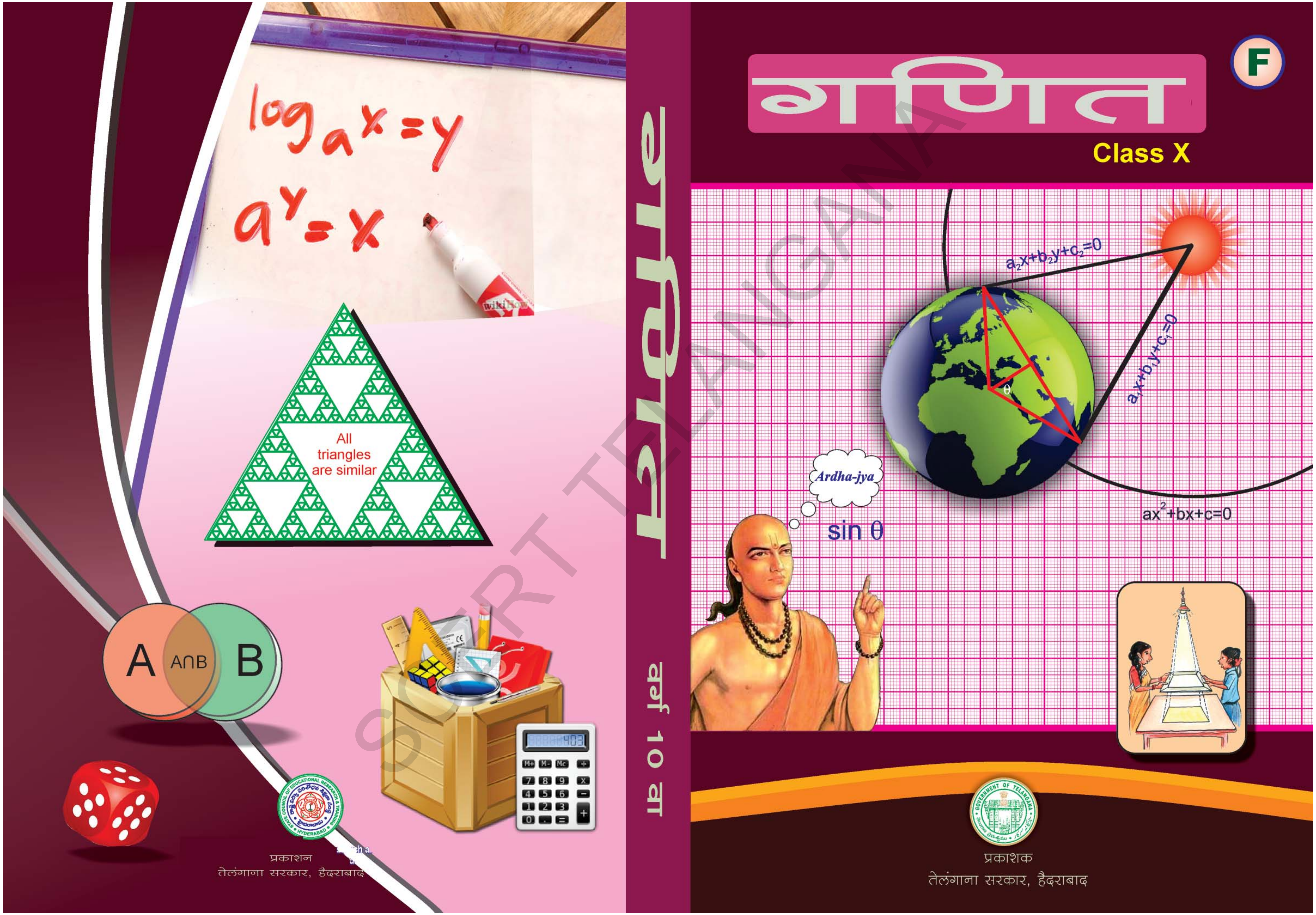


गणित
Class X
गणित
वर्ग 10 वा
$\log_a x = y$
$a^y = x$
All triangles are similar
A
A∩B
B
$a_2x+b_2y+c_2=0$
$a_1x+b_1y+c_1=0$
Ardha-jya
sin θ
$ax^2+bx+c=0$
प्रकाशन
तेलंगाना सरकार, हैदराबाद
प्रकाशक
तेलंगाना सरकार, हैदराबाद
SCERT TELANGANA

गणित (MARATHI MEDIUM) **वर्ग 10 वा**

पाठ्यपुस्तक विकास आणि प्रकाशन मंडळ

मुख्य निर्मिती अधिकारी : **श्री जी. गोपाल रेड्डी**
संचालक एस.सी.ई.आर.टी. हैद्राबाद,

मुख्य कार्यकारी अधिकारी : **श्री बि.सुधाकर,**
संचालक ,शासकीय पुस्तक मुद्रणालय, हैद्राबाद,

संघटन प्रमुख : **श्री डॉ.एन. उपेंदर रेड्डी,**
प्रो.सी.ॲण्ड टी विभाग प्रमुख एस.सी.ई.आर.टी.हैद्राबाद,

पोजिशन पेपर आणि गणित पाठ्यक्रम आणि पाठ्यपुस्तक विकासासाठी अध्यक्ष
प्रो.वी. कान्नान
गणित आणि संख्याशास्त्र विभाग, एच.सी.यु, हैद्राबाद

मुख्य सल्लागार

श्री चुक्का रामाय्या
विख्यात गणित तज्ञ
तेलंगाना, हैद्राबाद

डॉ.एच. के. दिवाण
शैक्षणिक सल्लागार विद्या भवन सोसायटी
उदयपुर, राजस्थान

तेलंगाना सरकार, हैदराबाद

कायद्याचा आदर करा
हक्क मिळवा

शिक्षणाने प्रगती साधा
नम्रमणे वागा

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

First Published 2014
New Impressions 2015, 2016, 2017,2018,2019

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho Title Page 200 G.S.M. White Art Card

तेलंगाना शासनाव्दारे मोफत वितरण 2019-20

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

पाठ्य पुस्तक विकास समीती

लेखक

श्री ताता व्यंकटा रामा कुमार
मु.अ. जेड.पी.एच.एस.मुलुमुडी,नेल्लोर

श्री गुट्टुमुक्कला वाय.बी.एस.एन.राजु
एस.ए.,एमपीएल.हायस्कुल, कास्पा, विजयनगरम

श्री सोमा प्रसाद बाबु
पीजीटी.एपीटीडब्युआरएस,चंद्रशेखरापुरम,नेल्लोर

श्री पडाला सुरेश कुमार
एस.ए. जीएचएस. विजयनगर कॉलनी, हैद्राबाद

श्री जी. अंनता रेड्डी
निवृत्ती मु.अ. रंगारेड्डी

श्री पेद्दादा डी.एल. गणपती शर्मा
एस.ए. जीएचएस. झमिस्तहानपुर, मानिकेश्वरनगर, हैदराबाद

श्री डॉ. पोनडला रमेश
लेक्चर, गोर्व्ह.आयएएसई, नेल्लोर

श्री सरदार धर्मेंद्र सिंग
एस.ए. जेडपीएचएस, धानुर(बी) आदिलाबाद

श्री कोमानदुरु श्रीधराचार्युलु
एस.ए., जेडीपीएचएस, रंगायपेल्ली, मेडक

श्री नागुला रवी
एस.ए., जेडीपीएचएस, लोकश्वरम, आदिलाबाद

श्री कांडला रामय्या
एस.ए., जेडीपीएचएस, कासीमदेवपेट, वरंगल

श्री काकुलावरम राजेंद्र रेड्डी
समन्वय, एससीईआरटी, आंध्र प्रदेश, हैद्राबाद

मुख्य संपादक

श्री डॉ. एच.के. देवान
शैक्षणिक सल्लागार, विद्या भवन सोसायटी उदयपुर, राजस्थान

संपादक

श्री प्रा. व्हि. शिवा रामप्रसाद(निवृत्त)
गणित विभाग, उस्मानिया विद्यापिठ हैद्राबाद

श्री प्रो.एन.सीएच. पट्टाभी रामाचार्युलु
(निवृत्त) औद्योगिक प्रशिक्षण संस्था, वरंगल

श्री ऐ. पद्मनाभन (निवृत्त)
विभाग प्रमुख, गणित विभाग, महाराणी
कॉलेज पेद्दापुरम, इस्ट गोदावरी जिल्हा

श्री डॉ. जी.एस.एन. मुर्ती (निवृत्त)
गणिततज्ञ, राजाह.आर.एस.आर.के. रंगाराव
कॉलेज, बोब्बीली, विजयनगरम जिल्हा (अ.प्र)

समन्वयक

श्री के. राजेंद्र रेड्डी
समन्वयक, एससीईआरटी, हैद्राबाद (आं.प्र)

श्री के. नारायण रेड्डी
लेक्चर, एससीईआरटी, हैद्राबाद (आं.प्र.)

शैक्षणिक साहाय्यक गट सदस्य

श्री हनिफ पालीवाल
विद्याभवन एजुकेशन रिसोर्स सेंटर, उदयपुर

कुमारी प्रिती मिश्रा
विद्याभवन एजुकेशन रिसोर्स सेंटर, उदयपुर

श्रीमती स्नेहबाला जोशी
विद्याभवन एजुकेशन रिसोर्स सेंटर, उदयपुर

कुमारी तानिया सक्सेना
विद्याभवन एजुकेशन रिसोर्स सेंटर, उदयपुर

कुमारी एम. अर्चना
गणित आणि सांख्यिकी विभाग, हैद्राबाद विद्यापिठ, हैद्राबाद

रेखाटन

श्री प्रशांत सोनी
विद्याभवन एजुकेशन रिसोर्स सेंटर, उदयपुर

श्री एस.एम.अक्रम
डी.टी.पी. चालक विद्याभवन एजुकेशन रिसोर्स सेंटर, उदयपुर

श्री भवाणी शंकर
डी.टी.पी. चालक विद्याभवन एजुकेशन रिसोर्स सेंटर, उदयपुर

श्री सुनकारा कोंटेश्वर राव
डी.टी.पी.चालक, पवन ग्राफिक्स, हैद्राबाद

श्रीमती सुनकारा सुनिता
डी.टी.पी.चालक, पवन ग्राफिक्स, हैद्राबाद

राधाकान्त पात्र
डी.टी.पी.चालक, हैद्राबाद

मराठी अनुवादक समन्वय

श्री जिलानी बाशा, प्राचार्य
शासकीय आध्यापक विद्यालय, आदिलाबाद

सह-समन्वयक: **श्री के. किरणकुमार (ईएलटीसी)** शासकीय आध्यापक विद्यालय, आदिलाबाद

मराठी अनुवादक : **श्री प्रशांत बाबाराव भोयर, एस.ए.**
गोर्व्ह.ग.1 शाळा, आदिलाबाद

श्री नागेश चनमनवार, एस.ए.
जेडपीएचएस, इंद्रवेल्ली, आदिलाबाद

मराठी डि.टी.पी. : **श्री राजेश दानका, (डी.टी.पी)** शासकीय आध्यापक विद्यालय, आदिलाबाद

प्रस्तावना

शिक्षण ही मानवास अज्ञानातुन मुक्त आणि सामर्थ्यवान बनविणारी एक कार्यप्रणाली आहे. शिक्षणाची प्रचंड अव्यवस्था ओळखुन सर्व साधारणवादी समजानी दर्जेदार शिक्षणाची तरतुद करण्याचा अगदी स्पष्ट उद्देशाने प्राथमिक शिक्षणाचे सार्वत्रिक करण्याची जबाबदारी घेतली. दुसऱ्या पायरीत माध्यमिक शिक्षणाला सार्वत्रिक किंवा सर्वसाधारण करण्याची चालना मिळाली. माध्यमिक आवस्था ठळकपणे क्रियाशिल गणितापासुन सुरुवात झाली. उच्च प्राथमिक आवस्थेच्या अभ्यासापर्यंत शिस्तपुर्णक गणिताचे अध्ययन आहे. या अवस्थेत समस्येची तार्किक सिध्दता, प्रमेय इत्यादी परिचीत केले आहे. त्यापासुन वेगळा एक खास विषय जो इतर कोणत्याही विषयाचा सहगामी आहे. ज्यात विचारसरणी आणि पृथकरण आहे.

आपल्या तेलंगानातील विद्यार्थ्यां मोठ्या उत्साहाने आणि आनंदाने गणित शिकतील अशी मला खात्री वाटते.गणितास त्याच्या जिवणातील महत्वाचा अंग बनवुन आणि अर्थपुर्ण प्रश्न सोडवुन या पुस्तकांच्या वाचनाव्दारे गणिताचे मुलभुत आकार समजुन घेतील. शिक्षकांना अभ्यासक्रमातील अवघड विषयाकडे लक्ष वेघुन आणि अध्यापण शास्त्रातील दृष्य समजुन घेणे आणि ठळक विषयाकडे लक्ष केंद्रीकृत करण्याची गरज आहे. अभ्यासक्रमाच्या परिणाम कारक, व्यवहारासाठी संकिर्ण खोलीचे वातावरण, शिकविणे आणि शिकणे प्रणालित अत्यंत महत्वाचे आहे. वर्ग खोलीच्या संस्कृतीला संवर्धण करुन त्याच्या मनात धनात्मक रुची ठसवुन जिवनशैलीच्या वेगवेगळ्या संभावतेचा आणि अभिप्रायातील फरक आणि जिवन हे ज्ञानाची तहान आहे. हे शिक्षणाव्दारे त्यांच्या मनात ठसविले पाहिजे.

राज्य अभ्यासक्रम फ्रेम वर्क (SCF 2011) ने दाखवलेली गणित शिकविण्याच्या सदर कल्पणेस गणिताच्या दर्जेदार कागदावर श्रमकौशल्य निर्मीत करुन राज्यात गणित शिकविण्यासाठी पाठ्यपुस्तक प्रमाणाची मांडणी केली. सर्व भावनांना साकार करण्याचा प्रयत्न पाठ्यपुस्तकाने केला आहे. राज्य विद्या परिशोधन संस्था (SCERT) आपल्या राज्यामधील सर्व शिक्षकवृंद ज्यानी या पाठ्यपुस्तकांच्या विकासासाठी हातभार लावला आणि पाठ्यपुस्तक विकास समितीच्या मेहनतीची प्रशंसा केली. मी जिल्हाशिक्षणाधिकारी, मंडळ शिक्षणाधिकारी आणि मुख्य शिक्षकाचा अतिशय आभारी आहोत. मी संस्था आणि संघटना यांचा सुध्दा आभारी आहे, ज्यांनी या पाठ्यपुस्तकाच्या विकासात वेळ दिला मी कार्यालयाचे निदेशक आणि शालेय शिक्षणाचे संचालक आणि विद्या भवन सोसायटी उदयपुर, राजस्थान ज्यांनी या पाठ्यपुस्तकाच्या विकासासाठी साहय्यता प्रधान केली. त्यांचे सुध्दा मी आभारी आहे. या कामाला निरंतर परिश्रमाने दर्जावाढविल्या बद्दल तुमचे आभारी आहोत.तुमच्या स्पष्टीकरणाचे आणि सल्ल्याचे आम्ही मनपुर्वक स्वागत करतो.

स्थळ : हैद्राबाद — संचालक

दिनांक : 17 आक्टोंबर 2013 — SCERT, हैद्राबाद

मनोगत

विद्यार्थी तीन वर्ष उच्च प्राथमिक (एलेंमेटरी) (६,७,८) आणि एक वर्ष माध्यमिक स्थायी (९) वरचे अभ्यास पुर्ण करुन या पाठ्यपुस्तकाला अभ्यास करणार आहेत. विद्यार्थी या वर्षात त्याचे शालेय शिक्षण पुर्ण करणार आहेत. म्हणुन प्रत्येक विद्यार्थ्याला पाहिजे असलेले आत्मविश्वास शिकलेले अंश त्यांच्या अनुभवाला जोडुन ज्ञानाचा विकास करण्यासाठी शिकण्याची प्रक्रिया सतत चालु ठेवावा.

गणीत हे प्रत्येकाला आवश्यक आहे. म्हणुन शालेय शिक्षणात माध्यमिक स्थायी पर्यंत गणिताला अध्ययन प्रक्रियेत समावेश करण्यात आला आहे. सध्याच्या काळात सुध्दा गणिताची तुलना इतर विषयासोबत करुन पुर्ण समाजाला सुध्दा गणित शिकणे, अवघड आहे असे सर्व समजतात. विद्यार्थी, शिक्षकांनाच नव्हे तर पुर्ण समाजाला सुध्दा गणित शिक्षके अवघड आहे असे सर्व समजतात. या अवस्थेत गणित हे फक्त शिकण्याचे विषय नसुन इतर विषय संबंध जोडुन असलेले आहे. हे आपली जिवन शैली उंचवण्याचे काम करते असे समजणे आवश्यक आहे. गणित शिकणे म्हणजे फक्त सुत्र माहित करणे नव्हे, शाळेच्या बाहेरच्या जिवनातील संदर्भाशी उपयोग करुन काम पुर्ण होण्यासाठी केले तर गणिताच्या अभ्यासा विषयी भिती दुर होऊन आवड निर्माण होते.

गणित अध्यापन मध्ये येणाऱ्या अडचणीत मुख्य म्हणजे गणित संकल्पनेला स्पष्ट करणारे विधान होय. गणित अध्यापन फक्त संख्याना अवघड गणनाना सिध्दता, व्याख्या, स्मरण शक्ती वर आधारीत सत्य, सतत प्रक्रिया होऊन सोपी पध्दत आणि सिध्दता सहीत असलेले सोडवणुक केंद्रीकृत होऊन आहे. शोध, समजणे, नविन विचार, संकल्पना निर्माणाला प्रोत्साहन देत गणिताच्या समस्या सोडविणे एकाच पध्दतीत असते अशी कल्पना काढुन टाकुण समस्या साधनेला विभिन्न मार्गाने करु शकते हे हा विश्वास त्यांच्यात निर्माण करावा.

या पुस्तकाव्दारे विद्यार्थ्यांच्या समस्या सोडविण्यासाठी अनेक मार्गाचे पध्दतीची निवड गणितीय संकल्पनेला समजुन घेण्यासाठी पाहिजे असलेल्या नमुन्याना शोध संकलपनेच्या मध्ये संबंध ओळखुन संबंध बनवुन तार्कीक विचार घेतात. शिक्षक व विद्यार्थी हा पाठ्यपुस्तक अध्ययन व्दारे संकल्पना समजणे, सुत्रीकरण आणि विविध समस्यांच्या भिन्न सोडवणुकीच्या पध्दतीव्दारे माहित करण्याचे सामर्थ्य येईल असे त्यात शिकवायला पाहिजे. विद्यार्थी समस्या सोडविण्यासाठी स्वतंत्रपणे गटामध्ये चर्चा करुन विश्लेषण करुन तार्किक पध्दतीत सोप्या पध्दतीला माहित करावे. विद्यार्थी ते जे शिकलेले आहेत त्याच्या आधारावर नविन गणितीय समस्या सोडविण्याचे सामार्थ त्यांच्या मध्ये यायला पाहिजे अशी अपेक्षा बाळगु. विद्यार्थ्यांना गणित सोडविणे म्हणजे फक्त समस्या सोडविणे, इतर विद्यार्थ्यां माहित केलेले उपयोगात आणलेल्या पध्दतींना, चर्चा पध्दतीत विश्लेषणांचा करणाऱ्यां स्थायीला वाढविण्यासाठी म्हणुन ओळखावे. कष्टाने गणिताचा अभ्यास करण्यापेक्षा आवडीने गणिताचा अभ्यास करण्याचा प्रयत्न करावा.

दाहव्या वर्गात हा विद्यार्थ्याच्या माध्यमिक स्थायीतील शेवटचा वर्ष आहे. विद्यार्थ्यांनि शिकलेल्या संकल्पनेला दैनंदिन जिवनात त्या संदर्भाना तो अनुभवतो. पण दैनदिंन जिवनातील सर्व संदर्भाला गणितीय संकल्पनेशी सांगड घालु शकत नाही. हा स्थायी पुर्ण केलेला विद्यार्थी एका सशर्त विधानाने कशा प्रकारे सिध्द करतात त्या कार्यक्रमाला लिहिण्याच्या पध्दतीला शिकतात. गणिताच्या अध्ययनाचा मुख्यउद्देश उपयोगात आणि पाठ्यपुस्तकात सांगीतल्या प्रमाणे विद्यार्थी त्यांच्या गणित संकल्पनेला,शोधा ना, गणितीकरण करावे. वर्गात शिकलेल्या अमृत संकल्पनेला समजुन त्यांच्या अनुभवाना क्रमबध्दीकरण करुन निर्माणात्मक प्रयत्नव्दारे संपुर्णात आणावे. गणितीय संकल्पनेला गणितीच्या व्याख्येत व्यक्तीकरण करण्याचे सामार्थ विद्यार्थ्यामिध्ये असायला पाहिजे. हा पाठ्यपुस्तक बरेचश्या विषय नैपुण्य असणाऱ्यांशी चर्चा करुन त्यांच्या अमुल्य सलहाना घेऊन केलेले आधार पत्र, शैक्षणिक सामर्थ्य आधर करुन तयार करण्यात आले. विशेष अनुभव आणि तज्ञ असलेल्या लेखकांच्या प्रयत्नात तयार झालेला हे पाठ्यपुस्तक आहे. त्या सर्व लेखकाप्रती आम्ही आभार व्यक्त करतो आणि या पुस्तका संदर्भातील सुचना आणि सल्ला याची दखल घेतली जाईल. जेणे करुन हे पुस्तक वाचकांसाठी आणखी दर्जेदार होइल.

पाठ्य पुस्तक विकास मंडळ

गणित वर्ग 10 वा

धड्याचे क्रमांक	धड्याचे नाव	एकुण तास	अभ्यासक्रमाचा कालावधी	पान क्र.
01	वास्तव संख्या	15	जुन	1 - 27
02	संच	08	जुन	28 - 50
03	बहुपदी	08	जुलै	51 - 76
04	दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाची जोडी	15	सप्टेंबर	77 - 104
05	वर्ग समीकरणे	12	ऑक्टोबर	105 - 128
06	श्रेढी	11	जानेवारी	129 - 162
07	निर्देशांक भुमिती	12	नोंव्हेबर	163 - 194
08	समरुप त्रिकोण	18	जुलै,ऑगस्ट	195 - 228
09	वर्तुळाच्या छेदिका आणि स्पर्शीका	15	नोंव्हेबर	229 - 248
10	महत्वमापण	10	डिसेंबर	249 - 272
11	त्रिकोणामिती	15	ऑगस्ट	273 - 297
12	त्रिकोणामितीचे उपयोजन	08	सप्टेंबर	298 - 308
13	संभाव्यता	10	जानेवारी	309 - 326
14	सांख्यिकी	15	जुलै	327 - 356
परिशिष्ठ	गणितीय नमुने तयार करणे	08	जानेवारी	357 - 369
	उत्तरे		फेंब्रुवारी	370 - 388
	Revision उजळणि			

आपले राष्ट्रीय गित

- रविंद्रनाथ टगोर

जन गण मन अधिनायक जय हे
भारत भाग्य विधाता ।
पंजाब, सिंध, गुजरात, मराठा
द्राविड उत्कल बंग ।।
विंध्य हिमाचल यमुना, गंगा
उच्छल जलधितरंग ।
तव शुभ नामे जागे ।
तव शुभ आशिष मागे ।
गाहे तव जय गाथा
जन गण मंगलदायक जय हे
भारत भाग्य विधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे
जय जय जय जय हे ।

प्रतिज्ञा

- पैडिमर्री व्यंकटा सुब्बाराव्

"भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत. माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी, म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

प्राणी मात्रावर दया दाखविण.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे."

CHAPTER

1 Real Numbers
वास्तविक संख्या

1.1 प्रस्तावणा

"पुर्णांक संख्या ईश्वरानी बनविल्या, बाकी सर्व काम मानवाचे " ____ लिओपोल्ड क्रोनेकर

आपले जिवन संख्याने भरुन आहे. तुमचा जन्म झालेल्या क्षणाची कल्पना करा. तुमच्या आई वडीलांनी तुमच्या जन्माचा वेळ, तुमच वजन, तुमच्या उंचीची नोंद केली असेल आणि अतीमहत्वाचे म्हणजे तुमच्या हाताची आणि पायाची बोट मोजली असेल. म्हणजेच आपले जिवन हे संख्यांनी पुर्णपणे व्यापलेली आहे.

आणखी कोणत्या संदर्भात तुम्ही संख्याचा वापर करता ?

आपले वय सांगण्यासाठी आपण संख्याचा उपयोग करतो तसेच आपले उत्पन्न मोजण्यासाठी आणि खर्च केल्यानंतर आपण केलेली बचतला माहित करण्यासाठी संख्याचा उपयोग करतो या प्रकारे आपल्या संपत्तीचे मोजमाप करतो.

या धड्यात आपण संख्याचा कल्पना विषयी माहिती घेणार आहोत.गणित विषयात संख्याचे पात्र मुलभुत आहे. येथे आपण संख्यांची समृध्दी आणि तसेच त्यांच्या संशोधन केलेल्या आश्चर्यकारक गुणांविषयी पाहणार आहोत.

एका कोडे पाहु या.

तुम्ही बगीच्यात फिरतांना तुम्हाला मधमाशांचा मोहोळ फुलावर बसलेला दिसला असेल. **एका परिस्थितीची कल्पना करु या.** जर मधमाशाचा थवा दोन फुलावर सारख्या संख्येने बसलेले असेल तर एक मधमाशी उरते जर ते तीन फुलावर सारख्या संख्येने बसलेले असेल तर दोन मधमाश्या उरतात. जर ते चार फुलांवर बसले तर तीन मधमाश्या उरतात. त्याच प्रमाणे जेव्हा ते पाच फुलावर सारख्या संख्येने बसले असेल तर एक ही मधमाशी उरत नाही.

जर तिथे जास्तीत जास्त 50 मधमाशा असेल तर मोहोळ मध्ये किती मधमाशी असतील ?

हे कोडे विश्लेषण करून सोडवु या.

समजा मधमाशांची संख्या 'x' तर कोड्यात दिल्या प्रमाणे $x \leq 50$.

जर मधमाशांना समान संख्याने 5 मोहोळात विभागले तर तेथे एकही मधमाशी उरत नाही. याला गणीतिय रुपात $x = 5a + 0$ काही नैसर्गिक संख्यासाठी 'a'.

जर मोहोळ ला 4 सारख्या गटात विभागले तर 3 मधमाशी उरतात याला $x = 4b + 3$ काही नैसर्गिक संख्या b साठी

जर मोहोळ ला 3 सारख्या गटात विभागले तर 2 मधमाशी उरते याला $x = 3c + 2$ काही नैसर्गिक संख्या c साठी

जर मोहोळ ला 2 सारख्या गटात विभागले तर 1 मधमाशी उरतात याला $x = 2d + 1$ काही नैसर्गिक संख्या d साठी

म्हणजेच प्रत्येक संदर्भात धन पुर्णाक y (या उदाहरणात घेतलेल्या किंमती5, 4, 3 आणि 2 अनुक्रमे) ने x ला भाग दिल्या जाते आणि 'r' बाकी राहते (येथे r हा 0, 3, 2 आणि1 अनुक्रमे), जे y पेक्षा लहान आहे युक्लीड भागाकार प्रमेयाचा वापर करुन या क्षणी आपण समीकरण लिहितो.

आपल्या कोड्या कडे वळु या हे सोडविण्यासाठी तुमच्या कडे एखादा उपाय आहे का? होय, तुम्ही 5 च्या गुणकाचा वापर करुन सर्व संदर्भाचा समाधान करु शकता. कारण $x = 5a + 0$.

जर एखाद्या संख्याला 2 ने भाग दिल्यानंतर 1 उरत असेल तर ती विषम संख्या असते. या संदर्भमिध्ये 5, 15, 25, 35, 45 इत्यादी. त्याच प्रमाणे उरलेल्या दोन संदर्भासाठी तुम्ही प्रयत्न केले तर तुम्हाला 35 मिळते

म्हणुन मोहळात 35 मधमाशी आहेत.

तुमच्या उत्तराचा पडताळा करु या.

जेव्हा 35 ला 2 ने भाग दिला तर 1 उरते त्याला असे लिहु शकतो.

$$35 = 2 \times 17 + 1$$

जेव्हा 35 ला 3 ने भाग दिला तर 2 उरते त्याला असे लिहु शकतो.

$$35 = 3 \times 11 + 2$$

जेव्हा 35 ला 4 ने भाग दिला तर 3 उरते त्याला असे लिहु शकतो.

$$35 = 4 \times 8 + 3$$

आणि जेव्हा 35 ला 5 ने भाग दिला तर 0 उरते त्याला असे लिहु शकतो.

$$35 = 5 \times 7 + 0$$

निष्कर्ष काढु या. संबंध समाधान करतांना प्रत्येक धनपुर्णाक a आणि b च्या जोडीसाठी (भाज्य आणि भाजक अनुक्रमे) आपल्याला q आणि r पुर्ण संख्या मिळते.(भागाकार आणि बाकी अनुक्रमे

$$a = bq + r, 0 \le r < b$$

हे करा

खालिल a आणि b धनपुर्णांकाच्या जोडीसाठी q आणि rची किंमत माहित करा ज्याने $a = bq + r$ चे समाधान होते?

(i) $a = 13, \quad b = 3$ (ii) $a = 8, \; b = 80$ (iii) $a = 125, \; b = 5$ (iv) $a = 132, \; b = 11$

विचार करा आणि चर्चा करा

वरील हे करा या प्रश्नावरुन q आणि r चे स्वरुप माहित करा?

प्रमेय-1.1 : (युक्लीड भागाकाराचा पुर्वप्रमेय) : दिलेल्या a आणि bधनपुर्णांकांसाठी q आणि r ची एकमेव जोडी अस्तीत्वात असते जे $a = bq + r$ ला समाधान करते. येथे $0 \leq r < b$

हा निकाल सर्व प्रथम युक्लीडच्या सातव्या पुस्तकात नोंद केली होती. युक्लीड भागाकार अल्गोरीदम या पुर्वप्रमेयावर आधारीत आहे. तर आपण युक्लीड भागाकार पुर्वप्रमेयाचा वापर करु या.

दिलेल्या दोन पुर्णांकांची म.सा.वी. काढण्यासाठी युक्लीड भागाकार लघु गुणकांचा वापर होतो. दोन धनपुर्णांक a आणि b ची मसावी d असते ज्याला a आणि b दोन्हीने भाग जातो. याची उजळणी करु या.

समजा तुम्हाला 60 आणि 100 या दोन संख्याची मसावी माहित करायची आहे.

हे आपण एका एका कृतीने सोडवु या.

कृती

60 से.मी. आणि 100 से.मी. लांबी असलेल्या आणि समान रुंदी असलेल्या कागदाच्या दोन पट्या घ्या दोन्ही पट्ट्यांची लांबी थोडी देखील जागा न सोडता मोजण्यासाठी लागणाऱ्या पट्टीची लांबी माहित करणे.

60 से.मी. ची पट्टी घेऊन त्याने 100 से.मी. पट्टीचा मोजणे. 40 से.मी. उरलेला भाग कापुन टाकणे. आता ती 40 से.मी. पट्टी घेवुन 60 से.मी. पट्टीस मोजने. 20 से.मी. उरलेला भाग कापुन टाका. आता तो कापलेला 20 से.मी. भाग घेऊन 40 से.मी. मोजने उरलेला 20 से.मी. भाग काढुन टाकने आता हा 20 से.मी. चा तुकडा घेवुन 20 से.मी. मोजने. दोन्ही तुकडे एकमेकांशी जुळतात याचा अर्थ काहीच उरत नाही.

म्हणुन आपण सांगु शकतो की, 20 से.मी. लांबीची पट्टी ही मोठी पट्टी आहे. त्याच्या साहाय्याने आपण दोन्ही पट्ट्यांची लांबी थोडी देखील जागा न सोडता मोजु शकतो.

खालील प्रक्रियेशी जोड लावु या.

60 आणि 100 ची मसावी युक्लीडच्या पुर्वप्रयेमानी मिळवु या.

जेव्हा 100 ला 60 ने भाग देऊ तर 40 उरतात.

$$100 = (60 \times 1) + 40$$

वर दिलेल्या सुत्रात वरच्यातील बाकी 40 ने 60 ला भाग देऊ आणि भागाकाराच्या अल्गोरीथमने मिळवु या. $60 = (40 \times 1) + 20$

वर दिलेल्या सुत्राप्रमाणे बाकी 20 ने 40 ला भाग देऊ आणि भागाकाराच्या अल्गोरीथमने मिळवु या. $40 = (20 \times 2) + 0$

येथे बाकी शुन्य आलेली आहे आणि आता आपण प्रक्रिया समोर नेऊ शकत नाही. येथे आपण असे म्हणु शकतो की, 60 आणि 100 ची मसावी 20 आहे. 60 आणि 100 च्या अवयवांची यादी करुन यांची पडताळा करु शकतो.

आपणास असे आढळुन आले की, 60 आणि 100 चा मसावी काढतांना नियमबध्द पायऱ्या मांडल्या गेल्या आहेत.

चला आता युक्लीडचा अल्गोरिथॅम स्पष्ट करु या संख्येचा मसावी माहित करण्यासाठी जसे c आणि d , $c > d$, खाली दिलेल्या पायऱ्यांचा अवलंब करा.

पायरी 1 : युक्लीड भागाकारचा पुर्व प्रमेय c आणि d ला लागु केल्यास आपल्याला एक विशिष्ट पुर्णांक संख्येची जोडी आपल्यास मिळते. q आणि r जे की, $c = dq + r, 0 \leq r < d$ असते.

पायरी 2 : जर $r = 0$ c आणि d चा d मसावी असतो. जर $r \neq 0$ तर d आणि r ला युक्लीडचा पुर्व प्रमेय लागु होतो.

पायरी 3: बाकी शुन्य येई पर्यंत ही प्रक्रिया करा. या स्थितीत येणारा विभाजकच म.सा.वी. असतो.

पुर्व प्रमेय लागु पडतो कारण (c, d) चा मसावी $= (d, r)$ चा मसावी जेथे (c, d) मसावी c आणि d चा मसावी दर्शविते.

हे करा

युक्लीड भागाकार पुर्वप्रमेयाचा वापर करुन खालील मसावी माहित करा?

(i) 50 आणि 70 (ii) 96 आणि 72 (iii) 300 आणि 550

(iv) 1860 आणि 2015

विचार करा आणि चर्चा करा

0.12 आणि 1.2 चा मसावी तुम्ही माहित करु शकता का? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा?

युक्लीड भागाकाराचा अल्गोरीदम व्दारे मोठ्या संख्यांचा मसावी माहित करणेच नव्हे तर ते एक प्राचिन पध्दतीचा उदाहरण होत असल्यामुळे संगणक प्रोग्रामींग मध्ये सुध्दा वापरण्यात आला आहे.

सुचना :

1. युक्लीड भागाकाराचा अल्गोरीदम आणि पुर्व प्रमेय एका सोबत एक जवळचे संबंध स्थापित करत असल्यामुळे काही संदर्भात युक्लीड भागाकाराचा अल्गोरीदम सुध्दा म्हणतात.
2. युक्लीड भागाकार अल्गोरीदम हे फक्त धनपुर्णांकासाठी सांगीतलेले आहे. पण ते सर्व पुर्णांक a आणि $b \neq 0$ साठी वाढवु शकतो. पण त्याची चर्चा आपण येथे करणार नाही.

संख्याचा गुणधर्म माहित करण्यासाठी युक्लीड भागाकाराचा उपयोग होतो. या उपयोजनाचे काही उदाहरणे खाली दिलेले आहे.

उदाहरण 1 : प्रत्येक सम धनपुर्णांक हे $2q$ च्या स्वरुपात आणि प्रत्येक विषम धन पुर्णांक $2q+1$ च्या स्वरुपात असते हे दाखवा येथे q हा एखादा पुर्णांक आहे.

सोडवणुक : समजा a हा धनपुर्णांक आहे आणि $b=2$ तर युक्लीड अल्गोरीदम व्दारे $a=2q+r$ पुर्णांक $q \geq 0$, आणि $r=0$ किंवा $r=1$, साठी कारण $0 \leq r < 2$. म्हणुन $a=2q$ किंवा $2q+1$.

जर a हा $2q$,च्या स्वरुपात असेल तर a हे समपुर्णांक आहे. तसेच एखाद्या धन पुर्णांक सम किंवा विषम राहु शकतो. म्हणुन कोणताही विषम धनपुर्णांक $2q+1$ च्या स्वरुपात असतो.

उदाहरण 2 : प्रत्येक विषम धनपुर्णांक हे $4q+1$ किंवा $4q+3$, च्या स्वरुपात असते हे दाखवा येथे q हा एखादा पुर्णांक आहे.

सोडवणुक : समजा a हा धन पुर्णांक आहे, a आणि $b=4$ वर भागाकार अल्गोरीदम चा वापर करु

$a = 4q+r$, येथे $q \geq 0$ आणि $0 \leq r < 4$, येथे शक्य बाकी 0, 1, 2 आणि 3.

म्हणजे a हा $4q$, $4q+1$, $4q+2$, किंवा $4q+3$, राहु शकते. येथे q हा भागाकार आहे. जर a हा विषम असेल तर a हा $4q$ किंवा $4q+2$ राहु शकत नाही (कारण ते दोन्ही ही 2 ने भाग जाणारे आहेत.)

म्हणुन कोणताही विषम धन पुर्णांक हा $4q+1$ किंवा $4q+3$ च्या स्वरुपात असते.

अभ्यास - 1.1

1. खालीलच्या मसावी माहित करण्यासाठी युक्लीड भागाकार अल्गोरीदम चा वापर करा?

   (i) 900 आणि 270 (ii) 196 आणि 38220 (iii) 1651 आणि 2032

2. एखादा विषम धन पुर्णांक हे $6q+1$ किंवा $6q+3$ किंवा $6q+5$ च्या स्वरुपात असते. हे युक्लीड भागाकार पुर्ण प्रमेयाचा वापर करुन सिध्दा करा येथे q हा एक पुर्णांक आहे.

3. युक्लीड भागाकार पुर्ण प्रमेयाचा वापर करुन सिध्द करा की, एखाद्या धन पुर्णांकाचा वर्ग हा $3p$, $3p+1$ किंवा $3p+2$ च्या स्वरुपात असतो.

4. युक्लीड भागाकार पुर्ण प्रमेयाचा वापर करुन सिध्द करा की, एखाद्या धन पुर्णांकाचा घन $9m$, $9m+1$ किंवा $9m+8$ च्या स्वरुपात असतो.

5. n, $n+2$ किंवा $n+4$ या मधुन फक्त एकालच 3 ने भाग जाते हे दाखवा. येथे n हा धन पुर्णांक आहे.

1.2 अंकगणीताचे मुलभुत प्रमेय

आपल्याला युक्लीड भागाकार अल्गोरीदम माहित आहे. दिलेल्या a किंवा b धन पुर्णांकासाठभ q आणि r ची एकमेव जोडी अस्तीत्वात असते जे $a = bq + r$ ला समाधान करते . येथे $0 \leq r \leq b$

विचार करा आणि चर्चा करा

जर $r = 0$, असेल तर युक्लीड भागाकार पुर्वप्रमेय $a = bq + r$ मध्ये a, b आणि q मध्ये कोणते संबंध आहे?

वरील चर्चे वरुन आपण निष्कर्ष काढतो की, जर $a = bq$, 'a' ला 'b' ने भाग जात असेल तर आपण असे म्हणु शकतो की, 'b'हा 'a' चा अवयव आहे.

उदाहरणार्थ
$$24 = 2 \times 12$$
$$24 = 2 \times 2 \times 6$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

आपल्याला माहित आहे की, जर $24 = 2 \times 12$ तर आपण असे म्हणु शकतो की, 2 आणि 12 हे 24 चे अवयव आहेत. यालाच आपण $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ असे ही लिहु शकतो. आणि तुम्हाला माहितच आहे की, हे 24 चे मुळ अवयव आहेत.

आता आपण इतर प्रकारे नैसर्गिक संख्येचा संच 2,3,7,11 आणि 23 घेऊ जर आपण या पैकी काही किंवा सर्व संख्याना गुणुन आपल्या मते त्यास अनेक वेळा वारंवार येण्यासाठी आपण अनंत मोठ्या धनपुर्णांक संख्या निर्माण करु शकतो. काही उदाहरणे पाहु या.

$2 \times 3 \times 11 = 66$ $\qquad$ $7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$ $\qquad$ $2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$ $\qquad$ $2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

समजा तुमच्या मुळ संख्याच्या संग्रहात सर्व शक्य मुळ संख्याचा समावेश आहे त्या संग्राहाच्या आकाराबद्दल तुमचा अंदाज काय आहे? या मध्ये फक्त सांत मुळ संख्या किंवा अनंत मुळ संख्या आहेत का? होय, म्हणजे येथे अनेक अनंत मुळ संख्या आहेत. म्हणुन शक्यतो सर्व प्रकारे या सर्व मुळ संख्याचा गुणाकार केल्यास संयुक्त संख्याचा अनंत संच येतो.

प्रमेय-1.2 : (गणितीय मुलभुत प्रमेय) प्रत्येक संयुक्त संख्येला मुळ संख्येच्या गुणाकारात (अवयव) व्यक्त करता येते आणि येणाऱ्या मुळ संख्येच्या क्रमाखेरीज हे अवयव एकच असतात.

या वरुन आपणास प्रत्येक संयुक्त संख्येला मुळ संख्येच्या गुणाकाराच्या रुपात अवयव पाडता येते. हा अंकगणितीय मुलभुत सिध्दांत आहे. कोणत्याही संयुक्त संख्येला त्यामध्ये येणाऱ्या मुळ संख्येचा क्रम सोडुन मुळ संख्याच्या अवयवाच्या गुणाकाराच्या एकाच रुपात अवयव पाडता येते. उदा. जेव्हा आपण 210 चे अवयव पाडतो आपणास $2 \times 3 \times 5 \times 7$ सारखे $3 \times 5 \times 7 \times 2$, येते किंवा इतर कोणत्याही शक्य क्रमात या मुळ संख्या लिहल्या जातात. म्हणजेच संयुक्त संख्येना मुळ संख्येच्या गुणाकारात फक्त एकाच पध्दतील लिहिता येते. मुळ संख्या कोणत्या क्रमात लिहिल्या गेले हे येथे विशेष नसतो.

सामान्यता x ही दिलेली संयुक्त संख्या असल्यास त्याचे आवयव आपण $x = p_1 \times p_2 \times p_3 \times ......$ असे पाडतो. येथे $p_1, p_2, ..., p_n$ या मुळ संख्या आहेत. आणि त्या चढत्या क्रमात लिहिलेल्या आहेत. म्हणजेच $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n$. जर आपण सारख्या मुळ संख्याना मिळविलो तर आपल्याला मुळ संख्येचा घातांक मिळतो. एकदा आपण चढत्या क्रमात लिहण्याचा निर्णय घेतल्यास अवयव पाडण्याची पध्दत एकच असते उदा.

$$27300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13$$

हे करा

2310 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकाराच्या रुपात व्यक्त करा? या संख्येचे अवयव तुमचा मित्र कशा रितीने पाडतो हे सुध्दा पाहा. त्यांनी तुमच्या सारखेच अवयव पाडले का? तुमच्या मित्राच्या उत्तरावरुन तुमच्या शेवटच्या उत्तराची तपासणी करा. हे 3 किंवा 4 संख्येसाठी करुन पाहा. तुमचा काय निश्कर्ष निघतो?

गणितीय मुलभुत प्रमेय वापरु या.

उदाहरण 3. 4^n ही संख्या घ्या, येथे n नैसर्गिक संख्या आहे. 4^n च्या शेवटचा अंक शुन्य येण्यासाठी येथे n ची कोणती तरी किंमत आहे का? याची तपासणी करा?

सोडवणुक: कोणत्याही नैसर्गिक संख्या n साठी 4^n चा शेवटचा अंक शुन्य येण्यासाठी त्यास 2 आणि 5 ने भाग गेला पाहिजे. याचा अर्थ 4^n च्या मुळ अवयवात 5 आणि 2 या मुळ संख्या असल्या पाहिजेत परंतु हे शक्य नाही कारण $4^n = (2)^{2n}$ म्हणुन 4^n च्या अवयवात 2 ही फक्त एकच मुळ संख्या आहे. कारण 5 ही मुळ अवयवात हजर नाही. म्हणुन4^n चा शेवटचा अंक शुन्य येण्यासाठी n साठी कोणताही नैसर्गिक संख्या नाही.

अंकगणिताच्या मुलभुत सिध्दांतावरुन दोन धन पुर्णाक संख्याचा मसावी आणि लसावी कसा काढावा तुम्ही मागच्या वर्गात आधीच शिकलात. या पध्दतीला मुळ अवयव पध्दत म्हणतात. चला खालील उदाहरणावरुन या पध्दतीची उजळणी करु या.

उदाहरण-4. मुळ अवयव पध्दतीचा उपयोग करुन 12 आणि 18 चा मसावी आणि लसावी काढा.

सोडवणुक : आपणास $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$$

(12, 18) चा मसावी $= 2^1 \times 3^1 = 6$ = **संख्येतील प्रत्येक सामान्य मुळ घटकाच्या सर्वात लहान घातकांचा गुणाकार**

(12, 18) चा लसावी $= 2^2 \times 3^2 = 36$ = **संख्येतील प्रत्येक मुळ अवयवाच्या सर्वात मोठ्या घातांकाचा गुणाकार**

वरील उदाहरणावरुन तुमच्या लक्षात येईल की, (12, 18) × ची मसावी x (12, 18) ची लसावी = 12 × 18. खरे म्हणजे कोणत्याही दोन धनपुर्णांक a आणि bसाठी मसावी (a, b) × लसावी$(a, b) = a \times b$. या वरुन पडताळा करु शकतो. या वरुन जर आपण दोन धनपुर्णांक संख्याचा मसावी आधीच माहित केला असेल तर दोन संख्याचा लसावी माहित करु शकतो

हे करा

मुळ अवयव पध्दतीने खाली दिलेल्या संख्याच्या जोडीचे मसावी आणि लसावी माहित करा.

(i) 120, 90 (ii) 50, 60 (iii) 37, 49

प्रयत्न करा

'n' आणि 'm' एखादी नैसर्गिक संख्यासाठी $3^n \times 4^m$ हे 0 किंवा 5 अंकाने शेवट होऊ शकत नाही हे दाखवा.

अभ्यास - 1.2

1. प्रत्येक संख्येला त्याच्या मुळ संख्येच्या अवयवाच्या रुपात व्यक्त करा.

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. खालील पुर्णांकाचा मुळ अवयव पध्दतीचा वापर करुन लसावि आणि मसावि काढा.

   (i) 12, 15 आणि 21 (ii) 17, 23, आणि 29 (iii) 8, 9 आणि 25

   (iv) 72 आणि 108 (v) 306 आणि 657

3. कोणत्याही n नैसर्गिक संख्येसाठी 6^n चा शेवट 0 अंकाने होतो का नाही तपासणी करा.

4. $7 \times 11 \times 13 + 13$ आणि $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ या संयुक्त संख्या आहेत. कारण स्पष्ट करा.

5. $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ ही संयुक्त संख्या आहे हे तुम्ही कसे दाखवाल? स्पष्ट करा.

6. 6^{100} चा शेवटचा अंक कोणता आहे?

आता अंकगणीतिय मुलभुत सिध्दांताचा उपयोग वास्तव संख्याचा पुर्ण अभ्यास पुढे करण्यासाठी करु. प्रथम परिमेय संख्याचा दशांस विस्तार केव्हा खंडीत आणि केव्हा अखंड आवर्ती संख्या होतो हे माहित करण्यासाठी या पध्दतीचा उपयोग होतो. नंतर $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ आणि $\sqrt{5}$ अशा काही संख्याचा परिमेयता सिध्द करण्यासाठी याचा उपयोग करु.

1.2.2 परिमेय संख्या आणि त्याचा दशांस विस्तार रुप

आता पर्यत आपण पुर्णांकांच्या काही गुणधर्मांची चर्चा केली दिलेल्या पुर्णांकाची अगोदरची व नंतरची संख्या तुम्ही कसे ठरवता? पुर्णांकाच्या अगोदरची किंवा नंतरच्या पुर्णांकामध्ये 1 चा फरक असतो. याची तुम्हाला आठवण करावी लागणार. आणि या गुणधर्माच्या आधारावर तुम्ही पाहिजे असलेली पुर्णांक मिळवु शकता.

0 आणि 1 किंवा 1 आणि 2 इत्यादी ...... मध्ये संख्या असु शकतात याची तुम्ही अपेक्षा करु शकता का? आणि त्याला काय म्हणतात? त्यांना परिमेय संख्या म्हणतात.

परिमेय संख्या या दशांश आवृत्ती किंवा दशांश अनावृत्ती, पुनरावर्ती दशांश विस्तार मध्ये असतात हे तुम्ही 9 व्या वर्गात शिकलात येथे आपण $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ ला परिमेय संख्या म्हणुन जेव्हा $\frac{p}{q}$ दशांश आवृत्ती असते जेव्हा $\frac{p}{q}$ दशांश अनावृत्ती, पुनरावर्ती असते. काही उदाहरणाव्दारे हे विचारात घेऊ या.

खालील परिमेय संख्या विचारात घेऊ या.

(i) 0.375 (ii) 1.04 (iii) 0.0875 (iv) 12.5

आता त्यांना $\frac{p}{q}$ च्या स्वरुपात व्यक्त करा.

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $1.04 = \frac{104}{100} = \frac{104}{10^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{125}{10^1}$

आपणास दिसुन येते की, आपण घेतलेल्या सर्व खंडीत दशांशाला परिमेय संख्येच्या रुपात व्यक्त करता येते ज्यांचा छेद 10 च्या घातांकाच्या रुपात आहे. आता अंशाचे आणि छेदाचे मुळ अवयव पाडुन त्यास संक्षीप्त रुपात व्यक्त करु.

आता (i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$

(ii) $1.04 = \frac{104}{10^2} = \frac{2^3 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{26}{5^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{5^3 \times 7}{2^4 \times 5^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$

(iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{5^3}{2 \times 5}$

वरील संख्येच्या छेदामध्ये तुम्हाला कोणते तरी नमुने आढळले का? जेव्हा दशांश संक्षिप्त रुपात लिहिले असता p आणि q सहमुळ वाटतात आणि छेद (म्हणजेच q) हा 2 च्या घातांकाच्या किंवा 5 च्या घातांकाच्या किंवा दोन्हीच्या घातांकाच्या रुपात आढळुन येते कारण 10 चा घातांक हा 2 आणि 5 च्या घातांकाच्या गुणाकाराच्या रुपात असते ज्याची आपण मुलभुत अंकगणितीय प्रमेयामध्ये चर्चा केली होती.

वरील उदाहरणा वरुन दशांश विस्तार असलेली कोणतीही वास्तव संख्या जी खंडीत आहे. त्यास परिमेय संख्येच्या रुपात व्यक्त करु शकतो. ज्याचा छेद 2 किंवा 5 किंवा दोन्ही च्या घातांकाच्या रुपात असतो. म्हणुन जेव्हा आपण अशा परिमेय संख्याला $\frac{p}{q}$ च्या स्वरुपात लिहितो, जेथे q चे मुळ अवयव 2^n5^m, च्या रुपात असुन n, m या काही ऋणरहीत पुर्णांक संख्या आहेत.

यास आपण सिध्दातांच्या रुपात खालील रितीने व्याख्या करु शकतो.

प्रमेय -1.3 : समजा x ही खंडीत दशांश रुपातील परिमेय संख्या असेल तर x ला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात व्यक्त करु शकतो. येथे p आणि q सहमुळ संख्या असुन q चा मुळ अवयव 2^n5^m च्या रुपात आहे येथे n, m हे ऋणरहीत पुर्णांक आहेत.

हे करा

खालील खंडीत दशांसास $\frac{p}{q}$ च्या रुपात लिहा $q \neq 0$ आणि p, q या सहमुळ संख्या आहेत?

(i) 15.265 (ii) 0.1255 (iii) 0.4 (iv) 23.34 (v) 1215.8

या पध्दतीत छेदाविषयी तुम्ही काय निष्कर्ष काढता?

तुम्हाला या गोष्टीचे आश्चर्य वाटत असेल. जर परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ च्या रुपात असुन q चा मुळ अवयव 2^n5^m च्या रुपात आहे. येथे n, m या ऋणरहीत पुर्णांक, तर $\frac{p}{q}$ ला खंडीत दशांस रुप असते का?

या वरुन आपण $\frac{p}{q}$,रुपात परिमेय संख्या आहे. q ही 2^n5^m च्या रुपात असुन यास समतुल्य $\frac{a}{b}$, च्या रुपातील परिमेय संख्या यात b हा 10 चा घातांक आहे. याचे निरिक्षण करण्यासाठी परत वरील उदाहरणाकडे जाऊ या.

(i) $\frac{25}{2} = \frac{5^3}{2\times5} = \frac{125}{10} = 12.5$ (ii) $\frac{26}{25} = \frac{26}{5^2} = \frac{13\times2^3}{2^2\times5^2} = \frac{104}{10^2} = 1.04$

(iii) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3\times5^3}{2^3\times5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$ (iv) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4\times5} = \frac{7\times5^3}{2^4\times5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

या उदाहरणावरुन आपणास $\frac{p}{q}$, च्या रुपातील परिमेय संख्येचा बदल $\frac{a}{b}$ रुपातील समतुल्य संख्येच्या परिमेय रुपात बदल कसा घडतो. हे दिसुन येते. यात q हे 2^n5^m, च्या रुपात आहे. हा $\frac{a}{b}$ हा b 10 चा घातांक आहे. म्हणुन अशा परिमेय संख्यांचा दंशास विस्तार खंडीत आपण $\frac{p}{q}$ च्या रुपातील परिमेय संख्या माहित करु शकतो. यात q हा 10 चा घातांक असुन खंडीत दशांस रुपात आहे.

म्हणुन आपणास दिसुन येते की, सिध्दांत 1.3 चा व्यत्यास सुध्दा सत्य असुन त्यास खालील प्रमाणे सांगता येते.

सिध्दांत 1.3 : n, m ऋणेत्तर पुर्णांक संख्या असुन q चे मुळ अवयवाचे रुप 2^n5^m, आहे. तर x $= \frac{p}{q}$ ही परिमेय संख्या होते. यात x ला खंडीत दशांस रुप असते.

हे करा

खालील परिमेय संख्यांना $\frac{p}{q}$, च्या रुपात लिहा. यात q हे 2^n5^m च्या रुपात असुन n, m या ऋणेत्तर पुर्णांक संख्या आहेत आणि नंतर त्या संख्यांना त्यांच्या दशांस रुपात लिहा.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{51}{64}$ (iv) $\frac{14}{25}$ (v) $\frac{80}{100}$

1.2.2 परिमेय संख्येतील अखंड, आवर्ती दशांसः

अखंड आणि आवर्ती दशांस दशांस रुपात असलेल्या परिमेय संख्या घ्या. पुन्हा एकदा या उदाहरणाकडे काय होत आहे ते पहा. $\frac{1}{7}$. च्या दशांस बदलाकडे पहा.

$\frac{1}{7}$ च्या दशांस बदला कडे पहा.

$\frac{1}{7} = 0.1428571428571$ ..... अखंड आणि आवर्ती दशांस आहे.

भागाकारात '142857' चा आवधी आवर्ती आहे.लक्षात घ्या की, छेद **7** हा **2^n5^m** च्या रुपात आहे.

$$
\begin{array}{r}
0.1428571 \\
7\overline{)1.0000000} \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30
\end{array}
$$

हे करा

खालील परिमेय संख्यांना दंशासात लिहा आणि भागाकारातील आवर्ती अंकांचा अवधी माहित करा.

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$

वरील उदाहरणावरुन आणि ' हे करा' या वरुन आपण खालील प्रमाणे सांगु शकतो.

सिध्दांत-1.5 : समजा x $= \frac{p}{q}$ ही परिमेय संख्या असुन q चा मुळ अवयव 2^n5^m च्या रुपात असुन n, m या ऋणोतर संख्या असेल तर x ला अखंड आवर्ती दशांस रुप असते.

वरील चर्चेवरुन आपण निश्कर्ष काढु शकतो की,परिमेय संख्या ही खंडीत किंवा अखंड आवर्ती असते.

उदाहरण-5. प्रत्यक्ष भागाकार न करता वरिल सिध्दातांचा उपयोग करुन खालील परिमेय संख्या खंडीत किंवा अखंड आवर्ती दंशास आहे का? ते सांगा.

(i) $\frac{16}{125}$ (ii) $\frac{25}{32}$ (iii) $\frac{100}{81}$ (iv) $\frac{41}{75}$

सोडवणुक : (i) $\frac{16}{125}=\frac{16}{5\times5\times5}=\frac{16}{5^3}$ खंडीत दशांस

(ii) $\frac{25}{32}=\frac{25}{2\times2\times2\times2\times2}=\frac{25}{2^5}$ खंडीत दशांस (iii) $\frac{100}{81}=\frac{100}{3\times3\times3\times3}=\frac{10}{3^4}$ अखंड, आवर्ती

(iv) $\frac{41}{75}=\frac{41}{3\times5\times5}=\frac{41}{3\times5^2}$ अखंड, आवर्ती दशांस

उदाहरण-6. खालील परिमेय संख्यांना वास्तविक भागाकार न करता दशांस रुपात लिहा.

(i) $\frac{35}{50}$ (ii) $\frac{21}{25}$ (iii) $\frac{7}{8}$

सोडवणुक : (i) $\frac{35}{50}=\frac{7\times5}{2\times5\times5}=\frac{7}{2\times5}=\frac{7}{10^1}=0.7$

(ii) $\frac{21}{25}=\frac{21}{5\times5}=\frac{21\times2^2}{5\times5\times2^2}=\frac{21\times4}{5^2\times2^2}=\frac{84}{10^2}=0.84$

(iii) $\frac{7}{8}=\frac{7}{2\times2\times2}=\frac{7}{2^3}=\frac{7\times5^3}{(2^3\times5^3)}=\frac{7\times25}{(2\times5)^3}=\frac{875}{(10)^3}=0.875$

अभ्यास - 1.3

लील परिमेय संख्यांना त्यांच्या दशांस रुपात लिहा आणि कोणत्या खंडीत आणि कोणत्या ..खंड, आवर्ती दशांस ते सांगा.

(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{229}{400}$ (iii) $4\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{11}$ (v) $\frac{8}{125}$

2. वास्तविक भागाकार न करता खालील परिमेय संख्यांना खंडीत दशांस रुप किंवा अखंड, आवर्ती दशांस रुप असते ते सांगा.

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3\cdot5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2\cdot5^7\cdot7^5}$ (viii) $\frac{9}{15}$ (ix) $\frac{36}{100}$ (x) $\frac{77}{210}$

3. सिध्दांत 1.1 चा उपयोग करुन, खालील परिमेय संख्यांना दशांस रुपात लिहा.

(i) $\frac{13}{25}$ (ii) $\frac{15}{16}$ (iii) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (iv) $\frac{7218}{3^2.5^2}$ (v) $\frac{143}{110}$

4. खाली काही वास्तव संख्याचे दशांस रुप दिलेले आहेत. प्रत्येक संदर्भात ती संख्या परिमेय आहे किंवा नाही याचा निर्णय करा. जर ती परिमेय संख्या असुन $\frac{p}{q}$ च्या रुपात व्यक्त केली असेत तर q च्या मुळ अवयवांविषयी तुमचे म्हणणे काय आहे?
(i) 43.123 (ii) 0.1201201 (iii) $43.\overline{12}$ iv) $0.\overline{63}$

1.3 अपरिमेय संख्या

9 व्या वर्गात आपण अपरिमेय संख्येची प्रस्तावना आणि त्यांचे काही गुणधर्म तुम्ही पाहिले त्यांच्या अस्तीत्वा विषयी आपण शिकलो तसेच परिमेय आणि अपरिमेय संख्या मिळुन वास्तव संख्या कशा बनतात. हे पण आपण पाहिले संख्या रेषेवर अपरिमेय संख्याना कशा दाखवावे हे पण आपण शिकलो. काही असो आपण ते अपरिमेय आहेत हे सिध्द केलेले नाही. येथे आपण $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ आणि $\sqrt{p}$ हे अपरिमेय आहेत हे सिध्द करणार आहोत. येथे p हा मुळसंख्या आहे. यासाठी आपण अंकगणितीय मुलभुत प्रमेयाचा वापर करणार आहोत.

p आणि q या पुर्णांक संख्या असुन $q \neq 0$ तर $\frac{p}{q}$ च्या रुपात नसलेल्या संख्याना अपरिमेय संख्या ("Q^1" किंवा "S") म्हणतात. याची उजळणी करा.तुम्हाला माहित असलेल्या अपरिमेय संख्याची उदा.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110..., इत्यादी

$\sqrt{2}$ हे अपरिमेय संख्या आहे. हे सिध्द करण्याआधी गणिताच्या मुलभुत प्रमेयावर आधारीत सिध्दतेची सांगता (विधान) या कडे लक्ष दिले पाहिजे.

प्रमेय-1.6 : समजा p ही मुळ संख्या असुन, जर a^2 ला p ने निशेष भागले (या a ही धन पुर्णांक आहे.) असता a ला p ने निशेष भाग जातो.

सिध्दता : समजा a ही कोणतीही पुर्णांक संख्या असल्यास a चे मुळ अवयव खालील प्रकारे असतात.

$a = p_1p_2 \ldots p_n$, यात $p_1, p_2, \ldots, p_n$ मुळ संख्या आहेत.

म्हणुन $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p^2_1p^2_2 \ldots p^2_n$.

आता a^2 ला p ने निशेष भाग जातो हे दिलेले आहे. म्हणुन गणिताच्या मुलभुत सिध्दांतावरुन p हा a^2 चा एक मुळ अवयव आहे, आणि a^2 चे मुळ अवयव फक्त $p_1 p_2 \ldots p_n$. आहेत. म्हणुन p हा $p_1, p_2, \ldots p_n$ चा एक अवयव आहे.

आता, $p_1p_2 \ldots p_n$, चा p हा एक अवयव असल्यामुळे तो a ला निशेष भागतो.

हे करा

$p=2$, $p=5$ आणि $a^2 = 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64$ आणि 81 साठी वरिल विधानाच्या सिध्दतेची तपासणी करा.

आता, आपण $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे. हे सिध्द करायला तयार आहोत. अशा सिध्दतेत आपण विरोधाभास याचा उपयोग करत आहो.

उदाहरण-7. **$\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे, हे सिध्द करा.**

सोडवणुक : सिध्दतेच्या विरोधाभासावरुन गृहीत धरा कि, $\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे.

जर ती परिमेय संख्या असल्यास दोन पुर्णांक संख्या r आणि s $(s \neq 0)$ तिचे अवयव असतात. $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$.

जर 1 शिवाय r आणि s ला सामाईक अवयव असतात. नंतर आपण महत्तम सामान्य अवयवाव्दारे भाग दिला असता अपणास $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ येते. यात a आणि b सहमुळ आहेत.

म्हणुन $b\sqrt{2} = a$.

दोन्ही बाजुंचा वर्ग केल्यास $2b^2 = a^2$ येते. म्हणुन a^2 ला 2 ने निषेश भाग जातो.

यास आपण $a = 2c$ असे लिहु शकतो. आता, प्रमेय 1.6 वरुन जर a^2 ला 2 ने भाग गेल्यासa ला सुध्दा जातो.

a च्या ऐवजी मांडल्यास आपणास $2b^2 = 4c^2$, म्हणजे $b^2 = 2c^2$ या अर्थ असा की,

b^2 ला 2 ने भाग जातो. आणि म्हणुन bला 2 ने भाग जातो. (विधान 1 मधील $p=2$)(का?)

म्हणुन a आणि b दोन्हीचा 2 हा सामाईक अवयव आहेत.

परंतु या विरोधाभासावरुन a आणि b सहमुळ संख्या आहेत.

आपण $\sqrt{2}$ ही परिमेय सख्या आहे. या प्रतिपादने मुळे विरोधाभास निर्माण होतो. म्हणजे आपण समजलेले चुकीचे आहे. म्हणुन आपण निश्कर्ष काढु शकतो. की, $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.साधारणत:d ही धन पुर्णांक संख्या असुन इतर कोणत्याही पुर्णांकाचा वर्ग होत नसल्यास $\sqrt{d}$ ला आपण अपरिमेय संख्या म्हणुन सांगु शकतो. या संदर्भात $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{15}\ \sqrt{24}$ इत्यादी अपरिमेय सख्या आहेत.

मागील वर्गात शिकल्या प्रमाणे.

- एक परिमेय आणि अपरिमेय संख्याची बेरीज किंवा वजाबाकी केल्यास अपरिमेय संख्या येते.
- एका शन्येतर परिमेय, अपरिमेय संख्याचा गुणाकार किंवा भागाकार अपरिमेय संख्याच येते.

आपण येथे काही विशेष संदर्भात सिध्द करु या.

उदाहरण-8. $5-\sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे सिध्द करा.

सोडवणुक: समजा आपल्या सिध्दते विरुध्द $5-\sqrt{3}$ ही परिमेय संख्या आहे.

म्हणजे आपण a आणि b सहमुळास $(b \neq 0)$, $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ अशा रितीने माहित करु शकतो.

म्हणुन, $5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$

समीकरणाची पुनर्रमांडणी केल्यास, $\sqrt{3}=5-\frac{a}{b}=\frac{5b-a}{b}$ येते....(1)

a आणि b पुर्णांक असल्यामुळे समीकरण 1 चे RHS $5-\frac{a}{b}$ ही परिमेय येते म्हणुन LHS $\sqrt{3}$ हे सुध्दा परिमेय संख्या आहे.

परंतु $\sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे. ही वास्तविक विरुध्दता आहे.

या विरुध्दतेनुसार $5-\sqrt{3}$ ही परिमेय संख्या आहे, असे आपण गृहीत धरलेले चुकीचे ठरते. म्हुणन आपण निश्कर्ष काढु शकतो

की, $5-\sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

उदाहरण-9. $3\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे, हे सिध्द करा.

सोडवणुक : आपल्या सिध्दते विरुध्द $3\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे, गृहीत धरा.

म्हणजे a आणि b या सहमुळांना $(b \neq 0)$ $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ अशा रितीने माहित करु शकतो.

पुन मांडणी नंतर $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$ येते.

$\frac{a}{3b}$ ही परिमेय आणि $\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे. कारण 3, a आणि b हे पुर्णांक आहेत.

परंतु $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय असल्यामुळ हा विरुध्दता आहे.

म्हणुन $3\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या आहे. असा निश्कर्ष आपण काढु शकतो.

उदाहरण-10. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे, सिध्द करा.

सोडवणुक: समजा $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ही परिमेय संख्या आहे.

जर $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, यात a, b पुर्णांक असुन $b \neq 0$ आहे.

म्हुणन $\sqrt{2}=\frac{a}{b}-\sqrt{3}$.

दोन्ही बाजुंना वर्ग केल्यांनी

$$2=\frac{a^2}{b^2}+3-2\frac{a}{b}\sqrt{3}$$ येते.

पुर्नमांडणी केल्यास

$$\frac{2a}{b}\sqrt{3}=\frac{a^2}{b^2}+3-2 \qquad =\frac{a^2}{b^2}+1 \qquad \sqrt{3}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

a, b पुर्णांक असल्यामुळे $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ ही परिमेय संख्या आहे. आणि म्हणुन $\sqrt{3}$ परिमेय आहे.

$\sqrt{3}$ ही अपरिमेय आहे. हा विरोधाभास आहे. म्हुणन $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ही अपरिमेय आहे.

सुचना:

1. दोन अपरिमेय संख्यांची बेरीज अपरिमेय असण्याची गरज नाही.

   उदाहरणार्थ जर a = $\sqrt{2}$ आणि b = $-\sqrt{2}$, तर a आणि b दोन्ही अपरिमेय संख्या आहेत. परंतु a + b = 0 ही परिमेय संख्या आहे.

2. दोन अपरिमेय संख्याचा गुणाकार अपरिमेय संख्याच येते हे गरज नाही.

   उदा. a = $\sqrt{2}$ आणि b = $\sqrt{8}$, तर a आणि b अपरिमेय संख्या आहेत. परंतु

   ab = $\sqrt{16}$ = 4 ही परिमेय संख्या आहे.

अभ्यास - 1.4

1. खालील संख्या अपरिमेय आहेत, हे सिध्द करा.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $3+2\sqrt{5}$

2. p, q मुळ संख्या असल्यास $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ अपरिमेय संख्या आहेत, हे सिध्द करा.

1.4 घातांकाची उजळणी (Exponentials Revisted)

आपणास माहित आहे की, a' या संख्येचा घातांक a^n' याचा अर्थ घातांक 'n' वेळा 'a' चा गुणाकार आणि 'n' संख्ये इतके अवयव दर्शविते.

म्हणजेच $$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots a}_{n-\text{factors}}$$

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ .... हे 2 चे घातांक

$3^0, 3^1, 3^2, 3^3$ .... हे 3 चे घातांक

आपणास माहित आहे की, 81 ला घातांकाच्या रुपात 3^4 असे लिहिता येते, म्हणजे '4' हा घातांक आणि 3 पाया आहे. " 81 हा 3 पाया असलेला 4 था घात आहे.

घातांकाच्या नियमांना आठवा.

जर a, b वास्तव संख्या असतील $a \neq 0, b \neq 0$ आणि m, n हे पुर्णांक आहे तर

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$; (ii) $(ab)^m = a^m.b^m$ (iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

(iv) $(a^m)^n = a^{mn}$

(v) $a^0 = 1$ (vi) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

हे करा

1. किंमत काढा.

(i) 2^1 (ii) $(4.73)^0$ (iii) 0^3 (iv) $(-1)^4$ (v) $(0.25)^{-1}$ (vi) $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ (vii) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2$

2. (a) 10, 100, 1000, 10000, 100000 यांना घातांकाच्या स्वरुपात लिहा.

(b) खाली दिलेल्यांना साध्या घातांकाच्या स्वरुपात लिहा.

(i) 16×64 (ii) 25×125 (iii) $128 \div 32$

घातांक आणि लघुगुणक (Exponential and Logarithims)

खालील दिलेल्या निरिक्षण करा.

$2^x = 4 = 2^2$ जेथे $x = 2$

$3^y = 81 = 3^4$ जेथे $y = 4$

$10^z = 100000 = 10^5$ जेथे $z = 5$

खाली दिलेल्या आपण x ची किंमत आपण काढु शकतो का?

$2^x = 5$, $3^x = 7$, $10^x = 5$

जर हो तर x च्या किंमती काढा.

$2^x = 5$, यात 2 च्या कितव्या घातांकाची किंमत 5 येईल यासाठी आपल्याला 2 आणि 5 यात नविन संबंध स्थापीत केले पाहिजे.

$1 \times 0.25 = 0.25$

$2 \times 0.25 = 0.5$

$4 \times 0.25 = 1$

$8 \times 0.25 = 2$

$16 \times 0.25 = 4$

x च्या कोणत्याही किंमती साठी आपण सहजपणे गुणाकारांची किंमत काढु शकतो. दिलेल्या गुणाकार येण्यासाठी x ची कोणती योग्य किंमत असु शकेल याची तुम्ही कल्पना करुन शकता का? अशा परिस्थितीत एक नविन संबंध लघुगुणकाचा परिचय देण्यात आला.

$y = 2^x$, x, y कोणत्या किंमतींना 5 उत्तर येईल ? जर $x = 1$ तर $y = 2^1 = 2$, जर $x = 2$ तर $y = 2^2 = 4$, जर $x = 3$ तर $y = 2^3 = 8$ याचे निरिक्षण केले तर आपल्या निरिक्षणात असे आले की, x ची किंमत 2 आणि 3 च्या मध्ये आहे.

x ची किंमत 2 च्या जवळपास आहे का 3 च्या ? पण x ची किंमत 2 च्या जवळपास आहे.

जर $2^x = 5$ येथे x हा 5 चा लघुगुणक याचा पाया 2 आहे अशी व्याख्या करता येते.

चिन्हाने त्याला असे दर्शवितात $x = \log_2 5$

उदाहरण-11. $\log \dfrac{343}{125}$ चे विस्तार करा.

सोडवणुक : तुम्हाला माहित असल्याप्रमाणे $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

म्हणुन $\log \dfrac{343}{125} = \log 343 - \log 125$

$= \log 7^3 - \log 5^3$

म्हणुन $\log_a x^n = m \log_a x$

$= 3\log 7 - 3\log 5$

म्हणुन $\log \dfrac{343}{125} = 3(\log 7 - \log 5)$.

उदाहरण-12. $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$ ला एकेरी लघुगुणकात लिहा

सोडवणुक : $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$

$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5$ (since in $n \log_a x = \log_a x^n$)

$= \log 9 + \log 125 - \log 32$

$= \log (9 \times 125) - \log 32$ (Since $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$)

$= \log 1125 - \log 32$

$= \log \dfrac{1125}{32}$ (Since $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$)

उदाहरण-13. सोडवा $3^x = 5^{x-2}$.

सोडवणुक : $3^x = 5^{x-2}$ दोन्ही बाजूस log चा वापर केल्यास

आपल्याला मिळते $\log (3^x) = \log (5^{x-2})$

$x \log_{10} 3 = (x - 2) \log_1 5$

$x \log_{10} 3 = x\log_{10} 5 - 2\log_{10} 5$

$x\log_{10} 5 - 2\log_{10} 5 = x \log_{10} 3$

2^x घातांकाचा आलेख

चला $y = 2^x$ चा आलेख

या साठी 'x' च्या किंमती घालुन आपण 'y' च्या किंमती काढु या.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

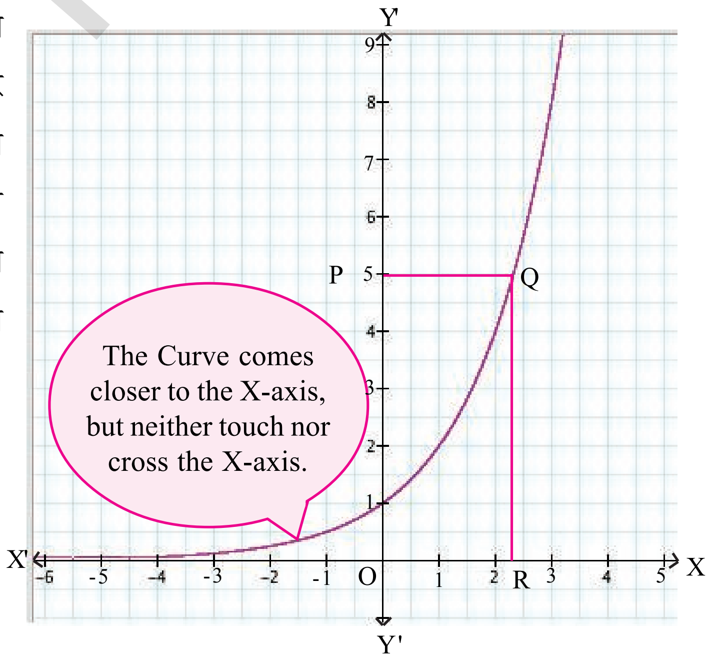
बिंदुना आपण आलेखावर स्थापल्या नंतर त्याला जोडल्यास एक वक्र रेषा येते. याची नोंद करा की, जसे जसे x किंमत वाढते y किंमत जी $y = 2^x$ ती पण वाढते. जर 'x' ची किंमत कमी झाली तर $y = 2^x$ ची किंमत पण कमी होते ती जवळ जवळ 0 पर्यंत येते पण 0 कधीच होत नाही.

समजा आपण असा विचार केला, जर $y = 2^x$ तर x, च्या कोणत्या किंमतीसाठी y ची किंमत 5 येईल ?

आपणास माहित आहे की, आलेखात Y – अक्ष 2^x ची किंमत दर्शवितो. तर X - अक्ष काय दर्शविते ? आपण निरिक्षण केले की, X – अक्ष x च्या किंमती दर्शविते. Y - अक्ष वर 5 ची किंमत दर्शवा ? या सह निर्देशक बिंदु "P" म्हणुन दर्शवा. X – अक्षला एक समांतर रेषा काढा जी P, मधुन जाते 1 आणि आलेखावर Q बिंदुत छेदते.

आता X- अक्षाला लंब QR काढु. आपण आलेखावरुन OR ची जवळपास किंमत माहित करु शकतो का ? ते कुठे आहे ? यावर विचार करा.

एखाद्या संख्येचा लॉगरीथमचा पाया 10 असेल तर त्यास साधारण लघुगुणक किंवा कॉमन लॉगरीथम म्हणतात. या स्थितीत आपण साधारणपणे पाया वगळतो म्हणजेच $\log_{10} 25$ याला $\log 25$असे लिहितात.



विचार करा आणि चर्चा करा.

आता मोजपट्टीचे निरिक्षण करु

X -अक्षावर (गुणोत्तर आणि निष्पती विषयी आठवा)

जर 10 जागा = 1 एकक

20 जागा = 2 एकक

40 जागा = 4 एकक तर

X-अक्षावरील संबंधीत किंमतीची तुम्ही कल्पना करु शकता का? ज्याचा संबंध Y- अक्षवर 5 शी आहे.

आपण वरच्या माहितीला खालील प्रमाणे लिहु शकतो.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$x = \log_2 y$	-2	-1	0	1	2	3

$y = 2^x$ आलेखाचे निरिक्षण करा लघुगुणकाच्या संदर्भात विचार करा.

जर $y = \frac{1}{4}$; $x = -2$ म्हणजेच $2^{-2} = \frac{1}{4}$ आणि $-2 = \log_2 \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{2}$; $x = -1$ म्हणजेच $2^{-1} = \frac{1}{2}$ आणि $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$

$y = 2$; $x = 1$ म्हणजेच $2^1 = 2$ आणि $1 = \log_2 2$

$y = 4$; $x = 2$ म्हणजेच $2^2 = 4$ आणि $2 = \log_2 4$

$y = 8$; $x = 3$ म्हणजेच $2^3 = 8$ आणि $3 = \log_2 8$

म्हणजेच वक्रावरील कोणताही बिंदु $y-$अक्षाचा सहनिर्देशांक आहे. तो x निर्देशाकांचा 2 चा घातांक आहे. आणि वक्रावरील कोणताही बिंदु जो $x-$अक्षाचा आहे तो $y-$निर्देशांकाचा लॉगरिथम चा 2 चा पाया आहे. घातांक स्वरुप आणि लघुगुणक स्वरुप("exponential form and logarithm form) हे एक दुसऱ्या शी व्यस्त आहेत असे आपण म्हणु शकतो. वक्र रेषेवर $y-$निर्देशांकासाठी $x-$ अक्षावर एक विशिष्ट बिंदु आहे. म्हणजेच प्रत्येक घन वास्तव संख्येसाठी एक विशिष्ट लघुगुणकिय किंमत असते. आणखी एक उदाहरण पाहु या.

प्रयत्न करा

खालील दिलेले सोडवा.

(i) $\log_2 32 = x$ (ii) $\log_5 625 = y$ (iii) $\log_{10} 10000 = z$

(iv) $\log_x 16 = 2 \quad \therefore \quad x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 4$, हे बरोबर आहे का नाही?

जर $10^y = 25$ तर याला $y = \log_{10}25$ किंवा $y = \log 25$ असे दर्शवितात.
एखाद्या संख्येचा लॉगरीथम चा पाया 10 असेल तर त्यास साधारण लघुगुणक किंवा कॉमन लॉगरीथम (common logarithms) असे म्हणतात.

साधारणपणे आपण त्याला a साठी $a > 0, a \neq 1$ $N > 0$ आणि a, N ही वास्तव संख्या म्हणुन व्याख्या केली. जर $a^x = N$ तर $x = \log_a N$.

हे करा

(1) खालील दिलेल्या लॉगरिथम लघुगुणकाच्या रुपात लिहा.

(i) $7 = 2^x$ (ii) $10 = 5^b$ (iii) $\frac{1}{81} = 3^c$ (iv) $100 = 10^z$ (iv) $\frac{1}{257} = 4^a$

(2) खाली दिलेल्यांना घातांक स्वरुपात लिहा.

(i) $\log_{10}100 = 2$ (ii) $\log_5 25 = 2$ (iii) $\log_2 2 = 1$

विचार करा आणि चर्चा करा.

(1) $\log_2 0$ अस्तीत्वात आहे का? कारणे द्या?

(2) सिध्द करा (i) $\log_b b = 1$ (ii) $\log_b 1 = 0$ (iii) $\log_x b^x = x$

लघुगुणकाचे गुणधर्म (Properties of Logarithms)

लॉगरिथमस हे बऱ्याच ठिकाणी उपयोजनात महत्वाचे आहे, आणि त्याच बरोबर प्रगत गणिता मध्ये पण उपयोगी आहे. आपण आता काही मुलभुत गुणधर्मांना स्थापीत करु जे लॉगरिथमच्या स्वरुपात बदलण्यासाठी उपयोगी आहेत.

(1) गुणाकार नियम

घातांकाचे गुणधर्म लघुगुणकाच्या गुणधर्माशी संबंधीत असतात. उदाहरणार्थ जेव्हा आपण त्याच पाया संख्येने गुणतो घातांक वाढतो.

$$a^x . a^y = a^{x+y}$$

हा घातांकाचा नियम लॉगरिथमला सुध्दा लागु होतो यालाच गुणाकाराचा नियम म्हणतो.

प्रमेय (गुणाकाराचा नियम) समजा **a, x** आणि **y** या घन वास्तव संख्या आहेत जेथे **$a \neq 1$.**

तर **$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$**

म्हणजेच लॉगरिथमचा गुणाकार हा लॉगरीथमची बेरीज असते.

सिध्दता:

समजा $\log_a x = m$ आणि $\log_a y = n$ तर आपण $a^m = x$ आणि $a^n = y$ असे म्हणु शकतो.

आता $xy = a^m a^n = a^{m+n}$

$\therefore \log_a xy = m + n = \log_a x + \log_a y$

प्रयत्न करा

आपणास माहित आहे $\log_{10}100000 = 5$

सिध्द करा की, $100000 = 1000 \times 100$ याचे उत्तर त्याच्या बरोबर असेल आणि गुणाकाराच्या नियमाने त्याला पडताळुन बघा.

हे करा

खाली दिलेल्या लॉगरीथमसला बेरजेच्या रुपात लिहा.

(i) 35×46 (ii) 235×437 (iii) 2437×3568

(ii) भागाकाराचा नियम (Quotient Rule)

जेव्हा आपण सारख्या पायाने विभाजतो, आपण घातांकाची वजाबाकी करतो.

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

हा गुणधर्म भागाकाराचा नियम दर्शवितो.

प्रमेय (भागाकाराचा नियम) समजा a, x आणि y हे धन वास्तव संख्या आहे जेथे $a \neq 1$.

तर $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

लॉगरीथमचा भागाकार हा दोन सारख्या क्रमाच्या लॉगरीथमच्या फरका ऐवढा असतो.

प्रयत्न करा

आपणास माहित आहे की, $\log_2 32 = 5$ तर सिध्द करा की, 32 ला $\frac{64}{2}$ असे लिहिले तरी तेच उत्तर येते आणि गुणाकार नियम उपयोगत आणुन तुमच्या उत्तराचा पडताळा करा.

हे करा

खालील लघुगुणकांना लघुगुणकाच्या फरकामध्ये व्यक्त करा.

(i) $\frac{23}{34}$ (ii) $\frac{373}{275}$ (iii) $4325 \div 3734$ (iv) $5055 \div 3303$

विचार करा आणि चर्चा करा

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ सिध्द करा.

(iii) घाताचा नियम (The power rule)

जेव्हा घातांकाच्या रुपात घात वाढवला तर आपण गुणा करतो

i.e. $(a^m)^n = a^{m.n}$

हा घात नियम दर्शवितो.

समजा a आणि x हे सम वास्तव संख्या आहेत जेथे $a \neq 0$ आणि n हा कोणतीही वास्तव संख्या आहे. $\log_a x^n = n \log_a x$

घातांक असलेल्या संख्येचा लघुगुणक हा घातांकाचा आणि त्या संख्येचा गुणाकार असतो.

प्रयत्न करा

आपणास माहित आहे की, $\log_2 32 = 5$. तर सिध्द करा की, $32 = 2^5$ असे लिहिले तरी सारखेच उत्तर येते. नंतर घाताच्या नियमाचा उपयोग करुन तुमचे उत्तर पडताळा.

$2^x = 3^5$ असल्यास आपण x ची किंमत माहित करु शकतो का? अशा परिस्थितीत आपण $3^5 = 243$ ची किंमत माहित करतो आणि नंतर x ची किंमत काढतो. ज्या साठी 2^x ची किंमत 243 च्या एवढी असेल.

लघुगुणकाला लागु करुन $\log_a x^n = n \log_a x$, या सुत्राचा उपयोग करुन सहजपणे आपण 3^{25}, 3^{33} इत्यादींची किंमत माहित करु शकतो.

$$2^x = 3^5$$

याला लघुगुणकाच्या स्वरुपात लिहा. आता समजा $2^x = 3^5$ दोन्ही बाजुचा लॉगरीथम घेऊन संक्षिप्त केल्यास आपणास येते. (याला $\log s_2 3^5$ च्या अर्धी लिहा.)

$$\log_2 3^5 = x$$

$$5 \log_2 3 = x \quad \left(\because \log_a x^n = n \log_a x\right)$$

x ची किंमत ही 5 आणि $\log_2 3$ च्या किंमती चा गुणाकार आहे असे आढळते.

हे करा

$\log_a x^n = n \log_a x$ याचा उपयोग करुन खाली दिलेल्याचा विस्तार करा.

(i) $\log_2 7^{25}$ (ii) $\log s_5 8^{50}$ (iii) $\log 5^{23}$ (iv) $\log 1024$

सुचना : $\log x = \log_{10} x$

विचार करा आणि चर्चा करा

आपण $\log \frac{x}{y} = \log (x.y^{-1})$. असे लिहीतो तुम्ही सिध्द करा शकता का $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$ गुणाकार आणि घात नियमांचा उपयोग करुन

प्रयत्न करा

(i) $\log_2 32$ ची किंमत काढा (ii) $\log_c \sqrt{c}$ ची किंमत काढा.

(iii) $\log_{10} 0.001$ ची किंमत माहित करा (iv) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$ ची किंमत काढा.

विचार करा आणि चर्चा करा

आपल्याला माहित आहे जर, $7 = 2^x$ तर $x = \log_2 7$. तर $2^{\log_2 7}$ ची किंमत किती? तुमच्या या उत्तराचे समर्थन करा? $a^{\log_a N}$ साठी आणखी काही उदाहरणे देऊन वरील चे सामान्यीकरण करा.

$$x\log_{10}5 - x\log_{10}3 = 2\log_{10}5$$

$$x(\log_{10}5 - \log_{10}3) = 2\log_{10}5$$

$$x = \frac{2\log_{10}5}{\log_{10}5 - \log_{10}3}$$

उदाहरण-14. जर $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3 = \log x$ तर x माहित करा

सोडवणुक : $\log x = 2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3$

$$= \log 5^2 + \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log\sqrt{9} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log 3 - \log 3$$

$$\log x = \log 25$$

$$\therefore \quad x = 25$$

अभ्यास - 1.5

1. खालीलचे किंमती काढा.

(i) $\log_{25}5$ (ii) $\log_{81}3$ (iii) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

(iv) $\log_7 1$ (v) $\log_x\sqrt{x}$ (vi) $\log_2 512$

(vii) $\log_{10}0.01$ (viii) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$ (ix) $2^{2+\log_2 3}$

2. खालील ना log N मध्ये व्यक्त करा आणि त्याच्या किंमती माहित करा.

(i) $\log 2 + \log 5$ (ii) $\log_2 16 - \log_2 2$ (iii) $3\log_{64}4$

(iv) $2\log 3 - 3\log 2$ (v) $\log 10 + 2\log 3 - \log 2$

3. जर $x = \log_2 3$ आणि $y = \log_2 5$ दिलेले असेल तर खालील प्रत्येकाची xआणि y च्या पदामध्ये किंमती ठरवा.

(i) $\log_2 15$ (ii) $\log_2 7.5$ (iii) $\log_2 60$ (iv) $\log_2 6750$

4. खालील चे विस्तार करा.

(i) $\log 10000$ (ii) $\log\left(\frac{128}{625}\right)$ (iii) $\log x^2y^3z^4$ (iv) $\log\frac{p^2q^3}{r^4}$ (v) $\log\sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

5. जर $x^2 + y^2 = 25xy$,तर सिध्द करा की, $2\log(x+y) = 3\log 3 + \log x + \log y$.

6. जर $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$, तर $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ची किंमत माहित करा.

7. जर $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ची किंमत माहित करा.

8. जर $2^{x+1} = 3^{1-x}$ तर x ची किंमत माहित करा.

9. (i) $\log 2$ हा परिमेय आहे की अपरिमेय आहे? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा?
   (ii) $\log 100$ हा परिमेय आहे की अपरिमेय आहे? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा?

ऐच्छिक अभ्यास

[विस्तृतपणे शिकण्यासाठी]

1. n ही 5 ने शेवट होणारी नैसर्गिक संख्या आहे तर 6^n ही संख्या असते का? कारणे द्या?
2. $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ ही संयुक्त संख्या आहे का? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.
3. सिध्द करा $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$ हि अपरिमेय संख्या आहे. $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$ ही परिमेय किंवा अपरिमेय संख्या आहे. याची तपासणी करा?
4. जर $x^2 + y^2 = 6xy$ तर सिध्द करा $2\log(x+y) = \log x + \log y + 3\log 2$
5. 4^{2013} मधील अंकाची संख्या काढा. जर $\log_{10} 2 = 0.3010$.

सुचना : तुमच्या शिक्षकाला लघुगुणकाच्या संख्येचा पुर्णाक भाग आणि दशांश भाग या बद्दल विचारा.

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

युक्लीड लॉगरीथम - (Euclid algorthem)

- रंगीत कागद किंवा ग्रिड पेपरचा उपयोग करुन युक्लीड पुर्व प्रकल्पाच्या आधारे म.सा.वी. माहित करा.

आपण काय चर्चा केली.

1. **युक्लीड भागाराचा पुर्वप्रमेय:** $a = bq + r,\ 0 < r < b.$ चे समाधान करतांना दिलेल्या धनपुर्णांक a आणि b साठी q आणि r पुर्ण संख्या अस्तीत्वात असतात.

2. अंकगणितीय मुलभुत सिध्दांतावरुन प्रत्येक संयुक्त संख्येला मुळ अवयवाच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहिता येते, आणि अवयव पाडण्याची पध्दत एकच असते. त्याच्या अवयावातील घटकाचा क्रम सोडुन.

3. जर p ही मुळ संख्या असल्यास a^2 ला p ने भाग जातो. येथे a ही धन पुर्णांक आहे. तर a ला p ने भाग जातो..

4. समजा x परिमेय संख्या असुन त्याचा दशांस विस्तार खंडीत आहे. तर आपण x ला $\frac{p}{q}$ रुपात व्यक्त करतो. येथे p आणि q सहमुळ आणि q चा मुळ घटक 2^n5^m या रुपात आहे, n, m ऋुणेत्तर पुर्णांक आहेत.

5. समजा $x = \frac{p}{q}$ परिमेय संख्या असुन q चा मुळ घटक 2^n5^m रुपात n, m ऋुणेत्तर पुर्णांक असल्यास तर x चा दशांस विस्तार खंडीत असतो.

6. समजा $x = \frac{p}{q}$ परिमेय संख्या q चा मुळ घटक 2^n5^m रुपात n, m ऋणेत्तर पुर्णांक असल्यास तर x चा दशांस विस्तार अखंड, आवर्ती असतो.

7. आपण $\log_a x = n,$ ची व्याख्या करु शकतो जर $a^n = x$ येथ a आणि x धन संख्या आणि $a \neq 1$

8. लघुगुणकाचे नियम जर a , x आणि y धन वास्तव संख्या असतील आणि तर

   (i) $a^{\log_a N} = N$ (ii) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

   (iii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (iv) $\log_a x^m = m \log_a x$

9. लघुगुणकाचा उपयोग आभीयांत्रिकीय गणनेत,विज्ञानात, व्यापारात आणि अर्थाशास्त्रसात होतो.

धडा

2

संच
Sets

2.1 प्रस्तावणा

एखाद्या व्यक्तीचे तुम्ही कसे वर्णन कराला? चला काही उदाहरणे पाहु या.

रामानुजन हे एक महान गणिततज्ञ होते. त्यांना अंक सिध्दांताची आवड होती.

दाशरथी हे एक तेलुगु भाषेचे कवी होते आणि एक स्वतंत्र सेनानी पण होते.

अल्बर्ट आईन्स्टाईन जन्मजातच भौतिक शास्त्रज्ञ होते. संगीत त्यांचा छंद होता.

मरीयम मिरझाखान ही एकच महिला गणितज्ञ आहे ज्यांना फील्ड मेडल मिळाले.

आपण व्यक्तीची वैशिष्टे गुण, आवड आणि एखाद्या संघाचा सदस्य आहे अशी विभागणी (वर्गीकर) करतो.

लोक त्यांच्या भोवतालच्या परिस्थिती, वातावरण इत्यांदीना त्याच्यांशी संबंधीत ज्ञानाच्या आधारावर वर्गीकरण करतात.

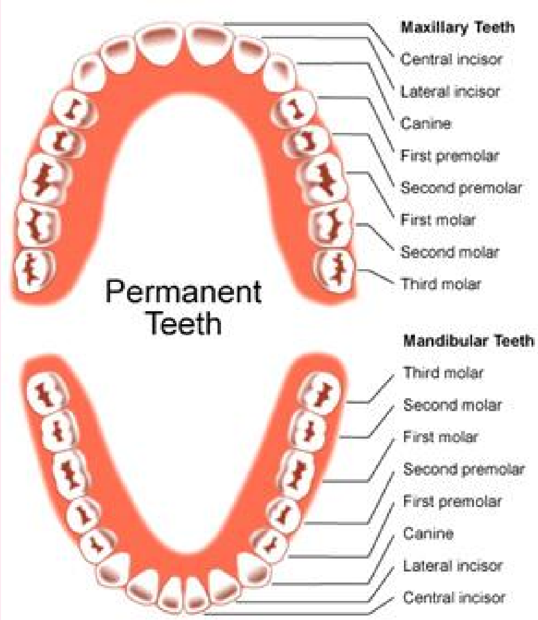
ग्रंथालयातील पुस्तके विषयानुसार रचली जातात. ज्यामुळे आपणास ती सहज मिळतात.

आवर्त सारणीत मुलद्रव्यांना त्यांच्या गुणधर्मानुसार आवर्त आणि गटात ठेवले जाते.

तुमच्या गणिताचे पाठ्य पुस्तक 14 पाठात विभागले आहे. प्रत्येक पाठाला निरनिराळे शिर्षक देण्यात आले आहे.

दंत सुत्र

मानवातील दातांचा संच चार प्रकारच्या दातामध्ये वर्गीकृत करण्यात आला असुन 1) पुढचे दात 2) सुळे 3) उपदाढा 4) दाढा तोंडात चार भागात हे चार प्रकारचे दात एका विशिष्ट सुत्रात मांडलेले आहेत. त्यालाच दंत सुत्र म्हणतात. (2, 1, 2, 3)



गणित हा विषय इतर विषयांपेक्षा वेगळा नाही. यात देखील अर्थपुर्ण वस्तुंना गोळा करणे गरजेचे आहे. त्यापैकी काही संच (समुह) संख्याचे समुह जे साधारणपणे आपण गणितात वापरतो.

$\mathbb{N}$ = नैसर्गिक संख्याचा संच 1, 2, 3....

W = पुर्ण संख्याचा संच 0, 1, 2, 3.....

I or $\mathbb{Z}$ = पुर्णांक संख्याचा संच $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ $\mathbb{Q}$ = परिमेय संख्याचा संच म्हणजेच अशा संख्या ज्यांना $\frac{p}{q}$ च्या स्वरुपात लिहिता येते. जेथे p, q हे पुर्णांक आहेत. $q \neq 0$

$\mathbb{R}$ = वास्तव संख्याचा संच म्हणजेच अशा संख्या ज्या दंशाश रुपात लिहता येतात.

हे करा

खालील समुदायाचे (संख्याचे) सामान्य गुणधर्म लिहा?

1) 2,4,6,8,... 2) 2,3,5,7,11,... 3) 1,4,9,16,...

4) जानेवारी, फेंब्रुवारी, मार्च, एप्रिल...

5) अंगढा, करगळी, मधले बोट, तर्जनी,

विचार करा आणि चर्चा करा

खालील संचाचे निरिक्षण करुन त्यांच्या गुणधर्मांचे वर्णन करीत शक्यतोवर सामान्य विधाने तयार करा.

1) 2,4,6,8,... 2) 1,4,9,16,...

उदाहरण (2, रमेश, जोनवारी) या संचात तीन घटक मीळुन संच तयार होत आहे. पण त्या मध्ये एकही सामाईक गुणधर्म नाही. म्हणुन या संचाला आपण वर्णन पध्दतीत लिहु शकत नाही.

2.2 संच

वस्तुच्या समुहास काहीतरी सामाईक गुणधर्म असल्यास किंवा नियमाचे पालन केल्यास त्यास संच असे म्हणतो. संचातील वस्तुंना घटक असे म्हणतात. संचास { } या चिन्हाने दर्शवितात आणि सामाईक नियम त्या संचातील घटकास ठरवितो.

उदाहरणार्थ आपणास पहिल्या पाच मुळ संख्याच्या संचाला लिहायचे असल्यास {2,3,5,7,11} असे लिहितो आणि दातांचा संच = { मधले दात, खालचे दात }

हे करा

खालील संच लिहा.

1) पहिल्या पाच धनपुर्णांकाचा संच

2) 100 पेक्षा मोठा आणि 125 पेक्षा लहान असलेला 5 च्या गुणकांचा संच

3) पहिल्या पाच घन संख्येचा संच

4) रामानुज संख्येतील अंकाचा संच

2.2.1 यादी पध्दत आणि वर्णन पध्दत (Roster form and Set builder form)

संचाना मोठ्या वाक्यात व्यक्त करणे फार कठिण आहे. म्हणुन साधारणतः इंग्रजी मुळाअक्षराव्दारे संचास दर्शवितात.

उदारणार्थ M दातांमधील दाढांचा संच

या संचास आपण M={पाहिले दात, दुसरे दात, तिसरे दात, चौथे दात}.

दुसरे उदाहरण घेऊ या. Q हा दोन समान बाजु असलेल्या चौरसाचा संच आहे. यास आपण Q ={चौरस, आयात, समांतर भुज, पतंग, समव्दिभुज समलंब} असे दर्शवितो.

येथे आपण घटकांची यादी बनवुन संच लिहित आहो. म्हणुन या संचास यादी पध्दत **"roster form"** असे म्हणतात.

वरील दोन उदाहरणात घटक आणि त्यांची दर्शवणुक या बद्दल चर्चा करु या. समजा दुसरी दाढ हा संचात आहे असे असल्याला म्हणायचे आहे. यास आपण दुसरा मोलार "second molar $\in$ M" असे दर्शवु शकतो आणि यास दुसरा मोलार M शी संबंधीत आहे असे वाचतो.

वरील उदाहरणात समचर्तुभुज हा $\in$ Q शी संबंधीत आहे असे आपण म्हणुन शकतो की, याचे वाचन तुम्ही कसे कराल?

वरील उदाहरणात चौरस हा M संचाशी संबंधीत आहे का? यास आपण असे दर्शवितो.

चौरस हा M संचात नाहीत असे आपण केव्हा म्हणतो. यास आपण $\notin$ M असे दर्शवितो. चौरस हा M संचाशी संबंधीत नाही असे वाचतो.

मागील धड्यात नैसर्गिक संख्याच्या संचाला $\mathbb{N}$,ने पुर्णांकाला $\mathbb{Z}$, ने परिमेय संख्याच्या संचाला $\mathbb{Q}$,ने आणि वास्तव संख्याच्या संचाला $\mathbb{R}$ ने कसे दर्शवितो याची उजळणी करु या.

हे करा

खाली काही संख्या दिलेल्या आहेत. त्या संख्या कोणत्या संचाशी संबंधीत आहे आणि कोणत्या संचाशी संबंधीत नाही हे अचुक चिन्हाचा वापर करुन लिहा.

i) 1   ii) 0   iii) -4   iv) $\frac{5}{6}$ v) $1.\overline{3}$

vi) $\sqrt{2}$ vii) log 2   viii) 0.03   ix) π x) $\sqrt{-4}$

विचार करा आणि चर्चा करा

परिमेय संख्येच्या संचातील घटकांची यादी लिहु शकता का?

तुमच्या लक्षात आले असेल की, परिमेय संख्येच्या संचातील घटकांना यादीत दर्शविणे थोडेशे कठिण आहे. सर्व परिमेय संख्या या $\frac{p}{q}$ च्या रुपात असुन ($q \neq 0$ आणि p,q पुर्णांक आहेत.).

जेव्हा आपण संचातील घटकांचे वर्णन त्यांच्या सामान्य गुणाधर्माशी करतो. तेव्हा ते वर्णन पध्दतीत आहे असे आपण म्हणु शकतो. चला काही उदाहरणे घेऊन पाहु या.

समजा A हा 20 पेक्षा लहान असलेल्या 3 च्या गुणाकाचा संच आहे. तर A={3,6,9,12,15,18} हे A चे यादी पध्दतीचे रुप आहे. जेव्हा आपण वर्णन पध्दतीत लिहितो तेव्हा A={x : x हा 3 चा गुणक आहे $x<20$} यास आपण "A हा xच्या घटकांचा संच असा आहे की, x हा 3 च्या 20 पेक्षा लहान असलेल्या गुणकाचा संच आहे. $\mathbb{Q}$={x : $x = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ आणि p,q दोन्ही पुर्णांक आहेत.}असे दर्शवु शकतो. उदाहरण (2, रमेश, जोनवारी) या संचात तीन घटक मीळुन संच तयार होत आहे. पण त्या मध्ये एकही सामाईक गुणधर्म नाही. म्हणुन या संचाला आपण वर्णन पध्दतीत लिहु शकत नाही.

A={ x : x हा 3 च्या गुणकाचा संच आणि $x<20$}

सर्व x चा संच असा आहे की, x हा 3 च्या गुणकाचा संच $x<20$

सुचना : (i) यादी पध्दतीत ज्या क्रमात घटकांची यादी केलेली आहे ती अवस्तु **(immaterial)** रुपात आहे. अशा प्रकारे उदाहरण 1 मध्ये {1, 3, 7, 21, 2, 6, 4, 42}असेही लिहु शकतो.

(ii) संचातील घटकांना यादी पध्दतीत लिहितांना घटकांची पुनरावृत्ती होता कामा नये उदाहरणात "SCHOOL" या शब्दातील घटकांचा संच {S, C, H, O, L}आहे. तो {S, C, H, O, O, L}नाही म्हणुन संचात एकसारखे घटक नसतात.

काही संचाची यादी पध्दत आणि वर्णन पध्दत पाहु या.

यादी पध्दत	वर्णन पध्दत
V = {a, e, i, o, u}	V = {x : x हा इंग्रजी मुळाक्षरातील व्यंजने आहेत}
A = {-2,-1,0,1,2}	$A = \{x : -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}$
$B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$	$B = \{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$
C = {2,5,10,17}	$C = \{x : x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$

हे करा

1. खालील संचातील घटकांची यादी लिहा.
   (i) G = {20 चे सर्व अवयव}
   (ii) F = {7 ने भाग जाणाऱ्या 17 आणि 61 मधील 4 चे गुणक}
   (iii) S = {x : x ही 'MADAM' मधील अक्षर आहेत}
   (iv) P = {x : x ही 3.5आणि 6.7 मधील पुर्ण संख्या आहे.}
2. खालील संचांना यादी पध्दतीत लिहा.
   (i) B हा वर्षातील 30 दिवस असलेल्या महिण्याचा संच आहे.
   (ii) P हा 10 पेक्षा लहान असलेल्या मुळ संख्याचा संच आहे.
   (iii) X हा इंद्रधनुष्यातील रंगाचा संच आहे.
3. A हा 12 च्या अवयवांचा संच आहे. खालील पैकी कोणता A चा घटक नाही.
   (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 12

प्रयत्न करा

1. बिजगणित आणि भुमिती मधील तुमच्या आवडीचे काही संच लिहा.
2. यादी पध्दत आणि वर्णन पध्दत जोड्या लावा.

(i)	{P, R, I, N, C, A, L}	(a)	{x : xही18 ला भागणारी धन पुर्णांक संख्या आहे}
(ii)	{0}	(b)	{x : x ही पुर्णांक संख्या आहे आणि $x^2 - 9 = 0$}
(iii)	{1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c)	{x : x ही पुर्णांक आहे आणि $x + 1 = 1$}
(iv)	{3, -3}	(d)	{x : x ही PRINCIPAL या शब्दातील अंक आहे}

अभ्यास - 2.1

1. खालील पैकी कोणते संच आहेत? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा?
   (i) "J" या अक्षराने सुरु होणाऱ्या सर्व महिण्याचा संच
   (ii) भारतातील 10 हुशार लोकांचा संच
   (iii) जगातील अकरा उत्कृष्ट क्रिकेट फलंदाजाचा संच
   (iv) तुमच्या वर्गातील सर्व मुलांचा संच
   (v) सर्व समपुर्णांक संख्याचा संच

2. जर A={0, 2, 4, 6}, B = {3, 5, 7} आणि C = {p, q, r}.....तर $\in$ किंवा $\notin$ या योग्य चिन्हाचा रिकाम्या जागेत भरा.
   (i) 0 ..... A (ii) 3 ..... C (iii) 4 ..... B
   (iv) 8 ..... A (v) p ..... C (vi) 7 ..... B

3. खालील विधानास योग्य चिन्हाचा वापर करुन व्यक्त करा.
   (i) 'x' हा 'A'चा घटक नाही.
   (ii) 'd' हा संच 'B'चा घटक आहे.
   (iii) '1' हा नैसर्गिक संख्या N चा घटक आहे.
   (iv) '8' हा मुळ संख्याचा संच P चा घटक नाही.

4. खालील विधाने सत्य किंवा असत्य ते सांगा. तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.
   (i) 5 $\notin$ मुळ संख्या संच
   (ii) S = {5, 6, 7} तर 8 $\in$ S.
   (iii) -5 $\notin$ W येथें 'W' हा पुर्ण संख्याचा संच आहे?
   (iv) $\frac{8}{11} \in Z$ येथे 'Z' हा पुर्णांक संख्याचा संच आहे.

5. खालील संचाना यादी पध्दतीत लिहा.
   (i) B = {x : x ही 6 पेक्षा लहान असलेली नैसर्गिक संख्या आहे.}
   (ii) C = {x : x ही दोन अंकी संख्या असुन त्यांचा अंकाची बेरीज 8आहे }.
   (iii) D = {x : x ही60 ला भागणारी मुळ संख्या आहे.}.
   (iv) E = {x : x ही BETTER या शब्दातील अक्षर आहेत }.

6. खालील संचाना वर्णन पध्दतीत लिहा.
   (i) {3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32}
   (iii) {5, 25, 125, 625} (iv) {1, 4, 9, 16, 25, ... 100}

7. खालील संख्या यादी पध्दतीत लिहा.
   (i) A = {x : x ही 50 पेक्षा मोठी आणि 100 पेक्षा लहान असलेली नैसर्गिक संख्या}
   (ii) B = {x : x ही पुर्णांक संख्या आहे $x^2 = 4$}
   (iii) D = {x : x ही "LOYAL" या शब्दातील अक्षर आहे.}

8. यादी पध्दतीची निर्णय पध्दतीशी जोड्या लावा.

(i)	$\{1, 2, 3, 6\}$	(a)	$\{x : x$ ही मुळ संख्या आहे आणि 6 चा विभाजक आहे.$\}$
(ii)	$\{2, 3\}$	(b)	$\{x : x$ ही10 पेक्षा लहान असलेली विषम नैसर्गिक संख्याआहे $\}$
(iii)	$\{M, A, T, H, E, I, C, S\}$	(c)	$\{x : x$ ही नैसर्गिक संख्या आहे आणि 6 चा विभाजक $\}$
(iv)	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	(d)	$\{x : x$ MATHEMATICS या शब्दातील अक्षर$\}$

2.3 संचाचे प्रकार

खालील काही संचाची उदाहरण घेऊ या.

(i) $A = \{x : x$ ही1 पेक्षा लहान असणारी नैसर्गिक संख्या आहे.$\}$

(ii) $D = \{x : x$ ही 2 ने भागजाणारी विषम मुळ संख्या आहे $\}$

A आणि D मध्ये किती घटक आहेत? त्यामध्ये 1 पेक्षा लहान असलेली एकही नैसर्गिक संख्या नाही हे आपल्याला आढळुन येते. म्हणुन A संचात एकही घटक नाही किंवा A हा रिकामा संच आहे. अशा रितीने 2 ने भाग जाणारी अशी कोणतीही विषम संख्या नाहीत. म्हणुन D रिकामा संच आहे.

ज्या संचात एकही घटक नसतो त्या संचाला रिक्त संच किंवा शुन्य संच म्हणतात. रिक्त संचाला ϕ किंवा { } या चिन्हाने दर्शवितात.

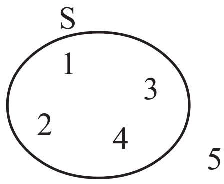
येथे रिक्त संचाची काही उदाहरणे आहेत.

(i) $A = \{x : 1 < x < 2, x$ ही नैसर्गिक संख्या आहे.$\}$

(ii) $B = \{x : x^2 - 2 = 0$ आणि x ही परिमेय संख्या आहे.$\}$

सुचना: ϕ आणि$\{0\}$ हे दोन वेगवेगळे संच आहेत. $\{0\}$ हा 0 घटक असलेला संच आहे तर ϕ हा रिकामा संच आहे.

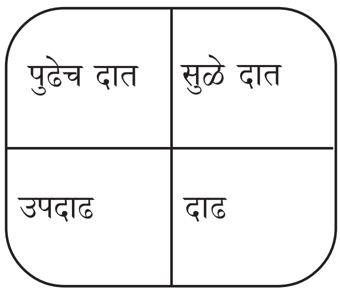
2.4 चित्राव्दारे संचास दर्शविणे



जर S हा संच आहे आणि x हा कोणताही मुलद्रव्य आहे तर आपणास $x \in S$ किंवा $x \notin S$. हे दोनच पर्याय शिल्लक राहतात. प्रत्येक संचाला संचाच्या नावाने बंदिस्त वक्राव्दारे दर्शविता येते. समजा तो संच S आहे आणि S चे घटक S मध्येच दर्शविले असुन ते S च्या बाहेर नाहीत उदाहरणार्थ $S = \{1, 2, 3, 4\}$ यास खाली दाखविलेल्या आकृतीप्रमाणे दर्शविता येते येथे $5 \notin S$ आणि $4 \in S$

2.5 वैश्विक संच आणि उपसंच

दातांचा संच



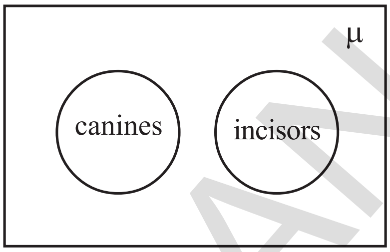
धड्याच्या सुरुवातीला चर्चा केलेल्या दातांचे उदाहरण घेऊ या तुम्ही दातांचे पुढचे दात, सुळे दात, उपदाढ असे दाढा अशा चार भागात विभाजन केले.

परंतु दाढ, या सर्व दातांच्या संचातील घटक आहेत का?

येथे पुर्ण दातांस वरिल चार प्रकारच्या दातांचा वैश्विक संच **"universal set"** असे म्हणतात.

दातांच्या संचाला वैश्विक संच आहे असे गृहीत धरा आणि सुळे दात, पुढच्या दातांच्या संचाला दोन संच समजा

यास आपण बाजुच्या आकृती सारखे सुध्दा दाखवु शकतो आकृतीचे निरिक्षणावरुन आकृतीचा रिकामा भाग काय दर्शवितो? वैश्विक संचाची काही उदाहरणे पाहु या.



(i) जर आपल्याला आपल्या राज्यातील विविध समुहाच्या अभ्यास करायचा असल्यास (त्याचे उत्पन्न किंवा काम, जात) वैश्विक संचात तेलंगाना संचातील सर्व लोक येतात.

(ii) जर आपल्याला आपल्या देशातील विविध समुहाच्या लोकांचा अभ्यास करायचा असल्यास विश्विक संच हा आपल्या भारतातील सर्व लोकांचा संच होतो.

वैश्विक संचास 'μ' ने दर्शवितो कधी कधी U ने सुध्दा दर्शवितो. वैश्विक संचाला आकृतीच्या रुपात दर्शविण्यासाठी नेहमी आयताचा वापर करतो.

नैसर्गिक संख्याचा संच $\mathbb{N}=\{1,2,3,4...\}$.या $\mathbb{N}$.मधील घटकांनी सम संख्याचा संच बनतो. तेव्हा $\mathbb{N}$ हर सम संख्याचा वैश्विक संच होतो. $\mathbb{N}$ हा विषम संख्याचा सुध्दा वैश्विक संच होतो का?

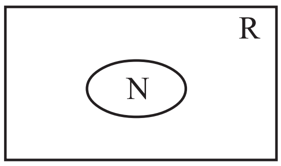
1. जर $x<3$, तर $x<4$" यास आपण "$x<3 \Rightarrow x<4$" असे लिहितो.
2. जर "$x-2 =5$ जर आणि फक्त जर $x=7$" यास "$x-2 = 5 \Leftrightarrow x=7$" दर्शवितो.

$A = \{1,2,3\}$पासुन संच तयार करा. A पासुन घेतलेल्या घटकांपासुन किती संच तयार होतात? आता $\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$ आता $\{1,2,3\}$ हे संच तुम्ही बनवु शकता. तुम्ही इतर संच बनवु शकता का? तेव्हा आपण त्या संचाना A चे उपसंच म्हणु शकतो. जर आपण $\{1,2\}$ ला A चे उपसंच घेतो तेव्हा $\{1,2\}$ला A वर उपसंच म्हटल्यास त्यास आपण $\{1,2\} \subseteq A$ असे दर्शवितो. जेव्हा आपण A चे उपसंच घेतो तेव्हा $\{1,2,3\}$हा A चा उपसंच आहे असे म्हणावे लागते.

जर A चे काही किंवा पुर्ण घटक B चे घटक असल्यास B हा A चा उपसंच होतो असे म्हणता येईल. यास $B \subseteq A$. .$B \subseteq A$ *म्हणजे फक्त आणि फक्त B चा प्रत्येक घटक हा A चा घटक झाला पाहिजे.*

यास आपण $B \subseteq A \Leftrightarrow a \in B \Rightarrow a \in A$, असे लिहितो येथे A, B हे दोन संच आहेत.

परिमेय संख्याचा संच $\mathbb{R}$ घ्या यात अनेक उपसंच असतात.



उदाहरणार्थ नैसर्गिक संख्याचा संच $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

पुर्ण संख्याचा संच $W = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

पुर्णांक संख्याचा संच $\mathbb{Z} = \{...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

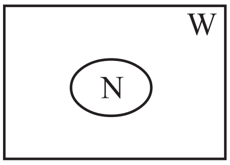
परिमेय संख्या नसलेल्या सर्व वास्तव संख्येनी बनलेला अपरिमेय संख्याचा संच $\mathbb{Q}$'आहे.

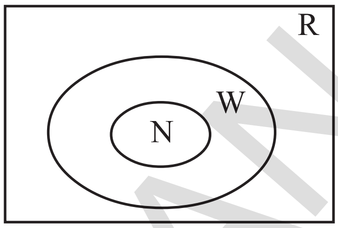
अशा रितीने $\mathbb{Q}' = \{x : x \in \mathbb{R}$ आणि $x \notin \mathbb{Q}\}$ म्हणजेच सर्व वास्तव संख्या परिमेय संख्या नसतात. उदा. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ आणि ð.

अशारितीने नैसर्गिक संख्याचा संच N हा पुर्ण संख्याचा संच W चा उपसंच आहे. यास आपण $\mathbb{N} \subseteq W$. असे लिहितो. W हा $\mathbb{R}$ चा सुध्दा उपसंच आहे.

म्हणजेच $\mathbb{N} \subseteq W$ आणि $W \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{R}$





या उपसंचातील काही संबंध $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq R$ आणि $\mathbb{Q}' \subseteq R$, आणि $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}'$ आहेत.

इंग्रजी व्यंजनाचे उदाहरण घ्या. $V = \{a, e, i, o, u\}$. आणि इंग्रजी मुळाक्षरांचा संच A सुध्दा घ्या. $A = \{a, b, c, d, \ldots.., z\}$ आपण पाहु शकतो की, परंतु काही घटक हा A चा सुध्दा घटक आहे. परंतु काही A चे घटक हे V चे घटक नाहीत. या संदर्भात V हा A चा उपसंच आहे. दुसऱ्या अर्थाने

$V \subset A$ जेव्हा $a \in V$, तर $a \in A$ आणि $V \subseteq A$.

हे करा

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $F = \{\ \}$.

   $\subset$ किंवा $\not\subset$ चा वापर करुन रिकाम्या जागा भरा.

   (i) A ….. B (ii) C ….. A (iii) B ….. A

   (iv) A ….. C (v) B ….. C (vi) ϕ ….. B

2. खालील पैकी कोणती विधान सत्य आहेत ते सांगा?

   (i) $\{\ \} = \phi$ (ii) $\phi = 0$ (iii) $0 = \{0\}$

प्रयत्न करा

1. A = {चौकोनातील संच}, B = {चौरस, आयत, समलंब समचतुर्भुज} तर $A \subset B$ किंवा $B \subset A$ आहे ते सांगा? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा?

2. जर $A = \{a, b, c, d\}$ तर.A संचास किती उपसंच आहेत?

   (A) 5 (B) 6 (C) 16 (D) 65

3. P हा 5 च्या अवयवाचा संच आहे. Q हा 25 च्या अवयवाचा संच आहे आणि R हा 125 च्या अवयवाचा संच आहे. तर खालील पैकी कोणते असत्य आहे?

   (A) $P \subset Q$ (B) $Q \subset R$ (C) $R \subset P$ (D) $P \subset R$

4. A हा 10 पेक्षा लहान असलेल्या मुळसंख्याचा संच आहे. B हा < 10 पेक्षा लहान असलेल्या विषम संख्याचा संच आहे. आणि C हा 10 पेक्षा लहान समसंख्याचा संच आहे. खालील पैकी किती विधाने सत्य आहेत?

   (i) $A \subset B$ (ii) $B \subset A$ (iii) $A \subset C$

   (iv) $C \subset A$ (v) $B \subset C$ (vi) $\phi \subset A$

चला उपसंचाच्या गुणधर्माचे निरिक्षण करु या. समजा $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ आणि $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$तर A मधील सर्व घटक B मध्ये आहेत $\therefore A \subset B$

B मधील सर्व घटक C मध्ये आहेत.$\therefore B \subset C$.

A मधील सर्व घटक C मध्ये आहेत.$\therefore A \subset C$.

म्हणजे $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

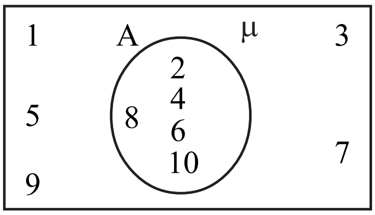
विचार करा आणि चर्चा करा

1. रिक्त संच हा प्रत्येक संचाचा उपसंच असतो का?
2. कोणताही संच स्वताचा उपसंच असतो का?
3. दोन संच अशाप्रकारे दिलेले आहेत की, एक संच हा दुसऱ्या संचाचा उपसंच नाही. तुम्हाला हे सिध्द करायचे असल्यास ते तुम्ही कसे सिध्द कराल? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा?

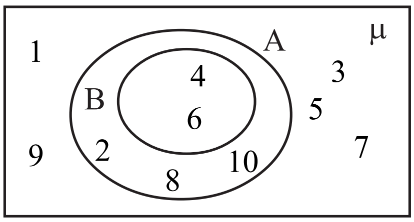
2.6 व्हेन चित्र (Venn diagrams)

व्हेन चित्राच्या साहाय्याने संचाला दर्शविने हे आपण आधीच पाहिले. याचा आता आपण सविस्तर अभ्यास करु या. संचामधील संबंध दर्शविण्याच्या एकमेव उपाय म्हणजे व्हेन आयलर चित्र किंवा साधे व्हेन चित्र (Venn-Euler diagram or simply Venn-diagram) या व्हेन चित्रात साधारणता आयत आणि वर्तुळाकार संवृत्त वक्र असतात.

आधीच्या धड्यात उल्लेख झाल्याप्रमाणे वैश्विक संच नेहमी आयतांनी दर्शविल्या जाते.



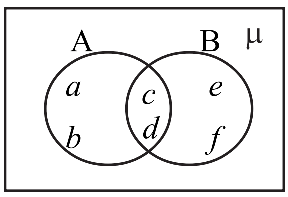
(i) समजा $\mu = \{1, 2, 3, \ldots., 10\}$ हा वैश्विक संच असुन $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ उपसंच असल्यास त्याचे व्हेन चित्र खालील प्रमाणे असते.



(ii) $\mu = \{1, 2, 3, \ldots., 10\}$ हा विश्व संच असुन $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ आणि $B = \{4, 6\}$ हे दोन उपसंच असल्यास $B \subset A$. तर त्याचे व्हेन चित्र खालील प्रमाणे असते.

(iii) जर $A = \{a, b, c, d\}$ आणि $B = \{c, d, e, f\}$.

या संचाला आपण व्हेन चित्राव्दारे स्पष्टीकरण करु शकतो.



2.6 संचावर मुलभुत क्रिया (Basic Operations on Sets)

बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार या अंकगणितीय मुलभुत क्रिया आहे. हे आपणास माहित आहे. त्याच प्रमाणे संचामध्ये संचाचा संयोग, संचाचा छेद आणि फरकाची क्रिया आपण व्याख्या करु शकतो.

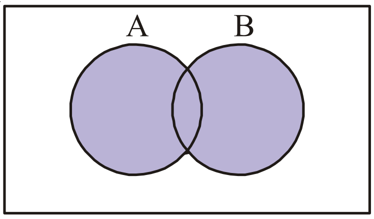
2.6.1 संचाचा संयोग (Union of Sets)

समजा A हा तुमच्या वर्गातील मंगळवारी गैरहजर असलेल्या विद्यार्थ्यांचा संच आणि B हा तुमच्या वर्गातील बुधवारी गैरहजर असलेल्या विद्यार्थ्यांचा संच आहे तर

A = {रोजा, रामु, रवी } आणि

B = {रामु, प्रिती, हनिफ}

आता आपणास मंगळवारी किंवा बुधवारी गैरहजर असलेल्या विद्यार्थ्यांचा संच माहित करायला हवा. रोजा $\in$ K होते का? रामु $\in$ K होतो का? रवि $\in$ K होतो का? हनिफ $\in$ K होतो का? प्रिती $\in$ K होते का? आखिल $\in$ K होतो का?



रोजा,रामु, रवि, हनिफ आणि प्रिती सर्व K शी संबंधीत आहेत. परंतु अखिला संबंधीत नाही.

म्हणुन K = {रोजा, रामु, रवि, हनिफ, प्रिती }

येथे K ला संच A आणि संच B चा संयोग म्हणतात. संच A आणि B चा संयोग म्हणजे असा संच ज्यामध्ये A संचाचे घटक आणि Bसंचाचे घटक असतात. यास '$\cup$'या चिन्हाने दर्शवितात चिन्हाच्या रुपात आपण $A \cup B$ रुपात आपण 'A '$\cup$' B' किंवा A cup B.

$A \cup B = \{x : x \in A$ किंवा $x \in B\}$

उदाहरण-1. समजा A = {2, 5, 6, 8} आणि B = {5, 7, 9, 1} तर माहित करा. $A \cup B$.

सोडवणुक : आपणास माहित आहे की, $A \cup B = \{2, 5, 6, 8\} \cup \{5, 7, 9, 1\}$

$= \{2, 5, 6, 8, 5, 7, 9, 1\}$

$= \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$A \cup B$ असे लिहितांना सामाईक घटक 5 ला एकदाच घेतले आहे.

उदाहरण-2. समजा $A = \{a, e, i, o, u\}$ आणि $B = \{a, i, u\}$ $A \cup B = A$.तर दाखवा.

सोडवणुक : आपणास माहित आहे $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} \cup \{a, i, u\}$

$= \{a, e, i, o, u, a, i, u\}$

$= \{a, e, i, o, u\} = A$.

या प्रश्नावरुन संच A आणि उपसंच B चा संयोगाचे स्पष्टीकरण मिळते. A हा स्वताचा उपसंच आहे.

जर $B \subset A$, तर $A \cup B = A$.

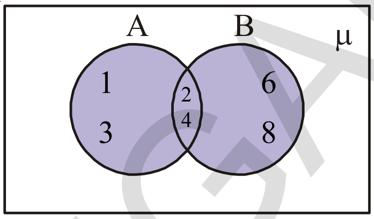
उदाहरण-3. जर A = {1, 2, 3, 4} आणि B = {2, 4, 6, 8}. माहित करा $A \cup B$.

सोडवणुक : A = {1, 2, 3, 4} आणि B = {2, 4, 6, 8}

तर $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$



$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

2.6.2 संचाचा छेद

समजा L हा तुमच्या वर्गातील मंगळवारी गैरहजर असलेल्या विद्यार्थ्यांचा संच आणि हा तुमच्या वर्गातील बुधवारी गैरहजर असलेल्या विद्यार्थ्यांचा संच आहे तर L = {रामु}.

येथे संच L हा संच A आणि संच B चा छेद आहे.

साधारपणे, A आणि B चे सर्व सामाईक घटक A आणि B च्या छेद संचात असतात. म्हणजेच असे घटक जे A मध्ये आहेत आणि B मध्ये सुध्दा आहेत. A आणि B चा छेद $A \cap B$ असे दर्शवितात. (याला "A छेद B" म्हणुन वाचतात.). चिन्ह रुपात आपण असे लिहितो की,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ आणि } x \in B\}$$

व्हेन चित्रामध्ये A आणि B चा छेद बाजुच्या आकृतीत रंगीत भागाने दाखविलेले आहे.

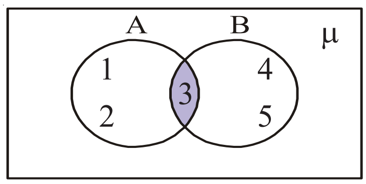
उदाहरण-4. माहित करा $A \cap B$ जेव्हा A = {5, 6, 7, 8} आणि B = {7, 8, 9, 10}.

सोडवणुक : A आणि B संचामध्ये सामाईक घटक 7, 8 आहेत.

$\therefore A \cap B = \{7, 8\}$.

उदाहरण-5. जर A = {1, 2, 3} आणि B = {3, 4, 5}, तर $A \cap B$ व्हेन चित्राव्दारे सोडवा.

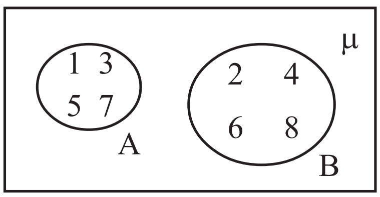
सोडवणुक : बाजूच्या व्हेन चित्रामध्ये A आणि B चा छेद खालील प्रमाणे सोडवु शकतो.



$A \cap B = \{3\}$

2.8 विभक्त संच (Disjoint Sets)

समजा A {1, 3, 5, 7} आणि B = {2, 4, 6, 8} आपल्याला असे दिसुन येते की, A आणि B मध्ये कोणतेही सामाईक घटक नाही.अशा संचाना विभक्त संच म्हणतात. व्हेन चित्राव्दारे विभक्त संच बाजुला दिलेल्या चित्रा प्रमाणे दर्शवु शकतो.



$A \cap B = \phi$

हे करा

1. समजा $A = \{1, 3, 7, 8\}$ आणि $B = \{2, 4, 7, 9\}$ तर $A \cap B$ माहित करा.
2. जर $A = \{6, 9, 11\}$ $B = \{\ \}$तर $A \cup \phi$ माहित करा.
3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $B = \{2, 3, 5, 7\}$. तर $A \cap B$ हे दाखवा. $A \cap B = B$.
4. जर $A = \{4, 5, 6\}$ $B = \{7, 8\}$ तर $A \cup B = B \cup A$ दाखवा.

प्रयत्न करा

1. A आणि B संचाची यादी करा. त्यामध्ये घटक असे निवडा की, A आणि B संच विभक्त होतील
2. जर $A = \{2, 3, 5\}$तर $A \cup \phi$ आणि $\phi \cup A$ माहित करून, तुलना करा.
3. जर$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ तर $A \cup B$, $A \cap B$ माहित करा. तुम्हाला काय निदर्शणास येते?
4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ A आणि B चा छेद माहित करा.

विचार करा आणि चर्चा करा

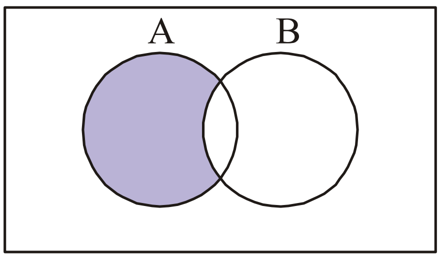
कोणत्याही दोन विभक्त संचाचा छेद हा रिक्त संच असतो. यासाठी काही उदाहरणे द्या.

2.8 संचाचा फरक (Difference of Sets)

समजा A हा विषम संख्याचा संच आणि B हा 30 च्या अवयवांचा संच आहे. तर $A=\{1,3,5,...\}$ आणि $B=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ जर आपणास 30 चे विषम नसणारे अवयव काढायचे असल्यास येणारा संच (2,6,10,30) होते. या संदर्भात हा संच B-A ने दर्शवितो.

तर $B-A=\{2,6,10,30\}$.

आता संच A आणि संच B चा फरक म्हणजे अशा घटकांचा संच जे संच A मध्ये आहे. परंतु B मध्ये नाही. A आणि B च्या फरकाला $A - B$ किंवा "A उणे B" असे दर्शवितो.



$$A - B = \{x : x \in A \text{ आणि } x \notin B\}.$$

उदाहरण-6. समजा $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$. माहित करा $A - B$.

सोडवणुक : दिलेले आहे $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ आणि $B = \{4, 5, 6, 7\}$. फक्त संच A मध्ये असणारे आणि संचB नसणारे घटक घेतले पाहिजे.

$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3\}$

$\therefore A - B = \{1, 2, 3\}$. कारण 4,5 घटक संच B मध्ये आहेत ते संचA मधुन काढलेले आहे.

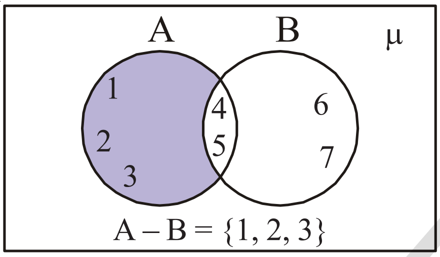
अशा रितीने संच B – A, या मधील घटक फक्त B संचातले अहे.

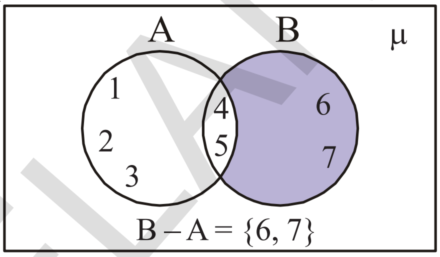
$B - A = \{4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\}$

$\therefore B - A = \{6, 7\}$ (Aमध्ये आहे ते B मधुन वाढले आहे.).

लक्षात घ्या $A - B \neq B - A$

A – B आणि B – Aचे व्हेन चित्र खाली दाखविले आहे.





हे करा

1. जर $A = \{1,2,3,4,5\}$; $B = \{4,5,6,7\}$तर A – B आणि B – A माहित करा.ते समान आहे का?
2. जर $V = \{a, e, i, o, u\}$ आणि $B = \{a, i, k, u\}$, तर माहित करा V – B आणि B – V.

विचार करा आणि चर्चा करा

A – B, B – A आणि $A \cap B$ हे परस्परांशी विभक्त संच आहेत. हे जर सत्य असेल तर निरिक्षण करण्यासाठी काही उदाहरणे वापरुन पाहा.

अभ्यास - 2.2

1. जर $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{1,2,3,5,6\}$ तर $A \cap B$ आणि $B \cap A$ माहित करा? ते समान आहे का?
2. $A = \{0, 2, 4\}$आणि $A \cap \phi$ आणि $A \cap A$ माहित करा.
3. जर $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ आणि $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$तर A – B आणि B – Aमाहित करा.
4. जरA आणि B हे दोन संच असे आहेत की, $A \subset B$ होतील तर $A \cup B$?

5. समजा $A = \{x : x$ ही नैसर्गिक संख्या आहे$\}$ $B = \{x : x$ ही सम नैसर्गिक संख्या आहे$\}$

$C = \{x : x$ ही विषम नैसर्गिक संख्या आहे$\}$ $D = \{x : x$ ही मुळ संख्या आहे$\}$

माहित करा $A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D$.

6. जर $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$; $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$; $D = \{5, 10, 15, 20\}$ तर माहित करा.

(i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$ (v) $C - A$

(vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$ (ix) $C - B$ (x) $D - B$

7. खालील प्रत्येक विधान सत्य आहेत की असत्य ते सांगा. तुमच्या उत्तरासाठी कारणे द्या.

(i) $\{2, 3, 4, 5\}$ आणि $\{3, 6\}$ हे विभक्त संच आहेत.

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ आणि $\{a, b, c, d\}$ हे विभक्त संच आहेत.

(iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ आणि $\{3, 7, 11, 15\}$ हे विभक्त संच आहेत.

(iv) $\{2, 6, 10\}$ आणि $\{3, 7, 11\}$ हे विभक्त संच आहेत.

2.9 समान संच (Equal Sets)

खालील संचास पाहा.

$A = \{$सचिन, द्रविड, कोहली$\}$

$B = \{$द्रविड, सचिन, धोनी$\}$

$C = \{$कोहली, द्रविड, सचिन$\}$

वरील तीन्ही संच A, B आणि C मध्ये तुम्ही काय निरिक्षण केले? A मध्ये असलेले सर्व खेळाडु C मध्ये आहेत. पण B मध्ये नाहीत. तसेच A आणि C मध्ये सारखे घटक आहेत पण A आणि B मधील काही घटक भिन्न आहेत. म्हणुन A आणि C संच समान आहेत पण A आणि B समान नाहीत.

A आणि C या दोन संचाला समान म्हणतात जेव्हा A मधील प्रत्येक घटक C मध्ये (i.e.$A \subseteq C$)असेल आणि C मधील प्रत्येक घटक A मध्ये असेल (i.e.$C \subseteq A$).

जर A आणि C समान संच असल्यास आपणत्याला $A = C$ असे लिहितो. अशा प्रकारे जर $C \subseteq A$ आणि $A \subseteq C \Leftrightarrow A = C$. असे लिहु शकतो. येथे $\Leftrightarrow$ हे चिन्ह जर आणि फक्त जर म्हणुन वाचावे जर A आणि C मध्ये सारखे घटक असल्यास ते समान होतात म्हणजे $A = C$.

यावरुन आपण असे निष्कर्शाला येतो की, संच हा स्वताचा उपसंच असतो.

उदाहरण-7. जर A = $\{p, q, r\}$ आणि B = $\{q, p, r\}$, तर A=B आहे किंवा नाही याची तपासणी करा.

सोडवणुक: A = $\{p, q, r\}$ आणि B = $\{q, p, r\}$ दिलेले आहे.

वरील संचात A चा प्रत्येक घटक हा B चा घटक आहे. $\therefore A \subseteq B$.

अशारितीने B चा प्रत्येक घटक हा A मध्ये आहे. $\therefore B \subseteq A$.

वरील दोन्ही संबंधावरुन आपण म्हणु शकतो की, A=B.

उदाहरण-8. जर A = {1, 2, 3, ...} आणि N हा नैसर्गिक संख्याचे संच आहे. A आणि N सारखे आहे का? याची तपासणी करा.

सोडवणुक: दोन्ही संचातील घटक सारखे आहेत म्हणुन $A \subseteq N$ आणि $N \subseteq A$.

म्हणुन A आणि N हे दोन्ही संच नैसर्गिक संख्याचे संच आहेत. म्हणुन A आणि N संच समान आहेत A = N.

उदाहरण-9. समजा A = $\{p, q, r, s\}$ आणि B = {1, 2, 3, 4}समान आहेत का?

सोडवणुक: $\therefore A = \{p, q, r, s\}, B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow$

A आणि B मध्ये सारखे घटक नाहीत म्हणुन $A \neq B$.

उदाहरण-10. समजा A हा 6 पेक्षा लहान असलेल्या मुळ संख्याचा संच आहे. आणि P हा 30 च्या मुळ अवयवांचा संच आहे. A आणि B समान आहेत का ?याची तपासणी करा.

सोडवणुक: 6 पेक्षा कमी असलेल्या मुळ संख्याचा संच A = { 2,3,5}

30 चे मुळ अवयव 2, 3 आणि 5 आहेत. म्हणुन B = { 2,3,5}

या वरुन A आणि B मधील घटक सारखे आहेत. म्हणुन A आणि B समान आहेत.

जसे $A \subseteq B \quad B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad A = B$

उदाहरण-11. A आणि B समान आहेत हे सिध्द करा, येथे

A = $\{x : x$ 'ASSASSINATION' शब्दामधील अक्षर आहे.}

B = $\{x : x$ STATION या शब्दामधील अक्षर आहे.}

सोडवणुक: दिलेले, A = $\{x : x$ 'ASSASSINATION' या शब्दामधील अक्षर आहे}

A या संचाला असे सुध्दा लिहु शकतो की, A = {A,S,I,N,T,O}कारण साधरणता: संचामधील घटक पुन्हा पुन्हा लिहित नसतो.

तसेच B = $\{x : x$ STATION या शब्दातील अक्षर आहे }

'B' ला असे ही लिहु शकतो की, B = {A,S,I,N,T,O}

म्हणुन, A आणि B मधील घटक समान आहेत आणि A = B

जसे $A \subseteq B\,,\; B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad A = B$

उदाहरण-12. संच ϕ, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 5, 9\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$संच घ्या. खालील संचाच्या जोड्यामध्ये $\subset$ किंवा $\not\subset$ हे चिन्ह लिहा.

(i) ϕ ….. B (ii) A ….. B (iii) A ….. C (iv) B ….. C

सोडवणुक : (i) $\phi \subset B$, कारण ϕ हा प्रत्येक संचाचा उपसंच असतो.

(ii) $A \not\subset B$, जसे $3 \in A$ पण $3 \notin B$.

(iii) $A \subset C$ कारण $1, 3 \in A$ तसेच C मध्ये सुध्दा आहेत.

(iv) $B \subset C$ कारण B मधला प्रत्येक घटक सुध्दा C मध्ये आहे.

अभ्यास - 2.3

1. खालील पैकी कोणते संच समान आहेत?

(i) $A = \{x : x$ FOLLOW या शब्दातील अक्षर आहे $\}$

(ii) $B = \{x : x$ FLOWया शब्दातील अक्षर आहे $\}$

(iii) $C = \{x : x$ WOLFया शब्दातील अक्षर आहे $\}$

2. खाली दिलेल्या संचाच्या रिकाम्या जागेत = किंवा $\neq$ या पैकी योग्य चिन्ह वापरुन दिलेले विधान सत्य करा.

$A = \{1, 2, 3\}$; B = {पहिले तीन नैसर्गिक संख्या}

$C = \{a, b, c, d\}$; $D = \{d, c, a, b\}$

$E = \{a, e, i, o, u\}$; F = {इंग्रजी मुळअक्षरांतील स्वरांचा संच}

(i) A …. B (ii) A …. E (iii) C …. D

(iv) D …. F (v) F …. A (vi) D …. E

(vii) F …. B

3. खालील प्रत्येकामध्ये $A = B$ आहे किंवा नाही?

(i) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{d, c, a, b\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$ $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{x : x$ हा धन समपुर्णांक आहे आणि $x < 10\}$

(iv) $A = \{x : x$हा10 चे गुणक आहे$\}$ $B = \{10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

4. खालील साठी कारणे सांगा?

(i) $\{1, 2, 3, ..., 10\} \neq \{x : x \in N$ आणि $1 < x < 10\}$

(ii) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \neq \{x : x = 2n+1$ आणि $x \in N\}$

(iii) $\{5, 15, 30, 45\} \neq \{x : x$ हा15 चा गुणक आहे.$\}$

(iv) $\{2, 3, 5, 7, 9\} \neq \{x : x$ हा मुळ संख्या आहे.$\}$

5. खालील संचाचे सर्व उपसंच लिहा.

(i) $B = \{p, q\}$ (ii) $C = \{x, y, z\}$ (iii) $D = \{a, b, c, d\}$

(iv) $E = \{1, 4, 9, 16\}$ (v) $F = \{10, 100, 1000\}$

2.10 मर्यादीत आणि अमर्यादीत संच (Finite & Infinite sets)

आता खालील संच माहित करा:

(i) A = {तुमच्या शाळेतील विद्यार्थी} (ii) $L = \{p,q,r,s\}$

(iii) $B = \{x : x$ is an even number$\}$ (iv) $J = \{x : x$ is a multiple of $7\}$

वर दिलेल्या प्रत्येक संचाच्या घटकांची यादी करु शकता का? (i) मध्ये तुमच्या शाळेतील विद्यार्थ्यांची संख्या ही घटकांची संख्या होते. (ii) मध्ये L संचातील घटकांची संख्या 4 आहे. A आणि L संचा मधील घटकांची संख्या मोजने शक्य आहे. हे आपल्याला माहित होते. म्हणजेच त्या मध्ये घटकांची संख्या मर्यादीत आहे. अशा संचाला मर्यादीत संच म्हणतात.

आता सर्व सम संख्याचा संच B घेऊ या. आपण घटकांच्या संख्येला पुर्ण संख्येत व्यक्त करु शकतो. म्हणजेच या संचाच्या घटकांची संख्या मर्यादीत नाही. आपणास आढळुन येते की, B आणि J संचातील घटकांची संख्या अमर्यादीत आहे अशा संचाला अमर्यादीत संच (अनंत संच) **infinite sets** असे म्हणतात.

दिलेल्या एका बिंदुतुन आपण अनेक रेषा काढु शकतो. म्हणुन हा संच अमर्यादीत आहे. सर्व पुर्णांकांच्या समुहामध्ये शेवटची सम किंवा विषम संख्या माहित करणे शक्य नाही. म्हणजेच संच मर्यादीत नसेल तर त्याला आपण अमर्यादीत संच म्हणतो.

आणखी काही उदाहरणे पाहु या.

(i) समजा 'W' हा आठवड्यातील दिवसांचा संच आहे. तर W मर्यादीत आहे.

(ii) समजा 'S' हा $x^2 - 16 = 0$ या समीकरणाला उकल संच आहे. तर S हा मर्यादीत आहे

(iii) समजा 'G' हा रेषेवरील बिंदुचा संच आहे. तर G हा अमर्यादीत आहे.

उदाहरण-13. खालील पैकी कोणते संच मर्यादीत किंवा अमर्यादीत संच आहेत ते सांगा.

(i) $\{x : x \in N$ आणि $(x-1)(x-2) = 0\}$ (ii) $\{x : x \in N$ आणि $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in N$ आणि $2x - 2 = 0\}$ (iv) $\{x : x \in N$ आणि x हा मुळ आहे$\}$

(v) $\{x : x \in N$ आणि x हा विषम संख्या आहे $\}$

सोडवणुक :

(i) दिलेल्या संदर्भात x ची किंमत 1 किंवा 2 घेऊ शकतो. $\{1,2\}$हा संच आहे. म्हणुन ते मर्यादीत आहे.

(ii) $x^2 = 4$, $x = +2$ किंवा -2. परंतु $x \in N$ किंवा x हा नैसर्गिक संख्या आहे. म्हणुन संच$\{2\}$आहे. म्हणजेच हे मर्यादीत आहे.

(iii) दिलेल्या संचामध्ये $x = 1$ आणि $1 \in N$ म्हणजेच हे मर्यादीत आहे.

(iv) दिलेला संच हा सर्व मुळ संख्याचा संच आहे. तेथे अनंत मुळ संख्या आहेत. म्हणजेच हे अमर्यादीत आहे.

(v) विषम संख्या अमर्यादीत आहे. म्हणुन संच पण अमर्यादीत आहे.

आता, खालील मर्यादीत संच पाहा:

2.11 मर्यादीत संचाची गनता

$A = \{1, 2, 4\}$; $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$; $C = \{x : x$ हा "INDIA"शब्दातील अक्षर आहे.$\}$

येथे,

संच A मधील घटकांची संख्या $= 3$.

संच B मधील घटकांची संख्या $= 5$.

संच C मधील घटकांची संख्या = 4 (C संचामध्ये 'I' घटक दोन वेळा येतो. आपल्याला माहित आहे की, दिलेल्या संचाचे घटक वेगवेगळे असायला पाहिजे म्हणुन C संचाचे 4 होतात.)

संचामध्ये असलेल्या घटकांच्या संख्येला त्या संचाची मुख्य संख्या म्हणतात. A संचाची मुख्य संख्या $n(A) = 3$ म्हणुन दर्शवितात.

तसेच, $n(B) = 5$ आणि $n(C) = 4$.

सुचना : शुन्य संचात एक ही घटक नसतो. या संख्यांची मुख्य संख्या 0 आहे $\therefore n(\phi) = 0$

हे करा

1. खालील पैकी कोणते रिक्त संच आहेत? तुमच्या उत्तरासाठी कारणे द्या.
   - (i) 2 आणि 3 मध्ये असलेल्या पुर्णांकांचा संच.
   - (ii) 1 पेक्षा लहान असलेल्या नैसर्गिक संख्याचा संच.
   - (iii) 2 ने निशेष भाग जाणाऱ्या विषम संख्याचा संच.
2. खालील पैकी कोणते संच मर्यादीत आणि कोणते अमर्यादीत संच आहेत, ते सांगा आणि तुमच्या उत्तरासाठी कारणे द्या.
   - (i) $A = \{x : x \in N$ आणि $x < 100\}$
   - (ii) $B = \{x : x \in N$ आणि $x \leq 5\}$
   - (iii) $C = \{1^2, 2^2, 3^2, ...\}$
   - (iv) $D = \{1, 2, 3, 4\}$
   - (v) $\{x : x$ हा आठवड्यातील दिवस आहे.$\}$
3. अमर्यादीत संचाला खुण करा.
   - (A) पुर्ण संख्याचा संच < 10
   - (B) मुळ संख्याचा संच < 10
   - (C) पुर्णांकाचा संच < 10
   - (D) 10 च्या अवयवाचा संच

प्रयत्न करा

1. खालील पैकी किती रिक्त संच आहेत? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.
   - (i) $A = \{x : x^2 = 4$ आणि $3x = 9\}$.
   - (ii) प्रतलातील अशा त्रिकोनांचा संच ज्यांच्या तीन्ही कोनांची बेरीज180 पेक्षा कमी आहे.
2. $B = \{x : x + 5 = 5\}$हे का रिक्त संच आहे? का?

विचार करा आणि चर्चा करा

रिक्त संच हा मर्यादीत संच आहे हे विधान सत्य आहे का असत्य आहे? का?

अभ्यास - 2.4

1. खालील पैकी कोणते संच रिक्त आहे व कोणते नाही?
   - (i) एका बिंदुतुन जाणाऱ्या रेषांचा संच.
   - (ii) 2 ने निशेष भाग जाणाऱ्या विषम नैसर्गिक संख्याचा संच.
   - (iii) $\{x : x$ हा नैसर्गिक संख्या आहे, $x < 5$ आणि $x > 7\}$
   - (iv) $\{x : x$ हा दोन समांतर रेषेचा सामाईक बिंदु आहे.$\}$
   - (v) सममुळ संख्याचा संच.
2. खालील पैकी कोणते संच मर्यादीत किंवा अमर्यादीत आहेत?
   - (i) वर्षामधील महिन्याचा संच
   - (ii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$
   - (iii) 99 पेक्षा लहान असलेल्या मुळ संख्याचा संच.
3. खालील पैकी प्रत्येक संच मर्यादीत आहे की अमर्यादीत आहेत ते सांगा.
   - (i) इंग्रजी मुळाक्षरे मधील अक्षरांचा संच
   - (ii) X-अक्षावर समांतर असणाऱ्या रेषांचा संच
   - (iii) 5 च्या गुणक संख्याचा संच.
   - (iv) (0, 0) या आरंभ बिंदु मधुन जाणाऱ्या वर्तुळाचा संच.

उदाहरण-14. जर $A = \{1, 2, 3,4,5\}$; $B = \{2,4,6,8\}$ तर $n(A \cup B)$ काढा.

सोडवणुक: संच A मध्ये पाच घटक आहेत $\therefore n(A) = 5$

आणि संच B मध्ये चार घटक आहेत $\therefore n(B) = 4$

परंतु $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$ मध्ये 9 घटक नाहीत आणि यात फक्त 7 घटक आहेत कारण काय?

विचार करा आणि चर्चा करा

1. $n(A), n(B), n(A \cap B)$ आणि $n(A \cup B)$ मध्ये काय संबंध आहे?
2. जर A आणि B विभक्त संच असेल तर $n(A \cup B)$ तुम्ही कसे माहित कराल?

सुचविलेले प्रकल्प

संचाची परिकल्पना, संचाचे गुणधर्म, संचाची प्रक्रिया

- विद्यार्थ्यांचे आवास आवडीने खेळ/विषय/साप्ताहीके/टी.व्ही.चॅनलस इत्यादी विषयी माहिती, गोळा करणे, वरील माहिती नुसार संचाचा संघ, संचाचा छेद, संचाचा भेद इत्यादी प्रक्रिया माहित करुन वेन आकृती काढुन त्याचे पृथ्यकरण करणे.

(i) खेळाची आवड आहे/ वर्तमानपत्राची आवड आहे 1 / TV channel ची आवड आहे 1

(ii) खेळाची आवड आहे 2/ वर्तमानपत्राची आवड आहे 2 / TV channel ची आवड आहे 2

(iii) कितींना दोन्ही मध्ये आवड आहे?

(iv) कितींना एकाही मध्ये आवड आहे?

Extension: या सर्वेक्षणाला आपण 3 खेळ / 3 वर्तमानपत्र/TV channel 3 असेही घेऊ शकतो.

आपण काय चर्चा केली

1. वस्तुची निश्चित व्याख्या केलेल्या समुहाला संच म्हणतात, येथे निश्चित व्याख्याचा अर्थ-

   (i) वस्तुचा वैश्विक संच आहे जो गृहीत धरण्याची परवानगी देतो.

   (ii) वैश्विक संचातील केाणतीही वस्तु संचाचा घटक असते किंवा घटक नसते.

2. संचामध्ये असलेल्या वस्तुला त्या संचाचा घटक म्हणतात. संचामध्ये असणे यासाठी आपण '$\in$' हे चिन्ह दर्शवितो.

3. संच यादी पध्दतीमध्ये लिहतांना संचामधील सर्व घटक लिहितो व दोन घटकांच्या मध्ये स्वल्पविराम देतो आणि संच महरपी कंसात लिहितो { }

4. संच वर्णन पध्दतीत सुध्दा लिहु शकतो.

5. संचामध्ये एकही घटक नसेल अशा संचाला रिक्त संच म्हणतात.

6. जर संचाची मुख्य संख्या ही निश्चित पुर्ण संख्या असेत तर त्या संचाला अमर्यादीत संच म्हणतात.

7. जर संचातील अमर्यादीत नसल्यास त्या संचाला मर्यादीत असे म्हणतात.

8. संख्यामध्ये असलेल्या घटकांच्या संख्याला त्या संचाची मुख्य संख्या म्हणतात.

9. वैश्विक संच 'μ' किंवा U ने दर्शवितात साधारणता वैश्विक संच आयताने दर्शवितात.

10. जर 'a' हा A चा घटक आहे आणि 'a' हा B चा सुध्दा घटक आहे. असे सुचित करत असेल तर A हा B चा उपसंच असतो. याला $A \subset B$ जर $a \in A \Rightarrow a \in B$ येथे A, B हे दोन संच आहेत. असे लिहु शकतो.

11. जर A संचातील प्रत्येक घटक B संचात असेल आणि तसेच B संचातील प्रत्येक घटक A मध्ये असेल तेव्हा B आणि A हे दोन संच समान आहेत असे म्हणतो.

12. A संयोग B ला $A \cup B = \{x : x \in A$ किंवा $x \in B\}$ असे लिहितात.

13. A छेद B ला $A \cap B = \{x : x \in A$ आणि $x \in B\}$ असे लिहितात.

14. A, B या दोन संचातील फरकास $A - B$ किंवा $B - A$ दर्शवितात.

    $A - B = \{x : x \in A$ आणि $x \notin B\}$

15. व्हेन चित्राने संचामधील क्रिया दाखविणे सोयीचे असते.

धडा 3

बहुपदी

(Polynomials)

3.1 प्रस्तावना:

खालील दोन संदर्भ पाहु या.

1. एका बगीच्यातील फ्लावर बेड त्रिकोणाकार आहे. त्याची सर्वात मोठी बाजु लहान बाजुच्या 3 पट आहे, आणि सर्वात लहान बाजु ही लहान बाजु पेक्षा 2 एकक लहान आहे. जर मधल्या बाजुची लांबी **P** ने दर्शविल्यास त्याची परिमीती **P** परिमाणात काय येईल?

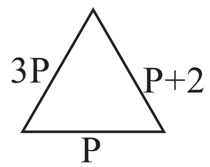
2. एका आयताकार डायनींग हॉलची लांबी तिच्या रुंदीच्या दुप्पट आहे. जर त्या हॉलची रुंदी x असल्यास त्या हॉलच्या पृष्ठभागाच्या तळाचे क्षेत्रफळ x च्या परिमाणात काय येईल?

वरील संदर्भात प्रत्येकात अज्ञात राशी आहे. पहिल्या संदर्भात मधली बाजु '**P**' एकक दिलेली आहे.

म्हणुन त्रिकोणाची परिमीती = सर्व बाजुंची बेरीज

परिमीती $= P + 3P + P + 2$

$= 5P + 2$



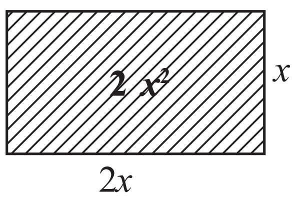
अशारितीने दुसऱ्या संदर्भात लांबी ही रुंदीच्या दुप्पट आहे.

म्हणुन जर रुंदी $= x$, तर लांबी $= 2x$

आयताची परिमीती $= lb$

क्षेत्रफळ $= (2x)\,(x)$

$= 2\,x^2$



या वरुन त्रिकोणाची परिमीती, $5P + 2$ आणि आयताचे क्षेत्रफळ $2x^2$ हे भिन्न कोटी असलेल्या बहुपदीच्या रुपात आहे.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

3.2 बहुपदी म्हणजे काय?

एका बहुपदीतील x हे असे पद आहे. जे ax^n मधील मर्यादीत संख्येचे बेरीज असुन कोणत्याही a, वास्तव संख्या जेथे $a \neq 0$ आणि एखाद्या पुर्ण संख्या n इतकी असते.

बहुपदी	बहुपदी नाही
$2x$	$4x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{3}x-4$	$3x^2 + 4x^{-1} + 5$
$x^2 - 2x - 1$	$4+\frac{1}{x}$

$\frac{1}{y-1}$ ही बहुपदी का होत नाही? याची तुमच्या मित्रांसोबत आणि शिक्षकांशी चर्चा करा.

6 ला $6,x$ असेही लिहिता येते जेथे x चा घातांक 0 आहे.

हे करा

खालील पैकी कोणत्या बहुपदी आहेत आणि कोणत्या नाही? कारणे द्या?

(i) $2x^3$ (ii) $\frac{1}{x-1}$ (iii) $4z^2+\frac{1}{7}$ (iv) $m^2-\sqrt{2}\,m+2$ (v) $P^{-2}+1$

3.2.1 बहुपदीची कोटी

जर p(x) ही x, मधील बहुपदी असुन p(x) मधील x च्या सर्वात मोठ्या घातांकाला p(x) बहुपदीची कोटी म्हणतात. उदा. $3x + 5$ ही x चलातील बहुपदी आहे. याचा कोटी 1 आहे. याला रेषीय बहुपदी म्हणतात. $5x$, $\sqrt{2}y+5$, $\frac{1}{3}$P, $m + 1$ इत्यादी रेषीय बहुपदी आहेत.

ज्या बहुपदीचा कोटी 2 असतो. त्यास वर्ग बहुपदी असे म्हणतात. उदाहरणार्थ $x^2 + 5x + 4$ ही x चलातील वर्ग बहुपदी आहे. $2x^2 + 3x - \frac{1}{2}$, $p^2 -1$, $3 - z - z^2$, $y^2 - \frac{y}{3} + \sqrt{2}$ ही काही वर्ग बहुपदीची उदाहरणे आहेत.

$5x^3-4x^2+x-1$ ही x चलातील कोटी 3 असलेली बहुपदी आहे. यालाच घन बहुपदी असे म्हणतात. $2 - x^3$, p^3, $\ell^3 - \ell^2 - \ell + 5$ घन बहुपदीची काही उदाहरणे आहेत.

हे करा

विविध पदांचा वापर करुन कोणत्याही 3 वर्ग बहुपदी,घन बहुपदी, 2 रेषीय बहुपदी लिहा.

आपण कोणत्याही कोटीचा बहुपदी लिहु शकतो. $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 - 8$ ही कोटी 6 असलेली बहुपदी आणि $x^{10} - 3x^8 + 4x^5 + 2x^2 -1$ ही कोटी 10 असलेली बहुपदी आहे.

n कोणतीही नैसर्गिक संख्या असुन x चलातील n कोटी असलेली बहुपदी आपण लिहु शकतो.

साधारपणे आपण

> $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$ ही n^{th} कोटी असलेली बहुपदी आहे.
> येथे $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1,} a_n$ वास्तव सहगुणक आणि $a_0 \neq 0$ आहे.

उदा. x चलातील कोटी 1 असलेल्या बहुपदीचे सामान्य रुप $ax+b$ आहे. यात a आणि b वास्तव संख्या असुन $a \neq 0$ आहे.

प्रयत्न करा

1. x चलातील वर्ग बहुपदी आणि घनबहुपदीच्या सामान्य रुपात लिहा.
2. $b_0 \ldots b_n$. सहगुणक आणि n असलेल्या $q(z)$ बहुपदीचे सामान्य रुप लिहा. $b_0 \ldots b_n$ ला कोणत्या अटी लागु पडतात?

3.2.2 बहुपदीची किंमत

$p(x) = x^2 - 2x - 3$ बहुपदी घ्या. कोणत्याही किंमतीवर या बहुपदीची किंमत काय येईल? उदा $x = 1$ ठेवल्यास याची किंमत किती? या बहुपदीत $x = 1$ ठेवल्यास $p(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$ येते. x च्या ऐवजी 1 ठेवल्यास दिलेल्या बहुपदीची $p(x)$ किंमत -4 येते. $x = 1$ असतांना $x^2 - 2x - 3$ ची किंमत -4 आहे.

अशा रितीने $x = 0$ असतांना $p(x)$ ची किंमत $p(0) = -3$ आहे.

अशा प्रकारे $p(x)$ ही x चलातील बहुपदी असुन k ही वास्तव संख्या असल्यास x च्या ऐवजी $p(x)$ मध्ये k ठेवल्यास येणाऱ्या किंमतीला $x = k$,असतांना $p(x)$ ची किंमत म्हणतात.यास $p(k)$ ने दर्शवितात.

हे करा

(i)जर $p(x) = x^2 - 5x - 6$, तर $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$ ची किंमती काढा.

(ii) जर $p(m) = m^2 - 3m + 1$,तर $p(1)$ आणि $p(-1)$ ची किंमत काढा.

3.2.3 बहुपदीचे शुन्य

$x = 3, -1$ आणि 2 असतांना $p(x) = x^2 - 2x - 3$ च्या किंमती काय येतात?

आपणास माहित आहे $p(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

पुन्हा $p(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

आणि $p(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$

आपणास दिसुन येते की, $p(3) = 0$ आणि $p(-1) = 0$. 3,–1या किंमतीना $p(x) = x^2 - 2x - 3$ बहुपदीचे ***शुन्य*** म्हणतात.

$p(2) \neq 0$, 2 हा $p(x)$ चा शुन्य नाही.

साधारणता जर $p(k) = 0$ तर k वास्तव संख्येंला $p(x)$ बहुपदीचा शुन्य म्हणतात.

हे करा

(i) $p(x) = x^2 - 4x + 3$ तर $p(0), p(1), p(2), p(3)$ च्या किंमती काढुन $p(x)$ बहुपदीच्या शुन्य माहित करा.

(ii) $x^2 - 9$ या बहुपदीचे शुन्य -3 आणि 3 आहेत का तपासुन पहा.

अभ्यास - 3.1

1. जर $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$ तर माहित करा.

   (i) x^5 चा सहगुणक (ii) $p(x)$ चा कोटी (iii) स्थिर पद

2. खालील पैकी कोणते विधान सत्य किंवा असत्य आहे ते सांगा? तुमच्या उत्तरासाठी कारणे द्या?

   (i) $\sqrt{2}\,x^2 - 3x + 1$ बहुपदीची कोटी $\sqrt{2}$ आहे.

   (ii) $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ बहुपदी मध्ये x^2 चा सहगुणक 2 आहे.

   (iii) स्थिरपदाचा कोटी शुन्य आहे.

   (iv) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ ही वर्ग बहुपदी आहे.

   (v) बहुपदीची कोटी हा त्या बहुपदीतील पदाच्या संख्येपेक्षा एक ने जास्त असतो.

3. जर $p(t) = t^3 - 1$तर $p(1), p(-1), p(0), p(2), p(-2)$ च्या किंमती काढा.

4. -2 आणि 2 हे $x^4 - 16$ या बहुपदीचे शुन्य आहे किंवा नाही. तपासणी करा.

5. $p(x)$ जेव्हा $p(x) = x^2 - x - 6$ या बहुपदीचे 3 आणि -2 शुन्य आहेत का नाही. तपासणी करा.

3.3 बहुपदीशी प्रक्रिया:

रेषीय बहुपदीचा शुन्य कसा माहित करावा हे तुम्ही आधीच शिकलात.

उदाहरणार्थ जर k हा $p(x) = 2x + 5$ चा शुन्य असेल तर $p(k) = 0$ यावरुन $2k + 5 = 0$ म्हणजेच $k = \frac{-5}{2}$.

साधारणपणे जर k हा $p(x) = ax+b, a \neq 0$ शुन्य

असल्यास $p(k) = ak + b = 0$,

म्हणजे $k = \frac{-b}{a}$ किंवा $ax + b$ बहुपदीचा शुन्य $\frac{-b}{a}$ आहे.

अशा रितीने रेषीय बहुपदीच्या शुन्याचा संबंध त्यांच्या सहगुणक आणि स्थिर पदांशी असतो.

मोठा कोटी असलेल्या बहुपदीचा शुन्य त्यांच्या सहगुणकांशी संबंधीत असतो का? या बद्दल विचार करा आणि तुमच्या मित्रांशी चर्चा करा. या विषयी आपण नंतर चर्चा करु या.

3.4 बहुपदीच्या शुन्याचा भुमितीय अर्थ:

आपणास माहिती आहे की, जर $p(k) = 0$. तर वास्तव संख्या k हा $p(x)$ या बहुपदीचा शुन्य होतो. रेषीय आणि वर्ग बहुपदीची आलेखीय दर्शवणुक आणि त्यांच्या शुन्याचा भुमितीय अर्थ पाहु या.

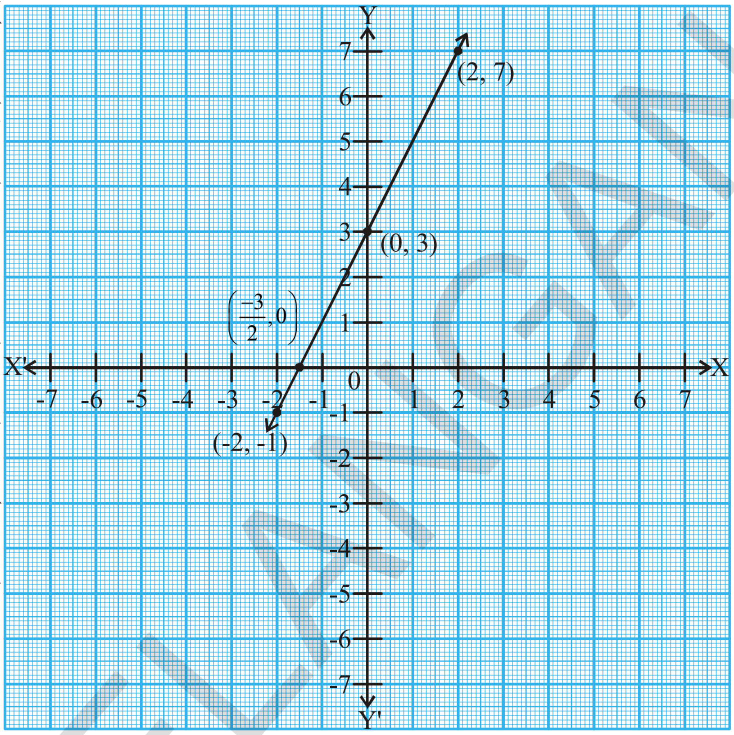
3.4.1. रेषीय बहुपदीची आलेखीय दर्शवणुक:

रेषीय बहुपदी $ax + b, a \neq 0$ घ्या. तुम्ही 9 व्या वर्गात शिकल्या प्रमाणे $y = ax + b$ चा आलेख एक सरळ रेषा आहे. उदाहरणार्थ $y = 2x + 3$ ती Y-अक्षावर $(0, 3)$ या बिंदुवर छेदते. तसेच ती $(-2, -1)$ आणि $(2, 7)$ या बिंदुतुन जाते.

तक्ता 3.1

x	-2	0	2
$y = 2x + 3$	-1	3	7
(x, y)	$(-2, -1)$	$(0, 3)$	$(2, 7)$

आलेखामध्ये तुम्हास दिसुन येते की, $y = 2x+3$ ही रेषा X अक्षावर $x = -1$ आणि $x = -2$ याच्या मध्ये म्हणजे $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ या बिंदुवर छेदते. परंतु $x = \frac{-3}{2}$ सुध्दा $2x + 3$ या बहुपदीचा शुन्य आहे. $2x + 3$ या बहुपदीचा शुन्य हा बिंदुचा x-निर्देशक आहे. जेथे $y = 2x + 3$ चा आलेख X अक्षावर छेदते.



हे करा

(i) $y = 2x + 5$, (ii) $y = 2x - 5$, (iii) $y = 2x$ चे आलेख काढा आणि X अक्षावरील छेदन बिंदु माहित करा. या बिंदुचे x-निर्देशक सुध्दा बहुपदीचे शुन्य होतात का?

साधारणपणे $ax + b$, $a \neq 0$ रेषीय बहुपदीसाठी $y = ax + b$ ही सरळ रेषा आहे. जी X अक्षावर एकाच बिंदुवर निश्चितपणे छेदते तो बिंदु $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$. आहे.

म्हणुन $ax + b$, $a \neq 0$ रेषीय बहुपदीला एकच शुन्य असतो. तो म्हणजे $y = ax + b$ चा आलेख x-अक्षावर छेदणाऱ्या बिंदुचा x- निर्देशक आहे.

3.4.2. वर्ग बहुपदीची आलेखीय दर्शवणुक:

वर्ग बहुपदीच्या शुन्याच्या भुमितीय अर्थाकडे पाहु या. $x^2 - 3x - 4$ बहुपदी घ्या. $y = x^2 - 3x - 4$ चा आलेख कसा असतो पहा. तक्ता 3.2 मध्ये दिल्याप्रमाणे x च्या काही किंमतीवरुन त्या समान $y = x^2 - 3x - 4$ च्या काही किंमतीची यादी पहा.

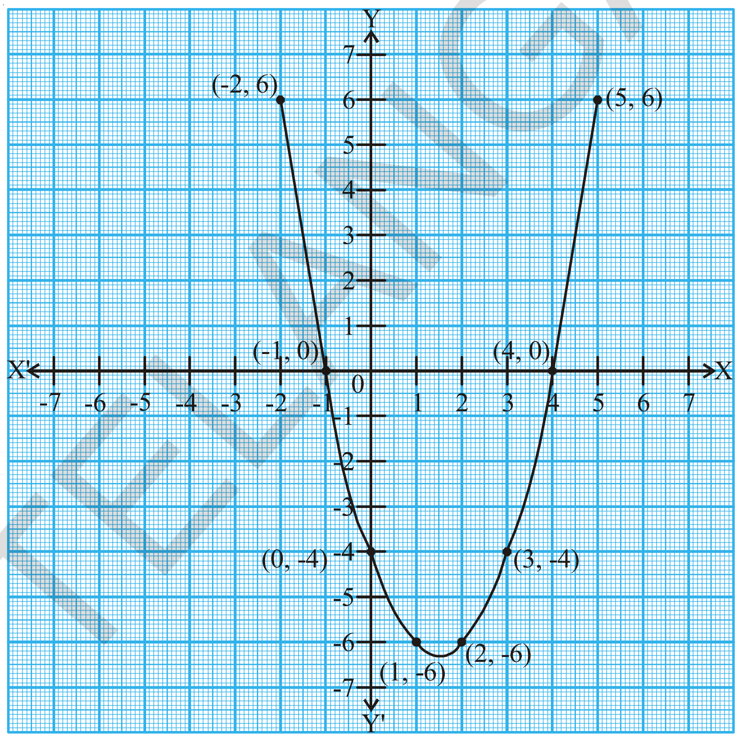
तक्ता 3.2

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6
(x, y)	$(-2, 6)$	$(-1, 0)$	$(0, -4)$	$(1, -6)$	$(2, -6)$	$(3, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 6)$

वरील यादीतील बिंदुंना आपण आलेखावर स्थापन करु आणि आलेख काढु. या वर्ग बहुपदीचा आलेख एक सरळ रेषा आहे का ?तो $\bigcup$ आकाराचा वक्र आहे का ? तो X अक्षावर दोन बिंदुत छेदतो.

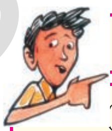
खरे तर कोणत्याही वर्ग बहुपदी $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, त्या समान असलेल्या $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$समिकरणाच्या आलेखावर $\bigcup$ अशा प्रकारे किंवा खाली $\bigcap$ अशा प्रकारे उघडतो. हे $a > 0$ किंवा $a < 0$ वर निर्भर करते.

(अशा वक्र आकारास परावलय म्हणतात)



आपल्या लक्षात आले की, -1 आणि 4 हे वर्ग बहुपदीचे शुन्य आहेत आणि -1 आणि 4 हे X अक्षावरील छेदनबिंदु आहेत. जिथे x-अक्षावर $y = x^2 - 3x - 4$ चा आलेख छेदतो. त्या छेदन बिंदुचे x-निर्देशक हे $x^2 - 3x - 4$ या वर्ग बहुपदीचे शुन्य आहेत. $(x) = y = x^2 - 3x - 4$; P(-1)=0,याचा आलेख X-अक्षाला (-1, 0) बिंदुवर छेदतो. आणखी P(4)=0 चा आलेख X-अक्षाला (4, 0) बिंदुवर छेदतो. साधारण पणे बहुपदी P(x) साठी जर P(a)=0 याचा आलेख X-अक्षाला (a, 0) वर छेदतो.

हे कोणत्याही वर्ग बहुपदीसाठी हे सत्य आहे. म्हणजे $ax^2 + bx + c$ जिथे $(a \neq 0)$ या वर्ग बहुपदीचे शुन्य हे त्या बिंदुचे x-निर्देशक आहेत. जेथे $y = ax^2 + bx + c$ जिथे $(a \neq 0)$ X अक्षावर छेदतात.

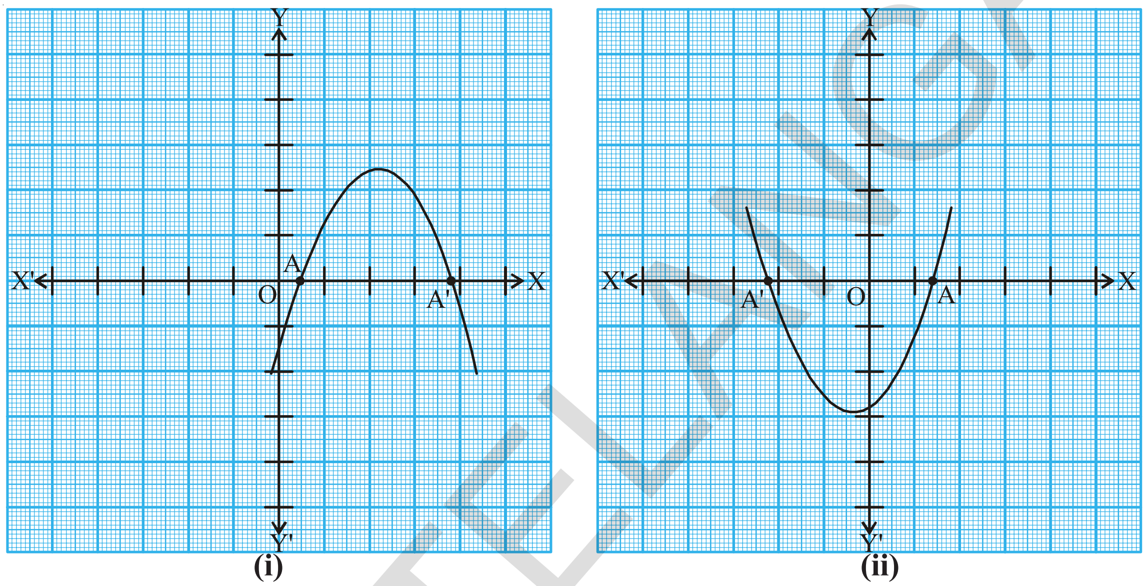


प्रयत्न करा

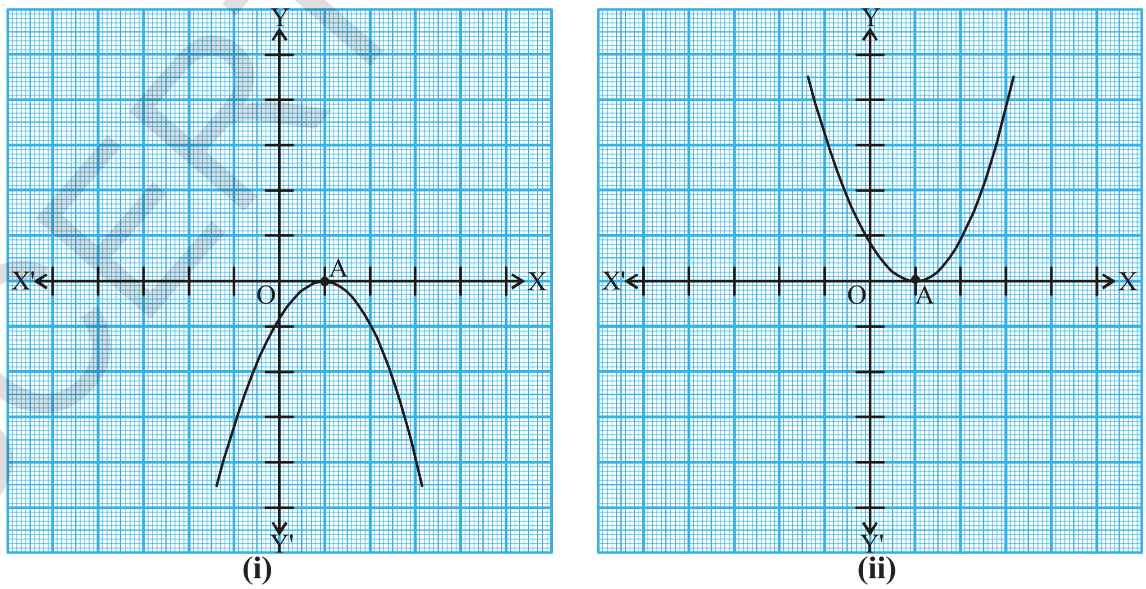
(i) $y = x^2 - x - 6$ (ii) $y = 6 - x - x^2$ चे आलेख काढुन प्रत्येक संदर्भातील शुन्य माहित करा. तुम्हाला काय दिसुन येते ?

आपण या आधीच निरिक्षण केलेल्या $y = ax^2 + bx + c$ जिथे $(a \neq 0)$ च्या आलेखावरुन खालील तिन संदर्भ उद्भवतात.

संदर्भ (i) : या संदर्भात आलेख x-अक्षाला दोन भिन्न बिंदु A मध्ये A′ मध्ये छेदतात. येथे A आणि A′ चे x-निर्देशक हे ax^2+bx+c जिथे $(a \neq 0)$ या वर्ग बहुपदीचे दोन शुन्य आहेत. परवलय हे वर किंवा खाली उघडतात.

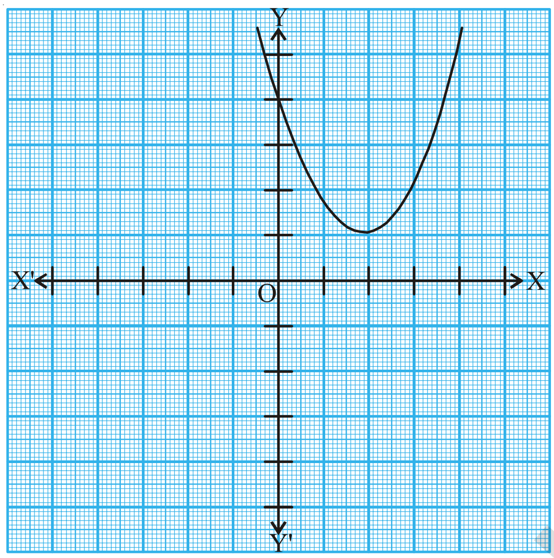


संदर्भ (ii) : येथे आलेख X अक्षावर निश्चितपणे एकाच बिंदुवर छेदतो. म्हणजे दोन बिंदु एकमेकांवर येतात. म्हणुन संदर्भ (i) वर दर्शविल्याप्रमाणे A आणि A′ हे दोन बिंदु एकाच जागी येऊन एकच बिंदु A.तयार होतो.

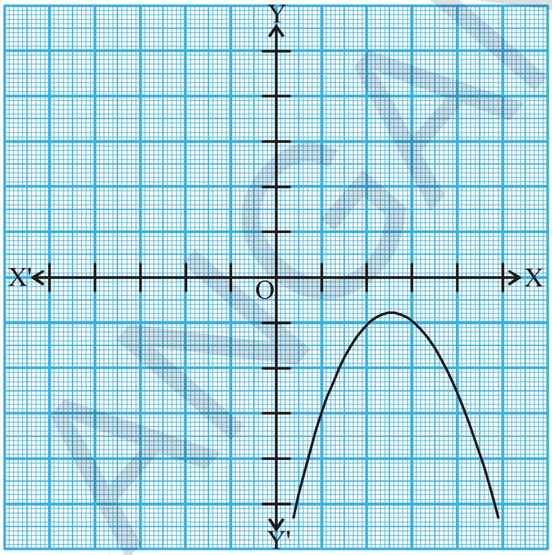


या संदर्भात $ax^2 + bx + c$ या वर्ग बहुपदीचा शुन्य A चा x- निर्देशक आहे.

संदर्भ (iii) : येथे आलेख हा पुर्ण पणे X अक्षाच्या वर किंवा X अक्षाच्या खाली आहे. म्हणुन तो X अक्षाला कोणत्याही बिंदुवर छेदत नाही.



(i)



(ii)

या संदर्भात $ax^2 + bx + c$ या वर्ग बहुपदीस शुन्य नसतो.

म्हणुन तुम्ही भुमितीय दृष्ट्या पाहिले असता वर्ग बहुपदीला दोन भिन्न शुन्य किंवा दोन समान शुन्य (म्हणजेच एक शुन्य) किंवा शुन्यच नसतो. याचा अर्थ असा होतो की, कोटी 2 असलेल्या बहुपदीला जास्तीत जास्त दोन शुन्य असतात.

प्रयत्न करा

1. प्रत्येकी दोन शुन्य असणाऱ्या कोणत्याही तिन वर्ग बहुपदी लिहा?
2. एक शुन्य असलेली एक वर्गबहुपदी लिहा?
3. एका वर्ग बहुपदीस एकच शुन्य असला म्हणजे तुम्ही त्याची तपासणी कशी कराल?
4. वास्तव संख्या x साठी शुन्य नसलेल्या तिन वर्ग बहुपदी लिहा?

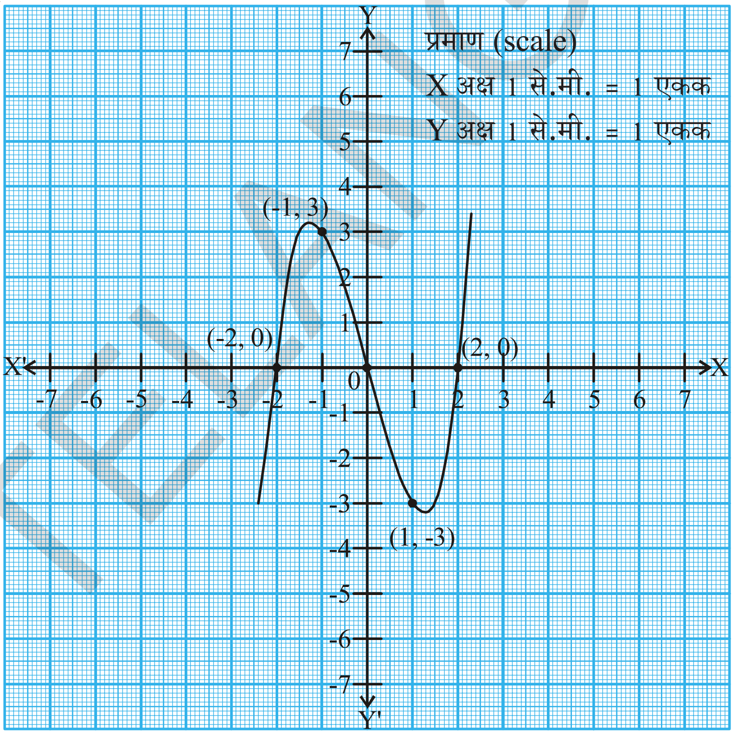
3.4.3 घन बहुपदीच्या शुन्याचा भुमितीय अर्थ

घन बहुपदीच्या शुन्याचा भुमितीय अर्थ काय होतो याचे तुम्हाला काय वाटते? $x^3 - 4x$ ही घन बहुपदी घ्या. $y = x^3 - 4x$ चा आलेख कसा दिसतो हे पाहण्यासाठी x च्या काही किंमती घेऊन समान y च्या काही किंमती तक्ता 3.3 मध्ये दाखविलेल्या आहेत.

तक्ता 3.3

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0
(x, y)	$(-2, 0)$	$(-1, 3)$	$(0, 0)$	$(1, -3)$	$(2, 0)$

आलेख काढतांना आपणास दिसुन येते की, $y = x^3 - 4x$ चा आलेखा आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे दिसतो.



वरील तक्त्यावरुन आपणास दिसुन यते की, -2, 0 आणि 2 हे $x^3 - 4x$ या घन बहुपदीचे शुन्य असुन -2, 0 आणि 2 हे बिंदुचे x-निर्देशक आहेत. जेथे $y = x^3 - 4x$ चा आलेख x-अक्षावर छेदतो. म्हणुन या बहुपदीला तिन शुन्य आहेत.

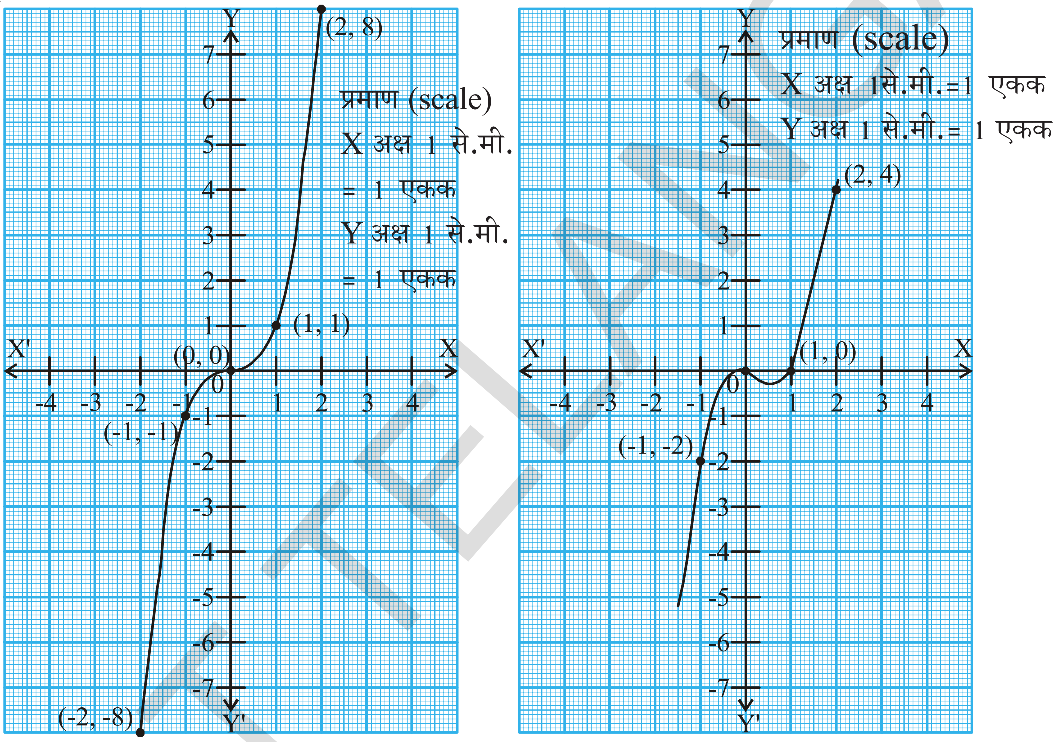
चला आता अजुन काही बहुपदी घेऊ या. x^3 आणि $x^3 - x^2$ या दोन बहुपदी घ्या. तक्ता 3.4 आणि 3.5 पहा.

तक्ता 3.4

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8
(x, y)	$(-2, -8)$	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 8)$

तक्ता 3.5

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - x^2$	-12	-2	0	0	4
(x, y)	$(-2, -12)$	$(-1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$



$y = x^3$ $\qquad$ $y = x^3 - x^2$

$y = x^3$ मध्ये तुम्हाला आढळुन येते की, 0 हा $y = x^3$ आलेखाव्दारे X अक्षावर छेदणाऱ्या एकच एक बिंदुचा x-निर्देशक आहे. म्हणुन बहुपदीला फक्त एकच शुन्य आहे. अशारीतीने 0 आणि 1 हे $y = x^3 - x^2$ व्दारा X अक्षावर दोन बिंदुवर छेदतात. त्यांचे x- निर्देशक 0 आणि 1 आहेत. म्हणुन घन बहुपदीला दोन शुन्य असतात.

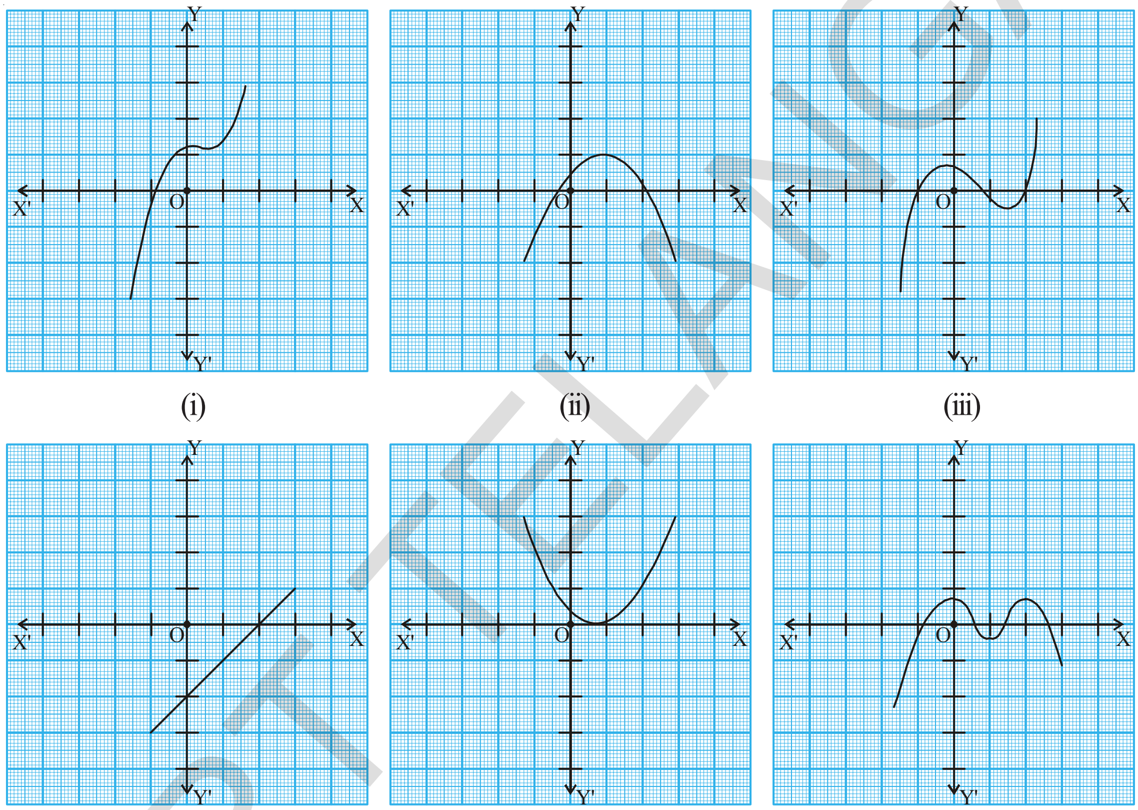
वरील उदाहरणावरुन आपणास असे दिसुन येते की, घन बहुपदीला जास्तीत जास्त 3 शुन्य असतात. दुसऱ्या शब्दात सांगायचे म्हणजे कोटी 3 असलेल्या बहुपदीला जास्तीत जास्त 3 शुन्य असते.

प्रयत्न करा

(i) $-x^3$ (ii) $x^2 - x^3$ (iii) $x^3 - 5x^2 + 6x$ बहुपदीचा आलेख न काढता. घन बहुपदीचे शुन्य माहित करा.

सुचना : n कोटी असलेली एक बहुपदी $p(x)$ चा आलेख $y = p(x)$ हा X अक्षाला जास्तीत जास्त n बिंदुत छेदते. म्हणुन n कोटी असलेल्या $p(x)$ बहुपदीला जास्तीत जास्त n शुन्य असतात.

उदाहरण-1. खाली दिलेल्या चित्रातील आलेख पहा. प्रत्येक आलेख हा $y = p(x)$ चा आलेख आहे. यात $p(x)$ ही बहुपदी आहे. प्रत्येक आलेखात दिलेल्या x व्याप्तीमध्ये $p(x)$ च्या शुन्याची संख्या काढा.



(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

सोडवणुक: दिलेल्या x व्याप्तीच्या प्रत्येक आलेखात.

(i) आलेख X अक्षावर एकाच बिंदुवर छेदते. म्हणुन शुन्याची संख्या 1 आहे.

(ii) आलेख X अक्षावर दोन बिंदुत छेदते. म्हणुन शुन्याची संख्या 2 आहे.

(iii) शुन्याची संख्या 3 आहे. (का ?)

(iv) शुन्याची संख्या 1 आहे. (का ?)

(v) शुन्याची संख्या 1 आहे. (का ?)

(vi) शुन्याची संख्या 4 आहे. (का ?)

उदाहरण-2. दिलेल्या बहुपदीच्या शुन्याची संख्या काढा. आणि त्यांची किंमत सुध्दा काढा.

(i) $p(x) = 2x + 1$ (ii) $q(y) = y^2 - 1$ (iii) $r(z) = z^3$

सोडवणुक: बहुपदीचा आलेख न काढता माहित करता येते.

(i) $p(x) = 2x + 1$ ही रेषीय बहुपदी आहे यास

एकच शुन्य असतो.

$p(x) = 0$ घ्या

म्हणुन $2x+1=0$

म्हणुन $x = \frac{-1}{2}$

बहुपदीचा शुन्य $\frac{-1}{2}$ आहे.

(ii) $q(y) = y^2 - 1$ ही वर्ग बहुपदी आहे.

यास जास्तीत जास्त दोन शुन्य असतात.

$q(y) = 0$ घ्या

$\Rightarrow y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (y + 1)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = -1$ or $y = 1$

म्हणुन बहुपदीचा शुन्य -1 आणि 1 आहेत.

(iii) $r(z) = z^3$ ही घन बहुपदी आहेत. यास जास्तीत जास्त तिन शुन्य असतात.

$r(z) = 0$ घ्या

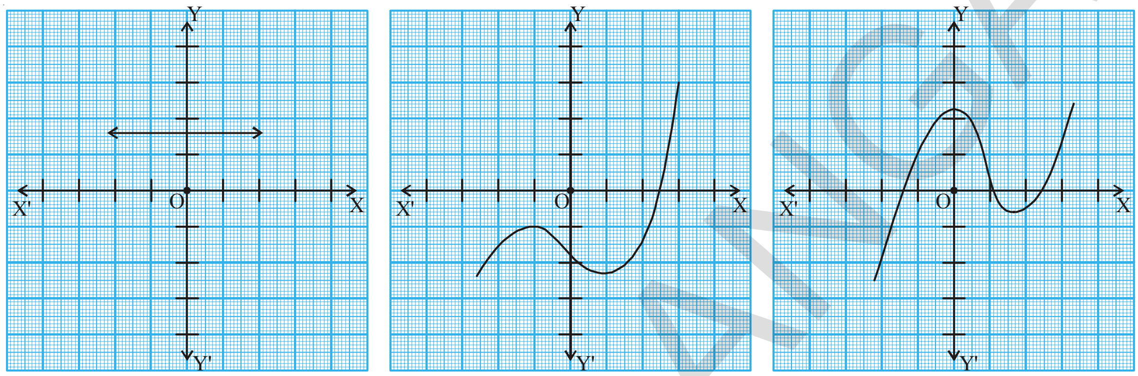
$\Rightarrow z^3 = 0$

$\Rightarrow z = 0$

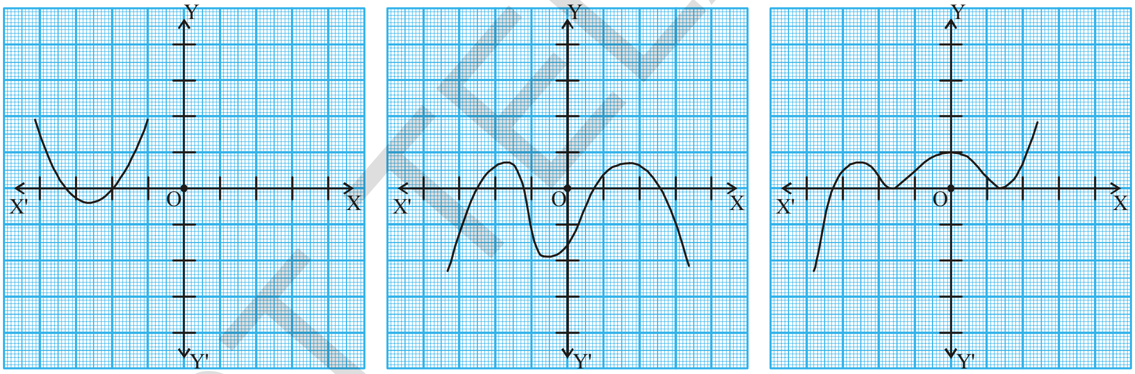
म्हणुन बहुपदीचा शुन्य 0 आहे.

अभ्यास – 3.2

1. बहुपदी $p(x)$ साठी खालील आकृतीत $y = p(x)$ चा आलेख दिलेला आहे. प्रत्येक संदर्भातील $p(x)$ चे शुन्य माहित करा



(i) (ii) (iii)



(iv) (v) (vi)

2. खाली दिलेल्या बहुपदीचे शुन्य माहित करा.

(i) $p(x) = 3x$ (ii) $p(x) = x^2 + 5x + 6$

(iii) $p(x) = (x+2)(x+3)$ (iv) $p(x) = x^4 - 16$

3. खाली दिलेल्या बहुपदीचे आलेख काढुन शुन्य माहित करा. उत्तराचे समर्थन करा.

(i) $p(x) = x^2 - x - 12$ (ii) $p(x) = x^2 - 6x + 9$

(iii) $p(x) = x^2 - 4x + 5$ (iv) $p(x) = x^2 + 3x - 4$

(v) $p(x) = x^2 - 1$

4. $p(x) = 4x^2 + 3x - 1$ या बहुपदीचे शुन्य $\frac{1}{4}$ आणि -1 हे आहेत का?

3.5 बहुपदीचे सहगुणक आणि शुन्यामधील संबंध

रेषीय बहुपदी $ax + b$ चा शुन्य $-\frac{b}{a}$ आहे. हे तुम्ही आधीच पाहिलात. आता आपण वर्ग बहुपदीच्या सहगुणक आणि शुन्यामधील संबंधाचा विस्तार करण्याचा प्रयत्न करु. यासाठी $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ बहुपदी घेऊ या.

बहुपदी च्या मध्यपदाला वेगळे करुन त्याचे अवयव कसे पाडतात. हे आपण 9 व्या वर्गात शिकलो. म्हणुन मधले पद '$-8x$' ला दोन पदात वेगळे करुन त्यांची बेरीज करु. त्याचा गुणाकार $6 \times 2x^2 = 12\,x^2$ आला पाहिजे. म्हणुन

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6$$
$$= 2x(x-3) - 2(x-3)$$
$$= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)(x-3)$$

$p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ शुन्य होते जेव्हा $x - 1 = 0$ किंवा $x - 3 = 0$ म्हणजेच जेव्हा $x = 1$ किंवा $x = 3$ असतात $2x^2 - 8x + 6$ चा शुन्य 1 आणि 3 आहेत. आता आपण बहुपदीतील पदांच्या सहगुणकाचा आणि या शुन्याचा काही संबंध आहे का? हे पाहण्याचा प्रयत्न करु. x^2 चा सहगुणक 2 आहे. x चा सहगुणक -8 आणि स्थिरांक 6 आहे.जो की x^0 चा सहगुणक आहे. (म्हणजे $6x^0 = 6$)

$$\text{बहुपदीच्या शुन्याची बेरीज} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$$

$$\text{बहुपदीच्या शुन्याचा गुणाकार} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{स्थिर पद}}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$$

आणखी काही वर्ग बहुपदींना घेऊ पाहु या.

$p(x) = 3x^2 + 5x - 2.$

मधल्या पदास वेगळे केल्यास

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x+2) - 1(x+2)$$
$$= (3x-1)(x+2)$$

$3x^2 + 5x - 2$ शुन्य होते जेव्हा $3x - 1 = 0$ किंवा $x + 2 = 0$

म्हणजेच जेव्हा $x = \frac{1}{3}$ किंवा $x = -2.$

$3x^2 + 5x - 2$ चा शुन्य $\frac{1}{3}$ आणि -2 या वरुन आपणास

$$\text{शुन्याची बेरीज} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$$

$$\text{शुन्याचा गुणाकार} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{स्थिर पद}}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$$

हे करा

खाली दिलेल्या वर्ग बहुपदीचे शुन्य माहित करा. बहुपदीच्या शुन्याची बेरीज आणि गुणाकार माहित करुन त्यातील पदांच्या सहगुणकाच्या संबंधाची तपासणी करा.

(i) $p(x) = x^2 - x - 6$ (ii) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(iii) $p(x) = x^2 - 4$ (iv) $p(x) = x^2 + 2x + 1$

साधारणपणे जर α आणि β ही $p(x) = ax^2 + bx + c$,

$a \neq 0$ या बहुपदीचे शुन्य असेल तर $(x - \alpha)$ आणि $(x - \beta)$ हे $p(x)$ चे अवयव होतात.

म्हणुन $ax^2 + bx + c = k\,(x - \alpha)\,(x - \beta)$ येथे k स्थिरांक आहे.

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta]$$

$$= kx^2 - k\,(\alpha + \beta)\,x + k\alpha\beta$$

दोन्ही बाजुच्या x^2, x आणि स्थिरपदांच्या सहगुणकाची तुलना केली असता.

$a = k$, $b = -k(\alpha+\beta)$ आणि $c = k\alpha\beta$.

त्यावरुन $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$,

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

सुचना: α आणि β हे ग्रीक शब्द असुन त्याचा उच्चार 'आल्फा' आणि 'बिटा' असा करतात. आपण अजुन एक अक्षर 'γ' वापरतो यास 'गामा' असे उच्चारतो.

$ax^2 + bx + c$ वर्ग बहुपदीच्या शुन्यांची बेरीज $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(\;x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

वर्ग बहुपदीच्या शुन्याचा गुणाकार $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{स्थिर पद}}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

खालील काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-3. $x^2 + 7x + 10$ या वर्ग बहुपदीचा शुन्य माहित करुन शुन्य आणि सहगुणकामधील संबंधाची तपासणी करा.

सोडवणुक: आपणास माहित आहे.

$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)\,(x + 5)$

म्हणुन $x^2 + 7x + 10$ ची किंमत शुन्य येते जेव्हा $x + 2 = 0$ किंवा $x + 5 = 0$,

म्हणजेच $x = -2$ किंवा $x = -5$.

म्हणुन $x^2 + 7x + 10$ चे शुन्य -2 आणि -5 आहेत.

बहुपदीची शुन्यांची बेरीज $= -2 + (-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

शुन्याचा गुणाकार $= -2 \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{स्थिर पद}}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

उदाहरण-4. $x^2 - 3$ या बहुपदीचे शुन्य माहित करुन त्यांच्या शुन्य आणि सहगुणकामधील संबंधाची तपासणी करा.

सोडवणुक : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ या समानतेची आठवण करु.

यावरुन $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ लिहु शकतो.

म्हणुन $x^2 - 3$ ची किंमत शुन्य येते जेव्हा $x = \sqrt{3}$ किंवा $x = -\sqrt{3}$.

म्हणुन $x^2 - 3$ चे शुन्य $\sqrt{3}$ आणि $-\sqrt{3}$ आहेत.

शुन्याची बेरीज करुन $= \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0 = \frac{-(x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

शुन्याची गुणाकार$= (\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{स्थिर पद}}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

उदाहरण-5. एका वर्ग बहुपदीचे शुन्याची बेरीज आणि गुणाकार अनुक्रमे -3 आणि 2 आहेत तर ती वर्ग बहुपदी माहित करा?

सोडवणुक : समजा α आणि β शुन्य असणारी बहुपदी $ax^2 + bx + c$ आहे. आपणास

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

आणि $\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$.

जर आपण $a = 1$ घेतल्यास $b = 3$ आणि $c = 2$ येते.

म्हणुन दिलेल्या अटी पुर्ण करुन येणारी बहुपदी $x^2 + 3x + 2$ आहे.

अशा रितीने 'a' ला कोणतीही वास्तव संख्या म्हणुन घेता येते.त्यास आपण k समजु या वरुन $\frac{-b}{k} = -3$ किंवा $b = 3k$ आणि $\frac{c}{k} = 2$ किंवा $c = 2k$. a, b आणि c च्या किंमत ठेवल्यास $kx^2 + 3kx + 2k$ ही बहुपदी येते.

उदाहरण -6. एका वर्ग बहुपदीचे शुन्य अनुक्रमे 2 आणि $\frac{-1}{3}$ आहेत. तर ती बहुपदी माहित करा.

सोडवणुक: समजा ती बहुपदी

$ax^2 + bx + c, a \neq 0$ बहुपदी आहे. α आणि β त्याचे शुन्य आहेत.

येथे $\alpha = 2, \beta = \frac{-1}{3}$

शुन्यांची बेरीज $= (\alpha + \beta) = 2 + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{5}{3}$

शुन्याचा गुणाकार $= (\alpha\beta) = 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-2}{3}$

म्हणुन वर्गबहुपदी $ax^2 + bx + c$ ही

$k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\,\beta]$, आहे. यात k स्थिरांक आहे.

$= k[x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}]$

k ला कोणत्याही भिन्न किंमती देता येतात.

जेव्हा $k = 3$ असतांना वर्ग बहुपदी $3x^2 - 5x - 2$ होते.

प्रयत्न करा

(i) -2 आणि $\frac{1}{3}$ शुन्य असलेली वर्ग बहुपदी माहित करा.

(ii) शुन्याची बेरीज $\frac{-3}{2}$ आणि शुन्याचा गुणाकार -1 असणारी वर्ग बहुपदी माहित करा.

3.6 घन बहुपदी

आता आपण घन बहुपदीचे निरिक्षण करु या. घन बहुपदीच्या शुन्यास आणि त्याच्या सहगुणकात सारखे संबंध आहे असे तुम्हाला वाटते का?

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ बहुपदी घेऊ या.

$p(x) = 0$ या किंमती वर $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ आहे हे दिसुन येते.

$p(x)$ घन बहुपदी असल्यामुळे जास्तीत जास्त तिन शुन्य असतात ते $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ चे शुन्य आहेत.

शुन्यांची बेरीज $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x \text{ चा सहगुणक})}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

शुन्यांचा गुणाकार $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{\text{स्थिर पद}}{x^2 \text{ चा सहगुणक}}$

या बरोबरच येथे अजुन एक संबंध आहे. बहुपदीच्या शुन्याला दोन दोन घेऊन त्यांच्या गुणाकाराची बेरीज घेऊन पाहिल्यास तो संबंध दिसुन येतो.

$$= \{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ चा सहगुणक}}{x^3 \text{ चा सहगुणक}}$$

साधारणता जर α, β, γ ही $ax^3 + bx^2 + cx + d$, चे शुन्य असल्यास

> α, β, γ हे बहुपदीचे शुन्य असुन त्यास $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
> $= x^3 - x^2(\alpha+\beta+\gamma) + x(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$ लिहु शकतो.
> $\therefore \quad b = -a(\alpha+\beta+\gamma), c = a(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma), d = -a\alpha\beta\gamma$

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$,

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$,

आणि

$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$.

हे करा

जर α, β, γ हे खाली दिलेल्या बहुपदीचे शुन्य असल्यास खालील तक्त्यातील किंमती माहित करा.

अ.क्र.	घन बहुपदी	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$	$\alpha\beta\gamma$
1	x^3+3x^2-x-2			
2	$4x^3+8x^2-6x-2$			
3	x^3+4x^2-5x-2			
4	x^3+5x^2+4			

खालील उदाहरणे घेऊ या.

उदाहरण -7. $3, -1, -\frac{1}{3}$ हे $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ या घन बहुपदीचे शुन्य आहेत याची तपासणी करा आणि बहुपदीचा शुन्य आणि सहगुणकामधील संबंधाची तपासणी करा.

सोडवणुक: $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ हे दिलेले बहुपदी आहे.

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

म्हणुन $3, -1,$ आणि $-\frac{1}{3}$ हे $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ या बहुपदीचे शुन्य आहेत.

म्हणुन घ्या $\alpha = 3, \beta = -1$ आणि $\gamma = -\frac{1}{3}$.घ्या.

आता, $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ या दिलेल्या बहुपदीची $ax^3 + bx^2 + cx + d$ शी तुलना केली असता आपणास $a = 3,\ b = -5,\ c = -11,\ d = -3$ येते. या नंतर

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\,\beta\,\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

अभ्यास – 3.3

1. खाली दिलेल्या वर्ग बहुपदीचे शुन्य माहित करा आणि सहगुणक आणि शुन्यात काय संबंध आहे याची पडताळणी करा?

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. एका वर्ग बहुपदीच्या अनुक्रमे दिलेल्या शुन्याच्या बेरजे आणि गुणाकारावरुन प्रत्येक संदर्भातील वर्ग बहुपदी माहित करा.

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

3. खाली दिलेल्या वर्ग बहुपदीच्या α, β शुन्यावरुन प्रत्येक संदर्भातील वर्ग बहुपदी माहित करा.

(i) $2, -1$ (ii) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ (iii) $\frac{1}{4}, -1$ (iv) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

4. $1, -1$ आणि -3 हे $x^3 + 3x^2 - x - 3$ या घन बहुपदीचे शुन्य आहेत. यांचा पडताळा करुन शुन्य आणि सहगुणकामधील संबंधाची तपासणी करा.

3.7 बहुपदीचे भागाकाराचे नियम:

घन बहुपदीला जास्तीत जास्त तीन शुन्य असतात. हे तुम्हाला माहित आहे. कोणत्याही संदर्भात एक दिला असता इतर दोन शुन्य तुम्ही कसे माहित कराल? यासाठी $x^3 + 3x^2 - x - 3$ ही बहुपदी घेऊन पाहु या. समजा या बहुपदीचा एक शुन्य 1 आहे. तेव्हा या बहुपदीला $x - 1$ ने निशेष भाग जातो. हे तुम्हाला माहित आहे. म्हणुन दिलेल्या बहुपदीला $x - 1$ ने भागल्यास भागाकार $x^2 - 2x - 3$ येतो.

$x^2 - 2x - 3$ या बहुपदीच्या मधल्या पदाची विभागणी केली असता आपणास $(x + 1)$ आणि $(x - 3)$ अवयव येतात. यावरुन

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

म्हणुन घन बहुपदीचे शुन्य $1, -1, 3$ आहेत.

एका बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागाकार करण्याच्या पध्दतीचा तपशीलपणे चर्चा करु या. याच्या पायऱ्या लिहिण्यापुर्वी एक उदाहरण घेऊ या.

उदाहरण - 8. $2x^2 + 3x + 1$ ला $x + 2$ ने भागाकार करा.

सोडवणुक: भागाकारात बाकी शुन्य असल्यास किंवा बाकीची कोटी ही भाजकाच्या कोटीपेक्षा लहान येईपर्यंत भागाकार केला पाहिजे. येथे भागाकार $2x - 1$ आहे. आणि बाकी 3 आहे.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x - 1 \\ \hline x+2 & 2x^2 + 3x + 1 \\ & 2x^2 + 4x \\ & \underline{-\quad\;\; -} \\ & \quad -x + 1 \\ & \quad -x - 2 \\ & \underline{\quad +\quad +} \\ & \qquad 3 \end{array}$$

$$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$$

म्हणजेच $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

म्हणुन भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी

या पध्दतीला समोर वाढवुन एका बहुपदीला वर्ग बहुपदीने भागाकार कसा करता याचे निरिक्षण करु.

उदाहरण-9. $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ला $1 + 2x + x^2$ने भागा.

सोडवणुक: प्रथम आपण भाज्य आणि भाजकांच्या पदांना त्यांच्या कोटीवरुन उतरत्या क्रमात मांडले पाहिजे.(बहुपदीच्या पदांना सामान्य रुपात लिहिले पाहिजे.) या उदाहरणात भाज्य हा सामान्य रुपातच आहे आणि भाजक सुध्दा सामान्य $x^2 + 2x + 1$ रुपातच आहे.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3x - 5 \\ \hline x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\ & 3x^3 + 6x^2 + 3x \\ & \underline{-\qquad -\qquad -} \\ & \quad -5x^2 - x + 5 \\ & \quad -5x^2 - 10x - 5 \\ & \underline{\quad +\qquad +\qquad +} \\ & \qquad 9x + 10 \end{array}$$

पायरी 1 : भागाकाराचे पाहिले पद येण्यासाठी भाजकाचा मोठा कोटी असलेल्या भाज्याच्या (म्हणजे $3x^3$) मोठा कोटी असलेल्या भाजकाच्या (म्हणजे x^2) पदाने भागल्यास $3x$ येते. अशा प्रकारे भागाकार करत गेल्यास बाकी $-5x^2 - x + 5$ येते.

पायरी 2 : भागाकाराचे दुसरे पद येण्यासाठी नविन भाज्याच्या सर्वांत मोठा कोटी (म्हणजे $-5x^2$) असलेल्या पदाला भाजकाने (म्हणजे x^2) मोठ्या कोटी असलेल्या पदाने भाग द्या. या भागाकारा वरुन -5 येते. परत $-5x^2 - x + 5$ शी भागाकार चालु ठेवा.

पायरी 3 : उरलेल्या बाकी $9x + 10$ आहे. आता $9x + 10$ चा कोटी भाजकाच्या $x^2 + 2x + 1$ कोटी पेक्षा लहान आहे. आता आपण समोर भागाकार करु शकत नाही.

म्हणुन भागाकार $3x - 5$ येतो आणि बाकी $9x + 10$ येते.

$$(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = (3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10)$$
$$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

आपण पुन्हा पाहतो की,

भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी

इथे आपण युक्लीडची भागाकाराचा नियम वापरत आहो.

यानुसार

जर $p(x)$ आणि $g(x)$ या दोन बहुपदी $g(x) \neq 0$ असेल तर आपण $q(x)$ आणि $r(x)$ अशा प्रकारे माहित करु शकतो. कि,

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x),$$

यात $r(x) = 0$ किंवा $r(x) <$ चा कोटी $g(x)$ कोटी जर $r(x) \neq 0$ यास बहुपदीच्या भागाकाराचे नियम म्हणुन म्हणतात.

आता वरील चर्चे वरुन आपणास खालील परिणाम येतात.

(i) जर $q(x)$ रेषीय बहुपदी असल्यास $r(x) = r$ हा स्थिरांक आहे.

(ii) जर $q(x)$ चा कोटी 1 असल्यास $p(x)$ चा कोटी $= 1 + g(x)$ चा केाटी

(iii) जर $p(x)$ ला $(x - a)$ ने भागले असता बाकी $p(a)$ येते.

(iv) जर $r = 0$ तर $q(x)$ ने $p(x)$ ला निश्चित पणे पुर्ण भाग जातो किंवा $q(x)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे असे म्हणु शकतो. याचे स्पष्टीकरण करण्यासाठी काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-10. $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ला $x - 1 - x^2$ ने भागुन भागाकाराच्या नियमावलीची तपासणी करा

सोडवणुक: दिलेली बहुपदी सामान्य रुपात नाही. हे लक्षात घ्या. भागाकार करण्यासाठी भाज्य आणि भाजकाला त्यांच्या कोटीनुसार उतरत्या क्रमात लिहिले पाहिजे.

म्हणुन, भाज्य $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ आणि

भाजक $= -x^2 + x - 1$.

भागाकाराची पध्दत उजव्या बाजुला दाखविली आहे.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & \;+ \quad - \quad + \\ \hline & \quad 2x^2 - 2x + 5 \\ & \quad 2x^2 - 2x + 2 \\ & \quad - \quad + \quad - \\ \hline & \qquad 3 \end{array}$$

येथे आपण थांबले पाहिजे कारण बाकीची कोटी ही $(-x^2 + x - 1)$ भाजकापेक्षा लहान आहे.

म्हणुन, भागाकार $= x - 2$, बाकी $= 3$.

आता,

भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी

$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

अशा रितीने भागाकाराच्या नियमावलीची तपासणी झाली.

उदाहरण-11. $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ या बहुपदीचे $\sqrt{2}$ आणि $-\sqrt{2}$ शुन्य असल्यास उरलेल्या शुन्याची किंमत माहित करा.

सोडवणुक: $\sqrt{2}$ आणि $-\sqrt{2}$ हे दिलेल्या बहुपदीची शुन्य आहेत. म्हणुन या बहुपदीला $(x - \sqrt{2})$ $(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ ने भागाकार करु शकतो.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 \qquad\quad - 4x^2 \\
 & - \qquad\qquad + \\ \hline
 & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & -3x^3 \qquad + 6x \\
 & + \qquad\qquad - \\ \hline
 & x^2 - 2 \\
 & x^2 - 2 \\
 & - \quad + \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

भागाकाराचे पहिले पद $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

भागाकाराचे दुसरे पद $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$

भागाकाराचे तिसरे पद $\frac{x^2}{x^2} = 1$

म्हणुन $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

आता, $-3x$, $2x^2 - 3x + 1$ मधील $-3x$ या मधल्या पदाचे विभाजन केल्यास $(2x - 1)(x - 1)$ हे अवयव येतात. म्हणुन त्याचे उरलेले शुन्य $x = \frac{1}{2}$ आणि $x = 1$ आहेत. म्हणुन दिलेल्या बहुपदीचे शुन्य $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1$ आणि $\frac{1}{2}$ आहेत.

अभ्यास – 3.4

1. खाली दिलेल्या प्रत्येक $p(x)$ बहुपदीला $g(x)$ ने भागा आणि प्रत्येकातील भागाकार आणि बाकी माहित करा.

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, g(x) = x^2 - 2$

   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5, g(x) = x^2 + 1 - x$

   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6, g(x) = 2 - x^2$

2. दुसऱ्या बहुपदीला पाहिल्या बहुपदीने भागले असता कोणत्या संदर्भात पाहिली बहुपदी ही दुसऱ्या बहुपदीचा अवयव होते. याची तपासणी करा.
   (i) $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$
   (ii) $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$
   (iii) $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$
3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ या बहुपदीचे दोन शुन्य
   $\sqrt{\frac{5}{3}}$ आणि $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ असल्यास बहुपदीची उरलेली शुन्ये माहित करा.
4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ बहुपदीला $g(x)$ या बहुपदीने भागले असता भागाकार आणि बाकी अनुक्रमे $x - 2$ आणि $-2x + 4$ येतात. तर $g(x)$ माहित करा.
5. $p(x), g(x), q(x)$ आणि $r(x)$ बहुपदी भागाकाराच्या नियमावलीला समाधान करणारी काही उदाहरणे द्या. आणि
   (i) $p(x)$ चा कोटी = $q(x)$चा कोटी (ii) चा कोटी $q(x)$ = चा कोटी$r(x)$ (iii) चा कोटी $r(x) = 0$

ऐच्छिक अभ्यास

[हा अभ्यास परिक्षेच्या दृष्टीकोनातुन नाही]

1. खालील घन बहुपदीसोबत दिलेल्या संख्या त्या बहुपदीचे शुन्य आहेत. आणि प्रत्येक संदर्भात शुन्य आणि सहगुणकाच्या संबंधाची तपासणी करा.
   (i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 ; (\frac{1}{2}, 1, -2)$ (ii) $x^3 + 4x^2 + 5x - 2 ; (1, 1, 1)$
2. एका घन बहुपदीच्या शुन्यांची बेरीज, दोन दोन शुन्यांच्या गुणाकाराची बेरीज आणि शुन्यांचा गुणाकार अनुक्रमे 2, –7, –14 आहे. तर ती बहुपदी माहित करा.
3. $x^3 - 3x^2 + x + 1$ या बहुपदीचे शुन्य $a - b, a, a + b$ आहेत तर a आणि b ची किंमत काढा.
4. $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ बहुपदीचे दोन शुन्य $2 \pm \sqrt{3}$ आहेत.तर इतर शुन्य माहित करा.
5. $x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 25x + 10$ या बहुपदीला $x^2 - 2x + k$ या बहुपदीने भागल्यास बाकी $x +$ a येते तर k आणि a च्या किंमती काढा.

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

वर्ग बहुपदी- बहुपदीचे शुन्य- भुमीतीय अर्थ/आलेख

- $ax^2 + bx + c$ या वर्ग बहुपदीचा वेगवेगळ्या संदर्भात आलेख काढा.

 (i) $a > 0$ (ii) $a < 0$ (iii) $a = 0$ (iv) $b > 0$ (v) $b < 0$

 (vi) $b = 0$ आलेखावर चर्चा करा.

आपण काय चर्चा केली

या धड्यात आपण खालील मुद्दे शिकलो.

1. 1, 2 आणि 3 कोटी असलेल्या बहुपदींना अनुक्रमे रेषीय वर्ग आणि घन बहुपदी म्हणतात.
2. वास्तव संख्या सहगुणक असलेली x चलीय वर्ग बहुपदीचे रुप $ax^2 + bx + c$ आहे. यात a, b, c वास्तव संख्या असुन $a \neq 0$.
3. $p(x)$ ही बहुपदीचे शुन्य त्या $y = p(x)$ आलेखाव्दारे X अक्षावर छेदन केलेल्या बिंदुचे x-निर्देशक आहेत.
4. वर्ग बहुपदींना महत्तम 2 शुन्य आणि घन बहुपदींना जास्तीत जास्त 3 शुन्य असतात.
5. जर $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ या वर्ग बहुपदीचे α आणि β शुन्य असेल तर

 $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

6. जर α, β, γ हे $ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ या घन बहुपदीचे शुन्य असल्यास

 $$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

 $$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

 आणि $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$.

7. $p(x)$ बहुपदीला दुसऱ्या शुन्येतर बहुपदी $g(x)$ व्दारा भागल्या गेले असता $q(x)$ आणि $r(x)$ या बहुपदीत येणाऱ्या भागाकाराच्या नियमावलीला खालील प्रकारे दर्शवु शकतो.

 $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$,

 येथे $r(x) = 0$ किंवा $r(x)$ चा कोटी < $g(x)$ चा कोटी, जर $r(x) \neq 0$.

धडा
4

दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाची जोडी

(Pair of Linear Equations in Two Variables)

4.1 प्रस्तावना

एका दिवशी कोमल तिच्या वडीलासोबत पुस्तकाच्या दुकानात गेली आणि 3 वह्या आणि 2 पेन्स विकत घेतल्या. त्यासाठी वडीलांनी 80 रुपये चुकते केले. तिची मैत्रीण लक्ष्मीला वही आणि पेन आवडले म्हणुन तीने त्या सारखेच 4 वह्या आणि 3 पेन्स विकत घेतल्या त्यासाठी तिने 110 रुपये चुकते केले आता पुन्हा तिच्या वर्गातील रुबिना ला पेन आणि जोसेफ ला वह्या आवडल्यात. त्यांनी कोमल ला एका पेनची आणि एका वहीची किंमत विचारली. पण कोमल ला एका पेनची आणि एका वहिची किंमत माहित नव्हती. तर ते या वस्तुची किंमत कशी माहित करु शकतात.

या उदाहरणार्थ, एका वहिची आणि एका पेनची किंमत माहित नाही. या माहित नसलेल्या राशी आहेत. अशा प्रकारचे संदर्भ आपण आपल्या दैनंदिन जिवनात पाहत असतो.

विचार करा- चर्चा करा

खाली दोन संदर्भ दिले आहेत.

(i) एका दिवशी 1 कि.ग्रॅ. बटाटे आणि 2 कि.ग्रॅ. टमाटे ची किंमत 30 रुपये होती. दोन दिवसानंतर 2 कि.ग्रॅ. बटाटे आणि 4 कि.ग्रॅ. टमाटे ची किंमत 66 रु. झाली.

(ii) एम.के. नगर उच्च माध्यमिक शाळेचे क्रिकेट संघाचे कोच ने 3 बॅट आणि 6 बॉल 3900 रुपयात विकत घेतले. नंतर त्याने अजुन एक बॅट आणि 2 बॉल 1300 रुपयात विकत घेतले.

प्रत्येक संदर्भा मध्ये दोन अनोळखी राशी आहेत. असे आपल्या निदर्शणास येते.

4.1.1 अनोळखी राशी आपण कसे माहित करु शकतो?

प्रस्तावना मध्ये कोमल ने 3 वह्या आणि 2 पेनी 80 रुपयात विकत घेतल्या. एका पेनची किंमत किंवा एका वहिची किंमत आपण कसे माहित कराल?

रुबीना आणि जोसेफ ने अंदाज लावण्याचा प्रयत्न केला. रुबिना म्हणाली की, प्रत्येक वहीची किंमत 25 रुपये राहु शकते. तर तीन वह्यांचीA

किंमत 75 रुपये आणि एका पेनची किंमत 2.5 रुपये राहु शकते. म्हणजेच दोन पेनची किंमत 5 रुपये होते.

जोसेफ ला वाटले एका पेनची किंमत 2.50 रुपये हे खुप कमी आहे. ते कमीत कमी 16 रुपयाचे राहु शकते. तेव्हा एका वहिची किंमत 16 रुपये राहु शकते.

आपल्याला असे दिसते की, एकुण किंमत 80 रुपये येण्या जोगे वही आणि पेनच्या किंमतीसाठी बरेचशे शक्य किंमती आहेत. म्हणुन, लक्ष्मी आणि कोमलने विकत घेतलेल्या वस्तुंची किंमत कशी माहित करावी? फक्त कोमल चे संदर्भ वापरत आपण किंमती माहित करु शकत नाही. आपल्याला लक्ष्मीचे संदर्भ सुध्दा वापरावे लागणार आहे.

4.1.2 दोन समीकरणे एकत्र वापरणे (Using Both Equations Together)

कोमलने ज्या वह्या आणि पेनी विकत घेतल्या त्या सारखेच वह्या आणि पेनी लक्ष्मीने सुध्दा विकत घेतल्या. लक्ष्मीने 4 वह्या आणि 3 पेनीसाठी 110 रुपये चुकते केले.

म्हणुन, आपल्या जवळ असलेल्या दोन संदर्भ खालील प्रमाणे दर्शवु शकतो.

(i) 3 वह्याची किंमत + 2 पेनची किंमत = 80 रुपये.

(ii) 4 वह्याची किंमत + 3 पेनची किंमत = 110 रुपये.

वही आणि पेनची किंमत माहित करण्यासाठी याची आपल्याला मदत होते का?

रुबीना ने सांगीतलेल्या किंमतीचा विचार करु या. जर एका वही ची किंमत 25 रुपये आणि एका पेनची किंमत 2.50 रुपये असेल तर,

4 वह्यांची किंमत : $4 \times 25 = 100$ रुपये होऊ शकते.

आणि 3 पेनची किंमत : $3 \times 2.50 = 7.50$ रुपये होऊ शकते.

जर रुबिनाचा अंदाज खरा होत असेल तर लक्ष्मीला 100 रुपये +7.50 रुपये चुकते करावे लागणार पण तीने 100 रुपये चुकते केले.

आता जोसेफ ने सांगितलेल्या किंमतीचा विचार करु या.

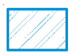
जर एक वहिची किंमत 16 रुपये असेल तर 4 वहिची किंमत : $4 \times 16 = 64$रु.होते

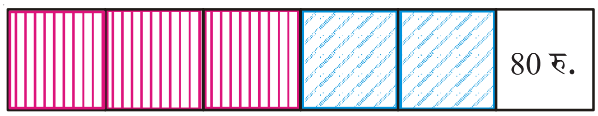
आणि एक पेनची किंमत 16 रुपये असेल तर 3 पेनची किंमत : $3 \times 16 = 48$रु.होते.

जर जोसेफचा अंदाज खरा होत असेल तर लक्ष्मीला 64 रुपये+48 रुपये=112 रुपये चुकते करावे लागणार. पण तिने चुकते केलेल्या किंमती पेक्षा हे खुप जास्त आहे.

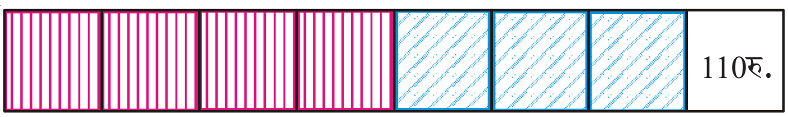
तर आपण एका पेनची आणि एका वहिची निश्चित किंमत कसे माहित करावे?

जर आपल्या जवळ एक समीकरण आणि दोन अनोळखी राशी असतील तर आपल्याला बरेचश्या उकल मिळतील. म्हणुन जर आपल्या जवळ दोन चलराशी असतील तेव्हा निश्चित उकल मिळविण्यासाठी आपल्याला दोन स्वतंत्र समीकरणाची आवश्यकता आहे. आदर्श पध्दतीचा वापर करुन आपण अनोळखी राशींची किंमत माहित करु शकतो. या पध्दतीमध्ये अनोळखी राशीला दर्शविण्यासाठी आयत किंवा आयताचा भागाचा वापर करतात. आदर्श पध्दतीचा उपयोग करुन पहिले संदर्भ पाहु.

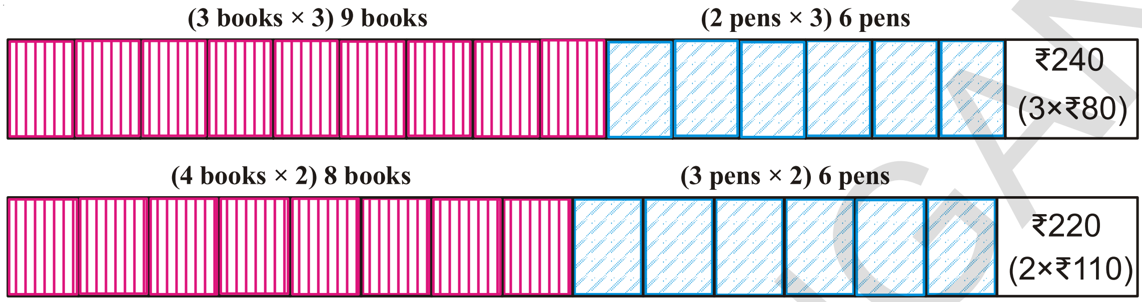
पायरी-1 : वहीसाठी  आणि पेनसाठी  दर्शवु,कोमल ने 3 वह्या आणि 2 पेनी 80 रु. विकत घेतल्या.



लक्ष्मीने 4 वह्या आणि 3 पेनी 110 रुपयात विकत घेतल्या



संदर्भ-2 : दोन्ही संदर्भात राशींना प्रमाणात वाढवुन (किंवा कमी करुन) कमीत कमी एका राशीला समान करुन घेणे.



2 च्या पायरीत आपल्याला असे निदर्शनास येते की, हे प्रमाणात आहेत.

कोमलने 3 वह्या आणि 2 पेनी 80 रुपयात विकत घेतल्या म्हणु 9 वही आणि 6 पेनीसाठी

$3 \times 3 = 9$ वही आणि $3 \times 2 = 6$ पेनची किंमत $3 \times 80 = 240$ रुपये (1)

त्याच प्रमाणे लक्ष्मीने 4 वह्या आणि 3 पेनीची 110 रुपयात विकत घेतल्या म्हणुन

$2 \times 4 = 8$ वही आणि $2 \times 3 = 6$ पेनची किंमत $2 \times 110 = 220$ रुपये (2)

1 आणि 2 ची तुलना केल्यानंतर आपल्याला सहज लक्षात येते की, एक वही जास्त आहे अणि त्याची किंमत 240रु. - 220रु. = 20रु.म्हणुन एका वहिची किंमत 20 रु. आहे.

कोमल 3 वह्या आणि 2 पेनी 80 रुपयात विकत घेतल्या. प्रत्येक वहीची किंमत 20 रुपये प्रमाणे 3 वह्यांची किंमत 60 रुपये होते. म्हणुन 2 पेनची किंमत 80 रु.- 60रु= 20 रुपये.

म्हणुन, एका पेनची किंमत 20रु. $\div 2 = 10$रु.

लक्ष्मीच्या संदर्भात या किंमती खऱ्या ठरतात का ते पाहु या. 4 वह्यांची किंमत 80 रु. आणि तीन पेनची किंमती 30 रु. म्हणजे एकुण 110 रु. होतात. जे की, सत्य आहे.

वरील चर्चेवरुन हे स्पष्ट झाले की, निश्चित उकल मिळविण्यासाठी आपल्याला दोन सारख्या चल राशीतील कमीत कमी दोन स्वतंत्र समीकरणाची आवश्यकता आहे.

साधारणत: $ax + by + c = 0$ येथे a, b, c हे वास्तव संख्या आहेत आणि येथे a किंवा b शुन्य नाही. म्हणजेच $a^2 + b^2 \neq 0$ याला x आणि y या दोन चलराशीतील रेषीय समीकरण म्हणतात.

प्रयत्न करा

खालील प्रश्नामध्ये योग्य पर्यायाला खुण करा.

1. खालील पैकी कोणते समीकरण रेषीय समीकरण नाही?

a) $5 + 4x = y + 3$ b) $x + 2y = y - x$

c) $3 - x = y^2 + 4$ d) $x + y = 0$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. खालील पैकी कोणते एक चलराशीतील रेषीय समीकरण आहे?

   a) $2x + 1 = y - 3$ b) $2t - 1 = 2t + 5$

   c) $2x - 1 = x^2$ d) $x^2 - x + 1 = 0$

3. $2(x + 3) = 18$ या समीकरणासाठी खालील पैकी कोणती संख्या उकल आहे?

   a) 5 b) 6 c) 13 d) 21

4. $2x - (4 - x) = 5 - x$ हे समीकरण सत्य होण्यासाठी x ची किंमत काढा.

   a) 4.5 b) 3 c) 2.25 d) 0.5

5. $x - 4y = 5$ या समीकरणाला

   a) उकल नाही b) निश्चित उकल आहे.

   c) दोन उकल आहेत d) अनंत उकल आहेत.

4.2 दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाच्या जोडीचे उकल.

वही आणि पेनच्या प्रस्तावनातील उदाहरणामध्ये आपल्या जवळ किती समीकरणे होती? आपल्या जवळ दोन समीकरण किंवा दोन चलराशीतील समीकरणांची एक जोडी होती. रेषीय समीकरणाच्या जोडीचे उकल म्हणजे काय?

x आणि y या चलराशीच्या किंमतीची जोडी एकत्र पणे प्रत्येक समीकरण समाधान किंवा समीकरणाला सत्य करतात. त्या चलराशींच्या किंमतीच्या जोडीला रेषीय समीकरणाच्या जोडीचे उकल म्हणतात.

4.2.1 रेषीय समीकरणाच्या जोडीची उकल माहित करण्याची आलेखीय पध्दत:

दोन चलराशींतील रेषीय समीकरणाच्या जोडीसाठी उकलची संख्या किती असु शकते? उकलची संख्या अनंत आहे का? किंवा निश्चित एक आहे का? किंवा एकही नाही का?

अगोदरच्या भागात रेषीय समीकरणाची जोडी सोडवण्यासाठी आपण आदर्श पध्दतीचा उपयोग केला होता. आता समीकरण सोडविण्यासाठी आलेखाचा वापर करु.

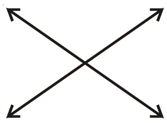
समजा: $a_1x + b_1y + c_1 = 0, (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$ आणि $a_2x + b_2y + c_2 = 0;\ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$ हे दोन चलराशींतील समीकरणाची जोडी आहे.

दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाचे आलेख एक रेषा असते. रेषेवर दर्शवणाऱ्या वास्तव संख्याच्या क्रमीक जोडी (x, y) हे त्या समीकरणाची उकल होते आणि वास्तव संख्याच्या जी क्रमीक जोडी (x, y) रेषेवर दर्शवत नाही. ते उकल होत नाही.

जर एकाच प्रतलात दोन रेषा असतील तर त्या मध्ये कोणते संबंध राहु शकते? या संबधाचे महत्व काय?

जेव्हा दोन रेषा एका प्रतलात काढले जाते तेव्हा खालील तीन पैकी एक संदर्भ शक्य आहे.

i) दोन रेषा एका बिंदुत छेदत असतील.



ii) दोन रेषा एकमेकांना छेदत नसतील म्हणजेच ते समांतर असतील.

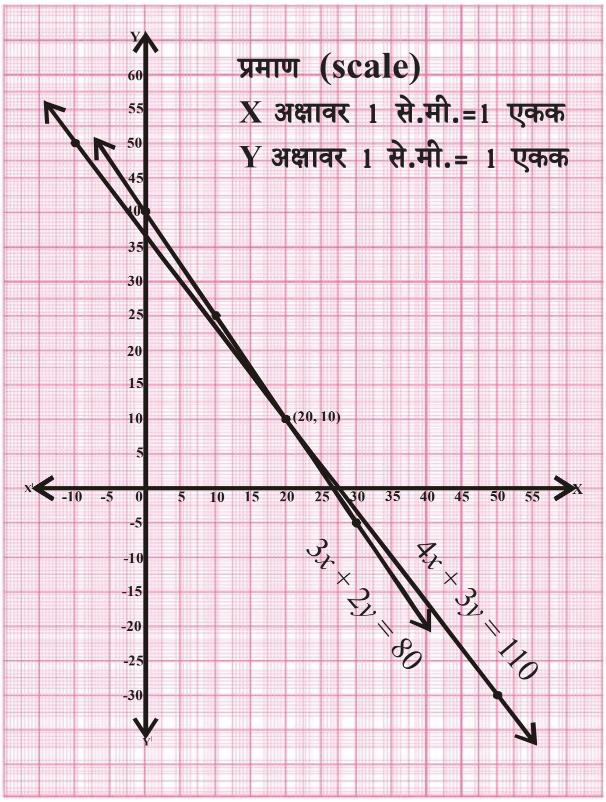
iii) त्या दोन रेषा अनुरुप असतील.
(दोन्ही सारखेच असतील)

पहिल्या उदाहरणामधील समीकरण x आणि y पदामध्ये लिहु. येथे x हे वहीची किंमत आहे आणि y हे पेनची किंमत आहे. तर समीकरण $3x + 2y = 80$ आणि $4x + 3y = 110$.

$3x + 2y = 80$ समीकरणासाठी		
x	$y = \dfrac{80-3x}{2}$	(x, y)
0	$y = \dfrac{80-3(0)}{2} = 40$	(0, 40)
10	$y = \dfrac{80-3(10)}{2} = 25$	(10, 25)
20	$y = \dfrac{80-3(20)}{2} = 10$	(20, 10)
30	$y = \dfrac{80-3(30)}{2} = -5$	(30, -5)

$4x + 3y = 110$ समीकरणासाठी		
x	$y = \dfrac{110-4x}{3}$	(x, y)
-10	$y = \dfrac{110-4(-10)}{3} = 50$	(-10, 50)
20	$y = \dfrac{110-4(20)}{3} = 10$	(20, 10)
50	$y = \dfrac{110-4(50)}{3} = -30$	(50, -30)

आलेखा वर वरील बिंदु स्थापल्या नंतर आपल्याला असे दिसते की, दोन रेषा(20, 10) बिंदुवर एकमेकांना छेदत आहेत. x आणि y च्या किंमती समीकरणात प्रतिक्षेपीत केल्यानंतर $3(20) + 2(10) = 80$ आणि $4(20) + 3(10) = 110$. अशा प्रकारे आपण आलेखाव्दारे वहीची किंमत 20 रुपये आणि पेनची किंमत 10 रुपये माहित करतो. आदर्श पध्दतीव्दारे सुध्दा हेच उकल माहित केले होते.



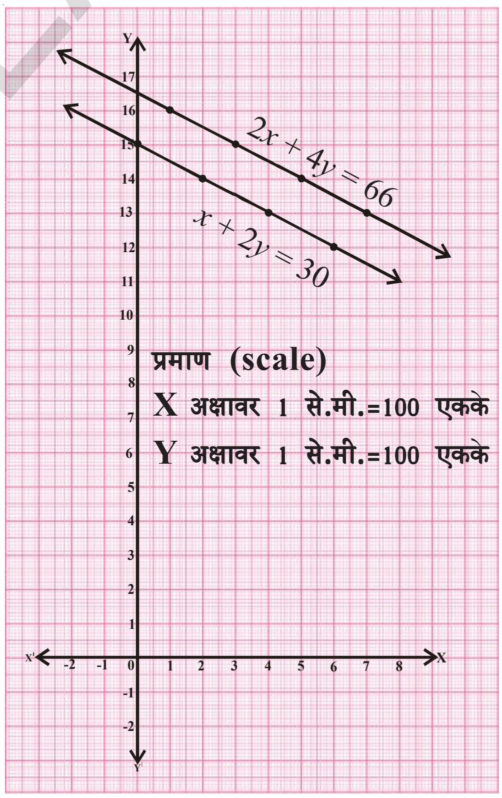
(20, 10) हे एकच सामाईक बिंदु असल्यामुळे या दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाच्या जोडीला फक्त एकच उकल आहे. अशा समीकरणाला रेषीय समीकरणाची सुसंगत जोडी म्हणतात. अशा समीकरणाला एकमेव उकल असते.

आता, विचार करा आणि चर्चा करा या विभागातुन पहिले उदाहरण पाहु. आपल्याला 1 कि.ग्रॅ. बटाटे ची किंमत आणि 1 कि.ग्रॅ. टमाटेची किंमत माहित करायची आहे. समजा 1 कि.ग्रॅ. बटाटेची किंमत xरु. आणि 1 कि.ग्रॅ. टमाटेची किंमत yरु. तर समीकरण$1x+2y=30$ आणि $2x+4y=66$.

$x + 2y = 30$ समीकरणासाठी		
x	$y = \frac{30-x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{30-0}{2} = 15$	(0, 15)
2	$y = \frac{30-2}{2} = 14$	(2, 14)
4	$y = \frac{30-4}{2} = 13$	(4, 13)
6	$y = \frac{30-6}{2} = 12$	(6, 12)

$2x + 4y = 66$ समीकरणासाठी		
x	$y = \frac{66-2x}{4}$	(x, y)
1	$y = \frac{66-2(1)}{4} = 16$	(1, 16)
3	$y = \frac{66-2(3)}{4} = 15$	(3, 15)
5	$y = \frac{66-2(5)}{4} = 14$	(5, 14)
7	$y = \frac{66-2(7)}{4} = 13$	(7, 13)

येथे आपल्याला असे निदर्शनास येते की, दोन समांतर रेषेव्दारा संदर्भाची आलेखीय दर्शवणुक होत आहे. रेषा एकमेकांना छेदत नाहीत म्हणजेच समीकरणाला सामाईक उकल नाही. याचा अर्थ बटाटे आणि टमाटे ची किंमत वेगवेगळ्या दिवसात वेगवेगळी असते. हे आपण आपल्या दैनंदिन जिवनात सुध्दा पाहतो. प्रत्येक दिवशी भाजीपालांची किंमत सारखीच राहते अशी आपेक्षा आपण करु शकत नाही. ते सतत बदलत असतात. तसेच बदल हा स्वतंत्रपणे घडतो. अशा रेषीय समीकरणाच्या जोडीला ज्याला उकल नाही. त्याला रेषीय समीकरणाची असंगत जोडी म्हणतात



विचार करा आणि चर्चा करा या विभागात दुसऱ्या विभागामध्ये, प्रत्येक बॅटची किंमत xरु. आणि प्रत्येक बॉलची किंमत y रु. तर समीकरण $3x + 6y = 3900$ आणि $x + 2y = 1300$.

$3x + 6y = 3900$ समीकरणासाठी

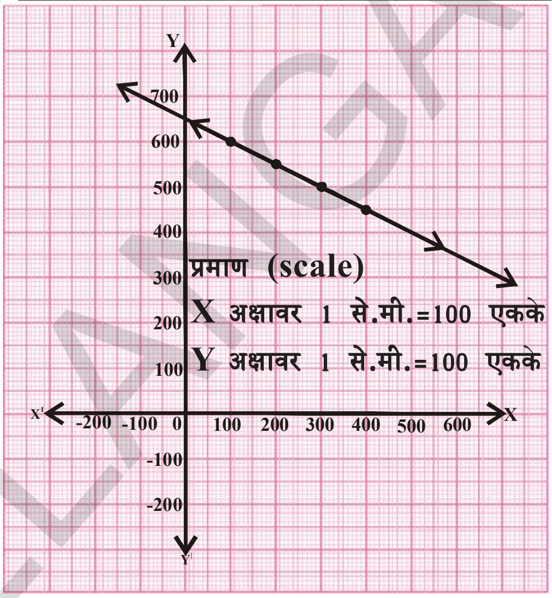
$x + 2y = 1300$ समीकरणासाठी		
x	$y = \frac{3900-3x}{6}$	(x, y)
100	$y = \frac{3900-3(100)}{6} = 600$	(100, 600)

x	$y = \frac{1300-x}{2}$	(x, y)
100	$y = \frac{1300-100}{2} = 600$	(100, 600)

200	$y = \dfrac{3900-3(200)}{6} = 550$	(200, 550)
300	$y = \dfrac{3900-3(300)}{6} = 500$	(300, 500)
400	$y = \dfrac{3900-3(400)}{6} = 450$	(400, 450)

200	$y = \dfrac{1300-200}{2} = 550$	(200, 550)
300	$y = \dfrac{1300-300}{2} = 500$	(300, 500)
400	$y = \dfrac{1300-400}{2} = 450$	(400, 450)

आपण असे पाहतो की, अनुरुप रेषेच्या जोडी व्दारे अनुरुप रेषांची जोडी व्दारे समीकरणाला आलेखाव्दारे दाखविले. जर दिलेल्या सामाईक बिंदुने समीकरणाची उकल होत असेल तर या संदर्भात कोणते सामाईक बिंदु आहेत?



आलेखावरुन आपल्याला असे निदर्शणास येते की, रेषेवरील प्रत्येक बिंदु हा त्या दोन्ही समीकरणाची उकल आहे. म्हणुन त्यांना अनंत उकल आहेत. अशा समीकरणाच्या जोडीला दोन चलराशींतील रेषीय समीकरणाची सापेक्ष जोडी म्हणतात.

प्रयत्न करा

वर दिलेल्या उदाहरणात, तुम्ही बॅट आणि बॉलची किंमत माहित करु शकता का?

विचार करा- चर्चा करा

रेषीय समीकरणाची सापेक्ष जोडी केव्हांही सुसंगत असते का? का किंवा का नाही?

हे करा

1. खालील समीकरणाच्या पध्दती सोडवा.

   i) $x - 2y = 0$, $3x + 4y = 20$ ii) $x + y = 2$, $2x + 2y = 4$ iii) $2x - y = 4$, $4x - 2y = 6$

2. रेल्वे पट्टीवर दोन रेल्वे समीकरणाने दर्शवतात.
   $x + 2y - 4 = 0$ आणि $2x + 4y - 12 = 0$ या संदर्भाला आलेखाने दर्शवा.

4.2.3 समीकरणाच्या पध्दतीचे स्वरुप आणि निर्देशांकामधील संबंध:

दोन चल राशीतील रेषीय समीकरणाची दिलेल्या जो जोडीचे निर्देशांक समजा a_1, b_1, c_1 आणि a_2, b_2, c_2 दर्शवत असले तर वरील उदाहरणातील $\dfrac{a_1}{a_2}$, $\dfrac{b_1}{b_2}$ आणि $\dfrac{c_1}{c_2}$ या किंमतीची तुलना करा.

रेषेची जोडी	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	गुणोत्तराची तुलना	आलेखीय दर्शवणुक	बैजीक स्पष्टीकरण
1. $3x+2y-80=0$ $4x+3y-110=0$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-80}{-110}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	छेदणाऱ्या रेषा	एकमेव उकल
2. $1x+2y-30=0$ $2x+4y-66=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-30}{-66}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समांतर रेषा	उकल नाही
3. $3x+6y=3900$ $x+2y=1300$	$\frac{3}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{3900}{1300}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	अनुरुप रेषा	अनंत उकल

काही उदाहरणात पाहु.

उदाहरण-1. दिलेल्या समीकरणाची जोडी छेदणारी समांतर किंवा सुसंगत रेषा आहेत का याची तपासणी करा. जर समीकरण सुसंगत असेल तर उकल माहित करा.

$2x + y - 5 = 0$

$3x - 2y - 4 = 0$

सोडवणुक : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$ $\qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$ $\qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-4}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, त्या छेदणाऱ्या रेषा आहेत आणि रेषीय समीकरणाची जोडी सुसंगत आहे.

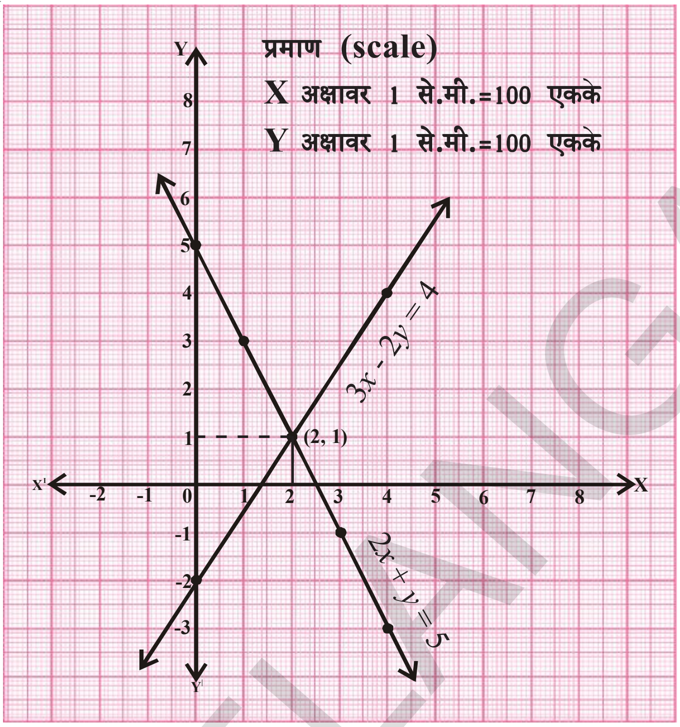
$2x + y = 5$ समीकरणासाठी

x	$y = 5 - 2x$	(x, y)
0	$y = 5 - 2(0) = 5$	(0, 5)
1	$y = 5 - 2(1) = 3$	(1, 3)
2	$y = 5 - 2(2) = 1$	(2, 1)
3	$y = 5 - 2(3) = -1$	(3, -1)
4	$y = 5 - 2(4) = -3$	(4, -3)

$3x - 2y = 4$ समीकरणासाठी

x	$y = \frac{4-3x}{-2}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-3(0)}{-2} = -2$	(0, -2)
2	$y = \frac{4-3(2)}{-2} = 1$	(2, 1)
4	$y = \frac{4-3(4)}{-2} = 4$	(4, 4)

समीकरणाच्या या जोडीचा एकमेव उकल (2,1)आहे.



उदाहरण-2. खालील समीकरणाची जोडी सुसंगत आहे का? ते तपासणी करा.

$3x + 4y = 2$ आणि $6x + 8y = 4$ आलेखा ने दर्शवुन पडताळा करा.

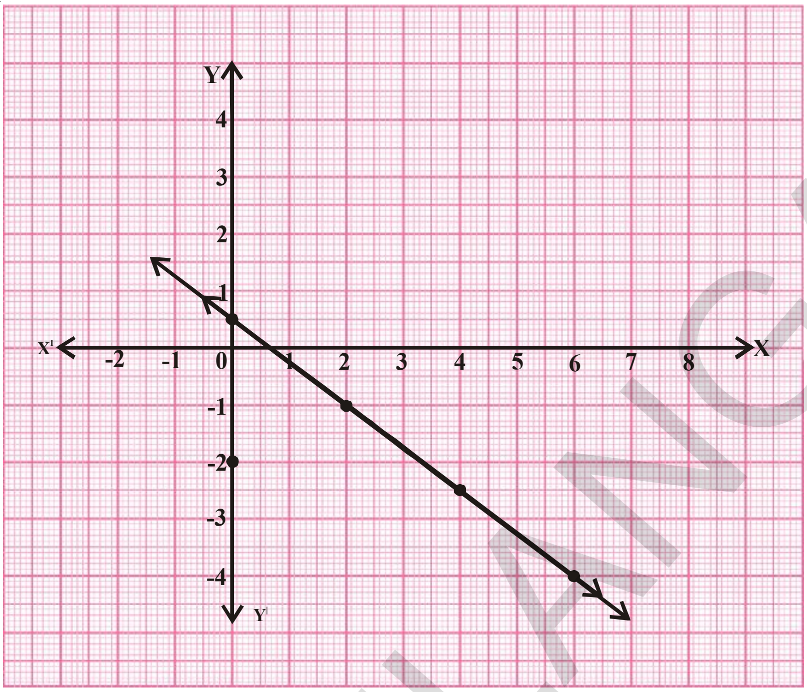
सोडवणुक : $3x + 4y - 2 = 0$

$6x+8y - 4 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ म्हणुन ते अनुरुप रेषा आहेत. म्हणुन रेषीय समीकरणाची जोडी अवलंबुन असते आणि त्याला अनंत उकल असतात.

$3x + 4y = 2$ समीकरणासाठी		
x	$y = \frac{2-3x}{4}$	(x, y)
0	$y = \frac{2-3(0)}{4} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{2-3(2)}{4} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{2-3(4)}{4} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{2-3(6)}{4} = -4$	(6, -4)

$6x + 8y = 4$ समीकरणासाठी		
x	$y = \frac{4-6x}{8}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-6(0)}{8} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{4-6(2)}{8} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{4-6(4)}{8} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{4-6(6)}{8} = -4$	(6, -4)



उदाहरण-3. 2x-3y = 5 आणि 4x-6y = 15 हे समीरकण सुसंगत आहे का? याची तपासणी करा. आलेखाव्दारे पडताळा करा.

सोडवणुक: 4x-6y - 15 = 0

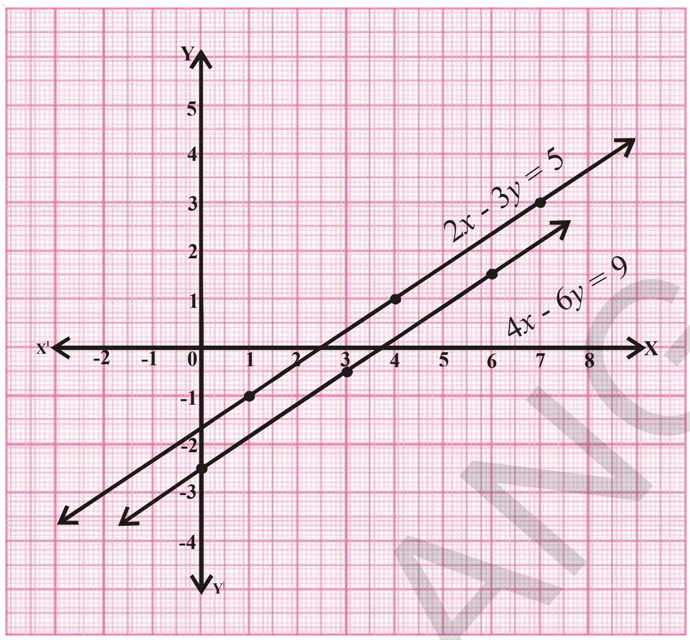
2x-3y - 5 = 0

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-15}{-5} = \frac{3}{1}$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

म्हणुन समीकरण हा असंगत आहे. त्यांचा आलेख समांतर रेषेचा आहे आणि त्याला उकल नाही आहे.

4x - 6y = 15 समीकरणासाठी		
x	$y = \frac{15-4x}{-6}$	(x, y)
0	$y = \frac{15-0}{-6} = \frac{-5}{2}$	(0, -2.5)
3	$y = \frac{15-4(3)}{-6} = \frac{-1}{2}$	(3, -0.5)
6	$y = \frac{15-4(6)}{-6} = \frac{3}{2}$	(6, 1.5)

2x - 3y = 5 समीकरणासाठी		
x	$y = \frac{5-2x}{-3}$	(x, y)
1	$y = \frac{5-2(1)}{-3} = -1$	(1, -1)
4	$y = \frac{5-2(4)}{-3} = 1$	(4, 1)
7	$y = \frac{5-2(7)}{-3} = 3$	(7, 3)



हे करा

समीकरणाच्या दिलेल्या प्रत्येक पध्दतीची तपासणी करा. त्याना एकमेव उकल आहे का? किंवा अनंत उकल आहेत का? उकल नाही का? समीकरणांना आलेखाव्दारे सोडवा.

(i) $2x+3y = 1$, $3x-y = 7$

(ii) $x + 2y = 6$, $2x + 4y = 12$

(iii) $3x + 2y = 6$, $6x + 4y = 18$

प्रयत्न करा

1. 'p' च्या कोणत्या किंमतीसाठी खालील समीकरणाच्या जोडीला एकमेव उकल असते?
   $2x + py = -5$ आणि $3x + 3y = -6$
2. $2x - ky + 3 = 0$, $4x + 6y - 5 = 0$ ही समीकरणाची जोडी समांतर रेषा दर्शविते तर'k'ची किंमत माहित करा.
3. 'k'च्या कोणत्या किंमतीसाठी $3x + 4y + 2 = 0$ आणि $9x + 12y + k = 0$ समीकरणाच्या जोडी अनुरुप दर्शविते.
4. 'p' च्या कोणत्या धन किंमतीसाठी खालील रेषीय समीकरणाच्या जोडीला अनंत उकल असते.
   $px + 3y - (p - 3) = 0$, $12x + py - p = 0$

आणखी काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-4. एका बागेत काही फुलपाखरु आणि काही फुल आहेत. जर एक फुलपाखरु प्रत्येक फुलावर बसले तर एक फुलपाखरु उरते. जर प्रत्येक फुलावर दोन फुलपाखरु बसतील तर एक फुल उरते तर फुलांची संख्या आणि फुलपाखरुंची संख्या माहित करा.

सोडवणुक : समजा फुलपाखरांची संख्या = x आणि फुलांची संख्या = y

जर प्रत्येक फुलावर एक फुलपाखरु बसेल तर एक फुलपाखरु उरते. म्हणुन $x = y + 1$

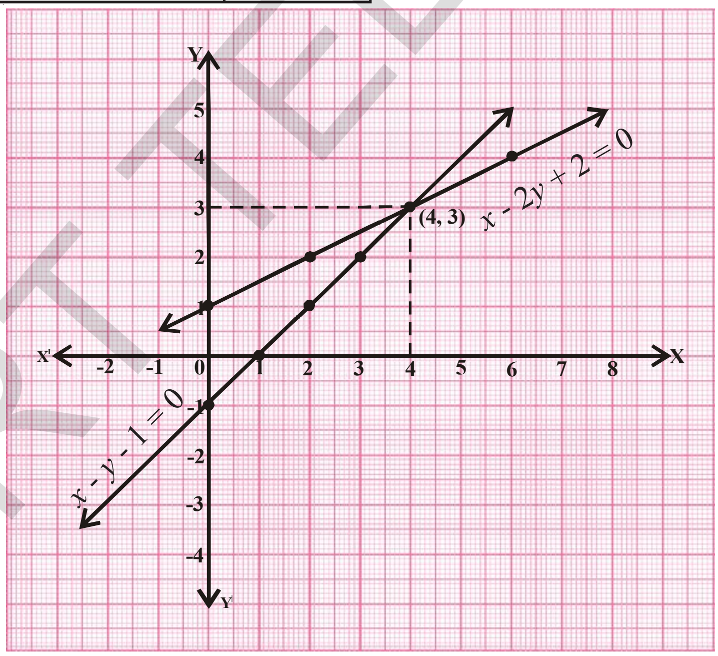
किंवा $x - y - 1 = 0$ ... (1)

जर प्रत्येक फुलावर दोन फुलपाखरु बसतील तर एक फुल उरते $x = 2(y - 1)$

किंवा $x - 2y + 2 = 0$ ... (2)

$x - y - 1 = 0$ समीकरणासाठी		
x	$y = x - 1$	(x, y)
0	$y = 0 - 1 = -1$	(0, -1)
1	$y = 1 - 1 = 0$	(1, 0)
2	$y = 2 - 1 = 1$	(2, 1)
3	$y = 3 - 1 = 2$	(3, 2)
4	$y = 4 - 1 = 3$	(4, 3)

$x - 2y + 2 = 0$ समीकरणासाठी		
x	$y = \frac{x+2}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{0+2}{2} = 1$	(0, 1)
2	$y = \frac{2+2}{2} = 2$	(2, 2)
4	$y = \frac{4+2}{2} = 3$	(4, 3)
6	$y = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)



म्हणुन तेथे 4 फुलपाखरु आणि 3 फुले आहेत.

उदाहरण-5. आयताकृती प्लॉटची परिमीती 32मी.आहे. जर लांबी 2मी.ने वाढवली आणि रुंदी 1मी.ने कमी केली तरी प्लॉटचे क्षेत्रफळ तेच सारखेच राहते. तर प्लॉटची लांबी आणि रुंदी काढा.

सोडवणुक: समजा आयताकृती प्लॉटची लांबी आणि रुंदी अनुक्रमे l आणि b असेल तर

क्षेत्रफळ $= lb$ आणि

परिमीती $= 2(l + b) = 32$ मी.

$l + b = 16$ सुचविते $l + b - 16 = 0$ ... (1)

जेव्हा लांबी 2 मी. ने वाढवितो तेव्हा नविन लांबी $l+2$ होते. तसेच रुंदी 1मी ने कमी करतो तेव्हा नविन रुंदी $b - 1$ होते. तेव्हा, क्षेत्रफळ $= (l + 2)(b - 1)$

तिथे क्षेत्रफळ मध्ये कोणताही बदल नाही.

$(l + 2)(b - 1) = lb$

$lb - l + 2b - 2 = lb$ किंवा $lb - lb = l - 2b + 2$

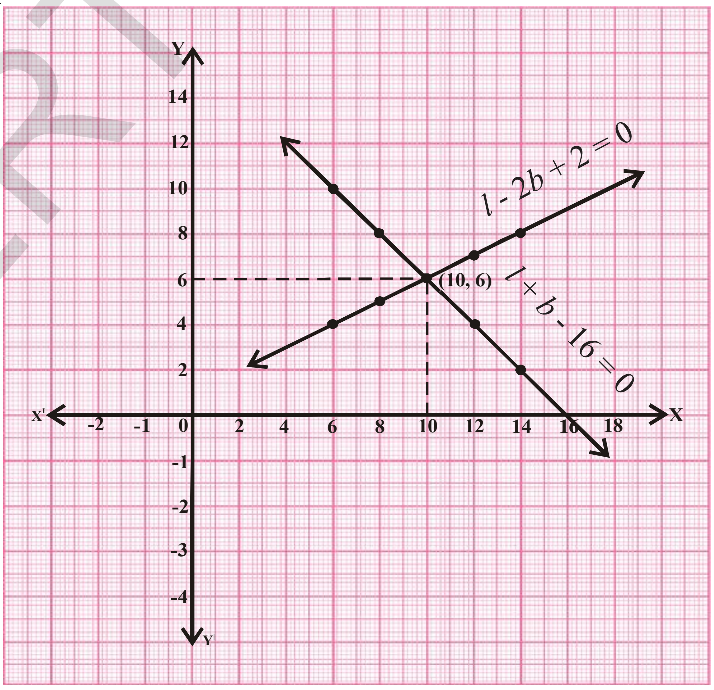
$l - 2b + 2 = 0$ ... (2)

$l + b - 16 = 0$ समीकरणासाठी		
l	$b = 16 - l$	(l, b)
6	$b = 16 - 6 = 10$	(6, 10)
8	$b = 16 - 8 = 8$	(8, 8)
10	$b = 16 - 10 = 6$	(10, 6)
12	$b = 16 - 12 = 4$	(12, 4)
14	$b = 16 - 14 = 2$	(14, 2)

$l - 2b + 2 = 0$ समीकरणासाठी		
l	$b = \frac{l+2}{2}$	(l, b)
6	$b = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)
8	$b = \frac{8+2}{2} = 5$	(8, 5)
10	$b = \frac{10+2}{2} = 6$	(10, 6)
12	$b = \frac{12+2}{2} = 7$	(12, 7)
14	$b = \frac{14+2}{2} = 8$	(14, 8)

म्हणुन प्लॉटची खरी लांबी 10 मी. आणि रुंदी 6मी. आहे.

X-अक्षावर लांबीचे माप आणि Y-अक्षावर रुंदीचे माप घेऊन खालील आलेख काढु शकता.



अभ्यास - 4.1

1. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$, गुणोत्तराची तुलना करा. खाली दिलेल्या रेषीय समीकरणाच्या जोडीतील छेदणाऱ्या रेषा, समांतर रेषा किंवा अनुरुप रेषांना माहित करा.

   a) $5x - 4y + 8 = 0$, $7x+6y-9 = 0$
   b) $9x+3y + 12 = 0$, $18x+6y + 24 = 0$
   c) $6x - 3y + 10 = 0$, $2x - y + 9 = 0$

2. खालील समीकरणे सुसंगत आहेत का असंगत आहेत? तपासणी करुन आलेखाव्दारे सोडवा.

   a) $3x+2y=5$, $2x - 3y=7$
   b) $2x - 3y = 8$, $4x - 6y = 9$
   c) $\frac{3}{2}x+\frac{5}{3}y = 7$, $9x - 10y=12$
   d) $5x-3y = 11$, $-10x+6y = -22$
   e) $\frac{4}{3}x+2y = 8$, $2x+3y = 12$
   f) $x + y = 5$, $2x+2y = 10$
   g) $x - y = 8$, $3x-3y = 16$
   h) $2x + y-6 = 0$, $4x-2y- 4 = 0$
   i) $2x-2y - 2 = 0$, $4x-4y- 5 = 0$

3. नेहाने बाजारातुन काही पॅट आणि स्कर्ट विकत घेतल्या. जेव्हा तिच्या मैत्रिनीने विचारले प्रत्येकी किती विकत घेतल्या. तेव्हा ती म्हणाली, पॅटची संख्याच्या दुपटीपेक्षा दोन स्कर्ट कमी विकत घेतल्या. तसेच पॅटच्या संख्येच्या चारपट पेक्षा चार स्कर्ट कमी विकत घेतल्या. नेहाने किती पॅट आणि स्कर्ट विकत घेतल्या हे माहित करण्यासाठी तिच्या मैत्रिणीला मदत करा.

4. दाहव्या वर्गातुन 10 विद्यार्थी गणिताच्या चाचणी परिक्षेत भाग घेतले. जर त्यामध्ये मुलांपेक्षा 4 मुली जास्त असेल तर किती मुल आणि किती मुलींनी त्या परिक्षेत भाग घेतला?

5. 5 पेन्सील आणि 7 पेनची एकत्र किमती 50 रुपये होते. तसेच 7 पेन्सील आणि 5 पेनची एकत्र किंमत 46 रुपये होते. तर एक पेन व पेन्सीलची किंमत माहित करा.

6. जर रुंदी पेक्षा 4 मी. ने जास्त असलेल्या लांबीच्या आयताकार बगीच्याची अर्धी परिमीती 36 मी. आहे. तर त्या बगीच्याची मापे माहित करा.

7. $2x + 3y - 8 = 0$ ही रेषीय समीकरण आपल्या जवळ आहे. आलेखाव्दारे दर्शविल्यानंतर या रेषेला छेदणारी दोन चलराशीतील रेषीय समीकरण लिहा. तसेच समांतर असणारी आणि दुसरी दिलेल्या रेषीय समीकरणाला अनुरुप असणारी.

8. जर एका आयताची लांबी 5 एककाने कमी आणि रुंदी 2 एककाने वाढविली असता त्या आयताचे क्षेत्रफळ 80 चौ.एककाने कमी होते. जर आपण लांबी 10 एककाने वाढविली आणि

रुंदी 5 एककाने कमी केली तर क्षेत्रफळ 50 चौरस एककाने वाढते. तर आयताची लांबी आणि रुंदी माहित करा.

9. एका प्रत्येक बाकावर तीन विद्यार्थी बसत असेल तर एक विद्यार्थी उरते. जर एका बाकावर 4 विद्यार्थी बसत असेल तर एक बाक उरते. तर वर्गातील बाक आणि विद्यार्थ्यांची संख्या माहित करा.

4.3 रेषीय समीकरणाची उकल माहित करण्यासाठी बैजीक पध्दत:

आलेखाव्दारे रेषयी समीकरणाची जोडी कशी सोडवावी हे आपण शिकलोत. पण उकल दर्शविणारे निर्देशाक बिंदु जर पुर्ण संख्या नसेल तेव्हा आलेख पध्दती तेवढ्या सोयीचे नसते.

उदाहणारार्थ, जेव्हा उकल $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, (- 1.75, 3.3), $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$ इत्यादी च्या स्वरुपात असेल तेव्हा अशा निर्देशांकाना वाचण्यामध्ये चुका होण्याची शक्यता आहे. उकल माहित करण्यासाठी आणखी काही पध्दती आहेत का? बरेचश्या बैजीक पध्दती आहेत ज्या विषयी आता आपण चर्चा करणार आहो.

4.3.1 प्रतिस्थापन पध्दत (SUBSTITUTION METHOD)

दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाची जोडी सोडविण्यासाठी ही पध्दत महत्वाची आहे. येथे एक चलराशी ही दुसऱ्या चलराशीच्या संदर्भात लिहितो. ही पध्दत पायरी-पायरी ने समजुन घेऊ या.

पायरी-1 : पहिल्या समीकरणात एक चल राशी ही दुसऱ्या चलराशीच्या संदर्भात व्यक्त करा. समजा y ही xच्या पध्दत

पायरी-2 : पहिल्या पायरीत मिळालेली y ची किंमत दुसऱ्या समीकरणात प्रतिक्षेपीत करा.

पायरी-3 : दुसऱ्या पायरीत मिळालेल्या समीकरणाला सरळ रुप द्या आणि xची किंमत माहित करा.

पायरी-4 : तिसऱ्या पायरीत मिळालेली x ची किंमत कोणत्या तरी एका समीकरणात प्रतिक्षेपीत करुन y ची किंमत माहित करा.

पायरी-5 : x आणि y या दोन्हीची किंमत समीकरणात प्रतिक्षेपीत करुन समीकरण सत्य ठरते का, याची तपासणी करा.

उदाहरण-6. दिलेल्या समीकरणाची जोडी प्रतिस्थापन पध्दतीने सोडवा.

$$2x - y = 5$$
$$3x + 2y = 11$$

सोडवणुक : $2x - y = 5 \qquad (1)$

$3x + 2y = 11 \qquad (2)$

समीकरण (1) ला असे लिहु शकतो

$$y = 2x - 5$$

समीकरण (2) ला असे लिहु शकतो

$$3x + 2(2x - 5) = 11$$

$3x + 4x - 10 = 11$

$7x = 11 + 10 = 21$

$x = 21/7 = 3.$

$x = 3$ समीकरण (1) मध्ये प्रतिक्षेपीत करुन

$2(3) - y = 5$

$y = 6 - 5 = 1$

समीकरण(2) मध्ये x आणि y च्या किंमती प्रतिक्षेपीत करुन $3(3) + 2(1) = 9 + 2 = 11$ समीकरण (2) या किंमतीने समाधान होते.

म्हणुन,उकल $x = 3$ आणि $y = 1$.

हे करा

प्रतिस्थापन पध्दतीचा वापर करुन समीकरणाची प्रत्येक जोडी सोडवा.

1) $3x - 5y = -1$, $x - y = -1$

2) $x+2y = -1$, $2x - 3y = 12$

3) $2x+3y = 9$, $3x+4y = 5$

4) $x + \frac{6}{y} = 6$, $3x - \frac{8}{y} = 5$

5) $0.2x + 0.3y = 13$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

6) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

4.3.2 निष्कासन पध्दती (Elimination Method)

या पध्दतीत दोन चल राशीतुन एक चलराशीचा सहगुणक समान करुन त्या चल राशीला काढुन टाकतो. यामुळे एका चलराशीत एक समीकरण मिळते. ते माहित करण्याव्दारे दुसऱ्या चलराशीची किंमत मिळते. काही पायरी व्दारा ही पध्दत समजुन घेऊ या.

पायरी-1 : दोन्ही समीकरणाला $ax + by = c$ च्या रुपात लिहा.

पायरी-2 : दोन चलराशी मधुन एका चलराशीचा सहगुणक समान करण्यासाठी दोन्ही समीकरणाला योग्य ते वास्तविक संख्येने गुणाकार करा.

पायरी-3 : जे चलराशी काढायची आहे तिचे चिन्ह दोन्ही समीकरणात समान असेल तर एका राशीतील समीकरण मिळविण्यासाठी एका समीकरणातुन दुसरे समीकरण वजा करावे. जर विरुध्द चिन्ह असेल तर बेरीज करावे.

पायरी-4 : उरलेल्या चलराशीसाठी समीकरण सोडवा.

पायरी-5 : या चलराशीची किंमत कोणत्या तरी एका समीकरणात टाकुन निष्कासन केलेल्या चलराशीची किंमत काढा.

उदाहरण-7. निष्कासन पध्दतीचा वापर करुन खालील रेषीय समीकरणाची जोडी सोडवा

$3x + 2y = 11$ $\qquad$ $2x + 3y = 4$

सोडवणुक : $3x + 2y = 11$ (1)

$2x + 3y = 4$ (2)

दिलेल्या समीकरणा मधुन 'y' काढु या. दिलेल्या समीकरणात 'y' चे सहगुणक 2 आणि 3 आहे. 2 आणि 3 चा ल.सा.वी. 6 आहे. समीकरण (1) ला 3 ने गुणुन आणि समीकरण (2) ला 2 ने गुणुन

समीकरण (1) × 3 $\quad 9x + \cancel{6y} = 33$

समीकरण (2) × 2 $\quad 4x + \cancel{6y} = 8$

$\underline{(-) \quad (-) \quad (-)}$

$5x = 25$

$$x = \frac{25}{5} = 5$$

समीकरण (1) मध्ये $x = 5$ प्रतिक्षेपीत करुन

$3(5) + 2y = 11$

$$2y = 11 - 15 = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = -2$$

म्हणुन, उकल $x = 5, y = -2$.

हे करा

खालील समीकरणाची प्रत्येक जोडी निष्कासन पध्दतीव्दारे सोडवा.

1. $8x + 5y = 9$
   $3x + 2y = 4$
2. $2x + 3y = 8$
   $4x + 6y = 7$
3. $3x + 4y = 25$
   $5x - 6y = -9$

प्रयत्न करा

दिलेल्या रेषीय समीकरणाची जोडी सोडवा.

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

आणखी काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-8. रुबिना 2000 रु.काढण्यासाठी बँकेत गेली. तीने फक्त 50रु.आणि 100 रु. च्या नोटाची मागणी कॅशीअर जवळ केली. तिला एकुण 25 नेाट मिळाले. तर तिला 50 रु.आणि 100 रु. च्या प्रत्येकी किती नेाटा मिळाले? हे तुम्ही सांगु शकता का?

सोडवणुक : समजा 50रु.नोटाची संख्या x; आणि 100 रु.नोटाच्या संख्या y;

तर $x + y = 25$ (1)

आणि $50x + 100y = 2000$ (2)

कविता ने प्रतिक्षेपीत पध्दतीचा वापर केला.

समीकरण (1) वरुन $x = 25 - y$

समीकरण (2) मध्ये प्रतिक्षेपीत करुन $50(25 - y) + 100y = 2000$

$$1250 - 50y + 100y = 2000$$

$$50y = 2000 - 1250 = 750$$

$$y = \frac{750}{50} = 15$$

$$x = 25 - 15 = 10$$

म्हणुन रुबिनाला दहा 50 रु. चे नोटा आणि पंधरा 100 रुचे नोटा मिळाले.

समीकरणाला सोडविण्यासाठी श्वेता ने निष्कासन पध्दतीचा वापर केला.

समीकरणामध्ये x चे सहगुणक 1 आणि 50 आहे म्हणुन

समीकरण (1) × 50 : $50x + 50y = 1250$

समीकरण (2) × 1 : $50x + 100y = 2000$ सारखे चिन्ह वजा करुन

$$\underline{(-) \quad (-) \quad (-)}$$

$$-50y = -750$$

किंवा $y = \frac{-750}{-50} = 15$

y ची किंमत समीकरण (1) मध्ये प्रतिक्षेपती करुन $x + 15 = 25$

$$x = 25 - 15 = 10$$

म्हणुन रुबिना ला 50 रु. चे दहा आणि 100 रु. चे पंधरा नोटा मिळाले.

उदाहरण-9. स्पर्धा परिक्षेत बरोबर लिहिलेल्या प्रत्येक उत्तराला 3 गुण दिल्या जाते आणि प्रत्येक चुक उत्तराला 1 गुण कमी करण्यात येते. मधुला या परिक्षेत 40 गुण मिळाले. जर बरोबर उत्तराला 4 गुण दिले आणि चुक उत्तराला 2 गुण कमी केले तर मधुला 50 गुण मिळाले असते. त्या प्रश्नपत्रिकेत किती प्रश्न होते? (मधुने ते सर्व प्रश्न सोडविले)

सोडवणुक : समजा उत्तर बरोबर लिहिलेले प्रश्न x;

आणि चुक उत्तर लिहिलेले प्रश्न y.

जेव्हा प्रत्येक बरोबर लिहिलेल्या उत्तराला 3 गुण दिल्या जाते आणि प्रत्येक चुक उत्तरासाठी 1 गुण कमी केला जातो. तेव्हा त्याला 40 गुण मिळतात.

$$3x - y = 40 \qquad (1)$$

जेव्हा प्रत्येक बरोबर लिहिलेल्या उत्तराला 4 गुण दिल्या जाते आणि प्रत्येक चुक उत्तरासाठी 2 गुण कमी केले जाते. तेव्हा त्याला 50 गुण मिळतात.

$$4x - 2y = 50 \qquad (2)$$

प्रतिस्थापन पध्दत

समीकरण (1) वरुन $y = 3x - 40$

समीकरण (2)मध्ये प्रतिक्षेपीत करुन $4x - 2(3x - 40) = 50$

$$4x - 6x + 80 = 50$$

$$-2x = 50 - 80 = -30$$

$$x = \frac{-30}{-2} = 15$$

x ची किंमत समीकरण(1) मध्ये प्रतिक्षेतीत करुन

$$3(15) - y = 40$$

$$45 - y = 40$$

$$y = 45 - 40 = 5$$

$\therefore$ एकुण प्रश्नांची संख्या = 15 + 5 = 20

हे करा

आता वरील उदाहरण-9 निष्कासन पध्दतीव्दारे सोडवा.

उदाहरण-10. मेरी तिच्या मुलीला सांगीतली, सात वर्षापुर्वी त्या वेळेसच्या तुझ्या वयाच्या सातपट माझे वय होते आणि आज पासुन तीन वर्षानंतर तुझ्या त्या वेळेसच्या वयाच्या माझे वय तिप्पट होईल, तर मेरी आणि तिच्या मुलीचे आजचे वय माहित करा.

सोडवणुक : समजा मेरी चे आजचे वय x वर्ष आणि तिच्या मुलीचे वय y वर्ष

तर सात वर्षापुर्वी मेरीचे वय $x - 7$ आणि मुलीचे वय $y - 7$.

$$x - 7 = 7(y - 7)$$

$$x - 7 = 7y - 49$$

$$x - 7y + 42 = 0 \qquad (1)$$

तीन वर्षानंतर मेरीचे वय $x + 3$ आणि मुलीचे वय $y + 3$.

$$x + 3 = 3(y + 3)$$

$$x + 3 = 3y + 9$$

$$x - 3y - 6 = 0 \qquad (2)$$

निष्कासन पध्दत

समीकरण 1 $\cancel{x} - 7y = -42$

समीकरण 2 $\cancel{x} - 3y = 6$

$\underline{(-)\quad(+)\quad(-)}$ x चे चिन्ह सारखे असल्यामुळे, वजा करा.

$$-4y = -48$$

$$y = \frac{-48}{-4} = 12$$

समीकरण (2) मध्ये y ची किंमत प्रतिक्षेपीत करुन

$$x\text{-}3\ (12) - 6 = 0$$

$$x = 36 + 6 = 42$$

म्हणुन मेरीचे आजचे वय 42 वर्ष आणि तिच्या मुलीचे वय 12 वर्ष आहे.

हे करा

उदाहरणा-10 प्रतिस्थापन पध्दतीने सोडवा.

उदाहरण-11. एक प्रकाशक एक नविन पुस्तक प्रकाशनासाठी उपलब्ध केला. त्यांची स्थीर किंमत (समालोचन, संपादन, मुद्रण इत्यादी) प्रत्येक पुस्तकाला 320000 रु. आहे. या ऐवजी त्याने पुस्तक प्रकाशित करण्यासाठी 31.25 रु. चे इतर खर्च केले. त्याची ठोक किंमत (प्रकाशकाने ठरवलेली किंमत) हे 43.75 रु. प्रति पुस्तकासाठी आहे. त्या प्रकाशकाचा खर्च आणि उत्पन्न समान होण्यासाठी (समतुल्य बिंदुवर येण्यासाठी) प्रकाशकाला किती पुस्तके विकावे लागणार?

> प्रकाशनावर आलेला खर्च आणि पुस्तके विक्री करुन आलेला उत्पन्न समान असेल तेव्हा समतुल्य बिंदुवर आहे असे म्हणतात.

सोडवणुक: प्रकाशकाला समतुल्य स्थानावर येण्यासाठी खर्च आणि उत्पन्न समान होयला पाहिजे. जर मुद्रण आणि विकलेल्या पुस्तकाची संख्या x आणि y हे समतुल्य बिंदु तर प्रकाशकाला खर्च आणि उत्पन्नसाठी समीकरण दिलेल्या खर्चाचे समीकरण

दिलेल्या खर्चाचे समीकरण $\quad y = 320000 + 31.25x \quad (1)$

दिलेल्या उत्पन्नाचा समीकरण $\quad y = 43.75x \quad (2)$

दुसऱ्या समीकरणातील y ची किंमत समीकरण (1) मध्ये प्रतिक्षेपतीत करुन

$$43.75x = 3{,}20{,}000 + 31.25x$$

$$12.5x = 3{,}20{,}000$$

$x = \dfrac{3{,}20{,}000}{12.5} = 25{,}600$ म्हणुन प्रकाशकाला 25,600 पुस्तके मुद्रण करुन विकल्यानंतर समतुल्य बिंदु वर येणे.

अभ्यास - 4.2

खालील गणीताचे रेषीय समीकरण तयार करा आणि ते सोडवा.

1. दोन व्यक्तीच्या उत्पन्नाचा गुणोत्तर 9:7 आहे आणि त्यांच्या खर्चाचा गुणोत्तर 4:3 आहे. जर प्रत्येक व्यक्ती प्रति महिना 2000 रु.ची बचत करत असेल तर त्यांचा मासीक उत्पन्न किती?
2. एक दोन अंकी संख्या आणि त्याच्या अंकाची अदलाबदल करुन आलेल्या संख्याची बेरीज 66 आहे. जर त्या संख्येतील अंकामध्ये 2 चा फरक असेल तर ती संख्या माहित करा. अशा एकुण किती संख्या आहेत?

3. दोन संपुरक कोनात मोठा कोन, लहान कोनापेक्षा $18°$ ने जास्त आहे. तर ते कोन माहित करा
4. हैद्राबाद मध्ये टॅक्सीचा दर दोन भागात असते. एक स्थिर दर असते आणि दुसरे अंतरानुसार दर असते. 3 कि.मी. चा दर स्थिर असतो. नंतर प्रत्येक कि.मी. वर अधिक दर असतो. पहिला 10 कि.मी. ला 166 रुपले भरले . 15 कि.मी. ला 256 रुपये भरले तर
   i. स्थिर दर किती आहे आणि प्रती की.मी. ला दर किती आहे?
   ii. एका व्यक्तीला 25 कि.मी. प्रवास करण्यासाठी किती रुपये द्यावे लागेल?
5. एका अपुर्णांकाच्या अंश आणि छेद मध्ये 1 मिळविला तर ते $\frac{4}{5}$ होते. तसेच अंश आणि छेदा मधुन 5 वजा केले तर ते अपुर्णांक $\frac{1}{2}$ होते. तर त्या अपुर्णांकाला माहित करा?
6. एका रस्त्यावर A आणि B स्थळ 100 कि.मी.दुर वर आहेत. A पासुन एक कार B पासुन एक कार एकाच वेळी वेगवेगळ्या वेगात प्रवास करत आहेत. ते दोन कार एका दिशेत प्रवास करीत 5 तासानंतर एकमेकाला मिळतात. जर ते एकमेकाकडे प्रवास करत असेल तर ते 1 तासात मिळतात. तर त्या दोन कारची गती किती आहे?
7. दोन कोन पुरक आहेत. मोठ्या कोनाचा माप लहान कोनाच्या दुपटी पेक्षा $3°$ ने कमी आहे. तर ते कोन माहित करा?
8. एका शब्द कोषात एकुण 1382 पाने आहेत. त्याला दोन भागात वेगळे केले. तर दुसऱ्या भागात पहिल्या भागापेक्षा 64 पाने जास्त आहेत. तर त्या पुस्तकाच्या प्रत्येक भागात किती पाने आहेत?
9. रसायन विकणाऱ्या दुकानदाराकडे दोन प्रकारचे हायड्रोक्लोरीक आम्ल आहे. एक 50% द्रवणीय आहे आणि दुसरे 80% द्रवणीय आहे. 68% चा 100 मी.ली.द्रावण तयार करण्यासाठी प्रत्येक द्रावण किती किती घ्यावे लागणार?
10. समजा तुम्हाला 12000 रु. बचत करायचे आहे. त्यामधुन काही रुपये 10% व्याजाने आणि उरलेले 15% व्याजाने येण्यासारखे बचत करायचे आहे. तर एकुण बचती वर 12% व्याज येण्यासाठी किती व्याजाने किती रुपये बचत करावे लागणार आहे?

4.4 दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाच्या जोडीत कमी करण्याजोगी समीकरण:

आता आपण अशा समीकरणाच्या जोडीची चर्चा करु या जे रेषीय समीकरण नाही पण योग्य ते प्रतिक्षेपीत करुन त्यांना रेषीय समीकरण बनवता येते. काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-12. खालील रेषीय समीकरणाची जोडी सोडवा $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$$

सोडवणुक: दिलेल्या समीकरणाच्या जोडीचे निरिक्षण करा. ते रेषीय समीकरण नाही.(का?)

तर $2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=13$ (1)

$5\left(\frac{1}{x}\right)-4\left(\frac{1}{y}\right)=-2$ (2)

जर आपण $\frac{1}{x}=p$ आणि $\frac{1}{y}=q$प्रतिक्षेपीत केलो तर आपल्याला खालील रेषीय समीकरणाची जोडी

$2p+3q=13$ (3)

$5p-4q=-2$ (4)

q चे सहगुणक 3 आणि 4 आहे. आणि त्यांचा ल.सा.वी. 12 आहे.

समीकरण (3) × 4 $8p+12q=52$

समीकरण (4) × 3 $15p-12q=-6$ 'q' पदाचे चिन्ह विरुध्द आहेत म्हणुन आपण दोन्ही समीकरणाची बेरीज करणे

$23p=46$

$$p=\frac{46}{23}=2$$

p ची किंमत समीकरण(3) मध्ये प्रतिक्षेपती करुन

$2(2)+3q=13$

$3q=13-4=9$

$$q=\frac{9}{3}=3$$

पण, $\frac{1}{x}=p=2$ $\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{y}=q=3$ $\Rightarrow y=\frac{1}{3}$

उदाहरण-13.कविताला तिच्या घरात आणखी दोन खोल्या बांधायचे आहे. यासाठी लागणाऱ्या मजुरा विषयी माहिती मिळवली. तिला असे माहित झाले की, 6 पुरुष आणि 8 स्त्रिया हे काम 14 दिवसात पुर्ण करतील. पण तिला हे काम 10 दिवसात पुर्ण करायचे आहे. जेव्हा तिने पुन्हा या विषयी माहिती घेतली तेव्हा तिला असे माहित झाले की, 8 पुरुष आणि 12 स्त्रिया हे काम 10 दिवसात पुर्ण करतील. जर हेच काम 1 पुरुष आणि 1 स्त्री करेल तेव्हा हे काम पुर्ण होण्यासाठी किती दिवस लागेल ?

सोडवणुक : समजा काम पुर्ण करण्यासाठी 1 पुरुषाला = x दिवस

तर एका पुरुषाने एका दिवसात केलेले काम $= \frac{1}{x}$

समजा हे काम पुर्ण करण्यासाठी एका स्त्रीला $= y$ दिवस

तर एका स्त्रीने एका दिवसात केलेले काम $= \frac{1}{y}$

आता, 8 पुरुष आणि 12 स्त्रीने हे काम पुर्ण करण्यासाठी 10 दिवस लावतील.

म्हणुन 8 पुरुष आणि 12 स्त्रीने एका दिवसात केलेले काम $= \frac{1}{10}$ (1)

तसेच, 8 पुरुषांनी एका दिवसात केलेले काम $8 \times \frac{1}{x}. = \frac{8}{x}$

त्याच प्रमाणे 12 स्त्रीयांनी एका दिवसात केलेले काम $12 \times \frac{1}{y} = \frac{12}{y}$

8 पुरुष आणि 12 स्त्रीयांनी एका दिवसात पुर्ण केलेले काम $= \frac{8}{x} + \frac{12}{y}$ (2)

समीकरण(1) आणि (2) बरोबर करुन $\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = \frac{1}{10}$

$$10\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = 1$$

$$\frac{80}{x} + \frac{120}{y} = 1 \quad (3)$$

तसेच 6 पुरुष आणि 8 स्त्रींयानी हे काम 14 दिवसात पुर्ण करतात.

6 पुरुष आणि 8 स्त्रीया एका दिवसात पुर्ण केलेले काम $= \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$

$$\Rightarrow \quad 14\left(\frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = 1$$

$$\left(\frac{84}{x} + \frac{112}{y}\right) = 1 \quad (4)$$

समीकरण (3) आणि (4) निरिक्षण करा. ते रेषीय समीकरण आहेत का? तर त्यांना तुम्ही कसे सोडवाल? $\frac{1}{x} = u$ आणि $\frac{1}{y} = v$ प्रतिक्षेपीत करुन आपण रेषीय समीकरणात रुपांतर करु शकतो.

तर समीकरण (3) चे पुन्हा $80u + 120v = 1$ (5)

आता, समीकरण (4) चे पुन्हा $84u + 112v = 1$ (6)

80 आणि 84 ची ल.सा.वी. 1680 निष्कासन पध्दतीचा वापर करुन

समीकरण (3) × 21 $(21 \times 80)u + (21 \times 120)v = 21$

समीकरण (4) × 20 $(20 \times 84)u + (20 \times 112)v = 20$

$$\begin{array}{r} \cancel{1680u}+2520v = 21 \\ \cancel{1680u}+2240v = 20 \\ (-) \quad (-) \quad (-) \\ \hline 280v = 1 \end{array}$$

u चे सारखे चिन्ह असल्यामुळे वजा करा.

$$v = \frac{1}{280}$$

समीकरण (5) मध्ये प्रतिक्षेपीत करुन $80u + 120 \times \frac{1}{280} = 1$

$$80u = 1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$u = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{7} \times \frac{1}{\underset{20}{\cancel{80}}} = \frac{1}{140}$$

म्हणुन एक पुरुष हे काम 140 दिवसात पुर्ण करतो आणि एक स्त्रि हे काम 280 दिवसात पुर्ण करते.

उदाहरण-14. एक व्यक्ती 370 कि.मी. प्रवासामध्ये काही अंतर ट्रेन आणि काही अंतर कार ने करतो जर तो 250 कि.मी. ट्रेन ने प्रवास करत असेल उरलेले कार ने प्रवास करतो तर यासाठी त्याला 4 तास लागतात. पण जर तो 130 कि.मी.ट्रेन ने प्रवास करत असेल तर आणि उरलेला प्रवास कार ने प्रवास करतो तर यासाठी त्याला आणखी 18 मिनीट जास्त लागतात. तर ट्रेन आणि कारची गती माहित करा.

सोडवणुक : समजा ट्रेनची गती x कि.मी. तास आणि त्याच प्रमाने कारची गती y कि.मी. प्रती तास

वेळ $= \dfrac{\text{अंतर}}{\text{गती}}$

संदर्भ 1 मध्ये, ट्रेनला लागलेला वेळ $= \dfrac{250}{x}$ तास

आणि कारला लागलेला वेळ $= \dfrac{120}{y}$ तास

म्हणुन एकुण लागलेला वेळ= ट्रेनमध्ये घालविलेला वेळ + कारमध्ये घालविलेला वेळ = $\frac{250}{x} + \frac{120}{y}$

परंतु, प्रवासाचा एकुण कालावधी 4 तास आहे, म्हणुन

$$\frac{250}{x} + \frac{120}{y} = 4$$

$$\frac{125}{x} + \frac{60}{y} = 2 \qquad \rightarrow (1)$$

पुन्हा जर तो ट्रेनने 130 कि.मी.आणि उरलेला प्रवास कारने केला तर

ट्रेनने 130 कि.मी.प्रवास करण्यासाठी लागलेला वेळ = $\frac{130}{x}$ तास

240 कि.मी. (370 - 130) कारने प्रवास करण्यासाठी लागलेला वेळ = $\frac{240}{y}$ तास

एकुण लागलेला वेळ = $\frac{130}{x} + \frac{240}{y}$

पण दिलेले, प्रवासाचा कालावधी 4 तास 18 मिनीटे म्हणजेच $4\frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{60}_{10}}$ तास = $4\frac{3}{10}$ तास

म्हणुन $\qquad \frac{130}{x} + \frac{240}{y} = \frac{43}{10} \qquad (2)$

$\frac{1}{x} = a$ आणि $\frac{1}{y} = b$ समीकरण(1)आणि(2) मध्ये प्रतिक्षेपीत करुन

$$125a + 60b = 2 \qquad (3)$$

$$130a + 240b = 43/10 \qquad (4)$$

60 आणि 240 चा ल.सा.वी. 240 निष्कासन पध्दतीचा वापर करुन

समीकरण (3) × 4 $\qquad 500a+\cancel{240b} = 8$

समीकरण (4) × 1 $\qquad 130a+\cancel{240b} = \frac{43}{10}$ (सारखे चिन्ह,वजा करा)

$\qquad$ (-) $\quad$ (-) $\quad$ (-)

$$370a = 8 - \frac{43}{10} = \frac{80-43}{10} = \frac{37}{10}$$

$$a = \frac{\cancel{37}}{10} \times \frac{1}{\cancel{370}_{10}} = \frac{1}{100}$$

$a = \frac{1}{100}$ समीकरण (3) मध्ये प्रतेक्षेपीत करुन

$$\left(\frac{\cancel{125}^{5}}{} \times \frac{1}{\cancel{100}_{4}}\right) + 60b = 2$$

$$60b = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\cancel{60}_{20}} = \frac{1}{80}$$

म्हणुन $a = \frac{1}{100}$ आणि $b = \frac{1}{80}$

म्हणुन $\frac{1}{x} = \frac{1}{100}$ आणि $\frac{1}{y} = \frac{1}{80}$

$x = 100$कि.मी./तास आणि $y = 80$ कि.मी./तास

म्हणुन ट्रेनची गती 100 कि.मी./तास आणि कारची गती 80 कि.मी./तास

अभ्यास - 4.3

खालील समीकरणाच्या जोडींना रेषीय समीकरणाच्या जोडीत रुंपातर करुन सोडवा.

i) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

ii) $\frac{x+y}{xy} = 2$

$\frac{x-y}{xy} = 6$

iii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

iv) $6x+3y=6xy$

$2x+4y=5xy$

v) $\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1$

vi) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$

$\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} = 10$ येथे $x \neq 0, y \neq 0$ $\quad$ $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$ येथे $x \neq 0, y \neq 0$

vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

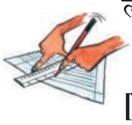
$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2. खालील गणीत रेषीय समीकरणाच्या जोडीत लिहा आणि नंतर सोडवा.

i. एका जहाजाला प्रवाहाच्या विरुध्द 30 कि.मी.आणि 44 कि.मी. प्रवाहाच्या दिशेने प्रवास करण्यासाठी 10 तास लागतात. तसेच 13 तास तो 40 कि.मी. प्रवाहाच्या विरुध्द आणि 55 कि.मी.प्रवाहाच्या दिशेला प्रवास करु शकतो. प्रवाह वेगाला, शांत पाण्यात जहाजाच्या वेगाला माहित करा.

ii. रहीम 600 कि.मी.प्रवासामध्ये काही अंतर ट्रेनने काही अंतर कार ने केला. जर तो 120 कि.मी.ट्रेनने प्रवास केला आणि उरलेला कारने प्रवास केला तर त्याला 8 तास लागले. जर तो. 200 कि.मी.आणखी 20 मिनीट जास्त लागेल. तर ट्रेन आणि कारची गती माहित करा

iii. 2 स्त्री आणि 3 पुरुष एक नक्षीकाम 4 दिवसात पुर्ण करतात. तेच काम 3 स्त्री आणि 6 पुरुष 3 दिवसात पुर्ण करु शकता. तर ते काम पुर्ण करण्यासाठी 1 पुरुषाला किती दिवस लागतात. तसेच ते काम पुर्ण करण्यासाठी 1 स्त्रीला किती दिवस लागतात.



ऐच्छिक अभ्यास

[हा अभ्यास परिक्षेसाठी नाही]

1. खालील समीकरणे सोडवा.

(i) $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4$

(ii) $\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} = 8$

$\frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 9$

(iii) $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$

$\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$

(iv) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$

$\sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$

(v) $\frac{ax}{b} - \frac{by}{a} = a + b$

$ax - by = 2ab,$

(vi) $2^x + 3^y = 17$

$2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$

2. एका प्रयोगात प्राण्यांना निर्देशित आहार दिले. प्रत्येक प्राण्याला इतर सोबत प्रोटीन, 6 ग्रॅ.,मेद देण्यात येते. त्या प्रयोग शाळेतील वैद्यकीयांनी A , Bअसे दोन प्रकारचे आहार मिश्रण विकत घेतले. A मिश्रणात 10% प्रोटीन आणि 6% मेद आहे. B मिश्रणात 20% प्रोटीन आणि 2% मेद आहे. तर त्याने प्रती मिश्रणाचे किती ग्राम उपयोग केला ?

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

- काही सरळ रेषीय समीकरणाच्या जोड्यांची रचना करा ज्या तुमच्या दररोजच्या जिवनातील घटनावर आधारीत असतील आलेखाचा उपयोग करुन त्या समीकरणाना सोडवा.

आपण काय चर्चा केली.

1. दोन सारख्याच चलराशीत असणाऱ्या दोन रेषीय समीकरणा दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाची जोडी म्हणतात.

   $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$

   $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$

   येथे $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ हे वास्तव संख्या आहेत.
2. दोन चलराशीतील समीकरणाच्या जोडीला वेगवेगळ्या पध्दतीचा उपयोग करुन सोडवु शकतो.
3. दोन चलराशीतील समीकरणाच्या जोडीचा आलेख दोन रेषांनी निर्देशित करतात.
   i. दोन रेषा, एक बिंदुत छेदत असेल तर त्याला एक उकल असते. या संदर्भात समीकरणाची जोडी सुसंगत आहे.
   ii. जर रेषा अनुरुप असतील तर त्यांना अनंत उकल असतात. रेषे वरील प्रत्येक बिंदु हे उकल असते. या संदर्भात समीकरणाची जोडी अश्रित आहे.
   iii. जर रेषा समांतर असतील तर त्यांना उकल नसतो. या संदर्भात समीकरणाची जोडी विसंगत आहे.
4. रेषीय समीकरणाची जोडीची उकल माहित करण्यासाठी आपण खालील पध्दतीची चर्चा केली.
   i. आदर्श पध्दत
   ii. आलेखीय पध्दत
   iii. बैजिक पध्दत- प्रतिस्थापन पध्दत आणि निष्कासन पध्दत
5. समीकरणातील चलराशीचे सहगुणक आणि समीकरणाच्या पध्दतीच्या स्वरुपात संबंध असतो.
   i. जर $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ तर रेषीय समीकरणाची जोडी सुसंगत असते.
   ii. जर $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ तर रेषीय समीकरणाची जोडी असंगत असते.
   iii. जर $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ तर रेषीय समीकरणाची जोडी आश्रित आणि सुसंगत असते.
6. बरेचश्या संदर्भाला दोन समीकरणाव्दारे गणीतामध्ये दर्शवु शकतो पण ते रेषीय समीकरण नाही. पण त्या समीकरणामध्ये योग्य ते प्रतिक्षेतीप करुन त्याला रेषीय समीकरणात रुपातर करतो.

धडा

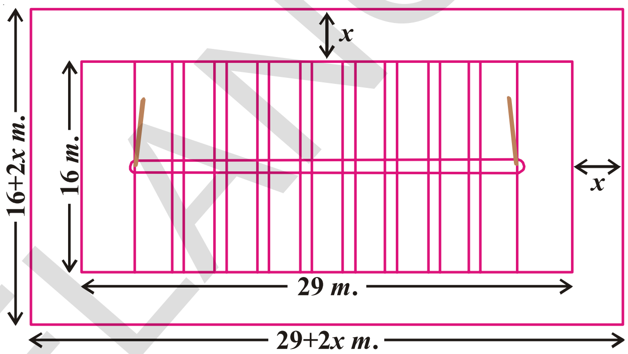
5

वर्ग समीकरणे

(Quadratic Equations)

5.1 प्रस्तावना

धन्नुर शाळेच्या खेळ समिती ने शाळेच्या प्रांगणात 29 मी. × 16 मी. परिमान असलेल्या एका खो-खो चा कोर्ट तयार करायचा होता. हा कोर्ट 558 मी^{2} क्षेत्रफळाचा आयताकार असायला हवा. त्या कोर्टभोवती प्रेक्षकांसाठी समान रुंदीची जागा सोडायला हवी होती. त्या भोवती प्रेक्षकांसाठी सोडलेल्या जागेची रुंदी काय होईल? ती पुरेशी होते का?



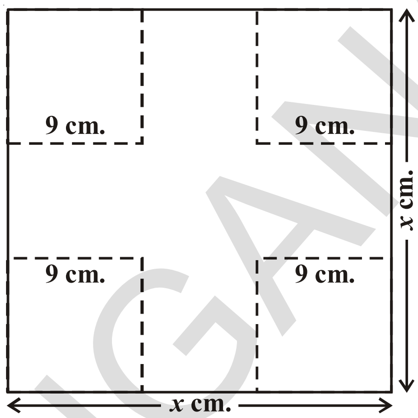
समजा त्या भोवती असलेल्या खाली जागेची रुंदी x मीटर आहे. म्हणुन आकृतीवरुन आयताकार जागेची लांबी $(29 + 2x)$ मीटर होते.

आयताकार जागेची रुंदी	$= (16 + 2x)$ मी.
म्हणुन आयताकार जागेचे क्षेत्रफळ	= लांबी × रुंदी
	$= (29 + 2x)(16 + 2x)$
परंतु जागेचे क्षेत्रफळ	= 558 मी^{2} आहे
$\therefore\ (29 + 2x)(16 + 2x)$	$= 558$
$\therefore\ 4x^2 + 90x + 464$	$= 558$
$4x^2 + 90x - 94$	$= 0$ (2 ने भागल्यास)
$2x^2 + 45x - 47$	$= 0$

$2x^2 + 45x - 47 = 0$ ..... (1)

आपण मागील वर्गात $ax + b = c$ या रुपातील रेषीय समीकरण सोडवुन 'x'ची किंमत माहित करणे शिकलो.वरील समीकरणात x च्या किंमतीवरुन प्रेक्षकासाठी खाली सोडलेल्या जागेची संभावित रुंदी काढता येते. तुम्ही अशा काही उदाहरणांचा विचार करु शकता का, ज्यामध्ये राशीची किंमत काढुन अशा प्रकारची समीकरणे येतील. चला एक उदाहरण पाहु या.

राणी जवळ एक चौरसाकार धातुचा पत्रा (शिट) आहे. तिने 9 से.मी. बाजु असलेल्या चौरसांना या पत्राच्या चार ही कोपऱ्यातुन कापले आणि उरलेल्या भागापासुन झाकन नसलेला डबा तयार केला. अशा तयार झालेल्या डब्याचे घनपरिमाण 144 घन से.मी. असल्यास आपण घेतलेल्या धातुच्या पत्राचे परिमाण काढु शकतो का?



समजा त्या चौरसाकार धातुच्या पत्र्याच्या तुकड्याची बाजु'x'से.मी. आहे. तर त्या डब्याचे परिमाण

9 से.मी. × (x-18) से.मी. × (x-18) सें.मी.

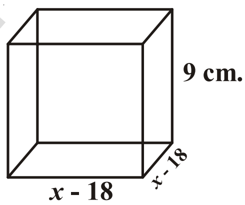
परंतु त्या डब्याचे घनफळ 144 घन सें.मी. आहे.

$9(x-18)(x-18) = 144$

$(x-18)^2 = 16$

$x^2 - 36x + 308 = 0$

म्हणजे वरील समीकरणाला समाधान करणारी 'x' ची किंमत ही त्या धातुच्या पत्र्याची बाजु होते.



$x^2 - 36x + 308 = 0$ ..... (2)

समीकरण (1) आणि (2) च्या डाव्या बाजुचे निरिक्षण करा.

त्या वर्ग बहुपदी आहेत का?

$ax^2 + bx + c, a \neq 0$ या रुपातील वर्ग बहुपदीचा अभ्यास आपण अगोदरच्या धड्यात केला.

वरील समीकरणातील डावी बाजु ही वर्ग बहुपदी असल्यामुळे त्यांना वर्ग समीकरणे म्हणतात.

या धड्यात आपण वर्ग समीकरणे आणि त्यांची मुळ माहित करण्याच्या पध्दतीबद्दल शिकणार आहोत.

5.2 वर्ग समीकरणे (Quadratic Equations)

a, b, c या वास्तव संख्या असतील व $a \neq 0$ तर $ax^2 + bx + c = 0$ या स्वरुपातील समीकरणांना x या चलातील वर्ग समीकरणे म्हणतात. उदाहरणार्थ $2x^2 + x - 300 = 0$ हे एक वर्ग समीकरणे आहे. अशारीतीने $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ आणि $1 - x^2 + 300 = 0$ सुध्दा वर्ग समीकरणे आहेत.

वास्तविक पणे $p(x)$ ही कोटी 2 असलेली बहुपदी $p(x)=0$ रुपात असल्यास त्यांना वर्ग समीकरणे म्हणतात. जेव्हा आपण $p(x)$ ला तीच्या कोटीनुसार उतरत्या क्रमात लिहितो तेव्हा ती आपणास सामान्य रुपातील समीकरण येते. म्हणजेच $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ला वर्ग समीकरणाचे सामान्य रुप म्हणतात. आणि $y = ax^2 + bx + c$ वर्ग फलन म्हणतात.

प्रयत्न करा

खालील समीकरणे वर्ग समीकरणे आहेत का नाही यांची तपासणी करा

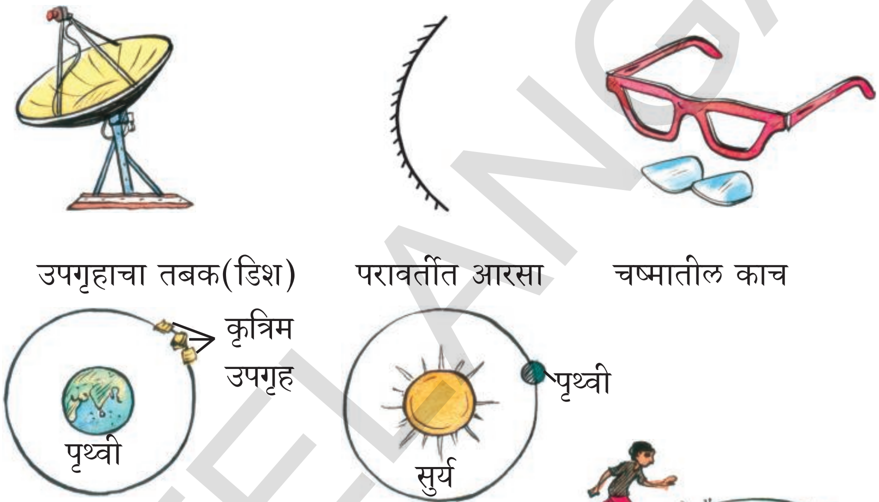
(i) $x^2 - 6x - 4 = 0$ (ii) $x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

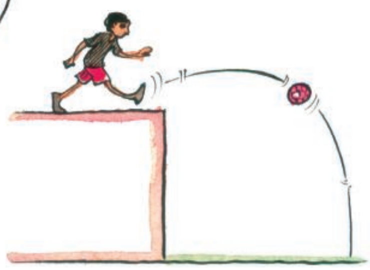
(iii) $7x = 2x^2$ (iv) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \quad (x \neq 0)$

(v) $(2x + 1)(3x + 1) = b(x - 1)(x - 2)$ (vi) $3y^2 = 192$

वर्ग फलनाचे उपयोग अनेक आहेत. त्यापैकी काही उपयोग पाहु या.

1. जेव्हा जळते रॉकेट वरच्या दिशेने प्रवास करते तेव्हा त्या रॉकेटच्या मार्गाची व्याख्या वर्गफलनाव्दारे केली जाते.
2. उपग्रहाव्दारे संदेश स्विकारणारी डिश (छत्री), टेलीस्कोप मधील परावर्तन आरसा, चष्मामधील कांच, खगोल शास्त्रातील वस्तुच्या कक्षेच्या मार्गाची माहिती वर्ग समीकरणाव्दारे व्याख्या करता येते.





3. एका प्रक्षेपणास्त्राच्या मार्गाला वर्गफिलानाव्दारे व्याख्या करतात.
4. एखाद्या वाहनाचा ब्रेक लावला असता ते थांबलेल्या ठिकाणीचे अंतर वर्गसमीकरणा वरुन काढता येते.

उदाहरण-1. खालील संदर्भाना गणिताच्या रुपात दर्शवा.

i. राजु आणि राकेश जवळ मिळुन एकुण 45 गोट्या आहेत. प्रत्येकांने 5 गोट्या हरविल्या दोघांजवळ उरलेल्या गोट्यांचा गुणाकार 124 आहे. आधी त्यांच्या प्रत्येका जवळ किती गोट्या होत्या ते माहित करु शकतो.

ii. एका काटकोन त्रिकोनाचा कर्ण 25 से.मी. आहे. आपणास माहित आहे उरलेल्या दोन बाजु मधील फरक 5 से.मी. आहे. उरलेल्या दोन बाजुची लांबी माहित करण्यासाठी उपयुक्त समीकरण लिहा.

सोडवणुक : i. राजु जवळील गोट्यांची संख्या x आहे.

राकेश जवळील गोट्याची संख्या = $45 - x$ (का?).

5 गोट्या हरविल्यानंतर राजु जवळील गोट्यांची संख्या = $x - 5$

5 गोट्या हरविल्यानंतर राकेश जवळील गोट्यांची संख्या = $(45 - x) - 5$

$= 40 - x$

म्हुणन त्यांचा गुणाकार $= (x - 5)(40 - x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= -x^2 + 45x - 200$

म्हणुन $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (गुणाकार = 124 दिलेले आहे.)

म्हणजे $-x^2 + 45x - 324 = 0$

म्हणजे $x^2 - 45x + 324 = 0$ (- या चिन्हाने गुणा)

म्हणुन राजु जवळील 'x'गोट्या हे वर्ग समीरकणाचे समाधान करते.

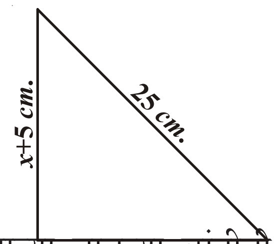
$x^2 - 45x + 324 = 0$

ii. हे येणारे समीकरण आहे. समजा लहान बाजुची लाबी समजा x सें.मी. आहे.

मोठ्या बाजुची लांबी = $(x + 5)$ से.मी. आहे.

कर्णाची दिलेली लांबी = 25 से.मी.

काटकोन त्रिकोणात (कर्ण)^2 = (बाजु)^2 + (बाजु)^2



म्हणुन $x^2 + (x + 5)^2 = (25)^2$

$x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$

$2x^2 + 10x - 600 = 0$

$x^2 + 5x - 300 = 0$

वरील समीकरणातील x च्या किंमती वरुन दिलेल्या काटकोन त्रिकोनाच्या बाजुच्या लांबीची संभाव्य किंमत येते.

उदाहरण-2. खालील वर्ग समीकरणे आहे किंवा नाही. तपासणी करा.

i. $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ii. $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

iii. $x(2x + 3) = x^2 + 1$ iv. $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

सोडवणुक : i. डावी बाजु = $(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

म्हणुन $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ला

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ असे लिहिता येते.

म्हणजेच $x^2 - 6x + 8 = 0$

हे $ax^2 + bx + c = 0$ च्या रुपात आहे.

म्हणुन दिलेले समीकरण वर्ग समीकरण आहे.

ii. येथे डावी बाजु $= x(x+1) + 8 = x^2 + x + 8$

आणि उजवी बाजु $= (x+2)(x-2) = x^2 - 4$

म्हणुन $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x^2 + x + 8 - x^2 + 4 = 0$

म्हणजेच $x + 12 = 0$

हे $ax^2 + bx + c = 0$ या रुपात नाही. $a \neq 0$

म्हणुन दिलेले समीकरण वर्ग समीकरण नाही.

iii. येथे डावी बाजु $= x\,(2x+3) = 2x^2 + 3x$

म्हणुन $x\,(2x+3) = x^2 + 1$ यास

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ असेही लिहिता येते.

म्हणुन $x^2 + 3x - 1 = 0$ येते.

हे $ax^2 + bx + c = 0$ या रुपात आहे.

म्हणुन दिलेले समीकरण वर्ग समीकरण आहे.

iv. येथे डावी बाजु $= (x+2)^3$
$$= (x+2)^2\,(x+2)$$
$$= (x^2 + 4x + 4)\,(x+2)$$
$$= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$$
$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

म्हणुन $(x+2)^3 = x^3 - 4$ यास

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ असे लिहिता येते.

म्हणजेच $6x^2 + 12x + 12 = 0$ किंवा $x^2 + 2x + 2 = 0$

हे $ax^2 + bx + c = 0$ या रुपात आहे.

म्हणुन दिलेले समीकरण वर्ग समीकरण आहे.

सुचना : (ii) मधील समीकरण हे वर्ग समीकरणा सारखे दिसले तरी ते वर्ग समीकरण होत नाही.

वरील (iv) मध्ये दिलेले समीकरण घन समीकरणासारखे (कोटी 3 असलेले समीकरण) आणि वर्ग समीरकणासारखे दिसत नाही,परंतु ते वर्ग समीकरण आहे. वरील उदाहरणावरुन दिलेले समीकरण वर्ग समीकरण होते किंवा नाही. या आधी त्यांना सरळ रुप देण्याची गरज आहे.

अभ्यास - 5.1

1. खालील समीकरणे वर्ग समीकरणे आहे किंवा नाही. तपासणी करा.

i. $(x+1)^2 = 2(x-3)$ ii. $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

iii. $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ iv. $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

v. $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ vi. $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

vii. $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ viii. $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2. खालील संदर्भाना वर्ग समीकरणातच्या रुपात दर्शवा.

i. एका आयताकृती जागेचे क्षेत्रफळ 528 मी^{2} आहे. त्या जागेची लांबी (मीटर मध्ये) त्यांच्या रुंदीच्या दुप्पटीपेक्षा एक मिटर ने जास्त आहे. तर त्याची लांबी आणि रुंदीसाठी योग्य समीकरण माहित करा.

ii. दोन क्रमवार धन पुर्णांक संख्याचा गुणाकार 306 आहे. तर त्या संख्या माहित करण्यासाठी वर्ग समीकरण माहित करा.

iii. रोहनची आई त्याच्या पेक्षा 26 वर्षानि मोठी आहे. 3 वर्षानंतर त्यांच्या वयांचा गुणाकार 360 होतो. तर रोहनचे आजचे वय माहित करा.

iv. एक रेल्वे एक समान वेगाने 480 कि.मी. अंतर प्रवास करते. जर तिचा वेग तासी 8 कि.मी. ने कमी झाला असता, हेच अंतर प्रवास करण्यासाठी तिला 3 तास जास्त लागतात. तर त्या रेल्वचा वेग काढा?

5.3 अवयव पध्दतीने वर्ग समीकरण सोडविणे (Solution of a Quadratic Equation by Factorisation)

दैनंदिन जिवनातील काही प्रसंगाना गणितातील अनोळखी 'x' चलाच्या वर्गसमीकरणाच्या रुपात कसे दर्शवावे हे आपण शिकलो.

आता, आपण x ची किंमत काढली पाहिजे.

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ वर्ग समीकरण घ्या. यात x च्या ऐवजी 1 ठेवल्यास $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ समीकरणा ची उजवी बाजु येते. कारण 1 नी या समीकरणाचे समाधान करते. म्हणुन आपण म्हणु शकतो की, 1 हे $2x^2 - 3x + 1 = 0$ वर्ग समीकरणाचे मुळ आहे.

$\therefore \; x = 1$ हे वर्ग समीकरणाची उकल आहे.

याचा अर्थ $2x^2 - 3x + 1$ बहुपदीचे शुन्य 1 आहे.

साधारणत: जर $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ तर α वास्तव संख्येला $ax^2 + bx + c = 0$ वर्ग समीकरणाचे मुळ म्हणतात. $x = \alpha$ यास वर्ग समीकरणाची उकल किंवा α मुळ वर्ग समीकरणाचे समाधान होते. असेही म्हणता येते.

$ax^2 + bx + c$ या बहुपदीचे शुन्य आणि $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्ग समीकरणाची मुळे एकच आहेत.

वर्ग बहुपदीला जास्तीत जास्त दोन शुन्य असतात. याचे निरिक्षण आपण धडा 3 मध्ये केले. म्हणुन कोणत्याही वर्ग समीकरणांना जास्तीत जास्त दोन मुळे असतात. (का?)

मधल्या पदाचे विभाजन (फोडुन)करुन वर्ग बहुपदीचे अवयव कसे पाडतात. हे आपण 9 व्या वर्गामध्ये शिकलो. या वरुन आपण वर्ग समीकरणाची मुळे कशी माहित करतात ते पाहु या.

उदाहरण-3. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ची मुळे अवयव पध्दतीने काढा.

सोडवणुक: मधल्या पदास प्रथम वेगळे करु या. $ax^2 + bx + c$ ही वर्ग बहुपदी असुन त्याचे मधले पदास वेगवेगळे करण्यासाठी $p + q = b$ आणि $p \times q = a \times c$ येईल अशा दोन संख्या p आणि q माहित कराव्या लागतात. याची आठवण करा. म्हणुन $2x^2 - 5x + 3$ चे मधल्या पदास वेगवेगळे करण्यासाठी $p + q = -5$ आणि $p \times q = 2 \times 3 = 6$ येईल अशा दोन संख्या p आणि q माहित केल्या पाहिजे.

यासाठी आपणास 6 च्या अवयवाच्या जोडींची यादी तयार करावी लागेल. ते $(1, 6), (-1, -6); (2, 3); (-2, -3)$ आहेत. वरील यादीतील $(-2, -3)$ ही जोडी $p + q = -5$ आणि $p \times q = 6$ या अटीचे समाधान करते.

मधले पद '$-5x$' यास '$-2x - 3x$' असे लिहु शकतो.

म्हणुन $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

आता $2x^2 - 5x + 3 = 0$ यास $(2x - 3)(x - 1) = 0$ असे लिहु शकतो.

म्हणुन $2x^2 - 5x + 3 = 0$ आणि $(2x - 3)(x - 1) = 0$ साठी x ची किंमत सारखीच राहते.

म्हणजे $2x - 3 = 0$ किंवा $x - 1 = 0$.

आता $2x - 3 = 0$ तर $x = \frac{3}{2}$ आणि $x - 1 = 0$ तर $x = 1$.

म्हणुन $x = \frac{3}{2}$ आणि $x = 1$ ही समीकरणाच्या उकली आहेत.

दुसऱ्या शब्दात सांगायचे म्हणजे 1 आणि $\frac{3}{2}$ ही $2x^2 - 5x + 3 = 0$ या वर्ग समीकरणाची मुळे आहे.

हे करा

खाली दिलेल्यांचे मुळ अवयव पध्दतीने काढा.

(i) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (ii) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(iii) $x^2 + 5x - 6 = 0$ (iv) $x^2 - 5x - 6 = 0$

प्रयत्न करा

1 आणि $\frac{3}{2}$ ही $2x^2 - 5x + 3 = 0$ या वर्ग समीकरणाची मुळे आहेत. याची तपासणी करा.

$2x^2 - 5x + 3 = 0$ **या वर्ग समीकरणाची मुळे माहित करण्यासाठी** $2x^2 - 5x + 3$ **चे दोन रेषीय अवयव पाडुन त्यांना शुन्याशी समान करुन मुळे माहित केली हे लक्षात घ्या.**

उदाहरण 4 : $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$ ची मुळे माहित करा. $(x \neq 0)$

सोडवणुक : $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$
$$= 3x\,(2x + 1) - 2\,(2x + 1)$$
$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ ची मुळे ही $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ या वर्ग समीकरणाला समाधान करणाऱ्या x च्या किंमती आहेत.

म्हणजे $3x - 2 = 0$ किंवा $2x + 1 = 0$,

म्हणुन $x = \frac{2}{3}$ किंवा $x = -\frac{1}{2}$

या म्हणुन $6x^2 - x - 2 = 0$ ची मूळे $\frac{2}{3}$ आणि $-\frac{1}{2}$ आहेत.

$\frac{2}{3}$ आणि $-\frac{1}{2}$ या किंमतीवरुन $6x^2 - x - 2 = 0$ चे समाधान करुन आपण तपासणी करु शकतो.

उदाहरण-5. 5.1 विभागातील चर्चेप्रमाणे प्रेक्षकांच्या जागेची रुंदी माहित करा.

सोडवणुक : 5.1 विभागामध्ये मध्ये आपणास आढळुन आले की, जर प्रेक्षकांच्या जागेची रुंदी x मी. तर x हे $2x^2 + 45x - 47 = 0$ या वर्ग समीकरणाचे समाधान करते. अवयव पध्दतीचा वापरावरुन लिहिल्यास

$$2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$$
$$2x\,(x - 1) + 47\,(x - 1) = 0$$

म्हणजेच $(x - 1)\ (2x + 47) = 0$

म्हणुन दिलेल्या समीकरणाची मुळे $x = 1$ किंवा $x = \frac{-47}{2}$ आहे. कारण 'x' ही प्रेक्षकांच्या जागेची रुंदी आहे ती ऋणात्मक नसते.

अशा प्रकारे रुंदी 1 मी. आहे. म्हणुन ते प्रेकांनासाठी पुरेशी जागा नाही.

अभ्यास - 5.2

1. खालील वर्ग समीकरणाची मुळे अवयव पध्दतीने काढा.

i. $x^2 - 3x - 10 = 0$ ii. $2x^2 + x - 6 = 0$ iii. $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

iv. $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ v. $100x^2 - 20x + 1 = 0$ vi. $x(x + 4) = 12$

vii. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ viii. $x - \frac{3}{x} = 2 \quad (x \neq 0)$ ix. $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

2. दोन संख्याची बेरीज 27 आणि गुणाकार 182 आहे. त्या संख्या काढा?
3. दोन क्रमवार धन पुर्णांक संख्येच्या वर्गाची बेरीज 613 आहे. तर त्या संख्या काढा.
4. एका काटकोन त्रिकोणाची उंची तिच्या पायापेक्षा 7 से.मी. ने कमी आहे. जर त्याचा कर्ण 13 सें.मी. आहे. तर इतर दोन बाजु माहित करा.
5. एका कुटीर उद्योगात एका दिवसात एका निश्चित संख्येत वस्तुंचे उत्पादन होते. एका विशिष्ट दिवशी तयार झालेल्या प्रत्येक वस्तुची किंमत (रुपयात) ही त्या दिवशी तयार झालेल्या वस्तुच्या दुप्पटीपेक्षा 3 ने जास्त आहे. त्या दिवशी तयार झालेल्या वस्तुची एकुण किंमत 90 रुपये असल्यास त्या दिवशी तयार झालेलेया एकुण वस्तुची संख्या आणि प्रत्येक वस्तुंची किंमती काढा.
6. 28 मीटर परिमीती आणि 40 चौ.मी. क्षेत्रफळ असलेल्या आयताचे मोजमाप काढा.
7. एका त्रिकोणाचा पाया तिच्या उंचीपेक्षा 4 सें.मी. मोठा आहे. जर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 48 चौ.सें.मी. आहे. तर त्या त्रिकोणाचा पाया आणि उंची काढा.
8. दोन्ही रेल्वे, रेल्वे स्टेशन वरुन एकदाच निघाली. पहिली रेल्वे पश्चिम दिशेने आणि दुसरी रेल्वे उत्तर दिशेने निघाली. पहिली रेल्वे दुसऱ्या रेल्वे पेक्षा तासी 5 कि.मी. वेगाने प्रवास करते. जर दोन तासांनी दोन्ही रेल्वे 50 कि.मी. अंतरावर असल्यास प्रत्येक रेल्वेची सरासरी वेग काढा.
9. एका वर्गात 60 विद्यार्थी आहेत. प्रत्येक मुलगा हा त्या वर्गातील मुलींच्या संख्येबरोबर वर्गणी (चंदा) काढतो आणि प्रत्येक मुलगी त्या वर्गातील मुलांच्या संख्येबरोबर वर्गणी(चंदा) काढतो. जर त्यांचे जमा झालेले एकुण 1600 रुपये असल्यास त्या वर्गात एकुण किती मुलं आहेत.
10. एक मोटार बोट तासी 3 कि.मी. वेगाने नदीच्या प्रवाह विरुध्द प्रवास करुन 24 कि.मी. अंतर पार करते. त्या मोटार बोटच्या जाणे आणि येण्याचा कालावधी 6 तास घेतो. त्या बोटार बोटचा वेग स्थिर वेग गृहीत धरुन त्याचा वेग माहित करा.

5.4 पुर्णवर्ग पध्दतीव्दारे समीकरणाची उकली काढणे.

मागील विभागात आपण अवयव पध्दतीने वर्ग समीकरणांची मुळे काढणे शिकलो. ही अवयव पध्दती सर्व प्रकारच्या वर्गसमीकरणाला लागु पडते का? $x^2 + 4x - 4 = 0$ या अवयवाला समीकरणे पध्दतीने सोडवु

$x^2 + 4x - 4 = 0$ यास अवयव पध्दतीने सोडविण्यासाठी

'p' आणि 'q' ला अशा प्रकारे माहित केले पाहिजे $p + q = 4$ आणि

$$p \times q = -4$$

वरील समीकरणाला p, q पुर्णांकाने समाधान होत नाही, म्हणुन अवयव पध्दतने दिलेले समीकरण सोडवु शकत नाही. म्हणुन आपण दुसरी पध्दत शिकणार आहोत.

खालील संदर्भ लक्षात घ्या.

दोन वर्षापुर्वी सुनिताचे वय आणि चार वर्षानंतर तिच्या वयाचा गुणाकार आजच्या वयापेक्षा दुप्पटीपेक्षा 1 ने जास्त आहे. तर तिचे आचजे वय काय आहे?

याचे उत्तर देण्यासाठी समजा तिचे वय x वर्ष समजु देान वर्षापुर्वीचे वय $= x - 2$ वर्ष आणि चार वर्षानंतरचे वय $= x + 4$ वर्ष. दोन्ही वयांचा गुणाकार $(x - 2)(x + 4)$ आहे.

म्हणुन $(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

म्हणजेच $x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

म्हणजेच $x^2 - 9 = 0$

म्हणुन सुनिताचे आजचे वय हे $x^2 - 9 = 0$ या वर्ग समीकरणाचे समाधान करते.

यास आपण $x^2 = 9$ असेही लिहु शकतो. वर्गमुळ काढल्यास $x = 3$ किंवा $x = -3$ येते. परंतु वय ही धन संख्या आहे. म्हणुन $x = 3$.

म्हणुन, सुनिताचे वय 3 वर्ष आहे.

आता दुसरे वर्ग समीकरण $(x + 2)^2 - 9 = 0$ घ्या. यास आपण $(x + 2)^2 = 9$ असे लिहिता येते. वर्गमुळ घेऊन $x + 2 = 3$ किंवा $x + 2 = -3$ येते.

म्हणुन $x = 1$ or $x = -5$

म्हणुन $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ची मुळ 1 आणि -5 आहेत.

वरील दोन्ही उदाहरणात x असणारे पद पुर्णवर्ग आहे. आणि आपण वर्गमुळाव्दारे मुळे सोप्या रितीने माहित करु शकतो. जर $x^2 + 4x - 4 = 0$ या वर्ग समीकरणाला अवयव पध्दतीव्दारे न सोडविल्यास काय होते.

म्हणुन, आता आपण नविन पध्दत पुर्णवर्ग पध्दतीचा परिचय करत आहो. या नविन पध्दतीत असणारा हेतु म्हणजे वर्ग समीकरणातील डावी बाजु व्यवस्थीत करुन पुर्ण वर्ग बनविने. कोटी एक असलेल्या बहुपदीचे वर्ग

ती पध्दत खालील प्रमाणे आहे.

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 4x = 4$$

$$x^2 + 2 . x . 2 = 4$$

आता डावी बाजु ही $a^2 + 2ab$ च्या रुपात आहे. जर यात b^2 मिळविल्यास $a^2 + 2ab + b^2$ येते. जो पुर्ण वर्ग आहे. म्हणुन दोन्ही बाजुंनी b^2 मिळविल्यास $2^2 = 4$ येते.

$$x^2 + 2.x.2 + 2^2 = 4 + 4$$

$$\Rightarrow \quad (x + 2)^2 = 8 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \quad x = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

आता $3x^2 - 5x + 2 = 0$ हे समीकरण विचारात घेऊ x^2 चा सहगुणक 1 नसला पाहिजे हे लक्षात घ्या. म्हणुन पुर्ण समीकरणाला 3 ने भागल्यास x^2 चा सहगुणक 1 येतो.

$$\therefore \quad x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \qquad \left(\text{add } \left(\frac{5}{6}\right)^2 \text{ both side}\right)$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{(12 \times -2) + (25 \times 1)}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$ (दोन्ही बांजुचे वर्गमुळ काढुन)

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$$

म्हणुन, $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ किंवा $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

म्हणुन $x = 1$ किंवा $x = \frac{4}{6}$

म्हणजेच $x = 1$ किंवा $x = \frac{2}{3}$

म्हणुन 1 आणि $\frac{2}{3}$ ही दिलेल्या समीकरणाची मुळे आहेत.

वरील उदाहरणावरुन आपण पुर्ण वर्गासाठी खालील अलगारीदम तयार करु शकतो.

अलगारीदम: $ax^2 + bx + c = 0$ समीकरण घ्या. $(x \neq 0)$

पायरी-1 : समीकरणाच्या दोन्ही बाजुला 'a' नी भागा.

पायरी -2 : स्थिर पद c/a हे उजव्या बाजुला येतील अशी त्या समीकरणाची पुर्नमांडणी करा .

पायरी -3 :डावी बाजु पुर्ण वर्ग येण्यासाठी दोन्ही बाजुत $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$ मिळवा.

पायरी -4 : डावी बाजु वर्गात लिहुन उजव्या बाजुला संक्षिप्त करा.

पायरी -5 : सोडवा.

उदाहरण-6. $5x^2 - 6x - 2 = 0$ या वर्ग समीकरणाची मुळे पुर्ण वर्ग करणे या पध्दतीव्दारे काढा

सोडवणुक: : $5x^2 - 6x - 2 = 0$

अल्गारीदमचा वापर करुन

पायरी -1 : $x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (दोन्ही बाजुंनी 5 ने भागुन)

पायरी -2 : $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$

पायरी -3 : $x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$ $\left(\cdots \left(\frac{3}{5}\right)^2\right.$ दोन्ही बाजुत मिळवुन$\left.\right)$

पायरी -4 : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$

पायरी -5 : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$$x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$$

$$x = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{किंवा} \quad x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{3+\sqrt{19}}{5} \quad \text{किंवा} \quad x = \frac{3-\sqrt{19}}{5}$$

उदाहरण-7. $4x^2 + 3x + 5 = 0$ या वर्ग समीकरणाची मुळे, वर्गपुर्ण करणे या पध्दतीव्दारे काढा.

सोडवणुक: $4x^2 + 3x + 5 = 0$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{-5}{4}$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \frac{9}{64}$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-71}{64} < 0$$

परंतु x च्या कोणत्याही वास्तव किंमती साठी $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2$ ही ऋण होत नाही.(का?) म्हणुन दिलेल्या समीकरणाचे समाधान करणारी x कोणतीही वास्तव किंमत नाही. म्हणुन दिलेल्या समीकरणाला वास्तव मुळे नसतात.

हे करा

पुर्णवर्ग करणे या पध्दतीव्दारे सोडवा.

(i) $x^2 - 10x + 9 = 0$ (ii) $x^2 - 5x + 5 = 0$

(iii) $x^2 + 7x - 6 = 0$

आपण वर्गपुर्ण करणे या पध्दतीव्दारे कित्येक उदाहरणे सोडवलीत. आता $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ या वर्ग समीकरणाच्या सामान्य रुपात या पध्दतीचा वापर करु.

पायरी 1 : समीकरणाला 'a' ने भागल्यास

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ येते.}$$

पायरी 2 : $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

पायरी 3 : $x^2+\frac{b}{a}x+\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2=-\frac{c}{a}+\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ $\left[\ \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2 \text{ दोन्ही बाजुला मिळविल्यास}\right]$

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x\frac{b}{2a}+\left[\frac{b}{2a}\right]^2=-\frac{c}{a}+\left[\frac{b}{2a}\right]^2$$

पायरी 4 : $\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

पायरी 5 : जर $b^2-4ac\geq 0$ तर वर्गमुळ काढल्यास

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ येते.

म्हणुन $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

म्हणुन $ax^2+bx+c=0$ ची मुळे $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ आणि $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ जर b^2-4ac ≥ 0 आहेत.

जर $b^2-4ac<0$ तर समीकरणाला वास्तवमुळे नसतात.(का?)

अशा प्रकारे जर $b^2-4ac\geq 0$ तर $ax^2+bx+c=0$ या वर्ग समीकरणाची मुळे $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

वरील सुत्रावरुन कोणत्याही वर्ग समीकरणाची मुळे काढता येते. यास वर्ग समीकरण सोडविण्याचे सुत्र म्हणतात. वर्ग समीकर काढण्याचे सुत्राचा वापर करुन काही उदाहरणे घेवु या.

उदाहरण -8. अभ्यास मधील 2(i) प्रश्नासाठी वर्ग समीकरण सोडविण्याचे सुत्र वापरा.

सोडवणुक: समजा जागेची रुंदी x मीटर आहे.

त्यांची लांबी $(2x+1)$ मी.

क्षेत्रफळ 528 मी^{2} आहे. यास आपण

$x(2x+1)=528$ यास असे लिहितो. म्हणजेच $2x^2+x-528=0$.

हे $ax^2+bx+c=0$ या रुपात असुन $a=2, b=1, c=-528$ आहे.

म्हणुन सुत्रावरुन आपणास

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$ येते.

म्हणजेच $x = \frac{64}{4}$ or $x = \frac{-66}{4}$

म्हणजेच $x = 16$ or $x = -\frac{33}{2}$

x ऋण राहत नाही म्हणुन जागेची रुंदी 16 मीटर आणि जागेची लांबी $(2x+1) = 33$ मीटर आहे. प्रश्नातील अटीचे किमतीव्दारे समाधान होते किंवा नाही.

याची तपासणी करु शकता.

विचार करा- चर्चा करा

वर्ग समीकरण सोडविण्याच्या तीन पध्दती आहे. या तीन पध्दती पैकी तुम्ही कोणती पध्दत वापराल? का?

उदाहरण -9. दोन क्रमवार विषम धन पुर्णांक संख्याची बेरीज 290 आहे. तर त्या संख्या काढा.

सोडवणुक : समजा पहिली विषम धन पुर्णांक संख्या x आहे. तर दुसरी संख्या $x+2$ आहे. प्रश्नावरुन

$x^2 + (x+2)^2 = 290$

म्हणजेच $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$

म्हणजेच $2x^2 + 4x - 286 = 0$

म्हणजेच $x^2 + 2x - 143 = 0$

हे x मधील वर्ग समीकरण आहे.

सुत्रावरुन $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ सुत्रावरुन आपणास

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$ येते.

म्हणजेच $x = 11$ किंवा $x = -13$

परंतु x ही विषम धन संख्या दिली आहे. म्हणुन $x \neq -13, x = 11$.

अशारितीने दोन क्रमवार विषम धन पुर्णांक संख्या 11 आणि $(x+2) = 11 + 2 = 13$.

पडताळा करा : $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$.

उदाहरण-10. एका आयताकार बगीच्याची रुंदी त्याच्या लांबीपेक्षा 3 मीटर ने कमी आहे. यांचे क्षेत्रफळ याच्या रुंदी समान असलेल्या पाया आणि 12 मीटर उंची असलेल्या एका समव्दीभुज त्रिकोनाच्या क्षेत्रफळापेक्षा 4 चौ.मी. जास्त आहे. तर आयताकार बगीच्याची लांबी, रुंदी माहित करा. (चित्र 5.3 पहा)

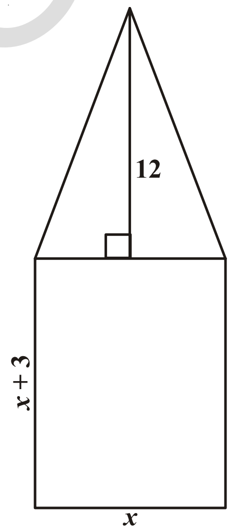
सोडवणुक: समजा आयताकार बगीच्याची रुंदी x मी. आहे.

म्हणुन त्याची लांबी $= (x + 3)$ मी.

म्हणुन आयताकार बगीच्याचे क्षेत्रफळ $= x(x + 3)$ मी^{2} $= (x^2 + 3x)$ मी^{2}.

आता समव्दिभुज त्रिकोणाचा पाया $= x$ मी

म्हणुन त्याचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x$ मी^{2}.



दिलेल्या माहिती वरुन

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

म्हणजेच $x^2 - 3x - 4 = 0$

सुत्राचा वापर केल्यास

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \quad = 4 \text{ किंवा } -1$$

परंतु $x \neq -1$ (का ?) म्हणुन $x = 4$.

त्या बागीच्याची रुंदी= 4 मी आणि लांबी $x + 3 = 4 + 3 = 7$मी.

पडताळा : आयताकार बगीच्याचे क्षेत्रफळ = 28 मी^{2},

त्रिकोणाकार बगीच्याचे क्षेत्रफळ = 24 मी^{2} = (28 – 4) मी^{2} = 24 मी^{2}

उदाहरण-11. खालील वर्ग समीकरणाची मुळे अस्तीत्वात असल्यास वर्ग समीकरण सोडवा.

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (ii) $2x^2 - 2\sqrt{2x} + 1 = 0$

सोडवणुक :

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$. येथे $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$. म्हणुन $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$.

वास्तव संख्याच्या वर्ग ऋण नसतो. म्हणुन $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ला कोणतीही वास्तव किंमत नसते.

म्हणुन, दिलेल्या समीकरणाला वास्तव मुळे नसतात.

(ii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$. येथे $a = 2$, $b = -2\sqrt{2}$, $c = 1$.

म्हणुन $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$

म्हणुन $x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$ म्हणजेच $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. ही मुळे आहेत.

उदाहरण-12. खालील समीकरणाची मुळे काढा.

(i) $x + \frac{1}{x} = 3,\ x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2$

सोडवणुक :

(i) $x + \frac{1}{x} = 3$. समीकरणाच्या दोन्ही बाजुला x ने गुणुन

$x^2 + 1 = 3x$ येते.

म्हणजेच $x^2 - 3x + 1 = 0$, हे एक वर्ग समीकरण आहे.

येथे $a = 1, b = -3, c = 1$

म्हणुन $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

म्हणुन $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (का ?)

म्हणुन $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ आणि $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. मुळे आहेत.

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2.$

$x \neq 0, 2$, समीकरणाला $x(x-2)$ ने गुणल्यास

$(x-2) - x = 3x(x-2)$ येते.

$= 3x^2 - 6x$

म्हणुन $3x^2 - 6x + 2 = 0$ हे एक वर्ग समीकरण येते.

म्हणुन $a = 3, b = -6, c = 2$. म्हणुन $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

म्हणजेच $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$.

म्हणुन $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ आणि $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$. मुळे आहेत.

उदाहरण-13. एका मोटार बोटची संथ पाण्यातील वेग तासी 18 कि.मी. आहे. पाण्याच्या विरुध्द प्रवाहाच्या दिशेत 24 कि.मी. प्रवास करण्यासाठी लागलेला वेळ परत निघालेल्या स्थानापर्यंत येण्यासाठी लागलेला वेळापेक्षा 1 तास जास्त आहे. तर पाण्याचा प्रवाहाचा वेग काढा.

सोडवणुक: समजा पाण्याचा वेग तासी x कि.मी.पाण्याच्या प्रवाहा विरुध्द दिशेतील बोटचा वेग = $(18-x)$ परत येताना बोटचा वेग $=(18+x)$ कि.मी.

पाण्याच्या प्रवाहाच्या विरुध्द दिशेत प्रवासास लागलेला वेळ = $\frac{\text{अंतर}}{\text{वेग}} = \frac{24}{18-x}$ तास.

परत येतांना लागणारा वेळ = $\frac{24}{18+x}$ तास

दिलेल्या माहिती वरुन

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

म्हणजेच $24(18+x) - 24(18-x) = (18-x)(18+x)$

म्हणजेच $x^2 + 48x - 324 = 0$

सुत्रावरुन-

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ किंवा } -54$$

पाण्याचा प्रवाहाचा वेग ऋण नसतो. म्हणुन $x = -54$. गृहीत धरु नये. म्हणजेच $x = 6$ पाण्याच्या प्रवाहाचा वेग = 6 कि.मी.

अभ्यास - 5.3

1. खालील समीकरणांना मुळे असल्यास वर्ग पुर्ण करणे या पध्दतीने माहित करा.

   i. $2x^2 + x - 4 = 0$ ii. $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

   iii. $5x^2 - 7x - 6 = 0$ iv. $x^2 + 5 = -6x$

2. प्रश्न क्र.1 मधील वर्ग समीकरणाची मुळे वर्गमुळ काढण्याच्या सुत्राव्दारे माहित करा.

3. खालील समीकरणाची मुळे काढा.

(i) $x-\frac{1}{x}=3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30}, x \neq -4, 7$

4. रहमानच्या आजच्या वयापासुन 3 वर्षापुर्वी आणि 5 वर्षानंतर त्याच्या वयाच्या व्यस्ताची बेरीज $\frac{1}{3}$ आहे. तर त्याचे आजचे वय काढा.

5. मोनीकास गणितात आणि इंग्रजीत मिळालेल्या गुणांची बेरीज 30 आहे. जर तीला गणितात 2 गुण जास्त आणि इंग्रजीत 3 गुण कमी मिळाले. तर त्या दोन्हीचा गुणाकार 210 असल्यास तिच्या दोन्ही विषयाचे गुण माहित करा.

6. एका आयताकार शेताचा कर्ण हा त्याच्या लहान बाजुपेक्षा 60 मी. ने मोठा आहे. जर मोठी बाजु लहान बाजुपेक्षा 30 मी.ने मोठी असल्यास त्या शेताच्या बाजुंची लांबी काढा.

7. दोन संख्याच्या वर्गातील फरक 180 आहे. लहान संख्येचा वर्ग हा मोठ्या संख्येच्या 8 पट आहे. तर त्या दोन संख्या काढा.

8. एक रेल्वे एकसमान गतीने 360 कि.मी. अंतर प्रवास करते. जर तीचा वेग तासी 5 कि.मी.नी वाढला असता तेच अंतर प्रवास करण्यासाठी लागणारा वेळ 1 तास कमी होतो. तर रेल्वेचा वेग काढा.

9. दोन नळ मिळुन एक पाण्याचा टाकी $9\frac{3}{8}$ तासात भरते. मोठा व्यास असलेला नळ हा लहान व्यास असलेल्या नळापेक्षा 10 तास कमी वेळात टाकी भरते. तर प्रत्येक नळाव्दारे पाण्याचा टाक़ी वेगवगळी भरण्याची वेळ माहित करा.

10. मैसुर, बेंगलुरु मधील 132 कि.मी. अंतर प्रवास करण्यासाठी एक जलद रेल्वे, प्रवासी रेल्वे पेक्षा एक तास कमी वेळ घेते (रेल्वे मधात थांबलेला वेळ गृहीत धरला नाही) जर जलद रेल्वेचा सरासरी वेग प्रवासी रेल्वेपेक्षा तासी 11 कि.मी. जास्त आहे. तर दोन्ही रेल्वेसरासरी वेग काढा.

11. दोन चौरसांच्या क्षेत्रफळाची बेरीज 468 मी^{2} आहे. त्यांच्या परिमीती मधील फरक 24 मीटर आहे. तर त्या दोन्ही चौरसाच्या बाजु माहित करा.

12. 12 मीटर उंच असलेल्या एका घरावरुन 17 मी/सेंकद प्रारंभीक वेगाने एक चेंडु वर फेकला. t सेंकदानंतर चेंडु आणि जमीनी मधील अंतर $S = 12 + 17t - 5t^2$ आहे. तर तो चेंडु किती सेकंदानंतर जमीनीवर येऊन पडतो?

13. 'n' बाजु असलेल्या कर्णांची संख्या $\frac{1}{2}n(n-3)$ आहे. 65 कर्ण असलेल्या बहुभुजीला किती बाजु असतात? 50 कर्ण असलेला बहुभुजी असु शकतो का?

5.5 मुळांचे स्वरुप (Nature of Roots)

मागील विभागात $ax^2 + bx + c = 0$ ची मुळे

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ आहेत. हे पाहिलेत.

आता आपण या मुळांचा स्वरुप समजुन घेऊ या.

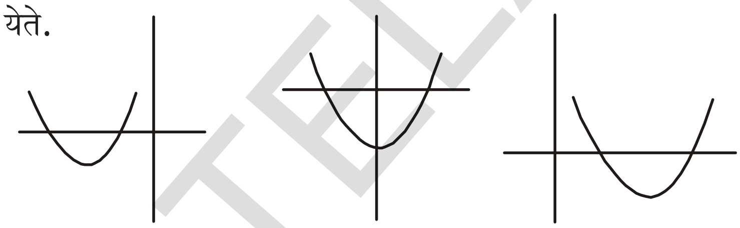
बहुपदी शुन्य म्हणजे ज्या ठिकाणी बहुपदीची किंमत शुन्य होते, तो बिंदु होय. वर्ग बहुपदी ही X-अक्षावर छेदत असे आपण म्हणु शकतो.

अशा रितीने, वर्ग समीकरणाचे मुळे म्हणजे तो बिंदु आहे जिथे वक्र X-अक्षाशी छेदते.

संदर्भ-1 : जर $b^2 - 4ac > 0$;

तर $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ आपणास दोन भिन्न वास्तव मुळ येतात.

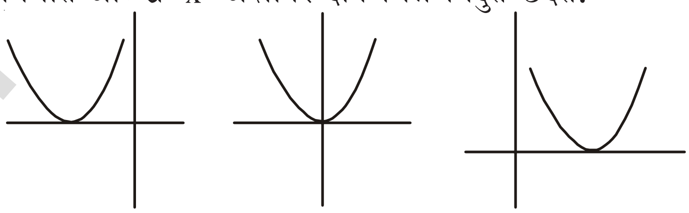
अशा संदर्भात आपण दिलेल्या वर्ग समीकरणाचा संबधीत आलेख काढला असता आपणास खालील आकृती येते.



आकृतीवरुन वर्ग समीकरणाचा संबधीत आलेख x- अक्षावर दोन भिन्न बिंदुत छेदते.

संदर्भ-2 : जर $b^2 - 4ac = 0$

$$x = \frac{-b + 0}{2a}$$

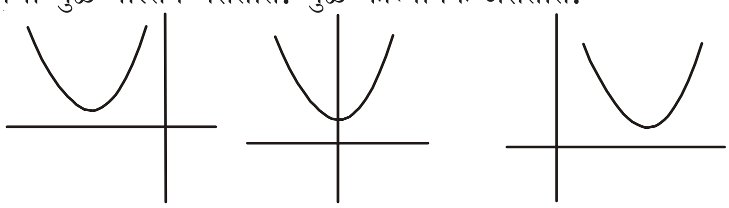


म्हणुन $x = \frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$

आकृतीवरुन वर्ग समीकरणाचा संबधीत वक्र X-अक्षावर एका बिंदुत छेदते.

संदर्भ-3 : $b^2 - 4ac < 0$

या समीकरणाची मुळे वास्तव नसतात. मुळे काल्पनिक असतात.



या संदर्भात काढलेले आलेख X- अक्षावर छेदत नाही आणि स्पर्श सुध्दा करीत नाहीत. म्हणुन तेथे वास्तव मुळे नसतात.

$b^2 - 4ac$ वरुन $ax^2 + bx + c = 0$ $(x \neq 0)$ या वर्ग समीकरणाला वास्तव मुळे आहे किंवा नाही याचा निर्णय घेण्यासाठी उपयोगी पडते. $b^2 - 4ac$ ला वर्ग समीकरणाचा विवेचक म्हणतात.

म्हणुन $ax^2 + bx + c = 0$ $(x \neq 0)$ वर्ग समीकरणास

i. जर $b^2 - 4ac > 0$ तर दोन भिन्न वास्तव मुळे असतात.

ii. जर $b^2 - 4ac = 0$ तर दोन वास्तव समान मुळे असतात.

iii. जर $b^2 - 4ac < 0$ तर वास्तव मुळे नसतात

काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-14. $2x^2 - 4x + 3 = 0$ या वर्गसमीकरणाचा विवेचक माहित करा आणि मुळांचे स्वरुप माहित करा.

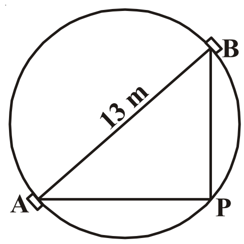
सोडवणुक :दिलेले समीकरण हे $ax^2 + bx + c = 0$ या रुपात आहे. येथे $a = 2$, $b = -4$ आणि $c = 3$ आहे. म्हणुन विवेचक

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

म्हणुन दिलेल्या समीकरणाला वास्तव मुळे नसतात.

उदाहरण-15. 13 से.मी. व्यास असलेल्या एका वृत्ताकार बागेच्या सरहद्दीवर एक खांब उभा करायचा होता. बागेच्या सरहद्दीवर एकमेकांच्या विरुध्द म्हणजे व्यासाच्या शेवटच्या बिंदुवर A आणिB फाटकापासुन या खांबापर्यंचे अंतर 7 मीटर असेल असा खांब आपण स्थापन करु शकतो का? जर होय तर त्या दोन फाटकापासुन तो खांब किती अंतरावर उभा आहे?

सोडवणुक :आकृती काढा.



समजा P हे येणाऱ्या खांबाचे स्थान आहे. समजा B फाटकापासुन खांबाचे अंतर x मी. आहे. म्हणजेच BP = x मी. खांब आणि त्या दोन फाटकामधील अंतरातील फरक = AP – BP (किंवा BP – AP)= 7 मी. म्हणुन AP = $(x + 7)$ मी.

आता, AB = 13 मी. आणि AB व्यास आहे.

$\angle APB = 90^0$ (का ?)

म्हणजेच $AP^2 + BP^2 = AB^2$ (पा.गो.प्र.नुसार)

म्हणजेच $(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

म्हणजेच $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

म्हणजेच $2x^2 + 14x - 120 = 0$

म्हणुन B फाटकापासुन खांबाचे अंतर 'x' हे

$x^2 + 7x - 60 = 0$ या समीकरणाचे समाधान करते.

म्हणुन समीकरणाची मुळे वास्तव असेला तरच खांबाची स्थापना करता येते. या समीकरणास वास्तव मुळे आहे किंवा नाही हे त्याच्या विवेचकावरुन माहित होते. या विवेचकाचे निरिक्षण करु.

$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$

दिलेल्या समीकरणाला दोन वास्तव मुळे असल्यामुळे, खांबाची स्थापना बागेच्या सरहद्दीवर करणे शक्य आहे.

$x^2 + 7x - 60 = 0$ सुत्राव्दारे सोडविल्यास

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \dfrac{-7 \pm 17}{2}$ येते.

म्हणन $x = 5$ किंवा -12.

x हे B फाटकापासुन खांबापर्यंतचे अंतर आहे. हे धनात्मक असले पाहिजे.

म्हणुन $x = -12$ सोडुन $x = 5$ घेतले पाहिजे.

अशाप्रकारे B फाटकापासुन 5 मी. अंतरावर आणि A फाटकापासुन 12 मी. अंतरावर खांब उभा केला पाहिजे.

प्रयत्न करा

1. एका वर्ग समीकरणाला सोडविण्यापुर्वी त्याचा विवेचक माहित केल्याने काय फायदा होतो स्पष्ट करा? त्याची किंमत महत्वपुर्ण का आहे?
2. तीन वर्ग समीकरणे लिहा. त्या पैकी एका समीकरणाची दोन भिन्न वास्तव मुळे असुन अजुन एक समीकरणाची मुळे वास्तव नाहीत आणि एका समीकरणाची मूळे फक्त एकच वास्तव मुळ असला पाहिजे.

उदाहरण-16. $3x^2 - 2x + \dfrac{1}{3} = 0$ या वर्ग समीकरणाचा विवेचक माहित करुन त्यांच्या मुळाचे स्वरुप माहित करा. ते वास्तव असल्यास माहित करा.

सोडवणुक: येथे $a = 3$, $b = -2$ आणि $c = \dfrac{1}{3}$

म्हणुन विवेचक $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \dfrac{1}{3} = 4 - 4 = 0.$

म्हणुन दिलेल्या वर्ग समीकरणास दोन समान वास्तव मुळे आहेत.

ते $\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-b}{2a}$, म्हणजेच $\dfrac{2}{6}, \dfrac{2}{6}$, म्हणजेच $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}$. आहेत.

अभ्यास - 5.4

1. खालील वर्ग समीकरणांच्या मुळांचे स्वरुप माहित करा? जर मुळे वास्तव असल्यास माहित करा.

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. खालील वर्ग समीकरणास दोन समान वास्तव मुळे असल्यास k ची किंमती काढा.

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0 \ (k \neq 0)$

3. आंबे साठवुन ठेवण्यासाठी 800 मी^{2} क्षेत्रफळाची लांबी ही रुंदीपेक्षा दुप्पट असलेली एक आयताकार जागा तयार करु शकता का? असे करु शकल्यास त्याची लांबी आणि रुंदी काढा?

4. दोन मित्रांच्या वयाची बेरीज 20 वर्ष आहे. चार वर्षापुर्वी त्यांच्या वयाचा गुणाकार 48 वर्ष होता. हे शक्य आहे का? जर शक्य असल्यास त्यांचे आजचे वय काढा?

5. 80 मी. परिमीती आणि 400मी^{2} क्षेत्रफळ असलेल्या एका आयताकार बागेची रचना करणे शक्य आहे का? जर शक्य असल्यास त्याची लांबी आणि रुंदी काढा?

ऐच्छिक अभ्यास

[परिक्षेसाठी नाहीत]

1. एका प्रतलात काही बिंदु विस्थापन केले आहेत. त्या मधील काही एकरेषीय नाहीत. रेषाखंडाने प्रत्येक बिंदुस व इतर सर्वांना जोडल्या गेले आहेत. जर 10 रेषाखंड असल्यास बिंदुची संख्या काढा.

2. एका दोन अंकी संख्येतील त्यांच्या अंकाचा गुणाकार 8 आहे. जर त्या संख्येत 18 मिळविल्यास त्यांच्या अंकाची अदलाबल होते. ती संख्या काढा.

3. एका 8 मी. लांबीच्या तारेचे दोन तुकडे केले. प्रत्येक तुकड्याला वाकवुन त्याचा चौरस बनविला. अशा तयार झालेल्या चौरसाच्या क्षेत्रफळाची बेरीज 2 मी^{2} येण्यासाठी तारेला कोठुन कापले पाहिजे?

$$\left[\text{सुचना}: x + y = 8, \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = 2\right].$$

4. विनय अणि प्रविण दोघे मिळुन एका घराला बाहेरुन रंग लावण्यासाठी 6 दिवस लागतात. विनय एकटाच हे काम प्रविनपेक्षा 5 दिवसा अगोदर पुर्ण करतो. विनय एकटा हे काम किती दिवसात पुर्ण करु शकतो.

5. $ax^2 + bx + c = 0$ वर्ग समीकरणाची मुळांची बेरीज '$\frac{-b}{a}$' आहे. हे दाखवा. $(x \neq 0)$

6. $ax^2 + bx + c = 0$ जिथे $(x \neq 0)$ वर्ग समीकरणाच्या मुळांचा गुणाकार '$\frac{c}{a}$' आहे. हे दाखवा.

7. जर अपुर्णांक आणि त्याच्या व्यस्ताची बेरीज $2\frac{16}{21}$ आहे. तर तो अपुर्णांक माहित करा.

सुचविलेळा प्रकल्प (Suggest Project)

भूमितीथ पद्धतीने वर्गसमीकरणे सोडविणे

वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ जिथे $(a \neq 0)$ विविध परिस्थितीत सोडविणे आणि 2 किंवा 3 समिकरणांची रचना करुन त्यांची भूमितीथ पद्धतीने सोडवणूक करणे.

आपण काय चर्चा केली.

या धड्यात आपण खालील गोष्टी शिकलो.

1. x चलातील वर्ग समीकरणाचे सामान्य रुप $ax^2 + bx + c = 0$ आहे. येथे a, b, c वास्तव संख्या आहेत आणि $a \neq 0$.

2. कोणत्याही वास्तव संख्या α ला $ax^2 + bx + c = 0$ जिथे $(x \neq 0)$ या वर्ग समीकरणाची मुळे म्हणतात. जर $a\alpha^2 + + b\alpha + c = 0$. $ax^2 + bx + c$ ला वर्ग बहुपदीचे शुन्य आणि $ax^2 + bx + c = 0$ ला वर्ग समीकरणाची मुळे एकच असतात.

3. जर $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ चे दोन रेषीय घटकात अवयव पाडले असता $ax^2 + bx + c = 0$ चे मुळे येण्यासाठी प्रत्येक घटकास शुन्या समान केले पाहिजे.

4. वर्ग पुर्ण करणे या पध्दतीने सुध्दा वर्ग समीकरणे सोडविता येतात.

5. $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्ग समीकरणाचे मुळे

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{आहे. } b^2 - 4ac \geq 0.$$

6. $ax^2 + bx + c = 0$ जिथे $(x \neq 0)$ या वर्ग समीकरणाची मुळे

   (i) जर $b^2 - 4ac > 0$ तर दोन भिन्न वास्तव मुळे असतात.

   (ii) जर $b^2 - 4ac = 0$ तर दोन समान मुळे असतात.

   (iii) जर $b^2 - 4ac < 0$ तर वास्तव मुळे नसतात.

धडा

6

श्रेढी
(Progressions)

6.1 प्रस्तावना:

निसर्गात बऱ्याच वस्तु नमुन्यावर आधारीत असतात. हे आपल्या निदर्शनास येते. उदा. सुर्यफुलाच्या पाकळ्या, मध्याच्या पोळावरील छिद्र, मक्यावरील दाने, पाईन वृक्षावरील आणि अननसावरील चक्रकार इत्यादी.

दिलेल्या प्रत्येक उदाहरणावर तुम्ही नमुना पाहु शकता की, अशा प्रकारचे नैसर्गिक नमुने पुनश्चर होतात. पण परिगमन होत नाही. सुर्यफुलात एका प्रकारचे पाकळ्या एकाच अंतरावर उगवतात. मधाच्या पोळ्यातील प्रत्येक षटकोना कृती ग्रंथी भोवती तंतोतंत जुळणाऱ्या षटकोनी आकाराच्या छिद्रकारामध्ये इतर नैसर्गिक नमुने तुम्हाला दिसु शकते.

आपल्या दैनंदिन जिवनातील इतर काही काही नमुने तुम्ही पाहु शकता. काही उदाहरणे.

(i) $4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$ ..... किंमतीच्या एकम स्थानातील अंक क्रमाने 4, 6, 4, 6, 4, 6, ...

(ii) बॅकेच्या परिक्षेसाठी मेरी नमुन्या वरील काही गणीत सोडवली त्या पैकी एक, खालील नमुन्यातील पुढचे दोन पद माहित करा.

1, 2, 4, 8, 10, 20, 22 ....

(iii) उषा नौकरीसाठी अर्ज केली आणि तीला ती नौकरी मिळाली तिच्या पाहिल्या महिण्याचा पगार 8000 रुपये आहे आणि तिची वार्षिक वाढ 500 रु. आहे. 1st, 2nd, 3rd ... वर्षासाठी तिचा पगार अनुक्रमे 8000, 8500, 9000 ..... आहे.

(iv) एका सिडीच्या पायरीची लांबी खालुन वर पर्यंत क्रमाने 2 से.मी. कमी होत जाते. खालच्या पासुन पहिल्या पायरी पर्यंतची लांबी 45 सें.मी. आहे तर खालच्या पासुन क्रमाने 1st, 2nd, 3rd, ... 8th पायरीची लांबी क्रमाने 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31 आहे.

वरील संख्या नमुना पदामध्ये तुम्हाला काही संबंध दिसत आहे का?

उदाहरण (1) मध्ये दोन संख्या 4 आणि 6 तेच क्रमाने पुन्हा पुन्हा येत आहे.

आता, उदाहरण (ii), (iii) आणि (iv) मधील नमुना माहित करण्याचा प्रयत्न करु या. प्रत्येक यादी मध्ये संख्या मधील संबंध स्थिर पणे पुढे जाते. 8000, 8500, 9000, ... दिलेल्या यादीत प्रत्येक मागच्या पदामध्ये 500 मिळवत क्रमवार पदे मिळतात.

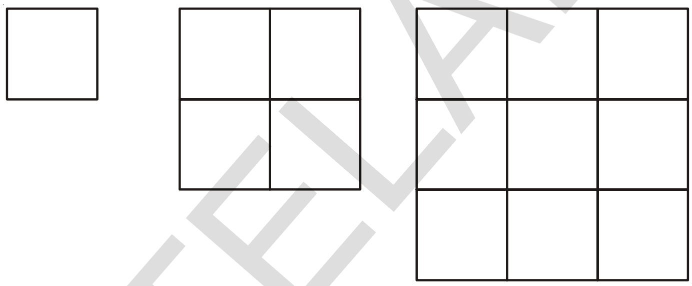
तसेच 45, 43, 41, ... मध्ये प्रत्येक मागच्या पदामध्ये '-2' मिळवत क्रमवार पदे मिळतात. आता प्रगमनशील नमुन्याची आणखी काही उदाहरणे पाहु या.

(a) एका बचत योजनेत 3 वर्षांनंतर रक्कम $\frac{5}{4}$ पट होते.

8000 रुपयांची गुंतवणुक 3, 6, 9 आणि 12 वर्षांनतर अनुक्रमे 10000, 12500, 15625, 19531.25.

(b) 1, 2, 3, ... एकक बाजुच्या चौरसामध्ये एकक चौरसाची संख्या अनुक्रमे

$1^2, 2^2, 3^2, ...$

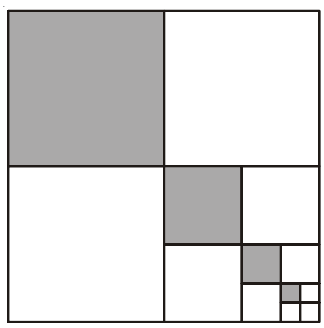


(c) हेमाची मुलगी 1 वर्षाची होती तेव्हा हेमाने तिच्या पैशाच्या डब्ब्यात 1000 रुपये ठेवले आणि प्रत्येक वर्षाला 500 रुपये वाढवत गेली. तर तिच्या 1st, 2nd, 3rd, 4th .... वाढदिवसाला डब्बामध्ये असणारी रक्कम अनुक्रमे

1000, 1500, 2000, 2500, ... आहे.

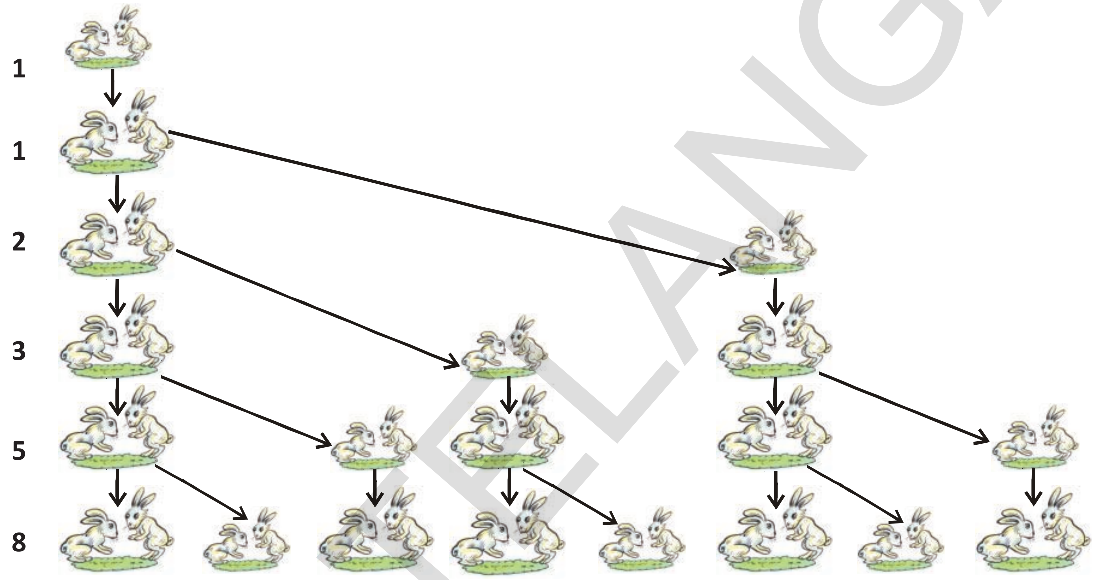
(d) खालील आकृतीमध्ये चौरसाच्या रंगीत भागाचा पहिला, दुसरा, तिसरा..... अपुर्णांक अनुक्रमे.

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, ...$



(e) एक सस्याची जोडी दुसऱ्या महिण्यापासुन प्रती महिण्याला आणखी एक सस्यांच्या जोडीला उत्पत्ती करतो. उत्पती झालेली संख्याची जोडी सुध्दा पुन्हा दुसऱ्या महिण्यापासुन प्रती महिण्याला आणखी एक संख्यांची जोडी उत्पत्ती करते असे समजु. पाहिल्या महिण्यात एक जोडी आहे आणि एकही संख्यांची जोडी मरण नाही पावली असे समजु $1^{ल्या}$, 2^{nd}, 3^{rd}, ..., 6^{th} महिण्यात असणाऱ्या संख्याची जोडीची संख्या अनुक्रमे.

1, 1, 2, 3, 5, 8



वरील उदाहरणातील काही नमुन्याचा निरिक्षण करु. काही मध्ये प्रत्येक पद त्याच्या मागील पदामध्ये एक स्थिर संख्या मिळवल्या नंतर येत आहे. काही मध्ये प्रत्येक पदाला एका स्थिर संख्याने गुणल्याने नंतरचे पद येत आहे. आणखी काही मध्ये क्रमाने येणाऱ्या संख्याच्या वर्गाचे निरिक्षण करु शकतो. प्रत्येक पद त्याच्या मागील पदामध्ये एक स्थिर संख्या मिळवल्याने येणारा नमुना आणि तसेच प्रत्येक पद त्याच्या मागील पदाला एका स्थिर संख्येने गुणल्यास येणारा नमुना याला अनुक्रमे अंकगणितीय श्रेणी आणि गुणोत्तर श्रेणी म्हणतात. आपण काही n संख्या आणि त्यांच्या क्रमवार संख्यांची बेरीज याचे ज्ञान दैनंदिन जिवनात काही समस्यांना सोडवण्यासाठी वापरु शकतो. आणि त्याचे n^{th} पद व n पदाची बेरीज या विषयी आपण चर्चा करणार आहोत.

इतिहास : 400 BCE बॉबीलोनियन्सला अंकगणितीय श्रेढी आणि भुमितीय श्रेढी विषयी माहित असल्याचा पुरावा आहे. बोथीन्स (570CE), च्या नुसार या श्रेढी विषयी पुर्वीच्या ग्रीक लेखकांना माहित होत असे समजते. सर्वात अगोदर भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्टने (470CE) पहिल्यांदा नैसर्गिक संख्याची बेरीज आणि घनाच्या बेरजेसाठी सुत्र दिल्या सारखे त्यांच्या आर्यभट्टीयम पुस्तका इ.स. 499 वरुन समजले. p पदापासुन सुरुवात होणाऱ्या अंकगणितीय श्रेढीच्या n पदांची बेरीज माहित करण्यासाठी सुध्दा त्यांनी सुत्र दिलेले आहे. भारतीय गणितज्ञ ब्राह्मगुप्त (598CE), महावीर (850 CE) आणि भास्करा(1114-1185CE) सुध्दा वर्ग आणि घनाची बेरीज वर चर्चा केल्या सारखे समजते.

6.2 अंकगणीतीय श्रेढी (Arithmetic Progressions)

खालील संख्यांची यादी विचारात घेऊ.

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) – 3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

यादीतील प्रत्येक संख्याला पद म्हणतात.

वरील यादीत तुम्ही पुढचे पद लिहु शकता का? ते कसे लिहु शकता? कदाचीत नियम किंवा नमुना व्दारे लिहु शकतो. तर निरिक्षण करुन नियम लिहु या.

(i) मध्ये, त्याच्या मागील पदापेक्षा 1 ने जास्त प्रत्येक पद आहे.

(ii) मध्ये, त्याच्या मागील पदापेक्षा 30 ने जास्त प्रत्येक पद आहे.

(iii)मध्ये, त्याच्या मागील पदापेक्षा 1 ने मिळवत प्रत्येक पद आहे.

(iv) मध्ये, या यादीतील सर्व पदे 3 आहे. म्हणजेच त्याच्या मागील पदामध्ये 3 मिळवत किंवा 3 वजा करत प्रत्येक पद आहे.

(v) मध्ये, त्याच्या मागील पदामध्ये -0.5 मिळवत (किंवा 0.5 वजा करत) प्रत्येक पद आहे.

वरील सर्व यादीमध्ये आपल्याला निरिक्षणास येते की, मागील पदामध्ये एक ठराविक संख्या मिळवत किंवा वजा करत आपल्याला क्रमवार पदे मिळतात. अशा संख्याच्या यादीला अंकगणीतीय श्रेढी म्हणतात.

प्रयत्न करा

(i) खालील पैकी कोणते अंकगणीतीय श्रेढी आहे आणि का?

(a) 2, 3, 5, 7, 8, 10, 15, ...

(b) 2, 5, 7, 10, 12, 15, ...

(c) -1, -3, -5, -7, ...

(ii) आणखी तीन अंकगणीतीय श्रेढी लिहा.

6.2.1 अंकगणीतीय श्रेढी म्हणजे काय? What is an Arithmetic Progression?

पहिल्या पदाच्या व्यतीरिक्त, प्रत्येक मागील पदामध्ये एक ठराविक संख्या मिळवल्या नंतर प्रत्येक पद मिळते अशा संख्याच्या यादीला अंकगणीतीय श्रेढी म्हणतात.

या ठराविक संख्याला अंकगणीतीय श्रेढीचे सामान्य भेद म्हणतात. ही संख्या धन

अंकगणीतीय श्रेढीचे पहिले पद a_1दर्शवु, दुसरे पद $a_2, \ldots, n$ वे पद a_n आणि सामान्य भेद d. तर अंकगणीतीय हे $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

म्हणुन $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d.$

अंकगणीतीय श्रेढीचे आणखी काही उदाहरणे पाहु या.

(a) सकाळच्या प्रार्थणासभेत रांगेत उभे असलेल्या विद्यार्थ्यांची उंची (से.मी. मध्ये) 147 , 148, 149, . . ., 157.

(b) एका शहरातील जानेवारी माहिण्याच्या किमान तापमान (डीग्री सेल्सीयस मध्ये) चढत्या क्रमात

$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$

(c) एकुण कर्ज 1000 रुपये वर दर महिण्याला 5% चुकते केल्यानंतर उरलेली रक्कम (रुपया मध्ये) 950, 900, 850, 800, . . ., 50.

(d) I ते XII वर्गाच्या जास्त गुण मिळविण्याऱ्या विद्यार्थ्यांला शाळेत दिलेली बक्षीसाची रक्कम (रुपया मध्ये) अनुक्रमे 200, 250, 300, 350, . . ., 750

(e) प्रत्येक महिण्याला 50 रुपये बचत प्रमाणे 10 महिण्याची एकुण बचत (रुपया मध्ये) 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

विचार करा - चर्चा करा

1. वर दिलेली प्रत्येक यादी अंकगणीतीय श्रेढी कसे बनवते याचा विचार करा आणि मित्रासोबत चर्चा करा.
2. वरील यादी मध्ये प्रत्येकाचा सामान्य भेद माहित करा.हे केव्हा शक्य आहे याचा विचार करा
3. लहान धन संख्या घेऊन धन अंकगणीतीय श्रेढी लिहा.
4. मोठी धन संख्या घेऊन अंकगणीतीय श्रेढी तयार करा.
5. ऋण सामान्य भेद घेऊन अंकगणीतीय श्रेढी तयार करा.

अंकगणीतीय श्रेढीचे सामान्य रुप : अंकगणीतीय श्रेढी असे लिहु शकतो का,

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$

याला अंकगणीतीय श्रेढीचे सामान्य रुप म्हणतात. येथे 'a' हा पहिला पद आणि 'd' हा सामान्य भेद आहे.

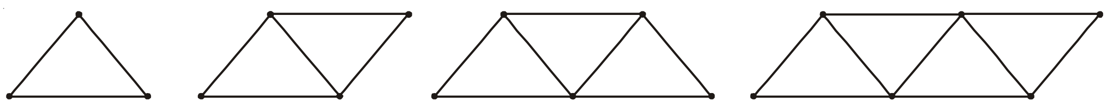
1, 2, 3, 4, 5, ... उदाहरणासाठी

पहिला पद हा 1 आहे आणि सामान्य भेद सुध्दा 1 आहे.

2, 4, 6, 8, 10 ..... मध्ये पहिला पद कोणता आहे? आणि सामान्य भेद कोणता आहे?

कृती

(i) आगडब्बीच्या कांड्यानी खालील आकृत्या तयार करा.



(iii) प्रत्येक आकृतीसाठी लागणाऱ्या आगडब्बीच्या काड्याची संख्या लिहा.

(iv) यादीच्या घटकामधुन तुम्ही सामान्य भेद माहित करु शकता का?

(v) या संख्याची यादी अंकगणीतीय श्रेढी बनते का?

6.2.2 अंकगणीतीय श्रेढीला आधारीत अंश (Parameters of a Arithmetic Progressions)

6.2.1 विभागामधील वरील (a) ते (e) उदाहरणा मधील नोंद घ्या. तेथे पदांची संख्या फक्त मर्यादीत आहे. अशा अंकगणीतीय श्रेढी ला शेवटचे पद आहे. 6.2 विभागामधील 1 ते 5 उदाहरण हे मर्यादीत अंकगणीतीय श्रेढी नाही. म्हणुन त्यांना अमर्यादीत अंकगणीतीय श्रेंढी म्हणतात. अशा अंकगणीतीय श्रेढी केव्हाही संपत नाही आणि यांना शेवटचे पद नसते.

हे करा

मर्यादीत अंकगणीतीय श्रेढीचे तीन उदाहरण आणि अमर्यादीत अंकगणीतीय श्रेढीचे तीन उदाहरण लिहा.

अंकगणीतीय श्रेढी विषयी माहित करण्यासाठी तुम्हाला कमीत कमी किती माहितीची आवश्यकता आहे? पहिले पद माहित केले तर पुरे होते का? किंवा फक्त सामान्य भेद माहित केले तर पुरे होते का?

आपल्याला असे समजते की, दोन्ही माहित करणे आवश्यक आहे. पहिले पद a आणि सामान्य भेद d अंकगणीतीय श्रेढी पुर्ण करण्यासाठी आपल्याला हे दोन अंक पुरेसे आहेत.

उदाहरणार्थ जर पहिजे पद a हा 6 आहे आणि सामान्य भेद d हा 3 आहेत तर

अंकगणीतीय श्रेढी $\quad 6, 9, 12, 15, \ldots$

आणि जर a हा 6 आणि d हा -3 असेल तर अंकगणीतीय श्रेढी हा

$6, 3, 0, -3, \ldots$

त्याच प्रमाणे जेव्हा

$a = -7, \quad d = -2,$ चे अंकगणीतीय श्रेढी $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0, \quad d = 0.1,$ चे अंकगणीतीय श्रेढी $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0, \quad d = 1\frac{1}{2},$ चे अंकगणीतीय श्रेढी $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2, \quad d = 0,$ चे अंकगणीतीय श्रेढी $2, 2, 2, 2, \ldots$

म्हणुन जर तुम्हाला a आणि d माहित असेल तर तुम्ही अंकगणीतीय श्रेढीची यादी तयार करु शकता. आणखी वेगळ्या पध्दतीने प्रयत्न करु या. जर तुम्हाला संख्याची यादी दिली तर तुम्ही या यादीला अंकगणीतीय श्रेढी आहे किंवा नाही कसे म्हणु शकता?

उदाहरणार्थ, कोणत्याही संख्याच्या यादीसाठी

$6, 9, 12, 15, \ldots,$

क्रमवार पदामधील फरकाची तपासणी करु. दिलेल्या यादीत $a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$,

$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

आपण पाहतो की, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 \dots = 3$

येथे प्रत्येक संदर्भामध्ये कोणत्याही दोन क्रमवार पदाचा फरक 3 आहे. म्हणुन दिलेली यादी ही अंकगणीतीय श्रेढी आहे. ज्याचा पहिला पद a हा 6 आहे. आणि सामान्य भेद d हा 3 आहे.

6, 3, 0, – 3, . . ., या संख्येच्या यादीसाठी

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3,$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = -3$$

याच प्रमाणे हे सुध्दा अंकगणीतीय श्रेढी आहे ज्याचे पहिले पद 6 आहे आणि सामान्य भेद -3

म्हणुन आपल्याला असे दिसते की, जर दोन क्रमवार पदामधील फरक एकच स्थिर संख्या असेल तर ते यादी अंकगणीतीय श्रेढी हेाते.

साधारणत: अंकगणीतीय श्रेढी $a_1, a_2, \dots, a_n$,

$$d = a_{k+1} - a_k \quad \text{येथे} \quad K \in N\ ,\ K \geq 1$$

येथे a_{k+1} आणि a_k हे अनुक्रमे $(k + 1)$वे आणि kवा पद आहे.

1, 1, 2, 3, 5, ... ही संख्याची यादी विचारात घेऊ. येथे कोणत्याही दोन क्रमवार पदामधील फरक तीच सारखी राहत नाही म्हणुन तुम्ही ही यादी अकगणीतीय श्रेढी नाही म्हणुन म्हणु शकता.

सुचना :6, 3, 0, – 3, . . ., या अंकगणीतीय श्रेढी मधील d माहित करण्यासाठी 3 मधुन 6 वजा करावे पण 3 मधुन 6 वजा करु नये. आपल्याला $(k + 1)$व्या पदामध्ये k वा पद वजा करायचे आहे. जरी $(k + 1)$ वा लहान असला तरी,आणखी एका दिलेल्या अंकगणीतीय मध्ये 'd' माहित करण्यासाठी $a_2 - a_1, a_1 - a_2 \dots$. हे सर्व माहित करण्याची आवश्यकता नाही. फक्त एक माहित केले तर पुरे होते.

हे करा

1. कोणताही एक अंकगणीतीय श्रेढी ला माहित करा.
2. यादीतील प्रत्येक पदामध्ये कोणतीही एक स्थिर संख्या मिळवा. मिळालेल्या संख्याला यादीत लिहा.
3. याच प्रमाणे यादीतील प्रत्येक पदामधुन कोणतीही एक स्थिर संख्या वजा करा. मिळालेल्या संख्यांना यादीत लिहा.
4. याच प्रमाणे प्रत्येक पदाला केाणत्याही एका स्थिर संख्याने गुणाकार किंवाभागाकार करुन मिळालेल्या संख्याला यादीत लिहा.
5. प्रत्येक संदर्भात मिळालेली यादी ही अंकगणीतीय श्रेढी आहे का याची तपासणी करा.

6. यावर तुमच्या निष्कर्ष काय?
आणखी काही उदाहरणे विचारात घेऊ या.

उदाहरण-1. $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{4}$ ...., या अंकगणीतीय श्रेढीसाठी पहिले पद a आणि सामान्य भेद d लिहा.आणि 7 वे पद माहित करा.

सोडवणुक : येथे $a = \frac{1}{4}$; $d = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$

अंकगणीतीय श्रेढीतील संख्या आपल्याला एकदा माहित झाले तर आपण कोणत्याही दोन क्रमवार संख्याचा वापर करुन d माहित करु शकतो.

सातवे पद $\frac{-5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-11}{4}$

उदाहरण-2. खालील पैकी कोणते अंकगणीतीय श्रेढी आहे? जर ते अंकगणीतीय श्रेढी असेल तर पुढचे दोन पद माहित करा.

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . . (iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .

(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . . (v) x, $2x$, $3x$, $4x$ ......

सोडवणुक : (i) $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

म्हणजेच $a_{k+1} - a_k$ हे प्रत्येक वेळा सारखे आहे.

दिलेली यादी अंकगणीतीय श्रेढी आहे. याचा सामान्य भेद $d = 6$.

म्हणुन पुढील दोन पदे : $22 + 6 = 28$ आणि $28 + 6 = 34$.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

म्हणजेच $a_{k+1} - a_k$ हे प्रत्येक वेळा सारखे आहे.

दिलेली यादी अंकगणीतीय श्रेढी आहे. याचा सामान्य भेद $d = -2$.

म्हणुन पुढील दोन पदे

$$-5 + (-2) = -7 \text{ आणि } -7 + (-2) = -9$$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

येथे $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, म्हणजे दिलेली संख्या यादी ही अंकगणीतीय श्रेढी नाही.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

येथे $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.

म्हणजेच दिलेली संख्या यादी ही अंकगणीतीय श्रेढी नाही.

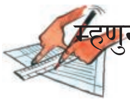
(v) $a_2 - a_1 = 2x - x = x$

$a_3 - a_2 = 3x - 2x = x$

$a_4 - a_3 = 4x - 3x = x$

$a_{k+1} - a_k$ हे प्रत्येक वेळा सारखे आहे.

$\therefore$ दिलेली यादी ही अंकगणीतीय श्रेढी आहे.



म्हणुन पुढील दोन पदे $4x + x = 5x$ आणि $5x + x = 6x$.

अभ्यास - 6.1

1. खालील प्रत्येक संदर्भातुन मिळण्याच्या संख्याची कोणती यादी अंकगणीतीय श्रेढी आहे? का?

   (i) एका टॅक्सीचे भाडे पहिल्या कि.मी. ला 20 रुपये आणि नंतरच्या प्रती कि.मी.वर 8 रुपये वाढत जाते.

   (ii) एका रिकाम्या सिलेंडर मधुन $\frac{1}{4}$ हवा काढुन टाकली तर दर वेळी सिलेंडर मधील उरलेल्या हवेचे परिमाण.

   (iii) एक विहिर खोदण्यासाठी पहिल्या मिटरला 150 रुपये आणि त्यानंतरच्या प्रत्येंक मिटरला 50 रुपये वाढत जाते.

   (iv) एका बँकेत 10,000 रु.ला वर्षाला 8% चक्रवाढ व्याजाने बचत केले. प्रती वर्षाच्या शेवटी खात्यात राहणारी रक्कम.

2. खाली अंकगणीतीय श्रेढीचे पहिले पद a आणि सामान्य भेद d दिलेले आहे तर अंकगणीतीय श्रेढीचे पहिले चार पद लिहा.

   (i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$

   (iii) $a = 4, d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, d = -0.25$

3. खालील अंकगणीतीय श्रेढीसाठी पहिले पद आणि सामान्य भेद लिहा.

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots.$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. खालील पैकी कोणते अंकगणीतीय श्रेढी आहे? जर ते अंकगणीतीय श्रेढी असेल तर सामान्य भेद d माहित करा आणि पुढील तीन पदे लिहा.

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots.$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots.$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots.$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots..$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots..$

6.3 अंकगणीतीय श्रेढीचे n वे पद

उषाने नौकरीसाठी अर्ज केला आणि तीला नौकरी मिळाली. तिच्या पहिल्या महिण्याचा पगार 8000 रुपये आहे आणि प्रती वर्ष 500 रु. ची वाढ होते. तर पाचव्या वर्षी तिचा महिणाचा पगार किती असेल?

हे माहित करण्या अगोदर तीचा दुसऱ्या वर्षामध्ये महिण्याचा पगार किती असेल हे अगोदर पहावे लागणार

हे (8000 + 500)रु. = 8500रु.असेल.

याच प्रमाणे अगोदरच्या वर्षाच्या पगारामध्ये 500 रु. मिळवत आपण तिचा 3 ऱ्या, 4थ्या आणि 5 व्या वर्षाचा महिण्याचा पगार माहित करु शकतो.

म्हणुन 3 ऱ्या वर्षाच्या महिण्याचा पगार = (8500 + 500)रु.

= (8000 + 500 + 500)रु.

= $(8000 + 2 \times 500)$रु.

= $[8000 + \mathbf{(3-1)} \times 500]$ (तिसऱ्या वर्षासाठी)

= 9000रु.

4 थ्या वर्षाच्या महिण्याचा पगार = (9000 + 500)रु.

= (8000 + 500 + 500 + 500)रु.

= (8000 + 3 × 500)रु.

= [8000 + **(4 – 1)** × 500] रु. (4 थ्या वर्षासाठी)

= 9500रु.

5 व्या वर्षाचा महिण्याचा पगार = (9500 + 500)रु.

= (8000+500+500+500 + 500)रु.

= (8000 + 4 × 500)रु.

= [8000 + **(5 – 1)** × 500] रु. (5 व्या वर्षासाठी)

= 10000रु.

तर आपल्याला अशी संख्याची यादी मिळले.

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

या संख्या अंकगणीतीय श्रेढी आहेत.

वरील नमुन्याला पाहुन आपण तिच्या 6 व्या वर्षाचा महिण्याचा पगार माहित करु शकतो का? तसेच 15 व्या वर्षाचा? समजा ती अजुन हेच नौकर असेल तर 25 वर्षानंतर तीचा महिण्याचा पगार किती असेल? येथे आपण मागील वर्षाच्या माहिण्याचा पगारामध्ये 500 रुपये मिळवत या वर्षीच्या महिण्याचा पगार माहित करतो. तर या पध्दतीला आपण अजुन लहान करु शकतो का? वरील प्रक्रियेत पगाराला माहित करण्याची पध्दत आपल्याला समजली म्हणुन त्याचा वापर करु.

15व्या वर्षी महिण्याचा पगार = 14व्या वर्षाचा महिण्याचा पगार + 500रु.

$$= ₹\left[8000+\underbrace{500+500+500+\ldots+500}_{13\text{ times}}\right]+₹500$$

= [8000 + 14 × 500]रु.

= [8000 + **(15 – 1)** × 500] = 15000रु

म्हणजेच पहिला पगार + (15 – 1) × वार्षिक वाढ

याच प्रमाणे 25 व्या वर्षी तिचा महिण्याचा पगार

=[8000 + **(25 – 1)** × 500] = 20000रु.

= पहिला पगार + **(25 – 1)** × वार्षिक वाढ

या उदाहरणाव्दारे 15 वे पद किंवा 25 वे पद कसे लिहावे याची कल्पना आपल्याला आली आहे. या कल्पनाचा उपयोग करुन आता अंकगणीतीय श्रेढीचे n वे पद माहित करु या.

समजा $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ही एक अंकगणीतीय श्रेढी आहे. ज्याचा पहिला पद a_1 हा a हा आहे आणि सामान्य भेद d आहे तर

दुसरे पद $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2 - 1)}\, d$

तिसरे पद $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3 - 1)}\, d$

चौथे पद $a_4 = a3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4 - 1)}\, d$

. . . .

. . . .

नमुन्याला पाहुन आपण म्हणु शकतो की, ***n*वे** पद $a_n = a + (n - 1)\, d$.

म्हुणन, **पहिले पद *a* आणि सामान्य भेद *d* असलेल्या अंकगणीतीय श्रेढीचे nवे पद**

$\boldsymbol{a_n = a + (n - 1)\, d.}$

a_n ला सुध्दा अंकगणीतीय श्रेढीचे सामान्य पद म्हणतात

एका अंकगणीतीय श्रेढीत m पदे असतील तर a_m वे पद शेवटचे पद होईल. त्याला केव्हा केव्हा l ने ही सुचवतात.

अंकगणीतीय पदांना माहित करणे: वरील सुत्राचा उपयोग करुन आपण अंकगणीतीय श्रेढीतील विभिन्न पदे माहित करु शकतो.

काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-3. 5, 1, –3, –7 . . .या अंकगणीतीय श्रेढीचे 10 वे पद माहित करा

सोडवणुक : येथे $a = 5$, $d = 1 - 5 = -4$ आणि $n = 10$.

$a_n = a + (n - 1)\, d$

म्हणुन $a_{10} = 5 + (10 - 1)\,(-4) = 5 - 36 = -31$

म्हणुन दिलेल्या अंकगणीतीय श्रेढीचे 10 वे पद – 31 आहे.

उदाहरण-4. 21, 18, 15, . . .या अंकगणीतीय श्रेढीचे– 81 हे कितवे पद आ
येथे 0 पद आहे का? तुमच्या उत्तरासाठी कारणे द्या.

सोडवणुक : येथे $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ आणि जर $a_n = -81$आपल्याला हे

$$a_n = a + (n - 1)\, d,$$
$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$
$$-81 = 24 - 3n$$
$$-105 = -3n$$

म्हणुन $n = 35$

म्हणुन दिलेल्या अंकगणीतीय श्रेढीचे – 81 हे 35 वे पद आहे.

नंतर $a_n = 0$ असेल तर n ला माहित करावयाचे आहे.

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

म्हणजे $3(n - 1) = 21$

म्हणजेच $n = 8$

म्हणजे, आठवे पद हे 0 आहे.

उदाहरण-5. 3 रे पद 5 आणि 7 वे पद 9 असलेली अंकगणीतीय श्रेढी माहित करा.

सोडवणुक : $a_3 = a + (3 - 1)\, d = a + 2d = 5$ (1)

आणि $a_7 = a + (7 - 1)\, d = a + 6d = 9$ (2)

रेषीय समीकरणाची जोडी (1) आणि (2) सोडवुण

$$a = 3, d = 1$$

म्हणुन, अंकगणीतीय श्रेढी 3, 4, 5, 6, 7, . . .

उदाहरण-6. 5, 11, 17, 23, . . . या संख्याच्या यादीमध्ये 301 हे पद आहे का याची तपासणी करा.

सोडवणुक : $a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6,\ a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6,\ a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

म्हणजे $k = 1, 2, 3$,ला $(a_{k+1} - a_k)$ हे सारखीच आहे. दिलेली संख्या यादी ही अंकगणीतीय श्रेढी आहे.

आता, अंकगणीतीय श्रेढीला $a = 5$ आणि $d = 6$.

आता, 301 हा या यादीत आहे का? नाही का? माहित करावयाचे आहे. याला माहित करण्यासाठी 301 हा या यादीतील n वे पद आहे असे समजु म्हणुन $a_n = 301$.

तर

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$

म्हणुन 301 या पदासाठी

$$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

किंवा $301 = 6n - 1$

म्हणुन $n = \dfrac{302}{6} = \dfrac{151}{3}$

पण n हे धनपुर्णांक असणे आवश्यक आहे.(का?)

म्हणुन 301 हा दिलेल्या संख्या यादीतील पद नाही.

उदाहरण-7. 3 ने भाग जाणारे किती दोन अंकी संख्या आहेत.

सोडवणुक : 3 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्याची यादी

$$12, 15, 18, . . . , 99$$

हे अंकगणीतीय श्रेढी आहे का? होय, येथे $a = 12, d = 3, a_n = 99$.

म्हणुन $a_n = a + (n - 1)\, d$,

तर $99 = 12 + (n-1) \times 3$

म्हणुन $87 = (n-1) \times 3$

म्हणुन $n - 1 = \frac{87}{3} = 29$

म्हणुन $n = 29 + 1 = 30$ (म्हणुन 99 हे 30 वे पद आहे.)

म्हणुन तेथे 3 ने. भाग जाणारे 30 दोन अंकी संख्या आहेत.

उदाहरण-8. 10, 7, 4, . . ., – 62 या अंकगणीतीय श्रेढीत शेवट पासुन 11 वे पद माहित करा.

सोडवणुक : येथे $a = 10, d = 7 - 10 = -3, l = -62$,

जेथे $l = a + (n-1)d$

शेवटपासुन 11 वे पद माहित करण्यासाठी आपल्याला अंकगणीतीय श्रेढीमधील एकुण पदाची संख्या माहित करावी लागेल.

म्हणुन $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

म्हणजेच $-72 = (n-1)(-3)$

म्हणजेच $n - 1 = 24$

किंवा $n = 25$

म्हणुन दिलेल्या अंकगणीतीय श्रेढीत एकुण 25 पदे आहेत.

तर शेवट पासुन 11 वे पद म्हणजे पहिल्या पासुन ते 15 वे पद होते. (ते 14 वे पद होत नाही याची नोंद घ्या. का?)

म्हुणन $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

म्हणुन शेवटपासुन 11 वे पद – 32 आहे.

सुचना : वरील श्रेढीत सुरुवाती पासुन 11 वे पद आणि शेवट पासुन 11 वे पद हे सारखेच -62 आहे आणि सामान्य भेद 3 आहे.

उदाहरण-9. 1000 रु.ला वर्षाला 8% सरळ व्याजाने प्रती वर्षाच्या शेवटी होणाऱ्या व्याजाला माहित करा? या व्याजाची यादी अंकगणीतीय श्रेढी होते का? जर अंकगणीतीय श्रेढी होत असेल तर 30 व्या वर्षाच्या शेवटी होणाऱ्या व्याजाला माहित करा.

सोडवणुक : सरळ व्याज कसे काढावे याचे सुत्र आपल्याला माहित आहे.

सरळ व्याज= $\frac{P \times R \times T}{100}$

म्हणुन 1ल्या वर्षाच्या शेवटी होणारे व्याज = $\frac{1000 \times 8 \times 1}{100}$ रु.= 80 रु.

दुसऱ्या वर्षाच्या शेवटी होणारे व्याज = $\frac{1000 \times 8 \times 2}{100}$ रु.= 160 रु.

तिसऱ्या वर्षाच्या शेवटी होणारे व्याज = $\frac{1000 \times 8 \times 3}{100}$ रु.= 240 रु.

याच प्रमाणे, 4 थ्या, 5व्या,.....वर्षाच्या शेवटी होणाऱ्या व्याजाला आपण माहित करु शकतो. म्हणुन 1ल्या, 2ऱ्या, 3ऱ्या..... वर्षाच्या शेवटी होणारे व्याज अनुक्रमे

$$80, 160, 240, \ldots$$

वरील यादीत दोन क्रमवार पदाचा फरक 80 आहे. आणि ही अंकगणीतीय श्रेढी आहे.

$d = 80$ सुध्दा $a = 80$.

30 व्या वर्षाच्या शेवटी होणारी व्याज माहित करण्यासाठी आपल्याला a_{30} माहित करावे लागेल

आता $a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

30 व्या वर्षाच्या शेवटी होणारे व्याज 2400 रुपये.

उदाहरण-10. एका बगीच्यात पहिल्या रांगेत 23 गुलावाचे झाड, दुसऱ्या रांगेत 21, तिसऱ्या रांगेत 19 ..... शेवटच्या रांगेत 5 गुलाबाचे झाड आहेत. तर बगीच्यात एकुण किती रांगा आहेत?

सोडवणुक : 1ल्या, 2ऱ्या, 3ऱ्या....शेवटच्या रांगेतील झाडाची संख्या अनुक्रमे

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

ही अंकगणीतीय श्रेढी आहे.(का?)

समजा बगीच्यातील रांगाची संख्या n.

तर $a = 23, d = 21 - 23 = -2, a_n = 5$

म्हणुन $a_n = a + (n - 1)\, d$

$5 = 23 + (n - 1)(-2)$

म्हणजे $-18 = (n - 1)(-2)$

म्हणजे $n = 10$

म्हणुन, बगीच्यात एकुण 10 रांगा आहेत.

अभ्यास - 6.2

1. खालील तक्त्यातील रिकाम्या जागा भरा. येथे अंकगणीतीय श्रेढीचे पहिले पद a, सामान्य भेद d, n वे पद a_n दिलेले आहे.

क्र.स.	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0

(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

2. माहित करा
   (i) 10, 7, 4 ...... या अंकगणीतीय श्रेढीचे 30 वे पद
   (ii) $-3, \frac{-1}{2}, 2, ...$ या अंकगणीतीय श्रेढीचे 11 वे पद
3. खालील माहित करा.
   (i) $a_1 = 2;\ a_3 = 26;\ a_2$ माहित करा (ii) $a_2 = 13;\ a_4 = 3;\ a_1, a_3$ माहित करा
   (iii) $a_1 = 5; a_4 = 9\frac{1}{2}\ a_2; a_3$ माहित करा (iv) $a_1 = -4; a_6 = 6; a_2, a_3, a_4, a_5$ माहित करा
   (v) $a_2 = 38;\ a_6 = -22;\ a_1, a_3, a_4, a_5$ माहित करा
4. 3, 8, 13, 18, . . . या अंकगणीतीय श्रेढीचे कोणते पद 78 आहे?
5. खालील अंकगणीतीय पदांची संख्या माहित करा.
   (i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, ..., -47$
6. 11, 8, 5, 2 . . .या अंकगणीतीय श्रेढीत -150 हे पद आहे का? तपासणी करा.
7. 11 वे पद 38 आणि 16 वे पद 73 असलेल्या अंकगणीतीय श्रेढीचे 31 वे पद माहित करा.
8. जर अंकगणीतीय श्रेढीचे 3 रे आणि 9 वे पद अनुक्रमे 4 आणि -8 आहे. तर या अंकगणीतीय श्रेढीत 17 वे पद 10 व्या पदापेक्षा 7 ने जास्त आहे. तर सामान्य भेद माहित करा.
9. एका अंकगणीतीय श्रेढीत 17 वे पद 10 व्या पदापेक्षा 7 ने जास्त आहे. तर सामान्य भेद माहित करा.
10. दोन अंकगणीतीय श्रेढीला सारखेच सामान्य भेद आहे. त्याच्या 100 व्या पदामधील फरक 100 आहे. तर 1000 व्या पदामध्ये किती फरक असेल?
11. 7 ने भाग जाणाऱ्या किती तीन अंकी संख्या आहेत?
12. 10 आणि 250 च्या मधात किती 4 चे गुणक आहेत?
13. 63, 65, 67, . . . आणि 3, 10, 17, . . . अंकगणीतीय श्रेढीचे n, वे पद समान आहेत तर n ला माहित करा.
14. 3 रे पद 16 आहे आणि 7 वे पद 5 व्या पदापेक्षा 12 ने जास्त आहे. तर अंकगणीतीय श्रेढीला माहित करा.
15. 3, 8, 13, . . ., 253 अंकगणीतीय श्रेढीतील शेवट पासुन 20 वे पद माहित करा.

16. अंकगणीतीय श्रेढीच्या 4 थ्या आणि 8व्या पदाची बेरीज 24 आहे. 6 व्या आणि 10 व्या पदाची बेरीज 44 आहे. तर अंकगणीतीय श्रेढीचे पहिले तीन पद माहित करा.

17. 5000 रु. वर्षाच्या पगारावर सुब्बाराव ने 1995 मध्ये काम करणे सुरुवात केली. त्यांना प्रत्येक वर्षी पगारावर 200 रु. ची वार्षिक वाढ मिळाली. तर कोणत्या वर्षी त्यांचा पगार 7000 रु. राहतो?

6.4 अंकगणीतीय मध्ये पहिल्या *n* पदांची बेरीज:

6 व्या विभागात दिलेल्या संदर्भाला पुन्हा विचारात घेऊ. जेव्हा हेमाची मुलगी 1 वर्षाची होते तेव्हा हेमाने 1000 रु. तिच्या मुलीच्या पैशाच्या डब्ब्यात टाकली. दुसऱ्या वाढदिवसाला 1500 रु. तिसऱ्या वाढदिवसाला 2000 रु. टाकले आणि याच पध्दतीने तीने पैशे टाकणे चालु ठेवले. तर जेव्हा हेमाची मुलगी 21 वर्षाची होईल तेव्हा पैशाच्या डब्ब्यात किती रुपये जमा होतील?

आता, पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या, ... वाढदिवसाला ठेवलेली रक्कम अनुक्रमे1000, 1500, 2000, 2500, . . . असे तिच्या 21 व्या वाढदिवसा पर्यंत चालु ठेवली. 21 व्या वाढदिवसा नंतर पेटीतील रक्कम माहित करण्यासाठी वरील यादी 21 पदा पर्यत लिहुन माहित करावे लागणार. हे वेळ वाया घालवणारी पध्दत आहे असे तुम्हाला वाटते का? या पेक्षा लहान पध्दतीने आपण माहित करु शकतो का?

जर आपण ही बेरीज करण्याची पध्दत माहित केलो तर हे शक्य आहे.

6.4.1 गॉस ने माहित केलेली पदांच्या बेरजेची पध्दत

Carl Fredrich Gauss (1777-1855) was a great German Mathematician

गॉस 10 वर्षाचा असतांना माहित केलेले एक गणीत आता आपण पाहु. गॉस 10 वर्षाचा असतांना 1 पासुन 100 पर्यंत संख्याची बेरीज किती? म्हणुन गॉसला विचारण्यात आले. गॉसने त्याचे उत्तर 5050 म्हणुन सांगीतले. त्याने हे उत्तर कसा दिला याचा अंदाज करा.

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

आणि नंतर त्याने त्या संख्याना उलटे लिहिले.

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

त्याने दोन पदांना एकामध्ये एक मिळवत समोरचे पद मिळवत गेले.

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101$$ (100 वेळा) (तपासणी करा आणि चर्चा करा)

म्हणुन $S = \frac{100\times101}{2} = 5050$, म्हणजेच, एकुण $= 5050$.

6.4.2 अंकगणीतीय *n* च्या पदांची बेरीज

आपण सुध्दा $a, a+d, a+2d, \ldots$ **श्रेढीतील** n पदांची बेरीज माहित करण्यासाठी गॉसची पध्दतीचा वापर करु या.

वरील अंकगणीतीय श्रेढीतील n वे पद $a+(n-1)d$ समजले.

वरील श्रेढीतील पहिले n पदाची बेरीज S_n समजलो.

$\therefore\ S_n = a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+a+(n-1)d$

S_n दोन वेगळ्या क्रमात लीहिल्यावर आपणास $S_n = [a+(n-1)d]+[a+(n-2)d]+\ldots+a$

पदामध्ये पद मिळवत $2S_n = [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+\ldots+[2a+(n-1)d]$ n

$= n[2a+(n-1)d]$ वेळा)

$= n(2a+(n-1)d)$

$\therefore\ S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = \frac{n}{2}[a+\{a+(n-1)d\}] = \frac{n}{2}$ [पहिले पद + n वे पद] $= \frac{n}{2}(a+a_n)$

जर अंकगणीतीय श्रेढीतील फक्त पहिले पद आणि शेवटचे पद माहित असेल आणि सामान्य भेद माहित नसेल तेव्हा

$S_n = \frac{n}{2}(a+a_n)$ या सुत्राचा वापर करुन S_n माहित करावे. किंवा $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ येथे 'l' हा शेवटचा पद आहे.

हेमाच्या मुलीचे रुपये:

आता, आपण पुन्हा आपल्या प्रश्नाला निरिक्षण करु हेमाच्या मुलीचे 1ल्या, दुसऱ्या तिसऱ्या, 4थ्या.....वाढदिवसाला पेटीतील रक्कम अनुक्रमे 1000, 1500, 2000, 2500, . . .,

हे अंकगणीतीय श्रेढी आहे. आता आपण हेमाच्या मुलीच्या 21 व्या वाढदिवसा नंतर तिच्या पेटीतील रक्कमला माहित करु.

येथे, $a = 1000$, $d = 500$ आणि $n = 21$. सुत्राचा वापर करुन

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d],$$

$$S = \frac{21}{2}[2\times1000+(21-1)\times500]$$

$$= \frac{21}{2}[2000+10000]$$

$$= \frac{21}{2}[12000] = 126000$$

म्हणुन तिच्या 21 व्या वाढदिवसाला जमा झालेली रक्कम 126000 रु.

S ऐवजी S_n धरु. या मुळे किती पदाची बेरीज आपण माहित करत आहो हे समजते. अंकगणीतीय श्रेढीच्या पहिल्या 20 पदांच्या बेरजेसाठी आपण S_{20} म्हणुन दर्शवु शकतो. पहिल्या n पदाच्या बेरजेच्या सुत्रात S_n, a, d आणि n या चार राशींचा समावेश आहे. जर आपल्याला या पैकी कोणत्याही तीन माहित असेल तर चौथे माहित करता येते.

सुचना : एक अंकगणीतीय श्रेढीतील पहिल्या n पदाची बेरीज मधुन पहिल्या $(n-1)$ पदाच्या बेरजेला वजा केल्याने या श्रेढीचे n वे पद येते. म्हणजेच $a_n = S_n - S_{n-1}$.

हे करा

प्रत्येक अंकगणीतीय श्रेढीमध्ये सुचित केलेल्या पदांच्या संख्याची बेरीज माहित करा.

(i) 16, 11, 6 .....; 23 पदे (ii) –0.5, –1.0, –1.5, ...; 10 पदे

(iii) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$....., 10 पदे

खालील काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-11. अंकगणीतीय श्रेढीच्या पहिल्या 14 पदांची बेरीज जर 1050 असेल तर त्याचा पहिला पद 10 असेल तर 20 वे पद माहित करा.

सोडवणुक : येथे $S_n = 1050$; $n = 14$, $a = 10$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[2a+13d] = 140+91d$$

$$910 = 91d$$

$$\therefore \quad d = 10$$

$$\therefore \quad a_{20} = 10 + (20-1)\,10 = 200$$

उदाहरण-12. 24, 21, 18, . . . या अंकगणीतीय श्रेढीच्या एकुण किती पदांची बेरीज 78 होईल?

सोडवणुक : येथे, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $Sn = 78$. समजा अंकगणीतीय श्रेढीच्या पदाची संख्या n तेव्हा आपल्याला n माहित करायची गरज असते. आपल्याला माहित आहे की,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \qquad \text{म्हणुन } 78 = \frac{n}{2}[48+(n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51-3n]$$

किंवा $3n^2 - 51n + 156 = 0$

किंवा $n^2 - 17n + 52 = 0$

किंवा $(n-4)(n-13) = 0$

किंवा $n = 4$ किंवा 13

n च्या दोन्ही किंमती स्विकार्य आहेत. म्हणुन पदांची संख्या 4 किंवा 13.

अभिप्राय :

1. या संदर्भात पहिल्या चार पदांची बेरीज= पहिल्या 13 पदाची बेरीज=78
2. दोन उत्तरे शक्य आहे कारण 5 ते 13 पदाची बेरीज शुन्य आहे. a हा धन आणि d हा ऋण असल्यामुळे काही पदे धन आणि काही पदे ऋण अल्याने उत्तर शुन्य येऊ शकते.

उदाहरण-13. बेरीज माहित करा.

(i) पहिल्या1000 नैसर्गिक संख्याचा (ii) पहिल्या n नैसर्गिक संख्या

सोडवणुक :

(i) समजा $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$

अंकगणीतीय श्रेढीच्या पहिल्या n पदाच्या बेरजेसाठी $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ सुत्राचा वापर करुन

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

म्हणुन पहिल्या 1000 धन पुर्णांकाची बेरीज 500500.

(ii) समजा $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

येथे $a = 1$ आणि शेवटचे पद l हा n आहे.

म्हणुन $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ (किंवा) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

म्हणुन पहिल्या n धन पुर्णांकाची बेरीज

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

उदाहरण-14. दिलेल्या n पदाच्या संख्येच्या यादीतील पहिल्या 24 पदांची बेरीज माहित करा.

$a_n = 3 + 2n$

सोडवणुक : $a_n = 3 + 2n,$

म्हणुन $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

$\vdots$

संख्याची यादी $5, 7, 9, 11, \ldots$
येथे $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$

हा अंकगणीतीय श्रेढी आहे. याचा सामान्य भेद $d = 2$ आहे.

S_{24} माहित करण्यासाठी आपल्या जवळ $n = 24, a = 5, d = 2$.

म्हणुन $$S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24-1) \times 2] = 12(10 + 46) = 672$$

म्हणुन, संख्याच्या यादीतील पहिल्या 24 पदांची बेरीज 672 आहे.

उदाहरण-15. एका TV तयार करण्याऱ्या कंपनीने तिसऱ्या वर्षी TV चे 600 संच तयार केले आणि सातव्या वर्षी 700 संच तयार केले. समजा दर वर्षी एका ठराविक संख्येने एकसमान उत्पत्ती वाढवली तर माहित करा.

(i) पहिल्या वर्षाची उत्पत्ती (ii) 10 व्या वर्षीची उत्पत्ती

(iii) पहिल्या सात वर्षाची एकुण उत्पत्ती

सोडवणुक : (i) दर वर्षी एका ठराविक संख्येने एकसमान उत्पत्ती वाढत असल्यामुळे 1 ल्या, 2 ऱ्या, 3 ऱ्या, ... वर्षामध्ये TV संच तयार झालेली संख्याची यादी अंकगणीतीय श्रेढीत असते.

n व्या वर्षी तयार झालेल्या TV संचाची संख्याला a_n म्हणुन दर्शवु.

तर $a_3 = 600$ आणि $a_7 = 700$
किंवा $a + 2d = 600$

आणि $a + 6d = 700$

हे समीकरण सोडविल्या नंतर आपल्या $d = 25$ आणि $a = 550$.

म्हणुन पहिल्या वर्षी TV संचाची उत्पत्ती 550 आहे.

(ii) आता $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

म्हणुन 10 व्या वर्षी तयार झालेल्या TV संचाची संख्या 775 आहे.

(iii) तसेच $$S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

म्हणुन, 7 वर्षात TV संचाची एकुण उत्पत्ती 4375 आहे.

अभ्यास - 6.3

1. खालील अंकगणितीय श्रेढी ची बेरीज माहित करा.

   (i) 2, 7, 12, . . ., ते 10 पदे (ii) –37, –33, –29, . . ., ते 12 पदे

   (iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., ते 100 पदे (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots$, ते 11 पदे

2. खाली दिलेल्याचे बेरीज माहित करा.

   (i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

   (iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. अंकगणीतीय श्रेढी

   (i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$, दिलेले आहे तर n आणि S_n माहित करा.

   (ii) $a = 7, a_{13} = 35$, दिलेले आहे तर d आणि S_{13} माहित करा.

   (iii) $a_{12} = 37, d = 3$, दिलेले आहे तर a आणि S_{12} माहित करा.

   (iv) $a_3 = 15, S_{10} = 125$, दिलेले आहे तर d आणि a_{10} माहित करा.

   (v) $a = 2, d = 8, S_n = 90$, दिलेले आहे तर n आणि a_n माहित करा.

   (vi) $a_n = 4, d = 2, S_n = -14$, दिलेले आहे तर n आणि a माहित करा.

   (vii) $l = 28, S = 144$, दिलेले आहे आणि तेथे एकुण 9 पदे आहेत तर a माहित करा.

4. अंकगणीतीय श्रेढीचे पहिले आणि शेवटचे पद अनुक्रमे 17 आणि 350 आहे. जर सामान्य भेद 9 असेल तर त्या श्रेढीत एकुण किती पदे असतील आणि त्या एकुण पदांची बेरीज किती होईल?

5. एका अंकगणीतीय श्रेढीचे दुसरे आणि तिसरे पद अनुक्रमे 14 आणि 18 आहे तर या अंकगणीतीय श्रेढीच्या पहिल्या 51 पदांची बेरीज माहित करा.

6. जर एका अंकगणितीय श्रेढीची पहिल्या 7 पदांची बेरीज 49 आणि 17 पदांची बेरीज 289 होते. तर पहिल्या n पदांच्या बेरजेला माहित करा.

7. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ हे अंकगणितीय श्रेढी आहे हे दाखवा येथे a_5 ची व्याख्या खाली दिले आहे.

   (i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

   प्रत्येक संदर्भात पहिल्या 15 पदांची बेरीज माहित करा.

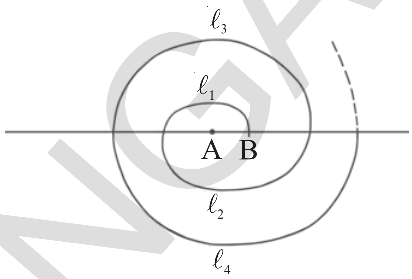
8. एका अंकगणितीय पहिल्या n पदांची बेरीज जर $4n - n^2$ तर पहिले पद (पहिले पद S_1 असते आठवण ठेवा)कोणते? पहिल्या दोन पदांची बेरीज किती? दुसरे पद कोणते आहे? याच प्रमाणे 3 रे, 10 वे आणि nवे पद माहित करा.

9. 6 ने भाग जाणाऱ्या पहिल्या 40 धन पुर्णांकांची बेरीज माहित करा.

10. एका शाळेत विद्याविषयक संबंधीत विषयामध्ये जास्त प्रगती दाखवणाऱ्या विद्यार्थ्यांना 700 रु.चे 7 बक्षीसे द्यावयाचे ठरविले. प्रत्येक बक्षीसाची किंमत त्या समोर असलेल्या बक्षीसाच्या किंमतीपेक्षा 20रु.ने कमी आहे. तर प्रत्येक बक्षीसाची किंमत माहित करा.

11. वायु प्रदुषण कमी करण्यासाठी एका शाळेतील विद्यार्थ्यांनी शाळेच्या भोवती झाडे लावण्याच्या निश्चय केला. प्रत्येक सेक्शनच्या विद्यार्थी ते ज्या वर्गात शिकत आहेत त्या संख्या ऐवढे झाडे त्यांनी लावावीत. म्हणजेच 1ल्या वर्गातील एका सेक्शसनच्या विद्यार्थ्यांनी एक झाड, दुसऱ्या वर्गातील एका सेक्शच्या विद्यार्थ्यांनी 2 झाडे या प्रमाणे 12 वी वर्गापर्यंत लावावे असा त्यांनी निश्चिय केला. तर प्रत्येक वर्गात तीन सेक्शन आहेत तर त्यांनी लावलेली एकुण झाडे किती?

12. अर्ध वर्तुळात एक चक्रकार तयार करण्यात आले. त्यात दाखविल्याप्रमाणे अर्ध वर्तुळाचे केंद्र A पासुन सुरुवात होऊन A ,B जवळ बदलत आहे. म्हणजेच पहिले अर्ध वर्तुळाचे केंद्र A दुसऱ्या अर्धवर्तुळाचे केंद्र B तिसऱ्या अर्ध वर्तुळाचे केंद्र A आणि अर्धवर्तुळाचे त्रिज्या अनुक्रमे 0.5 से.मी.1.0 से.मी., 1.5 से.मी.,2.0 सें.मी. ... याप्रमाणे एकुण 13 अर्धवर्तुळाने तयार होणाऱ्या अशा चक्राकाराची एकुण लांबी किती? ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या)



[**सुचना :** क्रमवार अर्धवर्तुळाची लांबी l_1, l_2, l_3, l_4, . आणि याचे केंद्र अनुक्रमे A, B, A, B, . . .,]

13. 200 लाकडाच्या ओंडक्याची रचना खालील प्रमाणे केलेली आहे. सर्वात खालच्या रांगेत 20 ओंडके, त्याच्या वरच्या रांगेत 19 ओंडके पुन्हा त्याच्या वरच्या रांगेत 18 ओंडके... तर अशा प्रकारे 200 ओंडके ठेवण्यासाठी किती रांगे होतात आणि सर्वात वरच्या रांगेत किती ओंडके आहेत?

14. बादली आणि बॉलच्या स्पर्धेत पहिल्या बॉलपासुन 5 मी. अंतरावर बादली ठेवली आणि इतर बॉल सरळ रेषेत प्रत्येकी 3 मी. अंतरावर ठेवा. एकुण 10 बॉल ठेवा.

या खेळात भाग घेणाऱ्या व्यक्तीने सुरुवातीला बादली जवळुन जाऊन पहिल्या बॉल उचलावा. मागे जात जात बादलीत टाकावा, पुन्हा बादली जवळ जाऊन दुसरा बॉल आणुन बादलीत टाकावा. अशा प्रकारे सर्व बॉल (दहा बॉल) टाकण्याऱ्या व्यक्तीने किती अंतर कापले?
[**सुचना :** पहिला आणि दुसरा बॉल घेऊन टाकण्यासाठी व्यक्तीने कापलेले अंतर अनुक्रमे $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

6.5 भुमितीय श्रेढी (Geometric Progressions)

खालील यादी विचारात घेऊ

(i) 30, 90, 270, 810 ..... (ii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$.....

(iii) 30, 24, 19.2, 15.36, 12.288

वरील यादीत तुम्ही पुढचे पद लिहु शकता का?

(i) मध्ये, त्याचा प्रत्येक पद हा त्याच्या मागच्या पदाला 3 ने गुणल्यानंतर आलेला आहे.

(ii) मध्ये, त्याचा प्रत्येक पद हा त्याच्या मागच्या पदाला $\frac{1}{4}$ ने गुणल्यानंतर आलेला आहे.

(iii) मध्ये, त्याचा प्रत्येक पद हा त्याच्या मागच्या पदाला 0.8 ने गुणल्यानंतर आलेला आहे.

वरील सर्व यादीत आपल्याला असे दिसते की, मागील संख्येला एका ठराविक संख्येने गुणल्यानंतर मिळालेल्या क्रमवार संख्या आहेत. अशा संख्याच्या यादीला भुमितीय श्रेढी **Geometric Progression (GP)** असे म्हणतात.

या ठराविक संख्येला त्या भुमितीय श्रेढीचे सामान्य गुणोत्तर 'r' म्हणतात. म्हणुन वरील उदाहरण (i), (ii), (iii) मध्ये सामान्य गुणोत्तर 3, $\frac{1}{4}$, 0.8 आहे.

भुमितीय श्रेढीच्या पहिल्या पदाला a आणि सामान्य गुणोत्तर r ने दर्शवु. भुमितीय श्रेढीच्या नियमानुसार दुसरे पद माहित करण्यासाठी आपल्याला सामान्य गुणोत्तर r ने पहिल्या पदाला गुणाकार करावे लागणार. येथे $a \neq 0, r \neq 0$ आणि $r \neq 1$

$\therefore$ दुसरे पद $= ar$

तिसरे पद $= ar \,.\, r = ar^2$

$\therefore$ a, ar, ar^2 ..... याला भुमितीय श्रेढीचे सामान्य रुप म्हणतात.

वरील भुमितीय श्रेढीमध्ये कोणत्याही दोन पदामधील गुणोत्तर 'r'

म्हणजे $\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = \text{.........} = r$

जर आपण भुमितीय श्रेढीचे पहिले पद a_1 आणि दुसरे पद a_2 ..... तर n वे पद a_n म्हणुन दर्शवितो.

तर $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$

$\therefore$ $a_1, a_2, a_3 \ldots. a_n \ldots$ या संख्याच्या यादीत जर प्रत्येक पद शुन्य नसेल तर याला भुमितीय श्रेढी म्हणतात.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r \qquad\qquad r \neq 1$$

येथे n हे नैसर्गिक संख्या आहे आणि $n \geq 2$.

हे करा

खालील पैकी कोणते भुमितीय श्रेढी नाही. ते माहित करा.

1. 6, 12, 24, 48, ...	2. 1, 4, 9, 16, ...
3. 1, –1, 1, –1, ...	4. –4, –20, –100, –500, ...

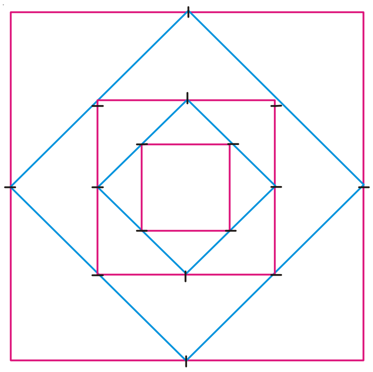
भुमितीय श्रेढीचे आणखी काही उदाहरणे:

(i) एक व्यक्ती त्याच्या चार मित्रांना पत्र लिहिले. त्यांना सुध्दा असे पत्र त्यांच्या चार मित्रांना लिहिण्यास सांगीतले. ही साखळी अशाच प्रकारे चालु असेल पहिला, दुसरा, तिसरा, चौथा.... स्थायीतील पत्राची संख्या अनुक्रमे

1, 4, 16, 64, 256 ....

(ii) 500 रु.ला वर्षाला 10% चक्रवाढ व्याजाने एक बॅंकेत बचत केलेल्या पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या....वर्षाच्या शेवटी होणारे रक्कम अनुक्रमे

550, 605, 665.5 ......



(iii) दिलेल्या चौरसाच्या बाजुच्या मध्यबिंदुला जोडुन एक चौरस काढले. दुसऱ्या चौरसाच्या बाजुच्या मध्यबिंदुला जोडुन तिसरे चौरस काढले. ही प्रक्रिया अंनत पणे चालु ठेवली. जर पहिल्या चौरसाची बाजु 16 से.मी. असेल तर पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या, ... चौरसाचे क्षेत्रफळ अनुक्रमे

256, 128, 64, 32, ...

(iv) एका घड्याळीचा दोलकाचा पहिला दोलनकांत केलेला वक्र/चापाची लांबी 18 सें.मी. आहे. त्यानंतर प्रत्येक दोलनकांत तयार होणाऱ्या चापाची लांबी त्याच्या आधीच्या दोलनकांत तयार होणाऱ्या चापाच्या लांबीचे 0.9 भाग आहे. तर पहिले, दुसरे, तीसरे,.... दोलनाने तयार झालेल्या चापाची लांबी अनुक्रमे.(से.मी.मध्ये)

18, 16.2, 14.58, 13.122......

विचार करा - चर्चा करा

1. वरील प्रत्येक भुमितीय श्रेढी का आहे. स्पष्ट करा.
2. भुमितीय श्रेढी विषयी माहित करण्यासाठी आपल्याला किती किमान माहितीची आवश्यकता आहे ?

आता, भुमितीय श्रेढी कशी तयार होते या विषी शिकु या. जेव्हा पहिले पद 'a' आणि सामान्य गुणोत्तर 'r' दिलेले असते. आणि तसेच दिलेली संख्याची ही भुमितीय श्रेढी आहे की नाही याची तपासणी कसे करावे ते पण शिकु या.

उदाहरण-16. जर पहिले पद $a = 3$ आणि सामान्य गुणोत्तर $r = 2$ तर भुमितीय श्रेढी लिहा.

सोडवणुक : 'a' हे पहिले पद असल्यामुळे ते सुरुवातीला लिहु.

आपल्याला माहित आहे की, भुमितीय श्रेढी मध्ये प्रत्येक मागच्या पदाला सामान्य गुणोत्तर 'r' ने गुणुन क्रमवार संख्या लिहल्या जातात. म्हणुन दुसरे पद मिळविण्यासाठी आपल्याला पहिल्या पद $a = 3$ ला सामान्य गुणोत्तर $r = 2$ ने गुणावे लागणार.

$\therefore$ दुसरे पद $= ar = 3 \times 2 = 6$ ($\because$ पहिले पद $\times$ सामान्य गुणोत्तर)

याच प्रमाणे तीसरे पद = दुसरे पद $\times$ सामान्य गुणोत्तर

$= 6 \times 2 = 12$

जर आपण याच प्रकारे प्रक्रिया चालु ठेवली तर आपल्याला खालील भुमितीय श्रेढी मिळते.

$3, 6, 12, 24, \ldots\ldots$.

उदाहरण-17. जर $a = 256$, $r = \frac{-1}{2}$ तर भुमितीय श्रेढी लिहा.

सोडवणुक : भुमितीय श्रेढीचे सामान्य रुप $= a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots$

$$= 256, 256\left(\frac{-1}{2}\right), 256\left(\frac{-1}{2}\right)^2, 256\left(\frac{-1}{2}\right)^3$$

$$= 256, -128, 64, -32 \ldots\ldots$$

उदाहरण-18. $25, -5, 1, \frac{-1}{5}$ या भुमितीय श्रेढीचे सामान्य गुणोत्तर माहित करा.

सोडवणुक : सामान्य गुणोत्तर $a_1, a_2, a_3 \ldots.$ समान्य गुणोत्तर $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots..$

येथे $a_1 = 25$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$.

म्हणुन सामान्य गुणोत्तर $r = \frac{-5}{25} = \frac{1}{-5} = \frac{-1}{5}$.

उदाहरण-19. खालील पैकी कोणती संख्याची यादी ही भुमितीय श्रेढी आहे?

(i) $3, 6, 12, \ldots..$ (ii) $64, -32, 16,$

(iii) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

सोडवणुक : (i)जर प्रत्येक पद शुन्य नसेल आणि $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ...\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ तर आपल्याला माहित आहे की, $a_1, a_2, a_3, ...a_n .....$ या संख्याच्या यादीला भुमितीय श्रेढी म्हणतो.

येथे सर्व पदे शुन्य नाहीत

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2 \text{ आणि}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$$

म्हणजे $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 2$

म्हणुन दिलेली यादी ही भुमितीय श्रेढी आहे. ज्याचा सामान्य गुणोत्तर 2 आहे.

(ii) सर्व पदे शुन्य नाहीत

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-32}{64} = \frac{-1}{2}$$

आणि $\frac{a_3}{a_1} = \frac{16}{-32} = \frac{-1}{2}$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{2}$$

म्हणुन दिलेली यादी ही भुमितीय श्रेढी आहे. ज्याचा सामान्य गुणोत्तर $\frac{-1}{2}$ आहे.

(iii) सर्व पदे शुन्य नाहीत

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{64}} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{32}} = 4$$

येथे $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

म्हणुन दिलेली यादी भुमितीय श्रेढी आहे.

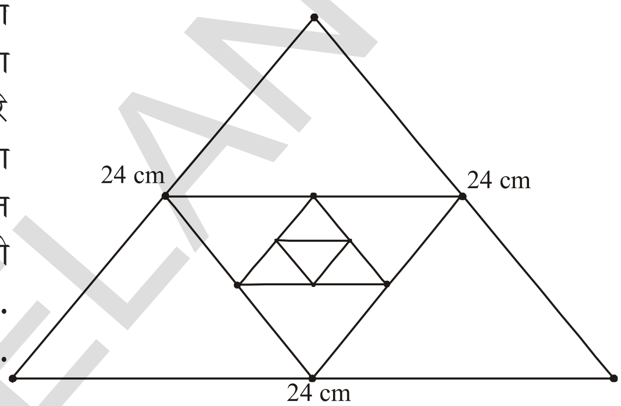
अभ्यास - 6.4

1. खालील कोणत्या संदर्भातील संख्याची यादी भुमितीय श्रेढीचे होते?

   (i) शर्मीला चा पहिल्या वर्षाचा पगार 5,00,000 रु. आहे आणि तिला दर वर्षी 10% ची वार्षिक वाढ मिळते.

   (ii) 30 पायऱ्या असलेल्या एका दादरच्या सर्वात खालची पायरी बांधायला 100 विटा लागतात. त्या पुढच्या प्रत्येक क्रमवार पायरीला मागील पायरी पेक्षा 2 विटा कमी लागतात. तर त्या प्रत्येक पायरी बांधण्यासाठी आवश्यक असलेल्या विटांची संख्या

   (iii) 24 से.मी. बाजु असलेल्या एका समभुज त्रिकोणाच्या मध्यबिंदुला जोडुन दुसरे त्रिकोण तयार केले, पुन्हा त्याच्या मध्यबिंदुला जोडुन तिसरे त्रिकोण तयार केले. ही प्रक्रिया अंनत पणे चालु ठेवली. पहिली, दुसरी, तीसरी,.... त्रिकोणाची परिमीती



2. पहिले पद 'a' आणि सामान्य गुणोत्तर 'r' दिलेले आहे तर भुमितीय श्रेढीची तीन पदे माहित करा

   (i) $a = 4;\quad r = 3$ (ii) $a = \sqrt{5};\ r = \frac{1}{5}$

   (iii) $a = 81;\ r = \frac{-1}{3}$ (iv) $a = \frac{1}{64};\ r = 2$

3. खालील पैकी कोणते भुमितीय श्रेढी मध्ये आहे? जर ते भुमितीय श्रेढी असेल तर पुढील तीन पदे माहित करा?

   (i) 4, 8, 16 ..... (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{12}$.....

   (iii) 5, 55, 555, ... (iv) –2, –6, –18 .....

   (v) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$..... (vi) $3, -3^2, 3^3$, ...

   (vii) $x, 1, \frac{1}{x}$,..... (viii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, \frac{8}{\sqrt{2}}$.....

   (ix) 0.4, 0.04, 0.004, ...

4. $x, x+2, x+6$ हे भुमितीय श्रेढीचे क्रमवार पदे आहेत तर x माहित करा?

6.6 भुमितीय श्रेढीचे n वे पद:

एक गणित पाहु. प्रति तासाला 3 पट वाढणारा एक रोगजंतु आहे. जर सुरुवातीला 30 रोगजंतु असेल तर 4 थ्या तासात रोगजंतुची संख्या किती होईल?

आपल्याला सुरुवातीला दुसऱ्या तासात किती होतील हे पाहावे लागणार

कारण प्रती तासाला हे तिप्पट हेतात.

दुसऱ्या तासामध्ये रोगजंतुची संख्या = 3 × पहिल्या तासातील रोगजंतुची संख्या

$= 3 \times 30 = 30 \times 3^1$

$= 30 \times 3^{(2-1)}$

$= 90$

तिसऱ्या तासामध्ये रोगजंतुची संख्या = 3 × दुसऱ्या तासातील रोगजंतुची संख्या

$= 3 \times 90 \qquad = 30 \times (3\times3)$

$= 30 \times 3^2 \qquad = 30 \times 3^{(3-1)}$

$= 270$

चौथ्या तासामध्ये रोगजंतुची संख्या = 3 × तिसऱ्या तासातील रोगजंतुची संख्या

$= 3 \times 270 \qquad = 30 \times (3\times3\times3)$

$= 30 \times 3^3 \qquad = 30 \times 3^{(4-1)}$

$= 810$

आपल्याला संख्याची यादी मिळते.

30, 90, 270, 810, ...

या संख्या भुमितीय श्रेढीत आहेत.(का?)

आता, वर तयार झालेल्या नमुन्याकडे पाहु, 20 व्या तासामध्ये रोगजंतुची संख्या तुम्ही माहित करु शकता का?

वरील नमुन्यावरुन रोगजंतुची संख्या कशी माहित करावी याची थोडीफार कल्पना तुम्हाला आलेली आहे. हाच नमुना वापरुन आपण 20 व्या तासामधील रोगजंतुची संख्या गणना करु या.

$$= 30 \times \underbrace{(3\times3\times\ldots\times3)}_{\text{19 terms}}$$

$$= 30 \times 3^{19} \qquad = 30 \times 3^{(20-1)}$$

भुमितीय श्रेढीचे 25 वे पद, 35 वे पद इतर पद आणि n वे कसे माहित करावे या उदाहरणावरुन तुम्हाला काही कल्पना आली असेलच.

समजा a_1, a_2, a_3 ...हे भुमितीय श्रेढीत आहेत. येथे पहिले पद a_1 हा a आणि सामान्य गुणोत्तर 'r' आहे.

तर दुसरे पद $a_2 = ar = ar^{(2-1)}$

तीसरे पद $a_3 = a_2 \times r = (ar) \times r = ar^2 = ar^{(3-1)}$

चौथे पद $a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3 = ar^{(4-1)}$

....

....

नमुन्याला पाहुन आपण असे म्हणु शकतो की, n वे पद $a_n = ar^{n-1}$

म्हणुन पहिले पद a आणि सामान्य गुणोत्तर 'r' असलेल्या भुमितीय श्रेढीचे n वे पद $a_n = ar^{n-1}$.

काही उदाहरणे विचारात घेऊ या.

उदाहरण-20. भुमितीय श्रेढीची 20 वे आणि n वे पद माहित करा.

$$\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8} \ldots\ldots$$

सोडवणुक : येथे $a = \frac{5}{2}$ आणि $r = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$

तर $a_{20} = ar^{20-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2^{20}}$

आणि $a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2^n}$

उदाहरण-21. 2, $2\sqrt{2}$, 4 ..... या भुमितीय श्रेढीचे कोणते पद 128 आहे?

सोडवणुक : येथे $a = 2$ $r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

समजा 128 भुमितीय श्रेढीचे n वे पद 128 आहे.

तर $a_n = ar^{n-1} = 128$

$2.(\sqrt{2})^{n-1} = 128$

$(\sqrt{2})^{n-1} = 64$

$(2)^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$

$$\Rightarrow \quad \frac{n-1}{2} = 6$$

$$\therefore \quad n = 13.$$

म्हणुन भुमितीय श्रेढीचे 13 वे पद 128 आहे.

उदाहरण-22. भुमितीय श्रेढीमध्ये 3 रे पद 24 आणि 6 वे पद 192 आहे तर 10 वे पद माहित करा.

सोडवणुक : येथे $a_3 = ar^2 = 24$ ...(1)

$a_6 = ar^5 = 195$ ...(2)

(2) ला (1)ने भाग देऊन $\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{195}{24}$

$$\Rightarrow \quad r^3 = 8 = 2^3$$

$$\Rightarrow \quad r = 2$$

(1) मध्ये $r = 2$ प्रतिक्षेपीत करुन आपल्याला $a = 6$ मिळते.

$\therefore\ a_{10} = ar^9 = 6(2)^9 = 3072.$

अभ्यास-6.5

1. प्रत्येक भुमितीय श्रेढीचे सामान्य गुणोत्तर 'r' माहित करुन a_n माहित करा.

   (i) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$......... (ii) $2, -6, 18, -54$

   (iii) $-1, -3, -9, -27$ .... (iv) $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}$.........

2. 5, 25, 125, ... या भुमितीय श्रेढीचे 10 वे आणि n वे पद माहित करा.

3. खालील प्रत्येक भुमितीय श्रेढीचे सुचित केलेले पद माहित करा.

   (i) $a_1 = 9;\ r = \frac{1}{3};\ a_7$ माहित करा (ii) $a_1 = -12;\ r = \frac{1}{3};\ a_6$ माहित करा

4. भुमितीय श्रेढीचे कोणते पद ?

   (i) 2, 8, 32, ... भुमितीय श्रेढीतील कोणते पद 512 आहे? (ii) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$ ...... भुमितीय श्रेढीतील कोणते पद 729 आहे?

   (iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$..... भुमितीय श्रेढीतील कोणते पद $\frac{1}{2187}$ आहे?

5. एका भुमितीय श्रेढीची 8 वे पद 192 आहे. सामान्य गुणोत्तर 2 आहे तर 12 वे पद माहित करा.

6. एका भुमितीय श्रेढीची 4थे पद $\frac{2}{3}$ आहे आणि 7वे पद $\frac{16}{81}$ आहे. तर भुमितीय श्रेढी माहित करा.

7. 162, 54, 18 ..... आणि $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}$.... जर या दोन्ही भुमितीय श्रेढीतील nवे पद समान असेल तर n ची किंमत माहित करा.

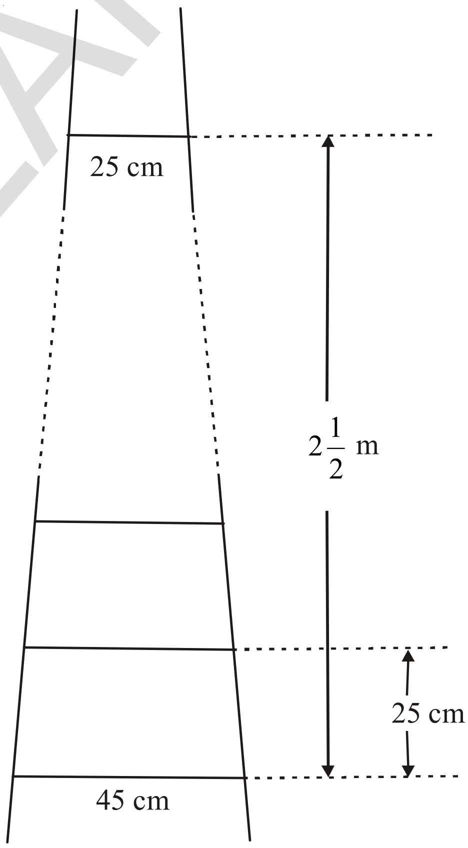
ऐच्छिक अभ्यास

[हा अभ्यास परिक्षेसाठी नाही]

1. 121, 117, 113, . . .या अंकगणितीय श्रेढीत कितवे पद पहिले ऋण पद होते?
[सुचना : $a_n < 0$ होण्यासारखे n किंमत काढा]

2. अंकगणितीय श्रेढीचे तिसरे आणि सातव्या पदाची बेरीज 6 आणि गुणाकार 8 आहे. तर अंकगणितीय श्रेढीचा पहिल्या 16 पदांची बेरीज माहित करा.

3. एका सिडीला 25 पायऱ्या आहेत. पायऱ्यांची लांबी खालपासुन वर पर्यंत एकाच पध्दतीने कमी होत आहे. खालपासुन पहिल्या पायरीची लांबी 45 सें.मी. आणि वर पासुन पहिल्या पायरीची लांबी 25 सें.मी. आहे. या दोन्हीच्या मधात $2\frac{1}{2}$ मी. अंतर आहे तर सर्व पायऱ्या बनवण्यासाठी किती लांबीचे लाकुड पाहिजे?
[सुचना : पायऱ्यांची संख्या = $\frac{250}{25} + 1$]

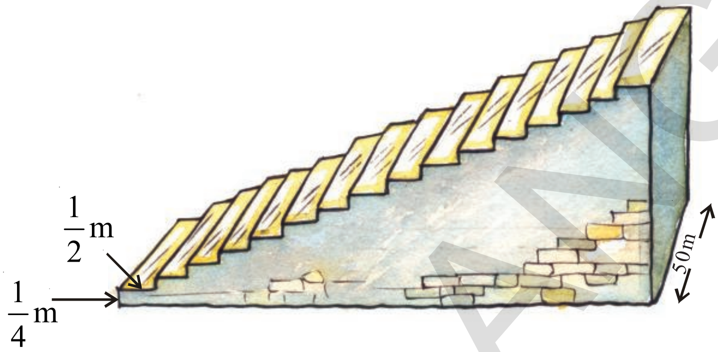


4. काही घर एका रांगेत आहेत. याला 1 ते 49 पर्यंतच्या संख्या देण्यात आल्या. कोणत्याही एका घराला दिलेल्या संख्याला x समजु या घरा अगोदर असलेल्या घरांच्या एकुण संख्याला नंतर असणाऱ्या एकुण घराच्या संख्येला समान होईल असा त्या घराला x म्हणुन दाखवा. आणि x ची किंमत माहित करा.
[सुचना : $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. खालील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एका फुटबॉल ग्रांऊड मध्ये 15 पायऱ्या असणारी एक सोपान (दादर) आहे. या मधील प्रत्येक पायरीची लांबी 50 मी. आणि रुंदी $\frac{1}{2}$ मी. आहे. पहिली पायरी

जमीनीपासुन $\frac{1}{4}$ मी. उंचीवर आहे आणि प्रत्येक पायरी त्याच्या समोर असलेल्या पायरीला $\frac{1}{4}$ मी. उंचीवर असलेल्या त्या पायऱ्यांच्या सोपानाला (दादरला) बांधण्यासाठी काँक्रीटचे घट्ट विटांचे एकुण किती घनफळ आवश्यक आहे?

[**सुचना :** पहिली पायरी बांधण्यासाठी पाहिजे असलेले काँक्रेट चे घनफळ = $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 50$ मी^{3}]



6. एका कामाला पुर्ण करण्यासाठी 150 मजुर लावण्यात आले. तर दुसऱ्या दिवशी 4 मजुर कामाला येणे बंद केले. तीसऱ्या दिवशी पुन्हा 4 मजुर बंद झाले. दररोज असे होत असल्याने ते काम पुर्ण होण्यासाठी आणखी 8 दिवसाची गरज पडली. तर ते काम पुर्ण होण्यासाठी एकुण किती दिवस लागले?

[काम पुर्ण होण्यासाठी लागणारे दिवस जर 'x' तर

$$150x = \frac{x+8}{2}[2\times 150 + (x+8-1)(-4)]$$

[उत्तर: $x = 17 \Rightarrow x+8 = 17+8 = 25$]

7. एका मशीनची किंमत 5,00,000 रु. जर पहिल्या वर्षी याची किंमतीत 15% ने घट झाली, दुसऱ्या वर्षी $13\frac{1}{2}$% नी घट, तिसऱ्या वर्षी 12% ने......याच प्रकारे घडत असेल तर 10 वर्षानंतर त्याची किंमत किती राहील? दिलेली टक्केवारी सुरुवातीला किमती वरच लावण्यात आली.

[एकुण घट = $15 + 13\frac{1}{2} + 12 + \ldots$ 10 पद

$$S_n = \frac{10}{2}[30 - 13.5] = 82.5\%$$

$\therefore$ 10 वर्षानंतर त्याची किंमत $= 100 - 82.5 = 17.5$ म्हणजेच 17.5% ला 5,00,000

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

1. दिलेली श्रेढी अंक श्रेढी आहे की नाही हे ग्रीड पेपरच्या साहाय्याने पडताळा करुन पहा.
2. ग्रीड पेपर चा उपयोग करुन एक अंक श्रेढीतील n पदांची बेरीज माहित करा.

आपण काय चर्चा केली.

या धड्यात आपण काय शिकलो खालील मुद्दे पाहु या.

1. एका संख्या यादीत पहिल्या पदा व्यतीरिक्त प्रत्येक मागील पदामध्ये एक ठराविक संख्या मिळवल्या नंतर प्रत्येक पद मिळते अशा संख्याच्या यादीला अंकगणितीय श्रेढी म्हणतात. ठराविक संख्येला सामान्य भेद d म्हणतात.

   अंकगणितीय श्रेढीतील पद क्रमाने $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$

2. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ संख्याच्या यादीत $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots,$ किंमतीला समान असलेला म्हणजे $a_{k+1} - a_k$ kची किंमत स्थिर असेल तर त्याला अंकगणितीय श्रेढी म्हणतात.

3. पहिले पद a आणि सामान्य भेद d असलेल्या अंकगणितीय श्रेढीचे nवे पद $a_n = a + (n-1)d$.

4. अंकगणितीय श्रेढीत पहिल्या n पदाची बेरीज

   $$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5. एका अंकगणीतीय श्रेढीतील शेवटच्या पदाची बेरीज l असल्यास पदांची बेरीज

   येथे n पदांची संख्या

   $$S = \frac{n}{2}(a + l).$$

6. एका संख्याच्या यादीत पहिल्या पदा व्यतीरिक्त प्रत्येक मागील पदाला एका ठराविक संख्याने गुणल्या नंतर प्रत्येक पद मिळते. अशा संख्याच्या यादील भुमितीय श्रेढी म्हणतात. या ठराविक संख्येला सामान्य गुणोत्तर'r' म्हणतात.

   भुमितीय श्रेढीचे सामान्य रुप $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots.$

7. भुमितीय श्रेढीचे पहिले पद a आणि सामान्य गुणोत्तर r असते तर त्याचे n वे पद $a_n = ar^{n-1}$.

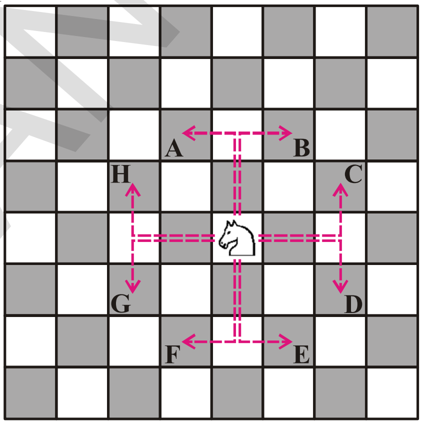
धडा
7

निर्देशांक भुमिती

(Coordinate Geometry)

7.1 प्रस्तावना

तुम्हाला माहित आहे की, बुध्दीबळाच्या (चेस) खेळात घोडा 'L' आकारात किंवा अडीच घरे सरकतो. (आकृती पहा) तो इतर दोन दोन घरावरुन उडी मारु शकतो. त्याच प्रमाणे उंट कर्णाच्या दिशेने जेवढे घर रिकामे आहे तेवढे तो समोर सरकतो.



इतर प्यादे कसे सरकतात माहित करा. बोर्डवर घोड्याचे स्थान,उंट आणि इतर प्यादाचे स्थान निश्चित करा. आणि ते कसे सरकतात ते पहा.समजा घोडा हा आरंभबिंद (0,0) वर आहे. आकृतीत तुटक रेषेने दाखविल्याप्रमाणे तो 4 ही दिशेत सरकतो. आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे विविध दिशेत सरकवुन त्याच्या स्थानाचे निर्देशक माहित करा.

हे करा

i. आकृतीवरुन A, B, C, D, E, F, G, H या बिंदुचे निर्देशक लिहा.

ii. 8 वेळा सरकविल्यानंतर घोड्याच्या सरकन्याचे कापलेले अंतर म्हणजेच A, B, C, D, E, F, G आणि H या बिंदुचे आरंभबिंदु पासुन अंतर काढा.

iii. H आणि C या दोन बिंदुमधील अंतर काय आहे? A आणि B या दोन बिंदुमधील अंतर सुध्दा काढा.

7.2 दोन बिंदुमधील अंतर (Distance Between Two Points)

(2, 0)आणि (6, 0) हे दोन बिंदु आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे X-अक्षावर आहेत.

A आणि B बिंदुमधील अंतर 4 एकक हे आहे.हे बघणे सोपे आहे.

आपण म्हणु शकतो की, X-अक्षावरील बिंदुमधील अंतर हेच x- निर्देशकामधील फरक होय.

(−2, 0) आणि (−6, 0) या बिंदुमधील अंतर काय आहे?

x-निर्देशकाच्या किंमती मधील फरक

(−6) − (−2) = −4 आहे. आपण अंतर ऋण किंमतीत दाखवत नाही.

म्हणुन आपण त्या अंतराचे खरे मुल्य माहित करतो.

म्हणुन अंतर

$= |(-6) - (-2)| = |-4| = 4$ एकक

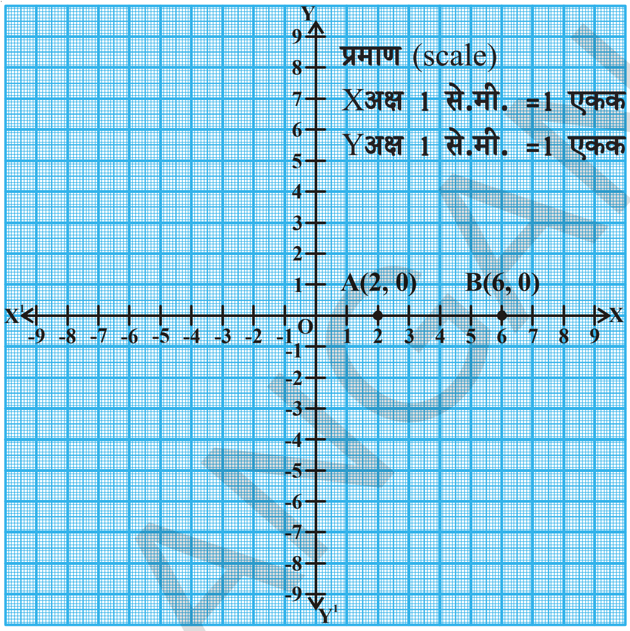
म्हणुन साधारणत: $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ या X-अक्षावरील बिंदुसाठी A आणि B बिंदुमधील अंतर $|x_2 - x_1|$ आहे.

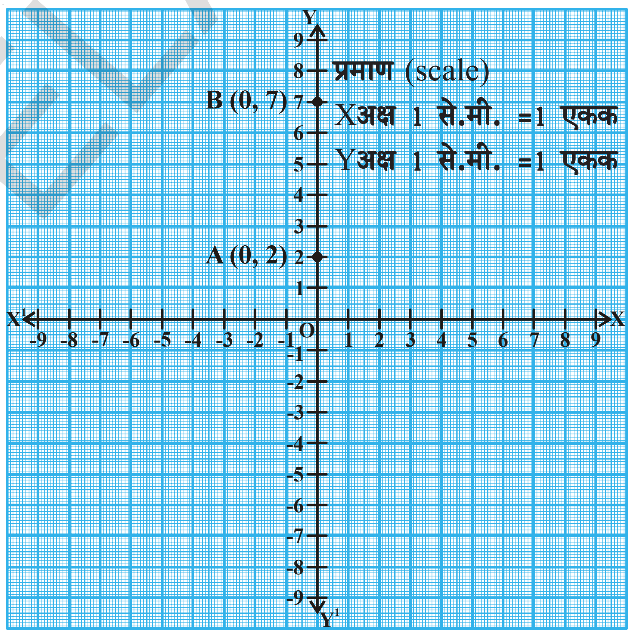
अशारितीने जर दोन बिंदु Y-अक्षावर असल्यास A आणि B बिंदुमधील अंतर हे त्या बिंदुच्या Y- निर्देशांकामधील फरक आहे.

$(0, y_1)$ $(0, y_2)$ या दोन बिंदुतील अंतर $|y_2 - y_1|$ होते.

उदाहरणार्थ समजा A(0, 2) आणि B(0, 7) हे दोन बिंदु आहेत.

A आणि B या बिंदुतील अंतर $|7 - 2| = 5$ एकक आहे.





हे करा

1. (−4, 0), (2, 0), (6, 0) आणि (−8, 0)हे बिंदु प्रतलात कुठे आहेत?
2. प्रतला मधील (−4, 0) आणि (6, 0) या बिंदुमधील अंतर काय आहे?

प्रयत्न करा

1. (0, –3), (0, –8), (0, 6) आणि (0, 4) हे प्रतलात बिंदु कुठे आहेत?
2. प्रतला मधील (0, –3), (0, –8) या बिंदुतील अंतर काय आहे? त्याच प्रमाणे Y-अक्षावरील दोन बिंदुमधील अंतर $|y_2 - y_1|$ आहे. असे सांगु शकता का?

विचार करा-चर्चा करा

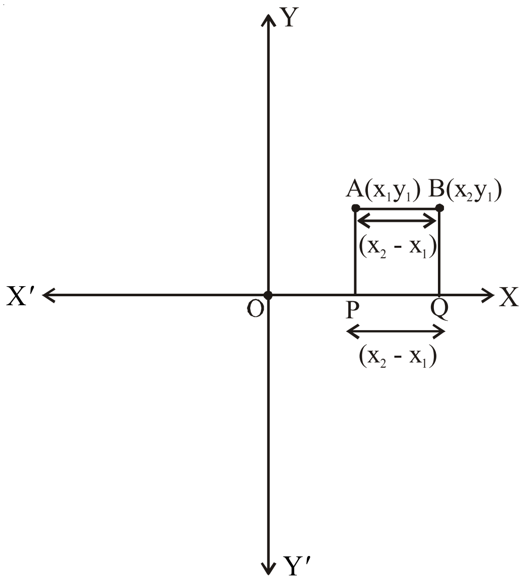
दोन बिंदुतील x किंवा y निर्देशक शुन्य नसुन परंतु समान असल्यास त्या दोन मधील अंतर तुम्ही कसे काढाल?

7.3 निर्देशक अक्षाला समांतर असलेल्या रेषेवरील दोन बिंदु मधील अंतर:

$A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_1)$ बिंदु घ्या. या दोन्ही बिंदुचे y-निर्देशक समान असल्यामुळे ते बिंदु X-अक्षावर समांतर असलेल्या रेषेवर असतात.

X-अक्षावर लंब AP आणि BQ काढले आहेत.

आकृती कडे पहा. A आणि B या दोन बिंदुमधील अंतर हे P आणि Q या दोन बिंदुमधील अंतराला समान आहे.



म्हणुन

अंतर AB = अंतर PQ

$= |x_2 - x_1|$ (म्हणजेच x - निर्देशाकातील फरक)

अशा रितीने $A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_1, y_2)$ या दोन बिंदुना जोडणारी रेषा Y-अक्षाला समांतर आहेत. या दोन बिंदुमधील अंतर $|y_2 - y_1|$ आहे.

(म्हणजेच y निर्देशकमधील फरक)

उदाहरण-1. A (4,0) आणि B (8, 0) या बिंदुमधील अंतर किती?

सोडवणुक: x निर्देशकमधील फरक $|x_2 - x_1| = |8 - 4| = 4$ एकक आहे.

उदाहरण-2. A आणि B बिंदु दिले (8, 3), (–4, 3) आहे. तर A आणि B बिंदुमधील अंतर काढा.

सोडवणुक: येथे x_1 आणि x_2 हे बिंदु दोन भिन्न चरणात आहे. आणि y- निर्देशक समान आहेत.

AB मधील अंतर $= |x_2 - x_1| = |-4 - 8| = |-12| = 12$ एकक

हे करा

1.खालील बिंदुमधील अंतर माहित करा.

i. (3, 8), (6, 8) ii. (–4,–3), (–8,–3) iii.(3, 4), (3, 8) (iv) (–5, –8), (–5, –12)

समजा A आणि B हे (4, 0) आणि (0, 3) बिंदु दर्शविते आणि 'O' हा आरंभबिंदु आहे.

ΔAOB हा काटकोन त्रिकोन आहे. आकृती वरुन

OA = 4 एकक (x-निर्देशक)

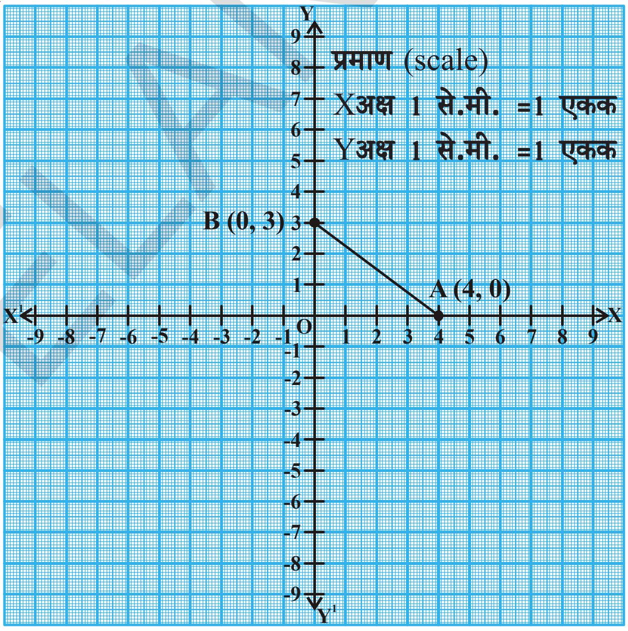
OB = 3 एकक (y-निर्देशक)

तर AB चे अंतर किती?

म्हणुन पायथागोरसच्या नियमानुसार

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = 4^2 + 3^2$



$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\,\text{units} \Rightarrow$ A आणि B बिंदुमधील अंतर आहे.

हे करा

खालील बिंदुमधील अंतर काढा. (i) A = (2, 0) आणि B(0, 4) (ii) P(0, 5) आणि Q(12, 0)

प्रयत्न करा

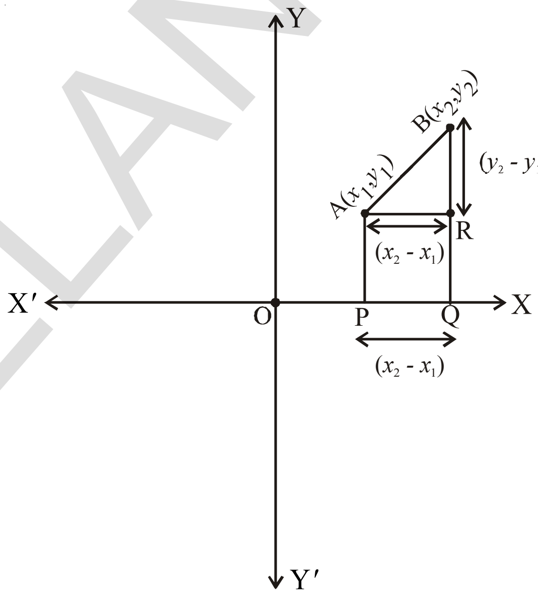
'O' (आरंभबिंदु) आणि 'A' (7, 4) या बिंदुमधील अंतर काढा.

विचार करा-चर्चा करा

1. रामु म्हणाला की, केंद्रबिंदु $O(0, 0)$ पासुन $P(x_1, y_1)$ बिंदुचे अंतर $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ आहे. तुम्ही रामु सोबत सहमत आहात का नाही? का?
2. रामुने अंतर माहित करण्याचे सुत्र $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ असे लिहिले (का?)

7.4 X-Y प्रतलातील कोणत्याही दोन बिंदुमधील अंतर:

आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे $A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ हे प्रतलातील (रेषेवर) कोणतेही दोन बिंदु आहेत.



X-अक्षावर AP आणि BQ लंब काढा.

A बिंदुपासुन BQ वर R बिंदुवर मिळणारा लंब AR काढा.

तर $OP = x_1$, $OQ = x_2$

म्हणुन $PQ = OQ - OP = x_2 - x_1$

APQR चा आकार पहा. तो आयत आहे.

म्हुणन $PQ = AR = x_2 - x_1$.

पुन्हा $QB = y_2$, $QR = y_1$,

म्हणुन $BR = QB - QR = y_2 - y_1$

ΔARB मध्ये (कोटकोन, त्रिकोण)

$AB^2 = AR^2 + RB^2$ (पा.गो.पा.च्या सिध्दतानुसार)

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

म्हणुन $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

म्हणुन A आणि B बिंदुमधील अंतर

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ आहे.

यालाच अंतर काढण्याचे सुत्र म्हणतात.

उदाहरण-3. A(4, 2) आणि B(8, 6) या दोन बिंदुमधील अंतर माहित करु या.

सोडवणुक: A(4, 2) आणि B(8, 6) या बिदुंची तुलना (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) या बिंदुशी करा.

$x_1 = 4,\ x_2 = 8, y_1 = 3, y_2 = 6$

अंतराच्या काढण्याच्या सुत्रावरुन

$$= d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

AB मधील अंतर $= \sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ एकक

हे करा

खालील दिलेल्या बिंदुच्या जोडीमधील अंतर माहित करा.

(i) (7, 8) आणि (−2, 3) (ii) (−8, 6) आणि (2, 0)

प्रयत्न करा

A(1, −3) आणि B(−4, 4) या बिंदुमधील अंतर काढा आणि दोन दशांसा पर्यत लिहा.

विचार करा- चर्चा करा

प्रशांतने T(5, 2) आणि R(−4, −1) या देान बिंदुमधील माहित केलेले दशांश 9.5 एकक च्या जवळ आहे.

आता तुम्ही P (4, 1) आणि Q (-5, -2) या दोन बिदुमधील अंतर काढा. तुम्हाला प्रशांत सारखेच उत्तर आले का? कारण?

चला काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-4. A (4, 2), B (7, 5) आणि C (9, 7) हे तिन्ही बिंदु एकाच रेषेवर आहेत. ते दाखवा.

सोडवणुक: आता आपण AB, BC, AC मधील अंतर माहित करु

अंतर काढण्याच्या सुत्रानुसार $= d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

म्हणुन $= AB = \sqrt{(7-4)^2+(5-2)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$= \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$ एकक

$BC = \sqrt{(9-7)^2+(7-5)^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ एकक

$AC = \sqrt{(9-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$= \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$ एकक

आता $AB + BC = 3\sqrt{2}+2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$ म्हणुन (4, 2), (7, 5) आणि (9, 7) हे तीन बिंदु सरळ रेषेवर आहेत. (एकाच रेषेवर असणाऱ्या बिंदुच्या एकरेषीय बिंदु म्हणतात)

उदाहरण-5. (3, 2), (–2, –3) आणि (2, 3) या बिंदुनी त्रिकोण तयार होतो का?

सोडवणुक: PQ, QR आणि PR,चे अंतर माहित करण्यासाठी लांबी काढण्याचे सुत्र वापरु येथे P(3, 2), Q(–2, –3) आणि R(2, 3) हे दिलेले बिंदु आहेत.

$PQ = \sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 7.07$ एकक(अंदाजे)

$QR = \sqrt{(2-(-2))^2+(3-(-3))^2} = \sqrt{(4)^2+(6)^2} = \sqrt{52} = 7.21$ एकक(अंदाजे)

$PR = \sqrt{(2-3)^2+(3-2)^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} = 1.41$ एकक (अंदाजे)

केाणत्याही दोन बाजुच्या लांबीची बेरीज ही तिसऱ्या बाजुच्या लांबीपेक्षा जास्त आहे. म्हणुन P, Q आणि R बिंदुनी त्रिकोण बनतो. आणि त्रिकोणाच्या सर्व बाजु असमान आहेत.

उदाहरण-6. (1, 7), (4, 2), (–1, –1) आणि (–4, 4) हे चौरसाचे शिरोबिंदु आहेत. हे दाखवा.

सोडवणुक: समजा A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) आणि D(–4, 4) हे दिलेले बिंदु आहेत.

ABCD चौरस आहे. याच्या गुणधर्मानुसार त्यांच्या सर्व बाजु समान असल्या पाहिजेत आणि त्यांचे कर्ण सुध्दा समान असायला पाहिजे.

म्हणुन $AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ एकक

$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ एकक

$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ एकक

$$DA = \sqrt{(-4-1)^2+(4-7)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \text{ एकक}$$

आणि कर्ण $AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ एकक

$$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} \text{ एकक}$$

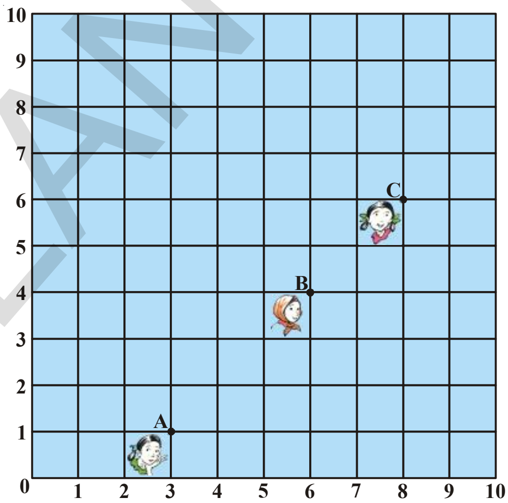
कारण $AB = BC = CD = DA$ आणि $AC = BD$ म्हणुन चौकोन ABCD च्या चारही बाजु समान आहेत आणि त्यांचे कर्ण AC आणि BD देखील समान आहेत. म्हणुन ABCD हा चौरस आहे.

उदाहरण-7. खालील आकृतीत वर्ग खोलीतील डेस्कची मांडणी दाखविलेली आहे.

माधुरी, मिना, पल्लवी या अनुक्रम A(3, 1), B(6, 4) आणि C(8, 6) या बिंदुवर बसलेल्या आहेत.

ते रेषत बसल्या आहे असे तुम्हाला वाटते का?

तुमच्या उत्तरासाठी कारणे द्या.



सोडवणुक: अंतर काढण्याच्या सुत्रानुसार

$AB = \sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ एकक

$BC = \sqrt{(18-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ एकक

$AC = \sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ एकक

कारण $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = AC$ आहे. आपण म्हणु शकतो की, A, B आणि C बिंदु एकरेषीय आहेत. म्हणुन ते एकाच रेषेत बसलेले आहेत.

उदाहरण-8. (x, y) हा बिंदु (7, 1) आणि (3, 5) बिंदु पासुन समान अंतरावर असल्यास x आणि y मधील संबंध माहित करा.

सोडवणुक $P(x, y)$ हा बिंदु A(7, 1) आणि B(3, 5) या बिंदुपासुन समान अंतरावर दिलेला आहे.

$AP = BP$ म्हणुन $AP^2 = BP^2$

म्हणजेच $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

म्हणजेच $(x^2 - 14x + 49) + (y^2 - 2y + 1) = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25)$

$(x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50) - (x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34) = 0$

$-8x + 8y = -16$

म्हणजेच $x - y = 2$ हा येणारा संबंध आहे.

उदाहरण-9. A(6, 5) आणि B(– 4, 3) या बिंदुपासुन समान अंतरावर असलेला y-अक्षावर बिंदु माहित करा.

सोडवणुक: आपणास माहित आहे की, Y-अक्षावरील बिदु $(0, y)$ या रुपात आहे.

समजा $P(0, y)$ हा बिंदु A आणि B पासुन समान अंतरावर आहे. तर

$$PA = \sqrt{(6-0)^2 + (5-y)^2}$$

$$PB = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-4)^2}$$

$$PA^2 = PB^2$$

म्हणन $(6 - 0)^2 + (5 - y)^2 = (- 4 - 0)^2 + (3 - y)^2$

म्हणजेच $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

म्हणजेच $4y = 36$

म्हणजेच $y = 9$

म्हणुन आवश्यक बिंदु (0, 9) आहे.

सोडवणुकीचा पडताळा पाहु या : $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

म्हणुन (0, 9) हा बिंदु (6, 5) आणि (4, 3) पासुन समान अंतरावर आहे.

अभ्यास 7.1

1. खालील दिलेल्या बिंदुच्या जोडीतील अंतर काढा.

   (i) (2, 3) आणि (4, 1) (ii) (–5, 7) आणि (–1, 3)

   (iii) (–2, –3) आणि (3, 2) (iv) (a, b) आणि $(-a, -b)$

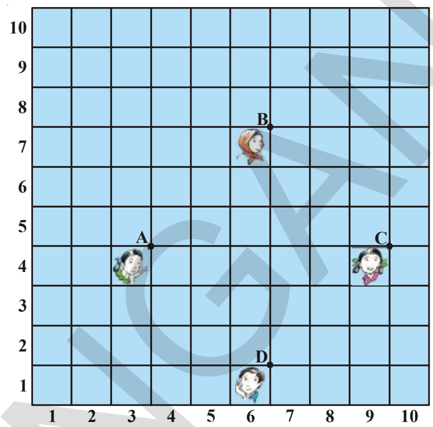
2. (0, 0) आणि (36, 15) या बिंदुमधील अंतर काढा.

3. (1, 5), (2, 3) आणि (–2, –1) हे बिंदु एकरेषीय आहे किंवा नाही पडताळा करा.

4. (5, −2), (6, 4) आणि (7, −2) हे समव्दिभुज त्रिकोनाचे शिरोंबिंदु आहे किंवा नाही तपासणी करा.

5. एका वर्गातील चार मित्र A, B, C आणि D या स्थानावर आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे बसलेले आहेत. झरीना आणि फनी वर्गात इकडे तिकडे फिरत थोड्या वेळाने झरीनाने फनीला विचारले, ABCD हा चौरस आहे असे तुम्हा लक्षात आले नाही का? फनी याशी सहमत नव्हता.

अंतर काढण्याच्या सुत्राचा वापर करुन कोणाचे उत्तर बरोबर आहे. ते माहित करा.



6. A(a, 0), B($-a$, 0), C(0, $a\sqrt{3}$) या बिंदुनी समभुज त्रिकोण तयार होतो हे दाखवा.

7. (−7, −3), (5, 10), (15, 8) आणि (3, −5) हे समांतर भुज चौकोनाचे शिरोबिंदु आहेत. हे सिध्द करा आणि त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

8. (−4, −7), (−1, 2), (8, 5) आणि (5, −4) हे समभुज चौकोनाचे शिरोंबिंदु आहेत. हे दाखवा.

(सुचना समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}\times$ कर्णाचा गुणाकार)

9. खालील दिलेल्या बिंदुवरुन तयार होणाऱ्या चौकोनाच्या प्रकाराचे नाव द्या आणि तुमच्या उत्तरासाठी कारणे द्या.

(i) (−1, −2), (1, 0), (−1, 2), (−3, 0)   (ii) (−3, 5), (3, 1), (0, 3), (−1, −4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

10. (2, −5) आणि (−2, 9) या बिंदुपासुन समान अंतरावर असलेल्या x-अक्षावरील बिंदु काढा.

11. जर (x, 7) आणि (1, 15) या बिंदुमधील अंतर 10 आहे तर x ची किंमत काढा.

12. P(2, −3) आणि Q(10, y) या बिंदुमधील अंतर 10 एकक असल्यास y ची किंमत काढा.

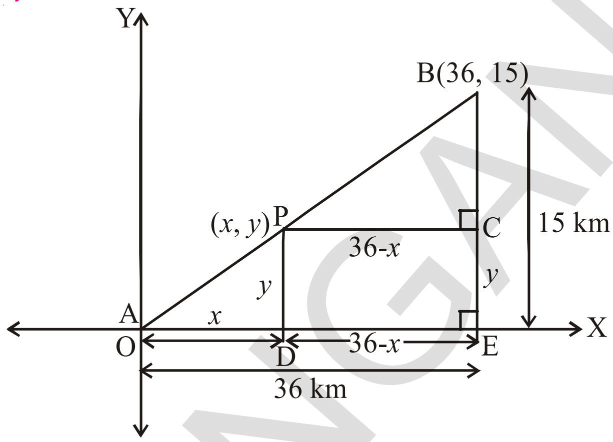
13. (−5, 6) बिंदुतुन जाणाऱ्या आणि (3, 2) केंद्रबिंदु असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

14. (1, 5), (5, 8) आणि (13, 14) या शिरोंबिंदु पासुन तुम्ही त्रिकोण काढु शकता का? कारणे द्या?

15. (x, y) हा बिंदु (−2, 8) आणि (−3, −5) या बिंदुपासुन समान अंतरावर असल्यास x आणि y मधील संबंध माहित करा.

7.5 विभाजनाचे सुत्र (SECTION FORMULA)

एका टेलीफोन कंपनीला A आणि B मध्ये P या ठिकाणी एक रिले टॉवर तयार करायचे आहे. त्यांनी A पासुन P पर्यंत अंतरापेक्षा दुप्पट P पासुन B मधील अंतर ठेवायचे हेते. जर P बिंदु AB रेषेवर AB ला 1 : 2 (आकृती पहा) गुणोत्तरात विभागते.जर A बिंदुला आरंभबिंदु O घेतल्यास दोन्ही अक्षावर 1 कि.मी. ला एक एकक घेतल्यास B चे निर्देशक (36, 15) होते. टॉवरचे स्थान माहित करण्यासाठी आपण P चे निर्देशक माहित असणे आवश्यक आहे. हे निर्देशक आपण कसे माहित करु शकतो ?



समजा P चे निर्देशक (x, y)आहे. P आणि B वरुन x-अक्षावर D आणि E वर मिळणारे लंब काढा.BE ला लंब असणारे रेषा PC काढा. आता, त्रिकोनाच्या कोन, कोन समरुपतेच्या नियमानुसार ΔPOD आणि ΔBPC सारखे आहेत.

म्हणुनच $\dfrac{OD}{PC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$ आणि $\dfrac{PD}{BC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$

म्हणुन $\dfrac{x}{36-x} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \dfrac{y}{15-y} = \dfrac{1}{2}$.

$2x = (36 - x)$ $\qquad 2y = 15 - y$

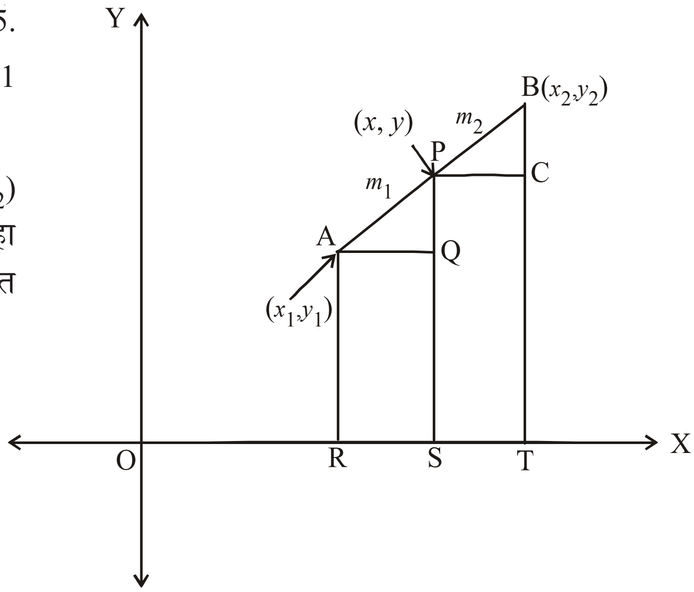
$3x = 36$ $\qquad 3y = 15$

$x = 12$ $\qquad y = 5$

या समीकरणावरुन $x = 12$ आणि $y = 5$.

P(12, 5) बिंदु रेषेला OP : PB = 1 : 2 विभागले या अटीचे समाधान होते.

समजा $A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ कोणतेही दोन बिंदु घेऊन. P (x, y) हा बिंदु AB ला आतुन $m_1 : m_2$ गुणोत्तरात विभागते असे गृहीत धरु.



म्हणजेच $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m_1}{m_2}$ ..... (1)

(आकृती पहा).

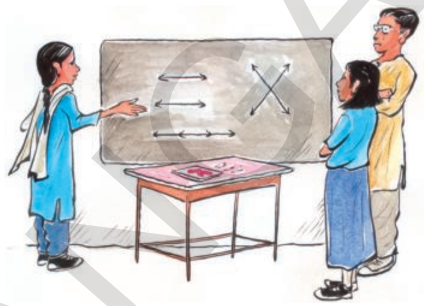
AR, PS आणि BT हे x-अक्षावर लंब काढा.

AQ आणि PC हे X-अक्षाला समांतर काढा.नंतर त्रिकोणाच्या कोन, कोन समरुपतेच्या गुणधर्मानुसार

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

म्हणन $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{PC} = \dfrac{PQ}{BC}$ .....(2)

आता, $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$



$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$

$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

या किंमतींना (1) मध्ये ठेवल्यास

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \quad \left[\because \frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2} \text{ from(1)}\right]$$

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$, घेऊन $x = \dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$ येते.

अशा रितीने $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$, घेऊन $y = \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$ येते.

अशारितीने $A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ या बिंदुना जोडणाऱ्या रेषेला $P(x, y)$ बिंदु $m_1 : m_2$ गुणोत्तरात आतुन विभागतो. त्याचे निर्देशक

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$ आहेत.....(3)

यालाच **विभाजन सुत्र** असे म्हणतात.

A, P आणि B बिंदुवरुन Y-अक्षावर लंब काढुन सुध्दा हे सुत्र काढता येते.

जर P बिंदु AB ला $k : 1$ गुणोत्तरात विभागल्यास P चे निर्देशक

$\left(\dfrac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \dfrac{ky_2 + y_1}{k + 1}\right)$ आहेत.

विशेष संदर्भ : एका रेषाखंडाचा मध्यबिंदु त्या रेषाखंडाला 1 : 1 गुणोत्तरात विभागते. म्हणुन $A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ या दोन बिंदुना जोडणाऱ्या मध्यबिंदु P चे निर्देशक

$$\left(\frac{1.x_1+1.x_2}{1+1}, \frac{1.y_1+1.y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{आहेत}$$

या विभाजन सुत्राच्या आधारावर काही उदाहरणे सोडवु या.

उदाहरण-10. (4, –3) आणि (8, 5) या बिंदुनी तयार झालेल्या रेषाखंडाला 3 : 1 गुणोत्तरात आतुन विभागणाऱ्या बिंदुचे निर्देशक काढा.

सोडवणुक: समजा आवश्यक बिंदु $P(x, y)$ आहे. विभजन सुत्रानुसार

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right) \text{येते.}$$

$$x = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = 7,$$

$$y = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$P(x, y) = (7, 3)$ हा येणारा बिंदु आहे.

उदाहरण-11. (3, 0) आणि (-1, 4) या बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचा मध्यबिंदु माहित करा.

सोडवणुक: (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) जोडणाऱ्या रेषाखंडाचा मध्यबिंदु $M(x, y)$ आहे.

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$\therefore$ (3, 0) आणि (–1, 4) या बिंदुना जोडणारा रेषाखंडाचा मध्यबिंदु

$$M(x, y) = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1, 2) \text{ आहे.}$$

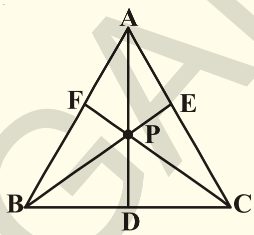
हे करा

1 (3, 5) आणि (8, 10) बिंदुना जोडणारा आणि रेषाखंडाला 2 : 3 गुणोत्तरात आतुन विभागणारा बिंदु माहित करा.

2. (2, 7) आणि (12, –7) जोडणारा रेषाखंडाचा मध्यबिंदु माहित करा.

प्रयत्न करा

समजा A(4, 2), B(6, 5) आणि C(1, 4) हे ΔABC चे शिरोंबिंदु आहे.

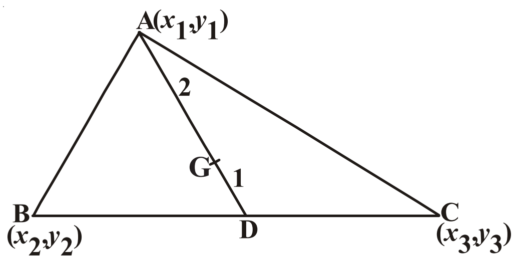


1. A पासुन BC वर काढलेली मध्यगा D वर मिळते. तर D बिंदुचे निर्देशक काढा.
2. AP : PD = 2 : 1 होईल अशा AD रेषेवरील P बिंदुचे निर्देशक काढा.
3. BE आणि CF मध्यगावरील Q आणि R बिंदुचे निर्देशक काढा.
4. BE रेषाखंडाला 2 : 1 गुणोत्तरात विभागणाऱ्या बिंदुचे निर्देशक काढा,आणि CF ला 2 : 1 गुणोत्तरात विभागणाऱ्या बिंदुचे सुध्दा निर्देशक काढा.
5. तुम्हाला काय आढळुन आले ?

एका त्रिकोणाच्या प्रत्येक मध्यगाला 2 : 1 गुणोत्तरात विभागणारा बिंदु त्या त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य होते. सहमती दर्शवा

7.6 त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य (Centroid of a Triangle)

त्रिकोणातील मध्यगांच्या छेदनबिंदुला गुरुत्वमध्य असे म्हणतात.



समजा $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ आणि $C(x_3, y_3)$ हे त्रिकोण ABC चे शिरोबिंदु आहे.

समजा AD ही मध्यगा त्याच्या पायाला समव्दिभागाने. तर

$$D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

AD वरील G बिंदु 2 : 1 गुणोत्तरात आतुन विभागतो तोच बिंदु गुरुत्वमध्य आहे. जर (x, y) हे G, चे निर्देशक आहे, तर

$$G(x, y) = \left[\frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1(y_1)}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right]$$

म्हणुन, गुरुत्वमध्याचे निर्देशक

$$\left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right] \text{आहेत.}$$

उदाहरण-12. (3, –5), (–7, 4), (10, –2) हे त्रिकोणानाचे शिरोंबिंदु आहे. तर त्या त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य माहित करा.

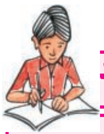
सोडवणुक गुरुत्व मध्याचे निर्देशक

$$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \text{आहेत.}$$

गुरुत्वामध्ये चे बिंदु (3, –5), (–7, 4) आणि (10, –2).

$$\left(\frac{3+(-7)+10}{3}, \frac{(-5)+4+(-2)}{3}\right) = (2, -1)$$

$\therefore$ गुरुत्वमध्य (2, –1) आहे.



हे करा

(–4, 6), (2, –2) आणि (2, 5) अनुक्रमे त्रिकोणाचे शिरोंबिंदु आहे. तर त्या त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य काढा.

प्रयत्न करा

(2, 3), (x, y), (3, –2) हे त्रिकोणाचे शिरोंबिंदु आहे. जर गुरुत्व मध्य आरंभबिंदु (x, y) असल्यास तर (x, y) ची किंमत काढा.

उदाहरण-13. A(– 6, 10) आणि B(3, – 8) बिंदुना जोडणाऱ्या रेषेला (– 4, 6) बिंदु कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो?

सोडवणुक: समजा (– 4, 6) बिदु AB रेषेला $m_1 : m_2$ गुणोत्तरात आतुन विभागतो. विभाजन सुत्राव्दारे

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad .....(1)$$

जर $(x, y) = (a, b)$ तर $x = a$ आणि $y = b$.

म्हणन $\quad -4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ आणि $6 = \dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$

आता $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ येते

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

म्हणजे $7m_1 = 2m_2$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

म्हणजे $m_1 : m_2 = 2 : 7$

गुणोत्तर हे y- निर्देशकांचे सुध्दा समाधान करणे याची आपण पडताळणी करु शकतो.

आता $\dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{-8\dfrac{m_1}{m_2} + 10}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}$ (m_2 ने भागल्यास)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = \frac{\frac{-16}{7} + 10}{\frac{9}{7}} = \frac{-16 + 70}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

म्हणुन (–4, 6) बिंदु हा A(–6, 10) आणि B (3, –8) बिंदुना जोडणाऱ्या रेषेला 2 : 7गुणोत्तरात विभागते

विचार करा- चर्चा करा

A(6, 9) आणि B(–6, –9) बिंदुना जोडणारा रेषाखंड दिला आहे.

(a) आंरभबिदु $\overline{AB}$ ला कोणत्या गुणोत्तरात विभागते ? $\overline{AB}$ ला काय म्हणतात ?

(b) P(2, 3) बिंदु $\overline{AB}$ ला कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो ?

(c) Q(–2, –3) बिंदु $\overline{AB}$ कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो ?

(d) P आणि Qव्दारे भागल्यामुळे $\overline{AB}$ किती समान भागात विभागल्या जाते ?

(e) P आणि Q ला $\overline{AB}$ चे काय म्हणतात ?

7.7 रेषेचा त्रिभाजन बिंदु (Trisectional Points of a Line)

एका रेषाखंडाला तीन समान भागात विभागणाऱ्या बिंदुला त्रिभाजन बिदु म्हणतात.

उदाहरण-14. A(2,–2) आणि B(–7, 4)या बिदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या त्रिभाजन बिंदुचे निर्देशक माहित करा

सोडवणुक समजा P आणि Q हे AB रेषाखंडाचे त्रिभाजन बिंदु आहे. म्हणजेच AP=PQ=QB (खालील आकृती पहा).

म्हणुन P बिंदु AB ला 1 : 2 गुणोत्तरात आतुन विभागले.

म्हणुन विभाजन सुत्रानुसा P चे निर्देशक

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$

म्हणजे $\left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$

आता Q बिंदु सुध्दा AB ला 2:1गुणोत्तरात आतुन विभागते.

म्हणुन Q चे निर्देशक

$$= \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$

म्हणजेच $\left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$

म्हणुन रेषाखंडाच्या त्रिभाजन बिंदुचे निर्देशक P(-1, 0) आणि Q(-4, 2) आहे.

हे करा

1. (2, 6) आणि (–4, 8)या बिदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे त्रिभाजन बिंदु काढा.
2. (–3, –5) आणि (–6, –8) या बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे त्रिभाजन बिंदु काढा.

उदाहरण-15. (5, –6) आणि (-1, –4) या बिदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला y- अक्ष कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो हे माहित करुन त्यांचा त्रिभाजन बिंदु सुध्दा काढा.

सोडवणुक : समजा गुणोत्तर K : 1 आहे. विभाजन सुत्रानुसार AB ला K : 1 गुणोत्तर विभागणाऱ्या बिंदुचे निर्देशक

$$\left(\frac{K(-1)+1(5)}{K+1}, \frac{K(-4)+1(-6)}{K+1}\right) \text{आहेत.}$$

म्हणजे $\left(\frac{-K+5}{K+1}, \frac{-4K-6}{K+1}\right)$

हा बिंदु y-अक्षावर असतो.आणि y- अक्षावरील भुजा 0 असते.

म्हणुन $\frac{-K+5}{K+1} = 0$

$-K + 5 = 0 \Rightarrow K = 5.$

म्हणुन, गुणोत्तर K : 1 = 5 : 1

K = 5 ठेवल्यास आपणास त्रिभाजन बिंदु

$$= \left(\frac{-5+5}{5+1}, \frac{-4(5)-6}{5+1}\right) = \left(0, \frac{-20-6}{6}\right) = \left(0, \frac{-26}{6}\right) = \left(0, \frac{-13}{3}\right) \text{ येते.}$$

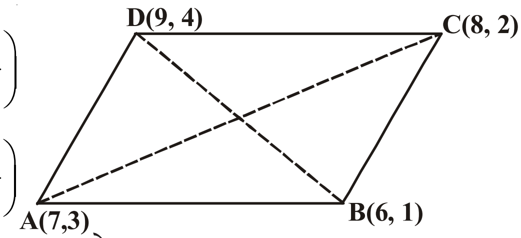
उदाहरण-16. A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2) आणि D(9, 4) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदु आहेत. दर्शवा.

सोडवणुक : समजा A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2) आणि D(9, 4) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोंबिंदु आहे.

समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस दुभागतात हे आपणास माहित आहे.

∴ कर्णाचे मध्यबिंदु AC आणि DB सारखे असायला हवे

AC हे DB मध्यबिंदु $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ या सुत्रावरुन काढता येते.



AC चा मध्यबिंदु $= \left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

DB चा मध्यबिंदु $= \left(\frac{9+6}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

AC चा मध्यबिंदु आणि DB चा मध्यबिंदु सारखा असतो.

म्हणुन A, B, C, D हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोंबिंदु आहेत.

उदाहरण-17. जर A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) आणि D(p, 3) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोंबिंदु आहे तर p ची किंमत काढा.

सोडवणुक : समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस दुभागतात हे आपणास माहित आहे.

म्हणुन AC = च्या मध्यबिंदुचे निर्देशक = BD च्या मध्यबिंदुचे निर्देशक

म्हणजे $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

$$15 = 8 + p \Rightarrow p = 7.$$

अभ्यास - 7.2

1. (–1, 7) आणि (4, –3) बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला 2 : 3 गुणोत्तरात विभागणाऱ्या बिंदुचे निर्देशक काढा.
2. (4, –1) आणि (–2, –3) या बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या त्रिभाजन बिंदुचे निर्देशकमाहित करा.
3. (–3, 10) आणि (6, –8) या बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला (–1, 6) बिंदु कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो हे माहित करा.
4. जर (1, 2), (4, y), (x, 6) आणि (3, 5) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोंबिदु आहे. तर x आणि yच्या किंमती काढा.
5. AB व्यास असलेल्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदु (2, –3) आणि त्या वर्तुळावर असलेला एक बिंदु B (1, 4)तर A चे निर्देशक माहित करा.
6. जर A आणि B अनुक्रमे (–2, –2) आणि (2, –4) आहेत. AB रेषाखंडावर AP = $\frac{3}{7}$ ABहोईल. अशा P बिदुचे निर्देशक काढा.
7. A(–4, 0) आणि B(0, 6) बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला चार समान भागात विभागणाऱ्या बिंदुचे निर्देशक काढा.

8. $A(-2, 2)$ आणि $B(2, 8)$ या बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला चार समान भागात विभागणाऱ्या बिंदुचे निर्देशक माहित करा.

9. $(a + b, a - b)$ आणि $(a - b, a + b)$ या बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला $3 : 2$ गुणोत्तरात आतुन विभागणाऱ्या बिंदुचे निर्देशक काढा.

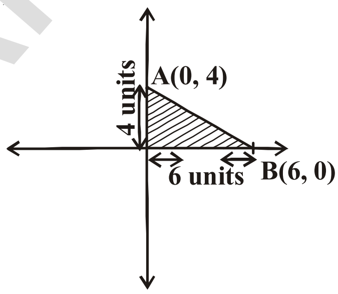
10. खालील शिरोबिंदु असलेल्या त्रिकोणाच्या गुरुत्वमध्याचे निर्देशक माहित करा.

i. (-1, 3), (6, -3) आणि (-3, 6) ii. (6, 2), (0, 0) आणि (4, -7)

iii. (1, -1), (0, 6) आणि (-3, 0)

7.8 त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (Area of the Triangle)

आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे A(0, 4) आणि B(6, 0) आरंभबिंदु O ने एक त्रिकोण तयार होतो.



ΔAOB चे क्षेत्रफळ किती?

ΔAOB हा काटकोन त्रिकोण असुन त्याचा पाया 6 एकक आहे. (म्हणजेच x निर्देशक) आणि उंची 4 एकक (म्हणजेच y निर्देशक).

$$\therefore \ \Delta AOB\text{चे क्षेत्रफळ} = \frac{1}{2}\times\text{पाया}\times\text{उंची}$$

$$= \frac{1}{2}\times 6\times 4 = 12 \ \text{चौरसाचे एकक}$$

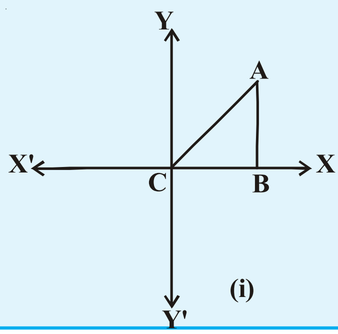
प्रयत्न करा

X-अक्षावर A बिंदु आणि Y-अक्षावर B बिंदु घ्या. आणि त्रिकोण AOB चे क्षेत्रफळ काढा. तुमचे मित्र ते कसे करतात याची मित्रासोबत चर्चा करा.

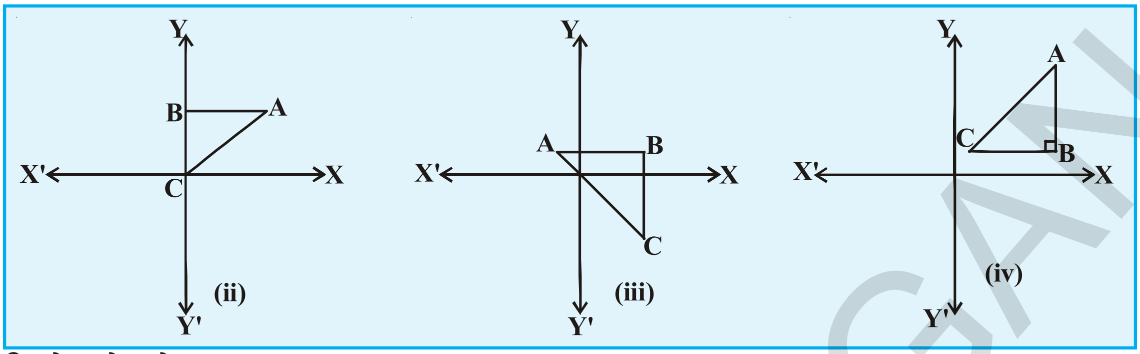
विचार करा- चर्चा करा

समजा $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ आहेत.

तर प्रतलातील खालील त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा. या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाची चर्चा तुमच्या मित्रांसोबत गट पाडुन करा.



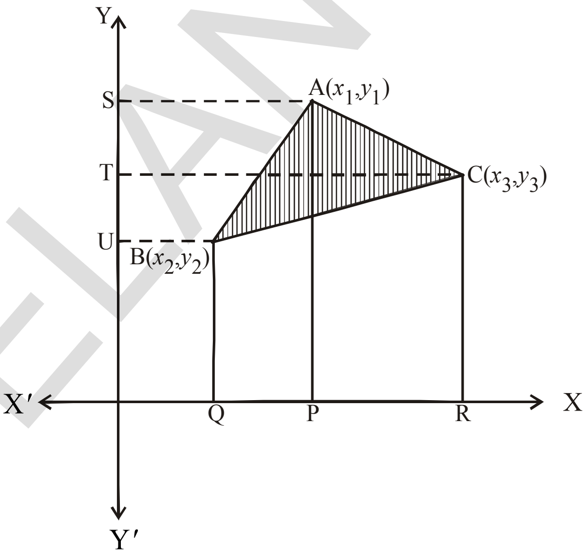
(i)



त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

समजा ABC एक कोणताही त्रिकोण असुन $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ आणि $C(x_3, y_3)$ हे त्याचे शिरोंबिदु आहेत.

A, B आणि C बिंदुवरुन अनुक्रमे x-अक्षावर AP, BQ आणि CR लंब काढा.



ABQP, APRC आणि BQRC हे सर्व समलंब चौकोन आहेत.

आकृतीवरुन स्पष्ट होते की,

ΔABC चे क्षेत्रफळ= समलंब चौकोन ABQP चे क्षेत्रफळ + समलंब चौकोन APRC चे क्षेत्रफळ – समलंब चौकोन BQRC चे क्षेत्रफळ

$\because$ समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ (समांतर बाजुचे बेरीज) (त्यामधील अंतर)

$$\Delta ABC\text{चे क्षेत्रफळ} = \frac{1}{2}(BQ+AP)QP + \frac{1}{2}(AP+CR)PR - \frac{1}{2}(BQ+CR)QR \quad .... (1)$$

आकृतीवरुन

$BQ = y_2,\ AP = y_1,\ QP = OP - OQ = x_1 - x_2$

$CR = y_3,\ PR = OR - OP = x_3 - x_1$

$QR = OR - OQ = x_3 - x_2$

म्हणुन ΔABCचे क्षेत्रफळ [(1) वरुन]

$$= \frac{1}{2}\left|(y_2+y_1)(x_1-x_2) + \frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1) - \frac{1}{2}(y_3+y_3)(x_3-x_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\right|$$

ΔABC चे क्षेत्रफळ ही

$$\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-18. (1, –1), (–4, 6) आणि (–3, –5) शिरोंबिंदु असलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

सोडवणुक : $\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$

A(1, –1), B(–4, 6) आणि C(–3, –5) ने तयार झालेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ सुत्रावरुन दिले आहे.

$$= \frac{1}{2}\left|1(6+5)+(-4)(-5+1)+(-3)(-1-6)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|11+16+21\right| = 24$$

म्हणुन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 24 चौ.एकक आहे.

उदाहरण-19. A(5, 2), B(4, 7) आणि C(7, –4) बिंदुनी तयार होणाऱ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

सोडवणुक: A(5, 2), B(4, 7) आणि C(7, –4) या बिदुनी तयार झालेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

$$\frac{1}{2}\left|5(7+4)+4(-4-2)+7(2-7)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|55-24-35\right| = \left|\frac{-4}{2}\right| = \left|-2\right|$$

कारण क्षेत्रफळ हे माप आहे आणि ते ऋण नसते. म्हणुन आपणास खरी किंमत म्हणजे $|-2| = 2$. घ्यावी लागते.

म्हणुन, त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = 2 चौ.एकक

हे करा

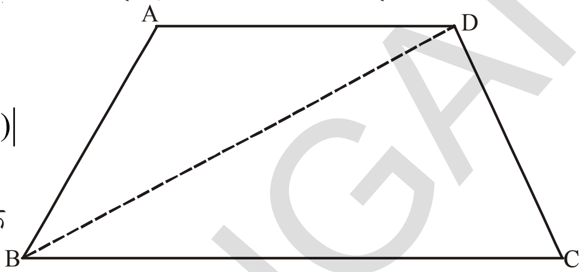
खालील दिलेल्या शिरोंबिंदु वरुन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

(5, 2) (3, –5) आणि (–5, –1)

(6, –6), (3, –7) आणि (3, 3)

उदाहरण-20. जर A(–5, 7), B(–4,–5), C(–1, –6) आणि D(4,5) हे चौकोनाचे शिरोंबिदु आहेत तर ABCD चौकोनाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

सोडवणुक : B आणि Dला जोडल्यास ABD आणि BCD हे दोन त्रिकोण तयार होतात.



ΔABD चे क्षेत्रफळ

$$= \frac{1}{2}\left|-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)\right|$$

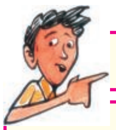
$$= \frac{1}{2}\left|50+8+48\right| = \frac{|106|}{2} = 53$$ चौ.एकक

ΔBCDचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}\left|-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|44-10+4\right| = 19$$ चौ.एकक

म्हणुन ABCD चौकोनाचे क्षेत्रफळ = ΔABD चे क्षेत्रफळ + ΔBCD चे क्षेत्रफळ

53+19 = 72 चौ.एकक



प्रयत्न करा

(0, –1), (2, 1) (0, 3) आणि (–2, 1) नी तयार झालेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ काढा.

विचार करा - चर्चा करा

खाली दिलेल्या बिंदुनी तयार झालेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

(i) (2, 0), (1, 2), (1, 6)

(ii) (3, 1), (5, 0), (1, 2)

(iii) (–1.5, 3), (6, 2), (–3, 4)

तुम्हाला काय आढळुन आले?

या बिंदुना तीन वेगवेगळ्या आलेखावर विस्थापन करा. तुम्हाला काय दिसुन येते?

शुन्य चौरस एकक असलेला त्रिकोण काढु शकता का?

याचा अर्थ काय आहे?

7.8.1. बिंदुची एकरेषीयता (COLLINEARITY)

एका सरळ रेषेत असणाऱ्या बिंदुना एकरेषीय बिंदु म्हणतात. जर $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ आणि $C(x_3, y_3)$ हे तीन बिंदु रेषेवर आहे. तर ते त्रिकोण तयार करु शकत नाही. म्हणजे ΔABC चे क्षेत्रफळ शुन्य असते.

जेव्हा त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ शुन्य असते तेव्हा त्या तीन्ही बिंदुना एकरेषीय बिंदु म्हणतात.

उदाहरण-21. (3, –2) (–2, 8) आणि (0, 4) हे प्रतलातील तीन बिंदु आहेत. हे बिंदु एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

सोडवणुक : त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या सुत्रावरुन

$$\Delta = \frac{1}{2}|3(8-4)+(-2)(4-(-2))+0((-2)-8)|$$

$$= \frac{1}{2}|12 - 12| = 0$$

त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळ 0 आहे. म्हणुन तीन बिंदु एकरेषीय किंवा एकाच रेषेवर आहेत.

हे करा

खालील बिंदु एकरेषीय आहे किंवा नाही याची पडताळणी करा.

(i) (1, –1), (4, 1), (–2, –3)

(ii) (1, –1), (2, 3), (2, 0)

(iii) (1, –6), (3, –4), (4, –3)

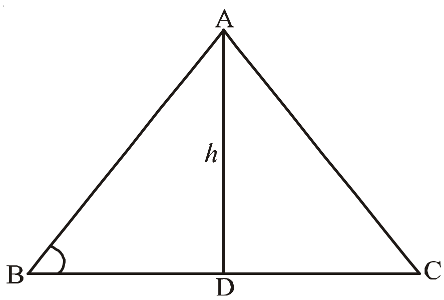
7.8.2. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ-हेरानचे सुत्र (AREA OF A TRIANGLE- 'HERON'S FORMULA')

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ माहित करण्याचे सुत्र $\frac{1}{2} \times$.पाया x उंची

कोणताही दिलेला त्रिकोण हा काटकोन त्रिकोण, समभुज त्रिकोण आणि समव्दिभुज त्रिकोण असु शकतो. आपण त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढु शकतो का?

जर पाया आणि उंची माहित असल्यास आपण वरील सुत्रावरुन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढु शकतो.

उंची (h) माहित नसल्यास आपण त्याचे क्षेत्रफळ कसे काढतो?

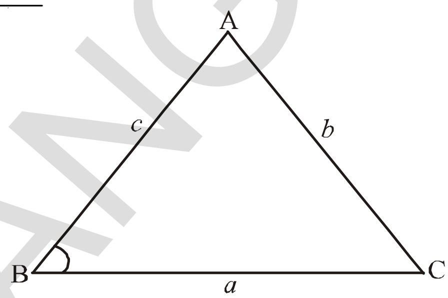


यासाठी प्राचीन ग्रीक गणित शास्त्रज्ञ हेरान यांनी एक सुत्र शोधुन काढले. यात a, b आणि c त्रिकोणाच्या बाजु आहेत.

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}, \text{ येथे } \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

उदाहरणार्थ 12मी.,9मी.,5मी., बाजुंची लांबी असलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हेरान च्या सुत्रानुसार काढता येते.

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ येथे } \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$



$$S = \frac{12+9+15}{2} = \frac{36}{2} = 18\text{मी.}$$

तर $s - a = 18 - 12 = 6$मी.

$s - b = 18 - 9 = 9$मी.

$s - c = 18 - 15 = 3$मी.

$$A = \sqrt{18(6)(9)(3)} = \sqrt{2916} = 54 \text{ चौरस मीटर}$$

हे करा

(i) 15मी, 17मी, 21मी. बाजुंची लांबी असलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (हेरानचे सुत्र वापरुन) काढा. आणि $A = \frac{1}{2}bh$ या सुत्रावरुन आलेल्या उत्तराची पडताळणी करा.

(ii) (0, 0), (4, 0), (4, 3) या बिंदुनी तयार झालेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हेरानच्या सुत्रावरुन काढा.

उदाहरण-22. A(1, 2), B(−1, b), C(−3, −4) एकरेषीय बिंदु आहेत. तर‘b’ ची किंमत काढा.

सोडवणुक : समजा A(1, 2), B(−1, b), C(−3, −4) हे बिंदु दिलेले आहेत.

तर $x_1 = 1, y_1 = 2;$ $\quad x_2 = -1, y_2 = b;$ $\quad x_3 = -3, \ y_3 = -4$

$$\Delta \text{ चे क्षेत्रफळ } = \frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$$

$$\therefore \ \Delta ABC \text{ चे क्षेत्रफळ } \frac{1}{2}|1(b+4)+(-1)(-4-2)+(-3)(2-b)| = 0 \quad (\because \text{ दिलेले बिंदु एकरेषीय आहेत})$$

$$|b + 4 + 6 - 6 + 3b| = 0$$

$$|4b + 4| = 0$$

$$4b + 4 = 0$$

$$\therefore b = -1$$

अभ्यास - 7.3

1. खालील दिलेल्या त्रिकोणाच्या शिरोंबिंदु वरुन त्याचे क्षेत्रफळ काढा.
   (i) (2, 3) (–1, 0), (2, –4) (ii) (–5, –1), (3, –5), (5, 2)
   (iii) (0, 0), (3, 0) and (0, 2)
2. खाली दिलेले बिंदु एकरेषीय आहेत तर 'K' ची किंमती काढा.
   (i) (7, –2) (5, 1) (3, K) (ii) (8, 1), (K, –4), (2, –5)
   (iii) (K, K) (2, 3) आणि (4, –1).
3. (0, –1), (2, 1) आणि (0, 3) शिरोंबिंदु असलेल्या त्रिकोणाच्या बाजुच्या मध्यबिंदुना जोडणाऱ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळाचे काढा. दिलेल्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाशी गुणोत्तर काढा.
4. (–4, –2), (–3, –5), (3, –2) आणि (2, 3) हे चौकोनाचे शिरोंबिंदु आहे. तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा
5. (2, 3), (6, 3) आणि (2, 6) या बिंदुनी बनलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हेरानच्या सुत्रावरुन काढा.

7.9 सरळ रेषा (Straight Lines)

भारव्दाज आणि मीना हे दोघे दोन चलीय रेषीय समीकरण सोडविण्याबद्दल चर्चा करीत आहे.

भारव्दाज : $2x + 3y = 12$ ची उकल माहित करु शकता का?

मीना : होय, मी केले आहे पहा

x	0	3	6	–3
y	4	2	0	6

$$2x+3y = 12$$

$$3y = 12 - 2x$$

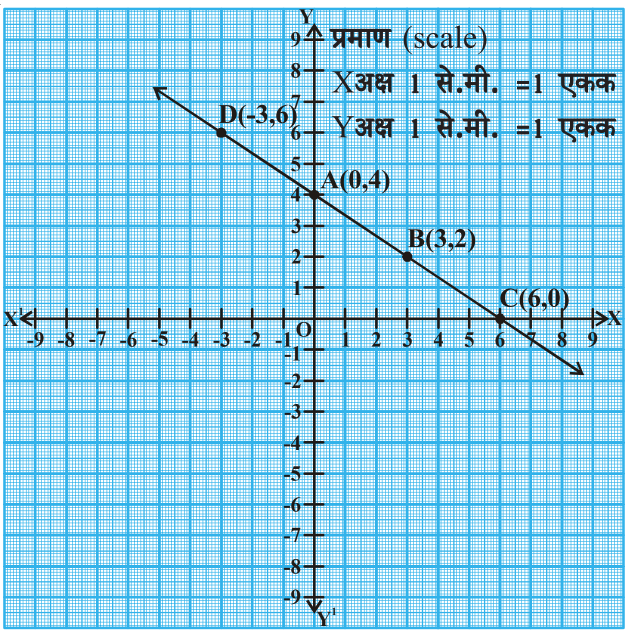
$$y = \frac{12-2x}{3}$$

मीना : या उकलींना क्रमीक जोडीत लिहु शकता का?

भारव्दाज : होय, (0, 4), (3, 2), (6, 0), (–3, 6)

मीना तु हे बिंदु निर्देशक प्रतलात विस्थापन करु शकते काय?

मीना : मी यास अशाप्रकारे केले आहे.



भारव्दाज: तुमच्या निदर्शनास काय आले? ही रेषा काय दर्शविते?

मीना : ही एक सरळ रेषा आहे

भारव्दाज : या रेषेवरील अजुन काही बिंदु ओळखु शकता काय?

या रेषेवरील काही बिंदु शोधण्यासाठी तुम्ही मीनाला मदत करु शकता काय?

.................., ..., ..., ...

या रेषेत $\overline{AB}$ ला काय म्हणतात?

$\overline{AB}$ हा एक रेषाखंड आहे.

हे करा

खालील बिंदुना निर्देशक प्रतळावर विस्थापुन त्यास जोडा.

1. A(1, 2), B(−3, 4), C(7, −1)
2. P(3, −5) Q(5, −1), R(2, 1), S(1, 2)

कोणता रेषाखंड होतो? कोणता होत नाही? का?

विचार करा - चर्चा करा

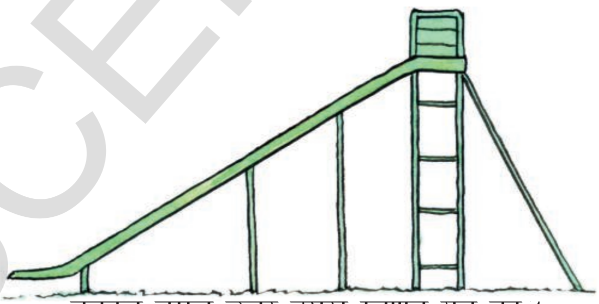
$y = x + 7$ ही सरळ रेषा दर्शविते का? निर्देशक प्रतलात रेषा काढा.

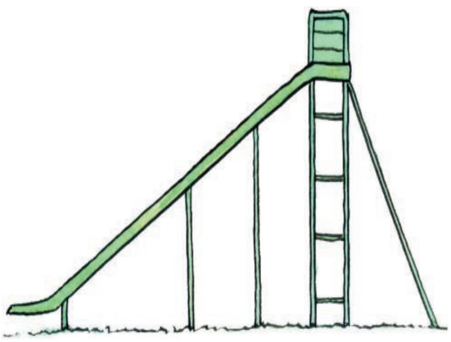
ही रेषा Y- अक्षावर कोणत्या बिंदुवर छेदते?

X-अक्षाशी तो कितीचा कोन करतो? तुमच्या मित्रांशी याची चर्चा करा?

7.9.1 सरळ रेषेचा चढ (Slope of the straight line)

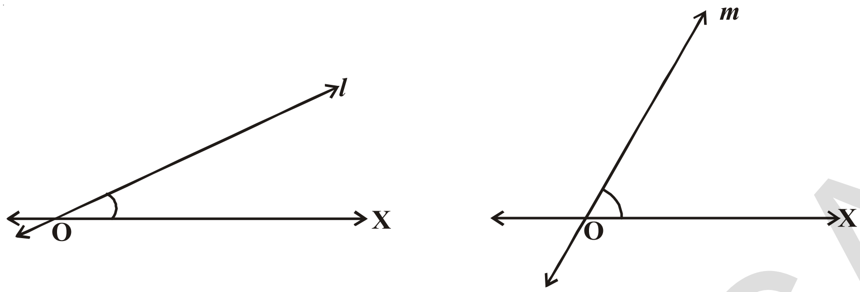
तुम्ही बगीच्यात घसरणारी शिढी पाहिलीच असाल. येथे दोन घसरणाऱ्या शिढ्या दिल्या आहेत. कोणत्या शिढीवरुन वेगात घसरता येते?





नक्कीच तुमचे उत्तर दुसरी म्हणुन येते का?

या रेषांचे निरिक्षण करा.



OX शी कोणती रेषा जास्त कोन करते?

"m" रेषा ही 'l' रेषेपेक्षा OX शी जास्त कोन करते.

'm' रेषेचा चढ 'l' रेषेपेक्षा जास्त आहे. रेषेच्या घसरणाऱ्या शब्दास चढ असे म्हणतात.

रेषेचा चढ आपण कसा माहित करु शकतो?

कृती

आकृतीतील रेषेचे निरिक्षण करुन त्यावरील बिंदुना ओळखुन खालील तक्ता भरा.

x निर्देशक	1	-	-	4	-
y निर्देशक	2	3	4	-	6

x निर्देशक बदलल्यामुळे y निर्देशक सुध्दा बदलत आहे. आपणास दिसुन येते.

y निर्देशक $y_1 = 2$ पासुन $y_2 = 3$, पर्यंत वाढल्यास

y मधील बदल = ...

तेव्हा त्यासमान 'x' मधील बदल = ...

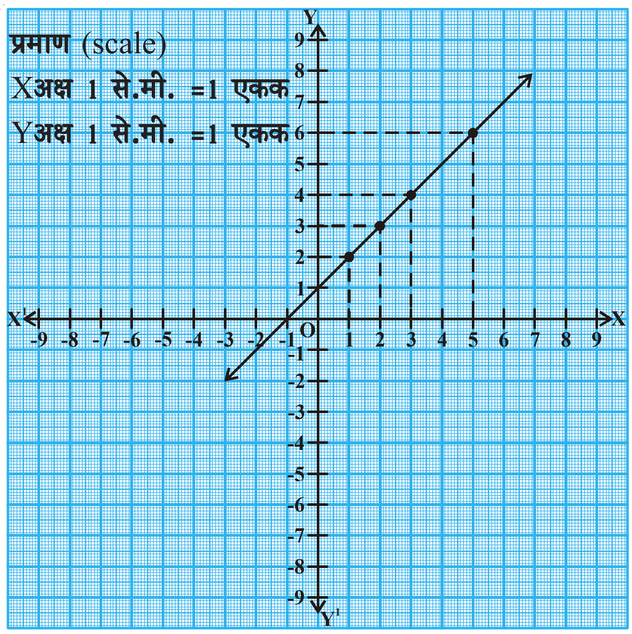
$\therefore \frac{y \text{ मधील बदल}}{x \text{ मधील बदल}}$ ....

yनिर्देशक $y_1 = 2$ पासुन $y_3 = 4$ पर्यंत वाढल्यास

म्हणुन y मधील बदल = ...

त्या समान x मधील बदल ....

म्हणुन $\frac{y \text{ मधील बदल}}{x \text{ मधील बदल}}$ ....



त्या रेषेवर अजुन काही बिंदु ओळखुन कोणत्याही दोन बिंदुना घेऊन खालील तक्ता भरा.

y किंमत		y मधील बदल	x	x मधील बदल		$\frac{\imath\, y}{\imath\, x}$ मधील बदल
2	4	-	1	2	1	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

वरील कृतीवरुन काय निश्कर्ष काढु शकता?

एका रेषेवरील y मधील फरकापासुन x मधील फरकांच्या गुणोत्तराचा संबंध आहे आणि X-अक्षाशी त्याचे केलेल्या कोनाच्या संबंध आहे.

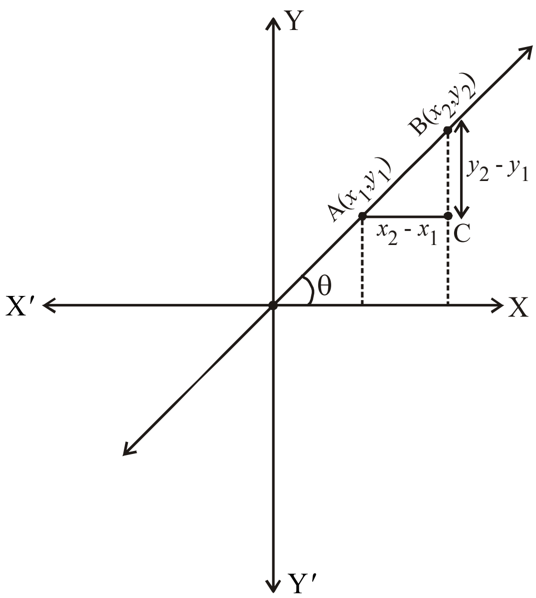
तुम्ही त्रिकोनमीती वरुन $\tan\theta$ बद्दल शिकणार आहात.

म्हणजेच $\tan\theta = \dfrac{\theta \text{ कोनाची विरुध्द बाजु}}{\theta \text{ कोनाची लगतची बाजु}} = \dfrac{y \text{ मधील बदल}}{x \text{ मधील बदल}}$

7.9.2 दोन बिंदुना जोडणाऱ्या रेषेचा चढ (Slope of a line joining Two Points)

समजा $A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ हे दोन बिंदु आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे 'l' रेषेवर आहेत.

रेषेचा चढ$= \frac{\imath\, y}{\imath\, x}$ मधील बदल



$\overline{AB}$ चा चढ$= m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

चढ ला 'm' ने दर्शवितात आणि 'l' रेषा X-अक्षाशी θ कोन करते.

म्हणुन रेषाखंड AB हा AC वर θ कोन करतो.

$$\therefore \tan\theta = \frac{\theta \text{ कोनाची विरुध्द बाजु}}{\theta \text{ कोनाची लगतची बाजु}}$$

$$= \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

$$\therefore m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ बिंदुनी तयार होणाऱ्या $\overline{AB}$ रेषाखंडाचा चढ काढण्याचे सुत्र आहे.

जर रेषांनी X-अक्षावर केलेला कोन θ आहे. तर $m = \tan\theta$.

उदाहरण-22. एका रेषाखंडाचे अंत्य बिंदु (2, 3), (4, 5) आहेत तर त्या रेषाखंडाचा चढ काढा.

सोडवणुक : रेषेचे अंत्यबिंदु (2, 3), (4, 5) आहेत. तर रेषाखंडाचा चढ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

दिलेल्या रेषाखंडाचा चढ 1 आहे.

हे करा

खालील दिलेल्या अंत्यबिंदुवरुन $\overleftrightarrow{AB}$ चा चढ काढा.

1. A(4, –6) B(7, 2)
2. A(8, –4), B(–4, 8)
3. A(–2, –5), B(1, –7)

प्रयत्न करा

खालील दिलेले बिंदु $\overleftrightarrow{AB}$ आहेत. तर त्याचा चढ काढा.

1. A(2, 1), B(2, 6)
2. A(–4, 2), B(–4, –2)
3. A(–2, 8), B(–2, –2)
4. वरील तिन उदाहरणातील दिलेल्या बिंदुपासुन तयार झालेल्या रेषाखंड $\overleftrightarrow{AB}$ हा Y-अक्षाशी समांतर आहे. हे खरे आहे की, त्यांच्या चढा बद्दल तुम्ही काय म्हणता? का?

विचार करा- चर्चा करा

A(3, 2), (–8, 2) बिंदु रेषेवर आहे का? $\overleftrightarrow{AB}$ चा चढ काढा.

$\overline{AB}$ रेषाखंड X-अक्षावर समांतर केव्हा असतो? का?

तुमच्या मित्रासोबत चर्चा करा.

उदाहरण-23. P(2, 5) आणि Q(x, 3) बिंदुतुन जाणाऱ्या रेषेचा चढ 2 आहे. तर x ची किंमत काढा.

सोडवणुक: P(2, 5) आणि Q(x, 3) बिंदुतुन जाणाऱ्या रेषेचा चढ 2 आहे.

येथे $x_1 = 2,\ y_1 = 5,\quad x_2 = x,\ y_2 = 3$

$$\text{चा चढ } \overline{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{x-2} = \frac{-2}{x-2} \Rightarrow \frac{-2}{x-2} = 2$$

$$\Rightarrow -2 = 2x - 4 \qquad \Rightarrow 2x = 2 \qquad \Rightarrow x = 1$$

अभ्यास - 7.4

1. खालील दिलेल्या दोन बिंदु मधुन रेषेचा चढ माहित करा.
   (i) $(4, -8)$ आणि $(5, -2)$
   (ii) $(0, 0)$ आणि $(\sqrt{3}, 3)$
   (iii) $(2a, 3b)$ आणि $(a, -b)$
   (iv) $(a, 0)$ आणि $(0, b)$
   (v) $A(-1.4, -3.7)$, $B(-2.4, 1.3)$
   (vi) $A(3, -2), B(-6, -2)$
   (vii) $A\left(-3\frac{1}{2}, 3\right)$, $B\left(-7, 2\frac{1}{2}\right)$
   (viii) $A(0, 4), B(4, 0)$

ऐच्छिक अभ्यास

[परिक्षेसाठी नाही]

1. Q वर्तुळाचा केंद्रबिंदु Y-अक्षावर आहे. आणि ते वर्तुळ $(0, 7)$ आणि $(0, -1)$ या बिंदुतुन जाते. जर वर्तुळ X-अक्षावर $(P, 0)$ येथे छेदत असल्यास 'P'ची किंमत काढा?
2. $A(2, 3), B(-2, -3), C(4, -3)$ या बिंदुनी तयार झालेल्या त्रिकोण ΔABC आहे. BC बाजु आणि कोन A च्या कोन दुभाजकाचा छेदन बिंदु माहित करा.
3. ΔABC समभुज त्रिकोणाची BC बाजु X-अक्षाला समांतर आहे. तर BC, CA आणि AB बाजु च्या रेषेचा चढ काढा.
4. एका काटकोन, त्रिकोणाची बाजु 'a' आणि 'b'असुन $a > b$ जर कोटकोन त्रिकोण दुभागत असल्यास निर्देशक भुमीतीच्या साहाय्याने त्रिकोणाच्या लंब संपात आणि लहान त्रिकोणामधील अंतर काढा.
5. $2x + 3y - 6 = 0$ या रेषेने निर्देशक अक्षांशी केलेल्या त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य माहित करा.

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

- एक बिंदु जो रेषाखंडाला आतुन विभागतो त्याचे निर्देशांक ग्राफ पेपरच्या साहय्याने माहित करा.

आपण काय चर्चा केली

1. $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ या बिंदुमधील अंतर $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ आहे.
2. आरंभबिंदु पासुन $P(x, y)$ बिंदुपर्यंतचे अंतर $\sqrt{x^2+y^2}$ आहे.
3. Y-अक्षाला समांतर असलेल्या (x_1, y_1) आणि (x_1, y_2) या बिंदुमधील अंतर $|y_2 - y_1|$ आहे.
4. X-अक्षाला समांतर असलेल्या (x_1, y_1) आणि (x_2, y_1) बिंदुमधील अंतर $|x_2 - x_1|$आहे
5. A (x_1, y_1) आणि B(x_2, y_2) बिंदुना जोडणाऱ्या रेषा खंडाला $m_1 : m_2$गुणोत्तरात विभागणाऱ्या P(x, y) चे निर्देशक $\left[\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right]$आहेत.
6. (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) जोडणाऱ्या रेषेच्या मध्यबिंदु चे निर्देशक $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ आहे.
7. मध्यगाचा छेदन बिंदु हा त्या त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य आहे. म्हणुन गुरुत्व मध्याचे निर्देशक $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$आहे.
8. प्रत्येक मध्यगाला 2:1 गुणोत्तराला विभागणारा बिंदु त्या त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य होय.
9. (x_1, y_1) (x_2, y_2) आणि (x_3, y_3) ने तयार झालेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{2}\,|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ आहे.
10. हेरॉनच्या सुत्रानुसार त्रिकोणाचे क्षेत्रफळाचे

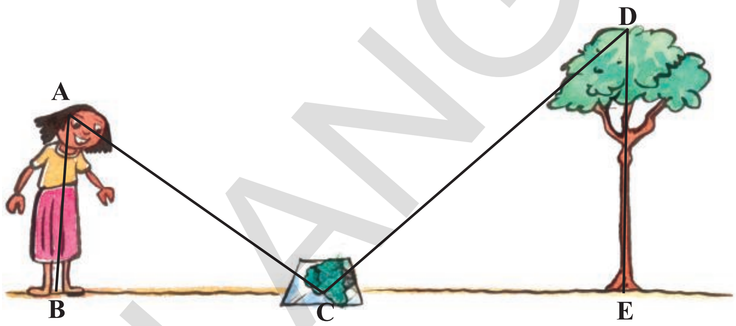
    $A = \sqrt{S(S-a)\ (S-b)\ (S-c)}$ $\qquad \because S = \dfrac{a+b+c}{2}$

    (a, b, c या ΔABC च्या तीन बाजु आहेत.)
11. $(x_1,\ y_1)$ आणि $(x_2,\ y_2)$ बिंदु असलेल्या रेषेचा चढ $m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ आहे.

धडा 8 समरुप त्रिकोण
(Similar Triangles)

8.1 प्रस्तावना

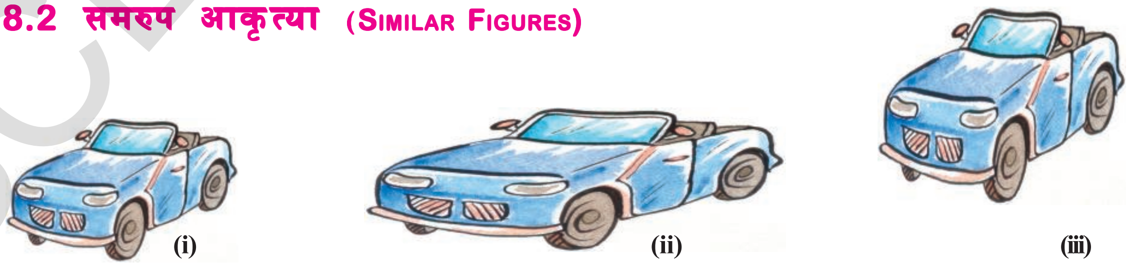
स्निग्धाच्या घराच्या मागील आवारात एक उंच झाड आहे. तिला त्या झाडाची उंची काढायची आहे.ती कशी काढता येते याची तिला माहिती नाही. त्याच वेळी तीचे मामा तीच्या घरी आले. तिने मामाला त्या झाडाची उंची माहित करण्यासाठी मदत करण्याची विनंती केली. त्यांनी थोडा वेळ विचार केला. आणि नंतर तिला एक आरसा आणायला सांगीतले. त्यांनी तो आरसा झाडाच्या पायापासुन काही अंतरावर ठेवला. त्यांनी स्निग्धाला आरशाच्या दुसऱ्या बाजुला अशा ठिकाणी उभे राहायला सांगीतले की, त्या आरशात झाडाचा वरचा भाग दिसला पाहिजे.



जेव्हा आपण (AB) मुलगी पासुन आरसा (C) आणि झाड (DE) ची आकृती वरील प्रमाणे काढतो. तेव्हा ABC त्रिकोण आणि DEC त्रिकोण आपणास दिसुन येतात. या दोन्ही त्रिकोणाबद्दल तुमचे म्हणेणे काय आहे? ते एकरूप आहे का? नाही, कारण जरी करता त्यांचा आकार एकच असला तरी त्याचे माप वेगवेगळे आहेत. अशा सारख्या आकाराच्या, परंतु मापे समान नसलेल्या भुमितीय आकृत्यांना आपण काय म्हणतो. हे तुम्हाला माहित आहे का? यालाच समरुप त्रिकोण म्हणतात.

तुम्ही झाडांची उंची पवर्ताची उंची किंवा दुर असलेले अंतर, सुर्यासारख्या दुर अंतरावर असलेल्या वस्तुच्या अंतराचा अंदाज तुम्ही कसा काढता? टेपच्या साहाय्याने असे अंतर माहित करु शकते असे तुम्हाला वाटते का? वास्तविक पाहता अशी उंची आणि अंतर अप्रत्यक्षपणे मोजमाप पध्दतीने काढता येते.हे आकृतीच्या समरुपतेच्या नियमावर अवलंबुन असते.

8.2 समरुप आकृत्या (Similar Figures)



वरील आकृतीचे (कारचे) निरिक्षण करा.

जर त्याची रुंदी सारखी ठेवुन लांबी दुप्पट केल्यास ती आकृती (ii)सारखी दिसते.

जर आकृती (i) मधील लांबी समान ठेवुन रुंदी दुप्पट केल्यास ती आकृती (iii) सारखी दिसते.

आता, आकृती.(ii) आणि (iii) बदल तुम्ही काय म्हणाल? ते आकृती(i) सारखे दिसतात का?आकृती विकृत झालेली आपणास दिसुन येते. ते समरुप आहेत तुम्ही म्हणु शकता का? नाही त्यांचा आकार समान आहे. परंतु त्या समरुप नाहीत.

एका फोटाग्राफर एकाच नेगेटीव पासुन विविध मापाची फोटो कसे मुद्रीत करतात, विचार करा? तुम्ही स्टॅपच्या आकाराचे, पासपोर्टच्या आकाराचे आणि पोस्टकार्डच्या आकाराच्या फोटोबद्दल ऐकले असतील ती साधारणता: फोटोंना 35 मी.मी. मापाच्या फिल्मवर फोटो काढतात आणि नंतर त्यास 45 मी.मी. (किंवा 55 मी.मी.) मापात मोठे करतात. आपणास आढळुन येते की, लहान फोटोग्राफ मधील प्रत्येक रेषाखंड हा 35:45 (किंवा 35:55) या गुणोत्तरात मोठा होतो. अजुन भिन्न मापाचे दोन फोटोग्राफ घेतल्यास आपणास त्यामधील कोन समान आढळुन येतात. म्हणुन फोटोग्राफ समरुप असतात.


(i)


(ii)


(iii)

अशा रितीने भुमितीमध्ये बाजुंची संख्या समान असलेले दोन बहुभुजी समरुप असतात. जेव्हा संगतकोन समान आणि त्यांच्या संगत बाजुंचे गुणोत्तर समान किंवा प्रमाणात असते.

एका बहुभुजीतील सर्व बाजु आणि कोन समान असतात त्याला नियमीत बहुभुजी म्हणतात.

संगत बहुभुजीतील सर्व बाजुच्या गुणोत्तराला स्केल घटक (दर्शविणारा घटक) म्हणुन घेतात.

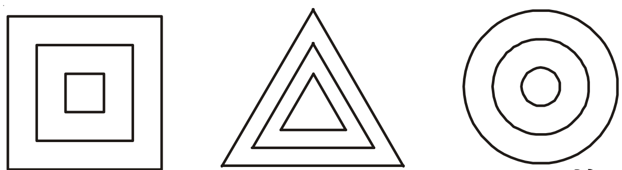
विचार करा- चर्चा करा आणि लिहा.

स्केल घटकाचा वापर केलेली तुमच्या दैनंदिन जिवनातील काही उदाहरणे तुम्ही देऊ शकता

सर्व नियमीत बहुभुजीची बाजुंची संख्या समान असते, ते नेहमी समरुप असतात.उदाहणार्थ सर्व चौरस समरुप असतात व सर्व समभुज त्रिकोण समरुप असतात.

समान त्रिजेची वर्तुळे एकरुप असतात आणि भिन्न त्रिजेची वर्तुळे एकरुप नसतात. परंतु एकाच आकारात असलेली वर्तुळ समरुप असतात.

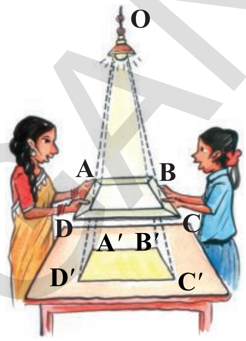
सर्व एकरुप आकृत्या समरुप असतात. परंतु सर्व समरुप आकृत्या एकरुप राहु शकत नाही हे आपण सांगु शकतो.



समरुप चौरस   समरुप समभुज त्रिकोण   समरुप वर्तुळे

आकृत्याची समरुपता स्पष्टपणे समजण्यासाठी खालील कृती करुन पाहु.

कृती



तुमच्या वर्गातील छताला बसविलेल्या प्रकाशित बल्बखाली एक टेबल ठेवा. एका सपाट कार्डबोर्डवरुन एक बहुभुजी ABCD कापा. त्या कार्ड बोर्ड ला बल्ब आणि टेबलामध्ये जमीनीला समांतर ठेवा. तेव्हा टेबलावर ABCD चौकोनाची छाया पडते. त्या पडलेल्या सावलीला $A'B'C'D'$ चौकोन हे नाव द्या.

आता हा $A'B'C'D'$ हा चौकोन ABCD चौकोनाचा पेक्षा मोठा किंवा वाढलेला आहे. 'O' हा बल्ब आहे आणि A' हा OA मोठा किंवा वाढलेला B'हा $\overrightarrow{OB}$, C'हा $\overrightarrow{OC}$ आणि D'हा $\overrightarrow{OD}$ वर आहे. ABCD आणि $A'B'C'D'$हे दोन्ही चौकोनएकाच आकारात असुन वेगवेगळ्या मापाचे आहेत.

A' हा A चा संगत शिरोंबिंदु यास $A' \leftrightarrow A$ असे दर्शवितात. अशारितीने $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ आणि $D' \leftrightarrow D$

कोनांची आणि बाजुची वास्तविक मोजणी केल्यास

(i) तुम्ही $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ आणि

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$ ची पडताळणी करु शकता.

या वरुन समान बाजुची संख्या असलेले दोन बहुभुजी समरुप असतात जर

(i) सर्व संगत कोन समान आहे. आणि

(ii) सर्व संगत बाजुंचे गुणोत्तर समान आहे. (किंवा प्रमाणात)

चौरस हा आयताशी समरुप होतो का? दोन्ही आकृतीत संगत कोन समान असुन संगत बाजुंचे गुणोत्तर समान नाही. म्हणुन ते समरुप नाहीत. बहुभुजीच्या समरुपतेसाठी आणि वरील दोन अटींपैकी फक्त एकच अट पुरेशी नाही. दोन्ही अटीचे समाधान झाले पाहिजे.

हे करा

चौरस आणि समभुज चौकोन समरुप आहेत का? तुमच्या मित्राशी चर्चा करा. अटी पुरेशा का होत नाही ते लिहा.

हे करा

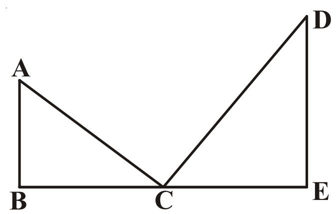
1. खालील रिकाम्या जागा समरुप आहे/ समरुप नाही यांनी भरा.
   (i) सर्व चौरस ....
   (ii) सर्व समभुज त्रिकोण ....
   (iii) सर्व समद्विभुज त्रिकोण ....
   (iv) समान बाजुंची संख्या असलेल दोन बहुभुजी .... जर त्यांचे संगत कोन आणि संगत बाजु समान आहेत.
   (v) एका वस्तुच्या फोटोग्राफला लहान किंवा मोठे केल्यास ती .... असते.
   (vi) समभुज चौकोन आणि चौरस हे एकमेकांला .... असते.
2. खालील विधान चुक किंवा बरोबर ते लिहा.
   (i) कोणत्याही दोन समरुप आकृत्या एकरुप असतात.
   (ii) केाणत्याही दोन एकरुप आकृत्या समरुप असतात.
   (iii) दोन बहुभुजी समरुप असतात जर त्यांचे संगत कोन समान आहे.
3. खालील जोडी साठी दोन भिन्न उदाहरणे द्या.
   (i) समरुप आकृत्या (ii) असमरुप आकृत्या

8.3 त्रिकोणाची समरुपता (SIMILARITY OF TRIANGLES)

स्नीग्धा ने झाडाची उंची माहित केली, आपण दोन त्रिकोण काढले ज्यामध्ये समरुपतेचा गुणधर्म दर्शविला गेला आपणास माहित आहे दोन त्रिकोण समरुप असतात जेव्हा त्यांचे

(i) त्यांचे संगत कोन समान आहेत.

(ii) त्यांच्या संगत बाजुचे गुणोत्तर समान आहे(प्रमाणात)



ΔABC आणि ΔDEC मध्ये

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle ACB = \angle DCE$

अजुन $\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{DC}{AC} = K$ (प्रमाण घटक)

तर ΔABC हा ΔDEC समरुप आहे.

चित्राच्या $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ असे लिहितात.

('~' या चिन्हाला "समरुप आहे" असे वाचतात.)

K हा प्रमाण घटक आहे म्हणुन

जर $K > 1$ तर आपणास मोठी आकृती येते.

$K = 1$ तर एकरुप आकृती येते आणि

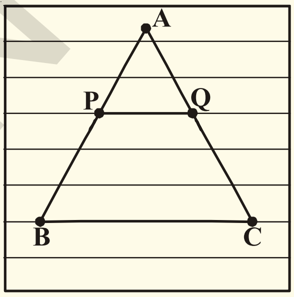
$K < 1$ तर लहान आकृती येतात.

त्रिकोण ABC आणि DEC मध्ये त्यांचे संगत केान समान आहेत. म्हणुन त्यास समकेाणीय त्रिकोण म्हणतात. दोन समकोनीय त्रिकोणाच्या संगत बाजुचे गुणोत्तर नेहमी सारखेच असते. हे सिध्द करण्यासाठी मुलभुत प्रमाणाच्या सिध्दांताचा उपयोग करावा लागतो. यालाच थेलसचे प्रमेय सुध्दा म्हणतात.

मुलभुत प्रमाणाचा सिध्दतांत किंवा थेलसचे प्रमेय समजण्यासाठी खालील कृती करु

कृती

एका रेषेच्या कागदावर त्रिकोण काढा. त्या कागदावरील रेषेवर काढलेल्या त्रिकोणाचा पाया आला पाहिजे. हा ABC त्रिकोण त्या कागदावरील अनेक रेषांना कापतो. त्यापैकी कोणतीही एक रेषा निवडुन तो त्रिकोणाच्या बाजु AB आणि AC ला मिळणाऱ्या बिंदुला P आणि Q नावे द्या.



$\frac{AP}{PB}$ आणि $\frac{AQ}{QC}$ चे गुणोत्तर काढा? तुमच्या निरिक्षणास काय येते? समान होते कारण? ते नेहमी सत्य आहे का? त्रिकोणाला छेदणाऱ्या दुसऱ्या रेषांना घेऊन पहा. आपणास माहित आहे की, रेषेच्या कागदावरील सर्व रेषा समांतर आहे आणि प्रत्येक वेळी गुणोत्तर समान येते हे आपणास दिसुन येते. म्हणुन ΔABC मध्ये जर $PQ \parallel BC$ तर $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ यालाच मुलभुत प्रमाणाच्या सिध्दतांचा परिणाम म्हणतात.

8.3.1 मुलभुत प्रमाणाचा सिध्दांत (Thales Theorem)

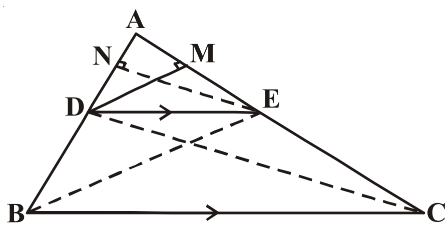
प्रमेय-8.1 : जर त्रिकोणाच्या एका बाजुला समांतर काढलेली रेषा इतर दोन बाजुना दोन भिन्न बिंदुत छेदत असेल तर ती रेषा त्या दोन्ही बाजुला एकाच गुणोत्तरात विभागते.

पक्ष : ΔABC मध्ये $DE \parallel BC$ ती AB आणि AC बाजुवर अनुक्रमे D आणि E बिदुवर छेदते.

साध्य: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना : B, E आणि C, D जोडा आणि नंतर

$DM \perp AC$ आणि $EN \perp AB$ काढा.



सिध्दता : ΔADE चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

ΔBDE चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times BD \times EN$

म्हणुन $\dfrac{(\Delta ADE)}{(\Delta BDE)} = \dfrac{\frac{1}{2}\times AD\times EN}{\frac{1}{2}\times BD\times EN} = \dfrac{AD}{BD}$ ...(1)

परम ΔADE चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}\times AE\times DM$

ΔCDE चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}\times EC\times DM$

$\dfrac{(\Delta ADE)}{(\Delta CDE)} = \dfrac{\frac{1}{2}\times AE\times DM}{\frac{1}{2}\times EC\times DM} = \dfrac{AE}{EC}$ ...(2)

ΔBDE आणि ΔCDE हे एकाच पाया DE वर आहे आणि एकाच समांतर BC आणि DEवर आहे

म्हणुन (ΔBDE)चे क्षेत्रफळ = (ΔCDE)चे क्षेत्रफळ ...(3)

(1) (2) आणि (3) वरुन

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

येते हे सिध्द झाले.

मुलभुत प्रमाणाचा व्यत्यास सत्य आहे का? यासाठी खालील कृती करुन पाहु या.

कृती

तुमच्या वहीत कोन XAY काढा आणि AX किरणावर B_1, B_2, B_3, B_4 आणि B बिंदुची अशी खुण करा की, ते अनुक्रमे समान अंतरावर असायला पाहिजे. $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$से.मी.

अशा रितीने किरण AY वर C_1, C_2, C_3, C_4 आणि C

$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$ से.मी.

B_1, C_1 आणि B, C.जोडा

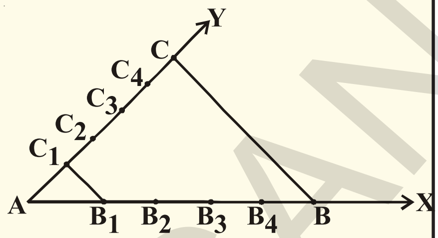
निरिक्षण करा $\dfrac{AB_1}{B_1B} = \dfrac{AC_1}{C_1C} = \dfrac{1}{4}$ आणि $B_1C_1 \parallel BC$

अशा रितीने B_2C_2, B_3C_3 आणि B_4C_4 ला जोडल्यास

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ आणि

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ आणि

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ आणि



$C_1B_1 \parallel C_2B_2 \parallel C_3B_3 \parallel C_4B_4 \parallel CB$ होते का तपासा?

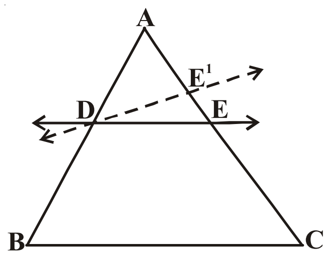
यावरुन येणाऱ्या प्रमेयाला थेलसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास म्हणतात.

प्रमेय-8.2 : जर एखादी रेषा त्रिकोणाच्या दोन्ही बाजुला एकाच गुणोत्तरात विभागल्यास ती रेषा तिसऱ्या बाजुला समांतर असते.

पक्ष: ΔABC मध्ये DE रेषा अशी काढली की, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

साध्य : $DE \parallel BC$

सिध्दता : समजा DE ही BC ला समांतर नाही. तेव्हा BC ला समांतर असणारी रेषा DE^1 काढा.



म्हणुन $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (का ?)

$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (का ?)

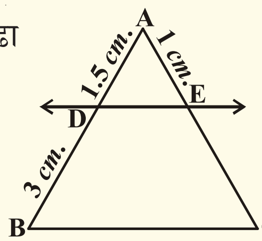
दोन्ही बाजुत 1 मिळविल्यास E आणि E′ एकमेकांवर तंतोतंत येतात.(का?)

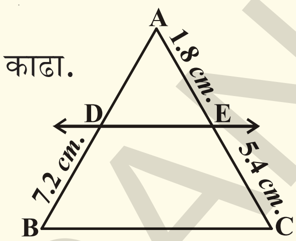
प्रयत्न करा

1. ΔPQR मध्ये PQ आणि PR बाजु वरील बिंदु अनुक्रमे E आणि F आहेत. खालील प्रत्येक संदर्भात $EF \parallel QR$ आहे किंवा नाही ते सांगा?
   (i) PE = 3.9 से.मी. EQ = 3 से.मी. PF = 3.6 से.मी.आणि FR = 2.4 से.मी.
   (ii) PE = 4 से.मी., QE = 4.5 से.मी., PF = 8 से.मी.आणि RF = 9 से.मी.
   (iii) PQ = 1.28 से.मी. PR = 2.56 से.मी. PE = 1.8 से.मी.आणि PF = 3.6 से.मी.

2. खालील आकृतीत DE || BC.

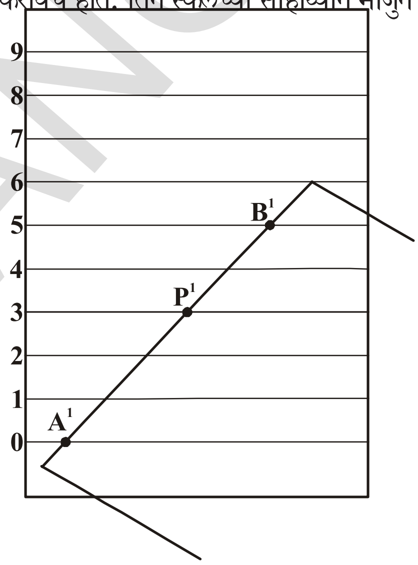
(i) EC काढा (ii) AD काढा.





रचना: रेषाखंडाचे विभाजन (थेलसच्या सिध्दतांवरुन)

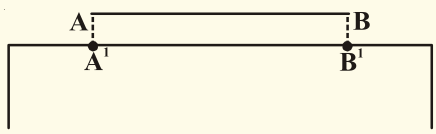
माधुरीने एक रेषाखंड काढला. त्या रेषाखंडाला 3:2 गुणोत्तरात विभाजन करायचे होते. तिने स्केलच्या साह्याने मोजुन आवश्यक गुणोत्तरात विभागणी केली. इतक्यात तिची मोठी बहीन तिथे आली. तिने असे करतांना पाहिले. तेव्हा तिच्या बहिणीने तिला, रेषाखंडाचे मोजमाप न करता दिलेल्या गुणोत्तरात कसे विभाजन करता येईल याचा सल्ला दिला. माधुरीला आश्चर्य वाढले आणि तिने तिच्या बहिनीला मदत करायला सांगीतले. तेव्हा तिची बहीन म्हणाली तुम्ही सुध्दा खालील कृतीवरुन हे करु शकता.



कृती

एका रेषेच्या कागदाच्या शिटवर खालच्या रेषेपासुन ‘0’ देऊन इतर रेषांना अनुक्रमे 1, 2, 3, ... असे लिहियला सांगीतले

एक जाड कार्डबोर्ड (किंवा चार्ट) घेऊन दिलेल्या रेषाखंड AB ठेवा आणि त्याची लांबी त्या कार्डबोर्डवर रुपांतरीत करा. समजा A^1 आणि B^1 त्या कार्डबोर्डवर हे A आणि B बिंदु सुचित करा.



आता A^1 ला रेषेच्या कागदावरील 0 च्या ठिकाणी ठेवा आणि त्या कार्डला A^1 भोवती B^1 बिंदु 5 व्या रेषेवर(3 + 2) येईपर्यंत फिरवा.

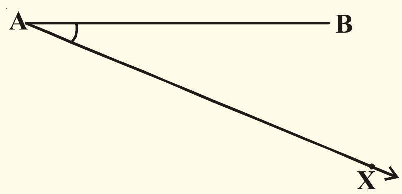
तिसऱ्या रेषेने त्या कार्डबोर्डला स्पर्श केलेल्या बिंदु P^1 ची खुण करा. परत या कार्डला दिलेल्या रेषाखंडा सोबत ठेवुन P^1 या बिंदुला बदलुन त्यास ‘P’ ची खुण करा.

म्हणुन P हा 3:2 गुणोत्तरात त्या रेषाखंडाला विभागणारा बिंदु आहे.

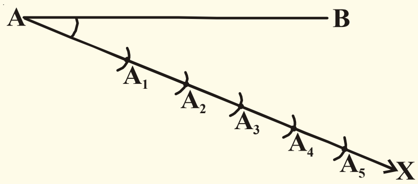
आता याची रचना कशी करता येते हे शिकु या. दिलेले AB रेषेला आपण m : n या गुणोत्तरात विभागु, येथे m आणि n दोन्ही धनपुर्णांक आहेत m = 3 आणि n = 2.

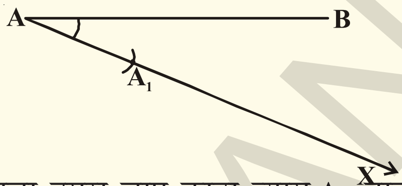
पायरी :

1. AB शी लघुकोन करणारे A बिंदुपासुन एक सरळ किरण AX काढा.



2. ‘A’ केंद्रबिंदु घेऊन कोणत्याही लांबीचा AX वर एकचाप काढा त्या बिंदुस A_1 नाव द्या.

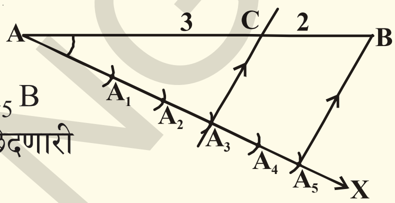




3. A_1 केंद्र बिदु घेऊन त्याच मापाचा दुसरा चाप काढा त्यास A_2 नाव द्या.

4.अशारितीने 5 बिंदु $(=m+n)$ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 असे काढा की, $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$

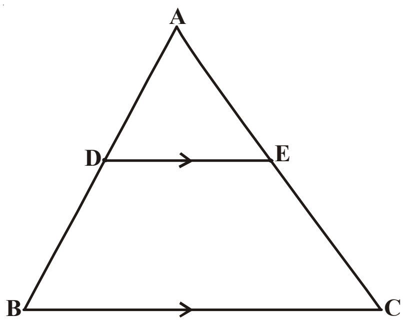
5. A_5B ला जोडा $A_3(m=3)$ बिंदुवरुन A_5B ला एक($\angle A\ A_5\ B$ ला समान कोन करणारी) समांतर रेषा AB ला C बिदुंवर छेदणारी रेषा काढा आणि $AC : CB = 3 : 2$. पहा.



आता, थेलसचे प्रमेय आणि व्यत्यासावर काही उदाहरणे सोडवु.

उदाहरण-1. ΔABC मध्ये $DE \parallel BC$ आणि $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$.

$AC = 5.6$ तर AE काढा.



सोडवणुक : ΔABC मध्ये $DE \parallel BC$

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (मुलभुत प्रमाणाच्या प्रमेयावरुन)

परंतु $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ म्हणुन $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$

$AC = 5.6$ आणि $AE : EC = 3 : 5$.

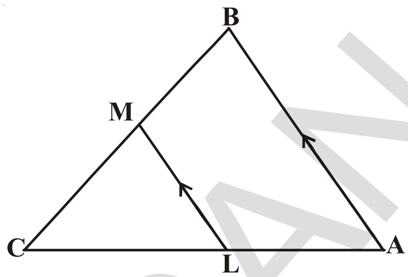
$$\frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AE}{5.6 - AE} \quad \frac{3}{5}$$ (तिरपा गुणाकार)

$5AE = (3 \times 5.6) - 3AE$

$8AE = 16.8$

$AE = \frac{16.8}{8} = 2.1$ से.मी.



उदाहरण-2. दिलेल्या आकृतीत LM || AB
$AL = x - 3,\ AC = 2x,\ BM = x - 2$
आणि $BC = 2x + 3$ तर xची किंमत काढा.

सोडवणुक: ΔABC मध्ये LM || AB

$\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{BM}{MC}$ (मुलभुत प्रमाणाच्या सिध्दतावरुन)

$$\frac{x-3}{2x-(x-3)} = \frac{x-2}{(2x+3)-(x-2)}$$

$$\frac{x-3}{x+3} \qquad \frac{x-2}{x+5}$$ (तिरपा गुणाकार)

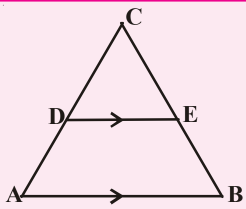
$$(x-3)(x+5) = (x-2)(x+3)$$

$$x^2 + 2x - 15 = x^2 + x - 6$$

Þ $2x - x = -6 + 15$

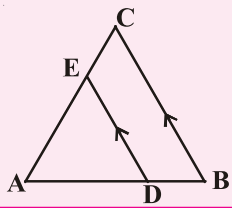
$$x = 9$$

हे करा



1. दिलेल्या आकृतीत x च्या कोणत्या किंमती DE || AB होते ?
   $AD = 8x + 9,\ CD = x + 3$
   $BE = 3x + 4,\ CE = x.$

2. ΔABC मध्य DE || BC. $AD = x, DB = x - 2,$
   $AE = x + 2$ आणि $EC = x - 1.$
   तर x ची किंमत माहित करा.



उदाहरण-3. ABCD चौकोनात कर्ण एकमेकांस 'O' बिदुवर अशारीतीने छेदतात की, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ तर सिध्द करा ABCD हा समलंब चौकोन आहे.

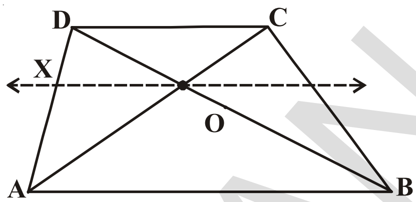
सोडवणुक: दिलेले : ABCD चौकोनात $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

साध्य : ABCD समलंब चौकोन आहे.

रचना : 'O' बिंदुपासुन AB ला समांतर असणारी एक रेषा काढा. ती DA ला X बिंदुवर मिळते.

सिध्दता : ΔDABमध्ये XO || AB (रचनेवरुन)

$\Rightarrow \frac{DX}{XA} = \frac{DO}{OB}$ (मुलभुत प्रमाणाच्या सिध्दतावरुन)



$$\frac{AX}{XD} = \frac{BO}{OD} \qquad ..... (1)$$

पुन्हा $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (दिलेले)

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{OD} \qquad ..... (2)$$

(1) आणि (2) वरुन

$$\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{CO}$$

ΔADC मध्ये XO रेषा अशी आहे की, $\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{OC}$

$\Rightarrow XO \parallel DC$ (मुलभुत प्रमाणाच्या सिध्दतांच्या व्यत्यावरुन)

$\Rightarrow AB \parallel DC$

ABCD चौकोनात $AB \parallel DC$

$\Rightarrow$ ABCD हा समलंब चौकोन आहे (व्याख्येवरुन)

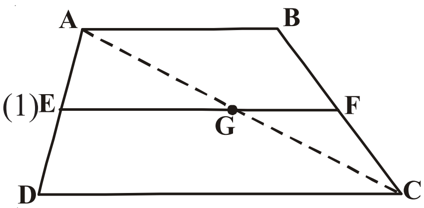
हे सिध्द झाले.

उदाहरण-4. ABCD समलंब चौकोनात $AB \parallel DC$. E आणि F हे समांतर नसलेल्या बाजु AD आणि BC वरील बिंदु असे आहे की, $EF \parallel AB$ तर $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ दाखवा.

सोडवणुक: AC ला जोडा ती EF ला G वर छेदते.

$AB \parallel DC$ आणि $EF \parallel AB$ (दिलेले)

$\Rightarrow EF \parallel DC$ (समांतर रेषेला समांतर असणारी रेषा एकमेकांला समांतर असतात)



ΔADC मध्ये $EG \parallel DC$

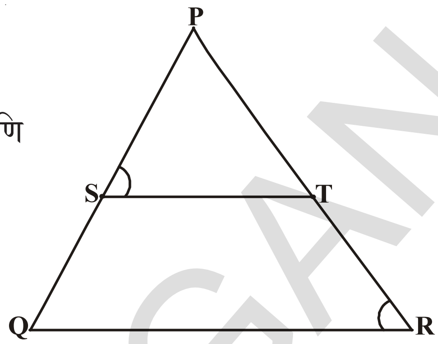
म्हणुन $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (मुलभुत प्रमाणाच्या सिध्दातंवरुन).(1)

अशाप्रकारे ΔCAB मध्ये $GF \parallel AB$

$\frac{CG}{GA} = \frac{CF}{FB}$ (मुलभुत प्रमाणाच्या सिध्दातंवरुन) म्हणजेच $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ...(2)

(1)आणि(2) वरुन $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

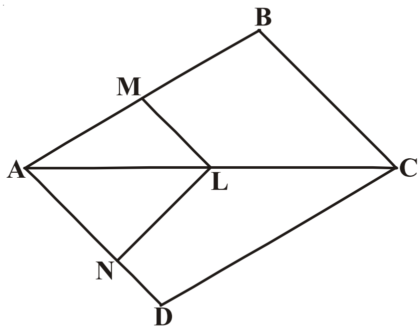
अभ्यास - 8.1



1. ΔPQR मध्ये ST रेषा अशी आहे की, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ आणि

   तर $\angle PST = \angle PRQ$ तर

   ΔPQR हा समव्दीभुज त्रिकोण आहे सिध्द करा.

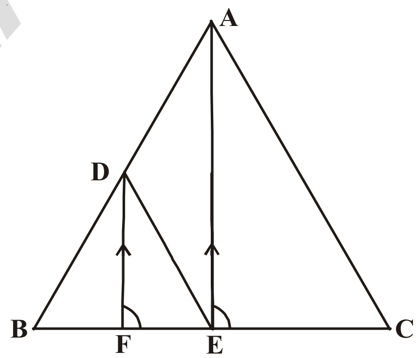


2. दिलेल्या आकृतीमध्ये $LM \parallel CB$ आणि $LN \parallel CD$

   तर सिध्द करा $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$

3. दिलेल्या आकृतीत $DE \parallel AC$ आणि $DF \parallel AE$

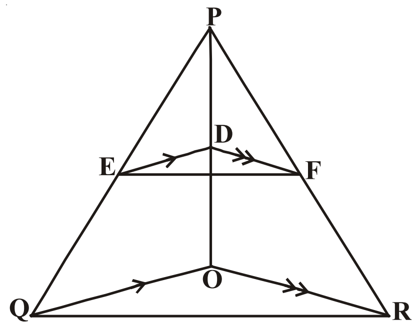
   तर सिध्द करा $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$.



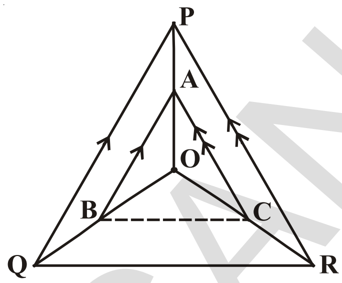
4. एका त्रिकोणात एका बाजुच्या मध्यबिंदुतुन जाणारी रेषा दुसऱ्या बाजुला समांतर असेल तर ती तिसऱ्या बाजुला समव्दीभाजन करते सिध्द करा.(मुलभुत प्रमाणाच्या प्रमेयाचा उपयोग करा.)

5. एका त्रिकोणातील कोणत्याही दोन बाजुंच्या मध्यबिंदुना जोडणारा रेषाखंड तिसऱ्या बाजुला समांतर असते. सिध्द करा. (मुलभुत प्रमाणाच्या सिध्दांतच्या व्यत्यास उपयोग करुन)

6. दिलेल्या आकृतीत $DE \parallel OQ$ आणि $DF \parallel OR$ तर $EF \parallel QR$ दाखवा.



7. बाजुच्या आकृतीत A, B आणि C हे बिंदु अनुक्रमे OP, OQ आणि OR बाजुवर असे आहे की, AB || PQ आणि AC||PR तर दाखवा की, BC || QR



8. ABCD समलंब चौकोनात AB||DC आणि त्याचे कर्ण एकमेकांवर 'O' बिंदुवर छेदतात. तर दाखवा की, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

9. 7.2 से.मी.लांबीचा रेषाखंड काढुन त्यास5 : 3गुणोत्तर विभागा.त्याच्या दोन्ही भागाची लांबी काढा.

विचार करा - चर्चा करा आणि लिहा

त्रिकोणाची समरुपता ही इतर बहुभजीच्या समरुपतेशी कशा प्रकारे भिन्न आहे. याची तुमच्या मित्राशी चर्चा करा.

8.4 त्रिकोणाच्या समरुपतेच्या कसोट्या (Criteria for Similarity of Triangles)

दोन त्रिकोण समरुप असतात जर त्यांचे संगतकोन समान असुन, संगत बाजुचे गुणोत्तर प्रमाणात आहे हे आपणास माहित आहे. या समरुपतेची तपासणी करण्यासाठी, दोन त्रिकोणाच्या संगत कोनाची आणि संगत बाजुच्या गुणोत्तराच्या समानतेची तपासणी करायला हवी. चला दोन त्रिकोणाच्या समरुपतेचा प्रयत्न काही नियम येण्यासाठी करुन पाहु. त्यासाठी खालील कृती करु.

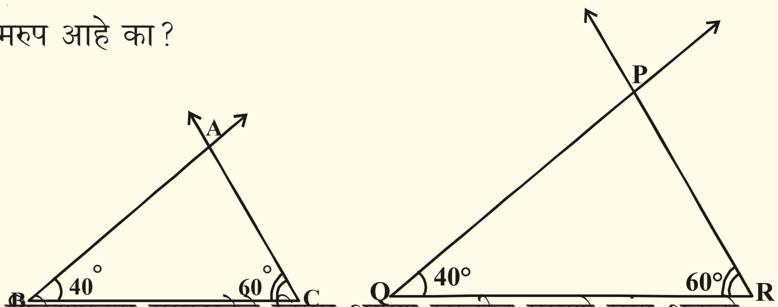
कृती

कोनमापक आणि मोजपट्टीचा उपयोग करुन दोन एकरुप नसलेले त्रिकोण असे काढु की, प्रत्येक त्रिकोणाचे कोन 40° आणि 60° असायला पाहिजे. तुम्ही काढलेल्या आकृतीची तपासणी दोन्ही त्रिकोणाच्या तिसऱ्या कोनाचे माप मोजुन करुन पहा.

तो प्रत्येकी 80° असेल. (का?)

त्रिकोणाच्या बाजुंची लांबी मोजुन त्यांच्या संगत बाजुच्या लांबीचे गुणोत्तर माहित करा.

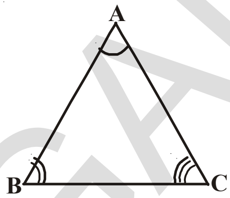
ते त्रिकोण समरुप आहे का?



या कृतीवरुन त्रिकोणाच्या समरुपतेचे नियम आपण खालील प्रमाणे सांगु शकतो.

8.4.1 त्रिकोणाच्या समरुपतेची को.को.को.कसोटी (AAA Criterion for Similarity of Triangles)

प्रमेय-8.3 : दोन त्रिकोणात संगत कोन समान असल्यास त्या कोनासमोरील संगत बाजुचे गुणोत्तर समान असते (प्रमाणात) आणि म्हणुन दोन त्रिकोण समरुप असतात.



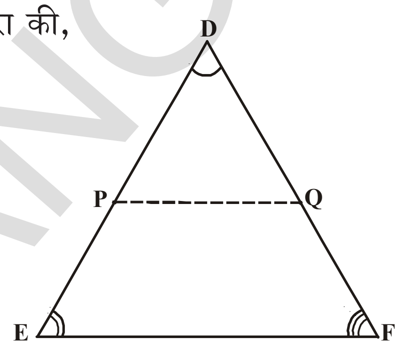
पक्ष : ABC आणि DEF त्रिकोणात

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ आणि $\angle C = \angle F$

साध्य : $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

रचना : DE आणि DF बाजुवर अनुक्रमे P आणि Q असे निश्चित करा की,

$AB = DP$ आणि $AC = DQ$ आणि PQ जोडा



सिध्दता : $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (का ?)

या वरुन $\angle B = \angle P = \angle E$ आणि $PQ \parallel EF$ (कसे ?)

$\therefore \dfrac{DP}{PE} = \dfrac{DQ}{QF}$ (का ?)

म्हणजेच $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (का ?)

अशा प्रकारे $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ आणि म्हणुन $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$. हे सिध्द होते.

विचार करा आणि चर्चा करा : वरील रचनेत जर $AB = DE$ किंवा $AB > DE$ तर तुम्ही काय कराल ?

सुचना : एका त्रिकोणाचे दोन कोन अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनाशी समान असल्यास त्रिकोणाच्या बेरजेच्या गुणधर्मावरुन तिसरा कोन सुध्दा समान होतो.

म्हणुन, कोन कोन समरुपतेच्या कसोटीवरुन जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन केानाशी समान असल्यास ते दोन त्रिकोण समरुप असतात.

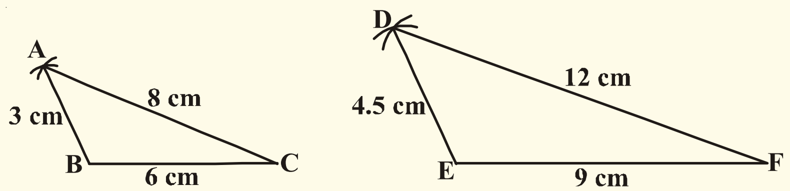
वरील कथनाचा व्यत्यास काय आहे ?

एका त्रिकोणाची बाजु अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या बाजुशी प्रमाणात असेल तर त्यांचे संगत कोन समान असतात. हे सत्य आहे.

हे खालील कृतीवरुन अभ्सास करुन पाहु.

कृती

$AB = 3$ से.मी. $BC = 6$ से.मी. $CA = 8$ से.मी.$DE = 4.5$ से.मी. $EF = 9$ से.मी. आणि $FD = 12$ से.मी. ABC आणि DEF हे दोन त्रिकोण काढा.



त्या दोन त्रिकोणावरुन $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{2}{3}$.

आता दोन्ही त्रिकोणाचे कोन मोजा. तुम्हाला काय आढळुन येते? त्यांच्या संगत कोनाविषयी तुम्ही काय म्हणु शकता? ते समान आहे म्हणुन दोन्ही त्रिकोण समरुप आहेत. भिन्न त्रिकोणासाठी याची पडताळणी करुन पाहु शकता.

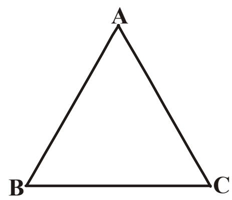
वरील कृतीवरुन दोन त्रिकोणाच्या समरुपतेचे कसोटी खालील प्रमाणे लिहु शकतो.

8.4.2. त्रिकोणाच्या समरुपतेची बाबाबा कसोटी (SSS Criterion for Similarity of Triangles)

प्रमेय-8.4 : दोन त्रिकोणात संगत बाजु जर समान गुणोत्तरात असल्यास तर संगत कोन समान असतात म्हणुन ते दोन त्रिकोण समरुप असतात.

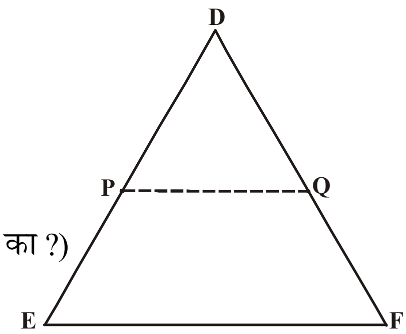
पक्ष : ΔABC आणि ΔDEF मध्ये

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \quad (<1)$$



साध्य : $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

रचना : DE आणि DF बाजुवर अनुक्रमे P आणि Q बिंदु AB = DP आणि AC = DQ होईल असे निश्चित करा आणि PQ जोडा.



सिध्दता : $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ आणि $PQ \parallel EF$ (का ?)

म्हणुन $\angle P = \angle E$ आणि $\angle Q = \angle F$ (का ?)

$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$ म्हणुन $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (का ?)

म्हणुन BC = PQ (का ?)

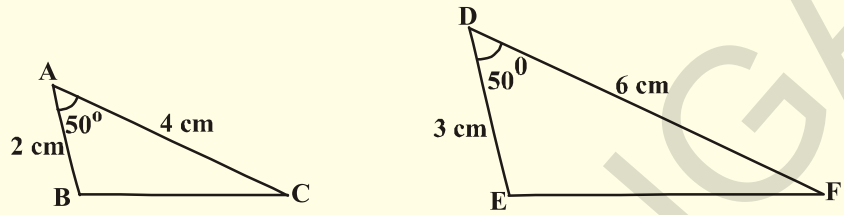
$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (का ?)

म्हणुन $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ आणि $\angle C = \angle F$ (कसे?)

दोन बहुभुजीच्या समरुपतेसाठी एक अट पुरेशी नाही हे आपण शिकलो. परंतु त्रिकोणाच्या समरुपतेसाठी दोन्ही अटी पुर्ण झाल्या पाहिजे हे आवश्यक नाही. कारण एक अट पुर्ण झाली म्हणजे आपोआप दुसरी अट पुर्ण होते. यासाठी खालील कृती करुन पाहु या.

कृती

AB = 2 **से.मी.**, $\angle A = 50^0$ AC = 4**से.मी. मापाचा त्रिकोण**ABC **काढा. आणि** DE = 3 **से.मी.**, $\angle D = 50^0$ **आणि** DF = 6**से.मी. मापाचा दुसरा त्रिकोण** DEF **काढा.**



$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$ **आणि** $\angle A = \angle D = 50^0$ **निरिक्षण करा.**

$\angle B$, $\angle C$, $\angle E$, $\angle F$ **मोजा** BC **आणि** EF **सुध्दा मोजा.**

$\angle B = \angle E$ **आणि** $\angle C = \angle F$ **अजुन** $\frac{BC}{EF} = \frac{2}{3}$ **याचे सुध्दा निरिक्षण करा.**

म्हणुन, दोन त्रिकोण समरुप आहे. भिन्न माप घेऊन दुसऱ्या त्रिकोणासाठी असेच करुन पहा. यावरुन त्रिकोणाच्या समरुपतेची खालील कसोटी येते.

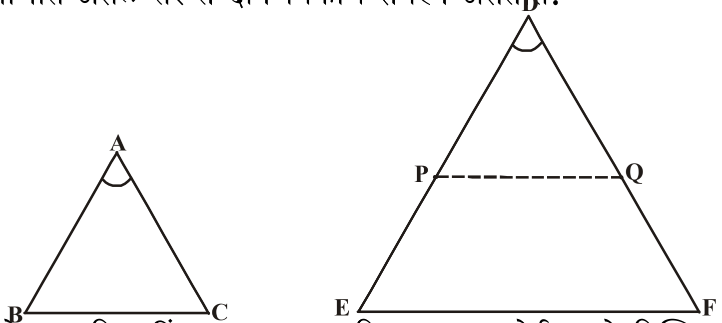
8.4.3 त्रिकोणाच्या एकरुपतेची बाकोबा कसोटी (SAS Criterion for Similarity of Triangles)

प्रमये-8.5 : एका त्रिकोणाचा एक कोन हा दुसऱ्या त्रिकोणाच्या एका कोनाशी समान असुन या कोनाशी संबंधीत असलेल्या बाजु प्रमाणात असेल तर ते दोन त्रिकोण समरुप असतात.

पक्ष : ΔABC आणि ΔDEF मध्ये

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (<1) आणि

$\angle A = \angle D$



साध्य: $\Delta ABC \sim \Delta DEFA$

रचना : DE आणि DF बाजुवर अनुक्रमे P आणिQ बिंदु AB = DP आणिAC = DQहोईल असे निश्चित करा आणि PQ जोडा

सिध्दता : PQ || EF आणि $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (कसे?)

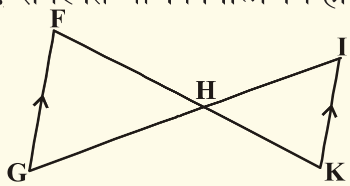
म्हणुन $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle Q$

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (का ?)

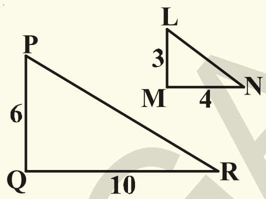
प्रयत्न करा

1. प्रत्येक आकृतीत तयार झालेले त्रिकोण समरुप आहेत का? जर असेल तर समरुपतेच्या नियमाचे नाव द्या. समरुपतेच्या नियमाला चिन्हाच्या रुपात लिहा.

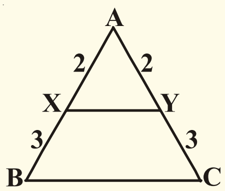
(i)



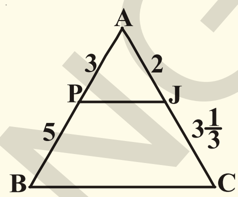
(ii)



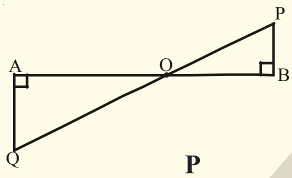
(iii)



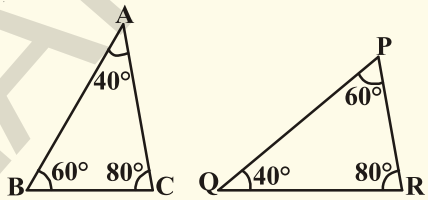
(iv)



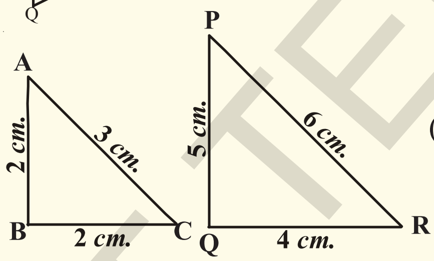
(v)



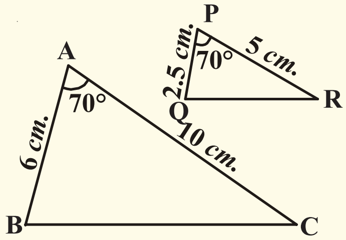
(vi)



(vii)

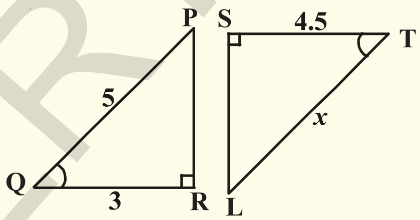


(viii)

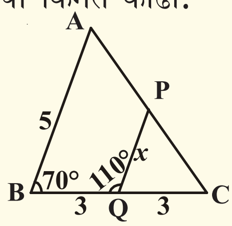


2. खालील त्रिकोण जर समरुप असेल तर स्पष्टीकरण देऊन x ची किंमत काढा.

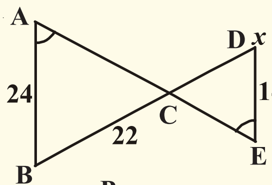
(i)



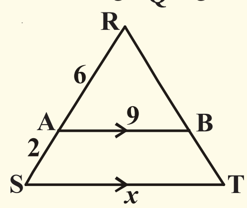
(ii)



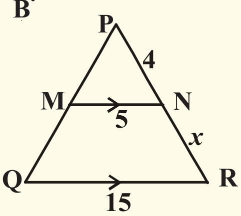
(iii)



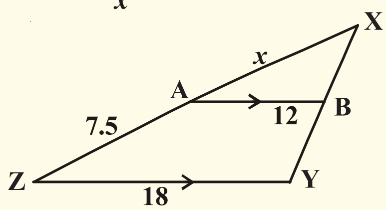
(iv)

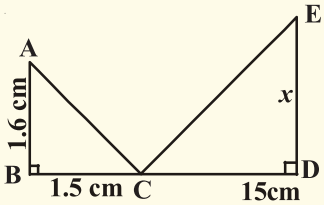


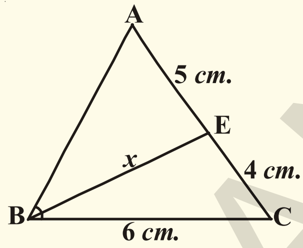
(v)



(vi)



(vii) 

(viii) 

रचना : दिलेल्या प्रमाण घटकावरुन दिलेल्या त्रिकोणाला समरुप असणाऱ्या त्रिकोणाची रचना करणे.

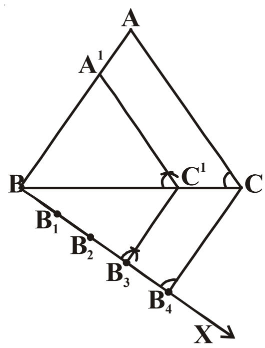
a) दिलेल्या त्रिकोण ABC ला समरुप असलेलाΔABC बाजुच्या $\frac{3}{4}$ असलेला समरुप बाजुवर असलेला त्रिकोणाची रचना करा (प्रमाण घटक $\frac{3}{4}$)

पायरी : 1. BC शी लघुकोन करुन A शिरोंबिंदुच्या विरुध्द बाजुवर BX किरण काढा.

2. BX वर $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$. होतील असे चार B_1, B_2, B_3 आणि B_4 बिंदुचे स्थान निश्चित करा.

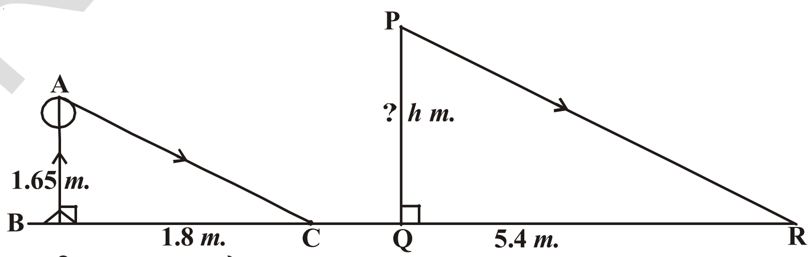
3. B_4C ला जोडुन B_3 मधुन जाणारी B_4C ला समांतर असणारी रेषा काढा. ती रेषा BC ला C′ येथे छेदते.

4. C′ बिंदुतुन जाणारी आणि CA ला समांतर असणारी रेषा काढा. ही रेषा AB ला A′ येथे छेदते. म्हणुन $\Delta A'BC'$ हा येणारा त्रिकोण आहे.



या नियमाचा उपयोगाचे काही उदाहरणे घेऊ या.

उदाहरण-5. एका 1.65 मी. उंच व्यक्तीची सावली 1.8 मी. पडते. याच वेळी एका दिव्याच्या स्तंभाची सावली 5.4 मी. पडते. तर त्या दिपस्तंभाची उंची काढा.



सोडवणुक: ΔABC आणि ΔPQR मध्ये

$\angle B = \angle Q = 90^0$.

$\angle C = \angle R$ (AC || PR, सुर्य किरणे कोणत्याही वेळी समांतर असतात.)

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (को को समरुपतेनुसार)

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (समरुप त्रिकोणाचे संगत भाग)

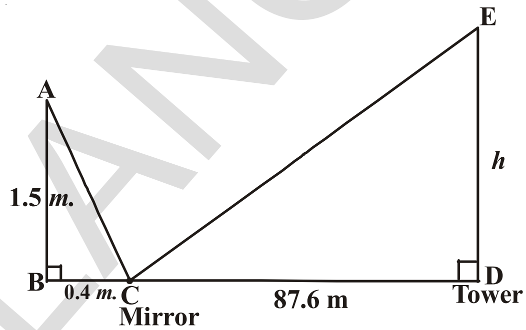
$$\frac{1.65}{PQ} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$PQ = \frac{1.65 \times 5.4}{1.8} = 4.95 \text{ मी.}$$

त्या दिपस्तंभाची उंची 4.95 मी.

उदाहरण-6. एका बुरुज पासुन 87.6 मी. अंतरावर असलेल्या आरशात एका व्यक्तीने बुरुजाचे शिखर पाहिले. आरसा हा जमीनीवर उर्ध्व दिशेत आहे. तो व्यक्ती आरशापासुन 0.4 मी. अंतरावर आहे आणि त्याची उंची 1.5 मी. आहे. तर ती बुरुज किती उंच आहे.

सोडवणुक : ΔABC आणि ΔEDC मध्ये



$\angle ABC = \angle EDC = 90°$

$\angle BCA = \angle DCE$ (आपाती कोन आणि परावर्तन कोन सारखे आहेत.)

$\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (को को समरुपते वरुन)

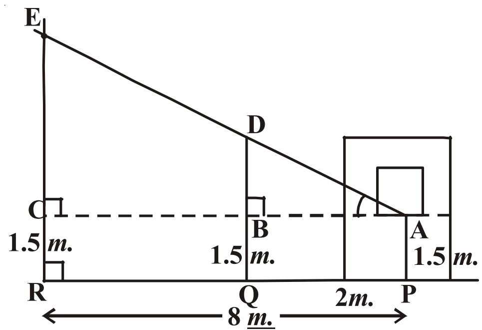
$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1.5}{h} = \frac{0.4}{87.6}$$

$$h = \frac{1.5 \times 87.6}{0.4} = 328.5m$$

म्हणुन बुरुजाची उंची 328.5 मी. आहे.

उदाहरण7. गोपाळचे शेजारी गोपाळ राहत असलेल्या खोलीकडे बघत असतात म्हणुन चिंतीत आहे. त्यांना आपली खोली दिसु नये म्हणुन घराची बाहेरील भित खिडकीच्या उंची पेक्षा वाढविली. त्या बाहेरील भिंतीची उंची काय असेल? त्याची मापे आकृतीत दिली आहे.

सोडवणुक : ΔABD आणि ΔACE मध्ये



$\angle B = \angle C = 90°$

$\angle A = \angle A$ (समाईक कोन)

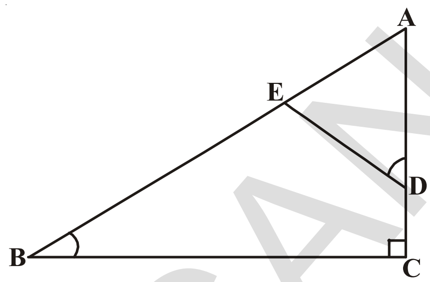
$\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (को को समरुपतेच्या)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BD}{1.2}$$

$$BD = \frac{2 \times 1.2}{8} = \frac{2.4}{8} = 0.3m$$

एकुण भिंतीची उंची 1.5 मी. + 0.3 मी. = 1.8मी बांधली असता शेजाऱ्याला काही दिसत नाही.

अभ्यास - 8.2



1. दिलेल्या आकृतीमध्ये $\angle ADE = \angle B$

   (i) $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ दाखवा.

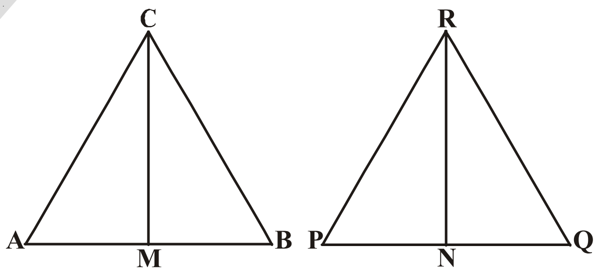
   (ii) जर $AD = 3.8$ से.मी., $AE = 3.6$ से.मी. $BE = 2.1$ से.मी. $BC = 4.2$ से.मी. तर DE काढा.

2. दोन समरुप त्रिकोणाची परिमीती अनुक्रमे 30 से.मी. आणि 20 से.मी. आहे. एका त्रिकोणाची एक बाजू 12 मी.आहे. दुसऱ्या त्रिकेाणाची संगत बाजु माहित करा.

3. दिलेल्या आकृतीत $AB \parallel CD \parallel EF$. दिलेले आहे. $AB = 7.5$ cm, $DC = y$ cm, $EF = 4.5$ cm आणि $BC = x$ cm तर x आणि y ची किंमत काढा.

4. 90 से.मी. उंची असलेली एक मुलगी दिपस्तंभाच्या दुर 1.2 मी./सें. वेगोने चालत आहे. जर दिवस्तंभा हा जमीनीवर 3.6 मी.उंच असल्यास 4 सेकंदानंतर त्या मुलीच्या सावलीची लांबी काढा

5. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ दिलेले आहे. CM आणि RN या अनुक्रमे ΔABC आणि ΔPQR च्या मध्यगा सावलीची लांबी काढा.



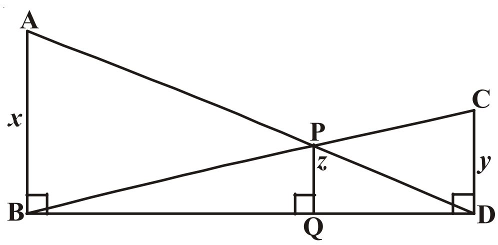
   (i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

   (ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$

   (iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$

6. ABCD समलंब चौकोनात $AB \parallel DC$ आणि कर्ण AC आणि BD एकमेकांस 'O' बिंदुवर छेदतात. दोन त्रिकोणाच्या समरुपतेच्या नियमावरुन दाखवा की, $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$.

7. AB, CD, PQ हे BD ला लंब आहेत.



   $AB = x$, $CD = y$ आणि $PQ = Z$

   तर सिध्द करा $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$.

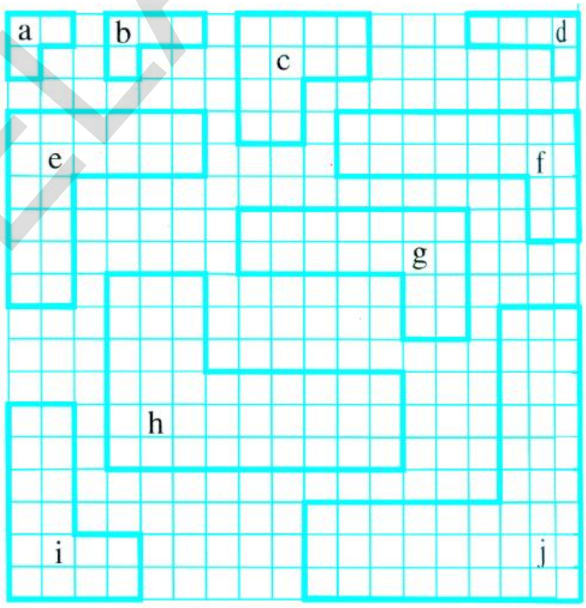
8. एका झेड्यांच्या खांबाची उंची 4 मी. आहे. त्याची सावली 6 मी.पडते. त्याच वेळी बाजुच्या इमारतीची सावली 24 मी. पडते. तर त्या इमारतीची उंची काढा.

9. CD आणि GH हे अनुक्रमे $\angle ACB$ आणि $\angle EGF$ चे कोन दुभाजक आहेत. ΔABC आणि ΔFEG त्रिकोणास AB आणि FE बाजुवर अनुक्रमे D आणि H बिंदु आहेत. जर $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ तर दाखवा की

(i) $\frac{CD}{GH}=\frac{AC}{FG}$ (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$ (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

10. AX आणि DY हे ΔABC आणि ΔDEF या दोन समरुप त्रिकोणाचे लंब आहे. तर सिध्द करा $AX : DY = AB : DE$.
11. दिलेल्या ΔABC समरुप असलेल्या त्रिकोणाच्या समरुप त्रिकोणाची रचना करा त्याची बाजु त्रिकोण ABC च्या संगत बाजुच्या $\frac{5}{3}$ ला समान आहे.
12. 4 से.मी.,5 से.मी.6 से.मी. मापाच्या एका त्रिकोणाची रचना करा.नंतर त्या त्रिकोणाला समरुप असलेला त्रिकोण काढा. ज्याची बाजु पहिल्या त्रिकोणाच्या संगत बाजुच्या $\frac{2}{3}$ आहे.
13. 8 से.मी. पाया आणि 4 से.मी. उंची असलेल्या एका समव्दिभुज त्रिकोणाची रचना करा. नंतर दुसरा त्रिकेाण काढा. ज्याची बाजु समव्दिभुज त्रिकोणाच्या संगत बाजुच्या $1\frac{1}{2}$ पट आहे.

8.5 समरुप त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ



दोन समरुप त्रिकोणातील त्यांच्या संगत बाजुचे गुणोत्तरे सारखेच असते. त्यांच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तरात आणि त्यांच्या बाजुच्या गुणोत्तरात काही संबंध वाटतो का? हे समजण्यासाठी खालील कृती करु या.

कृती

या आकृतीत समरुप बहुभुजीच्या जोडीची यादी बनवा व माहित करा.

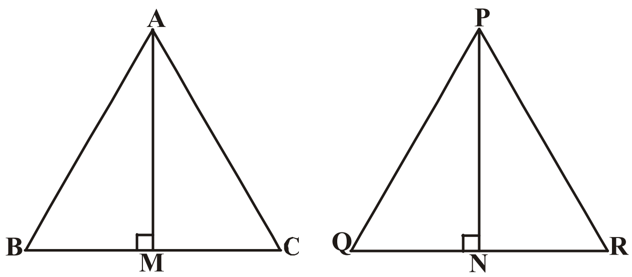
(i) समरुपतेचे गुणोत्तर आणि

(ii) क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर

क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत बाजुच्या गुणोत्तराचे वर्ग आहे. हे दिसुन येते.

या सारख्या प्रमेयाची सिध्दता करु.

प्रमेय-8.6 : दोन समरुप त्रिकेाणाच्या क्षेत्रफळाच्या गुणोत्तर त्यांच्या संगत बाजुच्या वर्गाच्या गुणोत्तराऐवढे असते.



दिलेले : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

साध्य: $\frac{(\Delta ABC)\text{क्षे.}}{(\Delta PQR)\text{क्षे.}} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$.

रचना : $AM \perp BC$ आणि $PN \perp QR$ काढा

सिध्दता : $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN}$ ...(1)

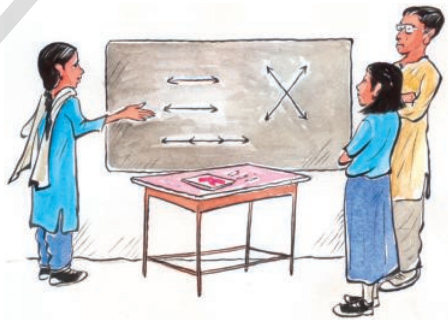
ΔABM & ΔPQN मध्ये

$\angle B = \angle Q$ ($\because \Delta ABC \sim \Delta PQR$)

$\angle M = \angle N = 90^0$

$\therefore$ $\Delta ABM \sim \Delta PQN$ (कोन कोन समरुपते वरुन)

$\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ}$ ...(2)



अजुन $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (दिलेले)

$\boxed{\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}} = \frac{AC}{PR}$ ...(3)

$\therefore \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ}$ (1), (2) आणि (3) वरुन

$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$.

(3) वरुन

$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$

हे सिध्द झाले.

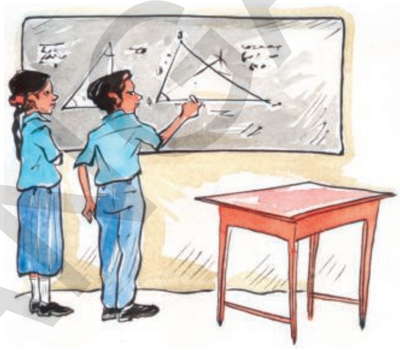
आता, काही उदाहरणे पाहु

उदाहरण-8. जर दोन समरुप त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ समान असल्यास ते दोन त्रिकोण एकरुप असतात. सिध्द करा

सोडवणुक: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

म्हणुन $\dfrac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2$

परंतु $\dfrac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = 1$ ($\because$ क्षेत्रफळ समान आहे.)



$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = 1$$

म्हणुन $AB^2 = PQ^2$

$BC^2 = QR^2$

$AC^2 = PR^2$

यावरुन $AB = PQ$

$BC = QR$

$AC = PR$

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (बाबाबा एकरुपते वरुन)

उदाहरण-9. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ आणि ज्याचे क्षेत्रफळ अनुक्रमे 64से.मी.^{2} आणि 121 से.मी.^{2}. जर $EF = 15.4$ से.मी. तर BC माहित करा.

सोडवणुक : $\dfrac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4} \Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2 \text{ से.मी.}$$

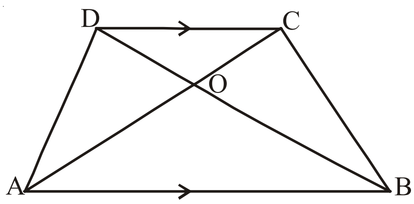
उदाहरण-10. ABCD समलंब चौकोनात $AB \parallel DC$ कर्ण एकमेकांस 'O' बिंदुवर छेदतात. जर $AB = 2CD$ तर त्रिकोण AOB आणि COD च्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर काढा.

सोडवणुक : ABCD समलंब चौकोनात $AB \parallel DC$ पण $AB = 2CD$.

ΔAOB आणि ΔCOD मध्ये

$\angle AOB = \angle COD$ (शिरोबिंदु विरुध्द कोन)

$\angle OAB = \angle OCD$ (एकांतर कोन)



$\Delta AOB \sim \Delta COD$ (को को समरुपते वरुन)

$$\frac{ar(\Delta AOB)}{ar(\Delta COD)} = \frac{AB^2}{DC^2}$$

$$= \frac{(2DC)^2}{(DC)^2} = \frac{4}{1}$$

$\therefore$ (ΔAOB)क्षे. : (ΔCOD)क्षे $= 4 : 1$.

अभ्यास - 8.3

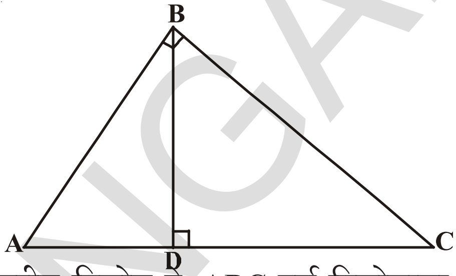
1. एका काटकोन त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजुवर समभुज त्रिकोण काढलेले आहेत. कर्णावरील त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ इतर दोन बाजुवरील त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या बेरजेऐवढे असते. हे दाखवा.
2. एका चौरसाच्या बाजुवर काढलेल्या समभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ त्या चौरसाच्या कर्णावर काढलेल्या समभुज त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या अर्धे असते हे दाखवा.
3. D, E, F हे ΔABC च्या BC, CA, AB बाजुचे मध्यबिंदु आहेत. ΔDEF आणि ΔABCच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर काढा.
4. ΔABC मध्ये $XY \parallel AC$ आणि XY ही त्या त्रिकोणाला दोन समान क्षेत्रफळ असलेल्या भागात विभाजन करते. तर $\frac{AX}{XB}$ चे गुणोत्तर काढा.
5. दोन समरुप त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर हे त्याच्या संगत मध्यगाच्या गुणोत्तराच्या वर्गाऐवढे असते सिध्द करा.
6. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. BC = 3से.मी. EF = 4से.मी. आणि ΔABC चे क्षेत्रफळ = 54 से.मी^{2}. तर ΔDEF चे क्षेत्रफळ काढा.
7. ABC त्रिकोणात AB बाजुला P वर AC ला Q वर मिळणारी PQ ही एक सरळ रेषा आहे. जरAP = 1 से.मी. आणि BP = 3 से.मी. AQ = 1.5 से.मी., CQ = 4.5 से.मी.तर सिध्द करा $(\Delta APQ$ चे क्षेत्रफळ$) = \frac{1}{16}(\Delta ABC$ चे क्षेत्रफळ$)$.
8. दोन समरुप त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ अनुक्रमे 81से.मी.^{2} आणि 49 से.मी.^{2} आहे. जर मोठ्या त्रिकोणाची उंची 4.5 से.मी. आहे.तर लहान त्रिकोणाची संगत उंची काढा.

8.6 पायथागोरसचे प्रमेय (Pythagoras Theorem)

तुम्ही पायथागोरसच्या प्रमेयाशी परिचीत आहात. काही कृतीवरुन या प्रमेयाचा पडताळा करा. यात आपण त्रिकोणाच्या समरुपतेच्या कल्पनेवरुन हे प्रमेय सिध्द करु शकतो. यासाठी खालील परिणामाचा उपयोग केला पाहिजे.

प्रमेय-8.7 : एका काटकोन त्रिकोणात काटकोन केलेल्या शिरोंबिंदु वरुन कर्णावर काढलेला लंब हा त्या लंबाच्या दोन्ही बाजुला तयार झालेले त्रिकोण दिलेल्या त्रिकोणाला समरुप आणि ते एकमेकांस समरुप असतात.

सिध्दता: त्रिकोण ABC काटकोन त्रिकोणात B हा काटकोन आहे. समजा BD हा कर्ण AC वर लंब टाकला. ΔADB आणि ΔABC मध्ये



$\angle A = \angle A$

आणि $\angle ADB = \angle ABC$ (का?)

म्हणुन $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (कसे ?) ...(1)

अशा प्रकारे $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (कसे ?) ...(2)

म्हणुन (1) आणि (2) वरुन BD लंबाच्या दोन्ही बाजु वरील त्रिकोण हे ABC पुर्ण त्रिकोणाला समरुप आहेत.

पुन्हा $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

म्हणुन $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

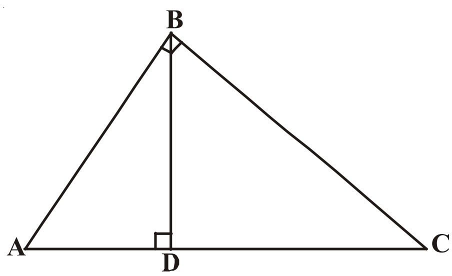
यावरुन खालील सिध्दता येते

विचार करा आणि चर्चा करा

एका काटकोन त्रिकोणात तिन्ही बाजुंचे माप पुर्ण संख्या असेल तर कमीत कमी एक नक्कीच समसंख्या असते का? तुमच्या मित्राशी आणि शिक्षकांशी चर्चा करा?

8.6.1 पायथागोरसचे प्रमेय (बौधायन सिध्दांत) PYTHAGORAS THEOREM (BAUDHAYAN THEOREM)

प्रमये-8.8 : एका काटकोन त्रिकोणात कर्णाच्या लांबीचा वर्ग हा इतर दोन बाजुच्या लांबीच्या वर्गाच्या बेरजे एवढा असतो.



पक्ष: ΔABC हा काटकोन त्रिकोणात B काटकोन आहे.

साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : $BD \perp AC$ काढा.

सिध्दता : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ (बाजु प्रमाणात आहेत.)

$AD \,.\, AC = AB^2$ ...(1)

पण $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$CD . AC = BC^2$ ...(2)

(1) & (2) ला मिळविल्यास

$AD . AC + CD . AC = AB^2 + BC^2$

$AC (AD + CD) = AB^2 + BC^2$

$AC . AC = AB^2 + BC^2$

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

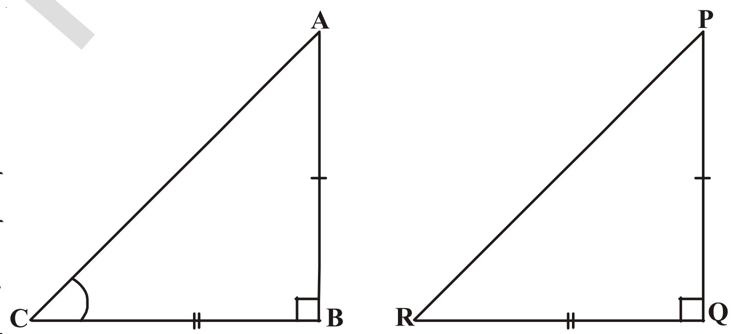
वरील सिध्दांत नुकताच भारतीय गणिततज्ञ बौद्धायान यांनी (इ.स.800 पुर्वी) खालील रुपात दिला.

"एका आयताने स्वता काढलेला कर्णाचे क्षेत्रफळ त्याच्या दोन्ही बाजु (म्हणजे लांबी आणि रुंदी) काढलेल्या क्षेत्रफळाच्या बेरजे ऐवढे असते." म्हणुन कधी कधी या सिध्दांताला बौध्दयान सिध्दतांत म्हणुन ओळखल्या जाते.

वरील सिध्दतांचा व्यत्यास काय आहे?

त्यास आपण वरील सिध्दतां सारखे सिध्द करु शकतो.

प्रमेय-8.9 : एका त्रिकोणातील एक बाजुच्या लांबीचा वर्ग हा इतर दोन बाजुच्या लांबीचा वर्गाच्या बेरजे एवढा असते. तर पहिल्या बाजुचा विरुध्द कोन हा काटकोन आणि तो काटकोन त्रिकोण होतो.



दिलेले : ΔABC मध्ये

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

साध्य : $\angle B = 90^0$.

रचना : ΔPQR काटकोन त्रिकोणाची रचना करा यात Q काटकोन असा आहे की, $PQ = AB$ आणि $QR = BC$.

सिध्दता : ΔPQRमध्ये$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (पा.गो.प्रमेयानुसार $\angle Q = 90^0$)

$PR^2 = AB^2 + BC^2$ (रचनेनुसार) ...(1)

परंतु $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (दिलेले आहे.) ...(2)

$\therefore$ $AC = PR$ (1) & (2) वरुन

आता ΔABC मध्ये आणि ΔPQR

$AB = PQ$ (रचनेनुसार)

$BC = QE$ (रचनेनुसार)

$AC = PR$ (सिध्द झाले)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (को को को एकरुपतेच्या नियमावरुन)

$\therefore$ $\angle B = \angle Q$ (एकरुप त्रिकोणाचे भाग)

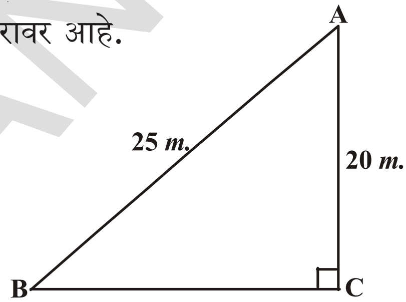
परंतु $\angle Q = 90°$ (रचनेनुसार)

$\therefore$ $\angle B = 90°$.

हे सिध्द झाले.

आता, काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-11. 25 मी. उंच असलेली एक शिडी भिंतीवरील 20 मी. उंची वर असलेल्या खिडकीला लागते. तर त्या शिडीचा खालचा भाग इमारती पासुन किती अंतरावर आहे.



सोडवणुक : ΔABC मध्ये $\angle C = 90°$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ (पा.गो.प्रमेयानुसार)

$25^2 = 20^2 + BC^2$

$BC^2 = 625 - 400 = 225$

$BC = \sqrt{225} = 15$मी.

म्हणुन त्या शिडीचा खालचा भाग इमारती पासुन 15 मी. अंतरावर आहे.

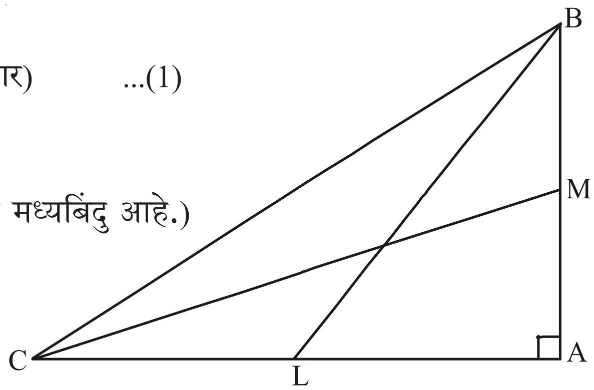
उदाहरण-12. ABC काटकोन त्रिकोणात A हा काटकोन आहे. BL आणि CM या मध्यगा आहेत तर सिध्द करा. $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$.

सोडवणुक : BL आणि CM हे ΔABC च्या मध्यगा आहेत $\angle A = 90°$.

ΔABC मध्ये

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (पा.गो.प्रमेयानुसार) ...(1)

$\Delta A.BL$ मध्ये $BL^2 = AL^2 + AB^2$



म्हणुन $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ ($\because$ L हा AC चा मध्यबिंदु आहे.)

$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

$\therefore$ $4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$ ...(2)

ΔCMA मध्ये $CM^2 = AC^2 + AM^2$

$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ ($\because$ M हा AB चा मध्यबिंदु आहे.)

$$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 \quad ...(3)$$

(2) आणि (3) ला मिळविल्यास

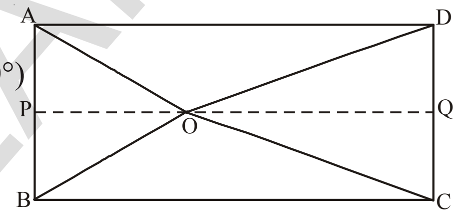
$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

$$\therefore\ 4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2 \quad (1)\text{ वरुन}$$

उदाहरण-13. ABCD आयतामध्ये कोणताही बिंदु'O' असल्यास सिध्द करा.

$$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$$

सोडवणुक : 'O' बिंदुमधुन BC समांतर एक रेषा काढली असता ती AB ला P येथे DCलाQ वर स्पर्श करते तेव्हा PQ || BC



आता PQ || BC

$\therefore$ $PQ \perp AB$ & $PQ \perp DC$ ($\because \angle B = \angle C = 90°$)

म्हणुन $\angle BPQ = 90°$ & $\angle CQP = 90°$

$\therefore$ BPQC आणि APQD दोन्ही आयत आहेत.

आता ΔOPB. $OB^2 = BP^2 + OP^2$ ...(1) वरुन

अशा प्रकारे ΔOQD वरुन, $OD^2 = OQ^2 + DQ^2$ ...(2)

ΔOQC पासुन $OC^2 = OQ^2 + CQ^2$ ...(3)

आणि ΔOAP पासुन $OA^2 = AP^2 + OP^2$

(1) & (2) मिळविल्यास

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \quad (\because BP = CQ \text{ आणि } DQ = AP)$$

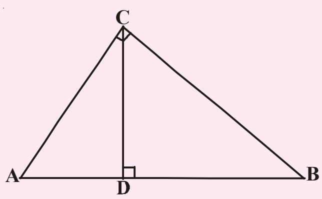
$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$

$$= OC^2 + OA^2 \ ((3)\ \&\ (4)\text{ वरुन})$$

हे करा

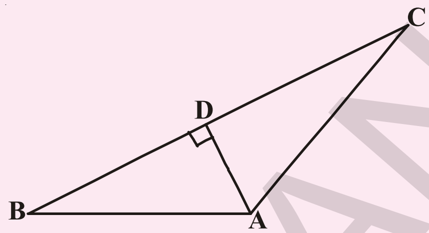
1. ΔACB मध्ये $\angle C = 90^0$ आणि $CD \perp AB$

   तर सिध्द करा $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$.



2. 15 मी.लांबीची शिडी इमारतीच्या जमीनीपासुन 9 मी अंतरावरील खिडकीला टेकते. शिडीची खालचा भाग त्याचा बिंदुवर ठेऊन शिडीला रस्त्याच्या दुसऱ्या बाजुला ठेवल्यास 12 मी.उंच असलेल्या खिडकीला टेकते. तर त्या रस्त्याची रुंदी काढा.

3. दिलेल्या आकृतीत जर $AD \perp BC$ तर सिध्द करा. $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$.



उदाहरण-14. एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण त्याच्या सर्वात लहान बाजुच्या दुप्पटीपेक्षा 6 मी. ने जास्त आहे. जर तिसरी बाजु कर्णापेक्षा 2 मी. ने लहान असल्यास त्या त्रिकोणाच्या बाजु काढा.

सोडवणुक : समजा लहान बाजु x मी. आहे.

कर्ण = (2x + 6)मी. आणि तीसरी बाजु = (2x + 4)मी.

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$(2x + 6)^2 = x^2 + (2x + 4)^2$

$4x^2 + 24x + 36 = x^2 + 4x^2 + 16x + 16$

$x^2 - 8x - 20 = 0$

$(x - 10)(x + 2) = 0$

$x = 10$ or $x = -2$

परंतु x ची किंमत ऋण नसते.

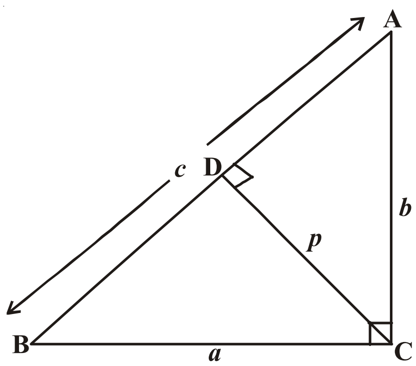
$\therefore x = 10$

म्हणुन त्रिकोणाच्या बाजु 10मी, 26मी.आणि 24मी.

उदाहरण-15. ABC काटकोन त्रिकोणात C हा काटकोन आहे. जर BC = a, CA = b, AB = c आणिC बिंदु पासुन AB वर काढलेल्या लंबाची लांबी P असल्यास सिध्द करा (i) pc = ab (ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

सोडवणुक :

(i) $CD \perp AB$ आणि CD = p.



ΔABC चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times AB \times CD$

$= \frac{1}{2} cp.$

ΔABC चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times BC \times AC$

$= \frac{1}{2} ab$

$$\frac{1}{2}cp = \frac{1}{2}ab$$

$$cp = ab \qquad ...(1)$$

(ii) ΔABC या काटकोन त्रिकोणात C कोन आहे.

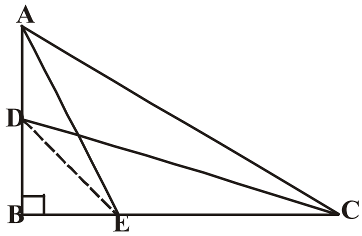
$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

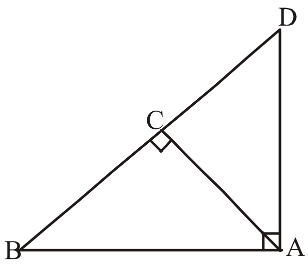
$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

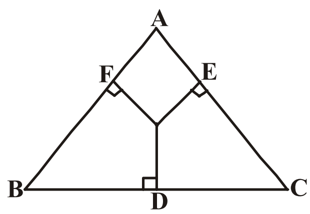
अभ्यास - 8.4



1. समभुज चौकोनाच्या बाजुवरील चौरसांची बेरीज त्याच्या कर्णावरील चौरसाच्या बेरजेऐवढे असते हे सिध्द करा.
2. ABC हा काटकोन त्रिकोण आहे.B हा काटकोन आहे. जर AB आणि BC बाजुवरील बिंदु अनुक्रमे D आणि E आहे तर सिध्द करा $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$.
3. एका समभुज त्रिकोणातील कोणत्याही बाजुच्या वर्गाची तिप्पट त्याच्या कर्णाच्या वर्गाच्या चार पटाएवढी असते हे सिध्द करा.
4. PQR काटकोन त्रिकोणात P हा काटकोन आहे. आणि $PM \perp QR$ होईल असा QR वरील बिंदु M बिंदुवर आहे तर $PM^2 = QM \cdot MR$. दाखवा.
5. ABD त्रिकोणात A काटकोन आहे आणि $AC \perp BD$ तर दाखवा (i) $AB^2 = BC \cdot BD$.
   (ii) $AC^2 = BC \cdot DC$
   (iii) $AD^2 = BD \cdot CD$.



6. ABC हा C येथे काटकोन करणारा समव्दिभुज काटकोन त्रिकोण आहे. सिध्द करा $AB^2 = 2AC^2$.
7. 'O' हा ABC त्रिकोणातील कोणताही आंतरीक बिंदु आहे जर $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ and $OF \perp AB$ तर दाखवा.
   (i) $OA^2+OB^2+OC^2-OD^2-OE^2-OF^2 = AF^2+BD^2+CE^2$
   (ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$.

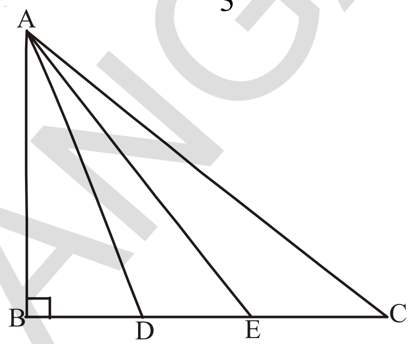


8. 18मी. उंची असलेल्या एका उभ्या खांबाला 24 मी. लांबी असलेली एक तार बांधलेली आहे. तारेच्या दुसऱ्या टोकाला एक खुटा बांधलेला आहे. वर खांबाच्या पायापासुन जमीनीवर किती अंतरावर खुटा गाडल्यास ती तार ताठ होते.

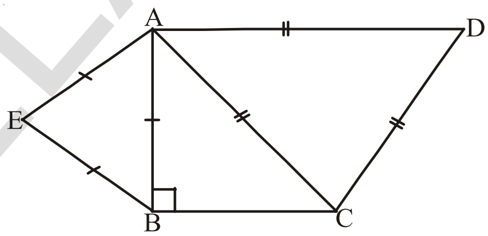
9. 6 मी. आणि 11मी. उंची असलेले दोन खांब सपाट जमीनीवर उभे आहे. त्या खांबाच्या पायामधील अंतर 12 मी. असल्यास त्याच्या वरच्या टोकातील अंतर काढा.

10. ABC समभुज त्रिकोणात D हा बिंदु BC बाजुवर असा आहे की, $BD = \frac{1}{3}BC$. तर सिध्द करा की, $9AD^2 = 7AB^2$.

11. दिलेल्या आकृतीमध्ये ABC हा काटकोन त्रिकोण B हा काटकेान आहे.BC बाजुवर D आणि E बिंदु समत्री खंडण करते तर सिध्द करा $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$.



12. ABC हा समव्दिभुज काटकोन त्रिकोणात B हा काटकोन आहे. ACDआणिABE हे दोन समरुप त्रिकोण AC आणि AB बाजुवर काढलेले आहेत. तर ΔABE आणि ΔACD च्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर काढा.



8.7 सिध्दातांच्या विधानाचे विविध रुप (DIFFERENT FORMS OF THEORITICAL STATEMENTS)

1. नकारात्मक विधान (Negation of a statement :)

एक विधानाच्या शेवटी नाही या शब्दाचा वापर केल्यास येणाऱ्या विधानास त्या विधानाचे नकारात्मक विधान म्हणतात

उदाहरणात "ΔABC हा समभुज आहे". हे विधान घ्या जर यास "p" ने दर्शविल्यास खालील प्रमाणे लिहितो.

p : ABC त्रिकोण हा समभुज आहे. याचे नकारात्मक " त्रिकोण ABC हा समभुज नाही.". विधानाचे नकारात्मक $\sim p$ या चिन्हाने दर्शवितात. यास नकारात्मक $\sim p$; असे वाचतात. pविधानाच्या व्यस्त नकारात्मक $\sim p$ असते p बनते.

जेव्हा आपण विधानाचे नकारात्मक लिहितो तेव्हा विधानाला समजण्यात गोधंळ होऊ नये याची काळजी घेतली पाहिजे.
या उदाहरणाकडे काळजीपुर्वक पहा.
P : सर्व अपरिमेय संख्या वास्तव संख्या आहेत. या p विधानाचे नकारात्मक असा लिहु शकतो.

i) $\sim p$: सर्व अपरिमेय संख्या वास्तव संख्या नसतात.

हे सत्य आहे की, असत्य या पैकी कोणते बरोबर आहे याचा निर्णय आपण कसा करतो ? आपण खालील नियम पाळतो. समजा p हे एक विधान आहे $\sim p$ हे त्याचे नकारात्मक आहे. तर $\sim p$ असत्य असते जेव्हा p सत्य असते आणि $\sim p$ सत्य असते जेव्हा p असत्य असते.

उदाहणार्थ s : $2 + 2 = 4$ सत्य

$\sim s$: $2 + 2 \neq 4$ असत्य

2. विधानाचा व्यत्यास किंवा विलोम (Converse of a statement :)

एखादे विधान सत्य किंवा असत्य असते. त्याला साधे विधान म्हणतात. जर आपण दोन साध्य विधानाला एकत्र केल्यास संयुक्त विधान येते. दोन साध्या विधानाला जर आणि तर या शब्दाने जोडल्यास संयुक्त विधान येते यालाच सशर्त किंवा तात्पर्य म्हणतात.

दोन साधे विधान p & q ला जर आणि तर या जोडशब्दाने जोडल्यास आपणास p झाल्यास q येते यास आपण $p \Rightarrow q$ ने दर्शवितो. $p \Rightarrow q$ मध्ये समजा आपण अदलाबदल केल्यास आपण p आणि q आपणास $q \Rightarrow p$ येते यालाच व्यत्यास किंवा विलोम म्हणतात.

उदाहरणात : $p \Rightarrow q$: ΔABC मध्ये $AB = AC$ तर $\angle C = \angle B$

Converse $q \Rightarrow p$: ΔABC मध्ये $\angle C = \angle B$ तर $AB = AC$

3. परस्पर विरोधाने सिध्दता (Proof by contradiction :)

या परस्पर विरोधाच्या सिध्दतेमध्ये आपण विधानाचे नकारात्मक सत्य गृहीत धरतो. जे आपल्याला सिध्द करावे लागते. या सिध्दतेमध्ये कुठेतरी परस्पर विरोध येते. तेव्हा आपल्याला कळुन येते. की, चुकीचे गृहीत धरल्याने विरोधाभास आला आहे. म्हणजे नकारात्मक हे सत्य आहे. म्हणुन आपण निश्कर्ष काढतो की मुळविधान सत्य आहे.

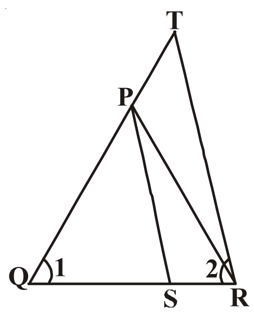
ऐच्छिक अभ्यास

[हा अभ्यास परिक्षेसाठी नाही]

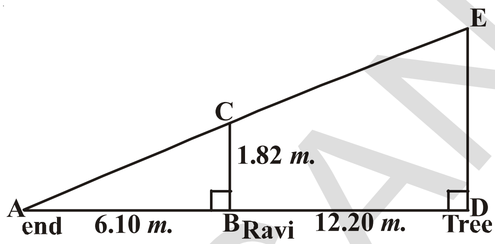
1. दिलेल्या आकृतीमध्ये

$$\frac{QT}{PR} = \frac{QR}{QS} \text{ आणि } \angle 1 = \angle 2$$

तर सिध्द करा. $\Delta PQS \sim \Delta TQR$.



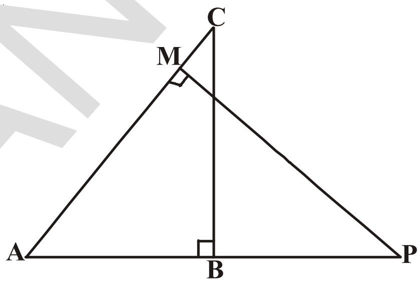
2. रविची उंची 1.82 मी आहे.त्याच्या घरातील मागील आवारात असलेल्या झाडाची उंची त्याला काढायची आहे. झाडापासुन 12.20 मी.अंतर चालल्यावर त्याची सावली झाडाच्या सावलीचा शेवटच्या भाग निश्चितपणे एकमेकांवर येते. तो आता सावलीच्या शेवटच्या भागा पासुन 6.10 मी. अंतरावर उभा असेल तर त्या झाडाची उंची किती असेल?



3. ABCD समांतरभुज चौकोनाचा कर्णAC हा DP बाजुवर Q येथे छेदते. 'P' हा AB बाजुवरील कोणताही एक बिंदु आहे. तर सिध्द करा. $CQ \times PQ = QA \times QD$.

4. ΔABC आणि ΔAMP हे दोन काटकोन त्रिकोण आहे आणि ते अनुक्रमे B आणि M शी काटकोन करते तर सिध्द करा (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$.



5. एक विमान विमानतळावरुन तासी 1000 कि.मी. वेगाने उत्तरेकडे जात आहे. त्याच वेळी दुसरे विमान त्याच विमानताळावरुन तासी 1200 कि.मी. वेगाने पश्चिमेकडे प्रवास करीत आहे. $1\frac{1}{2}$ तासांतर हे एकमेकांपासुन किती अंतरावर असेल?

6. ABC काटकोन त्रिकोणात C हा काटकोन आहे. AC आणि CB बाजुवर अनुक्रमे P आणि Q बिंदु आहेत. ते बिंदु या बाजुंना 2 : 1 गुणोत्तरात विभागते सिध्द करा.

(i) $9AQ^2 = 9AC^2 + 4BC^2$

(ii) $9BP^2 = 9BC^2 + 4AC^2$

(iii) $9(AQ^2 + BP^2) = 13AB^2$

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

- **विधानाला सिध्द करणे:** दोन समरुप त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर त्याच्या संगत बाजुच्या वर्गाच्या गुणोत्तरा ऐवढे असते. समरुप आणि समव्दिभुज त्रिकोणाच्या साहय्याने सिध्द करा.

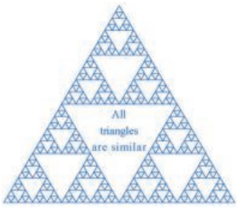
आपण काय चर्चा केली.

1. दोन आकृत्या सारख्या आकाराच्या असु शकतात. परंतु सारख्या मापाच्या असणे आवश्यक नाही यास समरुप आकृत्या म्हणतात.
2. सर्व एकरुप आकृत्या समरुप असतात परंतु याचा व्यत्यास सत्य नाही.

3. सारख्या बाजुंची संख्या असलेले दोन बहुभुजी समरुप असतात तर
   (i) त्यांचे संगत कोन समान असेल आणि
   (ii) त्यांच्या संगत बाजुचे गुणोत्तर समान असेल
   बहुभुजी समरुपतेसाठी वरील दोन अटी पुरेशा नाहीत.
4. एका त्रिकोणाच्या एका बाजुला काढलेली समांतर रेषा इतर दोन बाजुला भिन्न बिंदुत छेदते तेव्हा त्या दोन बाजु समान गुणोत्तरात विभागल्या जातात.
5. जर एक रेषा एका त्रिकोणाच्या दोन्ही बाजुला एकाच गुणोत्तरात विभागल्यास तिरेषा तिसऱ्या बाजुस समांतर असते.
6. दोन त्रिकोणात कोन समान असेल तर त्यांच्या संगत बाजुचे गुणोत्तर समान असते. म्हणुन हे दोन्ही त्रिकोण समरुप असता. (कोकोको समरुपतेच्या कसोटीवरुन)
7. एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनाशी समान असल्यास दोन्ही त्रिकोणाच्या तिसरा कोन समान होतो. (त्रिकेाणाच्या कोनाच्या बेरजेच्या कसोटीवरुन)
8. दोन त्रिकोणात संगत बाजुचे गुणोत्तर व्यस्त असल्यास त्यांचे संगत कोन समान असतात. म्हणुन ते समरुप होतात. (बाबाबा समरुपतेच्या कसोटीवरुन)
9. एका त्रिकोणास एक कोन हा दुसऱ्या त्रिकोणाच्या एका कोनाशी समान असेल तर आणि या कोनाला लागुन असलेले बाजुचे गुणोत्तर समान असल्यस ते त्रिकोण समरुप असतात.(बाकोबा)
10. दोन समरुप त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर हे त्याच्या संगत बाजुच्या चौरसाच्या गुणोत्तराला समान असते.
11. जर काटकोन त्रिकोणाच्या काटकोन केलेल्या शिरोंबिंदुवरुन दोन्ही बाजुचा लंब काढल्यास ते लंब पुर्ण त्रिकोणास समरुप असुन एकमेकांस समरुप असतात.
12. काटकोन त्रिकोणात एका बाजुचा वर्ग हा इतर दोन बाजुच्या वर्गाच्या बेरजेएवढा असतो(पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार)
13. एक त्रिकोणात एका बाजुचा वर्ग हा इतर दोन बाजुला वर्गाच्या बेरजेएवढा असतो. तर त्या पहिल्या बाजु समोरील कोन काटकोन होतो.

गंमत (कोडे)

एक त्रिकोण काढा. त्या त्रिकोणाच्या बाजुवरील मध्यबिंदुना जोडा. तुम्हाला चार त्रिकोण येतात. परत या त्रिकोणाच्या बाजुच्या मध्यबिंदुना जोडा अशा तऱ्हेने प्रणालीला वारंवार करत जा. काढलेले सर्व त्रिकोण समरुप आहेत का?



धडा

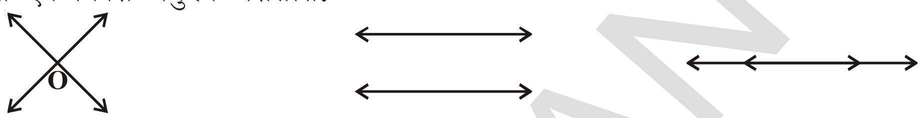
9

वर्तुळाच्या छेदिका आणि स्पर्शीका

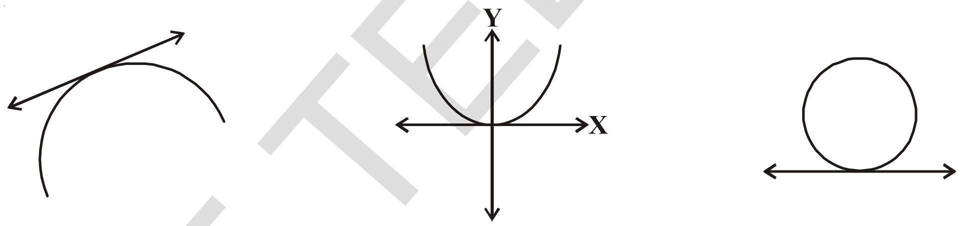
(Tangents and Secantsto a Circle)

9.1 प्रस्तावना

एका प्रतलामध्ये दोन रेषा एका बिंदुत छेदतात किंवा छेदत नाही हे आपण पाहतो. काही संदर्भात ते एकमेकांस अनुरुप असतात.



याच प्रमाणे जेव्हा एका प्रतलात एक वक्र रेषा आणि एक रेषा दिले असता, तेव्हा काय घडते. कोणत्या आकृत्या तयार होतात. वक्ररेषा परवलय असु शकते किंवा एका ठराविक बिंदु पासुन समान अंतरावर असणाऱ्या बिंदुचा समुह ***वर्तुळ*** असु शकते जे साधी बंदीस्त वक्र आहे.



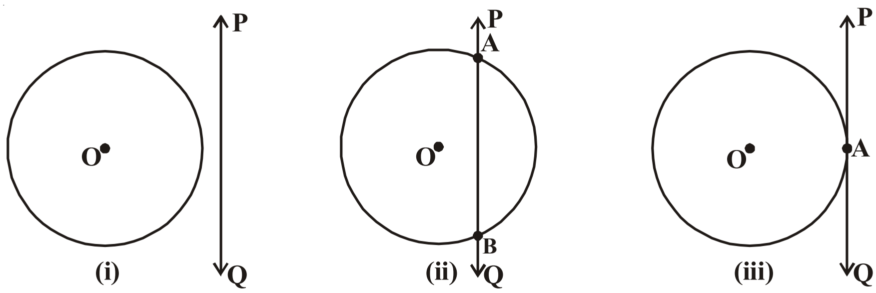
वर्तुळाकार वस्तु प्रतलावर हालचाल करतांना होणारे मार्ग तुम्ही पाहिलेच असेल. उदाहरणार्थ सायकल चालवतांना, रेल्वेरुळावर रेल्वेची चाके इत्यादी. येथे वर्तुळ आणि एक रेषा दिसते. त्यामध्ये काही संबंध बनते का?

जर एका प्रतलात दिलेल्या वर्तुळ आणि रेषेमधील सापेक्ष जागेचे निरिक्षण करु या.

9.1.1 रेषा आणि वर्तुळ (A Line and A Circle)

तुम्हाला कागदावर एक रेषा आणि वर्तुळ काढण्यास सांगीतले, सलमान म्हणाला की, ते तीन शक्य पध्दतीने काढु शकतो.

वर्तुळ 'O' आणि रेषा PQ, विचारात घेऊ, तीन शक्यता खालील आकृतीत दिलेले आहे.



आकृती.(i)मध्ये रेषा PQ आणि वर्तुळामध्ये एक सुध्दा सामाईक बिंदु नाही. या संदर्भात PQ ही रेषा वर्तुळाला न छेदणारी रेषा आहे.

आकृती (ii)मध्ये PQ ही वर्तुळाला A आणि B या दोन बिंदुत छेदत आहे. A आणि B दोन सामाईक बिंदुने वर्तुळाची जिवा AB बनते. या संदर्भात रेषा PQ ला वर्तुळाची छेदन रेषा म्हणतात.

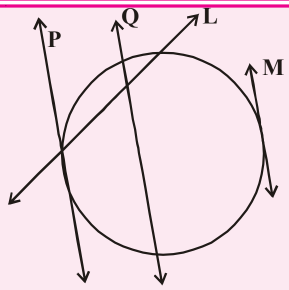
आकृती (iii) मध्ये येथे रेषा PQ ला आणि वर्तुळाला एकच सामाईक बिंदु A आहे. या रेषाला स्पर्शीका म्हणतात.

रेषा आणि वर्तुळाची या व्यक्तीरिक्त आणखी कोणतीही स्थिती तुम्ही पाहु शकत नाही. तर आपण वर्तुळाच्या स्पर्शीकाचे अस्तीत्व त्याचे गुणधर्म आणि त्याच्या रचनेचा अभ्यास करु या.

तुम्हाला माहित आहे का?

स्पर्शीका 'tangent' हे पद लॅटीन पद 'tangere'पदापासुन आलेली आहे. याचा अर्थ स्पर्श करणे आहे. या पदाला सुरुवातीला डेन्मार्क गणीतज्ञ थॉमस फिंकी 1583 वर्षात वापरला

हे करा



i. कोणत्याही एक त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. वेगवेगळ्या बिंदुवरुन चार स्पर्शीका काढा. या वर्तुळाला तुम्ही अजुन किती स्पर्शीका काढु शकता?

ii. वर्तुळाच्या बाहेर दिलेल्या बिंदुतुन वर्तुळाला तुम्ही किती स्पर्शीका काढु शकता?

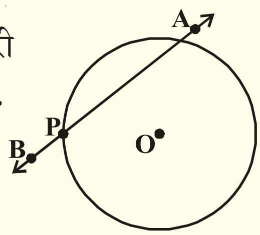
iii. बाजुच्या आकृतीत कोणत्या वर्तुळाची स्पर्शीका आहे?

9.2 वर्तुळाची स्पर्शीका (Tangents of a Circle)

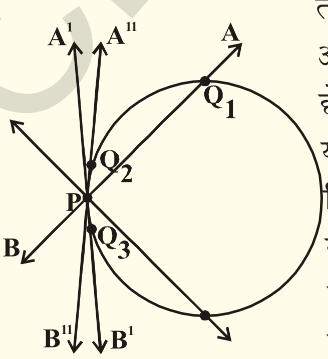
वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदु वरुन आपण स्पर्शीका काढु शकतो. असे आपल्याला दिसते. वर्तुळाच्या केाणत्याही बिंदुवरुन तुम्ही किती स्पर्शीका काढु शकता?

हे समजण्यासाठी खालील कृत्य विचारात घेऊ या.

कृती



एक वर्तुळाकार तार घ्या. त्यावर एक बिंदु P जवळ AB नावाची दुसरी रेषा अजुन एका तारेला घेऊन ती P भोवती भ्रमण करील अशी तयार करा. त्यामधील वृत्ताकार तार वर्तुळाला दर्शवितात आणि सरळ तार AB ही वर्तुळाच्या P बिंदुवर छेदणारी रेषा म्हणुन दर्शविते.



या प्रणालीला एका टेबलावर ठेऊन AB तारेला P बिंदु भोवती विविध स्थितीत येईल अशी सरळ रेषा आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे येते. ही तार वर्तुळाकार तारेला P येथे छेदते आणि तसेच Q_1, Q_2 किंवा Q_3 इ.बिंदु पैकी एका बिंदुत छेदते. साधारणत: वर्तुळाकार तार हे दोन बिंदुवर छेदताना त्या पैकी एक बिंदु P हा एका विशिष्ट स्थितीत तो त्या

वर्तुळास P बिंदु जवळ छेदतो. (AB ची A′B′ स्थिती पहा)ही त्या वर्तुळाचा P बिंदुवरील स्पर्शीकेची स्थिती आहे. तुम्ही AB च्या सर्व स्थितीची तपासणी करु शकता. ती दुसऱ्या बिंदुवर आणि वर्तुळाच्या P बिंदुवर छेदते. A′B′हा वर्तुळाच्या P बिंदुवरील स्पर्शिका आहे.

आपणास दिसुन येते की, वर्तुळाच्या P बिंदुवर फक्त एकच स्पर्शिका आहे.

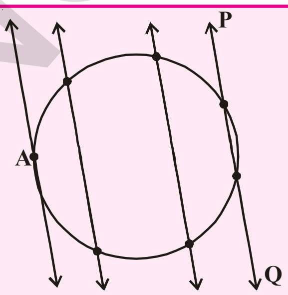
AB ला या स्थिती वरुन इतर दिशेत फिरविल्यामुळे ती वर्तुळाकार तारेला दोन बिंदुत कापते. या सर्वाला वृत्त छेदीका म्हणतात. स्पर्शीका हा वृत्तछेदीकेचे विशेष संदर्भ आहे. येथे रेषेवरील दोन छेदन बिंदु वर्तुळाशी अनुरुप नसतात.

हे करा

बाजुला दाखविल्याप्रमाणे कागदावर एक वर्तुळ काढा. व त्या वर्तुळाची PQ छेदन रेषा काढा.PQ ला समांतर असणाऱ्या रेषा PQ च्या दोन्ही बाजुला काढा. छेदन रेषा वर्तुळाच्या केंद्राकडे सरकतांना जिवाची लांबी कशी होत आहे?

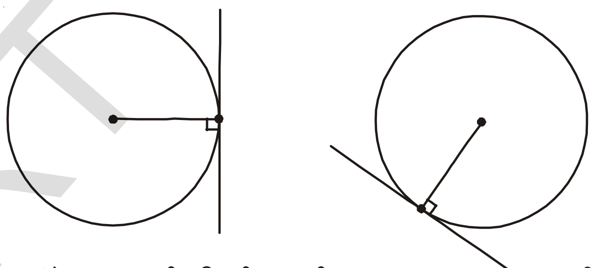
सर्वात लांब जीवा कोणती आहे?

वर्तुळाला तुम्ही किती स्पर्शीका काढु शकता? जे की, एकमेकांशी समांतर आहेत?



वर्तुळ आणि स्पर्शीकाच्या सामाईक बिंदुला स्पर्श बिंदु म्हणतात. आणि वर्तुळाच्या स्पर्श बिंदुपासुन जाणाऱ्या रेषांना स्पर्शीका म्हणतात.

खालील आकृतीत दिलेल्या वर्तुळाच्या स्पर्शीकाच्या निरिक्षण करु या.

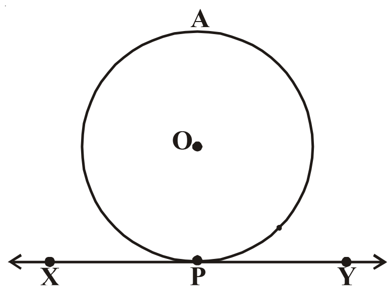


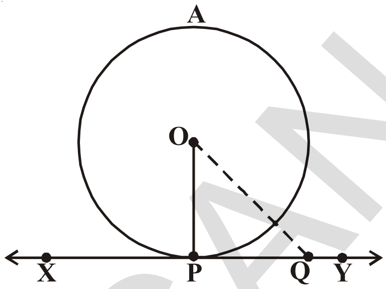
वर्तुळाच्या एका बिंदुवर तुम्ही किती स्पर्शीका काढु शकता? पुर्ण वर्तुळावर तुम्हाला किती स्पर्शीका मिळतात? स्पर्श बिंदु कडे पाहा. स्पर्शबिंदु पासुन एक त्रिज्या काढा. स्पर्श बिंदुवर स्पर्शीका आणि त्रिज्या मध्ये होणाऱ्या कोनामध्ये काही विशेषत: दिसते का? संबंधीत स्पर्शीकाला ते लंब आहे ते आपण सिध्द सुध्दा करु शकतो. ते कसे पाहु या.

प्रमेय -9.1 : वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदुची वरची स्पर्शीका स्पर्श बिंदुतुन काढलेल्या त्रिज्येला लंब असते.

दिलेले : ‘O’ केंद्र असलेले वर्तुळ आणि वर्तुळाच्या P बिंदुवरची स्पर्शीका XY

साध्य : XY ला OP हा लंब आहे (म्हणजे $OP \perp XY$)





Q हा वर्तुळाच्या बाहेरच्या बिंदु असतो का? (का?) (सुचना: Q हा वर्तुळा वरचा बिंदु जर असेल तर ते वर्तुळाची छेदन रेषा होते, XY स्पर्शीका हेात नाही)

म्हणुन, वर्तुळाची त्रिज्या OP पेक्षा OQ ही जास्त लांबीची आहे? (का?)

म्हणजे $OQ > OP$.

XY रेषा वरील कोणत्याही बिंदुसाठी असेच घडते. XY वरच्या कोणत्याही बिंदुपासुन बिंदु O पर्यंतचे अंतर हे OP पेक्षा जास्त असते आणि हे सत्य आहे. रेषेवर काढलेल्या रेषाखंडामध्ये लंब रेषा ही सर्वात लहान असते. (कृती 5.3 वर्ग 7 वा) म्हणुन XY ला OP लंब नाही असे जे आपण समजलो ते चुकीचे आहे. म्हणुन OP हे XYला लंब आहे.

जसे $\overline{OP} \perp XY$ हे सिध्द होते.

सुचना : वर्तुळाच्या त्रिज्येला स्पर्शबिंदु वर रेखाटलेल्या रेषांना त्या वर्तुळाच्या त्या बिंदुवर सामान्य (normal) असे सुध्दा म्हणतात.

प्रयत्न करा

वरील प्रमेयाचे व्यत्यास तुम्ही कसे सिध्द कराल?

"एका प्रतलात वर्तुळावरची त्रिज्या त्याच्या एका अंत्य बिंदु पासुन रेखाटलेली रेषा त्याला लंब असेल तर ती रेषा वर्तुळाला स्पर्शीका असते".

वरील प्रमेयाचा वापर करुन आपण आणखी काही परिणाम माहित करु शकतो.

(i) वर्तुळावरचा बिंदु P वरुन एक लंब OP काढु शकतो. म्हणुन परिघा वर दिलेल्या बिंदुतुन एकच स्पर्शीका असते.

(ii) वर्तुळावर P बिदुला एकच लंब XY रेषा असते म्हणुन स्पर्श रेषेला लंब असणारी रेषा निश्चित पणे वर्तुळाच्या केंद्रातुन जाते.

तुमचे मित्र आणि शिक्षकासोबत या विषयावर विचार आणि चर्चा करा.

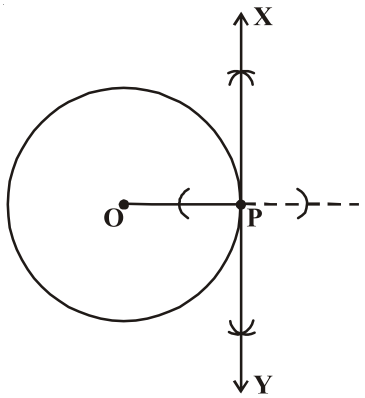
9.2.1 वर्तुळाच्या स्पर्शीकेची रचना (CONSTRUCTION OF TANGENT TO A CIRCLE)

वर्तुळाच्या दिलेल्या बिंदुवर स्पर्शीकेची रचना कशी करु शकतो? या साठी आताच आपण माहित केलेले स्पर्शबिंदु पासुन काढलेली त्रिज्या ही त्या स्पर्शबिंदुतुन काढलेल्या स्पर्शीकेला लंब असते. याचा वापर करु. स्पर्शबिंदुतुन स्पर्शीका काढण्यासाठी आपल्याला स्पर्शबिंदुतुन त्रिज्येला लंब असणारी रेषा काढावी लागणार. ही त्रिज्या काढण्यासाठी आपल्याला वर्तुळाचा केंद्रबिंदु माहित असणे आवश्यक आहे. रचनासाठी पायऱ्या पाहु या.

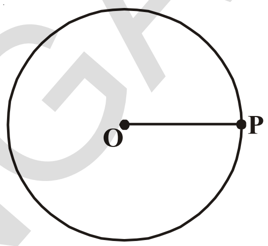
रचना : जेव्हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु माहित असेल तेव्हा दिलेल्या बिंदुतुन वर्तुळाची स्पर्शीका काढणे.

जर वर्तुळाचा केंद्रबिंदु 'O' आणि परिघा वरील केणताही P तर आपल्याला P बिंदुतुन स्पर्शीकाची रचना करायची आहे. स्पर्शिका काढण्याच्या पायऱ्यांचे निरिक्षण करु या.

रचनेच्या पायऱ्या :



1. 'O' केंद्र असलेले वर्तुळ काढा आणि परिघा वर कोठेही 'P' बिंदुची खुण करा आणि OP जोडा.



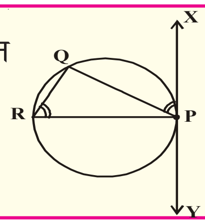
2. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे P बिंदुतुन जाणारी लंब रेषा काढा.त्याला XY नाव द्या.
3. तर XY ही P बिंदुतुन जाणारी स्पर्शीका होय.

P मधुन जाणारी आणखी एक स्पर्शीका तुम्ही काढु शकता का? कारण द्या?

प्रयत्न करा

जेव्हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु माहित नसेल तेव्हा वर्तुळावरच्या दिलेल्या बिंदुतुन वर्तुळाची स्पर्शीका तुम्ही कसे काढता?

सुचना : $\angle QPX$ आणि $\angle PRQ$ हे समान कोन काढा. रचना स्पष्ट करा.



9.2.2 स्पर्शीकेची लांबी माहित करणे (Finding Length of the Tangent)

वर्तुळावरच्या दिलेल्या बिंदुतुन काढलेल्या वर्तुळाच्या स्पर्शीकेची लांबी तुम्ही माहित करु शकता का?

उदाहरण : 6 से.मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचा केंद्र 'O' आहे.तर P बिंदुतुन काढलेल्या स्पर्शीकेची लांबी माहित करा. येथे OP = 10 से.मी.

सोडवणुक : स्पर्शीका ही त्रिज्येला स्पर्शबिंदुवर लंब आहे. (प्रमेय 9.1)

येथे PA हा स्पर्श रेषाखंड आणि OA हा वर्तुळाची त्रिज्या आहे.

$\therefore\ OA \perp PA \Rightarrow \angle OAP = 90°$

आता ΔOAP मध्ये $OP^2 = OA^2 + PA^2$ (पा.गो.प्र.नुसार)

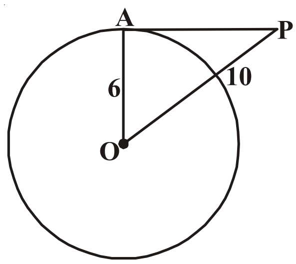
$10^2 = 6^2 + PA^2$

$100 = 36 + PA^2$

$PA^2 = 100 - 36$

$= 64$

$\therefore\ PA = \sqrt{64} = 8$ से.मी.



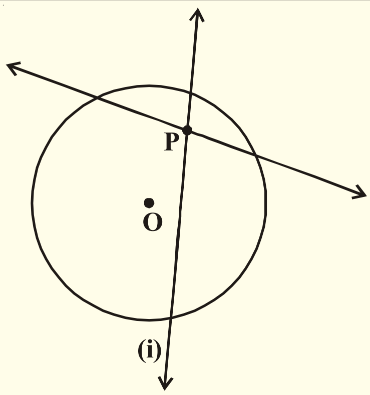
अभ्यास - 9.1

1. रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरा.
   (i) वर्तुळाला, एक स्पर्शीका............. बिंदुवर छेदते.
   (ii) वर्तुळाला एक रेषा दोन भिन्न बिंदुत छेदत असेल तर त्याला........... म्हणतात.
   (iii) एका वर्तुळाला जास्तीत जास्त काढता येणारे समांतर स्पर्शीका..........
   (iv) एक वर्तुळ आणि त्याच्या स्पर्शीकाच्या सामाईक बिंदुला......... म्हणतात.
   (v) एका वर्तुळाला आपण......... स्पर्शीका काढु शकतो.
   (vi) एका वर्तुळाला जास्तीत जास्त .... समांतर स्पर्शिका असतात.
2. 5 से.मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाला PQ स्पर्श रेषा P बिंदुतुन जाते. वर्तुळ केंद्र O पासुन स्पर्शीके वरील बिंदु Q पर्यंतचे अंतर OQ = 12 सें.मी. तर PQ ची लांबी माहित करा.
3. एक वर्तुळ काढा आणि दिलेल्या रेषेला दोन समांतर रेषा काढा. त्यामधील एक स्पर्शीका व दुसरी वृत्तछेदन रेषा.
4. 9 से.मी.त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाच्या केंद्रबिंदु पासुन 15 सें.मी. अंतरावर असणाऱ्या बिंदुतुन काढलेल्या स्पर्शीकेची लांबी माहित करा?
5. एका वर्तुळाच्या व्यासाच्या शेवटच्या बिंदुवर काढलेल्या स्पर्शीका समांतर असतात हे सिध्द करा.

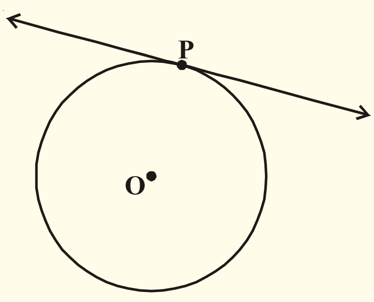
9.3 कोणत्याही बिंदुपासुन वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शीका

वर्तुळावरच्या बिंदुवरुन काढलेल्या स्पर्शीकांची संख्या माहित करण्यासाठी खालील कृत्य करु.

कृती

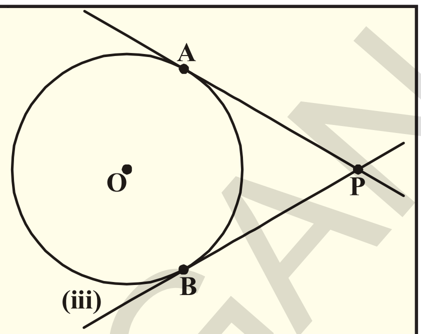


(i) एका कागदावर वर्तुळ काढा. आतमध्ये एक बिंदु P घ्या. या बिंदु पासुन तुम्ही वर्तुळाला स्पर्शीका काढु शकता का? या बिंदुतुन जाणाऱ्या सर्व रेषा वर्तुळाला दोन बिंदुत छेदतात असे तुम्हाला दिसते. या सर्व कोणत्या रेषा आहेत? या सर्व वृत्तछेदन रेषा आहेत. म्हणुन वर्तुळाच्या आतील बिंदुमधुन वर्तुळाला स्पर्शीका काढणे शक्य नाही (बाजुची आकृती पहा)



(ii) पुन्हा, वर्तुळावर एक बिंदु P घ्या. आणि या बिंदुतुन जाणाऱ्या स्पर्शीका काढा. वर्तुळाच्या अशा एखाद्या बिंदुपासुन फक्त एक स्पर्शीका आपल्या निरिक्षणास येते. (बाजुची आकृती पहा)

(iii) आता, पुन्हा वर्तुळाच्या बाहेर एक बिंदु P घ्या आणि या बिंदुपासुन वर्तुळाच्या स्पर्शीका काढण्याचा प्रयत्न करा. तुम्हाला काय निरिक्षणास येते? तुम्ही या बिंदुतुन दोन स्पर्शीका काढु शकता. असे तुम्हाला दिसते.(बाजुची आकृती पहा.)



आता, आपण याला सोप्या भाषेत खालील प्रमाणे लिहु शकतो.

संदर्भ (i) : वर्तुळाच्या आतील बिंदुतुन जाणारी वर्तुळाला स्पर्शीका नसते.

संदर्भ (ii) : वर्तुळावरच्या बिंदतुन जाणारी फक्त एक आणि एकच वर्तुळाला स्पर्शीका असते.

संदर्भ(iii) : वर्तुळा बाहेरच्या एका बिंदुतुन जाणाऱ्या वर्तुळाला दोन स्पर्शीका असतात. या संदर्भात A आणि B अनुक्रमे PA आणि PB चे स्पर्श बिंदु आहेत.

वर्तुळाच्या बाहेरील बिंदु P पासुन वर्तुळाच्या स्पर्शबिंदु पर्यंत रेषाखंडाची लांबी ला त्या वर्तुळाच्या बाह्य बिंदु P मधुन जाणारी स्पर्शीका लांबी म्हणतात.

वरील आकृती (iii) मध्ये, PA आणि PB हे वर्तुळाच्या बाह्यबिंदु P मधुन जाणाऱ्या स्पर्शीका आहेत. PA आणि PB मध्ये संबंध काय आहे?

प्रमेय -9.2 : वर्तुळाच्या बाह्यबिंदु मधुन काढलेल्या स्पर्शीकांची लांबी समान असते.

दिलेले : O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा P हा बाह्यबिंदु आहे. आणि P मधुन जाणाऱ्या PA आणि PB या दोन स्पर्शीका आहेत (आकृती पहा)

साध्य : PA = PB

सिध्दता : OA, OB आणि OP जोडा

$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$ (प्रमेय 9.1नुसार त्रिज्या आणि स्पर्शीका मधील कोन)

ΔOAP आणि ΔOBP, दोन काटकोन त्रिकोणामध्ये

OA = OB (सारख्या वर्तुळाच्या त्रिज्या)

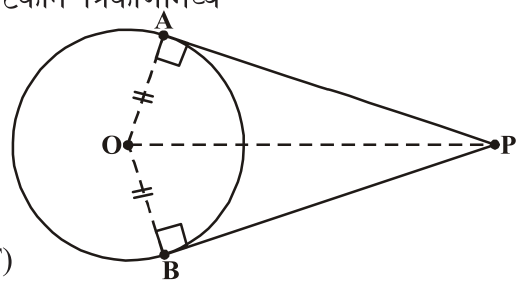
OP = OP (सामाईक)

एकरुपता कसोटीवरुन

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$

हे दिले आहे PA = PB (CPCT)

हे सिध्द होते.



प्रयत्न करा

पायथागोरस प्रमेयाचा वापर करुन वरील प्रमेयाची सिध्दता लिहा.

9.3.1. वर्तुळाच्या बाह्य बिंदुतुन वर्तुळाच्या स्पर्शीकाची रचना:

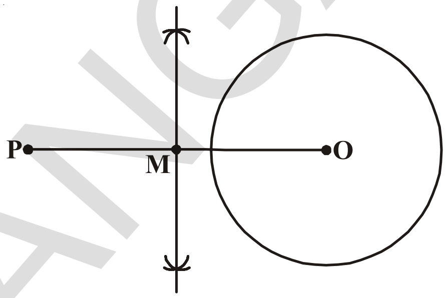
जर एक बिंदु वर्तुळाच्या बाहेर असेल तर त्या बिंदुमधुन वर्तुळाला दोन स्पर्शीका काढता येतात. हे आपण पाहिले आहे. तर आता आपण या स्पर्शीकांची रचना करु या.

रचना : वर्तुळाच्या बाह्य बिंदुवरुन वर्तुळाच्या स्पर्शीकाची रचना

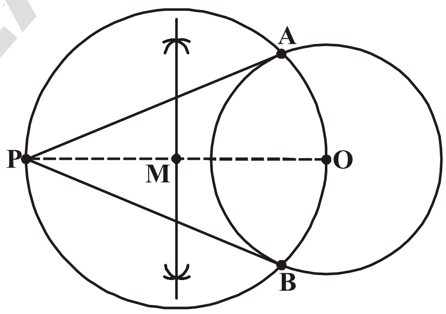
दिलेले : 'O' केंद्रबिंदु असलेल्या वर्तुळाचा बाह्यबिंदु P आहे. आपल्याला P मधुन वर्तुळाला दोन स्पर्शीकांची रचना करायची आहे.

रचनेच्या पायऱ्या :

पायरी(i) : PO जोडा आणि त्याचा लंब दुभाजक काढा. POच्या मध्यबिंदुला M समजा



पायरी (ii) : M केंद्र घेत PM किंवा MO त्रिज्या घेऊन वर्तुळ काढा. हा वर्तुळ दिलेल्या वर्तुळाला ज्या बिंदुत छेदलेला आहे. त्या बिंदुला A आणि B हे नाव द्या.

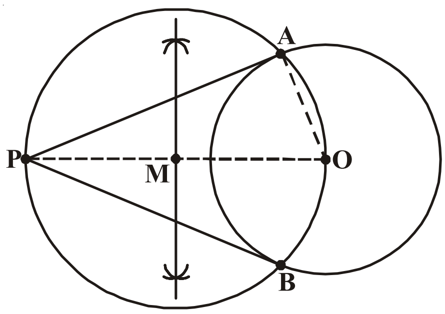


पायरी (iii) : PA आणि PB जोडा. तर PA आणि PB या वर्तुळाच्या स्पर्शीका आहेत.

सिध्दता: आता, ही रचना कशी समर्थनीय आहे ते पाहु या

OAजोडा, नंतर $\angle PAO$ हा अर्धवर्तुळाचा कोन आहे.

म्हणुन $\angle PAO = 90°$.

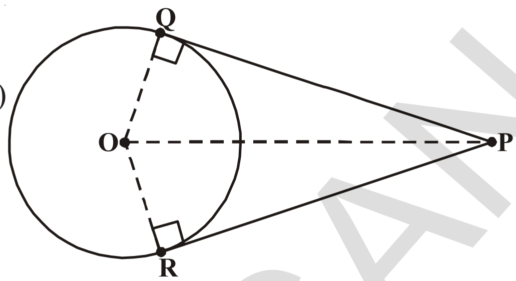


$PA \perp OA$ आपण असे लिहु शकतो का?
OA हा दिलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या असल्याने PA हा वर्तुळाची स्पर्शीका आहे.(प्रमेय 9.1 चा व्यत्यास)
याच प्रमाणे PB सुध्दा वर्तुळाची स्पर्शीका आहे. हे सिध्द होते.

स्पर्शीका आणि वृत्तछेदन रेषाविषयी काही महत्वाचे विधान आणि त्याच्या सिध्दता:

विधान-1 : वर्तुळाच्या बाह्यबिंदु मधुन जाणारी वर्तुळाच्या स्पर्शीके जवळ होणाऱ्या कोनाचा कोन दुभाजक रेषेवर त्या वर्तुळाचा केंद्र बिंदु असतो. हे तुम्ही कसे सिध्द कराल?

सिध्दता : समजा O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा Pहा बाह्य बिंदु आहे. आणि बिंदु P मधुन काढलेल्या PQ आणि PR हे स्पर्शीका आहेत. OQ आणि ORजोडा. त्रिकोण OQP आणि त्रिकोण ORP हे एकरुप आहे कारण आपल्या माहित आहे.



$\angle OQP = \angle ORP = 90^o$ (प्रमेय 9.1)

OQ = OR (दोन्ही एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

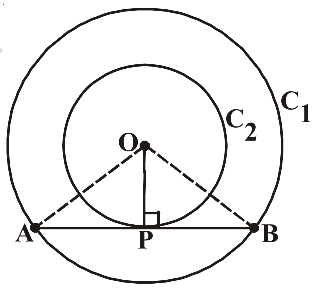
OP हे सामाईक आहे.

याचा अर्थ $\angle OPQ = \angle OPR$

म्हणुन $\angle QPR$ चा OP हा कोन दुभाजक आहे.

दोन स्पर्शीका मधील कोनाच्या कोन दुभाजकावर केंद्र आहे.

विधान-2 : दोन समकेंद्रक वर्तुळात बाह्य वर्तुळाची जिवा अंतर वर्तुळाच्या स्पर्श बिंदुवर लंबदुभाजक आहे. हे कसे सिध्द होईल ते पाहु?



सिध्दता : O समकेंद्र असलेली दोन वर्तुळे C_1 आणि C_2 आणि मोठा वर्तुळ C_1, C_2 ची जीवा ABलहान वर्तुळ च्या P बिंदुवर स्पर्श करीत आहे. (आकृती पहा) AP = PB सिध्द करायचे आहे.

OP जोडा

वर्तुळ C_2च्या Pबिंदुवर ABही स्पर्शीका आहेOP हा त्रिज्या आहे.

म्हणुन प्रमेय 9.1 नुसार

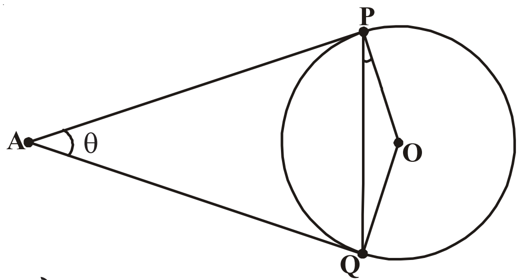
$OP \perp AB$

आता,ΔOAP आणि ΔOBP हे एकरुप आहेत (का?) याचा अर्थ AP = PB म्हणुन OP हा जिवा AB चा लंबदुभाजक आहे. जे केंद्र पासुन लंब असलेला जिवाला लंबदुभाजक आहे.

विधान-3 : जर O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या बाह्य बिंदु A मधुन वर्तुळावर AP आणि AQ अशा दोन स्पर्शीका काढल्या तर $\angle PAQ = 2\angle OPQ = 2\angle OQP$ आपणास दिसते?

सिध्दता : O केंद्र असलेले वर्तुळाचा बाह्य बिंदु A आहे आणि AP आणि AQ हे वर्तुळाचे दोन स्पर्शीका आहेत. P, Q हे स्पर्श बिंदु आहेत.(आकृती पहा)

आपल्याला सिध्द करायचे आहे.



$\angle PAQ = 2\angle OPQ$

समजा $\angle PAQ = \theta$

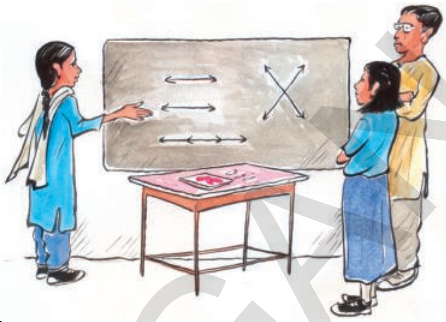
आता, प्रमेय 9.2 नुसार

AP = AQ, ΔAPQ हा समव्दिभुज त्रिकोण आहे.

म्हणुन $\angle APQ + \angle AQP + \angle PAQ = 180°$ (तीन कोनांची बेरीज)

$$\angle APQ = \angle AQP = \frac{1}{2}(180° - \theta)$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\theta$$



पुन्हा प्रमेय 9.1 नुसार

$\angle OPA = 90°$

म्हणुन $\angle OPQ = \angle OPA - \angle APQ$

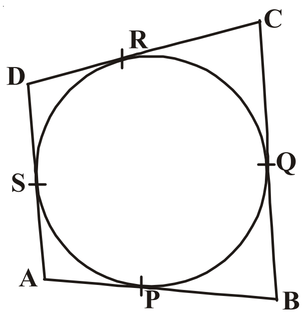
$$= 90° - \left[90 - \frac{1}{2}\theta\right] = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PAQ$$

दिलेले आहे $\angle OPQ = \frac{1}{2}\angle PAQ$.

\ ÐPAQ = 2ÐOPQ. याच प्रमाणे ÐPAQ = 2ÐOQP

विधान-4 : ABCD चौकोनात अंतर वर्तुळ काढल्यास

AB + CD = AD + BC.



सिध्दता : चौकोन ABCDच्या बाजु AB, BC, CD आणि DA ला अनुक्रमे P, Q, R आणि S बिंदुमध्ये वर्तुळ स्पर्श करीत आहे.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ आणि $\overline{DA}$ वर्तुळाच्या स्पर्शिका आहेत.

प्रमेय 9.2 नुसार, वर्तुळाच्या बाह्य बिंदुतुन काढलेल्या दोन्ही स्पर्शीका समान असतात.

AP = AS

BP = BQ

DR = DS

आणि CR = CQ

यांची बेरीज करुन

AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ

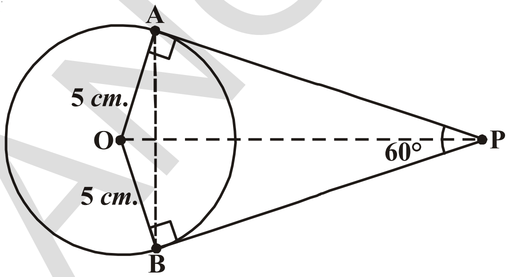
किंवा (AP + PB) + (CR + DR) = (BQ + QC) + (DS + SA)

किंवा AB + CD = BC + DA.

उदाहरण-1. वर्तुळाची त्रिज्या 5 से.मी. आणि दोन स्पर्शीकाच्या समोरचा कोन 60°असेल तर त्या वर्तुळाचे स्पर्शीका काढा.

सोडवणुक : वर्तुळ काढुन त्याला दोन स्पर्शीका काढण्यासाठी आपण निरिक्षण करु. आपल्या जवळ फक्त वर्तुळाची त्रिज्या आणि स्पर्शीका मधील कोन आहे. किती अंतरावरच्या बिंदु पासुन स्पर्शीका काढायची आहे ते आपल्याला माहित नाही आणि तसेच आपल्याला स्पर्शीकाची लांबी सुध्दा माहित नाही. आपल्याला फक्त स्पर्शीका मधील कोन माहित आहे. याचा वापर करात वर्तुळाच्या बाह्य बिंदुचा अंतर माहित करायचे आहे जेथुन आपल्याला स्पर्शीका काढायच्या आहेत.

तर'O' केंद्र असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 5 सें.मी. आहे. समजा वर्तुळाचा बाहेर 'P'बिंदु आहे. तर तिथुन काढलेल्या दोन स्पर्शीका PA आणि PB आणि त्या दोन स्पर्शीका मधील कोन 60^o आहे. यामध्ये $\angle APB = 60^o$. OP जोडा.आपल्याला माहित आहे की, $\angle APB$ चा OP हा दुभाजक आहे.



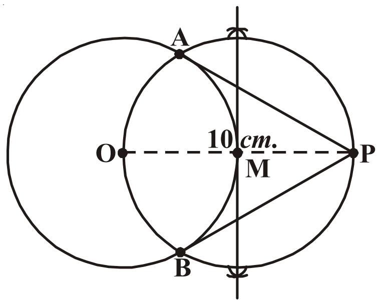
$\angle OAP = \angle OPB = \dfrac{60^o}{2} = 30^o$ ($\because$ $\Delta OAP \cong \Delta OBP$)

आता ΔOAP मध्ये

$$\sin 30^o = \frac{\text{Opp. side}}{\text{Hyp}} = \frac{OA}{OP}$$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{OP}$ (त्रिकोणामीतीय गुणोत्तरा वरुन)

OP = 10 से.मी.



आता आपण 'O'केंद्र घेऊन 5 से.मी. त्रिज्याचे वर्तुळ काढु. केंद्रबिंदु पासुन 10 से.मी. अंतरावर P बिंदु घेऊ. OP ला जोडुन 9.2 रचना मध्ये दिल्याप्रमाणे रचना पुर्ण करु. येथे दिलेल्या वर्तुळाची पाहिजे असलेल्या स्पर्शीकाची जोडी PA आणि PB आहे. त्रिकोणामीतीय रचनाचा वापर न करता सुध्दा रचना करण्याचा प्रयत्न करा.

प्रयत्न करा

OA आणि OB एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या अशा काढा की, $\angle BOA = 120^o$ $\angle BOA$ चा कोन दुभाजक काढा. OA आणि OB ला A आणि B जवळ लंब रेषा काढा. या रेषा $\angle BOA$ च्या दुभाजकाला बाह्य बिंदुवर छेदतात. या बिंदु पासुन आपल्याला पाहिजे असलेली स्पर्शीका काढता येते. रचना करा आणि योग्य आहे यासाठी पुरावे द्या.

अभ्यास - 9.2

1. योग्य पर्याय निवडा आणि प्रत्येकासाठी समर्थन करा.

(i) एका वर्तुळाच्या स्पर्शीकेला, स्पर्शबिंदुवर काढलेली त्रिज्या मधील कोन

(a) 60° (b) 30° (c) 45° (d) 90°

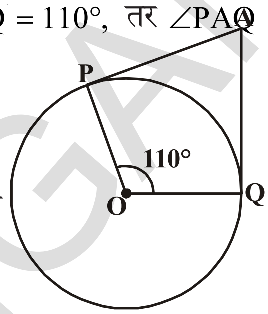
(ii) Q बिंदुवरुन, वर्तुळाच्या स्पर्शीकेची लांबी 24 से.मी. आहे. आणि केंद्रबिंदु पासुन Q चे अंतर 25 सें.मी. आहे. तर वर्तुळाची त्रिज्या हा

(a) 7से.मी. (b) 12 से.मी. (c) 15 से.मी. (d) 24.5 से.मी.

(iii) जर AP आणि AQ वर्तुळाच्या दोन स्पर्शीका आणि केंद्रबिंदु O तर $\angle POQ = 110°$, तर $\angle PAQ$ समान आहे.

(a) 60° (b) 70°

(c) 80° (d) 90°



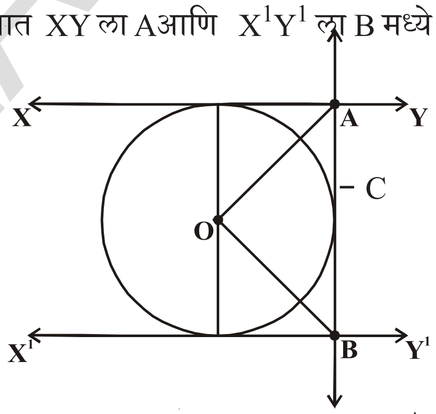
(iv) O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यबिंदु P वरुन PA आणि PB हे दोन स्पर्शीका आहेत. स्पर्शीकाच्या समोरच्या कोन 80° आहे. तर $\angle POA$ समान आहे.

(a) 50° (b) 60° (c) 70° (d) 80°

(v) बाजुच्या आकृतीतOकेंद्र असलेल्या वर्तुळाला XY आणि X^1Y^1 या दोन समांतर स्पर्शीका काढण्यात आल्या आणखी एक स्पर्शीका AB स्पर्श बिंदु C मधुन जात XY ला Aआणि X^1Y^1 ला B मध्ये छेदते तर $\angle AOB$ =

(a) 80° (b) 100°

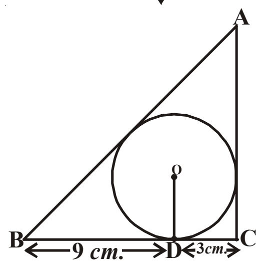
(c) 90° (d) 60°



2. दोन समकेंद्रक वर्तुळाची त्रिज्या 5 से.मी. आणि 3 सें.मी. आहे. लहान वर्तुळाला स्पर्श करत असलेल्या मोठ्या वर्तुळाची जीवाची लांबी माहित करा.

3. एक समांतर चौकोनामध्ये वर्तुळअंतर खंडीत करत आहे तर ते समभुज चौकोन आहे हे दाखवा.

4. बाजुच्या आकृतीत त्रिकोण ABC मध्ये 3 से.मी. त्रिज्या असलेला एक वर्तुळ अंतरखंडीत करत आहे. स्पर्श बिंदु D,BC बाजुला दोन भागात विभागत आहे. BD = 9 सें.मी. DC=3 सें.मी. आहे. तर बाजु AB आणि बाजु AC ची लांबी माहित करा?

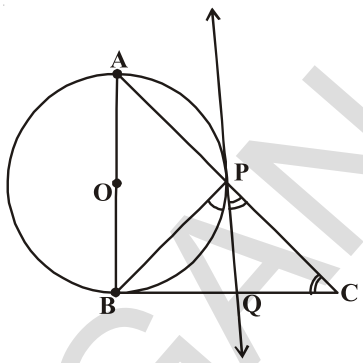


5. 6 से.मी. त्रिज्याचे वर्तुळ काढा. केंद्रापासुन 10 से.मी. दुरवर एक बिंदु घ्या. वर्तुळाच्या स्पर्शीकेच्या जोडीची रचना करा आणि त्याची लांबी मोजा. पायथागोरसचा प्रमेय वापरुन तपासा.

6. 4 सें.मी.त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाला 6 से.मी. त्रिज्या असलेला एक समकेंद्रक वर्तुळावर एक बिंदु पासुन स्पर्शीका काढा. तसेच लांबी मोजुन पडताळा करा.

7. बांगडीच्या साहाय्याने एक वर्तुळ काढा. वर्तुळाच्या बाहेर एक बिंदु घ्या. या बाह्य बिंदु पासुन वर्तुळाकार स्पर्शीकाच्या जोडीची रचना करा. आणि त्यांना मोजा. निष्कर्ष लिहा.

8. एका काटकोन त्रिकोण ABCमध्ये AB व्यासाचा एक वर्तुळ कर्ण AC ला P वर छेदलेला आहे. P मधुन वर्तुळावर काढलेली स्पर्शीका BC बाजुला दुभागत आहे असे सिध्द करा.

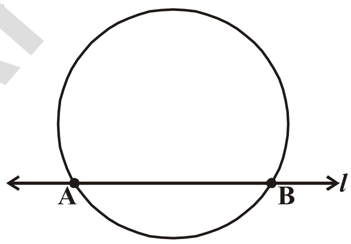


9. O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या बाह्य बिंदु 'R' मधुन वर्तुळाला स्पर्शीका काढा. त्या बिंदुतुन वर्तुळावर किती स्पर्शीका काढता येतील?

सुचना: स्पर्श बिंदुपासुन त्या दोन बिंदुचा अंतर समान आहे.

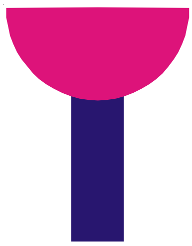
9.4 वृत्तछेदन रेषानी तयार झालेले वर्तुळ खंड

आपण रेषा आणि वर्तुळे पाहिलीत. जेव्हा रेषा वर्तुळाच्या एका बिंदुला स्पर्श करते तेव्हा ती रेषा स्पर्शीका होय. वर्तुळाच्या दोन भिन्न बिंदुत छेदणाऱ्या रेषेला वृत्तछेदन रेषा म्हणतात. त्या दोन बिंदु मधील रेषा खंडाला जीवा असे म्हणतात.



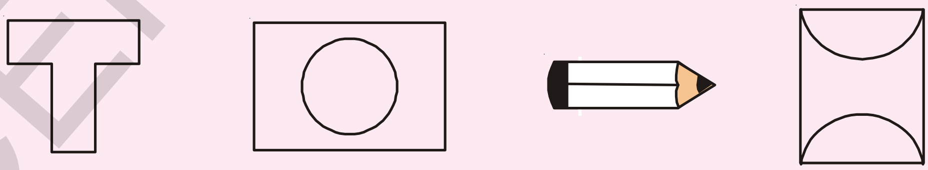
येथे 'l' हे वृत्तछेदन रेषा आहे आणि AB हे जिवा आहे.

आदित्याने गुलाबी आणि निळा रंगाच्या कागदांना चिटकवुन एक चित्र तयार करत आहे. त्यानी भरपुर चित्रे तयार केली. त्याने हात धुण्याचे कुंड चे चित्र तयार केले. हे चित्र तयार करण्यासाठी त्याला किती कागदाची गरज होती? हे चित्र दोन भागात दिसत आहे. एक भाग आयताकार आहे. त्याचे क्षेत्रफळ कसे काढावे तुम्हाला माहित आहे. आणि दुसरे भाग वर्तुळ खंडाचे आहे तर तुम्ही वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ कसे माहित करता? खालील चर्चेत आपण याचे क्षेत्रफळ माहित करण्याचा प्रयत्न करु.



हे करा

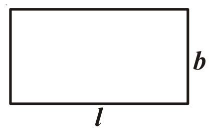
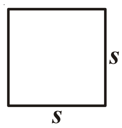
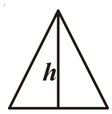
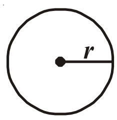
आदित्याने वॉशबेसिन सोबत खालील चित्रे सुध्दा बनवली.



या चित्राच्या आकाराना कोणत्या प्रकारे विभागुन त्याचे क्षेत्रफळ सहज रित्या माहित करु शकतो?

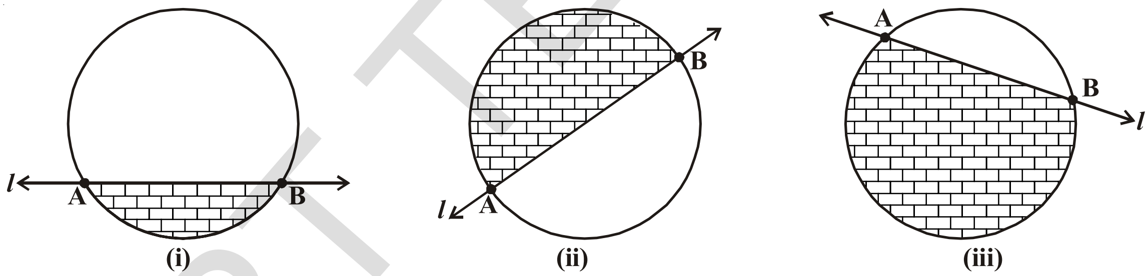
तुम्ही या सारखे आणखी काही चित्रे तयार करुन विभिन्न आकारात विभागा.

खालील तक्त्यात दिलेल्या भौमीतीक आकृत्यांचे क्षेत्रफळ कसे माहित करावे याची उजळणी करु

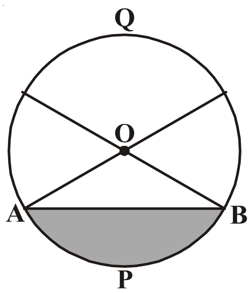
क्र.स.	आकृती	मापे	क्षेत्रफळ
1.		लांबी = l रुंदी = b	$A = lb$
2.		बाजु = s	$A = s^2$
3.		पाया = b	$A = \frac{1}{2}bh$
4.		त्रिज्या = r	$A = \pi r^2$

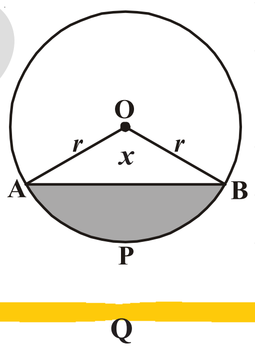
9.4.1. वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ माहित करणे:

वर्तुळ खंडाच्या क्षेत्रफळाच्या अंदाज करण्यासाठी वर्तुळाला छेदन रेषा काढुन वर्तुळखंडाना तयार करा.



वर्तुळाचा कंस आणि जीवा याला मिळुन झालेल्या भागाला वर्तुळखंड म्हणतात. हे तुम्हाला माहितच आहे. याचे क्षेत्रफळ रंगीत केलेला भाग ( ) आहे (i) आकृती मध्ये असलेला लहान वर्तुळ खंड आहे. आकृती (ii) मध्ये अर्धवर्तुळ आणि आकृती (iii) मध्ये मोठा वर्तुळ खंड आहे.वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ आपण कसे माहित करावे? खालील कृत्ये पहा. एक वर्तुळाकार कागद घेऊन व्यासापेक्षा कमी असलेल्या जीवा ला घेऊन आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे त्या सोबत घडी करा. मिळालेल्या लहान भागाला रंगीत करा. या लहान भागाला आपण काय म्हणतो? हे लहान वर्तुळखंड(APB)आहे? वर्तुळाच्या रंगीत न केलेल्या भागाला आपण काय म्हणु? निश्चितपणे हे मोठा वर्तुळखंड (AQB)आहे. तुम्ही मागील वर्गात वर्तुळखंड आणि व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाविषयी शिकलेले आहात. बाजुच्या आकृतीत काही रंगीत न केलेला भाग रंगीत केलेला भाग (लहान वर्तुळ खंड) मिळुन व्दैत्रिज्या वर्तुळखंड होते. म्हणजेच हे एक त्रिकोण आणि वर्तुळखंड मिळुन तयार होते. दिलेल्या आकृतीतO केंद्र 'r' त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचा OAPB हा एक व्दैत्रिज्या वर्तुळखंड आहे. समजा $\angle AOB$ चे माप 'x'.





वर्तुळ केंद्रावर $360°$ कोन मापन तर वर्तुळाचे क्षेत्रफळ πr^2 होते. हे तुम्हाला माहितच आहे.

म्हणुन, वर्तुळ केंद्रवर $1°$ कोननी तयार झालेल्या व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ $\frac{1°}{360°} \times \pi r^2$.

म्हणुन, जेव्हा वर्तुळकेंद्रावरचा कोन $x°$ असेल तेव्हा व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ $\frac{x°}{360°} \times \pi r^2$ असते

आता,'O'केंद्र 'r'त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचे वर्तुळखंड APB चे क्षेत्रफळाचे निरिक्षण करु.

APB वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = व्दैत्रिज्यावर्तुळ खंडाचे क्षेत्रफळ OAPB - ΔOABचे क्षेत्रफळ

$= \frac{x°}{360°} \times \pi r^2 -$ ΔOAB चे क्षेत्रफळ

प्रयत्न करा

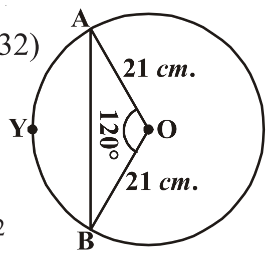
लहान वर्तुळखंडाच्या क्षेत्रफळ वापरुन त्याच्याशी मोठ्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ तुम्ही कसे माहित कराल?

हे करा

1. 7 से.मी.त्रिज्या आणि खाली व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाचे कोनाला अनुसरुन व्दैत्रिज्यावर्तुळ खंडाचे क्षेत्रफळ माहित करा.
   i. $60°$ ii. $30°$ iii. $72°$ iv. $90°$ v. $120°$
2. एका घड्याळ्यातील मिनीटाचा काट्याची लांबी 14से.मी.आहे.10 मिनीटात या काट्याने तयार होणाऱ्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

आता, वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ माहित करण्याचे काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-1. बाजुच्या आकृतीमधील दाखविलेल्या वर्तुळखंड AYB चा क्षेत्रफळ माहित करा.दिलेली वर्तुळाची त्रिज्या 21 से.मी.आणि $\angle AOB = 120^0$ ($\pi = \frac{22}{7}$ आणि $\sqrt{3} = 1.732$)



सोडवणुक: वर्तुळखंड AYB चे क्षेत्रफळ

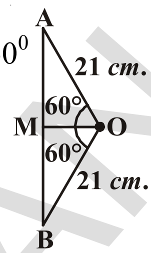
= OAYB चे क्षेत्रफळ – ΔOAB चे क्षेत्रफळ

आता, व्दैत्रिज्या वर्तुळखंड OAYBचे क्षेत्रफळ $= \frac{120^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ से.मी.^{2}

$= 462$ से.मी.^{2} ...(1)

ΔOAB चे क्षेत्रफळ माहित करण्यासाठी आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे $OM \perp AB$ काढा.

नोंद करा. OA = OB म्हणुन $\Delta AMO \cong \Delta BMO$



म्हणुन M हाAB चा मध्यबिंदु आहे आणि $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$

समजा $OM = x$ से.मी.

म्हणुन ΔOMA वरुन $\frac{OM}{OA} = \cos 60^0$.

किंवा $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\because \cos 60^0 = \frac{1}{2}\right)$

किंवा $x = \frac{21}{2}$

म्हणुन $OM = \frac{21}{2}$ से.मी.

तसेच $\frac{AM}{OA} = \sin 60°$

$\frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

म्हणुन $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ से.मी.

से.मी. $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ से.मी. $= 21\sqrt{3}$ से.मी.

म्हणुन ΔOAB चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ से.मी.^{2}.

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ से.मी.^{2}. ...(2)

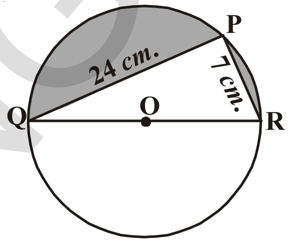
म्हणुन, वर्तुळखंड AYBचे क्षेत्रफळ $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ से.मी.^{2}.

($\because$ (1)आणि(2) वरुन]

$= \frac{21}{4}\left(88 - 21\sqrt{3}\right)$ से.मी.

$= 271.047$ से.मी.^{2}

उदाहरण-2. O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची QR ही व्यास आहे. आणि जर PQ = 24 से.मी., PR = 7 से.मी. तर आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे रंगीत वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ माहित करा($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)



सोडवणुक : रंगीत केलेल्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = OQPR वैत्रिज्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ- त्रिकोण PQR चे क्षेत्रफळ. QR हा व्यास असल्याने $\angle QPR = 90°$ (अर्धवर्तुळातील कोन)

म्हणुन पायथागोरसच्या प्रमेयाला वापर करुन

ΔQPR मध्ये $QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$= 24^2 + 7^2$

$= 576 + 49$

$= 625$

$QR = \sqrt{625} = 25$ से.मी.

तर वर्तुळाची त्रिज्या $= \frac{1}{2} QR$

$= \frac{1}{2}(25) = \frac{25}{2}$ से.मी.

आता, OQPR अर्धवर्तुळाचे क्षेत्रफ $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2}$

$= 245.53$ से.मी^{2} ...

कोटकोन त्रिकोण QPRचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times PR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 24$

$= 84$ से.मी.^{2} ..... (2)

(1) आणि (2) वरुन

रंगीत वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ $= 245.53 - 84$

$= 161.53$ से.मी.^{2}

उदाहरण-3. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एका वर्तुळाकार टेबल वरचा भाग सहा समान आकृतीत आहे. टेबलच्या वरच्या भागाची त्रिज्या 14 से.मी. आहे. तर त्या आकृतीत 5 रु. से.मी.^{2} प्रमाणे रंग लावा. खर्च किती येईल? ($\sqrt{3} = 1.732$)

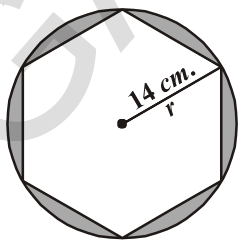
सोडवणुक : वर्तुळात अंतरखंडीत केलेल्या नियमीत षटकोनाची एक बाजु त्या वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या समान असते.

$\therefore$ नियमीत षटकोनाची प्रत्येक बाजु = 14 से.मी.

म्हणुन, रंगीत केलेल्या सहा वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = वर्तुळाचे क्षेत्रफळ - नियमीत षटकोनाचे क्षेत्रफळ

आता, वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616 \text{ से.मी.}^2 \; ..... (1)$$



नियमीत षटकोनाचे क्षेत्रफळ $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14$$

$$= 509.2 \text{ से.मी.}^2 \qquad ..... (2)$$

सहा रंगीत केलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ $= 616 - 509.21$ ((1), (2)वरुन)

$$= 106.79 \text{ से.मी.}^2$$

म्हणुन 5 रु. प्रती से.मी.^{2} दराने आकृतीत रंग लावण्याचा खर्च

$$= 106.79 \times 5 \text{ रु.}$$

$$= 533.95 \text{ रु.}$$

अभ्यास - 9.3

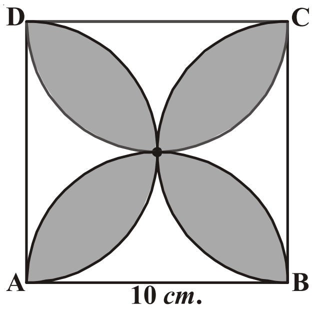
1. 10 से.मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळात एक जिवा केंद्रावर काटकोन करत असेल तर खाली दिलेल्या प्रत्येक खंडाचे क्षेत्रफळ माहित करा ($\pi = 3.14$)

   i. लहान वर्तुळखंड ii. मोठा वर्तुळखंड

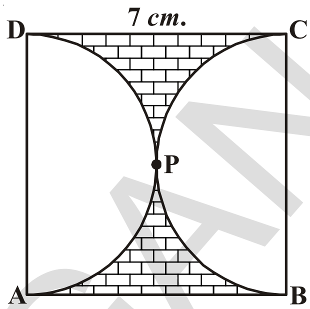
2. 12 से.मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळात एक जिवा केंद्रावर 120^0 केान करत आहे. तर त्याला संबंधीत लहान वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ माहित करा. ($\pi = 3.14$ आणि $\sqrt{3} = 1.732$)

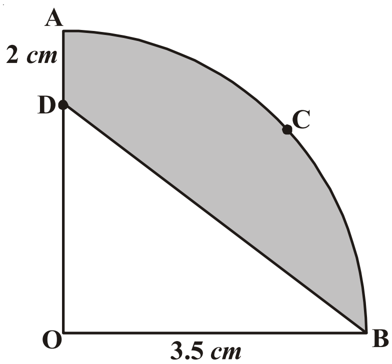
3. एका कारला दोन वायर्पस (कारचे काच पुसुन टाकणारे) आहेत. जे परस्परांना व्यापणार नाहीत. प्रत्येक वायपर च्या पातीची लांबी 25 से.मी. आहे. आणि ते 115^0 च्या कोनाने पुसुन टाकतात. प्रत्येक पातीने एका वेळेस पुसलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

4. 10 से.मी. बाजु असलेला ABCD हा एक चौरस आहे. आणि चौरसाची बाजु ही व्यास असणारे अर्धवर्तुळ प्रत्येक बाजु वर काढण्यात आले. बाजुच्या आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे रंगीत केलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.($\pi = 3.14$ घ्या)



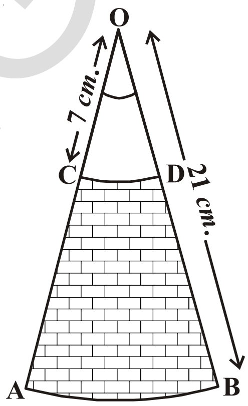
5. 7 से.मी. बाजु असलेली ABCD हा एक चौरस आहे आणि APD आणि BPC हे अर्धवर्तुळ आहेत. तर आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे रंगीत भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या)



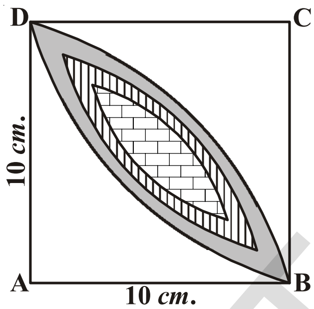


6. बाजुच्या आकृतीत 0 केंद्र आणि 3.5 सें.मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळात OACB एक व्दैत्रिज्या खंड पाद आहे. OD = 2 से.मी. तर रंगीत केलेल्या भागाचा क्षेत्रफळ माहित करा.

($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)



7. 21 से.मी. आणि 7 से.मी. त्रिज्या असलेल्या दोन समकेद्रक वर्तुळाचे कंस अनुक्रमे AB आणि CD आहेत. जर $\angle AOB = 30°$ तर रंगीत केलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या)

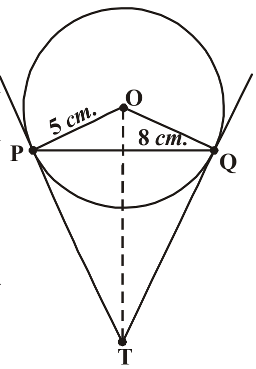


8. बाजुच्या आकृतीत त्रिज्या 10 सें.मी. असलेल्या वर्तुळात दोन व्दैत्रिज्याखंड पादाच्या मधात असलेल्या सामाईक भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा (π = 3.14 घ्या)

ऐच्छिक अभ्यास

[हा अभ्यास परिक्षेसाठी नाही]

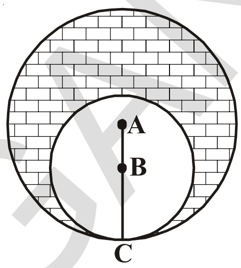
1. बाह्य बिंदुवरुन वर्तुळावर काढलेल्या दोन स्पर्शीका मधील कोन आणि दोन स्पर्श बिंदु केंद्रावर काढलेल्या रेषाखंडाने तयार झालेला कोनाला पुरक असते हे सिध्द करा
2. 5 से.मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळातील PQ जिवाची लांबी 8 से.मी. आहे. P आणि Q मधुन काढलेली स्पर्शीका T जवळ छेदत आहेत. (त्याना पहा) तर TP ची लांबी माहित करा.

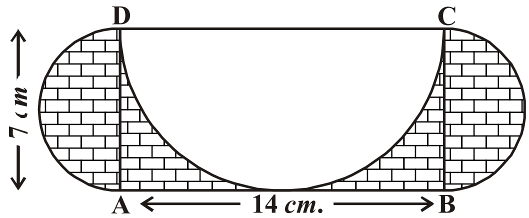


3. एका चौकोनात एक वर्तुळ त्याच्या चार ही बाजुना स्पर्श करीत अंतर खंडीत करत आहे. त्या चौकोणाच्या समोरच्या बाजु वर्तुळ केंद्रावर करणाऱ्या कोन संपुरक आहेत हे सिध्द करा.
4. 8 से.मी. लांबीचा रेषाखंड काढा. A केंद्र घेऊन 4 से.मी. त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. आणि तसेच B केंद्र घेऊन, 3 से.मी. त्रिज्याची आणखी एक वर्तुळ काढा. प्रत्येक वर्तुळाच्या केंद्रातुन दुसऱ्या प्रत्येक वर्तुळावर स्पर्शीकाची रचना करा.

5. समजा काटकोन त्रिकोन ABC मध्ये जर AB = 6से.मी., BC = 8 सें.मी. $\angle B = 90^0$. B शिरोबिंदुतुन AC वर BD हा लंब काढला आणि B, C, D बिंदु मधुन वर्तुळ काढली तर A बिंदु मधुन या वर्तुळावर स्पर्शीका काढा.

6. A , B केंद्र असलेले दोन वर्तुळ C बिंदु वर स्पर्श करीत आहेत. AC = 8 से.मी. आणिAB = 3 से.मी. आहे तर रंगीत भागाचे क्षेत्रफळ काढा.





7. AB = 14 से.मी. आणि BC = 7 से.मी. मापे असलेले ABCD हा एक आयत आहे. DC, BC आणि AD व्यास घेऊन आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे तीन अर्धवर्तुळ काढले. तर रंगीत भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

आपण काय चर्चा केली.

या धड्यात आपण खालील अंशाचा अभ्यास केलो.

1. वर्तुळाची स्पर्शीका ही वर्तुळाच्या एका बिंदुवर स्पर्श करणारी रेषा आहे.
2. वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदुवरील स्पर्शिका त्या बिंदुवरुन त्रिजेला लंब असते.
3. वर्तुळाच्या बाह्य बिंदुतुन काढलेल्या दोन स्पर्शीका लांबी समान असते
4. खालील रचना करणे शिकलो.

   a) वर्तुळाचा केंद्र जेव्हा माहित असेल तेव्हा दिलेल्या बिंदुमधुन वर्तुळाला स्पर्शीका काढण्याची रचना

   b) वर्तुळाच्या बाह्य बिंदुतुन वर्तुळावर स्पर्शीकाच्या जोडीची रचना.
5. वर्तुळावरील दोन बिंदुनां आणि रेषा खंडाला छेदणारी रेषा छेदिका आहे, आणि दोन बिंदुमधील रेषाखंडा ही जिवा आहे.
6. आपण लहान वर्तुळ खंड/ मोठा वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ कसे काढावे ते माहित केले. वर्तुळ खंडाचे क्षेत्रफळ = संबंधीत व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ - संबंधीत त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

धडा
10 महत्वमापन
(Mensuration)

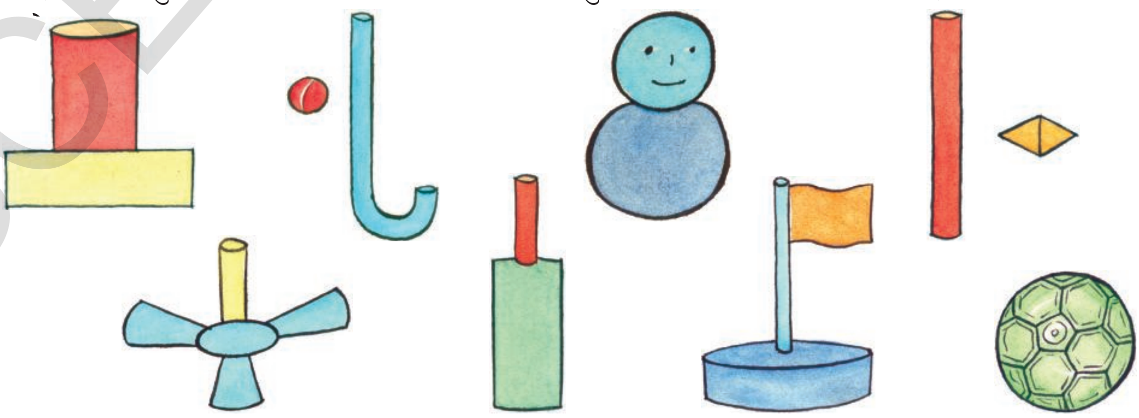
10.1 प्रस्तावना

नियमित घनाकृत्याचे पृष्ठफळ, घनफळ हे आपण 8व्या आणि 9 व्या वर्गात शिकलो. यांच्या अर्थ समज्यासाठी कित्येक अभ्यास सोडविले. त्यास आपण आपल्या दैनंदिन जिवनातील संदर्भात उपयोग करुन आपणास काय आवश्यक आहे. आणि कोणती मापे किंवा अंदाजाची आवश्यकता आहे. हे ओळखले उदाहरणात खोलीत रंग देण्यासाठी किती प्रमाणात रंग हवा आहे. यासाठी आपल्याला खोलीच्या पृष्टफळाची आवश्यकता आहे. घनफळाची नाही. धान्य साठवुन ठेवण्यासाठी किती डब्याची आवश्यकता आहे. यासाठी डब्याचे घनफळ माहित करणे आवश्यक आहे. परंतु त्या डब्याच्या क्षेत्रफळाची आवश्यकता नाही.

प्रयत्न करा

1. खाली दिलेल्या प्रत्येक संदर्भात तुम्हाला घनफळ किंवा क्षेत्रफळ यापैकी कशाची आवश्यकता भासते? आणि का भासते?
   i. बाटलमधील पाण्याचे परिमाण
   ii. तंबुसाठी लागलेले जाडकापड
   iii. लॅारी मधील पोत्यांची संख्या
   iv. सिलेंडर मधील गॅस
   v. आगपेटीतील आगकांड्याची संख्या
2. अशीच 5 उदाहरणे सांगुन घनफळ किंवा क्षेत्रफळ यापैकी कशाची आवश्यकता आहे. मित्रांना विचारा.

आपल्या सभोवताली निरनिराळ्या आकाराच्या अनेक वस्तु (दोन किंवा जास्त नियमित घन वस्तुपासुन बनेलेले) आपण पाहतो. आधारस्तंभावर उभे केलेले घर, पाणी सोठविण्याची टाकी, हे दंडगोलाकृती आणि ते इष्टीकाचीतीच्या पायावर ठेवलेले आहेत. क्रिकेट बॅटची मुठ दंडगोलाकार आणि मुख्यभाग सपाट आहे.इत्यादी तुमच्या सभोवती असलेल्या विविध वस्तुंचा विचार करा. त्यापैकी काही खाली दाखविले

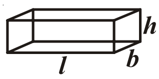
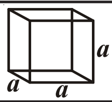
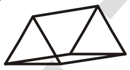
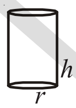
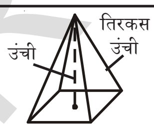
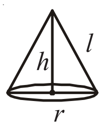
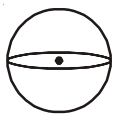
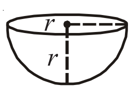


एकेरी नियमित घनाचे पृष्ठफळ आणि घनफळ कसे काढायचे हे तुम्ही शिकलात.इतर वस्तु दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त घनाकृती वस्तुनी मिळुन बनलेल्या आहेत. हे आपण पाहिले म्हणुन त्याचे पृष्ठफळ आणि घनफळ आता आपण माहित करु. खालील तक्त्यात विविध घनांचे आकार,त्यांचे क्षेत्रफळ आणि घनफळ दिले आहे.

प्रयत्न करा

1. वर दिलेल्या घनाकृतींना तुम्हाला माहित असलेल्या घनाकृती वेगळे करा.
2. तुमच्या सभोवतालच्या विविध आकृतीच्या एकत्रीकरणाने बनलेल्या 5 किंवा त्या पेक्षा जास्त वस्तुचा विचार करा. ज्या वस्तुपासुन बनलेल्या आहेत त्यांची नावे द्या.

विविध घनाकृती आकाराचे पृष्ठफळ आणि घनफळाची आठवण करु या.

अ.क्र.	घनाकृती चे नाव	आकृती	पार्श्व / वक्र पृष्ठफळाचे क्षेत्रफळ	एकुण पृष्ठफळ	घनफळ	पारिभाषिक नामकरण
1.	इष्टचिकाचिती		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+hl)$	lbh	l:लांबी b:रुंदी h:उंची
2.	घन		$4a^2$	$6a^2$	a^3	a:घनाची बाजु
3.	त्रिकोण चिती		पायाची परिमीती $\times$ उंची	पार्श्व पृष्ठफळाचे +2(अत्य पृष्ठफळाचे क्षेत्रफळ)	पायाचे क्षेत्रफळ $\times$ उंची	-
4.	नियमीत दंडगोला वृत्तचिती		$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$	$\pi r^2 h$	r: पायाची त्रिज्या h:उंची
5.	चौरस सुची		$\frac{1}{2}$(पायाची परिमीती) $\times$ तिरकस उंची	पार्श्व पृष्ठफळ+ पायाचे क्षेत्रफळ	$\frac{1}{3}$ पायाचे क्षेत्रफळ$\times$उंची	-
6.	शंकु		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	r:पायाची त्रिज्या h:उंची l: तिरकस उंची
7.	गोल		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r:त्रिज्या
8.	अर्धगोल		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$	r:त्रिज्या

तक्त्यातील विविध आकृतीशी संबंधीत काही उदाहरणे पाहु या.त्या पध्दतीने वक्रपृष्ठफळ (CSA) एकुण पृष्ठफळ TSA माहित करु.

उदाहरण-1. शंखुछेद आकाराच्या तंबुची त्रिज्या 7 मी. आणि उंची 10 मीटर आहे. 2 मी.रुंदीचा तंबु बनविण्यासाठी लागणाऱ्या जाड कापडाची लांबी माहित करा. $\left[\text{Use } \pi = \frac{22}{7}\right]$

सोडवणुक : शंकुछेदाकार तंबुची दिलेली त्रिज्या $(r) = 7$ मीटर

उंची $(h) = 10$ मी.

$\therefore$ शंकुची तिरकस उंची $l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2+h^2}$

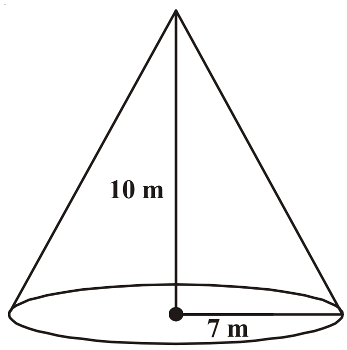
$= \sqrt{49+100}$

$= \sqrt{149} = 12.2$ मी.

आता, तंबुचे पृष्ठफळ $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12.2$मी^{2}

$= 268.4$ मी^{2}.



वापरलेल्या जाड कापडाचे क्षेत्रफळ $= 268.4$मी^{2}

जाड कापडाचे रुंदी $= 2$मी.

वापरलेल्या जाड कापडाचे क्षेत्रफळ $= \frac{\text{क्षेत्रफळ}}{\text{रुंदी}} = \frac{268.4}{2} = 134.2$मी.

उदाहरण-2. वृत्तचितीच्या आकारात असलेल्या तेलाच्या टाकीचे माप खालील प्रमाणे आहे. व्यास 2मी. आणि उंची 7 मीटर आहे. त्या टाकीला रंग देण्यासाठी पेंटरनी 3 रु. प्रती चौ.मी दर लावला. तर 10 टाकीला रंग देण्यासाठी पेंटरला एकुण किती रुपये द्यावे लागेल?

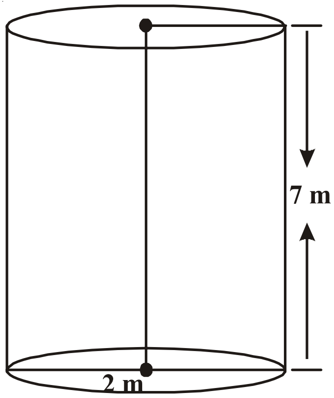
सोडवणुक : वृत्तचितीचा (तेलाची टाकी) दिलेल्या व्यास $= 2$ मी.

वृत्तचितीची त्रिज्या $= \frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1$मी.

वृत्तचिताकार टाकीचे एकुण पृष्ठफळ $= 2 \times \pi r(r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1(1+7)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8$



$= \frac{352}{7}$ मी^{2}. = 50.28 मी^{2}

टाकीचे एकुण पृष्ठफळ = 50.28 मी^{2}

1 चौ.मी ला रंगलावण्यासाठी येणारा खर्च = 3 रु.

10 टाकीला रंगलावण्याचा खर्च $= 50.28 \times 3 \times 10$

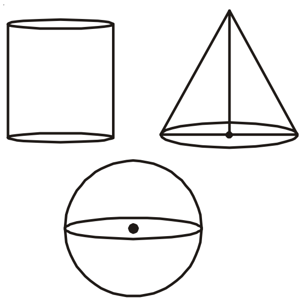
= 1508.40 रु.

उदाहरण-3. एक गोल वृत्तचिती आणि शुकंची त्रिज्या आणि उंची सारखी आहे. त्याच्या वक्रपृष्ठाच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर काढा.

सोडवणुक : समजा r ही गोल, शंकुची आणि वृत्तचितीची सामाईक त्रिज्या आहे.

गोलाची उंची = त्याच्या व्यास = $2r$.

शंकुची उंची = वृत्तचितीची उंची = गोलाची उंची = $2r$.



समजा शंकुची तिरकस उंची $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5}r$

S_1 = गोलाचे वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ $= 4\pi r^2$

S_2 = वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ $2\pi rh = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

S_3 = शंकुचे वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ $= \pi rl = \pi r \times \sqrt{5}\, r = \sqrt{5}\, \pi r^2$

$\therefore$ वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर

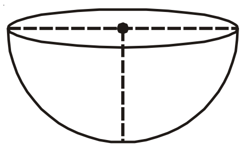
$S_1 : S_2 : S_3 = 4\pi r^2 : 4\pi r^2 : \sqrt{5}\, \pi r^2$

$= 4 : 4 : \sqrt{5}$

उदाहरण-4. एका कंपनीला पातळ लोखंडी पत्र्यापासुन 1000 अर्धगोलाकार बेसीन तयार करायचे आहे. जर प्रत्येक बेसीनची त्रिज्या 21 मी. आहे. तर वरील अर्धगोलाकार बेसीन तयार करण्यासाठी किती लोखंडी पत्रा लागेल. माहित करा?

सोडवणुक : अर्धगोलाकार बेसीनची त्रिज्या (r) = 21 से.मी.

अर्धगोलाकार बेसीनचे पृष्ठफळ



$= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

= 2772 से.मी.^{2}

म्हणुन एका बेसीनसाठी लागणारा लोखंडी पत्रा $= 2772$ से.मी.^{2}

1000 बेसीनसाठी लागणाऱ्या लोखंडी पत्र्याचे एकुण क्षेत्रफळ $= 2772 \times 1000$

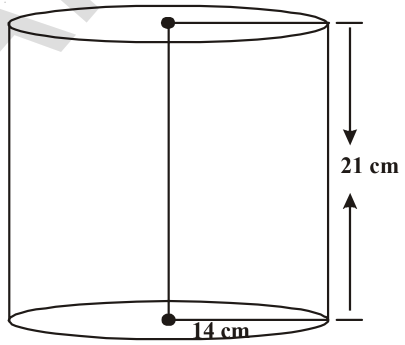
$= 2772000$ से.मी.^{2}

$= 277.2$ मी.^{2}

उदाहरण-5. एका लंबवृत्तचितीच्या पायाची त्रिज्या 14 से.मी. आणि उंची 21 सें.मी आहे. तर माहित करा (i) पायाचे क्षेत्रफळ किंवा (प्रत्येक तळाचे) (ii) वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ (iii) एकुण पृष्ठफळ आणि (iv) घनफळ

सोडवणुक : वृत्तचितीची त्रिज्या (r) = 14से.मी.

वृत्तचितीची उंची (h) = 21 से.मी.



आता (i) पायाचे क्षेत्रफळ (प्रत्येक तळाचे) $\pi r^2 = \frac{22}{7}(14)^2$

$= 616$ से.मी.^{2}

(ii) वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ $= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 21$

$= 1848$से.मी^{2}.

(iii) एकुण पृष्ठफळ $= 2 \times$ पायाचे क्षेत्रफळ+ वक्र पृष्ठाचे क्षेत्रफळ

$= 2 \times 616 + 1848 = 3080$ से.मी^{2}.

(iv) वृत्तचितीचे घनफळ $= \pi r^2 h =$ पायाचे क्षेत्रफळ(तळाचे क्षेत्रफळ) $\times$ उंची

$= 616 \times 21 = 12936$ से.मी^{3}.

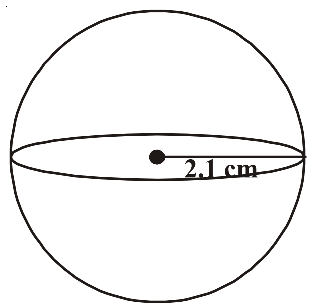
उदाहरण-6. 2.1 से.मी. त्रिज्या असलेल्या गोलाचे घनफळ आणि पृष्ठफळ माहित करा($\pi = \frac{22}{7}$)

सोडवणुक : गोलाची त्रिज्या $(r) = 2.1$ से.मी.

गोलाचे पृष्ठफळ $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (2.1)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10}$$

$$= \frac{1386}{25} = 55.44 \text{ से.मी.}^2$$

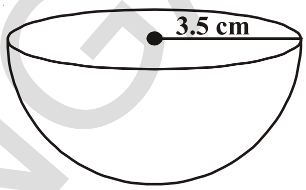


गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 38.808 \text{ से.मी}^3.$$

उदाहरण-7. 3.5 से.मी. त्रिज्या असलेल्या अर्धगोलाचे घनफळ आणि एकुण पृष्ठफळ काढा. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

सोडवणुक: गोलाची त्रिज्या (r) 3.5 से.मी. $= \frac{7}{2}$ से.मी.



गोलाचे घनफळ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{539}{6} = 89.83 \text{ से.मी.}^3$$

एकुण पृष्ठफळ $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{231}{2} = 115.5 \text{ से.मी.}^2$$

अभ्यास - 10.1

1. एका विदुषकाची टोपी शंकुच्या आकारात असुन तिची त्रिज्या 7 मी. आणि उंची 24 मी. आहे. अशा 10 टोप्या तयार करण्यासाठी लागणाऱ्या कागदाचे (शिट) क्षेत्रफळ काढा?
2. क्रिडा वस्तु बनविणाऱ्या एका कंपनीने शटल कॉक ठेवण्यासाठी वृत्तचिती आकराचे 100 डब्बे बनविण्याचे ठरविले. त्या वृत्तचितीची लांबी /उंची 35 से.मी.आणि त्याची त्रिज्या 7 से.मी. आहे. तर त्या 100 वृत्तचिती आकाराच्या डब्यांना तयार करण्यासाठी लागणाऱ्या जाड कागदाचे (शिट) क्षेत्रफळ काढा?
3. 6 से.मी. त्रिज्या आणि 7 से.मी. उंची असलेल्या शंकुचे घनफळ काढा?
4. एका वृत्तचितीचे पार्श्वपृष्ठफळ हे शंकुच्या वक्रपृष्ठाच्या क्षेत्रफळाशी समान आहे. जर त्यांचा पाया समान असल्यास वृत्तचितीची उंची आणि शंकुची तिरकस उंची याचे गुणोत्तर काढा?
5. एका स्वयम सहाय्यक गटाला 3 से.मी. त्रिज्या आणि 4 से.मी. उंची असलेल्या विदुषकाच्या टोप्या तयार करायच्या आहे. जर उपलब्ध असलेल्या रंगीत कागदाची शिट 1000 से.मी.^{2} आहे.तर त्या कागदाच्या शिटपासुन किती टोप्या तयार करु शकतात?
6. एका वृत्तचिती आणि शंकुच्या तळाची त्रिज्या आणि उंची समान आहे. तर त्याच्या घनफळाचे गुणोत्तर 3:1 असते. हे दाखवा.
7. एक लोखंडी सळई वृत्तचितीकार आहे. त्याची उंची 11 से.मी. आणि व्यास 7 से.मी. आहे. तर अशा 50 लोखंडी सळईचे एकुण घनफळ काढा?

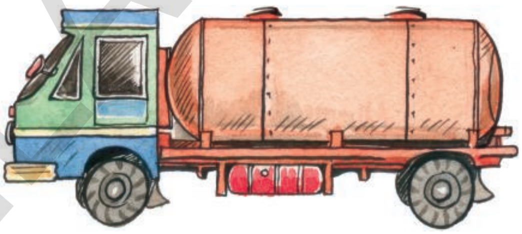
8. शंकुच्या आकारात असलेल्या तांदुळाच्या ढिगाचा व्यास 12 मी.आणि उंची 8 मी. आहे. त्याचे घनफळ काढा? त्या ढिगाला झाकण्यासाठी जाड कापड किती लागेल? ($\pi = 3.14$)

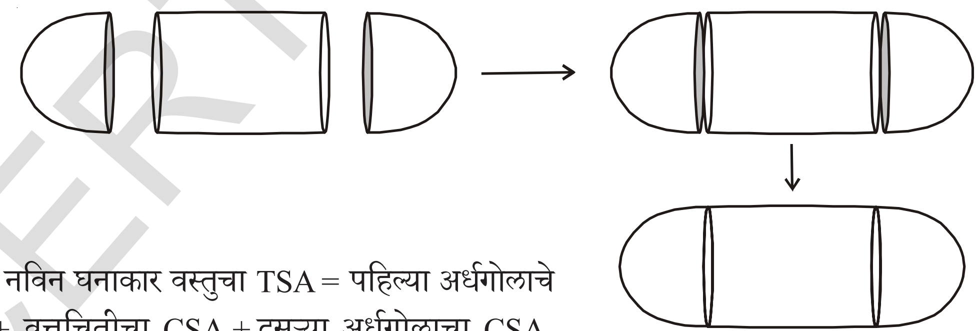
9. शंकुच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ 4070 से.मी.^{2} आहे आणि त्याचा व्यास 70 से.मी. आहे. तर त्याची तिरकस उंची किती?

10.2 एकत्र घनाकार वस्तुंचे पृष्ठफळ (SURFACE AREA OF THE COMBINATION OF SOLIDS)

गोला,वृत्तचिती आणि शकुं अशा घनाकार वस्तुनी बनलेल्या एकत्र घनाकार वस्तु आपण पाहिल्यात. आपल्या दैनंदिन जिवनात लाकडी वस्तु, घरगुत्ती वस्तु, औषधी गोळ्या, बॉटल, तेलाचे टॅकर इत्यादी पाहिल्यात. आपल्या दैनंदिन जिवनात आईसक्रिम खातो, यामध्ये किती घनाकृत्या आहेत तुम्ही सांगु शकता का? या नेहमी शंकु आणि अर्ध गोलांनी बनलेल्या असतात.

पाण्याचे टॅकर, तेलाचे टॅकरचे दुसरे उदाहरण घेऊ. ते एका आकाराच्या वस्तु आहेत का? हे वृत्तचिती आणि त्याच्या शेवटी दोन अर्धगोलांनी बनलेल्या आहेत. जर तुम्हाला अशा वस्तुचे पृष्ठफळ किंवा घनफळ किंवा धारक क्षमता माहित करायची असल्यास ती कशी माहित कराल? यास आपण कोणत्याही एका आकाराखाली वर्गीकरण करु शकत नाही. हे तुम्ही आधीच शिकलात.आपण पाहिले की, तेलाचे टॅकर हे वृत्तचिती आणि त्याच्या दोन्ही टोकाशी असलेल्या अर्ध गोलानी बनलेले असते.नविन तयार झालेल्या वस्तुचे पृष्ठफळ हे ध्यानात घेतल्यास आपण फक्त पाहायला मिळते. दोन अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ आणि वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ विचारात घ्यायला हवे.





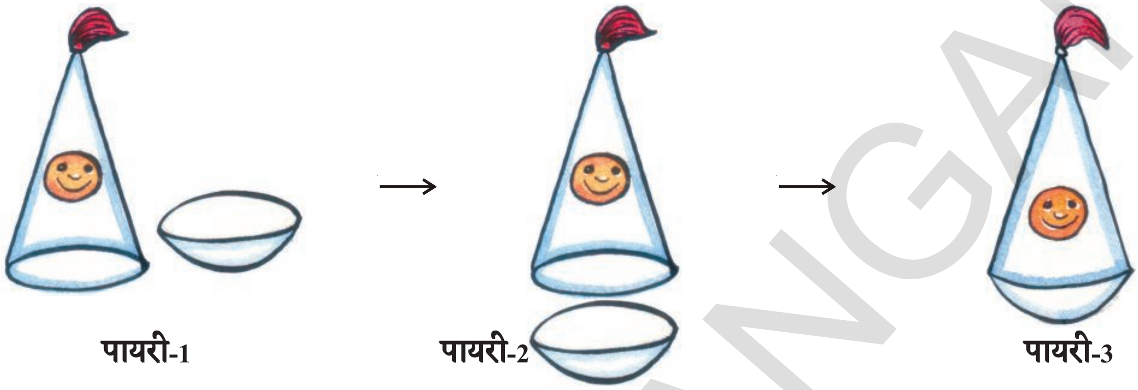
नविन घनाकार वस्तुचा TSA = पहिल्या अर्धगोलाचे CSA+ वृत्तचितीचा CSA + दुसऱ्या अर्धगोलाचा CSA

येथे TSA म्हणजे एकुण पृष्ठफळ CSA म्हणजे वक्रपृष्ठफळाचे क्षेत्रफळ होय.

आता दुसरे उदाहरण पाहु या.

देवर्षा अर्ध गोल आणि शंकुला एकत्र करुन एक खेळणी तयार करण्याच्या विचारात आहे. त्यांनी तयार करण्याच्या वापरलेल्या पध्दतीच्या पायऱ्या पाहु या.

त्यांनी पहिले शंकु आकार आणि अर्धगोलाकार घेऊन त्याचे सपाट पृष्ठभाग एकत्र आणले. येथे शंकुची त्रिज्या आणि अर्धगोलाची त्रिज्या सारखीच आहे. खेळणीसाठी हा मऊ तळभाग आहे. या तयारीतील पायऱ्या खालील प्रमाणे आहेत.



शेवटी गोल तळभाग असलेली सुदंर खेळणी तयार होते. आता त्यांना या खेळणीच्या पृष्ठभागाला रंग लावायचा असल्यास किती रंग हवा आहे, हे माहित करण्यासाठी त्या खेळणीचे पृष्ठफळ माहित केले पाहिजे. यात गोलाच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ आणि शंकुच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ याचा समावेश आहे.

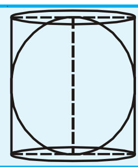
खेळणीचे एकुण पृष्ठफळ = अर्धगोलाच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ+ शंकच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ

प्रयत्न करा

- तुम्हाला माहित असलेल्या घनाकार वस्तुंना घेऊन दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त वस्तु एकत्र करुन तुमच्या दैनंदिन जिवनात आढळणाऱ्या शक्य तेवढ्या वस्तु बनवा.
  [सुचना: चिकनमाती, चेंडु, पाईप, कागदाचा शंकु, घनाकार इष्टकाचितीच्या आकाराचे डब्बे]

विचार करा- चर्चा करा

एका वृत्तचितीमध्ये गोलास ठेवा. गोलाचे पृष्ठफळ हे वृत्तचितीच्या वक्रपृष्टफळास समान आहे का? जर असेल तर कसे आहे स्पष्टीकरण द्या?



उदाहरण-8. एका काटकोन त्रिकोणाच्या पाया आणि उंची अनुक्रमे 15 से.मी. आणि 20 से.मी. आहे. तो त्रिकोण कर्णाभोवती फिरत आहे. अशा रितीने तयार होणाऱ्या व्दिशंकुचे घनफळ आणि पृष्ठफळ काढा?

सोडवणुक : समजा ABC काटकोन त्रिकोणात

AB = 15से.मी आणि AC = 20 से.मी.

पा.गो.प्रमेयानुसार ΔABC

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 15^2 + 20^2$

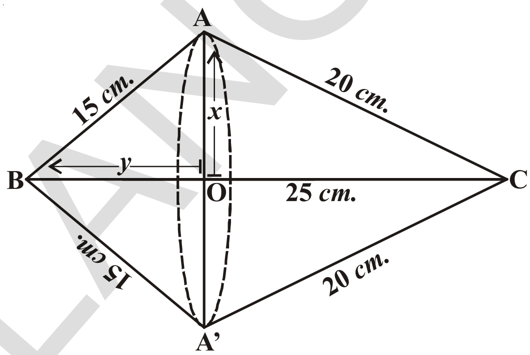
$BC^2 = 225 + 400 = 625$

$BC = \sqrt{625} = 25$ से.मी.

समजा $OA = x$ आणि $OB = y$.

त्रिकोण ABO आणि ABC मध्ये $\angle BOA = \angle BAC$ आणि $\angle ABO = \angle ABC$

म्हणुन कोको समरुपतेच्या नियमावरुन $\Delta BOA \sim \Delta BAC$



म्हणुन $\dfrac{BO}{BA} = \dfrac{OA}{AC} = \dfrac{BA}{BC}$

$\Rightarrow \dfrac{y}{15} = \dfrac{x}{20} = \dfrac{15}{25}$

$\Rightarrow \dfrac{y}{15} = \dfrac{x}{20} = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{y}{15} = \dfrac{3}{5}$ आणि $\dfrac{x}{20} = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow y = \dfrac{3}{5} \times 15$ आणि $x = \dfrac{3}{5} \times 20$

$\Rightarrow y = 9$ आणि $x = 12.$

अशाप्रकारे $OA = 12$ से.मी. आणि $OB = 9$ से.मी.

$OC = BC - OB = 25 - 9 = 16$ से.मी.

जेव्हा ABC हा कर्णाभोवती भ्रमण करते. तेव्हा व्दिशंकु आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे येते.
व्दिशंकुचे घनफळ = CAA' शंकुचे घनफळ + BAA' शकुंचे घनफळ

$= \dfrac{1}{3}\pi(OA)^2 \times OC + \dfrac{1}{3}\pi(OA)^2 \times OB$

$I = \dfrac{1}{3}\pi \times 12^2 \times 16 + \dfrac{1}{3}\pi \times 12^2 \times 9$

$= \dfrac{1}{3}\pi \times 144(16+9)$

$= \dfrac{1}{3} \times 3.14 \times 144 \times 25$ से.मी.^{3}

$= 3768$ से.मी.^{3}.

सुचना:

$\dfrac{1}{3}\pi(OA^2)(OC+OB)$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{22}{7} \times 12^2 \times (16+9)$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{22}{7} \times 144 \times 25$

व्दिशंकुचे पृष्टफळ = (CAA'शंकुच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ)

+ (BAA'शंकुच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ)

$= (\pi \times OA \times AC) + (\pi \times OA \times AB)$

$= (\pi \times 12 \times 20) + (\pi \times 12 \times 15)$ से.मी^{2}

$= 420\ \pi$ से.मी^{2}

$= 420 \times \frac{22}{7}$ से.मी^{2}

$= 1320$ से.मी^{2}

उदाहरण-9. एका लाकडी रॉकेटचा आकार वृत्तचीतीवरती शंकु ठेवल्यासारखे बाजुच्या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आहे. त्या पुर्ण रॉकेटची उंची 26 से.मी.आहे. परंतु त्या शंकुच्या भागाची उंची 6 से.मी. आहे, तळाचा व्यास 5 से.मी. आहे आणि दंडगोलाकृतीच्या पायाचा न्यास 3 से.मी. आहे. जर त्या शंकुच्या आकाराला नारंगी आणि वृत्तचिती आकाराला पिवळा रंग दिला असता त्या रॉकेटला लावलेल्या प्रत्येक रंगाचे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3.14$)

सोडवणुक : समजा त्या शंकुच्या तळाची त्रिज्या 'r'आहे आणि त्याची उंची तिरकस उंची 'l' आहे. त्या वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या r_1 आणि उंची h_1 आहे.

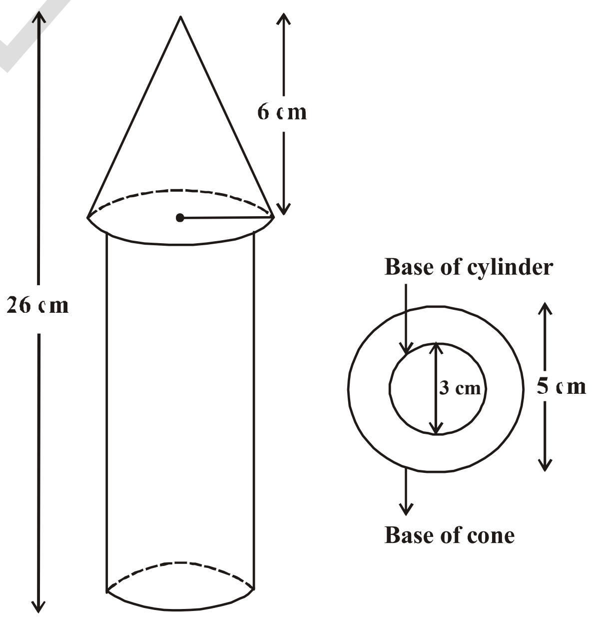
$r = 2.5$ से.मी., $h = 6$ से.मी.

$r_1 = 1.5$ से.मी. $h_1 = 20$ से.मी.

आता $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$\Rightarrow \quad l = \sqrt{(2.5)^2 + 6^2}$

$l = \sqrt{6.25 + 36} = \sqrt{42.25} = 6.5$



आता, नारंगी रंग लावलेले क्षेत्रफळ

शंकुच्या वकृपृष्ठाचे क्षेत्रफळ + शंकुच्या तळाचे क्षेत्रफळ - वृत्तचितीच्या तळाचे क्षेत्रफळ =

$\pi rl + \pi r^2 - \pi r_1^2$

$= \pi\{(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2\}$ से.मी^{2}

$= \pi(20.25)\ cm^2 = 3.14 \times 20.25$ से.मी^{2}

$= 63.585$ से.मी^{2}

पिवळा रंग लावायचा असलेला भाग

= वृत्तचितीच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ + वृत्तचितीच्या तळाचे क्षेत्रफळ

$= 2\pi r_1 h_1 + \pi r_1^2$

$= \pi r_1 (2h_1 + r_1)$

$= 3.14 \times 1.5\ (2\times20+1.5)$ से.मी^{2}

$= 3.14 \times 1.5 \times 41.5$ से.मी^{2}

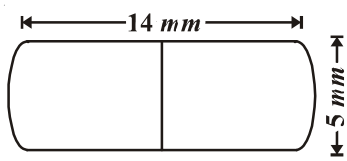
$= 4.71 \times 41.5$ से.मी^{2}

$= 195.465$ से.मी^{2}.

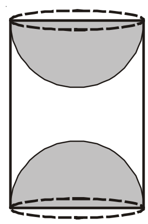
म्हणुन पिवळा रंग लावलेले क्षेत्रफळ = 195.465 से.मी^{2}

अभ्यास - 10.2

1. एका खेळणीचा आकार अर्धगोलावर शंकु ठेवल्या सारखा आहे. त्या अर्धगोलाचा व्यास आणि शंकुच्या तळाचा व्यास सारखा आहे. शंकुच्या तळाचा व्यास आणि उंची अनुक्रमे 6 से.मी. आणि 4 से.मी. आहेत. त्याखेळणीचे पृष्ठफळ काढा. [$\pi = 3.14$]
2. एका घनाचा आकार लंबवृत्तचिती सारखा आहे. त्याचा एक शेवट अर्धगोल आणि दुसरा शेवट शंकु आहे. त्याचा सामाईक पायाची त्रिज्या 8 से.मी. आहे. त्या वृत्तचितीची आणि शंकुच्या भागाची उंची अनुक्रमे 10 से.मी. आणि 6 से.मी. आहे. तर त्या घनाचे एकुण पृष्ठफळ काढा. [$\pi = 3.14$]



3. एका औषधीय गोळीचा आकार वृत्तचितीसारखा असुन त्यांचे दोन्ही शेवट अर्धगोलाकार आहेत. त्या गोळीची लांबी 14 मी.मी. आणि रुंदी 5 मी.मी. आहेत. तर त्याचे पृष्ठफळ काढा.
4. 64 से.मी^{3} घनफळाच्या दोन्ही घनास एकमेकांस जोडले असता तयार होणाऱ्या इष्टीकाचितीचे पृष्ठफळ काढा.
5. एका पाण्याच्या टाकीचे दोन्ही शेवट अर्धगोलाकरात असलेल्या वृत्तचितीसारखे आहे. जर त्या वृत्तचितीचा बाहेरील व्यास आणि उंची अनुक्रमे 1.4 मी. आणि 8 मी. आहे. त्या टाकीला बाहेरुन रंग द्यायचा असल्यास 20 रुपये प्रती मी^{2} दराने किती खर्च येईल?
6. एक गोल, वृत्तचिती आणि शंकुची त्रिज्या आणि उची सारखी आहे. घनफळाचे गुणोत्तर काढा.(गोलाची त्रिज़्या ही वृत्तचितीला आणि शंकुच्या उंचीला समान आहे.)
7. एका इष्टीकाचीतीच्या आकाराच्या लाकडी ढोकळ्याला एका पृष्ठा पासुन अर्धगोलाकार कापले असता, अर्धगोलाचा व्यास त्या घनाच्या लांबी एवढा होतो. तर उरलेल्या घनाचे पृष्ठफळ माहित करा.

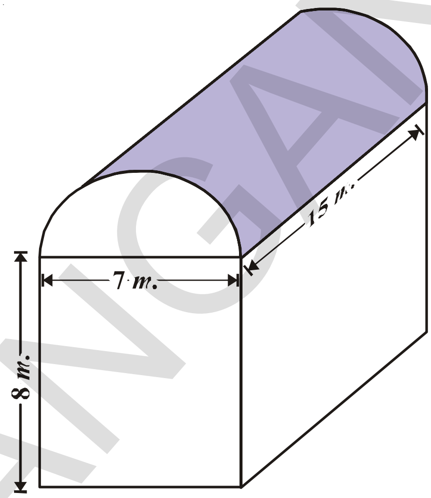


8. एका वृत्तचितीच्या दोन्ही शेवटापासुन अर्ध गोलाकार कापुन एक लाकडी वस्तु आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे बनते. जर त्या वृत्तचितीची उंची 10 से.मी. आणि त्याचा पाया ची त्रिज्या 3.5 मी.आहे तर त्या वस्तुचे एकुण पृष्ठफळ माहित करा.

10.3 एकत्र घनाकार वस्तुचे घनफळ(Volume of Combination of Solids)

एकत्र घनाकार वस्तुचे घनफळ उदाहरणावरुन समजु या

सुरेश एका इष्टीकाचितीच्या आकारात असलेल्या छता खाली उद्योग चालवत आहे. त्या छताचा वरचा भाग अर्ध वृत्तचितीकाराने झाकलेला आहे. त्या छताच्या पायाची मापे 7 मी. × 15 मी. त्या छतामधील हवेचे घनफळ काढा? समजा एका मशीनने त्या छतातील व्यापलेली एकुण जागा 300 मी^{3} आणि तिथे 20 मजुर काम करीत आहे. त्या पैकी प्रत्येकानी व्यापलेली जागा सरासरी 0.08मी^{3} आहे. तर त्या छतामधील हवा किती आहे?



त्या छतामधील हवा (मजुर आणि मशीन नसतांना) ही त्या इष्टीकाचीती आणि अर्धवृत्तचितीने एकत्रित व्यापलेली जागा होय. इष्टीकातीचीची लांबी, रुंदी आणि उंची अनुक्रमे 15मी,7मी आणि 8 मी आहे. त्या अर्धवृत्तचितीचा व्यास आणि उंची अनुक्रमे 7 मी आणि 15 मी आहे.

म्हणुन येणारे घनफळ $= \text{इष्टीकाचीतीचे घनफळ} + \frac{1}{2}\,\text{वृत्तचितीचे घनफळ}$

$$= \left[15\times7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times15\right]m^3$$

$= 1128.75$मी^{3}.

मशीनने व्यापलेली एकुण जागा

$= 300$ मी^{3}.

मजुरांनी व्यापलेली एकुण जागा

$= 20\times0.08$ मी^{3}

$= 1.6$मी^{3}

म्हणुन मशीने आणि मजुर असतांना हवेचे घनफळ

$= 1128.75 - (300.00 + 1.60)$

$= 1128.75 - 301.60 = 827.15$ मी^{3}

सुचना: एकत्र घनाकार वस्तुचे पृष्टफळ काढतांना दोन्ही घनांचा पृष्ठफळाला मिळवु शकत नाही. कारण त्यांना जोडतांना पृष्टफळाचा काही भाग अदृष्य असतो. घनफळ काढतांना हा संदर्भ येत नाही. दोन घनांना जोडल्यास येणाऱ्या घनाचे घनफळ हे, वास्तविकपणे वरील उदारहणात पाहिल्या प्रमाणे घटकांच्या घनफळाची बेरीज आहे.

प्रयत्न करा

1. तारेच्या काट छेदाच्या व्यास 5% कमी होतो. घनफळ न बदलण्यासाठी किती टक्याने लांबी वाढली पाहिजे?
2. एका गोलाचे आणि घनाचे पृष्टफळ समान आहे. त्याच्या घनफळाचे गुणोत्तर काढा?

अजुन काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-10. एक घन खेळणी लंबवृत्तचितीच्या आकारात आहे. त्याचे एक टोक अर्धगोलाकार आणि दुसरे टोक शंकुच्या आकारात आहे. त्यांचा सामाईक व्यास 4.2 से.मी. आणि वृत्तचिती आणि शंकुच्या आकाराच्या भागाची उंची अनुक्रमे 12 से.मी.आणि 7 से.मी. आहे. त्या घनाकार खेळणीचे घनफळ काढा. $\left(\text{Use } \pi = \frac{22}{7}\right)$.

सोडवणुक : शंकुच्या आकारातील भागाची उंची $h_1 = 7$ से.मी.

वृत्तचितीच्या आकारातील भागाची उंची $h_2 = 12$ से.मी.

त्रिज्या $(r) = \frac{4.2}{2} = 2.1 = \frac{21}{10}$ से.मी.

घनाकार खेंळणीचे घनफळ

= शंकुचे घनफळ+वृत्तचितीचे घनफळ+ अर्धगोलाचे घनफळ

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{2}{3}\pi r^3$$

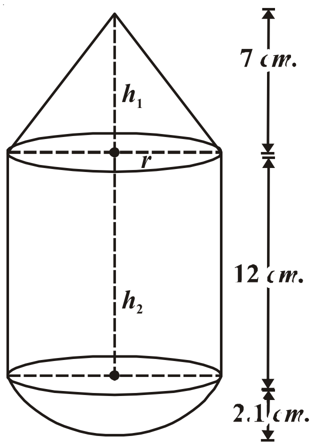
$$= \pi r^2 \left[\frac{1}{3}h_1 + h_2 + \frac{2}{3}r\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{10}\right)^2 \times \left[\frac{1}{3} \times 7 + 12 + \frac{2}{3} \times \frac{21}{10}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{7}{3} + \frac{12}{1} + \frac{7}{5}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{35+180+21}{15}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \frac{236}{15} = \frac{27258}{125} = 218.064 \text{ से.मी.}^3$$



उदाहरण-11. आईसक्रिमने भरलेल्या एका वृत्तचिती आकाराच्या पात्राचा व्यास आणि उंची अनुक्रमे 12 सें.मी. आणि 15 से.मी. आहे. त्यामधील पुर्ण आईसक्रिम वरचा भाग अर्धगोलाकार असलेल्या समान शंकुत भरुन 10 मुलांना वाटला. जर शंकुच्या भागाची उंची त्याच्या पायाच्या व्यासाच्या दुप्पट असल्यास त्या आईसक्रिम शंकुचा व्यास माहित करा.

सोडवणुक : शंकु आकाराच्या आईसक्रिमच्या पायाची त्रिज्या $= x$ से.मी.

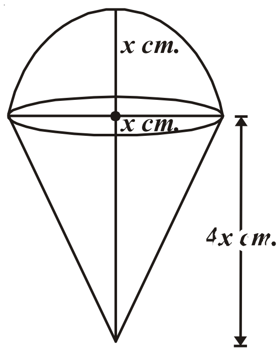
$\therefore$ व्यास $= 2x$ से.मी.

शंकु आकाराच्या आईसक्रिमची उंची

$= 2$ (व्यास) $= 2(2x) = 4x$ से.मी.

आईसक्रिम शंकुचे घनफळ

= शंकुच्या भागाचे घनफळ+ अर्धगोलाकार भागाचे घनफळ



$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi x^2 (4x) + \frac{2}{3}\pi x^3$$

$$= \frac{4\pi x^3 + 2\pi x^3}{3} = \frac{6\pi x^3}{3}$$

$= 2\pi x^3$ से.मी.^{3}

वृत्तचितीआकाराच्या पात्राचा व्यास $= 12$ से.मी

त्याची उंची $(h) = 15$ से.मी.

$\therefore$ वृत्तचिती आकाराच्या पात्राचे घनफळ $= \pi r^2 h$

$= \pi(6)^2\, 15$

$= 540\pi$ से.मी^{3}

आईसक्रिम दिलेल्या मुलांची संख्या $= 10$

$$\frac{\text{वृत्तचिती आकाराच्या पात्राचे घनफळ}}{\text{आईसक्रिम शंकुचे घनफळ}} = 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{540\pi}{2\pi x^3} = 10$$

$$2\pi x^3 \times 10 = 540\pi$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = \frac{540}{2\times 10} = 27$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = 27$$

$\Rightarrow \quad x^3 = 3^3$

$\Rightarrow \quad x = 3$

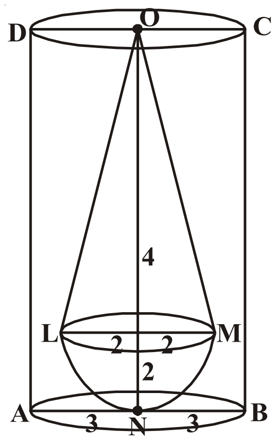
$\therefore$ आईसक्रिम शंकुचा व्यास $2x = 2(3) = 6$ से.मी.

उदाहरण-12. घनाकृतीत शंकु अर्धगोलावर उभा केले आहे. त्याला पुर्ण पाणी भरलेल्या एका लंबवृत्तचितीमध्ये उभे ठेवले असता तळाला स्पर्श करते. त्या वृत्तचितीमध्ये उरलेल्या पाण्याचे घनफळ काढा. वृत्तचितीची त्रिज्या 3 से.मी. आणि उंची 6 से.मी. दिलेले आहे. अर्धगोलाची त्रिज्या 2 से.मी. आणि शंकुची उंची 4 से.मी. आहे. $\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$.

सोडवणुक : काढलेल्या आकृतीमध्ये

ABCD ही वृत्तचिती आणि LMN अर्धगोल आहे.

OLM हा शंकु आहे. शंकु आणि अर्धगोल असलेल्या घनास पुर्णपणे पाणी भरलेल्या वृत्तचितीमध्ये बुडविले आहे.काही पाणी हे त्या घनाचा घनफळा ऐवढे आहे.



वृत्तचितीचे घनफळ $= \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\,\pi$ से.मी.^{3}

अर्धगोलाचे घनफळ $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{16}{3}\pi$ से.मी.^{3}

शंकुचे घनफळ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4 = \frac{16}{3}\pi$से.मी.^{3}

शंकु आणि अर्धगोलाचे घनफळ $= \frac{16}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi$

$= \frac{32}{3}\pi$

वृत्तचितीमध्ये उरलेल्या पाण्याचे घनफळ

= वृत्तचितीचे घनफळ - शंकु आणि अर्धगोलाचे घनफळ

$= 54\pi - \frac{32\pi}{3}$

$= \frac{162\pi - 32\pi}{3} = \frac{130\pi}{3}$

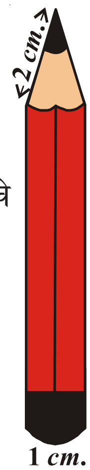
$= \frac{130}{3} \times \frac{22}{7} = \frac{2860}{21} = 136.19$से.मी.^{3}

उदाहरण-13. वृत्तचितीच्या आकारातील पेन्सीलला धारलावली असता वरचे टोक शंकुसारखे दिसते. (त्याच्या लांबीत बदल न करता) पेन्सीलचा व्यास 1 से.मी. आहे आणि शंकुच्या आकाराच्या भागाची लांबी 2 से.मी. आहे. त्या धारलावलेल्या भागाचे घनफळ काढा? तुमचे उत्तर दोन दशांस स्थळापर्यंत काढा? $\left[\text{use } \pi = \frac{355}{113}\right]$.

सोडवणुक : पेन्सीलचा व्यास = 1से.मी.

म्हणुन, पेन्सीलची त्रिज्या $(r) = 0.5$ से.मी.

शंकुच्या आकाराच्या भागाची लांबी $= h = 2$से.मी.



धारलावलेल्या भागाचे घनफळ= 2 से.मी. लांबी आणि 0.5 से.मी. त्रिज्या असलेल्या वृत्तचितीचे घनफळ – या वृत्तचितीमुळे तयार झालेल्या शंकुचे घनफळ

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{355}{113} \times (0.5)^2 \times 2 \text{ cm}^3 = 1.05 \text{ से.मी.}^3$$

अभ्यास-10.3

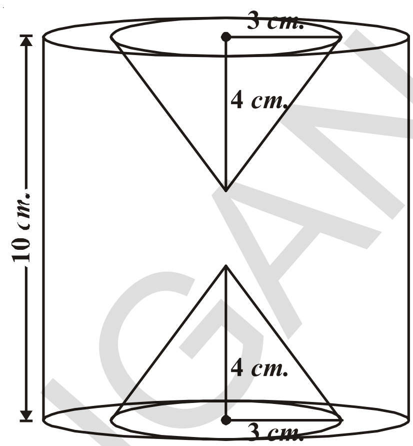
1. एका लोखंडी वृत्तचितीच्या आकारातील खांबाची उंची 2.8 मी.आणि व्यास 20 से.मी. आणि 42 मी. उंचीचा शंकु त्याच्या माथ्यावर आहे. जर एक घन सेमी लोखंडाचे वजन 7.5 ग्रॅम असल्यास त्या खांबाचे वजन काढा?

2. एका अर्धगोलाकार रुपात असलेल्या एका खेळणीच्या वरच्या भागात एक शंकु ज्याचा वृत्ताकार पाया अर्धगोलाच्या सपाट पृष्ठभागाशी जोडला आहे. शंकुच्या पायाची त्रिज्या 7 से.मी. आणि त्याचे घनफळ हे अर्धगोलाच्या $\frac{3}{2}$ पट आहे. तर शंकुची उंची आणि खेळणीचे पृष्टफळ दोन दंशास स्थळापर्यंत काढा. $\left(\text{Take } \pi = 3\frac{1}{7}\right)$.

3. 7 से.मी. बाजु असलेल्या घनापासुन तयार होणाऱ्या सर्वात मोठ्या शंकुचे घनफळ काढा?

4. एका वृत्तचितीच्या आकाराचा टबची त्रिज्या 5 से.मी. आणि लांबी 9.8 से.मी. आहे. त्यात पुर्ण

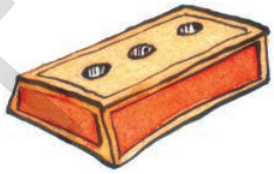
पाणी भरलेले आहे. शंकुच्या आकारात असलेली एका घनाकृती त्याच्या वरच्या भागावर अर्धगोल असुन ती त्या टबमध्ये बुडविलेली आहे. अर्धगोलाची त्रिज्या 3.5 से.मी. आहे. आणि शंकुची अर्धगोला बाहेरील उंची 5 से.मी. आहे. त्या टबमध्ये उरलेल्या पाण्याचे घनफळ काढा. $\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$.

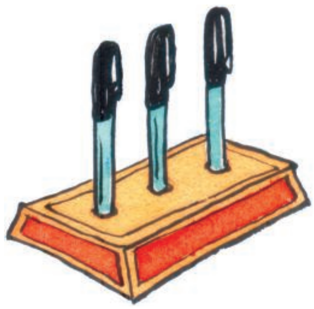


5. बाजुच्या आकृतीत घनाकार वृत्तचितीची उंची 10 से.मी. आणि व्यास 7 से.मी. आहे. त्रिज्या 3 से.मी. आणि उंची 4 से.मी. असणारे दोन शकुंच्या आकाराचे छिद्र आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आहेत उरलेल्या घनाचे घनफळ काढा?

6. 1.4 से.मी. त्रिज्या असलेल्या गोल गोटीला 7 से.मी. व्यास असलेल्या वृत्तचितीकार पाणी असलेल्या बिकरमध्ये टाकल्यास. पाण्याची पातळी 5.6 से.मी. पर्यंत वर येण्यासाठी त्या बिकरमध्ये किती गोट्या टाकाव्या लागतात?

7. एका पेनची लाकडी स्टॅंड इष्टीकाचीतीच्या आकारात असुन त्यात तिन पेनी उभे राहण्यासारखे आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे तीन छिद्रे आहेत. त्या इष्टीकाचीतीचे माप 15 से.मी.×3.5 से.मी. आहे. त्याप्रत्येक छिद्राची त्रिज्या 0.5 से.मी. आणि 1.4 से.मी. खोल आहे. त्या पुर्ण स्टॅंडचे घनफळ काढा.

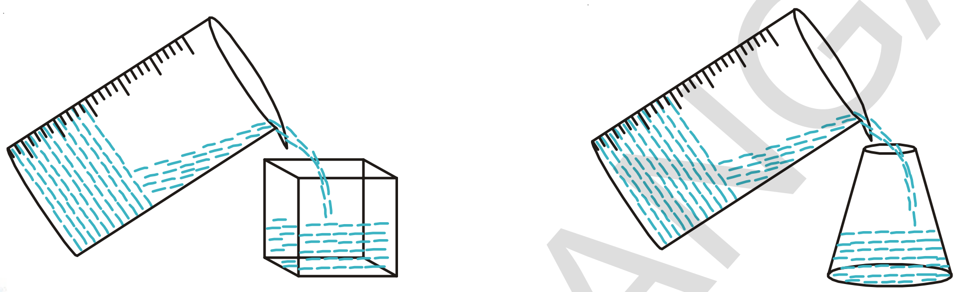




10.4 एका घनाकृतीचे दुसऱ्या घनाकृतीमध्ये रुपांतर

महिला स्वयंम सहाय्यक गटांनी (DWACRA) इष्टीकाचीतीच्या आकारातील मेण वितळवुन त्याच्या मेणबत्या बनविल्या बंदुकीच्या कारखाण्यात शिस्याचे घन वितळुन त्या पासुन बंदुकीच्या गोळ्या तयार करतात. सोन्याचे बिस्केट वितळवुन सोनार त्याचे दागिने तयार करतात. वरील सर्व संदर्भात एका घनाचा आकार दुसऱ्या घनाच्या आकारात रुपांतर होते. यामध्ये घनफळ सारखेच राहते. हे कसे घडते? तुम्हाला हव्या त्या आकारात मेनबत्या बनविण्यासाठी मेणाला एका धातुच्या पात्रात वितळे पर्यंत गरम केले पाहिजे. त्यानंतर तुम्हाला हव्या असलेल्या आकाराचा पात्रात टाकल्यास हव्या अशा मेणबत्या तयार होतात.

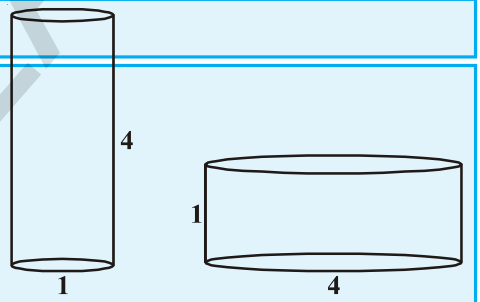
उदा. चला वृत्तचितीच्या घनाकारात असलेले मेणबत्ती बनवु. तिला वितळवुन वितळलेला पुर्ण मेलणाला गोलाच्या आकारात असलेल्या पात्रात ओतु. थंड झाल्यानंतर गोलाकार मेणबत्ती तयार होते. नविन मेणबत्तीचे घनफळ हे आधीच्या मेणबत्तीच्या घनफळा ऐवढेच असते. अशाप्रकारे आपण एका आकारातील वस्तुंना दुसऱ्या आकारात बदल्यास किंवा एका पात्रात साठविलेले द्रवाला विविध आकारात आणि विविध मापाच्या दुसऱ्या पात्रात टाकुन खाली दिलेल्या आकृतीसारखे तयार करु शकतो.



विचार करा आणि चर्चा करा

बाजुच्या आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे कोणत्या बॅरेलमध्ये जास्त पाणी मावते?

तुमच्या मित्राशी चर्चा करा. चर्चा करण्यासाठी काही उदाहरणे घेऊ



उदाहरण-14. एका चिकन मातीने बनलेल्या शंकुची उंची 24 से.मी. आणि पायाची त्रिज्या 6 से.मी. आहे. एका मुलांनी त्यास गोलात बदलल्यास त्या गोलाची त्रिज्या काढा?

सोडवणुक : शंकुचे घनफळ $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ से.मी^{3}

समजा गोलाची त्रिज्या r आहे. तर त्याचे घनफळ $\frac{4}{3}\pi r^3$

कारण शंकुच्या आकारातील आणि गोलाच्या आकारातील चिकन म

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi \times 6 \times 6 \times 24$$

$$r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3 \times 3 \times 3 \times 8$$

$$r^3 = 3^3 \times 2^3$$

$$r = 3 \times 2 = 6$$

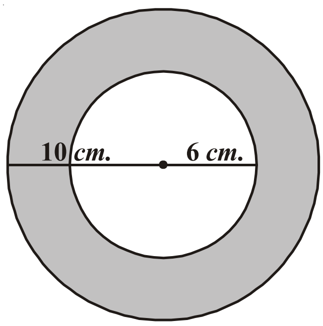
म्हणुन, त्या गोलाची त्रिज्या 6 से.मी.आहे.

हे करा

1. 1 से.मी. व्यास, 8 से.मी. लांबीची एक तांब्याच्या छडीला 18 मी. लांबीच्या तारेत बदल्यास त्या तारेची जाडी काढा?
2. प्रावलीच्या घरावर वृत्तचिताकार पाण्याची टाकी आहे. भुगर्भातील टाकीमधुन मोटारच्या साहाय्याने वरच्या टाकीत पाणी भरते. त्या भुगर्भातील टाकीचे परिमाण 1.57 मी. $\times$ 1.44 मी. $\times$ 9.5 से.मी.. पाण्याच्या टाकीची त्रिज्या 60 से.मी. आणि उंची 95 से.मी. आहे. पाण्याची टाकी पुर्ण भरल्यानंतर त्या भुगर्भातील टाकीत (संप) मध्ये किती पाणी राहाते. त्या भुगर्भ तील टाकीचे आणि पाण्याची टाकीच्या धारक क्षमतेची तुलना करा. ($\pi = 3.14$)

उदाहरण-15. एका पोकळ अर्धगोलाचे आतील आणि बाहेरील पृष्ठभागाचा व्यास अनुक्रमे 6 से.मी. आणि 10 से.मी. आहे. याला वितळुन परत 14 से.मी. व्यास असलेल्या वृत्तचितीच्या घनाकारात बदलल्यास त्या वृत्तचितीचे घनफळ काढा?

सोडवणुक: पोकळ अर्धगोलाची त्रिज्या $R = \frac{10}{2} = 5$ से.मी.



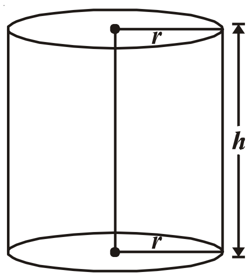
पोकळ अर्धगोलाची आतील त्रिज्या $r = \frac{6}{2} = 3$ से.मी.

पोकळ अर्धगोलाचे घनफळ

= बाहेरील घनफळ - आतील घनफळ

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$$



$$= \frac{2}{3}\pi(5^3 - 3^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(125 - 27)$$

$$= \frac{2}{3}\pi \times 98\,cm^3 = \frac{196\pi}{3} \text{ से.मी.}^3 \quad ...(1)$$

या पोकळ अर्धगोलास वितळुन वृत्तचितीकार घन बनविला आहे. म्हणुन त्याचे घनफळ सारखेच राहते.

वृत्तचितीचा व्यास = 14 से.मी. (दिलेले)

म्हणुन, वृत्तचितीची त्रिज्या = 7 से.मी.

वृत्तचितीची उंची $= h$

$\therefore$ वृत्तचितीचे घनफळ $= \pi r^2 h$

$= \pi \times 7 \times 7 \times h$ से.मी.^{3} $= 49\pi h$ से.मी.^{3} ...(2)

दिलेल्या अटीनुसार

पोकळ अर्धगोलाचे घनफळ= घनवृत्तचितीचे घनफळ

$\frac{196}{3}\pi = 49\pi h$ [(1)आणि (2) वरुन]

$\Rightarrow h = \frac{196}{3 \times 49} = \frac{4}{3}$ से.मी.

म्हणजेच वृत्तचितीची उंची = 1.33 से.मी.

उदाहरण-16. 15 से.मी. त्रिज्या असलेल्या अर्धगोलाकार पात्रात द्रव भरलेला आहे. त्या द्रवास 5 से.मी. व्यास आणि 6 से.मी. उंची असलेल्या वृत्तचितीच्या आकारात असलेल्या बॉटल मध्ये भरायचे आहे. ते पात्र रिकामे करण्यासाठी किती बॉटलची आवश्यकता आहे?

सोडवणुक : अर्धगोलाचे घनफळ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

अर्ध गोलाची आतील त्रिज्या $r = 15$ से.मी.

$\therefore$अर्धगोलाकार पात्रातील द्रवाचे घनफळ

$= \frac{2}{3}\pi(15)^3$ से.मी.^{3}

$= 2250\,\pi$ से.मी^{3}.

या द्रवास बॉटलमध्ये भरायचे आहे प्रत्येक बॉटलची उंची $(h) = 6$ से.मी. आणि

त्रिज्या $(R) = \frac{5}{2}$ से.मी.

$\therefore$ एका वृत्तचितीकार बॉटलचे घनफळ $= \pi R^2 h$

$= \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 6$

$= p \, ' \, \frac{25}{4} \, ' \, 6\,\text{cm}^3 = \frac{75}{2}\, p$ से.मी.^{3}

$$\text{आवश्यक वृत्तचितीकार बॉटलची संख्या} = \frac{\text{अर्धगोलाकार पात्राचे घनफळ}}{\text{1 वृत्तचितीकार बॉटलचे घनफळ}}$$

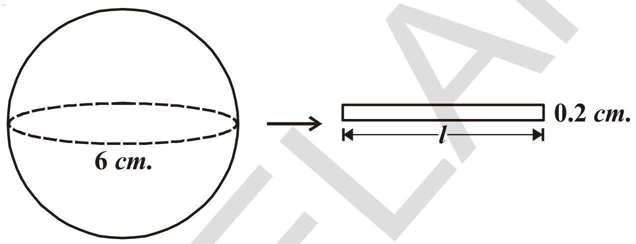
$$= \frac{2250\pi}{\frac{75}{2}\pi} = \frac{2\times 2250}{75} = 60.$$

उदाहरण-17. एका धातुच्या गोलाचा व्यास 6 से.मी. आहे. त्याला वितळवुन त्याची लांब तार बनविली. त्या वर्तुळाकार तारेचा काटछेदाचा व्यास 0.2 से.मी. आहे. त्या तारेची लांबी काढा?

सोडवणुक : धातुच्या गोलाचा व्यास = 6से.मी.

$\therefore$ धातुच्या गोलाचे त्रिज्या = 3से.मी.

पुन्हा



इष्टीकाचितीच्या आकारातील तारेचा काटछेद व्यास =0.2 से.मी.

वृत्तचिती आकारातील तारेची काटछेद त्रिज्या= 0.1 से.मी.

समजा तारेची लांबी l से.मी. आहे.

धातुच्या गोलास वृत्तचितीकार तारेत रुपांतर केल्यामुळे तारेची उंची h से.मी. आहे.

$\therefore$ तारेतील धातुचे घनफळ = गोलाचे घनफळ

$$\pi\times(0.1)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 3^3$$

$$\pi\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 27$$

$$p\,'\,\frac{1}{100}\,'\,h = 36p$$

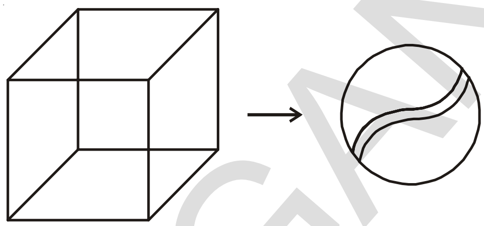
$$h = \frac{36\pi\times 100}{\pi}\text{से.मी.}$$

$= 3600$ से.मी. $= 36$ मी.

म्हणुन तारेची लांबी 36 मी. आहे.

उदाहरण-18. 44 से.मी. बाजु असलेल्या एका शिस्यांच्या घनाला 4 से.मी. व्यासाच्या गोलाकार चेंडुत बदलल्यास किती गोलाकार चेंडु तयार होतात?

सोडवणुक : शिस्यांच्या घनाची बाजु = 44 से.मी.



गोलाकार चेंडुची त्रिज्या $= \frac{4}{2}$ से.मी. $= 2$ से.मी.

गोलाकार चेंडुचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 2^3$ से.मी.^{3}

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8$ से.मी.^{3}

समजा चेंडुची संख्या x आहे.

x गोलाकार चेंडुचे घनफळ $= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x$ से.मी.^{3}

x गोलाकार चेंडुचे घनफळ= शिस्यांच्या घनाचे घनफळ

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = (44)^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = 44\times 44\times 44$$

$$\Rightarrow x = \frac{44\times 44\times 44\times 3\times 7}{4\times 22\times 8}$$

$x = 2541$

गोलाकार चेंडुची संख्या $= 2541$.

उदाहरण-19. महिला स्वंयम साहाय्यक गटांनी (DWACRA) 66से.मी., 42 से.मी., 21 से.मी. व्यास असलेले मेणाचे आयताकार घन 4 से.मी. व्यास आणि 2.8 से.मी. उंची असलेली वृत्तचितीकार मेणबत्ती तयार करण्यासाठी पुरवठा केले. तर त्या मेणबत्यांची संख्या काढा?

सोडवणुक: आयताकृती घनाच्या मेणाचे घनफळ $= lbh$

$= (66\times 42\times 21)$ से.मी^{3}.

वृत्तचितीच्या आकारातील मेणबत्तीची त्रिज्या $= \frac{4.2}{2}$ से.मी. $= 2.1$ से.मी.

वृत्तचितीच्या आकारातील मेणबत्तीची उंची $= 2.8$ से.मी.

मेणबत्तीचे घनफळ $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times (2.1)^2 \times 2.8$$

समजा मेणबत्तीची एकुण संख्या x आहे.

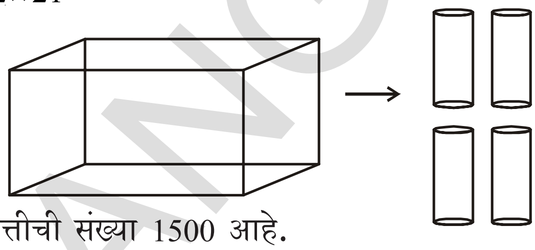
x वृत्तचितीकार मेणबत्तीचे घनफळ $= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x$

$\because$ x वृत्तचितीकार मेणबत्तीचे घनफळ= आयताकार मेणाचे घनफळ

$$\therefore \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x = 66 \times 42 \times 21$$

$$x = \frac{66 \times 42 \times 21 \times 7}{22 \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8}$$

$$= 1500$$



म्हणुन वृत्तचितीच्या आकारात बनणाऱ्या मेणबत्तीची संख्या 1500 आहे.

अभ्यास - 10.4

1. 4.2 से.मी. त्रिजेच्या एका घन गोलास वितळवुन 6 से.मी. त्रिजेची वृत्तचिती बनविल्यास त्या वृत्तचितीची उंची काढा.
2. 6 से.मी., 8 से.मी. आणि 10 से.मी. त्रिज्या असलेल्या तीन घन गोलास एकत्र वितळवुन एक घन गोल बनतो. या घनाची त्रिज्या माहित करा?
3. 20 मी. खोल आणि 7 मी. व्यासाचा एक खड्डा जमीनीवर खोदल्यास त्या मातीने 22 मी.$\times$ 14 मी. पायाचा एक आयताकार प्लाटफार्म तयार होतो. त्या प्लाटफार्मची उंची काढा?
4. 14 मी. व्यासाची एक विहिर 15 मी.खोल खोदली ती माती सभोवती पसरवल्यास त्या पासुन तयार होणाऱ्या एक वृत्ताकार रिंगची रुंदी 7 मी. आहे.त्या विहिरी भोवतालच्या मातीच्या ढिगाची उंची काढा?
5. एका लंबवृत्तचितीच्या आकाराच्या पात्राचा व्यास 12 से.मी. आणि उंची 15 से.मी. आहे. त्यात आईसक्रिम भरलेला आहे. 12 से.मी.उंची आणि 6 से.मी. व्यास असलेला वरचा भाग अर्धगोलाकार असलेल्या शंकुत आईसक्रिम भरायचा आहे. आईसक्रीम भरलेल्या अशा शंकुची संख्या काढा?
6. 5.5 से.मी. $\times$ 10 से.मी. $\times$ 3.5 से.मी. परिमाणाची इष्टीकाचिती तयार होण्यासाठी 1.75 से.मी. व्यास आणि 2 मी.मी. जाडीची किती चांदीच्या नाण्यांची आवश्यकता आहे?
7. एक पात्र उलट्या शंकुच्या आकारात आहे. त्याची उंची 8 से.मी. आणि त्याच्या वरच्या भागाची त्रिज्या 5 से.मी. आहे व वरच्या भागापर्यंत पाणी भरलेले आहे. 0.5 से.मी. व्यासाचे गोलीय आकाराचे शिस्यांचे गोल त्यात टाकले असता $\frac{1}{4}$ भाग पाणी बाहेर येते. त्या पात्रात टाकलेल्या शिस्यांच्या गोळ्याची संख्या काढा?
8. 28 से.मी. व्यासाच्या घनगोलास वितळवुन त्याचे प्रत्येकी $4\frac{2}{3}$ से.मी. व्यास आणि 3से.मी. उंचीचे लहान लहान शंकु बनविले. अशारितीने तयार झालेल्या शंकुची संख्या काढा?

ऐच्छिक अभ्यास

[हा अभ्यास परिक्षेसाठी नाही]

1. एका गोल्फचेंडुचा व्यास 4.1 से.मी. आहे. त्याच्या पृष्ठभागावर प्रत्येकी 2 मी.मी. त्रिजेच्या 150 खळी आहेत. खळी (डिपंल्स) अर्धगोलाकार असल्यास त्याचे एकुण पृष्ठफळ काढा. $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

2. 12 से.मी. त्रिजेच्या वृत्तचितीमध्ये 20 से.मी. खोलपाणी आहे. एका गोलाकार लोखंडी गोळीला त्या वृत्तचितीत टाकल्यास त्या पाण्याची पातळी 6.75 से.मी. ने वाढते. तर त्या गोळीची त्रिज्या काढा. $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

3. एक खेळणी लंबवृत्तचितीच्या आकारात असुन एक टोक अर्धगोलाकार आणि दुसरे टोक शंकुच्या आकारात आहे.सामाईक व्यास 42 से.मी. आणि वृत्तचितीकार व शुकंच्या आकारातील भागाची उंची अनुक्रमे 12 से.मी., 7 से.मी. आहे. त्या घन खेळणीचे घनफळ काढा. $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

4. तिन धातुच्या घनाच्या कडा अनुक्रमे 15 से.मी.,12 से.मी. आणि 9 से.मी. आहे. त्यास एकत्र वितळविल्यास साधे घन तयार होतात. प्रत्येक घनाचा कर्ण काढा.

5. एका अर्धगोलीय पात्राचा आतील व्यास 36 से.मी. असुन त्यात द्रव आहे. या द्रवास 3 से.मी. त्रिज्या आणि 6 से.मी. उंचीच्या वृत्तचितीच्या आकारातील बाटलीत भरायचे आहे. ते पात्र करण्यासाठी किती बाटल्या पाहिजेत?

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

एकुण पृष्ठफळ, पार्श्वपृष्ठफळ, घनफळ **(T.S.A, L.S.A and volume (packing type)**

- इष्टीकाचितीचे घनफळ सारखे असुन एकुण पृष्ठफळ वेगळे असणे.
- भिन्न एकुण पृष्ठफळ आणि भिन्न घनफळ असलेली इष्टीकाचीती वरील कोणत्या संदर्भात इष्टीकाचीतीचे एकुण पृष्टफळ आणि घनफळ हे जास्तीत जास्त असेल.

आपण काय चर्चा केली.

1. दोन सामान्य घनांनी तयार झालेल्या घनाचे घनफळ हे त्या दोन्ही घनफळाच्या बेरजेला समान असते.

2. एकत्र घनाचे पृष्ठफळ काढण्यासाठी दोन घनांचे पृष्ठफळ वितळविण्याची गरज नाही. कारण जोडण्याच्या प्रणालीत पृष्ठफळाचा काही भाग अदृष्य असतो.

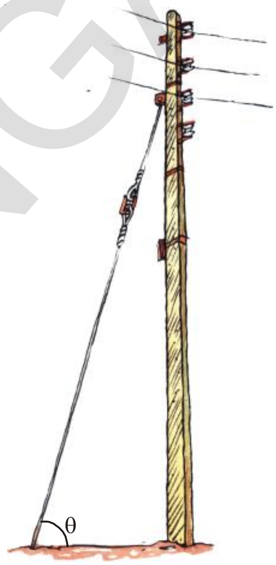
धडा
11 त्रिकोणामिती
(Trigonometry)

11.1 प्रस्तावना

मागील वर्गात आपण त्रिकोण आणि त्याचे गुणधर्म पाहिलेत. आपल्या दैनंदिन जिवनात विविध संदर्भात, त्रिकोण त्यांच्या गुणधर्माचा वापर करणे पाहिलेत.

आपल्या दैनंदिन जिवनातील काही उदाहरणे पाहु या.

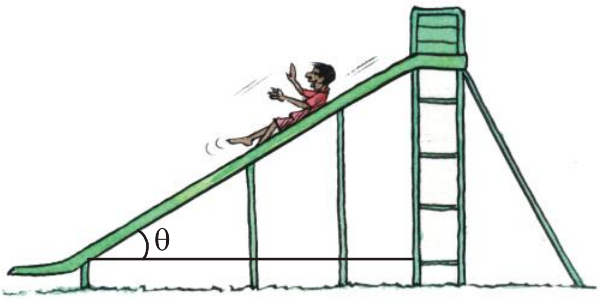
- विजेच्या खांब प्रत्येक ठिकाणी असतो. लोखंडी धातुच्या तारेने तो उभा केलेला असतो. विजेचा खांब, लोखंडी तार आणि जमीन मिळुन त्रिकोण बनतो. जर त्या लोखंडी तारेची लांबी कमी केली असता, त्या त्रिकोणाचा आकार व त्या तारेची जमीनीशी केलेला कोन कसा असतो?



- आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे एक व्यक्ती शिडीच्या साहाय्याने भिंतीला चुना लावत आहे. जर त्या व्यक्तीला थोड्या जास्त उंचीवर चुना लावायला असल्यास तो काय करतो? तेव्हा जमीन आणि शिडीमधील कोनात काय बदल घडतो?

- आदिलाबाद जिल्ह्यातील जैनथ या गावी 13 व्या शतकात निर्माण केलेल्या एका मंदीरात डिसेंबर महिण्यात एका दिवशी सुर्याचे किरण सुर्य नारायण स्वामीच्या पायावर पडते. मंदिराच्या दारापासुन मुर्तीपर्यंतचे अंतर, दारावरील छिद्राची उंची, ज्यामधुन सुर्यकिरण येते आणि सुर्यकिरणाव्दारे जमीनीवर केलेल्या केानात संबंध आहे? येथे कोणताही त्रिकोण तयार होतो का?

- खेळण्याच्या पटांगणात मुले घसरपट्टीवर घसरतांना तुम्ही पाहिले असाल. घसरपट्टीने जमीनीशी केलेल्या कोनावरुन घसण्याचा स्वभावात बदल घडुन येतो. घसरपट्टीने जमीनीशी केलेल्या कोनात बदल केल्यास काय घडते? त्यावेळी मुले घसरपट्टीवर खेळु शकतात का?

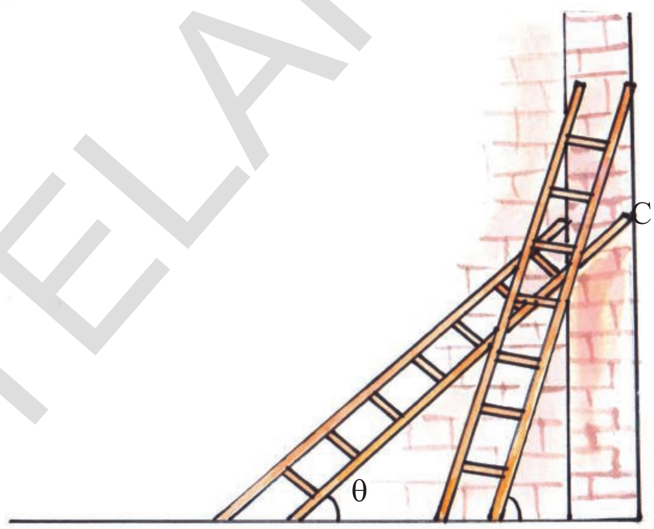


वरील उदाहरणे आपल्या नित्य जिवनात त्रिकोनाचा उपयोग कशा प्रकारे होतो याची भुमितीय दर्शवणुक,विविध प्रकारची उंची, अंतर आणि चढ इत्यादी त्रिकोणाच्या गुणधर्मावरुन जे मोजमाप करता येते. अशा प्रकारच्या प्रश्न हे गणिताच्या एका शाखेतील त्रिकोणमिती चा एक भाग आहे.

आता, शिडीच्या साहाय्याने भिंतीना चुना लावणाऱ्या व्यक्तीच्या उदाहरणाकडे पहा ते मागील आकृतीत दाखविले आहे. खालील संदर्भाचे निरिक्षण करु या.

आपण शिडीच्या खालच्या भागास A वरच्या भागास C ने दर्शवु आणि भिंतीची उंची व शिडीची पाया यास जोडणारा बिंदु B ने दर्शवु. म्हणुन ΔABC हा काटकोन त्रिकोण आहे व B हा काटकोन आहे. शिडी आणि पायामधील कोन θ आहे.

1. जर व्यक्तीला भिंतीच्या वरच्या भागाला चुना लावायचा असल्यास
   - शिडीने जमीनीशी केलेल्या कोनात कोणता बदल घडुन येतो ?
   - AB मधील अंतरात कोणता बदल घडुन येतो ?



2. जर व्यक्तीला भिंतीच्या खालच्या भागास चुना लावायचा असेल तर
   - शिडीने जमीनीशी केलेल्या कोनात काय बदल घडुन येतो ?
   - AB मधील अंतरात कोणता बदल घडुन येतो ?

वरील उदाहरणावरुन आपल्या निदर्शनास येते की, जेव्हा त्या व्यक्तीला भिंतीच्या वरच्या किंवा खालच्या भागाला चुना लावायचा असतो तेव्हा तो शिडीचे स्थान बदलतो. म्हणुन θ वाढल्यास उंची सुध्दा वाढते आणि पाया कमी होतो. परंतु जेव्हा θ कमी होते, तेव्हा उंची सुध्दा कमी होते आणि पाया वाढतो. तुम्ही या विधानाशी सहमत आहत का ?

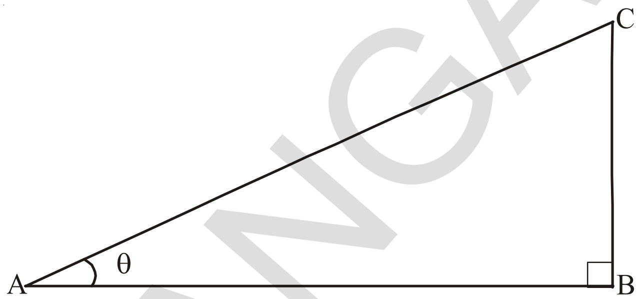
येथे तयार झालेल्या ABC त्रिकोणातील सर्व बाजु आणि कोनांना साधारण नाव दिले आहे. आता त्रिकोणातील बाजुंना, बाजुवर आधारीत कोनाच्या त्रिकेाणामितीय गुणोत्तरावरुन पुन्हा नावे देऊ या.

11.1.1 काटकोन त्रिकोणातील बाजुंना नाव देणे Naming The Sides in a Right Triangle

आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे काटकेान त्रिकोण ABC घ्या.

त्रिकोण ABC मध्ये $\angle CAB$ म्हणजे A हा लघुकोन आहे. कारण AC ही सर्वात मोठी बाजु असल्यासमुळे त्या बाजुला कर्ण म्हणतात.

येथे A कोना वरुन BC बाजुच्या स्थानाचे निरिक्षण करा. ती A कोनाच्या विरुध्द आहे. म्हणुन त्या बाजुला **A** ची विरुध्द बाजु म्हणतात. आणि उरलेली बाजु AB ला कोन **A** ची लगतची बाजु म्हणतात.



AC = कर्ण

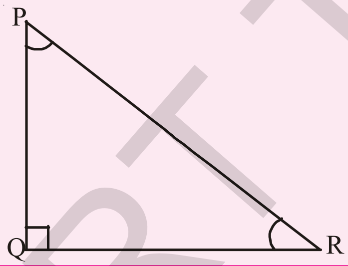
BC = कोन A ची विरुध्द बाजु

AB = कोन A ची लगतची बाजु

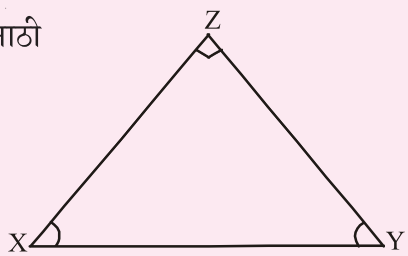
हे करा

खाली दिलेल्या त्रिकोणातील कोनांच्या आधारावरुन कर्ण, विरुध्द बाजु आणि लगतची बाजु ओळखा

1. कोन R साठी



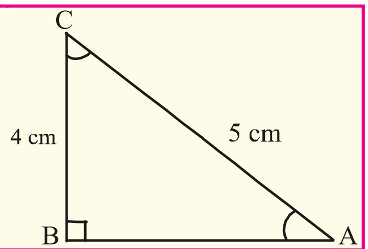
2. (i) कोन X साठी
   (ii) कोन Y साठी



प्रयत्न करा

खाली दिलेल्या त्रिकोणातील कोनावरुन कर्णाची लांबी विरुध्द बाजुची लांबी आणि लगतची बाजुची लांबी लिहा.

1. कोन C साठी
2. कोन A साठी

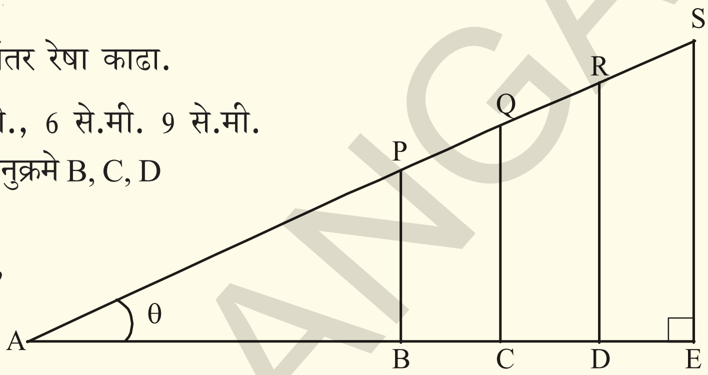


तुम्हाला काय दिसुन येते? कोन A ची विरुध्द बाजु आणि कोन C च्या लगतच्या बाजुमध्ये काही संबंध आहे का? अशारितीने एका दोरीच्या साहाय्याने तुम्ही एक खांब उभा केल्यास त्या दोरीची लांबी आणि खांबाच्या लांबीत काही संबंध आहे का? येथे आपण बाजु आणि कोनांमधील संबंध समजुन घेण्यासाठी त्रिकोणमितीय गुणोत्तराचा अभ्यास करु.

11.2 त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे (Trigonometric Ratios)

धड्याच्या सुरुवातीला आपल्या दैनंदिन जिवनाशी संबंधीत असलेले उदाहरण पाहिलेत. त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे आणि त्यांची व्याख्या कशी केली आहे. त्या बद्दल माहिती घेऊ या.

कृती



1. एका कागदावर क्षितीज समांतर रेषा काढा.
2. आरंभबिंदु A पासुन 3 से.मी., 6 से.मी. 9 से.मी. आणि 12 से.मी. अंतरावर अनुक्रमे B, C, D आणि E बिंदुची खुण करा.
3. 4 से.मी.8 से.मी., 12 से.मी., 16 से.मी.लांबीचे अनुक्रमे B, C, D आणि E बिदुवरुन BP, CQ, DR आणि ES लंब काढा.
4. AP, PQ, QR आणि RS जोडा
5. AP, AQ, AR आणि AS ची लांबी काढा.

त्रिकोण	त्रिकोणाची नावे	कर्णाची लांबी	विरुध्द बाजुची लांबी	लगतच्या बाजुची लांबी	$\frac{\text{विरुध्द बाजु}}{\text{कर्ण}}$	$\frac{\text{लगतच्या बाजु}}{\text{कर्ण}}$
ΔABP						
ΔACQ						
ΔADR						
ΔAES						

नंतर $\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ आणि $\frac{ES}{AS}$ ची गुणोत्तरे काढा.

तुम्हाला $\frac{4}{5}$ या सारखे गुणोत्तर येते का?

अशारीतीने $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ आणि $\frac{AE}{AS}$ ची गुणोत्तरे काढा? तुम्हाला काय आढळुन येते?

11.2.1 त्रिकोणमितीय गुणोत्तराची व्याख्या करणे.(DEFINING TRIGONOMETERIC RATIOS)

वरील कृतीत काटकोन त्रिकोण ABP, ACQ, ADR आणि AES मध्ये $\angle A$ हा सामाईक आहे $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ आणि $\angle E$ हे काटकोन आहेत आणि $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ आणि $\angle S$ सुध्दा समान आहेत. म्हणुन ABP, ACQ, ADR आणि AES हे समरुप त्रिकोण आहेत. जेव्हा आपण काटकोन त्रिकोणातील कोनाची विरुध्द बाजुचे आणि कर्णाच्या गुणोत्तराचे आणि दुसऱ्या त्रिकोणाच्या समरुप बाजुंच्या गुणोत्तराचे निरिक्षण केले असता वरील सर्व ABP, ACQ, ADR आणिAES काटकोन त्रिकोणात एक स्थिर संख्या आढळुन येते. $\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ आणि $\frac{ES}{AS}$ च्या गुणोत्तराला **"sine A"** किंवा **"sin A"** हे नाव दिले जाते. जर कोन A ची किंमत "x" असेल तर त्यास "$\sin x$" म्हणतात.

अशा प्रकारे आपण निश्कर्ष काढु शकतो की, सर्व समरुप काटकोन त्रिकोणात कोनाची विरुध्द बाजु आणि कर्णाची लांबी यांचे गुणोत्तर ही एक स्थिरसंख्या आहे. या गुणोत्तरास त्या कोनाचे "sine" म्हणतात.

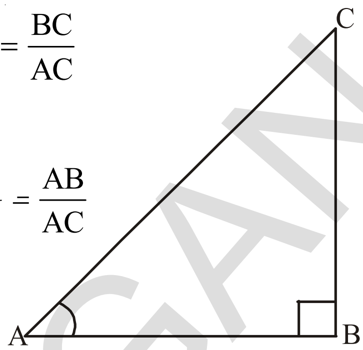
अशारितीने $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ आणि $\frac{AE}{AS}$ च्या गुणोत्तराचे निरिक्षण केल्यास ती स्थिरांक आहे असे आढळुन येते. ही ABP, ACQ, ADR आणि AES काटकोन त्रिकोणातील A कोनाच्या लगतच्या बाजुचे आणि कर्णाची गुणोत्तरे आहेत. म्हणुन $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ आणि $\frac{AE}{AS}$ च्या गुणोत्तरांना **"cosine A"** किंवा **"cos A"**जर कोन A ची किंमत "x" असेल तर त्या गुणोत्तराला "$\cos x$" म्हणतात.

म्हणुन आपण निश्कर्ष काढु शकतो की, कोनाची लगतच्या बाजु आणि कर्णाच्या लांबीचे गुणोत्तर एका स्थिरांक आहे. या गुणोत्तरांना त्या केानाचे "cosine" म्हणतात.

अशारीतीने कोनाची विरुध्द बाजु आणि लगतच्या बाजुचे गुणोत्तर एक स्थिरांक आहे. आणि त्यास "tangent" म्हणतात.

काटकोन त्रिकोणातील गुणोत्तराची व्याख्या करु या.(LET'S DEFINE RATIOS IN A RIGHT ANGLE TRIANGLE)

B येथे काटकोन असलेला काटकोन त्रिकोण ABC खालील आकृतीत दाखविलेला आहे. काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये कोन A च्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तराची व्याख्या खालील प्रमाणे केली आहे.

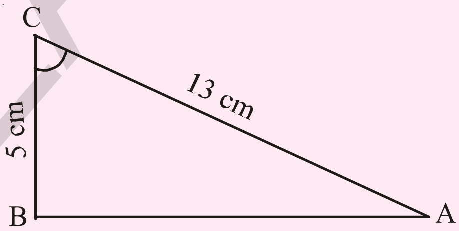


$\angle$Aचे sine = sinA = $\dfrac{\text{A कोनाच्या विरुध्द बाजुची लांबी}}{\text{कर्णाची लांबी}} = \dfrac{BC}{AC}$

$\angle$A चे cosine= cos A = $\dfrac{\text{A कोनाच्या लगतच्या बाजुची लांबी}}{\text{कर्णाची लांबी}} = \dfrac{AB}{AC}$

$\angle$Aचे tangent = tan A = $\dfrac{\text{A कोनाच्या विरुध्द बाजुची लांबी}}{\text{A कोनाच्या लगतच्या बाजुची लांबी}} = \dfrac{BC}{AB}$

हे करा



1. बाजुच्या काटकोन त्रिकोणाचे (i) sin C (ii) cos C आणि (iii) tan C काढा.
2. त्रिकोण XYZ मध्ये $\angle$Y हा काटकोन आहे., XZ = 17 मी.आणि YZ = 15 से.मी. तर (i) sin X (ii) cos Z (iii) tan X काढा.
3. त्रिकोण PQR मध्ये कोन Q हा काटकोन आहे. $\angle$P ची किंमत x आहे, PQ = 7 से.मी.आणि QR = 24 से.मी. आहे तर sin x आणि cos x काढा.

प्रयत्न करा

त्रिकोण ABC मध्ये C काटकोन आहे. BC + CA = 23 से.मी. आणि BC – CA = 7से.मी. आहेत तर sin A आणि tan B काढा.

विचार करा आणि चर्चा करा.

तुमच्या मित्रासोबत खालील चर्चा करा.

(i) xच्या कोणत्याही किंमतीसाठी sin $x = \dfrac{4}{3}$ अस्तित्वात आहे काय?

(ii) sin A आणि cos A ची किंमत नेहमी 1 पेक्षा लहान असते का?

(iii) tan A हा tan आणि A चा गुणाकार आहे.

त्रिकोणमिती मध्ये अजुन तीन गुणोत्तराची व्याख्या केलेली आहे. जे वरील तीन गुणोत्तराचे गुणाकार व्यस्त आहेत.

"sine A"चा गुणाकार व्यस्त "cosecant A"यास "cosec A"असे लिहितात.

म्हणजे cosec $A = \dfrac{1}{\sin A}$

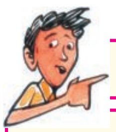
अशा रितीने "cos A" चा गुणाकार व्यस्त secant A" (यास असे "sec A") आणि "tan A" चा गुणाकाराचा व्यस्त "cotangent A (यास cot A असे लिहितात.)

म्हणजेच sec $A = \dfrac{1}{\cos A}$ आणि cot $A = \dfrac{1}{\tan A}$

बाजुवरुन 'cosec' ची व्याख्या कशी कराल?

जर $\sin A = \dfrac{\text{A कोनाची विरुध्द बाजु}}{\text{कर्ण}}$

तर cosec $A = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{A कोनाची विरुध्द बाजु}}$



प्रयत्न करा

sec A आणि cot A ला काटकोन त्रिकोणाच्या बाजुच्या गुणोत्तराच्या रुपात दर्शवा?

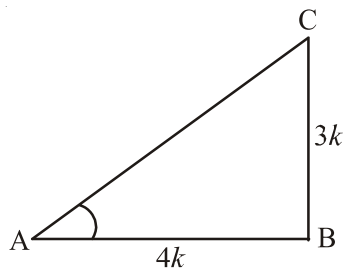
विचार करा आणि चर्चा करा.

- $\dfrac{\sin A}{\cos A}$ बरोबर tan A होते का?
- $\dfrac{\cos A}{\sin A}$ हे cot A च्या बरोबर आहे का?

चला,काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-1. जर $\tan A = \dfrac{3}{4}$ तर A कोनाची इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे माहित करा.

सोडवणुक : $\tan A = \dfrac{3}{4}$



म्हणुन $\tan A = \dfrac{\text{विरुध्द बाजु}}{\text{लगतच्या बाजु}} = \dfrac{3}{4}$

म्हणुन विरुध्द बाजु: लगतच्या बाजु $= 3:4$

कोन A ची विरुध्द बाजु= $BC = 3k$

लगतच्या बाजु $= AB = 4k$ (k ही कोणतीही धन संख्या आहे.)

आता, त्रिकोण ABC मध्ये (पा.गो.प्रमेयानुसार)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= (3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2$$
$$AC = \sqrt{25k^2}$$
$$= 5k = \text{कर्ण}$$

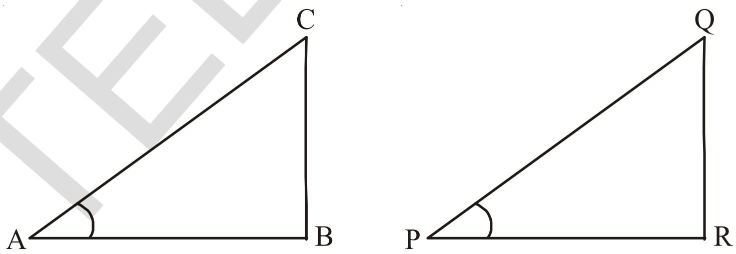
अशारितीने आपण इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे लिहु शकतो.

$$\sin A = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5} \quad \text{आणि} \quad \cos A = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

आणि $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}$, $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}$, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{3}$.

उदाहरण-2. $\angle A$ आणि $\angle P$ असे लघुकोन आहे की, $\sin A = \sin P$ तर सिध्द करा $\angle A = \angle P$

सोडवणुक : $\sin A = \sin P$ दिलेले आहे.



$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

आणि $\sin P = \frac{QR}{PQ}$

तर $\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ}$

म्हणुन $\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ} = k$ .... (1)

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$$\frac{AB}{PR} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{\sqrt{PQ^2 - QR^2}} = \frac{\sqrt{AC^2 - k^2AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - k^2PQ^2}} = \frac{\sqrt{AC^2\cancel{(1-k^2)}}}{\sqrt{PQ^2\cancel{(1-k^2)}}} = \frac{AC}{PQ} \quad \text{(1))वरुन)}$$

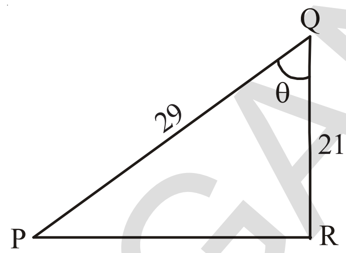
म्हणुन, $\frac{AC}{PQ} = \frac{AB}{PR} = \frac{BC}{QR}$ तर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

म्हणुन, $\angle A = \angle P$

उदाहरण-3. समजा त्रिकोण PQR हा काटकोन त्रिकोण आहे, R हा काटकोन आहे. यात $PQ = 29$ एकक $QR = 21$ एकक आणि $\angle PQR = \theta$ तर

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ and (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ च्या किंमती काढा.

सोडवणुक: त्रिकोण PQR मध्ये



$$PR = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{400} = 20 \text{ एकक}$$

$$\sin\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{20}{29}$$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{21}{29}$$

आता (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{441+400}{841} = 1$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 - \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{-41}{841}$

अभ्यास - 11.1

1. ABC काटकोन त्रिकोणात AB, BC आणि CA ची लांबी अनुक्रमे 8 से.मी. 15 से.मी. आणि 17 से.मी. आहे तर sin A, cos A आणि tan A काढा ?

2. काटकोन त्रिकोण PQR च्या बाजु PQ = 7 से.मी., QR = 25 से.मी.आणि $\angle Q = 90^o$ आहेत. तर tan P – tan R काढा.

3. ABC काटकोन त्रिकोणात B हा काटकोन आहे, यात $a = 24$ एकक, $b = 25$ एकक आणि $\angle BAC = \theta$ तर $\cos\theta$ आणि $\tan\theta$ काढा ?

4. जर $\cos A = \frac{12}{13}$ तर sin A आणि tan A काढा.($A < 90^0$)

5. जर $3\tan A = 4$ तर sin A आणि cos A काढा.

6. जर $\angle A$ आणि $\angle X$ हे असे लघुकोन आहे की, $\cos A = \cos X$ तर $\angle A = \angle X$ दर्शवा.

7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ दिले असता तर (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ च्या किंमती काढा.

8. ABC काटकोन त्रिकोणात B हा काटकोन आहे जर $\tan A = \sqrt{3}$ तर खालील किंमती काढा.

   (i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$ (ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

11.3 काही विशिष्ट कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे

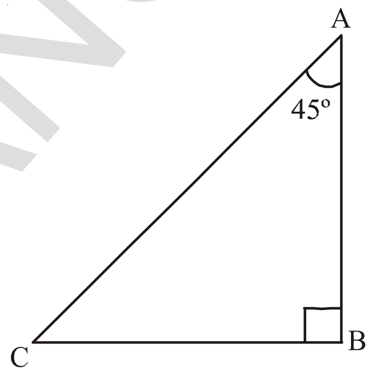
30^o, 60^o आणि 90^o कोनाचे माप असलेले समद्विभुज काटकोन त्रिकोण आणि काटकोन त्रिकोणा बद्दल आपणास माहिती आहे.

$\sin 30^o$ किंवा $\tan 60^o$ किंवा $\cos 45^o$ इ. किंमती या त्रिकोणावरुन काढता येते का?

$\sin 0^o$ किंवा $\cos 0^o$ च्या किंमती असतात का?

11.3.1 45^o कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे (Trigonometric Ratios of 45°)

ABC समद्विभुज काटकोन त्रिकोणात B हा काटकोन आहे.



$\angle A = \angle C = 45^o$ (का?) आणि $BC = AB$ (का?)

समजा $BC = AB = a$ गृहीत धरु.

तर $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (पा.गो.प्रमेयानुसार)

$= a^2 + a^2 = 2a^2$,

म्हणुन $AC = a\sqrt{2}$

त्रिकोणमितीय गुणोत्तराच्या व्याख्येवरुन

$$\sin 45^o = \frac{45^0 \text{ कोनाच्या विरुध्द बाजुंची लांबी}}{\text{कर्णाची लांबी}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

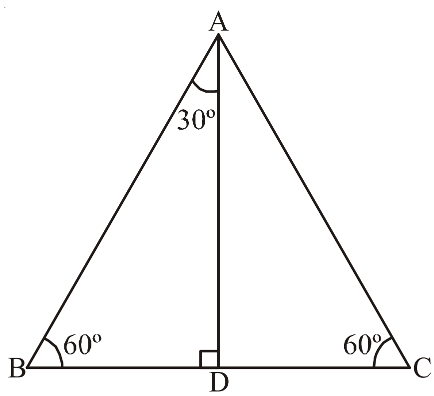
$$\cos 45^o = \frac{45^0 \text{ कोनाच्या लगतच्या बाजुंची लांबी}}{\text{कर्णाची लांबी}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{45^0 \text{ कोनाच्या विरुध्द बाजुंची लांबी}}{45^0 \text{ कोनाच्या लगतच्या बाजुंची लांबी}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$

अशाप्रकारे $\sec 45^o$ आणि $\cot 45^o$ च्या किंमती काढु शकतो.

11.3.2 30^0आणि60^0मापाच्या कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे:

आता आपण 30^0 आणि 60^0 कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे माहित करु. यासाठी एक समभुज त्रिकोण घेऊ. या समभुज त्रिकेाणात एक लंब काढला असता तो त्या त्रिकोणाला30^0, 600 आणि 90^0 कोनाची मापे असलेल्या दोन समान काटकोन त्रिकोणात विभागतो.



एक समभुज त्रिकोण ABC घ्या. त्याचा प्रत्येक कोन60^o असतो. म्हणुन $\angle A = \angle B = \angle C = 60^o$ आणि बाजु $AB = BC = CA = 2a$ एकक गृहीत धरा.

A शिरोंबिंदु वरुन BC बाजुवर आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे AD लंब काढा.

AD लंब हा A कोनाचा कोन दुभाजक आहे,आणिABC समभुज त्रिकोणात तो BC बाजुला समद्विभागतो .

म्हणुन $\angle BAD = \angle CAD = 30^o$.

D बिंदु BC बाजुला दोन समान भागात विभागतो.

$BD = \frac{1}{2}BC = \frac{2a}{2} = a$ एकक

वरील दिलेल्या प्रमाणे काटकोन त्रिकोण ABD घ्या.

$AB = 2a$ आणि $BD = a$

तर $AD^2 = AB^2 - BD^2$ (पा.गो.प्रमेयानुसार)

$= (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$.

म्हणुन $AD = a\sqrt{3}$

त्रिकोणमितीय गुणोत्तराच्या व्याख्येवरुन

$$\sin 60^o = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

म्हणुन, अशारितीने $\tan 60^o = \sqrt{3}$ (कसे ?)

वरील प्रमाणे तुम्ही $\operatorname{cosec} 60^o$ $\sec 60^o$ $\cot 60^o$ च्या किंमती गुणोत्तरावरुन काढु शकता,

हे करा

$\operatorname{cosec} 60^o$, $\sec 60^o$ आणि $\cot 60^o$ ची किंमत काढा.

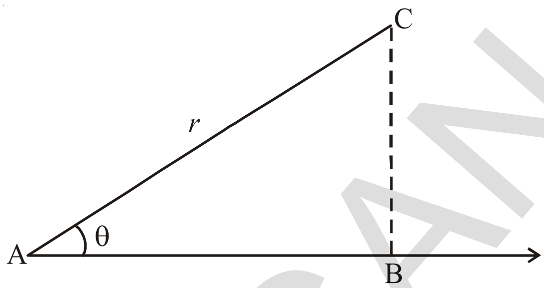
प्रयत्न करा

$\sin 30^o$, $\cos 30^o$, $\tan 30^o$, $\operatorname{cosec} 30^o$, $\sec 30^o$ आणि $\cot 30^o$ च्या किंमती काढा.

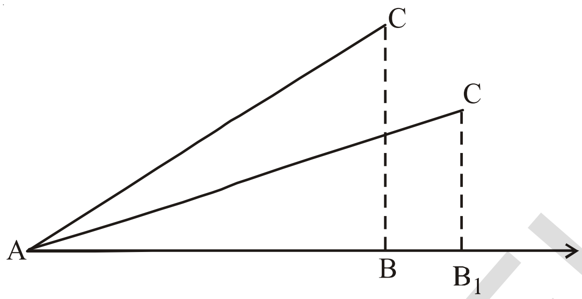
11.3.3 0^o आणि 90^o मापांच्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे

आतापर्यंत आपण 30^o, 45^o आणि 60^o मापांच्या कोनाच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरा बद्दल चर्चा केली. आता 0^o आणि 90^o मापांच्या कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तराची किंमत पाहु या.

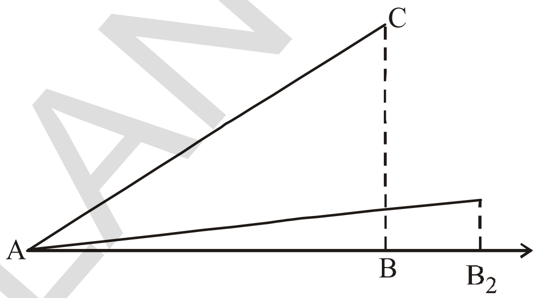
r लांबी असलेला AC रेषाखंड हा AB किरणावर लघुकोन करतो. B बिंदुपासुन C बिंदुची उंची BC आहे. AB वर AC व्दारा केलेला कोन थोडा कमी होईल तेव्हा BC आणि AB च्या अंतरात काय बदल होतो?



कोन A कमी झाल्यामुळे AB किरणावरील C ची उंची कमी होते. बिंदु B पासुन B ला B_1 नंतर B_2 होतो. जेव्हा हा कोन शुन्य होईल तेव्हा उंची (कोनाची विरुध्द बाजु) शुन्य होते. आणि लगतची बाजु AC च्या समान होते. म्हणजे लांबी r ला समान होते.



पायरी (i)



पायरी (ii)

त्रिकोणमितीय गुणोत्तराकडे पाहु या.

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \text{ आणि } \cos A = \frac{AB}{AC}$$

जर $A = 0^o$ तर $BC = 0$ आणि $AC = AB = r$

तर $\sin 0^o = \frac{0}{r} = 0$ आणि $\cos 0^o = \frac{r}{r} = 1$

आपणास माहित आहे. $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

म्हणुन, $\tan 0^o = \dfrac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \dfrac{0}{1} = 0$

प्रयत्न करा

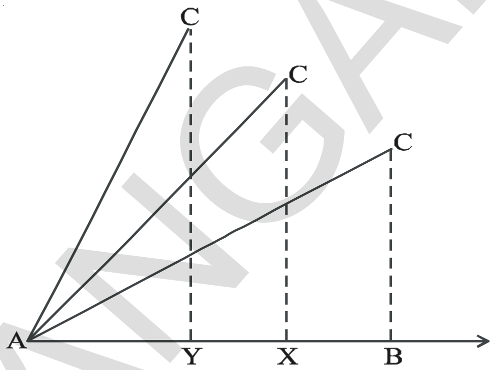
खालील संदर्भाची तुमच्या मित्रासोबत चर्चा करा.

1. $\operatorname{cosec} 0^o = \dfrac{1}{\sin 0^o}$ या बद्दल तुम्ही काय म्हणता. याची व्याख्या करता येते का? कारण?

2. $\cot 0^o = \frac{1}{\tan 0^o}$ याची व्याख्या करता येते का? कारण?

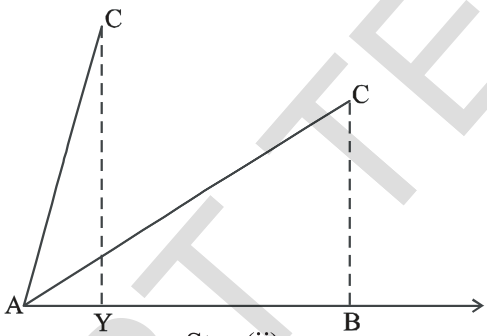
3. $\sec 0^o = 1$ का?

आता आपणास AB किरणावर AC ने केलेला कोन A ला वाढवित गेल्यास AB वरील C उंची वाढत जाऊन B बिंदुपासुन X नंतर Y ला बदलते. दुसऱ्या शब्दात सांगायचे म्हणजे कोन A हा वाढत गेल्यास विरुध्द बाजु वाढते. लगतच्या बाजु कमी होते. एके ठिकाणी कोनाची किंमत 90^0 पर्यंत पोहचते तेव्हा B बिंदु A जवळ पोहचतो आणि AC ही BC ला समान होते.

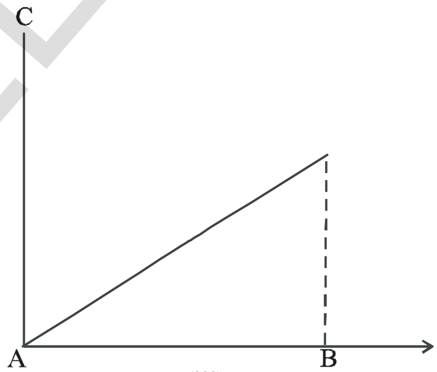


Step (i)

म्हणुन, जेव्हा कोन 90^oहोतो. तेव्हा पाया (म्हणजे कोनाची लगतच्या बाजु) शुन्य होते,ABपासुन C ची उंची वाढत जाते आणि ती AC ला समान म्हणजे r होते.



Step (ii)



Step (iii)

आता आपण त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे पाहु

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \text{ आणि } \cos A = \frac{AB}{AC}$$

जर $A = 90^o$ तर $AB = 0$ आणि $AC = BC = r$

तर $\sin 90^o = \frac{r}{r} = 1$ आणि $\cos 90^o = \frac{0}{r} = 0$

प्रयत्न करा

$\tan 90^o$, $\text{cosec } 90^o$, $\sec 90^o$ आणि $\cot 90^o$ ची गुणोत्तरे माहित करा?

आता खालील तक्त्यात वरील चर्चेतील सर्व त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे पाहु या.

Table 11.1

$\angle A$	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	व्याख्या करता येत नाही
cot A	व्याख्या करता येत नाही	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	व्याख्या करता येत नाही
cosec A	व्याख्या करता येत नाही	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

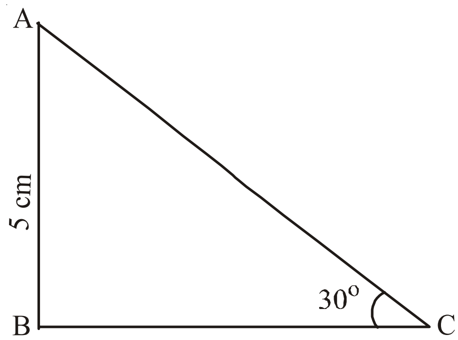
विचार करा-चर्चा करा

A कोनाची किंमत 0^o ते 90^o वाढली असता sin A आणि cos A च्या किंमती बद्दल तुम्ही काय म्हणु शकता? (वरील तक्ता पाहा)

जर $A \geq B$, तर $\sin A \geq \sin B$ हे सत्य आहे का?

जर $A \geq B$, तर $\cos A \geq \cos B$. हे सत्य आहे का? चर्चा करा?

उदाहरण-4. ΔABC मध्ये कोन B हा काटकोन आहे. $AB = 5$ से.मी. आणि $\angle ACB = 30^o$. तर BC आणि AC बाजुंची लांबी काढा.



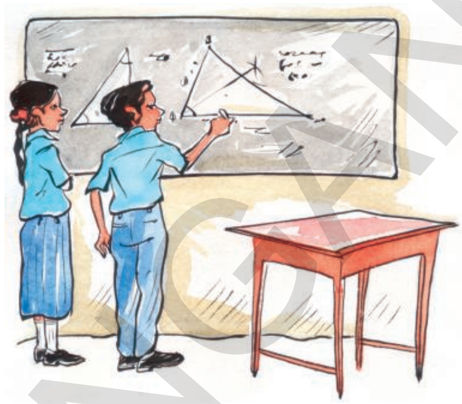
सोडवणुक : AB=5 से.मी आणि $\angle ACB=30^o$ आणि BC बाजुची लांबी माहित करण्यासाठी BC आणि AB बाजुच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तराची निवड करावी लागेल. कारण BC ही C कोनाची संलग्न बाजु आणि AB बाजु C कोनाची विरुध्द बाजु आहे.

म्हणुन,

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

म्हणजे $\frac{5}{BC} = \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$BC = 5\sqrt{3}$ से.मी.



आता, त्रिकोणामितीच्या गुणोत्तरा नुसार

ΔABC

$\sin 30^\circ = \frac{5}{AC}$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

$AC = 10$ cm

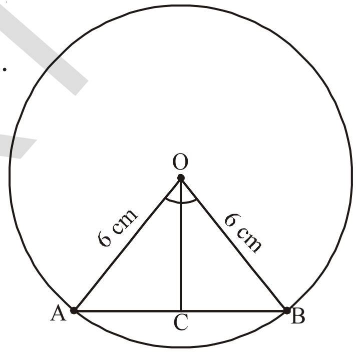
उदाहरण-5. 6 से.मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाची जिवा केंद्रबिंदुशी 60^o चा कोन करते. तर त्या जिवाची लांबी काढा?

सोडवणुक : वर्तुळाची त्रिज्या OA $= OB = 6$ से.मी.

$\angle AOB = 60^o$

OC ही 'O' पासुन AB वरील उंची आहे आणि तो कान दुभाजक आहे.

तर $\angle COB = 30^o$.



समजा ΔCOB

$\sin 30^o = \frac{BC}{OB}$

$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6}$

$BC = \frac{6}{2} = 3$.

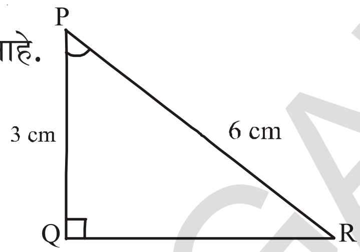
परंतु AB जिवाची लांबी $= 2BC$

$= 2 \times 3 = 6$ से.मी.

$\therefore$ म्हणुन जिवाची लांबी= 6 से.मी.

या दिवसात आपण वापरत असलेली **'sine'** ची कल्पना इ.स.500 वर्षापुर्वी आर्यभट्टाने लिहिलेल्या ***ardha-jya*** यात दिसुन येते. त्यात याला अर्ध ज्या या शब्दाचा वापर अर्धीजिवा यासाठी केला आहे. नंतर तो लहान होऊन ज्या किंवा जिवा झाला. जेव्हा आर्यभट्टायामचा आरेबिंदु भाषेत भाषांतर झाले. त्यास जिवा या शब्दाला तेसच ठेवले. जिवांचा शब्दाला सायनस यात भाषांतर केले. याचा अर्थ वक्र असा होतो. जेव्हा आरेबिक भाषेतुन लॅटीन भाषांतर केले तेव्हा सायनस या शब्दाला***sinus*** या शब्दाचा ***sine*** म्हणुन उपयोगात आणले. हा युरोप मध्ये गणितात सामान्य ठरला इंग्रजी खगोल शास्त्रज्ञ एड्मंड गुंटर Edmund Gunter (1581–1626) यांनी पहिल्यांदा ***'sin'*** चा वापर केला.

उदाहरण-6. ΔPQR मध्ये Q हा काटकोन आहे. $PQ = 3$ से.मी. आणि $PR = 6$ से.मी. तर $\angle QPR$ तर $\angle PRQ$ काढा.



सोडवणुक : PQ = 3 से.मी.आणि PR = 6 से.मी.दिले आहे.

म्हणुन $\frac{PQ}{PR} = \sin R$

किंवा $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

म्हणुन $\angle PRQ = 30^\circ$

आणि म्हणुन $\angle QPR = 60^\circ$ (कसे ?)

विचार करा आणि चर्चा करा : जर काटकोन त्रिकोणाची एक बाजु आणि इतर भाग (लघुकोन किंवा कोणतीही बाजु) माहित असेल तर त्रिकोणाच्या इतर बाजु आणि कोन माहित करता येते. तुम्ही याशी सहमत आहात का? उदाहरणात देऊन स्पष्ट करा.

उदाहरण-7. जर $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A+B \le 90^\circ, A > B$, तर A आणि B काढा.

सोडवणुक : Since $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$ म्हणुन $A - B = 30^\circ$ (का?)

पण since $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$ म्हणुन $A + B = 60^\circ$ (का?)

वरील समीकरण सोडविल्यास: $A = 45^\circ$ आणि $B = 15^\circ$ येते. (कसे?)

अभ्यास - 11.2

1. खालील किंमती माहित करा.

(i) $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$

(ii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 60^\circ}$

(iii) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\cot 45^\circ + \cos 60^\circ - \sec 30^\circ}$

(iv) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(v) $\frac{\sec^2 60^\circ - \tan^2 60^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. योग्य उत्तराची निवड करा आणि तुमची निवडीचे समर्थन करा.

(i) $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

(a) $\sin 60^\circ$ (b) $\cos 60^\circ$ (c) $\tan 30^\circ$ (d) $\sin 30^\circ$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

(a) $\tan 90^\circ$ (b) 1 (c) $\sin 45^\circ$ (d) 0

(iii) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$

(a) $\cos 60^\circ$ (b) $\sin 60^\circ$ (c) $\tan 60^\circ$ (d) $\sin 30^\circ$

3. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$. ची किंमत काढा. $\sin(60^\circ + 30^\circ)$ ची किंमत किती येते? तुम्ही काय निश्कर्ष काढता?

4. $\cos(60^\circ + 30^\circ) = \cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$ म्हणने योग्य आहे काय?

5. काटकोन त्रिकोण ΔPQR मध्येQ हा काटकोन आहे, आणि $PQ = 6$ से.मी. आहे. तर $\angle RPQ = 60^\circ$. QR आणि PR ची लांबी माहित करा.

6. काटकोन त्रिकोण ΔXYZ मध्ये Y हा काटकोन आहे. $YZ = x$, आणि $XZ = 2x$ तर $\angle YXZ$ आणि $\angle YZX$ काढा.

7. $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ म्हणजे योग्य आहे का? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा?

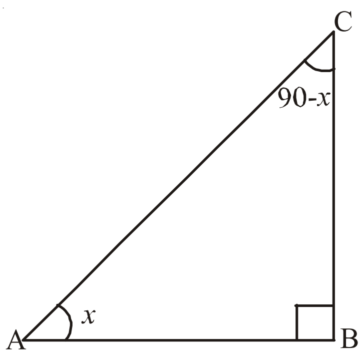
विचार करा-चर्चा करा

कोणत्या लघुकोनाच्या किंमतीसाठी (i) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$ हे सत्य आहे?

$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ च्या कोणत्या किंमतीसाठी वरील समीकरणाची व्याख्या करता येत नाही?

11.4 पुरक कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे

आपणास माहित आहे की, दोन कोनांची बेरीज 90° असल्यास त्या कोनांना पुरक कोन म्हणतात. गृहीत धरा की, ABC काटकोन त्रिकोणात कोन B हा काटकोन आहे. या त्रिकोणातील पुरक कोन आहे का?



कोन B हा 90° आहे. इतर दोन कोनांची बेरीज नक्कीच 90° असायला पाहिजे. ($\because$ त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज 180°)

म्हणुन $\angle A + \angle C = 90^\circ$. म्हणुन $\angle A$ आणि $\angle C$ ला पुरक कोन म्हणतात.

समजा $\angle A = x$ गृहीत धरा. तर x कोनाची विरुध्द बाजु BC आणि लगतच्या बाजु AB आहे.

$\sin x = \dfrac{BC}{AC}$ $\cos x = \dfrac{AB}{AC}$ $\tan x = \dfrac{BC}{AB}$

$\text{cosec}\, x = \dfrac{AC}{BC}$ $\sec x = \dfrac{AC}{AB}$ $\cot x = \dfrac{AB}{BC}$

जर $\angle A + \angle C = 90^o$, तर $\angle C = 90^o - \angle A$

आणि $\angle A = x$, तर $\angle C = 90^o - x$

त्रिकोण ABC. मध्ये आणि $(90^o - x)$कोनांची **विरुध्द बाजु** आणि लगतची बाजु काय होते ते पाहा.

$\sin(90^o - x) = \dfrac{AB}{AC}$ $\cos(90^o - x) = \dfrac{BC}{AC}$ $\tan(90^o - x) = \dfrac{AB}{BC}$

$\text{Cosec}(90^o - x) = \dfrac{AC}{AB}$ $\sec(90^o - x) = \dfrac{AC}{BC}$ $\cot(90^o - x) = \dfrac{BC}{AB}$

आता, जर वरील भिन्न त्रिकोणमितीय गुणोत्तरा वरुन आपण कोन x आणि $(90^o - x)$ ची तुलना केल्यास.

वरील आकृतीवरुन तीन संभाव्य किंमती येतात.

$\sin(90^o - x) = \dfrac{AB}{AC} = \cos x$ आणि $\cos(90^o - x) = \dfrac{BC}{AC} = \sin x$

$\tan(90^o - x) = \dfrac{AB}{BC} = \cot x$ आणि $\cot(90^o - x) = \dfrac{BC}{AB} = \tan x$

$\text{cosec}(90^o - x) = \dfrac{AC}{AB} = \sec x$ आणि $\sec(90^o - x) = \dfrac{AC}{BC} = \text{cosec}\, x$

प्रयत्न करा

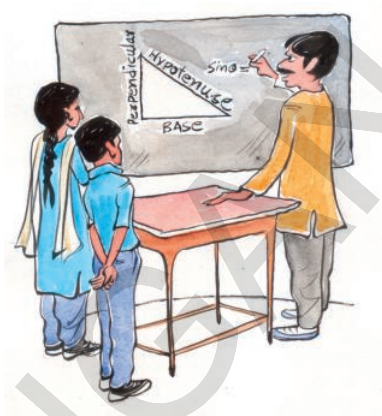
0^o आणि 90^o मापाच्या या संदर्भातील कोनांमधील वरील संबंधाची चर्चा करा आणि की ते या कोनासाठी लागु आहे किंवा नाही याचा पडताळा करा?

म्हणुन $\sin(90^o - A) = \cos A$ $\cos(90^o - A) = \sin A$

$\tan(90^o - A) = \cot A$ आणि $\cot(90^o - A) = \tan A$

$\sec(90^o - A) = \text{cosec}\, A$ $\text{cosec}(90^o - A) = \sec A$

आता, काही उदाहरणे पाहु या.



उदाहरण-8. $\dfrac{\sec 35^o}{\operatorname{cosec} 55^o}$ ची किंमत काढा.

सोडवणुक : $\operatorname{cosec} A = \sec(90^o - A)$

$\operatorname{cosec} 55^o = \sec(90^o - 35^o)$

$\operatorname{cosec} 55^o = \sec 35^o$

आता $\dfrac{\sec 35^o}{\operatorname{cosec} 55^o} = \dfrac{\sec 35^o}{\sec 35^o} = 1$

उदाहरण-9. जर $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$ यात 7A हा लघुकोन आहे. तर Aची किंमत काढा.

सोडवणुक: $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$ ...(1)

$\sin(90 - 7A) = \sin(A - 6^o)$

म्हणजे $(90 - 7A)$ & $(A - 6^o)$ हे दोन्ही लघुकोन आहेत.

म्हणुन

$90^o - 7A = A - 6^o$

$8A = 96^o$

आपणास $A = 12^o$.

उदाहरण-10. जर $\sin A = \cos B$, तर सिध्द करा $A + B = 90^o$.

सोडवणुक : $\sin A = \cos B$ ...(1)

आपणास माहित आहे की, $\cos B = \sin(90^o - B)$ आपण (1) ला असे लिहु शकतो.

$\sin A = \sin(90^o - B)$

जर A, B लघुकोन असेत तर $A = 90^o - B$

$\Rightarrow A + B = 90^o$.

उदाहरण-11. $\sin 81^o + \tan 81^o$ ला 0^o आणि 45^o मापाच्या कोनामधील त्रिकोणामितीय गुणोत्तराच्या रुपात लिहा.

सोडवणुक : असे लिहिता येते $\sin 81^o = \cos(90^o - 81^o) = \cos 9^o$

$\tan 81^o = \tan(90^o - 81^o) = \cot 9^o$

तर $\sin 81^o + \tan 81^o = \cos 9^o + \cot 9^o$

उदाहरण-12. जर A, B आणि C हे ABC त्रिकोणाचे आंतरीक कोन असल्यास $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$ दर्शवा.

सोडवणुक : A, B आणि C हे काटकोन त्रिकोण ABC चे आंतरीक कोन आहेत. तर

$A + B + C = 180^o$ वरील समीकरणाला दोन्ही बाजुस 2 ने भागल्यास आपणास

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^o \text{ येते.}$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^o - \frac{A}{2}$$

दोन्ही बाजुंचे sin गुणोत्तर घेऊन

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^o - \frac{A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2} \text{ ; सिध्द झाले.}$$

अभ्यास 11.3

1. किंमती काढा.

   (i) $\frac{\tan 36^o}{\cot 54^o}$ (ii) $\cos 12^o - \sin 78^o$ (iii) $\operatorname{cosec} 31^o - \sec 59^o$

   (iv) $\sin 15^o \sec 75^o$ (vi) $\tan 26^o \tan 64^o$

2. सिध्द करा.

   (i) $\tan 48^o \tan 16^o \tan 42^o \tan 74^o = 1$

   (ii) $\cos 36^o \cos 54^o - \sin 36^0 \sin 54^o = 0.$

3. जर $\tan 2A = \cot(A - 18^o)$ येथे 2A हा लघुकोन आहे. तर A ची किंमत काढा.

4. जर $\tan A = \cot B$ येथे A आणि B लघुकोन आहे. तर सिध्द करा, $A + B = 90^o$.

5. जर A, B आणि C हे त्रिकोण ABC चे आंतरिक कोन आहे. तर दाखवा की,

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$$

6. $\sin 75^o + \cos 65^o$ ला 0^o आणि 45^o कोनामधील त्रिकोणमितीय गुणोत्तरात व्यक्त करा.

11.5 त्रिकोणमितीय नित्य समानता (TRIGONOMETRIC IDENTITIES)

समीकरणातील चलाच्या सर्व किंमतीसाठी गणितीय समीकरण सत्य ठरते. यास नित्य समानता म्हणतात. हे आपल्याला माहित आहे.

उदाहणार्थ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ही नित्यसमानता आहे.

याच प्रमाणे नित्य समानता समीकरणात असलेल्या, कोनाच्या त्रिकोणामितीय गुणोत्तराला त्रिकोणमितीय नित्य समानता म्हणतात. ही नित्य समानता त्यातील कोनांच्या सर्व किंमतीसाठी सत्य ठरते

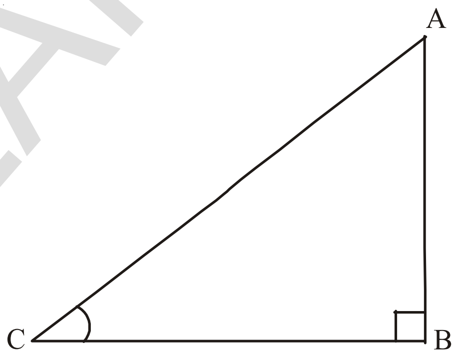
येथे आपण त्रिकोणमितीय गुणोत्तरास त्यावर आधारीत उरलेल्यांना साधनार आहोत.

गृहीत धरा की, ABC हा काटकोन त्रिकोण आहे आणि B काटकोन आहे.

पायथोगोसरच्या प्रमेयावरुन

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad ....(1)$$

प्रत्येक पदास AC^2 ने भागुन



$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$ येते.

म्हणजेच $\left[\frac{AB}{AC}\right]^2 + \left[\frac{BC}{AC}\right]^2 = \left[\frac{AC}{AC}\right]^2$

म्हणजे $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$

येथे साधारणता: $\cos^2 A$ च्या ऐवजी $(\cos A)^2$ असे लिहितात.

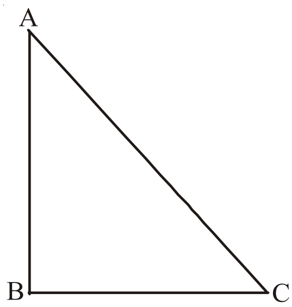
म्हणजे $(\cos A)^2 = \cos^2 A$ ($\cos A^2$ असे लिहु नये)

$\therefore$ वरील समीकरण $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ आहे.

आपणास दिलेल्या समीकरणात A चल (कोन) असुन वरील समीकरणात A च्या सर्व किंमतीसाठी सत्य ठरते.

म्हणुन वरील समीकरण हे त्रिकोणमितीय नित्य समानता आहे.

$$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$$



दुसऱ्या त्रिकोणमितीय नित्य समानता कडे पाहु.

समीकरण (1) वरुन

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$ (प्रत्येक पदास AB^2 ने भागल्यास)

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

म्हणजेच $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

अशारितीने(1)ला BC^2 ने भागल्यास $\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$ येते.

वरील नित्य समानतेचा वापर करुन प्रत्येक त्रिकोणमितीय गुणोत्तरास दुसऱ्या गुणोत्तरात व्यक्त करता येते. जर आपणास गुणोत्तराची किंमत माहित असल्यास या नित्य समानतेवरुन आपण इतर सर्व गुणोत्तरे माहित करता येते.

विचार करा - चर्चा करा

सर्व नित्य समानता $0^0 \leq A \leq 90^0$ साठी सत्य आहे का? जर नसेल तर ते A च्या कोणत्या किंमतीसाठी सत्य आहे?

- $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
- $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

हे करा

(i) जर $\sin C = \frac{15}{17}$, तर $\cos C$ काढा

(ii) जर $\tan x = \frac{5}{12}$, तर $\sec x$ काढा.

(iii) जर$\operatorname{cosec} \theta = \frac{25}{7}$ तर $\cot \theta$ काढा.

प्रयत्न करा

खालील किंमती माहित करा आणि तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

(i) $\dfrac{\sin^2 15^o + \sin^2 75^o}{\cos^2 36^o + \cos^2 54^o}$

(ii) $\sin 5^o \cos 85^o + \cos 5^o \sin 85^o$

(iii) $\sec 16^o \operatorname{cosec} 74^o - \cot 74^o \tan 16^o$.

उदाहरण-13. सिध्द करा की, $\cot \theta + \tan \theta = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$.

सोडवणुक : डावी बाजु $= \cot \theta + \tan \theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{(का ?)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta \cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta \; \cos\theta} \qquad \text{(का ?)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \; \frac{1}{\cos\theta} = \operatorname{cosec}\theta \; \sec\theta$$

उदाहरण-14. सिध्द करा की, $\tan^2\theta + \tan^4\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

सोडवणुक : डावी बाजु $= \tan^2\theta + \tan^4\theta$

$= \tan^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

$= \tan^2\theta \,.\, \sec^2\theta$ (का ?)

$= (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta$ (का ?)

$= \sec^4\theta - \sec^2\theta =$ उजवी बाजु

उदाहरण-15. सिध्द करा $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

सोडवणुक : डावी बाजु $= \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ ($\sqrt{(1+\cos\theta)}$ ने गुणुन आणि भागुन)

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad \text{(का ?)}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \text{उजवी बाजु}$$

अभ्यास 11.4

1. खालील किंमती माहित करा.

(i) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$

(ii) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

(iii) $(\sec^2\theta - 1)(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. सिध्द करा $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ दाखवा.

3. $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ दाखवा

4. $\dfrac{1-\tan^2 A}{\cot^2 A - 1} = \tan^2 A$ दाखवा

5. $\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta.\sin\theta$ दाखवा.

6. सरळ रुप द्या$\sec A\,(1-\sin A)\,(\sec A+\tan A)$

7. $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$ सिध्द करा

8. $(1-\cos\theta)\,(1+\cos\theta)\,(1+\cot^2\theta)$ सरळ रुप द्या.

9. जर $\sec\theta + \tan\theta = p$ तर $\sec\theta - \tan\theta$ ची किंमत किती ?

10. जर $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = k$ तर सिध्द करा $\cos\theta = \dfrac{k^2-1}{k^2+1}$

ऐच्छिक अभ्यास

[हा अभ्यास परिक्षेसाठी नाही]

1. $\dfrac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \dfrac{\operatorname{cosec}\theta - 1}{\operatorname{cosec}\theta + 1}$ सिध्द करा.

2. $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ नित्य समानतेचा $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$सिध्द करा.

3. $(\operatorname{cosec} A - \sin A)\,(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$सिध्द करा.

4. $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ सिध्द करा.

5. $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1+\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$ सिध्द करा.

6. $\dfrac{(\sec A - 1)}{(\sec A + 1)} = \dfrac{(1-\cos A)}{(1+\cos A)}$ सिध्द करा.

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

तयार करणे

- त्रिकोणामितीची गुणोत्तरे - मोजपट्टी आणि तक्ता तयार करणे विविध कोनासाठी त्रिकोणामितीच्या गुणोत्तराच्या वेगवेगळ्या किंमती दर्शविणे.इष्टीकाचीतीचे एकुण पृष्टफळ आणि घनफळ हे जास्तीत जास्त असेल.

आपण काय चर्चा केली.

1. ABC काटकोन त्रिकोणात कोन B हा काटकोन आहे.

   $\sin A \; \dfrac{\text{A कोनाची विरुध्द बाजु}}{\text{कर्ण}} \quad \cos A \; \dfrac{\text{A कोनाची लगतची बाजु}}{\text{कर्ण}}$

2. $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$

3. जर लघुकोनाचे एक त्रिकोणामितीय गुणोत्तर माहित असेल तर कोनाचे इतर त्रिकोणामितीय गुणोत्तरे माहित करु शकतो.

4. $0^o, 30^o, 45^o, 60^o$ आणि 90^o मापाच्या कोनाचे त्रिकेाणमितीय गुणोत्तराच्या किंमती

5. $\sin A$ किंवा $\cos A$ ची किंमत 1 पेक्षा मोठी नसते. $\sec A$ किंवा $\operatorname{cosec} A$ ची किंमत नेहमी 1 पेक्षा मोठी किंवा समान असते.

6. $\sin(90^o - A) = \cos A$, $\cos(90^o - A) = \sin A$

   $\tan(90^o - A) = \cot A$, $\cot(90^o - A) = \tan A$

   $\sec A (90^o - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90^o - A) = \sec A$

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ ते $0^o < A < 90^o$साठी

   $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ ते ($0^o < A < 90^o$साठी)

धडा

12 त्रिकोणामितीचे उपयोजन
(Applications of Trigonometry)

12.1 प्रस्तावना

जगातील सर्वात उंच पर्वत माऊंट एव्हरेस्ट आहे. त्याची उंची 8848 मीटर आहे. हे आपण इतिहासात शिकलो.

आदिलाबाद जिल्ह्यातील कुंटाला पाण्याचा धबधबा आंध्रप्रदेशातील सर्वात उंच नैसर्गिक पाण्याचा धबधबा आहे. त्याची उंची 147 फिट आहे.

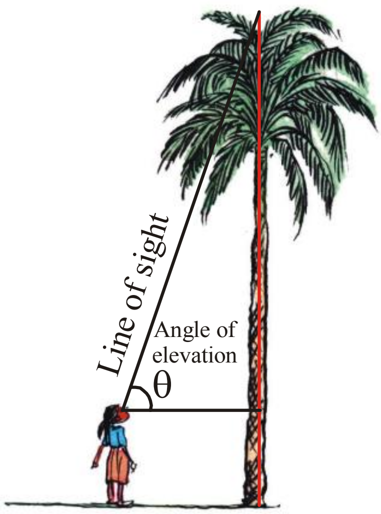
या उंचीना कसे मोजतात? तुम्ही तुमच्या शाळेच्या इमारतीची उंची किंवा तुमच्या शाळेतील सर्वात उंच झाडाची उंची मोजु शकता का?

काही उदाहरणाव्दारे समजुन घेऊ या. विजयाला ताडाच्या झाडाची उंची काढायची आहे. तिने झाडाचे सर्वात उंच बिंदुचे स्थान निश्चित केले. तिने झाडाचा सर्वात वरचा बिंदु आणि डोळ्यांना जोडणाऱ्या रेषेची कल्पना केली.

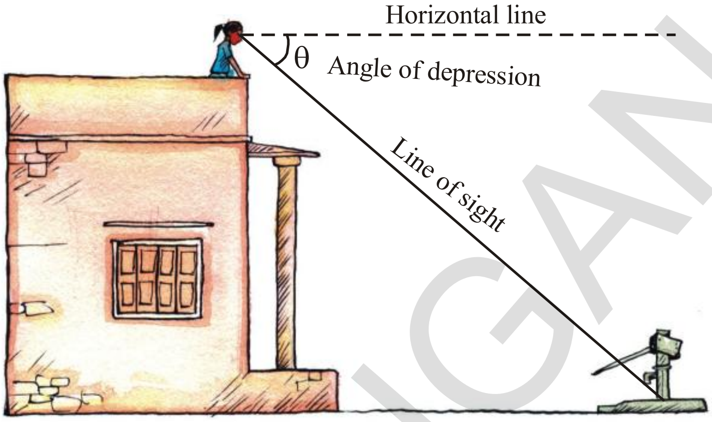
या रेषेला दृष्टीरेषा म्हणतात. तीने तिचे डोळे आणि झाडापासुन क्षीतीज समांतर रेषेची कल्पना केली.

येथे दृष्टीरेषा, क्षीतीज समांतर रेषा आणि झाडापासुन एक काटकोन त्रिकोण तयार झाला. झाडाची उंची माहित करण्यासाठी तिला या त्रिकोणाची बाजु आणि कोन माहित करण्याची गरज आहे.

दृष्टीरेषा ही क्षीतीज समांतर रेषेच्या वर आहे. दृष्टीरेषा आणि क्षीतीज समांतर रेषेमधील कोनास उन्नत कोन म्हणतात. **angle of elevation**".



समजा तुम्ही शाळेच्या इमारतीवर उभे आहात आणि तुम्ही उभे असलेल्या इमारती पासुन खाली असलेल्या बोरवेल मधील अंतर माहित करण्यासाठी तुम्हाला बोरवेलच्या पायाचे निरिक्षण केले पाहिजे.



आता, दृष्टीरेषा ही क्षितीज समांतर रेषेच्या खाली आहे.

येथे दृष्टीरेषा आणि क्षितीज समांतर रेषेमधल कोनाला अवनत कोन म्हणतात **angle of depression**."

पाहणी करण्यासाठी कित्येक शतकापुर्वी त्रिकोणमितीचा उपयोग करीत आले आहे. ते पाहणी करतांना उन्नत केान आणि अवनत कोन माहित करण्यासाठी दियेाडलाईट या उपकरणाचा वापर करीत होते. मोठ्या प्रकल्पाची पाहाणी करण्यासाठी 19 व्या शतकात महान त्रिकोणमितीय सर्वे या नावाखाली देान मोठे दियाडलाईट नावाचे उपकरणे तयार केले. 1852 मधील पाहणीनुसार जगातील सर्वात उंच शिखर हिमालयात शोध लावला. 160 कि.मी. अंतरावरुन सभोवताली असलेल्या सहा विविध केंद्रावरुन शिखराची उंची माहित केली. 1856 मध्ये सर जार्ज एवरेस्ट हे नाव शिखरास दिले. सर्व प्रथम त्यांनी उपयोग केलेल्या दियोडलाईट ला देहरादुन येथील म्युझीयम ऑफ सर्वे ऑफ इंडिया, येथे प्रदर्शनास ठेवले.

12.2 प्रश्न सोडविण्यासाठी आकृत्या काढणे(Drawing Figures to Solve Problems)

आपण जेव्हा उंची आणि अंतराचे प्रश्न सोडवितो. तेव्हा खालील गोष्टी लक्षात घेतल्या पाहिजे.

(i) टॉवर, झाड, इमारती, जहाज, पर्वते इत्यादींना गणितात सुलभतेसाठी रेषीय म्हणुन गृहीत धरले पाहिजे.

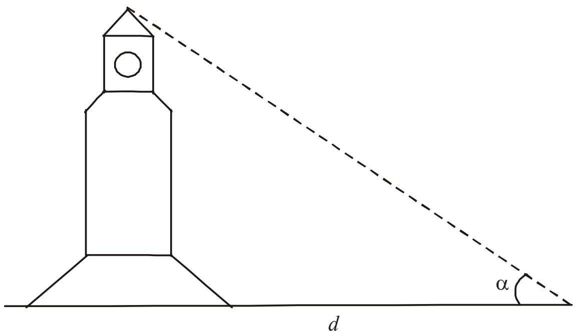
(ii) उन्नत कोन किंवा अवनत कोन हा क्षितीज समांतर रेषेच्या आधावरुन घेताले पाहिजे.

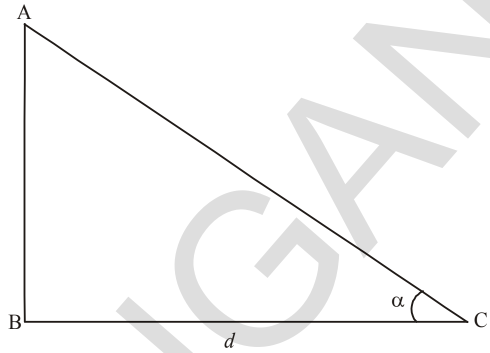
(iii) निरिक्षणाची उंची गणितात दिली नसेल तर त्यास सोडुन देणे.

जेव्हा आपण उन्नत कोन किंवा अवनत कोनावरुन उंची आणि अंतराची माहिती काढतो. तेव्हा ती भुमितिरीत्या दिसली पाहिजे. उंची आणि अंतरासाठी आकृती काढली पाहिजे. ज्यावरुन आपणास प्रश्न सोडविण्यास मदत मिळते. काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-1. एका निरिक्षकापासुन d मिटर अंतरावर असलेले क्लॉक टॉवरच्या वरच्या भागावर α° चा अवनत कोंन होतो. यासाठी आकृती काढा.

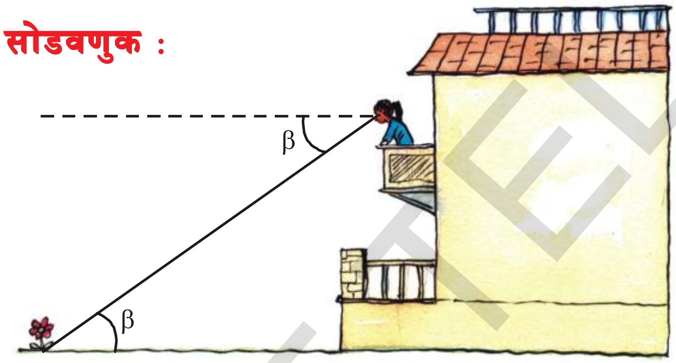
सोडवणुक : आकृती खाली दाखविली आहे.

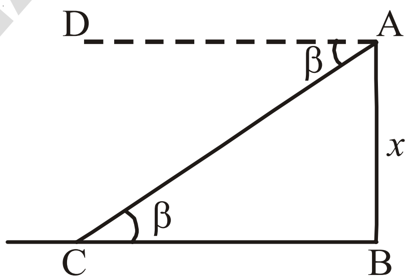




उदाहरण-2. रिकीने पहिल्या मजल्यावरील बालक्नी पासुन जमीनीवर असलेल्या फुलाकडे पाहिले असता β^o चा अवनत कोन तयार होतो. त्या इमारतीच्या पाहिल्या मजल्याची उंची x मिटर आहे. या माहितीसाठी आकृती काढा.

सोडवणुक :



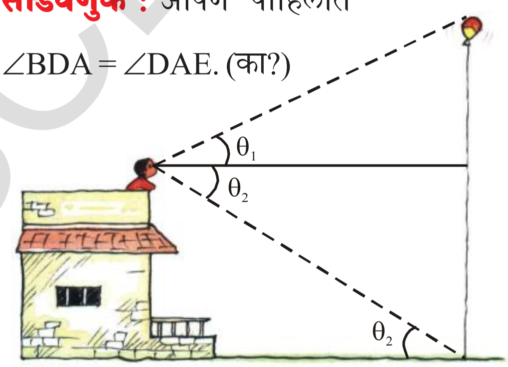


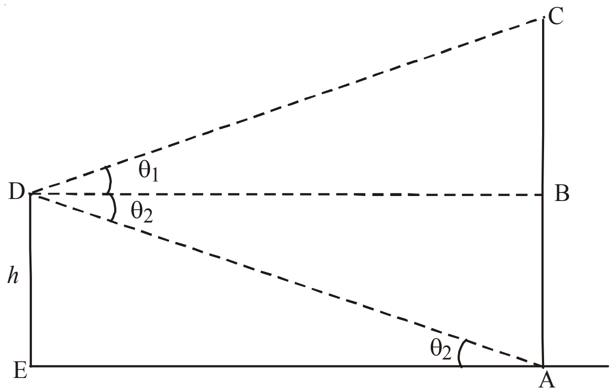
येथे $\angle DAC = \angle ACB = \beta$ (का?)

उदाहरण-3. एका मोठ्या दोरीच्या साहाय्याने एक मोठा फुगा हवेत उडत आहे. एका इमारतीवर असलेल्या व्यक्तीने त्या फुग्याकडे पाहिले तेव्हा θ_1 उन्नत कोन तयार झाला आणि दोरीच्या खालच्या भागाकडे पाहिले असता θ_2 अवनत कोन तयार झाला. त्या इमारतीची उंची h मीटर आहे. या माहितीसाठी आकृती काढा.

सोडवणुक : आपण पाहिलात

$\angle BDA = \angle DAE$. (का?)





हे करा

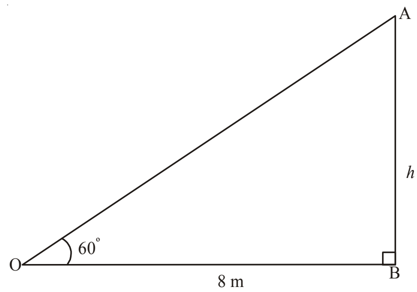
1. खालील संदर्भासाठी आकृत्या काढा.
   (i) एक व्यक्ती α अवनत कोन करीत असलेला एक पतंग उडवित आहे. त्याच्या हातापासुन पंतगा पर्यंतच्या दोरीची लांबी 'ℓ'आहे.
   (ii) एका व्यक्तीने नदिच्या दोन्ही किनाऱ्याकडे पाहिले असता θ_1 आणि θ_2 हे दोन अवनत कोन झाडावरुन तयार झाले.$(\theta_1 < \theta_2)$ त्या झाडाची उंची h आहे. ते नदीच्या बाजुला आहे. त्या नदीची रुंदी 'd' आहे.

विचार करा-चर्चा करा.

1. तुमच्या शाळेच्या इमारतीच्या पायथ्याशी d मीटर अंतरावर असलेल्या बिंदुपासुन इमारतीच्या वरच्या भागाकडे पाहिले असता α चा उन्नत कोन तयार होतो. इमारतीची उंची माहित करण्यासाठी कोणत्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तराचा वापर कराल?
2. x मिटर लांबीची एक शिडी भिंतीवर तिरपी ठेवलेली आहे. ती जमीनीशी θ चा कोन करते. तर शिडीचा स्पर्श होणाऱ्या बिंदुची उंची माहित करण्यासाठी कोणत्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तराचा वापर कराल?

आता पर्यंत आपण दिलेल्या संदर्भाच्या आकृत्या काढणे याची चर्चा केली. आता आपण उंची आणि अंतर कसे काढायचे याची चर्चा करु.

उदाहरण-4. एक मुलगा विजेच्या खांबाच्या पायथ्या पासुन 8 मीटर अंतरावर असलेल्या बिंदुपासुन विजेच्या खांबाच्या वरच्या टोकाकडे पाहिले असता. 60° उन्नत कोन तयार होतो. त्या खांबाची उंची काढा?



सोडवणुक : आकृतीवरुन त्रिकोण OAB पासुन

OB = 8 मी.

$\angle AOB = 60°$

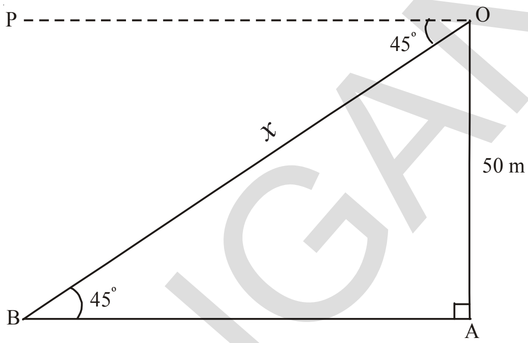
समजा खांबाची उंची = AB = h मी.

($\angle AOB$ ΔOAB मध्ये आपणास आसन्न बाजु माहित आहे. विरुध्द बाजु माहित करण्याची गरज आहे. म्हणुन त्रिकोणामितीय गुणोत्तर "tan" घेऊन प्रश्न सोडविता येते.).

$$\tan 60° = \frac{AB}{OB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{8} \qquad h = 8\sqrt{3}\text{मी.}$$

उदाहरण-5. एका हेलीकॉप्टर मध्ये असलेला राजेंदर जमीनीवर असलेल्या व्यक्तीला पाहिजे तेव्हा 45° अवनत कोन तयार होतो. जमीनीवरुन 50 मीटर उंची वर हेलीकॉप्टर उडत असल्यास तो व्यक्ती किती अंतरावर आहे.



सोडवणुक : आकृतीवरुन त्रिकोण OABमध्ये

OA = 50 मी.

$\angle POB = \angle OAB = 45^\circ$ (का ?)

OB = राजेंदर पासुन व्यक्तीचे अंतर = x.

(त्रिकोण $\angle$OBA ची विरुध बाजु माहित आहे. OAB त्रिकोणात कर्ण OB माहित करण्याची गरज आहे. म्हणुन गुणोत्तर "sin" गृहीत धरु.)

$$\sin 45^\circ = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{50}{x}$$

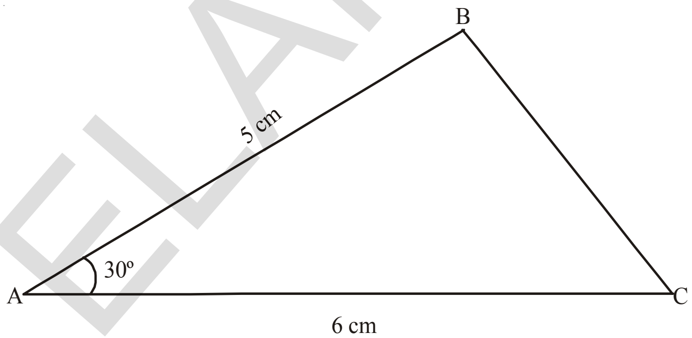
$x = 50\sqrt{2}$ मी.

(राजेंदर पासुन $50\sqrt{2}$ मी. अंतरावर तो व्यक्ती आहे.)

अभ्यास - 12.1

1. जमीनीवर एक टॉवर सरळ उभे आहे. टॉवरच्या पायथ्या पासुन 15 मीटर अंतरावर असलेल्या बिंदुपासुन त्या टॉवरच्या वरच्या टोकाशी 45° चा उन्नत कोन होतो. त्या टॉवरची उंची किती आहे ?
2. वादळाने एक झाड मोडले आणि मोडल्यामुळे झाडाचा शेंडा जमीनीवर टेकला तेव्हा जमिनीशी 30° कोन करतो. झाडाचा बुंधा आणि झाडाच्या शेंड्यामधील अंतर 6मी. आहे. झाड पडण्यापुर्वी त्याची उंची काढा ?
3. एका पार्क मध्ये मुलांना खेळण्यासाठी कंत्राटधारकांनी एक घसरपट्टी तयार करण्याचे ठरविले. ती 2 मी. उंचीवर जमीनीशी 30° चा कोन करील अशारितीने तयार केले. तर त्या घसरपट्टीची लांबी किती राहील ?
4. सकाळी 7 वाजता 15 मिटर उंच खांबाची सावली $5\sqrt{3}$ मीटर आहे. त्या वेळी सुर्यकिरणांनी जमीनीशी केलेला उन्नत केान काय होईल ?
5. 10 मी. उंची असलेल्या एका खांबाला तीन दोरीच्या साहाय्याने सरळ उभे करायचे आहे. प्रत्येक दोरी त्या खांबाशी 30° चा केान करते तर त्या दोरीची लांबी काय असेल ?

6. समजा तुम्ही एका इमारतीच्या 6 मी. उंचीवरुन जमीनीवरील एक लक्ष साधण्यासाठी बाण सोडत असतांना तो 60° चा अवनत कोन करतो. तर तुम्ही आणि त्या वस्तु मधील अंतर काय आहे?
7. 9 मी. उंचीच्या एका विजेच्या खांबावर इलेक्ट्रीकशीयनला विजेचा जोड दुरुस्ती करायचा आहे. त्याला हे काम करण्यासाठी खांबाच्या वरच्या टोकापासुन 1.8 मी. खाली यावे लागते. त्याने चढण्यासाठी वापरलेली शिडी जमीनीशी 60° कोन करते. तर त्या शिडीची लांबी किती? शिडीच्या आणि खांबाच्या पायथ्या मधील अंतर काय होईल?
8. एका नावेला नदी पार करायची आहे. नदीच्या प्रवाहामुळे त्या नदीच्या किनाऱ्यावर 60° चा कोन करणारी नाव 600 मीटर प्रवास केल्यावर ती दुसऱ्या किनाऱ्यावर पोहोचते. तर त्या नदीची रुंदी किती?
9. 1.8 मी.उंची असलेला एक निरिक्षक एका ताडाच्या झाडापासुन 13.2 मी. अंतरावर आहे. त्याच्या डोळ्या पासुन झाडाच्या शेंड्याशी केलेला उन्नत कोन 45° आहे. तर त्या ताडाच्या झाडाची उंची किती असेल?
10. बाजुच्या. आकृती AC = 6 से.मी. AB = 5 से.मी. आणि $\angle BAC = 30^\circ$ तर त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

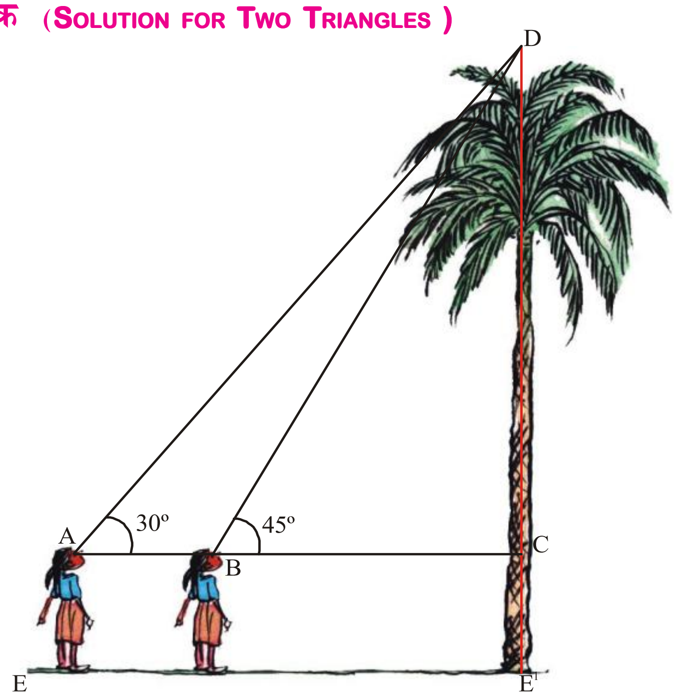


12.3 दोन त्रिकोणाची सोडवणुक (Solution for Two Triangles)

आपण एक त्रिकोण असलेले प्रश्न सोडविले दोन त्रिकोण असलेल्या प्रश्नांची सोडवणुक कशी राहील?

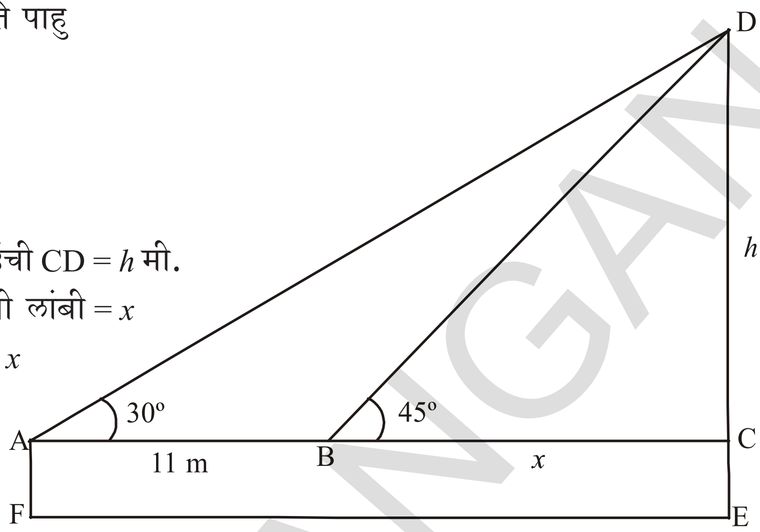
समजा तुम्ही झाडाच्या एका बाजुला उभे आहे. तुम्हाला वेगवेगळ्या ठिकाणावरुन त्या झाडाचे निरिक्षण करुन त्याची उंची काढायची आहे. हे कसे कराल?

समजा तुम्ही ताडाच्या झाडाच्या शेंड्याकडे पाहिले असता. 45° चा उन्नत कोन होतो. तुम्ही झाडापासुन 11 मीटर दुर सरकले असता उन्नत कोन बदलुन 30° होतो.



झाडाची उंची आपण कशी काढु ते पाहु

आकृतीवरुन



AB = 11 मी

$\angle DAC = 30^{\circ}$

$\angle DBC = 45^{\circ}$

समजा ताडाच्या झाडाची उंची CD = h मी.

आणि BC ची लांबी = x

AC = 11 + x

त्रिकोण BDC वरुन

$$\tan 45^{\circ} = \frac{DC}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h\sqrt{3} \qquad \ldots(1)$$

त्रिकोण ADC वरुन

$$\tan 30^{\circ} = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{11+x}$$

$$h = \frac{11+x}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\left(\sqrt{3}-1\right)} \text{ मीटर}$$

सुचना : ताडाच्या झाडाची एकुण उंची CD + CE आहे. यात CE = AF ही मुलीची उंची आहे.

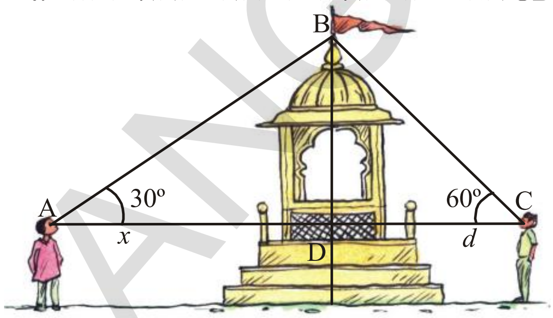
उदाहरण-6. 30 मीटर उंच मंदिराच्या दोन्ही बाजुला दोन व्यक्ती आहेत. त्यांनी मंदिराच्या वरच्या टोकाकडे पाहिल्यास अनुक्रमे 30^o आणि 60^o उन्नत कोन तयार होतो. त्या दोन व्यक्तीमधील अंतर माहित करा.

सोडवणुक : BD मंदीराची उंची $= 30$ मी.

एका व्यक्तीने निरिक्षण केलेला उन्नत कोन $\angle BAD = 30^o$

दुसऱ्या व्यक्तीने निरिक्षण केलेला उन्नत कोन $\angle BCD = 60^o$

समजा पहिला व्यक्ती आणि मंदिरामधील अंतर $AD = x$ आणि दसरा व्यक्ती व मंदिरामधील अंतर CD $= d$



ΔBAD वरुन

$$\tan 30^o = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{x}$$

$$x = 30\sqrt{3} \text{ .... (1)}$$

ΔBCD वरुन

$$\tan 60^o = \frac{BD}{d}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{d}$$

$$d = \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ .... (2)}$$

(1) आणि (2) वरुन दोन व्यक्तीमधील अंतर $= BC + BA = x + d$

$$= 30\sqrt{3} + \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\times 4}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

उदाहरण-7. एका टॉवरच्या पायथ्यापर्यंत एक सरळ महामार्ग जातो. रामय्या टॉवर वरुन उभा राहुन एका कारचे निरिक्षण केल्यास 30^o चा अवनत केान तयार होतो. ती कार एक समान वेगाने त्या टॉवरच्या पायथ्याकडे यते असतांना सहा संकेदानंतर त्या कारचा अवनत कोन 60^o आढळुन आला. तर या बिंदु पासुन ती कार टॉवरच्या पायथ्याशी किती वेळात पोहोचते ते काढा?

सोडवणुक : समजा कार ने 6 सेकंदात पार केलेले $= AB = x$ मीटर

टॉवरची उंची $CD = h$ मीटर

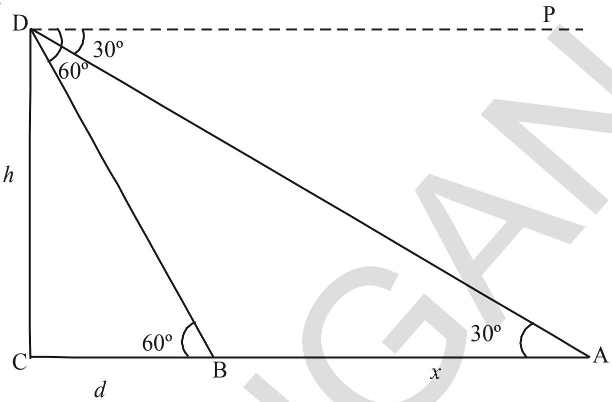
कारनी प्रवास केलेले उरलेले अंतर $BC = d$ मीटर

आणि $AC = AB + BC = (x + d)$ मीटर

$\angle PDA = \angle DAP = 30^o$ (का?)

$\angle PDB = \angle DBP = 60^o$ (का?)

ΔBCDवरुन



$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{d}$$

$$h = \sqrt{3}d \qquad ...(1)$$

ΔACD वरुन

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(x+d)}$$

$$h = \frac{(x+d)}{\sqrt{3}} \qquad ...(2)$$

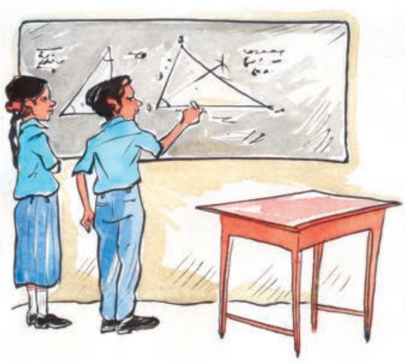
(1) & (2) वरुन

$$\frac{x+d}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}d$$

$$x + d = 3d$$

$$x = 2d$$

$$d = \frac{x}{2}$$



'x' मिटर अंतर प्रवास करण्यासाठी लागलेला वेळ = 6 सें.

'd' मिटर अंतर प्रवास करण्यासाठी लागलेला वेळ

म्हणजेच $\frac{x}{2}$ मीटर= 3 सेंकद

अभ्यास - 12.2

1. एका रस्त्याच्या बाजुला एक TV टॉवर सरळ उभे आहे. टॉवरच्या विरुध्द बाजुवरील बिंदुपासुन निरिक्षण केल्यास टॉवरच्या टोकाशी 60^0चा उन्नत कोन तयार होतो. या बिंदुपासुन 10 मी. दुर अंतरावर असलेल्या दुसऱ्या बिंदु आणि या टॉवरच्या पायथ्याला रेषेने जोडल्यास त्या टॉवरच्या वरच्या टोकाशी तयार होणारा उन्नत कोन 30° आहे. तर त्या टॉवरची उंची आणि रस्त्याची रुंदी माहित करा.

2. 1.5 मीटर उंची असलेला एका मुलाने 30 मीटर उंची असलेल्या एका मंदीराच्या वरच्या टोकाला काही अंतरावरुन पहिले. तो मंदीराकडे समोर चालत गेल्यास मंदिराच्या कळसाशी त्याच्या डोळ्यांनी केलेला कोन 30° पासुन वाढत 60° होतो. तर त्यांनी चाललेले अंतर काढा.

3. एक पुतळा 2 मी. उंच पायावर उभा आहे. जमीनीवरील एका बिदुपासुन पुतळ्याच्या वरच्या टोकाशी केलेला उन्नत केान 60° आणि याच बिंदुपासुन पायाच्या वरच्या टोकाशी केलेला उन्नत कोन 45° आहे तर त्या पुतळ्याची उंची काढा.

4. एका इमारतीवरुन एका सेल टॉवरकडे पाहिले असता.60° चा उन्नत केान आणि त्याच्या पायथ्याशी 45°चा अवनत कोन होतो. जर त्या इमारतीपासुन टॉवरचे अंतर 7 मी. आहे तर टॉवरची उंची काढा?

5. 18 मी.लांबीची एक तार विजेच्या खांबाला बांधल्यास ती जमीनीशी 30° चा उन्नत कोन करते. तार मोठी असल्यामुळे तिचा थोडा भाग कापुन बांधल्यास ती जमीनीशी 60° चा उन्नत कोन करते. त्या तारेच्या कापलेल्या भागाची लांबी काढा?

6. एका टॉवरच्या पायथ्यापासुन इमारतीच्या छताशी केलेला उन्नत कोन 30° आणि इमारतीच्या पायथ्यापासुन टॉवरच्या वरच्या टोकाशी केलेले उन्नत कोन 60° आहे. जर टॉवरची उंची 30 मीटर असेल तर इमारतीची उंची माहित करा?

7. 120 फिट रुंद रस्त्याच्या दोन्ही बाजुला समान उंचीचे दोन खांब उभे आहेत. त्या दोन खांबामधील बिंदुपासुन पाहिले असता. त्या खांबाच्या वरच्या टोकाशी अनुक्रमे 60° आणि 30° चे उन्नत कोन होतात. त्या खांबाची उंची त्या खांबापासुन बिंदुचे अंतर काढा?

8. टॉवरच्या एका सरळ रेषेवरील 4 मी. आणि 9 मी. अंतरावर असलेल्या दोन बिंदुवरुन टॉवरच्या वरच्या टोकाशी पुरक उन्नत कोन तयार होतात. त्या टॉवरची उंची काढा.

9. जमीनीवर असलेल्या A बिंदुपासुन एका जेट विमानाकडे पाहिल्यास 60° चा उन्नत कोन करते. 15 सेकंदानंतर तो उन्नत कोन बदलत 30° चा होता. जर ते जेट विमान $1500\sqrt{3}$ मीटर स्थिर उंचीवर उडत असल्यास त्या जेट विमानाचा वेग काढा. $\left(\sqrt{3}=1.732\right)$

10. एका इमारतीच्या पायथ्यापासुन समोरील टॉवरच्या वरच्या टोकाशी केलेला उन्नत कोन 30° आहे. टॉवरच्या पायथ्यापासुन इमारतीच्या छताशी केलेला उन्नत केान 60° आहे. तर टॉवर आणि इमारतीच्या उंचीचे गुणोत्तर काय आहे?

ऐच्छिक अभ्यास

[हा अभ्यास परिक्षेसाठी नाही.]

1. 1.2 मी.उंच मुलीने आकाशात क्षीतीज समांतर 88.2 मी.उंचीवर हवा भरलेला फुगा सोडला तिच्या डोळ्यापासुन फुग्याशी केलेला उन्नत कोन 60° चा आहे. काही वेळा नंतर तो कोन कमी होऊन 30° झाला. या कालावधीत त्या फुग्याने प्रवास केलेले अंतर काढा?

2. 'h' मीटर उंचीच्या PQ टॉवरपासुन काही अंतरावर असलेला बिदु A पासुन चिंकीने टॉवर कडे पाहिले जर ती A पासुन टॉवरच्या पायथ्याकडे 'd' अंतर चालल्यास उन्नत कोन A जवळ 2 पट होतो जेव्हा ती समोर जाते तेव्हा तर सिध्द करा.$36h^2 = 35d^2$.

3. A, B आणि C या तीन नावा एकाच सरळ रेषेत प्रवास करीत लाईट हाऊस कडे येत आहे. त्या नावापासुन लाईट हाऊसच्या वरच्या टोकडे कडे पाहिले असता अनुक्रमे a, $2a$, $3a$ उन्नत कोन तयार होतात. जर A आणि B नावेमधील अंतर x असेल तर त्या लाईट हाऊसची उंची किती असेल?

4. एका दिर्घ घनाकार कपबोर्डच्या आतील भागाच्या लांबी, रुंदी आणि उंचीचे गुणोत्तर $1 : \sqrt{2} : 1$आहे या कपबोर्डमधील मोठ्या काठीने त्याच्या पायाशी केलेला कोन किती आहे?

5. एक लोखंडी गोलीय चेंडुचे घनफळ 232848 से.मी.^{3} आहे. त्यास वितळविल्यास 120°चा शिर्ष कोन करीत शंकुच्या आकारात बदलतो. तर त्याचा पाया आणि उंची काय राहील?

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

उंची आणि अंतर माहित करणे

- क्लोनोमीटर चा उपयोग करुन टॉवर/झाड/इमारत यांची उंची तसेच अंतर माहित करा.

आपण काय चर्चा केली.

या धड्यात आपण काय चर्चा केली.

1. (i) एका वस्तुवरील एका बिंदुपासुन निरिक्षकाच्या डोळ्याला जोडणाऱ्या सरळ रेषेला दृष्टीरेषा म्हणतात.

   (ii) क्षीतीज समांतर रेषाच्यावर, दृष्टीरेषा असताना त्यामधील कोनास उन्नत कोन म्हणतात. या संदर्भात निरिक्षणाचे डोळे त्या वस्तुला पाहाण्यासाठी वर करावे लागते.

   (iii) क्षीतीज समांतर रेषेच्याखाली दृष्टीरेषा असतांना त्यापासुन तयार होणाऱ्या कोनास अवनत कोन म्हणतात. या संदर्भात निरिक्षणाकाला वस्तुकडे पाहण्यासाठी डोळे खाली करावे लागते.

2. एका वस्तुची लांबी, उंची किंवा दोन भिन्न वस्तुमधील अंतर माहित करण्यासाठी त्रिकोणमितीय गुणोत्तराचा उपयोग करावा लागतो.

धडा

13 संभाव्यता

(Probability)

13.1 प्रस्तावना

कुमार आणि सुधा कॅरम खेळा विषयी खालील चर्चा करत आहे.

कुमार : या खेळात आपण जिकेंल असे तुला वाटत आहे का?
सुधा : आपण जिकंण्याचे 50 % संधी आहे.
कुमार : 50% संधी आहे, हे तु कसे सांगु शकते?

या संदर्भात सुधाचे विधान कितपत सत्य आहे. असे तुम्हाला वाटते

तिला जिकण्याची 50% संधी आहे का?

अशा प्रश्नांविषयी या धड्यात आपण अभ्यास करणार आहोत. तसेच आपण संभवत, संभाव्य, शक्यतो इत्यादी सारख्या शब्दाचा अभ्यास आणि यांचा परिमाण कसे माहित करावे याचा अभ्यास पण करणार आहोत. वस्तुस्थितीत अत्यंत संभाव्य बऱ्याचदा निश्चित आणि अत्यंत असंभाव्य आणि बरेचदा अशक्य घटनाविषयी आपण 9 व्या वर्गात अभ्यास केलेले आहोत. संधी, सुदैव आणि एका विशिष्ट वेळेत एकदा घडलेली घटना पुन्हा घडेलच असे नाही, या विषयी सुधा आपण चर्चा करणार आहोत. या धड्यात आपण घडणाऱ्या संभवतेचे परिमाण पाहणार आहोत.

या प्रकारे परिमाण ला संख्या मध्ये दर्शविणाऱ्या ***संभाव्यता*** म्हणतात.

13.1.1 संभाव्यता म्हणजे काय ? (WHAT IS PROBABILITY)

एक प्रयोग विचारात घेऊ, एका नाणाल्या 1000 वेळा टॉस केले तर छापा (heads) 455 वेळा आणि काटा (tail) 545 वेळा पडले जर आपण छापा पडण्याचे संभव माहित करण्याचा प्रयत्न केला तर आपण असे म्हणुन शकतो की, ते 1000 पैकी 455 आहे

किंवा $\frac{455}{1000}$ किंवा 0.455.

असा प्रयोग फलीताला आधार करुन मोजल्याने संभाव्यता ला प्रयोगीक संभाव्यता म्हणतात. या प्रयोगाच्या अंदाजाला एक प्रयोग आणि त्यास फलीताचा आधार म्हणजे हेच प्रयोग पुन्हा 1000 वेळा टॉस केल्यावर हेच संभाव्यता येईलच असे नाही.

जगातल्या वेगवेगळ्या स्थानावरुन वेगवेगळे लोक हा प्रयोग केले आणि छापा पडण्याचे संख्याची नोंद केली.

उदाहरणार्थ 18 व्या शतकात फ्रेंच शास्त्रज्ञ कोम्टे डे बफन याने एका नाण्याला 4040 वेळा टॉस केले आणि 2048 वेळा छापा मिळवले. या संदर्भात, छापा मिळविण्याचे प्रयोगीक संभाव्यता $\frac{2048}{4040}$ म्हणजेच 0.507 आहे.

ब्रिटन चे जे.ई. केरीच (J.E. Kerrich) याने एका नाने 10000 वेळा टॉस करुन 5067 छापा पडण्याची नोंद केली. यासंदर्भात छापा मिळविण्याची संभाव्यता $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ आहे.संख्याशास्त्रज्ञ कार्ल पर्सन(Karl Pearson) याने एक नाणे 24000 वेळा टॉस केले आणि 12012 वेळा छापा मिळवले. या संदर्भात छापा मिळवण्याचे प्रयोगीक संभाव्यता 0.5005 आहे.

हेच प्रयोग आपण 10 लाख वेळा किंवा एक कोटी वेळा करुन छापा पडण्याचे संभाव्यता माहित करायचे असेल तर तेव्हा तुम्हाला असे वाटले की, जस जसे नाणे टॉस करण्याची संख्या वाढत आहे.तसे छापा किंवा काटा पडण्याचे प्रयोगीक संभाव्यताची संख्या 0.5 किंवा $\frac{1}{2}$ च्या जवळ जवळ आहे. म्हणजेच प्रयोग न करता सर्व परिमाणाच्या आधारावरुन एक संभाव्यतेचा अंदाज आपण करु शकतो.

याला तात्वीक संभाव्यता किंवा सांस्कृतीक संभाव्यता असे म्हणतात. आता या संकल्पने वर आधारीत काही गणीत पाहु या.

13.2 संभाव्यता - तात्वीक विवरण (PROBABILITY - A THEORETICAL APPROACH)

खालील संदर्भ विचारात घेऊ. एक उत्तम प्रतीचे नाणे यार्दुच्छिकपणे टॉस केले.

जेव्हा आपण नाण्याला उत्तम प्रतीचे म्हणलेले आहोत. म्हणजेच नाणे टॉस केले तर दोन बाजुच्या व्यतीरिक्त तिथे तिसरे काही पडण्याची शक्यता नाही. नाण्याच्या या गुणधर्माला समतोल म्हणतात. यार्दुच्छिक पणे टॉस म्हणजे काही अडथळा होऊ न देता मोकळ्या हाताने नाण्याला फेकणे होय. अशा प्रकारच्या प्रयोगांना यादृच्छीक प्रयोग म्हणतात. येथे आपण ते खाली कसे पडेल याचा विचार केलेला नाही करण जर रेती मध्ये ते पडला ते एका कडेवर सुध्दा पडु शकते. यासाठी आपण निष्पत्ती, छापा आणि काटा समसंभाव्य असे शब्द वापरुन ते पाहु शकतो.

या धड्यातील संभाव्यता या विषयी माहित करायचे असेल तर आपल्याला असे समजावे लागणार की, सर्व प्रयोग समसंभाव्य निष्पत्तीचे आहेत.

आता, आपल्याला माहित आहे की, E घटनेची प्रयोगीक संभाव्यता

$$P(E) = \frac{\text{घडलेल्या घटनेत एकुण प्रयोगाची संख्या}}{\text{प्रयत्नांची संख्या}}$$

हे करा

a. खालील पैकी कोणता प्रयोग सम संभाव्य निष्पत्तीचे आहे?

1. फासे फेकल्या नंतर 1, 2, 3, 4, 5 किंवा 6 मिळेल
2. एका पिशवीतुन 5लाल, 4 निळे आणि 1 काळा बॉल निवड करणे.
3. कॅरम खेळा मध्ये विजयी होणे.
4. दोन अंकी संख्यामध्ये एकम स्थानाचा अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 किंवा 9 या पैकी असते
5. एका पिशवीतुन 10 लाल, 10 निळे आणि 10 काळे बॉल निवड करणे.
6. जुलैच्या एका विशिष्ट दिवशी पाऊस पडणे.

b. प्रत्येक प्रयोगाची निष्पत्ती समसंभाव्य असते?

c. सम संभाव्य निष्पत्तीचे पाच आणि सम संभाव्य निष्पत्ती नसलेले पाच उदारहण द्या.

कृती

(i) एक नाणे घेऊन 50 वेळा, 100 वेळा, 150 वेळा टॉस करा आणि प्रत्येक वेळा छापा किंवा काटा पडण्याची संख्या स्वतंत्र पणे मोजा. तुम्ही केलेले निरिक्षण खालील तक्त्यात भरा.

क्र.स	प्रयोगाची संख्या	छापा पडण्याची संख्या	छाप्याची संभाव्यता	काटा पडण्याची संख्या	काटाची संभाव्यता
1.	50				
2.	100				
3.	150				

तुमच्या निदर्शणास काय आले? जस जशी प्रयोगाची संख्या वाढत आहे. तस तशी छापा किंवा काट्याची संभाव्यता 50% किंवा $\frac{1}{2}$ च्या जवळ पोहचत आहे. प्रयत्नांची संख्या अमर्यादित पणे सर्व प्रयोगाच्या संदर्भात अशा संभाव्यता मोजु शकतो.

संभाव्यता आणि आदर्श प्रयोग (Probability and Modelling)

प्रयोगाच्या पुनरावर्तीची गरजेला काही मर्यादा आहेत. ते काही संदर्भामध्ये महागडे आहे. फासे फेकणे किंवा नाणे टॉस करणे हे सोपे आहे. पण उदाहरणार्थ एका कृत्रीम उपगृहाला अंतरिक्षात पाठविणे हे एक प्रयोगीक संभाव्यता माहित करण्यासाठी भुकंपाने बंगले पडण्याची संभाव्यता असे

प्रयत्न आपण करु शकत नाही. निकाला पासुन प्रायोगीक संभाव्यता मोजु शकत नाही ना? म्हणुन तशा आदर्श संभाव्यताना कृत्य म्हणुन करुन किंवा कल्पना करुन घडणारे विविध समसंभाव्य निष्पत्तीचे निरिक्षण करुन संभाव्यतेचे अंदाज करतात. तसे आदर्श प्रयोगाची विश्वसनियता ते प्रयोग करताना घेतलेली काळजी अंदाजाला आणि निष्पत्तीवर आधारीत असते. वातावरणाचा अंदाज, निवडणुकीचा निकाल लोकसंख्या वाढणे, भुकंप, पिकांचे उत्पन्न इत्यादी सर्व अशा आदर्श प्रयोग आणि अंदाजावर अवलंबुन असतात.

नाण्याला टॉस करणे, फासे फेकणे, सारखे उदाहरणात चर्चा केल्या प्रमाणे " समसंभाव्यता निष्पत्तीचे अंदाज" अशा कल्पनेच्या आधारावर संभाव्यता स्पष्ट होते ते खाली दिलेले आहे.

T घटनेच्या तात्वीक संभाव्यतेला P(T) असे लिहितो. त्याची व्याख्या खालील प्रमाणे

$$P(T) = \frac{\text{T चे अनुकुल निष्पत्तीची संख्या}}{\text{प्रयोगाच्या सर्व शक्य निष्पत्तीची संख्या}}$$

येथे आपण असे समजु की, प्रयोगाचे निष्पत्ती समसंभाव्य आहे. तात्वीक संभाव्यतेला आपण संभाव्यता म्हणुन वाचु.

1795 मध्ये पियरे सायमन लॅपलेस (*Pierre Simon Laplace in*) यांनी संभाव्यतेची व्याख्या केली

16 व्या शतकातील इटलीचे भौतिक आणि गणितज्ञ जे. कार्डन(J. Cardan) यांनी लिहिलेले पहिले पुस्तक द बुक ऑन गेमस ऑफ चान्स(The Book on Games of Chance) मध्ये संभाव्याताचे प्रसंग लिहिले. जेम्स बेन्रोली James Bernoulli (1654 -1705)आणि ऐ.डीमोरी A. De Moivre (1667-1754)आणि पियरे साइमन लॅपलेस सुध्दा संभाव्यतेच्या अभ्यासाला विकासाला हातभार लावला. म्हणुन संभाव्यतेची महत्व वाढुन जिवशास्त्र, अर्थशास्त्र, जेनेटिक्स, भौतिकशास्त्र इत्यादी मध्ये सुध्दा महत्वाचे स्थान प्राप्त झाले आहे.

पियारे सायमन लॅपलेस
(1749 – 1827)

13.3 अपवर्णक घटना (Mutually Exclusive Events)

जर आपण एक नाणे टॉस केले तर आपल्याला छापा किंवा काटा मिळतो. पण दोन्ही मिळत नाहीत. याच प्रमाणे जर आपल्याला एका उच्च माध्यमिक शाळेतुन एका विद्यार्थ्यांना निवडायचे असेल तर तो विद्यार्थी 6,7,8,9 किंवा 10 वर्गापैकी एक वर्गाचा विद्यार्थी असेल पण तो दोन वर्गाचा विद्यार्थी नसतो. या दोन्ही उदाहरणात एक घटनेत घडणाऱ्या वर दुसऱ्या घटनेचा अडथळा असतो. अशा घटनाला अपवर्णक घटना म्हणतात.

एका प्रयोगात दोन किंवा दोन पेक्षा जास्त घटना, येथे घडणाऱ्या घटनेमध्ये दुसऱ्या सर्व घटनेचा प्रभाव असतो. यांना अपवर्णक घटना म्हणतात. या धड्यात आपण या विषयी जास्त चर्चा करु.

13.4.1 संभाव्यता माहित करणे.(FINDING PROBABILITY)

समसंभाव्यता घटनांची संभाव्यता तुम्ही कसे माहित कराल? नाण्याला टॉस करणे घटना म्हणुन प्रयोगात समजतो. म्हणजेच प्रत्येक वेळी दोन समसंभाव्यता निष्पत्ती असतात. या निष्पत्ती च्या संचाला नमुना अवकाश म्हणतात. एका नमुन्याचा अवकाश{H, T} आहे असे आपण म्हणु शकतो. पिशवीतुन लाल, पिवळे आणि पांढरे बॉल आहे त्यातुन बॉल काढण्याचा प्रयोगाचा नमुना अवकाश {R, B, Y, W}. आहे. फासे फेकण्यासाठी नमुना अवकाश काय आहे?

हे करा

समसंभाव्यता 5 घटनांचा विचार करा आणि नमुना अवकाश माहित करा?

परस्पर अपवर्णक असलेल्या समसंभाव्य घटनांची संभाव्यता माहित करण्याचा प्रयत्न करु या.

उदाहरण-1. जेव्हा नाणे एकदा टॉस केल्यानंतर छापा मिळण्याची संभाव्यता माहित करा. तसेच काटा मिळण्याची संभाव्यता सुध्दा माहित करा.

सोडवणुक : फक्त एकदाच नाणे टॉस करण्याचा प्रयोगामध्ये शक्य निष्पत्तीची संख्या दोन आहे. एक छापा आणि दुसरे काटा समजा E हा छापा मिळण्याचे घटना आहेत. E चे अनुकुल निष्पत्तीची संख्या 1 आहे. म्हणुन

$$P(E) = P(\text{छापा}) = \frac{\text{E चे अनुकुल निष्पत्तीची संख्या}}{\text{सर्व शक्य निष्पत्तीची संख्या}} = \frac{1}{2}$$

त्याचप्रमाणे जर F हा काटा मिळण्याचे घटना असेल तर

$$P(F) = P(\text{काटा}) = \frac{1}{2}$$ (अंदाज करा का?)

उदाहरण-2. एका पिशवीत एक लाल, एक निळे आणि एक पिवळे बॉल आहेत. ते सर्व एकाच आकाराचे आहेत. मानसा पिशवीत न पाहता त्या मधुन एक बॉल काढले. तर तिने (i) पिवळे बॉल (ii) लाल बॉल (iii) निळे बॉल ? काढण्याची संभाव्यता किती आहे?

सोडवणुक : मानसा पिशवीत न पाहता पिशवीतुन एक बॉल काढले. म्हणुन ती त्यापैकी कोणताही एक काढण्याची समसंभाव्यता आहे.

समजा एक पिवळे बॉल काढण्यासाठी घटनेला Y , निळे बॉल काढण्यासाठी घटनेला B आणि लाल बॉल काढण्यासाठी घटनेला R

आता, शक्य निष्पत्तीची संख्या = 3.

(i) Y घटनेला अनुकुल निष्पतीची संख्या = 1.

म्हणुन, $P(Y) = \frac{1}{3}$. याच प्रमाणे $P(R) = \frac{1}{3}$ आणि $P(B) = \frac{1}{3}$

सुचनाः

1. एका प्रयोगामध्ये घटनेला फक्त एकच निष्पत्ती असले तर त्याला प्राथमिक घटना म्हणतात. उदा. 1 मध्ये E आणि F दोन्ही घटना प्रार्थमिक घटना आहेत. याचप्रमाणे उदाहरण 2 मध्ये सर्व तीन घटना Y, B आणि R हे प्रार्थमिक घटना आहेत.

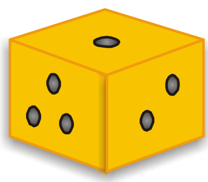
2. उदाहरण 1 मध्ये आपण नोंद करतो की, : $P(E) + P(F) = 1$
   उदाहरण 2 मध्ये आपण नोंद करतो की, : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$.

   जर आपण सर्व प्रार्थमिक घटनांची संभाव्यता माहित करुन त्यांची बेरीज केली तर आपल्याला एकुण बेरीज 1 मिळते.

3. फास्याला फेकले असता 3 पेक्षा कमी पडण्याची घटना किंवा 3 पडण्याचे किंवा 3 पेक्षा जास्त पडण्याची घटना प्राथमिक घटना होत नाही. तसेच दोन नाणे एकदाच फेकल्या मध्ये {HH}, {HT}, {TH} आणि {TT} या प्राथमिक घटना आहेत.

उदाहरण-3. समजा आपण एक फासे एकदा फेकले (i) 4 पेक्षा मोठी संख्या मिळविण्याची संभाव्यता किती आहे? (ii) 4 किंवा 4 पेक्षा कमी संख्या मिळविण्यासाठी संभाव्यता किती आहे?

सोडवणुक : (i) फासे फेकण्यामध्ये



नमुना अवकाश $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

निष्पत्तीची संख्या $n(S) = 6$

4 किंवा 4पेक्षा मोठ्या संख्येसाठी अनुकुल निष्पत्ती $E = \{5, 6\}$

अनुकुल निष्पत्तीची संख्या $n(E) = 2$

संभाव्यता $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) 4 किंवा 4 पेक्षा लहान संख्या मिळविण्याची घटना F

नमुना अवकाश $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

निष्पत्तीची संख्या $n(S) = 6$

4 किंवा 4 पेक्षा लहान संख्या मिळविण्यासाठी अनुकुल निष्पत्ती $F = \{1, 2, 3, 4\}$

अनुकुल निष्पत्तीची संख्या $n(F) = 4$

संभाव्यता $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

सुचना : वरील उदाहरणामधील E आणि F घटना प्रार्थमिक घटना आहेत?

नाही, ते प्रार्थमिक घटना नाहीत, E घटनेला 2 निष्पत्ती आणि F घटनेला 4 निष्पत्ती आहेत.

13.4.2 पुरक घटना आणि संभाव्यता (COMPLEMENTARY EVENTS AND PROBABILITY)

पुर्वीच्या विभागामध्ये आपण प्रार्थमिक घटना विषयी शिकलोत. नंतर उदाहरण 3 मध्ये प्रार्थमिक घटना नसलेल्या संभाव्यताची गणना केली. आपण पाहिलो की,

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

या उदाहरणातील प्रयोगात F ,E' च्या एकुण घटना F आणि E नसलेले समान आहेत.

E' नसलेल्या घटनेला आपण $\overline{E}$ म्हणुन दर्शवितो. याला E घटनेचा पुरक घटना म्हणतात.

म्हणुन P(E) + P(E नसलेले) = 1

म्हणजेच $P(E) + P(\overline{E}) = 1$, जे $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

सामान्य रुपात, E घटनेसाठी हे सत्य आहे की, $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

हे करा

(i) छापा मिळविण्याचे पुरक काटा मिळविणे आहे का? कारणे द्या?

(ii) फासाच्या संदर्भमध्ये 1 मिळविण्याचे पुरक 2,3,4,5,6 मिळविण्याचे घटना आहेत का? कारणे द्या?

(iii) पाच पुरक घटनांच्या जोड्या लिहा?

13.4.3 निश्चित आणि अशक्य घटना (IMPOSSIBLE AND CERTAIN EVENTS)

1, 2, 3, 4, 5, 6 खुण केलेल्या बाजुच्या फासे फेकण्या विषयी खालील विचारात घेऊ.

(i) फासे एकदाच फेकल्याने 7 संख्या मिळविण्याची संभाव्यता किती आहे?

फासे फेकल्यानंतर फक्त सहा शक्य निष्पत्ती आहेत, हे आपल्याला माहित आहे. या निष्पत्ती 1, 2, 3, 4, 5 आणि 6 आहे. 7 ने खुण केलेली कोणती बाजु फास्यावर नाही. 7 येण्याची अनुकुल निष्पत्ती तिथे नाही म्हणजेच अशा संख्याची निष्पत्ती शुन्य आहे. दुसऱ्या शब्दात फासे फेकल्यानंतर 7 मिळविणे हे अशक्य आहे.

$$\text{म्हणुन } P(7\text{मिळविणे}) = \frac{0}{6} = 0$$

म्हणजेच, मिळविणे अशक्य असलेल्या घटनेची संभाव्यता 0 असते. अशा घटनांना अशक्य घटना म्हणतात.

(ii) फासे एकदाच फेकल्याने 6 किंवा 6 पेक्षा लहान संख्या मिळण्याची संभाव्यता किती आहे?

फास्याची प्रत्येक बाजु 6 ने किंवा 6 पेक्षा लहान संख्येने खुण करुन असल्याने जेव्हा फासे फेकते तेव्हा त्या पैकी एखादी संख्या आपल्याला मिळविण्याची निश्चित खात्री असते. म्हणुन सर्व शक्य निष्पत्तीची संख्या ही अनुकुल निष्पत्तीच्या समान असते ते 6 आहे.

म्हणुन $P(E) = P(6$ किंवा 6 पेक्षा लहान संख्या$) = \frac{6}{6} = 1$ म्हणुन, मिळविण्याची खात्री असेल तर घटनेची संभाव्यता 1 असते. अशा घटना ना निश्चित घटना म्हणतात.

सुचना: संभाव्यता$P(E)$ च्या व्याख्येवरुन आपण असे पाहतो की, अंश (E घटनेच्या अनुकुल निष्पत्तीची संख्या) हे छेदाच्या (सर्व शक्य निष्पत्तीची संख्या) समान किंवा लहान असते म्हणुन $\mathbf{0 \leq P(E) \leq 1}$.

प्रयत्न करा

1. एका मुलाजवळ एक फासे आहे त्याने फासाच्या बाजुवर A, B, C, D, E आणि F अशी खुण केली आहे. एकदा फासे फेकल्यावर (i) A? (ii) D? मिळविण्याची संभाव्यता किती आहे?
2. खालील पैकी कोणते घटनेची संभाव्यता होऊ शकत नाही?
   (a) 2.3 (b) -1.5 (c) 15% (D) 0.7

प्रयत्न करा

1. कोणत्याही खेळात कोणत्या संघाने अगोदर गोलंदाजी करावे हे निर्णय करण्यासाठी नाणेफेक करणे निष्पक्ष आहे असे का म्हणतात?
2. $\frac{7}{2}$ हे एखाद्या घटनेची संभाव्यता असु शकते का? स्पष्ट करा?
3. खालील कोणते वाद विवाद बरोबर आहे आणि कोणते नाही? उदाहरण द्या?

   i) जर दोन नाणे एकदाच टॉस केले तर तीन शक्य निष्पती आहेत. दोन छापा, दोन काटा एक काटा, एक छापा म्हणुन या प्रत्येक निष्पतीसाठी संभाव्यता $\frac{1}{3}$ आहे.

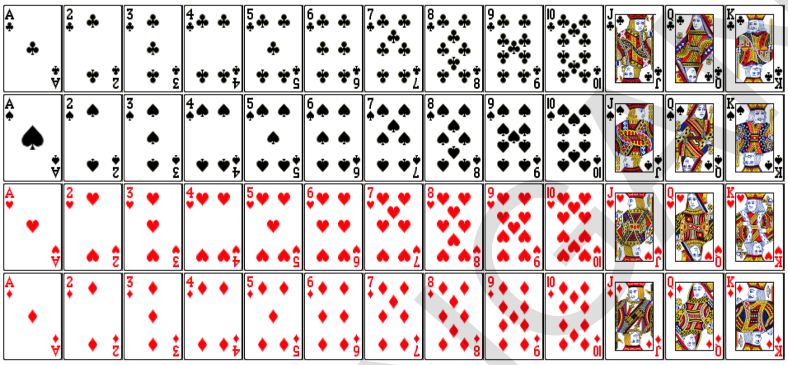
   ii) जर एक फासे फेकले तर तिथे दोन शक्य निष्पत्ती आहेत. विषम संख्या किंवा समसंख्या. म्हणुन विषम संख्या मिळविण्याची संभाव्यता $\frac{1}{2}$ आहे.

13.5 पत्त्यांचा संच आणि संभाव्यता (DECK OF CARDS AND PROBABILITY)

पत्त्यांचा संच तुम्ही पाहलात का?

पत्त्यांचा संचात एकुण 52 पत्ते असतात. ते 4 प्रकारचे असतात. प्रत्येक प्रकारामध्ये 13 पत्ते असतात ते काली पान (♠), लाल बदाम (♥), लाल इटकर (♦) आणि काळी फुल (♣).

प्रत्येका मध्ये एक्का, राजा, राणी, गुलाम, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 आणि 2 पत्ते असतात. राजा, राणी आणि गुलाम चेहऱ्याचे पत्ते म्हणतात. पत्याचा या संचाने बरेचशे खेळ खेळल्या जातात. काही खेळ पत्यांच्या दोन संचाने खेळल्या जातात. हे पत्ते वाटताना समोरील व्यक्ती जवळ असलेल्या पत्यांचा अंदाज करुन जिंकण्यासाठी संभाव्यताचा उपयोग होतो.



उदाहरण-4. मिसळविलेल्या पत्याच्या संचातुन एक पत्ता काढला तर तो पत्ता (i) एक्का आहे का? (ii) एक्का नाही का? असण्याची संभाव्यता माहित करा.

सोडवणुक : चांगले मिसळविलेल्या समसंभाव्य निष्पत्तीची खात्री असते.

(i) संचात 4 एक्के आहेत.

समजा पत्ता हा एक्का आहे, या घटनेसाठी E घेऊ.

E च्या अनुकुल निष्पत्तीची संख्या = 4

शक्य निष्पत्तीची संख्या = 52 (का ?)

म्हणुन $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) समजा पत्ता हा एक्का नाही या घटनेसाठी F घेऊ

F घटनेसाठी अनुकुल निष्पत्तीची संख्या = 52 - 4 = 48 (का?)

शक्य निष्पत्तीची संख्या = 52

म्हणुन $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

पर्यायी पध्दत : नोंद करा की, F हे $\overline{E}$ नसलेला

म्हणुन P(F) ला खालील प्रमाणे आपण गणना करु शकतो.

$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

प्रयत्न करा

तुमच्या जवळ मिसळविलेल्या पत्त्यांचा एक संच आहे तर

1. राणी पत्ता निघण्यासाठी संभाव्यता किती आहे?

2. चेहऱ्यांचा पत्ता निघण्यासाठी किती संभाव्यता आहे?
3. काली पान पत्ता निघण्यासाठी किती संभाव्यता आहे?
4. काली पान चेहऱ्यांचा पत्ता निघण्यासाठी किती संभाव्यता आहे?
5. चेहऱ्यांचा पत्ता न निघण्यासाठी किती संभाव्यता आहे?

13.6 संभाव्यतेचा उपयोग (USE OF PROBABILITY)

संभाव्यताचा उपयोग होऊ शकणाऱ्या आणखी काही संदर्भ पाहु या. आपल्याला माहित आहे की, खेळामध्ये काही देश उत्तम खेळतात आणि काही देश तेवढे चांगले खेळत नाही. तसेच आपल्याला हे सुध्दा माहित आहे की, एक खेळ जर दोन व्यक्ती खेळत असेल तर ते दोघे समान वेळा जिंकत नाही. एका खेळाडुची एक संघ जिंकण्याची संभाव्यता निश्चितपणे दुसऱ्या संघातील खेळाडुच्या संभाव्यता पेक्षा जास्त असते. आपण आपल्याला माहित असलेल्या लोकांचे वाढदिवसांची नोंद ठेवतो. काही वेळा काही लोकांची सारखीच वाढदिवसांचा दिनांक असतो. हे सामान्य घटना आहेत किंवा हे केव्हा केव्हा घडते. याचा आपण माहित करु शकतो. हे करण्यासाठी सांस्कृतीक संभाव्यतेची आपल्याला मदत होते.

उदाहरण-5. संगीता आणि रेश्मा टेनीस खेळत आहे. संगीता हा खेळ जिंकण्याची संभाव्यता 0.62 आहे. हे माहित आहे. तर रेश्मा हा खेळ जिंकण्याची संभाव्यता किती आहे?

सोडवणुक : समजा संगीता आणि रेश्मा हा खेळ जिंकण्यासाठी घटना अनुक्रमे S आणि R आहे.

संगीता जिंकण्याची संधी ची संभाव्यता = P(S) = 0.62 (दिलेले आहे)

रेश्मा जिंकण्याची संधी ची संभाव्यता = P(R) = 1 - P(S)

= 1 -0.62 = 0.38 [R आणि S हे पुरक आहेत.]

उदाहरण-6. शारदा आणि हमीदा मैत्रीनी आहेत. त्या दोघीचा वाढदिवस (i) वेगळे असण्याचा ? (ii) सारखी असण्याचा? किती संभाव्यता आहे? (लिप वर्ष सोडुन)

सोडवणुक : दोन मैत्रिणी पैकी शारदाचा वाढदिवस वर्षातुन कोणत्यातरी एका दिवशी आहे. आता हमीदाचा वाढदिवस सुध्दा वर्षातील 365 दिवसामध्ये कोणता तरी एक दिवस आहे. आपण असे समजु शकतो की, हे समसंभाव्यता निष्पत्ती 365 आहेत.

(i) जर हमीदाचा वाढदिवस शारदाच्या वाढदिवसापेक्षा भिन्न दिवस असेल तर तिच्या वाढदिवसासाठी अनुकुल निष्पत्ती 365 - 1 = 364

म्हणुन P (हमीदाचे वाढदिवस सारखाच आहे) = $\frac{364}{365}$

(ii) P(शारदा आणि हमीदाचा वाढदिवस सारखाच आहे) = 1 - P (दोघांचा वाढदिवस भिन्न आहे)

$$= 1- \frac{364}{365} \text{ [P(}\overline{E}\text{ वापरुन) = 1 - P(E)] } = \frac{1}{365}$$

उदाहरण-7. एका शाळेत 10 व्या वर्गात 40 विद्यार्थी आहे.ज्यामध्ये 25 मुली आणि 15 मुले आहेत. वर्गशिक्षकांना एका विद्यार्थ्यांची वर्ग प्रतिनीधी म्हणुन निवड करायची आहे. एक सारख्या असणाऱ्या कार्ड वर शिक्षकांनी प्रत्येक विद्यार्थ्यांचे नाव लिहिले. नंतर ते सर्व कार्डस तिने एका पेटीत टाकुण चांगले मिसळविले. नंतर तिने त्या पेटीतुन एक कार्ड काढले. तर त्या कार्ड लिहिलेले नाव (i) मुलीचे की ? (ii) मुलांचे? असल्याचे संभाव्यता किती आहे?

सोडवणुक : तेथे 40 विद्यार्थी आहेत आणि फक्त एक नावाचे कार्ड निवडले आहे.

सर्व शक्य निष्पत्तीची संख्या 40 आहे.

(i) मुलीच्या नावाच्या कार्डसाठी अनुकुल निष्पत्तीची संख्या = 25 (का?)

$\therefore$ P (मुलीचे नाव असलेले कार्ड) = P(मुलगी) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) मुलांच्या नावाच्या कार्डसाठी अनुकुल निष्पत्तीची संख्या = 15 (का?)

म्हणुन P(मुलांचे नाव असलेले कार्ड) = P(मुले) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

किंवा P(मुले) = 1 - P(मुले नाही) = 1 - P(मुली) = $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

अभ्यास - 13.1

1. खालील विधान पुर्ण करा.

(i) E घटनेची संभाव्यता + E नाही घटनेची संभाव्यता = ______________

(ii) केव्हाही अशक्य घटनेची संभाव्यता __________.
त्याला __________ घटना म्हणतात.

(iii) निश्चीत घडणाऱ्या घटनांची संभाव्यता __________.
त्याला______ घटना म्हणतात.

(iv) एका प्रयोगातील सर्व प्रार्थमिक घटनांच्या संभाव्यतेची बेरीज_________

(v) एका घटनेची संभाव्यता केव्हांही __________ पेक्षा मोठा किंवा समान आणि _______ पेक्षा लहान किंवा समान असते.

2. खालील पैकी कोणते समसंभाव्य निष्पत्तीचे आहे? स्पष्ट करा.

(i) चालकाने कार चालु केली. कार चालु होते किंवा चालु होत नाही?

(ii) एक खेळाळु बॉस्केट मध्ये बॉल टकला. बॉस्केट बॉल मध्ये पडला किंवा नाही.

(iii) सत्य - असत्य प्रश्नाला उत्तर विद्यार्थ्यांने दिले. उत्तर हे बरोबर किंवा चुक आहे.

(iv) बाळ जन्माला आल, ते मुलगा किंवा मुलगी आहे.

3. जर P(E) = 0.05, Eनाही ची संभाव्यता किती आहे?
4. एका पिशवीत फक्त निंबुच्या स्वादाचे चॉकलेट आहेत. मालीनी पिशवीत न पाहता त्यातुन एक चॉकलेट काढली असता ती

   (i) संत्र्याचे स्वाद असण्याचे?(ii) निंबुस्वाद असण्याचे?संभाव्यता माहित करा.
5. रहीम ने पत्त्यामधुन सर्व बदामाचे पत्ते काढले तर
   i. उरलेल्या पत्त्याच्या संचातुन एक्के मिळविण्याची संभाव्यता किती आहे?
   ii. इटकर चे पत्ते मिळविण्याची संभाव्यता किती आहे?
   iii. बदाम नसलेले पत्ते मिळविण्याची संभाव्यता किती आहे?
   iv. बदामाचे एक्के मिळविण्याची संभाव्यता किती आहे?
6. तीन विद्यार्थ्यांमध्ये दोघांचे वाढदिवस सारखी नसल्याची संभाव्यता 0.992 आहे. दोन विद्यार्थ्यांचा सारखा वाढदिवस असण्याची संभाव्यता किती आहे?
7. एक फासे एकदा फेकले तर

   (i) मुळ संख्या (ii) 2 आणि 6 मधील संख्या (iii) विषम संख्या मिळण्याची किती संभाव्यता आहे?
8. पत्त्यांच्या संचामुधन लाल रंगाच्या राजाची पत्ते मिळविण्याची संभाव्यता किती आहे?
9. फासे, पत्ते किंवा वाढदिवस यांचा वापर करुन अशा प्रकारचे आणखी पाच गणित तयार करा आणि त्याच्या सोडवणुकी विषयी तुमचे शिक्षक आणि मित्रांशी चर्चा करा.

13.7 संभाव्यतेची आणखी काही उपयोजन(MORE APPLICATIONS OF PROBABILITY)

संभाव्यतेचा वापर करुन आपण काही उदाहरणे पाहिलीत. यामध्ये आपण संभाव्येताचा वापर कशा पध्दतीने केला याचा विचार करु. पुरक घटनेची संभाव्यात 1 होते होते हे आपण पाहिलो. प्रार्थमिक घटनेच्या अभ्यासाची बेरीज 1 होते. आता पर्यंत आपण चर्चा केलेल्या उदाहरणात अभ्यासाच्या गणीतात हा विषय तुमच्या लक्षात आले का? तुमचे मित्र आणि शिक्षका सोबत चर्चा करा.आणखी काही उपयोग पाहु या.

उदाहरण-8. एका पेटीत 3 निळे, 2 पांढरे आणि 4 लाल काचेच्या गोट्या आहेत. जर काचेची गोटी यार्दुच्छिक पणे पेटीतुन निवडल्यास तर ती

(i) पांढरी? (ii) निळी? (iii) लाल? असण्याची संभाव्यता किती प्रकारची आहे?

सोडवणुक : यार्दुच्छिक पणे काचेची गोटी काढणे म्हणजेच सर्व गोटी निघण्याची समसंभाव्य आहे.

∴ शक्य निष्पत्तीची संख्या = 3 +2 + 4 = 9 (का?)

समजा पांढरी गोटी निघण्याची संभाव्यता W आहे. निळी गोटी निघण्याची घटना B आहे आणि लाल गोटी निघण्याची घटना R आहे.

(i) W घटनेची अनुकुल निष्पत्तीची संख्या = 2

म्हणुन $P(W) = \frac{2}{9}$

अशाप्रकारे (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ आणि (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

नोदं करा $P(W) + P(B) + P(R) = 1$.

उदाहरण-9. हरप्रित दोन नाणे एकदाच टॉस केले. (समजा एक नाणे 1 रु. व दुसरे नाणे 2 रु.चे) तीला कमीत कमी एक छापा मिळण्याची संभाव्यता किती आहे?

सोडवणुक : आपण छापासाठी H ('head') आणि काटासाठी T ('tail') लिहु जेव्हा दोन नाणे एकदाच टॉस करतो तर शक्य निष्पत्ती (H, H), (H, T), (T, H), (T, T)असते. जे की, सर्व नाणे सम संभाव्य आहेत. येथे (H, H) म्हणजे पहिल्या नाण्यावर (1रु. नाणे) छापा आणि तसेच दुसऱ्या नाण्यावर (2रु.चे नाणे) सुध्दा छापा याच प्रमाणे (H, T) म्हणजे पाहिल्या नाण्यावर छापा आणि दुसऱ्या नाण्यावर काटा. तसेच बाकीचे सुध्दा असतात.

किमान एक छापा घटनेसाठी E च्या अनुकुल निष्पत्ती (H, H), (H, T) आणि (T, H).

म्हणुन, E च्या अनुकुल निष्पत्तीची संख्या 3 आहे

$\therefore P(E) = \frac{3}{4}$ [एकुण शक्य निष्पत्तीची संख्या = 4]

म्हणजेच, हरप्रितला कमीत कमी एक छापा मिळविण्याची संभाव्यता $\frac{3}{4}$ आहे.

तपासणी करा:

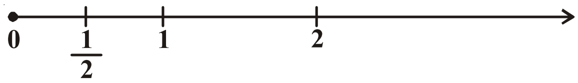
वरील सर्व उदाहरणामध्ये प्रत्येक प्रयोगातील शक्य निष्पत्ती संख्या मर्यादीत आहे. हे तुमच्या निदर्शनास आले का? जर नाही, आता ते तपासणी करा.

काही प्रयोगात निष्पत्ती हा दोन संख्याच्या मधातील सर्व संख्या, एक वर्तुळ किंवा आयतातील सर्व बिंदु होण्याची शक्यता आहे. अशा संदर्भातील सर्व शक्य निष्पत्तीची संख्या तुम्ही मोजु शकता का? तुम्हाला माहित की, दोन संख्यांच्या मधात अमर्यादीत संख्या आहेत. किंवा वर्तुळाच्या मधात अमर्यादीत बिंदु असतात. त्यामुळे ते शक्य नाही. म्हणुन तात्वीक संभाव्यतेची व्याख्या या सध्याच्या रुपात उपयोगी पडत नाही.

अशा प्रकारच्या गणीताला कसे सोडवावे हे खालील उदाहरणाव्दारे समजुन घेऊ.

उदाहरण-10.(परिक्षेसाठी नाही) संगीत खुर्ची स्पर्धेमध्ये खेळणाऱ्यांना सांगीतल्या गेले तेव्हा ते खेळ चालु करतील त्यांच्या 2 मिनीट मध्याच्या आत संगीत केव्हांही थांबेल त्या वेळी खेळ थांबवावे लागणार. खेळ चालु झाल्यानंतर पहिल्या अर्ध्या मिनीटात संगीत थांबण्याची संभाव्यता किती आहे?

सोडवणुक : येथे सर्व शक्य निष्पत्ती 0 आणि 2 मधातील संख्या आहेत. 0 ते 2 च्या दरम्यानचा भाग संख्या रेषेवर खालील प्रमाणे



पहिल्या अर्ध्या मिनीटात संगीत थांबण्याच्या घटनेला समजा E

E च्या शक्य निष्पत्ती 0 ते $\frac{1}{2}$ वरुन संख्या रेषे वरील बिंदु

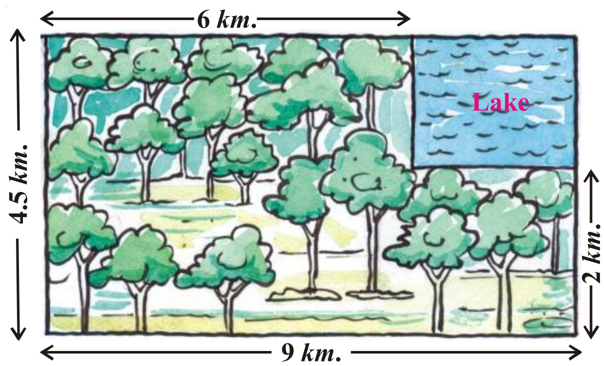
0 ते 2 वरुन अंतर 2 आहे. जेथे 0 ते $\frac{1}{2}$ वरुन अंतर $\frac{1}{2}$ आहे.

सर्व निष्पत्ती समसंभाव्य असल्याने एकुण अंतर 2 आणि E घटनेची अनुकुल अंतर $\frac{1}{2}$ आहे.

म्हणुन $P(E) = \dfrac{\text{E घटनेची अनुकुल अंतर}}{\text{एकुण अंतर}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

एकुण क्षेत्रफळाच्या अनुकुल क्षेत्रफळाचे गुणोत्तराची संभाव्यता माहित करण्यासाठी आता आपण या संकल्पनेला विस्तारीत करण्याचा प्रयत्न करु.

उदाहरण-11. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एका आयताकार भागात एक हेलीकॉप्टर कोसळले म्हणुन माहिती आली ते तळ्यात कोसळण्याचे संभाव्यता किती?



सोडवणुक : दिलेल्या भागात कोठेही हेलीकॉप्टर कोसळण्याचे समसंभाव्य आहे.जेथे हेलीकॉप्टर कोसळले आहे. त्या पुर्ण भागाचे क्षेत्रफळ $= (4.5 \times 9)$ कि.मी.$^2 = 40.5$ कि.मी.^{2}

तळ्याचे क्षेत्रफळ $= (2.5 \times 3)$ कि.मी.$^2 = (7.5)$ कि.मी.^{2}

म्हणुन P (हेलीकॉप्टर तळ्यात कोसळण्याचे) $= \dfrac{7.5}{40.5} = \dfrac{5}{27} = 0.185$

उदाहरण-12. एका पुट्याच्या पेटीत 100 शर्ट आहेत. ज्यामध्ये 88 चांगल्या दर्जाचे आहे, 8 किमान दोषाचे आणि 4 कमाल दोषाचे आहेत. ट्रेडर जॉनी हा फक्त चांगल्या दर्जाचे शर्ट स्विकारतो पण आणखी एक ट्रेडर सुजाता फक्त कमाल दोष असलेल्या शर्टना परत करते.

(i) ते जॉनी स्विकारणारे संभाव्यता किती? (ii) ते सुजाता स्विकारणारे संभाव्यता किती?

सोडवणुक : 100 शर्ट च्या पेटीतुन यार्दुच्छिक पणे एक शर्ट निवडला म्हणुन तिथे 100 समसंभाव्य निष्पत्ती आहेत.

(i) जॉनीचे अनुकुल निष्पत्तीची संख्या = 88 (का?)

म्हणुन P (जॉनी स्विकारणारे शर्ट) = $\frac{88}{100} = 0.88$

(ii) सुजाता चे अनुकुल निष्पत्तीची संख्या = 88 + 8 = 96 (का?)

म्हणुन P (सुजाता स्विकारणारे शर्ट) = $\frac{96}{100} = 0.96$

उदाहरण-13. एक लाल आणि एक पिवळे असे दोन फासे एकदाच फेकले तर सर्व शक्य निष्पत्ती लिहा. फास्याच्या वरच्या बाजुला मिळणाऱ्या दोन संख्याची बेरीजेची (i) 8 (ii) 13 (iii) 12 किंवा 12 पेक्षा कमी होण्यासाठी संभाव्यता किती?

सोडवणुक : जेव्हा लाल फासे 1 दाखवेल, तेव्हा पिवळे फासे 1, 2, 3, 4, 5, 6. यापैकी एखादी संख्या दाखवेल. त्याच प्रकारे लाल फासे '2', '3', '4', '5' किंवा '6' दाखवेल. तेव्हा पांढरा फासा1,2,3,4,5,6 यापैकी एखादी संख्यादाखवेल प्रयोगाची शक्य निष्पत्ती बाजुच्या आकृतीत दाखविलेली आहे. प्रत्येक क्रमीक जोडीत पहिली संख्या लाल फास्याची आणि दुसरी संख्या पांढऱ्या फास्यावरची आहे.

(1, 4) हे(4, 1) पेक्षा भिन्न आहे. याची नोंद ठेवा (का?)

म्हणुन शक्य निष्पत्तीची संख्या n(S) = 6 × 6 = 36.

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

(i) दोन संख्याची बेरीज 8 येण्याची घटनेला E ने दर्शवु चे अनुकुलन निष्पत्ती (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) (आकृती पहा.)

म्हणजेच E चे अनुकुलन निष्पत्तीची संख्या n(E) = 5.

म्हणुन $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}$

(ii) दोन संख्याची बेरीज 13 येण्याची घटनेला F ने दर्शवु.घटनेची अनुकुल निष्पती नाही.

म्हणुन, $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

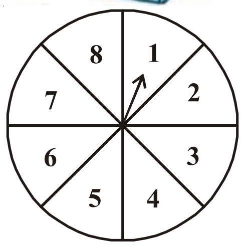
(iii) दोन संख्याची बेरीज 12 येण्याची घटनेला G, ने दर्शवु, घटनेची अनुकुल निष्पत्ती सर्व असल्याने

म्हणुन $P(G) = \frac{36}{36} = 1$

अभ्यास - 13.2

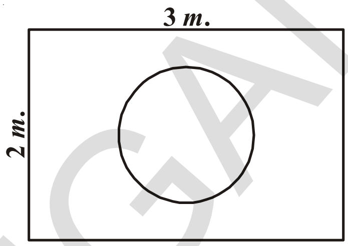
1. एका पिशवीत 3 लाल बॉल आणि 5 काळे बॉल आहेत. पिशवी मधुन एक बॉल यार्दुच्छिक पणे निवडल्यास (i) लाल बॉल (ii) लाल बॉल नसलेले निघण्याची संभाव्यता किती आहे?
2. एका पेटीत 5 लाल गोट्या, 8 पांढऱ्या गोट्या आणि 4 हिरव्या गोट्या आहेत. पेटीतुन एक गोटी यार्दुच्छित पणे बाहेर काढली तर (1) लाल (ii) पांढरे (iii) हिरवे नसलेले गोट्या निघण्याची संभाव्यता किती आहे?
3. लहान मुलाच्या पैशाच्या डब्यात शंभर 50 पै. नाणे, पन्नास 1 रुपयाचे नाणे, वीस 2 रुपयाचे नाणे, दहा 5 रुपयाचे नाणे आहेत. डब्बा खाली वरी केल्यानंतर त्यामधुन जर एक नाणे खाली पडण्याचे समसंभाव्य असेल तर (i) 50 पै.नाणे खाली पडण्याची? (ii) 5रु.चे नाणे नसलेले नाणे खाली पडण्याचे संभाव्यता किती असेल?
4. गोपीने त्याच्या अॅक्वारीयमसाठी (जलजपात्र)एक मासोळी विकत आणली 5 नर मासे आणि 8 मादी मासे असलेल्या हौदात दुकानदाराने हात टाकुन यार्दुच्छिकपणे एक मासे काढली (आकृती पहा) तर नर मासे निघण्याची किती संभाव्यता आहे?

5. एका खेळात बाणाला वेगात फिरवले (आकृतीत दाखविलेले आहे) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ला सुचित ते बाण थांबते. ते सर्व समसंभाव्य निष्पत्तीचे आहेत. तर हे बाण थांबण्याची संभाव्यता.
   (i) 8 वर? (ii) विषम संख्येवर?
   (iii) 2 पेक्षा मोठ्या संख्येवर? (iv) 9 पेक्षा लहान संख्येवर?



6. 52 पत्यांना चांगल्या मिसळलेल्या संचातुन एक पत्ता निवडला खालील पत्ता मिळवण्याची संभाव्यता माहित करा.
   (i) लाल रंगाचा राजा (ii) चेहऱ्याचा कार्ड (iii) लाल चेहऱ्यांचा कार्ड
   (iv) बदाम गुलाम (v) काळीपान पत्ता (vi) इटकर राणी
7. एका पत्याच्या संचातुन इटकरचे पाच पत्ते, 10 राजा, राणी गुलाम आणि एक्का फक्त घेऊन चांगले मिसळुन यार्दुच्छिकपणे त्यातुन एक पत्ता निवडत
   (i) तो पत्ता राणी होण्याची संभाव्यता किती?
   (ii) जर राणीचा पत्ता निवडला तर ते बाजुला ठेऊन,(न बदलता) दुसरा पत्ता बाहेर निवडला तर ते (a) एक्का होण्याचे (b) राणी होण्याचे संभाव्यता किती?
8. 132 चांगल्या दर्जाच्या पेनी सोबत कमी दर्जाचे 12 पेन चुकीने मिसळल्या गेले. त्यापेनीला नुसते पाहुन ते चांगले आहे कींवा कमी दर्जाचे आहे. हे सांगात येणे कठिण आहे. या गठयातुन एक पेन यार्दुच्छित पणे काढले तर ते पेन चांगले असण्याची संभाव्यता किती आहे?
9. 20 बल्बच्या पॅकेट मध्ये 4 कमी दर्जाचे आहेत. पॅकेट मधुन यार्दुच्छित पणे एक बल्ब निवडला. तर ते कमी दर्जाचे असण्याची किती संभाव्यता आहे? जर निवडलेला बल्ब चांगला असेल तर त्याला बाजुला ठेऊन अजुन एक बल्ब यार्दुच्छिक पणे पॅकेट मधुन निवडला तर तो चांगले असल्याची संभाव्यता किती आहे?

10. 1 ते 90 पर्यंत संख्याची खुण केलेले 90 डिस्क एक पेटीत आहेत. पेटीतुन एक डिस्क यार्दुच्छित पणे निवडला तर ते (i) दोन अंकी संख्या असणारे (ii) पुर्ण वर्ग संख्याचे डिस्क (iii) 5 ने भाग जाणाऱ्या संख्याचे डिस्क असण्याची संभाव्यता माहित करा.
11. बाजुला दिलेल्या आकृतीच्या आयताकार भागात यार्दुच्छिक पणे एक फासा सोडला तर ते फासा 1 मी. व्यास असलेल्या वर्तुळाच्या आत पडण्याची संभाव्यता किती आहे?



12. 144 बॉलच्या एका प्लॉंट मध्ये 20 पेनी कमी दर्जाचे आहे आणि उरलेले चांगल्या दर्जाचे आहेत. दुकानदार यार्दुच्छितपणे त्या प्लॉंटमधुन एक पेन काढुन सुधाला दिले. त्याला 1) सुधा विकत घेण्यासाठी2)ती विकत न घेण्यासाठी संभाव्यता किती किती आहे?
13. दोन फासे एकदाच फेकले आणि त्यांची बेरीज केली (i) खाली दिलेल्या तक्ता पुर्ण भरा.

2 फास्यावरची बेरीज घटना	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
संभाव्यता	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{12}{36}$

(ii) विद्यार्थी म्हणाले की, येथे 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 आणि 12 अशा 11शक्य निष्पती आहेत. म्हणुन प्रत्येकाची संभाव्यता $\frac{1}{11}$ आहे. या वादाशी तुम्ही सहमत आहात का? कारणे द्या

14. एका रुपयांच्या नाण्याला 3 वेळा टॉस केले. जर ते तीन वेळा छापा किंवा तीन वेळा काटा पडला तर हनीफ जिंकतो. नाही तर हनिफ हरतो. तर ती खेळ हरण्याची किती संभाव्यता आहे?
15. एका फास्याला दोनदा फेकले. दोन वेळा क्रमाने (i) 5 वर दिसण्याचे (ii) 5 वर न दिसण्याचे संभाव्यता माहित करा? [**सुचना** : एक फासा दोनदा फेकणे आणि दोन फासे एकदाच फेकणे हे दोन्ही प्रयोग सारखेच असतात.].

ऐच्छिक अभ्यास

[हा अभ्यास परिक्षेसाठी नाही]

1. एका आठवड्यामध्ये एका विशिष्ट दुकानात शाम आणि एकता गेलेत ते एकाच दिवशी किंवा भिन्न दिवशी दुकानात जाण्याची समसंभाव्य आहे. ते दुकानात (i) एकाच दिवशी जाण्याची (ii) लागोपाठ दिवसात (iii) वेगवेगळ्या दिवसात जाण्याची संभाव्यता माहित करा?
2. एका पिशवीत 5 लाल बॉल आणि काही निळे बॉल आहेत. जर लाल बॉल पेक्षा दुप्पट संभाव्यता निळे बॉल आहेत तर पिशवीतील निळ्या बॉलची संख्या माहित करा?
3. एका पेटीत 12 बॉल आहेत ज्या मध्ये x काळे बॉल आहेत. जर पेटीतुन यार्दुच्छित पणे एक बॉल काढला तर ते काळा बॉल असण्याची संभाव्यता किती आहे? जर आणखी 6 बॉल पेटीत टाकले तर ते निघण्याची संभाव्यता पुर्वीपेक्षा दुप्पट होइल. तर x माहित करा.

4. एक भाड्या मध्ये 24 गोट्या आहेत. काही हिरवे आणि इतर निळे आहेत. जर भाड्यातुन यार्दुच्छित पणे एक गोटी काढली तर हिरवे निघण्याची संभाव्यता $\frac{2}{3}$ आहे. तर भांड्यातील निळ्या गोट्याची संख्या माहित करा.

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

शास्त्रीय संभाव्यता व प्रयोगिक संभाव्यता ची तुलना करा. निरनिराळ्या संदर्भात संभाव्यता माहित करा. जसे 100 वेळा फासे फेकले तर 1) समसंख्या 2) विषमसंख्या 3) मुळ संख्या येण्याची संभाव्यता माहित करा.

आपण काय चर्चा केली.

या धड्यात खालील मुद्द्यांचा तुम्ही अभ्यास केलेला आहात.

1. आपण प्रायोगिक संभाव्यता आणि तात्विक संभाव्यताचे प्रयोग केलेत.
2. E घटनेची तात्वीक संभाव्यताला P(E) मध्ये खालील प्रमाणे व्याख्या करु शकतो.

$$P(E) = \frac{(E) \text{ च्या अवडत्या प्रयत्नांची संख्या}}{\text{एकुण प्रयोगातील सर्व प्रयत्नांची संख्या}}$$ येथे आपण असे समजलेले आहोत की, प्रयोगाची निष्पत्ती समसंभाव्य आहे.

3. निश्चित घटनेची संभाव्यता 1 आहे.
4. अश्यक्य घटनेची संभाव्यता 0 आहे.
5. E घटनेची संभाव्यता P(E) ही संख्या आहे जसे $0 \leq P(E) \leq 1$
6. ज्या घटनेची फक्त एकच निष्पत्ती असते त्याला प्रार्थमिक घटना म्हणतात. प्रार्थमिक घटनेच्या सर्व प्रयोगाची बेरीजेची संभाव्यता 1 आहे.
7. कोणत्याही E घटनेसाठी $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ येथे $\overline{E}$ नाही साठी E'आहे E आणि $\overline{E}$ ला पुरक घटना म्हणतात.
8. आणखी काही पदांचा वापर या धड्यात केलेला आहे. ते खालील प्रमाणे आहेत.

यार्दुच्छिक प्रयोग : यार्दुच्छिक प्रयोगाचे निर्णय आगोदरच माहित होतात. परंतु विशिष्ट कामाचे निर्णयाचे भाकीत करता येत नाही.

सम संभाव्य घटना : दोन किंवा दोन पेक्षा जास्त घटना मध्ये प्रत्येक घटना घडण्याची समान संधी असते तेव्हा त्या घटनांना समसंभाव्य घटना म्हणतात.

अपवर्णक घटना : दोन किंवा दोन पेक्षा जास्त घटना मध्ये प्रत्येक घटना घडण्यामध्ये दुसरी घटना अडथळा करते. तेव्हा त्या घटनांना अपवर्णक घटना

पुरक घटना : एका घटनेला काही निष्पत्ती आहेत असे विचारात घेऊ. नमुना निरक्षणस घटनेचे सर्व निष्पत्ती जे अनुकुल घटनेत नसतील त्याला पुरक घटना म्हणतात.

सर्व समावेशी घटना : जर संयोग नमुना अवकाश असेल तर सर्व घटना या सर्व समावेशी घटना असतात.

निश्चित घटना : प्रयोगाच्या एका प्रयत्नात निश्चित घडत असेल तर यार्दुच्छित पणे प्रयोगाचे नमुना अवकाशाला निश्चित घटना म्हणतात.

अशक्य घटना : जी घडणे घडते शक्य नाही त्याला अशक्य घटना म्हणतात.

धडा

14 सांख्यिकी

(Statistics)

14.1 प्रस्तावना

गणेशनी त्याच्या वर्गातील 26 विद्यार्थ्यांचे गणिताच्या संग्रहणात्मक मुल्यांकण -1 मध्ये मिळालेल्या गुणांची खालील प्रमाणे नोंद केली.

अर्जुन	76	नारायण	12
कामिनी	82	अनुष	24
शफिक	64	दुर्गा	39
केशव	53	शिवा	41
लता	90	रहीम	69
राजेंदर	27	राधा	73
रामु	34	कार्तिक	94
सुध्दा	74	जोसेफ	89
क्रिष्णा	76	आदित्या	64
सोमु	65	लक्ष्मी	46
गौरी	47	सिता	19
उपेंद्रा	54	रेहाना	53
रामय्या	36	अनिता	69

वरील माहिती वर्गीकृत आहे. किवा नाही? का?

त्यांच्या गणिताच्या शिक्षकाने वर्गातील विद्यार्थ्यांनी गणिताच्या संग्रहणात्मक मुल्यांकण - I मधील प्रतिभेची रिपोर्ट देण्यास सांगीतले.

गणेशनी वर्गातील प्रतिभा समजुन घेण्यासाठी खालील सारणी बनविली.

गुण	मुलांची संख्या
0 - 33	4
34 - 50	6
51 - 75	10
76 - 100	6

वरील सारणीत दिलेली माहिती वर्गीकृत आहे का अवर्गीकृत आहे?

ही सारणी त्याच्या शिक्षकाला दाखविली तेव्हा शिक्षकांनी त्याचे कौतुक केले. ही सारणी संक्षीप्त आणि समजण्यासाठी सोपी आहे. जास्तीत जास्त विद्यार्थ्यांनी मिळविलेले गुण 51-75 आहे. हे दिसुन येते. गणेशला सारणी बनविण्यासाठी कमी व्याप्ती चा उपयोग केला पाहिजे असे तुम्हाला वाटते का? कारणे द्या?

मागील वर्गात तुम्ही वर्गीकृत आणि अवर्गीकृत माहिती मधी फरकांविषयी आणि या माहितीस सारणी व्दारे कशा प्रकारे दर्शविता येते हे शिकलात. अवर्गीकृत माहितीचा मध्य (सरासरी) कसा काढतात हे सुध्दा माहित आहे. आता याची आठवण करुन मध्य, मध्यक आणि बहुलक कसे काढतात हे शिकु.

14.2 वर्गिकृत माहितीचा मध्य (Mean of Grouped Data)

आपणास माहित आहे की, अवलोकनाचा मध्य (सरासरी) ही सर्व अवलोकनाच्या किंमतीची बेरीज आणि एकुण अवलोकानाची संख्या होय. समजा $x_1, x_2, \ldots, x_n$ चा अवलोकानाची वारंवारता अनुक्रमे $f_1, f_2, \ldots, f_n$ आहे. म्हणजे x_1 ही राशी f_1 वेळा x_2 ही राशी f_2 वेळा येत आहे.

आता, सर्व राशींची बेरीज $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$ आणि राशींची संख्या $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

म्हणुन दिलेल्या सामग्रीचा (माहितीचा)मध्य $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n}$$

वरील मध्याला संक्षिप्तपणे ग्रीक अक्षर $\sum$ (सिग्मा असे वाचतात)ने दर्शवितात. म्हणजे. $\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

उदाहरण-1. एका शाळेतील 10 व्या वर्गाच्या 30 विद्यार्थ्यांनी गणितात मिळविलेले गुण खालील तक्त्यात दिले आहे. विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या गुणांचा मध्य (सरासरी) काढा.

मिळविलेल गुण(x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
विद्यार्थ्यांची संख्या (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

सोडवणुक : या सामग्रीची पुर्नरमांडणी करुन सर्व राशींची बेरीज काढु या.

प्राप्त गुण (x_i)	विद्यार्थ्यांची संख्या (fi)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
एकुण	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

म्हणुन $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{1779}{30} = 59.3$

म्हणुन गुणांचा मध्य (सरासरी) 59.3 आहे.

दैनंदिन जिवनातील अनेक संदर्भात मोठ्या सामग्रीला अर्थपुर्ण समजुन घेण्यासाठी त्या सामग्रीला वर्गीकृत माहितीत बदलने गरजेचे आहे. म्हणुन आपणास अवर्गिकृत सामग्रीला वर्गिकृत सामग्रीत बदलुन मध्य माहित करण्याच्या काही पध्दती पाहु या.

उदाहरण -1 मधील अवर्गीकृत सामग्रीला वर्गीकृत सामग्रीमध्ये बदलुन वर्गांतर 15 घेऊन वर्गअवकाश बनवुत. प्रत्येक वर्गविकाशाची वारंवारता एका वर्गाच्या वरची वर्ग मर्यादेला समान गुण मिळविलेल्या विद्यार्थ्यांना त्या समोरील वर्गात दाखविले पाहिजे. उदा. 40 गुण मिळविलेल्या विद्यार्थ्यांना 25-40 या वर्गात न घेता. 40-55 या वर्गात घेतले पाहिजे. हे लक्षात ठेवुन आपण वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी बनवु या.

वर्ग अवकाश	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
विद्यार्थ्यांची संख्या	2	3	7	6	6	6

आता प्रत्येक वर्गांतरासाठी पुर्ण वर्गाला दर्शविणारी एक किंमत पाहिजे. गृहीत धरा की, प्रत्येक वर्गाची वारंवारता ही त्या वर्गाच्या मध्यकिंमती भोवती केंद्रीकृत असते. म्हणुन प्रत्येक वर्गाच्या मध्यकिंमतीसाठी निवड त्या वर्गात येणारी राशी दर्शविते. यालाच वर्ग मध्य म्हणतात. वर्गाच्या वरच्या आणि खालच्या सिमेच्या सरासरी वरुन वर्गांतर मध्य वाढता येतो.

$$\text{वर्गांतर मध्य किंवा वर्गमध्य} = \frac{\text{वरची वर्ग सिमा + खालची वर्ग सिमा}}{2}$$

10 -25 वर्गासाठी वर्ग मध्य $\frac{10+25}{2}$ =17.5 आहे. अशारीतीने उरलेल्या वर्गांतराचे वर्ग मध्य काढता येते. हे आपण तक्त्यात लिहितो. या वर्गमिध्याना आपण x_i's असे लिहितो. मध्य काढण्यासाठी वरील उदाहरणाप्रमाणे समोर जाऊ या.

वर्ग अवकाश	विद्यार्थ्यांची संख्या (f_i)	वर्ग मध्य (x_i)	f_ix_i
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
एकुण	$\sum f_i$=30		$\sum f_ix_i$ =1860.0

शेवटच्या स्तंभात सर्व किंमतीची बेरीज $\sum f_ix_i$ आहे. म्हणुन दिलेल्या सामग्रीचा मध्य $\bar{x}$ ने दर्शवितो.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

अशारीतीने मध्य माहित करण्याच्या पध्दतीला सरळ पध्दत **Direct Method**.असे म्हणतात.

वरील संदर्भात आपण सारखीच सामग्री उपयोगात आणली आणि सारख्याच सुत्राचा वापर करुन मध्य काढला. परंतु आलेले उत्तर भिन्न आहे. हे दिसुन आले. उदाहरण 1 मध्ये 59.3 हा खरा मध्य आणि 62 हा अंदाजे मध्य आहे. असे उत्तर का आले याचा तुम्ही विचार करु शकता का?

विचार करा-चर्चा करा

1. अवर्गीकृत आणि वर्गीकृत दोन्ही सामग्रीचा मध्य माहित करु शकतो. यापैकी कोणते जास्त अचुक आहे. असे तुम्हाला वाटते का?
2. पृथकरण करण्यासाठी वर्गीकृत सामग्रीचा उपयोग केव्हा जास्त सोयीस्कर असतो?

कधी कधी x_1 आणि f_1 च्या संख्यात्मक किंमती खुप मोठ्या असतात तेव्हा x_1 आणि f_1 चा गुणाकार करणे कठिण आणि जास्त वेळ घेतो. अशा संदर्भात गणिताला सोपे बनविण्यासाठी इतर पध्दतीचा विचार करु.

आपण f_i'ची किंमत बदलु शकत नाही परंतु सुलभतेने गणित करण्यासाठी x_i च्या किंमतीला लहान संख्येत बदलाता येते. हे आपण कसे करतो? या प्रत्येक x_i' मधुन एक निश्चित संख्या वजा करण्याबाबत काय म्हणता? चला उदाहरण 1 मधील माहिती घेऊन या पध्दतीने प्रयत्न करुन पाहु या.

पाहिल्या पायरीत x_i' मधील एक किंमत गृहीत मध्ये घेऊ आणि यास 'a' ने दर्शवु. गणना सोपी होण्यासाठी$x_1, x_2, ..., x_n$ मधील मध्यकिंमत 'a' ची निवड करु. म्हणुन आपण $a = 47.5$ किंवा $a = 62.5$. निवडु शकतो. समजा $a = 47.5$ घ्या.

दुसऱ्या पायरीत प्रत्येक x_i' पासुन 'a' चे विचलन माहित करु. यास d ने दर्शवु

म्हणजे $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

तिसऱ्या पायरीत d_i आणि त्या संगत असलेली वारंवारता f_i, आणि सर्व $f_i\, d_i$' ची बेरीज घ्या. ही गणना खालील तक्त्यात दाखविलेली आहे.

वर्ग अवकाश	विद्यार्थ्यांची संख्या (f_i)	वर्ग मध्य (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$ $x_i = a$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5 (a)	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
एकुण	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

वरील तक्त्यावरुन विचलनाचा मध्य $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

आता $\bar{d}$ आणि $\bar{x}$ मधील संबंध माहित करु.

कारण d_i ची किंमत येण्यासाठी प्रत्येक x_i मधुन 'a' वजा केले पाहिजे. म्हणुन मध्य $\overline{x}$ येण्यासाठी आपणास 'a'ला $\overline{d}$ मध्ये मिळविले पाहिजे. यास गणितात असे दर्शवितात.

विचलनाचा मध्य $\overline{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

म्हणुन $$\overline{d} = \frac{\sum f_i(x_i - a)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$= \overline{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

$$\overline{d} = \overline{x} - a$$

म्हणुन $$\overline{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

$a, \sum f_i d_i$ आणि $\sum f_i$ च्या किंमती तक्त्यावरुन प्रतिक्षेपीत केल्यास

$$\overline{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

म्हणुन विद्यार्थ्यांचे प्राप्त केलेल्या गुणांचा मध्य 62 आहे.

चर्चा केलेल्या वरील पध्दतीला गृहीत मध्य पध्दती **(Assumed Mean Method)** म्हणतात.

कृती

उदाहरण 1 मधील माहिती (सामग्री) x_i च्या किंमती अनुक्रमे 17.5, 32.5, ... ना गृहीत मध्य घेऊन अंकगणितीय मध्य माहित करा आणि खालील चर्चा करा.

1. वरील सर्व संदर्भात अंकगणित मध्याची किंमत समान येते का?
2. जर आपण वास्तव मध्यास गृहीत मध्य घेतल्यास $\sum f_i d_i$ काय होते?
3. कोणत्याही वर्गमध्याला गृहीत मध्य समजण्यामधील कारणे काय?

खाली दिलेल्या तक्त्यातील 4 थ्या स्तंभाच्या किंमतीचे निरिक्षण केल्यास ते सर्व 15 चे गुणक आहेत. म्हणुन 4 थ्या स्तंभातील सर्व किंमतीना आपण 15 ने भागल्यास आपणास लहान संख्या येतात. नंतर त्यास f_i शी गुणाकार करणे सोपे जाते. (येथे प्रत्येक वर्गातंराचा आकार 15 आहे)

म्हणुन $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ येथे a हा गृहीत मध्य आणि h हा वर्गातराचा आकार आहे.

आता वरील प्रमाणे u_i च्या किंमती माहित करावे. (म्हणजे $f_i u_i$ काढल्यानंतर $\sum f_i u_i$ ची किंमत काढावी) $h = 15$ घेऊन [साधारणत: वर्गांच्या आकारास h ने सुचवतात परंतु प्रत्येक संदर्भात नेहमी वर्गाचा आकार h होत नाही.].

समजा $\bar{u} = \dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

वर्ग अवकाश	विद्यार्थ्यांची संख्या (f_i)	वर्ग मध्य (x_i)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	-30	-2	-4
25-40	3	32.5	-15	-1	-3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
एकुण	$\sum f_i$=30				$\sum f_i u_i$ =29

येथे परत $\bar{u}$ आणि $\bar{x}$ मधील संख्या जाणुन घेऊ

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$

म्हणुन $$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$$

म्हणुन $$\bar{u} = \frac{\sum f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}(\bar{x} - a)$$

किंवा $$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

म्हणुन $$\bar{x} = a + h\left[\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right]$$

किंवा $$\overline{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

तक्त्यावरुन a, $\sum f_i u_i$ आणि $\sum f_i$ च्या किंमती प्रतिक्षेपीत केल्यास

$$\overline{x} = 47.5 + \frac{29}{30} \times 15$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

म्हणुन विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या गुणांचा मध्य 62 आहे.
वरील पध्दतीला पायरी विचलन पध्दती (**Step-deviation**) म्हणतात.

लक्षात घ्या:

- जर सर्व d_i'ला सामाईक घटक असल्यास पायरी विचलन पध्दत वापरणे सोयीस्कर असते.
- तिन्ही पध्दतीव्दारे माहित केलेली मध्य एकच आहे.
- गृहीत मध्य पध्दत आणि पायरी विचलन पध्दती हे सरळ पध्दतीचे सरळ रुप आहे.
- जर a आणिा h च्या किंमती वरील प्रमाणे नसल्यातरी शुन्येतर संख्या अशा आहे की, $\overline{x} = a + h\overline{u}$ असे दर्शवितात. $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

या पध्दतीला इतर उदाहरणात वापर करु या.

उदाहरण-2. भारतातील केंद्रशासीत प्रदेश आणि विविध राज्यातील ग्रामिण भागात असलेल्या प्राथमिक शाळेतील महिला शिक्षकांची शेकडेवारीचे विवरण खालील सारणीत दिले आहे. वरील तिन्ही पध्दतीचा उपयोग करुन महिला शिक्षीकेच्या टक्केवारीचा मध्य माहित करा.

महिला शिक्षीकेची टक्केवारी	15 - 25	25 - 35	35 – 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 – 85
राज्यांची संख्या 6	11	7	4	4	2	1	

स्त्रोत : *NCERT* च्या 7 व्या आखिल भारतीय शालेय शिक्षण याच्या पाहणीवरुन (सर्वे)

सोडवणुक: प्रत्येक वर्गाचा वर्ग मध्य x_i काढुन सारणी मांडा.
येथे $a = 50$, $h = 10$,

तर $d_i = x_i - 50$ आणि $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

आता d_i आणि u_i च्या किंमती काढुन सारणीत ठेवल्यास

महिला शिक्षीकेची टक्केवारी	राज्याची संख्या	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 – 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 – 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 – 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 – 55	4	50	0	0	200	0	0
55 – 65	4	60	10	1	240	40	4
65 – 75	2	70	20	2	140	40	4
75 – 85	1	80	30	3	80	30	3
एकुण	35				1390	-360	-36

वरील सारणीवरुन $\sum f_i = 35, \sum f_i x_i = 1390, \sum f_i d_i = -360, \sum f_i u_i = -36$.

सरळ पध्दतीवरुन $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

गृहीत मध्य पध्दतीवरुन $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

पायरी विचलन पध्दतीवरुन $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

म्हणुन ग्रामिण भागातील प्राथमिक शाळेतील महिला शिक्षीकेच्या टक्केवारीचा मध्य 39.71 आहे.

विचार करा - चर्चा करा

1. तिन्ही पध्दतीव्दारे आलेले उत्तर सारखेच आहेत का?
2. जर x_i आणि f_i व्यवस्थीपणे लहान असल्यास कोणत्या पध्दतीची निवड करणे योग्य ठरते?
3. जर x_i आणि f_i खुप मोठ्या संख्या असल्यास कोणत्या पध्दतीची निवड करणे योग्य ठरते?

वर्गाचा आकार जर असमान असुन, आणि x_i ही मोठ्या संख्या असल्यास आपण पायरी विचलन पध्दतीने d_i' च्या सामान्य अवयांना h घेऊन मध्य काढु शकतो.

उदाहरण-3. एक दिवशीय क्रिकेट सामान्यात एका गोलंदाजाने बाद केलेल्या गड्यांची संख्या खालील सारणीत दिली आहे. योग्य पध्दतीचा उपयोग करुन गोलंदाजांनी बाद केलेया गड्यांचा मध्य काढा. अशा मध्याची विषेशता काय आहे?

बाद केलेल्या गड्यांची संख्या	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 – 450
गोलंदाजाची संख्या	7	5	16	12	2	3

सोडवणुक :येते वर्गाचा आकार बदलतो x_i' च्या किंमती मोठ्या आहेत.तरी सुध्दा $a = 200$ आणि $h = 20$ घेऊन पायरी विचलना पध्दतीचा उपयोग करु या.नंतर आपणास तक्त्यात दिलेली माहिती मिळते

बाद झालेल्या गड्यांची संख्या	गोलंदाजाची संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ($h = 20$)	f_iu_i
20 – 60	7	40	-160	-8	-56
60 – 100	5	80	-120	-6	-30
100 – 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 – 250	12	200 (a)	0	0	0
250 – 350	2	300	100	5	10
350 – 450	3	400	200	10	30
एकुण	45				-106

म्हणुन $$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}\right) \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$$

अशाप्रकारे एक दिवसीय क्रिकेट सामान्यात या 45 गोलंदाजीनी बाद केलेल्या गड्यांची सरासरी152.89आहे.

वर्गातील प्रकल्पः

1. तुमच्या शाळेत नुकत्याच झालेल्या गणिताच्या परिक्षेत वर्गातील सर्व विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या गुणांची माहिती गोळा करा. यापासुन वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा. याच प्रमाणे इतर विषयीची सारणी बनवुन तुलना करा.योग्य पध्दतीचा वापर करुन प्रत्येक संदर्भाचा मध्य काढा.
2. एका शहरातील 30 दिवसात नमुद केलेली जास्तीत जास्त तापमानाची माहिती गोळा करा, आणि यास वर्गीकृत वारंवारता सारणीत दर्शवा. योग्य पध्दतीचा वापर करुन सामग्रीचा मध्य काढा.
3. तुमच्या वर्गातील सर्व विद्यार्थ्यांची उंची मोजुन त्यांची वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा. योग्य पध्दतीचा उपयोग करुन या माहितीचा मध्य काढा.

अभ्यास- 14.1

1. एका गावात विद्यार्थ्यांनी गट बनवुन पर्यावरणाचे जाणिव या कार्यक्रमाव्दारे त्या परिसरातील 20 घरांचा सर्वे करुन किती झाडे लावलीत याची माहिती गोळा केली.प्रत्येक घरी किती झाडे लावली याचा मध्य काढा.

झाडांची संख्या	0 - 2	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 – 14
घरांची संख्या	1	2	1	5	6	2	3

2. एका कारखाण्यातील 50 मजुरांची रोजची मजुरी खालील सारणीत दिली आहे.

दररोजची मजुरी रुपयांत	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400– 450
मजुरांची संख्या	12	14	8	6	10

योग्य पध्दतीचा उपयोग करुन त्या कारखाण्यातील मजुरांच्या दररोजच्या मजुरीचा मध्य काढा.

3. एका परिसरातील मुलांचा रोजचा जेब खर्च खालील वितरण सारणीत दाखविला आहे. मुलाचा सरासरी जेब खर्च 18 रुपये आहे. तर सुटलेली वारंवारता f माहित करा.

रोजचा जेब खर्च (रुपयांत)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
मुलांची संख्या	7	6	9	13	f	5	4

4. एका दवाखाण्यात 30 स्त्रियाची डॉक्टरांनी तपासणी करुन दर मिनीटाला त्यांच्या ह्दय स्पंदनाची नोंद खालील सारणीत दिली आहे. योग्य पध्दतीचा वापर करुन या स्त्रियांचा दर मिनीटाचा ह्दय स्पंदनाचा मध्य काढा.

ह्दय स्पंदनाची संख्या प्रति मिनीट	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
स्त्रियांची संख्या	2	4	3	8	7	4	2

5. फळांच्या बाजारामध्ये व्यापारी संत्राना टोपली बंद करुन विकतात. या टोपलीत संत्र्यांची संख्या वेगवेगळी असते. टोपलीतील संत्राची संख्या खालील सारणीत दिली आहे.

संत्राची संख्या	10-14	15–19	20-24	25-29	30–34
टोपलीचीसंख्या	15	110	135	115	25

प्रत्येक टोपलीमधील संत्राची संख्याचा मध्य माहित करा. हा मध्य माहित करण्यासाठी कोणत्या पध्दतीची निवड कराल?

6. एका परिसरातील 25 कुटुंबांचा रेाजचा जेवणासाठी केलेले खर्च खालील सारणीत दिला आहे.

रोजचा खर्च (रु.)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
कुंटुबांची संख्या	4	5	12	2	2

योग्य पध्दतीचा वापर करुन कुंटुंबाचे जेवणाचा रोजचा खर्चाचा मध्य काढा.

7. एका शहरातील 30 निवासस्थानी असलेल्या हेवतील SO_2 ची तिव्रता (parts per million, i.e., ppm) या सारणीत दिली आहे.

हवेतील SO_2 चे ppm	0.00-0.04	0.04-0.08	0.08-0.12	0.12-0.16	0.16-0.20	0.20-0.24
वारंवारता	4	9	9	2	4	2

तर हवेतील SO_2 च्या तिव्रतेचा मध्य काढा.

8. एका वर्ग शिक्षकाने एका सत्रासाठी वर्गातील 40 विद्यार्थ्यांच्या हजेरीचे विवरण खालील सारणीत दाखविले आहे. या सत्रातील 56 दिवसांपैकी विद्यार्थी किती दिवस हजर होते. याचा मध्य काढा.

दिवसांची संख्या	35-38	38-41	41-44	44-47	47-50	50-53	53-56
विद्यार्थ्यांची संख्या	1	3	4	4	7	10	11

9. 35 शहरातील साक्षरता दर (टक्क्यात) खालील सारणीत दिले आहे. साक्षरता दराचा मध्य काढा.

साक्षरता दराची %	45–55	55-65	65-75	75-85	85-95
शहरांची संख्या	3	10	11	8	3

14.3 बहुलक (Mode)

दिलेल्या राशीतील वारंवार येणाऱ्या किंमतीला बहुलक म्हणतात. वर्गीकृत सामग्रीचा बहुलक काढण्यापुर्वी खालील उदाहरणाव्दारे अवर्गीकृत सामग्रीचा बहुलक कसा माहित करतो याची आठवण करु या.

उदाहरण-4. 10 क्रिकेट सामान्यात गोलंदाजानी घेतलेले विकेट खालील प्रमाणे आहेत. : 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3 या सामग्रीचा बहुलक काढा.

सोडवणुक: सामग्रीतील राशींना क्रमात लिहिल्यास 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6 याचे निरिक्षण केले असता.

जास्तीत जास्त सामान्यात गोलंदाजानी घेतलेले विकेटची संख्या 2 आहे. (म्हणजेच तिन वेळा) म्हणुन या सामग्रीचा बहुलक 2 आहे.

हे करा

1. खालील सामग्रीचा बहुलक काढा.
   a) 5, 6, 9, 10, 6, 12, 3, 6, 11, 10, 4, 6, 7.
   b) 20, 3, 7, 13, 3, 4, 6, 7, 19, 15, 7, 18, 3.
   c) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6.
2. बहुलक नेहमी सामग्रीच्या मधोमध असतो का?
3. बहुलक बदलतो का? वरील उदाहरणातील सामग्रीत अजुन काही राशी मिळविल्यास काय होते? चर्चा करा.
4. जर उदाहरण 4 मधील राशींची सर्वात मोठी किंमत 8 ला बदलल्यास बहुलकावर काही परिणाम होतो का? चर्चा करा.

वर्गीकृत वारंवारता वितरणात, वारंवारतेकडे पाहुन बहुलक काढणे शक्य नाही. येथे आपण मोठी वारंवारता असलेल्या वर्गाचे स्थान सुचवु शकतो. या वर्गाना बहुलक वर्ग म्हणतात. त्या बहुलकीय वर्गातील किंमत हाच बहुलक आहे. त्याला खालील सुत्राने माहित करतात.

बहुलक $= l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

येथे, l = बहुलकीय वर्गाची खालची मर्यादा

h = बहुलकीय वर्गाचे वर्गांतर

f_1 = बहुलकीय वर्गाची वारंवारता

f_0 = बहुलकीय वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची वारंवारता

f_2 = बहुलकीय वर्गाच्या पुढच्या वर्गाची वारंवारता

या सुत्राचा उपयोग करुन बहुलक काढण्याची पध्दतीला खालील उदाहरणाव्दारे स्पष्ट करु.

उदाहरण-5. एका निवास परिसरातील काही विद्यार्थ्यांच्या गटांनी 20 कुटुंबाची पाहणी केली आणि कुंटुंबातील सदस्यांची संख्या खालील वारंवारता सारणीत दिली.

कुंटुंबाचा आकार	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
कुंटुंबाची संख्या	7	8	2	2	1

या सामग्रीचा बहुलक काढा.

सोडवणुक : येथे सर्वात मोठी वारंवारता 8 आहे. आणि या वारंवारतेचा संगत वर्ग 3-5 आहे. म्हणुन बहुलकीय वर्ग 3-5 आहे.

आता, बहलुकीय वर्ग = 3-5, बहुलकीय वर्गाची खालची मर्यादा $(l) = 3$, वर्गांतर $(h) = 2$

बहुलकीय वर्गाची वारंवारता $(f_1) = 8$,

बहुलकीय वर्गाच्या आधीची वारंवारता $(f_0) = 7$,

बहुलकीय वर्गाच्या पुढची वारंवारता $(f_2) = 2$.

या किंमतीना सुत्रात ठेवल्यास

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

म्हणुन वरील माहितीचा बहुलक 3.286 आहे.

उदाहरण-6. 30 विद्यार्थ्यांचे गणिताच्या परिक्षेत आलेल्या गुणांचे वितरण बाजुच्या सारणीत दिले आहे. या सामग्रीचा बहुलक काढा. याच प्रमाणे बहुलक आणि मध्याची तुलना करुन स्पष्ट करा.

वर्ग अवकाश	विद्यार्थ्यांची संख्या (f_i)	वर्ग मध्य (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
एकुण	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

सोडवणुक :सामग्रीतील जास्त विद्यार्थ्यांनी(7) मिळविलेले गुण 40-65 या वर्गात आहे. बहुलकीय वर्ग 40-55 आहे.

बहुलकीय वर्गाची खालची मर्यादा (l) = 40,

वर्गांतर (h) = 15,

वहुलकीय वर्गाची वारंवारता (f_1) = 7,

बहुलकीय वर्गाच्या आधीचे वारंवारता (f_0) = 3,

बहुलकीय वर्गाच्या पुढचे वारंवारता (f_2) = 6.

आता सुत्रावरुन बहुलक

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{2\times 7 - 6 - 3}\right) \times 15 = 40 + 12 = 52$$

स्पष्टीकरण: सामग्रीतील बहुलक 52 आहे. आता उदाहरण 1 वरुन मध्य 62 आहे आपणास माहित आहे.म्हणुन जास्तीत जास्त विद्यार्थ्यांनी मिळविलेले गुण 52 आहे. सरासरीत विद्यार्थ्यांनी मिळविलेले आहेत.

विचार करा-चर्चा करा

1. संदर्भावरुन आपण वर्गातील सर्व विद्यार्थ्यांचे सरासरी गुण किंवा जास्त विद्यार्थ्यांनी मिळविलेले गुण माहित करतो.
   a. पहिल्या संदर्भात आपण काय माहित करतो ?
   b. दुसऱ्या संदर्भात आपण काय माहित करतो ?
2. असमान वर्गांतर घेऊन वर्गीकृत सामग्रीचा बहुलक काढता येते का ?

अभ्यास - 14.2

1. एका वर्षात एका दवाखाण्यात भरती झालेल्या रुग्नांची वय खालील सारणीत दाखविले आहे.

वय (वर्षात)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
रुग्नांची संख्या	6	11	21	23	14	5

वरील सामग्रीचा बहुलक आणि मध्य काढा. केंद्रीय प्रवृत्तीच्या दोन परिमाणाची तुलना करा आणि स्पष्टीकरण द्या.

2. खालील सारणीत 225 विद्युत उपकरणांचा जिवनकाळ (तासात) दिले आहे.

जिवनकाळ(तासात)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
वारंवारता	10	35	52	61	38	29

या उपकरनांचा बहुलकीय जिवनकाळ माहित करा.

3. गुम्मडाल्ला गावातील 200 कुंटुंबाचा महिण्याच्या घरगुती खर्चाची माहिती खालील वितरण सारणीत दिली आहे. त्या कुंटुबाचा महिण्याचा बहुलकीय खर्च काढा. आणि महिण्याच्या खर्चाचा मध्य सुध्दा काढा.

खर्च (रुपयांत)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
कुटुंबाची संख्या	24	40	33	28	30	22	16	7

4. भारतातील माध्यमिक शाळेतील शिक्षक - विद्यार्थ्यांचे गुणोत्तर राज्यवारी दिले आहे. या सामग्रीचा बहुलक आणि मध्य काढा. या दोन्ही परिमाणाचे स्पष्टीकरण द्या.

विद्यार्थ्यांची संख्या	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
राज्यांची संख्या	3	8	9	10	3	0	0	2

5. एक दिवसीय आंतरराष्ट्रीय क्रिकेट सामान्यातील जागाच्या सर्वोच्च श्रेणीच्या फलंदाजानी काढलेल्या धावांची संख्या वितरण सारणीत दिले आहे.

धावा	3000-4000	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000
फलंदाजाची संख्या	4	18	9	7	6	3	1	1

या सामग्रीचा बहुलक काढा.

6. एका विद्यार्थ्याने रोडवरील एका स्थानापासुन जाणाऱ्या कारची संख्या प्रत्येक तिन मिनीटाला एकदा 100 पिरीयडसाठी नोंद केली. याचे विवरण खालील सारणीत दिले आहे.

कारची संख्या	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
वारंवारता	7	14	13	12	20	11	15	8

या सामग्रीचा बहुलक काढा.

14.4 वर्गीकृत सामग्रीचा मध्यक (Median of Grouped Data)

मध्यक हे केंद्रीय प्रवृत्तीचे माप असुन हे दिलेल्या सामग्रीची किंवा राशीची मधली किंमत आहे. अवर्गीकृत सामग्रीचा मध्यक माहित करण्यासाठी प्रथम त्या सामग्रीच्या किंमतीला चढत्या क्रमात लिहिले पाहिजे.

जर n विषम असल्यास मध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ राशी आणि

जर n सम असल्यास मध्यक हा $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ आणि $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ राशींची सरासरी होय.

समजा एका परिक्षेत 50 गुणांसाठी 100 विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या गुणांना खालील सारणीत दिलेले आहे. अशा सामग्रीचा मध्यक कसा काढतात पाहु.

प्राप्त गुण	20	29	28	33	42	38	43	25
विद्यार्थ्यांची संख्या	6	28	24	15	2	4	1	20

पहिल्यांदा चढत्या क्रमात मांडणी करुन सारणी 14.9 खालील प्रमाणे तयार करु.

प्राप्त गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या (वारंवारता)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
एकुण	100

येथे $n = 100$ ही सम संख्या आहे. मध्यक हा $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ आणि $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ ची सरासरी आहे. म्हणजेच 50वा आणि51 वा राशींची सरासरी या मधील मध्यकिंमत काढण्यासाठी संचित वारंवारता काढावी लागते.

प्राप्त गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या	संचित वारंवारता
20	6	6
25 पर्यंत	6 + 20 = 26	26
28 पर्यंत	26 + 24 = 50	50
29 पर्यंत	50 + 28 = 78	78
33 पर्यंत	78 + 15 = 93	93
38 पर्यंत	93 + 4 = 97	97
42 पर्यंत	97 + 2 = 99	99
43 पर्यंत	99 + 1 = 100	100

आता आपण या माहितीच्या आधाराने पुन्हा एक उभा स्तंभ मिळवु त्यास संचित वारंवारता स्तंभ हे नाव देऊ(*cumulative frequency column*.)
वरील सारणीवरुन आपण पाहतो की,

50 वे आवलोकन 28 आहे (का?)

51 वे अवलोकन 29 आहे.

$$\text{मध्यक} = \frac{28+29}{2} = 28.5$$

सुचना : वरील सारणीतील स्तंभ 1 आणि स्तंभ 3 ला संचित वारंवारता सारणी म्हणतात. मधले गुण 28.5 हे 50% विद्यार्थ्यांना 28.5 पेक्षा कमी 50% विद्यार्थ्यांना 28.5 पेक्षा जास्त गुण मिळाले या विषयाची माहिती कळविते.बाजुच्या वर्गीकृती वारंवारता सारणीमध्ये एका परिक्षेत 53 विद्यार्थ्यांना 100 पैकी मिळविलेले गुण दिले आहे.

प्राप्त गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या
0-10	5
10-20	3
20-30	4
30-40	3
40-50	3
50-60	4
60-70	7
70-80	9
80-90	7
90-100	8

सारणीवरुन खालील प्रश्नांची उत्तरे देण्याचा प्रयत्न करा.

10 पेक्षा कमी गुण मिळविलेल्या विद्यार्थी किती आहेत? उत्तर आहे-5. 20 पेक्षा कमी गुण मिळवलेले विद्यार्थी किती आहे? लक्षात घ्या की, 10-20 गुण प्राप्त करणाऱ्या विद्यार्थ्यांमध्ये 0-10 गुण प्राप्त करणारे सुध्दा मिळुन असतात. म्हणुन 20 पेक्षा कमी गुण मिळविलेले 5+3 म्हणजे 8 विद्यार्थी. म्हणुन आपण 10-20 या वर्गाची संचीत वारंवारता 8 म्हणुन सांगतो.(आकृती 14.11 मध्ये दाखविल्या प्रमाणे)

प्राप्त गुण	विद्यार्थी संख्या (संचित वारंवारता)
10 पेक्षा कमी	5
20 पेक्षा कमी	5 + 3 = 8
30 पेक्षा कमी	8 + 4 = 12
40 पेक्षा कमी	12 + 3 = 15
50 पेक्षा कमी	15 + 3 = 18
60 पेक्षा कमी	18 + 4 = 22
70 पेक्षा कमी	22 + 7 = 29
80 पेक्षा कमी	29 + 9 = 38
90 पेक्षा कमी	38 + 7 = 45
100 पेक्षा कमी	45 + 8 = 53

अशारितीने आपण उरलेल्या वर्गाची संचित वारंवारता माहित करु शकतो. म्हणजे 30 पेक्षा कमी गुण मिळविलेले विद्यार्थ्यांची संख्या 40 पेक्षा कमी गुण मिळविलेले विद्यार्थ्यांची संख्या40,.....100 पेक्षा कमी गुण प्राप्त केलेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या माहित करता येते.

या सारणीला संचित वारंवारता वितरण सारणी पेक्षा कमी असे म्हणतात. येथे 10,20,................100 ही त्या वर्गाची अनुक्रमे वरची मर्यादा आहे.

अशारितीने 0 किंवा त्या पेक्षा जास्त गुण मिळवलेल्या विद्यार्थ्यांच्या संख्याची सारणी तयार करु शकतो. (हि संख्या सर्व वारंवारतेच्या बेरजेशी समान आहे) वरील बेरजेपेक्षा जास्त यातुन पहिल्या वर्गाविकाशाची वारंवारता वजा करणे. ही 20 पेक्षा जास्त किंवा समान घेत वर्गविकाशाच्या वारंवारतेची बेरीज वजा केलेल्या संख्येशी समान असते. अशारितीने सर्व 53 विद्यार्थी प्राप्त केलेले गुण 0 किंवा त्यापेक्षा जास्त आहे. 0-10 या वर्गात 5 विद्यार्थी आहेत. याचा अर्थ असा की, 53-5= 48

प्राप्त गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या (संचित वारंवारता)
0 पेक्षा जास्त किंवा समान	53
10 पेक्षा जास्त किंवा समान	53 - 5 = 48
20 पेक्षा जास्त किंवा समान	48 - 3 = 45
30 पेक्षा जास्त किंवा समान	45 - 4 = 41
40 पेक्षा जास्त किंवा समान	41 - 3 = 38
50 पेक्षा जास्त किंवा समान	38 - 3 = 35
60 पेक्षा जास्त किंवा समान	35 - 4 = 31
70 पेक्षा जास्त किंवा समान	31 - 7 = 24
80 पेक्षा जास्त किंवा समान	24 - 9 = 15
90 पेक्षा जास्त किंवा समान	15 - 7 = 8

विद्यार्थ्यांना 10 किंवा त्यापेक्षा जास्त गुण मिळाले अशाप्रकारे पुढे गेल्यास 20 किंवा त्यापेक्षा जास्त गुण मिळविणारे विद्यार्थी 48-3=45, 30 किंवा त्यापेक्षा जास्त 45-4=41, आणि ...... अशा प्रकारे बाजुच्या सारणीत दाखविल्याप्रमाणे माहित करु शकतो.

या सारणीला संचित वारंवारता वितरण सारणी पेक्षा जास्त म्हणतात. येथे 0, 10, 20, ..., 90 हे त्या वर्गाच्या खालच्या मर्यादा आहेत.

आता आपण वर्गीकृत माहितीचा मध्यक काढण्यासाठी या संचित वारंवारता वितरणाचा उपयोग करु शकतो.

आता वगीकृत सामग्रीत संचित वारंवारता कडे पाहुन मधले अवलोकन शोधु शकत नाही. कारण त्या मधल्या अवलोकनाची त्या वर्गात काही किंमत असते. म्हणुन त्या वर्गातील किंमत काढण्यासाठी त्या पुर्ण वितरणाला दोन भागात विभागले पाहिजे. परंतु तो कोणता वर्ग होतो? हे कसे माहित करतो?

याला माहित करण्यासाठी आपण सर्व वर्गाची $\frac{n}{2}$ ची संचित वारंवारता काढुन कोणत्या वर्गाची वारंवारता $\frac{n}{2}$ ला पहिल्यांदा व्यापते त्या वर्गाला वर्गाचा मध्यक म्हणतात.

गुण	विद्यार्थी संख्या (f)	संचित वारंवारता (cf)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53

वरील सारणीत $n = 53$ म्हणुन $\frac{n}{2} = 26.5$ आता 60-70 हा वर्ग आहे. यांची संचित वारंवारता 29 आहे. ही $\frac{n}{2}$ पेक्षा मोटी आहे. म्हणजेच 26.5 आहे.

म्हणुन 60-70 ला मध्यक वर्ग म्हणतात.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

मध्यक वर्ग माहित केल्यानंतर खालील सुत्राचा वापर करुन आपण मध्यक माहित करतो.

$$\text{मध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

येथे $l =$ मध्यक वर्गाची खालची मर्यादा

$n =$ अवलोकनाची संख्या

$cf =$ मध्यक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता

$f =$ मध्यक वर्गाची वारंवारता

$h =$ वर्गांतर (मध्यक वर्गाचा आकार)

$\frac{n}{2} = 26.5, \quad l = 60, \quad cf = 22, \quad f = 7, \quad h = 10$ या किंमती प्रतिक्षेपण केल्यास

$$\text{मध्यक} = 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{6}\right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

म्हणुन अर्धे विद्यार्थ्यांनी 66.4 पेक्षा कमी गुण प्राप्त केले आणि उरलेल्या अर्ध्या विद्यार्थ्यांनी 66.4 जास्त गुण मिळविले.

उदाहरण-7. एका शाळेतील 10 व्या वर्गाच्या मुलींच्या उंची विषयी केलेल्या पाहणीनुसार आलेली माहिती बाजुच्या सारणीत दाखविलेले आहे. तर त्याचा मध्यक काढा.

उंची(से.मी. मध्ये)	मुलींची संख्या
140 पेक्षा जास्त	4
145 पेक्षा जास्त	11
150 पेक्षा जास्त	29
155 पेक्षा जास्त	40
160 पेक्षा जास्त	46
165 पेक्षा जास्त	51

सोडवणुक : उंचीचा मध्यक काढण्यासाठी वर्गअवकाश आणि त्या संगत वारंवारता माहित करणे गरजेचे आहे. दिलेल्या सारणी च्या पेक्षा कमी असल्यामुळे 140, 145, 150, . . ., 165 या संगत वर्गाच्या वरच्या सिमा आहेत. म्हणुन वर्गअवकाश हे 140, 140 - 145, 145 - 150, . . ., 160 - 165 असले पाहिजे.

वर्ग अवकाश	वांरवारता	संचित वारंवारता
140 च्या कमी	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

वरील सारणीचे निरिक्षण केल्यास 140 पेक्षा कमी उंची असलेल्या मुलींची संख्या 4 आहे. म्हणजे 140 पेक्षा कमी असलेल्या वर्गाची वारंवारता 4 आहे. आता 145 पेक्षा कमी उंची असलेल्या मुली 4 आहेत. म्हणुन 140 - 145 वर्गातील उंची असलेल्या मुलींची संख्या $11 - 4 = 7$ आहे. अशारितीने उरलेल्या वांरवारतेला सारणीत दाखविल्या प्रमाणे माहित करता येते.

अवलोकानाची संख्या $n = 51$

$\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5^{th}$ अवलोकन हे 145 - 150 या वर्गात आहे.

$\therefore$ 145 - 150 हा मध्यक वर्ग आहे.

मध्यक वर्गाची खालची मर्यादा $l = 145$,

cf (मध्यक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता 145 - 150) = 11,

f (मध्यक वर्गाची वारंवारता 145 - 150) = 18,

वर्गांतर (वर्गाचा आकार) $h = 5$.

सुत्रावरुन, मध्यक $$= l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

म्हणुन मुलींची मध्यक उंची 149.03 से.मी. आहे. म्हणजे वर्गातील 50% मुली 149.03 पेक्षा जास्त उंचीच्या आहेत. उरलेल्या 50% मुली 149.03 पेक्षा कमी उंचीच्या आहेत.

उदाहरण-8. खालील सामग्रीचा मध्यक 525 आहे. एकुण वारंवारता 100 असल्यास x आणि y च्या किंमती काढा. येथे CI म्हणजे वर्ग अवकाश आणि Fr म्हणजे वारंवारता

CI	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

वर्ग अवकाश	वारंवारता	संचित वारंवारता
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7+x$
300-400	12	$19+x$
400-500	17	$36+x$
500-600	20	$56+x$
600-700	y	$56+x+y$
700-800	9	$65+x+y$
800-900	7	$72+x+y$
900-1000	4	$76+x+y$

सोडवणुक :

$n = 100$ दिले आहे.

म्हणुन $76 + x + y = 100$,म्हणजेच $x + y = 24$ (1)

मध्यक 525 आहे हा $500 - 600$ च्या मध्ये आहे.

म्हणुन $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

सुत्रावरुन

$$\text{मध्यक} \quad = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$525 \quad = 500 + \frac{50 - 36 - x}{20} \times 100$$

म्हणजे $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

म्हणजे $25 = 70 - 5x$

म्हणजे $5x = 70 - 25 = 45$

म्हणुन $x = 9$

म्हणुन (1) वरुन $9 + y = 24$ येते.

म्हणजेच $y = 15$

सुचना :

भिन्न वर्ग अवकाश असलेल्या वर्गीकृत सामग्रीचा मध्यक सुध्दा काढता येतो.

14.5 केंद्रीय प्रवृत्तीच्या किंमती (Which value of Central Tendency)

विशेष संदर्भासाठी कोणती परिमाणे उपयुक्त राहील.

केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणाचा नियमित वापर हा मध्यक आहे. कारण सर्व अवलोकनास विचारात घेतल्या जातो. हे सामग्रीतील सर्वात लहान आणि सर्वात मोठे अवलोकन आहे. यावरुन आपण दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त वितरणाची तुलना करण्यास समर्थ असतो. उदाहरणार्थ विविध शाळेतील एका विशिष्ट परिक्षेमधील विद्यार्थ्यांच्या निकालाची सरासरी तुलना करुन आपण कोणत्या शाळेची प्रगती चांगली आहे, याचा निश्कर्ष काढता येतो.

सामग्रीतील अंत्य किंमतीचा कधी कधी मध्यावर परिणाम होतो. उदाहरणार्थ वारंवारतेला जवळ जवह समान असलेल्या वर्गातील प्रतिनिधीत्व करते. परंतु एका वर्गाची वारंवारता 2, उरलेल्या वांरवारता 20, 25, 20, 21, 18, असल्यास मध्याचा त्या सामग्रीच्या स्वभावर काही फरक पडत नाही. अशा संदर्भात मध्य हा त्या सामग्रीचे चांगले प्रतिनिधित्व होत नाही.

गणितात वैयक्तिक अवलोकन महत्वाचा नसते. विशेष म्हणजे अंत्य किंमती महत्व नसतांना सामग्रीचे प्रतिनिधीत्व करणाऱ्या किंमती माहित करायची गरज पडली तेव्हा उदाहणात एक परिसरातील श्रमीकांच्या वेतनाचे प्रतिनिधीत्व करणाऱ्या किंमती काढण्याची गरज भासली. (उरलेल्या राशी पेक्षा जास्त फरकाच्या अत्यल्प अत्याधीक किंमती असलेल्या राशी आहेत) तेव्हा मध्यक ही केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे किंमती होते.

कधी कधी प्राधान्य राशीला ओळखण्याच्या संदर्भात बहुलकास केंद्रीय स्थान किंमतीची गणना केल्या जातो.उदा.जास्त लोकांनी पाहिलेलाT.Vवरील कार्यक्रम शोधण्यासाठी जास्त विकल्या जाणाऱ्या वस्तु,जास्त वापरण्यात येणाऱ्या वाहण्याचा रंग माहित करण्यासाठी इत्यादीसाठी बहुलकाचा वापर होतो.

अभ्यास - 14.3

1. एका निवास प्रांतातील 68 ग्राहकांचा महिन्याचा विद्युत वापरण्याचा खर्च खालील वारंवारता वितरण सारणीत दिला आहे. या सामग्रीचा मध्यक, मध्य आणि बहुलक काढुन चर्चा करा.

महिन्याचा वापर	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
ग्राहकांची संख्या	4	5	13	20	14	8	4

2. खालील दिलेल्या 60 अवलोकांनाचा मध्यक 28.5 आहे. तर x आणि y च्या किंमती काढा.

वर्ग अवकाश	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
वारंवारता	5	x	20	15	y	5

3. एका जिवन विमा एजेंटनी 100 पॉलीसी धारकांच्या वयाचे वितरण खालील सारणीत दिले आहे. त्यांच्या वयाचे मध्यक काढा. (पॉलीसी धारकाच्या व्यक्तीचे वय 18 वर्षापासुन 60 वर्षापर्यंत आहे)

वय (वर्षात)	Below 20	Below 25	Below 30	Below 35	Below 40	Below 45	Below 50	Below 55	Below 60
पॉलीसी धारकाची संख्या	2	6	24	45	78	89	92	98	100

4. एका झाडाच्या 40 पांनाची लांबी मी.मी.च्या जवळपास मापुन आलेल्या माहितीला खालील सारणीत दर्शविलेले आहे.

लांबी(मीमीमध्ये)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	172-180
पाणांची संख्या	3	5	9	12	5	4	2

पानांच्या लांबीचे मध्यक काढा. (**सुचना :** मध्यक काढण्यासाठी वर्गाच्या सिमा तयार कराव्या लागतात. नंतर त्या वर्गाना बदलुन 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . ., 171.5 - 180.5. लिहावे लागते.)

5. 400 नियॉन दिव्यांचा जिवनकाळ खालील वितरण सारणीत दिलेला आहे.

जिवन काळ (तासात)	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
दिव्यांची संख्या	14	56	60	86	74	62	48

तर दिव्यांच्या जिवनकाळाचे मध्यक काढा.

6. एका टेलीफोन डायरेक्टरी मधुन 100 अडनाव यादृच्छिकरित्या घेतले. त्यातील अक्षरांच्या संख्येवरुन वारंवारता वितरण खालील प्रमाणे तयार केले आहे.

अक्षरांची संख्या	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
अडनावांची संख्या	6	30	40	16	4	4

अडनावातील अंकाच्या संख्येचा मध्यक माहित करा. अडनावातील अंकाच्या संख्येचा मध्य काढा. अडनावाचा बहुलकीय आकार सुध्दा माहित करा.

7. एका वर्गातील 30 विद्यार्थ्यांचे वजन खालील वितरण सारणीत दिलेले आहे. विद्यार्थ्यांच्या वजनाने मध्यक काढा.

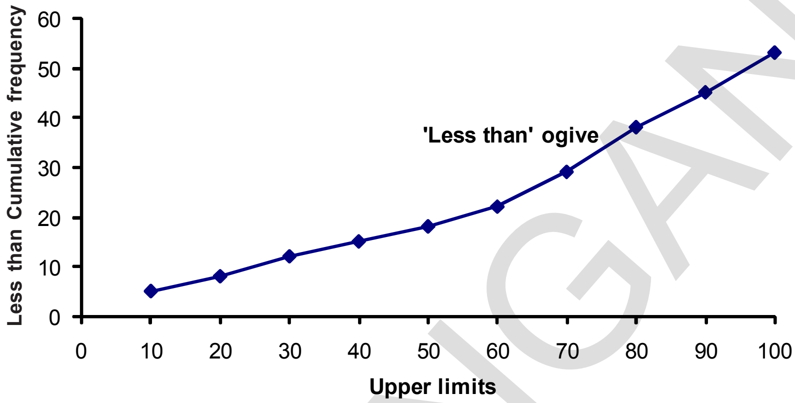
वजन (कि.ग्रॅ.)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
विद्यार्थ्यांची संख्या	2	3	8	6	6	3	2

14.6 संचित वारंवारता वितरणाची आलेखीय दर्शवणुक (Graphical Representation of Cumulative Frequency Distribution)

शब्दापेक्षा चित्राने चांगले समजते. आलेखीय दर्शवणुकीने दिलेली माहिती क्षणात समजते. 9 व्या वर्गात आपण सामग्रीला स्तंभालेख आयतालेख आणि वारंवारता बहुभुजीने दर्शविले जाते. आता संचित वारंवारता वितरणास आलेखाने दर्शवु.

उदारणार्थ वरील उदाहणातील संचित वारंवारता वितरण विचारात घ्या. यासाठी सामग्री मधील वर्गअवकाश अखंड असले पाहिजे. कारण संचित वारंवारता ही मर्यादे सोबत जुळलेली असुन सिमेसोबत त्याचा संबंध नाही.

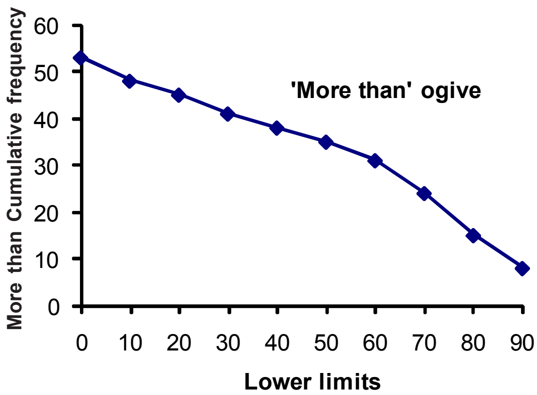
10, 20, 30, ..., 100 अनुक्रमे त्या वर्गाच्या खालची मर्यादा आहेत. सामग्रीला आलेखात सादरीकरण करण्यासाठी वर्गाची वरची मर्यादा क्षितीत समांतर रेषे (X-अक्ष) वर आणि त्याच्या संगत संचित वारंवारता उभ्या (Y-अक्ष) रेषेवर सुचित केले पाहिजे. प्रत्येक वर्गाची वरची मर्यादा त्या संबंधीत संचित वारंवारतेनी बनलेल्या मर्यादेला., (10, 5), (20, 8), (30,, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) ना आलेखावर सुचित करुन त्या बिंदुना सरळ वक्राने जोडा. या वक्राला संचित वारंवारता वक्र किंवा ओजीव वक्र असे म्हणतात.



ओजी('ogive) नावाच्या फेंच पदापासुन ओजीव ('ojeev') नावाचे पद तयार झाले. ओजी म्हणजे अंतवक्र पासुन सुरु होऊन बहीवक्राने शेवट होऊन इंग्रजी S-आकाराचे वक्र तयार होते. ओजी आकार हा 14th आणि 15th शतकातील गोतीक(Gothic) पध्दतीमधील मुख्य आकार आहे.

परत संचित वारंवारता वितरण घेऊ आणि संचित वारंवारता वक्र काढु.

येथे 0, 10, 20, ..., 90 ही अनुक्रमे 0-10, 10-20, ..., 90-100 या वर्गाची खालची मर्यादा आहे. यास दर्शविण्यासाठी खालची मर्यादा X-अक्षावर आणि त्या संबंधी संचित वारंवारता Y-अक्षावर काढावी लागते. त्यानंतर (खालची मर्यादा त्या संबंधी संचित वारंवारता)(0, 53), (10, 48), (20, (45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8), आलेखावरुन काढुन त्यास एक सरळ वक्राने जोडु. या वक्राला संचित वारंवारता वक्र किंवा ओजीव वक्र म्हणतात.

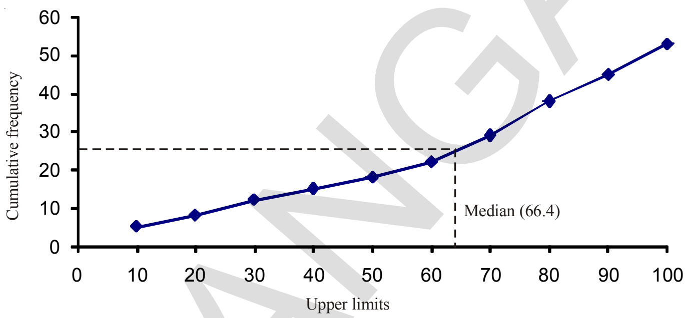


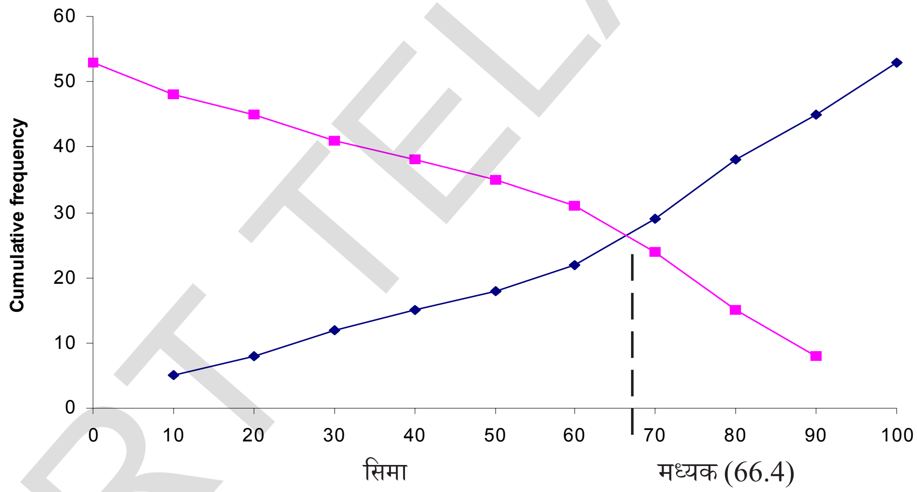
14.6.1 संचित वारंवारता वक्रापासुन मध्यक काढणे (OBTAINING MEDIAN FROM GIVE CURVE:)

दोन संचित वारंवारता वक्रापासुन मध्यक काढणे कसे शक्य आहे. ते पाहु या.प्रथम $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ ला y-अक्षावर दर्शवुन या बिंदुपासुन x-अक्षाला समांतर असणारी रेषा काढा. ती वक्रास एका बिंदुवर कापते. या बिंदुपासुन x-अक्षावर लंब काढा. या लंबपादाने माहितीचा मध्यक काढता येतो.

मध्यक काढण्याची दुसरी पध्दत:

दोन ओजीव वक्र (म्हणजे च्या पेक्षा कमी आणि च्या पेक्षा जास्त) सारख्या अक्षावर काढा. दोन्ही ओजीव वक्र एकमेकांस एका बिंदुवर छेदतात. या बिंदुवरुन x-अक्षावर लंब काढल्यास ज्या ठिकाणी x-अक्षावर हा बिंदु छेदतो त्या बिंदुवरुन मध्यक येते.



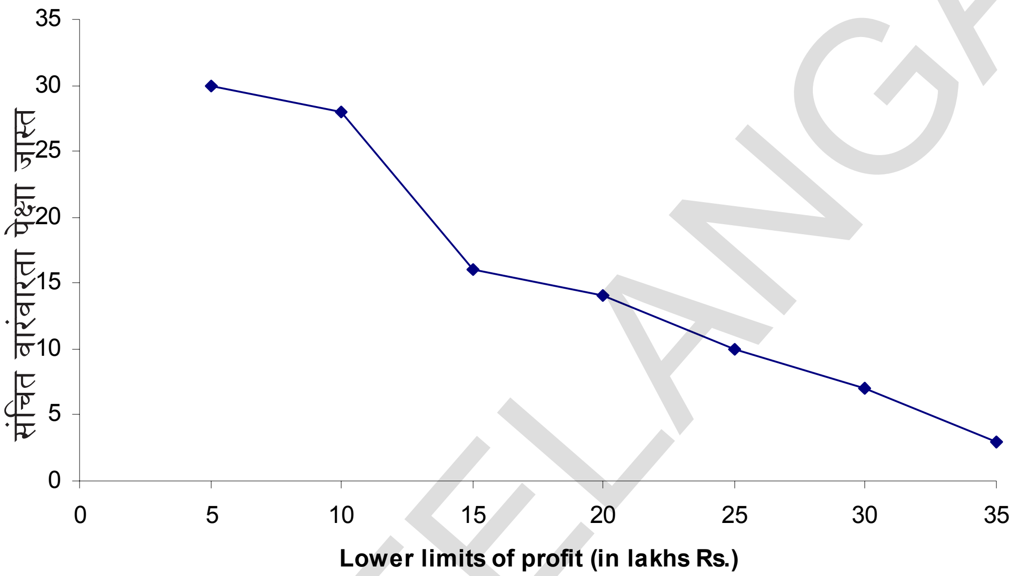


उदाहरण-9. एका निवासस्थानी 30 दुकानांचा वार्षिक नफा खालील वारंवारता सारणीत दिला आहे.

नफा(लाखात)	दुकांनाची संख्या (वारंवारता)
5 पेक्षा जास्त किंवा समान	30
10 पेक्षा जास्त किंवा समान	28
15 पेक्षा जास्त किंवा समान	16
20 पेक्षा जास्त किंवा समान	14
25 पेक्षा जास्त किंवा समान	10
30 पेक्षा जास्त किंवा समान	7
35 पेक्षा जास्त किंवा समान	3

वरील सामग्रीचे दोन्ही ओजीव वक्र काढा. आणि नफ्याचा मध्यक काढा.

सोडवणुक: अगोदर निर्देशक अक्ष काढु. नफ्याची खालची सिमा क्षितीज समांतर अक्षावर आणि संचित वारंवारता उभ्या अक्षावर सुचित करु. नंतर (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) आणि (35, 3) या बिंदुना विस्थापन करु. या बिदुना एका वक्राच्या साहाय्याने जोडल्यास ओजीव वक्र पेक्षा जास्त आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे येते.

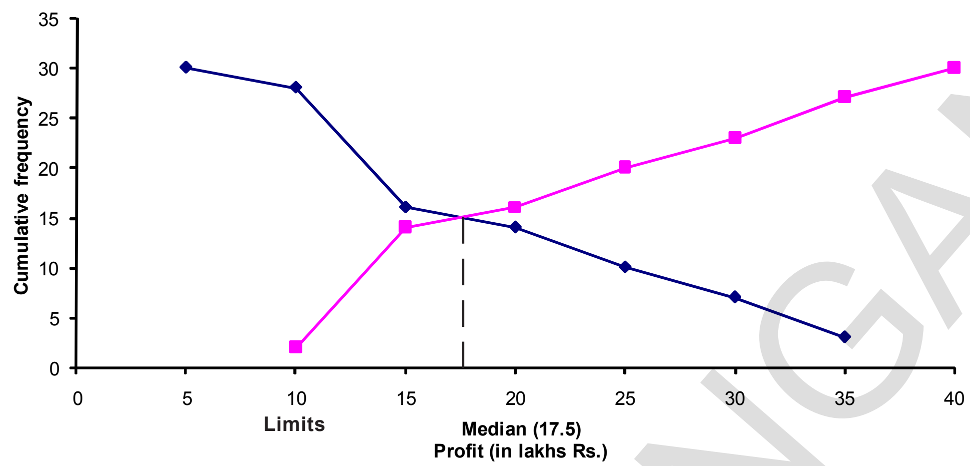


आता दिलेल्या सामग्रीवरुन वर्गांतर, वारंवारता आणि संचित वारंवारता वरील तक्त्यावरुन येते का ते पाहु या.

वर्गांतर	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
दुकांनाची संख्या	2	12	2	4	3	4	3
संचित वारंवारता	2	14	16	20	23	27	30

या किंमतीला वापरुन संचित वारंवारता वक्र पेक्षा कमी येण्यासाठी त्याच अक्षावर (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) या बिंदुना विस्थापन करु.

त्या दोन्ही वक्रांनी परस्पर छेदलेल्या बिंदुपासुन x अक्षावर लंब काढल्यास तो लंबपाद 17.5 येतो. हाच मध्यक आहे. याची तपासणी सुत्रावरुन केली जाते. म्हणुन आलेल्या नफ्याचा मध्यक 17.5 (लाख) आहे.



अभ्यास - 14.4

1. एका कारखाण्यातील 50 मजुरांची रोजची मजुरी खालील वितरण सारणीत दिली आहे.

रोजची मजुरी (रुपयात)	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
मजुरांची संख्या	12	14	8	6	10

वरील वितरणाला संचित वारंवारता वितरण पेक्षा कमी मध्ये बदलुन त्याचे ओजीव वक्र काढा.

2. एका शाळेतील 35 मुलांची वैद्यकीय तपासणीत त्यांचे वजन खालील प्रमाणे नमुद केले

वजन (कि.ग्रॅ.मध्ये)	विद्यार्थ्यांची संख्या
38 पेक्षा कमी	0
40 पेक्षा कमी	3
42 पेक्षा कमी	5
44 पेक्षा कमी	9
46 पेक्षा कमी	14
48 पेक्षा कमी	28
50 पेक्षा कमी	32
52 पेक्षा कमी	35

ओजीव वक्र पेक्षा कमी (संचित वारंवारता वक्र पेक्षा कमी) काढा आणि म्हणुन आलेखावरुन वजनाचे मध्यक काढा आणि आलेल्या उत्तराची पडताळणी सुत्राच्या साहाय्याने करा.

3. एका गावातील 100 शेतकऱ्यांच्या शेतातील गव्हाचे उत्पादन प्रति हेक्टर खालील सारणीत दिले आहे.

पिकांचे उत्पादन (क्रिटंल/ हेक्टर)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
शेतकऱ्यांची संख्या	2	8	12	24	38	16

वरील माहिती संचित वारंवारता पेक्षा जास्त मध्ये बदलुन त्याचे ओजीव वक्र काढा.

सुचविलेले प्रकल्प कार्य

मध्य - मध्यक - बहुलक माहित करणे

✻ रोजच्या जिवनात त्याचे उपयोजन ✻ मिळत असलेल्या स्त्रोतातुन माहित गोळा करणे. ✻ मध्य, मध्यक आणि बहुलकचा वरील माहिती संबंधी आलेख काढणे.

आपण काय चर्चा केली.

या धड्यात आपण खालील मुद्दे शिकलोत.

1. वर्गीकृत सामग्रीचा मध्य काढण्याचे सुत्र

   (i) सरळ पध्दतीत : $\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

   (ii) गृहीत मध्य पध्दतीत : $\overline{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

   (iii) पायरी विचलन पध्दतीत : $\overline{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

2. वर्गीकृत सामग्रीचा बहुलक काढण्याचे सुत्र

   $$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

   ....

3. वर्गीकृत सामग्रीचा मध्यक काढण्याचे सुत्र

   $$\text{मध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$ Where symbols have their usual meanings.

4. मध्यक माहित करण्यासाठी वर्ग अवकाश अखंड असले पाहिजे.
5. संचित वारंवारता वितरणाची आलेखीय दर्शवणुक संचित वारंवारता वक्रासारखी किंवा ओजीव वक्रा पेक्षा कमी किंवा पेक्षा जास्त या सारखी येते.
6. ओजीव वक्र काढण्यासाठी मयदिला X-अक्षावर आणि संचित वारंवारता Y-अक्षावर घेतल्या जाते.
7. दोन्ही अक्षावरील मापे समान नसतात.
8. एका सामग्रीतील देान ओजीव वक्राच्या परस्पर छेदन बिंदुपासुन x-निर्देशक काढलेल्या लंबपाद हा त्या वर्गीकृत सामग्रीचा मध्यक होतो.

परिशिष्ठ

गणितीय नमुने तयार करणे

(Mathematical Modelling)

A.I.1 प्रस्तावना

25 फेब्रुवारी 2013 ला ISRO ला PSLV C20 सुरु केला SARAL हा उपग्रहाला कक्षेत सोडले. उपग्रहाचे वजन 407 कि.ग्रॅ. होते. त्याची उंची 781 कि.मी. आणि त्याच्या कक्षेचा कल 98.5^{o} होता.

वरील माहिती वाचतांना आपण आश्चर्यचकीत होतो.

(i) शास्त्रज्ञाने 781 कि.मी. ही उंची कशी काढली ते आकाशात जाऊन मोजले काय?

(ii) वास्तविक मोजणी न करता कक्षेचा कोन 98.5^{o} आहे. हा निश्कर्ष त्यांनी कसा काढला?

आपल्या दैनंदिन जिवनातील काही उदाहरणांना पाहुन शास्त्रज्ञांनी आणि गणितज्ञांनी हा परिणाम कसा माहित केला याचे आश्चर्य वाटते. खालील उदाहरणे पाहु.

(i) सुर्याच्या पृष्ठभागाचे तापमान सुमारे $6,000^{o}$Cआहे.

(ii) मानवी हृदय दर मिनीटाला 5 ते 6 लिटर रक्त शरिराला पुरवठा करते.

(iii) सुर्य आणि पृथ्वीमधील अंतर 1,49,000 कि.मी.आहे.

वरील उदाहरणावरुन माहित होते की, सुर्याजवळ जाऊन कोणीही तापमान मोजले नाही. पृथ्वीपासुन सुर्याचे अंतर मोजले नाही. आपल्या शरीरातील हृदयाला बाहेर काढुन किती रक्त पाठविते हे मोजु शकत नाही. अशा प्रकारचे प्रश्न फक्त गणितीय नमुण्याव्दारेच सोडविता येते.

गणितीय नमुन्यांचा उपयोग फक्त शास्त्रज्ञानी नाही तर आपण सुध्दा केला आहे. उदाहरणार्थ 100 रुपये गुंतवणुक करुन 10% सरळ व्याजाने एक वर्षानंतर आपणास किती रुपये मिळतात. किंवा खोलीला रंग देण्यासाठी किती लिटर रंगाची आवश्यकता आहे. हे माहित करावे लागते. अशा प्रकारच्या प्रश्नांना आपण गणितीय नमुण्याव्दारे सोडवितो.

विचार करा-चर्चा करा

आपल्या दैनंदिन जिवनात प्रत्यक्षपणे मोजणी न करता गणितीय नमुन्याच्या साहाय्याने मोजणी करतो याची काही उदाहरणे घेऊन तुमच्या मित्राशी चर्चा करा.

A.I.2 गणितीय नमुने (MATHEMATICAL MODELS)

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्याचे सुत्र तुम्हाला माहित आहे.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ उंची

अशा प्रकारे सरळव्याजाचे सुत्र $I = \frac{PTR}{100}$. हे सुत्रात किंवा समीकरण व्याज (I); मुद्दल(P); वेळ (T); आणि व्याजाचा दर (R) यामध्ये संबंध आहे ही गणितीय नमुन्याची उदाहरणे आहेत.

गणितीय नमुन्याची आणखी काही उदाहरणे पाहु या.

(i) वेग (S) $= \frac{\text{अंतर (d)}}{\text{वेळ (t)}}$

(ii) चक्रवाढ व्याजात (A) $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

येथे P = मुद्दल

r = व्याजाचा दर

n = व्याज किती वेळ काढले याचा सख्या

दैनंदिन जिवनातील काही संबधाचे वर्णन किंवा गणितीय वर्णन म्हणजेच गणितीय नमुना होय

हे करा

मागील वर्गात शिकेलेले काही गणिताचे नमुने लिहा.

A.I.3 गणितीय नमुने तयार करणे (MATHEMATICAL MODELLING)

कधी कधी आपल्या दैनंदिन जिवनात काही प्रश्नांना तोंड द्यावे लागते. याला सोडविण्यासाठी आपण यास समतुल्य गणिताच्या प्रश्नांच्या रुपात लिहुन त्यांची सोडवणुक माहिती करतो. नंतर त्या सोडवणुकीचे स्पष्टीकरण करुन ते कुठपर्यंत योग्य आहे याची तपासणी करावी लागते. अशा गणितीय नमुना तयार करण्याच्या रचनेला आणि याचा वापर करुन उत्तर शोधण्याच्या प्रक्रियेला गणितीय नमुने तयार करणे म्हणतात.

आता गणितीय नमुन्याशी संबंधीत काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-1. वानीला 19,000 रुपये किंमतीची एक TV संच विकत घ्यायची होती. परंतु तिच्या जवळ फक्त 15,000 रुपये होते. म्हणुन तिने स्वताजवळील रक्कमेला 8% सरळ व्याजावर एकावर्षासाठी गुंणवणुक करायचे ठरविले ती किती वर्षानंतर ती TV घेण्यासाठी समर्थ होईल?

पायरी 1 (प्रश्न समजुन घेणे) : यामध्ये आपण खऱ्या प्रश्नांची व्याख्या केली पाहिजे. येथे आपणास मुद्दल व्याजाचा वर दिला आहे. किती वर्षानंतर ती रक्कम 19000 रुपये होईल हे माहित केले पाहिजे.

पायरी 2 (गणितीय वर्णन आणि सुत्रतयार करणे) या पायरीत आपण गणिताची पदे प्रश्नाचे विभिन्न स्वरुपाचे वर्णन केले जाते. चलाची व्याख्या करुन, समीकरण किंवा असमानता लिहुन आणि आवश्यक असल्यास माहिती गोळा करतो.

येथे सरळ व्याजाचे सुत्र

$$I = \frac{PTR}{100} \text{ (नमुना)}$$

येथे P = मुद्दल, T = वर्ष, R = व्याजाचा दर, I = व्याज

माहित करणे गरजेचे आहे. $= T = \frac{100I}{RP}$

पायरी 3 (गणितीय प्रश्न सोडविणे) या पायरीत पायरी 2 मध्ये विकसीत केलेल्या सुत्राचा वापर करुन प्रश्न सोडविले पाहिजे.

वानी जवळ 15000 रुपये आहे ही मुद्दल P आहे.

शेवटची रक्कम 19000 रुपये येण्यासाठी तिला (19000-15000) = 4000 रुपयांची गरज आहे. ही रक्कम व्याजापासुन I येते.

$$P = 15{,}000\text{रु.}, \text{ दर} = 8\%, \quad \text{तर व्याज} = 4000; \ T = \frac{100 \times 4\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{150\cancel{0}\cancel{0} \times 8} = \frac{40\cancel{0}}{12\cancel{0}}$$

$$T = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3} \text{ वर्ष}$$

किंवा **पायरी 4 (सोडवणुकीचे स्पष्टीकरण):** आधीच्या पायरीत आलेल्या समीकरणाचे येथे स्पष्टीकरण आहे.

येथे $T = 3\frac{1}{3}$ म्हणजे 3 वर्ष 4 महिने म्हणुन, वानीला टी.व्हि.संच घेण्यासाठी 3 वर्ष 4 महिने लागतात.

पायरी 5 (नमुन्याना कायदेशिरता) वास्तविकतेशी न जुळणाऱ्या नमुन्यानां उत्तरे देत असतील तरी आपण त्याचा स्वीकार करीत नाही. प्रणालीची तपासणी आणि बदलाव यासाठी आवश्यक आहे.

दिलेल्या उदाहरणात व्याजदर बदलत नाही असे आपण गृहीत धरत आहो. जर व्याजाचा दर बदलल्यास आपला नमुना $\frac{PTR}{100}$ कार्य करीत नाही. आणि वाशिंग मशीनची किंमत बदलत नाही ती 19,000 रुपये राहते.

पुन्हा एक उदाहरण पाहु या.

उदाहरण-2. लोकेश्वरम हायस्कुल मध्ये 10 व्या वर्गात 50 विद्यार्थी आहेत. त्या शाळेच्या गणिताच्या शिक्षकांना लोकेश्वरम ते हैद्राबादला वाहनाने सहलीला जायचे आहे. प्रत्येक वाहनात चालकास सोडुन सहाजन बसतात. तर त्यांना किती वाहनाची आवश्यकता आहे.

पायरी 1 : 51 व्यक्तींना वाहुन नेण्यासाठी किती वाहने हवी आहे हे माहित केले पाहिजे. प्रत्येक जीपमध्ये चालकास सोडुन सहाजन बसतात हे दिले आहे.

पायरी 2 : वाहनांची संख्या=(व्यक्तींची संख्या)/एका जीपमध्ये बसणाऱ्या व्यक्तींची संख्या

पायरी 3 : वाहनांची संख्या $= 51/6 = 8.5$

पायरी 4 : स्पष्टीकरण

आपणास माहित आहे की, 8.5 वाहन राहु शकत नाही. म्हणुन आवश्यक वाहनांची संख्या 9 आहे.

$\therefore$ आवश्यक वाहनांची संख्या= 9.

पायरी 5 : कायदेशीरता

नमुने तयार करतांना बारीक आणि लठ्ठ मुले सारखीच जागा व्यापतात हे गृहीत धरावे लागतात.

हे करा

1. तुमच्या पुस्तकातील कोणताही एक शाब्दिक प्रश्न घेऊन त्यांची गणितीय नमुना तयार करा आणि सोडवा.
2. खालील दिलेल्या प्रश्नांचा गणिताचा नमुना तयार करा व सोडवा.

   समजा A पासुन B पर्यंत प्रवास करणाऱ्या कारचा वेग तासी 40 कि.मी. आहे. त्याच वेळी दुसरी कार B पासुन A कडे तासी 30 कि.मी. वेगाने प्रवास करते. जर A आणि B मधील अंतर 100 किं.मी. आहे तर किती वेळा नंतर त्या दोन्ही कार एकमेकांस मिळतात?

आता पर्यंत आपण गणितातील साध्या प्रश्नांसाठी नमुने बनविले. आपल्या नित्य जिवनातील उदाहरण घेऊन त्याचा नमुना तयार करु या.

उदाहरण-3. इ.स. 2000 मध्ये U.N. च्या 191 सदस्य देशांनी लिंगाची समानता वाढविण्यासाठी हस्ताक्षर केले. प्राथमिक आणि उच्च प्राथमिक पातळीवर मुली आणि मुलांचे गुणोत्तारचा उददेश पुर्ण झाला किंवा नाही हे दाखविले. भारतांनी सुध्दा यावर स्वाक्षरी केल्या. भारतातील प्राथमिक शाळेतील मुलींची टक्केवारी खालील सारणीत दिली आहे. **A.I.1.**

तक्ता A.I.1

वर्ष	नांव नोंदणी (%)
1991 – 92	41.9
1992 – 93	42.6
1993 – 94	42.7
1994 – 95	42.9
1995 – 96	43.1
1996 – 97	43.2
1997 -98	43.5
1998 – 99	43.5
1999 – 2000	43.6
2000 – 01	43.7
2001 - 02	44.1

या माहितीवरुन प्राथमिक शाळेतील मुलींच्या नोंदणीची वाढ कशी झाली आहे. यास गणिताच्या रुपात वर्णन करा. कोणत्या वर्षी मुलींची 50% नोंदणी झाली हे सुध्दा ठरवा.

सोडवणुक :

पायरी 1 : सुत्रीकरण दिलेले गणित अगोदर गणिताच्या रुपात बदला.

सारणीमध्ये 1991 – 92, 1992- 93 इत्यादी पर्यंत नाव नोंदणी झालेली आहेत. शालेय वर्षाची सुरुवातीला 1991, 1992 वर्षी मुलींचे नोंदणी झाली आहे. प्राथमिक शाळेत प्रवेश घेतलेल्या मुलींचा दर या तक्त्यात दाखविल्याप्रमाणे वाढत आहे. एका विशिष्ट वर्षापेक्षा वर्षाची संख्या महत्वची आहे. या सारख्या संदर्भात जेव्हा आपण 8% व्याज दराने 15000 रु.साठी तीन वर्षाचे व्याज काढतो. तो तीन वर्षाचा काळ 1999 ते 2002 किंवा 2001 ते 2004 असेल तर काही हरकत नाही. वर्षातील व्याजाचा दर महत्वाचा आहे.

येथे आपण 1991 नंतरच्या वर्षाची तुलना करुन 1991 नंतर नाव नोंदणीत वाढ कशी झाली ते पाहु या. 1991 ला 0 वर्ष घेऊन 1992 ला 1 कारण 1991 नंतर येणारे 1992 म्हणजे 1 वर्ष आहे. अशारीतीने 1993 साठी 3, 1994 साठी 4 .... इत्यादी सारणी A.I.1 ही आता सारणी A.I.2 सारखी दिसते.

सारणी A.I.2

वर्ष	नाव नोंदणी(%)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

नाव नोंदणीत झालेली वाढ खालील सारणीत A.I.3 मध्ये दिलेली आहे.

सारणी A.I.3

वर्ष	नाव नोंदणी (%)	वाढ
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 ते 1992 पर्यंत वर्षाच्या शेवटी नाव नोंदणी ची वाढ 0.7% वाढुन ती 41.9% पासुन 42.6% साली दुसऱ्या वर्षाच्या शेवटी 0.1% ने वाढ होऊन ती 42.6% पासुन 42.7% झाली. वरील सारणीवरुन वर्ष आणि टक्केवारीमधील विशिष्ट संबंध माहित करु शकत नाही. परंतु झालेली वाढ ही स्थिर आहे. फक्त पहिल्या वर्षी आणि 10 व्या वर्षी जास्त उडी घेतलेली आहे. या किंमतीचा मध्य

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10}=0.22 \quad \text{.... (1)}$$

नाव नोंदणीचा दर हळु हळु 0.22% वाढत आहे हे गृहीत धरु या.

पायरी 2 (गणितीय वर्णन)

नाव नोंदणी वृध्दीचा दर हळु हळु 0.22% वाढलेला आहे असे आपण गृहीत धरले.

म्हणुन पहिल्या वर्षी नाव नोंदणी टक्केवारी $= 41.9 + 0.22$

दुसऱ्या वर्षी नाव नोंदणी टक्केवारी $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

तिसऱ्या वर्षी नाव नोंदणी टक्केवारी $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

nव्या वर्षी नाव नोंदणी टक्केवारी $= 41.9 + 0.22n$, ते $n \geq 1$. .... (2)

आता कोणत्या वर्षी नाव नोंदणी 50% पर्यंत पोहोचते ते माहित केले पाहिजे. म्हणुन या समीकरणावरुन n ची किंमत काढल्यास

$$50 = 41.9 + 0.22n$$

पायरी 3 (सोडवणुक) : (2) सोडविल्यास

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

पायरी 4 : (स्पष्टीकरण) : वर्षाची संख्या दशांसात आहे. म्हणुन त्या नंतरची किंमत घेतली पाहिजे. ती किंमत 37 आहे. म्हणुन नाव नोंदणी 50% टक्के झालेले वर्ष $1991 + 37 = 2028$ आहे.

पायरी 5 : (कायदेशीरता) आपण दैनंदिन जिवनातील संदर्भाचा उल्लेख केल्यामुळे या किंमती वास्तविक संदर्भाशी किती जुळल्या आहे.

सुत्र (2) ची वास्तविक तपासणी करु या. सुत्र (2) चा वापर करुन वर्षाची आधीच माहित असलेली किंमत काढुन त्याची तुलना माहित असलेल्या किंमतीशी फरक काढुन तुलना करुन या किंमती सारणीत A.I.4 मध्ये दिलेल्या आहेत.

सारणी A.I.4

वर्ष	नांव नोंदणी (%)	(2) व्दारा दिलेल्या किंमती (%)	फरक (%)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

तुम्ही पाहु शकता की, (2) व्दारा दिलेल्या किंमती वास्तविक किंमतीपेक्षा 0.3% किंवा 0.5% लहान आहेत. यावरुन वर्षातील फरक 3 ते 5 वर्ष येतो. कारण प्रति वर्ष वाढ ही 1% ते 2% आहे. हा फरक स्विकारण्या योग्य आहे. या संदर्भात (2) हा गणितीय नमुना आहे.

समजा ही चुक मोठी आहे असे निर्णय केल्यास आणि नमुना प्रगतशिल बनवायचा आहे. तेव्हा परत आपण पायरी (2) कडे गेले पाहिजे आणि समीकरण बदलेले पाहिजे. चला असे करु या.

पायरी 1 : परतसुत्रीकरण : आपण अद्याप असे समजलो की, या किंमतीत 0.22% वाढ झाली. परंतु आता आपणास ही चुक कमी करण्यासाठी चुक दुरुस्त घटकाचा परिचय करावयास हवा. यासाठी आपण सर्व चुकींचा मध्य काढला पाहिजे.

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}=0.18$$

आपण चुकीचा मध्य घेतो या किंमतीवरुन आपले सुत्र दुरुस्त होते.

सुधारीत गणितीय वर्णन : आता (2) मधील नाव नोंदणी टक्केवारी साठी चुकीच्या मध्यला आपल्या सुत्रात मिळविले पाहिजे. म्हणुन सुधारीत सुत्र:

n वर्षातील नाव नोंदणी टक्केवारी

$$= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n, \text{ for } n \geq 1 \quad \ldots (3)$$

समीकरण (2) n वरुन : n साठी नविन समीकरण

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad \ldots (4)$$

सोडवणुक : समीकरण (4) सोडविल्यास n

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

स्पष्टीकरण : n = 36 असतांना प्राथमिक शाळेतील मुलींची नांव नोंदणी 50% वर पोहोचते. तर ते वर्ष 1991 + 36 = 2027.

कायदेशीरपणा : पुन्हा एकदा सुत्र (4) चा उपयोग करुन किंमतीची तुलना वास्तविक किंमतीशी करुन सारणी A.I.5 तुलना देते.

सारणी A.I.5

वर्ष	नाव नोंदणी (%)	(2) ने दिलेल्या किंमती	किंमती मधील फरक	दिलेल्या किंमती (4)	किंमती मधील फरक
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1	44.10	0.00	44.28	-0.18

(4) मधील काही किंमती वास्तविक किंमतीच्या (2) मधील किंमतीशी जवळ आहे. याचा अर्थ असा की, या मधील चुका 0 आहेत.

A.I.4 गणितीय नमुन्याचे फायदे (ADVANTAGES OF MATHEMATICS MODELING)

1. जागतिक प्रश्नांना गणितीच्या प्रश्नांत बदलुन काही उपयुक्त माहिती मिळविणे हा गणिताच्या नमुन्याचा उद्देश आहे. हे अत्यंत उपयोगी आहे. जेव्हा ते अशक्य आहे तेव्हा उपयोगी पडते. किंवा प्रत्यक्ष निरिक्षणाने किंवा महागड्या प्रयोग केल्याने अनुभवाची माहिती मिळते.

   उदाहरणार्थ समजा मथुरा कारखाण्याव्दारे निघणाऱ्या प्रदुषित वायुपासुन ताजमहलास वर काय प्रभाव पडतो, याचा अभ्यास करायचा आहे. आपण ताजमहलावर प्रत्यक्ष पणे प्रयोग करु शकत नाही. कारण त्यामुळे त्यास नुकसान होऊ शकते. येथे गणितीय नमुन्याचा चांगला उपयोग होतो.

2. अनेक प्रकारच्या संघटनात भविष्याचा अंदाज लावणे अतिशय महत्वाचा आहे.

उदाहरणात:

(i) मार्केटींग विभागात मागणीची वास्तविक अंदाजाचे भाकीत करणे, विक्रीच्या योजनेसाठी फायदेशीर ठरते.

(ii) शालेय बोर्डतला शाळेत जाणाऱ्या विद्यार्थीची वृध्दी चे भाकित अंदाजे भाकीत करण्यास समर्थ आहे. यावरुन कोणत्या जिल्ह्यात कोणती आणि केव्हा नविन शाळा सुरु झाली याचा निर्णय करता येते.

3. जंगलातील झाडांचा अंदाज, सरोवरातील मासे, मतदानाचा अंदाज इ.चा अंदाज ही मोठी किंमत आहे.

   काही उदाहरणात गणितीय नमुन्याचा उपयोग हे खाली दिलेले आहे.

(i) काही निश्चित वर्षापर्यंत होणाऱ्या भविष्यात जनसंख्येच्या अंदाजे भाकीत

(ii) मान्सुन येण्याचे भविष्य

(iii) येणाऱ्या वर्षाचा साक्षरता दराचा अंदाज

(iv) झाडावरील पानांची संख्येचा अंदाज

(v) समुद्राची खोलपणा माहित करणे.

A.I.5 गणितीय नमुन्याची सिमा (LIMITATIONS OF MATHEMATICAL MODELING)

गणितीय नमुन्यात सर्व प्रश्नांना सिमा आहे काय?

निश्चितपणे नाही, कारण तिथे काही सिमा आहे. आपण लक्षात घेतले पाहिजे की, वास्तविक प्रश्नांचे सरळ रुप देणे म्हणजेच नमुना होय आणि दोन्ही समान नसते. नकाशातील फरक हा जगाची भौतिक सुविधा देते. या नकाशावरुन आपण समुद्रपातळी वरील जागेची उंची काढता येते. परंतु या वरुन व्यक्तीचे गुणधर्म माहित करु शकत नाही. म्हणुन यासाठी नमुन्याचा वापर करतो. त्याची रचना, करतांना आपण दुर्लक्ष केलेल्या सर्व सर्व घटकांची आठवण करतो. जिथे आवश्यकता भासते तिथेच सिमेत राहुन नमुन्याचा वापर केला पाहिजे.

A.I.6 आपल्या नमुन्याला सुधारण्याचा प्रयत्न करणे

नमुन्याची सुधारणा करण्यासाठी आपणास काही अधिक घटकांची आवश्यकता आहे. आपण हे जेव्हा करतो. आपण गणितीय समिकरणात अधीक चलांना मिळवितो. हे समीकरण क्लिष्ट होऊन नमुन्याचा वापर करणे कठिण होते. नमुना हा साधा आणि वापरण्यासाठी अचुक असला पाहिजे. तो वास्तविकतेशी जवळ असला म्हणजे तो नमुना चांगला आहे.

प्रयत्न करा.

13 व्या शतकात लियोनार्ड फिबोनकी यांनी विचारले की, तुम्हाला एका वर्षात किती ससे हवे आहेत. जर तुम्ही देान पासुन सुरुवात केली आणि सर्वांना पुन्हा निर्माण करा. गृहीत धरा की, सशाची एक जोडी प्रत्येक महिण्याला एक जोडी अपत्य प्रजोत्पादन करते. आणि ती सस्याची जोडी 2 महिण्याच्या वयात पहिले अपत्य प्रजोत्पादन करते. एका मागे एक महिन्यात सशाची 6 जोडी संख्या ही देान पुढील महिन्यातील संशाची बेरीज होते. 0 आणि 1 ला महिणा सोडुन खालील तक्त्यात सशाची वाढ दर महिन्याला कशी होत आहे हे दिलेले आहे.

महिना	सश्याची जोडी
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

एका वर्षानंतर 233 ससे मिळतात. 16 महिन्यानंतर आपणास 1600 सशांच्या जोड्या येतात.

या संदर्भात गणिताच्या नमुन्याच्या विविध स्तरावर समस्या स्पष्टपणे सांगीतली आहे.

काही उदाहरणाकडे पाहुन या धड्याचा शेवट करु या.

उदाहरण-4. (फास्याच्या जोडीला फेकणे) : दिक्षिता आणि आशिष फासे खेळत आहे. आशिष म्हणाला की, फास्यावरील संख्येच्या बेरजेचा अचुक अंदाज लावल्यास, तो तीला प्रत्येक उत्तराला बक्षीस देईल.

सोडवणुक :

पायरी 1 (समस्या समजुन घेणे) : जास्त वेळा वर येणाऱ्या काही संख्येची माहिती घेणे गरजेचे आहे.

पायरी 2 (गणितीय पदात) : गणितीय पदात, संभाव्यता मध्ये फास्यावरील येणाऱ्या विविध संख्येची बेरीज माहित करणे आणि त्या प्रश्नांचे भाषांतर करणे.

या संदर्भाची आपण साध्या रितीने नमुना तयार करता येते. खालील संख्याच्या छत्तीस जोडंया पैकी एक जोडीला यार्दुच्छिक रितीने निवड करुन फास्याला दर्शवु शकतो.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

प्रत्येक जोडीतील पहिली संख्या फास्यावरील दाखविलेली संख्या दर्शविते आणि दुसरी संख्या दुसऱ्या फास्यावरील दाखविलेली संख्या दर्शविते.

पायरी 3 (गणितीय प्रश्न सोडविणे) : वरील प्रत्येक जोडीची बेरीज केल्यास आपणास येणारी शक्य बेरीज 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 आणि 12 आहेत. त्या प्रत्येकासाठी संभाव्यता माहित करावी लागते. सर्व 36 जोड्या एक सारख्या समान आहेत गृहीत धरा.

हे आपण खालील तक्त्यावरुन करु शकतो.

बेरीज	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
संभाव्यता	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

बेरीज सात येणारी संभाव्यता $\frac{1}{6}$ आहे. याचे निरिक्षण करा. ही दुसऱ्या संख्येचा बेरजेच्या मोठी आहे.

पायरी 4 (सोडवणुकीचे स्पष्टीकरण) : बेरीज 7 येण्याची संभाव्यता ही सर्वात मोठी आहे. तुम्ही वारंवार सात या संख्येचा अंदाज लावला पाहिजे.

पायरी 5 (नमुन्याचे कायदेशीरता) : फास्याची जोडी खुप वेळा वर फेका आणि वारंवारता सारणी तयार करा. संबंधीत वारंवारेतीच संगत संभाव्यतेशी तुलना करा. समजा ते जवळ नसेल तर फासे शक्यतो विशिष्ट दिशेने झुकलेले असते. कोणत्या संख्येकडे झुकलेले आहे. हे माहित करण्यासाठी माहिती काढावी लागते.

समोर जाण्याआधी हा अभ्यास करण्याचा प्रयत्न करा. यासाठी काही माहितीची आवश्यकता आहे.

जेव्हा पैशाची आवश्यकता पडते तेव्हा पैसे नसतात हा काही लोकांसाठी सामान्य अनुभव आहे. दररोजच्या जिवनासाठी, आवश्यक आरामदेह वस्तु विकत घेण्यासाठी आपल्याला नेहमी पैशाची गरज पडते. ग्राहकांना स्कुटर, रेफ्रिजीरेटर, टेलीविजन, कार, इत्यादी वस्तु खरेदीकरण्यासाठी व्यापाऱ्यांनी काही सवलती दिल्या आहे. त्यास हप्ताभरणे म्हणतात.

कधी कधी व्यापारी ग्राहकांना या वस्तु खरेदी करुन त्यांचा व्यापार वाढविण्यासाठी अशा पध्दतीचा परिचय करतात. या हप्तेभरण्याच्या पध्दतीत ग्राहकांला वस्तु खरेदी करतांना त्या वस्तुची पुर्ण किंमत देण्याची गरज पडत नाही. त्यावेळी ती/तो त्या वस्तुच्या किंमतीला हप्ता भरणे या पध्दतीने महिनेवारी, तीन महिण्यांनी, अर्ध वार्षिक किंवा वर्षाला एकदा भरतो. म्हणुन या पध्दतीने विकत घेणाऱ्या व्यक्तीला जास्त पैसे भरावे लागतात. कारण विकणारा व्यक्ती या पैशावंर ठरलेया तारखेसाठी व्याज लावतो.

या कल्पेनत वापरलेल्या काही पदांशी तुम्ही परिचित आहात. उदाहणात वस्तुची रोख किंमत म्हणजे वस्तु विकत घेतांना ग्राहकांनी दिलेली त्या वस्तुची पुर्ण किंमत होय. डाऊन पेंमेट म्हणजे ग्राहकांना वस्तु विकत घेतांना काही रक्कम देऊन विकत घेतो.

या प्रश्नांना आपण गणितांच्या नमुन्यावरुन सोडविण्याचा प्रयत्न करु या.

प्रयत्न करा

रवीला एक सायकल विकत घ्याची आहे. तो बाजारात गेला आणि त्यांनी 2400 रु. किंमतीची सायकल निवडली. त्याच्या जवळ फक्त 1400 रुपये होते. दुकानदारांनी त्याची मदत केली. तो म्हणाला की तो 1400 रुपये आधी देऊन (डाऊन पेंमेट) उरलेली रक्कम 550 रुपये महिना बांधावी लागते. रवीला आता दुकानदाराने दिलेली संधी किंवा बॅंककडे जाऊन 12% दराने कर्ज घ्यावे लागेल दोन संधी पैकी कोणती संधी रवीसाठी उपयुक्त आहे. त्यांला मदत करा.

उत्तरे
(Answers)

अभ्यास - 1.1

1. (i) खंडीत दशांश (ii) अखंडीत दशांश (iii) खंडीत दशांश
   (iv) खंडीत दशांश (v) अखंडीत दशांश
2. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $3\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{31}{25}$
3. (i) परिमेय (ii) अपरिमेय (iii) परिमेय (iv) परिमेय
   (v) अपरिमेय (vi) अपरिमेय (vii) परिमेय

अभ्यास - 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$
2. (i) LCM = 420, HCF = 3 (ii) LCM = 11339, HCF = 1
   (iii) LCM = 1800, HCF = 1 (iv) LCM = 216, HCF = 36
   (v) LCM = 22338, HCF = 9

अभ्यास - 1.3

1. (i) 0.375 (खंडीत दशांश) (ii) 0.5725 (खंडीत दशांश) (iii) 4.2 (खंडीत दशांश)
   (iv) $0.\overline{18}$ (अखंडीत दशांश, पुर्नरावर्ती) (v) 0.064 (खंडीत दशांश)
2. (i) खंडीत दशांश (ii) अखंडीत दशांश, पुर्नरावर्ती
   (iii) अखंडीत दशांश, पुर्नरावर्ती (iv) खंडीत दशांश
   (v) अखंडीत दशांश, पुर्नरावर्ती (vi) खंडीत दशांश
   (vii) अखंडीत दशांश, पुर्नरावर्ती (viii) खंडीत दशांश (ix) खंडीत दशांश
   (x) अखंडीत दशांश, पुर्नरावर्ती
3. (i) 0.52 (ii) 0.9375 (iii) 0.115 (iv) 32.08 (v) 1.3

4. (i) परिमेय (ii) परिमेय नाही (iii) परिमेय
5. m = 5, n = 3
6. m = 4, n = 2

अभ्यास - 1.5

1. (i) $\log_3 243 = 5$ (ii) $\log_2 1024 = 10$ (iii) $\log_{10} 1000000 = 6$
   (iv) $\log_{10} 0.001 = -3$ (v) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (vi) $\log_6 1 = 0$
   (vii) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$ (viii) $\log_{\sqrt{49}} 7 = 1$ (ix) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$
   (x) $\log_{32} \frac{1}{4} = -\frac{2}{5}$
2. (i) $18^2 = 324$ (ii) $10^4 = 10000$ (iii) $a^b = \sqrt{x}$
   iv) $4x = 8$ (v) $3y = \frac{1}{27}$
3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) -4 (iv) 0
   (v) $\frac{1}{2}$ (vi) 9 (vii) -2 (viii) 3
4. (i) log 10 (ii) log 8 (iii) log 64
   (iv) $\log \frac{9}{8}$ (v) log 243 (vi) log 45
5. (i) 3(log 2 + log 5) (ii) 7log 2 − 4log 5 (iii) $2\log x + 3\log y + 4\log z$
   (iv) $2\log p + 3\log q - \log r$ (v) $\frac{1}{2}(3\log x - 2\log y)$

अभ्यास - 2.1

1. (i) संच (ii) संच नाही (iii) संच नाही
   (iv) संच (v) संच
2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\notin$
   (v) $\in$ (vi) $\in$
3. (i) $x \notin A$ (ii) B = {d} (iii) $1 \in N$ (iv) $8 \notin P$
4. (i) सत्य नाही (ii) सत्य नाही (iii) सत्य (iv) सत्य नाही

5. (i) B = {1, 2, 3, 4, 5}
   (ii) C = {17, 26, 35, 44, 53, 62, 71}
   (iii) D = {5, 3}
   (iv) E = {B, E, T, R}

6. (i) A = {x : x हा 3 चा गुणक आहे & 13 पेक्षा लहान आहे.}
   (ii) B = {x : x हा 2^x चा घात आहे& x हा 6पेक्षा लहान आहे.}
   (iii) C = {x : x हा 5 चा घात आहे & xहा 5पेक्षा लहान आहे.)
   (iv) D = {x : x हा नैसर्गिक संख्येच्या वर्गामध्ये आहे आणि10 पेक्षा मोठी नाही.}

7. (i) A = {51, 52, 53, ..., 98, 99}
   (ii) B = {+2, – 2}
   (iii) D = {2, 0, 4, A, 2}

8. (i) – (c)
   (ii) – (a)
   (iii) (d)
   (iv) (b)

अभ्यास - 2.2

1. (i) रिक्त नाही (ii) रिक्त (iii) रिक्त
   (iv) रिक्त (v) रिक्त नाही

2. (i) मर्यादीत (ii) मर्यादीत (iii) मर्यादीत

3. (i) मर्यादीत (ii) अमर्यादीत (iii) अमर्यादीत (iv) अमर्यादीत

अभ्यास - 2.3

1. होय, समान संच

2. (i) समान (ii) समान नाही (iii) समान (iv) समान नाही
   (v) समान नाही (vi) समान नाही (vii) समान नाही

3. (i) A = B (ii) $A \neq B$ (iii) A = B (iv) $A \neq B$

अभ्यास - 2.4

1. (i) सत्य (ii) असत्य नाही (iii) असत्य (iv) असत्य

2. (i) x हा 30 पेक्षा मोठा आहे.
   (ii) $x = 2x + 1$ म्हणजे x विषम आहे.
   (iii) x हा 15 चा गुणक आहे. म्हणुन 5 हा त्यामध्ये नाही.
   (iv) x हा मुळ संख्या आहे पण 9 ही मुळ संख्या नाही.
3. (i) $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \{\phi\}$
   (ii) $\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{x, y, z\}, \phi$
   (iii) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d)$
   (iv) $\phi, \{1\}, \{4\}, \{9\}, \{16\}, \{1, 4\}, \{1, 9\}, \{1, 16\}, \{4, 9\}, \{4, 16\}, \{9, 16\}, \{1, 4, 9\}, \{1, 9, 16\}, \{4, 9, 16\}, \{1, 4, 16\}, \{1, 4, 9, 14)$
   (v) $\phi, \{10\}, \{100\}, \{1000\}, \{10, 100\}, \{100, 1000\}, \{10, 1000\}, \{10, 100, 1000\}$

अभ्यास - 2.5

1. होय, $A \cap B$ & $B \cap B$ हे समान आहेत.
2. $A \cap \phi = \{0, 2, 4\}$
   $A \cap A = \{\phi\}$
3. $A - B = \{2, 4, 8, 10\}$
   $B - A = \{3, 9, 12, 15\}$
4. $A \cup B = B$
5. $A \cap B$ = {विषम नैसर्गिक संख्या}
   $\{1, 3, 5, ...\}$
   $A \cap C = \{\phi\}$
   $A \cap D = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, ... 100\}$
   $B \cap C$ = {विषम नैसर्गिक संख्या}
   $B \cap D = \{9, 15, 21, 25, 27, 33, ... 99\}$
   $C \cap D = \{4, 6, 8, 9, ... 99\}$
6. (i) $A - B = \{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$
   (ii) $A - C = \{3, 9, 15, 18, 21\}$
   (iii) $A - D = \{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$
   (iv) $B - A = \{4, 8, 16, 20\}$
   (v) $C - A = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$
   (vi) $D - A = \{5, 10, 20\}$

(vii) B – C = {20}

(viii) B – D = {4, 8, 12, 16}

(ix) C – B = {2, 6, 10, 14}

(x) D – B = {5, 10, 15}

7. (i) असत्य

(ii) सत्य

(iii) सत्य

(iv) सत्य

अभ्यास - 3.1

1. (a) (i) – 6 (ii) 7 (iii) – 6

(b) मुलांसाठी सोडले

2. (i) असत्य ($\sqrt{2}$ हा x^2 चा सहगुणक आहे, कोटी नाही)

(ii) असत्य (x^2 चा सहगुणक – 4 आहे.)

(iii) सत्य (केाणत्याही स्थिर पदासाठी कोटी शुन्य आहे.)

(iv) असत्य (ते बहुपदी नाही)

(v) असत्य (पदाच्या संख्येशी बहुपदीच्या कोटीचा संबंध नाही)

3. p(1) = 0, p (– 1) = – 2, p(0) = – 1, p(2) = 7, p(– 2) = – 9

4. होय, x^4-16 या बहुपदीचे शुन्य – 2 आणि – 2 आहे.

5. होय, $x^2 - x - 6$ या बहुपदीचे शुन्य 3 आणि – 2 आहे.

अभ्यास - 3.2

1. (i) शुन्य नाही (ii) 1 (iii) 3

(iv) 2 (v) 4 (vi) 3

2. (i) 0 (ii) – 2, – 3 (iii) – 2, – 3 (iv) – 2, 2, $\pm\sqrt{-4}$

3. (i) 4, – 3 (ii) 3, 3 (iii) शुन्य नाही

(iv) – 4, 1 (v) – 1, 1

4. $p\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ आणि $p(-1) = 0$

अभ्यास - 3.3

1. (i) $4, -2$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$

   (iv) $0, -2$ (v) $\sqrt{15}\ -\sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

   (iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

3. (i) $x^2 - x - 2$ (ii) $x^2 - 3$ (iii) $4x^2 + 3x - 1$

   (iv) $4x^2 - 8x + 3$

4. होय, सर्व शुन्य आहेत.

अभ्यास - 3.4

1. (i) भागाकार $= x - 3$ आणि बाकी $= 7x - 9$

   (ii) भागाकार $= x^2 + x - 3$ आणि बाकी $= 8$

   (iii) भागाकार $= -x^2 - 2$ आणि बाकी $= -5x + 10$

2. (i) होय (ii) होय (iii) नाही

3. $-1, -1$

4. $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14$, $g(x) = 2$, $q(x) = x^2 - x + 7$, $r(x) = 0$

   (ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x + 2$

   (iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 2$, $r(x) = 4$

अभ्यास - 4.1

1. (a) एका बिंदु वर छेदते

   (b) अनुरुप

   (c) समांतर

2. (a) सुसंगत (b) असंगत (c) सुसंगत

   (d) सुसंगत (e) सुसंगत (f) सुसंगत

   (g) असंगत (h) सुसंगत (i) असंगत

3. पॅटची संख्या $= 1$; शर्टची संख्या $= 0$

4. मुलींची संख्या $= 7$; मुलांची संख्या $= 4$

5. पेन्सीलची किंमत = 3 रु. पेनची किंमत = 5 रु.
6. लांबी = 20 मी; रुंदी = 16 मी.
7. (i) $3x + 2y - 7 = 0$
   (ii) $3x + 3y - 12 = 0$
   (iii) $4x + 6y - 16 = 0$
8. लांबी = 40 एकक; रुंदी = 30 एकक
9. विद्यार्थ्यांची संख्या = 16; बाकाची संख्या = 5

अभ्यास - 4.2

1. पहिल्या व्यक्तीचे उत्पन्न = 18000रु; दुसऱ्या व्यक्तीचे उत्पन्न = 14000रु.
2. 42 आणि 24
3. 81° आणि 99° हे कोन आहेत.
4. ठराविक दर = 40रु.; प्रति कि.मी. वर दर = 18 रु.
5. $\frac{7}{9}$
6. 60 कि.मी./तास 40 कि.मी/तास
7. 31° आणि 59°
8. 659 आणि 723
9. 40 मी.ली. आणि 60 मी.ली.
10. 7200रु.आणि 4800 रु.

अभ्यास - 4.3

1. (i) (4, 5) (ii) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (iii) (4, 9)
   (iv) (1, 2) (v) (3, 2) (vi) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
   (vii) (3, 2) (viii) (1, 1)
2. (i) जहाजाची गती = 8 कि.मी./तास प्रवाहाची गती = 3 कि.मी./तास
   (ii) ट्रेनची गती = 60 कि.मी./तास कारची गती = 80 कि.मी./तास
   (iii) पुरुषाव्दारे दिवसाची संख्या = 18; स्त्रीव्दारे दिवसाची संख्या = 36

अभ्यास - 5.1

1. (i) होय (ii) होय (iii) नाही
   (iv) होय (v) होय (vi) नाही
   (vii) नाही (viii) होय

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$ (x = रुंदी)
   (ii) $x^2 + x - 306 = 0$ (x = लहान पुर्णांक)
   (iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$ (x = रोहनचे वय)

अभ्यास - 5.2

1. (i) $-2; 5$ (ii) $-2; \frac{3}{2}$ (iii) $-\sqrt{2}; \frac{-5}{\sqrt{2}}$
   (iv) $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}; \frac{1}{10}$ (vi) $-6; 2$
   (vii) $1, \frac{2}{3}$ (viii) $-1; 3$ (ix) $7, \frac{8}{3}$
2. 13, 14
3. 17, 18; -17, -18
4. 5 से.मी., 12 से.मी.
5. वस्तुंची संख्या = 6; प्रत्येक वस्तुची किंमत = 15
6. 4 मी.; 10 मी.
7. पाया = 12 से.मी.; उंची = 8 से.मी.
8. 15 कि.मी., 20 कि.मी.
9. 20 किंवा 40
10. 9 कि.मी.प्रति तास

अभ्यास - 5.3

1. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$
   (iii) $2, \frac{-3}{5}$ (iv) $-1, -5$
2. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$
   (iii) $2, \frac{-3}{5}$ (iv) $-1, -5$
3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2
4. 7 वर्ष
5. गणित = 12, इंग्रजी= 18 (किंवा) गणित = 13, इंग्रजी = 17

6. 120 मी; 90 मी.
7. 18, 12; – 18, – 12
8. 40 कि.मी.प्र.तास
9. 15 तास, 25 तास
10. प्रवासी रेल्वेचे वेग = 33 कि.मी.प्र.तास
    जलद रेल्वेचे वेग = 44 कि.मी.प्र.तास
11. 18 मी.; 12 मी.
12. 6 सेंकद
13. 13 बाजु; नाही

अभ्यास - 5.4

1. (i) वास्तव मुळे अस्तीत्वात नसतात.
   (ii) समान मुळे $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$
   (iii) भिन्न मूळे; $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$
2. (i) $k=\pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k=6$
3. होय; 40 मी.; 20 मी.
4. नाही
5. होय; 20 मी.; 20 मी.

अभ्यास - 6.1

1.(i) अंकगणीतीय श्रेढी (ii) अंकगणीतीय श्रेढी नाही (iii) अंकगणीतीय श्रेढी (iv) अंकगणीतीय श्रेढी नाही

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) – 2, – 2, – 2, – 2
   (iii) 4, 1, – 2, – 5 (iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$
   (v) – 1.25, – 1.5, – 1.75, – 2
3. (i) $a_1 = 3;\ d = -2$ (ii) $a_1 = -5;\ d = 4$
   (iii) $a_1 = \frac{1}{3};\ d = \frac{4}{3}$ (iv) $a_1 = 0.6;\ d = 1.1$
4. (i) अंकगणीतीय श्रेढी नाही

(ii) अंकगणीतीय श्रेढी, पुढील तीन पदे $= 4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) अंकगणीतीय श्रेढी, पुढील तीन पदे $= -9.2, -11.2, -13.2$

(iv) अंकगणीतीय श्रेढी, पुढील तीन पदे $= 6, 10, 14$

(v) अंकगणीतीय श्रेढी, पुढील तीन पदे $= 3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$

(vi) अंकगणीतीय श्रेढी नाही

(vii) अंकगणीतीय श्रेढी, पुढील तीन पदे $= -16, -20, -24$

(viii) अंकगणीतीय श्रेढी, पुढील तीन पदे $= \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$

(ix) अंकगणीतीय श्रेढी नाही

(x) अंकगणीतीय श्रेढी, पुढील तीन पदे $= 5a, 6a, 7a$

(xi) अंकगणीतीय श्रेढी नाही

(xii) अंकगणीतीय श्रेढी, पुढील तीन पदे $= \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) अंकगणीतीय श्रेढी नाही

अभ्यास - 6.2

1. (i) $a_8 = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$
   (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$
2. (i) -84 (ii) 22
3. (i) $a_2 = 14$
   (ii) $a_1 = 18$; $a_3 = 8$
   (iii) $a_2 = \frac{13}{2}$; $a_3 = 8$
   (iv) $a_2 = -2$; $a_3 = 0$; $a_4 = 2$; $a_5 = 4$
   (v) $a_1 = 53$; $a_3 = 23$; $a_4 = 8$; $a_5 = -7$
4. 16वे पद
5. (i) 34 (ii) 27
6. नाही
7. 178
8. 5
9. 1

10. 100 11. 128 12. 60 13. 13

14. अंकगणितीय श्रेढी = 4, 10, 16, ... 15. 158

16. $-13, -8, -3$ 17. 11 18. 13

अभ्यास - 6.3

1. (i) 245 (ii) -180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$

2. (i) $\frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) -8930

3. (i) 440 (ii) $d = \frac{7}{3}$, $S_{13} = 273$

   (iii) $a = 4$, $S_{12} = 246$ (iv) $d = 1$, $a_{10} = 22$

   (v) $n = 5$; $a_5 = 34$ (vi) $x = 7$; $a = -8$

   (vii) $a = 4$

4. $x = 38$; $S_{38} = 6973$

5. 5610

6. x^2

7. (i) 525 (ii) -465

8. $S_1 = 3$; $S_2 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = -1$; $a_{10} = -15$

   $a_n = 5 - 2x$

9. 4920 10. 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40

11. 234 12. 143 13. 16 14. 370

अभ्यास - 6.4

1. (i) नाही (ii) नाही (iii) होय

2. (i) 4, 12, 36, ... (ii) $\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{25}, ...$

   (iii) $81, -27, 9, ...$ (iv) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, ...$

3. (i) होय; 32, 64, 128 (ii) होय, $\frac{-1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{-1}{96}$

(iii) नाही (iv) नाही (v) नाही

(vi) होय; $-81, 243, -729$ (vii) होय; $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \ldots\ldots$

(viii) होय; $-16, 32\sqrt{2}, -128$ (ix) होय; 0.0004, 0.00004, 0.000004

4. -4

अभ्यास- 6.5

1. (i) $r_a = \frac{1}{2}$; $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(ii) $r = -3$; $a_n = 2(-3)^{n-1}$

(iii) $r = 3$; $a_n = 3(3)^{n-1}$

(iv) $r = \frac{2}{5}$; $a_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

2. $a_{10} = 5^{10}$; $a_n = 5^n$

3. (i) $\frac{1}{3^4}$ (ii) $\frac{-4}{3^4}$

4. (i) 5 (ii) 12 (iii) 7

5. 2^{12} 6. $\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, \ldots$ 7. 5

अभ्यास - 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{2}$ (iv) $2\sqrt{a^2+b^2}$
2. 39
3. बिंदु एक रेषीय नाहीत
9. (i) चौरस (ii) समलंब चौकोन (iii) समांतरभुज चौकोन
10. (-7, 0) 11. 7 किंवा -5
12. 3 किंवा -9 13. $4\sqrt{5}$ एकक

अभ्यास - 7.2

1. (1, 3)
2. $\left(2, \frac{-5}{3}\right)$ आणि $\left(0, \frac{-7}{3}\right)$
3. 2 : 7
4. $x = 6$; $y = 3$
5. (3, – 10)
6. $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$
7. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), (-2, 3), \left(-1, \frac{9}{2}\right)$
8. $\left(1, \frac{13}{2}\right)$
9. 24 चौ.एकक
10. $\left(\frac{5a-b}{5}, \frac{5a+b}{5}\right)$
11. (i) $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ (ii) $\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ (iii) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

अभ्यास - 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ चौ.एकक (ii) 32 चौ.एकक (iii) 3 चौ.एकक
2. (i) K = 4 (ii) K = 3 (iii) $K = \frac{7}{3}$
3. 1 चौ.एकक ; 1 : 4
4. 19 चौ.एकक
5. शक्य नाही

अभ्यास - 7.4

1. (i) 6 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $\frac{4b}{a}$ (iv) $\frac{-b}{a}$
   (v) -5 (vi) 0 (vii) $\frac{1}{7}$ (viii) -1

अभ्यास - 8.1

4. $x =$ 5 से.मी. आणि $y = 2\frac{13}{16}$ से.मी. किंवा 2.8125 से.मी.

अभ्यास - 8.2

1. (ii) DE = 2.8 से.मी.

2. 8 से.मी. 3. 1.6 मी. 7. 16 मी.

अभ्यास - 8.3

3. 1:4 4. $\frac{\sqrt{2}-1}{1}$ 6. 96 से.मी.^{2} 8. 3.5से.मी.

अभ्यास - 8.4

8. $6\sqrt{7}$ मी. 9. 13 मी. 12. 1:2

अभ्यास - 9.1

1. (i) एक (ii) वृत्तछेदन रेषा (iii) दोन
(iv) स्पर्श बिंदु (v) अनंत

2. PQ = 13 से.मी. 4. $\sqrt{306}$ से.मी.

अभ्यास - 9.2

1. (i) d (ii) a (iii) b (iv) a (v) c

2. 8 से.मी. 4. AB = 15 से.मी., AC = 9 से.मी.

5. प्रत्येक 8 से.मी. 6. $2\sqrt{5}$ से.मी. 9. दोन

अभ्यास - 9.3

1. (i) 28.5 से.मी.^{2} (ii) 285.5 से.मी.^{2}

2. 88.368 से.मी.^{2} 3. 1254.96 से.मी.^{2} 4. 57 से.मी.^{2}

5. 10.5 से.मी.^{2} 6. 9.625 से.मी.^{2} 7. 102.67 से.मी.^{2}

8. 57 से.मी.^{2}

अभ्यास - 10.1

1. 5500 से.मी.^{2} 2. 154000 से.मी.^{2} 3. 264 c.c.

4. 1 : 2 5. 21 7. 21175 से.मी.^{3}

8. 188.57 मी.^{2} 9. 37 से.मी.

अभ्यास - 10.2

1. 103.71 से.मी.^{2} 2. 1156.57 से.मी.^{2} 3. 220मी.मी^{2}
4. 160 से.मी.^{2} 5. ₹ 827.20 6. $4:4:\sqrt{5}$
7. $x^2\left(\frac{\pi}{4}+6\right)$ चौ.एकक 8. 374 से.मी.^{2}

अभ्यास - 10.3

1. 693 कि.ग्रॅ. 2. शंकुची उंची = 22.05 से.मी.; खेळणीचे पृष्ठफळ = 793 से.मी.^{2}
3. 88.83 से.मी.^{3} 4. 616 से.मी.^{3} 5. 309.57 से.मी.^{3}
6. 150 7. 523.9 से.मी.^{3}

अभ्यास - 10.4

1. 2.74 से.मी. 2. 12 से.मी. 3. 2.5 मी.
4. 5 मी. 5. 10 6. 400
7. 100 8. 672

अभ्यास - 11.1

1. $\sin A = \frac{15}{17}$; $\cos A = \frac{18}{17}$; $\tan A = \frac{15}{8}$
2. $\frac{527}{168}$ 3. $\cos\theta = \frac{49}{25}$; $\tan\theta = \frac{24}{49}$
4. $\sin A = \frac{5}{13}$; $\tan A = \frac{5}{12}$
5. $\sin A = \frac{4}{5}$; $\cos A = \frac{3}{5}$
7. (i) $\frac{47}{62}$ (ii) $\frac{\sqrt{111}+8}{7}$
8. (i) 1 (ii) 0

अभ्यास - 11.2

1. (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ (iii) 1

(iv) $\frac{-1}{3}$ (v) -1

2. (i) c (ii) d (iii) b
3. 1 4. होय
5. QR = $6\sqrt{3}$ से.मी.; PR = 12 से.मी.
6. $\angle YXZ = 60^{o}$; $\angle YXZ = 30^{o}$ 7. हे सत्य आहे.

अभ्यास - 11.3

1. (i) 1 (ii) 0 (iii) 0
   (iv) 1 (v) 1
3. $A = 24^{o}$ 6. $\cos 15^{o} + \sin 25^{o}$

अभ्यास - 11.4

1. (i) 2 (ii) 2 (iii) 1
6. 1 8. 1 9. $\frac{1}{p}$

अभ्यास - 12.1

1. 15 मी. 2. $6\sqrt{3}$ मी. 3. 4 मी.
4. 60^{o} 5. 34.64 मी. 6. $4\sqrt{3}$ मी.
7. 4.1568 मी. 8. 300 मी. 9. 15 मी. 10. 12.99 से.मी.^{2}

अभ्यास - 12.2

1. स्तंभाची उंची = $5\sqrt{3}$ मी.; रस्त्याची रुंदी = 5 मी.
2. 32.908 मी. 3. 1.464 मी. 4. 19.124 मी.
5. 7.608 मी. 6. 10 मी. 7. 51.96 फिट; 30 फिट 8.6 से.मी.
9. 200 मी./सेकंद. 10. 1 : 3

अभ्यास - 13.1

1. (i) 1 (ii) 0, अशक्य घटना (iii) 1, खात्रीची घटना
   (iv) 1 (v) 0, 1
2. (i) नाही (ii) नाही (iii) होय (iv) होय

3. 0.95 4. (i) 0 (ii) 1

5. $\frac{1}{13}, \frac{1}{3}, 1, 0$

6. 0.008 7. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{26}$

अभ्यास - 13.2

1. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

2. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{4}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$

3. (i) $\frac{5}{4}$ (ii) $\frac{17}{18}$

4. $\frac{5}{13}$ 5. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

6. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{1}{13}$ (iii) $\frac{1}{26}$
(iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{13}$ (vi) $\frac{1}{52}$

7. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{1}{4}$ (b) 0

8. $\frac{11}{12}$ 9. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$

10. (i) $\frac{9}{10}$ (ii) (a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{5}$

11. $\frac{11}{84}$ 12. (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

13. (i) $\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$ (ii) No

14. $\frac{3}{4}$ 15. (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{6}{36}$ 16.

दोन फस्यावरील बेरीज	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
संभाव्यता	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

17. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$

अभ्यास - 14.1

1. 8.1 झाडे. x_i आणि f_i ची बैजीक किंमत लहान असल्याने आपण सरळ पध्दतीचा वापर करु
2. 145.20रु.
3. $f = 20$
4. 75.9
5. 22.31
6. 211रु.
7. 0.099 ppm
8. 49 दिवस
9. 69.43%

अभ्यास - 14.2

1. बहुलक = 36.8 वर्ष, मध्य = 35.37 वर्ष रुग्णालयात जास्तीत जास्त रुग्ण 36.8 वर्ष (अंदाजे) वयाचे आहेत. रुग्णालयात असलेल्या रुग्णांच्या वयाची सरासरी 35.37 वर्ष आहे.
2. 65.625 तास
3. महिण्याचा आदर्श खर्च = 1847.83रु. महिण्याचा खर्चाचा मध्य = 2662.5.रु.
4. बहुलक : 30.6, मध्य = 29.2. बरेचशे राज्य/केंद्रशासित प्रदेशात विद्यार्थी शिक्षक गुणोत्तर 30.6 आहे आणि त्यांची सरासरी 29.2 आहे.
5. बहुलक = 4608.7 धावा
6. बहुलक = 44.7 कार

अभ्यास - 14.3

1. मध्यक = 137 एकक, मध्य = 137.05 एकक, बहुलक = 135.76 एकक

   या संदर्भात तीन मापे जवळ जवळ समान आहेत.
2. $x = 8, y = 7$

3. मध्यक वय = 35.76 वर्ष

4. मध्यक लांबी = 146.75 मी.मी.

5. मध्यक आयुष्य = 3406.98 तास

6. मध्यक = 8.05, मध्य = 8.32, बहुलकीय आकार = 7.88

7. मध्यक वजन = 56.67 कि.ग्रॅ.

अभ्यास - 14.4

1.

दैनिक उत्पन्न(रु.मध्ये)	संचित वारंवारता
120 पेक्षा कमी	12
140 पेक्षा कमी	26
160 पेक्षा कमी	34
180 पेक्षा कमी	40
200 पेक्षा कमी	50

बिंदु स्थापण्याव्दारे संचित वारंवारता वक्र (ओजीव) काढा. (120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) आणि (200, 50)

2. (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) आणि (52, 35). बिंदु स्थापना व्दारे संचित वारंवारता वक्र (ओजीव) काढा. येथे $\frac{n}{2}$=17.5 निर्देशकांक 17.5असलेला बिंदु संचित वारंवारता वक्र (ओजीव) वर शोधा. या बिंदुचा x-निर्देशक मध्यक होऊ शकते.

3.

उत्पन्न केलेले (कि.ग्रॅ.)	संचित वारंवारता
50 पेक्षा जास्त किंवा समान	100
55 पेक्षा जास्त किंवा समान	98
60 पेक्षा जास्त किंवा समान	90
65 पेक्षा जास्त किंवा समान	78
70 पेक्षा जास्त किंवा समान	54
75 पेक्षा जास्त किंवा समान	16

(50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78),(70, 54) आणि (75, 16) बिंदु स्थापुन संचित वारंवारता वक्र (ओजीव) काढा.

शिक्षकांना सुचना

प्रिय शिक्षकांनो,

आंध्र प्रदेश शासनाने आंध्रप्रदेश राज्य पाठ्यक्रम फ्रेमवर्क (APSCF-2011). या आधारावरुन सर्व विषयांचा अभ्यासक्रम सुधारण्याचा निर्णय घेतला. त्या फ्रेमवर्कचे महत्व म्हणजे सर्व विद्यार्थी शाळेत शिकलेले गणित हे त्याच्या जिवनाशी आणि अनुभवाशी संबंधीत असले पाहिजे. यावर जास्त भर दिला.NCF-2005, नुसार NCERT मधील गणिताचा कागद आणि आंध्रप्रदेश शासनाने समजण्याचा दृष्टीकोन आणि सामर्थ्यांचा विकास गणितीतील वर्णन आणि गणिताच्या अनुभवाचा कल यावर जास्त भर दिला हे माध्यमिक शाळेच्या पातळीवर शक्य आहे. आपण 9 व्या वर्गात मुलभुत फ्रेमवर्क आणि गणितातील माध्यमिक पातळीवर एकीकरण केले. मागील वर्गात आपण मुलांना मोठे अडथळे दुर करुन गणितीय सुत्रे तयार करण्यासाठी प्रोत्साहन दिले. आपण त्यांना गणिताची सिध्दता आणि त्यांच्या भाषेचा उपयोग कसा करावा यासाठी त्यांना सामर्थ्यवान बनविले. तेव्हा आपण भाषेत समोर जातो. ज्यामध्ये गणितीय वाद आपले विधान हे संज्ञेच्या रुपात दर्शविल्या जाते याची ओळख करणे महत्वाचे आहे. गणितातील उपाय आणि आरामदायक बनविण्यासाठी मुलांना मदत करणे महत्वाचे आहे. 10 व्या वर्गात या सर्व कठिण पातळीवर उपाय काढु

6 वी ते 10 व्या वर्गाच्या सर्व पाठ्यक्रम 10 वा वर्ग शिकविताना विचारात घेणे महत्वाचे आहे. कठिणपणा आणि स्वभाव व गणिताच्या भाषेचा वापर याची हळुहळु वाढ होत आहे. येथे प्रणाली ही तत्वाची आणि मुले ही हळुहळु समृध्द झाली आहेत. सर्वात मोठी अडचण म्हणजे मुले समोर जाऊन माध्यमिक गणित शिकण्याची त्यांची पात्रता ही त्या तत्वाशी आणि स्वभावाशी चिन्हाच्या भाषेशी झुंज देणे कठिण आहे. त्यांना याचा विकास आणि शिकण्याची संधी द्यावी. समवयस्क ही एक कठिण बाब आहे. आणि त्यांना गटात देऊन विचार करु देत चर्चा करुन प्रश्न सोडवित महत्वाचे आहे. जेव्हा विद्यार्थी हे 10 व्या वर्गात शिकतो ते त्यांना भविष्यात गणित शिकण्यासाठी उपयोगी पडते.

अभ्यासक्रम रचनात्मक, शोध, गणिताचे मुलभुत मुद्दे आणि सामान्यवरण यावर आधारीत आहे. वर्गातील चर्चा आणि सहभागी होणे या पध्दतीने प्रोत्साहन मिळते.

10 व्या वर्गाच्या पुस्तकातील पाठ्यक्रमास 6 मोठ्या क्षेत्रात विभागले आहे. संख्या प्रणाली, अंकगणित, बिजगणित, भुमिती, त्रिकोणमिती, सांख्यिकी आणि निर्देशक भुमिती या क्षेत्रातील पाठ्यांश शिकविल्याने मुलांचे प्रश्न सोडविणे, तार्किक विचार, गणितीय संवाद, विविध रुपात माहिती दर्शविणे, गणिताचा उपयोग दैनंदिन जिवनात करणे इत्यादी कौशल्याचा विकास होतो.

योजना तयार करणे आणि त्यास जास्त प्राधान्य देणे या पुस्तकाची धडपड आहे. लहान गटात चर्चा करणे आणि ***हे करा, प्रयत्न करा*** या रुपातील अनुभवांना हाताळुन कृती करणे याचे प्राधान्य आहे. वर्गातील परिस्थितींना व्यवस्थीत करण्यासाठी शिक्षकांची मदत आवश्यक आहे आणि नविन पुस्तकात रुची निर्माण करणे.

हे करा आणि ***प्रयत्न करा*** या अभ्यास प्रत्येक धड्याचा शेवटी दिले आहे. ***हे करा*** या खाली दिलेले प्रश्न शिकविलेल्या मुद्द्यावर आहे. आणि प्रयत्न करा या मधील प्रश्न हे सत्याचे सामान्यकरण अचुकतेची खात्री, प्रश्नावली इत्यादी कौशल्याची परिक्षा करण्यासाठी आहे.

विचार करा आणि चर्चा करा हे विद्यार्थ्यामधील नविन कल्पना त्यांच्या भाषेत समजुन घेण्यासाठी दिले आहे.

10 व्या वर्गाचा पुर्ण पाठ्यक्रम 14 धड्यात विभागले असुन यावरुन विद्यार्थी पर्यायी प्रश्नांचे तर्काचे एकीकरण करुन गणित शिकण्याचा आनंद घेतील. रंगीत चित्र आकृत्या मोठे अक्षर, हे त्यांना अनुक्रमणीका स्वीकारुन हे पुस्तक स्वताचे आहे याची काळजी घेईल.

धडा -1: वास्तव संख्या आपण यास वास्तविक संख्याचे स्पष्टीकरण यामध्ये गणिताचे मुलभुत प्रमेय, परिमेय संख्या आणि त्यांचा दंशास विस्तार आणि अनावर्ती परिमेय संख्या दिल्या आहेत. येथे आपण अपरिमेय संख्याविषयी जास्त माहिती दिली आहहे. या धड्यात पहिल्यांदा लघुगुणकाचा परिचय देऊन यात लघुगुणकाचे मुलभुत नियमासाठी त्यांची उपयोजन याची चर्चा केली आहे.

धडा-2: मध्ये संच हा नविन धडा माध्यमिक विद्यार्थ्यांच्या पातळीवर आहे. जुन्या पाठ्यक्रमात तेथे आहे परंतु तो10 व्या वर्गात परिचीत केला आहे. या धड्यात विविध प्रकारचे उदाहरणे ज्यात संचाची व्याख्या त्याचे प्रसरव्हेन चित्र, संचावरील क्रिया, संचातील फरक इत्यादी आहेत. या धड्यात संचाबद्दल सामान्य माहितीचा विकास केला आहे. तुम्ही कोणत्याही वस्तुंचा संच कसा तयार कराल?

धडा-3: बहुपदी यामध्ये आपण बहुपदी काय आहेत? आणि त्या बहुपदीची कोटी आणि त्यांच्या किंमती आहेत. यावेळी आपण रेषीय समीकरण आणि वर्गसमीकरणाची आलेखीय दर्शवणुक पाहणार आहोत. बहुपदीची शुन्य आणि सहगुणक आणि त्यामधील संबंध याची काळजी घेत आहोत. आपण धन बहुपदी आणि बहुपदीचा अलगारीदम भागावर सुध्दा सुरु केलेला आहे.

धडा-4: दोन चलीय रेषीय समीकरणाची जोडी यात अनोळखी राशीची माहिती काढणे आणि दोन रेषीय समीकरणे एकत्र याचा उपयोगाची चर्चा करणार आहोत. दोन चलातील रेषयी समीकरणाची उकली, आलेखीय आणि बैजिक पध्दतीवरुन काढणार आहो. समीकरणाच्या स्वभाव आणि सहगुणक या मधील संबंधाला समजुन घेणे याचे स्पष्टीकरण काही उदाहरणे घेऊन केलेले आहे. समीकरणाला घेत चलातील रेषीय समीकरणात बदलणे येथे केलेले आहे.

अशा प्रश्नांना येथे तयार करुन आपल्या दैनंदिन जिवनातील विविध धड्यांना आणि गणितातील व इतर विषयातील सहसंबंधाचा प्रयत्न केलेला आहे.रोजच्या अनुभवाव्दारे अनोळखी माहिती घेण्याचा सामर्थ्यचा यांच्याशी संबंध आहे.

10 वर्गाच्या (8,9,10) धड्यांना गणिताच्या पुस्तकात ठेऊन भुमिती शिकण्याचे महत्व माहिती दृष्टीपुर्ण वैयक्तिक अर्थपुर्ण याचा उपयोग संवाद आणि प्रश्न सोडवुन विविध प्रतलीय आकृतीमधील संबंध काढण्यासाठी होतो. 9 व्या धड्यातील वर्तुळाची स्पर्शीका आणि छेदिका यात नविन शब्दाचा त्यांच्या गुणधर्माचा परिचय दिला आहे. आपण रेषाखंड आणि क्षेत्रफळ ज्यावरुन छेदिका येते याची सुध्दा चर्चा केली आहे. घनांचे घनफळ आणि क्षेत्रफळ माहित करणे महत्वमापणास दिले आहे.

धडा-5: वर्ग समीकरणे, वर्गसमीकरणाचा अर्थ सांगुन सोडविणे वर्ग पुर्ण करण्याच्या अवयवाच्या पध्दतीवरुन वर्ग समीकरणाची उकली काढणे. परावलयाच्या साहाय्याने मुळांच्या स्वरुपांची व्याख्या येथे केली आहे.

धडा-6: श्रेढी, माध्यमिक शिक्षणाच्या पातळीवर पहिल्यांदा या धड्याचा परिचय दिला आहे. या धड्यात अंकगणितात श्रेढी आणि गुणोत्तर श्रेढी याचा उपयोग घेतलेला आहे. या 6 श्रेढीत श्रेढीचा अंकगणितीय आणि भुमितीय पदाचा कसा परिचय दिला आहे. याची चर्चा केलेली आहे. पदांची संख्या n वे पद पदांची बेरीज या धड्यात आहे.

धडा-7: निर्देशक भुमिती कार्तेशियन प्रतलातील दोन बिंदुमधील अंतर काढणे, विभाजन सुत्र, त्रिकोणाचा गुरुत्व मध्य, रेषेवरील त्रिछेदन बिंदु, यात आपण प्रतलातील त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हेरॉनच्या सुत्राव्दारे माहित करणे या बद्दल चर्चा केली.

सरळ रेषेचा चढ सुध्दा या धड्यात परिचय केलेला आहे. (11 आणि 12) या दोन नविन धड्यात पहिल्यांदा त्रिकोणाचे उपयोजना वरुन कर्ण, लंब आणि पाया या मधील संबंध दिले आहे. या धड्यावरुन त्रिकोणमितीचा परिचय होतो. याची मोठ्या पातळीवर खुप मोठी भुमिका आहे. आणि अनेक परिमाण काढण्यासाठी सुध्दा याची भुमिका आहे. त्रिकोणामितीच्या उपयोजनात त्रिकोणाच्या साहाय्याने विस्तृत उपाय दिलेले आहे.

धडा-13: संभाव्यता हा मागील धड्यापेक्षा थोडा उच्च स्तरीय धडा आहे. याचा परिचय 9 व्या वर्गात झाला आहे. आपल्या दैनंदिन जिवनातील उपयोगावरुन संभाव्यताच्या काही विभिन्न पदांचा येथे समावेश आहे.

धडा-14: सांख्यिकी यात सांख्यिकीचे महत्व वर्गीकृत माहिती गोळा करणे , मध्य, मध्यक आणि बहुलकाचे स्पष्टीकरण काही उदाहरण घेऊन करणे, यासाठी विविध पध्दतीचा वापर करणे. येथे ओजीव वक्राचे पुन्हा वर्णन केले आहे. शब्दकोषात गणितीय नमुने यात नमुन्याविषयी उपाय आणि नमुन्याच्या पध्दती आहेत.

कोणताही कोर्स यशस्वी होणे फक्त पाठ्यक्रमावरच अवलंबुन नाही तर शिक्षकांवर आणि त्यांनी शिकविलेल्या शिक्षण पध्दतीवर सुध्दा अवलंबुन असते. सर्व शिक्षक गणिताचा विकासाशी संबंधीत असुन या प्रणालीत ते चांगले सहकार्य करण्याचा प्रयत्न करीत अशी अशा बाळगतो.

आपण काय चर्चा केली या मधील कल्पनेला पचविण्यासाठी विद्यार्थ्यांना तयार केले पाहिजे. त्या कल्पनेशी संबंधीत प्रश्नांना शिक्षक त्यांच्या स्वताहुन प्रश्न तयार करुन अभ्यासातील दिलेले प्रश्न सोडविले पाहिजे. म्हणुन शिक्षक त्या वर्गखोलीतील प्रणालीत प्रश्न सोडवुन त्या कल्पनेला चांगले समजुन त्यांचे समाधान केले पाहिजे

“शिक्षकांना शुभेच्छा”

पाठ्यक्रम

I. संख्या प्रणाली (23 तास)

(i) **वास्तव संख्या (15 तास)**

- परिमेय आणि अपरिमेय संख्येबद्दल जास्त माहिती
- अंकगणितीय मुलभुत सिध्दांत -कथन
- सिध्दता- $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ इत्यादीची अपरिमेयता आणि परिमेय संख्याचे खंडीत/ अखंड आवर्ती दशांशात विस्तार करणे.
- वास्तव संख्याचे गुणधर्म (उजळणी नंतर आणि उदाहरणे देऊन उदाहणाव्दारे प्रोत्साहण देणे)
- लघुकोनकाचा परिचय
- संख्यांना, घातांकाच्या रुपात लघुगुणकाच्या रुपात बदलणे.
- लघुगुणकाचे गुणधर्म $\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$
- लघुगुणकाचे नियम $\log xy = \log x + \log y$; $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$; $\log x^n = n \log x$
- लघुगुणकाचे सामान्य पाया आणि दैनंदिन जिवनात लघुगुणकाचे उपयोग(परिक्षेसाठी नाही)

(ii) **संच (8तास)**

- संच आणि त्यांची दर्शवणुक
- रिक्तसंच,सांत आणि अनंत संच, विश्वसंच
- समान संच, उपसंच, वास्तव संख्यांच्या संचाचे उपसंच (अंतराल आणि सुचक)
- संचावरील मुलभुत क्रिया - संचाचा संयोग आणि छेद
- विभक्त संच, संचातील फरक
- संचाचे व्हेन चित्र

II. बिजगणित (46 तास)

(i) **बहुपदी (8 तास)**

- बहुपदीचे शुन्य
- रेषीय, वर्ग आणि घनबहुपदीच्या शुन्याचा भुमितीय अर्थ
- बहुपदीच्या सहगुणक आणि शुन्यातील संबंध
- विभाजन अदगारीदम वरील सहगुणक असलेला बहुपदीसाठी साधे प्रश्न

(ii) **दोन चलीय रेषीय समीकरणाची जोडी (15 तास)**

- उदाहरणावरुन दोन चलीय रेषीय समीकरण तयार करणे.
- दोन चलीय रेषीय समीकरणाची बिजगणीतीय सोडवणुक प्रतिक्षेपण निश्काषसन पध्दतीने
- समीकरणावरील दैनंदिन साधे प्रश्न
- विविध शक्य उकलीच्या रेषीय समीकरणाच्या जोडीचे आलेखीय सादरीकरण
- संख्याच्या उकलीसाठी बिजगणितीय अटी

(iii) **वर्ग समीकरणे (12 तास)**

- $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ या वर्ग समीकरणाचे सामान्य रुप.
- वर्ग समीकरणाच्या उकली अवयव आणि वर्ग पुर्ण करणे या पध्दतीने सुत्राच्या साहाय्याने माहित करणे.

- विवेचक आणि मुळांच्या स्वरुपातील संबंध
- दररोजच्या कार्याशी संबंधीत प्रश्न

(iv) **श्रेढी (11 तास)**

- अंकगणितीय श्रेढीची व्याख्या
- अंकगणितीय श्रेढीचे n वे पद पहिल्या पदांची बेरीज काढणे.
- भुमितीय श्रेढी
- भुमितीय श्रेढीचे n वे पद काढणे.

III. भुमिती (33 तास)

(i) **समरुप त्रिकोण (18 तास)**

- समरुप आकृत्या एकरुपते आणि समरुपतेमधील फरक
- समरुप त्रिकोणाचे गुणधर्म
- त्रिकोणाच्या एका बाजुवर काढलेली समांतर रेषा इतर दोन बाजुना दोन भिन्न बिंदुत छेदते. त्या दोन बाजु सारख्या गुणोतरात विभागल्या जातात(सिध्दता)
- (प्रोत्साहन) दोन त्रिकोणात संगत कोन समान असल्यास त्याच्या संगत बाजु प्रमाणात असतात. ते त्रिकोण समरुप असतात) को को को
- (प्रोत्साहन) एक रेषा त्रिकोणाच्या दोन बाजुला सारख्या गुणोत्तरात विभागल्यास ती रेषा तिसऱ्या बाजुस संमातर असते.
- (प्रोत्साहन) दोन त्रिकोणाच्या संगत बाजु प्रमाणात असल्यास त्यांचे संगत कोन समान असतात. ते दोन त्रिकोण समरुप असतात(बाबाबा)
- एका त्रिकोणाच्या एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या एक कोनाशी समान आणि या कोनलगतची बाजु प्रमाणात असल्यास तर ते दोन त्रिकोण समरुप असतात (बाकोबा)
- (सिध्द) दोन समरुप त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर त्यांच्या संगत बाजुच्या वर्गाच्या गुणोत्तरा एवढे असते.
- (प्रोत्साहन) काटकोन त्रिकोणाच्या शिरोंबिंदु वरुन कर्णावर काढलेला लंब त्याचे लंबाच्या प्रत्येक बाजुवरील त्रिकोण समरुप असतात.
- (सिध्द) काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावरील हा, इतर दोन बाजुवर काढलेला चौरसाच्या बेरजेएवढा असते.
- (सिध्द) एका त्रिकोणाच्या बाजुवर चौरस हा इतर बाजु वरील चौरसाच्या बेरजेला समान असल्यास पहिल्या बाजुसमोरील कोन काटकोन होतो.
- (रचना) मुलभुत प्रमाणाच्या प्रमेयावरुन रेषाखंडाचे विभाजन.
- (रचना) दिलेल्या त्रिकोणाला समरुप असणाऱ्या त्रिकोण प्रमाण घटकावरुन

(ii) **वर्तुळाच्या स्पर्शीका आणि छेदिका (15 तास)**

- वर्तुळाच्या स्पर्शीका आणि छेदिका मधील फरक
- वर्तुळाची स्पर्शीका जिवाने प्रभावित असते नी त्या बिंदुच्या अति जवळ असते.
- (सिध्द) वर्तुळावरील स्पर्शीका ही त्या बिंदुच्या त्रिजेला लंब असते.
- (सिध्द) वर्तुळाच्या बाहेरील बिंदवुरुन काढलेली स्पर्शीकेची लांबी समान असते.
- (रचना) वर्तुळावर दिलेल्या बिंदुतुन काढलेली स्पर्शीका
- (रचना) बाहेरील बिंदवरुन वर्तुळावर काढलेल्या स्पशरिषेची जोडी
- वर्तुळाच्या रेषाखंड छेदिकेने बनतो.
- वर्तुळाचा मोठा/लहान रेषाखंडाचे क्षेत्रफळ काढणे.

IV. निर्देशक भुमिती

- रेषीय समीरकणाच्या आलेखावरुन निर्देशक भुमितीचे उजळणी
- $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ या दोन बिंदुतील अंतर $\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$
- विभाजन सुत्र(रेषाखंडाला m : n या गुणोत्तरात विभागतो.)
- निर्देशक प्रतलातील त्रिकाणाचे क्षेत्रफळ
- दोन बिंदुनी जोडणाऱ्या रेषेचे चढ

V. त्रिकोणमिती (23 तास)

(i) **त्रिकोणमिती (15 तास)**

- काटकोन त्रिकोणाच्या लघुकोनाचे त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे sine, cosine, tangent, cosecant, secant and cotangent.
- 30°, 45° आणि 60° कोनाचे त्रिकोणमितीय गुणोत्तराची किंमती (सिध्दतासोबत)
- पुरक कोनाच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तर आणि गुणोत्तरामधील संबंध
- त्रिकोणमितीय नित्यसमानता

(i) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, (ii) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, (iii) $\cot^2 A + 1 = \mathrm{cosec}^2 A$

(ii) **त्रिकोणमितीचे उपयोजन (8 तास)**

- उन्नत कोण, अवनत कोन
- उंची आणि अंतराची साधी आणि दैनंदिन जिवनातील उदाहरणे
- प्रश्न सोडविणे दोन पेक्षा जास्त नसणाऱ्या काटकोन त्रिकोणाच्या उन्नत कोन/अवनत को 30°, 45° आणि 60°.

VI. महत्वमापण (10 तास)

(i) **पृष्ठफळ आणि घनफळ**

- खालील दिलेल्या कोणत्याही दोन एकत्र घनाचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढणे म्हणजे जसे घन, इष्टीकाचीती, वृत्तचित, शंकु, गोल आणि अर्ध गोल
- एका घनाचे दुसऱ्या प्रकारच्या घनात रुपांतर करुन प्रश्न सोडविणे, घनफळ काढणे, दोन पेक्षा जास्त असलेल्या भिन्न घनाचे एकत्र घनांचे प्रश्न सोडविणे.

VII. सामग्री हाताळणे (25 तास)

(i) **सांख्यिकी**

- अवर्गीकृत सामग्रीचा मध्य, मध्यक आणि बहुलकाची उजळणी.
- वर्गीकृत सामग्रीचा मध्य, मध्यक आणि बहुलकाची कल्पना समजुन घेणे.
- वर्गीकृत/अवर्गीकृत माहितीचा मध्य, मध्यक,बहुलक यावरील साधे प्रश्न विविध पध्दतीने
- ओजीव वक्राव्दारे केंद्रीय प्रवृत्तीची भिन्न किंमत आणि त्याचा वापर.

(ii) **संभाव्यता (10 तास)**

- संभाव्यताची कल्पना आणि व्याख्या याची उजळणी.
- सुचकाचा वापर करुन साधे प्रश्न(दैनंदिन जिवनातील) सोडविणे.
- पुरक घटनांची संकल्पना.

परिशिष्ट गणितीय नमुने (8 तास)

- गणितीय नमुन्याची कल्पना
- दैनंदिन जिवनातील नमुन्याच्या पायऱ्याची चर्चा सोपी हप्ता भरण्याची पध्दत इत्यादी.

शैक्षणिक मुल्याकंण - उच्च प्राथमिक शाळा

विद्यार्थ्यांला काय माहित असायला पाहिजे आणि काय काय केले पाहिजे याबद्दलचे सुरळीत विधान म्हणजेच शैक्षणिक प्रमाण होय.या शैक्षणिक प्रमाणास खालील भागात वर्गीकरण केले.

1. गणिताचे क्षेत्र

गणितीय भाव आणि पध्दतीचा वापर करुन गणितीय प्रश्न सोडविणे.

अ. प्रश्नांचे प्रकार

प्रश्न वेगवेगळ्या रुपात असतात. जसे कोडे, लेखी प्रश्न, चित्ररुपात प्रश्न पध्दतीनुसार सोडविणारे गणित, माहितीचे वाचन, तक्ते, आलेख इत्यादी.

1. प्रश्न सोडविणे

- प्रश्न वाचा
- दिलेले सर्व माहिती ओळखणे
- संबंधीत माहिती वेगळी करणे.
- त्या मध्ये असलेले भाव समजुन घेणे.
- संबंधीत प्रणाली, सुत्रे इत्यादींची उजळणी
- पद्धतीची निवड करणे
- प्रश्न सोडविणे
- उत्तराचा पडताळा सिध्दांतावर आधारीत प्रश्न

क. संक्लीष्टता

प्रश्नांची क्लिष्टता खालील गोष्टीवर अवलंबुन आहे.

- संबंध बनविणे
- प्रश्नातील पायऱ्यांची संख्या
- प्रश्नांतील क्रियांची संख्या
- प्रश्न सोडविण्यासाठी दिलेली संदर्भ माहिती कशी आहे.
- प्रश्नातील पद्धतीचे स्वरुप

कारणे सिद्धता

- वेगवेगळया पायऱ्यांमधील कारणे दाखविणे.
- गणिताचे सामान्य करण आणि अनुमानाचे अर्थ समजुन घेणे.
- पध्दतीस समजुन घेणे आणि न्याय देणे.

- वादाची पाहाणी करणे, तर्क
- आगमन आणि निगमन तर्काचा वापर.
- गणितीय अनुमानाची पडताळणी करा.

व्यक्तीकरण

- गणितीय पदावलीला वाचने आणि लिहिने जसे (शाब्दीक आणि संज्ञारुप)

  उदा. $3 + 4 = 7$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, त्रिकोणांच्या कोनांची बेरीज $= 180^0$
- गणितीय पदावली तयार करणे.

अनुसंधान

- गणितीय प्रांतामधील भावांचे अनुसंधान करणे, जसे गुणाकाराशी बेरजेचा संबंध, पुर्ण संख्येमधील भागाचे गुणोत्तर आणि भागाकारा, नमुने आणि सममीती, मापण आणि जागा
- दैनंदिन जिवनाशी संबंध बनविणे.
- वेगवेगळ्या विषयाशी गणिताचा अनुसंधान करणे.
- गणितातील वेगवेगळ्या पाठ्यांशी संबंधीत भावनेला अनुसंधान करणे जसे, माहिती हाताळणे आणि अंकगणित किंवा आणि प्रदेश
- अनेक प्रकारच्या पध्तीच्या संकल्पनेचा अनुसंधान करणे.

दृष्यकरण आणि दर्शवणुक

- तक्त्यातील माहिती वाचुन त्याचे स्पष्टीकरण करणे जसे संख्यारेखा, चित्रालेख, स्तंभोलख, 2-D आकृती, 3-D आकृती आणि चित्र
- सारणी बनविणे, संख्या रेषा, चित्रालेख, स्तंभालेख,आकृती बनविणे.
- गणितीय संज्ञा आणि आकृत्या