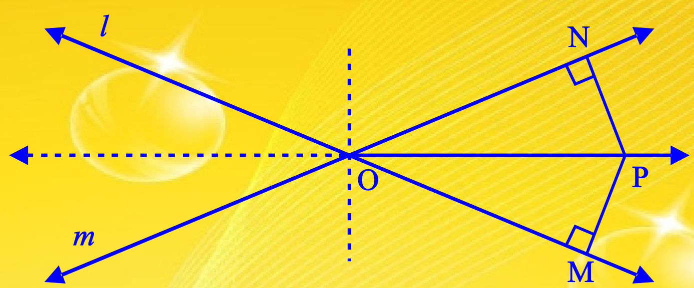
कक्षा
10

गणित



गणित

कक्षा – 10

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड राजस्थान, अजमेर

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

पुस्तक : गणित

कक्षा – 10

संयोजक :– डॉ. सुशील कुमार बिस्सू, सह आचार्य
सम्राट पृथ्वीराज चौहान राजकीय महाविद्यालय, अजमेर

लेखकगण :–

1. डॉ. कमल मिश्रा, सहायक निदेशक
   आयुक्तालय कॉलेज शिक्षा, जयपुर

2. डॉ. बी. बी. जैमिनी, सह आचार्य
   राजकीय महाविद्यालय, कोटा

3. श्री नागार्जुन शर्मा, पूर्व प्रधानाचार्य
   राजकीय उ.मा. विद्यालय, निवाई, टोंक

4. श्री शम्भू सिंह लाम्बा, प्रधानाचार्य
   राजकीय उ.मा. विद्यालय, तोपदड़ा, अजमेर

5. श्री आर. पी. सिंह, वरि. अध्यापक
   राजकीय उ.मा. विद्यालय, चौमा मालियान, कोटा

6. श्री बसंत कुमार जिंदल
   संदर्भ व्यक्ति खण्ड संदर्भ केन्द्र प्रभारी, जयपुर

7. डॉ. देवेन्द्र भटनागर, सेवानिवृत प्रधानाचार्य

पाठ्यक्रम समिति

पुस्तक : गणित

कक्षा – 10

संयोजक :– डॉ. सुशील कुमार बिस्सू, सह आचार्य
सम्राट पृथ्वीराज चौहान राजकीय महाविद्यालय, अजमेर

सदस्य :–

1. श्री राजनारायण शर्मा सेवानिवृत प्रधानाचार्य
   न्यू सांगानेर, सोडाला, जयपुर

2. श्री शम्भू सिंह लाम्बा, प्रधानाचार्य
   राजकीय उ.मा. विद्यालय, तोपदड़ा, अजमेर

3. श्री नागार्जुन शर्मा, पूर्व प्रधानाचार्य
   राजकीय उ.मा. विद्यालय, निवाई, टोंक

4. श्री रामलाल जाट, प्रधानाचार्य
   राजकीय उ.मा. विद्यालय, खडबामनिया, राजसमंद

5. श्री चन्द्र प्रकाश कुर्मी, प्राध्यापक
   राजकीय उ.मा. विद्यालय, टोडारायसिंह, टोंक

6. श्री भगवान सिंह शेखावत, वरि. अध्यापक
   राजकीय वरि. उपाध्याय संस्कृत विद्यालय, पुष्कर, अजमेर

आमुख

भारत वर्ष, गणित शास्त्र की दृष्टि से विश्व में सदैव अग्रणी रहा है। यहाँ की संस्कृति, परम्परा, सार्वभौम एवं सर्वसमावेश के चिन्तन का प्रभाव ही है जिसके कारण, शून्य अंक पद्धति, दशमलव पद्धति, अनेक प्रकार की गणनाओं के लिए सरल, लघु एवं त्रुटि रहित विधियाँ भारत विश्व को दे सका है । आवश्यकता अब इस बात की है कि गणित की इस प्रभावी विधा **''वैदिक गणित''** के आलोक में विद्यालय एवं उच्च शिक्षा में इसके प्रयोग के लिये अनुसंधान एवं शोध किये जाये। इस विचार से ही प्रस्तुत पुस्तक में एक अध्याय वैदिक संकल्पना पर आधारित दिया गया है तथा अन्य अध्यायों में भी जहाँ सम्भव हो सका है वहाँ अन्य विधियों के विकल्प के रूप में वैदिक विधियाँ भी दी गई हैं। थोड़े प्रयास से ही विद्यार्थियों को इन वैदिक विधियों की उपयोगिता को पहचानने में कठिनाई नहीं होगी।

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान द्वारा कक्षा 10 के लिए निर्धारित नवीन पाठ्यक्रम के अनुसार ही इस पुस्तक का लेखन किया गया है। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, तथा विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं के परिप्रेक्ष्य में भी इस पुस्तक का अद्यतन किया गया है। मानक शब्दावली का प्रयोग किया गया है। सरलता एवं बोधगम्यता का विशेष ध्यान रखा गया है।

प्रश्नों को हल करने की विधियाँ सरल एवं सहज बने इस हेतु पर्याप्त संख्याा में दृष्टांतीय उदाहरण एवं वस्तुनिष्ठ प्रश्न भी हर अध्याय में सम्मिलित किये गये हैं।

विश्वास है कि इस पुस्तक के पढ़ने से विद्यार्थी की गणित में रूचि जागृत होगी। आत्म–विश्वास के साथ–साथ आत्म–गौरव भी बढ़ेगा।

विद्यार्थियों, अध्यापकों एवं अन्य पाठकों से निवेदन है कि इस पुस्तक के अध्ययन/अध्यापन के परिणामस्वरूप जो अनुभूति हों अथवा किसी भी प्रकार की न्यूनता ध्यान में आए तो उससे लेखकगण, संयोजक को अवगत करवाने का कष्ट करें जिससे कि पुस्तक के स्तर में वांछित सुधार किया जा सके।

लेखकगण

पाठ्यक्रम

विषय कोड 09

प्रश्न–पत्र	समय (घण्टे)	प्रश्न पत्र के लिए अंक	सत्रांक	पूर्णांक
एक	3.15	80	20	100

क्र.सं.	इकाई का नाम	अंक भार
1.	वैदिक गणित (Vedic Mathematics)	4
1.	संख्या पद्धति (Numbers System)	3
3.	बीज गणित (Algebra)	12
4.	त्रिकोणमिति (Trigonmetry)	11
5.	निर्देशांक ज्यामिति (Coordinate Geometry)	6
6.	ज्यामिति (Geometry)	20
7.	क्षेत्रमिति (Mensuration)	10
8.	सांख्यिकी तथा प्रायिकता (Statistics and Probability)	10
9.	सड़क सुरक्षा शिक्षा (Road Safety Education)	4

Details of the Syllabus

इकाई–1 वैदिक गणित (Vedic Mathematics) **4**

वैदिक गणित की मूल संकल्पना–

मूल संक्रियाओं का अभ्यास एवं विस्तार, सूत्र उर्ध्व तिर्यग्भ्याम् का अर्थ एवं अनुप्रयोग, सूत्र निखिलम् आधार–उपाधार द्वारा वर्ग एवं घनफल संक्रिया का अध्ययन, भाग संक्रिया (सूत्र निखिलम्, सूत्र परावर्त्य योजयेत् व ध्वजांक विधि), वैदिक पद्धति द्वारा सरल समीकरणों का हल, भाग संक्रिया के लिए उत्तर जांचने की नवांक एवं एकादशांक विधि।

इकाई–2 संख्या पद्धति (Number System) **3**

वास्तविक संख्याएं–

यूक्लिड विभाजक प्रमेयिका, गणित के मूलभूत प्रमेय का कथन, पिछले कार्य की पुनरावृत्ति तथा उदाहरणों के उपरान्त के परिमेयता के प्रमाण, परिमेय संख्याओं का सांत/अनवसानी आवृति दशमलव पदों के दशमलव प्रसार।

इकाई–3 बीज गणित (Algebra) 12

(अ) बहुपद– 4

बहुपद के शून्यक, द्विघाती बहुपद के शून्यकों तथा उनके गुणांकों में सम्बंध, वास्तविक गुणांकों वाले बहुपदों पर भाग (एल्गोरिथ्म) पर कथन तथा सामान्य प्रश्न, द्विघात समीकरणों का मानक रूप एवं उसका हल, विविक्तिकर तथा मूलों की प्रकृति, बीजीय व्यंजकों का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) तथा महत्तम समापवर्तक (HCF)

(ब) दो चरों वाले रैखिक समीकरण एवं असमिकाएँ 5

दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म एवं असंगतता, रैखिक समीकरण युग्म का आलेखीय हल एवं उसकी विभिन्न सम्भावनाएं, दो चर राशि वाली रैखिक असमिकाएं।

(स) समान्तर श्रेढ़ी– 3

समान्तर श्रेढ़ी को पढ़ने की प्रेरणा। समान्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद तथा n पदों के योग के मानक परिणाम को निकालने की विधि।

इकाई–4 त्रिकोणमिति (Trigonmetry) **11**

(अ) त्रिकोणमितीय अनुपात–

एक समकोण त्रिभुज के न्यून कोण का त्रिकोणमितीय अनुपात 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0 के त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान, त्रिकोणमितीय अनुपातों में सम्बंध।

(ब) त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं के उपयोग, पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात।

(स) ऊंचाई और दूरी–

उन्नयन व अवनमन कोण, ऊंचाई व दूरी पर साधारण प्रश्न (30^0, 45^0, 60^0,पर आधारित)

इकाई–5. निर्देशांक ज्यामिति (Coordinate Geometry) **6**

निर्देशांक ज्यामिति

कार्तीय तल, निर्देशांक, दो बिन्दुओं के मध्य दूरी, आन्तरिक विभाजन सूत्र, त्रिभुज का क्षेत्रफल

इकाई–6. ज्यामिति (Geometry) **20**

(अ) बिन्दु एवं संगामी रेखाएं

बिन्दुपथ, त्रिभुज में संगामी बिन्दु (परिकेन्द्र, अन्तःकेन्द्र, लम्ब केन्द्र)

(ब) समरूप त्रिभुज

समरुपता, समरुप त्रिभुज एवं इससे सम्बन्धित प्रमेय, समरुप त्रिभुज के क्षेत्रफलों सम्बंधी प्रमेय।

(स) वृत्त

वृत्त, सर्वागमस वृत्तों में चाप व कोण में सम्बंध, जीवा एवं उससे सम्बधित प्रमेय, चाप व इसके द्वारा अन्तरित कोण, चक्रीय चतुर्भुज, वृत्त की स्पर्श रेखाएं एवं सम्बन्धित प्रमेय, जीवा और एकान्तर वृत्त खण्ड के कोण।

(द) ज्यामिति प्रायोगिक

एक रेखा खण्ड का दिए गए अनुपात में आन्तरिक विभाजन, वृत्त के बाहय बिन्दु से स्पर्श रेखा की रचना, दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की रचना, त्रिभुज के अन्तर्गत एवं परिमेय वृत्त की रचना।

इकाई–7. क्षेत्रमिति (Mensuration) **10**

(अ) समतलीय आकृतियों का क्षेत्रफल 4

वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल, वृत्त खण्ड एवं त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल

(ब) पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन 6

घन, घनाभ, गोला, अर्द्धगोला, लम्बवृत्तीय बेलन, शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन, एक प्रकार के ठोस को दूसरे में बदलना।

इकाई–8. सांख्यिकी तथा प्रायिकता (Statistics and Probability) **10**

(अ) सांख्यिकी 6

अवर्गीकृत एवं वर्गीकृत आंकड़ों का माध्य, माध्यक तथा बहुलक

(ब) प्रायिकता 4

यादृच्छिक घटना, प्रायिकता की चिर प्रतिष्ठित परिभाषा, एक घटना पर आधारित साधारण प्रश्न

इकाई–9 सड़क सुरक्षा शिक्षा **4**

समान्तर श्रेढ़ी, उद्देश्य, विषयवस्तु, अभ्यास, आंकड़ों का संकलन, त्रिकोणमिति का अनुप्रयोग (उद्देश्य, विषयवस्तु, अभ्यास), दो चर राशि पर आधारित समस्याएं (उद्देश्य)

QR कोड उपयोग करने हेतु निर्देश

इस पाठ्यपुस्तक में, आप इस तरह के रूप में मुद्रित किए हुए कई QR कोड देखेंगे

QR कोड से जुड़े हुए दिलचस्प अध्याय, वीडियो, दस्तावेज़, आदि देखने के लिए अपने मोबाइल, टेबलेट या कंप्यूटर का प्रयोग करें |

QR कोड से जुड़े सामग्री देखने के लिए अपने आंड्राय्ड मोबाइल या टेबलेट का प्रयोग करने पर :

चरण	विवरण
1.	प्ले स्टोर से DIKSHA एप डाउनलोड करने के लिए **http://diksha.gov.in/rj/get** पे जाऐं
2.	**इनस्टॉल** पे टैप करें
3.	सफल डाउनलोड और स्थापना के बाद, एप्लिकेशन को खोलें
4.	अपनी भाषा चुनें
5.	**Guest User** के रूप में जारी रखें
6.	**Student** चुनें
7.	ऊपर दाईं ओर दिए गए QR code scanner आइकोन को टैप करें और पाठ्यपुस्तक में मुद्रित किए गए एक QR कोड को स्केन करें या सर्च ईकोन को टैप करें और QR कोड आइकोन के नीचे दिए गए कोड को सर्च बार में टाइप करें |
8.	जुड़े हुए विषयों की एक सूची प्रदर्शित होगी |
9.	वांछित सामग्री को देखने के लिए किसी भी लिंक को टैप करें |

नोट: यदि आपके पास पहले से कोई आधिकारिक लॉगिन आईडी है तो कृपया QR कोड का प्रयोग करने के लिए इसका उपयोग करें।

QR कोड से जुड़े सामग्री देखने के लिए अपने कंप्यूटर का प्रयोग करने पर

1.	http://diksha.gov.in/rj/get पे जायें
2.	QR कोड आइकान के नीचे दिए गये कोड को ब्राउज़र सर्च बार में टाइप करें।
3.	जुड़े हुए विषयों की एक सूची प्रदर्शित होगी।
4.	वांछित सामग्री को देखने के लिए किसी भी लिंक को क्लिक करें।

उच्च क्षमता वाले राज्य के अधिकारियों और शिक्षकों के संवर्ग ने इस तकनीकी नवाचार को राजस्थान के लिए एक वास्तविकता बनाने के लिए बहुत प्रयास किए हैं। कुछ मूल्यवान योगदानकर्ताओं के नाम इस QR कोड के साथ प्रदान किए गये हैं योगदानकर्ताओं की सूची देखने हेतु उपर्युक्त निर्देशों का प्रयोग करते हुए इस QR कोड को स्केन करें।

RZ36FZ

अनुक्रमणिका

L1HV2E

1

वैदिक गणित (Vedic Mathematics)

L1RR42

1.01 प्रस्तावना (Introduction) :

पिछली कक्षा में हम पढ़ चुके हैं कि स्वामी भारतीकृष्णतीर्थ ने श्रृंगेरी मठ में रह कर आठ वर्ष कठोर तपस्या की। साधना की उच्च कोटि की सिद्ध अवस्था में उन्होंने वेदग्रन्थों में उल्लेखित गणितीय सूत्रों का अन्तःदर्शन किया और साक्षात्कार की अनुभूति को मंत्रों (सूत्रों) के रूप में प्रकट किया। इन मंत्रों को वैदिक गणितीय सूत्र नाम दिया जो सर्वथा उचित है। वैदिक विद्वानों के अनुसार वेदों के ज्ञान को अपौरूषेय कहते हैं क्योंकि इसे किसी मनुष्य ने विचार कर नहीं बनाया। वेदों का ज्ञान केवल चिन्तन से प्राप्त ज्ञान ही नहीं है वरन यह साधना की उच्चतम अवस्था में होने वाले साक्षात्कार की अनुभूति का मंत्रों के रूप में प्रकटीकरण है। इस परिप्रेक्ष्य में भी स्वामीजी द्वारा स्थापित सूत्र वैदिक गणितीय सूत्र हैं।

1.02 वैदिक गणित का महत्व :

गणितीय समस्याओं का हल ज्ञात करने में जब वैदिक गणितीय सूत्रों का निरन्तर मौखिक अभ्यास किया जाता है तो मानव की एकाग्रता और स्मृति का विकास होता है और उसके चिन्तन–मनन में प्रखरता आती है। वैदिक गणित की सरलता, सरसता और रोचकता के कारण मानव मन में जिज्ञासा का भाव उत्पन्न होता है। जिज्ञासा उसे जागरूक बनाती है तथा शनैः शनैः उसकी अन्तः चेतना जाग्रत होने लगती है। वास्तव में वैदिक गणित इसी अन्तः चेतना के जाग्रत करने की विधा है। यही अन्तः चेतना मानव के व्यक्तित्व और मस्तिष्क के विकास का आधार बनती है।

1.03 मूल संक्रियाओं का अभ्यास एवं विस्तार :

(i) योग संक्रिया :

पिछली कक्षा में हमने सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा पूर्ण संख्याओं का योग ज्ञात करने का अभ्यास किया था। अभ्यास में पूर्ण संख्याओं और मापन–इकाई दूरी (किमी – मी.) के प्रश्न लिये थे। वास्तव में सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा योग संक्रिया के सभी प्रकार के प्रश्न किये जा सकते हैं जैसे मापन इकाई मुद्रा (रुपये–पैसे) तौल (किग्रा.–ग्राम), धारिता (लीटर–मि.लीटर), समय (घंटा, मिनट, सैकण्ड), दशमलव भिन्न, पूर्ण संख्या और दूरी (किमी.–मी.–सेमी.) आदि।

टिप्पणी : योग करते समय निम्न बिन्दुओं का ध्यान रखना आवश्यक हैं :

1. स्तम्भ संख्या रचना में मापन इकाई के अनुसार लघु इकाई में भी स्तम्भ संख्या निश्चित होती है। जैसे मापन इकाई मुद्रा में 1 रुपया = 100 पैसे तो लघु इकाई पैसे में दो स्तम्भ रहेंगे अर्थात् 5 पैसे को स्तम्भ रचना में 05 पैसे लिखा जायेगा। इसी प्रकार 1 किलोमीटर = 1000 मीटर अतः लघुइकाई मीटर में तीन स्तम्भ रहेंगे अर्थात् 84 मीटर को स्तम्भ रचना में 084 मीटर लिखा जायेगा। देखिए निम्न उदाहरण।

उदाहरण (1): योग कीजिए।

किग्रा	ग्राम
112	065 ↓
360	$\dot{0}\dot{8}5$
$\dot{2}\dot{8}\dot{9}$	$\dot{8}72$
156	345
918	367

संकेत :

(i) 65 ग्राम को 065 ग्राम तथा 85 ग्राम को 085 ग्राम लिखा।

(ii) इकाई स्तम्भ ऊपर से योग प्रारम्भ।

(iii) $5+5=10$ अतः 5 के पूर्व अंक 8 पर एकाधिक चिह्न। शेष $=10-10=0$

(iv) शेष $0+2+5=7$ लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर।

(v) इसी प्रकार आगे करें।

2. स्तम्भ संख्या रचना पूरी करने के बाद सूत्र द्वारा पूर्ण संख्याओं की भाँति योग कर दिया जाता है।
3. मापन इकाई समय (घं., मि., सै.) के प्रश्नों में योग करते हुए मिनट व सैकण्ड के प्रथम स्तम्भ में आधार = 10 व द्वितीय स्तम्भ में

आधार $=6$ लेना चाहिये। घंटे के स्तम्भों में आधार $=10$ ही लिया जाता है।

(ii) मौखिक योग संक्रिया : (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण + शून्यान्त संख्या प्रयोग)

अल्प अभ्यास से उपरोक्त सूत्र–प्रयोग आधारित विधि के द्वारा बड़ी–बड़ी संख्याओं का योग द्रुत गति से मौखिक ज्ञात किया जा सकता है। शून्यान्त संख्या प्रयोग भारतीय प्राचीन गणित की एक विशेष विधि है जो बड़ी सरल तथा योग संक्रिया में प्रभावी है। इस विधि में इकाई–दहाई दो–दो अंकों की संख्याओं का विशेष प्रकार से योग किया जाता है। आवश्यकता पड़ने पर तीन–तीन अंकों (इकाई–दहाई–सैकड़ा) वाली संख्याओं का योग भी किया जा सकता है।

L21M5P

विधि :– दो संख्याओं में से एक संख्या को शून्यान्त बनाइए। इसकी न्यूनता को दूसरी संख्या से पूरा कीजिए। दोनेां नई संख्याओं को जोड़िये। प्राप्त योगफल यदि 100 से अधिक हो तो निश्चित पूर्व अंक पर एकाधिक चिह्न लगाइये। शेषफल को अगली संख्या में जोड़िये। अन्त में अन्तिम शेषफल को उत्तर के स्थान पर लिखिए। अगले दो स्तम्भों में उपरोक्त क्रिया की आवृत्ति कीजिए। देखिए निम्न उदाहरण।

उदाहरण (2) 35 और 58 को जोड़िये।

हल : 58 को शून्यान्त संख्या 60 बनाने के लिये 2 की आवश्यकता पड़ी। यह 2 की न्यूनता 35 में से पूरी की। अतः $35+58=33+2+58=33+60=93$

उदाहरण (3) 19 और 65 को जोड़िये।

हल : $19+65=19+1+64=20+64=84$

टिप्पणी : इसी प्रकार अनेक संख्याओं को जोड़ा जा सकता है।

उदाहरण (4) योग कीजिए।

$$\begin{array}{r} 4998 \\ \dot{0}6\dot{7}89 \\ 5\dot{7}15 \\ \dot{0}4837 \\ \underline{\dot{0}8\dot{9}76} \\ \underline{31315} \end{array}$$

संकेत :

(i) $98+89=98+2+87=100+87=187$
अतः 89 से पूर्व अंक 7 पर एकाधिक चिह्न।

(ii) शेष $87+15=87+3+12=90+12=102$
अतः 15 से पूर्व अंक 7 पर एकाधिक चिह्न।

(iii) शेष $02+37=39$
तथा $39+76=35+4+76=35+80$
$=15+20+80=115$
अतः 76 से पूर्व अंक 9 पर एकाधिक चिह्न तथा 15 नीचे उत्तर में लिखा।

(iv) शेष योग संक्रिया उपरोक्त समान।

उदाहरण (5) योग कीजिए।

$$\begin{array}{r} 7534 \\ 2459 \\ \dot{0}1\dot{9}32 \\ \underline{6547} \\ \underline{18472} \end{array}$$

संकेत :

(i) $34+59=33+1+59=33+60=93$

(ii) शेष $93+32=93+7+25=100+25=125$
अतः अंक 9 पर एकाधिक चिह्न।

(iii) शेष $25+47=22+3+47=22+50=72$ लिखा उत्तर के स्थान पर।

(iv) शेष योग संक्रिया उपरोक्त समान।

(iii) व्यवकलन संक्रिया :

पिछली कक्षा में हमने व्यवकलन संक्रिया की दो वैदिक विधियों का अध्ययन किया था।

1. सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण + परम मित्र अंक आधारित विधि

2. सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण + परम मित्र अंक आधारित विधि

प्रथम विधि द्वारा व्यवकलन संक्रिया का मापन इकाई अथवा पूर्ण संख्या का प्रत्येक प्रश्न हल किया जा सकता है।

अतः इसी विधि पर पुनः विचार किया जा रहा है। हमें ज्ञात है कि दो अंक एक दूसरे के परममित्र अंक होते हैं यदि उनका योग दस होता है तथा वियोज्य वह संख्या है कि जिसमें से कोई संख्या घटायी जाती है और घटायी जाने वाली संख्या वियोजक कहलाती है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (6) वैदिक विधि से व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{r} 8\,0\,0 \\ -\,\dot{2}\,\dot{6}\,3 \\ \hline 5\,3\,7 \\ \hline \end{array}$$

संकेत :

(i) 0 में से 3 नहीं घटता अतः 3 के परम मित्र अंक 7 को उसी अंक 0 में जोड़ा। योग 7 नीचे लिखा तथा पूर्व वियोजक अंक 6 पर एकाधिक चिह्न।

(ii) 0 में से $\dot{6}=7$ नहीं घटता अतः 7 के परम मित्र अंक 3 को उसी अंक 0 में जोड़ा। योग 3 नीचे लिखा तथा पूर्व वियोजक अंक2 पर एकाधिक चिह्न।

(iii) $8-\dot{2}=5$ लिखा नीचे अतः शेषफल $=537$

उदाहरण (7) वैदिक विधि से व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{ccc} \text{किमी.} & \text{मी.} & \text{सेमी.} \\ 3\,7 & 4\,6\,7 & 3\,5 \\ \dot{2}\,8 & \dot{3}\,7\,\dot{5} & \dot{4}\,6 \\ \hline 0\,9 & 0\,9\,1 & 8\,9 \\ \hline \end{array}$$

संकेत :

(i) मीटर–सेन्टीमीटर मे स्तम्भ संख्या व्यवस्थित।

(ii) सेमी स्तम्भ : 5 में से 6 नहीं घटता अतः 6 का परममित्र अंक 4 को 5 में जोड़ा।

(iii) योग $=9$ लिखा नीचे और पूर्व वियोजक अंक 4 पर एकाधिक चिह्न लगाया।

(iv) 3 में से $\dot{4}=5$ नहीं घटता अतः वियोज्य अंक 3 में 5 जोड़ा।

(v) योग $=8$ लिखा नीचे तथा पूर्व वियोजक अंक 5 पर लगाया एकाधिक चिह्न।

(vi) $7-\dot{5}=1$ लिखा नीचे।

(vii) 6 में से 7 नहीं घटता अतः 6 में 3 जोड़कर योग $=9$ लिखा नीचे तथा वियोजक अंक 3 पर एकाधिक चिह्न।

(viii) $4-\dot{3}=0$ लिखा नीचे।

(ix) आगे की क्रियाएं इसी प्रकार की जायेंगी।

क्रिया पूरी होने पर शेषफल $=9$ किमी. 91 मी. 89 सेमी.

(iv) गुणन संक्रिया :

गुणन संक्रिया के तीन मुख्य सूत्र आधारित विधियों का हमने पिछली कक्षा में विस्तार से अध्ययन किया था। अब इस कक्षा में सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् से गुणन संक्रिया के किसी भी प्रश्न का हल करना सीखेंगे। इन विधियों पर हमारा इतना अच्छा अभ्यास होना चाहिये कि गुणन संक्रिया का कोई प्रश्न देखते ही शीघ्र हल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का हम चयन कर सकें।

सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम्

सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् द्वारा गुणन का कोई भी प्रश्न अभ्यास के पश्चात् मौखिक हल किया जा सकता है। केवल उत्तर लिखने की सुविधा चाहिये। सूत्र प्रयोग बांयी अथवा दाहिनी दोनों तरफ से किया जा सकता है।

(क) अर्थ :

सूत्र दो शब्दों से बना है 'ऊर्ध्व' तथा 'तिर्यक'। ऊर्ध्व का अर्थ है 'ठीक ऊपर' या 'सीधा' या 'खड़ा'। इसका संकेत ↑ या ↕ है और इसकी क्रिया ''ऊपर नीचे लिखे अंको का गुणन'' है। शब्द तिर्यक का अर्थ 'तिरछा' है। इसका संकेत ↗ या ↖ या ⤡ है और इसकी क्रिया 'तिरछे लिखे अंको का गुणन' है।

(ख) अनुप्रयोग

(i) गुणन संक्रिया

विधि : प्रश्न में दिये हुए अंको से सर्वप्रथमसमूह रचना की जाती है। किसी संख्या में यदि कुछ अंक कम हो तो उससे पहले उतने ही शून्य लगा कर दोनों संख्याओं की अंक संख्या समान कर लीजिए। इन स्तम्भों से समूह रचना की जाती है।

$$\boxed{\text{समूह संख्या} = \text{स्तम्भ संख्या} \times 2 - 1 = \text{विषम संख्या}}$$

इन समूहों में संकेत लगा कर, संकेतानुसार गुणा किया जाता है। अंत में समूहसः गुणनफलों को एक विशेष पद्वति से उनके क्रमानुसार लिख कर जोड़ दिया जाता है। यही अभीष्ट गुणनफल है।

टिप्पणी : किसी भी समूह में संकेतों की कुल संख्या उसके स्तम्भ संख्या के समान होती है। ये सभी संकेत एक उभयनिष्ठ बिन्दु से निकलते हैं। समस्थान पर बने समूह में सभी संकेत तिर्यक जोड़े में होते हैं। विषय स्थान पर स्थित में समूह में ऊर्ध्व संकेत केवल एक ही होता है जो प्रथम तथा अन्तिम समूह में लगता है अथवा किसी समूह के मध्य स्तम्भ में लगता है। शेष संकेत तिर्यक जोड़े में होते हैं। मध्य समूह सबसे बड़ा और प्रश्न के समान होता है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

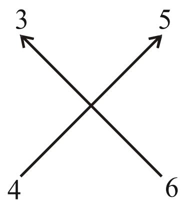
उदाहरण (8): निम्न समूहों में संकेत लगाकर गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(1)

$= 6 \times 9$
$= 54$

ऊर्ध्व

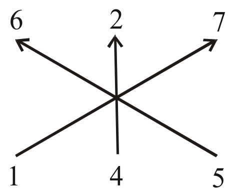
(2)



$= 6 \times 3 + 4 \times 5$
$= 38$

तिर्यक जोड़ा

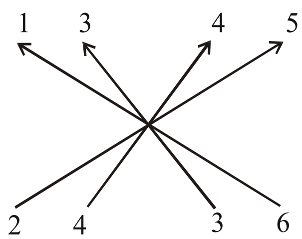
(3)



$= 5 \times 6 + 1 \times 7 + 4 \times 2$
$= 45$

तिर्यक जोड़ा + ऊर्ध्व

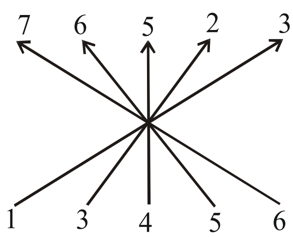
(4)



$= (6 \times 1 + 2 \times 5)$
$+ (4 \times 4 + 3 \times 3)$
$= 41$

दो तिर्यक जोड़े

(5)



$= (6 \times 7 + 1 \times 3)$
$+ (5 \times 6 + 3 \times 2)$
$+ 4 \times 5$
$= 101$

दो तिर्यक जोड़े + ऊर्ध्व

सूत्र ऊर्ध्व तिर्यक से गुणा कीजिए।

समूह बनेंगे $= 5$

$$\begin{array}{rrrrr} & & 1 & 4 & 7 \\ & \times & 0 & 2 & 8 \\ \hline =0 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ & 1 & 4 & 5 & \\ \hline = & 4 & 1 & 1 & 6 \end{array}$$

V	IV	III	II	I
1	14	147	47	7
0	02	028	28	8
$=0$	$=2$	$=16$	$=46$	$=56$

उपरोक्त, पाँचों गुणनफलों का योग निम्न प्रकार किया जाता है।

(i) 56 के 6 को प्रथम पंक्ति में इकाई स्थान पर तथा 5 को II पंक्ति के दहाई स्थान पर लिखे।

(ii) 46 के 6 को प्रथम पंक्ति में दहाई स्थान पर तथा 4 को II पंक्ति में सेंकड़ें के स्थान पर लिखे।

(iii) इसी प्रकार 16, 2, 0 को I पंक्ति तथा II पंक्ति में दर्शाये अनुसार संख्या समायोजित कर सब पदों का योग करे।

टिप्पणी : इन विधियों पर हमारा इतना अच्छा अभ्यास होना चाहिये कि गुणन संक्रिया का कोई प्रश्न देखते ही शीघ्र हल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का हम चयन कर सकें।

देखिए निम्न उदाहरण।

उदाहरण (9) 588×512 का सरलता से गुणनफल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का चयन कीजिए।

प्रथम हल : इस गुणन संक्रिया में क्या सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण श्रेष्ठ सूत्र हो सकता है?

इकाई–दहाई वाले अंकों का योग $= 88+12 = 100$ तथा शेष निखिलम् अंक परस्पर समान $= 5$ अतः सूत्र प्रभावी। सूत्रानुसार

$$588\times512 = 5\times6/88\times12 \quad \text{(दाहिने पक्ष में चार अंक)}$$
$$= 301056$$

द्वितीय हल : गुणन संक्रिया में सूत्र निखिलम्–उपाधार का परीक्षण

$$\begin{array}{lll} & 588\times512 & \\ = & 588 & +88 \\ & \times512 & +12 \\ \hline \end{array}$$
$$= 5(588+12)/88\times12$$
$$= 5\times600/_{10}56$$
$$= 3000/_{10}56 = 301056$$

संकेत :

(i) आधार $=100$

(ii) उपाधार $=100\times5$

(iii) उपाधार अंक $=5$

(iv) विचलन $=+88$ तथा $+12$

(v) दक्षिण पक्ष में दो अंक तथा सूत्र प्रभावी।

तृतीय हल : 588×512 में सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण प्रभावी ही नहीं है क्योंकि दोनों संख्याओं में एक संख्या 9 अंक वाली नहीं है।

चतुर्थ हल : 588×512 का गुणनफल सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$\begin{array}{r} 5\,8\,8 \\ \times\,5\,1\,2 \\ \hline 2\,5\,5\,8\,4\,6 \\ 4\,5\,2\,1 \\ \hline =3\,0\,1\,0\,5\,6 \end{array}$$

प्रश्न में तीन स्तम्भ हैं। अतः पांच समूह बनेंगे अर्थात् पांच गुणनफल ज्ञात कर विशेष पद्धति से लिखकर, उन्हें जोड़ा जायेगा।

परिणाम 1. प्रथम, द्वितीय तथा चतुर्थ हल देखने पर एक बात निश्चित है कि $588\times512 = 301056$.

2. प्रथम हल में उत्तर सरलता से ज्ञात हुआ अतः इस प्रश्न में सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण का चयन श्रेष्ठ रहेगा।

उदाहरण (10). 842×858 में सरलता से गुणनफल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का चयन कीजिए।

हल : (i) सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण प्रभावी नहीं है क्योंकि गुणनफल के दाहिने पक्ष में 42×58 का गुणन सरलता से ज्ञात नहीं हो सकता।

(ii) सूत्र निखिलम् आधार भी प्रभावी नहीं हो सकता क्योंकि आधार = 1000 मानने पर विचलन क्रमशः -158 तथा -142 आते हैं। निखिलम्–उपाधार भी प्रभावी नहीं है क्योंकि उपाधार = 800 मानने पर भी विचलन क्रमशः 42 और 58 आते हैं।

(iii) सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण भी प्रभावी नहीं है।

(iv) सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक गुणन संक्रिया के लिये व्यापक एवं प्रभावी सूत्र है। अंक बड़े होने के कारण गणना कठिन हो सकती है अतः नया विकल्प विचारणीय है।

(v) **नया विकल्प :** 842×858 का गुणनफल ज्ञात करने के लिये प्रारम्भ में सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण का प्रयोग तथा बाद में सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक का प्रयोग श्रेष्ठ रहेगा।

842×858
$=8\times9/42\times58$
$=72/2436$
$=722436$

संकेत :
सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक से मौखिक

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times58 \\ \hline 2436 \\ \hline \end{array}$$

1.04 वर्ग संक्रिया : (सूत्र निखिलम् आधार – उपाधार)

सूत्र निखिलम् आधार–उपाधार आधारित विधियों द्वारा दो संख्याओं का गुणन हम सीख चुके हैं। जब दोनों संख्याएँ परस्पर समान हो तो यही वर्ग संक्रिया है। निम्न विधियों द्वारा संख्याओं का वर्ग ज्ञात किया जा रहा है।

आधार विधि : सूत्रः– $(\text{संख्या})^2 = \text{संख्या} + \text{विचलन} \ / \ (\text{विचलन})^2$

1. $17^2 = 17\times17,$ आधार $=10,$ विचलन $=+7$

निखिलम आधार विधि

$=17+7$
$\ \ 17+7$

$17+7/49$
$=24/_4 9=289$

अथवा

सूत्र विधि

$17^2=17+7/7^2$
$=24/_4 9$

$=289$

2. $98^2 = 98\times98,$ आधार $=100,$ विचलन $=-02$

$=98-02/(-02)^2$
$=9604$

3. $104^2 \ = 104+04/(04)^2$
$=10816$

4. $115^2 = 115+15/15^2$
$=130/_2 25$
$=13225$

उपाधार विधि : सूत्रः– $(\text{संख्या})^2 = \text{उपाधार अंक}\,(\text{संख्या} + \text{विचलन})/(\text{विचलन})^2$

5. $23^2 = 23\times23,$ आधार $=10,$ उपाधार $=10\times2,$ विचलन $=+3$

निखिलम उपाधार विधि अथवा सूत्रविधि–

संख्या विचलन

$=23 \quad +3$
$\ \ 23 \quad +3$

$23^2 = 2(23+3)/3^2 = 529$

$= 2(23+3)/3^2$

$= 529$

6. 64^2, आधार $= 10$, उपाधार $= 10 \times 6$, विचलन $= +04$

$= 6(64+4)/4^2$

$= 408/_1 6$

$= 4096$

7. 308^2, आधार $= 100$, उपाधार $= 100 \times 3$, विचलन $= +08$

$= 3(308+08)/(08)^2$

$= 94864$

1.05 घनफल :

(सूत्र निखिलम् आधार – उपाधार)

सूत्र निखिलम् आधार – उपाधार आधारित विधियों द्वारा तीन संख्याओं का गुणन हम पढ़ चुके हैं। तीनों संख्याएँ परस्पर समान होने पर उपर्युक्त विधियों द्वारा घनफल ज्ञात किया जा सकता है।

आधार विधि :

सूत्र : घनफल = संख्या $+ 2 \times$ विचलन $/ 3 \times ($विचलन$)^2 / ($विचलन$)^3$

1. 12^3, आधार $= 10$, विचलन $= +2$

$= 12 + 2\times(2) / 3\times(2)^2 / (2)^3$

$= 16 / 12 / 8 = 1728$

2. 105^3, आधार $= 100$, विचलन $= +05$

$= 105 + 2\times(05) / 3\times(05)^2 / (05)^3$

$= 115 / 75 /_1 25 = 1157625$

3. 98^3, आधार $= 100$, विचलन $= -02$

$= 98 + 2\times(-02) / 3\times(-02)^2 / (-02)^3$

$= 94 / 12 / -08$

$= 94\,11\,92$

उपाधार विधि :

सूत्र : घनफल $= ($उपाधार अंक$)^2 ($संख्या $+ 2\times$ विचलन$) /$ उपाधार अंक $\times 3 \times ($विचलन$)^2 / ($विचलन$)^3$

4. 35^3 आधार $= 10$, उपाधार अंक $= 3$, विचलन $= 5$

$= 3^2(35 + 2\times 5) / 3\times3\times(5)^2 / 5^3$

$$= 9 \times 45 \,/\, 9 \times 25 \,/\, 125$$

$$= 405 \,/_{22} 5 \,/_{12} 5 = 42875$$

5. 497^3

$$= 5^2\{497 + 2 \times (-03)\} \,/\, 5 \times 3 \times (-03)^2 \,/\, (-03)^3$$

$$= 25 \times 491 \,/\, 5 \times 27 \,/\, -27$$

$$= 12275 \,/_1 35 \,/\, (-27)$$

$$= 12276 \,/\, 34 \,/\, 100 - 27$$

$$= 122763473$$

1.06 भाग संक्रिया

इस कक्षा में हम निम्न तीन सूत्रों पर आधारित भाग की विधियों का अध्ययन करेंगे।

1. सूत्र निखिलम्
2. सूत्र परावर्त्य योजयेत्
3. सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक

जब भाजक में 5 से बड़े अंक होते हैं तथा आधार = 10 या 10 की घात (उपाधार नहीं) के सापेक्ष भाजक की पूरक संख्या ज्ञात हो सकती है, तब ही सूत्र निखिलम् आधारित भाग की विधि प्रभावी होती है। इस विधि में मुख्य क्रिया भाजक की पूरक संख्या द्वारा ही होती है। यदि भाजक में 5 से छोटे अंक होते हैं अथवा लाये जा सकते हैं तथा बांयी ओर से भी अंक 1 होता है अथवा लाया जा सकता है और आधार = 10 या 10 की घात (उपाघार नहीं) के सापेक्ष भाजक का विचलन ज्ञात किया जा सकता है, तब ही सूत्र परावर्त्य योजयेत् आधारित भाग की विधि प्रभावी होती है। तीनों विधियों में से केवल यही भाग की विधि बीजगणित में प्रयोग में लायी जाती है। सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक आधारित ध्वजांक विधि द्वारा भाग संक्रिया का प्रत्येक प्रश्न हल किया जा सकता है। इस विधि में किसी भी भाजक के मुख्यांक तथा ध्वजांक का चयन बड़ा महत्वपूर्ण है। ध्वजांक कितने भी अंकों का हो सकता है। मुख्यांक में भी अनेक अंक हो सकते हैं यदि उसका भाग भाज्य–संशोधित भाज्य में सरलता से जाता है। ध्वजांक में जितने अंक हैउतने ही इकाई की तरफ से भाज्य के अंक तृतीय खण्ड में तथा शेष अंक मध्य खण्ड में रखे जाने चाहिये। निम्न उदाहरणों से इन विधियों को स्पष्ट किया जा रहा है।

सूत्र निखिलम् :

जब भाजक में प्रत्येक अंक 5 से बड़ा हो तो सूत्र निखिलम् आधारित विधि बड़ी सुविधाजनक रहती है।

प्रश्न लिखने की विधि

दो खड़ी रेखाएँ खींचकर निर्धारित स्थान के तीन खण्ड बनाइये। बांयी ओर से प्रथम खण्ड में भाजक और उसके नीचे उसकी पूरक संख्या लिखिए। आधार में जितने शून्य हैं, भाज्य के इतने ही अंक इकाई अंक की तरफ से तीसरे खण्ड में लिखिए। भाज्य के शेष अंक मध्य खण्ड में लिखिए।

निखिलम् विधि :

बांयी ओर से भाज्य के प्रथम अंक को नीचे योगफल के स्थान पर लिखिए। पूरक संख्या से इस अंक का गुणा कर गुणनफल को मध्य खण्ड के ही दूसरे अंक के नीचे लिखिए। पूरक संख्या में दो अंक हों तो गुणनफल को तीसरे अंकके नीचे भी लिखिए। केवल दूसरे स्थान के नीचे ऊपर के अंकों को जोड़िये और योगफल के स्थान पर लिखिए। अभी तीसरे स्थान केअंकों को नहीं जोड़ना है। योग मे ंलिखे दूसरे अंक का फिर पूरक संख्या से गुणा कर गुणनफल को भाज्य के तीसरे अंक के नीचे लिखिए और जोड़िये। इस प्रक्रिया की आवृत्ति करते रहिये जब तक कि गुणनफल के अंक तृतीय खण्ड के इकाई अंक के नीचे तक न लिख जाये। अन्त में फिर जोड़िये।

मध्य खण्ड का नीचे लिखा योगफल = भागफल

तथा तृतीय खण्ड के नीचे लिखा योगफल = शेषफल होता है।

यदि प्राप्त शेषफल भाजक से बड़ा हो तो उसमें से भाजक घटाकर संशोधित भागफल आर शेषफल प्राप्त कीजिए। विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण (11) : (i) $311 \div 8$, आधार $=10$

खण्ड

प्रथम	मध्य	तृतीय
8	3 1	1
2	6	–
		14
	3 7	15
	+1	–8
	3 8	7

संकेत

(i) भागफल $=37$, शेषफल $=15$

(ii) शेषफल $>$ भाजक

अतः संशोधन आवश्यक।

संशोधित भागफल $=38$

संशोधित शेषफल $=7$

(ii) $10025 \div 88$, आधार $=100$

8 8	1 0 0	2 5
1 2	1 2	– –
	1	2 –
		3 6
	1 1 3	8 1

संकेत

(i) पूरक संख्या $= 100 - 88 = 12$

(ii) मध्य खण्ड का 1 नीचे लिखा $1 \times 12 = 2$ के अंक मध्य खण्ड में आगे के अंकों के नीचे दर्शाये अनुसार लिखें

(iii) $0 + 1 = 1$ मध्य खण्ड में नीचे लिखें

(iv) $1 \times 12 = 12$ मध्य एवं तृतीय खण्ड में दर्शायें अनुसार लिखे।

(v) $0 + 2 + 1 = 3$ मध्य खण्ड में नीचे लिखें

(vi) $3 \times 12 = 36$ दर्शायें अनुसार लिखे

(vii) योग करें

(viii) भागफल $= 113$

(ix) शेषफल $= 81$

सूत्र परावर्त्य योजयेत्

सूत्र का प्रयोग अनेक क्षेत्रों में होता है जैसे समीकरणों का हल, जादू के वर्गों की रचना आदि।

(क) अर्थ :

सूत्र परावर्त्य योजयेत् का अर्थ है ''पक्षान्तरण कर उपयोग करें'' अथवा ''विलोम संक्रिया का प्रयोग करें''। जैसे पक्षान्तरण होते ही चिह्न $(+)$ का $(-)$, $(-)$ का $(+)$, $(\times)$ का $(\div)$, तथा $(\div)$ का $(\times)$ चिह्न हो जाता है। इसी प्रकार जादू के वर्ग में अन्तिम पंक्ति अथवा स्तम्भ में अंक रचना के बाद पुनः पहली पंक्ति या स्तम्भ में अंक रचना प्रारम्भ हो जाती है।

(ख) अनुप्रयोग :

भाग संक्रिया :

जब भाजक आधार =10 या 10 की घात के निकट होता है तथा उसका पहला अंक 1 होता है तो परावर्त्य योजयेत् सूत्र आध ारित भाग संक्रिया सुविधाजनक होती है। जब भाजक का पहला 1 अंक नहीं होता परन्तु उसे 1 में समायोजित किया जा सकता है तब भी यह विधि प्रभावी है।

विधि :

(1) भाजक में से उसके निकटतम आधार को घटा कर विचलन ज्ञात कीजिए। विचलन में यदि 5 से बड़े अंक हों तो उन्हे विनकुलम प्रयोग से छोटे अंको में बदल दीजिए। अब विचलन के प्रत्येक अंक का चिह्न बदल दीजिए।

(2) (i) भाग संक्रिया के निर्धारित स्थान को तीन खण्डों में विभाजित करें।

(ii) बांयी ओर से पहले खण्ड में भाजक, उसके नीचे विचलन तथा विचलन के नीचे उसके परिवर्तित अंक लिखे। अभ्यास होने पर परिवर्तित अंक सीधे भाजक के नीचे लिखे जा सकते हैं।

(iii) विचलन अंक संख्या अथवा आधार की शून्य अंक संख्या केसमान भाज्य के अंक तृतीय खण्ड में तथा भाज्य के शेष अंक मध् य खण्ड में लिखें।

(iv) आगे की क्रिया निखिलम् विधि के समान है।

विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण (12) :

(1) $1358 \div 113$, आधार $=100$

	प्रथम खण्ड	मध्य खण्ड	तृतीय खण्ड
भाजक =	1 1 3	1 3	5 8
विचलन =	1 3	−1	−3 −
परिवर्तित अंक =	−1 −3		−2 −6
		1 2	0 2

संकेत : (i) मध्य खण्ड का 1 लिखा नीचे योग के स्थान पर।

(ii) यह अंक 1× परिवर्तित अंक 1− 3 लिखे 3 व 5 के नीचे।

(iii) $3-1=2$ पुनः गुणनफल – 2– 6 लिखे 5 व 8 के नीचे।

योग करने पर भागफल = 12, शेषफल =02

(2) $395166 \div 1321$, आधार $=1000$

	1 3 2 1	3 9 5	1 6 6
परिवर्तित अंक =	$\bar{3}$ $\bar{2}$ $\bar{1}$	$\bar{9}$ $\bar{6}$	$\bar{3}$ − −
		0	0 0 −
			3 2 1
		3 0 $\bar{1}$	1 8 7

भागफल $30\bar{1}=299$

शेषफल $=187$

ध्वजांक विधि

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् आधारित सर्व व्यापक विधि द्वारा भाग संक्रिया का कोई भी बड़े से बड़ा प्रश्न न्यूनतम गणनाओं से हल किया जा सकता है। भाजक को सुविधानुसार दो भागों में विभाजित किया जाता है। मुख्यांक तथा ध्वजांक।

अर्थ :

(i) ध्वजांक : भाजक के इकाई अंक अथवा इकाई युक्त कई अंक जो घातांक के स्थान पर लिखे जाते हैं ध्वजांक कहलाते है।

(ii) मुख्यांक : भाजक का शेषफल जो आधार स्थान पर लिखा जाता है और वास्तविक भाग संक्रिया सम्पन्न करता है मुख्यांक कहलाता है।

विधि :

(1) भाग संक्रिया के स्थान को तीन खण्डों में विभाजित करना

(2) प्रथम खण्ड में आधार स्थान पर मुख्यांक तथा घातांक स्थान पर ध्वजांक लिखना।

(3) ध्वजांक अंक संख्या के समान भाज्य के उतने ही अंक (इकाई से लेकर) तृतीय खण्ड में तथा शेष अंक मध्य खण्ड में लिखना।

शेष विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण (13) :

(1) $23754 \div 74$ (ध्वजांक विधि)

	4	2 3 7 5	4
7		2 1	0
		3 2 1	$4-1\times4=0$

संकेत :

(i) $23 \div 7$, भागफल अंक$_1 = 3$, लिखा क्षितिज रेखा के नीचे तथा शेषफल $=2$ लिखा 7 से पहले और नीचे।

(ii) नया भाज्य $=27$,

संशोधित भाज्य = नया भाज्य − भागफल अंक × ध्वजांक

$=27-3\times4=15$

(iii) $15\div7$, भागफल अंक $_2=2$, शेषफल $=1$ संकेत (i) के अनुसार लिखे।

(iv) संशोधित भाज्य $=15-2\times4=7$

(v) $7\div7$, भागफल अंक$_3=1$, शेषफल $=0$ लिखे व्यवस्था अनुसार।

(vi) अन्तिम शेषफल $=04-1\times4=0$ [तृतीय खण्ड आने पर]

$\therefore$ भागफल $=321$, शेषफल $=0$

(2) $21112\div812$ (ध्वजांक विधि)

$$\begin{array}{r|rrr|l} 1\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1\ 2 \\ 8 & & 5 & & 1 \\ \hline & & 2 & 6 & 112-100-12=0 \end{array}$$

संकेत :

(i) $21\div8$, भागफल अंक$_1=2$, शेषफल $=5$

(ii) नया भाज्य $=51$, संशोधित भाज्य $=51-2\times1=49$

(iii) $49\div8$, भागफल अंक $_2=6$, शेषफल $=1$

(iv) संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल

$=112-(6\times1+2\times2)10-6\times2$

$=112-100-12=0$

अतः भागफल $=26$, शेषफल $=0$

टिप्पणी : (1) ध्वजांक 1 2 / भागफल 2 6 से बने तीन समूह

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1\ 2 & 2 \\ 2 & 2\ 6 & 6 \\ 1\times2 & (6\times1+2\times2) & 6\times2 \\ =2 & =10 & =12 \end{array}$$

(2) (i) प्रथम समूह का गुणनफल $=2$ जो 51 में से घटाया गया है।

(ii) मध्य समूह का गुणनफल $=10\times10=100$ घटाया गया 112 में से।

(iii) तृतीय समूह का गुणनफल $=12$ भी घटाया गया 112 में से।

उदाहरण (14) $98765\div87$ (ध्वजांक विधि)

$$\begin{array}{r|rrrr|l} 7 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 8 & & 1 & 3 & 6 & 5 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 5 & 5\ 5-5\times7=20 \end{array}$$

संकेत :

(i) भाजक $=87$, मुख्यांक $=8$, ध्वजांक $=7$

(ii) तृतीय खण्ड में भाज्य का एक अंक $=5$

(iii) $9\div8$, भागफल प्रथम अंक $=1$, शेषफल $=1$

(iv) नयाभाज्य $=18$, संशोधित भाज्य $=18-1\times7=11$

(v) $11\div8$, भागफल द्वितीय अंक $=1$, शेषफल $=3$

(vi) नयाभाज्य = 37, संशोधित भाज्य $=37-1\times7=30$

(vii) $30 \div 8$, भागफल तृतीय अंक = 3, शेषफल = 6

(viii) नया भाज्य 66, संशोधित भाज्य $= 66 - 3 \times 7 = 45$

(ix) $45 \div 8$, भागफल चतुर्थ अंक = 5, शेषफल = 5

(x) नया भाज्य 55,

संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल $= 55 - 5 \times 7 = 20$

$\therefore$ भागफल = 1135, शेषफल = 20

उदाहरण (15) $13579 \div 975$ (ध्वजांक विधि)

75	13 5	79
9	4	11
	1 3	$1179-260-15=904$

संकेत : (i) $13 \div 9$, भागफल प्रथम अंक = 1, शेषफल = 4

(ii) नया भाज्य = 45, संशोधित भाज्य $= 45 - 1 \times 7 = 38$

(iii) $38 \div 9$, भागफल द्वितीय अंक $= 4$, शेषफल $= 2$

(iv) नया भाज्य = 27,

संशोधित भाज्य $= 27 - (4 \times 7 + 1 \times 5) = 27 - 33 = -6$

क्योंकि संशोधित भाज्य ऋणात्मक आया है अतः भागफल द्वितीय अंक4 न लेकर 3 लेना सुविधाजनक रहेगा। इसी कारण क्रिया पद (iii) एवं (iv) निरस्त करने योग्य है।

(v) पुनः $38 \div 9$, भागफल द्वितीय अंक = 3, शेषफल = 11

(vi) नया भाज्य $= 1179$ अतः संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल

$= 1179 - (3 \times 7 + 1 \times 5) \times 10 - 3 \times 5 = 1179 - 260 - 15 = 904$

अतः भागफल = 13, शेषफल = 904

उदाहरण (16) $21015 \div 879$ (ध्वजांक विधि)

भाजक = 879, मुख्यांक = 8, ध्वजांक = 79

क्योंकि ध्वजांक में बड़े अंक हैं, भाग की गणना कठिन हो जायेगी अतः भाजक 879 को विनकुलम (निखिलम्) विधि से छोटे अंकों में बदला।

$879 = \dot{8}\bar{2}\bar{1} = 9\bar{2}\bar{1}$

अब मुख्यांक = 9 तथा ध्वजांक = $\bar{2}\bar{1}$

$\bar{2}\bar{1}$	21 0	1 5
9	3	7
	2 3	$715+80+3=798$

संकेत :

(i) $21 \div 9$, भागफल प्रथम अंक = 2, शेषफल = 3

(ii) नया भाज्य = 30, संशोधित भाज्य $= 30 - 2 \times \bar{2} = 34$

(iii) $34 \div 9$, भागफल द्वितीय अंक = 3, शेषफल = 7

(iv) नया भाज्य = 715, संशोधित भाज्य अथवा

अन्तिम शेषफल $= 715 - (3 \times \bar{2} + 2 \times \bar{1})10 - 3 \times \bar{1}$

$= 715 + 80 + 3 = 798$

अतः भागफल = 23, शेषफल = 798

उदाहरण (17) $7453 \div 79$

$$\begin{array}{r|rr|l} \bar{1} & 74 & 5 & 3 \\ 8 & & 2 & 2 \\ \hline & 9 & 4 & 23+4=27 \end{array}$$

संकेत :

(i) भाजक $79 = 8\bar{1}$, मुख्यांक = 8, ध्वजांक = $\bar{1}$

(ii) $74 \div 8$, भागफल प्रथम अंक = 9, शेषफल = 2

(iii) नया भाज्य = 25, संशोधित भाज्य $= 25 + 9 = 34$

(iv) $34 \div 8$, भागफल द्वितीय अंक = 4, शेषफल = 2

(v) नया भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल $= 23 + 4 = 27$

भागफल = 94, शेषफल = 27

टिप्पणी :1. क्रिया पद (iii) देखिए।

नया भाज्य = 25, संशोधित भाज्य $= 25 - 9 \times \bar{1} = 25 + 9 = 34$

= नया भाज्य + पिछला भागफल अंक

2. जिसभी भाजक में इकाई अंक 9 हो, उस प्रश्न में संशोधित भाज्य = नया भाज्य + पिछला भागफल अंक लिया जा सकता है। मुख्यांक के चयन में सावधानी रखना आवश्यक है।
3. जिस भाजक में इकाई अंक 1 हो, उस प्रश्न में संशोधित भाज्य = नया भाज्य – पिछला भागफल अंक लिया जाता है।
4. उपरोक्त दोनों प्रकार के प्रश्नों में संकेत लिखने की आवश्यकता नहीं है।

उदाहरण (18) $43758972 \div 81$

मुख्यांक = 8, ध्वजांक = 1

$$\begin{array}{r|rrrrrr|l} 1 & 43 & 7 & 5 & 8 & 9 & 7 & 2 \\ 8 & & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline & 5 & 40 & 2 & & 3 & 4 & 22-4=18 \end{array}$$

भागफल = 540234 शेषफल = 18

1.07 बीजगणित

सरल समीकरणों का हल (वैदिक पद्धति)

सूत्र परावर्त्ययोजयेत् एवं सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये द्वारा सरल समीकरणों का हल अति शीघ्र ज्ञात किया जा सकता है। इन सूत्रों के अनुप्रयोग बहुत छोटे, सरल एवं मानसिक गणना पर आधारित है।

सूत्र परावर्त्ययोजयेत् :–

सूत्र का अर्थ है "पक्षांतरण तथा समायोजन"। स्वामी भारतीकृष्ण जी तीर्थ ने इस सूत्र के अन्तर्गत चार अनुप्रयोगों की चर्चा की है। ये सभी अनुप्रयोग एक पंक्ति में मौखिक उत्तर देने वाले हैं।

प्रथम अनुप्रयोग :–

यदि $ax + b = cx + d$ हो तो $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ (बीजीय सूत्र)

द्वितीय अनुप्रयोग :–

यदि $\dfrac{ax+b}{p} = \dfrac{cx+d}{q}$ हो तो $x = \dfrac{dp-bq}{aq-cp}$ (बीजीय सूत्र)

तृतीय अनुप्रयोग :–

यदि $(x+a)(x+b)=(x+c)(x+d)$ हो तो

$$x=\frac{cd-ab}{a+b-c-d}$$ (बीजीय सूत्र)

उदाहरण (19) :– समीकरण सरल कीजिए।

$$(x+1)(x+2)=(x-3)(x-4)$$

हल :– बीजीय सूत्र द्वारा $x=\frac{12-2}{1+2+3+4}=\frac{10}{10}=1$

चतुर्थ अनुप्रयोग :–

यदि $\frac{m}{x+a}+\frac{n}{x+b}=0$ तो $x=-\frac{mb+na}{m+n}$ (बीजीय सूत्र)

उदाहरण (20):– समीकरण $\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x+5}=0$ को सरल कीजिए।

हल : बीजीय सूत्र द्वारा $x=-\frac{(20+6)}{4+3}=-\frac{26}{7}$

सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये :–

सूत्र का अर्थ है ''समुच्चय परस्पर समान होने पर शून्य होता है।'' इस सूत्र के अन्तर्गत छः अनुप्रयोगों की चर्चा की जा रही है।

सूत्र का प्रथम अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि समीकरण के प्रत्येक पद में x एक सर्वनिष्ठ खण्ड है तो $x=0$ (बीजीय सूत्र)

उदाहरण (21). समीकरण $12x+3x=4x+5x$ को सरल कीजिए।

हल : बीजीय सूत्र द्वारा $x=0$

उदाहरण (22). समीकरण $2(x+1)=7(x+1)$ को सरल कीजिए।

हल : प्रत्येक पद में $x+1$ एक उभयनिष्ठ खण्ड है अतः $x+1=0$

$\therefore \quad x=-1$

सूत्र का द्वितीय अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

एक घातीय समीकरण के दोनों पक्षों में स्वतन्त्र पद समान हो तो चर राशि का मान शून्य होता है।

उदाहरण (23). $(x+3)+(2x+5)+4=2(x+6)$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों में स्वतन्त्र पद समान $=12$ अतः $x=0$

उदाहरण (24). $(x+1)(x+9)=(x+3)(x+3)$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों में स्वतन्त्र पद समान $=9$ अतः $x=0$

सूत्र का तृतीय अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि समीकरण में दो भिन्नों के अंश परस्पर समान हों तो उनके हरों का योग शून्य रखने पर चर राशि का मान प्राप्त होता है।

उदाहरण (25). $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=0$ को सरल कीजिए।

हल : यहाँ दोनों भिन्नों के अंश परस्पर समान $=1$ अतः सूत्रानुसार

$$x+a+x+b=0 \quad \therefore\ x=-\frac{a+b}{2}$$

उदाहरण (26). $\frac{m}{2x+1}+\frac{m}{3x+4}$ को सरल कीजिए।

हल : भिन्नों के दोनों अंश परस्पर समान $= m$

अतः सूत्रानुसार $\quad 2x+1+3x+4=0$

या $\quad 5x+5=0 \quad \therefore \quad x=-1$

सूत्र का चतुर्थ अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि समीकरण के दोनों पक्षों के अंशों का योग तथा उसके दोनों हरों का योग परस्पर समान हो अथवा दोनों योग एक निश्चित अनुपात में हो तो किसी भी योग को शून्य समान रखने पर चर राशि का एक मान ज्ञात होता है।

उदाहरण (27). समीकरण $\frac{2x+3}{2x+5}=\frac{2x+5}{2x+3}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों के अंशों का योग $=2x+3+2x+5=4x+8$

दोनों पक्षों के हरों का योग $=4x+8$

दोनों समुच्चय समान अतः सूत्रानुसार $\quad 4x+8=0, \quad \therefore \; x=-2$

उदाहरण (28). समीकरण $\frac{3x+4}{6x+7}=\frac{x+1}{2x+3}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों के अंशों का योग $=3x+4+x+1=4x+5 \quad \cdots$(i)

दोनों पक्षों के हरों का योग $=6x+7+2x+3=8x+10 \quad \cdots$(ii)

योग क्रमांक (i) तथा योग क्रमांक (ii) का अनुपात $=1:2$

अतः सूत्रानुसार किसी भी योग को शून्य समान रखने पर

$4x+5=0$ अथवा $8x+10=0$ से $x=-\frac{5}{4}$

सूत्र का पंचम अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि समीकरण के एक पक्ष के अंश व हर का अन्तर दूसरे पक्ष के अंश व हर के अन्तर के समान हो अथवा दोनोंअन्तर एक निश्चित अनुपात में हो तो किसी भी अन्तर को शून्य समान रखने पर चर राशि का एक मान ज्ञात होता है।

उदाहरण (29). समीकरण $\frac{3x ? 4}{2x ? 1} ? \frac{x ? 8}{2x ? 5}$ को सरल कीजिए।

हल : वाम पक्ष के अंश व हर का अन्तर $=3x+4-2x-1=x+3 \quad \cdots$(i)

दक्षिण पक्ष के अंश व हर का अन्तर $=2x-5-x+8=x+3 \quad \cdots$(ii)

दोनों पक्षों के अन्तर परस्पर समान अतः सूत्रानुसार

$x+3=0 \quad \therefore \; x=-3$

उदाहरण (30). समीकरण $\frac{x-8}{3x-2}=\frac{3x+4}{2x+1}$ को सरल कीजिए।

हल : वाम पक्ष के अंश व हर का अन्तर $=3x-2-x+8=2x+6 \quad \cdots$(i)

दक्षिण पक्ष के अंश व हर का अन्तर $=3x+4-2x-1=x+3 \quad \cdots$(ii)

अन्तर क्रमांक (i) तथा अन्तर क्रमांक (ii) का अनुपात $=2:1$

अतः सूत्रानुसार किसी भी अन्तर को शून्य समान रखने पर

$x+3=0$ अथवा $2x+6=0$ से $x=-3$

टिप्पणी :– सूत्र शून्यं साम्य समुच्चये आधारित अनुप्रयोग क्रमांक चतुर्थ एवं पंचम द्वारा किसी द्विघाती समीकरण की चर राशि के दोनों

मान ज्ञात किये जा सकते हैं जैसे समीकरण $\frac{3x+4}{6x+7}=\frac{5x+6}{2x+3}$ के हल में उपरोक्त सूत्र द्वारा चर राशि x के दो मान अर्थात् $x=-\frac{5}{4}$ तथा $x=-1$ प्राप्त होते हैं।

सूत्र का षष्ठ अर्थ एवं अनुप्रयोग :–

यदि किसी समीकरण के प्रत्येक पक्ष में दो पद हों और पद का प्रत्येक अंश परस्पर समान हो तथा वाम पक्ष के हरों का योग दक्षिण पक्ष के हरों के योग के समान हो तो इस योग को शून्य के बराबर रखने पर चर राशि का मान प्राप्त होता है।

उदाहरण (31). समीकरण $\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+10}$ को सरल कीजिए।

हल : वाम पक्ष के हरों का योग $=x+7+x+9=2x+16$

दक्षिण पक्ष के हरों का योग $=x+6+x+10=2x+16$

सूत्रानुसार $2x+16=0 \quad \therefore \quad x=-8$

उदाहरण (32). समीकरण $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-12}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों के हरों का योग परस्पर समान $=2x-17$

अतः सूत्रानुसार $2x-17=0 \quad \therefore \quad x=\frac{17}{2}=8\frac{1}{2}$

उदाहरण (33). समीकरण $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$ को सरल कीजिए।

हल : दोनों पक्षों में ऋणात्मक पदों का पक्षांतरण करने पर

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$$

सूत्रानुसार $2x+5=0 \quad \therefore \quad x=-\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}$

उत्तर जाँचने की विधियाँ

किसी भी संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जांच करने के लिए दो विधियां प्रचलित हैं –

(क) नवांक विधि (ख) एकादशांक विधि

(क) नवांक विधि :

नवांक विधि में अंक 9 को आधार मान कर किसी संख्या का बीजांक ज्ञात किया जाता है। संख्या के अंकों अथवा अंको के योग में से 9 घटाने पर जो अंक बचता है वह इस संख्या का बीजांक कहलाता है। जैसे 947 का बीजांक = 2

भाग संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच

$4283 \div 7$, भागफल $=611$, शेषफल $=6$

हमें सिद्ध करना हैं कि

भाज्य का बीजांक = भाजक का बीजांक $\times$ भागफल का बीजांक + शेषफल का बीजांक

या $8 = 7 \times 8 + 6$

$=62$

$=8$

अतः उत्तर सही।

टिप्पणी: 1. यदि प्रश्न की किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के अंकों का स्थान परस्पर बदल जाय तो भी बीजांक वही आता है और नवांक विधि से गलती की पकड़ नहीं हो पाती है।

2. वैदिक गणित में एक ही प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने की अनेक विधियाँ हैं। एकदशांक विधि से भी उत्तर का सत्याप्न किया जा सकता है।

(ख) एकादशांक विधि :

किसी संख्या के विषम स्थानों के अंको और समस्थानों के अंको के योगों का अन्तर उस संख्या का बीजांक कहलाता है। जैसे संख्या 63254 का

बीजांक $= 4-5+2-3+6 = 4$

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है :

भाग संक्रिया

$6789 \div 12$, भागफल = 565, शेषफल = 9

भाज्य का बीजांक $= 9-8+7-6 = 2$

भागफल का बीजांक $= 5-6+5 \quad = 4$

भाजक का बीजांक $= 2-1 \quad = 1$

शेषफल का बीजांक $= 9 \quad = 9$

सूत्र : $2 = 4 \times 1 + 9$
$= 13$
$= 2$

अतः उत्तर सही है।

प्रश्नमाला 1

निखिलम विधि से भाग दीजिए :

1. $1245 \div 97$ 2. $311 \div 8$ 3. $1013 \div 88$

निम्न का वर्ग ज्ञात कीजिए :

4. 103 5. 95 6. 204 7. 225

निम्न का घनफल ज्ञात कीजिए :

8. 15 9. 91 10. 32 11. 208

ध्वजांक विधि से भाग दीजिए।

12. $4532 \div 112$ 13. $1234 \div 42$

14. $98765 \div 87$ 15. $2101532 \div 879$

सूत्र परावर्त्य आधारित विधि से भाग दीजिए।

16. $1154 \div 103$ 17. $1358 \div 113$

18. $1432 \div 88$ 19. $14885 \div 123$

उत्तरमाला

भागफल →	1. 12	2. 38	3. 11
शेषफल →	8	7	45

4. 10609

5. 9025

6. 41616

7. 50625

8. 3375

9. 753571

10. 32768

11. 8998912

भागफल →	12.	40	13.	29	14.	1135	15.	2390
शेषफल →		52		16		20		722
भागफल →	16.	11	17.	12	18.	16	19.	121
शेषफल →		21		2		24		2

LFRU23

02

वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)

LG1Q3Q

2.01 प्रस्तावना (Introduction)

अब तक पूर्व कक्षाओं में हमने प्राकृत संख्याओं (Natural Numbers), पूर्णांकों (Integers), परिमेय एवं अपरिमेय (Rational and Irrational) संख्याओं पर संक्रियाओं के प्रयोग के बारे में प्रारंभिक अध्ययन किया है। यहाँ हम वास्तविक संख्याओं एवं उनसे सम्बन्धित गणित के मूल भूत सिद्धान्तों तथा परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं के प्रमाण, सांत (Terminating), अवसानी (असांत) आवृति (Non-terminating repeating) प्रकृति के बारे में विस्तृत अध्ययन करेंगे।

हम जानते है कि किसी भी धनात्मक पूर्णांक (positive Integer) को दो या दो से अधिक संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। हम संख्याओं के भागफल के बारे में भी जानते हैं कि किन्हीं दो धनात्मक संख्याओं के भागफल के रूप में जो शेषफल (Remainder) आता है वह हर संख्या (Denominator) से कम होता है। यही महत्वपूर्ण तथ्य अंक गणित का आधार भूत प्रमेय है। इस अध्याय में हम हन्हीं गणितीय अवधारणाओं का उपयोग कर $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ आदि संख्याओं की अपरिमेयता के प्रमाण स्थापित करेंगे तथा परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार के बारे में पढ़ेंगे।

LGAL5D

2.02 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका

यूक्लिड ग्रीक गणितज्ञ थे, ये ज्यामिति एवं संख्या सिद्धान्त पर किये कार्य के लिए जाने जाते हैं। इन्होंने वास्तविक संख्याओं के भागफल सम्बन्धित सिद्धान्त भी प्रतिपादित किये। संख्या गणित में यूक्लिड विभाजन विधि (कलन विधि) (Euclid's Division Algorithm), इनके द्वारा प्रतिपादित विभाजन प्रमेयिका पर आधारित है।

माना a कोई अशून्य पूर्णांक है $(a \neq 0)$ तथा b एवं c दो पूर्णांक निम्न प्रकार परिभाषित है कि $b/a = c$ तब संख्या b भाज्य, संख्या a भाजक एवं संख्या c भागफल कहलाता है। भाजकता के लिए निम्न गुणधर्म ध्यान रखने योग्य है कि

(i) ± 1 से किसी भी अशून्य पूर्णांक संख्या में भाग लगाया जा सकता है।

(ii) 0 में किसी भी संख्या का भाग लगाया जा सकता है।

(iii) 0 से किसी संख्या को भाजित नहीं किया जा सकता।

(iv) यदि a एवं b में से कोई भी शून्य नहीं है तो इन पर भाग संक्रिया (भाजकता) लागू की जा सकती है।

(v) यदि a एवं b अशून्य पूर्णांक है तथा q एवं r अन्य पूर्णांक इस प्रकार है कि

$$a = bq + r$$

हमने पिछली कक्षाओं में भाग संक्रिया का अध्ययन किया है। हम जानते हैं कि एक धनात्मक पूर्णांक (माना a) को दूसरे धनात्मक पूर्णांक (माना b) से विभाजित करने पर भागफल (माना q) और शेषफल (माना r) प्राप्त होता है। हम पूर्णांको के निम्न युग्मों पर विचार करते हैं:

(i) 56, 16 (ii) 10, 2 (iii) 5, 7

यहाँ हम इन युग्मों के लिए निम्न प्रकार संबंध लिख सकते हैं।

(i) $56 = 16 \times 3 + 8$ (56 में 16 से भाग देने पर तीन बार जाता है और शेष 8 रहता है)

(ii) $10 = 5 \times 2 + 0$ (10 में 2 से भाग देने पर पाँच बार जाता है और शेष कुछ नहीं रहता है)

(iii) $5 = 7 \times 0 + 5$ (यह संबंध भी सही है क्योंकि 7, 5 से बड़ा है)

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो धनात्मक पूर्णांक a और b के प्रत्येक युग्म के लिए a को b से भाग देने पर शेष r बचता है तथा शेषफल r या तो शून्य होता है या भाजक b से छोटा (कम) होता है। अर्थात्

$$a = bq + r$$

जहाँ, $0 \leq r < b$

इस परिणाम को अंक गणित में युक्लिड विभाजन प्रमेयिका के नाम से जाना जाता है एवं औपचारिक रूप से निम्नप्रकार व्यक्त किया जाता है।

प्रमेय–2.1 (यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका):

यदि a और b दो धनात्मक पूर्णांक है, तो दो ऐसी अद्वितीय पूर्णांक q एवं r इस प्रकार विद्यमान होते हैं कि

$a = bq + r$, जहाँ $0 \le r < b$ है।

नोटः उपर्युक्त प्रमेयिका सभी पूर्णांको (शून्य को छोड़कर) पर प्रयुक्त हो सकती है तथा यह भी ध्यान रहे कि q या r शून्य भी हो सकते हैं।

उपर्युक्त यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका के अनुप्रयोगों को यहाँ निम्न उदाहरणों द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण 1: दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक $3q$ या $3q+1$ या, $3q+2$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हलः माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा $b = 3$ है।

a एवं b में विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करने पर,

$a = 3q + r$, जहाँ $0 \le r < 3$ तथा q कोई पूर्णांक है। $r = 0, 1, 2$ रखने पर

$a = 3q + 0$, जहाँ $a = 3q + 1$ या $a = 3q + 2$

अतः $a = 3q$, या $a = 3q + 1$ या $a = 3q + 2$

अतः कोई भी धनात्मक पूर्णांक $3q,\ 3q+1,\ 3q+2$ के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 2: दर्शाइए कि प्रत्येक धनात्मक समपूर्णांक $2q$ के रूप का होता है तथा प्रत्येक विषम पूर्णांक $2q+1$ के रूप का होता है जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हलः माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा $b = 2$ है।

a एवं b में विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करने पर,

$a = 2q + r$, जहाँ $0 \le r < 2$ तथा q कोई पूर्णांक है। $r = 0, 1$ रखने पर

$a = 2q + 0$, या $a = 2q + 1$ ($\because$ r एक पूर्णांक है)

$a = 2q$, या $a = 2q + 1$

चूंकि q एक पूर्णांक है तथा $a = 2q$ है तो a एक सम पूर्णांक है।

हम जानते है कि कोई पूर्णांक या तो सम होगा या फिर विषम हो सकता है, अतः यदि a सम पूर्णांक है तो $a+1$ अर्थात् $2a+1$ कोई भी विषम पूर्णांक का रूप होगा।

उदाहरण 3: यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कर दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $3\mathrm{m}$ या $3\mathrm{m}+1$ के रूप का होता है, जहाँ m कोई पूर्णांक है।

हलः माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है। हम जातने है कि यह धनात्मक पूर्णांक $a = 3q$ या, $a = 3q+1$ या, $a = 3q+2$ के रूप का होगा।

(i) यदि $a = 3q$ है तब, $a^2 = (3q)^2 = 9q^2 = 3(3q) = 3m$ जहाँ, $m = 3q$ है।

(ii) यदि $a = 3q + 1$ है तब, $a^2 = (3q+1)^2 = 9q^2 + 6q + 1$

$$= 3q(3q+2) + 1$$

$$= 3m + 1$$

जहाँ, $m = q(3q+2)$ है

(iii) यदि $a = 3q + 2$ है तब

$$a^2 = (3q+2)^2 = 9q^2 + 12q + 4$$

$$= 9q^2 + 12q + 3 + 1 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$$

$$\Rightarrow \qquad = 3m + 1$$

जहाँ $m=\left(3q^{2}+4q+1\right)$ है।

अतः उपर्युक्त (i), (ii) एवं (iii) स्थिति से स्पष्ट है कि पूर्णांक a का वर्ग, $3m$ या $3m+1$ के रूप का होता है।

2.03 यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (विधि)

यहाँ हम यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका पर आधारित एक अन्य अनुप्रयोग युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (कलन विधि) का अध्ययन करेंगे। एल्गोरिथ्म शब्द 9 वीं शताब्दी के एक फारसी गणितज्ञ 'अल–ख्वारिज़्मी' के नाम से लिया गया है। यह 'एल्गोरिथ्म' सुपरिभाषित चरणों की एक श्रृंखला होती है जो विशेष प्रकार की समस्या को हल करने की एक प्रक्रिया या विधि प्रदान करती है।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्यम दो धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात करने की विधि है। किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a एवं b का महत्तम समापवर्तक वह सबसे बड़ा पूर्णांक d है जो a तथा b दोनों को पूर्णतया विभाजित करता है।

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म द्वारा महत्तम समापवर्तक (Highest common factor) ज्ञात करने के लिए निम्न चरणों में यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग किया जाता है।

माना a और b (जहाँ $a>b$) दो धनात्मक पूर्णांक है तब

चरण–1: a और b के लिए युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग किजिए तथा पूर्णांक q एवं r इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि–

$a=bq+r,\ 0\le r<b$ हो।

चरण–2: यदि $r=0$, तो a और b का महत्तम समापवर्तक b है। यदि $r\neq 0$ है तो b तथा r के लिए युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कर पूर्णांक q_1 एवं r_1 इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $b=rq_1+r_1$ हो।

चरण–3: अब यदि $r_1=0$, तो a और b का महत्तम समापवर्तक (HCF) r होगा। यदि $r_1\neq 0$ है तो r एवं r_1 के लिए युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए।

चरण–4: उपर्युक्त प्रक्रिया दोहराते रहिये जब तक शेषफल 0 (शून्य) प्राप्त नही हो जाये। शेषफल 0 प्राप्त होने की स्थिति में प्राप्त भाजक ही वांछित महत्तम समापवर्तक (HCF) होगा।

यह विधि निम्न उदाहरणों द्वारा आसानी से स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 1: 81 और 237 का महत्तम समापवर्तक (HCF) यूक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए।

हल: चरण–1: यहाँ दिये गये पूर्णांक 81 एवं 237 इस प्रकार है कि $237>81$, अतः इन पूर्णांको पर युक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग करने पर निम्न प्राप्त होता है–

$$237=81\times 2+75 \qquad \ldots(\text{i})$$

चरण–2: यहाँ शेषफल $75\neq 0$ है। अतः भाजक 81 एवं शेषफल 75 पर यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम (विधि) का प्रयोग करने पर,

$$81=75\times 1+6 \qquad \ldots(\text{ii})$$

चरण–3: समीकरण (ii) से स्पष्ट है कि यहाँ भी शेषफल $6\neq 0$ है। अतः पुन भाजक 75 एवं शेषफल 6 पर यूक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग करेंगे अर्थात्

$$75=6\times 12+3 \qquad \ldots(\text{iii})$$

चरण–4: यह प्रक्रिया हमें तब तक जारी रखनी है, जबतक कि शेषफल शून्य नहीं हो जावे। यहाँ भी शेषफल $3\neq 0$ है। अतः युक्लिड विभाजन विधि के भाजक 6 एवं शेषफल 3 पर प्रयोग से हम लिख सकते है कि

$$6=3\times 2+0 \qquad \ldots(\text{iv})$$

समीकरण (iv) से स्पष्ट है कि इस स्थिति में शेषफल0 (शून्य) प्राप्त हो गया है। अतः अन्तिम भाजक3 ही 81 एवं 237 का महत्तम समापवर्तक (HCF) है। संक्षेप में इस विभाजन प्रक्रिया को इस प्रकार समझा जा सकता है।

81 | 237 | 2
162
75 | 81 | 1
75
6 | 75 | 12
72

HCF = 3 | 6 | 2
6
0 = शेषफल

उदाहरण 2: किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है। उन स्तम्भों की अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: परेड में सेना की टुकड़ी एवं आर्मी बैंड के सदस्यों को समान संख्या वाले स्तंभो में मार्च करना है। अतजिन स्तभों में दोनों समुह मार्च करेंगे उनकी अधिकतम संख्या 616 और 32 के महत्तम समापवर्तक (HCF) के बराबर होगी। अत: 616 एवं 32 का यूक्लिड विभाजन विधि से (HCF) ज्ञात करने के लिए युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करते है। अत:

$$616 = 32 \times 19 + 8 \qquad \ldots (i)$$

यहाँ शेषफल $8 \neq 0$ । अत: भाजक 32 एवं शेषफल 8 के लिए पुन: युक्लिड विभाजन प्रमेयिका के प्रयोग से निम्न प्राप्त करते है।

$$32 = 8 \times 4 + 0 \qquad \ldots (ii)$$

अब यहाँ शेषफल 0 (शून्य) प्राप्त हो गया है अत: 616 एवं 32 का महतम समापवर्तक (HCF) भाजक 8 प्राप्त हुआ। इस प्रकार सेना टुकडी एवं बैंड के सदस्यों का समुह अधिकतम 8 स्तम्भों में मार्च करेंगे।

संक्षेप में इस विभाजन प्रक्रिया को इस प्रकार समझा जा सकता है।

32 | 616 | 19
608
HCF = 8 | 32 | 4
32
0 = शेषफल

उदाहरण 3: वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो 245 और 2053 को इस प्रकार विभाजित करती है कि प्रत्येक स्थिति में शेषफल 5 प्राप्त हो।

हल: दिया गया है कि 245 और 2053 को अभीष्ट संख्या से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल 5 प्राप्त होता है। अत: $245 - 5 = 240$ एवं $2053 - 5 = 2048$ अर्थात् 240 और 2048 को अभीष्ट संख्या द्वारा पूर्णतया विभाजित किया जा सकता है यह तभी संभव है जबकि अभीष्ट संख्या 240 एवं 2048 का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो। यह भी ज्ञात है कि अभीष्ट संख्या इस उभयनिष्ठ गुणनखण्ड में सबसे बड़ी संख्या है। अर्थात् अभीष्ट संख्या 240 एवं 2048 का महत्तम समापर्वक (HCF) होगी। अत: यूक्लिड विभाजन विधि का चरण बद्ध प्रयोग करने पर,

$$2048 = 240 \times 8 + 128$$
$$240 = 128 \times 1 + 112$$
$$128 = 112 \times 1 + 16$$
$$112 = 16 \times 7 + 0$$

स्पष्ट है कि अन्तिम शेषफल 0 प्राप्त हो गया है। इस प्रकार अभीष्ट महत्तम समापवर्तक भाजक16 प्राप्त हुआ, जो कि अभीष्ट संख्या है।

संक्षेप में इस विभाजन प्रक्रिया को इस प्रकार समझा जा सकता है।

240 | 2048 | 8
1920
128 | 240 | 1
128
112 | 128 | 1
112
16 | 112 | 7
HCF = 112
0 = शेषफल

प्रश्नमाला 2.1

1. दर्शाइए कि एक विषम धनात्मक पूर्णांक संख्या का वर्ग $8q + 1$ के रूप का होता है, जहाँ q एक धनात्मक पूर्णांक है।

2. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका द्वारा दर्शाइए कि किसी भी धनात्मक पूर्णांक संख्या का घन $9q$ या, $9q+1$ या, $9q+8$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्णांक संख्या है।
3. दर्शाइए कि किसी भी धनात्मक विषम पूर्णांक संख्या को $6q+1$ या, $6q+3$ या, $6q+5$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ q एक धनात्मक पूर्णांक है।
4. निम्नलिखित संख्या–युग्मों का यूक्लिड विभाजन विधि द्वारा महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए:
   (i) 210, 55 (ii) 420, 130 (iii) 75, 243
   (iv) 135, 225 (v) 196, 38220 (vi) 867, 255
5. यदि संख्या 408 तथा 1032 के महत्तम समापवर्तक (HCF) को $1032x - 408\times 5$ के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

2.04 अंकगणित की मूलभूत प्रमेय:

पूर्व में हम प्राइमरी कक्षाओं में भाज्य एवं अभाज्य संख्याओं के बारे में पढ़ चुके हैं। हम जानते हैं कि कोई धनात्मक अभाज्य संख्या केवल 1 या फिर स्वयं से ही भाजक है। अर्थात् किसी भी अभाज्य संख्या के गुणन खण्ड केवल $1\times p$ के रूप में ही होंगे।

अब हम किसी धनात्मक पूर्णांक के बारे में विचार करते हैं एवं उसे गुणनखण्ड रूप में व्यक्त करते है, उदाहरणार्थ

$$5313 = 3\times 7\times 11\times 23$$

या $$140 = 4\times 5\times 7$$

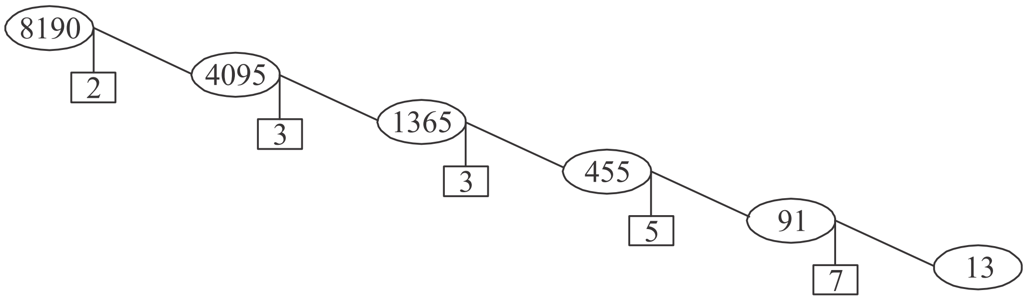
इत्यादि।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि प्रत्येक गुणपखण्ड या तो एक अभाज्य पूर्णांक होगा या एक भाज्य पूर्णांक होगा। यदि कोई गुणनखण्ड भाज्य पूर्णांक है तो इसे आगे भी गुणनखण्ड कर सकते हैं जब तक कि सभी गुणन खण्ड अभाज्य प्राप्त नहीं हो जाते। उदाहरणार्थ 140 के अन्ततः गुणन खण्ड इस प्रकार होंगे।

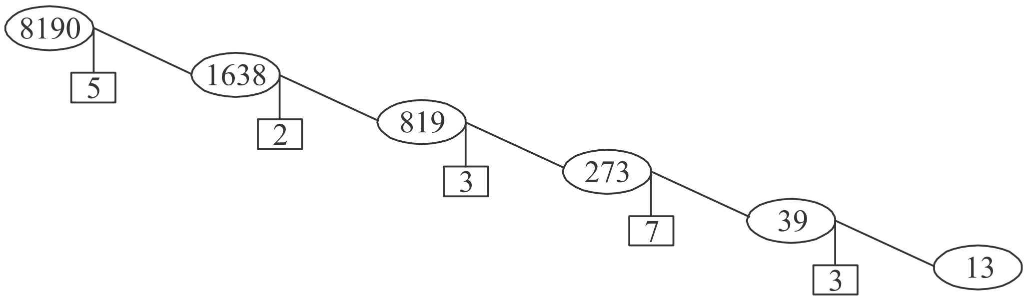
$$140 = 2\times 2\times 5\times 7$$

या $$140 = 2^2\times 5\times 7$$

अब हम किसी धनात्मक पूर्णांक संख्या के निम्न गुणनखण्ड क्रमों (factor tree) पर ध्यान केन्द्रित करते हैं। माना हम पूर्णांक संख्या 8190 के गुणनखण्ड नीचे दर्शाये अनुसार करते है।



अर्थात् $8190 = 2\times 3\times 3\times 5\times 7\times 13$ ...(i)



अर्थात् $8190 = 5\times 2\times 3\times 7\times 3\times 13$ ...(ii)

अर्थात् उदाहरण में पूर्णांक8190 के गुणन खण्ड बिना यह ध्यान दिये कि अभाज्य संख्याऐं किस क्रम में आ रही है, किये गये हैं। अतः स्पष्ट है कि एक धनात्मक पूर्णांक का अभाज्य गुणनखण्ड, उसके गुणन खण्डों के क्रम पर निर्भर नहीं है अतः किसी भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के अद्वितिय प्रकार से गुणनखण्डन रूप में लिखा जा सकता है अर्थात् अभाज्य गुणन खण्डन अद्वितिय (unique) होता है।

यदि हम गुणन खण्डों को आरोही क्रम में लिखे एवं समान अभाज्य संख्याओं को एक साथ घात रूप में लिखे तब उपर्युक्त संख्या 8190 के लिए निम्न अनुसार या कन्जक्चसर (conjecture) प्राप्त होता है,

$$8190 = 2\times 3^2\times 5\times 7\times 13$$

अंक गणित की यही अवधारणा आधार भूत प्रमेय या मूलभूत प्रमेय कहलाती है। इस तथ्य को औपचारिक रूप से निम्न कथन द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

प्रमेय–2.2: (अंकगणित की मूलभूत प्रमेय)

प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणन फलन के रूप में व्यक्त (गुणन खंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणन खण्डन अभाज्य गुणन खण्डों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

अंक गणित की इस मूलभूत प्रमेय 2.2 को हम निम्न उदाहरणों द्वारा समझ सकते हैं।

उदाहरण 1: जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 6^n अंक शून्य पर समाप्त हो सकती है?

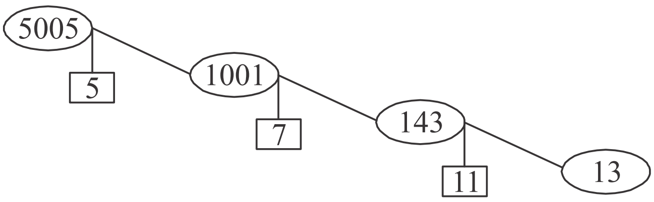
हल: हम जानते है कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक जो शून्य पर समाप्त होता है वह अंक 5 से भाज्य होता है अर्थात् उस धनात्मक पूर्णांक का एक गुणन खण्ड 5 होना चाहिये। यहाँ किसी n के लिए संख्या 6^n धनात्मक पूर्णांक हैं जो शून्य पर समाप्त होता है अतः गुणनखण्डन करने पर $6^n = (2\times 3)^n = 2^n\times 3^n$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार 6^n के गुणनखण्ड में 2 एवं 3 के अतिरिक्त अभाज्य गुणन खण्ड नहीं है अर्थात् गुणनखण्ड में अंक 5 नहीं है अतः 6^n किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए 0 अंक पर समाप्त नहीं होगा।

उदाहरण 2: निम्नलिखित धनात्मक पूर्णांको को अभाज्य गुणनखण्डो के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

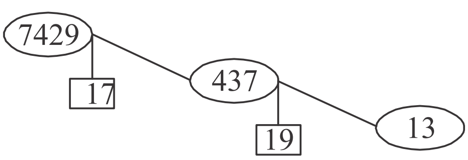
(i) 5005 (ii) 7429

हल: (i) संख्या 5005 का गुणनखण्ड वृक्ष है



अतः $5005 = 5\times 7\times 11\times 13$ अभाज्य गुणनखण्ड है

(ii) संख्या 7429 का गुणनखण्ड वृक्ष निम्न प्रकार होगा



अतः $7429 = 17\times 19\times 13$ अभाज्य गुणन खण्ड है।

पिछली कक्षाओं में हमने अभाज्य गुणन खण्ड विधि द्वारा धनात्मक पूर्णाकों के महत्तम समापवर्तक(HCF) एवं लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात किये हैं। यहाँ हम अंक गणित की मूलभूत प्रमेय 2.2 के प्रयोग द्वारा महत्तम समापवर्तक एवं लघुतम समापवर्तक ज्ञात करेंगें। इसे निम्न उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है। हम पूर्णांको के युग्म (26 और 91) पर विचार करते हैं।

यहाँ $26 = 2^1\times 13^1$

तथा $91 = 7^1\times 13^1$ अभाज्य गुणनखण्ड है

अतः $\text{HCF}(26, 91) = 13^1$

गुणन खण्डन से प्राप्त संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे छोटी घात का गुणनफल

तथा $\text{LCM}(26, 91) = 2^1 \times 7^1 \times 13^1$

= गुणन खण्डन से प्राप्त संख्याओं में संबंद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल

इस उदाहरण में ध्यान से देखने पर हम निम्न तथ्य पाते हैं कि

$$\text{HCF}(26, 91) \times \text{LCM}(26, 91) = 26 \times 91$$

अतः अंक गणित की मूल भूत प्रमेय के आधार पर हम यह परिणाम निकालते है कि किन्ही दो धनात्मक पूर्णांको a तथा b के लिए

$$\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$$

अर्थात् यदि हम पहले ही HCF ज्ञात कर चुके हैं तो उपर्युक्त परिणाम का उपयोग कर LCM ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 3: अभाज्य गुणन खण्डन विधि द्वारा 144, 180 और 192 के HCF एवं LCM ज्ञात कीजिए।

हल: अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा हम निम्न गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं।

$$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$$

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$$

तथा $$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^6 \times 3^1$$

अब महत्तम समापवर्तक (HCI) ज्ञात करने के लिए हम उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे छोटी घात ज्ञात करते हैं। यहाँ, पहले इन्हें इस प्रकार लिख लेते हैं,

उभयनिष्ठ गुणन खण्ड	न्यूनतम घातांक
2	2
3	1

अतः $\text{HCF} = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$

अब लघुत्तम समापवर्तक LCM ज्ञात करने के लिए हम संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डो की अधिकतम घातांको को इस प्रकार लिख लेते हैं,

अभाज्य गुणन खण्ड	अधिकतम घातांक
2	6
3	2
5	1

अतः $\text{LCM} = 2^6 \times 3^2 \times 5^1 = 64 \times 9 \times 5 = 2880$

उदाहरण 4: पूर्णांको के युग्म (510, 92) के HCF एवं LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि युग्म की दोनों संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

हल: अभाज्य गुणन खण्डन विधि द्वारा हम युग्म की संख्याओं को निम्न प्रकार लिख सकते हैं,

$$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1$$

$$92 = 2 \times 2 \times 23 = 2^2 \times 23^1$$

अब HCF ज्ञात करने हेतु हम इस प्रकार लिख सकते है

उभयनिष्ठ गुणन खण्ड	न्यूनतम घातंक
2	1

अतः $\text{HCF} = 2^1 = 2$

अब LCM ज्ञात करने हेतु निम्न प्रकार लिख लेते हैं

अभाज्य गुणन खण्ड	अधिकतम घातांक
2	2
3	1
5	1
17	1
23	1

अतः $\quad LCM = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 23^1 = 23460$

अब हम परिणाम की जाँच हेतु निम्न प्राप्त करते हैं,

युग्म की दोनो संख्याओं का गुणनफल $= 510 \times 92 = 46920$ . . . (i)

तथा $\quad HCF \times LCM = 2 \times 23460 = 46920$ . . . (ii)

इस प्रकार (i) एवं (ii) तथ्यों से हम कह सकते हैं कि दोनों संख्याओं का गुणनफल = HCF X LCM

प्रश्नमाला 2.2

1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणन खण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।
   (i) 468 (ii) 945 (iii) 140
   (iv) 3825 (v) 20570
2. पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों का महत्तम समापवर्तक (HCF) एवं लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि HCF $\times$ LCM = पूर्णांको का गुणनफल
   (i) 96 और 404 (ii) 336 और 54 (iii) 90 और 144
3. अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए:
   (i) 12, 15 और 21 (ii) 24, 15 और 36 (iii) 17, 23 और 29 (iv) 6, 72 और 120
   (v) 40, 36 और 126 (vi) 8, 9 और 25
4. किस खेल के मैदान के वृत्ताकार पथ पर मैदान का एक चक्कर पूरा करने में रमन को 18 मिनिट लगते हैं, जबकि उसी वृत्ताकार पथ पर मैदान का एक चक्कर पूरा करने में अनुप्रिया को 12 मिनिट का समय लगता है। माना कि दोनों एक ही स्थानसे एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करते हैं तथा एक ही दिशा में चलते है तो बताइये कितने समय बाद दोनों पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे?
5. एक संगोष्ठी में हिन्दी, अंग्रेजी तथा गणित में भाग लेने वाले प्रतिभागियों की संख्या क्रमशः60, 84 और 108 है। यदि प्रत्येक कमरे में बराबर संख्या में एक ही विषय के प्रतिभागी बैठाये जाते है तो आवश्यक कमरों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

LGJH71

2.05 संख्याओं की अपरिमेयता के प्रमाण

पिछली कक्षा में हमने अपरिमेय संख्याओं के बारे में संक्षेप में अध्ययन किया हैं। इनके अस्तित्व (existance) एवं संख्या रेखा पर इनके स्थान निर्धारण के बारे में भी पढ़ा है। अपरिमेय संख्यायें व्यापक रूप में $\sqrt{p}$ द्वारा व्यक्त की जाती है, जहाँ p एक धनात्मक अभाज्य संख्या है। हम जानते है कि किसी अपरिमेय संख्याआ को p/q रूप में नहीं लिखा जा सकता। यहाँ p एवं q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है।

उदाहरणार्थः $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 7\sqrt{5}$ इत्यादि अपरिमेय संख्याएँ है।

पिछली कक्षा में अपरिमेय संख्याओं के गुणधर्मों के बारे में भी पढ़ा है कि अपरिमेय संख्या का किसी परिमेय संख्या के साथ योग या अन्तर भी एक अपरिमेय संख्या ही प्राप्त होती है। यह भी सत्य है कि एक अशून्य परिमेय संख्या एवं अपरिमेय संख्या के गुणनफल एवं भागफल भी एक अपरिमेय संख्या ही प्राप्त होती है।

यहाँ हम $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ एवं $\sqrt{5}$ संख्याओं की अपरिमेयता के प्रमाण स्थापित करेंगे अर्थात् इन संख्याओं को अपरिमेय संख्या सिद्ध करेंगे। हम विरोधाभास विधि (proof by contradiction) एवं निम्नलिखित प्रमेय का उपयोग इन संख्याओं की अपरिमेयता सिद्ध करने में करेंगे।

प्रमेय–2.3: मान लिजिए p एक अभाज्य संख्या है तथा a एक घनात्मक पूर्णांक है। यदि p, a^2 को विभाजित करता है, तो p, a को भी विभाजित करेगा।

उपपत्तिः यह प्रमेय पिछले अनुच्छेद में पढ़ी अंक गणित की मूलभूत प्रमेय का सीधा परिणाम है। इस मूलभूत प्रमेय से, धनात्मर्क पूर्णांक a को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने पर,

$$a = p_1 p_2 p_3 ... p_n \quad \text{(माना)}$$

जहाँ $p_1 p_2 p_3 ... p_n$ अभाज्य संख्याएँ है, परन्तु आवश्यक नहीं कि ये भिन्न–भिन्न हो।

अब $\quad a^2 = (p_1 p_2 p_3 ... p_n)(p_1 p_2 p_3 ... p_n)$

$$= p_1^2 p_2^2 p_3^2 ... p_n^2$$

यहाँ यह दिया हुआ है कि p कोई अभाज्य संख्या है जो a^2 को विभाजित करती है।

अतः अंकगणित की मूलभूत प्रमेय के कथन से स्पष्ट है कि p, a^2 का एक अभाज्य गुणन खण्ड होगा। इस मूलभूत प्रमेय की अद्वितियता के गुण के उपयोग द्वारा हम कह सकते है कि a^2 के अभाज्य गुणन खण्ड केवल $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ है। इसलिए अभाज्य संख्या p संख्या, $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ में से ही एक होगी।

चूँकि $a = p_1 p_2 p_3 ... p_n$ एवं p, संख्या $p_1 p_2 p_3 ... p_n$ में से एक है। अतः p धनात्मक पूर्णांक a को विभाजित करेगा।

प्रमेय–2.4 प्रमाणित कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमाणः माना $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। तब दो पूर्णांक a एवं b के लिए निम्न कथन लिखा जा सकता है कि

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \ b \neq 0$$

जहाँ a और b सह अभाज्य (Co-prime) संख्याऐं हैं अर्थात् a, b में कोई उभयनिष्ठ गुणन खण्ड नहीं है।

अतः $\sqrt{2}b = a$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$2b^2 = a^2 \qquad \text{. . . (i)}$$

चूँकि $2b^2$, 2 से विभाजित होता है, अतः हम कह सकते हें कि 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए प्रमेय–2.3 से यह स्पष्ट है कि 2, a को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार प्रथम परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 2, a को विभाजित करता है।

अतः हम पूर्णांक a को निम्न रूप में लिख सकते हैं।

$a = 2c$ जहाँ c एक पूर्णांक है

अतः $$a^2 = 4c^2 \qquad \text{. . . (ii)}$$

समीकरण (i) से समीकरण (ii) में a^2 का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$2b^2 = 4c^2$$

अर्थात् $b^2 = 2c^2$

यहाँ चूँकि $2c^2$, 2 से विभाजित होता है अतः b^2 भी 2 से विभाजित होगा।

अतः प्रमेय–2.3 के उपयोग से हम कह सकते हैं कि 2, b को विभाजित करेगा। इस प्रकार द्वितीय परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 2, b को भी विभाजित करता है।

प्रथम एवं द्वितीय परिणामों से स्पष्ट है कि 2, पूर्णांक a और b का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। परन्तु यह कथन प्रारंभ में प्राप्त तथ्य का विरोधाभासी है कि a और b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है। अतः निष्कर्ष निकलता है कि हमारी प्रारंभिक कल्पना, कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है।

अतः यह प्रमाणित हुआ कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमेय–2.5: सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमाणः माना $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। तब दो पूर्णांक a एवं b के लिए निम्न कथन लिखा जा सकता है कि,

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

जहाँ a और b सह अभाज्य (co-prime) संख्याऐं है। अर्थात् a, b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

अतः $\sqrt{3}b = a$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$3b^2 = a^2 \qquad \ldots(i)$$

चूँकि $3b^2$, 3 से विभाजित होता है। अतः हम कह सकते हैं कि 3, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए प्रमेय–2.3 से यह स्पष्ट है कि 3, a को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार प्रथम परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 3, a को विभाजित करता है।

अतः हम पूर्णांक a को निम्न रूप में लिख सकते हैं

$a = 3c$ जहाँ c एक पूर्णांक है

अतः $a^2 = 9c^2 \qquad \ldots(ii)$

समीकरण (i) से समीकरण (ii) में a^2 का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है,

$$3b^2 = 9c^2$$

अर्थात् $b^2 = 3c^2$

यहाँ चूँकि $3c^2$, 3 से विभाजित होता है अतः b^2 भी 3 से विभाजित होगा।

अतः प्रमेय–2.3 के उपयोग से हम कह सकते हैं कि 3, b को विभाजित करेगा। इस प्रकार द्वितिय परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 3, b को विभाजित करता है।

प्रथम एवं द्वितिय परिणामों से स्पष्ट है कि 3, पूर्णांक a और b का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। परन्तु यह कथन प्रारंभ में प्राप्त तथ्य का विरोधाभासी है कि a और b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है। अतः निष्कर्ष निकलता है कि हमारी प्रारंभिक कल्पना, कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है।

अतः यह सिद्ध हुआ कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमेय–2.5: दर्शाइए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमाणः माना $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। तब दो पूर्णांकों a और b के लिए निम्न कथन लिखा जा सकता है कि

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b},\ b \neq 0$$

जहाँ a और b सह अभाज्य (co-prime) संख्याऐं है अर्थात् a, b में कोई उभयनिष्ठ गुणन खण्ड नहीं है।

अतः $\sqrt{5}\,b = a$

$\Rightarrow \quad 5b^2 = a^2 \qquad \ldots(i)$

चूँकि $5b^2$, 5 से विभाजित होता है अतः a^2 भी 5 से विभाजित किया जा सकता है।

प्रमेय–2.3 के उपयोग से हम कह सकते है कि 5, a को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार प्रथम परिणाम यह प्राप्त हुआ है कि 5, a को विभाजित करता है।

अतः पूर्णांक a को निम्न रूप में लिख सकते है

$a = 5c$, जहाँ c एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow \quad a^2 = 25c^2 \qquad \ldots(ii)$

समीकरण (i) एवं (ii) से हमें निम्न प्राप्त होता है,

$$5b^2 = 25c^2$$

$\Rightarrow \quad b^2 = 5c^2$

यहाँ स्पष्ट है कि b^2, 5 से विभाजित किया जा सकता है।

प्रमेय–2.3 के उपयोग से हम कह सकते हैं कि 5, b को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार द्वितीय परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 5, b को विभाजित करता है।

प्रथम एंव द्वितीय परिणामों से स्पष्ट है कि 5, पूर्णांक a और b का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। परन्तु यह कथन प्रारंभ में प्राप्त तथ्य का विरोधाभासी है कि a और b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

अतः निष्कर्ष निकलता है कि हमारी प्रारंभिक कल्पना, कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है।

अतः यह प्रमाणित होता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

निम्न उदाहरणों द्वारा हम एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग, अनतर, गुणनफल एवं भागफल पर आधारित विशिष्ट स्थितियों को समझ सकेंगे।

उदाहरण 1: सिद्ध कीजिए कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल: माना $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \quad 7\sqrt{5} = \frac{a}{b},\ b \neq 0$, जहाँ a, b सह अभाज्य पूर्णांक संख्याऐं है।

या $\quad \sqrt{5} = \frac{a}{7b} \qquad \ldots(i)$

चूंकि a, b पूर्णांक है, अतः $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। अतः समीकरण (i) से स्पष्ट है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या होगी जो कि विरोधाभासी कथन है क्योंकि हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ तो अपरिमेय संख्या होती हैं। अतः हमारी परिकल्पना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है। इससे सिद्ध होता है कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 2: सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या हैं।

हल: माना $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \quad 3+2\sqrt{5} = \frac{a}{b},\ b \neq 0 \qquad \ldots(i)$

जहाँ a, b पूर्णांक सह अभाज्य संख्याऐं है। समीकरण (i) से हम लिख सकते है कि

$$2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$$

या $\quad \sqrt{5} = \frac{a-3b}{2b} \qquad \ldots(ii)$

चूँकि a, b पूर्णांक संख्याऐं है, अतः $\frac{a-3b}{2b}$ एक परिमेय संख्या प्राप्त होगी। अतः समीकरण (ii) से परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। जबकि हम जानते है कि $\sqrt{5}$ तो अपरिमेय संख्या है अतः यह परिणाम विरोधाभासी है। अतः हमारी परिकल्पना कि $3+2\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है, गलत है।

इससे सिद्ध होता है कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 3: दर्शाइए कि $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल: माना $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\therefore \qquad \sqrt{2}+\sqrt{5}=\frac{a}{b},\ b\neq 0 \qquad \ldots(\text{i})$$

जहाँ a, b पूर्णांक सह अभाज्य संख्याऐं है।

समीकरण (i) को निम्न प्रकार लिख सकते है,

$$\sqrt{5}=\frac{a}{b}-\sqrt{2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$5=\left(\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad 5=\frac{a^2}{b^2}+2-2\sqrt{2}\,\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \qquad 2\sqrt{2}\,\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}-3$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{2}=\frac{a^2-3b^2}{2ab} \qquad \ldots(\text{ii})$$

चूँकि a, b पूर्णांक है, अतः $\frac{a^2-3b^2}{2ab}$ एक परिमेय संख्या होगी। अतः समीकरण (ii) से परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। जबकि हम जानते है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। अतः यह परिणाम विरोधाभासी है इसलिए हमारी परिकल्पना कि $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है।

इससे सिद्ध होता है कि $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नमाला 2.3

1. प्रमाणित कीजिए कि $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।
2. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याऐं अपरिमेय संख्याऐं है।

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $6+\sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{2}$
3. यदि p और q अभाज्य धनात्मक पूर्णांक है, तो सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ एक अपरिमेय संख्या है।

2.06 परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार

हम जानते है कि $\frac{p}{q}, q\neq 0$ एक परिमेय संख्या हैं, जहाँ p और q सह अभाज्य पूर्णांक संख्याऐं है। पिछली कक्षा में हमने इन संख्याओं के दशमलव प्रसार के बारे में पढ़ा है। हम जानते हैं कि परिमये संख्याओं के दशमलव प्रसार दो प्रकार के होते है। एक सांत दशमलव प्रसार (terminating decimal expansion) तथा दूसरा असांत या अनवसानी आवर्ती (non terminating repeating) दशमलव प्रसार। इस अनुच्छेद में हम एक परिमेय संख्या के दशमलव प्रसार की प्रकृति जानेंगे कि कब यह सांत होगा और कब असांत या अनवसानी आवर्ती होगा।

आइये दशमलव प्रसार की प्रकृति को समझने के लिए हम यहां निम्नलिखित परिमेय संख्याओं पर अपना ध्यान केन्द्रित करते हैं

(i) 0.375 (ii) 1.512 (iii) 0.01764 (iv) 23.3408

उपर्युक्त दशमलव संख्याओं को भिन्न रूप में परिवर्तित करने पर,

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$

(ii) $1.512 = \frac{1512}{1000} = \frac{1512}{10^3}$

(iii) $0.01764 = \frac{1764}{100000} = \frac{1764}{10^5}$

(iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

इन सभी संख्याओं के हर, 10 की कोई घात के रूप में है। अतः ये दशमलव प्रसार सांत प्रकृति के है।

हम जानते है कि, 10 के अभाज्य गुणनखण्ड 2 एवं 5 होते हैं। अतः 10 की धनात्मक घात को 2 और 5 की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ परिमेय संख्याऐं (i) से (iv) के भिन्न रूपों में अंश एवं हर के उभयनिष्ठ गुणनखण्डों को आपस में काटने पर इनके निम्न रूप प्राप्त होते हैं।

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{2^3 \times 5^0}$

(ii) $1.512 = \frac{1512}{10^3} = \frac{2^3 \times 3^3 \times 7}{2^3 \times 5^3} = \frac{3^3 \times 7}{5^3} = \frac{189}{2^0 \times 5^3}$

(iii) $0.01764 = \frac{1764}{10^5} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 7^2}{2^5 \times 5^5} = \frac{3^2 \times 7^2}{2^3 \times 5^5} = \frac{441}{2^3 \times 5^5}$

(iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^6 \times 7 \times 521}{2^4 \times 5^4} = \frac{14588}{2^0 \times 5^4}$

उपर्युक्त परिमेय संख्या प्रतिरूप से स्पष्ट है कि जिन परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार सांत होता है, उनके हर $2^m \times 5^n$ के रूप में लिखे जा सकते हैं, जहाँ m और n कोई ऋणेत्तर (non negative) पूर्णांक है।

इस परिणाम को निम्नलिखित प्रमेय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

प्रमेय–4: मान लीजिए x एक ऐसी परिमेय संख्या हैं जिसका दशमलव प्रसार सांत है। तब x को $p/q, q \neq 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q सहअभाज्य पूर्णांक संख्याऐं है तथा q का अभाज्य गुणनखण्डन $2^m \times 5^n$ के रूप का है, जहाँ m, n ऋणेत्तर (non negative) पूर्णांक है। आइये विचार करते है कि क्या इस प्रमेय का विलोम कथन भी सत्य होगा?

हम जानते है कि, $a/b, b \neq 0$, जहाँ a, b सहअभायज्य पूर्णांक है, रूप की किसी भी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत होगा, यदि b, 10 की कोई घात है।

उदाहरणार्थ–

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} \Rightarrow \frac{3}{8} = 0.375$

(ii) $\frac{189}{125} = \frac{3^3 \times 7 \times 2^3}{5^3 \times 2^3} = \frac{1512}{10^3} \Rightarrow \frac{189}{125} = 1.512$

(iii) $\frac{441}{25000} = \frac{3^2 \times 7^2 \times 2^2}{2^3 \times 5^5 \times 2^2} = \frac{1764}{10^5} \Rightarrow \frac{441}{25000} = 0.01764$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट हैं कि $p/q, q \neq 0$ के रूप की एक परिमेय संख्या का हर $2^m \times 5^n$ के रूप का है (जहां m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है) को $a/b, b \neq 0$ के तुल्य परिमेय संख्या के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ b, 10 की कोई घात है। अतः निष्कर्ष निकलता है कि परिमेय संख्या $p/q, q \neq 0$ का दशमलव प्रसार सांत होगा। इस परिणाम को निम्नलिखित प्रमेय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

प्रमेय–5: माना $x = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ एक ऐसी परिमेय संख्या है कि, q का अभाज्य गुणनखण्डन $2^m \times 5^n$ के रूप का है, जहां m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है तब x का दशमलव प्रसार सांत होता है।

आइये अब हम ऐसी परिमेय संख्याओं के बारे में जानते है जिनके दशमलव प्रसार सांत नहीं है।

उदाहरणार्थ

हम निम्न परिमेय संख्याओं पर विचार करते है।

(i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{29}{343}$ (iii) $\frac{77}{210}$

(i) $\frac{5}{3} = 1.6666...$ (ii) $\frac{29}{343} = 0.0845481...$ (iii) $\frac{77}{210} = 0.36666...$

उपर्युक्त परिमेय संख्याओं में हर $2^m \times 5^n$ के रूप का नहीं है तथा यहाँ हर से अंश में भाग लगाने पर शेषफल कभी 0 प्राप्त नहीं होगा एवं एक स्थिति के बाद भागफल की पुनरावृत्ति होती रहेगी। अर्थात् इस प्रकार की परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होते है।

इस कथन को प्रमेय रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

प्रमेय–6: माना $x = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ एक परिमेय संख्या इस प्रकार की है कि q के अभाज्य गुणनखण्डन $2^m \times 5^n$ के रूप के नहीं है, जहाँ m, n ऋणेत्तर (non negative) पूर्णांक है तब x का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती (non terminating repeating) या अवसानी आवर्ती होता है।

उदाहरण 1: लम्बी विभाजन विधि के बिना बताइए कि निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती है–

(i) $\frac{17}{8}$ (ii) $\frac{64}{455}$ (iii) $\frac{125}{441}$

हल: (i) यहाँ, $\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3 \times 5^0}$

यहाँ परिमेय संख्या का हर 8, $2^3 \times 5^0$ है जो $2^m \times 5^n$ के रूप का है? अतः $\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

(ii) यहाँ, $\frac{64}{455} = \frac{64}{5 \times 7 \times 13}$

स्पष्ट है कि, हर 455, $2^m \times 5^n$ के रूप का नहीं है, अतः $\frac{64}{455}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

(iii) यहाँ $\frac{125}{441} = \frac{5^3}{3^2 \times 7^2}$

स्पष्ट है कि हर 441, $2^m \times 5^n$ के रूप का नहीं है। अतः $\frac{125}{441}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

प्रश्नमाला 2.4

2. लम्बी विभाजन प्रक्रिया का उपयोग न करते हुए बताइए कि निम्नलिखित परिमये संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती है :

(i) $\frac{15}{1600}$ (ii) $\frac{13}{3125}$ (iii) $\frac{23}{2^3 \times 5^2}$ (iv) $\frac{17}{6}$

(v) $\frac{129}{2^2 \times 5^7 \times 7^5}$ (vi) $\frac{35}{50}$ (vii) $\frac{7}{80}$

2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार लिखिये एवं बताइये कि ये सांत है।

(i) $\frac{13}{125}$ (ii) $\frac{14588}{625}$ (iii) $\frac{49}{500}$

3. नीचे दर्शाये दशमलव प्रसार के लिए निर्धारित कीजिए कि यह संख्या परिमेय संख्या है या नहीं यदि यह परिमेय संख्या है, तो इसके हर के अभाज्य गुणन खण्डन के बारे में अपनी टिप्पणी लिखिए।

(i) 0.120120012000120000 . . . (ii) 43.123456789 (iii) $27.\overline{142857}$

विविध प्रश्नमाला–2

2. 196 के अभाज्य गुणन खण्डों की घातों का योगफल है:

(क) 1 (ख) 2 (ग) 4 (घ) 6

2. दो संख्याओं को $m = pq^3$ तथा $n = p^3q^2$ के रूप में लिखा जाये तब m, n का महत्तम समापवर्तक बताइये जबकि p, q अभाज्य संख्याऐं है

(क) pq (ख) pq^2 (ग) p^2q^2 (घ) p^3q^3

3. 95 तथा 152 का महत्तम समापवर्तक (HCF) है

(क) 1 (ख) 19 (ग) 57 (घ) 38

4. दो संख्याओं का गुणनफल 1080 है उनका महत्तम समापवर्तक 30 है तो उनका लघुत्तम समापवर्तक है

(क) 5 (ख) 16 (ग) 36 (घ) 108

5. संख्या $\frac{441}{2^2 \times 5^7 \times 7^2}$ का दशमलव प्रसार होगा

(क) सांत (ख) असांत आवर्ती

(ग) सांत एवं असांत दोनो (घ) संख्या, परिमेय संख्या नहीं है

6. परिमेय संख्या $\frac{43}{2^2 \times 5^3}$ के दशमलव प्रसार का दशमलव के कितने अंकों के पश्चात अंत होगा?

(क) एक (ख) दो (ग) तीन (घ) चार

7. सबसे न्यूनतम संख्या जिससे $\sqrt{27}$ को गुणा करने पर एक प्राकृत संख्या प्राप्त होती है, होगी

(क) 3 (ख) $\sqrt{3}$ (ग) 9 (घ) $3\sqrt{3}$

8. यदि दो परिमेय संख्याओं के लिए HCF = LCM, तो संख्याऐं होनी चाहियेः

(क) भाज्य (ख) समान (ग) अभाज्य (घ) सहअभाज्य

9. यदि a तथा 18 का LCM 36 है तथा a तथा 18 का HCF 2 है, तो a का मान होगा

(क) 1 (ख) 2 (ग) 5 (घ) 4

10. यदि n एक प्राकृत संख्या है, तो $6^n - 5^n$ में इकाई का अंक है।

(क) 1 (ख) 6 (ग) 5 (घ) 9

12. यदि $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ एक परिमेय संख्या है, तो q पर क्या प्रतिबन्ध होगा जबकि $\frac{p}{q}$ एक सांत दशमलव हो।

12. सरल कर बताइए कि संख्या $\frac{2\sqrt{45}+3\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$ एक परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या?

13. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $4q+1$ या $4q+3$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

14. सिद्ध कीजिए कि दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांको का गुणनफल 2 से भाज्य है।

15. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 2053 और 967 को विभाजित करने पर शेषफल क्रमशः 5 तथा 7 प्राप्त होते हैं।

16. व्याख्या कीजिए कि $7\times11\times13+13$ और $7\times6\times5\times4\times3\times2\times1+5$ भाज्य संख्याऐं क्यों है?

17. यदि दो संख्याओं 306 और 657 का महत्तम समापवर्तक 9 हो, तो इनका लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

18. एक आयताकार बरामदा 18 मी. 72 सेमी लम्बा तथा 13 मी. 20 सेमी चौड़ा है। इसमें समान विमाओं वाली वर्गाकार टाइलें लगानी हैं। इस प्रकार की टाइसों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

19. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याऐं अपरिमेय संख्याऐं है।

(i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ (iv) $4+\sqrt{2}$

20. निम्न परिमेय संख्याओं के हर के अभाज्य गुणनखण्डन के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

(i) 34.12345 (ii) $43.\overline{123456789}$

महत्वपूर्ण बिन्दु

2. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका: दो धनात्मक पूर्णांक a, b के लिए $a = bq + r$, जहाँ $0 \le r < b$ को संतुष्ट करने वाली, अद्वितिय पूर्णांक q एवं r विद्यमान होती है। यह कथन q एवं r के शून्य होने पर भी सत्य है।
2. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम: इस विधि से दो धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक ज्ञात किया जा सकता है। इसकके लिए निम्न चरणों का उपयोग करते हैं।

   चरण–1: a, b दोनो पूर्णांकों पर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का उपयोग कीजिए तथा q पूर्णांक q_1 तथा r_1 ज्ञात कीजिए, जबकि $a = bq_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < b$

   चरण–2: यदि $r_1 = 0$, है, तो a तथा b का HCF b है।

   चरण–3: यदि $r_1 \ne 0$, तो b तथा r_1 के लिए युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का उपयोग कर पूर्णांक q_2 तथा r_2 प्राप्त कीजिए, जबकि $b = q_2 r_1 + r_2$ है।

   चरण–4: यदि $r_2 = 0$ है, तो a, b का HCF r_1 है

   चरण–5: यदि $r_2 \ne 0$, तो उपर्युक्त प्रक्रिया को चरण बद्ध तब तक दोहराते रहिये जबतक की शेषफल r_n शून्य न प्राप्त हो जावे। इस स्थिति वाला अन्तिम भाजक r_{n-1} ही a और b का HCF होगा।
3. अंक गणित की आधार भूतप्रमेय: प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है तथा गुणनखण्डन अद्वितीय होता है, इस पर बिना ध्यान दिये कि अभाज्य गुणनखण्ड किस क्रम में आ रहे है।
4. प्रत्येक भाज्य संख्या अभाज्य गुणन खण्डों की घातों के आरोही अथवा अवरोही क्रम में अद्वितीय रूप से व्यक्तकी जा सकती है।
5. किसी धनात्मक पूर्णांक a के लिए p अभाज्य संख्या इस प्रकार है कि p, a^2 को विभाजित करता है तो p, a को भी विभाजित करेगा।
6. यदि p धनात्मक अभाज्य संख्या है, तो $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या होती है।
7. किसी परिमेय संख्या p/q, का दशमलव प्रसार सांत होगा यदि हर q को $2^m \times 5^n$, जहाँ m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है, के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ p, q सहअभाज्य पूर्णांक संख्याऐं है। यदि q को $2^m \times 5^n$, के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है तो दशमलव प्रसार असांत आवर्ती पा अवसानी आवर्ती होगा।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 2.1

4. (i) 5 (ii) 10 (iii) 3 (iv) 45 (v) 196 (vi) 51 5. 2

प्रश्नमाला 2.2

1. (i) $2^2 \times 3^2 \times 13$ (ii) $3^3 \times 5 \times 7$ (iii) $2^2 \times 5 \times 7$ (iv) $3^2 \times 5^2 \times 17$ (v) $2 \times 5 \times 11^2 \times 17$
2. (i) HCF = 4, LCM = 9696 (ii) HCF = 6, LCM = 3024 (iii) HCF = 18, LCM = 720
3. (i) HCF = 3, LCM = 420 (ii) HCF = 3, LCM = 360 (iii) HCF = 1, LCM = 11339
   (iv) HCF = 6, LCM = 360 (v) HCF = 2, LCM = 2520 (vi) HCF = 1, LCM = 1800
4. 36 मिनट 5. 21

प्रश्नमाला 2.4

1. (i) सांत (ii) सांत (iii) सांत (iv) असांत आवर्ती (v) असांत आवर्ती
   (vi) सांत (vii) सांत
2. (i) 0.104 (ii) 23.3408 (iii) 0.098
3. (i) अपरिमेय (ii) परिमेय, हर के अभाज्य गुणन खण्ड $2^m \times 5^n$ के रूप में है, जहाँ m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है।

विविध प्रश्नमाला–2

1. (ग) 2. (ख) 3. (ख) 4. (ग) 5. (क) 6. (घ)
7. (ख) 8. (ख) 9. (घ) 10. (क)
11. हर q के अभाज्य गुणनखण्ड $2^m \times 5^n$ के रूप के होंगे, जहाँ m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है।
12. परिमेय संख्या है।
15. 64 17. 22338 18. 4290
20. (i) चूँकि इसका दशमलव प्रसार सांत है तथा इसका हर $2^m \times 5^n$ के रूप का है, जहाँ m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है।
(ii) चूँकि इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है। अतः इसके हर का अभाज्य गुणन खण्डन $2^m \times 5^n$ के रूप का नहीं है

03

बहुपद (Polynomials)

LGTD8N

3.01 प्रस्तावना

एक चर वाले बहुपदों एवं उनकी घातों (Degree) के बारे में हम पिछली कक्षा में पढ़ चुके हैं। हम जानते हैं कि चर के लिए बहुपद $f(x)$ में x की उच्चतम घात बहुपद की घात कहलाती है एवं घात के आधार पर बहुपद की पहचान होती है कि यह रैखिक है, द्विघातीय है या त्रिघातीय है। इस प्रकार व्यापक रूप में चर x के लिए $f(x) = ax + b$ रैखिक, $f(x) = ax^2 + bx + c$ द्विघातीय एवं $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ एक त्रिघातीय बहुपद कहलाते हैं जहाँ a, b, c, d वास्तविक संख्याएँ तथा $a \neq 0$ है। इस प्रकार चर x के लिए n घातीय बहुपद निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है।

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ जहाँ 'n' एक प्राकृत संख्या है तथा $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ वास्तविक संख्याएँ हैं। $a_n x^n, a_{x-1} x^{n-1}, \ldots, a_1 x, a_0$ इस बहुपद के पद (terms) कहलाते हैं तथा $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ इन पदों के गुणांक (co-efficient) कहलाते हैं।

इस अध्याय में हम बहुपदों के शून्यकों, गुणांकों एवं विभाजन एल्गोरिथम का अध्ययन करेंगे। साथ ही द्विघातीय समीकरणों के हल एवं उनके मूलों की प्रकृति के बारे में पढ़ेगे। पिछली कक्षाओं में हमने वास्तविक संख्याओं के महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात किये थे। यहाँ हम बीजीय व्यंजकों के लिए महत्तम समापवर्तक (HCF) तथा लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात करेंगे।

LH39AB

3.02 बहुपद के शून्यक

बहुपद $f_1(x) = 4x + 2, f_2(x) = 2x^2 + 3x - \frac{2}{5}, f_3(x) = 2 - x^3$ के बारे में विचार करते हैं। ये क्रमशः रैखिक, द्विघात एवं त्रिघात बहुपद के उदाहरण हैं। बहुपद $f_1(x), f_2(x)$ एवं $f_3(x)$ में $x = 2$ रखने पर हम इन बहुपदों के निम्न मान प्राप्त करते है।

$$f_1(2) = 4 \times 2 + 2 = 10$$

$$f_2(2) = 2 \times 2^2 + 3 \times 2 - \frac{2}{5} = 8 + 6 - \frac{2}{5} = \frac{68}{5}$$

$$f_3(2) = 2 - 2^3 = -6$$

इस प्रकार x के भिन्न–भिन्न मान रखने पर बहुपदों के भिन्न–भिन्न प्राप्त होते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि

यदि $f(x)$, चर x में एक बहुपद हैं तथा 'a' कोई वास्तविक संख्या है, तो $f(x)$ में x को 'a' से प्रतिस्थापित करके प्राप्त की गई वास्तविक संख्या, बहुपद $f(x)$ का $x = a$ पर मान कहलाती है तथा इसे $f(a)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

आइये हम द्विघात बहुपद $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ के $x = 1$ एवं $x = 3$ पर मान ज्ञात करते हैं। यहाँ

$$f(1) = 2 \times 1 - 8 \times 1 + 6 = 0$$

$$f(3) = 2 \times 3^2 - 8 \times 3 + 6 = 0$$

चूँकि बहुपद $f(x)$ के $x = 1$ एवं $x = 3$ पर मान शून्य प्राप्त होते हैं अतः 1 और 3 को द्विघात बहुपद $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ के 'शून्यक' कहते हैं। व्यापक रूप में हम शून्यक को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं कि एक वास्तविक संख्या 'a' बहुपद $f(x)$ का एक 'शून्यक' होगा, यदि और केवल यदि $f(a) = 0$ है।

माना रैखिक बहुपद $f(x)=ax+b$ का शून्यक α है तब $f(\alpha)=a\alpha+b=0 \Rightarrow \alpha=\frac{-b}{a}=\frac{(\text{अचर गुणांक})}{x \text{ का गुणांक}}$ इससे स्पष्ट है कि बहुपद के शून्यक उसके गुणांको से सम्बन्धित होते है।

3.03 द्विघाती बहुपद के शून्यकों तथा गुणांको में सम्बन्ध

LHC5BY

हमने पिछली कक्षा में बहुपदों के गुणनखण्डन का अभ्यास किया है। द्विघाती बहुपद के गुणनखण्डन में इनके मध्य पद को दो पदों में इस प्रकार विभक्त किया जाता है कि प्राप्त दोनों पदों का गुणनफल बहुपद के प्रथम एवं तृतीय पदों के गुणनफल के बराबर हो। यहाँ यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि द्विघातीय बहुपद में दो शून्यक (वास्तविक/काल्पनिक) होते हैं। द्विघातीय बहुपद के शून्यको एवं गुणांकों में सम्बन्ध समझने का प्रयास करते है।

व्यापक रूपः माना द्विघात बहुपद $f(x)=ax^2+bx+c$ के शून्यक α तथा β है तब $(x-\alpha)$ एवं $(x-\beta)$ बहुपद f(x) के गुणनखण्ड होंगे। अतः स्थिरांक k के लिए निम्न प्रकार लिखा जा सकता है कि $f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$

अर्थात् $\quad ax^2+bx+c=k[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$

या $\quad ax^2+bx+c=kx^2-k(\alpha+\beta)x+k\alpha\beta$

दोनों पक्षों में x^2, x के गुणांक तथा अचर पदों की तुलना करने पर, $a=k, b=-k(\alpha+\beta)$ तथा $c=k\alpha\beta$

इनको निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a} \quad \text{तथा} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

अतः बहुपद $f(x)=ax^2+bx+c$ के लिए स्पष्ट है कि शून्यकों का योग $=\frac{-b}{a}=\frac{-(x\text{का गुणांक})}{x^2\text{का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल $=\frac{c}{a}=\frac{\text{अचर पद}}{x^2\text{का गुणांक}}$

उदाहरण-1. द्विघात बहुपद x^2-2x-8 के शून्यक ज्ञात कीजिए। और शून्यक एवं गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हलः माना $\quad f(x)=x^2-2x-8=x^2-4x+2x-8$

$$=x^2-4x+2x-8=x(x-4)+2(x-4)=(x+2)(x-4)$$

अब $\quad f(x)=0$ लेने पर $(x+2)(x-4)=0$

या $\quad x+2=0 \quad$ या $\quad x-4=0$

या $\quad x=-2 \quad$ या $\quad x=4$

अतः बहुपद $f(x)=x^2-2x-8$ के शून्यक –2 और 4 होंगे

यहाँ शून्यकों का योग $=-2+4=2$

अर्थात् शून्यकों का योग $=\frac{-(x\text{का गुणांक})}{x^2\text{का गुणांक}}=\frac{2}{1}=2$

शून्यकों का गुणनफल $-2\times4=-8$

अर्थात् शून्यकों का गुणनफल $=\frac{\text{अचर पद}}{x^2\text{का गुणांक}}=\frac{-8}{1}=-8$

अतः शून्यकों एवं गुणांकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

उदाहरण-2. द्विघात बहुपद $3x^2+5x-2$ के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा शून्यकों एवं गुणांको के मध्य सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

हल: माना $f(x)=3x^2+5x-2$

या $f(x)=3x^2+6x-x-2=3x(x+2)-1(x+2)=(3x-1)(x+2)$

अब $f(x)=0$ लेने पर $(3x-1)(x+2)=0$

या $3x-1=0$ या $x+2=0$

या $x=\frac{1}{3}$ या $x=-2$

अतः बहुपद $3x^2+5x-2$ के शून्यक $1/3$ और -2 होंगे।

यहाँ शून्यकों का योग $=\frac{1}{3}+(-2)=\frac{-5}{3}=\frac{(-x\text{का गुणांक})}{(x^2\text{का गुणांक})}$

शून्यकों का गुणनफल $=\frac{1}{3}\times(-2)=\frac{-2}{3}$

या शून्यकों का गुणनफल $=\frac{\text{अचर पद}}{x^2\text{का गुणांक}}$

अतः बहुपद $3x^2+5x-2$ के शून्यक एवं गुणांको के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

उदाहरण-3 एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः 1/4 और –1 हैं।

हल: माना द्विघात बहुपद ax^2+bx+c के शून्यक α और β हैं।

अतः शून्यकों का योग $=\frac{-b}{a}$

या $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{1}{4}$ (दिया हुआ है1) . . . (i)

तथा शून्यकों का गुणनफल $=c/a$

या $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$ (दिया हुआ है।) . . . (ii)

यदि $a=k$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है तब समीकरण (i) एवं (ii) से

$b=-\frac{k}{4}$ तथा $c=-k$

अतः द्विघात बहुपद ax^2+bx+c निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$kx^2-\frac{k}{4}x-k$ या $\frac{k}{4}(4x^2-x-4)$

अतः अभीष्ट द्विघात बहुपद $4x^2-x-4$ होगा।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

(i) $4x^2+8x$ (ii) $4x^2-4x+1$ (iii) $6x^2-x-2$

(iv) x^2-15 (v) $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}$ (vi) $3x^2-x-4$

2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं।

(i) $-3, 2$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (iv) $0, \sqrt{5}$

(v) $4, 1$ (vi) $1, 1$

3. यदि द्विघात बहुपद $f(x) = x^2 - 8x + k$ के शून्यकों के वर्गों का योग 40 हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

3.04 वास्तविक गुणांकों वाले बहुपदों पर विभाजन एल्गोरिथम (कलन विधि)

LVAP3E

पिछले अध्याय में हम पढ़ चुके है कि किसी पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक से विभाजित करने पर भागफल, शेषफल प्राप्त होते है। इनमें निम्न सम्बन्ध होता है।

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

यहाँ हम पढेंगे कि बहुपदों का विभाजन भी इसी प्रकार किया जा सकता है। एक बहुपद से दूसरे बहुपद को विभाजित (भाग) करते है तब यदि शेषफल शून्य हो जाये या शेषफल की घात भाजक की घात से कम रह जाये तो हम भाग की प्रक्रिया रोक देते हैं। इस विधि को ही विभाजन एल्गोरिथम या कलन विधि कहते हैं।

इस विधि को एक उदाहरण लेकर चरणबद्ध प्रक्रिया द्वारा समझते हैं।

उदाहरणार्थ, बहुपद $f(x) = 3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को बहुपद $g(x) = x - 1 - x^2$ द्वारा विभाजन एल्गोरिथम विधि से विभाजित करना है।

चरण–1: हम सर्वप्रथम भाजक एवं भाज्य के पदों को घटती हुई घातों के क्रम में लिखते हैं अर्थात् बहुपदों को मानक रूप में लिखते हैं। यहाँ $f(x), g(x)$ को मानक रूप में रखने पर, $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ तथा $g(x) = -x^2 + x - 1$

चरण–2: अब भाज्य के उच्चतम घात वाले पद $(-x^3)$ को भाजक के उच्चतम घात वाले पद $(-x^2)$ से भाग लगाते हैं एवं भागफल (x) प्राप्त करते है। अर्थात्

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \mp x \\ \hline & 2x^2 - 2x + 5 \end{array}$$

यहाँ शेषफल $2x^2 - 2x + 5$ बचता है

चरण–3: अब नये भाज्य $2x^2 - 2x + 5$ के उच्चतम घात वाले पद $(2x^2)$ को भाजक के उच्चतम घात वाले पद $(-x^2)$ से भाग करते हैं। इसमें (–2) भागफल प्राप्त होता है अर्थात्

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & \underset{+}{-x^3} + \underset{-}{x^2} \underset{+}{-x} \\ \hline & 2x^2 - 2x + 5 \\ & \underset{-}{2x^2} \underset{+}{- 2x} + \underset{-}{2} \\ \hline & 3 \end{array}$$

यहाँ शेषफल (3) प्राप्त होता है इसकी घात भाजक $-x^2 + x - 1$ से कम है अतः विभाजन प्रक्रिया यही रोक देते हैं। इस प्रकार भागफल (x – 2) एवं शेषफल (3) प्राप्त होता है। विभाजन एल्गोरिथम में निम्न कथन की जाँच करते हैं कि भाजक × भागफल + शेषफल = भाज्य

यहाँ भाजक $(-x^2 + x - 1)$, भागफल $(x - 2)$ एवं शेषफल (3) है

अतः $(-x^2 + x - 1) \times (x - 2) + 3$

$$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \ = \text{भाज्य}$$

इस प्रकार विभाजन एल्गोरिथम को निम्न कथन द्वारा व्यक्त किया जाता है।

विभाजन ऐल्गोरिथम– यदि $f(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपद हैं, जहाँ $g(x) \neq 0$ हो तो हम बहुपद q(x) और r(x) एसे प्राप्त कर सकते हैं कि

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

जहाँ $r(x) = 0$ या $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात है।

उदाहरण-4 विभाजन ऐल्गोरिथम का प्रयोग कर बहुपद $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ को $g(x) = x^2 + 1 - x$ से भाग देने पर प्राप्त भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल: बहुपदों को मानक रूप में रख विभाजन प्रक्रिया करने पर,

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 3 \\
x^2 - x + 1 & x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 5 \\
 & x^4 - x^3 + x^2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \\
 & x^3 - x^2 + x \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & -3x2 + 3x + 5 \\
 & -3x^2 + 3x - 3 \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & 8
\end{array}$$

अतः शेषफल की घात भाजक की घात से कम है अतः प्रक्रिया यही रोकनी पडेगी। इस प्रकार भागफल $= x^2 + x - 3$ एवं शेषफल '8' प्राप्त होती है। यहाँ

भाजक $\times$ भागफल $+$ शेषफल

$$= (x^2 - x + 1) \times (x^2 + x - 3) + 8$$

$$= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x - 3x^2 + 3x - 3 + 8$$

$$x^4 - 3x^2 + 4x + 5 \ = \text{भाज्य}$$

अतः विभाजन ऐल्गोरिथम सत्यापित होता है।

उदाहरण-5 बहुपद $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

हल: यहाँ बहुपद के दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ है।

अतः $$\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = x^2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(3x^2 - 5)$$ बहुपद का एक गुणनखण्ड है

अर्थात् $(3x^2 - 5)$ भी बहुपद का एक गुणनखण्ड है। अब $f(x)$ को $(3x^2 - 5)$ से विभाजित करने की प्रक्रिया करते हैं।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
3x^2 - 5 & 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 \\
 & 3x^4 - 5x^2 \\
 & \underline{- \quad +} \\
 & 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\
 & 6x^3 \qquad - 10x \\
 & \underline{- \qquad +} \\
 & 3x^2 - 5 \\
 & -3x^2 - 5 \\
 & \underline{- \quad +} \\
 & 0
\end{array}
$$

विभाजन एल्गोरिथम से स्पष्ट है कि भागफल (x^2+2x+1) बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड हैं, क्योकि शेषफल 0 प्राप्त हुआ है। यहाँ गुणनखण्डन द्वारा भागफल को निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

इस प्रकार भाज्य = भागफल × भाजक + शेषफल

$$3x^4+6x^3-2x^2-10x-5=(x+1)^2\times(3x^2-5)+0$$

$$=(x+1)^2(\sqrt{3}x-\sqrt{5})(\sqrt{3}x+\sqrt{5})$$

चूँकि बहुपद $f(x)$ के शून्यक निकालने के लिए $f(x)=0$ संतुष्ट होना चाहिए। अतः

$$(x+1)^2(\sqrt{3}x-\sqrt{5})(\sqrt{3}x+\sqrt{5})=0$$

या $$x+1=0, x+1=0, \sqrt{3}x-\sqrt{5}=0\ \sqrt{3}x+55=0$$

अर्थात् शून्यक $-1, -1, \sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}$ होंगे।

प्रश्नावली 3.2

1. विभाजन एल्गोरिथम का प्रयोग करके $f(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए।

   (i) $f(x)=3x^3+x^2+2x+5,\quad g(x)=1+2x+x^2$

   (ii) $f(x)=x^3-3x^2+5x-3,\quad g(x)=x^2-2$

   (iii) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6,\quad g(x)=x+2$

   (iv) $f(x)=9x^4-4x^2+4,\quad g(x)=3x^2+x-1$

2. पहले बहुपद से दूसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि प्रथम बहुपद दूसरे बहुपद का एक गुणनखण्ड है:

   (i) $g(x)=x^2+3x+1,\quad f(x)=3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$

   (ii) $g(t)=t^2-3,\quad f(t)=2t^4+3t^3-2t^2-9t-12$

   (iii) $g(x)=x^3-3x+1,\quad f(x)=x^5-4x^3+x^2+3x+1$

3. निम्न बहुपदों के साथ उनके शून्यक दिये गये है, अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए।

   (i) $f(x)=2x^4-3x^3-3x^2+6x-2;\ \sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$

   (ii) $f(x)=x^4-6x^3-26x^2+138x-35;\ 2\pm\sqrt{3}$

   (iii) $f(x)=x^3+13x^2+32x+20;\ -2$

4. बहुपद $f(x)=x^3-3x^2+x+2$ को बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल $q(x)$ तथा शेषफल $r(x)$ क्रमशः $x-2$ और $-2x+4$ प्राप्त होता है, तो बहुपद $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

3.05 द्विघात समीकरण का मानक रूप

अध्याय के प्रारम्भ में हमने द्विघात बहुपद के बारे में पढ़ा। व्यापक रूप में $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\pm 0$ बहुपद, द्विघात बहुपद का मानक रूप है। हमने द्विघात बहुपद $f(x)=ax^2+bx+c$ के शून्यकों के बारे में पढ़ा। हम जानते हैं कि शून्यकों पर बहुपद का मान शून्य होता है। इस तथ्य को हम निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

यदि $f(x)$ एक द्विघात बहुपद है तो $f(x)=0$ एक द्विघात समीकरण कहलाता है अर्थात् $ax^2+bx+c=0,$ एक द्विघात समीकरण है जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a\neq 0$ यदि $f(x)$ के पदों को घातों के घटते क्रम में व्यवस्थित करें तो $f(x)=0$ अर्थात् $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ द्विघात समीकरण का मानक रूप कहलाता है।

आइये हम उदाहरणों के माध्यम से कुछ समीकरणों की जाँच करते हैं कि ये द्विघात समीकरण है या नहीं। निम्न समीकरण पर विचार करते हैं

$$(x-2)(x+1)=(x-1)(x+3)$$

बायाँ पक्ष $=(x-2)(x+1)$

$$=x^2-2x+x-2$$

$$=(x^2-x-2) \qquad \ldots(\text{i})$$

दायाँ पक्ष $=(x-1)(x+3)$

$$x^2-x+3x-3$$

$$=x^2+2x-3 \qquad \ldots(\text{ii})$$

दोनों पक्षों को दिये गये समीकरणानुसार बराबर रखने पर

$$x^2-x-2=x^2+2x-3$$

पक्षान्तरण करने पर $x^2-x^2-x-2x-2+3=0$

$\Rightarrow \quad -x+1=0 \quad$ या $\quad (x-1)=0$

यहाँ समीकरण $x-1=0$ में x की घात 2 नहीं है अतः सिद्ध होता है कि समीकरण $(x-2)(x+1)=(x-1)(x+3)$ द्विघात समीकरण नहीं है।

एक अन्य समीकरण $3x^2-5x+9=x^2-7x+3$ की जाँच हेतु पक्षान्तरण करने पर हम पाते हैं कि

$$3x^2-x^2-5x+7x+9-3=0$$

$\Rightarrow \quad 2x^2+2x+7=0$

यहाँ समीकरण में x की '2' घात उपस्थित है अतः $3x^2-5x+9\ =x^2-7x+3$ एक द्विघात समीकरण है।

3.6 गुणनखण्डन विधि द्वारा द्विघात समीकरणों के हल

LVJK52

द्विघात बहुपद $f(x)$ के शून्यक, समीकरण $f(x)=0$ से x के दो मान प्राप्त होते हैं। माना $x=\alpha$ बहुपद $f(x)=ax^2+bx+c$ का एक शून्यक है, तब $f(\alpha)=0$ होगा अर्थात् $x=\alpha$ समीकरण $ax^2+bx+c=0$ को सन्तुष्ट करेगा। अतः हम कह सकते हैं कि बहुपद ax^2+bx+c का एक शून्यक $x=\alpha$ द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल (Root) होगा।

इस प्रकार यदि $f(x)=0$ एक द्विघात समीकरण हो तो बहुपद $f(x)$ के शून्यक समीकरण $f(x)=0$ के मूल कहलाते हैं।

द्विघात समीकरण में चर की अधिकतम घात '2' होती है अतः इसके अधिकतम दो मूल हो सकते हैं।

किसी द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने की प्रक्रिया को उस समीकरण को हल करना कहते है। द्विघात समीकरण को हल करने के लिए इसे $f(x)=0$ मानक रूप में रखते है फिर $f(x)$ व्यंजक के गुणनखण्ड करते है तथा प्रत्येक गुणनखण्ड को शून्य के बराबर रख कर x के मान ज्ञात करते हैं। x के वे मान ही द्विघात समीकरण के हल कहलाते हैं। अर्थात् इस प्रकार प्राप्त x के मान इस समीकरण के अभीष्ट मूल हैं। निम्न उदाहरणों द्वारा यह विधि स्पष्ट समझी जा सकती है।

उदाहरण-6 गुणनखण्ड विधि से द्विघात समीकरण $x^2-3x-10=0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हलः दिया गया समीकरण

$$x^2-3x-10=0$$

गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-5x+2x-10=0$$

या $\quad x(x-5)+2(x-5)=0$

या $\quad (x+2)(x-5)=0$

या $\quad x+2=0 \quad$ या $\quad x-5=0$

या $\quad x=-2 \quad$ या $\quad x=5$

अतः $x=-2$ और $x=5$ दिये गये समीकरण के दो अभीष्ट मूल है।

उदाहरण-7 गुणनखण्ड विधि से द्विघात समीकरण $52x^2+7x+5\sqrt{2}=0$ को हल कीजिए।

हलः दिया गया समीकरण

$$\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$$

गुणनखण्ड करने पर,

$$\sqrt{2}x^2+5x+2x+5\sqrt{2}=0$$

या $\quad x(\sqrt{2}x+5)+\sqrt{2}(\sqrt{2}x+5)=0$

या $\quad (\sqrt{2}x+5)(x+\sqrt{2})=0$

या $\quad \sqrt{2}x+5=0 \quad$ या $\quad x+\sqrt{2}=0$

या $\quad x=\dfrac{-5}{\sqrt{2}} \quad$ या $\quad x=-\sqrt{2}$

अतः $x=\dfrac{-5}{\sqrt{2}}$ और $x=-\sqrt{2}$ दिये गये समीकरण के अभीष्ट मूल हैं।

उदाहरण-8 निम्न द्विघात समीकरण का गुणनखण्ड विधि से मूल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{4}{x}-3=\frac{5}{2x+3} \text{ जहाँ } x\neq 0, \frac{-3}{2}$$

हलः दिया गया समीकरण है, $\quad \dfrac{4}{x}-3=\dfrac{5}{2x+3}$

लघुत्तम लेने पर $\quad \dfrac{4-3x}{x}=\dfrac{5}{2x+3}$

वज्र गुणन करने पर निम्न प्रकार लिखा जा सकता है कि

$$(4-3x)(2x+3)=5x$$

या $\quad 8x-6x^2+12-9x=5x$

पक्षान्तरण करने पर $\quad 6x^2+6x-12=0$

अब गुणनखण्ड करने पर $6x^2+12x-6x-12=0$

या $6x(x+2)-6(x+2)=0$

या $(x+2)(6x-6)=0$

या $x+2=0$ या $6x-6=0$

या $x=-2$ या $x=1$

अतः $x=-2$ और $x=1$ द्विघात समीकरण के अभीष्ट हल हैं।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्न समीकरणों की जाँच कर बताइए कि क्या ये द्विघात समीकरण है:

(i) $x(x+1)+8=(x+2)(x-2)$ (ii) $(x+2)^3=x^3-4$

(iii) $x^2+3x+1=(x-2)^2$ (iv) $x+\frac{1}{x}+x^2,\ x\neq 0$

2. गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्न समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $2x^2-5x+3=0$ (ii) $9x^2-3x-2=0$

(iii) $\sqrt{3}x^2+10x+7\sqrt{3}=0$ (iv) $x^2-8x+16=0$

(v) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-1}=\frac{6}{x}$ जहाँ $x\neq 1,2$ (vi) $100x^2-20x+1=0$

(vii) $3x^2-2\sqrt{6}\,x+2=0$ (viii) x^2+8x+7

(ix) $\frac{x+3}{x+2}=\frac{3x-7}{2x-3}$ (x) $4x^2-4a^2x+(a^4-b^4)=0$

(xi) $abx^2+(b^2-ac)x-bc=0$

3.07 द्विघात समीकरणों का पूर्णवर्ग बनाने की विधि द्वारा हल

LVTG6P

यहाँ दिये गए द्विघात समीकरणों को चर 'x' के लिए पूर्णवर्ग रूप $(x\pm A)^2=k^2$ में बदल लेते हैं तथा इस समीकरण में दोनों पक्षों का वर्गमूल लेकर अन्त में $x=k\pm A$ रूप में दिये गये द्विघात समीकरण के अभीष्ट मूल प्राप्त करते हैं। इस विधि को निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट करते है।

दिया गया समीकरण $2x^2-5x+3=0$ है जिसको पूर्णवर्ग विधि द्वारा हल करना है।

अतः $2x^2-5x+3=0$ . . . (1)

या $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$ (x^2 का गुणांक इकाई करने पर)

या $x^2-\frac{5}{2}x=-\frac{3}{2}$ (अचर पद का पक्षान्तरण करने पर) . . . (2)

अब समीकरण (2) के वाम पक्ष (LHS) को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए x के गुणांक के आधे का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर, हमे निम्न समीकरण प्राप्त होता है।

$$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=-\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

वाम पक्ष को पूर्ण वर्ग रूप में लिखने पर दाँये पक्ष को सरल कर हम $(x\pm A)^2=k^2$ रूप प्राप्त करते हैं

अर्थात् $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{-24+25}{16}=\frac{1}{16}$

या $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$

अब दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर,

$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4}\pm\frac{1}{4}$

या $x=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$ या $x=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}$

या $x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ या $x=\frac{4}{4}=1$

इस प्रकार $x=\frac{3}{2}$ और $x=1$ दिये गए समीकरण $2x^2-5x+3=0$ के अभिष्ठ मूल प्राप्त होते हैं।

यहाँ यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि यदि दिए गए द्विघात समीकरण का पूर्णवर्ग रूप $(x\pm A)^2=-k^2$ प्राप्त होता है तो x के मान, वास्तविक मान नहीं होंगे। अर्थात् दिए गए समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं होंगे।

इस प्रकार के द्विघात समीकरणों को भारतीय गणितज्ञ श्रीधर आचार्य द्वार प्रतिपादित द्विघात सूत्र (Quadratic formula) द्वारा हल किया जा सकता है।

माना द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ है

यहाँ $ax^2+bx+c=0$

$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x=\frac{-c}{a}$

वाम पक्ष को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए x के गुणक के आधे का वर्ग दोनों और जोड़ने पर,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

या $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

या $$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$$

अर्थात् दिये गये समीकरण के मूल निम्ननुसार प्राप्त होते हैं,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

यहाँ यदि $(b^2-4ac)\geq 0,$ है तो ही x के मान वास्तविक होंगे। अतः द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ के

लिए श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र (Quadratic formula) इस प्रकार प्राप्त होता है

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ जहाँ } (b^2 - 4ac) \geq 0$$

उदाहरण-9 द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ को पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा हल कीजिए तथा श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र से मूलों का सत्यापन कीजिए।

हल: दिया गया समीकरण है–

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

या $$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

या $$x^2 - \frac{7}{2}x = \frac{-3}{2}$$

वाम पक्ष को पूर्ण वर्ग बनाने हेतु x के गुणांक के आधे का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-3}{2} + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

या $$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-24 + 49}{16} = \frac{25}{16}$$

या $$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$x - \frac{7}{4} = \pm\frac{5}{4}$$

या $x - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$ या $x - \frac{7}{4} = \frac{-5}{4}$

या $x = \frac{7}{4} + \frac{5}{4} = 3$ या $x = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$

अतः $x = 3$ और $1/2$ दिये गये द्विघात समीकरण के हल हैं।

श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र से सत्यापन

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ की तुलना दिये गये समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ से करने पर $a = 2, b = -7, c = 3$ प्राप्त होते हैं।

अतः यहाँ $b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 \geq 0$ अतः मूल वास्तविक होंगे अतः a, b, c के मान श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर

$$x = \frac{+7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

अतः $x = \frac{7+5}{4}$ या $x = \frac{7-5}{4}$

अर्थात् $x = 3$ और $x = 1/2$ अभीष्ट मूल प्राप्त होते हैं अतः दिये गये समीकरण का हल श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र से प्रमाणित होता है।

प्रश्नावली 3.4

1. पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा निम्न द्विघात समीकरणों को हल कीजिए।

   (i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $5x^2 - 6x - 2 = 0$ (iii) $4x^2 + 3x + 5 = 0$ (iv) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

   (v) $2x^2 + x - 4 = 0$ (vi) $2x^2 + x + 4 = 0$ (vii) $4x^2 + 4bx - (a^2 - b^2) = 0$

2. निम्न द्विघात समीकरणों के मूल, यदि उनका अस्तित्व हो, तो श्रीधर आचार्य विधि द्वारा द्विघाती सूत्र का उपयोग करके ज्ञात कीजिए।

   (i) $2x^2 - 2\sqrt{2} + 1 = 0$ (ii) $9x^2 + 7x - 2 = 0$ (iii) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

   (iv) $\sqrt{2}\,x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (v) $x^2 + 4x + 5 = 0$

   (vi) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2$

3. दो ऐसे क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए, जिनके वर्गों का योग 290 हो।
4. दो संख्याओं के वर्गों का अन्तर 45 है तथा छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का चार गुना है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. 16 को दो भागों में इस प्रकार विभाजित कीजिए कि बड़े भाग के वर्ग का दो गुना छोटे भाग के वर्ग से 164 अधिक हो।

LH3C8C

3.08 विविक्तिकर तथा मूलों की प्रकृति

पिछले अनुच्छेदों में हमने द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ को गुणनखण्डन विधि, पूर्णवर्ग विधि एवं श्रीधर आचार्य विधि से हल करने के बारे में पढ़ा। अनुच्छेद 3.7 में हमने श्रीधर आचार्य विधि द्वारा द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल प्राप्त करने के लिए निम्न द्विघाती सूत्र का प्रयोग किया।

सूत्र $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \ldots (i)$$

जहाँ वास्तविक मूलों के लिए $(b^2 - 4ac) \geq 0$ होता है। इससे हमें द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो वास्तविक मूल प्राप्त होते हैं। यदि $(b^2 - 4ac) < 0$ होगा तो द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे क्योंकि $(b^2 - 4ac)$ ऋणात्मक होगी एवं इसका वर्गमूल काल्पनिक होगा।

अतः उपर्युक्त विवेचना से स्पष्ट है कि मूलों की प्रकृति $(b^2 - 4ac)$ पर आधारित है इसलिये $(b^2 - 4ac)$ को द्विघात समीकरण $ax^2 - bx + c = 0$ का 'विविक्तिकर' (Discriminant) कहते हैं।

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के 'विविक्तिकर' $(b^2 - 4ac)$ के विभिन्न प्रकार के मानों के अनुरूप इसके मूलों की प्रकृति का निर्धारण निम्न प्रकार किया जाता है।

(i) यदि $(b^2 - 4ac) > 0$ है तो द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक एवं भिन्न होंगे। यदि मूल α, β से व्यक्त करें तो–

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ii) यदि $(b^2 - 4ac) = 0$ है तो मूल वास्तविक तथा समान होंगे अर्थात् $\alpha = \frac{-b}{2a}, \beta = \frac{-b}{2a}$

(iii) यदि $(b^2 - 4ac) < 0$ तो द्विघात समीकरण के मूल काल्पनिक होंगे।

अब हम निम्न उदाहरणों द्वारा द्विघात समीकरणों के मूलों की तीनों प्रकार की प्रकृति को स्पष्ट रूप से समझ सकते हैं।

उदाहरण-10 निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए तथा मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 6x + 3 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = 0$ (iii) $x^2 + x + 1 = 0$

हलः (i) दिया गया द्विघात समीकरण है

$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

इनकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर निम्न मान प्राप्त होते हैं

$$a = 2, b = -6, c = 3$$

अब विविक्तिकर $(b^2 - 4ac)$ की जाँच करते हैं,

यहाँ विविक्तकर $b^2 - 4ac = 12 > 0$ धनात्मक है अतः समीकरण $2x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूल वास्तविक एवं भिन्न होंगे

अतः श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ द्वारा दोनों अभीष्ट मूल $x = \dfrac{+6 \pm \sqrt{12}}{4}$ होंगे अर्थात् $x = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$ या $x = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}$

(ii) यहाँ समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ हैं, इसकी $ax^2 + 3x + c = 0$ से तुलना करने पर a, b, c के मान $a = 3,\ b = -4\sqrt{3},\ c = 4$ प्राप्त होते हैं,

अतः विविक्तिकर $(b^2 - 4ac)$ की जाँच करने पर, विविक्तकर

$$(b^2 - 4ac) = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 4 = 48 - 48 = 0$$

अतः द्विघात समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ के दोनों मूल वास्तविक एवं समान होंगे। श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ द्वारा दोनों मूल

$$x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{2 \times 3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(iii) दिया गया समीकरण है, $x^2 + x + 1 = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$ प्राप्त होते हैं। अतः विविक्तकर $(b^2 - 4ac)$ की जाँच करने पर,

विविक्तकर $(b^2 - 4ac) = 1 - 4 = -3 < 0$ यहाँ $(b^2 - 4ac) < 0$ है अतः द्विघात समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ के दोनों मूल काल्पनिक होंगे।

प्रश्नावली 3.5

1. निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $2x^2 - 4x + 3 = 0$ (iii) $2x^2 + x - 1 = 0$ (iv) $x^2 - 4x + 4 = 0$

   (v) $2x^2 + 5x + 5 = 0$ (vi) $3x^2 - 2x + \dfrac{1}{3} = 0$

2. निम्न द्विघात समीकरण में k का वह मान ज्ञात कीजिए कि उसके मूल वास्तविक तथा बराबर हों।

   (i) $kx(x-2) + 6 = 0$ (ii) $x^2 - 2(k+1)x + k^2 = 0$ (iii) $2x^2 + kx + 3 = 0$

   (iv) $(k+1)x^2 - 2(k-1)x + 1 = 0$ (v) $(k+4)x^2 + (k+1)x + 1 = 0$

   (vi) $kx^2 - 5x + k = 0$

3. k के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल वास्तविक व भिन्न हों

   (i) $kx^2 + 2x + 1 = 0$ (ii) $kx^2 + 6x + 1$ (iii) $x^2 - kx + 9 = 0$

4. K के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण $x^2+5kx+16=0$ के मूल वास्तविक नहीं हो।

5. यदि द्विघात समीकरण $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ के मूल वास्तविक व बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि $2b=a+c$

3.09 बीजीय व्यंजकों के लघुत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक

LHC89Z

हमने पिछले अध्याय में वास्तविक संख्याओं के धनात्मक पूर्णांकों के लघुत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक अंक गणित की मूलभूत प्रमेय का प्रयोग कर ज्ञात किये थे। लघुत्तम समापवर्तक (LCM) गुणनखण्डन से प्राप्त संख्याओं में सम्बद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल होता है जबकि महत्तम समापवर्तक (HCF) गुणनखण्डन से प्राप्त संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे छोटी घात का गुणनफल होता है।

यहाँ हम बीजीय व्यंजकों के LCM एवं HCM ज्ञात करने के बारे में अध्ययन करेंगे। बीजीय व्यंजक या दिये गये बहुपदों के लघुत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक निम्न प्रकार परिभाषित किये जाते हैं।

लघुत्तम समापवर्तक (LCM)

दिये गये व्यंजकों $u(x)$ तथा $v(x)$ का लघुत्तम समापवर्तक न्यूनतम घात के बहुपद तथा न्यूनतम घात के संख्यात्मक गुणांक के गुणनफल वाला ऐसा बहुपद होता है जिसको $u(x)$ एवं $v(x)$ दोनों का भाग चला जाता है। यहाँ इसके उच्चतम घात के पद के गुणांक का चिह्न वही होता है जो गुणनफल $u(x), v(x)$ के उच्चतम घात के पद का है।

महत्तम समापवर्तक (HCF)

दो व्यंजकों $u(x)$ तथा $v(x)$ में विद्यमान समस्त सार्वगुणनखण्डों में उच्चतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल ही इन बहुपदों का महत्तम समापवर्तक कहलाता है तथा इसका गुणांक धनात्मक लेते हैं। अतः दिये गये बहुपदों का (HCF) उनके उच्चतम घात का सर्वनिष्ठ व्यंजक तथा संख्यात्मक गुणांकों के महत्तम भाजक को गुणा करके प्राप्त करते हैं। किसी बहुपद के लघुत्तम समावर्तक एवं महत्तम समापवर्तकों के लिए निम्न सम्बन्ध यहाँ भी सत्य है कि यदि $u(x)$ तथा $v(x)$ दो बहुपद है तो इनके लघुत्तम समापवर्तक (LCM) एवं महत्तम समापवर्तक (HCF) का गुणनफल इन बहुपदों के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात्

$$\text{LCM} \times \text{HCF} = u(x) \times v(x)$$

इस अनुच्छेद में सार्वगुणनखण्ड (common factor) का अर्थ है एक ऐसा व्यंजक जिसका दिये गये प्रत्येक व्यंजक में भाग दिया जावे तो शेषफल शून्य बचता है तथा सर्वनिष्ठ गुणज (common multiple) से तात्पर्य यह है कि यदि f(x) एक सर्वनिष्ठ गुणज है तो यह दिये गये बहुपदों से पूर्णतया विभाजित होगा।

व्यंजकों एवं बहुपदों के लघुत्तम समापवर्तक (LCM) एवं महत्तम समापवर्तक (HCF) को ज्ञात करने की विधि निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट रूप से समझी जा सकती है।

उदाहरण-11 निम्न व्यंजकों का लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात कीजिए।

(i) $4a^2b^2c$ तथा $6ab^2d$

(ii) x^2-4x+3 तथा x^2-5x+6

(iii) $-2(x-1)(x-2)(x+3)$ तथा $3(x-1)(x-2)(x+3)(x+5)$

हल: (i) माना दिये गये व्यंजक $u(x)=4a^2b^2c$ तथा $v(x)=6ab^2d$ है।

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u=2^2\times a^2\times b^2\times c$$

तथा $$v=2\times 3\times a\times b^2\times d$$

अतः सर्वनिष्ठ गुणज (common multiple)

$$=2^2\times 3^1\times a^2\times b^2\times c\times d$$

= उच्चतम घात वाले सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

यही सर्वनिष्ठ गुणज उपरोक्त व्यंजकों का अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक है।

अर्थात् LCM = $12\ a^2b^2cd$

(ii) माना दिये गये बहुपद में $u(x)=x^2-4x+3$ तथा $v(x)=x^2-5x+6$ हैं।

इनको गुणनखण्ड रूप में लिखने पर

$$u(x)=x^2-4x+3=x^2-3x-x+3$$

$$=x(x-3)-1(x-3)=(x-3)(x-1) \quad \ldots(1)$$

तथा $$v(x)=x^2-5x+6=x^2-3x-2x+6$$

$$=x(x-3)-2(x-3)=(x-3)(x-2) \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) एवं (2) से स्पष्ट है कि अभाज्य गुणनखण्डों की उच्चतम घातों का गुणनफल

$$=(x-1)\times(x-2)\times(x-3)$$

अतः अभिष्ठ लघुत्तम समापवर्तक LCM $=(x-1)(x-2)(x-3)$ होगा।

(iii) माना दिये गये बहुपद

$u(x)=-2(x-1)(x-2)(x+3)$ तथा

$v(x)=3(x-1)(x-2)(x+3)(x+5)$ हैं।

यहाँ अवलोकन मात्र से लिखा जा सकता है कि सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

$$=-2\times3\times(x-1)\times(x-2)\times(x+3)\times(x+5)$$

है। यहाँ इस गुणनफल में उच्चतम घात के गुणनफल का चिह्न वही है जो $u(x)\times v(x)$ के उच्चतम घात के पद $-6x^7$ का है।

अतः अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक $=-6(x-1)(x-2)(x+3)(x+5)$ है।

उदाहरण-12 निम्न व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए।

(i) $8a^2b^2c$ तथा $18ab^3c^2$ (ii) $20x^2-9x+1$ तथा $5x^2-6x+1$

(iii) $(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2$ तथा $(x+1)^3(x-2)^2(x+3)^3$

हल: (i) माना दिये गये व्यंजक $u=8a^2b^2c$ तथा $v=18ab^3c^2$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर $u=2^3\times a^2\times b^2\times c$ तथा $v=2\times3^2\times a\times b^3\times c^2$

यहाँ महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक $=2\times a\times b^2\times c$

या = न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) $=2ab^2c$ है।

(ii) माना दिये गये बहुपद $u(x)=20x^2-9x+1$ तथा $v(x)=5x^2-6x+1$ है।

इनको गुणनखण्ड रूप में लिखने पर,

$$u(x)=20x^2-9x+1=20x^2-5x-4x+1$$

$$=5x(4x-1)-1(4x-1)=(4x-1)(5x-1) \quad \ldots(1)$$

तथा $$v(x)=5x^2-6x+1=5x^2-5x-x+1$$

$$=5x(x-1)-1(x-1)=(x-1)(5x-1) \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) एवं (2) से स्पष्ट है कि महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक $(5x-1)$ है।

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक $=(5x-1)$ है।

(iii) माना $u(x)=(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2$ तथा $v(x)=(x+1)^3(x-2)^2(x+3)^3$

अतः महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक $=(x+1)^2(x+3)^2$

= न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

अर्थात् अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) $=(x+1)^2(x+3)^2$ है।

प्रश्नावली 3.6

1. निम्नलिखित व्यंजकों के लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

(i) $24x^2yz$ और $27x^4y^2z^2$ (ii) x^2-3x+2 और $x^4+x^3-6x^2$

(iii) $2x^2-8$ और x^2-5x+6 (iv) x^2-1; $(x^2+1)(x+1)$ तथा x^2+x-1

(v) $18(6x^4+x^3-x^2)$ और $45(2x^6+3x^5+x^4)$

2. निम्नलिखित व्यंजकों के महत्तम समावर्तक ज्ञात कीजिए।

(i) a^3b^4, ab^5, a^2b^8 (ii) $16x^2y^2, 48x^4z$

(iii) $x^2-7x+12$; $x^2-10x+21$ तथा $x^2+2x-15$ (iv) $(x+3)^2(x-2)$ और $(x+3)(x-2)^2$

(v) $24(6x^4-x^3-2x^2)$ और $20(6x^6+3x^5+x^4)$

3. यदि $u(x)=(x-1)^2$ तथा $v(x)=(x^2-1)$ हो तो सम्बन्ध $LCM \times HCF = u(x) \times v(x)$ की सत्यता की जाँच कीजिए।

4. दो व्यंजकों का गुणनफल $(x-7)(x^2+8x+12)$ है। यदि इन व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक (HCF), $(x+6)$ है तो इनका लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात कीजिए।

5. दो द्विघातीय व्यंजकों का HCF एवं LCM क्रमशः $(x-5)$ तथा $x^3-19x-30$ है तो दोनों व्यंजकों को ज्ञात कीजिए।

विविध प्रश्नमाला–3

1. यदि बहुपद $f(x)=5x^2+13x+k$ का एक शून्यक दूसरे का व्युत्क्रम हो, तो k का मान होगा–
(क) 0 (ख) 1/5 (ग) 5 (घ) 6

2. बहुपद x^2-x-6 के शून्यक हैं
(क) 1, 6 (ख) 2, −3 (ग) 3, – (घ) 1, −6

3. यदि बहुपद $2x^2+x+k$ का एक शून्यक 3 है तो k का मान होगा–
(क) 12 (ख) 21 (ग) 24 (घ) – 21

4. यदि α, β बहुपद $x^2-p(x+1)-c$ के शून्यक इस प्रकार है कि $(\alpha+1)(\beta+1)=0$ है तो c का मान होगा–
(क) 0 (ख) −1 (ग) 1 (घ) 2

5. यदि द्विघात समीकरण $x^2-kx+4=0$ के मूल समान हो तो k का मान होगा–
(क) 2 (ख) 1 (ग) 4 (घ) 3

6. यदि $x=1$, समीकरण $ax^2+ax+3=0$ तथा $x^2+x+b=0$ का एक उभयनिष्ठ मूल है, तो $a\,b$ का मान होगा–
(क) 1 (ख) 3.5 (ग) 6 (घ) 3

7. द्विघात समीकरण $3\sqrt{3}\,x^2+10x+\sqrt{3}=0$ का विविक्तिकर होगा–
(क) 10 (ख) 64 (ग) 46 (घ) 30

8. द्विघात समीकरण $4x^2-12x-9=0$ के मूलों की प्रकृति है–
(क) वास्तविक एवं समान (ख) वास्तविक एवं भिन्न
(ग) काल्पनिक एवं समान (घ) काल्पनिक एवं भिन्न

9. व्यंजकों $8a^2b^2c$ तथा $20ab^3c^2$ का HCF है–
(क) $4ab^2c$ (ख) $4abc$ (ग) $40a^2b^3c^2$ (घ) $40abc$

10. व्यंजकों x^2-1 तथा x^2+2x+1 का LCM है–
(क) $x+1$ (ख) $(x^2-1)(x+1)$ (ग) $(x-1)(x+1)^2$ (घ) $(x^2-1)(x+1)^2$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

11. व्यंजक $6x^2y^4$ तथा $10xy^2$ का LCM $30x^2y^4$ है तो HCF होगा–

(क) $6x^2y^2$ (ख) $2xy^2$ (ग) $10x^2y^4$ (घ) $60x^3y^6$

12. द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल ज्ञात करने की श्रीधर आचार्य सूत्र लिखिए।

13. समीकरण $ax^2+by+c=0$ के विविक्तिकर का व्यापक रूप लिखकर मूलों की प्रकृति समझाइए।

14. द्विघात बहुपद $2x^2-8x+6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों एवं गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

15. यदि α और β द्विघात बहुपद $f(x)=x^2-px+q$ के शून्यक है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

16. यदि बहुपद $x^4-6x^3+16x^2-25x+10$ को एक अन्य बहुपद x^2-2x+k से भाग दिया जाता है और शेषफल $(x+a)$ आता है, तो k तथा a का मान ज्ञात कीजिए।

17. एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 528 मी² है। भूखंड की लम्बाई (मीटर में), चौड़ाई के दोगुनें से 1 अधिक है। अभीष्ट द्विघात समीकरण निरूपित कर भूखंड की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

18. द्विघात समीकरण $x^2+4x-5=0$ को पूर्णवर्ग बनाने की विधि द्वारा हल कीजिए।

19. निम्न समीकरणों को गुणनखण्डन विधि से हल कीजिए।

(i) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}=3, \quad x\neq 0,2$ (ii) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+5}=\frac{6}{7}, \quad x\neq 1,-5$

(iii) $x-\frac{1}{x}=3, \quad x\neq 0$ (iv) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30}, \quad x\neq 4,7$

20. यदि द्विघात समीकरण $2x^2+px-15=0$ का एक मूल –5 है तथा द्विघात समीकरण $p(x^2+x)+k=0$ के मूल बराबर हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

21. श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र का उपयोग करके निम्न द्विघात समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $p^2x^2+(p^2-q^2)x-q^2=0$ (ii) $9x^2-9(a+b)x+(2a^2+5ab+2b^2)=0$

22. दो द्विघातीय व्यंजकों के लघुत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक क्रमशः x^3-7x+6 एवं $(x-1)$ है। व्यंजक ज्ञात कीजिए।

23. दो बहुपदों का लघुत्तम समापवर्तक $x^3-6x^2+3x+10$ है तथा महत्तम समापवर्तक $(x-1)$ है। यदि एक बहुपद x^2-4x-5 है तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. व्यापक रूप में $ax+b$ रैखिक, ax^2+bx+c द्विघातीय तथा ax^3+bx^2+cx+d त्रिघातीय बहुपद कहलाते हैं।
3. बहुपद $f(x)$ का मान x के जिस मान के लिए शून्य प्राप्त होता है, x के उन मानों को बहुपद $f(x)$ के शून्यक कहते हैं।
3. बहुपद के 'शून्यकों' की संख्या इसकी उच्चतम घात के बराबर होती है। एक द्विघात बहुपद के अधिकतम दो शूबक होते हैं।
4. यदि ax^2+bx+c के शून्यक α, β है तो $(\alpha+\beta)=\frac{-b}{a}$ तथा $\alpha\beta=\frac{c}{a}$
5. यदि किसी द्विघात बहुपद के शून्यक α, β है तो इसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है,

   $k[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$
6. विभाजन एल्गोरिथम (कलन विधि) – यदि $f(x)$ और $g(x)$ कोई बहुपद है तो हम बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे प्राप्त करते हैं कि $f(x)=q(x)\,g(x)+r(x)$ जहाँ $r(x)=0$ या $r(x)$ की घात $<g(x)$ की घात है।
7. यदि $f(x)=ax^2+bx+c$ एक द्विघात बहुपद है तो $f(x)=0, a\neq 0$ एक द्विघात समीकरण कहलाता है। बहुपद $f(x)$ के शून्यक एवं द्विघात समीकरण $f(x)=0$ के मूल एक ही होते हैं।
8. द्विघात समीकरण का हल, इसे मानक रूप $f(x)=0$ में रखकर $f(x)$ के दो रैखिक गुणनखण्ड कर प्रत्येक को शून्य के बराबर रख कर x के मान प्राप्त करना है।
9. श्रीधर आचार्य द्वारा द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ के मूल निम्न द्विघात सूत्र द्वारा दिये जाते है।

   $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

   जहाँ $(b^2-4ac)>0$
10. द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ के मूलों की प्रकृति विविक्तिकर (b^2-4ac) के मान पर निम्न प्रकार निर्भर करती हैं

    (i) यदि $(b^2-4ac)>0$ तब मूल वास्तविक एवं भिन्न होंगे।

    (ii) यदि $(b^2-4ac)=0$ तब मूल वास्तविक एवं समान होंगे।

    (iii) यदि $(b^2-4ac)<0$ तब मूल काल्पनिक होंगे।
11. दिये गये व्यंजकों का लघुत्तम समापवर्तक (LCM) इनके उच्चतम घात वाले सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल अर्थात् सर्वनिष्ठ गुणज (common multiple) होता है। इसका चिह्न व्यंजकों के उच्चतम घात के पदों के गुणनफल से प्राप्त चिह्न ही होता है।
13. दिये गये व्यजंको का महत्तम समापवर्तक (HCF) महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक (common factor) अर्थात् व्यंजकों के न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल होता है।
13. यदि f(x) तथा g(x) दो व्यंजक है तो इनके लघुत्तम समापवर्तक (LCM) एवं महत्तम समापवर्तक (HCF) में निम्न सम्बन्ध होता है–

    $\text{LCM}\times\text{HCF}=f(x)\times g(x)$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 3.1

1. (i) –2, 0 (ii) $\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{3},-\frac{1}{2}$ (iv) $-\sqrt{15},\sqrt{15}$ (v) $1,\sqrt{3}$ (vi) $-1,\frac{4}{3}$

2. (i) x^2+3x+2 (ii) $3x^2-3\sqrt{2}x+1$ (iii) $4x^2+x+1$ (iv) $x^2+\sqrt{5}$
(v) x^2-4x+1 (vi) x^2-x+1 3. 12

प्रश्नमाला 3.2

1. (i) $3x-5;\ 9x+10$ (ii) $x-3;\ 7x-9$ (iii) $x^2-8x+27;\ -60$ (iv) $3x^2-x;\ -x+4$

3. (i) $\frac{1}{2},1$ (ii) –5, 7 (iii) –10, –1 4. $-x^2-x-1$

प्रश्नमाला 3.3

1. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) नहीं

2. (i) $1,\frac{3}{2}$ (ii) $-\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ (iii) $-\sqrt{3},-\frac{7}{\sqrt{3}}$ (iv) 4, 4 (v) $3,\frac{4}{3}$ (vi) $\frac{1}{10},\frac{1}{10}$
(vii) $\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}$ (viii) –1, –7 (ix) –1, 5 (x) $\frac{a^2+b^2}{2},\frac{a^2-b^2}{2}$ (xi) $-\frac{b}{a},\frac{c}{b}$

प्रश्नमाला 3.4

1. (i) $1,\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$ (iii) वास्तविक मूल नहीं है (iv) $\frac{-\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (v) $\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$

(vi) वास्तविक मूल नहीं है (vii) $\frac{-(a+b)}{2},\frac{(a-b)}{2}$

2. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{2}{9},-1$ (iii) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (iv) $-\sqrt{2},\frac{-5}{\sqrt{2}}$ (v) वास्तविक मूल नहीं हैं (vi) $\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

3. 11, 13 4. 9, 6 तथा 9, –6 5. 10, 6

प्रश्नमाला 3.5

1. (i) मूल वास्तविक नहीं है (ii) कोई वास्तविक मूल नहीं हैं (iii) मूल वास्तविक एवं भिन्न हैं
(iv) मूल वास्तविक एवं बराबर हैं (v) मूल वास्तविक नहीं हैं (vi) मूल वास्तविक एवं समान हैं

2. (i) $K=0,6$ (ii) $k=-\frac{1}{2}$ (iii) $k\le-2\sqrt{6},\quad k\ge2\sqrt{6}$ (iv) k = 0, 3 (v) k = 5, –3

(vi) $k=\pm\frac{5}{2}$

3. (i) $k<1$ (ii) $k<9$ (iii) $k<-6,\quad k>6$ 4. $\frac{-8}{5}<k<\frac{8}{5}$

प्रश्नमाला 3.6

1. (i) $216x^4y^2z^2$ (ii) $x^2(x-1)(x-2)(x+3)$ (iii) $2(x^2-4)(x-3)$ (iv) $(x^4-1)(x^2+x-1)$

(v) $90x^4(x+1)(2x+1)(3x-1)$

2. (i) ab^4 (ii) $16x^2$ (iii) $(x+3)$ (iv) $(x+3)(x-2)$ (v) $4x^2(2x+1)$

3. $\text{LCM} = (x-1)^2(x+1)$; $\text{HCF} = (x-1)$ 4. $\text{LCM} = x^2-5x-14$

5. $x^2-3x-10$ तथा $x^2-2x-15$

विविध प्रश्नमाला–3

1. (ग) 2. (ग) 3. (घ) 4. (ग) 5. (ग) 6. (घ) 7. (ख)
8. (ख) 9. (क) 10. (ग) 11. (ख)

12. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

13. विविक्तिकर (b^2-4ac), (i) $b^2-4ac>0$, मूल वास्तविक एवं भिन्न (ii) $b^2-4ac=0$, मूल वास्तविक एवं समान (iii) $b^2-4ac<0$ तो मूल काल्पनिक होंगे।

14. 1, 3 15. (i) p^2-2q (ii) $\dfrac{p}{q}$ 16. $k=5$ और $a=-5$

17. $2x^2+x-528=0$, चौड़ाई = 16 m और लम्बाई = 33 m 18. 1, –5

19. (i) 2, –6; (ii) $\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$; (iii) $\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$; (iv) 1, 2 20. $k=\dfrac{7}{4}$

21. (i) $-1, \dfrac{q^2}{p^2}$; (ii) $\dfrac{2a+b}{3}, \dfrac{a+2b}{3}$ 22. x^2+2x-3 और x^2-3x+2 23. x^2-x-2

LHL4BH

04

दो चरों वाले रैखिक समीकरण एवं असमिकाएँ (Linear Equation and Inequalities in two variables)

4.01 प्रस्तावना

किसी भी समस्या को हल करने के लिए उसे गणितीय रूप में निरूपित किया जाता है। हम जानते हैं कि समस्या एक या कई घटकों पर निर्भर होती है। पिछली कक्षा में हमने इस प्रकार की समस्याओं का समीकरण के रूप में निरूपण किया है। समस्या की स्थिति के अनुसार ये समीकरण एक चर दो चर या अधिक चरों पर आधारित होते हैं। यदि कोई समीकरण एक सरल रेखा को व्यक्त करता है तो रैखिक समीकरण कहलाता है। सामान्य रूप में $ax+b=0, a\neq 0$ जहां a, b वास्तविक संख्याऐं है, एक चर वाले रैखिक समीकरण को व्यक्त करता है। चर x के जिस मान पर यह समीकरण संतुष्ट होता है उसे इस समीकरण का हल कहते है। एक चर वाले रैखिक समीकरण का आलेख किसी भी एक अक्ष के समान्तर रेखा होती हैं। नवीं कक्षा में हमने दो चरों वाले रैखिक समीकरणों $ax+by+c=0;\ \ a,b\neq 0$ के आलेखों को बनाया है। x तथा y के जिन मानों के लिए यह समीकरण संतुष्ट होता है वह युग्म इसके हल कहलाते हैं। दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख (ग्राफ) भी एक सरल रेखा होता है। इस सरल रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु (x, y) इस समीकरण के हल को व्यक्त करता है।

यहाँ हम दो चरों x, y में दो रैखिक समीकरणों पर विचार करते हैं।

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \qquad \ldots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0, \qquad \ldots(2)$$

जहाँ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ सभी वास्तविक संख्याएँ हैं, और a_1, b_1 तथा a_2, b_2 कोई भी शून्य नहीं है अर्थात् समीकरण (1) व (2) के लिए $a_1^2+b_1^2\neq 0$ एवं $a_2^2+b_2^2\neq 0$ प्रतिबन्ध है। ये दो रैखिक समीकरण उन्हीं दो चरों x, y में है। इस प्रकार के समीकरणों को दो चरों वाले रैखिक समीकरणों का एक युग्म कहते हैं। समीकरणों का यह युग्म एक युगपत रैखिक समीकरण (Simultaneous Linear Equations) निकाय कहलाता है। यहाँ हम इन समीकरणों के हल एवं इस हल की संगतता एवं असंगतता के बारे में विस्तृत अध्ययन करेंगे।

इस अध्याय में हम असमिकाओं के बारे में भी पढ़ेंगे। यदि रैखिक समीकरणों में बराबर के चिह्न (=) के स्थान पर छोटा (<) बड़ा (>) या ये दोनों चिह्न बराबर के चिह्न के साथ ($\leq$) या ($\geq$) (sign of inequations) के रूप में प्रयुक्त होते हैं तो ये असमिकाएँ (inequations) कहलाती है। यहाँ हम दो चरों वाली असमिकाओं को आलेखीय (ग्राफीय) विधि द्वारा हल करेंगे। यह हल एक क्षेत्र के रूप में प्राप्त होता है। दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं के समूह(Set of Simultaneous Linear inequations) का हल भी आलेखन (ग्राफ) द्वारा उभयनिष्ठ क्षेत्र के रूप में प्राप्त किया जाता है।

4.02 दो चरों वाले रैखिक युगपत समीकरण (Simultaneous Linear Equation of two variables)

दो चरों वाली रैखिक समीकरणों का युग्म एक युगपत रैखिक समीकरण निकाय कहलाता है। उदाहरणार्थ $5x+2y=17;$ $2x-5y=1$ या $x+2y=3;\ \ 2x-y=5$ आदि।

किसी भी रैखिक समीकरण युग्म को हल करना अर्थात् उसके दोनों चरों के ऐसे मान प्राप्त करना जो युग्म की दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। यहाँ हम रैखिक युगपत समीकरणों के हल की प्रकृति के बारे में निम्न उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

उदाहरण-1. रैखिक युगपत समीकरण $3x+2y-5=0;\ \ 4x+7y-11=0$ के हल की प्रकृति ज्ञात करते हैं। उक्त दोनों समीकरणों में $x=1$ और $y=1$ रखते है।

तब $\quad 3(1)+2(1)-5=0$

तथा $\quad 4(1)+7(1)-11=0$

अर्थात् $x=1$ और $y=1$ पर दोनों समीकरण संतुष्ट होते हैं अतः ये समीकरण युग्म के अभीष्ट हल है।

उदाहरण-2. रैखिक युगपत समीकरण $2x+7y=11;\ x-3y=5$ के $x=2$ तथा $y=1$ मान पर हल की प्रकृति ज्ञात करते हैं।

उक्त दोनों समीकरणों में $x=2$ तथा $y=1$ रखते हैं। तब

$$2(2)+7\,(1)=11$$

अर्थात् प्रथम समीकरण संतुष्ट होता है।

दूसरे समीकरण के लिए x, y के दिये गए मान रखने पर,

$$2-3(1)=-1\neq 5$$

अतः दूसरा समीकरण $x=2, y=1$ पर संतुष्ट नहीं होता है। अर्थात् समीकरण युग्म का हल $x=2, y=1$ नहीं है।

उदाहरण-3. रैखिक समीकरण युग्म $x+2y-5=0;\ 2x+4y-10=0$ के $x=1, y=2$ तथा $x=3, y=1$ मान पर हल की प्रकृति ज्ञात करते हैं।

स्थिति – 1, $x=1$ और $y=2$ पर युगपत समीकरण

$$1+2(2)-5=0$$

तथा $$2(1)+4(2)-10=0$$

समीकरण संतुष्ट होते हैं।

स्थिति – 2, $x=3$ और $y=1$ पर युगपत समीकरण

$$3+2\,(1)-5=0$$

तथा $$2(3)+4\,(1)-10=0$$

अतः इस स्थिति में भी समीकरण संतुष्ट है।

अर्थात् $x=1$ और $y=2$

तथा $x=3$ और $y=1$

दोनों ही दिए गए समीकरण युग्म के हल है। इस प्रकार इन समीकरणों के अनेक हल संभव है।

यहाँ इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि रैखिक समीकरण युग्म के 'अद्वितीय हल' अनेक हल या फिर कोई हल नहीं प्रकृति के हल प्राप्त हो सकते हैं। अतः यदि किसी युगपत समीकरण युग्म का हल ज्ञात किया जा सकता है चाहे वह अद्वितीय हो या अनेक हल प्राप्त हो, तो इस प्रकार के रैखिक समीकरण संगत (consistent) युग्म कहलाते हैं। और यदि हल प्राप्त नहीं होता है तो ऐसे युग्म असंगत (inconsistent) युग्म कहलाते हैं।

हम यहां उल्लेख करना चाहेंगे कि दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण का आलेखन (ग्राफ) करने पर यह एक सरल रेखा प्राप्त होता है। अतः रैखिक समीकरण युग्म में दो सरल रेखाएँ एक समतल में प्राप्त होगी। जिनकी परस्पर स्थिति इस प्रकार हो सकती है।

(i) दोनों रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करे।

(ii) दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करे अर्थात् समान्तर हो।

(iii) दोनों रेखाएँ एक दूसरे का ढके अर्थात् संपाती हो।

आइए इन स्थितियों को हम आलेखीय निरूपण द्वारा समझते है एवं रैखिक समीकरण युग्म को संगत या अंसगत होने पर दोनों रेखाएँ किस प्रकार दिखाई पड़ती है।

4.03 रैखिक समीकरणों का आलेखीय निरूपण एवं हल

MATJ4Q

यहाँ हम निम्न उदाहरणों में लिए गए रैखिक समीकरण युग्मों के ग्राफीय (आलेखीय) निरूपण द्वारा इनके हल की प्रकृति पता लगाएंगे एवं समीकरणों के गुणांकों के परस्पर अनुपातों की तुलना कर हल की प्रकृति का आंकलन करेंगे।

उदाहरणार्थ निम्न रैखिक समीकरण युग्मों के ग्राफीय निरूपण करते हैं।

(i) $2x+3y=13;\ 5x-2y=4$

(ii) $2x+4y=10;\quad 3x+6y=12$

(iii) $4x+6y=18;\quad 2x+3y=9$

उदाहरण-4. समीकरण

$$2x+3y=13 \qquad \ldots(1)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$5x - 2y = 4$ . . . (2)

इनका तुल्य ज्यामितीय निरूपण करने के लिए समीकरण (1) एवं (2) में दी गई रेखाओं पर दो–दो बिन्दु प्राप्त करते हैं। सर्वप्रथम समीकरणों में $x = 0$ या $y = 0$ पर बिन्दु प्राप्त करने का प्रयास करते हैं चूंकि एक चर के शून्य होने पर समीकरण एक चर वाले रैखिक समीकरण में बदल जाती है जिससे दूसरे चर को सुगमता से प्राप्त किया जा सकता है।

समीकरण (1) में $x = 0$ या $y = 0$ पर दूसरे चर का मान एक पूर्णांक प्राप्त नहीं होता अतः हम सुगमता के लिए दूसरे मान रखकर बिन्दु प्राप्त करेंगे।

समीकरण (1) में $x = 2$ पर

$2 \times 2 + 3y = 13$ $3y = 13 - 4 = 9$ $y = 3$

तथा $x = 5$ पर $2 \times 5 + 3y = 13$ $3y = 13 - 10 = 3$

$y = 1$

अतः बिन्दु निम्न सारणी अनुसार प्राप्त होंगे

x	2	5
y	3	1

इसी प्रकार समीकरण (2) में $x = 0$

$5 \times 0 - 2y = 4$ $y = -2$

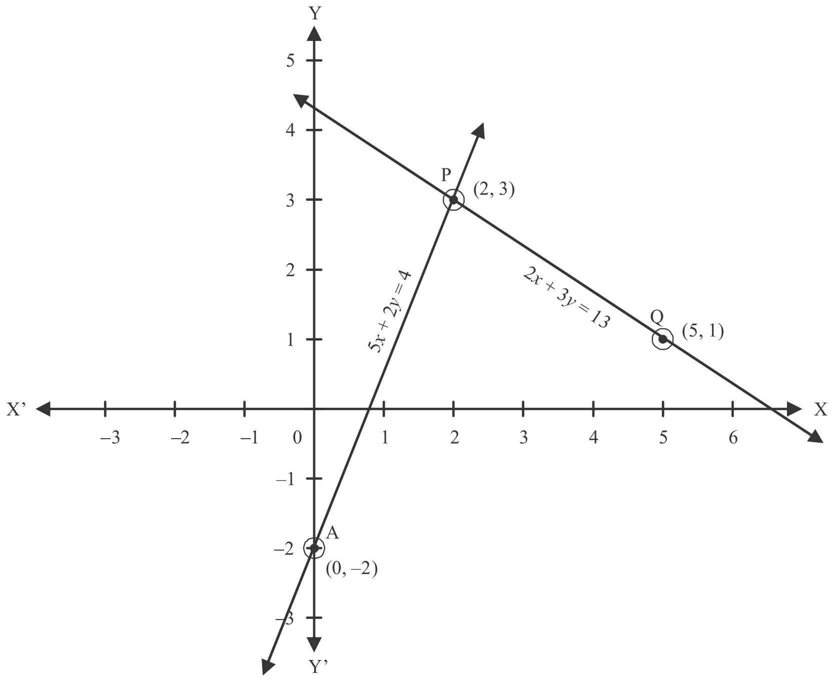
तथा $x = 2$ पर

$5 \times 2 - 2y = 4$ $-2y = -6$ $y = 3$

अतः समीकरण (2) के लिए बिन्दु निम्न प्रकार प्राप्त होंगे।

x	0	2
y	–2	3

अब उपरोक्त सारणियों से प्राप्त बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर निरूपित कर निम्न सरल रेखाएँ प्राप्त करते है। अर्थात् ग्राफ पेपर पर XOX' एवं YOY' अक्षों का निर्माण कर सारणी में दिए गए बिन्दुओं को मिलाकर सरल रेखा प्राप्त करते है।



ग्राफ (आलेख) 4.1

उपरोक्त चित्र में हम देखते हैं कि सरल रेखाएँ बिन्दु P(2,3) पर प्रतिच्छेद करती है।

उदाहरण-5. समीकरण युग्म

$$2x+4y=10 \qquad \ldots(1)$$

$$3x+6y=12 \qquad \ldots(2)$$

का तुल्य ज्यामितीय निरूपण करने के लिए निम्न प्रकार से बिन्दु ज्ञात करते हैं।

समीकरण (1) में $y = 0$ पर

$$2x+4\times0=10$$

$$x = 5$$

तथा $x = 1$ पर

$$2\times1+4y=10$$

$$4y=10-2=8$$

$$y=2$$

अतः समीकरण (1) के लिए बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती हैं

x	5	1
y	0	2

इसी प्रकार समीकरण (2) में $x = 0$ पर

$$3\times0+6y=12$$

$$6y=12$$

$$y=2$$

तथा $y = 0$ पर

$$3x+6\times0=12$$

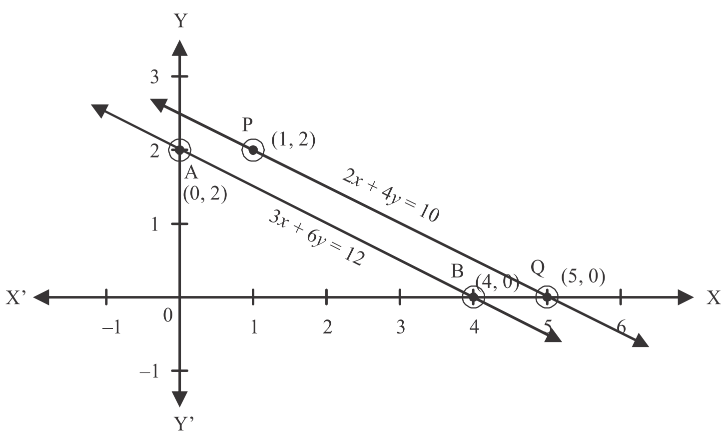
$$3x=12$$

$$x = 4$$

अतः समीकरण (2) के लिए निम्न बिन्दु सारणी होगी

x	5	1
y	0	2

अब उपरोक्त सारणियों से प्राप्त बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर आलेखित करते हैं, एवं बिन्दुओं को मिलाकर निम्न ग्राफ (आलेख) प्राप्त करते हैं।



ग्राफ (आलेख) 4.2

उपरोक्त चित्र में हम देखते है कि दोनों सरल रेखाऐं एक दूसरे के समानान्तर है।

उदाहरण-6. समीकरण युग्म

$$4x+6y=18 \qquad \ldots(1)$$

$$2x+3y=9 \qquad \ldots(2)$$

में समीकरण (1) एवं (2) से बिन्दु प्राप्त करते हैं एवं इन रेखाओं का तुल्य ज्यामितीय निरूपण करते हैं।

समीकरण (1) में $x=0$ पर

$$4\times 0+6y=18$$

$$6y=18 \qquad \Rightarrow \qquad y=3$$

तथा $y=1$ पर

$$4x+6\times 1=18$$

$$4x=18-6=12$$

$$x=3$$

अतः बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

x	0	3
y	3	1

यहाँ समीकरण (2) के लिए $x=0$ पर

$$2\times 0+3y=9$$

$$3y=9 \qquad \Rightarrow \qquad y=3$$

तथा $y=1$ पर

$$2x+3\times 1=9$$

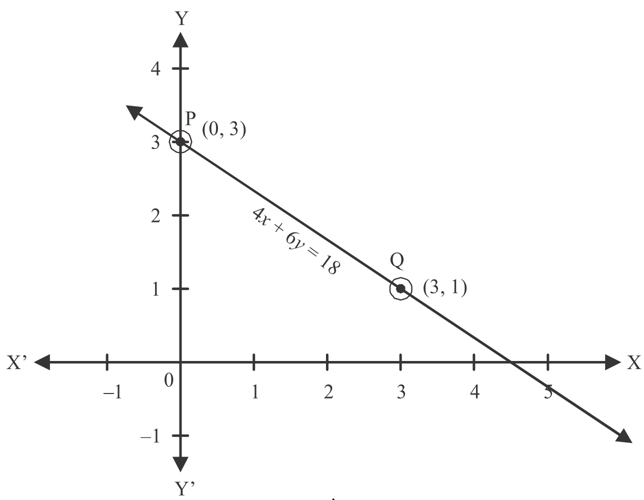
$$2x=9-3=6$$

$$x=3$$

इस प्रकार समीकरण (2) के लिए यहाँ निम्न बिन्दु सारणी प्राप्त होती है।

x	0	3
y	3	1

अब उपरोक्त सारणियों से प्राप्त बिन्दुओं का ग्राफ पेपर पर आलेखन करते हैं एवं इस प्रकार प्राप्त रेखाओं का ग्राफ आलेख प्राप्त करते हैं।



ग्राफ (आलेख) 4.3

उपरोक्त ग्राफ (आलेख) में दोनों रेखाएँ एक दूसरे को ढके हुए हैं अर्थात् दोनों रेखाऐं संपाती है। स्पष्ट है दोनों समीकरण तुल्य रेखाओं को प्रदर्शित करते हैं।

उपर्युक्त तीनों उदाहरणों (4), (5) व (6) में समीकरणों को निम्नलिखित प्रकार से व्यापक रूप में व्यक्त किया जा सकता है

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad \ldots(1)$$

तथा $$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad \ldots(2)$$

यहाँ हम तीनों उदाहरणों के लिए x, y एवं अचर के गुणांकों की तुलना सारणी तैयार करते हैं तथा रेखा युग्मों की प्रकृति से इनके अनुपातों के सम्बन्धों की व्याख्या करते हैं।

तुलनात्मक सारणी

उदाहरण संख्या	समीकरण युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	गुणांक अनुपातों की तुलना	रेखाओं की प्रकृति	बीजीय हल
(i)	$2x+3y=13$ $5x-2y=4$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{-2}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद रेखाएँ	अद्वितीय हल
(ii)	$2x+4y=10$ $3x+6y=12$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	समान्तर रेखाएँ	कोई हल नहीं
(iii)	$4x+6y=18$ $2x+3y=9$	$\frac{4}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{18}{9}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अनेक हल

इस सारणी से स्पष्ट है कि रेखा युग्म

$$a_1x+b_1y+c=0$$

$$a_2x+b_2y+c=0$$

(i) परस्पर प्रतिच्छेद रेखाएँ है यदि गुणांकों में सम्बन्ध

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2} \text{ है।}$$

इस प्रकार के रेखा युग्मों का हल अद्वितीय होगा एवं प्रतिच्छेद बिन्दु (x, y) पर x, y के मान ही अभीष्ट हल होगा।

(ii) परस्पर समान्तर रेखाएँ है यदि गुणांकों में सम्बन्ध

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2} \text{ है।}$$

इस प्रकार के रेखा युग्मों का कोई हल नहीं होता।

(iii) परस्पर संपाती रेखाएँ हैं यदि गुणांकों में सम्बन्ध

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \text{ है।}$$

इस प्रकार के रेखा युग्मों के असीमित कई हल होंगे अर्थात् रेखाओं का प्रत्येक बिन्दु के लिए x, y के मान इसके हल होंगे।

विलोमतः यदि गुणांकों में सम्बन्ध दिए गए हैं तो रेखा युग्म की प्रकृति जाँची जा सकती हैं।

उपरोक्त व्याख्या से रैखिक समीकरणों को आलेखिक विधि से निम्न चरणों में हल किया जा सकता है।

आलेखीय विधिः

चरण–1: दिए गए रैखिक समीकरणों को मानक रूप में रखते हैं।

अर्थात् $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ . . . (1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . . . (2)

चरण–2: दोनों रेखाओं के समीकरणों से संगत बिन्दु सारणी तैयार कर रेखाएँ ग्राफ पेपर पर अक्षों XOX' एवं YOY' के निरूपण कर आलेखित करते हैं। माना रेखा L_1 समीकरण (i) एवं रेखा L_2 समीकरण (2) के संगत रेखा प्राप्त होती है।

चरण–3: यदि रेखाएँ L_1 एवं L_2 किसी बिन्दु (α, β) पर प्रतिच्छेद करती है तो $x = \alpha$ तथा $y = \beta$ ही रेखा युग्म के संगत समीकरणों के हल होंगे।

चरण–4: यदि रेखाएँ L_1 एवं L_2 समान्तर है तो कोई हल विद्यमान नहीं होगा अर्थात् समीकरण युग्म असंगत होगा।

चरण–5: यदि रेखाएँ L_1 एवं L_2 संपाती है तो इनके अनन्त (असीमित) हल होंगे अर्थात् दोनों रेखाऐं एक ही समीकरण से व्यक्त की जा सकती है। एवं इस रेखा का प्रत्येक बिन्दु (α, β) रेखायुग्म के कई हलों $(x = \alpha, y = \beta)$ के रूप में प्राप्त होंगे।

यहाँ निम्न उदाहरणों के माध्यम से इस विधि को और अधिक स्पष्ट समझा जा सकेगा।

उदाहरण-7. निम्न रैखिक समीकरण युग्मों को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

(i) $3x + 2y - 11 = 0$

$2x - 3y + 10 = 0$

(ii) $2x + 3y = 8$

$x - 2y = -3$

(iii) $2x + y - 6 = 0$

$4x - 2y - 4 = 0$

हल: (i) दिए गए समीकरणों को निम्न प्रकार लिखने पर,

$3x + 2y = 11$ . . . (i)

$2x - 3y = -10$ . . . (ii)

समीकरण (i) की बिन्दु सारणी प्राप्त करते है,

$y = 1$ पर, $3x + 2 \times 1 = 11$

$3x = 11 - 2 = 9$

$x = 3$

इसी प्रकार समीकरण (1) में $x = 1$ पर

$3 \times 1 + 2y = 11$

$2y = 11 - 3 = 8$

$y = 4$

अतः समीकरण (i) की बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

x	3	1
y	1	4

अब समीकरण (ii) की बिन्दु सारणी प्राप्त करते है।

$y = 0$ पर, $2x - 3 \times 0 = -10$

$x = -5$

इसी प्रकार $y = 2$ पर, $2x - 3\times 2 = -10$

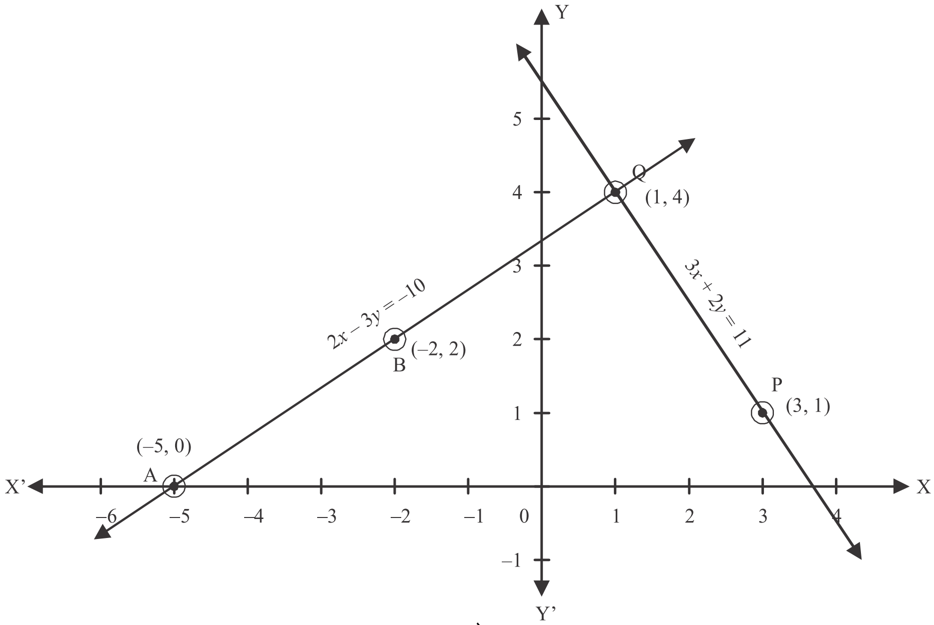
$2x = -4$

$x = -2$

अतः समीकरण (ii) की बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

x	-5	-2
y	0	2

उपरोक्त दोनों समीकरणों से संगत रेखाओं का ग्राफ पेपर पर आलेखन करते हैं।



ग्राफ (आलेख) 4.4

उपरोक्त निरूपण से स्पष्ट है कि दोनों रेखाऐं बिन्दु (1, 4) पर प्रतिच्छेद करती है अतः $x = 1$ एवं $y = 4$ रेखायुग्म $3x + 2y = 11$; $2x - 3y = -10$ का अभीष्ट हल है। अर्थात् $x = 1, y = 4$ मान इन दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते है। अतः हल सत्यापित होता है।

हल: (ii) दिया गया समीकरण युग्म है

$$2x + 3y = 8 \quad \ldots(1)$$

$$x - 2y = -3 \quad \ldots(2)$$

हम समीकरण (1) की बिन्दु सारणी प्राप्त होते हैं,

$x = 1$ पर, $2\times 1 + 3y = 8$

$3y = 8 - 2 = 6$

$y = 2$

इसी प्रकार $y = 0$ पर $2x + 3\times 0 = 8$

$x = 4$

अतः समीकरण (1) की बिन्दु सारणी निम्न प्राप्त होती हैं।

x	1	4
y	2	0

अब हम समीकरण (2) की बिन्दु सारणी प्राप्त करते है।

समीकरण (2) में $y = 0$ पर $x - 2\times 0 = -3$

$x = -3$

इसी प्रकार $x = 1$ पर $1 - 2y = -3$

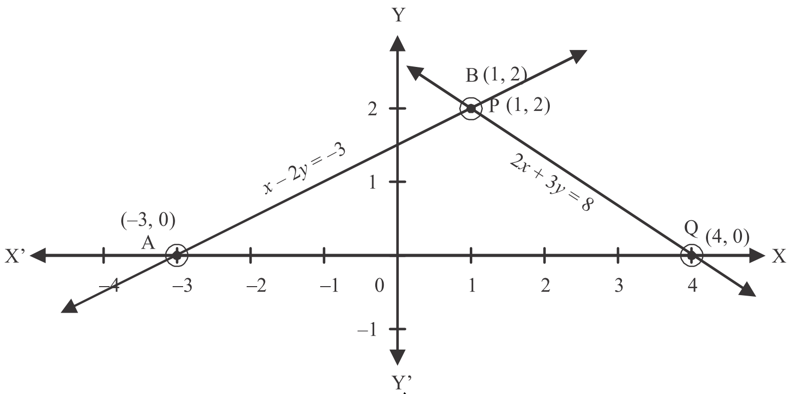
$-2y = -4$

$y = 2$

इस प्रकार निम्न बिन्दु सारणी समीकरण (2) के लिए प्राप्त होती है।

x	-3	1
y	0	2

उपरोक्त समीकरण (1) एवं (2) के संगत सारणीयों की सहायता से ग्राफ पेपर पर रेखाओं की निरूपण करते है।



ग्राफ (आलेख) 4.5

उपरोक्त ग्राफ निरूपण से स्पष्ट है कि दोनों रेखाऐं बिन्दु (1,2) पर प्रतिच्छेद करती है। अतः $x = 1, y = 2$ रेखायुग्म $2x + 3y = 8;\ \ x - 2y = -3$ का अभीष्ट हल है। $x = 1$ एवं $y = 2$ मान दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं।

हल: (iii) दिए गए समीकरणों को निम्न प्रकार लिखने पर

$$2x + y = 6 \qquad \ldots(1)$$

$$4x - 2y = 4 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) के संगत बिन्दु सारणी प्राप्त करते हैं।

$x = 0$ पर $20 + y = 6$

$y = 6$

तथा $x = 1$ पर $2 \times 1 + y = 6$

$y = 6 - 2 = 4$

इस प्रकार समीकरण (1) की बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

x	0	1
y	6	4

अब समीकरण (2) के संगत बिन्दु सारणी प्राप्त करते है। समीकरण (2) में $x = 0$ पर $4 \times 0 - 2y = 4$

$y = -2$

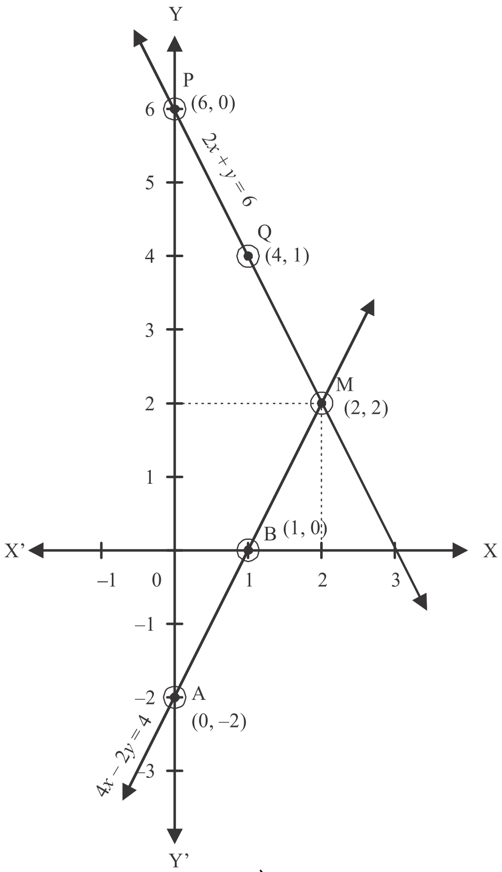
तथा $y = 0$ पर $4x - 2 \times 0 = 4$

$x = 1$

अतः समीकरण (2) की बिन्दु सारणी निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

x	0	1
y	-2	0

उपरोक्त समीकरण (1) एवं (2) से प्राप्त बिन्दु सारणियों की सहायता से ग्राफ पेपर पर रेखायुग्म का निरूपण करते हैं।



ग्राफ (आलेख) 4.6

उपरोक्त ग्राफ से स्पष्ट है कि दोनों रेखाएँ बिन्दु (2, 2) पर प्रतिच्छेद करती है अतः $x = 2, y = 2$ दिए गए रेखा युग्म समीकरणों का अभीष्ट हल है एवं इन समीकरणों को $x = 2, y = 2$ मान संतुष्ट करते है।

प्रश्नावली 4.1

1. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म संगत है या असंगत।

   (i) $2x - 3y = 8;$ $4x - 6y = 9$ (ii) $3x - y = 2;$ $6x - 2y = 4$

   (iii) $2x - 2y = 2;$ $4x - 4y = 5$ (iv) $\frac{4}{3}x + 2y = 8;$ $2x + 3y = 12$

2. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को ग्राफीय विधि से हल कीजिए एवं हल की प्रकृति बताइए।

   (i) $x + y = 3;$ $3x - 2y = 4$ (ii) $2x - y = 4;$ $x + y = -1$

   (iii) $x + y = 5;$ $2x + 2y = 10$ (iv) $3x + y = 2;$ $2x - 3y = 5$

3. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों को आलेखीय विधि से हल कीजिए तथा उन बिन्दुओं के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए जहाँ इनके द्वारा निरूपित रेखाएँ $y-$ अक्ष को काटती हैं।

   (i) $2x - 5y + 4 = 0;$ $2x + y - 8 = 0$ (ii) $3x + 2y = 12;$ $5x - 2y = 4$

4. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए तथा $y-$ अक्ष तथा युग्म द्वारा निरूपित रेखाओं से निर्मित त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

   $4x - 5y = 20;$ $3x + 5y = 15$

4.04 दो चर राशि वाली रैखिक असमिकाएँ

एक गणितीय कथन जिसमें चर एवं चिह्न $>, <, \geq$ या $\leq$ विद्यमान हो असमिका कहलाती है। असमिकाऐं एक चर वाली या एक से अधिक चर वाली हो सकती है। माना a एक अशून्य वास्तविक संख्या हैं तो चर x के लिए $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b>0$ और $ax+b\geq 0$ असमिकाएँ एक चर वाली रैखिक असमिकाएँ कहलाती है।

MB3F6D

यदि चरों की संख्या दो हो तो असमिकाएँ दो चर वाली कहलाती है उदाहरणार्थ $2x+3y\leq 6$ $x+y<4$, व्यापक रूप में हम दो चर वाली रैखिक असमिकाओं को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं

माना a, b दो अशून्य वास्तविक संख्याएँ है x और y चरों के लिए असमिकाएँ $ax+by<c$, $ax+by\leq c$, $ax+by>c$ या $ax+by\geq c$ दो चरों वाली रैखिक असमिकाएँ कहलाती है।

इस अनुच्छेद में हम दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं को हल करने के बारे में पढ़ेंगे। इन असमिकाओं के कई हल संभव है। सभी संभव हलों के समुच्चय को ही एक असमिका का हल समुच्चय (Solution set) कहते हैं।

4.05 आलेखन विधि द्वारा दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं का हल

यहाँ हम दो चरों x, y वाली रैखिक असमिकाओं का आलेखन विधि द्वारा हल करेंगे। निर्देशांक ज्यामिति में हमने पढ़ा है कि सरल रेखा $ax+by=c$, x, y तल में ग्राफ पेपर पर $x-$अक्ष एवं $y-$अक्ष के सापेक्ष समीकरण को संतुष्ट करने वाले बिन्दुओं को मिलाने पर निरूपित होती है।

सरल रेखा $ax+by=c$, $x\,y-$तल को दो भागों में विभाजित करती है।

MBCB81

अर्थात् ये विभाजित क्षेत्र $ax+by\leq c$ एवं $ax+by\geq c$ द्वारा व्यक्त किये जा सकते है। इन्हें संवृत एवं खुला अर्धआकाशीय क्षेत्रों के रूप में निम्न समुच्चयों से व्यक्त करते हैं। समुच्चय निरूपण में

समुच्चय $\{(x,y): ax+by=c\}$ सरल रेखा, समुच्चय $\{(x,y): ax+by\leq c\}$ तथा $\{(x,y): ax+by\geq c\}$ संवृत अर्ध आकाशीय क्षेत्र और समुच्चय $\{(x,y): ax+by<c\}$ तथा $\{(x,y): ax+by>c\}$ विवृत या खुला अर्ध आकाशीय क्षेत्र को प्रदर्शित करते हैं। ये सभी अर्ध आकाशीय क्षेत्र असमिकाओं के हल समुच्चय कहलाते हैं।

इस प्रकार की दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं को ग्राफीय (आलेखन) विधि द्वारा निम्न चरणों में हल किया जा सकता है।

चरण–1: दी गई असमिका को समीकरण रूप में लिखिए यह एक सरल रेखा को व्यक्त करेगी।

चरण–2: अब सरल रेखा के समीकरण में $x=0$ रखकर y-अक्ष पर कटान बिन्दु प्राप्त कीजिए एवं $y=0$ रखकर x - अक्ष पर रेखा के कटान बिन्दु प्राप्त कीजिए।

चरण–3: उपरोक्त दोनों कटान बिन्दुओं को मिलाकर सरल रेखा का निरूपण कीजिए।

चरण–4: अब एक बिन्दु (मूल बिन्दु भी हो सकता है) लेकर उसके निर्देशांकों के मान असमिका में रखते है। यदि इस बिन्दु के निर्देशांक असमिका को संतुष्ट करते हैं तो सरल रेखा से लेकर बिन्दु की तरफ वाले क्षेत्र को छांयाकित कर दीजिए। यही छायांकित क्षेत्र असमिका का अभीष्ट हल समुच्चय है।

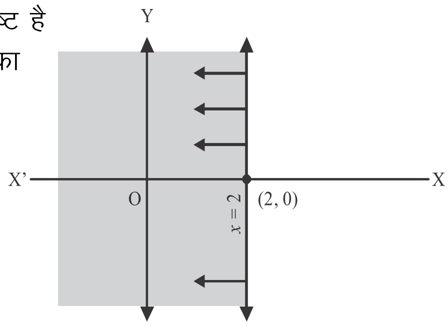
यदि मूल बिन्दु असमिका को संतुष्ट नहीं करता है तो छायांकित क्षेत्र रेखा से मूल बिन्दु की विपरीत होगा एवं यही क्षेत्र असमिका का अभीष्ट हल होगा।

किसी असमिका को हल करने की उपरोक्त विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट समझी जा सकती है।

उदाहरण-8. निम्न असमिकाओं को आलेखन विधि से हल कीजिए।

(i) $x\leq 2$ (ii) $2x-y\geq 1$ (iii) $|y-x|\leq 3$

हल: (i) असमिका $x\leq 2$ को समीकरण में बदलने पर $x=2$ प्राप्त होता है। स्पष्ट है यह सरल रेखा y-अक्ष के समान्तर है एवं x-अक्ष के बिन्दु $(2, 0)$ से गुजरेगी। इसका ग्राफ (आलेख) 4.7 के अनुरूप प्राप्त होता है।

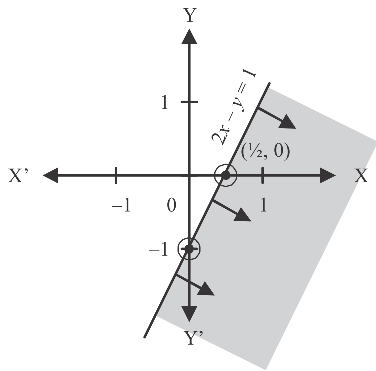


ग्राफ (आलेख) 4.7

अब मूल बिन्दु (0, 0) से असमिका $x \le 2$ संतुष्ट होती है अतः क्षेत्र रेखा $x = 2$ से मूल बिन्दु की ओर आच्छादित (छायांकित) क्षेत्र ही इसका हल समुच्चय होगा।

(ii) असमिका $2x - y \ge 1$ को समीकरण रूप में बदलने पर $2x - y = 1$ प्राप्त होता है।

इस समीकरण में $x = 0$ रखने पर, $y = -1$ प्राप्त होता है अतः y-अक्ष पर बिन्दु $(0, -1)$ कटान बिन्दु है इसी प्रकार समीकरण में $y = 0$ रखने पर, $x = \frac{1}{2}$ प्राप्त होता है। अतः x – अक्ष पर बिन्दु $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ कटान बिन्दु प्राप्त हुआ दोनों कटान बिन्दु $(0, -1)$ एवं $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ को मिलाने पर इसका ग्राफ आलेखन चित्र निम्न प्राप्त होता है।



ग्राफ (आलेख) 4.8

अब मूल बिन्दु (0, 0) से असमिका $2x - y \ge 1$ संतुष्ट नहीं होती अर्थात् $2 \times 0 - 0 \ge 1$ सत्य नहीं है। अतः रेखा $2x - y = 1$ से मूल बिन्दु के विपरीत छायांकित क्षेत्र ही इसका हल समुच्चय होगा।

(iii) यहाँ दी गई असमिका $|y - x| \le 3$ है इसे मोड्यूलस को हटाने पर निम्नानुसार लिखा जा सकता है–

$$-3 \le y - x \le 3$$

इसे पुनः निम्नानुसार दो असमिकाओं के रूप में लिखा जा सकता है।

$$-3 \le y - x$$

तथा $\quad y - x \le 3$

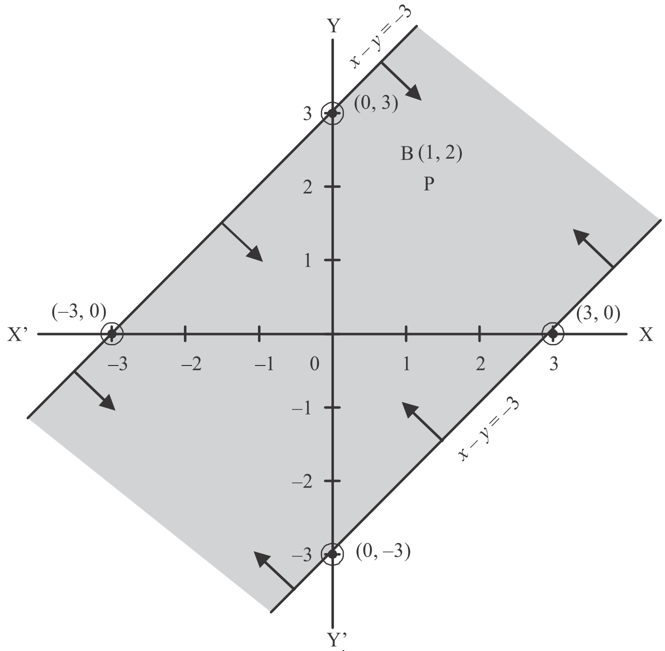
अर्थात् $\quad x - y - 3 \le 0 \qquad \ldots(i)$

तथा $\quad x - y + 3 \ge 0 \qquad \ldots(ii)$

असमिका (i) को समीकरण रूप में लिखने पर $x - y - 3 = 0$ प्राप्त होता है।

इसके X-अक्ष पर कटान बिन्दु (3, 0) एवं Y-अक्ष पर कटान बिन्दु (0, –3) प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार द्वितीय (ii) असमिका को समीकरण रूप में लिखने पर $x - y + 3 = 0$ प्राप्त होता है।

इस रेखा के X-अक्ष पर कटान बिन्दु (–3, 0) एवं Y-अक्ष पर कटान बिन्दु (0, 3) प्राप्त होते है। अब इन दोनों रेखाओं के ग्राफ (आलेख) 4.9 के अनुसार प्राप्त होते हैं।



ग्राफ (आलेख) 4.9

अब मूल बिन्दु (0, 0) से असमिका $x-y-3\le 0$ संतुष्ट होती है। अर्थात् $0-0-3\le 0$ सत्य है अतः इसका छायांकित क्षेत्र रेखा से मूल बिन्दु की ओर होगा।

दूसरी असमिका $x-y+3\ge 0$ भी मूल बिन्दु (0, 0) से संतुष्ट होती है अर्थात् $0-0+3\ge 0$ सत्य है। अतः इसका छायांकित क्षेत्र रेखा से मूल बिन्दु की ओर ही होगा। अतः दोनों रेखाओं के मध्य का छायांकित क्षेत्र ही अभीष्ट हल समुच्चय होगा।

प्रश्नावली 4.2

1. निम्न असमिकाओं का आलेखीय विधि से हल समुच्चय दर्शाइये।

   (i) $x\ge 2$ (ii) $y\le -3$ (iii) $x-2y<0$ (iv) $2x+3y\le 6$

2. निम्न असमिकाओं का आलेखीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।

   (i) $|x|\le 3$ (ii) $3x-2y\le x+y-8$ (iii) $|x-y|\ge 1$

विविध प्रश्नमाला–4

1. k के किस मान के लिए समीकरण युग्म $x+y-4=0;\ 2x+ky-3=0$ का कोई हल नहीं होगा–

   (क) 0 (ख) 2 (ग) 6 (घ) 8

2. k के किस मान के लिए समीकरण युग्म $3x-2y=0$ तथा $kx+5y=0$ के अनन्त हल होंगे–

   (क) $\frac{1}{2}$ (ख) 3 (ग) $\frac{-5}{3}$ (घ) $\frac{-15}{2}$

4. समीकरण युग्म $kx-y=2;\ 6x-2y=3$ का हल अद्वितिय होगा यदि

   (क) $k=2$ (ख) $k=3$ (ग) $k\ne 3$ (घ) $k\ne 0$

4. असमिकाओं $x\ge 0, y\ge 0$ के संगत समीकरण व्यक्त करते हैं–

   (क) x-अक्ष को (ख) y-अक्ष को (ग) x एवं y-अक्षों को (घ) $x=y$ रेखा को

5. असमिका $y-3\le 0$ के संगत रेखा के लिए निम्न कथन सत्य है–

   (क) x-अक्ष के समान्तर है (ख) y-अक्ष के समान्तर है

   (ग) x-अक्ष को विभाजित करती है (घ) मूल बिन्दु से गुजरती है

6. निम्न रैखिक समीकरण युग्म के हलों की संख्या लिखिए।

   $x+2y-8=0; 2x+4y=16$

7. यदि समीकरण युग्म $2x+3y=7; (a+b)x+(2a-b)y=21$ के अनन्त हल हो तो a, b के मान ज्ञात कीजिए।

8. असमिका $|x|\le 3$ के हल समुच्चय को छायांकित कीजिए।

9. असमिका $2x+3y\ge 3$ के हल समुच्चय को छायांकित कीजिए।

10. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को आलेखीय विधि से हल कीजिए तथा इसकी सहायता से 'a' का मान ज्ञात कीजिए जबकि $4x+3y=a$ है। $x+3y=6; 2x-3y=12$

11. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखिक विधि से हल कीजिये तथा उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिये जहाँ इनके द्वारा निरूपित रेखाएँ $y-$ अक्ष को काटती है। $3x+2y=12;\ 5x-2y=4$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि a, b, c वास्तविक संख्याएँ है तो दो चरों x, y वाले रैखिक समीकरण का व्यापक रूप $ax+by+c=0$ जहाँ $a, b \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।
2. दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म का व्यापक रूप $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ द्वारा दिया जाता है। x, y के मानों का वह युग्म जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करता हैं, रैखिक समीकरण युग्म (युगपत समीकरण) का हल कहलाता है।
4. दो चरों वाली रैखिक समीकरण युग्म 'संगत' युग्म कहलाते हैं यदि इस युग्म का कम से कम एक हल हो। यदि किसी युग्म का कोई हल न हो तो ऐसे युग्म 'असंगत' युग्म कहलाते है।
4. रेखा युग्म $a_1x+b_1y+c=0$

   $a_2x+b_2y+c=0$

   के गुणांको में सम्बन्ध देखकर इसके हल की प्रकृति निम्न प्रकार जाँची जा सकती हैं–

   (i) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ हो तो हल अद्वितीय होगा एवं युग्म संगत होगा।

   (ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ हो तो युग्मों का कोई हल नहीं होगा एवं युग्म असंगत होगा।

   (iii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ हो तो हल असीमित होंगे एवं युग्म संगत होगा।
5. दो चरों वाली रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय (ग्राफीय) विधि से निम्न चरणों में हल किया जा सकता है

   (i) दोनों रेखाओं के समीकरणों से संगत बिन्दु सारणी प्राप्त कर इसकी सहायता से ग्राफ पेपर पर रेखाँग्निरूपित करते है।

   (ii) यदि दोनों रेखाएँ बिन्दु (α, β) पर प्रतिच्छेद करे तो $x=\alpha, y=\beta$ रैखिक समीकरण युग्म का अभीष्ट हल होगा।

   (iii) यदि रेखाऐं संपाती है तो इनके अनन्त हल होंगे एवं दोनों रेखाएँ एक ही समीकरण से व्यक्त की जा सकती है अतः प्रत्येक बिन्दु (α, β) हल $x=\alpha, y=\beta$ के रूप में प्राप्त होंगे।

   (iv) यदि रेखाएँ समान्तर है तो कोई हल विद्यमान नहीं होगा।
6. यदि a, b दो अशून्य वास्तविक संख्याएँ है तब x और y चरों के लिए असमिकाएँ $ax+by<c$, $ax+by \leq c$, $ax+by>c$ या $ax+by \geq c$ दो चरों वाली रैखिक असमिकाएँ कहलाती हैं।
7. दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं को ग्राफीय आलेखन विधि से निम्न चरणों में हल किया जा सकता है–

   (i) दी गई असमिकाओं को समीकरण रूप में लिखिए।

   (ii) उक्त समीकरणों में $x=0$ रखकर y-अक्ष पर कटान बिन्दु एवं $y=0$ रखकर x-अक्ष पर कटान बिन्दु प्राप्त कर दोनों कटान बिन्दुओं को मिलाकर संगत सरल रेखाऐं ग्राफ पेपर पर एक ही अक्षीय निकाय पर निरूपित करते हैं।

   (iii) अब मूल बिन्दु $(0, 0)$ के निर्देशांक से असमिका को संतुष्ट करते हैं। यदि संतुष्ट होती हैं तो हल समुच्चय संगत रेखा से मूल बिन्दु की ओर का छायांकित क्षेत्र होगा। यदि मूल बिन्दु $(0, 0)$ असमिका को संतुष्ट नहीं करता है तो हल समुच्चय रेखा से मूल बिन्दु के विपरीत ओर का छायांकित क्षेत्र होगा।

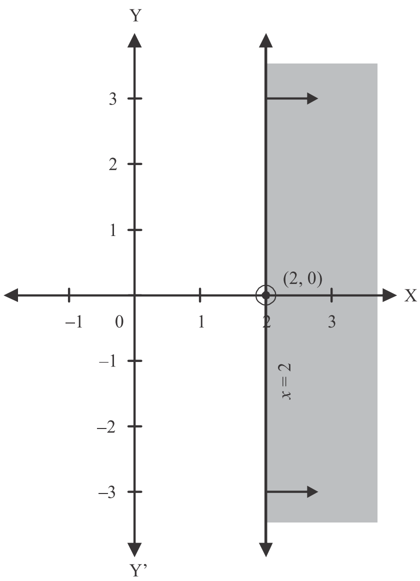
   (iv) इस प्रकार सभी रैखिक असमिकाओं का उभयनिष्ठ छायांकित क्षेत्र रैखिक असमिकाओं के निकाय का अभीष्ट हल समुच्चय होगा।
8. अभीष्ट हल सभी असमिकाओं को संतुष्ट करने वाला छायांकित क्षेत्र (Common rigion) होगा। यह हल समुच्चय रिक्त समुच्चय, परिबद्ध या अपरिबद्ध (Bounded or unbounded) क्षेत्र भी हो सकता है।

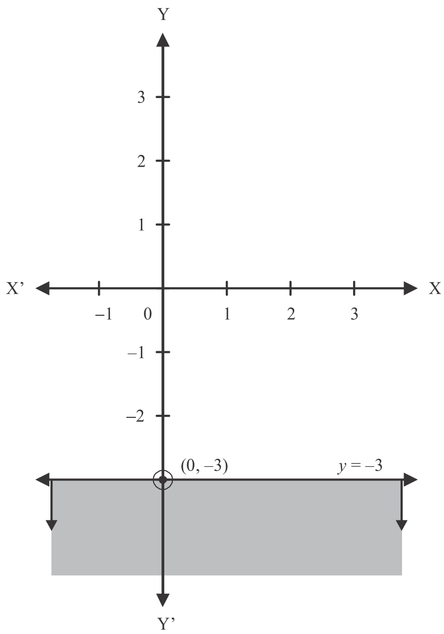
उत्तरमाला

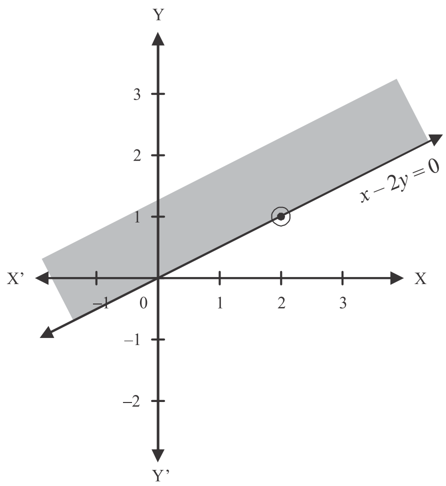
प्रश्नमाला 4.1

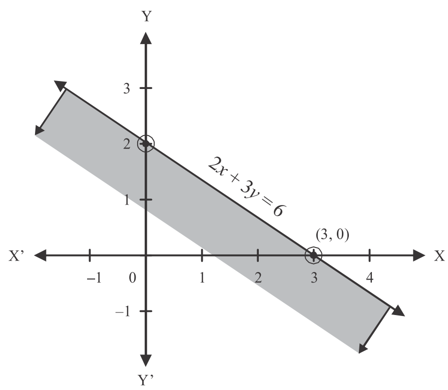
1. (i) असंगत (ii) संगत (iii) असंगत (iv) संगत
2. (i) अद्वितीय हल $x = 2, y = 1$ (ii) अद्वितीय, $x = 1, y = -2$ (iii) अनन्त हल
   (iv) अद्वितीय, $x = 1, y = -1$
3. (i) $x = 3, y = 2$; (0, 415), (0, 8) (ii) $x = 2, y = 3$; (0, 6), (0, –2)
4. $x = 5$, y = 0; (5, 0), (0, 3), (0, –4)

प्रश्नमाला 4.2

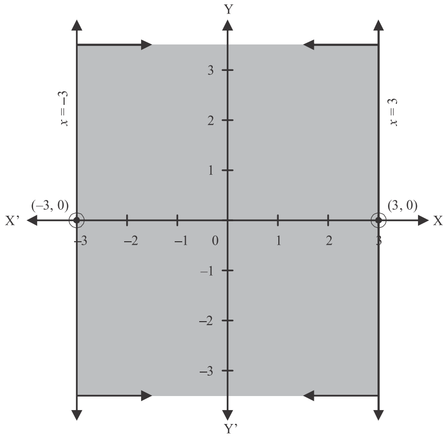
1. (i)


(ii)


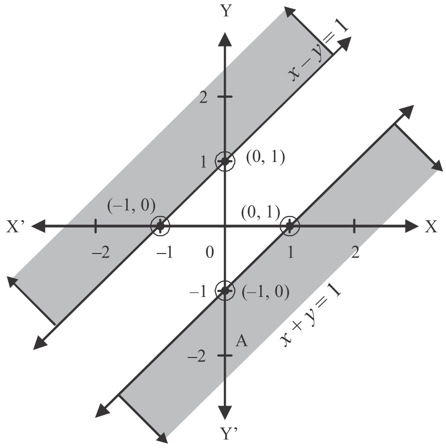
(iii)


(iv)


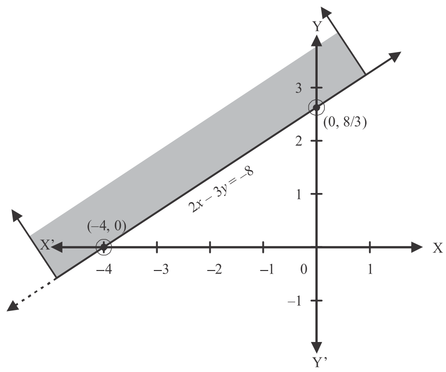
2. (i)



(ii)



(iii)



विविध प्रश्नमाला–4

1. (ख) 2. (घ) 3. (ग) 4. (ग) 5. (क)

6. अनन्त हल 7. $a = 5, b = 1$ 10. $x = 6, y = 0$ अतः $a = 24$

11. $x = 2, y = 3$; (0, 6) और (0, –2)

MBL79N

05

समान्तर श्रेढ़ी (Arithmetic Progression)

5.01 प्रस्तावना

प्रकृति में हम अपने आस-पास की कई वस्तुओं को उनके एक निश्चित ढ़ंग में दिखने के कारण पहचानते है। ये वस्तुऐं अपने निश्चित प्रतिरूप का अनुसरण करती है। जैसे मधुमक्खी के छत्ते में छिद्रों का बनना। इस प्रकार के निश्चित प्रतिरूप को प्रदर्शित करता है।

घर या दुकानों में लगी स्टील की सीढ़ी में भी एक निश्चित लम्बाई की पाइप रोड एक निश्चित अन्तराल पर लगीहोती है। गणितीय भाषा में हम कहेंगे कि प्रतिरूपों में एक नियत मात्रा में संख्या बढ़ती या घटती चली जाती है। एवं एक के बाद दूसरे, तीसरे, चौथे क्रमों में परस्पर एक निश्चित सम्बन्ध होता है। संख्याओं के एक निश्चित नियमानुसार क्रम को अनुक्रम (Sequence) कहते हैं। **उदाहरणार्थ**–संख्याओं के निम्नलिखित अनुक्रमों पर अपना ध्यान केन्द्रित करते हैं–

(i) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

(ii) $8, 5, 2, -1, -4, \ldots$

(iii) $3^o, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4 \ldots$

प्रतिरूप (i) में प्रत्येक संख्या अपनी आगे वाली संख्या से 2 कम है। अर्थात् किसी संख्याओं में 2 जोड़े तो क्रम की अगली संख्या प्राप्त होती है। प्रतिरूप (ii) में अगली संख्या पूर्व संख्या में से 3 घटाने पर प्राप्त हो रही है। इसी प्रकार(iii) प्रतिरूप में सभी क्रमिक संख्याऐं 3 की बढ़ती घातों में दर्शाई गई है।

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट हैं कि सभी प्रतिरूप एक निश्चित नियम/नियमों का अनुसरण करते हैं। इस अध्याय में हम इसी तरह के एक प्रतिरूप का अध्ययन करेंगे। जिसमें उत्तरोत्तर पद(term) अपने से पहले पदों (terms) में एक निश्चित संख्या जोड़ने पर प्राप्त किये जाते हैं। यहाँ हम इस प्रतिरूप के व्यापक पद (n^{th} term) एवं क्रमागत पदों के योग ज्ञात करने की विधियों के बारे में पढ़ेंगे।

5.02 समान्तर श्रेढ़ी

MBV3BB

हम सर्वप्रथम संख्याओं के निम्न अनुक्रमों पर विचार करते हैं।

(i) $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$

(ii) $100, 70, 40, 10, \ldots$

(iii) $-5, -3, -1, 1, \ldots$

उपर्युक्त अनुक्रमों में प्रथम पद छोड़कर सभी पद एक निश्चित संख्या (धनात्मक या ऋणात्मक) को पिछले पद वालीसंख्या में जोड़ कर प्राप्त किये जा सकते हैं। इस प्रकार उक्त अनुक्रमों में संख्याऐ समान्तर श्रेढ़ी (Arithmetic progression) में लिखी हुई है।

अतः समान्तर श्रेढ़ी में अनुक्रम के प्रत्येक पद और उसके पूर्ववर्ती पद का अन्तर हमेशा समान रहता है। यह निश्चित संख्या (अन्तर) समान्तर श्रेढ़ी का सार्वअन्तर (Common difference) कहलाता है।

माना किसी अनुक्रम के पद $a_1, a_2, \ldots, a_n$ से व्यक्त किये जाते हैं। अब यदि ये समान्तर श्रेढ़ी में है तो प्रथम पद को छोड़कर प्रत्येक पद उसके पूर्ववर्ती पद का अन्तर निश्चित संख्या होती है। अर्थात् प्रथम पद को छोड़कर प्रत्येक पद पिछले पद में सार्व अन्तर जोड़ने पर प्राप्त होता है। सार्वअन्तर को यहाँ d माना जाए तो

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{n+1} &= a_n + d \end{aligned}$$

अतः $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{n+1} - a_n = d$ व्यापक रूप में $a_{n+1} - a_n = d$ जहाँ $n = 1, 2, 3, ...$ यहाँ हम यह कह सकते हैं कि यदि अनुक्रम का प्रथम पद a है और सार्व अन्तर d है तो समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+(n-1)d, ...$$

उपर्युक्त तथ्यों को हम निम्न उदाहरणों से स्पष्ट रूप से समझ सकते है।

उदाहरण-1. निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद एवं सार्व अन्तर लिखिए।

$$-5, -1, 3, 7, ...$$

हलः दी गई समान्तर श्रेढ़ी की व्यापक रूप से तुलना करने पर, स्पष्ट है कि यहाँ प्रथम पद $a = -5$

तथा सार्व अन्तर = क्रमागत दो पदों का अन्तर

अर्थात् $-5-(-1) = 4,\ \ 3-(-1) = 4$

उदाहरण-2. संख्याओं की निम्नलिखित अनुक्रमों के लिए समान्तर श्रेढ़ी की जाँच कीजिए।

(i) $4, 10, 16, 22, ...$

(ii) $-2, 2, -2, 2, -2, ...$

हलः (i) प्रथम अनुक्रम $4, 10, 16, 22, ...$ की समान्तर श्रेढ़ी होने की जाँच के लिए हम सार्वअन्तर ज्ञात करते हैं। अर्थात्

$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$

$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$

$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

अर्थात् प्रत्येक बार अन्तर '6' प्राप्त हो रहा है अतः यह अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी है तथा इसका सार्वअन्तर '6' है।

(ii) अनुक्रम $-2, 2, -2, 2, -2, ...$ की जाँच के लिए सार्वअन्तर ज्ञात करते हैं–

$$a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 4$$

$$a_3\ ?\ a_2\ ?\ ?\ 2?\ \ (2)?\ ?\ \ 4$$

$$a_4 - a_3 = 2 - (-2) = 4$$

अर्थात् प्रत्येक बार अन्तर समान प्राप्त नहीं हो रहा हैं अतः यह सूची समान्तर श्रेढ़ी नहीं है।

उदाहरण-3. निम्न समान्तर श्रेढ़ियों के सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए तथा उनके अगले चार पद भी लिखिए–

(i) $0, -3, -6, -9, ...$

(ii) $-1, \frac{-5}{6}, \frac{-2}{3}, ...$

हलः (i) माना समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, ...$ है। अतः यहाँ

$$a_2 - a_1 = -3 - 0 = -3$$

$$a_3 - a_2 = -6 - (-3) = -3$$

$$a_4 - a_3 = -9 - (-6) = -3$$

स्पष्ट है कि दो क्रमागत पदों में अन्तर –3' समान है। अतः सार्वअन्तर $'d' = -3$ अतः अगले चार पद निम्नप्रकार होंगे–

$$a_5 = a_4 + d = -9 + (-3) = -12$$

$$a_6 = a_5 + d = -12 + (-3) = -15$$

$$a_7 = a_6 + d = -15 + (-3) = -18$$

$$a_8 = a_7 + d = -18 + (-3) = -21$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(ii) माना समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, ...$ द्वारा व्यक्त की जाती है तब यहाँ

$$a_2 - a_1 = \frac{-5}{6} - (-1) = \frac{1}{6}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{-2}{3} - \frac{(-5)}{6} = \frac{-4+5}{6} = \frac{1}{6}$$

स्पष्ट है कि दो क्रमागत पदों में अन्तर '$\frac{1}{6}$' समान है। अतः सार्वअन्तर, $d = \frac{1}{6}$

इस प्रकार अगले चार पद निम्न होंगे।

$$a_4 = a_3 + d = \frac{-2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-4+1}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{-1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$a_6 = a_5 + d = \frac{-1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-2+1}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$a_7 = a_6 + d = \frac{-1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

प्रश्नमाला 5.1

1. निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d ज्ञात कीजिए–

   (i) $6, 9, 12, 15, \ldots$ (ii) $-7, -9, -11, -13, \ldots$

   (iii) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \ldots$ (iv) $1, -2, -5, -8, \ldots$

   (v) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$ (vi) $3, 1, -1, -3, \ldots$

   (vii) $3, -2, -7, -12, ...$

2. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d निम्नानुसार दिया हुआ है, तो उस श्रेढ़ी के प्रथम चार पद लिखिए।

   (i) $a = -1,\quad d = \frac{1}{2}$ (ii) $a = \frac{1}{3},\quad d = \frac{4}{3}$

   (iii) $a = 0.6,\quad d = 1.1$ (iv) $a = 4,\quad d = -3$

   (v) $a = 11,\quad d = -4$ (vi) $a = -1.25,\quad d = -0.25$

   (vii) $a = 20,\quad d = \frac{-3}{4}$

3. संख्याओं की निम्न लिखित सूचियों के लिए समान्तर श्रेढ़ी की जाँच कीजिए। यदि इनमें कोई समान्तर श्रेढ़ी है तो इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए तथा इसके अगले चार पद भी लिखिए।

   (i) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$ (ii) $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \ldots$

   (iii) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (iv) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$

   (v) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$ (vi) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

   (vii) $0.2, 0.22, 0.222, \ldots$ (viii) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$

5.03 समान्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद या 'व्यापक पद'

पिछले अनुच्छेद में हमने समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d द्वारा समान्तर श्रेढ़ी के क्रमिक पदों को ज्ञात करने के बारे में पढ़ा। यहाँ हम निम्न उदारहण पर विचार करते है।

माना किसी कर्मचारी का मूल मासिक वेतन ₹ 10000 है तथा उसे ₹ 300 की वार्षिक वेतन वृद्धि दी जा रही है। तो उसका वेतन 20 वें वर्ष में कितना हो जायेगा, यह पता लगाने के लिए हम प्रथम पाँच वर्ष की वेतन प्राप्ति की गणना करते हैं–

	प्रथम वर्ष में प्राप्त मासिक वेतन	= ₹ 10,000
	द्वितीय वर्ष में प्राप्त मासिक वेतन होगा	= ₹ (10000 + 300)
अर्थात्	दूसरे वर्ष में वेतन	= ₹ 10,300
इस प्रकार,	तृतीय वर्ष में मासिक वेतन	= ₹ (10300+300)
		= ₹ (10,000 + 300 + 300)
		= ₹ [10,000 + 2 × 300]
अर्थात्	तीसरे वर्ष में वेतन	= ₹ (10,000 + (3–1) × 300)
		= ₹ 10600
अतः	चतुर्थ वर्ष में मासिक वेतन	= ₹ (10600 = 300)
		= ₹ (10,000 + 300 + 300 + 300)
		= ₹ [10,000 + 3 × 300]
अर्थात्	चौथे वर्ष में वेतन	= ₹ (10,000 + (4–1) × 300)
		= ₹ 10,900
इसी प्रकार,	पाँचवे वर्ष में वेतन	= ₹ (10,900 + 300)
		= ₹ (10,000 + 300 + 300 + 300 + 300)
		= ₹ (10,000 + 4 × 300)
		= ₹ (10,000+(5–1) × 300)
		= ₹ 11,200

यहाँ हम वार्षिक वेतन के पाँच वर्षों के आँकडों को निम्न अनुक्रम में लिखते है,

10000, 10300, 10600, 10900, 11200 . . .

यह अनुक्रम एक समान्तर श्रेढ़ी है क्योंकि इसके क्रमिक पदों में सार्वअन्तर 300 है। उपर्युक्त चर्चा से स्पष्ट है कि हम पिछले वर्ष के वेतन में रु. 300 जोडकर वांछित वर्ष के वेतन की गणना कर सकते है।

वेतन गणना के उक्त प्रतिरूप से स्पष्ट है कि कर्मचारी का 20 वें वर्ष में वेतन निम्न प्रकार होगा

= 19 वें वर्ष का वेतन + ₹ 300

= ₹ (10,000 + (19–1) × 300 + 300

= ₹ (10,000 + (20–1) × 300)

अर्थात्, 20वें वर्ष में वेतन ? ₹ 15700

अतः स्पष्ट है कि जिस प्रकार हमने दूसरे, तीसरे, चौथे, पाँचवे एवं अन्त में 20 वें वर्ष में कर्मचारी का वेतन प्राप्त किया हैं, व्यापक रूप में हम इसे निम्न संबन्ध द्वारा लिख सकते है।

20वें वर्ष के लिए वेतन ? प्रथम वर्ष का वेतन + (20–1) × वार्षिक वेतन वृद्धि

इस उदाहरण से हम व्यापक रूप में यह प्रतिपादित कर सकते हैं कि यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है तो उसका nवाँ पद (व्यापक पद) a_n निम्न प्रकार लिखा जा सकता है– $a_n = a + (n-1)d$

मान लीजिए समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ के रूप में है तथा इसका $a_1 = a$ प्रथम पद तथा सार्वअन्तर d है तब,

दूसरा पद $\quad a_2 = a + d = a + (2-1)d$

तथा $\quad a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d$

या $\quad a_3 = a + (3-1)d$

इसी प्रकार n वाँ पद $\quad a_n = a_{n-1} + d = a + (n-1)d$

इसी प्रकार n वाँ पद $a_n = a_{n-1} + d = a + (n-1)d$

अर्थात् व्यापक पद = प्रथम पद + (पदों की संख्या–1) × सार्वअन्तर

यहाँ यह उल्लेख करना आवश्यक है कि यदि समान्तर श्रेढ़ी में m पद हैं अर्थात् अन्तिम पद a_m (या ℓ अंतिम पद) है तब अन्त से n वाँ पद निम्न प्रकार होगा–

अन्त से n वाँ पद $= a_{m?n?1}$

$= a + (m - n + 1 - 1)d$

$= a + (m - n)d$

यदि श्रेढ़ी के अन्तिम पद 'ℓ' को प्रथम पद एवं घटते सार्वअन्तर को $-d$ लें तो अन्त से n वे पद को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

अन्त से n वाँ पद = अंतिम पद $+(n-1)(-d)$

अर्थात् अन्त से nवाँ पद $= \ell - (n-1)d$

समान्तर श्रेढ़ी के व्यापक पद के बारे में निम्न उदारहणों के माध्यम से अवधारणा को और अधिक समझा जा सकता है।

उदाहरण-4. समान्तर श्रेढ़ी 10, 7, 4, ... का 30 वाँ एवं nवाँ (व्यापक पद) ज्ञात कीजिए।

हल: दी गयी समान्तर श्रेढ़ी है:

10, 7, 4, ...

इसका प्रथम पद $a = 10$

सार्वअन्तर $= d = -3$

अतः इस समान्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद a_n दिया जाता है

$$a_n = a + (n-1)d$$

इस प्रकार 30 वाँ पद $a_{30} = 10 + (30-1) \times (-3)$

$= 10 - 29 \times 3 = -77$

तथा व्यापक nवाँ पद $a_n = 10 + (n-1) \times (-3)$

$= 10 - 3(n-1) = 13 - 3n$

अतः अभीष्ट 30 वाँ पद $= -77$ एवं nवाँ व्यापक पद $= 13 - 3n$ है।

उदाहरण-5. समान्तर श्रेढ़ी 3, 15, 27, 39, ... का कौनसा पद 639 है ?

हल: दी गई समान्तर श्रेढ़ी है: 3, 15, 27, 39, ...

अतः प्रथम पद $a = 3$ तथा सार्वअन्तर $d = 12$ है माना nवाँ पद $= 639$ है अतः व्यापक पद

$$a_n = a + (n-1)d$$

यहाँ, $639 = 3 + (n-1) \times 12$

या $639 = 3 + 12n - 12$

या $648 = 12n$

या $n = \dfrac{648}{12} = 54$

अतः दी गई समान्तर श्रेढ़ी का 54 वाँ पद 639 है।

उदाहरण-6. समान्तर श्रेढ़ी 7, 13, 19, . . . , 205 में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई समान्तर श्रेढ़ी 7, 13, 19, . . . , 205 है। यहाँ प्रथम पद $a = 7,$ एवं सार्वअन्तर $d = 6$ है। माना nवाँ पद अंतिम है। तब $a_n = 205$.

इस प्रकार nवाँ पद $a_n = a + (n-1) \times d$

अर्थात् यहाँ $205 = 7 + (n-1) \times 6$

$$205 = 7 + 6n - 6$$

या $$204 = 6n$$

या $$n = \frac{204}{6} = 34$$

अतः दी गई समान्तर श्रेढ़ी में 34 पद है।

उदाहरण-7. एक समान्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 12 है और 50 वाँ पद 106 है। इसका 29 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद $= n$ वाँ पद

$$\therefore \quad a_n = a + (n-1)d$$

जहाँ a समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद एवं d सार्वअन्तर है।

यहाँ $a_3 = 12$ एवं $a_{50} = 106$

इसप्रकार $$a_3 = a + (3-1)d$$

या $$12 = a + 2d \quad \ldots(i)$$

तथा $$a_{50} = a + (50-1)d$$

या $$106 = a + 49d \quad \ldots(ii)$$

अब समीकरण (ii) में से (i) को घटाने पर

$$106 - 12 = 49d - 2d$$

या $$94 = 47d$$

या $$d = \frac{94}{47} = 2$$

d का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$12 = a + 2 \times 2$$

$$\Rightarrow \quad a = 8$$

इसलिए 29 वाँ पद $a_{29} = a + (29-1)\mathrm{d}$

$$= 8 + 28 \times 2 = 64$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी का 29 वाँ पद 64 होगा।

उदाहरण-8. क्या समान्तर श्रेढ़ी 3, 7, 11, ... का एक पद 184 है?

हलः दी गई समान्तर श्रेढ़ी 3, 7, 11, ... है। यहाँ प्रथम पद $a = 3,$ एवं सार्वअन्तर $d = 4$ है।

माना श्रेढ़ी का n वाँ पद 184 है

अतः $$a_n = a + (\mathrm{n}-1)\mathrm{d}$$

$$\therefore \quad 184 = 3 + (n-1) \times 4$$

या $$184 = 3 + 4n - 4$$

या $$185 = 4n$$

या $$n = \frac{185}{4} = 46\frac{1}{4}$$

चूँकि n का मान एक प्राकृत संख्या नहीं है। अतः 184 दी गई समान्तर श्रेढ़ी का पद नहीं हो सकता है।

उदाहरण-9. दो अकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से भाज्य है?

हलः हम जानते है कि दो अंको वाली (धनात्मक) सबसे छोटी संख्या जिसमें 7 का भाग जाता है, 14 है। इस प्रकार दो अंको वाली 7 से भाज्य संख्याएँ निम्न अनुक्रम में होगी

14, 21, 28, ..., 98

यह एक समान्तर श्रेढ़ी है जिसका प्रथम पद $a=14$ एवं सार्वअन्तर $d=7$ है।

माना समान्तर श्रेढ़ी में n पद है। तब n वाँ पद $a_n=98$ निम्न प्रकार दिया जाता है

$$a_n=a+(\mathrm{n}-1)\mathrm{d}$$

अर्थात् $98=14+(\mathrm{n}-1)\times 7$

या $98=14+7n-7$

या $91=7n$

या $n=\frac{91}{7}=13$

इस प्रकार दो अकों वाली 13 संख्याएँ ऐसी है जो 7 से भाज्य है।

उदाहरण-10. समान्तर श्रेढ़ी 3, 8, 13, ..., 253 के अन्तिम पद से 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ श्रेढ़ी का अन्तिम पद $\ell=253$ है। प्रथम पद $a=3$ एवं सार्वअन्तर $d=5$ है। इस प्रकार अन्तिम पद से 20 वाँ पद

$$=\ell-(20-1)d$$

$$=253-19\times 5=253-95=158$$

इस प्रकार अन्तिम पद से 20 वाँ पद 158 है।

उदाहरण-11. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज है?

हलः स्पष्टतः 10 और 250 के बीच 4 से विभाजित होने वाली प्रथम संख्या 12 है। जब हम 250 को 4 से विभाजित करते है, तो शेषफल 2 प्राप्त होता है। इसप्रकार 4 से विभाजित होने वाली अंतिम संख्या $250-2=248$ है। अर्थात् 4 से विभाजित होने वाली 10 और 250 के बीच वाली संख्याएँ निम्नांकित में समान्तर श्रेढ़ी बनाती है–

12, 16, ..., 248

अब इस श्रेढ़ी में 4 के गुणजों की संख्या ज्ञात करनी है। माना यह n है। तब $a_n=248$ अर्थात्

$$a_n=a+(n-1)d$$

या $248=12+(n-1)\times 4$

या $248=12+4n-4$

या $240=4n$

या $n=60$

अतः 10 और 250 के बीच में 4 के गुणज 60 होंगे।

5.04 समान्तर श्रेढ़ी के पदो का चयन

समान्तर श्रेढ़ी में स्थित संख्याएँ (सम या विषम पद) ज्ञात करने हेतु श्रेढ़ी के पदों का चयन, सुविधा को ध्यान में रखकर निम्न प्रकार किया जा सकता है।

संख्याएँ	पद
3	$a-d, a, a+d$
4	$a-3d, a-d, a+d, a+3d$
5	$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$
6	$a-5d, a-3d, a-d, a+d, a+3d, a+5d$

स्पष्ट है कि यदि पदों की संख्या विषम है, तो मध्य पद a तथा सार्वअन्तर d है और यदि पदों की संख्या सम है तो दो मध्यपद होंगे $a-d$ एवं $a+d$ तथा सार्वअन्तर $2d$ होगा। संख्या सम्बन्धित समस्याएँ निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट रूप से समझी जा सकती है।

उदाहरण-12. तीन संख्याएँ समान्तर श्रेढ़ी में हैं। यदि उनका योग –3 तथा गुणनफल 8 हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हलः : माना समान्तर श्रेढ़ी में ये तीन संख्याएँ निम्न है

$$a-d, a, a+d$$

दिया हुआ है कि संख्याओं का योग −3 है, अर्थात्

$$(a-d)+a+(a+d)=-3$$

या $\quad 3a=-3$

या $\quad a=-1$

यह भी दिया हुआ है कि संख्याओं का गुणनफल 8 है।

अतः $\quad (a-d)\times a\times(a+d)=8$

या $\quad (a^2-d^2)\times a=8$

यहाँ $a=-1$ रखने पर

$$[(-1)^2-d^2]\times(-1)=8$$

या $\quad d^2-1=8$

या $\quad d^2=9$

या $\quad d=\pm 3$

अतः a एवं d के मान रखने पर अभीष्ट संख्याएँ निम्न प्राप्त होती है। यदि $d=3$ तो $-1-3, -1, -1+3$ अर्थात् $-4, -1, 2$ और यदि $d=-3$ तो $-1+3, -1, -1-3$ अर्थात् $2, -1, -4$ अभीष्ट संख्याएँ प्राप्त होती है।

प्रश्नमाला 5.2

1. ज्ञात कीजिए।
   (i) समान्तर श्रेढ़ी $2, 7, 12, \ldots$ का 10 वाँ पद
   (ii) समान्तर श्रेढ़ी $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \ldots$ का 18 वाँ पद
   (iii) समान्तर श्रेढ़ी $9, 13, 17, 21, \ldots$ का 24 वाँ पद
2. हल कीजिए।
   (i) समान्तर श्रेढ़ी $21, 18, 15, \ldots$ का कौन सा पद −81 है ?
   (ii) समान्तर श्रेढ़ी $84, 80, 76, \ldots$ का कौन सा पद शून्य है ?
   (iii) क्या संख्याओं के अनुक्रम $5, 11, 17, 23, \ldots$ का कोई पद 301 है ?
   (iv) क्या समान्तर श्रेढ़ी $11, 8, 5, 2, \ldots$ का एक पद −150 हैं ?
3. यदि समान्तर श्रेढ़ी का छठा पद तथा 17 वाँ पद क्रमशः 19 तथा 41 हैं, तो 40 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
4. किसी समान्तर श्रेढ़ी के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और −8 हैं, तो इसका कौनसा पद शून्य होगा ?
5. किसी समान्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 16 है और 7 वाँ पद 5 वें पद से 12 अधिक है, तो समान्तर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।
6. तीन अंको वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य है ?
7. समान्तर श्रेढ़ी 10, 7, 4, ..., −62 का अंतिम पद से 11 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
8. समान्तर श्रेढ़ी 1, 4, 7, 10, ..., 88 में अन्त से 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
9. एक समान्तर श्रेढ़ी में 60 पद है। यदि उसका प्रथम पद तथा अंतिम पद क्रमशः 7 तथा 125 है, तो उसका 32 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
10. चार संख्याएँ समान्तर श्रेढ़ी में है। यदि संख्याओं का योग 50 तथा सबसे बड़ी संख्या, सबसे छोटी संख्या कीचार गुनी है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

5.05 समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग

MQ3I4E

इस अनुच्छेद में हम समान्तर श्रेढ़ी के योग का सूत्र प्राप्त करेंगे। इसकी आवश्यकता को समझने हेतु हम एक उदारहण लेते है। लता को जन्म दिन पर उसकी माँ 500 रु देती है। दूसरे, तीसरे, चौथे, पाँचवे जन्मदिवस पर क्रमशः 600, 700, 800, 900 रुपये माँ ने लता को दिये। यही क्रम उसके 18 वर्ष की उम्र तक चलता है, तो 18 वें जन्म दिन पर उसके पास एकत्र राशि की गणना सभी जन्मदिनों पर प्राप्त राशि को जोड़कर निकाली जा सकेगी, जो कि एक श्रमसाध्य प्रक्रिया है चूँकि 500, 600, 700, 800, . . . संख्याएँ समान्तर श्रेढ़ी में है अतः इस

प्रकार प्राप्त 18 पदों को जोड़ने के लिए अर्थात् समान्तर श्रेढ़ी के पदों का योग करने के लिए हम निम्न विधि से सूत्र प्राप्त करते है। इस सूत्र में उपस्थित राशियों के मान रखकर समान्तर श्रेढ़ी का योग आसानी से ज्ञात किया जा सकेगा।
माना समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a एव सार्वअन्तर d है तथा इसके n पदो का योगफल S_n है अतः समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों को इसप्रकार लिखते है कि

$$a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d$$

तब $$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + ... + \left[a+(n-2)d\right] + \left[a+(n-1)d\right] \quad ...(i)$$

पदो को विपरीत क्रम में लिखने पर योग में कोई अन्तर नहीं आता हैं अतः हम लिख सकते हैं कि

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + ... + (a+2d) + (a+d) + a \quad ...(ii)$$

(i) तथा (ii) के संगत पदों को जोड़ने पर

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + ... + [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d]$$ (चूँकि इसमें n पद है)

अतः $$2S_n = n[2a+(n-1)d]$$

या $$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

यह सूत्र समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद एवं सार्वअन्तर ज्ञात होने पर n पदों के योगफल को दर्शाता है।

यदि श्रेढ़ी में अन्तिम पद ℓ दिया हुआ है, तो सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ को निम्न रूप में भी लिख कर योगफल प्राप्त किया जा सकता है।

अर्थात् $$S_n = \frac{n}{2}[a+a+(n-1)d]$$

या $$S_n = \frac{n}{2}[a+\ell]$$ [चूंकि $\ell =$ अंतिम पद $= n$वाँ पद $= a+(n-1)d$ है]

इस प्रकार किसी समान्तर श्रेढ़ी में n पद है, तो $a_n = \ell$ अन्तिम पद होगा अतः

$$n \text{ पदों का योग } = S_n = \frac{n}{2} \text{ [प्रथम पद + अंतिम पद]}$$

यहाँ यह समझना आवश्यक है कि समान्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद, उसके प्रथम n पदों के योग और प्रथम$(n-1)$ पदों के योग के अन्तर के बराबर होता है।

अर्थात् $a_n = S_n - S_{n-1}$ है।

उपर्युक्त सूत्रों के प्रयोग से समान्तर श्रेढ़ी के पदों की योगफल आधारित समस्याओं का हल निम्न उदारहणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण-13. योगफल ज्ञात कीजिए

(i) समान्तर श्रेढ़ी $1, 4, 7, 10, ...$ के 20 पदों का

(ii) समान्तर श्रेढ़ी $2, 7, 12, ...$ के 10 पदों का

हलः (i) समान्तर श्रेढ़ी $1, 4, 7, 10, ...$ दी हुई है।
यहाँ प्रथम पद $a = 1$ तथा सार्वअन्तर $d = 3$ है

चूँकि n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ होता है।

अतः 20 पदों का योग $S_{20} = \frac{20}{2}[2\times1+(20-1)\times3]$

$= 10[2+57] = 590$

अतः अभीष्ट योगफल $= 590$ हैं

(ii) समान्तर श्रेढ़ी $2, 7, 12, ...$ दी हुई है।

यहाँ प्रथम पद $a = 2$ सार्वअन्तर $d = 5$ है। चूँकि n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ होता है

अतः 10 पदों का योगफल $S_{10} = \frac{10}{2}[2\times 2+(10-1)\times 5]$

या $S_{10} = 5[4+45] = 5= 49 = 245$

अतः अभीष्ट योगफल $= 245$.

उदाहरण-14. निम्नलिखित का योगफल ज्ञात कीजिए

(i) $34+32+30+....+10$

(ii) $(-5)+(-8)+(-11)+....+(-230)$

हलः (i) दी हुई श्रेढ़ी $34+32+30+....+10$ एक समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद $a = 34$, अन्तिम पद $\ell = a_n = 10$ तथा सार्वअन्तर $d = -2$ है।

अत : $a_n = a + (n-1)d$

या $10 = 34 + (n-1)(-2)$

या $10 = 34 - 2n + 2$

या $2n = 26$

या $n = 13$

श्रेढ़ी का योगफल $S_n = \frac{n}{2}[a+\ell]$

अतः $S_{13} = \frac{13}{2}[34+10] = 13\times 22 = 286$

(ii) दी हुई श्रेढ़ी $(-5)+(-8)+(-11)+...+(-230)$ एक समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद $a = -5$ तथा सर्वा अन्तर $d = -3$ एवं अन्तिम n वाँ पद $a_n = \ell = -230$ है

अतः $a_n = a + (n-1)d$

यहाँ $-230 = -5 + (n-1)\times(-3)$

या $-230 = -5 - 3n + 3$

या $3n = 228$

या $n = \frac{228}{3} = 76$

$\because$ $S_n = \frac{n}{2}[a+\ell]$

$\therefore$ $S_{76} = \frac{76}{2}[-5+(-230)] = 38\times(-235) = -8930$.

उदाहरण-15. समान्तर श्रेढ़ी $54, 51, 48, ...$ के कितने पदों का योगफल 513 होगा ?

हल: समान्तर श्रेढ़ी $54, 51, 48, ...$ का प्रथम पद $a = 54$ एवं सार्वअन्तर $d = -3$ है।

माना n पदों का योग $S_n = 513$ है तब समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

यहाँ $$513 = \frac{n}{2}[2\times 54 + (n-1)\times(-3)]$$

या $$513 = \frac{n}{2}[108 - 3n + 3]$$

या $$513 \times 2 = n(111 - 3n)$$

या $$3n^2 - 111n + 1026 = 0$$

या $$n^2 - 37n + 342 = 0$$

गुणनखण्ड करने पर

या $$n^2 - 18n - 19n + 342 = 0$$

या $$n(n-18) - 19(n-18) = 0$$

या $$(n-19)(n-18) = 0$$

या $$n = 19 \text{ एवं } n = 18$$

यहाँ सार्वअन्तर $d = -3$ (ऋणात्मक है)

एवं 19 वाँ पद $$= a_{19} = a + (n-1)d$$

$$= 54 + (19-1)(-3) = 0$$

यहाँ 19 वाँ पद शून्य है। अतः 18 पदों का योग एवं 19 पदों का योग बराबर एवं 513 होगा।

उदाहरण-16. समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 15 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिसका n वाँ पद $a_n = 95 - n$ है।

हल: चूँकि श्रेढ़ी का n वाँ पद $a_n = 9 - 5n$

अतः $$a_1 = 9 - 5\times 1 = 4$$

$$a_2 = 9 - 5\times 2 = -1$$

$$a_3 = 9 - 5\times 3 = -6$$

इस प्रकार प्राप्त संख्याओं की सूचि $4, -1, -6, ...$ प्राप्त होती है,

जो कि समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद $a = 4$ एवं सार्वअन्तर $d = -5$ है।

इस प्रकार इस श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

यहाँ $$S_{15} = \frac{15}{2}[2\times 4 + (15-1)\times(-5)]$$

$$= \frac{15}{2}[8 - 70] = -(15\times 31) = -465$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 15 पदों का योगफल -465 होगा।

उदाहरण-17. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो उसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ है कि $S_7 = 49$ एवं $S_{17} = 289$
समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग चूँकि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

यहाँ $$S_7 = \frac{7}{2}[2a + (7-1)d] = 49$$

तथा $$S_{17} = \frac{17}{2}[2a + (17-1)d] = 289$$

अतः उपर्युक्त दोनों समीकरणों को सरल रूप में लिखने पर प्रथम समीकरण

$$2a + 6d = \frac{49 \times 2}{7}$$

या $$a + 3d = 7 \qquad \ldots\text{(i)}$$

एवं द्वितीय समीकरण $$2a + 16d = \frac{289 \times 2}{17}$$

या $$a + 8d = 17 \qquad \ldots\text{(ii)}$$

समीकरण (i) में से (ii) को घटाने पर,

$$5d = 10$$

या $$d = 2$$

d का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$a + 3 \times 2 = 7$$

या $$a = 7 - 6$$

या $$a = 1$$

अतः a एवं d के मान समान्तर श्रेढ़ी के n पदों के योग के सूत्र में रखने पर n पदों का योग,

$$S_n = \frac{1}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2] = \frac{n}{2}[2 + 2n - 2] = n^2$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग n^2 है।

उदाहरण-18. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो पहला पद क्या है ? पहले दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है ? इसी प्रकार तीसरे, 10 वें और n वें पद ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ है कि समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $S_n = 4n - n^2$ है

अतः $n = 1$ पर $S_1 = 4 \times 1 - (1)^2 = 4 - 1 = 3$

अतः प्रथम पद 3 है।

प्रथम दो पदों के योग के लिए

$$S_2 = 4 \times 2 - (2)^2 = 8 - 4 = 4$$

अतः प्रथम दो पदों का योग 4 है।

इस प्रकार दूसरा पद $a_2 = S_2 - S_1 = 4 - 3 = 1$

अर्थात् श्रेढ़ी का दूसरा पद 1 है।

यहाँ पहले तीन पदों का योग $S_3 = 4 \times 3 - (3)^2 = 12 - 9 = 3$

अतः श्रेढ़ी का तीसरा पद $\quad a_3 = S_3 - S_2 = 3 - 4 = -1$

इस प्रकार समान्तर श्रेढ़ी $3, 1, = 1, ...$ प्राप्त हुई है। इसका सार्वअन्तर $d = a_3 - a_2 = -1 - 1 = -2$ होगा।

$$n \text{ वाँ पद या} = a_n = a + (n-1)d$$

यहाँ प्रथम पद $a = 3$, सार्वअन्तर $d = -2$, है इस प्रकार

$$a_n = 3 + (n-1) \times (-2) = 3 - 2n + 2 = 5 - 2n$$

अर्थात् n वाँ पद $a_n = 5 - 2n$ है। अतः 10 वें पद के लिए $n = 10$ रखने पर

$$a_{10} = 5 - 2 \times 10 = 5 - 20 = -15$$

इस प्रकार 10 वाँ पद -15 होगा।

उदाहरण-19. 250 से 1000 तक 3 से भाज्य प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः : स्पष्ट है कि 250 से 1000 के बीच 3 से भाज्य संख्याएँ 252, 255, 258, . . ., 999 है जो कि एक समान्तर श्रेढ़ी है।

इसका प्रथम पद $a = 252$, अन्तिम पद $a_n = \ell = 999$ एवं सार्वअन्तर $d = 3$ है

इस प्रकार यहाँ $\quad a_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad 999 = 252 + (n-1) \times 3$

या $\quad 999 = 252 + 3n - 3$

या $\quad 999 = 249 + 3n$

या $\quad 3n = 750$

या $\quad n = 250$

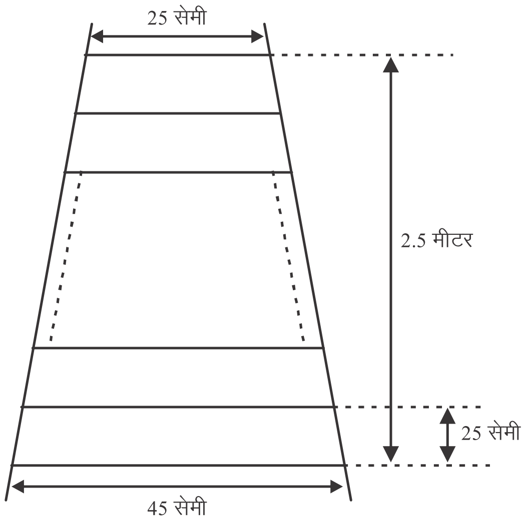
अतः अभीष्ट योगफल $\quad S_n = \dfrac{n}{2}(a + \ell)$

अर्थात् $\quad S_{250} = \dfrac{250}{2}(252 + 999)$

$$= 125 \times 1251 = 156375$$

इस प्रकार अभीष्ट योगफल 156375 होगा।

उदाहरण-20. एक सीढ़ी के क्रमागत डंडे परस्पर 25 सेमी. की दूरी पर है। (नीचे दिए गए चित्र में देखिए) डंडो की लम्बाई एक समान रूप से घटती जाती है तथा सबसे निचले डंड़े की लम्बाई 45 सेमी. है और सबसे ऊपर वाले डंड़े की लम्बाई 25 सेमी. है। यदि ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दूरी 2.5 मी. है, तो डंड़ों को बनाने के लिए कितनी लम्बाई की लकड़ी लेना आवश्यक होगा?



हल: दिया गया है कि सीढ़ी के दो क्रमागत डंड़ों के बीच की दूरी 25 सेमी है तथा सबसे ऊपरी एवं सबसे निचले डंडो के मध्य दूरी 2.5 मी. अर्थात् 250 सेमी. है।

अतः सीढ़ी में डंडों की संख्या $= \frac{250}{25} + 1 = 10 + 1 = 11$

यह भी दिया हुआ है कि डंड़ों की लम्बाई नीचे से ऊपर जाने पर एक समान रूप से घटती जाती है तथा सबसे निचले डंड़े की लम्बाई 45 सेमी एवं सबसे ऊपर के डंड़े की लम्बाई 25 सेमी है। इस प्रकार स्पष्ट है कि डंड़ों की लम्बाई समान्तर श्रेढ़ी में है जिसका प्रथम पद $a = 45$ सेमी. एवं 11 वाँ पद (अन्तिम पद) $\ell = 25$ सेमी है।

अतः डंड़ों को बनाने वाली लकड़ी की कुल लम्बाई = समान्तर श्रेढ़ी के 11 पदों का योग

$\because$ $$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$$

अतः $$S_{11} = \frac{11}{2}(45 + 25) \text{ सेमी}$$

$$= 11 = 35 = 385 \text{ सेमी.}$$

अर्थात् लकड़ी की कुल लम्बाई 3.85 मी. होगी।

प्रश्नमाला 5.3

1. निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ियों का योगफल ज्ञात कीजिए।

   (i) $1, 3, 5, 7, ..., 12$ पदों तक

   (ii) $8, 3, -2, ..., 22$ पदों तक

   (iii) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, ..., 11$ पदों तक

2. निम्नलिखित का योगफल ज्ञात कीजिए।

   (i) $3 + 11 + 19 +, .., + 803$ (ii) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 +, .., + 84$

3. पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

   (i) समान्तर श्रेढ़ी $9, 17, 25, ...$ के कितने पद लिए जाये कि उनका योगफल 636 हो ?

   (ii) समान्तर श्रेढ़ी $63, 60, 57, ...$ के कितने पद लिए जाये कि उनका योगफल 693 हों?

4. निम्न श्रेढ़ियों के पहले 25 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद दिया हैं :

   (i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 7 - 3n$

5. एक समान्तर श्रेढ़ी के पहले 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसमें द्वितीय तथा तृतीय पद क्रमशः 14 तथा 18 है।
6. किसी समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम एवं अन्तिम पद क्रमशः 17 और 350 है। यदि सार्वअन्तर 9 हो तो समान्तर श्रेढ़ी में पदों की संख्या कितनी है तथा उनका योग क्या है ?
7. 1 से 1000 के बीच 3 से भाज्य सभी विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।
8. एक समान्तर श्रेढ़ी में प्रथम पद 8 है,n वाँ पद 33 है। तथा पहले n पदों का योग 123 है तो n तथा सार्वअन्तर d को ज्ञात कीजिए।
9. 280 रु. की राशि चार पुरस्कार देने के लिए रखी गई है। यदि प्रथम पुरस्कार के बाद का प्रत्येक पुरस्कार, अपेन्ठीक पहले पुरस्कार से 20 रु. कम हो, तो प्रत्येक पुरस्कार की राशि ज्ञात कीजिए।
10. एक टेलीविजन सेटों का निर्माता, तीसरे वर्ष 600 टी.वी. तथा सातवें वर्ष में 700 टी.वी. सेटों का उत्पादन करता है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए

    (i) प्रथम वर्ष में उत्पादन (ii)10 वें वर्ष में उत्पादन (iii) 7 वर्षों में कुल उत्पादन

विविध प्रश्नमाला–5

1. दो समान्तर श्रेढ़ियों का सार्वअन्तर समान है। उनमें से एक का पहला पद 8 है और दूसरे का 3 है। उनके 30 वें पदों के बीच का अन्तर है:

(क) 11 (ख) 3 (ग) 8 (घ)5

2. यदि $18, a, b, ?3$ समान्तर श्रेढ़ी में है तो $a ? b ?$

(क) 19 (ख) 7 (ग) 11 (घ) 15

3. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का 7 वाँ तथा 13 वाँ पद क्रमशः 34 तथा 64 है, तो इसका 18 वाँ पद है:

(क) 89 (ख) 88 (ग) 87 (घ) 90

4. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 2 एवं सार्वअन्तर 8 है तथा n पदों का योग 90 है, तो n का मान होगा:

(क) 3 (ख) 4 (ग) 5 (घ) 6

5. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल $3n^2+5n$ है, तो 164 इसका कौनसा पद है:

(क) 12 वाँ (ख) 15 वाँ (ग) 27 वाँ (घ) 20 वाँ

6. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदो का योगफल S_n है तथा $S_{2n}=3S_n$ है, तो $S_{3n}:S_n$ होगा:

(क) 10 (ख) 11 (ग) 6 (घ) 4

7. एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम एवं अंतिम पद क्रमशः 1 तथा 11 है। यदि इसके पदों का योगफल 36 है, तो इसके पदों का संख्या होगी:

(क) 5 (ख) 6 (ग) 9 (घ) 11

8. समान्तर श्रेढ़ी $3, 5, 7, 9, ..., 201$ का अन्त से 5 वाँ पद लिखिए।

9. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद $\frac{4}{5}, a, 2$ है, तो a का मान लिखिए।

10. प्रथम 1000 धनपूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।

11. क्या संख्याओं का अनुक्रम $5, 11, 17, 23, ...$ में कोई पद 299 है ?

12. समान्तर श्रेढ़ी $20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, 17\frac{3}{4}, ...$ का कौनसा पद, प्रथम ऋणात्मक पद है?

13. चार संख्याएं समान्तर श्रेढ़ी में है। यदि उनका योग 20 तथा उनके वर्गो का योग 120 हो, तो संख्याऐं ज्ञात कीजिए।

14. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $\frac{3n^2}{2}+\frac{5n}{2}$ हो, तो उसका 25 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

15. एक पंक्ति के मकानों को क्रमागत रूप सें संख्या 1 से 49 तक अंकित किया गया है। दर्शाइये कि x का एक मान ऐसा है कि x से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओं का योग उसके बाद आने वाले मकानों की संख्याओं के योग के बराबर है। x का मान ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप $a, a+d, a+2d, ...$ है जहाँ a प्रथम पद एवं d सार्व अन्तर है।
2. संख्याओं का अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी होता है यदि अंतर $a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, ...$ समान मान प्राप्त हो। यह एक समान्तर श्रेढ़ी का सार्वअन्तर कहलाता है।
3. समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद (n वाँ पद) $a_n=a+(n-1)d$ होता है, जहाँ a प्रथम पद एवं d सार्वअन्तर है।
4. समान्तर श्रेढ़ी $a, a+d, a+2d, ...+(n-1)d, ...$ के n पदो का योगफल $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

या $S_n=\frac{n}{2}[a+\ell]$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ ℓ ? अंतिम पद $=n$ वाँ पद $=a+(n-1)d$ है।

5. समान्तर श्रेढ़ी के पदों का चयन निम्नलिखित रूप में करना चाहिये।

पदों की संख्या	पद
3	$a-d, a, a+d$
4	$a-3d, a-d, a+d, a+3d$
5	$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$

6. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के पदों का योग दिया हुआ है, तो श्रेढ़ी का n वाँ पदें निम्नांकित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 5.1

1. (i) $a=6, d=3$ (ii) $a=-7, d=-2$ (iii) $a=\frac{3}{2}, d=-1$ (iv) $a=1, d=-3$

(v) $a=-1, d=\frac{5}{4}$ (vi) $a=3, d=-2$ (vii) $a=3, d=-5$

2. (i) $-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$ (iii) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9$ (iv) $4, 1, -2, -5$

(v) $11, 7, 3, -1$ (vi) $-1.25, -1.50, -1.75, -2.00$ (vii) $20, \frac{77}{4}, \frac{74}{4}, \frac{71}{4}$

3. (i) हाँ, $d=\frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}$ (ii) हाँ, $d=0; \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$ (iii) नहीं (iv) नहीं

(v) हाँ, $d=\sqrt{2}; \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}, \sqrt{128}$ (vi) हाँ, $d=a; 5a, 6a, 7a, 8a$

(vii) नहीं (viii) हाँ, $d=\sqrt{2}; 3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}, 3+7\sqrt{2}$

प्रश्नमाला 5.2

1. (i) 47 (ii) $35\sqrt{2}$ (iii) 101 2. (i) 35 वाँ (ii) 22 वाँ (iii) नहीं (iv) नहीं

3. 87 4. 5 वाँ 5. 4, 10, 16, 22 6. 128 7. −32 8. 55

9. 69 10. 5, 10, 15, 20

प्रश्नमाला 5.3

1. (i) 144 (ii) -979 (iii) $\frac{33}{20}$ 2. (i) 40703 (ii) $1046\frac{1}{2}$ 3. (i) 12 (ii) 21, 22

4. (i) 1375 (ii) -800 5. 5610 6. 38, 6973 7. 83667 8. $n=6, d=5$

9. रु. 100, रु. 80, रु. 60, रु. 40 10. (i) 550 (ii) 775 (iii) 4375

विविध प्रश्नमाला–5

1. (घ) 2. (घ) 3. (क) 4. (ग) 5. (ग) 6. (ग) 7. (ख)

8. 193 9. $\frac{7}{5}$ 10. 500500 11. हाँ 12. 28 वाँ 13. 2, 4, 6, 8 या 8, 6, 4, 2 है

14. 76 15. $x=35$

06

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios)

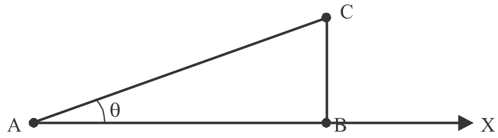
प्रस्तावना (Introdution)

कक्षा 9 में आपने न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के बारे में अध्ययन किया है। इस अध्याय में हम समकोण त्रिभुज के विशिष्ट कोण $0^o, 30^o, 45^o, 60^o$ एवं 90^o के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करेंगे।

6.01 कोण 0^o के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान

माना परिक्रमी रेखा CA, प्रारम्भिक स्थिति CX से प्रारम्भ कर वामावर्त (धनात्मक) दिशा में अतिअल्प कोण $\angle XCA = \theta$ बनाती हैं। बिन्दु A से CX पर लम्ब AB डालते है। जिसका परिमाण बहुत अल्प होता है। जैसे–जैसे रेखा CA स्थिर रेखा CX की ओर अग्रसर होती है। वैसे–वैसे CB की लम्बाई शून्य की ओर अग्रसर होती है। इस स्थिति में रेखा CA और CB सम्पाती हो जाती हैं और $\angle XAC = \theta = 0^\circ$ तथा $CA = CB \quad \therefore AB = 0$ (शून्य)

अत: 0^o के संगत त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान निम्न होगे



आकृति 6.01

$$\sin 0^\circ = \frac{CB}{CA} = \frac{0}{CA} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{AB}{CA} = \frac{CA}{CA} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{0}{AB} = 0 \qquad \cot 0^\circ = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{0} = \infty$$

$$\sec 0^\circ = \frac{CA}{AB} = \frac{CA}{AA} = 1 \qquad \text{cosec}\, 0^\circ = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{0} = \infty$$

6.2 कोण 90^o के त्रिकोणमितीय अनुपात

ΔCBA से स्पष्ट है कि जैसे–जैसे θ बढ़ता जाता है। वैसे–वैसे CB की लम्बाई घटती जाती है और बिन्दु B बिन्दु C के निकट आता जाता है अतंत: जब $\theta, 90^\circ$ के बराबर हो जाए तो बिन्दु B बिन्दु C के संपाती हो जायेगा इस स्थिति में CB=0 तथा CA=AB

$$\sin 90^\circ = \frac{AB}{CA} = \frac{AB}{AB} = 1$$

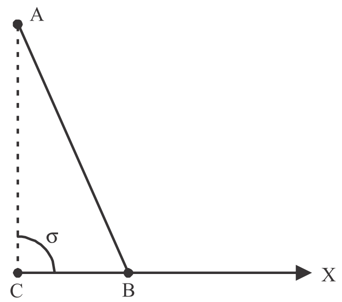
$$\cos 90^\circ = \frac{CB}{CA} = \frac{0}{AB} = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{0} = \infty$$

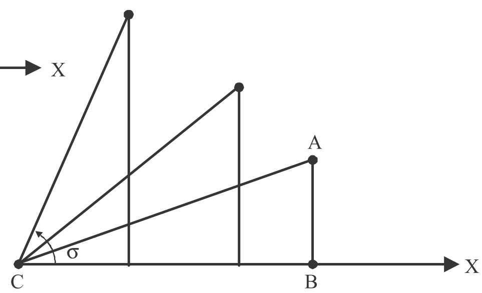
$$\cot 90^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{0}{AB} = 0$$

$$\sec 90^\circ = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{0} = \infty$$

$$\cos ec 90^\circ = \frac{CA}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$



आकृति 6.02

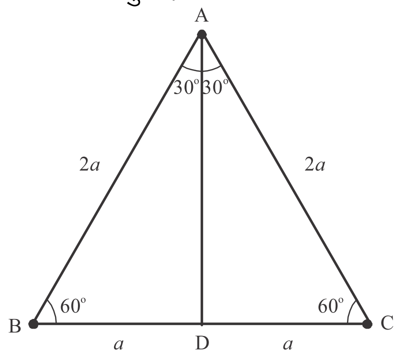


आकृति 6.03

6.03 कोण 30° तथा कोण 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of 30° and 60°)

एक समबाहु ΔABC की रचना करते है, जिसका प्रत्येक भुजा की लम्बाई $2a$ है। समबाहु Δ का प्रत्येक कोण 60° होता है। शीर्ष A से भुजा BC पर लम्ब AD है। AD, $\angle A$ का समद्विभाजक होगा तथा बिन्दु D भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ $BD = DC = a$ तथा $\angle BAD = 30^\circ$



आकृति 6.04

अत: ΔABC में कोण D समकोण है तथा कर्ण $AB = 2a$, तथा $BD = a$

ΔABD में बौधायन प्रमेय से,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$(2a)^2 = AD^2 + a^2$$
$$AD^2 = 4a^2 - a^2$$
$$AD = \sqrt{3}a$$

कोण 30° के त्रिकोणमितीय अनुपात

समकोण ΔADB में आधार $(AD) = \sqrt{3}a$, लम्ब $(BD) = a$ कर्ण $(AB) = 2a$ तथा $\angle DAB = 30^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}.a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}.a}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{2a}{a} = 2$$

कोण 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात

समकोण ΔADB में आधार $(BD) = a$, लम्ब $(AD) = a.\sqrt{3}$ कर्ण $(AB) = 2a$ तथा $= ABD = 60^\circ$

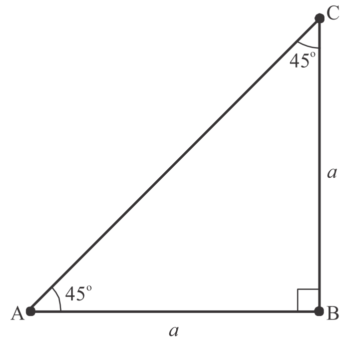
$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a.\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{a.\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{2a}{a} = 2 \qquad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{AB}{AB} = \frac{2a}{a.\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

6.04 कोण 45° के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of 45°)

एक समकोण ΔABC भी रचना करते है जिसका कोण B समकोण है तथा $\angle A = 45^\circ$ हो, तो ΔABC में



आकृति 6.05

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$45^\circ + 90^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 45^\circ$$

$\therefore \quad \angle A = \angle C$

$\therefore \quad AB = BC$

ΔABC मे बौधायन प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$AC = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

ΔABC में, $\angle A = 45^\circ$, आधार $(AB) = a$, लम्ब $(BC) = a$, कर्ण $(AC) = \sqrt{2}a$

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \qquad \cot 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2} \qquad \cos ec 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणी

कोण (डिग्री / रेडियन) त्रिकोणमितीय अनुपात	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cosec σ	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

उदाहरण-1. $\tan^2 60^\circ + 3\cos^2 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan^2 60^\circ + 3\cos^2 30^\circ$ (त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान रखने पर)

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 + 3\times\frac{3}{4}$$

$$= 3 + \frac{9}{4} = \frac{12+9}{4} = \frac{21}{4}$$

उदाहरण-2. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

उदाहरण-3. सिद्ध कीजिए कि $4\sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ = 2\sec^2 60^\circ - \operatorname{cosec}^2 90^\circ$

हल: बायाँ पक्ष $(L.H.S.) = 4\sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ$

$$= 4.\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3\times\frac{1}{2}.1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

दायाँ पक्ष $(R.H.S.) = 2\sec^2 60^\circ - \operatorname{cosec}^2 90^\circ$

$$= 2.\left(\sqrt{2}\right)^2 - (1)^2 = 2\times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$\therefore L.H.S. = R.H.S.$

उदाहरण-4. $\dfrac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\dfrac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}\right] = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4(3-1)} = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{8}$$

उदाहरण-5. सिद्ध कीजिए $3\tan^2 30^\circ - \frac{4}{3}\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 45^\circ + \frac{4}{3}\sin^2 90^\circ = \frac{1}{3}$

हल: बायाँ पक्ष $(L.H.S.) = 3\tan^2 30^\circ - \frac{4}{3}\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 45^\circ + \frac{4}{3}\sin^2 90^\circ$

$$= 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4}{3}(1)^2 = 3.\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3}.\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}.(2) + \frac{4}{3}$$

$= 1 - 1 - 1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$ दाया पक्ष $(R.H.S.)$

उदाहरण.6. यदि $\tan 3x = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए। $(x < 90^\circ)$

हलः दिया है, $\tan 3x = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$

$$\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

या $\tan 3x = 1$ या $\tan 3x = \tan 45^\circ$

या $3x = 45^\circ$ या $x = 15^\circ$

उदाहरण-7. यदि $\sin(A+B) = 1$ तथा $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ यहाँ $0^\circ < (A+B) \leq 90^\circ$, $A > B$ हो, तो A तथा B के मान ज्ञात कीजिए।

हलः दिया है $\sin(A+B) = 1$

या $\sin(A+B) = \sin 90^\circ$

या $A + B = 90^\circ$ . . . (1)

तथा $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

या $\cos(A-B) = \cos 30^\circ$

या $A - B = 30^\circ$ . . . (2)

समीकरण (1) व (2) समीकरण को जोडने पर

$$(A+B) + (A-B) = 90 + 30^\circ$$

$2A = 120^\circ$ या $A = 60^\circ$

A का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$60^\circ + B = 90^\circ$$

$$B = 30^\circ$$

$\therefore$ $A = 60^\circ, B = 30^\circ$

उदाहरण.8. $\dfrac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \cos ec 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\dfrac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \cos ec 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} = \left(\frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{4-3\sqrt{3}}\right)$$

(अंश व हर में $\left(4-3\sqrt{3}\right)$ से गुणा करने पर)

$$=\frac{-\left(4-3\sqrt{3}\right)\left(4-3\sqrt{3}\right)}{(4)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-\left(4-3\sqrt{3}\right)^2}{16-27}$$

$$=\frac{-\left(16+27-24\sqrt{3}\right)}{-11}=\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

$$\therefore \qquad \frac{\sin 30^\circ+\tan 45^\circ-\operatorname{cos}ec 45^\circ}{\sec 30^\circ+\cos 60^\circ+\cot 45^\circ}=\frac{45-24\sqrt{3}}{11}$$

प्रश्नमाला 6.1

निम्न के मान ज्ञात कीजिए:

1. $2\sin 45^\circ \cos 45^\circ$
2. $\cos 45^\circ \cos 60^\circ-\sin 45^\circ \sin 60^\circ$
3. $\sin^2 30^\circ+2\cos^2 45^\circ+3\tan^2 60^\circ$
4. $3\sin 60^\circ-4\sin^3 60^\circ$
5. $\dfrac{5\cos^2 60^\circ+4\sin^2 30^\circ+\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ}$
6. $4\cot^2 45^\circ-\sec^2 60^\circ+\sin^2 60^\circ+\cos^2 90^\circ$
7. $\dfrac{4}{\cot^2 30^\circ}+\dfrac{1}{\sin^2 30^\circ}-\cos^2 45^\circ$
8. $\dfrac{\tan^2 60^\circ+4\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ}{3\sec^2 30^\circ+\operatorname{cos}ec^2 60^\circ-\cot^2 30^\circ}$
9. $\dfrac{\sin 30^\circ-\sin 90^\circ+2\cos 0^\circ}{\tan 30^\circ \tan 60^\circ}$
10. $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$
11. निम्न में x का मान ज्ञात कीजिए:

    (i) $\cos x=\cos 60^\circ \cos 30^\circ+\sin 60^\circ \sin 30^\circ$

    (ii) $\sin 2x=\sin 60^\circ \cos 30^\circ-\cos 60^\circ \sin 30^\circ$

    (iii) $\sqrt{3}\tan 2x=\sin 30^\circ+\sin 45^\circ \cos 45^\circ+2\sin 90^\circ$

सिद्ध कीजिए:

12. $\dfrac{\cos 30^\circ+\sin 60^\circ}{1+\cos 60^\circ+\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
13. $4\cot^2 45^\circ-\sec^2 60^\circ-\sin^2 30^\circ=-\dfrac{1}{4}$

14. $4\sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ = 2\sec^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 90^\circ$

15. $\cos ec^2 45^\circ \sec^2 30^\circ \sin^3 90^\circ \cos 60^\circ = \frac{4}{3}$

16. $\frac{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ} = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{\tan 60^o - \tan 45^\circ}$

17. $2\left(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ\right) - 6\left(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ\right) = 6$

18. $\left(\sec^2 30^\circ + \cos ec^2 45^\circ\right)\left(2\cos 60^\circ + \sin 90^\circ + \tan 45^\circ\right) = 10$

19. $\left(1 - \sin 45^\circ + \sin 30^\circ\right)\left(1 + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ\right) = \frac{7}{4}$

20. $\cos^2 0^\circ - 2\cot^2 30^\circ + 3\cos ec^2 90^\circ = 2\left(\sec^2 45^\circ - \tan^2 60\right)$

21. यदि $x = 30^\circ$ हो, तो सिद्ध कीजिए:

(i) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ (ii) $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

(iii) $\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$ (iv) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

22. यदि $A = 60^\circ$ और $B = 30^\circ$ हो तो सिद्ध कीजिए:

$$\cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

विविध प्रश्नमाला–6

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 5 तक)

1. $\tan^2 60^\circ$ का मान है

(क) 3 (ख) $\frac{1}{3}$ (ग) 1 (घ) ∞

2. $2\sin^2 60^\circ \cos 60^\circ$ का मान होगा

(क) $\frac{4}{3}$ (ख) $\frac{5}{2}$ (ग) $\frac{3}{4}$ (घ) $\frac{1}{3}$

3. यदि $\cos ec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ हो, तो θ का मान है

(क) $\frac{\pi}{4}$ (ख) $\frac{\pi}{3}$ (ग) $\frac{\pi}{2}$ (घ) $\frac{\pi}{6}$

4. $\cos^2 45^\circ$ का मान होगा

(क) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ख) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ग) $\frac{1}{2}$ (घ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. यदि $\theta = 45^\circ$ हो, तो $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ का मान है

(क) 0 (ख) 1 (ग) 2 (घ) ∞

11. $\sin^2 60^\circ \cot^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. $4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए $\frac{1-\cos^2\theta}{2-\sin^2\theta} = \frac{3}{5}$

14. सिद्ध कीजिए $3\left(\tan^2 30^\circ + \cot^2 30^\circ\right) - 8\left(\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ\right) = 0$

15. $4\left(\sin^4 30^\circ + \cos 60^\circ\right) - 3\left(\cos^2 45^\circ - \sin^2 90^\circ\right) = \frac{15}{4}$

16. $\frac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

17. $2\left(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ\right) - 6\left(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ\right) = 6$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 6.1

(1) 1 **(2)** $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **(3)** $10\frac{1}{4}$ **(4)** 0 **(5)** $\frac{67}{12}$ **(6)** $\frac{3}{4}$

(7) $\frac{13}{6}$ **(8)** $\frac{18}{7}$ **(9)** $\frac{3}{2}$ **(10)** $\sqrt{3}$

(11) **(i)** 30° **(ii)** 15° **(iii)** 30°

विविध प्रश्नमाला—6

(1) क (2) ग (3) ख (4) ग (5) ख

(14) $\frac{1}{4}$ (15) 0

HQV69C

07

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometric Indentities)

MR52AZ

7.01 प्रस्तावना (Introduction)

हमने पूर्व अध्याय में त्रिकोणमितीय अनुपापों एवं उनमें पारस्परिक सम्बन्धों में अध्ययन किया है। इस अध्याय में त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन करेंगे।

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकायें:

त्रिकोणमितीय सर्वसमिका त्रिकोणमितीय सम्बन्धित कोणों के सभी मानों के लिए सत्य होती है। यहाँ निम्न सर्वसमिकाओं की उत्पत्ति पर विचार करते हैं।

आकृतिनुसार, ΔABC में $\angle B$ समकोण है। कोण θ के लिए, BC लम्ब, AB आधार व AC कर्ण होगा।

अतः $$BC^2 + AB^2 = AC^2 \qquad \ldots(1)$$

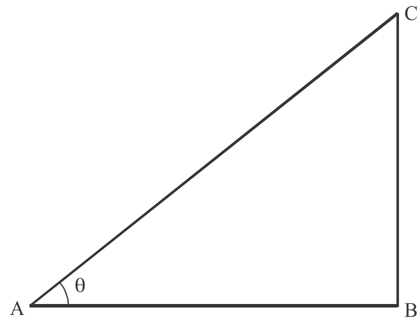
समीकरण (1) के प्रत्येक पद को AC^2 से भाग देने पर

$$\frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \ldots(2)$$



आकृति 7.01

यह सभी θ, जहाँ $0^o \le \theta \le 90^o$ के लिए सत्य होता है।

यह एक सर्वसमिका है,

अब समीकरण (1) के प्रत्येक पद को AB^2 से भाग देने पर

$$\frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AB^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$(\tan\theta)^2 + 1 = (\sec\theta)^2$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \ldots(3)$$

अब समीकरण (1) के प्रत्येक पद को BC^2 से भाग देने पर

$$\frac{BC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\left(\frac{BC}{BC}\right)^2+\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$1+(\cot\theta)^2=(\operatorname{cosec}\theta^2)$$

$$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta \quad \ldots(\text{iv})$$

उपरोक्त सर्वसमिकाओं को निम्न प्रकार लिख सकते हैं–

1. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

   या $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

   या $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

2. $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

   या $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$

   या $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$

3. $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

   या $\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$

   या $\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2-1$

सारणी

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\operatorname{cosec}\theta$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. सिद्ध किजिए कि $\cot\theta+\tan\theta=\operatorname{cosec}\theta\sec\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\cot\theta+\tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta}$$

$= \operatorname{cosec}\theta \cdot \sec\theta$ = RHS दक्षिण पक्ष

उदाहरण-2. सिद्ध किजिए कि $(1+\tan^2\theta)(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1$

हल: LHS (वाम पक्ष) $= (1+\tan^2\theta)(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

$$= (1+\tan^2\theta)(1-\sin^2\theta)$$

$$= \sec^2\theta \cos^2\theta$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta$$

$= 1 =$ RHS (दक्षिण पक्ष)

उदाहरण-3. सिद्ध किजिए कि $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $= \frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta}$

$$= \frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta} = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$= 2\sec^2\theta$ = RHS (दक्षिण पक्ष)

उदाहरण-4. सिद्ध किजिए कि $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

अंश व हर को $\sqrt{1+\cos\theta}$ से गुणा करने पर

$$\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)} \times \frac{(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ = RHS दक्षिण पक्ष

उदाहरण-5. सिद्ध किजिए कि $\left(\sec\theta-\tan\theta\right)^2=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\left(\sec\theta-\tan\theta\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$$=\frac{\left(1-\sin\theta\right)^2}{\cos^2\theta}=\frac{\left(1-\sin\theta\right)^2}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\left(1-\sin\theta\right)\left(1-\sin\theta\right)}{\left(1-\sin\theta\right)\left(1+\sin\theta\right)}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

उदाहरण-6. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\left(1+\cos\theta\right)^2}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\cos\theta}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{1+\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{1+1+2\cos\theta}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}=\frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{2\left(1+\cos\theta\right)}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}=\frac{2}{\sin\theta}=2\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=2\operatorname{cosec}\theta=\text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

उदाहरण-7. सिद्ध कीजिए $\dfrac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}=\tan\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\dfrac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}$

$$=\frac{\sin\theta\left(1-2\sin^2\theta\right)}{\cos\theta\left(2\cos^2\theta-1\right)}$$

$$= \frac{\sin\theta\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta\right]}{\cos\theta\left[2\cos^2\theta - \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\right]} \quad \left(\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right)$$

$$= \frac{\sin\theta\left[\cos^2\theta - \sin^2\theta\right]}{\cos\theta\left[\cos^2\theta - \sin^2\theta\right]} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$= \tan\theta = \text{RHS}$ (दक्षिण पक्ष)

उदाहरण-8. सिद्ध कीजिए कि $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

हलः LHS (वाम पक्ष) $= \frac{1+\sec A}{\sec A}$

$$= \frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} = \frac{\cos A+1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1}$$

$$= \frac{1+\cos A}{1}$$

$$= \frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{1-\cos A}$$ {अंश व हर में $(1-\cos A)$ से गुणा करने पर}

$$= \frac{(1)^2 - (\cos A)^2}{1-\cos A} = \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$$

$= \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = \text{RHS}$ (दक्षिण पक्ष) $\left(\because\ 1-\cos^2 A = \sin^2 A\right)$

उदाहरण-9. सिद्ध कीजिए कि $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

हलः LHS (वाम पक्ष) $= \cos^4\theta - \sin^4\theta$

$$= \left(\cos^2\theta\right)^2 - \left(\sin^2\theta\right)^2$$

$= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \qquad \because\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$= 1\cdot\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \qquad \because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$= 1\cdot\left(1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta\right) = 1 - 2\sin^2\theta = \text{RHS}$ (दक्षिण पक्ष)

उदाहरण-10. यदि $\sin\theta + \cos\theta = p$ और $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = q$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $q\left(p^2 - 1\right) = 2p$

हलः LHS (वाम पक्ष) $= q\left(p^2 - 1\right)$

p व q का मान रखने पर $= \left(\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta\right)\left[\left(\sin\theta + \cos\theta\right)^2 - 1\right]$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1\right]$$

$$= \left(\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)[1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1]$$

$$= \left[\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta \cdot \cos\theta}\right] \times (2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= 2[\sin\theta + \cos\theta] = 2p = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

उदाहरण-11. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1} = \dfrac{1 + \cos A}{\sin A}$

हल: LHS (वाम पक्ष) $= \dfrac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

$$= \frac{(\cot A + \operatorname{cosec} A) - (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1} \qquad (\because \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1)$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A + \cot A) - [(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)]}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A + \cot A)[1 - (\operatorname{cosec} A - \cot A)]}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A + \cot A)[\cot A - \operatorname{cosec} A + 1]}{(\cot A - \operatorname{cosec} A + 1)}$$

$$= \operatorname{cosec} A + \cot A$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1 + \cos A}{\sin A} = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

उदाहरण-12. सिद्ध कीजिए कि $\left(\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

हल: LHS (वाम पक्ष) $= \dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \dfrac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A}$

$$= \left[\frac{\sec A}{\operatorname{cosec} A}\right]^2 = \left[\frac{1/\cos A}{1/\sin A}\right]^2 = \left[\frac{1}{\cos A} \times \frac{\sin A}{1}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2 = [\tan A]^2 = \tan^2 A = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

अब $\left[\dfrac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right]^2 = \left[\dfrac{1 - \dfrac{\sin A}{\cos A}}{1 - \dfrac{\cos A}{\sin A}}\right]^2 = \left[\dfrac{\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A}}{\dfrac{\sin A - \cos A}{\sin A}}\right]^2$

$$=\left[\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}\times\frac{\sin A}{\sin A-\cos A}\right]^2=\left[-\frac{(\sin A-\cos A)}{\cos A}\times\frac{\sin A}{(\sin A-\cos A)}\right]^2$$

$$=\left[-\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2=[-\tan A]^2=\tan^2 A=\text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

प्रश्नमाला 7.1

1. $\angle\theta$ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec\theta$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

2. त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin\theta, \sec\theta, \tan\theta$ को $\cot\theta$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

निम्नलिखित को सर्वसमिकाओं की सहायता से सिद्ध कीजिए।

3. $\cos^2\theta+\cos^2\theta\cot^2\theta=\cot^2\theta$

4. $\sec\theta(1-\sin\theta)(\sec\theta+\tan\theta)=1$

7. $\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta\sec^2\theta$

6. $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$

7. $\sqrt{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}=\tan\theta+\cot\theta$

8. $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$

9. $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=2\sec\theta$

10. $\dfrac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=1$

11. $\cot\theta-\tan\theta=\dfrac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

12. $\cos^4\theta+\sin^4\theta=1-2\cos^2\theta\sin^2\theta$

13. $(\sec\theta-\cos\theta)(\cot\theta+\tan\theta)=\tan\theta\sec\theta$

14. $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{\cot^2\alpha-1}=\tan^2\alpha$

15. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

16. $\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

17. $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\tan\theta+\cot\theta$

18. $\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta)=\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta$

19. $\sin^2\theta\cos\theta+\tan\theta\sin\theta+\cos^3\theta=\sec\theta$

20. $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

21. $(\sin A+\text{cosec}A)^2+(\cos A+\sec A)^2=7+\tan^2 A+\cot^2 A$

22. $\sin^8\theta-\cos^8\theta=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)$

23. $\sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}=\cot\theta+\text{cosec}\,\theta$

24. $\dfrac{(1+\cot\theta+\tan\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sec^3\theta-\text{cosec}^3\theta}=\sin^2\theta\cos^2\theta$

27. $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{2}{1-2\cos^2\theta}=\dfrac{2}{2\sin^2\theta-1}$

26. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$

27. $(\text{cosec}A-\sin A)(\sec A-\cos A)=\dfrac{1}{\tan A+\cot A}$

28. $\dfrac{\cos^2\theta}{1-\tan\theta}+\dfrac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=1+\sin\theta\cos\theta$

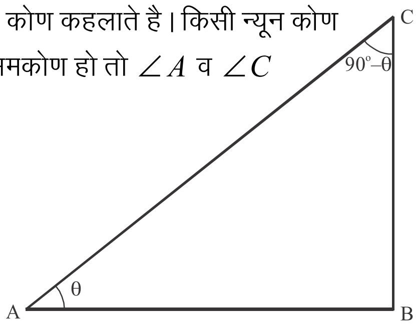
29. यदि $\sec\theta+\tan\theta=P$ हो, तो सिद्ध करो कि $\dfrac{P^2-1}{P^2+1}=\sin\theta$

30. यदि $\dfrac{\cos A}{\cos B}=m$ तथा $\dfrac{\cos A}{\sin B}=n$ हो, तो सिद्ध कीजिए $(m^2+n^2)\cos^2 B=n^2$

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

पूरक कोण

यदि दो कोणों का योग 90° हो तो दोनों कोण एक दूसरे के पूरक कोण कहलाते है। किसी न्यून कोण θ का पूरक कोण $(90^\circ-\theta)$ होगा। समकोण ΔABC में $\angle B$ समकोण हो तो $\angle A$ व $\angle C$ का योफल समकोण होगा।



आकृति 7.02

$$\angle A+\angle C=90^\circ$$

यदि $\angle A=\theta$ तो

$\angle C=90^\circ-\theta$ होगा

अतः θ व $90^\circ-\theta$ परस्पर पूरक कोण होंगे

समकोण ΔABC में कोण θ के लिए भुजा BC तथा AB क्रमशः लम्ब व आधार होंगे।

समकोण ΔABC में $(90^\circ-\theta)$ के लिए भुजा AB तथा BC क्रमशः लम्ब व आधार होंगे।

अतः ΔABC में को $(90^\circ-\theta)$ व θ के लिए त्रिकोणमिती अनुपात

$$\sin(90^\circ-\theta)=\frac{AB}{AC} \qquad \sin\theta=\frac{BC}{AC}$$

$$\cos\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{BC}{AC} \qquad \cos\theta=\frac{AB}{AC}$$

$$\tan\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{AB}{BC} \qquad \tan\theta=\frac{BC}{AB}$$

$$\cot\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{BC}{AB} \qquad \cot\theta=\frac{AB}{BC}$$

$$\sec\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{AC}{BC} \qquad \sec\theta=\frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec}\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{AC}{AB} \qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{AC}{BC}$$

उपर्युक्त समीकरणों की तुलना करने पर

$$\sin\left(90^\circ-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cos\left(90^\circ-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\tan\left(90^\circ-\theta\right)=\cot\theta \qquad \cot\left(90^\circ-\theta\right)=\tan\theta$$

$$\sec\left(90^\circ-\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta \qquad \operatorname{cosec}\left(90^\circ-\theta\right)=\sec\theta$$

जब $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$

टिप्पणी: हम कह सकते हैं कि

किसी कोण का $\sin =$ उसके पूरक कोण का $\cos$

किसी कोण का $\tan =$ उसके पूरक कोण का $\cot$

किसी कोण का $\sec =$ उसके पूरक कोण का cosec

इनका विलोम भी सत्य है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-13. $\dfrac{\tan 49^\circ}{\cot 41^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan 49^\circ = \cot\left(90^\circ-49^\circ\right)=\cot 41^\circ \qquad \{\tan\theta=\cot(90-\theta)\}$

$$\therefore \quad \frac{\tan 49^\circ}{\cot 41^\circ}=\frac{\cot 41^\circ}{\cot 41^\circ}=1$$

उदाहरण-14. $\sin^2 50^\circ+\sin^2 40^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\because \quad 40^\circ = 90^\circ - 50^\circ$

$$\therefore \quad \sin 40^\circ = \sin\left(90^\circ-50^\circ\right)=\cos 50^\circ$$

अतः $\sin^2 50^\circ+\sin^2 40^\circ=\sin^2 50^\circ+\cos^2 50^\circ=1 \qquad \left(\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\right)$

उदाहरण-15. $\tan 39^\circ - \cot 51^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan 39^\circ = \cot\left(90-39^\circ\right)=\cot 51^\circ$

अतः $\tan 39^\circ - \cot 51^\circ = \cot 51^\circ - \cot 51^\circ = 0$

उदाहरण-16. $\sec 50^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \operatorname{cosec} 50^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sec 50^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \operatorname{cosec} 50^\circ$

$$= \operatorname{cosec} 40^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \operatorname{cosec}\left(90^\circ - 40^\circ\right)$$

$$= \operatorname{cosec} 40^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \sec 40^\circ$$

$$= \frac{1}{\sin 40^\circ} \cdot \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \cdot \frac{1}{\cos 40^\circ} = 1 + 1 = 2$$

उदाहरण-17. सिद्ध कीजिए $\tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan 70^\circ \tan 75^\circ = 1$

हल: वाम पक्ष (LHS) $= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan 70^\circ \tan 75^\circ$

$$= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan\left(90^\circ - 20\right) \tan\left(90^\circ - 15^\circ\right)$$

$$= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \cdot \cot 20^\circ \cdot \cot 15^\circ$$

$$= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \cdot \frac{1}{\tan 20^\circ \tan 15^\circ} = 1 \text{ (RHS)}$$

उदाहरण-18. यदि $\tan 2A = \cot\left(A - 18^\circ\right)$ हो तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\tan 2A = \tan\left[90 - \left(A - 18^\circ\right)\right]$$

$$\tan 2A = \tan\left(108 - A\right)$$

$$\therefore \quad 2A = 108^\circ - A$$

$$3A = 108^\circ \Rightarrow A = 36^\circ$$

उदाहरण-19. निम्न समीकरण से x का मान ज्ञात कीजिए?

$$\operatorname{cosec}\left(90^\circ - \theta\right) + x \cos\theta \cot\left(90^\circ - \theta\right) = \sin\left(90^\circ - \theta\right)$$

हल:

$$\operatorname{cosec}\left(90^\circ - \theta\right) + x \cos\theta \cot\left(90^\circ - \theta\right) = \sin\left(90^\circ - \theta\right)$$

$$\sec\theta + x\cos\theta\tan\theta = \cos\theta$$

$$x\sin\theta = \cos\theta - \sec\theta \qquad \left(\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$x = \frac{\cos\theta - \sec\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta} \qquad \left(\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$= -\left[\frac{1 - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right] \qquad \left(\because 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta\right)$$

$$= -\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \qquad x = -\tan\theta$$

प्रश्नमाला 7.2

निम्नलिखित के मान ज्ञात करो।

1. (i) $\frac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$ (ii) $\frac{\operatorname{cosec} 32^\circ}{\sec 58^\circ}$ (iii) $\frac{\tan 10^\circ}{\cot 80^\circ}$ (iv) $\frac{\cos 19^\circ}{\sin 71^\circ}$

2. (i) $\operatorname{cosec} 25^\circ - \sec 65^\circ$ (ii) $\cot 34^\circ - \tan 56^\circ$

   (iii) $\frac{\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ} - \frac{\sin 54^\circ}{\cos 36^\circ}$ (iv) $\sin\theta\cos\left(90^\circ - \theta\right) + \cos\theta\sin\left(90^\circ - \theta\right)$

3. (i) $\sin 70^\circ \sin 20^\circ - \cos 20^\circ \operatorname{cosec} 70^\circ$ (ii) $\frac{2\cos 67^\circ}{\sin 23^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ} - \cos 60^\circ$

4. (i) $\left(\frac{\sin 35^\circ}{\cos 55^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\cos 55^\circ}{\sin 35^\circ}\right)^2 - 2\cos 60^\circ$ (ii) $\left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 63^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\cos 63^\circ}{\sin 27^\circ}\right)^2$

5. (i) $\cot 12^\circ \cot 38^\circ \cot 52^\circ \cot 60^\circ \cot 78^\circ$ (ii) $\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 30^\circ \tan 45^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ$

6. निम्न को 0° से 45° के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपदों के पदों में व्यक्त कीजिए

   (i) $\sin 81^\circ + \sin 71^\circ$ (ii) $\tan 68^\circ + \sec 68^\circ$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

7. $\sin 65^\circ + \cos 25^\circ = 2\cos 25^\circ$

8. $\sin 35^\circ \sin 55^\circ - \cos 35^\circ \cos 55^\circ = 0$

9. $\frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} + \frac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ} - 8\sin^2 30^\circ = 0$

10. $\sin\left(90^\circ - \theta\right)\cos\left(90^\circ - \theta\right) = \frac{\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}$

11. $\frac{\cos\left(90^\circ - \theta\right)\cos\theta}{\tan\theta} + \cos^2\left(90^\circ - \theta\right) = 1$

12. $\frac{\tan\left(90^\circ - \theta\right)\cot\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta} - \cos^2\theta = 0$

13. $\frac{\cos\left(90^\circ - \theta\right)\sin\left(90^\circ - \theta\right)}{\tan\left(90^\circ - \theta\right)} = \sin^2\theta$

14. $\frac{\sin\theta\cos\left(90^\circ - \theta\right)\cos\theta}{\sec\left(90^\circ - \theta\right)} + \frac{\cos\theta\sin\left(90^\circ - \theta\right)\sin\theta}{\operatorname{cosec}\left(90^\circ - \theta\right)} = \sin\theta\cos\theta$

17. यदि $\sin 3\theta = \cos\left(\theta - 6^\circ\right)$ यहाँ 3θ और $\left(\theta - 6^\circ\right)$ न्यूकोण है तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि $\sec 5\theta = \operatorname{cosec}\left(\theta - 36^\circ\right)$ यहाँ 5θ एक न्यूकोण है तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि A, B और C किसी त्रिभुज ABC के अन्तः कोण हो तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\left(\frac{B + C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$

18. यदि $\cos 2\theta = \sin 4\theta$ हो और 2θ व 4θ न्यूनकोण हो तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 7.1

1. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$, $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$, $\mathrm{cosec}\,\theta = \dfrac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$

2. (i) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$, $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$

प्रश्नमाला 7.2

1. (1) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 1

2. (i) 0 (ii) 0 (iii) 0 (iv) 1

3. (i) 0 (ii) 1 / 2

4. (i) 1 (ii) 2

5. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

6. (i) $\cos 9^\circ + \cos 19^\circ$ (ii) $\cot 22^\circ + \cos ec 22^\circ$

15. $\theta = 24^\circ$

16. $\theta = 21^\circ$

18. $\theta = 15^\circ$

08

ऊँचाई और दूरी (Height and Distance)

8.01 प्रस्तावना (Introduction)

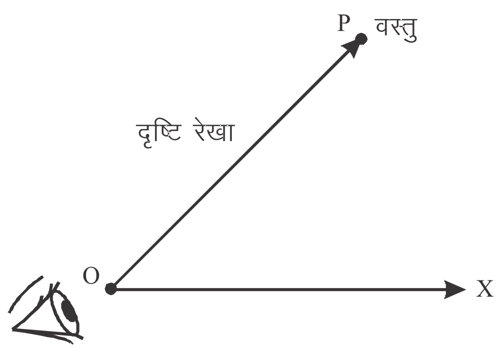
पूर्व अध्यायों में हमने त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं तथा पूरक कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों का अध्ययन किया है।

इस अध्याय में त्रिकोणमितीय अनुपातों का प्रयोग कर ऊँचाई–दूरी पर आधारित सरल समस्याओं का अध्ययन करेंगे हमारा उद्देश्य त्रिकोणमिति की सहायता से ऊँचाई एंव दूरी की वास्तविक माप के बिना दो बिन्दुओं के मध्य दूरी या किसी वस्तु/मीनार कीऊँचाई ज्ञात करना है। इससे पूर्व हम कुछ परिभाषाओं का अध्ययन करेंगे।

8.02 महत्वपूर्ण परिभाषाएँ

दृष्टि रेखा (Line of sight)

प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु को मिलाने वाली रेखा को दृष्टि रेखा कहते है। अर्थात्जब हम वस्तु को देखते है, तो हमारी आँख व वस्तु को जोड़ने वाली रेखा को दृष्टि रेखा कहते है।

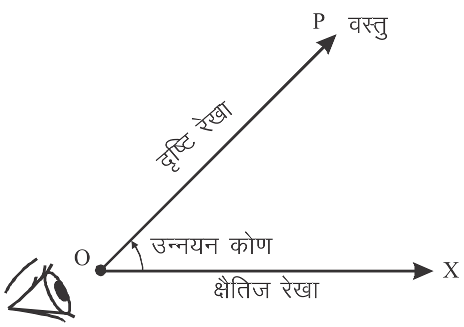


आकृति 8.01

आकृति 8.01 में आँख बिन्दु O पर हो और वस्तु की स्थिति बिन्दु P हों तब OP दृष्टि रेखा होगी।

उन्नयन कोण (Angle of Elevation)

यदि कोई वस्तु आँख से ऊपर हो, तो दृष्टि रेखा, क्षैतिज रेखा के साथ जो कोण बनाती है। उसे उन्नयन या उन्नति या उन्नताश कोण कहते है।



आकृति 8.02

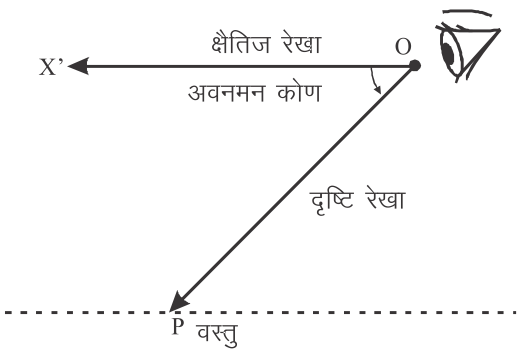
आकृति 8.02 में, आँख बिन्दु O पर हो और वस्तु (Object) की स्थिति बिन्दु P हो तब OP दृष्टि रेखा जो क्षैतिज रेखा OX से कोण $\angle XOP$ बनाती हो तो

उन्नयन कोण $=\angle XOP$

नोटः उन्नयन कोण को वस्तु की कोणीय ऊँचाई भी कहते हैं।

अवनमन कोण (Angle of depression)

यदि कोई वस्तु (Object), आँख से नीचे हो तो दृष्टि रेखा क्षैतिज रेखा के साथ जो कोण बनाती है। उसे अवनमन या अवनति कोण कहते है।



आकृति 8.03

आकृति 8.03 में, आँख बिन्दु O पर और वस्तु (Object) की स्थिति बिन्दु P हो तब OP दृष्टि रेखा है। जो क्षैतिज रेखा OX^1 से कोण X^1OP बनाती है तो अवनमन कोण $=\angle X^1OP$

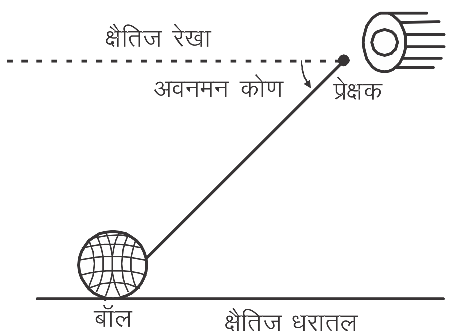
ऊँचाई व दूरी की समस्याओं को हल करते समय निम्न बिन्दुओं को ध्यान में रखना चाहिए

(i) सर्वप्रथम प्रश्न को ध्यानपूर्वक पढ़ने के उपरान्त आकृति बनाकर समकोण त्रिभुज का निर्माण करते हैं।

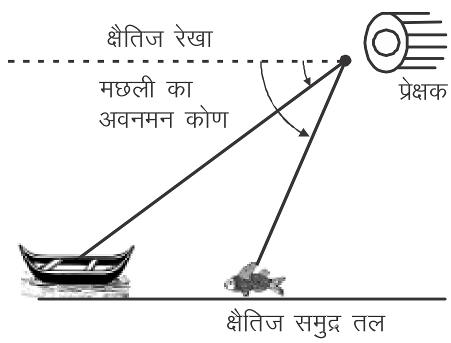
(ii) समकोण त्रिभुज में ज्ञात कोण के त्रिकोणमिति अनुपातों (sin, cos, tan आदि) को ज्ञात भुजाओं के पदो में व्यक्त करते हैं।

नोटः पूरक कोण–यदि दो कोणों का योग 90° हो पूरक कोण कहलाते हैं।

वस्तुओं द्वारा प्रेक्षक की आँख पर अन्तरित अवनमन कोण के आकृति सहित उदाहरण



आकृति 8.04



आकृति 8.05

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक स्तम्भ के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण आधार तल के एक बिन्दु पर 60° है। यदि यह बिन्दु स्तम्भ के आधार बिन्दु से $10\sqrt{3}$ मीटर की दूरी पर हो तो स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हलः माना AB एक स्तम्भ है जिसके आधार से $10\sqrt{3}$ मीटर की दूरी पर स्थित बिन्दु C से स्तम्भ के शिखर का उन्नयन कोण 60° माना स्तम्भ AB की ऊँचाई h मीटर है।

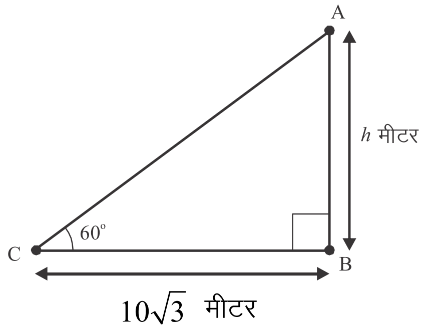
समकोण ΔABC में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{10\sqrt{3}}$$

या $\quad h = 10\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

या $\quad h = 10 \times 3 = 30$



आकृति 8.06

अतः स्तम्भ AB की ऊँचाई = 30 मीटर है।

उदाहरण-2. 50 मीटर ऊँचे पुल से किसी नाव का अवनमन कोण 30° है। नाव की पुल से क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः माना नाव की पुल से क्षैतिज दूरी x मीटर है

दिया हुआ है $\quad$ अवनमन कोण 30° है।

यहाँ $PQ = 50$ मीटर

$\angle XPO = \angle POQ = 30^\circ$ (एकान्तर कोण)

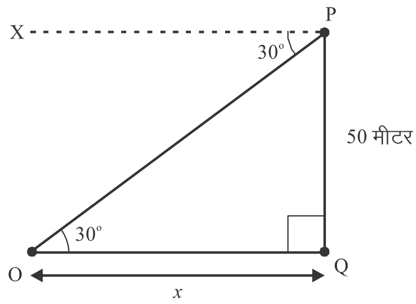
समकोण ΔPQO में

$\because \quad \tan 30^\circ = \frac{PQ}{OQ}$

$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{x}$

या $\quad x = 50\sqrt{3} = 50 \times 1.732 \quad (\because \sqrt{3} = 1.732)$

या $\quad x = 86.60$



आकृति 8.07

अतः नाव की पुल से क्षैतिज दूरी 86.60 मीटर है।

उदाहरण-3. एक समतल जमीन पर 1.5 मीटर लम्बे छात्र की छाया की लम्बाई 1 मीटर है तथा उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 5 मीटर है तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

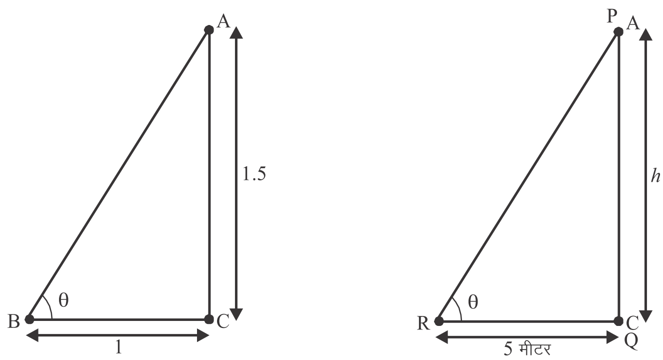
हल : दिया हुआ है: $\quad$ छात्र की लम्बाई AC = 1.5 मीटर

छात्र की छाया BC = 1 मीटर

समकोण ΔACB में,

$$\tan\theta = \frac{AC}{BC} \qquad \tan\theta = \frac{1.5}{1}$$

या $\quad \tan\theta = 1.5 \qquad \ldots(1.5)$



आकृति 8.08

अब दिया हुआ है कि

मीनार की छाया की लम्बाई $BC = 5$ मीटर है।

माना मीनार की ऊँचाई $PQ = \hbar$

समकोण PQR में,

या $\tan\theta = \dfrac{PQ}{QR}$

या $\dfrac{h}{5} = 1.5$ [$\because \tan\theta = 1.5$ (समीकरण (1) से)]

या $h = 5 \times 1.5$

या $h = 7.5$

अतः मीनार की ऊँचाई $= 7.5$ मीटर है।

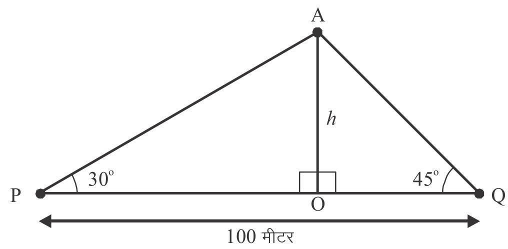
उदाहरण-4. 100 मीटर चौड़ी एक नदी के मध्य में एक छोटा टापू है। इस टापू पर एक ऊँचा वृक्ष है। नदी के विपरीत किनारों पर दो बिन्दु P व Q इस प्रकार स्थित है कि P, Q और वृक्ष एक रेखा में है। यदि P और Q से वृक्ष की चोटी का उन्नयन कोण 30° और 45° हों, तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना OA वृक्ष है जिसकी ऊँचाई h मीटर है।

आकृति में $PQ = 100$ मीटर

$\angle APO = 30^\circ$ और $\angle AQO = 45^\circ$ है

अब समकोण ΔPOA और ΔQOA में



आकृति 8.09

$$\tan 30^\circ = \frac{OA}{OP} \text{ और } \tan 45^\circ = \frac{OA}{OQ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{OP} \text{ और } 1 = \frac{h}{OQ}$$

$$OP = h\sqrt{3} \text{ और } OQ = h$$

$\therefore$ आकृति से $PQ = OP + OQ$

$$100 = h\sqrt{3} + h$$

$$100 = h\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$\therefore \quad h = \frac{100}{\sqrt{3}+1} = \frac{100}{\left(\sqrt{3}+1\right)} \times \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$h = \frac{100\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

$$h = 50\left(\sqrt{3}-1\right) = 36.6 \text{ मीटर} \qquad \left(\because \sqrt{3} = 1.732\right)$$

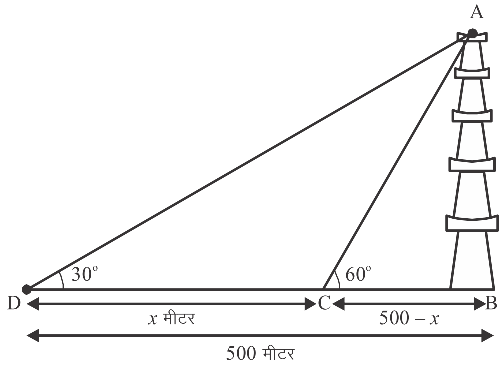
उदाहरण-5. एक कार एक सीधी सड़क पर चल रही है जो एक मीनार की ओर जाती है मीनार से 500 मीटर की दूरी पर कार के ड्राइवर ने मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° पाया। 10 सेकण्ड तक कार को मीनार की ओर चलाने के बाद ड्राइवर ने मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° पाया। कार की चाल ज्ञात कीजिए।

हलः माना मीनार की ऊँचाई $AB = h$ मीटर और 10 सैकण्ड में कार द्वारा तय दूरी $(DC) = x$ मीटर है।

$BD = 500$ मीटर

$\therefore$ $BC = (500 - x)$ मीटर

$\angle ADC = 30^\circ, \angle ACB = 60^\circ$



आकृति 8.10

समकोण ΔABD में

$$\frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{h}{500} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \hbar = \frac{500}{\sqrt{3}} ...(1)$$

पुनः समकोण ΔABC में $\frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$

या $\frac{h}{500 - x} = \sqrt{3} \Rightarrow h = (500 - x)\sqrt{3} ...(2)$

समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{500}{\sqrt{3}} = (500 - x)\sqrt{3} \Rightarrow 500 = (500 - x)\sqrt{3}.\sqrt{3}$$

या $500 = (500 - x).3$

या $500 = 1500 - 3x$

या $3x = 1500 - 500 = 1000$

या $x = \frac{1000}{3}$

10 सेकण्ड में कार द्वारा तय दूरी $= \frac{1000}{3}$ मीटर

$\therefore$ 1 मिनट में कार द्वारा तय दूरी $= \frac{1000 \times 60}{3 \times 10} = 2000$ मीटर

$= 2$ किलोमीटर

अतः कार की चाल $= 2$ किलोमीटर / मिनट

उदाहरण-6 किसी मीनार के आधार से a और b दूरी पर एक ही रेखा पर स्थित दो बिन्दु क्रमशः C व D से देखने पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण एक दूसरे के पूरक हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{ab}$ है।

हलः माना मीनार की ऊँचाई $AB = \hbar$ मीटर तथा C व D बिन्दु इस प्रकार है कि $BC = a, BD = b$

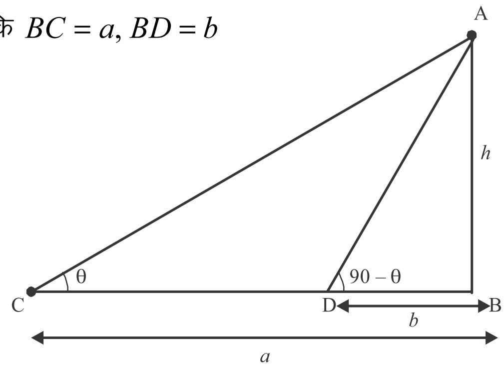
यदि $\angle ACB = \theta$ तो $\angle ADB = 90^\circ - \theta$

समकोण ΔABC में $\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{\hbar}{a} ..(1)$

पुनः समकोण ΔABD में,

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{AB}{BD}$$

या $\cot\theta = \frac{\hbar}{b} ...(2)$



आकृति 8.11

समीकरण (1) व समीकरण (2) का गुणा करने पर

$$\tan\theta \times \cot\theta = \frac{h}{a} \times \frac{h}{b}$$

या $$1 = \frac{h^2}{ab} \Rightarrow h^2 = ab$$

या $$h = \sqrt{ab}$$

उदाहरण-7. एक 80 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने–सामने समान लम्बाई के दो खम्बे लगे हुये हैं। इन दोनों खम्बों के मध्य सड़क के एक बिन्दु से खम्बों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° व 30° है। खम्बों की ऊँचाई तथा खम्बों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः माना BC व DE दो समान ऊँचाई के खम्बे है। जिनकी ऊँचीई मीटर है। इन खम्बों के मध्य सड़क BD पर एक बिन्दु से खम्बों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° व 30°है।

अतः $\angle CAB = 60^\circ$ और $\angle EAD = 30^\circ$, $BC = DE = h$ मी. $BD = 80$ मीटर

माना $AD = x$ मीटर

$\therefore$ $AB = BD - AD = (80 - x)$ मीटर

समकोण ΔADE में

$$\tan 30^\circ = \frac{DE}{AD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x}$$

$$\therefore \quad h = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad ...(1)$$

पुनः समकोण ΔABC में,

$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{(80 - x)}$$

$$h = (80 - x)\sqrt{3} \text{ मीटर } ...(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) से

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(80 - x)$$

$$x = \sqrt{3}.\sqrt{3}(80 - x)$$

$$x = 3(80 - x)$$

$$x = 240 - 3x$$

$$\Rightarrow \quad x + 3x = 240$$

$$4x = 240$$

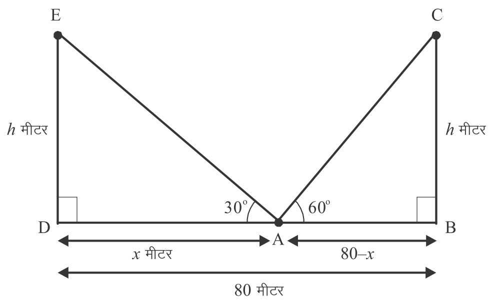
$$x = \frac{240}{4} = 60 \text{ मीटर}$$

समीकरण (1) से

$$h = \frac{60}{\sqrt{3}} = \frac{60}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3}$$

$h = 20\sqrt{3}$ मीटर

अतः खम्बों की ऊँचाई $(h) = 20\sqrt{3}$ मीटर एवं बिन्दु की खम्बों से दूरी 20 मीटर व 60 मीटर है।



आकृति 8.12

उदाहरण-8. एक झील के पानी की सतह से h मीटर ऊँचाई पर स्थित एक बिन्दु से एक बादल का उन्नयन कोण α है। तथा झील के पानी में उसकी छाया का अवनमन कोण β है। सिद्ध कीजिए कि पानी के तल से बादल की ऊँचाई $\dfrac{h(\tan\beta + \tan\alpha)}{\tan\beta - \tan\alpha}$ मीटर है।

हलः माना झील की सतह AB है। तथा प्रेक्षण बिन्दु P है

दिया है $AP = h$ मीटर माना बादल की स्थिति c है तथा c' झील में बादल की छाया है $\therefore CB = C'B$

माना PM बिन्दु P से CB पर लम्ब है दिया हुआ है कि

$\angle CPM = \alpha$ तथा $\angle MPC' = \beta$ माना कि $CM = x$

स्पष्ट है कि $CB = CM + MB = CM + PA = x + h$

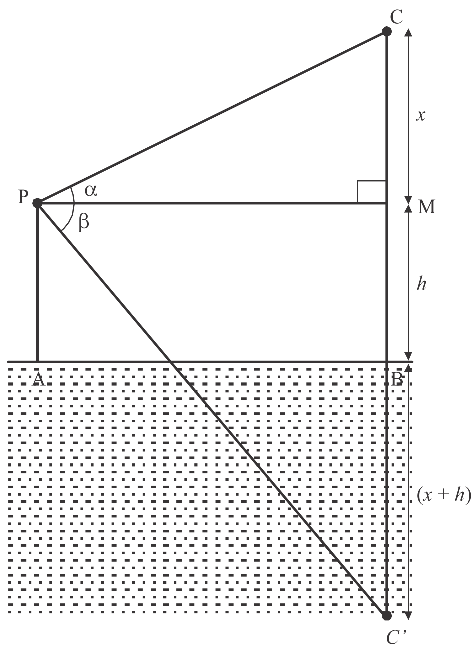
ΔCMP में, $\tan\alpha = \dfrac{CM}{PM}$

या $\tan\alpha = \dfrac{x}{AB}$ $(\because PM = AB)$

$\therefore$ $AB = x\cot\alpha$ ... (1)

ΔPMC^1 में, $\tan\beta = \dfrac{C'M}{PM} = \dfrac{x+2h}{AB}$

$\therefore$ $AB = (x+2h)\cot\beta$ ... (2)



आकृति 8.13

समीकरण (1) व समीकरण (2) के मान बराबर करने पर

$$x\cot\alpha = (x+2h)\cot\beta$$

$$x(\cot\alpha - \cot\beta) = 2h\cot\beta$$

या $$x\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}\right) = \frac{2h}{\tan\beta}$$

या $$x\left[\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta}\right] = \frac{2h}{\tan\beta}$$

या $$x = \frac{2h\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

अतः बादल की ऊँचाई $CB = x + h = \dfrac{2h\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} + h = \dfrac{h(\tan\alpha + \tan\beta)}{\tan\beta - \tan\alpha}$

विविध प्रश्नमाला—8

1. एक उर्ध्वाधर खम्बे की परछाई, खम्बे की ऊँचाई के बराबर है, तो सूर्य का उन्नयन कोण होगा
   $(A)\ 45^\circ$ $(B)\ 30^\circ$ $(C)\ 60^\circ$ $(D)\ 50^\circ$
2. यदि एक मीनार के पाद बिन्दु से 100 मीटर की दूरी से उसके शिखर का उन्नयन कोण 60° है। तो मीनार की ऊँचाई है।
   $(A)\ 100\sqrt{3}$ मीटर $(B)\ \frac{100}{\sqrt{3}}$ मीटर $(C)\ 50\sqrt{3}$ मीटर $(D)\ \frac{200}{\sqrt{3}}$ मीटर
3. 15 मीटर लम्बी एक सीढ़ी एक ऊर्ध्वाधर दीवार के शिखर तक पहूँचती है यदि यह सीढ़ी दीवार के साथ 60° का कोण बनाती है। तो दीवार की ऊँचाई है
   $(A)\ 15\sqrt{3}$ मीटर $(B)\ \frac{15\sqrt{3}}{2}$ मीटर $(C)\ \frac{15}{2}$ मीटर (D) 15 मीटर
4. 10 मीटर ऊँची मीनार के शिखर से पृथ्वी पर एक बिन्दु का अवनमन कोण 30° है। बिन्दु की मीनार के आधार से दूरी है
   $(A)\ 10\sqrt{3}$ मीटर $(B)\ \frac{10}{\sqrt{3}}$ मीटर (C) 10 मीटर $(D)\ 5\sqrt{3}$ मीटर
5. एक नदी के ऊपर एक पुल नदी के तट के साथ 45° का कोण बनाता है। यदि नदी के ऊपर पुल की लम्बाई 150 मीटर हो तो नदी की चौडाई होगी
   (A) 75 मीटर $(B)\ 50\sqrt{2}$ मीटर (C) 150 मीटर $(D)\ 75\sqrt{2}$ मीटर
6. दो खम्बों के शीर्ष, जिनकी ऊँचाई 20 मीटर तथा 14 मीटर है, एक तार से जुडे हुये है। यदि तार क्षैतिजरेखा के साथ 30° का कोण बनाता है। तो तार की लम्बाई है
   (A) 12 मीटर (B) 10 मीटर (C) 8 मीटर (D) 6 मीटर
7. यदि किसी मीनार के आधार से a तथा $b\,(a>b)$ दूरी पर उसी सरल रेखा पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 30° व 60° हो तो मीनार की ऊँचाई है
   $(A)\ \sqrt{a+b}$ $(B)\ \sqrt{a-b}$ $(C)\ \sqrt{ab}$ $(D)\ \sqrt{\frac{a}{b}}$
8. 25 मीटर ऊचे एक स्तम्भ के शीर्ष से एक मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण तथा मीनार के पाद का अवनमन कोणसमान हो तो मीनार की ऊँचाई है
   (A) 25 मीटर (B) 100 मीटर (C) 75 मीटर (D) 50 मीटर
9. एक उर्ध्वाधर छड की लम्बाई तथा इसकी छाया की लम्बाई का अनुपात $1:\sqrt{3}$ हो तो सूर्य का उन्नयन कोण है
   $(A)\ 30^\circ$ $(B)\ 45^\circ$ $(C)\ 60^\circ$ $(D)\ 90^\circ$
10. एक पहाड़ी का ढ़लान क्षैतिज से 60° का कोण बनाता है। यदि शिखर तक पहुँचने में 500 मीटर चलना पडता है। तो पहाड़ी की ऊँचाई है
    $(A)\ 500\sqrt{3}$ मीटर $(B)\ \frac{500}{\sqrt{3}}$ मीटर $(C)\ 250\sqrt{3}$ मीटर $(D)\ \frac{250}{\sqrt{3}}$ मीटर
11. एक मीनार क्षैतिज समतल पर उर्ध्वाधर खड़ी हैं यदि सूर्य का उन्नयन कोण30° हो और मीनार की छाया की लम्बाई 45 मीटर हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए
12. आंधी के कारण एक वृक्ष का ऊपरी भाग टूटकर क्षैतिज तल पर 60° का कोण बनाता है। वृक्ष का शिखर क्षैतिज तल पर वृक्ष की जड़ से 10 मीटर की दूरी पर मिलता है। टूटने से पहले वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए $\left(\sqrt{3}=1.732\right)$
13. किसी अपूर्ण मीनारके आधार से 120 मीटर दूर किसी बिन्दु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण30° है। ज्ञात कीजिए कि मीनार को और कितना ऊँचा बनाया जाय जिससे उसी स्थान पर उसका उन्नयन कोण 60° हो जाये?

14. एक मीनार के आधार से 100 मीटर दूरी पर स्थित बिन्दु से शिखर का उन्नयन कोण 30^o है तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
15. किसी स्तम्भ की चोटी का उन्नयन कोण समतल पर स्थित एक बिन्दु से 15^o है स्तम्भ की ओर 100 मीटर चलने पर उन्नयन कोण 30^o हो जाता है तो स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (जहाँ $\tan 15 = 2-\sqrt{3}$ है।)
16. एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40 मीटर अधिक लम्बी हो जाती है। जबकि सूर्य का उन्नतांश कोण 60^o से घटकर 30^o हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
17. समुद्र तल से 60 मीटर ऊंचे लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण30^o व 45^o है। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो, तो जहाजों के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए।
18. 1.5 मीटर लम्बा एक लड़का 30मीटर ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा हो जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30^o से 60^o हो जाता है। बताइये कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है
19. 7 मीटर ऊँचे भवन के शिखर से एक टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60^o है और इसके पाद (Foot) का अवनमन कोण 45^oहै टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
20. एक पर्वत के शिखर से पूर्व की ओर स्थिति दो बिन्दुओं से शिखर के अवनमन कोण 30^o व 45^o है। यदि बिन्दुओं के बीच की दूरी 1 किमी. हो तो पर्वत की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
21. एक झील में पानी के तल से 20 मीटर ऊँचे बिन्दु A से एक बादल का उन्नयन कोण 30^o है। यदि झील में बादल के प्रतिबिम्ब का बिन्दु A से अवनमन कोण 60^o हो तो बिन्दु A से बादल की दूरी ज्ञात कीजिए।
22. एक नदी के पुल के एक बिन्दु से नदी के सम्मुख किनारो के अवनमन कोण क्रमशः30^o और 45^o है। यदि पुल किनारों से 4 मीटर की ऊँचाई पर हो, तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
23. एक व्यक्ति एक जहाज के डैक जो पानी की सतह से 10 मीटर ऊँचा है, पर खड़ा है यदि वह पहाडी के शिखर का उन्नयन कोण 60^o तथा पहाड़ी के आधार का अवनमन कोण 30^o देखता हो, तो जहाज से पहाड़ी की दूरी तथा पहाड़ी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
24. एक 12 मीटर ऊँचा पेड तेज हवा से इस प्रकार टूट जाता है। कि उसका शीर्ष जमीन को छूने लगता है और जमीन के साथ 60^o का कोण बनाता है। ज्ञात करे कि तेज हवा से पेड, जमीन से कितनी ऊँचाई से टूटा है $\left(\sqrt{3}=1.732\right)$?
25. एक राजमार्ग एक मीनार के नीचे से होकर गुजरता है। एक आदमी मीनार के शिखर से एक कार को अवनमन कोण30° पर देखता है। वह कार एक समान गति से मीनार के नजदीक आ रही है 6 सैकण्ड के पश्चात कार का अवनमन कोण 60° हो जाता है। कार कितने समय में मीनार के नीचे से गुजर जायेगी?
26. मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4 मीटर तथा 9 मीटर की दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण है सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 मीटर है।
27. सड़क के एक ओर एक मीनार तथा दूसरी ओर एक मकान स्थित है। मीनार के शिखर से मकान की छत और आधार के अवनमन कोण क्रमशः 45^o व 60^o हो यदि मकान की ऊँचाई 12 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए $\left(\sqrt{3}=1.732\right)$?
28. यदि सूर्य का उन्नयन कोण 30^o से 60^o में परिवर्तित हो जाता है। तो इन दोनों उन्नयन कोणों पर 15 मीटर ऊँचे खम्बे की छाया की लम्बाई में अन्तर ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. जब आँख किसी वस्तु को देखती है तो आँख और वस्तु को मिलाने वाली रेखा दृष्टि रेखा कहलाती है।
2. जब कोई वस्तु, आँख से ऊपर हो तो दृष्टि रेखा क्षैतिज के साथ जो कोण बनाती है। वह उन्नयन या उन्नतांश या उन्नति कोण कहलाता है।
3. जब कोई वस्तु, आँख से नीचे हो, तो दृष्टि रेखा, क्षैतिज के साथ जो कोण बनाती है वह अवनमन या अवनति कोण कहलाता है।
4. $\sin 30^\circ = 0.5774 = \cos 60^\circ$

   $\sin 45^\circ = 07071 = \cos 45^\circ$

   $\sin 60^\circ = 0.8660 = \cos 30^\circ$

   $\sqrt{2} = 1.4141, \ \sqrt{3} = 1.732$

उत्तरमाला–8
विविध प्रश्नमाला–8

1. $(A)\ 45^\circ$ 2. $(A)\ 100\sqrt{3}$ मीटर 3. $(C)\ \frac{15}{2}$ मीटर 4. $(A)\ 10\sqrt{3}$ मीटर 5. $(D)\ 75\sqrt{2}$

7. (A) 12 मीटर7. $(C)\ \sqrt{ab}$ 8. (D) 50 मीटर 9. $(A)\ 30^\circ$ 10. $(C)\ 250\sqrt{3}$ मीटर

11. $15\sqrt{3}$ मीटर 12. 37.32 मीटर 13. 138.56 मीटर 14. 57.73 मीटर 15. 50 मीटर

18. 34.64 मीटर 17. 43.92 मीटर 18. $19\sqrt{3}$ मीटर 19. $7\left(\sqrt{3}+1\right)$ मीटर 20. 1.366 किमी.

21. 40 मीटर 22. 10.92 मीटर 23. $10\sqrt{3}$ मी., 40 मी. 24. 5.569 मीटर

25. 3 मीटर 27. 28.392 मीटर 28. 17.32 मीटर

N5V97D

09

निर्देशांक ज्यामिति (Co-Ordinate Geometry)

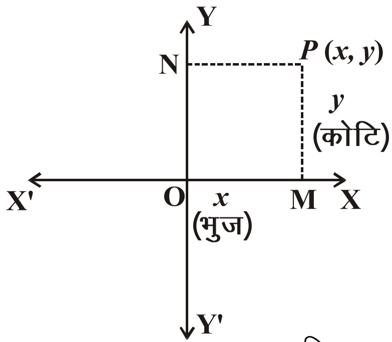
9.01 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्ववर्ती कक्षाओं में अभी तक जिस ज्यामिति का अध्ययन किया है, उसे यूक्लिडियन ज्यामिति कहते हैं। अब हम वैश्लेषिक ज्यामिति का अध्ययन करेंगे। जिसमें बिन्दु की स्थिति विशिष्ट संख्याओं, जिन्हें निर्देशांक कहते हैं, द्वारा निरूपित की जाती है और इनसे बनी रेखाओं और वक्रों को बीजीय समीकरण द्वारा निरूपित किया जाता है। वैश्लेषिक ज्यामिति में निर्देशांकों का प्रयोग होने के कारण इसे निर्देशांक ज्यामिति कहा जाता है।

9.02 कार्तीय निर्देशांक (Cartesian co–ordinate)

N65591

माना किसी समतल में दो परस्पर लम्बवत् रेखाएँ XOX' और YOY' हैं जो कि बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। इन्हें निर्देशांक अक्ष(coordinate axes) कहते हैं और O को मूलबिन्दु (origin) कहते हैं। XOX' और YOY' परस्पर लम्बवत हैं, अतः XOX' और YOY' को समकोणिक अक्ष या आयतीय निर्देशांक अक्ष (rectangular axes) कहते हैं।



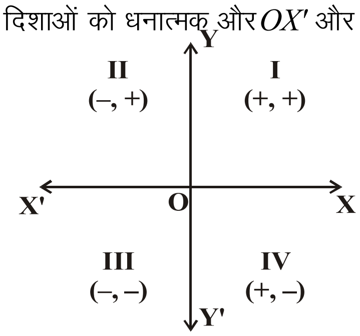
आकृति 9.01

अब समतल में बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए बिन्दु P से XOX' या x–अक्ष पर लम्ब PM और YOY' या y–अक्ष पर लम्ब PN डालते हैं। मूल बिन्दु O से M की दिष्ट दूरी ($OM = x$) बिन्दु P का x–निर्देशांक या भुज (abscissa) और M से P की दिष्ट दूरी ($MP = y$) बिन्दु P का y–निर्देशांक या कोटि (ordinate) कहलाती है। बिन्दु जिसका भुज x और कोटि y हो, बिन्दु (x, y) अर्थात् $P(x,y)$ कहलाता है। बिन्दु के निर्देशांक सदैव क्रमित युग्म (x, y) में निरूपित किये जाते हैं। अर्थात् बिन्दु के निर्देशांक लिखते समय x–निर्देशांक पहले और y–निर्देशांक बाद में लिखते हैं और इन्हें अल्प विराम (,) से अलग करते हुए छोटे कोष्ठक में लिखते हैं।

9.03 चतुर्थांश में निर्देशांकों के चिह्न (Sign of co–ordinate in quadrants)

N6E1AN

आकृति 9.02 में, दोनों अक्ष XOX' और YOY' समतल को चार भागों में विभाजित करती हैं। इन्हें चतुर्थांश कहते हैं। XOY, YOX', $X'OY'$ और $Y'OX$ को क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ चतुर्थांश कहते हैं। हम सदैव OX और OY दिशाओं को धनात्मक और OX' और OY' दिशाओं को ऋणात्मक लेते हैं।



आकृति 9.02

यदि समतल में किसी बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हो, तो
प्रथम चतुर्थांश में $x > 0, y > 0$; निर्देशांक $(+, +)$
द्वितीय चतुर्थांश में $x < 0, y > 0$; निर्देशांक $(–, +)$
तृतीय चतुर्थांश में $x < 0, y < 0$; निर्देशांक $(–, –)$
चतुर्थ चतुर्थांश में $x > 0, y < 0$; निर्देशांक $(+, –)$

टिप्पणी :

(i) किसी बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं, तो इसे $P(x, y)$ लिख सकते हैं।
(ii) किसी बिन्दु का भुज, बिन्दु की y–अक्ष से लम्बवत् दूरी होती है।
(iii) किसी बिन्दु की कोटि, बिन्दु की x–अक्ष से लम्बवत् दूरी होती है।
(iv) किसी बिन्दु का भुज, y–अक्ष के दायीं ओर धनात्मक और बायीं ओर ऋणात्मक होता है।
(v) किसी बिन्दु की कोटि, x–अक्ष के ऊपर धनात्मक और नीचे ऋणात्मक होती है।
(vi) यदि $y = 0$ हो, तो बिन्दु x–अक्ष पर स्थित होता है।
(vii) यदि $x = 0$ हो, तो बिन्दु y–अक्ष पर स्थित होता है।
(viii) यदि $x = 0, y=0$ हो, तो बिन्दु मूल बिन्दु है।

9.04 दो बिन्दुओं के बीच की दूरी (Distance between two points)

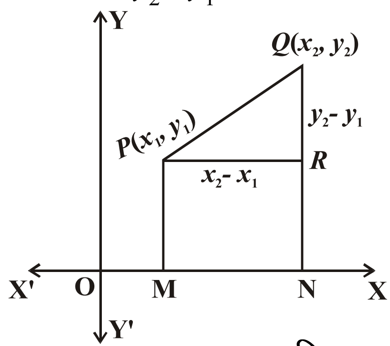
माना XOX' और YOY' निर्देशांक अक्ष हैं और समतल में स्थित दो बिन्दु $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ है जिनके बीच की दूरी ज्ञात करनी है। बिन्दु P और Q से x–अक्ष पर लम्ब क्रमशः PM और QN डालते हैं और P से QN पर लम्ब PR डाला। अतः $OM = P$ का भुज $= x_1$

इसी प्रकार $ON = x_2$, $PM = y_1$

और $QN=y_2$

अतः आकृतिानुसार $PR = MN = ON – OM = x_2 – x_1$

और $QR = QN –RN = QN – PM = y_2 – y_1$



आकृति 9.03

अतः समकोण त्रिभुज PRQ में बौधायन सूत्र से

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

या $$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$\therefore$ $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x - \text{निर्देशांकों का अन्तर})^2 + (y - \text{निर्देशांकों का अन्तर})^2}$$

जो कि दो बिन्दुओं के बीच की दूरी का सूत्र है।

विशेष स्थितिः मूल बिन्दु O (0,0) से किसी बिन्दु $P(x, y)$ की दूरी

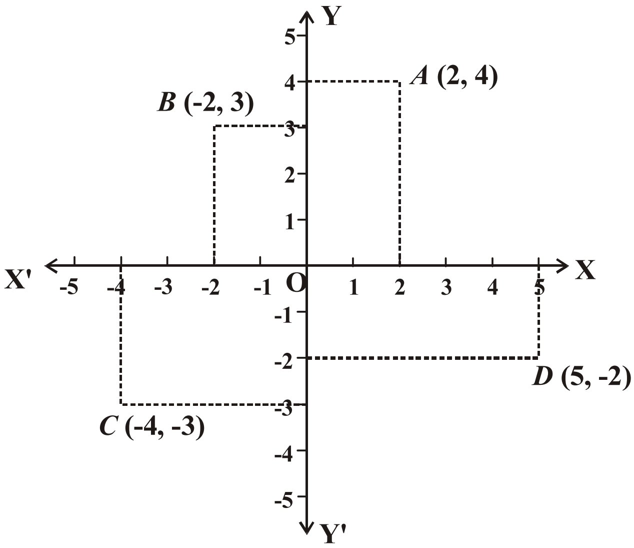
$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. आयतीय निर्देशांक निकाय में बिन्दु (2, 4), (–2, 3), (–4, –3) और (5, –2) को आलेखित कीजिए।

हलः

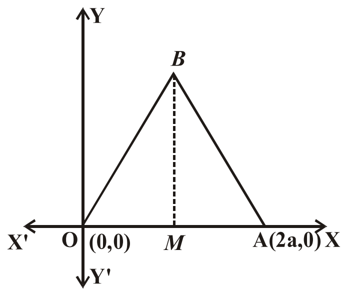


आकृति 9.04

आकृति 9.04 में, आयतीय निर्देशांक XOX' और YOY' खींचते हैं और दिए गए बिन्दुओं (2, 4), (-2, 3), (-4, -3) और (5, -2) को चिह्नित करते हैं।

उदाहरण-2. यदि एक समबाहु त्रिभुज की भुजा $2a$ हो, तो उसके शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हलः आकृति 9.05 के अनुसार



आकृति 9.05

$\because$ OAB समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा $2a$ है

$\therefore$ $OA = AB = OB = 2a$

अब बिन्दु B से OA पर लम्ब BM डाला

$\therefore$ $OM = MA = a$

अतः समकोण त्रिभुज OMB में,

$$OB^2 = OM^2 + MB^2$$

या $$(2a)^2 = (a)^2 + MB^2$$

या $$MB^2 = 3a^2$$

$\therefore$ $$MB = \sqrt{3}a$$

अतः समबाहु त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक $O\,(0, 0)$, $A(2a, 0)$ और $B(a, \sqrt{3}a)$ क्योंकि $OM = a$ और $MB = \sqrt{3}a$ ।

उदाहरण-3. बिन्दुओं (2, 3) और (5, 6) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः माना बिन्दु (2, 3) और (5, 6) क्रमशः P और Q हैं, अतः इनके बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

उदाहरण-4. यदि बिन्दु $(x, 3)$ और $(5, 7)$ के बीच की दूरी 5 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $P(x, 3)$ और $Q(5, 7)$ दिये हुए बिन्दु हैं तो प्रश्नानुसार

$$PQ = 5$$

$$\sqrt{(x-5)^2+(3-7)^2} = 5$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(x-5)^2+(-4)^2 = 25$$

या $x^2-10x+25+16=25$

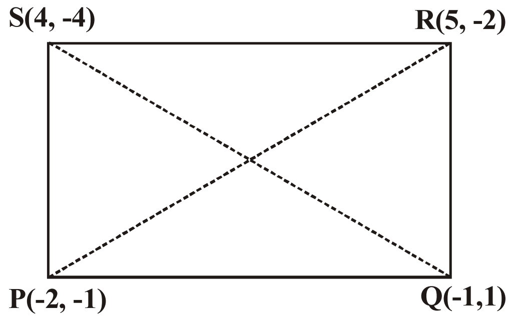
या $x^2-10x+16=0$

या $(x-2)(x-8)=0$

$\therefore$ $x = 2, 8$

उदाहरण-5. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(5, -2)$ और $(4, -4)$ एक आयत के शीर्ष हैं।

हल: माना दिये बिन्दु $P(-2, -1)$, $Q(-1, 1)$, $R(5, -2)$ और $S(4, -4)$ हैं



आकृति 9.06

$$PQ = \sqrt{[-2-(-1)]^2+[-1-1]^2} = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$QR = \sqrt{[5-(-1)]^2+[-2-1]^2} = \sqrt{(6)^2+(-3)^2} = \sqrt{45}$$

$$RS = \sqrt{[4-5]^2+[-4-(-2)]^2} = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$SP = \sqrt{[4-(-2)]^2+[-4-(-1)]^2} = \sqrt{(6)^2+(-3)^2} = \sqrt{45}$$

$\therefore$ $PQ = RS$ और $QR = SP$

अतः सम्मुख भुजाएँ समान हैं।

पुनः विकर्ण $PR = \sqrt{[5-(-2)]^2+[-2-(-1)]^2} = \sqrt{(7)^2+(-1)^2} = \sqrt{50}$

$$QS = \sqrt{[4-(-1)]^2+[-4-1)]^2} = \sqrt{(5)^2+(-5)^2} = \sqrt{50}$$

अतः विकर्ण समान है। फलतः दिये गये बिन्दु P, Q, R, S आयत के शीर्ष हैं।

उदाहरण-6. यदि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं $(a+b, b-a)$ और $(a-b, a+b)$ से बराबर दूरी पर स्थित हो, तो सिद्ध कीजिए कि $bx = ay$.

हल: माना दिए बिन्दु $P(x, y)$, $Q(a+b, b-a)$ और $R(a-b, a+b)$ हैं। अतः प्रश्नानुसार

$$PQ = PR$$

या $PQ^2 = PR^2$

या $[x-(a+b)]^2+[y-(b-a)]^2 = [x-(a-b)]^2+[y-(a+b)]^2$

या $x^2-2(a+b)x+(a+b)^2+y^2-2(b-a)y+(b-a)^2$

$$= x^2-2(a-b)x+(a-b)^2+y^2-2(a+b)y+(a+b)^2$$

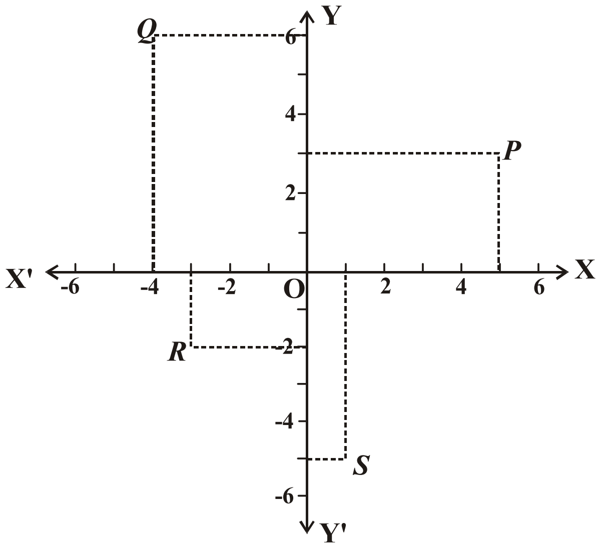
या $\quad -2(a+b)x-2(b-a)y=-2(a-b)x-2(a+b)y$

या $\quad ax+bx+by-ay=ax-bx-ay-by$

या $\quad 2bx=2ay \Rightarrow bx=ay$

प्रश्नमाला—9.1

1. दिये गये आकृति से बिन्दुओं *P, Q, R* व *S* के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.07

2. निम्नलिखित निर्देशांकों वाले बिन्दुओं को आलेखित कीजिए।
   (1, 2), (–1, 3), (–2, –4), (3, –2), (2, 0), (0, 3)
3. आयतीय निर्देशांक अक्षों को लेते हुए बिन्दु *O (0,0), P* (3, 0) और *R*(0, 4) को आलेखित कीजिए। यदि *OPQR* एक आयत हों, तो बिन्दु *Q* के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
4. बिन्दुओं (–1, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 2), (–1, 1) को आलेखित कीजिए और इन्हें क्रम से मिलाने पर कौन सी आकृति प्राप्त होती है।
5. चतुर्भुज बनाइए, यदि उसके शीर्ष निम्नलिखित हों :
   (i) (1,1), (2, 4), (8, 4) और (10, 1) $\qquad$ (ii) (–2, –2), (–4, 2), (–6, –2) और (–4, –6)
   प्रत्येक स्थिति में बने चतुर्भुज का प्रकार भी बताइए।
6. निम्नलिखित बिन्दुओं के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए :
   (i) (–6, 7) और (–1, –5) $\quad$ (ii) (–1, –1) और (8, –2) $\quad$ (iii) $(at_1^2, 2at_1)$ और $(at_2^2, 2at_2)$
7. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2, –2), (–2, 1) और (5, 2) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
8. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (1, –2), (3, 0), (1, 2) और (–1, 0) एक वर्ग के शीर्ष हैं।
9. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु *(a, a), (–a, –a)* और $(-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a)$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।
10. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (1, 1), (–2, 7) और (3, –3) संरेख हैं।
11. *x*–अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (–2, –5) और (2, –3) से समान दूरी पर स्थित है।
12. *y*–अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (–5, –2) और (3, 2) से समान दूरी पर स्थित है।
13. यदि बिन्दुओं (3, K) और (K, 5) से बिन्दु (0, 2) की दूरियाँ बराबर हो, तो K का मान ज्ञात कीजिए।
14. यदि P और Q के निर्देशांक क्रमशः $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ और $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $OP^2+OQ^2=a^2+b^2$, जहाँ O मूल बिन्दु है।
15. यदि एक समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष (0, 0), $(3, \sqrt{3})$ हों, तो तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

9.05 दो बिन्दुओं के मध्य दूरी का अन्तः और बाह्य विभाजन (Internal and external division of distance between two points)

माना समतल में दो बिन्दु A और B हैं, यदि रेखा AB पर कोई बिन्दु P, A व B के मध्य स्थित हो, तो इस प्रकार के विभाजन को अन्तः विभाजन कहते हैं। यदि विभाजन बिन्दु, P, A और B के मध्य में नहीं होकर A के बायीं ओर या B के दायीं ओर स्थित हो, तो ऐसे विभाजन को बाह्य विभाजन कहते हैं।

(i) अन्तः विभाजन (Internal division) :

माना समतल में स्थित दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ हैं और बिन्दु $P(x, y)$ रेखाखण्ड AB को $m_1 : m_2$ में अन्तः विभाजित करता है। बिन्दु A, P और B से x–अक्ष पर डाले गये लम्ब क्रमशः AL, PM और BN हैं। बिन्दु A से PM पर लम्ब AQ और बिन्दु P से BN पर लम्ब PR डाला। तब

$$OL = x_1,\ OM = x,\ ON = x_2$$

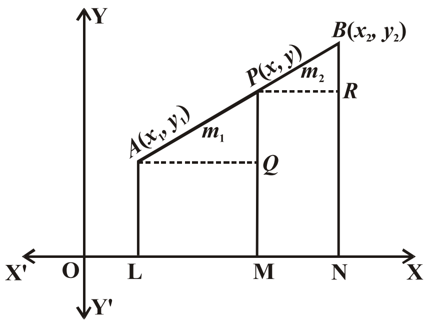
$$AL = y_1,\ PM = y \text{ और } BN = y_2$$

$$\therefore \quad AQ = LM = OM - OL = x - x_1$$

$$PR = MN = ON - OM = x_2 - x$$

$$PQ = PM - QM = PM - AL = y - y_1$$

$$BR = BN - RN = BN - PM = y_2 - y$$



आकृति 9.08

आकृति 9.08 में, त्रिभुज AQP और त्रिभुज PRB स्पष्टतः समरूप त्रिभुज हैं।

$$\therefore \quad \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{PR} = \frac{PQ}{BR}$$

या $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

अब $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

या $$m_1x_2 - m_1x = m_2x - m_2x_1$$

या $$(m_1 + m_2)x = m_1x_2 + m_2x_1$$

$$\therefore \quad x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

पुनः $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

या $$m_1y_2 - m_1y = m_2y - m_2y_1$$

या $$(m_1 + m_2)y = m_1y_2 + m_2y_1$$

$$\therefore \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

अतः P के अभीष्ट निर्देशांक

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

(ii) बाह्य विभाजन (External division) :

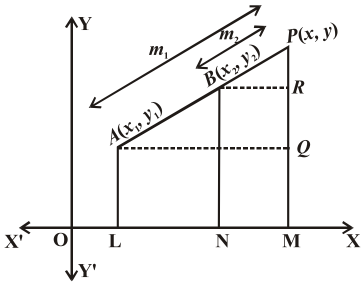
माना समतल में स्थित बिन्दु $A(x_1,y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ हैं। बिन्दु $P(x,y)$ रेखाखण्ड AB को $m_1 : m_2$ में बाह्य विभाजन करता है। बिन्दु A, B और P से x–अक्ष पर डाले गये लम्ब क्रमशः AL, BN और PM हैं। बिन्दु A से PM पर लम्ब AQ और B से PM पर लम्ब BR डाला। तब $OL = x_1$, $ON = x_2$, $OM = x$, $AL = y_1$, $BN = y_2$ और $PM = y$

$$\therefore \quad AQ = LM = OM - OL = x - x_1$$

$$BR = NM = OM - ON = x - x_2$$

$$PQ = PM - QM = PM - AL = y - y_1$$

और $\quad PR = PM - RM = PM - BN = y - y_2$



आकृति 9.09

आकृति 9.09 में, त्रिभुज AQP और त्रिभुज BRP स्पष्टतः समरूप त्रिभुज हैं।

$$\therefore \quad \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BR} = \frac{PQ}{PR}$$

या $\quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x - x_1}{x - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y - y_2}$

अब $\quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x - x_1}{x - x_2}$

या $\quad m_1 x - m_1 x_2 = m_2 x - m_2 x_1$

या $\quad (m_1 - m_2)x = m_1 x_2 - m_2 x_1$

$$\therefore \quad x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}$$

पुनः $\quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{y - y_1}{y - y_2}$

या $\quad m_1 y - m_1 y_2 = m_2 y - m_2 y_1$

या $\quad (m_1 - m_2)y = m_1 y_2 - m_2 y_1$

$$\therefore \quad y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

अतः P के अभीष्ट निर्देशांक

$$\left(\frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}\right)$$

विशेष स्थिति: यदि बिन्दु P रेखाखण्ड AB का मध्य बिन्दु हो, अर्थात् P, AB को $1 : 1$ में विभाजित करता हो, तो P के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

टिप्पणी:

(i) अन्तः विभाजन सूत्र से बाह्य विभाजन सूत्र प्राप्त करने के लिए m_1 या m_2 का चिह्न ऋण कर देते हैं।

(ii) यदि बाह्य विभाजन में $|m_1| > |m_2|$ हो, तो विभाजन बिन्दु B के दायीं ओर (रेखा AB को B की ओर बढ़ाने पर) प्राप्त होता है। इसी प्रकार $|m_1| < |m_2|$ हो, तो विभाजन बिन्दु A के बायीं ओर (रेखा AB को A की ओर बढ़ाने पर) प्राप्त होता है।

(iii) यदि बिन्दु $P(x,y)$ रेखाखण्ड AB को $\lambda : 1$ में विभाजित करता है तो P के निर्देशांक $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ होते हैं। λ को प्राचल मानते हुए बिन्दु (x_1, y_1) व (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक को उपरोक्त रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-2, 1)$ और $(5, 4)$ को मिलाने वाली रेखा को 2 : 3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

हल: माना अभीष्ट बिन्दु (x, y) है। तब सूत्र से

$$x = \frac{2\times5+3\times(-2)}{2+3} = \frac{10-6}{5} = \frac{4}{5}$$

और $$y = \frac{2\times4+3\times1}{2+3} = \frac{8+3}{5} = \frac{11}{5}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{4}{5}, \frac{11}{5}\right)$ हैं।

उदाहरण-2. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-4, 4)$ और $(7, 2)$ को मिलाने वाली रेखा को 4 : 7 के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है।

हल: माना अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक (x, y) हैं। तब

$$x = \frac{4\times7-7\times(-4)}{4-7} = \frac{28+28}{-3} = -\frac{56}{3} = -18\frac{2}{3}$$

और $$y = \frac{4\times2-7\times4}{4-7} = \frac{8-28}{-3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $\left(-18\frac{2}{3}, 6\frac{2}{3}\right)$ हैं।

उदाहरण-3. x–अक्ष बिन्दुओं $A(3, -5)$ और $B(-4, 7)$ को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करती है?

हल: x–अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की कोटि शून्य होती है। अतः माना बिन्दु $P(x,0)$ दिए हुए रेखाखण्ड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है

$$\therefore \quad 0 = \frac{m_1\times7+m_2\times(-5)}{m_1+m_2}$$

या $$7m_1 - 5m_2 = 0$$

या $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{7}$$

अतः दिए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड x–अक्ष द्वारा 5 : 7 के अनुपात में अन्तः विभाजित होता है।

उदाहरण-4. बिन्दुओं $(-3, 5)$ और $(4, -9)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड को बिन्दु $(-2, 3)$ किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल: माना दिए हुए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड को बिन्दु $(-2, 3)$, $\lambda : 1$ में विभाजित करता है, अन्तः विभाजन सूत्र से

$$-2 = \frac{\lambda\times4+1\times(-3)}{\lambda+1}$$

$$= \frac{4\lambda-3}{\lambda+1}$$

या $\quad -2\lambda - 2 = 4\lambda - 3$

या $\quad 6\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$

अतः अभीष्ट अनुपात 1 : 6 है।

नोटः कोटि के मान से भी हमें यही अनुपात प्राप्त होगा।

उदाहरण-5. यदि बिन्दु $A(2, 5)$ और B को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $P(-1, 2), 3:4$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है, तो B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हलः माना B के निर्देशांक (x_1, y_1) है और दिया है $AP : BP = 3:4$

अन्तः विभाजन सूत्र से

$$-1 = \frac{3 \times x_1 + 4 \times 2}{3+4} = \frac{3x_1 + 8}{7}$$

या $\quad -7 = 3x_1 + 8 \Rightarrow x_1 = -\frac{15}{3} = -5$

और $\quad 2 = \frac{3 \times y_1 + 4 \times 5}{3+7} = \frac{3y_1 + 20}{7}$

या $\quad 14 = 3y_1 + 20$

$\Rightarrow \quad y_1 = -\frac{6}{3} = -2$

अतः B के निर्देशांक $(-5, -2)$ हैं।

उदाहरण-6. ज्ञात कीजिए कि, रेखा $x + y = 4$, बिन्दु $(-1, 1)$ और $(5, 7)$ को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करती है?

हलः माना दी गई रेखा बिन्दु $A(-1, 1)$ और $B(5, 7)$ को मिलाने वाली रेखा को बिन्दु P पर $\lambda : 1$ में अन्तः विभाजित करती है।

अतः P के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{5\lambda - 1}{\lambda + 1}, \frac{7\lambda + 1}{\lambda + 1}\right)$$

परन्तु बिन्दु P रेखा $x + y = 4$ पर स्थित है

$\therefore \quad \frac{5\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{7\lambda + 1}{\lambda + 1} = 4$

या $\quad 5\lambda - 1 + 7\lambda + 1 = 4\lambda + 4$

या $\quad 8\lambda = 4$

$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}$

या $\quad \lambda : 1 = 1 : 2$

प्रश्नमाला—9.2

1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3, 5)$ और $(7, 9)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

2. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(5, -2)$ और $\left(-1\frac{1}{2}, 4\right)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 7 :9 में बाह्य विभाजित करता है।

3. सिद्ध कीजिए कि मूल बिन्दु O बिन्दुओं $A(1, -3)$ और $B(-3, 9)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 1 : 3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है। बाह्य विभाजन करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

4. बिन्दुओं (22, 20) और (0, 16) को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
5. बिन्दुओं (5, 3) और (–3, –2) को मिलाने वाली रेखाखण्ड x–अक्ष द्वारा किस अनुपात में विभाजित होता है ?
6. बिन्दुओं (2, –3) और (5, 6) को मिलाने वाली रेखाखण्ड y–अक्ष से किस अनुपात में विभाजित होता है ?
7. बिन्दुओं (15, 5) और (9, 20) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (11, 15) किस अनुपात में विभाजित करता है ?
8. यदि बिन्दु $P(3, 5)$ बिन्दुओं $A(-2, 3)$ और B को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 4 : 7 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है, तो B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
9. बिन्दुओं (11,9) और (1, 2) को मिलाने वाली रेखा को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
10. बिन्दुओं (–4, 0) और (0, 6) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 4 बराबर भागों में बाँटने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
11. ज्ञात कीजिए कि रेखा $3x + y = 9$ बिन्दुओं (1, 3) और (2, 7) मिलाने वाले रेखाखण्ड को किस अनुपात में विभाजित करती है?
12. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि बिन्दु (–3, p) बिन्दुओं (–5, –4) और (–2, 3) को अन्तः विभाजित करता है। p का मान भी ज्ञात कीजिए।

विविध प्रश्नमाला–9

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 10 तक)

1. बिन्दु (3, 4) की y–अक्ष से दूरी होगी
   (क) 1 (ख) 4 (ग) 2 (घ) 3
2. बिन्दु (5, –2) की x–अक्ष से दूरी होगी
   (क) 5 (ख) 2 (ग) 3 (घ) 4
3. बिन्दु (0, 3) और (–2, 0) के बीच की दूरी होगी
   (क) $\sqrt{14}$ (ख) $\sqrt{15}$ (ग) $\sqrt{13}$ (घ) $\sqrt{5}$
4. (–2, 1), (2, –2) और (5, 2) शीर्ष वाला त्रिभुज है
   (क) समकोण (ख) समबाहु (ग) समद्विबाहु (घ) इनमें से कोई नहीं
5. बिन्दुओं (–1, 1), (0, –3), (5, 2) और (4, 6) से निर्मित चतुर्भुज होगा–
   (क) वर्ग (ख) आयत (ग) सम चतुर्भुज (घ) समान्तर चतुर्भुज
6. बिन्दुओं (0, 0), (2, 0) और (0, 2) से समान दूरी वाला बिन्दु है
   (क) (1, 2) (ख) (2, 1) (ग) (2, 2) (घ) (1, 1)
7. बिन्दु (5, 0) और (0, 4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु P, 2:3 के अनुपात में अन्त विभाजित करता है। P के निर्देशांक है
   (क) $\left(3, \frac{8}{5}\right)$ (ख) $\left(1, \frac{4}{5}\right)$ (ग) $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$ (घ) $\left(2, \frac{12}{5}\right)$
8. यदि बिन्दु (1, 2), (–1, x) और (2, 3) संरेख हो, तो x का मान होगा
   (क) 2 (ख) 0 (ग) –1 (घ) 1
9. बिन्दुओं $(3, a)$ और (4, 1) की बीच की दूरी $\sqrt{10}$ हो तो a का मान होगा
   (क) 3, –1 (ख) 2, –2 (ग) 4, –2 (घ) 5, –3
10. यदि बिन्दु (x, y), बिन्दुओं (2, 1) और (1, –2) से समान दूरी पर हो, तो निम्नांकित में से सत्य कथन है–
    (क) $x + 3y = 0$ (ख) $3x + y = 0$ (ग) $x + 2y = 0$ (घ) $2y + 3x = 0$
11. यदि एक चतुर्भुज के शीर्ष (1, 4), (–5, 4), (–5, –3) और (1,–3) हो, तो चतुर्भुज का प्रकार बताइए।
12. बिन्दुओं (–2, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 4), (–2, 2) को क्रम से मिलाने पर कौन सी आकृति प्राप्त होगी?
13. बिन्दु (1, 2) और (6, 7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (3, 4) किस अनुपात में विभाजित करता है?
14. किसी वर्ग के सम्मुख शीर्ष (5, –4) और (–3, 2) हैं इसके विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
15. एक रेखा खण्ड का एक सिरा (4, 0) है और मध्य बिन्दु (4, 1) है, तो रेखा खण्ड के दूसरे सिरे के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

16. बिन्दुओं (6, 8) और (2, 4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु से बिन्दु (1, 2) की दूरी ज्ञात कीजिए।
17. किसी समतल में चार बिन्दु P(2, –1), Q(3, 4), R(–2, 3) और S(–3, –2) है, तो सिद्ध कीजिए कि PQRS वर्ग नहीं एक समचतुर्भुज है।
18. सिद्ध कीजिए कि समकोण त्रिभुज AOB में कर्ण का मध्य बिन्दु C त्रिभुज के शीर्षों O, A और B से बराबर दूरी पर स्थित है।
19. उस त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष (1,–1), (0, 4) और (–5, 3) हैं।
20. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (5, 7) और (3, 9) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु वहीं है जो बिन्दुओं (8, 6) और (0, 10) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु है।
21. यदि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु (1, 2), (0, –1) और (2, –1) हैं, तो त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. nksfcUnqvksa $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी का सूत्र

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

या $$PQ = \sqrt{(\text{भुजों का अन्तर})^2 + (\text{कोटियों का अन्तर})^2}$$

2. बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का बिन्दु $P(x, y)$ पर $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजक बिन्दु के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

$$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

3. बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का बिन्दु $P(x, y)$ पर $m_1 : m_2$ के अनुपात में बाह्य विभाजक बिन्दु के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$$

$$y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$

4. बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

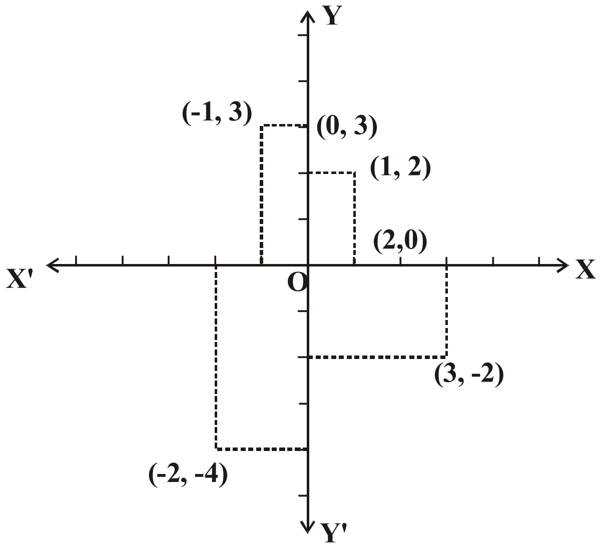
या $$\left(\frac{x - \text{निर्देशांकों का योग}}{2}, \frac{y - \text{निर्देशांकों का योग}}{2}\right)$$

उत्तरमाला–9

प्रश्नमाला 9.1

1. $P(5,3), Q(-4,6), R(-3,-2), S(1,-5)$

2.



3. (3, 4) 4. पंचभुज 5. (i) समलम्ब (ii) समचतुर्भुज 6. (i) 13 (ii) $\sqrt{82}$ (iii) $a(t_2 - t_1)\sqrt{(t_2 + t_1)^2 + 4}$

11. (–2, 0) 12. (0, –2) 13. 1 15. $(0,2\sqrt{3})$ या $(3,-\sqrt{3})$

प्रश्नमाला 9.2

1. $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$ 2. $\left(27\frac{3}{4}, -23\right)$ 3. (3, –9) 4. (11, 18) 5. 3 : 2

6. 2 :5 बाह्य विभाजन 7. 2 :1 8. $\left(\frac{47}{4}, \frac{17}{2}\right)$ 9. $\left(\frac{13}{3}, \frac{13}{3}\right), \left(\frac{23}{3}, \frac{20}{3}\right)$

10. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), (-2,3), \left(-1, \frac{9}{2}\right)$ 11. 3 : 4 12. $2:1, p = \frac{2}{3}$

विविध प्रश्नमाला–9

1. (घ) 2. (ख) 3. (ग) 4. (क) 5. (घ) 6. (घ) 7. (क)
8. (ख) 9. (ग) 10. (क) 11. आयत. 12. पंचभुज 13. 2 :3. 14. 10
15. (4, 2) 16. 5 19. $\frac{\sqrt{130}}{2}, \frac{\sqrt{130}}{2}, \sqrt{13}$ 21. (1, –4), (3, 2), (–1, 2)

N76NFL

10

बिन्दु पथ (Locus)

NK5872

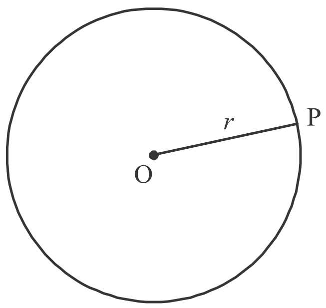
10.01 प्रस्तावना (Introduction)

आपने कभी अपने चारों ओर कुछ अनोखे दृश्य अवश्य देखे होंगे। क्या आपको आकाश में अनायस ही कभी कुछ पक्षी एक विशेष आकृति बना कर उड़ते दिखाई दिए हैं? अथवा चीटियों का कोई समूह दीवार पर या अन्य सतह पर किसी निश्चित आकृति से विचरण करते हुए भी अवश्य देखा होगा। इन जीवों के विचरण में प्रत्येक एक दूसरे से उस आकृति के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध जो उनके स्वभाव में हैं का पालन करते हैं। यदि दोनों घटनाओं के अन्तर्गत आने वाले प्रत्येक जीव को एक बिन्दु मान लें तो उनके द्वारा बनाई गई आकृति आवश्यक प्रतिबन्ध का पालन करने वाले बिन्दुओं का एक समुच्चय है। वास्तव में ज्यामितीय आकृतियों में ऐसे वांछनीय प्रतिबंध युक्त बिन्दुओं के समुच्चय ही कुछ विशेष आकृति उभारते हैं, अर्थात् शून्य में नीहित समस्त बिन्दुओं में से किसी आकृति केलिए उन सभी आवश्यक बिन्दुओं का समुच्चय ही बिन्दु पथ है।

10.02 परिभाषा

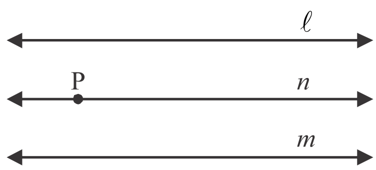
बिन्दु पथ बिन्दुओं का एक विशिष्ट समुच्चय होता है जो किन्ही प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं। इसे समझने के लिए हम कुछ उदाहरण लेते हैं:

(*a*) मान लीजिए कि किसी तल में O एक बिन्दु है तथा r धनात्मक वास्तविक संख्या है। तल के उन बिंन्दुओं से जो'O' से r दूरी पर है, एक बिन्दु पथ बनता है। यह एक वृत्त है जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या r है। देखिए आकृति 10.01 में



आकृति 10.01

(*b*) दो समान्तर रेखाएँ ℓ और m लीजिए। उन सभी बिन्दुओं पर विचार कीजिए जो ℓ और m से समान दूरी पर हैं। उन बिन्दुओं से रेखा n बनती है जो ℓ और m के समान्तर है तथा उनसे समान दूरी पर है। देखिए आकृति 10.02

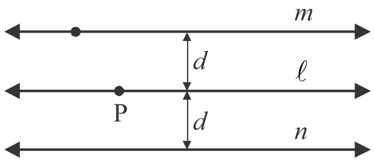


आकृति 10.02

(*c*) अब मान लीजिए कि एक रेखा ℓ तथा एक धनात्मक वास्तविक संख्या d है। उन सभी बिन्दुओं पर विचार कीजिए जो ℓ से d दूरी पर स्थित हैं। यहाँ हमें ℓ के समांतर व इससे d दूरी पर दो रेखाएँ m और n प्राप्त होती हैं। आकृति 10.03

यह ध्यान देने योग्य है कि उपयुक्त तीनों स्थितियों में बिन्दु, विशेष प्रतिबंधों का पालन करते है। अलग–अलग प्रतिबंधों से अलग–अलग बिन्दु पथ प्राप्त होते हैं।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com



आकृति 10.3

अतः बिन्दुओं का बिन्दु पथ उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय होता है, जो दी हुई एक या अधिक प्रतिबंधों का पालन करे। ध्यान रहे कि इस परिभाषा में दो पूरक विचार शामिल हैं।

(i) जो बिन्दु दी हुई शर्तों (प्रतिबंधों) का पालन करता है वह बिन्दु पथ का बिन्दु होता है।

(ii) बिन्दु पथ के प्रत्येक बिन्दु को दिए गए प्रतिबंधों का पालन करना अनिवार्य होता है।

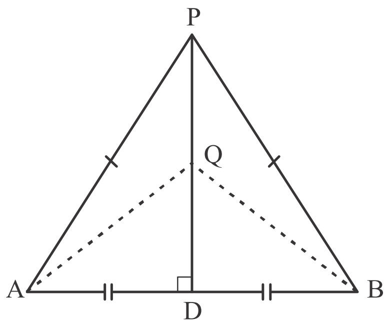
इस प्रकार बिन्दु पथ व उसे निर्धारित करने वाले प्रतिबंध एक ही समझे जा सकते है। एक का वर्णन होने से दूसरे का भी बोध होता है।

आइए अब हम दो महत्वपूर्ण बिन्दु पथों का अध्ययन करते हैं, जिनकी उपयोगिता अन्य प्रमेयों व ज्यामितीय रचनाओं में होगी।

10.03 दो दिए हुए बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ (Locus of points equidistant from two given points)

NKE48P

मान लीजिए कि A और B दो दिए हुए बिन्दु हैं। P बिन्दु के बिन्दु पथ पर विचार करें जो प्रतिबंध AP= BP को संतुष्ट करता है।



आकृति 10.04

यदि AB का मध्य बिन्दु D है, तो AD=BD, इसलिए D भी बिन्दु पथ पर स्थित है। मान लें कि D के अतिरिक्त P अन्य ऐसा बिन्दु है कि AP=BP, हम देखते हैं कि यदि PD को मिलाया जाए तो AP और BP क्रमशः दो त्रिभुजों ADP और BDP की भुजाएँ बन जाती है। इन त्रिभुजों के संबंध में हम क्या कह सकते हैं? हम देखते हैं कि इनमें सर्वांगसमता की भुजा–भुजा–भुजा प्रमेय का पालन होता है।

अतः $\Delta ADP \cong \Delta BDP$ जिसमें $\angle ADP = \angle BDP$ यह सरलतापूर्वक सिद्ध किया जा सकता है कि $\angle ADP = 90^\circ$ या $PD \perp AB$ अतः AB का लंब अर्द्धक PD हुआ। PD को सरल रेखा कह सकते हैं। चूंकि A और B से P समदूरस्थ है। इसी प्रकार PD पर कोई अन्य बिन्दु Q ले तो Q भी A व B से समदूरस्त सिद्ध होगा अर्थात् PD पर स्थित सभी बिन्दु A व B से समदूरस्थ रहेंगें।

अतः उपर्युक्त विवेचन के आधार पर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय–10.1: दिए हुए दो बिन्दुओं से समदूरस्थ किसी बिन्दु का बिन्दु पथ उन्हें मिलाने वाले रेखाखंड का लम्बसमद्विभाजक होता है।

(प्रमेय 10.1 का विलोम) दो दिए गए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के समद्विभाजाक पर स्थित बिन्दु दिए गए बिन्दुओं से समदूरस्थ होते हैं।

उदाहरण-1 एक ही आधार BC पर तीन समद्विबाहु त्रिभुज $\Delta PBC, \Delta QBC$ और ΔRBC स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि P, Q और R समरेख है।

हलः दिया हुआ है: $\Delta PBC, \Delta QBC$ तथा ΔRBC इस प्रकार है कि PB = PC, QB = QC, RB = RC सिद्ध करना है : P, Q, R समरेख हैं।

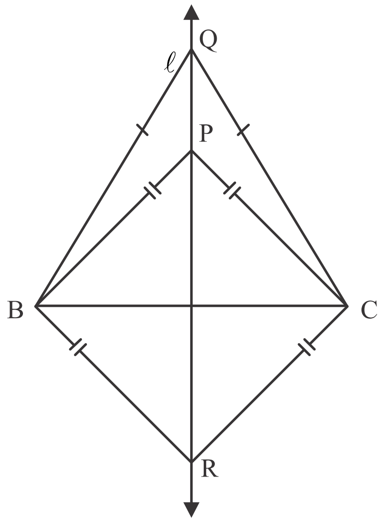
उपपत्तिः ΔPBC समद्विबाहु है

दिया हुआ है: PB=PC, B और C से समदूरस्थ बिन्दु पथ BC का लंब अर्द्धक होगा, मान लीजिए यह ℓ है।

P बिन्दु ℓ पर स्थित है। ...(1)

इसी प्रकार Q और R, ℓ पर स्थित हैं ...(2)

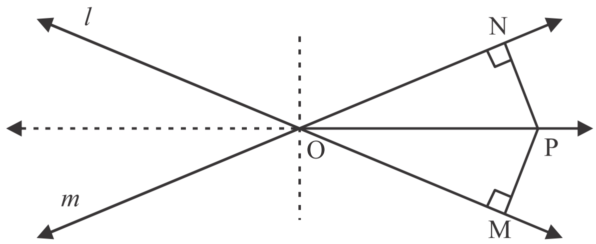
(1) व (2) से P, Q व R समरेख है।



आकृति 10.05

10.04 दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ (Locus of points equidistant from two intersecting lines)

मान लीजिए दो रेखाएं ℓ और m एक दुसरे को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। और ℓ और m से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ हमें ज्ञात करना है। यदि कोई बिन्दु P जो ℓ व m पर नहीं है, तब इसकी ℓ व m से दूरी P से ℓ व m पर डाले गए लम्ब की लम्बाई होगी। दूसरी ओर यदि P बिन्दु ℓ व m दोनों पर ही है तो P की ℓ व m से दूरी शून्य होगी।



आकृति 10.06

यदि $d = 0$ तब बिन्दु P, ℓ और m दोनों पर होगा अर्थात् बिन्दु P, O के सम्पाती होगा। इस प्रकार बिन्दु O बिन्दु पथ पर होगा।

यदि $d \neq 0$ तो P न तो ℓ पर और न ही m पर स्थित होगा। अतः ℓ और m से निर्मित चार कोणों में से एक के अंतः भाग में स्थित होगा।

यदि $PM \perp \ell$ तथा $PN \perp m$, तब $PM = PN = d$ (दिए गए प्रतिबन्धानुसार)

ΔOPM और ΔOPN में

$\angle M = \angle N$ (प्रत्येक 90°)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$PM = PN (PM = PN = d)$

$\therefore$ $\Delta OPM \cong \Delta OPN$ (समकोण–कर्ण–भुजा)

$\therefore$ $\angle POM = \angle PON$

इससे स्पष्ट है कि $P, \angle MON$ के अंत भाग में स्थित है तथा $OP, \angle MON$ की अर्द्धक है अथवा $\angle MON$ के अर्द्धक पर P स्थित है। इसी प्रकार P अन्य तीन कोणों के अर्द्धकों पर भी स्थित हो सकता है। इन चारों कोणों के अर्द्धकों से दो रेखाएँ बनती हैं। मान लीजिए ये p और q हैं। तब P बिन्दु p और q पर स्थित बिन्दुओं के समुच्चय का सदस्य होगा। हम कह सकते हैं कि रेखाएँ p और q बिन्दु P का बिन्दु पथ है।

अतः उपर्युक्त विवेचन के आधार पर हमे निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय–10.2: दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से सम दूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ, उन रेखाओं से बने कोणों की समद्विभाजकों का युग्म होता है।

उदाहरण-2. चतुर्भुज ABCD के $\angle B$ एवं $\angle C$ के अर्द्धक परस्पर बिन्दु P बिन्दु पर मिलते हैं। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P सम्मुख भुजाओं AB और CD से समदूरस्थ है।

हलः दिया हुआ हैः चतुर्भुज ABCD जिसमें $\angle B$ व $\angle C$ के अर्द्धक P पर मिलते है, साथ ही $PM \perp AB$ तथा $PN \perp CD$

सिद्ध करना है : PM=PN

रचनाः $PL \perp BC$ खींचा

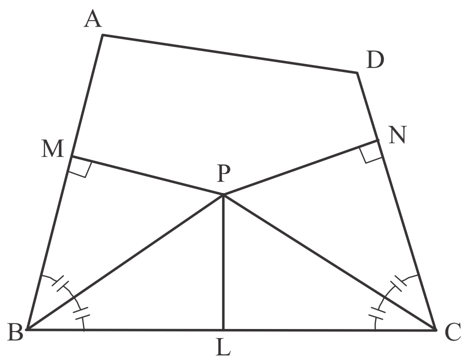
उपपत्तिः $\angle B$ के अर्द्धक पर बिन्दु P स्थित है। (दिया हुआ है)

$\therefore \quad PM = PL \quad \ldots(1)$

$\because \quad \angle C$ के अर्द्धक पर भी बिन्दु P स्थित है (दिया हुआ है)

$\therefore \quad PL = PN \quad \ldots(2)$

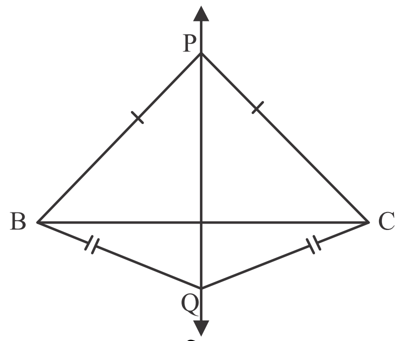
(1) व (2) से PM=PN इति सिद्धम्



आकृति 10.07

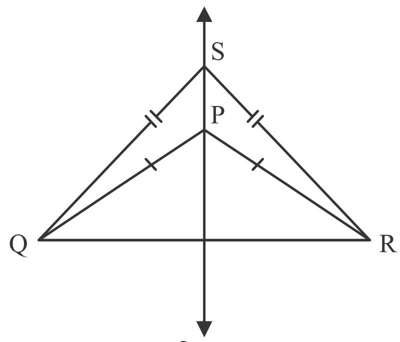
प्रश्नमाला 10.1

1. निम्नलिखित कथनों में से सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।
   (i) किसी रेखा से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का समुच्चय एक रेखा होती है।
   (ii) एक वृत्त उन बिन्दुओं का बिन्दु पथ है जो किसी दिए गए बिन्दु से नीयत दूरी पर स्थित है।
   (iii) तीन दिए गए बिन्दु संरेख तभी होंगें जब वह एक रेखा के बिन्दुओं के समुच्चय के अवयव नहीं हो।
   (vi) दो रेखाओं से समदुरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ दोनों रेखाओं के समान्तर रेखा होगी।
   (v) दो दिए गए बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का लम्ब अर्द्धक होता है।
2. एक चतुर्भुज के विकर्ण एक–दूसरे को सम द्विभाजित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि यह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है।
3. तीन असमरेख बिन्दुओं A, B और C के सम दूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ क्या होगा? अपने उत्तर का कारण स्पष्ट कीजिए।
4. तीन समरेख बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ क्या होगा? अपने उत्तर का कारण स्पष्ट कीजिए।
5. सिद्ध कीजिए कि A और B बिन्दुओं से होकर जाने वाले वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दु पथ रेखाखंड AB का लंबअर्द्धक है।
6. दिए गए आकृति 10.08 में उभयनिष्ठ आधार BC पर रेखा BC के विपरीत ओर दो समद्विबाहु त्रिभुज ΔPBC और ΔQBC स्थित है। सिद्ध कीजिए कि P और Q को मिलाने वाली रेखा BC को समकोण पर समद्विभाजित करती है।



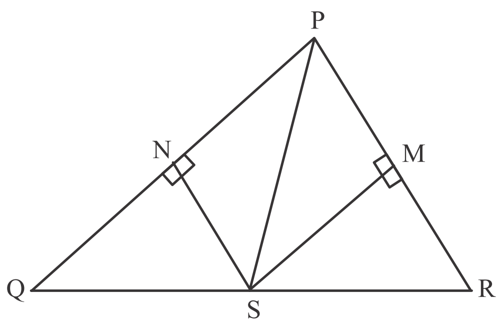
आकृति 10.8

7. दिए गए आकृति 10.09 में उभयनिष्ट आधार QR पर एक ही ओर दो समद्विबाहु त्रिभुज PQR और SQR स्थित हैं। सिद्ध कीजिए की SP रेखा QR की लम्ब अर्द्धक है।



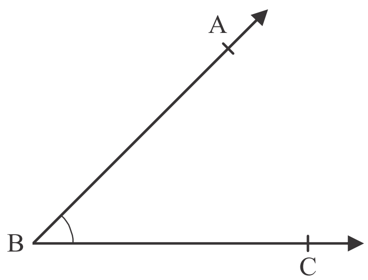
आकृति 10.09

8. दिए गए आकृति 10.10 में $\angle P$ का अर्द्धक PS, भुजा QR को S बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है। $SN \perp PQ$ एवं $SM \perp PR$ खींचे गए हैं। सिद्ध कीजिए कि $SN = SM$



आकृति 10.10

9. दिए गए आकृति 10.11 में $\angle ABC$ दिया गया है। BA और BC से समदूरस्थ तथा $\angle ABC$ के अंत भाग में किसी बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.11

10.05 संगामी रेखाएँ

पिछली कक्षाओं में आपने त्रिभुज से सम्बन्धित कुछ जानकारियाँ प्राप्त की हैं जिनका इस अनुच्छेद में उपयोग होगा। इनका यहाँ पुनः स्मरण करना अनिवार्य है।

NKHVBZ

1. माध्यिका **(Median)** : त्रिभुज के किसी शीर्ष को सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाले रेखाखण्ड को त्रिभुज की मध्यिका कहते हैं।
2. भुजाओं के लम्ब अर्द्धक या लम्ब समाद्विभाजक **(Perpendicular bisectors)** : त्रिभुज की किसी भुजा के मध्य बिन्दु पर खींचा गया लम्ब, भुजा का लम्ब अर्द्धक कहलाता है।
3. कोणों के समद्विभाजक **(Angle bisector)** : त्रिभुज के किसी कोण के समान दो भाग करने वाले रेखा खण्ड को त्रिभुज के कोण समद्विभाजक कहते हैं।
4. शीर्षलम्ब **(Altitude)** : वह रेखाखण्ड जो त्रिभुज के किसी एक शीर्ष से सम्मुख भुजा पर लम्ब डालने से प्राप्त हो को त्रिभुज का एक शीर्षलम्ब कहते हैं।
5. संगामी रेखाएं **(Concurrent lines)** : तीन या तीन से अधिक रेखाएँ यदि एक ही बिन्दु से होकर गुजरें तो वे संगामी रेखाएँ कहलाती हैं। इस स्थिति में उनका उभयनिष्ठ बिन्दु रेखाओं का संगमन अथवा संगामी बिन्दु (Point of Concurrency) कहलाता है।

आइए अब उपर्युक्त रेखाखण्डों के संगामी बिन्दुओं पर विचार करते हैं– जिनसे कुछ निश्चित परिणाम प्राप्त होते हैं। जिन्हें निम्न प्रमेयों के माध्यम से सिद्ध किया जा सकता है। ये परिणाम निश्चित ही ज्यामिति अध्ययन में उपयोगी रहते हैं।

प्रमेय–10.3 त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब–समद्विभाजक संगामी होते है।

दिया है: ΔABC में भुजा AB एवं AC के लम्ब–समद्विभाजक बिन्दु O पर मिलते है और OD भुजा BC पर लम्ब है।

सिद्ध करना है: OD, भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है।

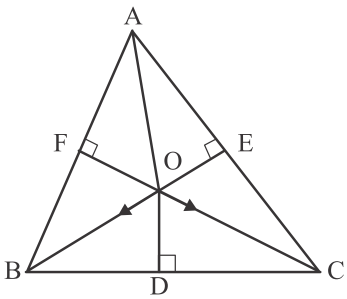
रचना: OA,OB और OC को मिलाया।

उपपत्ति: OE एवं OF क्रमशः AC एवं AB के लम्ब–समद्विभाजक हैं।, अतः OA=OB=OC (प्रमेय 10.1 के विलोम से)

$\because$ OD, भुजा BC पर लम्बवत है और OB=OC अतः प्रमेय 10.1 से

OD, भूजा BC का लम्ब–समद्विभाजक है।

परिकेन्द्र: त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों का संगमन बिन्दु त्रिभुज का परिकेन्द्र (Circumcentre) कहलाता है।



आकृति 10.12

प्रमेय–10.4 त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक संगामी होते हैं।

दिया है: ΔABC में $\angle B$ एवं $\angle C$ के समद्विभाजक बिन्दु O पर मिलते हैं।

सिद्ध करना है: OA, $\angle A$ को समद्धिभाजित करता है।

रचना: आकृति 10.13 में, O से लम्ब OD, OE और OF खींचे।

उपपत्ति: OB एवं OC क्रमशः $\angle B$ एवं $\angle C$ के समद्विभाजक हैं।

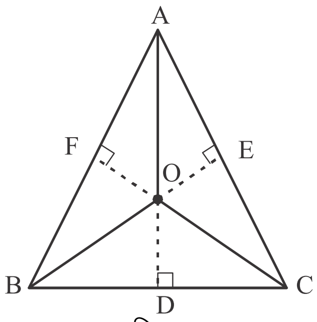
अतः OD = OF . . . (1) (प्रमेय 10.2 से)

और OD = OE . . . (2)

(1) और (2) से OE=OF अतः O, AB और AC से समान दूरी पर स्थित है अर्थात् OA, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

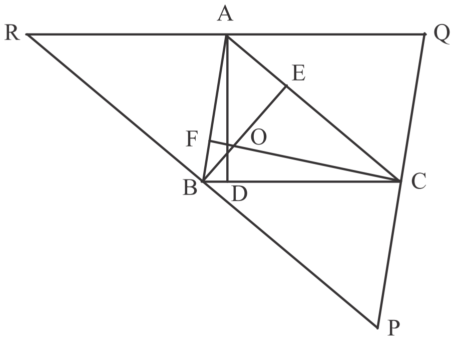
"इतिसिद्धम्"

अन्तः केन्द्रः त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजकों के सगमन् बिन्दु को त्रिभुज का अन्तः केन्द्र कहते हैं।



आकृति 10.13

प्रमेय–10.5 त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्ब संगामी होते हैं।



आकृति 10.14

दिया हुआ है: ΔABC के AD व CF और BE शीर्ष लम्ब हैं।

सिद्ध करना है: AD, CF एवं BE एक बिन्दु से होकर जाते हैं।

रचना: आकृति 10.14 के अनुसार त्रिभुज ABC के प्रत्येक शीर्ष से गुजरती हुई उनकी सम्मुख भुजाओं के समान्तर रेखाएँ खींच कर एक ΔPQR बनाया

उपपत्ति: चतुर्भुज BCAR में $AC \quad RB$ (रचना से) और $BC \quad RA$ (रचना से)

अतः चतुर्भुज BCAR एक समानतर चतुर्भुज है।

$\therefore \quad RA = BC$ ...(1)

इसी प्रकार ABCQ भी एक समान्तर चतुभुज है।

$\therefore \quad AQ = BC$ ...(2)

(1) और (2) से $AR = AQ$ ...(3)

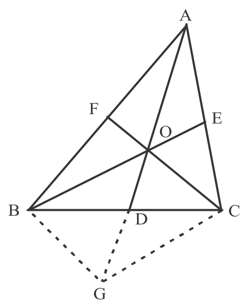
एवं $AD \perp BC$ और $BC \parallel QR$ अतः $AD \perp QR$ ...(4)

(3) और (4) से AD भुजा QR का लम्ब अर्द्धक हुआ इसी प्राकर BE, भुजा PR का एवं CF भुजा PQ के लम्ब अर्द्धक होंगे।

चूकि त्रिभुज के लम्ब अर्द्धक परस्पर संगामी होते हैं। अतः AD, CF एवं BE एक बिन्दु से होकर जाते हैं। इति सिद्धम्

लम्ब केन्द्र–त्रिभुज के शीर्ष लम्बों के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का लम्ब केन्द्र (Orthocentre) कहते हैं।

प्रमेय–10.6 त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से गुजरती हैं और यह बिन्दु प्रत्येक माध्यिका को 2:1 में विभाजित करता है।



आकृति 10.15

दिया हुआ है: BE और CF, ΔABC की माध्यिकाएँ O पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है: (i) A को O से मिलाते हुए आगे बढ़ाने पर प्राप्त रेखा खण्ड AD भी एक माध्यिका ही है अर्थात् $BD = DC$

(ii) $AO : OD = BO : OE = CO : OF = 2 : 1$

रचना: AD को G तक इतना बढ़ाया कि $AO = OG$ हो जाए। BG व CG को मिलाया ।

उप्पत्ति: हम जानते है कि त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर एवं उसकी आधी होती है।

$\therefore$ ΔABG में F, AB का मध्य बिन्दु दिया हुआ हैं एवं O, AG का मध्य बिन्दु है (रचना द्वारा)

अतः $OF \quad BG$ तथा $CO \quad BG$ (चूंकि CO एवं OF, CF के ही भाग हैं) ...(1)

एवं $OF = \frac{1}{2} BG$ ...(2)

इसी प्रकार ΔACG में E व O क्रमशः AC व AG के मध्य बिन्दु हैं

अतः $OE \quad GC$ तथा $BO \quad GC$ (BO एवं OE, BE के ही भाग है) ...(3)

एवं $OE = \frac{1}{2} GC$ ...(4)

(1) व (3) से BOCG एक समान्तर चतुर्भज है।

चूंकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजन करते हैं।

अतः BD=DC

अर्थात् शीर्ष A से खींची गई रेखा AD भी ΔABC की माध्यिका है (एक भाग सिद्ध हुआ)

(ii) चूंकि D समान्तर चतुर्भुत BOCG के विकर्णो का प्रतिच्छेदी बिन्दु है, अतः

$OD = DG$ ...(5)

$OD = \frac{1}{2} OG$ ...(6)

तथा $AO = OG$ (रचना से).

(5) और (6) से

$$OD = \frac{1}{2} AO$$

या $\frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$

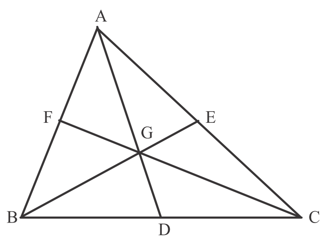
या $AO : OD = 2 : 1$

इसी प्रकार $BO : OE = 2 : 1$ तथा $CO : OF = 2 : 1$

अर्थात् $AO : OD = BO : OE = CO : OF = 2 : 1$ इतिसिद्धम्

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक ΔABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF एक बिन्दु G से गुजरती हैं। यदि $AG = 6$ सेमी, $BE = 12.6$ सेमी और $FG = 3$ सेमी हो, तो AD, GE और GC ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.16

हल: हम जानते हैं कि केन्द्रक G त्रिभुज की माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अतः $\frac{AG}{GD}=\frac{2}{1}$ या $\frac{GD}{AG}=\frac{1}{2}$ दोनों ओर 1 जोडने पर

$\frac{GD}{AG}+1=\frac{1}{2}+1$ या $\frac{GD+AG}{AG}=\frac{1+2}{2}$

या $\frac{AD}{AG}=\frac{3}{2}$ या $\frac{AD}{6}=\frac{3}{2}$

या $AD=\frac{3}{2}\times 6$ या $AD=9$ सेमी

इसी प्रकार $\frac{BG}{GE}=\frac{2}{1}$ या $\frac{BG}{GE}+1=\frac{2}{1}+1$

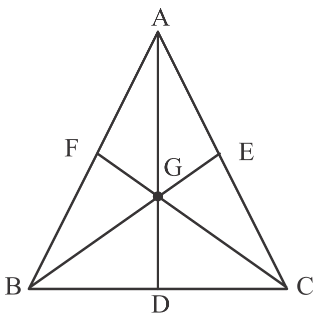
या $\frac{BG+GE}{GE}=\frac{2+1}{1}$ या $\frac{BE}{GE}=\frac{3}{1}$

या $GE=\frac{1}{3}BE$ या $GE=\frac{12.6}{3}$

या $GE=4.2$ और $\frac{FG}{GC}=\frac{1}{2}$

या $2FG=GC$ या $GC=2\times 3=6$ सेमी

उदाहरण-2. यदि एक त्रिभुज की सभी माध्यिकाएँ समान हों, तो वह समबाहु त्रिभुज होगा।



आकृति 10.17

हल: दिया है: ΔABC की माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर मिलती हैं, और $AD=BE=CF$ ।

सिद्ध करना है: ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति: हम जानते हैं कि त्रिभुज की माध्यिकाओं को केन्द्रक 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अतः $AD=BE=CF$ (दिया है)

$$\therefore \quad \frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}CF$$

$$\Rightarrow \quad AG=BG=CG \quad \ldots(1)$$

इसी प्रकार $\frac{1}{3}AD=\frac{1}{3}BE=\frac{1}{3}CF$

$$\Rightarrow \quad GD=GE=GF \quad \ldots(2)$$

अब ΔBGF और ΔCGE में,

$BG = CG$ $\quad [(1)$ से$]$

$GF = GE$ $\quad [(2)$ से$]$

और $\angle BGF = \angle CGE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$\Delta BGF \cong \Delta CGE$

अतः सर्वागासम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होगी।

$\therefore \quad BF = CE$

$\therefore \quad 2BF = 2CE$

$\Rightarrow \quad AB = AC$ ...(3)

इसी प्रकार $\Delta CGD \cong \Delta AGF$ होंगे।

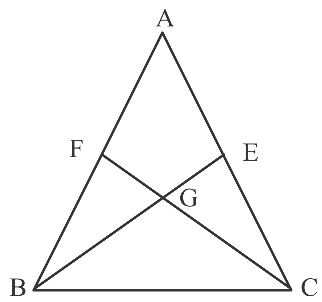
अतः $BC = AB$ ...(4)

(3) और (4) से

$AD = BC = CF$

$\therefore$ ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। ''इतिसिद्धम्''

उदाहरण-3. एक त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ समान माप की हो तो वह त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज होता है।



आकृति 10.18

दिया हुआ है: ΔABC में BE एवं CF दो समान माप की माध्यिकाएँ है।

तथा BE = CF, F तथा E क्रमशः AB तथा AC के मध्य बिन्दु हैं।

सिद्ध करना है: ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति: ΔABC का केंद्रक G है (ज्ञात है)

$\therefore \quad BG : GE = CG : GF = 2 : 1$

अतः $BG = \frac{2}{3} BE$ ...(1)

$GE = \frac{1}{3} BE$ ...(2)

तथा $CG = \frac{2}{3} CF$ ...(3)

$GF = \frac{1}{3} CF$ ...(4)

परन्तु $BE = CF$ (ज्ञात है)

$\therefore$ (1) और (3) से $BG = CG$ और (2) और (4) से $GE = GF$

अब ΔBGF और ΔCGE में

$BG = CG$ (सिद्ध कर चुके हैं)

$GE = GF$ (सिद्ध कर चुके हैं)

$\angle BGF = \angle CGE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\Delta BGF \cong \Delta CGE$ (भुजा–कोण–भुजा नियम से)

अतः $BF = CE$ या $2BF = 2CE$

$\therefore$ $AB = AC$

$\therefore$ ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्नमाला 10.2

1. त्रिभुज के तीनों शीर्षों एवं तीनों भुजाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।
2. एक ΔABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि AG=6 सेमी, BE=9 सेमी और GF=4.5 सेमी हो, तो GD, BG और CF ज्ञात कीजिए।
3. एक ΔABC में, माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि $AD + BE > \frac{3}{2} AB$,

   [संकेत : $AG + BG > AB$]
4. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की दो माध्यिकाओं का योग तीसरी माध्यिका से अधिक होता है।
5. एक ΔABC में, माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि

   $$4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$$
6. ΔABC का लम्ब केंद्र P है। सिद्ध कीजिए कि ΔPBC का लम्ब केंद्र बिन्दु A है।
7. ΔABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G से गुजरती है।
   (a) यदि GF=4 सेमी हो तो GC का मान ज्ञात कीजिए।
   (b) यदि AD=7.5 सेमी हो तो GD का मान ज्ञात कीजिए।
8. ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC, BC का मध्य बिन्दु D है। सिद्ध कीजिए कि परिकेंद्र, अंतकेंद्र, लम्ब केंद्र तथा केंद्रक सभी AD रेखा पर स्थित हैं।
9. ΔABC का लम्ब केंद्र H है। AH, BH और CH में मध्य बिन्दु क्रमशः X, Y और Z हैं। सिद्ध कीजिए कि ΔXYZ का लम्ब केंद्र भी H है।
10. ΔABC की भुजा BC में वह बिन्दु किस प्रकार ज्ञात करेंगे जो भुजाओं AB और AC से समदूरस्थ हों?

विविध प्रश्नमाला–10

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 7 तक)

1. किसी त्रिभुज के शीर्षों से समदूरस्थ बिन्दु कहलाता है–
   (क)गुरूत्व केन्द्र (ख) परिकेन्द्र (ग) लम्बकेन्द्र (घ) अन्तःकेन्द
2. त्रिभुज का गुरूत्व केन्द्र होता है–
   (क) त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से खींचे गये लम्ब–समद्विभाजक का संगामी–बिन्दु
   (ख) त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक का संगामी–बिन्दु
   (ग) त्रिभुज की माध्यिकाओं का संगामी –बिन्दु
   (घ) त्रिभुज के शीर्षलम्ब का संगामी बिन्दु
3. समतल में लुढ़कने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ होता है–
   (क) वृत्त (ख) वक्र (ग) समतल के समान्तर रेखा (घ) समतल पर लम्बवत् रेखा
4. यदि किसी त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ समान हों, तो त्रिभुज होगा–
   (क) समकोण त्रिभुज (ख) समद्विबाहु त्रिभुज (ग) समबाहु त्रिभुज (घ) इनमें से कोई नहीं

5. यदि AB और CD दो असमान्तर रेखाएँ हो, तो इनसे समान दूरी पर रहने वाले बिन्दु P का बिन्दुपथ होगा–
   (क) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB के समान्तर रेखा,
   (ख) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB तथा CD से अन्तरित कोण की समद्विभाजक रेखा
   (ग) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB तथा CD के समान्तर रेखा
   (घ) बिन्दु P से होकर जाने वाली रेखाओं AB तथा CD के लम्बवत् रेखा
6. वह त्रिभुज जिसके लम्बकेन्द्र, परिकेन्द्र और अन्तःकेन्द्र संपाती हो कहलाता है
   (क) समबाहु त्रिभुज (ख) समकोण त्रिभुज (ग) समद्विबाहु त्रिभुज (घ) इनमें से कोई नहीं
7. वह त्रिभुज जिसका लम्बकेंद्र त्रिभुज का शीर्ष बिन्दु होता है, कहलाता है
   (क) समकोण त्रिभुज (ख) समबाहु त्रिभुज (ग) समद्विबाहु त्रिभुज (घ) इनमें से कोई नही
8. घडी के पेन्डुलम के सिरे का बिन्दुपथ लिखिये।
9. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिन्दु, क्रमश D, E और F हों, तो सिद्ध कीजिए कि EF, AD को समद्विभाजित करती है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. किन्हीं प्रतिबन्धों के अर्न्तगत एक बिन्दु का बिन्दुपथ वह ज्यामितीय आकृति है, जिसका प्रत्येक बिन्दु दिए गए प्रतिबंधों का सन्तुष्ट करता है।
2. किन्हीं दो बिन्दुओं से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ दिए हुए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का लम्ब–समद्विभाजक होता है।
3. दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ उन दोनों रेखाओं से बने कोणों का समद्विभाजक होता है।
4. त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब–समद्विभाजक संगामी होते हैं, और संगमन बिन्दु को त्रिभुज का परिकेन्द्र कहते हैं।
5. त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक संगामी होते हैं और संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अन्तः केन्द्र कहते हैं।
6. त्रिभुज के तीनों शीर्षलम्ब संगामी होते हैं और संगमन बिन्दु को त्रिभुज का लम्ब केन्द्र कहते हैं।
7. त्रिभुज के तीनों माध्यिकाएँ संगामी होती है। संगमन बिन्दु त्रिभुज की माध्यिकाओं को 2 : 1 के अनुपात में विभापित करता है। संगमन बिन्दु को त्रिभुज का केन्द्रक कहते हैं।

उत्तरमाला–10

प्रश्नमाला–10.1

1. (i) असत्य–किसी रेखा से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दु पथ उसके दोनों ओर उस रेखा के समान्तर रेखाएँ होती हैं।

(ii)सत्य

(iii)असत्य–तीन दिए गए बिन्दु संरेख तभी होंगे जब तीनों उस एक रेखा पर स्थित हो जिसके सभी बिन्दुओ केसमुच्चयों में से तीनों दिए गए बिन्दु भी समुच्चय के अवयव हो।

(iv) असत्य, यह निर्भर करता है, दोनों रेखाएँ किस स्थिति में स्थित हैं। यदि दोनों समान्तर हो तो उनके समान्तर रेखा होगी और यदि प्रतिच्छेदी रेखाएँ हों तो प्रतिच्छेदी बिन्दुओं पर बनने वाले कोण के अर्द्धक वाली रेखा होगी।

(v) सत्य

प्रश्नमाला–10.2

1. परिकेन्द्र, अन्तःकेन्द्र 2. 3 सेमी, 6 सेमी, 13.5 सेमी, 7.8 सेमी, 2.5 सेमी

विविध प्रश्नमाला 10

1. (ख) 2. (ग) 3. (ग) 4. (ख) 5. (ख) 6. (क) 7. (क)

8. एक वृत्त चाप

11

समरूपता (Similarity)

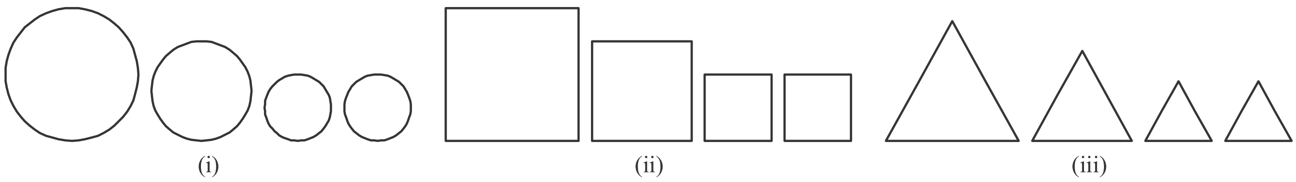
11.01 प्रस्तावना

क्या आपके मन में कभी यह प्रश्न उठा है कि दूरस्थ वस्तुओं जैसे चन्द्रमा की दूरी अथवा पर्वतों जैसे गौरीशंकर शिखर (माउन्ट एवरेस्ट), गुरू शिखर (माउन्ट आबू की सबसे ऊंची चोटी) की ऊँचाई किस प्रकार ज्ञात की होगी? क्या इन्हें एक मापन वाले फीते से सीधा (प्रत्यक्ष) मापा गया है? वास्तव में इन सभी दूरियों और ऊँचाईयों को अप्रत्यक्ष मापन की अवधारण का प्रयोग करते हुए ज्ञात किया है। यह अप्रत्यक्ष अवधारणा आकृतियों की समरूपता सिद्धान्त पर आधारित है। इस अध्याय में हम समरूपता विशेषतः समरूप त्रिभुज पर विस्तृत अध्ययन करेगें।

11.02 समरूप आकृतियाँ

याद कीजिए कक्षा 9 में आप समान आकार एवं समान माप की आकृतियों, (सर्वांगसम आकृतियों) पर चर्चा कर चुके हैं। जिसके अन्तर्गत आपने देखा होगा कि समान (एक ही) त्रिज्या वाले सभी वृत्त सर्वांगसम होते हैं, समान लम्बाई की भुजा वाले सभी वर्ग सर्वांगसम होते हैं। इसी प्रकार समान लम्बाई की भुजा वाले सभी समबाहू त्रिभुज भी सर्वांगसम होते हैं।

आइए अब निम्न आकृतियों पर विचार करते है।

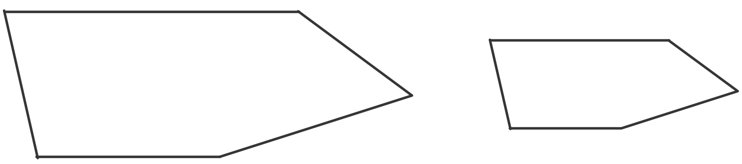


आकृति 11.01

आकृति 11.1 (i) में से कोई दो या अधिक वृत्त ले कर देखिए क्या ये सर्वांगसम हैं? चूंकि इनमें से सभी की त्रिज्या समान नहीं है इसलिए ये परस्पर सर्वांगसम नहीं हैं। ध्यान दीजिए इनमें कुछ सर्वांगसम है और कुछ सर्वांगसम नहीं है। परन्तु सभी के आकार (बनावट) समान है। अतः ये सभी वे आकृतियाँ हैं जिन्हें समरूप कहते है। दो समरूप आकृतियों के आकार समान होते है परन्तु इनके माप समान होना आवश्यक नहीं है। अतः सभी वृत्त समरूप होते हैं। इसी प्रकार आकृति 11.1 (ii), (iii) में स्थित सभी वर्गों एवं सभी समबाहू त्रिभूजों के बारे में भी सभी वृत्तों की तरह यही कहेगें कि सभी वर्ग समरूप हैं तथा सभी समबाहू त्रिभुज भी समरूप हैं।

उपर्युक्त चिंतन के पश्चात् हम ये कह सकते हैं कि सभी सर्वांगसम आकृतियां समरूप होती हैं। परन्तु सभी समरूप आकृतियों का सर्वांगमस होना आवश्यक नहीं है।

अब पुनः उपर्युक्त आकृति 11.01 (i), (ii), (iii) को देखकर यह बतायें कि क्या एक वृत्त और एक वर्ग परस्पर समरूप है अथवा एक वर्ग व एक समबाहू त्रिभुज परस्पर समरूप है? निश्चित ही आपका उत्तर नहीं में होगा क्योंकि इनके आकार समान नहीं हैं। आकृति 11.02में दर्शाये गये दो पंचभुजों के बारे में आप क्या कहेंगे? क्या ये परस्पर समरूप हैं? यद्यपि ये दो आकृतियां समरूप जैसी प्रतीत हो रही है परन्तु हमें इनके समरूप होने या नहीं होने पर आशंका है।



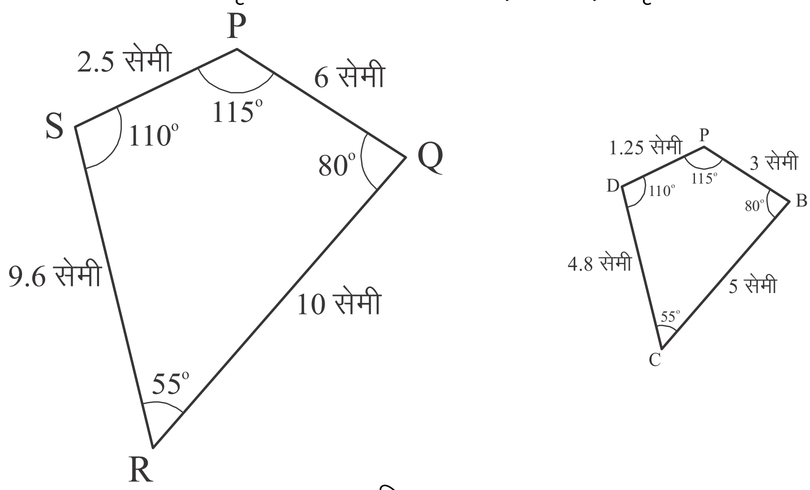
आकृति 11.02

अब हम निम्न आकृतिों में अंकित आकृतियों के बारे में विचार करते हैं। चित्र क्रमांक 11.03 देखिये।

चित्र 11.03

तीन चित्रों में हमारे देश के महान गणितज्ञ श्री निवास रामानुजन (22 दिसम्बर 1887–18 अप्रैल 1920) की भिन्न मापों में आकृतियाँ बनी हुई है। क्यॉं ये आकृतियां परस्पर समरूप हैं? निःसन्देह ये समरूप आकृतियां हैं। क्या आप बता सकते हैं इन आकृतियों का अवलोकन करने के बाद आप को इन्हे समरूप में आशंका क्यों नहीं हुई? इसलिए आइये आकृतियों की समरूपता के लिए कोई परिभाषा ज्ञात करे जिससे यह सुनिश्चित कर सकें कि दो दी हुई आकृतियां समरूप हैं या नहीं।

आपने कभी अपने दस्तावेजों जैसे अंक तालिका, जन्म प्रमाण पत्र आदि की छाया प्रतियां (फोटो कॉपी) अवश्य बनवाई होंगी। इसी प्रकार फोटो ग्राफर से अपनी स्टेम्प साइज, पासपोर्ट साइज एवं पोस्टकार्ड़ साइज फोटो भी अवश्य बनवाई होगी। एक ही समय खींची गई आपकी सभी साइज की फोटो परस्पर समरूप होती हैं। एक सफेद कागज पर एक आकृति बनाकर फोटो कापी की मशीन द्वारा आवर्धित (बड़ी) करवाइए अब आपके पास दो आकृतियां हैं। इन आकृतियों की संगत भुजाओं एवं संगत कोणों को क्रमशः स्केल एवं प्रोटेक्टर से माप कर आकृतिों को नामांकित कीजिए। देखिए आकृति 11.04



आकृति 11.04

अब आप दोनों आकृतियों की संगत भुजाओं एवं संगत कोणों की तुलना कीजिए। आप पाएंगे बड़े आकृति की संगत भुजाएँ छोटे आकृति की संगत भुजाओं से 2 : 1 में आवर्धित (बड़ी) हो गई है। इसी प्रकार छोटे आकृति की प्रत्येक संगत भुजा बड़े आकृति की संगत भुजा से 1 : 2 में छोटी हो गई। इसी तरह प्रत्येक संगत कोण परस्पर बराबर है यहीं दो आकृतियों विशेष कर दो बहुभुजों में समरूपता के लिए निष्कर्ष मान सकते हैं। अर्थात् हम कह सकते हैं कि भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप तभी होतें हैं जब (i) इनके सभी संगत कोण बराबर हो तथा (ii) इनकी संगत भुजाएं समान अनुपात में हो।

आकृति 11.04 में दर्शाए दोनों चतुर्भुज क्रमशः ABCD एवं PQRS हो तो हम देख सकते है कि शीर्ष A, शीर्ष P के सगंत है, शीर्ष B, शीर्ष Q के संगत है, शीर्ष C, शीर्ष R के संगत है तथा शीर्ष D, शीर्ष S के संगत हैं। सांकेतिक रूप से इन संगतताओं को $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q, C \leftrightarrow R$ और $D \leftrightarrow S$ से निरूपित किया जाता है। इस प्रकार

(i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ और $\angle D = \angle S$ है।

(ii) $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CD}{RS} = \dfrac{DA}{SP} = \dfrac{1}{2}$

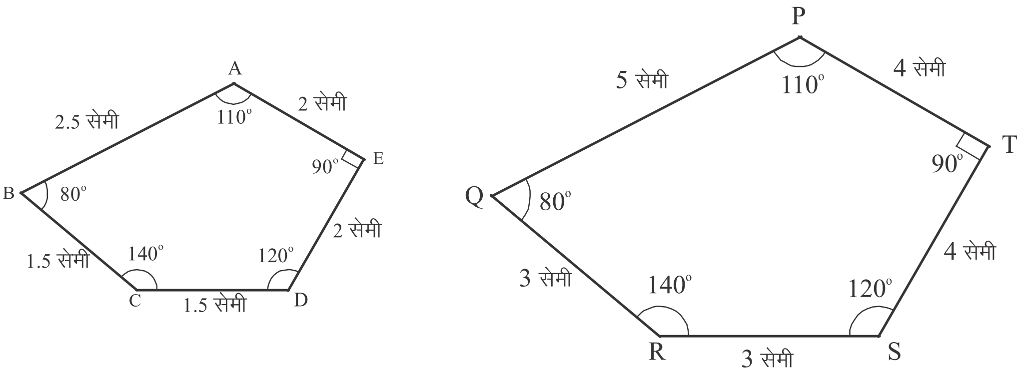
अर्थात् चतुर्भुज ABCD और चतुर्भुज PQRS परस्पर समरूप है।

उपर्युक्त निष्कर्ष के आधार पर आकृति 11.5 में बने दो पंचभुजों के लिए–

(i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R, \angle D = \angle S$ एवं $\angle E = \angle T$

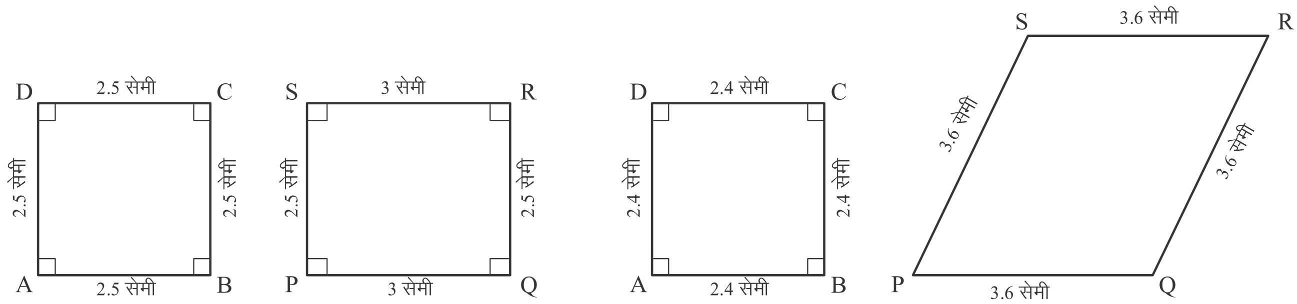
(ii) $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CD}{RS} = \dfrac{DE}{ST} = \dfrac{EA}{TP} = \dfrac{1}{2}$

अतः पंचभुज ABCDE और पंचभुज PQRST समरूप हैं।



आकृति 11.05

आकृति 11.06 (i) के अन्तर्गत एक वर्ग एवं एक आयत में संगत कोण तो बराबर है, परन्तु इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती नहीं है। अतः दोनों समरूप नहीं हैं।



आकृति 11.06

इसी प्रकार आकृति 11.06 (ii) में एक वर्ग और एक समचतुर्भुज है, में संगत भुजाएँ समानुपाती है परन्तु संगत कोण समान नहीं हैं अतः दोनों चतुर्भुज समरूप नहीं हैं।

इस प्रकार हम कह सकते है कि दो बहुभुजों की समरूपता के लिए (i) संगत कोणों का बराबर होना (ii) संगत भुजाओं का समानुपाती होना में से किसी एक प्रतिबन्ध का सन्तुष्ट होना ही पर्याप्त नहीं हैं वरन् दोनों का संतुष्ट होना आवश्यक है।

प्रश्नमाला 11.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (i) सभी वृत्त .... होते है। (ii) सभी वर्ग .... होते है।

   (iii) सभी .... त्रिभुज समरूप होते हैं।

   (iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि

   (a) .... (b) ....

2. निम्न कथन में सत्य व असत्य बताइए।

   (i) दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं।

   (ii) दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं।

   (iii) दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएं समानुपाती हो।

   (iv) दो बहुभुज समरूप होत हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण बराबर हो।

   (v) दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हो।

3. समरूप आकृतियों के कोई दो उदाहरण आकृति बनाकर दीजिए।

11.03 त्रिभुजों की समरूपता एवं समान कोणिक त्रिभुज

इस अध्याय में अब तक हमने दो बहुभुजों के समरूप होने के लिए दो प्रतिबन्धों की अनिवार्यता को समझा। चूंकि त्रिभुज भी बहुभुज की श्रेणी में ही आता है अतः दो त्रिभुज परस्पर समरूप होगें यदि

(i) दोनों के सभी संगत कोण बराबर हो

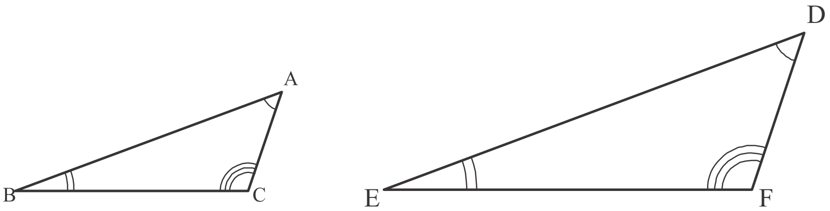
(ii) दोनों की संगत भुजाओं का अनुपात बराबर हो

आकृति 11.7 में स्थित ΔABC एवं ΔDEF समरूप होगें यदि

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

(ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

NZN38D



आकृति 11.07

समानकोणिक त्रिभुज

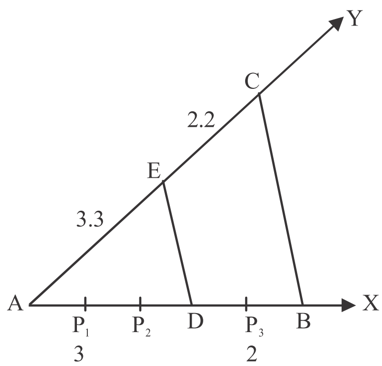
यदि दो त्रिभुजों में उनके संगत कोण बराबर हो तो वे दोनों त्रिभुज समानकोणिक त्रिभुज कहलाते हैं।

आधारभूत समानुपातिकता सम्बन्धित परिणाम –

अब हम निम्न प्रयोग के माध्यम से त्रिभुज की भुजाओं में नीहित अनुपातिक सम्बन्धों को समझने का प्रयत्न करते हैं।

(a) कोई एक कोण $\angle XAY$ खींचिए। AX पर बराबर लम्बाई लेकर P_1, P_2, D, P_3 तथा B बिन्दु लगा दीजिए। इस प्रकार हमें $AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ इकाई प्राप्त होंगे (यदि यहां प्रत्येक बिन्दु 1 – 1 सेमी दूरी पर लगाएँ तो आगे मापन में सुविधा रहेगी)

(b) AY पर कोई बिन्दु C लेकर B को C से मिला दीजिए। अब D से रेखा DE, BC के समान्तर खींचिए जो AY को E पर काटती हैं। इस तरह एक ΔABC बन गया है।



आकृति 11.08

आकृति 11.08 के अनुसार

$AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3$ इकाई (3 सेमी यहाँ सभी अन्तराल 1–1 सेमी है)

$DB = DP_3 + P_3B = 2$ इकाई (2 सेमी)

$\therefore \quad \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{3}{2} \qquad \ldots (1)$

अब AE एवं AC को मापिए (यहाँ मापने पर AE = 3.3 सेमी व EC = 2.2 सेमी है)

अतः $\frac{AE}{EC}=\frac{3.3}{2.2}=\frac{3}{2}$ . . . (2)

(1) व (2) की तुलना की जाए तो हम देखते हैं।

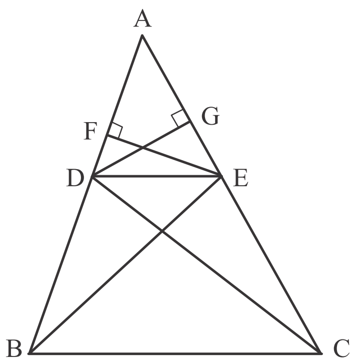
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

अर्थात् यदि ΔABC में इसकी भुजाएँ AB व AC पर क्रमशः D व E ऐसे दो बिन्दु ले कि DE || BC हो तो $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ प्राप्त होता है तथा इसे सर्वप्रथम यूनान के प्रसिद्ध गणितज्ञ थेल्स ने प्राप्त किया इसलिए इसे थेल्स प्रमेय भी कहते हैं। यह परिणाम आधार भूत अनुपातिकता प्रमेय के नाम से जाना जाता है।

प्रमेय 11.1 (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय/थेल्स प्रमेय)

किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गइ एक रेखा त्रिभुज की शेष दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करे तो यह दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

दिया हुआ है: ABC एक त्रिभुज हैं जिसमें DE || BC है। DE, AB व AC को क्रमशः D व E पर काटती है।



आकृति 11.09

सिद्ध करना: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

रचना: BE व CD को मिलाया $EF \perp BA$ और $DG \perp CA$ खींचा

उपपत्ति: चूंकि $EF \perp BA$ अतः EF, ΔADE तथा ΔABE की ऊँचाई है।

$\therefore$ ΔADE का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

$=\frac{1}{2}$ AD × EF

और ΔDBE का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई $=\frac{1}{2} DB \times EF$

$$\therefore \quad \frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBE \text{ का क्षेत्रफल}}=\frac{\frac{1}{2} AD \times EF}{\frac{1}{2} DB \times EF}=\frac{AD}{DB} \quad \ldots (1)$$

इसी प्रकार $$\frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DG}{\frac{1}{2} EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \qquad \ldots(2)$$

किन्तु ΔDBE एवं ΔDEC दोनों समान आधार DE एवं DE || BC के मध्य बने हैं

अतः ΔDBE का क्षेत्रफल $=\Delta$DEC का क्षेत्रफल . . . (3)

(1), (2) और (3) से

$$\frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBE \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEC \text{ का क्षेत्रफल}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

इति सिद्धम्

इस आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की सहायता से निम्न परिणाम भी ज्ञात किए जा सकते हैं। आगे उपयोग के लिए इनका भी स्मरण में रहना आवश्यक है।

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

प्रमेय 11.2 (प्रमेय 11.1 का विलोम)

यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करे, तो यह तीसरी भुजा के समान्तर होती है।

दिया हुआ है: एक रेखा ℓ त्रिभुज ABC की भुजा AB व AC को क्रमशः D व E पर इस प्रकार काटती है कि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ हो

सिद्ध करना है: $\ell \parallel BC$ अर्थात् DE || BC

उपपत्ति: मान लें कि DE, BC के समान्तर नहीं है, तब दूसरी रेखा BC के समान्तर है माना कि DF || BC है।

$\because$ DF || BC

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा) . . . (1)

किन्तु $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (दिया हुआ) . . . (2)

अतः $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC}$ ((1) व (2) से)

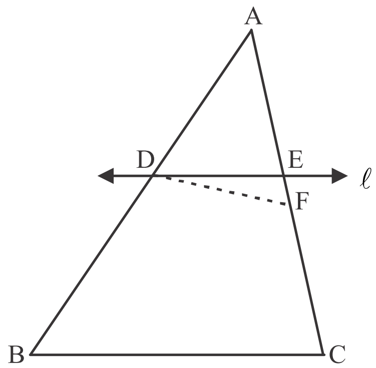
दोनों ओर 1 जोड़ने पर

$$\frac{AF}{FC} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$$

या $$\frac{AF + FC}{FC} = \frac{AE + EC}{EC}$$

या $$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC}$$

या $$\frac{1}{FC} = \frac{1}{EC}$$



आकृति 11.10

या FC = EC यह परिणाम तभी आ सकता है जब F और E एक दूसरे को सम्पाती करे और DF, DE पर स्थित हो।

अर्थात् DE || BC इति सिद्धम्

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. ΔABC में $DE \parallel BC$ है तथा $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ है। यदि $AC = 5.6$ इकाई हो तो AE का मान ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में $DE \parallel BC$ दिया हुआ है।

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{(AC - AE)}$

या $\quad \frac{3}{5} = \frac{AE}{5.6 - AE}$

$\because \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ एवं $AC = 5.6$ इकाई

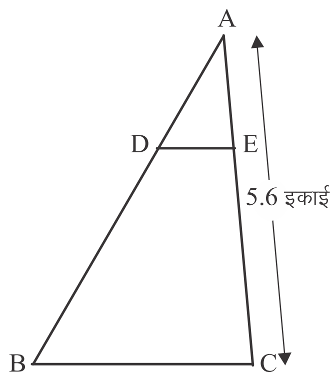
या $\quad 3(5.6 - AE) = 5AE$

या $\quad 16.8 - 3AE = 5AE$

या $\quad 5AE + 3AE = 16.8$

या $\quad 8AE = 16.8$

या $\quad AE = \frac{16.8}{8} = 2.1$ इकाई



आकृति 11.11

उदाहरण-2. दिए गए आकृति में $DE \parallel BC$ है यदि $AD = x$, $DB = x - 2$, $AE = x + 2$ और $EC = x - 1$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में $DE \parallel BC$ अतः

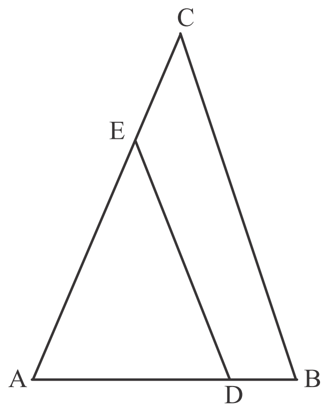
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\quad \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$

या $\quad x(x-1) = (x+2)(x-2)$

या $\quad x^2 - x = x^2 - 4$

या $\quad x = 4$



आकृति 11.12

उदाहरण-3. समलम्ब चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel DC$ है। AD व BC पर क्रमशः E और F इस प्रकार स्थित है कि $EF \parallel AB$ है।

सिद्ध कीजिए $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

हल: A व C को मिलाइए इस प्रकार AC, EF के बिन्दु G से गुजरता है।

$\because \quad AB \parallel DC$ और $EF \parallel AB$ (दिया हुआ है)

$\therefore \quad EF \parallel DC$ (एक ही रेखा के समान्तर खींची गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती है)

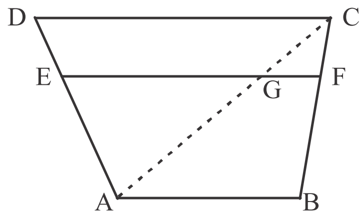
ΔADC में $EG \parallel DC$ (यहाँ $EF \parallel DC$ और EG, EF का ही भाग है)

अतः $\quad \frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\quad \frac{AG}{CG} = \frac{AE}{ED} \quad \ldots (1)$

इसी प्रकार ΔCAB में $\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

या $\frac{AG}{CG} = \frac{BF}{CF}$ . . . (2)

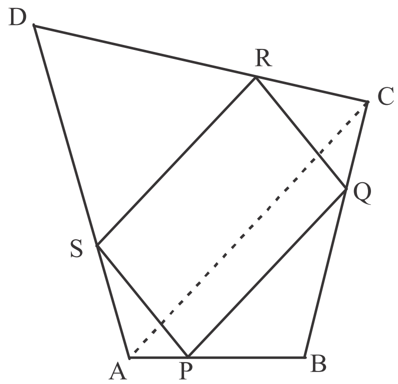


आकृति 11.13

अतः (1) और (2) से $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ इति सिद्धम्

उदाहरण-4. ABCD एक चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD और DA पर क्रमशः P,Q,R एवं S बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि ये चतुर्भुज के शीर्ष A व C के सापेक्ष इन्हें सम त्रिभाजित करते है, तो सिद्ध कीजिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल: PQRS के समान्तर चतुर्भुज सिद्ध करने के लिए हमें PQ || SR एवं QR || PS सिद्ध करना होगा।



आकृति 11.14

दिया हुआ है: P,Q,R और S बिन्दु क्रमशः AB, BC, CD और DA पर इस प्रकार स्थित हैं कि BP = 2 PA, BQ = 2 QC, DR = 2RC और DS = 2SA

रचना: A को C से मिलाया –

ΔADC में $\frac{DS}{SA} = \frac{2SA}{SA} = 2$

एवं $\frac{DR}{RC} = \frac{2RC}{RC} = 2$ (दिया हुआ है से)

$\Rightarrow \frac{DS}{SA} = \frac{DR}{RC} \Rightarrow SR \parallel AC$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की विलोम प्रमेय द्वारा) . . . (1)

ΔABC में $\frac{BP}{PA} = \frac{2PA}{PA} = 2$

और $\frac{BQ}{QC} = \frac{2QC}{QC} = 2$ (दिया हुआ है से)

$\Rightarrow \frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC} \Rightarrow PQ \parallel AC$ (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की विलोम प्रमेय द्वारा) . . . (2)

(1) व (2) से SR || AC तथा PQ || AC $\Rightarrow$ SR || PQ

इसी प्रकार BD को मिलाकर हम उपर्युक्तानुसार QR || PS सिद्ध कर सकते हैं।

अर्थात् PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

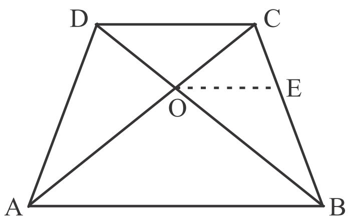
उदाहरण-5. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$ है तो सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

हल: दिया हुआ है: चतुर्भुज ABCD में आकृति 11.15 के अनुसार

$$\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$$

सिद्ध करना है: ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, इसके लिए हमें AB || CD सिद्ध करना होगा।

रचना: O से OE || AB रेखा खींची



आकृति 11.15

उपपत्ति: $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$ (दिया हुआ है)

या $\frac{AO}{CO}=\frac{BO}{DO}$ . . . (1)

ΔABC में OE || AB

$\therefore$ $\frac{CO}{OA}=\frac{CE}{EB}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\frac{OA}{CO}=\frac{EB}{CE}$ . . . (2)

(1) व (2) से $\frac{BO}{OD}=\frac{EB}{CE}$

या $\frac{BO}{OD}=\frac{BE}{EC}$

$\Rightarrow$ OE || CD (ΔBCD में आधारभूत आनुपातिक प्रमेय के विलोम से). . . (3)

$\because$ OE || AB (रचना से) . . . (4)

(3) व (4) से

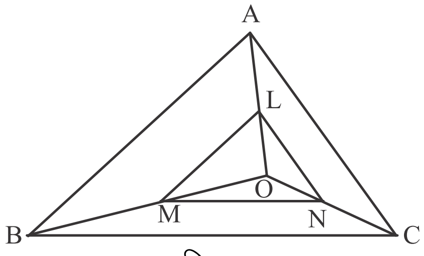
AB || CD

अर्थात् ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है। इति सिद्धम्

प्रश्नमाला 11.2

1. ΔABC की भुजाएं AB व AC पर क्रमशः D व E बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि DE || BC हो तो
   (i) यदि AD = 6 सेमी, DB = 9 सेमी और AE = 8 सेमी हो तो AC का मान ज्ञात कीजिए।
   (ii) यदि $\frac{AD}{DB}=\frac{4}{13}$ और AC = 20.4 सेमी हो तो EC का मान ज्ञात कीजिए।
   (iii) $\frac{AD}{DB}=\frac{7}{4}$ और AE = 6.3 सेमी हो तो AC का मान ज्ञात कीजिए।
   (iv) यदि $AD = 4x - 3$, $AE = 8x - 7$, $BD = 3x - 1$ और $CE = 5x - 3$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
2. ΔABC की भुजाएँ AB एवं AC पर क्रमशः D व E दो बिन्दु स्थित है, निम्न प्रश्नों में दिये गये मानों के माध्यम से DE || BC होने नहीं होने जाकारी दीजिए।
   (i) AB = 12 सेमी, AD = 8 सेमी, AE = 12 सेमी और AC = 18 सेमी
   (ii) AB = 5.6 सेमी, AD = 1.4 सेमी, AC = 9.0 सेमी तथा AE = 1.8 सेमी
   (iii) AD = 10.5 सेमी, BD = 4.5 सेमी, AC = 4.8 सेमी तथा AE = 2.8 सेमी
   (iv) AD = 5.7 सेमी, BD = 9.5 सेमी, AE = 3.3 सेमी तथा EC = 5.5 सेमी

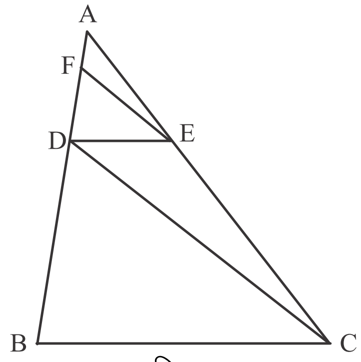
3. दिए गए आकृति 11.16 में OA, OB और OC पर क्रमशः L,M एवं N बिन्दु इस प्रकार स्थित है कि LM || AB तथा MN || BC है तो दर्शाइए LN || AC है।



आकृति 11.16

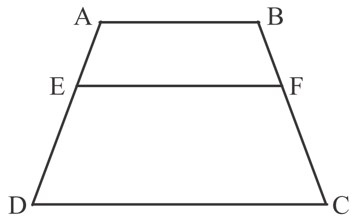
4. ΔABC में AB व AC भुजाओं पर क्रमशः D और E बिन्दु इस प्रकार स्थित है कि BD = CE है यदि $\angle B = \angle C$ हो तो दर्शाइए DE || BC

5. आकृति 11.17 में DE || BC और CD || EF हो तो सिद्ध कीजिए $AD^2 = AB \times AF$



आकृति 11.17

6. आकृति 11.18 में यदि EF || DC || AB हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$



आकृति 11.18

7. ABCD पर समान्तर चतुर्भुज है, जिसकी भुजा BC पर कोई बिन्दु P स्थित है। यदि DP एवं AB को आगे बढ़ाएँ तो वे L पर मिलते है। तो सिद्ध कीजिए।

(i) $\frac{DP}{PL} = \frac{DC}{BL}$ (ii) $\frac{DL}{DP} = \frac{AL}{DC}$

8. ΔABC की भुजा AB पर D और E दो ऐसे बिन्दु स्थित हैं कि AD = BE हो। यदि DP || BC तथा EQ || AC हो तो सिद्ध कीजिए PQ || AB

9. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी AB || DC है तथा इसके विकर्ण O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

10. यदि D और E क्रमशः AB और AC, त्रिभुज ABC की भुजाओं पर स्थित ऐसे बिन्दु है कि BD = CE हो तो सिद्ध कीजिए ΔABC एक समद्विबाहू त्रिभुज है।

11.04 त्रिभुज के आन्तरिक और बाह्य कोणों के समद्विभाजक

आधारभूत समानुपातिकता प्रमयों में आपने त्रिभुज की भुजाओं को एक रेखा द्वारा प्रतिच्छेद करने पर प्राप्त परिणामों को देखा और समझा। अब यदि Δ के कोणों को कोई भुजा विभाजित करती है तो विभाजन के बाद किस प्रकार के परिणाम मिलते है, तो आइए निम्न प्रयोग हमको क्या परिणाम देता है? समझते हैं।

प्रमेय–11.3 यदि कोई एक रेखा किसी त्रिभुज के एक आन्तरिक कोण का समद्विभाजन करे तो वह समद्विभाजक रेखा उस कोण की सम्मुख भुजा को त्रिभुज की शेष भुजाओं की लम्बाईयों के अनुपात में विभाजित करती है।

दिया हुआ है: ΔABC में AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है।

अत: $\angle 1 = \angle 2$

सिद्ध करना है: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

रचना: रेखा CE इस प्रकार खींची गई है कि DA || CE हो तो BA को आगे बढ़ाने पर E पर मिलती है।

उपपत्ति: CE || DA और AC और BE तिर्यक रेखाएं है।

अत: $\angle 2 = \angle 3$ (एकान्तर कोण) . . . (1)

एवं $\angle 1 = \angle 4$ (संगत कोण) . . . (2)

परन्तु $\angle 1 = \angle 2$ (दिया हुआ)

(1) व (2) से $\angle 3 = \angle 4$

अत: ΔACE में

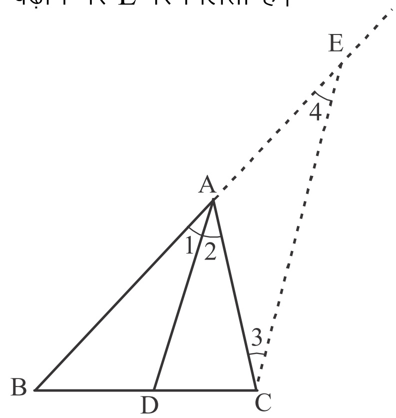
$AE = AC$ . . . (3)

ΔBCE में DA || CA तो आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

या $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC}$ ((3) से)

अर्थात् $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC}$ इति सिद्धम्



आकृति 11.19

प्रमेय–11.4 (प्रमेय 11.3 की विलोम)

यदि एक रेखा किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से इस प्रकार खींची जाए कि वह उसके सम्मुख भुजा को शेष दोनों भुजाओं के अनुपात में विभाजित करे तो वह रेखा शीर्ष पर बने कोण का समद्विभाजन करती है।

दिया हुआ है: ΔABC की भुजा BC पर D एक ऐसा बिन्दु है जिससे

$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ हो।

सिद्ध करना है: AD, $\angle A$ की समद्विभाजक है

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

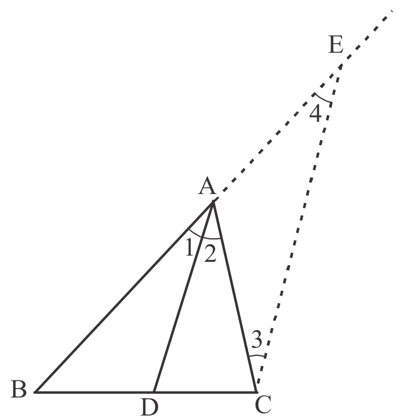
रचना: BA को E तक इतना बढ़ाया कि $AE = AC$ हो जाए, E व C को मिलाया

उपपत्ति: ΔACE में

$AE = AC$ (रचना से)

अत: $\angle 3 = \angle 4$ . . . (1)

अब चूंकि $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (दिया हुआ)



आकृति 11.20

अतः $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AE}$ $(\because\ \text{AE}=\text{AC}$ रचना से)

इस प्रकार ΔBCE में यदि $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AE}$ हो तो आधारभूत समानुपातिक विलोम प्रमेय से

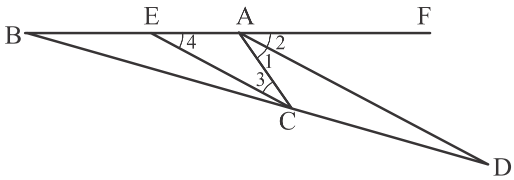
DA || CE अतः $\angle 1=\angle 4$ (संगत कोण) एवं $\angle 2=\angle 3$ (एकान्तर कोण)

परन्तु $\angle 3=\angle 4$ ((1) से) अतः $\angle 1=\angle 2$ अर्थात् AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है इति सिद्धम्

प्रमेय–11.5 त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाने पर बनने वाले बहिष्कोण का समद्विभाजक कोण की सम्मुख भुजा बाह्य विभाजन त्रिभुज की शेष दोनों भुजाओं के अनुपात में करता है।

दिया हुआ है: AD, ΔABC के शीर्ष A पर बने बहिष्कोण $\angle FAC$ की समद्विभाजक रेखा है।

अर्थात् $\angle 1=\angle 2$



आकृति 11.21

सिद्ध करना है: $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$

रचना: CE || DA खींची जो AB को E पर काटती है।

उपपत्ति: CE || DA है एवं AC तथा BF तिर्यक रेखाएँ है। अतः

$\angle 1=\angle 3$ (एकान्तर कोण) . . . (1)

एवं $\angle 2=\angle 4$ (संगत कोण) . . . (2)

चूंकि $\angle 1=\angle 2$ (दिया हुआ)

अतः $\angle 3=\angle 4$

चूंकि $\angle 3=\angle 4$ है तो ΔAEC में

AE = AC (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएं) . . . (3)

अब ΔBAD में EC || AD

तो $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{BA}{EA}$ (आधारभूत समानुपातिकता के विशिष्ट गुण)

या $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{BA}{AC}$ ((3) से)

या $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$ इति सिद्धम्

11.05 त्रिभुज की समरूपता

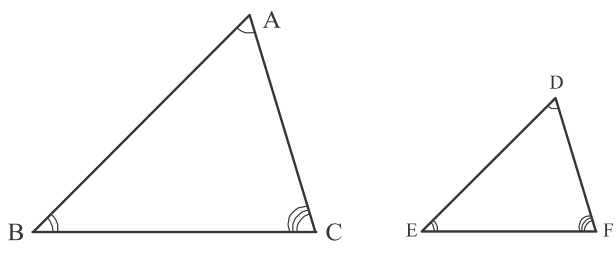
पिछले अनुच्छेद 11.3 में हमने पढ़ा है कि दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हो तथा (ii) संगत भुजाएँ समानुपाती हों

P16UBN

आकृति बनाकर समझे तो यदि ΔABC और ΔDEF में (देखिए आकृति 11.22)

(i) $\angle A=\angle D, \angle B=\angle E, \angle C=\angle F$ हो तथा

(ii) $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{CA}{FD}$ हो तो ΔABC व ΔDEF परस्पर समरूप होते हैं



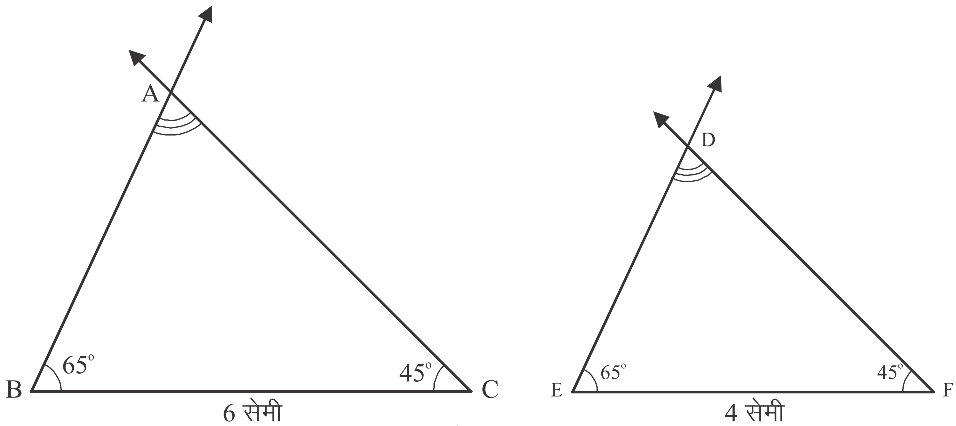
आकृति 11.22

आकृतियों में आप देख सकते है A, D के संगत, B, E के संगत तथा C, F के संगत है। संकेत में हम इन दोनों त्रिभुजों को समरूप बताने के लिए $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तरीके से लिखते हैं और "त्रिभुजABC समरूप है ΔDEF के" पढ़ते हैं। याद कीजिए आपने कक्षा IX में सर्वांगसम के लिए संकेत "$\cong$" का प्रयोग किया था इस प्रकार समरूप के लिए संकेत "$\sim$" का प्रयोग होता है।

आपको याद होगा सर्वांगसम त्रिभुजों को सांकेतिक रूप से लिखते समय संगत शीर्षों का क्रम सही प्रकार से लिखे जाते हैं। इसी प्रकार त्रिभुजों की समरूपता को भी सांकेतिक लिखने के लिए उनके शीर्ष की संगतताओं को सही क्रम में लिखा जाना चाहिए। जैसा आकृति 11.25 में दोनों त्रिभुजों में समरूपता के लिए $\Delta ABC \sim \Delta EFD$ अथवा $\Delta ABC \sim \Delta FED$ नहीं लिख सकते हां इन्हें $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ या $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ या $\Delta BCA \sim \Delta EFD$ लिख सकते हैं।

पिछली कक्षा में आपने त्रिभुजों की सर्वांगसमता बताने के लिए इनके संगत अगों के आधार पर अनेक कसौटियेां पर विस्तार से अध्ययन किया है। इसी प्रकार यहाँ भी समरूपता के लिए कुछ ऐसी कसौटियाँ प्राप्त करने का प्रयत्न करते हैं जिनमें त्रिभुजों संगत भागों के सभी छः युग्मों के स्थान पर कम से कम युग्मों के बीच सम्बन्ध स्थापित कर इन्हें समरूप बता सकें। आइए इस कड़ी में सर्वप्रथम निम्न प्रयोग के माध्यम से क्या परिणाम आता है, देखते है।

सबसे पहले दो असमान माप क्रमशः 6 सेमी और 4 सेमी के रेखाखण्डBC एवं EF की रचना करते हैं। इसके बाद हम रेखाखण्ड BC एवं EF के बिन्दु B और E पर क्रमशः $65^\circ - 65^\circ$ तथा बिन्दु C व F पर क्रमशः $45^\circ - 45^\circ$ के कोण रचित रेखाखण्ड BC व EF को क्रमशः आधार रेखा मानते हुए बनाते हैं। इस प्रकार हमें दो त्रिभुज क्रमशःΔABC एवं ΔDEF प्राप्त होते है (देखिए आकृति 11.23 में) क्या आप इन त्रिभुजों में शेष तीसरे कोण का मान ज्ञात कर सकते है? चूंकिΔ के तीनों कोणों का योग180° होता है।



आकृति 11.23

$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - 110° = 70°$ इसी प्रकार

$\angle D = 180° - (\angle E + AF) = 180° - 110° = 70°$ उपरोक्त आकृति के द्वारा हमें ज्ञात हैं

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

इस प्रकार हम देखते हैं कि ΔABC एवं ΔDEF में तीनों संगत कोण परस्पर समान है। अर्थात् दोनों त्रिभुज समान कोणिक है। अब इनकी भुजाओं को स्केल की सहायता से मापकर संगत भुजाओं के मध्य अनुपात ज्ञात करते है।

$$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{4} = 1.5,$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

तथा $$\frac{AC}{DF} = \frac{5.85}{3.9} = 1.5$$

(यहाँ AB = 3.5 सेमी, DE = 3 सेमी, AC = 5.85 सेमी एवं DF = 3.9 सेमी मापने पर प्राप्त होता है।)

अर्थात् $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ प्राप्त होता है। आप समान संगत कोण वाले अनेक त्रिभुजों के युग्म बनाकर इस प्रयोग को दोहराएगें तो प्रत्येक बार वही परिणाम प्राप्त करेगें। इस प्रयोग से हमें ज्ञात होता है "दो समान कोणिक त्रिभुजों की संगत भुजाओं

का अनुपात सदैव समान आता है।" अब चूंकि समरूप त्रिभुजों की परिभाषा अनुसार दोनों त्रिभुजों के संगत कोण समान होने एवं संगत भुजाओं में समान अनुपात होने के कारण $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ होंगे।

प्रमेय–11.6 (**AAA** समरूपता नियम) दो समानकोणिक त्रिभुज, परस्पर समरूप होते है।

दिया हुआ है: दो ΔABC एवं ΔDEF इस प्रकार के है कि इनके संगत कोण बराबर है।

अर्थात् $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$

सिद्ध करना है: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

रचना: ΔABC की भुजा AB एवं भुजा AC के बराबर माप लेकर क्रमशः DP एवं DQ, ΔDEF की भुजाएं DE व DF में से काटिए और PQ को मिलाइए।

उपपत्ति: $AB = DP$ एवं $AC = DQ$ (रचना से)

$\angle A = \angle D$ (दिया हुआ)

अतः $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (भुजा कोण भुजा प्रमेय से)

इसलिए $\angle B = \angle DPQ$ एवं $\angle C = \angle DQP$

परन्तु $\angle B = \angle E$ एवं $\angle C = \angle F$ (दिया हुआ)

अतः $\angle DPQ = \angle E$ एवं $\angle DQP = \angle F$ (चूंकि ये संगत कोण है)

अतः $PQ \parallel EF$

इसलिए $\dfrac{DP}{PE} = \dfrac{DQ}{QF}$ (आधारभूत समानुपातिका प्रमेय से)

या $\dfrac{PE}{DP} = \dfrac{QF}{DQ}$

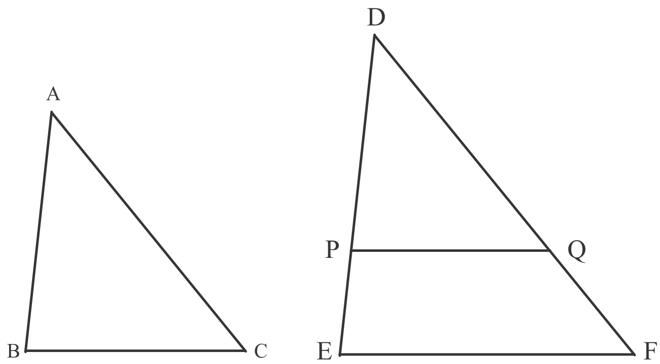
या $\dfrac{PE}{DP} + 1 = \dfrac{QF}{DQ} + 1$

या $\dfrac{PE + DP}{DP} = \dfrac{QF + DQ}{DQ}$

या $\dfrac{DE}{DP} = \dfrac{DF}{DQ}$

या $\dfrac{DP}{DE} = \dfrac{DQ}{DF}$

या $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$



आकृति 11.24

इस पद्धति से $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ भी ज्ञात किया जा सकता है।

इस प्रकार $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

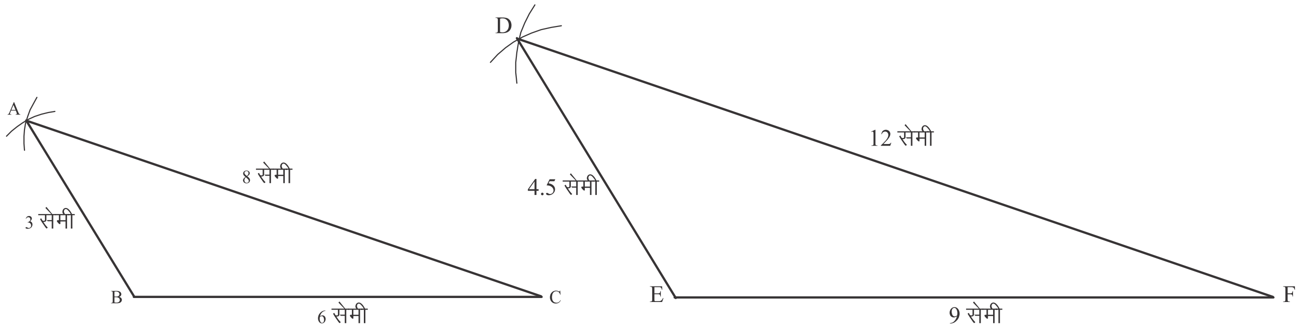
तो इस प्रकार ΔABC एवं ΔDEF में दो त्रिभुजों की समरूपता के गुण विद्यमान है।

अतः $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ इति सिद्धम्

यदि एक त्रिभुज के दो कोण किसी अन्य त्रिभुज के दो कोणों के क्रमशः समान हो तो त्रिभुज कोण योग गुणधर्म से दोनों के तीसरे कोण भी बराबर होंगे। अतः यहाँ (AAA समरूपता गुणधर्म) के स्थान पर (AA समरूपता गुणधर्म) से भी व्यक्त कर सकते हैं।

क्या सम्भव हैं यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती तो दोनों त्रिभुजों के संगत कोण भी बराबर होगें? तो आइए निम्न प्रयोग के माध्यम से जानकारी लेते हैं।

प्रयोगः ΔABC में $AB = 3$ सेमी, $BC = 6$ सेमी तथा $CA = 8$ सेमी इसी प्रकार DEF में $DE = 4.5$ सेमी, $EF = 9$ सेमी तथा $FD = 12$ सेमी लेकर त्रिभुजों की रचना करके प्रत्येक कोण प्रोटेक्टर की मदद से नाप कर दोनों त्रिभुजों के संगत कोणों की तुलना करेंगे।



आकृति 11.25

यहाँ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ($\frac{2}{3}$ प्रत्येक संगत भुजाओं का अनुपात है)

मापन करने के पश्चात् $\angle A = \angle D = 40°, \angle B = \angle E = 120°, \angle C = \angle F = 20°$ प्राप्त हो रहे हैं अर्थात् संगत भुजाओं का अनुपात समान हो तो संगत कोण स्वतः समान होंगे। इस प्रकार $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ के। इसी प्रकार आप अनेक बार त्रिभुजों के युग्मों की रचना करके (जिनकी संगत भुजाओं के अनुपात समान रखते हुए) प्रत्येक बार त्रिभुजों के संगत कोण बराबर प्राप्त कर सकते है।

आइए अब हम समरूपता के इस परिणाम को निम्न प्रेमय के माध्यम से सिद्ध करते हैं।

प्रमेय–11.7 (SSS समरूपता नियम) यदि दो त्रिभुजों में संगत भुजाओं का अनुपात बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज परस्पर समरूप होते है।

दिया हुआ हैः ΔABC एवं ΔDEF में $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ है

सिद्ध करना हैः $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

रचनाः ΔDEF में $DP = AB$ और $DQ = AC$ काटिए तथा P और Q को मिलाइए।

उपपत्तिः $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (दिया हुआ)

$\Rightarrow$ $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$ (रचना से)

$\Rightarrow$ $PQ \parallel EF$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलोम से)

$\Rightarrow$ $\angle DPQ = \angle E$ तथा $\angle DQP = \angle F$ (संगत कोण)

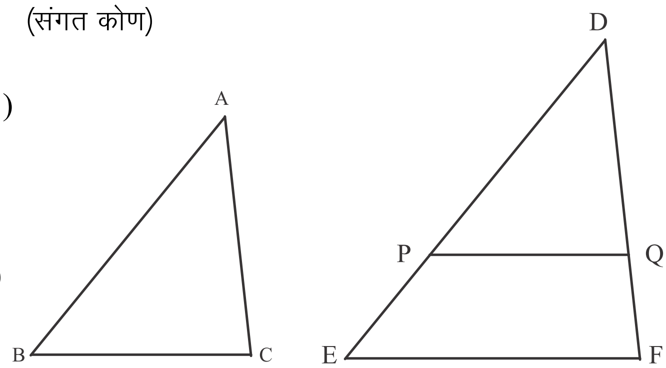
$\therefore$ A A समरूपता गुण धर्म से

$\Delta DPQ \sim \Delta DEF$ . . . (1)

$\Rightarrow$ $\frac{DP}{DE} = \frac{PQ}{EF}$ (समरूपता गुणधर्म से)

$\Rightarrow$ $\frac{AB}{DE} = \frac{PQ}{EF}$ ($\because$ $AB = DP$ रचना से)

परन्तु $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (दिया हुआ)



आकृति 11.26

अतः $\dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{BC}{EF}$

$\Rightarrow$ PQ = BC इस प्रकार ΔABC और ΔDPQ में

AB = DP, BC = PQ, और AC = DQ

अतः SSS सर्वांगसम नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ . . . (2)

(1) व (2) से $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ और $\Delta DPQ \sim \Delta DEF$ (दो सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते है)

अतः $\Delta ABC \sim DPQ$ और $\Delta DPQ \sim \Delta DEF$

$\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ इति सिद्धम्

प्रमेय–11.8 (SAS समरूपता नियम) यदि दो त्रिभुजों में कोई संगत दो भुजाएं परस्पर समानुपाती हो तथा उनके मध्य के कोण बराबर हो तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

दिया हुआ है: ΔABC एवं ΔDEF में $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ एवं $\angle A = \angle D$ है।

सिद्ध करना: ΔABC ~ ΔDEF

रचना: ΔDEF में AB = DP, AC = DQ क्रमशः DE एवं DF में से काटिए तथा P व Q को मिलाइए।

उपपत्ति: ΔABC एवं ΔDPQ में

AB = DP, $\angle A = \angle D$ तथा AC = DQ (रचना द्वारा)

अतः सर्वांगसमता के SAS नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ . . . (1)

अब $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (दिया हुआ है)

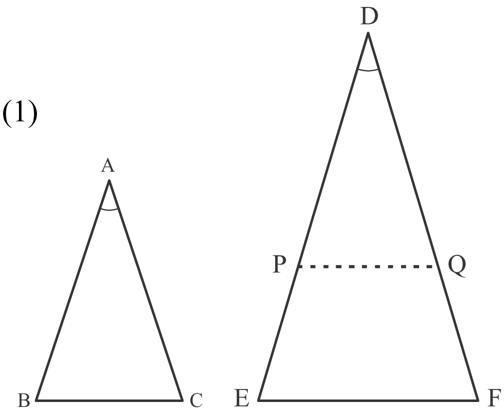
$\Rightarrow$ $\dfrac{DP}{DE} = \dfrac{DQ}{DF}$ (रचना से AB = DP एवं AC = DQ)

$\Rightarrow$ PQ || EF (थेल्स प्रमेय के विलोम द्वारा)

$\Rightarrow$ $\angle DPQ = \angle E$ एवं $\angle DQP = \angle F$ (संगत कोण)

इस प्रकार AA समरूपता नियम से

ΔDPQ ~ ΔDEF . . . (2)



आकृति 11.27

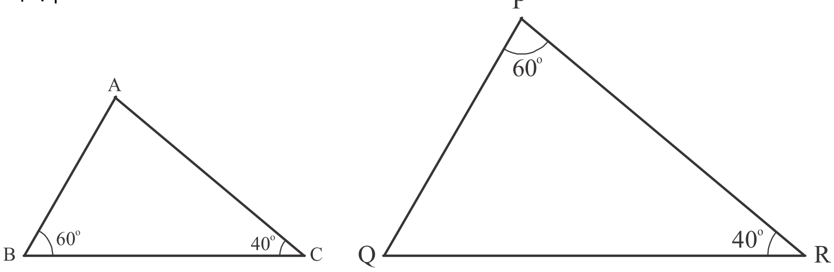
(1) व (2) से $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ तथा $\Delta DPQ \sim \Delta DEF$

$\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta DPQ$ तथा $\Delta DPQ \sim \Delta DEF$ (सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते है)

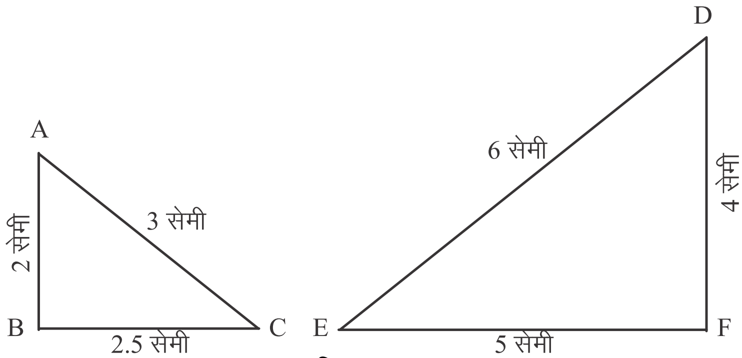
$\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ इति सिद्धम्

दृष्टांतीय उदाहरण

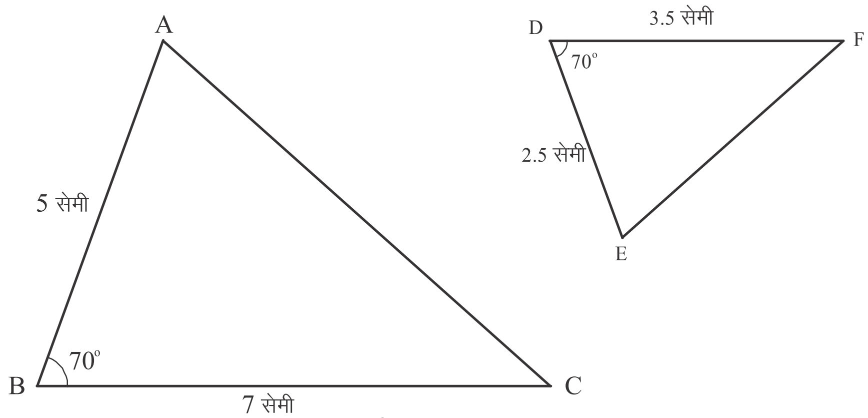
उदाहरण-1. आकृति में दर्शाए गए त्रिभुजों के युग्मों में कौन–कौन से युग्म समरूप है। समरूपता के नियम लिखते हुए सांकेतिक रूप से लिखकर व्यक्त करें।



आकृति 11.28 **(i)**



आकृति 11.28 **(ii)**



आकृति 11.28 **(iii)**

हलः (i) $\Delta BCA \sim \Delta PQR$

चूंकि $\angle B = \angle P = 60°, \;\; \angle C = \angle R = 40$

अतः $\angle A = 180 - (60 + 40) = \angle Q = 80°$

अतः AAA समरूपता प्रमेय द्वार $\Delta BCA \sim \Delta PRQ$ होगा

(ii) ΔABC व ΔDEF में

$$\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED} = \frac{1}{2}$$

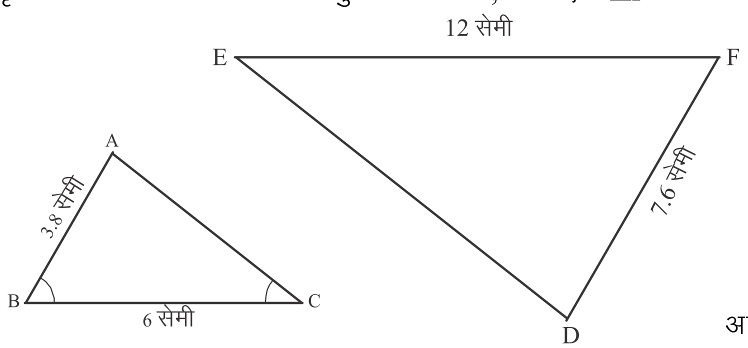
अतः SSS समरूपता प्रमेय से $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

(iii) ΔABC व ΔDEF में

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF} = 2 \text{ एवं } \angle ABC = 70° = \angle EDF$$

अतः SAS समरूपता प्रमेय से $\Delta ABC \sim \Delta EDF$

उदाहरण-2. दिए गए आकृति में ΔABC व ΔDEF को तुलनाकर $\angle D, \angle E$ एवं $\angle F$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.29

हलः ΔABC एवं ΔDEF में $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED} = \frac{1}{2}$

अतः SSS समरूपता प्रमेय से

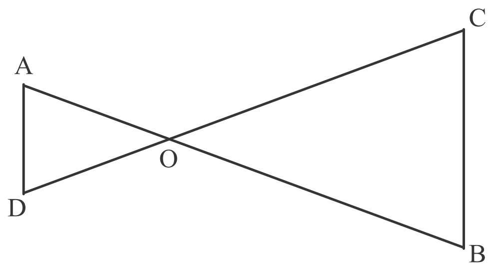
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\Rightarrow$ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle F$ एवं $\angle C = \angle E$

$\Rightarrow$ $\angle F = 60°, \angle E = 40°$

$\Rightarrow$ $\angle D = 180 - (60 + 40) = 80°$

उदाहरण-3. आकृति में यदि $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ है तो दर्शाइए $\angle A = \angle C$ व $\angle B = \angle D$



आकृति 11.30

हलः ΔAOD व ΔBOC में $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ दिया हुआ है

अतः $\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$ ...(1)

तथा $\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण) ...(2)

(1) व (2) से $\Delta AOD \sim \Delta COB$

इसलिए $\angle A = \angle C$ एवं $\angle D = \angle B$ (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण) इति सिद्धम्

उदाहरण-4. आकृति में QA तथा PB, AB पर लम्ब है यदि AB = 16 सेमी, $OQ = 5\sqrt{3}$ सेमी और $OP = 3\sqrt{13}$ सेमी है तो AO एवं BO के मान ज्ञात कीजिए।

हलः ΔAOQ एवं ΔBOP में $\angle OAQ = \angle OBP$ (प्रत्येक $90°$)

$\angle AOQ = \angle BOP$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः A A समरूपता प्रमेय द्वारा

$\frac{AO}{BO} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP}$ ...(1)

परन्तु AB = AO + BO = 16 सेमी

माना कि AO = x तो BO = 16 – x.

अतः $\frac{x}{16 - x} = \frac{OQ}{OP}$ ((1) से)

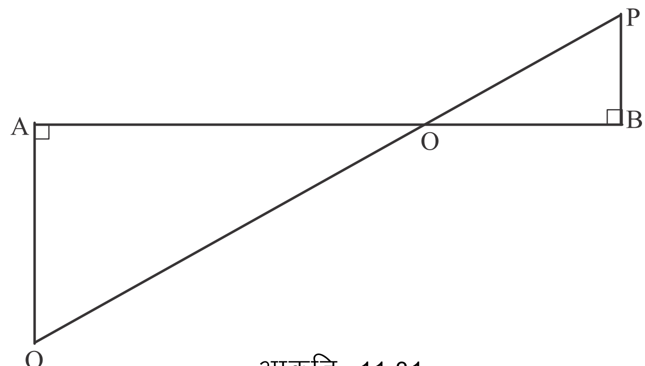
या $\frac{x}{16 - x} = \frac{5\sqrt{13}}{3\sqrt{13}}$

या $3x = 80 - 5x$

या $8x = 80$

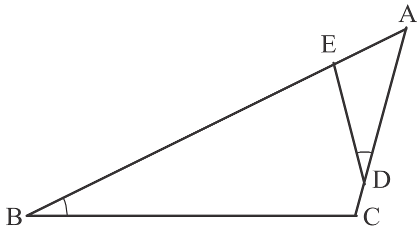
या $x = 10$ सेमी $\Rightarrow$ AO = 10 सेमी

एवं BO = 16 – 10 = 6 सेमी



आकृति 11.31

उदाहरण-5. आकृति में $\angle ADE = \angle B$ और AD = 3.8सेमी, AE = 3.6 सेमी, BE = 2.1 सेमी और BC = 4.2 सेमी तो DE का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.32

हल: ΔADE एवं ΔABC में

$\angle ADE = \angle B$ (दिया हुआ) $\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

अतः AA समरूपता प्रमेय से $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

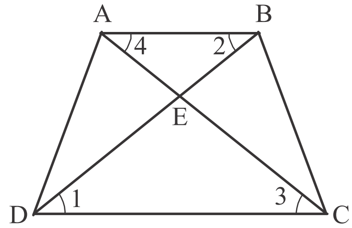
$$\text{या} \quad \frac{AD}{AE+EB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3.8}{3.6+2.1} = \frac{DE}{4.2}$$

$$\text{या} \quad DE = \frac{3.8 \times 4.2}{5.7} = \frac{15.96}{5.7}$$

या DE = 2.8 सेमी

उदाहरण-6. आकृति में ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसकी AB || DC है। यदि $\Delta AED \sim \Delta BEC$ हो तो सिद्ध कीजिए AD = BC है।



आकृति 11.33

हल: ΔEDC एवं ΔEBA में

$\angle 1 = \angle 2$ एवं $\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोण)

तथा $\angle DEC = \angle AEB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः AAA समरूपता प्रमेय द्वारा

$\Delta EDC \sim \Delta EBA$

$$\text{अतः} \quad \frac{ED}{EB} = \frac{EC}{EA}$$

$$\text{या} \quad \frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA} \quad \ldots (1)$$

चूंकि $\Delta AED \sim \Delta BEC$

$$\text{अतः} \quad \frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{BC} \quad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ व } (2) \text{ से} \quad \frac{EB}{EA} = \frac{AE}{BE}$$

या $(BE)^2 = (AE)^2$

या BE = AE

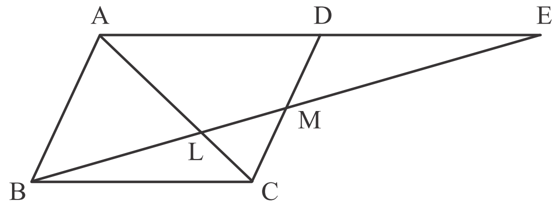
(2) में BE = AE रखने पर $\dfrac{AE}{AE} = \dfrac{AD}{BC}$

$$\text{या} \quad \frac{AD}{BC} = 1$$

या AD = BC

इति सिद्धम्

उदाहरण-7. समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजा CD के मध्य बिन्दु M को B से मिलाने वाली रेखा AC को L पर काटती है। यदि AD व BM को आगे बढ़ावें तो वह E पर मिलती है तो सिद्ध कीजिए। EL = 2 BL



आकृति 11.34

हलः ΔBMC व ΔEMD में

MC = MD (M, CD का मध्य बिन्दु है)

$\angle CMB = \angle DME$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle MCB = \angle MDE$ (एकान्तर कोण)

अतः ASA सर्वांगसम नियम द्वारा

$\Delta BMC \cong \Delta EMD$

अतः BC = ED परन्तु AD = BC (ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है)

और AE = AD + DE

या AE = BC + BC

या AE = 2BC . . . (1)

ΔAEL व ΔCBL में

$\angle ALE = \angle CLB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle EAL = \angle BCL$ (एकान्तर कोण)

अतः A A समरूपता प्रमेय द्वारा

$\Delta AEL \sim \Delta CBL$

$\Rightarrow \quad \dfrac{EL}{BL} = \dfrac{AE}{CB}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{EL}{BL} = \dfrac{2BC}{BC}$ (समीकरण (1) से)

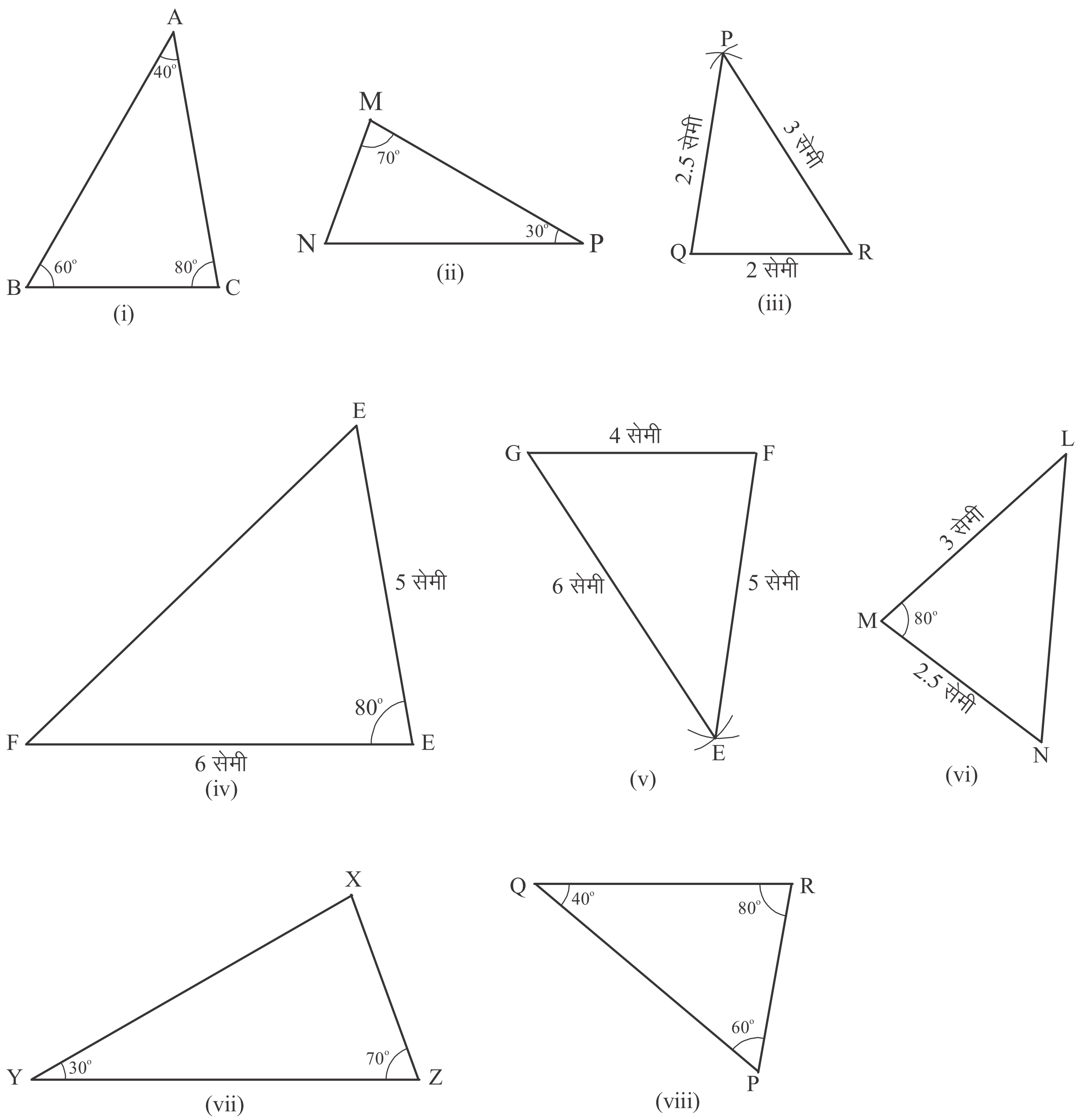
$\Rightarrow \quad \dfrac{EL}{BL} = 2$

$\Rightarrow$ EL = 2 BL इति सिद्धम्

प्रश्नमाला 11.3

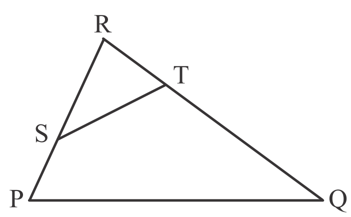
1. दो त्रिभुज ABC और PQR में $\dfrac{AB}{PQ}$ और $\dfrac{BC}{QR}$ दोनों त्रिभुजों में से दो कोणों के नाम बताइए जो बराबर होना चाहिए, ताकि ये दोनों Δ समरूप हो सके। अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।
2. त्रिभुजों ABC एवं DEF में, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle F$ हो तो क्या $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
3. यदि त्रिभुज $ABC \sim \Delta FDE$ हो तो क्या $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$ बताया जा सकता है? उत्तर को कारण सहित लिखिए।
4. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण के क्रमशः समानुपाती एवं बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते है। क्या यह कथन सत्य है? कारण सहित उत्तर लिखिए।

5. समान कोणिक त्रिभुजों से क्या तात्पर्य है? इनमें परस्पर क्या सम्बन्ध हो सकता है?
6. निम्न दिए गए त्रिभुजों की आकृतियों में से समरूप त्रिभुज युग्मों का चयन कीजिए। और उन्हें समरूप होने की सांकेतिक भाषा में लिखिए।



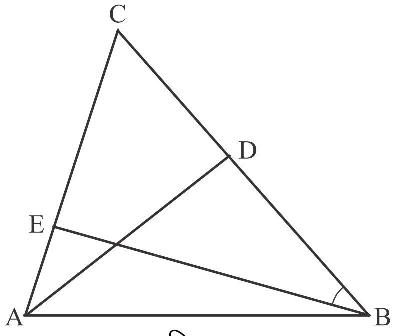
आकृति 11.35

7. आकृति में $\Delta PRQ \sim \Delta TRS$ हो तो बताइए इस समरूप त्रिभुज युग्म में कौन–कौन से कोण परस्पर समान होने चाहिए?



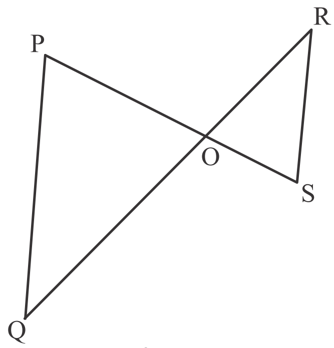
आकृति 11.36

8. आपको आकृति में स्थित उन दो त्रिभुजों का चयन करना है जो परस्पर समरूप है। यदि $\angle CBE = \angle CAD$ है।



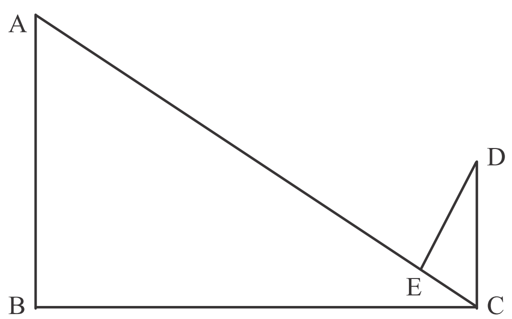
आकृति 11.37

9. आकृति में PQ और RS समान्तर है तो सिद्ध कीजिए $\Delta POQ \sim \Delta SOR$



आकृति 11.38

10. 90 सेमी. की लम्बाई वाली लड़की बल्ब लगे खम्बे के आधार से परे 1.2 मीटर/सैकण्ड की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6 मीटर की ऊँचाई पर हो तो 4 सैकण्ड के बाद उस लड़की की छाया कितने मीटर होगी?
11. 12 मीटर लम्बाई वाले उर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लम्बाई 8 मीटर है, उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 56 मीटर हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
12. किसी ΔABC के शीर्ष A से उसकी सम्मुख भुजा BD पर लम्ब डालने पर $AD^2 = BD \times DC$ प्राप्त होता है तो, सिद्ध कीजिए ABC एक समकोण त्रिभुज है।
13. सिद्ध कीजिए किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को क्रमशः मिलाने पर बनने वाले चारों त्रिभुज अपने मूल त्रिभुज के समरूप होते है।
14. आकृति दर्शाए अनुसार यदि $AB \perp BC, DC \perp BC$ और $DE \perp AC$ हो तो सिद्ध कीजिए। $\Delta CED \sim \Delta ABC$



आकृति 11.39

15. ΔABC की भुजा BC के मध्य बिन्दु D है। यदि AD का समद्विभाजन करती हुई एक रेखा B से इस प्रकार खींची जाए कि वह भुजा AD को E पर काटते हुए AC को X पर काटे तो सिद्ध कीजिए $\frac{EX}{BE} = \frac{1}{3}$ है।

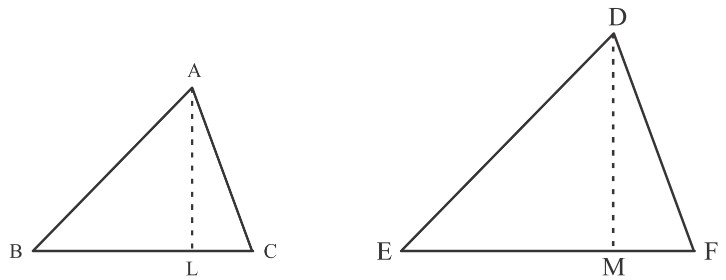
11.5.2 दो समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल

इस अनुच्छेद में हम दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपातों के बारे में अध्ययन करेगें।

प्रमेय–11.08 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।

दिया हुआ है: ΔABC एवं ΔDEF में $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है

सिद्ध करना: $\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2}$



आकृति 11.40

रचना: $AL \perp BC$ एवं $DM \perp EF$ खींचा

उपपत्ति: $\because$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\therefore$ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E,$ और $\angle C = \angle F$ . . . (1)

एवं $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$

ΔALB व ΔDME में . . . (1)

$\angle ALB = \angle DME$ (प्रत्येक कोण $90°$)

$\angle B = \angle E$ (1 के द्वारा)

अतः $\Delta ALB \sim \Delta DME$ (A-A समरूपता प्रमेय द्वारा)

$\Rightarrow$ $\dfrac{AL}{DM} = \dfrac{AB}{DE}$ . . . (3)

(2) व (3) से $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AL}{DM}$ . . . (4)

अब $\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{\frac{1}{2} BC \times AL}{\frac{1}{2} EF \times DM}$ (त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई)

$= \dfrac{BC}{EF} \times \dfrac{AL}{DM}$

$= \dfrac{BC}{EF} \times \dfrac{BC}{EF}$ ((4) से)

$= \dfrac{BC^2}{EF^2}$

परन्तु $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$ इति सिद्धम्

इस प्रमेय के माध्यम से हम अन्य परिणाम भी प्राप्त कर सकते हैं जिन्हें निम्न उपप्रमयों के रूप में लिखा जा सकता है।

उपप्रमेय–11.2 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात किसी एक शीर्ष से डाले गए संगत लम्ब के वर्गों के अनुपातों के बराबर होता है।

उपप्रमेय–11.3 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत माध्यिकाओं के वर्गों के अनुपातों के बराबर होता है।

उपप्रमेय–11.4 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत कोणों के समद्विभाजकों के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

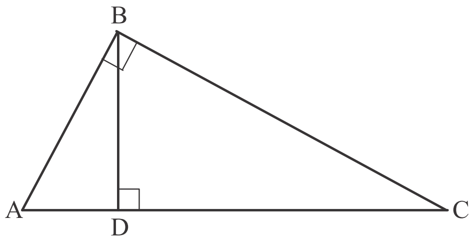
P1FQDB

11.5.3 समरूपता की अवधारणा से बोधायन प्रमेय का सत्यापन

पिछली कक्षाओं में आपने बोधायन प्रमेय के बारे में अध्ययन किया है। इस पर आधारित अनेक प्रश्न हल किये है तथा उपपत्ति कक्षा IX में आपने देखी। यहां हम इस प्रमेय को त्रिभुजों की समरूपता की अवधारणा का प्रयोग करके सिद्ध करेगें।

प्रमेय–11.9 समकोण त्रिभुज में, कर्ण पर बना कोण शेष भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

दिया हुआ है: ABCD एक समकोण त्रिभुज है। जिसका कोण $B\,90°$ है।



आकृति 11.41

सिद्ध करना: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना: B से AC पर लम्ब BD डाला ।

उपपत्ति: ΔADB एवं ΔABC में

$\angle ADB = \angle ABC$ (प्रत्येक 90° दिया हुआ एवं रचना से)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

अतः AA समरूपता प्रमेय से

$\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय)

$\Rightarrow \quad AB^2 = AC \times AD$ .....(1)

ΔBDC एवं ΔABC में

$\angle CDB = \angle ABC$ (प्रत्येक कोण 90° दिया हुआ एवं रचना से)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

अतः A – A समरूपता प्रमेय से

$\Delta CDB \sim \Delta CBA$

$\frac{CD}{CB} = \frac{BC}{AC}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय)

या $\frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$

$\Rightarrow$ $BC^2 = AC \times DC$ .....(2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times DC$

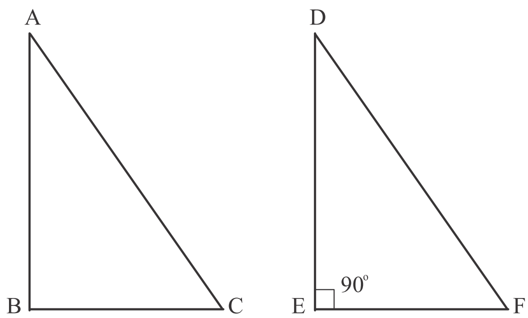
$\Rightarrow$ $AB^2 + BC^2 = AC\ (AD + DC)$

$\Rightarrow$ $AB^2 + BC^2 = AC \times AC$

$\Rightarrow$ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ इति सिद्धम्

आइए अब हम इस प्रमेय की विलोम भी समरूपता अवधारणा का ही प्रयोग करके पुनः सिद्ध करते है।

प्रमेय–11.10 (बोधायन प्रमेय का विलोम) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं पर बने वर्गों का योग उसकी तीसरी भुजा पर बने वर्ग के बराबर हो तो, वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।



आकृति 11.42

दिया हुआ है: ΔABC में $AC^2 = AB^2 + BC^2$

सिद्ध करना: ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

रचना: एक समकोण त्रिभुज DEF की रचना इस प्रकार करे कि DE = AB, EF = BC एवं $\angle E = 90°$ हो।

उपपत्ति: $DF^2 = DE^2 + EF^2$ (वो धायन प्रमेय से)

$\Rightarrow$ $DF^2 = AB^2 + BC^2$ (रचना से)

परन्तु $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (दिया हुआ)

अतः $AC^2 = DF^2$

या $AC = DF$ .....(1)

ΔABC एवं ΔDEF में

AB = DE, BC = EF (रचना से)

एवं AC = DF [1] से

अतः SSS सर्वांगसमता प्रमेय से

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

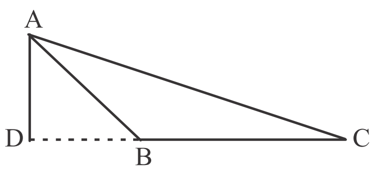
$\Rightarrow$ $\angle B = \angle D = 90°$

$\Rightarrow$ ΔABC एक समकोण त्रिभुज है। इति सिद्धम्

11.5.3 बोधायन प्रमेय पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

प्रमेय–11.11 एक अधिक कोण त्रिभुज ABC जिसका $\angle B$ अधिक कोण हो और $AD \perp BC$ है तो

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BD$



आकृति 11.43

दूसरे शब्दों में अधिक कोण त्रिभुज में अधिक कोण के सम्मुख भुजा का वर्ग शेष दोनों भुजाओं के वर्गों एवं एक भुजा व दूसरी भुजा से का पहली भुजा पर पक्ष के गुणनफल के दुगने के योग के बराबर होता है।

दिया हुआ है: ABC एक अधिक कोण त्रिभुज हैं, जिसमें $\angle B$ अधिक कोण है।

सिद्ध करना: $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times DB$

उपपत्ति: ΔADB में $\angle D = 90^\circ$ है। (दिया हुआ है)

अतः $AB^2 = AD^2 + DB^2$ .....(1)

अब ΔADC में

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

या $AC^2 = AD^2 + (DB + BC)^2$

या $AC^2 = AD^2 + DB^2 + BC^2 + 2DB \times BC$

या $AC^2 = [AD^2 + DB^2] + BC^2 + 2DB \times BC$

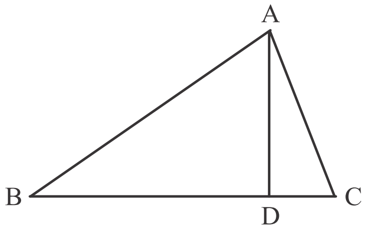
या $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times DB$ [1] से इति सिद्धम्

यदि यहाँ अधिक कोण त्रिभुज के स्थान पर न्यून कोण त्रिभुज होता तो परिणाम निम्नानुसार प्राप्त होता है।

प्रमेय–11.12 ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है, और $AD \perp BC$ तो

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$

(न्यून कोण त्रिभुज में किसी एक भुजा का वर्ग शेष दोनों भुजाओं के वर्गों के योग में से एक भुजा व दूसरी भुजा से पहली भुजा पर प्रक्षेपण के गुणनफल के दुगने में से घटाने पर प्राप्त मान के बराबर होता है।)



आकृति 11.44

दिया हुआ है: ABC एक त्रिभुज हैं जिसमें $AD \perp BC$ है।

सिद्ध करना: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$

उपपत्ति: $AB^2 = AD^2 + BD^2$ .....(1) (ΔABD एक समकोण त्रिभुज है)

इसी प्रकार $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (ΔADC समकोण त्रिभुज है)

$\Rightarrow$ $AC^2 = AD^2 + (BC - BD)^2$ (आकृति से $DC = BC - BD$)

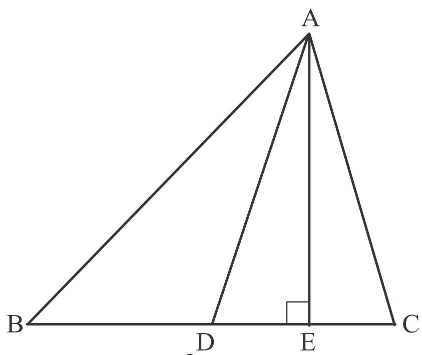
$\Rightarrow$ $AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD$

$\Rightarrow$ $AC^2 = (AD^2 + BD^2) + BC^2 - 2BC \times BD$

$\Rightarrow$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$ [1] से

अर्थात् $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$ इति सिद्धम्

उपप्रमेय– त्रिभुज दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली माध्यिका के वर्ग एवं तीसरी भुजा के आधे के वर्ग के योग के दुगने के बराबर होता है।



आकृति 11.45

दिया हुआ है: ABC एक त्रिभुज हैं जिसमें AD उसकी एक माध्यिका है।

सिद्ध करना: $AB^2 + AC^2 = 2\left[AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$

या $AB^2 + AC^2 = 2[AD^2 + BD^2]$

रचना: $AE \perp BC$ की रचना कीजिए।

उपपत्ति– $\angle AED = 90°, \Delta ADE$ में हम देखते हैं।

$\angle ADE < 90° \Rightarrow \angle ADB > 90°$

इस प्रकार ΔADB एक अधिक कोण त्रिभुज एवं ΔADC न्यून कोण त्रिभुज होंगें।

$\therefore$ अधिक कोण ΔABD में BD को आगे बढ़ाने पर और $AE \perp BD$ अतः प्रमेय–11.11 से

$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \times DE$ . . . (1)

ΔACD एक न्यून कोण त्रिभुज हैं और $AE \perp CD$ तो प्रमेय–11.12 से

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \times DE$

या $AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \times DE$ [$\because$ CD = BD] . . . (2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \times DE + AD^2 + BD^2 - 2BD \times DE$

या $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

या $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2$

या $AB^2 + AC^2 = 2\left[AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$

अर्थात् $AB^2 + AC^2 = 2\left[AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$ अथवा $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ इति सिद्धम्

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. 10 मीटर लम्बी एक सीढ़ी को एक दीवार पर टिकाने से वह भूमि से 8 मीटर ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुंचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः आकृति के अनुसार ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका $\angle B = 90°$ हैं

अतः बौधायन प्रमेय से

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

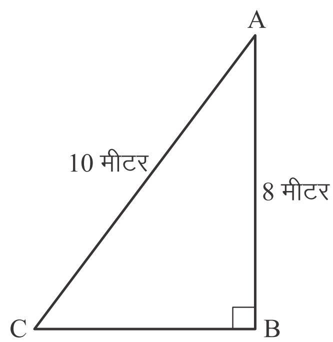
या $BC^2 = AC^2 - AB^2$

या $BC^2 = 10^2 - 8^2$

या $BC^2 = 100 - 64$

या $BC^2 = 36$

या $BC = \sqrt{36} = 6$ मीटर



आकृति 11.46

उदाहरण-2. एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 किमी/घ. की चाल से उड़ता है उसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 किमी/घ. की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे बाद दोनों हवाई जहाजों के मध्य की दूरी कितनी होगी।

हल: प्रथम हवाईजहाज की उत्तर दिशा में $1\frac{1}{2}$ घंटे बाद हवाई अड्डे से दूरी = चाल × समय $= 1000 \times \frac{3}{2} = 1500$ किमी

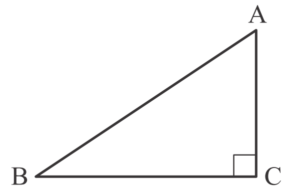
दूसरे हवाईजहाज की पश्चिम दिशा में $1\frac{1}{2}$ घंटे बाद हवाई अड्डे से दूरी = चाल × समय $1200 \times \frac{3}{2} = 1800$ किमी

आकृतिनुसार $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (बोधायन प्रमेय)

$AB^2 = 1500^2 + 1800^2$

$= 2250000 + 3240000$

$= 5490000 = 30\sqrt{61}$ किमी



आकृति 11.47

उदाहरण-3. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है जिनमें AB = 2.2 सेमी. और DE = 3.3 सेमी. हो तो ΔABC और ΔDEF के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते है। दो त्रिभुज समरूप हो तो उनकी संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात उनके क्षेत्रफलों के बराबर होता है।

अतः $$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(2.2)^2}{3.3^2} = \left(\frac{22}{33}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

उदाहरण-4. दो समरूप त्रिभुज ABC और PQR की संगत भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल क्रमशः 36 वर्ग सेमी एवं 49 वर्ग सेमी है।

हल: हम जानते है कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपातों के बराबर होता है।

अतः $$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2} = \frac{36}{49}$$

या $$\frac{AB}{DE} = \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$$

उदाहरण-5. यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हो ΔABC का क्षेत्रफल = 16 सेमी² एवं ΔPQR का क्षेत्रफल 9 सेमी² तथा AB = 2.1 सेमी हो तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: $$\because \quad \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{16}{9} = \frac{(2.1)^2}{PQ^2}$$

दोनों ओर वर्ग मूल लेने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3} = \frac{2.1}{PQ}$$

$$\Rightarrow \quad PQ = \frac{2.1 \times 3}{4} = \frac{6.3}{4} = 1.575 \text{ सेमी.}$$

उदाहरण-6. आकृति में ΔABC में एक रेखा ℓ जो BC के समान्तर है, AB और AC को क्रमशः D व E पर काटती हुई इस प्रकार निकलती हैं कि AD : DB = 1 : 2 हो जाता हैं, तो इस प्रकार बने समलम्ब चतुर्भुजBDEC एवं ΔADE क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: चूंकि $\ell \parallel BC$

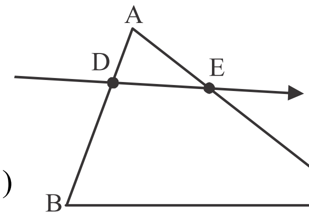
अतः $\angle ADE = \angle B$ एवं $\angle AED = \angle C$ (संगत कोण)

अतः ΔADE व ΔABC में

$\angle ADE = \angle B$

एवं $\angle AED = \angle C$

$\Rightarrow$ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (A A समरूपता प्रमेय)



आकृति 11.48

$\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{AD^2}{AB^2}$ . . . (1)

परन्तु $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{AD}{AD+DB} = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{AD}{AB}$ . . . (2)

(1) व (2) से $\dfrac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{1^2}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow$ ΔABC का क्षेत्रफल $= 9 \times \Delta ADE$ का क्षेत्रफल . . . (3)

किन्तु समलम्ब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल $= \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $- \Delta ADE$ का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ समीकरण (3) से समलम्ब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल

$= 9 \times \Delta ADE$ का क्षेत्रफल $- \Delta ADE$ का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ समलम्ब BDEC का क्ष्क्षेत्रफल $= 8 \times \Delta ADE$ का क्षेत्रफल

या $\dfrac{\text{समलम्ब } BDEC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{8}{1}$

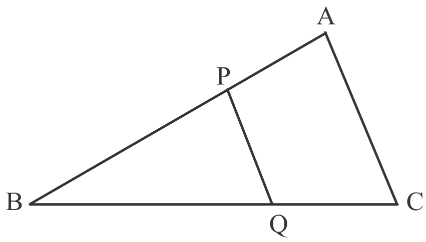
उदाहरण-7. आकृति 11.49 के अनुसार एक त्रिभुज ABC की भुजा AC के समान्तर रेखाखण्ड PQ उसकी भुजा AB और AC को इस प्रकार विभाजित करती है कि $\dfrac{BP}{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ हो तो सिद्ध कीजिए रेखा खण्ड $PQ, \Delta ABC$ को समान क्षेत्रफल में विभाजित करती है।

हलः दिया हुआ हैः $\because$ PQ || AC दिया हुआ है।

अतः $\angle A = \angle BPQ$ (संगत कोण)

एवं $\angle C = \angle BQP$ (संगत कोण) एवं $\dfrac{BP}{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

अतः $\Delta BAC \sim \Delta BPQ$ (A A समरूपता प्रमेय से)



आकृति 11.49

सिद्ध करना हैः ΔBPQ का क्षेत्रफल $=$ समलम्ब PACQ का क्षेत्रफल

या समलम्ब PACQ का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \Delta BAC$ का क्षेत्रफल $= \Delta BPQ$ का क्षेत्रफल (दिया हुआ है)

अर्थात् $2\Delta BPQ$ का क्षेत्रफल $= \Delta BAC$ का क्षेत्रफल भी सिद्ध करेगें तो प्रश्न हल हो जाएगा।

उपपत्तिः चूंकि $\Delta BAC \sim \Delta BPQ$ या $\Delta BPQ \sim \Delta BAC$

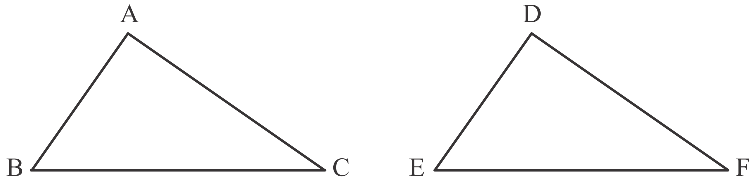
अतः $\dfrac{\Delta BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{BP^2}{BA^2}$

या $\dfrac{\Delta BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{1^2}{\sqrt{2}^2}$

या $\dfrac{\Delta BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{1}{2}$

या $2\Delta BPQ$ का क्षेत्रफल $= \Delta BAC$ का क्षेत्रफल इति सिद्धम्

उदाहरण-8. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगमस होते है।



आकृति 11.50

हलः दिया हुआ हैः $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ एवं ΔABC का क्षेत्रफल $= \Delta DEF$ का क्षेत्रफल

सिद्ध करनाः $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उपपत्तिः $\because$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\therefore$ ΔABC एवं ΔDEF समानकोणिक त्रिभुज है।

एवं $\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$

या $1 = \dfrac{BC^2}{EF^2}$ (दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान है दिया हुआ है)

या $BC^2 = EF^2$ या $BC = EF$ . . . (1)

$\Rightarrow$ ΔABC व ΔDEF में

$\angle B = \angle E$ (समानकोणिक त्रिभुज से)

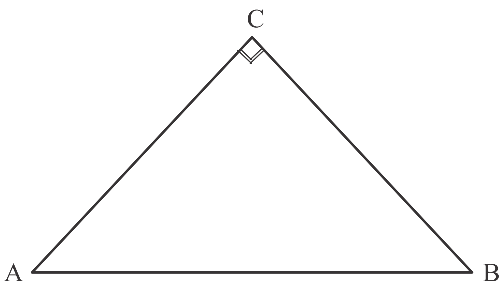
$BC = EF$ ((1) से)

$\angle C = \angle F$ (समान कोणिक त्रिभुज से)

अतः A S A सर्वांगसम प्रमेय से

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उदाहरण-9. ABC एक समद्विबाहू त्रिभुज है, जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए $AB^2 = 2AC^2$ है।



आकृति 11.51

हलः ABC एक समकोण त्रिभुज है। जिसमें

$\angle C = 90°, AC = BC$ (दिया हुआ) . . . (1)

समकोण त्रिभुज में बोधायन प्रमेय से

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

या $AB^2 = AC^2 + AC^2$ [1] से

या $AB^2 = 2AC^2$ इति सिद्धम

उदाहरण-10. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $BD = \dfrac{1}{3}BC$ है, तो सिद्ध

कीजिए। $9AD^2 = 7AB^2$ है।

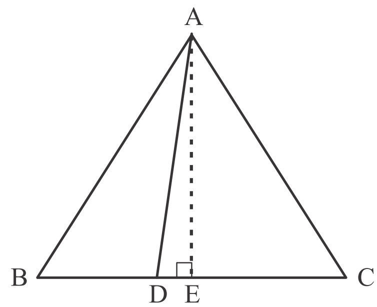
हल: $\because$ ΔABC एक समबाहू त्रिभुज है। और A से BC पर AE लम्ब डाला है

अतः किसी भी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब उसका समद्विभाजन करता हैं।

अतः $BE = EC = \frac{1}{2}BC$ [रचना से]

तथा $BD = \frac{1}{3}BC$ [दिया हुआ है]

एवं $AB = BC = CA$ [दिया हुआ है]



आकृति 11.52

समकोण ΔABE में $AB^2 = AE^2 + BE^2$

या $AE^2 = AB^2 - BE^2$

या $AE^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$ $\left[\because BE = \frac{1}{2}BC\right]$

या $AE^2 = AB^2 - \frac{BC^2}{4}$

या $AE^2 = \frac{4AB^2 - BC^2}{4}$ . . . (1)

समकोण ΔADE में

$AD^2 = AE^2 + DE^2$

या $AE^2 = AD^2 - DE^2$

या $AE^2 = AD^2 - (BE - BD)^2$

या $AE^2 = AD^2 - \left(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC\right)^2$ [$\because$ $BE = \frac{1}{2}$ BC एवं $BD = \frac{1}{3}$ BC]

या $AE^2 = AD^2 - \left(\frac{BC}{6}\right)^2$

या $AE^2 = \frac{36AD^2 - BC^2}{36}$ .....(2)

(1) व (2) से $\frac{4AB^2 - BC^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$

या $\frac{4AB^2 - AB^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$ [$\because$ AB = BC = CA]

या $\frac{3AB^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$

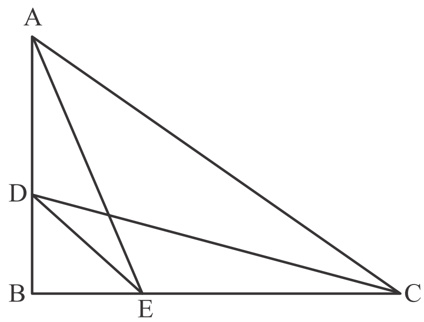
या $27\,AB^2 = 36\,AD^2 - AB^2$

या $28\,AB^2 = 36\,AD^2$

या $7\,AB^2 = 9\,AD^2$

अर्थात् $9AD^2 = 7AB^2$ इति सिद्धम

उदाहरण-11. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका कोण $\angle B = 90°$ है। माना कि D और E क्रमशः AB एवं BC पर दोबिन्दु स्थित है। सिद्ध कीजिए $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$



आकृति 11.53

हल: ΔABE समकोण त्रिभुज है तथा $\angle B = 90°$

$\therefore \quad AE^2 = AB^2 + BE^2 \qquad \ldots(1)$

पुनः ΔDBC समकोण त्रिभुज है और $\angle B = 90°$

$CD^2 = BD^2 + BC^2 \qquad \ldots(2)$

(1) व (2) को जोड़ने पर

$AE^2 + CD^2 = (AB^2 + BC^2) + (BE^2 + BD^2) \qquad \ldots(3)$

इसी प्रकार समकोण ΔABC एवं समकोण ΔDBE में

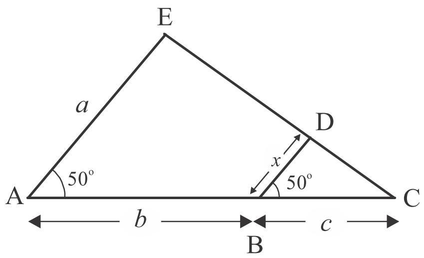
$AC^2 = AB^2 + BC^2$ एवं $DE^2 = BE^2 + BD^2 \qquad \ldots(4)$

(3) व (4) से

$AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$ इति सिद्धम्

प्रश्नमाला 11.4

1. निम्न के उत्तर सत्य एवं असत्य में देना है। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए (यदि सम्भव हो)
   (i) दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 4 : 9 है तो इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 9 है।
   (ii) दो त्रिभुजों क्रमशः ABC व DEF में यदि $\dfrac{\Delta ABC \text{ के क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ के क्षेत्रफल}} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{9}{4}$ है तो $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ होगा।
   (iii) दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी भुजाओं के वर्गों के समानुपाती होता है।
   (iv) ΔABC एवं ΔAXY समरूप हो और उनके क्षेत्रफलों का मान समान हो तोXY, एवं BC सम्पाती भुजाएँ हो सकती है।
2. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 वर्ग सेमी. और 121 वर्ग सेमी. है यदि EF = 15.4 सेमी हो तो BC ज्ञात कीजिए।
3. एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC एवं DBC बने हैं। यदि AD व BC परस्पर O पर प्रतिच्छेद करे तो सिद्ध कीजिए
   $$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AO}{DO}$$
4. निम्न प्रश्नों के हल ज्ञात कीजिए।
   (i) ΔABC में DE || BC एवं AD : DB = 2 : 3 हो तो ΔADE एवं ΔABC के क्षेत्रफलों के अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (ii) रेखा खण्ड AB के बिन्दु A व B पर PB और QA लम्ब है। यदि P व Q, AB के दोनों ओर स्थित हो और P व Q को मिलाने पर वह AB को O पर प्रतिच्छेद करे तथा PO = 5 सेमी, QO = 7 सेमी, ΔPOB का क्षेत्रफल 150 सेमी^{2} हो तो ΔQOA का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   (iii) आकृति में x का मान a, b एवं c के पदों में ज्ञात कीजिए।



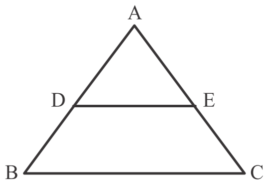
आकृति 11.54

5. ΔABC में $\angle B = 90°$ हो एवं BD कर्ण AC पर लम्ब हो तो सिद्ध कीजिए। $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

6. सिद्ध कीजिए कि वर्ग की एक भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

विविध प्रश्नमाला—11

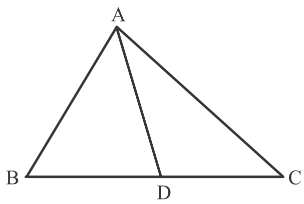
1. आकृति में $DE \parallel BC$ हो, $AD = 4$ सेमी. $DB = 6$ सेमी एवं $AE = 5$ सेमी हो, तो EC का मान होगा–



आकृति 11.55

(क) 6.5 सेमी (ख) 7.0 सेमी (ग) 7.5 सेमी (घ) 8.0 सेमी

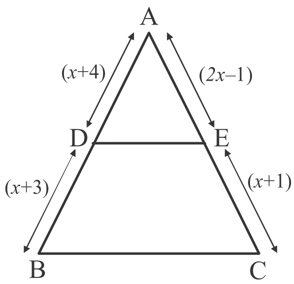
2. आकृति में AD, कोण A का समद्विभाजक है, $AB = 6$ सेमी. $BD = 8$ सेमी. $DC = 6$ सेमी हो, तो AC का मान होगा–



आकृति 11.56

(क) 4.0 सेमी (ख) 4.5 सेमी (ग) 5 सेमी (घ) 5.5 सेमी

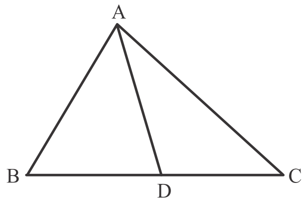
3. आकृति में, यदि $DE \parallel BC$ हो, तो x का मान होगा–



आकृति 11.57

(क) $\sqrt{5}$ (ख) $\sqrt{6}$ (ग) $\sqrt{3}$ (घ) $\sqrt{7}$

4. आकृति 11.58 में, यदि $AB = 3.4$ सेमी, $BD = 4$ सेमी, $BC = 10$ सेमी हो, तो AC का मान होगा–



आकृति 11.58

(क) 5.1 सेमी (ख) 3.4 सेमी (ग) 6 सेमी (घ) 5.3 सेमी

5. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल क्रमशः 25 25 सेमी² एवं 36 सेमी² है, यदि छोटे त्रिभुज की माध्यिका 10 सेमी हो, तो बड़े त्रिभुज की संगत माध्यिका होगी–

(क) 12 सेमी (ख) 15 सेमी (ग) 10 सेमी (घ) 18 सेमी

6. एक समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में $AB \parallel CD$ है एवं इसके विकर्ण O बिन्दु पर मिलते है। यदि $AB = 6$ सेमी एवं $DC = 3$ सेमी हो, तो ΔAOB के क्षेत्रफल एवं ΔCOD के क्षेत्रफल का अनुपात होगा–

(क) 4 : 1 (ख) 1 : 2 (ग) 2 : 1 (घ) 1 : 4

7. यदि ΔABC एवं ΔDEF में $\angle A = 50°, \angle B = 70°, \angle C = 60°, \angle D = 60°, \angle E = 70°$ एवं $\angle F = 50°$ हो तो निम्नलिखित में सही है

(क) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ख) $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ (ग) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (घ) $\Delta ABC \sim \Delta FED$

8. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ हो, एवं $AB = 10$ सेमी, $DE = 8$ सेमी हो, तो ΔABC का क्षेत्रफल ΔDEF का क्षेत्रफल होगा–

(क) 25 : 16 (ख) 16 : 25 (ग) 4 : 5 (घ) 5 : 4

9. ΔABC की भुजाओं AB एवं AC पर बिन्दु D और E इस प्रकार है कि $DE \parallel BC$ है एवं $AD = 8$ सेमी, $AB = 12$ सेमी तथा $AE = 12$ सेमी हो, तो CE का माप होगा–

(क) 6 सेमी (ख) 18 सेमी (ग) 9 सेमी (घ) 15 सेमी

10. एक 12 सेमी लम्बी उर्ध्वाधर छड़ की जमीन पर छाया की लम्बाई 8 सेमी. लम्बी है। यदि इसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 40 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई होगी–

(क) 60 मीटर (ख) 60 सेमी (ग) 40 सेमी (घ) 80 सेमी

11. ΔABC में यदि D, BC पर कोई बिन्दु इस प्रकार है कि $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$ हो, एवं $\angle B = 70°, \angle C = 50°$ हो, तो $\angle BAD$ ज्ञात कीजिए।

12. यदि ΔABC में $DE \parallel BC$ हो, एवं $AD = 6$ सेमी, $DB = 9$ सेमी, और $AE = 8$ सेमी हो, तो AC को ज्ञात कीजिए।

13. यदि ΔABC में $\angle A$ का समद्विभाजक AD हो एवं $AB = 8$ सेमी, $BD = 5$ सेमी एवं $DC = 4$ सेमी हो, तो AC को ज्ञात कीजिए।

14. यदि दो समरूप त्रिभुजों की ऊँचाईयों का अनुपात 4:9 हो, तो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. समरूप आकृतियाँ आकार में समान एवं माप में समान हो यह आवश्यक नहीं है।
2. दो बहुभुज समरूप होते है यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण समान हो।
3. दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण समान हो।
4. थेल्स प्रमेय (आधारभूत आनुपातिक प्रमेय) यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को काटते हुए कोई रेखा खींची जाए तो वह त्रिभुज की अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती हैं।
5. यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती हो, तो यह रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है।
6. दो सरल रेखीय आकृतियाँ समान कोणिक होती है यदि इनके संगत कोण समान हो एवं इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती होती है एवं ये समरूप होते हैं।
7. कोण कोण कोण समरूपताः यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण समान हो, तो त्रिभुज समरूप होते है।
8. कोण कोण समरूपताः यदि एक त्रिभुज के दो कोण, दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों के समान हो, तो त्रिभुज समरूप होते है।
9. भुजा कोण भुजा समरूपताः यदि किसी त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के किसी कोण के बराबर हों एवं उन कोणों को अन्तर्विष्ट करने वाली भुजाएँ समानुपाती हो, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते है।
10. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।
11. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत ऊँचाइयों के वर्गों के अनुपात के समान होता है।
12. अधिक कोण त्रिभुज ABC में $\angle B$ अधिक कोण हो और $AD \perp BC$ हो तो $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,BC \times BD$ होता है।
13. ΔABC न्यून कोण त्रिभुज हो और $AD \perp BC$ हो तो $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$ होता है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 11.1

1. (i) समरूप (ii) समरूप (iii) समबाहू (iv) (a) उनके संगत कोण समान हो (b) संगत भुजाओं का अनुपात समान हो।
2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (क्योंकि केवल संगत भुजाओं का समानुपाती होना पर्याप्त नहीं हैं। (iv) सत्य (v) असत्य

प्रश्नमाना 11.2

1.	(i) 20 सेमी.	(ii) 15.6 सेमी.	(iii) 9.9 सेमी.	(iv) $x = 1, \frac{-1}{2}$
2.	(i) समान्तर है	(ii) समान्तर नहीं है	(iii) समान्तर नहीं है	(iv) समान्तर है।

प्रश्नमाला 11.3

1. यदि $\angle A = \angle P$ व $\angle C = \angle R$ हो तो $\angle B$ व $\angle Q$ स्वतः समान हो जाएगें तो दो त्रिभुज समान कोणिक हो जावेगें।
2. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ नहीं है। क्योंकि दिए गए कोणों के क्रम के अनुसार $\Delta ABC \sim \Delta DFE$ होने चाहिए।
3. $\Delta ABC \sim \Delta FDE$ के लिए प्रश्न में दिया गया अनुपात नहीं लिखा जा सकता वास्तव में शीर्षो के क्रम में $\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EF}$ लिया जाना चाहिए।
4. यह कथन सत्य नहीं हैं क्योंकि दोनों त्रिभुजों में दो भुजाएं और उनके अन्तर्गत कोण समान होने पर ही दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।
5. दो समानकोणिक त्रिभुजों में संगत कोण बराबर होते हैं। यदि संगत कोण बराबर हो तो दोनों Δ समरूप होते है।
6. (i) व (viii) $\Delta ABC \sim \Delta QRP$, (ii) व (vii) $\Delta MPN \sim \Delta ZYX$, (iii) व (v) $\Delta PQR \sim \Delta EFG$, (iv) व (vi) $\Delta EDF \sim \Delta NML$
7. $\angle P = \angle RTS, \angle Q = \angle RST$
8. $\Delta ADC \sim \Delta BEC$
10. 1.6 मी.
11. 84 मी.

प्रश्नमाला 11.4

1. (i) असत्य भुजाओं के वर्गों के अनुपात अर्थात् 16 : 81 होगा

   (ii) असत्य चूंकि संगत भुजाओं का अनुपात $\frac{3}{2}$ है जबकि सर्वांगसमता के लिए यह अनुपात 1 : 1 होता है।

   (iii) असत्य क्योंकि क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

   (iv) सत्य

11. 11.2 सेमी.

4. (i) 4 : 25 (ii) 294 सेमी^{2} (iii) $x = \frac{ac}{b+c}$

विविधप्रश्नमाला–11

1. (ग)	2. (ख)	3. (घ)	4. (क)	5. (क)	6. (क)	7. (घ)
8. (क)	9. (क)	10. (क)	11. 30^0	12. 20 सेमी	13. 6.4 सेमी	14. 16:81

12

वृत्त (Circle)

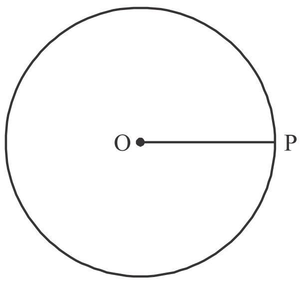
12.01 प्रस्तावना (Introduction)

बचपन से आपने ऐसी अनेक वस्तुऐं देखी है या उन्हें काम में लिया है जिन का आकार गोल हैं जैसे चूड़ियाँ, सिक्के, गाडी का पहिया, थाली, कमीज का बटन आदि। घर में लगे पंखे को चालू करके देखोगे तो उसकी पंखुड़ियाँ तेजी से गोल–गोल चक्कर लगाने लगेगी ऐसी स्थिति में आपको पंखुड़ियाँ अलग–अलग दिखाई देने की अपेक्षा एक नई आकृति में दिखाई देती है। आप एक काम कीजिए धागे के लगभग 1 मीटर टुकडे के एक छोर पर छोटा पत्थर बान्धकर दूसरे छोर को पकड कर घुमाइए और गति तेज कीजिए तथा अपना ध्यान पत्थर पर रखिए, आप अनुभव करेंगे कि पत्थर के स्थान पर एक वलय (रिंग) दिखने लगा है, यही वृत्त है। इस अध्याय में आप वृत्त एवं वृत्त में नीहित गुणों के बारे में अध्ययन करेंगे।

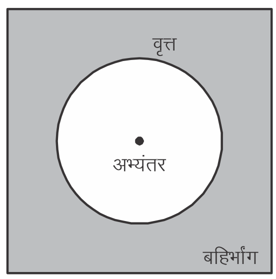
12.02 वृत्त और उसके भाग

परकार के एक भाग पर पेंसिल लगाकर कागज के पृष्ठ पर दूसरे नुकीले भाग के सापेक्ष एक चक्कर पूरा होने तक घुमाइए तो आप देखेंगे, कागज पर एक आकृति बनेगी यह आकृति एक वृत्त है। आपको ध्यान होगा पेंसिल की नोक से उभरी आकृति बिन्दु होता है। वास्तव में एक वृत्त परकार को घुमाने पर पेंसिल के नोक से अनवरत अंकित अनन्त बिन्दुओं का समूह (समुच्चय) है। अर्थात् एक तल पर उन सभी बिन्दुओं का समूह जो तल के एक स्थिर बिन्दु से एक अचर दूरी पर स्थित हों, एक वृत्त कहलाता है।

स्थिर बिन्दु को वृत्त का केन्द्र और अचर दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं। आकृति 12.01 में O वृत्त का केन्द्र और OP वृत्त की त्रिज्या है।



आकृति 12.01



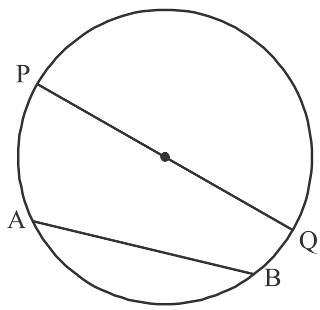
आकृति 12.02

एक वृत्त किसी तल को जिस पर वह स्थित है, उसे तीन भागों में विभाजित करता है।

देखिए आकृति 12.02 (i) अभ्यन्तर– वृत्त के अन्दर का भाग (ii) वृत्त (iii) बहिर्भाग–वृत्त के बाहर का भाग 1 वृतीय क्षेत्र– वृत्त एवं अभ्यन्तर मिलकर वृत्त क्षेत्र बनाते हैं।

जीवा एवं व्यास– वृत्त पर स्थित दो बिन्दु A व B को स्केल की सहायता से मिलाने पर प्राप्त रेखाखण्ड AB वृत्त की जीवा कहलाती है।

यदि कोई जीवा वृत्त के केन्द्र से गुजरती है तो वह उस वृत्त का व्यास कहलाती है। देखिए आकृति 12.03, जीवा PQ वृत्त का व्यास है।

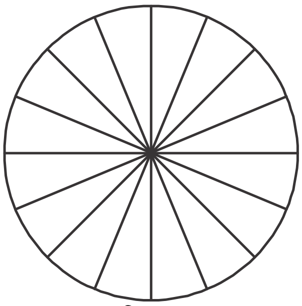


आकृति 12.03

क्रिया कलाप–

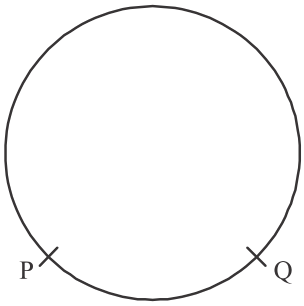
(i) अपनी अभ्यास पुस्तिका में भिन्न–भिन्न त्रिज्या लेकर वृत्त बनाइए और प्रत्येक वृत्त में दो से अधिक जीवाएँ खीचिएँ। सभी जीवाओं को मापिए। क्या व्यास से बड़ी जीवा कोई अन्य है? निः सन्देह नहीं है। अर्थात् प्रत्येक वृत्त में व्यास सबसे बड़ी जीवा होती है। वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या के माप का दो गुना होता है।

(ii) एक वृत्त बनाइए और देखिए कि उसमें कितने व्यास खींचे जा सकते हैं। क्या एक से अधिक व्यास होंगे? हाँ, अनन्त व्यास खींचे जा सकते हैं। देखिए आकृति 12.04

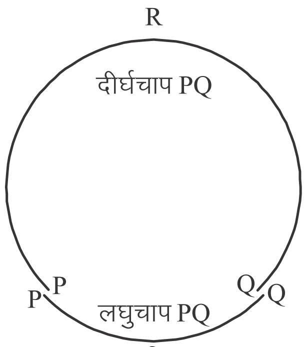


आकृति 12.04

चाप– आकृति 12.05 में वृत्त पर दो बिन्दु P व Q दिखाए गए हैं जो वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है। दोनों भागों में से एक भाग बड़ा व दूसरा छोटा दिखाई देता है।



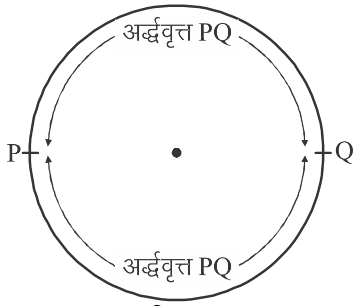
आकृति 12.05



आकृति 12.06

यदि दोनों चाप को आकृति 12.06 के अनुसार अलग–अलग करके देखें तो लघु चाप PQ को चाप PQ से व्यक्त करते हैं। परन्तु दीर्घ चाप PQ के लिए चाप पर कोई अन्य बिन्दु R लेकर चाप PRQ द्वारा व्यक्त करेंगे।

P और Q जब व्यास पर स्थित हो तो दोनो चाप समान होते हैं तो, प्रत्येक चाप को अर्द्धवृत्त कहते हैं। देखिए आकृति 12.07



आकृति 12.07

प्रश्नमाला 12.1

1. खाली स्थान भरिए:
   (i) वृत्त का केन्द्र वृत्त के . . . में स्थित है। (बहिर्भाग/अभ्यन्तर)।
   (ii) एक बिन्दु, जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक हो, वृत्त के . . . में स्थित होता है। (बहिर्भाग/अभ्यन्तर)
   (iii) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त की . . . होती है।
   (iv) एक चाप . . . होता है, जब इसके सिरे एक व्यास के सिरे हो।
   (v) एक वृत्त जिस तल पर स्थित होता है, उसे . . . भागों में विभाजित करता है।
2. सत्य/असत्य लिखिए। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।
   (i) केन्द्र को वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु को मिलाने वाला रेखा खण्ड वृत्त की त्रिज्या होती है।
   (ii) एक वृत्त में समान लम्बाई के चाप जीवाएँ होती है।
   (iii) यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बांट दिया जाए, तो प्रत्येक भाग दीर्घ चाप होता है।

(iv) वृत्त की एक जीवा, जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दोगुनी हो, वृत्त का व्यास है।

(v) वृत्त एक समतलीय आकृति है।

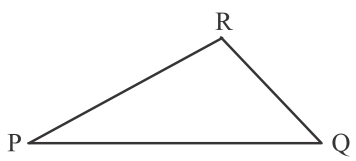
(vi) एक तल पर स्थित उन बिन्दुओं का समूह जो उसी तल के एक के स्थिर बिन्दु से अचर दूरी पर होते है एक व्यास कहलाता है।

(vii) वह जीवा जिस पर केन्द्र स्थित होता है, त्रिज्या कहलाती है।

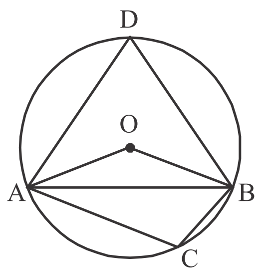
12.03 जीवा द्वारा एक बिन्दु पर अन्तरित कोण

PEX282

यदि P, Q एवं R तीन बिन्दु किसी तल पर एक सरल रेखा में नहीं है को मिलाने पर $\angle PRQ$ रेखाखण्ड PQ द्वारा अन्तरित कोण कहलाता है। (देखिए चित्र 12.08) इसी प्रकार आकृति 12.09 में $\angle AOB$ जीवा AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, $\angle ADB$ दीर्घ चाप AB पर जीवा AB द्वारा अन्तरित कोण तथा $\angle ACB$ लघुचाप AB पर जीवा AB द्वारा अन्तरित कोण है।

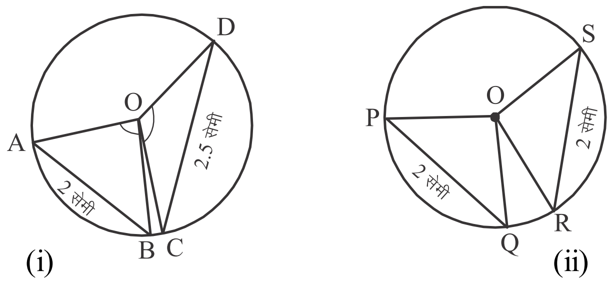


आकृति 12.08



आकृति 12.09

क्रिया कलाप– आइए अब हम जीवा के माप और उसके द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण के मध्य सम्बन्ध पर विचार करते हैं।



आकृति 12.10

आकृति 12.10 (i) में 2 सेमी एवं 2.5 सेमी नाप की जीवाएँ AB एवं CD दर्शाई हुई हैं। यहाँ AB < CD तो AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित $\angle AOB$ तथा CD द्वारा केन्द्र पर अन्तरित $\angle COD$ में आपको कोई सम्बन्ध दिखाई देता है? हाँ $\angle AOB < \angle COD$ परन्तु आकृति 12.10 (ii) में आप क्या देख रहे हैं? आप देख रहे हैं

PQ = RS तो $\angle POQ = \angle ROS$ है

अर्थात् एक वृत्त में बड़ी जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, छोटी जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण से बड़ा होता है। बराबर नाप की जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अन्तरित करती हैं।

आइए इस परिणाम को हम प्रमेय के रूप में लिखकर पूर्व प्राप्त परिणामों के माध्यम से सिद्ध करते हैं।

प्रमेय–12.1 एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अन्तरित करती है।

दिया हुआ है: AB = CD

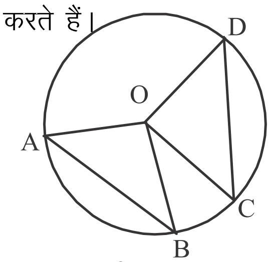
सिद्ध करना: $\angle AOB = \angle COD$

उपपत्तिः ΔAOB व ΔCOD में

OA = OC एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

OB = OD एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

AB = CD दिया हुआ है



आकृति 12.11

अतः $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (SSS नियम से)

अतः $\angle AOB = \angle COD$ इति सिद्धम

अब हम इसका विलोम भी सिद्ध करते है।

प्रमेय–12.2 यदि एक वृत्त की जीवाओ द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण बराबर हों तो वे जीवाएँ भी बराबर होती है।

दिया हुआ है: $\angle AOB = \angle COD$

सिद्ध करना: $AB = CD$

उपपत्ति: ΔAOB व ΔDOC में

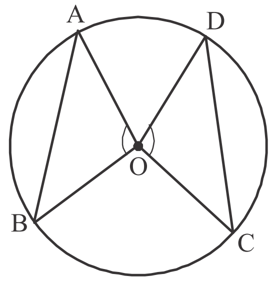
$OA = OD$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

$\angle AOB = \angle COD$ दिया हुआ है

$OB = OC$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

अतः $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (SAS नियम से)

अतः $AB = CD$ इति सिद्धम



आकृति 12.12

चूंकि दो सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर होती है अतः प्रमेय 12.1 एवं 12.2 को दो सर्वांगसम वृत्तें के लिए भी सिद्ध कर सकते है।

12.04 केन्द्र से जीवा पर लम्ब

प्रमेय–12.03 एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा का समद्विभाजन करता है।

दिया हुआ है: $OM \perp AB$, AB एक जीवा है

सिद्ध करना है: $AM = BM$

रचना: O को A व B से मिलाया

उपपत्ति: ΔOAM व ΔOBM में

$OA = OB$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

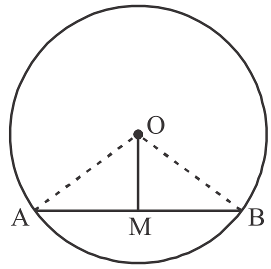
$\angle AMO = \angle OMB = 90^\circ$, $OM \perp AB$ दिया हुआ है

OM उभयनिष्ठ

अर्थात् ΔOAM एवं ΔOBM दोनों समकोण त्रिभुज है

अतः $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (RHS नियम से)

अतः $AM = BM$ इति सिद्धम



आकृति 12.13

प्रमेय–12.4 किसी वृत्त की एक जीवा के मध्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

दिया हुआ है: $AM = BM$

सिद्ध करना है: $OM \perp AB$

रचना: O को A व B से मिलाया

उपपत्ति: ΔOMA एवं ΔOMB में

$OA = OB$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

OM उभयनिष्ठ

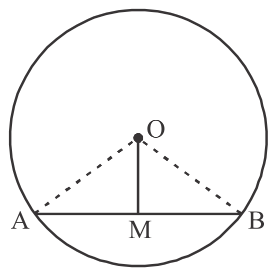
$AM = BM$ दिया हुआ है।

अतः $\Delta OMA \cong \Delta OMB$ (SSS नियम से)

अतः $\angle OMA = \angle OMB$ जो रैखिक कोण युग्म है

अर्थात् $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$

अतः $OM \perp AB$ इति सिद्धम

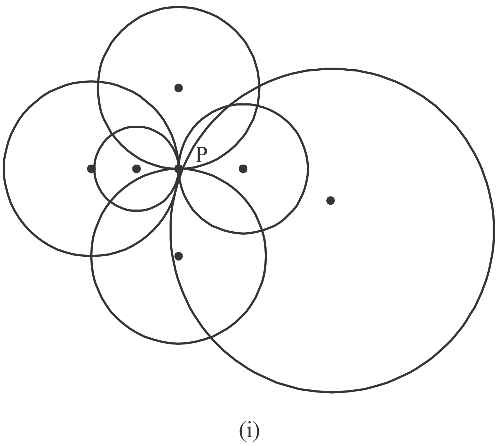


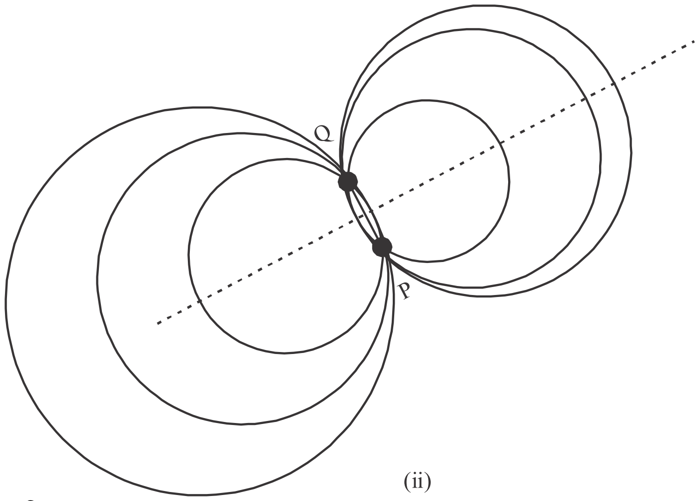
आकृति 12.14

12.05 तीन बिन्दुओं से जाने वाला वृत्त

जिस प्रकार आपने कक्षा 9 में अभिगृहीत के अन्तर्गत पढ़ा है कि, दो बिन्दुओं से गुजरती हुई एक और केवल एक ही सरल रेखा खींची जा सकती है। उसी प्रकार क्या आप नहीं जानना चाहेंगे कि एक तल पर कितने बिन्दु ऐसे उपस्थित हो सकते हैं, जिनमें से एक और केवल एक ही वृत्त गुजर सके।

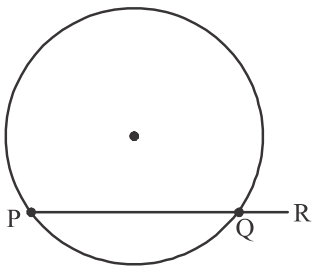
सर्व प्रथम एक बिन्दु P लेकर देखते हैं। आप देखेंगे कि एक बिन्दु से गुजरने वाले आप जितने चाहे उतने वृत्त खींच सकते हैं (देखिए आकृति 12.19 (i)) अब दो बिन्दु P व Q लेकर देखिए। आप पुनः देखेंगे कि इन दो बिन्दुओं से होकर गुजरने वाले वृत्त भी अनेक खींच सकते हैं परन्तु यहाँ आप देखेगे कि प्रत्येक वृत्त के केन्द्र एक सरल रेखा पर होंगे और वह रेखा PQ का लम्ब समद्विभाजक है (देखिए आकृति 12.19 (ii))





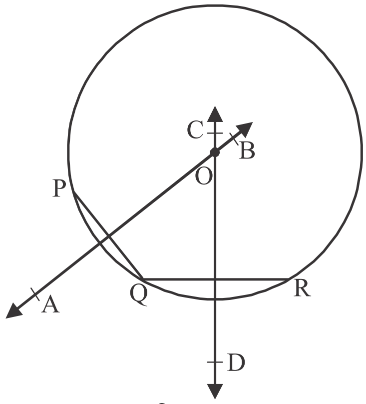
आकृति 12.19

इसी क्रम में तीन बिन्दु PQ व R ऐसे लें जो संरेख हैं। क्या आप इन तीनों बिन्दुओं से गुजरने वाला एक वृत्त खींच सकते हैं? नहीं। यदि तीन बिन्दु एक ही रेखा पर हो तो तीसरा बिन्दु दो बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त के बाहर या अन्दर होगा (देखिए आकृति 12.20)।



आकृति 12.20

आइए अब हम तीन बिन्दु PQ व R इस तरह के लेते हैं, जो एक रेखा पर नहीं हैं (देखिए आकृति 12.21)



आकृति 12.21

आप आकृति 12.19 (ii) में देख चुके हैं कि दो बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों के केन्द्र दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के लम्ब समद्विभाजकों पर स्थित होते हैं। यहाँ भी P,Q और R से गुजरने वाले वृत्तों के केन्द्र PQ तथा QR रेखा खण्डों के लम्ब समद्विभाजकों पर स्थित होंगे। अतः हमें PQ व QR के लम्ब समद्विभाजक खींचने होंगे। आकृति 12.21 में PQ व QR के लम्ब समद्विभाजक क्रमशः AB एवं CD हैं।

आप देख रहे हैं AB और CD परस्पर O पर प्रतिच्छेद कर रहे हैं अतः O से बिन्दु P,Q एवं Q,R से गुजरने वाले वृत्त खींचे जाने चाहिए। क्यों?

चूंकि कक्षा 9 में हम पढ़ चुके हैं कि किसी रेखा खण्ड के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित बिन्दु उस रेखा खण्ड केअन्तिम बिन्दुओं से समान दूरी पर होते हैं। इसलिए $OP = OQ - (1)$ एवं $OQ = OR - (2)$

(1) व (2) से $OP = OQ = OR$

अतः 'O' से OP के बराबर त्रिज्या लेकर यदि कोई वृत्त खींचे तो वह निश्चित ही P, Q व R बिन्दुओं से होकर गुजरेगा।

अर्थात् तीन बिन्दु जो एक सरल रेखा में नहीं है, से होकर जाने वाला एक ही वृत्त है।

आप जानते है कि दो रेखा खण्डों के लम्ब समद्विभाजक एक और केवल एक बिन्दु पर ही प्रतिच्छेद करते है अतः P, Q व R बिन्दुओं से समान दूरी पर रहने वाला बिन्दु O भी एक ही होगा। अर्थात् दूसरे शब्दो में P, Q और R से होकर जाने वाला एक अद्वितीय वृत्त है।

इस परिणाम को हम निम्न प्रमेय के रूप में लिख सकते हैं।

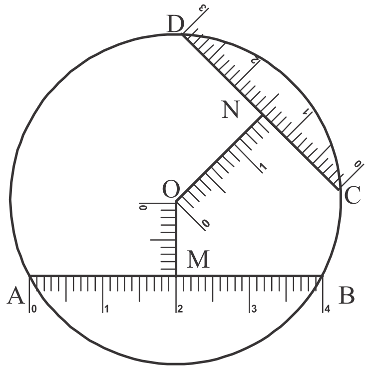
प्रमेय–12.5 तीन दिए हुए असंरेखी बिन्दुओं से होकर जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है।

12.06 समान जीवाएँ और उनके केन्द्र से दूरियाँ

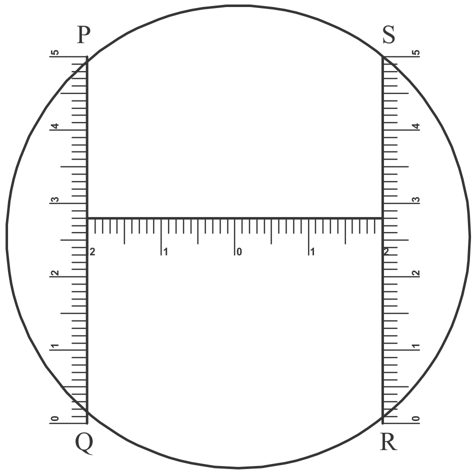
आपने कक्षा 9 में पढ़ा है कि किसी रेखा खण्ड पर बाह्य बिन्दु से खींचे गये सभी रेखा खण्डों में लम्ब सबसे छोटा होता है और यही उस बाह्य बिन्दु की दिये गये रेखा खण्ड से दूरी का माप होता है।

नोटः यदि बिन्दु रेखा खण्ड पर स्थित हो, तो रेखा खण्ड की उससे दूरी शून्य होती है।

PFFTBC



(i)



(ii)

आकृति 12.22

एक वृत्त में अनेक जीवाएँ खींची जा सकती हैं। आप को भी एक वृत्त की रचना करके उसमें एक से अधिक जीवाएँ खींचनी है। प्रत्येक जीवा की केन्द्र से दूरी ज्ञात करनी है। आप क्या देखतें है?

आइए एक क्रिया कलाप पर विचार करतें हैं।

आकृति 12.22 (i) में दो जीवाएँ 4 सेमी और 3 सेमी की हैं। उनकी केन्द्र से दूरी क्रमशः 1 सेमी एवं 1.6 सेमी है। अर्थात् एक वृत्त में लम्बी जीवा छोटी जीवा की तुलना में केन्द्र के निकट होती है।

आकृति 12.22 (ii) में दोनों जीवाएँ समान माप 5-5 सेमी की है जो केन्द्र से 2-2 सेमी दूरी पर स्थित है। अर्थात् एक वृत्त में समान नाप की जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर स्थित होती हैं।

चलिए अब हम इन्हें एक वृत्त और दो सर्वांगसम वृत्तों के लिए निम्न प्रमेय द्वारा सिद्ध करते हैं।

प्रमेय–12.6 वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से समदूरस्त होती हैं

दिया हुआ है: जीवा AB = जीवा CD

सिद्ध करना: OM = ON

रचना: OA एवं OD को मिलाया

उपपत्ति: $AM = BM = \frac{1}{2}AB \ldots$ (केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा का समद्विभाजन करता है)

$DN = CN = \frac{1}{2}CD$ (केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा का समद्विभाजन करता है)

परन्तु AB = CD दिया हुआ है।

अत: AM = DN . . . (i)

ΔOMA एवं ΔOND में

AM = DN [(i) से]

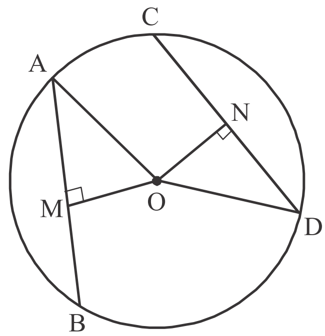
OA = OD (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$\angle OMA = \angle OND = 90^{\circ}$

अत: RHS नियम से

$\Delta OMA \cong \Delta OND$

अत: OM = ON इतिसिद्धम



आकृति 12.23

इसी प्रकार सर्वांगसम वृत्तों के लिए भी निम्न कथन सत्य है।

उपप्रमेय: सर्वांगसम वृत्तों में समान जीवाएँ संगत केन्द्रों से सम दूरस्त होती हैं।

प्रमेय–12.7 (प्रमेय का विलोम) किसी वृत्त की जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर हो तो वे परस्पर बराबर होती हैं।

दिया हुआ है: जीवाएँ AB व CD केन्द्र 'O' से समान दूरी पर स्थित हैं अर्थात् OM = ON

सिद्ध करना: AB = CD

रचना: O को A व D से मिलाया

उपपत्ति: ΔOMA व ΔOND में

OM = ON (दिया हुआ)

OA = OD (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OMA = \angle OND$ $(OM \perp AB$ एवं $ON \perp CD)$

अत: RHS नियम से

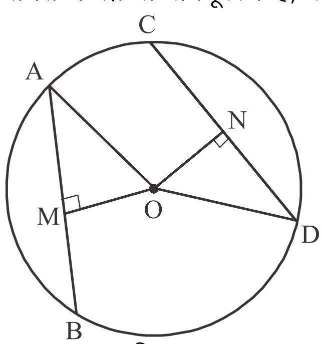
$\Delta OMA \cong \Delta OND$

∴ AM = ND

या 2 AM = 2 ND

या AB = CD इतिसिद्धम

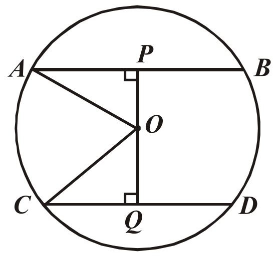
उपप्रमेय: सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ जो संगत केन्द्रों से समदूरस्थ है, समान होती हैं।



आकृति 12.24

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. आकृति 12.25 में, वृत्त का केन्द्र O एवं त्रिज्या 5 सेमी है। यदि $OP \perp AB$, $OQ \perp CD$, AB|| CD, AB = 8 सेमी और CD = 6 सेमी हों, तो PQ ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.25

हल: दिया है कि $OP \perp AB$, एवं $OQ \perp CD$

अतः $AP = PB = \frac{1}{2}AB = 4$ सेमी

$CQ = QD = \frac{1}{2}CD = 3$ सेमी

और $OA = OC = 5$ सेमी (त्रिज्या)

ΔOPA में, बौधायन प्रमेय से,

$OP^2 = OA^2 - AP^2$

या $OP^2 = 5^2 - 4^2$

$= 25 - 16 = 9$

$\therefore$ $OP = 3$ सेमी

इसी प्रकार ΔOQC में,

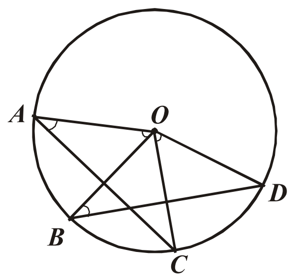
$OQ^2 = OC^2 - CQ^2$

$OQ^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore$ $OQ = 4$ सेमी

अर्थात् $PQ = OP + OQ = 3 + 4 = 7$ सेमी

उदाहरण-2. आकृति 12.26 में, चाप AB = चाप CD है, सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$ है।



आकृति 12.26

हल: दिया है: चाप AB = चाप CD है,

सिद्ध करना है: $\angle A = \angle B$

उपपत्ति: हम जानते हैं कि समान चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण समान होते हैं

अतः $\angle AOB = \angle COD$

दोनों पक्षों में $\angle BOC$ जोड़ने पर

$\angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COD$

या $\angle AOC = \angle BOD$ . . . (1)

अब ΔAOC और ΔBOD में,

$OA = OB$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OC = OD$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle AOC = \angle BOD$ [(1)से]

$\Delta AOC \cong \Delta BOD$ (SAS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे।

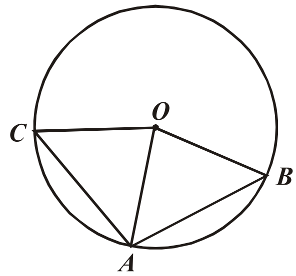
अर्थात् $\angle A = \angle B$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण-3. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि वृत्त का केन्द्र $\angle BAC$ के समद्विभाजक पर स्थित होगा।

हल: दिया है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, जिसकी जीवाएँ AB और AC समान हैं।

सिद्ध करना है: केन्द्र O, कोण BAC के समद्विभाजक पर स्थित है।

रचना: CO और BO को मिलाया।



आकृति 12.27

उपपत्ति: ΔAOB और ΔAOC में,

BO = OC (वृत्त की त्रिज्याएँ)

OA = OA (उभयनिष्ठ भुजा)

AB = AC (दिया है)

$\Delta AOB \cong \Delta AOC$ (SSS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle OAB = \angle OAC$

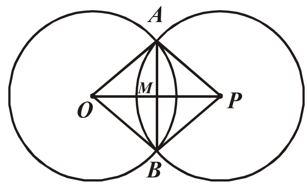
अर्थात केन्द्र O, कोण BAC के समद्विभाजक पर स्थित है। "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण-4. यदि दो वृत्त, एक दूसरे को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करते हों, तो सिद्ध कीजिए कि उनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा उनकी उभयनिष्ठ जीवा का लम्ब समद्विभाजक होती है।

हलः दिया हैः आकृति 12.28 में दो वृत्त, जिनके केन्द्र क्रमशः O एवं P है, जो A और B बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना हैः OP, जीवा AB का लम्बसमद्विभाजक है।

रचनाः OA, OB, PA और PB को मिलाया।



आकृति 12.28

उपपत्तिः ΔOAP और ΔOBP में,

$AO = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$PA = PB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$ (SSS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होंगे।

$\angle AOP = \angle BOP$

या $\angle AOM = \angle BOM$ .....(1)

अबः ΔAOM और ΔBOM में

$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle AOM = \angle BOM$ [(1)से]

$OM = OM$ (उभयनिष्ठ)

$\Delta AOM \cong \Delta BOM$ (SAS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ एवं कोण समान होंगे।

अर्थात् $AM = BM$ ....(2)

और $\angle AMO = \angle BMO$ .....(3)

परन्तु $\angle AMO + \angle BMO = 180^\circ$

या $\angle AMO = \angle BMO = 90^\circ$ .....(4)

समीकरण (2) और (4) से,

OP, जीवा AB का लम्ब समद्विभाजक है। "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण-5. 10 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त में, दो जीवाएँ AB = AC = 12 सेमी हों, तो जीवा BC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हलः आकृति 12.29 में, ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। $\angle BAC$ का समद्विभाजक AD है, अतः AD जीवा BC का लम्ब-समद्विभाजक है।

यहाँ AC = AB = 12 सेमी

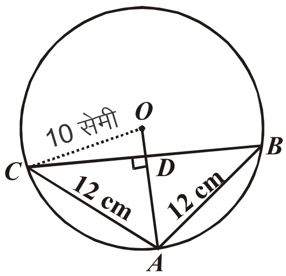
OA = OC = 10 सेमी

और BD = CD

$\because$ ΔADC में, बौधायन प्रमेय से

$CD^2 = AC^2 - AD^2$

$CD^2 = 144 - AD^2$ .....(1)



आकृति 12.29

इसी प्रकार ΔOCD में $CD^2 = OC^2 - OD^2$

$CD^2 = 100 - (OA - AD)^2 = 100 - (10 - AD)^2$

$CD^2 = 20\,AD - AD^2$ .....(2)

(1) और (2) से $144 - AD^2 = 20\,AD - AD^2$

या $AD = 7.2$ सेमी

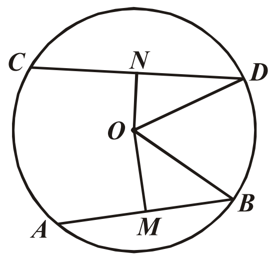
AD का मान (1) में रखने पर

$CD^2 = 144 - (7.2)^2$ या $CD = 9.6$ सेमी

अतः जीवा $BC = 2CD = 2\times 9.6 = 19.2$ सेमी

उदाहरण-6. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की दो जीवाओं में से बड़ी जीवा केन्द्र के निकट होती है।

हलः दिया है: आकृति 12.30 में, एक वृत्त जिसका केन्द्र O है और जीवा CD > जीवा AB



आकृति 12.30

सिद्ध करना है: $ON < OM$

रचना: OB और OD को मिलाया

उपपत्ति: OM और ON क्रमश AB और CD पर लम्ब हैं,

अतः $MB = \frac{1}{2}AB$ और $ND = \frac{1}{2}CD$ .....(1)

अब ΔOMB में

$MB^2 = OB^2 - OM^2$ .....(2)

और ΔOND में

$ND^2 = OD^2 - ON^2$ .....(3)

दिया है कि $AB < CD$

या $\frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}CD$

या $MB < ND$ [(1)से]

या $MB^2 < ND^2$ .....(4)

समीकरण (2), (3) और (4) से

$(OB^2 - OM^2) < (OD^2 - ON^2)$

परन्तु OB = OD (वृत्त की त्रिज्या) है

अतः $-OM^2 < -ON^2$

या $OM^2 > ON^2$

या $OM > ON$

या $ON < OM$ ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण-7. आकृति 12.31 में, एक वृत्त में जीवा AB = जीवा CD हों, तो सिद्ध कीजिए कि DQ = BQ

हलः दिया है: जीवा AB = जीवा CD

सिद्ध करना है: DQ = BQ

रचना: $OL \perp AB$ और $OM \perp CD$ खीचें और OQ को मिलाया।

उपपत्ति: AB = CD (दिया हुआ है)

या $\quad OL = OM$ .....(1)

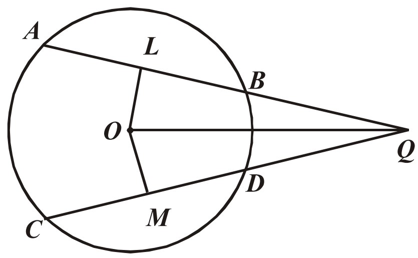
अब $\quad \Delta OMQ$ और ΔOLQ में,

$OQ = OQ$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$OM = OL$ [(1) से]

$\angle OMQ = \angle OLQ$ (समकोण)

$\angle OMQ \cong \Delta OLQ$ (RHS से)



आकृति 12.31

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $\quad MQ = LQ$ .....(2)

परन्तु $\quad MD = \frac{1}{2}CD$ और $LB = \frac{1}{2}AB$

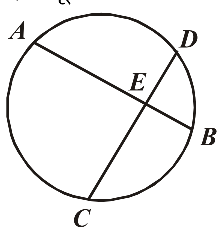
$AB = CD \Rightarrow MD = LB$ .....(3)

समीकरण (2) में से (3) को घटाने पर $MQ - MD = LQ - LB$

अतः $\quad DQ = BQ$ "इतिसिद्धम्"।

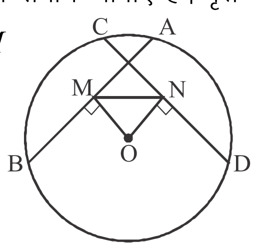
प्रश्नमाला 12.2

1. निम्न में सत्य/असत्य लिखिए और अपने उत्तर का कारण सम्भव हो तो बताइए।
   (i) एक वृत्त की AB व CD क्रमशः 3 सेमी एवं 4 सेमी माप की जीवाएं है जिनके द्वारा केन्द्र पर क्रमशः 70° एवं 50° के कोण निर्मित हैं।
   (ii) एक वृत्त की जीवाएँ जिनकी लम्बाईयाँ 10 सेमी और 8 सेमी हैं केन्द्र से क्रमशः 8 सेमी और 5 सेमी दूरियों पर स्थित है।
   (iii) एक वृत्त की दो जीवाएँ AB व CD में से प्रत्येक केन्द्र से 4 सेमी दूरी पर है तब $AB = CD$ है।
   (iv) O और O' केन्द्रों वाले दो सर्वांगसम वृत्त A और B दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हें। तब $\angle AOB = \angle AO'B$ है।
   (v) तीन संरेख बिन्दुओं से होकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।
   (vi) दो बिन्दुओं A और B से होकर 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचा जा सकता है, यदि $AB = 8$ सेमी है।
2. यदि वृत्त की त्रिज्या 13 सेमी है और इसकी एक जीवा की लम्बाई 10 सेमी हो, तो इस जीवा की वृत्त के केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिए।
3. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD जिनकी लम्बाइयाँ क्रमशः 6 सेमी और 12 सेमी हैं, एक दूसरे के समान्तर हैं तथा वे वृत्त के केन्द्र के एक ही ओर स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच 3 सेमी की दूरी हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
4. आकृति 12.32 मे, दो समान जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि चाप DA = चाप CB



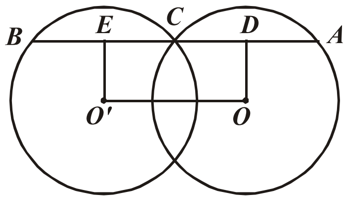
आकृति 12.32

5. आकृति 12.33 में, AB और CD एक वृत्त की समान जीवाएँ हैं। वृत्त का केन्द्र O है। $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle OMN = \angle ONM$



आकृति 12.33

6. आकृति 12.34 में, O और O' दिए गए वृत्तों के केन्द्र हैं। $AB||OO'$ है। सिद्ध कीजिए कि $AB = 2OO'$.



आकृति 12.34

7. AB और CD वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि $AB = 10$ सेमी, $CD = 24$ सेमी और $AB || CD$ है। AB एवं CD के बीच की दूरी 17 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
8. 10 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त में, दो समान्तर जीवाओं की लम्बाई क्रमशः 12 सेमी एवं 16 सेमी है। AB और CD के मध्यदूरी ज्ञात कीजिए, यदि जीवाएँ
   (क) केन्द्र के एक ही ओर हों, (ख) केन्द्र के विपरीत ओर हों।
9. एक चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष वृत्त पर इस प्रकार स्थित हैं कि, $AB = CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AC = BD$
10. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हों, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के क्रमित भाग क्रमशः दूसरी जीवा के संगत भागों के बराबर होते हैं।

PFPPCZ

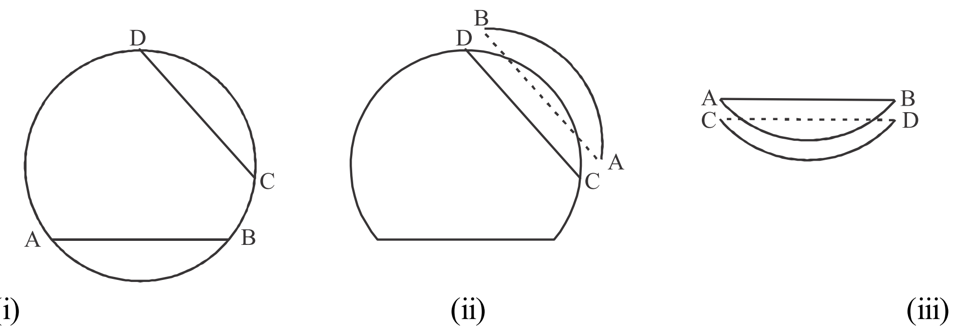
11. सिद्ध कीजिए कि दो समान्तर जीवाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

12.07 एक वृत्त के चाप द्वारा अन्तरित कोण

आपने पिछले अनुच्छेदों में पढ़ा है कि जीवा के अन्तिम बिन्दु वृत्त को दो चापों में विभाजित करते हैं। यदि आप बराबर माप की दो जीवाएँ लें तो उनके चापों के माप के बारे में क्या कह सकते है? क्या एक जीवा द्वारा बना चाप दूसरी जीवा द्वारा बने चाप के बराबर है?

आइए इस पहेली को सुलझातें है।

क्रिया कलाप– एक वृत्त एक कागज पर बनाइए। उसमें दो समान माप की दो जीवाएँ AB व CD खींचिए तो हमें चाप AB एवं चाप CD प्राप्त होंगे। (देखिए आकृति 12.35 (i))



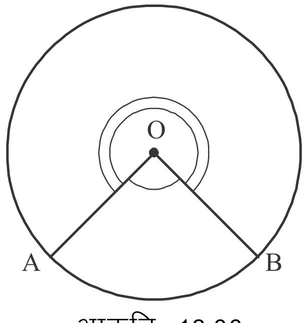
आकृति 12.35

आकृति 12.35 (ii) के अनुसार जीवा AB के अनुदिश काट कर जीवा CD पर रखकर AB द्वारा बने चाप से CD द्वारा बने चाप को ढकने का प्रयत्न कीजिए। आप क्या देखतें?

. अब जीवा CD के अनुदिश भी काट लीजिए और दोनों को (आकृति 12.35(iii)) के अनुसार परस्पर ढकने का प्रयत्न करें।

आप देखेंगें, कि चाप CD एवं चाप AB एक दूसरे को पूरा–पूरा ढक लेते है। अर्थात् बराबर जीवाएँ सर्वांगसम चाप बनाती है।

अतः यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हो तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोम यदि दो चाप सर्वांगसम हों तो उनकी संगत जीवाएँ भी बराबर होती हैं।



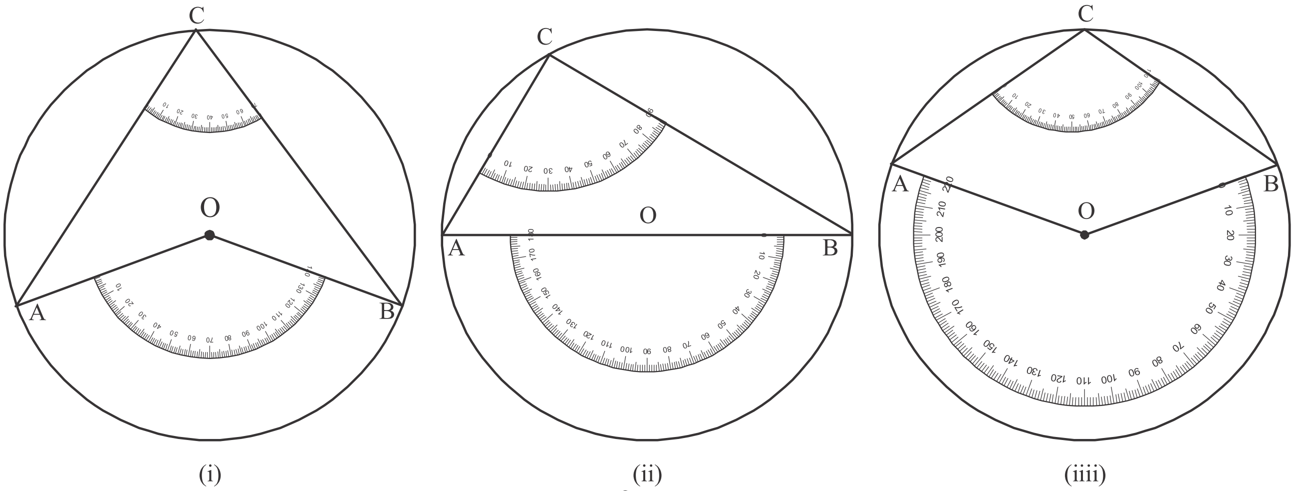
आकृति 12.36

यहाँ चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण भी संगत जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण के अर्थ में ही परिभाषित किया जा सकता है। यानि, लघु चाप AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित $\angle AOB$ तथा दीर्घ चाप AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित वृहत $\angle AOB$ से व्यक्त कर सकते हैं (देखिए आकृति 12.36) इस परिभाषा और प्रमेय 12.1 द्वारा हम कहे सकते हैं कि–

किसी वृत्त के सर्वांगसम चाप (या बराबर चाप) केन्द्र पर बराबर कोण अन्तरित करतें हैं।

आइए अब हम एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण एवं वृत्त के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोणों में निम्न क्रियाकलाप द्वारा उनमें क्या सम्बन्ध होता है? देखते हैं।

क्रिया कलाप–



आकृति 12.37

आकृति 12.37 (i) (ii) एवं (iii) में आपको क्रमशः लघु चाप AB अर्द्ध वृत्त AB तथा दीर्घ चाप AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण और शेष वृत्त पर अन्तरित कोण ''चान्दे की फोटो प्रतियों के द्वारा मापन करते हुए दिखाई दे रहे होंगे।

आपको प्रत्येक आकृति को ध्यान से देखना है। उन सभी में चाप AB, द्वारा केन्द्र पर अन्तरित $\angle AOB$ एवं वृत्त के शेष भाग ACB पर अन्तरित $\angle ACB$ में क्या सम्बन्ध दिखाई देता है? चान्दे द्वारा दर्शाया माप पढ़िए।

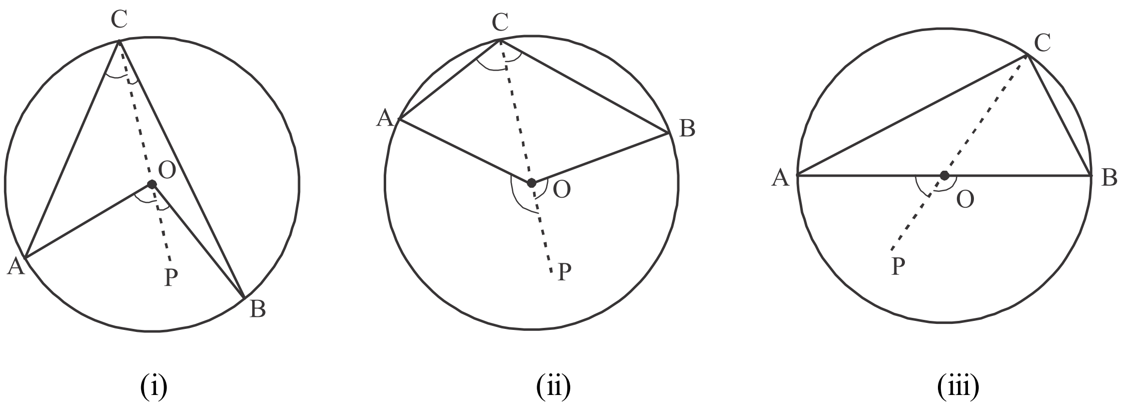
आकृति 12.37 (i) में $\angle AOB = 140^\circ$ एवं $\angle ACB = 70^\circ$ (ii) में $\angle AOB = 180^\circ$ एवं $\angle ACB = 90^\circ$ तथा (ii) में वृहत $\angle AOB = 220^\circ$ एवं $\angle ACD = 110^\circ$ है।

सभी आकृतियों से स्पष्ट होता है कि केन्द्र पर बना कोण वृत्त के शेष भाग पर बने कोण का दोगुना है।

इस क्रिया कलाप को आप भी अन्य माप के कोण लेकर दोहराइए।

चलिए अब इस प्राप्त परिणाम को उपपत्ति द्वारा सिद्ध करते हैं।

प्रमेय 12.8 एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दोगुना होता है।



आकृति 12.38

दिया हुआ: चाप AB द्वारा केन्द्र O पर अन्तरित $\angle AOB$ और शेष भाग पर अन्तरित $\angle ACB$ है।

सिद्ध करना: $\angle AOB = 2\angle ACB$

रचना: C को O से मिलाते हुए P तक बढ़ावा

उपपत्ति: ΔAOC एक समद्विबाहू त्रिभुज है, क्योंकि OA = OC एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ है।

अत: $\angle ACO = \angle OAC$ (त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।) . . . (1)

ΔAOC का $\angle AOP$ बहिष्कोण है अत:

$\angle AOP = \angle ACO + \angle OAC$ ($\angle ACO = \angle OAC$ (1) से)

$\angle AOP = \angle ACO + \angle ACO$

या $\angle AOP = 2\angle ACO$ . . . (2)

इसी प्रकार $\angle BOP = 2\angle BCO$ . . . (3)

(2) व (3) को जोड़ने पर

$\angle AOP + \angle BOP = 2\angle ACO + 2\angle BCO$

या $\angle AOP + \angle BOP = 2(\angle ACO + \angle BCO)$

या $\angle AOB = 2\angle ACB$

(आकृति 12.39(i), (ii) व (iii) से) इति सिद्धम

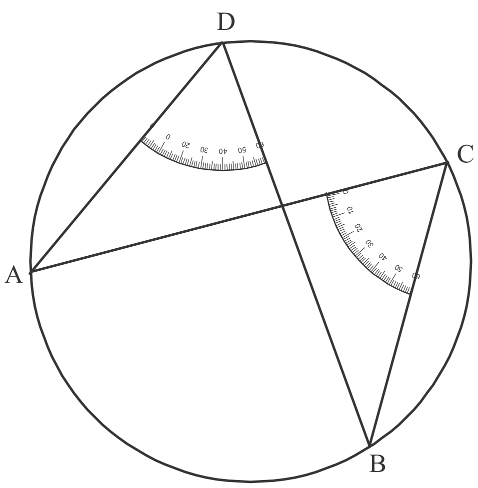
आकृति 12.39(iii) में $\angle ACB$ अर्द्ध वृत्त पर बनने वाला कोण है

यहाँ $\angle AOB = 180^\circ$ है अत: $\angle ACB = 90^\circ$ होगा, अर्थात्
उपप्रमेय अर्द्ध वृत्त समकोण अन्तरित करता है।

आइए अब हम एक ही चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में अन्तरित कोणों पर विचार निम्न क्रिया कलाप द्वारा करते हैं

क्रिया कलाप– एक वृत्त बनाकर AC एवं AD दो जीवाएँ खींचिए। चान्दे की छाया प्रतियाँ (समान कोणों की) काटकर आकृति 12.39 के अनुसार आधार रेखा CA व DA लेकर C व D पर चिपकाइए। आप देखेंगे उक्त चान्दे की छाया प्रतियों में बने कोण की दूसरी भुजाएँ बढ़ाने पर वे परस्पर वृत्त पर ही B बिन्दु पर मिलेंगे। आकृति में $\angle ADB = \angle ACB = 60^\circ$ हैं।

अर्थात् एक ही चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में अन्तरित सभी कोण बराबर होते हैं।



आकृति 12.39

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. आकृति 12.40 में, वृत्त का व्यास AB है और $\angle DAB = 40^\circ$ हो,तो $\angle DCA$ ज्ञात कीजिए।

हलः वृत्त का व्यास AB है अतः

$$\angle ADB = 90^\circ$$

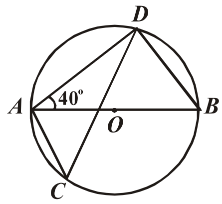
अब $\angle DBA = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ)$

$\Rightarrow$ $\angle DBA = 50^\circ$

$\therefore$ $\angle DBA$ और $\angle DCA$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं

अतः $\angle DCA = \angle DBA = 50^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle DCA = 50^\circ$



आकृति 12.40

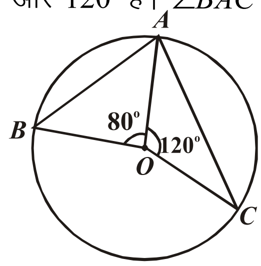
उदाहरण-2. आकृति 12.41 में, चाप AB और चाप AC द्वारा केन्द्र O पर अन्तरित कोण क्रमश 80° और 120° हैं। $\angle BAC$ और $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।

हलः $\angle BOC = 360^\circ - (120^\circ + 80^\circ)$

अतः $\angle BOC = 160^\circ$

एवं $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\times 160^\circ$

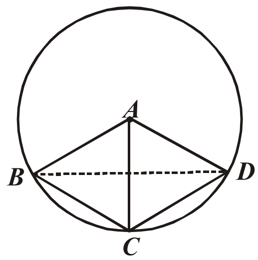
अतः $\angle BAC = 80^\circ$



आकृति 12.41

उदाहरण-3. एक चतुर्भुज ABCD में AB=AC=AD हों, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle BAD = 2(\angle BDC + \angle CBD)$.

हलः दिया है कि $AB = AC = AD$ अर्थात् बिन्दु B, C और D बिन्दु A से समान दूरी पर है, अतः वृत्त का केन्द्र A है।



आकृति 12.42

अब चाप BC केन्द्र पर $\angle BAC$ और वृत्त के शेष भाग पर $\angle BDC$ बनाता है।

$\therefore$ $\angle BAC = 2\angle BDC$ ...(1)

इसी प्रकार चाप CD केन्द्र पर $\angle CAD$ और वृत्त के शेष भाग $\angle CBD$ बनाता है।

$\therefore$ $\angle CAD = 2\angle CBD$ ...(2)

समीकरण (1) और (2) का योग करने पर

$$\angle BAC + \angle CAD = 2(\angle BDC + \angle CBD)$$

$\Rightarrow$ $\angle BAD = 2(\angle BDC + \angle CBD)$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण-4. सिद्ध कीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज की एक समान भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त, त्रिभुज की असमान भुजा को समद्विभाजित करता है।

हलः दिया है: आकृति 12.43 में, एक समद्विबाहु ΔABC जिसमें $AB=AC$ और व्यास AC पर खींचा गया वृत्त BC को D पर काटता है।

सिद्ध करना है: $BD = DC$

उपपत्तिः AC को व्यास मानकर वृत्त खींचा गया है और $\angle ADC$ अर्द्धवृत्त का कोण है,

अतः $\angle ADC = 90^\circ$

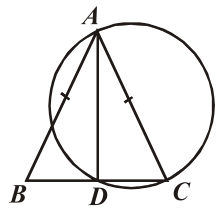
अब, $\Delta\, ABD$ और $\Delta\, ACD$ में,

$AB = AC$ (दिया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ADB = \angle ADC$ (समकोण)

$\Delta ABC \cong \Delta ACD$ (RHS से)



आकृति 12.43

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $BD = CD$

उदाहरण-5. सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्तखण्ड का कोण न्यूनकोण होता है।

हलः दिया हैः आकृति में एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, दीर्घवृत्तखण्ड ACB है।

सिद्ध करना हैः $\angle ACB < 90^\circ$

रचनाः OA, OB एवं AB को मिलाया।

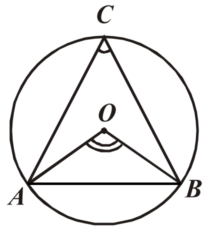
उपपत्तिः चाप AB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण $\angle AOB$ और शेष भाग पर अन्तरित कोण $\angle ACB$ है, अतः

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB \qquad \ldots (1)$$

परन्तु $\angle AOB < 180^\circ$ (ΔAOB का एक कोण)

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle AOB < \frac{1}{2} \times 180^\circ$$

अर्थात $$\frac{1}{2}\angle AOB < 90^\circ \qquad \ldots (2)$$



आकृति 12.44

समीकरण (1) और (2) से $\angle ACB < 90^\circ$ ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण-6. AOC वृत्त का एक व्यास है तथा चाप $AXB = \frac{1}{2}$ चाप BYC है। $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।

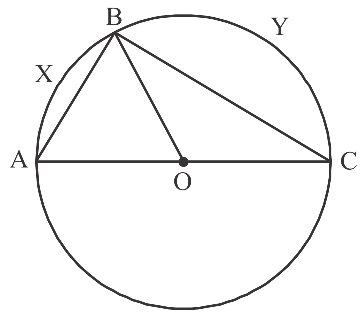
हलः क्योंकि चाप $AXB = \frac{1}{2}$ चाप BYC है, इसलिए,

$$\angle AOB = \frac{1}{2}\angle BOC$$

साथ ही, $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$

अतः, $$\frac{1}{2}\angle BOC + \angle BOC = 180^\circ$$

या $$\angle BOC = \frac{2}{3} \times 180^\circ = 120^\circ$$



आकृति 12.45

उदाहरण-7. आकृति 12.46 में x का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\angle DAC = \angle DBC = 30^\circ$ (एक ही वृत्त खण्ड में बने कोण) . . . (i)

Δ DBC में

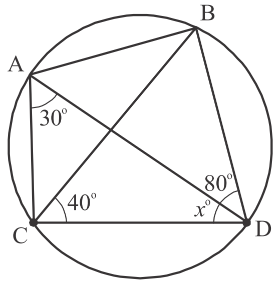
$$\angle DBC + \angle DCB + \angle BDC = 180^\circ$$

या $\quad 30^\circ + 40^\circ + \left(x + 80^\circ\right) = 180^\circ$ (आकृति एवं (i) से)

या $\quad x + 80 = 180 - 70$

या $\quad x = 110 - 80$

या $\quad x = 30^\circ$



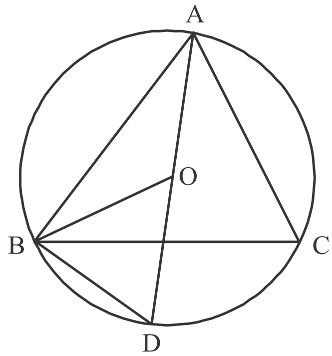
आकृति 12.46

उदाहरण-8. आकृति 12.47 में, Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है। O इसका केन्द्र है। यदि A को O से मिलाते हुए आगे बढ़ाया तो वह वृत्त को D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए Δ OBD एक समबाहु त्रिभुज है।

हल: दिया हुआ है: Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है। O, Δ ABC का केन्द्र है।

AO को आगे बढ़ाने पर वृत्त से D पर मिलता है।

सिद्ध करना: Δ OBD समबाहु त्रिभुज है।



आकृति 12.47

उपपत्ति: OB एवं OD (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

अतः $\quad \angle OBD = \angle ODB$ . . . (i)

$\because \quad \Delta$ ABC एक समबाहु त्रिभुज है

अतः $\quad \angle C = 60^\circ$ . . . (ii)

$\angle ADB = \angle C$ ((ii) से एक ही वृत्त खण्ड पर बने कोण)

अतः $\quad \angle ADB = 60^\circ$ [(i) से]

परन्तु $\quad \angle ADB$ एवं $\angle ODB$ एक ही कोण को दर्शाता है

अतः $\quad \angle ODB = 60^\circ$

$\therefore \quad \angle OBD = 60^\circ$ ((i) से)

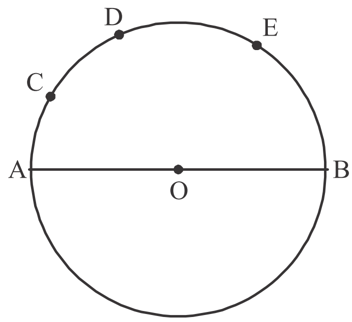
परन्तु Δ में तीनों कोणों का योग 180° होता है।

अतः Δ OBD का तीसरा कोण $\angle BOD$ भी 60° का होगा

अतः Δ OBD एक समबाहु त्रिभुज है इतिसिद्धम

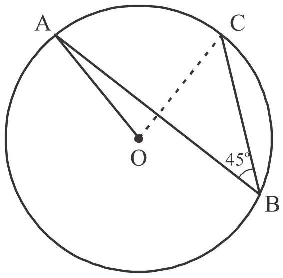
प्रश्नमाला 12.3

1. प्रत्येक के लिए सत्य/असत्य लिखिए और अपने उत्तर कारण भी लिखिए।
   (i) किसी जीवा द्वारा वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं पर अन्तरित कोण बराबर होते है।
   (ii) आकृति 12.48 में, AB एक वृत्त का व्यास है और C वृत्त पर कोई बिन्दु है तब $AC^2 + BC^2 = AB^2$ है।
   (iii) आकृति 12.48 में, यदि $\angle ADE = 120^\circ$ है तो $\angle EAB = 30^\circ$ है
   (iv) आकृति 12.48 में, $\angle CAD = \angle CED$ है।



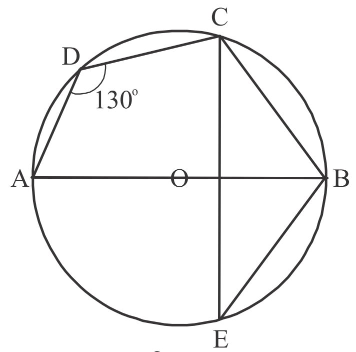
आकृति 12.48

2. आकृति 12.49 में $\angle ABC = 45^\circ$ है तो सिद्ध कीजिए $OA \perp OC$ है।



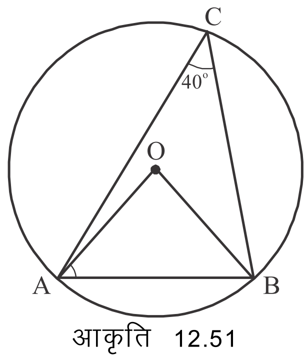
आकृति 12.49

3. O त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र है तथा D आधार BC का मध्य–बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BOD = \angle A$ है।
4. एक उभयनिष्ठ कर्ण AB पर दो समकोण त्रिभुज ACB और ADB इस प्रकार खींचे गए हैं कि वे विपरीत ओर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC = \angle BDC$ है।
5. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC उसके केन्द्र पर क्रमशः 90^o और 150^o के कोण अंतरित करती हैं। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए, यदि AB और AC केन्द्र के विपरीत ओर स्थित हैं।
6. एक त्रिभुज ABC का परिकेंद्र O है। सिद्ध कीजिए कि $\angle OBC + \angle BAC = 90^o$ है।
7. किसी वृत्त की एक जीवा उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्तखंड में किसी बिन्दु पर अंतरित केाण ज्ञात कीजिए।
8. आकृति 12.50 में, $\angle ADC = 130^o$ और जीवा BC = जीवा BE है। $\angle CBE$ ज्ञात कीजिए।



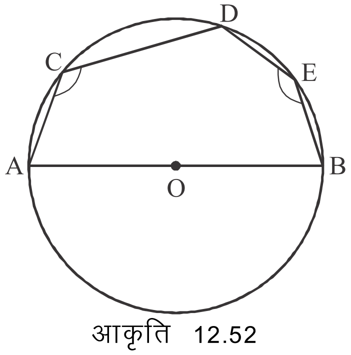
आकृति 12.50

9. आकृति 12.51 में, $\angle ACB = 40^o$ है। $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.51

10. आकृति में AOB वृत्त का व्यास है तथा C, D और E अर्धवृत्त पर स्थित कोई तीन बिन्दु हैं। $\angle ACD + \angle BED$ का मान ज्ञात कीजिए।

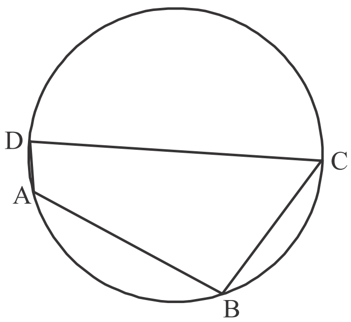


आकृति 12.52

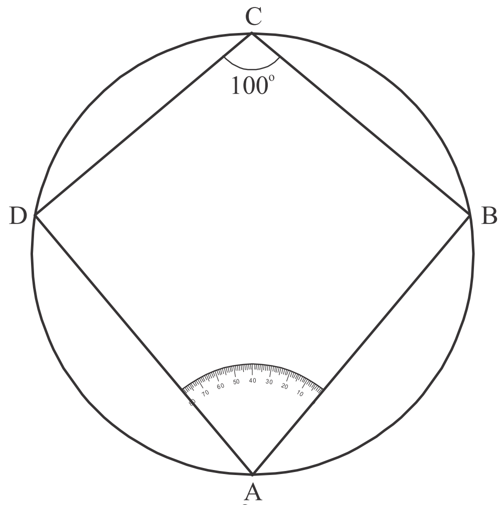
12.08 चक्रीय चतुर्भुज

ऐसा चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हो चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है। (देखिए आकृति 12.65 में) इन चतुर्भुजों में एक विशेष गुण होता है उसके लिए आइए एक क्रिया कलाप पर ध्यान देते हैं।

क्रिया कलाप–



आकृति 12.53



आकृति 12.54

1. एक वृत्त अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनाइए।
2. वृत्त के किसी बिन्दु पर अपनी इच्छा से चान्दे की छाया प्रति में से एक कोण (यहाँ 80° का कोण काट कर चिपकाया है) काट कर चिपका दीजिए जैसा आकृति 12.54 में $\angle A$ है।
3. इस कोण की दोनों भुजाओं को इतना बढ़ाइए कि वृत्त को किन्ही दो बिन्दुओं पर मिले इस प्रकार $\angle BAD$ प्राप्त होगा।
4. चाप DAB को छोड़कर वृत्त के शेष भाग पर कोई बिन्दु C लीजिए और चतुर्भुज पूरा कीजिए।
5. $\angle A$ के सम्मुख $\angle C$ है। $\angle C$ का मान कितना होगा? इसको चाँदे की सहायता से नापिए आप देखेंगे कि यहा $\angle BCD = 100^\circ$ प्राप्त होता है। अर्थात् $\angle A + \angle C = 180^\circ$ है।

शेष दोनों कोणों का योग भी 180° का होगा, क्योंकि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।

अर्थात् चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं। इस परिणाम को निम्न उपपत्ति द्वारा भी सिद्ध करेंगे।

प्रमेय–12.8 चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण युग्म सम्पूरक या उनका योग 180° होता है।

दिया हुआ है: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

सिद्ध करना: $\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

रचना: O को B व D से मिलाया

उपपत्ति: चाप DAB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण x° और वृत्त के शेष भाग पर अन्तरित कोण $\angle C$ है।

अत: $\angle C = \frac{1}{2} x^o$ . . . (1)

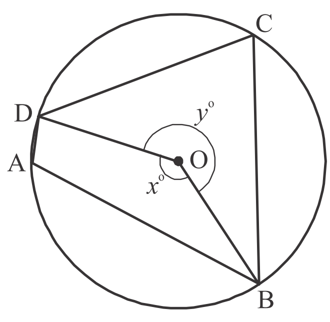
इसी प्रकार चाप DCB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण y° और वृत्त के शेष भाग पर अन्तरित कोण $\angle A$ है।

अत: $\angle A = \frac{1}{2} y^\circ$ . . . (2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$\angle C + \angle A = \frac{1}{2}(x^\circ + y^\circ)$$

या $\angle C + \angle A = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$ . . . (3)



आकृति 12.55

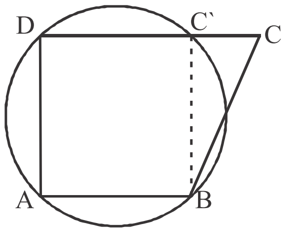
चूंकि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^o होता है

अतः $\angle B+\angle D=360^o-(\angle A+\angle C)$

या $\angle B+\angle D=360^o-180^o=180^o$ . . . (3) से इतिसिद्धम्

इस प्रमेय का विलोम जिसका कथन निम्न प्रकार है भी सत्य है।

प्रमेय–12.9 (प्रमेय 12.08 का विलोम) यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक हो तो वह एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।



आकृति 12.56

दिया हुआ है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें $\angle BAD+\angle BCD=180^o$ एवं $\angle ABD+\angle ADC=180^o$

सिद्ध करना: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति: माना कि एक वृत्त जो A, B एवं D से गुजरता है परन्तु C के स्थान पर C' से गुजरता है तब C'B को मिलाने पर ABC'D एक चक्रीय चतुर्भुज बन जाता है।

अतः $\angle BAD+\angle BC'D=180^o$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं) . . . (i)

परन्तु $\angle BAD+\angle BCD=180^o$ (दिया हुआ हैं।) . . . (ii)

(i) व (ii) से $\angle BAD+\angle BC'D=\angle BAD+\angle BCD$

या $\angle BC'D+\angle BCD$ . . . (iii)

परन्तु $\angle BC'D$, $\Delta BCC'$ का बहिष्कोण है।

अर्थात् $\angle BC'D=\angle BCD\angle CBC'$ (Δ का बहिष्कोण अन्तराभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है)

या $\angle BC'D>\angle BCD$ . . . (iv)

(iii) एवं (iv) से स्पष्ट होता है कि $\angle BC'D>\angle BCD$ तभी सम्भव है जब BC एवं BC' सम्पाती हो। या बिन्दु C एवं C' सम्पाती हो

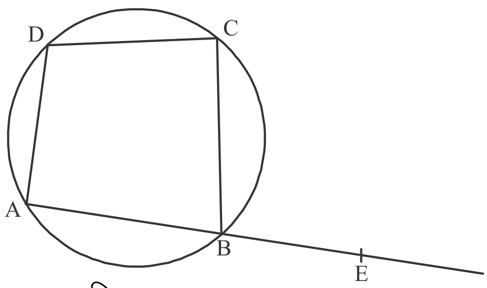
अर्थात् ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज हो

अतः ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है इतिसिद्धम्

12.09 चक्रीय चतुर्भुज के अन्तराभिमुख कोण

PFYKEH

किसी चक्रीय चतुर्भुज की एक भुजा को बढ़ाने पर जो कोण बनता है,उसे उस चतुर्भुज का बहिष्कोण कहते हैं। (देखिए आकृति 12.57) $\angle CBE$ चक्रीय चतुर्भुज ABCD का बहिष्कोण है। इस प्रकार आप प्रत्येक शीर्ष पर एक–एक बहिष्कोण बना सकते हैं।



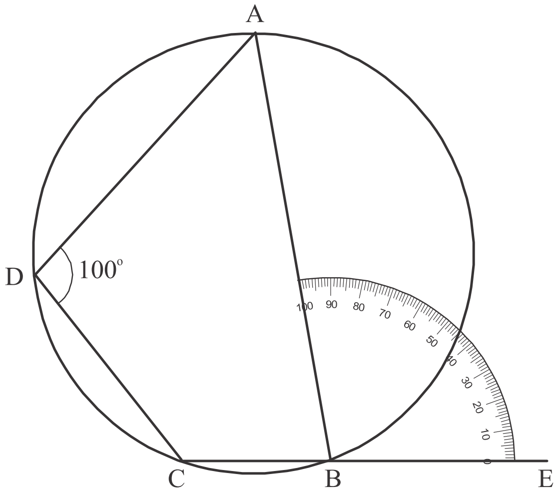
आकृति 12.57

$\angle ABC$ एवं $\angle ADC$ बहिष्कोण $\angle CBE$ के क्रमशः अन्तः आसन्न कोण एवं अन्तराभिमुख कोण कहलाते हैं।

आइए अब हम बहिष्कोण एवं अन्तराभिमुख कोणों में क्या सम्बन्ध होता है? जानकारी करते हैं। इसके लिए एक क्रिया कलाप को करने का प्रयत्न करते हैं।

क्रिया कलाप–

1. एक वृत्त की रचना कीजिए।
2. आकृति 12.57 की तरह वृत्त पर कोई दो बिन्दु A व B लेकर दोनों को मिलाते हुए E तक बढ़ाइए।



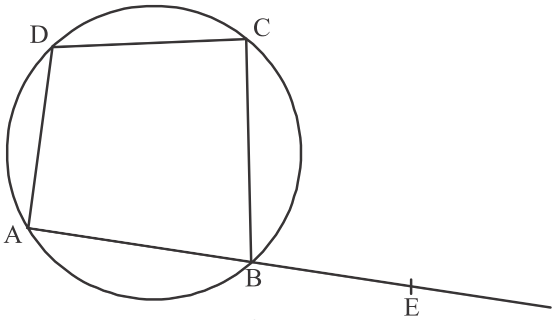
आकृति 12.58

3. चान्दे की छाया प्रति में से आप अपनी इच्छा से एक किसी भी माप का कोण काट लीजिए (यहाँ 100° का कोण है) और उसे बिन्दु B पर इस प्रकार चिपकाइए कि काटे गये कोण की आधार रेखा और BE सम्पाती हो जाए।
4. कोण की भुजा EB को आगे इतना बढ़ाइए कि वह वृत्त को किसी बिन्दु C पर मिले
5. वृत्त के चाप ABC को छोड़ कर शेष भाग पर एक बिन्दु D लीजिए। चक्रीय चतुर्भुज ABCD को पूरा कीजिए।
6. $\angle ADC$ को चांदे की सहायता से मापिए। आप पाएंगे कि $\angle ADC = 100^\circ$ प्राप्त हो रहा है।

   अर्थात् चक्रीय चतुर्भुज के एक बहिष्कोण का माप उसके अन्तराभिमुख कोण के माप के बराबर होता है।

   आइए इस परिणाम को निम्नानुसार उपपत्ति के चरण देकर सिद्ध करते है।

प्रमेय–12.10 चक्रीय चतुर्भुज की एक भुजा बढ़ाने पर बनने वाला बहिष्कोण उसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होता है।



आकृति 12.59

दिया हुआ है: चक्रीय चतुर्भुज ABCD की भुजा AB को E तक बढ़ाया गया है।

सिद्ध करना है: $\angle CBE = \angle ADC$

उपपत्ति: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है

अतः $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ . . . (i)

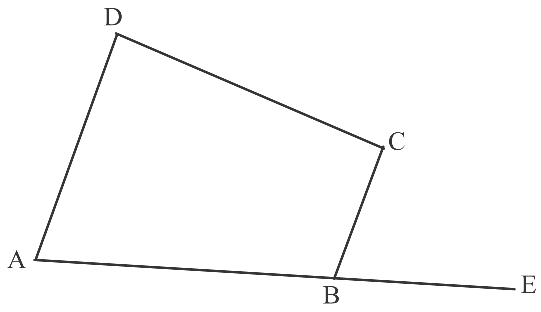
$\angle ABC + \angle CBE = 180^\circ$ रैखिक कोण युग्म . . . (ii)

(i) व (ii) से $\angle ABC + \angle ADC = \angle ABC + \angle CBE$

या $\angle ADC = \angle CBE$ इति सिद्धम

क्या आप इस प्रमेय का विलोम यानि किसी चतुर्भुज का बहिष्कोण व उसका अन्तराभिमुख कोण बराबर हो तो वह एक चक्रीय चतुर्भुज है, सिद्ध कर सकते हैं?

प्रमेय–12.11 किसी चतुर्भुज की एक भुजा बढ़ाने पर बनने वाला बहिष्कोण अपने अन्तराभिमुख कोण के बराबर हो, तो वह एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।



आकृति 12.60

दिया हुआ है: चतुर्भुज ABCD का $\angle CBE$ बहिष्कोण है।

तथा $\angle ADC = \angle CBE$

सिद्ध करना है: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति: $\angle ADC = \angle CBE$ ... (दिया हुआ है)

दोनों ओर $\angle ABC$ जोडने पर

$\angle ABC + \angle ADC = \angle ABC + \angle CBE$

या $\angle ABC + \angle CBE = 180^o$ (रैखिक कोण युग्म)

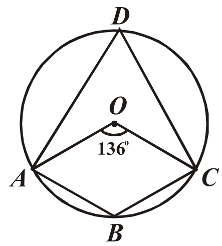
अत: $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$

चूंकि $\angle ABC$ व $\angle ADC$ चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण है अत: प्रमेय 12.12 के अनुसारABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. आकृति 12.61 में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle AOC = 136^\circ$ हो,तो $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए।

हल: चाप ABC द्वारा केन्द्र O और शेष भाग पर अन्तरितकोण क्रमश: $\angle AOC$ और $\angle ADC$ हैं।



आकृति 12.61

अत: $\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\times 136^\circ$

या $\angle ADC = 68^\circ$

$\therefore$ $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है अत: सम्मुख कोणों का योग 180^o होगा

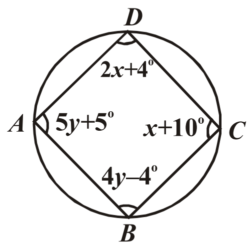
$\therefore$ $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$

या $\angle ABC = 180^\circ - 68^\circ$

या $\angle ABC = 112^\circ$

उदाहरण-2. आकृति 12.62 में $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। x और y ज्ञात कीजिए।

हल: चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं।



आकृति 12.62

$\left(2x^\circ + 4^\circ\right) + \left(4y^\circ - 4^\circ\right) = 180^\circ$

या $2x^\circ + 4y^\circ = 180^\circ$

या $x^\circ + 2y^\circ = 90^\circ$ ... (1)

इसी प्रकार $(x^\circ + 10^\circ) + (5y^\circ + 5^\circ) = 180^\circ$

या $x^\circ + 5y^\circ = 165^\circ$ ... (2)

(1) और (2) को हल करने पर

$x^\circ = 40^\circ, \ y^\circ = 25^\circ$

अत: $x^\circ = 40^\circ$ और $y^\circ = 25^\circ$

उदाहरण-3. आकृति 12.63 में, वृत्त का केन्द्र O है और चाप BCD द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 140^o है। $\angle BAD$ और $\angle DCE$ ज्ञात कीजिए।

हल: चाप BCD द्वारा केन्द्र एवं शेष भाग पर अन्तरित कोण क्रमश: $\angle BOD$ एवं $\angle BAD$ हैं।

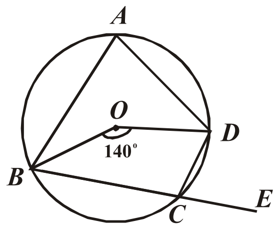
अतः $\angle BAD = \frac{1}{2} \times \angle BOD = \frac{1}{2} \times 140^\circ$

या $\angle BAD = 70^\circ$

परन्तु $\angle DCE$, चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ का बहिष्कोण है जो इसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होगा।

$\angle DCE = \angle BAD$

या $\angle DCE = 70^\circ$



आकृति 12.63

उदाहरण-4. आकृति 12.64 में $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। CD के समान्तर रेखा AE खींची गई है। BA को F तक आगे बढ़ाया गया है। यदि $\angle ABC = 92^\circ$ और $\angle FAE = 20^\circ$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।

हल: $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है अतः

$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$

या $\angle CDA = 180^\circ - 92^\circ$

या $\angle CDA = 88^\circ$

परन्तु $CD \parallel AE$

या $\angle DAE = \angle CDA$ (एकान्तर कोण)

या $\angle DAE = 88^\circ$

यहाँ $\angle DAF = \angle FAE + \angle DAE = 20^\circ + 88^\circ$

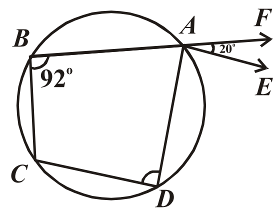
या $\angle DAF = 108^\circ$

$\angle DAB = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$

अब $\angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$

या $\angle BCD = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 72^\circ$

या $\angle BCD = 108^\circ$



आकृति 12.64

उदाहरण-5. सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय समान्तर चतुर्भुज एक आयत होता है।

हल: दिया है: $ABCD$ एक चक्रीय समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है: $ABCD$ एक आयत है।

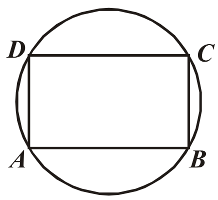
उपपत्तिः $ABCD$ एक चक्रीय समान्तर चतुर्भुज है

अतः $\angle B + \angle D = 180^\circ$ . . . (1)

और $\angle B = \angle D$ . . . (2)

समीकरण (1) और (2) से $\angle B = \angle D = 90^\circ$ इसी प्रकार $\angle A = \angle C = 90^\circ$

अतः $ABCD$ एक आयत है। ''इतिसिद्धम्''।



आकृति 12.65

उदाहरण-6. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज की दो भुजाएँ समान्तर हों, तो सिद्ध कीजिए कि शेष भुजाएँ बराबर होंगी और विकर्ण भी बराबर होंगे।

हल: दिया है: चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ में,

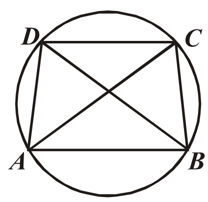
$AB \parallel DC$ है।

सिद्ध करना है: (i) $AD = BC$

(ii) $AC = BD$

उपपत्तिः $\therefore$ $AB \parallel DC$ और BC एक तिर्यक रेखा है,

अतः $\angle ABC + \angle DCB = 180^\circ$ . . . (1)



आकृति 12.66

परन्तु $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है,

अतः $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ . . . (2)

समीकरण (1) और (2) से

$\angle DCB = \angle ADC$ . . . (3)

अब ΔADC और ΔBCD में,

$\angle ADC = \angle DCB$ [(3)से]

$\angle DAC = \angle DBC$ (एक ही वृत्त खण्ड के कोण)

और $DC = DC$ (उभयनिष्ठ)

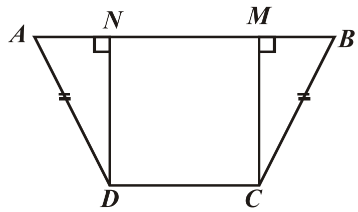
$\therefore$ $\Delta ADC \cong \Delta BCD$ (ASA से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी,

अर्थात $AD = BC$

और $AC = BD$ ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण-7 आकृति 12.67 में, $ABCD$ एक चतुर्भुज है, जिसमें $AD = BC$ और $\angle ADC = \angle BCD$ है। सिद्ध कीजिए $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।



आकृति 12.67

हल: दिया है: चतुर्भुज $ABCD$ में $AD = BC$, और $\angle ADC = \angle BCD$ है।

सिद्ध करना है: $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

रचना: $DN \perp AB$ और $CM \perp AB$ खींचे।

उपपत्ति: दिया है कि

$\angle ADC = \angle BCD$ . . . (1)

$\therefore$ $\angle ADN = \angle ADC - 90^\circ$

$= \angle BCD - 90^\circ$ [(1)से]

$\angle ADN = \angle BCM$ . . . (2)

अब ΔAND और ΔBMC में

$\angle AND = \angle BMC$ (समकोण)

$\angle ADN = \angle BCM$ [(2)से]

और $AD = BC$ (दिया है)

$\therefore$ $\Delta AND \cong \Delta BMC$ (AAS से)

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होंगे,

अर्थात $\angle A = \angle B$ . . . (3)

इसी प्रकार $\angle C = \angle D$ . . . (4)

परन्तु $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

समीकरण (3) और (4) से, $2\angle B + 2\angle D = 360^\circ$

$\therefore$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$\therefore$ $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम्''।

प्रश्नमाला 12.4

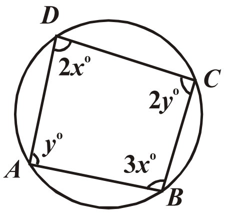
1. एक चक्रीय चतुर्भुज का एक कोण दिया गया है। सम्मुख कोण ज्ञात कीजिए।

(i) 70° (ii) 135° (iii) $112\frac{1}{2}^\circ$ (iv) $\frac{3}{5}$ समकोण (v) 165°

2. चक्रीय चतुर्भुज का सम्मुख कोण ज्ञात कीजिए यदि उसमें से एक कोण

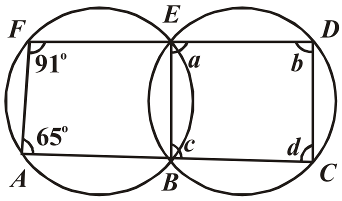
(i) दूसरे का $\frac{2}{7}$ हो (ii) दूसरे का $\frac{11}{4}$ हो।

3. आकृति 12.68 में, चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ के चारों कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.68

4. आकृति 12.69 में कुछ कोणों को a, b, c और d से चिह्नित किया गया है। इन कोणों के माप ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.69

5. यदि चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ में, $AD \parallel BC$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle D$

6. $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। AB और DC बढ़ाये जाने E पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि ΔEBC और ΔEDA समरूप है।

7. सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजकों द्वारा बनाया चतुर्भुज भी चक्रीय चतुर्भुज होता है।

विविध प्रश्नमाला–12

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 10 तक)

1. 10 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से 6 सेमी दूर स्थित जीवा की लम्बाई है–

(क) 16 सेमी (ख) 8 सेमी (ग) 4 सेमी (घ) 5 सेमी

2. 13 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त में 24 सेमी लम्बी जीवा खीची गई है। जीवा की वृत्त के केन्द्र से दूरी है–

(क) 12 सेमी (ख) 5 सेमी (ग) 6.5 सेमी (घ) 12 सेमी

3. लघुचाप का डिग्री माप होता है–

(क) 180° से कम (ख) 180° से अधिक (ग) 360° (घ) 270°

4. दीर्घचाप का डिग्री माप होता है–

(क) 180° से कम (ख) 180° से अधिक (ग) 360° (घ) 90°

5. एक वृत्त में केन्द्र से समान दूरी पर स्थित जीवाएँ एक दूसरे की होती हैं–

(क) दुगुनी (ख) तिगुनी (ग) आधी (घ) बराबर

6. एक वृत्त के किसी चाप का डिग्रीमाप 180° है, वह चाप है–

(क) दीर्घ चाप (ख) लघुचाप (ग) वृत्त (घ) अर्द्धवृत्त

7. तीन संरेखीय बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों की संख्या है–

(क) एक (ख) दो (ग) शून्य (घ) अनन्त

8. यदि किसी वृत्त में चाप AB = चाप BA हों, तो चाप है–

(क) दीर्घ चाप (ख) लघुचाप (ग) अर्द्ध वृत्त (घ) वृत्त

9. यदि वृत्त का व्यास दो जीवाओं में से प्रत्येक को समद्विभाजित करे तो जीवाएँ होंगी–

(क) समान्तर (ख) लम्बवत (ग) प्रतिच्छेदी (घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

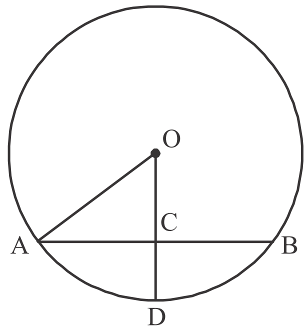
10. यदि सर्वांगसम वृत्तों में दो चाप बराबर हों, तो उनकी संगत जीवाएँ होंगी–

(क) समान्तर (ख) समान (ग) लम्बवत (घ) प्रतिच्छेदी

11. किसी वृत्त का AD एक व्यास है और AB एक जीवा है। यदि AD = 34 cm, AB = 30 cm हैं, तो वृत्त के केन्द्र से AB की दूरी है–

(क) 17 सेमी (ख) 15 सेमी (ग) 4 सेमी (घ) 8 सेमी

12. आकृति 12.70 में, यदि OA = 5 सेमी, AB = 8 सेमी तथा OD जीवा AB पर लंब है: तो CD बराबर है–



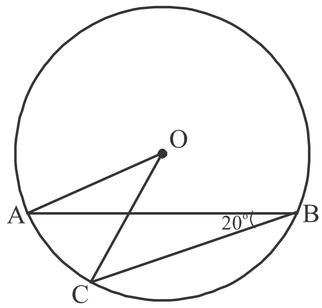
आकृति 12.70

(क) 2 सेमी (ख) 3 सेमी (ग) 4 सेमी (घ) 5 सेमी

13. यदि AB = 12 सेमी, BC = 16 सेमी और AB रेखाखंड BC पर लंब है, तो A, B और C से होकर जाने वाले वृत्त की त्रिज्या है–

(क) 6 सेमी (ख) 8 सेमी (ग) 10 सेमी (घ) 12 सेमी

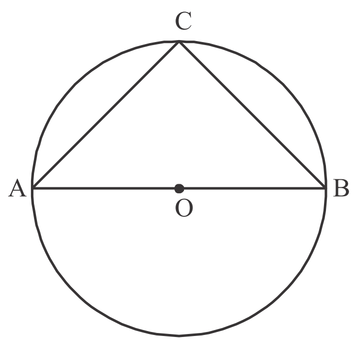
14. आकृति 12.71 में, यदि $\angle ABC = 20^\circ$ है, तो $\angle AOC$ बराबर है–



आकृति 12.71

(क) 20° (ख) 40° (ग) 60° (घ) 10°

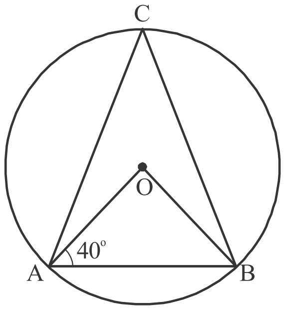
15. आकृति 12.72 में, यदि AOB वृत्त का एक व्यास तथा AC = BC है, तो $\angle CAB$ बराबर है–



आकृति 12.72

(क) 30° (ख) 60° (ग) 90° (घ) 45°

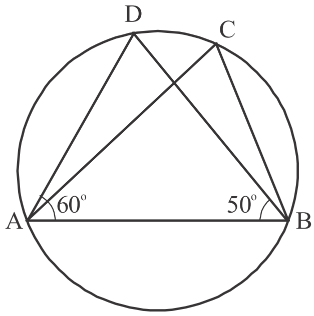
16. आकृति 12.73 में, यदि $\angle OAB = 40^\circ$ है, तो $\angle ACB$ बराबर है–



आकृति 12.73

(क) 50° (ख) 40° (ग) 60° (घ) 70°

17. आकृति 12.74 में, यदि $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle ABD = 50^\circ$ है, तो $\angle ACB$ बराबर है–



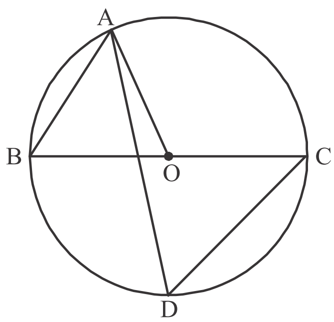
आकृति 12.74

(क) 60° (ख) 50° (ग) 70° (घ) 80°

18. चतुर्भुज की एक भुजा AB उसके के परिगत वृत्त का एक व्यास है तथा $\angle ADC = 140^\circ$ है। तब, $\angle BAC$ बराबर है–

(क) 80° (ख) 50° (ग) 40° (घ) 30°

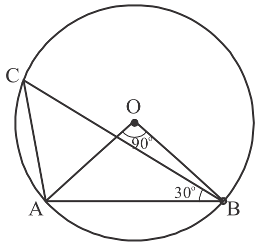
19. आकृति 12.75 में, BC वृत्त का व्यास है तथा $\angle BAO = 60^\circ$ है। तब, $\angle ADC$ बराबर है–



आकृति 12.75

(क) 30° (ख) 45° (ग) 60° (घ) 120°

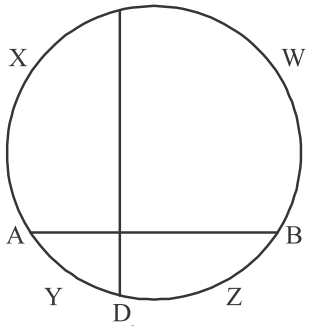
20. आकृति 12.76 में, $\angle AOB = 90^\circ$ और $\angle ABC = 30^\circ$ है। तब, $\angle CAO$ बराबर है–



आकृति 12.76

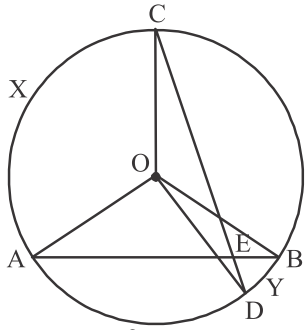
(क) 30° (ख) 45° (ग) 90° (घ) 60°

21. यदि एक वृत्त की दो बराबर जीवाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के दो भाग दूसरी जीवा के दोनों भागों के पृथक–पृथक बराबर होते हैं।
22. यदि P, Q और R क्रमशः एक त्रिभुज की BC, CA और AB भुजाओं के मध्य–बिन्दु हैं तथा AD शीर्ष A से BC पर लंब है, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P, Q, R और D चक्रीय हैं।
23. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। A और B से होकर एक वृत्त इस प्रकार खींचा जाता है कि वह AD को P पर और BC को Q पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि P, Q, C और D चक्रीय हैं।
24. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक और उसकी सम्मुख भुजा का लंब समद्विभाजक, यदि प्रतिच्छेद करते हैं, तो उस त्रिभुज के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करते हैं।
25. यदि किसी वृत्त AYDZBWCX की दो जीवाएँ AB और CD समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 12.77 देखिए), तो सिद्ध कीजिए कि चाप CXA + चाप DZB = चाप AYD + चाप BWC = एक अर्धवृत्त है।



आकृति 12.77

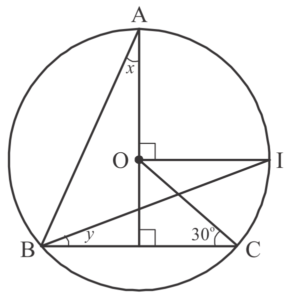
26. यदि ABC किसी वृत्त के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज है तथा P लघु चाप BC पर स्थित कोई बिन्दु है, जो B या C के संपाती नहीं है, तो सिद्ध कीजिए कि PA कोण BPC का समद्विभाजक है।
27. आकृति 12.78 में, AB और CD एक वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle AEC = \frac{1}{2}$ (चाप CXA द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण + चाप DYB द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण) है।



आकृति 12.78

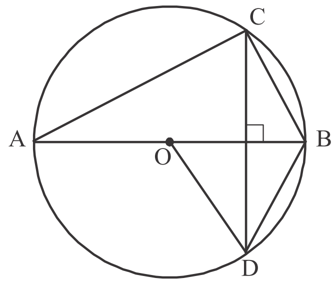
28. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोणों के समद्विभाजक इस चतुर्भुज के परिगत वृत्त को P और Q, बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि PQ इस वृत्त का व्यास है।
29. एक वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{2}$ cm है। 2 cm लंबाई वाली जीवा द्वारा यह वृत्त दो वृत्त–खंडों में विभाजित किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्त–खंड के किसी बिन्दु पर बना कोण 45° है।
30. AB और AC त्रिज्या r वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि AB = 2AC है। यदि p और q क्रमशः केन्द्र से AB और AC की दूरियाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $4q^2 = p^2 + 3r^2$ है।

31. आकृति 12.79 में, O वृत्त का केन्द्र है और $\angle BCO = 30^\circ$ है। x और y ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.79

32. आकृति 12.80 में, O वृत्त का केन्द्र है, BD = OD और $CD \perp AB$ है। $\angle CAB$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.80

33. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के अन्दर किसी बिन्दु से होकर जाने वाली सभी जीवाओं में से वह जीवा सबसे छोटी होती है। जो उस बिन्दु से होकर जाने वाले व्यास पर लम्ब होती है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक वृत्त किसी तल के उन सभी बिन्दुओं का समूह होता है, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर हों।
2. एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र (या संगत केन्द्रों) पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
3. यदि किसी वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) दो जीवाएँ केन्द्र पर (या संगत केन्द्रों पर) बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।
4. किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।
5. केन्द्र से होकर जाने वाली और किसी जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।
6. तीन असरेखीय बिन्दुओं से जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है।
12. एक वृत्त की (या सर्वांगम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या संगत केन्द्रों से) समान दूरी पर होती है।
8. एक वृत्त के केन्द्र (या सर्वांगम वृत्तों के केन्द्रों) से समान दूरी पर स्थित जीवाएं बराबर होती हैं।
9. यदि किसी वृत्त के दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं और विलोमतः यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप (लघु, दीर्घ) सर्वांगसम होते हैं।
10. किसी वृत्त की सर्वांगसम चाप केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।
11. किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।
12. एक वृत्तखण्ड में बने कोण बराबर होते हैं।
13. अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।
14. यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं। स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोणअंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं।
15. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है।
16. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180° हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।
17. चक्रीय चतुर्भुज की एक भुजा को बढ़ाने पर बनने वाले बहिष्कोण का मान उसके अन्तराभिमुख कोण के बराबर होता है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 12.1

1. (i) अभ्यन्तर (ii) बहिर्भाग (iii) व्यास (iv) अर्द्धवृत्त (v) तीन
2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य (vi) असत्य (vii) असत्य

प्रश्नमाला 12.2

1. (i) असत्य–क्योंकि बड़ी जीवा छोटी जीवा की अपेक्षा केन्द्र पर बड़ा कोण अन्तरित करती है।
(ii) असत्य–क्योंकि बड़ी जीवा केन्द्र से कम दूरी पर स्थित होती है।
(iii) सत्य–क्योंकि केन्द्र से दोनों जीवाओं की दूरियाँ बराबर है।
(iv) सत्य–क्योंकि सर्वांगसम वृत्तें की बराबर जीवाएँ संगत केन्द्रों पर बराबर कोण अन्तरित करती है।
(v) असत्य–क्योंकि दो बिन्दुओं से होकर जाने वाला वृत्त उन दोनों बिन्दुओं के संरेख तीसरे बिन्दु से होक़र नहीं जा सकता।
(vi) सत्य–क्योंकि AB व्यास है।

2. 12 सेमी 3. $3\sqrt{5}$ सेमी 7. 13 सेमी 8. (i) 2 सेमी (ii) 14 सेमी

प्रश्नमाला 12.3

1. (i) असत्य–यदि दोनों बिन्दु एक ही वृत्त खण्ड (दीर्घ या लघु) में स्थित हों तभी बराबर होते हैं। अन्यथा नहीं।
(ii) असत्य–क्योंकि $\angle C$ एक समकोण है। अतः $AB^2 = AC^2 + BC^2$
(iii) सत्य–AD, DE, DB और EB को मिलाने के बाद $\angle ADB = 90^\circ$ तो $\angle BDE = 120 - 90 = 30^\circ$ यहाँ $\angle BDE$ एवं $\angle EAB$ एक ही चाप खण्ड पर बने होने से $\angle BDE = \angle EAB = 30^\circ$ होंगे।
(iv) सत्य–क्योंकि सर्वांगसम वृत्तें की बराबर जीवाएँ संगत केन्द्रों पर बराबर कोण अन्तरित करती है।
(v) असत्य–क्योंकि दो बिन्दुओं से होकर जाने वाला वृत्त उन दोनों बिन्दुओं के संरेख तीसरे बिन्दु से होक़र नहीं जा सकता।
(vi) सत्य–AC, CD, AD, DE व CE को मिलाने पर $\angle CAD$ एवं $\angle CED$ एक ही चाप खण्ड में बनने वाले कोण है अतः $\angle CAD = \angle CED$ है

2. 120° 6. 60° 9. 100° 10. 50° 11. 270°

प्रश्नमाला 12.4

1. (i) 110° (ii) 45° (iii) $67\frac{1}{2}^\circ$ (iv) 126° (v) 15° 2. (i) $45^\circ, 40^\circ$ (ii) $132^\circ, 48^\circ$

3. $\angle A = 60^\circ, \angle B = 108^\circ, \angle C = 120^\circ, \angle D = 72^\circ$ 5. $a = 65^\circ, b = 89^\circ, c = 91^\circ, d = 115^\circ$

विविध प्रश्नमाला–12

1. (क)	2. (ख)	3. (क)	4. (ख)	5. (घ)	6. (घ)	7. (क)
8. (ग)	9. (क)	10. (ख)	11. (घ)	12. (क)	13. (ग)	14. (ख)
15. (घ)	16. (क)	17. (ग)	18. (ख)	19. (ग)	20. (घ)	

13

वृत्त एवं स्पर्श रेखा
(Circle and Tangent)

PG8GGA

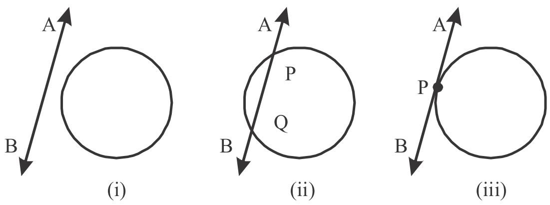
13.01 प्रस्तावना

पिछले अध्याय में आपने वृत्त से संबंधित कुछ अवधारणाओं के बारे में अध्ययन किया है जैसे – जीवा, चाप के द्वारा बने कोण, चक्रीय चतुर्भुज इत्यादि। इस अध्याय में समतल पर एक रेखा एवं वृत्त की विभिन्न स्थितियों में स्थित होने पर उनमें कुछ विशेष संगत गुण दिखाई देने लगते हैं, के बारे में अध्ययन करेंगे।

PGHCHX

13.02 छेदन रेखा एवं स्पर्श रेखा

एक सफेद कागज पर एक वृत्त और एक रेखा को एक साथ लेकर आकृति बनाइए। अब अपने द्वारा बनाए गए उस आकृति की निम्न आकृतिों से तुलना कीजिए। निश्चित ही दिए गए तीनों आकृतिों में से एक आकृति से उसकी समानता अवश्य दिखाई देगी अर्थात् एक रेखा और एक वृत्त को एक साथ बनाने पर आकृति 13.01 में दिखाई गई तीनों आकृत्तियाँ ही बनना संभव है। आइए यहाँ इन तीनों आकृतियों पर विचार करते हैं।



आकृति 13.01

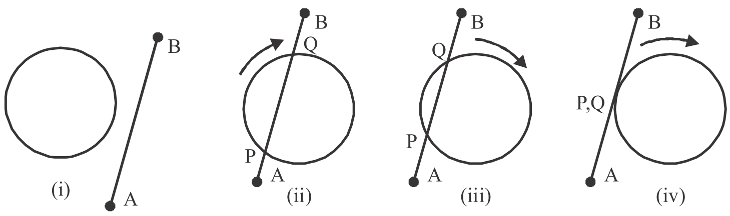
1. आकृति 13.1 (i) में रेखा AB वृत्त के बाहर से निकल रही है। अतः रेखा एवं वृत्त समतल पर बनी अलग – अलग आकृतियाँ है परस्पर इनमें कोई सम्बन्ध नहीं है।

2. आकृति 13.1 (ii) में रेखा AB, वृत्त के लिए एक छेदन रेखा है। यदि कोई एक रेखा किसी वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करे तो उस रेखा को छेदन रेखा कहते हैं।

13. आकृति 13.1 (iii) में रेखा AB, वृत्त की एक स्पर्श रेखा है। यहां रेखा AB, वृत्त को बिन्दु P पर छूती हुई निकल रही है या यों कहें की रेखा AB वृत्त को एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। इस बिन्दु P को रेखा AB एवं वृत्त का स्पर्श बिन्दु कहेंगे।

अर्थात् वह रेखा जो किसी वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है वह उस वृत्त की स्पर्श रेखा के नाम से जानी जाती है।

वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा के अस्तित्व को समझने के लिए आइए निम्न क्रिया कलाप को करते हैं।



आकृति 13.02

क्रिया कलाप– एक ड्राइंग बोर्ड अथवा लकड़ी की टेबिल पर एक सफेद कागज को रखकर दो आलपिन A व B गाढ़ दें। अब सामान्य तनाव रखते हुए उनसे एक काले रंग का धागा बांधिए और एक दूसरे सफेद कागज पर एक वृत्त बनाइए। देखिए आकृति 13.02 (i) वृत्त पर बने कागज को धागे के नीचे इतना सरका दीजिए कि धागा वृत्त को दो स्थानों पर काटता हुआ दिखाई दे। उन दोनों स्थानों को P व Q नाम दीजिए तथा वृत्त के कागज को स्थिर रखते हुए बिन्दु P पर तीसरा आलपिन गाढ़ दीजिए।

इस प्रकार वृत्त वाला कागज P के सापेक्ष घूम सकता है देखिए आकृति 13.02 (ii) अब वृत्त वाले कागज को धीरे–धीरे बाएँ से दाएँ घुमाएँ इस प्रक्रिया में आप क्या देखते है? अवलोकन कीजिए, हम पाएंगे।

(i) P व Q के मध्य की दूरी वृत्त के घूमने के साथ ही कम होती जाती है अर्थात् प्रत्येक स्थिति में जीवा कि लम्बाईपूर्व की लम्बाई से छोटी हो जाती है। देखिए आकृति 13.02 (iii)

(ii) जब Q बिन्दु P पर आ जावे अर्थात् दोनों सम्पाती हो जाए जीवा की लम्बाई शून्य हो जाती है। रेखा वृत्त को एक ही ब्न्दि पर प्रतिच्छेद करती हुई दिखाई देती है। देखिए आकृति 13.02 (iv) इस स्थिति में रेखा AB वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

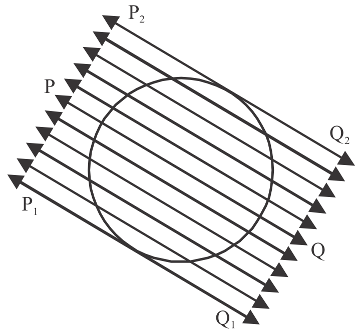
(iii) वृत्त को ओर अधिक उसी दिशा में धुमाते जाए तो हम पायेंगे कि जीवा की लम्बाई एक निश्चित स्थिति तकबढ़ती है और उसके बाद घटती हुई पुनः उपरोक्त (i) व (ii) में वर्णित परिणाम प्राप्त होते हैं।

इसी प्रक्रिया को विपरीत दिशा में भी घुमाकर देखिए आप निश्चित ही उपरोक्त परिणाम ही प्राप्त करेंगे।

इस प्रयोग के बाद हम कह सकते है कि

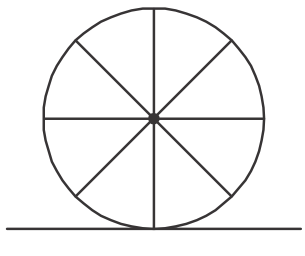
किसी वृत्त की छेदन रेखा जो वृत्त की जीवा है, के दोनों प्रतिछेदी सिरे एक विशिष्ट स्थिति में सम्पाती होने पर वह स्पर्श रेखा में परिवर्तित हो जाती है। अर्थात् वृत्त के एक बिन्दु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा ही विद्यमान रहती है।

क्रिया कलाप– एक सफेद कागज पर एक वृत्त और उसकी एक छेदन रेखा PQ खींचिए। अब छेदन रेखा PQ के समान्तर अनेक रेखाएं खींचिए आप देखेंगे कि कुछ चरणों के बाद छेदन रेखाओं द्वारा काटी गई जीवाएँ लगातार छोटी होती जाती हैं। एक स्थिति में छेदन रेखाPQ के दोनों ओर की जीवाओं का माप शून्य हो जाता है। अर्थात् छेदन रेखाएँ P_1Q_1 एवं P_2Q_2 वृत्त के दोनों ओर उस वृत्त की स्पर्श रेखाएं हो जाती हैं। देखिए आकृति 13.3 इस प्रयोग से स्पष्ट होता है कि एक छेदन रेखा के समान्तर दो से अधिक समान्तर स्पर्श रेखाएं नहीं हो सकती। या किसी एक वृत्त पर केवल दो समान्तर स्पर्श रेखाएं ही विद्यमान रह सकती है।

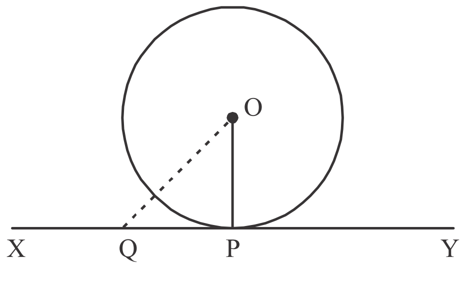


आकृति 13.03

क्रिया कलाप– एक सफेद कागज पर परकार की सहायता से वृत्त बनाइए। इस वृत्त पर अनेक त्रिज्याएं स्केल की सहायता से खींचकर उक्त आकृति को एक गत्ते चिपका दीजिए और वृत्त की सीमाओं के अनुसार काट दीजिए। इस प्रकार आपके पास एक वृत्ताकार पहिया तैयार हो गया है। अब इसके केन्द्र में पिन लगाकर पहिए को धराताल पर केन्द्र के सापेक्ष घुमाते हुए लुडकाइए। आप क्या देखतेहै? आप देखेंगें कि लुडकाते समय वृत्त पर खींची गई सभी त्रिज्याएँ धरातल के साथ लम्बवत रहती हुई नजर आती है। (देखिए आकृति 13.04)


आकृति 13.04

प्रमेयः 13.1 वृत्त के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस बिन्दु से केन्द्र को मिलाने वाली रेखा (त्रिज्या) पर लम्ब होती है।



आकृति 13.05

दिया हुआ हैः O केन्द्र वाले वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा XY है और OP वृत्त की त्रिज्या है

सिद्ध करना हैः $OP \perp XY$

रचनाः XY पर कोई अन्य बिन्दु Q लिया और OQ को मिलाया

उपपत्तिः चूंकि स्पर्श रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु, स्पर्श बिन्दु को छोड़कर वृत्त के बाहर स्थित होगा। अतः $OP < OQ$ (वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु की केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक होती है)

अर्थात् OP (त्रिज्या), XY पर स्थित सभी बिन्दुओं से दूरियों में सबसे छोटी होगी। परन्तु हम जानते हैं कि किसी बिन्दु की किसी सरल रेखा के सभी बिन्दुओं की दूरियों में लम्ब सबसे छोटा होता है।

अतः $OP \perp XY$ इतिसिद्धम्

प्रमेयः 13.2 (प्रमेय 13.1 का विलोम)ः वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से खींची गई कोई रेखा त्रिज्या पर लम्ब हो तो, वहस्पर्श रेखा होती है।

दिया हुआ हैः O वृत्त का केन्द्र OP त्रिज्या तथा $OP \perp XY$

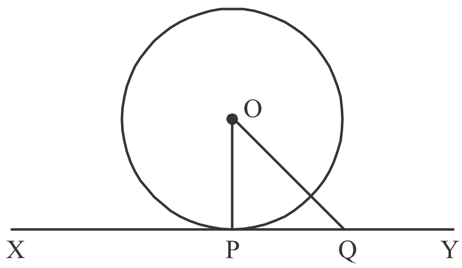
सिद्ध करना हैः XY, बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा है।

रचनाः XY पर स्थित अन्य बिन्दु Q को O से मिलाया।

उपपतिः $\because OP \perp XY$

अतः $OP < OQ$

(किसी बिन्दु से एक सरल रेखा पर डाला गया लम्ब उस रेखा के सभी बिन्दुओं से उस बिन्दु को मिलाने वाले सभी रेखाखण्डों से छोटा होता है) चूंकि Q सहित XY पर स्थित सभी बिन्दु वृत्त के बाहर है अतः XY वृत्त की स्पर्श रेखा है।



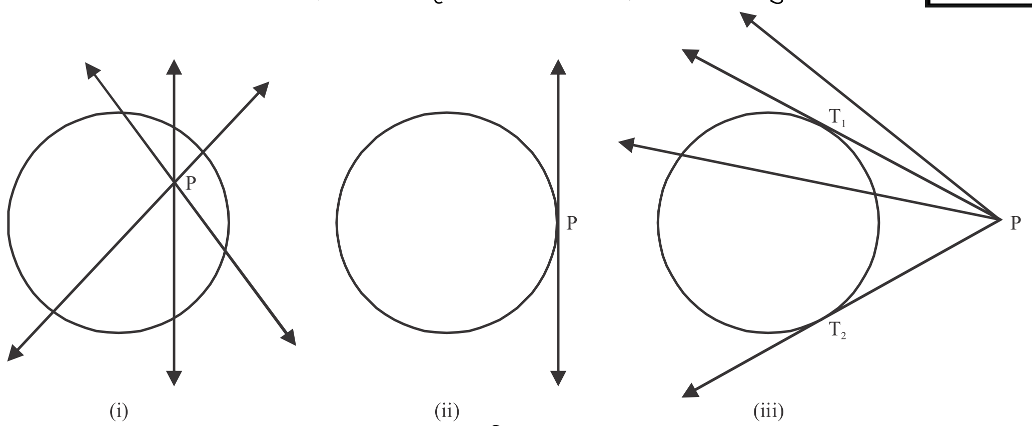
आकृति 13.06

किसी बिन्दु से एक सरल रेखा पर डाला गया लम्ब, उस रेखा के सभी बिन्दुओं से उस बिन्दु को मिलाने वाले सभी रेखाखण्डों से छोटा होता है।

13.03 एक बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची जा सकने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या

PUFH9D

पिछले अनुच्छेद में आपने छेदन रेखा एवं स्पर्श रेखा के बारे में जानकारी ली। क्या आप जानते हैं कि वृत्त के अन्दर या वृत्त के बाहर स्थित एक बिन्दु से उस वृत्त पर कितनी संख्या में स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैऔर उन स्पर्श रेखाओं में क्या सम्बन्ध होता है? आइए निम्न आकृतियों के माध्यम से इस पहेली को सुलझाते हैं।



आकृति 13.07

एक समतल पर स्थित वृत्त के लिए समतल के सभी बिन्दुओं में से एक बिन्दु का चयन करना चाहें तो वह वृत्त केअन्दर या वृत्त पर अथवा वृत्त के बाहर इन तीन में से एक ही स्थान का चयन करेगें तीनों विकल्पों में से अब हम क्रमशः एक–एक पर अलग–अलग विचार

करते हैं।

(i) जब बिन्दु P वृत्त के अन्दर स्थित है। वृत्त पर P बिन्दु से गुजरने वाली सभी रेखाओं को देखें तो, वे सभी छेदन रेखाएँ प्राप्त होती है (देखिए आकृति 13.07 (i) में) अर्थात् इस स्थिति में स्पर्श रेखाओं की संख्या शून्य है।

(ii) जब बिन्दु P वृत्त पर स्थित है। पिछले अनुच्छेद में हम पढ़ चुके हैं कि "वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से एक और केवल एकस्पर्श रेखा खींची जा सकती है।" (देखिए आकृति 13.07 (ii) में)

(iii) जब बिन्दु P वृत्त के बाहर स्थित है। वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं शेष रेखाएँ या तो छेदन रेखाएँ होंगी या वृत्त के बाहर ही रहेंगी (देखिए आकृति 13.07 (iii) में)

आकृति 13.07 (iii) में वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ PT_1 एवं PT_2 दिखाई दे रही हैं। आप बता सकते हैं इनमें आपस में क्या सम्बन्ध है? वास्तव में ये दोनो स्पर्श रेखाएँ बराबर हैं। आइए निम्न प्रमेय के माध्यम से इस तथ्य को सिद्ध करते हैं।

प्रमेय: 13.3 वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ परस्पर समान होती हैं।

दिया हुआ है: O केन्द्र वाले वृत्त के बाहर स्थित P बिन्दु से PT_1 एवं PT_2 दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है: $PT_1 = PT_2$

रचना: O को T_1, T_2 एवं P से मिलाया

उपपत्ति: ΔOPT_1 एवं ΔOPT_2 में

$\angle OT_1P = \angle OT_2P = 90°$

(स्पर्श रेखा एवं त्रिज्या परस्पर लम्ब होते है प्रमेय 1 से)

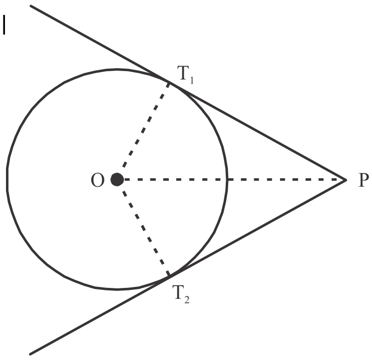
$OT_1 = OT_2$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएं)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

समकोण त्रिभुज में कर्ण भुजा सर्वांगसता के नियम से

$\Delta OPT_1 \cong \Delta OPT_2$

अतः $PT_1 = PT_2$ इतिसिद्धम



आकृति 13.08

दृष्टांतीय उदाहरण

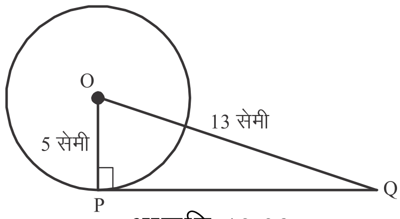
उदाहरण-1. एक बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जबकि बिन्दु की वृत्त के केन्द्र से दूरी 13 सेमी है और वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है।

हल: चूंकि $OQ^2 = OP^2 + PQ^2$ (समकोण ΔOPQ में)

या $PQ^2 = OQ^2 - OP^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

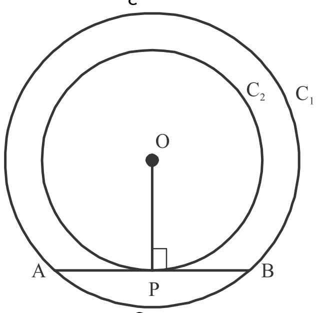
या $PQ = \sqrt{144} = 12$

अतः $PQ = 12$ सेमी



आकृति 13.09

उदाहरण-2. दो संकेद्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा यदि छोटे वृत्त को स्पर्श करे तो, स्पर्श बिन्दु उस जीवा का समद्विभाजन करता है।



आकृति 13.10

हल: दिया हुआ है: दो संकेन्द्रीय वृत्त जिनका केन्द्र O है। AB बडे वृत्त C_1 की जीवा है जो छोटे वृत्त C_2 को P बिन्दु पर स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है: $AP = PB$

उपपत्ति : AB, वृत्त C_2 को P पर स्पर्श करती है।

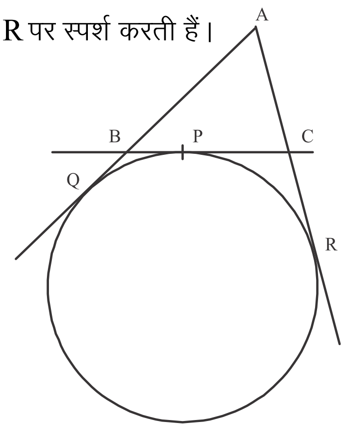
अतः $\qquad OP \perp AB \qquad$ (प्रमेय –1 से)

चूंकि O वृत्त C_1 का भी केन्द्र है और AB वृत्त, C_1 की जीवा है। अतः कक्षा IX के प्रमेय अनुसार वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा का समद्विभाजन करता है।

अतः $\qquad$ AP = PB $\qquad$ इति सिद्धम्

उदाहरण-3. एक वृत्त ΔABC की भुजा BC को P पर बाह्य स्पर्श करता है तथा AB व AC को बढ़ाए जाने पर Q और R पर स्पर्श करता है तो सिद्ध कीजिए कि $AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC की परिमिति)

हल: दिया हुआ है: ΔABC की भुजा BC वृत्त को P पर एवं AB व AC बढ़ाने पर क्रमशः Q व R पर स्पर्श करती हैं।



आकृति 13.11

सिद्ध करना है: $AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC की परिमिति)

उपपत्ति: $\quad$ AQ = AR $\quad$ (प्रमेय 2 से) $\quad$ . . . (1)

इसी प्रकार BQ = BP $\quad$ . . . (2)

एवं $\quad$ CP = CR $\quad$ . . . (3)

अब $\quad$ AQ + AR = [AB + BQ] + [AC + CR]

$\qquad$ = [AB + BP] + [AC + CP] = AB + (BP + CP) + AC

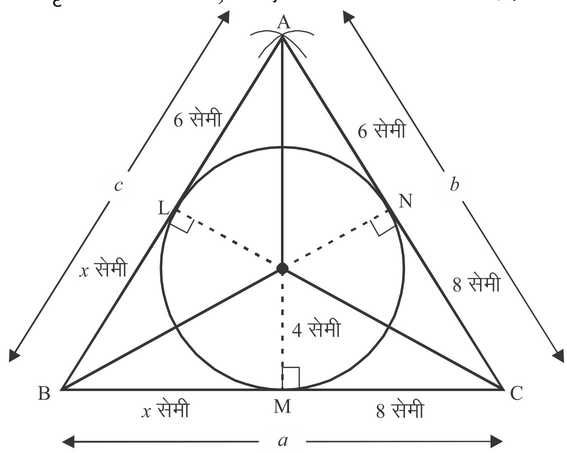
$\qquad$ 2AQ = AB + BC + AC . . . [(1) से]

या $\quad$ $AQ = \frac{1}{2}[AB + BC + AC]$

या $\quad$ $AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC की परिमिति) $\qquad$ इति सिद्धम्

उदाहरण-4. ΔABC की भुजाएँ AB, BC एवं CA एक 4 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त को क्रमशः L, M एवं N पर स्पर्श करती हैं। यदि AN = 6 सेमी एवं CN = 8 सेमी हो तो ABC की परिमिति ज्ञात कीजिये।

हल: माना कि त्रिभुज ABC के अन्तर्गत वृत्त का केन्द्र O है।



आकृति 13.12

अर्थात् $\quad$ OL = OM = ON = 4 सेमी,

माना कि $\quad$ BL = x सेमी

तो $\quad$ BL = BM = x सेमी (देखिए आकृति 13.12 में)

∵ $\quad$ AN = AL = 6 सेमी

इसी प्रकार CN = CM = 8 सेमी

तो $\quad$ BC = $(x + 8)$ सेमी = a एवं AB = $(x + 6) = c$

तथा $\quad$ AC = 6 + 8 = 14 सेमी = b

हीरों के सूत्र में $\quad 2s = a + b + c$

या $\quad 2s = x + 8 + 14 + x + 6$

या $\quad 2s = 2x + 28$

या $\quad s = x + 14$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{(x+14)(x+14-x-8)(x+14-14)(x+14-x-6)}$$

$$\sqrt{(x+14)\times 6 \times x \times 8} = \sqrt{48x(x+14)} \qquad \ldots(1)$$

तथा ΔABC का क्षेत्रफल $= \Delta AOB$ का क्षेत्रफल + ΔBOC का क्षेत्रफल + ΔAOC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}AB \times OL + \frac{1}{2}BC \times OM + \frac{1}{2}AC \times ON$$

$$=\frac{1}{2}(x+6)\times 4+\frac{1}{2}(x+8)\times 4+\frac{1}{2}14\times 4$$

$$=2(x+6)+2(x+8)+28$$

$$=2x+12+2x+16+28$$

$$=4x+56 \qquad \ldots(2)$$

(1) व (2) से $\sqrt{48x(x+14)}=4x+56$

$$4\sqrt{3x(x+14)}=4(x+14)$$

या $\sqrt{3x(x+14)}=(x+14)$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$3x(x+14)=(x+14)^2$$

या $3x=x+14$

या $3x-x=14$

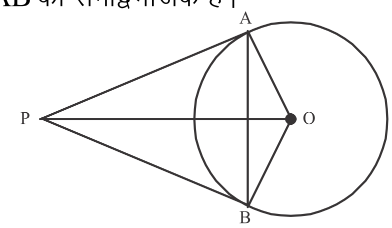
या $x=7$

अतः $AB=6+7=13$ एवं $BC=7+8=15$

इस प्रकार ΔABC की परिमिति $=(13+15+14)$ सेमी $=42$ सेमी

प्रश्नमाला 13.1

1. निम्न में से प्रत्येक कथन सत्य या असत्य है लिखिए और उत्तर का कारण भी लिखिए।
   (i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो वृत्त को दो बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।
   (ii) एक स्पर्श रेखा XY, O केन्द्र वाले वृत्त को P पर स्पर्श करती है और Q स्पर्श रेखा पर अन्य बिन्दु है तो $OP=OQ$ होता है।
   (iii) वृत्त पर स्थित बिन्दु P व Q पर दो स्पर्श रेखाएं LM एवं XY खींची गई है। यदि PQ व्यास है तो $LM \parallel XY$ है।
   (iv) एक वृत्त का केन्द्र O दूसरे वृत्त पर स्थित है जिसका केन्द्र A है। यदि O केन्द्र वाला वृत्त बिन्दु A और B से इस प्रकार गुजरता है कि AOB एक ही रेखा पर हो, तो B से खींची गई स्पर्श रेखाएँ दोनों वृत्तों के प्रतिच्छेदी बिन्दुओं से गुजरती हैं।
2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) एक वृत्त पर स्थित एक बिन्दु से .... स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
   (ii) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा .... कहलाती हैं।
   (iii) एक वृत्त की .... समान्तर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
   (iv) वृत्त तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को .... कहते हैं।
3. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिजाएँ5 सेमी तथा 3 सेमी है। बडे वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।
4. किसी वृत्त के केन्द्र से 10 सेमी दूर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई यदि4 सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या कितनी होगी?
5. एक O केन्द्र वाला वृत्त, चतुर्भुज ABCD की चारों भुजाओं को अन्तः स्पर्श इस प्रकार करता है यदि AB को स्पर्श बिन्दु 3 : 1 भागों में विभाजित करे तथा $AB=8$ सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जबकि $OA=10$ सेमी है।
6. एक वृत्त एक चतुर्भुज की सभी भुजाओं को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए कि केन्द्र पर सम्मुख भुजाओं द्वारा आन्तरित कोण सम्पूरक होते हैं।
7. आकृति 13.13 में वृत्त का केन्द्र O है और बाह्य बिन्दु P से खींची हुई स्पर्श रेखाएँ PA और PB वृत्त को क्रमशः A व B पर स्पर्श करती हैं। सिद्ध कीजिए कि OP रेखाखण्ड AB का समद्विभाजक है।



आकृति 13.13

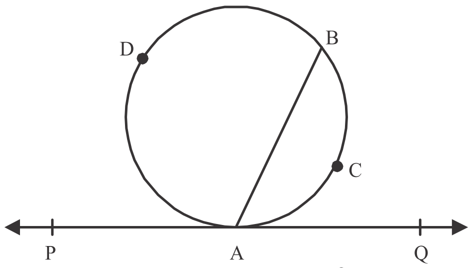
8. आकृति 13.13 में बाह्य बिन्दु P से O केन्द्र वाले वृत्त को PA एवं PB दो स्पर्श रेखाएँ क्रमशः A व B पर स्पर्श करती हैं। सिद्ध कीजिए कि PAOB एक चक्रीय चतुर्भुज है।

अब तक आपने वृत्त की स्पर्श रेखाओं सम्बन्धित अनेक जानकारियाँ प्राप्त की और उन पर आधारित अनेक प्रश्नों को हल किया है। अब यदि वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से वृत्त पर खींची जाने वाली जीवा द्वारा विभाजित वृत्तखण्डों में बनने वाले कोणों पर विचार करें तो हमें कुछ अन्य जानकारियाँ ओर प्राप्त हो सकती हैं। आइए इन्हे समझने का प्रयास करते हैं।

13.04 एकान्तर वृत्तखण्ड के कोण

PUPSB1

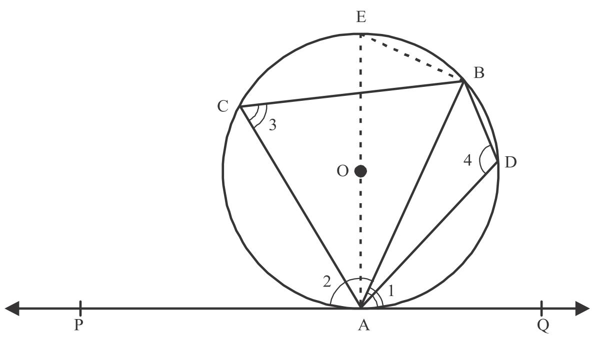
आकृति 13.14 में एक वृत्त की एक जीवा AB वृत्त की स्पर्श रेखा PAQ के स्पर्श बिन्दु A से खींची गई है जो PAQ के साथ $\angle BAP$ एवं $\angle BAQ$ बनाती है।



आकृति 13.14

जीवा AB वृत्त के दो वृत्तखण्डों ADB और ACB में विभाजित करती है। वृत्तखण्ड ADB और ACB क्रमशः $\angle BAQ$ एवं $\angle BAP$ के एकान्तर वृत्तखण्ड कहलाते हैं।

प्रमेय—13.4. यदि वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से एक जीवा खींची जाए तो इस जीवा द्वारा दी गई स्पर्श रेखा से बनाए गए कोण क्रमशः उसी जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्डों में बने कोणों के बराबर होते हैं।



आकृति 13.15

दिया हुआ है: वृत्त के बिन्दु A पर स्पर्श रेखा PQ है।

जीवा AB स्पर्श रेखा के साथ क्रमशः $\angle 1$ एवं $\angle 2$ की रचना करती है। $\angle 3$ एवं $\angle 4$ क्रमशः $\angle 1$ एवं $\angle 2$ के एकान्तर वृत्त खण्डों के C एवं D पर बने कोण हैं।

सिद्ध करना है: $\angle 1 = \angle 3$ एवं $\angle 2 = \angle 4$

रचना है: व्यास AOE खींचकर EB को मिलाया

उपपत्ति: $\Delta\, AEB$ में

$\angle ABE = 90^\circ$ (अर्द्धवृत्त में बना कोण)

अतः $\angle AEB + \angle EAB = 90^\circ$ ...(1)

∵ $\angle EAP = 90^\circ$ (व्यास स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है)

अतः $\angle EAB + \angle 1 = 90^\circ$ ...(2)

(1) एवं (2) से $\angle EAB + \angle 1 = \angle AEB + \angle EAB$

या $\angle 1 = \angle AEB$ ...(3)

$\because$ $\angle AEB = \angle 3$ (एक ही वृत्तखण्ड पर बने कोण बराबर होते हैं) ...(4)

(3) एवं (4) से

$\angle 1 = \angle 3$ ...(5)

पुनः $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (रैखिक युग्म)

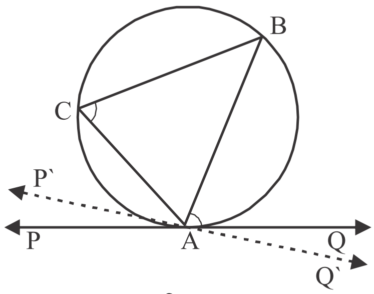
तथा $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं)

अतः $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$

परन्तु $\angle 1 = \angle 3$ ((5) से)

अतः $\angle 2 = \angle 4$ इति सिद्धम्

प्रमेय—13.5. (प्रमेय 13.4 का विलोम): यदि वृत्त की जीवा के एक सिरे पर एक ऐसी रेखा खींची जाती है कि जीवा द्वारा इसके साथ बना कोण इसके एकान्तर वृत्त खण्ड में जीवा द्वारा बनाए कोण के बराबर हो, तो वह रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।



आकृति 13.16

दिया हुआ है: किसी वृत्त की AB जीवा है तथा रेखा PAQ इस प्रकार की है कि $\angle BAQ = \angle ACB$ है जहाँ C एकान्तर वृत्तखण्ड में कोई बिन्दु है।

सिद्ध करना है: PAQ वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

उपपत्तिः $\angle BAQ = \angle ACB$ ...(1) (दिया हुआ)

माना कि PAQ के स्थान पर रेखा P'AQ' वृत्त को बिन्दु A पर स्पर्श करती है।

अतः $\angle BAQ' = \angle ACB$ (प्रमेय द्वारा) ...(2)

(1) व (2) से $\angle BAQ = \angle BAQ'$ ...(3)

आकृति के अनुसार $\angle BAQ' = \angle BAQ + \angle QAQ'$ ...(4)

अर्थात् $\angle BAQ = \angle BAQ + \angle QAQ'$

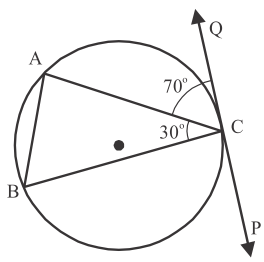
अतः $\angle QAQ' = 0$ ...(5)

यह तभी सम्भव है जब PAQ एवं P'AQ' परस्पर सम्पाती हो अर्थात् PAQ वृत्त की A पर एक स्पर्श रेखा है। इति सिद्धम।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर सत्य या असत्य लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

(i) आकृति 13.17 के अनुसार $\angle A = 70°$ होगा जहाँ PQ वृत्त के बिन्दु C पर स्पर्श करती है।



आकृति 13.17

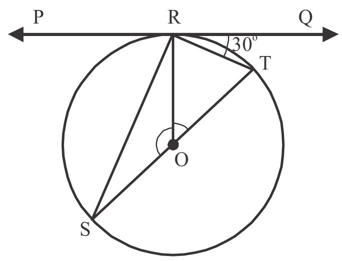
हल: असत्य, चूंकि $\angle PCB$ का एकान्तर वृत्तखण्ड पर बना कोण $\angle A$ है

अत: $\angle A = \angle PCB$

और $\angle PCB = 180 - (70 + 30) = 80°$

अत: $\angle A = 80°$ होगा।

उदाहरण-2. आकृति 13.18 में PQ, O केन्द्र वाले वृत्त की स्पर्श रेखा है जो वृत्त को R पर स्पर्श करती है। यदि कोण $TRQ = 30°$ हो, तो $\angle SOR$ एवं $\angle RTO$ का मान ज्ञात कीजिये।



आकृति 13.18

हल: चूंकि SOT वृत्त का व्यास है।

अत: $\angle SRT = 90°$

तथा RT जीवा द्वारा $\angle TRQ$ का एकान्तर वृत्तखण्ड RST है

अत: $\angle RST = \angle TRQ = 30°$

परन्तु ΔORS एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी OS = OR एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं

अत: $\angle RST = \angle SRO = 30°$

$\therefore$ $\angle SOR = 180 - (30 + 30) = 180 - 60 = 120°$

एवं $\angle ORT = \angle SRT - \angle SRO$

$= 90 - 30 = 60°$

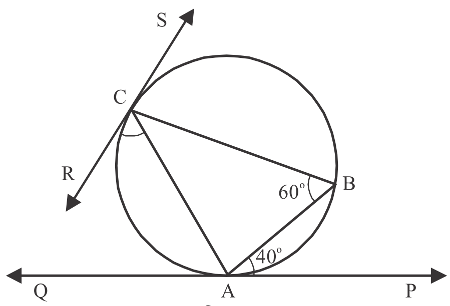
अब ΔORT में

OR = OT (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

अत: $\angle RTO = \angle ORT = 60°$

एवं $\angle SOR = 120°$

उदाहरण-3. आकृति 13.19 में PQ तथा RS एक वृत्त पर क्रमशः बिन्दु A और C पर स्पर्श रेखाएँ है। यदि $\angle ABC = 60°$ और $\angle BAP = 40°$ हो तो $\angle BCR$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.19

हल: स्पर्श रेखा PQ और जीवा AB स्पर्श बिन्दु A से गुजरते हैं, (प्रमेय 13.04)

अत: $\angle ACB = \angle BAP = 40°$ . . . (1)

इसी प्रकार स्पर्श रेखा CR एवं जीवा AC के बिन्दु C से गुजरते हैं

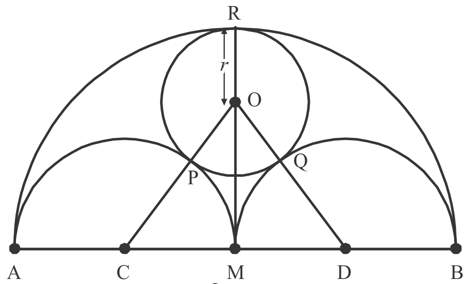
अतः $\angle ACR = \angle ABC = 60°$ ...(2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$\angle ACB + \angle ACR = 40 + 60 = 100°$$

या $\angle BCR = 100°$

उदाहरण-4. आकृति 13.20 मे रेखा खण्ड AB का मध्य बिन्दु M है, AM, MB एवं AB को व्यास मानकर AB के एक ही ओर अर्द्धवृत्त खींचे गए हैं। 'O' को केन्द्र मानकर r त्रिज्या का एक वृत्त इस प्रकार खींचा गया है जो तीनों अर्द्धवृत्तों को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिये $r = \frac{1}{6}AB$ ।



आकृति 13.20

हल: दिया हुआ है: आकृति 13.24 में C,M,D एवं O को केन्द्र मानकर अर्द्धवृत्त प्रश्नानुसार बने हुए है।

सिद्ध करना है: $r = \frac{1}{6}AB$

उपपत्ति है: माना कि AB = a तो $AM = \frac{a}{2}$ परन्तु AC = CM = MD = DM = CP = DQ बराबर अर्द्धवृत्तों की त्रिज्याएं है।

अतः $CM = MD = CP = DQ = \frac{a}{4}$ ...(1)

अब $OC = OD = \left(\frac{a}{4} + r\right)$ ...(2)

$OM = (MR - OR) = \left(\frac{a}{2} - r\right)$ ...(3)

चूंकि ΔOCD एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा OC = OD है एवं M,CB का मध्य बिन्दु है

अतः $OM \perp CD$

अब समकोण त्रिभुज OMC में $OC^2 = CM^2 + OM^2$

अतः (1), (2) एवं (3) से

$$\left(\frac{a}{4} + r\right)^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - r\right)^2$$

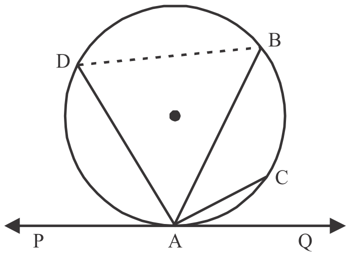
या $\frac{a^2}{16} + r^2 + \frac{1}{2}ra = \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{16} + r^2 - ra$ या $\frac{1}{2}ra + ra = \frac{a^2}{16}$

या $\frac{3}{2}ra = \frac{a^2}{16}$ या $a(6r - a) = 0$ परन्तु $a \neq 0$

अतः $6r = a$ या $r = \frac{1}{6}a$ या $r = \frac{1}{6}AB$ इति सिद्धम्

प्रश्नमाला 13.2

1. आकृति 13.21 को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए।



आकृति 13.21

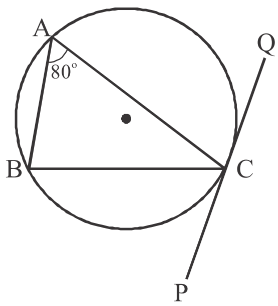
(i) $\angle BAQ$ का एकान्तर वृत्तखण्ड है।

(ii) $\angle DAP$ का एकान्तर वृत्तखण्ड है।

(iii) यदि C को B से मिला दें तो बनने वाले $\angle ACB$ किस कोण के बराबर है।

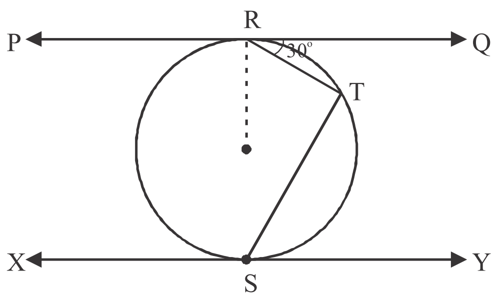
(iv) $\angle ABD$ एवं $\angle ADB$ किन–किन कोणों के बराबर है।

2. आकृति 13.22 के अनुसार यदि $\angle BAC = 80^\circ$ हो तो $\angle BCP$ का मान ज्ञात कीजिए।



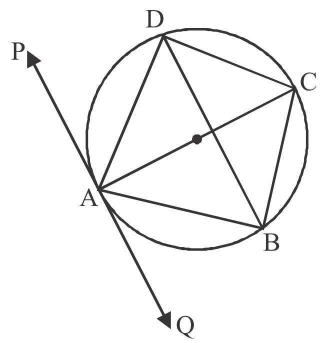
आकृति 13.22

3. आकृति 13.23 के अनुसार आकृति में PQ और XY समानान्तर स्पर्श रेखाएँ है यदि $\angle QRT = 30^\circ$ हो, तो $\angle TSY$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.23

4. आकृति 13.24 चक्रीय चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC कोण C को समद्विभाजित करता है, सिद्ध कीजिए कि विकर्ण BD, बिन्दु A, B, C और D से गुजरने वाले वृत्त के बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के समान्तर है।



आकृति 13.24

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 13.1

1. (i) असत्य – वृत्त की स्पर्श रेखा उसे एक और एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।
   (ii) असत्य – क्योंकि OP स्पर्श रेखा पर लम्ब है। और लम्ब सभी दूरियों से छोटा होता है।
   (iii) सत्य – चूंकि स्पर्श रेखा व्यास पर लम्ब होती है।
   (iv) सत्य – क्योंकि AOB एक व्यास है। और अर्द्धवृत्त पर बना कोण समकोण होता।

2. (i) एक, (ii) छेदन रेखा, (iii) दो, (iv) स्पर्श रेखा 3. 8 सेमी 4. $2\sqrt{21}$ सेमी 5. 8 सेमी

प्रश्नमाला 13.2

1. (i) ADB, (ii) ACBD, (iii) $\angle BAP$, (iv) $\angle DAP$ एवं $\angle BAQ$ 2. 80^o 3. 60^o

14

रचनाएँ
(Constructions)

14.01 प्रस्तावना

हमने पिछले अध्यायों में वृत्त, छेदन रेखा, स्पर्श रेखा एकान्तर वृत्त खण्ड, से सम्बन्धित गुणधर्मों को समझा और स्मरण किया। आइए यहाँ हम उन अध्ययन किये गए प्रमेयों का उपयोग करते हुए उनसे सम्बन्धित रचना कैसे करेंगे का अध्ययन करते हैं। बिन्दु पथ के अध्याय में हमने संगामी रेखा खण्ड एवं संगामी बिन्दुओं पर चर्चा की है। जिनमें हमने अन्तः केन्द्र और परिकेन्द्र के बारे में अध्ययन किया है। आइए अब हम इन सिद्धान्तों एवं मूलभूत अनुपातिक प्रमेय का उपयोग करके, रचना के माध्यम से इन सिद्धांतों को समझने का प्रयत्न करते हैं।

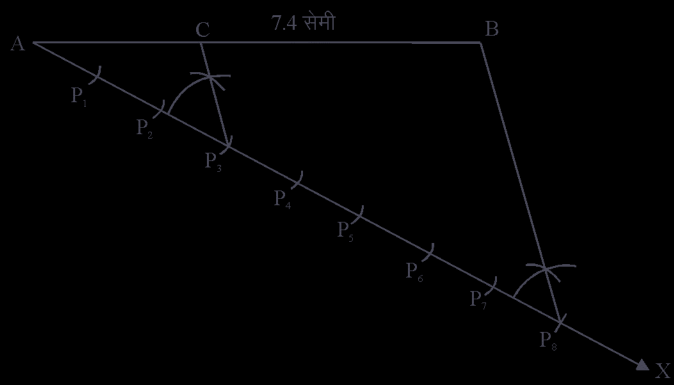
निर्मेय– ज्यामिति में किसी ज्यामितीय निर्माण सम्बन्धी पहेली को निर्मेय कहते हैं।

14.02 एक रेखा खण्ड का दिए गए अनुपात में आन्तरिक विभाजन

निर्मेय–1. एक 7. 4 सेमी लम्बाई का एक रेखा खण्ड खींच कर उसका 3 : 5 में आन्तरिक विभाजन कीजिए।

रचना के पद:

1. रेखा खण्ड AB = 7.4 सेमी खींचिए।
2. न्यून कोण BAX की रचना कीजिए।
3. सुविधाजनक त्रिज्या लेते हुवे AX पर 8 चाप (3 + 5) P_1, P_2, P_3 . . . P_8 इस प्रकार के लें कि
   $AP_1 = A_1P_2 = P_2P_3 = ... = P_7P_8$ हो।
4. BP_8 को मिलाइए।
5. बिन्दु P_3 से $P_3C \| P_8B$ खींचिए (इसके लिए
   $\angle AP_3C = \angle AP_8B$ बनाइए जो AB को बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करता है)
   इस प्रकार रेखाखण्ड AB बिन्दु C पर 3 : 5 में विभाजित होता है।



आकृति 14.01

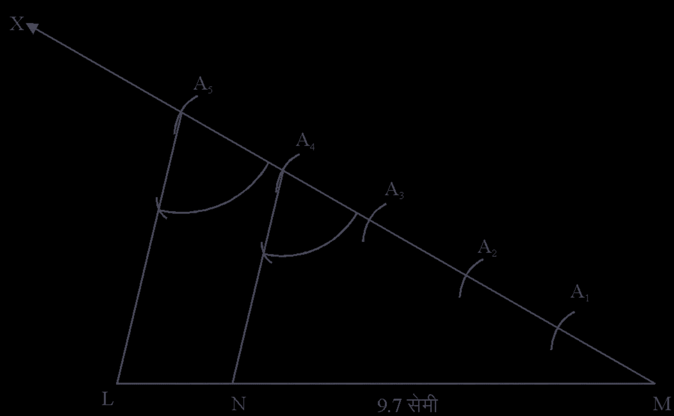
निर्मेय–2. एक रेखा खण्ड ML = 9.7 सेमी खींचिए तथा इस पर एक ऐसा बिन्दु N ज्ञात कीजिए कि

$$MN = \frac{4}{5}ML$$

रचना के पद:

1. रेखाखण्ड ML = 9.7 सेमी खींचिए।
2. एक न्यून कोण LMX की रचना कीजिए।
3. एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर MX पर 5 चाप A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 इस प्रकार के लेते हैं कि
   $MA_1 = A_1A_2 = ... = A_4A_5$
4. A_5L को मिलाए
5. बिन्दु A_4 पर $A_4N \| A_5L$ बनाइए (इसके लिए
   $\angle MA_4N = \angle MA_5L$ की रचना कीजिए)
6. बिन्दु N रेखाखण्ड ML पर इस प्रकार का प्राप्त होता है।

$$MN = \frac{4}{5}ML$$



आकृति 14.02

सत्यापनः त्रिभुज MLA_5 में, $NA_4 \parallel LA_5$

$$\therefore \quad \frac{LN}{NM} = \frac{A_5A_4}{MA_4} \text{ (मूलभूत आनुपातिक प्रमेय से)}$$

$$\text{या} \quad \frac{LN}{NM} + 1 = \frac{A_5A_4}{MA_4} + 1$$

$$\text{या} \quad \frac{LN + NM}{NM} = \frac{M_5A_4 + MA_4}{MA_4}$$

$$\text{या} \quad \frac{ML}{NM} = \frac{MA_5}{MA_4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{या} \quad \frac{MN}{ML} = \frac{4}{5}$$

अतः रेखाखण्ड ML पर N एक ऐसा बिन्दु है कि $MN = \frac{4}{5}ML$

14.03 वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना (Construction of a tangetn to a point on the circle)

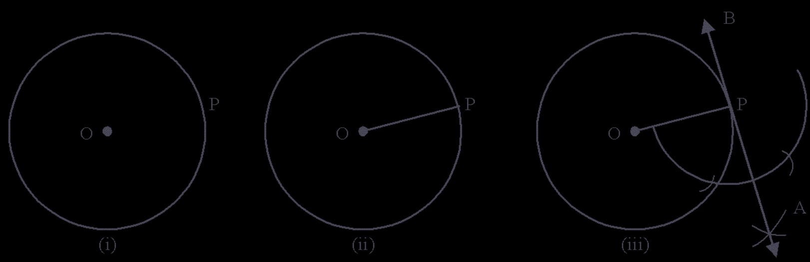
(A) जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात हो (प्रमेय 14.1 का उपयोग)

यदि आपसे एक वृत्त जिसकी त्रिज्या r दी गई हो की रचना करके उस पर एक स्पर्श रेखा खींचने को कहा जाए तो आप (जैसा अधिकांश विद्यार्थियों में देखा गया है) परकार की सहायता से r त्रिज्या वाला वृत्त बनाकर अपने विवेक से वृत्त पर एक बिन्दु चयन कर एक रेखा खींच देते हैं। यदि आप स्पर्श रेखा की रचना ऐसे ही करते हैं तो पूर्णतः त्रूटि युक्त है।

सही प्रकार से रचना (प्रमेय 13.1 का उपयोग करते हुए) निम्न निर्मय द्वारा समझेंगे–

निर्मेय–3. दिए गए वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना करना, जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात हो।

रचना (i) O केन्द्र वाला वृत्त दी गई त्रिज्या को परकार की सहायता से बनाकर उस पर एक बिन्दु P अंकित करते हैं। देखिए आकृति 14.03(i)



आकृति 14.03

(ii) O व P को मिलाया अर्थात् OP वृत्त की त्रिज्या है। देखिए आकृति 14.03 (ii)

(iii) OP (त्रिज्या) को आधार रेखा मानकर, OP पर लम्ब AB खींचा। देखिए आकृति 14.03 (iii)

इस प्रकार प्राप्त AB ही दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखा है।

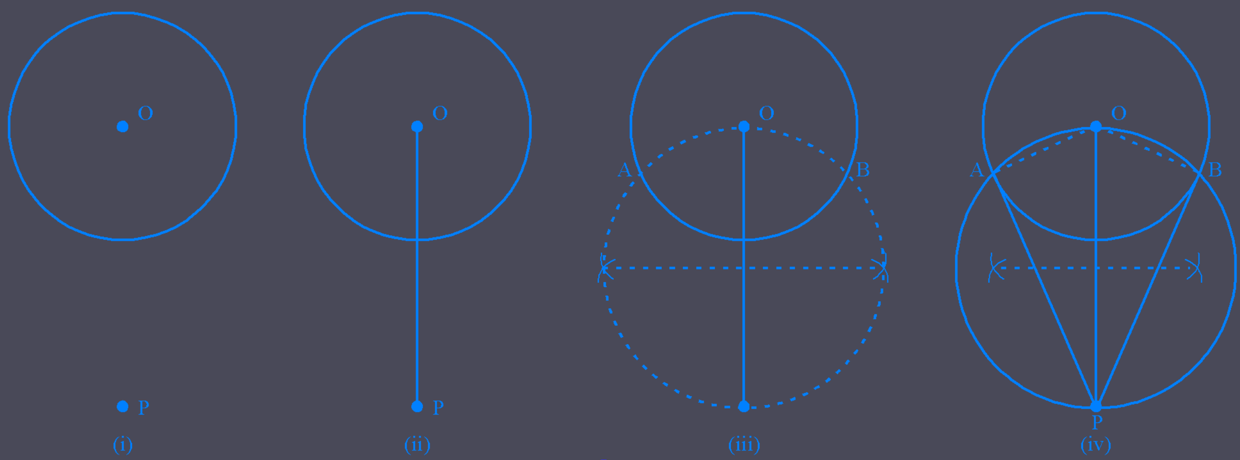
14.04 वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से स्पर्श रेखा खींचना

(A) जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात है। (प्रमेय 13.3 का उपयोग)

हम जानते हैं कि वृत्त में व्यास पर बना कोण समकोण होता है। वृत्त और व्यास के मध्य इस गुणधर्म पर विचार कीजिये।

निर्मेय–4. दिए गए वृत्त पर बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखा की रचना करना जब वृत्त का केन्द्र ज्ञात हो।

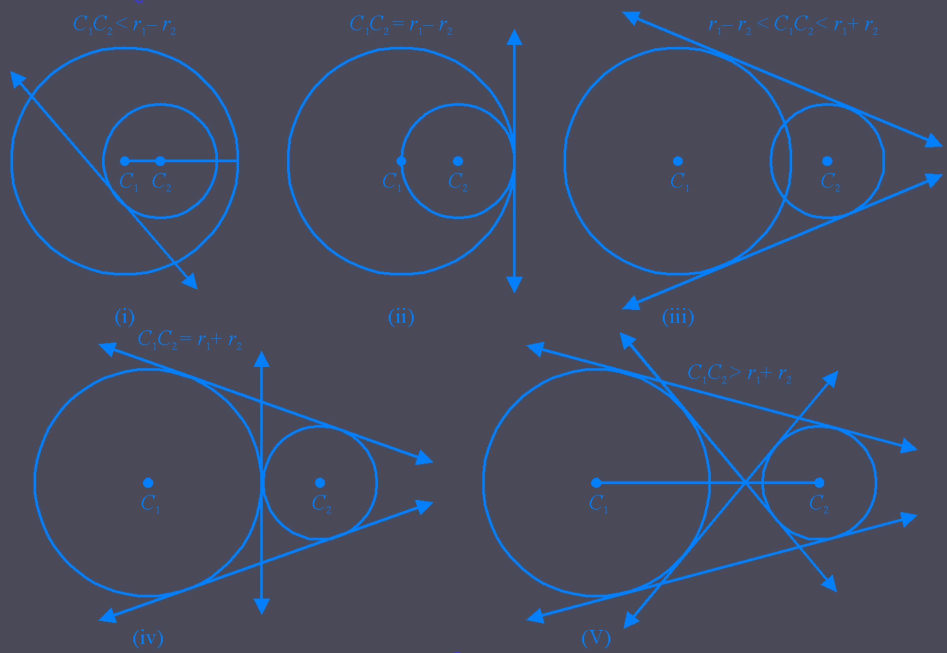
(1) एक वृत्त जिसका केन्द्र O है इसके बाहर एक बिन्दु P लेते हैं (ii) OP को मिलाया (iii) OP का लम्ब अर्द्धक के माध्यम से OP का मध्य बिन्दु M प्राप्त किया और MO त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया जो दिए गए वृत्त को A व B पर प्रतिच्छेद करता है। अतः PA व PB दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।



आकृति 14.04

14.05 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ

दो वृत्तों की विभिन्न स्थितियों के अन्तर्गत उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या की सम्भावना के लिए हमें सभी स्थितियों पर विचार करना होगा। अतः इसे निम्न आकृतियों के माध्यम से समझ सकते हैं।



आकृति 14.05

I. आकृति 14.05 (i) में छोटे वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा खींची जाती है तो वह बड़े वृत्त को प्रतिच्छेद करती है। अतः जब $C_1C_2 < r_1 - r_2$ तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की संख्या = 0 है।

II. आकृति 14.05 (ii) में दोनों वृत्तों के स्पर्श बिन्दु पर केवल एक उभयनिष्ठ रेखा है चूंकि यहाँ दोनों वृत्त उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा के एक ही ओर स्थित है अतः यह उभयनिष्ठ अनु स्पर्श रेखा कहलाती है। अतः जब $C_1C_2 = r_1 - r_2$ हो तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 1 (उभयनिष्ठ अनु स्पर्श रेखा)

III. आकृति 14.05 (iii) में दोनों वृत्त परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं अतः दो वृत्तों के दो ओर कुल दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएं हैं। चूंकि यहाँ दोनों उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार स्थित हैं कि प्रत्येक वृत्त दोनों उभयनिष्ठ रेखाओं के क्रमशः एक ही ओर स्थित है। अतः दोनों उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ मानी जायेगी।

इस प्रकार जब $r_1 - r_2 < C_1C_2 < r_1 + r_2$ तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 2 (उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ)

IV. आकृति 14.05 (iv) में दोनों वृत्त परस्पर बाह्य स्पर्श करते हैं अतः कुल उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या तीन है। यहाँ एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा दोनों वृत्तों के स्पर्श बिन्दु पर स्थित है, जिसे उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा कहेगें क्योंकि दोनों वृत्त इसके दोनों ओर स्थित हैं और दो उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ हैं।

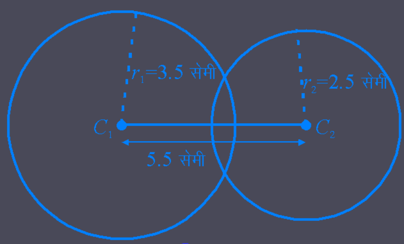
इस प्रकार जब $C_1C_2 = r_1 + r_2$ तब कुल स्पर्श रेखाओं की संख्या = 3 (2 उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ एवं उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा)

V. आकृति 14.05 (v) में दोनों वृत्त बाहर स्थित है अतः कुल उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या चार है। यहाँ 2 उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ एवं 2 उभयनिष्ठ तिर्यक रेखाएँ है।

bl i dk j t c $C_1C_2 > r_1 + r_2$ तब कुल उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 4 (2 उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएं एवं 2 उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएं) आइए अगले अनुच्छेद में उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा एवं उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा के रचना करना सीखते हैं।

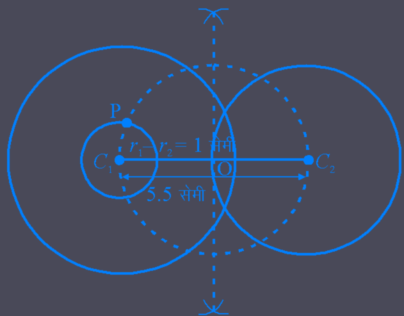
निर्मेय–5. दो भिन्न त्रिज्या वाले वृत्तों के केन्द्रों की दूरी ज्ञात हो, तो दोनों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा की रचना करना

(i) रचना – $C_1C_2 = 5.5$ सेमी का एक रेखाखण्ड खींचकर C_1 व C_2 पर क्रमशः $r_1 = 3.5$ सेमी और $r_2 = 2.5$ सेमी. त्रिज्या के दो वृत्तों की रचना की।



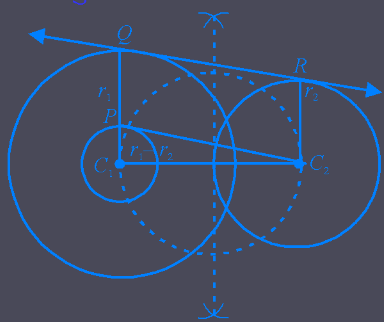
आकृति 14.06

(ii) दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर $r_1 - r_2 = 3.5 - 2.5 = 1$ सेमी की त्रिज्या का एक वृत्त बडे वृत्त के केन्द्र C_1 पर क बनाया और C_1C_2 का समद्विभाजन बिन्दु O प्राप्त कर O से $OC_1 = OC_2$ की त्रिज्या लेकर डोटेड वृत्त बनाया जो $r_1 - r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त को P पर काटता है।



आकृति 14.07

(iii) PC_2 को मिलाकर $r_1 - r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त C_2 से PC_2 स्पर्श रेखा खींची। C_1P को मिलाते हुए C_1Q रेखा खींची जो r_1 त्रिज्या वाले वृत्त को Q पर काटती है PC_2 के समान चाप लेकर Q को केन्द्र मान कर r_2 त्रिज्या वाले वृत्त का प्रतिच्छेदी बिन्दु R प्राप्त किया। QR का मिलाया QR ही अभीष्ट उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा है।



आकृति 14.08

नोटः आप ध्यान से देखेगें तो $PQRC_2$ एक आयत दिखाई देता है अर्थात् QR पर दोनों वृत्तों की त्रिज्याएं r_1 व r_2 लम्ब है। इसीलिए QR ही दोनों वृत्तो की अभीष्ट उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा कही जा सकती है। ऐसा ही उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा C_1C_2 के दूसरी आरे भी खींची जा सकती है।

ध्यान देने योग्य बिन्दु– उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा की रचना करने के लिए

(i) $r_1 - r_2$ ज्ञात करना होता है।

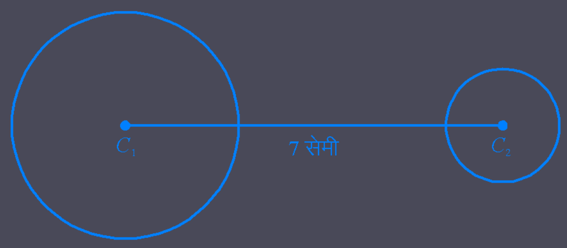
(ii) $r_1 - r_2$ त्रिज्या का वृत्त, बडे वृत्त के केन्द्र से बनाया जाता है

(iii) यदि दोनों वृत्तों की त्रिज्याऐं समान हो तो C_1 व C_2 पर सीधे r_1 व r_2 लम्ब खींचकर दोनों वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मिलाकर उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा खींची जाती है।

निर्मेय–6. दो भिन्न त्रिज्या वाले वृत्तों के केन्द्रों की दूरी ज्ञात है पर उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना करना।

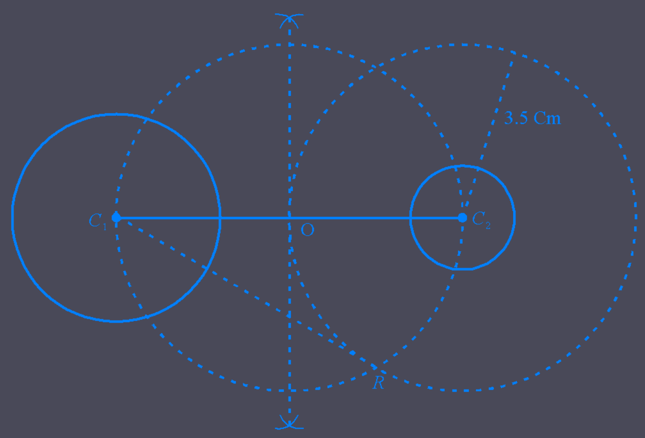
उदाहरण: दो वृत्त 2.5 सेमी एवं 1 सेमी त्रिज्याओं के केन्द्र परस्पर 7 सेमी दूरी पर है, एक उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

(i) $C_1C_2 = 7$ सेमी का एक रेखाखण्ड खींचकर C_1 व C_2 पर क्रमश: 2.5 सेमी एवं 1 सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों की रचना की।



आकृति 14.09

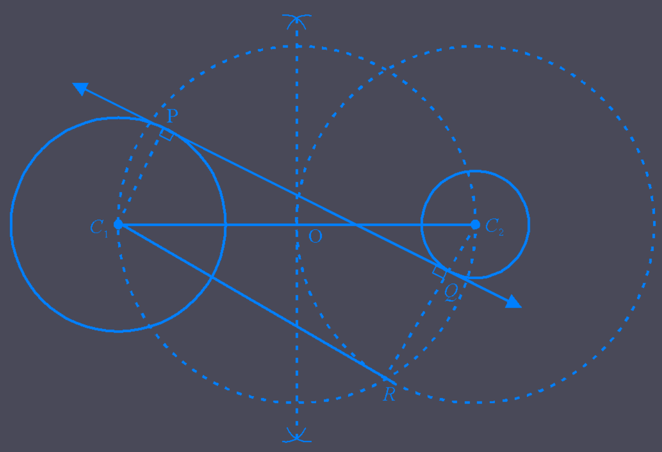
(ii) दोनो वृत्तों की त्रिज्याओं का योग $r_1 + r_2 = 2.5 + 1.00 = 3.5$ सेमी त्रिज्या का डोटेड वृत्त केन्द्र C_2 पर (छोटे वृत्त के केन्द्र पर) खींचा। C_1C_2 का समद्विभाजक बिन्दु O प्राप्त कर एक वृत्त $OC_1 = OC_2$ त्रिज्या लेकर एक और डोटेड वृत्त खींचा जो $r_1 + r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त को R पर काटता है। C_1R को मिलाकर $r_1 + r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त की स्पर्श रेखा खींची।



आकृति 14.10

(iii) RC_2 को मिलाया जो r_2 त्रिज्या वाले छोटे वृत्त को Q पर काटता है RC_1 त्रिज्या लेकर Q को केन्द्र मानकर r_1 त्रिज्या लेकर Q को केन्द्र मानकर r_1 त्रिज्या वाले वृत्त पर चाप काटा जो P पर काटता है।

PQ को मिलाया। यही r_1 व r_2 त्रिज्या वाले वृत्तों के लिए उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा है।



आकृति 14.11

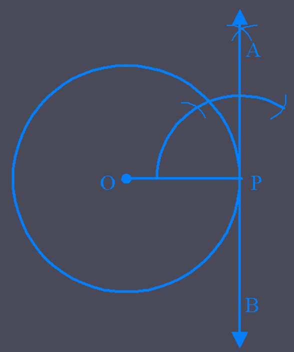
दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक 2.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

हल: (i) 2.5 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त बनाया जिसका केन्द्र O है।

(ii) इस वृत्त पर एक बिन्दु P लिया जिसे केन्द्र O से मिलाया

(iii) बिन्दु P पर OP लम्ब की रचना कीजिए अर्थात् $\angle OPA = 90°$ का बनाइए AP को आगे B तक बढ़ाइए इस प्रकार APB ही अभीष्ट स्पर्श रेखा है।



आकृति 14.12

उदाहरण-2. एक 2.8 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत बनाइए तथा जिसके केन्द्र से 4.3 सेमी दूर स्थित बिन्दु P से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएं खींचीए और उन्हें मापकर दोनों बराबर है की जाँच कीजिये।

हल: (i) 2.8 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत बनाया जिसका केन्द्र O है

(ii) 0 से 4.3 दूर P लेकर OP को मिलाया

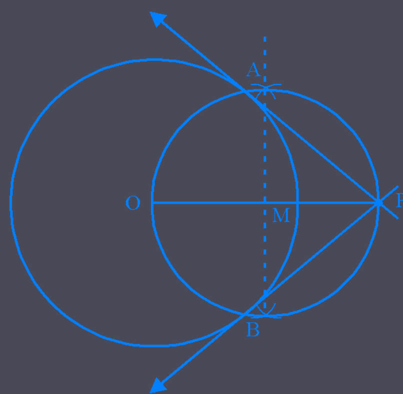
(iii) OP का लम्ब समद्विभाजक खींचकर OP का मध्य बिन्दु M प्राप्त किया।

(iv) M को केन्द्र मानकर OM = PM त्रिज्या लेकर एक वृत की रचना की जो दिए गए वृत्त को A व B पर काटता है।

(v) A व B को क्रमशः P से मिलाया।

PA व PB की वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से खींची गई अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ है।

यहाँ PA = PB = 3.2 सेमी है। अर्थात् दोनों स्पर्श रेखाएँ बराबर माप की है।

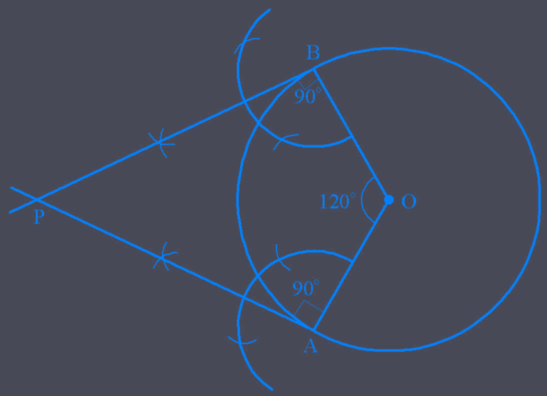


आकृति 14.13

उदाहरण-3. एक 3 सेमी त्रिज्या का वृत बनाकर केन्द्र O पर OA व OB त्रिज्याएँ परस्पर $120°$ कोण बनाती है की रचना कर A व B पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

हल: (i) 3 cm त्रिज्या का वृत बनाकर O पर $120°$ का कोण बनाते हुए OA व OB त्रिज्याएँ खींची।

(ii) A व B पर लम्ब क्रमशः PA एवं PB की रचना की PA व PB ही अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ है।



आकृति 14.14

उदाहरण-4. एक 4 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर बाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाओं PA, PB की रचना कीजिए जहाँ PA तथा PB के मध्य का कोण 80° है।

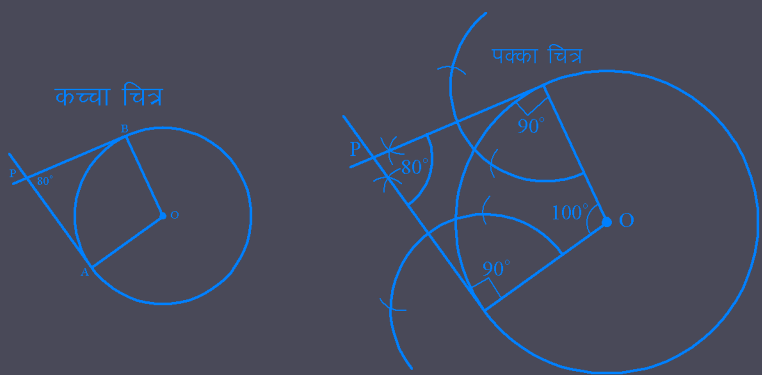
हल: चूंकि $\angle APB = 80°$ दिया हुआ

$\angle A = \angle B = 90°$

अतः चतुर्भुज AOBP का चौथा कोण

$\angle AOB = 360 - (80 + 90 + 90) = 360 - 260 = 100°$

अर्थात् जीवा OA व OB के मध्य $\angle AOB = 100°$



(i) (ii)

आकृति 14.15

रचना – (i) 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाया एवं त्रिज्याएँ OA व OB के मध्य $100°$ का कोण बनाया

(ii) OA व OB के A व B पर लम्ब क्रमशः AP व BP खींचे जो एक दूसरे को P पर मिलते हैं

$\angle APB$ को मापने पर $\angle APB = 80°$ प्राप्त होता है। इस प्रकार अभीष्ट स्पर्श रेखाओं की रचना होती है।

उदाहरण-5. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएं 4 सेमी और 3 सेमी है। तथा दोनों के केन्द्रों की मध्य दूरी 6.5 सेमी है की रचना कर उन पर एक उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

हल: (i) $C_1C_2 = 6.5$ सेमी की रेखा खींच कर C_1 व C_2 पर क्रमशः 4 सेमी एवं 3 सेमी. त्रिज्या के दो वृत्त बनाएं

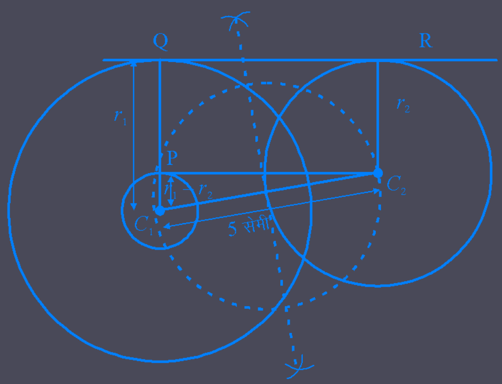
(ii) $r_1 - r_2 = 4 - 3 = 1$ सेमी की त्रिज्या का C_1 को केन्द्र मानकर बडे वृत्त के अन्दर एक वृत्त और बनाया।

(iii) $r_1 - r_2$ त्रिज्या वाले वृत्त पर निर्मय 13.3 का उपयोग कर PC_2 एक स्पर्श रेखा खींची

(iv) C_1 को P से मिलाते हुए C_1Q रेखा खींची जो r_1 त्रिज्या वाले वृत्त को Q पर काटती है।

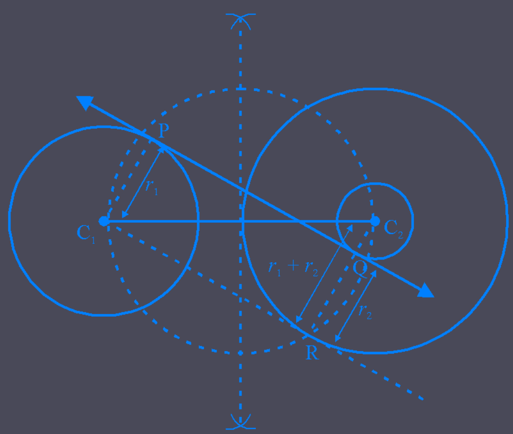
(v) PC_2 के बराबर चाप खोलकर बिन्दु Q से r_2 त्रिज्या वाले वृत्त पर चाप व वृत्त का प्रतिच्छेदी बिन्दु R प्राप्त किया

(vi) QR को मिलाए यही अभीष्ट उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है।



आकृति 14.16

उदाहरण-6. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 2.5 सेमी एवं 1.5 सेमी है जिनके केन्द्र 8 सेमी दूरी पर स्थित है। पर एक उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।



आकृति 14.17

रचना:

(i) $C_1C_2 = 8$ सेमी की रेखा खींचकर उसके दोनों सिरे पर क्रमशः 2.5 सेमी एवं 1.5 सेमी की त्रिज्याएँ लेकर वृत्त खींचे।

(ii) $r_1 + r_2 = 2.5 + 1.5 = 4$ सेमी त्रिज्या का छोटे वृत्त $r_2 = 1.5$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र C_2 से एक और वृत्त बनाया।

(iii) निर्मेय 13.3 का उपयोग करते हुए $r_1 + r_2 = 4$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर C_1 से स्पर्श रेखा C_1R की रचना की एवं R को C_2 से मिलाया तो इस प्रकार रेखा RC_2, $r_2 = 1.5$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त को प्रतिच्छेद करती हुई निकलती है। इस प्रतिच्छेद बिन्दु को Q नाम दिया।

(iv) RC_1 के बराबर लम्बाई लेकर Q से $r_1 = 2.5$ सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर प्रतिच्छेदी बिन्दु P प्राप्त किया P व Q को मिलाया। इस प्रकार PQ ही अभीष्ट उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा है।

प्रश्नमाला 14.1

1. 6.7 सेमी लम्बाई के एक रेखा खण्ड को 2:3 में विभाजित कीजिए।

2. एक रेखा खण्ड AB = 8.3 सेमी लम्बाई का बनाइए। रेखा खण्ड AB पर एक बिन्दु C ऐसा ज्ञात कीजिए कि $AC = \frac{1}{3}AB$ इसे सत्यापित भी कीजिए।

3. एक 2.8 सेमी के वृत्त की रचना कर उस पर स्थित बिन्दु P पर एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिये।
4. एक 3 सेमी त्रिज्या के व्यास के दोनों सिरों पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए। क्या वह परस्पर प्रतिच्छेद करेगी कारण सहित उत्तर लिखिए।
5. एक 3.1 सेमी त्रिज्या के वृत्त में एक 2.3 सेमी की जीवा काटिए और उसके दोनों सिरों पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।
6. एक 2.7 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना कीजिए। उस वृत्त पर एक स्पर्श रेखा खींचिए।
7. किसी बिन्दु O पर 2.4 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त बनाइए। इसमें 60° का कोण बनाती हुई दो त्रिज्याएँ OA और OB की रचना करके A व B पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए जो परस्पर T बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है कोण ATP को मापिए।
8. एक 3.2 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिएं उस पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार खींचिए कि वे परस्पर 70° का कोण बनाती हो।
9. एक वृत्त 3 सेमी त्रिज्या का खींचिए जिसके केन्द्र O से 5 सेमी दूर स्थित P से दो स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।
10. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 3 सेमी एवं 4 सेमी है। जिनके केन्द्रों के मध्य की दूरी 8 सेमी है। दोनों वृत्तों पर उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ कितनी खींची जा सकती है। तथा दो उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।
11. दो वृत्तों जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 1.7 सेमी. और 2.8 सेमी की है कि एक उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए जबकि दोनों के केन्द्र एक दूसरे से 6 सेमी दूरी पर है।

14.06 पहले त्रिभुज की रचना कर वृत्त की रचना करना

(A) परिवृत्त (परिगत वृत्त) की रचना

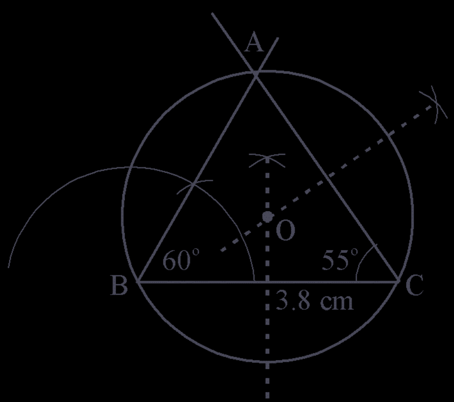
चूंकि परिकेन्द्र त्रिभुज की तीनों भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों के संगामी बिन्दु है तथा इसकी स्थिति त्रिभुजों की प्रकृति पर निर्भर करती है। अतः परिगत वृत्त की रचना के लिए निम्न चरणों पर ध्यान केन्द्रित करेंगे।

(i) त्रिभुज की दो भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक खींचकर परिकेन्द्र की रचना करते हैं।

(ii) प्राप्त परिकेन्द्र को केन्द्र मानकर किसी एक शीर्ष की दूरी तक त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना करते हैं। इस प्रकार प्राप्त वृत्त तीनों शीर्षों से होकर गुजरेगा। यही अभीष्ट परिगत वृत्त है।

I. त्रिभुज के परिकेन्द्र की स्थिति एवं परिगत वृत्त की रचना

उदाहरण-7. ΔABC की रचना कीजिए जिसमें भुजा BC = 3.8 सेमी, $\angle B = 60^\circ$ तथा $\angle C = 55^\circ$ हो। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की भी रचना कीजिए और परिकेन्द्र की स्थिति की जाँच कीजिए। (देखिए आकृति 14.16)



आकृति 14.18

रचना

(i) ΔABC की रचना दिए मापों के अनुसार की गई।

(ii) ΔABC की कोई दो भुजाएँ BC एवं AC लेकर लम्ब समद्विभाजक खींचिए परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। इस प्रकार O वृत्त का परिकेन्द्र प्राप्त हो चुका है।

(iii) O को केन्द्र मान कर त्रिभुज के शीर्ष में से किसी एक शीर्ष की परिकेन्द्र से दूरी की त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना की यही ΔABC का अभिष्ट परिवृत्त (परिगत वृत्त) है।

विशेषः ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है जिसका परिकेन्द्र त्रिभुज के अन्दर स्थित है।

उदाहरण-8. ΔABC की रचना कीजिए जिसकी भुजा BC = 4 सेमी $\angle B = 40^\circ$ एवं $\angle A = 90^\circ$ हो। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए और परिकेन्द्र की स्थिति की जाँच कीजिए।

रचना (देखिए आकृति 14.17)

(i) चूंकि त्रिभुज में $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (भुजा BC के C पर स्थित कोण ज्ञात करने के लिए)

अतः $\angle C = 180 - (\angle A + \angle B)$

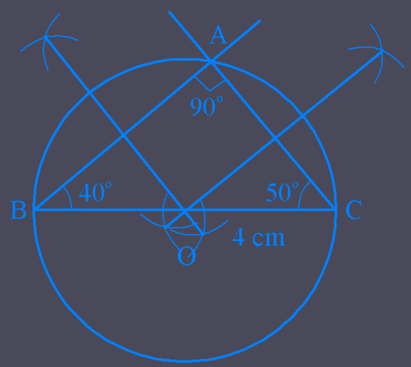
या $\angle C = 180 - (90 + 40) = 50^\circ$

(ii) ΔABC की BC=4 सेमी $\angle B = 40^\circ$ व $\angle C = 50^\circ$ का उपयोग कर रचना की। इस रचना से $\angle A = 90^\circ$ स्वतः प्राप्त होगा

(iii) AB एवं AC के लम्ब समद्विभाज खींच कर परिकेन्द्र O प्राप्त किया

(iv) परिकेन्द्र से एक शीर्ष A तक त्रिज्या लेकर एक वृत्त की रचना की जो ΔABC के सभी शीर्षों से गुजरता है।

यही ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त (परिगत) वृत्त है। ΔABC एक समकोण त्रिभुज है। जिसका परिकेन्द्र त्रिभुज के कर्ण BC पर स्थित है।



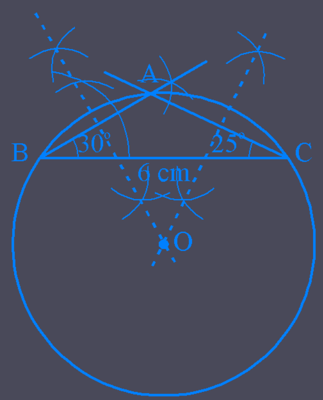
आकृति 14.19

उदाहरण-9. एक त्रिभुज ABC की रचना की रचना कीजिए जिसकी भुजा BC=6 सेमी $\angle B = 30^\circ$ एवं $\angle C = 25^\circ$ इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए और परिकेन्द्र स्थिति का पता लगाइए।

(i) दिए मापों के आधार पर त्रिभुज ABC की रचना की

(ii) AB एवं AC के लम्ब समद्विभाजक खींचे जो परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते है।

(iii) O को केन्द्र मान कर OC के बराबर त्रिज्या लेकर वृत्त की रचना की जो ΔABC के तीनों शीर्षों से गुजरता है। यह वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिगत वृत्त है।



आकृति 14.20

यहाँ ΔABC का परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर सबसे बडी भुजा की ओर स्थित है।

त्रिभुजों की प्रकृति के आधार पर इनके परिकेन्द्र की स्थितियाँ भिन्न–भिन्न रहती है।

(a) न्यूनकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के अन्दर स्थित होता है। देखिए उदाहरण–1 का आकृति 10.16

(b) समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के कर्ण पर स्थित होता है। देखिए उदाहरण–2 का आकृति 14.17

(c) अधिक कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर स्थित होता है। देखिए उदाहरण–3 का आकृति 14.18

(B) अन्तः वृत्त (अन्तर्गत वृत्त) की रचना

चूंकि अन्तः केन्द्र–त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजकों के संगमन बिन्दु है। अतः अन्तः वृत्त (अन्तर्गत वृत्त) की रचना के लिए सर्व प्रथम त्रिभुज का अन्तः केन्द्र प्राप्त करते हैं। इनके लिए

(i) दिये गए त्रिभुज के किन्हीं दो कोणों के समद्विभाजक खींचते हैं।

(ii) दोनों समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु (अन्तः केन्द्र) से त्रिभुज की एक भुजा पर लम्ब डालते हैं (किसी कोण का समद्विभाजक कोण की दोनों भुजाओं से समान दूरी पर स्थित बिन्दु है)

(iii) इस लम्ब की लम्बाई की त्रिज्या लेकर प्राप्त अन्तः केन्द्र से वृत्त खींचेंगे। यह वृत्तत्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता हुआ गुजरेगा यही दिए गए त्रिभुज का अभीष्ट अन्तर्गत वृत्त होगा।

आइए अंतर्गत वृत्त की रचना समझने के लिए निम्न उदाहरण का उपयोग करते हैं।

उदाहरण-10. ΔABC के अन्तर्गत वृत्त की रचना कीजिए, जबकि BC = 5.8 सेमी, AB = 5 सेमी और $\angle B = 55^\circ$ हो।

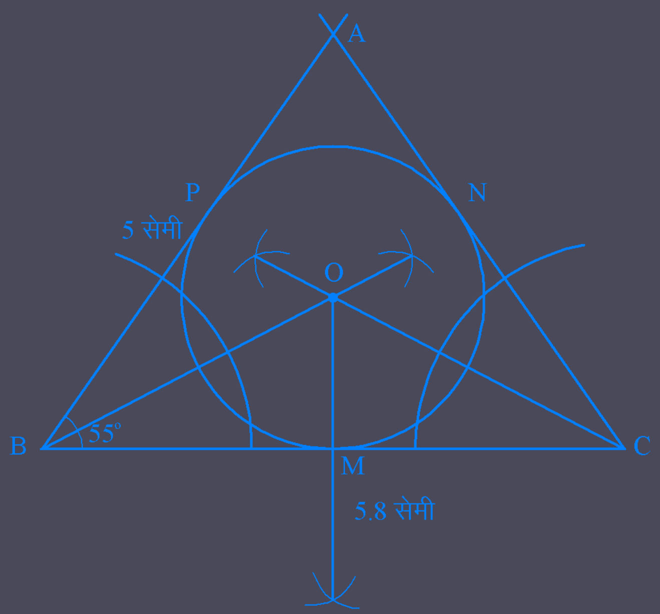
हल: प्रश्नानुसार ΔABC की रचना की (देखिए आकृति 14.19)

(ii) $\angle B$ व $\angle C$ के समद्विभाजक खींचे जो O पर मिलते हैं O D का अन्तः केन्द्र है।

(iii) अन्तः केन्द्र O से BC पर लम्ब OM खींचा

(iv) O को केन्द्र मान पर OM त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा जो ΔABC की भुजाएं AB, BC व CA को क्रमशः P, M, N पर स्पर्श करता हुआ गुजरता है।

यही ΔABC का अभीष्ट अन्तर्गत वृत्त है।



आकृति 14.21

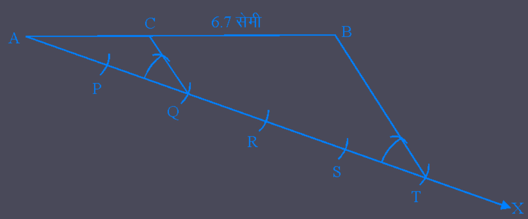
प्रश्नमाला 14.02

1. निम्न में सत्य अथवा असत्य बताइए और अपने उत्तर का यदि सम्भव हो तो कारण लिखिए
   (i) समबाहु त्रिभुज के अंतर्गत वृत्त एवं परिगत वृत्त की रचना, एक ही बिन्दु को केन्द्र मान कर की जा सकती है।
   (ii) त्रिभुज की सभी भुजाएं उसके अन्तर्गत वृत्त को स्पर्श करती है।
   (iii) त्रिभुज का परिकेन्द्र उसकी एक भुजा पर स्थित होता है, जब वह त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज होता है।
   (iv) त्रिभुज के परिकेन्द्र त्रिभुज की अन्दर स्थित होता है जब वह न्यून कोण त्रिभुज होता है।
   (v) त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की रचना त्रिभुज की दो भुजाओं के लम्ब व समद्विभाजकों के प्रतिछेदी बिन्दु को ज्ञात करके की जाती है।
2. 4.6 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की रचना कीजिए। क्या इसका परिकेन्द्र एवं अन्तः केन्द्र सम्पाती हैं? क्यों कारण सहित बताइए।
3. ΔABC के अन्तर्गत वृत्त की रचना कीजिए, जहाँ AB = 4.6 सेमी, AC = 4.2 सेमी एवं $\angle A = 90^\circ$ है।
4. एक त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए जिसकी भुजाए क्रमशः 5 सेमी, 12 सेमी व 13 सेमी है और बताइए कि इस त्रिभुज का परिकेन्द्र 13 सेमी वाली भुजा पर ही क्यों स्थित है?
5. 5 सेमी, 4.5 सेमी एवं 7 सेमी भुजाओं वाले त्रिभुज का परिकेन्द्र कहाँ स्थित होना चाहिए की पुष्टी रचना के द्वारा कीजिए साथ ही इसके परिगत वृत्त की भी रचना कीजिए।
6. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 6 सेमी, BC = 4 सेमी और $\angle B = 120^\circ$ हो त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की रचना कीजिए।

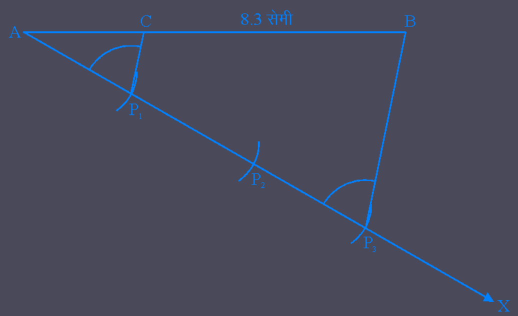
उत्तरमाला

प्रश्नमाला–14.1

1.



2.



सत्यापनः त्रिभुज ABP_3 में, $CP_1 \parallel BP_3$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{P_1P_3}{AP_1} \text{ (मूलभूत आनुपातिक प्रमेय से)}$$

$$\text{या } \frac{BC}{AC} + 1 = \frac{P_1P_3}{AP_1} + 1 \text{ या } \frac{BC + AC}{AC} = \frac{P_1P_3 + AP_1}{AP_1}$$

$$\text{या } \frac{AB}{AC} = \frac{AP_1 + P_1P_3}{AP_1} = \frac{3}{1} \text{ या } \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}$$

अतः रेखाखण्ड AB पर C एक ऐसा बिन्दु है कि $AC = \frac{1}{3}AB$

अन्य रचनाओं का निर्माण अध्यापक की सहायता से स्वयं कीजिए।

उत्तरमाला–14.2

(1) (i) सत्य, क्योंकि समबाहु त्रिभुज के अन्तः केन्द्र, परिकेन्द्र एवं लम्ब केन्द्र परस्पर सम्पाती होते हैं।
(ii) सत्य, क्योंकि अन्तर्गत वृत्त की रचना के लिए अन्तः केन्द्र से एक भुजा पर डाले गए लम्ब को त्रिज्या मान कर करते हैं।
(iii) असत्य– त्रिभुज का परिकेन्द्र केवल समकोण त्रिभुज के कर्ण पर स्थित होता है।
(iv) सत्य
(v) असत्य – अन्तः केन्द्र की रचना त्रिभुज के दो कोणों के अर्द्धकों के प्रतिच्छेदी बिन्दु को केन्द्र मान कर की जाती है।

4. क्योंकि 13 सेमी भुज समकोण त्रिभुज का कर्ण है और परिकेन्द्र समकोण त्रिभुज में कर्ण पर स्थित होता है।

QA8HCC

15

वृत्त की परिधि एवम् क्षेत्रफल (Circumference of a Circle and Area)

15.01 प्रस्तावना (Introduction)

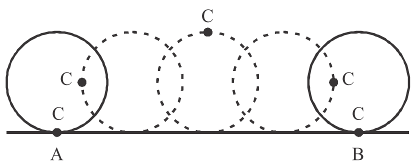
पूर्व अध्यायों में हम वृत्त सम्बन्धी विभिन्न परिभाषाओं एवम् वृत्त सम्बन्धित गुणधर्मों का अध्ययन कर चुके है इस अध्याय में कुछ वृत्ताकार आकृतियों के परिमाप व क्षेत्रफल से सम्बन्धित जानकारी प्राप्त करेंगे।

वृत्त किसी बिन्दु का बिन्दु पथ होता है जो किसी समतल में इस प्रकार गति करता है कि समतल में स्थित किसी नियत बिन्दु से इसकी दूरी सदैव समान रहे।

15.02 वृत्त की परिधि

QAHIDZ

वृत्त की परिधि का सन्निकट माप ज्ञात करने के लिए एक वृत्ताकार चकती (circular disc) की रिम पर कोई बिन्दु अंकित करें एक समतल पृष्ठ पर एक सरल रेखा पर इस प्रकार रखें कि बिन्दु C रेखा पर स्थित बिन्दु A पर स्पर्श करे। इस चकती को सावधानी पूर्वक इस प्रकार लुढकाएं कि पुनः बिन्दु C रेखा को B बिन्दु पर स्पर्श करे। देखिए आकृति 15.01



आकृति 15.01

अब रेखाखण्ड AB को नाप लें इस प्रकार रेखाखण्ड की लम्बाई उस वृत्ताकार चकती की परिधि के बराबर होती है अतः आप समझ गये होंगे कि पहिये द्वारा एक बार घूमने में तय की गई दूरी या वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उसका परिमाप होता है जिसे प्रायः परिधि (circumference) कहा जाता है।

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$ या $\pi \times d$

जहाँ $d = 2r$

दूसरे शब्दों में $\dfrac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

अतः वृत्त के अनुदिश एक पूरे चक्कर में तय की गई दूरी को वृत्त की परिधि कहते हैं।

नोटः ध्यान रखें कि वृत्त एवम् वृत्त की परिधि समानार्थी नहीं हैं, वृत्त समतल में बनी एक आकृति है, जबकि वृत्त की परिधि एक लम्बाई है वृत्त की परिधि व व्यास का अनुपात एक अचर राशि होती है जिसे π द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

π के मान की गणना महान भारतीय गणितिज्ञ आर्य भट्ट (499 AD) में की उन्होंने बताया कि $\pi = \dfrac{62832}{20,000}$ होता है जो लगभग 3.1416 के बराबर होता है। π एक अपरिमेय संख्या है परन्तु व्यवहारिक कार्यों के लिए π का मान लगभग 22/7 या 3.14 लेते हैं। कम्प्यूटर से π के मान की गणना दशमलव के 5,00,000 (आधा मिलियन) स्थान तक की जा चुकी है आकृति 15.02 में वृत्त $C(0, r)$ के लिए

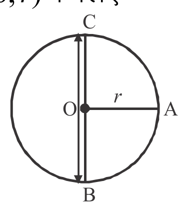
$\dfrac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

परिधि $= \pi \times$ व्यास

यदि वृत्त की परिधि को C तथा व्यास को D माने तो

$C = \pi \times D = \pi \times 2r$ $\quad$ ($\because$ व्यास $D = 2r$, r वृत्त की त्रिज्या है)

$= 2\pi r$



आकृति 15.02

15.03 वृत्त का क्षेत्रफल

यदि ग्राफ पेपर पर एक वृत्त बनाया जाए और वृत्त का क्षेत्रफल वृत्त में छोटे–छोटे वर्गों को गिनकर ज्ञात करें तो पाऐंगे कि

$$\frac{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}}{(\text{त्रिज्या})^2} = \pi$$

यदि वृत्त के क्षेत्रफल को A व त्रिज्या को r से व्यक्त करें तो

$$\frac{A}{r^2} = \pi$$

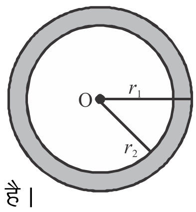
या $A = \pi r^2$

15.04 दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

संकेन्द्रीय वृत्तों से तात्पर्य ऐसे वृत्तों से हैं जिनका केन्द्र एक ही हो। यदि r_1 व r_2 दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ हैं $(r_1 > r_2)$ दोनों संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$$

$$= \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$$



आकृति 15.03

उपर्युक्त तथ्यों से महत्वपूर्ण परिणाम निकाले जा सकते हैं

(i) किसी पहिए द्वारा एक बार घूमने में तय की गई दूरी उसकी (पहिए की) परिधि या परिमाप के बराबर होती है।

(ii) पहिए द्वारा एक मिनट में लगाए गए चक्करों की संख्या $= \dfrac{\text{एक मिनट में तय की गई दूरी}}{\text{परिधि}}$

(iii) वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है।

उदाहरण-1. निम्नलिखित वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए जबकि

(i) वृत्त की परिधि 132 सेमी है।

(ii) वृत्त की परिधि 176 सेमी है।

हल: (i) वृत्त की परिधि $= 132$ सेमी

$$2\pi r = 132 \quad [\text{जहाँ } r = \text{वृत्त की त्रिज्या}]$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 132$$

$$r = \frac{132 \times 7}{2 \times 22}$$

$$\text{त्रिज्या} = \frac{42}{2} = 21 \text{ सेमी}$$

(ii) वृत्त की परिधि $= 176$ सेमी

$$2\pi r = 176$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 176 \quad [\text{वृत्त की त्रिज्या} = r]$$

$$\text{वृत्त की त्रिज्या} = \frac{176 \times 7}{2 \times 22} = \frac{56}{2} = 28 \text{ सेमी}$$

उदाहरण-2. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है

हल: वृत्त की त्रिज्या =7 सेमी

वृत्त की क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 22 \times 7$$

$= 154$ सेमी²

उदाहरण-3. एक साईकिल का पहिया 11 km चलने में 5000 चक्कर लगाता है तो पहिए का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल: पहिये द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी $= \dfrac{\text{चली गई दूरी}}{\text{चक्करों की संख्या}}$

$$= \frac{11}{5000} \text{km}$$

$$= \frac{11}{5000} \times 1000 \times 100$$

$= 220$ सेमी

माना पहिये की त्रिज्या $= r$ सेमी

परिधि $= 220$ सेमी

$2\pi r = 220$ सेमी

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$ सेमी

$r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35$ सेमी

व्यास $= 2r = 2 \times 35$ सेमी

$= 70$ सेमी

प्रश्नमाला 15.1

1. एक वृत्त की त्रिज्या 3.5 सेमी है। वृत की परिधि तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक वृत्त की परिधि 44 मीटर है वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक अर्धवृत्ताकार प्लाट की त्रिज्या 21 मीटर है। इसका क्षेत्रफल व परिमाप ज्ञात कीजिए।
4. 100 चक्कर में एक स्कूटर का पहिया 88 मीटर की दूरी तय करता है। इस पहिये की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
5. एक वृत्ताकार प्लेट का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी है। इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।
6. एक वृत्त की परिधि एक वर्ग के परिमाप के बराबर है। यदि वर्ग का क्षेत्रफल 484 वर्ग मीटर हो तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. एक वृत्ताकार खेत पर 24 रु. प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय 5280 रु. है। इस क्षेत्र की 0.50 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से जुताई कराई जानी है। खेत की जुताई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
8. एक वृत्ताकार घास के मैदान की त्रिज्या 35 मीटर है। इसके बाहर चारों ओर 7 मीटर चौडा मार्ग बना हुआ है।मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा।

   (A) πR^2 (B) $\pi(R+r)(R-r)$ (C) $\pi(R^2-r)$ (D) इनमें से कोई नहीं
10. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 4 सेमी व 3 सेमी. है इन वृत्तों से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्न में से होगा

    (A) 22 सेमी² (B) 12 सेमी² (c) 32 सेमी² (d) 18 सेमी²

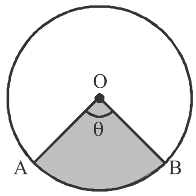
15.05 वृत्त के त्रिज्यखण्ड एवम् वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

किसी भी वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे हुए क्षेत्र को वृत्त का त्रिज्य खण्ड कहते हैं।

आकृति 15.04 में वृत्त $(0, r)$ का एक त्रिज्य खण्ड AOB लीजिए। माना कि $\angle AOB = \theta$ है तथा $\theta < 180^\circ$ जब कोण θ का मान बढ़ता है तो चाप AB की लम्बाई भी उसी अनुपात में बढेगी। जब कोई चाप वृत्त के केन्द्र पर 180° का कोण आन्तरित करता है तो चाप की लम्बाई = अर्धवृत्त के चाप की लम्बाई $= \pi r$

$\because$ केन्द्र पर 180° अन्तरित करने वाले चाप की लम्बाई $= \pi r$ है

चाप की लम्बाई जो केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करता है।



आकृति 15.04

$$= \frac{\pi r \theta}{180} = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$$

या $$L = 2\pi r \times \frac{\theta}{360} \quad \ldots (i)$$

इसी प्रकार जब कोई चाप वृत्त के केन्द्र पर 180° का कोण अन्तरित करता है तो उसके संगत त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2}{2}$

यदि चाप वृत्त के केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करता है तो संगत

त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $$A = \frac{\pi r^2 \theta}{2 \times 180} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}.$$

या $$A = \pi r^2 \times \frac{\theta}{360} \quad \ldots (ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से हम ज्ञात कर सकते है।

$$A = \frac{1}{2} L \times r$$

नोटः यहाँ कोण θ डिग्री में लिया जाता है।

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

(i) घड़ी के मिनट की सूई 1 मिनट में 6° के कोण से घूमती है।

(ii) घड़ी के घंटे की सूई 1 मिनट में $1/2^\circ$ कोण से घूमती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक वृत्त के चाप की लम्बाई 4 सेमी और त्रिज्या 6 सेमी है। वृत्त के त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः दिया है वृत्त के चाप की लम्बाई = 4 सेमी.

वृत्त के त्रिज्या = 6 सेमी.

हम जानते है कि त्रिज्य खण्ड के चाप की लम्बाई $= \frac{\pi r \theta}{180}$

$$4 = \frac{\pi \times 6 \times \theta}{180}$$

$$4 \times 180 = \pi \times 6 \times \theta$$

$$\theta = \frac{4 \times 180}{\pi \times 6}$$

$$\theta = \frac{4 \times 30}{\pi} = \frac{120}{\pi}$$

अतः त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2 \theta}{360} = \dfrac{\pi \times (6)^2 \times \left(\dfrac{120}{\pi}\right)}{360} = \dfrac{6 \times 6 \times 120}{360}$

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{6 \times 6}{3} = \dfrac{36}{3} = 12$ वर्ग सेमी (इसे सीधे $A = \dfrac{1}{2} L \times r$ से भी कर सकते हैं)

उदाहरण-2. वृत्त के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण 50° है। यदि चाप की लम्बाई 5π सेमी. हो, तो चाप द्वारा बने लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः वृत्त के चाप की लम्बाई $L = 5\pi$ सेमी.

त्रिज्य खण्ड का कोण $\theta = 50^\circ$

चाप की लम्बाई $L = \dfrac{\pi r \theta}{180}$

$r = \dfrac{5\pi \times 18}{50\pi} = 18$ सेमी

त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} L \times r$

$= \dfrac{1}{2} \times 5\pi \times 18 = 45\pi$ सेमी²

$= 45 \times 3.14 = 140.3$ सेमी²

उदाहरण-3. एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी. है और त्रिज्य खण्ड का कोण 90° है वृत्त के लघु त्रिज्य खण्ड के चाप की लम्बाई तथा उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right)$

हलः वृत्त की त्रिज्या = 7 सेमी.

त्रिज्यखण्ड का कोण = 90°

त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई $L = \dfrac{\pi r \theta}{180^\circ} = \dfrac{22}{7} \times \dfrac{7 \times 90}{180}$

$L = 11$ सेमी.

वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times L \times r$

$= \dfrac{1}{2} \times 11 \times 7 = \dfrac{77}{2} = 38.5$ सेमी²

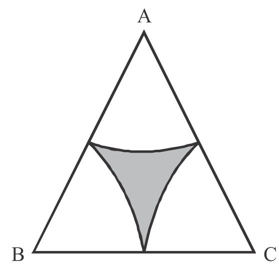
उदाहरण-4. दी गई आकृति में ABC एक समबाहु त्रिभुज है। जिसकी एक भुजा 20 सेमी. है त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष से 10 सेमी. त्रिज्या के चाप खींचे गये हैं छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ व $\sqrt{3} = 1.73$ लीजिए)

हलः समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई (a) = 20 सेमी.

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (20)^2$ (समबाहू त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ भुजा²)

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 20 \times 20$

$= 1.73 \times 100 = 173$ सेमी²



आकृति 15.05

समबाहू त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60°होता है अतः तीनों त्रिज्य खण्डों का क्षेत्रफल समान होगा तीनों त्रिज्य खण्डों का क्षेत्रफल

$$= 3 \times \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$$

$$= \frac{3 \times 3.14 \times 10^2 \times 60}{360}$$

$= 157$ सेमी²

छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= (173 - 157) = 16$ सेमी²

उदाहरण-5. एक घड़ी के घंटे की सूई 6 सेमी. लम्बी है। 90 मिनट में इस सूई द्वारा बनाये गये त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: घन्टे की सूई की लम्बाई $= 6$ सेमी.

अतः घन्टे की सूई 6 सेमी. त्रिज्या का त्रिज्यखण्ड बनायेगी

घंटे की सूई द्वारा 12 घण्टे में बनाया गया कोण $= 360^\circ$

घंटे की सूई द्वारा 1 घंटे में बनाया गया कोण $= \frac{360}{12} = 30^\circ$

घंटे की सूई द्वारा 1 मिनट में बनाया गया कोण $= \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

अतः घंटे की सूई द्वारा 90 मिनट में बनाया गया कोण $= \frac{1}{2} \times 90 = 45^\circ$

घंटे की सूई द्वारा निर्मित त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times 6^2 \times 45}{360} = \frac{22 \times 6 \times 6 \times 45}{7 \times 360}$$

$$= \frac{22 \times 36}{7 \times 8} = \frac{792}{56} = 14.14 \text{ सेमी}^2$$

घंटे की सूई द्वारा निर्मित त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= 14.14$ सेमी²

QB1AHA

15.06 वृत्तखण्ड (Segment) का क्षेत्रफल

वृत्त की प्रत्येक जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करती है इनमें से प्रत्येक भाग को वृत्त खण्ड कहते है। बड़े भाग को दीर्घ वृत्त खण्ड व छोटे भाग को लघु वृत्त खण्ड कहते है।

आकृति में वृत्त का केन्द्र O है तथा त्रिज्या r है। मानाकि जीवा PQ वृत्त को दो वृत्तखण्डों में विभाजित करती है। हमें लघुवृत्त खण्ड PRQ का क्षेत्रफल ज्ञात करना है। मानाकि $\angle POQ = \theta^\circ$ है

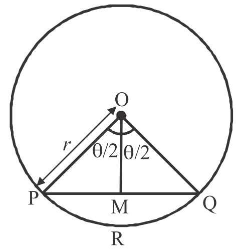
तो $\angle POM = \angle QOM = \frac{\theta}{2}$

त्रिज्य खण्ड OPRQ का क्षेत्रफल = वृत्त खण्ड PRQ का क्षेत्रफल + Δ POQ का क्षेत्रफल

$\therefore$ वृत्तखण्ड PRQ का क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड OPRQ का क्षेत्र $-\Delta$ POQ का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} PQ \times OM$$

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} \times 2PM \times OM$$



आकृति 15.06

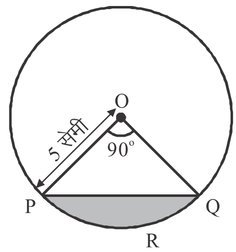
$$=\frac{\pi r^2\theta}{360}-r\sin\frac{\theta}{2}\times r\cos\frac{\theta}{2}$$

वृत्तखण्ड PRQ का क्षेत्रफल $=\frac{\pi r^2\theta}{360}-\frac{r^2}{2}\sin\theta \qquad \left[\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$

उदाहरण-6. 5 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त की जीवा वृत्त के केन्द्र पर समकोण बनाती है। इस जीवा द्वारा बने लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त की त्रिज्या = 5 सेमी., जीवा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बना कोण $=90^\circ$

त्रिज्यखण्ड OPRQ का क्षेत्रफल $=\frac{\pi r^2\theta}{360}$



आकृति 15.07

$$=\frac{\frac{22}{7}\times(5)^2\times 90}{360}$$

$$=\frac{22\times25\times90}{7\times360}=\frac{550}{28}=19.64\,\text{cm}^2$$

Δ POQ का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times OP\times OQ$

$$=\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}=12.50 \text{ वर्ग सेमी}$$

$\therefore$ लघु वृत्त खण्ड PRQ का क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड OPRQ का क्षेत्रफल $-\Delta$ POQ का क्षेत्रफल

$$=19.64-12.50=7.14\,\text{cm}^2$$

अतः लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल = 7.14 वर्ग सेमी

[इसे सीधे लघुवृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $=\frac{\pi r^2\theta}{360}-\frac{1}{2}r^2\sin\theta$ से भी कर सकते है]

उदाहरण-7. 14 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा वृत्त के केन्द्र पर 30° का कोण बनाती है इससे बनने वाले लघु वृत्त खण्ड और दीर्घ वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$

हल: वृत्त की त्रिज्या $(r)=14$ सेमी.

जीवा द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण $\theta=30^\circ$

हम जानते है लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $=\frac{\pi r^2\theta}{360}-\frac{1}{2}r^2\sin\theta$

$$=\frac{\frac{22}{7}\times14\times14\times30}{360}-\frac{1}{2}\times14\times14\sin30$$

$$=\frac{22\times2\times14}{12}-\frac{1}{2}\times196\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{616}{12}-49=51.33-49$$

$=2.33$ सेमी²

दीर्घ वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 - 2.33 = \frac{22}{7} \times (14)^2 - 2.33$$

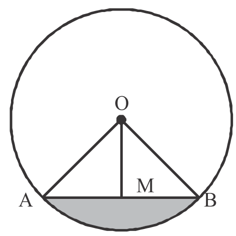
$$= \frac{22 \times 14 \times 14}{7} - 2.33$$

$$= 22 \times 2 \times 14 - 2.33$$

$$= 616 - 2.33$$

$= 613.67$ सेमी²

उदाहरण-8. त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की जीवा केन्द्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए)



आकृति 15.08

हल: यहाँ $r = 12$ सेमी और $\theta = 120^\circ$ है

संगत वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

= लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखण्ड OAB का क्षेत्रफल – Δ OAB का क्षेत्रफल . . . (i)

त्रिज्यखण्ड OAB का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 = \frac{120}{360} \times 3.14 \times 12 \times 12$

$= 3.14 \times 48$ सेमी² . . . (ii)

Δ OAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए OM $\perp$ AB

AM = BM तथा $\angle AOM = \angle BOM = 60^\circ$

अब $\frac{OM}{OA} = \cos 60^\circ$ $\therefore$ $OM = OA \cos 60^\circ$

$$= 12 \times \frac{1}{2} = 6 \text{cm}$$

$$\frac{AM}{OA} = \sin 60^\circ$$

अतः $AM = OA \sin 60^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ सेमी $= 6\sqrt{3}$ सेमी

$AB = 2 \times 6\sqrt{3}$ सेमी $= 12\sqrt{3}$ सेमी

Δ OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times OM = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 6 = 36\sqrt{3}$ सेमी² . . . (iii)

अतः समीकरण (i), (ii) व (iii) से

संगत वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \left(3.14 \times 48 - 36\sqrt{3}\right)$ सेमी²

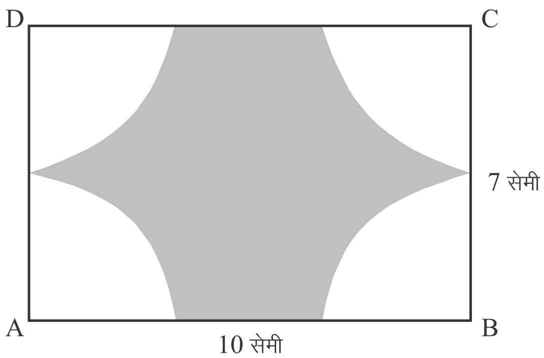
$= (3.14 \times 48 - 36 \times 1.73)$ सेमी²

$= 12(12.56 - 3 \times 1.73)$ सेमी²

$= 12(12.56 - 5.19) = 88.44$ सेमी²

प्रश्नमाला 15.2

1. एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है तथा चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 60° है। चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
2. एक वृत्त की त्रिज्या 10.5 सेमी और त्रिज्यखण्ड का कोण 45° है। लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right)$
3. एक वृत्त के चाप की लम्बाई 12 सेमी. और त्रिज्या 7 सेमी. है। वृत्त के लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. त्रिज्या 121 सेमी. वाले वृत्त का चाप केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए–
   (i) चाप की लम्बाई
   (ii) चाप द्वारा बनाये गये त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल
   (iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गये वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल
5. एक घड़ी की मिनट की सूई 10.5 सेमी. लम्बी है। मिनट की सूई द्वारा 10 मिनट में बनाए गए त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right)$
6. 3.5 सेमी. त्रिज्या के वृत्त में एक जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 90° है इस जीवा द्वारा बने लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right)$
7. एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 सेमी. है।
8. एक घड़ी के घण्टे की सूई 5 सेमी. लम्बी हैं 7 मिनट में इस सूई द्वारा बनाए गये त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. दी गई आकृति 15.9 में ABCD एक आयत है। भुजा AB = 10 सेमी BC = 7 सेमी है। आयत के प्रत्येक शीर्ष पर 3.5 सेमी. त्रिज्या के वृत्त खींचे गए हैं छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right)$



आकृति 15.9

15.07 समतलीय आकृतियों के संयोजन के क्षेत्रफल

संयोजन से तात्पर्य दो या दो से अधिक समतलीय आकृतियों को एक साथ मिलाकर नई आकृति बनाने से है। अभी तक वृत्त से संबंधित पृथक–2 आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात किया गया है। अब समतल आकृतियों के कुछ संयोजनों (combination) के क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे। हमें इस प्रकार की रोचक आकृतियाँ दैनिक जीवन में तथा विभिन्न रोचक डिजाइनों के साथ देखने को मिलती है। मेज पर ढका गया मेजपोश, फूलों की क्यारियाँ, खिडकियों के डिजाइन, मेजपोशों पर बने डिजाइन आदि ऐसी आकृतियों के उदाहरण है। आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए निम्न उदाहरण दिए गए है।

उदाहरण-9. 58 मीटर वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के सिरों पर दो वृत्ताकार भाग जोड़ने का प्रस्ताव है। प्रत्येक वृत्त का केन्द्र वर्ग के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु है पूरे मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वर्ग के विकर्ण की लम्बाई $=\sqrt{58^2+58^2}=58\sqrt{2}$ मीटर

अत: उस वृत्त की त्रिज्या जिसका केन्द्र वर्ग के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु है $=\dfrac{58\sqrt{2}}{2}=29\sqrt{2}$ मीटर

एक वृत्ताकार सिरे का क्षेत्रफल $=29\sqrt{2}$ मीटर त्रिज्यावले वृत्त में 90° कोण वाले वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

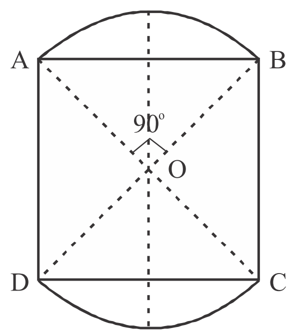
$$=\left[\frac{\pi r^2\theta}{360}-r^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]=\left[\frac{\pi\theta}{360}-\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right]r^2$$

$$=\left[\frac{22}{7}\times\frac{90}{360}-\sin 45^\circ\cos 45^\circ\right]\left(29\sqrt{2}\right)^2 \text{ सेमी}^2$$

$$=\left[\frac{11}{14}-\frac{1}{2}\right]\times 29\times 29\times 2 \text{ सेमी}^2$$

$$=29\times 29\times 2\times\frac{4}{14} \text{ सेमी}^2$$

$$=\frac{3364}{7} \text{ सेमी}^2$$



आकृति 15.10

पूरे घास के मैदान का क्षेत्रफल

= वर्ग का क्षेत्रफल + 2 (वृत्ताकार सिरों का क्षेत्रफल)

$$=\left[58\times 58+2\times\frac{3364}{7}\right] \text{ सेमी}^2$$

$$=3364\left[1+\frac{2}{7}\right] \text{ सेमी}^2$$

$$=3364\times\frac{9}{7} \text{ सेमी}^2$$

$$=4325.14 \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण-10. एक 42 मी. व्यास के वृत्ताकार घास के मैदान के बाहर चारों ओर 3.5 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते में ₹ 4 प्रति वर्ग मीटर की दर से कंकड बिछवाने का खर्च ज्ञात कीजिए।

हल: मैदान का व्यास = 42 मी.

∴ मैदान की त्रिज्या = 21 मी.

रास्ते सहित मैदान की त्रिज्या $=(21+3.5)=24.5$ मी.

रास्ते का क्षेत्रफल $=\left[\pi(24.5)^2-\pi(21)^2\right]$ मी²

$$=\pi\left[(24.5)^2-(21)^2\right] \text{ मी}^2$$

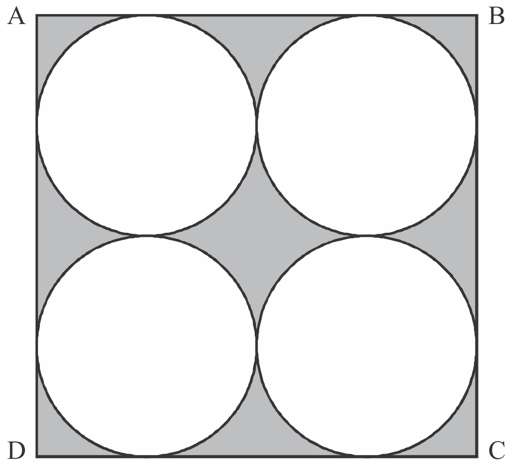
$$=\pi\left[(24.5+21)(24.5-21)\right] \text{ मी}^2$$

$$=\pi\left[45.5\times 3.5\right] \text{ मी}^2$$

$$=\frac{22}{7}\times 45.5\times 3.5 \text{ मी}^2=500.5 \text{ मी}^2$$

रास्ते में कंकड बिछवाने का खर्च $=500.5\times 4=2002$ ₹

उदाहरण-11. आकृति 15.11 में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ ABCD भुजा 14 सेमी. का एक वर्ग है।



आकृति 15.11

हल: वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= 14 \times 14$ सेमी$^2 = 196$ सेमी^{2}

प्रत्येक वृत्त का व्यास $= \frac{14}{2}$ सेमी. $= 7$ सेमी

$\therefore$ प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या $= \frac{7}{2}$ सेमी.

अतः एक वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ सेमी^{2}

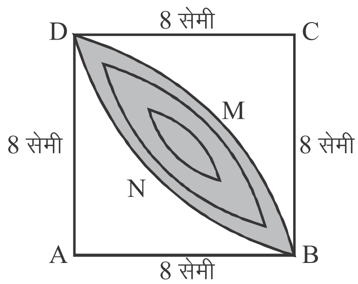
$= \frac{154}{4} = \frac{77}{2}$ सेमी^{2}

चारों वृत्तों का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{77}{2} = 154$ सेमी^{2}

छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= (196 - 154) = 42$ सेमी^{2}

उदाहरण-12. आकृति में छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो त्रिज्याओं 8 सेमी. वाले दो वृत्तों के चतुर्थांशों के बीच का उभयनिष्ठ भाग है।



Downloaded from https:// www.studiestoday.com

हल: यहाँ चतुर्थांश ABMD और BNDC की त्रिज्याऐं 8 सेमी है।

उनके क्षेत्रफलों का योग $= 2\times\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$

$$= \left[\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times 64\right]$$

$$= \frac{704}{7} \text{ सेमी}^2$$

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= (8\times 8)$ सेमी² $= 64$ सेमी²

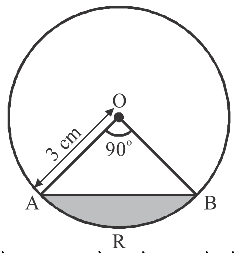
डिजाइन वाले भाग का क्षेत्रफल = छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= चतुर्थांश के क्षेत्रफलों का योग – वर्ग ABCD का योग

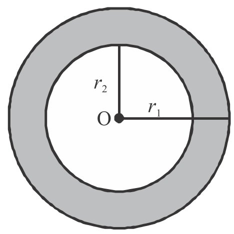
$$= \left[\frac{704}{7} - 64\right]\text{सेमी}^2 = \left[\frac{704-448}{7}\right]\text{सेमी}^2 = \frac{256}{7}\text{ सेमी}^2$$

प्रश्नमाला 15.3

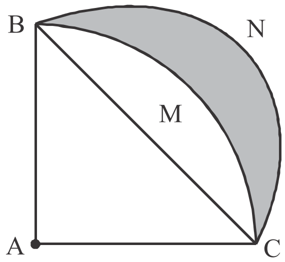
1. 14 सेमी भुजा के वर्ग में बने अन्तः वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।
2. किसी वृत्त की परिधि व त्रिज्या का अन्तर 74 सेमी है उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. दी गई आकृति 15.14 में वृत्त का केन्द्रO है। $\angle AOB = 90^\circ$ तथा OA = 3 सेमी. है तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



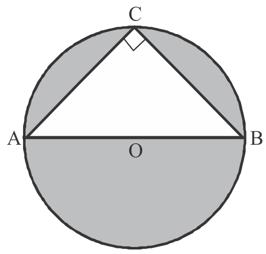
4. यदि एक वृत्त का परिमाप एक वर्ग के परिमाप के बराबर है। तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. एक वृत्ताकार पार्क की त्रिज्या 3.5 मीटर है। पार्क के चारों ओर 1.4 मीटर चौडा फुटपात बना हुआ है फुटपात का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



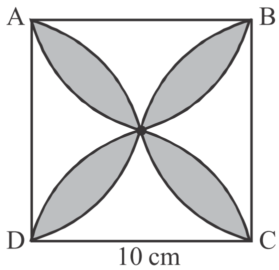
6. त्रिज्या 8 cm वाले एक वृत्त के अन्तर्गत खींचे जा सकने वाले वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. दी गई आकृति 15.16 में ABMC त्रिज्या 14 सेमी. वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मानक एक अर्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



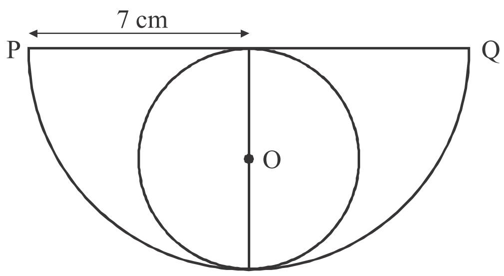
8. दी गई आकृति में AB का व्यास है AC = 6 सेमी. और BC = 8 सेमी तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



9. दी गई आकृति में छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ ABCD भुजा 10 सेमी. का एक वर्ग है तथा इस वर्ग की प्रत्येक भुजा को व्यास मानकर अर्धवृत्त खींचे गए है $(\pi = 3.14)$



10. दी गई आकृति में अर्धवृत्त की त्रिज्या 7 सेमी. है अर्धवृत्त में बने वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



11. यदि R_1 व R_2 त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों की परिधियों का योग R त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि के बराबर हो तो सही विकल्प है

(A) $R_1 + R_2 = R$ (B) $R_1 + R_2 > R$

(C) $R_1 + R_2 < R$ (D) निश्चित कुछ नहीं कहा जा सकता

12. 14 सेमी भुजा वाले वर्ग में बने अन्तः वृत्त की परिधि होगी।

(A) 22 सेमी (B) 44 सेमी (C) 33 सेमी (D) 55 सेमी

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. वृत्त की परिधि $2 = \pi r = \pi d \quad (r =$ त्रिज्या, $d =$ व्यास)
2. वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$
3. दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$ यहाँ $r_1 > r_2$
4. त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $A = \dfrac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$
5. त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई $= L = \dfrac{2\pi r \pi}{360^\circ}$
6. $A = \dfrac{1}{2} Lr$ (त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल)
7. वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \dfrac{1}{2} r^2 \sin\theta$
8. दीर्घवृत्त खण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 15.1

1. 22 सेमी., 38.5 वर्ग सेमी. 2. 154 वर्ग मीटर 3. 693 वर्ग मीटर, 108 मीटर 4. 14 सेमी.
5. 144 सेमी. 6. 616 वर्ग मीटर 7. ₹ 1925 8. 1386 वर्ग मीटर
9. B 10 A

प्रश्नमाना 15.2

1. 7.3 सेमी. 2. 43-31 वर्ग सेमी. 3. 42 वर्ग सेमी. 4. (i) 22 सेमी (ii) 231 वर्ग सेमी (iii) 40.047 वर्ग से.मी
5. 57.75 वर्ग सेमी 6. 3.5 वर्ग सेमी 7. 9.625 वर्ग सेमी 8. 7.64 वर्ग सेमी 9. 31.5 वर्ग सेमी

प्रश्नमाला 15.3

1. 44 सेमी 2. 616 वर्ग सेमी 3. 2.57 वर्ग सेमी 4. 14 : 11 5. 36.96 वर्ग मीटर
6. 128 वर्ग सेमी 7. 98 वर्ग सेमी 8. 54.57 वर्ग सेमी 9. 57 वर्ग सेमी
10. 38.5 वर्ग सेमी 11. A 12. B

16

पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन (Surface Area and Volume)

QP8QAD

घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन (Surface area and volume of cube, cuboid, Cylinder, cone and sphere)

QPHLC1

16.01 प्रस्तावना (Introduction)

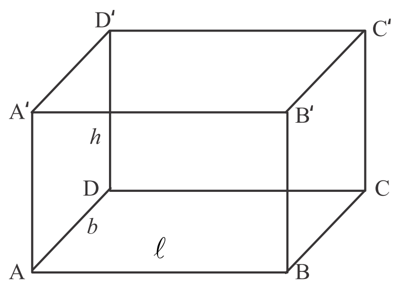
पिछले अध्याय में हम त्रिभुज, आयत, वृत्त, वृत्तखण्ड तथा त्रिज्यखण्ड जैसी समतल आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों का अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में हम ठोस आकृतियों के बारे में अध्ययन करेंगे। ईट, माचिस की डिब्बी, प्लेन मकान की दीवारें, पानी की टंकियाँ, क्रिकेट गेंद आदि सभी विभिन्न आकार की ठोस आकृतियाँ है। समतल आकृति व ठोस आकृति में भौतिक अन्तर यह है कि समतल आकृतियाँ पूरी की पूरी समतल में स्थित होती है। जबकि ठोस आकृतियाँ एक समतल में स्थित नहीं होती हैं। ठोस आकृतियाँ आकाश (space) में स्थित होती हैं। ठोस (घनाकृतियाँ) त्रिविम (Three dimensional) होती हैं।

किसी ठोस आकृति के पृष्ठीय क्षेत्रफल से तात्पर्य समस्त पृष्ठों के क्षेत्रफलों के योग से है तथा किसी ठोस द्वारा आकाश (space) में जितना स्थान घेरा जाता है वह उसका आयतन कहलाता है। क्षेत्रफल को वर्ग इकाई व आयतन को घन इकाई में मापा जाता है।

16.02 घन और घनाभ (Cube and Cubiod) का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन

QPRHDN

एक माचिस की डिब्बी, कमरा, चौक का डिब्बा, ईंट आदि घनाभ के उदाहरण हैं घनाभ को समान्तर षट्कोणिक फलक भी कहा जाता है। आकृति 16.1 में घनाभ दर्शाया गया है। जिसके छः फलक है प्रत्येक फलक एक समतल में आयताकार है सम्मुख फलक समान्तर और सर्वांगसम है। इसमें समान्तर फलकों के तीन युग्म हैं दो आसन्न फलक एक रेखाखण्ड पर मिलते हैं। जिसे कोर कहते है। एक घनाभ में बारह कोर होती है।,



आकृति 16.01

तीन सलंग्न फलक परस्पर एक दूसरे पर लम्ब है। तीन संलग्न कोरें एक बिन्दु पर मिलती है इस बिन्दु को शीर्ष कहते है। एक घनाभ में 8 शीर्ष होते हैं।

मान लीजिए $AB = A'B' = D'C' = DC = \ell$

$AD = A'D' = B'C' = BC = b$

$AA' = DD' = BB' = h$

यदि ℓ को घनाभ की लम्बाई, h घनाभ की ऊँचाई, b घनाभ की चौड़ाई मान लें ये तीनों लांबिक कोरें (संगामी) एक घनाभ को निर्धारित करती है।

''अतः समान्तर षठ्फलक का प्रत्येक फलक आयत हो तो उसे घनाभ कहते है। घनाभ को आयतफलकी ठोस भी कहते है। जैसे ईंट, सन्दूक, कमरा आदि''

धनाभ में, फलक ABCD का क्षेत्रफल = फलक A'B'C'D' का क्षेत्रफल $= \ell \times b$

धनाभ में, फलक ADD'A' का क्षेत्रफल = फलक BCC'B' का क्षेत्रफल $= b \times h$

धनाभ में, फलक ABB'A' का क्षेत्रफल = फलक DCC'D' का क्षेत्रफल $= b \times \ell$

अतः घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= 2 (ABCD का क्षेत्रफल + ADD'A का क्षेत्रफल + ABB'A का क्षेत्रफल)

$$= 2(\ell \times b + b \times h + h \times \ell)$$

$$= 2(\ell b + bh + h\ell) \text{ वर्ग इकाई}$$

यदि घनाभ की ऊँचाई शून्य हो तो यह एक आयत का रूप ले लेगा।

16.03 घन (Cube)

जब घनाभ की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई समान है। अर्थात् $\ell = b = h \neq 0$ हो तो इसे घन कहा जाता है। घन के सभी फलक वर्गाकार होते हैं तथा प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल भी समान होता है।

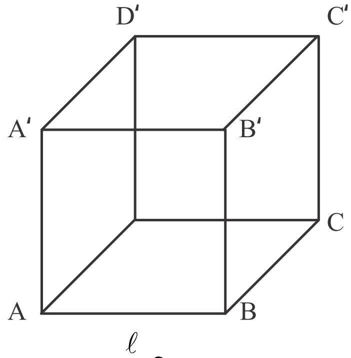
आकृति 16.02 एक घन को प्रदर्शित करती है। यदि घन की एक भुजा की लम्बाई ℓ हो तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2(\ell \times \ell + \ell \times \ell + \ell \times \ell)$$

$$= 2(\ell^2 + \ell^2 + \ell^2)$$

$$= 2 \times 3\ell^2$$

$$= 6\ell^2 \text{ वर्ग इकाई होगा}$$



आकृति 16.02

अब हम घन या घनाभ का आयतन ज्ञात करने की विधियाँ विकसित करेंगे आयतन ज्ञात करने के लिए एक इकाई चुनेंगे।

आकृति 16.03 के अनुसार एक घन लीजिए जिसकी भुजा की लम्बाई 1 इकाई है ऐसे घन को इकाई घन कहते है 1 घन सेमी को 1 सेमी^{3} के रूप में लिखा जाता है।

इसी प्रकार घनाभ का आयतन घन इकाई में मापा जाता है। घनाभ का आयतन उसके पृष्ठ की लम्बाई चौड़ाई व ऊँचाई अलग–2 होने के कारण उनका गुणनफल होगा इससे निम्न निष्कर्ष पर पहुंचा जा सकता है।

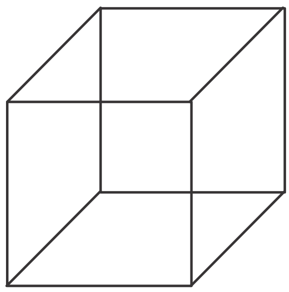
घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई घन इकाई है।

यदि आयतन को V, लम्बाई $= \ell$, चौड़ाई $= b$, ऊँचाई $= h$ है तो

$$V = \ell \times b \times n \text{ घन इकाई होगा}$$

∵ घन की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई समान होती है

अतः घन का आयतन $\ell \times \ell \times \ell = \ell^3$ होगा



आकृति 16.03

16.04 घन तथा घनाभ का विकर्ण

घन या घनाभ के समान्तर फलक के दो सम्मुख कोनों को मिलाने वाली सीधी रेखा विकर्ण कहलाती है इस प्रकार कुल 4 विकर्ण होते है।

नोटः फलकों के विकर्ण घन या घनार्भ के विकर्णों से भिन्नहोते हैं यदि घनाभ की लम्बाई ℓ, चौड़ाई b तथा ऊँचाई h है तो

घनाभ के विकर्ण की लम्बाई $\sqrt{\ell^2+b^2+h^2}$ इकाई, घन के लिए $\ell=b=h$

अतः घनके विकर्ण की लम्बाई $=\ell\sqrt{3}$ इकाई,

आयतन संबंधी इकाईयाँ

(i) 1 लीटर $=1000$ घन सेमी.

(ii) 1 घन सेमी $=10\times10\times10$ घन मिमी. $=1000$ घन मिमी

(iii) 1 घन मीटर $=100\times100\times100=100,00,00$ घन सेमी

(iv) 1 घन मीटर $=1000$ लीटर $=1$ किलो लीटर

उदाहरण-1. एक बन्द लकडी के बक्से की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 90 सेमी, 50 सेमी और 30 सेमी है। बक्से का बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः बक्से की लम्बाई $=90$ सेमी.

बक्से की चौड़ाई $=50$ सेमी.

बक्से की ऊँचाई $=30$ सेमी

बक्से का बाहरी सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2$ (ल. × चौ. + चौ. × ऊँ + ऊँ × ल.)

$$=2(90\times50+50\times30+30\times90)$$

$$=2(4500+1500+2700)$$

$$=2(8700) \text{ वर्ग सेमी.}$$

$$=\frac{17400}{10000}=1.74 \text{ वर्ग मीटर}$$

उदाहरण-2. एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 1014 वर्ग मीटर है। घन की भुजा ज्ञात कीजिए।

हलः घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=1014$ वर्ग मीटर

माना घन की भुजा $=x$ मीटर

घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=6$ (भुजा)^2

$\therefore \quad 6x^2=1014$

या $\quad x^2=\frac{1014}{6}=169$

या $\quad x=\sqrt{169}=13$ मीटर

उदाहरण-3. यदि घनाभ की लम्बाई 12 मीटर, चौड़ाई 9 मीटर और ऊँचाई 8 मीटर है तो घनाभ के विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हलः घनाभ की लम्बाई $=12$ मीटर

घनाभ की चौड़ाई $=9$ मीटर

घनाभ की ऊँचाई $=8$ मीटर

हम जानते है कि घनाभ का विकर्ण $=\sqrt{(\text{ल.})^2+(\text{चौ.})^2+(\text{ऊँ})^2}$

$$=\sqrt{(12)^2+(9)^2+(8)^2}$$

$$=\sqrt{144+81+64}$$

$$=\sqrt{289}=17 \text{ मीटर}$$

उदाहरण-4. एक कक्ष की लम्बाई 5 मीटर, चौड़ाई = 3.5 मीटर व ऊँचाई 4 मीटर है। 20 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से चारों दीवारों पर सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल: कमरे की लम्बाई = 5 मीटर

चौड़ाई = 3.5 मीटर

ऊँचाई = 4 मीटर

कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2 (लम्बाई + चौड़ाई) ऊँचाई

$$= 2(5+3.5)\times 4$$

$$= 2\times 8.5\times 4$$

= 68 वर्ग मीटर

चारों दीवारों पर सफेदी कराने का व्यय ₹ = 68×20

या व्यय ₹ = 1360

उदाहरण-5. घन के एक पृष्ठ का परिमाप 28 सेमी. है तो घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: घन के एक पृष्ठ का परिमाप = 28 सेमी.

∵ घन की सभी भुजाएँ बराबर होती है

∴ घन के एक पृष्ठ का परिमाप = 4 × भुजा

या 28 = 4 × भुजा

या भुजा $= \frac{28}{4} = 7$ सेमी.

घन का आयतन $= (\text{भुजा})^3 = (7)^3$

$= 7\times 7\times 7 = 343$ घन सेमी.

उदाहरण-6. यदि एक समान्तर षट्फलक की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 6 : 5 : 4 है और उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 33300 वर्ग सेमी है तो समकोणिक समान्तर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि समकोणिक समान्तर षटफलक की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई क्रमशः $6x, 5x, 4x$ है।

समकोणिक समान्तर षट्फलक का क्षेत्रफल = 33300 वर्ग सेमी

∴ $2(\ell b + bh + h\ell) = 33300$

या $2(6x\times 5x + 5x\times 4x + 4x\times 6x) = 33300$

या $2(30x^2 + 20x^2 + 24x^2) = 33300$

या $2\times 74x^2 = 33300$

या $x^2 = \frac{33300}{2\times 74}$

या $x^2 = 225$

∴ $x = \sqrt{225} = 15$

या $x = 15$ सेमी

∵ $\ell = 6\times 15 = 90\,\text{cm}$, $b = 5\times 15 = 75$ सेमी,

$h = 4\times 15 = 60$ सेमी

समकोणिक समान्तर षटफलक का आयतन $= 90\times 75\times 60$

$= 405000$ सेमी³

उदाहरण-7. एक सन्दूक की माप 3 मी. × 2 मी. × 1.80 मी है। बाहर की ओर सभी फलकों पर ₹ 12 प्रति वर्ग मीटर की दर से वार्निश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल: सन्दूक की लम्बाई = 3 मी., चौड़ाई = 2 मी., ऊँचाई = 1.80 मी.

सन्दूक का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 [ल. × चौ. + चौ. × ऊँ. + ऊँ. × ल.]

$= 2\,[3 \times 2 + 2 \times 1.80 + 1.80 \times 3]$

$= 2\,[6 + 3.60 + 5.40]$

$= 2\,[6 + 9] = 2\,[15]$

= 30 वर्ग मीटर

30 मीटर^2 पर वार्निश कराने का व्यय = ₹ $30 \times 12 = 360$

उदाहरण-8. धातु के तीन समान घनों की कोर क्रमशः 3 सेमी., 4 सेमी., 5 सेमी. है। इन्हें पिघलाकर एक नया घन बनाय गया। इस घन की कोर की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: 3 सेमी. कोर वाले घन का आयतन = (भुजा)^3 = $(3)^3 = 27$ घन सेमी.

4 सेमी. कोर वाले घन का आयतन = (भुजा)^3 = $(4)^3 = 64$ घन सेमी.

5 सेमी. कोर वाले घन का आयतन = (भुजा)^3 = $(5)^3 = 125$ घन सेमी.

इन घनों का सम्पूर्ण आयतन = $27 + 64 + 125 = 216$ सेमी^{3}

इन्हें पिघलाकर नया घन बनाया गया है।

अतः नये घन का आयतन = 216 घन सेमी

(भुजा)^3 = 216

भुजा $= \sqrt[3]{216}$

भुजा $= (6 \times 6 \times 6)^{1/3}$

भुजा $= 6^{3 \times 1/3} = 6$

अतः नए घन की कोर = 6 सेमी.

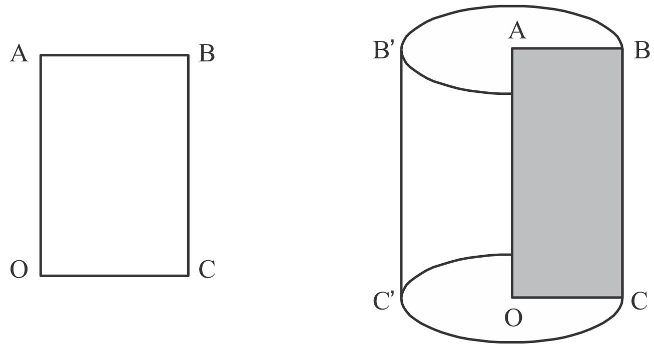
प्रश्नावली–16.1

1. एक घनाभ 12 सेमी. लम्बा, 9 सेमी. चौड़ा, और 5 सेमी. ऊँचा है। घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम्आयतन ज्ञात कीजिए।
2. तीन घनों की भुजाऐं क्रमशः 8 सेमी., 6 सेमी. और 1 सेमी. है इन्हें पिघलाकर एक नया घन बनाया जाता है। नये घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक सन्दूक की माप 50 सेमी. × 36 सेमी. × 25 सेमी. हैं इस सन्दूक का कवर बनाने के लिए कितने वर्ग सेमी कपड़े की आवश्यकता होगी।
4. एक घन का प्रत्येक पृष्ठ 100 वर्ग सेमी. है। यदि आधार के समान्तर समतल द्वारा घन को काटकर दो बराबर भागों में बाँट दिया जाये तो प्रत्येक समान भाग का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. बगैर ढक्कन का एक बक्सा 3 सेमी. मोटी लकडी का बना हुआ हैं। इसकी बाहरी लम्बाई 146 सेमी. चौड़ाई 116 सेमी और ऊँचाई 83 सेमी. है उसके अन्दर की ओर पेन्ट कराने का खर्च ज्ञात कीजिए। पेन्ट की दर 2 रु. प्रति 1000 वर्ग सेमी है।
6. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का योग 19 सेमी. है तथा विकर्ण की लम्बाई 11 सेमी. है। घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. 6 मीटर भुजा के वर्गाकार फर्श के कमरे में 180 घन मीटर हवा है। कमरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
8. 44 मीटर लम्बी, 1.5 मी. ऊँची और 85 सेमी. चौडी दीवार बनाने में 22 सेमी. × 10 सेमी. × 7 सेमी. माप की कितनी ईटों की आवश्यकता होगी?
9. 10 मीटर लम्बे 8 मीटर चौड़े और 6 मीटर ऊँचें कमरे में अधिक से अधिक कितनी लम्बी छड़ रखी जा सकती है?
10. एक घन का आयतन 512 घन मीटर हैं उसकी भुजा ज्ञात कीजिए।
11. एक दीवार की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 5 मीटर, 30 सेमी. और 3 मीटर हैं। दीवार बनाने में 20 सेमी. × 10 सेमी. × 7.5 सेमी. माप की कितनी ईटों की आवश्यकता होगी?
12. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 5 : 3 : 2 है। यदि घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 558 सेमी^{2} है तो उसकी कोरों का माप ज्ञात कीजिए।

16.05 बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन (Surface Area and Volume of Cylinder)

आपने मापन जार, गोलखम्भे, गोलपाइप, टेस्ट ट्यूब आदि वस्तुऐं देखी होगी ऐसी वस्तुऐं जिसमें एक पार्श्व वक्र पृष्ठ (lateral curved surface) और सर्वांग समवृत्तीय अनुप्रस्थ काट (cross section) हो वृत्तीय बेलन कहलाता हैं वृत्तीय अनुप्रस्थ काटों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा को बेलन की अक्ष कहते हैं। यदि बेलन का अक्ष वृत्तीय अनुप्रस्थ काट पर लम्ब है तो उस बेलन को लम्ब वृत्तीय बेलन कहते है (Right circular cylinder) है। इस अध्याय में जहाँ भी बेलन का प्रयोग किया जायेगा वहाँ बेलन का अर्थ लम्ब वृत्तीय बेलन होगा।

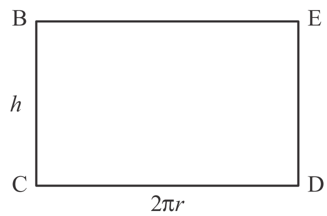
यदि ABCO एक आयतकार क्षेत्र है यह रेखा OA के चारों ओर परिक्रमण करता है तो हमें AB त्रिज्या का तथा OA ऊँचाई का एक ठोस बेलन प्राप्त होता है। इसे आकृति 16.04 में दर्शाया गया है।



आकृति 16.04

वे रेखाएँ जो OA के समान्तर हैं और बेलन के पार्श्व पृष्ठ पर स्थित है। जनक कहलाती है। यहाँ रेखाऐं BC, B'C'जनक हैं। बेलन को उर्ध्वाधर स्थिति में रखने पर नीचे के वृत्तीय सिरों को बेलन का आधार कहते हैं। रेखाखण्ड CB की लम्बाई आकृति 16.05 में बेलन की ऊँचाई कही जाती है। वृत्तीय सिरे की त्रिज्या को बेलन की त्रिज्या कहते है।

खोखले बेलन में दोनों सिरे खुले होते हैं। ठोस बेलन में दोनों सिरे बन्द होते है r त्रिज्या और h ऊँचाई वाला बेलन (आकृति 16.05) का वक्र पृष्ठ ज्ञात करने के लिए यदि वक्र पृष्ठ को रेखाखण्ड BC के अनुदिश काट कर खोल दिया जाए तो यह आयत BCDE के रूप का हो जायेगा।



आकृति 16.05

जब चद्दर बेलन के वक्रपृष्ठ के रूप में है तो रेखा खण्ड BC तथा ED संपाती है। अतः BC की लम्बाई $= h$ बेलन की ऊँचाई, CD की लम्बाई = बेलन के एक सिरे की परिधि जिसकी त्रिज्या r है।

अतः बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = आयत BCDE का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r \times h$$

$$= 2\pi rh$$

बेलन के आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ + 2 आधार का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r(h + r)$$

बेलन द्वारा घेरा गया स्थान उसका आयतन होता है। यदि बेलन की त्रिज्या r और ऊँचाई h है। तो

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

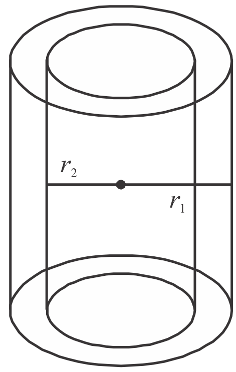
$$= \pi r^2 \times h$$

$$= \pi r^2 h$$

यदि एक खोखले बेलन की बाह्य त्रिज्या r_1 तथा अन्त: त्रिज्या r_2 है तथा उसकी ऊँचाई h है तो आकृति 16.06 में खोखले बेलन का आयतन

$$= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$$

$$= \pi \left(r_1^2 - r_2^2\right) h$$



आकृति 16.06

खोखले बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi r_1 h + 2\pi r_2 h + 2\pi r_1^2 - 2\pi r_2^2$$

$$= 2\pi h\left(r_1 + r_2\right) + 2\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$$

$$= 2\pi h\left(r_1 + r_2\right) + 2\pi\left(r_1 + r_2\right)\left(r_1 - r_2\right)$$

$$= 2\pi\left(r_1 + r_2\right)\left(h + r_1 - r_2\right)$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक बेलन के आधार का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. तथा ऊँचाई 21 सेमी है। बेलन का आयतन और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: बेलन के आधार का क्षेत्रफल = 154 वर्ग सेमी,

बेलन की ऊँचाई $(h) = 21$ सेमी

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= 154 \times 21$

$= 3234$ घन सेमी

अत: आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

या $154 = \frac{22}{7} \times r^2$

या $154 \times 7 = 22 \times r^2$

या $r^2 = \frac{154 \times 7}{22} = 49$

या $r = \sqrt{49} = 7$ सेमी

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 21$$

$= 2 \times 22 \times 21 = 924$ वर्ग सेमी

उदाहरण-2. एक बेलन की ऊँचाई 11 सेमी तथा उसका वक्र पृष्ठ 968 सेमी^{2} है। बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: बेलन की ऊँचाई $h = 11$ सेमी.

मानाकि बेलन की त्रिज्या $= r$

बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh = 968$

या $$2\times\frac{22}{7}\times r\times 11=968$$

$$r=\frac{968\times 7}{2\times 22\times 11}=14 \text{ सेमी}$$

उदाहरण-3. यदि एक बेलन का आयतन 448 π घन सेमी. और ऊँचाई 7 सेमी. है तो बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: बेलन का आयतन $=\pi r^2 h$

∴ $$448\pi=\pi\times r^2\times 7$$

या $$448=7r^2$$

या $$r^2=\frac{448}{7}=64$$

या $$r=\sqrt{64}=8 \text{ सेमी}$$

बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2\pi rh$

$$=2\times\frac{22}{7}\times 8\times 7$$

$$=44\times 8=352 \text{ वर्ग सेमी}$$

बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2\pi r(h+r)$

$$=2\times\frac{22}{7}\times 8(7+8)$$

$$=2\times\frac{22}{7}\times 15\times 8=\frac{5280}{7}=754.28 \text{ वर्ग सेमी}$$

उदाहरण-4. एक खोखले बेलन की ऊँचाई 21 डेसी मीटर है तथा इसके बाह्य व्यास व अन्तः व्यास क्रमशः 10 सेमी व 6 सेमी है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: खोखले बेलन की ऊँचाई $=21$ डेसी मीटर [∵ 10 सेमी $=1$ डेसी मीटर]

$$=21\times 10=210 \text{ सेमी.}$$

खोखले बेलन का बाह्य व्यास $=10$ सेमी.

अतः बाह्य त्रिज्या $(r_1)=\frac{\text{व्यास}}{2}=\frac{10}{2}=5$ सेमी

खोखले बेलन का अन्तः व्यास $=6$ सेमी.

अन्तः त्रिज्या $(r_2)=\frac{6}{2}=3$ सेमी.

खोखले बेलन का आयतन $=\pi\left(r_1^2-r_2^2\right)h$

$$=\frac{22}{7}\left[(5)^2-(3)^2\right]\times 210$$

$$=\frac{22}{7}[25-9]\times 210$$

$$=\frac{22}{7}\times 16\times 210=10560 \text{ घन सेमी}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदाहरण-5. एक बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात 1 : 3 है। यदि बेलन का आयतन 3234 सेमी^{3} है तो बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना बेलन की त्रिज्या r तथा ऊँचाई $3r$ है

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times r^2 \times 3r = 3234$$

$$r^3 = \frac{3234 \times 7}{22 \times 3}$$

या $r^3 = 343$

या $r^3 = (7)^3$

या $r = 7$

अतः बेलन की ऊँचाई $h = 3 \times 7 = 21$ सेमी.

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h+r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(21+7)$$

$$= 2 \times 22 \times 28$$

$= 1232$ सेमी^{2}

उदाहरण-6. एक रोलर की लम्बाई 2 मी. और व्यास 1.4 मी. है ज्ञात कीजिए 5 चक्कर लगाने में रोलर कितना क्षेत्र समतल करेगा?

हल: रोलर की लम्बाई $(h) = 2$ मीटर

रोलर का व्यास $= 1.4$ मीटर

रोलर की त्रिज्या $= \frac{1.4}{2} = 0.7$ मीटर

रोलर के 1 चक्कर लगाने में समतल किया क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

$\therefore$ $$2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 0.7 \times 2$$

$$= 2 \times 22 \times \frac{1}{10} \times 2$$

$= 8.8$ वर्ग मीटर

$\therefore$ 5 चक्कर लगाने में समतल किया क्षेत्रफल $= 8.8 \times 5 = 44$ वर्ग मीटर

प्रश्नमाला 16.2

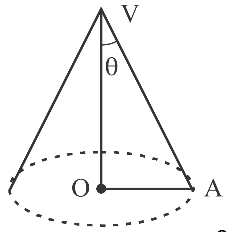
1. एक बेलन का व्यास 14 सेमी. ओर ऊँचाई 15 सेमी. है। बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक लम्ब वृत्तीय बेलन की ऊँचाई 7 सेमी और आधार की त्रिज्या 3 सेमी है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
3. एक बेलन के सिरे का क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है तथा इसकी ऊँचाई 21 सेमी. है बेलन का आयतन एवम् वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. दो लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्याओं का अनुपात 2 : 3 तथा ऊँचाईयों का अनुपात 5 : 4 है तो दोनों बेलनों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. एक ठोस बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 462 वर्ग सेमी. है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफलका एक तिहाई है बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।
6. एक बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 660 वर्ग सेमी तथा ऊँचाई 15 सेमी. है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।
7. एक बेलन का आयतन $30\pi cm^3$ है तथा आधार का क्षेत्रफल $6\pi cm^2$ है बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

8. एक बेलन का आयतन और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल क्रमशः 1650 घन सेमी और 660 वर्ग सेमी है। बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
9. एक बेलन की ऊँचाई व त्रिज्या क्रमशः 7.5 सेमी और 3.5 सेमी है। इसके सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल और वक्र पृष्ठके क्षेत्रफल में अनुपात ज्ञात कीजिए।
10. 20 मीटर गहरा और 7 मीटर व्यास का एक कुँआ खोदा गया। इससे निकली मिट्टी से 22 मी.× 14 मी. माप का एक चबूतरा बनाया गया। चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
11. एक बेलनाकार बर्तन में $30800\,cm^3$ पानी भरा जा सकता है। यदि बर्तन की भीतरी त्रिज्या $14\,cm$ है तो उसका भीतरी वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।
12. एक खोखले बेलन की मोटाई 2 सेमी. है। इसका भीतरी व्यास 14 सेमी तथा ऊँचाई 26 सेमी. है। बेलन के दोनों सिरे खुले हुए है। खोखले बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
13. एक खोखला बेलन दोनों सिरों से खुला हुआ है। उसकी ऊँचाई 20 सेमी. तथा अन्तः एवम् बाह्य व्यास क्रमशः26 सेमी. व 30 सेमी. है। इस खोखले बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

16.06 शंकु (Cone)

QQA9GY

आपने जोकर की टोपी, आइसक्रीम का कोन देखा होगा ये शंकु के आकार जैसी वस्तुएँ है। दी गई आकृति 16.07 में VO एक रेखा खण्ड है, दूसरा रेखाखण्ड VA, VO से θ कोण बनाता है। यदि रेखा खण्ड VA, रेखाखण्ड VO के चारों ओर एक चक्कर लगाता है तो एक शंकु जनित होता है।



आकृति 16.07

रेखाखण्ड VO की लम्बाई शंकु की ऊँचाई कहलाती है। इसे सामान्यतः h के द्वारा लिखा जाता है रेखाखण्ड VO शंकु का अक्ष है रेखाखण्ड VA के परिक्रमण करने पर खुले आधार वाला एक खोखला शंकु जनित होता है बिन्दु V को शंकु का शीर्ष एवम् रेखाखण्ड VA शंकु की तिरछी ऊँचाई (Slant height) कहलाती है। सामान्यतः इसे ℓ से प्रकट करते हैं। शंकु का आधार एक वृत्त है जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या OA $= r$ (माना) है। यदि रेखा VO आधार पर लम्ब है तो शंकु लम्ब वृत्तीय शंकु कहलाता है। इस अध्याय में हम लम्ब वृत्तीय शंकु का अध्ययन करेंगे।

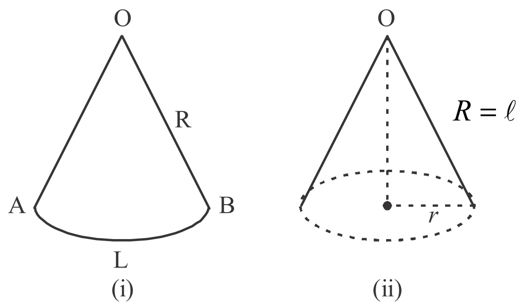
लम्ब वृत्तीय शंकु वह ठोस आकृति हैं जब कोई रेखाखण्ड एक स्थिर बिन्दु पर एक स्थिर रेखा से अचर कोण पर परिक्रमण करता है यहाँ शंकु से तात्पर्य लम्ब वृत्तीय शंकु से है।

$$VA^2 = VO^2 + OA^2$$

या $$\ell^2 = h^2 + r^2$$

$$\ell = \sqrt{h^2 + r^2}$$ VA को शंकु की तिर्यक लम्बाई कहते है।

वृत्त का त्रिज्यखण्ड OAB लीजिए। इसकी सीधी कोरे OA व OB को इस तरह मिलाइये कि इससे एक शंकु प्राप्त हो जिसके आधार का परिमाप चाप AB की लम्बाई के बराबर हो तथा त्रिज्य खण्ड की त्रिज्या शंकु की तिरछी ऊँचाई हो। आकृति 16.08 के अनुसार शंकु का पृष्ठीय (तिर्यक पृष्ठीय) क्षेत्रफल



आकृति 16.08

$= $ त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} L \times R$$

$$= \frac{1}{2} \text{ शंकु के आधार का परिमाप} \times \text{तिरछी ऊँचाई}$$

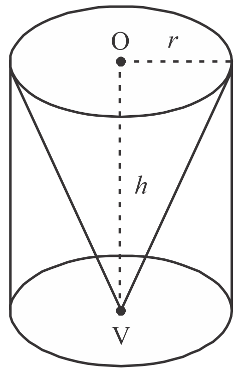
$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times \ell$$

शंकु का तिर्यक पृष्ठ $= \pi r \ell$

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का तिर्यक पृष्ठ + शंकु के आधार का क्षेत्रफल

$$= \pi r \ell + \pi r^2$$

$$= \pi r(\ell + r)$$



आकृति 16.09

यदि शंकु के आधार की त्रिज्या r व ऊँचाई h हो तो

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $= \ell = \sqrt{r^2 + h^2}$

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(\ell + r)$

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

हम जानते हे कि $\pi r^2 h$ उस बेलन का आयतन होता है जिसकी त्रिज्या r व ऊँचाई h है। यदि ऊँचाई h और त्रिज्या r का एक शंकु बनाया जाये तो उसका आयतन $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ होता है। प्रयोग द्वारा यह सत्यापित किया जा सकता है। कि शंकु का आयतन समान ऊँचाई और समान त्रिज्या वाले बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है।

r त्रिज्या व h ऊँचाई का एक बेलनाकार मापन जार लीजिए। इसका आयतन $\pi r^2 h$ है। आकृति 16.09 के अनुसार एक शंकु लीजिए जिसका आधार और ऊँचाई वही है जो कि बेलनाकार जार की है। मानाकि शंकु का आयतन V हैं। शंकु को पानी से भरकर इसे बेलनाकार मापन जार में उडेल दीजिए। आप देखेंगे कि तीन बार शंकु को भरकर उसे जार में उडेला जाए। तब ही जार पूरा भरेगा इस प्रयोग से यह निष्कर्ष निकलता है कि शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-7. एक शंकु के आधार का व्यास 12 मीटर और तिर्यक ऊँचाई 10 मीटर है। शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है– शंकु के आधार का व्यास = 12 मीटर

शंकु की त्रिज्या $r = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{12}{2} = 6$ मीटर

और शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(\ell) = 10$ मीटर

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi(\ell + r) r$

$$= \frac{22}{7}(10+6) \times 6 = \frac{22}{7} \times 16 \times 6$$

$$= \frac{2112}{7} = 301.71 \text{ वर्ग मीटर}$$

अतः शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 301.71 वर्ग मीटर है।

उदाहरण-8. यदि एक शंकु का वक्रपृष्ठ 2035 वर्ग सेमी और आधार का व्यास 35 cm हो तो शंकु की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है– शंकु का वक्र पृष्ठ $=\pi r\ell = 3035\,cm^2$

$\therefore$ शंकु की त्रिज्या $(r) = \dfrac{\text{व्यास}}{2} = \dfrac{35}{2} = 17.5$ सेमी

$\therefore$ $2035 = \dfrac{22}{7}\times 17.5\times \ell$

या $2035 = 22\times 2.5\times \ell$

या $\ell = \dfrac{2035}{22\times 2.5} = \dfrac{2035}{55}$

या $\ell = 37$

अतः शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(\ell) = 37$ सेमी होगी।

उदाहरण-9. एक शंकु का आयतन 16632 घन सेमी है और ऊँचाई 9 सेमी है इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है: शंकु का आयतन $= 16632$ घन सेमी

शंकु की ऊँचाई $(h) = 9$ सेमी

शंकु का आयतन $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore$ $16632 = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{22}{7}\times r^2\times 9$

या $16632 = \dfrac{22}{7}\times r^2\times 3$

या $16632\times 7 = 22\times r^2\times 3$

या $r^2 = \dfrac{16632\times 7}{22\times 3} = \dfrac{756\times 7}{3}$

या $r^2 = 252\times 7$

या $r = \sqrt{36\times 7\times 7}$

या $r = 6\times 7 = 42$

अतः शंकु की त्रिज्या $= 42$ सेमी

उदाहरण-10. किसी शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात 5 : 12 और आयतन 2512 घन सेमी है तो शंकु की तिर्यक ऊँचाई और आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल: शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात $= 5:12$

शंकु की त्रिज्या $(r) = 5x$ सेमी

शंकु की ऊँचाई $(h) = 12x$ सेमी

शंकु का आयतन $= 2512$ घन सेमी

$\therefore$ $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 2512$

$\dfrac{1}{3}\times 3.14\times (5x)^2\times 12x = 2512$

$$\frac{1}{3}\times 3.14\times 25x^2\times 12x=2512$$

$$3.14\times 25x^2\times 4x=2512$$

या $$314x^3=2512$$

या $$x^3=\frac{2512}{314}=8$$

या $$(x)^3=(2\times 2\times 2)$$

या $$x^3=2^3$$

या $$x=2$$

अतः शंकु की त्रिज्या $=5\times 2=10$ सेमी.

शंकु की ऊँचाई $=12\times 2=24$ सेमी.

उदाहरण-11. एक शंकु के आकार के टेन्ट की ऊँचाई 14 मीटर है तथा आधार का क्षेत्रफल 346.5 मीटर^2 है। यह टेन्ट 1.5 मीटर चौड़े केनवास से बना हुआ है तो कैनवास की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु के आकार के टेन्ट की ऊँचाई $h=14$ मीटर

त्रिज्या $=r$ मीटर

शंकु के आधार का क्षेत्रफल $=\pi r^2$

आधार का क्षेत्रफल $=346.5$ मीटर^2

$$\frac{22}{7}\times r^2=346.5$$

या $$r^2=\frac{346.5\times 7}{22}$$

या $$r^2=110.25$$

या $$r=10.5 \text{ मीटर}$$

टेन्ट की तिरछी लम्बाई $\ell=\sqrt{r^2+h^2}$

$$=\sqrt{(10.5)^2+(14)^2}$$

$$=\sqrt{110.25+196}$$

$$=\sqrt{306.25}=17.5 \text{ मीटर}$$

केनवास का क्षेत्रफल = टेन्ट के तिर्यक पृष्ठ का क्षेत्रफल

$$=\pi r\ell$$

$$=\frac{22}{7}\times 10.5\times 17.5$$

$$=577.5 \text{ मीटर}^2$$

केनवास की लम्बाई $=\dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$

$$=\frac{577.5}{1.5}\text{ मीटर}=385 \text{ मीटर}$$

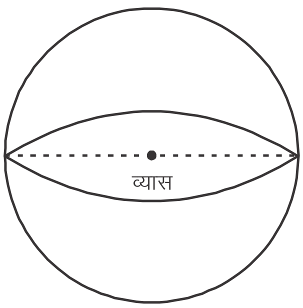
प्रश्नमाला 16.3

1. एक शंकु की ऊँचाई 28 सेमी. तथा आधार की त्रिज्या 21 सेमी. है। उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीयक्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन 1232 सेमी^{3} है तथा उसकी ऊँचाई 24 सेमी है तो शंकु की तिरछी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. एक शंकु के आधार का व्यास 14 मीटर और तिर्यक ऊँचाई 25 मीटर है तो शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. शंकु के आधार की त्रिज्या 14 सेमी. और तिरछी ऊँचाई 50 सेमी. है। शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल), सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई 8 सेमी. और आधार की त्रिज्या 6 सेमी. है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।
6. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 1884.4 मीटर^2 है तथा इसकी तिर्यक ऊँचाई 12 मीटर है। इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
7. एक लम्ब वृत्तीय शंकु के आधार का क्षेत्रफल $154\ cm^2$ है। इसकी तिरछी ऊँचाई 25 सेमी. है तो शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
8. दो शंकुओं के आधार का व्यास समान है। उनकी तिरछी ऊँचाइयों का अनुपात 5 : 4 है। यदि छोटे शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 400 सेमी^{2} है तो बडे शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. एक शंकु की तिर्यक ऊँचाई और त्रिज्या का अनुपात 7 : 4 है। यदि इसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल 792 वर्ग सेमी. होतो इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
10. 9 मीटर ऊँचे शंकु के आकार के टेंट के आधार की परिधि 44 मीटर है। इसके अन्दर की वायु का आयतन ज्ञात कीजिए।
11. एक शंकु के आकार के बर्तन की त्रिज्या 10 सेमी और ऊँचाई 18 सेमी है यह पानी से पूरा भरा हुआ है। इसे 5 सेमी. त्रिज्या के बेलनाकार बर्तन में उड़ेला जाता है। बेलनाकार बर्तन में पानी के तल ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
12. 14 सेमी. भुजा के एक घन से बड़े से बड़ा शंकु काटा जाता है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।
13. शंकु के आधार की त्रिज्या और ऊँचाई क्रमशः 7 सेमी. और 24 सेमी है। शंकु की तिरछी ऊँचाई वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन ज्ञात कीजिए।
14. एक त्रिज्य खण्ड की त्रिज्या 12 सेमी. और कोण 120^{o} है। इसकी सीधी कोरों को सम्पाती करके एक शंकु बनाया जाता है। इस शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

16.07 गोला (Sphere)

एक वृत्त या अर्धवृत्त द्वारा उसके एक व्यास को अक्ष मानकर उसके चारों ओर क्रमशः आधा चक्कर या पूरा चक्कर लगाने में जो ठोस जनित होता है उसे गोला कहते हैं।

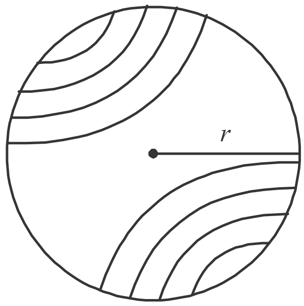
QQJ5IL



आकृति 16.10

गोले की परिभाषा हम इस प्रकार भी दे सकते है। कि आकाश में स्थित उन सभी बिन्दुओं के समुच्चय को गोला कहा जा सकता है, जो एक नियत बिन्दु से समान दूरी पर हो। नियत बिन्दु को गोले को केन्द्र कहते है। केन्द्र से इस समुच्चय के किसी बिन्दु की दूरी को त्रिज्या कहते है। पूर्ण फूला हुआ फुटबाल, क्रिकेट बॉल, गोले के उदाहरण है।

उस रेखा खण्ड को जो गोले के केन्द्र से गुजरता है। जिसके दोनों सिरे गोले पर हो गोले का व्यास कहलाता है। गोले के सभी व्यास लम्बाई में समान होते हैं। गोले की त्रिज्या उसके व्यास की आधी होती है। गोले द्वारा आकाश में घेरा गया स्थान उसका आयतन कहलाता है।



आकृति 16.11

उपपत्ति को दिये बिना निम्नलिखित सूत्र दिये जा सकते हैं।

यदि गोले की त्रिज्या r है तो

गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3$

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $=4\pi r^2$

r त्रिज्या के अर्ध गोले का आयतन $=\frac{2}{3}\pi r^3$

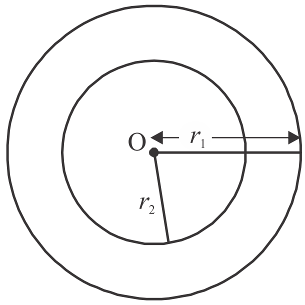
अर्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2\pi r^2$

अर्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=3\pi r^2$

यदि गोलीय कोश की बाहरी त्रिज्या r_1 तथा भीतरी त्रिज्या r_2 है तो

गोलीय कोश का आयतन $=\frac{4}{3}\pi\left(r_1^3-r_2^3\right)$

गोलीय कोश का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=4\pi\left(r_1^2-r_2^2\right)$



आकृति 16.12

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-12. 7 सेमी. त्रिज्या के गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: गोले की त्रिज्या = 7 सेमी.

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$=4\times\frac{22}{7}\times7\times7$$

$$=22\times28$$

$=616$ सेमी²

उदाहरण-13. एक अर्ध गोले की त्रिज्या 3.5 सेमी. है तो इसका आयतन व सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: अर्ध गोले की त्रिज्या $(r)=3.5$ सेमी.

अर्ध गोले का आयतन $=\frac{2}{3}\pi r^3$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times(3.5)^3$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times3.5\times3.5\times3.5$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= \frac{2}{3} \times 22 \times 0.5 \times 12.25$$

$$= \frac{269.5}{3} = 89.83 \text{ घन सेमी.}$$

अर्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$$

$$= 3 \times 22 \times 0.5 \times 3.5$$

$= 115.5$ सेमी^{2}

उदाहरण-14. सीसे के एक गोले की त्रिज्या 5 सेमी. है। इससे 5 मि.मि. त्रिज्या की कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती है?

हल: सीसे के बड़े गोले की त्रिज्या $(r) = 5$ सेमी.

सीसे के बड़े गोले का आयतन $(v) = \frac{4}{3}\pi(5)^3$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 5 \times 5 \times 5 \text{ घन सेमी.}$$

सीसे की छोटी गोली की त्रिज्या $(r_1) = 5$ मिमी. $= \frac{5}{10} = 0.5$ सेमी.

सीसे की एक गोली का आयतन $= \frac{4}{3} \times \pi \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5$ घन सेमी.

छोटी गोलियों की संख्या $= \dfrac{\text{बड़े गोले का आयतन}}{\text{एक छोटी गोली का आयतन}}$

$$= \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times 5 \times 5 \times 5}{\frac{4}{3} \times \pi \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5} = 1000 \text{ गोलियाँ}$$

उदाहरण-15. एक गेंद के पृष्ठ का क्षेत्रफल 1386 वर्ग सेमी. है। गेंद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है:– गेंद (गोला) के पृष्ठ का क्षेत्रफल = 1386 वर्ग सेमी.

या $4\pi r^2 = 1386$

या $4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 1386$

या $r^2 = \frac{1386 \times 7}{4 \times 22} = 110.25$

या $r = \sqrt{110.25} = 10.5$ सेमी.

अतः गेंद की त्रिज्या 10.5 सेमी. होगी।

उदाहरण-16. दो गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 9 है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों एवं आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: माना दो गोलों की त्रिज्याऐं r_1 और r_2 है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफल $4\pi r_1^2$ तथा $4\pi r_2^2$ है।

गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात $= \dfrac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \dfrac{4}{9}$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

दोनों गोलों के आयतनों का अनुपात $= \dfrac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3} r_2^3} = \dfrac{r_1^3}{r_2^3}$

$$= \left(\frac{r_1}{r_2}^3\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 8 : 27$$

प्रश्नमाला 16.4

1. 1.4 सेमी. त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी. है, तो गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।
3. एक अर्ध गोले की त्रिज्या 4.5 सेमी. है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन ज्ञात कीजिए।
4. एक गोले का आयतन 38808 घन सेमी. है तो गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. एक बेलन सीसे का बना हुआ है जिसकी त्रिज्या 4 सेमी व ऊँचाई 10 सेमी है। इसे पिघलाकर कर 2 सेमी. त्रिज्या के कितने गोले बनाए जा सकते हैं।
6. एक खोखला गोल शेल 2 सेमी. मोटा है। यदि इसकी बाह्य त्रिज्या 8 सेमी. है तो इसमें लगी धातु का आयतन ज्ञात कीजिए।
7. 9 सेमी त्रिज्या के धातु के गोले को पिघलाकर 3 सेमी त्रिज्या और 6 सेमी ऊँचाई के कितने शंकु बनाए जा सकते है।
8. 10 सेमी. त्रिज्या के धातु के गोले से समान त्रिज्या के 8 गोले बनाए जाते है। इस प्रकार बने प्रत्येक गोले कापृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. यदि एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 5544 सेमी^{2} है तो गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।
10. एक सीसे के ठोस आयत फलकी की माप क्रमशः 66 सेमी, 42 सेमी और 21 सेमी है। ज्ञात कीजिए कि इसको पिघलाकर इससे 4.2 सेमी. व्यास की कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती है।
11. 6 सेमी व्यास का एक गोला 12 सेमी व्यास के बेलनाकार बर्तन में जिसमें पानी है डाला जाता है बर्तन में पानी कितना ऊपर चढ़ जायेगा।
12. 9 सेमी. की अन्तः त्रिज्या वाले एक अर्ध गोलाकार कटोरे में एक द्रव भरा है। इस द्रव को 3 सेमी व्यास और 4 सेमी ऊँचाई के छोटे–छोटे बेलनाकार बर्तनों में भरना है। ज्ञात कीजिए कि कटोरे के पूरे द्रव को भरने के लिए कितनी बोतलों की आवश्यकता होगी।
13. एक गोले का व्यास 0.7 सेमी है। एक पानी की टंकी से 3000 गोले पूर्ण रूप से भरकर पानी बाहर निकाला जाता है तो बाहर निकलने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।
14. एक खोखले अर्ध गोलीय बर्तन के बाह्य और अन्तः व्यास क्रमशः 43 सेमी और 42 सेमी है यदि उस पर रंग करवानेका व्यय 7 पैसे प्रति वर्ग सेमी हो तो बर्तन पर रंग करवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

विविध प्रश्नमाला–16

1. एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 486 वर्ग सेमी. है घन की भुजा होगी–
   (क) 6 सेमी (ख) 8 सेमी (ग) 9 सेमी (घ) 7 सेमी
2. एक घनाभ की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 9 मीटर, 2 मीटर और 1 मीटर है घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा–
   (क) 12 वर्ग मीटर (ख) 11 वर्ग मीटर (ग) 21 वर्ग मीटर (घ) 22 वर्ग मीटर
3. एक गोले का व्यास 6 सेमी है गोले का आयतन होगा–
   (क) 16π घन सेमी (ख) 20π घन सेमी (ग) 36π घन सेमी (घ) 30π घन सेमी
4. एक बेलन के आधार की त्रिज्या 14 सेमी. तथा ऊँचाई 10 सेमी. है। बेलन का वक्र पृष्ठ होगा–
   (क) 810 सेमी^{2} (ख) 880 सेमी^{2} (ग) 888 सेमी^{2} (घ) 890 सेमी^{2}
5. एक शंकु का आयतन 308 सेमी^{3} और ऊँचाई 6 सेमी. है उसके आधार की त्रिज्या होगी–
   (क) 7 सेमी. (ख) 8 सेमी. (ग) 6 सेमी. (घ) इनमें से कोई नहीं
6. एक ठोस धातु के अर्ध गोले का व्यास 42 सेमी. है। इसके सम्पूर्ण पृष्ठ पर 20 पैसे प्रति वर्ग सेमी. की दर से पालिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
7. एक शंकु एक अर्ध गोला व एक बेलन एक ही आधार व ऊँचाई पर बने है। उनके आयतनों का अनुपात लिखिये।
8. एक ठोस पिण्ड का वॉया भाग बेलनाकार और दांया भाग शंकु नुमा है। यदि बेलन का व्यास 14 सेमी. तथा लम्बाई 40 सेमी और शंकु का व्यास 14 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 12 सेमी. हो तो ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।
9. 9 सेमी. त्रिज्या के धातु के गोले को पिघलाकर 3 सेमी त्रिज्या और 6 सेमी. ऊँचाई के शंकु बनाए जा सकते है। शंकुओं की संख्या ज्ञात करो।
10. एक गाँव जिसकी जनसंख्या 4000 है जिसको प्रतिदिन प्रतिव्यक्ति 150 लीटर पानी की आवश्यकता है। इस गांव में 20 मीटर $\times$ 15 मीटर $\times$ 6 मीटर माप वाली एक टंकी बनी हुई है। इस टंकी का पानी वहाँ कितने दिन के लिए पर्याप्त होगा।
11. क्रमशः 6 सेमी., 8 सेमी. और 10 सेमी. त्रिज्याओं वाले धातु के तीन ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
12. एक शंकु के आकर की बर्तन की त्रिज्या 10 सेमी. और ऊँचाई 18 सेमी है। पानी से पूरा भरा हुआ है। इसे 5 सेमी. त्रिज्या के एक बेलनाकार बर्तन में उडेला जाता है। बेलनाकार बर्तन में पानी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
13. यदि 11 सेमी. $\times$ 3.5 सेमी. $\times$ 2.5 सेमी. मोम के एक घनाभ से 2.8 सेमी. व्यास की एक मोमबत्ती बनाई जाती है। मोमबत्ती की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
14. धातु के एक गोले का व्यास 6 सेमी है। गोले को पिघलाकर एक समान वृत्तीय अनुप्रस्थ काट–परिच्छेद वाला तार बनाया गया है। तार की लम्बाई 36 मीटर हो, तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2 ऊँचाई (लम्बाई + चौड़ाई)

   $= 2 \times (\text{ल.} + \text{चौ.}) \times \text{ऊँ.} = 2 \times (\ell + b) \times h$

2. घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + h\ell)$
3. घनाभ का आयतन $= \ell \times b \times h =$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई
4. घन की चारों दीवारों का क्षेत्रफल $= 4\ell^2$
5. घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6\ell^2$
6. घन का आयतन $= \ell^3$
7. घनाभ का विकर्ण $= \sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$
8. घन का विकर्ण $= \sqrt{3}\ell$
9. बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$
10. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r + h)$
11. बेलन का आयतन $= \pi r^2 h =$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई
12. खोखले बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi (r_1 + r_2)(h + r_1 - r_2)$
13. खोखले बेलन का आयतन $= \pi (r_1^2 - r_2^2) h$
14. शंकु का तिर्यक पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r \ell$
15. शंकु की तिर्यक लम्बाई $\ell^2 = \sqrt{h^2 + r^2}$
16. शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय

    क्षेत्रफल $= \pi r(r + \ell)$

17. शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई
18. ठोस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$
19. ठोस गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$
20. अर्द्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$
21. अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$
22. अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$
23. गोलीय कोश या खोखले गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi (r_1^2 - r_2^2)$ यहाँ $r_1 > r_2$
24. गोलीय कोश का आयतन $= \frac{4}{3}\pi (r_1^3 - r_2^3)$
25. 1 घन मीटर = 1000 लीटर = 1 किलो लीटर

    1 लीटर = 1000 घन सेमी

    1 आर = 100 वर्ग मीटर

    1 घन सेमी = 1000 घन मिमी

    1 घन मीटर = 100,00,00 घन सेमी

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 16.1

1. 416 वर्ग सेमी, 540 वर्ग सेमी.
2. 486 वर्ग मीटर
3. 7900 वर्ग सेमी
4. 400 वर्ग सेमी
5. ₹ 110.80
6. 240 वर्ग सेमी
7. 5 मीटर
8. 15000 ईंट
9. $10\sqrt{2}$ मीटर
10. 8 मीटर
11. 3000 ईंट
12. 15 सेमी, 9 सेमी, 6 सेमी

प्रश्नमाना 16.2

1. 968 वर्ग सेमी, 2310 घन सेमी
2. 132 वर्ग सेमी, 188.57 वर्ग सेमी, 198 घन सेमी
3. 3234 घन सेमी, 924 वर्ग सेमी
4. (5 : 6. 5 : 9)
5. 539 घन सेमी
6. 2310 घन सेमी
7. 5 सेमी
8. 5 सेमी, 21 सेमी
9. 22 : 15
10. 2.5 मीटर
11. 4400 वर्ग सेमी
12. 2816 वर्ग सेमी
13. 3520 घन सेमी

प्रश्नमाला 16.3

1. 2310 वर्ग सेमी, 3696 वर्ग सेमी, 12936 घन सेमी
2. 25 सेमी
3. 704 वर्ग मीटर
4. 2200 वर्ग सेमी, 2816 वर्ग सेमी
5. 301.71 घन सेमी
6. लगभग 5 सेमी
7. 24 सेमी
8. 320 वर्ग सेमी
9. 12 सेमी
10. 462 घन मीटर
11. 24 सेमी
12. 718.67 घन सेमी
13. 25 सेमी, 550 वर्ग सेमी, 704 वर्ग सेमी, 1232 घन सेमी
14. 189.61 घन सेमी

प्रश्नमाला 16.4

1. 24.64 वर्ग सेमी, 11.5 घन सेमी
2. 1437.33 घन सेमी
3. 190.93 वर्ग सेमी, 190.93 घन सेमी
4. 5544 वर्ग सेमी
5. 15
6. 1240.38 घन सेमी
7. 54
8. 100 π वर्ग सेमी
9. 38808 घन सेमी
10. 1500
11. 1 सेमी
12. 54
13. 539 घन सेमी
14. ₹ 397.43

विविध प्रश्नमाला–16

1. (ग)
2. (घ)
3. (ग)
4. (ख)
5. (क)
6. ₹ 831.60
7. 1 : 2 : 3
8. 6776 घन सेमी
9. 54
10. 3 दिन
11. 12 सेमी
12. 24 सेमी
13. 15.6 सेमी
14. $\frac{1}{10}$ सेमी $= 0.1$ सेमी

❑

QQT1K9

17

केन्द्रीय प्रवृति के माप (Measures of Central Tendency)

17.01 प्रस्तावना (Introduction) :

प्रारम्भिक आंकड़ों का संकलन, वर्गीकरण, सारणीयन एवं ग्राफ द्वारा प्रदर्शित कर, इन्हें समझने के लिए सरल एवं सुगम बनाया जाता है। परन्तु जब आंकडों का तुलनात्मक अध्ययन करना हो या आंकडों से कोई निष्कर्ष निकालना हो, तो इन्हें और अधिक सरल एवं संक्षिप्त बनाना आवश्यक हो जाता है जिससे कि उनकी विशेषताओं को एक ही अंक द्वारा प्रकट किया जा सके।

उदाहरण के लिए यदि एक विद्यालय के 300 विद्यार्थियों की तुलना दूसरे विद्यालय के 500 विद्यार्थियों से करनी है, तो उनके भिन्न–भिन्न विषयों में प्राप्तांक दर्शाने वाली श्रेणियों से किसी भी निष्कर्ष पर पहुँचना आसान नहीं है। किन्तु यदि इन्हीं श्रेणियों के बजाय प्रत्येक श्रेणी से एक–एक प्रतिनिधि अंक लिया जाये तो तुलना करना आसान हो जायेगा। यह प्रतिनिधि अंक, श्रेणी के लगभग मध्य में, जहाँ श्रेणी के अधिकांश पद केन्द्रित होते हैं लिया जाता है। यह मान सम्पूर्ण श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है तथा इसे ''केन्द्रीय प्रवृति का माप'' कहते हैं।

17.02 केन्द्रीय प्रवृति के माप एवं माध्यों के प्रकार (Measures of Central Tendency and Types of Averages)

R4RKBP

केन्द्रीय प्रवृति के माप तथा माध्यों को साधारणतः दो भागों में विभाजित किया जाता है :

(1) गणितीय माध्य (Mathematical Average)

(i) समान्तर माध्य अथवा औसत (Arithmetic Mean or Average)[AM]

(ii) गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) [GM]

(iii) हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) [HM]

(2) स्थिति सम्बन्धी माध्य (Average of Position)

(i) माध्यक (Median)

(ii) बहुलक (Mode)

यहाँ हम माध्यमिक स्तर पर केवल समान्तर माध्य (जिसे सामान्यतः केवल माध्य कहकर भी प्रकट करते हैं) माध्यक तथा बहुलक के सरल प्रश्नों पर ही विचार करेंगे।

17.03 समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)

R51GDC

प्रारम्भिक आँकड़ों से समान्तर माध्य ज्ञात करना (व्यक्तिगत श्रेणी) इस प्रकार के आँकड़ों से समान्तर माध्य प्राप्त करने के लिए सभी आंकड़ों का योग करके उसमें कुल आँकड़ों (समंक) की संख्या का भाग दिया जाता है। इसे औसत भी कहते हैं, अर्थात्

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{आंकड़ों का योग}}{\text{आंकड़ों की संख्या}}$$

उदाहरण के लिए किसी विद्यालय में कक्षा दसवीं में अध्ययन करने वाले 10 छात्रों के गणित विषय में प्राप्तांक क्रमशः 7, 8, 5, 6, 7, 8, 9, 4, 5, 6 अंक है तो प्राप्तांकों का औसत

$$= \frac{\text{प्राप्तांकों का योग (आंकड़ों का योग)}}{\text{छात्रों की संख्या (आंकड़ों की संख्या)}}$$

$$= \frac{7+8+5+6+7+8+9+4+5+6}{10}$$

$$= \frac{65}{10} = 6\cdot5 \text{ अंक}$$

यदि किसी चर के मान क्रमशः $x_1, x_2, \dots, x_n$ हों, तो

उनका समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

टिप्पणी : Σ ग्रीक वर्णमाला का अक्षर है तथा इसे **'सिग्मा'** उच्चारित करते हैं तथा गणित में इसे योग की प्रक्रिया दिखाने के लिये प्रयोग में लाया जाता है। जैसे $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ को प्रकट करता है। अतः

$$\sum_{i=1}^{25} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{25}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक विद्यालय में कार्यरत प्रधानाध्यापक समेत 5 कर्मचारियों का वेतन क्रमशः ₹ 8000, ₹ 5000, ₹ 4000, ₹ 2500, ₹ 1500 मासिक है। विद्यालय में कार्यरत कर्मचारियों का औसत मासिक वेतन ज्ञात कीजिए।

हल: औसत मासिक वेतन $= \dfrac{8000 + 5000 + 4000 + 2500 + 1500}{5}$

$$= \frac{21000}{5} = 4200$$

अतः कर्मचारियों का औसत मासिक वेतन = ₹ 4200

उदाहरण-2. प्रथम दस विषम संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: प्रथम दस विषम संख्याएँ क्रमशः $1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19$ हैं।

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19}{10}$

$$= \frac{100}{10} = 10$$

उदाहरण-3. आठ क्रमागत विषम संख्याओं का औसत 16 है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि प्रथम विषम संख्या x है, अतः क्रमागत आठ विषम संख्याएँ होंगी

$$x,\ x+2,\ x+4,\ x+6,\ x+8,\ x+10,\ x+12,\ x+14$$

आठों संख्याओं का औसत

$$= \frac{(x)+(x+2)+(x+4)+(x+6)+(x+8)+(x+10)+(x+12)+(x+14)}{8}$$

$$= \frac{8x+2+4+6+8+10+12+14}{8} = \frac{8x+56}{8}$$

अतः $\dfrac{8x+56}{8} = 16$ या $8x+56 = 128$ या $x = 9$

अतः अभीष्ट क्रमागत विषम संख्याएँ $9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23$ हैं।

17.04 समान्तर माध्य के गुण–दोष (Merits, Demerits of Arithmetic Mean) :

गुण (Merits) :

1. इसकी गणना करना सरल है।
2. यह सभी पदों पर आधारित है।
3. अन्य सांख्यिकीय विश्लेषण में भी इसका प्रयोग होता है।
4. यह माध्य निश्चित और सदा एक ही होता है।
5. इसकी शुद्धता की जाँच सम्भव है।
6. इसके मान में स्थिरता रहती है।

दोष (Demerits) :

1. कभी–कभी इसके मान के गणन में ऐसी राशि आ सकती हैं जो प्रकृति के अनुसार संभव नहीं हो जैसे परिवार के सदस्यों की संख्या 3·8 या 5·6 होना।
2. किसी भी एक मूल्य के नहीं होने पर गणना संभव नहीं है।
3. चरम मानों (extreme values) का अत्यधिक प्रभाव पड़ता है।
4. इस माध्य का निर्धारण अवलोकन द्वारा सम्भव नहीं है।

प्रश्नमाला 17.1

1. यदि एक कक्षा के गणित विषय में दस छात्रों के प्राप्तांक 52, 75, 40, 70, 43, 40, 65, 35, 48, 52 हों, तो समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।
2. एक विद्यालय के सहायक कर्मचारियों का मासिक वेतन रुपयों में 1720, 1750, 1760 तथा 1710 है, तो समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।
3. यदि 3, 4, 8, 5, x, 3, 2,1 अंकों का समान्तर माध्य 4 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
4. क्रिकेट के एक खिलाड़ी ने 10 पारियों में क्रमशः 60, 62, 56, 64, 0, 57, 33, 27, 9 और 71 रन बनाए। उसके इन पारियों के रनों का औसत ज्ञात कीजिए।
5. एक मासिक परीक्षा में 10 विद्यार्थियों के द्वारा अंग्रेजी में प्राप्त निम्न अंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजिए –

अनुक्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्राप्तांक	30	28	32	12	18	20	25	15	26	14

6. एक विद्यालय के पुस्तकालय से 10 दिन में छात्रों को दी गई पुस्तकों की संख्या निम्नलिखित है –

   300 405 455 489 375 280 418 502 300 476

   प्रतिदिन दी गई पुस्तकों की औसत संख्या ज्ञात कीजिए।
7. एक कक्षा के वर्ग A के 25 छात्रों का औसत भार 51 किग्रा है, जबकि वर्ग B के 35 छात्रों का औसत भार 54 किग्रा है। इस कक्षा के कुल 60 छात्रों के औसत भार की गणना कीजिए।
8. पाँच संख्याओं का औसत 18 है। यदि एक संख्या हटा दी जाती है तो औसत 16 हो जाता है। हटायी गई संख्या ज्ञात कीजिए।
9. 13 संख्याओं का माध्य 24 है। यदि प्रत्येक संख्या में 3 जोड़ दिया जाय, तो नए माध्य में क्या परिवर्तन आयेगा ?
10. एक विद्यालय के पाँच कर्मचारियों का औसत मासिक वेतन ₹ 3000 है। एक कर्मचारी के सेवानिवृत होने पर शेष कर्मचारियों का औसत मासिक वेतन ₹ 3200 हो जाता है। सेवानिवृत कर्मचारी का, सेवा निवृति के समय कितना वेतन था ?

17.05 असंतत श्रेणी या असंतत बारम्बारता बंटन से समान्तर माध्य (Arithmetic Average from Discrete Series or Discrete Frequency Distribution)

माना कि चर x के n मानों का बारम्बारता बंटन निम्न प्रकार है –

चर x के मान	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
बारम्बारता f	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_n

बंटन से यह स्पष्ट है कि चर राशि x के कुल n मानों में से x_1, f_1 बार; x_2, f_2 बार; $\cdots$, x_n, f_n बार मान प्राप्त करते हैं। अतः

चर x का औसत या समान्तर माध्य $(\bar{x})$ निम्न प्रकार प्राप्त होगा –

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}^{f_1 \text{ बार}} + \overbrace{x_2 + x_2 + \cdots + x_2}^{f_2 \text{ बार}} + \cdots + \overbrace{x_n + x_n + \cdots + x_n}^{f_n \text{ बार}}}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

$$= \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i \, x_i, \quad \text{जहाँ} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i = n = \text{कुल मानों की संख्या}$$

क्रिया पद (Working steps) :

पद I. सबसे पहले बारम्बारता बंटन से बारम्बारता सारणी इस प्रकार बनाते हैं कि पहला स्तम्भ चर x के मानों x_i का तथा दूसरा स्तम्भ चर मानों की बारम्बारता f_i का हो।

पद II. तीसरा स्तम्भ x_i तथा f_i के गुणनफल $f_i x_i$ का बनायेंगे।

पद III. दूसरे स्तम्भ के योग को $\sum f_i$ तथा तीसरे स्तम्भ के योग को $\sum f_i x_i$ से दर्शाने पर

$$\text{समान्तर माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

अतः समान्तर माध्य की गणना हेतु सारणी निम्न प्रकार बनायी जाती है :

समान्तर माध्य की गणना

x_i	f_i	$f_i x_i$
x_1	f_1	$f_1 x_1$
x_2	f_2	$f_2 x_2$
x_3	f_3	$f_3 x_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n	$f_n x_n$
	$\sum f_i$	$\sum f_i x_i$

$$\text{माध्य} \quad \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

टिप्पणी : x के मान को x_i तथा इसकी सम्बन्धित बारम्बारता को f_i से दर्शाते हैं। x के औसत मान को $\bar{x}$ से निरूपित करते हैं।

उदाहरण : निम्न बारम्बारता बंटन से माध्य की गणना कीजिए –

x :	5	6	7	8	9	10	11
f :	5	8	9	12	6	6	4

हल: **समान्तर माध्य की गणना**

x_i	f_i	$f_i x_i$
5	5	25
6	8	48
7	9	63
8	12	96
9	6	54
10	6	60
11	4	44
	$\sum f_i = 50$	$\sum f_i\ x_i = 390$

अतः समान्तर माध्य $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$$= \frac{390}{50} = 7 \cdot 8$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए:

x	1	2	3	4	5	6
f	2	5	6	4	2	2

हल: **समान्तर माध्य की गणना**

x_i	f_i	$f_i x_i$
1	2	2
2	5	10
3	6	18
4	4	16
5	2	10
6	2	12
	$\sum f_i = 21$	$\sum f_i x_i = 68$

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{68}{21} = 3 \cdot 238$

उदाहरण-2. एक कारखाने में 50 अधिकारियों का दैनिक वेतन निम्न प्रकार है–

वेतन (रु. में) x :	450	475	500	525	550
अधिकारियों की संख्या f :	12	13	7	10	8

इनके वेतन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः

x_i	f_i	$f_i x_i$
450	12	5400
475	13	6175
500	7	3500
525	10	5250
550	8	4400
	$\sum f_i = 50$	$\sum f_i x_i = 24725$

अतः अभीष्ट समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$= \dfrac{24725}{50}$

$= ₹494 \cdot 5$

प्रश्नमाला 17.2

निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए (प्रश्न 1–4) :

1.

x :	3	5	8	11
f :	2	4	5	3

2.

x :	2	5	7	9	11
f :	1	5	4	7	3

3.

x :	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6
f :	30	60	20	40	10	50

4.

x :	0·1	0·3	0·5	0·7	0·89
f :	7	8	10	15	10

5. एक सौ परिवारों में बच्चों की संख्या निम्न प्रकार है –

बच्चों की संख्या	1	2	3	4	5	6
परिवारों की संख्या	45	25	19	8	2	1

इनका समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

6. एक कक्षा में छात्रों के भार निम्न सारणी में दिए गए हैं –

भार (किग्रा में)	20	21	22	23	24	25	26	27	28
छात्रों की संख्या	1	2	6	7	4	2	3	2	3

इनका समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

7. यदि निम्न बंटन का माध्य $7 \cdot 5$ हो, तो P का मान ज्ञात कीजिए।

x :	3	5	7	9	11	13
f :	6	8	15	P	8	4

8. यदि निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य $1 \cdot 46$ हो, तो अज्ञात बारम्बारताएं ज्ञात कीजिए।

x :	0	1	2	3	4	5	योग
f :	46	$\cdots$	$\cdots$	25	10	5	200

17.06 वर्गीकृत (समूहित) बारम्बारता बंटन से समान्तर माध्य (Arithmetic mean from grouped frequency distribution)

इस प्रकार के बारम्बारता बंटन में चर का मान अन्तरालों में विभाजित होता है। उदाहरण के लिए निम्न बारम्बारता बंटन पर विचार करेंगे –

प्राप्तांक (x)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या (f)	5	8	20	14	3

यहाँ एक वर्ग अन्तराल 10-20 की बारम्बारता 8 है अर्थात् 10 से लगाकर 20 से कम तक x के 8 मान हैं। जब प्रारम्भिक आंकड़ों से वर्गीकृत बारम्बारता बंटन तैयार कर लेते हैं तो फिर बंटन देखकर उन आंकड़ों के बारे में अनुमान लगाना असम्भव हो जाता है। जैसे यदि x के मान 10, 11, 12, 17, 17, 18, 19, 19·5, हैं या 11, 12, 13, 14, 15, 15, 17, 19 तो प्रत्येक स्थिति में वर्ग अन्तराल 10-20 ही होगा जिसकी बारम्बारता 8 है।

अतः सुविधा एवं सरलता हेतु, युक्तिसंगत यह माना जाता है कि प्रत्येक अन्तराल के माध्य को चर x का मान तथा संगत अन्तराल की बारम्बारता को x की बारम्बारता मानते हुए, अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन की बताई गई विधि द्वारा माध्य की गणना की जाती है जैसे

अन्तराल 10-20 के लिए $x = \dfrac{10+20}{2} = 15$ की बारम्बारता 8 है।

इस प्रकार उपर्युक्त वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से निम्न प्रकार अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन प्राप्त करते हैं –

अन्तराल (प्राप्तांक)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
प्राप्तांक	5	15	25	35	45
बारम्बारता	5	8	20	14	3

इससे पूर्व में बताई गई विधि द्वारा निम्नानुसार माध्य प्राप्त करते है –

x_i	f_i	$f_i x_i$
5	5	25
15	8	120
25	20	500
35	14	490
45	3	135
योग	$\sum f_i = 50$	$\sum f_i x_i = 1270$

अतः अभीष्ट समान्तर माध्य $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$$= \frac{1270}{50}$$

$= 25 \cdot 4$ अंक

प्रश्नमाला 17.3

निम्न बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए : [1 से 4]

1.

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	9	12	15	10	14

2.

वर्ग	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30
बारम्बारता	6	8	10	9	7

3.

प्राप्तांक (x)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
छात्रों की संख्या (f)	10	20	20	15	5

4.

वर्ग	25 – 35	35 – 45	45 – 55	55 – 65	65 – 75
बारम्बारता	6	10	8	12	4

5. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए –

भार (किग्रा में)	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
छात्रों की संख्या	10	25	28	12	10	15

6. एक फैक्ट्री में कर्मचारियों के वेतन निम्न सारणी अनुसार है –

प्रतिमाह वेतन (रुपयों में)	1000-1200	1200-1400	1400-1600
कर्मचारियों की संख्या	10	20	20
प्रतिमाह वेतन (रुपयों में)	1600-1800	1800-2000	
कर्मचारियों की संख्या	15	5	

वेतन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

17.07 कल्पित माध्य की सहायता से समान्तर माध्य : (Arithmetic mean using assumed mean) :

यदि किसी बारम्बारता बंटन में x के मान बहुत बड़े हों, तब समान्तर माध्य की गणना कठिन हो जाती है तथा समय भी अधिक लगता है। ऐसी स्थिति में कल्पित माध्य (assumed mean) की लघु रीति से समान्तर माध्य ज्ञात करना अधिक सुविधाजनक रहता है।

क्रिया पद (Working Steps) :

पद I. सर्वप्रथम बारम्बारता सारणी इस प्रकार बनाते हैं कि पहले स्तम्भ में चर x का मान x_i तथा दूसरे स्तम्भ में इसकी बारम्बारता f_i आए।

पद II. तीसरे स्तम्भ में सुविधानुसार एक मान A से प्रत्येक चर मान x_i से विचलन लिखते हैं। यहाँ A कल्पित माध्य कहलाता है।

पद III. चौथे स्तम्भ में बारम्बारता f_i तथा विचलन d_i का गुणा $f_i d_i$ लिखते हैं।

पद IV. अब स्तम्भ 2 का योग $\sum f_i$ तथा स्तम्भ 4 का योग $\sum f_i d_i$ सम्बन्धित स्तम्भ के नीचे लिखते हैं।

पद V. सूत्र $\bar{x} = A + \frac{1}{N}\left(\sum f_i d_i\right)$, जहाँ $N = \sum f_i$ है, से समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं।

निम्न सारणी से उपरोक्त क्रिया विधि स्पष्ट होती है –

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
x_1	f_1	d_1	$f_1 d_1$
x_2	f_2	d_2	$f_2 d_2$
x_3	f_3	d_3	$f_3 d_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k	d_k	$f_k d_k$
	$N = \sum f_i$		$\sum f_i d_i$

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = A + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$$= A + \frac{1}{N}\left(\sum f_i\, d_i\right)$$

यदि पद II में $u_i = \dfrac{x_i - A}{h}$ से पद विचलन (step deviation) ज्ञात किया जाय, जहाँ h विचलनो का सार्व गुणनखण्ड है तो पद III के अनुसार कॉलम तीन में $f_i u_i$ अर्थात् बारम्बारता f_i तथा u_i का गुणनफल लिखेंगे। तब निम्न सूत्रानुसार माध्य ज्ञात करेंगे

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$$

महत्वपूर्ण टिप्पणी :

(i) सामान्यतः कल्पित माध्य A, चर x के मध्य के मान को अथवा अधिकतम बारम्बारता वाले मान को लिया जाता है।

(ii) जब x के मानों में अन्तर अधिक तथा मान बड़ा हो या बारम्बारता अधिक हो तो गणितीय परिकलन सरल करने के लिये पद विचलन

$u_i = \dfrac{x_i - A}{h}$ लेकर गणना करना सुविधाजनक रहता है।

उपर्युक्त सूत्र के लिये गणना सारणी

x_i	f_i	$u_i = \dfrac{x_i - A}{h}$	$f_i u_i$
x_1	f_1	u_1	$f_1 u_1$
x_2	f_2	u_2	$f_2 u_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k	u_k	$f_k u_k$
योग	$\sum f_i$		$\sum f_i u_i$

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

(यहाँ सामान्यतः A के मध्यमान लेने पर u_i के मान $\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ आते हैं)
आगे दिये गये उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जायेगा।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न बारम्बारता बंटन के लिये समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए –

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
f	20	43	75	67	72	45	39	9	8	6

हलः सर्वप्रथम अधिकतम बारम्बारता 72 के संगत चर मान 25 को कल्पित माध्य A मानकर गणना सारणी का निर्माण करेंगे। (यहाँ $A = 25$ तथा $h = 5$)

समान्तर माध्य की गणना सारणी

चर मान x_i	बारम्बारता f_i	$u_i = \frac{x_i - 25}{5}$	$f_i u_i$
5	20	−4	−80
10	43	−3	−129
15	75	−2	−150
20	67	−1	−67
25	72	0	0
30	45	1	45
35	39	2	78
40	9	3	27
45	8	4	32
50	6	5	30
योग	$N = \sum f_i = 384$		$\sum f_i u_i = -214$

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$$= 25 + \left(\frac{-214}{384}\right) \times 5$$

$$= 25 - 2\cdot786 = 22\cdot214$$

उदाहरण-2. निम्न बारम्बारता बंटन 12 विद्यार्थियों के भारों को प्रदर्शित करता है

भार (किग्रा में)	67	70	72	73	75
विद्यार्थियों की संख्या	4	3	2	2	1

माध्य भार ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर माध्य हेतु गणना सारणी :–

भार (किग्रा में) x_i	विद्यार्थियों की संख्या f_i	$d_i = x_i - 72$	$f_i d_i$
67	4	-5	-20
70	3	-2	-6
72	2	0	0
73	2	1	2
75	1	3	3
योग	$N = \sum f_i = 12$		$\sum f_i d_i = -21$

यहाँ A का मान चर x के मानों के मध्य का मान 72 लेने पर

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \frac{1}{N}\left(\sum f_i d_i\right)$$

$$= 72 + \left(\frac{-21}{12}\right)$$

$$= 72 - \frac{7}{4} = 70 \cdot 25 \text{ किग्रा.}$$

अतः माध्य भार 70·25 किग्रा.

उदाहरण-3. नीचे सारणी में कुछ विशेष क्षेत्र के गाँवों की समुद्रतल से ऊँचाई दे रखी है। उस क्षेत्र की समुद्रतल से माध्य उँचाई ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (मीटर में)	200	600	1000	1400	1800	2200
गाँवों की संख्या	142	265	560	271	89	16

हल: यहाँ हम $A = 1000$ तथा $h = 400$ लेकर दोनों तरह के विचलन d_i तथा u_i की गणना करते हुए माध्य ज्ञात करेंगे।

समान्तर माध्य की गणना सारणी

ऊँचाई (मी. में) x_i	गाँवों की संख्या f_i	विचलन $d_i = x_i - 1000$	$f_i d_i$	विचलन $u_i = \frac{x_i - 1000}{400}$	$f_i u_i$
200	142	−800	−113600	−2	−284
600	265	−400	−106000	−1	−265
1000	560	0	0	0	0
1400	271	400	108400	1	271
1800	89	800	71200	2	178
2200	16	1200	19200	3	48
	$\sum f_i = 1343$		$\sum f_i d_i = -20800$		$\sum f_i u_i = -52$

अतः (i) विचलन विधि से माध्य

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

$$= 1000 + \frac{-20800}{1343}$$

$= 1000 - 15\cdot488$ लगभग

$$= 984\cdot512$$

(ii) पद विचलन विधि से माध्य

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) h$$

$$= 1000 + \frac{-52}{1343} \times 400$$

$= 1000 - 15\cdot488$ लगभग

$$= 984\cdot512$$

उदाहरण-4. निम्न बारम्बारता बंटन का पद विचलन विधि से माध्य ज्ञात कीजिए –

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	7	10	15	8	10

हल: माध्य की गणना (यहाँ $A = 25$ तथा $h = 10$)

वर्गअन्तराल	x_i	f_i	$u_i = \frac{x_i - 25}{10}$	$f_i u_i$
0 − 10	5	7	−2	−14
10 − 20	15	10	−1	−10
20 − 30	25	15	0	0
30 − 40	35	8	1	8
40 − 50	45	10	2	20
		$\sum f_i = 50$		$\sum f_i u_i = 4$

$$\text{अत: माध्य} = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$$= 25 + \left(\frac{4}{50}\right) \times 10 = 25 \cdot 8$$

प्रश्नमाला 17.4

निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य, कल्पित माध्य की सहायता से ज्ञात कीजिए –
(प्रश्न 1 से 4)

1.

x	800	820	860	900	920	980	1000
f	7	14	19	25	20	10	5

2.

भार (किग्रा में)	60	61	62	63	64	65
मजदूरों की संख्या	5	8	14	16	10	7

3.

खर्च (रुपयों में)	100-150	150-200	200-250	250-300
मजदूरों की संख्या	24	40	33	28
खर्च (रुपयों में)	300 – 350	350 – 400	400 – 450	450 – 500
मजदूरों की संख्या	30	22	16	7

4.

पानी पर खर्च (रुपयों में)	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
मकानों की संख्या	7	5	7	8	9	11
पानी पर खर्च (रुपयों में)	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	
मकानों की संख्या	7	5	4	4	3	

5. कल्पित माध्य 25 मानकर निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f	6	10	13	7	4

6. निम्नलिखित सारणी में एक शहर में एक विशेष वर्ष में एक रोग से पीड़ित रोगियों का आयु बंटन दिया गया है। प्रति रोगी औसत आयु (वर्षों में) ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में)	5 – 14	15 – 24	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

7. निम्न लिखित बारम्बारता बंटन से माध्य ज्ञात कीजिए –

वर्ग अन्तराल	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारम्बारता	10	25	28	12	10	15

R5ACEZ

17.08 माध्यक (Median) :

यदि किसी चर राशि x के n मानों को आरोही (ascending) या अवरोही (descending) क्रम में रखा जाय, तो इस श्रेणी के मध्य पद को श्रेणी की माध्यक कहेंगे। यदि पदों की संख्या विषम है तो मध्य में एक ही पद $\left(\frac{n+1}{2}\text{वां}\right)$ होगा। परन्तु यदि पदों की संख्या सम हो तो मध्य में दो पद होंगे $\left(\frac{n}{2}\text{वां व } \frac{n}{2}+1 \text{ वां}\right)$ तथा माध्यक उन दोनों पदों का औसत होगी। उदाहरण के लिये कक्षा A के 9 छात्रों के प्राप्तांक 10, 15, 12, 18, 17, 18, 15, 16, 19 हैं तथा कक्षा B के 8 छात्रों के प्राप्तांक 19, 15, 18, 14, 17, 16, 15, 15 है। इनको आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर –

A :	10	12	15	15	16	17	18	18	19
B :	14	15	15	15	16	17	18	19	

A का माध्यक = मध्य पद (5वाँ पद) = 16 अंक

B का माध्यक = मध्य पदों का औसत $\left(\frac{4\text{था पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}\right)$

$$= \frac{15+16}{2} = 15\cdot5 \text{ अंक}$$

17.09 अवर्गीकृत या व्यक्तिगत श्रेणी से माध्यक (Median from ungrouped or individual series)

क्रिया पद (Working steps) :

पद I. चर x के n मानों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम जैसे $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ में लिखना।

पद II. अब निम्न सूत्र के अनुसार माध्यक ज्ञात कीजिए –

$$\text{माध्यक } (M) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} \text{ वाँ पद अर्थात् } x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ यदि } n \text{ विषम संख्या हो} \\ \frac{n}{2} \text{ वें व } \frac{n}{2}+1 \text{ वें पदों का औसत अर्थात् } \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, \text{ यदि } n \text{ सम संख्या हो} \end{cases}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न आंकडों से माध्यक ज्ञात कीजिए।

25, 34, 31, 23, 22, 26, 35, 28, 20, 32

हल: दिये गए ऑकडों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

क्र. सं.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
चर का मान (x)	20	22	23	25	26	28	31	32	34	35

यहाँ कुल पद $(n) = 10$ (सम संख्या)

$$\text{अतः माध्यक } (M) = \frac{\frac{10}{2} \text{ वां पद } \left(\frac{10}{2}+1\right) \text{वां पद}}{2}$$

$$= \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{26+28}{2} = 27$$

उदाहरण-2. निम्न चर मानों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

37, 31, 42, 43, 46, 25, 39, 45, 32

हल: दिए गए आँकडों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
25	31	32	37	39	42	43	45	46

क्योंकि x के 9 मान क्रमशः आरोही क्रम में $x_1, x_2, \ldots, x_9$ है

अतः माध्यक $(M) = \left(\frac{9+1}{2}\right)$ वाँ पद $= x_5 = 39$

उदाहरण-3. आरोही क्रम में व्यवस्थित चर मान (x) निम्नानुसार है।

8 11 12 16 $16+x$ 20 25 30

यदि माध्यक 18 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ कुल चर मान 8 है अतः मध्य में दो पद क्रमशः 16 व $16+x$ है।

अतः माध्यक $= \frac{(16)+(16+x)}{2} = 18$ (दिया हुआ)

या $32+x=36$ या $x=4$

अतः x का मान $=4$

17.10 अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक (Median from ungrouped frequency distribution)

अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात करने की क्रिया विधि निम्नानुसार है –

क्रिया पद (Working steps) :

पद I. संचयी बारम्बारता सारणी (cummulative frequency table) तैयार करना।

पद II. $N/2$ का मान ज्ञात करना, जहाँ $N = \sum f_i$

पद III. $N/2$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता वाला चर मान माध्यक होगी।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात कीजिए।

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f :	8	10	11	16	20	25	15	9	6

हल: माध्यक के लिए गणना

x_i	f_i	$c.f.$
1	8	8
2	10	18
3	11	29
4	16	45
5	20	65
6	25	90
7	15	105
8	9	114
9	6	120

$N = 120$

यहाँ $\frac{N}{2} = 60.$

वह पद जिसकी संचयी बारम्बारता 60 से ठीक अधिक अर्थात् संचयी बारम्बारता 65 के संगत पद मान 5 हैं।

अतः माध्यक = 5

प्रश्नमाला 17.6

1. निम्न चर मानों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

   25, 34, 33, 13, 20, 26, 36, 28, 19, 34

2. निम्न आंकडों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

   19, 25, 59, 48, 35, 31, 30, 32, 51.

   यदि 25 को 52 से बदल दिया जाय, तो नया माध्यक का मान ज्ञात कीजिए।

3. एक कक्षा के विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न सारणी अनुसार दिए गए हैं, माध्यक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	15	20	25	30	35	40	45	50
विद्यार्थियों की संख्या	2	8	16	26	20	16	7	4

4. एक सौ परिवारों में बच्चों की संख्या निम्न प्रकार है, इनका माध्यक ज्ञात कीजिए।

बच्चों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
परिवारों की संख्या	10	35	27	17	6	3	2

5. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए –

x	20	25	30	35	40	45	50	55
f	14	28	33	30	20	15	13	7

17.11 वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक
(Median from grouped frequency distribution)

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात करने के लिए निम्न क्रिया पद है :

पद I. संचयी बारम्बारता सारणी तैयार करना।

पद II. $N/2$ ज्ञात कर ठीक अधिक संचयी बारम्बारता वाले वर्ग अन्तराल को ज्ञात करना।

पद III. अब इस वर्ग अन्तराल के लिए निम्न सूत्र की सहायता से माध्यक ज्ञात करना।

माध्यक $(M) = \ell + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f_i}\right) \times h$

जहाँ ℓ = माध्यक वर्ग निम्न सीमा

N = कुल बारम्बारता $\left(\sum f_i\right)$

C = माध्यक वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी बारम्बारता

h = माध्यक वर्ग का अन्तराल

f = माध्यक वर्ग की बारम्बारता

निम्न उदाहरण से यह विधि स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण-1. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
f_i	6	20	44	26	3	1

हल: संचयी बारम्बारता सारणी बनाने पर

वर्ग	f_i	संचयी बारम्बारता (c)
10-25	6	6
25-40	20	26
40-55	44	70
55-70	26	96
70-85	3	99
85-100	1	100

$N = 100$

यहाँ $\frac{N}{2} = 50$ अतः माध्यक वर्ग अंतराल "$40 - 55$" है तथा

यहाँ संगत $\ell = 40,\ C = 26,\ h = 15$ व $f = 44.$

$$\therefore \quad \text{माध्यक } (M) = \ell + \frac{\left(\frac{N}{2} - c\right)}{f} \times h$$

$$= 40 + \frac{(50 - 26)}{44} \times h$$

$$= 40 + \frac{24}{44} \times 15$$

$$= 48 \cdot 18$$

अतः माध्यक $48 \cdot 18$ है।

17.12 माध्यक के गुण व दोष (Merits and Demerits of Median) :

माध्यक के गुण :

(i) यह गुणात्मक विशेषताओं के अध्ययन में श्रेष्ठ है।

(ii) माध्यक ज्ञात करना सरल व सुविधाजनक है। कभी–कभी यह निरीक्षण मात्र से ज्ञात किया जा सकता है।

(iii) इसकी गणना में संपूर्ण आंकड़ों की आवश्यकता नहीं होती है।

(iv) माध्यक सदैव निश्चित एवं स्पष्ट होती है।

(v) इस पर चरम मानों का प्रभाव नहीं पड़ता, जबकि माध्य में अधिक प्रभाव पड़ता है।

माध्यक के दोष :

(i) मानों का अनियमित वितरण होने पर माध्यक प्रतिनिधि अंक प्रस्तुत नहीं करता व भ्रमपूर्ण निष्कर्ष निकलता है। जैसे– एक विद्यार्थी को क्रमशः 5 विषयों में 40, 30, 5, 3, 2 अंक प्राप्त हुए। यहाँ माध्यक 5 हुई जो आंकड़ों का उचित प्रतिनिधित्व नहीं करती है।

(ii) जब चरम मानों को समान महत्व देना हो तो यह केन्द्रीय प्रवृति का मान अनुपयुक्त है।

(iii) इसका प्रयोग गणितीय प्रक्रियाओं में नहीं किया जा सकता है।

प्रश्नमाला 17.7

1. 100 छात्रों के प्राप्तांक निम्न सारणी में दिए गए हैं। इनसे माध्यक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
छात्रों की संख्या	6	20	44	26	3	1

2. एक कक्षा के छात्रों के प्राप्तांक निम्न बारम्बारता बंटन में दिए हुए हैं। इनसे माध्यक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
छात्रों की संख्या	4	28	42	20	6

निम्न बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात कीजिए। (प्र. 3 व 4)

3.

वर्ग	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40
f_i	2	6	10	17
वर्ग	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
f_i	30	15	10	10

4.

वर्ग	0 – 8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
f_i	42	30	50	22	8	5

17.13 बहुलक (Mode)

किसी श्रेणी का वह मूल्य जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है, बहुलक कहलाता है। इसके पास श्रेणी के पदों के केन्द्रित होने की प्रवृति सबसे अधिक होती है।

R5J8GH

बहुलक की गणना (Calculation of Mode)

(i) व्यक्तिगत श्रेणी या अवर्गीकृत श्रेणी से बहुलक (Mode from Individual Series or Discrete Series)

इस श्रेणी से पहले बारम्बारता बंटन सारणी तैयार करते हैं।

जिस मूल्य (समंक) की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वही मूल्य (समंक) श्रेणी का बहुलक (Mode) कहलाता है। इसको निम्न उदाहरण की सहायता से सरलता से समझा जा सकता है –

प्राप्तांक	0	1	2	3	4	5
छात्रों की संख्या	5	8	13	5	3	2

यहाँ बारम्बारता बंटन से स्पष्ट है कि प्राप्तांक 2 की बारम्बारता सबसे अधिक 13 है, अतः बंटन का बहुलक प्राप्तांक 2 होगा।

यदि बारम्बारता का वितरण नियमित नहीं हो या सबसे अधिक बारम्बारता वाले मूल्य एक से अधिक हो, तो फिर बहुलक ज्ञात करना कठिन होता है। ऐसी स्थिति में बहुलक का निर्धारण 'समूहीकरण' (Grouping) द्वारा करना पड़ता है। यहाँ हम नियमित वितरण वाले बारम्बारता बंटन का ही अध्ययन करेंगे।

(ii) अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन से बहुलक (Mode from ungrouped frequency distribution) :

यहाँ नियमित बारम्बारता बटन से जिस पद मूल्य की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वहीं पद मूल्य बहुलक होता है।

उदाहरणः कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नानुसार है इनका बहुलक ज्ञात कीजिए –

प्राप्तांक	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
विद्यार्थियों की संख्या	1	5	15	16	20	19	15	8	7	3	2

हलः यहाँ प्राप्तांक 34 की बारम्बारता सबसे अधिक 20 है।

अतः बहुलक $= 34$ अंक

(iii) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से बहुलक (Median from grouped frequency distribution)

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से बहुलक निकालने के लिये निम्न क्रिया पद है –

पद I. वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के जिस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक होती है, उसे बहुलक वर्ग कहते हैं। सर्व प्रथम बहुलक वर्ग को ज्ञात करते हैं।

पद II. बहुलक वर्ग के माध्यम से निम्न सूत्र का प्रयोग करते हुए बहुलक ज्ञात करते है –

$$\text{बहुलक} = \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

जहाँ $\ell =$ बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

$f_1 =$ बहुलक वर्ग की बारम्बारता

$f_0 =$ बहुलक वर्ग से ठीक पूर्व वर्ग की बारम्बारता

$f_2 =$ बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारम्बारता

$h =$ बहुलक वर्ग का अन्तराल

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न बारम्बारता बंटन से बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
f_i	6	20	44	26	3	1

हलः यहाँ सबसे अधिक बारम्बारता 44, वर्ग '40-50' की है।

इस प्रकार बहुलक वर्ग $= 40 - 50$

पुनः $\ell = 40,\ f_1 = 44,\ f_0 = 20,\ f_2 = 26$ तथा $h = 15$

$$\text{सूत्र के अनुसार बहुलक} = \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{44 - 20}{88 - 20 - 26}\right) \times 15 = 48\cdot57$$

अतः अभीष्ट बहुलक $= 48\cdot57$

प्रश्नमाला 17.8

1. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

(i)	2	5	7	5	3	1	5	8	7	5
(ii)	2	4	6	2	6	6	7	8		
(iii)	2·5	2·5	2·1	2·5	2·7	2·8	2·5			

2. निम्न बारम्बारता बंटनों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

(i)

x	3	4	5	6	7	8
f	2	4	6	3	2	1

(ii)

x	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6
f	20	50	80	60	15	8

3. एक गाँव के 30 परिवारों में उनके सदस्यों की संख्या निम्न सारणी के अनुसार है, इनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

सदस्य संख्या	2	3	4	5	6	7	8
परिवारों की संख्या	1	2	4	6	10	3	5

4. एक कक्षा के 20 छात्रों की आयु वर्षों में निम्न प्रकार है।

15	16	13	14	14	13	15	14	13	13
14	12	15	14	16	13	14	14	13	15

इन्हें बारम्बारता बंटन में व्यक्त कर बहुलक ज्ञात कीजिए।

5. कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक नीचे दिए हुए है, प्राप्तांकों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	10	20	30	40	50	60	70	80
विद्यार्थियों की संख्या	2	8	16	26	20	16	7	4

निम्न बारम्बारता बंटन से बहुलक ज्ञात कीजिए। [प्रश्न 6–9]

6.

वर्ग	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
बारम्बारता	3	7	16	12	9	5	3

7.

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
छात्रों की संख्या	5	12	14	10	8	6

8.

प्राप्तांक	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
छात्रों की संख्या	4	28	42	20	6

9.

ऊँचाई (सेमी में)	52-55	55-58	58-61	61-64
छात्रों की संख्या	10	20	25	10

विविध प्रश्नमाला–17

निम्न प्रश्नों के उत्तरों के चार संभावित विकल्प दिए हुए हैं। सही उत्तर वाले विकल्प का चुनाव कीजिए।

1. किसी श्रेणी का बहुलक मूल्य होता है –
   (क) मध्यवर्ती मूल्य (ख) सर्वाधिक बारम्बारता वाला मूल्य
   (ग) न्यूनतम बारम्बारता मूल्य (घ) सीमान्त मूल्य

2. निम्न श्रेणी का माध्यक मूल्य है –

520, 20, 340, 190, 35, 800, 1210, 50, 80

(क) 1210 (ख) 520 (ग) 190 (घ) 35

3. चार छात्रों के सांख्यिकी में प्राप्तांक 53, 75, 42, 70 है, उनके प्राप्तांकों का समान्तर माध्य है –

(क) 42 (ख) 64 (ग) 60 (घ) 56

4. एक छात्र को गणित, भौतिक विज्ञान तथा रसायन विज्ञान में क्रमशः 85, 87 तथा 83 अंक मिले। उसके इन विषयों में प्राप्तांकों का माध्य है –

(क) 86 (ख) 84 (ग) 85 (घ) 85·5

5. यदि 5, 7, 9, x का समान्तर माध्य 9 हो, तो x का मान है –

(क) 11 (ख) 15 (ग) 18 (घ) 16

6. बंटन 2, 3, 4, 7, 5, 1 का माध्यक है –

(क) 4 (ख) 7 (ग) 11 (घ) 3.5

7. बंटन 1, 3, 2, 5, 9 का माध्यक है –

(क) 3 (ख) 4 (ग) 2 (घ) 20

8. बंटन 3, 5, 7, 4, 2, 1, 4, 3, 4 का बहुलक है –

(क) 7 (ख) 4 (ग) 3 (घ) 1

9. किसी स्कूल के छात्रों की संख्या उनकी आयु के अनुसार निम्न प्रकार है –

आयु वर्षों में	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
छात्रों की संख्या	15	25	40	36	41	37	20	13	5	3

इनका बहुलक होगा –

(क) 41 (ख) 12 (ग) 3 (घ) 17

निम्न बंटनों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए – [प्रश्न 10 से 14]

10.

x	5	6	7	8	9
f	4	8	14	11	3

11.

x	10	15	17	20	22	30	35
f	5	10	2	8	3	6	6

12.

x	19	21	23	25	27	29	31
f	13	15	16	18	16	15	13

13.

x	1	2	3	4	5	6
f	45	25	19	8	2	1

14. निम्न बारम्बारता बंटन से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए –

भार (किग्रा में)	40-44	44-48	48-52	52-56	56-60	60-64
व्यक्तियों की संख्या	5	6	5	9	3	2

निम्न बंटन की माध्यक ज्ञात कीजिए– (प्रश्न 15 – 17)

15.

x	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7
f	30	60	20	40	10	50	35

16.

जूतों की नाप	4·5	5·0	5·5	6·0	6·5	7·0	7·5	8·0	8·5	9·0
जूतों की संख्या	1	2	4	5	15	30	60	95	82	75

17. क्रिकेट की एक टीम के खिलाड़ियों द्वारा बनाए गये रनों की संख्या निम्न प्रकार है –

57, 17, 26, 91, 115, 26, 83, 41, 57, 0, 26.

इसका समान्तर माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए– (प्रश्न 18 – 19)

18.

वर्ग	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
बारम्बारता	4	7	13	9	3

19.

वर्ग	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
बारम्बारता	3	15	24	8	5

20. समान्तर माध्य की परिभाषा देते हुए इसके किन्हीं दो दोषों को बताइए।

21. माध्यक की प्रमुख उपयोगिता बताइए।

22. वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. समान्तर माध्य $(\overline{x})$:

(i) व्यक्तिगत श्रेणी : $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

(ii) अवर्गीकृत बंटन : $\overline{x} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

(iii) कल्पित माध्य से : $\overline{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$ या $\overline{x} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

जहाँ A कल्पित माध्य, $d_i = x_i - A$ तथा $u_i = \frac{x_i - A}{h}$

2. माध्यक (M):

(i) व्यक्तिगत श्रेणी : मूल्य को आरोही क्रम या अवरोही क्रम $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ में व्यवस्थित करने पर

$$\text{माध्यक } (M) = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{यदि } n \text{ विषम संख्या हो} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम हो} \end{cases}$$

(ii) अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन : संचयी बारम्बारता सारणी से वह मूल्य जिसकी संचयी आवृति $N/2$से ठीक बड़ी है।

(iii) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन : वह वर्ग अन्तराल जिसकी संचयी आवृति $N/2$ से ठीक अधिक है, माध्यक का वर्ग होगा तथा

$$\text{माध्यक } (M) = \ell + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f} \right) \times h$$

जहाँ $\ell =$ माध्यक वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा

$N = \sum f_i$ अर्थात् कुल बारम्बारता

$C =$ माध्यक वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी बारम्बारता

$h =$ माध्यक वर्ग का अन्तराल

$f =$ माध्यक वर्ग की बारम्बारता

3. बहुलक :

(i) व्यक्तिगत श्रेणी : वह पद मूल्य जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक है।

(ii) अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन : सबसे अधिक बारम्बारता वाला पद मूल्य।

(iii) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन : सबसे अधिक बारम्बारता वाला वर्ग, बहुलक वर्ग कहलाता है

तथा बहुलक $(z) = \ell + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

जहाँ ℓ = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पूर्व वर्ग की बारम्बारता

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारम्बारता

h = बहुलक वर्ग का अन्तराल

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 17.1

1. 52 अंक 2. 1735 रु. 3. 6 4. 43.9 रन 5. 22 अंक 6. 400 पुस्तके
7. 52.75 किग्रा 8. 26 9. माध्य 24 +3 10. 2200 रु.

प्रश्नमाला 17.2

1. 7·07 2. 7·55 3. 0·34 4. 0·55 5. 2 6. 23·9 7. 3 8. 76 व 38

प्रश्नमाला 17.3

1. 26·33 लगभग 2. 15·45 3. 145·71 4. 49·5 5. 68·2 6. 1457·14

प्रश्नमाला 17.4

1. 891·2 2. 62·65 3. 266·25 4. 39·57 5. 23·25 6. 34·87 7. 68·2

प्रश्नमाला 17.5

1. 56·875 2. 86·5 व 87·25 3. 82 4. 49·67

प्रश्नमाला 17.6

1. 27 2. 32 व 35 3. 30 4. 2 5. 35

प्रश्नमाला 17.7

1. 45·45 2. 24·29 3. 45 4. 17·04

प्रश्नमाला 17.8

1. (i) 5 (ii) 6 (iii) 2·5 2. (i) 5 (ii) 1·3 3. 6 4. 14 5. 40
6. 23·46 7. 23·33 8. 43.89 9. 58·75

विविध प्रश्नमाला–17

1. (ख) 2. (ग) 3. (ग) 4. (ग) 5. (ख) 6. (घ) 7. (क)
8. (ख) 9. (ख) 10. 7·025 11. 21·25 12. 25 13. 2 14. 50·67
15. 0.4 16. 8 17. 49, 41 व 26 18. 26 19. 47·2

❑

R5T4IA

18

प्रायिकता (Probability)

R62ZJX

18.01 प्रस्तावना (Introduction):

हमारे सामने प्रतिदिन विभिन्न ऐसी घटनाएं घटित होती हैं जिनके एक से अधिक परिणाम हो सकते हैं। ऐसी घटनाओं के परिणामों की जानकारी करने की जिज्ञासा प्रत्येक व्यक्ति को होना स्वाभाविक है। ऐसी घटनाओं के परिणामों का पूर्वानुमान करके व्यक्ति लाभ उठाने का प्रयास भी करता है। किसी भी घटना से सम्बन्धित पूर्व सूचनाओं व परिस्थितियों के आधार पर परिणामों की संभावनाओं का पता करने के सिद्धान्त को प्रायिकता कहते हैं।

प्रायिकता के सिद्धान्त की उत्पति 17 वीं शताब्दी में यूरोप में हुई। जहां के उद्योगपतियों एवं व्यापारियों ने उनसे सम्बन्धित व्यवसाय के परिणामों के पूर्वानुमान करने के प्रयास किये, जिससे अधिक से अधिक लाभ हो सके। इन लोगों ने अपनी समस्याओं को तत्कालीन गणितज्ञों गेलीलियो, पास्कल, फर्मा कारडेनों आदि के सामने रखा। गणितज्ञों ने इन समस्याओं के समाधान हेतु गणितीय विधियों का विकास किया, जिससे गणित की इस शाखा की उत्पति हुई। 18 वीं एवं 19 वीं शताब्दी में प्रमुख गणितज्ञों लॉप्लास, गॉस और बरनौली आदि ने इस सिद्धान्त का और विकास किया। 20 वीं शताब्दी में प्रायिकता सिद्धान्त पर आधारित प्रतिचयन सिद्धान्त, निर्णय सिद्धान्त आदि का प्रतिपादन हुआ, जिनका श्रेय आर. एस. फिशर तथा कार्ल पियर्सन आदि को जाता है।

आधुनिक युग में प्रायिकता के सिद्धान्त का उपयोग विभिन्न क्षेत्रों में भविष्य के सम्बन्ध में निर्णय लेने हेतु किया जा रहा है जैसे किसी राज्य या देश का बजट बनाने में, बीमा कम्पनियों में, संयोग पर आधारित खेलों में, कृषि, अर्थशास्त्र, वैज्ञानिक अनुसंधान में, सैनिक विशेषज्ञ सुरक्षा सम्बन्धी नीति निर्धारण में, व्यापक रूप से व्यवसाय के क्षेत्र में, प्राकृतिक एवं भौतिक विज्ञान के क्षेत्र में, समाज एवं राज्य व्यवस्था की महत्वपूर्ण नीति निर्धारण में किया जाता है। अब सर्वप्रथम हम प्रायिकता के अध्ययन में काम में आने वाले कुछ महत्वपूर्ण शब्दावलियों को परिभाषित करेंगे।

18.02 परिभाषाएं :

1. यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment): एक प्रयोग जिसके बारे में सभी संभव परिणाम पहले से ही ज्ञात हों तथा प्रयोग के किसी विशेष परिणाम के आने का निश्चित अनुमान नहीं लगाया जा सके, यादृच्छिक प्रयोग कहलाता है। जैसे एक सिक्के के उछाल में चित्त या पट दो परिणाम पहले से ज्ञात हैं, लेकिन निश्चित परिणाम नहीं बताया जा सकता। अतः सिक्के को उछालना यादृच्छिक प्रयोग है।

2. अभिप्रयोग एवं घटना (Trial and Event): किसी भी संदर्भ का कोई प्रयोग जिसका कई सम्भावित परिणामों में से एक परिणाम अवश्य प्राप्त होता हो, एक अभिप्रयोग कहलाता है तथा इसके सम्भावित परिणाम घटनाएँ कहलाती हैं। उदाहरणार्थः (i) एक सिक्के को उछालना एक अभिप्रयोग है और चित्त (H) या पट (T) आना एक घटना है।

(ii) एक पासे को उछालना एक अभिप्रयोग है और 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से किसी एक अंक का आना घटना है।

(iii) परीक्षा में किसी परीक्षार्थी का बैठना एक अभिप्रयोग है एवं उत्तीर्ण या अनुत्तीर्ण होना एक घटना है।

3. सरल घटना (Simple Event): किसी अभिप्रयोग में एक समय में केवल एक घटना घटित हो तो उसे सरल घटना कहते हैं। उदाहरणार्थः एक थैले में कुछ काली तथा सफेद गेंदें हैं उसमें से एक गेंद निकालना सरल घटना है।

4. निःशेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ (Exhaustive events or Total number of cases): किसी अभिप्रयोग के समस्त सम्भावित परिणाम उस अभिप्रयोग की निःशेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ कहलाती हैं। उदाहरणार्थः
(i) एक सिक्के को उछालना एक अभिप्रयोग है और चित्त (H) या पट (T) आ सकते हैं। अतः इस अभिप्रयोग में 2 निःशेष घटनाएँ हैं।

(ii) एक पासे को उछालने पर 1, 2, 3, 4, 5, या 6 अंक आ सकता हैं। अतः इस अभिप्रयोग में 6 निःशेष घटनाएँ हैं।

5. अनुकूल घटनाएँ या स्थितियाँ (Favourable events or cases) किसी अभिप्रयोग में किसी विशिष्ट घटना की अनुकूल स्थितियाँ उस प्रयोग के उन परिणामों की संख्या हैं जिसमें वह विशिष्ट घटना घटित होती है। उदाहरणार्थ :

(i) एक पासे को उछालने पर सम अंक आने की अनुकूल घटनाएँ 2,4,6 अर्थात् 3 हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से दो पत्ते खींचने में राजा आने की अनुकूल स्थितियाँ $^4C_2$ अर्थात् 6 हैं।

(iii) दो पासों को उछालने पर योग 5 आने के लिए 4 अनुकूल स्थितियाँ हैं: (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) अर्थात् 4 हैं।

6. स्वतंत्र व आश्रित घटनाएँ (Independent and dependent events): (1) **स्वतन्त्र घटनाएँ** : दो या दो से अधिक घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती हैं यदि किसी एक के घटित होने या न होने का प्रभाव शेष घटनाओं के घटित होने या न होने पर नहीं पड़ता है। उदाहरणार्थ :

एक सिक्के तथा एक पासे के साथ साथ उछालने पर सिक्के पर पट तथा पासे पर 4 आना स्वतन्त्र घटनाएँ हैं।

R6BVLK

(2) **आश्रित घटनाएँ** : दो या दो से अधिक घटनाएँ इस प्रकार हों कि एक के घटित होने का प्रभाव दूसरे पर पड़ता हो तो उन्हें आश्रित घटनाएँ कहते हैं। उदाहरणार्थ :

ताश की साधारण गड्डी से खींचे गये एक पत्ते का पान का पत्ता होना तदुपरान्त बिना इस पत्ते को गड्डी में मिलायें पुनः खींचे गये पत्ते का हुकुम का पत्ता होना दोनो आश्रित घटनाएँ हैं।

7. परस्पर अपवर्जी या असंयुक्त घटनाएँ (Mutually exclusive or disjoint events): दो या दो से अधिक घटनाएँ परस्पर अपवर्जी या असंयुक्त घटनाएँ कहलाती हैं यदि इनमें से कोई दो घटनाएँ एक साथ घटित नहीं हो सके अर्थात् यदि एक घटना घटित होती है, तो शेष घटनाएँ घटित नहीं हो सके। उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के को उछालने पर चित्त या पट आना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचने पर राजा होना या रानी होना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

8. समप्रायिक घटनाएँ (Equally likely events): यदि किसी प्रयोग में सभी घटनाओं के घटित होने की समान सम्भावना हो तो ऐसी घटनाओं को समप्रायिक घटनाएँ कहते हैं। उदाहरणार्थ:

(i) एक सिक्के को उछालने पर चित्त (H) या पट (T) आना समप्रायिक घटनाएँ हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से पत्ते के खींचने पर लाल या काला पत्ता होना समप्रायिक घटनाएँ हैं।

9. मिश्र घटनाएँ (Compound events): यदि दो या दो से अधिक घटनाएँ एक साथ घटित हों तो वे मिश्र घटनाएँ या संयुक्त घटनाएँ कहलाती हैं। उदाहरणार्थ :

दो थैलों में कुछ नीली व कुछ लाल गेंदें रखी हैं। किसी एक थैले का चुनाव कर उसमें से एक गेंद निकालना एक मिश्र घटना है क्योंकि दो थैलों में से एक का चयन कर और फिर चुने हुए थैले में से एक गेंद निकालना साथ–साथ घटित होने वाली घटना है।

10. प्रतिदर्श बिन्दु तथा प्रतिदर्श समष्टि (Sample point and sample space): किसी अभिप्रयोग का प्रत्येक परिणाम एक प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है तथा इन सभी प्रतिदर्श बिन्दुओं का समुच्चय उस अभिप्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है। इसे प्रायः S से व्यक्त किया जाता है। उदाहरणार्थ:

(i) दो सिक्कों के उछाल में प्रतिदर्श बिन्दु हैं

$$(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)$$

तथा $S=\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$ प्रतिदर्श समष्टि हैं।

(ii) 3 बालक और 2 बालिकाओं में से 2 को चुना जाता है। इस अभिप्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि होगी (बालक B_1,B_2,B_3, बालिका G_1,G_2) :

$S=\{B_1B_2,B_2B_3,B_3B_1,B_1G_1,B_1G_2,B_2G_1,B_2G_2,B_3G_1,B_3G_2,G_1G_2\}$

18.03 प्रायिकता की गणितीय परिभाषा

यदि किसी अभिप्रयोग के कुल n परिणाम समप्रायिक, परस्पर अपवर्जी एवम् निःशेष हों और उनमें से m परिणाम किसी विशेष घटना A के अनुकूल हों तो A की प्रायिकता अनुपात $\frac{m}{n}$ द्वारा परिभाषित की जाती है जिसे संकेत P(A) से व्यक्त करते हैं।

अतः $P(A) = P(A) = \dfrac{\text{A की अनुकूल स्थितियाँ}}{\text{A की निःशेष स्थितियाँ}} = \dfrac{m}{n}$ (संख्यात्मक माप)

यदि किसी अभिप्रयोग में घटना A का घटना निश्चित हो तो $m = n$ होगा तथा

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1,$$

यदि किसी घटना A का घटना असम्भव हो तो $m = 0$ तथा

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0,$$

इसलिए किसी भी घटना A के लिए $0 \le P(A) \le 1$

अर्थात् किसी भी घटना की प्रायिकता 0 से कम तथा 1 से अधिक नहीं हो सकती है और प्रायिकता की सीमा 0 से 1 तक होती है। घटना A के घटित न होने की प्रायिकता $P(\bar{A})$ द्वारा प्रदर्शित की जाती है।

अतः $P(\bar{A}) = \dfrac{\text{घटना A की प्रतिकूल स्थितियाँ}}{\text{घटना A की निःशेष स्थितियाँ}} = \dfrac{n-m}{n} = 1 - \dfrac{m}{n}$

या $\quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

18.04 संकेतन (Notation) :

(i) $P(A) =$ घटना A के घटित होने की प्रायिकता

(ii) $P(\bar{A}) =$ घटना A के घटित नहीं होने की प्रायिकता

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक पासे के फेंकने पर सम अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः एक पासे के फेंकने पर 6 तरह के अंक आ सकते हैं। अतः घटना की निःशेष स्थितियाँ = 6, प्रदत्त घटना के लिए सम अंक 2,4,6 आयेंगे। जिनकी संख्या 3 हैं, अतः घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 3

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

उदाहरण-2. दो पासों के फेंकने पर अंको का योग 7 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः दो पासों के फेंकने पर $6 \times 6 = 36$ परिणाम प्राप्त हो सकते हैं। अतः प्रदत्त घटना के लिए निःशेष स्थितियाँ = 36

अंकों का योग 7 आने के लिए निम्नलिखित युग्म बनते हैं

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) जिनकी संख्या 6 है।

अतः घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 6

$\therefore$ *अभीष्ट प्रायिकता* $= \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

उदाहरण-3. यदि एक लीप वर्ष का यादृच्छिक चयन किया गया हो तो इस वर्ष में 53 सोमवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः हमें ज्ञात है कि लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं। अतः 52 पूर्ण सप्ताह तथा दो दिन शेष बचते हैं। इन दो दिनों की सात संभावनाएँ निम्नलिखित प्रकार से हो सकती हैं। 1. सोमवार और मंगलवार 2. मंगलवार और बुधवार 3. बुधवार और बृहस्पतिवार 4. बृहस्पतिवार और शुक्रवार 18. शुक्रवार और शनिवार 6. शनिवार और रविवार 7. रविवार और सोमवार।

अतः प्रदत्त घटना के लिए निःशेष स्थितियाँ = 7 इन सात संभावित स्थितियों में से दो में सोमवार आते हैं। अतः प्रदत्त घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 2

अभीष्ट प्रायिकता =

उदाहरण-4. बारह टिकटों पर एक–एक संख्या 1 से 12 तक लिखी गई हैं। यदि उनमें से कोई एक टिकट का यादृच्छिक चयन किया जाये तो इस पर लिखी हुई संख्या के 2 या 3 के गुणज होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः 1 से 12 तक अंकों में 2 या 3 के गुणज 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12 हैं। अतः समप्रायिक 12 स्थितियों में से 8 अनुकूल हैं।

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

उदाहरण-5. एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है। पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः एक सिक्के को एक बार उछालने के प्रयोग में, सम्भव परिणामों की संख्या 2 है। चित (H) पट (T)। मान लीजिए घटना E ''पट प्राप्त करना'' है। तब, E के अनुकूल (अर्थात् पट प्राप्त करने के अनूकूल) परिणामों की संख्या 1 है। अतः

$$P(E) = P(\text{पट}) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण-6. एक थैले में एक सफेद गेंद, एक काली गेंद और एक लाल गेंद एक ही आकार की हैं। सविता बिना थैले के अंदर झाँके, इसमें से एक गेंद निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गेंद लाल होगी?

हल: सविता द्वारा कोई भी गेंद निकालना समप्रायिक है। अतः सभी सम्भव परिणामों की संख्या 3 है।

माना 'लाल गेंद निकालना' घटना R है। अतः R के अनुकूल परिणामों की संख्या 1 है।

अतः $P(R)=\frac{1}{3}$

उदाहरण-7. एक पासे को एक बार उछाला जाता है। 5 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

हल: एक पासे को एक बार उछालने पर सभी सम्भव परिणाम छः ये 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। माना लीजिए 5 से छोटी या 3 बराबर संख्या प्राप्त करना घटना E है। अतः घटना E के अनुकूल परिणाम 1, 2, 3, 4 और 5 हैं।

अतः घटना E के अनुकूल परिणामों की संख्या 5 है।

अतः $P(E)=\frac{5}{6}$

उदाहरण-8. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इस पत्ते के बादशाह होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: 52 पत्तों की एक गड्डी में 4 बादशाह होते हैं। मान लीजिए

घटना E 'एक बादशाह होता' है।

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

संभव परिणामों की संख्या = 52

अतः $P(E)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

उदाहरण-9. दो खिलाड़ी राम और श्याम शतरंज का एक मैच खेलते हैं यह ज्ञात है कि राम द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। श्याम के जीतने की क्या प्रायिकता है?

हल: मान लीजिए R और S क्रमशः राम के जीतने और श्याम के जीतने की घटनाएँ व्यक्त करते है।

राम के जीतने की प्रायिकता $=P(R)=\frac{4}{5}$

श्याम के जीतने की प्रायिकता $=P(S)=1-P(R)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

उदाहरण-10. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता है। कम से कम एक चित्त की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: एक सिक्के को दो बार उछालने पर सम्भावित परिणाम (H, H); (H, T); (T, H); (T, T) है।

मान लीजिए घटना E "कम से कम एक चित्त आना" है।

अतः अनुकूल परिणाम (H, H); (H, T) और (T, H) है।

अतः E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

अतः $P(E)=\frac{3}{4}$

उदाहरण-11. दो पासो को एक साथ उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों पासों की संख्याओं का योग 7 हो।

हल: दो पासो को एक साथ उछालने पर सम्भावित परिणाम 36 है, जो कि निम्न प्रकार है–

{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

मान लीजिए घटना E संख्याओं का योग 7 हैं।

अतः अनुकूल परिणाम $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ है।

अतः E के अनुकूल परिणामों की संख्या $= 6$

अतः $P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

प्रश्नमाला 18.1

1. एक पासे को फेंकने पर 4 से बड़ा अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता हैं। दोनों बार चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. 1 से 17 तक की प्राकृत संख्याओं में से एक संख्या का यादृच्छिक चयन किया जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह एक अभाज्य संख्या हो।
4. एक सिक्के के लगातार तीन उछालों में एकान्तरतः चित्त या पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. एक अलीप वर्ष में केवल 52 रविवार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. यदि $P(A) = 0.65$ है, तो "A नहीं" की प्रायिकता क्या है?
7. दो सिक्को को एक बार उछालने पर अधिक से अधिक एक पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
8. एक पासे को दो बार उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि संख्याओं का योग
   (i) 9 हैं। (ii) 13 हैं।
9. एक थैले में 5 लाल और 3 सफेद गेंद है। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि गेंद
   (i) सफेद हों? (ii) सफेद नहीं हो?
10. किसी कारण 12 खराब पेन, 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है यदि एक पेन यादृच्छया चुना जाता है तो इसके अच्छे होने की क्या प्रायिकता है?
11. 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेंटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
    (i) लाल रंग का गुलाम (ii) लाल रंग का पत्ता (iii) पान का ईक्का (iv) ईंट की बेगम
    (v) हुकुम का पत्ता

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **अभिप्रयोग एवं घटना :** किसी भी संदर्भ का कोई प्रयोग जिसका कई सम्भावित परिणामों में से एक परिणाम अवश्य होता हो, एक अभिप्रयोग कहलाता है तथा इसके सम्भावित परिणाम घटनाएँ कहलाती हैं।
2. **निःशेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ :** किसी अभिप्रयोग के समस्त सम्भावित परिणाम उस अभिप्रयोग की निःशेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ कहलाती हैं।
3. **अनुकूल घटनाएँ या स्थितियाँ :** किसी अभिप्रयोग में किसी विशिष्ट घटनाओं की अनुकूल स्थितियाँ उस प्रयोग के उन परिणामों की संख्या है जिससे वह विशिष्ट घटना घटित होती है।
4. **प्रायिकता :**

   घटना A के अनुकूल होने की प्रायिकता

   $$P(A) = \frac{\text{घटना A के अनुकूल घटनाएँ}}{\text{निःशेष घटनाएँ}} = \frac{m}{n}$$

   घटना A के नहीं घटने की प्रायिकता

   $$P(\bar{A}) = \frac{\text{घटना A प्रतिकूल घटनाएँ}}{\text{निःशेष घटनाएँ}} = \frac{n-m}{n}$$

18. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ या $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
6. प्रायिकता की सीमा $0 \le P(A) \le 1$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 18.1

(1) $\frac{1}{3}$ ***(2)*** $\frac{1}{4}$ ***(3)*** $\frac{7}{17}$ ***(4)*** $\frac{1}{4}$ ***(5)*** $\frac{6}{7}$ ***(6)*** 0.35 ***(7)*** $\frac{1}{2}$

(8) (i) $\frac{1}{9}$ (ii) 0 ***(9)*** (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$ ***(9)*** (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$ ***(10)*** $\frac{11}{12}$

(11) (i) $\frac{1}{52}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{52}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$

RJAFD1

अध्याय–19 सड़क सुरक्षा शिक्षा

RJJBEN

समान्तर श्रेढ़ी

उद्देश्य : यातायात संकेतों को पार करते समय लगने वाले समय एवं तय की गई दूरी से समान्तर श्रेढ़ी का निर्माण करना।

विषय वस्तु : एक समान्तर श्रेढ़ी में हम उन संख्याओं की श्रेणियाँ और अनुक्रमों का अध्ययन करते हैं जो कि दूरी एवं समय को सम्मिलित करती है। जैसे कार या अन्य हल्के या भारी वाहन द्वारा एक स्थान से दूसरे स्थान तक जाने में तय की गई दूरी और उसमें लगे समय से समान्तर श्रेढ़ी (श्रेणी) की रचना की जा सकती है।

अभ्यास :

A व B के मध्य की दूरी 150 किमी. है तथा इसके मध्य 10 यातायात सिग्नल मिलते हैं। यदि एक कार 60 कि.मी. प्रति घंटा की समान गति से सभी हरे सिग्नलों को पार करते हुए वह B बिन्दु पर 2 घंटे 30 मिनट पर पहुंच जाती है लेकिन अन्य दिन भारी यातायात के कारण निम्नानुसार रूकना पड़ता है –

प्रथम यातायात सिग्नल 1 मिनट

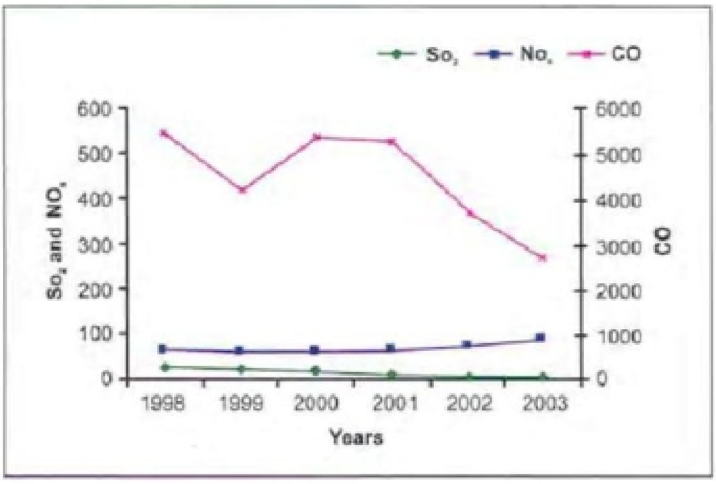
द्वितीय यातायात सिग्नल 2 मिनट.........10वें सिग्नल तक ....10 मिनट

उसी कार द्वारा लिए गये कुल समय की गणना कीजिए यदि वह सभी यातायात सिग्नलों की अनुपालना करती है (अन्य बाधाओं को छोड़कर) जबकि कार की गति 60 किमी. प्रति घंटा है।

RJT7GB

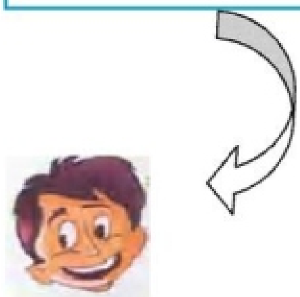
आंकड़ों का संकलन

उद्देश्य : वाहनों द्वारा फैले प्रदूषण को नियंत्रित करना आवश्यक है। प्रदूषण कम करने के साधनों के उपयोग पर जोर दिया जा रहा है।



उपर्युक्त आलेख प्रमुख वातावरणीय प्रदूषकों की सांद्रता को प्रदर्शित करता है। किस वर्ष में प्रमुख प्रदूषक की कमी को देखा गया। इसके लिए आप किसे श्रेय देते है?

क्या आप जानते हैं कि प्रत्येक वाहन के लिए प्रदूषण नियंत्रित प्रमाण पत्र (पी.यू.सी.) आवश्यक है?



प्रदूषण नियंत्रित प्रमाण पत्र (पी.यू.सी.)

RK33HY

त्रिकोणमिति का अनुप्रयोग

उद्देश्य : बढ़ते हुए यातायात एवं सड़क दुर्घटनाओं के संदर्भ में त्रिकोणमिति का अनुप्रयोग।

विषय–वस्तु : चूंकि ऊंचाई व दूरी का उपयोग टॉवर व इमारतों की ऊंचाई व दूरी के मापन में किया जाता है। इसका उपयोग सड़क यातायात एवं बढ़ती हुई सड़क दुर्घटना के क्रम में भी किया जा सकता है।

अभ्यास :

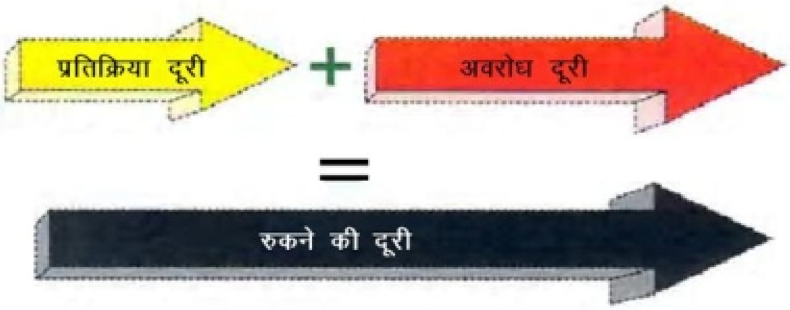
एक सीधे व 12 मीटर ऊंचे पोल के शीर्ष पर एक CCTV कैमरा लगाना है ताकि पोल के शीर्ष से 13 मीटर दूर दृष्टि रेखा के आगे भी यातायात देखा जा सके। इस स्थिति में –

1. पोल के पाद (Feet) से वह दूरी जिसके आगे से यातायात दिखाई देता है, क्या होगी?
2. पोल के चारों ओर अदर्शनीय वृत्त (Green Patch) का क्षेत्रफल कितना होगा?
3. क्या आप सोचते हैं कि CCTV कैमरा यातायात चेतना को प्रबंधन करने में उपयोगी है, यदि हां तो कैसे?

दो चर राशियों पर आधारित समस्याएं

उद्देश्य : सड़क दृश्यों से सम्बन्धित समस्याओं का उपयोग समीकरण हल करने के लिए किया जाता है।

रुकने की दूरी = प्रतिक्रिया दूरी + अवरोध दूरी (Breaking Distance)



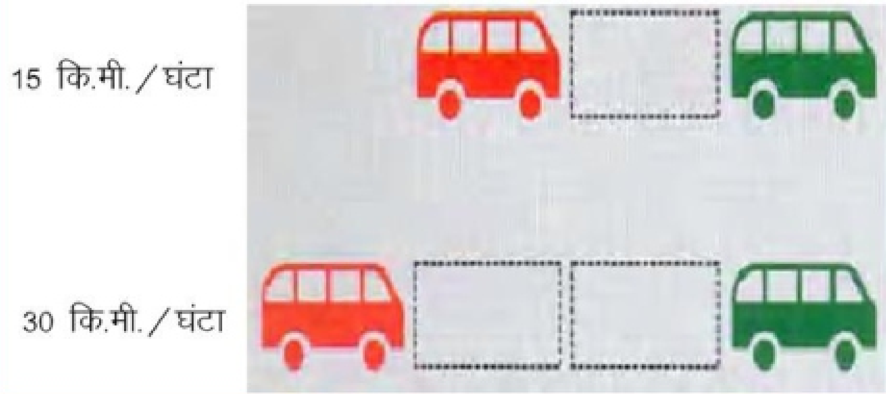
एक कार 50 किमी. प्रति घंटा की गति से चलती है –
यदि रुकने की दूरी = 40 मी. और मन्दन की दर 4.4 मी./सै.^{2} हैं तो पहुंचने का समय ज्ञात कीजिए।

1. क्या वाहन की गति के साथ रुकने की दूरी परिवर्तित होगी?
2. गीली फिसलन वाली सड़क पर यह कैसे परिवर्तित होगी?

पीछा करने की दूरी :

आगे के वाहन का पीछा करते समय आप कितनी दूरी सैकण्ड में रखेंगें? इसकी गणना रुकने की दूरी तथा प्रतिक्रिया समय के संदर्भ में की जा सकती है?
सैकण्ड्स को गिनने का सरल तरीका इस प्रकार प्रस्तावित है –
सर्वप्रथम लयबद्ध क्रम में 19, 20, 21 गिनो अर्थात उन्नीस, बीस, इक्कीस सामान्यतया प्रत्येक लयबद्व गिनती में एक सैकण्ड का समय लगता है।

पीछा करने की दूरी



आप जिस वाहन का पीछा कर रहे हैं, उसके एवं आपके बीच सैकण्ड्स में कितनी दूरी रखोगें?

इसकी गणना इस प्रकार से की जाएगी –

गति (कि.मी./घंटा)	कुल रुकने की दूरी (मी.)	प्रतिक्रिया दूरी (मी.)	पीछा करने की दूरी (सैकण्ड)
(i)	(ii)	(iii)	(iv)
30	18	9	2
60	54	18	–
90	108	–	4

रिक्त स्थानों के मानों को ज्ञात कीजिए।