیجیے۔

2- کیا  $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$  ایک مرکب عدد (غیر مفرد عدد) ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

3- ثابت کیجیے کہ  $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$  ایک غیر ناطق عدد ہے۔ جانچ کیجیے کہ  $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$  ناطق عدد یا غیر ناطق عدد ہے۔

4- اگر  $x^2 + y^2 = 6xy$  ہو تو ثابت کیجیے کہ  $2 \log(x+y) = \log x + \log y + 3 \log 2$

5-  $4^{2013}$  میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجیے اگر  $\log_{10} 2 = 0.3010$  ہو

نوٹ: کسی عدد کے لوگار تھم کے صحیح حصے اور اعشاری حصے سے متعلق اپنے استاد سے گفتگو کیجیے۔



تجویز کردہ منصوبہ کام:

اقلیدس الگورتھم

☆ رنگین ربن یا گرڈ پیپر کو استعمال کرتے ہوئے اقلیدس الگورتھم کی مدد سے HCF معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا



- 1- اقلیدس کا نظریہ تقسیم: دیے گئے مثبت صحیح اعداد  $a$  اور  $b$  کے لیے مکمل اعداد  $q$  اور  $r$  اس طرح ہیں کہ  $a = bq + r$ ،  $0 < r < b$  کو مطمئن کرتے ہیں۔
  - 2- حساب کا بنیادی مسئلہ یہ بتلاتا ہے کہ ہر مرکب عدد کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ اور یہ اجزائے ضربی کا عمل یکتا ہے۔ مفرد اعداد کی کوئی خاص ترتیب کے بغیر۔
  - 3- اگر  $P$  کوئی مفرد عدد ہے اور  $p$  عدد  $a^2$  کو تقسیم کرتا ہے جہاں  $a$  مثبت صحیح عدد ہے تب  $p$  کو تقسیم کرتا ہے۔
  - 4- فرض کیجیے کہ  $x$  ایک ناطق عدد ہے جس کا اعشاری پھیلاؤ مختتم ہے۔ تب ہم  $x$  کو  $\frac{p}{q}$  کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں جہاں  $p$  اور  $q$  ہم مفرد اعداد ہیں اور  $q$  کے مفرد اجزائے ضربی  $2^n 5^m$  کی شکل میں ہیں۔ جہاں  $m$  اور  $n$  مثبت صحیح اعداد ہیں۔
  - 5- فرض کیجیے کہ  $x = \frac{p}{q}$  ایک ناطق عدد ہے اس طرح سے کہ  $q$  کے مفرد اجزائے ضربی  $2^n 5^m$  کی شکل میں ہیں جہاں  $n$  اور  $m$  مثبت صحیح اعداد ہیں۔ تب  $x$  اعشاری پھیلاؤ رکھتا ہے جو مختتم ہے۔
  - 6- فرض کیجیے کہ  $x = \frac{p}{q}$  ایک ناطق عدد ہے اس طرح سے کہ  $q$  کے مفرد اجزائے ضربی  $2^n 5^m$  کی شکل میں نہیں ہے جہاں  $n$  اور  $m$  مثبت صحیح اعداد ہیں تب  $x$  اعشاری پھیلاؤ رکھتا ہے جو غیر مختتم اور تکراری ہے۔
  - 7- اگر  $a^n = x$  ہو تو  $\log_a x = n$  جہاں  $a$  اور  $x$  مثبت اعداد ہیں اور  $a \neq 0$  کے
  - 8- لوگارٹھم کے قوانین
- (i)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
  - (ii)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
  - (iii)  $\log_a x^m = m \log_a x$
- 9- لوگارٹھم کا استعمال شعبے انجینئرنگ، سائنس، تجارت اور معاشیات میں ہوتا ہے۔

# سٹس Sets

## باب 2

### تمہید 2.1

آپ ایک شخص کو کس طرح بیان کر سکتے ہیں جبکہ آپ کو ایسا کرنے کے لیے کہا گیا ہے؟ آئیے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔  
رامانجن علم ہندسہ میں دلچسپی رکھنے والا ریاضی داں تھا۔

مولانا حسرت موہانی اردو کے شاعر تھے اور مجاہد آزادی بھی تھے۔

البرٹ آئنسٹائن جرمن طبیعیات داں تھا، موسیقی اس کا شوق تھا۔

مریم مرزا خانم واحد خاتون ریاضی داں تھی جس نے ریاضی میں میڈل جیتا

ہم افراد کی درجہ بندی ان کی مخصوص خصوصیت اور دلچسپی کی بناء پر کرتے ہیں۔ تب ہمیں بہت زیادہ گروپ حاصل ہوتے ہیں۔ لوگ اپنے اطراف کی دنیا کو ان کے ماحول اور ان کے رشتوں کو سمجھنے کے لیے درجہ بندی کرتے ہیں۔ لائبریری میں کتابیں مضمون واری ترتیب دی جاتی ہیں تاکہ مطلوبہ کتاب آسانی سے مل جائے۔ کیمیا میں عناصر کو درجہ بندی گروپ اور دور میں کی گئی ہے۔ آپ کی جماعت دہم کا نصاب مختلف عنوانات کے تحت 14 باب میں تقسیم کیا گیا ہے۔

**ڈینٹل فارمولہ**

غور کیجیے کہ انسانی دانت کو ان کے فعل کے لحاظ سے چار اقسام میں تقسیم کیا گیا ہے۔

(i) اگلے دانت (ii) نوکیلے دانت  
(iii) پیش داڑھ (iv) داڑھ

دانتوں کا ضابطہ دراصل ایک ربع میں پائے جانے والے قاطع دانت، کچلی پیش داڑھ اور داڑھ ہیں اس طرح ہم انسانی دانتوں کے ضابطہ کو 2,12,2,3 لکھتے ہیں۔

وسطی اگلا دانت  
طرفی اگلا دانت  
نوکیلا دانت  
پہلا پیش داڑھ  
دوسرا پیش داڑھ  
پہلا داڑھ  
دوسرا داڑھ  
تیسرا داڑھ

تیسرا داڑھ  
دوسرا داڑھ  
پہلا داڑھ  
دوسرا پیش داڑھ  
پہلا پیش داڑھ  
نوکیلا دانت  
طرفی اگلا دانت  
وسطی اگلا دانت

ریاضی دوسروں سے مختلف نہیں ہے۔ اس میں اشیا کے با معنی گروپ جمع کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

ریاضی میں اشیا کی مشترک خصوصیات ہوتی ہیں تاکہ اس کو واحد اشیا کا مجموعہ لیا جائے۔

ریاضی میں استعمال ہونے والے عام اعداد کے گروپ یہ ہیں۔

N= طبعی اعداد 1,2,3,4..... کا کلکشن

W= مکمل اعداد 0,1,2,3..... کا کلکشن

Z یا I= صحیح اعداد  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ ..... کا کلکشن

Q= ناطق اعداد کا کلکشن

یعنی دو اعداد جن کو  $\frac{P}{q}$  کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں p, q صحیح اعداد ہیں اور  $q \neq 0$

(یعنی ایسے اعداد جن کا اعشاری پھیلاؤ ہو) حقیقی اعداد کا کلکشن R=

یہ کیجیے



مندرجہ ذیل مجموعے میں پائی جانے والی ”مشترک خاصیت“ کی شناخت کیجیے اور لکھیے؟

(i) 2,4,6,8 (ii) 2,3,5,7,11,... (iii) 1,4,9,16,...

(iv) جنوری، فروری، مارچ، اپریل،۔۔۔ (v) انگوٹھا، انگشت شہادت، درمیانی انگلی، چوتھی انگلی، چھوٹی انگلی۔۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



مندرجہ ذیل مجموعے کا مشاہدہ کیجیے تمام ممکنہ عمومی بیانات کو ان کی خصوصیات کی بنا پر تیار کیجیے۔

(i) 2,4,6,8,.... (ii) 1,4,9,16,.....

بعض اوقات ہم مخصوص گروپ کا مشاہدہ کرتے ہیں جن میں کچھ بھی مشترک خصوصیت نہیں ہوتی ہے جیسے 2، رحیم، جنوری لہذا یہاں کچھ وجوہات ہوتی ہیں گروپ بنانے کے لئے مگر یہاں ان میں کچھ بھی مشترک خصوصیت نہیں ہے۔ یقیناً یہ گروپ میں صرف تین اشیا ہیں ہم جانتے ہیں دراصل یہ اشیا ہیں بالفاظ دیگر یہ اشیا ”خوش معروف“ کہلاتے ہیں۔


## 2.2 سٹ SET

سٹ اشیاء کا خوش معروف مجموعہ ہے۔ سٹ میں موجود اشیاء ان کے ”عناصر“ کہلاتے ہیں۔ سٹ کو { سے ظاہر کیا جاتا ہے اس کے عناصر کو ، ، کا استعمال کرتے ہوئے علیحدہ کرتے ہیں مشترک اصول سٹ کے عناصر کا تعین کرتا ہے۔

مثال کے طور پر جب ہم پہلے پانچ مفرد اعداد کا سٹ لکھنا چاہتے ہیں۔ اسکو {2,3,5,7,11} کی طرح لکھا جاتا ہے اور قاطع دانت کا سٹ = { درمیانی قاطع دانت، جانبی قاطع دانت }

## 2.2.1 سٹ کا فہرستی طریقہ اور سٹ ساز شکل (Roster Form and Set Builder Form)

یہ کیجیے



مندرجہ ذیل سٹس لکھیے۔

- (1) پہلے پانچ مثبت صحیح اعداد کا سٹ
- (2) 100 سے بڑے اور 125 سے کم تمام 5 کے ضعف کا سٹ
- (3) پہلے پانچ مکعبی اعداد کا سٹ
- (4) رامانجن اعداد میں پائے جانے والے ہندسوں کا سٹ

سٹ کا طویل جملوں میں اظہار ایک مشکل عمل ہے اس لیے عموماً سٹ کو انگریزی کے بڑے حروف تہجی A,B,C..... سے ظاہر کرتے ہیں۔ مثلاً M: ہمارے دانتوں میں داڑھ کا سٹ ہے اس سٹ کو { تیسرا داڑھ، دوسرا داڑھ، پہلا داڑھ } سے ظاہر کرتے ہیں۔ آئیے دوسری مثال پر غور کریں۔ Q ایسے چار ضلعی کا سٹ ہے جس میں کم از کم دو ضلعے مساوی ہیں۔ تب اس سٹ کو ہم اس طرح لکھتے ہیں۔

{ برچھی کا اگلا سرا (Dart)، مساوی الساقین مخرف، پینگ، متوازی اضلاع، معین، مستطیل، مربع } Q =

یہاں ہم نے عناصر کو فہرست کی شکل میں لکھا ہے اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ سٹ کا فہرستی طریقہ Roster Form ہے۔ آئیے مندرجہ بالا دو مثالوں میں عناصر کے تعلق اور ان کے اظہار کے بارے میں بحث کریں گے۔ فرض کرو کہ اگر ہم کہتے ہیں کہ دوسرا داڑھ، داڑھ کے سٹ سے تعلق رکھتا ہے اس کو ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔ ”  $M \in$  دوسرا داڑھ“ اور ہم اس کو اس طرح پڑھتے ہیں۔ دوسرا داڑھ سٹ M سے تعلق رکھتا ہے“

کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ”  $M \in$  معین“ آپ اس کو کس طرح پڑھیں گے؟

اوپری مثال میں کیا مربع سٹ M سے تعلق رکھتا ہے۔ تب آپ اسکو کس طرح ظاہر کریں گے؟ جب ہم کہتے ہیں کہ ”مربع سٹ M

میں نہیں ہے“ اس کو ہم ”  $M \notin$  مربع“ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کو اس طرح پڑھا جاتا ہے ”مربع سٹ M سے تعلق نہیں رکھتا ہے۔“

پچھلی جماعتوں میں ہم نے طبعی اعداد کے سٹ کو 'N'، صحیح اعداد کے سٹ کو 'Z'، ناطق اعداد کے سٹ کو 'Q' سے اور حقیقی اعداد کے سٹ کو 'R' سے ظاہر کرنے کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل میں چند اعداد دیے گئے ہیں دیے گئے اعداد اعداد کے کس سٹ سے تعلق رکھتے اور کس سٹس سے تعلق نہیں رکھتے ہیں طے کیجیے اور ان کو صحیح علامتوں سے ظاہر کیجیے

$\sqrt{1.3}$ (v)	$\frac{5}{6}$ (iv)	-4 (iii)	0 (ii)	1 (i)
$\sqrt{-4}$ (x)	$\pi$ (ix)	0.03 (viii)	$\log 2$ (vii)	$\sqrt{2}$ (vi)

سوچیے اور تباہ خیال کیجیے

کیا آپ ناطق اعداد کے سٹ کو فہرستی طریقہ میں لکھ سکتے ہیں؟

آپ کے سابقہ معلومات سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ ناطق اعداد کو فہرستی طریقہ میں ظاہر کرنا ایک مشکل ترین عمل ہے۔ اور ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں کہ ناطق اعداد کی شکل  $\frac{p}{q}$  ہوتی ہے (جہاں پر  $q \neq 0$  اور  $q$  صحیح اعداد ہوتے ہیں)۔ جب کبھی ہم کسی سٹ کو عناصر کی مشترک خصوصیت بیان کرتے ہوئے لکھتے ہیں اس طریقہ کار کو 'سٹ ساز شکل' کہتے ہیں۔ سٹ ساز شکل کو ایک مخصوص قاعدہ کے تحت ظاہر کیا جاتا ہے۔

آئیے اب ہم ایک مثال کا مشاہدہ کرتے ہوئے غور کریں۔  
فرض کیجیے کہ A، 20 سے چھوٹے 3 کے اضعاف کا سٹ ہے تب  $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$   
اور یہ سٹ A کا فہرستی طریقہ ہے۔ ہم سٹ 'A' کو سٹ ساز شکل میں اس طرح لکھتے ہیں  $A = \{x : x < 20 \text{ کا اضعاف ہے } 3x\}$  اور اسکو اس طرح پڑھتے ہیں 'A' عناصر کا سٹ ہے اس طرح کہ x تین کے اضعاف ہیں اور x چھوٹا ہے 20 سے۔

$$A = \{x : x < 20 \text{ اور } x \text{ تین کے اضعاف ہیں}\}$$

اس طرح کہ تمام x سٹ

اور ناطق اعداد کے سٹ کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔  $Q = \{x : x = \frac{p}{q}, q \neq 0 \text{ اور } p, q \text{ صحیح اعداد ہیں}\}$

نوٹ: (i) روسٹر فارم یا فہرستی شکل میں عناصر کو ترتیب میں درج کرنا ضروری نہیں ہے جیسے مثال: 1: کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں  $\{1, 7, 2, 9\}$  یا  $\{1, 2, 7, 9\}$

(ii) فہرستی طریقہ میں عناصر کو درج کرنے کے دوران عنصر کو دہرایا نہ جائے مثال کے طور پر لفظ "SCHOOL" کے حرف کا سٹ اس طرح ہوگا۔  $\{s, c, h, o, o, l\}$  اور  $\{s, c, h, o, l\}$  نہیں ہونا چاہیے۔  
اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ سٹ کے عناصر منفرد ہوتے ہیں۔ یعنی دہرائے نہیں جاتے ہیں۔



آئیے چند سٹس کا فہرستی طریقہ اور سٹس ساز شکل کا مشاہدہ کریں۔

فہرستی شکل	سٹس ساز شکل
$V = \{a, e, i, o, u\}$	$V = \{x : x \text{ انگریزی زبان کے حروف علت ہے: } x\}$
$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$A = \{x : -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}$
$B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$	$B = \left\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\right\}$
$C = \{2, 5, 10, 17\}$	$C = \{x : x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$

یہ کیجیے



1- مندرجہ ذیل سٹس کے عناصر لکھئے۔

- (i)  $G = \{20\}$  کے تمام اجزائے ضربی
- (ii)  $F = \{\text{اعداد } 17 \text{ اور } 61 \text{ کے درمیان } 4 \text{ کے اضعاف جو عدد } 7 \text{ سے مکمل طور پر تقسیم ہوتے ہیں}\}$
- (iii)  $S = \{x : x \text{ لفظ 'MADAM' کے حروف ہیں}\}$
- (iv)  $P = \{x : 3.5 \text{ اور } 6.7 \text{ کے درمیان مکمل عدد ہے}\}$

2- مندرجہ ذیل سٹس کو ”فہرستی شکل“ میں لکھئے۔

- (i) B سال کے 30 دن رکھنے والے مہینوں کا سٹ ہے۔
- (ii) P 10 سے چھوٹے تمام منفرد اعداد کا سٹ ہے۔
- (iii) X قوس قزح میں پائے جانے والے تمام رنگوں کا سٹ ہے۔

3- A عدد 12 کے اجزائے ضربی کا سٹ ہے۔ مندرجہ ذیل میں کونسا A کا عنصر نہیں ہے۔

- (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 12

کوشش کیجیے



1- آپ اپنے پسند کے ایسے سٹس بنائیے جن میں الجبرائی و جیومیٹرائی تصورات ہوں

2- فہرستی طریقہ کو سٹس ساز شکل سے جوڑ لگائیے۔

- (i)  $\{p, r, i, n, c, a, l\}$  (a)  $\{x : x \text{ ایک مثبت صحیح عدد جو } 18 \text{ کا قاسم ہے}\}$
- (ii)  $\{0\}$  (b)  $\{x : x^2 - 9 = 0 \text{ اور } x \text{ صحیح عدد ہے}\}$
- (iii)  $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$  (c)  $\{x : x + 1 = 1 \text{ اور } x \text{ صحیح عدد ہے}\}$
- (iv)  $\{3, -3\}$  (d)  $\{x : x \text{ لفظ PRINCIPAL کا ایک حرف ہے}\}$

## مشق - 2.1:



- 1- مندرجہ ذیل میں کونسے سٹس ہیں؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔
- (i) حرف 'J' سے شروع ہونے والے سال کے تمام مہینوں کا کلکشن  
(ii) ہندوستان کے بہت ہی ذہین دس مصنفوں کا کلکشن  
(iii) دنیا کے گیارہ بہترین کرکٹ کے بلے بازوں کا کلکشن  
(iv) آپ کی جماعت کے تمام لڑکوں کا کلکشن  
(v) تمام جفت صحیح اعداد کا کلکشن
- 2- اگر  $A = \{0, 2, 4, 6\}$ ،  $B = \{3, 5, 7\}$  اور  $C = \{p, q, r\}$  تب خالی جگہوں کو مناسب علامت  $\in$  یا  $\notin$  سے پُر کیجیے۔
- (i)  $0 \dots A$  (ii)  $3 \dots C$  (iii)  $4 \dots B$   
(iv)  $8 \dots A$  (v)  $p \dots C$  (vi)  $7 \dots B$
- 3- مندرجہ ذیل بیانات کو علامتوں کے استعمال سے ظاہر کیجیے۔
- (i) عنصر 'x' سٹ A سے تعلق نہیں رکھتا ہے۔  
(ii) 'd' سٹ B کا ایک عنصر ہے۔  
(iii) '1' طبعی اعداد کے سٹ N سے تعلق رکھتا ہے۔  
(iv) '8' مفرد اعداد کے سٹ P سے تعلق نہیں رکھتا ہے۔
- 4- مندرجہ ذیل بیانات آیا صادق ہیں یا کاذب ہیں؟ بیان کیجیے۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔
- (i) مفرد اعداد کا سٹ  $5 \notin$   
(ii)  $S = \{5, 6, 7\}$  سے ہمیں  $8 \in S$  حاصل ہوتا ہے۔  
(iii) جہاں W مکمل اعداد کا سٹ ہے  $5 \notin W$   
(iv) جہاں Z صحیح اعداد کا سٹ ہے  $\frac{8}{11} \in Z$
- 5- مندرجہ ذیل سٹس کو فہرستی شکل میں لکھئے۔
- (i)  $B = \{x \mid x \text{ سے چھوٹا طبعی عدد ہے}\}$   
(ii)  $C = \{x \mid x \text{ دو ہندسی طبعی عدد ہے جس کے ہندسوں کا مجموعہ '8' ہے}\}$   
(iii)  $D = \{x \mid x \text{ مفرد عدد ہے جو 60 کا قاسم ہے}\}$   
(iv)  $E = \{x \mid x \text{ لفظ BETTER کے تمام حروف ہے}\}$
- 6- مندرجہ ذیل سٹس کو سٹ ساز شکل میں لکھئے۔
- (i)  $\{3, 6, 9, 12\}$  (ii)  $\{2, 4, 8, 16, 32\}$   
(iii)  $\{5, 25, 125, 625\}$  (iv)  $\{1, 4, 9, 25, \dots, 100\}$
- 7- مندرجہ ذیل سٹس کے عناصر کو فہرستی شکل میں لکھئے۔
- (i)  $A = \{x \mid x \text{ طبعی عدد ہے جو 50 سے بڑا ہے لیکن 100 سے چھوٹا ہے}\}$   
(ii)  $B = \{x \mid x \text{ ایک صحیح عدد ہے } x^2 = 4\}$   
(iii)  $D = \{x \mid x \text{ لفظ 'LOYAL' کا حرف ہے}\}$

8- فہرستی شکل کو سٹس ساز شکل سے جوڑیئے۔

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| (i) {1, 2, 3, 6}               | (a) {x: 'x' مفرد عدد ہے اور 6 کا قاسم ہے}           |
| (ii) {2, 3}                    | (b) {x: 'x' ایک طاق طبعی عدد ہے اور 10 سے چھوٹا ہے} |
| (iii) {m, a, t, h, e, i, c, s} | (c) {x: 'x' طبعی عدد ہے اور عدد 6 کو تقسیم کرتا ہے} |
| (iv) {1, 3, 5, 7, 9}           | (d) {x: 'x' لفظ "MATHEMATICS" کا حرف ہے}            |

### 2.3 خالی سٹس (EMPTY SET)

مندرجہ ذیل سٹس کی مثالوں پر غور کیجئے۔

$$A = \{x: '1' \text{ سے چھوٹا طبعی عدد ہے} : x\} \quad (i)$$

$$D = \{x: '2' \text{ سے قابل تقسیم طاق عدد ہے} : x\} \quad (ii)$$

سٹس A اور سٹس D میں کتنے عناصر ہیں؟ ہم جانتے ہیں کہ '1' سے چھوٹا کوئی طبعی عدد نہیں ہے لہذا سٹس A میں عناصر نہیں ہیں۔ یا ہم کہتے ہیں کہ A ایک خالی سٹس ہے اسی طرح کوئی طاق اعداد نہیں ہیں جو 2 قابل تقسیم ہیں۔ لہذا D بھی ایک خالی سٹس ہے۔ ایک سٹس جس میں کوئی عنصر نہ ہو ایک خالی سٹس Null set یا Void set کہلاتا ہے۔ خالی سٹس کو علامات  $\phi$  یا  $\{\}$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

یہاں خالی سٹس کی مزید مثالیں ہیں۔

$$A = \{x: \text{ایک طبعی عدد ہے}, 1 < x < 2\} \quad (i)$$

$$B = \{x: \text{ایک ناطق عدد ہے}, x^2 - 2 = 0\} \quad (ii)$$

$$D = \{x: \text{طاق ہے}, x^2 = 4\} \quad (iii)$$

**نوٹ:**  $\phi$  اور  $\{0\}$  دو مختلف سٹس ہیں۔  $\{0\}$  ایک سٹس ہے جس کا صرف ایک عنصر '0' ہے جبکہ  $\{\}$  ایک خالی سٹس ہے۔

### 2.4 آفاقی سٹس اور تحت سٹس: (Universal Set & Sub Set)

آئیے دانتوں کے سٹس پر غور کریں۔ جس پر ہم نے اس باب کے ابتداء میں مباحثہ کیا ہے

آپ دانتوں کے مکمل سٹس کو چار سٹس میں درجہ بندی کر چکے ہیں جن کے نام یہ ہیں قاطع دانت کا سٹس، کچلیاں کا سٹس، پیش داڑھ کا سٹس

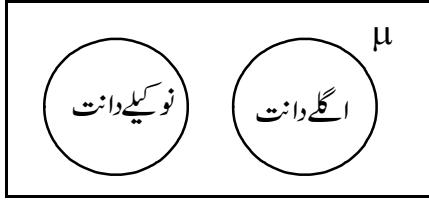
اور داڑھ کا سٹس۔

دانت کا سٹس

کچلیاں	قاطع دانت
پیش داڑھ	داڑھ

لیکن کیا داڑھ کا سٹس بھی کل دانت کے سٹس کا عنصر ہے یا نہیں؟

یہاں پر کل دانتوں کا سٹس دیے گئے چار سٹس کے لیے "آفاقی سٹس" ہے۔



غور کیجیے دانتوں کے آفاقی سٹ اور قاطع دانت کے سٹ؛ نکلیاں کے سٹ یہ کو متصلہ شکل میں ظاہر کیا گیا ہے  
 شکل پر غور کیجیے شکل میں خالی حصہ کس کو ظاہر کرتا ہے؟ آئیے اب ہم مزید آفاقی سٹ کی مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

- (i) اگر ہم اپنی ریاست تلنگانہ کے لوگوں کے مختلف گروپس کے بارے میں معلومات حاصل کرنا چاہتے ہیں (جیسے ان کی آمدنی، یا کام یا ذات) جہاں پر تمام تلنگانہ کے لوگوں کا سٹ آفاقی سٹ ہوگا۔  
 (ii) اگر ہم ہمارے ملک کے لوگوں کے مختلف گروپس کے بارے میں معلومات حاصل کرنا چاہتے ہیں تب ہندوستان کے تمام لوگوں کا سٹ آفاقی سٹ ہوگا۔

آفاقی سٹ کو عموماً 'U' سے ظاہر کرتے ہیں۔ اور بعض اوقات 'U' سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ آفاقی سٹ کو شکل میں عام طور پر مستطیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

1. جب ہم کہتے ہیں کہ "اگر  $x < 3$  تب  $x < 4$ " اس بیان کو ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔ " $x < 3 \Rightarrow x < 4$ "  
 2. جب ہم کہتے ہیں کہ " $x - 2 = 5$  اگر اور صرف اگر  $x = 7$ " اس بیان کو ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں  $x - 2 = 5 \Leftrightarrow x = 7$

آئیے طبعی اعداد کے سٹ  $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  اور جفت اعداد کا سٹ جو ان ہی طبعی اعداد میں موجود ہیں غور کریں تب  $N$  طبعی اعداد کا سٹ جفت اعداد کے سٹ کے لیے آفاقی سٹ ہوتا ہے۔ کیا طاق اعداد کے سٹ کے لیے بھی طبعی  $N$  اعداد کا سٹ آفاقی سٹ ہے۔

آئیے سٹ  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  پر غور کریں سٹ  $A$  کے عناصر سے جتنے چاہے عناصر لے کر آپ کتنے سیٹس بنا سکتے ہو بنائے؟  
 اب  $\{1\}$ ،  $\{2\}$ ،  $\{3\}$ ،  $\{1, 2\}$ ،  $\{2, 3\}$ ،  $\{1, 3\}$  اور  $\{1, 2, 3\}$  آپ کے بنائے ہوئے سیٹس ہیں کیا آپ کہنا چاہیے مزید چند سیٹس تشکیل دیے سکتے ہیں؟ تب ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ تمام سیٹس سٹ  $A$  کے تحت سیٹس ہیں۔ اگر ہم  $\{1, 2\}$  کو سٹ  $A$  کا تحت کہنا چاہیے ہیں تو اس کو ہم اس طرح  $\{1, 2\} \subset A$  لکھتے ہیں جب ہم  $A$  کے تحت سیٹس پر غور کرتے ہیں ہمیں کہنا چاہیے کہ  $\{1, 2, 3\}$  بھی سٹ  $A$  کا تحت ہوتا ہے۔  
 اگر سٹ  $A$  کے تمام عناصر سٹ  $B$  کے عناصر ہوں تو تب ہم کہتے ہیں کہ سٹ  $A$  کا تحت سٹ ہے  $B$ ۔ اور اس کو ہم  $A \subseteq B$  ظاہر کرتے ہیں یعنی  $B \subseteq A$  سے مراد "اگر اور صرف اگر سٹ  $A$  کا ہر ایک عنصر سٹ  $B$  کا بھی عنصر ہوتا ہے۔

تب ہم اس طرح لکھتے ہیں۔  $A \subseteq B \Leftrightarrow a \in A \Rightarrow a \in B$  جہاں پر  $A$  اور  $B$  دو سیٹس ہیں۔

آئیے اب ہم حقیقی اعداد کے سٹ  $R$  پر غور کریں جس کے کئی تحت سیٹس ہوتے ہیں۔

مثلاً:  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  طبعی اعداد کا سٹ

$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  مکمل اعداد کا سٹ

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  صحیح اعداد کا سٹ

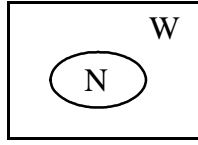
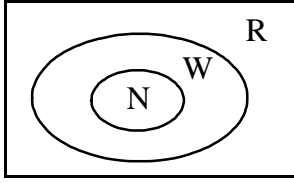
ناطق اعداد کا سٹ  $Q = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$

غیر ناطق اعداد کا سٹ  $Q$  تمام حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے جس میں ناطق اعداد نہیں ہوتے ہیں۔ تب  $x \notin Q$  اور

$Q^1 = \{x : x \in R\}$  یعنی تمام حقیقی اعداد جو ناطق نہیں ہوتے مثلاً  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{5}$  اور  $\pi$

اسی طرح، طبعی اعداد کا سٹ  $N$ ، مکمل اعداد کے سٹ  $W$  کا تحت سٹ ہے۔ ہم اس کو اس طرح لکھتے ہیں  $N \subset W$  مزید مکمل اعداد

کا سٹ  $W$  حقیقی اعداد  $R$  کا تحت سٹ ہے۔



$N \subset W$  اور  $W \subset R$  یعنی

$$\Rightarrow N \subset W \subset R$$

ان تحت سٹس کے درمیان چند ظاہری رشتے یہ ہیں

$$N \not\subset Q^1 \text{ اور } N \subset Z \subset Q, Q \subset R, Q^1 \subset R,$$

حروف علت کے سٹ  $V = \{a, e, i, o, u\}$  پر غور کیجیے اور انگریزی کے تمام حروف کے سٹ  $A = \{a, b, c, d, \dots, z\}$  پر غور کیجیے، ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ سٹ  $V$  کیہر ایک عنصر سٹ  $A$  کا بھی عنصر ہے۔ لیکن سٹ  $A$  کے چند عنصر ایسے ہیں جو سٹ  $V$  سے تعلق نہیں رکھتے ہیں اس صورت میں سٹ  $V$  سٹ  $A$  کا واجب تحت سٹ کہلاتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں  $V \subset A$  جہاں پر اگر  $a \in V$  تب  $a \in A$  اس کو  $V \subset A$  کی طرح ظاہر کیا جاتا ہے اور  $V$  کا واجب تحت سٹ ہے۔  $V$  کا پڑھا جاتا ہے۔

یہ کیجیے



$$F = \{ \}. \quad C = \{1, 2, 3, 4, 7\}, \quad B = \{2, 4\}, \quad A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad -1$$

خالی جگہوں کو علامات  $\subset$  یا  $\not\subset$  سے پُر کیجیے

(i)  $A \dots B$       (ii)  $C \dots A$       (iii)  $B \dots A$

(iv)  $A \dots C$       (v)  $B \dots C$       (vi)  $\phi \dots B$

2- مندرجہ ذیل میں کونسا بیان صادق ہے؟ وضاحت کیجیے۔

(i)  $\{ \} = \phi$       (ii)  $\phi = 0$       (iii)  $0 = \{ 0 \}$

کوشش کیجیے



1-  $A = \{ \text{چار ضلعی کاسٹ} \}$ ،  $B = \{ \text{مربع، مستطیل، منحرف، معین} \}$ ۔ بیان کیجیے کہ کیا  $A \subset B$  یا  $B \subset A$  آپ کے جواب کی تصدیق کیجیے۔

2- اگر  $A = \{a, b, c, d\}$  تب  $A$  کے کتنے تحت سٹس ہوتے ہیں؟

(A) 5      (B) 6      (C) 16      (D) 65

3-  $P$  کے اجزائے ضربی کاسٹ ہے 'Q' کے اجزائے ضربی کاسٹ ہے۔ اور 'R' کے اجزائے ضربی کاسٹ ہے۔

مندرجہ ذیل میں کونسا ایک کا ذب ہے؟

(A)  $P \subset Q$       (B)  $Q \subset R$       (C)  $R \subset P$       (D)  $P \subset R$

4-  $A$  سے چھوٹے مفرد اعداد کاسٹ ہے 'B' سے کم طاق اعداد کاسٹ ہے۔ اور 'C' سے کم جفت اعداد کاسٹ ہے۔ مندرجہ

ذیل میں کون سے بیان صادق ہیں؟

(i)  $A \subset B$       (ii)  $B \subset A$       (iii)  $A \subset C$

(iv)  $C \subset A$       (v)  $B \subset C$       (vi)  $X \subset A$



آئیے اب ہم تحت سٹ کی خصوصیت کا مشاہدہ کریں

فرض کرو کہ  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore A \subset B$  تب A کے تمام عناصر B میں موجود ہیں

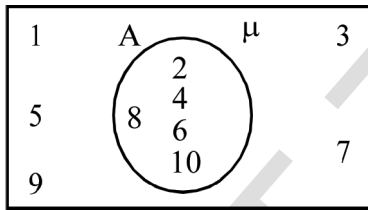
$\therefore B \subset C$  اور B کے تمام عناصر C میں موجود ہیں

$\therefore A \subset C$  A کے تمام عناصر C میں ہیں

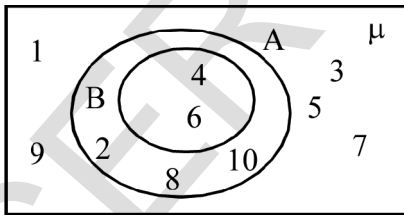
اس طرح  $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

## 2.5 وین اشکال Venn Diagrams

ہم سٹس کو اشکال میں ظاہر کرنے کے طریقہ کار کے بارے میں جان چکے ہیں۔ آئیے اب ہم وین پولر (Venn-Euler) ڈائیگرام یا وین ڈائیگرام کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے کہ سٹس کے درمیان موجود رشتوں کو ظاہر کرنے کا طریقہ ہے۔ عام طور پر یہ ڈائیگرام (اشکال) مستطیل اور بند منحنیوں یعنی دائروں پر مشتمل ہوتے ہیں۔ جیسا کہ اس سبق کی ابتداء میں بیان کیا گیا کہ آفاقی سٹ کو عام طور پر مستطیل سے ظاہر کرتے ہیں۔



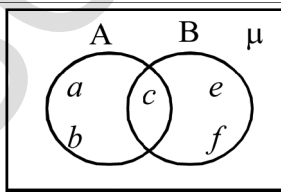
(i) غور کیجیے کہ  $\mu = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  ایک آفاقی سٹ ہے اور جس کا تحت سٹ  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  ہے تب ان سٹس کی وین اشکال اس طرح ہوگی۔



(ii)  $\mu = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  آفاقی سٹ ہے۔

جس کے تحت سٹس  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  اور  $B = \{4, 6\}$  ہیں

اور  $B \subset A$  تب وین اشکال اس طرح ہوگی۔



(iii) فرض کرو کہ  $A = \{a, b, c, d\}$  اور  $B = \{c, d, e, f\}$  تب ہم ان سٹس کی وضاحت

وین اشکال کی مدد سے اس طرح کر سکتے ہیں۔

## 2.6 سٹس کے بنیادی اعمال Basic Operations on Sets

ہم جانتے ہیں کہ حساب میں اعداد کے بنیادی اعمال جیسے جمع، عمل تفریق اور عمل ضرب ہیں۔ اسی طرح سٹس کے لیے بنیادی اعمال جیسے اجماع، تقاطع اور سٹس کا فرق لیے جاتے ہیں۔

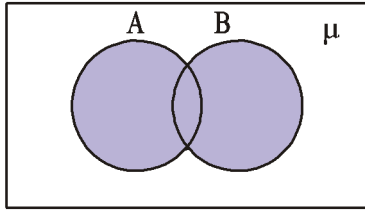
### 2.6.1 سٹس کا اجماع (Union of Sets):

فرض کیجیے کہ A، آپ کی جماعت کے وہ طلباء سٹ ہے جو منگل کو غیر حاضر تھے اور B آپ کی جماعت کے وہ طلباء کا سٹ جو چہار شنبہ کو غیر حاضر تھے۔ تب

$$A = \{\text{مخوین، اریب، اسرار}\}$$

$$B = \{\text{اریب، نصرت، اطہر}\}$$

اب ہم K معلوم کرنا چاہتے ہیں جو ایسے طلباء کا سٹ جو یا تو منگل کو غیر حاضر تھے یا چہار شنبہ کو غیر حاضر تھے۔ تب کیا  $K \in$  مخوین



$$K \in \text{اریب} \in K, \text{اسرار} \in K, \text{نصرت} \in K, \text{اطہر} \in K, \text{انجم}$$

مخوین، اریب، اسرار، نصرت، اطہر یہ تمام سٹ K سے تعلق رکھتے ہیں لیکن انجم K سے تعلق نہیں رکھتی ہے۔

$$K = \{\text{مخوین، اریب، اسرار، نصرت، اطہر}\}$$

یہاں K، سٹس A اور B کا اجماع کہلاتا ہے۔ A اور B کا اجماع ایک سٹ ہے جس کے ارکان A اور B کے تمام عناصر پر مشتمل ہے۔ اجماع کو ظاہر کرنے کے لیے علامت  $\cup$  استعمال کی جاتی ہے۔ اور علامتی طور پر ہم اس کو اس طرح  $A \cup B$  لکھتے ہیں اور اس طرح پڑھا

جاتا ہے 'A اجماع B' یا 'A cup B' (A کپ B)

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

**مثال 1:** فرض کرو کہ  $A = \{2, 5, 6, 8\}$  اور  $B = \{5, 7, 9, 1\}$  تب  $A \cup B$  معلوم کیجیے۔

$$A \cup B = \{2, 5, 6, 8\} \cup \{5, 7, 9, 1\}$$

$$= \{2, 5, 6, 8, 5, 7, 9, 1\}$$

$$= \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

نوٹ کیجیے کہ سٹ  $A \cup B$  سٹ لکھنے کے دوران ہم نے مشترک عنصر '5' کو صرف ایک مرتبہ لیا ہے۔

**مثال 2:** فرض کرو کہ اگر  $A = \{a, e, i, o, u\}$  اور  $B = \{a, i, u\}$  بتائیے کہ  $A \cup B = A$

$$A \cup B = \{a, e, i, o, u\} \cup \{a, i, u\}$$

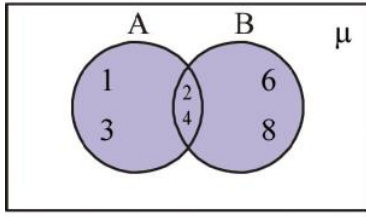
$$= \{a, e, i, o, u, a, i, u\}$$

$$= \{a, e, i, o, u\} = A$$

اس مثال سے اس بات کی وضاحت ہوتی ہے کہ سٹ A اور اس کے تحت سٹ B کا اجماع خود سٹ A ہوتا ہے۔

$$\text{یعنی اگر } B \subset A \text{ تب } A \cup B = A$$

مثال 3. اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  اور  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  تب  $A \cup B$  معلوم کیجیے۔



$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

حل:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  اور  $B = \{2, 4, 6, 8\}$

تب  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$

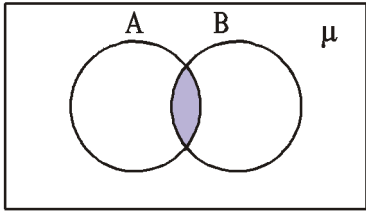
$$= \{1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 8\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

## 2.6.2: سٹس کا تقاطع (INTERSECTION OF SETS)

آئیے دوبارہ غیر حاضر طلباء کی مثال پر غور کرتے ہیں۔ اس بار ہم ایسا سٹ 'L' معلوم کرنا چاہتے ہیں جو طلباء منگل اور چہار شنبہ دونوں دن غیر حاضر رہے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔  $L = \{اریب\}$  یہاں سٹ 'L' سٹ 'A' اور سٹ 'B' کا تقاطع کہلاتا ہے۔

عام طور پر سٹ 'A' اور سٹ 'B' کا تقاطع 'A' تمام عناصر کا سٹ ہے جو سٹ 'A' اور 'B' میں مشترک طور پر ہوتے ہیں۔ یعنی وہ عناصر جو 'A' کے ممبر ہیں اور 'B' کے بھی ممبر ہیں۔ ہم تقاطع کو علامتی طور پر  $A \cap B$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ (A تقاطع B پڑھتے ہیں)۔



$$A \cap B$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ اور } x \in B\}$$

A اور B کا تقاطع کو وین ڈائیگرام میں سایہ دار حصہ سے ظاہر کہا جاتا ہے۔

مثال 4. اگر  $A = \{5, 6, 7, 8\}$  اور  $B = \{7, 8, 9, 10\}$  تب  $A \cap B$  معلوم کیجیے۔

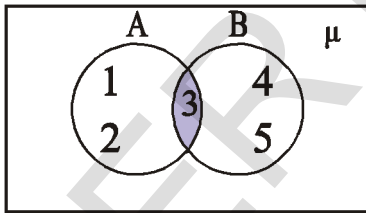
حل: سٹ 'A' اور سٹ 'B' کے مشترک عناصر 7 اور 8 ہیں

$$A \cap B = \{5, 6, 7, 8\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{7, 8\}$$

مثال 5: اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  اور  $B = \{3, 4, 5\}$  تب  $A \cap B$

کی وضاحت وین ڈائیگرام کے ذریعے کیجیے۔

حل:  $A \cap B$  کی وضاحت وین ڈائیگرام اس طرح کی جاسکتی ہے



$$A \cap B = \{3\}$$

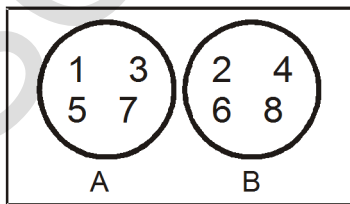
## غیر مشترک سٹس : Disjoint Sets

فرض کیجیے کہ  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  اور  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ۔ ہم دیکھتے

ہیں کہ A اور B میں کوئی مشترک عنصر نہیں ہے۔ اس طرح کہ سٹس غیر مشترک سٹس  $A \cap B = \phi$

کہلاتے ہیں۔ غیر مشترک سٹس کو وین ڈائیگرام کی مدد سے اس طرح ظاہر

کیا جاسکتا ہے۔



$$A \cap B = \phi$$

یہ کیجیے



- (i) فرض کرو کہ  $A = \{1, 3, 7, 8\}$  اور  $B = \{2, 4, 7, 9\}$  تب  $A \cap B$  معلوم کیجیے۔
- (ii) اگر  $A = \{6, 9, 11\}$ ،  $\phi = \{\}$  تب  $A \cup \phi$  اور  $\phi \cap A$  معلوم کیجیے۔
- (iii)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ،  $B = \{2, 3, 5, 7\}$  تب  $A \cap B$  معلوم کیجیے اور مزید بتلائیے کہ  $A \cap B = B$ ۔
- (iv) اگر  $A = \{4, 5, 6\}$ ،  $B = \{7, 8\}$  تب بتلائیے کہ  $A \cup B = B \cup A$ ۔

کوشش کیجیے



- 1-  $A$  اور  $B$  کے چند سٹ بنائیے اور ان کے عناصر اس طرح لیجیے کہ  $A$  اور  $B$  غیر مشترک ہوں۔
- 2- اگر  $A = \{2, 3, 5\}$ ،  $A \cup \phi$  اور  $\phi \cup A$  معلوم کیجیے اور ان کا تقابل کیجیے۔
- 3-  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ،  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  تب  $A \cup B$  اور  $A \cap B$  معلوم کیجیے؟ ان نتائج سے متعلق آپ کیا محسوس کرتے ہیں۔
- 4-  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ،  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  تب  $A$  تقاطع  $B$  معلوم کیجیے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے۔



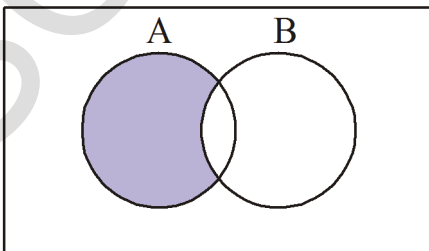
- 1- کوئی دو غیر مشترک سٹس کا تقاطع ایک خالی سٹ ہے اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

### 2.6.3 سٹس کا فرق (Difference of Sets)

فرض کرو کہ  $A$  10 چھوٹے طبعی اعداد کا سٹ ہے۔ اور  $B$  10 چھوٹے جفت اعداد کا سٹ ہے۔ اگر ہم 10 سے چھوٹے طاق اعداد کے سٹ پر غور کریں، تب اس سٹ کے عناصر سٹ  $A$  سے تعلق رکھتے ہیں جب کہ سٹ  $B$  سے نہیں۔ اس سٹ کو  $A - B$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور  $A$  تفریق  $B$  پڑھا جاتا ہے۔

$$\therefore A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

آئیے اب ہم سٹس کے فرق کی تعریف کریں۔



سٹس  $A$  اور  $B$  کا فرق دراصل وہ سٹ ہوتا ہے جس میں صرف  $A$  کے عناصر موجود ہوتے ہیں  $B$  کے نہیں۔ ہم  $A$  اور  $B$  کے فرق کو  $A - B$  ظاہر کرتے ہیں۔ اور اس کو اس طرح پڑھا جاتا ہے "A منہی B"۔

$$A - B = \{x : x \in A \text{ اور } x \notin B\}$$

**مثال - 6:** فرض کرو کہ  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  اور  $B = \{4, 5, 6, 7\}$  اور  $A - B$  اور  $B - A$  معلوم کیجیے۔

**حل:** دیا گیا ہے  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  اور  $B = \{4, 5, 6, 7\}$  صرف وہی عناصر لیے جائیں جو  $A$  میں ہوں لیکن  $B$  میں موجود نہ ہوں

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\therefore A - B = \{1, 2, 3\}$$

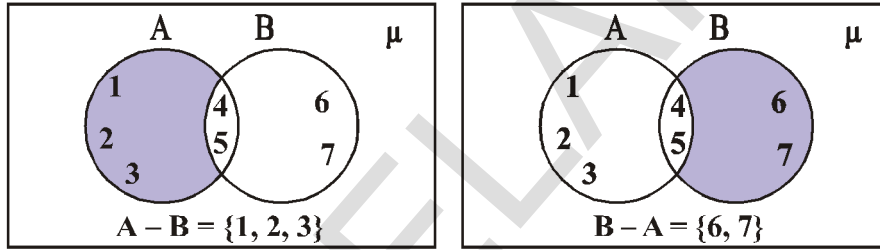
چونکہ  $A$  میں  $4$  اور  $5$  کے عناصر ہیں ان عناصر کو  $A - B$  کے سٹ میں نہیں لیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح  $B - A$  کے لیے صرف ان ہی عناصر کو

لینا چاہیے جو صرف  $B$  میں ہوں لیکن  $A$  میں نہیں

$$\therefore B - A = \{6, 7\} \quad (\text{A کے عناصر ہیں جن کو B سے نکال دیا گیا ہے})$$

$$\text{نوٹ: } A - B \neq B - A$$

ذیل میں  $A - B$  اور  $B - A$  کے وین ڈائیگرام دیے گئے ہیں



یہ کیجیے



1- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;  $B = \{4, 5, 6, 7\}$  اور  $A - B$  اور  $B - A$  معلوم کیجیے۔ کیا یہ دو مساوی ہیں۔

2- اگر  $V = \{a, e, i, o, u\}$  اور  $B = \{a, i, k, u\}$  اور  $V - B$  اور  $B - V$  معلوم کیجیے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے۔



$A - B$  اور  $B - A$  آپس میں غیر مشترک سٹس ہیں۔ اگر یہ بیان صادق ہے تب مشاہدے کے لیے مزید چند مثالیں دیجیے

مشق 2.2



1- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  اور  $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$  اور  $A \cap B$  اور  $B \cap A$  معلوم کیجیے۔ کیا یہ مساوی سٹس ہیں

2-  $A \cap A$  اور  $A \cap \phi$  اور  $A \cap A$  معلوم کیجیے اور اس پر تبصرہ کیجیے۔

3- اگر  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  اور  $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$  اور  $A - B$  اور  $B - A$  معلوم کیجیے۔

4- اگر  $A$  اور  $B$  دو سٹس اس طرح  $A \subset B$  اور  $A \cup B$  کیا ہوگا؟

5- اگر  $A = \{x: \text{ایک طبعی عدد ہے}, x\}$

$B = \{x: \text{ایک جفت طبعی عدد ہے}, x\}$

$C = \{x: \text{ایک طاق طبعی عدد ہے}, x\}$

$D = \{x: \text{ایک مفرد عدد ہے}, x\}$  تب

$A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D$  معلوم کیجیے۔

6- اگر  $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$ ,  $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$D = \{5, 10, 15, 20\}$ ,  $\{14, 16\}$  تب

(i)  $A - B$  (ii)  $A - C$  (iii)  $A - D$  (iv)  $B - A$  (v)  $C - A$

(vi)  $D - A$  (vii)  $B - C$  (viii)  $B - D$  (ix)  $C - B$  (x)  $D - B$

7- مندرجہ ذیل میں کونسے بیانات صادق ہیں یا کاذب بتلایئے۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i)  $\{2, 3, 4, 5\}$  اور  $\{3, 6\}$  غیر مشترک (مختلف) سٹس ہیں۔

(ii)  $\{a, e, i, o, u\}$  اور  $\{a, b, c, d\}$  غیر مشترک (مختلف) سٹس ہیں۔

(iii)  $\{2, 6, 10, 14\}$  اور  $\{3, 7, 11, 15\}$  غیر مشترک (مختلف) سٹس ہیں۔

(iv)  $\{2, 6, 10\}$  اور  $\{3, 7, 11\}$  غیر مشترک (مختلف) سٹس ہیں۔

## 2.7 مساوی سٹس (Equal Sets)

مندرجہ ذیل سٹس پر غور کیجیے۔

$A = \{\text{چچن، ڈراویڈ، کوہلی}\}$

$B = \{\text{ڈراویڈ، چچن، دھونی}\}$

$C = \{\text{کوہلی، ڈراویڈ، چچن}\}$

مندرجہ بالا تین سٹس  $A$  اور  $B$  میں آپ کیا مشابہہ کرتے ہیں؟  $A$  کے تمام کھلاڑی  $C$  میں ہیں۔  $C$  کے بھی تمام کھلاڑی  $A$  میں ہیں۔  $A$  اور  $B$  کے عناصر یکساں (ایک جیسے) ہیں جبکہ  $A$  اور  $B$  کے چند عناصر مختلف ہیں۔ اسی لیے  $A$  اور  $C$  مساوی سٹس کہلاتے ہیں۔ جبکہ  $A$  اور  $B$  غیر مساوی سٹس کہلاتے ہیں۔

دو سٹس  $A$  اور  $C$  مساوی سٹس کہلاتے ہیں اگر سٹ  $A$  کا ہر عنصر سٹ  $C$  سے تعلق رکھتا ہو (یعنی  $A \subseteq C$ ) اور سٹ  $C$  کا ہر ایک عنصر سٹ  $A$  سے تعلق رکھتا ہو (یعنی  $C \subseteq A$ )

اگر  $A$  اور  $C$  مساوی سٹ ہیں تب ہم  $A = C$  لکھ سکتے ہیں۔ مزید اس طرح سے بھی لکھا جاسکتا ہے

اگر  $C \subseteq A$  اور  $A \subseteq C$  تو  $A = C$

یہاں پر علامت  $\Leftrightarrow$  دوہری دلالت کو ظاہر کرتی ہے جس کو 'اگر صرف اور صرف' پڑھا جاتا ہے۔ (مختصراً 'اگر' لکھا جاتا ہے)

اگر  $A$  اور  $C$  یکساں عناصر پر مشتمل ہوتے ہیں تب یہ سٹس مساوی سٹس کہلاتے ہیں یعنی  $A = C$

مزید ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ 'ہر سٹ خود اپنا تحت سٹ ہوتا ہے'۔



**مثال - 7:** اگر  $A = \{p, q, r\}$  اور  $B = \{q, p, r\}$  تب جانچ کیجیے کہ  $A=B$  ہے یا نہیں۔

**حل:** دیا گیا ہے کہ  $A = \{p, q, r\}$  اور  $B = \{q, p, r\}$

مندرجہ بالا سٹس میں سٹ  $A$  کا ہر ایک عنصر  $B$  کا بھی عنصر ہے۔  $\therefore A \subset B$ .

اسی طرح  $B$  کا ہر ایک سٹ  $A$  کا بھی عنصر ہے۔  $\therefore B \subset A$ .

مندرجہ بالا دو رشتوں سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $A=B$

**مثال - 8:** اگر  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  اور  $N$  ایک طبعی اعداد کا سٹ ہے تب جانچ کیجیے کہ آیا  $A$  اور  $N$  مساوی ہیں؟

**حل:** دونوں سٹس میں موجود عناصر یکساں (ایک ہی ہیں) اس لیے  $A \subseteq N$  اور  $N \subseteq A$

مزید یہ کہ دونوں  $A$  اور  $N$  دونوں طبعی اعداد کے سٹس ہیں۔ اس لیے سٹ  $A$  اور سٹ  $N$  مساوی سٹس کہلاتے ہیں یعنی  $A = N$

**مثال - 9:** سٹ  $A = \{p, q, r, s\}$  اور سٹ  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  کا مشاہدہ کیجیے۔ کیا یہ سٹس مساوی سٹس ہیں؟

**حل:**  $A$  اور  $B$  کے عناصر یکساں (ایک جیسے) نہیں ہیں۔ اس لیے  $A \neq B$

**مثال - 10:** فرض کرو کہ سٹ  $A$  سے چھوٹے مفرد اعداد کا سٹ ہے۔ اور سٹ  $P$  کے تمام مفرد اجزائے ضربی کا سٹ ہے۔ جانچ کیجیے

کہ آیا  $A$  اور  $P$  مساوی سٹس ہیں؟

**حل:**  $A = \{2, 3, 5\}$  سے چھوٹے مفرد اعداد کا سٹ

عدد 30 کے مفرد اجزائے ضربی 2، 3 اور 5 ہیں اس لیے  $P = \{2, 3, 5\}$  ہوگا

چونکہ  $A$  کا ہر ایک عنصر سٹ  $P$  کا بھی عنصر ہے اس لیے

$A \subset P$  اور  $P \subset A$  مساوی سٹس ہیں۔  $\therefore P=A$

**مثال - 11:** بتائیے کہ سٹس  $A$  اور  $B$  مساوی ہیں؟ جہاں

$A = \{x \mid \text{لفظ "ASSASSINATION" کا حرف ہے } x\}$

$B = \{x \mid \text{لفظ "STATION" کا حرف ہے } x\}$

**حل:** دیا گیا ہے کہ  $A = \{x \mid \text{لفظ "ASSASSINATION" کا حرف ہے } x\}$

سٹ  $A$  کا فہرستی طریقہ  $A = \{A, S, I, N, T, O\}$  (چونکہ سٹ عناصر دہرائے نہیں جاتے)

دیا گیا ہے کہ  $B = \{x \mid \text{لفظ "STATION" کا حرف ہے } x\}$

سٹ  $B$  کا فہرستی طریقہ  $B = \{A, S, I, N, T, O\}$

اس طرح  $A$  اور  $B$  کے عناصر یکساں ہیں اور  $A=B$

مثال - 12: سٹس  $\phi$ ،  $A = \{1, 3\}$ ،  $B = \{1, 5, 9\}$ ،  $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  پر غور کیجیے مندرجہ ذیل میں دونوں سٹس کے

درمیان خالی جگہوں میں مناسب علامت  $\subset$  اور  $\not\subset$  درج کیجیے

- (i)  $\phi \dots B$  (ii)  $A \dots B$  (iii)  $A \dots C$  (iv)  $B \dots C$

حل: (i)  $\phi \subset B$  چونکہ خالی سٹ ہر ایک سٹ کا تحت سٹ ہوتا ہے۔

(ii)  $A \not\subset B$  چونکہ  $3 \in A$  لیکن  $3 \notin B$

(iii)  $A \subset C$  چونکہ  $3 \in A$  اور یہی عنصر  $C$  سے بھی تعلق رکھتے ہیں۔

(iv)  $B \subset C$  چونکہ سٹ  $B$  کا ہر ایک عنصر سٹ  $C$  کا بھی عنصر ہے۔

### مشق - 2.3



1- مندرجہ ذیل میں کونسے سٹس مساوی ہیں؟

(i)  $A = \{x : \text{لفظ "FOLLOW" کا حرف ہے } x\}$

(ii)  $B = \{x : \text{لفظ "FLOW" کا حرف ہے } x\}$

(iii)  $C = \{x : \text{لفظ "WOLF" کا حرف ہے } x\}$

2- مندرجہ ذیل سٹس پر غور کیجیے اور علامتوں  $=$  اور  $\neq$  کو درج کرتے ہوئے بیانات کو صادق بنائیے

$A = \{1, 2, 3\}$ ;

$B = \{\text{پہلے تین طبعی اعداد}\}$

$C = \{a, b, c, d\}$ ;

$D = \{d, c, a, b\}$

$E = \{a, e, i, o, u\}$ ;

$F = \{\text{انگریزی حروف کے حرف علت}\}$

(i)  $A \dots B$  (ii)  $A \dots E$  (iii)  $C \dots D$  (iv)  $D \dots F$

(v)  $F \dots A$  (vi)  $D \dots E$  (vii)  $F \dots B$

3- مندرجہ ذیل میں بتائیے کہ آیا  $A=B$  ہے یا نہیں؟

(i)  $A = \{a, b, c, d\}$   $B = \{d, c, a, b\}$

(ii)  $A = \{4, 8, 12, 16\}$   $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii)  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$   $B = \{x : \text{مثبت جفت صحیح عدد } x < 10\}$

(iv)  $A = \{x : \text{ضعاف ہے } x\}$   $B = \{10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$

4- مندرجہ ذیل کے لیے وجوہات بیان کیجیے۔

- (i)  $\{1, 2, 3, \dots, 10\} \neq \{x : x \in \mathbb{N} \text{ اور } 1 < x < 10\}$   
(ii)  $\{2, 4, 6, 8, 10\} \neq \{x : x = 2n+1 \text{ اور } x \in \mathbb{N}\}$   
(iii)  $\{5, 15, 30, 45\} \neq \{x : 15^x \text{ کا ضعف ہے}\}$   
(iv)  $\{2, 3, 5, 7, 9\} \neq \{x : x \text{ مفرد عدد ہے}\}$

5- مندرجہ ذیل سٹس کے تمام تحت سٹ لکھئے۔

- (i)  $B = \{p, q\}$  (ii)  $C = \{x, y, z\}$  (iii)  $D = \{a, b, c, d\}$   
(iv)  $E = \{1, 4, 9, 16\}$  (v)  $F = \{10, 100, 1000\}$

## 2.8 متناہی اور لامتناہی سٹ: FINITE AND INFINITE SETS

آئیے مندرجہ ذیل سٹ پر غور کریں۔

- (i)  $A = \{\text{آپ کے مدرسے کے طلباء}\}$  (ii)  $L = \{p, q, r, s\}$   
(iii)  $B = \{x : x \text{ ایک جفت عدد ہے}\}$  (iv)  $J = \{x : x \text{ '7' کا ضعف ہے}\}$

کیا آپ مندرجہ بالا دیے گئے سٹس عناصر کے کی لسٹ (فہرست) تیار کر سکتے ہیں؟

(i) میں عناصر کی تعداد آپ کے مدرسہ میں موجود طلباء کی تعداد ہی ہوگی۔ سٹ (ii) میں سٹ 'L' میں عناصر کی تعداد 4 ہے سٹ A اور L کے عناصر کی تعداد ایک مکمل عدد سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ایسے سٹس جن کی تعداد کسی مخصوص مکمل عدد سے ظاہر کی جاتی ہے۔ متناہی سٹس کہلاتے ہیں۔

آئیے اب سٹ B پر غور کریں۔ جو تمام جفت اعداد کا سٹ ہے۔ ہم B کے تمام عناصر کی تعداد کو ظاہر نہیں کر سکتے۔ کیونکہ جفت اعداد ختم نہیں ہوتے ہیں۔ اس لیے مقدار (تعداد) کو کسی ایک مکمل عدد سے ظاہر نہیں کر سکتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ان سٹس میں عناصر کی تعداد متناہی نہیں ہے۔ سٹ B اور J میں ارکان کی تعداد لامتناہی ہے۔ ایسے سٹس جن میں عناصر کی تعداد متناہی نہیں ہوتی ہے "لامتناہی" سٹس کہلاتے ہیں۔ ہم کسی دیے گئے ایک نقطہ سے گزرنے والی لامتناہی خطوط کھینچ سکتے ہیں۔ اس لیے یہ سٹ ایک لامتناہی سٹ ہوگا اسی طرح صحیح اعداد کے مجموعہ میں سے آخری عدد معلوم کرنا ناممکن ہے۔ اس لیے اس سٹ کو لامتناہی سٹ کہتے ہیں۔ اگر یہ متناہی نہ ہوں۔ مزید مثالوں پر غور کریں۔

- (i) فرض کیجیے کہ W 'ہفتہ کے تمام دنوں کا سٹ ہے' تب W ایک متناہی ہے۔  
(ii) فرض کرو کہ S 'مساوات  $x^2 - 16 = 0$  کے ریشوں کا سٹ ہے' تب S ایک متناہی سٹ ہے۔  
(iii) فرض کرو کہ G 'خط کے تمام نقاط کا سٹ ہے' تب G 'لامتناہی سٹ ہے'۔

**مثال - 13:** مندرجہ ذیل سٹس میں کونسے متناہی کونسے لا متناہی لکھیے۔

- (i)  $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ اور } (x - 1)(x - 2) = 0\}$       (ii)  $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ اور } x^2 = 4\}$   
 (iii)  $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ اور } 2x - 2 = 0\}$       (iv)  $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ اور } x \text{ مفرد ہے}\}$   
 (v)  $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ اور } x \text{ طاق ہے}\}$

**حل:** (i) اس صورت میں  $x$  کی قدر '1' یا '2' ہو سکتی ہے اس لیے سٹ  $\{1, 2\}$  ہوگا۔ لہذا یہ سٹ متناہی ہے۔  
 (ii)  $x^2 = 4$  دلالت کرتا ہے کہ  $x = +2$  یا  $x = -2$ ، لیکن  $x \in \mathbb{N}$  یا  $x$  ایک طبعی عدد ہے۔ تب سٹ  $\{2\}$  ہوگا۔ یہ ایک متناہی سٹ ہے۔

(iii) دیئے گئے سٹ میں  $x=1$  اور  $1 \in \mathbb{N}$ ، تب یہ ایک متناہی سٹ ہے۔

(iv) دیا گیا سٹ تمام مفرد اعداد کا سٹ ہے، ہم جانتے ہیں کہ مفرد اعداد لا متناہی ہیں۔ اس لیے یہ سٹ لا متناہی سٹ ہے۔

(v) چونکہ طاق اعداد لا متناہی ہیں۔ اس لیے یہ سٹ لا متناہی سٹ ہے۔

## 2.9 - متناہی سٹ کا کارڈینل عدد Cardinality or Cardinal number of a Finite Set

اب مندرجہ ذیل متناہی سٹس پر غور کریں۔

$$C = \{x : \text{لفظ INDIA کا حرف ہے } x\} \quad ; B = \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad ; A = \{1, 2, 4\}$$

- یہاں پر سٹ 'A' کے عناصر کی تعداد 3 =  
 سٹ 'B' کے عناصر کی تعداد 5 =  
 سٹ 'C' کے عناصر کی تعداد 4 =

(سٹ C میں حرف 'I' کو دوہرایا گیا ہے کیونکہ کوئی بھی سٹ میں عناصر متفرق لینا چاہیے اس لیے C میں صرف 4 عناصر ہیں) سٹ میں موجود عناصر کی تعداد کو سٹ کا (Cardinal Number) (کارڈینل عدد) یا (Cardinality) کہتے ہیں۔

سٹ A کے کارڈینل عدد کو  $n(A) = 3$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\text{اس طرح } n(B) = 5 \text{ اور } n(C) = 4$$

متناہی سٹ کے لیے کارڈینل عدد مکمل عدد ہوتا ہے اور لا متناہی سٹ کے لیے کارڈینل عدد کے بارے میں اگلی جماعتوں میں سیکھیں گے۔

**نوٹ:** خالی سٹ میں کوئی بھی عنصر نہیں ہوتا ہے۔ اس لیے خالی سٹ کا کارڈینل عدد  $n(\phi) = 0$  ہوتا ہے۔

یہ کیجیے



- 1- مندرجہ ذیل میں کونسے خالی سٹ ہیں؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔
- (i) 2 اور 3 کے درمیان واقع تمام صحیح اعداد کا سٹ
- (ii) عدد 1 سے چھوٹے تمام طبعی اعداد کا سٹ
- (iii) ایسے طاق اعداد کا سٹ جن کو 2 سے تقسیم کرنے پر باقی صفر پڑتا ہے۔
- 2- مندرجہ ذیل میں کونسے سٹ متناہی اور کونسے لامتناہی ہیں۔ بیان کیجیے اور آپ کے جواب کی وضاحت کیجیے۔
- (i)  $A = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ اور } x < 100\}$  (ii)  $B = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ اور } x < 5\}$
- (iii)  $C = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$  (iv)  $D = \{1, 2, 3, 4\}$
- (v)  $\{x : \text{ہفتہ کا ایک دن } x\}$
- 3- لامتناہی سٹ کی نشاندہی کیجیے۔
- (A) 10 سے چھوٹے مکمل اعداد کا سٹ ہے
- (B) 10 سے چھوٹے مفرد اعداد کا سٹ ہے
- (C) 10 سے چھوٹے صحیح اعداد کا سٹ ہے
- (D) 10 کے اجزائے ضربی کا سٹ ہے

کوشش کیجیے



- 1- مندرجہ ذیل میں کونسے سٹس خالی سٹس ہیں۔ آپ کے جواب کے تصدیق کیجیے۔
- (i)  $A = \{x : x^2 = 4 \text{ اور } 3x = 9\}$
- (ii) ایک مستوی میں ایسے مثلثات کا سٹ جن کے تینوں زاویوں کا مجموعہ  $180^\circ$  سے کم ہے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



- 1- ایک خالی سٹ متناہی سٹ ہوتا ہے۔ کیا یہ بیان صادق ہے یا کاذب ہے؟ کیوں؟

## مشق - 2.2:



1- مندرجہ ذیل سٹس میں کونسے خالی سٹ اور کونسے نہیں ہیں؟

- ایک نقطہ سے گزرنے والے خطوط کا سٹ
- طاق طبعی اعداد کا سٹ جو عدد 2 سے قابل تقسیم ہے۔
- {x} طبعی عدد ہے،  $x < 5$  اور  $x > 7$  ہے: {x}
- {x} کوئی دو متوازی خطوط کا مشترک نقطہ ہے {x}
- مفرد جفت اعداد کا سٹ ہے

2- مندرجہ ذیل سٹس میں کونسے متناہی اور کونسے لامتناہی سٹس ہیں؟

- سال کے تمام مہینوں کا سٹ ہے {1, 2, 3, ..., 99, 100} (ii)
- 99 سے چھوٹے مفرد اعداد کا سٹ
- انگریزی حرف تہجی کا سٹ
- X- محور کے متوازی خطوط کا سٹ
- 5 کے اضعاف کا سٹ
- (0,0) سے گزرنے والے دائروں کا سٹ

مثال 13. اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  اور  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  تب  $n(A \cup B)$  معلوم کیجیے۔

حل: سٹ A میں کل 5 عناصر ہیں۔  $n(A) = 5$

سٹ B میں کل 4 عناصر ہیں۔  $n(B) = 4$

لیکن  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$  میں 9 عناصر نہیں ہیں۔ اور اس میں صرف 7 ہیں۔ کیوں؟

## سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے



1-  $n(A)$ ،  $n(B)$ ،  $n(A \cap B)$  اور  $n(A \cup B)$  کے درمیان کیا رشتہ ہے؟

2- اگر A اور B غیر مشترک سٹس ہیں تب  $n(A \cup B)$  کو کیسے معلوم کرو گے؟



## تجویز کردہ منصوبہ کام:

- آپ کی کلاس میں آپ کے ساتھیوں کے پسندیدہ گیمس اخبارات، ٹی وی چینلس کے بارے میں ایک سروے کیجیے۔ سیٹس کی مدد سے ان معلومات کو اکٹھا کیجیے۔ معلوم کیجیے۔
- (i) کتنے ساتھی گیمس، اخبارات، ٹی وی چینلس میں دلچسپی رکھتے ہیں۔
- (ii) کتنے ساتھی ان میں سے دو جیسے گیمس / اخبارات یا اخبارات / ٹی وی چینلس یا گیمس / ٹی وی چینلس میں دلچسپی رکھتے ہیں اور کتنے ساتھی تینوں میں دلچسپی رکھتے ہیں۔
- (iii) اور ایسے کتنے ساتھی ہیں جو کسی بھی گیمس / اخبارات / ٹی وی چینلس میں دلچسپی نہیں رکھتے۔

## ہم نے کیا سیکھا

- 1- سٹ ایک خوش معروف اشیاء کا مجموعہ ہوتا ہے۔ جہاں پر خوش معروف کا مطلب یہ ہوتا ہے،
  - (i) سٹ کے تمام عناصر میں ایک مشترک خصوصیت ہونی چاہیے اور
  - (ii) آیا دیا گیا عنصر سٹ سے تعلق رکھتا ہے کہ نہیں، کا تعین ممکن ہو۔
- 2- اشیاء جو سٹ سے تعلق رکھتے ہیں وہ اس سٹ کے عناصر کہلاتے ہیں۔ ہم "تعلق رکھنے" کے لیے علامت '∈' کا استعمال کرتے ہیں۔
- 3- سٹس کو ریسٹرکٹڈ میں تمام عناصر کو کا ما سے علیحدہ کرتے ہوئے ان کو منحنی قوسین میں درج کرتے ہوئے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- 4- سٹس، کو سٹ ساز شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
- 5- ایک ایسا سٹ جس میں کوئی عنصر نہ ہو، خالی سٹ کہلاتا ہے یا Null سٹ یا Void سٹ کہلاتا ہے۔
- 6- ایک سٹ متناہی سٹ ہوگا اگر اس سٹ کے عناصر کی تعداد کی گنتی کی جاسکتی ہے۔
- 7- ایک سٹ لامتناہی سٹ ہوگا اگر اس کے عناصر کی تعداد کی گنتی ممکن نہ ہو۔
- 8- سٹ میں موجود عناصر کی تعداد کو اس سٹ کا Cardinal number/Cardinality کہتے ہیں۔
- 9- آفاقی سٹ کو 'n' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ عام طور پر وین اشکال میں اسکو مستطیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- 10- سٹ 'A' سٹ 'B' کا تحت سٹ ہوتا ہے اگر 'a' تعلق رکھتا ہے A سے دلالت کرتا ہے کہ 'a' تعلق رکھتا ہے S سے۔ اس کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔  $A \subset B$  اگر  $a \in B$  تب  $a \in A$  جہاں A اور B دو سٹس ہیں۔

11- دو سٹس A اور B مساوی سٹ ہوتے ہیں اگر سٹ A کا ہر ایک عنصر سٹ B کا بھی عنصر ہو اور B کا ہر ایک عنصر سٹ A کا بھی عنصر ہو۔

12- سٹس A اور B کے اجماع کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔  $A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$

13- سٹس A اور B کے تقاطع کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ اور } x \in B\}$$

14- دو سٹس A اور B کے فرق کو A-B یا B-A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

15- سٹس کے بنیادی اعمال کو سہل طریقہ پر وین اشکال کی مدد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ 1

# کثیر رکنیاں Polynomials

## باب 3

### 3.1 تمہید:

آئیے مندرجہ ذیل کی دو صورتوں پر غور کرتے ہیں۔

1- ایک باغ میں پھولوں سے بنی سیج ایک مثلث کی شکل میں ہے۔ مثلث کا سب سے بڑا ضلع اس کے چھوٹے ضلع کا تین گنا ہے

اور اس کا سب سے چھوٹا ضلع درمیانی ضلع سے 2 کاٹی چھوٹا ہے۔ مان لیجیے کہ  $p$  چھوٹے ضلع کی لمبائی کو ظاہر کرتا ہے تب احاطہ 'p' کے ارقام میں کیا ہوگا؟

2- ایک مستطیلی ڈائننگ ہال کا طول اس کے عرض سے دو گنا ہے۔ مان لیجیے کہ  $x$  ہال کے عرض کی لمبائی کو ظاہر کرتا ہے ہال کے فرش کا رقبہ 'x' کے ارقام میں کیا ہوگا؟

مذکورہ بالا صورتوں میں ہر بیان میں ایک نامعلوم قدر ہے پہلی صورت میں چھوٹے ضلع کو  $P$  کا بیوں میں دیا گیا ہے

چونکہ مثلث کا احاطہ = تمام ضلعوں کا مجموعہ

$$P+3P+P+2 = \text{احاطہ}$$

$$5P+2$$

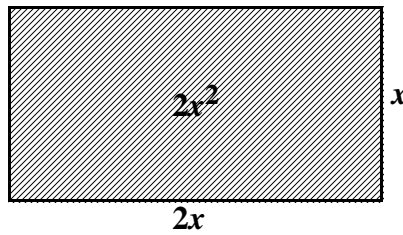
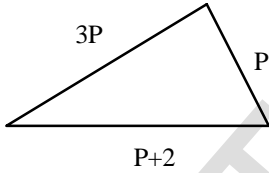
اسی طرح دوسری صورت میں مستطیل کا طول عرض کے دو گنا کے طور پر دیا گیا ہے

$$\text{لہذا اگر عرض } x = \text{طول } 2x =$$

$$\text{چونکہ } \text{مستطیل کا رقبہ} = lb$$

$$\text{رقبہ} = (2x)(x)$$

$$= 2x^2$$



جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ مثلث کا احاطہ  $5P+2$  اور مستطیل کا رقبہ  $2x^2$  مختلف درجوں کے کثیر رکنیوں کی شکل میں ہے۔

## 3.2 کثیررکنیاں کیا ہیں؟

کثیررکنی  $x$  میں ایک عبارت ہے جس میں  $ax^n$  کی شکل میں کے متناہی ارکان ہوتے ہیں۔ کسی مکمل عدد  $a$  کے لیے جہاں  $a \neq 0$  کے اور  $n$  مکمل عدد ہے۔

کثیررکنیاں ہیں	کثیررکنیاں نہیں ہیں
$2x$	$4x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{3}x - 4$	$3x^2 + 4x^{-1} + 5$
$x^2 - 2x - 1$	$4 + \frac{1}{x}$

کیوں  $\frac{1}{y-1}$  ایک کثیررکنی نہیں ہے؟ اپنے دوستوں اور استاد سے تبادلہ خیال کیجیے۔

یہ کیجیے



مندرجہ ذیل میں کوئی کثیررکنیاں ہیں اور کوئی نہیں ہیں بیان کیجیے وجوہات بتائیے۔

- (i)  $2x^3$  (ii)  $\frac{1}{x-1}$  (iii)  $4z^2 + \frac{1}{7}$  (iv)  $m^2 - \sqrt{2}m + 2$  (v)  $P^{-2} + 1$

## 3.2.1 کثیررکنی کا درجہ

یاد کیجیے کہ اگر  $p(x)$  میں ایک کثیررکنی ہے  $P(x)$  میں  $x$  کی اعظم ترین قوت کثیررکنی  $p(x)$  کا درجہ کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر  $3x+5$  متغیر 'x' میں ایک کثیررکنی ہے جس کا درجہ '1' ہے۔ اور ایک خطی کثیررکنی کہلاتی ہے۔  
 $5x, \sqrt{2}y+5, \frac{1}{3}p, m+1$  وغیرہ مزید خطی کثیررکنیاں ہیں۔  
دو درجہ کی ایک کثیررکنی دو درجہ کی کثیررکنی کہلاتی ہے۔ مثلاً  $x^2 + 5x + 4$  متغیر 'x' میں دو درجہ کی کثیررکنی ہے۔  
 $2x^2 + 3x - \frac{1}{2}, p^2 - 1, 3 - z - z^2, y^2 - \frac{y}{3} + \sqrt{2}$  متغیر  $x$  میں دو درجہ کی کثیررکنیوں کی چند مثالیں ہیں۔  
عبارت  $5x^3 - 4x^2 + x - 1$  متغیر 'x' میں 3 درجہ کی کثیررکنی ہے۔ اور اسکو مکعبی کثیررکنی کہتے ہیں۔ مکعبی کثیررکنیوں کی مزید مثالیں  
 $2 - x^3, p^3, l^2 - l^3 - l + 5$  ہیں  
عدد 6 کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔  $6 \cdot x^0$  جیسا کہ  $x$  کی قوت '0' ہے یہ ایک صفر درجہ کثیررکنی ہے۔

کوشش کیجیے



3، دو درجہ اور مکعبی کثیررکنیاں اور 2 خطی کثیررکنیاں جن کے ارکان کی تعداد مختلف ہو۔

ہم کسی بھی درجہ کی کثیررکنیاں لکھ سکتے ہیں۔  $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 - 8$  چھٹویں درجہ کی ایک کثیررکنی ہے

اور  $x^{10} - 3x^8 + 4x^5 + 2x^2$  ایک 10 درجہ کی کثیررکنی ہے۔

ہم متغیر 'x' میں n درجہ کی ایک کثیررکنی لکھ سکتے ہیں جہاں 'n' کوئی بھی طبعی عدد ہے۔  
عموماً ہم کہتے ہیں :

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

ایک  $n^{\text{th}}$  درجہ کی کثیررکنی ہے۔ جہاں پر  
 $a_0 \neq 0$  اور  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  کے حقیقی ضریب ہیں

مثلاً  $ax+b$ ، متغیر  $x$  میں یک درجہ کی کثیررکنی کی عام شکل ہے۔ جہاں پر  $a$  اور  $b$  حقیقی اعداد ہیں اور  $a \neq 0$ ۔

کوشش کیجیے



- 1- متغیر 'x' میں دو درجہ کی کثیررکنی اور مکعبی کثیررکنی کی عام شکل لکھئے۔
- 2-  $n$  درجہ والی ایک عام کثیررکنی کی شکل لکھئے جس کے ضریب  $b_0, \dots, b_n$  ہوں اور بتلائیے کہ  $b_0, \dots, b_n$  کے لیے کیا شرائط ہیں۔

### 3.2.2 کثیررکنی کی قدر: Value of Polynomial

اب ہم کثیررکنی  $p(x) = x^2 - 2x - 3$  پر غور کرتے ہیں۔  $x$  کی کسی بھی قدر کے لیے کثیررکنی کی قدر کیا ہوگی؟ مثلاً  $x=1$  کے لیے کثیررکنی کی قدر کیا ہے۔ کثیررکنی میں  $x=1$  درج کرنے سے ہمیں  $p(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$  حاصل ہوتا ہے متغیر  $x$  کو 1 میں تبدیل کرنے سے دی گئی کثیررکنی  $p(x)$  کی قدر -4 حاصل ہوئی۔ یہ  $x=1$  کے لیے  $x^2 - 2x - 3$  کی قدر ہے

اس طرح  $p(0) = -3$  کی قدر  $x=0$  پر ہے۔

پس اگر  $p(x)$  متغیر  $x$  کی ایک کثیررکنی ہو اور اگر  $k$  کوئی حقیقی عدد ہے تب  $x$  کو  $k$  میں تبدیل کرنے پر جو قدر حاصل ہوتی ہے وہ

یہ کیجیے



- (1) اگر  $p(x) = x^2 - 5x - 6$  ہو تو  $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$  کی قدریں معلوم کیجیے۔
- (2) اگر  $p(m) = m^2 - 3m + 1$  ہو تو  $p(1)$  اور  $p(-1)$  کی قدریں معلوم کیجیے۔

$x=k$  کے لیے  $P(x)$  کی قدر کہلاتی ہے اور  $p(k)$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

### 3.2.3 کثیررکنی کا صفر Zero of Polynomial

$p(x) = x^2 - 2x - 3$  کی قدریں  $x=3$ ،  $x=1$  اور  $x=2$  کے لیے کیا ہوں گی؟  
ہمیں حاصل ہوتا ہے  $p(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

ہم دیکھتے ہیں کہ  $p(3) = 0$  اور  $p(-1) = 0$  اس لیے 3 اور -1 کثیررکنی  $p(x) = x^2 - 2x - 3$  کے صفر کہلاتے ہیں۔  
چوں کہ  $p(2) \neq 0$  اس لیے 2 '  $p(x)$  کا صفر نہیں ہے۔  
عام طور پر ایک حقیقی عدد '  $k$  ' کثیررکنی  $p(x)$  کا صفر کہلاتا ہے اگر  $p(k) = 0$  ہو۔

پہنچیں



(i) مان لیجیے کہ  $p(x) = x^2 - 4x + 3$  تب  $p(0), p(1), p(2), p(3)$  کی قدریں معلوم کیجیے۔ اور کثیررکنی  $p(x)$  کے صفر معلوم کیجیے۔

(ii) جانچ کیجیے کہ آیا -3 اور 3، کثیررکنی  $x^2 - 9$  کے صفر ہیں؟

مشق 3.1



- 1- اگر  $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$  ہو تو معلوم کیجیے۔
- (i)  $x^5$  کا ضریب (ii)  $p(x)$  کا درجہ (iii) مستقل رکن
- 2- مندرجہ ذیل بیانات میں کونسے صادق اور کاذب ہیں؟ اپنے انتخاب کی وجوہات بیان کیجیے۔
- (i) کثیررکنی  $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$  کا درجہ  $\sqrt{2}$  ہے
- (ii) کثیررکنی  $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$  میں  $x^2$  کا عددی ضریب '2' ہے
- (iii) مستقل کا درجہ صفر ہوتا ہے۔
- (iv)  $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$  ایک دودرجی کثیررکنی ہے۔
- (v) کثیررکنی کا درجہ اس کے ارکان کے تعداد سے ایک زیادہ ہوتا ہے۔
- 3- اگر  $p(t) = t^3 - 1$  ہو تو  $p(1), p(-1), p(0), p(2), p(-2)$  کی قدریں معلوم کیجیے۔
- 4- جانچ کیجیے کہ آیا 2 اور -2، کثیررکنی  $x^4 - 16$  کے صفر ہیں؟
- 5- جانچ کیجیے کہ آیا 3 اور -2، کثیررکنی  $p(x)$  کے صفر ہیں جہاں  $p(x) = x^2 - x - 6$  ہے۔



### 3.3 کثیررکنیوں کی صورت گری Working with Polynomials:

آپ سیکھ چکے ہیں کہ ایک خطی کثیررکنی کے صفر کو کس طرح معلوم کرتے ہیں۔

مثلاً: اگر  $k$ ،  $p(x) = 2x + 5$  کا صفر ہے تب  $p(k) = 0$  سے حاصل ہوتا ہے  $2k + 5 = 0$ ،  $\therefore k = \frac{-5}{2}$

عام طور پر اگر  $k$ ،  $p(x) = ax + b$  کا صفر ہے جہاں  $a \neq 0$

$$p(k) = ak + b = 0 \text{ تب}$$

یعنی  $k = \frac{-b}{a}$ ، یا خطی کثیررکنی  $ax + b$  کا صفر  $\frac{-b}{a}$  ہے۔

پس، خطی کثیررکنی کا صفر کثیررکنی کے ضربیوں اور مستقل سے تعلق رکھتا ہے

کیا اعلیٰ درجہ رکھنے والی کثیررکنیوں کے صفر بھی کثیررکنیوں کے ضربیوں اور مستقل سے تعلق رکھتے ہیں؟ اس تعلق سے سوچئے اور اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجئے۔ اس موضوع پر ہم آگے بحث کریں گے۔

### 3.4 کثیررکنیوں کے صفروں کا جیومیٹری مفہوم:

آپ جانتے ہیں کہ ایک حقیقی عدد  $k$ ، کثیررکنی  $p(x)$  کا صفر ہے اگر  $p(k) = 0$  ہو۔

آئیے خطی اور درجی کثیررکنیوں کا ترتیبی اظہار اور ان کے صفروں کا جیومیٹری مفہوم دیکھتے ہیں۔

#### 3.4.1 خطی کثیررکنی کا ترتیبی اظہار:

پہلے ایک خطی کثیررکنی  $(a \neq 0)$ ،  $ax + b$  پر غور کریں، آپ جماعت نہم میں پڑھ چکے ہیں کہ  $y = ax + b$  کا گراف خط مستقیم

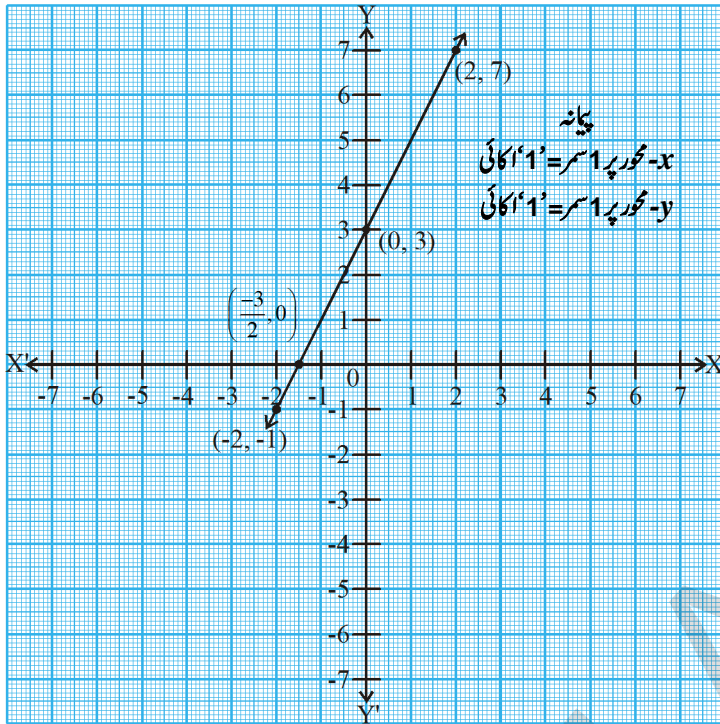
ہے۔

مثال کے طور پر  $y = 2x + 3$  کا گراف ایک خط مستقیم ہے جو  $-Y$  محور کو نقطہ  $(0, 3)$  پر قطع کرتا ہے اور نقاط  $(-2, -1)$  اور  $(2, 7)$

سے گذرتا ہے۔

#### جدول 3.1

$x$	-2	-1	0	2
$y = 2x + 3$	-1	1	3	7
$(x, y)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 3)$	$(2, 7)$



گراف میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $y = 2x + 3$  کا گراف  $x$ -محور کو  $x = -1$  کے درمیان قطع کرتا ہے۔ یعنی نقطہ  $(-\frac{3}{2}, 0)$  پر۔ لیکن  $x = \frac{-3}{2}$  کثیررکنی  $2x + 3$  کا صفر بھی ہے۔

پس کثیررکنی  $2x + 3$  کے صفر اس نقطہ کا مختص ہے جہاں پر خط مستقیم  $y = 2x + 3$   $x$ -محور کو قطع کرتی ہے۔

یہ کیجیے



گراف کھینچیے

گراف کھینچیے اور  $x$ -محور پر نقطہ تقاطع معلوم کیجیے (i)  $y = 2x + 5$ , (ii)  $y = 2x - 5$ , (iii)  $y = 2x$

کیا ان نقاط کے  $x$ -مختصات کثیررکنی کے بھی صفر ہیں؟

عام طور پر کسی خط  $ax + b, a \neq 0$  کے لیے  $y = ax + b$  کا گراف ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔ جو  $x$ -محور کو صرف ایک ہی نقطہ یعنی  $(-\frac{b}{a}, 0)$  پر قطع کرتا ہے۔

اس طرح خطی کثیررکنی  $ax + b, a \neq 0$  کا صرف ایک صفر ہوتا ہے۔ اس نقطہ کا  $x$ -مختص ہوتا ہے جہاں  $y = ax + b$   $x$ -محور پر قطع کرتی ہے۔

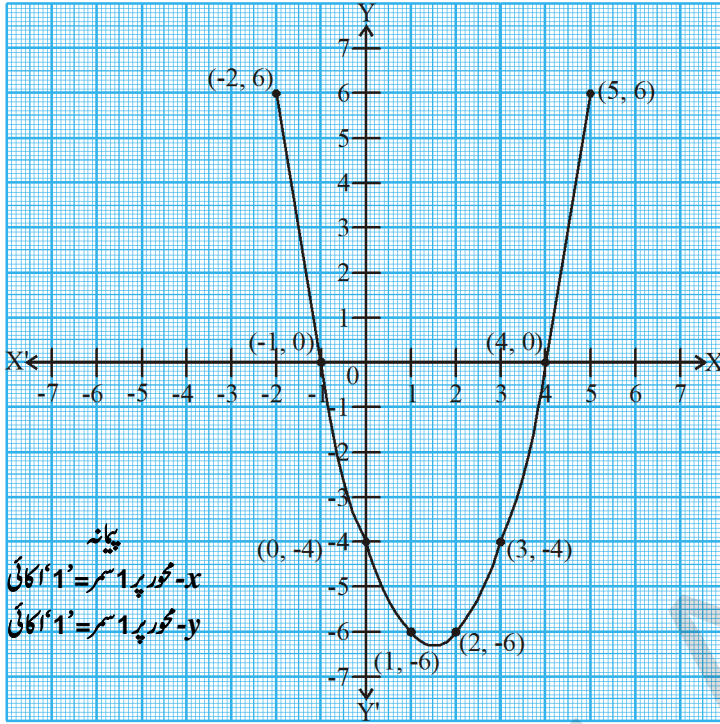
### 3.4.2 دودرجی کثیررکنی کا ترتیبی اظہار:

آئیے اب ہم دودرجی کثیررکنی کے صفر کے جیومیٹریائی مفہوم کی پرغور کرتے ہیں۔ دودرجی کثیررکنی  $x^2 - 3x - 4$  پر غور کیجیے۔ آئیے  $x^2 - 3x - 4$  کا گراف دیکھنے میں کیسا لگتا ہے مشاہدہ کرتے ہیں۔

آئیے  $x$  کی چند قدروں کے لیے  $y = x^2 - 3x - 4$  کے متناظر قدروں کی فہرست جدول 3.2 میں درج کرتے ہیں۔

#### جدول 3.2

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6
$(x, y)$	(-2, 6)	(-1, 0)	(0, -4)	(1, -6)	(2, -6)	(3, -4)	(4, 0)	(5, 6)



مذکورہ بالا دیئے گئے نقاط کو گراف پیپر پر نشان دہی کرتے ہیں اور ان کی گراف کھینچتے ہیں۔

کیا اس دو درجی کثیررکنی  $y = x^2 - 3x - 4$  کا گراف ایک خط مستقیم ہے؟ یہ ”U“ شکل کی منحنی ہے۔ یہ  $-x$  محور کو دو نقاط پر قطع کرتی ہے۔

حقیقت میں کسی دو درجی کثیررکنی  $ax^2 + bx + c$ ،  $a \neq 0$  کی متعلقہ مساوات

$y = ax^2 + bx + c$  کا گراف یا تو اوپر کی جانب کھلتا ہے جیسے U یا پھر نیچے کی جانب کھلتا ہے جیسے

∩ یہ  $a > 0$  یا  $a < 0$  پر منحصر ہوتا ہے۔ (اس طرح کی منحنیاں مکانی (Parabola) کہلاتے ہیں)

جدول سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ  $-1$  اور  $4$  دو درجی کثیررکنی کے صفر ہیں۔ اور ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ  $-1$  اور  $4$  مکانی اور

$-x$  محور کے نقطہ تقاطع کے  $x$  مختصات ہیں۔ دو درجی کثیررکنی  $x^2 - 3x - 4$  کے صفران نقاط کے  $x$  مختصات ہیں۔ جہاں پر

$$P(x) = y = x^2 - 3x - 4$$

$$P(-1) = 0 \text{ تب یہ ترسیم کے } -x \text{ محور پر } (-1, 0) \text{ پر قطع کرتا ہے اس طرح}$$

$$P(4) = 0 \text{ بھی } -x \text{ محور پر } (4, 0) \text{ پر قطع کرتا ہے۔}$$

عام طور پر کثیررکنی  $P(x)$  اگر  $P(0) = 0$  تب اس کی ترسیم میں یہ  $-x$  محور کو  $(0, 0)$  پر قطع کرتی ہے۔

یہ کسی بھی دو درجی کثیررکنی کے لیے صادق ہے یعنی دو درجی کثیررکنی،  $ax^2 + bx + c$ ،  $a \neq 0$  کے صفر مکانی (Parabola)

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \text{ اور } x \text{ محور کے نقطہ تقاطع کے } -x \text{ مختصات ہیں۔}$$

کوشش کیجیے



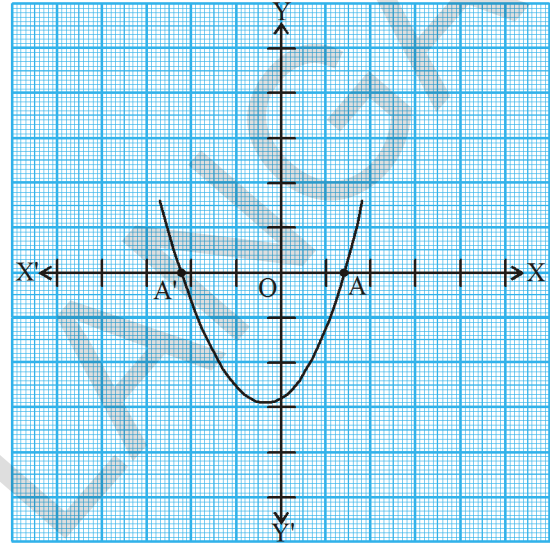
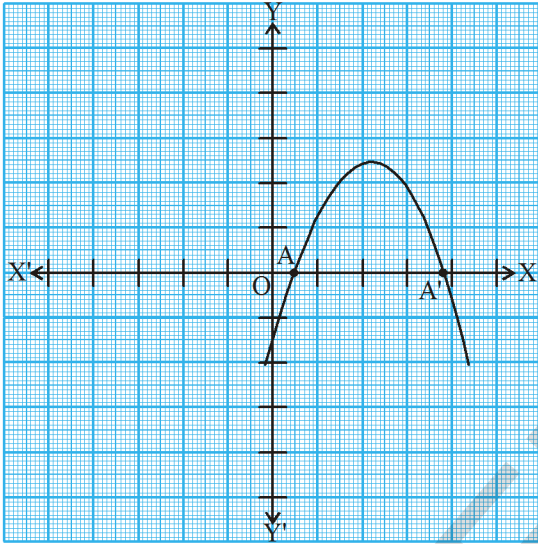
آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ (i)  $y = x^2 - x - 6$  (ii)  $y = 6 - x - x^2$  کے گراف کھینچیے اور ہر ایک کے صفر معلوم کیجیے۔

$y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) کی گراف کی شکل سے متعلق ہمارے پچھلے مشاہدات سے حسب ذیل تین صورتیں واقع ہوتے ہیں۔

صورت (i): یہاں پر گراف 'x- محور کو دو مختلف نقاط A اور A' پر قطع کرتا ہے۔ اس صورت میں نقاط A اور A' کے x- مختصات دوجی کثیررکنی  $ax^2 + bx + c$  کے دو "صفر" ہوتے ہیں۔ مکافی (Parabola) یا تو اوپر کھلتا ہے یا نیچے کی جانب کھلتا ہے۔

(i)

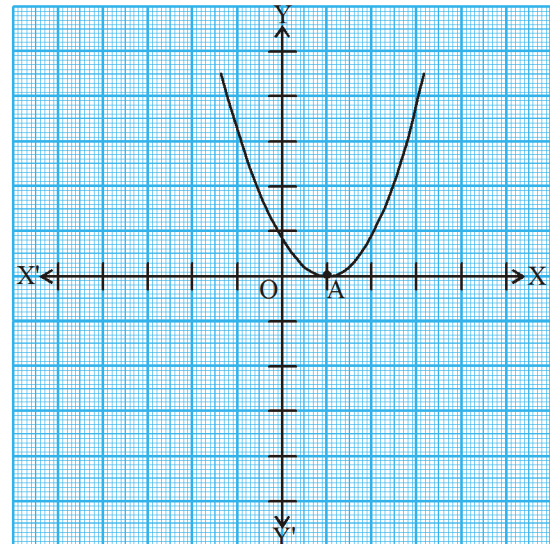
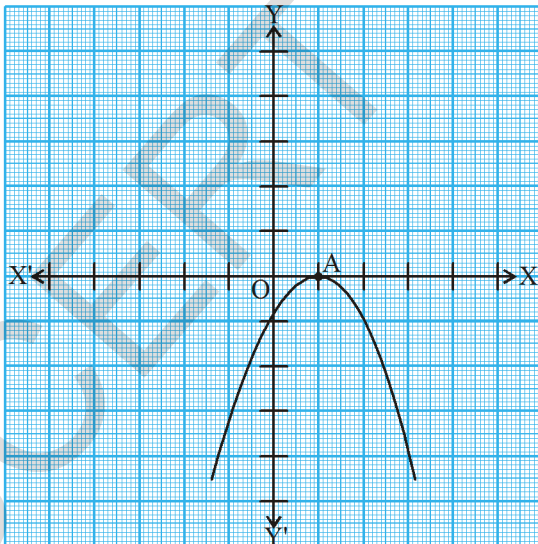
(ii)



صورت (ii): یہاں پر گراف 'x- محور کو صرف ایک ہی نقطہ پر مس کرتا ہے۔ یعنی دو منطبق نقاط پر۔ لہذا صورت (i) کے دو نقاط A اور A' یہاں منطبق ہو کر صرف ایک نقطہ A بن جاتا ہے۔

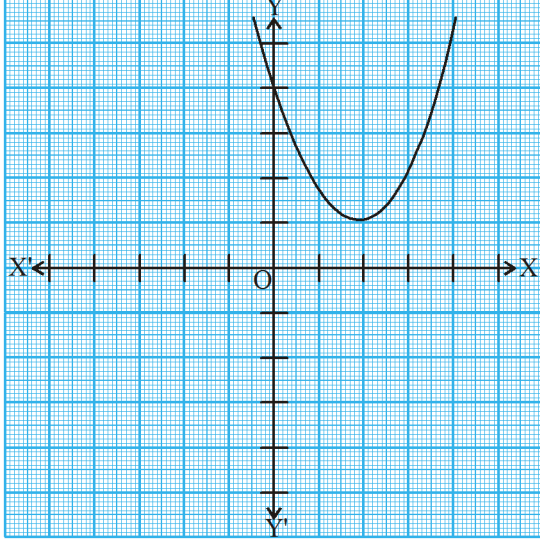
(i)

(ii)

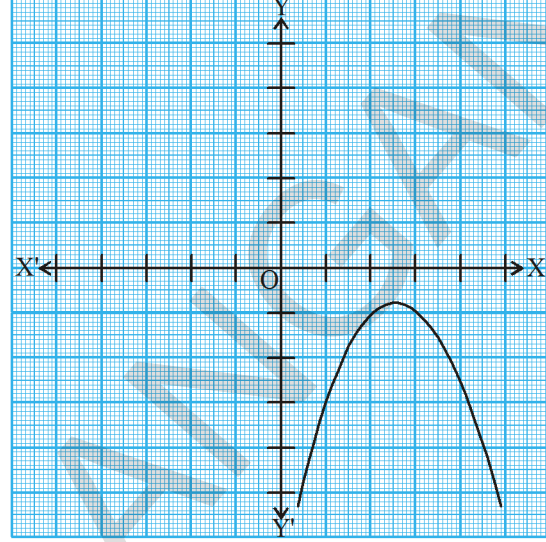


اس صورت میں دوجی کثیررکنی  $ax^2 + bx + c$  کا "صفر" نقطہ A کا x- مختص ہی ہوگا۔

صورت (iii) یہاں دوددرجی کثیررکنی کی گراف مکمل طور پر یا تو  $x$ - محور کے اوپر ہوگا یا مکمل طور پر نیچے ہوگا یہ گراف  $x$ - محور کو کسی بھی نقطہ پر قطع نہیں کرتا ہے۔



(i)



(ii)

لہذا اس صورت میں دوددرجی کثیررکنی  $ax^2 + bx + c$  کا کوئی بھی ”صفر“ نہیں ہوتا ہے۔

لہذا آپ جیومیٹریائی طور پر دیکھ سکتے ہیں کہ دوددرجی کثیررکنی کے یا تو دو مختلف صفر یا دو مساوی صفر (یعنی ایک صفر) یا کوئی صفر نہیں ہوتے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ دوددرجی کثیررکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہو سکتے ہیں۔

### کوشش کیجیے



- 1- دو صفر رکھنے والے تین کثیررکنیوں کو لکھئے۔
- 2- ایک کثیررکنی لکھئے جس کا ایک صفر ہو۔
- 3- اگر دو کثیررکنی کا صرف ایک صفر ہو تو آپ اس کی جانچ کس طرح کریں گے۔
- 4- تین کثیررکنیاں جن کے کوئی صفر نہ ہوں۔

### 3.4.3 مکعبی کثیررکنی کے صفر کا جیومیٹری مفہوم:-

#### (Geometrical Meaning of Zeros of a cubic Polynomial)

مکعبی کثیررکنی کے صفروں کی جیومیٹری مفہوم سے آپ کیا توقع رکھتے ہیں؟ آئیے معلوم کریں۔ مکعبی کثیررکنی  $x^3 - 4x$  پر غور کیجیے۔

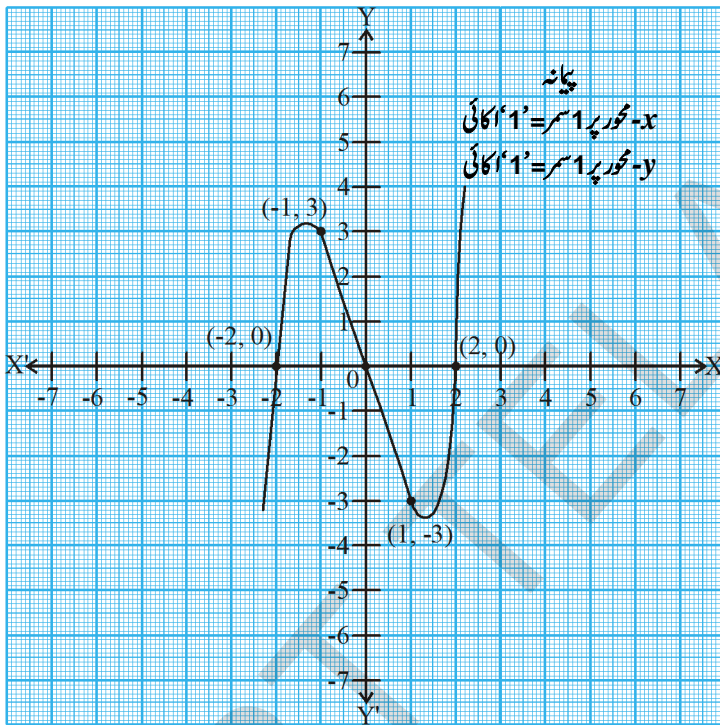
آئیے یہ دیکھنے کے لیے  $y = x^3 - 4x$  کا گراف دیکھنے میں کیسا لگتا ہے۔ 'x' کی چند قدروں کے لیے  $y = x^3 - 4x$  کے

متناظر قدروں کی فہرست جدول 3.3 میں درج کرتے ہیں۔



## جدول 3.3

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0
$(x, y)$	(-2, 0)	(-1, 3)	(0, 0)	(1, -3)	(2, 0)



ہم دیکھتے ہیں کہ  $y = x^3 - 4x$  کا گراف شکل کے مطابق نظر آتا ہے۔

مندرجہ بالا جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ -2، 0 اور 2، مکعبی کثیررکنی  $x^3 - 4x$  کے صفر ہیں۔

0 اور 2، ان نقاط کے  $x$ -مختصات ہیں جہاں پر  $y = x^3 - 4x$  کا گراف  $x$ -کا محور کو قطع کرتا ہے۔

لہذا اس کثیررکنی کے تین صفر ہیں۔

آئیے چند مزید مثالوں پر غور کرتے ہیں۔ مکعبی

کثیررکنی  $x^3$  اور  $x^2 - x^3$  پر غور کیجیے۔ جدول 3.4

اور 3.5 کو دیکھئے۔

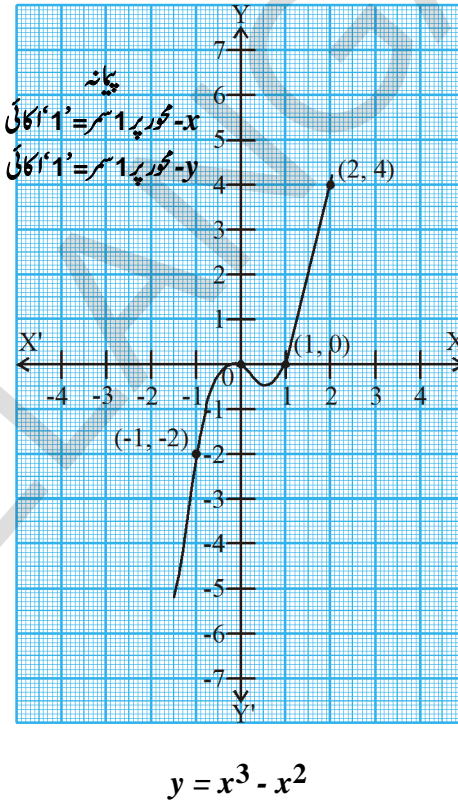
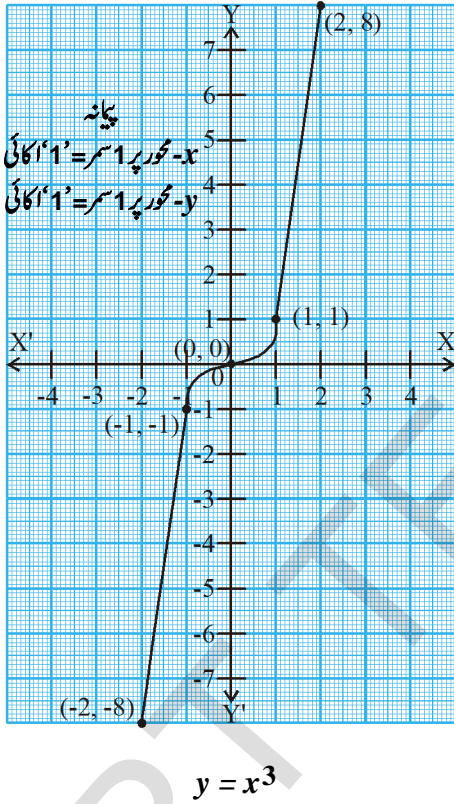
## جدول 3.4

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8
$(x, y)$	(-2, -8)	(-1, -1)	(0, 0)	(1, 1)	(2, 8)



## جدول 3.5

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - x^2$	-12	-2	0	0	4
$(x, y)$	$(-2, -12)$	$(-1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$



$y = x^3$  میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $y = x^3$  کا گراف  $x$  - محور کو صرف ایک ہی نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کا  $x$  - مختص '0' ہے۔ لہذا اس کثیررکنی کا صرف ایک ہی صفر ہے۔ اسی طرح  $y = x^3 - x^2$  کا گراف  $x$  - محور کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے جس کے  $x$  - مختصات 0 اور 1 ہیں۔ لہذا ملکہی کثیررکنی کے دو مختلف صفر ہیں۔

مندرجہ بالا مثالوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی ملکہی کثیررکنی کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہوتے ہیں۔ بالفاظ دیگر کے کثیررکنی جس کا درجہ تین ہو اس کے تین صفر ہوتے ہیں۔

کوشش کیجیے

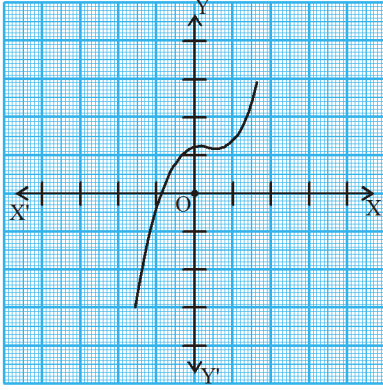


1- ملکہی کثیررکنیوں کے صفر بغیر گراف تشکیل دیئے معلوم کیجیے۔

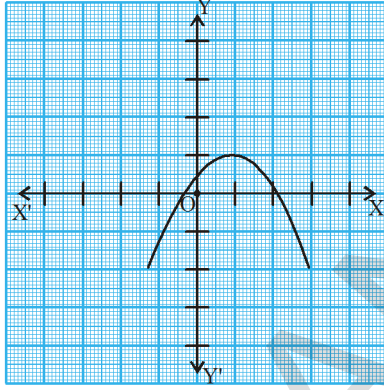
- (i)  $-x^3$       (ii)  $x^2 - x^3$       (iii)  $x^3 - 5x^2 + 6x$

**تبصرہ (Remark):** عموماً ایک  $n$  درجہ والی کثیر رکنی  $p(x)$  کا گراف  $x$ - محور کو زیادہ سے زیادہ  $n$  نقاط پر قطع کرتا ہے۔ اس لیے  $n$  درجہ والی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ  $n$  صفر ہوتے ہیں۔

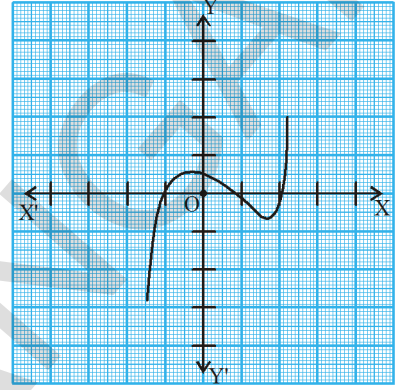
**مثال-1:** مندرجہ ذیل دیئے گئے گراف پر غور کیجیے۔ ہر ایک  $y=p(x)$  کا گراف ہے۔ جہاں  $p(x)$  ایک کثیر رکنی ہے۔ ہر ایک کثیر رکنی  $p(x)$  کے صفروں کی تعداد معلوم کیجیے۔



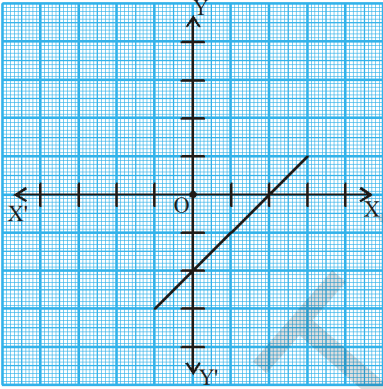
(i)



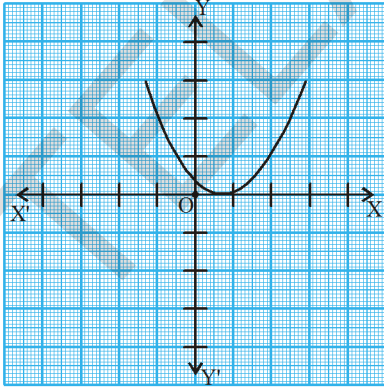
(ii)



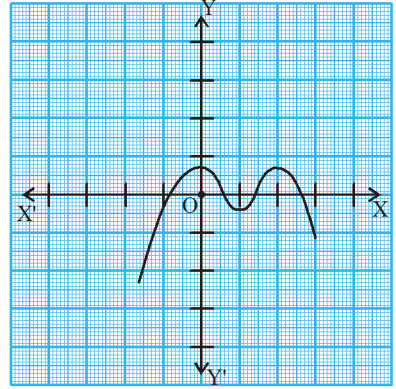
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

**حل:**  $x$  کے دیئے گئے سمت میں ان کے متعلقہ گراف ہیں۔

(i) صفروں کی تعداد 1 ہے کیونکہ گراف  $x$ - کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

(ii) صفروں کی تعداد 2 ہے کیونکہ گراف  $x$ - محور کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے۔

(iii) صفروں کی تعداد 3 ہے۔ کیوں؟

(iv) صفروں کی تعداد 1 ہے۔ کیوں؟

(v) صفروں کی تعداد 1 ہے۔ کیوں؟

(vi) صفروں کی تعداد 4 ہے۔ کیوں؟

**مثال - 2:** دیئے گئے کثیررکنیوں کے صفروں کی تعداد معلوم کیجیے۔ اور ان کی قدروں کو بھی معلوم کیجیے؟

(i)  $p(x) = 2x + 1$

(ii)  $q(y) = y^2 - 1$

(iii)  $r(z) = z^3$

**حل:** ہم یہ گراف کی تشکیل کے بغیر کریں گے۔

(i)  $p(x) = 2x + 1$  ایک خطی کثیررکنی ہے اور اس کا صرف ایک ہی صفر ہوتا ہے۔  
صفر معلوم کرنے کے لیے

مان لیجیے  $p(x) = 0$

$\therefore 2x + 1 = 0$

$\therefore x = \frac{-1}{2}$

دی گئی کثیررکنی کا صفر  $\frac{-1}{2}$  ہے۔



(ii)  $q(y) = y^2 - 1$  ایک ددرجی کثیررکنی ہے۔

اس کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہوتے ہیں۔

صفر معلوم کرنے کے لیے مان لیجیے کہ  $q(y) = 0$

$\Rightarrow y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (y + 1)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = -1$  یا  $1$

لہذا دی گئی کثیررکنی کے صفر '1' اور '1' ہیں۔

(iii)  $r(z) = z^3$  ایک ملکہی کثیررکنی ہے۔ اس کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہوتے ہیں۔

مان لیجیے کہ  $r(z) = 0$

$\Rightarrow z^3 = 0$

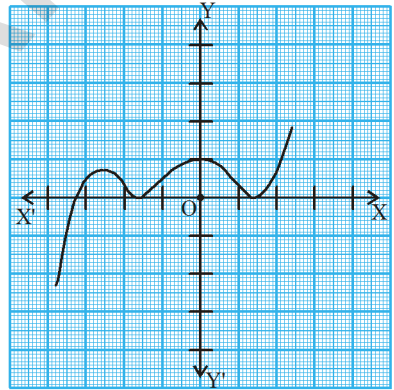
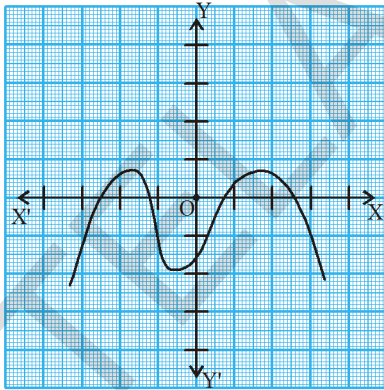
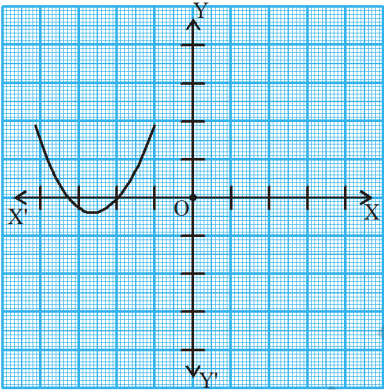
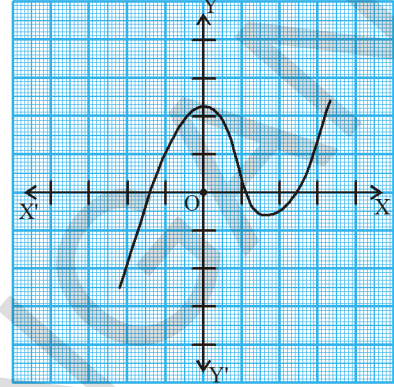
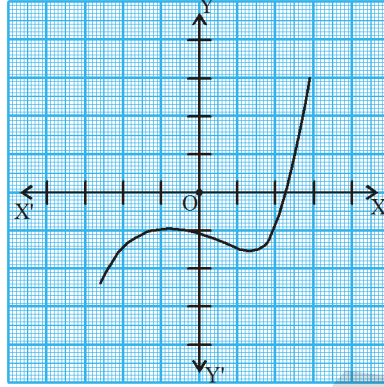
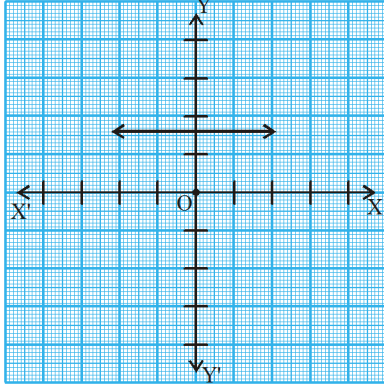
$\Rightarrow z = 0$

لہذا دی گئی کثیررکنی کا صفر '0' ہے۔

## مشق 3.2



1- چند کثیر رکنیوں  $y = p(x)$  کے گراف ذیل کی شکلوں میں دیے گئے ہیں ہر صورت میں کثیر رکنی  $P(x)$  کے صفروں کی تعداد معلوم



(i)

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

(vi)

2- دیئے گئے کثیر رکنیوں کے صفروں کو معلوم کیجیے۔

(i)  $p(x) = 3x$

(ii)  $p(x) = x^2 + 5x + 6$

(iii)  $p(x) = (x+2)(x+3)$

(iv)  $p(x) = x^4 - 16$

3- دیئے گئے کثیر رکنیوں کی گراف تشکیل دیجیے اور صفروں کو معلوم کیجیے۔ جواب کے صحیح ہونے کی دلیل دیجیے۔

(i)  $p(x) = x^2 - x - 12$

(ii)  $p(x) = x^2 - 6x + 9$

(iii)  $p(x) = x^2 - 4x + 5$

(iv)  $p(x) = x^2 + 3x - 4$

(v)  $p(x) = x^2 - 1$

## 3.5 کثیررکنیوں کے صفر اور ضربیوں کے درمیان رشتہ:

پہلے ہی آپ مشاہدہ کر چکے ہیں کہ خطی کثیررکنی  $ax+b$  کا صفر  $-\frac{b}{a}$  ہے۔ اب ہم دو درجی کثیررکنی کے صفر اور اس کے ضربیوں کے درمیان رشتہ اخذ کرنے کی کوشش کریں گے۔ اس کے لیے آئیے دو درجی کثیررکنی  $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$  لیں گے۔ آپ جماعت نہم میں سیکھ چکے ہیں کہ درمیانی رکن کے ٹکڑے کرتے ہوئے کس طرح کثیررکنی کے اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں۔ لہذا اب ہم درمیانی رکن کے ایسے دو اجزاء بناتے ہیں جن کا مجموعہ  $-8x$  ہو اور جن حاصل ضرب  $12x^2 = 6 \times 2x^2$  ہو۔ لہذا

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 \\ &= 2x(x - 3) - 2(x - 3) \\ &= (2x - 2)(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

$p(x) = 2x^2 - 8x + 6$  صفر ہوگا جب  $x - 1 = 0$  یا  $x - 3 = 0$  ہے۔ یعنی  $x = 1$  یا  $x = 3$  لہذا  $2x^2 - 8x + 6$  کے صفر 1 اور 3 ہیں۔ اب ہم یہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ کیا ان صفروں کا کثیررکنیوں کے ارکان کے ضربیوں سے کوئی رشتہ ہے۔  $x^2$  کا ضربی '2' ہے۔  $x$  کا عددی ضربی 8 - ہے اور مستقل رکن 6 ہے۔ جو  $x^0$  کا ضربی ہے۔ (یعنی  $6x^0 = 6$ )

$$\begin{aligned} \text{ہم دیکھتے ہیں کہ} & \quad \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضربی}} = \frac{-(-8)}{2} = \frac{x \text{ کا عددی ضربی}}{x^2 \text{ کا عددی ضربی}} \\ \text{مستقل رکن} & \quad = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضربی}} \end{aligned}$$

آئیے مزید ایک دو درجی کثیررکنی پر غور کرتے ہیں۔

$$p(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

درمیانی رکن کے ٹکڑے کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2) \\ &= (3x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

$3x^2 + 5x - 2$  صفر ہوتا ہے جب کہ  $3x - 1 = 0$  ہو یا  $x + 2 = 0$  ہو

$$\text{یعنی جب } x = -2 \text{ یا } x = \frac{1}{3}$$

$3x^2 + 5x - 2$  کے صفر  $\frac{1}{3}$  اور  $-2$  ہیں۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضربی}} = \frac{-5}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{x \text{ کا عددی ضربی}}{x^2 \text{ کا عددی ضربی}}$$

$$\frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضربی}} = \frac{-2}{3} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضربی}}$$



یہ کیجیے



مندرجہ ذیل دو درجی کثیر رکنیوں کے صفروں کو معلوم کیجیے۔ صفروں کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کیجیے اور ان صفروں کا کثیر رکنیوں کے ارکان کے ضربیوں کے رشتہ کی تصدیق کیجیے۔

(i)  $p(x) = x^2 - x - 6$

(ii)  $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(iii)  $p(x) = x^2 - 4$

(iv)  $p(x) = x^2 + 2x + 1$

عموماً اگر  $\alpha$  اور  $\beta$  دو درجی کثیر رکنی  $p(x) = ax^2 + bx + c$  جہاں  $a \neq 0$  کے صفروں ہوں تب  $(x - \alpha)$  اور  $(x - \beta)$

$p(x)$  کے اجزائے ضربی ہوں گے۔ اسی لیے

$$ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$$

جہاں  $k$  ایک مستقل ہے۔

$$ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

$$ax^2 + bx + c = kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

مساوات کے دونوں جانب  $x^2$  کے ضربیوں اور مستقل ارکان کا تقابل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a = k, b = -k(\alpha + \beta) \text{ اور } c = k\alpha\beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \text{ اس سے حاصل ہوتا ہے}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

**نوٹ:**  $\alpha$ ،  $\beta$  یونانی زبان کے حروف ہیں جنہیں بالترتیب 'alpha' اور 'beta' 'بیٹا' پڑھتے ہیں۔ آگے ہم ایک اور حرف 'gamma' جس کا تلفظ گاما ہے استعمال کریں گے۔

$$\text{لہذا } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{x \text{ کا عددی ضریب}}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}}$$

**مثال - 3:** دو درجی کثیر رکنی  $x^2 + 7x + 10$  کے صفروں کو معلوم کیجیے اور صفروں اور ضربیوں کے درمیانی رشتہ کی تصدیق کیجیے۔

$$\text{حل: ہم جانتے ہیں } x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$



لہذا کثیررکنی  $x^2 + 7x + 10$  کی قدر صفر ہوگی جبکہ  $x + 2 = 0$  یا  $x + 5 = 0$  ہو

یعنی جب کہ  $x = -2$  یا  $x = -5$

اس لیے  $x^2 + 7x + 10$  کے صفر  $-2$  اور  $-5$  ہیں۔

$$\text{اب } x \text{ کا عددی ضریب} = \frac{-(7)}{1} = \frac{-x \text{ کا عددی ضریب}}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}} \quad \text{صفروں کا مجموعہ} = -2 + (-5) = -7$$

$$\text{صفروں کا حاصل ضرب} = -2 \times (-5) = 10 = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}} = \frac{10}{1}$$

**مثال-4:** دو درجی کثیررکنی  $x^2 - 3$  کے صفروں کو معلوم کیجیے صفروں اور ضریبوں کے درمیان رشتہ کی تصدیق کیجیے

**حل:** متماثلہ  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  کو ذہن میں لائیے

اس کو استعمال کرتے ہوئے اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

لہذا  $x^2 - 3$  کی قدر صفر ہوتی ہے جبکہ  $x = \sqrt{3}$  یا  $x = -\sqrt{3}$

اس لیے  $x^2 - 3$  کے صفر  $\sqrt{3}$  اور  $-\sqrt{3}$  ہیں۔

$$\text{صفروں کا مجموعہ} = \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0 = \frac{-x \text{ کا ضریب}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

$$\text{صفروں کا حاصل ضرب} = (\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = -3 = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \frac{-3}{1}$$

**مثال-5:** دو درجی کثیررکنی معلوم کیجیے جس کے صفروں کا مجموعہ اور حاصل ضرب بالترتیب  $-3$  اور  $2$  ہے۔

**حل:** مان لیجیے کہ دو درجی کثیررکنی  $ax^2 + bx + c$  ہے۔ اس کے صفر  $\alpha$  اور  $\beta$  ہیں۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a} \quad \text{اور}$$

اگر ہم  $a=1$  لیں تب  $b=3$  اور  $c=2$  ہوگا۔

لہذا دیے ہوئے شرائط کو مطمئن کرنے والی ایک دو درجی کثیررکنی  $x^2 + 3x + 2$  ہے۔

اسی طرح 'a' کوئی بھی حقیقی عدد لے سکتے ہیں، مان لیجیے کہ یہ عدد 'k' ہے۔  
اس سے حاصل ہوتا ہے  $\frac{-b}{k} = -3$  یا  $b = 3k$  اور  $\frac{c}{k} = 2$  یا  $c = 2k$   
'a' اور 'b' کی قدریں درج کرنے سے ہمیں  $kx^2 + 3kx + 2k$  کثیررکنی حاصل ہوتی ہے۔

**مثال - 6:** دو درجی کثیررکنی معلوم کیجیے جس کے صفر 2 اور  $\frac{-1}{3}$  ہیں۔

**حل:** مان لیجیے کہ دو درجی کثیررکنی  $ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  ہے اور اس کے صفر  $\alpha$  اور  $\beta$  ہیں۔

$$\beta = \frac{-1}{3}, \alpha = 2 \text{ یہاں}$$

$$\text{صفروں کا مجموعہ } (\alpha + \beta) = 2 + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$$\text{صفروں کا حاصل ضرب } = \alpha\beta = \frac{-2}{3} = 2\left(\frac{-1}{3}\right)$$

دو درجی کثیررکنی  $ax^2 + bx + c$  اس طرح ہوگی

$$k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] \text{ جہاں 'k' ایک مستقل ہے}$$

$$= k\left[x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\right]$$

'k' کی کسی بھی قدر کے لیے جہاں  $k \neq 0$  مطلوبہ کثیررکنی  $k\left[x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\right]$  ہوگی۔



کوشش کیجیے



1- صفر -2 اور  $\frac{1}{3}$  والی ایک دو درجی کثیررکنی معلوم کیجیے۔

2- دو درجی کثیررکنی کیا ہے جس کے صفروں کا مجموعہ  $\frac{-3}{2}$  اور صفروں کا حاصل ضرب -1 ہیں۔

## 3.6 مکعبی کثیررکنی Cubic Polynomials:

آئیے مکعبی کثیررکنی پر غور کریں۔ کیا آپ سوچتے ہیں مندرجہ بالا حاصل رشتوں کی طرح ہی مکعبی کثیررکنی کے صفر اور اس کے ضریب کے درمیان رشتہ ہوتا ہے۔

آئیے ہم غور کرتے ہیں  $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$

ہم دیکھتے ہیں کہ  $p(x) = 0$  کے لیے  $x = 4, -2, \frac{1}{2}$

چونکہ  $p(x)$  کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہو سکتے ہیں۔ یہ  $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$  کے صفر ہیں۔

$$x^2 \text{ کا عددی ضریب} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \text{اس کے صفروں کا مجموعہ}$$

$$x^3 \text{ کا عددی ضریب} = \frac{-8}{2} = -4 = 4 + (-2) \times \frac{1}{2} = \text{اس کے صفروں کا حاصل ضرب}$$

تاہم یہاں ایک اور زائد رشتہ ہے۔ غور کیجیے کہ ایک وقت دو صفروں کے حاصل ضرب کا مجموعہ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} &= \{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\} \\ &= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^3 \text{ کا عددی ضریب}} \end{aligned}$$

عموماً اگر ایک مکعبی کثیررکنی  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  کے صفر  $\alpha$ ،  $\beta$  اور  $\gamma$  ہوں تب ثابت کیا جاسکتا ہے

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

$\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  صفروں والی ایک کثیررکنی  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  ہے۔ آئیے دیکھیں گے  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$ ،  $a$ ،  $b$ ،  $c$  اور  $d$  سے کس طرح کا رشتہ رکھتے ہیں۔ چونکہ  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  صفر ہیں کثیررکنی کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 - x^2(\alpha + \beta + \gamma) + x(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$$

کثیررکنی کی مماثلت کے لیے ہم  $a$  سے ضرب دیتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$ax^3 - x^2a(\alpha + \beta + \gamma) + xa(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma \quad \text{یعنی}$$

$$\text{اور } ax^3 - x^2a(\alpha + \beta + \gamma) + xa(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$$

$ax^3 + bx^2 + cx + d$  سے تقابل کرنے پر حاصل ہوتے ہیں

$$\therefore b = -a(\alpha + \beta + \gamma), c = a(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma), d = -\alpha\beta\gamma$$

یہ کیجیے۔

اگر  $\alpha, \beta, \gamma$  دی گئی کثیر رکنیوں کے صفر ہیں متعلقہ قدریں معلوم کر کے جدول میں درج کیجیے۔

S.No.	مکعبی کثیر رکنی	$\alpha + \beta + \gamma$	$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$	$\alpha\beta\gamma$
1	$x^3 + 3x^2 - x - 2$			
2	$4x^3 + 8x^2 - 6x - 2$			
3	$x^3 + 4x^2 - 5x - 2$			
4	$x^3 + 5x^2 + 4$			

آئیے ایک مثال پر غور کریں۔

**مثال-7:** تصدیق کیجیے کہ  $3, -1$  اور  $-\frac{1}{3}$  مکعبی کثیر رکنی،  $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$  کے صفر ہیں یا نہیں اور مزید ان صفروں

اور ضربوں کے درمیانی رشتے کی جانچ کیجیے۔

**حل:** دی گئی کثیر رکنی کا  $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$  سے تقابل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$d = -3 \text{ اور } c = -11, b = -5, a = 3$$

$$P(3) = 3(3)^3 - 5(3)^2 - 11(3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0$$

$$P(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 - 11(-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$$

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

لہذا  $3, -1$  اور  $-\frac{1}{3}$  کثیر رکنی،  $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$  کے صفر ہیں۔

چنانچہ ہم  $\alpha = 3, \beta = -1, \gamma = -\frac{1}{3}$  لینے ہیں

**حل:** دی گئی کثیر رکنی کا کثیر رکنی  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  سے تقابل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$d = -3 \text{ اور } c = -11, b = -5, a = 3$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3t(-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \frac{-1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\therefore \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3t(-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}$$

## مشق 3.3



1- ذیل کی دو درجی کثیررکنیوں کے صفروں کو معلوم کیجیے اور صفروں اور ضربیوں کے درمیان رشتے کی جانچ کیجیے۔

(i)  $x^2 - 2x - 8$       (ii)  $4s^2 - 4s + 1$       (iii)  $6x^2 - 3 - 7x$

(iv)  $4u^2 + 8u$       (v)  $t^2 - 15$       (vi)  $3x^2 - x - 4$

2- دو درجی کثیررکنی معلوم کیجیے جبکہ دیئے گئے اعداد بالترتیب اس کے صفروں کا مجموعہ اور حاصل ضرب ہے۔

(i)  $\frac{1}{4}, -1$       (ii)  $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$       (iii)  $0, \sqrt{5}$

(iv)  $1, 1$       (v)  $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$       (vi)  $4, 1$

3- دیئے گئے  $\alpha, \beta$  صفروں کے لیے دو درجی کثیررکنی معلوم کیجیے

(i)  $2, -1$       (ii)  $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$       (iii)  $\frac{1}{4}, -1$       (iv)  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

4- تصدیق کیجیے  $1, -1$  اور  $3$  مکعبی کثیررکنی  $x^3 - 3x^2 - x + 3$  کے صفروں اور ضربیوں کے درمیان رشتے کی جانچ کیجیے۔

### 3.7 کثیررکنیوں کی تقسیمی الگورتھم (مسئلہ تقسیم) Division Algorithm for polynomials

آپ جانتے ہیں کہ ایک مکعبی کثیررکنی کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہوتے ہیں۔ اگر آپ کو صرف ایک صفر دیا جائے تو کیا آپ باقی دو صفر معلوم کر سکتے ہیں؟ اس کے لیے آئیے ایک مکعبی کثیررکنی  $x^3 - 3x^2 - x + 3$  پر غور کریں۔

اگر اس کا ایک صفر '1' ہے۔ تب آپ جانتے ہیں کہ یہ کثیررکنی  $(x-1)$  سے قابل تقسیم ہے۔ دی گئی کثیررکنی کو  $(x-1)$  سے تقسیم کرنے پر  $x^2 - 2x - 3$  خارج قسمت حاصل ہوگا۔

$x^2 - 2x - 3$  کے اجزائے ضربی درمیانی رکن کے ٹکڑے کر کے حاصل کرتے ہیں اجزائے ضربی  $(x+1)$  اور  $(x-3)$  ہیں۔

$$\text{ان سے ہمیں حاصل ہوتا ہے } x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$= (x-1)(x+1)(x-3)$$

لہذا مکعبی کثیررکنی کے صفر  $1, -1$  اور  $3$  ہیں۔

آئیے ہم تفصیل سے تبادلہ خیال کریں گے کہ کس طرح ایک کثیررکنی دوسری کثیررکنی کو تقسیم کرتی ہے اور ان اقدامات سے قبل ایک مثال پر غور کریں۔

**مثال - 8:**  $2x^2 + 3x + 1$  کو  $x + 2$  سے تقسیم کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x+2 \overline{) 2x^2+3x+1} \\ \underline{2x^2+4x} \phantom{+1} \\ -x+1 \phantom{+1} \\ \underline{-x-2} \phantom{+1} \\ + \phantom{+1} \\ 3 \end{array}$$

**حل:** غور کیجیے کہ ہم عمل تقسیم اس وقت روک دیتے ہیں جب باقی صفر '0' ہو یا اس کا درجہ مقسوم علیہ سے کم

ہو لہذا یہاں خارج قسمت  $2x-1$  اور باقی 3 ہے اور

$$(2x-1)(x+2)+3=2x^2+3x-2+3 \\ =2x^2+3x+1$$

$$2x^2+3x+1=(x+2)(2x-1)+3$$

یعنی باقی + خارج قسمت × مقسوم علیہ = مقسوم

آئیے اب اس طریقہ کو توسیع دیتے ہوئے ایک کثیر رکنی کو دو درجی کثیر رکنی سے تقسیم کرتے ہیں۔

**مثال - 9:** مکعبی کثیر رکنی  $3x^3 + x^2 + 2x + 5$  کو دو درجی کثیر رکنی  $1 + 2x + x^2$  سے تقسیم کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 3x-5 \\ x^2+2x+1 \overline{) 3x^3+x^2+2x+5} \\ \underline{3x^3+6x^2+3x} \phantom{+5} \\ -5x^2-x+5 \\ \underline{-5x^2-10x-5} \phantom{+5} \\ + \phantom{+5} \\ 9x+10 \end{array}$$

**حل:** پہلے ہم مقسوم اور مقسوم علیہ کے ارکان کو ان کے درجوں کی تیزی ترتیب میں

لکھیں گے ان کی اس طرح کی ترتیب کو کثیر رکنیوں کی معیاری شکل کہتے ہیں۔

اس مثال میں مقسوم پہلے ہی سے اپنی معیاری شکل میں موجود ہے اور مقسوم علیہ

کی معیاری شکل  $x^2 + 2x + 1$  ہے۔

**مرحلہ - 1:** خارج قسمت کے پہلے رکن کو حاصل کرنے کے لیے مقسوم کے اعظم درجے

رکن (یعنی  $3x^3$ ) کو مقسوم علیہ کے اعلیٰ درجے کے رکن (یعنی  $x^2$ ) سے تقسیم کرتے ہیں۔

یہ  $3x$  ہے تب تقسیم کے عمل کو مکمل کیجیے باقی  $-5x^2 - x + 5$  ہے

**مرحلہ - 2:** اب خارج قسمت کے دوسرے رکن کو حاصل کرنے کے لیے نئے مقسوم کے اعظم درجے کے رکن (یعنی  $-5x^2$ ) کو مقسوم علیہ کے

اعظم درجے کے رکن (یعنی  $x^2$ ) سے تقسیم کیجیے۔  $-5$  حاصل ہوتا ہے۔  $-5x^2 - x + 5$  کے تقسیم کے عمل کو جاری رکھیے۔

**مرحلہ - 3:** باقی  $9x + 10$  ہے اب  $9x + 10$  کا درجہ مقسوم علیہ  $x^2 + 2x + 1$  کے درجے سے کم ہے۔ لہذا ہم تقسیم کے عمل کو آگے جاری

نہیں رکھ سکتے ہیں۔

لہذا خارج قسمت  $3x - 5$  اور باقی  $9x + 10$  ہے

$$(x^2+2x+1) \times (3x-5) + (9x+10) = (3x^3+6x^2+3x-5x^2-10x-5+9x+10) \\ = 3x^3+x^2+2x+5$$

یہاں ہم دوبارہ دیکھتے ہیں کہ

باقی + خارج قسمت × مقسوم علیہ = مقسوم



یہاں ہم ایک الگورتھم استعمال کرتے ہیں جو اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم کہلاتا ہے اس کے مطابق اگر  $p(x)$  اور  $g(x)$  کوئی دو کثیررکنیاں ہیں جہاں  $g(x) \neq 0$ ، تب ہم کثیررکنیاں  $q(x)$  اور  $r(x)$  اس طرح معلوم کر سکتے ہیں

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

جہاں یا تو  $r(x) = 0$  یا  $r(x) < g(x)$  کا درجہ اگر  $r(x) \neq 0$

یہ نتیجہ کثیررکنیوں کے لیے تقسیمی الگورتھم کے طور پر جانا جاتا ہے۔

اب مذکورہ بالا بحث سے حسب ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(i) اگر  $g(x)$  ایک خطی کثیررکنی ہے تب  $r(x) = r$  ایک مستقل ہوگا۔

(ii) اگر  $g(x) = 1$  ہو تب  $q(x)$  کا درجہ  $p(x) = 1$  کا درجہ

(iii) اگر  $p(x)$  کو  $x - a$  سے تقسیم کیا جائے تب باقی  $p(a)$  ہوگا۔

(iv) اگر  $r = 0$  ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $p(x)$ ،  $q(x)$  کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔ یا  $q(x)$ ،  $p(x)$  کا جز ضربی ہے۔

اس کے استعمال کی تشریح کے لیے آئیے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

**مثال - 10:**  $3x^2 - x^3 - 3x + 5$  کو  $x - 1 - x^2$  سے تقسیم کیجیے اور تقسیمی الگورتھم کی تصدیق کیجیے؟

**حل:** غور کیجیے کہ دی گئی کثیررکنیاں معیاری شکل میں نہیں ہیں۔ عمل تقسیم سے قبل ہم دونوں مقسوم اور مقسوم علیہ کے ارکان کو ان کے درجوں کی نزولی ترتیب میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} x-2 \\ -x^2+x-1 \overline{) -x^3+3x^2-3x+5} \\ \underline{-x^3+x^2-x} \phantom{+5} \\ 2x^2-2x+5 \\ \underline{2x^2-2x+2} \\ 3 \end{array}$$

$$\text{مقسوم} = -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

$$\text{مقسوم علیہ} = -x^2 - x - 1$$

تقسیمی عمل کو بائیں جانب دیکھا گیا ہے

یہاں پر ہم رک جاتے ہیں چونکہ باقی کا درجہ مقسوم علیہ

$(-x^2 - x - 1)$  کے درجے سے کم ہے۔

لہذا خارج قسمت  $x - 2$ ، باقی  $3$

$$\text{باقی} + \text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم علیہ} = \text{مقسوم}$$

$$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$$

$$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

اس طرح تقسیمی الگورتھم کی تصدیق ہوئی۔

**مثال - 11:** کثیررکنی  $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$  کے تمام صفروں کو معلوم کیجیے۔ اس کے دو صفر  $\sqrt{2}$  اور  $-\sqrt{2}$  ہیں۔

**حل:** چونکہ صفروں میں سے دو صفر  $\sqrt{2}$  اور  $-\sqrt{2}$  ہیں۔

اس لیے  $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$  سے تقسیم کر سکتے ہیں

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 3x + 1 \\
 x^2 - 2 \overline{) 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2} \\
 \underline{2x^4 \quad - 4x^2} \phantom{- 2} \\
 -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 \underline{-3x^3 \quad + 6x} \phantom{- 2} \\
 + \phantom{- 3x^3} \phantom{+ x^2} \phantom{+ 6x} - 2 \\
 \phantom{+} \phantom{- 3x^3} \phantom{+ x^2} \phantom{+ 6x} x^2 - 2 \\
 \phantom{+} \phantom{- 3x^3} \phantom{+ x^2} \phantom{+ 6x} x^2 - 2 \\
 \phantom{+} \phantom{- 3x^3} \phantom{+ x^2} \phantom{+ 6x} - \phantom{x^2} + \phantom{- 2} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2 \text{ خارج قسمت کا پہلا رکن}$$

$$\frac{-3x^3}{x^2} = -3x \text{ خارج قسمت کا دوسرا رکن}$$

$$\frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ خارج قسمت کا تیسرا رکن}$$

$$\text{لہذا } 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$$

$(-3x)$  کے ٹکڑے کرتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کرنے پر ہمیں  $(2x-1)(x-1)$  حاصل ہوتا ہے۔ لہذا اس کے صفر

$$x = \frac{1}{2} \text{ اور } x = 1 \text{ ہیں۔}$$

اس لیے دی گئی کثیررکنیوں کے صفر  $\sqrt{2}$ ،  $-\sqrt{2}$ ،  $1$  اور  $\frac{1}{2}$  ہیں۔

### مشق 3.4



1- مندرجہ ذیل میں دی گئی کثیررکنی  $p(x)$  کو کثیررکنی  $g(x)$  سے تقسیم کیجیے۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کیجیے۔

(i)  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ ,  $g(x) = x^2 - 2$

(ii)  $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ ,  $g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii)  $p(x) = x^4 - 5x + 6$ ,  $g(x) = 2 - x^2$

2- دوسری کثیررکنی کو پہلی کثیررکنی سے تقسیم کرتے ہوئے جانچ کیجیے کہ کس صورت میں پہلی کثیررکنی دوسری کثیررکنی کا جز ضربی ہے۔

(i)  $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12, t^2 - 3$

(ii)  $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2, x^2 + 3x + 1$

(iii)  $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1, x^3 - 3x + 1$

3-  $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$  کے تمام صفروں کو معلوم کیجیے اگر اس کے دو صفر  $\sqrt{\frac{5}{3}}$  اور  $-\sqrt{\frac{5}{3}}$  ہیں

4-  $x^3 - 3x^2 + x + 2$  کو کثیررکنی  $g(x)$  سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت اور باقی بالترتیب  $x-2$  اور  $-2x+4$  ہے تب  $g(x)$  معلوم کیجیے۔

5-  $p(x), g(x), q(x)$  اور  $r(x)$  کی مثالیں دیجیے جو تقسیمی الگورتھم کو مطمئن کرتے ہیں اور

(i)  $\deg p(x) = \deg q(x)$  (ii)  $\deg q(x) = \deg r(x)$  (iii)  $\deg r(x) = 0$

مشق اختیاری

(جامع اکتساب کے لیے)



1- جانچ کیجیے کہ ذیل میں دی گئی مکعبی کثیررکنیوں کے ساتھ میں بازو دیئے گئے اعداد ان کے صفر ہیں اور ہر صورت میں صفروں اور ضربیوں میں رشتہ کی بھی جانچ کیجیے۔

(i)  $2x^3 + x^2 - 5x + 2; (\frac{1}{2}, 1, -2)$

(ii)  $x^3 + 4x^2 + 5x - 2; (1, 1, 1)$

2- ایک مکعبی کثیررکنی معلوم کیجیے جن کے صفروں کا مجموعہ، ایک وقت میں دو صفروں کے حاصل ضرب کا مجموعہ اور تین صفروں کے حاصل ضرب بالترتیب 2، -7 اور -14 ہیں۔

3- اگر کثیررکنی  $x^3 - 3x^2 + x + 1$  کے صفر  $a-b$  اور  $a$  اور  $a+b$  ہیں تب  $a$  اور  $b$  معلوم کیجیے۔

4- اگر کثیررکنی  $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$  کے دو صفر  $2 \pm \sqrt{3}$  ہیں تب دوسرے صفر معلوم کیجیے۔

5- اگر کثیررکنی  $x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 25x + 10$  کو ایک دوسری کثیررکنی  $x^2 - 2x + k$  سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی  $x+a$  حاصل ہوتا ہے  $k$  اور  $a$  کی قدر معلوم کیجیے۔

## تجویز کردہ منصوبہ کام

## دو درجی کثیررکنی - کثیررکنی کا صفر - جیومیٹریائی مفہوم/ترسیم

مختلف شرائط کے لیے دو درجی کثیررکنی  $ax^2 + bx + c$  کی ترسیمات کھینچئے اور ان پر تبصرہ کیجئے۔

$$a=0 \quad (\text{iii}) \quad a<0 \quad (\text{ii}) \quad a>0 \quad (\text{i})$$

$$b=0 \quad (\text{vi}) \quad b<0 \quad (\text{v}) \quad b>0 \quad (\text{iv})$$

ہم نے کیا سیکھا



1- '1'، '2' اور '3' درجہ والی کثیررکنیاں بالترتیب خطی، دو درجی اور مکعبی کثیررکنیاں کہلاتی ہیں۔

2- 'x' میں حقیقی ضربیوں والی دو درجی کثیررکنی کی شکل  $ax^2 + bx + c$  ہے جہاں 'a'، 'b'، 'c' حقیقی اعداد ہیں۔ اور  $a \neq 0$

3- کثیررکنی  $p(x)$  کے صفران نقاط کے -x مختصات ہیں جہاں  $y = p(x)$  کا گراف -x محور کو قطع کرتا ہے

4- ایک دو درجی کثیررکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر اور مکعبی کثیررکنی کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہوتے ہیں۔

5- اگر  $\alpha$  اور  $\beta$  دو درجی کثیررکنی  $ax^2 + bx + c$  'a' کے صفر ہیں تب  $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ ،  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

6- اگر  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  مکعبی کثیررکنی  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  'a' کے صفر ہیں تب

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \quad \text{اور}$$

7- تقسیمی الگورتھم بیان کرتا ہے کہ دی گئی کسی بھی کثیررکنی  $p(x)$  اور غیر صفری کثیررکنی  $g(x)$  کے لیے دو کثیررکنیاں

$q(x)$  اور  $r(x)$  اس طرح حاصل ہوتی ہیں کہ

$$p(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

جہاں  $r(x) = 0$  یا  $r(x)$  کا درجہ  $g(x)$  کے درجے سے چھوٹا ہوتا ہے اگر  $r(x) \neq 0$

# دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ

## Pair of Linear Equations in Two Variabes

# باب 4

### 4.1 تمہید

ایک دن نازیہ اپنے والد کے ہمراہ ایک کتابوں کی دکان پہنچی انہوں نے 3 نوٹ بک اور 2 پن خریدے جس کے لیے اس کے والد نے 80 روپے ادا کیے۔ نازیہ کی سہیلی امرین کو وہ نوٹ بک اور پن پسند آئے اور اس نے 4 نوٹ بک اور 3 پن 110 روپے میں خریدے ان کے ہم جماعت ساتھ رشی کو پن اور جوزف کو نوٹ بک پسند آئی۔ انہوں نے نازیہ سے ایک پن کی اور ایک نوٹ بک کی قیمت دریافت کی۔ لیکن نازیہ کو ایک نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت نہیں معلوم تھی۔ وہ لوگ ان کی علیحدہ قیمت کس طرح معلوم کریں گے؟

اوپر دی گئی مثال میں ایک پن اور ایک نوٹ بک کی قیمت نہیں معلوم ہے یہ نامعلوم مقداریں ہیں۔ ہم روزمرہ زندگی میں ایسے کئی حالات سے دوچار ہوتے ہیں۔

### سوچئے۔ تبادلہ خیال کیجئے



ذیل میں دو حالات/ صورتیں دی گئی ہیں

- 1- کسی دن 2 کلوٹھاٹرا اور 1 کلوٹھاٹرا کی قیمت 30 تھی۔ دو دن بعد 2 کلوٹھاٹرا اور 4 کلوٹھاٹرا کی قیمت 66 ہو گئی۔
  - 2- ایم۔ کے نگر ہائی اسکول کی کرکٹ ٹیم کے کوچ نے 3 بلے (Bats) اور 6 گیند 3900 میں خریدے۔ اس کے بعد انہوں نے مزید ایک بلا (Bat) اور 2 گیند 1300 میں خریدے۔
- مندرجہ بالا صورتوں میں نامعلوم مقداروں کی نشاندہی/ شناخت کیجئے۔ ہم نے یہ مشاہدہ کیا کہ ہر صورت میں دو نامعلوم مقداریں ہیں۔

### 4.1.1 : نامعلوم مقداروں کو ہم کس طرح معلوم کرتے ہیں۔

تمہید میں دی گئی مثال میں نازیہ نے 3 نوٹ بک اور 2 پن 80 میں خریدتی ہے ہم ایک نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت کس طرح معلوم کریں گے؟

رشی اور جوزف اندازہ لگانے کی کوشش کرتے ہیں۔ رشی کہتی ہے کہ ایک نوٹ بک کی قیمت 25 ہوگی تب تین نوٹ بک کی قیمت 75 ہوگی۔ دو پن کی قیمت 5 ہوگی تب ایک پن 2.50 میں ہوگا۔

جوزف نے سوچا کہ ایک پن کی قیمت کے لیے 2.50 بہت کم ہوتے ہیں اس پن کی کم سے کم قیمت 16 ہونی چاہیے تب ایک نوٹ بک کی قیمت بھی 16 ہوگی۔

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ نوٹ بک اور پن کی قیمت کے لیے کئی قدریں ہو سکتی ہیں۔ تاکہ کل قیمت 80 ہو۔ تب ہم یہ کس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ نازیہ اور امرین نے نوٹ بک اور پن کس قیمت میں خریدے؟ صرف نازیہ کی ادا کی گئی قیمت کے استعمال سے ہم نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت نہیں معلوم کر سکتے۔ ہمیں امرین کے ذریعہ ادا کی گئی قیمت بھی استعمال کرنا ہوگا۔

### 4.1.2 ایک ساتھ دونوں مساواتوں کا استعمال

امرین نے وہی نوٹ بک اور پن خریدا ہے جو نازیہ نے خریدا۔ امرین نے 4 نوٹ بک اور 3 پن کے لیے 110 ادا کئے لہذا ہمارے دو صورتیں ہیں جس کو ہم ذیل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$(i) \quad 3 \text{ نوٹ بک} + 2 \text{ پن کی قیمت} = 80$$

$$(ii) \quad 4 \text{ نوٹ بک} + 3 \text{ پن کی قیمت} = 110$$

کیا ہم ایک نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں،

رشی کے ذریعہ اندازہ لگائی گئی قیمت پر غور کیجیے۔ اگر ایک نوٹ بک کی قیمت 25 اور ایک پن کی قیمت 2.50 ہو تب

$$4 \text{ نوٹ بک کی قیمت} : 4 \times 25 = 100$$

$$\text{اور 3 پن کی قیمت} : 3 \times 2.50 = 7.50$$

اگر رشی کا اندازہ درست ہے تب امرین کو  $100 + 7.50 = 107.50$  ادا کرنے ہوں گے۔ لیکن رشی نے 110 ادا کیے۔

اب ہم جوزف کے اندازہ کی گئی قیمت پر غور کریں گے۔

$$\text{جبکہ 4 نوٹ بک کی قیمت اگر ایک نوٹ بک 16 ہو تب} : 4 \times 16 = 64$$

$$\text{جبکہ 3 پن کی قیمت اگر ایک پن 16 ہو تب} : 3 \times 16 = 48$$

اگر جوزف کا اندازہ درست ہے تب امرین کو 112 ادا کرنے ہوں گے۔ لیکن امرین کی ادا کردہ قیمت سے زیادہ ہے۔



اصل تب ہم کیا کریں گے؟ ایک نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت خرید ہم کس طرح معلوم کریں گے؟

اگر ہمارے پاس ایک ہی مساوات جو دو نامعلوم مقدراتیں (متغیرات) میں ہوں تب ہم کئی جوابات معلوم کر سکتے ہیں۔ لہذا جب

ہمارے پاس دو متغیرات ہوں، ہمیں کم سے کم دو غیر منحصر مساوات (Independent Equations) کی ضرورت ہوگی۔ تاکہ صحیح حل

حاصل ہو۔ نامعلوم مقداروں کو معلوم کرنے کا ایک طریقہ ”مثالی طریقہ“ (Model Method) ہے۔ اس طریقہ میں نامعلوم مقداروں کو ظاہر

کرنے کے لیے مستطیل یا مستطیل کے حصے استعمال کیے جاتے ہیں آئیے ہم اوپر کی مثال کو اس طریقے سے غور کرتے ہیں۔

مرحلہ-1: نوٹ بک کو اس  خانہ سے اور پن کو  سے ظاہر کریں۔



نازیہ نے 3 نوٹ بک اور 2 پن 80 میں خریدی



امرین نے 4 نوٹ بک اور 3 پن 110 میں خریدی



**مرحلہ-2:** مقداروں کو بڑھائیے (یا گھٹائیے) تاکہ کوئی مقدار دونوں صورتوں میں مساوی ہو جائے۔ یہاں پر ہم پنوں کی تعداد کو مساوی کریں گے۔

$$(3 \times \text{نوٹ بک} + 9 \text{ نوٹ بک}) \quad (2 \times \text{پن} + 6 \text{ قلم})$$



$$(4 \times \text{نوٹ بک} + 8 \text{ نوٹ بک}) \quad (3 \times \text{پن} + 6 \text{ پن})$$



مرحلہ 2 میں ہم سادہ تناسبی منطق کا مشاہدہ کرتے ہیں

چونکہ نازیہ نے 3 نوٹ بکس اور 2 پن 80 میں خریدیں لہذا 9 نوٹ بک اور 6 پن:

$$3 \times 3 = 9 \quad \text{نوٹ بک} \quad \text{پن} \quad 3 \times 2 = 6 \quad \text{اور} \quad 3 \times 80 = 240$$

$$(1) \quad \dots\dots\dots \quad 240 = 3 \times 80$$

اسی طرح سے امرین نے 4 نوٹ بک اور 3 پن 110 میں خریدیں تب:

$$2 \times 4 = 8 \quad \text{نوٹ بک} \quad \text{اور} \quad 2 \times 3 = 6 \quad \text{پن}$$

$$(2) \quad \dots\dots\dots \quad 220 = 2 \times 110$$

مساوات (1) اور (2) کا تقابل کرنے پر ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایک زائد نوٹ بک کی قیمت 20 = 240 - 220

تب ایک نوٹ بک کی قیمت 20 ہوگی۔

نازیہ نے 3 نوٹ بک اور 2 پن 80 روپے میں خریدیں چونکہ ایک نوٹ بک کی قیمت 20 ہے 3 نوٹ بک کی قیمت 60 ہوگی۔ لہذا

$$2 \text{ پن کی قیمت} = 20 - 60 = 80 \text{ ہوگی۔}$$

$$\text{لہذا ایک پن کی قیمت} = 20 \div 2 = 10$$

آئیے ہم ان قیمتوں کو امرین کی ادا کردہ قیمت کے مطابق جانچ لیں۔ 4 نوٹ بک کی قیمت 80 ہوگی اور 3 قلم کی قیمت 30 ہوگی تب

کل قیمت 110 ہوگی جو درست ہے۔

مندرجہ بالا مباحثہ اور حساب سے یہ واضح ہوتا ہے کہ مطلق حل سٹ (منفرد حل سٹ) کو حاصل کرنے کے لیے ہمیں دو متغیرات پر مبنی کم

سے کم دو غیر منحصر (Independent) مساوات کی ضرورت ہوگی۔

عام طور پر ایک مساوات جو  $ax + by + c = 0$  کی شکل میں ہو دو متغیرات  $x$  اور  $y$  پر مبنی خطی مساوات کہلاتی ہے۔ جہاں  $a$  اور  $b$  حقیقی اعداد ہیں۔ جہاں پر  $a$  اور  $b$  میں کم سے کم کوئی ایک صفر نہ ہو (عام طور پر ہم اس شرط کو  $a^2 + b^2 \neq 0$  لکھتے ہیں)



**کوشش کیجیے**



ذیل کے سوالات کے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے؟

1- ذیل میں کونسی مساوات خطی مساوات نہیں ہے

$$(a) 5 + 4x = y + 3 \quad (b) x + 2y = y - x \quad (c) 3 - x = y^2 + 4 \quad (d) x + y = 0$$

2- ذیل میں کونسی مساوات واحد متغیر پر خطی مساوات ہے۔

a)  $2x + 1 = y - 3$

b)  $2t - 1 = 2t + 5$

c)  $2x - 1 = x^2$

d)  $x^2 - x + 1 = 0$

3- ذیل میں دیا گیا کونسا عدد مساوات  $2(x + 3) = 18$  کا حل ہے؟

21 (d) 13 (c) 6 (b) 5 (a)

4-  $x$  کی کونسی قدر مساوات  $2x - (4 - x) = 5 - x$  کو مطمئن کرتی ہے۔

0.5 (d) 2.25 (c) 3 (b) 4.5 (a)

5- مساوات  $x - 4y = 5$  کا

(a) کوئی حل نہیں (b) منفرد حل سٹ ہے (c) دو حل سٹ ہیں (d) لامحدود کئی حل سٹ ہیں

## 4.2 دو متغیرات میں خطی مساوات کی جوڑ کا حل:

تمہید میں دی گئی نوٹ بک اور پن کی مثال میں کتنی مساواتیں ہیں؟ ہمارے پاس دو مساواتیں ہیں یا دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ ہے۔ ایک خطی مساوات کے جوڑ کے حل سٹ سے کیا مراد ہے؟  
متغیرات  $x$  اور  $y$  کی قدروں کی جوڑ جو دونوں مساواتوں کو مطمئن کرتا ہے خطی مساوات کی جوڑ کا حل سٹ کہلاتا ہے۔

### 4.2.1 خطی مساوات کی جوڑ کا حل معلوم کرنے کا ترتیبی طریقہ

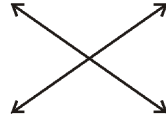
دو متغیرات پر خطی مساوات کے جوڑ کے کتنے حل سٹ ہوتے ہیں؟ کیا ان کی تعداد لامتناہی یا ایک یا پھر ایک بھی نہیں۔  
پچھلے حصہ میں ہم نے خطی مساوات کے جوڑ کے حل کے لیے مثالی طریقہ استعمال کیا۔ اب ہم ان مساوات کے حل کے لیے ترتیبی طریقہ کار استعمال کریں گے۔

فرض کرو کہ مساوات  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ,  $(a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$  اور  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ;  $(a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$

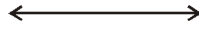
دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ بناتی ہیں۔

دو متغیرات میں خطی مساوات کی ترسیم ایک خط مستقیم ہوتی ہے۔ اس خط مستقیم پر پائے جانے والے حقیقی اعداد کے مرتب جوڑ  $(x, y)$  اس مساوات کے حل کو ظاہر کرتے ہیں۔ اور مرتب جوڑ  $(x, y)$  جو خط مستقیم پر واقع نہ ہوں وہ خطی مساوات کے حل نہیں ہوں گے۔  
اگر ایک ہی مستوی کے دو خط مستقیم ہوں تب ان کے درمیان کیا رشتہ ممکن ہو سکتا ہے؟ اور اس رشتہ کی کیا اہمیت ہے؟

جب کسی مستوی میں دو خط کھینچے گئے ہوں ان کے درمیان ذیل میں دیئے گئے تین صورتوں میں کوئی ایک صورت ممکن ہوگی۔



1- دو خط ایک نقطہ پر قطع کریں گے۔



2- دو خط آپس میں قطع نہ کریں یعنی وہ متوازی ہوں۔



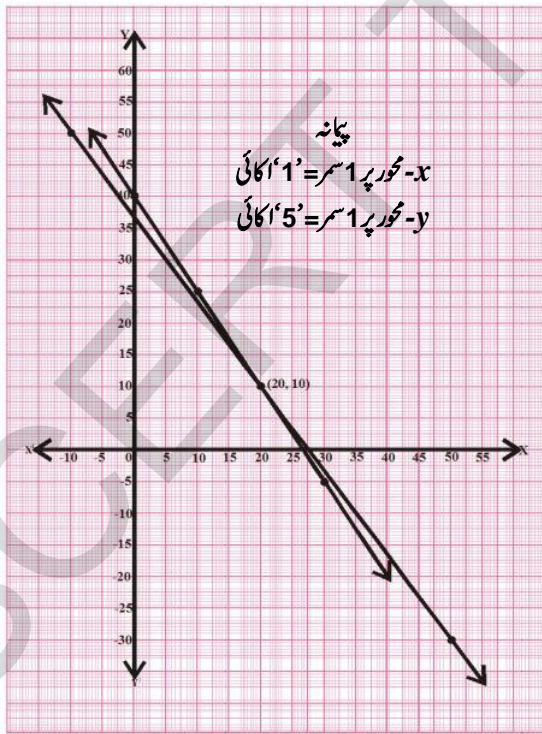
3- دو خطوط ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے (یعنی دونوں یکساں ہوں)

آئیے ہم پہلی مثال کو 'x' اور 'y' کے استعمال سے لکھتے ہیں جہاں x ایک نوٹ بک کی قیمت اور y ایک پن کی قیمت ہے۔ تب حاصل

ہونے والی مساوات  $3x + 2y = 80$  اور  $4x + 3y = 110$  ہوں گی۔

مساوات $4x + 3y = 110$ کے لیے		
x	$y = \frac{110 - 4x}{3}$	(x, y)
-10	$y = \frac{110 - 4(-10)}{3} = 50$	(-10, 50)
20	$y = \frac{110 - 4(20)}{3} = 10$	(20, 10)
50	$y = \frac{110 - 4(50)}{3} = 30$	(50, -30)

مساوات $3x + 2y = 80$ کے لیے		
x	$y = \frac{80 - 3x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{80 - 3(0)}{2} = 40$	(0, 40)
10	$y = \frac{80 - 3(10)}{2} = 25$	(10, 25)
20	$y = \frac{80 - 3(20)}{2} = 10$	(20, 10)
30	$y = \frac{80 - 3(30)}{2} = -5$	(30, -5)



اوپر کے نقاط کی کارٹیزی مستوی میں نشانہ ہی کرنے پر ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ دو خطوط نقطہ (20, 10) پر قطع کرتے ہیں۔

اوپر کی مساواتوں میں x اور y کی قدر درج کرنے پر

$$4(20) + 3(10) = 110 \text{ اور } 3(20) + 2(10) = 80$$

حاصل ہوگا۔

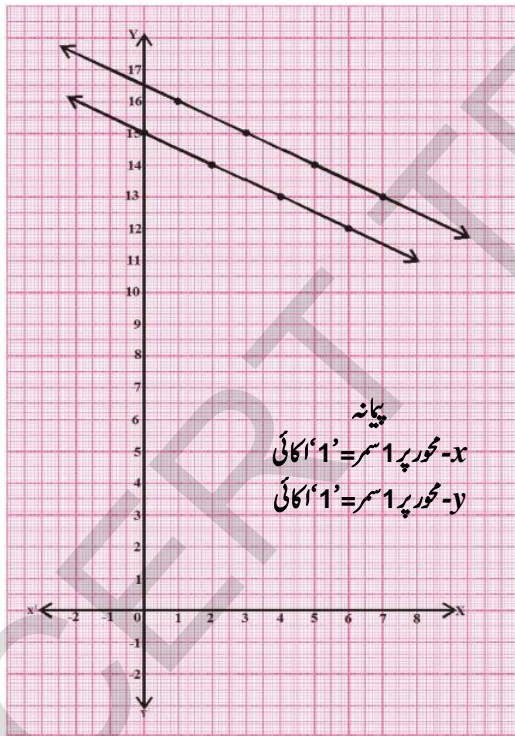
پس ترسیم سے ایک نوٹ بک کی قیمت 20 اور ایک پن کی قیمت 10 حاصل ہوئی۔ اعادہ کیجیے کہ ہمیں مثالی طریقے کے استعمال سے بھی یہی حل سٹ حاصل ہوا تھا۔

چونکہ صرف (20, 10) ہی ایک مشترکہ نقطہ ہے۔ یہ خطی مساوات کا حل سٹ ایک ہی ہوگا۔ ایسی مساوات کا جوڑ 'خطی مساواتوں کا حقیقی جوڑ' یا غیر منحصر جوڑ کہلاتا ہے۔ ان کا ہمیشہ ایک منفرد حل ہوتا ہے۔

آئیے سوچیں اور تبادلہ خیال کیجیے کہ تحت دی گئی پہلی مثال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ ہمیں 1 کلوٹھاٹر اور 1 کلوآلوکی علدہ علدہ قیمت معلوم کرنا ہے۔ فرض کرو کہ 1 کلوآلوکی قیمت  $x$  اور 1 کلوٹھاٹر کی قیمت  $y$  روپیے ہے۔ تب یہ مساوات حاصل ہوگی۔  $1x+2y=30$  اور  $-2x+4y = 66$

مساوات $2x+4y = 66$ کے لیے		
$x$	$y = \frac{66-2x}{4}$	$(x, y)$
1	$y = \frac{66-2(1)}{4} = 16$	(1, 16)
3	$y = \frac{66-2(3)}{4} = 14$	(3, 14)
5	$y = \frac{66-2(5)}{4} = 13$	(5, 13)
7	$y = \frac{66-2(7)}{4} = 12$	(7, 13)

مساوات $1x + 2y = 30$ کے لیے		
$x$	$y = \frac{30-x}{2}$	$(x, y)$
0	$y = \frac{30-0}{2} = 15$	(0, 15)
2	$y = \frac{30-2}{2} = 14$	(2, 14)
4	$y = \frac{30-4}{2} = 13$	(4, 13)
6	$y = \frac{30-6}{2} = 12$	(6, 12)



اس ترسیم میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ دو مساوات سے بننے والے خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ چونکہ خطوط قطع نہیں کرتے اس لیے ان دو مساواتوں کا کوئی حل سٹ نہیں۔ اس سے مراد یہ ہے کہ مختلف ایام میں ٹھاٹر اور آلوکی قیمتیں مختلف ہے۔ جس کا مشاہدہ ہم زندگی میں بھی کرتے ہیں۔ یہ تبدیلی غیر منحصر ہے

ایسا خطی مساواتوں کا جوڑا جس کا کوئی حل سٹ نہیں ہوتا۔ غیر حقیقی خطی مساواتوں کا جوڑا کہلاتا ہے۔

سوچیں اور تبادلہ خیال کیجیے میں دیئے گئے دوسری مثال میں فرض کیجیے کہ ایک بلے کی قیمت  $x$  ہے اور ایک گیند کی قیمت  $y$  ہے۔ تب ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔  $3x+6y=3900$  اور  $x+2y = 1300$

مساوات $2x+4y = 66$ کے لیے		
$x$	$y = \frac{3900-3x}{6}$	$(x, y)$
100	$y = \frac{3900-3(100)}{6} = 600$	(100, 600)

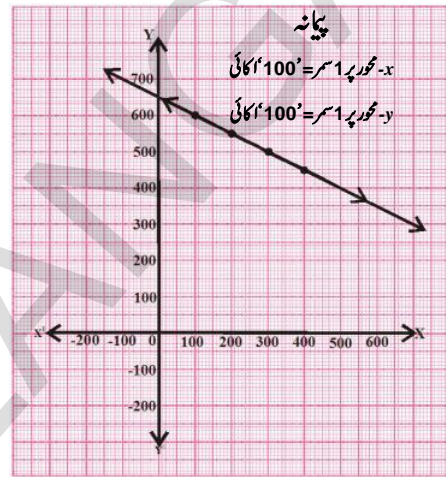
مساوات $x + 2y = 1300$ کے لیے		
$x$	$y = \frac{1300-x}{2}$	$(x, y)$
100	$y = \frac{1300-100}{2} = 600$	(100, 600)



مساوات $x + 2y = 1300$ کے لیے			مساوات $x + 2y = 1300$ کے لیے		
200	$y = \frac{3900 - 3(200)}{6} = 550$	(200,500)	200	$y = \frac{1300 - 200}{2} = 550$	(200,550)
300	$y = \frac{3900 - 3(300)}{6} = 500$	(300,500)	300	$y = \frac{1300 - 300}{2} = 500$	(300,500)
400	$y = \frac{3900 - 3(400)}{6} = 450$	(400,450)	400	$y = \frac{1300 - 400}{2} = 450$	(400,450)

ایک منطبق خطوط کی جوڑ کی مدد سے جیومیٹری طریقے سے مساواتوں کو بتایا گیا ہے اگر مساواتوں کے حل مشترک نقاط رکھتے ہیں تب اس صورت میں ان کے مشترک نقاط کیا ہیں؟

ترسیم میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ خط کا ہر ایک نقطہ دونوں مساواتوں کا مشترک حل رکھتا ہے اس طرح یہ دونوں مساواتیں جو معادل ہیں کئی لامتناہی حل رکھتے ہیں۔ اس طرح مساواتوں کے جوڑ ”دو متغیرات میں خطی مساواتوں کے مختصر اور Consistent pair کہلاتے ہیں“ مساواتوں کا نظام جو حل رکھتا ہے Consistent مساوات کے طور پر جانے جاتے ہیں۔



### کوشش کیجیے



اوپر دی گئی مثال میں کیا آپ ایک بلہ (BAT) اور گیند کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں؟

### سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



کیا دیا گیا ہر مختصر مساواتوں کا جوڑ ہمیشہ حقیقی ہوتا ہے۔ کیوں؟ یا کیوں نہیں؟

### یہ کیجیے



1- ذیل کی خطی مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے۔

$$\begin{array}{lll} 2x - y = 4 & \text{(iii)} & x + y = 2 & \text{(ii)} & x - 2y = 0 & \text{(i)} \\ 4x - 2y = 6 & & 2x + 2y = 4 & & 3x + 4y = 20 & \end{array}$$

2- ایک ریل کے راستے کی دو پٹریاں ذیل کے مساواتوں سے ظاہر کی گئی ہیں

$$x + 2y - 4 = 0 \text{ اور } 2x + 4y - 12 = 0 \text{ تب ان مساواتوں کا ترسیمی اظہار کیجیے۔}$$

### 4.2.3 مساواتوں کے نظام کی نوعیت اور عددی ضربوں کے درمیان رشتہ

فرض کرو کہ کسی دو متغیرات پر خطی مساوات کے جوڑ کے ضرب  $a_1, b_1, c_1$  اور  $a_2, b_2, c_2$  ہیں تب مندرجہ بالا مثالوں میں  $\frac{a_1}{c_2}, \frac{a_2}{c_1}, \frac{b_1}{c_2}$  اور  $\frac{b_2}{c_1}$  کی قدریں معلوم کر کے ان کا تقابل کرتے ہیں۔

مساواتوں کا جوڑ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	نسبتوں کا تقابل	ترسیلی اظہار	الجبری اظہار
1. $3x+2y-80=0$ $4x+3y-110=0$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-80}{-110}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	قاطع خطوط	واحد حل
2. $1x+2y-30=0$ $2x+4y-66=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-30}{-66}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	متوازی خطوط	کوئی حل سٹ وجود نہیں رکھتا
3. $3x+6y=3900$ $x+2y=1300$	$\frac{3}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{3900}{1300}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ایک دوسرے پر منطبق خطوط	لاتناہی حل سٹ

آئیے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

**مثال-1:** جانچ کیجیے کہ ذیل میں دی گئی مساواتوں کا جوڑ قاطع خطوط ہے، متوازی خطوط ہے یا منطبق خطوط ہے۔ اگر مساواتیں حقیقی ہوں تب ان کا حل سٹ معلوم کیجیے۔

$$2x + y - 5 = 0$$

$$3x - 2y - 4 = 0$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-4}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$$

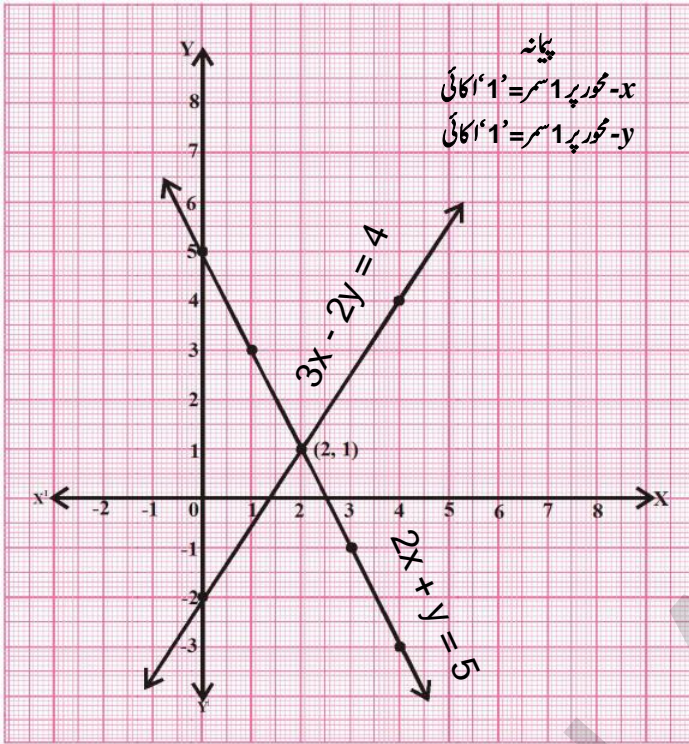
حل:

چونکہ  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$  لہذا دی گئی مساواتیں قاطع خطوط بناتی ہیں اور یہ حقیقی ہیں۔

مساوات $2x + y = 5$ کے لیے		
x	$y = 5 - 2x$	(x, y)
0	$y = 5 - 2(0) = 5$	(0, 5)
1	$y = 5 - 2(1) = 3$	(1, 3)
2	$y = 5 - 2(2) = 1$	(2, 1)
3	$y = 5 - 2(3) = -1$	(3, -1)
4	$y = 5 - 2(4) = -3$	(4, -3)

مساوات $3x - 2y = 4$ کے لیے		
x	$y = \frac{4-3x}{-2}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-3(0)}{-2} = -2$	(0, -2)
2	$y = \frac{4-3(2)}{-2} = 1$	(2, 1)
4	$y = \frac{4-3(4)}{-2} = 4$	(4, 4)





اس مساوات کے جوڑ کا واحد حل سٹ (2, 1) ہے۔

مثال-2: جانچ کیجیے کہ ذیل میں دیا گیا مساوات کا جوڑ حقیقی ہے یا نہیں۔

$6x + 8y = 4$  اور  $3x + 4y = 2$  اور تریسی اظہار کے ذریعہ تصدیق کیجیے۔

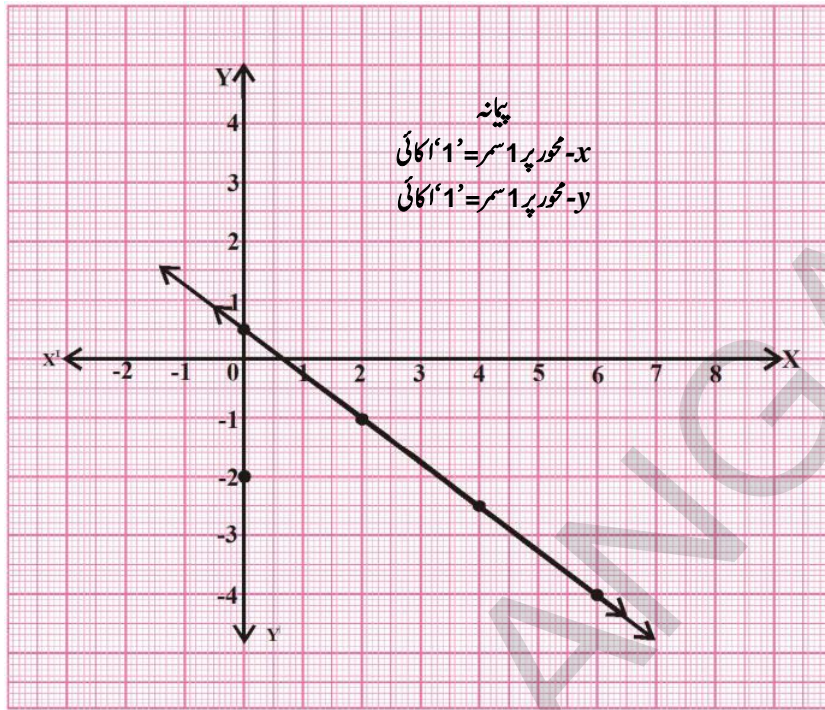
$$3x + 4y - 2 = 0 \quad \text{حل}$$

$$6x + 8y - 4 = 0$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{چونکہ}$$

لہذا یہ خطوط ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے۔ پس دیا گیا خطی مساوات کا جوڑ حقیقی اور منحصر ہے اور لامتناہی حل سیٹ رکھتا ہے۔

مساوات $3x + 4y = 2$ کے لیے			مساوات $6x + 8y = 4$ کے لیے		
$x$	$y = \frac{2-3x}{4}$	$(x, y)$	$x$	$y = \frac{4-6x}{8}$	$(x, y)$
0	$y = \frac{2-3(0)}{4} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$	0	$y = \frac{4-6(0)}{8} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{2-3(2)}{4} = -1$	$(2, -1)$	2	$y = \frac{4-6(2)}{8} = -1$	$(2, -1)$
4	$y = \frac{2-3(4)}{4} = -2.5$	$(4, -2.5)$	4	$y = \frac{4-6(4)}{8} = -2.5$	$(4, -2.5)$
6	$y = \frac{2-3(6)}{4} = -4$	$(6, -4)$	6	$y = \frac{4-6(6)}{8} = -4$	$(6, -4)$



مثال-3: جانچ کیجیے کہ آیا مساوات  $4x - 6y = 15$  اور  $2x - 3y = 5$  حقیقی ہیں یا نہیں۔ تریسی انظہار کے ذریعہ تصدیق کیجیے۔

حل:  $4x - 6y - 15 = 0$

$2x - 3y - 5 = 0$

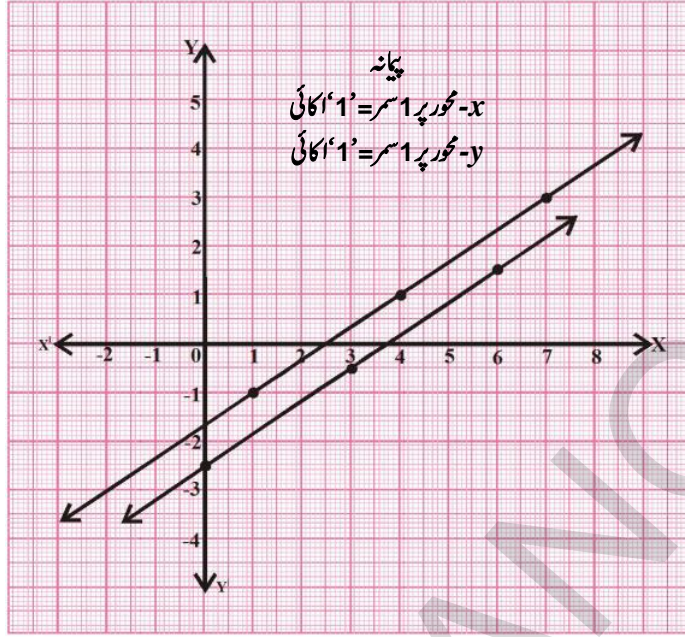
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$        $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-15}{-5} = \frac{3}{1}$        $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

لہذا دی گئی مساوات کا جوڑ حقیقی نہیں۔ ان کا کوئی حل سٹ نہیں ہوتا۔ لہذا ان کا تریسی انظہار متوازی خطوط ہوگا۔

مساوات $4x - 6y = 9$ کے لیے			مساوات $2x + 3y = 5$ کے لیے		
$x$	$y = \frac{15 - 4x}{-6}$	$(x, y)$	$x$	$y = \frac{5 - 2x}{-3}$	$(x, y)$
0	$y = \frac{15 - 0}{-6} = \frac{-5}{2}$	$(0, -2.5)$	1	$y = \frac{5 - 2(1)}{-3} = -1$	$(1, -1)$
3	$y = \frac{15 - 4(3)}{-6} = \frac{-1}{2}$	$(3, -0.5)$	3	$y = \frac{5 - 2(4)}{-3} = 1$	$(4, 1)$
6	$y = \frac{15 - 4(6)}{-6} = \frac{3}{2}$	$(6, 1.5)$	6	$y = \frac{5 - 2(7)}{-3} = 3$	$(7, 3)$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2019-20



یہ کیجیے



ذیل میں دی گئی مساوات کے نظام جانچئے کہ ان کا منفرد حل سٹ ہے یا لامتناہی کئی سٹ ہیں یا پھر کوئی حل سٹ نہیں۔ ان کو ترتیم کے ذریعہ حل کیجیے۔

(i)  $2x + 3y = 1$   
 $3x - y = 7$

(ii)  $x + 2y = 6$   
 $2x + 4y = 12$

(iii)  $3x + 2y = 6$   
 $6x + 4y = 18$

کوشش کیجیے



1- ذیل کے مساوات کے جوڑ میں P کی کس قدر کے لیے ان مساوات کا واحد حل سٹ ہوگا۔

$$3x + 3y = -6 \text{ اور } 2x + py = -5$$

2- مساوات کا جوڑ  $2x - ky + 3 = 0$  اور  $4x + 6y - 5 = 0$  میں k کی کس قدر کے لیے یہ مساوات متوازی خطوط کو ظاہر کرتے ہیں۔

3- مساوات کا جوڑ  $3x + 4y + 2 = 0$  اور  $9x + 12y + k = 0$  کی کس قدر کے لیے منطبق خطوط کو ظاہر کرتا ہے۔

4- 'P' کی کس مثبت قدر کے لیے ذیل کے خطی مساوات کے جوڑ کے لامتناہی حل سٹ ہوں گے۔

$$12x + py - p = 0$$

$$px + 3y - (p - 3) = 0$$

آئیے ہم چند مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں

**مثال-4:** ایک باغ میں چند پھول اور کھیاں ہیں۔ اگر ایک پھول پر ایک مکھی بیٹھ جائے تب ایک مکھی باقی رہ جائے گی۔ اور اگر ایک پھول پر دو مکھیاں بیٹھ جاتی ہیں تب ایک پھول باقی رہ جائے گا۔ باغ میں پھول اور مکھیوں کی تعداد معلوم کیجیے۔



**حل:** فرض کرو کہ باغ میں مکھیوں کی تعداد  $x$  اور

باغ میں پھولوں کی تعداد  $y$

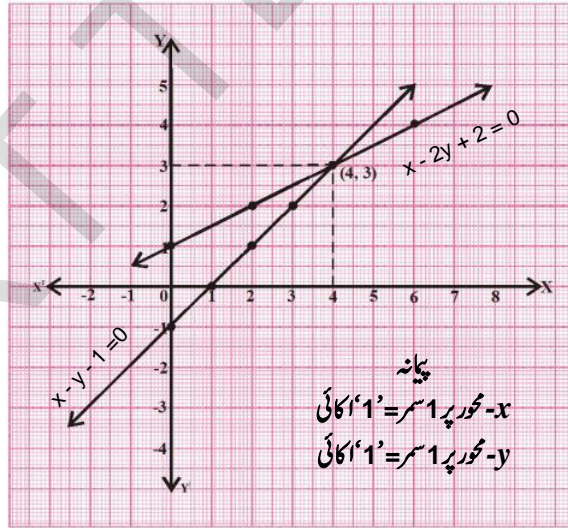
اگر ایک پھول پر ایک مکھی بیٹھتی ہو تب 1 مکھی باقی رہ جائے گی لہذا  $x = y + 1$

یا  $x - y - 1 = 0$  ..... (i)

اگر ایک پھول پر دو مکھیاں بیٹھتی ہیں تب ایک پھول باقی رہ جائے گا لہذا  $x = 2(y - 1)$

یا  $x - 2y + 2 = 0$  ..... (ii)

مساوات $x - y - 1 = 0$ کے لیے			مساوات $x - 2y + 2 = 0$ کے لیے		
$x$	$y = x - 1$	$(x, y)$	$x$	$y = \frac{x+2}{2}$	$(x, y)$
0	$y = 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$	0	$y = \frac{0+2}{2} = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 1 - 1 = 0$	$(1, 0)$	2	$y = \frac{2+2}{2} = 2$	$(2, 2)$
2	$y = 2 - 1 = 1$	$(2, 1)$	4	$y = \frac{4+2}{2} = 3$	$(4, 3)$
3	$y = 3 - 1 = 2$	$(3, 2)$	6	$y = \frac{6+2}{2} = 4$	$(6, 4)$
4	$y = 4 - 1 = 3$	$(4, 3)$			



لہذا باغ میں 4 مکھیاں اور 3 پھول ہیں۔

**مثال-5:** ایک مستطیلی نما پلاٹ (plot) کا احاطہ 32 میٹر ہے۔ اگر اس کا طول 2 میٹر بڑھا دیا جائے اور اس کا عرض 1 میٹر کم کر دیا جائے تب بھی

اس پلاٹ کا رقبہ تبدیل نہیں ہوتا۔ تب پلاٹ کا طول اور عرض معلوم کیجیے۔

**حل:** فرض کیجیے کہ پلاٹ طول اور عرض بالترتیب  $l$  اور  $b$  ہیں تب

دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ

$$\begin{aligned} \text{رقبہ} &= lb & \text{اور} & \text{احاطہ} = 2(l+b) \\ & & & \Rightarrow 32 = 2(l+b) \\ & & & \Rightarrow l+b = 16 \\ & & & \Rightarrow l+b-16 = 0 \dots\dots (i) \end{aligned}$$

جب طول 2 میٹر بڑھا دیا جائے تب نیا طول  $l+2$  ہوگا اور عرض 1 میٹر کم کر دیا جائے تب نیا عرض  $b-1$  حاصل ہوگا۔

تب رقبہ  $= (1+2)(b-1)$

چونکہ رقبہ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی

$$(1+2)(b-1) = lb$$

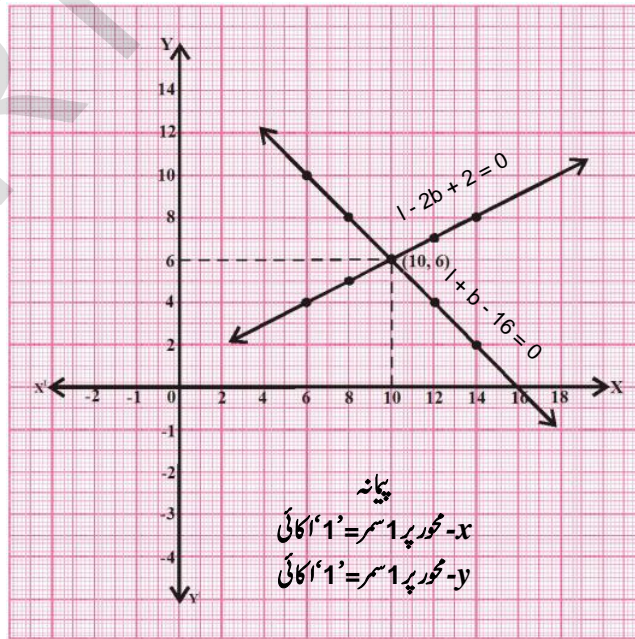
$$\Rightarrow lb - 1 + 2b - 2 = lb \text{ یا } lb - lb = 1 - 2b + 2$$

$$\Rightarrow 1 - 2b + 2 = 0 \dots\dots (2)$$

مساوات $l+b-16=0$ کے لیے			مساوات $l-2b+2=0$ کے لیے		
$l$	$b = 16 - l$	$(l, b)$	$l$	$b = \frac{l+2}{2}$	$(l, b)$
6	$b = 16 - 6 = 10$	(6, 10)	6	$b = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)
8	$b = 16 - 8 = 8$	(8, 8)	8	$b = \frac{8+2}{2} = 5$	(8, 5)
10	$b = 16 - 10 = 6$	(10, 6)	10	$b = \frac{10+2}{2} = 6$	(10, 6)
12	$b = 16 - 12 = 4$	(12, 4)	12	$b = \frac{12+2}{2} = 7$	(12, 7)
14	$b = 16 - 14 = 2$	(14, 2)	14	$b = \frac{14+2}{2} = 8$	(14, 8)

لہذا پلاٹ کا حقیقی طول 10 میٹر اور عرض 6 میٹر ہوگا۔

طول کی قدریں  $x$ - محور پر اور عرض کی قدریں  $y$ - محور پر حاصل ہونے والی ترتیب



## مشق - 4.1



1- نسبتوں کے تقابل سے جانچے کہ ذیل میں دیا گیا خطی مساوات کا جوڑ آیا ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے یا متوازی ہے یا ایک دوسرے پر منطبق ہے۔

a)  $5x - 4y + 8 = 0$       b)  $9x + 3y + 12 = 0$       c)  $6x - 3y + 10 = 0$   
 $7x + 6y - 9 = 0$                        $18x + 6y + 24 = 0$                        $2x - y + 9 = 0$

2- جانچ کیجیے کہ ذیل میں دی گئی مساواتیں حقیقی ہیں یا غیر حقیقی۔ ان کو ترسیم کے ذریعہ حل کیجیے۔

a)  $3x + 2y = 5$                       b)  $2x - 3y = 8$                       c)  $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$   
 $2x - 3y = 7$                                $4x - 6y = 9$                                $9x - 10y = 14$

d)  $5x - 3y = 11$                       e)  $\frac{4}{3}x + 2y = 8$                       f)  $x + y = 5$   
 $-10x + 6y = -22$                        $2x + 3y = 12$                                $2x + 2y = 10$

g)  $x - y = 8$                               h)  $2x + y - 6 = 0$                       i)  $2x - 2y - 2 = 0$   
 $3x - 3y = 16$                                $4x - 2y - 4 = 0$                                $4x - 4y - 5 = 0$

3- اسلم ملبوسات کی دوکان جا کر پینٹ اور شرٹ خریدتا ہے۔ جب اس کے دوستوں نے اس سے پوچھا کہ کتنے شرٹ اور پینٹ خریدے تب اس نے انہیں اس طرح جواب دیا ”شرٹ کی تعداد خریدے گئے پینٹ کی تعداد کے دو گنے سے 2 کم ہے اور اسی طرح شرٹ کی تعداد پینٹ کے چار گنا سے 4 کم ہے؟“

اسلم کے خریدے گئے پینٹ اور شرٹ کی تعداد معلوم کرنے میں اس کے دوستوں کی مدد کیجیے۔

4- ایک ریاضی کے کونز (Quiz) میں جماعت دہم کے 10 طلباء نے شرکت کی۔ اگر لڑکیوں کی تعداد لڑکوں کی تعداد سے 4 زیادہ ہو تب کونز میں شرکت کرنے والے لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

5- پنسل اور 7 پن کی کل قیمت 50 ہے جبکہ 7 پنسل اور 5 پن کی کل قیمت 46 ہے ایک پنسل اور ایک پن کی علیحدہ قیمت معلوم کیجیے

6- ایک مستطیلی نما باغ کا طول عرض سے 4 میٹر زیادہ ہے اور اس باغ کا نصف احاطہ 36 میٹر ہے تب باغ کے ابعاد (طول، عرض) معلوم کیجیے۔

7-  $2x + 3y - 8 = 0$  ایک خطی مساوات ہے ایک اور دو متغیرات پر مبنی خطی مساوات اس طرح لکھئے کہ ان دونوں کا ترسیمی اظہار کرنے پر قاطع خطوط حاصل ہوں۔ اور مزید دو خطی مساواتیں بنائیے جس میں ایک دی گئی مساوات متوازی ہو دوسری دی گئی مساوات پر منطبق ہو؟

8- ایک مستطیل کے طول کو 5 اکائی کم کرنے پر اور عرض 2 اکائی بڑھانے پر اس کا رقبہ 80 مربع اکائیاں کم ہو گیا۔ اگر اس مستطیل کا طول 10 اکائی بڑھادیں اور عرض 15 اکائی کم کردیں تب اس کا رقبہ میں 50 مربع اکائیاں کا اضافہ ہوگا۔ مستطیل کا طول اور عرض معلوم کیجیے۔



9- جماعت دہم میں اگر ایک بیٹھ پر 3 طلباء بیٹھتے ہیں تب ایک طالب علم باقی رہ جاتا ہے۔ اگر ایک بیٹھ پر 4 طلباء بیٹھتے ہیں تب ایک بیٹھ باقی رہ جاتی ہے جماعت میں طلباء اور بیٹھوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

### 4.3 خطی مساوات کے جوڑ کا حل سٹ معلوم کرنے کا الجبری طریقہ

خطی مساوات کے جوڑ کا حل سٹ معلوم کرنے کا تریسی طریقہ ہم سیکھ چکے ہیں۔ لیکن ان مساوات کے لیے جن کے حل سٹ کے مختصات طبعی اعداد نہیں ہوتے۔ ان کا تریسی اظہار آسان نہیں ہوتا۔

مثال کے طور پر جب حل سٹ کے نقاط  $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$ ،  $(-1.75, 3.3)$ ،  $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$  وغیرہ ہوں تو اس طرح کے حل سٹ کی

نشاندہی کے لیے غلطی کا امکان بہت زیادہ ہوتا ہے۔ کیا ان حل سٹ کو معلوم کرنے کا کوئی دوسرا طریقہ ہے؟ ایسے کئی الجبری طریقے ہیں جن پر اب ہم مباحثہ کریں گے۔

#### 4.3.1 قدریں درج کرنے کا طریقہ (اندراجی طریقہ)

یہ طریقہ دو متغیرات پر خطی مساواتوں کو حل کرنے کے لیے کافی کارآمد ہے جہاں ایک متغیر کو دوسرے متغیر کی رقوم میں آسانی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقے کو سمجھنے کے لیے مرحلے وار غور کریں گے۔

- مرحلہ-1: دو خطی مساواتوں سے کسی ایک مساوات میں ایک متغیر کو دوسرے متغیر کی رقوم میں لکھئے۔ مثال کے طور پر  $y$  کو  $x$  کی رقوم میں۔
- مرحلہ-2: مرحلہ-1 میں حاصل کردہ  $y$  کی قدر کو دوسری مساوات میں درج کیجیے۔
- مرحلہ-3: مرحلہ-2 میں حاصل کردہ مساوات کو مختصر کیجیے اور  $x$  کی قدر معلوم کیجیے۔
- مرحلہ-4: مرحلہ-3 میں  $x$  کی حاصل کردہ قدر دی گئی کسی ایک خطی مساوات میں درج کیجیے اور  $y$  کی قدر محسوب کیجیے۔
- مرحلہ-5: محسوب کردہ  $x$  اور  $y$  کی قدروں کو دی گئی دونوں مساوات میں درج کر کے حاصل کردہ حل سٹ کی تصدیق کیجیے۔
- مثال-6: ذیل میں دیئے گئے مساوات کے جوڑ کو اندراجی طریقے سے حل کیجیے۔

$$2x - y = 5$$

$$3x + 2y = 11$$

$$2x - y = 5 \quad \dots\dots\dots(1) \quad \text{حل:}$$

$$3x + 2y = 11 \quad \dots\dots\dots(2)$$

مساوات (1) اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔ (مرحلہ-1)

$$y = 2x - 5$$

$y$  کی قدر مساوات (2) میں درج کرنے پر (مرحلہ-2)

$$3x + 2(2x - 5) = 11$$

$$3x + 4x - 10 = 11$$

$$7x = 11 + 10 = 21$$

$$(مرحلہ-3) \quad x = 21/7 = 3$$

$x = 3$  کو مساوات (1) میں درج کرنے پر (مرحلہ-4)

$$2(3) - y = 5$$

$$y = 6 - 5 = 1$$

$x$  اور  $y$  کی قدریں مساوات (2) میں درج کرنے پر  $3(3) + 2(1) = 9 + 6 = 11$

$x = 3$  اور  $y = 1$  دونوں مساواتوں کو مطمئن کرتے ہیں۔

لہذا  $x = 3$  اور  $y = 1$  حل سٹ ہے۔

یہ کیجیے۔



ذیل میں دیے گئے مساوات کے جوڑ کو اندراجی طریقے سے حل کیجیے۔

1)  $3x - 5y = -1$

2)  $x + 2y = -1$

3)  $2x + 3y = 9$

$x - y = -1$

$2x - 3y = 12$

$3x + 4y = 5$

4)  $x + \frac{6}{y} = 6$

5)  $0.2x + 0.3y = 13$

6)  $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 0$

$3x - \frac{8}{y} = 5$

$0.4x + 0.5y = 2.3$

$\sqrt{3x} - \sqrt{8y} = 0$

### 4.3.2: حذف کا طریقہ

ہم اس طریقے میں دونوں مساواتوں کے ایک متغیر کے عددی ضرب کو مساوی کر لیتے ہیں۔ پھر اس متغیر کو حذف (نکال) کر دیتے ہیں۔ جس سے ایک ہی متغیر والی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو حل کر کے دوسرے متغیر کی قدر معلوم کی جاتی ہے۔ اس طریقے کو سمجھنے کے لیے مرحلہ وار غور کریں گے۔

مرحلہ-1: دونوں مساوات کو  $ax + by = c$  کی شکل میں لکھئے۔

مرحلہ-2: دونوں مساوات کے کسی ایک متغیر کے عددی ضربوں کو موزوں اعداد سے ضرب دیتے ہوئے مساوی کیجیے۔

مرحلہ-3: جس متغیر کو خارج کرنا ہے اگر اس کی علامت دونوں مساوات میں مساوی ہو تب ان مساوات کو تفریق کیجیے اور اگر مختلف علامتیں ہو تب انہیں جمع کیجیے۔ جس سے ایک متغیر والی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مرحلہ-4: بچے ہوئے متغیر کی قدر معلوم کرنے کے لیے حاصل ہونی والی مساوات کو مختصر کیجیے۔

مرحلہ-5: اس متغیر کی قدر دی گئی کسی بھی ایک مساوات میں درج کر کے دوسرے متغیر کی قدر معلوم کیجیے۔

مثال-7: ذیل میں دیے گئے خطی مساوات کے جوڑ کو حذف کے طریقے سے حل کیجیے۔

$$3x + 2y = 11$$

$$2x + 3y = 4$$

حل:

$$3x + 2y = 11 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$2x + 3y = 4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

دی گئی مساواتوں سے  $y$  کو حذف کرتے ہیں، ان میں  $y$  کے عددی ضریب 2 اور 3 ہیں، اور 3 کا ذمہ 6 ہے۔ لہذا

مساوات (1) کو 3 سے اور مساوات (2) کو 2 سے ضرب دے کر تفریق کرنے پر

$$(1) \text{ مساوات} \times 3 \quad 9x + 6y = 33$$

$$(2) \text{ مساوات} \times 2 \quad 4x + 6y = 8$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (-) \quad (-) \\ 9x + 6y = 33 \\ 4x + 6y = 8 \\ \hline 5x = 25 \end{array}$$

$$x = \frac{25}{5} = 5$$

$x = 5$  کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$3(5) + 2y = 11$$

$$2y = 11 - 15 = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = -2$$

یہ کیجیے



ذیل میں دی گئی مساواتوں کے جوڑ کو حذف کرنے کے طریقے سے حل کیجیے۔

1.  $8x + 5y = 9$

2.  $2x + 3y = 8$

3.  $3x + 4y = 25$

$3x + 2y = 4$

$4x + 6y = 7$

$5x - 6y = -9$

کوشش کیجیے



دیے گئے خطی مساوات کے جوڑ کو حل کیجیے

$$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$$

$$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$$

لہذا مطلوبہ حل  $x = 5$ ،  $y = -2$  ہے۔

آئیے چند مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

**مثال-8:** صبیحہ 2000 ` نکالنے کے لیے ایک بینک جاتی ہے۔ اس نے کیشیئر (Cashier) سے کہا وہ اسے صرف 50 ` اور 100 ` کے

نوٹ دے۔ صبیحہ کو کل 25 نوٹ ملے۔ بتائیے کہ اسے کتنے 50 ` اور کتنے 100 ` کے نوٹ ملے۔

**حل:** فرض کرو کہ 50 ` کے نوٹوں کی تعداد = 'x' اور

100 ` کے نوٹوں کی تعداد = 'y'

تب (1)  $x + y = 25$  اور

(2)  $50x + 100y = 2000$

اندراجی طریقے سے حل

مساوات (1) سے  $x = 25 - y$  $x$  کی قدر کو مساوات (2) میں درج کرنے پر  $50(25 - y) + 100y = 2000$ 

$$1250 - 50y + 100y = 2000$$

$$50y = 2000 - 1250 = 750$$

$$y = \frac{750}{50} = 15$$

$$x = 25 - 15 = 10$$

لہذا صبیحہ کو 50 کے 10 نوٹ اور 100 کے 15 نوٹ ملے۔

حذف کے طریقے سے حل

مساوات (1) اور (2) میں  $x$  کے عددی ضریب بالترتیب 1 اور 50 ہیں۔ لہذا

$$(1) \quad 50x + 50y = 1250$$

$$(2) \quad 50x + 100y = 2000$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (-) \quad (-) \\ \hline \end{array}$$

$$-50y = -750$$

$$y = \frac{-750}{-50} = 15$$

 $y$  کی قدر مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$x + 15 = 25$$

$$x = 25 - 15 = 10$$

لہذا صبیحہ کو 50 کے 10 نوٹ اور 100 کے 15 نوٹ ملے۔

**مثال-9:** ایک مسابقتی امتحان میں ہر صحیح جواب کے لیے 3 نشانات اور ہر غلط جواب کے لیے 1 نشان کی کمی کی جاتی ہے۔ اس امتحان میں اکبر کو

40 نشانات حاصل ہوئے۔ اگر ہر صحیح جواب کے لیے 4 نشانات دیئے جاتے ہیں اور ہر غلط جواب کے لیے 2 نشانات کی کمی کی جاتی ہے تو

اکبر کے حاصل کردہ نشانات 50 ہوتے ہیں امتحان میں کل سوالات کی تعداد کیا ہوگی معلوم کیجیے؟

**حل:** فرض کرو کہ صحیح جواب کی تعداد  $x$ اور غلط جواب کی تعداد  $y$ 

جب ہر صحیح جواب کے 3 نشانات دیئے جائیں اور ہر غلط جواب کے لیے 1 نشان کم کر دیا جائے۔ اکبر کو 40 نشانات حاصل ہوئے۔

$$3x - y = 40 \quad (1)$$

اکبر کے حاصل کردہ نشانات 50 ہوتے اگر ہر صحیح جواب کے لیے 4 نشانات دیئے جاتے اور غلط جواب کے لیے 2 نشانات کم کر دیا جاتے

$$4x - 2y = 50 \quad (2)$$

اندراجی طریقہ

مساوات (1) سے  $y = 3x - 40$  $4x - 2(3x - 40) = 50$  کی قیمت مساوات (2) میں درج کرنے پر

$$4x - 6x + 80 = 50$$

$$-2x = 50 - 80 = -30$$

$$x = \frac{-30}{-2} = 15$$

 $x$  کی قدر مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$45 - y = 40$$

$$y = 45 - 40 = 5$$

لہذا امتحان میں جملہ سوالات کی تعداد =  $15 + 5 = 20$ 

یہ کیجیے



مثال-9 کو حذف کے طریقے سے حل کیجیے۔

**مثال-10:** تسلیم نے اپنی بیٹی سے کہا کہ ”سات سال سے قبل میری عمر تمہاری اس وقت کی عمر کا 7 گنا تھی اور اگلے 3 سال بعد میری عمر تمہاری

عمر کا تین گنا ہوگی“۔ تسلیم اور اس کی بیٹی کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

**حل:** فرض کرو کہ تسلیم کی موجودہ عمر  $x$  سال اور اس کی بیٹی کی عمر  $y$  سال ہے۔تب 7 سال قبل تسلیم کی عمر  $(x-7)$  اور اسکی بیٹی کی عمر  $(y-7)$  تھی۔

$$x - 7 = 7(y - 7)$$

$$x - 7 = 7y - 49$$

$$x - 7y + 42 = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

تین سال بعد تسلیم کی عمر  $x + 3$  سال اور اسکی بیٹی کی عمر  $y + 3$  سال ہوگی۔

$$x + 3 = 3(y + 3)$$

$$x + 3 = 3y + 9$$

$$x - 3y - 6 = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

اخراجی طریقہ

$$x - 7y = -42 \quad (1) \quad \text{مساوات}$$

$$x - 3y = 6 \quad (2) \quad \text{مساوات}$$

 $x$  کی علامتیں مشابہہ ہیں۔ لہذا تفریق کریں

$$\begin{array}{r} (-) \quad (+) \quad (-) \\ \hline \end{array}$$

$$-4y = -48$$

$$y = \frac{-48}{-4} = 12$$

y کی قدر مساوات (2) میں درج کرنے پر

$$x - 3(12) - 6 = 0$$

$$x = 36 + 6 = 42$$

لہذا تسلیم کی موجودہ عمر 42 سال اور اس کی بیٹی کی عمر 12 سال ہے۔

یہ کیجیے



مثال-10 کو اندراجی طریقے سے حل کیجیے۔

**مثال-11:** ایک ناشر ایک نئی کتاب کی طباعت کا منصوبہ بنا رہا ہے ایک کتاب کی چھپائی کی قیمت (نظر ثانی 'ایڈیٹنگ' ٹائپنگ وغیرہ سب

ملا کر) 320,000 اس کے علاوہ وہ مزید 31.25 کتاب کی تیاری کے لیے خرچ کرے گا۔ ایک کتاب کی ٹھوک قیمت (ناشر کو حاصل ہونے والی قیمت) 43.75 ہے۔ ناشر کو Break even کے لیے کتنے کتاب چھپوانے ہوں گے یعنی خرچ اور آمدنی دونوں مساوی ہو جائیں۔

حل: ناشر کی آمدنی جب خرچ کے مساوی ہو جائے گی تب Break even کرے گا۔ اگر چھپوائے گئے اور فروخت کیے گئے کتابوں کی

تعداد x اور y (break even) نقطہ ہے تب ناشر کی آمدنی اور خرچ کے لیے مساوات

$$y = 320000 + 31.25x \quad \text{..... (1)}$$

$$y = 43.75x \quad \text{..... (2)}$$

مساوات (2) کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$43.75x = 320000 + 31.25x$$

$$12.5x = 320000$$

$$x = \frac{320000}{12.5} = 25600$$

break even کے لیے ناشر کو 25,600 کتابیں چھپوانی اور فروخت کرنی ہوں گی۔

مشق - 4.2



مندرجہ ذیل میں تمام سوالات کے لیے مساواتیں بنائیے اور ان کو حل کیجیے۔

1- دو اشخاص کے آمدنی کی نسبت 9:7 اور ان کے خرچ کی نسبت 4:3 ہے۔ اگر دونوں اشخاص فرداً 2000 مہینہ بچت کرتے ہوں تب انکی آمدنی معلوم کیجیے۔

2- ایک دو ہندسی عدد اور اس کے ہندسوں کو باہم تبدیل کرنے سے حاصل ہونے والے عدد کا مجموعہ 66 ہے اگر دونوں ہندسوں کا فرق '2' ہو تب عدد معلوم کیجیے۔ ایسے کتنے اعداد ہیں؟



- 3- تمامی زاویوں میں بڑا زاویہ چھوٹے زاویے سے  $18^\circ$  زیادہ ہے زاویے معلوم کیجیے۔
- 4- حیدرآباد میں ٹیکسی کا کرایہ مختص ہے۔ اور اس کے ساتھ طے کردہ فاصلہ کا کرایہ ادا کرنا ہے۔ 10km کا فاصلہ طے کرنے کے لیے 220` کرایہ ہوا۔ ایک 15km سفر کرنے کے لیے 310` کرایہ ادا کیا گیا۔
- (i) ٹیکسی کا مختص کردہ کرایہ اور فی کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے کرایہ معلوم کیجیے۔
- (ii) ایک شخص کو 25km کا فاصلہ طے کرنے کے لیے کتنی رقم ادا کرنی ہوگی۔
- 5- ایک کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں 1 جمع کرنے پر حاصل ہونے والی کسر  $\frac{4}{5}$  ہوگی۔ اور اگر شمار کنندہ اور نسب نما سے 5 کو تفریق کریں تب کسر  $\frac{1}{2}$  ہو جائے گی۔ کسر معلوم کیجیے۔
- 6- ایک شاہراہ پر دو مقامات A اور B ایک دوسرے سے 100km کے فاصلہ پر ہیں۔ ایک کار مقام A سے دوسری کار مقام B سے بیک وقت مختلف رفتاروں سے سفر کا آغاز کرتے ہیں۔ اگر دونوں ایک ہی سمت میں سفر کریں تب 5 گھنٹے بعد ملتے ہیں اور اگر ایک دوسرے کی سمت سفر کرتے ہیں تب 1 گھنٹے بعد ملتے ہیں دونوں کاروں کی رفتار کیا ہوگی؟
- 7- دو زاویے اتما می ہیں بڑے زاویہ کی پیمائش چھوٹے کی پیمائش کے دو گنے سے 3 کم ہے دونوں زاویوں کی قدر معلوم کیجیے۔
- 8- ایک الجبرا کی کتاب کے کل 1382 صفحات ہیں۔ اس کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ کتاب کے دوسرے حصے میں پہلے حصے سے 64 صفحات زیادہ ہیں۔ کتاب کے ہر حصے میں کتنے صفحات ہیں
- 9- ایک کیمیائی اشیاء فروخت کرنے والے شخص کے پاس ہائیڈروکلورک ترشہ کے دو محلول ہیں۔ ایک 50% ارتکاز والا محلول اور دوسرا 80% ارتکاز والا محلول۔ دونوں محلول کی کتنی مقدار کے ذریعہ 68% ارتکاز والا 100ml محلول حاصل ہوگا۔
- 10- فرض کرو کہ آپ کے پاس 12000` موجود ہیں۔ آپ کو کچھ رقم 10% شرح سود مفرد سے اور مابقی 15% شرح سے سود مفرد رقم مشغول کرنا ہے۔ دونوں شرح میں کتنی رقم مشغول کرنا ہوگا کہ کل رقم پر 12% شرح سود مفرد حاصل ہو۔

#### 4.4 مساواتیں جنہیں دو متغیرات پر خطی مساوات کے جوڑ میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم ایسی مساوات کے جوڑ کا حل معلوم کریں گے جو خطی نہیں لیکن انہیں موزوں اندازات کے ذریعہ خطی بنایا جاسکتا ہو۔ ایسے ایک مثال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

مثال -12: ذیل کی مساوات کے جوڑ کو حل کیجیے۔

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

حل: دیے گئے مساوات کے جوڑ کا مشاہدہ کیجیے یہ خطی مساواتیں نہیں (کیوں؟)

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \quad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \quad (2)$$

اگر ہم  $p = \frac{1}{x}$  اور  $q = \frac{1}{y}$  درج کریں ہمیں مندرجہ ذیل خطی مساوات کا جوڑ حاصل ہوگا۔

$$2p + 3q = 13 \quad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \quad (4)$$

$q$  کے عددی ضریب 3 اور 4 ہیں ان کا ذمہ 12 ہے۔ اخراجی طریقے (حذفی طریقے) کے استعمال سے

$$(3) \times 4 \quad 8p + 12q = 52$$

$$(4) \times 3 \quad 15p - 12q = -6$$

$$23p = 46$$

$$p = \frac{46}{23} = 2$$

$p$  کی قدر مساوات (3) میں درج کرنے پر

$$2(2) + 3q = 13$$

$$3q = 13 - 4 = 9$$

$$q = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{1}{x} = p = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ لیکن}$$

$$\frac{1}{y} = q = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

**مثال-13:** آفرین اپنے مکان میں مزید 2 کمرے بنوانا چاہتی ہے۔ اس نے مزدوروں کے متعلق جانکاری حاصل کی۔ اس نے یہ پتہ لگایا کہ 6 آدمی اور 8 عورتیں اس کام کو 14 دن میں مکمل کریں گے۔ لیکن وہ اس کام کو 10 دن ہی میں تکمیل کروانا چاہتی ہے۔ جب آفرین نے مزید معلومات حاصل کیں تو اس نے جاننا کہ 8 آدمی اور 12 عورتیں اس کام کو 10 دن میں مکمل کر دیں گے۔ ایک آدمی یا عورت اکیلے ہی کام کرے تب اس کام کی تکمیل کے لیے کتنے دن درکار ہوں گے۔

**حل:** فرض کرو کہ ایک آدمی کے ذریعہ کام کی تکمیل کے لیے درکار وقت =  $x$  دن



$$\frac{1}{x} = \text{ایک آدمی کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام}$$

$$\text{دن } y = \text{فرض کرو کہ ایک عورت کے ذریعہ کام کی تکمیل کے لیے درکار وقت}$$

$$\frac{1}{y} = \text{ایک عورت کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام}$$

اب 8 آدمی اور 12 عورتیں اس کام کو 10 دن میں تکمیل کرتے ہیں۔

$$(1) \dots\dots\dots \frac{1}{10} = \text{تب 8 آدمی اور 12 عورتوں کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام}$$

$$\frac{8}{x} = \text{اور 8 آدمیوں کا ایک دن میں تکمیل کردہ کام } 8 \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{12}{y} = \text{اسی طرح سے 12 عورتوں کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام } 12 \times \frac{1}{y}$$

$$(2) \dots\dots\dots \frac{8}{x} + \frac{12}{y} = \text{8 آدمی اور 12 عورتیں کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام}$$

$$\left( \frac{8}{x} + \frac{12}{y} \right) = \frac{1}{10} \quad \text{مساوات (1) اور (2) کا تقابل کرنے پر}$$

$$10 \left( \frac{8}{x} + \frac{12}{y} \right) = 1$$

$$(3) \dots\dots\dots \frac{80}{x} + \frac{120}{y} = 1$$

اور دیا گیا ہے کہ 6 آدمی اور 8 عورتیں اس کام کو 14 دن میں تکمیل کریں گے۔

$$\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14} = \text{تب 6 آدمی اور 8 عورتوں کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام}$$

$$14 \left( \frac{6}{x} + \frac{8}{y} \right) = 1$$

$$(4) \dots\dots \left( \frac{84}{x} + \frac{112}{y} \right) = 1$$

مساوات (3) اور (4) کا مشاہدہ کیجیے کیا یہ خطی مساواتیں ہیں؟ انہیں ہم کس طرح حل کریں؟ ہم ان مساواتوں کو خطی مساوات میں

تبدیل کرنے کے لیے  $\frac{1}{x} = u$  اور  $\frac{1}{y} = v$  درج کرتے ہیں۔

$$\text{مساوات (3) سے} \Rightarrow 80u + 120v = 1 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{مساوات (4) سے} \Rightarrow 84u + 112v = 1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

80 اور 84 کا ذمہ 1680 ہے۔ اخراجی (حذفی) طریقے کے استعمال سے

$$\text{مساوات (3) } \times 21 \quad (21 \times 80)u + (21 \times 120)v = 21$$

$$\text{مساوات (4) } \times 20 \quad (20 \times 84)u + (20 \times 112)v = 20$$

$$1680u + 2520v = 21$$

$$1680u + 2240v = 20 \quad \text{u کی مساوی علامتیں ہیں لہذا تفریق کرنے پر}$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (-) \quad (-) \\ \hline \end{array}$$

$$280v = 1$$

$$v = \frac{1}{280}$$

$$80u + 120 \times \frac{1}{280} = 1$$

v کی قیمت مساوات (5) میں درج کرنے پر

$$80u = 1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$u = \frac{4}{7} \times \frac{1}{80} = \frac{1}{140}$$

$$\frac{1}{x} = u = \frac{1}{140} \Rightarrow x = 140$$

$$\frac{1}{y} = v = \frac{1}{280} \Rightarrow y = 280$$

لہذا ایک آدمی اس کیلئے اس کام کو 140 دن میں اور ایک عورت اس کام کو 280 دن میں مکمل کریں گے۔

**مثال-14:** ایک آدمی 370km سفر کرتا ہے۔ وہ اپنے سفر کا کچھ فاصلہ بذریعہ ریل اور کچھ بذریعہ کار طے کرتا ہے اگر وہ 250km ریل کے

ذریعہ اور مابقی کار کے ذریعہ طے کرتا ہو تب ایسے 4 گھنٹے لگتے ہیں۔ اگر وہ 130km ریل اور مابقی کار سے سفر کرے تب انہیں 18

منٹ زیادہ درکار ہوں گے۔ ریل کے رفتار اور کار کی رفتار معلوم کیجیے۔

**حل:** فرض کرو کہ ریل کی رفتار x کلومیٹر فی گھنٹہ اور کار کی رفتار y کلومیٹر فی گھنٹہ ہے

$$\frac{\text{طے شدہ فاصلہ}}{\text{رفتار}} = \text{وقت}$$

$$\frac{250}{x} = \text{پہلی صورت میں ریل میں سفر کا وقت گھنٹے}$$

$$\frac{120}{y} = \text{اور کار میں سفر کا وقت گھنٹے}$$

$$\frac{250}{x} + \frac{120}{y} = \text{لہذا کل وقت = ریل کے ذریعہ سفر کا وقت + کار کے ذریعہ سفر کا وقت}$$

لیکن سفر کا کل وقت 4 گھنٹے ہے لہذا

$$\frac{250}{x} + \frac{120}{y} = 4$$

$$\frac{125}{x} + \frac{60}{y} = 2 \quad \dots\dots(1)$$

دوبارہ جب وہ 130km ریل سے اور ماہاتی کار سے سفر کرتا ہے

$$\frac{130}{x} = \text{اس شخص کا 130 کلومیٹر ریل کے ذریعہ سفر کا وقت گھنٹے}$$

$$\frac{240}{y} = \text{اور کار میں 240km (370-130) کے سفر کا وقت گھنٹے}$$

$$\frac{3}{10} = 4 \frac{18}{60} \text{ لیکن دیا گیا ہے کہ سفر کا وقت 4 گھنٹہ 18 منٹ ہے یعنی } 4 \frac{3}{10}$$

$$\frac{130}{x} + \frac{240}{y} = \frac{43}{10} \quad \dots\dots\dots (2)$$

مساوات (1) اور (2) میں  $\frac{1}{x} = a$  اور  $\frac{1}{y} = b$  درج کرنے پر

$$125a + 60b = 2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$130a + 240b = \frac{43}{10} \quad \dots\dots\dots (4)$$

60 اور 240 کا ذرا م 240 ہے اخراجی طریقے (حذفی طریقہ) استعمال سے

$$4 \times (1) \quad \text{مساوات} \quad 500a + 240b = 8$$

$$1 \times (4) \quad \text{مساوات} \quad 130a + 240b = \frac{43}{10} \quad \text{پر } b \text{ کی علامتیں مساوی ہیں لہذا التفریق کرنے پر}$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (-) \quad (-) \\ \hline 370a = 8 - \frac{43}{10} = \frac{80 - 43}{10} = \frac{37}{10} \end{array}$$



$$a = \frac{37}{10} \times \frac{1}{\frac{370}{10}} = \frac{1}{100}$$

$a = \frac{1}{100}$  کو مساوات (3) میں درج کرنے پر

$$\left( \frac{5}{125} \times \frac{1}{\frac{100}{4}} \right) + 60b = 2$$

$$60b = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{3}{4} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{80}$$

$$a = \frac{1}{100} \text{ اور } b = \frac{1}{80} \text{ لہذا}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{100} \text{ اور } \frac{1}{y} = \frac{1}{80} \text{ تب}$$

$$\Rightarrow x = 100 \text{ km/hr اور } y = 80 \text{ km/hr}$$

لہذا ریل کی رفتار 100 کلومیٹر فی گھنٹہ اور کار کی رفتار 80 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

### مشق - 4.3



1- مندرجہ ذیل مساواتوں کو خطی مساواتوں کے جوڑ میں تبدیل کرتے ہوئے حل کیجیے

$$\frac{x+y}{xy} = 2 \quad (\text{ii})$$

$$\frac{x-y}{xy} = 6$$

$$6x+3y = 6xy \quad (\text{iv})$$

$$2x + 4y = 5xy$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \quad (\text{vi})$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2 \text{ جہاں } x \neq 0, y \neq 0$$

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2 \quad (\text{i})$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2 \quad (\text{iii})$$

$$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$$

$$\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1 \quad (\text{v})$$

$$\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} = 10 \text{ (جہاں } x \neq 0, y \neq 0)$$



$$\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \quad (\text{viii})$$

$$\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \quad (\text{vii})$$

$$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$$

$$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$$

2- مندرجہ ذیل سوالات کے لیے مساواتیں بنائیے اور ان کو حل کیجیے۔

(i) ایک کشتی بہاؤ کے مخالف سمت 30 کلومیٹر اور بہاؤ کی سمت 44 کلومیٹر 10 گھنٹے میں طے کرتی ہے۔ 13 گھنٹوں میں وہ 40 کلومیٹر بہاؤ کی مخالف سمت اور 55 کلومیٹر بہاؤ کی سمت طے کرتی ہے۔ ٹہرے ہوئے پانی میں کشتی کی رفتار اور بہاؤ کی رفتار معلوم کیجیے۔

(ii) رحیم اپنے گھر جانے کے لیے 600 کلومیٹر کے فاصلہ میں کچھ ریل کے ذریعے اور کچھ کار کے ذریعے طے کرتا ہے۔ اگر وہ 120 کلومیٹر ریل کے ذریعے اور باقی کار کے ذریعے طے کرے تب اُسے 8 گھنٹے درکار ہوں گے۔ اگر وہ 200 کلومیٹر ریل کے ذریعے اور باقی کار کے ذریعے طے کرے تب اُسے 20 منٹ زیادہ لگیں گے۔ ریل کی رفتار اور کار کی رفتار معلوم کیجیے۔

(iii) 2 عورتیں اور 5 آدمی ایک ایمریڈری کا کام 4 دن میں مکمل کرتے ہیں جبکہ 3 عورتیں اور 6 آدمی اس کام کو 3 دن میں مکمل کرتے ہیں ایک آدمی یا ایک عورت کے ذریعے کام کی تکمیل کے لیے درکار وقت معلوم کیجیے۔

### اختیاری مشق



(جامع اکتساب کے لیے)

1- مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجیے۔

$$\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} = 8 \quad (\text{ii})$$

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 2 \quad (\text{i})$$

$$\frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 9$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4$$

$$\sqrt{3x} + \sqrt{2y} = \sqrt{3} \quad (\text{iv})$$

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5 \quad (\text{iii})$$

$$\sqrt{5x} + \sqrt{3y} = \sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$$

$$2^x + 3^y = 17 \quad (\text{vi})$$

$$\frac{ax}{b} - \frac{by}{a} = a+b \quad (\text{v})$$

$$2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$$

$$ax - by = 2ab$$

- 2- ایک تجربہ کے دوران جانوروں کو سخت پرہیز پر رکھا گیا۔ ہر جانور کو غذا کی دوسری اشیاء کے ساتھ 20 گرام پروٹین اور 6 گرام چکنائی دیا جاتا ہے۔ لیباریٹری ٹیکنیشن غذا کے دو آمیزے A اور B خریدتا ہے۔ آمیزہ A میں 10% پروٹین اور 6% چکنائی ہے اور آمیزہ B میں 20% پروٹین اور 2% چکنائی ہے۔ جانوروں کی غذا کے لیے دونوں آمیزوں کا کتنا وزن ملانا ہوگا؟

تجویز کردہ منصوبہ کام

روزمرہ زندگی کے واقعات پر مبنی دو متغیرات پر چند خطی مساوات تیار کیجیے اور گراف کے استعمال سے ان کے حل معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا



- 1- دو مشابہہ متغیرات پر مبنی دو خطی مساواتیں، دو متغیرات ہر خطی مساوات کا جوڑ کہلاتی ہیں۔

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

جہاں  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  حقیقی اعداد ہیں۔

- 2- دو متغیر پر خطی مساوات کے جوڑ کو مختلف طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔

- 3- دو متغیر پر خطی مساوات کے جوڑ کے ترسیم میں دو خطوط ہوتے ہیں۔

(i) اگر یہ دو خطوط ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر قطع کرتے ہوں تب یہ نقطہ ان خطوط کا حل کہلاتا ہے۔ ایسے مساوات کا جوڑ حقیقی مساوات کا جوڑ کہلاتا ہے۔

(ii) اگر دونوں خطوط ایک دوسرے پر منطبق ہوں تب ان خطوط کے لامتناہی کئی حل سٹ ہوتے ہیں یعنی خط کا ہر نقطہ ایک حل سٹ ہوتا ہے۔ اور ایسی مساوات کا جوڑ منحصر کہلاتا ہے۔

(iii) اگر یہ دونوں خطوط متوازی ہوں تب مساوات کے جوڑ کوئی حل سٹ نہیں ہوتا اور یہ مساوات کا جوڑ غیر ہم آہنگ کہلاتا ہے۔

- 4- دو متغیرات پر خطی مساوات کے جوڑ کے حل سٹ معلوم کرنے کے لیے ہم درج ذیل طریقوں کا مشاہدہ کیا۔

(i) مثالی طریقہ Model Method

(ii) ترسیمی طریقہ Graphical Method

(iii) الجبری طریقہ (Algebraic Method)۔ اندراجی طریقہ اور حذف کا طریقہ

- 5- مساوات کے نظام کی نوعیت اور متغیرات کے عددی ضریب کے درمیان رشتہ ہوتا ہے۔

(i) اگر  $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$  تب خطی مساوات کا جوڑ ہم آہنگ ہوتا ہے۔

(ii) اگر  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$  تب خطی مساوات کا جوڑ غیر حقیقی ہوتا ہے۔

(iii) اگر  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$  تب خطی مساواتیں حقیقی اور منحصر مساوات ہیں۔

- 6- ایسے کئی صورتیں/حالات ہوتے ہیں جنہیں ریاضی میں دو مساوات کے ذریعہ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جو کہ شروعات میں خطی

مساوات نہیں ہوتے۔ لیکن ہم ان میں چند تبدیلیاں لاتے ہوئے انہیں خطی مساوات کا جوڑ بنا سکتے ہیں۔

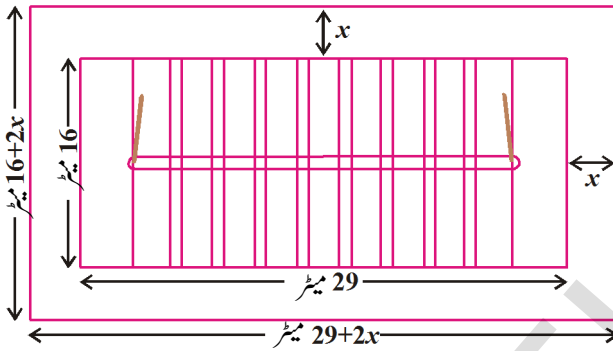
# دو درجی مساواتیں

## Quadratic Equations

### باب 5

#### 5.1 تعارف

سرکاری مدرسہ فوقانیہ نسواں مکرم پورہ کی کھیل کود کی کمیٹی  $29\text{m} \times 16\text{m}$  ابعاد کا ایک کھوکھو کورٹ تیار کرنا چاہتی ہے۔ اس کے لیے مدرسہ



میں  $558$  مربع میٹر رقبہ کا مستطیلی پلاٹ موجود ہے۔ وہ شائقین کے لیے کورٹ کے اطراف مساوی چوڑائی کی جگہ چھوڑنا چاہتے ہیں شائقین کے لیے جگہ کی چوڑائی کیا ہوگی؟ کیا یہ چوڑائی کافی ہوگی؟

فرض کیجیے کہ جگہ کی چوڑائی  $x$  میٹر ہے لہذا شکل کے بموجب

پلاٹ کا طول  $29+2x$  میٹر ہوگا۔

اور مستطیلی پلاٹ کا عرض  $= (16+2x)$  میٹر ہوگا

لہذا،  $\text{عرض} \times \text{طول} = \text{مستطیلی پلاٹ کا رقبہ}$

$$= (29+2x)(16+2x)$$

چوں کہ پلاٹ کا رقبہ  $= 558$  مربع میٹر

$$\therefore (29+2x)(16+2x) = 558$$

$$\therefore 4x^2 + 90x + 464 = 558$$

$$4x^2 + 90x - 94 = 0 \quad (2 \text{ سے تقسیم کرنے پر})$$

$$2x^2 + 45x - 47 = 0$$

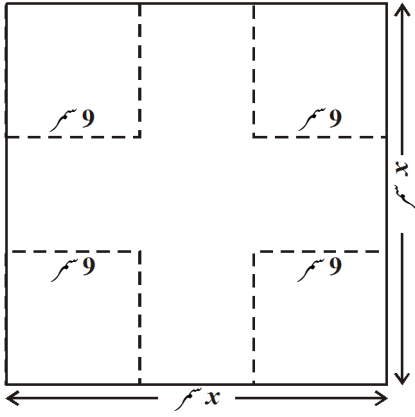
$$2x^2 + 45x - 47 = 0 \quad \dots (1)$$

گذشتہ جماعت میں ہم نے  $x$  کی قدر معلوم کرنے کے لیے  $ax + b = c$  شکل کی خطی مساوات کو حل کیا ہے اسی طرح مذکورہ بالا مساوات سے حاصل کردہ  $x$  کی قدر سے شائقین کے لیے جگہ کی ممکنہ چوڑائی حاصل ہوگی۔

کیا آپ اس طرح کے کئی اور مثالوں کا تصور کر سکتے ہیں جہاں ہمیں مذکورہ بالا مثال کی طرح مقداروں کو معلوم کرنے کے لیے اس طرح کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

آئیے ایک اور مثال پر غور کرتے ہیں

عائشہ کے پاس ایک مربع دھاتی شیٹ ہے وہ اس شیٹ کے ہر کونے سے  $9$  سمر کے مربعوں کو الگ کرتی ہے۔ شیٹ کے باقی حصے کو اوپر کی جانب موڑتے ہوئے شکل کے مطابق ایک کھلا ڈبہ بناتی ہے گیا ڈبے کی گنجائش  $144$  کعب سمر ہے کیا ہم دھاتی شیٹ کے ابعاد معلوم کر سکتے ہیں۔



فرض کیجیے کہ مربعی دھاتی شیٹ کے ضلع کی لمبائی x سمر ہے  
تب ڈبے کے ابعاد (x-18) × سمر (x-18) × سمر 9 سمر ہیں

چونکہ ڈبے کا حجم 144 مکعب سمر ہے

$$9(x-18)(x-18) = 144$$

$$(x-18)^2 = 16$$

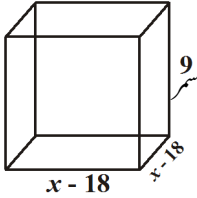
$$x^2 - 36x + 308 = 0$$

لہذا دھاتی شیٹ کے ضلع کی لمبائی 'x' ذیل کی مساوات کو مطمئن کرے گی

$$x^2 - 36x + 308 = 0 \quad \dots (2)$$

آئیے مساوات (1) اور (2) میں LHS کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

کیا یہ دو درجی کثیررکنیاں ہیں؟



گذشتہ باب میں ہم  $ax^2 + bx + c$  شکل کی کثیررکنیوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ (جہاں  $a \neq 0$ )

چوں کہ مذکورہ مساواتوں کے LHS میں دو درجی کثیررکنیاں ہیں یہ دو درجی مساواتیں کہلاتے ہیں

اس باب میں ہم دو درجی مساواتوں اور ان کے ریشوں کو معلوم کرنے کے طریقوں کا مطالعہ کریں گے

## 5.2 دو درجی مساواتیں

متغیر x میں ایک دو درجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کی شکل میں ہوتی ہے جہاں 'a'، 'b'، 'c' حقیقی اعداد ہیں اور  $a \neq 0$  مثال کے

طور پر  $2x^2 + x - 300 = 0$  ایک دو درجی مساوات ہے اسی طرح  $2x^2 - 3x + 1 = 0$  اور  $4x - 3x^2 + 2 = 0$  اور  $1 - x^2$

$+ 300 = 0$  بھی دو درجی مساوات ہیں۔

دراصل کوئی بھی  $p(x) = 0$  شکل کی مساوات جہاں  $p(x)$  دو درجہ کی ایک کثیررکنی ہے دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔ جب ہم  $p(x)$  کے

ارکان کو اس کے قوت نماوں کی گھٹی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں تو معیاری شکل حاصل ہوتی ہے یعنی  $ax^2 + bx + c = 0$

$a \neq 0$  دو درجی مساوات کی معیاری شکل کہلاتی ہے اور  $y = ax^2 + bx + c$  ایک دو درجی تفاعل کہلاتا ہے۔



کوشش کیجیے



جانچ کہ آیا ذیل کی مساواتیں دو درجی ہیں یا نہیں؟

(i)  $x^2 - 6x - 4 = 0$

(ii)  $x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

(iii)  $7x = 2x^2$

(iv)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$  ( $x \neq 0$ )

(v)  $(2x + 1)(3x + 1) = 6(x - 1)(x - 2)$  (vi)  $3y^2 = 192$

دور درجی تفاعلات کے کئی استعمالات ہیں۔ ان میں سے چند یہ ہیں

- 1- جب راکٹ کو اوپر کی جانب داغا جاتا ہے تو راکٹ کی بلندی کو ایک درجی تفاعل سے بیان کیا جاتا ہے۔
- 2- سٹیلا بیٹ ڈش کی شکلیں، ٹیلی اسکوپ کے انعکاسی آئینے، عینک کے عدسے اور اجرام فلکی کے مداروں کے شکلوں کی تعریف دور درجی مساواتوں سے بیان کی جاتی ہے۔



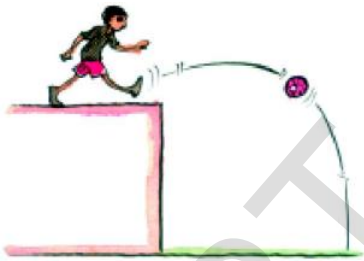
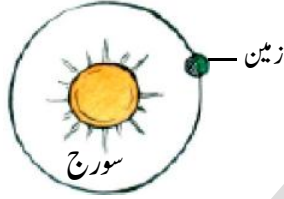
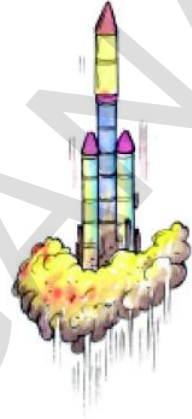
عینک کے عدسے



انعکاسی آئینہ



سٹیلا بیٹ ڈش



- 3- پروجیکٹل کے راستے کو دور درجی تفاعل سے بیان کیا جاتا ہے۔
- 4- جب ایک گاڑی کو بریک لگائے جاتے ہیں تو وہ حالت سکون میں آنے تک کے فاصلہ کو دور درجی مساوات کے استعمال سے محسوب کیا جاتا ہے

**مثال - 1:** حسب ذیل صورت حال کو موزوں ریاضیاتی مساوات سے ظاہر کیجیے۔

- (i) صہیب اور عاطف کے پاس جملہ 45 سنگ مرمر کی گولیاں ہیں ہر ایک نے 5 سنگ مرمر گولیوں کو کھو ڈالا۔ ان کی بچی ہوئی سنگ مرمر کی گولیوں کا حاصل ضرب 124 ہے ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ ان کے پاس پہلے کتنی سنگ مرمر کی گولیاں تھیں؟
- (ii) ایک قائمہ الزاویہ مثلث کا وتر 25 سمر ہے ہم جانتے ہیں کہ دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق 5 سمر ہے۔ ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ ان ضلعوں کے طول کیا ہیں؟

**حل:** (i) مان لیجیے کہ صہیب کے پاس سنگ مرمر کی گولیوں کی تعداد  $x$  ہے۔

تب عاطف کے پاس سنگ مرمر کی گولیوں کی تعداد =  $45 - x$  (کیوں؟)

صہیب کے پاس باقی سنگ مرمر کی گولیوں کی تعداد =  $x - 5$

عاطف کے پاس باقی سنگ مرمر کی گولیوں کی تعداد =  $(45 - x) - 5$

$40 - x =$

لہذا ان کا حاصل ضرب  $(x - 5)(40 - x) = 124$

$$-x^2 + 45x - 200 = 124$$

$$-x^2 + 45x - 324 = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$x^2 - 45x + 324 = 0 \quad \text{منفی (-1) سے ضرب دینے پر}$$

لہذا صہیب کے پاس سنگ مرمر کی گولیوں کی تعداد 'x' دو درجی مساوات  $x^2 - 45x + 324 = 0$  کو مطمئن کرتی ہے۔ جو

سوال کے مطابق مطلوبہ مساوات ہے۔

(ii) مان لیجیے کہ چھوٹے ضلع کی لمبائی x سم ہے تب

بڑے ضلع کی لمبائی =  $x + 5$  سم

دی گئی وتر کی لمبائی = 25 سم

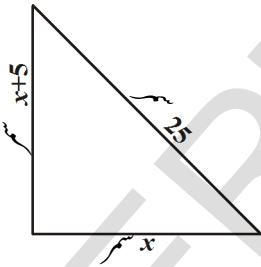
کسی مثلث قائمہ الزاویہ کے لیے ہم جانتے ہیں کہ  $(\text{وتر})^2 = (\text{ضلع})^2 + (\text{ضلع})^2$

$$x^2 + (x + 5)^2 = (25)^2 \quad \text{لہذا}$$

$$x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$$

$$2x^2 + 10x - 600 = 0$$

$$x^2 + 5x - 300 = 0$$



اس مساوات سے حاصل ہونے والی 'x' کی قدر دیئے ہوئے قائمہ الزاویہ مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں کی

مکنہ قدروں کو دے گی

**مثال - 2:** جانچئے کیا حسب ذیل مساواتیں دو درجی مساواتیں ہیں۔

i.  $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$     ii.  $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

iii.  $x(2x + 3) = x^2 + 1$     iv.  $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

**حل:** (i)  $\text{LHS} = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

یعنی  $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$  کو

کے طور پر بھی لکھا جاسکتا ہے  $x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$



$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \text{ یعنی}$$

یہ  $ax^2 + bx + c = 0$  کی شکل میں ہے

لہذا دی گئی مساوات دو درجی مساوات ہے۔

$$\text{LHS} = x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8 \quad \text{یہاں (ii)}$$

$$\text{RHS} = (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4 \quad \text{اور}$$

$$x^2 + x + 8 = x^2 - 4$$

$$x^2 + x + 8 - x^2 + 4 = 0$$

$$x + 12 = 0 \quad \text{یعنی}$$

یہ  $ax^2 + bx + c = 0$  کی شکل میں نہیں ہے،  $a \neq 0$

لہذا دی گئی مساوات دو درجی مساوات ہے۔

$$\text{LHS} = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x \quad \text{یہاں (iii)}$$

$$\text{لہذا } x(2x + 3) = x^2 + 1 \text{ کو}$$

اس طرح  $2x^2 + 3x = x^2 + 1$  بھی لکھا جاسکتا ہے

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے}$$

یہ مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کی شکل میں ہے۔

لہذا دی گئی مساوات دو درجی مساوات ہے۔

$$\text{LHS} = (x + 2)^3 = (x + 2)^2 (x + 2) \quad \text{(iv)}$$

$$= (x^2 + 4x + 4)(x + 2)$$

$$= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$\text{اس لیے } (x + 2)^3(x + 2)^3 = x^3 - 4 \text{ کو}$$

اس طرح  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$  کے طور پر بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Rightarrow 6x^2 + 12x + 12 = 0 \text{ یا } x^2 + 2x + 2 = 0$$

یہ مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کی شکل میں ہے

لہذا دی گئی مساوات دو درجی مساوات ہے۔

تبصرہ: مثال (ii) ایک دو درجی مساوات معلوم ہوتی ہے لیکن یہ دو درجی مساوات نہیں ہے۔

اور مثال (iv) میں دی گئی مساوات بظاہر ایک مکعبی مساوات (تیسرے درجے کی مساوات) معلوم ہوتی ہے نہ کہ دو درجی مساوات

لیکن یہ دو درجی مساوات کی شکل تبدیل ہوتی ہے کہ دی گئی مساوات دو درجی مساوات ہے یا نہیں فیصلہ کرنے سے پہلے اس کو مختصر کرنا ہوتا ہے۔

## مشق - 5.1



1- جانچے کہ آیا ذیل کی مساواتیں دو درجی ہیں؟

i.  $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

ii.  $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

iii.  $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

iv.  $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

v.  $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

vi.  $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

vii.  $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

viii.  $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

2- حسب ذیل صورت حال کو دو درجی مساوات کی شکل میں ظاہر کیجیے

(i) ایک مستطیلی پلاٹ کا رقبہ 528 مربع میٹر ہے پلاٹ کا طول اس کے عرض کے دو گنا سے ایک میٹر زیادہ ہے پلاٹ کا طول اور عرض معلوم کرنا ہے؟

(ii) دو سلسلہ وار مثبت صحیح اعداد کا حاصل ضرب 306 ہے ہمیں صحیح اعداد معلوم کرنا ہے؟

(iii) صہیب کی ماں اس سے 26 سال بڑی ہے ان دونوں کی عمروں کا حاصل ضرب 3 سال بعد 360 سال ہو جائے گا ہمیں صہیب کی موجودہ عمر معلوم کرنا ہے؟

(iv) ایک ریل گاڑی 480 کلومیٹر کا فاصلہ یکساں رفتار سے طے کرتی ہے اگر اس کی رفتار 8 کلومیٹر فی گھنٹہ کم ہو جائے تو اسی فاصلے کو طے کرنے کے لیے اس کو 3 شیمہ زیادہ درکار ہوتا ہے میں ریل گاڑی کی رفتار معلوم کرنا ہے؟

## 5.3 اجزائے ضربی سے دو درجی مساوات کا حل

ہم روزمرہ زندگی کے بعض حالات کو ریاضیاتی طور پر نامعلوم متغیر  $x$  کی دو درجی مساوات کی شکل میں ظاہر کرنا سیکھ چکے ہیں اب ہمیں 'x' کی قدر معلوم کرنا ہے۔

دو درجی مساوات  $2x^2 - 3x + 1 = 0$  پر غور کیجیے۔ اگر ہم 'x' کو '1' سے تبدیل کریں تب ہم کو مساوات کا

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow (2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 = \text{RHS}$$

$$-3x + 1 = 0 \text{ کا ریشہ ہے۔}$$

$$\therefore x = 1 \text{ دی ہوئی دو درجی مساوات کا حل ہے۔}$$

بالفاظ دیگر سے '1' دو درجی کثیررکنی  $2x^2 - 3x + 1$  کا صفر ہے۔

عموماً ایک حقیقی عدد دو درجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کا ریشہ کہلائے گا اگر  $ax^2 + bx + c = 0$  ہو ہم اس طرح بھی

کہتے ہیں کہ  $x = \alpha$  ایک دو درجی مساوات کا حل ہے یا پھر 'α' دو درجی مساوات کو مطمئن کرتا ہے

نوٹ: دو درجی کثیررکنی  $ax^2 + bx + c$  کے صفر اور دو درجی مساوات  $a^2 + b + c = 0$  کے ریشے ایک ہی ہیں۔

ہم نے باب 3 میں یہ مشاہدہ کیا ہے کہ دو درجی کثیررکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہو سکتے ہیں لہذا کوئی دو درجی مساوات کے زیادہ سے

زیادہ 2 ریشے ہو سکتے ہیں (کیوں؟)

ہم نے جماعت نہم میں سیکھ چکے ہیں کہ کسی دو درجی کثیر رکنی کے درمیانی ارکان کو نکالنے کے لئے کس طرح اجزائے ضربی معلوم کیا جاتا ہے، ہم ان معلومات کو دو درجی مساوات کے ریشے معلوم کرنے کے لیے استعمال کریں گے۔ آئیے غور کرتے ہیں

**مثال - 3:** مساوات  $2x^2 - 5x + 3 = 0$  کے ریشے تحلیل جزو ضربی سے معلوم کیجیے۔

**حل:** آئیے پہلے درمیانی رکن کی پھوڑی کرتے ہیں۔

یاد کیجیے کہ اگر  $ax^2 + bx + c$  ایک دو درجی کثیر رکنی ہے تب درمیانی رکن کو نکالنے کے لیے ہمیں دو اعداد  $p$  اور  $q$  اس طرح معلوم کرنا چاہے کہ  $p+q=b$  اور  $p \times q = a \times c$  لہذا  $2x^2 - 5x + 3$  کے درمیانی رکن کی پھوڑی کیجیے ہمیں دو اعداد  $p$  اور  $q$  اس طرح معلوم کرنا ہوگا کہ  $p+q=-5$  اور  $p \times q = 2 \times 3 = 6$ ۔

اس کے لیے ہم کو 6 کے تمام ممکنہ جزو ضربیوں کی جوڑیوں کو لکھنا ہوگا وہ جو  $(-2, -3)$ ;  $(2, 3)$ ;  $(-1, -6)$ ;  $(1, 6)$  میں فہرست سے یہ واضح ہوتا ہے کہ جوڑی  $(-2, -3)$  ہماری شرط  $p+q=-5$  اور  $p \times q = 6$  کو مطمئن کرتی ہے۔

درمیانی رکن  $-5x$  کو  $-2x - 3x$  کے طور پر بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\therefore 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x-1) - 3(x-1) = (2x-3)(x-1)$$

اب  $2x^2 - 5x + 3 = 0$  کو  $(2x-3)(x-1) = 0$  کے طور پر لکھا جاسکتا ہے۔

لہذا  $2x^2 - 5x + 3 = 0$  کے لیے  $x$  کی قدریں مساوی ہوتی ہیں۔  $(2x-3)(x-1) = 0$  کے لیے  $x$  کی قدروں کے

$$x-1=0 \text{ یا } 2x-3=0$$

$$\text{اب } 2x-3=0 \text{ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے } x = \frac{3}{2} \text{ اور } x-1=0 \text{ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے } x=1$$

$$\text{لہذا } x=1 \text{ یا } x = \frac{3}{2} \text{ مساوات کے حل ہیں}$$

بالفاظ دیگر مساوات  $2x^2 - 5x + 3 = 0$  کے ریشے  $\frac{3}{2}$  یا 1 ہیں۔

یہ کیجیے



ذیل کی مساواتوں کے ریشے اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

(ii)

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

(i)

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

(iv)

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

(i)

کوشش کیجیے



تصدیق کیجیے کہ کیا 1 اور  $\frac{3}{2}$  مساوات  $2x^2 - 5x + 3 = 0$  کے ریشے ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ ہم  $2x^2 - 5x + 3 = 0$  کے ریشے  $2x^2 - 5x + 3$  کو دو جزو ضربی میں تحلیل کرتے ہوئے اور ہر ایک کو صفر کے

مساوی کرتے ہوئے معلوم کیے ہیں۔

**مثال - 4:** دو درجی مساوات  $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   $x \neq 0$  کے ریشے معلوم کیجیے؟  $x \neq 0$

**حل:** دی گئی دو درجی مساوات  $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$

$$= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$$

$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

$6x^2 - x - 2 = 0$  کے ریشے  $x$  کی وہ قدریں ہیں جن کے لیے  $(3x - 2)(2x + 1) = 0$  ہے۔

اس لیے  $2x + 1 = 0$  یا  $3x - 2 = 0$

یعنی  $x = -\frac{1}{2}$  یا  $x = \frac{2}{3}$

لہذا مساوات  $6x^2 - x - 2 = 0$  کے ریشے  $\frac{2}{3}$  اور  $-\frac{1}{2}$  ہیں۔

ہم جانچ کرتے ہوئے ریشوں کی تصدیق کرتے ہیں  $x = \frac{2}{3}$  اور  $x = -\frac{1}{2}$  یہ  $6x^2 - x - 2 = 0$  کو مطمئن کرتے ہیں یا نہیں۔

**مثال - 5:** شائقین کے لیے جگہ کی چوڑائی کو معلوم کیجیے جس کے لیے سکن 5.1 میں بحث کی گئی تھی۔

**حل:** سکن 5.1 میں ہم معلوم کئے تھے کہ اگر شائقین کے لیے جگہ کی چوڑائی کو  $x$  میٹر ہو تب  $x$  مساوات

$$2x^2 + 45x - 47 = 0 \text{ کو مطمئن کرتا ہے تحلیل اجزائے ضربی کو استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں}$$

$$2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$$

$$2x(x - 1) + 47(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(2x + 47) = 0 \quad \text{یعنی}$$

لہذا دی ہوئی مساوات کے ریشے  $x = 1$  یا  $x = \frac{-47}{2}$  ہوں گے چونکہ  $x$  'شائقین کے لیے جگہ کی چوڑائی' ہے یہ منفی نہیں ہو سکتی

لہذا چوڑائی 1 میٹر ہے۔



1- حیل اجزائے ضربی سے حسب ذیل دو درجی مساوات کے ریشے معلوم کیجیے۔

(i)  $x^2 - 3x - 10 = 0$

(ii)  $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii)  $\sqrt{2}x^2 + 7^2 + 5\sqrt{2} = 0$

(iv)  $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v)  $100x^2 - 20x + 1 = 0$

(vi)  $x(x + 4) = 12$

(vii)  $3x^2 - 5x + 2 = 0$

(viii)  $x - \frac{3}{x} = 2, (x \neq 0)$

(ix)  $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

- 2- دو اعداد معلوم کیجیے جن کا مجموعہ 27 اور حاصل ضرب 182 ہے؟
- 3- دو سلسلہ وار مثبت صحیح اعداد معلوم کیجیے جن کے مربعوں کا مجموعہ 613 ہے؟
- 4- ایک قائمہ الزاویہ مثلث کا ارتفاع اس کے قاعدے سے 7 سمر کم ہے اگر وتر 13 سمر ہو تو باقی دو اضلاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔
- 5- ایک گھریلو صنعت سے ایک دن میں مٹی کے برتنوں کی خاص تعداد تیار کی جاتی ہے ایک مخصوص دن یہ مشاہدہ کیا گیا کہ ایک برتن کی لاگت (روپیوں میں) اس دن تیار کردہ برتنوں کی تعداد کے دو گنا سے 3 زیادہ ہے اگر اس دن کی جملہ لاگت 90 ہو تو تیار کردہ برتنوں کی تعداد اور ہر ایک برتن کی قیمت معلوم کیجیے؟
- 6- ایک مستطیل کے ابعاد معلوم کیجیے جس کا احاطہ 28 میٹر اور رقبہ 40 مربع میٹر ہے۔
- 7- ایک مثلث کا قاعدہ اس کے ارتفاع سے 4 سمر زائد ہے اگر مثلث کا رقبہ 48 مربع سمر ہو تو قاعدہ اور ارتفاع معلوم کیجیے۔
- 8- دو ٹرین ایک اسٹیشن سے ایک ہی وقت روانہ ہوتی ہیں ایک ٹرین مغرب کی جانب اور دوسری ٹرین شمال کی جانب روانہ ہوتی ہے پہلی ٹرین دوسری ٹرین کے مقابلے میں 5 کلومیٹر فی گھنٹہ کی زائد رفتار سے نکلتی ہے اگر دو گھنٹے بعد ان کے درمیان 50 کلومیٹر کا فاصلہ ہو تو ہر ایک ٹرین کی اوسط رفتار کیا ہوگی؟
- 9- ایک جماعت میں 60 طلباء ہیں جماعت کے ہر لڑکے نے کسی کام کے لیے لڑکیوں کی تعداد کے مساوی رقم پیش کی اور ہر لڑکی، لڑکوں کی تعداد کے مساوی رقم دی۔ اگر مجموعی رقم 1600 حاصل ہوئی ہو تو بتائیے کہ جماعت میں لڑکوں کی تعداد کیا ہے؟
- 10- ایک موٹر بوٹ دریا کی مخالف سمت میں 24 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے جب کہ پانی کی رفتار 3 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے موٹر بوٹ کی ایک چکر کے لیے 6 گھنٹے درکار ہیں۔ ساکن پانی میں اس کی رفتار معلوم کیجیے۔

#### 5.4 تکمیل مربع سے دو درجی مساوات کا حل:

پچھلے سیشن میں ہم بذریعہ تحلیل جزو ضربی دو درجی مساوات کے ریشے معلوم کرنے کا طریقہ سیکھ چکے ہیں کیا یہ طریقہ مختلف تمام اقسام دو درجی کے مساواتوں کے لیے قابل اطلاق ہے

$$x^2 + 4x - 4 = 0 \text{ آئیے } x^2 + 4x - 4 = 0 \text{ کو تحلیل جزو ضربی کے طریقے سے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں}$$

$$\text{دی گئی مساوات } x^2 + 4x - 4 = 0 \text{ کو تحلیل جزو ضربی کے طریقے سے حل کرنے کے لیے ہم کو } p \text{ اور } q \text{ معلوم کرنا ہوتا ہے}$$

$$\text{اس طرح کہ } p + q = 4 \text{ اور } p \times q = -4$$

لیکن یہ ممکن نہیں ہے لہذا ہم تحلیل جزو ضربی کے طریقے سے حل نہیں کر سکتے ہیں

اس لیے ہم کو ایک دوسرا طریقہ کا مطالعہ کرنا ہوگا

## ذیل کی صورت پر غور کیجیے۔

دو سال قبل عائشہ کی عمر (سالوں میں) اور اب سے چار سال بعد اس کی عمر کا حاصل ضرب اس کی موجودہ عمر کے دو گنے سے 1 زیادہ ہے بتائیے کہ اس کی موجودہ عمر کیا ہے؟

اس کے جواب کے لیے مان لیجیے کہ عائشہ کی موجودہ عمر 'x' سال ہے دو سال قبل عمر (x-2) سال اور چار سال بعد عمر (x+4) سال تب ان دونوں کا حاصل ضرب (x-2)(x+4) ہے

$$\begin{aligned} \text{اس لیے } (x-2)(x+4) &= 2x+1 \\ \Rightarrow x^2+2x-8 &= 2x+1 \quad \text{یعنی} \\ \therefore x^2-9 &= 0 \quad \text{یعنی} \end{aligned}$$

لہذا عائشہ کی موجودہ عمر دو درجی مساوات  $x^2-9=0$  کو مطمئن کرتی ہے۔

ہم اس کو  $x^2=9$  کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ جذر المربع لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے  $x=3$  اور  $x=-3$  چونکہ عمر مثبت عدد ہونی چاہیے لہذا عائشہ کی موجودہ عمر 3 سال ہوگی۔

اب دوسری دو درجی مساوات  $(x+2)^2-9=0$  پر غور کریں گے۔ اس کو حل کرنے کے لیے اس کو ہم  $(x+2)^2=9$  لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned} (x+2)^2-9=0 &\Rightarrow (x+2)^2=9 \\ \therefore x+2=3 \text{ یا } x+2=-3 &\quad \text{اس لیے} \\ \therefore x=1 \text{ یا } x=-5 &\quad \text{یعنی} \end{aligned}$$

یعنی  $(x+2)^2-9=0$  کے ریشے '1' اور '-5' ہیں۔

مذکورہ بالا دونوں مثالوں میں وہ رکن جس میں 'x' ہے ایک مربع ہے۔ اور ہم جزر المربع لیتے ہوئے آسانی سے ریشے معلوم کر سکتے ہیں لیکن کیا ہوگا اگر ہمیں کہا جائے کہ مساوات  $x^2+4x-4=0$  کو حل کیجیے۔ اس کو تحلیل اجزائے ضربی سے بھی حل نہیں کیا جاسکتا ہے۔ لہذا اب ہم تکمیل مربع کے طریقے کو متعارف کریں گے۔ اس طریقے میں دو درجی مساوات کے بائیں بازو کو اس طرح ترتیب دیا جائے کہ یہ ایک کثیر رکنی کا کامل مربع بن جائے اور دائیں جانب مستقل رکن ہو۔ اس کا طریقہ عمل حسب ذیل ہے

$$\begin{aligned} x^2+4x-4 &= 0 \\ \Rightarrow x^2+4x &= 4 \\ x^2+2 \cdot x \cdot 2 &= 4 \end{aligned}$$

اب LHS  $a^2+2ab$  کی شکل میں ہے اگر ہم  $b^2$  جمع کرتے ہیں تو  $a^2+2ab+b^2$  ہو جاتا ہے جو ایک کامل مربع ہے

لہذا دونوں جانب  $b^2=2^2=4$  جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$\begin{aligned} x^2+2 \cdot x \cdot 2+2^2 &= 4+4 \\ \Rightarrow (x+2)^2 &= 8 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{8} \\ \Rightarrow x &= -2 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$



اب مساوات  $3x^2 - 5x + 2 = 0$  پر غور کیجیے۔ نوٹ کیجیے کہ  $x^2$  کا عددی سر 1 نہیں ہے اس لیے ہم پوری مساوات کو 3 سے تقسیم کرتے ہیں تاکہ  $x^2$  کا عددی سر 1 بن جائے۔

$$\begin{aligned} \therefore x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - \frac{5}{3}x &= \frac{-2}{3} \\ \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{6} &= \frac{-2}{3} \\ \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{-2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

دونوں جانب  $\left(\frac{5}{6}\right)^2$  جمع کرنے پر

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{(12 \times -2) + (25 \times 1)}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

دونوں جانب جزر المربع لینے پر

$$x - \frac{5}{6} = \pm \frac{1}{6}$$

$$\text{یعنی } x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \text{ یا } x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = 1 \text{ یا } x = \frac{4}{6}$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = \frac{2}{3}$$

اس لیے دی گئی مساوات کے ریشے 1 اور  $\frac{2}{3}$  ہیں

مذکورہ بالا مثالوں سے ہم تکمیل مربع کے لیے حسب ذیل الگورتھم اخذ کر سکتے ہیں۔

الگورتھم: مان لیجیے کہ  $ax^2 + bx + c = 0$  دو درجی مساوات ہے

مرحلہ - 1: مساوات کے دونوں جانب 'a' سے تقسیم کرنے پر

مرحلہ - 2 : مساوات کو دوبارہ اس طرح ترتیب دیجیے کہ مستقل رکن  $c/a$  مساوات کی سیدھی جانب (RHS) و

مرحلہ - 3: LHS کو کامل مربع بنانے کے لیے دونوں جانب  $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$  جمع کیجیے۔

مرحلہ - 4: LHS کو ایک مربع کے طور پر لکھتے ہوئے RHS کو مختصر کیجیے۔

مرحلہ - 5: اس کو حل کیجیے۔

مثال - 6: مساوات  $5x^2 - 6x - 2 = 0$  تکمیل مربع سے حل کیجیے

حل: دیا گیا ہے کہ  $5x^2 - 6x - 2 = 0$

اب ہم الگورتھم کو اختیار کرتے ہیں

مرحلہ - 1:  $x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$  (دونوں جانب 5 سے تقسیم کرنے پر)

مرحلہ - 2:  $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$

مرحلہ - 3:  $x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$  (دونوں جانب  $\left(\frac{3}{5}\right)^2$  جمع کرنے پر)

مرحلہ - 4:  $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$

مرحلہ - 5:  $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$x - \frac{3}{5} = \pm \sqrt{\frac{19}{25}}$

$x = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5}$  یا  $x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{3 + \sqrt{19}}{5}$  یا  $x = \frac{3 - \sqrt{19}}{5}$

مثال-7: مساوات  $4x^2 + 3x + 5 = 0$  کے ریش کامل مربع بنانے کے طریقے سے معلوم کیجیے۔



حل: دیا گیا ہے

$$4x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{-5}{4}$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \frac{9}{64}$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-71}{64} < 0$$

لیکن  $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2$  منفی نہیں ہو سکتا 'x' کی کسی بھی حقیقی قدر کے لیے (کیوں؟)

لہذا x کی کوئی حقیقی قدر نہیں ہے جو مساوات کو مطمئن کر سکے

اس لیے اس مساوات کے حقیقی ریشے نہیں ہیں

یہ کیجیے



نیچے دی گئی دو درجی مساواتوں کو کامل مربع بناتے ہوئے حل کیجیے

(i)  $x^2 - 10x + 9 = 0$

(ii)  $x^2 - 5x + 5 = 0$

(iii)  $x^2 + 7x - 6 = 0$

ہم تکمیل مربع کے استعمال سے کئی مثالوں کو حل کئے ہیں آئیے اب اس طریقے کو معیاری دو درجی مساوات

$ax^2 + bx + c = 0$  (a ≠ 0) کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

مرحلہ - 1: مساوات کو دونوں جانب a سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \text{مرحلہ - 2:}$$

مرحلہ - 3:  $x^2 + \frac{b}{a}x + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2 = -\frac{c}{a} + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$  (دونوں بازو  $\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$  جمع کرنے پر)

$$\Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2 = -\frac{c}{a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{مرحلہ - 4}$$

مرحلہ - 5: اگر  $b^2 - 4ac \geq 0$  لیا گیا ہو تب دونوں جانب جزر المربع لینے پر

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اگر  $b^2 - 4ac \geq 0$  ہو تب مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے ریشے  $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  اور  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ہوں گے۔

پس اگر  $b^2 - 4ac \geq 0$  دو درجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے ریشے  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ہوں گے۔

دو درجی مساوات کے ریشے معلوم کرنے کا یہ ضابطہ دو درجی ضابطہ کہلاتا ہے۔

آئیے دو درجی ضابطہ کو استعمال کرتے ہوئے چند اور مثالوں پر غور کرتے ہیں

**مثال - 8:** مشق 5.1 میں سوال نمبر (i) 2 کو مذکورہ ضابطہ استعمال کرتے ہوئے حل کیجیے۔

**حل:** مان لیجیے کہ مستطیلی پلاٹ کا عرض = 'x' میٹر ہے۔

$$\text{تب طول} = (2x+1) \text{ میٹر ہے}$$

چونکہ مستطیلی پلاٹ کا رقبہ = 528 مربع میٹر ہے

$$\text{ہم لکھ سکتے ہیں کہ } x(2x+1) = 528$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 528 = 0 \quad \text{یعنی}$$

یہ  $ax^2 + bx + c = 0$  کی شکل میں ہے جہاں پر  $a = 2$ ،  $b = 1$  اور  $c = -528$  ہیں۔

لہذا دو درجی ضابطہ سے ہمیں حل حاصل ہوتا ہے۔

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$$x = \frac{64}{4} \text{ یا } x = \frac{-66}{4} \text{ یعنی}$$

$$\Rightarrow x = 16 \text{ یا } x = \frac{-33}{2} \text{ یعنی}$$

چونکہ  $x$  منفی نہیں ہو سکتا لہذا پلاٹ کی چوڑائی 16 میٹر ہے چنانچہ پلاٹ کا طول 33 میٹر  $= (2x+1)$  ہے  
آپ تصدیق کر لیں کہ یہ قدریں سوال کے شرائط کی تکمیل کرتے ہیں۔

### سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے



ہمارے پاس ایک دورجی مساوات کو حل کرنے کے تین طریقے ہیں۔ ان طریقوں میں سے آپ کونسے طریقے کو

استعمال کرنا چاہیں گے۔ کیوں؟

**مثال-9:** دو سلسلہ وار مثبت طاق اعداد معلوم کیجیے جن کے مربعوں کا مجموعہ 290 ہے۔

**حل:** مان لیجیے کہ پہلا مثبت طاق صحیح عدد  $x$  اور دوسرا مثبت طاق صحیح عدد  $(x+2)$  ہوگا۔ سوال کے مطابق

$$x^2 + (x+2)^2 = 290$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290 \text{ یعنی}$$

$$2x^2 + 4x - 286 = 0 \text{ یعنی}$$

$$x^2 + 2x - 143 = 0 \text{ یعنی}$$

جو کہ  $x$  میں ایک دورجی مساوات ہے

$$\text{دورجی ضابطہ } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \therefore \text{ کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوا ہے}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$$\text{یعنی } x = 11 \text{ یا } x = -13$$

چونکہ  $x$  ایک مثبت طاق عدد ہے دیا گیا ہے لہذا  $x \neq -13$

پس سلسلہ وار طاق صحیح اعداد 11 اور 13  $= 11+2 = (x+2)$  ہیں

$$\text{تصدیق: } 11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$$

**مثال - 10:** ایک مستطیلی چمن کی نقشہ کشی کرنا ہے جس کی چوڑائی اس کے طول سے 3 میٹر کم ہے اس کا رقبہ 4 مربع میٹر زائد ہے بہ نسبت ایک پارک کے رقبہ کے جو پہلے ہی تیار کیا گیا ہے جو ایک مساوی الساقین مثلث کی شکل میں ہے جس کا قاعدہ مستطیلی پارک کی چوڑائی کے برابر ہے اور ارتفاع 12 میٹر ہے (شکل 5.3 کو دیکھئے) اس کے طول اور عرض کو معلوم کیجیے۔

**حل:** مان لیجیے کہ مستطیلی چمن کی چوڑائی 'x' میٹر ہے۔

لہذا اس کی لمبائی = (x+3) میٹر

اس لیے مستطیلی کا رقبہ = (x+3) x مربع میٹر

= (x<sup>2</sup>+3x) مربع میٹر

اب مساوی الساقین مثلث کا قاعدہ = x میٹر

اس لیے مساوی الساقین کا رقبہ =  $\frac{1}{2} \times x \times 12$

= 6x مربع میٹر

ہماری ضروریات کے مطابق

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

$$\therefore x^2 - 3x - 4 = 0 \text{ یعنی}$$

دو درجی ضابطہ کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ یا } -1$$

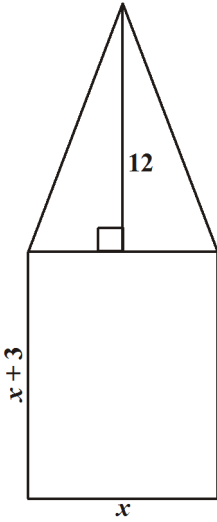
لیکن  $x \neq -1$  (کیوں؟) لہذا  $x=4$

لہذا مستطیلی چمن کا عرض = 4 میٹر

اور اس کا طول = 7 میٹر = 4+3 = x+3 ہوگا

**تصدیق:** مستطیلی چمن کا رقبہ = 28 مربع میٹر

مثالی پارک کا رقبہ = 24 مربع میٹر = (28-4) مربع میٹر



شکل: 5.3

**مثال - 11:** دو درجی ضابطہ کے استعمال سے حسب ذیل دی گئی مساواتوں کے ریشے معلوم کیجیے اگر وجود رکھتے ہوں۔

$$(i) x^2 + 4x + 5 = 0 \quad (ii) 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

**حل:** (i): یہاں  $x^2 + 4x + 5 = 0$  یہاں  $a = 1, b = 4, c = 5$  ہیں لہذا  $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$

چونکہ حقیقی اعداد کا مربع منفی نہیں ہو سکتا ہے اس لیے (میٹر)  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  کی کوئی حقیقی قدر نہیں ہوگی۔

اس لئے دی گئی دو درجی مساوات کے حقیقی ریشے نہیں ہیں۔

$$(ii) 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \text{ یہاں } a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 5$$



$$\therefore b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0 \text{ لہذا}$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ اس لیے}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{لہذا ریشے}$$

**مثال - 12:** حسب ذیل مساواتوں کے ریشے معلوم کیجیے۔

(i)  $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

(ii)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

**حل:** (i)  $x + \frac{1}{x} = 3$  مساوات کے دونوں جانب 'x' سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x^2 + 1 = 3x$$

یعنی  $x^2 - 3x + 1 = 0$  جو کہ ایک دو درجی مساوات ہے

یہاں  $a = 1, b = -3, c = 1$  ہیں

$$b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0 \text{ لہذا}$$

$$\text{لہذا } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (کیوں؟)}$$

$$\text{لہذا ریشے } \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ اور } \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ ہیں}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2. \text{ (ii)}$$

چونکہ  $x \neq 0, 2$  مساوات کو  $x(x-2)$  سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$

$$-2 = 3x^2 - 6x$$

لہذا دی گئی مساوات کی مختصر شکل  $3x^2 - 6x + 2 = 0$  ہے جو کہ ایک دو درجی مساوات ہے

یہاں  $a=3, b=-6, c=2$

$$b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0 \text{ لہذا}$$

$$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \text{ اس لیے}$$

لہذا ریشے  $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$  اور  $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$  ہیں

**مثال - 13:** ایک موٹر بوٹ جس کی رفتار ساکن پانی میں 18 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے اس کو 24 کلومیٹر کا فاصلہ نہر کے بہاؤ کے مخالف سمت میں طے کرنے کے لیے نہر کے بہاؤ کی سمت اسی مقام کو واپسی کے بہ نسبت ایک گھنٹہ زائد درکار ہے۔ نہر کی رفتار کیا ہوگی؟

**حل:** مان لیجیے کہ پانی کے بہاؤ کی رفتار فی گھنٹہ  $x$  کلومیٹر فی گھنٹہ ہے

اس لیے بہاؤ کی مخالف سمت موٹر بوٹ کی رفتار  $(18 - x)$  کلومیٹر فی گھنٹہ

نہر کے بہاؤ کے سمت بوٹ کی رفتار  $(18 + x)$  کلومیٹر فی گھنٹہ

پانی کے بہاؤ کی مخالف سمت درکار وقت =  $\frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} = \frac{24}{18 - x}$  گھنٹے

بہاؤ کی سمت درکار وقت =  $\frac{24}{18 + x}$  گھنٹے

سوال کے مطابق  $\frac{24}{18 - x} - \frac{24}{18 + x} = 1$

یعنی  $24(18 + x) - 24(18 - x) = (18 - x)(18 + x)$

یعنی  $\Rightarrow x^2 + 48x - 324 = 0$

دو درجی ضابطہ کے استعمال سے  $x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$

$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6$  یا  $-54$

چونکہ  $x$  نہر کے بہاؤ کی رفتار ہے یہ منفی نہیں ہو سکتی لہذا ہم ریشہ  $x = -54$  کو نظر انداز کرتے ہیں

اس لیے  $x = 6$  سے نہر کی رفتار 6 کلومیٹر فی گھنٹہ حاصل ہوتی ہے

### مشق 5.3



1- حسب ذیل دو درجی مساواتوں کے ریشے تکمیل مربع سے معلوم کیجیے اگر ریشے وجود رکھتے ہوں

i.  $2x^2 + x - 4 = 0$

ii.  $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

iii.  $5x^2 - 7x - 6 = 0$

iv.  $x^2 + 5 = -6x$

- 2- سوال 1 میں دی گئی دو دور جی مساواتوں کے ریشے دو دور جی ضابطہ کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے۔
- 3- ذیل کی مساواتوں کے ریشے معلوم کیجیے۔
- (i)  $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$  (ii)  $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$
- 4- رحمن کی 3 سال پہلے کی عمر اور 5 سال بعد کی عمر کے مقلوب کا مجموعہ  $\frac{1}{3}$  ہے اس کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔
- 5- ایک کلاس ٹسٹ میں طالبہ عائشہ کے ریاضی اور انگریزی کے محصلہ نشانات 30 ہیں اگر وہ ریاضی میں 2 نشانات زیادہ اور انگریزی میں 3 نشانات کم حاصل کرتی ہو تو اس کے نشانات کا حاصل ضرب 210 ہے اس کے دو مضامین کے نشانات معلوم کیجیے؟
- 6- ایک مستطیلی کھیت کا وتر اس کے چھوٹے ضلع سے 60 میٹر زیادہ ہے اگر اس کا بڑا ضلع چھوٹے ضلع سے 30 میٹر زیادہ ہو تو اس کھیت کے ضلعوں کو معلوم کیجیے
- 7- دو اعداد کے مربعوں کا فرق 180 ہے چھوٹے عدد کا مربع بڑے عدد کا 8 گنا زیادہ ہے دو اعداد معلوم کیجیے
- 8- ایک ٹرین 360 کلومیٹر فی گھنٹہ کی ہموار رفتار سے فاصلہ طے کرتی ہے اگر رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو یہ سفر طے کرنے کے لیے ایک گھنٹہ کم لیتی۔ ٹرین کی رفتار معلوم کیجیے۔
- 9- پانی کے دو ٹن ایک ٹانگی کو  $9\frac{3}{8}$  گھنٹوں میں بھر سکتے ہیں بڑے قطر کا ٹن، چھوٹے قطر کے ٹن سے ٹانگی بھرنے کے لیے 10 گھنٹے کم وقت لیتا ہے۔ بتائیے کہ علیحدہ طور پر یہ ٹانگی کو کتنے گھنٹے میں بھرتے ہیں۔
- 10- ایک ایکسپریس ٹرین میسور تا بنگلور 132 کلومیٹر درمیانی فاصلہ طے کرنے کے لیے پانچ ٹرین کے مقابلے 1 گھنٹہ کم لیتی ہے۔ (درمیانی اسٹیشن پر توقف کے وقت کو نظر انداز کیجیے) اگر ایکسپریس ٹرین کی اوسط رفتار یا پانچ ٹرین سے 11 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہو تو دونوں ٹرینوں کی اوسط رفتار معلوم کیجیے؟
- 11- دو مربعوں کے رقبوں کا مجموعہ 468 مربع میٹر ہے اگر ان کے احاطوں کا فرق 24 میٹر ہو تو ان دو مربعوں کے ضلعوں کو معلوم کیجیے
- 12- ایک گیند 12 میٹر فی سکینڈ کی رفتار سے ایک 17 میٹر بلند بلڈنگ سے انتصاباً اوپر پھینکا گیا۔ 'ا' سکینڈ بعد گیند کی بلندی زمین سے  $g = -10ms^{-2}$  جہاں  $S = ut + \frac{1}{2}gt^2$  ہو جاتی ہے۔ تب گیند کا زمین تک پہنچنے کا وقت معلوم کیجیے۔
- 13- اگر ایک 'n' ضلعی کثیر الرکنی میں  $\frac{1}{2}n(n-3)$  وتر ہوں تو 65 وتروں والی ایک کثیر الرکنی میں کتنے ضلعے ہوں گے؟ کیا کوئی کثیر الرکنی ہے جس کے 50 وتر ہوں؟

## 5.5 ریشوں کی نوعیت

سابقہ سیکشن میں ہم نے دیکھا کہ دو درجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے ریشے  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  سے ظاہر کرتے

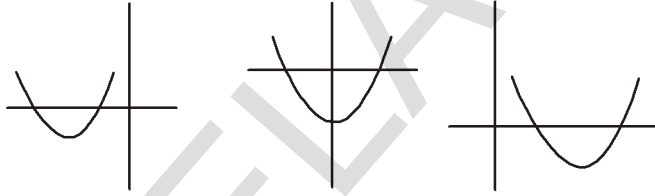
ہیں۔ آئیے اب ہم ان کی نوعیت کا فہم حاصل کرنے کی کوشش کریں گے۔

یاد رکھیے کہ صفر '0' وہ نقاط ہے جہاں کثیر رکنی کی قدر صفر '0' ہو جاتی ہے۔ یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ دو درجی کثیر رکنی کا منحنی  $x$ -محور کو قطع کرتی ہے اسی طرح دو درجی مساوات کے ریشے وہ نقاط ہیں جہاں منحنی  $x$ -محور کو قطع کرتی ہے۔

پہلی صورت: اگر  $b^2 - 4ac > 0$

ہمیں دو مختلف حقیقی ریشے حاصل ہوتے ہیں  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ،  $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ایسی صورت میں اگر دی گئی دو درجی مساوات کا گراف کھینچتے ہیں تو ہمیں یہ شکلیں حاصل ہوتی ہیں۔



شکل سے ظاہر ہوتا ہے کہ دو درجی مساوات کے منحنی  $x$ -محور کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتی ہے

دوسری صورت: اگر  $b^2 - 4ac = 0$

$$x = \frac{-b + 0}{2a}$$

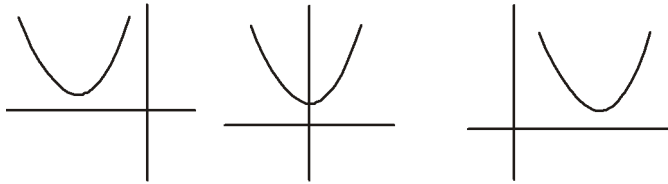
$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a} \text{ لہذا}$$

شکل سے ظاہر ہوتا ہے کہ دو درجی مساوات کی منحنی  $x$ -

محور کو ایک ہی نقطہ پر مس کرتی ہے

تیسری صورت: اگر  $b^2 - 4ac < 0$

ریشے حقیقی نہیں ہیں۔ ریشے خیالی ہیں



اس صورت میں گراف نہ ہی x محور کو قطع کرتا ہے اور نہ ہی مس کرتا ہے لہذا کوئی حقیقی ریشے نہیں ہیں۔  
چوں کہ  $b^2 - 4ac$  تعین کرتا ہے کہ دورجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$   $a \neq 0$  کے ریشے حقیقی ہیں یا نہیں۔  
 $b^2 - 4ac$  کو دورجی مساوات کا میٹرز (D) کہتے ہیں۔  
لہذا دورجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے  
(i) دور ریشے حقیقی اور مختلف ہیں اگر  $b^2 - 4ac > 0$   
(ii) دور ریشے حقیقی اور مساوی ہیں اگر  $b^2 - 4ac = 0$   
(iii) حقیقی نہیں ہیں اگر  $b^2 - 4ac < 0$   
آئیے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں

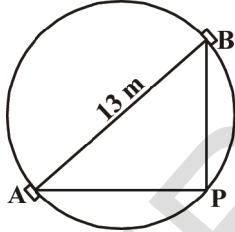
**مثال - 14:** دورجی مساوات  $2x^2 - 4x + 3 = 0$  کا میٹرز معلوم کیجیے۔ اور اس کے ریشوں کی نوعیت پر تبصرہ کیجیے۔

**حل:** دی گئی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کی شکل میں ہے۔ جہاں  $a = 2, b = -4, c = 3$

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) \\ = 16 - 24 = -8 < 0$$

لہذا دی گئی مساوات کے کوئی حقیقی ریشے نہیں ہیں۔

**مثال - 15:** ایک کھمبے کو 13 میٹر قطر کے دائرہ نما چمن کی باونڈری کے ایک نقطہ پر اس طرح انصافی کھڑا کرنا ہے کہ اس کا فاصلہ قطر کے مخالف دونوں جانب باونڈری پر قائم گیٹس A اور B کے فاصلوں کا فرق 7 میٹر ہو کیا اس طرح انجام دینا ممکن ہے؟ اگر ممکن ہو تو بتائیے کہ ان دونوں گیٹس سے کھمبے کو کس فاصلہ پر نصب کیا جائے۔



**حل:** آئیے پہلے شکل تشکیل دیتے ہیں

مان لیجیے کہ  $p$  کھمبے کا تعین مقام ہے

مان لیجیے کہ کھمبے کا فاصلہ گیٹ B سے  $x$  میٹر یعنی  $BP = x$  میٹر

اب کھمبے کا فاصلہ دونوں گیٹوں کے فاصلہ کا فرق  $7 = (BP - AP)$  یا  $(AP - BP)$

اس لیے  $AP = (x + 7)$  میٹر

اب  $13$  میٹر  $AB$  اور چونکہ  $AB$  قطر ہے

$\angle APB = 90^\circ$  (کیوں؟)

اس لیے فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے  $AP^2 + PB^2 = AB^2$

$$\Rightarrow (x + 7)^2 + x^2 = 13^2 \text{ یعنی}$$

$$\Rightarrow x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169 \text{ یعنی}$$

$$\therefore 2x^2 + 14x - 120 = 0 \text{ یعنی}$$

لہذا گیٹ B سے کھبے کا فاصلہ  $x$  مساوات  $x^2 + 7x - 60 = 0$  کو مطمئن کرتا ہے  
 لہذا کھبے کو نصب کرنا ممکن ہوگا اگر اسی مساوات کے ریشے حقیقی ہوں یہ دیکھنے کے لیے کہ ریشے حقیقی ہیں یا نہیں  
 آئیے اس کے ممیز پر غور کرتے ہیں۔ ممیز ہے

$$\therefore b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60)$$

$$= 289 > 0$$

لہذا دی ہوئی دو درجی مساوات کے دو ریشے حقیقی ہیں اور کھبے کو دائروی چمن کے باؤنڈری پر نصب کرنا ممکن ہے  
 دو درجی ضابطہ کی مدد سے مساوات  $x^2 + 7x - 60 = 0$  کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

اس لیے  $x = 5$  یا  $-12$

چوں کہ 'x' کھبے اور گیٹ B کا درمیانی فاصلہ ہے لہذا یہ مثبت ہونا چاہیے

اس لیے  $x = -12$  کو نظر انداز کرنا ہوگا لہذا،  $x = 5$

اس لیے دائروی چمن کی باؤنڈری پر کھمبا گیٹ B سے 5 میٹر اور گیٹ A سے 12 میٹر فاصلہ کی دوری پر نصب کیا جائے گا۔

### کوشش کیجیے



- 1- کسی دو درجی مساوات کو حل کرنے کی کوشش سے پہلے اس کے ممیز کی قدر محسوب کرنے کے فوائد بیان کیجیے اس کی قدر کی کیا اہمیت ہے؟
- 2- ایسی تین دو درجی مساواتیں لکھیے جن میں ایک کے دو حقیقی حل ہوں ایک کا حقیقی حل نہ ہو اور ایک کا بے کم صرف ایک ہی حل ہو۔

**مثال-16:** مساوات  $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$  کا ممیز معلوم کیجیے اور بتائیے کہ ریشوں کی نوعیت معلوم کیجیے؟ اگر یہ حقیقی ہوں تو ان کو محسوب

کیجیے۔

**حل:** یہاں  $a=3$ ،  $b=-2$  اور  $c=\frac{1}{3}$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0.$$

اس لیے ممیز 0 ہے۔ لہذا دی گئی دو درجی مساوات کے دو مساوی ریشے ہیں۔

یعنی ریشے  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{3}$   $\Rightarrow \frac{2}{6}$ ،  $\frac{2}{6} \Rightarrow \frac{-b}{2a}$ ،  $\frac{-b}{2a}$  ہیں۔



## مشق 5.4



- 1- حسب ذیل دو درجی مساوات کے ریشوں کی نوعیت معلوم کیجیے؟ اگر حقیقی ریشے وجود رکھتے ہیں تو انہیں محسوب کیجیے
- (i)  $2x^2 - 3x + 5 = 0$       (ii)  $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$
- (iii)  $2x^2 - 6x + 3 = 0$
- 2- حسب ذیل ہر ایک دو درجی مساوات میں K کی قدر اس طرح معلوم کیجیے کہ ان کے ریشے مساوی ہوں؟
- (i)  $2x^2 + kx + 3 = 0$       (ii)  $kx(x - 2) + 6 = 0$  ( $k \neq 0$ )
- 3- کیا یہ ممکن ہے کہ ایک ایسا مستطیلی آم کا باغ کی اگایا جائے جس کا طول اس کے عرض کا دو گنا ہے اور رقبہ 800 مربع میٹر ہے؟ اگر ایسا ہو تو اس کا طول اور عرض معلوم کیجیے۔
- 4- دو دوستوں کی عمر کا مجموعہ 20 سال ہے۔ 4 سال پہلے ان کی عمر کا حاصل ضرب 48 تھا۔ کیا ایسا ممکن ہے اگر آپ کا جواب ہاں ہو تو ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔
- 5- کیا یہ ممکن ہے کہ ایک ایسا مستطیلی چمن بنایا جائے جس کا احاطہ 80 میٹر اور رقبہ 400 مربع میٹر ہو؟ اگر ممکن ہو تو طول اور عرض معلوم کیجیے، نتیجے کی تصدیق کیجئے۔

## مشق (اختیاری)



(جامع اکتساب کے لیے)

- 1- ایک مستوی پر چند نقاط کو نشان زدہ کیا گیا ہے ان میں کوئی تین ہم خط نہیں ہیں۔ خطی قطعوں سے ہر ایک نقطہ کو باقی تمام نقاط سے جوڑا گیا۔ اگر خطی قطعوں کی تعداد 10 ہو تب نقاط کی تعداد معلوم کیجیے؟
- 2- ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں کا حاصل ضرب 8 ہے جب عدد میں 18 جمع کیا جائے تو ہندسے اپنا مقام بدل لیتے ہیں عدد کو معلوم کیجیے؟
- 3- 8 میٹر لمبے ایک برقی تار کو 2 ٹکڑوں میں کاٹا گیا ہر ٹکڑے کو موڑ کر ایک مربع کی شکل دی گئی تار کو کس جگہ سے کٹ کرنا چاہیے تاکہ ان دونوں مربعوں کے رقبوں کا مجموعہ 2 مربع میٹر ہو؟
- (اشارہ:  $\left[ x + y = 8, \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = 2 \right]$ )
- 4- صہیب اور عاطف کسی مکان کی بیرونی دیواروں کو 6 دن میں آہک پاشی کرتے ہیں صہیب اکیلا یہ کام عاطف سے 5 دن پہلے کرتا ہے تو بتاؤ کہ صہیب کتنے دن میں اس کام کو مکمل کرے گا؟
- 5- بتائیے کہ دو درجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$   $a \neq 0$  کے ریشوں کا مجموعہ  $-\frac{b}{a}$  ہے۔

6- ثابت کیجیے کہ دو درجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) کا حاصل ضرب  $\frac{c}{a}$  ہے؟

7- اگر کسر اور مقلوب کا مجموعہ  $2\frac{16}{21}$  ہو تو کسر معلوم کیجیے؟

### تجزیہ کردہ منصوبہ کام

دو درجی مساوات  $(a \neq 0)$   $ax^2 + bx + c = 0$  کی شکل کے کوئی دو یا تین دو درجی مساواتیں مختلف صورتحال جیسے  $\alpha > 0$   $b=0, \alpha < 0$  کے لیے، لیجیے اور ان کو تریسی طریقے سے حل کیجیے۔

### ہم نے کیا سیکھا؟



- 1- متغیر 'x' میں دو درجی مساوات کی معیاری شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  ہے جہاں  $a, b, c$  حقیقی اعداد ہیں اور  $a \neq 0$ .
- 2- ایک حقیقی عدد ' $\alpha$ ' دو درجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کا ریشہ کہلاتا ہے اگر  $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$  ہو۔ دو درجی کثیر رکنی  $ax^2 + bx + c$  کے صفر اور دو درجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے ریشے یکساں ہوتے ہیں؟
- 3- اگر  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) کو دو خطی اجزاء کے حاصل ضرب کے طور پر اجزائے ضربی میں تحلیل کرتے ہیں تب دو درجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے ریشے ہر جز ضربی کو صفر '0' کے مساوی کرتے ہوئے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔
- 4- ایک دو درجی مساوات کو تکمیل مربع کے طریقے سے بھی حل کیا جاسکتا ہے۔
- 5- دو درجی ضابطہ: دو درجی مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) کے ریشے  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  سے حاصل کئے جاتے ہیں

$$b^2 - 4ac \geq 0 \text{ جبکہ}$$

6- دو درجی مساوات  $(a \neq 0)$   $ax^2 + bx + c = 0$  کے

(i) دو ریشے حقیقی اور مختلف ہیں اگر  $b^2 - 4ac > 0$

(ii) دو ریشے حقیقی اور مساوی ہیں اگر  $b^2 - 4ac = 0$

(iii) دو ریشے غیر حقیقی ہیں اگر  $b^2 - 4ac < 0$

# تصاعد Progressions

## باب 6

### 6.1 تمہید:

آپ نے قدرت کی کئی اشیاء میں ایک مخصوص ترتیب یا نمونے کا مشاہدہ کیا ہوگا۔ جیسے کہ سورج مکھی کی پنکھڑی شہد کی مکھیوں کا چھتہ، مکئی کے بھٹے میں بیج، انناس کے بیج اور صنوبر کے پھل وغیرہ۔

مذکورہ بالا ہر مثال میں کیا آپ نے ایک مخصوص ترتیب کو پایا ہے؟ قدرتی طور پر پائے جانے والی یہ مخصوص ترتیب تصاعد نہیں ہے۔ ایک جیسی نظر آنے والی سورج مکھی کی پنکھڑیاں مساوی دوری / فاصلے پر ہوتی ہیں۔ شہد کی مکھیوں کے چھتہ میں مسدس نما (چھرنی) سورخ متشاکل ہوتے ہیں۔ اسی طرح آپ مکئی اور انناس میں قدرتی ترتیب پاتے ہیں۔

روزمرہ زندگی کے کئی مواقع پر ہم ترتیب کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ چند مثالیں یہ ہیں۔

(i) .....  $4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$  کی قدروں میں آخری ہندسے (اکائی کا ہندسہ) کی فہرست

.....  $4, 6, 4, 6, 4, 6$  ہے۔

(ii) مارے بینک کے مسابقتی امتحان کی تیاری کر رہی ہے۔ اس ضمن میں ترتیب، سلسلوں پر مسائل حل کر رہی ہے۔ اس میں سے ایک سوال اس طرح تھا ”ذیل کے اعداد کی ترتیب میں اگلے دور کن معلوم کیجیے“

.....  $1, 2, 4, 8, 10, 20, 22$

(iii) اکرم نے ملازمت کے لیے درخواست دی۔ وہ ماہانہ 8000 تنخواہ اور سالانہ 500 تدریجی اضافہ (Increment) کے ساتھ تقرر پاتا ہے۔ تب اسکی ماہانہ تنخواہ (روپیوں میں) پہلے دوسرے/تیسرے..... سال کے لیے ترتیب وار .....  $8000, 8500, 9000$  ہوگی۔

(iv) ایک سیڑھی (زینہ) کے ڈنڈے کا طول نیچے سے اوپر کی جانب ہموار 2 سمر کم ہوتا جا رہا ہے۔ اگر سیڑھی کے نچلے ڈنڈے کا طول 45 سمر ہو تب نیچے سے پہلا دوسرا تیسرا..... آٹھواں ڈنڈا ترتیب وار  $45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31$  ہوگا۔

مذکورہ بالا اعداد کی ترتیب میں کیا آپ نے کسی خاص ترتیب کا مشاہدہ کیا ہے؟

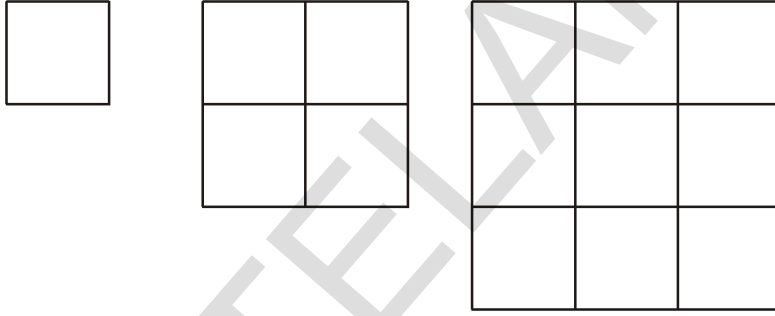
مثال (i) میں دو اعداد 4 اور 6 کے بعد دیگرے دہرائے جا رہے ہیں۔

مثال (ii) میں ترتیب معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔ مثال (iii) اور (iv) میں اعداد کے درمیان رشتوں کا مشاہدہ کرنے پر پتہ چلتا ہے کہ ہمیشہ اس میں اضافہ ہوتا جا رہا ہے۔ دی گئی فہرست ...., 8000, 8500, 9000 کے پیش رو رکن میں 500 جمع کرنے سے اگلا رکن حاصل ہو رہا ہے۔

اسی طرح ..... 41, 43, 45 میں ہر پیش رو رکن میں "2" جمع کرنے پر پس رو رکن حاصل ہو رہا ہے۔ اب ہم مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں جس میں اعداد کی ترتیب میں مسلسل اضافہ ہوتے رہتا ہے۔

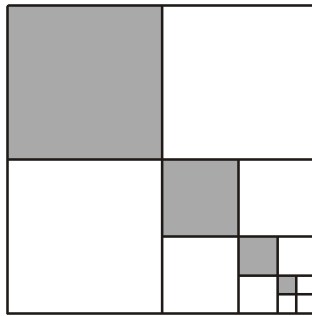
(a) ایک سیونگ اسکیم (Saving Scheme) میں رقم میں ہر 3 سال میں  $\frac{5}{4}$  گنا اضافہ ہوتی ہے۔ اس اسکیم میں 8000 کا سرمایہ لگانے پر 3، 6، 9 اور 12 سال بعد حاصل ہونے والی جملہ رقم ترتیب وار، 1000, 12500, 15625, 19531.25 ہوگی۔

(b) 1, 2, 3, ..... اکائی ضلع والے مربع میں اکائی مربع کی تعداد ترتیب وار  $1^2, 2^2, 3^2, \dots$  ہے



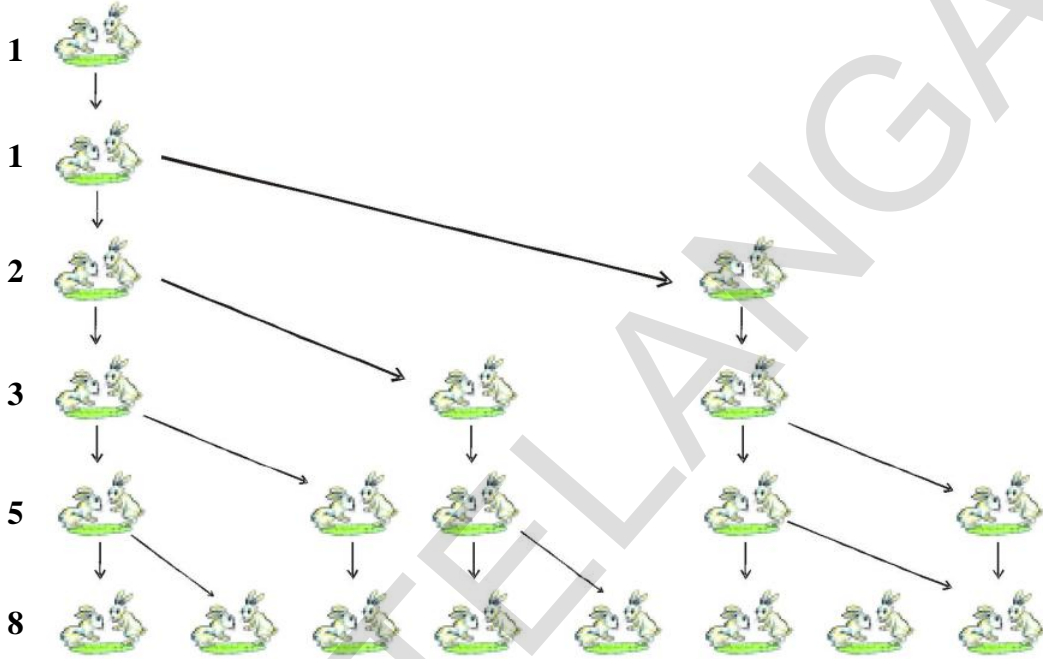
(c) آفرین نے بیٹی کے یوم پیدائش کے موقع پر -/1000 (بیٹی کی رقم چھپانے والے) بکسے میں رکھے۔ اگر ہر سال اس بکسے میں -/500 اضافہ کرتے ہوئے جمع کرنے پر پہلی دوسری تیسری اور چوتھی سالگرہ پر رقم ترتیب وار، 1000, 1500, 2000, ..... 2500 ہوگی۔

(d) ذیل کی شکل میں سایہ دار مربعوں کے حصوں کی قدر کو کسر کی شکل میں ترتیب وار  $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \dots$  سے ظاہر کیا گیا



(e) مان لیجیے کہ ایک خرگوش کی جوڑی دوسرے مہینے سے ہر مہینہ ایک نیا جوڑا پیدا کرتی ہے۔ اس طرح نیا جوڑا بھی دوسرے مہینے سے ہر مہینہ ایک نیا جوڑا پیدا کرتا ہے۔ پہلے مہینے میں صرف ایک جوڑی ہے اور فرض کیجیے کہ کوئی بھی جوڑا مرا نہیں۔ پہلے دوسرے تیسرے چوتھے پانچویں اور چھٹویں۔۔۔۔۔ مہینے میں خرگوش کے جوڑوں کی تعداد بالترتیب۔

1, 1, 2, 3, 5, 8



اوپر کی مثالوں میں ہم چند ترتیبوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ بعض صورتوں میں ایک رکن اس کے پیش رو رکن میں ایک متعین عدد/مستقل عدد جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے اور بعض صورتوں میں ہر رکن کو ایک مستقل رکن سے ضرب دینے پر اگلا رکن حاصل ہوتا ہے جبکہ بعض میں متواتر اعداد کے مربع لیے جاتے ہیں وغیرہ

اس باب میں ہم ہر رکن پیش رو رکن میں ایک مستقل رکن کو جمع کرنے پر حاصل ہونے والی ترتیب اور ہر رکن کو ایک مستقل رکن سے ضرب دینے پر حاصل ہونے والی ترتیب انکا  $n$  واں رکن اور  $n$  ارکان کا مجموعہ معلوم کرنا وغیرہ سے متعلق گفتگو کریں گے۔

تاریخ: 400 سال قبل بابل کی باسی (عراق کا اک قدیم شہر) حسابی تصاعد اور جو مٹریہ تصاعد سے واقفیت رکھتے تھے اس کے کئی شواہد ملتے ہیں۔ بوٹھینس (570 عیسوی) کے مطابق قدیم یونانی مصنف تصاعد سے واقف تھے۔ ہندوستان کے قدیم ریاضی داں آریہ بھٹ (470 عیسوی) نے پہلی مرتبہ پہلے طبعی اعداد کے مربعوں اور مکعبوں کے مجموعے کا ضابطہ متعارف کیا جس کو اس نے اپنی مشہور تصنیف آریہ بھٹیم (499 عیسوی) میں قلم بند کیا۔ علاوہ ازیں اس نے حسابی تصاعد میں  $P$  رکن سے  $n$  ویں رکن تک ارکان کے مجموعے کو معلوم کرنے کا ضابطہ بھی پیش کیا ہے۔ برہم گپت (598 عیسوی) ماہاویر (850 عیسوی) اور بھاسکرا (1114-1185 عیسوی) جیسے ریاضی دانوں نے پہلے طبعی اعداد کے مربعوں و مکعبوں کے مجموعے پر تحقیقات کی ہیں۔

## 6.2 حسابی تصاعد (Arithmetic Progression):

حسب ذیل اعداد کی فہرست کا مشاہدہ کیجیے۔

- (i) 1, 2, 3, 4, ... (ii) 100, 70, 40, 10, ...  
 (iii) -3, -2, -1, 0, ... (iv) 3, 3, 3, 3, ...  
 (v) -1.0, -1.5, -2.0, -2.5, ...

فہرست کے ہر عدد کو رکن کہتے ہیں۔

دیئے گئے ارکان کی اساس پر کیا آپ اگلے ارکان لکھ سکتے ہیں؟ اگر آپ کا جواب ”ہاں“ ہو تب آپ کیسے لکھو گے؟  
 شاید آپ ترتیب کے اصول کی بنیاد پر لکھ سکیں گے۔ آئیے اس اصول کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

(i) میں ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اپنے پیش رو رکن سے 1 زیادہ ہے۔

(ii) میں ہر رکن اپنے پیش رو رکن سے 30 کم ہے۔

(iii) میں ہر رکن پیش رو رکن میں 1 جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(iv) میں تمام رکن 3 ہیں۔ یعنی ہر رکن اپنے پیش رو رکن میں 0 جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(v) میں ہر رکن اپنے پیش رو رکن میں -0.5 جمع کرنے (یعنی 0.5 نکلنے) سے حاصل ہوتا ہے۔

اوپر دیئے گئے تمام اعداد کی فہرست میں ہر فہرست کا ہر رکن اسکے پیش رو رکن میں ایک متعین / مستقل عدد جمع کرنے یا تفریق کرنے سے حاصل ہو رہا ہے۔ ایسے اعداد کا سلسلہ یا فہرست ہی حسابی تصاعد کہلاتی ہے۔

## کوشش کیجیے



(i) حسب ذیل میں کون سا سلسلہ حسابی تصاعد ہے؟ اور کیوں؟

(a) 2, 3, 5, 7, 8, 10, 15, ..... (b) 2, 5, 7, 10, 12, 15, .....

(c) -1, -3, -5, -7, .....

(ii) کوئی 3 حسابی تصاعد لکھئے؟

## 6.2.1 حسابی تصاعد کیا ہے؟

مذکورہ بالا مثالوں کے مشاہدہ سے پتہ چلتا ہے کہ ”اعداد کے سلسلہ / فہرست میں سوائے پہلے رکن کے باقی تمام اعداد کو“ اس کے پیش رو عدد میں ایک متعین عدد (مستقل عدد) جمع کرنے سے حاصل ہونے والا سلسلہ حسابی تصاعد کہلاتا ہے۔“

جمع کیا جانے والا متعین عدد ”فرق مشترک“ کہلاتا ہے۔ یاد رہے کہ یہ مثبت، منفی یا صفر بھی ہو سکتا ہے۔

ایک حسابی تصاعد کے پہلے رکن کو  $a_1$ ، دوسرے رکن کو  $a_2$ ، .....،  $a_n$  ویں رکن کو  $a_n$  اور فرق مشترک  $d$  تصور کرنے پر حسابی تصاعد کا

سلسلہ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ہوگا۔

لہذا  $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2019-20



آئیے حسابی تصاعد کی مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

(a) کسی اسکول کے دعائیہ اجتماع میں قطار میں کھڑے ہوئے طلبہ کی بلندیاں (سنٹی میٹر میں) اس طرح سے ہیں

147, 148, 149, . . . , 157

(b) ایک شہر کے ماہ جنوری کے ایک ہفتہ میں ریکارڈ کیا گیا اقل ترین درجہ حرارت صعودی ترتیب میں

2.5, -2.6, -2.7, -2.8, -2.9, -3.0, -3.1 ہے۔

(c) 1000 کے قرض کو 5% کے حساب سے ہر مہینہ ادا کرنے پر باقی ادا کی جانے والی رقم

950, 900, 850, 800, . . . , 50

(d) ایک اسکول میں اول تا 12 ویں جماعت (I to XII) زائد نشانات حاصل کرنے والے طالب علم کو دیے جانے والے نقد انعام بالترتیب

200, 250, 300, 350, . . . , 750

(e) دس مہینوں تک ہر مہینہ اگر 50 روپے کے حساب سے بچت کریں تو ہر مہینہ کی بچت

50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500 ہوگی

### سوچئے اور تبادلہ خیال کیجئے



1. کیا مذکورہ بالا کی ہر فہرست حسابی تصاعد ہے۔ ساتھیوں سے تبادلہ خیال کیجئے۔
2. مذکورہ بالا کی ہر فہرست کے لیے فرق مشترک معلوم کیجئے؟ سوچ کر بتائیے کہ فرق مشترک کب مثبت ہوتا ہے؟
3. ایک ایسا حسابی تصاعد لکھئے جس کا فرق مشترک اقل ترین مثبت عدد ہو۔
4. ایک ایسا حسابی تصاعد لکھئے جس کا فرق مشترک اعظم ترین مثبت عدد ہو۔
5. ایک ایسا حسابی تصاعد لکھئے جس کا فرق مشترک منفی ہو۔

حسابی تصاعد کی عام شکل: حسابی تصاعد کو حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$

یہ حسابی تصاعد کی عام شکل کہلاتی ہے۔ جہاں پر پہلا رکن 'a' اور d فرق مشترک ہے۔

مثال کے طور پر 1, 2, 3, 4, 5, . . . میں

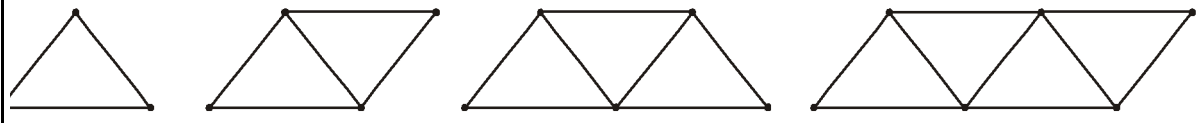
پہلا رکن 1 ہے اور فرق مشترک بھی 1 ہے۔

اسی طرح 2, 4, 6, 8, 10 . . . میں پہلا رکن اور فرق مشترک کیا ہوگا؟

### مشغلہ



(i) حسب ذیل شکلوں کو تیلیوں کی مدد سے بنائیے۔



- (ii) ہر شکل کے لیے درکار تیلیوں کی تعداد کو ترتیب وار لکھئے۔  
 (iii) کیا آپ اعداد کی فہرست میں فرق مشترک معلوم کر سکتے ہیں؟  
 (iv) کیا اعداد کی ہر فہرست ایک حسابی تصاعد کا سلسلہ ہے؟

### 6.2.2 حسابی تصاعد کی حدود

مشاہدہ کیجئے کہ 6.2.1 کے تحت دی گئی (a) تا (e) مثالوں میں دی گئی فہرست میں اعداد کی تعداد محدود ہے۔ ایسے حسابی تصاعد محدود حسابی تصاعد کہلاتے ہیں۔ علاوہ ازیں آپ نے یہ بھی مشاہدہ کیا ہوگا کہ اس فہرست میں آخری رکن بھی موجود ہوتا ہے لیکن 6.2 کے تحت (i) تا (v) فہرست میں اعداد کی تعداد لامحدود ہے۔ ایسے حسابی تصاعد لامحدود حسابی تصاعد کہلاتے ہیں۔ ان میں آخری رکن موجود نہیں ہوتا ہے۔

یہ کیجئے



محدود حسابی تصاعد کی 3 مثالیں اور لامحدود حسابی تصاعد کی 3 مثالیں لکھئے۔

ایک حسابی تصاعد سے متعلق جانکاری کے لیے ہمیں کن اقل ترین معلومات سے آگہی ضروری ہے؟ کیا یہ کافی ہوگا کہ تصاعد کا پہلا رکن معلوم ہو؟ یا کیا یہ کافی ہوگا کہ اس کا فرق مشترک معلوم ہو؟  
 ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں ہمارے لیے ضروری ہیں۔ یعنی پہلا رکن  $a$  اور فرق مشترک  $d$ ۔ یہ دو مقدماتیں کافی ہوں گی کسی بھی حسابی تصاعد کی تکمیل کے لیے۔

مثال کے طور پر پہلے رکن  $a$  کی قدر 6 اور فرق مشترک  $d$  کی قدر 3 ہو تب حسابی تصاعد کا سلسلہ ہوگا  
 $6, 9, 12, 15, \dots$

اور پہلے رکن  $a$  کی قدر 6 اور فرق مشترک  $d$  کی قدر -3 ہو تب حسابی تصاعد ہوگا۔  
 $6, 3, 0, -3, \dots$

اسی طرح اگر

$a = -7$  اور  $d = -2$  تب حسابی تصاعد  $-7, -9, -11, -13, \dots$

$a = 1.0$  اور  $d = 0.1$  تب حسابی تصاعد  $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \dots$

$a = 0$  اور  $d = 1\frac{1}{2}$  تب حسابی تصاعد  $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \dots$

$a = 2$  اور  $d = 0$  تب حسابی تصاعد  $2, 2, 2, 2, \dots$

لہذا 'a' اور 'd' کی قدر معلوم ہو تب ہم حسابی تصاعد لکھ سکتے ہیں۔

آئیے ایک اور طریقہ سے کوشش کرتے ہیں۔ اگر اعداد کا سلسلہ یا اعداد کی فہرست دی جائے تب وہ کیا حسابی تصاعد میں ہے یا نہیں؟ کس طرح معلوم کریں گے۔

مثال کے طور پر اعداد کی فہرست  $6, 9, 12, 15, \dots$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2019-20

پہلے ہم متواتر اعداد یا متواتر رکن کا فرق جانیں گے۔ فہرست کے مطابق

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$$

$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

یعنی ہم دیکھتے ہیں کہ  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = 3$

یہاں ہر صورت میں دو متواتر اعداد کا فرق 3 ہے لہذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ ایک حسابی تصاعد ہے۔ جس کا پہلا رکن 6 اور فرق مشترک 3 ہے۔

اعداد کی فہرست  $6, 3, 0, -3, \dots$  کے لیے

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$

$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$

$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = -3$$

یعنی یہ بھی ایک حسابی تصاعد ہے جس کا پہلا رکن 6 اور فرق مشترک -3 ہے۔

لہذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کوئی دو متواتر اعداد کا فرق اگر مستقل رکن ہو تب وہ حسابی تصاعد ہے۔

یعنی عام طور پر حسابی تصاعد  $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$d = a_{k+1} - a_k \quad (k \in N; k \geq 1)$$

یہاں  $a_{k+1}$  اور  $a_k$  ترتیب وار  $(k+1)$  واں اور  $k$  واں رکن ہے۔

1, 1, 2, 3, 5, ... فہرست کا مشاہدہ کیجیے۔ اس میں دو متواتر ارکان کا فرق مشترک ایک جیسا (مستقل) نہیں ہے۔ لہذا یہ حسابی

تصاعد نہیں ہوگا۔

**نوٹ:**  $6, 3, 0, -3, \dots$  حسابی تصاعد میں  $d$  کی قدر معلوم کرنے کے لیے ہم 3 سے 6 تفریق کیا ہے نہ کہ 6 سے 3۔ یعنی

$(k+1)$  واں رکن چھوٹا ہونے پر بھی  $k$  واں رکن تفریق کرنا چاہیے۔ علاوہ ازیں 'd' کی قدر معلوم کرنے کے لیے  $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots$  ان تمام کا فرق معلوم کرنا ضروری نہیں۔ ان میں سے صرف کسی ایک کی قدر معلوم کر لینا کافی ہو جائے گا۔

یہ کیجیے



(1) کوئی ایک حسابی تصاعد کو لیجیے۔

(2) حسابی تصاعد کے ہر رکن میں ایک متعین عدد جمع کیجیے۔ اور حاصل ہونے والے نتیجہ کو فہرست کی شکل میں لکھئے۔

(3) اسی طرح حسابی تصاعد کے ہر رکن سے ایک معین عدد تفریق کیجیے اور حاصل ہونے والے نتیجہ کو فہرست کی شکل میں لکھئے۔

(4) حسابی تصاعد کے ہر رکن کو ایک معین عدد سے ضرب و تقسیم کیجیے اور نتیجہ کو فہرست کی شکل میں لکھئے۔

(5) اس طرح حاصل ہونے والی نئی فہرست کیا حسابی تصاعد ہوگی۔ جانچ کیجیے۔

(6) بتائیے کہ آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟

آئیے مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

**مثال-1:** حسابی تصاعد  $\dots, \frac{-5}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$  میں پہلا رکن  $a$  اور فرق مشترک  $d$  معلوم کیجیے۔ اور اس حسابی تصاعد کا 7 واں رکن معلوم کیجیے۔

**حل:** یہاں پر  $a = \frac{1}{4}$  اور  $d = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$

ہم جانتے ہیں کہ دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں ہے اس لیے یکے بعد دیگرے آنے والے دو ارکان کا فرق  $d$  ہوگا۔

لہذا حسابی تصاعد کا ساتواں رکن  $\frac{-5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-11}{4}$  ہوگا۔

**مثال-2:** دیے گئے اعداد میں کون سے حسابی تصاعد میں ہیں؟ اگر ان اعداد کی ترتیب حسابی تصاعد میں ہو تب اگلے دور رکن معلوم کیجیے۔

(i) 4, 10, 16, 22, ... (ii) 1, -1, -3, -5, ... (iii) -2, 2, -2, 2, -2, ...

(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ... (v)  $x, 2x, 3x, 4x, \dots$

**حل:** (i) یہاں پر  $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

یعنی  $a_{k+1} - a_k$  کی قدر ہر مرتبہ مساوی یا مستقل ہے۔

لہذا دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد ہے۔ اس کا فرق مشترک  $d=6$  ہے۔

تب سلسلہ کے اگلے دور رکن  $22 + 6 = 28$  اور  $28 + 6 = 34$  ہوں گے۔

(ii)  $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

یعنی  $a_{k+1} - a_k$  کی قدر ہر مرتبہ مساوی یا مستقل ہے۔

لہذا دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں ہے، اس کا فرق مشترک  $d=-2$  ہے۔

تب سلسلے کے اگلے دور رکن ہوں گے۔

$-7 + (-2) = -9$  اور  $(-5) + (-2) = -7$



$$a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4 \text{ (iii)}$$

$$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$$

چونکہ  $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$  اس لیے دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں نہیں ہے۔

$$a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0 \text{ (iv)}$$

$$a_3 - a_1 = 1 - 1 = 0$$

$$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3 \text{ پر}$$

لہذا دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں نہیں ہوگا۔

$$a_2 - a_1 = 2x - x = x \text{ (v)}$$

$$a_3 - a_2 = 3x - 2x = x$$

$$a_4 - a_3 = 4x - 3x = x$$

یعنی  $a_{k+1} - a_k$  ہر مرتبہ مساوی یا مستقل ہے۔

لہذا دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں ہوگا۔

سلسلے کے اگلے دو رکن  $4x + x = 5x$  اور  $5x + x = 6x$  ہوں گے۔

## مشق 6.1



- 1- حسب ذیل صورت میں حاصل والے اعداد کی فہرست کیا حسابی تصاعد ہوگی؟ کیوں؟
  - (i) اگر ایک کرایہ کی گاڑی (Taxi) کو پہلے کلومیٹر کے سفر پر 20، اور اس کے بعد ہر کلومیٹر کے اضافہ پر 8 کے حساب سے کرایہ ادا کیا جائے۔ تو ہر کلومیٹر پر ادا کی جانے والی رقم
  - (ii) ایک خلائی پمپ کے سیلنڈر میں موجود ہوا سے  $\frac{1}{4}$  حصہ خارج کر دیا گیا تب ہر دفعہ سلنڈر میں باقی رہنے والی ہوا کا حجم
  - (iii) ایک کنواں کھودنے کے لیے پہلے ایک میٹر کھدوائی پر 150، اس کے بعد ہر میٹر کے اضافہ پر 50 ادا کرنا ہے تب ہر میٹر کھدوائی کے لیے ادا کی جانے والی رقم
  - (iv) ایک بینک میں 10000 رقم کو سالانہ 8% سود مرکب سے جمع کیا جائے تب ہر سال کے اختتام پر کھاتے (Account) میں موجود رقم معلوم کیجیے؟

2- ذیل کے ہر ایک حسابی تصاعد کا پہلا کزن (a) اور فرق مشترک (d) دیا گیا ہے تب سلسلے کے پہلے چار ارکان معلوم کیجیے؟

$$(i) a = 10, d = 10$$

$$(ii) a = -2, d = 0$$

$$(iii) a = 4, d = -3$$

$$(iv) a = -1, d = \frac{1}{2}$$

$$(v) a = -1.25, d = -0.25$$

3- ذیل کے ہر ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن اور فرق مشترک معلوم کیجیے؟

(i)  $3, 1, -1, -3, \dots$

(ii)  $-5, -1, 3, 7, \dots$

(iii)  $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \dots$

(iv)  $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \dots$

4- حسب ذیل میں کون سے سلسلے حسابی تصاعد میں ہیں؟ اگر یہ حسابی تصاعد میں ہوں تب فرق مشترک (d) معلوم کیجیے اور سلسلے کے اگلے 3 ارکان لکھئے۔

(i)  $2, 4, 8, 16, \dots$

(ii)  $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$

(iii)  $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \dots$

(iv)  $-10, -6, -2, 2, \dots$

(v)  $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \dots$

(vi)  $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \dots$

(vii)  $0, -4, -8, -12, \dots$

(viii)  $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$

(ix)  $1, 3, 9, 27, \dots$

(x)  $a, 2a, 3a, 4a, \dots$

(xi)  $a, a^2, a^3, a^4, \dots$

(xii)  $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \dots$

(xiii)  $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \dots$

### 6.3 حسابی تصاعد کا $n$ واں رکن

6.1 کے تحت مثال کو لیتے ہیں۔ اکرم نے ملازمت کے لیے درخواست دی۔ وہ ماہانہ 8000 ` تنخواہ اور سالانہ 500 ` تدریجی اضافہ

کے ساتھ تقرر پاتا ہے۔ تب بتائیے کہ تقرر کے 5 سال بعد اس کی تنخواہ کیا ہوگی؟

اس سوال کے حل سے پہلے ہم تقرر کے 2 سال بعد اس کی تنخواہ معلوم کرتے ہیں۔

$$8500 = (8000 + 500) \text{ ` تنخواہ ہوگی۔}$$

ٹھیک اسی طرح تیسرے چوتھے اور پانچویں سال محصلہ تنخواہ میں 500 ` اضافہ یا زیادتی کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں

$$\text{لہذا تیسرے سال اکرم کی تنخواہ} = (8500 + 500) \text{ `}$$

$$= (8000 + 500 + 500) \text{ `}$$

$$= (8000 + 2 \times 500) \text{ `}$$

$$= (8500 + (3-1) \times 500) \text{ (تیسرے سال پر)}$$

$$= 9000 \text{ `}$$

$$\text{چوتھے سال پر تنخواہ} = (9000 + 500) \text{ `}$$

$$= (8000 + 500 + 500 + 500) \text{ `}$$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2019-20



$$= \text{` } (8000 + 3 \times 500)$$

$$= \text{` } [8000 + (4 - 1) \times 500] \text{ (چوتھے سال پر)}$$

$$= \text{` } 9500$$

$$\text{پانچویں سال پر تنخواہ} = \text{` } (9500 + 500)$$

$$= \text{` } (8000 + 500 + 500 + 500 + 500)$$

$$= \text{` } (8000 + 4 \times 500)$$

$$= \text{` } [8000 + (5 - 1) \times 500] \text{ (پانچویں سال پر)}$$

$$= \text{` } 10000$$

مذکورہ بالا اعداد کی فہرست سے ہم ایک ترتیب کا مشاہدہ کرتے ہیں جو اس طرح ہے۔

$$8000, 8500, 9000, 9500, 10000, \dots$$

یہ اعداد کا سلسلہ حسابی تصاعد میں ہے۔

مذکورہ بالا ترتیب کی بنیاد پر کیا ہم چھٹویں (6 ویں) اور 15 ویں سال پر ماہانہ تنخواہ معلوم کر سکتے ہیں؟ اگر وہ 25 سال تک برسر خدمت مان لیا جائے تب 25 ویں سال پر تنخواہ کیا ہوگی؟ یہاں پر ہم گزشتہ ماہ کی تنخواہ میں 500 جمع کرنے پر موجودہ ماہ کی تنخواہ معلوم کر سکتے ہیں۔ کیا ہم اس طریقے کار کو اور بھی مختصر کر سکتے ہیں؟ آئیے دیکھتے ہیں۔ مذکورہ بالا طریقے کار سے ہمیں ماہانہ تنخواہ معلوم کرنے کا اندازہ ہو چکا ہے۔

$$500 + \text{` } 14 \text{ ویں سال پر تنخواہ} = \text{` } 15 \text{ ویں سال پر تنخواہ}$$

$$= \text{` } \left[ 8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \dots + 500}_{13 \text{ مرتبہ}} \right] + \text{` } 500$$

$$= \text{` } [8000 + 14 \times 500]$$

$$= \text{` } [8000 + (15 - 1) \times 500] = \text{` } 15000$$

$$\text{یعنی} = \text{سالانہ تدریجی اضافہ} \times (15 - 1) + \text{پہلی تنخواہ}$$

ٹھیک اسی طرح 25 سال بعد تنخواہ یہ ہوگی۔

$$\text{` } [8000 + (25 - 1) \times 500] = \text{` } 20000$$

$$= \text{سالانہ تدریجی اضافہ} \times (25 - 1) + \text{پہلی تنخواہ}$$

اس مثال کے ذریعہ ہم نے 15 واں رکن یا 25 واں رکن معلوم کرنے کا طریقہ سیکھا ہے۔ اس طریقے کار کو استعمال کرتے ہوئے ایک حسابی

تصاعد کا  $n$  واں رکن معلوم کریں گے۔

مان لیتے ہیں کہ  $a_1, a_2, a_3, \dots$  حسابی تصاعد میں ہیں اس سلسلہ کا پہلا رکن  $(a)$  اور فرق مشترک  $d$  ہے۔

$$a_2 = a + d = a + (2 - 1) d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$a_4 = a_2 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

.....

مذکورہ بالا ترتیب کی بنیاد پر  $n$  واں رکن  $a + (n - 1)d$  کہہ سکتے ہیں۔

یعنی ایک حسابی تصاعد جس کا پہلا رکن  $a$  اور فرق مشترک  $d$  ہو تب  $n$  واں رکن  $a_n = a + (n - 1)d$  ہوگا۔

$a_n$  کو حسابی تصاعد کا عام رکن (General term) بھی کہتے ہیں۔

اگر کسی حسابی تصاعد میں  $m$  ارکان ہوں تب  $a_m$  آخری رکن کو ظاہر کرتا ہے۔ بسا اوقات اس کو  $n$  سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

حسابی تصاعد کے ارکان معلوم کرنا: اوپر کے ضابطے کی مدد سے ہم حسابی تصاعد کے مختلف ارکان کو معلوم کر سکتے ہیں۔

آئیے چند مثالیں دیکھتے ہیں۔

**مثال-3:** حسابی تصاعد کے سلسلہ  $5, 1, -3, -7, \dots$  کا 10 واں رکن معلوم کیجیے۔

**حل:** یہاں  $a = 5$ ،  $d = 1 - 5 = -4$  اور  $n = 10$  ہے

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$a_{10} = 5 + (10 - 1)(-4) = 5 - 36 = -31$$

لہذا دیے گئے حسابی تصاعد کا 10 واں رکن  $-31$  ہے۔

**مثال-4:** حسابی تصاعد  $21, 18, 15, \dots$  کا کون سا رکن  $-81$  ہوگا؟ کیا کوئی رکن  $0$  ہوگا؟

اپنے جواب کی وجوہات بتلائیے۔

**حل:** یہاں  $a = 21$ ،  $d = 18 - 21 = -3$  اور اگر  $a_n = 81$  تب  $n$  کی قدر معلوم کرنی ہوگی۔

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$

$$-81 = 24 - 3n$$

$$-105 = -3n$$

$$\therefore n = 35$$

لہذا حسابی تصاعد کا 35 واں رکن  $-81$  ہوگا۔

علاوہ ازیں  $a_n = 0$  کے لیے  $n$  کی قدر معلوم کرنی ہوگی۔

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

$$3(n - 1) = 21$$

$$n = 8$$

لہذا حسابی تصاعد کا 8 واں رکن  $0$  (صفر) ہوگا۔



**مثال-5:** ایک حسابی تصاعد معلوم کیجیے اگر اس کا تیسرا رکن 5 اور 7 واں رکن 9 ہو۔

**حل:** یہاں

$$a_3 = a + (3 - 1)d = a + 2d = 5 \quad (1)$$

$$\text{اور} \quad a_7 = a + (7 - 1)d = a + 6d = 9 \quad (2)$$

مساوات (1) اور (2) کو حل کرنے پر

$$a = 3, d = 1 \text{ حاصل ہوگا۔}$$

لہذا مطلوبہ حسابی تصاعد کا سلسلہ  $3, 4, 5, 6, 7, \dots$  ہے۔

**مثال-6:** اعداد  $5, 11, 17, 23, \dots$  کی فہرست میں 301 ہوگا یا نہیں؟ جانچ کیجیے۔

**حل:** یہاں

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

چونکہ  $(a_{k+1} - a_k)$  مساوی ہے  $k = 1, 2, 3$  کے لیے۔ لہذا دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد ہے۔

اب اس حسابی تصاعد کے سلسلہ میں  $a = 5$  اور  $d = 6$  ہے۔

ہم فرض کریں گے کہ اس A.P کا  $n$  واں رکن 301 ہے ہمیں یہ دیکھنا ہوگا کہ  $a_n = 301$  کے لیے کیا کوئی  $n$  وجود رکھتا ہے۔

$$a_n = a + (n - 1)d \quad \text{ہم جانتے ہیں}$$

$$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

$$\text{یا } 301 = 6n - 1$$

$$\therefore n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

لیکن "n" مثبت صحیح عدد ہونا چاہیے۔ (کیوں؟)

لہذا 301 دیے گئے اعداد کی فہرست میں نہیں ہے۔

**مثال-7:** 3 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کتنے ہوں گے؟

**حل:** 3 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کی فہرست یہ ہے۔

$$12, 15, 18, \dots, 99$$

کیا یہ حسابی تصاعد ہے؟ ہاں۔ یہاں  $a = 12$  اور  $d = 3$  اور  $a_n = 99$

$$a_n = a + (n - 1)d \quad \text{ہم جانتے ہیں}$$

$$99 = 12 + (n - 1) \times 3$$

$$87 = (n - 1) \times 3$$

$$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

$$n = 29 + 1 = 30$$

لہذا 3 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کی تعداد 30 ہے۔

**مثال-8:** حسابی تصاعد 62, 4, 7, 10 کا آخری سے 11 واں رکن معلوم کیجیے۔

**حل:** یہاں  $a = 10$ ,  $d = 7 - 10 = -3$ ,  $l = 62$

$$l = a + (n - 1)d$$

سلسلے کے آخری سے 11 واں رکن معلوم کرنے سے پہلے ہمیں سلسلے کے تمام ارکان کی تعداد معلوم کرنی ہوگی۔

$$62 = 10 + (n - 1)(-3)$$

$$-72 = (n - 1)(-3)$$

$$n - 1 = 24$$

$$n = 25$$

یعنی حسابی تصاعد کے سلسلہ میں جملہ 25 ارکان ہوتے ہیں۔

آخر سے 11 واں رکن کا مطلب شروعات سے سلسلے کا 15 واں رکن ہوگا (یاد رکھیے کہ یہ 14 واں رکن نہیں ہوگا۔ کیوں؟)

$$\therefore a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$$

لہذا سلسلے کے آخر سے 11 واں رکن -32 ہوگا۔

**نوٹ:** آخر سے 11 واں رکن ابتداء سے بھی 11 واں رکن ہوگا جس کا پہلا رکن 62۔ اور فرق مشترک 3 ہو۔

**مثال-9:** سالانہ 8% شرح سود سے 1000 سرمایہ کے لیے سالانہ سود مفرد محسوب کیجیے؟ کیا یہ سود حسابی تصاعد میں ہے؟ اگر یہ حسابی

تصاعد میں ہو تب 30 سال کے اختتام پر سود معلوم کیجیے۔

**حل:** ہم جانتے ہیں کہ سود مفرد معلوم کرنے کا ضابطہ یہ ہے۔

$$\text{سود مفرد} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

$$\text{لہذا پہلے سال کے اختتام پر سود} = \frac{1000 \times 8 \times 1}{100} = 80$$

$$\text{دوسرے سال کے اختتام پر سود} = \frac{1000 \times 8 \times 2}{100} = 160$$

$$= \frac{1000 \times 8 \times 3}{100} = 240$$

اسی طرح چوتھے پانچویں۔۔۔۔ سال کے اختتام پر سود محسوب کیا جاسکتا ہے۔ یعنی پہلے دوسرے تیسرے۔۔۔۔ سال کے اختتام پر سود (روپیوں میں) ترتیب وار 80, 160, 240, ...

اوپر کے اعداد کی فہرست حسابی تصاعد کو ظاہر کرتی ہے کیونکہ متواتر اعداد کا فرق مشترک 80 ہے۔  
یہاں  $a = 80$  اور  $d = 80$

لہذا 30 سال کے اختتام پر سود معلوم کرنے کے لیے ہمیں  $a_{30}$  کی قدر معلوم کرنی ہوگی۔

$$\therefore a_{30} = a + (30 - 1)d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

30 سال کے اختتام پر سود کی رقم 2400 ہوگی۔

**مثال-10:** ایک پھولوں کی کیاری کی پہلی قطار میں 23 گلاب کے پودے دوسری قطار میں 21 تیسری قطار میں 19 وغیرہ ہیں۔ آخری قطار

میں 5 گلاب کے پودے ہیں تو بتائیے کہ پھولوں کی کیاری میں جملہ کتنی قطاریں ہیں۔

**حل:** پہلی دوسری تیسری..... قطار میں گلاب کے پودوں کی تعداد ترتیب وار

$$23, 21, 19, \dots, 5$$

یہ ایک حسابی تصاعد ہے (کیوں؟)

فرض کیجیے کہ کیاری میں جملہ قطاروں کی تعداد 'n' ہے

$$تب \quad a = 23, \quad d = 21 - 23 = -2 \quad اور \quad a_n = 5$$

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$5 = 23 + (n - 1)(-2)$$

$$-18 = (n - 1)(-2)$$

$$n = 10$$

لہذا پھولوں کی کیاری میں قطاروں کی تعداد 10 ہے۔

## مشق 6.2

ایک حسابی تصاعد میں پہلا رکن 'a'، فرق مشترک 'd' اور n واں رکن  $a_n$  ہو تو تب ذیل کی جدول کو مکمل کیجیے۔

S. No.	a	d	n	$a_n$
(i)	7	3	8	...
(ii)	-18	...	10	0

(iii)	...	-3	18	-5
(iv)	-18.9	2.5	...	3.6
(v)	3.5	0	105	...

(2) محسوب کیجیے۔

(i) حسابی تصاعد ..... 10, 7, 4 کا 30 واں رکن

(ii) حسابی تصاعد .....  $2, \frac{-1}{2}, -3$  کا 11 واں رکن

(3) حسب ذیل حسابی تصاعد متعلقہ رکن معلوم کیجیے۔

(i) اگر  $a_1 = 2$ ،  $a_3 = 26$ ،  $a_2$  معلوم کیجیے۔(ii) اگر  $a_2 = 13$ ،  $a_4 = 3$ ،  $a_1$ ،  $a_3$  معلوم کیجیے۔(iii) اگر  $a_1 = 5$ ،  $a_4 = 9\frac{1}{2}$ ،  $a_2$ ،  $a_3$  معلوم کیجیے۔(iv) اگر  $a_1 = -4$ ،  $a_6 = 6$ ،  $a_2$ ،  $a_3$ ،  $a_4$ ،  $a_5$  معلوم کیجیے۔(v) اگر  $a_2 = 38$ ،  $a_6 = -22$ ،  $a_1$ ،  $a_3$ ،  $a_4$ ،  $a_5$  معلوم کیجیے۔

(4) حسابی تصاعد ... 3, 8, 13, 18, ... کا کون سا رکن 78 ہوگا؟

(5) ذیل کے حسابی تصاعد میں ارکان کی تعداد معلوم کیجیے۔

(i) 7, 13, 19, ..., 205 (ii)  $18, 15\frac{1}{2}, 13, \dots, -47$ 

(6) حسابی تصاعد ... 2, 5, 8, 11 میں کیا 150 تصاعد کا رکن ہوگا؟ جانچ کیجیے؟

(7) اگر ایک حسابی تصاعد کا 11 واں رکن 38 اور 16 واں رکن 73 ہو تب 31 واں رکن معلوم کیجیے۔

(8) اگر ایک حسابی تصاعد کا تیسرا 9 واں رکن ترتیب وار 4 اور 8- ہو تب بتلائیے کہ اس کا کون سا رکن صفر (0) ہوگا۔

(9) اگر ایک حسابی تصاعد کا 17 واں رکن 10 ویں رکن سے 7 زیادہ ہے تب فرق مشترک معلوم کیجیے۔

(10) دو حسابی تصاعد کا مشترک فرق مساوی ہے۔ اگر 100 ویں رکن کا فرق 100 ہو تب 1000 ویں رکن کا فرق مشترک کیا ہوگا؟

(11) 7 سے تقسیم پذیر تین ہندسی اعداد کتنے ہوں گے؟

(12) 10 اور 250 کے درمیان 4 کے اضعاف کتنے معلوم کیجیے۔

(13) اگر دو حسابی تصاعد ... 63, 65, 67, ... اور 3, 10, 17, ... کا n واں رکن مساوی ہے تب 'n' کی قدر معلوم کیجیے۔

(14) ایک ایسا حسابی تصاعد معلوم کیجیے جس کا تیسرا رکن 16 ہو۔ جبکہ اس کا 7 واں رکن 5 ویں رکن سے 12 زیادہ ہو۔

(15) حسابی تصاعد 3, 8, 13, ..., 253 کا آخر سے 20 واں رکن معلوم کیجیے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2019-20



16) ایک حسابی تصاعد کے چوتھے اور 8 ویں رکن کا مجموعہ 24 ہے اور 6 ویں اور 10 ویں رکن کا مجموعہ 44 ہو تو تصاعد کے پہلے تین ارکان معلوم کیجیے۔

17) ارشد 1995ء میں ملازمت سے جڑ گیا جس وقت اس کی سالانہ تنخواہ 5000 تھی۔ اگر سالانہ 200 کے حساب سے تنخواہ میں اضافہ ہو تب کس سال ارشد کی تنخواہ 7000 ہوگی۔

### 6.4 حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کا مجموعہ

تمہید کے تحت 6.1 میں دی گئی صورت کا دوبارہ مشاہدہ کرتے ہیں۔ آفرین اپنی بیٹی کی پہلی سالگرہ پر 1000، دوسری سالگرہ پر 1500، تیسری سالگرہ پر 2000،۔۔۔ ایک بکسے میں جمع کرتی ہے تو بتائیے کہ 21 ویں سالگرہ پر آفرین کی بیٹی کی جمع شدہ رقم کتنی ہوگی؟



یہاں پہلی، دوسری، تیسری۔۔۔ سالگرہ پر بکسے میں جمع کی گئی رقم بالترتیب 1000، 1500، 2000،۔۔۔ ہے اس طرح یہ سلسلہ 21 ویں سالگرہ تک چلتا رہا۔ 21 ویں سالگرہ کے موقع پر بکسے میں جمع شدہ رقم کو محسوب کرنا ہو تو اوپر کی فہرست میں 21 دفعہ ارکان ترتیب وار/سلسلہ وار لکھ کر ان تمام کا مجموعہ معلوم کرنا ہوگا۔

اس طرح کے عمل سے نہ صرف وقت ضائع ہوتا ہے بلکہ کچھ حد تک یہ کام مشکل بھی ہے کیا ہم اختصاری طریقے سے اسکو حل کر سکتے ہیں۔

### 6.4.1 کس طرح گاس (Gauss) نے ارکان کا مجموعہ محسوب کیا۔

معروف جرمن ریاضی داں گاس نے 10 سال کی عمر میں جس مسئلہ کو حل کیا ہے اس پر ہم بھی غور کریں گے۔ 10 سال کی عمر میں جب اس سے پوچھا گیا کہ ”1 تا 100 مثبت اعداد کا مجموعہ کیا ہوگا؟ تب اس نے جواب دیا کہ 5050 ہوگا۔



Carl Friedrich Gauss

مشہور (1777-1855)

جرمن ریاضی داں

کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ اس نے کس طرح حل کر کے جواب دیا ہوگا؟

اس نے مسئلہ کے حل کو اس طرح لکھا

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$

اس نے اعداد کی ترتیب کو ذیل کی طرح لکھا

$$S = 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1$$

اس نے ان دونوں سلسلہ کو یوں جمع کیا

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \dots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$(100 مرتبہ) = 101 + 101 + \dots + 101 + 101 \text{ (تصدیق کیجیے اور مباحثہ کیجیے)}$$

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

$$\therefore \text{مجموعہ} = 5050$$

## 6.4.2 حسابی تصاعد کے n ارکان کا مجموعہ

ہم بھی  $a, a + d, a + 2d, \dots$  سلسلے کے n ارکان کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے اسی طریقہ کار کو اپنائیں گے۔

حسابی تصاعد کا n واں رکن  $a + (n - 1)d$  ہے

اوپر کے سلسلے میں پہلے n ارکان کے مجموعہ کو  $S_n$  مان لینے پر

$$\therefore S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + a + (n - 1)d$$

ترتیب بدل کر لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$S_n = (a + (n - 1)d) + (a + (n - 2)d) + \dots + a$$

ارکان کو ترتیب وار جمع کرنے پر

$$(n \text{ مرتبہ}) [(2a + (n - 1)d) + (2a + (n - 1)d) + \dots + (2a + (n - 1)d)]$$

$$n = [2a + (n - 1)d]$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}[a + \text{پہلا رکن} + n \text{ واں رکن}] = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

اگر ایک حسابی تصاعد کا صرف پہلا رکن اور آخری رکن دیا جائے اور فرق مشترک معلوم نہ ہو تب

ضابطے  $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$  یا  $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$  جہاں  $l$  آخری رکن ہے کی مدد سے  $S_n$  کو آسانی سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

## آفرین کی بیٹی کی رقم

اب ہم تمہید کے تحت 6.1 میں دی گئی مثال (c) پر دوبارہ غور کریں۔ آفرین کی بیٹی کی پہلی دوسری تیسری چوتھی۔۔۔۔۔ سالگرہ پر بکسے

میں رکھی گئی رقم ترتیب وار  $1000, 1500, 2000, 2500, \dots$  یعنی حسابی تصاعد کے پہلے 21 ارکان کا مجموعہ

$$\text{یہاں } a = 1000, d = 500 \text{ اور } n = 21$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d], \text{ ضابطے کی مدد سے}$$

$$S_n = \frac{21}{2}[2 \times 1000 + (21 - 1) \times 500]$$

$$= \frac{21}{2}[2000 + 10000]$$

$$= \frac{21}{2} [12000] = 126000$$

21 ویں سالگرہ کے بعد بکسے میں جمع شدہ رقم = 1,26,000

ہم S کی جگہ S<sub>n</sub> استعمال کریں گے تاکہ پتہ چلے کہ کتنے ارکان کا مجموعہ معلوم کیا جا رہا ہے۔ پہلے 20 ارکان کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے S<sub>20</sub> سے ظاہر کریں گے۔ حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے استعمال ہونے والے ضابطے میں چار متغیرات ہیں۔ وہ 'a'، 'd' اور n ہیں ان میں سے اگر تین متغیرات کی قدر معلوم ہو تب ہم چوتھی قدر معلوم کر سکتے ہیں۔

**ہدایت:** ایک حسابی تصاعد میں پہلے n ارکان کے مجموعے سے پہلے (n-1) ارکان کے مجموعے کو تفریق پر اس سلسلہ کا n واں رکن حاصل ہوگا۔

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{یعنی}$$

یہ کیجیے



حسب ذیل حسابی تصاعد میں ظاہر کیے گئے ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

(i) 16, 11, 6 .....; 23 ارکان تک

(ii) -0.5, -1.0, -1.5, .....; 10 ارکان تک

(iii)  $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \dots$ ; 10 ارکان تک

آئیے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

**مثال-11:** اگر ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن 10 اور 14 ارکان کا مجموعہ 1050 ہو تب 20 واں رکن معلوم کیجیے۔

**حل:** یہاں  $S_n = 1050$  اور  $n=14$  اور  $a=10$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2} [2a + 13d] = 140 + 91d$$

$$910 = 91d$$

$$d = 10$$

$$a_{20} = 10 + (20-1)10 = 200$$

**مثال-12:** 24, 21, 18, ... حسابی تصاعد کے کتنے ارکان کا مجموعہ 78 ہوگا؟

**حل:** یہاں  $a = 24$  اور  $d = 21 - 24 = -3$  اور  $S_n = 78$ ۔ ہم کو 'n' کی قدر معلوم کرنی ہوگی۔

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \quad \text{ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$78 = \frac{n}{2} [48 + (n-1)(-3)] = \frac{n}{2} [51 - 3n]$$

$$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

$$n^2 - 17n + 52 = 0$$

$$(n - 4)(n - 13) = 0$$

$$n = 4 \text{ یا } 13$$

'n' کی دونوں قدریں قابل قبول ہیں یعنی دونوں کو شمار کیا جائے گا۔ لہذا ارکان کی تعداد 4 یا 13 ہوگی۔

تبصرہ

$$-1 \text{ یہاں پر 4 ارکان کا مجموعہ } = 13 \text{ ارکان کا مجموعہ } = 78$$

-2 اس سلسلے میں 5 ویں رکن سے 13 ویں رکن کا مجموعہ صفر (0) ہوگا۔ کیونکہ 'a' کی قدر مثبت ہے جبکہ فرق مشترک (d) منفی میں ہے۔

اس لیے چند ارکان مثبت اور چند ارکان منفی ہوں گے جس کے نتیجے میں مثبت و منفی ارکان ایک دوسرے کی تعدیل کرتے ہیں اور

صفر حاصل ہوتا ہے۔

**مثال-13:** حسب ذیل کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

(i) پہلے 1000 طبعی اعداد (ii) پہلے n طبعی اعداد

**حل:** (i) فرض کیجیے کہ  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l) \text{ سے ضابطے کی مدد سے}$$

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

لہذا پہلے 1000 طبعی اعداد کا مجموعہ 500500

(ii) فرض کیجیے کہ  $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

یہاں  $a=1$  اور آخری رکن  $n=l$

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2} \text{ یا } S_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ہوگا۔}$$

**مثال-14:** پہلے 24 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے جبکہ سلسلہ کا n واں رکن  $a_n = 3 + 2n$  دیا گیا ہے۔

$$a_n = 3 + 2n \text{ : حل}$$

$$a_1 = 3 + 2 = 5$$

$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$

$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$$

.....

اس طرح اعداد کی فہرست  $5, 7, 9, 11, \dots$

یہاں  $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$

لہذا یہ ایک حسابی تصاعد ہے کیونکہ اس کا فرق مشترک  $d=2$  ہے۔

$S_{24}$  معلوم کرنے کے لیے  $a = 5$ ،  $n = 24$  اور  $d = 2$  لیا جائے۔

$$\therefore S_{24} = \frac{24}{2} [2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12(10 + 46) = 672$$

لہذا پہلے 24 ارکان کا مجموعہ 672 ہے۔

**مثال-15:** ایک ٹیلی ویژن تیار کرنے والی کمپنی نے تیسرے سال میں 600 ٹیلی ویژن کے سیٹس اور 7 ویں سال میں 700 سیٹس تیار کیے۔

مان لیجیے کہ ہر سال ٹیلی ویژن کی تعداد میں ایک متعین عدد کا اضافہ ہوتا ہے

(i) پہلے سال میں تیار کیے گئے ٹیلی ویژن سیٹس (ii) 10 ویں سال میں تیار کیے گئے ٹیلی ویژن سیٹس

(iii) پہلے 7 سال میں تیار کیے گئے تمام سیٹس کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

**حل:** (i) چونکہ ہر سال تیار کیے جانے والے ٹیلی ویژن سیٹس کی تعداد میں ایک مستقل مقدار (متعین عدد) میں اضافہ ہو رہا ہے۔ اس لیے

پہلے دوسرے تیسرے۔۔۔ سال ٹیلی ویژن سیٹس کی تعداد ایک حسابی تصاعد بناتی ہے۔

فرض کیجیے کہ  $n$  ویں سال میں تیار کیے گئے ٹیلی ویژن سیٹس کی تعداد  $a_n$  ہے

$$تب \quad a_3 = 600 \quad اور \quad a_7 = 700$$

$$a + 2d = 600 \quad (1)$$

$$اور \quad a + 6d = 700 \quad (2)$$

مذکورہ بالا مساواتوں کو حل کرنے پر  $d=25$  اور  $a = 550$  حاصل ہوگا۔

لہذا پہلے سال تیار کیے گئے ٹیلی ویژن سیٹس کی تعداد 550 ہوگی۔

$$(ii) \quad اب \quad a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$$

یعنی 10 ویں سال تیار کیے گئے ٹیلی ویژن سیٹس کی تعداد 775 ہوگی۔

$$S_7 = \frac{7}{2} [2 \times 550 + (7 - 1) \times 25] \quad (iii)$$

$$= \frac{7}{2} [1100 + 150] = 4375$$

پہلے 7 سال تیار کیے گئے تمام سیٹس کا مجموعہ 4375 ہوگا۔



## مشق 6.3

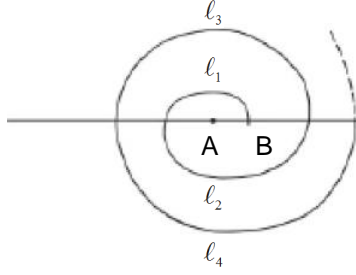


- 1- حسب ذیل حسابی تصاعد میں ظاہر کیے گئے ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔
- (i) 10 ارکان تک، 2, 7, 12, . . . , (ii) 12 ارکان تک، -37, -33, -29, . . . ,
- (iii) 100 ارکان تک، 0.6, 1.7, 2.8, . . . , (iv) 11 ارکان تک،  $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \dots$
- 2- ذیل کے سوالات حل کیجیے
- (i)  $7+10\frac{1}{2}+14+\dots+84$  (ii)  $34+32+30+\dots+10$  (iii)  $-5+(-8)+(-11)+\dots+(-230)$
- 3- حسابی تصاعد (AP) میں دیا گیا ہے۔
- (i)  $d=3, a=5$  اور  $a_n=50$  ہو تب  $n$  اور  $S_n$  کی قدر معلوم کیجیے۔
- (ii)  $a=7, a_{13}=35$  ہو تب  $d$  اور  $S_{13}$  کی قدر معلوم کیجیے۔
- (iii)  $a_{12}=37$  اور  $d=3$  ہو تب  $a$  اور  $S_{12}$  کی قدر معلوم کیجیے۔
- (iv)  $a_3=15$  اور  $S_{10}=125$  ہو تب  $d$  اور  $a_{10}$  کی قدر معلوم کیجیے۔
- (v)  $a=2, d=8$  اور  $S_n=90$  ہو تب  $n$  اور  $a_n$  کی قدر معلوم کیجیے۔
- (vi)  $a_n=4, d=2$  اور  $S_n=-14$  ہو تب  $n$  اور  $a$  کی قدر معلوم کیجیے۔
- (vii)  $S=144, l=28$  اور ارکان 9 ہوں تب  $a$  کی قدر معلوم کیجیے۔
- 4- ایک حسابی تصاعد کا پہلا اور آخری رکن بالترتیب 17 اور 350 ہے۔ اگر فرق مشترک 9 ہو تب ارکان کی تعداد اور ارکان کا مجموعہ کو معلوم کیجیے۔
- 5- ایک حسابی تصاعد کا دوسرا اور تیسرا رکن بالترتیب 14 اور 18 ہے تب 51 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔
- 6- ایک حسابی تصاعد کے پہلے 17 ارکان کا مجموعہ 49 اور 17 ارکان کا مجموعہ 289 ہے تب پہلے  $n$  ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔
- 7- بتلائیے کہ  $a_1, a_2, \dots, a_n$  حسابی تصاعد ہے جہاں پر  $a_n$  کی تعریف اس طرح ہے۔
- (i)  $a_n = 3 + 4n$  (ii)  $a_n = 9 - 5n$
- علاوہ ازیں ہر صورت میں پہلے 15 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔
- 8- ایک حسابی تصاعد کے  $n$  ارکان کا مجموعہ  $4n - n^2$  ہے تب پہلا رکن کیا ہوگا۔ یاد رکھئے کہ  $S_1$  کی قدر ہی پہلا رکن ہے پہلے دو ارکان کا مجموعہ کیا ہوگا؟ دوسرا رکن کیا ہوگا؟ اسی طرح تیسرا 10 واں اور  $n$  واں رکن معلوم کیجیے
- 9- 6 سے تقسیم پذیر پہلے 40 مثبت اعداد کا مجموعہ معلوم کیجیے۔
- 10- ایک اسکول کے مضمون واری امتحان میں بہترین مظاہرہ کرنے والوں کو جملہ منظور شدہ رقم 700 روپیوں سے 7 انعامات دینا طے پایا۔ اگر ہر انعام کی قیمت اس سے پہلے انعام کی قیمت سے 20 کم ہو تب ہر انعام کی قیمت معلوم کیجیے۔



11- ایک اسکول کے احاطہ میں ماحول کے تحفظ کے تحت طلباء کا پودے لگانا پیمانہ کیا جاسکے۔ ہر سیکشن سے طلباء کی تعداد کی مناسبت سے مساوی پودے لگانے پایا۔ جماعت اول کے ایک سیکشن کے طلباء 1 پودا، جماعت دوم کے سیکشن کے طلباء 2 پودے لگائیں گے۔ اس طرح 12 ویں جماعت تک پودے لگانا قرار پایا۔ اگر ہر جماعت میں 3 سیکشن ہوں تب لگائے گئے پودوں کی تعداد معلوم کیجیے؟

12- متواتر نیم دائروں کی مدد سے ایک پیچ دار (Spiral) تیار کیا گیا۔ نیم دائروں کے مراکز A سے شروع ہو کر A، B میں تبدیل ہوتے گئے



(جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے)۔ یعنی پہلے نیم دائرہ کا مرکز A، دوسرے نیم دائرہ کا مرکز B، تیسرے نیم دائرے کا مرکز A، اور چوتھے نیم دائرے کا نصف قطر بالترتیب 0.5 سم، 1.0 سم، 1.5 سم، 2.0 سم۔۔۔ اس طرح جملہ 13 نیم دائرے ہوں گے تب پیچ دار (Spiral) کا طول معلوم کیجیے۔ ( $\pi = \frac{22}{7}$  لیجیے)

[اشارہ: متواتر نیم دائروں کے طول  $l_1, l_2, l_3, l_4, \dots$  اور متعلقہ مراکز بالترتیب A, B, A, B, ... ہیں]

13- 200 لکڑی کے کندوں کو ذیل کی ترتیب کے مطابق رکھا گیا۔ سب سے آخری (خچی) قطار میں 20 لکڑی کے کندے ہیں۔ اس پر 19 کندوں کو پھر اس پر 18 کندے۔۔۔ ترتیب دیے گئے۔ جملہ 200 کندوں کو اس طریقے سے ترتیب دینے کے لیے کتنی قطاریں درکار ہوں گی؟ اور سب سے اوپری قطار میں کتنے کندے ہوں گے معلوم کیجیے؟



14- گیند اور بالٹی کھیل میں، کھیل کے ابتداء میں ایک بالٹی جس کی 5 میٹر دوری پر ایک گیند رکھی گئی۔ اور دیگر گیندیں ایک خط مستقیم پر پہلی گیند سے 3 میٹر فاصلے پر رکھی گئیں (جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے) ایک خط مستقیم پر جملہ 10 گیند ہیں۔



ایک کھلاڑی ابتدائی بالٹی کے مقام سے کھیل شروع کرتا ہے۔ بالٹی سے قریب تر رکھی ہوئی گیند کو اٹھا کر واپس دوڑتا ہوا گیند کو بالٹی میں ڈالتا ہے۔ دوبارہ دوسری گیند کی طرف دوڑتا ہے اور اس گیند کو بھی بالٹی میں ڈالتا ہے۔ اس طرح اس کھیل کو جاری رکھتا ہے تب تک کہ تمام گیند بالٹی میں نہ ڈال دی جائیں۔ کھیل کی تکمیل پر کھلاڑی کا طے کردہ فاصلہ کیا ہوگا؟

[اشارہ: پہلی اور دوسری گیند لے کر آنے کے لیے کھلاڑی کا طے کردہ فاصلہ (میٹر میں)  $(2 \times 5 + 2 \times (5 + 3))$  ہوگا۔

## 6.5 جیومیٹریہ تصاعد (Geometric Progression)

ذیل کے اعداد کی فہرست یا سلسلے کا مشاہدہ کیجیے۔

(i) 30, 90, 270, 810 ..... (ii)  $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \dots$

(iii) 30, 24, 19.2, 15.36, 12.288

کیا ہم فہرست یا سلسلے کا اگلا رکن لکھ سکتے ہیں؟

- (i) کا ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اس کے پیش رو رکن 3 سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔  
(ii) کا ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اس کے پیش رو عدد کو  $\frac{1}{4}$  سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔  
(iii) کا ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اس کے پیش رو عدد کو 0.8 سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔  
اوپر کی ہر فہرست میں ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اس کے پیش رو عدد کو ایک متعین یا مستقل عدد سے ضرب دینے پر حاصل ہو رہا ہے۔  
اس طرح کے اعداد کی فہرست یا سلسلے کو جیومیٹریہ تصاعد کہتے ہیں۔ اس متعین یا مستقل عدد کو مشترک نسبت 'r' کہتے ہیں۔ یعنی مذکورہ بالا مثالیں (i)، (ii) اور (iii) میں مشترک نسبت بالترتیب  $\frac{1}{4}$ ، 3 اور 0.8 ہے۔

فرض کرو کہ جیومیٹریہ تصاعد کے پہلے رکن کو 'a' اور مشترک نسبت کو 'r' ظاہر کیا گیا ہے، دوسرے رکن کو حاصل کرنے کے لیے جیومیٹریہ تصاعد کے اصول کے مطابق پہلے رکن 'a' کو مشترک نسبت 'r' سے ضرب دینا ہوگا۔

$$\therefore \text{دوسرا رکن} = ar$$

$$\text{اسی طرح تیسرا رکن} = ar \cdot r = ar^2$$

لہذا  $a, ar, ar^2, \dots$  جیومیٹریہ تصاعد کی عام شکل ہے۔

اوپر دیے گئے جیومیٹریہ تصاعد میں کسی بھی رکن (سوائے پہلے رکن کے) اور اس کے پیش رو رکن کی نسبت 'r' ہے۔

$$\text{یعنی } \frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = \dots = r$$

اگر ہم ایک جیومیٹریہ تصاعد کے پہلے رکن کو  $a_1$ ، دوسرے رکن کو  $a_2$ ، ---، n ویں رکن کو  $a_n$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\text{تب } \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

لہذا  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  جیومیٹریہ تصاعد کہلائے گا اگر ہر رکن غیر صفر ہو اور

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

جہاں پر 'n' ایک طبعی عدد ہے اور  $n \geq 2$

یہ کیجیے



حسب ذیل میں کون سے جیومیٹری تصاعد میں نہیں ہیں معلوم کیجیے۔

1. 6, 12, 24, 48, .....

2. 1, 4, 9, 16, .....

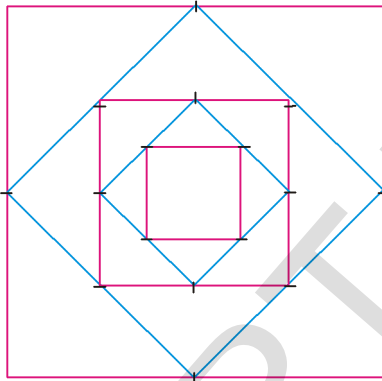
3. 1, -1, 1, -1, .....

4. -4, -20, -100, -500, .....

جیومیٹری تصاعد کی مزید مثالیں:

(i) ایک فرد اپنے چار دوستوں کو خط لکھتا ہے اور ہر دوست سے یہ کہتا ہے کہ وہ اس خط کی نقل اتار کر مزید 4 افراد تک پہنچائے اور یہی اصول یا ہدایت کو اپناتے ہوئے اس سلسلے کو برقرار رکھے۔ اگر مان لیا جائے کہ یہ سلسلہ اسی طرح برقرار رہا تب پہلے دوسرے تیسرے چوتھے۔۔۔ سلسلہ میں خطوط کی تعداد بالترتیب ..... 1, 4, 16, 256 ہیں

(ii) سالانہ 10% شرح سود مرکب کے حساب سے 500 رقم کو ایک بنک میں جمع کیا گیا جمع کی گئی رقم پہلے دوسرے تیسرے۔۔۔ سال کے اختتام پر روپیوں ترتیب وار ..... 550, 605, 665.5 ہے



(iii) متصلہ شکل میں دیئے گئے طریقے پر پہلے مربع کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے پر دوسرا مربع حاصل ہوا۔ دوسرے مربع کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے پر تیسرا مربع حاصل ہوا۔ اسی طرح لامتناہی سلسلہ دہرایا گیا۔ اگر پہلے مربع کے ضلع کا طول 16 سمر ہو تب پہلے دوسرے تیسرے چوتھے۔۔۔ مربعوں کا رقبہ بالترتیب

..... 256, 128, 64, 32, ہوں گے



(iv) ایک گھڑی کے رقاص کے پہلے اہتزاز پر بننے والے قوس کا طول 18 سمر ہے۔

اس کے بعد ہر اہتزاز پر بننے والے قوس کا طول اس کے پیش رو اہتزاز کی حرکت سے بننے والے قوس کے طول کا 0.9 گنا ہے۔

تب پہلے دوسرے تیسرے چوتھے۔۔۔۔۔ اہتزاز پر بننے والے قوس کا طول بالترتیب

..... 18, 16.2, 14.58, 13.122

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



1. کیا مذکورہ بالا کی فہرست / سلسلہ جیومیٹری تصاعد میں کیوں ہوگا وضاحت کیجیے۔

2. جیومیٹری تصاعد کے ہونے کے لیے ضروری اصول / نکات کیا ہونے چاہئیں۔

آئیے اب معلوم کریں گے کہ کس طرح جیومیٹریہ تصاعد (G.P) تشکیل پاتا ہے جبکہ اس کا پہلا رکن 'a' اور مشترک نسبت 'r' دیا گیا ہے۔ اور یہ بھی سیکھیں گے کہ دیے گئے اعداد کی فہرست کیا جیومیٹریہ تصاعد میں ہے یا نہیں اس کا فیصلہ کیسے کریں گے۔

**مثال-16:** اگر پہلا رکن  $a=3$  اور مشترک نسبت  $r=2$  ہے تب جیومیٹریہ تصاعد لکھئے؟

**حل:** چونکہ پہلا رکن 'a' ہے اس لیے اسکو با آسانی لکھا جاسکتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ جیومیٹریہ تصاعد کا رکن اس کے پیش رکن کو مشترک نسبت (r) سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے یعنی دوسرے رکن کو حاصل کرنے کے لیے ہمیں پہلے رکن  $a=3$  کو مشترک نسبت  $r=2$  سے ضرب دینا ہوگا۔

$$\text{دوسرا رکن} = ar = 3 \times 2 = 6$$

$$\text{مشترک نسبت} \times \text{دوسرا رکن} = \text{اسی طرح تیسرا رکن}$$

$$= 6 \times 2 = 12$$

اسی عمل کو دہرانے پر حاصل ہونے والا جیومیٹریہ تصاعد  $3, 6, 12, 24, \dots$

**مثال-17:** اگر  $a=256$  اور  $r=\frac{-1}{2}$  ہو تب جیومیٹریہ تصاعد لکھئے؟

**حل:** جیومیٹریہ تصاعد کی عام شکل  $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$

$$= 256, 256, \left(\frac{-1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}\right)^2, 256, \left(\frac{-1}{2}\right)^3$$

$$= 256, -128, 64, -32, \dots$$

**مثال-18:** جیومیٹریہ تصاعد  $25, -5, 1, \frac{-1}{5}$  کی مشترک نسبت معلوم کیجئے؟

**حل:** ہم جانتے ہیں کہ اگر جیومیٹریہ تصاعد کا پہلا دوسرا تیسرا۔۔۔ رکن بالترتیب  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ہو تب مشترک نسبت

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots$$

$$\text{یہاں } a_3 = \frac{-1}{5} \text{ اور } a_2 = -5, a_1 = 25$$

$$\text{اس لیے مشترک نسبت } r = \frac{-5}{25} = \frac{1}{-5} = \frac{-1}{5}$$

**مثال-19:** حسب ذیل اعداد کی فہرست میں کونسے جیومیٹریہ تصاعد میں ہے؟

(i) 3, 6, 12, .....

(ii) 64, -32, 16,

(iii)  $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \dots$

حل: (i) ہم جانتے ہیں کہ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  اس وقت جیومیٹرک تصاعد میں ہوں گے جب کہ اس کا ہر رکن غیر صفر ہو اور

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

یہاں پر تمام ارکان غیر صفر ہیں علاوہ ازیں

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{اور } \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 2$$

لہذا دیئے گئے اعداد کی فہرست جیومیٹرک تصاعد میں ہے اس کی مشترک نسبت 2 ہے۔

(ii) تمام ارکان غیر صفر ہیں۔

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{16}{-32} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = -\frac{1}{2}$$

لہذا دیئے گئے اعداد کی فہرست جیومیٹرک تصاعد میں ہے۔ اس کی مشترک نسبت  $-\frac{1}{2}$  ہے

(iii) تمام ارکان غیر صفر ہیں۔

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{64}} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{32}} = 4$$

$$\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2} \text{ یہاں}$$

لہذا دیئے گئے اعداد کی فہرست جیومیٹرک تصاعد میں نہیں ہے۔

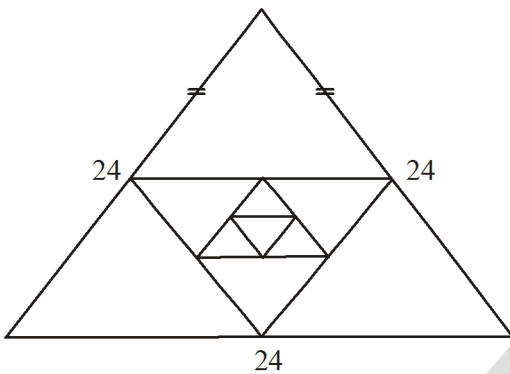


## مشق 6.4



1- حسب ذیل کی صورت میں اعداد کی فہرست جیومیٹریہ تصاعد میں ہوگی؟

- (i) شرمیلا کی پہلے سال کی تنخواہ 5,00,000 ہے اس کے بعد ہر سال 'تنخواہ کا 10% اضافہ ہوگا۔
- (ii) 30 سیڑھی رکھنے والے ایک پل کے سب سے نچلی سیڑھی کی تعمیر کے لیے 100 اینٹ درکار ہیں۔ ہر اوپری سیڑھی کی تعمیر کے لیے اس کی نچلی سیڑھی کی تعمیر کے لیے درکار اینٹوں سے 2 اینٹیں کم لگتے ہیں۔ تب ہر سیڑھی کے لیے درکار اینٹ کی تعداد کیا ہوگی؟



- (iii) 24 سمر والے مساوی الاضلاع مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے سے دوسرا مثلث اس کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے سے تیسرا مثلث حاصل ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ لامتناہی جاری رہے گا تو ہر مثلث کا احاطہ

2- جیومیٹریہ تصاعد کا پہلا رکن 'a' مشترک نسبت 'r' ذیل میں دی گئی ہے تب اس کے پہلے تین ارکان لکھئے۔

- (i)  $a = 4$ ;  $r = 3$  (ii)  $a = \sqrt{5}$ ;  $r = \frac{1}{5}$
- (iii)  $a = 81$ ;  $r = \frac{-1}{3}$  (iv)  $a = \frac{1}{64}$ ;  $r = 2$

3- حسب ذیل میں کون سے سلسلہ جیومیٹریہ تصاعد میں ہیں؟ اگر یہ جیومیٹریہ تصاعد میں ہیں تو اگلے تین ارکان لکھئے۔

- (i) 4, 8, 16 ..... (ii)  $\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{12}, \dots$
- (iii) 5, 55, 555, ..... (iv) -2, -6, -18, .....
- (v)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$  (vi)  $3, -3^2, 3^3, \dots$
- (vii)  $x, 1, \frac{1}{x}, \dots, (x \neq 0)$  (viii)  $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, 4\sqrt{2}, \dots$
- (ix) 0.4, 0.04, 0.004, .....

4- اگر  $x, x + 2, x + 6$  ایک جیومیٹریہ تصاعد کے تین متواتر ارکان ہوں تو 'x' کی قدر معلوم کیجئے۔



## 6.6 جیومیٹرہ تصاعد کا n واں رکن

آئیے ایک مثال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ ماحول میں بیکٹیریا ہر گھنٹے میں 3 گنا ہوتے ہیں اگر پہلے گھنٹے میں بیکٹیریا کی تعداد 30 ہو تب چوتھے گھنٹے میں بیکٹیریا کی تعداد معلوم کیجیے۔

اس سوال کے حل کے لیے سب سے پہلے ہم دوسرے گھنٹے میں موجود بیکٹیریا کی تعداد معلوم کریں گے۔

چونکہ ہر گھنٹے بیکٹیریا کی تعداد میں 3 گنا اضافہ ہوگا اس لیے

$$\begin{aligned} \text{پہلے گھنٹے میں بیکٹیریا کی تعداد} \times 3 &= \text{دوسرے گھنٹے میں بیکٹیریا کی تعداد} \\ &= 3 \times 30 = 30 \times 3^1 \\ &= 30 \times 3^{(2-1)} \\ &= 90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{دوسرے گھنٹے میں بیکٹیریا کی تعداد} \times 3 &= \text{تیسرے گھنٹے میں بیکٹیریا کی تعداد} \\ &= 3 \times 90 = 30 \times (3 \times 3) \\ &= 30 \times 3^2 = 30 \times 3^{(3-1)} \\ &= 270 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{چوتھے گھنٹے میں بیکٹیریا کی تعداد} \times 3 &= \text{تیسرے گھنٹے میں بیکٹیریا کی تعداد} \\ &= 3 \times 270 = 30 \times (3 \times 3 \times 3) \\ &= 30 \times 3^3 = 30 \times 3^{(4-1)} \\ &= 810 \end{aligned}$$

مشاہدہ کیجیے کہ حاصل ہونے والے اعداد اس طرح ہیں۔ 30, 90, 270, 810, ....

یہ اعداد جیومیٹرہ تصاعد ہیں (کیوں؟)

اوپر کی ترتیب کی مدد سے کیا ہم 20 گھنٹوں میں بیکٹیریا کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں؟

مندرجہ بالا طریقے میں ہر گھنٹے میں بیکٹیریا کی تعداد معلوم کرنے کے دوران آپ کو کچھ تصور آیا ہوگا

اس بالا طریقے کی مدد سے پرہم باسانی 20 گھنٹے میں پائے جانے والے بیکٹیریا کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

$$= 30 \times \underbrace{(3 \times 3 \times \dots \times 3)}_{19 \text{ terms}}$$

$$= 30 \times 3^{19} = 30 \times 3^{(20-1)}$$

اس مثال کے ذریعہ ہم باسانی 25 واں اور 35 واں اور n واں رکن بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

مان لیجیے کہ  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ایک جیومیٹرہ تصاعد ہے جس کا پہلا رکن  $a_1$  اور مشترک نسبت (r) ہے تب

$$\text{دوسرا رکن } a_2 = ar = ar^{(2-1)}$$

$$\text{تیسرا رکن } a_3 = a_2 \times r = (ar) \times r = ar^2 = ar^{(3-1)}$$

$$\text{چوتھا رکن } a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3 = ar^{(4-1)}$$

.....

.....

اوپر کی ترتیب کا مشاہدہ کرنے پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $n$  واں رکن  $a_n = a.r^{n-1}$  یعنی پہلا رکن 'a' اور مشترک نسبت r رکھنے والے جیومیٹرک تصاعد کا n واں رکن  $a_n = ar^{n-1}$  ہوگا

آئیے مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

**مثال-20:** جیومیٹرک تصاعد  $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \dots$  کا 20 واں اور n واں رکن معلوم کیجیے۔

$$\text{حل: یہاں } a = \frac{5}{2} \text{ اور } r = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_{20} = ar^{20-1} = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2^{20}}$$

$$\text{اور } a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2^n}$$

**مثال-21:** جیومیٹرک تصاعد  $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$  کا کون سا رکن 128 ہوگا؟

$$\text{حل: یہاں } a = 2 \text{ اور } r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

فرض کرو کہ جیومیٹرک تصاعد کا n واں رکن 128 ہے تب

$$a_n = ar^{n-1} = 128$$

$$2 \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = 128$$

$$(\sqrt{2})^{n-1} = 64$$

$$(2)^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$$



$$\Rightarrow \frac{n-1}{2} = 6$$

$$\therefore n = 13$$

لہذا جیومیٹریہ تصاعد کا تیرواں رکن 128 ہوگا۔

**مثال-22:** ایک جیومیٹریہ تصاعد کا تیسرا رکن 24 اور 6واں رکن 192 ہو تب 10واں رکن معلوم کیجیے۔

$$a_3 = ar^2 = 24 \quad \dots(1) \quad \text{یہاں } r = 2$$

$$a_6 = ar^5 = 192 \quad \dots(2)$$

مساوات (2) کو (1) سے تقسیم کرنے پر  $\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{192}{24}$  حاصل ہوگا۔

$$\Rightarrow r^3 = 8 = 2^3$$

$$r = 2$$

$r$  کی قدر کو مساوات (1) میں درج کرنے پر  $a = 6$  حاصل ہوگا۔

$$\therefore a_{10} = ar^9 = 6(2)^9 = 3072$$



### مشق 6.5

1- ذیل میں دیے گئے ہر جیومیٹریہ تصاعد کے مشترک نسبت  $r$  اور  $n$  واں رکن  $(a_n)$  معلوم کیجیے۔

(i)  $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$  (ii)  $2, -6, 18, -54$

(iii)  $-1, -3, -9, -18, \dots$  (iv)  $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \dots$

2- جیومیٹریہ تصاعد  $5, 25, 125, \dots$  کا 10واں اور  $n$  واں رکن معلوم کیجیے۔

3- حسب ذیل جیومیٹریہ تصاعد کے ظاہر کردہ رکن معلوم کیجیے۔

(i)  $a_1 = 9$  اور  $r = \frac{1}{3}$  ہو تب  $a_7$  کی قدر معلوم کیجیے (ii)  $a_1 = -12$  اور  $r = \frac{1}{3}$  ہو تب  $a_6$  کی قدر معلوم کیجیے

4- (i) جیومیٹریہ تصاعد  $2, 8, 32, \dots$  کا کون سا رکن 512 ہوگا؟

(ii) جیومیٹریہ تصاعد  $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$  کا کون سا رکن 729 ہوگا؟

(iii) جیومیٹریہ تصاعد  $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$  کا کون سا رکن  $\frac{1}{2187}$  ہوگا؟

- 5- اگر ایک جیومیٹریہ تصاعد کا 8 واں رکن 192 اور مشترک نسبت 2 ہو تب 12 واں رکن معلوم کیجیے؟
- 6- ایک جیومیٹریہ تصاعد کا چوتھا رکن  $\frac{2}{3}$  اور 7 واں رکن  $\frac{16}{81}$  ہو تب جیومیٹریہ تصاعد معلوم کیجیے؟
- 7- جیومیٹریہ تصاعد  $162, 54, 18, \dots$  اور  $\frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots$  کے  $n$  ویں ارکان مساوی ہوں تب  $n$  کی قدر معلوم کیجیے؟

## اختیاری مشق



(جامع اکتساب کے لیے)

- 1- حسابی تصاعد  $121, 117, 113, \dots$  کا کون سا رکن پہلا منفی رکن ہوگا؟

(اشارہ:  $a_n < 0$  کے لیے  $n$  معلوم کیجیے)

- 2- ایک حسابی تصاعد کے تیسرے اور 7 ویں رکن کا مجموعہ 6 ہے اور ان کا حاصل ضرب 8 ہو تب پہلے 16 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے؟

- 3- ایک سیڑھی کے 25 ڈنڈے ہیں سیڑھی کے ڈنڈوں کے طول میں نیچے سے اوپر کی جانب بتدریج کمی واقع ہو رہی ہے۔ اگر نیچے سے پہلی سیڑھی کا طول 45 سمر اور اوپر سے پہلی سیڑھی کا طول 25 سمر ہے اور ان دونوں کا درمیانی فاصلہ  $2\frac{1}{2}$  میٹر ہو تب ڈنڈے بنانے کے لیے درکار لکڑی کا طول معلوم کیجیے؟

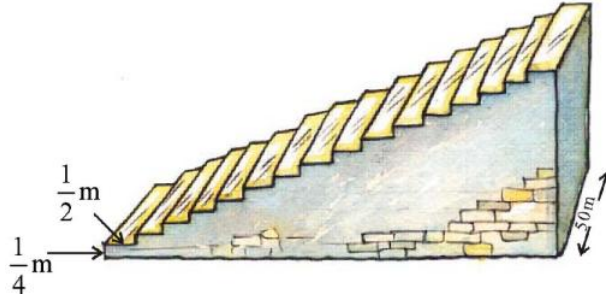
(اشارہ:  $1 + \frac{250}{25} =$  ڈنڈوں کی تعداد)

- 4- چند دکاناں ایک ہی قطار میں موجود ہیں۔ ان کو 1 تا 49 اعداد مختص کیے گئے ہیں۔ اگر ان میں سے کسی ایک دکان کو 'x' تصور کرنے پر 'x' کی قدر اس طرح معلوم کیجیے کہ 'x' سے پہلے دکاناں کی تعداد بعد کی دکاناں کی تعداد کے مساوی ہو۔

(اشارہ:  $S_{x-1} = S_{49} - S_x$ )

- 5- ذیل کی شکل کے مانند ایک فٹ بال میدان میں 15 سیڑھیوں پر مشتمل ایک بالا خانہ (terrace) ہے۔ اس کی ہر سیڑھی کا طول 50 میٹر اور چوڑائی  $2\frac{1}{2}$  میٹر ہے۔ پہلی سیڑھی زمین سے  $\frac{1}{4}$  میٹر اونچائی پر اور ہر سیڑھی اس سے پہلے والی سیڑھی کے  $\frac{1}{4}$  میٹر اونچائی پر ہے تب سیڑھیوں سے گھرے ہوئے بالا خانہ کی تعمیر کے لیے درکار کانکریٹ کا حجم معلوم کیجیے۔

(اشارہ:  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 m^3$  پہلی میٹر ہی بنانے کے لیے درکار کانکریٹ کا حجم)



6- ایک کام کو مکمل کرنے کے لیے 150 مزدور لگائے گئے۔ لیکن دوسرے دن 4 مزدور غیر حاضر رہے۔ تیسرے دن بھی 4 مزدور غیر حاضر رہے اسی طرح مزدور روزانہ غیر حاضر ہوتے رہے جس کے نتیجے میں متعینہ ایام سے 8 دن زائد کام چلا تو بتائیے کہ کام مکمل ہونے کے لیے جملہ کتنے دن لگے۔

(اشارہ: ابتداء میں کام مکمل ہونے کے لیے درکار دن کو 'x' تصور کرنے پر)

$$150x = \frac{x+8}{2} [2 \times 150 + (x+8-1)(-4)]$$

(جواب:  $x=17 \Rightarrow x+8=17+8=25$ )

7- ایک مشین کی قیمت 5,00,000 ہے۔ پہلے سال اس کی قیمت میں 15% کمی دوسرے سال  $13\frac{1}{2}\%$  تیسرے سال 12%۔۔۔ کمی واقع ہوئی۔ اگر یہ کمی اسی طرح سال در سال واقع ہوتی گئی تب 10 سال کے اختتام پر اس کی قیمت کیا ہوگی جبکہ دیئے گئے تمام فیصد ابتدائی قیمت پر محسوب کئے گئے۔

(اشارہ: 10 ارکان  $= 15 + 13\frac{1}{2} + 12 + \dots$  جملہ قیمت میں کمی)

$$S_n = \frac{10}{2} [30 - 13.5] = 82.5\%$$

(یعنی 5,00,000 کا 17.5%) یعنی  $100 - 82.5 = 17.5$  سال بعد قیمت  $\therefore$

## تجویز کردہ منصوبہ کام

- 1- گرڈ پیپر کے استعمال سے تصدیق کیجیے کہ دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں ہے یا نہیں۔
- 2- گرڈ پیپر کے استعمال سے حسابی تصاعد کا  $n$  واں رکن معلوم کیجیے۔

## ہم نے کیا سیکھا



- 1- اعداد کے سلسلے/فہرست میں سوائے پہلے رکن کے باقی تمام اعداد کو اس کے پیش رو عدد میں ایک معین عدد جمع کرنے سے حاصل ہونے والے سلسلہ کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔ جمع کیے جانے والے معین عدد ( $d$ ) کو فرق مشترک کہتے ہیں۔  
حسابی تصاعد کے ارکان  $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$  ہیں۔
- 2-  $a_1, a_2, a_3, \dots$  اعداد کی فہرست میں اگر فرق  $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$  کی قدریں مساوی ہوں یعنی  $a_{k+1} - a_k$  کی قدر مساوی ہو ( $k$  کی مختلف قدروں کے لیے) تب دی گئی فہرست حسابی تصاعد ہے۔
- 3- حسابی تصاعد کا پہلا رکن  $a$ ، فرق مشترک  $d$  ہو تب  $n$  واں رکن (عام رکن)  $a_n = a + (n - 1)d$  ہوگا۔
- 4- حسابی تصاعد کے پہلے  $n$  ارکان کا مجموعہ  $S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$
- 5- اگر لگاتار ہی حسابی تصاعد کا آخری رکن  $l$  ہو (یعنی  $n$  واں رکن) تب  $n$  ارکان کا مجموعہ  $S = \frac{n}{2}(a + l)$
- 6- اعداد کی فہرست/سلسلے میں پائے جانے والے اعداد سوائے پہلے رکن کے باقی تمام اعداد اس کے پیش رو عدد کو ایک معین عدد ( $r$ ) سے ضرب دینے پر حاصل ہونے والا سلسلہ جیومیٹریہ تصاعد کہلاتا ہے۔ اور اس معین عدد کو مشترک نسبت کہتے ہیں؟
- 7- ایک جیومیٹریہ تصاعد کا پہلا رکن  $a$  اور مشترک نسبت  $r$  ہو تب جیومیٹریہ تصاعد کا  $n$  واں رکن

$$a^n = a.r^{n-1}$$



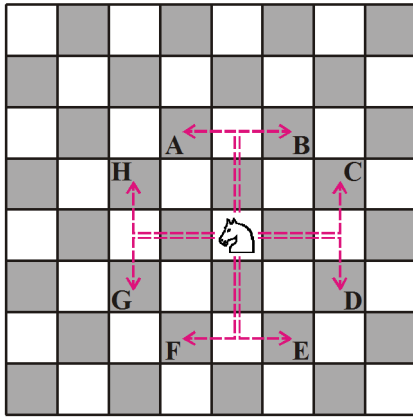


# تحلیلی جیومیٹری

## Coordinate Geometry

# باب 7

### 7.1 تمہید:-



آپ جانتے ہیں شطرنج کے کھیل میں گھوڑے کی چال 'L' کی طرح ہوتی ہے۔ یعنی ڈھائی قدم (جیسا شکل میں بتایا گیا ہے)۔ یہ دوسرے مہروں پر سے بھی جست لگاتا ہے۔ اونٹ کی چال ترچھی (وترنما) ہوتی ہے اور یہ ایک وقت کئی قدم آگے بڑھ سکتا ہے جبکہ اس کے آگے خالی ہوں۔ دوسرے مہرے کس طرح کی چال چلتے ہیں ان پر غور کیجیے۔ گھوڑے اور اونٹ کے علاوہ دوسرے مہروں کی چال کو شطرنج کی بساط پر دکھایا گیا ہے فرض کیجیے کہ گھوڑا مبداء (0,0) پر واقع ہے۔ یہ چاروں سمتوں میں جن کو شکل میں نقاط کے خطوط سے ظاہر کیا گیا ہے اپنی چال چل سکتا ہے۔ گھوڑے کی حرکت سے حاصل نقاط سے مختلف مختصات معلوم کیجیے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

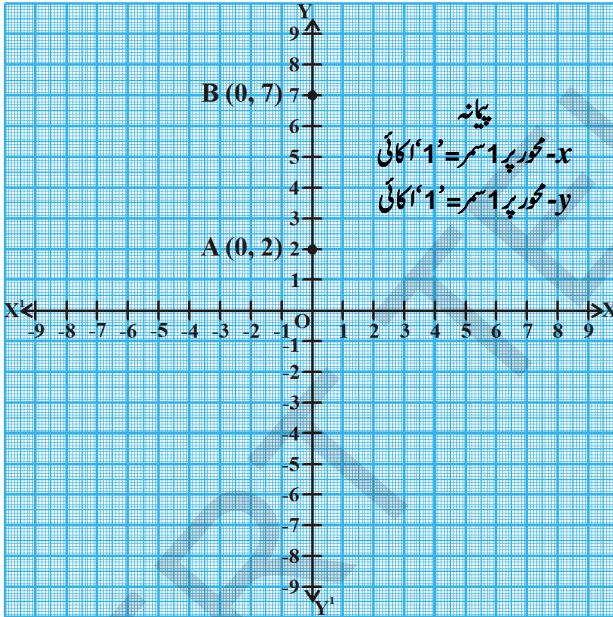
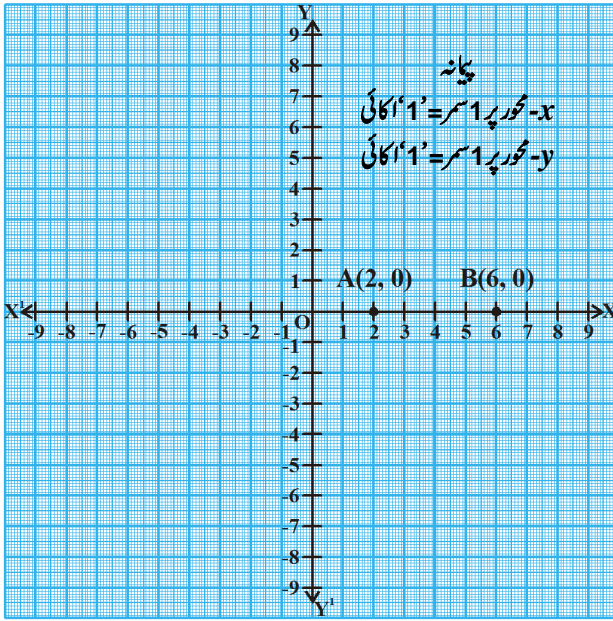
یہ کیجیے



- دی گئی شکل کی مدد سے نقاط A, B, C, D, E, F, G, H کے مختصات لکھیے۔
- گھوڑے کی کل 8 مختلف سمت میں ہر ایک چال کا فاصلہ معلوم کیجیے۔ مبداء سے نقاط A, B, C, D, E, F اور H کا فاصلہ معلوم کیجیے۔
- دو نقاط H اور C کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔ دو نقاط A اور B کا درمیانی فاصلہ بھی معلوم کیجیے۔

### 7.2 دو نقاط کے درمیان فاصلہ:

دو نقاط (2,0) اور (6,0) -x محور پر واقع ہیں جس کو شکل میں دکھایا گیا ہے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ نقاط A اور B کا درمیانی فاصلہ 4 اکائیاں ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ -x محور پر واقع دو نقاط کا درمیانی فاصلہ ان کے -x مختصات کا فرق ہوتا ہے۔



نقاط  $(-2, 0)$  اور  $(-6, 0)$  کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟

ان نقاط کے  $x$ -مختصات کا فرق

$$(-6) - (-2) = -4 \text{ (منفی قدر)}$$

فاصلہ کو ہم کسی بھی صورت میں منفی سے ظاہر نہیں کرتے۔

اس کے لیے ہم کو فرق کی مطلق قدر لینی چاہیے۔

$$\text{اکائیاں} = |(-6) - (-2)| = |-4| = 4$$

اس طرح عموماً نقاط  $A(x_1, 0)$  اور  $B(x_2, 0)$  جو  $x$ -محور پر واقع

کا درمیانی فاصلہ  $|x_2 - x_1|$  ہوتا ہے۔

اسی طرح اگر دو نقاط  $y$ -محور پر واقع ہوں تب ان نقاط کا

درمیانی فاصلہ  $y$ -مختصات کا فرق ہوگا۔

∴ دو نقاط  $(0, y_1)$  اور  $(0, y_2)$  کا درمیانی فاصلہ  $|y_2 - y_1|$

ہوگا۔

مثال کے طور پر دو نقاط  $A(0, 2)$  اور  $B(0, 7)$  ہیں۔

تب ان کا درمیانی فاصلہ  $= |7 - 2| = 5$  اکائیاں۔

یہ کیجیے



(i) نقاط  $(-4, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(-8, 0)$  مختصات کی مستوی پر کہاں واقع ہیں۔

(ii) نقاط  $(-4, 0)$  اور  $(6, 0)$  کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟

کوشش کیجیے



(i) نقاط  $(0, -3)$ ,  $(0, -8)$ ,  $(0, 6)$ ,  $(0, 4)$  مختصات کی مستوی پر کہاں پرواقع ہیں؟  
(ii) نقاط  $(0, -3)$  اور  $(0, -8)$  کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟ تصدیق کیجیے کہ مختصات کی مستوی میں  $Y$ -محور پرواقع نقاط کا درمیانی فاصلہ  $|y_2 - y_1|$  ہے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے۔



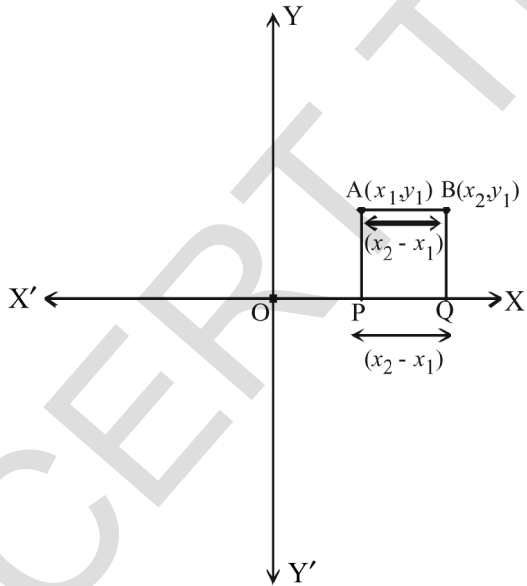
آپ دونوں کے درمیان کا فاصلہ کس طرح معلوم کریں گے جب کہ ان نقاط کے  $x$  یا  $y$  مختصات مساوی ہیں لیکن صفر نہیں۔

### 7.3 محوروں کے متوازی خطوط پرواقع دو نقاط کا درمیانی فاصلہ

نقاط  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_2, y_1)$  پر غور کیجیے کیوں کہ  $y$ -مختصات مساوی ہوں۔ یہ نقاط  $x$ -محور کے متوازی خط پرواقع ہیں۔

$x$ -محور پر  $AP$  اور  $BQ$  دو عمود کھینچے گئے ہیں۔

شکل پر کا مشاہدہ کیجیے۔  $APQB$  مستطیل ہے۔



$$AB = PQ$$

$$PQ = |x_2 - x_1| \quad (\text{یعنی } x\text{-مختصات کے}$$

فرق) کی (مطلق قدر)

اسی طرح، دو نقاط  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_1, y_2)$

کو ملانے والی خط  $y$ -محور کے متوازی ہے تب ان دو نقاط کا درمیانی

فاصلہ  $|y_2 - y_1|$  ہوگا (یعنی  $y$ -مختصات کا فرق)۔

**مثال-1:** نقاط A (4,0) اور B (8, 0) کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟

**حل:** 4 اکائیاں  $-x = |x_2 - x_1| = |8 - 4| = 4$  مختصات کے فرق کی مطلق قدر

**مثال-2:** A (8, 3) اور B (-4, 3) دو نقاط ہیں۔ ان کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

**حل:** یہاں پر  $x_1$  اور  $x_2$  دو مختلف ربعوں میں واقع ہیں جبکہ ان کا 'y' مختص مساوی ہے۔

12 اکائیاں  $AB = |x_2 - x_1| = |-4 - 8| = |-12| = 12$  فاصلہ

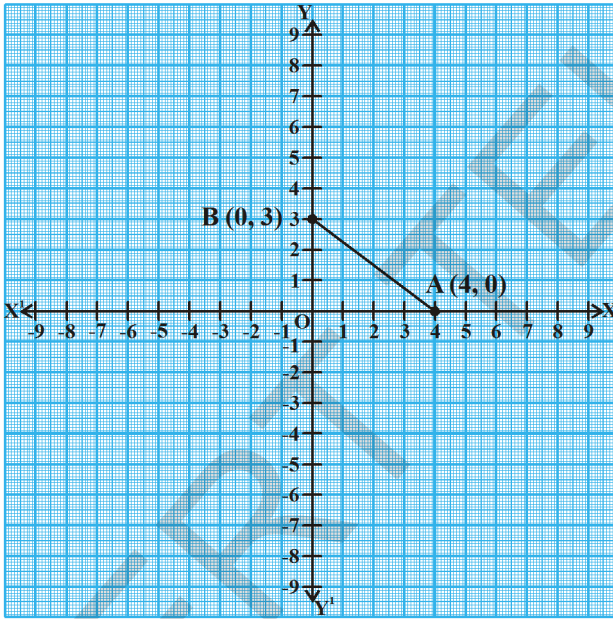
یہ کیجیے



مندرجہ ذیل نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

- i. (3, 8), (6, 8)      ii. (-4, -3), (-8, -3)      iii. (3, 4), (3, 8)      (iv) (-5, -8), (-5, -12)

فرض کرو کہ A اور B بالترتیب نقاط (4, 0) اور (0, 3) ہیں اور 'O' مبداء ہے۔  $\triangle AOB$  ایک قائم الزاویہ ہے۔



شکل سے  $OA = 4$  اکائیاں (مختص  $-x$ )

$OB = 3$  اکائیاں (مختص  $-y$ )

تب  $AB$  کا درمیانی فاصلہ = ؟

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ اکائیاں}$$

اس طرح  $AB$  کا درمیانی فاصلہ = 5 اکائیاں

یہ کیجیے



مندرجہ ذیل میں دیئے گئے نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

- (i) A = (2, 0) اور B(0, 4)      (ii) P(0, 5) اور Q(12, 0)

کوشش کیجیے



مبداء 'O' اور نقطہ A(7,4) کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

## سوچے اور تبادلہ خیال کیجیے



1- رحیم کہتا ہے کہ مبداء  $O(0,0)$  سے نقطہ  $P(x_1, y_1)$  کا درمیانی فاصلہ  $\sqrt{x^2 + y^2}$  ہے کیا آپ رحیم کی بات پر متفق ہیں یا نہیں؟ کیوں؟

2- رحیم  $AB$  کے درمیانی فاصلہ کا ضابطہ اس طرح لکھتا ہے۔  $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  کیوں؟

## 7.4 X - Y مستوی میں کوئی دو نقاط کا درمیانی فاصلہ

فرض کرو کہ  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_2, y_2)$  مستوی میں واقع خط پر کے دو نقاط ہیں جیسا کہ شکل سے ظاہر کیا گیا ہے۔  
-X محور پر  $AP$  اور  $BQ$  دو عمود کھینچئے۔

ایک عمود  $AR$  نقطہ  $A$  سے  $BQ$  پر اس طرح گرائیے کہ وہ  $R$  تک جاوے۔

تب  $OP = x_1$ ,  $OQ = x_2$

اس طرح  $PQ = OQ - OP$

$$= x_2 - x_1$$

شکل  $APQR$  کا مشاہدہ کیجیے جو ایک مستطیل ہے۔

اس لیے  $PQ = AR = x_2 - x_1$

$QB = y_2$ ,  $QR = y_1$

اس لیے  $BR = QB - QR = y_2 - y_1$

مثلث  $\triangle ARB$  ( قائم الزاویہ مثلث )

(مسئلہ فیثاغورث کی رُو سے)  $AB^2 = AR^2 + RB^2$

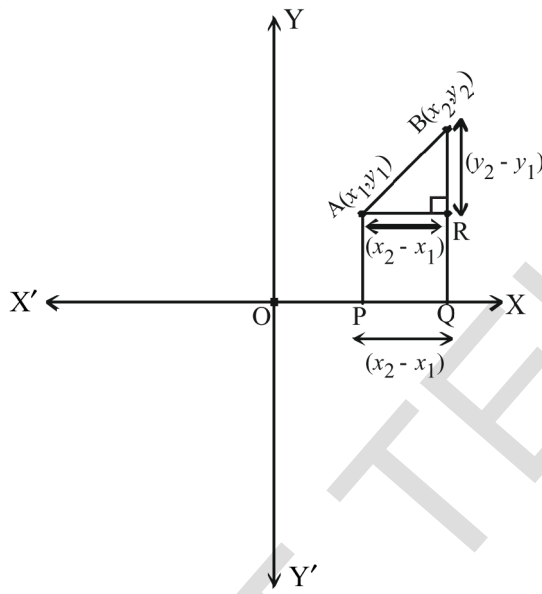
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

یعنی  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

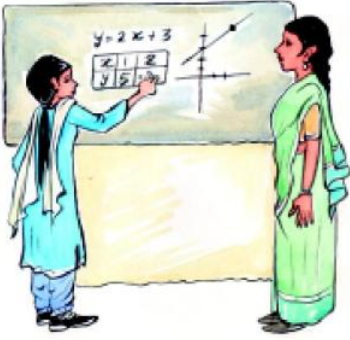
اس طرح نقاط  $A$  اور  $B$  کا درمیانی فاصلہ

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

اس کو دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کرنے کا ضابطہ کہتے ہیں۔







**مثال-3:** آئیے نقاط A(4, 2) اور B(8, 6) کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔

**حل:** ان نقاط کا  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  سے تقابل کیجیے۔

$$x_1 = 4, x_2 = 8, y_1 = 2, y_2 = 6$$

ضابطہ کی رو سے

$$\begin{aligned} \text{AB کا درمیانی فاصلہ } AB = d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(8 - 4)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ اکائیاں} \end{aligned}$$



یہ کیجیے

دیئے گئے نقاط کے جوڑ کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

(i) (7, 8) اور (-2, 3)

(ii) (-8, 6) اور (2, 0)



کوشش کیجیے

دونقاط A(1, -3) اور B(-4, 4) کا درمیانی فاصلہ اعشاریہ کے دو مقام تک معلوم کیجیے۔



سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1- صفی دونقاط T(5, 2) اور R(-4, -1) کا درمیانی فاصلہ قریب ترین اشاریہ تک 19.5 اکائیاں محسوب کیا؟  
اب آپ نقاط P(4, 1) اور Q(-5, -2) کا فاصلہ معلوم کیجیے۔ کیا آپ کا جواب صفی کے جواب کے مساوی ہے؟

آئیے مزید چند مثالوں پر غور کریں۔

**مثال-4:** بتائیے کہ نقاط A(4, 2), B(7, 5), C(9, 7) ایک ہی خط پر واقع ہیں۔

**حل:** آئیے AB، BC اور AC کا فاصلہ معلوم کریں۔

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \text{فاصلہ کا ضابطہ کی رو سے}$$



$$AB = \sqrt{(7-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \text{ اس طرح}$$

$$= \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2} \text{ اکائیاں}$$

$$BC = \sqrt{(9-7)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ اکائیاں}$$

$$AC = \sqrt{(9-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

$$= \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2} \text{ اکائیاں}$$

$$AB+BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$$

∴ تین نقاط (4, 2), (7, 5), اور (9, 7) ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہیں۔

(ایک خط پر واقع ہونے والے نقاط کو "ہم خط نقاط" (Collinear points) کہتے ہیں۔)

**مثال-5:** کیا نقاط (-2, -3), (3, 2), اور (2, 3) ایک مثلث بناتے ہیں؟

**حل:** آئیے فاصلہ کے ضابطہ کو استعمال کرتے ہوئے PQ, QR, RP کا فاصلہ معلوم کرتے ہیں۔ جہاں پر P(3, 2), Q(-2, -3) اور R(2, 3) ہیں۔

$$PQ = \sqrt{(-2-3)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ اکائیاں}$$

$$QR = \sqrt{(2-(-2))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{(4)^2 + (6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 = 7.21 \text{ اکائیاں (تقریباً)}$$

$$PR = \sqrt{(2-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.41 = 1.41 \text{ اکائیاں (تقریباً)}$$

اگر کسی دو فاصلوں کا مجموعہ تیسرے فاصلے سے زیادہ ہوتا ہو تب دیئے گئے نقاط P, Q, R ایک مختلف الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

**مثال-6:** بتائیے کہ دیئے گئے نقاط (1, 7), (4, 2), (-1, -1), اور (-4, 4) ایک مربع کے راس ہیں۔

**حل:** فرض کرو کہ A(1, 7), B(4, 2), C(-1, -1), D(-4, 4) دیئے گئے نقاط ہیں۔

دیئے گئے نقاط ایک مربع ABCD کے راس ہیں ثابت کرنے کے لیے ہمیں مربع کی خصوصیات استعمال کرنا ہوگا کہ تمام ضلعوں کا طول مساوی ہوتے ہیں اور ان کے وتر کے طول بھی مساوی ہوتے ہیں۔

اس طرح الاضلاع ہوں گے۔

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \text{ اکائیاں}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \text{ اکائیاں}$$

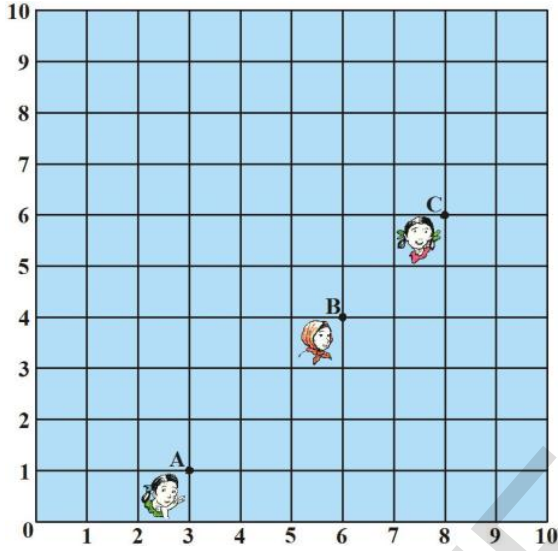
$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \text{ اکائیاں}$$

$$DA = \sqrt{(-4-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \text{ اکائیاں}$$

$$\text{وتر } AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} \text{ اکائیاں}$$

$$\text{وتر } BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

اسی طرح  $AB = BC = CD = DA$  اور  $AC = BD$  اس طرح چار ضلعی کے تمام اضلاع کے طول مساوی ہیں اور ان کے



وتر  $AC$ ،  $BD$  کے طول بھی آپس میں مساوی ہیں۔ اسی لیے ABCD ایک

مربع ہے۔

**مثال-7:** متصلہ شکل میں ایک جماعت میں بیچ کی ترتیب دکھائی گئی ہے۔

ثانیہ آفرین، ثمرین، بالترتیب  $A(3, 1)$ ،  $B(6, 4)$  اور  $C(8, 6)$  پر

بیٹھے ہیں۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ وہ ایک ہی خط میں ہیں۔

آپ کے جوابات کی وجوہات بیان کیجیے۔

**حل:** دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کرنے کے ضابطے کو استعمال

کرنے پر

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ اکائیاں}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ اکائیاں}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ اکائیاں}$$

$$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC \text{ اس طرح}$$

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقاط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  ہم خط ہیں۔

اسی لیے وہ تینوں ایک ہی خط پر بیٹھے ہیں۔

**مثال-8:**  $x$  اور  $y$  کے درمیان رشتہ محسوب کیجیے۔ اس طرح کہ نقطہ  $(x, y)$  دیئے گئے نقاط  $(7, 1)$  اور  $(3, 5)$  سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

**حل:** فرض کیجیے کہ نقطہ  $P(x, y)$  نقاط  $A(7, 1)$  اور  $B(3, 5)$  سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

$$AP = BP \Rightarrow AP^2 = BP^2 \text{ سوال کی رو سے}$$

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$(x^2 - 14x + 49) + (y^2 - 2y + 1) = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25)$$

$$(x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50) - (x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34) = 0$$

$$-8x + 8y = -16$$

جو مطلوبہ برشتہ ہے  $x - y = 2$

**مثال - 9:**  $y$ -محور پر ایک نقطہ معلوم کیجیے جو دیئے گئے دو نقاط  $A(6, 5)$  اور  $B(-4, 3)$  سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

**حل:** ہم جانتے ہیں کہ  $y$ -محور پر نقطہ  $(0, y)$  کی شکل ہوگا۔ فرض کیجیے کہ نقطہ  $P(0, y)$  نقاط  $A$  اور  $B$  سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

$$PA = \sqrt{(6-0)^2 + (5-y)^2} \quad \text{تب}$$

$$PB = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-y)^2}$$

$$PA^2 = PB^2$$

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2 \quad \text{اس طرح}$$

$$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

$$4y = 36$$

$$y = 9$$

اس طرح مطلوبہ نقطہ  $(0, 9)$  ہے۔

آئیے ہم اس کی جانچ کریں گے۔

$$AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

نقطہ  $(0, 9)$  نقاط  $(6, 5)$  اور  $(-4, 3)$  سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔



## مشق 7.1

1- مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑ کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

(i)  $(2, 3)$  اور  $(4, 1)$

(ii)  $(-5, 7)$  اور  $(-1, 3)$

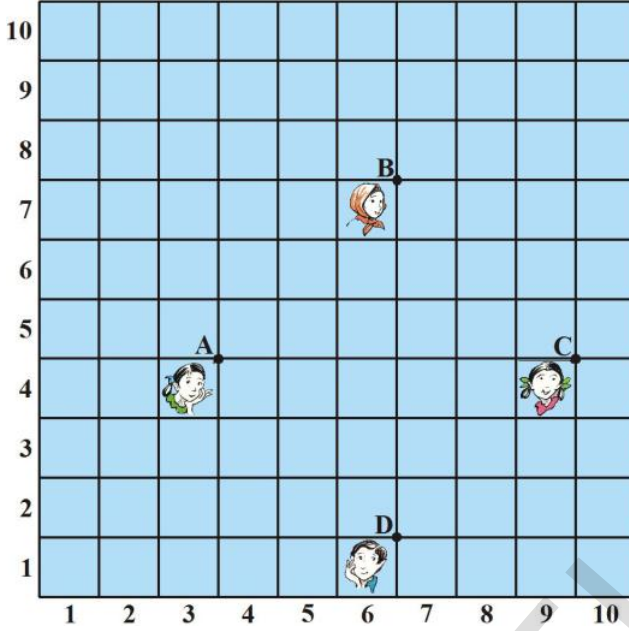
(iii)  $(-2, -3)$  اور  $(3, 2)$

(iv)  $(a, b)$  اور  $(-a, -b)$

2- نقاط  $(0, 0)$  اور  $(36, 15)$  کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

3- جانچ کیجیے آیا نقاط  $(1, 5)$ ،  $(2, 3)$  اور  $(-2, -1)$  ہم خط ہیں یا نہیں۔

5- ایک کمرے جماعت میں چار دوست شکل میں بتلائے گئے نقاط A، B، C اور D پر بیٹھے ہوئے ہیں۔ نصرت اور نور جہاں کمرے جماعت میں بیٹھے دوستوں کا مشاہدہ کرتے ہوئے ایک دوسرے سے تبادلہ خیال کرتے ہیں۔ نصرت، نور جہاں سے کہتی ہے کہ



”کیا آپ سوچتی ہیں کہ یہ نقاط ABCD ایک مربع بناتے ہیں؟“ نور جہاں اس بیان سے اتفاق نہیں کرتی ہے۔

دونوں کا درمیانی فاصلہ کے ضابطہ کو استعمال کرتے ہوئے بتلائے کہ ان دونوں میں کون صحیح ہے؟

6- بتلائے کہ نقاط  $B(-a, 0)$   $A(a, 0)$   $C(0, a\sqrt{3})$  ایک مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

7- ثابت کیجیے کہ نقاط  $(-7, -3)$   $(5, 10)$   $(15, 8)$  اور  $(3, -5)$  متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

8- بتلائے کہ نقاط  $(-4, -7)$   $(-1, 2)$   $(8, 5)$  اور  $(5, -4)$  ترتیب وار لینے پر معین کے راس ہیں؟ اور اس کا رقبہ معلوم کیجیے؟  
(وتروں کا حاصل ضرب)  $\times \frac{1}{2} \times$  معین کا رقبہ = اشارہ

9- مندرجہ ذیل کے نقاط سے بننے والے چار ضلعی شکل کا نام دیجیے۔ اگر کوئی ہوا اپنے جواب کیلئے وجوہات بیان کیجیے؟

(i)  $(-1, -2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(-3, 0)$  (ii)  $(-3, 5)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(-5, 1)$

(iii)  $(4, 5)$ ,  $(7, 6)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(1, 2)$

10- x محور پر واقع نقطہ معلوم کیجیے جو نقاط  $(2, -5)$  اور  $(-2, 9)$  سے مساوی فاصلہ پر ہے؟

11- x کی قدر معلوم کیجیے جبکہ نقاط  $(x, 7)$  اور  $(1, 15)$  کا درمیانی فاصلہ 10 اکائیاں ہیں؟

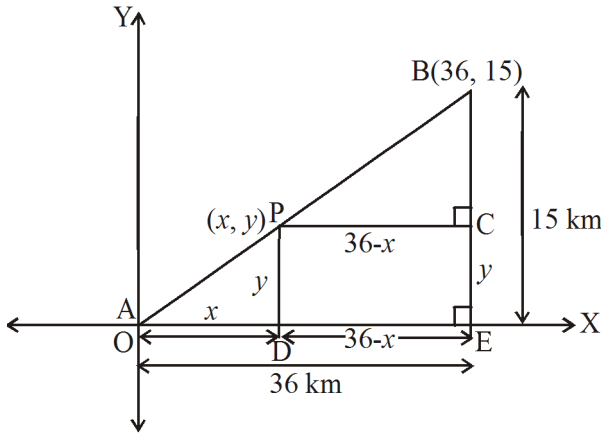
12- y کی قدر معلوم کیجیے جب کہ نقاط  $P(2, -3)$  اور  $Q(10, y)$  کا درمیانی فاصلہ 10 اکائیاں ہے۔

13- دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے جس کا مرکز  $(3, 2)$  ہے اور وہ نقطہ  $(-5, 6)$  سے گزرتا ہے؟

14- کیا آپ نقاط  $(1, 5)$   $(5, 8)$  اور  $(13, 14)$  سے ایک مثلث بنا سکتے ہو؟ وجوہات بیان کیجیے؟

15- x اور y کے درمیان رشتہ محسوب کیجیے اس طرح کہ نقطہ  $P(x, y)$  نقطہ  $(-2, 8)$  اور  $(-3, -5)$  سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے؟

## 7.5 - نسبت میں تقسیم کرنے کا ضابطہ (SECTION FORMULA)



فرض کیجیے کہ ایک ٹیلیفون کمپنی ایک ریٹے ٹاور 'P' کو دو نقاط A اور B کے درمیان اس طرح نسب کرنا چاہتی ہے کہ ٹاور اور نقطہ B کا درمیانی فاصلہ ٹاور اور نقطہ A تک کے فاصلہ کا دگنا ہے۔ اگر 'P' اور B کے درمیان واقع ہو تب نقطہ 'P' AB کو 1:2 میں تقسیم کرتا ہے۔ (شکل دیکھئے) اگر نقطہ A کو مبداء 'O' پر لیا جائے اور ایک کلومیٹر کو ایک اکائی دونوں محوروں پر لی جائے تب نقطہ B (36, 15) پر ہوگا۔ ٹاور کا مقام معلوم کرنے کے لیے ہم کو 'P' کے مختصات معلوم کرنا ہوگا۔ ہم ان مختصات کو کس طرح معلوم کریں گے۔ فرض کرو کہ 'P' کے مختصات (x, y) ہیں۔ نقطہ P اور B سے

x محور پر عمود کھینچیں، فرض کرو کہ یہ نقطہ D اور E ہیں۔ ایک عمود PC، BE پر کھینچیں، تب مشابہ مثلثات کی AAA خاصیت کے تحت جس کے بارے میں آپ سچلی جماعت میں پڑھ چکے ہیں۔  $\Delta BPC$  اور  $\Delta POD$  مشابہ مثلثات ہیں۔

$$\therefore \frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2} \quad \text{اور} \quad \frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{x}{36-x} = \frac{1}{2} \quad \text{اور} \quad \frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$$

$$2x = (36 - x) \quad \text{اور} \quad 2y = 15 - y$$

$$3x = 36 \quad \text{اور} \quad 3y = 15$$

$$x = 12 \quad \text{اور} \quad y = 5$$

اس طرح مساوات سے 'P' کے مختصات  $x = 12$  اور  $y = 5$  ہوتے ہیں۔

آپ  $P(12, 5)$  کے مختصات کو درج کرتے ہوئے دی

گئی شرط کی جانچ کر سکتے ہیں۔ یعنی  $OP:PB=1:2$

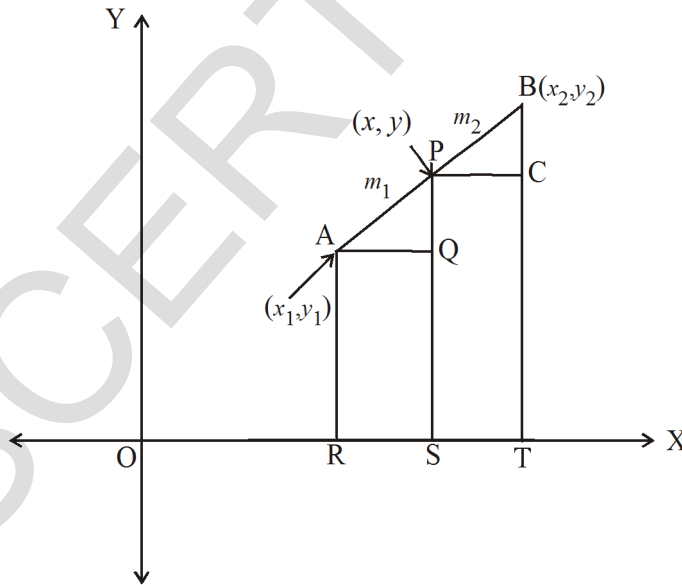
فرض کیجیے کہ کوئی دو نقاط  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_2, y_2)$

کو ملانے والے خط کو نقطہ  $P(x, y)$  داخل  $m_1 : m_2$  کی

نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

$$\text{اس لیے (i) } \frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2} \quad \text{(شکل میں دیکھئے)}$$

x-محور پر 'AR'، 'PS' اور 'BT' عمود کھینچئے۔



AQ اور PC 'x- محور پر متوازی کھینچئے۔ مشابہت کے AA معیار کے تحت

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \dots\dots(2) \quad \text{اس طرح}$$

$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1 \quad \text{اب}$$

$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$

$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

ان تمام قدروں کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \left[ \because \frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2} \text{ سے مساوات (1)} \right]$$

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \quad \text{اس طرح } \frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \text{ لینے پر حاصل ہوتا ہے}$$

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \quad \text{اسی طرح } \frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \text{ لینے پر حاصل ہوتا ہے۔}$$

اس لیے  $P(x, y)$  کے مختصات جو خطی قطعہ AB کو داخلاً  $m_1 : m_2$  کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جبکہ  $A(x_1, y_1)$  اور

$B(x_2, y_2)$  ہوں۔

$$\left( \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right) \dots\dots(3)$$

اس کو نسبت میں تقسیم کا ضابطہ (Section formula) کہتے ہیں۔

اس ضابطہ کو Y- محور پر نقاط P' A اور B سے عمود کھینچتے ہوئے مندرجہ بال کی طرح اخذ کیا جاسکتا ہے۔

اگر نقطہ P' AB کو K:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تب P کے مختصات

$$\left( \frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \right) \text{ ہوں گے۔}$$



## مخصوص مرحلہ (Special Case):

خطی قطعہ کا وسطی نقطہ خطی قطعہ کو 1:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لیے نقطہ P کے مختصات جو نقاط  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_2, y_2)$  کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

$$\left( \frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1} \right) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

آئیے چند مثالیں نسبت میں تقسیم کے ضابطہ Section Formula کو استعمال کرتے ہوئے حل کریں گے۔

**مثال-10:** نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط  $(4, -3)$  اور  $(8, 5)$  کو ملانے والے خط کو 3:1 کی نسبت میں داخلہ تقسیم کرتا ہے۔

**حل:** فرض کیجیے کہ  $P(x, y)$  مطلوبہ نقطہ ہے۔ نسبت میں تقسیم کا ضابطہ کی مدد سے

$$P(x, y) = \left( \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = 7,$$

$$y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

جو ایک مطلوبہ نقطہ ہے  $P(x, y) = (7, 3)$

**مثال-11:** نقاط  $(3, 0)$  اور  $(-1, 4)$  کو ملانے والی خط کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے؟

**حل:** فرض کرو کہ نقطہ  $M(x, y)$  نقاط  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  کو ملانے والے خطی قطعہ کا وسطی نقطہ ہے۔

$$M(x, y) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

∴ نقاط  $(3, 0)$  اور  $(-1, 4)$  کے ملانے والے خطی قطعہ کا وسطی نقطہ

$$M(x, y) = \left( \frac{3 + (-1)}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right) = \left( \frac{2}{2}, \frac{4}{2} \right) = (1, 2)$$

یہ کیجیے



1- نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط  $(3, 5)$  اور  $(8, 10)$  کو ملانے والے خط کو 2:3 کی نسبت میں داخلہ تقسیم کرتا ہے۔

2- نقاط  $(2, 7)$  اور  $(12, -7)$  کو ملانے والی خط کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے؟

## 7.7 خط کے نقاط تثلیث نقاط: Trisectional points of a line

خطی قطعہ کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرنے والے نقاط خط کے نقاط تثلیث کہلاتے ہیں۔

مثال-11: نقاط A(2, -2) اور B(-7, 4) کو ملانے والے خط کے نقطہ تثلیث معلوم کیجیے؟



حل: فرض کرو کہ نقاط P اور Q خط AB کے نقاط تثلیث ہیں۔

یعنی AP=PQ=QB (شکل پر غور کیجیے)

اس طرح نقطہ P خط AB کو داخلاً 1:2 کی نسبت تقسیم کرتا ہے۔

اس طرح P کے مختصات ہیں۔ نسبت میں تقسیم کرنے والا ضابطہ استعمال کرنے سے

$$P(x, y) = \left( \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$\left( \frac{1(-7) + 2(2)}{1+2}, \frac{1(4) + 2(-2)}{1+2} \right)$$

$$\text{یعنی} \left( \frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3} \right) = \left( \frac{-3}{3}, \frac{0}{3} \right) = (-1, 0)$$

اب نقطہ Q خط AB کو بھی داخلاً 2:1 میں تقسیم کرتا ہے اس طرح Q کے مختصات ہیں۔

$$= \left( \frac{2(-7) + 1(2)}{2+1}, \frac{2(4) + 1(-2)}{2+1} \right)$$

$$\text{یعنی} \left( \frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3} \right) = \left( \frac{-12}{3}, \frac{6}{3} \right) = (-4, 2)$$

اس طرح نقطہ تثلیث کے مختصات P(-1, 0) اور Q(-4, 2) ہیں۔

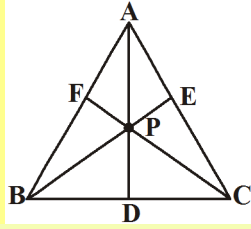
یہ کیجیے



(1) نقاط (2, 6) اور (-4, 8) کو ملانے والی خط کے نقاط تثلیث معلوم کیجیے؟

(2) نقاط (-3, -5) اور (-6, -8) کو ملانے والی خط کے نقاط تثلیث معلوم کیجیے؟

## کوشش کیجیے



فرض کیجیے کہ  $A(4, 2)$ ،  $B(6, 5)$  اور  $C(1, 4)$  سے مثلث  $\Delta ABC$  کے راس ہیں۔

(1) نقطہ  $A$  سے خط  $BC$  پر کھینچا گیا وسطانیہ نقطہ  $D$  پر قطع کرتا ہے تب نقطہ  $D$  کے مختصات معلوم کیجیے؟

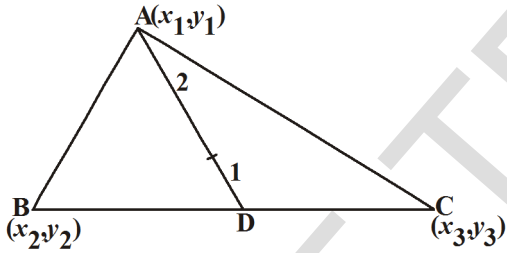
(2) خط  $AD$  پر نقطہ  $P$  کے مختصات معلوم کیجیے جبکہ  $AP:PD=2:1$  ہے۔

(3) خطی قطعہ  $BE$  کو  $2:1$  تقسیم کرنے والا اور خطی قطعہ  $CF$  کو بھی  $2:1$  میں قطع کرنے والے نقاط کے مختصات معلوم کیجیے۔

(4) آپ نے کیا مشاہدہ کیا۔

تصدیق کیجیے جو وسطانیہ کو  $2:1$  میں تقسیم کرتا ہے۔ وہ نقطہ مثلث کا مرکز وسطانی ہوتا ہے۔

## 7.7 مثلث کا مرکز وسطانی CENTROID OF A TRIANGLE



مثلث کا مرکز وسطانی دراصل اس کے وسطانیوں کا نقطہ تقاطع ہے۔

فرض کرو کہ  $A(x_1, y_1)$ ،  $B(x_2, y_2)$  اور  $C(x_3, y_3)$  ایک مثلث

ABC کے راس ہیں۔

فرض کرو کہ  $AD$  وسطانیہ ہے جو قاعدہ  $BC$  کا نصف ہے۔

$$D = \left( \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$

اب نقطہ  $G$  معلوم کیجیے جو خط  $AD$  کو داخلاً  $2:1$  کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ جو کہ مثلث کا مرکز وسطانی ہے۔ اگر  $G(x, y)$

مختصات ہیں۔

$$G(x, y) = \left[ \frac{2 \left( \frac{x_2 + x_3}{2} \right) + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2 \left( \frac{y_2 + y_3}{2} \right) + 1(y_1)}{2+1} \right]$$

$$= \left[ \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right]$$

اس طرح، مرکز وسطانی کے مختصات ہیں۔

$$\left[ \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right]$$

**مثال-13:** مثلث کے راس  $(3, -5)$ ،  $(-7, 4)$ ،  $(10, -2)$  ہیں اس کا مرکز وسطانی معلوم کیجیے۔

**حل:** مرکز وسطانی کے مختصات ہیں۔

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \\ &= \left( \frac{3 + (-7) + 10}{3}, \frac{(-5) + 4 + (-2)}{3} \right) = (2, -1) \end{aligned}$$

∴ مرکز وسطانی  $(2, -1)$  ہے۔



یہ کیجیے

مثلث کے مرکز وسطانی معلوم کیجیے جبکہ اس کے راس  $(-4, 6)$ ،  $(2, -2)$  اور  $(2, 5)$  ہیں۔

**مثال-14:** نقطہ  $(-4, 6)$ ، نقاط  $A(-6, 10)$  اور  $B(3, -8)$  کو ملانے والے خطی قطعہ کو کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔  
**حل:** فرض کیجیے کہ نقطہ  $(-4, 6)$  خط  $AB$  کو  $m_1:m_2$  داخل تقسیم کرتا ہے نسبت میں تقسیم کا ضابطہ کے استعمال سے

$$(-4, 6) = \left( \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

ہم جانتے ہیں کہ اگر  $(x, y) = (a, b)$  تب  $x = a$ ,  $y = b$  ہوگا۔

اس لیے

$$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{اور} \quad 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$



$$\text{اب } -4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ سے}$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

$$\therefore 7m_1 = 2m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

$$m_1 : m_2 = 2 : 7 \text{ اس طرح}$$

ہم جانچ کر سکتے ہیں کہ حاصلہ نسبت  $-y$  مختص کی بھی تصدیق کرتی ہے۔

$$\text{اب } \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \text{ (دونوں جانب 'm2' سے تقسیم کرنے پر)}$$

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = \frac{-\frac{16}{7} + 10}{\frac{9}{7}} = \frac{-16 + 70}{9}$$

$$\frac{54}{9} = 6$$

اس طرح نقطہ  $(-4, 6)$ ، نقاط  $A(-6, 10)$  اور  $B(3, -8)$  کو ملانے والے خط کو  $2:7$  میں تقسیم کرتا ہے۔



سوچے اور تبادلہ خیال کیجیے۔

- نقاط  $A(6, 9)$  اور  $B(-6, -9)$  کو ملانے والے خط دیئے گئے ہیں۔
- (a) خط  $AB$  کو مبداء کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اور یہ  $AB$  کا کیا کہلاتا ہے؟
- (b) نقطہ  $P(2, 3)$  خط  $AB$  کو کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔
- (c) نقطہ  $Q(-2, -3)$  خط  $AB$  کو کس نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔
- (d)  $p$  اور  $q$  خط  $AB$  کو کتنے مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے؟
- (e) خط  $AB$  کے لیے نقاط  $P$  اور  $Q$  کیا کہلاتا ہیں؟

**مثال-15:** نقاط  $(5, -6)$  اور  $(1, -4)$  کو ملانے والی خطی قطعہ کو  $-y$  محور کس نسبت میں قطع کرتا ہے۔ اور نقطہ تقاطع معلوم کیجیے؟

**حل:** فرض کرو کہ نسبت  $K:1$  ہے۔ نقطہ کے مختصات جو خط  $AB$  کو  $K:1$  میں قطع کرتے ہیں اس طرح ہیں۔

$$\left( \frac{K(-1)+1(5)}{K+1}, \frac{K(-4)+1(-6)}{K+1} \right)$$

$$\text{i.e.,} \left( \frac{-K+5}{K+1}, \frac{-4K-6}{K+1} \right)$$

یہ نقطہ  $-y$  محور پر واقع ہے۔ اور ہم جانتے ہیں کہ  $y$  محور پر پہلا مختص 'O' ہوتا ہے۔

$$\text{اس لیے } \frac{-K+5}{K+1} = 0$$

$$-K+5=0, \Rightarrow K=5$$

اس طرح  $K:1=5:1$

$K=5$  کی قدر درج کرنے پر نقطہ تقاطع اس طرح ہوگا۔

$$= \left( \frac{-5+5}{5+1}, \frac{-4(5)-6}{5+1} \right) = \left( 0, \frac{-20-6}{6} \right) = \left( 0, \frac{-26}{6} \right) = \left( 0, \frac{-13}{3} \right) =$$

**مثال-16:** بتائیے کہ نقاط بالترتیب  $A(3, 3)$ ،  $B(6, 1)$ ،  $C(8, 2)$  اور  $D(9, 4)$  ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

**حل:** فرض کرو کہ نقاط  $A(3, 3)$ ،  $B(6, 1)$ ،  $C(8, 2)$  اور  $D(9, 4)$  ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ اس طرح وتر  $AC$  اور  $BD$  کے وسطی نقاط مساوی ہونے

چاہیے۔

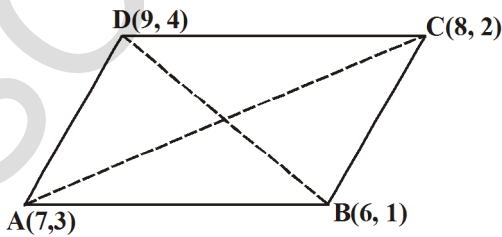
اب ہم  $AC$  اور  $BD$  کے وسطی نقاط کو ضابطہ  $\left( \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$  کی مدد سے معلوم کریں گے۔

$$AC \text{ کا وسطی نقطہ} = \left( \frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2} \right) = \left( \frac{15}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

$$DB \text{ کا وسطی نقطہ} = \left( \frac{9+6}{2}, \frac{4+1}{2} \right) = \left( \frac{15}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

اس طرح  $AC$  کا وسطی نقطہ =  $BD$  کا وسطی نقطہ

$\therefore$  نقاط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  اور  $D$  متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔





**مثال-17:** اگر نقاط 'A(6, 1)'، 'B(8, 2)'، 'C(9, 4)' اور 'D(P, 3)' ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔ تب 'P' کی قدر معلوم کیجیے۔

**حل:** ہم جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

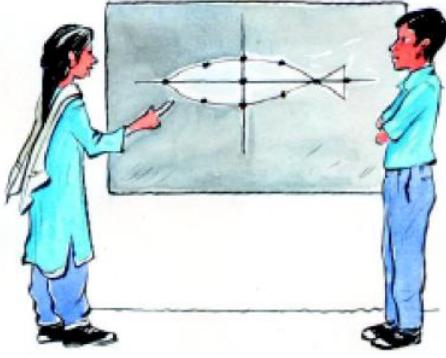
یعنی AC کے وسطی نقطہ کے مختصات = BD کے وسطی نقطہ کے مختصات کے

$$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ یعنی}$$

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

$$15 = 8 + p \Rightarrow p = 7$$



## مشق 7.2



- 1- نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط (7, -1) اور (-3, 4) کو ملانے والے خط کو 2:3 کی نسبت میں قطع کرتا ہے۔
- 2- نقاط (-1, 4) اور (-3, -2) کو ملانے والے خطی قطعہ کے نقاط تثلیث معلوم کیجیے؟
- 3- نقاط (10, -3) اور (-8, 6) کو ملانے والے خطی قطعہ کو کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے؟ معلوم کیجیے۔
- 4- اگر نقاط (2, 1) 'A'، (4, y) 'B'، (6, x) اور (5, 3) متوازی الاضلاع کے راس ہیں تب x اور y کی قدر کیا ہوگی؟
- 5- نقطہ 'A' کے مختصات معلوم کیجیے جبکہ AB ایک دائرہ کا قطر ہے۔ جس کا مرکز (3, -2) اور نقطہ B کے مختصات (4, 1) ہیں؟
- 6- اگر نقاط A اور B بالترتیب (-2, -2) اور (2, -4) ہیں۔ 'P' کے مختصات معلوم کیجیے اس طرح کہ  $AP = \frac{3}{7} AB$  اور نقطہ 'P' خطی قطعہ AB پر واقع ہے۔
- 7- ان نقاط کے مختصات معلوم کیجیے جو خطی قطعہ A(-4, 0) اور B(0, 4) کو ملانے والے خط کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں؟

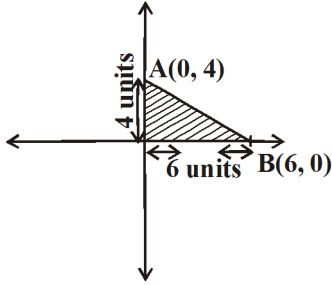
8- اُن نقاط کے مختصات معلوم کیجیے۔ جو نقاط A(-2, 2) اور B(2, 8) کو ملانے والے خطی قطعہ کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں؟

9- نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط (a+b, a-b) اور (a-b, a+b) کو ملانے والے خطی قطعہ کو 3:2 کی نسبت میں داخل تقسیم کرتا ہے؟

10- مندرجہ ذیل میں دیئے گئے مثلث نقاط کا مرکز وسطانی معلوم کیجیے۔

- i. (-1, 3), (6, -3) اور (-3, 6)    ii. (6, 2), (0, 0) اور (4, -7)  
iii. (1, -1), (0, 6) اور (-3, 0)

### 7.8 مثلث کا رقبہ



نقاط A(0, 4) اور B(6, 0) پر غور کیجیے جو ایک مستوی میں مبداء سے مثلث بناتے ہیں۔

مثلث AOB کا رقبہ کیا ہوگا؟

$\Delta AOB$  ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس کا قاعدہ 6 اکائیاں (x-مختص) اور بلندی 4

اکائیاں (y-مختص)

$$\therefore \text{بلندی} \times \text{قاعدہ} \times \Delta AOB = \frac{1}{2} \times \text{کارقبہ}$$

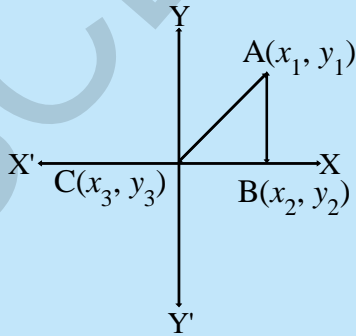
$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12 \text{ مربع اکائیاں}$$

### کوشش کیجیے



-x محور پر نقطہ A اور -y محور پر نقطہ 'B' لیتے ہوئے مثلث  $\Delta AOB$  کا رقبہ معلوم کیجیے۔ اپنے دوستوں سے متبادلہ خیال کیجیے وہ کیا کرتے ہیں۔

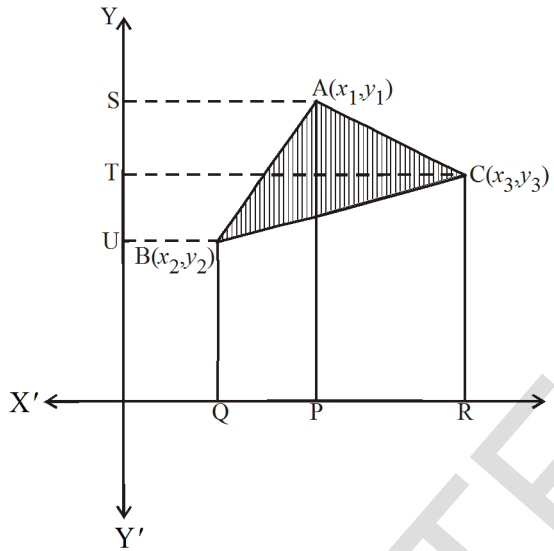
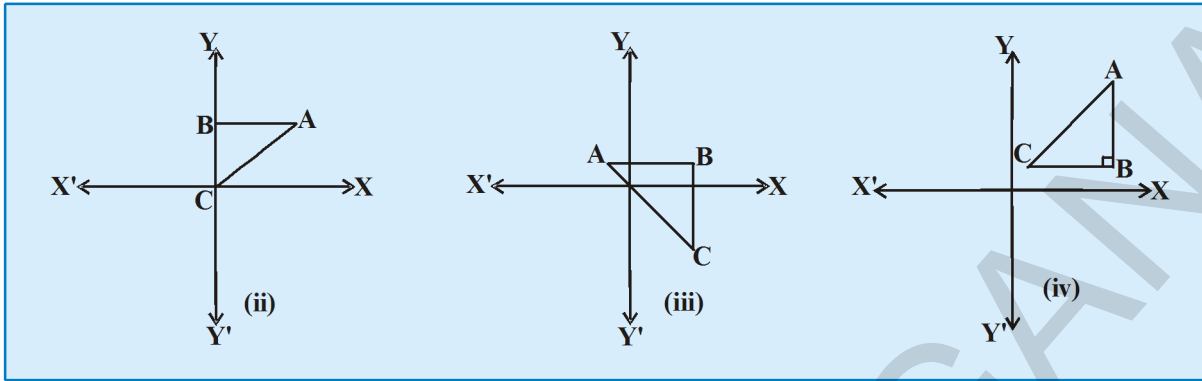
### سوچیے اور متبادلہ خیال کیجیے۔



1- فرض کرو کہ 'A(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>)', 'B(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>)'، 'C(x<sub>3</sub>, y<sub>3</sub>)' مثلث کے راس ہیں

تب مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔

اپنے دوستوں سے مثلث کے رقبوں پر متبادلہ خیال کیجیے۔



## مثلث کا رقبہ

مثلث ABC کے راس  $A(x_1, y_1)$ ،  $B(x_2, y_2)$  اور

$C(x_3, y_3)$  ہیں۔

AP، BQ اور CR بالترتیب نقاط A، B اور C سے x-محور پر

عمودوار کھینچے۔

واضح طور پر ABQP، APRC اور BQRC منحرف حاصل ہوتے

ہیں۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

شکل سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ

منحرف BQRC کا رقبہ = منحرف APRC کا رقبہ + منحرف ABQP کا رقبہ

(متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ) (متوازی ضلعوں کا مجموعہ) = منحرف کا رقبہ  $\therefore$

$$\text{مثلث } \Delta ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2}(BQ + AP)QP + \frac{1}{2}(AP + CR)PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)QR$$

$$BQ = y_2, AP = y_1, QP = OP - OQ = x_1 - x_2 \quad \text{شکل سے}$$

$$CR = y_3, PR = OR - OP = x_3 - x_1$$

$$QR = OR - OQ = x_3 - x_2$$

$$\begin{aligned} \text{مثلث } \Delta ABC \text{ کا رقبہ} &= \frac{1}{2} \left| (y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2) \right| \\ &= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \end{aligned}$$

$$\therefore \text{کارتبہ } \Delta ABC = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

آئیے مزید چند مثالوں پر غور کریں۔

**مثال-18:** مثلث کارتبہ معلوم کیجیے جس کے راس (1, -1) (4, 6) اور (-3, -5) ہیں۔

**حل:** فرض کرو کہ A(1, -1) B(4, 6) اور C(-3, -5) مثلث کے راس ہیں۔

$$\text{کارتبہ } ABC = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

$$= \frac{1}{2} |1(6 + 5) + (-4)(-5 + 1) + (-3)(-1 - 6)|$$

$$= \frac{1}{2} |11 + 16 + 21| = 24$$

$\therefore$  مثلث ABC کارتبہ 24 مربع اکائیاں ہوتا ہے۔

**مثال-19:** نقاط A(5, 2) ' B(4, 7) ' اور C(7, -4) سے بننے والے مثلث کارتبہ معلوم کیجیے؟

**حل:** نقاط A(5, 2) ' B(4, 7) ' اور C(7, -4) سے بننے والے مثلث کارتبہ ضابطہ کی رو سے

$$\text{کارتبہ } ABC = \frac{1}{2} |5(7 + 4) + 4(-4 - 2) + 7(2 - 7)|$$

$$= \frac{1}{2} |55 - 24 - 35| = \left| \frac{-4}{2} \right| = |-2|$$

چونکہ رقبہ پیمائش ہے۔ جو منفی نہیں ہو سکتا اس لیے اس کی عدد قدر 2 لی جاسکتی ہے یا مطلق قدر  $|-2| = 2$  لی جاتی ہے۔

$\therefore$  مثلث کارتبہ = 2 مربع اکائیاں



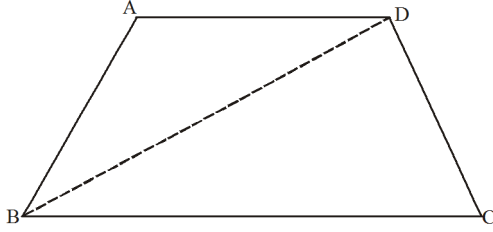
یہ کیجیے

1- مثلث کارتبہ معلوم کیجیے جس کے راس ہیں

(i) (5, 2) (3, -5) اور (-5, -1)

(ii) (6, -6) (3, -7) اور (3, 3)

**مثال-20:** اگر A(-5, 7) B(-4, -5) C(-1, -6) اور D(4,5) ایک چار ضلعی کے راس ہیں۔ تب چار ضلعی ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے۔



**حل:** چار ضلعی کے نقاط B کو D سے جوڑنے پر دو مثلثات ABD اور BCD حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\Delta ABD \text{ کا رقبہ} &= \frac{1}{2}[-5(-5-5) + (-4)(5-7) + 4(7+5)] \\ &= \frac{1}{2}[-5(-10) + (-4)(-2) + 4(12)] \\ &= \frac{1}{2}(50 + 8 + 48) = \frac{106}{2} = 53 \text{ مربع اکائیاں}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta BCD \text{ کا رقبہ} &= \frac{1}{2}[-4(-6-5) - 1(5+5) + 4(-5+6)] \\ &= \frac{1}{2}[44 - 10 + 4] = 19 \text{ مربع اکائیاں}\end{aligned}$$

چار ضلعی کا رقبہ =  $\Delta ABD$  کا رقبہ +  $\Delta BCD$  کا رقبہ  
اس طرح چار ضلعی کا رقبہ =  $19 + 53 = 72$  مربع اکائیاں

کوشش کیجیے



مربع کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس بالترتیب (0, -1), (2, 1), (0, 3) اور (-2, 1) ہیں۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے۔



ذیل میں دیئے گئے نقاط سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(i) (2, 0), (1, 2), (1, 6)

(ii) (3, 1), (5, 0), (1, 2)

(iii) (-1.5, 3), (6, 2), (-3, 4)

آپ نے مشاہدہ کیا؟

ان مختصات سے تین مختلف گراف بنائیے؟ آپ نے کیا مشاہدہ کیا۔

کیا ہم کو کسی مثلث کا رقبہ 10 اکائیاں حاصل ہوا؟

اس کے کیا معنی ہیں؟

**7.8.1 ہم خط خاصیت Collinearity:**

فرض کرو کہ نقاط  $A(x_1, y_1)$ ،  $B(x_2, y_2)$  اور  $C(x_3, y_3)$  ایک ہی خط پر واقع ہیں۔ تب وہ مثلث نہیں بناتے۔ یعنی  $\Delta ABC$  کا رقبہ صفر ہوگا۔

اگر مثلث کا رقبہ صفر کا نیاں ہو تب ہم کہیں گے کہ تین نقاط ہم خط ہیں۔

**مثال-21:** نقاط  $(3, -2)$ ،  $(-2, 8)$  اور  $(0, 4)$  ایک مستوی میں واقع ہیں۔ بتائیے کہ یہ نقاط ہم خط ہیں۔

**حل:** مثلث کے رقبہ کے ضابطہ کی رو سے

$$\Delta = \frac{1}{2} |3(8 - 4) + (-2)(4 - (-2)) + 0((-2) - 8)|$$

$$= \frac{1}{2} |12 - 12| = 0$$

اس طرح مثلث کا رقبہ صفر ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ تینوں نقاط ہم خط ہیں یا ایک ہی خط پر واقع ہیں۔

یہ کیجیے



جانچ کیجیے کہ آیا دیئے گئے نقاط ہم خط ہیں۔

- (i)  $(1, -1)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(-2, -3)$
- (ii)  $(1, -1)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 0)$
- (iii)  $(1, -6)$ ,  $(3, -4)$ ,  $(4, -3)$

**7.8.2 مثلث کا رقبہ 'ہیرون کا ضابطہ' 'Heron's Formula':**

ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{بلندی} \times \text{قاعدہ} = \frac{1}{2} \text{ مثلث کے رقبہ کا ضابطہ}$$

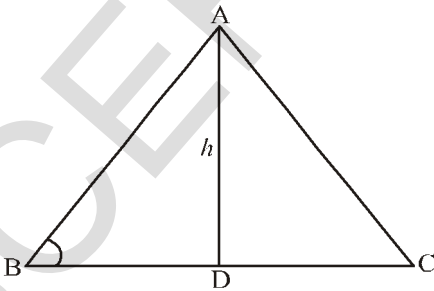
کوئی دی گئی مثلث قائم الزاویہ مثلث، مساوی الاضلاع مثلث یا مساوی

الزاقین مثلث ہو سکتی ہے۔ کیا ہم مثلث کا رقبہ محسوب کر سکتے ہیں؟

اگر ہم قاعدہ اور بلندی راست طور پر جانتے ہیں تب ہم اوپر دیئے گئے ضابطہ کو

استعمال کر کے مثلث کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر مثلث کی بلندی 'h' نہ دی گئی ہو تو ہم رقبہ کیسے معلوم کر سکتے ہیں؟

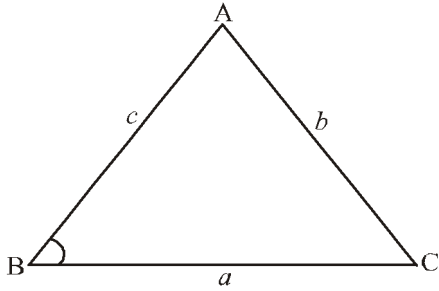




اس کے لیے یونان ریاضی داں ہیرون (Heron) نے مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا ضابطہ اخذ کیا جب کہ مثلث کے اضلاع کا طول 'a' اور 'b' اور 'c' دیے جائیں۔

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \text{ جہاں } S = \frac{a+b+c}{2}$$

مثال کے طور پر ایک مثلث کے اضلاع کا طول 12 میٹر، 9 میٹر اور 15 میٹر دیئے گئے ہیں ہیرون کے ضابطہ کی مدد سے اس کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔



$$S = \frac{a+b+c}{2} \text{ جہاں } A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$S = \frac{12+9+15}{2} = \frac{36}{2} = 18m$$

$$S - a = 18 - 12 = 6m \quad \text{تب}$$

$$S - b = 18 - 9 = 9m$$

$$S - c = 18 - 15 = 3m$$

$$A = \sqrt{18(6)(9)(3)} = \sqrt{2916} = 54 \text{ مربع میٹر}$$

یہ کیجیے



(i) مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے اضلاع کے طول بالترتیب 15 میٹر، 17 میٹر اور 21 میٹر ہے (ہیرون کے ضابطہ کا استعمال کیجیے۔)

(ii) نقاط (0,0)، (4,0) اور (4,3) سے بننے والے مثلث کا رقبہ ہیرون کے ضابطہ کی مدد سے معلوم کیجیے۔

مثال-22: 'b' کی قدر معلوم کیجیے جبکہ نقاط A(1,2)، B(-1,b) اور C(-3,-4) ہم خط ہیں۔

حل: دیئے گئے نقاط A(1, 2), B(-1, b), C(-3, -4)

$$\text{تب } x_1 = 1, y_1 = 2; \quad x_2 = -1, y_2 = b \quad x_3 = -3, y_3 = -4$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

$$\frac{1}{2} |1(b+4) + (-1)(-4, -2) + (-3)(2-b)| = 0 \quad \text{چونکہ دیئے گئے نقاط ہم خط ہیں}$$

$$|b+4+6-6+3b| = 0$$

$$4b+4=0$$

$$4b=-4$$

$$\therefore b=-1$$

## مشق - 7.3



1- ذیل میں مثلث کے مختصات دیئے گئے ہیں ان کے رقبہ معلوم کیجیے؟

- (i) (2, 3) (-1, 0), (2, -4) (ii) (-5, -1), (3, -5), (5, 2)  
(iii) (0, 0), (3, 0) and (0, 2)

2- ذیل میں دیئے گئے نقاط ہم خط ہیں تب K کی قدر معلوم کیجیے۔

- (i) (7, -2) (5, 1) (3, K) (ii) (8, 1), (K, -4), (2, -5)  
(iii) (K, K) (2, 3) and (4, -1)

3- مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔ جس کے راس (0, -1), (2, 1) اور (0, 3) ہیں اس

مثلث اور دی گئی مثلث کے رقبوں میں نسبت کیا ہوگی؟

4- ایک چار ضلعی کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس بالترتیب (-4, -2), (-3, -5), (3, -2) اور (2, 3) ہیں۔

5- ہیرون کے ضابطہ کی مدد سے مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس بالترتیب (2, 3), (6, 3) اور (2, 6) ہیں۔

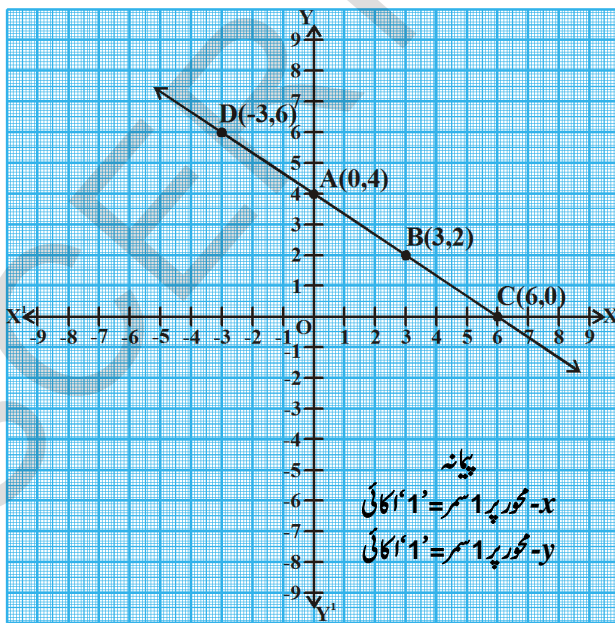
## 7.9 خط مستقیم (Straight Line):

سیف اور آفرین دو متغیرات پر خطی مساوات کے حل کے لیے تبادلہ خیال کر رہے ہیں۔

سیف: کیا مساوات  $2x + 3y = 12$  کا حل معلوم کر سکتے ہو۔

آفرین: ہاں! میں نے اس کا حل کیا ہے۔ دیکھئے۔

x	0	3	6	-3
y	4	2	0	6



$$2x + 3y = 12$$

$$3y = 12 - 2x$$

$$y = \frac{12 - 2x}{3}$$

آفرین: کیا تم اس حل کے مرتب جوڑ لکھ سکتے ہو؟

سیف: ہاں (0, 4), (3, 2), (6, 0) اور (-3, 6)۔

آفرین، آپ مختصات کے مستوی پر ان نقاط کا اظہار

کر سکتی ہو۔

آفرین: میں نے اس طرح کیا ہے۔

آفرین: یہ خط مستقیم ہے۔

سیف: اس خط پر کیا آپ دوسرے مختصات بھی شناخت کر سکتے ہیں؟  
کیا آپ چند اور مختصات کی شناخت کرتے ہوئے آفرین کی مدد کر سکتے ہو؟

اس خط میں خط  $\overline{AB}$  کیا کہلاتا ہے؟

AB دراصل خطی قطعہ ہے۔

یہ کیجیے



ذیل میں دیئے گئے نقاط کی مختصات کے مستوی پر نشانہ ہی کیجیے اور ان کو حل لگائیے۔

1. A(1, 2), B(-3, 4), C(7, -1)
2. P(3, -5) Q(5, -1), R(2, 1), S(1, 2)

کونسے نقاط خط مستقیم بناتے ہیں اور کونسے نہیں؟ کیوں؟

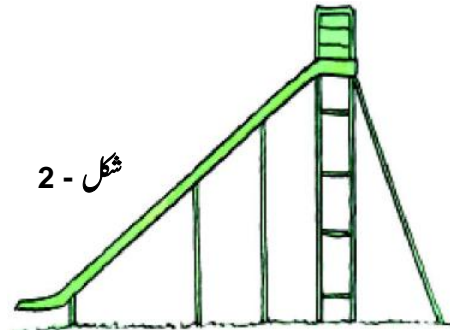
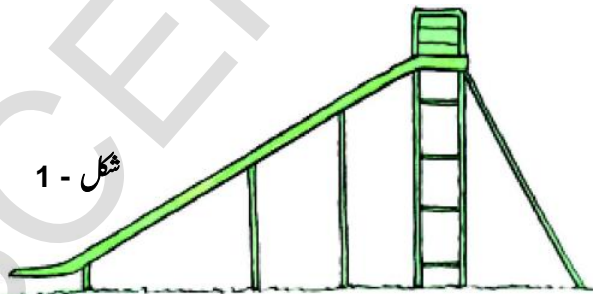
سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



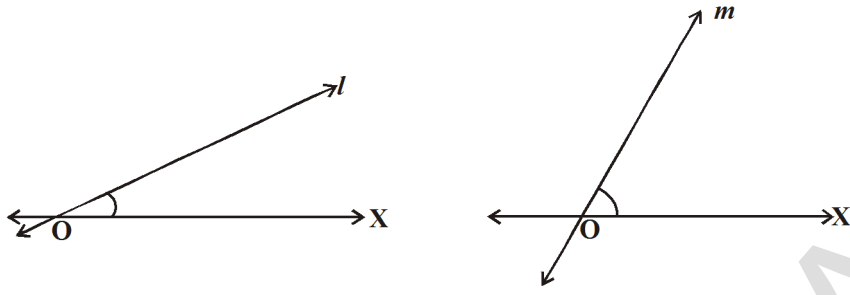
کیا  $y = x + 7$  ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے؟ مختصات کے مستوی پر خط کھینچیے۔  
کس نقطہ پر خط  $-y$  محور کو قطع کرتی ہے۔  
 $-x$  محور پر کتنا زاویہ بناتی ہے؟ اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے؟

### 7.9.1 خط مستقیم کا ڈھال : Slope of a Straight line

آپ نے جن میں پھسل بندھ دیکھا ہوگا۔ یہاں پر دو پھسل بندھے کی تصاویر دی گئی ہیں۔ اس میں سے کونسے پھسل بندھے پر سے آپ تیز پھسلیں گے؟



یقیناً آپ کا جواب دوسرے پر سے ہوگا۔ کیوں؟  
ان خطوط کا مشاہدہ کیجیے۔



کونسا خط OX پر بڑا زاویہ بناتا ہے؟  
چونکہ خط 'm' OX پر خط 'l' کی بہ نسبت بڑا زاویہ بناتا ہے۔  
خط 'm' کا ڈھال بڑا ہے خط 'l' کے ڈھال سے خط کی ڈھالوں ان سطح خط کا ڈھال کہتے ہیں۔  
ہم خط کا ڈھال کس طرح معلوم کر سکتے ہیں؟

مشغلہ

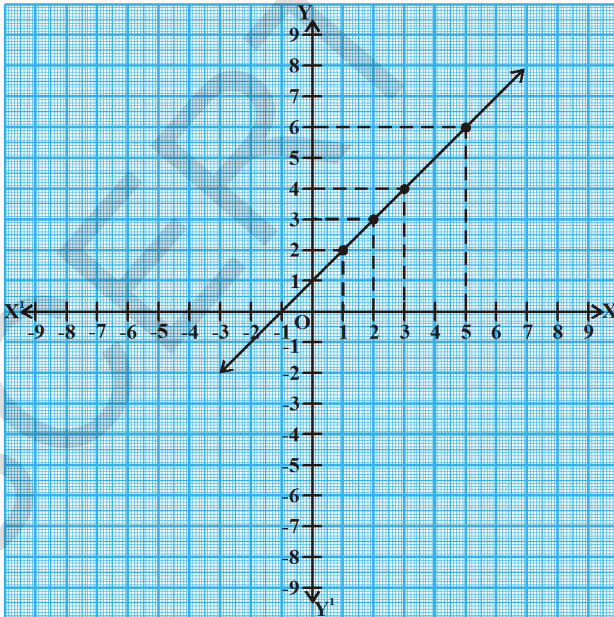


شکل میں دکھائے گئے خط مستقیم پر غور کیجیے خط پر کے نقاط پر غور کرتے ہوئے جدول کو پُر کیجیے۔

مختص $-x$	1	-	-	4	-
مختص $-y$	2	3	4	-	6

ہم نے مشاہدہ کیا کہ  $-x$  مختص میں تبدیلی ہو تو  $-y$  مختص میں بھی تبدیلی ہوتی ہے۔

جب  $-y$  مختص کی قدر  $y_1=2$  سے  $y_2=3$  تک بڑھتی ہے



تب  $y$  مختص میں فرق = .....

تب متعلقہ  $x$  مختص میں فرق = .....

..... =  $\frac{-y \text{ مختص میں فرق}}{-x \text{ مختص میں فرق}}$

جب  $y$  مختص کی قدر  $y_1=2$  سے  $y_3=4$  تک بڑھتی ہے۔

تب  $y$  مختص میں فرق = .....

..... =  $x$  مختص میں فرق

اس طرح =  $\frac{-y \text{ مختص میں فرق}}{-x \text{ مختص میں فرق}}$

تب آپ چند دوسرے نقاط سے کوشش کر سکتے ہیں؟ کوئی دو نقاط منتخب کیجیے۔ اور اس طرح جدول کو پُر کیجیے۔

مختصات $y$		مختصات $x$		مختصات کا فرق	
مختصات کا فرق		مختصات کا فرق		مختصات کا فرق	
2	4	-	2	1	-
-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-

مندرجہ بالا مشغلہ سے آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

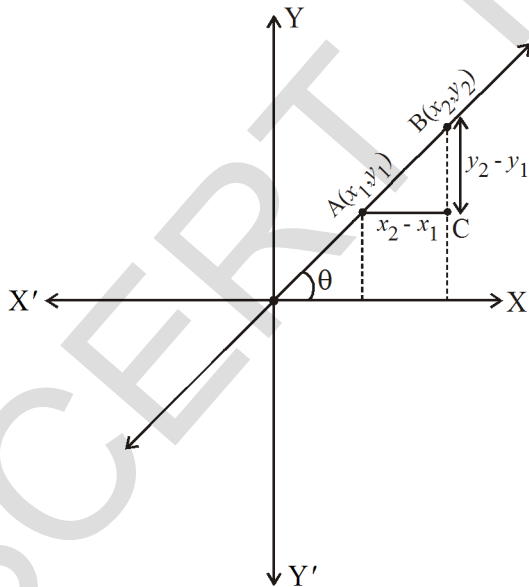
اس لیے  $y$  مختصات کا فرق اور  $x$  مختصات کی فرق کی نسبت  $x$ -محور پر بننے والے زاویہ میں رشتہ پایا جاتا ہے۔

آپ علم مثلث میں  $\tan\theta$  کے تصور کو سمجھیں گے۔

$$\tan\theta = \frac{\text{زاویے } \theta \text{ کا مقابل کا ضلع}}{\text{زاویے } \theta \text{ کا متصلہ ضلع}} = \frac{y \text{ میں فرق}}{x \text{ میں فرق}}$$

### 7.9.2 دو مختصات کو ملانے والی خط کا ڈھال : Slope of a line joining two points

اگر  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_2, y_2)$  خط 'l' پر دو مختصات ہیں۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔



$$\text{خط کا ڈھال} = \frac{-y \text{ مختص میں فرق}}{-x \text{ مختص میں فرق}}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ AB کا ڈھال}$$

ڈھال کو  $m$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ خط 'l'  $x$ -محور پر زاویہ  $\theta$  بناتا ہے

اس طرح خطی قطعہ AB 'AC' سے بھی وہی زاویہ  $\theta$  بناتا ہے۔

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{زاویے } \theta \text{ کا مقابل کا ضلع}}{\text{زاویے } \theta \text{ کا متصلہ ضلع}} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ اس طرح}$$

یہ  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  ہوں سے بننے والے خطی قطعہ AB کے ڈھال کا ضابطہ ہے۔

اگر خط  $x$ -محور پر زاویہ  $\theta$  بناتا ہے تب  $m = \tan\theta$

**مثال-23:** ایک خطی قطعہ کے اختتامی نقاط (2, 3) اور (4, 5) ہیں خط کا ڈھال معلوم کیجیے؟

**حل:** خطی قطعہ کے نقاط (4, 5) ، (2, 3) ہیں تب ڈھال ہے

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$$

دیئے گئے خط کی ڈھال = 1

یہ کیجیے



خطی قطعہ  $\overline{AB}$  کا ڈھال کیا ہوگا جب کہ خط کے اختتامی نقاط دیئے گئے ہیں؟

1. A(4, -6) B(7, 2)
2. A(8, -4), B(-4, 8)
3. A(-2, -5), B(1, -7)

کوشش کیجیے



خطی قطعہ  $\overline{AB}$  پر کا ڈھال معلوم کیجیے۔

1. A(2, 1), B(2, 6)
2. A(-4, 2), B(-4, -2)
3. A(-2, 8), B(-2, -2)

4- دیئے گئے نقاط سے حاصل ہونے والا خطی قطعہ  $\overline{AB}$  -y محور کے متوازی ہیں تصدیق کیجیے آپ ان کے ڈھال کے بارے میں کیا کہیں گے؟ اور کیوں؟

سوچئے اور تبادلہ خیال کیجیے



نقاط A(3, 2) اور B(-8, 2) خط  $\overline{AB}$  پر واقع ہیں تب اس کا ڈھال معلوم کیجیے۔

خط  $\overline{AB}$  کب -x محور کے متوازی ہے؟ کیوں؟

اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔

**مثال-24:** نقاط P(2, 5) اور Q(x, 3) گزرنے والے خط کا ڈھال 2 ہے تب 'x' کی قدر معلوم کیجیے۔

$$\text{یہاں } x_1 = 2, y_1 = 5, x_2 = x, y_2 = 3$$

$$\overline{PQ} \text{ ڈھال ہے} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{x - 2} = \frac{-2}{x - 2} \Rightarrow \frac{-2}{x - 2} = 2$$

$$\Rightarrow -2 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$



## مشق - 7.4:



1- دیئے گئے نقاط سے گزرنے والے خط کا ڈھال معلوم کیجیے۔

(i) (5, -2) اور (4, 8)

(ii) (0, 0) اور  $(\sqrt{3}, 3)$

(iii) (2a, 3b) اور (a, -b)

(iv) (a, 0) اور (0, b)

(v) A(-1.4, -3.7), B(-2.4, 1.3)

(vi) A(3, -2), B(-6, -2)

(vii)  $A\left(-3\frac{1}{2}, 3\right)$ ,  $B\left(-7, 2\frac{1}{2}\right)$

(viii) A(0, 4), B(4, 0)

## اختیاری مشق Optional Exercise



(جامع اکتساب کے لیے)

1- 'Q' دائرہ کا مرکز y-محور پر واقع ہے۔ اور دائرہ نقاط (0, 7) اور (0, -1) سے گزرتا ہے۔ دائرہ مثبت x-محور کو (P, 0) مختص پر قطع کرتا ہے۔ تب 'P' کی قدر معلوم کیجیے۔

2- ایک مثلث  $\Delta ABC$  مختصات A(2, 3) ' B(-2, -3) ' C(4, -3) سے بنتا ہے۔ A کا زاویے ناصف اور ضلع BC کا نقطہ تقاطع کیا ہوگا؟

3- مثلث  $\Delta ABC$  ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے جس کا ضلع BC x-محور کے متوازی ہے۔ ضلعوں BC ' CA اور AB کے ڈھال معلوم کیجیے؟

4- ایک قائم الزاویہ مثلث کے دو ضلع 'a' اور 'b' جہاں پر  $a > b$  ہیں، اگر قائم الزاویہ کا ناصف کھینچنے پر حاصل دو چھوٹے مثلثات کے راس سے کھینچے گئے عمودوار (بلندی) کے نقطہ تقاطع کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔ (مختصات کا استعمال کرتے ہوئے کیجیے)

5- خط  $2x+3y-6=0$  اور محوروں سے مل کر بننے والے مثلث کا مرکز وسطانیہ معلوم کیجیے۔

تجویز کردہ منصوبہ کام:

گرڈ پیپر کے استعمال سے اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو خطی قطعہ کو داخلاً تقسیم کرتا ہے۔

## ہم نے کیا سیکھا۔



- 1- دو نقاط  $P(x_1, x_2)$  اور  $Q(x_2, y_2)$  کا درمیانی فاصلہ  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  ہے۔
- 2- مبدا سے نقطہ  $P(x, y)$  اور  $P(x, y)$  کا درمیانی فاصلہ  $\sqrt{x^2 + y^2}$
- 3- دو نقاط  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_1, y_2)$  کا درمیانی فاصلہ جو  $y$ -محور کے متوازی خط پر واقع ہیں  $|y_2 - y_1|$  ہوتا ہے۔
- 4- دو مختصات  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  کا درمیانی فاصلہ جو  $x$ -محور کے متوازی ہے خط پر واقع ہیں  $|x_2 - x_1|$  ہوتا ہے۔
- 5- نقطہ  $P(x, y)$  جو نقاط  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_2, y_2)$  کو ملانے والے لختی قطعہ کو  $m_1 : m_2$  کی نسبت میں قطع کرتا ہے مختصات  $\left[ \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right]$  ہوں گے۔
- 6- نقاط  $P(x_1, y_1)$  اور  $Q(x_2, y_2)$  کو ملانے والے لختی قطعہ کا وسطی نقطہ  $\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$  ہوتا ہے۔
- 7- وہ مختص جو ہر وسطانیہ کو 1:2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے مثلث کا مرکز وسطانیہ کہلاتا ہے
- 8- مثلث کا مرکز وسطانیہ وہ نقطہ ہے جہاں پر مثلث کے تینوں وسطانیہ قطع ہوتے ہیں۔ لہذا مرکز وسطانیہ کے راس  $\left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$  ہوں گے۔
- 9- نقاط  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  اور  $(x_3, y_3)$  سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا ضابطہ  $\frac{1}{2} |x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)|$
- 10- مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا ہیرون ضابطہ  $A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \therefore S = \frac{a+b+c}{2}$  ( $\Delta ABC$  کے اضلاع  $a, b, c$  ہیں)
- 11- نقطہ  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  سے گزرنے والے خط کا ڈھال معلوم کرنے کا ضابطہ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

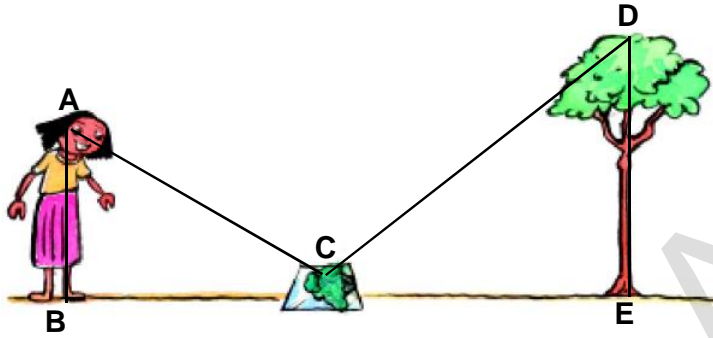


## مشابہ مثلثات

باب  
8

## Similar Triangles

## 8.1 تعارف



احمد کے مکان کے عقب میں ایک درخت ہے وہ اس کی بلندی معلوم کرنا چاہتا ہے لیکن وہ سوچ رہا ہے کہ اس درخت کی بلندی کیسے معلوم کرے۔ اسی دوران اس کے چچا اس کے گھر آتے ہیں۔ احمد ان سے کہتا ہے کہ اس مسئلہ پر اس کی مدد کریں۔ وہ کچھ دیر

کے لیے سوچتے ہیں اور اس سے کہتے ہیں کہ ایک آئینہ لاؤ۔ وہ درخت سے کچھ فاصلے پر آئینہ رکھتے ہیں اور احمد سے کہتے ہیں کہ وہ آئینہ کے دوسرے جانب کچھ فاصلے پر اس طرح ٹھہر جائے کہ اسکو درخت کی چوٹی آئینے میں نظر آئے۔

شکل کے مطابق ہم لڑکے کی بلندی AB، آئینہ C اور درخت DE کا خاکہ اوپر کی طرح بناتے ہیں تو ہمیں دو مثلثات ABC اور DEC حاصل ہوتے ہیں۔ اب بتائیے کہ آپ ان مثلثات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ کیا یہ مثلثات مماثل ہیں؟ نہیں! چونکہ ان کی شکلیں ایک جیسی ہے لیکن جسامت مختلف ہیں کیا آپ جانتے ہیں کہ ایک جیسی شکل رکھنے والی جیومیٹریائی اشکال کو ہم کیا کہتے ہیں؟ جبکہ یہ شکلیں ضروری نہیں کہ وہ ایک ہی جسامت رکھتی ہوں؟ ایسی اشکال مشابہ اشکال کہلاتی ہیں۔

کیا آپ اندازہ کر سکتے ہیں کہ درخت کی بلندیاں، پہاڑوں کی بلندی، دور کے اجسام کے فاصلے جیسے زمین سے سورج کا فاصلہ کیوں کر محسوب کیا جاتا ہے؟ کیا آپ سمجھتے ہیں کہ یہ فاصلے ایک پیمائشی ٹیپ کی مدد سے راست طور پر معلوم کئے جاسکتے ہیں؟ حقیقت یہ ہے کہ ایسی بلندیاں اور فاصلے اشکال کی مشابہت کے اصول کی بنیاد پر بلا واسطہ پیمائش سے معلوم کیے جاتے ہیں۔

## 8.2 مشابہ اشکال



شکل میں دی گئی کار کا مشابہہ کیجیے

اگر اس کی چوڑائی وہی رکھتے ہوئے لمبائی دوگنی کر دی جائے تب وہ شکل (ii) کی طرح نظر آئے گی

اگر شکل (i) کے مطابق اسکے طول کو وہی رکھ کر چوڑائی دوگنی کر دی جائے تو یہ شکل (iii) کی طرح نظر آئے گی۔  
 شکل (ii) اور شکل (iii) کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں کیسی ہیں۔ کیا یہ شکل (i) جیسی ہیں؟ یہ واضح ہو جاتا ہے کہ اصل شکل بدل دی گئی ہے کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ تینوں اشکال مشابہہ ہیں؟ نہیں۔ ان کی صورت ایک جیسی ہے لیکن یہ مشابہہ نہیں ہیں۔  
 ایک فوٹو گرافر کے بارے میں غور کیجیے جو ایک ہی فلم سے مختلف جسامت کے فوٹو گراف بناتا ہے آپ نے اسٹامپ سائز، پاسپورٹ سائز اور پوسٹ کارڈ سائز فوٹو کے متعلق سنا ہوگا عام طور پر ایک فوٹو گرافر (فوٹو کھینچنے والا) چھوٹی سی فلم (جیسے کہ 35mm جسامت والی) پر فوٹو کھینچتا ہے اور پھر اس کا بڑا سائز (45mm یا 55mm) بناتا ہے۔ ہمارا یہ مشاہدہ ہے کہ چھوٹی فوٹو کے تمام خطی قطعوں کو 35:45 (35:55) کی نسبت میں بڑا کیا جاتا ہے مزید یہ کہ دو مختلف سائز کے فوٹو میں زاویے مساوی ہوتے ہیں لہذا فوٹو مشابہہ ہیں۔



(i)



(ii)



(iii)

اسی طرح جیومیٹری میں مساوی ضلعوں کی تعداد رکھنے والے دو کثیر ضلعی اس وقت مشابہہ ہوں گے جب ان کے زاویے مساوی ہوں اور متناظر ضلعے (متناسب) ہوں۔

ایک کثیر ضلعی جس میں تمام ضلعے اور تمام زاویے مساوی ہوں منتظم کثیر ضلعی کہلاتی ہے۔

متناظر اضلاع کی نسبت کو اسکیل فیکٹر یا نمائندہ کسریا نمائندہ اسکیل کہا جاتا ہے۔ روزمرہ زندگی میں عمارتوں کی تعمیر کے لیے ان کا نقشہ ایسی ہی کسریا نمائندہ کسریا نمائندہ اسکیل کی مدد سے بنایا جاتا ہے۔

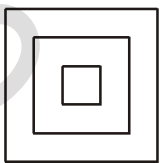
سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے



کیا آپ روزمرہ زندگی کی ایسی چند مثالیں دے سکتے ہیں جہاں کہ ہم نمائندہ اسکیل استعمال کرتے ہیں۔

تمام منتظم کثیر ضلعی اشکال جنکے ضلعوں کی تعداد ایک ہی ہوتی ہے ہمیشہ مشابہہ ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر تمام مربعے مشابہہ ہوتے ہیں، تمام مساوی الاضلاع مثلثات مشابہہ ہوتے ہیں۔ وغیرہ۔ وغیرہ

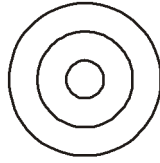
ایک ہی نصف قطر رکھنے والے دائرے مماثل ہوتے ہیں اور مختلف نصف قطر رکھنے والے دائرے غیر مماثل ہوتے ہیں لیکن چونکہ تمام دائرے یک جیسی شکل رکھتے ہیں اس لیے وہ مشابہہ ہوں گے۔



مشابہہ مربعے



مشابہہ مساوی الاضلاع مثلث



مشابہہ دائرے

ہم کہتے ہیں کہ تمام مماثل اشکال مشابہہ ہوتی ہیں لیکن تمام مشابہہ اشکال کا مماثل ہونا ضروری نہیں ہے۔

اشکال کی مشابہت کو واضح طور پر سمجھنے کے لیے ہم حسب ذیل مشغلہ انجام دیتے ہیں۔



کمرہ جماعت کے ایک میز کو نصب کردہ منور برقی بلب کے بالکل نیچے رکھے ایک کثیر ضلعی مثلث ABCD کو ایک سطح کارڈ بورڈ سے کاٹیں اور اسکو زمین کے متوازی میز اور برقی گولے کے درمیان رکھیں چار ضلعی ABCD کا سایہ میز پر پڑے گا اب میز پر چار ضلعی کے سایے پر 'A'B'C'D'' کا خاکہ کھینچیں۔

چار ضلعی 'A'B'C'D'' دراصل چار ضلعی ABCD کی توسیعی شکل ہے۔ اس کے علاوہ 'A' شعاع 'OA' پر واقع ہوتا ہے جہاں 'O' برقی گولا ہے اسی طرح 'B' 'OB' پر 'C' 'OC' اور 'D' 'OD' پر واقع ہیں۔ چار ضلعی ABCD اور 'A'B'C'D'' کی شکل ایک جیسی ہے۔ لیکن ان کی جسامت مختلف ہے۔

'A' اس 'A' کے متناظر ہے اور اسکو ہم علامتی طور پر 'A' سے تعبیر کرتے ہیں اسی طرح 'B' ↔ 'B', 'C' ↔ 'C', 'D' ↔ 'D' بھی لکھتے ہیں۔ لیکن زاویے اور ضلعوں کی پیمائش کی مدد سے آپ تصدیق کر سکتے ہیں۔

$$(i) \quad \angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D'$$

$$(ii) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} \quad \text{اور}$$

اس سے یہ واضح ہوتا ہے کہ دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد مساوی ہو مشابہ ہوتے ہیں اگر

(i) تمام متناظر زاویے مساوی ہو اور

(ii) تمام متناظر ضلع ایک ہی نسبت میں پائے جاتے ہوں۔

کیا ایک مربع مستطیل کے مشابہ ہو سکتا ہے؟ دونوں اشکال میں متناظر زاویے مساوی تو ہوتے ہیں لیکن ان کے متناظر اضلاع میں نسبت مساوی نہیں ہوتی ہے۔ لہذا مربع کسی مستطیل کے مشابہ نہیں ہو سکتا۔ کثیر ضلعی اشکال کے لیے مندرجہ بالا دونوں میں سے ایک شرط کافی نہیں بلکہ دونوں شرائط کا پورا ہونا ضروری ہے۔



سوچئے۔ تبادلہ خیال کیجئے

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ مربع اور معین مشابہ ہوں گے؟ اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجئے اور بتائیے کہ دونوں شرائط کیوں کافی نہیں ہیں۔

یہ کیجیے



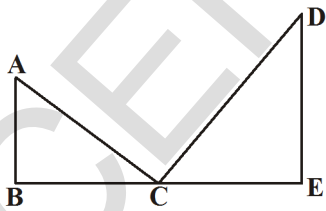
- 1- خالی جگہوں کو مشابہ/ غیر مشابہ سے پُر کیجیے۔
- (i) تمام مربّے \_\_\_\_\_ ہوتے ہیں۔
- (ii) تمام مساوی الاضلاع مثلثات \_\_\_\_\_ ہوتے ہیں۔
- (iii) تمام مساوی الساقین مثلثات \_\_\_\_\_ ہوتے ہیں۔
- (iv) کوئی دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد مساوی ہوئے \_\_\_\_\_ ہوتے ہیں جب کہ ان کے متناظر زاویے اور اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
- (v) کسی شے کی چھوٹی کی ہوئی اور بڑی کی ہوئی تصاویر \_\_\_\_\_ ہوتی ہے۔
- (vi) معین اور مربّے ایک دوسرے کے \_\_\_\_\_ ہوتے ہیں۔
- 2- حسب ذیل بیان کے لیے صادق/ کاذب لکھئے۔
- (i) کوئی دو مشابہہ اشکال مماثل ہوتی ہے،
- (ii) کوئی دو مماثل اشکال مشابہہ ہوتی ہیں۔
- (iii) دو کثیر ضلعی اس وقت مشابہہ ہوں گے جب ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں۔
- 3- حسب ذیل کی دو مختلف مثالیں دیجیے۔
- (i) مشابہ اشکال (ii) غیر مشابہ اشکال

### 8.3 مثلثات کی مشابہت (Similarity of Triangles)

دی ہوئی مثال میں ہم نے دو مثلثات بنائے ہیں یہ مثلثات مشابہت کی خصوصیت کو ظاہر کرتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ مثلثات اس وقت مشابہہ ہوتے ہیں اگر ان کے

(i) متناظر زاویے مساوی ہوتے ہیں (ii) متناظر ضلعے ایک ہی نسبت میں پائے جاتے ہیں

میں  $\triangle ABC$  اور  $\triangle DEC$



$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle ACB = \angle DCE$$

اور  $\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{DC}{AC} = K$  (نمائندہ اسکیل پر)

تب  $\triangle ABC$ ،  $\triangle DEC$  دونوں مشابہہ ہوں گے

علامتی طور پر ہم اس کو یوں لکھیں گے  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

(جہاں علامت '~' کو مشابہہ ہے پڑھا جائے گا)

جیسا کہ ہم نے بیان کیا ہے کہ 'K' نمائندہ اسکیل ہے لہذا

اگر  $K > 1$  ہو تب ہو تو اصل شکل سے بڑی شکل حاصل ہوگی

$K = 1$  ہو تب مماثل اشکال حاصل ہوگی

$K < 1$  ہو تب اصل اشکال سے چھوٹی اشکال حاصل ہوں گی





مزید مثلثات ABC اور DEC میں متناظر زاویے مساوی ہیں۔ اس لیے ان کو مساوی الزاویہ مثلثات کہا جاتا ہے کسی دو مساوی الزاویہ مثلثات میں کوئی دو متناظر اضلاع کی نسبت ہمیشہ مساوی ہوتی ہے اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم تناسب کے بنیادی مسئلہ استعمال ہوتا ہے اس مسئلہ کو تھیلیس کا مسئلہ بھی کہتے ہیں اس مسئلہ کو سمجھنے کے لیے آئیے پہلے حسب ذیل عملی کام کریں۔

مشغلہ

لیکروں والے کاغذ پر ایک مثلث اس طرح بنائے کہ اس کا قاعدہ کسی ایک لکیر پر ہو (شکل دیکھئے) مثلث ABC کوئی لکیریں قطع کریں گی ان میں کسی ایک لکیر (خط) کو منتخب کرتے ہوئے ان نقاط کا نام دیجیے جہاں یہ خط ضلع AB اور AC سے ملتا ہو۔ فرض کیجیے کہ یہ نقاط P اور Q ہیں۔  $\frac{AP}{PB}$  اور  $\frac{AQ}{QC}$  کی نسبت معلوم کیجیے۔ آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟

یہ نسبت مساوی ہوں گی۔ کیوں؟ کیا یہ ہمیشہ صحیح ہوتا ہے؟ مثلث کو قطع کرنے والی مختلف خطوط سے یہ تجربہ دوہرائیے۔ ہم یہ جانتے ہیں کہ کاغذ پر تمام خطوط متوازی ہوتے ہیں ہم یہ پائیں گے کہ ہر دفعہ نسبتیں مساوی ہوں گی۔

اس لیے  $\Delta ABC$  میں اگر  $PQ \parallel BC$  تب  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

یہ تناسب کے بنیادی مسئلہ کا نتیجہ کہلاتا ہے۔

### 8.3.1 تناسب کا بنیادی مسئلہ (تھیلیس کا مسئلہ)

مسئلہ 8.1: اگر کسی مثلث میں ایک خط کسی ضلع کے متوازی اس طرح کھینچا جائے کہ یہ باقی دو ضلعوں کو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہو تو یہ خط دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرے گا۔

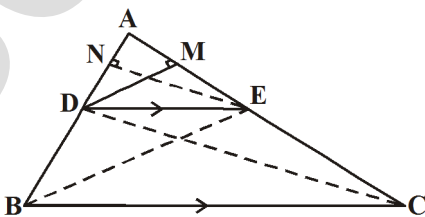
دیا گیا ہے کہ:  $\Delta ABC$  میں  $DE \parallel BC$  اور خط  $DE$  اضلاع  $AB$  اور  $AC$  کو ترتیب وار نقاط  $D$  اور  $E$  پر قطع کرتی ہے۔

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{مطلوب:}$$

بناوٹ:  $C, D$  اور  $B, E$  کو ملائیے اور  $DM \perp AC$  اور  $EN \perp AB$  بنائیے۔

$$\Delta ADE \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times AD \times EN \quad \text{ثبوت:}$$

$$\Delta BDE \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times BD \times EN$$





$$\frac{\text{کارقبہ } (\triangle ADE)}{\text{کارقبہ } (\triangle BDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times BD \times EN} = \frac{AD}{BD} \text{ --- اس لیے (1)}$$

$$\text{دوبارہ } \triangle ADE = \frac{1}{2} \times AE \times DM$$

$$\triangle CDE = \frac{1}{2} \times EC \times DM$$

$$\frac{(\triangle ADE)}{(\triangle CDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \text{ --- (2)}$$

غور کیجیے کہ  $\triangle BDE$  اور  $\triangle CDE$  ایک ہی قاعدہ  $DE$  پر واقع ہیں اور متوازی خطوط کے ایک ہی جوڑ  $BC$  اور  $DE$  کے درمیان ہیں۔

$$\text{اس لیے (3)} \quad (\triangle BDE) = (\triangle CDE) \dots$$

مساوات (1) اور (2) سے

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

ثابت کیا گیا۔

کیا اس مسئلہ کا برعکس بھی صادق ہوگا؟ یہ جاننے کے لیے آئیے ذیل کا عملی کام کریں۔

مشغلہ



اپنی نوٹ بک پر زاویہ  $XAY$  بنائیے اور شعاع  $AX$  پر نقاط  $B_1, B_2, B_3, B_4$  اور  $B$  کی اس طرح نشانہ ہی کیجیے کہ یہ بالترتیب مساوی فاصلہ پر ہوں۔

$$AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1 \text{ cm} \quad (\text{فرض کیجیے کہ})$$

اسی طرح شعاع  $AY$  پر نقاط  $C_1, C_2, C_3, C_4$  اور  $C$  کی اس طرح نشانہ ہی کیجیے کہ یہ

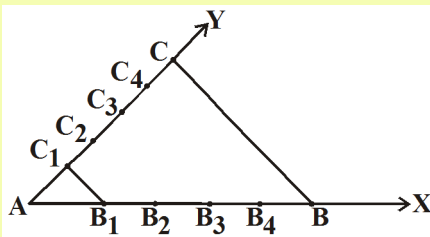
$$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2 \text{ cm} \quad (\text{فرض کیجیے کہ})$$

$B_1C_1$  اور  $B$  کو ملائیے

غور کیجیے کہ

$$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$$

اسی طرح  $B_2C_2$ ،  $B_3C_3$  اور  $B_4C_4$  کو ملانے پر آپ دیکھیں گے کہ



$$B_2C_2 \parallel BC \text{ اور } \frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$$

$$B_3C_3 \parallel BC \text{ اور } \frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$$

$$B_4C_4 \parallel BC \text{ اور } \frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$$

جانچئے کیا  $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3 \parallel B_4C_4 \parallel BC$

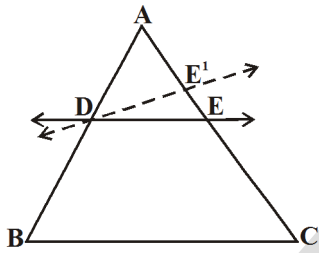
اس سے ہمیں ذیل کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے جو تھیلس کے مسئلہ کا برعکس مسئلہ کہلاتا ہے۔

**مسئلہ:** اگر کسی مثلث میں ایک خط اس کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تو یہ خط مثلث کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔

دیا گیا ہے کہ:  $\Delta ABC$  میں ایک خط  $DE$  اس طرح کھینچا گیا ہے کہ  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

مطلوب:  $DE \parallel BC$

ثبوت: فرض کیجئے کہ  $DE$  متوازی نہیں ہے  $BC$  کے۔ تب  $BC$  کے متوازی ایک خط  $DE'$  کھینچئے



اس لیے  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$  (کیوں؟)

$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$  (کیوں؟)

مندرجہ بالا مساوات میں دونوں جانب 1 جمع کرنے پر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $E$  اور  $E'$  ایک دوسرے سے منطبق ہوں (کیوں؟)

کوشش کیجئے

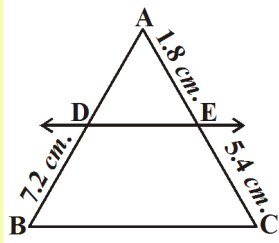


1-  $\Delta PQR$  میں بالترتیب اضلاع  $PQ$  اور  $PR$  پر نقاط  $E$  اور  $F$  ہیں۔ ذیل میں سے ہر ایک کے لیے بیان کیجئے کہ  $EF \parallel QR$  یا نہیں۔

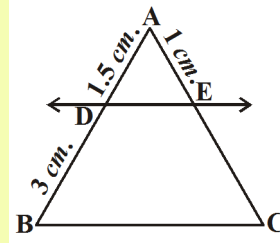
(i)  $FR = 2.4$  سم اور  $PF = 3.6$  سم اور  $EQ = 3$  سم اور  $PE = 3.9$  سم

(ii)  $PE = 4$  سم اور  $QE = 4.5$  سم اور  $PF = 8$  سم اور  $RF = 9$  سم

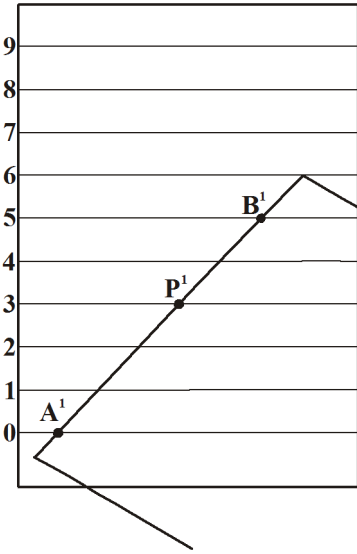
(iii)  $PQ = 1.28$  سم اور  $PR = 2.56$  سم اور  $PE = 1.8$  سم اور  $PF = 3.6$  سم

2- ذیل کی اشکال میں  $DE \parallel BC$ 

(ii) AD معلوم کیجیے



(i) EC معلوم کیجیے۔



بناوٹ: خطی قطعہ کی تقسیم (تھیلیس کے مسئلہ کے استعمال سے)

عائشہ نے ایک خطی قطعہ کھینچا۔ وہ اس خط کو 2:3 کی نسبت میں تقسیم کرنا چاہتی ہے۔ اس نے اسکیل کی مدد سے اس خط کی پیمائش کی اور مطلوبہ نسبت میں تقسیم کر دیا۔ اسی اثناء میں اس کی بڑی بہن وہاں پہنچی۔ بڑی بہن نے عائشہ کو مشورہ دیا کہ خطی قطعہ کو ناپے بغیر اسے 2:3 کی نسبت میں تقسیم کرے۔ عائشہ حیران ہوئی اور بہن سے کہا کہ اس کی مدد کرے۔ بڑی بہن نے عائشہ کو سمجھایا ذیل کے عملی کام کے ذریعہ آپ بھی کر سکتے ہیں۔

مشغلہ



لائنوں والی نوٹ بک سے ایک کاغذ نکالئے۔ صفحہ کے نیچے کی لائن 'O' سے شروع کرتے ہوئے لائنوں کو 1, 2, 3, ..... نمبرات دیجیے،

ایک موٹا کارڈ بورڈ پپر لیجیے (یا فائل کارڈ یا چارٹ کی چوڑی پٹی) اور اسے خطی قطعہ AB پر رکھئے اور اسکی لمبائی کو کارڈ پر نشان لگائیے



فرض کیجیے کہ A اور B کے متناظر نقاط فائل کارڈ پر A' اور B' ہیں۔

اب A' کو لائن والے کاغذ کی صفری لائن پر رکھتے ہوئے کارڈ بورڈ کو نقطہ A' پر اس

طرح گھمائیے کہ B' پانچویں لائن پر آجائے۔ یعنی (2+3) ویں لائن

اس نقطہ پر نشان P1 لگائے جہاں تیسری لائن کارڈ کو چھوتی ہو۔ اب دوبارہ کارڈ کو دی ہوئی لائن کے متوازی رکھئے اور نقطہ P1 کو منتقل

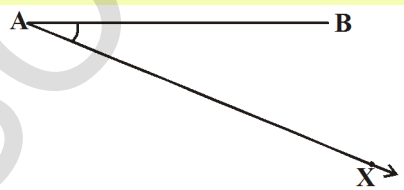
کیجیے اور P' سے ظاہر کیجیے لہذا P1 وہ نقطہ ہوگا جو ہمیں مطلوب ہے اور جو دیئے ہوئی خطی قطعہ کو 2:3 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آئیے اب یہ دیکھیں گے کہ یہ بناوٹ کس طرح کیجاتی ہے۔

ایک خطی قطعہ AB دیا گیا ہے

ہم اسے m:n کی نسبت میں تقسیم کرنا چاہیں گے (m اور n مثبت صحیح اعداد ہیں)

آئیے m=3 اور n=2 لیں



مراحل

1: A سے ایک شعاع AX اس طرح کھینچیے کہ یہ AB سے زاویہ حادہ بناتی ہو۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2019-20

2- A کو مرکز مان کر AX پر کسی بھی طول سے ایک قوس کھینچنے اور نقاط A1 کی نشاندہی کیجیے۔

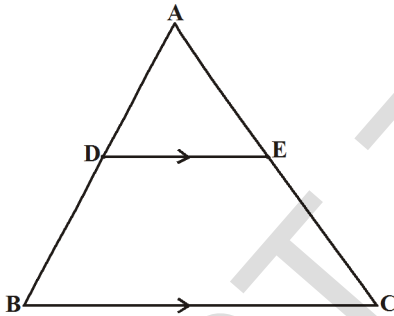
3- پر کارکی اسی دوری سے A1 کو مرکز مانتے ہوئے ایک اور قوس کھینچنے اور A2 کی نشاندہی کیجیے

4- اسی طرح 5 نقاط (m+n=5) A1, A2, A3, A4, A5 کی نشاندہی کیجیے

اس طرح کہ  $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$

5- A5B کو ملائیے۔ اب نقطہ A3 (m=3) سے ایک خط A3B کے متوازی  $\angle AA_5B$  کے مساوی زاویہ بناتے ہوئے اس طرح کھینچیے کہ جو AB کو C پر قطع کرتی ہو اور مشاہدہ کیجیے کہ  $AC : CB = 3 : 2$

آپ ہم تھیلس کے مسئلہ اور اسکے برعکس مسئلہ پر چند مثالیں حل کریں گے۔



مثال-1: مثلث ABC میں،  $DE \parallel BC$  اور  $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$

AC=5.6 ہو تو AE معلوم کیجیے

حل:  $DE \parallel BC$  میں  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{سے BPT})$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5} \quad \text{لیے اس لیے} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{5} \quad \text{لیکن}$$

دیا گیا ہے کہ  $AC = 5.6$  اور  $AE : EC = 3 : 5$

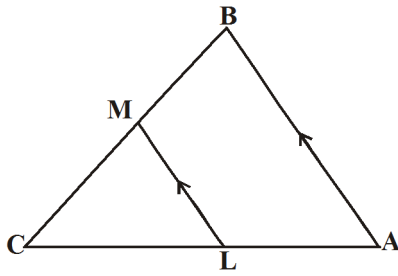
$$\frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5} \quad (\text{ضرب چلیپائی سے})$$

$$\frac{AE}{5.6 - AE} = \frac{3}{5} \quad (\text{ضرب چلیپائی})$$

$$5AE = (3 \cdot 5.6) - 3AE$$

$$8AE = 16.8$$

$$AE = \frac{16.8}{8} = 2.1 \text{ cm.}$$



مثال-2: دی ہوئی شکل میں  $LM \parallel AB$

$$AL = x - 3, AC = 2x, BM = x - 2$$

اور  $BC = 2x + 3$  کی قدر معلوم کرو؟

$\Delta ABC$  میں  $LM \parallel AB$

حل:

$$\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{BM}{MC} \quad \text{(B.P.T کی رو سے)}$$

$$\frac{x-3}{2x-(x-3)} = \frac{x-2}{(2x+3)-(x-2)}$$

$$\text{ضرب چلیپائی سے} \quad \frac{x-3}{x+3} = \frac{x-2}{x+5}$$

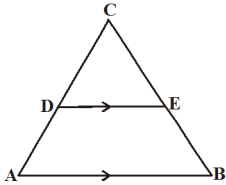
$$(x-3)(x+5) = (x-2)(x+3)$$

$$x^2 + 2x - 15 = x^2 + x - 6$$

$$\Rightarrow 2x - x = -6 + 15$$

$$x = 9$$

کوشش کیجیے



1- دی ہوئی شکل میں  $x$  کی کوئی قیمت (قیمتوں) کے لیے  $DE \parallel AB$  ہو جائے گا۔

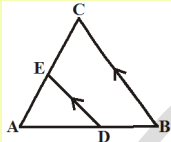
$$AD = 8x + 9, CD = x + 3$$

$$BE = 3x + 4, CE = x$$

2-  $\Delta ABC$  میں  $DE \parallel BC$ ،  $AD = x$ ،  $DB = x - 2$

$$EC = x - 1 \text{ اور } AE = x + 2$$

$x$  کی قدر معلوم کیجیے۔



مثال-3: ایک چار ضلعی ABCD کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ 'O' پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ  $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$  تب ثابت کیجیے کہ

ABCD ایک منحرف ہے۔

حل: دیا گیا ہے ABCD ایک چار ضلعی میں  $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

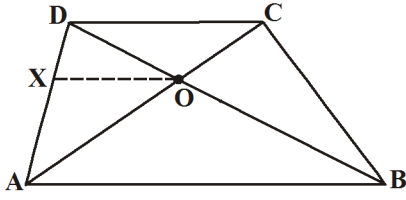
مطلوب: ABCD ایک منحرف ہے

بناوٹ: 'O' سے AB کے متوازی ایک خط اس طرح کھینچیے جو DA کو X پر قطع کرتا ہے

ثبوت:  $\Delta DAB$  میں  $XO \parallel AB$  (بناوٹ سے)

$$\Rightarrow \frac{DX}{XA} = \frac{DO}{OB} \quad \text{(متناسبت کے بنیادی مسئلہ کی رو سے)}$$





$$\frac{AX}{XD} = \frac{BO}{OD} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} \quad (\text{دیا گیا ہے})$$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{OD} \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{CO} \quad \text{کی رو سے (1) اور (2)}$$

$$\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{OC} \quad \text{کہ } \Delta ADC \text{ میں } XO \text{ ایک خط اس طرح ہے کہ}$$

$$\Rightarrow XO \parallel DC \quad (\text{متناسبیت کا بنیادی مسئلہ کا برعکس})$$

$$\Rightarrow AB \parallel DC$$

چار ضلعی ABCD میں  $AB \parallel DC$

$\Leftarrow$  ABCD ایک منحرف ہے (تعریف سے)

لہذا ثابت ہوا

**مثال-4:** ایک منحرف ABCD میں  $AB \parallel DC$  نقطہ E اور F غیر متوازی اضلاع AD اور BC پر اس طرح واقع ہیں کہ  $EF \parallel AB$

$$\text{ثابت کیجیے} \quad \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

**حل:** A, C کو اس طرح ملائیے کہ EF کو G پر قطع کرے

$$EF \parallel AB \text{ اور } AB \parallel DC \quad (\text{دیا گیا ہے})$$

$$\Rightarrow EF \parallel DC \quad (\text{ایک خط کے متوازی خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں})$$

$\Delta ADC$  میں  $EG \parallel DC$

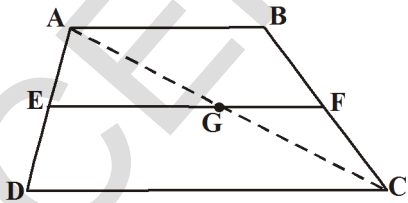
$$\text{اس لیے (1) } \frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC} \dots\dots\dots(1) \quad (\text{متناسبیت کا بنیادی مسئلہ کی رو سے})$$

اسی طرح مثلث CAB میں  $GF \parallel AB$

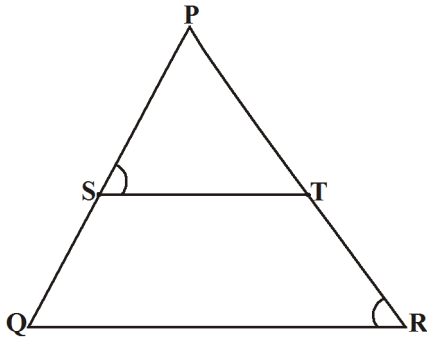
$$\frac{CG}{GA} = \frac{CF}{FB} \quad (\text{متناسبیت کا بنیادی مسئلہ کی رو سے})$$

$$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \quad \text{یعنی (2) } \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \quad \text{کی رو سے (1) اور (2)}$$



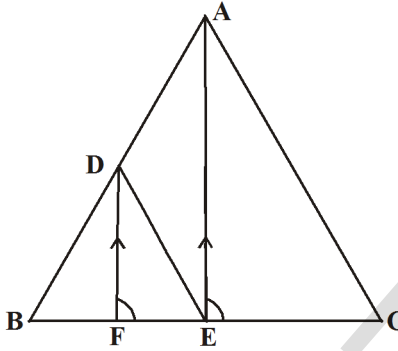
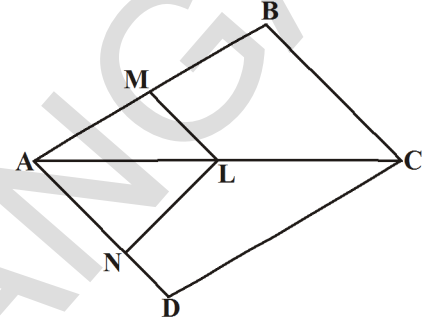
## مشق - 8.1



1- مثلث PQR میں ایک خط ہے اس طرح کہ  $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$  اور مزید  $\angle PST = \angle PRQ$  ثابت کیجیے کہ  $\Delta PQR$  ایک مثلث مساوی الساقین ہے۔

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$

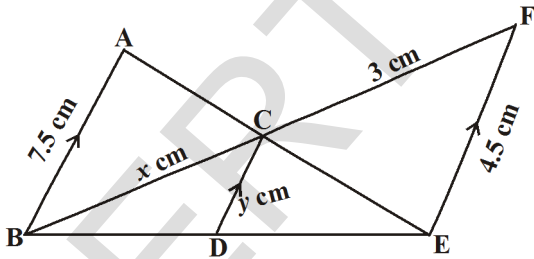
2- دی گئی شکل میں  $LM \parallel CB$  اور  $LN \parallel CD$  ثابت کیجیے کہ



3- دی گئی شکل میں  $DF \parallel AE$  اور  $DE \parallel AC$  ثابت کیجیے کہ  $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$

4- ثابت کیجیے کہ مثلث کے ایک ضلع کے نقطہ وسطی سے دوسرے ضلع کے متوازی کھینچا گیا خط تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔ (متناسبت کے بنیادی مسئلہ کے استعمال سے)

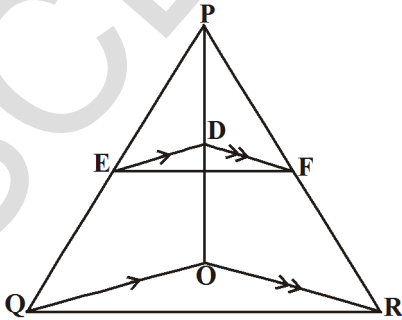
5- ثابت کیجیے کہ مثلث کے کوئی دو ضلعوں کے نقاط وسطی کو ملانے والا خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔ (متناسبت کے بنیادی مسئلہ کے استعمال سے)



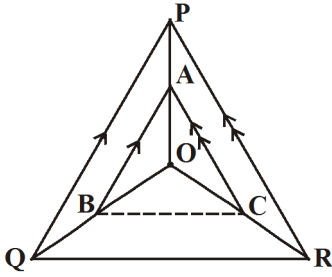
6- دی گئی شکل میں  $AB \parallel CD \parallel EF$  دیا گیا ہے کہ  $AB =$

$7.5 \text{ cm}$ ،  $DC = y \text{ cm}$ ،  $EF = 4.5 \text{ cm}$  اور  $BC = x \text{ cm}$

کی قدریں معلوم کیجیے۔



7- دی گئی شکل میں  $DE \parallel OQ$  اور  $DF \parallel OR$  بتائیے کہ  $EF \parallel QR$



8- متصلہ شکل میں نقاط 'A'، 'B' اور 'C' بالترتیب 'OP'، 'OQ' اور 'OR' پر تین نقاط ہیں۔ کہ

ثابت کیجیے کہ  $AC \parallel PR$  اور  $AB \parallel PQ$

9- ABCD ایک منحرف ہے جس میں  $AB \parallel DC$  اور اس کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ 'O' پر قطع کرتے ہیں ثابت کیجیے کہ

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

10- ایک خطی قطعہ کھینچیے جس کی لمبائی 7.2 ہو اور اسے 5:3 کی نسبت میں تقسیم کیجیے دونوں حصوں کی پیمائش کیجیے۔

سوچیے۔ متبادلہ خیال کیجیے



اپنے ساتھیوں سے متبادلہ خیال کیجیے کہ مثلثات کی مشابہت دیگر کثیرضلعی کی مشابہت سے کس طرح مختلف ہے؟

### 8.4 مثلثات کی مشابہت کا پیمانہ/معیار

ہم جانتے ہیں کہ دو مثلثات اس وقت مشابہہ ہوں گے جب ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں اور متناظر اضلاع متناسب ہوں۔ کوئی مثلثات کی مشابہت کی جانچ کے لیے ہم متناظر زاویوں کے مساوی ہونے اور متناظر اضلاع کی نسبت کے مساوی ہونے کی جانچ کریں گے۔ دو مثلثات کی مشابہت کی جانچ کے لیے آئیے کسی معیار کے قائم کرنے کی کوشش کریں گے۔ آئیے مندرجہ ذیل عملی کام انجام دیں۔

### مشغلہ

مثلثات بنانے کے لیے چاندے اور پٹری کا استعمال کریں اس طرح کہ ہر مثلث میں  $40^\circ$  اور  $60^\circ$  کے زاویے ہوں۔

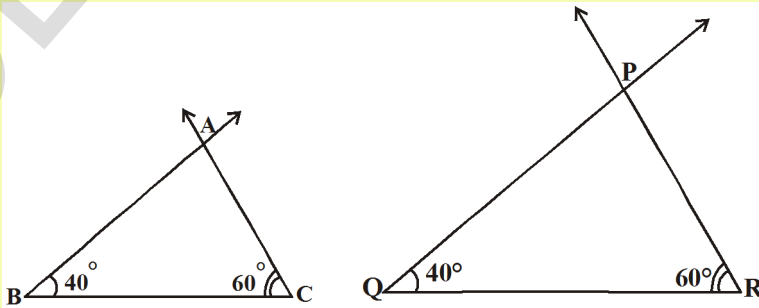


اپنی بنائی ہوئی اشکال کی جانچ کہ تیسرے زاویے کی پیمائش کے ذریعہ کیجیے۔

یہ  $80^\circ$  ہونا چاہیے (کیوں؟)

مثلثات کے ضلعوں کی پیمائش کیجیے اور ان کے متناظر اضلاع کی نسبتوں کو محسوب کیجیے

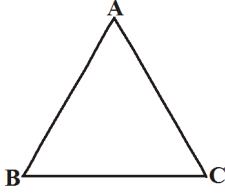
کیا یہ مثلثات مشابہہ ہیں؟



اس عملی کام سے ہمیں دو مثلثات

## 8.4.1 مثلثات کی مشابہت کے لیے AAA معیار

**مسئلہ 8.3:** دو مثلثات میں اگر نظیری زاویے مساوی ہوں تب ان کے نظیری اضلاع ایک ہی نسبت میں ہوں گے اور یہ دو مثلثات مشابہہ ہوں گے۔



دیا گیا ہے کہ مثلثات ABC اور DEF میں

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \text{ مطلوب:}$$

**ثبوت:** فرض کرو کہ  $DE > AB$  اور DF پر بالترتیب نقاط P اور Q لیجئے اس طرح کہ  $AB = DP$  اور  $AC = DQ$  کو ملائیے۔

$$\Delta ABC \cong \Delta DPQ \text{ (کیوں؟)}$$

اس حاصل ہوتا ہے۔  $\angle B = \angle P = \angle E$  اور  $PQ \parallel EF$  (کسے مرچ؟)

$$\therefore \frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF} \text{ (کیوں؟)}$$

$$\text{یعنی (کیوں؟)} \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\text{اسی طرح } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \text{ اور اس لیے } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

لہذا ثابت ہوا

**نوٹ:** اگر ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں تب (مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خصوصیت کی رو سے) تیسرا زاویہ یہ بھی مساوی ہوگا۔

اس لیے AA مشابہت کے معیار کو اس طرح بیان کیا گیا ہے کہ ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں دونوں مثلثات مشابہہ ہوں گے۔

مذکورہ بالا بیان کے برعکس بیان کے متعلق آپ کی کیا رائے ہے؟

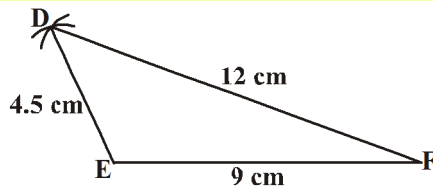
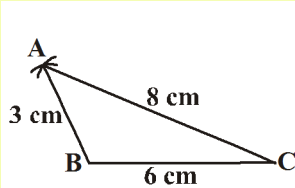
اگر ایک مثلث کے اضلاع ترتیب وار ایک دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہوں تو یہ درست ہوگا کہ ان کے متناظر زاویے بھی مساوی ہوں گے۔

آئیے اسے ایک عملی کام سے سمجھنے کی کوشش کریں۔

مشغلہ



دو مثلثات ABC اور DEF اس طرح کھینچئے کہ  $AB = 3$  سم،  $BC = 6$  سم،  $CA = 8$  سم،  $DE = 4.5$  سم،  $EF = 9$  سم اور  $FD = 12$  سم



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{2}{3} \text{ ہاں لیے ہمارے ہاں}$$

اب دونوں مثلثوں کے زاویوں کی پیمائش کیجیے آپ نے کیا مشاہدہ کیا۔ متناظر زاویوں کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ یہ مساوی ہیں اس لیے مثلثات مشابہ ہوں گے اس بات کی آپ تصدیق مختلف مثلثات سے کر سکتے ہیں۔  
مذکورہ بالا عملی کام سے ہم مثلثات کی مشابہت کا حسب ذیل معیار قائم کر سکتے ہیں۔

### 8.4.2 ضلع ضلع مشابہت کا معیار

مسئلہ 8.4: اگر کوئی دو مثلثات میں ایک مثلث کے اضلاع دوسرے مثلث کے اضلاع سے تناسب میں ہوں تو ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں گے۔ اور تب یہ مثلثات مشابہ ہوں گے۔

دیا گیا ہے کہ  $\triangle ABC$  اور  $\triangle DEF$  اس طرح ہیں کہ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \quad (<1)$$

مطلوب:  $\angle C = \angle F$ ،  $\angle B = \angle E$ ،  $\angle A = \angle D$

بناوٹ: فرض کرو کہ:  $DE > AB$  اور  $DF > AC$  پر بالترتیب P اور Q کے نقاط اس

طرح لیجیے کہ  $AB = DP$  اور  $AC = DQ$  ہوں PQ کو ملائیے۔

ثبوت:  $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$  اور  $PQ \parallel EF$  (کیوں؟)

اس لیے  $\angle P = \angle E$  اور  $\angle Q = \angle F$  (کیوں؟)

$$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$$

$$\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad (\text{کیوں؟})$$

اس لیے  $BC = PQ$  (کیوں؟)

$\triangle ABC \cong \triangle DPQ$  (کیوں؟)

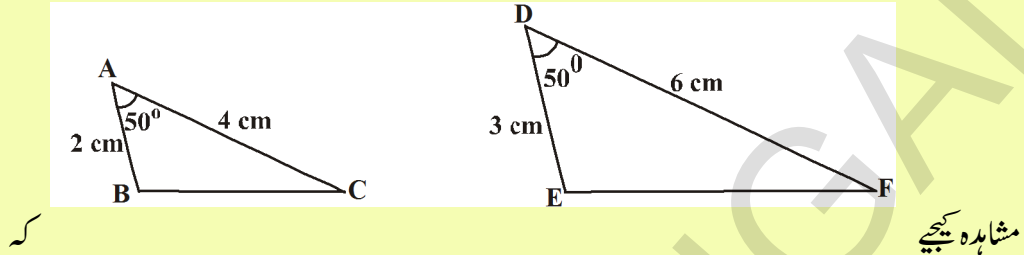
اس لیے  $\angle A = \angle D$ ،  $\angle B = \angle E$  اور  $\angle C = \angle F$  (کیسے؟)

ہم نے دیکھا کہ دو کثیرضلعی کی مشابہت کے لیے کوئی ایک شرط کافی نہیں ہے لیکن مثلثات کی مشابہت کے لیے دونوں شرائط کی تکمیل ضروری نہیں چونکہ ایک شرط از خود دوسری شرط کو پورا کر دیتی ہے۔ اب ہم SAS مشابہت کے معیار پر غور کریں گے اس کے لیے آئیے حسب ذیل عملی کام انجام دیں۔

مشغلہ



دو مثلثات ABC اور DEF اس طرح بنائے کہ  $AB=2$  سم،  $\angle A=50^\circ$ ،  $AC=4$  سم،  $DE=3$  سم اور  $\angle D=50^\circ$  اور  $DF=6$  سم



مشاہدہ کیجیے

$$\angle A = \angle D = 50^\circ \text{ اور } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$$

اب  $\angle B, \angle C, \angle E, \angle F$  کی پیمائش کیجیے اور BC اور EF کی بھی پیمائش کیجیے۔

$$\frac{BC}{EF} = \frac{2}{3} \text{ علاوہ اس کے } \angle C = \angle F \text{ اور } \angle B = \angle E \text{ غور کیجیے کہ}$$

اس لیے دو مثلثات مشابہ ہوں گے اس مشغلہ کو مختلف پیمائشات کی مثلثات کے لیے دوہرائیے جس سے آپ کو مثلثات کی مشابہت کا

حسب ذیل معیار معلوم ہوگا۔

### 8.4.3 مثلثات کے مشابہت کے لیے SAS معیار

**مسئلہ 8.5:** اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویے کے مساوی ہو اور اس زاویہ کو گھیرنے والے ضلعے متناسب ہوں تو

دو مثلثات مشابہ ہوں گے۔

$$\angle A = \angle D \text{ اور } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} (< 1) \text{ دیا گیا ہے}$$

مطلوب:  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

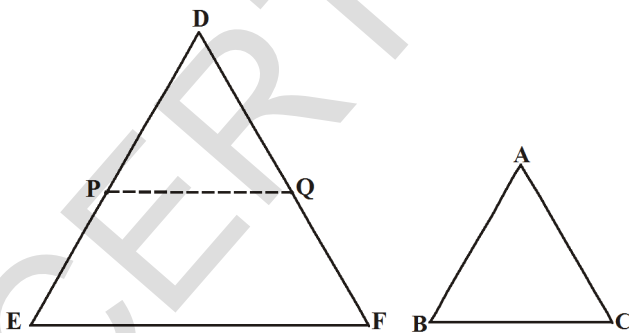
بناوٹ: DE اور DF پر دو نقاط P اور Q اس طرح لیجیے کہ

$$AB=DP \text{ اور } AC=DQ \text{ کو ملائیے۔}$$

ثبوت:  $PQ \parallel EF$  اور  $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$  (کیسے؟)

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle P, \angle C = \angle Q \text{ اس لیے}$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ (کیوں؟)}$$

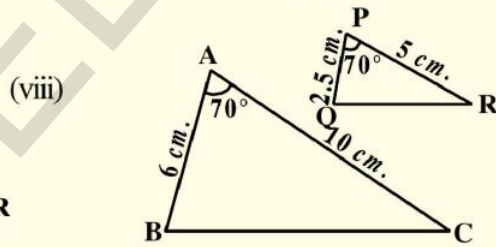
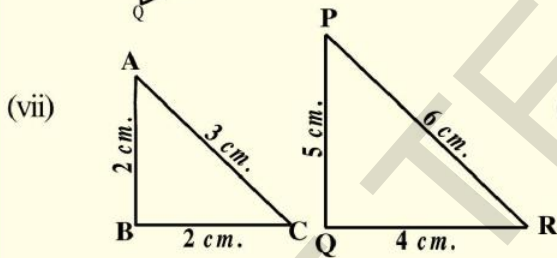
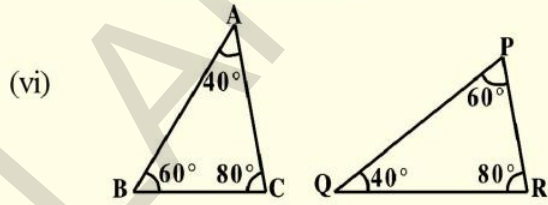
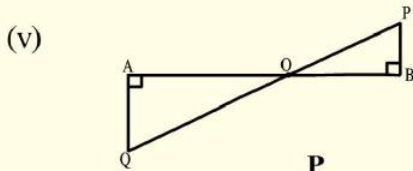
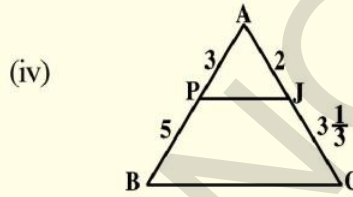
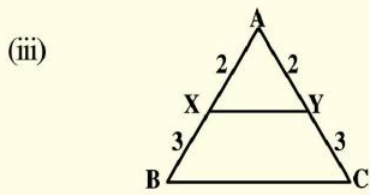
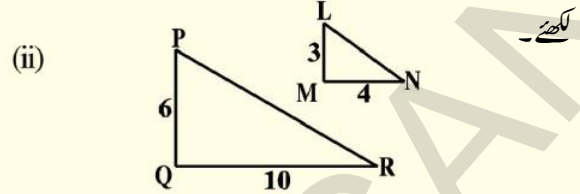
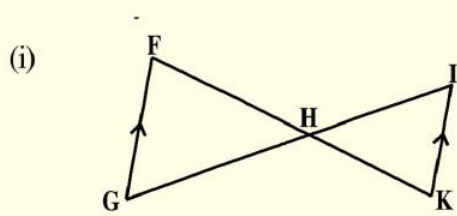




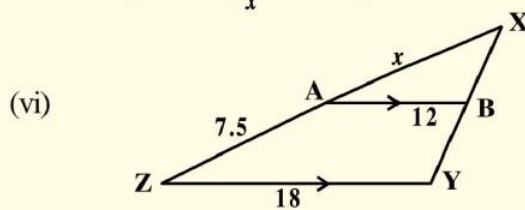
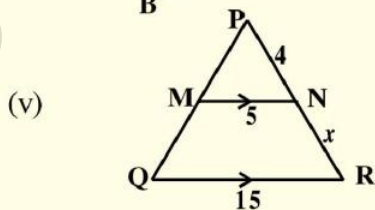
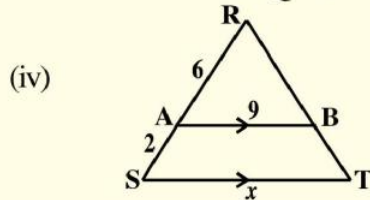
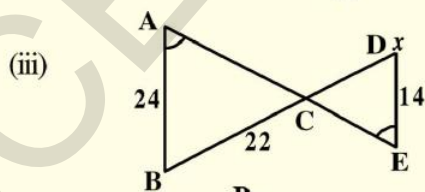
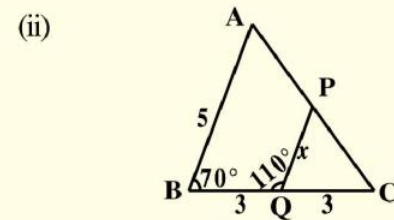
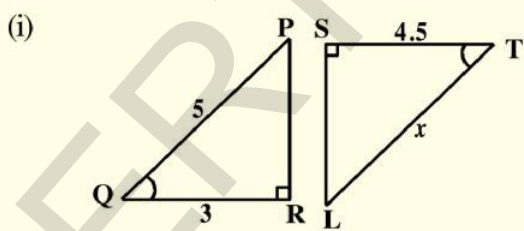
کوشش کیجیے

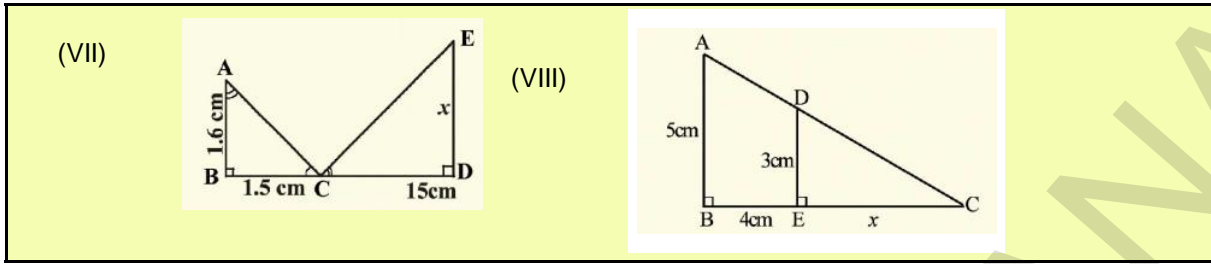


1- کیا یہ مثلثات مشابہہ ہیں؟ اگر مشابہہ ہیں بتائیے اور مشابہت کی کس خصوصیت کے تحت مشابہہ ہیں مشابہت کے رشتہ کو علامتی شکل میں لکھئے۔



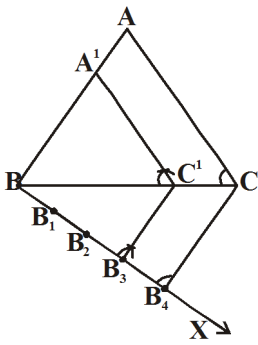
2- اگر مثلثات کے جوڑ مشابہہ ہیں تب  $x$  کی قدر کی معلوم کیجیے۔





بناوٹ: دیئے گئے نمائندہ پیمانہ (اسکیل فیا کٹر) کے مطابق دیئے ہوئے مثلث کی مشابہہ مثلث بنانا

(a) دیئے گئے مثلث ABC کے مشابہہ مثلث بناؤ جس کے ضلع 'ABC کے متناظر اضلاع کے  $\frac{3}{4}$  کے مساوی ہوں (اسکیل فیا کٹر  $\frac{3}{4}$ )



مرحلے 1: راس A کے مخالف ضلع BC کے ساتھ زاویہ جاڑہ بناتے ہوئے ایک شعاع BX کھینچئے۔

2: BX پر چار نقاط  $B_1, B_2, B_3, B_4$  اور  $C_1, C_2, C_3, C_4$  کے اس طرح کھینچئے کہ

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$$

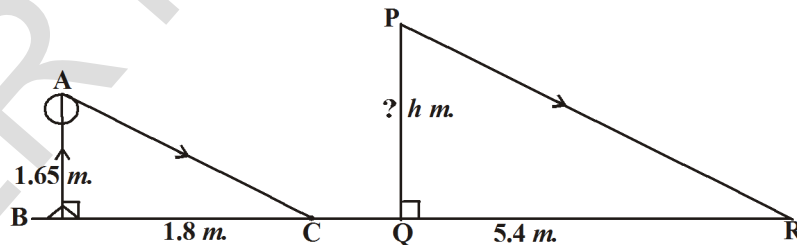
3:  $B_4C$  کو ملائیے اور  $B_3$  سے ایک خط کھینچئے جو  $B_4C$  کے متوازی ہو جو BC کو 'C' پر قطع کرتا ہو،

4: 'C' سے ایک خط کھینچئے جو CA کے متوازی ہو اور AB کو 'A' پر قطع کرے۔

اس لیے  $\triangle A'B'C'$  ایک مطلوبہ مثلث ہے۔

آئیے ان اصولوں کی وضاحت کے لیے بعض مثالوں پر غور کریں۔

**مثال-5:** ایک آدمی کا قد 1.65 میٹر ہے جبکہ زمین پر اس کا سایہ 1.8 میٹر پڑتا ہے اسی وقت ایک قدیل کے کھجے کا سایہ 5.4 میٹر حاصل ہوتا ہے بتائیے کہ اس کھجے کی لمبائی کیا ہے۔



حل:  $\triangle ABC$  اور  $\triangle PQR$  میں

$$\angle B = \angle Q = 90^\circ$$

(کسی بھی وقت سورج کی تمام شعاعیں متوازی ہوتی ہیں)  $\angle CAC \parallel PR = \angle R$

(AA مشابہت سے)  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

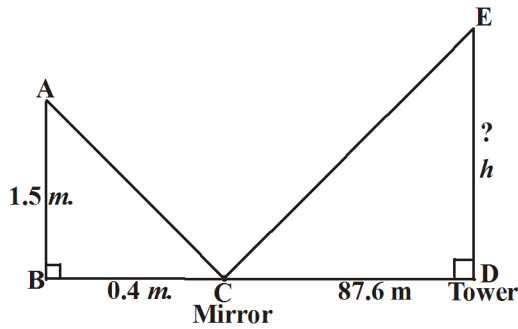
$$(\text{مشابہہ مثلثات متناسب ضلع}) \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\frac{1.65}{PQ} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$PQ = \frac{1.65 \times 5.4}{1.8} = 4.95m$$

کھمبے کی لمبائی 4.95 میٹر ہے۔

**مثال-6:** ایک آدمی 87.6 میٹر کے فاصلے سے ایک ٹاور کو آئینے میں دیکھتا ہے۔ آئینہ زمین پر رکھا ہوا ہے۔ اگر آدمی آئینے سے 0.4 میٹر کے فاصلے پر ہو اور اس کا قد 1.5 میٹر ہو تو بتاؤ کہ ٹاور کتنا لمبا ہے؟



**حل:**  $\Delta ABC$  اور  $\Delta EDC$  میں

$$\angle ABC = \angle EDC = 90^\circ$$

$$\angle BCA = \angle DCE \text{ (زاویے وقوع اور زاویہ انعکاس متماثل)}$$

(ہوتے ہیں)

$$\Delta ABC \sim \Delta EDC \text{ (AA مشابہت)}$$

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1.5}{h} = \frac{0.4}{87.6}$$

$$h = \frac{1.5 \times 87.6}{0.4} = 328.5m$$

اس لیے ٹاور کی لمبائی 328.5 میٹر ہے۔

**مثال-7:** ندیم کو اس بات پر الجھن ہے کہ اس کا پڑوسی اپنی چھت سے ندیم کے کمرے میں دیکھ سکتا ہے۔ اس نے اپنی چھت کی کھڑکی سے ہونے والی بے پردگی کو ختم کرنے کے لیے دیوار اونچی کرنے کا فیصلہ کیا۔ دیوار کی اونچائی کیا ہونی چاہیے۔

**حل:**  $\Delta ABD$  اور  $\Delta ACE$  میں

$$\angle B = \angle C = 90^\circ$$

$$\angle A = \angle A \text{ (مشترکہ زاویہ)}$$

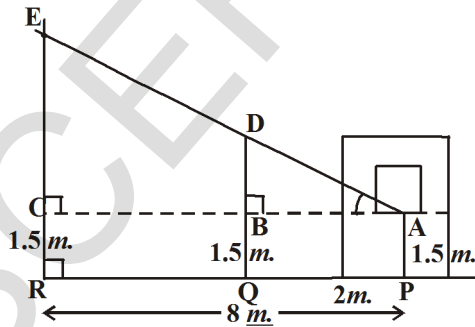
$$\Delta ABD \sim \Delta ACE \text{ (زاویہ زاویہ مشابہت)}$$

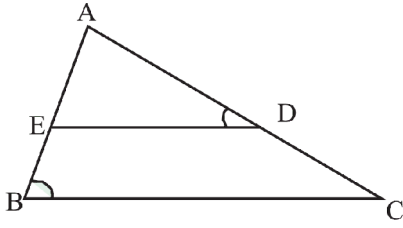
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BD}{1.2}$$

$$BD = \frac{2 \times 1.2}{8} = \frac{2.4}{8} = 0.3m$$

حصار بندی کی دیوار کی مطلوبہ بلندی 1.5+0.3=1.8m ہوگی۔

میٹر تاکہ پڑوسی کے نظارہ کو روکا جاسکے





## مشق 8.2



1- دی ہوئی شکل میں  $\angle ADE = \angle B$

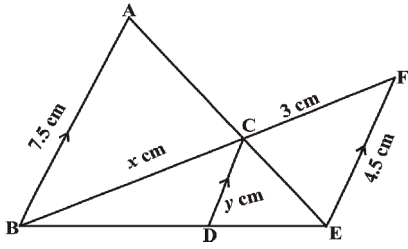
(i) بتائیے کہ  $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

(ii) اگر  $AD = 3.8$  سمر،  $AE = 3.6$  سمر

2.1 سمر  $BE$ ،  $4.2$  سمر  $BC$  ہو تو  $DE$  معلوم کیجیے

2- دو مشابہہ مثلثات کے احاطے ترتیب وار 30 سمر اور 20 سمر ہیں۔ اگر پہلے مثلث کا ایک ضلع 12 سمر ہو تو دوسرے مثلث کا متناظر

ضلع معلوم کیجیے؟



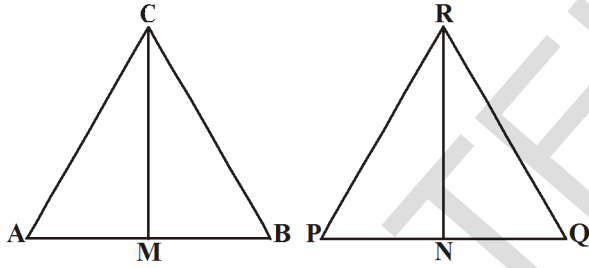
3- دی گئی شکل میں  $AB \parallel CD \parallel EF$  اور دیا گیا ہے۔  $AB = 7.5$  سمر،

$DC = y$  سمر،  $EF = 4.5$  سمر،  $BC = x$  سمر،  $BC$  تب  $x$  اور  $y$  کی

قدریں معلوم کیجیے۔

4- 90 سمر قد کی ایک لڑکی قدیل کے کھبے سے 12 میٹر فی سکینڈ کی رفتار سے دور ہو رہی ہے۔ اگر قدیل کے کھبے کی اونچائی 3.6 میٹر

ہو تو 4 سکینڈ بعد لڑکی کے سایہ کی لمبائی کیا ہوگی؟



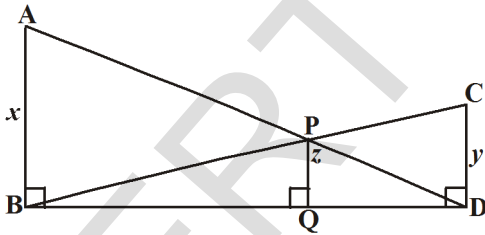
5-  $CM$  اور  $RN$  بالترتیب دو مثلثات  $\Delta ABC$  اور  $\Delta PQR$  کے

وسطیے ہیں اور  $\Delta ABC \sim \Delta PNR$  تو ثابت کیجیے کہ

(i)  $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii)  $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii)  $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$



6- منحرف ABCD کے وتر AC اور BD ایک دوسرے کو نقطہ

O پر قطع کرتے ہیں۔ جبکہ  $AB \parallel OC$ ۔ دو مثلثات کی مشابہت کے

اصول سے ثابت کیجیے کہ  $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

7- دی ہوئی شکل میں AB، CD، PQ اور BD کے عمود ہیں جبکہ  $AB = x$ ،  $CD = y$  اور  $PQ = z$  ہو تو ثابت کیجیے کہ  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

8- 6 میٹر بلند ایک جھنڈے کے کھبے کا 6 میٹر لمبا سایہ حاصل ہوتا ہے اسی وقت قریب کی ایک عمارت کا سایہ 24 میٹر ہے بتائیے کہ

عمارت کی لمبائی کیا ہے؟

9-  $\angle EGF$  اور  $\angle ACB$  کے ناصف ہیں اس طرح کہ D اور H بالترتیب  $\Delta ABC$  اور  $\Delta EFG$  کے

اضلاع AB اور FE پر واقع ہیں۔ اگر یہ دونوں مثلثات مشابہہ ہوں تو ثابت کیجیے

(i)  $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$  (ii)  $\Delta DCB \sim \Delta HGE$  (iii)  $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

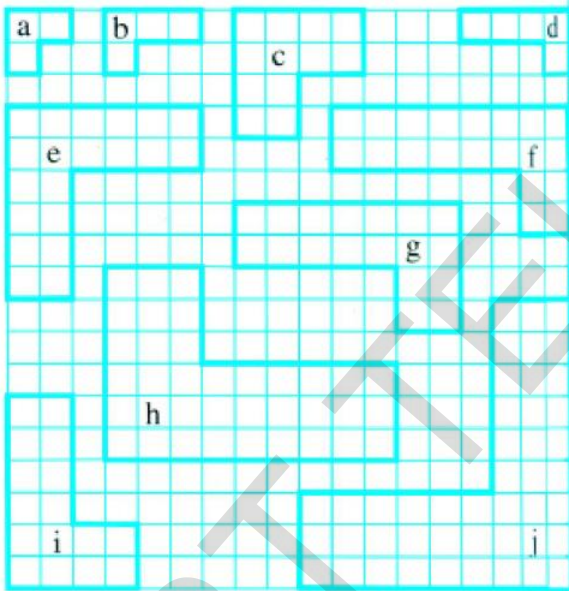
10- AX اور DY دو مشابہہ مثلثات  $\Delta ABC$  اور  $\Delta DEF$  کے عمود ہیں۔ ثابت کیجیے کہ  $AX : DY = AB : DE$

11-  $\Delta ABC$  کے مشابہہ ایک مثلث بنائیے جس کے ضلعے  $\Delta ABC$  کے متناظر اضلاع کے  $\frac{5}{3}$  مساوی ہوں۔

12- ایک مثلث بنائیے جس کے اضلاع کی لمبائی 4 سمر، 5 سمر اور 6 سمر ہے تب اسی مثلث کے مشابہہ ایک اور مثلث بنائیے جس کے متناظر اضلاع کی نسبت پہلے مثلث کے متناظر اضلاع کا  $\frac{2}{3}$  ہو۔

13- اک مثلث مساوی الساقین بنائیے جس کا قاعدہ 8 سمر اور ارتفاع 4 سمر ہو۔ پھر ایک اور مثلث بنائیے جس کے متناظر اضلاع ' مثلث مساوی الساقین کے متناظر اضلاع کے  $1\frac{1}{2}$  گنا ہو۔

### 8.5 مشابہہ مثلثات کے رقبے



دو مشابہہ مثلثات کے لیے ان کے متناظر اضلاع کی نسبت مساوی ہوتی ہے کیا ان کے رقبوں کی نسبت اور متناظر اضلاع کی نسبت میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے۔ اس بات کو سمجھنے کے لیے ہم حسب ذیل عملی کام پر غور کریں۔



مشغلہ

اس شکل میں مشابہہ کثیر ضلعی کی جوڑیوں کی فہرست تیار کیجیے

معلوم کیجیے

(i) مشابہت کی نسبت (اسکیل فی ایکٹر)

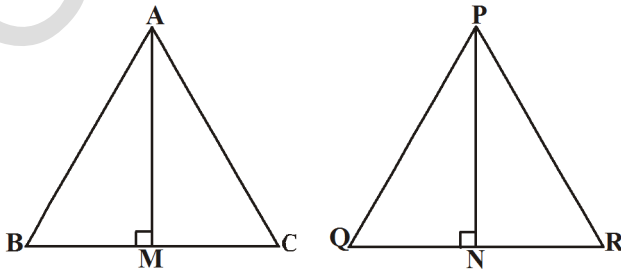
(ii) رقبوں کی نسبت

آپ دیکھیں گے کہ رقبوں کی نسبت ان کے متناظر ضلعوں کی نسبت کے مربع کے مساوی ہونگے۔

آئیے اس بات کو ہم اک مسئلہ کے طور پر ثابت کریں گے۔

**مسئلہ 8.6:** دو مشابہہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

دیا گیا ہے :  $\Delta ABC \sim \Delta PQR$



$$\frac{\text{کارتبہ } (\Delta ABC)}{\text{کارتبہ } (\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2 \quad \text{مطلوب:}$$

بناوٹ:  $PN \perp QR$  اور  $AM \perp BC$  بنائے

$$\frac{\text{کارتبہ } (\Delta ABC)}{\text{کارتبہ } (\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \quad \text{ثبوت: (i)}$$

$\Delta PQR$  اور  $\Delta ABM$  میں

$$(\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR) \angle B = \angle Q$$

$$\angle M = \angle N = 90^\circ$$

$\therefore \Delta ABM \sim \Delta PQR$  (زاویہ زاویہ مشابہت کی رو سے)

$$\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} \dots\dots\dots(2)$$

اور  $\Delta ABC \sim \Delta PQR$  (دیا گیا ہے)

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \dots\dots\dots(3)$$

(1) اور (2) کی مدد سے

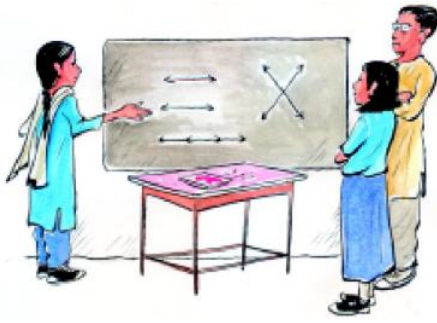
$$\begin{aligned} \therefore \frac{\text{کارتبہ } (\Delta ABC)}{\text{کارتبہ } (\Delta PQR)} &= \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ} \\ &= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 \end{aligned}$$

مساوات (3) کے استعمال سے

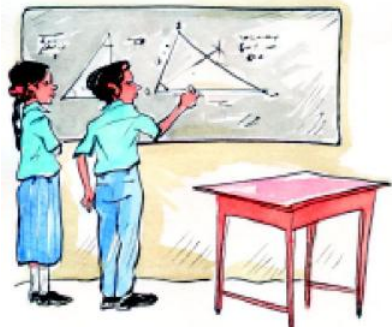
$$\frac{\text{کارتبہ } (\Delta ABC)}{\text{کارتبہ } (\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

تب ثابت ہوا

آئیے اب ہم بعض مثالوں پر غور کریں گے۔







**مثال-8:** ثابت کیجیے کہ اگر دو مشابہ مثلثات کے رقبہ مساوی ہوں، تب وہ مماثل ہوں گے

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR \quad \text{حل:}$$

$$\frac{\text{رقبہ } (\Delta ABC)}{\text{رقبہ } (\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 \quad \text{اس لیے}$$

$$\left(\frac{\Delta ABC}{\Delta PQR}\right) = 1 \quad \text{لیکن} \quad (\because \text{ رقبہ مساوی ہیں})$$

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = 1$$

$$\therefore AB^2 = PQ^2$$

$$BC^2 = QR^2$$

$$AC^2 = PR^2$$

جس سے ہم کو حاصل ہوتا ہے  $AB = PQ$

$$BC = QR$$

$$AC = PR$$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$  (ضلع ضلع مماثلت کی رو سے)

**مثال-9:**  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$  اور ان کے رقبہ بالترتیب 64 مربع سمر اور 121 مربع سمر ہیں۔ اگر  $EF = 15.4$  سمر، تب  $BC$  معلوم کیجیے۔

$$\frac{\text{رقبہ } (\Delta ABC)}{\text{رقبہ } (\Delta DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 \quad \text{حل:}$$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4} \Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2 \text{ cm}$$

**مثال-10:** ایک منحرف ABCD کے وتر ایک دوسرے کو 'O' پر قطع کرتے ہیں جہاں  $AB \parallel DC$  ہیں۔ اگر  $AB = 2CD$  ہو تو مثلثات

AOB اور COD کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

**حل:** منحرف ABCD میں  $AB \parallel DC$  اور  $AB = 2CD$

مثلثات  $\Delta AOB$  اور  $\Delta COD$  میں

$$\angle COD = \angle AOB \quad (\text{مقابل کے راسی زاویے})$$

$$\angle OCD = \angle OAB \quad (\text{اندرونی متبادلہ زاویے})$$



(زاویہ زاویہ مشابہت سے)  $\Delta AOB \sim \Delta COD$

$$\frac{\text{کارقبہ } (\Delta AOB)}{\text{کارقبہ } (\Delta COD)} = \frac{AB^2}{DC^2}$$

$$= \frac{(2DC)^2}{(DC)^2} = \frac{4}{1}$$

$\therefore$  کارقبہ  $(\Delta AOB)$ : کارقبہ  $(\Delta COD) = 4:1$

### مشق 8.3



- 1- کسی مثلث ABC میں نقاط F'E'D اضلاع AB'CA'BC کے وسطی نقاط ہیں۔  $\Delta ABC$  اور  $\Delta DEF$  کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔
- 2-  $\Delta ABC$  میں  $XY \parallel AC$  اور  $XY$  مثلث کو دو مساوی رقبہ والے حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔  $\frac{AX}{XB}$  کی نسبت معلوم کیجیے۔
- 3- ثابت کیجیے کہ دو مشابہہ مثلثات کے رقبوں کی نسبت ان کے متناظر وسطانیوں کی نسبت کے مربع کے مساوی ہوتی ہے۔
- 4-  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ،  $BC = 3$  سمر،  $EF = 4$  سمر اور  $\Delta ABC$  کا رقبہ 54 مربع سمر ہو تو  $\Delta DEF$  کا رقبہ معلوم کیجیے؟
- 5- ABC ایک مثلث ہے اور PQ ایک خط مستقیم ہے جو AB کو P پر اور AC پر نقطہ Q مس کرتا ہے اگر  $AP = 1$  سمر اور  $BP = 3$  سمر،  $AQ = 1.5$  سمر،  $CQ = 4.5$  سمر ہو تو ثابت کیجیے کہ  $(\Delta ABC)$  کے رقبہ کا  $\frac{1}{16}$   $\Delta APQ$  کا رقبہ
- 6- دو مشابہہ مثلثات کے رقبے 81 مربع سمر اور 49 مربع سمر ہیں اگر بڑے مثلث کا ارتفاع 4.5 سمر ہو تو چھوٹے مثلث کا ارتفاع کیا ہوگا؟

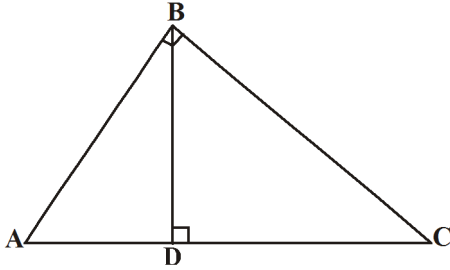
### 8.6 فیثا غورث کا مسئلہ

آپ فیثا غورث کے مسئلہ سے واقف ہیں۔ چند مشاغل کے ذریعہ آپ اسکی تصدیق کر چکے ہیں۔ اب ہم مثلثات کی مماثلت کے تصور کی بنیاد پر اس کو ثابت کریں گے اس کے لیے ہم حسب ذیل نتائج کا استعمال کریں گے۔

**مسئلہ 8.7:** اگر کسی مثلث قائمہ الزاویہ میں زاویہ قائمہ کی راس سے وتر پر عمود گرایا جائے تو وتر کے دونوں جانب بننے والے دو مثلثات دی گئی

مثلث کے مشابہ ہوں گے اور آپس میں ایک دوسرے سے مشابہ ہوں گے۔

**ثبوت:** ABC ایک مثلث قائمہ الزاویہ ہے جو B پر قائمہ ہے۔ فرض کیجیے کہ BD وتر AC پر عمود ہے۔



$\angle A = \angle A$  میں  $\triangle ABC$  اور  $\triangle ADB$

اور  $\angle ADB = \angle ABC$  (کیوں؟)

(1) ..... اس لیے  $\triangle ADB \sim \triangle ABC$  (کیوں؟)

اسی طرح  $\triangle BDC \sim \triangle ABC$  (کیسے؟)

اس لیے (1) اور (2) سے عمود BD کے دونوں جانب کے مثلثات دی گئی

مثلث ABC کے مشابہ ہیں۔

مزید چونکہ  $\triangle ADB \sim \triangle ABC$

$\triangle BDC \sim \triangle ABC$

اس لیے  $\triangle ADB \sim \triangle BDC$

ان نتائج سے حسب ذیل مسئلہ اخذ کیا جائے گا۔

**سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے**

کسی مثلث قائمہ الزاویہ میں جس کے اضلاع کے طول صحیح اعداد ہوں تو کم از کم ایک ضلع جفت عدد ہوگا کیوں؟ اس بات پر اپنے ساتھیوں اور استاد سے تبادلہ خیال کیجیے۔



**8.6.1 فیثاغورث کا مسئلہ (بودھیان کا مسئلہ)**

**مسئلہ 8.8:** کسی مثلث قائمہ الزاویہ میں وتر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔

دیا گیا ہے کہ  $\triangle ABC$  ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس میں راس B پر زاویہ قائمہ ہے

مطلوب:  $AC^2 = AB^2 + BC^2$

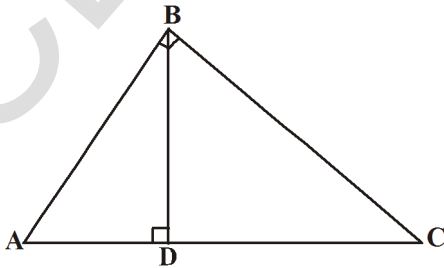
بناوٹ:  $BD \perp AC$  بنائیے

ثبوت:  $\triangle ADB \sim \triangle ABC$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$  (متناظر ضلع)

$AD \cdot AC = AB^2$  ... (1)

مزید  $\triangle BDC \sim \triangle ABC$





$$\Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$$CD \cdot AC = BC^2 \quad \dots(2)$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$$AD \cdot AC + CD \cdot AC = AB^2 + BC^2$$

$$AC (AD + CD) = AB^2 + BC^2$$

$$AC \cdot AC = AB^2 + BC^2$$

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

اس مسئلہ کو 800 قبل مسیح میں ہمارے ملک کے ریاضی داں بودھیان نے حسب ذیل انداز میں پیش کیا تھا۔

مستطیل کے وتر پر بننے والا رقبہ اس کے دونوں ضلعوں سے بننے والے رقبوں کے مساوی ہوتا ہے۔ (یعنی طول اور عرض) لہذا بعض دفعہ

اسے بودھیان کا مسئلہ بھی کہا جاتا ہے۔

اس مسئلہ کے عکس مسئلہ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟

ہم اسے ایک مسئلہ کے طور پر ویسے ہی ثابت کریں گے جیسے کہ پہلے کیا تھا۔

مسئلہ 8.9: ایک مثلث میں ایک ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہو تو پہلے ضلع کے مخالف بننے والا زاویہ قائمہ

ہوگا اور مثلث ایک قائم الزاویہ مثلث ہوگا۔

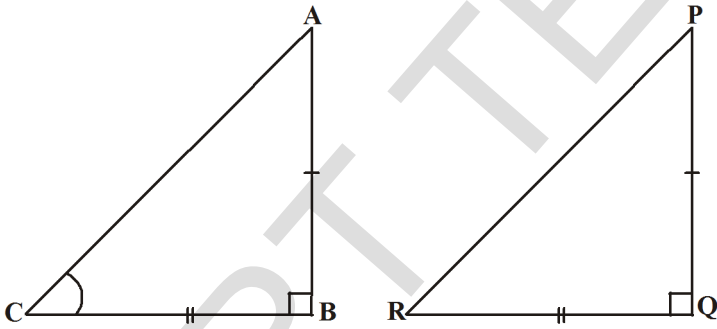
دیا گیا ہے:  $\Delta ABC$  میں

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

مطلوب:  $\angle B = 90^\circ$

بناوٹ: ایک قائم الزاویہ مثلث PQR بنائیے جو

Q پر قائمہ ہو اس طرح کہ  $PQ = AB$  اور  $QR = BC$



ثبوت:  $\Delta PQR$  میں  $PR^2 = PQ^2 + QR^2$  (فیثا غورث کا مسئلہ کیوں کہ  $\angle Q = 90^\circ$ )

$$(1) \text{-----} PR^2 = AB^2 + BC^2 \text{ (بموجب عمل سے)}$$

$$(2) \text{-----} AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ (دیا گیا ہے)}$$

$$\therefore AC = PR \text{ (1) اور (2) سے}$$

اب  $\Delta PQR$  اور  $\Delta ABC$  میں

$$AB = PQ \text{ (عمل سے)}$$

$$BC = QR \text{ (عمل سے)}$$

$$AC = PR \text{ (ثابت ہوا)}$$



(ضلع ضلع ضلع مماثلت)  $\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$

$$\angle B = \angle Q \therefore$$

لیکن  $\angle Q = 90^\circ$  (عمل سے)

$$\angle B = 90^\circ \therefore$$

لہذا ثابت ہوا۔

آئیے اب بعض مثالوں پر غور کریں۔

**مثال-11:** 25 میٹر لمبی ایک سیڑھی ایک عمارت کی کھڑکی تک پہنچتی ہے جو زمین سے 20

میٹر کی اونچائی پر ہے۔ بتائیے کہ سیڑھی عمارت کے قاعدہ سے کتنے فاصلہ پر رکھی گئی ہے۔

**حل:**  $\Delta ABC$  میں  $\angle C = 90^\circ$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ (فیثا غورث کے مسئلہ سے)}$$

$$25^2 = 20^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 625 - 400 = 225$$

$$BC = \sqrt{225} = 15\text{m}$$

لہذا سیڑھی عمارت سے 15 میٹر کے فاصلہ پر رکھی گئی ہے۔

**مثال-12:** BL اور CM  $\Delta ABC$  کے وسطانیے ہیں جہاں راس A قائم الزاویہ ہے۔

$$\text{ثابت کیجیے کہ } 4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$$

**حل:** BL اور CM  $\Delta ABC$  کے وسطانیے ہیں  $\angle A = 90^\circ$

میں  $\Delta ABC$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے)} \dots\dots\dots (1)$$

$$BL^2 = AL^2 + AB^2 \text{ میں } \Delta ABL$$

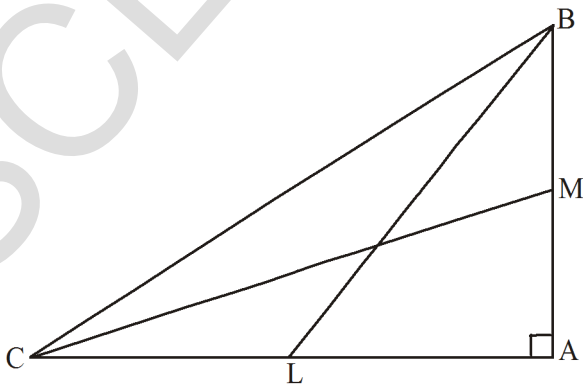
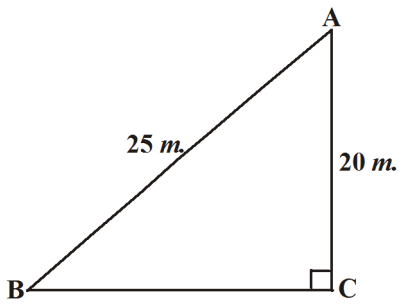
$$BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2 \text{ (} AC \text{ کا نقطہ وسطی ہے)}$$

$$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

$$4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$$

$$CM^2 = AC^2 + AM^2 \text{ میں } \Delta CMA$$

$$(AB \text{ کا نقطہ وسطی ہے}) CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$





$$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 \dots\dots (3)$$

(2) اور (3) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

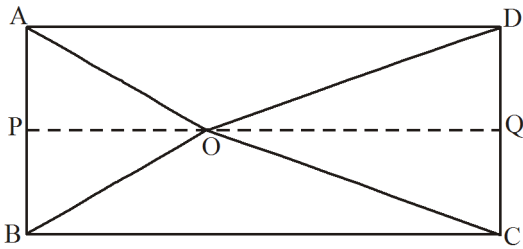
$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

$$\therefore 4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2 \text{ سے (1)}$$

**مثال-13:** اگر 'O' ایک نقطہ ہے جو مستطیل ABCD کے اندرون واقع ہے تو ثابت کیجیے کہ

$$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$$

**حل:** 'O' سے PQ || BC اس طرح کھینچیے کہ 'P' AB پر اور 'Q' DC پر واقع ہو



اب PQ || BC

$$\therefore PQ \perp AB \text{ اور } PQ \perp DC (\angle B = \angle C = 90^\circ)$$

$$\text{لہذا } \angle BPQ = 90^\circ \text{ اور } \angle CQP = 90^\circ$$

$\therefore$  BPQC اور APQD دونوں ہی مستطیل ہیں۔

$$\text{اب } \Delta OPB \text{ سے (1) } OB^2 = BP^2 + OP^2 \dots\dots\dots$$

$$\text{اس طرح } \Delta OQD \text{ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے (2) } OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \dots\dots$$

$$\text{سے (3) } \Delta OQC \text{ سے } OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \dots\dots$$

$$\text{اور } \Delta OAP \text{ سے } OA^2 = AP^2 + OP^2$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 (\because BP = CQ \text{ اور } DQ = AP)$$

$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$

$$= OC^2 + OA^2$$

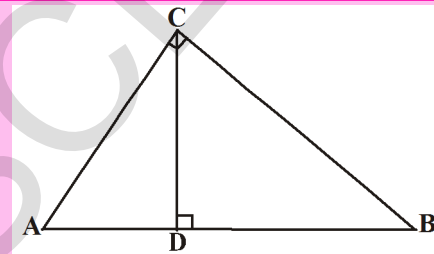
(3) اور (4) سے

یہ کیجیے



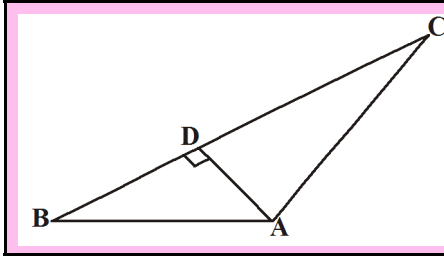
1-  $\Delta ACB$  میں  $\angle C = 90^\circ$  اور  $CD \perp AB$  ہو تو

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD} \text{ ثابت کیجیے کہ}$$



2- ایک گلی میں 15 میٹر لابی ایک سیڑھی عمارت کی کھڑکی تک جو 9 میٹر اونچی ہے رکھی گئی ہے۔ سیڑھی کو گلی کی دوسری طرف پلانے پر یہ 12 میٹر اونچائی تک پہنچتی ہے۔ گل کی چوڑائی کیا ہوگی؟





3- دی ہوئی شکل میں اگر  $AD \perp BC$  تب ثابت کیجیے کہ

$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

**مثال-14:** قائم الزاویہ مثلث کا وتر چھوٹے ضلع کے دو گنے سے 6 میٹر زائد ہے اگر تیسرا ضلع وتر سے 2 میٹر کم ہو تو مثلث کے اضلاع کے طول کیا ہوں گے؟

**حل:** فرض کیجیے کہ چھوٹا ضلع  $x$  میٹر ہے۔

$$\therefore \text{ وتر} = (2x + 6) \text{ میٹر اور تیسرا ضلع} = (2x + 4) \text{ میٹر}$$

فیثا غورث کے مسئلہ سے

$$(2x + 6)^2 = x^2 + (2x + 4)^2$$

$$4x^2 + 24x + 36 = x^2 + 4x^2 + 16x + 16$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$(x - 10)(x + 2) = 0$$

$$x = 10 \text{ یا } x = -2$$

لیکن  $x$  کی قیمت منفی اس لیے نہیں ہو سکتی کہ ضلع کی لمبائی منفی نہیں ہو سکتی۔

$$\therefore x = 10$$

لہذا مثلث کے اضلاع کی لمبائی 10 میٹر، 26 میٹر اور 24 میٹر ہے۔

**مثال-15:**  $\Delta ABC$  ایک قائم الزاویہ مثلث ہے۔ جو  $C$  پر قائم ہے۔ فرض کیجیے کہ  $BC = a$ ،  $CA = b$ ،  $AB = c$  اور فرض کیجیے کہ  $p$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (\text{ii})$$

$AB$  سے  $C$  پر عمود کا طول ہے۔ ثابت کیجیے کہ  $pc = ab$  (i)

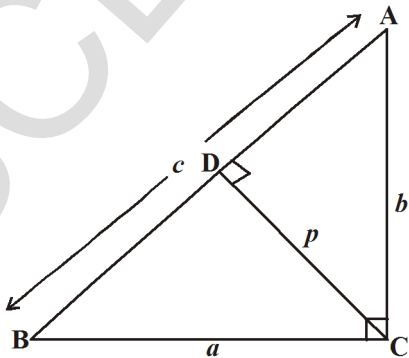
**حل:** (i)  $CD \perp AB$  اور  $CD = p$

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

$$= \frac{1}{2} cp$$

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times BC \times AC \quad \text{مزید}$$

$$= \frac{1}{2} ab$$





$$\frac{1}{2}cp = \frac{1}{2}ab$$

$$cp = ab \dots(1)$$

(ii) چونکہ  $\triangle ABC$  قائم الزاویہ مثلث ہے اور C پر قائم الزاویہ بناتا ہے۔

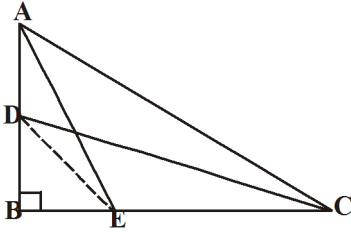
$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

### مشق - 8.4



1- ثابت کیجیے کہ معین کے اضلاع کے مربعوں کا حاصل مجموعہ اس کے وتروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

2-  $\triangle ABC$  قائم الزاویہ مثلث ہے جو کہ B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے فرض کیجیے کہ D اور E بالترتیب AB اور BC پر دو نقاط ہیں تو ثابت کیجیے کہ

$$AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$$

3- ثابت کیجیے کہ مثلث مساوی الاضلاع کے ایک ضلع کے مربع کا تین گنا اس کے ارتفاع کے مربع کے چار گنا کے مساوی ہوتا ہے؟

4-  $\triangle PQR$  ایک مثلث قائمہ الزاویہ ہے جو کہ نقطہ P پر قائمہ ہے۔ QR پر ایک نقطہ M اس طرح ہے کہ  $PM \perp QR$  تب ثابت کیجیے

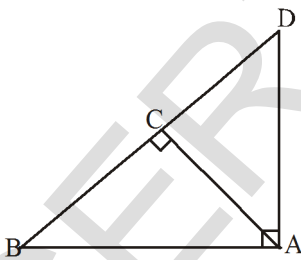
$$\text{کہ } PM^2 = QM \cdot MR$$

5- A پر قائم الزاویہ بناتے ہوئے  $\triangle ABD$  ایک مثلث ہے اور  $AC \perp BD$  تب ثابت کیجیے کہ

$$(i) AB^2 = BC \cdot BD.$$

$$(ii) AC^2 = BC \cdot DC$$

$$(iii) AD^2 = BD \cdot CD$$



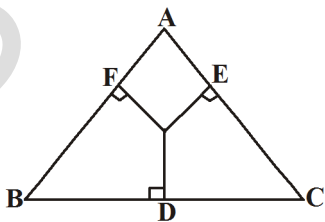
6-  $\triangle ABC$  ایک مثلث قائمہ الزاویہ مساوی الساقین ہے۔ جو C پر قائمہ ہے۔ ثابت کیجیے کہ  $AB^2 = 2AC^2$

7- 'O' مثلث ABC کے اندرون ایک نقطہ ہے۔ اس طرح کہ

$OF \perp AB$  اور  $OE \perp AC$  اور  $OD \perp BC$  تو ثابت کرو

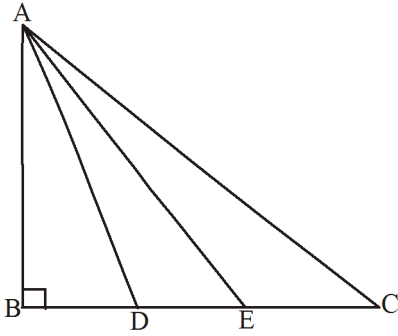
$$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2 \quad (i)$$

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2 \quad (ii)$$



8- ایک میٹر والے برقی تار کو 18 میٹر اونچے ایک انتصابی کھمبے سے باندھ دیا گیا ہے۔ بتلائیے کہ کھمبے کے قاعدہ کو کتنی دور نصب کیا جائے تاکہ برقی تار ٹھیک تنا ہوا ہو۔

9- دو برقی کھمبے 6 میٹر اور 11 میٹر اونچے ہیں اگر دونوں کے درمیان 12 میٹر کا فاصلہ ہو تو ان کے چوٹیوں کے درمیان کا فاصلہ محسوب کیجیے۔



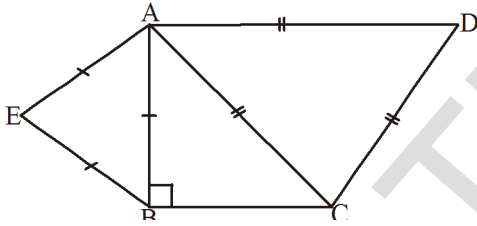
10- ایک مساوی الاضلاع مثلث میں ایک نقطہ D ضلع BC پر اس طرح لیا گیا ہے

$$\text{کہ } BD = \frac{1}{3} BC \text{ تب ثابت کیجیے کہ } 9AD^2 = 7AB^2$$

11- دی ہوئی شکل میں ABC ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے جو B پر قائمہ ہے

اور D، E، BC پر نقاط تثلیث ہیں۔ ثابت کیجیے کہ

$$8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$$



12- ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جو B پر قائمہ ہے۔

ضلع AC اور AB پر دو مشابہ مثلثات  $\triangle ABE$  اور  $\triangle ACD$

بنائے گئے ان کے رقبوں کے درمیان کی نسبت معلوم کرو؟

13- کسی قائمہ الزاویہ مثلث کے تینوں ضلعوں پر مساوی الاضلاع مثلثات بنائے گئے۔ ثابت کیجیے کہ وتر پر بنائے گئے مثلث کا

رقبہ باقی کے دو ضلعوں پر بنائے گئے مثلثات کے رقبوں کے مجموعے کے مساوی ہوگا۔

14- ثابت کیجیے کہ کسی مربع کے ضلع پر بنائے گئے مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ وتر پر بنائے گئے مساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ کا نصف ہے۔

## 8.7 مسئلہ جاتی بیانات کی مختلف صورتیں

### 1- بیان کانفی

اگر ایک بیان دیا گیا ہے، اگر بیان کے بعد نہیں لگا دیا جائے تو ایک نیا بیان حاصل ہوگا جو دیئے ہوئے بیان کانفی کہلائے گا۔

مثال کے طور پر ایک " $\triangle ABC$  ایک مساوی الاضلاع ہے"۔ لیجیے۔ اگر ہم اسے p سے ظاہر کریں گے تو ہمیں اس طرح لکھنا ہوگا۔

p: مثلث ABC ایک مساوی الاضلاع ہے اور اس کانفی مثلث ABC مساوی الاضلاع نہیں ہے ہوگا۔ کسی بیان کے نفی کو ~p سے ظاہر

کرتے ہیں اور اسے "p کانفی" پڑھا جاتا ہے۔ بیان ~p، اصل بیان p کی تردید کرتا ہے۔

جب ہم کسی بیان کانفی لکھتے ہیں تو ہمیں احتیاط برتنی ہوگی کہ جملہ واضح ہوتا کہ بات صاف طور پر سمجھ میں آجائے۔

اس مثال پر غور کیجیے۔

p: تمام غیر ناطق اعداد حقیقی اعداد ہیں۔ ہم اس بیان p کانفی اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$\sim p$  : تمام غیر ناطق اعداد حقیقی اعداد نہیں ہوتے

ہم کیسے طے کریں گے کہ کونسا بیان صحیح ہے؟ اس کے لیے ذیل کے اصول پر عمل کیا جائیگا۔  
فرض کیجیے کہ  $p$  ایک بیان ہے اور  $\sim p$  اس کا نفی ہے۔ تب  $\sim p$  اس وقت غلط ہوگا جب  $p$  صحیح ہو اور  $\sim p$  اس وقت صحیح ہوتا ہے جب  $p$  غلط ہو۔

مثال:  $S : 2 + 2 = 4$  صادق ہے۔

$\sim S : 2 + 2 \neq 4$  کاذب ہے۔

## 2- بیان کا برعکس

ایک بیان جو صحیح ہو یا غلط سادہ بیان کہلاتا ہے اگر ہم دوسادہ بیانات کو یکجا کر دیں تو ہمیں مرکب بیان حاصل ہوتا ہے دوسادہ بیانات کو اگر۔۔۔۔۔ تب سے یکجا کرنے (جوڑ دینے) پر جو مرکب بیان حاصل ہوتا ہے اسے شرطیہ یا دلالتی بیان کہتے ہیں۔

اگر۔۔۔۔۔ تب سے دوسادہ بیانات  $p$  اور  $q$  کو جوڑ دینے پر ہمیں  $p$  دلالت کرتا ہے  $q$  پر حاصل ہوتا ہے اسے علامتی طور پر  $p \Rightarrow q$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔  $p \Rightarrow q$  میں فرض کیجیے کہ ہم  $p$  اور  $q$  کے مقام بدل دیں تو ہمیں  $q \Rightarrow p$  حاصل ہوگا ایسے بیان کو برعکس بیان کہتے ہیں۔

مثال  $\Delta ABC$  میں اگر  $AB=AC$  تب  $\angle C=\angle B$  :  $p \Rightarrow q$

$\Delta ABC$  میں اگر  $\angle C=\angle B$  تب  $AB=AC$  :  $q \Rightarrow p$  برعکس

## 3- ثبوت بذریعہ تضاد بیان

اس طرح کے ثبوت میں ہم کسی بیان کے نفی کو صادق متصور کرتے ہیں جہاں ہم کو ثابت کرنا ہوتا ہے اس دوران ثابت کرنے کے عمل میں ہمیں کہیں نہ کہیں تضاد پیدا ہوتا ہے۔ تب ہم یہ موقف اختیار کرتے ہیں کہ یہ تضاد ہمارے غلط مفروضے کے سبب پیدا ہوتے ہیں جو کہ نفی کے صحیح تصور کرنے سے پیش آیا ہے۔ لہذا ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ دیا ہوا بیان صحیح ہے۔

## اختیاری مشق

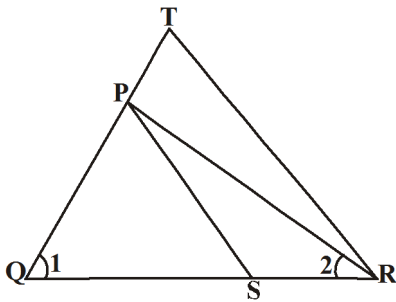


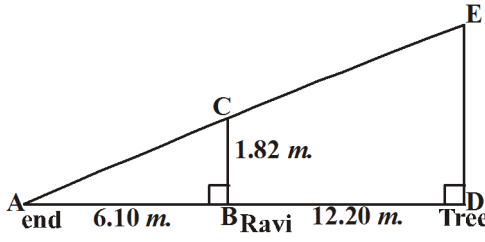
(جامع اکتساب کے لیے)

1- دی ہوئی شکل میں

اور  $\angle 1 = \angle 2$  ثابت کیجیے کہ  $\frac{QT}{PR} = \frac{QR}{QS}$

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$





2- ندیم 1.82 میٹر لمبا ہے۔ وہ اپنے صحن میں درخت کی اونچائی معلوم کرنا چاہتا ہے۔ درخت سے اس نے 12.2 میٹر کا فاصلہ درخت کے سایہ کے ساتھ ساتھ اس طرح طے کیا کہ اس کے سایہ کا آخری سر درخت کے سایہ کے آخری سرے سے جا لگے۔ وہ سائے کے کنارے سے 6.1 میٹر کے فاصلہ پر ہے درخت کی اونچائی معلوم کرو؟

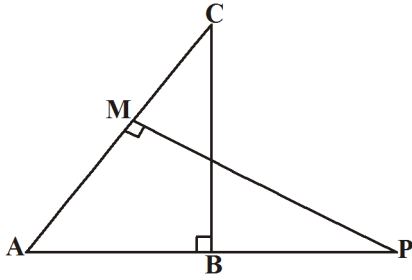
3- متوازی الاضلاع ABCD کا ایک وتر AC و DP کو قطع کرتا ہے جہاں P ضلع AB پر کوئی نقطہ ہے ثابت کیجیے

$$CQ \times PQ = QA \times QD$$

4- AMP اور ABC دو قائم الزاویہ مثلثات ہیں جو بالترتیب B اور M پر قائمہ

ہیں۔ ثابت کیجیے کہ

$$\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP} \quad (ii) \quad \Delta ABC \sim \Delta AMP \quad (i)$$



5- ایک ہوائی جہاز اڑان بھرتے ہوئے 1000 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے شمال

کی طرف جاتا ہے۔ اس وقت ایک اور ہوائی جہاز 1200 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے مغرب کی جانب روانہ ہوتا ہے بتائیے کہ  $1\frac{1}{2}$  گھنٹہ بعد ان کی دوری کتنی ہوگی؟

6- ایک قائم الزاویہ مثلث میں C پر قائمہ ہے۔ نقاط P اور Q بالترتیب اضلاع AC اور CB پر اس طرح ہیں کہ جو ان ضلعوں کو 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔ ثابت کیجیے۔

$$9AQ^2 = 9AC^2 + 4BC^2 \quad (i)$$

$$9BP^2 = 9BC^2 + 4AC^2 \quad (ii)$$

$$9(AQ^2 + BP^2) = 13AB^2 \quad (iii)$$

تجویز کردہ منصوبہ کام:

مشابہ مثلثات کی خصوصیات کی مدد سے درخت رینار مندر کی اونچائی کو معلوم کیجیے۔ جیسا کہ مشابہ مثلثات کے باب میں اس بارے میں بحث کی جا چکی ہے۔

ہم نے کیا سیکھا

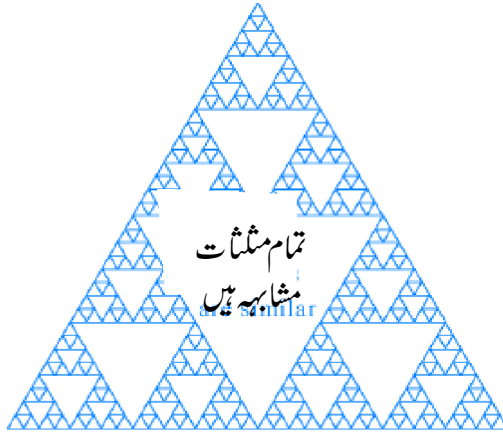


- 1- دو خا کے جو کہ ایک ہی شکل کے ہوں لیکن ضروری نہیں کہ ایک ہی جسامت کے ہوں، مشابہہ اشکال کہلاتے ہیں۔
  - 2- تمام مماثل اشکال، مشابہہ ہوتی ہیں لیکن تمام مشابہہ اشکال کا مماثل ہونا ضروری نہیں۔
  - 3- دو کثیر ضلعی جن کے ضلعوں کی تعداد مساوی ہوں مشابہہ ہوتی ہیں۔
  - (i) ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں اور
  - (ii) ان کے متناظر ضلع ایک ہی نسبت میں ہوں (یعنی وہ تناسب میں)
- واضح رہے کہ کثیر ضلعوں کی مشابہت کے لیے مذکورہ بالا دو شرائط میں سے کوئی ایک ناکافی ہے۔

- 4- اگر کسی مثلث میں کسی ضلع کے متوازی ایک خط اس طرح کھینچا جائے کہ یہ دوسرے دو اضلاع کو قطع کرتا ہو تو ان ضلعوں کی نسبت مساوی ہوگی۔
- 5- اگر کسی مثلث میں ایک خط دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تو یہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔
- 6- دو مثلثات میں اگر زاویے مساوی ہوں تو ان کے متناظر ضلعوں کی نسبت مساوی ہوگی اور یوں اس طرح یہ دونوں مثلثات مشابہ ہوں گے (زاویہ زاویہ مشابہت)
- 7- اگر کسی مثلث کے دو زاویے کسی اور مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں تو، مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خصوصیت سے ان کا تیسرا زاویہ بھی مساوی ہوگا۔
- 8- اگر کوئی دو مثلثات کے متناظر ضلع ایک ہی نسبت میں ہوں تو ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں گے اور اس طرح یہ مثلثات مشابہ ہوں گے (ضلع ضلع ضلع)
- 9- ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے زاویے کے مساوی ہو اور اس زاویے کو گھیرنے والے اضلاع کی نسبت بھی مساوی ہو تو یہ مثلثات مشابہ ہوں گے (ضلع زاویہ ضلع)
- 10- دو مشابہ مثلثات کے رقبوں کی نسبت ان کے متناظر اضلاع کی نسبت کے مربع کے مساوی ہوگی۔
- 11- کسی مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کی راس سے مخالف ضلع پر عمود کھینچا جائے تو اس طرح بننے والے دو مثلثات اصل مثلث سے مشابہ ہوں گے اور یہ اندرونی مثلثات آپس میں مشابہ ہوں گے۔
- 12- ایک مثلث قائم الزاویہ میں وتر پر کا مربع دیگر دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا (قیثا غورث کا مسئلہ)
- 13- ایک مثلث میں اگر کسی ضلع پر بننے والا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہو تو پہلے ضلع کے مخالف کا زاویہ قائمہ ہوگا۔

پہلی بوجھئے تو بھلا

ایک مثلث بنائیے مثلث کے اضلاع کے نقاط وسطی کو ملائیے۔ آپ کو چار مثلثات حاصل ہوں گے۔ دوبارہ ان مثلثات کے نقاط وسطی کو ملائیے۔ ایسا کرتے جائیے۔ تمام مثلثات مشابہ ہوں گے۔ کیوں؟ اپنے ساتھیوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔





# دائرے کے مماس اور خطوط قاطع

## Tangents and Secants to a circle

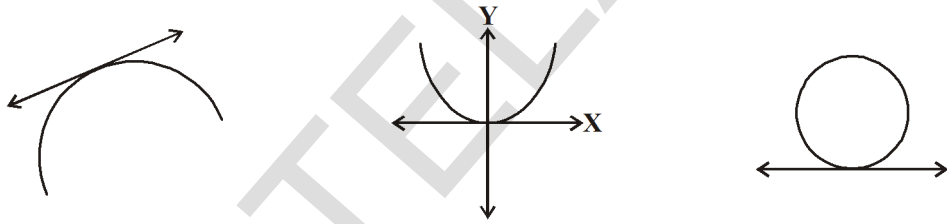
### باب 9

#### 9.1 تمہید

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک مستوی میں دو خط اکثر ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں یا قطع نہیں کرتے بعض صورتوں میں وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔



اس طرح کیا ہوتا ہے جب ایک مستوی میں ایک خط مستقیم اور منحنی دی جائے؟ آپ جانتے ہیں کہ ایک منحنی ایک مکانی ہو سکتی ہے جیسا کہ آپ نے کثیر رکنیوں میں مشاہدہ کیا ہے یا سادہ بند منحنی دائرہ جو دیے ہوئے نقطہ سے دیئے ہوئے فاصلہ پر اسی مستوی میں واقع تمام نقاط کا کلکشن ہے

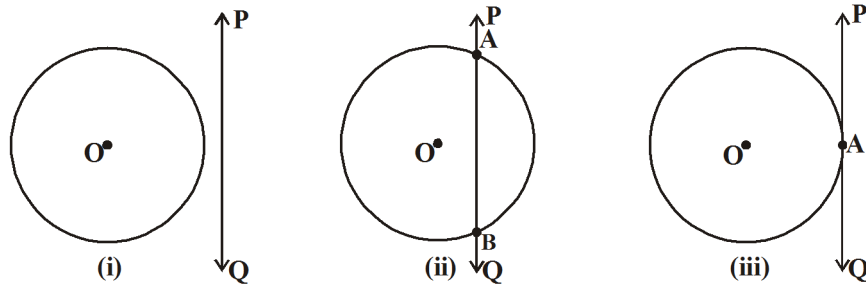


آپ ایک مستوی میں متحرک دائری اشیاء کی حرکت سے بننے والے راستہ کا مشاہدہ کیا ہوگا مثلاً سائیکل چلاتے ہوئے یا ریل کے پہیوں کو پٹریوں پر چلتے ہوئے وغیرہ جہاں یہ ایک خط مستقیم اور دائرہ کی طرح معلوم ہوتے ہیں کیا ان کے درمیان کوئی رشتہ پایا جاتا ہے؟ آئیے کسی مستوی میں دائرہ اور خط کے درمیان رشتہ پر غور کریں گے۔

#### 9.1.1 ایک خط اور ایک دائرہ

آپ کو کاغذ پر ایک دائرہ ایک خط مستقیم کھینچنے کے لیے کہا گیا ہے۔ سلمان بحث کرتا ہے کہ ان دونوں کو صرف تین ممکنہ طریقوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

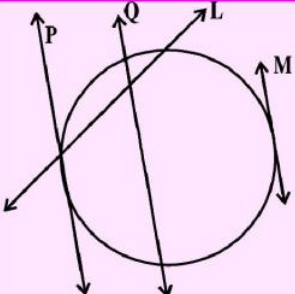
ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اور ایک خط PQ پر غور کیجیے۔ تین ممکنات کو ذیل کی شکل میں دیا گیا ہے



- شکل (i) میں خط PQ اور دائرہ کا کوئی مشترکہ نقطہ نہیں ہے۔ اس صورت میں PQ بلحاظ دائرہ غیر قاطع خط ہے۔
- شکل (ii) میں خط PQ دائرہ کے دو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے ان دو مشترکہ نقاط سے دائرہ کا وتر AB بنتا ہے۔ اس صورت میں خط PQ دائرے کا خط قاطع (Secant) ہے۔
- شکل (iii) میں صرف ایک نقطہ A ہے جو دائرہ اور خط PQ کا مشترکہ نقطہ ہے۔ اس خط کو دائرہ کا مماس (Tangent) کہتے ہیں۔ آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ خط کا اسکے علاوہ بلحاظ دائرہ اور کوئی صورت نہیں ہو سکتی ہے۔ ہم دائرہ کے مماس کے کا وجود اور ان کے خصوصیات اور بناوٹوں کا مطالعہ کریں گے۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

لفظ Tangent لاطینی لفظ "Tangere" سے ماخوذ ہے۔ جس کے معنی "مس کرنا" ہے۔ اس لفظ کو پہلی مرتبہ ڈنمارک کے ماہر ریاضی داں تھامس فائینکی (Thomas Fineki) نے 1583 میں پیش کیا۔



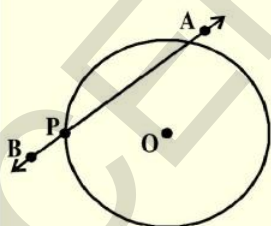
یہ کیجیے

- 1- کسی بھی نصف قطر سے دائرہ بنائے۔ مختلف نقاط پر 4 مماس کھینچیے۔ آپ اس دائرہ پر اور کتنے مماس کھینچ سکتے ہیں؟
- 2- آپ دائرہ کے بیرونی نقطہ سے کتنے مماس کھینچ سکتے ہیں؟
- 3- متصلہ شکل میں کونسے خطوط دائرے کے مماس ہیں۔

## 9.2 دائرے کے مماس

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دائرے کے کسی بھی نقطہ پر مماس کھینچا جاسکتا ہے۔ کیا آپ بتلا سکتے ہیں کہ دائرے پر واقع کسی بھی نقطہ کے کتنے مماس کھینچے جاسکتے ہیں؟

اس کو سمجھنے کے لیے آئیے ذیل کے مشغلہ پر غور کرتے ہیں



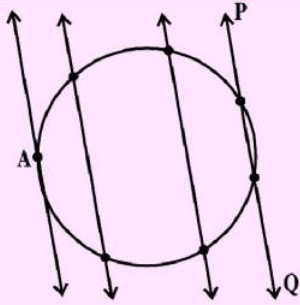
مشغلہ

ایک دائری شکل کا تار لیچیے دائرے پر واقع نقطہ P پر ایک سیدھا تار AB کو اس طرح لگائیے کہ یہ نظام مستوی میں نقطہ P کے اطراف گھوم سکے۔ دائری تار دائرہ کو اور سیدھا تار AB خط کو ظاہر کرتا ہے جو دائرے کو نقطہ P پر قطع کرتا ہے اس کو میز پر رکھئے اور تار AB کو آہستہ سے گرد گھمائیے سیدھے تار کے مختلف تمام پوزیشن حاصل ہو سکے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔ تار دائری تار کو P پر قطع کرتا ہے اور مزید ایک نقطہ Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>, Q<sub>3</sub> وغیرہ سے گزرتے ہوئے لہذا عموماً جب یہ دائری تار کو دو نقاط A' A'' اور B' B'' پر قطع کرتا ہے۔

پر قطع کرتا ہے تو ان میں کا ایک نقطہ P مخصوص پوزیشن میں ہوتا ہے یہ دائرے کے صرف نقطہ P پر قطع کرتا ہے (AB کے پوزیشن 'A'B' کو دیکھئے) یہ دائرے کے نقطہ P پر ایک مماس کا پوزیشن ہے۔ AB کے تمام پوزیشن کے لیے آپ جانچ کر سکتے ہیں یہ دائرے کو نقطہ P پر قطع کرتا ہے اور ایک دوسرے نقطہ پر قطع کرے گا۔ 'A'B' پر دائرہ کا مماس ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ دائرے کا نقطہ P پر صرف اور صرف ایک ہی مماس ہوتا ہے۔ متحرک تار AB اس پوزیشن سے کسی بھی جانب دائری تار کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے یہ تمام لہذا خط قاطع ہیں۔ مماس خط قاطع کی ایک مخصوص شکل ہے جہاں اس کے دو نقاط قاطع منطبق ہوتے ہیں۔



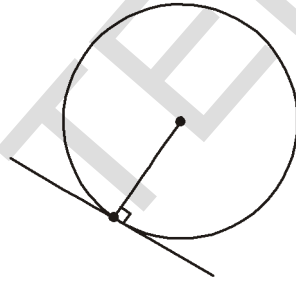
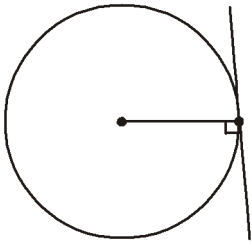
یہ کیجیے



ایک کاغذ پر ایک دائرہ اور ایک خط قاطع PQ کھینچئے، جیسا کہ بتلایا گیا ہے۔ خط قاطع کے دونوں جانب کئی متوازی خطوط کھینچئے۔ ان کے طول کو کیا ہوتا ہے جب یہ دائرے کے مرکز کے قریب ہوتے جاتے ہیں۔

سب سے طویل وتر کیا ہے؟

آپ دائرے پر کتنے مماس کھینچ سکتے ہیں جو کہ ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔



دائرے کے مماس اور دائرہ کا مشترک نقطہ نقطہ تماس (Point of Contact) کہلاتا ہے۔ اور یہ مماس دائرے کے مشترک نقطہ پر مس کرتا ہے۔ دیئے گئے ذیل کی شکلوں میں دائرے کے مماسوں کا مشاہدہ کیجیے

آپ ایک دائرے کے ایک نقطہ پر کتنے مماس کھینچ سکتے ہیں؟ دائرے پر آپ کل ملا کر جملہ کتنے مماس حاصل کر سکتے ہیں؟ تمام نقطوں کو دیکھئے۔ تماسی نقاط سے نصف قطروں کو کھینچئے۔ نقاط تماس پر مماسوں اور نصف قطروں کے درمیان بننے والے زاویہ سے متعلق آپ کوئی خاص خصوصیت کو دیکھتے ہیں۔ یہ تمام متناظر مماسوں پر عمود وار ہوتے ہوئے دیکھائی دیتے ہیں ہم اس کو بھی ثابت کر سکتے ہیں۔ آئیے دیکھیں گے۔

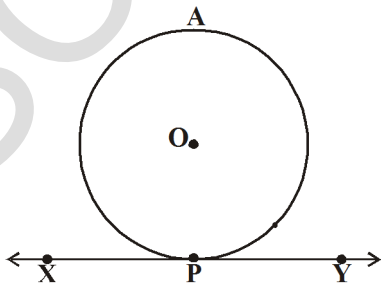
**مسئلہ 9.1:** دائرے پر واقع کسی نقطہ پر کھینچا گیا مماس نقطہ تماس سے گزرنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے دیا گیا ہے: ایک دائرہ جس کا مرکز 'O' ہے اور دائرہ کے نقطہ P پر مماس xy ہے اور OP نصف قطر ہے۔

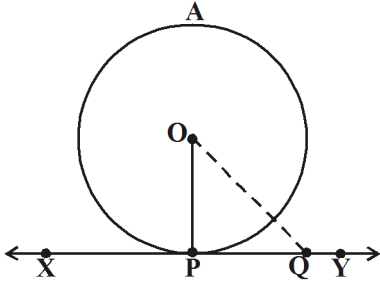
ثابت کرنا ہے: OP عمود وار ہے XY پر (یعنی  $OP \perp XY$ )

ثبوت: P کے علاوہ XY پر کوئی ایک نقطہ Q لیجئے O اور Q کو ملائیے۔

نقطہ Q دائرے کے باہر ہونا چاہیے۔ (کیوں؟)

(غور کیجیے کہ اگر نقطہ Q دائرہ کے اندر واقع ہو تو XY قاطع خط ہوگی نہ کہ دائرہ کا مماس)





اس لیے OQ، نصف قطر OP سے لمبا ہوگا (کیوں؟)

یعنی  $OQ > OP$

یہ XY پر کہ تمام نقاط کے لیے واقع ہوگا۔ اس لیے یہ سچ ہے کہ O سے XY پر تمام نقاط سے اقل ترین فاصلہ OP ہوگا۔

کسی نقطہ سے خط پر گرائے گئے عمود کا طول چھوٹا ہوگا۔

(جماعت ہفتم کا مشغلہ 5.3)

اس لیے OP عمود وار ہے

یعنی  $OP \perp XY$

سچ ثابت ہوا

**نوٹ:** نقطہ تماس سے گذرتا ہوا خط جس میں نصف قطر واقع ہے اس نقطہ پر دائرہ کا عماد Normal کہلاتا ہے۔

کوشش کیجیے



آپ مذکورہ بالا مسئلہ کا برعکس کس طرح ثابت کریں گے۔

”اگر دائرے کی مستوی میں ایک خط نصف قطر کے اختتامی نقطہ پر عمود وار ہو تو وہ خط دائرے کا مماس ہے“

مذکورہ بالا مسئلہ کا استعمال کرتے ہوئے ہم مزید نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

(i) چونکہ نقطہ P پر صرف اور صرف ایک عمود OP ہو سکتا ہے لہذا دائرے کے محیط پر دیئے گئے نقطہ پر صرف اور صرف دائرے کا ایک ہی مماس کھینچا جاسکتا ہے۔

(ii) چونکہ نقطہ P پر XY کا صرف اور صرف ایک عمود ہو سکتا ہے لہذا نقطہ تماس اور مماس کا عمود مرکز سے گذرتا ہے

ان کے متعلق غور کیجیے۔ ان کو اپنے ساتھیوں کے درمیان اور اپنے اساتذہ سے تبادلہ خیال کیجیے۔

### 9.2.1 دائرے کے مماس کی بناوٹ:

ہم دائرے پر دیئے گئے نقطہ پر مماس کس طرح کھینچ سکتے ہیں؟ ابھی ہم نے جو نتیجہ اخذ کیا تھا کہ مماس اور نصف قطر نقطہ تماس پر عمود وار

ہوتے ہیں اس کو استعمال کرتے ہیں۔ نقطہ تماس سے گذرتا ہوا مماس کھینچنے کے لیے ہمیں اس نقطہ پر نصف قطر کے ساتھ ایک خط عمود وار کھینچنا ہوگا۔

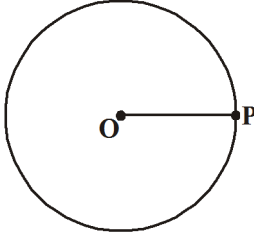
اس نصف قطر کو کھینچنے سے پہلے دائرے کے مرکز کی نشاندہی ضروری ہے۔

آئیے اس کی بناوٹ کے مراحل پر غور کرتے ہیں۔

بناوٹ: دیے گئے نقطہ پر دائرے کا مماس کھینچنا جبکہ دائرے کا مرکز معلوم ہو۔

ہم کو دائرہ جس کا مرکز 'O' اور محیط پر کوئی ایک نقطہ P دیا گیا ہے۔ تب ہمیں نقطہ P سے گذرتے ہوئے ایک مماس کھینچنا ہے۔

بناوٹ کے مراحل:



1- ایک دائرہ بنائیے جس کا مرکز 'O' ہو اس پر کوئی نقطہ P لپیچے

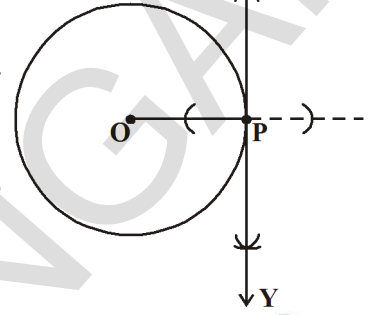
OP کو ملائیے۔

2- ایک عمودی خط نقطہ P سے گذرتا ہوا کھینچئے اور اس کا نام XY

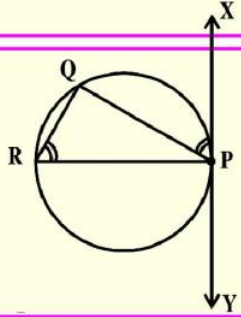
دیکھیے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے

3- XY دیئے گئے نقطہ P سے گذرتا ہوا دائرے کا مطلوبہ مماس ہے

کیا آپ نقطہ P سے گذرتا ہوا ایک اور مماس کھینچ سکتے ہو؟ وجوہات بتلائیے؟



کوشش کیجیے



آپ کس طرح دائرے پر دیئے گئے نقطہ پر دائرے کا مماس کھینچیں گے۔ جب کہ دائرے کا مرکز معلوم نہ ہو۔

اشارہ: مساوی زاویے  $\angle QPX$  اور  $\angle PRQ$  بنائیے۔ بناوٹ کی تشریح کیجیے۔

### 9.2.2 مماس کا طول معلوم کرنا

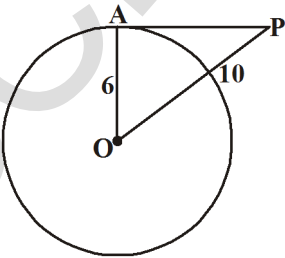
کیا ہم کسی دیے گئے نقطہ سے دائرے کے مماس کا طول معلوم کر سکتے ہیں؟

**مثال:** ایک دائرہ جس کا مرکز 'O' ہے اور نصف قطر 6 سمر ہے بیرونی نقطہ P سے فاصلہ 10 سمر  $OP = 10$  ہے دائرے کے مماس کا طول معلوم کیجیے

**حل:** نقطہ تماس پر مماس اور نصف قطر عمود ہوتے ہیں (مسئلہ 9.1)

یہاں PA مماسی قطعہ ہے اور OA دائرے کا نصف قطر ہے۔

$$\therefore OA \perp PA \Rightarrow \angle OAP = 90^\circ$$



اب  $\Delta OAP$  میں  $OP^2 = OA^2 + PA^2$  (فیثاغورث مسئلہ کی رو سے)

$$10^2 = 6^2 + PA^2$$

$$100 = 36 + PA^2$$

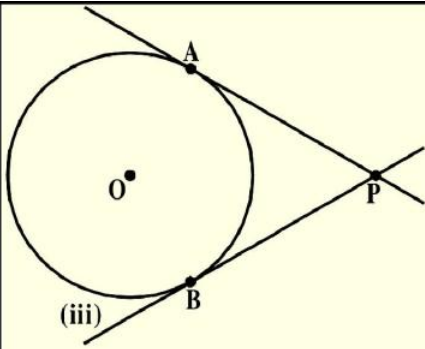
$$PA^2 = 100 - 36$$

$$= 64$$

$$\therefore PA = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$







(iii) اب دائرے کے باہر ایک نقطہ P کی لیجیے۔ اس نقطہ P سے دائرے پر مماس کھینچنے کی کوشش کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ اس نقطہ سے قطعی طور پر دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔ (متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے) اب ہم ذیل میں ان حقائق کا خلاصہ لکھتے ہیں۔

صورت حال (i): دائرے کے اندرونی نقطہ سے گذرتا ہوا دائرے کا کوئی بھی مماس کھینچا نہیں جاسکتا۔

صورت حال (ii): دائرے پر کے نقطہ سے گذرتا ہوا ایک اور صرف ایک ہی مماس کھینچا جاسکتا ہے۔

صورت حال (iii): اس دائرے کے بیرونی نقطہ سے دائرے پر قطعی طور پر دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔ مماس PA اور PB مماس کے نقاط مماس A اور B ہیں۔

بیرونی نقطہ P اور نقطہ مماس A کے درمیان قطعہ کا فاصلہ مماس کا طول کہلاتا ہے

نوٹ کیجیے کہ شکل (iii) میں PA اور PB نقطہ P سے دائرے پر کھینچے گئے دو مماس کے طول ہیں PA اور PB کے طول میں کیا رشتہ ہے۔

مسئلہ 9.2: ایک دائرے کے بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے دو مماس کے طول مساوی ہوتے ہیں۔

دیا گیا ہے: دائرے کا مرکز O ہے۔ P اس کا بیرونی نقطہ ہے۔ PA اور PB دائرے کے مماس ہیں جو نقطہ P سے کھینچے گئے (شکل دیکھیے)

ثابت کرنا ہے: PA = PB

ثبوت: OA اور OB، OP کو ملائیے۔

(مسئلہ 9.1 کی رو سے نصف قطر اور دائرے کے مماس کے درمیان کا زاویہ  $90^\circ$  ہوتا ہے)

اب دو قائم الزاویہ مثلثات OAP اور OBP میں

OA = OB (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

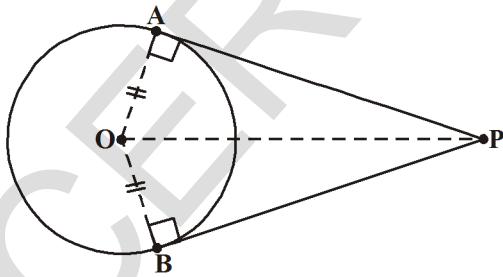
OP = OP (مشترک)

لہذا RHS موضوعہ متماثلت کی رو سے

$\triangle OAP \cong \triangle OBP$

اس سے حاصل ہوتا ہے۔ PA = PB

پس ثابت ہوا۔



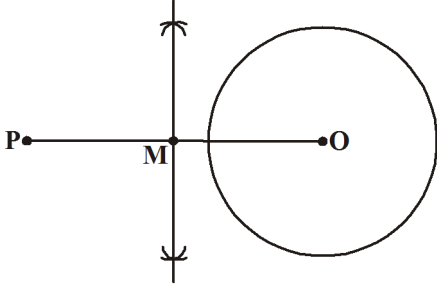
کوشش کیجیے



فیثا غورث کو استعمال کیجیے اور مذکورہ بالا مسئلہ کا ثبوت لکھئے

## 9.3.1 بیرونی نقطہ سے دائرے کے مماس کی بناوٹ:

آپ نے دیکھا کہ اگر نقطہ دائرے کے بیرون ہو تو اس نقطے سے دائرے پر قطعی طور پر دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔ اب ہم دیکھیں گے کہ ان مماس کو کس طرح کھینچتے ہیں۔

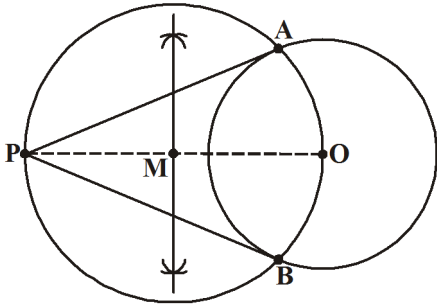


بناوٹ: دائرے کے باہر دیئے ہوئے نقطہ سے دائرہ پر مماس کھینچنا

دیا گیا ہے: ہمیں دائرہ دیا گیا ہے جس کا مرکز 'O' اور بیرونی نقطہ P ہے۔ ہمیں نقطہ P سے دائرے پر دو مماس کھینچنا ہے

بناوٹ کے مراحل:

مرحلہ (i): PO کو ملائیے اور اس کا عمودی ناصف کھینچے۔ مان لیجیے کہ 'M' PO کا وسطی نقطہ ہوگا۔



مرحلہ (ii): M کو مرکز مان کر MO یا PM کے نصف قطر سے ایک دائرہ بنائیے مان لیجیے کہ یہ دیئے ہوئے دائرے کے دو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔

مرحلہ (iii): PA اور PB کو ملائیے۔ تب PA اور PB دائرے کے مطلوبہ دو مماس ہیں

ہیں

ثبوت: اب ہم اس بناوٹ کی تصدیق کریں گے۔

OA کو ملائیے۔  $\angle PAO$  نصف دائرہ کا زاویہ ہے

لہذا  $\angle PAO = 90^\circ$

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ  $PA \perp OA$

چونکہ OA دیئے گئے دائرہ کا نصف قطر ہے اس لیے PA دائرے کا مماس ہوتا ہے (مسئلہ 9.1 کے برعکس سے)

اسی طرح PB بھی دائرے کا مماس ہے۔

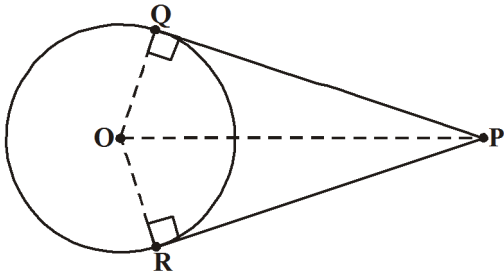
لہذا اثبات ہوا

مماس اور خطوط قاطع سے متعلق چند دلچسپ بیانات اور ان کا ثبوت

بیان 1: دائرے کے بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے دائرے کے مماس کے درمیان بننے والے زاویہ کے ناصف پر اس دائرے کا مرکز واقع ہوتا ہے۔ کیا آپ تصور کر سکتے ہیں کہ ہم اس کو کس طرح ثابت کر سکتے ہیں؟

ثبوت: 'O' مرکز والے دائرے کے بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے دو مماس PQ اور PR ہیں۔ OQ اور OR کو ملائیے۔ مثلثات OQP اور

ORP متماثل ہیں۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ



$$\angle OQP = \angle ORP = 90^\circ \text{ (مسئلہ 9.1)}$$

OP، مشترک ہے۔ OQ=OR (نصف قطر)

یعنی (متماثل مثلث کے متماثلتی حصہ)  $\angle OPQ = \angle OPR$

لہذا OP 'QPR' کا ناصف ہے۔

پس دو مماس سے بننے والے زاویہ کے ناصف پر مرکز واقع ہے۔

بیان-2: دو ہم مرکز دائروں میں بڑے دائرے کا وتر چھوٹے دائرے کا مماس ہے اور نقطہ تماس پر اس کی تنصیف کرتا ہے۔

کیا آپ نے دیکھا یہ کس طرح ہوگا۔

ثبوت: دو ہم مرکز دائرے  $C_1$  اور  $C_2$  دیے گئے ہیں۔ جن کا مرکز 'O' ہے۔ اور بڑے دائرے  $C_1$  کا

وتر AB چھوٹے دائرے  $C_2$  کو نقطہ P پر مس کرتا ہے۔ (شکل دیکھیے)۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$AP=PB \text{ O کو P سے ملایئے۔}$$

تب AB دائرہ  $C_2$  کا نقطہ P پر مماس ہے اور OP اس کا نصف قطر ہے۔

اس لیے مسئلہ 9.1 کی رو سے  $OP \perp AB$

اب  $\triangle OAP$  اور  $\triangle OBP$  متماثل ہیں (کیوں؟) اس کا مطلب ہے  $AP=PB$ ۔

لہذا OPI 'وتر AB کا ناصف ہے چونکہ مرکز سے گرایا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے

بیان-3: دائرہ کا مرکز 'O' ہے اور اسکے بیرونی نقطہ A سے اگر دو مماس AP اور AQ کھینچے گئے ہوں تب

$$\angle PAQ = 2\angle OPQ = 2\angle OQP$$

کیا آپ دیکھ سکتے ہیں؟

ثبوت: ہمیں ایک دائرہ دیا گیا ہے جس کا مرکز 'O' ہے، بیرونی نقطہ A سے AP اور AQ دائرے کے دو مماس کھینچے گئے ہیں۔ جہاں پر Q'P

دائرے کے نقطہ مماس ہیں۔ (شکل دیکھیے)

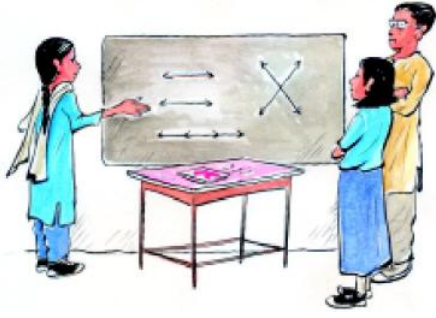
ثابت کرنا ہے کہ  $\angle PAQ = 2\angle OPQ$

فرض کرو کہ  $\angle PAQ = \theta$

اب مسئلہ 9.2 کی رو سے  $AP=AQ$

لہذا  $\triangle APQ$  ایک مساوی الساقین مثلث ہے

(تینوں زاویوں کا مجموعہ)  $\angle APQ + \angle AQP + \angle PAQ = 180^\circ$  اس لیے



$$\angle APQ = \angle AQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$$

علاوہ ازیں مسئلہ 9.1 کی رو سے

$$\angle OPA = 90^\circ$$

$$\angle OPQ = \angle OPA - \angle APQ \text{ لہذا}$$

$$= 90^\circ - \left[ 90 - \frac{1}{2}\theta \right] = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PAQ$$

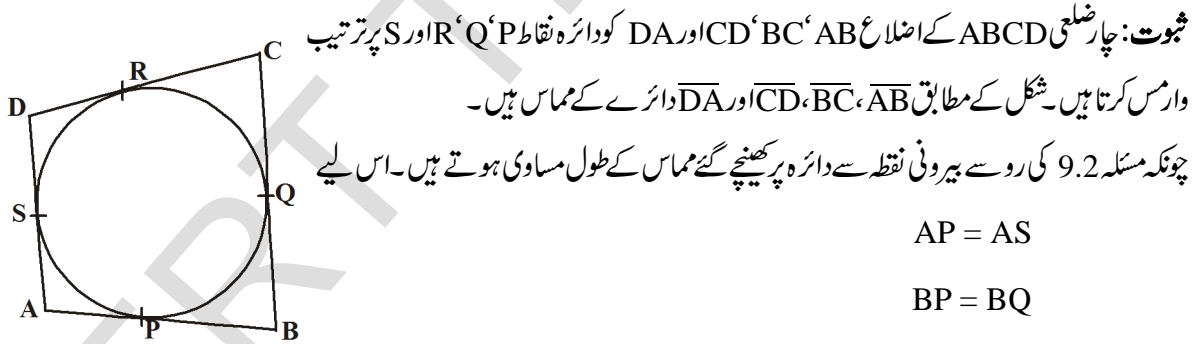
$$\angle OPQ = \frac{1}{2}\angle PAQ \text{ اس سے حاصل ہوتا ہے}$$

$$\angle PAQ = 2\angle OPQ = 2\angle OQP$$

بیان-4: ایک دائرہ کا محیطی چار ضلعی ABCD ہے۔ تب  $AB+CD = BC + DA$

ہمیں کس طرح شروع کرنا ہوگا؟ آپس سوچ سکتے ہیں AB، BC، CD، DA تمام دائرے کے مماس ہیں (شکل دیکھیے)

ایک دائرے کو چار ضلعی کے تمام ضلعوں کے نقاط P، Q، R، S کو مس کرنے کے لیے اس کو چار ضلعی کے اندر واقع ہونا چاہیے (شکل دیکھئے)



ثبوت: چار ضلعی ABCD کے اضلاع AB، BC، CD، DA کو دائرہ نقاط P، Q، R، S پر ترتیب

وارس کرتا ہیں۔ شکل کے مطابق  $\overline{AB}$ ،  $\overline{BC}$ ،  $\overline{CD}$  اور  $\overline{DA}$  دائرے کے مماس ہیں۔

چونکہ مسئلہ 9.2 کی رو سے بیرونی نقطہ سے دائرہ پر کھینچے گئے مماس کے طول مساوی ہوتے ہیں۔ اس لیے

$$AP = AS$$

$$BP = BQ$$

$$DR = DS$$

$$CR = CQ \text{ اور}$$

انہیں جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ$$

$$\text{یا } (AP + PB) + (CR + DR) = (BQ + QC) + (DS + SA)$$

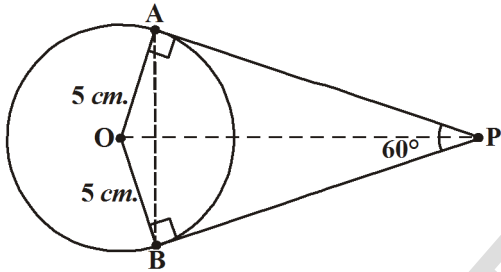
$$\text{یا } AB + CD = BC + DA$$

**مثال-1:5** سمر نصف قطر والے دائرے پر مماس کی ایک جوڑی کھینچئے جو ایک دوسرے سے  $60^\circ$  کا زاویہ بناتے ہیں۔  
**حل:** دائرہ اور دائرے کے دو مماس کھینچنے کے لیے ہمیں دیکھنا ہوگا کہ ہم کس طرح آگے بڑھتے ہیں۔ ہمیں صرف دائرے کا نصف قطر اور دو مماس کے درمیان کا زاویہ دیا گیا ہے ہم یہ نہیں جانتے کہ دائرے کا بیرونی نقطہ دائرے سے کتنی دوری پر واقع ہے۔ جہاں سے دو مماس کھینچے گئے ہیں اور مماس کے طول سے بھی ہم واقف نہیں ہیں۔ ہم صرف دو مماس کے درمیان بننے والے زاویہ سے واقف ہیں۔ ہمیں ان کو استعمال کرتے ہوئے یہ دریافت کرنا ہے کہ بیرونی نقطہ جس سے مماس کھینچا گیا ہے وہ دائرے سے کتنی دوری پر واقع ہے۔  
 آئیے ہم ایک دائرہ پر غور کرتے ہیں جس کا مرکز O ہے اور نصف قطر 5 سمر ہے۔ مان لیجئے کہ PA اور PB دائرے کے دو مماس ہیں جو بیرونی نقطہ P سے کھینچے گئے ہیں اور ان مماس کا درمیانی زاویہ  $60^\circ$  ہے۔ یعنی  $\angle APB = 60^\circ$  اور O۔ P اور O کو ملائیے۔ ہم جانتے ہیں کہ  $\angle APB$  کا نصف ہے۔

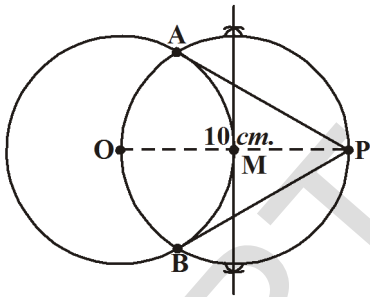
$$\text{چونکہ } (\Delta OAP \cong \Delta OBP) \text{ لہذا } \angle OPA = \angle OPB = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\text{اب } \Delta OAP \text{ میں } \sin 30 = \frac{\text{مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{OA}{OP}$$

$$\text{مثالی نسبت سے } \frac{1}{2} = \frac{5}{OP} \text{ لہذا } OP = 10 \text{ ہے}$$



اب ہم O کو مرکز مان کر 5 سمر نصف قطر کی دوری سے ایک دائرہ کھینچ سکتے ہیں۔ دائرے کے مرکز سے 10 سمر کے فاصلے پر نقطہ P کا تعین کریں گے۔ OP کو ملائیے اور 9.2 میں دی گئی بناوٹ کے مطابق تکمیل کیجئے۔



پس PA اور PB دیئے گئے دائرے پر کھینچے گئے دو مطلوبہ مماس ہیں اس کے علاوہ آپ اس بناوٹ کو علم مثلث کی نسبتوں کو استعمال کیے بغیر بنانے کی کوشش کیجئے۔  
 $\Delta OAP$  میں  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle P = 30^\circ$  اور  $OA = 5$  سمر اور  $\angle O = 60^\circ$  بنائے اس طرح کہ P حاصل ہو جائے۔

### کوشش کیجئے



دو نصف قطر OA اور OB کھینچئے اس طرح کہ  $\angle BOA = 120^\circ$  ہو۔  $\angle BOA$  کا نصف کھینچئے اور OA اور OB پر نقاط A اور B سے عمودی خط کھینچئے۔ یہ خطوط  $\angle BOA$  کے نصف کو دائرے کے بیرونی نقطہ پر قطع کرتے ہیں اور یہ عمودی خطوط دائرے کے مماس ہوں گے۔ تشکیل دیجئے اور صحیح ہونے کی تصدیق کیجئے۔

### مشق 9.2



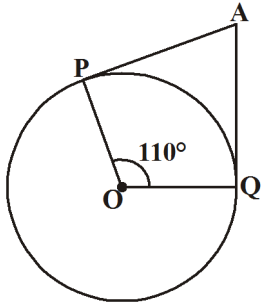
1- صحیح جواب کا انتخاب کیجئے ہر جواب کے صحیح ہونے کی تصدیق کیجئے؟

(i) دائرے کے مماس اور اس کے نقطہ تماس پر کھینچا گیا نصف قطر کا درمیانی زاویہ

- (a)  $60^\circ$  (b)  $30^\circ$  (c)  $45^\circ$  (d)  $90^\circ$

(ii) ایک نقطہ Q سے دائرے کے مماس کا طول 24 سمر ہے۔ اور دائرے کے مرکز سے Q کا فاصلہ 25 سمر ہے تب دائرے کا نصف قطر ہے۔

24.5cm (d) 15cm (c) 12 cm (b) 7cm (a)



(iii) دائرہ کا مرکز 'O' ہے AP اور AQ دائرے کے مماس ہیں اس طرح کہ  $\angle POQ = 110^\circ$  تب  $\angle PAQ$  مساوی ہے

90° (d) 80° (c) 70° (b) 60° (a)

(iv) دائرے کا مرکز O ہے بیرونی نقطہ P سے دائرے کے مماس PA اور PB کھینچے گئے ہیں۔ اگر دو مماس

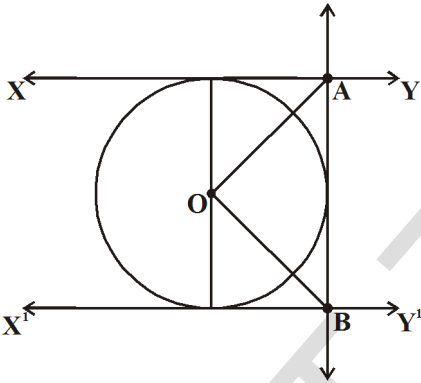
کا درمیانی زاویہ 80° ہو تب  $\angle POA$  مساوی ہے

80° (d) 70° (c) 60° (b) 50° (a)

(v) دائرہ کا مرکز O ہے شکل میں XY اور  $X^1Y^1$  دائرے کے دو متوازی مماس ہیں ایک اور مماس AB جس کا نقطہ تماس C ہے XY سے

$\angle AOB =$  پرب قطع کرتا ہے تب

60° (d) 90° (c) 100° (b) 80° (a)



2- دو ہم مرکز دائرے کھینچے گئے جن کے نصف قطر 5 سمر اور 3 سمر ہیں۔ بڑے دائرے

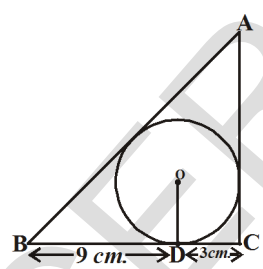
کا وتر کا طول معلوم کیجیے جو چھوٹے دائرے کو مس کرتا ہے؟

3- ثابت کیجیے کہ دائرہ کا ٹیٹلی متوازی الاضلاع ایک معین ہے؟

4- 3 سمر نصف قطر دائرہ کا ایک ٹیٹلی مثلث اس طرح تشکیل دیا گیا ہے کہ نقطہ تماس

BC'D کو دو خطی قطعات BD=9cm اور DC=3cm سمر میں تقسیم کرتا ہے (متصلہ شکل دیکھئے)

ضلع AC اور AB کو معلوم کیجیے۔



5- 6 سمر نصف قطر والا دائرہ کھینچئے۔ دائرے کے مرکز سے 10 سمر کے فاصلے پر واقع نقطہ سے دائرے

کے مماس کھینچئے اور ان کا طول معلوم کیجیے۔ فیثا غورث مسئلہ کی مدد سے تصدیق کیجیے۔

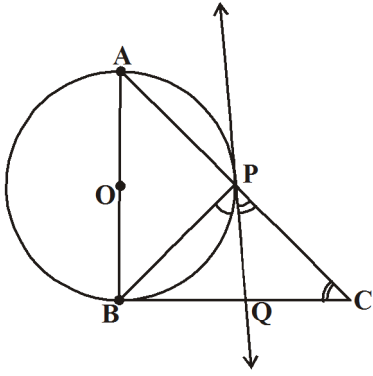
6- 4 سمر نصف قطر والے دائرہ کے ہم مرکز دائرہ جس کا نصف قطر 6 سمر پر کے نقطے سے مماس کھینچئے

اور اس کے طول کو محسوب کیجیے اور پیمائش کر کے تصدیق کیجیے۔

7- ہاتھ کی چوڑی کی مدد سے دائرہ کھینچئے۔ اس دائرہ کے باہر ایک نقطہ لیجئے اس نقطہ سے دائرے پر ایک جوڑ مماس کھینچئے ان کی پیمائش کیجیے۔

نتیجہ لکھئے۔

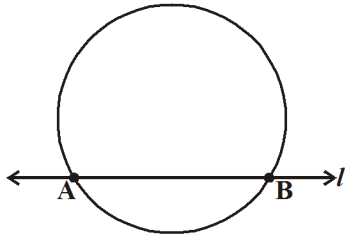




8- ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں ضلع AB کو قطرمان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو وتر AC کو نقطہ P پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ دائرے کے نقطہ P کا مماس BC کی تنصیف کرتا ہے۔

9- دائرے کا مرکز O ہے۔ دائرہ کے بیرونی نقطہ R سے دائرہ پر مماس کھینچے۔ بتائیے کہ اس نقطہ سے دائرے پر کتنے مماس کھینچے جاسکتے ہیں؟  
(اشارہ: ہر صورت میں نقطہ تماس کا فاصلہ اس نقطہ سے مساوی ہوتا ہے)

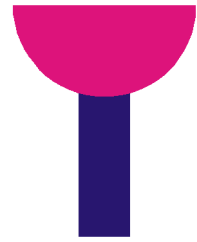
### 9.4 دائرے کے خط قاطع سے بننے والا قاطع



ہم نے ایک خط اور ایک دائرے پر غور کیا ہے جب ایک خط کسی دائرے کے صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے تو وہ مماس ہوتا ہے۔ خط قاطع وہ خط ہے جو دائرے کے دو نقطوں کو قطع کرتا ہے اور دائرے کا وتر خط قاطع میں شامل ہوتا ہے۔

متصلہ شکل میں خط l خط قاطع ہے اور AB وتر ہے۔

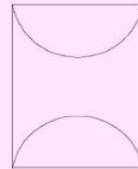
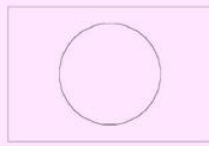
زید گلابی اور نیلے کاغذ کو چپکاتے ہوئے ایک تصویر بنا رہا ہے۔ وہ کئی تصویریں بناتا ہے ان میں ایک تصویر (Wash Basin) واش بیسن کی ہے۔ اس تصویر کی بناوٹ کے لیے زید کو کتنے کاغذ کی ضرورت ہوگی۔ اس تصور کے دو حصوں میں دیکھ سکتے ہیں۔ ایک مستطیلی شکل ہے لیکن باقی حصہ کیا ہے؟ دراصل باقی حصہ دائرے کا قاطع ہے ہمیں معلوم ہے کہ مستطیل کا رقبہ کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہم قاطع دائرے کا رقبہ کس طرح معلوم کرتے ہیں۔ ذیل میں قاطع دائرے کا رقبہ معلوم کرنے سے متعلق تبادلہ خیال کیا گیا ہے۔



یہ کیجیے



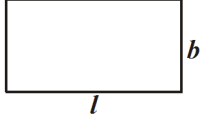
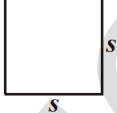

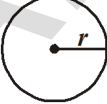
زید نے واش بیسن کے علاوہ ذیل کی تصویریں بھی بنائی ہے۔



ان تصاویر کو کن شکلوں میں کاٹنے سے ہم رقبہ کو آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں؟

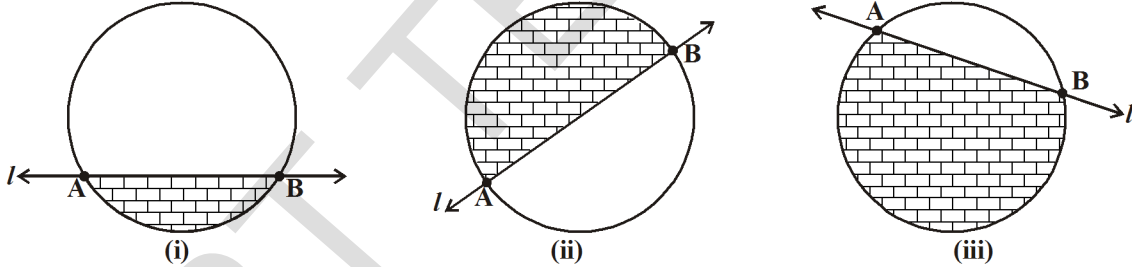
چند اور زیادہ تصاویر میں بنائیے اور ان شکلوں کے متعلق سوچیے جن میں ان کو مختلف حصوں میں تقسیم کیا جاسکے

ذیل میں دیے گئے جیومیٹریہ اشکال کے رقبہ کس طرح معلوم کرتے ہیں۔ آئیے ان کا اعادہ کریں گے۔

رقبہ	ابعاد	شکل	سلسلہ نشان
$A = lb$	طول $l$ عرض $b$		1
$A = s^2$	ضلع $s$		2
$A = \frac{1}{2}bh$	قاعدہ $b$		3
$A = \pi r^2$	نصف قطر $r$		4

### 9.4.1 قطاع دائرے کا رقبہ معلوم کرنا

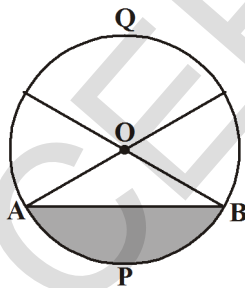
قطاع دائرے کا رقبہ کے تخمینہ کے لئے شریفہ نے قاطع خطوط کھینچے ہوئے دائرے کے قطاع بنائے



رقبہ کو ظاہر کرتا ہے جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ قطاع دائرے کا وہ علاقہ ہے جو ایک وتر اور قوس کی حد بندی سے بنتا ہے۔ تصویر میں سایہ دار حصہ

(i) شکل (ii) نصف دائرہ اور شکل (iii) قطاع اکبر ہے۔ ہم قطاع کا رقبہ کس طرح معلوم

کر سکتے ہیں ذیل کے مشغلہ کو انجام دیجیے



دائرہ نما کاغذ لیجیے اور قطر سے کم والے وتر کے طول پر موڑئے اور چھوٹے حصہ کو سایہ دار کیجیے جیسا کہ شکل میں

بتلایا گیا ہے، ہم اس سایہ دار حصہ کو کیا کہتے ہیں؟ یہ سایہ دار حصہ قطاع اصغر (APB) ہے۔ دائرے کے غیر سایہ دار حصہ کو

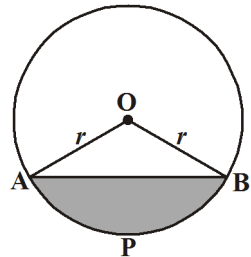
ہم کیا کہیں گے؟ یقیناً یہ قطاع اکبر (AQB) ہے۔

گذشتہ جماعتوں میں آپ قطاع اور دائرے کے خطی قطعے سے متعلق معلومات حاصل

کر چکے ہیں۔ وہ حصہ جو غیر سایہ دار ہے اور سایہ دار حصہ (قطاع اصغر) قطاع ہے جو ایک مثلث اور ایک قطعہ دائرے

سے مل کر بنتا ہے۔ مان لیجیے کہ OAPB ایک دائرے کا قطاع ہے جس کا مرکز O اور نصف قطر  $r$  ہے جیسا کہ شکل

میں بتلایا گیا ہے اور فرض کیجیے کہ  $\angle AOB$  کی پیمائش  $x$  ہے۔



آپ جانتے ہیں کہ دائرے کا رقبہ جب کہ مرکز پر زاویہ کی پیمائش  $360^\circ$  ہو  $\pi r^2$  ہے۔

لہذا جب درجہ کی پیمائش مرکز پر  $1^\circ$  ہو تب قطاع دائرہ کا رقبہ  $\frac{1^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$  ہے۔

اس لیے جب درجہ کی پیمائش مرکز پر  $x^\circ$  ہو تب قطاع دائرہ کا رقبہ  $\frac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$  ہے۔

اب دائرہ کا مرکز O اور نصف قطر r سے بننے والا قطاع APB کے رقبہ کی صورت میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\Delta OAB \text{ کا رقبہ} - \text{قطاع OAPB کا رقبہ} = \text{قطاع APB کا رقبہ}$$

$$= \frac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ کا رقبہ}$$

کوشش کیجیے



آپ قطاع اصغر کے رقبہ کی مدد سے کس طرح قطاع اکبر کا رقبہ معلوم کریں گے۔

یہ کیجیے



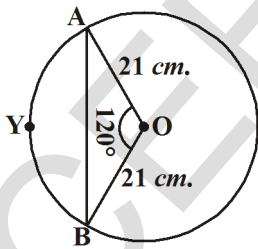
1- ذیل میں دئے گئے زاویوں کی مدد سے قطاع دائرہ کا رقبہ معلوم کیجیے جب اس کا نصف قطر 7 سم ہے۔

(i)  $60^\circ$  (ii)  $30^\circ$  (iii)  $72^\circ$  (iv)  $90^\circ$  (v)  $120^\circ$

2- ایک گھڑی میں منٹ کے کاٹنے کا طول 14 سم ہے تب 10 منٹ بعد منٹ کے کانٹے سے بننے والے رقبہ کو معلوم کیجیے۔

اب ہم قطاع دائرہ کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے مثال کا مشاہدہ کریں گے۔

**مثال-1:** متصلہ شکل میں بتائے گئے قطاع AYB قطاع دائرہ کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ دائرہ کا نصف قطر 21 سم اور  $\angle AOB = 120^\circ$  ہے۔



$$\left( \pi = \frac{22}{7} \text{ اور } \sqrt{3} = 1.1732 \text{ کا استعمال کیجیے} \right)$$

**حل:**  $\Delta AOB$  کا رقبہ - قطاع دائرہ OAYB کا رقبہ = قطاع دائرہ AYB کا رقبہ

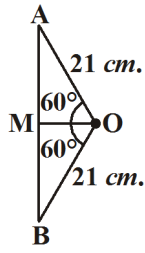
$$\text{اب} \quad \text{قطاع دائرہ OAYB کا رقبہ} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2$$

$$= 462 \text{ مربع سم} \quad \dots \dots \dots (i)$$

$\Delta OAB$  کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے AB پر OM عمود کھینچئے  $OM \perp AB$  (جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے)

نوٹ  $OA = OB$  لہذا RHS متماثلت سے

$$\Delta AMO \cong \Delta BMO$$



لہذا 'M' AB کا وسطی نقطہ ہے اور

$$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

مان لیجیے کہ  $x$  سمر OM =

$$\frac{OM}{OA} = \cos 60^\circ \text{ لہذا } \triangle OMA \text{ سے}$$

$$\text{یا } \frac{x}{21} = \frac{1}{2} \quad \left( \because \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{یا } x = \frac{21}{2}$$

$$\text{لہذا } OM = \frac{21}{2} \text{ سمر}$$

$$\text{اور } \frac{AM}{OA} = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left( \because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{لہذا } AM = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ سمر}$$

$$AB = 2AM = \text{سمر } \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} = \text{سمر } 21\sqrt{3} \text{ لیے اسی}$$

$$\text{لہذا } \angle AOB \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times AB \times OM$$

$$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} \text{ cm}^2$$

$$= \frac{441}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad (2)$$

(1) اور (2) سے

$$\text{اس لیے } \text{قطعہ } AYB = \text{مربع سمر} \left( 462 - \frac{441}{4} \sqrt{3} \right)$$

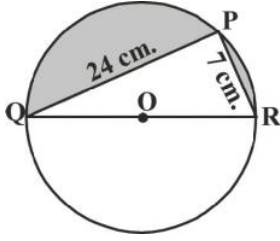
$$= \text{مربع سمر} \frac{21}{4} (88 - 21\sqrt{3})$$

$$= \text{مربع سمر } 271.047$$

**مثال:** شکل میں سایہ دار قطاع کارقبہ معلوم کیجیے اگر  $PQ = 24$  سمر جبکہ  $PR = 7$  سمر اور  $QR$  دائرے کا قطر ہے جس کا مرکز  $O$  ہے  
( $\pi = \frac{22}{7}$  لیجیے)

**حل:**  $\Delta PQR$  کارقبہ - قطاع دائرہ  $OQRR$  کارقبہ = سایہ دار قطاع کارقبہ  
چوں کہ قطر ہے اس لیے  $\angle QPR = 90^\circ$  (نصف دائرہ کا زاویہ)

فیثا غورث مسئلہ کی رو سے



$$\begin{aligned} QR^2 &= PQ^2 + PR^2 \quad \text{میں } \Delta QPR \\ &= 24^2 + 7^2 \\ &= 576 + 49 \\ &= 625 \end{aligned}$$

$$QR = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{تب دائرہ کا نصف قطر} &= \frac{1}{2} QR \\ &= \frac{1}{2} (25) = \text{سمر } \frac{25}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نصف دائرہ } OQPR \text{ کارقبہ} &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2} \\ &= 245.53 \text{ مربع سمر} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{قائم الزاویہ مثلث } \Delta QPR \text{ کارقبہ} &= \frac{1}{2} \times PR \times PQ \\ &= \frac{1}{2} \times 7 \times 24 \\ &= 84 \text{ مربع سمر} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

مساوات (1) اور (2) کی مدد سے

$$\begin{aligned} \text{سایہ دار قطاع کارقبہ} &= 245.53 - 84 \\ &= 161.53 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

**مثال-3:** ایک گول میز کی اوپری سطح پر 6 یکساں ڈیزائن کے نمونے ہیں جیسا کہ شکل میں دکھلایا گیا ہے اگر میز کے اوپری سطح کا نصف قطر 14 سمر ہو تب بحساب 5 فی مربع سمر نمونوں کو رنگین کرنے کی لاگت معلوم کیجیے۔ ( $\sqrt{3} = 1.732$  لیجیے)

حل: آپ جانتے ہیں کہ ایک منتظم مسدس کے محیطی دائرے کا نصف قطر مسدس کے ضلع کے مساوی ہوتا ہے؟

$$14 \text{ سمر} = \text{منتظم مسدس کا ہر ضلع}$$

$$\text{منتظم مسدس کا رقبہ} - \text{دائرہ کا رقبہ} = 6 \text{ قطاع نماڈیزائن کا رقبہ}$$

$$\text{اب دائرہ کا رقبہ} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616 \text{ مربع سمر} \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{منتظم مسدس کا رقبہ} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14$$

$$= 509.21 \text{ مربع سمر} \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) اور (ii) کی مدد سے

$$6 \text{ قطاع نماڈیزائن کا رقبہ} = 616 - 509.21$$

$$= 106.79 \text{ مربع سمر}$$

تب بحساب  $5 \times 106.79$  فی مربع سمر 6 قطاع نماڈیزائن کو رنگین کرنے کی لاگت

$$= 106.79 \times 5$$

$$= 533.95$$

### مشق - 9.3



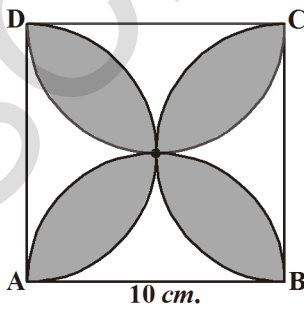
1- 10 سمر نصف قطر والے دائرے میں ایک وتر مرکز پر قائم الزاویہ بناتا ہو تب ذیل میں دیئے گئے دائری خطی قطعوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

$$(\pi = 3.14 \text{ لیجیے})$$

(i) قطاع اصغر (ii) قطاع اکبر

2- 12 سمر نصف قطر والے دائرے کا ایک وتر مرکز پر  $120^\circ$  زاویہ بناتا ہے۔ تب متعلقہ قطاع اصغر کا رقبہ معلوم کیجیے

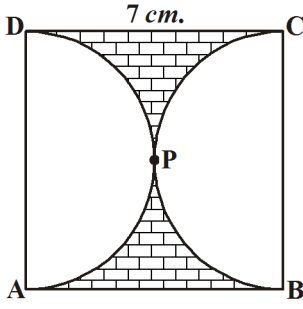
$$(\sqrt{3} = 1.732 \text{ اور } \pi = 3.14 \text{ لیجیے})$$



3- ایک کار کے دو واپرس (Wipers) ہیں جو ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے۔ اگر ہر واپر کا طول 25 سمر اور پونچھتے وقت واپر کا درمیانی زاویہ  $115^\circ$  ہو تب وہ پورے علاقے کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ دو واپرس ایک ساتھ کام کرتے ہیں۔  $(\pi = \frac{22}{7} \text{ لیجیے})$

4- متصلہ شکل میں ABCD ایک مربع ہے جس کے ضلع کا طول 10 سمر ہے اور ہر ضلع کو قطر لیتے ہوئے نصف دائرہ کھینچا گیا تب سایہ دار حصہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔  $(\pi = 3.14 \text{ لیجیے})$

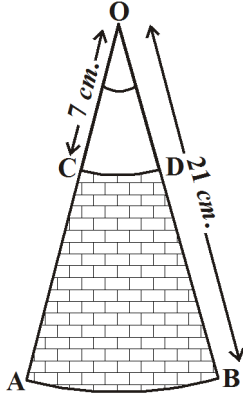
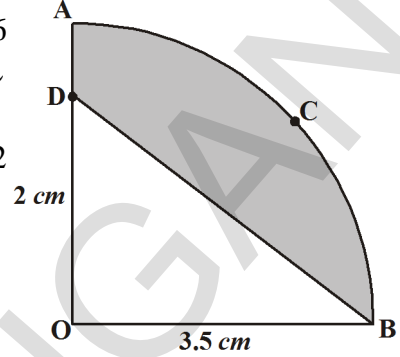




5- متصلہ شکل میں سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے اگر ABCD ایک مربع ہو جس کے ضلع کا طول 7 سمر ہے اور APD اور BPC دو نصف دائرے ہیں۔ ( $\pi = \frac{22}{7}$  لیجیے)

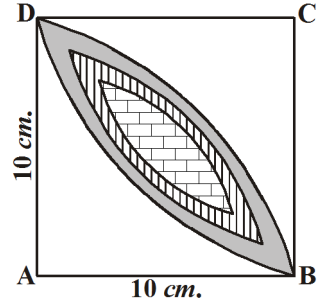
6- متصلہ شکل میں OACB ایک دائری خطہ ہے جس کا مرکز 'O' ہے اور اس کا نصف قطر 3.5 سمر ہے۔ اگر OD = 2 سمر تب سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

$$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$$



7- AB اور CD ترتیب وار قوس ہیں جو کہ ہم مرکز دائرے پر بنائے گئے ہیں جن کے نصف قطر ترتیب وار 21 سمر اور 7 سمر ہیں (متصلہ شکل دیکھئے) اگر  $\angle AOB = 30^\circ$  تب سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے؟

$$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$$



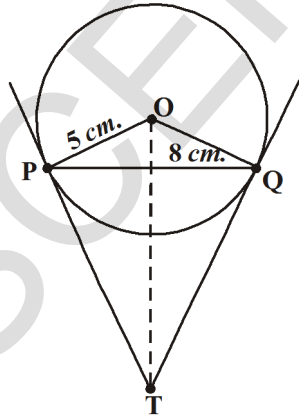
8- متصلہ شکل میں 10 سمر نصف قطر والے دائرہ میں 2 خطے ہیں۔ دو خطوں کے درمیان سایہ دار حصے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ( $\pi = 3.14$  لیجیے)

اختیاری مشق



(جامع اکتساب کے لیے)

1- ثابت کیجیے کہ کسی دائرے کے دو مماس جو کہ دائرے کے بیرونی نقطہ سے بنائے گئے ہوں، کے درمیان والا زاویہ اتہامی ہوتا ہے کیوں کہ نقطہ تماس کو خطی قطعہ سے جوڑنے پر یہ زاویہ بنتا ہے۔

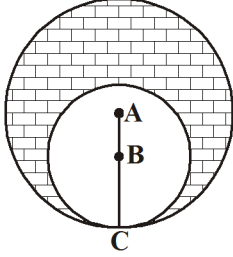


2- PQ ایک وتر ہے اس کا طول 8 سمر ہے اور دائرے کا نصف قطر 5 سمر دیا گیا ہے مماس جو P اور Q کے نقطہ تقاطع T ہے (شکل دیکھیے) تب TP کا طول معلوم کیجیے۔

3- اگر ایک دائرہ کے اندر ایک متوازی الاضلاع تشکیل دیا جائے تو ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلع اتہامی ہوتے ہیں؟

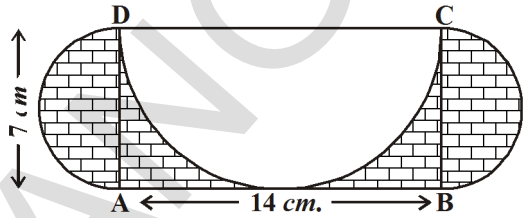
4- ایک خطی قطعہ AB لیجیے۔ جس کی پیمائش 8 سمر ہو۔ A کو مرکز بنا کر 4 سمر نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنائیے۔ B کو مرکز مان کر 3 سمر نصف قطر والا ایک دائرہ بنائیے ہر دائرے کے مرکز سے دوسرے دائرے پر مس کھینچئے۔

5- مان لیجیے کہ ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس میں  $AB = 6$  سمر،  $BC = 8$  سمر اور  $\angle B = 90^\circ$ ، BD کو نقطہ B سے AC پر عموداً کھینچا گیا۔ نقطہ B، C، D کو مس کرتے ہوئے ایک دائرہ بنایا گیا۔ تب نقطہ A سے دائرے کے مماس کھینچیے۔



6- متصلہ شکل میں سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ دو دائرے جن کا مرکز A اور B ہیں یہ دونوں ایک ہی نقطہ تماس C پر منطبق ہوتے ہیں۔ اگر  $AC = 8$  سمر اور  $AB = 3$  سمر ہوں۔

7- ABCD ایک مستطیل ہے جس کا ضلع  $AB = 14$  سمر اور  $BC = 7$  سمر ہے۔ DC، BC اور AD کو قطر مانتے ہوئے تین نصف دائرے بنائے گئے۔ (شکل دیکھیے) تب سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



ہم نے کیا سیکھا



اس باب میں ہم نے حسب ذیل نکات کا مطالعہ کیا ہے۔

- 1- دائرے کے مماس اور متقاطع خطوط کی تعریفیں اور دائرے کے وتر سے متعلق معلومات حاصل کی ہیں۔
- 2- مختلف اقسام کے مثلثات کے تصورات بالخصوص قائم الزاویہ اور مساوی الثاقین مثلثات کا اطلاق کیا ہے۔
- 3- ذیل کے مسئلوں سے آگہی حاصل کی ہے۔
  - (الف) دائرے کے مماس نقطہ تماس سے گزرتے ہوئے نصف قطر پر عمودوار ہوتا ہے۔
  - (ب) ایک دائرے کے بیرونی نقطے سے کھینچے گئے دو مماس کے طول مساوی ہوتے ہیں۔
- 4- حسب ذیل کی بنا وٹیں سیکھی ہیں۔
  - (الف) دائرے پر واقع کسی نقطہ پر مماس کھینچنا جبکہ دائرہ کا مرکز معلوم ہو۔
  - (ب) دیے گئے بیرونی نقطے سے دائرے پر دو مماس بنانا۔
- 5- ہم نے سایہ بھی سیکھا کہ دائرے اور مماس سے متعلق بیانات کو کس طرح ثابت کیا جاسکتا ہے۔ اس ضمن میں سابقہ نتائج کی بناء پر منطقی طور پر نئے نتائج کو اخذ کیا جاتا ہے۔
- 6- مزید یہ سیکھا کہ۔

متعلقہ مثلث کا رقبہ - متعلقہ قطاع کا رقبہ = قطاع دائرہ کا رقبہ

# باب 10

## مساحت Mensuration

### 10.1 تمہید

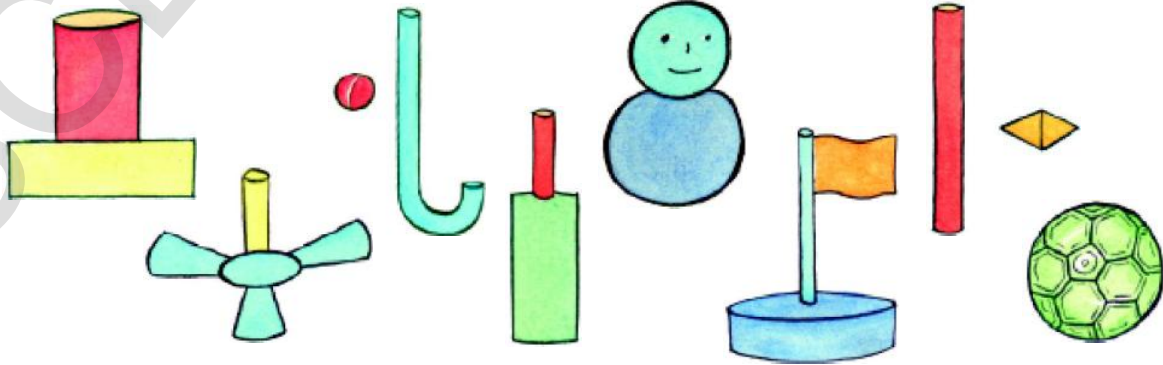
جماعت ہشتم اور نہم میں منتظم ٹھوس اجسام کے رقبہ، طرفی سطح کا رقبہ اور حجم سے متعلق واقفیت حاصل کر لی ہے۔ اور کئی مشقی سوالات کے حل کے ذریعہ ان سے متعلق آگہی بھی حاصل کی ہے۔ ان کا روزمرہ زندگی کے مختلف موقعوں و صورتوں میں نشاندہی کرتے ہوئے یہ اندازہ لگایا کہ کسی کی پیمائش کرنی ہے؟ کسی کا تخمینہ کرنا ہے؟ وغیرہ مثال کے طور پر کسی کمرہ کی رنگریزی کے لیے درکار رنگ کی مقدار معلوم کرنے۔ اس کے لیے ہمیں طرفی سطح کے رقبہ کی ضرورت ہے تاکہ کمرے کے حجم کی اور کٹی گئی دھان کی ذخیرہ اندوزی کے لیے کتنے تھیلیوں کی ضرورت ہوتی ہے؟ معلم کرنے کے لیے ہمیں رقبہ کی ضرورت نہیں ہوتی بلکہ حجم کی ضرورت پڑتی ہے۔

### کوشش کیجیے



- 1- حسب ذیل موقعوں یا صورتحال کا مشاہدہ کرتے ہوئے بتائیے کہ ہر صورتحال میں حجم یا رقبہ میں کسی کی ضرورت درپیش ہوتی ہے؟ اور کیوں؟ وضاحت کیجیے۔
  - (i) بوتل میں پانی کی گنجائش معلوم کرنا
  - (ii) خیمہ (Tent) بنانے کے لیے درکار کپڑا
  - (iii) لاری میں موجود تھیلیوں کی تعداد
  - (iv) سلنڈر میں بھری ہوئی گیس
  - (v) دیاسلائی کی ڈبیہ میں تیلیوں کی ممکنہ تعداد
- 2- ایسے مزید 5 مثالیں ترتیب دیجیے اور اپنے ساتھی سے سوالات کیجیے کہ کس کی ضرورت ہوتی ہے؟

ہم اپنے اطراف و اکناف میں مختلف اشکال (دو یا دو سے زائد اشکال کا مجموعہ) دیکھتے ہیں۔ ستون پر ٹھہرے ہوئے مکان استوانہ نما پانی کے ٹالکیوں کی مکعبی ستون پر تنصیب استوانہ نما کرکٹ بیاٹ کا دستہ جبکہ بلے کا مسطح ہونا وغیرہ۔ اپنے اطراف و اکناف کے مختلف اشیاء پر غور کیجیے۔ ان میں سے چند ذیل میں دیے گئے ہیں۔



آپ صرف واحد منتظم ٹھوس کا سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنے کا طریقہ سیکھ چکے ہیں۔ لیکن بعض اشیاء ایسے بھی دیکھے جاتے ہیں جو دو یا دو سے زائد ٹھوس اشیاء کی اشکال کا مجموعہ ہوتے ہیں۔ لہذا ان کے طرفی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنا ہوتا ہے۔ ذیل کے جدول میں چند ٹھوس اشیاء کی اشکال ان کے رقبہ اور حجم کے ضوابط دیئے گئے ہیں۔

### کوشش کیجیے

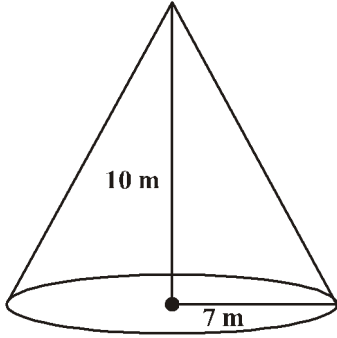


- 1- درج بالا اشکال کو ان کی شکل کی مناسبت سے واقف اشکال میں علاحدہ کیجیے۔
- 2- اپنے اطراف و اکناف میں پائے جانے والے ایسی اشیاء کی نشاندہی کیجیے جو دو یا دو سے زائد اشکال کا مجموعہ ہوں ان کے اشکال کے نام دیجیے۔

آئیے ٹھوس اجسام کے طرفی سطحوں کا رقبہ اور حجم کے ضوابط کا اعادہ کرتے ہیں۔

اصطلاحی تفصیلات	حجم Volume	کل سطح کا رقبہ	طرفی/منحنی سطح کا رقبہ	شکل/وضع	ٹھوس اجسام کے نام	سلسلہ نشان
$l$ = طول $b$ = عرض $h$ = بلندی	$lbh$	$2(lb+bh+hl)$	$2h(l+b)$		مکعب نما	1
$a$ = مکعب کا ضلع	$a^3$	$6a^2$	$4a^2$		مکعب	2
$\times$ قاعدہ کا رقبہ - بلندی		طرفی رخوں کا رقبہ (قاعدہ کا رقبہ) $2$	بلندی $\times$ قاعدہ کا احاطہ		قائم منشور	3
$r$ = قاعدہ کا نصف قطر بلندی $= h$	$\pi r^2 h$	$2\pi r(r+h)$	$2\pi r h$		قائم مدوری استوانہ	4
-	$\frac{1}{3}$ قاعدہ کا رقبہ $\times$ بلندی	قاعدے کا رقبہ + طرفی سطحوں کا رقبہ	$\frac{1}{2}$ (قاعدے کا احاطہ) مائل بلندی $\times$		قائم ابھرام	5
$r$ = قاعدے کا نصف قطر بلندی $= h$ مائل بلندی $= l$	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$	$\pi r(l+r)$	$\pi r l$		قائم مدوری مخروط	6
$r$ = نصف قطر	$\frac{4}{3} \pi r^3$	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$		کرہ	7
$r$ = نصف قطر	$\frac{2}{3} \pi r^3$	$3\pi r^2$	$2\pi r^2$		نصف کرہ	8

آئیے چند مثالوں جدول میں دیے گئے ٹھوس اجسام کے طرفی سطح کا رقبہ کل سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنے کی وضاحت کریں گے۔  
**مثال-1:** مخروط نما ڈیرہ کے قاعدے کا نصف قطر 7 میٹر اور بلندی 10 میٹر ہے۔ اگر کیا نوس کی چوڑائی 2 میٹر ہو تو اس ڈیرے کی تیاری کے لیے



درکار کیا نوس کا طول کیا ہوگا۔ ( $\pi = \frac{22}{7}$  لیا جائے)

**حل:** ڈیرے کے قاعدے کا نصف قطر ( $r$ ) = 7 میٹر

بلندی ( $h$ ) = 10 میٹر

$$l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{49 + 100}$$

$$= \sqrt{149} = 12.2 \text{ میٹر}$$

$$\text{ڈیرے کے طرفی سطح کا رقبہ} = \pi r l$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12.2 \text{ m}^2$$

$$= 268.4 \text{ مربع میٹر}$$

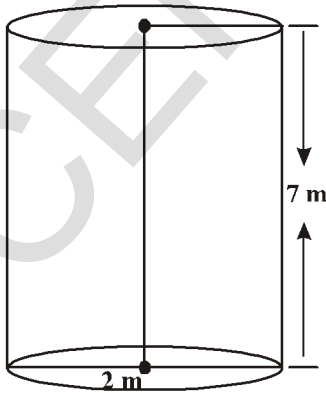
$$= 268.4 \text{ مربع میٹر} = \text{استعمال کیے گئے کیا نوس کا رقبہ}$$

$$= 2 \text{ میٹر} = \text{کیا نوس کی چوڑائی}$$

$$134.2 \text{ میٹر} = \frac{268.4}{2} = \frac{\text{رقبہ}}{\text{چوڑائی}} = \text{کیا نوس کا طول}$$

**مثال-2:** ایک استوانی تیل کے ڈرم کے قاعدے کا قطر 2 میٹر اور بلندی 7 میٹر ہے۔ اس استوانی ڈرم کو پینٹ کرنے کا خرچہ بجسب 3 فی مربع میٹر ہو تو 10 ڈرم کو پینٹ کرنے کا جملہ خرچہ معلوم کیجیے۔

**حل:** دیا گیا ہے کہ استوانی تیل کے ڈرم کا قطر (d) 2 میٹر ہے



$$\text{استوانہ کا نصف قطر} = \frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m}$$

$$\text{استوانی تیل کے ڈرم کا کل سطحی رقبہ} = 2\pi r(r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1(1 + 7)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8$$

$$= \frac{352}{7} \text{ مربع میٹر} = 50.28$$

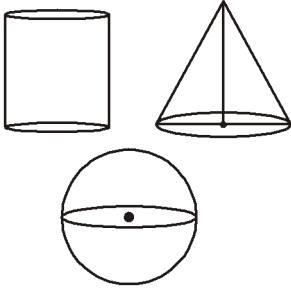
$$\begin{aligned} \text{لہذا } 50.28 \text{ مربع میٹر} &= \text{ڈرم کا کل سطحی رقبہ} \\ \text{فی مربع میٹر پیٹ کرنے کا خرچہ} &= 3 \\ \text{10 ڈرم کے لیے درکار لاگت} &= 50.28 \times 3 \times 10 \\ &= 1508.4 \end{aligned}$$

**مثال-3:** اگر ایک کرہ ایک استوانہ اور ایک مخروط یکساں بلندی اور نصف قطر رکھتے ہیں تب ان کے منحنی سطح کے رقبوں میں نسبت معلوم کیجیے۔

**حل:** فرض کرو کہ کرہ، استوانہ اور مخروط کا نصف قطر 'r' ہے تب

$$\text{کرہ کا نصف قطر} = 2r$$

$$\text{تو } 2r = \text{کرہ کی بلندی} = \text{استوانہ کی بلندی} = \text{مخروط کی بلندی}$$



$$\begin{aligned} \text{مخروط کی مائل بلندی } (l) &= \sqrt{r^2 + h^2} \\ &= \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5}r \end{aligned}$$

$$S_1 = \text{کرہ کی طرفی سطح کا رقبہ} = 4\pi r^2$$

$$S_2 = \text{استوانہ کی طرفی سطح کا رقبہ} = 2\pi rh = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$$

$$S_3 = \text{مخروط کا طرفی سطح کا رقبہ} = \pi r l = \pi r \times \sqrt{5}r = \sqrt{5}\pi r^2$$

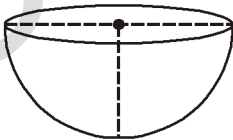
$$S_1 : S_2 : S_3 = 4\pi r^2 : 4\pi r^2 : \sqrt{5}\pi r^2$$

$$= 4 : 4 : \sqrt{5}$$

**مثال-4:** ایک کمپنی نے یہ طے کیا کہ وہ فولادی شیٹ سے 1000 نصف کروئی بیسن (basin) بناتا ہے۔ اگر نصف کروئی بیسن کا نصف قطر 21 سمر ہو تب 1000 بیسن کی تیاری کے لیے فولادی شیٹ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

$$\text{21 سمر} = (r) \text{ نصف کروئی بیسن کا نصف قطر}$$

$$\text{نصف کروئی بیسن کی طرفی سطح کا رقبہ} = 2\pi r^2$$



$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 2772 \text{ مربع سمر}$$



2772 مربع سمر = ایک بیسن کی تیاری کے لیے درکار فولادی شیٹ

$27721000 \times 1000$  = بیسن کی تیاری کے لیے درکار فولادی شیٹ کا رقبہ

$$= \text{مربع سمر } 2772000$$

$$= \text{مربع میٹر } 277.2$$

**مثال-5:** ایک قائم مدوری کا استوانہ کے قاعدے کا نصف قطر 14 سمر اور بلندی 21 سمر ہو تب ذیل کی قدریں معلوم کیجیے۔

(i) قاعدے کا رقبہ (ii) منحنی سطح کا رقبہ

(iii) کل سطحی رقبہ اور (iv) قائم مدوری استوانہ کا حجم

$$\text{حل: (r) استوانہ کا نصف قطر} = 14 \text{ cm}$$

$$\text{(h) استوانہ کی بلندی} = 21 \text{ cm}$$

$$\text{اب (i) قاعدے کا رقبہ} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (14)^2 = \text{مربع سمر } 616$$

$$\text{(ii) منحنی سطح کا رقبہ} = 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 21 = \text{مربع سمر } 1848$$

$$\text{(iii) منحنی سطح کا رقبہ} \times \text{قاعدے کا رقبہ} \times 2 = \text{کل سطحی رقبہ}$$

$$= 2 \times 616 + 1848 = \text{مربع سمر } 3080$$

$$\text{(iv) بلندی} \times \text{قاعدے کا رقبہ} = \pi r^2 h = \text{استوانہ کا حجم}$$

$$= 616 \times 21 = \text{مکعب سمر } 12936$$

**مثال-6:** 2.1 سمر نصف قطر والے کرہ کے طرفی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے ( $\pi = \frac{22}{7}$ )

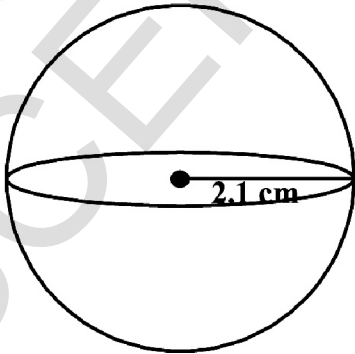
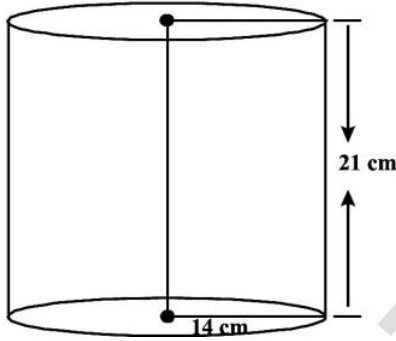
$$\text{حل: (r) کرہ کے نصف قطر} = 2.1 \text{ سمر}$$

$$\text{کرہ کے طرفی سطح کا رقبہ} = 4\pi r^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (2.1)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10}$$

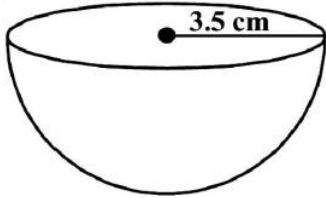
$$= \frac{1386}{25} = 55.44 \text{ cm}^2$$

$$\text{کرہ کا حجم} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3$$



$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 38.808 \text{ cm}^3$$

**مثال-7:** ایک نصف کرے کے کل سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے جبکہ نصف کرہ کا نصف قطر 3.5 سمر ہے۔  $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



**حل:**  $\frac{7}{2}$  سمر = 3.5 سمر = (r) نصف کرہ کا نصف قطر

$$\text{نصف کرہ کا حجم} = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{539}{6} = 89.83 \text{ cm}^3$$

$$\text{کل سطحی رقبہ} = 3\pi r^2$$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{231}{2} = 115.5 \text{ مربع سمر}$$

### مشق - 10.1



- 1- ایک جوکر کی ٹوپی قائم مدوری مخروط نما ہے جس کا نصف قطر 7 سمر اور بلندی 24 سمر ہے اس قسم کے 10 ٹوپی بنانے کے لیے درکار ریشٹ کا رقبہ کیا ہوگا؟
- 2- کھیل کی اشیاء بنانے والی کمپنی شٹل کاک (Shuttle cocks) کی ذخیرہ اندوزی کے لیے 100 استوانہ نما (کاغذ) متقوے کے ڈبے بنانا چاہا۔ استوانہ نما ڈبے کے ابعاد طول/بلندی 35 سمر اور نصف قطر 7 سمر ہے۔ 100 ڈبوں کی تیاری کے لیے درکار کاغذ کے شٹل کاک کا رقبہ معلوم کیجیے؟
- 3- اگر ایک قائم مدوری مخروط کا نصف قطر 6 سمر اور بلندی 7 سمر ہے تب اس کا حجم معلوم کیجیے؟
- 4- ایک استوانہ کا طرفی سطح رقبہ مخروط کی منحنی سطحی کے رقبہ کے مساوی ہے۔ اگر ان دونوں کے قاعدے مساوی ہوں تب استوانہ کی بلندی اور مخروط کی مائل بلندی کے درمیان نسبت معلوم کیجیے؟
- 5- ایک امداد باہمی گروپ (Self help group) نے 3 سمر نصف قطر اور 4 سمر بلندی والے مخروط نما جوکر کی ٹوپیاں بنانا چاہا۔ اگر ان کے پاس 1000 مربع سمر رنگین کاغذی شٹل موجود ہو تو بتلائیے کہ ان سے کتنے ٹوپیاں بنائی جاسکتی ہیں؟
- 6- اگر ایک استوانہ اور مخروط کے نصف قطر اور بلندی مساوی ہیں تب بتلائیے کہ ان کے حجم 3:1 کی نسبت ہوں گے؟
- 7- ایک استوانہ نما لوہے کی سلاخ کی بلندی 11 سمر اور قاعدے کا قطر 7 سمر ہے تب 50 لوہے کی سلاخوں کا حجم معلوم کیجیے؟

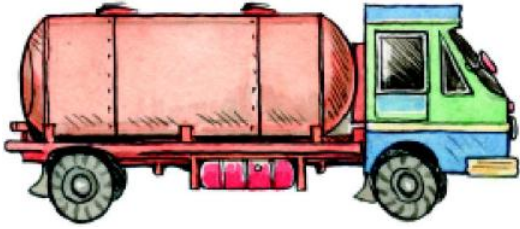
8- ایک دھان کا ڈھیر مخروط نما ہے جس کا قطر 12 میٹر اور بلندی 8 میٹر ہے۔ تب اس کا حجم معلوم کیجیے؟ اس کو ڈھانکنے کے لیے کتنا کیا نوس درکار ہوگا؟ ( $\pi=3.14$  لیجیے)

9- ایک مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ 4070 مربع سمر ہے۔ اور اس کا قطر 70 سمر ہے تب اس کی ماٹل بلندی معلوم کیجیے؟

## 10.2 دو یا دو زائند ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھنے والے شکل کا سطحی رقبہ

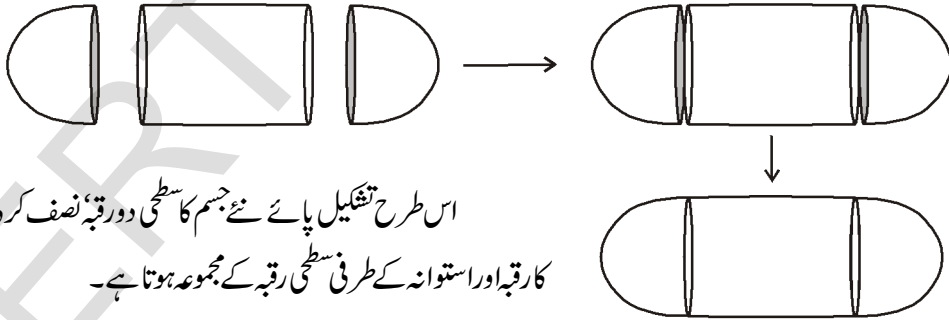


ہم اپنے اطراف و اکناف اکثر ایسی اشیاء دیکھتے ہیں جو دو یا دو سے زائند ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھتے ہیں جیسے کرہ استوانہ اور مخروط۔ اس کے علاوہ اپنی روزمرہ زندگی میں بھی کئی ایسی اشیاء کا مشاہدہ کرتے ہیں جیسے لکڑی کے اشیاء، گھریلو سامان، کپسل گولیاں (Capsules)، بوتل، تیل کے ٹینکر وغیرہ۔ ہم آئس کریم سے بھی لطف اندوز ہوتے رہتے ہیں کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان میں کتنے ٹھوس اجسام موجود ہیں؟ عام طور پر یہ مخروط اور نصف کرہ سے ملکر بنتا ہے۔



آئیے ایک اور مثال تیل کے ٹینکر/پانی کے ٹینکر کی لیتے ہیں۔ کیا یہ ایک ہی وضع یا شکل رکھنے والا جسم ہے؟ اگر آپ اس کا بغور مشاہدہ کرتے ہیں تو یہ اندازہ لگائیں گے کہ یہ استوانہ کے ساتھ ساتھ (دونوں کناروں پر) نصف کرہ پر مشتمل ہے؟

مذکورہ بالا اجسام رکھنے والے اجسام کا سطحی رقبہ، حجم یا گنجائش آپ کس طرح معلوم کریں گے؟ ان اجسام کی درجہ بندی گذشتہ پیریڈس میں سیکھے ہوئے معلومات کی بنیاد پر نہیں کر سکتے ہیں؟ ہم دیکھ چکے ہیں کہ تیل کا ٹینکر، استوانہ اور نصف کرہ کا اجماع ہے۔ دونوں کرے استوانہ کے دونوں کناروں سے جڑے ہوئے ہیں۔ اسکو ذیل کی شکل کے ذریعہ بتایا جاسکتا ہے۔



اس طرح تشکیل پائے نئے جسم کا سطحی دورقبہ، نصف کرہ کے منحنی سطح کا رقبہ اور استوانہ کے طرفی سطحی رقبہ کے مجموعہ ہوتا ہے۔

دوسرے نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ (CSA) + استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ (CSA) + نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ نئے جسم کا کل سطحی رقبہ

یہاں پر TSA سے مراد کل سطحی رقبہ اور CSA سے مراد منحنی سطح کا رقبہ ہے۔

آئیے ایک اور مثال پر غور کرتے ہیں۔

عاطف ایک کھلونا (Toy) تیار کرنا چاہتا ہے۔ جو نصف کرہ اور مخروط پر مشتمل ہے۔ آئیے اس کے تیار کرنے کے مراحل کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

پہلے مساوی نصف قطر کے مخروطی اور نصف کروی حصوں کو لینا چاہیے۔ تاکہ ان کے ہموار سطح ایک ساتھ ہوں۔ لہذا حسب ذیل مراحل اپنانا چاہیے۔



مرحلہ - III

مرحلہ - II

مرحلہ - I

مرحلے کے آخر میں عطف کو ایسا کھلونا حاصل ہوگا۔ جس کا نچلا حصہ گول ہوگا۔ اب اس کھلونے کی رنگریزی کرنے کے لیے درکار پینٹ کی مقدار جاننے کے لیے کھلونے کے کل سطح کا رقبہ جاننا ضروری ہے۔ اس لیے عطف کو چاہیے کہ وہ نصف کرہ کا CSA اور مخروط کا CSA معلوم کرے کیونکہ یہ کھلونا دو ٹھوس اجسام کا مجموعہ ہے۔ لہذا اہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ

$$\text{مخروط منحنی سطح کا رقبہ (CSA)} + \text{نصف کرہ کی منحنی سطح کا رقبہ (CSA)} = \text{کھلونے کا کل سطحی رقبہ TSA}$$

### کوشش کیجیے

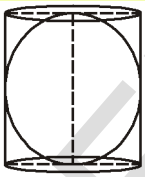


معلوم ٹھوس اجسام کی مدد سے ممکنہ کھلونے تیار کیجیے (جو دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ ہو) جنہیں آپ اپنی روزمرہ زندگی میں دیکھتے ہیں۔  
(اشارہ: چکنی مٹی، گینڈ پاپ، کاغذ کے مخروط، مگب اور مگب نما بکسے وغیرہ استعمال کیجیے)

### سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



استوانہ نما برتن میں کرہ تشکیل دیا گیا۔ کیا کرہ کے طرفی سطح رقبہ اور استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ کے مساوی ہوگا؟  
اگر آپ کا جواب ہاں ہو تو کس طرح یہ ممکن ہوگا وضاحت کیجیے۔



**مثال-8:** ایک قائم الزاویہ مثلث جس کا قاعدہ اور بلندی بالترتیب 15 سمر اور 20 سمر ہیں اگر مثلث وتر کے اطراف گردش کرتا ہے تب اس طرح بننے والے دوہرے مخروط کا حجم اور طرفی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے (p=3.14 لیجیے)

**حل:** فرض کرو کہ ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے۔

$$AB = 15 \text{ سمر اور } AC = 20 \text{ سمر}$$

فیثا غورث مسئلہ کی مدد سے  $\Delta ABC$  میں

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 15^2 + 20^2$$

$$BC^2 = 225 + 400 = 625$$

$$BC = \sqrt{625} = \text{سم} 25$$

$$\text{فرض کرو کہ } OA = x \text{ اور } OB = y$$

مثلث ABO اور ABC میں  $\angle BOA = \angle BAC$  اور  $\angle ABO = \angle ABC$  ہوگا

اس لیے (زاویہ-زاویہ متماثل اصول کی رو سے)  $\Delta BOA \sim \Delta BAC$

$$\text{اس لیے } \frac{BO}{BA} = \frac{OA}{AC} = \frac{BA}{BC}$$

$$\frac{y}{15} = \frac{x}{20} = \frac{15}{25}$$

$$\frac{y}{15} = \frac{x}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{y}{15} = \frac{3}{5} \text{ اور } \frac{x}{20} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{3}{5} \times 15 \text{ اور } x = \frac{3}{5} \times 20$$

$$y = 9 \text{ اور } x = 12$$

اس لیے

$$OB = 9 \text{ سم اور } OA = 12 \text{ سم}$$

جب مثلث ABC وتر کے اطراف گردش کرتا ہے تب ہم کو دو ہر مخروط حاصل ہوتا ہے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

$BAA'$  مخروط کا حجم +  $CAA'$  مخروط کا حجم = دو ہرے مخروط کا حجم

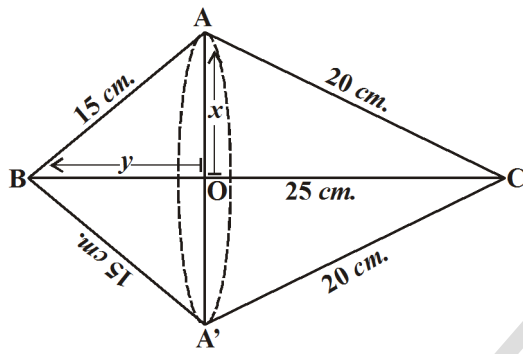
$$= \frac{1}{3} \pi (OA)^2 \times OC + \frac{1}{3} \pi (OA)^2 \times OB$$

$$= \frac{1}{3} \pi \times 12^2 \times 16 + \frac{1}{3} \pi \times 12^2 \times 9$$

$$= \frac{1}{3} \pi \times 144 (16 + 9)$$

$$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 144 \times 25 \text{ مکعب سم}$$

$$= 3768 \text{ سم مکعب}$$



Note :

$$\frac{1}{3} \pi (OA)^2 (OC + OB)$$

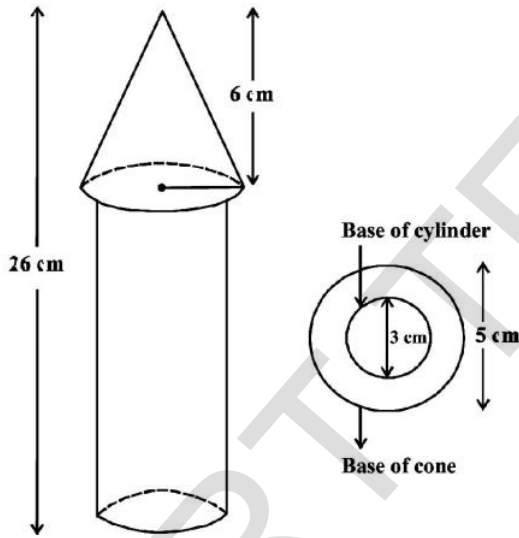
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 12^2 \times (16 + 9)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 144 \times 25$$

$$\begin{aligned}
\text{مخروط } BAA^1 \text{ کا منحنی سطح کا رقبہ} + (\text{مخروط } CAA^1 \text{ کا منحنی سطح کا رقبہ}) &= \text{دوہرے مخروط کا سطحی رقبہ} \\
&= \pi \times OA \times AC + \pi \times OA \times AB \\
&= (\pi \times 12 \times 20) + (\pi \times 12 \times 15) \\
&= 420\pi \text{ cm}^2 \\
&= 420 \times 3.14 \text{ cm}^2 \\
&= 1318.8 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

**مثال-9:** ایک لکڑی کا راکٹ نما (کھلونا) تیار کیا گیا۔ استوانہ کے اوپر مخروط کوٹھرایا گیا جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے راکٹ کی جملہ بلندی 26 سمر ہے۔ جبکہ مخروط کی بلندی 6 سمر ہے۔ مخروط کے قاعدے کا قطر 5 سمر ہے جب کہ استوانہ کے قاعدے کا قطر 3 سمر ہے۔ اگر مخروطی حصہ کو نارنجی رنگ (Orange) اور استوانہ نما حصہ کو زرد (Yellow) رنگ کرنا ہو تب ہر رنگ سے رنگین کیا ہوا راکٹ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(لیجیے  $\pi = 3.14$ )



**حل:** فرض کیجیے کہ مخروط کے قاعدے کا نصف قطر  $r$  اور مائل بلندی  $l$  ہے۔ او

اسی طرح استوانہ کا نصف قطر  $r_1$  اور بلندی  $h_1$  ہے

$$r = 2.5 \text{ سمر} ; h = 6 \text{ سمر}$$

$$r_1 = 1.5 \text{ سمر} ; h_1 = 20 \text{ سمر}$$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} \quad \text{اب}$$

$$l = \sqrt{(2.5)^2 + 6^2}$$

$$l = \sqrt{6.25 + 36} = \sqrt{42.25} = 6.5$$

اب نارنجی رنگریزی کے لیے

استوانے کے قاعدے کا رقبہ - مخروط کے قاعدے کا رقبہ + مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ

$$\begin{aligned}
&\pi r l + \pi r^2 - \pi r_1^2 \\
&= \pi \{ (2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2 \} \text{ cm}^2 \\
&= \pi (20.25) \text{ cm}^2 = 3.14 \times 20.25 \text{ cm}^2 \\
&= 63.585 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

استوانے کے قاعدے کا رقبہ + استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ = وہ حصہ جو زرد رنگریزی کے لیے

$$= 2\pi r_1 h_1 + \pi r_1^2$$

$$= \pi r_1 (2h_1 + r_1)$$



$$= 3.14 \times 1.5 (2 \times 20 + 1.5)$$

$$= 3.14 \times 1.5 \times 41.5$$

$$= 4.71 \times 41.5$$

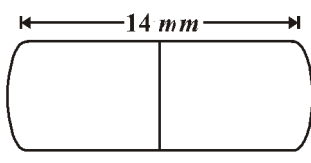
$$= 195.465 \text{ مربع سمر}$$

$$195.465 = \text{لہذا زرد رنگ کیا ہوا حصہ}$$

## مشق 10.2



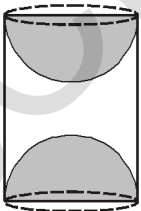
- 1- ایک کھلونا ہے جس میں نصف کرہ پر مخروط کو نصب کیا گیا ہے۔ مخروط کے قاعدے کا قطر اور بلندی بالترتیب 6 سمر اور 4 سمر ہے۔ تب کھلونے کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے ( $\pi = 3.14$  لیجیے)
- 2- ایک ٹھوس جسم قائم مدور استوانہ نما ہے۔ جس کے ایک کنارے پر نصف کرہ اور دوسرے کنارے پر مخروط نصب کیا گیا ہے مشترک قاعدے کا نصف قطر 8 سمر ہے جبکہ استوانی اور مخروطی حصے کی بلندی بالترتیب 10 سمر اور 6 سمر ہے تب ٹھوس جسم کی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے ( $\pi = 3.14$  لیجیے)



- 3- ایک دوئی کیپ سول (Capsule) استوانہ نما ہے جس کے دونوں کناروں پر نصف کرہ لگے ہوئے ہیں۔ Capsule کی لمبائی 14 ملی میٹر ہے۔ جبکہ چوڑائی 5 ملی میٹر ہے تب اس کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

- 4- 64 مکعب سمر حجم والے دو مکعبوں کو ملایا گیا ہے اس طرح بننے والے نئے مکعب نما کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔
- 5- ایک پانی کا ٹینکر استوانہ نما ہے اس کے دونوں جانب نصف کرہ جڑا ہوا ہے۔ اگر استوانہ کا بیرونی قطر 1.4 میٹر اور طول 8 میٹر ہو تب اس ٹینکر کو بیرونی جانب سے فی مربع میٹر 20 روپے کے حساب سے رنگ ریزی کا خرچ معلوم کیجیے۔
- 6- اگر ایک کرہ استوانہ اور مخروط مساوی نصف قطر اور بلندی رکھتے ہوں تب ان کے حجم میں نسبت معلوم کیجیے۔ (اشارہ: کرہ کا قطر، استوانے اور مخروط کی بلندی کے مساوی ہے)

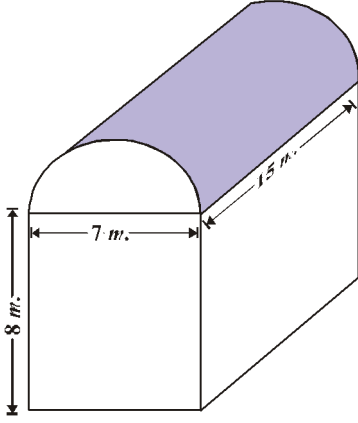
- 7- ایک مکعبی نما لکڑی کے کندے سے ایک نصف کرہ اس طرح کاٹ لیا گیا کہ نصف کرہ کا قطر مکعب کے ضلع کے مساوی ہے تب باقی ٹھوس جسم کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔



- 8- ایک لکڑی سے بنائے گئے استوانی شے کے دونوں جانب سے نصف کرہ نما حصوں کو علیحدہ کر دیا گیا جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اگر استوانہ کی بلندی 10 سمر اور اس کے قاعدہ کے نصف قطر 3.5 سمر ہو تو شے کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

## دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھنے والے جسم کا حجم

آئیے مثال کے ذریعہ دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھنے والے جسم کا حجم معلوم کرنے کا طریقہ سمجھیں گے۔



سلیم ایک شیڈ میں فیکٹری چلاتا ہے۔ جو کہ مکعب نما پر نصف استوانہ ٹھہرانے کے مانند ہے۔ شیڈ کے قاعدے کا ابعاد 7 میٹر اور 15 میٹر ہے اور ان کی بلندی مکعب نما حصہ کی بلندی 8 میٹر ہے تب اس شیڈ میں موجود ہوا کی گنجائش یا حجم معلوم کیجیے؟ مزید شیڈ میں موجود مشنری 300 مکعب میٹر جگہ گھیرتی ہے۔ اور 20 مزدور اوسطاً 0.08 مکعب میٹر جگہ گھیرتے ہیں تب اس شیڈ میں موجود ہوا کا حجم معلوم کیجیے۔

شیڈ میں موجود ہوا کا حجم (مشنری اور مزدور نہ رہنے پر) مکعب نما حصہ میں موجود ہوا کا حجم اور نصف استوانہ میں موجود ہوا کے حجم کا مجموعہ ہوتا ہے۔ اگر مکعب نما کا طول، عرض اور بلندی بالترتیب 15 میٹر، 7 میٹر اور 8 میٹر ہیں مزید نصف استوانہ کا قطر 7 میٹر اور اسکی بلندی 15 میٹر ہے۔

$$\begin{aligned} \text{تب} \quad \text{استوانہ کا حجم} \times \frac{1}{2} + \text{مکعب نما کا حجم} &= \text{مطلوبہ حجم} \\ &= \left[ 15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15 \right] m^3 \\ &= 1128.75 m^3 \end{aligned}$$

$$\text{بعد از مشنری کی گھیری ہوئی مکمل جگہ} = 300 m^3$$

$$\begin{aligned} \text{اور مزدوروں کی گھیری ہوئی جگہ} &= 20 \times 0.08 m^3 \\ &= 1.6 m^3 \end{aligned}$$

لہذا ہوا کا حجم جبکہ شیڈ میں مشنری اور مزدور موجود ہوں

$$= 1128.75 - (300.00 + 1.60)$$

$$= 1128.75 - 301.60 = 827.15 \text{ مکعب میٹر}$$

نوٹ: دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھنے والے شکل کے سطحی رقبہ میں دو ٹھوس اجسام کے سطحی رقبوں کو جمع نہیں کیا جاسکتا کیونکہ جب دو اجسام کو جوڑا جاتا ہے تو سطحی رقبہ کا کچھ حصہ چھپ جاتا ہے۔ لیکن حجم معلوم کرنے کے دوران ایسا نہیں ہوتا۔ دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھنے والے شکل کا حجم، ان اشیاء کے حجم اجسام کا مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ جن کو جوڑ کر شکل حاصل کی گئی ہے جیسا کہ اوپر کی مثال میں دیکھا گیا ہے۔

کوشش کیجیے



- 1- اگر ایک تار (Wire) کے عمودی تراش کے قطر میں 5% کمی کر دی جائے تب اس کے طول میں کتنے فیصد اضافہ کیا جائے تاکہ اس کے حجم میں تبدیلی واقع نہ ہو۔
- 2- اگر کرہ اور مکعب کا طرئی سطح کا رقبہ مساوی ہو تب ان کے حجم کے درمیان نسبت معلوم کیجیے؟

آئیے مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

**مثال-10:** ایک ٹھوس کھلونا جو قائم مدور استوانہ نما ہے اس کے دو کناروں پر ترتیب وار نصف کرہ اور مخروط جڑے ہوئے ہیں ان کا مشترک قطر 4.2 سمر ہے جبکہ استوانہ اور مخروط نما حصوں کی بلندی بالترتیب 12 سمر اور 7 سمر ہے تب ٹھوس کھلونے کا حجم معلوم کیجیے ( $\pi = \frac{22}{7}$  لیجیے)

حل:

$$h_1 = 7 \text{ سمر} \quad \text{فرض کرو کہ مخروط نما حصہ کی بلندی}$$

$$h_2 = 12 \text{ سمر} \quad \text{استوانہ نما حصہ کی بلندی}$$

$$r = \frac{4.2}{2} = 2.1 = \frac{21}{10} \text{ سمر} \quad \text{نصف قطر}$$

نصف کرہ کا حجم + استوانہ کا حجم + مخروط کا حجم = ٹھوس کھلونے کا حجم

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{2}{3} \pi r^3$$

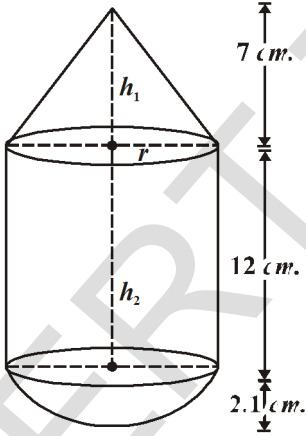
$$= \pi r^2 \left[ \frac{1}{3} h_1 + h_2 + \frac{2}{3} r \right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \left( \frac{21}{10} \right)^2 \times \left[ \frac{1}{3} \times 7 + 12 + \frac{2}{3} \times \frac{21}{10} \right]$$

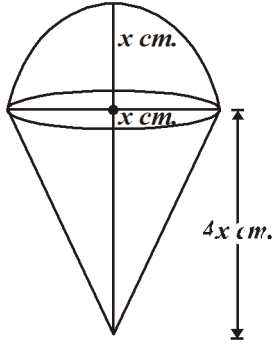
$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[ \frac{7}{3} + \frac{12}{1} + \frac{7}{5} \right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[ \frac{35 + 180 + 21}{15} \right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \frac{236}{15} = \frac{27258}{125} = 218.064 \text{ cm}^3.$$



**مثال-11:** ایک استوانہ نما برتن کو آئس کریم سے پُر کیا گیا جس کا قطر 12 سمر اور بلندی 15 سمر ہے اس آئس کریم کو اوپری نصف کروی نما مخروط میں مساوی طور پر پُر کر کے 10 بچوں میں تقسیم کیا گیا۔ اگر مخروط نما حصہ کی بلندی اس کے قاعدے کے قطر کا دُگنا ہو تب آئس کریم مخروط کا قطر معلوم کیجیے۔



**حل:** فرض کرو کہ مخروط نما آئس کریم کے قاعدے کا نصف قطر =  $x$  سمر

$$\text{قطر} = 2x \text{ سمر}$$

$$\text{تپ مخروطی آئس کریم کی بلندی} = \text{سمر } 2(2x) = 4x \text{ سمر}$$

$$\text{نصف کروی حصہ کا حجم} + \text{مخروط نما حصہ کا حجم} = \text{مخروطی آئس کریم کا حجم}$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{1}{3} \pi x^2 (4x) + \frac{2}{3} \pi x^3$$

$$= \frac{4\pi x^3 + 2\pi x^3}{3} = \frac{6\pi x^3}{3}$$

$$= 2\pi x^3 \text{ m}^3$$

$$\text{استوانہ نما برتن کا قطر} = 12 \text{ سمر}$$

$$\text{اس کی بلندی} = 15 \text{ سمر}$$

لہذا

$$\text{استوانہ نما برتن کا حجم} = \pi r^2 h$$

$$= \pi (6)^2 15$$

$$= 540 \text{ مکعب سمر}$$

$$\text{بچوں کی تعداد جن میں آئس کریم تقسیم کی گئی} = 10$$

$$\frac{\text{استوانہ نما برتن کا حجم}}{\text{ایک آئس کریم کون (مخروط) کا حجم}} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{540\pi}{2\pi x^3} = 10$$

$$2\pi x^3 \times 10 = 540\pi$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{540}{2 \times 10} = 27$$

$$\Rightarrow x^3 = 27$$



$$\Rightarrow x^3 = 3^3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$(2x) = \text{لہذا آکس کریم کون کا قطر}$$

$$\text{سمر } 6 = 2 \times 3 =$$

**مثال-12:** ایک ٹھوس جسم جو قائم مدور مخروطی شکل ہے جس کو ایک نصف کرہ پر ٹھہرا گیا ہے۔ اس ٹھوس جسم کو پانی سے بھرے ایک قائم مدور استوانہ نما برتن میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ برتن کے نچلے حصہ سے مس ہو جائے۔ تب استوانہ نما برتن بچے ہوئے پانی کا حجم معلوم کیجیے جبکہ استوانہ نما برتن کا نصف 3 سم بلندی 6 سم اور نصف کرہ کا نصف قطر 2 سم ہے جب کہ مخروط کی بلندی 4 سم ہے۔

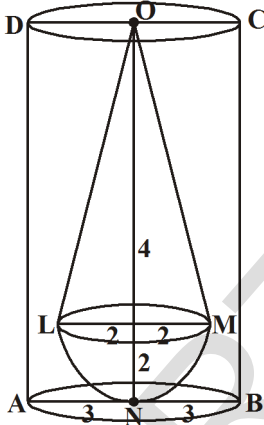
$$\left( \pi = \frac{22}{7} \text{ لیا جائے} \right)$$

**حل:** متصلہ شکل میں

ABCD ایک استوانہ نما برتن ہے، LMN نصف کرہ ہے اور OLM مخروط ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ جب ٹھوس جسم کو استوانہ نما برتن جس میں پانی بھرا ہوا ہے رکھا جائے ہے تو چھلکنے والے پانی کا حجم، ٹھوس جسم کے حجم کے

برابر ہوگا۔



$$\text{استوانہ کا حجم} = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi \text{ m}^3$$

$$\text{نصف کرہ کا حجم} = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{16}{3} \pi \text{ m}^3$$

$$\text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4 = \frac{16}{3} \pi \text{ m}^3$$

$$\text{ٹھوس جسم کا حجم} = \frac{16}{3} \pi + \frac{16}{3} \pi =$$

$$\frac{32}{3} \pi =$$

$$\text{(مخروط اور نصف کرہ کا حجم) - (استوانہ کا حجم) = استوانہ نما برتن میں بچے ہوئے پانی کا حجم}$$

$$= 54\pi - \frac{32}{3} \pi$$

$$= 54\pi - \frac{32\pi}{3}$$

$$= \frac{130}{3} \times \frac{22}{7} = \frac{2860}{21} = 136.19 \text{ m}^3$$

**مثال-13:** ایک استوانہ نما پنسل کے سرے کو تراش کر مخروطی شکل دی گئی اس طرح کہ اس کے طول میں کوئی کمی واقع نہ ہو۔ اگر پنسل کا قطر 1 سمر اور تراشے ہوئے مخروطی حصہ کا طول 2 سمر ہو تب تراشے ہوئے حصہ کا حجم معلوم کیجیے۔ جواب کو اعشاریہ کے دو مقامات تک محسوب کیجیے۔

$$\left( \pi = \frac{355}{113} \text{ لیا جائے} \right)$$



**حل:** پنسل کا قطر = 1 سمر

تب پنسل کا نصف قطر (r) = 0.5 سمر

مخروطی حصہ کا طول = h = 2 سمر

استوانہ سے حاصل کردہ مخروط کا حجم - استوانہ کا حجم جس کا طول 2 سمر اور نصف قطر 0.5 سمر = تراشے ہوئے حصہ کا حجم

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{355}{113} \times (0.5)^2 \times 2 \text{ cm}^3 = 1.05 \text{ cm}^3$$

### مشق 10.3



1- ایک استوانہ نما لوہے کا برتن جس کی بلندی 2.8 میٹر اور قطر 20 سمر ہے۔ اس پر 42 سمر بلندی والا مخروط نصب کیا گیا

ہے۔ اگر ایک مکعب سمر لوہے کا وزن 7.5 گرام ہو تب اس لوہے کے ستون کا وزن کیا ہوگا؟

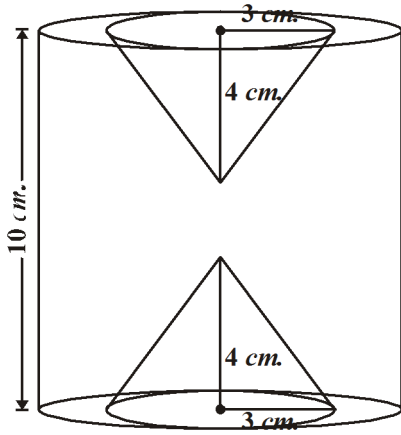
2- ایک کھلونا جو ایک نصف کرہ کے اوپری سطح پر مخروط نما حصہ کو اس طرح نصب کیا گیا کہ اس کا قاعدہ نصف کرہ کے ہموار سطح سے جڑا

ہوا ہے۔ اگر مخروط کے قاعدے کا نصف قطر 7 سمر اور اس کا حجم نصف کرہ کے حجم کا  $\frac{3}{2}$  گنا ہے تب مخروط کی بلندی اور کھلونے کا

سطحی رقبہ اعشاریہ کے دو مقامات تک معلوم کیجیے۔  $\left( \pi = 3\frac{1}{7} \right)$  لیجیے

3- اعظم ترین قائم مدور مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔ جس کو 7 سمر ضلع والے مکعب سے علاحدہ کیا گیا ہے۔



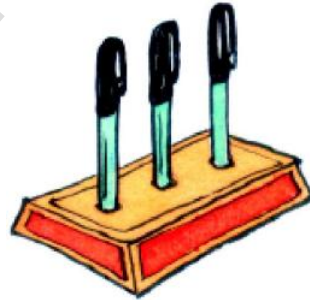


4- ایک استوانہ نما برتن جس کا نصف قطر 5 سمر اور بلندی 9.8 سمر ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ مخروطی شکل کا ٹھوس جسم جو کہ نصف کرہ پر نصب ہے کو جس کو اس برتن میں ڈالا گیا۔ نصف کرہ کا نصف قطر 3.5 سمر ہے اور مخروطی حصہ کی بلندی 5 سمر ہے تب استوانہ نما برتن میں بچے ہوئے پانی کا حجم معلوم کیجیے ( $\pi = \frac{22}{7}$  لیجیے)

5- متصلہ شکل میں ایک ٹھوس استوانہ کی بلندی 10 سمر اور قطر 7 سمر ہے دو مساوی مخروطی حصوں کو شکل کے مطابق نکال دیا گیا ہے جس کا نصف قطر 3 سمر اور بلندی 4 سمر ہو۔ استوانہ کے بچے ہوئے حصے کا حجم معلوم کیجیے۔

6- 1.4 سمر قطر کے کروی شکل کی کنچوں (Marbles) کو 7 سمر استوانہ نما برتن میں ڈالا گیا جس میں پانی کی کچھ مقدار موجود ہے۔ تب کنچوں کی تعداد معلوم کیجیے جس کو برتن میں ڈالنے پر پانی کی سطح میں 5.6 سمر کا اضافہ ہو جائے۔

7- لکڑی کا بنا ہوا Pen stand جو کہ مکعب نما (Cuboid) شکل کا ہے جس میں تین مخروط نما خول ہیں۔ مکعب نما کے ابعاد 15 سمر 10 سمر اور 3.5 سمر ہیں۔ ہر خول کا نصف قطر 0.5 سمر اور گہرائی 1.4 سمر ہے۔ اس اسٹانڈ میں مستعملہ لکڑی کا حجم معلوم کیجیے۔



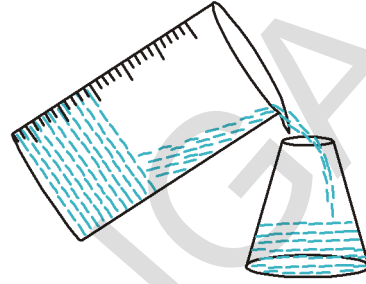
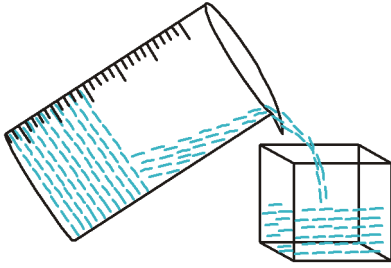
### 10.4 ٹھوس اجسام کی ایک شکل سے دوسری میں شکل میں تبدیلی

ایک ڈواکرا (DWACRA) گروپ مکعب نما موم کو پگھلا کر موم بتی بناتا ہے۔ بندوق کی فیکٹری میں مکعب نما ٹھوس سیسہ کو پگھلا کر بندوق کی گولی تیار کی جاتی ہے۔ ایک جوہری مکعب نما سونے (Gold) کے بسکٹ کو پگھلا کر زیورات بناتا ہے۔ ان تمام صورتوں میں ٹھوس اجسام کی ایک شکل سے دوسری شکل میں تبدیلی لائی گئی۔ اس عمل میں ٹھوس کے حجم میں تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔ یہ کیسے ممکن ہے؟ اگر آپ کو کسی مخصوص وضع میں موم بتی بنانا ہو تو موم کو پگھلا کر گرم کر کے مائع کی حالت میں تبدیل کرنا ہوگا پھر اس مخصوص وضع والے سانچے میں ڈال کر حاصل کیا جاتا ہے۔



مثال کے طور پر ایک استوانہ نما موم بتی لے کر اس کو پگھلائیے اور اسے مکعب کی شکل کے سانچے میں ڈالیے۔ ٹھنڈا ہونے پر آپ کو مکعب کی

شکل والی موم بتی حاصل ہوگی۔ حاصل ہونے والی موم بتی کا حجم پہلے والے موم بتی کے حجم کے مساوی ہوگا۔ اس طرح یہ بات ذہن نشین کر لینی چاہیے کہ اشیاء کو ایک شکل سے دوسری شکل میں ڈھالا جائے یا مائع کو ایک برتن سے دوسرے برتن میں ڈال کر مختلف وضع حاصل کرنے کے باوجود ان کے حجم میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔ ذیل کے تصویر کا مشاہدہ کیجیے۔



سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

متصلہ شکل کے کسی برتن میں زیادہ پانی سمائے گا؟  
ساتھیوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔

اب تک سیکھے گئے نکات کی تقویت بخش تفہیم کے لیے چند مثالوں پر غور کریں گے۔

**مثال-14:** چکنی مٹی سے ایک مخروط بنایا گیا جس کی بلندی 24 سمر اور قاعدے کا نصف قطر 6 سمر ہے۔ ایک بچے نے اسی کو کروی شکل دی تب کروی شکل کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

**حل:**  $\frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24 =$  مکعب سمر = مخروط کا حجم

اگر  $r$  کرہ کا نصف قطر ہو تب اس کا حجم  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ہوگا۔

چونکہ چکنی مٹی کا حجم دونوں صورتوں (کرہ اور مخروط) میں مساوی رہے گا۔

لہذا

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$$

$$r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3 \times 3 \times 3 \times 8$$

$$r^3 = 3^3 \times 2^3$$

$$r = 3 \times 2 = 6$$

لہذا کرہ کا نصف قطر 6 سمر ہوگا



یہ کیجیے



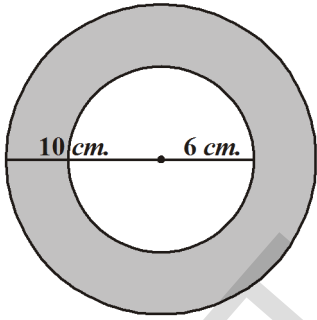
- 1- ایک تانبہ کی سلاخ لی گئی جس کا قطر 1 سمر اور طول 8 سمر ہے۔ اس سلاخ کو 18 میٹر طویل تار (Wire) میں تبدیل کیا گیا اس طرح کہ اس کی موٹائی یکساں رہے۔ تار (Wire) کی موٹائی معلوم کیجیے۔
- 2- تقدیس کے گھر کی چھت پر ایک استوانہ نما پانی کی ٹانگی رکھی ہوئی ہے اس ٹانگی میں مکعب نما شکل والے زیر زمین حوض (Sump) سے موٹر کے ذریعہ سے پانی چڑھایا جاتا ہے۔ زیر زمین حوض کے ابعاد 1.57 میٹر، 1.44 میٹر اور 9.5 میٹر ہیں۔ جبکہ پانی کی ٹانگی کا نصف قطر 60 سمر اور بلندی 95 سمر ہے۔ اگر مکمل بھرے ہوئے زیر زمین حوض میں موجود پانی سے ٹانگی کو مکمل بھر دیا جائے تب حوض میں باقی رہنے والے پانی کی بلندی معلوم کیجیے۔ ٹانگی کا حجم اور حوض کے حجم کا تقابل کیجیے۔ ( $\pi = 3.14$ )

**مثال-15:** ایک کھوکھلی نصف کروی شے کے اندرونی اور بیرونی سطح کے قطر بالترتیب 6 سمر اور 10 سمر ہے۔ اس شے کو پگھلا کر 14 سمر قطر والا

ٹھوس حاصل کیا گیا ہے۔ استوانہ کی بلندی معلوم کیجیے۔

$$\text{حل:} \quad R = \frac{10}{2} = 5 \text{ سمر} \quad \text{کھوکھلے نصف کرہ کا بیرونی نصف قطر}$$

$$r = \frac{6}{2} = 3 \text{ سمر} \quad \text{اندرونی نصف قطر}$$



اندرونی حجم - بیرونی حجم = کھوکھلے نصف کرہ کا حجم

$$= \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3)$$

$$= \frac{2}{3} \pi (5^3 - 3^3)$$

$$= \frac{2}{3} \pi (125 - 27)$$

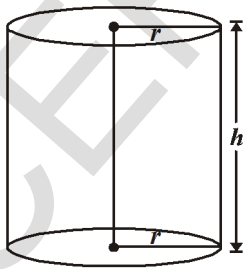
$$= \frac{2}{3} \pi \times 98 \text{ cm}^3 = \frac{196\pi}{3} \text{ cm}^3 \dots\dots\dots(i)$$

چوں کہ کھوکھلے نصف کرہ کو پگھلا کر استوانہ میں تبدیل کیا گیا ہے

اس لیے دونوں کا حجم مساوی ہوگا۔

$$\text{استوانہ کا قطر} = 14 \text{ سمر} \quad (\text{دیا گیا})$$

$$\text{لہذا استوانہ کا نصف قطر} = \frac{14}{2} = 7 \text{ سمر}$$



$$\text{فرض کرو کہ استوانہ کی بلندی} = h$$

$$\text{استوانہ کا حجم} = \pi r^2 h$$

$$= \pi \times 7 \times 7 \times h = 49\pi \text{ cm}^3 \dots\dots\dots (2)$$

سوال کے مطابق

$$\text{ٹھوس استوانہ کا حجم} = \text{کھوکھلے نصف کرہ کا حجم}$$

$$\frac{196}{3}\pi = 49\pi h \quad \text{یعنی سے مساوات (1) اور (2)}$$

$$\Rightarrow h = \frac{196}{3 \times 49} = \frac{4}{3} \text{ cm.} = \text{سمر } 1.33$$

لہذا استوانہ کی بلندی 1.33 سم ہوگی۔

**مثال-16:** ایک نصف کرہ برتن مائع سے بھرا ہوا ہے جس کا اندرونی نصف قطر 15 سم ہے اس مائع کو 5 سم قطر اور 6 سم بلندی والی استوانی بوتلوں میں بھرنے کے لیے کتنے بوتلوں کی ضرورت ہوگی؟

**حل:**

$$\text{نصف کرہ کا حجم} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$r = \text{سم } 15 \quad \text{نصف کرہ کا اندرونی نصف قطر}$$

$$\text{نصف کرہ برتن میں بھرے ہوئے مائع کا حجم} = \frac{2}{3}\pi(15)^3 \text{ cm}^3$$

$$= 2250\pi \text{ cm}^3$$

مائع کو استوانی بوتلوں میں بھرا گیا ہے۔

$$6 \text{ سم} = (h) \text{ استوانہ نما بوتل کی بلندی}$$

$$\frac{5}{2} \text{ سم} = (R) \text{ استوانہ نما بوتل کا نصف قطر}$$

$$\text{استوانہ نما بوتل کا حجم} = \pi R^2 h$$

$$= \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 6$$

$$= \pi \times \frac{25}{4} \times 6 \text{ cm}^3$$

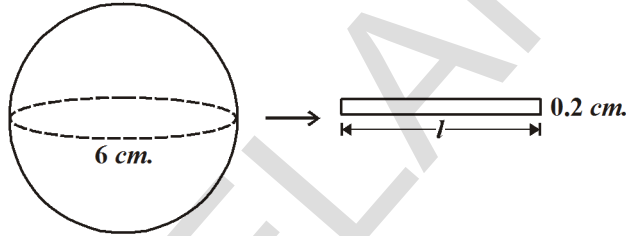
$$= \frac{75}{2} \pi \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{نصف کروی برتن کا حجم} \\ \text{استوانہ نما ایک بوتل کا حجم} &= \frac{\text{مانع کو بھرنے کے لیے درکار بوتلوں کی تعداد}}{\text{نصف کروی برتن کا حجم}} \\ &= \frac{2250\pi}{\frac{75}{2}\pi} = \frac{2 \times 2250}{75} = 60 \end{aligned}$$

**مثال-17:** 6 سمر قطر والے ایک دھاتی کرہ کو پگھلا کر 0.2 سمر قطر والے تار (wire) میں تبدیل کیا گیا۔ تو بتلائیے کہ تار کا طول کیا ہوگا؟

**حل:**

$$\begin{aligned} 6 \text{ سمر} &= \text{دھاتی کرہ کا قطر} \\ 3 \text{ سمر} &= \text{دھاتی کرہ کا نصف قطر} \end{aligned}$$



$$\text{تار کا قطر} = 0.2 \text{ سمر}$$

$$\text{تار کا نصف قطر} = 0.1 \text{ سمر}$$

فرض کیجیے کہ دائرہ کا طول  $h$  سمر ہے۔

چوں کہ دھاتی کرہ کو  $h$  سمر والے تار میں تبدیل کیا گیا

کرہ کا حجم = تار میں استعمال کی گئی دھات کا حجم  $\therefore$

$$\pi \times (0.1)^2 \times h = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3$$

$$\pi \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times h = \frac{4}{3} \times \pi \times 27$$

$$\pi \times \frac{1}{100} \times h = 36\pi$$

$$h = \frac{36\pi \times 100}{\pi}$$

$$= 36 \text{ میٹر} = 3600 \text{ سمر}$$

لہذا تار کا طول 36 میٹر ہوگا۔



**مثال-18:** 44 سمر ضلع والے مکعب (Cube) شکل والے سیسہ (lead) سے 4 سمر قطر والے کتنے کروی گیند تیار کئے جاسکتے ہیں؟

**حل:** 44 سمر = سیسہ کے مکعب کا ضلع

$$\text{کروی گیند کا نصف قطر} = \frac{4}{2} = 2 \text{ سمر}$$

$$\text{کروی گیند کا حجم} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 8 \text{ سمر مکعب}$$

$$\text{مکعب سمر } x = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 8 \times x \text{ کروی گیندوں کا حجم}$$

اس سے یہ بات واضح ہوتی ہے کہ

$$\text{مکعب والی شکل کے سیسہ کا حجم} = x \text{ کروی گیندوں کا حجم}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 8 \times x = (44)^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 8 \times x = 44 \times 44 \times 44$$

$$\Rightarrow x = \frac{44 \times 44 \times 44 \times 3 \times 7}{4 \times 22 \times 8}$$

$$x = 2541$$

لہذا 2541 کروی گیندیں تیار کی جاسکتی ہیں۔

**مثال-19:** ایک امداد باہمی گروپ (ڈواکرا) 66 سمر، 42 سمر، 21 سمر ابعاد والے مستطیلی ٹھوس مکعب نما موم سے جس کے ابعاد موم سے 4.2 سمر

قطر اور 2.8 سمر بلندی والے استوانہ نما موم بتیاں تیار کرتا ہے۔ تب بتلائیے کہ اس نے کتنے موم بتیاں تیار کیے۔

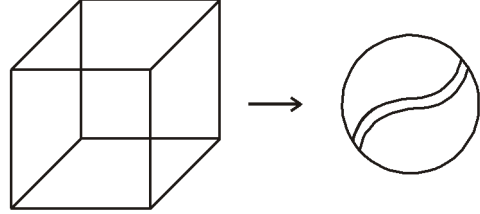
$$\text{مکعب نما ٹھوس موم کا حجم} = lbh$$

$$= (66 \times 42 \times 20) \text{ cm}^3$$

$$2.1 \text{ سمر} = \frac{4.2}{2} = \text{استوانہ نما موم بتی کا نصف قطر}$$

$$2.8 \text{ سمر} = \text{استوانہ نما موم بتی کی بلندی}$$

$$\text{موم بتی کا حجم} = \pi r^2 h$$





$$= \frac{22}{7} \times (2.1)^2 \times 2.8$$

فروض کرو کہ موم بتیوں کی تعداد

$$x \text{ استوانہ نما موم بتیوں کا حجم} = \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x$$

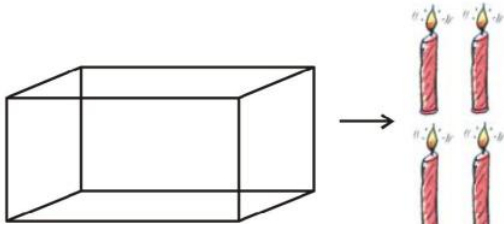
$$x \text{ استوانہ نما موم بتیوں کا حجم} = \text{مستطیلی ٹھوس موم کا حجم}$$

$$\therefore \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x = 66 \times 42 \times 21$$

$$x = \frac{66 \times 42 \times 21 \times 7}{22 \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8}$$

$$x = 1500$$

$\therefore$  تیار کیے جانے والے موم بتیوں کی تعداد = 1500



### مشق - 10.4



- 1- ایک دھاتی کرہ جس کا نصف قطر 4.2 سمر ہے کو پگھلا کر 6 سمر نصف قطر والے استوانے میں تبدیل کیا گیا تو بتلایئے کہ استوانہ کی بلندی کیا ہوگی؟
- 2- تین دھاتی کرے جن کے نصف قطر ترتیب وار 6 سمر، 8 سمر اور 10 سمر ہیں کو پگھلا کر ایک کرہ بنایا گیا اس کرہ کا نصف قطر کیا ہوگا؟
- 3- کسی مقام پر 20 میٹر گہری 7 میٹر قطر والی باؤلی کھودی گئی ہے۔ اس سے حاصل ہونے والی مٹی کے ذریعہ 22 میٹر اور 14 میٹر ابعاد والا مستطیلی چبوترہ (Plat form) بنانا ہے۔ چبوترہ کی بلندی کیا ہوگی؟
- 4- 14 میٹر قطر والی 15 میٹر گہری باؤلی کھودی گئی۔ حاصل کی گئی مٹی سے باؤلی کے اطراف 7 میٹر چوڑا پشتہ بنایا گیا۔ پشتہ کی بلندی معلوم کیجئے۔
- 5- قائم مدوری استوانہ نما برتن میں آئس کریم بھرا گیا ہے جس کا قطر 12 سمر اور بلندی 15 سمر ہے اگر اس آئس کریم کو 12 سمر بلندی اور 6 سمر قطر والے مخروط (Cone) میں بھرا گیا ہے جس کے اوپر نصف کرہ کی شکل ہے تب آئس کریم کے جملہ مخروط کی تعداد کیا ہوگی؟
- 6-  $5.5\text{cm} \times 10\text{cm} \times 3.5\text{cm}$  ابعاد والے مکعب کی تیاری کے لیے 1.75 سمر قطر اور 2 ملی میٹر موٹائی والے کتنے چاندی کے سکوں کو پگھلانے کی ضرورت ہوگی؟
- 7- ایک برتن مخروط کی پٹی ہوئی شکل میں ہے اس کی بلندی 8 سمر اور اس کے اوپری حصہ کا نصف قطر 5 سمر ہے برتن میں پانی مکمل طور پر بھرا ہوا ہے۔ اس میں 0.5 سمر نصف قطر والا ٹھوس کرہ گولیاں نصف کرہ ڈالنے پر موجود پانی کا  $\frac{1}{4}$  حصہ پھلک کر باہر گر جاتا ہے۔ تو بتلایئے کہ برتن میں جملہ کتنی گولیاں ڈالی گئی ہیں؟
- 8- 28 سمر قطر والے ایک ٹھوس کرہ شے کو پگھلا کر  $4\frac{2}{3}$  سمر قطر اور 3 سمر بلندی والے چھوٹے مخروط میں تبدیل کیا گیا ہے تب بننے والے مخروط کی تعداد کیا ہوگی؟

## اختیاری مشق

(جامع اکتساب کے لیے)

1- 4.1 سمر قطر والے ایک گولف گیند کی اوپری سطح پر 2 ملی میٹر قطر والے 150 گڑھے ہیں۔ اگر گڑھوں کو نصف کروی شکل میں تصور کیا جائے تب ان کا جملہ طرئی سطح کا رقبہ کیا ہوگا؟ ( $\pi = \frac{22}{7}$  لیجیے)

2- 12 سمر نصف قطر والے ایک استوانہ نما برتن میں 20 سمر گہرائی تک پانی بھرا ہوا ہے ایک لوہے کے کروی گیند کو اس برتن میں ڈالنے پر پانی کی سطح میں 6.75 سمر اضافہ ہوا۔ بتائیے کہ استوانہ میں ڈالے گئے کروی گیند کا نصف قطر کیا ہوگا؟ ( $\pi = \frac{22}{7}$  لیجیے)

3- ایک ٹھوس کھلونا جو قائم مدور استوانہ کی شکل کا ہے جس کے ایک کنارے پر نصف کرہ اور دوسرے کنارے پر مخروط نصب کیا گیا ہے ان دونوں کا مشترک قطر 4.2 سمر ہے۔ جبکہ استوانہ نما اور مخروطی حصوں کی بلندی بالترتیب 12 سمر اور 7 سمر ہے اس ٹھوس کھلونے کا حجم کیا ہوگا؟ ( $\pi = \frac{22}{7}$  لیجیے)

4- 15 سمر، 12 سمر اور 9 سمر ضلع رکھنے والے تین فولادی مکعبوں کو پگھلا کر ایک مکعب میں تبدیل کیا گیا تب حاصل مکعب کے وتر کا طول معلوم کیجیے؟

5- 6 سمر اندرون نصف قطر والے ایک نیم کروی برتن میں مائع ڈالا گیا۔ اس مائع کو 3 سمر نصف قطر اور 6 سمر بلندی والی استوانی بوتلوں میں بھرنے کے لیے کتنی بوتلیں درکار ہوں گی؟

## تجویز کردہ منصوبہ کام:

مربع نما 20 سمر x 20 سمر والے ایک شیٹ کے چاروں کونوں سے مربعوں کو کاٹتے ہوئے انکے فلاپس کو موڑتے ہوئے ایک کھلا باکس بنائیے۔ سب سے بڑا حجم والا باکس کو اس طریقے سے کیسے بنایا جاسکتا ہے؟ آپ بتا سکتے ہو۔ مربع نما شیٹ اور اس سے بنایا گیا بڑے حجم والے باکس میں کیا رشتہ ہے؟  
توسیع: مربع نما شیٹ کے بجائے مستطیل نما شیٹ کا غد لیکر بھی اس باکس کو بنایا جاسکتا ہے۔

## ہم نے کیا سیکھا

- 1- دو مختلف ٹھوس اجسام کو ملا کر کوئی ٹھوس جسم بنایا جائے اس کا حجم ان دو اجسام کے مجموعوں کے مساوی ہوگا؟
- 2- ٹھوس اجسام کو ملانے پر بننے والے ٹھوس جسم کا سطحی رقبہ ان ٹھوس اجسام کے سطحی رقبوں کے مجموعہ کے مساوی نہیں ہوگا۔ کیوں اسکی وجہ یہ ہے کہ سطحی رقبوں کو ملاتے وقت کچھ حصہ ٹوٹ جاتا ہے۔

# علم مثلث Trigonometry

## باب 11

### 11.1 تمہید



سابقہ جماعتوں میں ہم مثلثات اور انکی خصوصیات سے واقف ہو چکے ہیں اور ہم روزمرہ زندگی میں مثلثات اور انکی خصوصیات کو مختلف مواقع پر استعمال کرتے ہیں آئیے اب ہم روزمرہ زندگی کی مزید چند مثالوں پر غور کریں گے۔

● آپ اطراف و اکناف برقی کھمبوں کا مشاہدہ کیا ہوگا یہ عام طور پر ایک دھاتی واٹر کی مدد سے نصب کئے جاتے ہیں۔ کھمبہ دھاتی تار اور زمین مل کر ایک مثلث بناتے ہیں لیکن اگر تار کے طول کو گھٹاتے جائیں تب مثلث کونسی شکل اختیار کرے گا۔ اور زمین سے بننے والے زاویہ میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟

● ایک شخص سیڑھی لگا کر ایک دیوار کی آہک پاشی کرتا ہے۔ جیسا کہ متصلہ شکل میں بتایا گیا ہے۔ اگر وہ دیوار کے اوپری حصہ پر آہک پاشی کرنا چاہے تب وہ شخص کیا کرے گا۔ زمین سے سیڑھی کے زاویہ میں کیا کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟

● ضلع عادل آباد کے ایک گاؤں جئی ناتھ (Jainath) میں 13 صدی عیسوی میں تعمیر کردہ ایک مندر ہے اس مندر میں ڈسمبر کے کسی دن سور یا نارائنا سوامی کے مجسمہ کے قدموں پر پڑنے والی سورج کی پہلی کرنوں پر غور کرتے ہوئے دلچسپ امور اجاگر ہوتے ہیں۔ یہاں مندر کے دروازے اور مجسمہ کا درمیانی فاصلہ اور دروازے سے اس سوراخ کی بلندی قابل غور ہے ڈسمبر میں یہاں پر سورج کی پہلی کرنوں کا منظر توجہ طلب ہے۔ کیا آپ مذکورہ امور میں کوئی تعلق محسوس کرتے ہیں؟ اس موقع پر آپ کیا کوئی مثلث کا تخیل کرتے ہیں۔



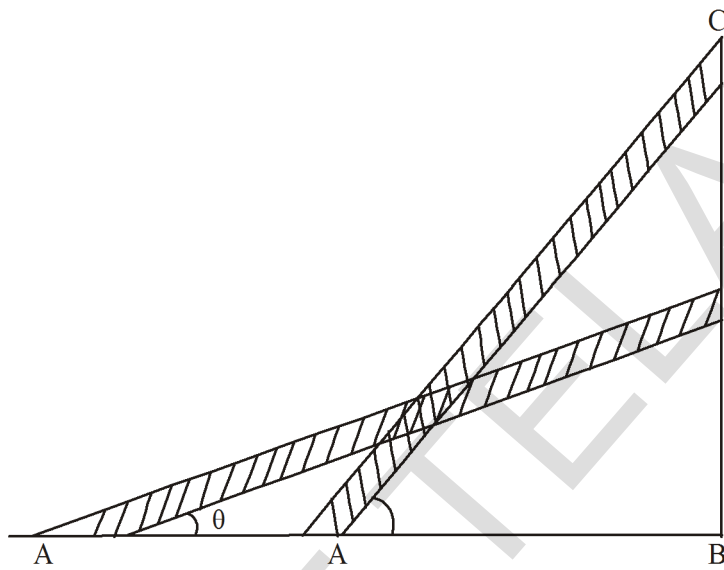
● کھیل کے میدان میں بچے پھسل بنڈہ (Slider) پر پھسلتے ہوئے آپ نے غور کیا ہوگا پھسل بنڈہ زمین کی سطح سے ایک مخصوص زاویہ بناتا ہے اگر اس زاویہ میں کچھ تبدیلی کی جائے تب کیا ہوگا۔ کیا بچے اب بھی اس پر پھسل سکیں گے۔



مندرجہ بالا مثالیں یہ ظاہر کرتی ہیں کہ ہم روزمرہ زندگی میں جیومیٹری کا اطلاق کس طرح کرتے ہیں اور ان مثلثات کی خصوصیات کے استعمال سے مختلف تعمیرات کی بلندیاں، فاصلے اور ڈھلان سے بننے والے زاویوں کی پیمائش کی جاسکتی ہے اس طرح کے مسائل مثلثات کا ایک حصہ ہیں جو کہ ریاضی کی ایک شاخ ہے۔

اب ہم اس مثال پر غور کریں گے کہ جس میں ایک شخص سیڑھی کی مدد سے ایک دیوار کی آہک پاشی کرتا ہے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے آئیے اب ہم مندرجہ ذیل شرائط پر غور کریں گے۔

سیڑھی کے قدم کو 'A'، اس کے اوپری حصہ کو 'C' اور دیوار کے قدم اور سیڑھی کے قدم کو ملانے والے نقطہ کو 'B' سے تعبیر کرتے ہیں اس



طرح  $\triangle ABC$  'B' پر زاویہ قائمہ بنانے

والا ایک مثلث ہے۔ سیڑھی کے قدم سے

زمین پر بننے والے زاویے کو اگر  $\theta$  مان لیا

جائے۔

1- اگر وہ شخص دیوار کی اوپری سطح کی حصے پر

آہک پاشی کرنا چاہتا ہے تب

● کیا سیڑھی سے زمین پر بننے والے

زاویہ میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟

● AB کے طول میں کیا کوئی تبدیلی

واقع ہوگی؟

2- اگر وہ شخص دیوار کے نچلے حصے پر آہک پاشی کرنا چاہتا ہے تب

● کیا سیڑھی سے زمین پر بننے والے زاویہ میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟

● کیا AB کے طول میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟

مندرجہ بالا مثال میں ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ اوپری اور نچلے حصے پر آہک پاشی کرنے کے لیے اس شخص کو سیڑھی کی حالت کو

تبدیل کرنا ہوتا ہے۔ اس لیے جب  $\theta$  کی قدر میں اضافہ ہوتا ہے تب بلندی میں اضافہ اور زمین پر سیڑھی سے دیوار کے فاصلے 'AB' میں

کمی واقع ہوتی ہے۔ لیکن جب  $\theta$  کی قدر میں کمی واقع ہوتی ہے تب بلندی میں کمی اور زمین پر سیڑھی سے دیوار کے فاصلے 'AB' میں

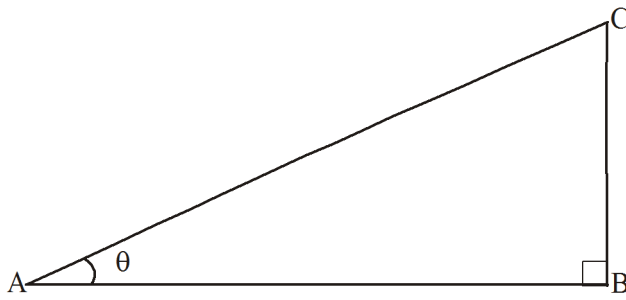
اضافہ ہوتا ہے کیا آپ اس بیان سے متفق ہیں؟

یہاں پر ہم نے قائمہ الزاویہ مثلث کے ضلعوں اور زاویوں پر عمومی حیثیت سے ہی مشاہدہ کیا ہے۔ آئیے اب ہم قائمہ الزاویہ مثلث

کے ضلعوں کے نام دیں گے کیونکہ علم مثلث میں زاویوں کی نسبت کا انحصار ضلعوں پر ہوتا ہے۔

## 11.1.1 قائمہ الزاویہ مثلث کے ضلعوں کے نام

ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC لیجیے جس میں راس B پر زاویہ قائمہ ہو جیسا کہ متصلہ شکل میں بتلایا گیا۔ مان لیجیے کہ مثلث ABC میں  $\angle CAB$  کو زاویہ 'A' سے ظاہر کیا جائے جو ایک حادہ زاویہ ہے۔ چونکہ AC سب سے بڑا ضلع ہے اس کو وتر (hypotenuse) کہا جاتا ہے۔



اس مثلث میں بلحاظ  $\angle A$  BC کے مقام کا مشاہدہ کیجیے یہ  $\angle A$  کے مقابل ہے۔ لہذا BC کو  $\angle A$  کے مقابل کا ضلع کہا جاتا ہے دوسرے ضلع AB کو  $\angle A$  کا متصلہ ضلع کہا جاتا ہے۔

$$\text{وتر} = AC$$

$$\angle A \text{ کے مقابل کا ضلع} = BC$$

$$\angle A \text{ کا متصلہ ضلع} = AB$$

یہ کیجیے

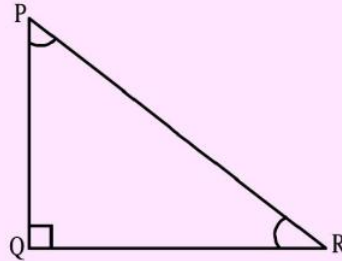
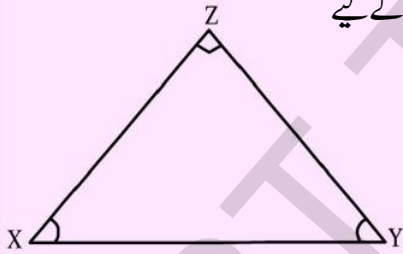


حسب ذیل مثلثات میں دیے گئے زاویوں کے لحاظ سے وتر، مقابل کا ضلع اور متصلہ ضلع کی نشاندہی کیجیے۔

1- زاویہ 'R' کے لیے

2- (i) زاویہ 'X' کے لیے

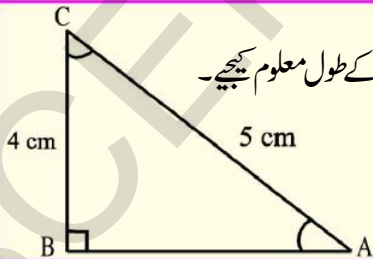
(ii) زاویہ 'Y' کے لیے



کوشش کیجیے



حسب ذیل مثلث میں دیے گئے زاویوں کے لحاظ سے "وتر"، "مقابل کا ضلع"، اور "متصلہ ضلع" کے طول معلوم کیجیے۔



1- زاویہ 'C' کے لیے

2- زاویہ 'A' کے لیے

آپ نے کیا دیکھا؟ زاویہ 'A' کے مقابل کا ضلع اور زاویہ 'C' کے متصلہ ضلع کے مابین کیا کوئی رشتہ ہے؟ اس طرح فرض کیجیے کہ جب ایک برقی کھمبے کو دھاتی تار کی مدد سے نصب کیا جا رہا ہو تب کیا دھاتی تار کے طول اور برقی کھمبے کے طول میں کوئی رشتہ ہوتا ہے؟ یہاں مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے مابین رشتہ کو سمجھنا ہے جس کا مطالعہ ہم علم مثلث کی نسبتوں کے تحت کریں گے۔

## 11.2 مشائی نسبتیں:

آئیے اس باب کے آغاز میں ہم روزمرہ زندگی میں درپیش مثالوں کا جائزہ لیتے ہیں۔ آئیے اب ہم علم مثلث کی نسبتوں کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

**مشغلہ**

1- پٹری کی مدد سے کاغذ پر ایک افقی خط S کھینچئے۔  
2- اس خط کے ابتدائی نقطہ کو A اور دوسرے نقاط B، C، D اور E کو نقطہ A سے بالترتیب 3 سمر، 6 سمر، 9 سمر نشان دہی کھینچئے۔  
3- نقاط B، C، D اور E سے بالترتیب 4 سمر، 8 سمر، 12 سمر اور 16 سمر طول والے عمود BD، CQ، DR اور ES کھینچئے۔  
4- AP، PQ، QR اور RS کو ملائیے۔  
5- AP، AQ، AR اور AS کا طول معلوم کیجئے۔

مثلث کا نام	وتر کا طول	مقابل کے ضلع کا طول	متصلہ ضلع کا طول	مقابل کا ضلع	متصلہ ضلع
				وتر	وتر
DABP					
DACQ					
DADR					
DAES					

تب  $\frac{ES}{AS}$  اور  $\frac{BP}{AP}$ ،  $\frac{CQ}{AQ}$ ،  $\frac{DR}{AR}$  کی نسبتیں معلوم کیجئے۔

کیا یہ تمام نسبتیں  $\frac{4}{5}$  کے مساوی ہیں؟

اسی طرح  $\frac{AE}{AS}$  اور  $\frac{AB}{AP}$ ،  $\frac{AC}{AQ}$ ،  $\frac{AD}{AR}$  کی نسبتیں معلوم کیجئے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔



## 11.2.1 مثلثی نسبتوں کی تعریف:

مندرجہ بالا مشغلہ میں ہم نے قائم الزاویہ مثلثات  $ABP$ ،  $ACQ$ ،  $ADR$  اور  $AES$  کا مشاہدہ کیا ہے جہاں پر  $A$  مشترک زاویہ ہے جبکہ  $\angle B$ ،  $\angle C$ ،  $\angle D$  اور  $\angle E$  قائمہ ہیں اور  $\angle P$ ،  $\angle Q$ ،  $\angle R$  اور  $\angle S$  ایک دوسرے کے مساوی زاویے ہیں لہذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ مثلثات  $ABP$ ،  $ACQ$ ،  $ADR$  اور  $AES$  مشابہہ ہیں۔ ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ان مثلثات سے کسی ایک مثلث میں  $A$  کے مقابل کا ضلع اور وتر کی نسبت مابقی مثلثات میں  $A$  کے مقابل کے ضلع اور وتر کی نسبت کے مساوی اور مستقل ہوتی ہے۔ اور ان نسبتوں کو  $\frac{ES}{AS}$ ،  $\frac{BP}{AP}$ ،  $\frac{CQ}{AQ}$ ،  $\frac{DR}{AR}$  یا مختصر "Sine A" یا مختصر "Sin A" کہا جاتا ہے اگر زاویہ  $A$  کی قدر  $x$  ہو تب نسبت "Sin x" ہوگی۔

لہذا ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ تمام مشابہہ قائمہ الزاویہ مثلثات میں کسی زاویہ کے مقابل کے ضلع اور وتر کی نسبت مستقل ہوتی ہے۔ اور یہ نسبت اس زاویہ کے "Sine" کہلاتی ہے۔

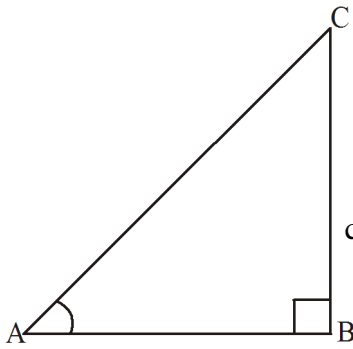
اسی طرح سے جب ہم نسبتیں  $\frac{AE}{AS}$ ،  $\frac{AB}{AP}$ ،  $\frac{AC}{AQ}$ ،  $\frac{AD}{AR}$  کا مشاہدہ کرتے ہیں تو یہ بھی مستقل ہوتی ہیں اور یہ قائمہ الزاویہ مثلثات میں زاویہ  $A$  کے متصلہ ضلع اور وتر کی نسبتیں ہیں۔ لہذا نسبتیں  $\frac{AE}{AS}$ ،  $\frac{AB}{AP}$ ،  $\frac{AC}{AQ}$ ،  $\frac{AD}{AR}$  یا مختصر "cosine A" یا مختصر "cos A" کہلاتی ہیں۔ اگر زاویہ  $A$  کی قدر  $x$  ہو تب نسبت "cos x" ہوگی۔

لہذا ہم یہ بھی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ تمام مشابہہ قائمہ الزاویہ مثلثات میں زاویہ قائمہ کے علاوہ کسی زاویہ کے متصلہ ضلع اور وتر کے طول کی نسبت مستقل ہوتی ہے اور یہ نسبت اس زاویہ کی "cosine" کہلاتی ہے۔

اسی طرح کسی قائمہ الزاویہ مثلث میں زاویہ قائمہ کے علاوہ کسی زاویہ کے مقابل کے ضلع اور متصلہ ضلع کی نسبت "tangent" کہلاتی ہے۔

## ایک قائمہ الزاویہ مثلث میں نسبتوں کی تعریف

ایک قائمہ الزاویہ مثلث  $ABC$  پر غور کیجیے جو  $B$  پر زاویہ قائمہ ہے جیسا کہ ذیل کی شکل میں بتلایا گیا ہے۔ تب قائمہ الزاویہ مثلث  $ABC$  میں زاویہ  $A$  کے مثلث کی نسبتیں اس طرح ہوں گی۔

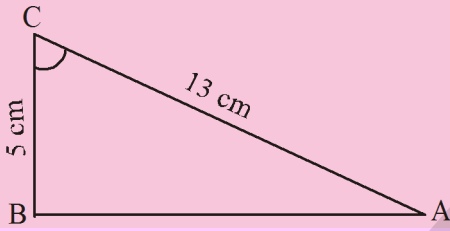


$$\sin \text{ زاویہ 'A' کا } = \sin A = \frac{\text{زاویہ کے مقابل کے ضلع کا طول}}{\text{وتر کا طول}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos \text{ زاویہ 'A' کا } = \cos A = \frac{\text{زاویہ کے متصل ضلع کا طول}}{\text{وتر کا طول}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan \text{ زاویہ 'A' کا } = \tan A = \frac{\text{زاویہ کے مقابل کے ضلع کا طول}}{\text{زاویہ کے متصل ضلع کا طول}} = \frac{BC}{AB}$$

یہ کیجیے



1- متصلہ شکل میں  $\sin C$  (i)  $\cos C$  (ii) اور  $\tan C$  (iii) معلوم کیجیے۔

2- ایک مثلث XYZ میں  $\angle Y$  قائمہ زاویہ ہے۔  $XZ = 17\text{cm}$  اور

$YZ = 15\text{cm}$  تب  $\sin X$  (i)  $\cos Z$  (ii) اور  $\tan X$  (iii) معلوم کیجیے۔

3- ایک مثلث PQR میں جو Q پر زاویہ قائمہ ہے اگر  $\angle P$  کی قدر x ہے  $PQ = 7\text{cm}$  اور  $QR = 24\text{cm}$  ہو تب  $\sin x$  اور  $\cos x$  معلوم کیجیے۔

کوشش کیجیے



ایک قائمہ زاویہ مثلث ABC میں جو C پر زاویہ قائمہ بناتا ہے اگر  $BC + CA = 23\text{cm}$  اور  $BC - CA = 7\text{cm}$  ہو تب  $\sin A$  اور  $\tan B$  معلوم کیجیے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔

1-  $\sin = \frac{4}{3}$  زاویہ x کی کسی قدر کے لیے وجود رکھتی ہے۔

2-  $\sin A$  اور  $\cos A$  کی قدر ہمیشہ 1 سے کم ہوتی ہے۔ کیوں؟

3-  $\tan A$  کا مطلب  $\tan A$  کا حاصل ضرب ہے۔

علم مثلث میں مزید تین نسبتوں کی تعریف کی گئی ہے جو اوپر بتائی گئی نسبتوں کے ضربی معکوس ہیں۔

$$\text{cosec}A = \frac{1}{\sin A} \text{ یعنی } \text{cosec}A \text{ مختصراً لکھتے ہیں یعنی } \text{cosec}A = \frac{1}{\sin A}$$

اسی طرح  $\cos A$  کا ضربی معکوس "secantA" ہے جس کو ہم مختصراً "secA" لکھتے ہیں۔ اور  $\tan A$  کا ضربی معکوس "cotangentA" ہے جس کو ہم مختصراً "cotA" لکھتے ہیں۔

$$\text{sec}A = \frac{1}{\cos A} \text{ اور } \text{cot}A = \frac{1}{\tan A} \text{ یعنی}$$

آپ  $\text{cosec}$  کی تعریف ضلعوں کے لحاظ سے کس طرح کریں گے۔

$$\sin A = \frac{\text{وتر}}{\text{ہیپتونیوس}}$$

$$\text{cosec}A = \frac{\text{ہیپتونیوس}}{\text{وتر}}$$

کوشش کیجیے

secA اور cotA کے لیے ضلعوں کی نسبتیں کیا ہوں گی۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

☆ کیا  $\frac{\sin A}{\cos A}$  کی قدر tanA کے مساوی ہوگی؟ ☆ کیا  $\frac{\cos A}{\sin A}$  کی قدر cotA کے مساوی ہوگی۔

آئیے مزید چند مثالوں کا مشاہدہ کریں گے۔

مثال - 1: اگر  $\tan A = \frac{3}{4}$  تب زاویہ A کے مابقی تمام مثلثی نسبتیں معلوم کیجیے

حل: دیا گیا ہے کہ  $\tan A = \frac{3}{4}$

$$\tan A = \frac{\text{وتر}}{\text{ہیپتونیوس}}$$

$$\therefore \text{متصلہ ضلع} : \text{مقابلہ ضلع} = 3:4$$

زاویہ A کے لیے: مقابلہ ضلع =  $3k = BC$

متصلہ ضلع =  $4k = AB$  جہاں  $k$  ایک مثبت صحیح عدد ہے

مثلث ABC میں فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2$$

$$AC = \sqrt{25k^2}$$

$$= 5k = \text{وتر}$$

آئیے اب مابقی تمام مثلثی نسبتوں کو لکھیں گے۔

$$\sin A = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5} \quad \text{اور} \quad \cos A = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\text{اور} \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}, \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{3}$$

**مثال- 2:** اگر دو حادہ زاویے  $\angle A$  اور  $\angle P$  اس طرح ہیں کہ  $\sin A = \sin P$  تب ثابت کیجیے کہ  $\angle A = \angle P$

**حل:** دیا گیا ہے کہ  $\sin A = \sin P$  اور

$$\text{اور} \quad \sin A = \frac{BC}{AC} \quad \text{..... سے } \Delta ABC$$

$$\sin P = \frac{QR}{PQ} \quad \text{..... سے } \Delta PQR$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ} = k \quad \text{..... (1) فرض کرو کہ}$$

فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{AB}{PR} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{\sqrt{PQ^2 - QR^2}} = \frac{\sqrt{AC^2 - k^2 AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - k^2 PQ^2}} = \frac{\sqrt{AC^2(1-k^2)}}{\sqrt{PQ^2(1-k^2)}} = \frac{AC}{PQ} \quad \text{سے (1) مساوات}$$

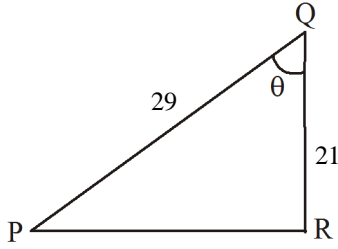
$$\Delta ABC \sim \Delta PQR \quad \text{تب} \quad \frac{AC}{PQ} = \frac{AB}{PR} = \frac{BC}{QR} \quad \text{لہذا}$$

$$\therefore \angle A = \angle P \quad \text{جو کہ ثابت ہوا۔}$$

**مثال- 3:** مان لیجیے کہ ایک قائمہ الزاویہ مثلث PQR میں جو اس R پر زاویہ قائمہ بناتا ہے اگر 29 اکائیاں PQ = اکائیاں

$$\text{اور} \quad QR = 21 \quad \angle PQR = \theta \quad \text{ہو تب درج ذیل کی قدریں معلوم کیجیے۔}$$

$$\text{حل:} \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \quad \text{(i) اور} \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{(ii)}$$



حل: مثلث PQR میں

$$PR = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{400} = 20 \text{ اکائیاں}$$

$$\sin \theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{20}{29}$$

$$\cos \theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{21}{29}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{441 + 400}{841} = 1$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 - \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{-41}{841}$$

### مشق 11.1



- 1- ایک قائم الزاویہ مثلث ABC میں ضلع AB، BC اور CA کے طول بالترتیب 8cm، 15cm اور 17cm ہیں۔ تب  $\cos A$ ،  $\sin A$  اور  $\tan A$  کی قدر معلوم کیجیے۔
- 2- ایک قائم الزاویہ مثلث PQR میں اگر  $PQ = 7\text{cm}$  اور  $QR = 25\text{cm}$  اور  $\angle Q = 90^\circ$  ہو تب  $\tan Q - \tan R$  معلوم کیجیے۔
- 3- ایک قائم الزاویہ مثلث ABC میں جو اس B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے 24 اکائیاں  $a = 25$  اکائیاں  $b =$  اور  $\angle BAC = \theta$  ہو تب  $\cos \theta$  اور  $\tan \theta$  کی قدر معلوم کیجیے؟
- 4- اگر  $\cos A = \frac{12}{13}$  اور  $A < 90^\circ$  ہو تب  $\sin A$  اور  $\tan A$  کی قدر معلوم کیجیے۔
- 5- اگر  $3 \tan A = 4$  ہو تب  $\sin A$  اور  $\cos A$  معلوم کیجیے۔
- 6- اگر دو واحدہ زاویے  $\angle A$  اور  $\angle X$  اس طرح ہیں کہ  $\cos A = \cos X$  تب بتلائیے کہ  $\angle A = \angle X$ ۔
- 7- دیا گیا ہے کہ  $\cot \theta = \frac{7}{8}$  تب حسب ذیل کو محسوب کیجیے۔

$$\frac{(1 + \sin \theta)}{\cos \theta} \quad \text{(ii)} \quad \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \quad \text{(i)}$$

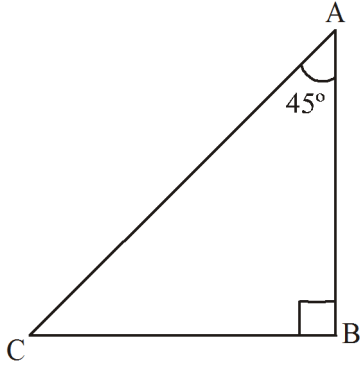
- 8- ایک قائم الزاویہ مثلث ABC میں جو اس B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے۔ اگر  $\tan A = \sqrt{3}$  تب ذیل کی قدریں معلوم کیجیے۔

$$\cos A \cos C - \sin A \sin C \quad \text{(ii)} \quad \sin A \cos C + \cos A \sin C \quad \text{(i)}$$

### 11.3 چند مخصوص زاویوں کی مثلثی نسبتیں:

آپ قائمہ الزاویہ مساوی الساقین مثلث اور  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  زاویے رکھنے والے مثلثات سے متعلق پہلے ہی سے واقف ہیں۔ کیا مندرجہ بالا مثلثات کی مدد سے ہم  $\sin 30^\circ$  یا  $\tan 60^\circ$  یا  $\cos 45^\circ$  وغیرہ کی قدریں معلوم کر سکتے ہیں؟ کیا  $\sin 0^\circ$  یا  $\cos 0^\circ$  وجود رکھتے ہیں۔

#### 11.3.1 زاویہ $45^\circ$ کی مثلثی نسبتیں



قائمہ الزاویہ مساوی الساقین مثلث ABC میں جو B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے  $\angle A = \angle C = 45^\circ$  (کیوں؟) اور  $BC = AB$  (کیوں؟)

فرض کرو کہ  $AB = BC = a$  کا طول

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ تب فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے}$$

$$= a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$AC = a\sqrt{2} \text{ لہذا}$$

مثلثی نسبتوں کی تعریف کی رو سے

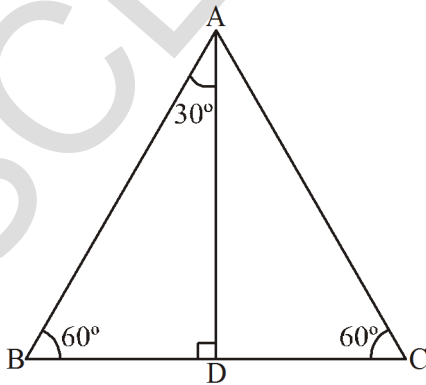
$$\sin 45^\circ = \frac{\text{زاویہ } 45^\circ \text{ کے مقابل کے ضلع کا طول}}{\text{وتر کا طول}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{زاویہ } 45^\circ \text{ کے متصلہ ضلع کا طول}}{\text{وتر کا طول}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{زاویہ } 45^\circ \text{ کے مقابل کے ضلع کا طول}}{\text{زاویہ } 45^\circ \text{ کے متصلہ ضلع کا طول}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$

اسی طرح سے آپ  $\cot 45^\circ$  اور  $\sec 45^\circ$ ،  $\csc 45^\circ$  کی قدریں معلوم کر سکتے ہیں۔

#### 11.3.2 زاویہ $30^\circ$ اور $60^\circ$ کی مثلثی نسبتیں



آئیے اب ہم زاویہ  $30^\circ$  اور زاویہ  $60^\circ$  کی مثلثی نسبتوں کو محسوب کریں گے۔ ان کو محسوب کرنے کے لیے ایک مساوی الاضلاع مثلث لیجیے۔ مساوی الاضلاع مثلث میں کسی ضلع پر کھینچا گیا عمود اس مثلث کو  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  زاویے والے دو مساوی قائمہ الزاویہ مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔



ایک مساوی الاضلاع مثلث  $\Delta ABC$  لیجیے چونکہ اس کا ہر زاویہ  $60^\circ$  ہوتا ہے اس لیے  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$  اور اس کے تینوں

ضلع مساوی ہوتے ہیں  $AB = BC = CA = 2a$

اس سے  $A$  سے  $BC$  پر ایک عمود  $AD$  کھینچیے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

مساوی الاضلاع مثلث  $ABC$  میں عمود  $AD$ ، زاویہ  $A$  کا نصف اور یہ ضلع  $BC$  کا بھی نصف ہوتا ہے۔

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$$

چونکہ نقطہ  $D$ ، ضلع  $BC$  کو دو مساوی نصف میں تقسیم کرتا ہے اس لیے

$$BD = \frac{1}{2} BC = \frac{2a}{2} = a$$

اوپر دی گئی شکل میں قائمہ الزاویہ مثلث  $ABD$  سے

$$AB = 2a \text{ اور } BD = a$$

تب فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$$

$$\therefore AD = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$



مثالی نسبتوں کی تعریف کی رو سے

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

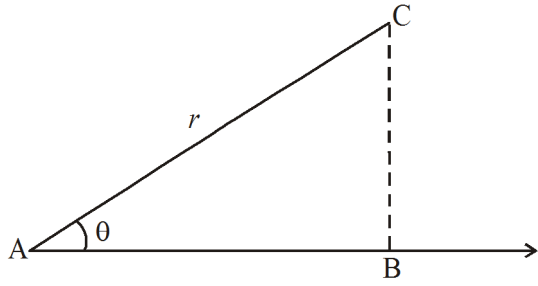
$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \text{ (کیوں؟) اسی طرح سے}$$

مندرجہ بالا طریقے کے مطابق آپ مقلوب  $\csc 60^\circ$ ،  $\sec 60^\circ$  اور  $\cot 60^\circ$  کی قدریں معلوم کر سکتے ہیں۔

یہ کیجیے	
کی قدریں معلوم کیجیے۔ $\csc 60^\circ$ ، $\sec 60^\circ$ اور $\cot 60^\circ$	
کوشش کیجیے	
کی قدریں معلوم کیجیے۔ $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ ، $\tan 30^\circ$ ، $\csc 30^\circ$ ، $\sec 30^\circ$ اور $\cot 30^\circ$	

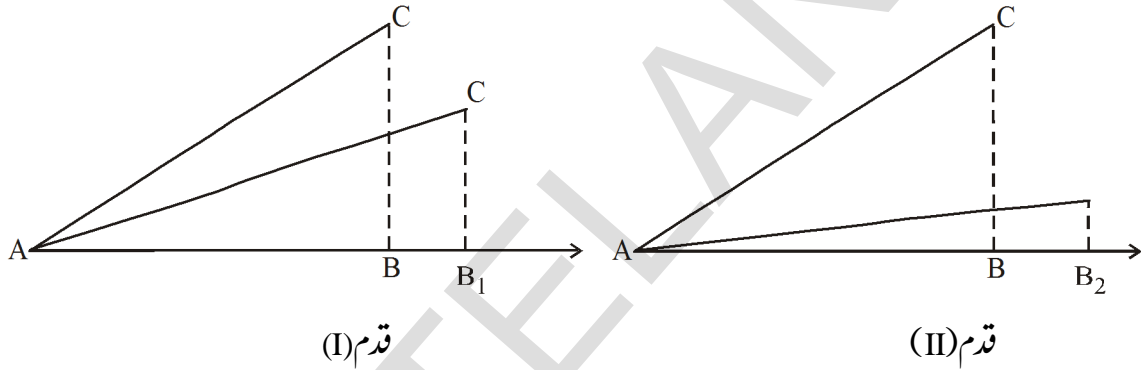
### 11.3.3 $90^\circ$ اور $0^\circ$ کی مثالی نسبتیں

اب تک ہم نے  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  اور  $60^\circ$  کی مثالی نسبتوں کا مطالعہ کیا۔ آئیے اب ہم  $90^\circ$  اور  $0^\circ$  کی مثالی نسبتوں کو معلوم کریں گے۔



فرض کیجیے کہ ایک خطی قطعہ AC جس کا طول r ہے شعاع AB سے ایک زاویہ حادہ بناتا ہے نقطہ B سے نقطہ C کی بلندی BC ہے جب AC کا جھکاؤ AB کی جانب بڑھتا جائے تب ان دونوں کے درمیان بننے والا زاویہ گھٹتا ہے تب کیا AB اور AC کے طول میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی۔ جیسے جیسے زاویہ A میں کمی ہوگی شعاع AB سے نقطہ C کی بلندی میں

بھی کمی واقع ہوگی اور شعاع AB پر نقطہ C کا مقام (قدم) B سے تبدیل ہو کر B<sub>1</sub> اور B<sub>2</sub> میں تبدیل ہوتا جائے گا۔ اور زاویہ A کی قدر 0 ہو جائے گی۔ C کی بلندی (زاویہ A کے مقابل کا ضلع) بھی صفر ہو جائے گی۔ اور متصلہ ضلع AC (وتر) شعاع AB (متصلہ ضلع) میں ضم ہو جائے گا لہذا A سے B کا طول بھی r کے مساوی ہو جائیگا۔



(I) قدم

(II) قدم

مثالی نسبتوں پر نظر ڈالیے

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \quad \text{اور} \quad \cos A = \frac{AB}{AC}$$

اگر  $A^\circ = 0^\circ$  تب  $BC = 0$  اور  $AC = AB = r$

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{r} = 0 \quad \text{اور} \quad \cos 0^\circ = \frac{r}{r} = 1$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad \text{ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{لہذا}$$



سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

حسب ذیل پراپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے

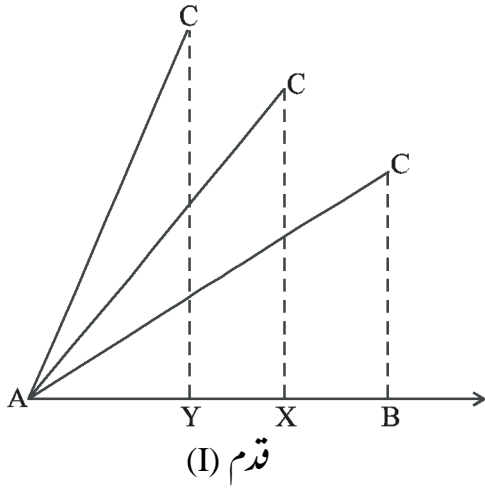
$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0} = -1$$

کیا اس کی تعریف کی جاسکتی ہے؟ کیوں؟



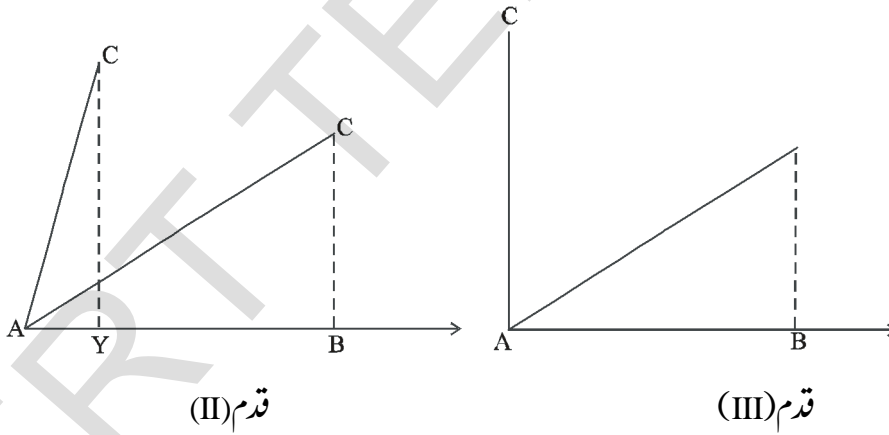
2-  $\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ}$  کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ کیا اس کی تعریف ممکن ہے؟ کیوں؟

3-  $\sec 0^\circ = 1$  کیوں؟



اب تک ہم نے زاویہ کو گھٹاتے ہوئے  $0^\circ$  کی مثلثی نسبتوں کا مطالعہ کیا ہے۔ آئیے اب ہم یہ معلوم کریں گے کہ جب خطی قطعہ AC اور شعاع AB کے درمیان بننے والے زاویے میں اضافہ ہونے پر کیا ہوگا؟ جب زاویہ A میں اضافہ ہوتا ہے تب نقطہ C کی بلندی میں بھی اضافہ ہوتا ہے اور عمود کا قدم B مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے پہلے X اور پھر Y پر پہنچتا ہے۔ بالفاظ دیگر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ A میں مسلسل اضافہ سے مقابل کے ضلع کی بلندی BC میں بھی بتدریج اضافہ ہونے لگتا ہے اور متصلہ ضلع کے طول میں کمی واقع ہوتی ہے۔ اور ایک وقت زاویہ  $A = 90^\circ$  کے مساوی ہو جائے گا تب نقطہ B 'نقطہ A' سے منطبق ہو جاتا ہے اور BC، AC کے مساوی ہو جاتا ہے۔

پس جب زاویہ  $A = 90^\circ$  ہو جاتا ہے تب قاعدہ (زاویہ کا متصلہ ضلع) کا طول صفر ہو جائے گا اور نقطہ C کی بلندی شعاع AB سے مسلسل بڑھتی ہوئی AC کے مساوی ہو جاتی ہے جس کا طول r ہے۔



آئیے اب ہم مثلثی نسبتوں سے کی قدریں واقفیت حاصل کریں گے۔

$$\sin A = \frac{AB}{AC} \quad \text{اور} \quad \cos A = \frac{BC}{AC}$$

اگر  $A = 90^\circ$  تب  $AB = 0$  اور  $AC = BC = r$

$$\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1 \quad \text{اور} \quad \cos 90^\circ = \frac{0}{r} = 0 \quad \text{تب}$$

کوشش کیجیے

$\tan 90^\circ$ ،  $\operatorname{cosec} 90^\circ$  اور  $\cot 90^\circ$  کی نسبتیں معلوم کیجیے۔



آئیے اب ہم ان تمام مذکورہ زاویوں کے مثلثی نسبتوں کی قدروں کو جدول کی شکل میں مشاہدہ کرتے ہیں۔

### جدول 11.1

$\angle A$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	لامتناہی ( $\infty$ )
$\cot A$	لامتناہی ( $\infty$ )	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	لامتناہی ( $\infty$ )
$\csc A$	لامتناہی ( $\infty$ )	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

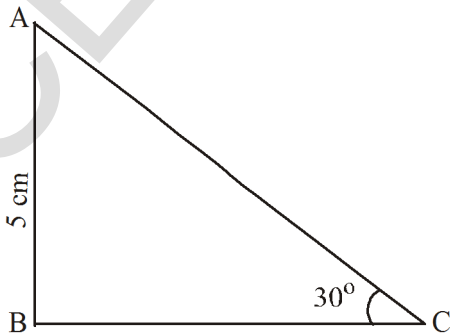
### سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



زاویہ A کی قدر میں  $0^\circ$  سے  $90^\circ$  تک اضافے سے  $\sin A$  اور  $\cos A$  کی قدروں میں تبدیلی سے متعلق آپ کا کیا خیال ہے (اوپر کی جدول کا مشاہدہ کیجیے)

اگر  $A \geq B$  تب  $\sin A \geq \sin B$  کہ کیا یہ درست ہے؟  
اگر  $A \geq B$  تب  $\cos A \geq \cos B$  کہ کیا یہ درست ہے؟

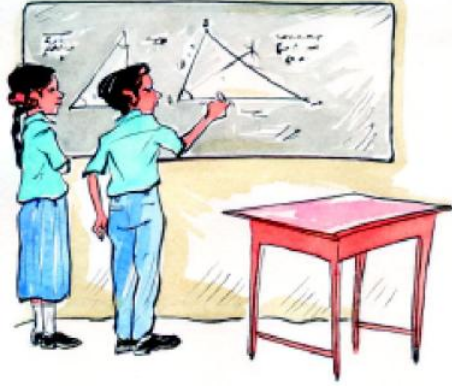
**مثال 4:** ایک مثلث ABC میں جو B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے  $AB = 5\text{cm}$  اور  $\angle ACB = 30^\circ$  ہے تب ضلع BC اور AC کا طول معلوم کیجیے۔



**حل:** دیا گیا ہے کہ  $AB = 5\text{cm}$  اور  $\angle ACB = 30^\circ$  ضلع

BC کا طول معلوم کرنے کے لیے ہم ایسی مثلثی نسبت منتخب کریں گے جس میں ضلع BC اور دیا گیا ضلع AB شامل ہوں چونکہ ضلع BC زاویہ 'C' کا متصلہ ضلع اور AB کے مقابل کا ضلع ہے۔

$$\frac{AB}{BC} = \tan C \quad \text{اس لیے}$$



$$\frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BC = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

مثلث ABC میں مثلثی نسبتوں کے استعمال سے

$$\sin 30^\circ = \frac{5}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

$$AC = 10 \text{ cm}$$

**مثال- 5:** 6 سم نصف قطر والے دائرے کا ایک وتر مرکز سے  $60^\circ$  کا زاویہ بناتا ہے اس وتر کا طول معلوم کیجیے۔

**حل:** دیا گیا ہے کہ دائرے کا نصف قطر  $6 \text{ cm} = OB = OA$  اور  $\angle AOB = 60^\circ$

OC 'AB پر زاویائی ناصف OC کھینچا گیا ہے۔

تب  $\angle COB = 30^\circ$

مثلث COB میں

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{OB}$$

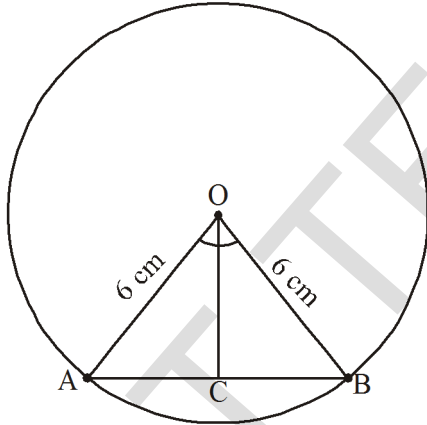
$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6}$$

$$BC = \frac{6}{2} = 3$$

لیکن وتر کا طول  $AB = 2BC$

$$= 2 \times 3 = 6 \text{ cm}$$

$\therefore$  وتر کا طول  $6 \text{ cm}$  ہے۔



دور حاضر میں زیر استعمال نسبت "sine" کا تصور AD500

میں آریہ بھٹ نے اپنی کتاب آریہ بھٹم میں پیش کیا تھا۔ آریہ

بھٹ نے نصف وتر کو "آردھاجیا" کی اصطلاح دی جس کو آگے

چل کر "جیا" یا "جیوا" کہا جانے لگا۔ کتاب آریہ بھٹم کے عربی

ترجمے میں لفظ "جیوا" کو ہی استعمال کیا گیا۔ جب اس کتاب کا

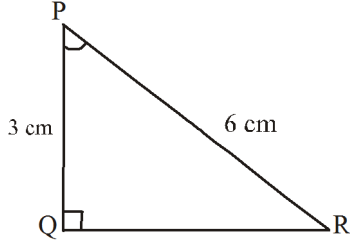
عربی سے لاطینی زبان میں ترجمہ کیا گیا تب اس میں لفظ "جیوا" کے لیے

لفظ "sinus" لیا گیا۔ اس کو بعد میں sine بھی کہا گیا جو سارے یورپ میں ریاضی کی

کتابوں میں عام ہو گئی۔ فلکیات کے انگریز پروفیسر ایڈمنڈ کنسٹر (1581-1626) نے

سب سے پہلے مختصر اظہار کے طور پر "sin" کا استعمال کیا۔

**مثال-6:** ایک قائمہ الزاویہ مثلث PQR میں جو اس Q زاویہ پر قائمہ بناتا ہے، اگر  $PQ=3\text{cm}$  اور  $PR=6\text{cm}$  اور  $\angle QPR$  اور  $\angle PRQ$  معلوم کیجیے۔



**حل:** دیا گیا ہے کہ  $PQ = 3\text{cm}$  اور  $PR = 6\text{cm}$

$$\therefore \sin R = \frac{PQ}{PR} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

لہذا  $\angle PRQ = 30^\circ$  اور

$\angle QPR = 60^\circ$  (کیوں؟)

نوٹ: اگر کسی قائمہ الزاویہ مثلث کا ایک ضلع اور کوئی دوسرا حصہ (زاویہ حادہ یا کوئی ضلع) معلوم ہو تب باقی زاویہ اور اضلاع کو معلوم کیا جاسکتا ہے؟

### سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

اگر کسی بھی قائم الزاویہ مثلث میں ایک ضلع اور کوئی دوسری پیمائش (یا تو ایک ضلع یا زاویہ) معلوم ہو تو کیا مثلث کے باقی ضلع اور زاویے معلوم کر سکتے ہیں۔ کیا آپ اس سے متفق ہیں۔ ایک مثال کے ذریعہ وضاحت کیجیے۔



**مثال-7:** اگر  $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$ ,  $A > B$  اور  $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$ ,  $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$  تب 'A' اور 'B' کی قدریں کیا ہوں گی؟

**حل:** چونکہ  $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow A - B = 30^\circ \dots\dots\dots (1) \quad (\text{کہا؟})$$

$$\cos(A + B) = \frac{1}{2} \quad \text{اور}$$

$$\Rightarrow A + B = 60^\circ \dots\dots\dots (2)$$

مساوات (1) اور (2) کو حل کرنے پر

$A = 45^\circ$  اور  $B = 15^\circ$  (کیسے؟)



### مشق 11.2

1- حسب کی قدریں محسوس کیجیے؟

(i)  $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$

(ii)  $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 60^\circ}$

(iii)  $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\cot 45^\circ + \cos 60^\circ - \sec 30^\circ}$

(iv)  $2 \tan 245^\circ + \cos 230^\circ - \sin 260^\circ$

(v)  $\frac{\sec^2 60^\circ - \tan^2 60^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2- صحیح جواب کا انتخاب کیجیے اور اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i)  $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ}$

(a)  $\sin 60^\circ$

(b)  $\cos 60^\circ$

(c)  $\tan 30^\circ$

(d)  $\sin 30^\circ$



(ii)  $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ}$

(a)  $\tan 90^\circ$  (b) 1 (c)  $\sin 45^\circ$  (d) 0

(iii)  $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$

(a)  $\cos 60^\circ$  (b)  $\sin 60^\circ$  (c)  $\tan 60^\circ$  (d)  $\sin 30^\circ$

3-  $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$  کو محسوب کیجیے؟  $\sin(60^\circ + 30^\circ)$  کی قدر کیا ہوگی آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

4- کیا یہ بیان  $\cos(60^\circ + 30^\circ) = \cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$  صادق ہے؟

5- ایک قائمہ الزاویہ مثلث PQR میں جو اس Q پر قائمہ الزاویہ بناتا ہے اور  $\angle RPQ = 60^\circ$  اور  $PQ = 6\text{cms}$  ضلع QR اور PR کا طول معلوم کیجیے۔

6- مثلث XYZ میں جو اس Y پر قائمہ بناتا ہے  $YZ = x$  اور  $XZ = 2x$  تب  $\angle YXZ$  اور  $\angle YZX$  معلوم کیجیے۔

7- کیا یہ بیان  $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$  صادق ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

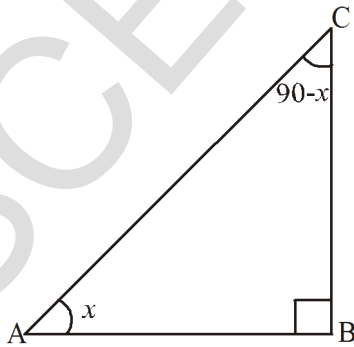


بیان  $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = 4$  حادہ زاویہ  $\theta$  کی کس قدر کے لیے صادق ہے؟

$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  کی کس قدر کے لیے مندرجہ بالا مساوات ناقابل تعریف ہے؟

## 11.4 اتمامی زاویوں کی مثلثی نسبتیں

ہم پہلے ہی سے واقف ہیں کہ اگر کوئی دو زاویوں کا مجموعہ  $90^\circ$  ہو تب وہ زاویے اتمامی زاویے کہلاتے ہیں۔ مان لیجیے کہ ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں جو اس B پر قائمہ بناتا ہے اس مثلث میں کیا کوئی اتمامی زاویہ ہے۔



چونکہ زاویہ B  $90^\circ$  ہے مابقی دو زاویوں کا مجموعہ  $90^\circ$  ہوگا

(کیونکہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ  $180^\circ$  ہوتا ہے)

$$\angle A + \angle C = 90^\circ$$

لہذا  $\angle A$  اور  $\angle C$  اتمامی زاویہ کہلاتے ہیں۔

آئیے! فرض کرتے ہیں کہ  $\angle A = x$  تب زاویہ  $x$  کے مقابل کا ضلع BC اور متصلہ ضلع AB ہے۔

$$\sin x = \frac{BC}{AC} \quad \cos x = \frac{AB}{AC} \quad \tan x = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{AC}{BC} \quad \sec x = \frac{AC}{AB} \quad \cot x = \frac{AB}{BC}$$

اگر  $\angle A + \angle C = 90^\circ$  تب  $\angle C = 90^\circ - \angle A$  اور  $\angle A = x$  تب  $\angle C = 90^\circ - x$

آئیے! اب ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث ABC میں زاویہ  $(90^\circ - x)$  کے مقابل کا ضلع اور متصلہ کون سے ہوں گے۔

$$\sin(90^\circ - x) = \frac{AB}{AC} \quad \cos(90^\circ - x) = \frac{BC}{AC} \quad \tan(90^\circ - x) = \frac{AB}{BC}$$

$$\operatorname{Cosec}(90^\circ - x) = \frac{AC}{AB} \quad \sec(90^\circ - x) = \frac{AC}{BC} \quad \cot(90^\circ - x) = \frac{BC}{AB}$$

اب اگر ہم زاویہ  $x^\circ$  اور  $(90^\circ - x)$  کے مندرجہ بالا مختلف مثلثی نسبتوں کا تقابل کریں تب ہمیں مثلث ABC کے لیے تین ممکن

صورتیں ہوں گی۔

$$\sin(90^\circ - x) = \frac{AB}{AC} = \cos x \quad \text{اور} \quad \cos(90^\circ - x) = \frac{BC}{AC} = \sin x$$

$$\tan(90^\circ - x) = \frac{AB}{BC} = \cot x \quad \text{اور} \quad \cot(90^\circ - x) = \frac{BC}{AB} = \tan x$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - x) = \frac{AC}{AB} = \sec x \quad \text{اور} \quad \sec(90^\circ - x) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} x$$



سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

مندرجہ بالا رشتوں/بیانات کو  $90^\circ$  اور  $0^\circ$  کے لیے جانچئے کہ یہ صادق ہیں یا نہیں۔

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A$$

$$\cot(90^\circ - A) = \tan A$$

$$\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$$

اور

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$$



آئیے چند مزید مثالوں پر غور کریں

**مثال-8:**  $\frac{\sec 35^\circ}{\operatorname{cosec} 55^\circ}$  کی قدر محسوب کیجیے۔

**حل:**  $\operatorname{cosec} A = \sec (90^\circ - A)$

$$\operatorname{cosec} 55^\circ = \operatorname{cosec} (90^\circ - 35^\circ)$$

$$\operatorname{cosec} 55^\circ = \sec 35^\circ$$

$$\text{تب } \frac{\sec 35^\circ}{\operatorname{cosec} 55^\circ} = \frac{\sec 35^\circ}{\sec 35^\circ} = 1$$

**مثال-9:** اگر  $\cos 7A = \sin(A - 6^\circ)$  جہاں  $7A$  ایک حادہ زاویہ ہے تب  $A$  کی قدر معلوم کیجیے؟

**حل:** دیا گیا ہے کہ  $\cos 7A = \sin(A - 6^\circ)$

$$\sin (90 - 7A) = \sin (A - 6^\circ)$$

چونکہ  $(90 - 7A)$  اور  $(A - 6^\circ)$  دونوں حادہ زاویے ہیں

$$\text{اس لیے } 90^\circ - 7A = A - 6^\circ$$

$$8A = 96^\circ$$

$$\Rightarrow A = 12^\circ$$

**مثال-10:** اگر  $\sin A = \cos B$  تب ثابت کیجیے کہ  $A + B = 90^\circ$

**حل:** دیا گیا ہے کہ  $\sin A = \cos B \dots (1)$

ہم جانتے ہیں کہ  $\cos B = \sin (90^\circ - B)$  تب ہم مساوات (1) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\sin A = \sin (90^\circ - B)$$

اگر  $A$  اور  $B$  دونوں حادہ زاویہ ہیں تب  $A = 90^\circ - B$

$$\Rightarrow A + B = 90^\circ$$

**مثال-11:**  $\sin 81^\circ + \tan 81^\circ$  کو زاویہ  $0^\circ$  اور  $45^\circ$  کے درمیانی زاویوں کی مثلثی نسبتوں میں ظاہر کیجیے۔

**حل:** ہم  $\sin 81^\circ = \sin(90^\circ - 9^\circ) = \cos 9^\circ$  لکھ سکتے ہیں اور

$$\tan 81^\circ = \tan(90^\circ - 9^\circ) = \cot 9^\circ$$

تب  $\sin 81^\circ + \tan 81^\circ = \cos 9^\circ + \cot 9^\circ$

مثال-12: ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC کے زاویے A اور B اور C ہیں تب بتائیے کہ  $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$

حل: دیا گیا ہے کہ A اور B اور C ایک مثلث کے زاویے ہیں تب

$$A + B + C = 180^\circ$$

اوپر کی مساوات کو دونوں جانب '2' سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

دونوں جانب 'sin' نسبت لینے پر

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2} \quad \text{لہذا ثابت ہوا کہ}$$



### مشق 11.3



1- محسوب کیجیے۔

- (i)  $\frac{\tan 36^\circ}{\cot 54^\circ}$  (ii)  $\cos 12^\circ - \sin 78^\circ$  (iii)  $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$   
 (iv)  $\sin 15^\circ \sec 75^\circ$  (v)  $\tan 26^\circ \tan 64^\circ$

2- بتائیے کہ

(i)  $\tan 48^\circ \tan 16^\circ \tan 42^\circ \tan 74^\circ = 1$

(ii)  $\cos 36^\circ \cos 54^\circ - \sin 36^\circ \sin 54^\circ = 0$

3- اگر  $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$  جہاں  $2A$  ایک زاویہ حادہ ہے تب 'A' کی قدر معلوم کیجیے۔

4- اگر  $\tan A = \cot B$  جہاں A اور B حادہ زاویے ہیں تب ثابت کیجیے کہ  $A + B = 90^\circ$

5- ایک مثلث ABC کے زاویے A اور B اور C ہیں تب ثابت کیجیے  $\cot \frac{C}{2} = \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)$

6-  $\sin 75^\circ + \cos 65^\circ$  کو زاویہ  $0^\circ$  اور  $45^\circ$  کی درمیانی زاویوں کے مثلثی نسبتوں میں ظاہر کیجیے۔

## 11.8 علم مثلث کی متماثلات

ہم جانتے ہیں کہ متماثلہ (Identity) ایک ریاضی کی وہ مساوات جو متغیرات کی ہر قدر کے لیے صادق ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  ایک متماثلہ ہے

اسی طرح سے ایسی متماثلہ جس میں مثلثی نسبتیں پائی جاتی ہیں علم مثلث کی متماثلہ کہلاتی ہے اور یہ اپنے زاویوں کی تمام قدروں کے لیے صادق ہوتی ہے۔

یہاں پر ہم ایک متماثلہ کو اخذ کریں گے اور باقی تمام اسی کی بنیاد پر ہوں گے۔

مان لیجیے کہ مثلث ABC پر زاویہ قائمہ بناتا ہے لہذا

فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \dots(1)$$

دونوں جانب AC<sup>2</sup> سے تقسیم کرنے پر

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\text{یعنی} \left[ \frac{AB}{AC} \right]^2 + \left[ \frac{BC}{AC} \right]^2 = \left[ \frac{AC}{AC} \right]^2$$

$$\text{یعنی} (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

یہاں ہم عام طور پر  $(\cos A)^2$  کی بجائے  $\cos^2 A$  لکھتے ہیں

$$\text{یعنی} (\cos A)^2 = \cos^2 A \text{ (نا لکھیں)}$$

لہذا اوپر کی مساوات اس طرح ہوگی

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

اس مساوات میں متغیر A (زاویہ) استعمال کیا گیا ہے یہ مساوات A کی تمام قدروں کے

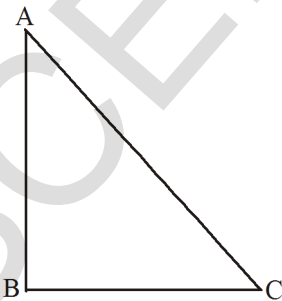
لیے صادق ہے۔ لہذا یہ مساوات علم مثلث کی ایک متماثلہ ہے۔

لہذا  $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$  علم مثلث کی متماثلہ ہے۔

آئیے اب ہم دوسری متماثلہ پر غور کرتے ہیں۔

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \text{ (مساوات 1 سے)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2} \text{ (مساوات 1 کو } AB^2 \text{ سے تقسیم کرنے پر)}$$



$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\text{یعنی } 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

اسی طرح سے مساوات 1 کو  $BC^2$  سے تقسیم کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوگا

$$\cot^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$$

ان متماثلات کی مدد سے ہم ایک مثلثی نسبت کو ہم دوسری نسبت میں ظاہر کر سکتے ہیں اگر ہمیں کسی بھی ایک نسبت کی قدر معلوم ہو تب ہم ان متماثلات کے استعمال سے مابقی تمام مثلثی نسبتوں کی قدر معلوم کر سکتے ہیں۔

سوچئے اور تبادلہ خیال کیجئے



کیا ذیل میں دی گئیں متماثلات  $90^\circ \geq A \geq 0^\circ$  کے لیے صادق ہیں؟ اگر نہیں تب 'A' کی کن قدروں کے لیے صادق ہے؟

●  $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$       ●  $\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

یہ کیجئے



(i) اگر  $\sin C = \frac{15}{17}$  تب  $\cos C$  معلوم کیجئے

(ii) اگر  $\tan x = \frac{5}{12}$  تب  $\sec x$  معلوم کیجئے۔ (iii) اگر  $\text{cosec} \theta = \frac{25}{7}$  تب  $\cot \theta$  معلوم کیجئے۔

کوشش کیجئے



حسب ذیل کی قدر محسوب کیجئے اور اپنے جواب کی تصدیق کیجئے۔

(i)  $\frac{\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ}{\cos^2 36^\circ + \cos^2 54^\circ}$

(ii)  $\sin 5^\circ \cos 85^\circ + \cos 5^\circ \sin 85^\circ$

(iii)  $\sec 16^\circ \text{ cosec } 74^\circ - \cot 74^\circ \tan 16^\circ$

مثال-13: ثابت کیجئے کہ  $\cot \theta + \tan \theta = \sec \theta \text{ cosec } \theta$

حل:

$$\text{LHS} = \cot \theta + \tan \theta$$

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{کیوں؟})$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$



$$= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\cos \theta} = \operatorname{cosec} \theta \sec \theta$$

مثال-14: ثابت کیجیے  $\tan^2 \theta + \tan^4 \theta = \sec^4 \theta - \sec^2 \theta$

حل:

$$\text{L.H.S} = \tan^2 \theta + \tan^4 \theta$$

$$= \tan^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)$$

$$= \tan^2 \theta \cdot \sec^2 \theta \quad (\text{کیوں؟})$$

$$= (\sec^2 \theta - 1) \sec^2 \theta \quad (\text{کیوں؟})$$

$$= \sec^4 \theta - \sec^2 \theta = \text{R.H.S}$$

مثال-15: ثابت کیجیے  $\sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}} = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$

حل:

$$\text{LHS} = \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta} \cdot \frac{1+\cos \theta}{1+\cos \theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos \theta)^2}{1-\cos^2 \theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}} \quad (\text{کیوں؟})$$

$$= \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \text{R.H.S.}$$

مشق 11.4



1- ذیل کو محسب کیجیے؟

(i)  $(1 + \tan \theta + \sec \theta) (1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)$

(ii)  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$

(iii)  $(\sec^2 \theta - 1) (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1)$

$$(2) \text{ ثابت کیجیے } (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$(3) \text{ بتائیے کہ } \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$$

$$(4) \text{ بتائیے کہ } \frac{1 - \tan^2 A}{\cot^2 A - 1} = \tan^2 A$$

$$(5) \text{ بتائیے کہ } \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \tan \theta \cdot \sin \theta$$

$$(6) \text{ مختصر کیجیے } \sec A (1 - \sin A) (\sec A + \tan A)$$

$$(7) \text{ ثابت کیجیے } (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$(8) \text{ مختصر کیجیے } (1 - \cos \theta) (1 + \cos \theta) (1 + \cot^2 \theta)$$

$$(9) \text{ اگر } \sec \theta + \tan \theta = p \text{ تب } \sec \theta - \tan \theta \text{ کی قدر کیا ہوگی؟}$$

$$(10) \text{ اگر } \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = k \text{ تب ثابت کیجیے } \cos \theta = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$$

اختیاری مشق



(جامع اکتساب کے لیے)

$$(1) \text{ ثابت کیجیے کہ } \frac{\cot \theta - \cos \theta}{\cot \theta + \cos \theta} = \frac{\operatorname{cosec} \theta - 1}{\operatorname{cosec} \theta + 1}$$

$$(2) \text{ ثابت کیجیے کہ } \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} \text{ (متماثلہ } \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta \text{ کو استعمال کرتے ہوئے)}$$

$$(3) \text{ ثابت کیجیے } (\operatorname{cosec} A - \sin A) (\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

$$(4) \text{ ثابت کیجیے } \frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$$

$$(5) \text{ بتائیے } \left( \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) = \left( \frac{1 + \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$$

$$(6) \text{ ثابت کیجیے } \left( \frac{\sec A - 1}{\sec A + 1} \right) = \left( \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \right)$$

ہم نے کیا سیکھا

1- ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں جو اس B پر قائمہ بناتا ہے

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}} \quad \cos A = \frac{\angle A \text{ کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}} \quad \tan A = \frac{\angle A \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\angle A \text{ کا متصلہ ضلع}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}; \operatorname{sec} A = \frac{1}{\cos A}; \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}; \cot A = \frac{1}{\tan A} \quad -2$$

3- اگر ایک قائمہ الزاویہ مثلث میں کسی حادہ زاویہ کی کوئی بھی ایک مثلثی نسبت معلوم ہو تب اس زاویے کی مابقی تمام مثلثی نسبتوں کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔

4-  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  اور  $90^\circ$  کے تمام مثلثی نسبتوں کی قدر

5-  $\sin A$  یا  $\cos A$  کی قدر 1 سے کم یا 1 سے زیادہ ہوتی ہے اور کبھی 1 سے زیادہ نہیں ہوتی جبکہ  $\sec A$  یا  $\operatorname{cosec} A$  کی قدر ہمیشہ 1 کے مساوی یا زیادہ ہوتی ہے۔

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A, \cos(90^\circ - A) = \sin A \quad -6$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A, \cot(90^\circ - A) = \tan A$$

$$\sec A(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A, \operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad -7$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1 \quad \text{جب کہ } 0^\circ < A < 90^\circ$$

$$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1 \quad \text{جب کہ } (0^\circ < A < 90^\circ)$$



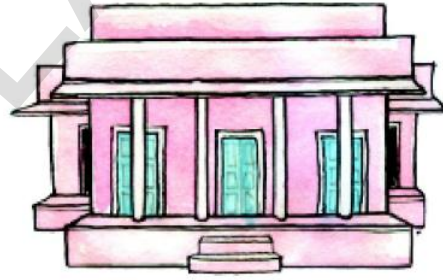
# علم مثلث کا اطلاق

## Applicatoin of Trigonometry

# باب 12

### 12.1 تمہید

آپ نے سماجی علم میں پڑھا ہے کہ دنیا کے سب سے بلند ترین پہاڑ کی چوٹی ماؤنٹ ایورسٹ ہے اور اس کی بلندی 8848 میٹر ہے۔ ضلع عادل آباد کا کھلا آبشار ریاست تلنگانہ کا سب سے بلند ترین قدرتی آبشار ہے جس کی بلندی 147 فٹ ہے۔ ان بلندیوں کی پیمائش کس طرح کی گئی ہوگی؟ کیا آپ اپنے اسکول کے عمارت کی بلندی کی پیمائش یا آپ کے اسکول میں یا اسکے قرب وجوار میں موجود قد آور درخت کی بلندی پیمائش کر سکتے ہیں؟ آئیے اب اس طریقہ کار کو مثالوں کے ذریعہ سمجھیں گے۔



شاز یہ کھجور کے درخت کے بلندی کی پیمائش کرنا چاہتی ہے وہ درخت کے بلند ترین مقام کی نشاندہی کرنے کی کوشش کرتی ہے اور وہ بلند ترین مقام اور اپنی آنکھ کے درمیان ایک خیالی خط کو تصور کرتی ہے۔

یہ خیالی خط ”خط نظر“ کہلاتا ہے وہ ایک افقی خط ”جو درخت اور آنکھ کے درمیان زمین کے

متوازی ہوتی ہے۔

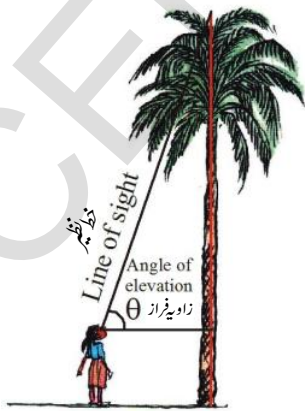
یہاں پر ”خط نظر“ ”افقی خط“ اور درخت ایک قائم الزاویہ مثلث بناتے ہیں

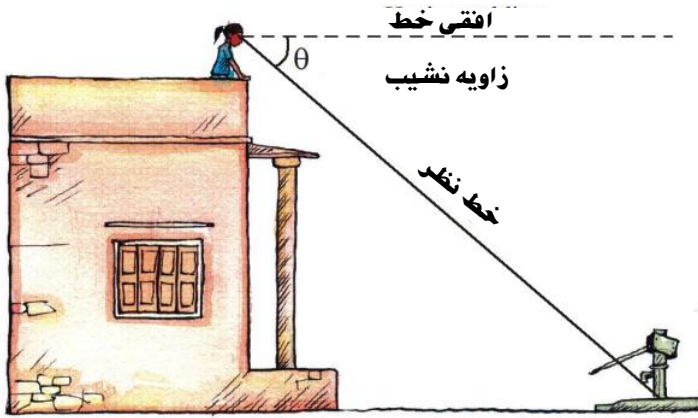
درخت کی بلندی معلوم کرنے کے لیے شاز یہ کو اس مثلث کے ایک ضلع اور ایک زاویہ کو معلوم

کرنا ہوگا۔

”خط نظر“ افقی خط کے اوپر واقع ہے اور خط نظر اور افقی خط کے درمیان بننے والا زاویہ ”زاویہ

فراز“ کہلاتا ہے۔





فرض کرو کہ آپ اپنے اسکول کے عمارت کی چھت پر کھڑے ہیں اس عمارت سے جس پر کھڑے ہیں ایک بورویل کا فاصلہ معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ اس کے لیے آپ کو اس بورویل کے قدم کا مشاہدہ کرنا ہوگا۔ تب آپ کی آنکھ سے بورویل تک 'خط نظر آپ کی آنکھ سے افقی خط کے نیچے ہے یہاں خط نظر اور افقی خط کے درمیان بننے والا زاویہ "زاویہ نشیب" کہلاتا ہے۔

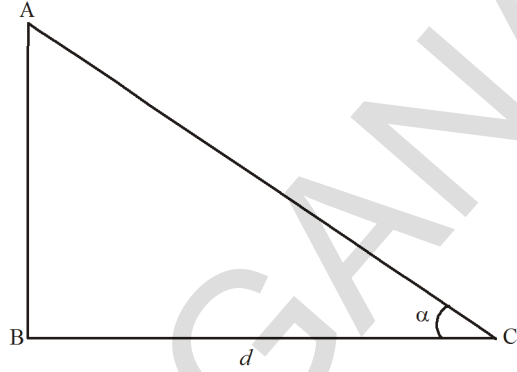
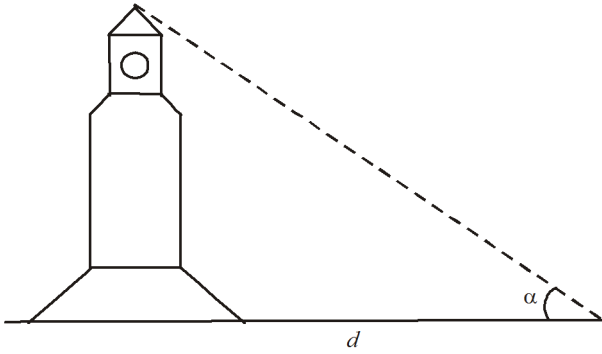
ارضی کی پیمائش کرنے والے اشخاص (Surveyors) صدیوں سے علم مثلث کا استعمال کرتے آ رہے ہیں وہ لوگ سروے کے دوران Theodolites (افقی و عمودی پیمائش کرنے والا آلہ) کے استعمال سے زاویہ نشیب و زاویہ فرازی کی پیمائش کرتے تھے۔ ہندوستان میں 19 ویں صدی عیسوی میں سروے پراجیکٹ Great Trigonometric survey کے لیے ہندوستانی انگریزی حکومت نے دو بڑے Theodolites بنوائے۔ 1852 میں سروے کے دوران ہمالیہ پہاڑ میں دنیا کی سب سے بلند ترین چوٹی ماؤنٹ ایورسٹ دریافت ہوئی۔ 160km کے فاصلہ سے چھ مختلف مقامات سے اس چوٹی کا مشاہدہ کیا گیا اور اس چوٹی کی بلندی محسوب کی گئی۔ 1856ء میں اس چوٹی کو سر جارج ایورسٹ کے نام سے موسوم کیا گیا۔ جنہوں نے اس قومی Theodolites کو تیار کرنے میں اہم رول ادا کیا اور اس کو سب سے پہلے استعمال کیا۔ وہ قومی Theodolites نمائش کے لیے سروے آف انڈیا کے عجائب گھر (میوزیم) و ہرادون میں رکھا گیا ہے۔

## 12.2 مسائل کے حل کے لیے خاکہ بنانا

- فاصلہ اور بلندی کے (سوالات) مسائل حل کرنے کے لیے اشکال بناتے وقت ہمیں حسب ذیل نکات کو ملحوظ رکھنا چاہیے۔
- تمام اجسام جیسے مینار، درخت، عمارتیں، پانی کا جہاز، پہاڑ وغیرہ کو ریاضیاتی سہولت کے لیے میں بطور ایک خط لیا جانا چاہیے
  - زاویہ فرازی زاویہ نشیب کی پیمائش افقی خط کی اساس پر لی جاتی ہے۔
  - اگر مشاہدہ کا قد سوال میں نہ دیا جائے تب اسکو نظر انداز کر دیا جاتا ہے۔
- جب ہم کسی فاصلہ اور بلندی کو زاویہ نشیب یا زاویہ فرازی کے استعمال سے معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں تب ہمیں جیومیٹریہ تخیل کی ضرورت ہوگی۔ فاصلہ اور بلندی معلوم کرنے کے لیے ہمیں پہلے خاکہ بنانا ہوگا اور ان خاکوں کی مدد سے ہم مسائل حل کر سکتے ہیں۔ آئیے چند مثالوں پر غور کریں گے۔

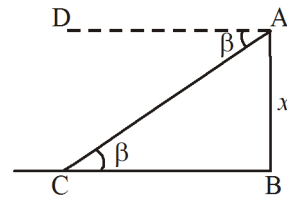
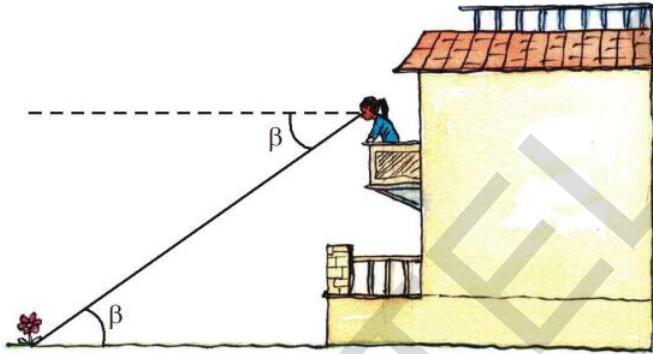
**مثال-1:** مشاہدہ کار سے  $d$  میٹر فاصلہ پر موجود (Clock tower) گھڑیال کے مینار کے اوپری حصہ کا زاویہ فرازی  $\alpha^\circ$  ہے۔ اس کے لیے ایک کچھ خاکہ بنائیے۔

حل: سوال کے مطابق حسب ذیل کچھ خاکہ بنایا جاسکتا ہے۔



مثال-2: نازیہ اپنے مکان کی پہلی منزل کی بالکنی سے سطح زمین پر موجود پھول کا مشاہدہ کرتی ہے جس کا زاویہ نشیب  $\beta^\circ$  بنتا ہے۔ اس عمارت کی پہلی منزل کی بلندی  $x$  میٹر ہے۔ اس کے لیے ایک کچھ خاکہ بنائیے۔

حل:

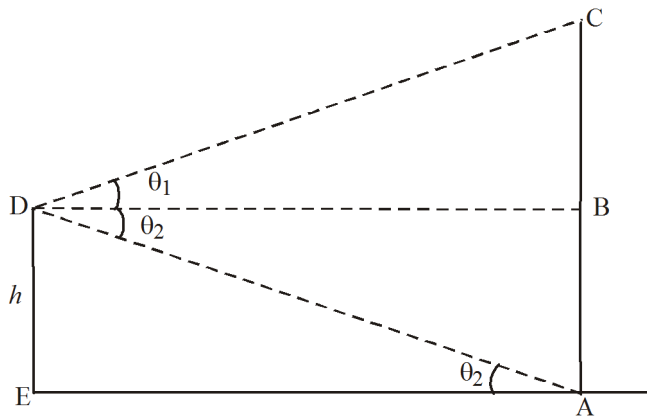
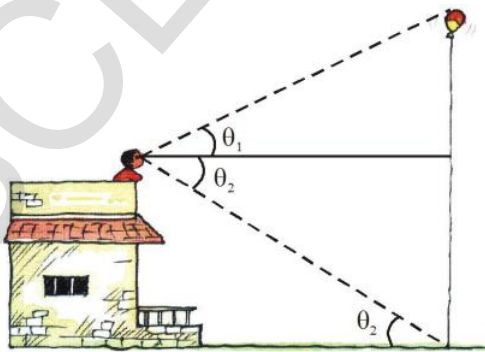


یہاں  $\angle DAC = \angle ACB = \beta$  (کیوں)؟

مثال-3: ایک بڑا غبارہ ایک رسی سے باندھا گیا جو ہوا میں لہرا رہا ہے ایک شخص عمارت کی چھت سے اس غبارہ کا مشاہدہ کرنے پر زاویہ فراز  $\theta_1$  بنتا ہے جب وہ اس کے قدم کا مشاہدہ کرتا ہے تب زاویہ نشیب  $\theta_2$  بنتا ہے۔ عمارت کی بلندی  $h$  فٹ ہے۔ اس کے لیے ایک کچا خاکہ بنائیے۔

حل: یہاں ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$$\angle BDA = \angle DAE \text{ (کیوں؟)}$$





یہ کیجیے



- 1- حسب ذیل صورتوں کے اشکال اتاریئے۔  
 (i) ایک شخص پتنگ اڑا رہا ہے جس کا زاویہ فراز  $\alpha$  ہے۔ اور اس شخص کے ہاتھ سے پتنگ کا فاصلہ  $l$  ہے۔  
 2- ایک شخص ایک ندی کے کنارے موجود ایک  $h$  بلندی والے درخت کے اوپر سے ندی کے دونوں کناروں کا مشاہدہ کرتا ہے۔ جہاں پر ندی کی چوڑائی  $d$  ہے زاویہ نشیب  $\theta_1$  اور  $\theta_2$  جہاں  $Q_1 < Q_2$  ہے

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



- 1- آپ اپنے اسکول کی عمارت کی چھت کا  $d$  میٹر کے فاصلہ سے مشاہدہ کر رہے ہیں جس کا زاویہ فراز  $\alpha$  ہے۔ اس عمارت کی بلندی معلوم کرنے کے لیے آپ کس مثلثی نسبت کا استعمال کریں گے۔  
 2- ایک  $x$  میٹر طول والی سیڑھی ایک انتصابی دیوار سے لگی ہوئی ہے جو سطح زمین سے  $\theta$  کا زاویہ بناتی ہے دیوار کے اس مقام تک کی بلندی جہاں سیڑھی لگی ہوئی ہے معلوم کرنے کے لیے آپ کس مثلثی نسبت کا استعمال کریں گے۔

اب تک ہم دی گئی تفصیلات کے مطابق فاصلے اور بلندیوں سے متعلق کچے خاکے بنانے کے علاوہ جیومیٹریائی طرز پر تبادلہ خیال کیا۔ اب ہم فاصلہ اور بلندی کو محسوب کرنے کے طریقہ عمل کے بارے میں واقفیت حاصل کریں گے۔

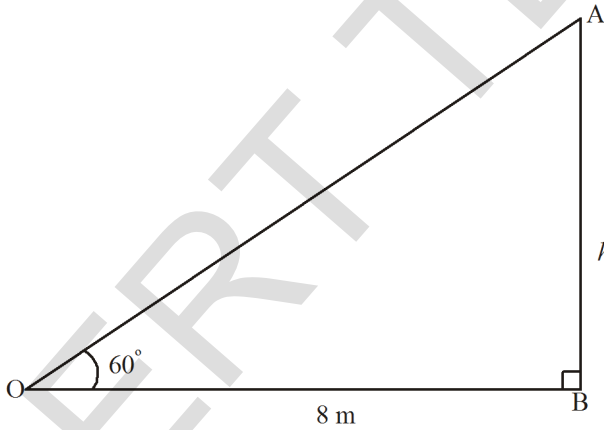
**مثال-4:** ایک لڑکا ایک برقی کھمبے کے قدم سے 8 میٹر فاصلہ پر موجود ایک نقطہ سے برقی کھمبے کے اوپری حصہ کا مشاہدہ کرتا ہے جس کا زاویہ فراز  $60^\circ$  ہے۔ کھمبے کی بلندی معلوم کیجیے۔

**حل:** شکل کے مطابق مثلث OAB میں

$$OB = 8 \text{ میٹر}$$

$$\angle AOB = 60^\circ$$

فرض کرو کہ کھمبے کی بلندی  $h = AB$  میٹر



( $\Delta OAB$  میں  $\angle AOB$  کے متضلع کا طول ہمیں معلوم ہے۔ ہمیں مقابل کے ضلع کا طول مطلوب ہے۔ لہذا اس مسئلہ (سوال) کو

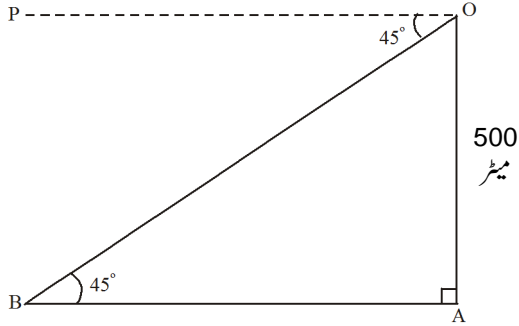
حل کرنے کے لیے ہمیں  $\tan$  مثلثی نسبت کو استعمال کرنا ہوگا)

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{OB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{8}$$

$$h = 8\sqrt{3}m. \text{ میٹر}$$

**مثال-5:** حبیب ایک ہیلی کاپٹر سے زمین پر کھڑے ایک شخص کا مشاہدہ کرتا ہے جس کا زاویہ نشیب  $45^\circ$  ہے۔ اگر ہیلی کاپٹر سطح زمین سے 500 میٹر کی اونچائی پر اڑ رہا ہو تب حبیب سے اس شخص کا فاصلہ معلوم کیجیے۔



**حل:** کچے خاکے کے مطابق مثلث OAB میں

$$OA = 500 \text{ میٹر}$$

$$\angle POB = \angle OAB = 45^\circ \text{ (کیوں؟)}$$

$$OB = \text{حبیب سے شخص کا فاصلہ} = x$$

(ہم  $\angle OBA$  کے مقابل کے ضلع سے واقف ہیں اور ہم کو مثلث OAB میں وتر OB کو معلوم کرنا ہوگا۔ لہذا اس مسئلہ کو حل کرنے کے لیے مثلثی نسبت 'sin' کا استعمال کرنا ہوگا۔



$$\sin 45^\circ = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{500}{x}$$

$$x = 500\sqrt{2} \text{ m}$$

(لہذا حبیب سے شخص کا فاصلہ  $500\sqrt{2}$  میٹر ہے۔)

### مشق - 12.1



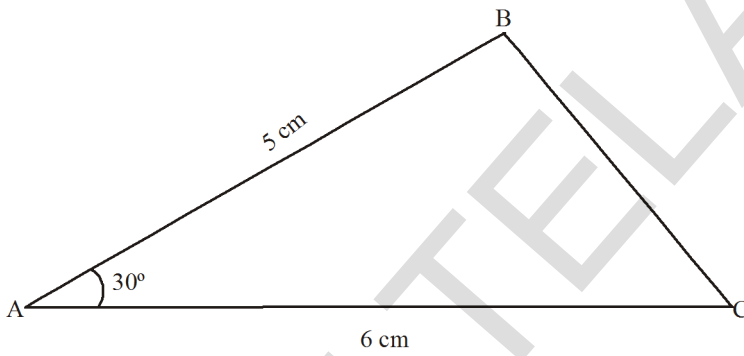
- 1- ایک مینار زمین پر انتصباً ہے اس کے قدم سے 15 میٹر کی دوری پر ایک نقطہ سے مینار کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز  $45^\circ$  ہے۔ مینار کی بلندی معلوم کیجیے؟
- 2- ایک درخت کا اوپری حصہ ہوا کی وجہ سے ٹوٹ کر  $30^\circ$  کے زاویہ سے زمین پر ٹک گیا۔ درخت کے قدم سے زمین پر ٹکے ہوئے اوپری حصہ کے سرے کا درمیانی فاصلہ 6 میٹر ہے۔ ٹوٹنے سے پہلے درخت کی بلندی معلوم کیجیے۔
- 3- ایک کھیل کے میدان میں بچوں کے کھیلنے کے لیے ایک کنٹرولر ایک پھسل بندہ (Slider) بنانا چاہتا ہے۔ وہ پھسل بندے کی بلندی 2 میٹر رکھنا چاہتا ہے جو زمین سے  $30^\circ$  کا زاویہ بناتا ہو تب اس پھسل بندہ (Slider) کا طول کیا ہوگا؟
- 4- ایک انتصابی کھمبا 15 میٹر اونچا ہے صبح 8 بجے اس کے سایہ کی لمبائی  $15\sqrt{3}$  میٹر ہے اس وقت زمین سے سورج کی کرنوں کا زاویہ فراز کیا ہوگا؟
- 5- آپ ایک 10 میٹر بلندی والے کھمبے کو تین مضبوط رسیوں کی مدد سے نصب کرنا چاہتے ہیں اگر ہر رسی کھمبے کے ساتھ  $30^\circ$  کا زاویہ بناتی ہے تب رسی کا طول کیا ہوگا؟

6- مان لیجیے کہ آپ ایک 6 میٹر بلند عمارت کے اوپر سے زمین پر موجود ایک شے پر  $60^\circ$  زاویہ نشیب سے تیر چلا رہے ہیں۔ تب آپ کے اور شے کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟

7- 9 میٹر بلند برقی کھمبے پر ایک الیکٹریشن کنکشن کو درست کرنا چاہتا ہے۔ جس کے لیے اسے اس کھمبے کی بلندی سے 1.8 میٹر نیچے پہنچنا ہے۔ جب وہ سطح زمین سے  $60^\circ$  زاویہ سے ایک سیڑھی کو استعمال کرنا چاہتا ہے تب اس سیڑھی کا طول کیا ہوگا؟ سیڑھی کے قدم اور کھمبے کے قدم کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

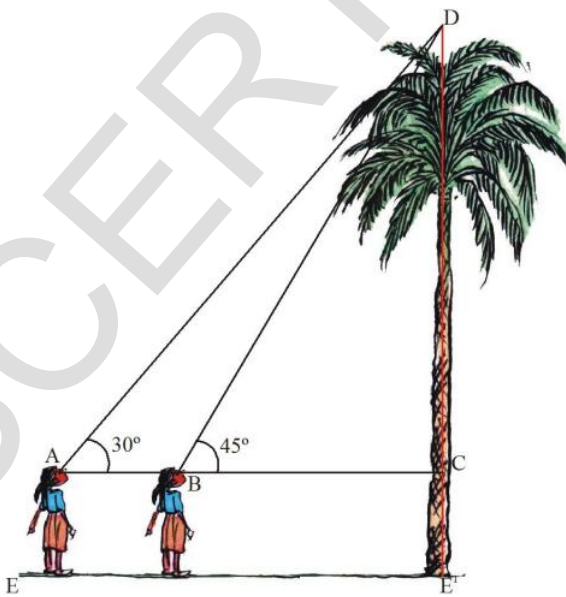
8- ایک کشتی دریا کو عبور کرتی ہے پانی کے بہاؤ کی وجہ سے کشتی ایک کنارے سے  $60^\circ$  زاویہ سے 600 میٹر فاصلہ طے کرتے ہوئے دوسرے کنارے پر پہنچتی ہے تب دریا کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

9- ایک مشاہدہ کار جس کا قد 1.8 میٹر ہے۔ ایک کھجور کے درخت سے 13.2 میٹر فاصلہ پر کھڑا ہے۔ اس کی آنکھ سے درخت کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز  $45^\circ$  ہے۔ کھجور کے درخت کی بلندی معلوم کیجیے۔



### 12.3 دو قائم الزاویہ مثلثات پر مبنی سوالات کا حل

اب تک ہم نے ایک مثلث کے ذریعہ سوالات کے حل کا مطالعہ کیا ہے۔ اگر دو مثلثات ہوں تب اس کو کس طرح حل کیا جانا چاہیے۔ فرض کرو کہ آپ ایک کھجور کے درخت کی ایک جانب کھڑے ہیں اور آپ اس درخت کی بلندی معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کے لیے آپ مختلف مقامات سے درخت کا مشاہدہ کرتے ہیں آپ یہ کس طرح معلوم کریں گے؟ فرض کرو کہ آپ اس کھجور کے درخت کا زاویہ فراز  $45^\circ$  مشاہدہ کرتے ہیں۔ جب آپ 11 میٹر (درخت کے مخالف سمت) آگے بڑھتے ہیں تب زاویہ فراز  $45^\circ$  سے  $30^\circ$  درجہ ہو جاتا ہے۔



آئیے! ہم دیکھیں گے کہ درخت کی بلندی کس طرح معلوم کی جاسکتی ہے۔

کچے خاکے کے مطابق

$$AB = 11 \text{ میٹر}$$

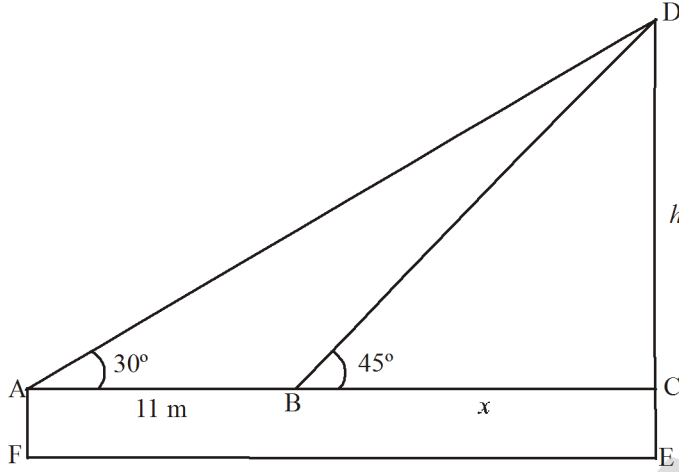
$$\angle DAC = 30^\circ$$

$$\angle DBC = 45^\circ$$

فرض کرو کہ کھجور کے درخت کی بلندی  $h = CD$  میٹر

اور  $BC$  کا طول  $x$  میٹر

$$AC = 11 + x \quad \text{تب}$$



مثلث BDC سے

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \quad \dots\dots\dots (1)$$

مثلث ADC سے

$$\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{11+x}$$

$$h = \frac{11+x}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}} \quad (\text{مساوات (1)})$$

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{(\sqrt{3}-1)} \text{ m}$$



**نوٹ:** کھجور کے درخت کی کل بلندی  $CD + CE$  ہے جہاں  $CE = AF$  آپ کا قد ہے۔

**مثال-6:** ایک 30 میٹر بلند مسجد کے دونوں جانب کھڑے ہوئے دو اشخاص مسجد کے بالائی حصے کا زاویہ فراز  $30^\circ$  اور  $60^\circ$  مشاہدہ کرتے ہیں۔

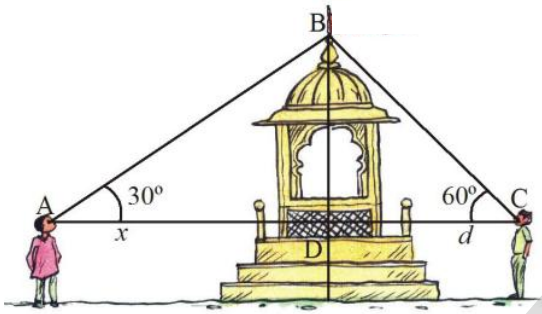
دو اشخاص کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

**حل:** دیا گیا ہے کہ مسجد کی بلندی  $BD = 30$  میٹر

پہلے شخص کا زاویہ فراز  $\angle BAD = 30^\circ$

دوسرے شخص کا زاویہ فراز  $\angle BCD = 60^\circ$

فرض کرو کہ پہلے شخص اور مسجد کے درمیان کا فاصلہ  $x = AB$  میٹر اور دوسرے شخص اور مسجد کے درمیان کا فاصلہ  $d = CD$  میٹر



مثلاً  $\triangle BAD$  سے

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{d}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{d}$$

$$d = \frac{30}{\sqrt{3}} \dots \dots \dots (2)$$

مثلاً  $\triangle BAD$  سے

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{x}$$

$$x = 30\sqrt{3} \dots \dots \dots (1)$$

مساوات (1) اور (2) سے دو اشخاص کے درمیان فاصلہ

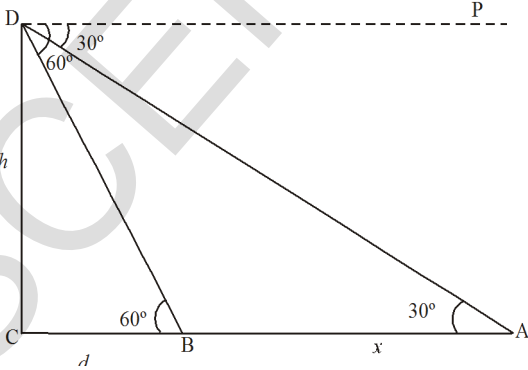
$$BC + BA = x + d$$

$$= 30\sqrt{3} + \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30 \times 4}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} \text{ m}$$

**مثال-7:** ایک مینار کے قدم تک سیدھا راستہ ہے۔ مینار کے اوپر ٹھہر کر راشد ایک کار کا مشاہدہ کرتا ہے۔ جس کا زاویہ نشیب  $30^\circ$  پاتا ہے۔ مینار

کی جانب ہموار رفتار سے آرہی کار سے زاویہ نشیب  $60^\circ$  سکند بعد  $60^\circ$  ہو جاتا ہے۔ تب کار کا اس مقام سے مینار تک پہنچنے کے لیے درکار وقت معلوم کیجیے۔

**حل:** کچے خاکے کے مطابق



فرض کرو کہ  $6$  سکند میں کار کا طے شدہ فاصلہ  $x = AB$  میٹر

مینار کی بلندی  $h = CD$  میٹر

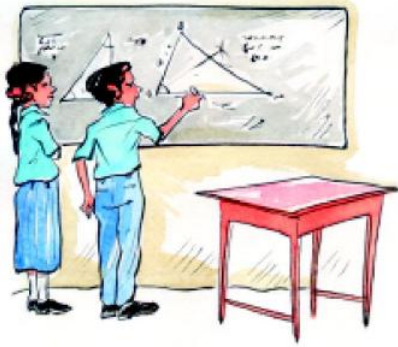
$6$  سکند بعد کار اور مینار کے درمیان کا باقی فاصلہ  $d = BC$  میٹر

$$AC = AB + BC = (x + d) \text{ m} \quad \text{اور}$$

$$\angle PDA = \angle DAP = 30^\circ \quad (\text{کیوں؟})$$

$$\angle PDB = \angle DBP = 60^\circ$$

مثلاً  $\triangle ABCD$  سے



$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{d}$$

$$h = \sqrt{3}d \dots\dots\dots(1)$$

مثلاً  $\Delta ACD$  سے

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(x+d)}$$

$$h = \frac{(x+d)}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(2)$$

مساوات (1) اور (2) سے

$$\frac{x+d}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}d$$

$$x+d = 3d$$

$$x = 2d$$

$$d = \frac{x}{2}$$

'x' میٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت = 6 سکنڈ

'd' میٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت =  $\frac{x}{2}$  = 3 سکنڈ

## مشق - 12.2



1- سڑک کے کنارے ایک ٹی وی ٹاور عموداً نصب کیا گیا ہے۔ سڑک کے دوسرے کنارے سے ٹاور کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز  $60^\circ$

ہے۔ اس نقطہ سے 10m کے فاصلہ پر ایک اور نقطہ سے ٹاور کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز  $30^\circ$  ہے۔ ٹاور کی بلندی اور سڑک کی

چوڑائی معلوم کیجیے۔



- 2- ایک 1.5 میٹر قد والا لڑکا کچھ فاصلہ سے 30 میٹر بلند ایک مسجد کے بالائی حصہ کا مشاہدہ کر رہا ہے جب وہ اس مقام سے کچھ دور مسجد کی جانب بڑھتا ہے تب لڑکے اور مینار کے کلس کے درمیان بننے والا زاویہ  $30^\circ$  سے  $60^\circ$  ہو جاتا ہے لڑکے کا مسجد کی جانب طے کردہ فاصلہ معلوم کیجیے۔
- 3- ایک مجسمہ 2 میٹر بلند قاعدے پر کھڑا ہے زمین پر کسی نقطہ سے مجسمہ کے اوپری حصہ کا زاویہ فراز  $60^\circ$  اور اسی نقطہ سے قاعدے کے اوپری حصے کا زاویہ فراز  $45^\circ$  ہے۔ مجسمہ کی بلندی معلوم کیجیے۔
- 4- ایک عمارت کے اوپری حصہ سے ایک سیل فون ٹاور کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز  $60^\circ$  ہے۔ اور اس کے قدم کا زاویہ نشیب  $45^\circ$  ہے۔ اگر عمارت سے ٹاور کا درمیانی فاصلہ 7 میٹر ہے تب ٹاور کی بلندی معلوم کیجیے۔
- 5- ایک برقی کھمبے کو 18 میٹر طول والے تار کے سہارے سے نصب کیا گیا ہے جو سطح زمین سے  $30^\circ$  کا زاویہ بناتا ہے کیونکہ وائر کا طول زیادہ ہونے کی وجہ سے اس کو کاٹ کر کھمبے سے قریب کسا گیا ہے جو سطح زمین سے  $60^\circ$  کا زاویہ بناتا ہے۔ بتائیے کہ کاٹے گئے تار کا طول کا کتنا ہے۔
- 6- ایک مینار کے قدم سے ایک عمارت کی چھت کا زاویہ فراز  $30^\circ$  ہے اور اس عمارت کے قدم سے مینار کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز  $60^\circ$  ہے اگر مینار کی بلندی 30 میٹر ہے تب عمارت کی بلندی کیا ہوگی؟
- 7- ایک سڑک کے دونوں کنارے دو مساوی بلندیوں والے ستون ایک دوسرے کے مقابل کھڑے ہیں سڑک کی چوڑائی 120 میٹر ہے۔ ان ستونوں کے درمیان سڑک پر کسی نقطہ سے ان کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز بالترتیب  $30^\circ$  اور  $60^\circ$  ہے۔ دونوں ستونوں کی بلندی اور دونوں ستون سے نقطہ کے مشاہدہ کا فاصلہ معلوم کیجیے۔
- 8- ایک مینار کے قدم سے 4 میٹر اور 9 میٹر کے فاصلہ پر واقع دو نقاط سے اس مینار کے بالائی حصہ کے زاویے فراز اتمامی ہیں (دونوں زاویوں کا مجموعہ  $90^\circ$  ہے) مینار کی بلندی معلوم کیجیے؟
- 9- زمین پر ایک نقطہ A سے جٹ ہوئی جہاز کا زاویہ فراز  $60^\circ$  مشاہدہ کیا گیا۔ 15 سینڈ بعد زاویہ فراز  $30^\circ$  ہو جاتا ہے اگر جٹ ہوئی جہاز سطح زمین سے مستقل بلندی  $3\sqrt{1500}$  میٹر پر سفر کر رہا ہو تب جٹ کی رفتار معلوم کیجیے؟ ( $\sqrt{3} = 1.732$ )
- 10- ایک عمارت کے قدم سے مینار کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز  $30^\circ$  ہے اور معیار کے قدم سے عمارت کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز  $60^\circ$  ہے۔ تب مینار اور عمارت کی بلندیوں میں نسبت معلوم کیجیے۔

## اختیاری مشق



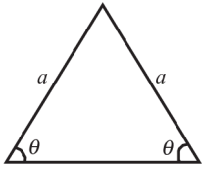
(جامع اکتساب کے لیے)

- 1- ایک لڑکی جس کا قد 1.2 میٹر ہے۔ زمین سے 88.2 میٹر بلندی پر ہوا میں افقی سمت میں حرکت کرنے والے ایک غبارے کا مشاہدہ کرتی ہے۔ لڑکی کی آنکھ سے غبارے کا زاویہ فراز  $60^\circ$  بنتا ہے۔ کچھ دیر بعد زاویہ فراز گھٹ کر  $30^\circ$  ہو جاتا ہے۔ اس وقفہ کے دوران غبارے کا طے کردہ فاصلہ معلوم کیجیے؟

2- A اور B تین کشتیاں ایک خط مستقیم میں لائٹ ہاؤز کی جانب سفر کر رہی ہیں۔ اور کشتی B اور کشتی C کا درمیانی فاصلہ y میٹر اور کشتیوں سے لائٹ ہاؤز پر بننے والے زاویے فراز بالترتیب  $2a$  اور  $3a$  ہیں۔ اگر کشتی A اور کشتی B کا درمیانی فاصلہ x میٹر ہو تب لائٹ ہاؤز کی بلندی معلوم کیجیے؟

3- ایک مکعب نما شکل کا محراب جس کے اندرونی حصہ کے طول، عرض اور بلندی میں  $1 : \sqrt{2} : 1$  کی نسبت ہے۔ اس بڑے سے بڑے بڑے چھڑی کا طول والی چھڑی کا زاویہ کیا ہوگا جو اس محراب میں رکھی جاسکے۔ معلوم کیجیے۔

4- ایک مکعب سمرجھم والے لوہے کے کرے کو پگھلا کر ایک مخروط تیار کیا گیا۔ جس کا راسی زاویہ  $120^\circ$  ہے۔ اس کا قاعدہ اور بلندی معلوم کیجیے۔



5- ثابت کرو کہ مساوی الساقین مثلث کا رقبہ  $A = a^2 \sin \theta \cos \theta$  ہے جہاں دو مساوی ضلعوں میں سے ایک ضلع A ہے اور ان دونوں ضلعوں میں سے ایک ضلع کا زاویہ  $\theta$  ہے۔

6- ایک قائم مدوری مینار جس کی بلندی h اور نصف قطر r ہے۔ سطح زمین پر کھڑا ہوا ہے۔ اگر سطح زمین پر

کوئی نقطہ P ہے۔ مینار کے اوپری سطح کا نصف دائروں کی کنارہ ABC ہے۔ اس طرح کے نقطہ B، P سے قریب ہے۔ اگر A اور B کے زاویے فراز ترتیب وار  $45^\circ$  اور  $60^\circ$  ہیں تو ثابت کرو۔

$$\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{2}$$

تجویز کردہ منصوبہ کام:

مینار درخت، عمارت کی بلندی (Clinometer) کی مدد سے معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا



اس باب میں ہم نے حسب ذیل نکات کا مطالعہ کیا ہے۔

1- (i) ”خط نظر“ وہ خط مستقیم ہے جو مشاہد کی آنکھ اور زیر مشاہدہ نقطہ کے درمیان اس طرح بنتی ہے جس طرح وہ اس کو دیکھتا ہے۔

(ii) کسی مشاہدہ جسم کا زاویہ فراز ”وہ زاویہ ہے جو خط نظر اور افقی خط کے درمیان بنتا ہے جب کہ جسم افقی سطح سے اوپر واقع ہو یعنی ایسی صورت جس میں مشاہدہ کا جسم کو دیکھنے کے لیے اپنا سر اوپر اٹھاتا ہو۔

(iii) ”کسی جسم کا زاویہ نشیب“ وہ زاویہ ہے جو خط نظر اور افقی خط کے درمیان بنتا ہے جبکہ جسم افقی سطح کے نیچے واقع ہو یعنی ایسی صورت جس میں مشاہدہ کا جسم کو دیکھنے کے لیے اپنا سر نیچے جھکاتا ہو۔

2- کسی جسم کا طول یا بلندی معلوم کرنا اور دو اجسام کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنے کے لیے متناسی نسبتوں کو استعمال کیا جاتا ہے۔

# قیاسیات Probability

## باب 13

### 13.1 تمہید

ریاض اور واجدہ کیرم (Carrom) کھیلنے کے دوران گفتگو کر رہے تھے  
ریاض : کیا آپ سمجھتے ہیں کہ ہم اس کھیل میں جیت حاصل کریں گے؟  
واجدہ : جیت حاصل کرنے کے 50 فیصد امکانات ہیں۔ ہم جیت سکتے ہیں۔  
ریاض : آپ 50 فیصد کے امکانات کس طرح کہیں گے؟  
آپ کیا سمجھتے ہیں؟ کیا واجدہ نے صحیح کہا۔

کیا ان کی جیت حاصل کرنے کے صرف 50 فیصد امکانات ہیں؟  
اس باب میں ہم اس قسم کے سوالات سے متعلق مطالعہ کریں گے۔ اس دوران ہم الفاظ جیسے ممکنہ ”غالباً“ حتی الامکان وغیرہ جیسے الفاظ پر گفتگو کریں گے۔ جماعت نہم میں ہم نے حتی الامکان ہونے والے یا یقینی واقعات اور غیر یقینی اور ناممکن واقعات سے متعلق معلومات حاصل کر چکے ہیں اس کے علاوہ کسی واقعہ کے امکان سے متعلق اور کسی واقعہ کے نتائج ہمیشہ یکساں ہونا ضروری نہیں ہے۔ اس سے متعلق بھی گفتگو کر چکے ہیں۔ فی الوقت کسی واقعہ کے امکانی معیار سے متعلق سیکھیں گے۔  
اس طرح معیاری امکانات کے مقداری تعین کے اظہار کے مطالعہ کو قیاسیات کہتے ہیں۔

### 13.1.1 قیاسیات سے کیا مراد ہے؟

آئیے! ایک تجربہ کرتے ہیں ایک سکہ کو ہزار دفعہ اچھالنے پر 455 مرتبہ چت اور 545 مرتبہ پٹ حاصل ہوا ہے۔ اگر ہم چت حاصل ہونے کے امکانات معلوم کرنے کی کوشش کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ 1000 میں سے 455 ہے یا  $\frac{455}{1000}$  یا 0.455 ہے۔



یہ قیاس کرنے کا تجربہ دراصل حقیقی تجربہ پر حاصل کردہ نتائج پر منحصر ہے جو کہ 1000 مرتبہ کسی سکہ کو اچھالنے سے حاصل ہوا۔ یہ اندازہ دراصل تجرباتی قیاس (Experimental probability) کہلاتا ہے اس تجرباتی قیاس کا اندازہ دراصل کسی ایک تجربہ کے نتائج کی اساس پر ہوتا ہے یعنی اگر اسی تجربہ کو دوبارہ ہزار مرتبہ سکہ اچھال کر وہی نتیجہ برآمد ہونا ضروری ہے بلکہ نتائج میں کچھ نہ کچھ فرق پایا جائے گا۔

اسی طرح دنیا کے بیشتر ممالک کے افراد کے ذریعہ اس تجربہ کو دہرایا گیا اور نتائج کو چت کی اساس پر ریکارڈ کیا گیا۔ مثال کے طور پر اٹھارویں صدی میں فرانس کے ماہرین فطرت ڈی۔ بغان (D. Buffan) نے ایک سکہ کو 4040 مرتبہ اچھالا تب اس کو 2048 مرتبہ چت حاصل ہوا۔ اس تجربہ میں تجرباتی قیاسی چت پانے کا امکان  $\frac{2048}{4040}$  یعنی 0.507 حاصل ہوا۔

برطانیہ کے سائنس دان جے۔ ای کرٹیج J.E. Kerrich نے سکہ کو 10000 مرتبہ ٹاس کر کے 5067 چت حاصل کئے، چت تجرباتی قیاس  $\frac{5067}{10000}$  یعنی 0.5067 حاصل ہوا۔ ماہر شماریات کارل پیرسن Carl Pearson نے زائد وقت دے کر 24000 مرتبہ ٹاس کیا۔ اس نے 12012 مرتبہ چت حاصل کیا۔ اس نے چت کے لیے تجرباتی قیاس کے تحت 0.5005 حاصل کیا۔

فرض کیجئے کہ آپ سے پوچھا گیا کہ چت کی اساس پر تجرباتی قیاس کیا ہے؟ تجربہ کی تکمیل کے بعد کیا کہا جائے؟ ایک ملین مرتبہ؟ 10 ملین مرتبہ؟ آپ غور کریں گے کہ جیسے جیسے ٹاس کی تعداد میں اضافہ ہوگا چت یا پٹ کا تجرباتی قیاس 0.5 یا  $\frac{1}{2}$  کے قریب تر ہو سکتا ہے جو کہ چت (یا پٹ) حاصل کرنے کا نظریاتی قیاس (theoretical probability) کہلاتا ہے۔

اب ہم نظریاتی قیاس کس طرح معلوم کرتے ہیں؟ سیکھیں گے۔

یہ باب دراصل کسی واقعہ کے نظریاتی قیاس کا تعارف ہے۔

اب ہم اس تصور کی بنیاد پر چند آسان و سہل سوالات سے متعلق گفتگو کریں گے۔

## 13.2: قیاسیات۔ نظریاتی طرز رسائی

آئیے حسب ذیل صورتحال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ایک سکہ کو بے ترتیب اچھالا گیا ہے۔ جب ہم کسی سکہ کی بات کرتے ہیں تب اسکو Fair (بے داغ) تصور کرتے ہیں یعنی یہ تشاکلی ہوتا ہے جس سے وہ نیچے کی جانب گرتے وقت کسی امتیاز کا شکار نہیں ہوتا۔ اس خصوصیت کو ہم سکہ کی غیر جانبداری کہتے ہیں۔ یعنی اس سے یہ اندازہ ہوتا ہے کہ جب سکہ کو بے ترتیب انداز میں اچھالا جاتا ہے تب وہ سکہ آسانی سے بغیر کسی روکاٹ کے نیچے کی جانب گرتا ہے۔ (یہاں پر یہ قیاس کیا جاتا ہے کہ سکہ نیچے گرتے وقت اس کے کنارے دونوں جانب چت یا پٹ کسی بھی سمت ہی گر سکتا ہے)

قیاسیات کے بنیادی تصورات کی تفہیم کے لیے اس باب میں ہم یہ مان کر چلتے ہیں کہ تمام تجربات کے نتائج مساوی ممکنہ حتی الامکان حاصل ہوتے ہیں۔

اب ہم جانتے ہیں کہ کسی صورتحال یا واقعہ (E) کا تجرباتی قیاس P(E) ہے

$$P(E) = \frac{\text{موافق ممکنہ نتائج کے لیے کی گئی کوششوں کی تعداد}}{\text{جملہ ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

یہ کیجیے



- (a) حسب ذیل تجربات کے لیے ممکنہ/حتمی الامکان نتائج مساوی ہوتے ہیں۔
- 1- پانسہ اچھالنے کے بعد ہندسہ 1، 2، 3، 4، 5 یا 6 حاصل ہونا۔
  - 2- 5 سرخ، 4 نیلے اور 1 کالی گیند کے بکسے سے کسی بھی رنگ کی گیند کا انتخاب
  - 3- کیرم بورڈ کے کھیل میں جیت کا امکان
  - 4- دو ہندسی عدد میں اکائی کے مقام پر کوئی بھی ہندسہ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 یا 9 کا انتخاب
  - 5- 10 سرخ، 10 نیلے، 10 کالی گیندوں کے بیاگ میں سے کسی ایک گیند کا انتخاب
  - 6- ماہ جولائی کے کسی مخصوص دن بارش کا امکان
- (b) کیا مندرجہ بالا ہر تجربہ کا امکان یکساں/مساوی ہوگا؟
- (c) پانچ (5) ایسی مثالیں دیجیے جس کا نتیجہ یکساں اور 15 ایسی مثالیں دیجیے جس کا نتیجہ یکساں نہیں ہونے کا امکان ہو۔

مشغلہ



(i) ایک سکہ 50 مرتبہ، 100 مرتبہ اور 150 مرتبہ اچھالیے اور چپت یا پٹ کے حصول کی گنتی کیجیے۔ اپنے مشاہدات کو ذیل کے جدول میں درج کیجیے۔

سلسلہ نشان	تجربات کی تعداد	چپت کی تعداد	چپت کے وقوع کا قیاس	پٹ کی تعداد	پٹ کے وقوع کا قیاس
1	50				
2	100				
3	150				

آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ یقیناً جیسے جیسے تجربات کی تعداد بڑھتی جائے گی چپت یا پٹ واقع ہونے کا قیاس %50 یا  $\frac{1}{2}$  کے قریب ہوگا جائے گا۔ قیاس کا یہ تجرباتی پہلو ہر موقعہ/واقعہ/صورت حال کے لیے استعمال ہوگا جس میں تجربات کی تعداد بے زیادہ ہو۔

### قیاسیات اور ماڈلنگ :Probability and Modelling

کسی بھی تجربے کو دہرانے کی کچھ پابندیاں ہوتی ہیں۔ چونکہ چند تجربات انتہائی قیمتی اور چند ناقابل عمل ہوتے ہیں۔ حالانکہ سکہ اچھالنے اور پانسہ ڈالنے کے تجربات دہرائے جاسکتے ہیں۔ لیکن کیا سٹیلا میٹ کی تنصیب کے تجربے کو بار بار دہرا کر اسکی ناکامی کی تعداد کا قیاس کیا جاسکتا ہے۔

تجرباتی قیاس کا شمار اس وقت بھی ناکام ہوتا ہے جب دیکھا جائے کہ زلزلہ کے ظہور کی صورت حال کو بار بار ہاد ہرا کر یہ اندازہ لگانے کی کوشش کی جائے کہ ہمہ منزلہ عمارت مسمار ہوتی ہے؟ ان قیاسات کے حصول کے لیے مصنوعی طور پر ان تجربات کو انجام دے کر ان کے نتائج کا قیاس لگایا جاتا ہے۔ یہ ماڈلس (models) قیاس اور نتیجہ کی معقولیت کا مرکب ہوتے ہیں۔ موسم کی پیش قیاسی، انتخابی نتائج کے امکانات، آبادی کے اعداد و شمار، زلزلے، فصل کی پیداوار وغیرہ تمام ماڈلس اور قیاسات پر منحصر ہوتے ہیں۔

مساوی، یکساں نتائج کا امکان (جو کہ کئی تجربات جیسے سکہ اچھالنے اور پانسہ ڈالنے میں معقول ہے) قیاسات کی ایک قسم ہے جس میں کسی صورت حال کے قیاسات سے متعلق ذیل میں دیا گیا ہے۔

کسی وقوع T کے نظریاتی قیاس کو (P(T)) سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف اس طرح ہے۔

$$P(T) = \frac{T \text{ کے موافق حاصل ہونے والے نتائج کی تعداد}}{\text{تجربے کے ممکنہ تمام نتائج کی تعداد}}$$

جہاں پر ہم یہ جان چکے ہیں کہ ان تجربات کے نتائج تقریباً وغالباً یکساں ہوتے ہیں۔ عام طور پر ہم نظریاتی قیاسات کو ہی قیاسات تصور کرتے ہیں۔



پیر سین لاپ لیس  
(1749 - 1827)

لفظ قیاسات (Probability) کو 1795ء میں سب سے پہلے پیر سین لاپ لیس (Pierre simon Laplace) نے متعارف کیا۔

قیاسات کے نظریہ کا مرکز 16 ویں صدی سے ملتا ہے جس میں اطالوی ماہر طبیعیات و ریاضی جے۔ کارڈن (J. Cardon) نے اس عنوان پر پہلی کتاب تحریر کی۔ جس کا نام The Book on Games of Chance تھا۔ جیمس برنولی (James Bernoulli) (1654-1705) اے۔ ڈی۔ ماویر (1667-1754) اور پیر سین لاپ لیس ان ماہرین میں شامل ہے جنہوں نے اس میدان میں گراں قدر خدمات انجام دیں۔ حالیہ برسوں میں قیاسات کے استعمال کی وسعت کئی میدانوں جیسے حیاتیات، معاشیات، جنینیات، طبیعیات، سماجیات وغیرہ میں دیکھی جا رہی ہے۔

### 13.3: باہمی (خاص) غیر مشمولی وقوعہ (Mutually Exclusive Events):

اگر سب کو اچھالا جائے تب چت یا پٹ حاصل ہوتا ہے لیکن دونوں نہیں، اسی طرح ہم کسی فوقانوی سطح کے طالب علم کا انتخاب کریں تو اس کا تعلق ششم، ہفتم، ہشتم، نہم یا دہم میں کسی ایک جماعت سے ہے۔ ناکہ کسی دو یا دو سے زائد جماعتوں سے۔ ان دونوں مثالوں سے یہ بات واضح ہو جاتی ہے کہ کسی ایک واقعہ کا وقوع ہونا دوسرے واقعہ کے وقوع ہونے کو روکتا ہے ایسے وقوعے ہی باہمی غیر مشمولی وقوعہ کہلاتے ہیں دو یا دو سے زائد وقوعہ کے کسی تجربے میں کسی ایک واقعہ کا وقوع ہونا دوسرے وقوعہ کا روکنا، باہمی (خاص) غیر مشمولی وقوعہ کہلاتا ہے اس سے متعلق اس باب کے اواخر میں گفتگو کریں گے۔



## 13.4.1: قیاس معلوم کرنا Finding Probability

ہم یکساں وقوع ہونے والے وقوعہ کا کس طرح قیاس معلوم کریں گے۔ سکہ اچھالنے کو ہم ایک واقعہ جو کہ تجربات سے مربوط ہے لیتے ہیں جہاں پر کہ قیاسیات یکساں طور پر ہوتے ہیں۔ مزید ہم جانتے ہیں کہ ہر موقع پر صرف دو ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں۔ ان حاصل نتائج کے سٹ کو (Sample space) کہتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک مرتبہ سکہ اچھالنے کا Sample Space {H, T} ہے۔ کسی بکسے سے جس میں سرخ، نیلا، زرد، سفید رنگ کی گیندیں موجود ہوں ایک گیند نکالنے کا Sample Space {R, B, Y, W} ہے پانسہ ڈالنے کا Sample Space کیا ہوگا؟

یہ کیجیے



5 واقفے لیجیے جس میں یکساں مواقع موجود ہوں اور ان کا Sample Space معلوم کیجیے۔

آئیے ہم یکساں مواقع رکھنے والے باہمی غیر مشمولی قیاسیات سے متعلق معلومات حاصل کریں گے۔

**مثال-1:** ایک سکہ ایک مرتبہ اچھالنے پر چٹ حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجیے۔ اسی طرح پٹ حاصل ہونے کا قیاس بھی معلوم کیجیے۔

**حل:** اس تجربے میں ایک مرتبہ سکہ اچھالنے پر متوقع نتائج چٹ (H) اور پٹ (T) ہیں۔ فرض کرو کہ چٹ (H) اور حاصل ہونے کا وقوعہ (E) کے موافق حاصل ہونے والے نتیجے کی تعداد 1 ہوگی۔

$$P(E) = \frac{E \text{ کے موافق حاصل ہونے والے نتائج کی تعداد}}{\text{تجربے کے ممکنہ تمام نتائج کی تعداد}} = \frac{1}{2}$$

اسی طرح پٹ (T) حاصل ہونے کا وقوعہ F ہو تو

$$P(F) = P(T) = \frac{1}{2} \quad (\text{اندازہ کیجیے۔ کیوں؟})$$

**مثال-2:** ایک تھیلی میں 1 سرخ، 1 نیلی اور 1 زرد گیند ہیں۔ تمام گیندوں کی جسامت یکساں ہے۔ تھیلی میں دیکھے بغیر عمران ایک گیند لیتا ہے تب وہ گیند (i) سرخ (ii) نیلی (iii) زرد گیند ہونے کے لیے قیاس دریافت کیجیے۔

**حل:** عمران نے بغیر دیکھے گیند اٹھائی لہذا تمام نتائج کے یکساں مواقع ہوں گے۔ زرد رنگ کی گیند اٹھانے کو Y نیلی گیند اٹھانے کو B اور سرخ گیند اٹھانے کو R تصور کرنے پر Sample Space {Y, B, R} ہوگا۔

$$\text{متوقع ممکنہ نتائج کی تعداد} = 3$$

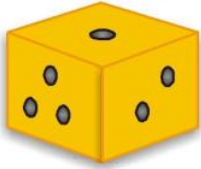
$$(i) \quad Y=1 \text{ حاصل ہونے کے ممکنہ نتائج کی تعداد}$$

$$\therefore P(Y) = \frac{1}{3}$$

$$P(R) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{3} \text{ اسی طرح}$$

## مشاہدات:

- 1- کسی تجربے کے دوران نتیجہ کی تعداد صرف ایک ہو تو اس کو بنیادی وقوع کہتے ہیں۔
- مثال (1) میں دونوں وقوعے E اور F بنیادی وقوعے ہیں اسی طرح مثال 2 کے تین وقوعے B، Y اور R بنیادی وقوعے ہیں۔
- 2- مثال (1) غور کرنے پر  $P(E) + P(F) = 1$  اسی طرح مثال (2) میں  $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$  یعنی کسی تجربے کے تمام بنیادی وقوعے کا قیاس 1 ہوتا ہے۔
- 3- پانسہ ڈالنے کے وقوعے میں 3 سے کم یا حاصل ہونے والے وقوعے یا 3 سے زائد حاصل ہونے والے وقوعے بنیادی وقوعے نہیں ہے لیکن دو سکے اچھالنے پر متوقع وقوعے {HH}، {HT}، {TH}، {TT} بنیادی وقوعے ہیں۔
- مثال - 3: پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر (i) 4 سے بڑے عدد حاصل ہونے کا قیاس (ii) 4 یا اس سے چھوٹا عدد حاصل ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟



حل: (i) ایک پانسہ ڈالنے پر ممکنہ واقعات

Sample Space  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

جملہ ممکنہ نتائج کی تعداد  $n(S) = 6$

4 سے بڑا عدد حاصل ہونے والے کے لیے موافق واقعات  $E = \{5, 6\}$

موافق نتائج کی تعداد  $n(E) = 2$

E کا قیاس  $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) فرض کرو کہ 4 یا اس سے چھوٹا عدد حاصل ہونے والا متوقع نتیجہ F ہے تو

Sample Space  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

جملہ ممکنہ نتائج کی تعداد  $n(s) = 6$

4 سے چھوٹا عدد حاصل ہونے والے کے لیے موافق واقعات  $F = \{1, 2, 3, 4\}$

موافق نتائج کی تعداد  $n(F) = 4$

واقعہ کا قیاس  $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

نوٹ: کیا اوپر کی مثال میں بتائے گئے واقعات E اور F بنیادی وقوعے ہیں؟  
نہیں۔ یہ بنیادی وقوعے نہیں ہیں چونکہ واقعہ E میں 2 متوقع نتائج جبکہ واقعہ F میں 4 متوقع نتائج ہیں

### 13.4.2 تکمیلی وقوعے اور قیاسیات Complementary Events And Probability

اس سے قبل ہم نے بنیادی وقوعے سے متعلق معلومات حاصل کر چکے ہیں۔ مثال 3 کے واقعات بنیادی وقوعے نہیں ہیں لیکن ان کے قیاسیات کا مشاہدہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

یہاں پر F کا وقوع 'E نہیں' کے مساوی ہے۔ ہم 'E نہیں' کو E سے ظاہر کرتے ہیں اسکو وقوعے E کا تکمیلی وقوعے کہتے ہیں۔

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1 \quad \text{لہذا}$$

$$\text{یعنی } P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

جس سے  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$  حاصل ہوتا ہے۔

عام طور پر E اگر کوئی واقعہ ہو تب  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$  ہوگا۔

یہ کیجیے



- (i) کیا چیت کا حاصل ہونا پٹ حاصل ہونے کا تکمیلی وقوعے ہے؟ وجوہات بتلائیے۔  
(ii) پانسہ کی صورت میں ایک حاصل ہونے کا وقوعے 2, 3, 4, 5, 6 حاصل ہونے کا تکمیلی وقوعے ہے؟ وجوہات بتلائیے۔  
(iii) پانچ باہمی تکمیلی واقعات کی کوئی 5 مثالیں دیجیے۔

### 13.4.3 ناممکن اور یقینی وقوعے

فرض کرو کہ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ہندسے لکھا ہوا پانسہ ڈالا گیا ہے۔

(i) پانسہ ڈالنے پر ہندسہ 7 حاصل ہونے کا قیاس کیا ہے۔

ایک پانسہ میں 1, 2, 3, 4, 5, 6 یعنی 6 ہی رخ ہیں جن پر ہندسے لکھے ہوئے ہیں اس پانسہ کا 7 واں رخ یا 7 لکھا ہوا رخ موجود نہیں ہے۔ لہذا 7 حاصل ہونا، ناممکن ہے۔ یعنی ایسے نتائج کی تعداد صفر 0 ہوتی ہے لہذا پانسہ کو ایک مرتبہ ڈالنے پر وقوعے 7 حاصل ہونا ناممکن ہے۔

$$\therefore P(7 \text{ حاصل ہونا}) = P(7) = \frac{0}{6} = 0$$

یعنی 7 کا وقوع ناممکن ہے اس وقوعے کو ناممکن وقوعے کہتے ہیں۔

پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر 6 یا اس سے چھوٹے ہندسے حاصل ہونے کا قیاس کیا ہے؟ کتنے ممکن وقوعے ہوں گے۔

چونکہ پانسے کے ایک رخ پر 6 اور باقی رخوں پر 6 سے چھوٹے ہندسے یعنی 1,2,3,4,5 کی نشاندہی کی گئی ہے لہذا پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر 6 یا 6 سے کم ہندسوں کا وقوع ممکن ہے یعنی موافق اور جملہ وقوع کی تعداد مساوی ہے۔

$$\therefore P(E) = P(6 \text{ یا اس سے چھوٹا ہندسہ}) = \frac{6}{6} = 1$$

اس واقعہ میں یقینی موافقت کا قیاس 1 ہے، اس کو یقینی وقوعہ کہتے ہیں۔

**نوٹ:** قیاس  $P(E)$  کی تعریف سے ہم دیکھتے ہیں کہ شمار کنندہ (وقوعہ  $E$  کے موافق نتائج کی تعداد) ہمیشہ نسب نما (تمام ممکنہ نتائج کی تعداد) سے

$$0 \leq P(E) \leq 1 \text{ لیے۔ اس کا مساوی ہوتا ہے۔}$$

### کوشش کیجیے



- 1- ایک بچے کے پاس موجود پانسے کے رخوں پر A, B, C, D, E, F لکھا ہوا ہے۔ پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر (i) اور (ii) کے واقعہ ہونے کا قیاس لکھئے؟
  - 2- ذیل میں کونسا عدد وقوعہ کے قیاس کو ظاہر نہیں کرتا؟
- (a) 2.3 (b) -1.5 (c) 15% (D) 0.7

### سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

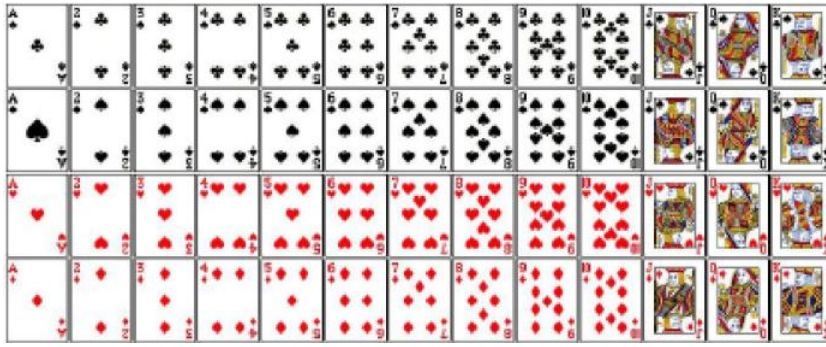


- 1- کسی بھی کھیل کے آغاز میں گیند کے حصول کے لیے غیر جانبدار عمل کے طور پر ہمیشہ سکھ اچھالا جاتا ہے کیوں؟
  - 2- کیا کسی وقوعہ کا قیاس  $\frac{7}{2}$  ممکن ہے؟ وضاحت کیجیے؟
  - 3- ذیل کے کونسے جملے صادق ہیں یا کاذب؟ وجوہات بتلائیے؟
- (i) دو سکے اچھالنے پر ان کے تین متوقع نتائج ہوں گے؟ دو چیت یا دو پٹ یا ایک چیت یا ایک پٹ۔ اس طرح ہر نتیجے کے لیے قیاس  $\frac{1}{3}$  ہوگا۔
- (ii) ایک پانسہ ڈالنے پر صرف 2 متوقع نتائج ہوں گے طاق عدد یا جفت عدد۔ اس طرح طاق عدد کا متوقع نتیجہ  $\frac{1}{2}$  ہوگا۔

### 13.5 تاش کے پتے۔ قیاسیات

کیا آپ نے تاش کے پتے دیکھے ہیں؟ ایک سیٹ میں 52 کارڈ ہوتے ہیں جس میں 4 حصے ہوتے ہیں ہر حصہ میں 13 پتے ہوں گے جن میں بلاک سپیڈ (Black Spade) (♠) لال دل (♥) لال ہیرے (♦) اور بلاک کلب (Black club) (♣) ڈیزان والے پتے ہوتے ہیں۔

کارڈ کے ہر حصے میں Ace (یکہ) King (بادشاہ) Queen (بیگم) Jack (غلام) 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4 اور 3 ہوتے ہیں۔



بادشاہ، بیگم اور غلام کو مہرے (Face cards) کہتے ہیں۔ ان تاش کے پتوں سے مختلف قسم کے کھیل کھیلے جاتے ہیں۔ بعض کھیل تاش کے چند پتوں سے کھیلتے ہیں جبکہ اور چند کھیل پتوں کے 2 سیٹس سے کھیلتے ہیں اس کھیل میں پتے بانٹتے وقت

حزب مخالف کے پاس موجود پتوں کے امکانات کے مطابق بھی چال چلنے کے لیے قیاسیات کا اطلاق کرتے ہیں۔

**مثال - 4:** تاش کے پتوں کو اچھی طرح منتشر (Shuffle) کر کے اس میں سے ایک کارڈ لیا گیا ہے یہ کارڈ۔

(i) یکہ Ace ہوگا (ii) یکہ (Ace) نہیں ہوگا کے لیے قیاس محسوب کیجیے۔

**حل:** (i) ”تاش کے پتوں میں 4 یکے ہوتے ہیں“ فرض کرو کہ کارڈ یکہ ہونے کا وقوعہ E ہے۔

$$E = 4 \text{ کے موافق ممکنہ نتائج کی تعداد}$$

$$= 52 \text{ نتائج کی جملہ ممکنہ تعداد (کیوں؟)}$$

$$\therefore P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ii) ”کارڈ یکہ موجود نہیں“ کو F فرض کرنے پر

$$(F) = 52 - 4 = 48 \text{ موافق ممکنہ نتائج کی تعداد (کیوں؟)}$$

$$= 52 \text{ نتائج کی جملہ ممکنہ تعداد}$$

$$\therefore P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

متبادل طریقہ: غور کیجیے کہ F دراصل  $\bar{E}$  ہے

لہذا ہم  $P(F)$  کو اس طرح بھی محسوب کر سکتے ہیں۔

$$P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

$$1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$



کوشش کیجیے

(1) اگر اچھی طرح منتشر تاش کے پتوں میں سے ایک پتہ اٹھایا جائے تب وہ پتہ ”بیگم“ ہوگا۔ اس کا کتنا قیاس ہوگا؟

- 2- وہ پتہ "Face Card" ہونے کا کتنا امکان ہے؟  
 3- وہ پتہ "Spade" ہونے کا کتنا احتمال/امکان ہوگا؟  
 4- وہ پتہ "Spades" کے "Face Card" ہونے کا کتنا امکان/احتمال ہوگا؟  
 5- وہ پتہ "Face Card" نہ ہونے کے کتنے امکانات ہوں گے؟

### قیاسیات کا اطلاق

آئیے ہم مزید ان صورتحال کا جائزہ لیں گے جہاں پر قیاسیات کا استعمال/اطلاق ہوتا ہے کھیل کود کے مقابلوں میں چند ممالک طاقتور اور چند کمزور ہوتے ہیں۔ جب دو ٹیم کے کھلاڑی اپنے اپنے کھیل کا مظاہرہ کرتے ہیں تب جیت کے یکساں مواقع نہیں ہوتے۔ ایک کھلاڑی کھیل میں جیت حاصل کرنے کا قیاس لازمی طور پر دوسرے کھلاڑی یا دوسری ٹیم کے قیاس سے بہ قدرے زیادہ ہوتا ہے۔ ہمارے رشتہ دار اور دوستوں کے یوم پیدائش ایک ہی دن واقع ہوتے ہیں کیا ایسا ہونا عام بات ہے یا اتفاقی واقعہ ہے۔ اس کے کتنے امکانات ہوتے ہیں۔ ان سوالوں کے جواب کے حصول اور احتساب کرنے کے لیے روایتی قیاسیات کا آمد ہوتی ہیں۔

**مثال-5:** اسحاق اور عامر نے ٹینس میچ کھیلا۔ اسحاق کے میچ جیتنے کا قیاس 0.62 ہو تو عامر کی جیت کا قیاس محسوب کیجیے۔

**حل:** اسحاق اور عامر کی جیت کے قیاس کو بالترتیب I اور A فرض کرنے پر

$$P(I) = 0.62 \text{ (دیا گیا ہے کہ) اسحاق کے میچ جیتنے کا قیاس}$$

$$P(A) = 1 - 0.62 \text{ عامر کے میچ جیتنے کا قیاس}$$

$$= 1 - 0.62 = 0.38 \text{ چونکہ I اور A تکمیلی ہیں}$$

**مثال-6:** آفرین اور فرحین دونوں سہیلیاں ہیں۔ ان دونوں کے (i) مختلف یوم پیدائش قیاس محسوب کیجیے (ii) ایک ہی یوم پیدائش (سال کیسے کو نظر انداز کیا جائے)

**حل:** ایک سال میں 365 ایام ہوتے ہیں۔ ان ایام میں کسی بھی دن ان دونوں کا یوم پیدائش ہو سکتا ہے۔ ہم فرض کریں گے کہ 365 ایام کے واقع ہونے کے مساوی امکانات ہیں۔

(i) آفرین کا یوم پیدائش فرحین کے یوم پیدائش سے مختلف ہے۔ موافق نتائج کی تعداد  $365 - 1 = 364$  ہے۔

$$P(\text{آفرین کا یوم پیدائش فرحین سے مختلف}) = \frac{364}{365}$$

(ii) (دونوں کے یوم پیدائش مختلف ہیں)  $1 - P$  = (آفرین اور فرحین کا یوم پیدائش اگر ایک ہی دن ہے)  $P$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \text{ لینے پر} = 1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365}$$



**مثال-7:** کسی اسکول کی جماعت دہم میں 40 طلباء و طالبات ہیں جن میں سے 25 لڑکیاں اور 15 لڑکے موجود ہیں۔ کلاس ٹیچر کو ان میں سے کسی ایک کو جماعت کا نمائندہ منتخب کرنا ہے انہوں نے پر طالب علم کا نام الگ الگ کارڈ پر لکھا اس طرح کہ تمام کارڈس ایک جیسے لیے گئے۔ انہوں نے ان تمام کارڈس کو ایک بکسہ میں ڈالا اور خوب ہلایا۔ ان میں سے ایک کارڈ نکالنے پر (i) لڑکی (ii) لڑکا ہونے کا قیاس/احتمال محسوب کیجیے۔

**حل:** کلاس میں جملہ طلباء و طالبات کی تعداد 40 ہے ان میں سے ایک کو منتخب کرنا ہے۔  
متوقع نتائج کی جملہ تعداد 40 ہوگی۔

(i) (کیوں؟)  $25 =$  لڑکی کا نام ہونے کے موافق نتائج کی تعداد

$$P(\text{لڑکی کا نام والا کارڈ}) = P(\text{لڑکی}) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

(ii) (کیوں؟)  $15 =$  لڑکے کا نام ہونے کے موافق نتائج کی تعداد

$$P(\text{لڑکا کے نام والا کارڈ}) = P(\text{لڑکا}) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$\text{یا } P(\text{لڑکا}) = 1 - P(\text{لڑکا نہیں}) = 1 - P(\text{لڑکی}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

### مشق 13.1



1- ذیل کے بیانات کو مکمل کیجیے۔

- (i) \_\_\_\_\_ = وقوعہ (E) کا قیاس + وقوعہ (E) کا قیاس
  - (ii) ایسا وقوعہ جو واقع نہیں ہوتا کا قیاس \_\_\_\_\_ ہوتا ہے ایسا وقوعہ \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔
  - (iii) ایسا وقوعہ جو یقینی ہو کا قیاس \_\_\_\_\_ ہوتا ہے اس طرح کا وقوعہ \_\_\_\_\_ کہلاتا ہے۔
  - (iv) تمام بنیادی وقوعے کا مجموعہ \_\_\_\_\_ ہوتا ہے۔
  - (v) کسی وقوعہ کا قیاس \_\_\_\_\_ سے بڑا یا مساوی ہوتا ہے اور \_\_\_\_\_ سے چھوٹا یا مساوی ہوتا ہے۔
- 2- ذیل کے کن تجربات کے نتائج مساوی یکساں ہوتے ہیں؟ وضاحت کیجیے۔
- (i) ایک ڈرائیور کا راسٹارٹ (Start) کرنے کی کوشش کی۔ کار اسٹارٹ ہوگی یا نہیں۔
  - (ii) ایک کھلاڑی باسکٹ بال کا گول (Goal) کرنا چاہا۔ وہ گول کر پائے گا یا نہیں۔
  - (iii) صادق - کاذب پڑنی سوالات کا جواب لکھنے پر وہ صحیح ہوگا یا غلط
  - (iv) نومولود لڑکا ہو سکتا ہے یا لڑکی

- 3- اگر  $P(E)=0.05$  ہو تو "E نہیں" کا قیاس کیا ہوگا؟
- 4- ایک تھیلی میں لیمو کی مہک کے والے چاکلیٹ ہیں۔ شاہدہ نے بلا منصوبہ ایک چاکلیٹ لیا تب
- (i) نارنجی مہک والا (ii) لیمو کی مہک رکھنے والے چاکلیٹ کے قیاس کو محسوس کیجیے۔
- 5- ونا ایک نے تاش کے پتوں میں سے تمام دل کے نشان (ڈیزائن) والے پتے علیحدہ کئے تب ذیل کا قیاس معلوم کیجیے۔
- (i) ایک پتے لینے پر Ace (یکہ) ڈیزائن ہونے والے پتے کا؟
- (ii) ہیرا ڈیزائن منتخب ہونے کا۔
- (iii) "دل" ڈیزائن نہ ہونے والے پتے کا۔
- (iv) دل کا ڈیزائن رکھنے والے یکہ کا۔
- 6- تین طلباء میں دو طلباء کے یوم پیدائش ایک ہی دن واقع نہ ہونے کا قیاس 0.992 ہو تو بتائیے کہ ایک ہی دن واقع ہونے کا قیاس کتنا ہوگا۔
- 7- پانسے کو ایک مرتبہ ڈالنے پر ذیل کا ممکنہ قیاس کیا ہوگا۔
- (i) مفرد عدد (ii) 2 اور 6 کے درمیان واقع عدد (iii) طاق عدد
- 8- تاش کے پتوں کے ڈھیر سے لال بادشاہ نکالنے کا قیاس کتنا ہوگا؟
- 9- پانسوں، کارڈس اور یوم پیدائش کے موقعوں کا استعمال کرتے وقت 5 مسائل (سوال) تیار کریں اور اس کے حل کے لیے ساتھیوں اور اپنے معلم سے تبادلہ خیال کیجیے۔

### 13.7 قیاسیات کے مزید اطلاق

ہم نے غور کیے ہیں کہ ہم نے قیاسیات کے استعمال کی چند مثالوں کا مشاہدہ کیا ان مثالوں میں دی گئی معلومات اور قیاسیات معلوم کرنے طریقہ پر غور کیجیے۔ ہم کو تکمیلی وقوع کے قیاس کا مجموعہ 1 ہوتا ہے۔ بنیادی وقوع کے قیاس کا مجموعہ 1 ہوتا ہے کیا آپ نے ان مثالوں اور مشقی سوالات میں ان نکات پر غور کیا ہے۔ جو تکمیلی وقوع اور بنیادی وقوع اپناتے ہیں اپنے ساتھیوں اور معلم سے تبادلہ خیال کیجیے۔ آئیے مزید مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

**مثال-8:** ایک صندوقچے میں 3 نیلی، 2 سفید اور 4 سرخ کچے (Marbles) ہیں۔ انہیں اچھی طرح ہلا کر صندوقچے میں سے ایک کچھ لیا جائے تب کچھ

(i) سفید (ii) نیلا (iii) سرخ ہونے کا قیاس کیا ہوگا۔

**حل:** یہ کہنا اچھی طرح ہلا کر ایک کچھ لیا گیا اس بات کی نشاندہی کرتا ہے کہ وہ کچھ کسی بھی رنگ کا ہو سکتا ہے (کیوں؟)

$$(کیوں؟) \quad = 3+2+4=9 \quad \text{ممكنه متوقع نتیجہ کی تعداد} \therefore$$

فرض کرو کہ سفید کچھ کو "W" نیلے کچھ کو "B" اور سرخ کچھ کو "R" سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$(i) \quad W=2 \quad \text{کے موافق نتائج ہونے کی تعداد}$$

$$P(W) = \frac{2}{9}$$

$$P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{(ii) اسی طرح}$$

$$P(R) = \frac{4}{9} \quad \text{(iii) اور}$$

$$P(W) + P(B) + P(R) = 1 \quad \text{واضح رہے کہ}$$

**مثال-9:** مسکان نے 1 اور 2 کے دو سکوں کو بیک وقت اچھالا۔ کم از کم ایک چت حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجیے۔

**حل:** چت کو H اور پٹ T لیتے ہیں۔ جب دو سکوں کو بیک وقت اچھالا جائے تب متوقع نتائج (H,H) (H,T) (T,H) (T,T) ہوں گے جو ایک جیسے یکساں ہوں گے۔ (H,H) سے مراد پہلے سکے (1) پر چت اور دوسرے سکے (2) پر بھی چت حاصل ہوگا۔ (H,T) سے مراد پہلے سکے پر چت اور دوسرے سکے پر پٹ اس طرح دیگر نتائج ہوں گے۔

$$E = \{(H, H), (H, T), (T, H)\} \quad \text{کم از کم ایک چت کے لیے موافق نتائج}$$

$$n(E) = 3 \quad \text{E کے موافق نتائج کی تعداد}$$

$$\therefore P(E) = \frac{3}{4} \quad \{ \text{کیونکہ ممکنہ نتائج کی جملہ تعداد} = 4 \}$$

یعنی مسکان کے کم از کم ایک چت حاصل کرنے کا قیاس  $\frac{3}{4}$  ہے۔

**جانچئے:**

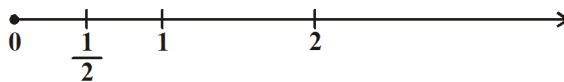
کیا آپ نے غور کیا کہ اب تک جن مثالوں کا تذکرہ کیا گیا ہے ہر تجربے کے متوقع نتائج کی تعداد محدود تھی۔ اگر نہیں تو اب تصدیق کیجیے کئی تجربات میں متوقع نتائج کی تعداد دیئے گئے اعداد کے درمیان ہوتی ہے۔ یا متوقع نقطہ دیئے گئے دائرہ یا مستطیل کے اندرونی واقع ہو سکتا ہے۔ کیا آپ ان صورتوں میں ممکنہ نتیجے کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ ہرگز نہیں چونکہ دو اعداد کے درمیان لامتناہی اعداد پائے جاتے ہیں اسی طرح دائرے میں لامتناہی نقاط پائے جاتے ہیں۔ اب تک سیکھی گئی نظریاتی قیاسیات کی تعریف کا اطلاق اس صورت میں ممکن نہیں ہے۔

اس طرح کے مسائل کو کس طرح حل کیا جائے۔ آئیے چند مثالوں کے ذریعہ غور کریں گے۔

**مثال-10:** میوزیکل چیر (Musical Chair) کھیل کے دوران میوزک بجانے والے کو یہ اختیار ہے کہ کھیل کے آغاز سے 2 منٹ کے

اندرونی میوزک روک سکتا ہے۔ کھیل کی شروعات کے پہلے آدھے منٹ میں میوزک کو روک دینا کا قیاس/احتمال معلوم کیجیے

**حل:** یہاں پر متوقع نتائج 0 اور 2 کے درمیان موجود تمام حقیقی اعداد ہو سکتے ہیں۔ اس کو عددی خط پر ظاہر کرنے پر



فرض کرو کہ پہلے  $\frac{1}{2}$  منٹ میں میوزک روک دی گئی ہے کے لیے وقوعہ E ہے۔

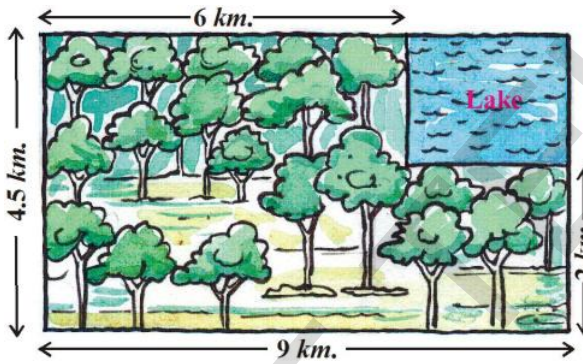
تب E کے موافق ممکنہ نتائج کی تعداد عددی خط پر 0 اور  $\frac{1}{2}$  کے درمیان ہونگے۔

0 اور 2 کا درمیانی فاصلہ 2 ہو تب 0 اور  $\frac{1}{2}$  کا درمیانی فاصلہ  $\frac{1}{2}$  ہوگا۔

چونکہ تمام ممکنہ نتائج غالباً مساوی ہوتے ہیں۔ اس لیے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ جملہ فاصلہ 2 ہے اور E کے لیے موافق فاصلہ  $\frac{1}{2}$  ہوگا۔

$$\text{لہذا } P(E) = \frac{\text{وقوعہ E کے موافق فاصلہ}}{\text{جملہ فاصلہ جس میں نتیجہ ہو سکتا ہے}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

اسی طریقہ کار کو رقبوں میں وسعت دیتے ہوئے جملہ رقبہ سے موافق رقبہ کا قیاس معلوم کرنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مشاہدہ



کریں گے۔

**مثال-11:** متصلہ شکل میں واقع مستطیلی شکل کے علاقے میں

ایک ہیلی کاپٹر کے حادثے کا شکار ہو کر گرنے کی اطلاع ملی۔ اس ہیلی کاپٹر کے (متصلہ شکل کے) جھیل پر گرنے کے قیاس کو محسوب کیجیے۔

**حل:** ہیلی کاپٹر کے اس پورے مقام (متصلہ شکل) پر کہیں بھی

گرنے کے غالباً مساوی امکانات ہیں۔

اس علاقے کا جملہ رقبہ جہاں ہیلی کاپٹر گر سکتا ہے۔

$$= (4.5 \times 9) \text{ km}^2 = 40.5 \text{ km}^2$$

$$= (2.5 \times 7.5) \text{ km}^2 = 18.75 \text{ km}^2$$

$$\therefore P(\text{جھیل جس میں ہیلی کاپٹر گر گیا}) = \frac{18.75}{40.5} = \frac{5}{27} = 0.185$$

**مثال-12:** ایک بکسے میں 100 قمیص ہیں جن میں 88 بہتر حالت میں ہے۔ 8 قمیص میں تھوڑا نقص پایا گیا۔ جبکہ 4 قمیص میں بہت زیادہ

نقص پائے گئے۔ شاہد جو کپڑوں کا تاجر ہے، بہتر قمیص قبول کرتا ہے جبکہ امجد صرف زیادہ نقص والے قمیص لینے سے انکار کرتا ہے۔ اب

اس بکسے سے ایک قمیص بلا منصوبہ نکالی جائے تب کس کے لینے کا امکان / احتمال کتنا ہے؟

(i) شاہد کے (ii) امجد کے

**حل:** 100 فیص والے بکسے سے ایک فیص نکالی گئی لہذا 100 نتائج غالباً مساوی ہو سکتے ہیں۔

(i) شاہد کے موافق متوقع نتائج کی تعداد 88 ہوگی (کیوں)

$$\text{لہذا } P(\text{شاہد کے قبول شدہ فیص}) = \frac{88}{100} = 0.88$$

(ii) امجد کے موافق متوقع نتائج کی تعداد  $88+8=96$  (کیوں؟)

$$\text{لہذا } P(\text{امجد کے قبول شدہ فیص}) = \frac{96}{100} = 0.96$$

**مثال-13:** دو پانسے ایک سفید اور دوسرا سرخ کو بیک وقت ڈالا گیا۔ تمام ممکنہ نتائج لکھئے۔

دو پانسوں کے افق پر حاصل ہونے والے دو اعداد کا مجموعہ (i) 8 (ii) 13 اور (iii) 12 یا اس سے کم حاصل ہونے کے لیے قیاس محسوب کیجئے۔

**حل:** اگر سرخ پانسے کے افق پر 1 حاصل ہو تب سفید پانسے کے رخ پر 1، 2، 3، 4، 5 یا 6 حاصل ہو سکتا ہے اسی طرح سرخ پانسے

پر 2، 3، 4، 5 یا 6 ہو تب بھی یہی نتیجہ ہوگا۔ جدول میں اس تجربے کے ممکنہ موافق نتائج بتائے گئے ہیں۔ ہر جوڑی میں بتایا جانے والا

پہلا عدد سرخ پانسے کے افق پر پائے جانے والے عدد کو ظاہر کرتا ہے اور دوسرا عدد سفید پانسے کو ظاہر کرتا ہے۔

یہ بات غور طلب ہے کہ (1,4) جوڑ (4,1) سے مختلف ہے

کیوں؟



	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

لہذا ممکنہ نتائج کی جملہ تعداد ہوگی۔  $n(s) = 6 \times 6 = 36$

(i) وقوع E دو اعداد کا مجموعہ 8 ہے کے موافق ممکنہ نتائج

$$E = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$$

(شکل دیکھئے)

اس طرح E کے موافق ممکنہ نتائج کی تعداد  $n(E) = 5$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

(ii) وقوع F دو اعداد کا مجموعہ 13 ہے کے موافق ممکنہ نتائج صفر ہوں گے۔

$$\therefore P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

(iii) وقوع G دو اعداد کا مجموعہ 12 یا 12 سے کم ہو کے موافق ممکنہ نتائج تمام ہو سکتے ہیں۔

$$\therefore P(G) = \frac{36}{36} = 1$$

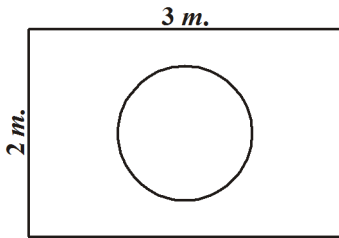
## مشق 13.2

- 1- ایک تھیلی میں 3 سرخ اور 5 کالی گیندیں ہیں۔ اگر اس تھیلی سے بلا منصوبہ ایک گیند لی جائے تب  
(i) سرخ (ii) ”سرخ نہیں“ کا قیاس محسوب کیجیے۔
- 2- ایک بکسہ میں 5 سرخ، 8 سفید اور 4 سبز کچے (Marbles) ہیں۔ بلا منصوبہ اگر اس بکسہ سے ایک کچا (Marble) لیے گئے کچوں میں  
(i) سرخ (ii) سفید (iii) سبز نہیں کے لیے قیاس محسوب کیجیے۔
- 3- ایک بچوں کے غلہ (Kiddy Bank) میں سو پچاس پیسے سکے، پچاس 1 کے سکے اور بیس 2 کے سکے اور دس 5 کے سکے ہیں اگر  
غلے کو الٹا دیا جائے تب ہر سکہ کے غالباً مساوی امکانات ہونے کی صورت میں (i) 50 پیسے سکے (ii) 5 کے سکے نہیں کیلئے قیاس محسوب  
کیجیے۔
- 4- کریمہ نے اکویریم (Aquarium) کے لیے دکان سے مچھلی خریدی۔ دکاندار نے 5 ز اور 8 مادہ مچھلیوں  
میں سے بلا منصوبہ ایک مچھلی نکالنے پر حاصل ہونے والی مچھلی نہ ہونے کے لیے قیاس محسوب کیجیے (متصلہ شکل  
دیکھیے)
- 5- ایک کھیل میں تیزی سے گھمایا گیا تیر کا نشان (شکل کے مطابق) کسی ایک عدد 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 یا 8 پر  
ٹھہرتا ہے (شکل دیکھیے) اگر تمام اعداد پر ٹھہرنے کے غالباً مساوی وقوعے ہیں تو قیاس کو محسوب کیجیے۔ جبکہ  
تیر کا نشان ذیل کے اعداد پر ٹھہرتا ہے۔
- (i) 8 (ii) طاق عدد (iii) 2 سے بڑا عدد (iv) 9 سے چھوٹا عدد
- 6- اچھی طرح منتشر کیے ہوئے 52 تاش کے پتوں سے بلا منصوبہ ایک پتہ نکالا گیا تب وہ ذیل کا پتہ ہونے کا  
امکان/قیاس محسوب کیجیے۔
- (i) لال بادشاہ (ii) (مہرہ کارڈ) Face card (iii) لال مہرہ کارڈ (Red face card)  
(iv) دل کے نشان والا غلام (v) Spade (vi) ہیرے کے نشان والی بیگم
- 7- تاش کے پتوں میں ”ہیرا“ نشان والے 5 پتے، 10 صرف بادشاہ، بیگم، غلام اور یکہ پتوں کو لے کر خوب پھینٹا گیا اس کے بعد بلا منصوبہ  
ایک پتہ نکالنے پر  
(i) وہ کارڈ (پتہ) بیگم کے ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔  
(ii) بیگم پتہ کو بازور رکھ کر دوسرا کارڈ (پتہ) نکالنے پر (a) یکہ (Ace) ہونے کے لیے (b) بیگم ہونے کے لیے قیاس محسوب کیجیے
- 8- خرابی رکھنے والے 12 پن (PEN) 132 اچھے پن میں شامل ہو گئے۔ دیکھنے پر پن کی خرابی کو نہیں پہنچانا جاسکتا۔ اگر ایک پن بلا منصوبہ  
اٹھایا جائے تب اچھے پن کا قیاس کتنا ہوگا؟
- 9- 20 برقی بلب میں 4 ناقص بلب ہیں بلا منصوبہ ایک بلب اٹھانے پر اس بلب کے اچھے ہونے کا قیاس/امکان کیا ہوگا اگر اٹھایا/نکالا گیا  
بلب اچھا ہو تب اسکو بکسے میں رکھے بغیر دوسرا بلب اٹھانے پر اس بلب کے ناقص ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔



10- ایک بکسہ 90 قرص (Discs) ہونے کا پر مشتمل ہے جن پر 1 تا 90 اعداد لکھے گئے ہیں۔ بلا منصوبہ ان میں سے ایک قرص کا انتخاب کرنے پر قرص پر ذیل کے اعداد ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔

(i) دو ہندسی عدد (ii) کامل مربع (iii) 5 کا ضعف



11- متصلہ شکل کے مطابق ایک مستطیلی تختی پر ایک میٹر قطر والا دائرہ بنایا گیا اگر اس تختی پر پانسہ ڈالا جائے تب وہ اس دائرے کے اندر واقع ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔

12- 144 پن کے بکسے میں 20 ناقص پن پائے گئے ہیں دکاندار نے ان میں سے ایک پن بلا منصوبہ اٹھایا اور شگفتہ کو دیا تب شگفتہ کے

(i) پن خریدنے (ii) نا خریدنے کا قیاس محسوب کیجیے۔

13- دو پانسوں کو بیک وقت لڑھکا یا گیا اور حاصل اعداد کو جمع کیا گیا ہے۔

(i) تب مجموعے کے قیاس کو ظاہر کرنے والے ذیل کی جدول کو مکمل کیجیے۔

دو پانسوں کے اعداد کا مجموعہ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
قیاس	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{12}{36}$

(ii) ایک طالب علم نے کہا اس کے 11 متوقع نتائج 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11 اور 12 ہیں لہذا ہر ایک کا قیاس  $\frac{1}{11}$  ہوگا۔ کیا آپ اس کے بیان سے متفق ہیں؟ وجوہات بیان کیجیے۔

14- ایک سکہ کو 3 مرتبہ اچھال کر چت یا پٹ کا مشاہدہ کرنا طے کیا گیا۔ اگر تینوں مرتبہ چت یا پٹ حاصل ہو تو حنیف ” کامیاب “ ہوگا نہیں تو ناکام ہوگا تب حنیف کی ناکامی کا قیاس محسوب کیجیے۔

15- ایک پانسہ کو دو دفعہ ڈالا گیا تب (i) کم سے کم ایک مرتبہ 5 حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجیے۔ (ii) 5 حاصل نہ ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔

### اختیاری مشق



(جامع کتاب کے لیے)

1- دو صارفین علیم اور اسماء کسی ایک ہفتہ میں (منگل سے ہفتہ تک) کسی مخصوص دکان کو جاتے ہیں۔ ایک دن میں ان دنوں کا ایک ساتھ جانا ضروری نہیں تب (i) ایک ہی دن (ii) متصل دن (iii) علاحدہ دن اس دکان کو جانے کا قیاس محسوب کیجیے۔

2- ایک تھیلی میں 5 سرخ اور چند نیلی گیندیں ہیں اگر نیلی گیند کا قیاس سرخ گیند کے قیاس کا دُگنا ہو تب نیلی گیند کی تعداد معلوم کیجیے۔

3- ایک بکسے میں 12 گیندیں ہیں۔ ان میں 'x' گیند کالی ہیں۔ بکسے میں بلا منصوبہ نکالی گئی گیند کالی ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔ مزید '6' کالی گیند ملانے پر جملہ گیندوں میں سے کالی گیند کے نکالنے کا قیاس پہلے سے دُگنا ہو جاتا ہے۔ تب 'x' کی قدر معلوم کیجیے۔

4- ایک برتن میں 24 کچے (Marbles) ہیں۔ ان میں چند سبز اور باقی نیلے رنگ کے ہیں۔ اگر بلا منصوبہ کچے نکالنے پر سبز رنگ کے کچے کا قیاس  $\frac{2}{3}$  ہو تب نیلے رنگ کے کچوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

تجویز کردہ منصوبہ کام:

تجرباتی قیاس کا نظریاتی قیاس سے تقابل

(i) ایک پانسے کو 100 مرتبہ اچھال کر ذیل کے اعداد حاصل ہونے کا قیاس معلوم کرنا۔

(1) جفت عدد (2) طاق عدد (3) مفرد عدد

(ii) سکہ کو 100 مرتبہ 200 مرتبہ اچھال کر (a) چپت حاصل ہونے کا قیاس (b) پٹ حاصل

ہونے کا قیاس معلوم کرنا۔

ہم نے کیا سیکھا



اس باب میں آپ نے حسب ذیل نکات کا مطالعہ کیا گیا ہے۔

- 1- تجرباتی قیاس، نظریاتی قیاس سے متعلق واقفیت حاصل کی ہے۔
- 2- وقوع E کے نظریاتی قیاس کو P(E) سے تصور کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ اس کی تعریف اس طرح ہے۔

$$P(E) = \frac{E \text{ کے موافق ممکنہ نتائج کی تعداد}}{\text{جملہ موافق نتائج کی تعداد}}$$

جہاں پر تجربات کے تمام نتائج غالباً مساوی تصور کیا جاتا ہے۔

- 3- یقینی وقوع کے لیے قیاس 1 ہے۔
  - 4- ناممکن وقوع کا قیاس '0' ہے۔
  - 5- وقوع E کا قیاس P(E) ہے اس طرح کہ  $0 \leq P(E) \leq 1$
  - 6- ایک ہی موافق نتیجہ رکھنے والے وقوع کو بنیادی وقوع کہتے ہیں۔ کسی تجربے کے تمام بنیادی وقوعوں کے قیاس کا مجموعہ 1 ہوتا ہے۔
  - 7- کسی وقوع ایک وقوع E کے لیے  $P(E) + P(\bar{E}) = 1$  ہے جہاں پر  $\bar{E}$  کا مطلب 'E نہیں' ہے۔ اور  $\bar{E}$  تکمیلی وقوع کہلاتے ہیں۔
  - 8- اس باب میں مستعملہ اصطلاحات ذیل میں دی گئی ہیں۔
- بلا منصوبہ تجربہ : بلا منصوبہ تجربہ کے لیے نتائج کا پہلے سے ہی علم ہوتا ہے لیکن مخصوص عمل کے قیاس کی پیشین گوئی نہیں کر سکتے۔
- غالباً مساوی وقوع : کسی تجربے میں دو یا دو سے زائد موقعوں پر ایک جیسے واقعات رونما ہونے کے لیے مساوی موقع فراہم ہوں تب انہیں غالباً مساوی وقوع کہا جاتا ہے۔
- باہمی (خاص) غیر مشمولی وقوع: کسی تجربے میں دو یا دو سے زائد واقعات باہمی خاص (غیر مشمولی) وقوع ہوتے ہیں جبکہ ہر ایک واقعہ دوسرے واقعہ کو روکتا ہے باہمی (خاص) غیر مشمولی وقوع کہلاتا ہے۔
- تشریحی وقوع : اگر کسی واقعہ کے تمام نتائج (Sample Space) ماثلہ سعت ہوں تب یہ تشریحی وقوع کہلاتے ہیں۔
- تکمیلی وقوع : دو یا دو سے زائد واقعات تکمیلی وقوع کہلاتے ہیں اگر وہ باہمی خاص (غیر مشمولی) اور تشریحی وقوع بھی ہوں۔ یا دو واقعات تکمیلی وقوع کہلاتے ہیں اگر ایک واقعہ دوسرے واقعہ کو روکتا ہے اور ان کے تمام نتائج (Sample Space) ماثلہ سعت کا اجتماع ہوں۔
- یقینی وقوع : اگر واقعہ یقیناً وقوع پذیر ہوتا ہے تب یقینی وقوع کے تمام نتائج کا مجموعہ (Sample Space) ماثلہ سعت ہے۔
- ناممکن وقوع : اگر کسی واقعہ میں کسی وقوع کا قطعی امکان نہ ہو تو اس کا ناممکن وقوع کہتے ہیں۔

# شماریات Statistics

## باب 14

### 14.1 تمہید

اطہر اپنی جماعت کے 26 طلباء کے ریاضی کے مجموعی جانچ - I کے نشانات کو درجہ ذیل میں جدول میں درج کیا۔

69	مطلب	76	عزیز
12	تاج	75	سیف
24	حمیرہ	82	فیصل
39	منظور	47	فردوس
41	عمر	90	سجاد
69	ابراہیم	65	مشتاق
73	عبداللہ	64	جاوید
94	فرحین	54	خورشید
89	مصطفیٰ	53	معین
64	حافیہ	34	افشاں
46	نور	27	مدیحہ
19	عائشہ	76	نازیہ
53	معراج	36	اظہر

کیا مندرجہ بالا جدول میں دیے گئے معطیات منظم ہے؟ کیوں؟ کیوں نہیں؟

اطہر کی ٹیچر نے اس سے دریافت کیا کہ بتاؤ کہ ریاضی کے مجموعی جانچ - I میں اپنی جماعت کے طلباء کا مظاہرہ کس طرح ہے۔

اپنی جماعت کی کارکردگی کو سمجھنے کے لیے اطہر نے مندرجہ ذیل جدول کو تیار کیا۔

نشانات	طلباء کی تعداد
0 - 33	4
34 - 50	6
51 - 75	10
76 - 100	6

کیا مندرجہ بالا جدول میں دیئے گئے معطیات گروہی ہے یا غیر گروہی؟

اطہر نے اس جدول کو اپنے ٹیچر کو دکھایا جس پر ٹیچر نے اطہر کو شاباشی دی اور کہا کہ گروہی جدول تیار کرنے سے سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ جماعت کے بہت زیادہ تر طلباء 51 - 75 کے درمیان نشانات حاصل کیے ہیں۔ کیا آپ سوچتے ہیں کہ اطہر نے اقل

ترین سعت استعمال کیا ہے۔ کیوں؟ یا کیوں نہیں؟

پچھلی جماعت میں آپ نے گروہی معطیات اور غیر گروہی معطیات کے فرق کے ساتھ ساتھ ان کو جدول میں پیش کرنے کے طریقے کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ اور آپ غیر گروہی معطیات کی اوسط قدر بھی معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ آئیے اب ہم ان کا اعادہ کرتے ہوئے گروہی معطیات کے اوسط و وسطانیہ بہتانیہ معلوم کریں گے۔

## 14.2 غیر گروہی معطیات کا اوسط

جیسا کہ ہم جانتے ہیں اوسط دراصل دیئے گئے معطیات کے مجموعہ کو معطیات کی تعداد سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  مشاہدات کا تعدد بالترتیب  $f_1, f_2, \dots, f_n$  ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ مشاہدہ  $f_1, x_1$  مرتبہ واقع ہوا ہے۔ اور مشاہدہ  $f_2, x_2$  مرتبہ واقع ہوا ہے اور اس طرح تمام مشاہدات واقع ہوتے ہیں۔

$$f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n = \text{اب تمام مشاہدات کا مجموعہ}$$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = \text{اور مشاہدات کی تعداد}$$

اس طرح معطیات کا اوسط  $\bar{x}$  ذیل میں دیا گیا ہے۔

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

اس طرح اب ہم یونانی حرف  $\Sigma$  (سکما) کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا ضابطہ کو مختصراً اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

جہاں پر  $\Sigma$  کا مطلب مجموعہ ہوتا ہے۔

**مثال-1:** دسویں جماعت کے 30 طلباء کے ریاضی میں حاصل نشانات کو مندرجہ ذیل جدول میں دیا گیا ہے۔ ان طلباء کے نشانات کا اوسط (اوسط حسابیہ) معلوم کیجیے۔

حاصل نشانات ( $x_i$ )	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
طلباء کی تعداد ( $f_i$ )	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

حل: آئیے اب ہم دیئے گئے معطیات کو منظم انداز میں ترتیب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ معلوم کریں گے۔

$f_i x_i$	طلباء کی تعداد ( $f_i$ )	حاصل کردہ نشانات ( $x_i$ )
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
$\sum f_i x_i = 1779$	$\sum f_i = 30$	مجموعہ

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

اس طرح 59.3 = اس لیے طلباء کے نشانات کا اوسط

ہماری روزمرہ کی زندگی کے مختلف حالات میں معطیات اکثر بڑی مقدار میں موجود ہوتے ہیں جن کو با مقصد مطالعہ بنانے کے لیے ان معطیات کو گروہی معطیات میں تبدیل کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس لیے ہم غیر گروہی معطیات کو گروہی معطیات میں تبدیل کرتے ہوئے ان معطیات کا اوسط معلوم کرنے کے لیے چند طریقے اخذ کریں گے۔

آئیے اب ہم مثال 1 میں دیئے گئے غیر گروہی معطیات کو وقفہ جماعت کی چوڑائی 15، لیتے ہوئے گروہی معطیات میں تبدیل کریں گے۔ یاد رکھیے کہ ہر وقفہ جماعت کے لیے تعداد کا تعین کرتے وقت ان طلباء کی تعداد کو جن کے نشانات جماعت کی اوپری سرحد کے مساوی ہوا گلی جماعت کی تعداد میں لیا جاتا ہے۔ مثلاً 40 نشانات حاصل کرنے والے 4 طلباء کو وقفہ جماعت 44-55 میں لیا جاتا ہے۔ ناکہ وقفہ جماعت 25-40 میں اس اصول کو ذہن میں رکھتے ہوئے آئیے گروہی تعدادی بناؤ کا جدول تیار کریں۔

وقفہ جماعت	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
طلباء کی تعداد	2	3	7	6	6	6

اب ہر ایک وقفہ جماعت کے لیے ہمیں ایک نقطہ (قدر) کی ضرورت ہوتی ہے جو اس جماعت کے لیے ایک نمائندہ ہو۔ یہ مانا گیا ہے کہ ہر وقفہ جماعت کا تعدد کا اس جماعت کے وسطی نقطہ (Mid-point) کے اطراف ہوتا ہے۔ اس لیے وسطی نقطہ (وسطی قدر) کو ہر جماعت کے تمام مشاہدات کے لیے نمائندہ تصور کیا جاتا ہے۔ اور اسکو جماعت کا ”جماعتی اعداد“ (Class Marks) کہتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ”جماعتی عدد“ (وسطی نقطہ) دراصل اس جماعت کی نچلی سرحد اور اوپری سرحد کا اوسط ہوتا ہے۔

$$\text{جماعت کی نچلی سرحد} + \text{جماعت کی اوپری سرحد} = \frac{\text{جماعتی عدد (وسطی قدر)}}{2}$$

مثلاً جماعت 10-25 کے لیے جماعتی عدد  $17.5 = \frac{10+25}{2}$  ہوگا۔ اسی طرح ہم بقیہ جماعتوں کے لیے ”جماعتی عدد“ (وسطی قدر)

معلوم کر سکتے ہیں۔ ان جماعتی اعداد کو جدول میں درج کیا جاتا ہے۔ اور ان کو ”xi“ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ آئیے اب ہم کچھ مثال کے طریقہ کار پر اوسط معلوم کر سکتے ہیں۔

وقفہ جماعت C-I	طلباء کی تعداد $f_i$	جماعتی تعداد $(x_i)$	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
جملہ	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 18600$

جدول کے آخری کالم میں موجود قدروں کے مجموعہ سے ہمیں  $\sum f_i x_i$  حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے دیئے گئے گروہی معطیات کا اوسط  $\bar{x}$  اس طرح ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

اوسط معلوم کرنے کا یہ نیا طریقہ "Direct Method" راست طریقہ کہلاتا ہے۔

ہم نے مشاہدہ کیا ہے کہ مندرجہ بالا دونوں صورتوں میں اوسط معلوم کرنے کے لیے دیئے گئے معطیات اور ضابطہ یکساں ہیں لیکن حاصل

نتائج مختلف ہیں۔

مثال (1) میں حقیقی اوسط 59.3 ہے اور تقریباً (قریب تر) اوسط 62 ہے۔

کیا آپ سوچ سکتے ہو کہ ایسا کیوں کر ہوا ہے؟



## سوچئے اور تبادلہ خیال کیجئے



- 1- غیر گروہی اور گروہی معطیات دونوں سے اوسط معلوم کیا جاسکتا ہے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان دونوں میں کونسا اوسط بالکل صحیح ہوتا ہے؟ کیوں؟
- 2- گروہی معطیات کے تجزیہ کے لیے کب زیادہ آسان ہوگا؟

بعض اوقات جب  $x_1$  اور  $f_1$  کی قدریں بہت بڑی ہوتی ہیں ان کا حاصل ضرب معلوم کرنا مشکل اور زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔ ان حالات کے لیے آئیے اب ہم کوئی دوسرا طریقہ عمل پر غور کریں تاکہ ریاضیاتی عمل کو کسی حد تک کم اور آسان کیا جاسکے۔ ہم  $f_i$ 's کو کچھ نہیں کر سکتے لیکن  $x_i$ 's کی قدروں کو چھوٹی قدروں میں تبدیل کر سکتے ہیں تاکہ حاصل ضرب کو آسان ہو جائے۔ ہم  $x_i$ 's یہ کس طرح کریں گے؟ کسی مقررہ قدر کو ہر ایک  $x_i$ 's سے تفریق کرنا کیسا ہے؟ آئیے اب ہم اس طریقہ کار سے مثال (1) میں دئے گئے معطیات کا اوسط معلوم کرتے ہیں۔

اس طریقہ کار کا پہلا مرحلہ یہ ہے کہ  $x_i$ 's کی کسی ایک قدر کو مفروضہ اوسط کے طور پر لیا جائے۔ اور اسکو 'a' سے ظاہر کیا جائے۔ ریاضیاتی عمل کو مزید مختصر کرنے کے لیے اس مفروضہ  $x_i$  اوسط کو لیا جائے  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کے درمیان ہو۔ اس طرح ہم  $a = 47.5$  یا  $a = 62.5$  لے سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ  $a = 47.5$

دوسرا مرحلہ یہ ہے کہ ہر  $x_i$ 's سے  $a$  کی انحرافی قدریں معلوم کریں جس کو  $d_i$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

تیسرا مرحلہ یہ ہے کہ ہر ایک  $f_i$  اور  $d_i$  کا حاصل ضرب معلوم کیا جائے اور ان کا مجموعہ کو محسوب کیا جائے یعنی  $\sum f_i d_i$  مندرجہ ذیل جدول میں اس طریقہ کار کو سمجھایا گیا ہے۔

وقفہ جماعت	طلباء کی تعداد $f_i$	جماعتی عدد ( $x_i$ )	$d_i = x_i - a$ $d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	-30	-60
25 - 40	3	32.5	-15	-45
40 - 55	7	47.5(a)	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
جملہ	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

اس طرح مندرجہ بالا جدول سے انحراف کا اوسط  $\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$  ہے۔

آئیے اب  $\bar{d}$  اور  $\bar{x}$  کے درمیان رشتہ محسوب کریں۔

چونکہ  $d_i$  کی قدر معلوم کرنے کے لیے ہر ایک  $x_i$  سے 'a' تفریق کیا جاتا ہے۔ اس لیے اوسط  $\bar{x}$  کی قدر حاصل کرنے کے لیے محسوب کردہ  $\bar{d}$  کی قدر میں a جمع کرنا ہوگا۔ اس کی تشریح ریاضیاتی طور پر اس طرح کی جاتی ہے۔

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \text{ انحراف کا اوسط}$$



$$\text{اس لیے } \bar{d} = \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$\bar{d} = \bar{x} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{d} = \bar{x} - a \text{ کیوں کہ}$$

$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \text{ اس لیے}$$

جدول سے 'a' اور  $\sum f_i d_i$  کی قدر کو درج کرنے پر

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

اس طرح طلباء کے حاصل کردہ نشانات کا اوسط 62 ہے۔

مندرجہ بالا طریقہ کار "مفروضہ اوسط کا طریقہ" کہلاتا ہے۔

### مشغلہ



مثال (1) کے معطیات کے ذریعہ مفروضہ قدر کو  $x_i$  کی متواتر قدروں میں ہر ایک قدر یعنی  $17.5, 32.5, \dots$  لیتے ہوئے اوسط حسابیہ محسوب کیجیے۔ اور مندرجہ ذیل سوالات پر تبادلہ خیال کیجیے۔

1- کیا حاصل کردہ اوسط حسابیہ کی قدر ہر صورت میں مساوی ہوتی ہے۔

2- اگر ہم حقیقی اوسط کو مفروضہ قدر مان لیا جائے تب  $\sum f_i d_i$  کی قدر کیا ہوگی؟

3- کسی بھی وسطی قدر (جماعتی عدد) مفروضہ اوسط لینے کی وجہ بتائیے؟

مندرجہ ذیل جدول کے کالم '4' میں موجود قدروں کا مشاہدہ کیجیے۔ جو تمام '15' کے اضعاف ہیں۔ اگر ہم کالم '4' کی تمام قدروں کو 15 سے تقسیم کرتے ہوئے اور بھی چھوٹی قدریں حاصل کر سکتے ہیں جن کو  $f$  سے ضرب دینا آسان ہوگا۔ (یہاں پر عدد '15' ہر جماعت کے لیے وقفہ جماعت ہے)

اس لیے فرض کرو کہ  $u_i = \frac{x_i - a}{h}$  جہاں پر 'a' مفروضہ اوسط ہے اور h وقفہ جماعت ہے۔

اب ہم ہر جماعت کے لیے  $u_i$  کی قدر معلوم کرتے ہوئے  $f_i u_i$  کی قدروں کا مجموعہ  $\sum f_i u_i$  معلوم کرتے ہیں۔ اور  $h = 15$  (عام طور

پر وقفہ جماعت کو  $h$  لیا جاتا ہے۔ لیکن یہ ضروری نہیں کہ ہمیشہ وقفہ جماعت ہی لی جائے)

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \text{ فرض کرو کہ}$$

وقفہ جماعت	طلباء کی تعداد $f_i$	جماعتی عدد $x_i$	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10 - 25	2	17.5	-30	-2	-4
25 - 40	3	32.5	-15	-1	-3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
جملہ	$\sum f_i = 30$				$\sum f_i u_i = 29$

یہاں ہم کو دوبارہ  $\bar{u}$  اور  $\bar{x}$  کے درمیان رشتہ محسوب کرنا ہوگا۔

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} \quad \text{ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \quad \text{اس طرح}$$

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i} \quad \text{اس طرح}$$

$$= \frac{1}{h} \left[ \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i} \right]$$

$$= \frac{1}{h} (\bar{x} - a)$$

$$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

اس لیے

$$\bar{x} = a + h \left[ \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right]$$

$$\bar{x} = a + \left( \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h \quad \text{یا}$$

جدول سے 'a'،  $\sum f_i u_i$  اور  $\sum f_i$  کی قدر درج کرتے ہوئے اوسط حسابیہ  $\bar{x}$  محسوب کیا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{29}{30} \times 15$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

اس طرح طلباء کے نشانات کا اوسط 62 حاصل ہوگا۔

مندرجہ بالا طریقہ ”انحرافی طریقہ“ کہلاتا ہے۔

نوٹ:

اگر تمام  $d_i$ s کی قدروں کے لیے مشترک جزو ضربی ہو تب انحرافی طریقہ موزوں ہوگا۔

- تینوں طریقوں سے حاصل کردہ اوسط مساوی ہوتا ہے۔
- مفروضہ اوسط کا طریقہ اور انحرافی طریقہ راست طریقے کی مختصر شکل ہے۔
- ضابطہ  $\bar{x} = a + h \bar{u}$  اور  $a$  کی قدریں جدول سے تعلق رکھتی ہوں یا نہ ہوں قابل عمل ہوتا ہے لیکن یہ قدر اس طرح لی جائے کہ

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} \quad \text{صفر نہ ہو۔}$$

آئیے اب ہم ان طریقوں کو دوسری مثالوں میں استعمال کریں گے۔

**مثال-2:** مندرجہ ذیل جدول میں جو ہمارے ملک ہندوستان کے تمام ریاستوں اور مرکزی زیر انتظام علاقوں کے دیہات کے اسکول میں

پڑھانے والی معلمات (لیڈی ٹیچرس) کافی صد دیا گیا ہے۔ ان کا اوسط مندرجہ بالا تین طریقوں سے محسوب کیجیے۔

معلمات کا فیصد	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85
ریاستوں/مرکزی زیر انتظام علاقے کی تعداد	6	11	7	4	4	2	1

**وسائل:** (NCERT) کے ساتویں کل ہند تعلیمی سروے سے حاصل کیا گیا ہے۔

**حل:** آئیے اب ہم ہر جماعت کے جماعتی عدد (وسطی قدر)  $x_i$  محسوب کریں گے

یہاں ہم  $a = 50$ ،  $h = 10$  لیتے ہیں

$$u_i = \frac{x_i - 50}{10} \quad \text{تب} \quad d_i = x_i - 50 \quad \text{اور}$$

اب  $d_i$  اور  $u_i$  کی قدر کو معلوم کر کے جدول میں درج کیجیے۔

معلومات کا فیصد C.I	ریاستوں/مرکزی زیر انتظامی علاقے کی تعداد (fi)	$x_i$	$d_i =$ $x_i - 50$	$u_i =$ $\frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 - 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 - 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 - 55	4	50	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
جملہ	35				1390	-360	-36

جدول سے  $\sum f_i = 35$ ,  $\sum f_i x_i = 1390$ ,  $\sum f_i d_i = -360$ ,  $\sum f_i u_i = -36$  حاصل ہوتا ہے

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$$

$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$$

$$\bar{x} = a + \left( \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$$

اس طرح دیہاتی اسکول میں پڑھانے والی معلمات کا فیصدی 39.71 ہے۔

### سوچے اور تبادلہ خیال کیجیے



- 1- کیا تینوں طریقوں سے حاصل نتائج مساوی ہیں؟
- 2- اگر  $x_i$  اور  $f_i$  کی قدریں بہت چھوٹی ہوں تب اوسط کا کونسا طریقہ موزوں ہوتا ہے؟
- 3- اگر  $x_i$  اور  $f_i$  کی قدریں بہت بڑی ہوں تب اوسط کا کونسا طریقہ کار موزوں ہوتا ہے؟

اگرچہ وقفہ جماعت غیر مساوی ہو اور  $x_i$  کی قدریں اعظم ترین ہوں تب بھی انحرافی طریقہ کار کے ذریعہ اوسط محسوب کیا جاسکتا ہے۔  $h$  کی

قدر کو اس طرح لی جائے کہ وہ تمام  $d_i$ 's کو تقسیم کرتا ہو (تمام  $d_i$ 's کا جزو ضربی ہو)

**مثال-3:** تعددی بٹاؤ جدول میں ایک روزہ کرکٹ میچوں میں گیند بازوں کے حاصل کردہ وکٹ کی تعداد دی گئی ہے۔ ان معطیات کا اوسط

موزوں طریقہ کے استعمال سے معلوم کریں۔ نیز یہ بھی بتائیے کہ اوسط سے کس بات کا اندازہ لگایا جاتا ہے

وکٹوں کی تعداد	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
بلے بازوں کی تعداد	7	5	16	12	2	3

حل: یہاں پر وقفہ جماعت مختلف ہے۔ اور  $x_i$ 's کی قدریں بہت بڑی ہیں۔ پھر بھی ہم انحرافی طریقہ کے استعمال سے  $a=200$  اور  $h=20$  لیتے ہوئے اوسط حسابیہ معلوم کریں گے۔ ہمیں جدول میں دیا گیا ڈاٹا مکمل کرنا ہوتا ہے۔

وکٹوں کی تعداد (C.I)	بلے بازوں کی تعداد $f_i$	$x_i$	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ( $h=20$ )	$f_i u_i$
20 - 60	7	40	-160	-8	-56
60 - 100	5	80	-120	-6	-30
100 - 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 - 250	12	200 (a)	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
جملہ	45				-106

$$\bar{x} = a + \left( \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$$

اس طرح ایک روزہ کرکٹ میاچ میں 45 بلے بازوں کے اوسط وکٹوں کی تعداد 152.89 ہے۔

کمرے جماعت کے لیے منصوبہ

1- آپ کے اسکول میں انعقاد کیے گئے حالیہ امتحان میں آپ کی جماعت کے طلباء کے ریاضی میں حاصل نشانات کو حاصل کیجیے اور ان نشانات کو استعمال کرتے ہوئے گروہی تعددی بناؤ کا جدول تیار کیجیے۔ اور اس کا اوسط معلوم کیجیے۔ مزید اس طرح تمام دوسرے مضامین کے گروہی تعددی بناؤ کے جدول اور اوسط معلوم کرتے ہوئے ان کا تقابل کیجیے۔ اوسط کو محسوب کرنے کے لیے آپ کے لیے موزوں طریقہ استعمال کیجیے۔

2- آپ کے شہر میں پچھلے 30 دن میں درج کردہ اعظم ترین درجہ حرارت (پیش) کو حاصل کیجیے۔ اور ان معطیات سے گروہی تعددی بناؤ کا جدول تیار کرتے ہوئے موزوں طریقے کے استعمال سے اوسط معلوم کیجیے۔

3- آپ کی جماعت کے تمام طلباء کے قد کی پیمائش کیجیے۔ ان معطیات کا تعددی بناؤ کا جدول تیار کیجیے۔ نیز مناسب طریقہ کار کے استعمال کرتے ہوئے اوسط معلوم کیجیے۔

### مشق 14.1

1- ماحولیاتی معلومات کے لیے طلباء سے ایک سروے کروایا گیا۔ انہوں نے 20 گھروں میں موجود درختوں کی تعداد کا تعددی بناؤ کا جدول تیار کیا۔ ہر ایک گھر میں موجود درختوں کی اوسط تعداد معلوم کیجیے۔

درختوں کی تعداد	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
گھروں کی تعداد	1	2	1	5	6	2	3



2- کسی فیکٹری کے 50 مزدوروں کی یومیہ اجرت کے تعددی بٹاؤ کا جدول دیا گیا ہے۔ کوئی موزوں طریقے سے مزدوروں کی اوسط یومیہ آمدنی معلوم کیجیے۔

یومیہ اجرت روپیوں میں	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400 - 450
مزدوروں کی تعداد	12	14	8	6	10

3- ایک محلے کے بچوں کو دیئے گئے یومیہ جیب خرچ کا گروہی تعددی بٹاؤ کا جدول ذیل میں دیا گیا ہے اگر جیب خرچ کا اوسط 18 روپے ہو تب غائب شدہ تعدد f کی قدر کیا ہوگی؟

یومیہ جیب خرچ روپیوں میں	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
بچوں کی تعداد	7	6	9	13	f	5	4

4- ایک ہاسپٹل میں دل کے ڈاکٹر نے 30 خواتین کے دل کی ڈھڑکن کی تعداد فی منٹ کو درجہ ذیل کے جدول میں درج کیا ہے۔ ان خواتین کے دل کی ڈھڑکن کی اوسط قدر فی منٹ کیا ہوگی؟

ڈھکن کی تعداد فی منٹ	65 - 68	68 - 71	71 - 74	74 - 77	77 - 80	80 - 83	83 - 86
خواتین کی تعداد	2	4	3	8	7	4	2

5- ایک عام میوہ فروش سنترے کے پیک کردہ باسکٹ فروخت کرتا ہے ہر باسکٹ میں سنتروں کی تعداد مختلف ہوتی ہے۔ ان باسکٹ کے تعددی بٹاؤ کا جدول دیا گیا ہے۔ موزوں طریقے سے استعمال سے باسکٹ میں موجود سنتروں کا اوسط معلوم کیجیے۔

سنتروں کی تعداد	10 - 14	15 - 19	20 - 24	25 - 29	30 - 34
باسکٹ کی تعداد	15	110	135	115	25

6- گروہی تعددی بٹاؤ کے جدول میں ایک محلے کے 25 خاندان کے روزانہ غذا پر کیا جانے والا خرچ دیا گیا ہے۔ کوئی مناسب طریقے کی مدد سے اوسط خرچ معلوم کیجیے۔

روزانہ کا خرچ روپیوں میں	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
خاندان کی تعداد	4	5	12	2	2

7- ہوا میں  $SO_2$  کے ارتکاز کو معلوم کرنے کے لیے ایک شہر کے 30 مختلف علاقوں میں ڈاٹا جمع کرتے ہوئے گروہی تعددی بٹاؤ کا جدول تیار کیا گیا ہے؟ ہوا میں موجود  $SO_2$  کے ارتکاز کا اوسط معلوم کیجیے؟

$SO_2$ کا ارتکاز PPM پر	0.00 - 0.04	0.04 - 0.08	0.08 - 0.12	0.12 - 0.16	0.16 - 0.20	0.20 - 0.24
تعدد	4	9	9	2	4	2

8- ایک معلم کے پاس 56 دن کی میقات کے لیے ایک جماعت کی حاضری کارڈ کا درج ذیل ہے۔ طلباء کی اوسط حاضری معلوم کیجیے۔

دنوں کی تعداد	35 - 38	38 - 41	41 - 44	44 - 47	47 - 50	50 - 53	53 - 56
طلباء کی تعداد	1	3	4	4	7	10	11

9- مندرجہ ذیل جدول میں 35 شہروں کی خواندگی کا فیصد درج کیا گیا ہے اس کا اوسط معلوم کیجیے؟

خواندگی کا فیصد	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
شہروں کی تعداد	3	10	11	8	3

### 14.3 بہتاتیہ Mode

تمام مشاہدات میں وہ قدر جو سب سے زیادہ مرتبہ واقع ہوتی ہے بہتاتیہ (Mode) کہلاتی ہے۔

گروہی معطیات کے بہتاتیہ کو محسوب کرنے سے قبل آئیے پہلے ہم ذیل کی مثالوں کے ذریعہ اعادہ کریں گے۔ غیر گروہی (خام)

معطیات کا بہتاتیہ کیسے معلوم کریں گے۔

مثال-4: ایک بلے باز کے 10 کرکٹ میچوں میں حاصل کردہ وکٹ کی تعداد 3, 2, 1, 3, 2, 5, 0, 4, 6, 2 ہے۔ ان معطیات کا

بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

حل: دیئے گئے معطیات کو صعودی ترتیب میں لکھنے پر

0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6

بلے باز کے سب سے زیادہ مرتبہ یعنی 3 مرتبہ 2 وکٹ حاصل کیا۔ اس لیے ان معطیات کا بہتاتیہ 2 ہوتا ہے۔

یہ کیجیے



1- مندرجہ ذیل معطیات کا بہتاتیہ معلوم کیجیے؟

(a) 5, 6, 9, 10, 6, 12, 3, 6, 11, 10, 4, 6, 7

(b) 20, 3, 7, 13, 3, 4, 6, 7, 19, 15, 7, 18, 3

(c) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6

2- کیا بہتاتیہ معطیات کی درمیان میں واقع ہوتا ہے؟

3- کیا بہتاتیہ تبدیل ہوتا ہے۔ اگر مثال میں دوسرے مشاہدہ کو شامل کیا جائے۔ تبصرہ کیجیے۔

4- اگر مثال 4 کے معطیات میں اعظم ترین قدر کو تبدیل کر کے 8 کر دیا جائے تو کیا بہتاتیہ متاثر ہوتا ہے۔ تبصرہ کیجیے۔

گروہی تعددی بٹاؤ میں تعدد کو دیکھ کر بہتائیہ معلوم کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے یہاں ہم صرف اعظم ترین تعدد والی جماعت کی نشاندہی کر سکتے ہیں جو بہتائیہ جماعت کہلاتی ہے۔ بہتائیہ اسی جماعت میں کوئی قدر ہوگی۔ جس کو مندرجہ ذیل ضابطہ کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\text{بہتائیہ} = l + \left( \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

جہاں پر  $l$  = بہتائیہ جماعت کی چلی سرحد ہے

$h$  = بہتائیہ جماعت کا وقفہ ہے

$f_1$  = بہتائیہ جماعت کا تعدد ہے

$f_0$  = بہتائیہ جماعت کے پیش رو جماعت کا تعدد ہے

$f_2$  = بہتائیہ جماعت کے پس رو جماعت کا تعدد ہے

آئیے ہم ذیل کی مثالوں کے ذریعہ مندرجہ بالا ضابطہ کی استعمال کو سمجھیں گے۔

**مثال-5:** ایک محلے میں 20 خاندان کا سروے کیا گیا اور خاندان میں موجود افراد کی تعداد کو درجہ ذیل جدول میں درج کیا گیا ہے۔

افراد خاندان	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
خاندان کی تعداد	7	8	2	2	1

ان معطیات کا بہتائیہ معلوم کیجیے۔

**حل:** یہاں پر سب سے بڑا تعدد 8 ہے۔ اور اس تعدد کی متعلقہ جماعت 3-5 ہے۔ اس لیے بہتائیہ جماعت (Mode class) 3-5 ہے۔

اب

بہتائیہ جماعت 3-5 چلی سرحد  $l=3$

وقفہ جماعت  $h=2$  اور تعدد  $f_1=8$

بہتائیہ جماعت سے پہلی جماعت کا تعدد  $f_0=7$

اور بہتائیہ جماعت کے بعد والی جماعت کا تعدد  $f_2=2$

آئیے ان قدروں کو ضابطہ میں درج کرنے پر

$$\text{Mode بہتائیہ} = l + \left( \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$$= 3 + \left( \frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2} \right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

**مثال-6:** ریاضی کے امتحان میں 30 طلباء کے نشانات کو مندرجہ ذیل جدول میں گیا ہے۔ ان معطیات کا بہتائیہ معلوم کیجیے نیز اوسط معلوم کرتے

ہوئے ان دونوں کا تقابلی تبصرہ کیجیے؟

وقفہ جماعت	طلباء کی تعداد ( $f_i$ )	جماعتی عدد ( $x_i$ )	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
جملہ	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

**حل:** چونکہ طلباء کی سب سے زیادہ تعداد (یعنی 7) کے حاصل کردہ نشانات وقفہ جماعت 40-55 میں واقع ہیں۔ اس لیے یہی جماعت

یعنی 40 - 55 بہتاتی جماعت کہلاتی ہے۔۔

بہتاتی جماعت کی چوٹی سرحد  $l = 40$

جماعت کا وقفہ  $h = 15$

اس جماعت کا تعدد  $f_i = 7$

بہتاتی جماعت سے پہلی جماعت کا تعدد  $f_0 = 3$  اور

بہتاتی جماعت کے بعد والی جماعت کا تعدد  $f_2 = 6$

ضابطہ کی رو سے

$$\text{بہتاتیہ (Mode)} = l + \left( \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$$= 40 + \left( \frac{7 - 3}{2 \times 7 - 6 - 3} \right) \times 15 = 40 + 12 = 52$$

تبصرہ: بہتاتیہ (Mode) 52 ہے۔ مثال (1) کی مدد سے ہم جانتے ہیں کہ اوسط 62 ہے۔ جماعت کے زیادہ تر طلباء کے حاصل نشانات

52 ہیں۔ جبکہ طالب علم کے حاصل نشانات کا اوسط 62 ہے۔

**سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے**



1- مختلف حالات اور ضرورت کے لحاظ سے ہم طلباء کے نشانات کا اوسط یا ان نشانات میں سب سے زیادہ طلباء کے حاصل

کردہ نشانات معلوم کرتے ہیں۔

(a) پہلی صورت میں ہم کو کیا معلوم کرنا چاہیے؟

(b) دوسری صورت میں ہم کو کیا معلوم کرنا چاہیے؟

2- کیا غیر مسلسل جماعت کے گروہی معطیات کا بہتاتیہ معلوم کیا جاسکتا ہے؟

## مشق 14.2



1- مندرجہ ذیل جدول میں ایک مخصوص دن میں ہاسپٹل میں شریک مریضوں کی عمروں کو دیا گیا ہے؟

عمر (سال میں)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
مریضوں کی تعداد	6	11	21	23	14	5

اوسط اور بہتاتیہ معلوم کیجیے۔ ان دونوں مرکز رجحان کا تقابل کیجیے اور تبصرہ کیجیے۔

2- مندرجہ ذیل جدول میں 225 مختلف برقی آلات کی کام کرنے کی مدت (گھنٹوں میں) درج کی گئی ہے؟

کام کرنے کی مدت (گھنٹوں میں)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
تعداد	10	35	52	61	38	29

برقی آلات کی بہتاتیہ مدت معلوم کیجیے۔

3- ایک گاؤں کے 200 خاندان کے ماہانہ خرچ کو ذیل کے تعددی بٹاؤ کے جدول میں دیا گیا ہے ان خاندان کا بہتاتیہ خرچ معلوم کیجیے اور

اسکے علاوہ ان کا اوسط خرچ کیا ہوگا؟ معلوم کیجیے۔

خرچ	1000 - 1500	1500 - 2000	2000 - 2500	2500 - 3000	3000 - 3500	3500 - 4000	4000 - 4500	4500 - 5000
(روپیوں میں)	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
خاندان کی تعداد	24	40	33	28	30	22	16	7

4- مندرجہ ذیل جدول میں ہندوستان کے تمام ریاستوں کے اسکولوں میں موجود ٹیچر اور طلباء کی نسبت کو درج کیا گیا ہے۔ ان معطیات کا

بہتاتیہ اور اوسط معلوم کیجیے۔ ان کا تقابل کیجیے اور تبصرہ کیجیے۔

طلباء کی تعداد	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
ریاستوں کی تعداد	3	8	9	10	3	0	0	2

5- تعددی بٹاؤ کے جدول میں ایک یومیہ انٹرنیشنل کرکٹ میاچ میں دنیا کے مشہور بلے بازوں کے بنائے گئے رن (RUN) کی تعداد دی گئی

ہے۔ اس کا بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

رن	3000 - 4000	4000 - 5000	5000 - 6000	6000 - 7000	7000 - 8000	8000 - 9000	9000 - 10000	10000 - 11000
بلے بازوں کی تعداد	4	18	9	7	6	3	1	1

6- ایک طالب علم ہر 3 منٹ کے وقفہ میں ایک مصروف سڑک پر گزرنے والی کار کی تعداد کو 100 مرتبہ معلوم کیا اور مندرجہ ذیل میں درج کیا ہے۔ ان کا بہتائیہ معلوم کیجیے؟

کار کی تعداد	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
تعداد	7	14	13	12	20	11	15	8

#### 14.4 - گروہی معطیات کا وسطانیہ (Median)

وسطانیہ دراصل مرکزی رجحان میں ایک ہے۔ جو دیے گئے مشاہدات کی بالکل وسط میں آنی والی قدر کو ظاہر کرتا ہے۔ آئیے غیر گروہی معطیات کا وسطانیہ معلوم کرنے کے طریقہ کار کا اعادہ کریں۔ دیئے گئے معطیات / مشاہدات کو صعودی ترتیب میں درج کرنا چاہیے۔

اگر معطیات کی تعداد  $n$  طاق ہو تب وسطانیہ  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  واں مشاہدہ ہوگا۔ اور اگر معطیات کی تعداد  $n$  جفت ہو تب وسطانیہ واں  $\left(\frac{n}{2}\right)$  اور  $\left(\frac{n}{2}+1\right)$  ویں مشاہدات کی اوسط قدر ہوگی۔

فرض کرو کہ دیئے گئے معطیات کا وسطانیہ معلوم کرنا ہے۔ ذیل میں 100 طلباء کے 50 نشانات کے امتحان میں سے حاصل کردہ نشانات دیئے گئے ہیں۔

حاصل کردہ نشانات	20	29	28	33	42	38	43	25
طلباء کی تعداد	6	28	24	15	2	4	1	20

سب سے پہلے دیئے گئے معطیات کو صعودی ترتیب میں درج کرتے ہوئے تعددی بناؤ کا جدول تیار کریں۔ جیسا کہ شکل 14.9 میں بتلایا گیا ہے۔

حاصل کردہ نشانات	طلباء کی تعداد (تعدد)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1



یہاں  $n = 100$  جو n جفت عدد ہے۔ تب ان معطیات کا وسطانیہ  $\left(\frac{n}{2}\right)$  واں اور  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$  ویں (یعنی 50 واں اور 51 واں)

مشاہدات کا اوسط ہوتا ہے۔

ان درمیانی قدروں کے تعین کے لیے آئیے ہم یکجائی تعداد کا جدول تیار کریں گے۔

یکجائی تعداد C F	طلباء کی تعداد (تعدد)	حاصل کردہ نشانات
6	6	20
26	$6 + 20 = 26$	25 تک
50	$26 + 24 = 50$	28 تک
78	$50 + 28 = 78$	29 تک
93	$78 + 15 = 93$	33 تک
97	$93 + 4 = 97$	38 تک
99	$97 + 2 = 99$	42 تک
100	$99 + 1 = 100$	43 تک

دیئے گئے تعددی بٹاؤ کے جدول میں ہم نے ایک کالم (Column) کا اضافہ کیا ہے۔ جس کو یکجائی تعداد کالم کہتے ہیں۔ مندرجہ بالا جدول سے ظاہر ہے کہ

50 واں مشاہدہ 28 ہے (کیوں؟)

اور 51 واں مشاہدہ 29 ہے

$$\therefore \text{وسطانیہ} = \frac{28 + 29}{2} = 28.5$$

نشانات	طلباء کی تعداد
0-10	5
10-20	3
20-30	4
30-40	3
40-50	3
50-60	4
60-70	7
70-80	9
80-90	7
90-100	8

نوٹ: مندرجہ بالا جدول میں کالم نمبر (1) اور کالم نمبر (3) کو یکجائی تعداد کا جدول کہتے ہیں۔

وسطانیہ 28.5 سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ 50% طلباء 28.5 کم نشانات حاصل کئے ہیں

اور باقی 50% طلباء 28.5 نشانات سے زیادہ نشانات حاصل کئے ہیں۔

کسی جماعت کے 53 طلباء کے ایک مخصوص امتحان میں جملہ 100 نشانات میں سے

حاصل کردہ نشانات کو متصل گروہی تعددی جدول میں درج کیا گیا ہے۔

جدول پر غور کرتے ہوئے مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات دینے کی کوشش کیجیے۔

طلباء کی تعداد (یکجائی تعداد)	حاصل کردہ نشانات
5	10 سے کم
$5 + 3 = 8$	20 سے کم
$8 + 4 = 12$	30 سے کم
$12 + 3 = 15$	40 سے کم
$15 + 3 = 18$	50 سے کم
$18 + 4 = 22$	60 سے کم
$22 + 7 = 29$	70 سے کم
$29 + 9 = 38$	80 سے کم
$38 + 7 = 45$	90 سے کم
$45 + 8 = 53$	100 سے کم

جماعت کے کتنے طلباء 10 سے کم نشانات حاصل کئے ہیں؟  
جواب: یقیناً 5 طلباء ہیں جو 10 سے کم نشانات حاصل کئے ہیں۔  
کتنے طلباء 20 سے کم نشانات حاصل کئے ہیں۔ غور کیجیے کہ 20 سے کم نشانات حاصل کرنے والے طلباء سے مراد ایسے طلباء جن کے نشانات 0-10 کے درمیان ہیں اور ایسے طلباء جن کے نشانات 10-20 کے درمیان ہیں۔ اس طرح 20 سے کم نشانات حاصل کرنے والے طلباء کی تعداد ان دونوں کا حاصل جمع لیا جائے گا۔ یعنی  $8 = 5 + 3$ ۔ اس طرح 10-20 جماعت کا یکجائی تعداد 8 لیا جائے گا (جس کو جدول 14.11 میں دیکھا گیا ہے۔  
اسی طرح ہم دوسری جماعتوں کی یکجائی تعداد کو محسوب کر سکتے ہیں۔ جیسے 30 سے کم، 40 سے کم، 50 سے کم..... 100 سے کم نشانات حاصل کرنے والے طلباء کی تعداد۔

اس بٹاؤ جدول کو ”کم تریکجائی تعدد“ کا جدول کہتے ہیں۔

یہاں..... 10، 20، 30 وقفہ جماعت کی اوپری سرحد کہلاتے ہیں۔ اس ہی طرح ہم 0 یا 0 سے زیادہ نشانات حاصل کرنے والے طلباء کا جدول تیار کر سکتے ہیں۔ (یہ عدد تمام تعدد کا مجموعہ ہوتا ہے) 10 یا 10 سے زیادہ کا یکجائی تعدد مجموعہ سے پہلی جماعت کے تعدد کا تصور

طلباء کی تعداد (یکجائی تعداد)	حاصل کردہ نشانات
53	0 کے مساوی یا زیادہ
$53 - 5 = 48$	10 کے مساوی یا زیادہ
$48 - 3 = 45$	20 کے مساوی یا زیادہ
$45 - 4 = 41$	30 کے مساوی یا زیادہ
$41 - 3 = 38$	40 کے مساوی یا زیادہ
$38 - 3 = 35$	50 کے مساوی یا زیادہ
$35 - 4 = 31$	60 کے مساوی یا زیادہ
$31 - 7 = 24$	70 کے مساوی یا زیادہ
$24 - 9 = 15$	80 کے مساوی یا زیادہ
$15 - 7 = 8$	90 کے مساوی یا زیادہ

کو تفریق کرنے پر حاصل ہوگا۔ 20 یا 20 سے زیادہ یکجائی تعدد مجموعہ سے پہلی دو جماعتوں کے تعدد کو تفریق کرنے پر حاصل ہو جائے گا۔ اس طرح تمام جماعتوں کا یکجائی تعدد حاصل کیا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ 53 طلباء ایسے ہیں جنہوں نے 0 یا 0 سے زیادہ نشانات حاصل کئے ہیں۔ چونکہ 5 طلباء کے نشانات وقفہ جماعت 0-10 کے درمیان واقع ہیں۔ یعنی  $48 = 53 - 5$  طلباء ایسے ہیں جن کے نشانات 10 یا 10 سے زیادہ نشانات حاصل کیے ہیں۔ اس طریقہ کار کے استعمال سے ہم 20 یا 20 سے مساوی یا

زیادہ نشانات حاصل کرنے والے طلباء کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں یعنی  $45 - 3 = 48 - 30$  یا  $30$  سے زیادہ نشانات حاصل کرنے والے طلباء کی تعداد  $41 = 45 - 4$  وہاں جیسا کہ جدول میں بتلایا گیا ہے۔

یہ متصلہ جدول ”زیادہ تر یکجائی تعداد“ کا جدول کہلاتا ہے۔ جہاں پر  $0$ ،  $10$ ،  $20$ ، .....  $90$  متعلقہ جماعت کی نچلی سرحد ہوتی ہے۔

گروہی معطیات کا وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے ہم دونوں یکجائی تعداد میں کسی کو بھی استعمال کر سکتے ہیں۔ گروہی معطیات میں یکجائی تعداد پر نظر ڈالتے ہی یہ ممکن نہیں ہے کہ درمیانی مشاہدہ کی نشاندہی کی جائے۔ یہ درمیانی مشاہدہ اس ہی وقفہ جماعت میں کہیں واقع ہوگا (یعنی اس وقفہ جماعت میں کوئی قدر ہوگی) اس لیے اس جماعت کے درمیان اس قدر کو معلوم کرنے کے لیے دیئے گئے کل تعداد کو نصف حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ لیکن یہ قدر کس جماعت سے تعلق رکھتی ہے کس طرح معلوم کیا جائے؟ اس جماعت کو معلوم کرنے کے لیے تمام جماعتوں کا یکجائی تعداد اور  $\frac{n}{2}$  کی قدر معلوم کی جاتی ہے اور اس جماعت کی نشاندہی کی جاتی ہے جس کا یکجائی تعداد  $\frac{n}{2}$  سے زیادہ ہوگی۔ وہ جماعت وسطانوی کی جماعت کہلاتی ہے۔

نشانات	طلباء کی تعداد (f)	یکجائی تعداد (cf)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53

مندرجہ بالا تعددی بناؤ کے جدول میں  $n = 53$  اس لیے  $\frac{n}{2} = 26.5$  اب جماعت 60-70 کا یکجائی تعداد 29 ہے۔

جو  $\frac{n}{2}$  یعنی 26.5 سے زیادہ ہے)

اس لیے جماعت 60 - 70 وسطانوی (Medium Class) ہے۔

وسطانوی جماعت کی نشاندہی کے بعد مندرجہ ذیل ضابطہ کی عدد سے وسطانیہ محسوب کیا جاتا ہے۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \left( \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

جہاں پر  $l$  = وسطانوی جماعت کی نچلی سرحد ہے

$n$  = مشاہدات کی تعداد ہے

$cf$  = وسطانوی جماعت سے پہلی والی جماعت کا یکجائی تعداد ہے

$f$  = وسطانوی جماعت کا تعدد

$h$  = وقفہ جماعت (وسطانوی جماعت کا وقفہ)

ضابطہ میں قدروں کو درج کرنے پر

$$\frac{n}{2} = 26.5, \quad l = 60, \quad cf = 22, \quad f = 7, \quad h = 10$$

$$\begin{aligned} \text{وسطانیہ (Median)} &= 60 + \left[ \frac{26.5 - 22}{7} \right] \times 10 \\ &= 60 + \frac{45}{7} \\ &= 66.4 \end{aligned}$$

اس طرح جماعت کے آدھے طلباء کے نشانات 66.4 سے کم اور آدھے طلباء کے نشانات 66.4 سے زیادہ ہیں۔

**مثال-7:** ایک مدرسہ کے دسویں جماعت کے 51 لڑکیوں کے ”قد“ کا سروے کرتے ہوئے حاصل معطیات کو ذیل کے جدول میں اس طرح

بتلایا گیا۔ ان کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

”قد“ سمر میں	لڑکیوں کی تعداد
140 سے کم	4
145 سے کم	11
150 سے کم	29
155 سے کم	40
160 سے کم	46
165 سے کم	51

وقفہ جماعت	تعداد	یکجائی تعداد
140 سے کم	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

حل: وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں وقفہ

جماعت اور اس جماعت کا متعلقہ تعداد معلوم

کرنے کی ضرورت ہے۔

دیا گیا تعددی بٹاؤ کا جدول ’ترکم یکجائی تعدد‘ ہے

کیوں کہ 140، 145، 150، 155، 160، 165

متعلقہ جماعتوں کے ’اوپری سرحد‘ ہیں۔ اس طرح

جماعتیں یہ ہوگی۔ 140 سے کم، 145 - 140

150 - 145 ..... 160 - 165

تعددی بٹاؤ کے مشاہدات پر غور کرنے پر پتہ چلتا ہے کہ 4 لڑکیاں ایسے ہیں جن کا قد 140 سمر سے کم ہے۔ یعنی 140 سے کم وقفہ جماعت

کا تعداد 4 ہوگا۔ اب 11 لڑکیاں ہیں جن کا قد 145 سمر سے کم ہے اور 4 لڑکیاں جن کا قد 140 سے کم ہے۔ لہذا وقفہ جماعت 145 - 140 کا

تعداد 7 = 11 - 4 ہوگا۔ اسی طرح تمام متعلقہ جماعتوں کا تعداد محسوب کیا سکتا ہے۔

مشاہدات کی تعداد n = 51

$$\text{یعنی } \frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$$

25.5 واں مشاہدہ وقفہ جماعت 150 - 145 میں واقع ہوتا ہے۔

∴ 150 - 145 کو وسطانیہ جماعت کہتے ہیں۔

تب  $l = 145$  چلی سرحد

$cf = 11$  (وسطانیہ جماعت سے پہلی جماعت کا یکجائی تعداد)

$f = 18$  وسطانیہ جماعت کا تعداد

$h = 5$  وسطانیہ جماعت کا وقفہ جماعت

ضابطہ کے استعمال سے

$$\text{وسطانیہ (Medion)} = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

اس طرح لڑکیوں کے قد کا وسطانیہ 149.03 سمر ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ 50% لڑکیوں کا قد 149.03 سے کم اور 50% لڑکیوں کا قد 149.03 سے زیادہ ہے۔

**مثال-8:** مندرجہ ذیل معطیات کا وسطانیہ 525 ہے۔

x اور y غائب شدہ تعدد معلوم کیجیے جبکہ تعدد کا مجموعہ 100 ہے۔ یہاں CI کا مطلب وقفہ جماعت اور Fr کا مطلب تعدد لیا جائے گا۔

CI	0 - 100	100 - 200	200 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800	800 - 900	900 - 1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

حل:

وقفہ جماعت	تعدد	یکجائی تعداد
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	7+x
300-400	12	19+x
400-500	17	36+x
500-600	20	56+x
600-700	y	56+x+y
700-800	9	65+x+y
800-900	7	72+x+y
900-1000	4	76+x+y

دیا گیا ہے کہ  $n=100$

$$\therefore 76 + x + y = 100$$

$$\Rightarrow x + y = 100 - 76 = 24 \quad \dots \dots \dots (1)$$

وسطانیہ 525 ہے جو وقفہ جماعت 600 - 500 میں واقع ہوگا ہے۔

اس طرح  $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$  اس لیے



ضابطے کے استعمال سے

$$\text{Median (وسطانیہ)} = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$525 = 500 + \frac{50 - 36 - x}{20} \times 100$$

$$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

$$25 = 70 - 5x$$

$$5x = 70 - 25 = 45$$

$$\therefore x = 9$$

$x = 9$  کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$9 + y = 24$$

$$y = 24 - 9 = 15$$

**نوٹ:** گروہی معطیات جن کے وقفہ جماعت غیر مساوی ہوں ان معطیات کا بھی وسطانیہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

### 14.5 مرکزی رجحان کی کونسی قدر Which value of central tendency

ضرورت کے اعتبار سے کونسی مخصوص پیمائش موزوں ہوگی۔ تمام تر مرکزی رجحان میں سب سے زیادہ استعمال کی جانے والی پیمائش ”اوسط (Mean)“ ہے۔ کیونکہ اس پیمائش میں تمام معطیات کو شامل کیا جاتا ہے۔ جملہ معطیات کے (اقل ترین اور اعظم ترین مشاہدات) اوسط کو دو یا دو سے زیادہ تعددی بناؤ کے درمیان تقابل کے لیے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ مثلاً ایک مخصوص امتحان میں دو مختلف اسکول کے طلباء کے حاصل نتائج کے ”اوسط“ لیتے ہوئے اور ان اوسط کا تقابل کرتے ہوئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کونسے اسکول کے طلباء کی کارکردگی اچھی رہی ہے اور کونسے اسکول کی کارکردگی کمزور ہے وغیرہ۔

جبکہ معطیات کی اقل ترین اور اعظم ترین قدر کا اثر اوسط پر پڑتا ہے۔ مثلاً ہم جانتے ہیں کہ جماعتوں کے تعدد کی قدر میں بہت زیادہ کمی یا بہت زیادہ اضافہ کی حالات میں بھی اوسط ان معطیات کے نمائندہ کے طور پر لیا جاتا ہے۔ لیکن اگر ایک جماعت کا تعدد 2 اور دوسرے پانچ جماعتوں کا تعدد 21, 20, 25 اور 18 ہو تب اوسط دیئے گئے معطیات کے طرز کو ظاہر نہیں کرتا ہے اس صورت میں اوسط دیئے گئے معطیات کے لیے ایک بہتر نمائندہ قدر نہیں ہو سکتا۔

ایسے مسائل جن میں انفرادی مشاہدات کی اہمیت نہیں ہوتی ہے خصوصاً حدودی قدریں۔ ان حالات میں ہم مرکزی رجحان کی ایک مثالی پیمائش ”وسطانیہ“ زیادہ موزوں ہوگا۔ مثلاً مزدوروں کی مثالی کام کرنے پر شرح پیداوار ملک کے مزدوروں کی اوسط مزدوری وغیرہ۔ یہ تمام ایسی صورت حال میں جہاں حدودی قدریں وجود رکھتی ہیں۔

اس طرح ”اوسط کے بجائے ہم وسطانیہ کو بہتر مرکزی رجحان کے طور پر لیتے ہیں۔  
ایسے حالات جن میں مکرر آنے والی مقدار یا زیادہ مشہور شے کے تعین کے لیے بہتاتیتہ محسوب کرنا موزوں ہوگا۔  
مثلاً سب سے زیادہ دیکھا جانے والا TV پروگرام سب سے زیادہ استعمال کی جانے والی شے سب سے زیادہ لوگوں کی پسندیدہ گاڑی  
اور ان کے رنگ وغیرہ وغیرہ۔

### مشق 14.3

1- ذیل کے تعددی بٹاؤ کے جدول میں ایک محلے (کالونی) کے 68 برقی صارفین کے ماہانہ صرف کی جانے والی برقی اکائیاں دی گئی ہیں۔  
ان معطیات کا وسطانیہ اوسط اور بہتاتیتہ معلوم کرتے ہوئے ان کا تقابل کیجیے۔

صرف شدہ برقی اکائیاں	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
صارفین کی تعداد	4	5	13	20	14	8	4

2- اگر ذیل میں دیے گئے 60 مشاہدات کا وسطانیہ 28.5 ہے تب x اور y کی قدر معلوم کیجیے۔

وقفہ جماعت	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
تعداد	5	x	20	15	y	5

3- مندرجہ ذیل جدول میں ایک لائف انشورنس ایجنٹ کے پاس 100 پالیسی رکھنے والے اشخاص کی عمر کا تعددی بٹاؤ دیا گیا ہے۔ ان کی عمر کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔ (یاد رہے کہ لائف انشورنس پالیسی صرف 18 سال تا 60 سال کے عمر رکھنے والے اشخاص ہی کو دی جاتی ہے)

عمر (سال میں)	20 سے کم	25 سے کم	30 سے کم	35 سے کم	40 سے کم	45 سے کم	50 سے کم	55 سے کم	60 سے کم
پالیسی رکھنے والوں کی تعداد	2	6	24	45	78	89	92	98	100

4- ایک درخت کے 40 پتوں کی پیمائش قریب ترین ملی میٹر میں کی گئی ہے۔ ذیل کے جدول میں ظاہر کیا گیا ہے؟

طول (ملی میٹر)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	172-180
پتوں کی تعداد	3	5	9	12	5	4	2

پتوں کے طول کا وسطانیہ معلوم کیجیے (اشارہ: دی گئی جماعتیں غیر مسلسل جماعتیں ہیں۔ ان جماعتوں کو مسلسل جماعتوں میں تبدیل کرتے ہوئے وسطانیہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ ضابطہ میں درج کرنے کے لیے مسلسل جماعتوں کا ہونا ضروری ہے۔ اس طرح مسلسل جماعتیں 171.5 - 180.5, 171.5 - 180.5, ..., 126.5 - 135.5, 126.5 - 135.5, 17.5 - 126.5 ہوں گی)

5- ذیل کے تعددی بناؤ کے جدول میں 400 نیاں بلب کی مدت عمر گھنٹوں میں دی گئی ہے۔ اس کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

کارکردگی گھنٹوں میں	1500 - 2000	2000 - 2500	2500 - 3000	3000 - 3500	3500 - 4000	4000 - 4500	4500 - 5000
بلب کی تعداد	14	56	60	86	74	62	48

6- ٹیلی فون ڈائری سے کوئی 100 نام چن لیے گئے ہیں ان نام کے انگریزی حرف کی تعداد ذیل کے تعددی بناؤ کے جدول میں درج کیا گیا ہے؟ ان نام کے حروف کی تعداد کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حرف کی تعداد	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
نام کی تعداد	6	30	40	16	4	4

7- ذیل کے تعددی بناؤ کے جدول میں ایک جماعت کے 30 طلباء کے وزن درج کئے گئے ہیں ان کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

وزن کلوگرام میں	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
طلباء کی تعداد	2	3	8	6	6	3	2

### 14.6 یکجائی تعدد کے بناؤ کا گرافی (ترسیمی) اظہار

ہم جانتے ہیں کہ ”تصاویر الفاظ سے بہتر اظہار کر سکتی ہیں“۔ دیے گئے معطیات کو جلد اور آسانی سے سمجھنے کا بہترین ذریعہ ترسیمی اظہار ہے۔ جماعت نہم میں معطیات کو ”بار گراف“، ہسٹوگرام اور تعددی کثیر ضلعی میں ظاہر کرنے کا طریقہ کار سیکھ چکے ہیں۔ آئیے اب ہم یکجائی تعددی بناؤ کو ترسیم (گراف) میں ظاہر کریں گے۔

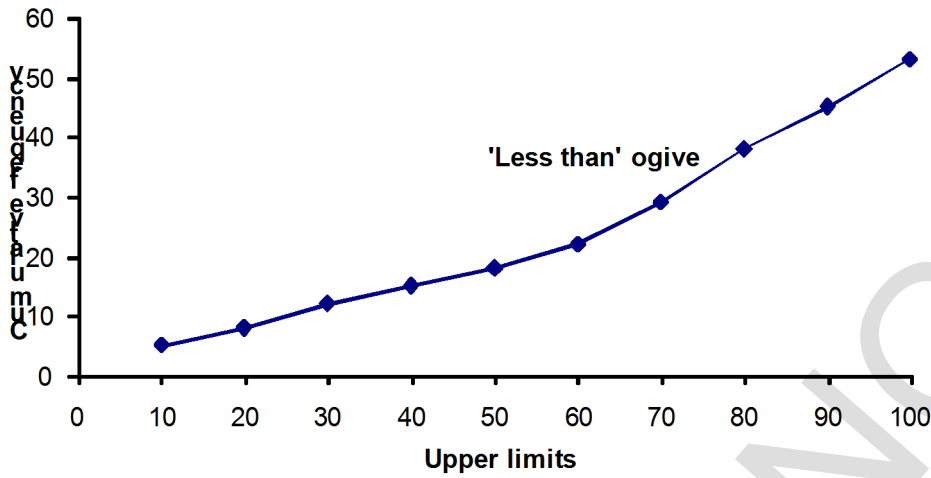
اس کے لیے مثال (6) میں دیے گئے معطیات کا استعمال کریں گے۔

"Ogives" کی ترسیم کھینچنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ وقفہ جماعت مسلسل جماعت ہو۔ چونکہ یکجائی تعدد کا تعلق جماعت کی سرحد سے ہوتا ہے۔ لیکن ان جماعتوں کی انتہا سے نہیں۔

اعادہ کیجیے کہ 100, 30, 20, 10..... متعلقہ وقفہ جماعت کی اوپری سرحد ہیں۔

ان معطیات کو ترسیم (گراف) میں ظاہر کرنے کے لیے وقفہ جماعت کی اوپری سرحد کو افقی محور (x- محور پر) لیا جائیگا۔ اور ان سے متعلقہ

یکجائی تعدد کو انتہائی محور (y- محور پر) موزوں اکائیوں کا انتخاب کرتے ہوئے لیا جائیگا۔



اب مرتب جوڑ میں دیئے گئے نقاط کو ترسیم (گراف) پر نشان دہی کیجیے یعنی مرتب جوڑ (متعلقہ یکجائی تعدد) اوپری سرحد) اس طرح ہیں۔

(10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53)

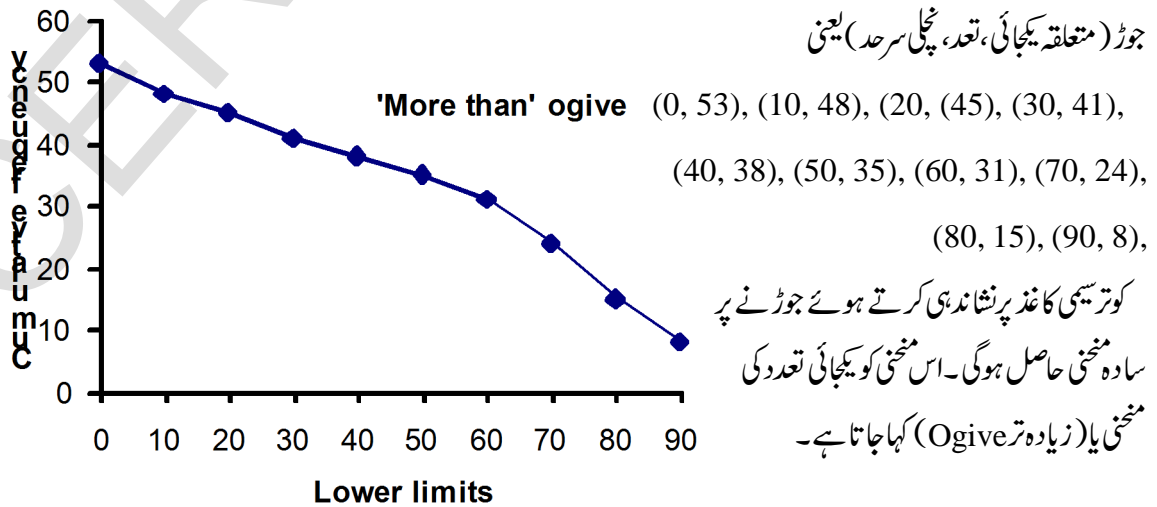
ترسیمی کاغذ پر حاصل نشانات کو جوڑنے پر سادہ منحنی حاصل ہوگی۔ اس منحنی کو یکجائی تعدد کی منحنی یا (Ogive) کہتے ہیں۔ لفظ "Ogive" کو "Ojcev" پڑھا جائے گا۔ اور لفظ "Ogee" سے اخذ کیا گیا ہے۔ ogee کی شکل دراصل ایک محدب منحنی و مقعر منحنی پر مشتمل ہوتا ہے۔ جس کے اختتامی سرے حرف 'S' کی شکل اختیار کر لیتے ہیں۔ 14 ویں اور 15 ویں صدی میں Gothic Styles میں بنی ہوئی عمارتیں Ogee کی شکل کی ایک خاصیت موجود رہتی ہیں۔ آئیے اب ہم زیادہ تر یکجائی تعدد بناؤ کی Ogive کی ترسیم بنائیں گے۔

اعادہ کیجیے کہ 0, 10, 20, 30, 40, ..., 90

وقفہ جماعت 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, ....., 90-100 کے پٹی سرحد ہیں۔

زیادہ تر یکجائی تعدد کی ترسیم بنانے کے لیے x- محور پر پٹی سرحد اور ان سے متعلقہ یکجائی تعدد کو y- محور پر لیتے ہیں، مرتب

جوڑ (متعلقہ یکجائی، تعدد، پٹی سرحد) یعنی

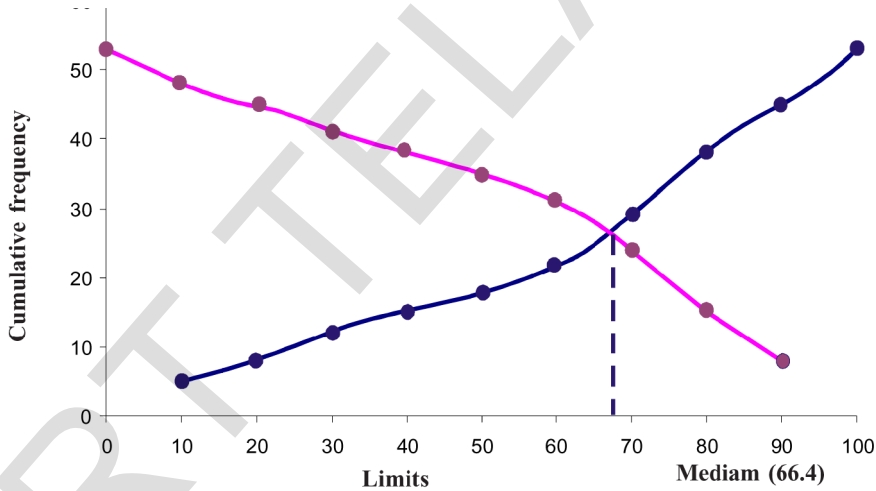
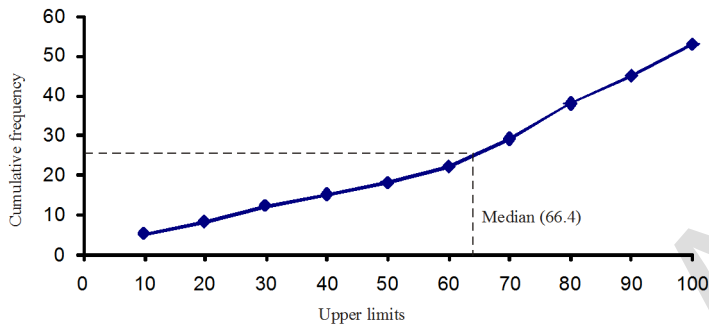


'More than' ogive (0, 53), (10, 48), (20, 45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8),

کو ترسیمی کاغذ پر نشان دہی کرتے ہوئے جوڑنے پر سادہ منحنی حاصل ہوگی۔ اس منحنی کو یکجائی تعدد کی منحنی یا (زیادہ تر Ogive) کہا جاتا ہے۔

## Ogive 14.6.1 منحنی سے وسطانیہ حاصل کرنا:

کیا ان دونوں طرح کی منحنی سے وسطانیہ کی قدر حاصل کرنا ممکن ہے۔ آئیے غور کریں۔ ایک طریقہ یہ ہے کہ کم تر یکجائی تعداد یا زیادہ تر یکجائی تعداد تقسیم کے  $y$ -محور پر  $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$  کی نشاندہی کرتے ہوئے اس نقطہ سے  $x$ -محور کے متوازی ایک خط کھینچئے جو منحنی کو ایک نقطہ پر تقاطع کرتی ہے۔ اس نقطہ تقاطع سے  $x$ -محور پر عمود گرائیے۔ (یعنی  $x$ -محور پر) اس عمود کا قدم معطیات کا وسطانیہ ہوگا۔ وسطانیہ معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ

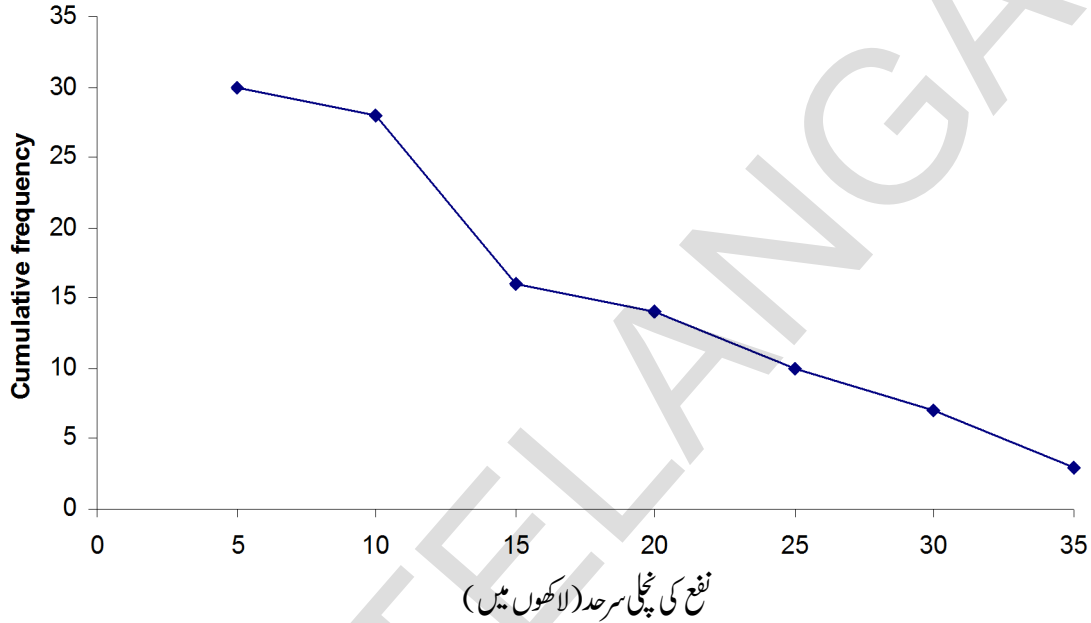


مثال-9: ایک محلے کے 30 دکاندار کی سالانہ حاصل نفع کو تعدادی ٹاؤ کے جدول میں دیا گیا ہے؟

نفع (لاکھوں میں)	دکاندار کی تعداد (تعداد)
5 کے مساوی یا زیادہ	30
10 کے مساوی یا زیادہ	28
15 کے مساوی یا زیادہ	16
20 کے مساوی یا زیادہ	14
25 کے مساوی یا زیادہ	10
30 کے مساوی یا زیادہ	7
35 کے مساوی یا زیادہ	3

مندرجہ بالا معطیات سے دونوں طرح کی (Ogive) بنائے اور نفع وسطانیہ معلوم کیجیے۔

**حل:** دیے گئے معطیات میں نفع کی نچلی سرحد کو افقی محور یعنی x- محور پر اور متعلقہ یکجائی تعدد کو انتصابی محور یعنی y- محور پر لیں۔ تب ان نقاط (30, 7), (25, 10), (20, 14), (15, 16), (10, 28), (5, 30) اور (35, 3) کی ترتیبی کاغذ پر نشان دہی کریں۔ ان نقاط کو ملانے پر زیادہ تر یکجائی تعدد کی منحنی حاصل ہوگی۔ جس کو مندرجہ ذیل شکل میں بتلایا گیا ہے۔



آئیے اب ہم مندرجہ بالا جدول سے وقفہ جماعت اور کم تر یکجائی تعدد کا جدول تیار کریں۔

جماعتیں	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
دکاندار کی تعداد (تعدد)	2	12	2	4	3	4	3
یکجائی تعدد	2	14	16	20	23	27	30

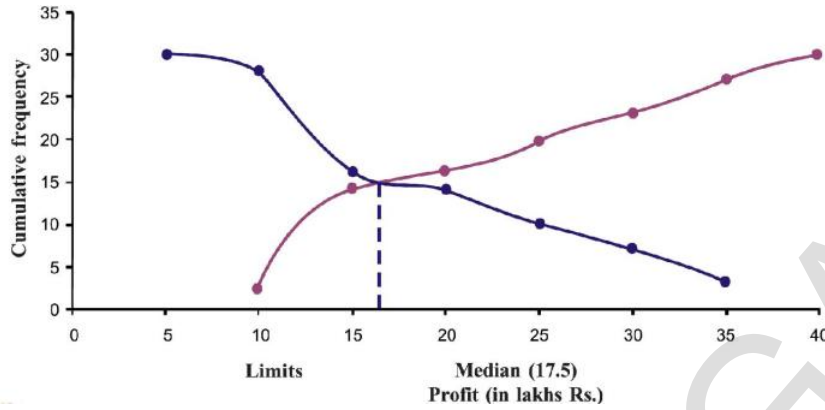
ان اقدار کا استعمال کرتے ہوئے نقاط (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30)

کو اسی ترتیبی کاغذ پر زیادہ تر یکجائی ترتیب کھینچی گئی ہے کم تر یکجائی تعددی ترتیب کھینچنے جیسا شکل میں بتلایا گیا ہے۔

ان دونوں منحنیوں کے نقطہ تقاطع کا پہلا مختص یعنی x- مختص دیئے گئے معطیات کا وسطانیہ ہوگا۔ اس حاصل شدہ قدر کی جانچ ضابطہ کی مدد

سے حاصل وسطانیہ کی قدر سے کی جاسکتی ہے۔ اور یہ نفع وسطانیہ 17.5 روپیے (لاکھوں میں) ہوگا۔





## مشق - 14.4



1- مندرجہ ذیل میں تعددی بٹاؤ کے جدول میں ایک فیا کٹری کے 50 مزدوروں کی روزانہ آمدنی دی گئی ہے۔

روزانہ آمدنی (روپیوں میں)	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
مزدوروں کی تعداد	12	14	8	6	10

اس تعددی (بٹاؤ) جدول کو کم تریکجائی تعددی بٹاؤ کے جدول میں تبدیل کرتے ہوئے "Ogive" کی ترسیم کھینچئے۔

2- ایک جماعت کے 35 طلباء کا میڈیکل چیک کیا گیا اور ان کے اوزن کو ذیل کے جدول میں درج کیا گیا۔

وزن کلوگرام میں	طلباء کی تعداد
38 سے کم	0
40 سے کم	3
42 سے کم	5
44 سے کم	9
46 سے کم	14
48 سے کم	28
50 سے کم	32
52 سے کم	35

کم تر Ogive کھینچئے اور اسکی مدد سے وسطانیہ معلوم کیجئے حاصل قدر کی جانچ ضابطہ کے استعمال سے کیجئے۔

3- ذیل کے جدول میں ایک گاؤں کے 100 کسان کے ایک ہکٹر رقبہ میں گیہوں کی پیداوار کو پیش کیا گیا ہے۔

گیہوں کی پیداوار	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
کسان کی تعداد	2	8	12	24	38	16

مندرجہ بالا جدول کو زیادہ تریکجائی تعدد کے جدول میں تبدیل کیجئے اور اسکا ogive کھینچئے۔

## تجویز کردہ منصوبہ کام:

- اوسط وسطانیہ - بہتاتیہ معلوم کرنا
- ☆ روزمرہ زندگی کے حالات کے استعمال سے
  - ☆ دستیاب ذریعے سے معلومات اکٹھا کرتے ہوئے
  - ☆ حاصل معلومات کا اوسط، وسطانیہ اور بہتاتیہ معلوم کرنا۔



ہم نے کیا سیکھا

1- گروہی معطیات کا اوسط کو ذیل کے ضابطوں سے محسوب کیا جاتا ہے

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \quad \text{راست طریقہ کار} \quad (i)$$

$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \quad \text{مفروضہ قدر کا طریقہ کار} \quad (ii)$$

$$\bar{x} = a + \left( \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h \quad \text{انحرافی طریقہ کار} \quad (iii)$$

2- گروہی معطیات کا بہتاتیہ اس ضابطہ کی مدد سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{Mode} = l + \left( \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

جہاں پر علامتیں اپنی اپنی قدروں کو ظاہر کرتی ہیں۔

3- گروہی معطیات کا وسطانیہ اس ضابطہ کی مدد سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{Medion} = l + \left( \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

جہاں پر علامتیں اپنی اپنی قدروں کو ظاہر کرتی ہیں۔

4- وسطانیہ معلوم کرنے کے لئے وقفہ جماعت مسلسل ہونا ضروری ہوتا ہے۔

5- یکجائی تعددی بٹاؤ کو ترسیم کے ذریعے یکجائی تعددی منحنی یا Ogive کو کم تر یکجائی (Ogive) یا زیادہ تر یکجائی (Ogive) میں ظاہر کرتے ہیں۔

6- ogive کی ترسیم کھینچنے کے لئے سرحد کو x- محور پر اور ان کی متعلقہ یکجائی تعدد کو y- محور پر لیا جاتا ہے۔

7- دونوں محوروں یعنی (x- محور اور y- محور) اکائیاں مساوی ہونا ضروری نہیں ہے۔

8- دیئے گئے معطیات کا وسطانیہ دونوں (Ogives) منحنی کے نقطہ تقاطع کا x- مختص ہوتا ہے۔

ضمیمہ

## ریاضیاتی ماڈلنگ

## Mathematical Modelling

## A.1.1 تعارف

25 فروری 2013ء کو ISRO کی جانب سے PSLVC20 لانچر کی مدد SARAL مصنوعی سیارہ کو فضاء میں داغا گیا اس سیارے کا وزن 407 کلوگرام ہے اور یہ زمین سے 781 کلومیٹر کی بلندی پر  $98.5^\circ$  کا زاویہ بناتے ہوئے اپنے مدار میں قائم ہے۔

ان معلومات کو پڑھنے کے بعد ہم کو تعجب ہوگا کہ

- (i) سائنسدانوں نے سیارے کی بلندی جو کہ 781 کلومیٹر ہے کیسے معلوم کی؟ کیا انہوں نے واقعتاً فضاء میں جا کر یہ بلندی محسوب کی؟  
(ii) انہوں نے پیمائش کے بغیر مدار کا زاویہ  $98.5^\circ$  کیسے محسوب کیا۔

روزمرہ زندگی میں ایسی کئی مثالیں دی جاسکتی ہیں جنہیں پڑھ کر ہمیں تعجب ہوتا ہے کہ سائنسدانوں اور ریاضی دانوں نے ان نتائج کا اندازہ کیسے کیا ہوگا ان مثالوں میں چند ایک ذیل میں درج ہیں۔

(i) سورج کی سطح تپش  $6000^\circ\text{C}$  ہے

(ii) انسانی دل ایک منٹ میں 5 تا 6 لیٹر خون پمپ کرتا ہے۔

(iii) ہم جانتے ہیں کہ زمین سے سورج کا فاصلہ 1,49,000 کلومیٹر ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ مذکورہ مثالوں میں سورج کی تپش معلوم کرنے یا زمین سے سورج کا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے کوئی سورج تک نہیں پہنچ سکتا اور نہ ہی ہم دل کو جسم سے علاحدہ کر کے یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ دل کتنا خون پمپ کر سکتا ہے۔ ایسے سوالات کے جواب حساب کے ایک خاص طریقہ کار ریاضیاتی ماڈلنگ کے ذریعہ ہی دیئے جاسکتے ہیں۔

ریاضیاتی ماڈلنگ نہ صرف یہ کہ سائنسداں ہی اپناتے ہیں بلکہ ہم بھی یہ طریقہ اپناتے ہیں مثال کے طور پر یہ جاننے کے لیے کہ 100 '10% کی شرح سود مفرد سے دینے پر ایک سال بعد ہم کو کتنی رقم حاصل ہوگی۔ یا پھر ہم یہ جاننا چاہیں گے کہ اپنے کمرے کی آہک پاشی کے لیے کتنا چونا درکار ہے۔ ان جیسے مسائل بھی ریاضیاتی ماڈلنگ کے ذریعہ ہی حل کیے جاسکتے ہیں۔

سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے



اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کرتے ہوئے روزمرہ زندگی کی ایسی مثالیں پیش کیجیے جہاں ہم راست طور پر مطلوبہ معلومات حاصل نہیں کر سکتے لیکن ہمیں لازمی طور پر ریاضیاتی ماڈلنگ کا سہارا لینا پڑتا ہے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2019-20

## A.1.2 ریاضیاتی ماڈلس

کیا آپ کو کسی مثلث کے رقبے کا ضابطہ یاد ہے؟

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ} \times \frac{1}{2} = \text{مثلث کا رقبہ}$$

اسی طرح سود مفرد معلوم کرنے کا ضابطہ  $I = \frac{PTR}{100}$  ہے یہ ضابطہ یا مساوات سود مفرد (I) اصل زر (p) مدت (T) اور شرح سود (R) کے درمیان تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔

یہ ضابطے ریاضیاتی ماڈلس کی مثالیں ہیں۔

ریاضیاتی ماڈلس کی چند اور مثالوں پر غور کریں گے۔

$$(i) \quad \text{رفتار (S)} = \frac{\text{فاصلہ (d)}}{\text{وقت (t)}}$$



$$(ii) \quad \text{سود مرکب میں کلی زر (A)} = P \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^n$$

جہاں اصل زر = p

شرح سود = r

مدت = n

کل زر = A

لہذا ریاضیاتی ماڈل ایک حسابی ضابطہ یا مختلف مقداروں کے مابین ایک خاص تعلق ہوتا ہے جس سے روزمرہ زندگی کے بعض معاملات بیان کیے جاتے ہیں۔

یہ کیجیے



ریاضیاتی ماڈل کی مزید مثالیں دیجیے جس کو آپ نے چھپلی جماعتوں میں سیکھا ہے۔

## A.1.3 ریاضیاتی ماڈلنگ

روزمرہ زندگی میں ہم کو بعض مسائل کا سامنا ہوتا ہے انہیں حل کرنے کے لیے ہم ایک حسابی ضابطہ بناتے ہیں اور حل کرتے ہیں بعد ازاں اس حل کی توضیح کی جا کر یہ تصدیق کی جاتی ہے کہ حل کہاں تک صحیح ہے۔ اس انداز سے ایک ریاضیاتی ماڈل کی تیاری اور حل معلوم کرنے کا طریقہ ریاضیاتی ماڈلنگ کہلاتا ہے۔

آئیے اب ہم ریاضیاتی ماڈلنگ سے متعلق کچھ اور مثالوں کا جائزہ لیں گے۔

**مثال-1:** وانی چاہتی ہے کہ ایک TV خریدا جائے جس کی قیمت 19000 ہے لیکن اس کے پاس صرف 15000 ہیں۔ اس لیے اس نے یہ طے کیا کہ اپنی رقم 8% شرح سود مفرد سے قرض دے۔ کتنے سال بعد وہ TV خریدنے کے قابل ہو جائے گی۔

مرحلہ - I (مسئلہ کا فہم)

اس مرحلہ پر ہم اصل مسئلہ کو سمجھنے کی کوشش کریں گے یہاں ہم کو اصل زر سود مفرد کی شرح دی گئی ہے اور ہم چاہتے ہیں کہ کتنے سال بعد یہ رقم 19000 ہو جائے گی۔

مرحلہ - 2 (ریاضیاتی صراحت اور ضابطہ کی تدوین)

اس مرحلہ میں ہم مسئلہ کے مختلف پہلوؤں کو ریاضی کی اصطلاحوں میں بیان کریں گے۔ یہاں پر ہم متغیر مقداروں کی وضاحت کریں گے مساوات یا نامساوات لکھی جائیں گی اور پھر مطلوبہ اعداد و شمار جمع کیے جائیں گے۔ یہاں پر ہم سود مفرد کا ضابطہ استعمال کریں گے۔

$$I = \frac{PTR}{100}$$

جہاں P = اصل زر ، T = مدت ، R = شرح سود ، I = سود مفرد

$$T = \frac{100I}{RP} \text{ لیے ہم کو مدت معلوم کرنے کے لیے}$$

مرحلہ - 3 (حسابی حل)

اس مرحلے میں مرحلہ - 2 میں ترتیب دیا گیا ضابطہ استعمال کرتے ہوئے مسئلہ کو حل کریں گے۔

ہم جانتے ہیں کہ پہلے سے ہی وانی کے نزدیک 15000 تو ہیں یہ رقم دراصل زر ہے۔

جملہ درکار رقم 19000 ہے اس لیے اس کو مزید 4,000 = 19,000 - 15,000 رقم کی ضرورت ہے۔ یہ رقم بذریعہ سود حاصل ہوگی۔

$$P = 15,000 \quad R = 8\% \quad I = 4000$$

$$T = \frac{100 \times 4000}{15000 \times 8} = \frac{4000}{1200}$$

$$T = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3} \text{ سال}$$

مرحلہ - 4 (حل کی توضیح)

مندرجہ بالا مرحلے میں حاصل کئے گئے نتیجے کی یہاں توضیح کی جائے گی۔

یہاں  $T = 3\frac{1}{3}$  سال اس کا مطلب یہ ہے کہ درکار مدت 3 سال اور ایک تہائی سال یا 3 سال 4 مہینے ہوگی۔

لہذا وانی 3 سال 4 مہینوں بعد TV خرید سکتی ہے۔

مرحلہ 5: (ماڈل کی توثیق)

ہم ریاضی کے کسی مسئلہ کو ہمیشہ ہی اس لیے قبول نہیں کر سکتے کہ حل صحیح ہے اور جو حقیقت سے میل نہیں کھاتا۔ ضرورت کے اعتبار سے ریاضی کے مسئلہ میں رد و بدل کرنا اور جانچ پڑتال کرنا توثیق (Validation) کہلاتا ہے۔

دی ہوئی مثال میں ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ شرح سود مستقل رہے گا اگر شرح سود بدلتا ہو تو ہمارا ماڈل  $\frac{PTR}{100}$  کا آمد نہیں ہوگا۔ یہاں ہم یہ بھی فرض کرتے ہیں کہ TV کی قیمت 19,000 غیر متبدل رہے گی۔

آئیے ایک مثال پر غور کریں گے۔

**مثال-2:** مکرم پورہ ہائی اسکول، کریم نگر کی دسویں جماعت میں 50 طلباء پڑھتے ہیں ان کے ریاضی کے استاد حیدر آباد کا دورہ کروانے کے لیے

جیپ میں سفر کرنا چاہتے ہیں ہر جیپ میں ڈرائیور کے علاوہ 6 افراد کی گنجائش ہے بتائیے کہ کتنی جیپ کرایہ پر حاصل کی جانی چاہیں؟

مرحلہ - 1: ہم 51 افراد کے سفر کے لیے جیپ کی تعداد معلوم کرنا چاہتے ہیں جب کہ دیا گیا ہے کہ ڈرائیور کے علاوہ ہر جیپ میں 6 افراد سفر کر سکتے ہیں

$$\text{مرحلہ - 2: جیپ کی تعداد} = \frac{\text{افراد کی تعداد}}{\text{ہر جیپ میں مسافروں کی تعداد}}$$

$$\text{مرحلہ - 3: جیپ کی تعداد} = \frac{51}{6} = 8.5$$

مرحلہ - 4: (توضیح)

ہم جانتے ہیں کہ جیپ کی تعداد 8.5 نہیں ہو سکتی۔ لہذا قریب ترین صحیح عدد 9 لینا پڑے گا۔

$$\therefore \text{جیپ کی تعداد} = 9$$

مرحلہ - 5: (توثیق)

ریاضیاتی ماڈلنگ کے دوران ہم یہ فرض کرتے ہوئے کہ دبلے اور فربہ بچوں کے لیے یک جیسی جگہ درکار ہے، مسئلہ حل کرتے ہیں۔ اگر اس طرح فرض نہ کریں تب یہ مسئلہ حل نہیں ہوگا۔

کوشش کیجیے



1- اپنی مرضی سے آپ کی درسی کتاب سے کوئی ایک عبارتی سوال لیجیے اس سوال کے لیے ریاضیاتی ماڈل بنائیے اور حل کیجیے

2- ذیل میں دیے گئے مسئلہ کا ریاضیاتی ماڈل تیار کیجیے اور حل کیجیے۔

فرض کیجیے کہ کار مقام 'A' سے سفر شروع کرتے ہوئے مقام 'B' کی جانب 40 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے آگے بڑھتی ہے۔ اسی وقت دوسری کار مقام 'B' سے شروع کرتے ہوئے مقام 'A' کی جانب 30 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے آگے بڑھتی ہے۔ اگر 'A' اور 'B' کے درمیان فاصلہ 100 کلومیٹر ہو تو بتائیے کہ کتنی دیر بعد یہ کاریں ایک دوسرے کے پاس سے گزریں گی۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2019-20



اب تک ہم نے سادہ عبارتی سوالات کے لیے ریاضیاتی ماڈلس ترتیب دیئے ہیں آئیے اب ہم روزمرہ زندگی کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

**مثال-3:** سال 2000 کے دوران اقوام متحدہ کے 191 رکن ممالک نے مرد و خواتین سے متعلق مساوات کے مقصد سے ایک اعلامیہ پر دستخط کیے۔ اس کی جانچ کے لیے ایک نشانہ (نمائندہ) یہ بنایا گیا کہ تھانوی اور فو قانوی مدرسے سے پڑھنے والے لڑکے اور لڑکیوں میں نسبت معلوم کر لی جائے؟ ہمارے ملک میں لڑکیوں کے فیصد کے اعداد و شمار جنہیں تھانوی مدرسوں میں شریک کیا جاتا ہے ذیل کے جدول A.1.1 میں بتائے گئے ہیں۔

جدول : A.1.1

سال	اندراج (فیصد میں)
1991 - 92	41.9
1992 - 93	42.6
1993 - 94	42.7
1994 - 95	42.9
1995 - 96	43.1
1996 - 97	43.2
1997 - 98	43.5
1998 - 99	43.5
1999 - 2000	43.6
2000 - 01	43.7
2001 - 02	44.1

ان اعداد و شمار کو استعمال کرتے ہوئے حسابی نقطہ نظر سے تھانوی مدرسہ میں لڑکیوں کو شریک کرنے کے تناسب میں بتدریج اضافہ کو بتایا گیا ہے۔ تخمینہ کر کے بتائیے کہ کس سال لڑکیوں کی تعداد 50% سے تجاوز کر جائے گی۔

**حل:**

مرحلہ 1- (ضابطہ کی تدوین)

آئیے سب سے پہلے اس مسئلہ کو حسابی سوال کے طور پر تجویز کریں گے

جدول A.1.1 میں سال 1991-92، 1992-93 وغیرہ کے دوران طلباء کے اندراج دیئے گئے ہیں چونکہ بچے تعلیمی سال کے شروع ہی میں شریک ہوتے ہیں ہم 1991-92 وغیرہ کے سال لیں گے۔ اور ہم یہ بھی فرض کریں گے کہ تھانوی مدرسوں میں شریک ہونے والی لڑکیوں کا فیصد اسی شرح سے (جیسا کہ جدول A.1.1 میں بتایا گیا ہے) بڑھتا رہے گا اس لیے سال کی تعداد ہم ہے نہ کہ کوئی خصوصی سال (اس کی مثال ایسی ہی ہے جیسے کہ ہم 15,000 کا سود مفرد 8% کی شرح سے 3 سال کے لیے معلوم کرتے ہیں۔ یہاں پر یہ بات ہم نہیں ہے کہ 1999 - 2002 تک یا 2001 - 04 تک کے جن سال کے لیے سود مفرد محسوب کیا جانا ہے اس کی شرح کیا ہے؟)

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2019-20

یہاں پر 1991 کے بعد سال کا تقابل کرتے ہوئے 1991 سے شریک مدرسہ ہونے والوں کی تعداد کیا ہے؟ فرض کیجیے کہ سال 1991 سے صفر مان کر گنتی کریں گے۔ یعنی 1992 کے لیے ایک سال، اس لیے کہ 1991 کے بعد 1992 تک ایک سال مکمل ہوتا ہے اسی طرح 1993 کے لیے 2 اور 1994 کے لیے 3 سال وغیرہ لکھا جائے گا۔ لہذا ہمارا جدول A.I.1 ذیل کے جدول A.I.2 میں بدل جائے گا۔

## جدول A.I.2

سال	اندراج (فیصد میں)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

لڑکیوں کے شریک مدرسہ ہونے کی شرح ذیل کے جدول A.I.3 میں دی جاتی ہے۔

## جدول A.I.3

سال	اندراج (فیصد میں)	اضافہ
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

سال 1991 سے 1992 پہلے سال کے اختتام پر شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کی تعداد میں 41.9% تا 42.6% کے سبب 0.7% کا اضافہ ہوا دوسرے سال کے اختتام پر یہ شرح 42.6% تا 42.7% ہو گئی جو کہ 0.1% ہے۔ مذکورہ بالا تفصیل سے ہم سال کی تعداد اور فیصد کے درمیان کوئی متعین ہم رشتگی حاصل نہیں کر سکتے لیکن شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کی تعداد ایک خاص رفتار میں اضافہ سے برقرار ہے۔ صرف پہلے سال کے دوران اور 10 ویں سال میں غیر معمولی تبدیلی دیکھی گئی ہے ان قدروں کا اوسط

$$= \frac{0.7 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.4}{10}$$

$$= \frac{2.2}{10} = 0.22 \quad \dots\dots\dots(1)$$

فرض کیجیے کہ اس اضافہ کی شرح 0.22% ہے

مرحلہ-2: (ریاضیاتی توضیح)

ہم نے فرض کیا ہے کہ لڑکیوں کی شریک مدرسہ ہونے کی شرح بتدریج ہر سال 0.22% کی شرح سے بڑھتی جاتی ہے۔ اس لیے

$$\text{پہلے سال شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کا فیصد (EP)} = 41.9 + 0.22$$

$$\text{دوسرے سال شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کا فیصد (EP)} = 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \cdot 0.22$$

$$\text{تیسرے سال شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کا فیصد (EP)} = 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \cdot 0.22$$

$$\text{n ویں سال شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کا فیصد (EP)} = 41.9 + 0.22n, n > 1. \quad \dots (2)$$

ہم کو اس سال کی تعداد بھی محسوب کرنا ہے جہاں یہ شرح بڑھ کر 50% کو چھو لیتی ہے

اس لیے ہمیں 'n' کی قیمت معلوم کرنی ہوگی۔

$$50 = 41.9 + 0.22n$$

مرحلہ-3: حل: 'n' کی قیمت کے لیے مساوات (2) کو حل کرنے پر

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

مرحلہ-4: (توضیح): چونکہ سال کی تعداد صحیح عدد ہونا چاہیے اس لیے ہم اگلا صحیح عدد 37 لیں گے لہذا شریک مدرسہ ہونے والوں کا فیصد 50% کے نشانے کو پالے گا۔

$$1991 + 37 = 2028$$

مرحلہ-5: (تصدیق): چونکہ ہم روزمرہ زندگی سے ایک مثال لے رہے ہیں تو ہم کو یہ دیکھنا ہوگا کہ کس حد تک یہ قیمت اصل حالات سے مطابقت رکھتی ہے۔

آئیے جانچ کرتے ہیں کہ ضابطہ (2) حقیقت سے کتنا قریب ہے۔ اس کے لیے اس سال کی قدر معلوم کریں گے جو کہ ہم جانتے ہیں۔

ضابطہ (2) استعمال کرنے اور تقابل کے لیے ان دونوں کا فرق محسوب کرتے ہوئے انہیں معلوم کرنے پر حاصل قیمتوں کو جدول A.I.4 میں دیا گیا ہے

## جدول A.I.4

سال	اندراج (فیصد میں)	مرحلہ-2 کے مطابق محصلہ قدر (فیصد میں)	فرق (فیصد میں)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ضابطہ (2) کی بعض قدریں 0.3% یا 0.5% کی حد تک اصل قدر سے کم ہیں اس تفاوت کے سبب 3 تا 5 سال کا فرق آسکتا ہے چونکہ ہر سال شرح فیصد میں 1% تا 2% اضافہ ہو رہا ہے۔ ہم طے کریں گے کہ یہ فرق قابل قبول ہے اس صورت میں مساوات (2) ہمارا ریاضیاتی ماڈل ہے۔

فرض کیجیے کہ یہ غلطی کافی مقدار میں ہو تو ہمیں ماڈل کو صحیح کرنا ہوگا تب ہم کو مرحلہ-2 کی جانب جاتے ہوئے مساوات تبدیل کرنی ہوگی۔ آئیے اسی کا جائزہ لیتے ہیں۔

مرحلہ-1: ضابطہ کی مکرر تدوین

یہاں بھی ہم ہنوز یہی فرض کریں گے کہ قیمتوں میں ہموار اضافہ ہوتا ہے جس کی شرح 0.22% ہے لیکن ہم غلطی کو اقل ترین حد تک گھٹانے کے لیے تصحیح متعارف کریں گے جس کے لیے ہم کو تصحیح طلب قیمتوں کا اوسط معلوم کرنا ہوگا۔

$$\frac{0 + 0.48 + 0.36 + 0.34 + 0.32 + 0.2 + 0.28 + 0.06 - 0.06 - 0.18 + 0}{10} = 0.18$$

ہم غلطیوں کا اوسط لیتے ہوئے اس کی قدر کے ذریعہ ضابطہ کی تصحیح کریں گے۔

نظر ثانی شدہ ریاضیاتی توضیح: آئیے مرحلہ-2 میں دیئے گئے لڑکیوں کے شریک مدرسہ ہونے کے فیصد کے ضابطہ میں غلطیوں کا اوسط جمع کرنے پر اس لیے تصحیح شدہ ضابطہ

(3).....(جہاں  $n > 1$ )  $n = 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$ ،  $n$  ویں سال میں شریک مدرسہ لڑکیوں کا فیصد

ہم مساوات (2) میں موزوں ردوبدل کریں گے جو

$$(4) \dots\dots\dots 50 = 42.08 + 0.22n \text{ ہو جائے گی۔}$$

متبادل حل: 'n' کے لیے مساوات (4) حل کرنے پر

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

توضیح: چونکہ  $n = 36$  ہے لہذا تھانوی مدرسے میں لڑکیوں کے شریک ہونے کا فیصد 50 ہو جائے گا جو کہ سال 1991+36=2027 ہوگا۔

حل کی تصدیق: آئیے ضابطہ (4) استعمال کرتے ہوئے محصلہ قیمتوں کو اصل قیمت سے تقابل کرنے پر جدول A.I.5 کی قیمتیں آئیں گی۔

### جدول A.I.5

سال	اندراج (فیصد)	مساوات (2) کے مطابق قدر	فرق	مساوات (4) کے مطابق قدر	فرق
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1	44.10	0.00	44.28	-0.18

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات (4) کی متعدد قیمتیں مساوات (2) کی قیمتوں کی بہ نسبت اصل قیمت سے قریب تر ہیں۔ اس صورت میں

غلطیوں کا اوسط صفر '0' رہ جاتا ہے۔

## A.I.4 ریاضیاتی ماڈلنگ کے فوائد

- 1- ریاضیاتی ماڈلنگ کا مقصد معلومات کو حسابی مسئلہ میں تبدیل کرتے ہوئے روزمرہ کی دنیا سے متعلق صحیح نتیجہ پر پہنچانا ہوتا ہے۔ ایک ایسے موقع پر ریاضیاتی ماڈلنگ خصوصی طور پر کارآمد ہوتی ہے جب کسی دوسرے ذرائع سے جیسے راست مشاہدے یا پھر تجربہ کرتے ہوئے صحیح معلومات کا اکٹھا کرنا یا تو ممکن نہیں ہوتا یا پھر بہت زیادہ مہنگا ہوگا۔
- مثال کے طور پر فرض کیجیے کہ ہم مقررہ ریفرنسری سے خارج ہونے والے دھویں سے تاج محل پر ہونے والے نقصان دہ اثرات کا مطالعہ کرنا چاہتے ہیں اس مقصد کے لئے اس کام کا تجربہ راست طور پر تاج محل پر نہیں کیا جاسکتا۔ چونکہ عمارت کو نقصان پہنچنے کا احتمال ہے یہاں ریاضیاتی ماڈلنگ کا بڑا فائدہ ہوگا۔
- 2- کئی اداروں کی جانب سے موسمی پیش قیاسی بڑی اہمیت رکھتی ہے اس لیے کہ مستقبل میں واقع ہونے والے حالات کے پیش نظر ہی فیصلے کیے جاتے ہیں یا کام انجام دیئے جاتے ہیں۔

مثال:

- 1- مارکنگ محکمہ میں طلب سے متعلق قابل بھروسہ اندازہ اشیاء کی فروخت کے لیے بہتر منصوبہ بندی کی وجہ بنتا ہے۔
- 2- مدرسہ بورڈ کو کسی ریاست کے اضلاع میں مختلف اسکول میں بچوں کو شریک کرنے کی تعداد سے متعلق ایک اندازے کی ضرورت ہوتی ہے جس سے یہ طے کیا جائے کہ اسکول کب اور کہاں قائم کیے جاسکیں۔
- 3- اکثر و بیشتر ہمیں بعض امور سے متعلق بہت زیادہ مقداروں کا تخمینہ کرنا پڑتا ہے جیسے جنگلات میں درختوں کی تعداد کسی تالاب میں مچھلیوں کی تعداد یا پھر رائے دہندوں کی جانب سے ڈالے جانے والے ووٹوں کی تعداد وغیرہ

ریاضیاتی ماڈلنگ کی چند اور مثالیں ملاحظہ کیجیے۔

- (i) چند سال کے لیے مستقبل کی آبادی کا تخمینہ
- (ii) مانسون کی آمد کی پیش قیاسی
- (iii) مستقبل میں (چند سال) شرح خواندگی کا تخمینہ
- (iv) کسی درخت پر پتوں کی تعداد کا اندازہ
- (v) سمندر کی گہرائی کا تخمینہ

## A.I.5 ریاضیاتی ماڈلنگ کے نقصان

کیا ریاضیاتی ماڈلنگ ہمارے تمام سوالات کا حل پیش کرتی ہیں؟ یقیناً نہیں؛ اس کی چند حد بندیاں ہوتی ہیں، ہم کو یہ بات ذہن نشین رکھنی چاہیے کہ ایک نمونہ کسی حقیقی مسئلہ کے حل کے سلسلے میں ایک سادہ طریقہ ہوتا ہے اور یہ دونوں بالکل ایک جیسے نہیں ہوتے ہیں یہ ایسے ہی ہیں جیسے کہ کسی ملک کے نقشے اور اس ملک کے مابین فرق ہو، نقشے سے ہم کو صرف بعض تفصیلات ہی معلوم ہوتی ہیں ایک نقشے سے ہم سطح سمندر سے کسی مقام کی بلندی معلوم کر سکتے ہیں لیکن اس سے ہم کو وہاں کے عوام کے متعلق معلومات نہیں مل سکتیں اس لیے ہمیں چاہیے کہ اسی حد تک کسی ماڈل کا استعمال کریں جہاں تک اس کی گنجائش ہو سکتی ہے جبکہ اصل حل کے موقع پر ان تمام عوامل کو ذہن نشین رکھا جائے جس کو ہم نے نظر انداز کیا تھا۔ ماڈل کو اس کی حدوں ہی میں استعمال کیا جانا چاہیے۔



## A.I.6 کس حد تک ہم کسی ریاضیاتی ماڈل کو بہتر بنا سکتے ہیں؟

کسی ماڈل کو بہتر بنانے کے لیے ہمیں کئی ایک اضافی عوامل ملحوظ رکھنے ہوتے ہیں اس کام کے دوران ہم کو ریاضی کی مساواتوں کی مختلف متغیر مقداروں کو جمع کرنا پڑے گا۔ نتیجتاً مساواتیں پیچیدہ ہو کر ماڈل خود مشکل ہو جاتا ہے۔ ماڈل کو اس حد تک سہل ہونا چاہیے کہ ہم اس کو صحیح طور پر استعمال کر سکیں۔ یہ الفاظ دیگر حقیقی قیمتیں جتنی زیادہ قریب تر ہوں گی ہمارا ماڈل اتنا ہی بہتر کہلائے گا۔

## کوشش کیجیے



ماہر حیوانیات لیونارڈو فیبوناکی (Leonardo Fibonacci) نے 13 ویں صدی عیسوی کا سائنس داں رہا ہے ایک مسئلہ پیش کیا۔ اس نے یہ جاننا چاہا تھا کہ اگر دو نردو مادہ خرگوش سے ایک سال کی مدت میں ان کی نسل کتنی ہو جائے گی فرض کیجیے کہ خرگوش کا ایک جوڑا ہر مہینہ دو بچے پیدا کرتا ہے اور یہ کہ ہر جوڑا دو مہینوں میں بالغ جوڑا بن جاتا ہے کتنے مہینوں بعد خرگوش کے جوڑوں کی تعداد آنے والے دو مہینوں میں ان کی مجموعی تعداد سوائے صفروں اور پہلے مہینے کے ہو جاتی ہے۔ ذیل کے جدول میں یہ دکھایا گیا ہے کہ ہر ماہ خرگوش کی تعداد میں کتنا اضافہ ہوتا ہے۔



مہینہ	خرگوش کے جوڑے
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

ایک سال بعد ان کی تعداد 233 ہوگی۔ 16 مہینے بعد ان کے 1600 جوڑے تیار ہو جائیں گے اس مثال کے لیے نفس مسئلہ واضح کیجیے اور ریاضیاتی ماڈلنگ کے مختلف مراحل بیان کیجیے۔

آئیے اس باب کا مزید کچھ اور دلچسپ مثالوں کے ساتھ اختتام کریں۔

مثال-4: (پانسہ کے جوڑ کا وقوع)

صہیب اور عائشہ پانسے (DICE) کا کھیل کھیل رہے ہیں۔ صہیب کہتا ہے کہ اگر عائشہ ایک دفعہ پانسے کو اچھالنے پر اعداد کا مجموعہ صحیح طور پر بتا سکتی ہے تو وہ اس کے ہر صحیح جواب پر اس کو انعام دے گا۔ بتائیے کہ عائشہ کے لیے بہترین قیاس کے کیا اعداد ہوں گے۔

حل:

مرحلہ-1: (مسئلہ کا فہم)

آپ کو چند اعداد جن کے آنے کے زیادہ امکان ہوں جاننے کی ضرورت ہوگی۔

مرحلہ-2: (ریاضیاتی توضیح)

ریاضیاتی اصطلاحوں میں یہ کہا جائے گا کہ یہ سوال اعداد کے مختلف ممکنہ قیاسات پر مشتمل ہے جب کہ ہم پانسہ ڈالتے ہیں۔ ہم اس صورت حال کا ایک آسان نمونہ یوں پیش کریں گے کہ ذیل کے اعداد کے 36 جوڑ میں سے کسی بھی وقت پانسہ پھینکنے پر کیا امکانات ہوں گے۔

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

اعداد کے ہر جوڑ میں پہلا عدد پانسہ کو پہلی دفعہ پھینکنے اور دوسرا عدد پانسے کو دوسری دفعہ پھینکنے پر امکانی طور پر ظاہر ہونے والے اعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

مرحلہ-3: (حسابی سوال کا حل): مذکورہ اعداد کی جوڑیوں کو جمع کرتے ہوئے ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ امکانی مجموعے 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 اور 12 قیاس کئے گئے ہیں۔ ہم کو ان میں سے ہر ایک کے لیے یہ مفروضہ لے کر کہ تمام 36 جوڑ امکانی طور پر مساویانہ واقع ہوں گے، قیاس کرنا ہوگا۔

ہم یہ کام ذیل کے جدول کے مطابق کریں گے۔

مجموعہ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
قیاس	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مشاہدہ کیجیے کہ 7 حاصل جمع آنے کے لیے  $\frac{1}{6}$  امکانات ہیں۔ جو کہ دوسرے اعداد کے حاصل جمع کے وقوع پر زیر ہونے کے امکانات سے

زیادہ ہیں۔

## مرحلہ - 4 (حل کی توضیح)

چوں کہ اعداد کے مجموعے 7 کے واضح ہونے کا امکان بہت زیادہ ہے آپ کو چاہیے کہ 7 کے عدد کا مکرر قیاس کریں۔

## مرحلہ - 5 (نمونے کی تصدیق)

پانسے کے ایک جوڑ کو متعدد دفعہ پھینکتے ہوئے ایک تعددی جدول تیار کیا جائے۔ اس جدول کے تعدد کا متعلقہ قیاسات سے تقابل کیجیے۔ اگر قیاس کردہ قیمتیں قریب تر نہ ہوں تو پانسے کی قیمتیں امتیازی ہیں۔ تب یہ جاننے کے لیے کہ پانسہ کس جانب جھکاؤ رکھتا ہے ہمیں اس عدد کو معلوم کرنے کے لیے اعداد کا مجموعہ حاصل کرنا ہوگا۔

اس مشق میں آگے بڑھنے سے قبل کچھ کچھلی معلومات کا اعادہ کرنا پڑے گا۔

ایک ایسے وقت جب کہ ہم کو رقم کی ضرورت ہو اور ہماری جیب میں رقم نہ ہو بہت سارے افراد کا تجربہ سے گزرتے ہیں چاہے روزمرہ کی بعض ضروری اشیاء خریدنے کے لیے کافی رقم موجود ہو یا پھر سامان تقیش کے لیے بہر حال ہمیں ہمیشہ ہی روپیوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ اسکوٹز ریفریجریٹریٹل، ویشن، کار وغیرہ کی خریداری کے لیے جب کہ خواہش مندوں کے پاس نا کافی رقم ہو تو ایک سہولت دیجاتی ہے ایک اسکیم جس کو قسط واری اسکیم کہا جاتا ہے دکانداروں نے رائج کی ہے۔

بعض دفعہ ایک تاجر (دکاندار، Trader) بازاری حکمت عملی کے طور پر قسط واری اسکیم متعارف کرتا ہے۔ تاکہ خریداروں کو مذکورہ اشیاء وغیرہ خریدنے کا موقع مل سکے۔ قسط واری اسکیم کے تحت خریدار کو بوقت خریدی کسی چیز کی مکمل قیمت ادا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ خریداری کے وقت اس کو قیمت کی جزوی رقم ادا کرنی ہوتی ہے۔ اور باقی ماندہ رقم کو قسطوں میں ادا کرنا ہوتا ہے۔ یہ قسطیں ماہانہ سہ ماہی، ششماہی یا پھر سالانہ بھی ہو سکتی ہیں۔ یہاں یہ بات واضح ہے کہ خریدار کو قیمت سے زیادہ ادا کرنا پڑتا ہے چوں کہ قیمت کی بعد ازاں ادائیگی (تاخیر سے ادائیگی) کے سبب تاجر شے کی لاگت پر سود عائد کرتا ہے۔

بازار کے اس نظریہ سے متعلق بعض اصطلاحیں مجموعی طور پر استعمال کی جاتی ہیں ان میں سے چند ایک سے آپ واقف بھی ہوں گے مثال کے طور پر کسی شے کی خریدی کے لیے موقتی قیمت وہ رقم ہوتی ہے جو خریدار بوقت خریداری اس کی مکمل قیمت کے طور پر ادا کرتا ہے۔ (Cash Down payment) شے کی وہ جزوی قیمت ہوتی ہے جس کی ادائیگی کے بعد خریدار اس کو اپنالیتا ہے۔

آئیے اب ذیل کے ایسے ہی ایک سوال کو ریاضیاتی ماڈلنگ کے وسیلہ سے حل کریں گے۔

## کوشش کیجیے



صہیب ایک سائیکل خریدنا چاہتا ہے مارکٹ جانے پر اس کو پتہ چلتا ہے کہ اس کی پسند کی سائیکل کی قیمت 2400 ` ہے اور اسکے پاس صرف 1400 ` ہے اس موقع پر دکاندار اس کی مدد کی پیش کش کرتا ہے وہ کہتا ہے کہ صہیب موقع پر ہی 1400 ` داد کر دے اور 550 ` کی ماہانہ اقساط کے طور پر بقیہ ادائیگی کرے۔ صہیب کو دکاندار کی پیشکش قبول کرنا ہوگا یا پھر 12% سود مفرد کی شرح سے بینک سے قرض لینا ہوگا۔ بتائیے کہ دونوں صورتوں میں سے صہیب کے لیے فائدہ مند کونسی صورت ہوگی۔ اس کی مدد کیجیے۔

# جوابات

## Answers

### مشق - 1.1

1. (i) 90 (ii) 196 (iii) 127

### مشق - 1.2

$$3^2 \times 5^2 \times 17 \text{ (iii)} \quad 2^2 \times 3 \times 13 \text{ (ii)} \quad 2^2 \times 5 \times 7 \text{ (i) } -1$$

$$17 \times 19 \times 23 \text{ (v)} \quad 5 \times 7 \times 11 \times 13 \text{ (iv)}$$

$$1800,1 \text{ (iii)} \quad 11139,1 \text{ (ii)} \quad 420,3 \text{ (i) } -2$$

$$6 \text{ (vi)} \quad 22338,9 \text{ (v)} \quad 216,36 \text{ (iv)}$$

### مشق - 1.3

$$4.2 \text{ مختتم (iii)} \quad 0.5725 \text{ مختتم (ii)} \quad 0.375 \text{ مختتم (i) } -1$$

$$0.064 \text{ مختتم (v)} \quad 0.18 \text{ تکراری (iv)}$$

$$\text{غیر مختتم متوالی تکراری (iii)} \quad \text{غیر مختتم تکراری (ii)} \quad \text{مختتم (i) } -2$$

$$\text{مختتم (vi)} \quad \text{غیر مختتم (v)} \quad \text{مختتم (iv)}$$

$$\text{مختتم (ix)} \quad \text{مختتم (viii)} \quad \text{غیر مختتم (vii)}$$

$$\text{غیر مختتم تکراری (x)}$$

$$1.3 \text{ (v)} \quad 32.08 \quad 0.115 \text{ (iv)} \quad 0.9375 \text{ (ii)} \quad 0.52 \text{ (i) } .3$$

$$\text{ناطق } q \text{ کے مفرد اجزاء 2 یا 5 یا دونوں (i) } .4$$

$$\text{غیر ناطق (ii)}$$

$$\text{ناطق } q \text{ کے مفرد اجزاء جو 2 اور 5 کے علاوہ ہیں۔ (iii)}$$

### مشق - 1.5

$$12 \text{ (ix)} \quad 3 \text{ (viii)} \quad -2 \text{ (vii)} \quad 9 \text{ (vi)} \quad \frac{1}{2} \text{ (v)} \quad 0 \text{ صفر (iv)} \quad \frac{1}{4} \text{ (iii)} \quad -4 \text{ (ii)} \quad \frac{1}{2} \text{ (i) } -1$$

$$\log\left(\frac{9}{8}\right) \quad (\text{iv}) \quad 1 \quad (\text{iii}) \quad 3 \quad (\text{ii}) \quad \log_{10} 1 \quad (\text{i}) \quad -2$$

$$\log 45 \quad (\text{v})$$

$$3x+3y+1 \quad (\text{iv}) \quad x+y+2 \quad (\text{iii}) \quad x+y-1 \quad (\text{ii}) \quad x+y \quad (\text{i}) \quad -3$$

$$7\log 2 - \log 5 \quad (\text{ii}) \quad 4\log 10 \quad (\text{i}) \quad -4$$

$$2 \log p + 3 \log q - 4 \log r \quad (\text{iv}) \quad 2 \log x + 3 \log y + 4 \log z \quad (\text{iii})$$

$$\frac{3}{2} \log x - \log y \quad (\text{v})$$

$$\frac{\log \frac{3}{2}}{\log 6} \quad -8 \quad 3 \quad -7 \quad 7 \quad -6$$

## مشق - 2.1

$$\text{سٹ نہیں} \quad (\text{iii}) \quad \text{سٹ نہیں} \quad (\text{ii}) \quad \text{سٹ} \quad (\text{i}) \quad -1$$

$$\text{سٹ} \quad (\text{v}) \quad \text{سٹ} \quad (\text{iv})$$

$$\notin \quad (\text{iv}) \quad \notin \quad (\text{iii}) \quad \notin \quad (\text{ii}) \quad \in \quad (\text{i}) \quad -2$$

$$\in \quad (\text{vi}) \quad \in \quad (\text{v})$$

$$8 \in P \quad (\text{iv}) \quad 1 \in N \quad (\text{iii}) \quad B = \{d\} \quad (\text{ii}) \quad x \notin A \quad (\text{i}) \quad -3$$

$$\text{صادق} \quad (\text{iii}) \quad \text{کاذب} \quad (\text{ii}) \quad \text{کاذب} \quad (\text{i}) \quad -4$$

$$C = \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\} \quad (\text{ii}) \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (\text{i}) \quad -5$$

$$E = \{B, E, T, R\} \quad (\text{iv}) \quad D = \{3, 5\} \quad (\text{iii})$$

$$A = \{x = 3y, y < 5, y \in N\} \quad (\text{i}) \quad -6$$

$$B = \{x = 2^y, y < 6, y \in N\} \quad (\text{ii})$$

$$C = \{x = 5^y, y < 5, y \in N\} \quad (\text{iii})$$

$$D = \{x = y^2, y \leq 10, y \in N\} \quad (\text{i})$$

$$B = \{+2, 2\} \quad (\text{ii}) \quad A = \{51, 52, 53, \dots, 98, 99\} \quad (\text{i}) \quad -7$$

$$D = \{2, 0, 4, A, 2\} \quad (\text{iii})$$

$$(b) \quad (\text{iv}) \quad (d) \quad (\text{iii}) \quad (a) \quad (\text{ii}) \quad (c) \quad (\text{i}) \quad -8$$

## مشق - 2.2

1- ہاں  $A \cap B$  اور  $B \cap A$  مساوی ہیں

2-  $A \cap A = A$     $A \cap B = \phi$

3-  $B - A = \{3, 9, 12, 15\}$     $A - B = \{2, 4, 8, 10\}$

4-  $A \cup B = B$    5-  $A \cap B = \{\text{جفت طبعی اعداد}\}$

$A \cap C = \{\text{طاق طبعی اعداد}\}$

$A \cap D = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, \dots, 100\}$

$B \cap C = \phi$

$B \cap D = \{\text{جفت طبعی اعداد}\}$

$C \cap D = \{4, 6, 8, 9, \dots\}$

$A - B = \{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$

$A - C = \{3, 9, 15, 18, 21\}$

$A - D = \{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$

$B - A = \{4, 8, 16, 20\}$

$C - A = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$

$D - A = \{5, 10, 20\}$

$B - C = \{20\}$

$B - D = \{4, 8, 12, 16\}$

$C - B = \{2, 6, 10, 14\}$

$D - B = \{5, 10, 15\}$



7- (i) کاذب

(ii) صادق

(iii) صادق

(iv) صادق



## مشق - 2.3

(i) -1 ہاں، مساوی سٹ

(ii) -2 مساوی سٹ (i) غیر مساوی سٹ (iii) مساوی سٹ

(iv) -3 غیر مساوی سٹ (v) غیر مساوی سٹ

(vi) -4 غیر مساوی سٹ (vii) غیر مساوی سٹ

(i) -5  $A=B$  (ii)  $A \neq B$  (iii)  $A \neq B$  (iv)  $A \neq B$ (i) -6  $\{1,2,3,\dots,10\} \neq \{2,3,4,\dots,9\}$ (ii)  $x=2x+1$  کا مطلب  $x$  طاق ہے۔(iii)  $x$  کا ضعف ہے اس طرح 5 جو نہیں رکھتا ہے۔(iv)  $x$  صفر عدد ہے مگر 9 مفرد نہیں ہے۔(i) -7  $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \phi$ (ii)  $\{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{x, y, z\}, \phi$ (iii)  $\{c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, c\},$  $\{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$ (iv)  $\phi, \{1\}, \{4\}, \{9\}, \{16\}, \{1, 4\}, \{1, 9\}, \{1, 16\}, \{4, 9\}, \{4, 16\}, \{9, 16\},$  $\{1, 4, 9\}, \{1, 9, 16\}, \{4, 9, 16\}, \{1, 4, 16\}, \{1, 4, 9, 16\}$ (v)  $\phi, \{10\}, \{100\}, \{1000\}, \{10, 100\}, \{100, 1000\}, \{10, 1000\}, \{10, 100, 1000\}$ 

## مشق - 2.4

(i) -1 غیر خالی (ii) خالی (iii) خالی (iv) خالی (v) غیر خالی

(i) -2 متناہی (ii) متناہی (iii) متناہی

(i) -3 متناہی (ii) لا متناہی (iii) لا متناہی (iv) لا متناہی

## مشق 3.1



(a) (i) -6 (ii) 7 (iii) -6

(b) طلباء کے لیے چھوڑ دیا گیا

(i) کاذب  $(\sqrt{2}, x)$  کا ضرب ہے درجہ نہیں

(ii) کاذب  $(x^2)$  کا عددی ضرب  $(-4)$  ہے

(iii) صادق (کسی بھی مستقل رکن کے لیے درجہ صفر ہوگا)

(iv) کاذب (یہ ایک کثیر رکنی نہیں ہے)

(v) کاذب (کیوں کہ کثیر رکنی کا تعلق اس کے ارکان کی تعداد سے نہیں ہوتا ہے)

$p(1) = 0, p(-1) = -2, p(0) = -1, p(2) = 7, p(-2) = -9$  -3

-4 ہاں؛ کثیر رکنی  $x^4 - 16$  کا صفر  $-2$  اور  $-2$  ہے۔

-5 ہاں؛ کثیر رکنی  $x^2 - x - 6$  کا صفر  $3$  اور  $-2$  ہے۔

## مشق 3.2

(i) صفر نہیں ہے (ii) 1 (iii) 3

(iv) 2 (v) 4 (vi) 3

(i) 0 (ii)  $-2, -3$  (iii)  $-2, -3$  (iv)  $-2, 2, \pm\sqrt{-4}$

(i)  $4, -3$  (ii)  $3, 3$  (iii) صفر نہیں ہے۔

(iv)  $-4, 1$  (v)  $-1, 1$

-4 اور  $P\left(\frac{1}{4}\right) = 0$  اور  $P(-1) = 0$

## مشق 3.3

(i)  $4, -2$  (ii)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  (iii)  $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$

(iv)  $0, -2$  (v)  $\sqrt{15} - \sqrt{15}$  (vi)  $-1, \frac{4}{3}$

(i)  $4x^2 - x - 4$  (ii)  $3x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$  (iii)  $x^2 + \sqrt{5}x$

(iv)  $x^2 - 2x + 1$  (v)  $4x^2 - 1$  (vi)  $x^2 - 5x + 4$

(i)  $x^2 - x - 2$  (ii)  $x^2 - 3$  (iii)  $4x^2 + 3x - 1$  (iv)  $4x^2 - 8x + 3$

-4 ہاں تمام صفر ہیں

## مشق - 3.4

- (i) -1 خارج قسمت =  $x-3$  اور باقی  $7x-9$
- (ii) خارج قسمت =  $x^2+x-3$  اور باقی  $8$
- (iii) خارج قسمت =  $-x^2-2$  اور باقی  $-5x+10$
- (i) -2 باہاں (ii) ہاں (iii) نہیں
- $-1, +1 -3$
- $g(x) = x^2 - x + 1 -4$
- (i) -5  $p(x) = 2x^2 - 2x + 14, g(x) = 2, q(x) = x^2 - x + 7, r(x) = 0$
- (ii)  $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, g(x) = x^2 - 1, q(x) = x + 1, r(x) = 2x + 2$
- (iii)  $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2, g(x) = x^2 - 1, q(x) = x + 2, r(x) = 4$

## مشق - 4.1

- (a) -1 ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں (b) دو خطوط منطبق ہونا
- (c) متوازی خطوط
- (a) -2 مطمئن کرتی ہے (b) مطمئن نہیں کرتی ہے
- (c) مطمئن کرتی ہے (d) مطمئن کرتی ہے
- (e) مطمئن کرتی ہے (f) مطمئن کرتی ہے
- (g) مطمئن کرتی ہے (h) مطمئن کرتی ہے
- (h) مطمئن نہیں کرتی ہے (i) مطمئن نہیں کرتی ہے
- 3 پائنت کی تعداد = 1 شرٹ کی تعداد = 0
- 4 لڑکیوں کی تعداد = 7 لڑکوں کی تعداد = 3
- 5 پنسل کی قیمت = 3 پن کی قیمت = 5
- 6 لمبائی = 20 میٹر چوڑائی = 16 میٹر
- (i) -7  $6x + 5y - 10 = 0$
- (ii)  $4x + 6y - 10 = 0$
- (iii)  $6x + 9y - 24 = 0$

8- طول = 140 کانیاں عرض = 30 کانیاں

9- طلباء کی تعداد = 16 بیچ کی تعداد = 5

## مشق - 4.2

1- پہلے شخص کی آمدنی = 1800 دوسرے شخص کی آمدنی = 14000

2- 24 اور 42

3- زاویے:  $99^\circ$  اور  $81^\circ$

4- مقرر کردہ کرایہ = 40 شرح کرایہ فی کلومیٹر = 18 (ii) 490

5-  $\frac{7}{9}$

6- 40 km/h ; 60 km/h

7-  $31^\circ$  اور  $59^\circ$

8- 723 اور 659

9- 60ml اور 40ml

10- 4800 اور 7200

## مشق - 4.3

1- (i) (4, 5) (ii)  $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  (iii) (4, 9)

(iv) (1, 2) (v) (3, 2) (vi)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

(vii) (3, 2) (viii) (1, 1)

2- (i) بوٹ کی رفتار = 8 کلومیٹر فی گھنٹہ بہاؤ کی رفتار = 3 کلومیٹر فی گھنٹہ

(ii) ریل کی رفتار = 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کار کی رفتار = 80 کلومیٹر فی گھنٹہ

(iii) کام کی تکمیل کے درکار ایام مرد آدمی کے لیے = 18

عورتوں کے لیے کام کی تکمیل کے لیے درکار ایام = 36

## مشق - 5.1

1- (i) ہاں (ii) ہاں (iii) نہیں (iv) ہاں

(v) ہاں (vi) نہیں (vii) نہیں (viii) ہاں

$$(i) \quad 2x^2 + x - 528 = 8 \quad (\text{جہاں } x = \text{عرض})$$

$$(ii) \quad x^2 + x - 306 = 0 \quad (\text{جہاں } x = \text{چھوٹا صحیح عدد ہے})$$

$$(iii) \quad x^2 + 32x - 273 = 0 \quad (\text{جہاں } x = \text{صہیب کی عمر})$$

$$(iv) \quad x^2 - 8x + 1280 = 0 \quad (\text{ٹرین کی رفتار } = x)$$

## مشق - 5.2

$$-1 \quad (i) \quad -2; 5 \quad (ii) \quad -2; \frac{3}{2} \quad (iii) \quad -\sqrt{2}; \frac{-5}{\sqrt{2}}$$

$$(iv) \quad \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \quad (v) \quad \frac{1}{10}; \frac{1}{10} \quad (vi) \quad -6; 2$$

$$(vii) \quad 1, \frac{2}{3} \quad (viii) \quad -1; 3 \quad (ix) \quad 7, \frac{8}{3}$$

$$-2 \quad 13, 14 \quad -3 \quad 17, 18$$

$$-4 \quad 5 \text{ سمر} \quad 12 \text{ سمر} \quad -5 \quad \text{اشیاء کی تعداد} = 6; \text{ ہر شے کی قیمت خرید} = 15$$

$$-6 \quad 4 \text{ میٹر} \quad 10 \text{ میٹر} \quad -7 \quad \text{قاعدہ} = 12 \text{ سمر} \quad \text{بلندی} = 8 \text{ سمر}$$

$$-8 \quad 15 \text{ کلومیٹر} \quad 20 \text{ کلومیٹر} \quad -9 \quad 20 \text{ یا } 40$$

$$-10 \quad 9 \text{ کلومیٹر فی گھنٹہ} \quad (9 \text{ kmph})$$

## مشق - 5.3

$$-1 \quad (i) \quad \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \quad (ii) \quad \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$(iii) \quad \frac{-3}{5} \text{ and } 2 \quad (iv) \quad -1, -5$$

$$-3 \quad (i) \quad \frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \quad (ii) \quad 1, 2$$

$$-4 \quad 7 \text{ سال}$$

$$-5 \quad \text{ریاضی} = 12 \text{ نشانات} \quad \text{انگریزی} = 18 \text{ نشانات}$$

$$-6 \quad 120 \text{ میٹر} \quad 90 \text{ میٹر}$$



-7 -18, -12 ; 18, 12

-8 40 کلومیٹر فی گھنٹہ (40kmph)

-9 15 گھنٹے ، 25 گھنٹے

-10 پیانسٹر ریل گاڑی کی رفتار = 33 کلومیٹر فی گھنٹہ (33kmph)

ایکسپریس ریل گاڑی کی رفتار = 44 کلومیٹر فی گھنٹہ (44kmph)

-11 18 میٹر ، 12 میٹر

-12 6 سکینڈ

-13 ضلع، نہیں

## مشق - 5.4

-1 (i) حقیقی ریشے نہیں رکھتا ہے۔

(ii)  $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$  حقیقی اور مساوی ریشے(iii)  $\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$  حقیقی اور مختلف ریشے-2 (i)  $k = \pm 2\sqrt{6}$  (ii)  $k = 6$ 

-3 ہاں ؛ 40 میٹر ؛ 20 میٹر

-4 ممکن نہیں

-5 ہاں ؛ 20 میٹر ؛ 20 میٹر

## مشق - 6.1

-1 (i) حسابی تصاعد میں ہے (ii) حسابی تصاعد میں نہیں ہے

(iii) حسابی تصاعد میں ہے (iv) حسابی تصاعد میں نہیں ہے۔

-2 (i) 10, 20, 30, 40 (ii) -2, -2, -2, -2

(iii) 4, 1, -2, -5 (iv)  $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ 

(v) -1.25, -1.5, -1.75, -2

-3 (i)  $a_1 = 3 ; d = -2$  (ii)  $a_1 = -5 ; d = 4$ (iii)  $a_1 = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$  (iv)  $a_1 = 0.6 ; d = 1.1$ 

-4 (i) حسابی تصاعد میں نہیں ہے۔



$$4, \frac{9}{2}, 5 = \text{حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان (ii)}$$

$$-9.2, -11.2, -13.2 = \text{حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان (iii)}$$

$$6, 10, 14 = \text{حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان (iv)}$$

$$3 + 4\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2}, 3 + 6\sqrt{2} = \text{حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان (v)}$$

(vi) حسابی تصاعد میں نہیں ہے

$$-16, -20, -24 = \text{حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان (vii)}$$

$$\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2} = \text{حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان (viii)}$$

(ix) حسابی تصاعد میں نہیں ہے

$$5a, 6a, 7a = \text{حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان (x)}$$

(xi) حسابی تصاعد میں نہیں ہے

$$\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98} = \text{حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان (xii)}$$

(xiii) حسابی تصاعد میں نہیں ہے

### مشق - 6.2

$$a_n=3.5 \text{ (v)} \quad n=10 \text{ (iv)} \quad a=46 \text{ (iii)} \quad d=2 \text{ (ii)} \quad a_8 = 28 \text{ (i) -1}$$

$$22 \text{ (ii)} \quad -77 \text{ (i) -2}$$

$$a_1=18 ; a_1=8 \text{ (ii)} \quad a_2=14 \text{ (i) -3}$$

$$a_5=4, a_4=2, a_3=0, a_2=-2 \text{ (iv)} \quad a_2=\frac{13}{2} ; a_3=8 \text{ (iii)}$$

$$a_2=-2 ; a_3=0 ; a_4=2 ; a_5=4 \text{ (v)}$$

$$a_1=53 ; a_3=23 ; a_4=8 ; a_5=-7 \text{ (vi)}$$

$$16 \text{ واں رکن -4}$$

$$27 \text{ (ii)} \quad 34 \text{ (i) -5}$$

$$\text{نہیں (i) -6}$$

$$178 -7$$

$$5 -8$$

$$1 -9$$

$$13 - 13 \quad 60 - 12 \quad 128 - 11 \quad 100 - 10$$

$$158 - 15 \quad 4, 10, 16, \dots \text{ کے حسابی تصاعد}$$

$$-16 \quad -13, -8, -3 \quad 11 - 17 \text{ واں سال}$$

## مشق - 6.3

$$\frac{33}{20} = 1\frac{13}{20} \text{ (iv)} \quad 5505 \text{ (iii)} \quad -180 \text{ (ii)} \quad 245 \text{ (i)} \quad -1$$

$$-8930 \text{ (iii)} \quad 286 \text{ (ii)} \quad \frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2} \text{ (i)} \quad -2$$

$$d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273 \text{ (ii)} \quad s_n = 440 \quad n = 16 \text{ (i)} \quad -3$$

$$d = 1, a_{10} = 22 \text{ (iv)} \quad a = 4, S_{12} = 246 \text{ (iii)}$$

$$a = -8 \quad n = 7; \text{ (vi)} \quad n = 5; a_5 = 34 \text{ (v)}$$

$$a = 4 \text{ (vii)}$$

$$n = 38; S_{38} = 6973 \quad -4$$

$$5610 \quad -5$$

$$n^2 \quad -6$$

$$-465 \text{ (ii)} \quad 525 \text{ (i)} \quad -7$$

$$a_n = 5 - 2n \quad ; \quad s_1 = 3 \quad ; \quad s_2 = 4 \quad ; \quad a_2 = 1 \quad ; \quad a_3 = -1 \quad ; \quad a_{10} = -15 \quad -8$$

$$160, 140, 120, 100, 80, 60, 40 \quad -10 \quad 4920 \quad -9$$

$$370 \text{ میٹر} \quad -14 \quad 5'16 \quad -13 \quad \text{سمر} \quad 143 \quad -12 \quad 234 \quad -11$$

## مشق - 6.4

$$\text{ہاں (iii)} \quad \text{نہیں (ii)} \quad \text{ہاں (i)} \quad -1$$

$$\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{25}, \dots \text{ (ii)} \quad 4, 12, 36, \dots \text{ (i)} \quad -2$$

$$\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \dots \text{ (iv)} \quad 81, -27, 9, \dots \text{ (iii)}$$

$$32, 64, 128 \quad ; \quad \text{ہاں (i)} \quad -3$$

$$\frac{-1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{-1}{96} \quad ; \quad \text{ہاں (ii)}$$

- (iii) نہیں (iv) ہاں (v) نہیں  
 (vi) ہاں: -81, 243, -729 (vii) ہاں  $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \dots$   
 (viii) ہاں: -16,  $32\sqrt{2}$ , -128 (ix) ہاں: 0.0004, 0.00004, 0.000004

Z -4

## مشق - 6.5

$$r = \frac{1}{2}; a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (i) \quad -1$$

$$r = -3; a_n = 2(-3)^{n-1} \quad (ii)$$

$$r = 3; a_n = (-1)(3)^{n-1} \quad (iii)$$

$$r = \frac{2}{4}; a_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \quad (iv)$$

$$a_{10} = 5^{10}; a_n = 5^n \quad -2$$

$$\frac{-4}{3^4} \quad (ii) \quad \frac{1}{3^4} \quad (i) \quad -3$$

$$7 \quad (iii) \quad 12 \quad (ii) \quad 5 \quad (i) \quad -4$$

$$5 \quad -7 \quad \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, \dots \quad -6 \quad 3 \times 2^{10} \quad -5$$

## مشق - 7.1

$$2\sqrt{a^2 + b^2} \quad (iv) \quad 5\sqrt{2} \quad (iii) \quad 4\sqrt{2} \quad (ii) \quad 2\sqrt{2} \quad (i) \quad -1$$

$$39 \quad -2$$

$$-3 \quad \text{ہم خط نقاط نہیں ہیں۔} \quad 4. \text{ ہاں} \quad 5. \text{ نصرت} \quad 8. \text{ 72 مربع اکائیاں}$$

$$-9 \quad (i) \text{ مربع} \quad (ii) \text{ متوازی الاضلاع} \quad (iii) \text{ متوازی الاضلاع}$$

$$(-7, 10) \quad -10$$

$$-5 \text{ یا } 7 \quad -11$$

$$-9 \text{ یا } 3 \quad -12$$

$$x+13y=17 \quad -15 \quad 4\sqrt{5} \text{ اکائیاں} \quad -13$$



## مشق - 7.2

- $(0, \frac{-7}{3})$  اور  $(2, \frac{-5}{3})$  -2  $(1, 3)$  -1  
 $x = 6 ; y = 3$  -4  $2 : 7$  -3  
 $(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7})$  -6  $(3, -10)$  -5  
 $(-3, \frac{3}{2}), (-2, 3), (-1, \frac{9}{2})$  -7  
 $(\frac{5a-b}{5}, \frac{5a+b}{5})$  -9  $(4\frac{7}{2}), (0, 5), (1, \frac{13}{2})$  -8  
 $(\frac{-2}{3}, \frac{5}{3})$  (iii)  $(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3})$  (ii)  $(\frac{2}{3}, 2)$  (i) -10

## مشق - 7.3

- $\frac{21}{2}$  مربع اکائیاں (i) -1  
 32 مربع اکائیاں (ii) 3 مربع اکائیاں (iii)  
 $k = \frac{7}{3}$  (iii)  $k = 3$  (ii)  $k = 4$  (i) -2  
 1 : 4 ; 1 مربع اکائیاں -3  
 28 مربع اکائیاں -4  
 5 مربع اکائیاں (i) 6 مربع اکائیاں (ii) -5

## مشق - 7.4

- $\frac{-b}{a}$  (iv)  $\frac{4b}{a}$  (iii)  $\sqrt{3}$  (ii) 6 (i) -1  
 -1 (vii)  $\frac{1}{7}$  (vii) 0 (vi) -5 (v)

## مشق - 8.2

- 1- (ii) 2.8 سمر DE =  
 2- 8 سمر 3- 1.6 سمر 7- 16 میٹر

## مشق - 8.3

- (3) 1:4 (4)  $\sqrt{2}-1$  (6) 96 مربع سمر (7) 3.5 سمر

## مشق - 8.4

- (8)  $6\sqrt{7}$  میٹر (9) 13 میٹر (12) 1:2

## مشق - 9.1

- 1- (i) ایک (ii) قاطع خط  
 (iii) دو (iv) نقطہ تماس (v) لائنناہی  
 2- 12 سمر PQ = (4) 12 سمر

## مشق - 9.2

- 1- (i) d (ii) a (iii) b (iv) a (v) c  
 2- 8 سمر (4) 9 سمر AC = 15 سمر AB =  
 5- ہر ایک 8 سمر 6-  $2\sqrt{5}$  سمر (9) دو

## مشق - 9.3

- (1) (i) 28.5 مربع سمر (ii) 285.5 مربع سمر  
 (2) 88.368 مربع سمر (3) 1254.96 مربع سمر  
 (4) 57 مربع سمر (5) 10.5 مربع سمر  
 (6) 6.125 مربع سمر (7) 102.67 مربع سمر

## مشق - 10.1

- (1) 5500 مربع سمر (2) 18.48 , 184800 مربع میٹر  
 (3) 264 مکعب سمر (4) 1:2 (5) 21  
 (7) 21175 مکعب سمر (8) 301.44 مکعب میٹر (9) 37 سنٹی میٹر  
 188.4 مربع میٹر

## مشق - 10.2

- (1) 103.62 مربع سمر (2) 1155.52 مربع سمر (3)  $298.57m^2$   
 (4) 160 مربع سمر (5) 827.00 (6) 2:1:3  
 (7)  $a^2 \left(6 + \frac{\pi}{4}\right)$  مربع اکائی (8) 374 مربع سمر

## مشق - 10.3

- (1) 693 کلوگرام (2) مخروط کی بلندی = 22.14 سمر; کھلونے کی طرفی سطح کا رقبہ = 795.08 مربع سمر  
 (3) 89.83 مکعب سمر (4) 616 مکعب سمر  
 (5) 309.57 مکعب سمر  
 (6) 150 (7) 523.9 مکعب سمر

## مشق - 10.4

- (1) 2.74 سمر (2) 12 سمر (3) 2.5 میٹر  
 (4) 5 میٹر (5) 10 (6) 400  
 (7) 100 (8) 672

## مشق - 11.1

- (1)  $\sin A = \frac{15}{17}$  ;  $\cos A = \frac{8}{17}$  ;  $\tan A = \frac{15}{8}$   
 (2)  $\frac{527}{168}$   
 (3)  $\tan \theta = \frac{24}{7}$  ;  $\cos \theta = \frac{7}{25}$   
 (4)  $\tan A = \frac{5}{12}$  ;  $\sin A = \frac{5}{13}$   
 (5)  $\sin A = \frac{4}{5}$  ;  $\cos A = \frac{3}{5}$   
 (7)  $\frac{\sqrt{113} + 8}{7}$  (ii)  $\frac{49}{64}$  (i)  
 (8) 0 (ii) 1 (i)

## مشق - 11.2

- (1)  $\sqrt{2}$  (ii)  $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$  (iii) 1



- +1 (v)  $\frac{2}{3}$  (iv)  
 c (iii) d (ii) c (i) (2)  
 ہاں (4) 1 (3)  
 QR =  $6\sqrt{3}$  سم ; PR = 12 سم (5)  
 $\angle YZX = 60^\circ$  ;  $\angle YXZ = 30^\circ$  (6)  
 کاذب (7)

## مشق - 11.3

- 0 (iii) 0 (ii) 1 (i) (1)  
 1 (v) 1 (iv)  
 $\cos 15^\circ + \sin 25^\circ$  (6)  $A^\circ = 36^\circ$  (3)

## مشق - 11.4

- 1 (iii) 2 (ii) 2 (i) (1)  
 $\frac{1}{p}$  (9) 1 (8) 1 (6)

## مشق - 12.1

- 15 میٹر (1)  $6\sqrt{3}$  میٹر (2) 4 میٹر (3)  
 $30^\circ$  (4) 11.547m (5)  $4\sqrt{3}$  میٹر (6)  
 8.3136 میٹر، 4.1568 میٹر (7)  $300\sqrt{3}$  میٹر (8) 15 میٹر (9) 7.5 مربع سم (10)

## مشق - 12.2

- ٹاور کی بلندی =  $5\sqrt{3}$  میٹر ; راستے کی چوڑائی = 5 میٹر (1)  
 32.908 میٹر (2) 1.464 میٹر (3) 19.124 میٹر (4)  
 7.608 میٹر (5) 10 میٹر (6) 30 فٹ ; 90 فٹ (7)  
 6 سم (8) 200 مربع فی سکوائر (9) 3 (10)

## مشق - 13.1

- 0 ناممکن واقعہ (ii) 1 (i) (1)  
 1 ممکن واقعہ (iii) 1 (iv) 0, 1 (v)  
 نہیں (ii) نہیں (i) (2)  
 ہاں (iii) ہاں (iv)

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{13} \quad (5) \quad 1 \quad (ii) \quad 0 \quad (i) \quad (4) \quad 0.95 \quad (3)$$

$$\frac{1}{26} \quad (8) \quad \frac{1}{2} \quad (iii) \quad \frac{1}{2} \quad (ii) \quad \frac{1}{2} \quad (i) \quad (7) \quad 0.008 \quad (5)$$

## مشق - 13.2

$$\frac{5}{8} \quad (ii) \quad \frac{3}{8} \quad (i) \quad (1)$$

$$\frac{13}{17} \quad (iii) \quad \frac{8}{17} \quad (ii) \quad \frac{5}{17} \quad (i) \quad (2)$$

$$\frac{17}{18} \quad (ii) \quad \frac{5}{4} \quad (i) \quad (3)$$

$$\frac{5}{13} \quad (4)$$

$$1 \quad (iv) \quad \frac{3}{4} \quad (iii) \quad \frac{1}{2} \quad (ii) \quad \frac{1}{8} \quad (i) \quad (5)$$

$$\frac{1}{26} \quad (iii) \quad \frac{1}{13} \quad (ii) \quad \frac{1}{26} \quad (i) \quad (6)$$

$$\frac{1}{52} \quad (vi) \quad \frac{1}{4} \quad (v) \quad \frac{1}{52} \quad (iv)$$

$$0 \quad (b) \quad \frac{1}{4} \quad (a) \quad (ii) \quad \frac{1}{5} \quad (i) \quad (7)$$

$$\frac{15}{19} \quad (ii) \quad \frac{1}{5} \quad (i) \quad (9) \quad \frac{11}{12} \quad (8)$$

$$\frac{1}{5} \quad (iii) \quad \frac{1}{10} \quad (ii) \quad \frac{9}{10} \quad (i) \quad (10)$$

$$\frac{5}{36} \quad (ii) \quad \frac{31}{36} \quad (i) \quad (12) \quad \frac{11}{84} \quad (11)$$

$$\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}$$

$$\text{نہیں} \quad (ii) \quad \frac{1}{36} \quad (i) \quad (13)$$

$$\frac{6}{36} \quad (ii) \quad \frac{31}{36} \quad (i) \quad (15) \quad \frac{3}{4} \quad (14)$$

(16)

دوپانوں پر محصلہ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
نشانات کا مجموعہ											
قیاس	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\frac{11}{36} \quad (ii) \quad \frac{25}{36} \quad (i) \quad (15) \quad \frac{3}{4} \quad (14)$$

## مشق - 14.1

- (1) درخت کی اوسط تعداد = 8.1
- (2) 45 - 20 = 25
- (3) f = 20
- (4) 75.9
- (5) 22.31
- (6) 211
- (7) 0.099ppm
- (8) 49 دن
- (9) 69.43%

## مشق - 14.2

- (1) بہتاتیہ = 36.8 سال ، اوسط = 35.37 سال
- (2) بہتاتیہ = 65.625 گھنٹے
- (3) بہتاتیہ = 1847.83 ، اوسط = 2662.5
- (4) بہتاتیہ = 30.6 ، اوسط = 29.2
- (5) بہتاتیہ = 4608.7 رن
- (6) بہتاتیہ = 44.7 کار

## مشق - 14.3

- (1) بہتاتیہ = 135.76 اکائیاں ، اوسط = 137.05 اکائیاں
- (2) وسطانیہ = 137 (تینوں کی قیمتیں تقریباً مساوی ہیں)
- (3)  $x = 8, y = 7$
- (4) وسطانی عمر = 35.76 سال
- (5) وسطانی لمبائی = 146.75 میٹر
- (6) وسطانی وقت زندگی = 3406.98 گھنٹے

(6) بہتاتیہ = 7.88 ، اوسط = 8.32 ، وسطانیہ = 8.05

(7) 56.67 کلوگرام = وسطانی وزن

مشق - 14.4

-1

Cummulative Frequency	یومیہ آمدنی (روپے میں)
12	300 سے کم
26	350 سے کم
34	400 سے کم
40	450 سے کم
50	500 سے کم

نقاط کی مدد سے ogive بنائیے۔ (500, 50) اور (300, 12), (350, 26), (400, 34), (450, 40)

2- نقاط کو جوڑتے ہوئے Ogive بنائیے۔ (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28) اور (50, 32) اور (52, 35) جہاں  $17.5 = \frac{n}{2}$  ہے۔ Ogive میں مرکز کا مشاہدہ کیجیے جس کا قطر 17.5 ہے اور x محور پر اس کا وسطانیہ ہوگا۔

-3

C.F.	Production yield (kg/ha)
100	50 سے زیادہ یا مساوی
98	55 سے زیادہ یا مساوی
90	60 سے زیادہ یا مساوی
78	65 سے زیادہ یا مساوی
54	70 سے زیادہ یا مساوی
16	75 سے زیادہ یا مساوی

اب نقاط کو جوڑتے ہوئے Ogive بنائیے: (75, 16) اور (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54)

## اساتذہ سے کچھ ضروری باتیں

### معزز اساتذہ!

حکومت آندھرا پردیش نے 2011 - APSCF کی بنیاد پر تمام ہی مضامین پر نظر ثانی کا فیصلہ کیا ہے۔ اس خاکہ کا منشاء یہی ہے کہ بچے لازمی طور پر پڑھیں اور مدرسہ کی سطح پر جو حساب سکھائی جائے وہ طلباء کی زندگی اور ان کے تجربات سے ہم آہنگ ہو۔ این سی ای آر ٹی اور حکومت آندھرا پردیش کی جانب سے 2005 - NCF کے تحت جس میں مضمون ریاضی سے متعلق پالیسی دستاویز پیش کیا گیا ہے، زندگی کے تجربات کو ریاضیاتی انداز میں سمجھے، اسی طرز پر اہلیت کو فروغ دینے اور امکانات تلاش کرنے کی ضرورت ظاہر کی گئی ہے۔ اور ایسا کرنا ثانوی سطح پر ہی ممکن ہے۔ نویں جماعت کا حسابی بنیادی خاکہ اسی طرز پر مستحکم کیا گیا ہے۔ اور اب ہم اس مضمون کی ثانوی سطح کی تکمیل پر پہنچ چکے ہیں۔ گزشتہ جماعتوں میں ہم نے طلباء میں تلخیصی فکر کو وسعت دینے اور ریاضیاتی انداز اپنانے کی حوصلہ افزائی کی تھی۔ ثبوت و شواہد تلاش کرنے اور حسابی زبان استعمال کرنے کے رجحانات پیدا کئے گئے تھے۔ یہ سمجھنے کی ضرورت ہے کہ ہم ایسا طرز زبان اختیار کریں کہ جس سے حسابی دلائل و بیانات زیادہ سے زیادہ علاقائی بن سکیں۔ اور ان کا مدعا راست طور پر ذہن نشین ہو سکے۔ اس پس منظر میں یہ بات اہمیت رکھتی ہے کہ اس جماعت میں بچوں کو حسابی انداز استعمال کرنے کا اہل بنایا جائے۔ اور ان میں ایسا کرنے کا فطری رجحان فروغ پاسکے۔ جماعت دہم میں اسی طرز فکر کو پائے تکمیل تک پہنچانے کی سعی کریں گے۔

یاد رہے کہ دسویں جماعت میں درس و تدریس کے لیے ضروری ہے کہ ششم تا دہم ہم سارے نصاب کو ملحوظ رکھا جائے۔ نصاب پر طائرانہ نظر سے واضح ہو جاتا ہے کہ تلخیص و نظریاتی فکر اور حسابی زبان کا استعمال بتدریج وسعت اختیار کرتا جاتا ہے۔ طلباء میں فروغ پانے والی یہی فکر خیالات کو اک خاص طرز پڑھانے میں مدد دیتی ہے اور وہ انہیں ٹھوس رخ دینے قابل ہو جاتے ہیں۔ اس مضمون کو مستقبل کے امکانات کا وسیلہ بنانے اور ثانوی سطح پر اس پر دسترس حاصل کرنے میں بچوں کو اک بڑی دشواری یہ ہے کہ وہ اس مضمون کے نظریاتی انداز اور علاقائی زبان بہتر طور پر تفہیم نہیں کر سکتے۔ ان حالات میں یہ ضروری ہے کہ انہیں ایک گروپ اور ٹیم کی حیثیت میں اسے سیکھنے اور اس مضمون کے طرز فکر کو لاگو کرنے کے سازگار حالات فراہم کئے جائیں۔ اس سلسلہ میں ہم عمر اور ہم خیال افراد کا اشتراک و تعاون، مشکلات کو دور کرنے میں مدد و معاون ہوگا۔ اس مقصد کے پیش نظر طلباء کے مابین تبادلہ خیال، گفتگو اور اجتماعی کوشش اہم رول ادا کرتا ہے۔ اسی انداز سے نتائج اخذ کرتے ہوئے وہ حسابی مسائل حل کر سکتے ہیں۔ دسویں جماعت میں اسی انداز کی تدریس و ٹرینینگ، مستقبل میں مضمون کو سیکھنے کے راستے آسان کر دے گی۔

نصاب کچھ اس طرح مدون کیا گیا ہے کہ اس سے تحقیقی رجحانات اجاگر ہوں گے۔ اور حساب کے نظریات کا فہم فروغ پائیگا۔ اور طلباء میں نتائج اخذ کرنے کا میلان پیدا ہوگا۔ نصاب کے خاکہ جاتی انداز سے بچوں میں کمرہ جماعت میں موضوع پر گفتگو کرنے اور اپنے خیالات کا تبادلہ کرنے کا حوصلہ پیدا ہوگا۔ دسویں جماعت کی ریاضی کے اس نصاب کو چھ حصوں اعداد کے نظام، محسوبات، الجبر، علم ہندسہ، علم مثلث، اعداد و شمار اور تجلیلی جیومیٹری میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ان موضوعات سے متعلق تدریس بچوں میں سوالات کو حل کرنے، منطقی سوچ، ریاضیاتی مواصلت، اعداد و شمار کی مختلف انداز سے اظہار کی مہارت پیدا ہوگی، اور حساب کو ایک خصوصی مضمون کے طور پر اپنانے کے ذوق کے علاوہ اسے روزمرہ زندگی میں بروئے کار لانے سے دلچسپی پیدا ہوگی۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ترجیحات کو متعین کرنے اور مستقبل کے امکانات تلاش کرنے کا وسیلہ ہوگی۔ ”یہ کیجیے“ اور ”کوشش کیجیے“ کے تحت سر دست مطلوبہ آزمائشی کوششوں کے لیے بچوں میں چھوٹے گروپس کے مابین تبادلہ خیال کے حالات پیدا ہوں گے۔ واضح رہے کہ کمرہ جماعت میں سازگار ماحول پیدا کرنے اور بچوں میں کتاب سے دلچسپی پیدا کرنے کے لیے اساتذہ کی کاوشیں ضروری ہیں۔

ہر ایک عنوان کے تحت نظریات کی وضاحت کے بعد ”یہ کیجیے“ اور ”کوشش کیجیے“ اہم حصہ کے طور پر شامل کئے گئے ہیں۔ یاد رہے کہ ”یہ کیجیے“ کے تحت جو سوالات دیئے گئے ہیں وہ درسی بنیاد پر وضع کئے گئے ہیں جبکہ ”کوشش کیجیے“ کے تحت جو سوالات دیئے گئے ہیں وہ تدریسی نکات کی مہارت اور تصدیق کی جانچ کے مقصد سے شامل کئے گئے ہیں۔ ”سوچے اور تبادلہ خیال کیجیے“ بچوں میں نظریات کی تفہیم اور اپنے ادراک کو قلمبند کرنے کے منشاء سے دیئے گئے ہیں۔

دسویں جماعت کی ریاضی کا یہ نصاب 14 بابوں میں تقسیم کیا گیا ہے جبکہ ایک مضمون بھی شامل کیا گیا ہے تاکہ ایک طالب علم متن کا باریک بینی سے مطالعہ کرتے ہوئے نہ صرف اپنے ذہن کو وسعت دے بلکہ ریاضی سیکھنے کے عمل سے لطف اندوز بھی ہو۔ علاوہ ازیں رنگ برنگے خاکے، اشکال اور بہ آسانی قابل مطالعہ تحریر و عواہل ہیں جو طالب علم کو اپنی جانب راغب کریں گے۔ اور وہ کتاب کے متن سے دلچسپی پیدا کرتے ہوئے کتاب کو اپنی خاص دستاویز متصور کرے گا۔

### باب - 1: حقیقی اعداد:

اس باب میں حقیقی اعداد کا گہرائی سے مطالعہ کیا گیا ہے جس کے تحت حساب کے بنیادی مسئلہ کا مختصر جائزہ لیا گیا ہے۔ اور ناطق اعداد ان کا اعشاری پھیلاؤ کے علاوہ غیر مختتم تکراری ناطق اعداد بھی دیئے گئے ہیں۔ مزید برآں غیر ناطق اعداد بھی شامل کئے گئے ہیں۔ اس باب میں پہلی مرتبہ لوگارٹھم شامل کیا گیا ہے جس کے تحت اس کے بنیادی قوانین اور اطلاقات کی تفصیلات درج کی گئی ہیں۔

### باب - 2: سیٹس:

ثانوی سطح پر یہ کلاماً ایک نیا باب ہے۔ سابقہ نصاب میں بھی یہ شامل کیا گیا تھا لیکن دسویں جماعت میں یہ پہلی مرتبہ اس نوعیت سے رکھا گیا ہے اس میں وسیع تر مثالیں پیش کی گئی ہیں۔ ان میں سیٹس کی تعریف و توضیح ان کے اقسام، وین کی شکلیں، سیٹس کے اعمال اور ان کے فرق بتلائے گئے ہیں۔ یہ واضح کیا گیا ہے کہ سیٹس کی تفہیم کس طرح کی جائے؟ اور کس طرح کسی بھی شے سے سیٹ تیار کئے جائیں۔

### باب - 3: کثیر رکنیاں:

ہم نے اس باب میں کثیر رکنیوں سے بحث کی ہے کہ وہ کیا ہیں؟ کثیر رکنیوں کا درجہ اور ان کی قیمت بھی اسی میں شامل ہوگئی۔ خطی مساواتوں اور دو درجی مساواتوں کو ترتیبی طور پر ظاہر کیا گیا ہے کثیر رکنیوں کے شعراء اور عددی ضربوں پر بحث کی گئی ہے اور ان کے مابین رشتہ بتایا گیا ہے۔ مکعبی کثیر رکنی اور کثیر رکنیوں کے تقسیمی الگورتھم کو پہلی مرتبہ متعارف کیا گیا ہے۔

### باب - 4: دو متغیر مقداروں میں خطی مساواتوں کے جوڑ:

نامعلوم مقداروں کو محسوب کرنے کی مثال سے باب شروع ہوتا ہے اور دو مساواتوں کے استعمال کا جائزہ لیا گیا ہے۔ اس باب میں کوئی دو متغیر مقداروں میں خطی مساواتوں کا حل پیش کیا گیا ہے۔ اور ترتیبی والجبری طریقے استعمال کئے گئے ہیں۔ عددی ضربوں اور مساوات کے نظام کے نیچر کے مابین ہمیشگی بتائی گئی ہے۔ مساوات کو دو متغیر مقداروں کی خطی مساوات میں تبدیل کرنے کی بابت وضاحت شامل ہے۔

سوالات اس طرز پر ترتیب دیئے گئے ہیں کہ مضمون ہی کے تحت مختلف بابوں اور دیگر مضامین کے مابین تعلق کو اہمیت دی گئی ہے۔ روزمرہ کے تجربات میں نامعلوم مقدار کو معلوم کرنے کی اہلیت طالب علم ہی پیدا کرنے کی کوشش کی گئی ہے

اس کتاب میں باب 8 اور 10 علم ہندسہ سے متعلق ہیں۔ تینوں بابوں میں از خود توضیحات ظاہر کرنے اور اپنے ذاتی تجربات سے تاویل پیش کرنے کی بابت ترغیب دی گئی ہے۔ بہتر مواصلاتی صلاحیت سوالات حل کرنے اور مختلف مستوی اشکال کے مابین تعلق اخذ کرنے طالب علم کے

لیے سہل انداز اپنایا گیا ہے۔ باب 9 علم مثلث کی نسبتوں سے متعلق ہے اس میں tangent اور Secant کی خصوصیات بتائی گئی ہیں۔ دائرے میں Secant سے تشکیل پانے والے رقبہ کی نسبت بحث کی گئی ہے۔ مساحت کے تحت ٹھوس اجسام ان کے حجم اور سطحی رقبہ پر سوالات شامل کئے گئے ہیں۔

باب - 5 دو درجی مساواتیں:

دو درجی مساواتوں کا مفہوم اور اجزائے ضربی و کامل مربع کے طریقے سے ان کو حل سمجھائے گئے ہیں۔ مکانی کی مدد سے ان کے ریشوں کی نوعیت بتائی گئی ہے۔

باب - 6 تصاعد:

ثانوی سطح پر پہلی مرتبہ اس باب کا آغاز کیا گیا ہے حسابی تصاعد و جیومیٹریہ تصاعد تو ضیحات بتائی گئی ہیں۔ متعلقہ اصطلاحات تفصیلی طور پر شامل کئے گئے ہیں۔ علاوہ ازیں  $n$  ویں رکن اور  $n$  ارکان تک مجموعہ کے سوالات بھی شامل ہیں۔

باب - 7 تخلیقی جیومیٹری:

کار تیزی مستوی پر دو نقاط کے درمیان فاصلہ مثلث کا نقطہ مرکز، کسی خطی قطعہ کا نقطہ تنہیت کا فہم دیا گیا ہے۔ علاوہ ازیں کسی مستوی میں مثلث کا رقبہ اور Heron کے ضابطہ سے رقبہ محسوب کرنا سمجھایا گیا ہے۔ کسی خط مستقیم کے ڈھلان کو بھی اس باب میں متعارف کیا گیا ہے۔

باب - 11 اور 12 پہلی مرتبہ شروع کئے گئے ہیں۔ مثلث میں وتر، ارتفاع اور قاعدہ کے درمیان ہم رشتگی اور مثلثات سے متعلق اطلاقات بتائے گئے ہیں۔ اس طرح علم مثلث شامل کیا گیا ہے۔ اعلیٰ تعلیم میں اس باب کی افادیت کے پیش نظر تحت کی پیمائش بھی اس سے منسلک ہیں۔ مثلث کے استعمال کا اک مختصر خاکہ علم مثلث کے ساتھ جوڑ دیا گیا ہے۔

باب - 13 قیاسیات کے باب کو نمہ سے آگے بڑھایا گیا ہے۔ اس باب میں روزمرہ زندگی سے چند مثالیں لیتے ہوئے قیاسیات کی مختلف اصطلاحیں شامل کی گئی ہیں۔

باب - 14 شماریات:

شماریات کی اہمیت اجاگر کی گئی ہے۔ گروہی معطیات، اوسط حسابیہ و وسطانیہ اور بہتاتہ کو محسوب کرنے مثالیں دی گئی ہیں۔ مختلف طریقے گروہی معطیات میں اپنائے گئے ہیں۔ مشمولہ میں ریاضیاتی ماڈلنگ متعارف کی گئی ہے۔ اس باب میں ریاضیاتی نمونوں کی بابت بحث کی گئی ہے۔

اساتذہ سے عرض ہے کہ کسی تعلیمی کورس کی کامیابی کا انحصار نصاب پر ہی نہیں بلکہ اساتذہ اور طریقہ تدریس پر بھی ہوتا ہے۔ یہ امید کی جاتی ہے کہ اساتذہ ریاضی کی تعلیم کو موثر بنانے اور اس کے معیار میں بہتری لانے کی بھرپور کوشش کریں گے اس سلسلہ میں ان سے ممکنہ تعاون کی توقع کی جاتی ہے۔ تا وقتیکہ اساتذہ ایسی کتاب کے نصاب کے منشاء کو پورا کرنے کی مخلصانہ سعی نہیں کرتے تعلیم کو معیار کو صرف کتاب کی تیاری سے یقینی نہیں بنایا جاسکتا۔ کتاب میں طالب علم کو درس و تدریس کا حصہ بنانے اور مختلف نصابی سرگرمیوں میں اسے شریک رکھنے کو یقینی بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس امر پر بھی توجہ دی گئی ہے کہ نصاب میں شامل مختلف عنوانات کے تحت تدریسی موضوعات کا فہم پیدا کیا جائے۔

طلباء کو چاہیے کہ وہ ”ہم نے کیا سیکھا“ کے تحت تمام نظریات کو اچھی طرح سمجھیں۔ مختلف مشقوں میں دیئے گئے سوالات کو حل کرنے کے علاوہ اساتذہ کو چاہیے کہ وہ خود اپنے طور پر متعلقہ نظریات کی بنیاد پر سوالات تیار کریں۔ اس طرح ہم توقع کر سکتے ہیں کہ معزز اساتذہ مضمون کو صحیح فہم کے ذریعہ کمرہ جماعت کے ماحول میں اک بہتر تبدیلی لائیں گے۔

”بہتر تدریس کے لیے نیک تمنا میں“



## نصاب

## I۔ اعداد کا نظام (23 پیر میٹس)

## (i) حقیقی اعداد (15 پیر میٹس)

- ◀▶ ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد سے متعلق معلومات
- ◀▶ اقلیدس کا سببی نظریہ
- ◀▶ حساب کا بنیادی مسئلہ - بیانات
- ◀▶ نتائج کے ثبوت -  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$  وغیرہ کی غیر ناطقی خصوصیت اور ناطق اعداد کا اعشاری پھیلاؤ / مختتم / غیر مختتم تکراری اعشاریہ
- ◀▶ حقیقی اعداد کی خصوصیات (سابقہ معلومات کا اعادہ، مثالوں کی تقسیم کے بعد اور مثالوں کے ذریعہ ترغیب دینا)
- ◀▶ لوگارٹھم کا تعارف
- ◀▶ کسی عدد کی قوت نما کی شکل سے لوگارٹھم کی شکل میں تحویل
- ◀▶ لوگارٹھم کی خصوصیات  $\log_a^1 = 0$ ;  $\log_a^a = 1$
- ◀▶ لوگارٹھم کے قوانین

$$\log xy = \log x + \log y; \log \frac{x}{y} = \log x - \log y; \log x^n = n \log x; a^{\log_a N} = N$$

◀▶ لوگارٹھم کا معیاری اساس اور روزمرہ زندگی میں لوگارٹھم کے استعمالات (امتحان سے مستثنیٰ)

## (ii) سیٹس (8 پیر میٹس)

- ◀▶ سیٹس اور ان کا اظہار
- ◀▶ خالی سیٹ، متناہی سیٹ اور لامتناہی سیٹس، آفاقی سیٹس
- ◀▶ مساوی سیٹس، تحت سیٹس، حقیقی اعداد کے سیٹ کے تحت سیٹس (خصوصی وقفے اور علامتی اظہار)
- ◀▶ وین کی اشکال اور سیٹس میں ارکان کی تعداد
- ◀▶ سیٹس کے بنیادی اعمال - سیٹس کے قوانین سیٹس کا اجماع اور سیٹس کا تقاطع
- ◀▶ غیر مشترک سیٹس اور سیٹس کے فرق

## II۔ الجبراء (46 پیر میٹس)

## (i) کثیر رکنیاں (8 پیر میٹس)

- ◀▶ کثیر رکنی کے صفر
- ◀▶ خطی، دو درجی اور ملکی کثیر رکنیوں کے صفروں کا جیومیٹریائی مفہوم، ترسیم کے استعمال سے
- ◀▶ کسی کثیر رکنی کے صفروں اور عددی ضربیوں کے درمیانی رشتہ
- ◀▶ صحیح عددی ضربیوں کے کثیر رکنیوں کے لیے نسبی الگورتھم پر سادہ سوالات

## (ii) دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ (15 پیر میٹس)

- ◀▶ مثالوں کے ذریعہ دو متغیرات پر خطی مساواتوں کی تشکیل
- ◀▶ خطی مساواتوں کے جوڑ کا ترتیبی اظہار - مساواتوں کے نظام کی نوعیت
- ◀▶ حل کی تعداد کے لیے الجبری شرائط
- ◀▶ الجبری طریقے سے دو متغیرات پر خطی مساوات کے جوڑ کا حل اندراج کا طریقہ
- ◀▶ روزمرہ زندگی سے متعلق سادہ سوالات جو خطی مساواتوں میں قابل تبدیل ہیں -

## (iii) دو درجی مساوات (12 پیر میٹس)

- ◀▶ دو درجی مساوات کی معیاری شکل  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$

- ◀◀ دو درجی مساوات کے حل (حقیقی ریٹے)۔ اجزائے ضربی اور کامل مربعوں کے ذریعہ یعنی دو درجی ضابطہ کے استعمال سے  
 ◀◀ میٹر اور ریٹوں کی نوعیت کے مابین تعلق  
 ◀◀ روزمرہ زندگی سے متعلق مسائل

## (iv) تصاعد (11 پیر میٹس)

- ◀◀ حسابی تصاعد کی تعریف (A.P)  
 ◀◀ حسابی تصاعد کے  $n$  ویں رکن اور پہلے  $n$  ارکان کا مجموعہ  
 ◀◀ جیومیٹرک تصاعد (G.P)  
 ◀◀ جیومیٹرک تصاعد کا  $n$  واں رکن

## III۔ جیومیٹری (33 پیر میٹس)

## (i) مشابہہ مثلثات (18 پیر میٹس)

- ◀◀ مشابہہ اور مماثل اشکال کے مابین فرق  
 ◀◀ مشابہہ مثلثات کی خصوصیات  
 ◀◀ (ثابت کیجیے) کسی مثلث میں ایک خطی قطعہ کسی ایک ضلع کے متوازی اس طرح کھینچا جائے کہ یہ دو اضلاع کو متفرق نقاط پر قطع کرتا ہو تو یہ خط ان اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے گا۔  
 ◀◀ (ترغیب دیں) اگر کوئی خطی قطعہ کسی مثلث کے کوئی دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرتا ہو تو یہ خط مثلث کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔  
 ◀◀ (ترغیب دیں) اگر کسی دو مثلثات میں متناظر زاویے مساوی ہوں تو ان کے متعلقہ ضلعے متناسب ہوں گے اور یہ مثلثات مشابہہ ہوں گے (زاویہ زاویہ زاویہ)  
 ◀◀ (ترغیب دیں) اگر کسی دو مثلثات میں متناظر اضلاع متناسب ہوں تو ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں گے اور یہ دونوں مثلثات مشابہہ ہوں گے۔ (ضلع ضلع ضلع)  
 ◀◀ (ترغیب دیں) اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ ایک دو مثلث کے کسی ایک زاویے کے مساوی ہوں اور ان زاویوں کو گھیرنے والے اضلاع متناسب ہوں تو یہ دونوں مثلثات مشابہہ ہوں گے (الہس سے الہس)  
 ◀◀ (ثابت کیجیے) کوئی دو مشابہہ مثلثات کے رقبوں کی نسبت مساوی ہوئی ہے ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے۔  
 ◀◀ (ترغیب دیں) اگر کسی مثلث میں اس کے زاویہ قائمہ کی راس سے وتر پر ایک عمود کھینچا جائے تو اس کے عمود کے دونوں جانب بننے والے مثلثات بڑے مثلث کے مشابہہ ہوں گے اور ایک دوسرے کے بھی مشابہہ ہوں گے۔  
 ◀◀ (ثابت کیجیے) کسی مثلث قائمہ الزاویہ میں وتر پر کا مربع باقی کے دو اضلاع پر مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔  
 ◀◀ (ثابت کیجیے) کسی مثلث میں اگر کسی ایک ضلع پر کا مربع باقی دو اضلاع پر بننے والے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہو تو یہ مثلث قائمہ الزاویہ مثلث ہوگا۔  
 ◀◀ (بناوٹ) بنیادی متناسبی مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک خطی قطعہ کی تقسیم کا عمل  
 ◀◀ (بناوٹ) کوئی مثلث دی ہوئی اسکیل (پیمانہ کی شرح) کے مطابق دیئے ہوئے دوسرے مثلث کے مشابہہ ہوتا ہے۔

## (ii) ایک دائرے کے Tangent اور Secants (15 پیر میٹس)

- ◀◀ ایک دائرے کے Tangent اور Secants (15 پیر میٹس)  
 ◀◀ ایک ایسے دائرے کے Tangents جس میں کسی ایک نقطہ سے وتر کچھ اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ جو کسی اور نقطہ پر قریب سے قریب تر ہو جاتے ہیں۔  
 ◀◀ (ثابت کیجیے) دائرہ کے کسی نقطہ پر واقع ہونے والا Tangent اس نقطہ سے کھینچنے والے نصف قطر کے عمود وار ہوتا ہے۔  
 ◀◀ (ثابت کیجیے) کسی دائرہ کے ایک بیرونی نقطہ سے کھینچنے والے Tangent کی لمبائی مساوی ہوتی ہے۔  
 ◀◀ (بناوٹ) کسی دائرہ پر ایک نقطہ سے ایک Tangent کھینچنا  
 ◀◀ (بناوٹ) کسی بیرونی نقطہ سے دائرہ پر Tangent کے جوڑ  
 ◀◀ Secant سے کسی دائرے میں خطی قطعہ  
 ◀◀ کسی دائرہ میں قطعہ کبر/قطعہ اصغر کے رقبے

## (iv) تحلیلی جیومیٹری

- کار تیزی جیومیٹری کے نظریات کا اعادہ، خطی مساواتوں کی ترسیم کے ذریعہ  
 دو نقاط  $P(x_1, y_1)$  اور  $Q(x_2, y_2)$  کے درمیان کا فاصلہ  

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
  
 سکشن فارمولہ (کسی خطی قطعہ کی  $m:n$  کی نسبت میں اندرونی تقسیم)  
 کار تیزی مستوی پراک مثلث کا رقبہ  
 دو نقاط کو ملانے والے خط کی ڈھال

## (v) علم مثلث (23 پیر میٹس)

- (i) علم مثلث (15 پیر میٹس)  
 کسی مثلث قائمہ الزاویہ کے زاویہ حادہ کی مثلثی نسبتیں (Trigonometrical ratios) یعنی Secant 'Tangent' Cosine 'Sine اور  
 co-secant  
 زاویوں  $30^\circ$  اور  $40^\circ$  اور  $60^\circ$  (ثبوت کے ساتھ) کی مثلثی نسبتوں کی قدریں  
 تکمیلی زاویوں کے لیے نسبتوں اور مثلثی نسبتوں کے مابین ہم رنگی  
 Trigonometry کی متماثلات  
 (i)  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ , (ii)  $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ , (iii)  $\cot^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$

## (ii) علم مثلث کے اطلاقات (8 پیر میٹس)

- زاویہ فرازونشیب  
 بلندی اور فاصلہ پر روزمرہ زندگی سے متعلق سادہ سوالات  
 دو مثلثات قائمہ الزاویہ (زاویہ نہیں) سے متعلق سوالات اور  $30^\circ$  اور  $45^\circ$  اور  $60^\circ$  تک محدود فرازونشیب کے زاویے

## (vi) مساحت (10 پیر میٹس)

- (i) سطحی رقبے اور حجم  
 سطح کے رقبوں پر سوالات اور حجم پر سوالات ملعب نما، ملعب نما، قائم استوانہ، مخروط، کوزے اور نصف کروں میں سے کوئی دو کو یکجا کر کے ان کے حجم پر سوالات  
 ایک ٹھوس دھاتی جسم کو دوسری شکل میں تبدیل کرنے کی صورت میں ان کے حجم پر سوالات اور دوسرے ایسے ملے جلے سوالات جو ایک یا دو مختلف ٹھوس  
 اجسام سے متعلق ہوں۔

## (ii) قیاسیات (10 پیر میٹس)

- قیاسیات کا نظریہ اور اس کی تعریف کا اعادہ  
 علاقائی انظہار کے ذریعہ واحد وقوع پر (روزمرہ زندگی سے متعلق) سادہ سوالات  
 ایک ساتھ وقوع کا نظریہ

مشمولہ

## ریاضیاتی ماڈلنگ (8 پیر میٹس)

- ریاضیاتی ماڈلنگ کا نظریہ  
 روزمرہ زندگی میں ریاضیاتی ماڈلنگ کے وسیع تر مرحلوں پر تبادلہ (سود مقرر، شرح، قسطی ادائیگی وغیرہ۔۔۔)

## تعلیمی معیارات (ہائی اسکول)

طلباء کیا جاننا چاہیے اور ان پر عمل کرنے کے قابل ہوں ان کے بارے میں تعلیمی معیارات واضح بیانات ہوتے ہیں، ان کی بنیاد پر ذیل کے تعلیمی معیارات کی درجہ بندی کی گئی ہے۔

### مسئلہ کا حل

طریقہ عمل اور تصورات کو استعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی مسائل کو حل کرنا۔

### (a) مسائل کے اقسام

مسائل مختلف صورتوں میں ہو سکتے ہیں، جیسے معرہ، عبارتی سوالات، تصویری مسائل، طریقوں پر مبنی سوالات، معطیات، جدول اور تریسیمات وغیرہ۔

### (b) مسئلہ کو حل کرنا

- مسئلہ کو پڑھنا۔
- معلومات / ڈیٹا کے تمام حصوں کی شناخت کرنا۔
- کونسا خیال یا تصور شامل ہے اس کی تفہیم کرنا۔
- متعلقہ طریقہ اعمال (مفروضات) ضابطوں وغیرہ کو دہرانا۔
- طریقہ عمل کا انتخاب۔
- مسئلہ کو حل کرنا۔
- مسئلہ پر مبنی عبارتی سوالات اور ان کے جوابات کی جانچ۔

### (c) پیچیدگی

- ایک سوال کی پیچیدگی اس پر منحصر ہوتی ہے۔
- تعلق پیدا کرنا (رابطے کے سیکشن میں اس کی تعریف کی گئی ہے)۔
- اقدامات کی تعداد۔
- مراحل کی تعداد۔
- عبارتی سوالات کو سلجھانا۔
- طریقہ عمل کی نوعیت۔

### استدلالی ثبوت

- مختلف مراحل کے درمیان وجوہات بتلانا (مختلف مفروضات سے)
- ریاضیاتی کلیات (ضابطے) اور مفروضات کو بتانا اور سمجھنا۔
- طریقہ عمل کی جانچ اور تفہیم، منطقی بحث کی جانچ۔

## اظہار

- ریاضی کے اعداد کے نظام کو لکھنا، پڑھنا اور ان کا اظہار کرنا۔ (عباری اور علامتی شکل میں)
- مثلاً  $180^0 =$  زاویوں کا مجموعہ  $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ ,  $3 < 5$ ,  $3 + 4 = 7$
- ریاضیاتی عبارتوں کی تشکیل
- ریاضیاتی خیالات کو اپنے الفاظ میں بیان کرنا جیسے مربع ایک بند شکل ہوتی ہے جس کے چار ضلعے اور چار زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- ریاضیاتی طریقوں کی تشریح جیسے دو ہندسی اعداد کی جمع میں پہلے اکائی کے مقام کے ہندسوں کو جمع کرنا اس کے بعد دہائی کے مقام کے ہندسوں کو ہمیشہ حاصل کو مد نظر رکھتے ہوئے۔
- ریاضیاتی منطق کی تشریح

## رابط

- ریاضیاتی علاقے کے تصورات میں ربط پیدا کرنا مثلاً جمع کو ضرب سے، کل کے حصوں کو نسبت سے تقسیم سے، نقش و نگار نمونے میں اور تشاکل، پیمائشات اور فاصلے۔
- روزمرہ زندگی سے تعلق پیدا کرنا۔
- ریاضی سے دوسرے مضامین میں ربط پیدا کرنا۔
- مختلف ریاضیاتی (domains) علاقوں کے تصورات میں ربط پیدا کرنا جیسے معطیات کا اظہار اور حساب یا حساب اور فضاء۔
- تصورات کو مختلف طریقوں سے جوڑنا/مربوط کرنا۔

## نمائندگی

- جدول کے معطیات، عددی خط، تصویری ترسیم، بارگراف، 2D اشکال، 3D اشکال، تصویروں اور خاکوں کو پڑھنا اور ان کی تشریح کرنا۔
- جدول، عددی خط، تصویری گراف، بارگراف اور تصویروں کو بتانا۔
- ریاضیاتی علاقوں میں اور اشکال۔