# ਗਣਿਤ

*(ਬਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)*

*ਭਾਗ -1*

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ 2017 .................. 10,000 ਕਾਪੀਆਂ

[This book has been adopted with the kind permission of the
National Council of Educational Research and Training, New Delhi]



ਸੰਯੋਜਕ : ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ
ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚਿੱਤਰਕਾਰ : ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ (ਆਰਟਿਸਟ)
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਅਨੁਵਾਦਕ
* ਸ਼੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ ਗੌ. ਸੀ. ਸੈ. ਸ. ਪਾਸੀ ਰੋਡ, ਪਟਿਆਲਾ।
* ਸ਼੍ਰੀ ਨੀਰਜ ਸ਼ਰਮਾ, ਸੀ. ਸੈ. ਸ. ਮਹਿੰਦਰਗੰਜ ਰਾਜਪੁਰਾ ਪਟਿਆਲਾ।
* ਸ਼੍ਰੀ ਹਰਪ੍ਰੀਤ ਸਿੰਘ, ਧਨਾਲ ਕਲਾਂ ਬਲਾਕ ਪੁਰਬੀ–3 ਜਲੰਧਰ।
* ਸ਼੍ਰੀਮਤੀ ਬਬੀਤਾ ਭੰਡਾਰੀ, ਸੀ. ਸੈ. ਸ. ਸਹੌੜਾ, ਐਸ. ਏ. ਐਸ. ਨਗਰ।

## ਚੇਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ਼ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ 'ਤੇ ਜਿਲਦ-ਸਾਜ਼ੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ਼ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ. 7 ਅਨੁਸਾਰ)
2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਵਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਲ੍ਹੀ/ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫ਼ੌਜਦਾਰੀ ਜੁਰਮ ਹੈ।
   (ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਬੋਰਡ ਦੇ 'ਵਾਟਰ ਮਾਰਕ' ਵਾਲ਼ੇ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਪਰ ਹੀ ਛਪਵਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਮੁੱਲ : ₹

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8, ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ-160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ. ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

# ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਤਾਂ ਪ੍ਰਫੁੱਲਿਤ ਹੋਵੇਗੀ ਹੀ ਸਗੋਂ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ (ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ.) ਵੱਲੋਂ ਬਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਦਮ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇਕਸਾਰਤਾ ਲਿਆਉਣ ਲਈ ਚੁੱਕਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਪੱਧਰ ਦੇ ਇਮਤਿਹਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਔਕੜ ਨਾ ਆਵੇ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਮੈਨ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

# NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਪ੍ਰਧਾਨ, ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸਲਾਹਕਾਰ ਕਮੇਟੀ

ਜੇ. ਵੀ. ਨਾਰਲੀਕਾਰ, ਇਮੇਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਅੰਤਰ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ ਕੇਂਦਰ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਖਗੋਲ ਭੌਤਿਕੀ, (IUCCA), ਗਣੇਸ਼ ਖੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ।

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ. ਕੇ. ਜੈਨ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਦਿੱਲੀ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਦਿੱਲੀ।

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕਮ ਸਿੰਘ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

ਮੈਂਬਰ

- ਆਸ਼ੂਤੋਸ਼ ਕੇ. ਵਲਝਵਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਏ. ਕੇ. ਰਾਜਪੂਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਉਦੈ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਐਸ. ਕੇ. ਐਸ. ਗੌਤਮ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਐਮ. ਬੀ. ਤ੍ਰਿਪਾਠੀ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਰਾਜ ਪ੍ਰਤਿਭਾ ਵਿਕਾਸ ਵਿਦਿਯਾਲਯ, ਸੂਰਜਮਲ ਬਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ।
- ਪ੍ਰਦਿੱਤੋ ਹਰੇ, ਵਰਿਸ਼ਟ ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਸਰਲਾ ਬਿੜ੍ਹਲਾ ਅਕੈਡਮੀ ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
- ਬੀ. ਐੱਸ. ਪੀ. ਰਾਜੂ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਸੰਜੇ ਕੁਮਾਰ ਸਿੰਹਾ, ਪੀ. ਜੀ. ਟੀ., ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਸਕੂਲ, ਚਾਣਕਯਪੁਰੀ ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਸੰਜੇ ਮੁਦਗਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ. ਆਈ. ਈ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਸੀ. ਆਰ. ਪ੍ਰਦੀਪ, ਸਹਾਇਕ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਵਿਭਾਗ, ਭਾਰਤੀ ਵਿਗਿਆਨ ਸੰਸਥਾਨ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
- ਸੁਜਾਤਾ ਵਰਮਾ, ਰੀਡਰ, ਏ. ਗਾ. ਮੁ. ਵਿ. ਵਿ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਸਨੇਹਾ ਟਾਇਟਸ, ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਆਦਿਤੀ ਮਾਲਯਾ ਸਕੂਲ ਇਲਹਾਰਿਕਾ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

- ਬੀ. ਪੀ. ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

# PSEB ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਸੋਧ ਕਮੇਟੀ

ਮੈਂਬਰ

– ਸ. ਅਵਤਾਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਕੰਨਿਆ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਖੰਨਾ ਰੋਡ, ਸਮਰਾਲਾ, (ਲੁਧਿਆਣਾ)।
– ਸ੍ਰੀ ਆਰ.ਕੇ. ਗੋਇਲ, ਰਿਟਾਇਰਡ (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਾਹਮਣੇ ਮਨਸਾ ਦੇਵੀ ਮੰਦਿਰ, ਚੱਕਰੀਆਂ ਰੋਡ, ਮਾਨਸਾ।
– ਸ੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਗੌਰਮਿੰਟ ਮਲਟੀਪਰਪਜ਼ ਸਕੂਲ ਪਾਸੀ ਰੋਡ, ਪਟਿਆਲਾ।
– ਸ. ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ (ਲੜਕੇ) ਅਬੋਹਰ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।
– ਸ੍ਰੀ ਨੀਰਜ ਸ਼ਰਮਾ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਮਹਿੰਦਰਗੰਜ ਰਾਜਪੁਰਾ, ਪਟਿਆਲਾ।
– ਸ. ਵਿਕਰਮ ਸੇਠੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਕਰਨੀਖੇੜਾ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।
– ਸ੍ਰੀਮਤੀ ਬੰਬੀਤਾ ਭੰਡਾਰੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਸਹੌੜਾ, ਐੱਸ.ਏ.ਐੱਸ. ਨਗਰ।

# ਵਿਸ਼ਾ ਸੂਚੀ

ਅਧਿਆਇ **1**

# ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਫਲਨ
# (Relations and Functions)

❖ *There is no permanent place in the world for ugly mathematics ... . It may be very hard to define mathematical beauty but that is just as true of beauty of any kind, we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognising one when we read it. — G. H. Hardy* ❖

## 1.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

**Lejeune Dirichlet**
**(1805-1859)**

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ, ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਫਲਨ, ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਆਦਿ ਦੀ ਧਾਰਣਾਵਾਂ ਦਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਸਹਿਤ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾਇਆ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਸੰਬੰਧ (Relation)* ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅਰਥ ਤੋਂ ਲਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਮੰਨ ਸਕਣ ਯੋਗ (Recognisable) ਕੜੀ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A, ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ XII ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ B ਉਸ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ XI ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

(i) $\{(a, b) \in A \times B$: $a, b$ ਦਾ ਭਰਾ ਹੈ$\}$,

(ii) $\{(a, b) \in A \times B$: $a, b$ ਦੀ ਭੈਣ ਹੈ$\}$,

(iii) $\{(a, b) \in A \times B$: $a$ ਦੀ ਉਮਰ $b$ ਦੀ ਉਮਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ$\}$,

(iv) $\{(a, b) \in A \times B$: ਪਿਛਲੀ ਅੰਤਿਮ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ $a$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $b$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹਨ।$\}$,

(v) $\{(a, b) \in A \times B$: $a$ ਉਸ ਥਾਂ ਤੇ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $b$ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।$\}$.

ਜਦੋਂ ਕਿ A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸੰਬੰਧ R ਨੂੰ ਅਮੂਰਤ ਰੂਪ (Abstracting) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ $A \times B$ ਦੇ ਇੱਕ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਉਪਸਮੂਹ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਬੰਧ R ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $a$, $b$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $a \, R \, b$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਫ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $a$ ਅਤੇ $b$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਈ ਮੰਨਣਯੋਗ ਕੜੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਵੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਫਲਨ ਇੱਕ ਖਾਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਅਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ (composition)] ਉਲਾਣਯੋਗ (Invertible) ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਅਧਾਰਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

## 1.2 ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Types of Relations)

ਇਸ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ $A \times A$ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ $\phi \subset A \times A$ ਹੈ ਅਤੇ $A \times A$ ਖੁਦ ਦੋ ਚਰਮ ਸੰਬੰਧ ਹਨ। ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਲਈ, $R = \{(a, b): a ï \ b = 10\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਹ ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਕੋਈ ਵੀ ਜੋੜਾ (pair) ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਹੜਾ $a ï \ b = 10$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $R' = \{(a, b) : |a ï \ b| \geq 0\}]$ ਸੰਪੂਰਨ ਸਮੂਹ $A \times A$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $A \times A$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਜੋੜੇ $(a, b)$, $|a ï \ b| \geq 0$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਚਰਮ ਉਦਾਹਰਨ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਸਮੂਹ A ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ A ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਹਿੱਸਾ A ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਹਿੱਸੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਭਾਵ $R = \phi \subset A \times A$.ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R, ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ **(universal)** ਸੰਬੰਧ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ A ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ, ਭਾਵ $R = A \times A$.ਹੈ।

ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਕਦੇ ਕਦੇ ਤੁੱਛ (trivial) ਸੰਬੰਧ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ A ਕਿਸੇ ਮੁੰਡਿਆਂ ਦੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ $R = \{(a, b) : a, b$ ਦੀ ਭੈਣ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਅਤੇ $R' = \{(a, b) :$ $a$ ਅਤੇ $b$ ਦੀ ਉਚਾਈਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਮੀਟਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਕੂਲ ਮੁੰਡਿਆਂ ਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਕੂਲ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਕੂਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਭੈਣ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $R = \phi]$ ਜਿਸ ਤੋਂ ਇਹ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਹ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਮੀਟਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣਾ ਹੀ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $R' = A \times A$ ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਰੋਸਟਰ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿਧੀ। ਇਸ ਲਈ ਲੇਖਕਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4\}$ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ ਨੂੰ $a \, R \, b$ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $b = a + 1$ ਹੋਵੇ। ਜਦੋਂ ਅਸਾਨ ਹੋਵੇ, ਅਸੀਂ ਵੀ ਇਸ ਸੰਕੇਤ (notation) ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਾਂਗੇ।

ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ "$a, b$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ" ਅਤੇ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $a \mathrm{R} b$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸੰਬੰਧ, ਜਿਸ ਦੀ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖਾਸ ਭੂਮਿਕਾ ਹੈ, ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ (Equivalence Relation) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ, ਨਾਮਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਨਿੱਜਵਾਚਕ (Reflexive)] ਸਮਮਿਤਈ (Symmetric) ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ (Transitive) ਸੰਬੰਧਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਸਮੂਹ A ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R;

(i) ਨਿੱਜਵਾਚਕ **(reflexive)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $a \in A$ ਲਈ $(a, a) \in R$, ਹੋਵੇ।

(ii) ਸਮਮਿਤਈ **(symmetric)** ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $a_1, a_2 \in A$ ਦੇ ਲਈ $(a_1, a_2) \in R$ ਅਤੇ $(a_2, a_1) \in R$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।

(iii) ਸਕਰਮਕ **(transitive)** ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $a_1, a_2, a_3 \in A$ ਦੇ ਲਈ $(a_1, a_2) \in R$ ਅਤੇ $(a_2, a_3) \in R$ ਤੋਂ $(a_1, a_3) \in R$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. A ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ R ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ T ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਸਮੂਹ T ਵਿੱਚ R = $\{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ$\}$ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸੰਬੰਧ R ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਆਪਣੇ ਆਪ ਤੋਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੋਬਾਰਾ $(T_1, T_2) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ $\Rightarrow T_2, T_1$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ $\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$. ਇਸ ਲਈ R ਸਮਮਿਤਈ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ ਅਤੇ $T_2, T_3$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ। $\Rightarrow T_1, T_3$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ $\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$. ਇਸ ਲਈ R ਸਕਰਮਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ L ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ R = $\{(L_1, L_2) : L_1, L_2$ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।$\}$ ਸਮੂਹ L ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

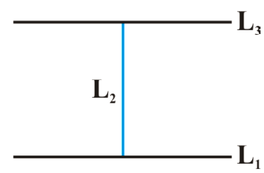
ਹੱਲ : R ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਰੇਖਾ $L_1$ ਆਪਣੇ ਆਪ 'ਤੇ ਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਭਾਵ $(L_1, L_1) \notin R$- R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(L_1, L_2) \in R$

$\Rightarrow$ $L_1, L_2$ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ

$\Rightarrow$ $L_2, L_1$ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ

$\Rightarrow$ $(L_2, L_1) \in R$

R ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ $L_1$, $L_2$ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ $L_2$, $L_3$ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਤਾਂ $L_1$, $L_3$ 'ਤੇ ਕਦੇ ਵੀ ਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $L_1$, $L_3$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਭਾਵ, $(L_1, L_2) \in R$, $(L_2, L_3) \in R$ ਪਰੰਤੂ $(L_1, L_3) \notin R$



ਚਿੱਤਰ 1.1

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ {1, 2, 3} ਵਿੱਚ R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)} ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : R ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ (1, 1), (2, 2) ਅਤੇ (3, 3), R ਦੇ ਤੱਤ ਹਨ। R ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(1, 2) \in R$ ਪਰ $(2, 1) \notin R$.ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $(1, 2) \in R$ ਅਤੇ $(2, 3) \in R$ ਪਰੰਤੂ $(1, 3) \notin R$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **Z** ਵਿੱਚ R = {(*a*, *b*) : ਸੰਖਿਆ 2, (*a* ï *b*) ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।} ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : R ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ $a \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਲਈ 2] (*a* ï *a*) ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(a, a) \in R$. ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ, ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਤਾਂ 2] *a* ï *b* ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ *b* ï *a* ਨੂੰ ਵੀ 2 ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(b, a) \in R$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R$, ਹਨ ਤਾਂ *a* ï *b* ਅਤੇ *b* ï *c* ਸੰਖਿਆ 2 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ। ਹੁਣ *a* ï *c* = (*a* ï *b*) + (*b* ï *c*) ਜਿਸਤ (even) ਹੈ (ਕਿਉਂ\)A ਇਸ ਲਈ (*a* ï *c*) ਵੀ 2 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ **Z** ਵਿੱਚ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 ਵਿੱਚ, ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $(0, \pm 2)$, $(0, \pm 4)$, ---ਆਦਿ R ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(0, \pm 1)$,$(0, \pm 3)$, ---ਆਦਿ R ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ E ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ O ਸਮੂਹ Z ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ, ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ :

(i) E ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ O ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।

(ii) E ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ O ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਉਲਟੇ ਤੌਰ ਤੇ O ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ E ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) E ਅਤੇ O ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ $\mathbf{Z} = E \cup O$ ਹੈ।

ਉਪ ਸਮੂਹ E, ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਸਮਤੁਲਨਾ-ਸ਼੍ਰੇਣੀ (Equivalence Class) ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ [0] ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ O, 1 ਨੂੰ ਸਮਿਲਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਸਮਤੁਲਤਾ-ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ [1] ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ $[0] \neq [1]$, $[0] = [2r]$ ਅਤੇ $[1] = [2r + 1]$,

$r \in \mathbf{Z}$ ।ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਜਿਹੜਾ ਕੁਝ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ, ਉਹ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੂਹ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ R ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿੱਤੇ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮੂਹ X ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ (arbitrary) R, X ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ $A_i$ ਵਿੱਚ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ X ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ (Partition) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਹੜਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ :

(i) ਸਾਰੇ $i$ ਲਈ $A_i$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) $A_i$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ $A_j$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $i \neq j$।

(iii) $\cup A_j = X$ ਅਤੇ $A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j$

ਉਪ ਸਮੂਹ $A_i$ ਸਮਤੁਲਤਾ-ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਰੋਚਕ ਪੱਖ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $\mathbf{Z}$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਉਪਖੰਡਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਹੜਾ $\mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਤਿੰਨ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ $A_1, A_2$ ਅਤੇ $A_3$ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਸੰਮਿਲਣ (Union) $\mathbf{Z}$ ਹੈ।

$A_1 = \{x \in \mathbf{Z} : x$ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ$\} = \{..., $ ï $6,$ ï $3, 0, 3, 6, ...\}$

$A_2 = \{x \in \mathbf{Z} : x$ ï 1 ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ$\} = \{..., $ ï $5,$ ï $2, 1, 4, 7, ...\}$

$A_3 = \{x \in \mathbf{Z} : x$ ï 2 ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ $\} = \{..., $ ï $4,$ ï $1, 2, 5, 8, ...\}$

$\mathbf{Z}$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ $R = \{(a, b) : 3, a$ ï $b$ ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।$\}$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਉਦਾਹਰਣ 5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਤਰਕ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਇਲਾਵਾ $A_1$, $\mathbf{Z}$ $A_2$ $\mathbf{Z}$ ਦੀਆਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਜਿਹੜਾ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ, $A_3$, $\mathbf{Z}$ ਦੀਆਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਜਿਹੜੀਆਂ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $A_3$, $\mathbf{Z}$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਸੰਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ 2 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $A_1 = [0], A_2 = [1]$ ਅਤੇ $A_3 = [2]$ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $A_1 = [3r], A_2 = [3r + 1]$ ਅਤੇ $A_3 = [3r + 2]$, ਜਿੱਥੇ $r \in \mathbf{Z}$.

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a$ ਅਤੇ $b$ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹਨ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹਨ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 3, 5, 7\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{2, 4, 6\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 3, 5,7\}$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{2, 4, 6\}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : A ਦਾ ਦਿੱਤਾ ਕੋਈ ਤੱਤ $a$ ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹੈ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, a) \in R$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $(a, b) \in R \Rightarrow a$ ਅਤੇ $b$ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਟਾਂਕ ਹਨ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹਨ $\Rightarrow (b, a) \in R$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R \Rightarrow$ ਤੱਤ $a, b, c$, ਸਾਰੇ ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹਨ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹਨ $\Rightarrow (a, c) \in R$. ਇਸ ਲਈ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ $\{1, 3, 5, 7\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਉਪਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਟਾਂਕ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\{2, 4, 6,\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਾਰੇ ਜਿਸਤ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ ਉਪ ਸਮੂਹ$\{1, 3, 5, 7\}$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ $\{2, 4, 6\}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਕਿਉਂਕਿ $\{1, 3, 5, 7\}$ ਦੇ ਤੱਤ ਟਾਂਕ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ $\{2, 4, 6\}$, ਦੇ ਤੱਤ ਜਿਸਤ ਹਨ।

## ਅਭਿਆਸ 1.1

1. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹਨ :

   (i) ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ R, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਕਿ

   $$R = \{(x, y) : 3x \text{ ï } y = 0\}$$

   (ii) ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **N** ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : y = x + 5$ ਅਤੇ $x < 4\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R.

   (iii) ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : y$ ਭਾਜ ਹੈ $x$ ਨਾਲ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਹੈ।

   (iv) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **Z** ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : x$ ï $y$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R-

   (v) ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਸਮਾਂ ਤੇ ਕਿਸੇ ਨਗਰ ਦੇ ਨਿਵਾਸੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧ R

   (a) $R = \{(x, y) : x$ ਅਤੇ $y$ ਇੱਕ ਹੀ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਕਾਰਜ ਕਰਦੇ ਹਨ।$\}$

   (b) $R = \{(x, y) : x$ ਅਤੇ $y$ ਇੱਕ ਹੀ ਮੁਹੱਲੇ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ।$\}$

   (c) $R = \{(x, y) : x, y$ ਤੋਂ ਠੀਕ ਠੀਕ 7 ਸੈ: ਮੀ: ਲੰਬਾ ਹੈ।$\}$

   (d) $R = \{(x, y) : x , y$ ਦੀ ਪਤਨੀ ਹੈ।$\}$

   (e) $R = \{(x, y) : x, y$ ਦਾ ਪਿਤਾ ਹੈ।$\}$

2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ R ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R] ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ, ਨਾ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

3. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a \leq b\}$, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

5. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ?

6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕਾਲਜ ਦੇ ਲਾਇਬਰੇਰੀ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹA ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : x$ ਅਤੇ $y$ ਵਿੱਚ ਪੰਨਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸਮਾਨ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

**8.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ] $R = \{(a, b) : |a ï\ b|$ ਜਿਸਤ ਹੈ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $\{1, 3, 5\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮੂਹ $\{2, 4\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਪਰੰਤੂ $\{1, 3, 5\}$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ $\{2, 4\}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**9.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $A = \{x \in \mathbf{Z} : 0 \le x \le 12\}$, ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧਾਂ R ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ :

(i) $R = \{(a, b) : |a ï\ b|$, 4 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ।$\}$,

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$,

ਹਰੇਕ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**10.** ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਓ, ਜਿਹੜੇ :

(i) ਸਮਮਿਤਈ ਹੋਣ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੋਣ ਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ।

(ii) ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੋਣ ਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਮਮਿਤਈ ਹੋਣ।

(iii) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਮਮਿਤਈ ਹੋਣ ਪਰ ਸਕਰਮਕ ਨਾ ਹੋਣ।

(iv) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਾ ਹੋਣ।

(v) ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ ਪਰ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਾ ਹੋਣ।

**11.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ, $R = \{(P, Q) :$ ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ, ਬਿੰਦੂ Q ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $P \ne (0, 0)$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ P ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਹੈ।

**12.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ] $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਭੁਜਾਵਾਂ 3, 4, 5, ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ $T_1$] ਭੁਜਾਵਾਂ 5, 12, 13 ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ $T_2$ ਅਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ 6, 8, 10 ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ $T_3$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। $T_1$, $T_2$ ਅਤੇ $T_3$ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ?

**13.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ, $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ ਅਤੇ $P_2$ ਦੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। 3, 4, ਅਤੇ 5 ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**14.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ XY- ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ L ਹੈ ਅਤੇ L ਵਿੱਚ $R = \{(L_1, L_2) : L_1$ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ $L_2$ ਨਾਲ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਰੇਖਾ $y = 2x + 4$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**15.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4\}$ ਵਿੱਚ] $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4,4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

(A) R ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(B) R ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(C) R ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਨਿਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(D) R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

**16.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ **N** ਵਿੱਚ] $R = \{(a, b) : a = b$ ï $2, b > 6\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

## 1.3 ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Types of Functions)

ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਕਲਪ, ਕੁਝ ਖਾਸ ਫਲਨ ਜਿਵੇਂ ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ, ਅਚਲ ਫਲਨ, ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ, ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ, ਮਾਪ ਅੰਕ ਫਲਨ, ਚਿੰਨ੍ਹ, ਫਲਨ ਆਦਿ ਦਾ ਵਰਣਨ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਨਾਲ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ।

ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਅੰਤਰ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਅਧਿਐਨ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ (Disciplines) ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਆਪਣਾ ਅਧਿਐਨ ਅੱਗੇ ਵਧਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ ਇਸਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਖਤਮ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

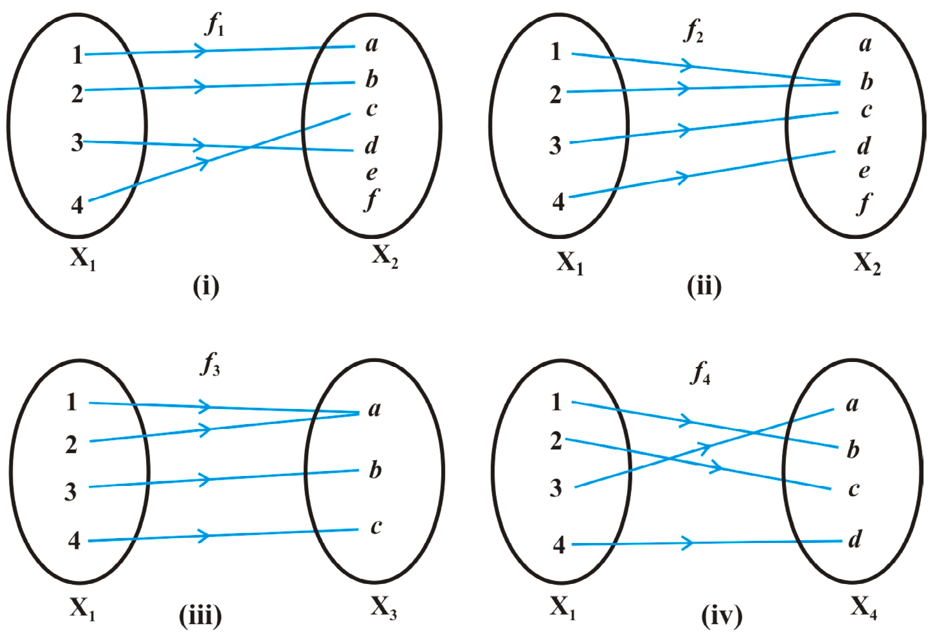
ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਏ ਫਲਨ $f_1, f_2, f_3$ ਅਤੇ $f_4$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 1.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $X_1$ ਦੇ ਵੱਖ (distinct) ਤੱਤਾਂ ਦੇ, ਫਲਨ $f_1$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਵੀ ਵੱਖ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ $f_2$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੋ ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਇੱਕ ਹੀ ਹਨ, ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $b$ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ $X_2$ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਤੱਤ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ $e$ ਅਤੇ $f$ ਜਿਹੜੇ $f_1$ ਦੇ ਬਾਬਤ $X_1$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ $f_3$ ਦੇ ਬਾਬਤ $X_3$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ $X_1$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5 : ਇੱਕ ਫਲਨ $f : X \to Y$ ਇੱਕ-ਇੱਕ (one-one) ਜਾਂ ਇਨਜੈਕਟਿਵ (injective) ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $f$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ X ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਵੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ $x_1, x_2 \in X$, ਲਈ $f(x_1) = f(x_2)$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $x_1 = x_2$, ਨਹੀਂ ਤਾਂ $f$ ਇੱਕ ਬਹੁ-ਇੱਕ (many-one) ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 1.2 (i) ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f_1$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 1.2 (ii) ਵਿੱਚ $f_2$ ਇੱਕ ਬਹੁ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 1.2

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6. ਫਲਨ $f: X \to Y$ (ਔਨਟੂ) (onto) ਜਾਂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ (surjective) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $f$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ Y ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ, X ਦੇ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ $y \in Y$, ਲਈ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ $x$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$.

ਚਿੱਤਰ 1.2 (iii) ਵਿੱਚ, ਫਲਨ $f_3$ ਉੱਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 1-2 (i) ਵਿੱਚ, ਫਲਨ $f_1$ ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $X_2$ ਦੇ ਤੱਤ $e$, ਅਤੇ $f$, $f_1$ ਦੇ ਬਾਬਤ $X_1$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* $f: X \to Y$ ਇੱਕ (ਔਨਟੂ) ਫਲਨ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $f$ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ (range) = Y.

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 7. ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ (one-one and onto) ਜਾਂ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ **(bijective)** ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਦੋਵੇਂ ਹੋਵੇ।

ਚਿੱਤਰ 1.2 (iv) ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f_4$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਜਮਾਤ X ਦੇ ਸਾਰੇ 50 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ A ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $f: A \to \mathbf{N}$] $f(x)$ = ਵਿਦਿਆਰਥੀ $x$ ਦਾ ਰੋਲ ਨੰਬਰ, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜਮਾਤ ਦੇ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ। ਵਿਆਪਕਤਾ ਦਾ ਬਿਨਾਂ ਨੁਕਸਾਨ ਕੀਤੇ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰ 1 ਤੋਂ 50

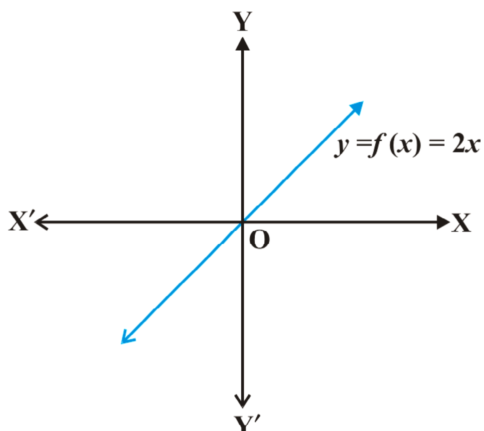
ਤੱਕ ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ **N** ਦਾ ਤੱਤ 51] ਜਮਾਤ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਾ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ $f$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 51] A ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $f$ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = 2x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. ਹਨ। ਦੁਬਾਰਾ, $f$ ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $1 \in \mathbf{N}$, ਦੇ ਲਈ **N** ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੇ ਕਿਸੇ $x$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ $f(x) = 2x = 1$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = 2x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ।

ਹੱਲ : $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$- ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ **R** ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $y$ ਲਈ **R** ਵਿੱਚ $\frac{y}{2}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $f(\frac{y}{2}) = 2\ (\frac{y}{2}) = y$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f$ ਉੱਤੇ ਵੀ ਹੈ।



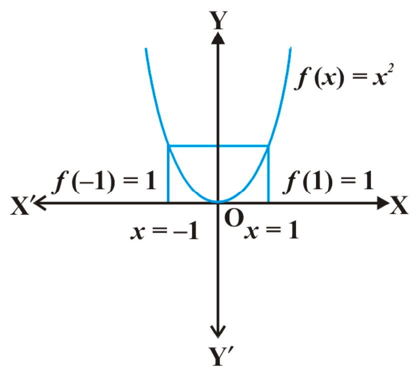
ਚਿੱਤਰ 1.3

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(1) = f(2) = 1$ ਅਤੇ $x > 2$ ਲਈ $f(x) = x$ ï $1$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, ਉੱਤੇ ਤਾਂ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $f(1) = f(2) = 1$, ਪਰੰਤੂ $f$ ਔਨਟੂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ $y \in \mathbf{N}, y \neq 1$, ਲਈ ਅਸੀਂ $x$ ਨੂੰ $y + 1$ ਚੁਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੋ $f\ (y + 1) = y + 1$ ï $1 = y$ ਨਾਲ ਵੀ $1 \in \mathbf{N}$ ਲਈ $f\ (1) = 1$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $f(ï\ 1) = 1 = f(1)$, ਇਸ ਲਈ $f$ ਇੱਕ ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਦਾ ਤੱਤ&2] ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ $x$ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)A ਇਸ ਲਈ $f$ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।




$f$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 1 ਅਤੇ $-1$ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 1.4

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f$: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ :

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ਜੇਕਰ } x \text{ ਟਾਂਕ ਹੈ} \\ x-1, \text{ਜੇਕਰ } x \text{ ਜਿਸਤ ਹੈ} \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $f(x_1) = f(x_2)$ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $x_1$ ਟਾਂਕ ਹੈ ਅਤੇ $x_2$ ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ $x_1 + 1 = x_2\ ï\ 1$, ਭਾਵ $x_2\ ï\ x_1 = 2$ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਅਸੰਭਵ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x_1$ ਦੇ ਜਿਸਤ ਅਤੇ $x_2$ ਦੇ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਦੀ ਵੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x_1$ ਅਤੇ $x_2$ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹੋਣਗੇ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹੋਣਗੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x_1$ ਅਤੇ $x_2$ ਦੋਵੇਂ ਟਾਂਕ ਹਨ, ਤਾਂ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਲਈ $x_1$ ਅਤੇ $x_2$ ਦੋਵੇਂ ਜਿਸਤ ਹਨ, ਤਾਂ ਵੀ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1\ ï\ 1 = x_2\ ï\ 1 \Rightarrow x_1 = x_2$- ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $f$ ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ $2r + 1$, ਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਦੀ ਸੰਖਿਆ $2r + 2$ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ $2r$, **N** ਦੀ ਸੰਖਿਆ $2r\ ï\ 1$ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f$ ਔਨਟੂ ਵੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਔਨਟੂ ਫਲਨ $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਤੱਤ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 1 ਅਤੇ 2 ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ $f$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 3 ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਤੱਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਸਥਾਰ ਵਿੱਚ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ $\{1, 2, 3\}$ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਹੀ ਤੱਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $f$ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਅੰਤਰ ਵਿਰੋਧੀ ਗੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f$ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿ ਇੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਨੂੰ $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਔਨਟੂ ਵੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\{1, 2, 3\}$ ਦੇ ਤਿੰਨ ਤੱਤ $f$ ਅੰਤਰਗਤ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ $\{1, 2, 3\}$ ਦੇ ਤਿੰਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ $f$ ਔਨਟੂ ਵੀ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਉਦਾਹਰਣ 13 ਅਤੇ 14 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸੀਮਿਤ (finite) ਸਮੂਹ X, ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to X$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਉੱਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ X ਲਈ ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਫਲਨ $f: X \to X$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ 8 ਅਤੇ

10 ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ ਲਈ ਇਹ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਅਤੇ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹਾਂ (Infinite) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਖਾਸ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ (characteristic) ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = \frac{1}{x}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\mathbf{R}_*$ ਸਾਰੇ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R}_*$ ਨੂੰ $\mathbf{N}$ ਨਾਲ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $\mathbf{R}_*$ ਹੀ ਰਹੇ, ਤਾਂ ਵੀ ਕੀ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ?
2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਇਨਜੈਕਟਿਵ (Injective) ਅਤੇ ਸਰਜੈਕਟਿਵ (Surjective) ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ:
   (i) $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਫਲਨ ਹੈ।
   (ii) $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ਫਲਨ ਹੈ।
   (iii) $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਫਲਨ ਹੈ।
   (iv) $f(x) = x^3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਫਲਨ ਹੈ।
   (v) $f(x) = x^3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ਫਲਨ ਹੈ।
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = [x]$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਮਹੱਤਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ- ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $[x]$, $x$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।
4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = |x|$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $|x|$ ਬਰਾਬਰ $x$, ਜੇਕਰ $x$ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਅਤੇ $|x|$ ਬਰਾਬਰ ï $x$, ਜੇਕਰ $x$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ਜੇਕਰ } x > 0 \\ 0, \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \\ ï\ 1, \text{ਜੇਕਰ } x < 0, \end{cases}$$

ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਫਲਨ ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਨਾ ਔਨਟੂ ਹੈ।

6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7} ਅਤੇ $f$ = {(1, 4), (2, 5), (3, 6)} A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

**7.** ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਜਾਂ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ (bijective) ਹਨ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਦੱਸੋ।

(i) $f(x) = 3$ ï $4x$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ਹੈ।

(ii) $f(x) = 1 + x^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ਹੈ।

**8.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f: A \times B \rightarrow B \times A$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $f(a, b) = (b, a)$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਜਾਂ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ (bijective) ਫਲਨ ਹੈ।

**9.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ, $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{ਜੇਕਰ } n \text{ ਟਾਂਕ ਹੈ,} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{ਜੇਕਰ } n \text{ ਜਿਸਤ ਹੈ} \end{cases}$

ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ ਹੈ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਕੀ ਫਲਨ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ (bijective) ਹੈ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਦੱਸੋ।

**10.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A = **R** ï {3} ਅਤੇ B = **R** ï {1} ਹਨ। $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: A \rightarrow B$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਕੀ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਦੱਸੋ।

**11.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^4$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

(A) $f$ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ ਹੈ।
(B) $f$ ਬਹੁ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੈ।
(C) $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।
(D) $f$ ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

**12.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = 3x$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ਹੈ। ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

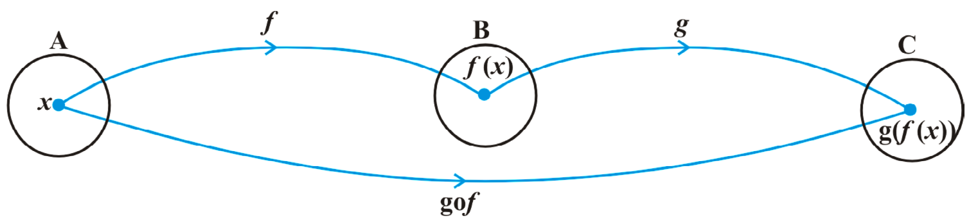
(A) $f$ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ ਹੈ।
(B) $f$ ਬਹੁ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੈ।
(C) $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ
(D) $f$ ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

## 1.4 ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਅਤੇ ਉਲਟ ਹੋਣ ਯੋਗ ਫਲਨ (Composition of Functions and Invertible Function)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ (bijective) ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ (Inverse) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਸੰਨ 2006 ਦੀ ਕਿਸੇ ਬੋਰਡ ਦੀ ਜਮਾਤ X ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬੈਠ ਚੁੱਕੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ A 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਬੋਰਡ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬੈਠਣ ਵਾਲੇ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਬੋਰਡ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੇ ਸਮੇਂ ਆਪਣੀ ਉੱਤਰ ਪੱਤਰੀ ਤੇ ਲਿਖਦਾ ਹੈ। ਰੋਲ ਨੰਬਰਾਂ ਨੂੰ ਗੁਪਤ (deface) ਰੱਖਣ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ ਇੱਕ ਨਕਲੀ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ (Fake Code Number) ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $B \subset N$ ਸਾਰੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ $C \subset N$ ਸਾਰੇ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰਾਂ ਦਾ

ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਫਲਨਾਂ $f : A \to B$ ਅਤੇ $g : B \to C$ ਬਣਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਕਿ $f(a)$ = ਵਿਦਿਆਰਥੀ $a$ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਅਤੇ $g(b)$ = ਰੋਲ ਨੰਬਰ $b$ ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਨਕਲੀ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f$ ਰਾਹੀਂ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲਈ ਇੱਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਲਨ $g$ ਰਾਹੀਂ ਹਰੇਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

**ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 8.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : A \to B$ ਅਤੇ $g : B \to C$ ਦੋ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ $f$ ਅਤੇ $g$ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ, $gof$ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਲਨ $gof : A \to C$, $gof(x) = g(f(x))$, $\forall\ x \in A$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 1.5

**ਉਦਾਹਰਣ 15.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$ ਅਤੇ $g : \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$ ਦੋ ਫਲਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = f(5) = 5$ ਅਤੇ $g(3) = g(4) = 7$ ਅਤੇ $g(5) = g(9) = 11$, ਤਾਂ $gof$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ $gof(2) = g(f(2)) = g(3) = 7$, $gof(3) = g(f(3)) = g(4) = 7$, $gof(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$ ਅਤੇ $gof(5) = g(5) = 11$.

**ਉਦਾਹਰਣ 16.** ਜੇਕਰ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਫਲਨ $f(x) = \cos x$ ਅਤੇ $g(x) = 3x^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ $gof$ ਅਤੇ $fog$ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $gof \neq fog$. ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ $gof(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = 3(\cos x)^2 = 3\cos^2 x$. ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $fog(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = \cos(3x^2)$ ਹਨ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ $x = 0$ ਲਈ $3\cos^2 x \neq \cos 3x^2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $gof \neq fog$.

**ਉਦਾਹਰਣ 17.** ਜੇਕਰ $f(x) = \dfrac{3x+4}{5x-7}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f : \mathbf{R} - \left\{\dfrac{7}{5}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\dfrac{3}{5}\right\}$ ਅਤੇ $g(x) = \dfrac{7x+4}{5x-3}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $g : \mathbf{R} - \left\{\dfrac{3}{5}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\dfrac{7}{5}\right\}$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $fog = I_A$ ਅਤੇ $gof = I_B$ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $I_A(x) = x$, $\forall\, x \in A$ ਅਤੇ $I_B(x) = x$, $\forall\, x \in B$, ਜਿੱਥੇ

$A = \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$, $B = \mathbf{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$ ਹਨ। $I_A$ ਅਤੇ $I_B$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਤਤਸਮਕ (Identity) ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$gof(x) = g\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right) = \frac{7\left(\frac{(3x+4)}{(5x-7)}\right)+4}{5\left(\frac{(3x+4)}{(5x-7)}\right)-3} = \frac{21x+28+20x-28}{15x+20-15x+21} = \frac{41x}{41} = x$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $fog(x) = f\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{(7x+4)}{(5x-3)}\right)+4}{5\left(\frac{(7x+4)}{(5x-3)}\right)-7} = \frac{21x+12+20x-12}{35x+20-35x+21} = \frac{41x}{41} = x$

ਇਸ ਲਈ $gof(x) = x, \ \forall x \in B$ ਅਤੇ $fog(x) = x, \ \forall x \in A$, ਜਿਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $gof = I_B$ ਅਤੇ $fog = I_A$.

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $f: A \to B$ ਅਤੇ $g: B \to C$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹਨ ਤਾਂ $gof: A \to C$ ਵੀ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

ਹੱਲ : $gof(x_1) = gof(x_2)$

$\Rightarrow$ $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Rightarrow$ $f(x_1) = f(x_2)$, ਕਿਉਂਕਿ $g$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ,

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2$, ਕਿਉਂਕਿ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $gof$ ਵੀ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $f: A \to B$ ਅਤੇ $g: B \to C$ ਔਨਟੂ ਹਨ, ਤਾਂ $gof: A \to C$ ਵੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਤੱਤ $z \in C$ ਹੈ। $g$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ $z$ ਦੇ ਇੱਕ ਪੂਰਵ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ (Pre-image) $y \in B$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $g(y) = z$, ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $g$ ਔਨਟੂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $y \in B$ ਲਈ A ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੱਤ $x$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$, ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $f$ ਔਨਟੂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $gof(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $gof$ ਔਨਟੂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. $f$ ਅਤੇ $g$ ਅਜਿਹੇ ਦੋ ਫਲਨਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਕਿ $gof$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੈ। ਕੀ $f$ ਅਤੇ $g$ ਦੋਵੇਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਫਲਨ $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $f(x) = x, \forall\, x$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ $g(x) = x, x = 1, 2, 3, 4$ ਅਤੇ $g(5) = g(6) = 5$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $g: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇੱਥੇ $gof: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਇੱਥੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $gof(x) = x, \forall\, x$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $gof$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ $g$ ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਜੇਕਰ $gof$ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੀ $f$ ਅਤੇ $g$ ਦੋਵੇਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਔਨਟੂ ਹਨ ?

ਹੱਲ : $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ ਅਤੇ $g: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਹੜੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = f(4) = 3, g(1) = 1, g(2) = 2$ ਅਤੇ $g(3) = g(4) = 3.$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਵੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $gof$ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ $f$ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ ਤੇ $gof$ ਦੇ ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੋਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $f$ ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $gof$ ਔਨਟੂ ਹੋਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $g$ ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਭਾਗ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਬੋਰਡ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੇ ਪਰਿਪੇਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ $f$ ਅਤੇ $g$ ਤੇ ਹੋਰ ਬਰੀਕੀ ਨਾਲ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਬੋਰਡ ਦੀ ਜਮਾਤ X ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬੈਠਣ ਵਾਲੇ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਇੱਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨੂੰ $g$ ਅੰਤਰਗਤ ਇੱਕ ਨਕਲੀ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉੱਤਰ ਪੱਤਰੀਆਂ ਦੇ ਮੁਲਾਂਕਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਪਰੀਖਿਅਕ ਹਰੇਕ ਮੁਲਾਂਕਣ ਹੋਈ ਪੱਤਰੀ ਤੇ ਨਕਲੀ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਦੇ ਅੱਗੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਲਿਖ ਕੇ ਬੋਰਡ ਦੇ ਦਫ਼ਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਬੋਰਡ ਦੇ ਅਧਿਆਕੀ, $g$ ਦੇ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਰਾਹੀਂ, ਹਰੇਕ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ ਦੁਬਾਰਾ ਸੰਗਤ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਲਗਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਦੀ ਬਜਾਏ ਸਿੱਧੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ, $f$ ਦੀ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਰਾਹੀਂ, ਹਰੇਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨੂੰ ਉਸ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨਾਲ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਸਿੱਧੇ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਨਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f$ ਅਤੇ $g$, ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਰਾਹੀਂ, $gof$, ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਪਹਿਲਾਂ $f$ ਅਤੇ ਫੇਰ $g$ ਨੂੰ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਸੰਯੁਕਤ $gof$, ਦੀ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ $g$ ਦੀ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਅਤੇ ਫ਼ਿਰ $f$ ਦੀ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $f(1) = a, f(2) = b$ ਅਤੇ $f(3) = c$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $g: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ ਦਾ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਤਾਂ ਜੋ $gof = \mathrm{I}_\mathrm{X}$ ਅਤੇ $fog = \mathrm{I}_\mathrm{Y}$, ਜਿੱਥੇ $\mathrm{X} = \{1, 2, 3\}$ ਅਤੇ $\mathrm{Y} = \{a, b, c\}$ ਹੋਣ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ $g: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $g(a) = 1, g(b) = 2$ ਤੇ $g(c) = 3$, 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੈ ਕਿ ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨ $gof = \mathrm{I}_\mathrm{X}$, X ਤੇ ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨ $fog = \mathrm{I}_\mathrm{Y}$, Y ਤੇ ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ ਹਨ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਇਹ ਇੱਕ ਰੋਚਕ ਤੱਥ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਪਰਿਣਾਮ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੇਵਲ ਏਨਾ ਹੀ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ (converse) ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ, ਜੇਕਰ $f: X \to Y$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਫਲਨ $g: Y \to X$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $gof = I_X$ ਅਤੇ $fog = I_Y$ ਤਾਂ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੀ ਚਰਚਾ, ਉਦਾਹਰਣ 22 ਅਤੇ ਟਿੱਪਣੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 9. ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ **(Invertible)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਫਲਨ $g: Y \to X$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $gof = I_X$ ਅਤੇ $fog = I_Y$ ਹੈ। ਫਲਨ $g$ ਨੂੰ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਉਲਟ (Inverse) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਕ $f^{-1}$ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਜੇਕਰ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਤਾਂ $f$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ ਤਾਂ $f$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤੱਥ $f$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਸਿੱਧ ਕਰਕੇ, ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦੋਂ $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਨਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \mathbf{N} \to Y$, $f(x) = 4x + 3$, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $Y = \{y \in \mathbf{N}: y = 4x + 3$ ਕਿਸੇ $x \in \mathbf{N}$ ਲਈ$\}$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ। ਉਲਟ ਫਲਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : Y ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਤੱਤ $y$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। Y, ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{N}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਤੱਤ $x$ ਲਈ $y = 4x + 3$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $x = \dfrac{(y-3)}{4}$ ਹੈ। ਹੁਣ $g(y) = \dfrac{(y-3)}{4}$ ਰਾਹੀਂ $g: Y \to \mathbf{N}$ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $gof(x) = g(f(x)) = g(4x + 3) = \dfrac{(4x+3-3)}{4} = x$ ਅਤੇ $fog(y) = f(g(y)) = f\left(\dfrac{(y-3)}{4}\right) = \dfrac{4(y-3)}{4} + 3 = y$ ï $3 + 3 = y$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $gof = I_N$ ਅਤੇ $fog = I_Y$, ਜਿਸ ਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ ਫਲਨ $g$ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $Y = \{n^2 : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{N}$ ਹੈ। ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \to Y$ ਜਿੱਥੇ $f(n) = n^2$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ। $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : Y ਦਾ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਤੱਤ, $y$, $n^2$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{N}$. ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $n = \sqrt{y}$ ਇਸ ਤੋਂ $g(y) = \sqrt{y}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ $g: Y \to \mathbf{N}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $gof(n) = g(n^2) = \sqrt{n^2} = n$ ਅਤੇ $fog(y) = f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $gof = \mathrm{I_N}$ ਅਤੇ $fog = \mathrm{I_Y}$ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $f^{ï1} = g$.ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f : \mathbf{N} \to \mathrm{S}$, ਜਿੱਥੇ S, $f$ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਹੈ, ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ। $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦਾ $y$ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਤੱਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $y = 4x^2 + 12x + 15$, ਜਿੱਥੇ $x \in \mathbf{N}$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $y = (2x + 3)^2 + 6$. ➪ $x = \dfrac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}$.

ਹੁਣ, ਇੱਕ ਫਲਨ $g : \mathrm{S} \to \mathbf{N}$, $g(y) = \dfrac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\quad gof(x) = g(f(x)) = g(4x^2 + 12x + 15) = g((2x + 3)^2 + 6))$

$$= \frac{\left(\left(\sqrt{(2x+3)^2+6-6}\right)-3\right)}{2} = \frac{(2x+3-3)}{2} = x$$

ਅਤੇ $\quad fog\ (y) = f\left(\dfrac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}\right) = \left(\dfrac{2\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}+3\right)^2 + 6$

$$= \left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3+3\right)^2 + 6 = \left(\sqrt{y-6}\right)^2 + 6 = y ï\ 6 + 6 = y.$$

ਇਸ ਲਈ : $gof = \mathrm{I_N}$ ਅਤੇ $fog = \mathrm{I_S}$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $f$ ਇੱਕ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $f^{ï1} = g$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਤਿੰਨ ਫਲਨ $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਅਤੇ $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$ ਅਤੇ $h(z) = \sin z$, $\forall\, x, y$ ਅਤੇ $z \in \mathbf{N}$- ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $ho(gof) = (hog)\ of$.

ਹੱਲ : ਜਿੱਥੇ $\quad ho(gof)\ (x) = h(gof\ (x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x))$

$$= h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = \sin(6x + 4),\ \forall\, x \in \mathbf{N}$$

ਨਾਲ ਹੀ $\quad ((hog)\,o\,f)\ (x) = (hog)\ (f(x)) = (hog)\ (2x) = h(g(2x))$

$$= h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = \sin(6x + 4),\ \forall\, x \in \mathbf{N}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $ho(gof) = (hog) \circ f$

ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ ਵਿਆਪਕ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1: ਜੇਕਰ $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ ਅਤੇ $h : Z \to S$ ਤਿੰਨ ਫਲਨ ਹਨ, ਤਾਂ

$$ho(gof) = (hog) \circ f$$

ਉਪਪੱਤੀ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$ho(gof)\ (x) = h(gof(x)) = h(g(f(x))),\ \forall\, x \text{ in } X$$

ਅਤੇ $$(hog)\ of\ (x) = hog(f(x)) = h(g(f(x))),\ \forall\, x \text{ in } X$$

ਇਸ ਲਈ $$ho(gof) = (hog) \circ f$$

ਉਦਾਹਰਣ 27. $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ ਅਤੇ $g : \{a, b, c\} \to$ {ਸੇਬ, ਗੇਂਦ, ਬਿੱਲੀ} $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $g(a) =$ ਸੇਬ, $g(b) =$ ਗੇਂਦ ਅਤੇ $g(c) =$ ਬਿੱਲੀ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$, $g$ ਅਤੇ $gof$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹਨ। $f^{-1}$, $g^{-1}$ ਅਤੇ $(gof)^{-1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $(gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ $f$ ਅਤੇ $g$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f^{-1}: \{a, b, c\} \to (1, 2, 3\}$ ਅਤੇ $g^{-1}$: {ਸੇਬ, ਗੇਂਦ, ਬਿੱਲੀ} $\to \{a, b, c\}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ ਕਿ $f^{-1}\{a\} = 1$, $f^{-1}\{b\} = 2$, $f^{-1}\{c\} = 3$, $g^{-1}$\{ਸੇਬ\} $= a$, $g^{-1}$\{ਗੇਂਦ\} $= b$, $g^{-1}$\{ਬਿੱਲੀ\} $= c$ ਹੈ। ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f^{-1} o f = I_{\{1, 2, 3\}}$, $f \circ f^{-1} = I_{\{a, b, c\}}$, $g^{-1} og = I_{\{a, b, c\}}$ ਅਤੇ $g \circ g^{-1} = I_D$, ਜਿੱਥੇ D = {ਸੇਬ, ਗੇਂਦ, ਬਿੱਲੀ} ਹੈ। ਹੁਣ $gof : \{1, 2, 3\} \to$ {ਸੇਬ, ਗੇਂਦ, ਬਿੱਲੀ} $gof(1) =$ ਸੇਬ, $gof(2) =$ ਗੇਂਦ, $gof(3) =$ ਬਿੱਲੀ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ $(gof)^{-1}$ : {ਸੇਬ, ਗੇਂਦ, ਬਿੱਲੀ} $\to \{1, 2, 3\}$ ਨੂੰ $(gof)^{-1}$ (ਸੇਬ) $= 1$, $(gof)^{-1}$ (ਗੇਂਦ) $= 2$ ਅਤੇ $(g \circ f)^{-1}$ (ਬਿੱਲੀ) $= 3$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = I_{\{1, 2, 3\}}$ ਅਤੇ $(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I_D$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $f$, $g$ ਅਤੇ $gof$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹਨ।

ਹੁਣ $f^{-1} og^{-1}$ (ਸੇਬ) $= f^{-1}(g^{-1}$ (ਸੇਬ)) $= f^{-1}(a) = 1 = (gof)^{-1}$ (ਸੇਬ)

$f^{-1} og^{-1}$ (ਗੇਂਦ) $= f^{-1}(g^{-1}$(ਗੇਂਦ)) $= f^{-1}(b) = 2 = (gof)^{-1}$ (ਗੇਂਦ)

ਅਤੇ $f^{-1} og^{-1}$ (ਬਿੱਲੀ) $= f^{-1}(g^{-1}$(ਬਿੱਲੀ)) $= f^{-1}(c) = 3 = (gof)^{-1}$ (ਬਿੱਲੀ)

ਇਸ ਲਈ $$(gof)^{-1} = f^{-1} og^{-1}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਣਾਮ ਵਿਆਪਕ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : X \to Y$ ਅਤੇ $g : Y \to Z$ ਦੋ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ $gof$ ਵੀ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $(gof)^{-1} = f^{-1} og^{-1}$ ਹੈ।

ਉਪਪੱਤੀ : $gof$ ਨੂੰ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਅਤੇ $(gof)^{-1} = f^{-1} og^{-1}$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਇਹ

ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨਾ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਕਿ $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = I_X$ ਅਤੇ $(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_Z$ ਹੈ।

ਹੁਣ $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = ((f^{-1}og^{-1})\ og)\ of$, ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਰਾਹੀਂ

$= (f^{-1}o(g^{-1}og))\ of$, ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਰਾਹੀਂ

$= (f^{-1}o\,I_Y)\ of$, $g^{-1}$ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ

$= I_X$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਹ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ] $(gof)\,(f^{-1}\,o\,g^{-1}) = I_Z$

**ਉਦਾਹਰਣ 28.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $S = \{1, 2, 3\}$ ਹੈ। ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: S \to S$ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਹਨ। $f^{-1}$, ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

(a) $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(b) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$

(c) $f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$

**ਹੱਲ :**

(a) ਇਹ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਵੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $f$ ਇੱਕ ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ $f$ ਦਾ ਉਲਟ $f^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = f$ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(b) ਕਿਉਂਕਿ $f(2) = f(3) = 1$, ਇਸ ਲਈ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(c) ਇਹ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਵੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ ਇਸ ਕਰਕੇ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ $f^{-1} = \{(3, 1), (2, 3), (1, 2)\}$ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 1.3

**1.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$ ਅਤੇ $g: \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$, $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ ਅਤੇ $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। $gof$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**2.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f, g$ ਅਤੇ $h$, **R** ਤੋਂ **R** ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$(f + g)oh = foh + goh$$

$$(f\,.\,g)oh = (foh)\,.\,(goh)$$

**3.** $gof$ ਅਤੇ $fog$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ

(i) $f(x) = |x|$ ਅਤੇ $g(x) = |5x - 2|$

(ii) $f(x) = 8x^3$ ਅਤੇ $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

4. ਜੇਕਰ $f(x) = \dfrac{(4x+3)}{(6x-4)}$, $x \neq \dfrac{2}{3}$, ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ $x \neq \dfrac{2}{3}$ ਲਈ $fof(x) = x$ ਹੈ। $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਫਲਨ ਕੀ ਹੈ ?

5. ਕਾਰਨ ਨਾਲ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਹਨ :

   (i) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{10\}$ ਜਿੱਥੇ

   $f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$ ਹੈ।

   (ii) $g : \{5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ ਜਿੱਥੇ

   $g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$ ਹੈ।

   (iii) $h : \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{7, 9, 11, 13\}$ ਜਿੱਥੇ

   $h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$ ਹੈ।

6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ : [ï 1, 1] $\rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)}$, ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ। ਫਲਨ $f$ : [ï 1, 1] $\rightarrow$ ($f$ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ)] ਦਾ ਉਲਟ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (ਸੰਕੇਤ : $y \in$ ਵਿਸਥਾਰ ਲਈ $f$, ਦੇ ਕਿਸੇ] [ï 1, 1] ਲਈ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $y = f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, ਭਾਵ

   $x = \dfrac{2y}{(1-y)}$)

7. $f(x) = 4x + 3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ। $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. $f(x) = x^2 + 4$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow [4, \infty)$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ $f$ ਦਾ ਉਲਟ $f^{ï1}$, $f^{ï1}(y) = \sqrt{y-4}$, ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\mathbf{R}_+$ ਸਾਰੇ ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

9. $f(x) = 9x^2 + 6x$ ï 5 ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow$ [ï 5, $\infty$) 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ $f^{ï1}(y) = \left(\dfrac{\left(\sqrt{y+6}\right)-1}{3}\right)$ ਹੈ।

10. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ ਇੱਕ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੈ। (ਸੰਕੇਤ : ਮੰਨੋ ਕਿ $f$ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ $g_1$ ਅਤੇ $g_2$ ਹਨ। ਤਾਂ ਸਾਰੇ $y \in \mathrm{Y}$ ਲਈ $fog_1(y) = 1_{\mathrm{Y}}(y) = fog_2(y)$ ਹੈ। ਹੁਣ $f$ ਦੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੋਣ ਦੇ ਗੁਣ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰੋ।)

**11.** $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}, f(1) = a, f(2) = b$ ਅਤੇ $f(3) = c$. ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। $f^{-1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(f^{-1})^{-1} = f$ ਹੈ।

**12.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ ਇੱਕ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f^{-1}$ ਦਾ ਉਲਟ $f$, ਹੈ ਭਾਵ $(f^{-1})^{-1} = f$ ਹੈ।

**13.** ਜੇਕਰ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$, ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ $fof(x)$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $x^{\frac{1}{3}}$ (B) $x^3$ (C) $x$ (D) $(3 - x^3)$

**14.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbf{R}$ ਹੈ। $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਭਾਵ ਪ੍ਰਤਿਚਿੱਤਰ (Map) $g$ : ਵਿਸਥਾਰ $f \to \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ :

(A) $g(y) = \dfrac{3y}{3-4y}$ (B) $g(y) = \dfrac{4y}{4-3y}$

(C) $g(y) = \dfrac{4y}{3-4y}$ (D) $g(y) = \dfrac{3y}{4-3y}$

## 1.5 ਦੋ-ਆਧਾਰਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ (Binary Operations)

ਆਪਣੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਤੁਸੀਂ ਚਾਰ ਮੂਲ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ, ਨਾਮ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਜੋੜ, ਘਟਾਓ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇਹਨਾਂ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $a$ ਅਤੇ $b$, ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ $a + b$ ਜਾਂ $a - b$ ਜਾਂ $ab$ ਜਾਂ $\dfrac{a}{b}, b \neq 0$ ਨੂੰ ਸੰਬੰਧਿਤ (Associate) ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗੱਲ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ, ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ, ਕੇਵਲ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੀ ਜੋੜ ਜਾਂ ਗੁਣਾ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਾਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਚਾਹੀਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜਫਲ ਨੂੰ ਫੇਰ ਤੀਜੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਜੋੜ, ਗੁਣਾ, ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ 'ਦੋ-ਅਧਾਰੀ' ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ 'ਦੋ ਅਧਾਰ ਵਾਲੀ'। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਿਆਪਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਚਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵੀ ਆ ਜਾਣ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮੂਹ X ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤਾਂ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ, ਕੁਝ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ, X ਦੇ ਦੋ ਤੱਤਾਂ $a$ ਅਤੇ $b$ ਨੂੰ X ਦੇ ਹੀ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਵਿਆਪਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 10. ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, ਇੱਕ ਫਲਨ $* : A \times A \to A$ ਹੈ। ਅਸੀਂ $*(a, b)$ ਨੂੰ $a * b$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ ਜੋੜ, ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਪਰ ਭਾਗ **R** ਵਿੱਚ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਭਾਗ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **R** ਵਿੱਚ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to a + b$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ,

ï : **R** × **R** → **R**, $(a, b) \to a$ ï $b$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ,

$\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to ab$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ,

ਕਿਉਂਕਿ ó+ô, ä ô ਅਤੇ ó×ô ਫਲਨ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ **R** ਵਿੱਚ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਪਰੰਤੂ $\div : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to \frac{a}{b}$, ਇੱਕ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $b = 0$ ਲਈ $\frac{a}{b}$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $\div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$, $(a, b) \to \frac{a}{b}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ $\mathbf{R}_*$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਭਾਗ **N** ਵਿੱਚ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ï : **N** × **N** → **N**, $(a, b) \to a$ ï $b$, ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੀ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ä ô ਦੇ ਤਹਿਤ (3] 5) ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ 3 ï 5 = ï 2 ∉ **N**. ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ $\div \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $(a, b) \to \frac{a}{b}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ^÷* ਦੇ ਤਹਿਤ (3 ¸ 5) ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ $3 \div 5 = \frac{3}{5} \notin \mathbf{N}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 31. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to a + 4b^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੀ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $*$ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ $(a, b)$ ਨੂੰ **R** ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤੱਤ $a + 4b^2$ ਤੱਕ ਲੈ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $*$ **R** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 32. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ P, ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ X ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ, ਸਮੂਹ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\cup : P \times P \to P$, $(A, B) \to A \cup B$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ $\cap : P \times P \to P$, $(A, B) \to A \cap B$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, P ਵਿੱਚ ਦੋ ਆਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਘ ਸੰਕਿਰਿਆ (Union Operation) $\cup$, $P \times P$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਜੋੜ (A, B) ਨੂੰ P ਦੇ ਇੱਕ

ਵਿਲੱਖਣ ਤੱਤ $A \cup B$ ਤੱਕ ਲੈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\cup$, ਸਮੂਹ P ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਾਟ (Intersection) ਸੰਕਿਰਿਆ $\cap$, $P \times P$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ (A, B) ਨੂੰ P ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤੱਤ $A \cap B$ ਤੱਕ ਲੈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\cap$, ਸਮੂਹ P ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 33. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(a, b) \to$ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ $\{a, b\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $\vee : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $(a, b) \to$ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ $\{a, b\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $\wedge : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\vee$, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ $(a, b)$ ਨੂੰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R}$ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤੱਤ, ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $a$ ਅਤੇ $b$ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਧ, 'ਤੇ ਲੈ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\vee$ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਤਰਕ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $\wedge$ ਵੀ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* $\vee(4, 7) = 7$, $\vee(4, ï\ 7) = 4$, $\wedge(4, 7) = 4$ ਅਤੇ $\wedge(4, ï\ 7) = ï\ 7$ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਰਾਹੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, $A = \{1, 2, 3\}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਤਾਂ ਉਦਾਹਰਣ 33 ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ A ਵਿੱਚ ਸੰਕਿਰਿਆ $\vee$ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ (ਸਾਰਣੀ 1.1) ਰਾਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ $\vee(1, 3) = 3$, $\vee(2, 3) = 3$, $\vee(1, 2) = 2$.ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 1.1

| $\vee$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

ਇੱਥੇ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ 3 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 3 ਥੰਮ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $(i, j)$ਵੀਂ ਇੰਦਰਾਜ ਸਮੂਹ A ਦੇ $i$ਵੇਂ ਅਤੇ $j$ਵੇਂ ਤੱਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਵਿਆਪੀਕਰਣ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅਸਾਨ ਸੰਕਿਰਿਆ $* : A \times A \to A$ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ $n$ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ $n$ ਥੰਮ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ $(i, j)$ਵੀਂ ਇੰਦਰਾਜ $a_i * a_j$ ਹੋਵੇਗੀ। ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ $n$ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ $n$ ਥੰਮਾਂ ਵਾਲੀ ਕਿਸੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ, ਜਿਸ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇੰਦਰਾਜ $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, ਦਾ ਇੱਕ ਤੱਤ ਹੈ, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $* : A \times A \to A$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $a_i * a_j =$ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਦੀ $i$ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ $j$ਵੇਂ ਸਤੰਭਾਂ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 3 ਅਤੇ 4 ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ (order) ਵਿੱਚ ਜੋੜੀਏ, ਨਤੀਜਾ ਇੱਕ ਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $3 + 4 = 4 + 3$, ਪਰੰਤੂ 3 ਅਤੇ 4 ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਭਿੰਨ ਨਤੀਜੇ ਦਿੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ $3\, ï\ 4 \neq 4\, ï\ 3$ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 3 ਅਤੇ 4 ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮਹੱਤਵ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ 3 ਅਤੇ 4 ਦੀ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਭਿੰਨ ਨਤੀਜੇ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 3 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਅਰਥ ਪੂਰਣ ਹੈ ਪਰ 3

ਅਤੇ 4 ਦਾ ਅੰਤਰ ਅਤੇ ਭਾਗ ਅਰਥਹੀਨ ਹੈ। ਅੰਤਰ ਅਤੇ ਭਾਗ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਲਿਖਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਕਿ '3 ਵਿੱਚੋਂ 4 ਨੂੰ ਘਟਾਉ' ਜਾਂ 4 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਘਟਾਉ' ਜਾਂ '3 ਨੂੰ 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ' ਜਾਂ '4 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ।' ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

**ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 11.** ਸਮੂਹ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ* ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ (Commutative) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $a, b \in X$ ਲਈ $a * b = b * a$ ਹੋਵੇ।

**ਉਦਾਹਰਣ 34.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ (Commutative) ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਪਰ ï : $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $\div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ (Commutative) ਨਹੀਂ ਹਨ।

**ਹੱਲ :** ਕਿਉਂਕਿ $a + b = b + a$ ਅਤੇ $a \times b = b \times a$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$, ਹਨ, ਇਸ ਕਰਕੇ ó+ô ਅਤੇ ó×ô ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ óï ô ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ 3 ï 4 ≠ 4 ï 3. ਹੁੰਦਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ $3 \div 4 \neq 4 \div 3$, ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ó÷ô ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 35.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a * b = a + 2b$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਕਿਉਂਕਿ $3 * 4 = 3 + 8 = 11$ ਅਤੇ $4 * 3 = 4 + 6 = 10$, ਇਸ ਲਈ ਸੰਕਿਰਿਆ * ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ X ਦੇ ਤਿੰਨ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ X ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਿਸੇ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸੁਭਾਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਉੱਠਦੀ ਹੈ। ਵਿਅੰਜਕ $a * b * c$ ਦਾ ਅਰਥ $(a * b) * c$ ਜਾਂ $a * (b * c)$ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਵਿਅੰਜਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ (8 ï 5) ï 2 ≠ 8 ï (5 ï 2). ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 8, 5 ਅਤੇ 3 ਦਾ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ 'ਘਟਾਓ' ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਸੰਬੰਧ ਅਰਥਹੀਨ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਬਰੈਕਟ(Bracket) ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ। ਪਰ ਜੋੜ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ $8 + 5 + 2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਚਾਹੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $(8 + 5) + 2$ ਜਾਂ $8 + (5 + 2)$ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੀਏ। ਇਸ ਲਈ ਤਿੰਨ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਜੋੜ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਸੰਬੰਧ ਬਗੈਰ ਬਰੈਕਟਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤੇ ਵੀ, ਅਰਥਪੂਰਨ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

**ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 12.** ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ$* : A \times A \to A$ ਸਹਿਚਰ (Associative) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ

$$(a * b) * c = a * (b * c), \ \forall\, a, b, c, \in A.$$

**ਉਦਾਹਰਣ 36.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਸਹਿਚਰ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਪਰ ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਭਾਗ **R** ਵਿੱਚ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹਨ।

**ਹੱਲ :** ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਸਹਿਚਰ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ $(a + b) + c = a + (b + c)$ ਅਤੇ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, $\forall\, a, b, c \in R$ ਹੈ ਬਲਕਿ ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਭਾਗ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ (8 ï 5) ï 3 ≠ 8 ï (5 ï 3) ਅਤੇ $(8 \div 5) \div 3 \neq 8 \div (5 \div 3)$ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 37.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a * b \to a + 2b$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ

$$(8 * 5) * 3 = (8 + 10) * 3 = (8 + 10) + 6 = 24,$$

ਜਦੋਂ ਕਿ $$8 * (5 * 3) = 8 * (5 + 6) = 8 * 11 = 8 + 22 = 30.$$

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਹਿਚਰ ਗੁਣ ਇਸ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕ $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਗੁਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਇਹ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਇਸ ਗੁਣ ਦ ਬਿਨਾਂ ਵਿਅੰਜਕ $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ ਵਿੱਚ ਸ਼ੱਕ (Ambiguous) ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਬਰੈਕਟ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਨਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਘਟਾਓ ਜਾਂ ਭਾਗ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਪੂਰੀਆਂ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੀ, ਤਾਂ ਬਰੈਕਟਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ।

**R** ਵਿੱਚ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ^$* ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੰਖਿਆ ਸਿਫ਼ਰ (zero) ਦੀ ਇੱਕ ਰੋਚਕ ਖਾਸੀਅਤ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $a + 0 = a = 0 + a,\ \forall\ a \in \mathbf{R}$, ਭਾਵ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਬਦਲਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ ਇਹ ਭੂਮਿਕਾ ਸੰਖਿਆ 1 ਰਾਹੀਂ ਨਿਭਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $a \times 1 = a = 1 \times a,\ \forall\ a \in \mathbf{R}$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 13. ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $* : A \times A \to A$, ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਤੱਤ $e \in A$, ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਤਤਸਮਕ (Identity) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $a * e = a = e * a,\ \forall\ a \in A$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 38. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਜੋੜ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਤੇ 1 ਗੁਣਾ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ। ਪਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ï : $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $\div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ ਲਈ ਕੋਈ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : $a + 0 = 0 + a = a$ ਅਤੇ $a \times 1 = a = 1 \times a,\ \forall\, a \in \mathbf{R}$ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ 0 ਅਤੇ 1 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ó+ô ਅਤੇ ó×ô, ਦੇ ਤੱਤਸਮਕ ਤੱਤ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ **R** ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਕੋਈ ਤੱਤ $e$ ਨਹੀਂ ਕਿ $a$ ï $e$ = $e$ ï $a$, $\forall\, a \in \mathbf{R}$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ $\mathbf{R}_*$ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਤੱਤ $e$ ਨਹੀਂ ਮਿਲ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $a \div e = e \div a,\ \forall\, a \in \mathbf{R}_*$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ óï ô ਅਤੇ ó÷ô ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* **R** ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ, ਪਰ ਇਹ **N** ਵਿੱਚ ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $0 \notin \mathbf{N}$ ਅਸਲ ਵਿੱਚ **N** ਵਿੱਚ ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਕੋਈ ਤਤਸਮਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਲਈ, ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ $a \in \mathbf{R}$ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਅਸੀਂ **R** ਵਿੱਚ ï $a$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $a$ + (ï $a$) = 0 (ó+ô ਤਤਸਮਕ) = (ï $a$) + $a$. ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **R** ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਲਈ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ $a \in \mathbf{R}, a \neq 0$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਅਸੀਂ **R** ਵਿੱਚ $\frac{1}{a}$ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਚੁਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $a \times \frac{1}{a}$ = 1(ó×ô ਦਾ ਤਤਸਮਕ) = $\frac{1}{a} \times a$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 14. A ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ $e$ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*: A \times A \to A$ ਦੇ ਲਈ ਕਿਸੇ ਤੱਤ $a \in A$ ਨੂੰ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ A ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਤੱਤ $b$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ ਕਿ $a * b = e = b * a$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $b$ ਨੂੰ $a$ ਦਾ ਉਲਟ (Inverse) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਕ $a^{ï1}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 39. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ó+ô ਲਈ ï $a$ ਦਾ ਉਲਟ $a$ ਹੈ ਅਤੇ **R** ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਸੰਕਿਰਿਆ ó×ô ਲਈ $a \neq 0$ ਦਾ ਉਲਟ $\frac{1}{a}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $a + (ï\ a) = a\ ï\ a = 0$ ਅਤੇ $(ï\ a) + a = 0$, ਇਸ ਲਈ ï $a$ ਜੋੜ ਸੰਕਿਰਿਆ ਲਈ $a$ ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $a \neq 0$, ਲਈ $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$, ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $\frac{1}{a}$ ਗੁਣਾ ਸੰਕਿਰਿਆ ਲਈ $a$ ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 40. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **N** ਵਿੱਚ ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ '+' ਦੇ ਲਈ $a \in$ **N** ਦਾ ਉਲਟ ï $a$ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ **N** ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਸੰਕਿਰਿਆ ó×ô ਲਈ $a \in$ **N**, $a \neq 1$ ਦਾ ਉਲਟ $\frac{1}{a}$ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ï $a \notin$ **N**, ਇਸ ਲਈ **N** ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਸੰਕਿਰਿਆ ਲਈ $a$ ਦਾ ਉਲਟ ï $a$ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਜਦੋਂ ਕਿ ï $a$ ਸ਼ਰਤਾਂ $a + (ï\ a) = 0 = (ï\ a) + a$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **N** ਵਿੱਚ $a \neq 1$ ਲਈ $\frac{1}{a} \notin$ **N**, ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ 1 ਦੇ ਇਲਾਵਾ **N** ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦਾ ਉਲਟ **N** ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਸੰਕਿਰਿਆ ਲਈ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 34, 36, 38 ਅਤੇ 39 ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਸੰਕਿਰਿਆ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਸਹਿਚਰ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ 0 ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਅਤੇ $a \in$ **R**, $\forall\, a$ ਦਾ ਉਲਟ ਤੱਤ ï $a$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 1.4

1. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਰੇਕ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਤੋਂ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $*$ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਕਾਰਨ ਵੀ ਦੱਸੋ।
   (i) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, $a * b = a\ ï\ b$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$
   (ii) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, $a * b = ab$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$
   (iii) **R** ਵਿੱਚ] ਸੰਕਿਰਿਆ $*$] $a * b = ab^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ
   (iv) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, ਸੰਕਿਰਿਆ $*$] $a * b = |a\ ï\ b|$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ
   (v) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, $a * b = a$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

**2.** ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਰੇਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਲਈ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ, ਕੀ$*$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਕੀ$*$ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।

(i) **Z** ਵਿੱਚ, $a * b = a$ ï $b$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

(ii) **Q** ਵਿੱਚ, $a * b = ab + 1$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

(iii) **Q** ਵਿੱਚ, $a * b = \dfrac{ab}{2}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

(iv) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, $a * b = 2^{ab}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

(v) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, $a * b = a^b$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

(vi) **R** ï {ï 1} ਵਿੱਚ, $a * b = \dfrac{a}{b+1}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

**3.** ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ $a \wedge b$ = ਘੱਟੋ-ਘੱਟ $\{a, b\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸੰਕਿਰਿਆ $\wedge$ ਲਈ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਲਿਖੋ।

**4.** ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ (ਸਾਰਣੀ 1.2) ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਨਾਲ ਹੀ :

(i) $(2 * 3) * 4$ ਅਤੇ $2 * (3 * 4)$ ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ।

(ii) ਕੀ $*$ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ?

(iii) $(2 * 3) * (4 * 5)$ ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ।

(ਸੰਕੇਤ : ਹੇਠਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰੋ।)

ਸਾਰਣੀ 1.2

| * | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |

**5.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*'$, $a *' b = a$ ਅਤੇ $b$ ਦਾ HCF, HCF ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਕੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*'$ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 4 ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਉੱਚਿਤਤਾ ਵੀ ਦੱਸੋ।

**6.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ **N** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*]$ $a * b = a$ ਅਤੇ $b$ ਦਾ LCM ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $5 * 7$, $20 * 16$ (ii) ਕੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ?

(iii) ਕੀ $*$ ਸਹਿਚਰ ਹੈ ? (iv) **N** ਵਿੱਚ $*$ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਤਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(v) **N** ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਤੱਤ $*$ ਸੰਕਿਰਿਆ ਲਈ ਉਲਟਾਏ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹਨ ?

**7.** ਕੀ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ $a * b = a$ ਅਤੇ $b$ ਦਾ (LCM) ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $*$ ਇੱਕ ਦੋ -ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ।

**8.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ **N** ਵਿੱਚ $a * b = a$ ਅਤੇ $b$ ਦਾ HCF ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ। ਕੀ $*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ? ਕੀ $*$ ਸਹਿਚਰ ਹੈ ? ਕੀ **N** ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਤੱਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ?

**9.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **Q** ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $*$ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ:

(i) $a * b = a$ ï $b$ (ii) $a * b = a^2 + b^2$

(iii) $a * b = a + ab$ (iv) $a * b = (a$ ï $b)^2$

(v) $a * b = \dfrac{a^b}{4}$ (vi) $a * b = ab^2$

ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸਹਿਚਰ ਹਨ।

**10.** ਪ੍ਰਸ਼ਨ 9 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਦਾ ਤੱਤਸਮਕ ਹੈ, ਉਹ ਦੱਸੋ।

**11.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ਹੈ ਅਤੇ A ਵਿੱਚ $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਸਹਿਚਰ ਹੈ। A ਵਿੱਚ $*$ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਤਤ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**12.** ਦੱਸੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹਨ। ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਕਰੋ।

(i) ਸਮੂਹ **N** ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦੇ ਲਈ $a * a = a$, $\forall a \in \mathbf{N}$

(ii) ਜੇਕਰ **N** ਵਿੱਚ $*$ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ $a * (b * c) = (c * b) * a$

**13.** $a * b = a^3 + b^3$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ **N** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

(A) $*$ ਸਹਿਚਰ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਦੋਵੇਂ ਹੈ।

(B) $*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਪਰ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(C) $*$ ਸਹਿਚਰ ਹੈ ਪਰ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(D) $*$ ਨਾ ਤਾਂ ਸਹਿਚਰ ਹੈ ਨਾ ਹੀ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ।

## *ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ*

ਉਦਾਹਰਣ 41. ਜੇਕਰ $R_1$ ਅਤੇ $R_2$ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $R_1 \cap R_2$ ਵੀ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $R_1$ ਅਤੇ $R_2$ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $(a, a) \in R_1$, ਅਤੇ $(a, a) \in R_2$, $\forall\, a \in$ A ਭਾਵ, $(a, a) \in R_1 \cap R_2 \,\forall\, a$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $R_1 \cap R_2$, ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ ਅਤੇ $(a, b) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1$ ਅਤੇ $(b, a) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$, ਇਸ ਲਈ $R_1 \cap R_2$ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ ਅਤੇ $(b, c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1$ ਅਤੇ $(a, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$- ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $R_1 \cap R_2$ ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $R_1 \cap R_2$ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 42. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਜੋੜੇ (ordered pairs) ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R, $(x, y)$ R $(u, v)$, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $xv = yu$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ $(x, y)$ R $(x, y)$, $\forall\, (x, y) \in$ A, ਕਿਉਂਕਿ $xy = yx$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ $(x, y)$ R $(u, v) \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(u, v)$ R $(x, y)$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(x, y)$ R $(u, v)$ ਅਤੇ $(u, v)$ R $(a, b) \Rightarrow xv = yu$ ਅਤੇ $ub = va \Rightarrow xv\frac{a}{u} = yu\frac{a}{u} \Rightarrow xv\frac{b}{v} = yu\frac{a}{u} \Rightarrow xb = ya$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(x, y)$ R $(a, b)$ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ R ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 43. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X ਵਿੱਚ $R_1 = \{(x, y) : x$ ï $y$ ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ} ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ $R_1$ ਹੈ ਅਤੇ $R_2 = \{(x, y): \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ ਜਾਂ $\{(x, y\} \subset \{3, 6, 9\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਬੰਧ $R_2$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $R_1 = R_2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ {1, 4, 7}, {2, 5, 8} ਅਤੇ {3, 6, 9} ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ (characterstic) ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(x, y) \in R_1 \Rightarrow x$ ï $y$ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ $\Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow (x, y) \in R_2]$ ਇਸ ਲਈ $R_1 \subset R_2$- ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\{x, y\} \in R_2 \Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow x$ ï $y$ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ $\Rightarrow \{x, y\} \in R_1$- ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $R_2 \subset R_1$- ਇਸ ਲਈ $R_1 = R_2$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 44. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $f: X \to Y$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। X ਵਿੱਚ $R = \{(a, b): f(a) = f(b)\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਹਰੇਕ $a \in X$ ਲਈ $(a, a) \in R$, ਕਿਉਂਕਿ $f(a) = f(a)$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, b) \in R \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow (b, a) \in R$-ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R \Rightarrow f(a) = f(b)$ ਅਤੇ $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in R$, ਜਿਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ R ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 45. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ **R** ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸਹਿਚਰ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹਨ।

(a) $a * b = 1,\ \forall\ a, b \in \mathbf{R}$ (b) $a * b = \dfrac{(a+b)}{2}\ \ \forall\ a, b \in \mathbf{R}$

ਹੱਲ :

(a) ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ $a * b = b * a = 1, \forall\, a, b \in \mathbf{R}$- ਨਾਲ ਹੀ $(a * b) * c = (1 * c) = 1$ ਅਤੇ $a * (b * c) = a * (1) = 1, \forall\ a, b, c \in \mathbf{R}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਸਹਿਚਰ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਦੋਵੇਂ ਹੈ।

(b) $a * b = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b+a}{2} = b * a,\ \forall\ a, b \in R$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ$*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ

$$(a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c.$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)+c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}.$$

ਪ੍ਰੰਤੂ

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$= \frac{a+\frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4} \neq \frac{a+b+2c}{4} \text{ (ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ)}$$

ਇਸ ਲਈ $*$ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 46. ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3\}$ ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਤੱਕ ਸਾਰੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\{1, 2, 3\}$ ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਤੱਕ ਇੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ 1,2,3 ਦਾ ਕ੍ਰਮ-ਸੰਚਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$\{1, 2, 3\}$ ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਚਿੱਤਰਾਂ (Maps) ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਹੜੀ ਕਿ $3! = 6$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 47. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $A = \{1, 2, 3\}$ ਹੈ। ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਚਾਰ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ $(1, 2)$ ਅਤੇ $(2, 3)$ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਹੜੇ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਤਾਂ ਹਨ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, $(1, 2)$ ਅਤੇ $(2, 3)$ ਤੱਤਾਂ ਵਾਲਾ ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਸੰਬੰਧ $R_1$ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ $R_1$ ਵਿੱਚ ਜੋੜਾ $(2, 1)$ ਵਧਾ ਦੇਈਏ, ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਬੰਧ $R_2$ ਹੁਣ ਵੀ ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ $R_1$ ਵਿੱਚ $(3, 2)$ ਪਾ ਕੇ $R_3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਲੋੜੀਂਦੇ ਗੁਣ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ $R_1$ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਜੋੜਿਆਂ $(2, 1), (3, 2)$ ਜਾਂ ਇੱਕ ਜੋੜੇ $(3, 1)$ ਤੱਕ ਨਹੀਂ ਵਧਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ, ਸਕਰਮਕਤਾ ਬਨਾਉਣ ਲਈ, ਬਾਕੀ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈਣ ਲਈ ਥੱਲੇ ਜਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਬੰਧ ਸਮਮਿਤਈ ਵੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ, ਜਿਹੜਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਤਿੰਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 48. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3\}$ ਵਿੱਚ $(1, 2)$ ਅਤੇ $(2, 1)$ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2 ਹੈ।

ਹੱਲ : $(1, 2)$ ਅਤੇ $(2, 1)$ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਸੰਬੰਧ (ਸਮਤੁਲਤਾ) $R_1$, $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ ਹਨ। ਹੁਣ ਸਿਰਫ਼ 4 ਜੋੜੇ $(2, 3), (3, 2), (1, 3)$ ਅਤੇ $(3, 1)$ ਬਾਕੀ ਬਚਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਜਿਵੇਂ $(2, 3)$ ਨੂੰ $R_1$ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਮਮਿਤਈ ਲਈ ਅਸੀਂ $(3, 2)$ ਨੂੰ ਵੀ ਲੈਣਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਨਾਲ ਵੀ ਸਕਰਮਕਤਾ ਲਈ ਅਸੀਂ $(1, 3)$ ਅਤੇ $(3, 1)$ ਨੂੰ ਲੈਣ ਲਈ ਥੱਲੇ ਜਾਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਲਈ $R_1$ ਵੱਡਾ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਕੇਵਲ ਸਰਵ ਵਿਆਪਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $(1, 2)$ ਅਤੇ $(2, 1)$ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 49. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\{1, 2\}$ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਤਤਸਮਕ 1 ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 2 ਦਾ ਉਲਟ 2 ਹੈ।

ਹੱਲ : $\{1, 2\}$ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$ ਤੋਂ $\{1, 2\}$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਭਾਵ, $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ ਤੋਂ $\{1, 2\}$ ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦੇ ਲਈ ਤਤਸਮਕ ਤਤ 1 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, $*(1, 1) = 1$, $*(1, 2) = 2$, $*(2, 1) = 2$ ਅਤੇ ਜੋੜਾ $(2, 2)$ ਲਈ ਹੀ ਬਾਕੀ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ 2 ਦਾ ਉਲਟ 2 ਹੈ ਇਸ ਲਈ $*(2, 2)$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 50. ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ $I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਹੜਾ $I_N(x) = x, \forall x \in \mathbf{N}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ, ਭਾਵੇਂ $I_N$ ਉੱਤੇ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $I_N + I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ :

$$(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$$

ਹੱਲ : ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ $I_N$ ਔਨਟੂ ਹੈ ਪਰ $I_N + I_N$ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਸਹਿ-ਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੱਤ 3 ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ **N** ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹਾ $x$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $(I_N + I_N)(x) = 2x = 3$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 51. $f(x) = \sin x$ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g(x) = \cos x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ ਅਤੇ $g$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਪਰ $f + g$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ਦੇ ਦੋ ਵੱਖ ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ $x_1$ ਅਤੇ $x_2$ ਲਈ $\sin x_1 \neq \sin x_2$ ਅਤੇ $\cos x_1 \neq \cos x_2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f$ ਅਤੇ $g$ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹਨ। ਪਰ $(f + g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ ਅਤੇ $(f+g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f + g$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

## *ਅਧਿਆਇ 1 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

1. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 10x + 7$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ $g \circ f = f \circ g = 1_{\mathbf{R}}$ ਹੋਵੇ।
2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \mathbf{W} \to \mathbf{W}$, $f(n) = n$ ï $1$, ਜੇਕਰ $n$ ਟਾਂਕ ਹੈ ਅਤੇ $f(n) = n + 1$, ਜੇਕਰ $n$ ਜਿਸਤ ਹੈ, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੈ। $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇੱਥੇ **W** ਸਾਰੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਜਿੱਥੇ $f(x) = x^2$ ï $3x + 2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ $f(f(x))$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f: \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R}:$ ï $1 < x < 1\}$ ਜਿੱਥੇ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbf{R}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ।
5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = x^3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ-ਇੱਕ (Injective) ਹੈ।
6. ਦੋ ਫਲਨਾਂ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ ਅਤੇ $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ ਜਿਹੜੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਣ ਕਿ $g \circ f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ $g$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

   (ਸੰਕੇਤ : $f(x) = x$ ਅਤੇ $g(x) = |x|$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।)
7. ਦੋ ਫਲਨਾਂ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਅਤੇ $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ ਜਿਹੜੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਣ ਕਿ $g \circ f$ ਔਨਟੂ ਹੋਵੇ ਪਰ $f$ ਔਨਟੂ ਨਾ ਹੋਵੇ।

   (ਸੰਕੇਤ : $f(x) = x + 1$ ਅਤੇ $g(x) = \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

**8.** ਇੱਕ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ X ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। P(X) ਜੋ ਕਿ X ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੋਂ P(X) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ :

P(X) ਵਿੱਚ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ A, B ਲਈ ARB, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $A \subset B$ ਹੈ। ਕੀ R, P(X) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਵੀ ਕਰੋ।

**9.** ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਗੈਰ-ਖਾਲੀ X ਲਈ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਹੜੇ $A * B = A \cap B$, $\forall A, B \in P(X)$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ P(X) ਸਮੂਹ X ਦਾ ਘਾਤ-ਸਮੂਹ (Power set) ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ X ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਲਈ P(X) ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ X ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਤਤ ਹੈ।

**10.** ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ਤੋਂ ਖ਼ੁਦ ਤੱਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**11.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $S = \{a, b, c\}$ ਅਤੇ $T = \{1, 2, 3\}$ ਹੈ। S ਤੋਂ T ਤੱਕ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ F ਲਈ $F^{-1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

(i) $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ (ii) $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$

**12.** $a * b = |a - b|$ ਅਤੇ $a \circ b = a$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $\circ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਪਰ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, $\circ$ ਸਹਿਚਰ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ (Commuative) ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ $a, b, c \in \mathbf{R}$ ਲਈ $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ ਹੈ। [ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਸੰਕਿਰਿਆ $\circ$ ਤੇ ਵੰਡੀ (Distributes) ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ] ਕੀ $\circ$ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਤੇ ਵੰਡੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਵੀ ਕਰੋ।

**13.** ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ X ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$, ਜਿੱਥੇ $A * B = (A - B) \cup (B - A)$, $\forall A, B \in P(X)$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ $\phi$] ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਤੇ P(X) ਦੇ ਸਾਰੇ ਤਤ A ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $A^{-1} = A$. (ਸੰਕੇਤ : $(A - \phi) \cup (\phi - A) = A$. ਅਤੇ $(A - A) \cup (A - A) = A * A = \phi$) ਹੈ।

**14.** ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਸਮੂਹ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ:

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{ਜੇਕਰ } a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{ਜੇਕਰ } a + b \geq 6 \end{cases}$$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਇਸ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ $a \neq 0$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੈ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਿ $6 - a$, $a$ ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ।

**15.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A = {ï 1, 0, 1, 2}, B = {ï 4, ï 2, 0, 2} ਅਤੇ $f, g : A \to B$, ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f(x) = x^2$ ï $x, x \in A$ ਅਤੇ $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹਨ, ਕੀ $f$ ਅਤੇ $g$ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ। (ਸੰਕੇਤ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਫਲਨ $f : A \to B$ ਅਤੇ $g : A \to B$ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ $f(a) = g(a) \ \forall\ a \in A$ ਹੋਵੇ।

**16.** ਜੇਕਰ A = {1, 2, 3} ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਸੰਬੰਧ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੱਤ (1] 2) ਅਤੇ (1] 3) ਹੋਣ ਅਤੇ ਜਿਹੜੇ ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਮਮਿਤਈ ਹਨ ਪਰ ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ, ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**17.** ਜੇਕਰ A = {1, 2, 3} ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੱਤ (1, 2) ਵਾਲੇ ਨਿਜਵਾਚਕ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**18.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਚਿੰਨ੍ਹ ਫਲਨ (Signum Function) ਹੈ।

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ਅਤੇ $g : R \to R$] $g(x) = [x]$, ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $[x]$] $x$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ $x$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੀ $fog$ ਅਤੇ $gof$, ਅੰਤਰਾਲ [0, 1] ਵਿੱਚ ਸੰਪਾਤੀ (coincide) ਹਨ ?

**19.** ਸਮੂਹ $\{a, b\}$ ਵਿੱਚ ਦੋ–ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

## *ਸਾਰ–ਅੰਸ਼*

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ, ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

- X ਵਿੱਚ, $R = \phi \subset X \times X$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R] ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, $R = X \times X$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R] ਸਰਵ ਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਸੰਬੰਧ ਕਿ $\forall\ a \in X$] $(a, a) \in R$, ਹੋਵੇ, ਨਿਜਵਾਚਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ R, ਕਿ ਸ਼ਰਤ $(a, b) \in R$ ਦਾ ਭਾਵ ਕਿ $(b, a) \in R$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਸਮਮਿਤਈ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਸ਼ਰਤ R, $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R \ \forall\ a, b, c \in X$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਸੰਬੰਧ R ਸਕਰਮਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

- X ਵਿੱਚ, ਸੰਬੰਧ R, ਜਿਹੜਾ ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ, ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਲਈ $a \in X$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਮਤੁਲਤਾ ਵਰਗ **[*a*]**, X ਦਾ ਉਹ ਉਪਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ $a$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \rightarrow Y$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ
  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \ \forall \ x_1, x_2 \in X$
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \rightarrow Y$ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ $y \in Y, \exists\, x \in X$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \rightarrow Y$ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਦੋਵੇਂ ਹੈ।
- ਫਲਨ $f: A \rightarrow B$ ਅਤੇ $g: B \rightarrow C$ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਫਲਨ $gof: A \rightarrow C$ ਹੈ ਜਿਹੜਾ $gof(x) = g(f(x)), \ \forall\, x \in A$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \rightarrow Y$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਜੇਕਰ $\exists\, g: Y \rightarrow X$, ਤਾਂ ਜੋ $gof = 1_X$ ਅਤੇ $fog = 1_Y$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \rightarrow Y$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਜੇਕਰ $f$ ਉਹ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ X ਲਈ ਫਲਨ $f: X \rightarrow X$ ਇੱਕ-ਇੱਕ (ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਵੀ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $f$ ਔਨਟੂ (ਅਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਵੀ) ਹੈ। ਇਹ ਕਿਸੇ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਦਾ ਗੁਣ ਧਰਮ ਹੈ। ਇਹ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ (Characterstic Property) ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- A ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, $A \times A$ ਤੋਂ A ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ $*$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਤੱਤ $e \in X$, ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*: X \times X \rightarrow X$, ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਹੈ ਜੇਕਰ $a * e = a = e * a, \ \forall\, a \in X$
- ਕੋਈ ਤੱਤ $e \in X$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*: X \times X \rightarrow X$, ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ $b \in X$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $a * b = e = b * a$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $e$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ। ਤਤ $b$, $a$ ਦਾ ਉਲਟ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ $a^{-1}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- X ਇੱਕ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, ਹੈ ਜੇਕਰ $a * b = b * a, \ \forall\, a, b \in X$
- X ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, ਸਹਿਚਰ ਹੈ ਜੇਕਰ $(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c \in X$

## ਇਤਿਹਾਸਕ ਨੋਟ

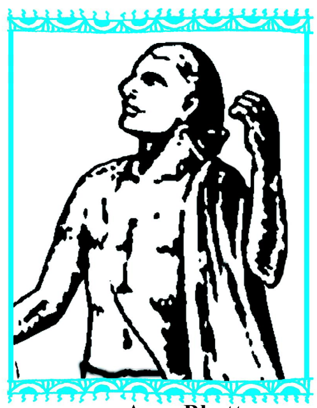
ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਕਲਪ R. Descartes (ਸੰਨ 1596-1650 ਈ.) ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਲੰਬੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਹੋਈ ਹੈ। Descartes ਨੇ ਸੰਨ 1637 ਈ: ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñGeometrieò ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ (Function) ਫਲਨ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ, ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਕਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ, (Hyperbola)] ਪੈਰਾਬੋਲਾ (Parabola) ਅਤੇ ਇਲਿਪਸ (Ellipse), ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਸਮੇਂ ਇੱਕ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ $x$ ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਘਾਤ $x^n$ ਦੇ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ। James Gregory (ਸੰਨ 1636-1675 ਈ.) ਨੇ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñVera Circuliet Hyperbolae Quadraturaò (ਸੰਨ 1667 ਈ.) ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਮੰਨਿਆ ਸੀ, ਜਿਹੜੀ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਬੀਜਗਣਿਤੀ ਜਾਂ ਹੋਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ G. W. Leibnitz (1646-1716 ਈ.) ਨੇ 1673 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñMethodus tangentium inversa, seu de functionibusò ਵਿੱਚ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ ਫਲਨ (Function) ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ, ਜਿਹੜਾ ਕਿਸੇ ਵਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬਦਲਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਵਕਰ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, ਵਕਰ ਦੀ ਫਲ, ਵਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਲੰਬਰੂਪ ਰੇਖਾ ਬਦਲਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñHistoriaò (1714 ਈ.) ਵਿੱਚ Leibnitz ਨੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ó*x* ਦਾ ਫਲਨ' ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਉਹ ਪਹਿਲੇ ਇਨਸਾਨ ਸੀ। John Bernoulli (1667-1748 ਈ:) ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 1718 ਵਿੱਚ ਸੰਕੇਤ (Notation) $\phi x$ ਨੂੰ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ó*x* ਦਾ ਫਲਨ' ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਪਰ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ $f$, F, $\phi$, $\psi$ ... ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪ੍ਰਯੋਗ Leonhard Euler (1707-1783 ਈ.) ਰਾਹੀਂ 1734 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñAnalysis Infinitoriumò ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਖੰਡ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ Joeph Louis Lagrange (1736-1813 ਈ.) ਨੇ 1793 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñTheorie des functions analytiquesò ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਿਕ (Analytic) ਫਲਨ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ ਅਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ $f(x)$, F($x$), $\phi(x)$ ਆਦਿ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ $x$ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਸ ਦੇ ਬਾਅਦ Lejeunne Dirichlet (1805-1859 ਈ.) ਨੇ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿੱਤੀ। ਜਿਸ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਉਸ ਸਮੇਂ ਤੱਕ ਹੁੰਦਾ ਰਿਹਾ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਚਲਨ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ, ਜਿਹੜਾ Georg Cantor (1845-1918 ਈ.) ਰਾਹੀਂ ਵਿਕਸਿਤ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹੋਇਆ। ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਪ੍ਰਚਲਿਤ ਫਲਨ ਦੀ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ Dirichlet ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਮਾਤਰ ਅਮੂਰਤ ਰੂਪ (Abstraction) ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 2

# ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ (Inverse Trigonometric Functions)

❖ *Mathematics, in general, is fundamentally the science of self-evident things— FELIX KLEIN* ❖

## 2.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)



**Arya Bhatta (476-550 A. D.)**

ਅਧਿਆਇ1 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ $f^{-1}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਉਲਟ ਫਲਨ (Inverse) ਦੀ ਹੋਂਦ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੈ ਜੇਕਰ $f$ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੋਵੇ। ਕਈ ਫਲਨ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਇੱਕ ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਜਾਂ ਦੋਵੇਂ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਗੱਲ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਆਪਣੇ ਆਮ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰਾਂ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ (Restrictions) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਹਨਾਂ ਤੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਅਲੇਖਾਂ ਰਾਹੀਂ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਹਨਾਂ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਗੁਣ (Properties) 'ਤੇ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ, ਕਲਨ (Calculus) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਭੂਮਿਕਾ ਨਿਭਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਕਈ ਇਟੇਗਰਲਜ਼ (Integrals) ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ (Engineering) ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

## 2.2 ਅਧਾਰਭੂਤ ਸੰਕਲਪ (Basic Concepts)

ਜਮਾਤ XI, ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ :

sine ਫਲਨ ਭਾਵ, $\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

cosine ਫਲਨ ਭਾਵ, $\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

tangent ਫਲਨ ਭਾਵ, $\tan : \mathbf{R} - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

cotangent ਫਲਨ ਭਾਵ, cot : $\mathbf{R}$ ï $\{x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

secant ਫਲਨ ਭਾਵ, sec : $\mathbf{R}$ ï $\{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$ ï (ï 1, 1)

cosecant ਫਲਨ ਭਾਵ, cosec : $\mathbf{R}$ ï $\{x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$ ï (ï 1, 1)

ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 1 ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ $f : X \to Y$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬੇਜੋੜ ਫਲਨ $g : Y \to X$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $g(y) = x$, ਜਿੱਥੇ $x \in X$ ਅਤੇ $y = f(x), y \in Y$ ਹੈ। ਇੱਥੇ $g$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $= f$ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਅਤੇ $g$ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $= f$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਹੈ। ਫਲਨ $g$ ਨੂੰ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $f^{\text{ï}1}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ $g$ ਵੀ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $g$ ਦਾ ਉਲਟ $f$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $g^{\text{ï}1} = (f^{\text{ï}1})^{\text{ï}1} = f$ ਨਾਲ ਹੀ :

$$(f^{\text{ï}1} \circ f)(x) = f^{\text{ï}1}(f(x)) = f^{\text{ï}1}(y) = x$$

ਅਤੇ
$$(f \circ f^{\text{ï}1})(y) = f(f^{\text{ï}1}(y)) = f(x) = y$$

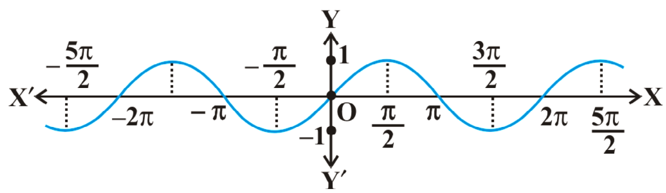
ਕਿਉਂਕਿ sine ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ [ï 1, 1]ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ (ਬੰਨ) ਦੇਈਏ, ਤਾਂ ਇਹ ਵਿਸਥਾਰ [ï 1, 1] ਵਾਲਾ, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ sine ਫਲਨ, ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{\text{ï}\,\pi}{2}\right], \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ, ਵਿਸਥਾਰ [ï 1, 1] ਵਾਲਾ, ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ, sine ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਨੂੰ $\sin^{\text{ï}1}$ (arc sine function) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\sin^{\text{ï}1}$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ [ï 1, 1] ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਜਾਂ $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ $\sin^{\text{ï}1}$ ਦੀ ਇੱਕ ਸ਼ਾਖਾ (Branch) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਹੈ, ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ (ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਿਸਥਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੋਂ $\sin^{\text{ï}1}$ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਫਲਨ $\sin^{\text{ï}1}$ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਂਤ [ï 1, 1] ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਾਲਾ ਫਲਨ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $\sin^{\text{ï}1}$ : [ï 1, 1] $\to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਲਟ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sin(\sin^{\text{ï}1} x) = x$, ਜੇਕਰ ï $1 \le x \le 1$ ਅਤੇ $\sin^{\text{ï}1}(\sin x) = x$ ਜੇਕਰ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ; ਜੇਕਰ $y = \sin^{\text{ï}1} x$ ਹੋਵੇ

ਉਲਟ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sin(\sin^{-1} x) = x$ , ਜੇਕਰ $-1 \le x \le 1$ ਅਤੇ $\sin^{-1}(\sin x) = x$ ਜੇਕਰ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ; ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1} x$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\sin y = x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

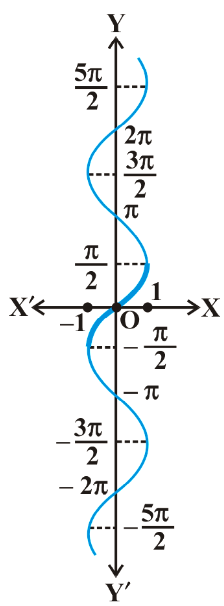
*ਟਿੱਪਣੀ :*

(i) ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 1 ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ $x = f^{-1}(y)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ ਫਲਨ sin ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ $x$ ਅਤੇ $y$ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀ ਕਰਕੇ ਫਲਨ $\sin^{-1}$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ, ਜੇਕਰ $(a, b)$, sin ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $(b, a)$, sin ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



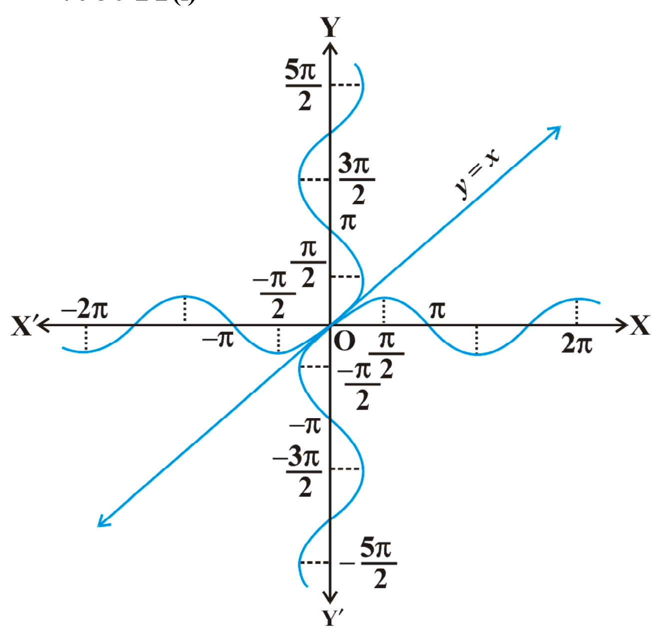

$y = \sin x$

ਚਿੱਤਰ 2.1 (i)




$y = \sin^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ 2.1 (ii)




$y = \sin x$ ਅਤੇ $y = \sin^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ 2.1 (iii)

ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ $y = \sin^{-1} x$ ਦਾ ਆਲੇਖ, ਫਲਨ $y = \sin x$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਵਿੱਚ $x$ ਅਤੇ $y$ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਫਲਨ $y = \sin x$ ਅਤੇ ਫਲਨ $y = \sin^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2.1 (i), (ii), ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਲਨ $y = \sin^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਗੂੜਾ ਭਾਗ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।

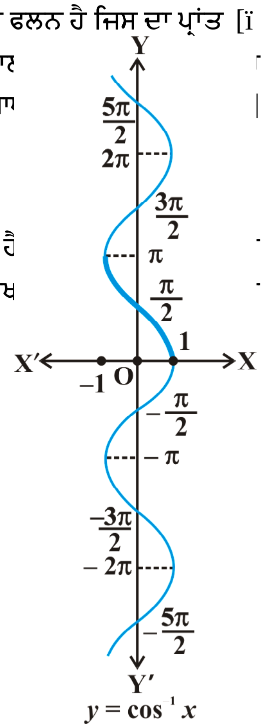
(ii) ਇਹ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ, ਰੇਖਾ $y = x$ ਦੇ ਵੱਲ ਸੰਗਤ ਮੂਲ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਸ਼ੀਸ਼ੇ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ (Mirror Image)] ਭਾਵ ਪਰਾਵਰਤਨ (Reflection) (Along)] ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕਲਪਨਾ $y = \sin x$ ਅਤੇ $y = \sin^{-1} x$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ, ਦਿੱਤੇ ਅਲੇਖਾਂ ਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 2.1 (iii))।

sine ਫਲਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ cosine ਫਲਨ ਵੀ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $[-1, 1]$ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ cosine ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $[0, \pi]$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਵਿਸਥਾਰ $[-1, 1]$ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ cosine ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $[-\pi, 0]$, $[0,\pi]$, $[\pi, 2\pi]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $[-1, 1]$ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ cosine ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ cosine ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਨੂੰ $\cos^{-1}$(arc cosine function) ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ $\cos^{-1}$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $[-1, 1]$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਤਰਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ $\cos^{-1}$ ਦੀ ਇੱਕ ਸ਼ਾਖਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਸ਼ਾ ਹੈ, ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ (ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

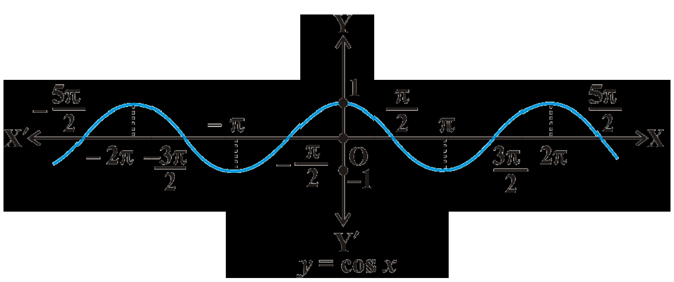
$$\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$y = \cos^{-1} x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਲੇਖ ਦੇ ਬਾਰੇ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ। $y = \cos x$ ਅਤੇ $y = \cos^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖ (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\text{cosec}^{-1}x$ ਅਤੇ $\sec^{-1}x$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

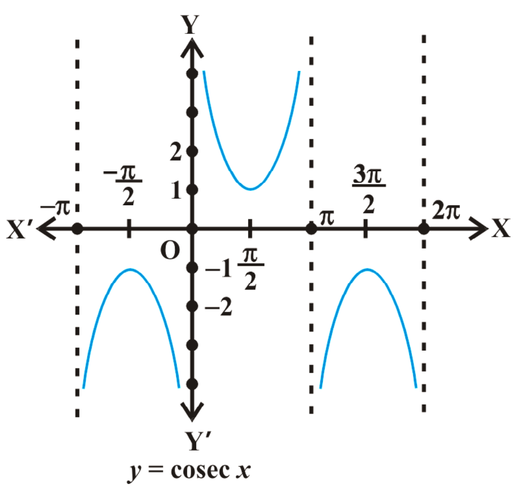


ਚਿੱਤਰ 2-2 **(ii)**

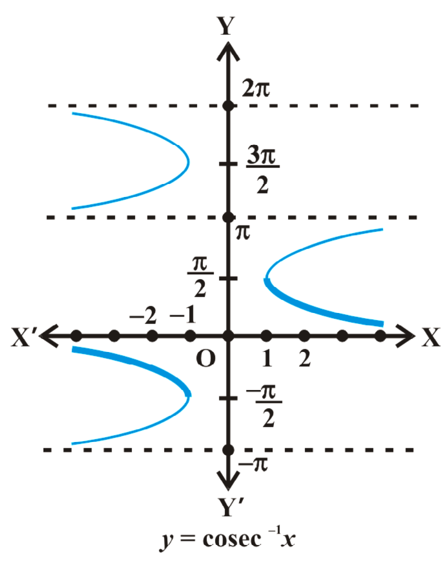


ਚਿੱਤਰ 2-2 **(i)**

ਕਿਉਂਕਿ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, ਇਸ ਲਈ cosec ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\{y : y \in \mathbf{R}$, $y \geq 1$ ਜਾਂ $y \leq$ ï $1\}$, ਭਾਵ, ਸਮੂਹ $\mathbf{R}$ ï (ï 1, 1) ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $y = \operatorname{cosec} x$, ï $1 < y < 1$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $\pi$ ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ (Integral) ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ cosec ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ï $\{0\}$, ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R}$ ï (ï 1, 1). ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਰਅਸਲ cosec ਫਲਨ, ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[\dfrac{-3\pi}{2},\dfrac{-\pi}{2}\right]-\{-\pi\}$, $\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ï $\{0\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]-\{\pi\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R}$ ï (ï 1, 1) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ cosec$^{ï 1}$ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R}$ ï (ï 1, 1) ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]-\{0\}$, $\left[\dfrac{-3\pi}{2},\dfrac{-\pi}{2}\right]-\{-\pi\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]-\{\pi\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਇੱਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵਿਸਥਾਰ $\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]-\{0\}$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਫਲਨ ਨੂੰ cosec$^{ï 1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :




ਚਿੱਤਰ : 2-3 (i)




ਚਿੱਤਰ : 2-3 (ii)

$$\operatorname{cosec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1,\ 1) \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

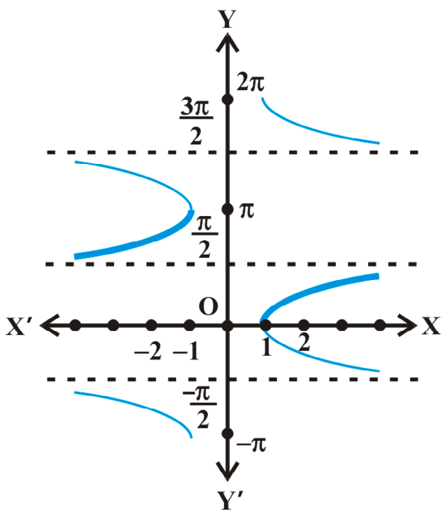
$y = \operatorname{cosec} x$ ਅਤੇ $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2-3 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $y = \sec x$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ sec (secant) ਫਲਨ $-1 < y < 1$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦਾ (Assumes) ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ secant ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਰਾਲ $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$, ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਇੱਕ–ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।ਅਸਲ ਵਿੱਚ secant ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $[-\pi, 0] - \{\frac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\frac{3\pi}{2}\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ–ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sec^{-1}$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $(-1, 1)$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $[-\pi, 0] - \{\frac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\frac{3\pi}{2}\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ $\sec^{-1}$ ਦੀ ਵੱਖ–ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $\sec^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

$$\sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \rightarrow [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$$

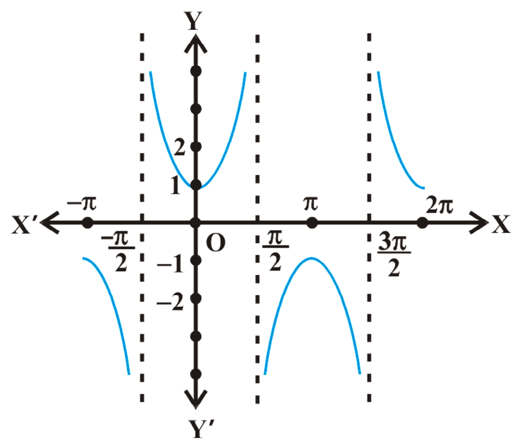
$y = \sec x$ ਅਤੇ $y = \sec^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰਾਂ 2.4 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\tan^{-1}$ ਅਤੇ $\cot^{-1}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ, (tangent ਫਲਨ) ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $\mathbf{R}$ ਹੈ । ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ tangent ਫਲਨ $\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।




$y = \sec^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ 2-4 **(i)**

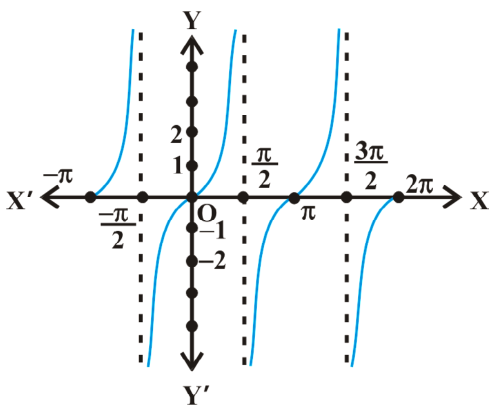



$y = \sec x$

ਚਿੱਤਰ 2-4 **(ii)**

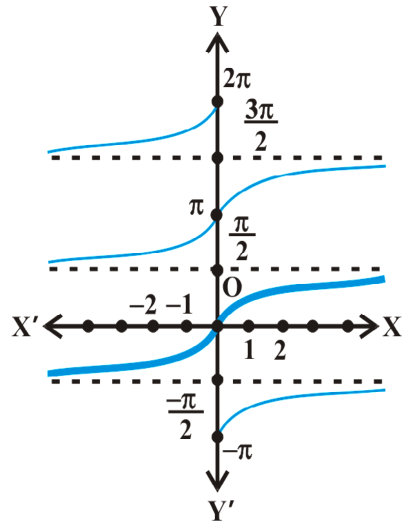
ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ tangent ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, tangent ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ $\tan^{-1}$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਰਾਹੀਂ ਫਲਨ $\tan^{-1}$ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $\tan^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ :

$$\tan^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$




$y = \tan x$

ਚਿੱਤਰ 2.5 **(i)**

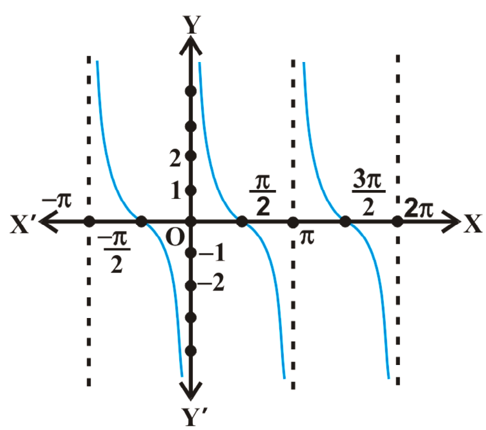



$y = \tan^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ 2.5 **(ii)**

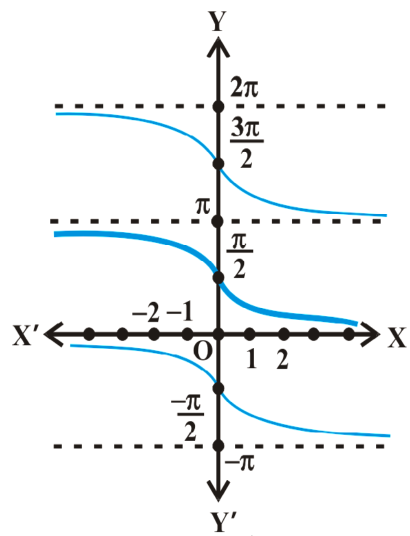
$y = \tan x$ ਅਤੇ $y = \tan^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2.5 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ (cotangent ਫਲਨ) ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ **R** ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ cotangent ਫਲਨ, $\pi$ ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।




$y = \cot x$

ਚਿੱਤਰ 2.6 **(i)**




$y = \cot^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ 2.6 **(ii)**

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ cotangent ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਵਿਸਥਾਰ **R** ਵਾਲਾ ਇੱਕ, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ cotangent ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $\cot^{-1}$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋਵੇ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੋਂ ਫਲਨ $\cot^{-1}$ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $(0, \pi)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $\cot^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$\cot^{-1} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$$

$y = \cot x$ ਅਤੇ $y = \cot^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2.6 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sin^{-1}$ | : | $[-1, 1]$ | $\to$ | $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $\cos^{-1}$ | : | $[-1, 1]$ | $\to$ | $[0, \pi]$ |
| $\text{cosec}^{-1}$ | : | $\mathbf{R} - (-1,1)$ | $\to$ | $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ |
| $\sec^{-1}$ | : | $\mathbf{R} - (-1, 1)$ | $\to$ | $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ |
| $\tan^{-1}$ | : | $\mathbf{R}$ | $\to$ | $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ |
| $\cot^{-1}$ | : | $\mathbf{R}$ | $\to$ | $(0, \pi)$ |

*ਟਿੱਪਣੀ*

1. $\sin^{-1} x$ ਤੋਂ $(\sin x)^{-1}$ ਦਾ ਭਰਮ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ ਅਤੇ ਇਹ ਤੱਥ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।
2. ਜਦੋਂ ਵੀ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਕਿਸੇ ਸ਼ਾਖਾ (ਖਾਸ) ਦੇ ਬਾਰੇ ਨਾ ਦੱਸਿਆ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਉਸ ਫਲਨ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਤੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਜਿਹੜਾ ਉਸਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ (Principal value) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ :

**ਉਦਾਹਰਣ 1** $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$. ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sin y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\sin^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ $\dfrac{\pi}{4}$ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 2** $\cot^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\cot^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\cot y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ ਹੈ।}$$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\cot^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $(0, \pi)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\cot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\cot^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ $\dfrac{2\pi}{3}$ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 2.1

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**1.** $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **2.** $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3.** $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$

**4.** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **5.** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **6.** $\tan^{-1}(-1)$

**7.** $\sec^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **8.** $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ **9.** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

**10.** $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**11.** $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **12.** $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

**13.** ਜੇਕਰ $\sin^{-1} x = y$, ਹੈ, ਤਾਂ

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

**14.** $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\pi$ (B) $-\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{2\pi}{3}$

## 2.3 ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਦੱਸ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ, ਸੰਗਤ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੀ ਸਹੀ (Valid) ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਵੀ ਉਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਕੁਝ ਨਤੀਜੇ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਉਨ੍ਹਾਂ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸਹੀ ਹੋਣਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵੇਰਵੇ (Details) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਚਰਚਾ (Discussion) ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ, ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1}x$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $x = \sin y$ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $x = \sin y$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $y = \sin^{-1}x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ (Equivalent) ਹੈ ਕਿ

$$\sin(\sin^{-1} x) = x,\ x \in [-1, 1] \text{ ਅਤੇ } \sin^{-1}(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ਹੋਰ ਪੰਜ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

**1. (i)** $\boldsymbol{\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x,\ x \geq 1}$ **ਜਾਂ** $\boldsymbol{x \leq -1}$

**(ii)** $\boldsymbol{\cos^{-1}\dfrac{1}{x} = \sec^{-1} x,\ x \geq 1}$ **ਜਾਂ** $\boldsymbol{x \leq -1}$

**(iii)** $\boldsymbol{\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \cot^{-1} x,\ x > 0}$

ਪਹਿਲੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $\operatorname{cosec}^{-1} x = y$ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ

$$x = \operatorname{cosec} y$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\dfrac{1}{x} = \sin y$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = y$

ਜਾਂ $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

**2. (i)** $\boldsymbol{\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x,\ x \in [-1, 1]}$

**(ii)** $\boldsymbol{\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x,\ x \in \mathbf{R}}$

**(iii)** $\boldsymbol{\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x,\ |x| \geq 1}$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{-1}(-x) = y$, ਭਾਵ $-x = \sin y$ ਇਸ ਲਈ $x = -\sin y$, ਭਾਵ $x = \sin(-y)$.

ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1} x = -y = -\sin^{-1}(-x)$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

**3. (i)** $\boldsymbol{\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x,\ x \in [-1, 1]}$

**(ii)** $\boldsymbol{\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x,\ |x| \geq 1}$

**(iii)** $\boldsymbol{\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x,\ x \in \mathbf{R}}$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\cos^{-1}(-x) = y$ ਭਾਵ $-x = \cos y$ ਇਸ ਲਈ $x = -\cos y = \cos(\pi - y)$

ਇਸ ਕਰਕੇ $\cos^{-1} x = \pi - y = \pi - \cos^{-1}(-x)$

ਇਸ ਲਈ $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

**4. (i)** $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$

**(ii)** $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in \mathbf{R}$

**(iii)** $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}, |x| \geq 1$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{-1} x = y$, ਤਾਂ $x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

ਇਸ ਲਈ $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

**5. (i)** $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}, xy < 1$

**(ii)** $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}, xy > -1$

**(iii)** $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}, |x| < 1$

ਹੁਣ $\tan^{-1} x = \theta$ ਹੈ ਅਤੇ $\tan^{-1} y = \phi$ ਹੈ ਤਾਂ $x = \tan\theta$ ਅਤੇ $y = \tan\phi$ ਹੈ।

ਹੁਣ $\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi} = \frac{x+y}{1-xy}$

ਇਸ ਲਈ $\theta + \phi = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$

ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $y$ ਨੂੰ $-y$ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ (Replace) ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਦੂਜਾ ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $y$ ਨੂੰ $x$ ਰਾਹੀਂ ਬਦਲੀ ਕਰਨ ਤੇ ਤੀਜਾ ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**6. (i)** $\mathbf{2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}, \; |x| \le 1}$

**(ii)** $\mathbf{2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}, \; x \ge 0}$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $\tan^{-1} x = y$, ਤਾਂ $x = \tan y$ ਹੈ।

ਹੁਣ
$$\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \sin^{-1} \frac{2\tan y}{1+\tan^2 y}$$
$$= \sin^{-1} (\sin 2y) = 2y = 2\tan^{-1} x$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ
$$\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y} = \cos^{-1} (\cos 2y) = 2y = 2\tan^{-1} x$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

**ਉਦਾਹਰਣ 3** ਦਰਸਾਉ ਕਿ :

(i) $\sin^{-1} \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x, \; -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sin^{-1} \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x, \; \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$

**ਹੱਲ :**

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = \sin\theta$ ਤਾਂ $\sin^{-1} x = \theta$ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ,
$$\sin^{-1} \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1} \left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$
$$= \sin^{-1} (2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1} (\sin 2\theta) = 2\theta$$
$$= 2\sin^{-1} x$$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = \cos\theta$ ਹੈ ਤਾਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਵਰਤੋਂ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ

$\sin^{-1} \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 4.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ : $\tan^{-1} \dfrac{1}{2} + \tan^{-1} \dfrac{2}{11} = \tan^{-1} \dfrac{3}{4}$

ਹੱਲ : ਗੁਣ 5 (i), ਰਾਹੀਂ,

$$\text{ਖੱਬਾ ਪੱਖ} = \tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{2}{11} \quad = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}} = \tan^{-1}\frac{15}{20} = \tan^{-1}\frac{3}{4} = \text{ਸੱਜਾ ਪੱਖ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right),\ -\frac{-3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

ਦੂਜੇ ਤੌਰ ਤੇ,

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 6. $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right), x > 1$ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = \sec\theta$, ਤਾਂ $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta-1} = \tan\theta$

ਇਸ ਲਈ $\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \cot^{-1}(\cot\theta) = \theta = \sec^{-1}x$ ਜਿਹੜਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਰਲ ਰੂਪ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = \tan\theta$. ਤਾਂ $\theta = \tan^{-1}x$ ਹੈ। ਹੁਣ :

$$\text{ਸੱਜਾ ਪੱਖ} = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan 3\theta) = 3\theta = 3\tan^{-1}x = \tan^{-1}x + 2\tan^{-1}x$$

$$= \tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \text{ਖੱਬਾ ਪੱਖ (ਕਿਉਂ ?)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 8. $\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x), |x| \geq 1$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

## ਅਭਿਆਸ 2.2

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

**1.** $3\sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3),\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

**2.** $3\cos^{-1} x = \cos^{-1} (4x^3 - 3x),\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

**3.** $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

**4.** $2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

**5.** $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x},\ x \neq 0$

**6.** $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ |x| > 1$

**7.** $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right),\ 0 < x < \pi$

**8.** $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right),\ \frac{-\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

**9.** $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ |x| < a$

**10.** $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right),\ a > 0;\ \frac{-a}{\sqrt{3}} < x < \frac{a}{\sqrt{3}}$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**11.** $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

**12.** $\cot (\tan^{-1}a + \cot^{-1}a)$

**13.** $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right],\ |x| < 1,\ y > 0$ ਅਤੇ $xy < 1$

**14.** ਜੇਕਰ $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right) = 1$, ਤਾਂ $x$ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**15.** ਜੇਕਰ $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, ਤਾਂ $x$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਭਿਆਸ 16 ਤੋਂ 18 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**16.** $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

**17.** $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

**18.** $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

**19.** $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

**20.** $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) $\frac{1}{2}$ ਹੈ (B) $\frac{1}{3}$ ਹੈ (C) $\frac{1}{4}$ ਹੈ (D) 1

**21.** $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) $\pi$ ਹੈ (B) $-\frac{\pi}{2}$ ਹੈ (C) 0 ਹੈ (D) $2\sqrt{3}$

## *ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣ*

ਉਦਾਹਰਣ **9** $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\sin^{-1}(\sin x) = x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5}) = \frac{3\pi}{5}$

ਪਰ, $\frac{3\pi}{5} \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ਜਿਹੜਾ $\sin^{-1}x$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿ $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin\frac{2\pi}{5}$ ਅਤੇ $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$

**ਉਦਾਹਰਣ 10.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{-1}\frac{3}{5} = x$ ਅਤੇ $\sin^{-1}\frac{8}{17} = y$

ਇਸ ਲਈ $\sin x = \frac{3}{5}$ ਅਤੇ $\sin y = \frac{8}{17}$

ਹੁਣ $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ (ਕਿਉਂ ?)

ਅਤੇ $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\cos (x \text{ ï } y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{15}{17} + \frac{3}{5} \times \frac{8}{17} = \frac{84}{85}$$

ਇਸ ਲਈ $x \text{ ï } y = \cos^{-1}\left(\frac{84}{85}\right)$

ਇਸ ਕਰਕੇ $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

**ਉਦਾਹਰਨ 11.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\sin^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{-1}\frac{12}{13} = x$, $\cos^{-1}\frac{4}{5} = y$, $\tan^{-1}\frac{63}{16} = z$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sin x = \frac{12}{13}$, $\cos y = \frac{4}{5}$, $\tan z = \frac{63}{16}$

ਇਸ ਲਈ $\cos x = \frac{5}{13}$, $\sin y = \frac{3}{5}$, $\tan x = \frac{12}{5}$ ਅਤੇ $\tan y = \frac{3}{4}$

ਹੁਣ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \dfrac{\frac{12}{5} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{12}{5} \times \frac{3}{4}} = -\dfrac{63}{16}$

ਇਸ ਲਈ $\tan(x+y) = -\tan z$

ਭਾਵ $\tan(x+y) = \tan(-z)$ ਜਾਂ $\tan(x+y) = \tan(\pi - z)$

ਇਸ ਲਈ $x + y = -z$ ਜਾਂ $x + y = \pi - z$

ਕਿਉਂਕਿ $x, y$ ਅਤੇ $z$ ਧਨਾਤਮਕ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $x + y \neq -z$ (ਕਿਉਂ ??)

ਇਸ ਲਈ $x + y + z = \pi$ ਜਾਂ $\sin^{-1}\dfrac{12}{13} + \cos^{-1}\dfrac{4}{5} + \tan^{-1}\dfrac{63}{16} = \pi$

ਉਦਾਹਰਣ 12. $\tan^{-1}\left[\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right]$ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $\dfrac{a}{b}\tan x > -1$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ,

$$\tan^{-1}\left[\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x}}{\dfrac{b\cos x + a\sin x}{b\cos x}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{a}{b} - \tan x}{1 + \dfrac{a}{b}\tan x}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{a}{b} - \tan^{-1}(\tan x) = \tan^{-1}\frac{a}{b} - x$$

ਉਦਾਹਰਣ 13. $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \dfrac{\pi}{4}$ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \dfrac{\pi}{4}$

ਜਾਂ $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x+3x}{1-2x\times 3x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

ਜਾਂ $\tan^{-1}\left(\dfrac{5x}{1-6x^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{5x}{1-6x^2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

ਜਾਂ $$6x^2 + 5x - 1 = 0 \text{ ਭਾਵ } (6x - 1)(x + 1) = 0$$

ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ, $$x = \frac{1}{6} \text{ ਜਾਂ } x = -1$$

ਕਿਉਂਕਿ $x = -1$, ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $x = -1$ ਤੋਂ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖੱਬਾ ਪੱਖ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਕੇਵਲ $x = \frac{1}{6}$ ਹੈ।

## *ਅਧਿਆਇ 2 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**1.** $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$ **2.** $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

**3.** $2\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{24}{7}$ **4.** $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

**5.** $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$ **6.** $\cos^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$

**7.** $\tan^{-1}\frac{63}{16} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$

**8.** $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

**9.** $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $x \in [0, 1]$

**10.** $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

**11.** $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ [ਸੰਕੇਤ : $x = \cos 2\theta$ ਰੱਖੋ।]

**12.** $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3} = \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

**13.** $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$ **14.** $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x, (x > 0)$

**15.** $\sin(\tan^{-1}x), |x| < 1$ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

**16.** ਜੇਕਰ $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, ਹੈ, ਤਾਂ $x$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

**17.** $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) $\frac{\pi}{2}$ ਹੈ। (B) $\frac{\pi}{3}$ ਹੈ। (C) $\frac{\pi}{4}$ ਹੈ। (D) $\frac{-3\pi}{4}$ ਹੈ।

## ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ (ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ) ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ ਹੈ :

| ਫਲਨ | ਪ੍ਰਾਂਤ | ਵਿਸਥਾਰ (ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਸ਼ਾਖਾ) |
|---|---|---|
| $y = \sin^{-1}x$ | $[-1, 1]$ | $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $y = \cos^{-1}x$ | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ |
| $y = \operatorname{cosec}^{-1}x$ | $\mathbf{R} - (-1, 1)$ | $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ |
| $y = \sec^{-1}x$ | $\mathbf{R} - (-1, 1)$ | $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $y = \tan^{-1} x$ | **R** | $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ |
| $y = \cot^{-1} x$ | **R** | $(0, \pi)$ |

- $\sin^{-1}x$ ਤੋਂ $(\sin x)^{-1}$ ਦਾ ਭਰਮ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਤੱਥ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ, ਜਿਹੜਾ ਉਸਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ (Principal Value) ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਠੀਕ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਲਈ

- $y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y$
- $\sin(\sin^{-1} x) = x$
- $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$
- $\cos^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1} x$
- $\tan^{-1}\frac{1}{x} = \cot^{-1} x$
- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$
- $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}, \ xy < 1$
- $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}, \ xy > -1$
- $x = \sin y \Rightarrow y = \sin^{-1} x$
- $\sin^{-1}(\sin x) = x$
- $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$
- $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$
- $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$
- $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
- $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$
- $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} \quad |x| < 1$
- $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}, \ 0 \le x \le 1$

## *ਇਤਿਹਾਸਕ ਨੋਟ*

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਆਰੀਆਭੱਟ (476 ਈ.)] ਬ੍ਰਹਮਗੁਪਤ (598 ਈ.) ਭਾਸਕਰ ਪਹਿਲਾ (600 ਈ.) ਭਾਸਕਰ ਦੂਜਾ (1114 ਈ.) ਨੇ ਮੁੱਖ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਸੀ। ਇਸ ਸੰਪੂਰਨ ਗਿਆਨ ਭਾਰਤ ਤੋਂ ਮੱਧ ਪੂਰਵ ਅਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਉੱਥੋਂ ਯੂਰੋਪ ਗਿਆ। ਯੂਨਾਨੀਆਂ ਨੇ ਵੀ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਪਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕਾਰਜ ਵਿਧੀ ਇੰਨੀ ਬੇ-ਢੰਗੀ ਸੀ, ਕਿ ਭਾਰਤੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਣ ਤੇ ਇਹ ਸੰਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ਵ ਵਿੱਚ ਅਪਣਾਈ ਗਈ।

ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਆਧੁਨਿਕ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕੋਣ ਦੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਅਤੇ (sine) ਫਲਨ ਦੀ ਜਾਣ ਪਹਿਚਾਣ ਦਾ ਵੇਰਵਾ ਸਿਧਾਂਤ (ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜੋਤਿਸ਼ ਕਾਰਜ) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਗਣਿਤ ਦੇ ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ ਮੁੱਖ ਹੈ।

ਭਾਸਕਰ ਪਹਿਲਾ (600 ਈ.) ਨੇ $90°$ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੋਣਾਂ ਦੇ sine ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਸੋਲਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦਾ ਮਲਿਆਲਮ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $\sin(A + B)$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਉਤਪਤੀ ਹੈ। $18°$, $36°$, $54°$, $72°$, ਆਦਿ ਦੇ sine ਅਤੇ cosine ਦੇ ਸ਼ੁੱਧ ਮੁੱਲ ਭਾਸਕਰ ਦੂਜੇ ਨੇ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, ਆਦਿ ਨੂੰ $\sin x$, ਅਤੇ $\cos x$, ਆਦਿ ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਤੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਨ ਦਾ ਸੁਝਾਵ Sir John F.W. Hersehel (1813 ਈ.) ਨੇ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਨਾਲ Thales (600 ਈ. ਪੂ.) ਦਾ ਨਾਂ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਜੁੜਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਮਿਸਰ ਦੇ ਮਹਾਨ ਪਿਰਾਮਿਡਾਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਉਚਾਈ ਦੀ ਮਦਦ ਛੜ ਅਤੇ ਪਿਰਾਮਿਡ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਨੂੰ ਮਾਪ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਹ ਅਨੁਪਾਤ ਹਨ :

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (ਸੂਰਜ ਦਾ ਅਵਲੰਬ)}$$

Thales ਨੇ ਸਮੁੰਦਰੀ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਤੋਂ ਪੁਰਾਣੇ ਭਾਰਤੀ ਕਾਰਜਾਂ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦੇ ਹਨ।

ਅਧਿਆਇ 3

# ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ Matrices)

❖ *The essence of mathematics lies in its freedom — CANTOR* ❖

## 3.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Matrix) ਦੇ ਗਿਆਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਸਾਧਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ। ਹੋਰ ਸਿੱਧੀਆਂ ਸਾਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਇਹ ਗਣਿਤਕ ਸਾਧਨ ਸਾਡੇ ਕੰਮ ਨੂੰ ਕਾਫੀ ਹੱਦ ਤੱਕ ਸਰਲ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਸੰਖੇਪ ਅਤੇ ਸਰਲ ਵਿਧੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਉਪਰਾਲੇ ਸਦਕਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਹੋਇਆ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਲਈ ਹੀ ਨਹੀਂ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਬਲਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਕਿਤੇ ਵੱਧ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸੰਕੇਤਨ ਅਤੇ (operations) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਲਈ ਇਲੈਕਟ੍ਰਾਨਿਕ ਸਪਰੈਡਸ਼ੀਟ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਜ਼ (Electronic Spreadsheet Programmes) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿਜ਼ਨਸ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਬਜਟ (Budgeting), ਵਿਕਰੀ ਖਾਕਾ (Sales Projection) ਲਾਗਤ ਅਨੁਮਾਨ (Cost Estimation) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਆਦਿ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅਨੇਕ ਭੌਤਿਕ ਕਾਰਵਾਈਆਂ (operations) ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਵਧਾਉਣਾ (Magnification), ਗੇੜਾ (Rotation) ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ (Reflection) ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤਿਕ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸੰਕੇਤ ਪੱਧਤੀ ਲਿਖਣ (Cryptography) ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗਣਿਤਿਕ ਸਾਧਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾ ਕੇਵਲ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀਆਂ ਹੀ ਕੁਝ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਹੈ ਬਲਕਿ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਤਪੱਤੀ ਸੰਬੰਧੀ, ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ; ਆਧੁਨਿਕ ਮਨੋਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਉਦਯੋਗਿਕ ਪ੍ਰਬੰਧਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Matrix algebra) ਦੇ ਆਧਾਰਭੂਤ ਸਿਧਾਤਾਂ ਨਾਲ ਜਾਣੂ ਹੋਣਾ ਸਾਨੂੰ ਰੋਚਕ ਲੱਗੇਗਾ।

## 3.2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Matrix)

ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਇਹਸੂਚਨਾ ਦੇਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰਾਧਾ ਕੋਲ 15 ਕਿਤਾਬਾਂ/ ਪੁਸਤਕਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ [15] ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਸਮਝ ਦੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ [ ] ਦੇ ਅੰਦਰ ਲਿਖਿਤ ਸੰਖਿਆ ਰਾਧਾ ਦੇ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ ਰਾਧਾ ਕੋਲ 15 ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ 6 ਕਲਮਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ [15 6] ਰੂਪ ਨਾਲ ਇਸ ਸਮਝ ਦੇ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ [ ] ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਰਾਧਾ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਦਕਿ ਦੂਜੀ ਸੰਖਿਆ ਰਾਧਾ ਦੇ ਕੋਲ ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਰਾਧਾ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਦੋ ਮਿੱਤਰਾਂ ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ਰਾਧਾ ਦੇ ਕੋਲ | 15 | ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ | 6 ਕਲਮਾਂ ਹਨ, |
| ਜੋਤਿਕਾ ਦੇ ਕੋਲ | 10 | ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ | 2 ਕਲਮਾਂ ਹਨ, |
| ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ | 13 | ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ | 5 ਕਲਮਾਂ ਹਨ, |

ਹੁਣ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਵਿਵਸਥਿਤ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

| | ਪੁਸਤਕਾਂ | ਕਲਮਾਂ |
|---|---|---|
| ਰਾਧਾ | 15 | 6 |
| ਜੋਤਿਕਾ | 10 | 2 |
| ਸਿਮਰਨ | 13 | 5 |

ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ} \\ \leftarrow \text{ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ} \\ \leftarrow \text{ਤੀਜੀ ਕਤਾਰ} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{ਪਹਿਲਾ ਥੰਮ} & \text{ਦੂਸਰਾ ਥੰਮ} \end{array} & \end{array}$$

ਜਾਂ

| | ਰਾਧਾ | ਜੋਤਿਕਾ | ਸਿਮਰਨ |
|---|---|---|---|
| ਪੁਸਤਕਾਂ | 15 | 10 | 13 |
| ਕਲਮਾਂ | 6 | 2 | 5 |

ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 15 & 10 & 13 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ} \\ \leftarrow \text{ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{ਪਹਿਲਾ ਥੰਮ} & \text{ਦੂਸਰਾ ਥੰਮ} & \text{ਤੀਸਰਾ ਥੰਮ} \end{array} & \end{array}$$

ਪਹਿਲੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ

ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦੂਸਰੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ; ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਕਿਸਮ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਜਾਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

**ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1** ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਕ੍ਰਮ ਤਰਤੀਬ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਤੱਤ ਜਾਂ ਇੰਦਰਾਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਵੱਡੇ (Capital) ਅੱਖਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

$$A = \begin{bmatrix} \text{ï}\,2 & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3.5 & \text{ï}\,1 & 2 \\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7} \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1+x & x^3 & 3 \\ \cos x & \sin x + 2 & \tan x \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਖਿਤਿਜੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ (Rows) ਅਤੇ ਖੜੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਥੰਮ (Columns) ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਵਿੱਚ 3 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 2 ਥੰਮ ਹਨ ਅਤੇ B ਵਿੱਚ 3 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 3 ਥੰਮ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ C ਵਿੱਚ 2 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 3 ਥੰਮ ਹਨ।

### 3.2.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (Order of a matrix)*

$m$ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ $n$ ਥੰਮਾਂ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ $m \times n$ ਤਰਤੀਬ (order) ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਾਂ ਕੇਵਲ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ A, ਇੱਕ $3 \times 2$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, B ਇੱਕ $3 \times 3$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ C, ਇੱਕ $2 \times 3$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A ਵਿੱਚ $3 \times 2 = 6$ ਅੰਗ ਹਨ ਅਤੇ B ਅਤੇ C ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 9 ਅਤੇ 6 ਅੰਗ ਹਨ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕਿਸੇ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਆਇਤਕਾਰ ਵਿਵਸਥਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

ਜਾਂ $A = [a_{ij}]_{m \times n},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$ ਜਿੱਥੇ $i,\ j \in \mathbf{N}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $i$ ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਦੇ ਤੱਤ $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3},..., a_{in}$ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ $j$ਵੇਂ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j},..., a_{mj}$ ਹਨ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ $a_{ij}$, $i$ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ $j$ਵੇਂ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲਾ ਤੱਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ A ਦਾ $(i, j)$ਵਾਂ ਤੱਤ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਸੇ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $mn$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ* ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ :

1. ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਸੰਕੇਤ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।
2. ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਅਜਿਹੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਤੱਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਹਿਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਫਲਨ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $(x, y)$ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਥੰਮ) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (ਜਾਂ $[x, y]$)ਨਾਲ, ਉਦਾਹਰਣ ਸਰੂਪ ਬਿੰਦੂ P(0, 1), ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ਜਾਂ [0 1] ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਬੰਦ ਸਰਲਰੇਖੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A(1, 0), B (3, 2), C (1, 3), ਅਤੇ D (ï 1, 2) ਹਨ।

ਹੁਣ, ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \end{array} \quad \text{ਜਾਂ} \quad Y = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

ਇਸ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ, ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

**ਉਦਾਹਰਣ 1.** ਤਿੰਨ ਫੈਕਟਰੀਆਂ I, II ਅਤੇ III ਵਿੱਚ ਪੁਰਸ਼ ਅਤੇ ਮਹਿਲਾ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੂਚਨਾ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

| | ਪੁਰਸ਼ ਕਰਮਚਾਰੀ | ਮਹਿਲਾ ਕਰਮਚਾਰੀ |
|---|---|---|
| I | 30 | 25 |
| II | 25 | 31 |
| III | 27 | 26 |

ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ $3 \times 2$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਨਿਰਪੂਤ ਕਰੋ। ਤੀਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ ਵਾਲੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕੀ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤੀ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ $3 \times 2$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$$

ਤੀਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ ਦਾ ਇੰਦਰਾਜ ਫੈਕਟਰੀ &III ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਮਹਿਲਾ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 2.** ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ 8 ਤੱਤ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) (orders) ਕੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

**ਹੱਲ :** ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ $mn$ ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 8 ਤੱਤਾਂ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਕ੍ਰਮਿਤ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 8 ਹੈ।

ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਜੋੜੇ (1, 8), (8, 1), (4, 2), (2, 4) ਹਨ।

ਅਤੇ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮਿਤ (ਤਰਤੀਬ) $1 \times 8, 8 \times 1, 4 \times 2, 2 \times 4$ ਹਨ।

**ਉਦਾਹਰਣ 3.** ਇੱਕ $3 \times 2$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਕ $3 \times 2$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

ਹੁਣ $\quad a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|,\ i = 1, 2, 3$ ਅਤੇ $j = 1, 2$

ਇਸ ਲਈ

$$a_{11} = \frac{1}{2}|1 - 3.1| = 1 \qquad a_{12} = \frac{1}{2}|1 - 3.2| = \frac{5}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}|2 - 3.1| = \frac{1}{2} \qquad a_{22} = \frac{1}{2}|2 - 3.2| = 2$$

$$a_{31} = \frac{1}{2}|3-3.1| = 0 \qquad a_{32} = \frac{1}{2}|3-3.2| = \frac{3}{2}$$

ਅਤੇ ਲੋੜੀਂਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ ਹੈ।

## 3.3. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Types of Matrices)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) **ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Column matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਥੰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $4 \times 1$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਇੱਕ ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ ਇੱਕ $m \times 1$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(ii) **ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Row matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 4}$, $1\times4$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੀ ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $B = [b_{ij}]_{1 \times n}$ ਇੱਕ $1 \times n$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੀ ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(iii) **ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Square matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $m = n$ ਅਤੇ

ਉਸ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ó$n$ôਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

ਇੱਕ 3 ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ਇੱਕ $m$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ $n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਇੰਦਰਾਜ $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਤੱਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ A ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਅੰਗ, 1, 4, 6 ਹਨ।

(iv) **ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Diagonal matrix)**

ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਵਿਕਰਣ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਸ ਦੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਰਥਾਤ, ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $b_{ij} = 0$, ਜਦੋਂ ਕਿ $i \neq j$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $A = [4]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

(v) **ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Scalar matrix)**

ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਤੱਤ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਭਾਵ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $b_{ij} = 0$, ਜੇਕਰ $i \neq j$

$b_{ij} = k$, ਜੇਕਰ $i = j$, ਜਦੋਂ ਕਿ $k$ ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ

$A = [3]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :

ਕ੍ਰਮ ਤਰਤੀਬ 1, 2 ਅਤੇ ਦੇ 3 ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

(vi) **ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Identity matrix)**

ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਿਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ 1 ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਗ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ

ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ਜੇਕਰ } & i = j \\ 0 \text{ ਜੇਕਰ } & i \neq j \end{cases}$

ਅਸੀਂ, $n$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ $I_n$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਦੋਂ ਸੰਦਰਭ ਤੋਂ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਕੇਵਲ I ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $[1], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਤਰਤੀਬ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ $k = 1$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਹਰੇਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(vii) **ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Zero matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[0, 0]$ ਸਾਰੇ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ O ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਸੰਦਰਭ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

### 3.3.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ (Equality of matrices)*

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ

(i) ਉਹ ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹੋਣ ਅਤੇ

(ii) A ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ, B ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ $i$ ਅਤੇ $j$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਲਈ $a_{ij} = b_{ij}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਸਮਾਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਪਰੰਤੂ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਸਮਾਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ A = B ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $x =$ ï $1.5, y = 0, z = 2, a = \sqrt{6}, b = 3, c = 2$

**ਉਦਾਹਰਣ 4.** ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$

ਹੈ ਤਾਂ $a, b, c, x, y$ ਅਤੇ $z$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮਾਨ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਵੀ ਸਮਾਨ ਹੋਣਗੇ। ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਣਾਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$x + 3 = 0$,  $z + 4 = 6$,  $2y$ ï $7 = 3y$ ï $2$

$a$ ï $1 =$ ï $3$,  $0 = 2c + 2$  $b$ ï $3 = 2b + 4$,

ਇਸ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$a =$ ï $2$, $b =$ ï $7$, $c =$ ï $1$, $x =$ ï $3$, $y =$ ï $5$, $z = 2$

**ਉਦਾਹਰਣ 5.** ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $a, b, c,$ ਅਤੇ $d$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ, ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$2a + b = 4$  $5c$ ï $d = 11$

$a$ ï $2b =$ ï $3$  $4c + 3d = 24$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $a = 1, b = 2, c = 3$ ਅਤੇ $d = 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 3.1

**1.** ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$, ਦੇ ਲਈ ਪਤਾ ਕਰੋ %

(i) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਤਰਤੀਬ (order)  (ii) ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

(iii) ਤੱਤ $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}$

**2.** ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ 24 ਤੱਤ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸਦੀਆਂ ਸੰਭਵ ਤਰਤੀਬ ਕੀ ਹਨ ? ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ 13 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕ੍ਰਮ ਤਰਤੀਬ ਕੀ ਹੋਣਗੀਆਂ।

**3.** ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ 18 ਤੱਤ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੀਆਂ ਸੰਭਵ ਤਰਤੀਬ ਪਤਾ ਕਰੋ ? ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ 5 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

**4.** ਇੱਕ $2 \times 2$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

**5.** ਇੱਕ $3 \times 4$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$

**6.** ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੋਂ $x, y$ ਅਤੇ $z$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

**7.** ਸਮੀਕਰਣ $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ ਤੋਂ $a, b, c$ ਅਤੇ $d$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**8.** $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

**9.** $x$ ਅਤੇ $y$ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਜੋੜੇ ਸਮਾਨ ਹਨ :

$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

(A) $x = \frac{-1}{3}, y = 7$ (B) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ

(C) $y = 7, x = \frac{-2}{3}$ (D) $x = \frac{-1}{3}, y = \frac{-2}{3}$.

**10.** $3 \times 3$ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਅਜਿਹੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿੰਨ੍ਹਾ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇੰਦਰਾਜ 0 ਜਾਂ 1 ਹੈ।

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

## 3.4 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਤੇ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ (Operations on Matrices)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਤੇ ਕੁੱਝ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂ :

### 3.4.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (Addition of matrices)*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਫਾਤੀਮਾ ਦੀਆਂ ਸਥਾਨ A ਅਤੇ ਸਥਾਨ B 'ਤੇ ਦੋ ਫੈਕਟਰੀਆਂ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਕੁੜੀਆਂ ਅਤੇ ਮੁੰਡਿਆਂ ਲਈ ਵੱਖ ਵੱਖ ਮੁੱਲ ਵਰਗਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1, 2, 3 ਲਈ ਖੇਡ ਦੇ ਜੁੱਤੇ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਜੁੱਤਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ :

A ਸਥਾਨ ਤੇ ਫੈਕਟਰੀ B ਸਥਾਨ ਤੇ ਫੈਕਟਰੀ

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \text{ਮੁੰਡੇ} \quad \text{ਕੁੜੀਆਂ} \\ \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \text{ਮੁੰਡੇ} \quad \text{ਕੁੜੀਆਂ} \\ \begin{bmatrix} 90 & 50 \\ 70 & 55 \\ 75 & 75 \end{bmatrix} \end{array}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਾਤਿਮਾ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਖੇਡ ਦੇ ਜੁੱਤਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

ਮੁੱਲ ਵਰਗ 1 : ਲੜਕਿਆਂ ਲਈ (80 + 90), ਲੜਕੀਆਂ ਲਈ (60 + 50)

ਮੁੱਲ ਵਰਗ 2 : ਲੜਕਿਆਂ ਲਈ (75 + 70), ਲੜਕੀਆਂ ਲਈ (65 + 55)

ਮੁੱਲ ਵਰਗ 3 : ਲੜਕਿਆਂ ਲਈ (90 + 75), ਲੜਕੀਆਂ ਲਈ (85 + 75)

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $\begin{bmatrix} 80+90 & 60+50 \\ 75+70 & 65+55 \\ 90+75 & 85+75 \end{bmatrix}$

ਇਹ ਨਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ, ਦਿੱਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, ਜੋੜ ਦੇ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ ਇੱਕ $2 \times 3$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਹੋਰ $2 \times 3$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਦੋ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ; ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i$ ਅਤੇ $j$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 6** $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}2 & \sqrt{5} & 1\\ -2 & 3 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $A+B$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਕਿਉਂਕਿ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $2\times 3$ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਦਾ ਯੋਗ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ

$$A+B=\begin{bmatrix}2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 1-1\\ 2-2 & 3+3 & 0+\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 0\\ 0 & 6 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**ਟਿੱਪਣੀ**

1. ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹਨ ਤਾਂ $A+B$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, ਤਾਂ $A+B$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।
2. ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

### 3.4.2 *ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਨ* (*Multiplication of a matrix by a scalar*)

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਫਾਤੀਮਾ ਨੇ A 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਵਰਗ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਦੋ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ (ਸੰਦਰਭ 3-4-1)

A 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}\text{ਮੁੰਡੇ} & \text{ਕੁੜੀਆਂ}\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}80 & 60\\ 75 & 65\\ 90 & 85\end{bmatrix}\end{array}.$$

A 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਿਤ ਨਵੀਂ (ਬਦਲੀ ਹੋਈ) ਸੰਖਿਆ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{ਮੁੰਡੇ} & \text{ਕੁੜੀਆਂ}\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix} 2\times 80 & 2\times 60 \\ 2\times 75 & 2\times 65 \\ 2\times 90 & 2\times 85 \end{bmatrix}\end{array}$$

ਇਸ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\begin{bmatrix} 160 & 120 \\ 150 & 130 \\ 180 & 170 \end{bmatrix}$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਨਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪਹਿਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ $k$ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ ਤਾਂ $k$A ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ $k$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$, ਭਾਵ $k$A ਦਾ $(i, j)$ਵਾਂ ਅੰਸ਼, $i$ ਅਤੇ $j$ ਦੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ, $ka_{ij}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ

$$3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

**ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਰਿਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Negative of a matrix)** ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਰਿਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸï A ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂï A ਨੂੰ ï A = (ï 1) A ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ï A ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

ï A = (ï 1) A $= (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$

**ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ (Difference of matrices)** ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$, ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਵਾਲੇ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ Aï B] ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $D = [d_{ij}]$ ਜਿੱਥੇ $i$ ਅਤੇ $j$ ਦੇ

ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $d_{ij} = a_{ij}$ ï $b_{ij}$ ਹੈ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ D = A ï B = A + (ï 1) B, ਭਾਵ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸï B ਦਾ ਜੋੜਫਲ।

**ਉਦਾਹਰਣ 7.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ 2A ï B ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6+0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.4.3 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of matrix addition)*

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਗੁਣਾਂ (ਨਿਯਮਾਂ) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ :

(i) ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ **(Commutative Law)** ਜੇਕਰ A = $[a_{ij}]$, B = $[b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$, ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ A + B = B + A ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ (ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ)

$= ([b_{ij}] + [a_{ij}]) = B + A$

(ii) ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ **(Associative Law)** ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A = $[a_{ij}]$, B = $[b_{ij}]$, C = $[c_{ij}]$ ਦੇ ਲਈ (A + B) + C = A + (B + C)

ਹੁਣ $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ (ਕਿਉਂ ?)

$= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B + C)$

(iii) ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ **(Existence of additive identity)** ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ A = $[a_{ij}]$ ਇੱਕ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ O ਇੱਕ $m \times n$ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ A+O = O+A= A ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਜੋੜ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ O ਹੈ।

(iv) ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਦੀ ਹੋਂਦ **(The existence of additive inverse)** ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ A = $[a_{ij}]_{m \times n}$ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸï A = [ï $a_{ij}]_{m \times n}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਕਿ A + (ï

A) = (ï A) + A= O] ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ï A, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਜੋੜ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਾਂ ਰਿਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

### 3.4.4 *ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of scalar multiplication of a matrix)*

ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$, ਵਾਲੇ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ $k$ ਅਤੇ $l$ ਸਕੇਲਰ ਹਨ ਤਾਂ

(i) $k(A + B) = kA + kB$, (ii) $(k + l)A = kA + lA$

ਹੁਣ] $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, ਅਤੇ $k$ ਅਤੇ $l$ ਸਕੇਲਰ ਹਨ, ਤਾਂ

(i) $k\,(A + B) = k\,([a_{ij}] + [b_{ij}])$

$$= k\,[a_{ij} + b_{ij}] = [k\,(a_{ij} + b_{ij})] = [(k\,a_{ij}) + (k\,b_{ij})]$$

$$= [k\,a_{ij}] + [k\,b_{ij}] = k\,[a_{ij}] + k\,[b_{ij}] = kA + kB$$

(ii) $(k + l)\,A = (k + l)\,[a_{ij}]$

$$= [(k + l)\,a_{ij}] = [k\,a_{ij}] + [l\,a_{ij}] = k\,[a_{ij}] + l\,[a_{ij}] = k\,A + l\,A.$$

**ਉਦਾਹਰਣ 8.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $2A + 3X = 5B$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ X ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤਾ ਹੈ $2A + 3X = 5B$

ਜਾਂ $2A + 3X ï 2A = 5B ï 2A$

ਜਾਂ $2A ï 2A + 3X = 5B ï 2A$ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮਾਂ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ)

ਜਾਂ $O + 3X = 5B ï 2A$ (ï 2A, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 2A ਦਾ ਜੋੜ ਉਲਟ ਹੈ)

ਜਾਂ $3X = 5B ï 2A$ (O, ਜੋੜ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ)

ਜਾਂ $X = \frac{1}{3}(5B ï 2A)$

ਜਾਂ $$X = \frac{1}{3}\left(5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -8 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10+0 \\ 20-8 & 10+4 \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ \frac{-31}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. X ਅਤੇ Y, ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $(X + Y) + (X \text{ ï } Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ਜਾਂ $(X + X) + (Y \text{ ï } Y) = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

ਜਾਂ $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

ਨਾਲ ਹੀ $(X + Y) \text{ ï } (X \text{ ï } Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ਜਾਂ $(X \text{ ï } X) + (Y + Y) = \begin{bmatrix} 5-3 & 2-6 \\ 0 & 9+1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

ਜਾਂ $Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ $x$ ਅਤੇ $y$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 10 \\ 14 & 2y-6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $\begin{bmatrix} 2x+3 & 10-4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3 & 6 \\ 15 & 2y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

ਜਾਂ $2x + 3 = 7$ ਅਤੇ $2y$ ï $4 = 14$ (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $2x = 7$ ï $3$ ਅਤੇ $2y = 18$

ਜਾਂ $x = \frac{4}{2}$ ਅਤੇ $y = \frac{18}{2}$

ਅਰਥਾਤ $x = 2$ ਅਤੇ $y = 9$

**ਉਦਾਹਰਣ 11.** ਦੋ ਕਿਸਾਨ ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ ਅਤੇ ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਜਿਵੇਂ ਬਾਸਮਤੀ, ਪਰਮਲ ਅਤੇ ਨਉਰਾ ਦੀ ਖੇਤੀ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਕਿਸਾਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਤੰਬਰ ਅਤੇ ਅਕਤੂਬਰ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

ਸਤੰਬਰ ਮਹੀਨੇ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਿਆਂ ਵਿੱਚ )

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10,000 & 20,000 & 30,000 \\ 50,000 & 30,000 & 10,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ} \\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ} \end{array}$$

ਅਕਤੂਬਰ ਮਹੀਨੇ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਿਆਂ ਵਿੱਚ )

$$A - B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ} \\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ} \end{array}$$

(i) ਹਰੇਕ ਕਿਸਾਨ ਦੀ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਸਤੰਬਰ ਅਤੇ ਅਕਤੂਬਰ ਦੀ ਇਕੱਠੀ ਵਿਕਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਸਤੰਬਰ ਤੋਂ ਅਕਤੂਬਰ ਤੱਕ ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਆਈ ਕਮੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਕਿਸਾਨਾਂ ਨੂੰ ਕੁੱਲ ਵਿਕਰੀ 'ਤੇ 2% ਲਾਭ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਕਤੂਬਰ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਕਿਸਾਨ ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਵਾਲਾ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :**

(i) ਹਰੇਕ ਕਿਸਾਨ ਦੀ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਸਤੰਬਰ ਅਤੇ ਅਕਤੂਬਰ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ :

$$A+B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc}15{,}000 & 30{,}000 & 36{,}000\\ 70{,}000 & 40{,}000 & 20{,}000\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ}\\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ}\end{array}$$

(ii) ਸਤੰਬਰ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਅਕਤੂਬਰ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

$$A-B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc}5000 & 10{,}000 & 24{,}000\\ 30{,}000 & 20{,}000 & 0\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ}\\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ}\end{array}$$

(iii) B ਦਾ 2% $= \frac{2}{100}\times B = 0.02\times B$

$$=0.02\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc}5000 & 10{,}000 & 6000\\ 20{,}000 & 10{,}000 & 10{,}000\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ}\\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ}\end{array}$$

$$=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc}100 & 200 & 120\\ 400 & 200 & 200\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ}\\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ}\end{array}$$

ਇਸ ਲਈ ਅਕਤੂਬਰ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ, ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 100 ਰੁਪਏ, 200 ਰੁਪਏ ਅਤੇ 120 ਰੁਪਏ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ, ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 400 ਰੁ., 200, ਰੁ: ਅਤੇ 200 ਰੁ: ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

### 3.4.5 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ* *(Multiplication of matrices)*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਮੀਰਾ ਅਤੇ ਨਦੀਮ ਦੋ ਮਿੱਤਰ ਹਨ। ਮੀਰਾ 2 ਕਲਮਾਂ ਅਤੇ 5 ਕਹਾਣੀ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਦੀਮ ਨੂੰ 8 ਕਲਮਾਂ ਅਤੇ 10 ਕਹਾਣੀ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ ਤੇ (ਕੀਮਤ) ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜੋ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਕਲਮ & ਹਰੇਕ 5 ਰੁ:, ਕਹਾਣੀ ਪੁਸਤਕ&ਹਰੇਕ 50 ਰੁ: ਹੈ।

ਉਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਖਰਚ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ ? ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ; ਮੀਰਾ ਨੂੰ ਰੁ: $(5\times 2+50\times 5)$ ਰੁ: ਭਾਵ 260 ਰੁ: ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਦੀਮ ਨੂੰ $(8\times 5+50\times 10)$ ਭਾਵ 540 ਰੁ: ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

| ਜ਼ਰੂਰਤ | ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) | ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) |
|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5\times 2+5\times 50 \\ 8\times 5+10\times 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$ |

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਦੁਕਾਨ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

ਕਲਮ & ਹਰੇਕ 4 ਰੁਪਏ; ਕਹਾਣੀ ਦੀ ਪੁਸਤਕ &ਹਰੇਕ 40 ਰੁ:

ਹੁਣ ਮੀਰਾ ਅਤੇ ਨਦੀਮ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦਦਾਰੀ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(4 \times 2 + 40 \times 5) =$ ਰੁਪਏ ਅਤੇ $(8 \times 4 + 10 \times 40) = 432$ ਰੁਪਏ ਹੈ।

ਦੁਆਰਾ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

| ਜ਼ਰੂਰਤ | ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) | ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) |
|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 4 \\ 40 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 4\times 2+40\times 5 \\ 8\times 4+10\times 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \\ 432 \end{bmatrix}$ |

ਹਣ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਵਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਿਰੂਪਣ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

| ਜ਼ਰੂਰਤ | ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) | ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) |
|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 50 & 40 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5\times 2+5\times 50 & 4\times 2+40\times 5 \\ 8\times 5+10\times 50 & 8\times 4+10\times 40 \end{bmatrix}$ |

$$= \begin{bmatrix} 260 & 208 \\ 540 & 432 \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਗੁਣਨ ਲਈ, A ਵਿੱਚ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ B ਵਿੱਚ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਗੁਣਨਫਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Product matrix) ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ A ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ B ਦੇ ਥੰਮਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ (Elementï wise) ਗੁਣਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨਫ਼ਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।ਰਸਮੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ A ਵਿੱਚ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, B ਵਿੱਚ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ $B = [b_{jk}]$ ਇੱਕ $n \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।ਹੁਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ $m \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ C ਹੁੰਦਾ ਹੈ।ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ C ਦਾ $(i, k)$ ਵਾਂ ਤੱਤ $c_{ik}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ A ਦੀ $i$ ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ B ਦੇ $k$ਵੇਂ ਥੰਮ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਗੁਣਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।ਇਸ ਦੇ ਉਪਰੰਤ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਗੁਣਨਫ਼ਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ,

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ ਹੈ ਤਾਂ A ਦੀ $i$ ਵੀਂ ਕਤਾਰ $[a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}]$ ਅਤੇ B ਦਾ $k$ਵਾਂ ਥੰਮ

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$ ਹੈ, ਤਾਂ $c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \ldots + a_{in} b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ A ਅਤੇ B ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ

ਗੁਣਨਫਲ CD ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ $2 \times 2$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇੰਦਰਾਜ C ਦੀ ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜਾਂ ਦੀ D ਦੇ ਕਿਸੇ ਥੰਮ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਇੰਦਰਾਜਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਇਹ ਚਾਰੋਂ ਗਣਨਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2) + (-1)(-1) + (2)(5) & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & (1)(7) + (-1)(1) + 2(-4) \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 0(2) + 3(-1) + 4(5) & ? \end{bmatrix}$$

ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & 0(7) + 3(1) + 4(-4) \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ $CD = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{bmatrix}$

**ਉਦਾਹਰਣ 12.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ AB ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਵਿੱਚ 2 ਥੰਮ ਹਨ ਜੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ AB ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਹੁਣ

$$AB = \begin{bmatrix} 6(2)+9(7) & 6(6)+9(9) & 6(0)+9(8) \\ 2(2)+3(7) & 2(6)+3(9) & 2(0)+3(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+63 & 36+81 & 0+72 \\ 4+21 & 12+27 & 0+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix}$$

**ਟਿੱਪਣੀ** ਜੇਕਰ AB ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ BA ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ AB ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਪਰੰਤੂ BA ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ B ਵਿੱਚ 3 ਥੰਮ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ A ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਕਤਾਰਾਂ (3 ਕਤਾਰਾਂ ਨਹੀਂ) ਹਨ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮਵਾਰ $m \times n$ ਅਤੇ $k \times l$ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ ਜੇਕਰ ਕੇਵਲ $n = k$ ਅਤੇ $l = m$ ਹੋਵੇ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

**ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੀ ਅਣ-ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ (Non-Commutativity of multiplication of matrices)**

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਵੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਜੇਕਰ AB ਅਤੇ BA ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਵੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ AB = BA ਹੋਵੇ।

**ਉਦਾਹਰਣ 13.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ $AB \neq BA$

**ਹੱਲ :** ਕਿਉਂਕਿ A ਇੱਕ $2 \times 3$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ B ਇੱਕ $3 \times 2$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $2 \times 2$ ਅਤੇ $3 \times 3$, ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8+6 & 3-10+3 \\ -8+8+10 & -12+10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ
$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-12 & -4+6 & 6+15 \\ 4-20 & -8+10 & 12+25 \\ 2-4 & -4+2 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $AB \neq BA$.

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ AB ਅਤੇ BA ਵੱਖ ਵੱਖ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $AB \neq BA$ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਸੋਚ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਤਾਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਉਹ ਸਮਾਨ ਹੋਣ। ਪਰੰਤੂ ਅਜਿਹਾ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ AB ਅਤੇ BA ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਵੀ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਸਮਾਨ ਹੋਣ।

**ਉਦਾਹਰਣ 14.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ਅਤੇ $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $AB \neq BA$ gA

ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ, ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ AB ਅਤੇ BA ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, $AB \neq BA$ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ :
>
> ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
>
> ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ ਕ੍ਰਮ&ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**ਦੋ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Zero matrix as the product of two non-zero matrices)**

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $a$ ਅਤੇ $b$ ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ $ab = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਜਾਂ ਤਾਂ $a = 0$ ਜਾਂ $b = 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ।

**ਉਦਾਹਰਣ 15.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ AB ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਵੇ।

### 3.4.6 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of multiplication of matrices)*

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦਰਸਾ ਰਹੇ ਹਾਂ।

1. **ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ (The Associatine law)** : ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਲਈ $(AB)C = A(BC)$, ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

**2.** ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ **(The distributive law)** : ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਲਈ

(i) A (B+C) = AB + AC

(ii) (A+B) C = AC + BC, ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

**3.** ਗੁਣਨ ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ **(The Existance of multiplcatioutive identify)**: ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ I ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ IA = AI = A

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਉਪਰੋਕਤ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$ ਤਾਂ A(BC) ਅਤੇ (AB)C ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਰਸਾਓ ਕਿ (AB)C = A(BC) ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $AB=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0+1 & 3+2-4\\ 2+0-3 & 6+0+12\\ 3+0-2 & 9-2+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 18\\ 1 & 15\end{bmatrix}$

$$(AB)\,(C)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 18\\ 1 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+2 & 4+0 & 6-2 & -8+1\\ -1+36 & -2+0 & -3-36 & 4+18\\ 1+30 & 2+0 & 3-30 & -4+15\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 4 & 4 & -7\\ 35 & -2 & -39 & 22\\ 31 & 2 & -27 & 11\end{bmatrix}$$

ਹੁਣ
$$BC=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6 & 2+0 & 3-6 & -4+3\\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2\\ -1+8 & -2+0 & -3-8 & 4+4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 2 & -3 & -1\\ 4 & 0 & -4 & 2\\ 7 & -2 & -11 & 8\end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7+4-7 & 2+0+2 & -3-4+11 & -1+2-8 \\ 14+0+21 & 4+0-6 & -6+0-33 & -2+0+24 \\ 21-4+14 & 6+0-4 & -9+4-22 & -3-2+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ, $(AB)\,C = A\,(BC)$

**ਉਦਾਹਰਣ 17.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ਤਾਂ AC, BC ਅਤੇ (A + B)C ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਵੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $(A + B)\,C = AC + BC$

**ਹੱਲ :** $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ, $(A + B)\,C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-14+24 \\ -10+0+30 \\ 16+12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $AC = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-12+21 \\ -12+0+24 \\ 14+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$

ਅਤੇ $$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2+3 \\ 2+0+6 \\ 2-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$AC + BC = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ $(A + B) C = AC + BC$

**ਉਦਾਹਰਣ 18.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $A^3$ ï $23A$ ï $40I = O$

**ਹੱਲ :** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $$A^3 = A\,A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A^3 \text{ ï } 23A \text{ ï } 40I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} \text{ ï } 23 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ï } 40 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਕਿਸੇ ਵਿਧਾਨ ਸਭਾ ਚੋਣਾਂ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਇੱਕ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਦਲ ਨੇ ਆਪਣੇ ਉਮੀਦਵਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਚਾਰ ਹਿੱਤ ਇੱਕ ਜਨ ਸੰਪਰਕ ਫਰਮ ਨੂੰ ਠੇਕਾ ਦਿੱਤਾ। ਪ੍ਰਚਾਰ ਲਈ ਤਿੰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਸੰਪਰਕ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੋਇਆ। ਇਹ ਹਨ : ਟੈਲੀਫੋਨ ਦੁਆਰਾ, ਘਰ ਘਰ ਜਾ ਕੇ ਅਤੇ ਪਰਚਾ ਵਿਤਰਣ ਦੁਆਰਾ। ਹਰੇਕ ਸੰਪਰਕ ਦੀ ਲਾਗਤ (ਪੈਸਿਆਂ ਵਿੱਚ) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ :

$$\begin{array}{cl} & \text{ਪ੍ਰਤੀ ਸੰਪਰਕ ਲਾਗਤ} \\ A = & \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ਟੈਲੀਫੋਨ ਦੁਆਰਾ} \\ \text{ਘਰੋਂ ਜਾ ਕੇ} \\ \text{ਪਰਚੇ ਦੁਆਰਾ} \end{matrix} \end{array}$$

X ਅਤੇ Y ਦੋ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਪਰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ

$$\begin{array}{cccc} & \text{ਟੈਲੀਫੋਨ ਦੁਆਰਾ} & \text{ਘਰ ਜਾ ਕੇ} & \text{ਪਰਚੇ ਦੁਆਰਾ} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। X ਅਤੇ Y ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਵਿੱਚ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਦਲ ਦੁਆਰਾ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਕੁੱਲ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$BA = \begin{bmatrix} 40,000 + 50,000 + 250,000 \\ 120,000 + 100,000 + 500,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 340,000 \\ 720,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਲ ਦੁਆਰਾ ਦੋਵਾਂ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਵਿੱਚ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਕੁੱਲ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ 3,40,000 ਪੈਸੇ ਅਤੇ 720,000 ਪੈਸੇ ਭਾਵ 3400 ਰੁ: ਅਤੇ 7200 ਰੁ: ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 3.2

1. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) A + B  (ii) A ï B  (iii) 3A ï C

   (iv) AB  (v) BA

**2.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

**3.** ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਗੁਣਨਫ਼ਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

**4.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ (A+B) ਅਤੇ (B ï C) ਪਤਾ ਕਰੋ। ਨਾਲ ਹੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ A + (B ï C) = (A + B) ï C.

**5.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$, ਤਾਂ 3A ï 5B ਪਤਾ ਕਰੋ।

**6.** ਸਰਲ ਕਰੋ, $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

**7.** X ਅਤੇ Y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ

(i) $X+Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ ਅਤੇ X ï $Y=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

(ii) $2X+3Y=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $3X+2Y=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$

**8.** X ਅਤੇ Y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $Y=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

**9.** $x$ ਅਤੇ $y$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 1 & 8\end{bmatrix}$

**10.** ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ $x, y, z$ ਅਤੇ $t$ ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਕਰੋ ਜੇਕਰ

$$2\begin{bmatrix}x & z\\ y & t\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}$$

**11.** ਜੇਕਰ $x\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 5\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $x$ ਅਤੇ $y$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**12.** ਜੇਕਰ $3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $x, y, z$ ਅਤੇ $w$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**13.** ਜੇਕਰ $F(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $F(x)\,F(y) = F(x+y)$

**14.** ਦਰਸਾਓ ਕਿ

(i) $\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**15.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $A^2$ ï $5A + 6I$, ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**16.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A^3$ ï $6A^2 + 7A + 2I = 0$

**17.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $A^2 = kA$ ï $2I$ ਹੈ ਤਾਂ $k$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**18.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\dfrac{\alpha}{2} \\ \tan\dfrac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ I ਕ੍ਰਮ 2 ਦਾ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ

ਕਿ $I + A = (I$ ï $A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

**19.** ਕਿਸੇ ਵਪਾਰ ਸੰਘ ਦੇ ਕੋਲ 30,000 ਰੁਪਏ ਦਾ ਫੰਡ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਾਂਡਾਂ (Bonds) ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੇ ਬਾਂਡ ਤੇ 5% ਸਲਾਨਾ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਬਾਂਡ ਤੇ 7% ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਆਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ 30,000 ਰੁ: ਦੇ ਫੰਡ ਨੂੰ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਾਂਡ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਵਪਾਰ ਸੰਘ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਆਜ
(i) 1800 ਰੁ: ਹੋਵੇ। (ii) 2000 ਰੁ: ਹੋਵੇ।

**20.** ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਦੁਕਾਨ ਵਿੱਚ 10 ਦਰਜਨ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ, 8 ਦਰਜਨ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ 10 ਦਰਜਨ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 80 ਰੁ: ਅਤੇ 60 ਰੁ: ਅਤੇ 40 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਪੁਸਤਕ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਨੂੰ ਵੇਚਣ ਨਾਲ ਦੁਕਾਨ ਨੂੰ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ X, Y, Z, W ਅਤੇ P ਕ੍ਰਮਵਾਰ $2 \times n$, $3 \times k$, $2 \times p$, $n \times 3$ ਅਤੇ $p \times k$, ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 21 ਅਤੇ 22 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

**21.** PY + WY ਦੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ $n$, $k$ ਅਤੇ $p$ 'ਤੇ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਹੋਣਗੇ।

(A) $k = 3, p = n$ (B) $k$ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਹੈ, , $p = 2$

(C) $p$ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਹੈ, $k = 3$ (D) $k = 2, p = 3$

**22.** ਜੇਕਰ $n = p$, ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 7X ï 5Z ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ।

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$ (C) $n \times 3$ (D) $p \times n$

## 3.5. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ (Transpose of a Matrix)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਅਤੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਜਿਵੇਂ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Symmetric Matrix) ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Skew Symmetric Matrix) ਦੇ ਬਾਰੇ ਜਾਣਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ A ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾਂ ਦਾ ਪਰਸਪਰ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ (Interchange) ਕਰਨ ਨਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, A ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ (Transpose) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਨੂੰ $A'$ (ਜਾਂ $A^T$) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, rk ਤਾਂ $A' = [a_{ji}]_{n \times m}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$ gk rk ਹੋਵੇ ਤਾਂ $$A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$ ਹੋਵੇਗਾ।

### ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of transpose of matrices)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ ਢੁੱਕਵੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਢੁੱਕਵੇਂ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਲਈ

(i) $(A')' = A$ (ii) $(kA)' = kA'$ (ਜਦੋਂ ਕਿ $k$ ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ)

(iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(A B)' = B' A'$

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ rFkk ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

(i) $(A')' = A$ (ii) $(A + B)' = A' + B'$

(iii) $(kB)' = kB'$, ਜਿੱਥੇ $k$ ਕੋਈ ਅਚੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A')' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

ਇੱਥੇ : $(A')' = A$

(ii) ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$(A + B)' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A' + B' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $(A + B)' = A' + B'$

(iii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$kB = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 2k \\ k & 2k & 4k \end{bmatrix}$$

ਤਦ $$(kB)' = \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = kB'$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(kB)' = kB'$

**ਉਦਾਹਰਣ 21.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)' = B'A'$ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$(AB)' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A' = [\text{ï}\,2 \quad 4 \quad 5],\ B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix} = (AB)'$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ $(AB)' = B'A'$

## 3.6 ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ (Symmetric and Skew Symmetric Matrices)

**ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4.** ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਸਮਮਿਤਈ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ $A' = A$ ਭਾਵ $i$ ਅਤੇ $j$ ਦੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $A' = A$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A = [$a_{ij}$] ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ A′ = ï A, ਭਾਵ $i$ ਅਤੇ $j$ ਦੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $a_{ji}$ = ï $a_{ij}$ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $i = j$ ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ $a_{ii}$ = ï $a_{ii}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2a_{ii} = 0$ ਜਾਂ $a_{ii} = 0$ ਹਰੇਕ $i$ ਦੇ ਲਈ।

ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ B′ = ï B ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਵਾਸਤਵਿਕ ਤੱਤਾਂ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ A + A′ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ A ï A′ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ B = A + A′ ਤਾਂ

B′ = (A + A′)′
= A′ + (A′)′ [(ਕਿਉਂਕਿ (A + B)′ = (A′ + B′)]
= A′ + A (ਕਿਉਂਕਿ (A′)′ = A)
= A + A′ (ਕਿਉਂਕਿ A + B = B + A)
= B

ਇਸ ਲਈ B = A + A′ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ C = A ï A′

C′ = (A ï A′)′ = A′ ï (A′)′ (ਕਿਉਂ ?)
= A′ ï A (ਕਿਉਂ ?)
= ï (A ï A′) = ï C

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : C = A ï A′ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{A}') + \frac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{A}')$$

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(A + A')$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ $(A ï A')$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ $(kA)' = kA'$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{1}{2}(A + A')$ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ $\frac{1}{2}(A - A')$ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 22.** ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ $B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $$P = \frac{1}{2}(B + B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $P = \frac{1}{2}(B + B')$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ $$Q = \frac{1}{2}(B ï B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ ਹੈ।

ਤਦ
$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $Q = \frac{1}{2}$(B ï B′) ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਹੁਣ
$$P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ।

## ਅਭਿਆਸ 3.3

**1.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

**2.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) (A ï B)′ = A′ ï B′

**3.** ਜੇਕਰ $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) (A ï B)′ = A′ ï B′

**4.** ਜੇਕਰ $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $(A + 2B)'$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**5.** A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)' = B'A'$, ਜਿੱਥੇ

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

**6.** (i) ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A'A = I$

(ii) ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A'A = I$

**7.** (i) ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(ii) ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

**8.** ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $(A + A')$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(ii) (A ï A′) ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

**9.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ $\frac{1}{2}(A + A')$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}(A - A')$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**10.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ :

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 11 ਅਤੇ 12 ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

**11.** ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ AB ï BA ਇੱਕ

(A) ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (B) ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ

(C) ਸਿਫਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ (D) ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ

**12.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ਤਾਂ $A + A' = I$, ਜੇਕਰ $\alpha$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\pi$ (D) $\frac{3\pi}{2}$

## 3.7 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪਾਂਤਰਣ) [Elementary Operation (Transformation) of a matrix]

ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'ਤੇ ਛੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ (ਰੂਪਾਂਤਰਣ) ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਥੰਮਾਂ 'ਤੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(i) ਕਿਸੇ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ ਜਾਂ ਦੋ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ (Inter change) ਸੰਕੇਤ ਰੂਪ (symbolically) ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $i$ਵੀ ਅਤੇ $j$ਵੀਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ ਨੂੰ $R_i \leftrightarrow R_j$ ਅਤੇ $i$ਵੇਂ ਅਤੇ $j$ਵੇਂ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ ਨੂੰ $C_i \leftrightarrow C_j$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, ਵਿੱਚ $R_1 \leftrightarrow R_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ; ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $i$ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ ਨੂੰ $k$, ਜਦੋਂ $k \neq 0$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਨੂੰ $R_i \to kR_i$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਗਤ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ $C_i \to kC_i$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

ਵਿੱਚ $C_3 \to \frac{1}{7}C_3$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{7} \\ -1 & \sqrt{3} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਜੋੜਨਾ ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $i$ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚ $j$ਵੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ $k$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਜੋੜਨ ਨੂੰ $R_i \to R_i + kR_j$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।
ਸੰਗਤ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ $C_i \to C_i + k\,C_j$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

À ç ÀÔ ô ä ç ¶ñ Â Æ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ਤੇ $R_2 \to R_2$ ï $2R_1$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

## 3.8 ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Invertible Matrices)

**ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6.** ਜੇਕਰ A, ਕ੍ਰਮ $m$, ਦਾ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ AB = BA = I, ਤਾਂ B ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ Aï 1 ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ A ਨੂੰ ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

ਹੁਣ
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ਨਾਲ ਹੀ $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟ (Inverse) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ B = Aï 1 ਅਤੇ A ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B, ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੈ ਭਾਵ A = Bï 1

**ਟਿੱਪਣੀ**

1. ਕਿਸੇ ਆਇਤਾਕਾਰ (Rectangular) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਨਫਲ AB ਅਤੇ BA ਦੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ, ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣ।

2. ਜੇਕਰ B, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਤਾਂ A, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦਾ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**ਪ੍ਰਮੇਯ 3.** [ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ (Uniqueness of inverse)] ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਜੇਕਰ ਉਸਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

**ਸਬੂਤ :** ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਕ੍ਰਮ $m$ ਦਾ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਮੰਨ ਲਓ B ਅਤੇ C ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਦੋ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦਿਖਾਵਾਂਗੇ ਕਿ B = C ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ B ਹੈ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$AB = BA = I \qquad \ldots (1)$$

ਕਿਉਂਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ C ਵੀ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$AC = CA = I \qquad \ldots (2)$$

ਹੁਣ $$B = BI = B\,(AC) = (BA)\,C = IC = C$$

**ਪ੍ਰਮੇਯ 4.** ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਯੋਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣ ਤਾਂ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

**ਸਬੂਤ :** ਇੱਕ ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ

$$(AB)\,(AB)^{-1} = 1$$

ਜਾਂ $$A^{-1}\,(AB)\,(AB)^{-1} = A^{-1}I \quad (A^{-1} \text{ ਦਾ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਨਾਲ ਪੂਰਵ ਗੁਣਨ ਕਰਨ 'ਤੇ})$$

ਜਾਂ $$(A^{-1}A)\,B\,(AB)^{-1} = A^{-1} \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } A^{-1}\,I = A^{-1})$$

ਜਾਂ $$IB\,(AB)^{-1} = A^{-1}$$

ਜਾਂ $$B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$$

ਜਾਂ $$B^{-1}\,B\,(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

ਜਾਂ $$I\,(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

### 3.8.1 *ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ (Inverse of a matrix by elementary operations)*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ X, A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ X = AB ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ X = AB 'ਤੇ ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ X ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A 'ਤੇ, ਇਕੱਠੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ X = AB 'ਤੇ ਆਰੰਭਿਕ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ X ਤੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਫਲ AB ਵਿੱਚ ਬਾਅਦ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਤੇ, ਇਕੱਠੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਕਿ $A^{-1}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ $A^{-1}$ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, A = IA ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ A = IA ਤੇ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਕਰਦੇ ਰਹਿਣਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ

$I = BA$ ਨਹੀਂ ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ $A^{\text{ï}1}$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ $A = AI$ ਲਿਖੋ ਅਤੇ $A = AI$ ਤੇ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਕਰਦੇ ਰਹੋ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਸਾਨੂੰ $I = AB$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $A = IA$ ($A = AI$) ਤੇ ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ (ਥੰਮ) ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕਰਨ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੀ ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹੋਣ ਤਾਂ $A^{\text{ï}1}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 23.** ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $A = IA$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A, \text{ ਤਾਂ } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_2 \to R_2 \text{ ï } 2R_1 \text{ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to \text{ï } \frac{1}{5} R_2 \text{ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A \qquad (R_1 \to R_1 \text{ ï } 2R_2 \text{ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$A^{\text{ï}1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} \text{ ਹੈ।}$$

ਵਿਕਲਪ : ਆਰੰਭਿਕ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹਿੱਤ, ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A = AI$, ਭਾਵ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2$ ï $2C_1$, ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $C_2 \rightarrow -\frac{1}{5}C_2$, ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

ਅੰਤ ਵਿੱਚ, $C_1 \rightarrow C_1$ ï $2C_2$, ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਕਰਕੇ $$A^{ï1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A = I\,A$, ਭਾਵ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_1 \leftrightarrow R_2 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_3 \rightarrow R_3 \text{ ï } 3R_1 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_1 \to R_1 \text{ ï } 2R_2 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_3 \to R_3 + 5R_2 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \quad (R_3 \to \frac{1}{2} R_3 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \quad (R_1 \to R_1 + R_3 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \quad (R_2 \to R_2 \text{ ï } 2R_3 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$A^{\text{ï}1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ਵਿਕਲਪ] $A = AI$ ਲਿਖੋ, ਭਾਵ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (C_1 \leftrightarrow C_2)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (C_3 \to C_3 - 2C_1)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (C_3 \to C_3 + C_2)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (C_3 \to \frac{1}{2} C_3)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 - 2C_2)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 0 & -1 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + 5C_3)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (C_2 \to C_2 - 3C_3)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

**ਉਦਾਹਰਣ 25.** ਜੇਕਰ $P = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $P^{-1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਇਸਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** $P = IP$ ਲਿਖੋ ਭਾਵ, $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P \quad (R_1 \to \frac{1}{10} R_1 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} P \quad (R_2 \to R_2 + 5R_1 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇੱਥੇ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $P^{-1}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 3.4

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ 17 ਤੱਕ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਆਰੰਭਿਕ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

**4.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

**7.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

**10.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

**13.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

**16.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**18.** ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੋਣਗੇ, ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ

(A) AB = BA (B) AB = BA = 0

(C) AB = 0, BA = I (D) AB = BA = I

## *ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ*

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbf{N}$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਥੇ $P(n)$ : ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, n \in \mathbf{N}$

ਹੁਣ $P(1)$ : $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਇਸ ਲਈ $A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

ਇਸ ਕਰਕੇ ਨਤੀਜਾ $n = 1$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਨਤੀਜਾ $n = k$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $P(k)$ : $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$.

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਨਤੀਜਾ $n = k + 1$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਹੁਣ
$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos k\theta \text{ ï } \sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta + \sin\theta\cos k\theta \\ -\sin\theta\cos k\theta + \cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta + \cos\theta\cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta + k\theta) & \sin(\theta + k\theta) \\ -\sin(\theta + k\theta) & \cos(\theta + k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ ਨਤੀਜਾ $n = k + 1$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਣਿਤਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $n$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹਨ ਭਾਵ AB = BA ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $A' = A$ ਅਤੇ $B' = B$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਤਾਂ $(AB)' = AB$

ਪਰੰਤੂ $(AB)' = B'A' = BA$ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $BA = AB$

ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ $AB = BA$ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ।

ਹੁਣ $(AB)' = B'A'$

$= BA$ (ਕਿਉਂਕਿ A ਅਤੇ B ਸਮਮਿਤਈ ਹਨ)

$= AB$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ D ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ CD ï AB = O ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ A, B, C ਸਾਰੇ ਕ੍ਰਮ 2, ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ CD ï AB ਸੁਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ (Well defined) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ D, 2 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $\quad D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ਹੈ। ਤਾਂ CD ï AB = O ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = O$$

ਜਾਂ
$$\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ
$$\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ਦੁਆਰਾ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$2a + 5c$ ï $3 = 0$ ... (1)

$3a + 8c$ ï $43 = 0$ ... (2)

$2b + 5d = 0$ ... (3)

ਅਤੇ $3b + 8d$ ï $22 = 0$ ... (4)

(1) ਅਤੇ (2), ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $a =$ ï 191, $c = 77$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(3) ਅਤੇ (4), ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $b =$ ï 110, $d = 44$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਤੇ
$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$$

## *ਅਧਿਆਇ 3 'ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ*

**1.** ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਦੇ ਲਈ

$(aI + bA)^n = a^n I + na^{n \text{ ï } 1} bA$, ਜਿੱਥੇ I ਕ੍ਰਮ 2 ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

**2.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$, $n \in \mathbf{N}$

**3.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$, ਜਿੱਥੇ $n$ ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

**4.** ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AB ï BA ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

**5.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B'AB$ ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਜੇਕਰ A ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ।

**6.** $x$, $y$, ਅਤੇ $z$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ ਸਮੀਕਰਣ $A'A = I$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

**7.** $x$ ਦੇ ਕਿਸ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ ਹੈ ?

**8.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A^2$ ï $5A + 7I = O$ ਹੈ।

**9.** ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ ਹੈ ਤਾਂ $x$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**10.** ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ $x$, $y$, ਅਤੇ z ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਉਹ ਦੋ ਬਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੇਚਦਾ ਹੈ। ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਕਰੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੂਚਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

| ਬਾਜ਼ਾਰ | ਉਤਪਾਦਨ | | |
|---|---|---|---|
| I | 10,000 | 2,000 | 18,000 |
| II | 6,000 | 20,000 | 8,000 |

(a) ਜੇਕਰ $x$, $y$ ਅਤੇ $z$ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2.50 ਰੁ:, 1.50 ਰੁ: ਅਤੇ 1.00 ਰੁ: ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਬਾਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ (Revenue), ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(b) ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਤਿੰਨ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੀ ਲਾਗਤ (Cost) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2.00 ਰੁ:, 1.00 ਰੁ: ਅਤੇ 50 ਪੈਸੇ ਹੈ ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਲਾਭ (Gross profit) ਪਤਾ ਕਰੋ।

**11.** ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ X ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ।

**12.** ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $AB = BA$ ਹੈ ਤਾਂ ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AB^n = B^nA$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ $n \in N$ ਦੇ ਲਈ $(AB)^n = A^nB^n$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

**13.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $A^2 = I$, ਤਾਂ

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 \text{ ï } \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 \text{ ï } \alpha^2 \text{ ï } \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 \text{ ï } \beta\gamma = 0$

**14.** ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਹੈ ਤਾਂ :

(A) A ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। (B) A ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(C) A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

**15.** ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $A^2 = A$, ਤਾਂ $(I + A)^3 \text{ ï } 7A$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) A (B) I ï A (C) I (D) 3A

## ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਫਲਨਾਂ ਜਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਆਇਤਕਾਰ ਕ੍ਰਮ ਵਿਵਸਥਾ ਹੈ।
- $m$ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ $n$ ਥੰਮਾਂ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- $[a_{ij}]_{m \times 1}$ ਇੱਕ ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- $[a_{ij}]_{1 \times n}$ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਇੱਕ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ $m = n$ ਹੈ।
- $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{ij} = 0$, ਜਦੋਂ $i \neq j$
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{ij} = 0$, ਜਦੋਂ $i \neq j$, $a_{ij} = k$, ($k$ ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ), ਜਦੋਂ $i = j$ ਹੈ।
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਜੇਕਰ $a_{ij} = 1$ ਜਦੋਂ $i = j$ ਅਤੇ $a_{ij} = 0$ ਜਦੋਂ $i \neq j$ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
- $A = [a_{ij}] = [b_{ij}] = B$ ਜੇਕਰ (i) A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਨ ਅਤੇ (ii) $i$ ਅਤੇ $j$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $a_{ij} = b_{ij}$ ਹੈ।
- $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$
- ï A = (ï 1)A
- A ï B = A + (ï 1) B
- $A + B = B + A$

- $(A + B) + C = A + (B + C)$, ਜਿੱਥੇ A, B ਅਤੇ C ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।
- $k(A + B) = kA + kB$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ $k$ ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ।
- $(k + l)A = kA + lA$, ਜਿੱਥੇ $k$ ਅਤੇ $l$ ਅਚੱਲ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਅਤੇ $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ ਤਾਂ $AB = C = [c_{ik}]_{m \times p}$, ਜਿੱਥੇ $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$ ਹੈ।
- (i) $A(BC) = (AB)C$, (ii) $A(B + C) = AB + AC$, (iii) $(A + B)C = AC + BC$
- ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਤਾਂ $A'$ ਜਾਂ $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$
- (i) $(A')' = A$ (ii) $(kA)' = kA'$ (iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(AB)' = B'A'$
- ਜੇਕਰ $A' = A$ ਹੈ ਤਾਂ A ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ $A' =$ ï A ਹੈ ਤਾਂ A ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ 'ਤੇ ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

  (i) $R_i \leftrightarrow R_j$ ਜਾਂ $C_i \leftrightarrow C_j$

  (ii) $R_i \to kR_i$ ਜਾਂ $C_i \to kC_i$

  (iii) $R_i \to R_i + kR_j$ ਜਾਂ $C_i \to C_i + kC_j$
- ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਹਨ ਕਿ $AB = BA = I$, ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ B ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ A ï1 ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ A ਹੈ।
- ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ **4**

# ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ (Determinants)

❖ *All Mathematical truths are relative and conditional — C.P. STEINMETZ* ❖

## 4.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

**P.S. Laplace**
**(1749-1827)**

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣਾ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

ਨੂੰ $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਵਿਲੱਖਣ (Unique) ਹੱਲ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਨੂੰ $a_1 b_2 - a_2 b_1$ ਸੰਖਿਆ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਜਾਂ $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਹ ਸੰਖਿਆ $a_1 b_2 - a_2 b_1$ ਜੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਉਹ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਜਾਂ **det A** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ, ਵਿਗਿਆਨ, ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਰਿਤ ਵਰਤੋਂ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਇੰਦਰਾਜਾਂ ਦੇ 3 ਕ੍ਰਮ ਤੱਕ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਤੇ ਸੀਮਿਤ ਰਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ, ਲਘੂ (MINORS) ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ (Cofacters) ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਸਹਿਖੰਡਜ ਅਤੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ, ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀਆਂ ਦੀ ਸੰਗਤੀ (Consistency) ਅਤੇ ਅਸੰਗਤੀ

(Inconsistency) ਅਤੇ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

## 4.2 ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ (Determinant)

ਅਸੀਂ $n$ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਦੁਆਰਾ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ $a_{ij}$ A $ij$ ਵਾਂ ਤੱਤ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੋਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੋ ਹਰੇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ M ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, $k$ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ $f : M \to K, f(A) = k,$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ $A \in M$ ਅਤੇ $k \in K$ ਤਾਂ $f(A)$, A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ $|A|$ ਜਾਂ det A ਜਾਂ $\Delta$ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ਤਾਂ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A)$ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :*

(i) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ, $|A|$ ਨੂੰ A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਕੇਵਲ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

### 4.2.1 *ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ* (Determinant of a matrix of order one)

ਮੰਨਿਆ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a]$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ $a$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ $|A| = a$

### 4.2.2 *ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ* (Determinant of a matrix of order two)

ਮੰਨਿਆ $2 \times 2$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਤਾਂ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ A_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \text{ ï } a_{21}a_{12}$$

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \text{ï}1 & 2 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \text{ï}1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) \text{ ï } 4(\text{ï }1) = 4 + 4 = 8$

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x \text{ ï } 1 & x \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x \text{ ï } 1 & x \end{vmatrix} = x\,(x) \text{ ï } (x+1)\,(x \text{ ï } 1) = x^2 \text{ ï } (x^2 \text{ ï } 1) = x^2 \text{ ï } x^2 + 1 = 1$

### 4.2.3 *ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ (Determinant of a matrix of order Three)*

ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਦੋ ਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਇੱਕ ਥੰਮ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਛੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸਾਰਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਿੰਨੋ ਕਤਾਰਾਂ ($R_1$, $R_2$ ਅਤੇ $R_3$) ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅਤੇ ਤਿੰਨੋਂ ਥੰਮਾ ($C_1$, $C_2$ ਅਤੇ $C_3$) ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਸੰਗਤ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਪ੍ਰਸਾਰਣ ਸਮਾਨ ਨਤੀਜਾ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜਿੱਥੇ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

**ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ($R_1$) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (Expand)**

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਪਗ 1. $R_1$ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਅੰਸ਼ $a_{11}$ ਨੂੰ $(\text{ï } 1)^{(1+1)}$ ਭਾਵ $[(\text{ï } 1)^{a_{11}\text{ਵਿੱਚ ਅਨੁਲਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}]$ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|A|$ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ($R_1$) ਅਤੇ ਪਹਿਲਾ ਥੰਮ ($C_1$) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰੋ ਕਿਉਂਕਿ $a_{11}$, $R_1$ ਅਤੇ $C_1$ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ :

ਭਾਵ $(\text{ï } 1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

ਪਗ 2. ਕਿਉਂਕਿ $a_{12}$, $R_1$ ਅਤੇ $C_2$ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $R_1$ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ $a_{12}$ ਨੂੰ $(\text{ï } 1)^{1+2}$ ਭਾਵ $[(\text{ï } 1)^{a_{12}\text{ਵਿੱਚ ਅਨੁਲਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}]$ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|A|$ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ($R_1$) ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ ($C_2$) ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।

ਅਰਥਾਤ $(\text{ï } 1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

ਪਗ 3. ਕਿਉਂਕਿ $a_{13}$, $R_1$ ਅਤੇ $C_3$ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $R_1$ ਦੇ ਤੀਜੇ ਤੱਤ ਨੂੰ $(\text{ï } 1)^{1+3}$ ਭਾਵ ਭਾਵ$[(\text{ï } 1)^{a_{13}\text{ਵਿੱਚ ਅਨੁਲਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}]$ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|A|$ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ($R_1$) ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਥੰਮ ($C_3$) ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।

ਭਾਵ $$(-1)^{1+3}\, a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ਪਗ 4. ਹੁਣ A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਭਾਵ | A | ਦੇ ਪਸਾਰ ਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਪਗ 1] 2 ਅਤੇ 3 ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਤਿੰਨੋਂ ਪਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਕੇ ਲਿਖੋ ਭਾਵ

$$\det A = |A| = (-1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\, a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ਜਾਂ
$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) \\ &\quad + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}) \\ &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{31}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} \\ &\quad - a_{13}\,a_{31}\,a_{22} \qquad \ldots (1) \end{aligned}$$

**ਟਿੱਪਣੀ** ਅਸੀਂ ਚਾਰੋਂ ਪਗਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

**ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ($R_2$) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (Expand)**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$R_2$ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$|A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3}\, a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -\, a_{21}\,(a_{12}\,a_{33} - a_{32}\,a_{13}) + a_{22}\,(a_{11}\,a_{33} - a_{31}\,a_{13}) \\ &\quad - a_{23}\,(a_{11}\,a_{32} - a_{31}\,a_{12}) \\ |A| &= -\, a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{22}\,a_{11}\,a_{33} - a_{22}\,a_{31}\,a_{13} - a_{23}\,a_{11}\,a_{32} \\ &\quad + a_{23}\,a_{31}\,a_{12} \\ &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} \\ &\quad - a_{13}\,a_{31}\,a_{22} \qquad \ldots (2) \end{aligned}$$

**ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ($C_1$) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (Expand)**

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$C_1$, ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ ’ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$|A| = a_{11}\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\ a_{31}\,(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{21}\,(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) + a_{31}\,(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})$$

$$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{21}\,a_{13}\,a_{32} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23}$$
$$-\ a_{31}\,a_{13}\,a_{22}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$
$$-\ a_{13}\,a_{31}\,a_{22} \qquad \ldots (3)$$

(1), (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $|A|$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਹ ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਕਿ $|A|$ ਦਾ $R_3$, $C_2$ ਅਤੇ $C_3$ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :*

(i) ਗਣਨਾ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਉਸ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਧਿਕਤਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪਸਾਰਣ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ $(-1)^{i+j}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਦੇ ਸਥਾਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ $(i+j)$ ਦੇ ਜਿਸਤ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $+1$ ਜਾਂ $-1$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(iii) ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੈ ਕਿ $A = 2B$. ਪਰੰਤੂ $|A| = 0 - 8 = -8$ ਅਤੇ $|B| = 0 - 2 = -2$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ ਜਾਂ $|A| = 2^n|B|$, ਜਿੱਥੇ $n = 2$, ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $A = kB$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ $n$ ਹੈ, ਤਦ $|A| = k^n|B|$, ਜਿੱਥੇ $n = 1, 2, 3$ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 3.** ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਤੀਜੇ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਦੋ ਇੰਦਰਾਜ ਸਿਫਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਤੀਜੇ ਥੰਮ $(C_3)$ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1 - 12) - 0 + 0 = -52$$

**ਉਦਾਹਰਣ 4.** $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** $R_1$ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

**ਉਦਾਹਰਣ 5.** ਜੇਕਰ $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ ਤਾਂ $x$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

ਭਾਵ $3 - x^2 = 3 - 8$

ਭਾਵ $x^2 = 8$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = \pm 2\sqrt{2}$

## ਅਭਿਆਸ 4-1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਤੱਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

**2.** (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

**3.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $|2A| = 4|A|$

**4.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $|3A| = 27|A|$

**5.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

**6.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$, ਹੈ, ਤਾਂ $|A|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**7.** $x$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

**8.** ਜੇਕਰ $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $x$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) 6 (B) $\pm 6$ (C) $-6$ (D) 0

## 4.3 ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of Determinants)

ਪਿਛਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਸਿਫਰ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਨਾਲ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਖੁਦ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਤੱਕ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਾਂਗੇ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1. ਕਿਸੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਇਸ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾਂ ਨੂੰ ਉਸੇ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਬਦਲਨ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ।

ਪੜਤਾਲ – ਮੰਨ ਲਓ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$\Delta$ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਨੂੰ ਥੰਮਾ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ’ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\Delta_1$ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta_1 = a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $\Delta = \Delta_1$

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਆਖਿਆ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ det (A) = det (A′), ਜਿੱਥੇ A′, A ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ* ਜੇਕਰ $R_i$ = $i$ ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ $C_i$ = $i$ ਵਾਂ ਥੰਮ ਹੈ ਤਾਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾ ਦੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $C_i \leftrightarrow R_i$ ਲਿਖਾਂਗੇ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਪੜਤਾਲ ਕਰੀਏ।

**ਉਦਾਹਰਣ 6.** $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1 ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ,

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0 - 20) + 3\,(-42 - 4) + 5\,(30 - 0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix}$$ (ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0 - 20) + 3\,(-42 - 4) + 5\,(30 - 0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ $\Delta = \Delta_1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1ਸਿੱਧ ਹੋਈ।

**ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2.** ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਕੋਈ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ (ਜਾਂ ਥੰਮਾ) ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : ਮੰਨ ਲਓ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\Delta = a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - a_2\,(b_1\,c_3 - b_3\,c_1) + a_3\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1)$$

ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਤੀਜੀ ਕਤਾਰਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਭਾਵ $R_1 \leftrightarrow R_3$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਵਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਤੀਜੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ

$$\Delta_1 = a_1 (c_2\, b_3 - b_2\, c_3) - a_2 (c_1\, b_3 - c_3\, b_1) + a_3 (b_2\, c_1 - b_1\, c_2)$$

$$= - [a_1 (b_2\, c_3 - b_3\, c_2) - a_2 (b_1\, c_3 - b_3\, c_1) + a_3 (b_1\, c_2 - b_2\, c_1)]$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $\Delta_1 = - \Delta$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਥੰਮਾ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਉਕਤ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਅਸੀਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨੂੰ $R_i \leftrightarrow R_j$ ਅਤੇ ਥੰਮਾ ਦੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨੂੰ $C_i \leftrightarrow C_j$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

**ਉਦਾਹਰਣ 7.** ਜੇਕਰ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2 ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = - 28$ (ਵੇਖੋ ਉਦਾਹਰਣ 6)

$R_2$ ਅਤੇ $R_3$ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਭਾਵ $R_2 \leftrightarrow R_3$ ਤੋਂ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta_1$ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 (20 - 0) + 3 (4 + 42) + 5 (0 - 30)$$

$$= 40 + 138 - 150 = 28$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ $\Delta_1 = - \Delta$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2 ਸਿੱਧ ਹੋਈ।

**ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 3.** ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਕੋਈ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਸਮਾਨ ਹਨ (ਸਾਰੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਬਰਾਬਰ ਹਨ), ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**ਸਬੂਤ :** ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta$ ਦੀਆਂ ਸਮਾਨ ਕਤਾਰਾਂ (ਜਾਂ ਥੰਮਾਂ) ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ $\Delta$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\Delta$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\qquad \Delta = -\Delta$

ਜਾਂ $\qquad \Delta = 0$

ਆਓ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਦੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਪੜਤਾਲ ਕਰੀਏ।

**ਉਦਾਹਰਣ 8.** $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ *(expand)* ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = 3\,(6 - 6) - 2\,(6 - 9) + 3\,(4 - 6)$$
$$= 0 - 2\,(-3) + 3\,(-2) = 6 - 6 = 0$$

ਇੱਥੇ $R_1$ ਅਤੇ $R_3$ ਸਮਾਨ ਹਨ।

**ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 4.** ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਨੂੰ ਇੱਕ ਅਚੱਲ $k$, ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਉਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ $k$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : ਮੰਨ ਲਓ $\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ਇਸ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ $k$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta_1$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta_1 = k\,a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - k\,b_1\,(a_2\,c_3 - c_2\,a_3) + k\,c_1\,(a_2\,b_3 - b_2\,a_3)$$
$$= k\,[a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - b_1\,(a_2\,c_3 - c_2\,a_3) + c_1\,(a_2\,b_3 - b_2\,a_3)] = k\,\Delta$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\qquad \begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

*ਟਿੱਪਣੀ :*

(i) ਇਸ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮਾ ਤੋਂ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਬਾਹਰ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀ ਕਿਸੇ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ (ਜਾਂ ਥੰਮਾ) ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ (ਉਸੇ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ) ਹੈ ਤਦ ਉਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ k\,a_1 & k\,a_2 & k\,a_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (ਕਤਾਰਾਂ } R_1 \text{ ਅਤੇ } R_3 \text{ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹਨ)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(17) & 6(3) & 6(6) \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 17 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 4 ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 3 ਦੀ ਵਰਤੋਂ)

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 5. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਦੋ (ਜਾਂ ਵੱਧ) ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਹੋਣ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਦੋ (ਜਾਂ ਵੱਧ) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ਪੜਤਾਲ : ਖੱਬਾ ਪੱਖ $= \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_1+\lambda_1)(b_2c_3 - c_2b_3) - (a_2+\lambda_2)(b_1c_3 - b_3c_1) \\ &\quad + (a_3+\lambda_3)(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \end{aligned}$$

$$+\ \lambda_1\ (b_2\ c_3\ \text{ï}\ \ c_2\ b_3)\ \text{ï}\ \ \lambda_2\ (b_1\ c_3\ \text{ï}\ \ b_3\ c_1) + \lambda_3\ (b_1\ c_2\ \text{ï}\ \ b_2\ c_1)$$

(ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਵਿਵਸਥਿਤ ਕਰਨ 'ਤੇ )

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{ਸੱਜਾ ਪੱਖ}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਜੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

**ਉਦਾਹਰਣ 10.** ਦਰਸਾਓ ਕਿ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

**ਹੱਲ :** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix}$

(ਵਿਸ਼ੇਸਤਾ 5 ਦੇ ਦੁਆਰਾ)

$= 0 + 0 = 0$ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 5 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ)

**ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 6.** ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $R_i \to R_i + kR_j$ ਜਾਂ $C_i \to C_i + k\,C_j$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

**ਪੜਤਾਲ :**

ਮੰਨ ਲਓ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ਅਤੇ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 + k\,c_1 & a_2 + k\,c_2 & a_3 + k\,c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$,

ਜਿੱਥੇ $\Delta_1$ ਸੰਕਿਰਿਆ $R_1 \to R_1 + kR_3$ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਤੀਜੀ ਕਤਾਰ $(R_3)$ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਅਚੱਲ $k$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ $(R_1)$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $R_1 \to R_1 + k\,R_3$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k\,c_1 & k\,c_2 & k\,c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 5 ਦੇ ਦੁਆਰਾ)}$$

$$= \Delta + 0 \qquad \text{(ਜਦੋਂ ਕਿ } R_1 \text{ ਅਤੇ } R_3 \text{ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹਨ)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\Delta = \Delta_1$

*ਟਿੱਪਣੀ :*

(i) ਜੇਕਰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta$ ਵਿੱਚ $R_i \to kR_i$ ਜਾਂ $C_i \to kC_i$ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta_1$ ਹੈ ਤਾਂ $\Delta_1 = k\Delta$.

(ii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪਗ ਵਿੱਚ $R_i \to R_i + kR_j$ ਵਰਗੀਆਂ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਵਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਤਾਰ ਦਾ ਹੋਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ। ਠੀਕ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਟਿੱਪਣੀ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 11.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$

**ਹੱਲ :** ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta$ ਵਿੱਚ $R_2 \to R_2$ ï $2R_1$ ਅਤੇ $R_3 \to R_3$ ï $3R_1$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $R_3 \to R_3$ ï $3R_2$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$C_1$ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$= a\,(a^2$ ï $0) = a\,(a^2) = a^3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ਹੱਲ : $\Delta$ ਵਿੱਚ $R_1 \to R_1 + R_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ਹੁਣ $R_1$ ਅਤੇ $R_3$ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\Delta = 0$

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

ਹੱਲ : $R_2 \to R_2 - R_1$ ਅਤੇ $R_3 \to R_3 - R_1$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$R_2$ ਅਤੇ $R_3$ ਵਿੱਚੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(b-a)$ ਅਤੇ $(c-a)$ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

$= (b-a)(c-a)[(-b+c)]$ (ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ)

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

**ਉਦਾਹਰਣ 14.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਓ

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ 'ਤੇ $R_1 \to R_1 - R_2 - R_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

$R_1$ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c)\begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-2b)\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2\,c\,(a\,b + b^2 - bc) - 2\,b\,(b\,c - c^2 - ac)$$

$$= 2\,a\,b\,c + 2\,cb^2 - 2\,bc^2 - 2\,b^2c + 2\,bc^2 + 2\,abc$$

$$= 4\,abc$$

**ਉਦਾਹਰਣ 15.** ਜੇਕਰ $x, y, z$ ਭਿੰਨ ਹੋਣ ਅਤੇ $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$,

ਭਾਵ $x \neq y \neq z$

ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $1 + xyz = 0$

**ਹੱਲ :** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 5 ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ)

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ (ਪਹਿਲੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ $C_3 \leftrightarrow C_2$ ਅਤੇ $C_1 \leftrightarrow C_2$ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ)

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} (1+xyz)$$ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ $R_1, R_2$ ਅਤੇ $R_3$ ਵਿੱਚੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $x, y$ ਅਤੇ $z$

$$= (1+xyz) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1$ ਅਤੇ $R_3 \to R_3 - R_1$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$R_2$ ਨਾਲ $(y-x)$ ਅਤੇ $R_3$ ਨਾਲ $(z-x)$ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਾਹਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\Delta = (1+xyz)(y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (1+xyz)(y-x)(z-x)(z-y)$$ ($C_1$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ)

ਕਿਉਂਕਿ $\Delta = 0$ ਅਤੇ $x, y$ ਅਤੇ $z$ ਸਾਰੇ ਭਿੰਨ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x - y \neq 0, y - z \neq 0, z - x \neq 0$, ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $1 + xyz = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 16.** ਦਰਸਾਓ ਕਿ $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc+bc+ca+ab$

**ਹੱਲ :** $R_1, R_2$ ਅਤੇ $R_3$ ਵਿੱਚੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $a, b$ ਅਤੇ $c$ ਸਾਝਾਂ ਲੈਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\text{ਖੱਬਾ ਪੱਖ} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

ਜਾਂ $$\Delta = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

ਹੁਣ $C_2 \to C_2 - C_1$ ਅਤੇ $C_3 \to C_3 - C_1$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left[1(1-0)\right]$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc + bc + ca + ab = \text{ਸੱਜਾ ਪੱਖ}$$

**ਟਿੱਪਣੀ** ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ $C_1 \to C_1 - C_2$ ਅਤੇ $C_3 \to C_3 - C_2$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਤੇ $C_1 \to C_1 - a\,C_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ।

## ਅਭਿਆਸ 4.2

ਬਿਨਾਂ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤੇ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 5 ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

**1.** $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$ **2.** $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$ **3.** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$

**4.** $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

**5.** $\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਤੋਂ 14 ਤੱਕ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

**6.** $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

**7.** $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

**8.** (i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

**9.** $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x ï\ y)\ (y ï\ z)\ (z ï\ x)\ (xy + yz + zx)$

**10.** (i) $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

(ii) $\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

**11.** (i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

(ii) $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$

**12.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

**13.** $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

**14.** $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 15 ਅਤੇ 16 ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

**15.** ਜੇਕਰ A ਇੱਕ $3 \times 3$ ਦਰਜੇ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $|k\mathrm{A}|$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ :

(A) $k\,|\mathrm{A}|$ (B) $k^2\,|\mathrm{A}|$ (C) $k^3\,|\mathrm{A}|$ (D) $3k\,|\mathrm{A}|$

**16.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹੈ।

(A) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(B) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(C) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

## 4.4 ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (Area of a Triangle)

ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ਅਤੇ $(x_3, y_3)$, ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{2}[x_1(y_2 \text{ï} y_3) + x_2\ (y_3 \text{ï} y_1) + x_3\ (y_1 \text{ï} y_2)]$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਇਸ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \dots (1)$$

*ਟਿੱਪਣੀ*

(i) ਕਿਉਂਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਮੇਸ਼ਾ (1) ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ (absolute value) ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਜੇਕਰ ਖੇਤਰਫਲ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਗਣਨਾ ਦੇ ਲਈ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦੋਵੇਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

(iii) ਤਿੰਨ ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ (3, 8), (ï 4, 2) ਅਤੇ (5, 1) ਹਨ।

ਹੱਲ : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[3(2-1)-8(-4-5)+1(-4-10)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(3+72-14) = \frac{61}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ A(1, 3) ਅਤੇ B (0, 0) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ $k$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ D($k$, 0) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $\Delta$ ABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 3 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ AB ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P ($x$, $y$) ਹੈ ਤਦ $\Delta$ ABP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 0 (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ
$$\frac{1}{2}(y-3x) = 0 \text{ ਜਾਂ } y = 3x$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ AB ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ $\Delta$ ABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 3 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3 \text{ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ } \frac{-3k}{2} = \pm 3, \text{ i.e., } k = \mp 2$$

## ਅਭਿਆਸ 4.3

**1.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (ï 2, ï 3), (3, 2), (ï 1, ï 8)

**2.** ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A $(a, b + c)$, B $(b, c + a)$ ਅਤੇ C $(c, a + b)$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

**3.** ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ $k$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 4 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

(i) $(k, 0)$, (4, 0), (0, 2) (ii) (ï 2, 0), (0, 4), $(0, k)$

**4.** (i) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ (1, 2) ਅਤੇ (3, 6) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ (3, 1) ਅਤੇ (9, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**5.** ਜੇਕਰ ਸਿਖਰ (2, ï 6), (5, 4) ਅਤੇ $(k, 4)$ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 35 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $k$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) 12 (B) ï 2 (C) ï 12, ï 2 (D) 12, ï 2

## 4.5 ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ (Minor and Co-factor)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਘੂ (Minor) ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨ ਖੰਡਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦਾ ਵਿਸਤਰਿਤ ਰੂਪ ਲਿਖਣਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਤੱਤ $a_{ij}$ ਦਾ ਲਘੂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੈ ਜੋ $i$ ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ $j$ ਵੇਂ ਥੰਮ ਜਿਸ ਦੇ ਵਿੱਚ ਤੱਤ $a_{ij}$ ਸਥਿਤ ਹੈ ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤੱਤ $a_{ij}$ ਦੇ ਲਘੂਆਂ ਨੂੰ $M_{ij}$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* $n(n \geq 2)$ ਦਰਜੇ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਤੱਤ ਦਾ ਲਘੂ $n$ ï 1 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ਵਿੱਚ ਤੱਤ 6 ਦਾ ਲਘੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ 6 ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਸ ਦਾ ਲਘੂ $= M_{23}$ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 ï 14 = ï 6 \ (\Delta \text{ ਵਿੱਚੋਂ } R_2 \text{ ਅਤੇ } C_3 \text{ ਹਟਾਉਣ 'ਤੇ})$$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਇੱਕ ਤੱਤ $a_{ij}$ ਦਾ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ ਜਿਸ ਨੂੰ $A_{ij}$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ $a_{ij}$ ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ $M_{ij}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਤੱਤ $a_{ij}$ ਦਾ ਲਘੂ $M_{ij}$ ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ $a_{11} = 1$, ਇਸ ਲਈ $M_{11} = a_{11}$ ਦਾ ਲਘੂ $= 3$

$M_{12} =$ ਤੱਤ $a_{12}$ ਦਾ ਲਘੂ $= 4$

$M_{21} =$ ਤੱਤ $a_{21}$ ਦਾ ਲਘੂ $= -2$

$M_{22} =$ ਤੱਤ $a_{22}$ ਦਾ ਲਘੂ $= 1$

ਹੁਣ $a_{ij}$ ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ $A_{ij}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\, M_{11} = (-1)^2\,(3) = 3$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}\, M_{12} = (-1)^3\,(4) = -4$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\, M_{21} = (-1)^3\,(-2) = 2$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\, M_{22} = (-1)^4\,(1) = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 21. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ਦੇ ਤੱਤਾਂ $a_{11}$ ਅਤੇ $a_{21}$ ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$a_{11}$ ਦਾ ਲਘੂ $= M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}$

$a_{11}$ ਦਾ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ $= A_{11} = (-1)^{1+1}\, M_{11} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}$

$a_{21}$ ਦਾ ਲਘੂ $= M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}$

$a_{21}$ ਦਾ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ $= A_{21} = (-1)^{2+1}\, M_{21} = (-1)\,(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) = -a_{12}\,a_{33} + a_{13}\,a_{32}$

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਉਦਹਾਰਣ 21 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta$ ਦਾ $R_1$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = (ï\ 1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (ï\ 1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (ï\ 1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$, ਜਿੱਥੇ $a_{ij}$ ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ $A_{ij}$ ਹੈ।

$= R_1$ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\Delta$ ਦਾ $R_2, R_3, C_1, C_2$ ਅਤੇ $C_3$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ 5 ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਕੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta$, ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ* ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ $\Delta = a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}$ ਤਦ

$$\Delta = a_{11}\ (ï\ 1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\ (ï\ 1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\ (ï\ 1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$ ( ਕਿਉਂਕਿ $R_1$ ਅਤੇ $R_2$ ਬਰਾਬਰ ਹਨ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾ ਦੇ ਲਈ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

**ਉਦਾਹਰਣ 22.** ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 0$ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0\ ï\ 20 = ï\ 20$; ਇਸ ਲਈ $A_{11} = (ï\ 1)^{1+1}(ï\ 20) = ï\ 20$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = ï\ 42\ ï\ 4 = ï\ 46;$$ ਇਸ ਲਈ $A_{12} = (ï\ 1)^{1+2}(ï\ 46) = 46$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30\ ï\ 0 = 30;$$ ਇਸ ਲਈ $A_{13} = (ï\ 1)^{1+3}(30) = 30$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4; \text{ ਇਸ ਲਈ } A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19; \text{ ਇਸ ਲਈ } A_{22} = (-1)^{2+2}(-19) = -19$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13; \text{ ਇਸ ਲਈ } A_{23} = (-1)^{2+3}(13) = -13$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12; \text{ ਇਸ ਲਈ } A_{31} = (-1)^{3+1}(-12) = -12$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22; \text{ ਇਸ ਲਈ } A_{32} = (-1)^{3+2}(-22) = 22$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18; \text{ ਇਸ ਲਈ } A_{33} = (-1)^{3+3}(18) = 18$$

ਹੁਣ $a_{11} = 2, a_{12} = -3, a_{13} = 5;$ ਅਤੇ $A_{31} = -12, A_{32} = 22, A_{33} = 18$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}$

$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$

## ਅਭਿਆਸ 4.4

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਲਿਖੋ।

**1.** (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

**2.** (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**3.** ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਤੀਜੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਕੇ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜੇਕਰ $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ਅਤੇ $a_{ij}$ ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ $A_{ij}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\Delta$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

(A) $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}$ (B) $a_{11} A_{11} + a_{12} A_{21} + a_{13} A_{31}$

(C) $a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13}$ (D) $a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$

## 4.6 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਹਿਖੰਡਨ ਅਤੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ (Adjoint and Inverse of a Matrix)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੇ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਵੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਾਂਗੇ।

$A^{–1}$ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

### 4.6.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ (Adjoint of a matrix)*

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $[A_{ij}]$ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $A_{ij}$] ਤੱਤ $a_{ij}$ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ ਨੂੰ *adj* A ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਤਦ $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A_{11} = 4, A_{12} = ï\,1, A_{21} = ï\,3, A_{22} = 2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & ï\,3 \\ ï\,1 & 2 \end{bmatrix}$$

*ਟਿੱਪਣੀ*: $2 \times 2$ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ $adj$ A, $a_{11}$ ਅਤੇ $a_{22}$ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਅਤੇ $a_{12}$ ਅਤੇ $a_{21}$ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰ ਦੇਣ ਨਾਲ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

$$adj\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ

ਅਸੀਂ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਥਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਜੇਕਰ A ਕੋਈ $n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $A(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$, ਜਿੱਥੇ I, $n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ ਹੈ ਤਦ } adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $|A|$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$A\,(adj\ A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\ I$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(adj\ A)\,A = |A|\,I$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ। (ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਵਿਚਿੱਤਰ (singular) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਵਿੱਚਿੱਤਰ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ (non-singular) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $|A| \neq 0$

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \text{ ï } 6 = \text{ï } 2 \neq 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦੇ ਕਥਿਤ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣ ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਵੀ ਉਸੇ ਦਰਜੇ ਦੇ ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $|AB| = |A|\ |B|$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(adj\ A)\,A = |A|\ I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$

ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਲੈਣ 'ਤੇ

$$|(adj\ A)\,A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

ਭਾਵ $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ (ਕਿਉਂ?)

ਭਾਵ $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3\ (1)$$

ਭਾਵ $$|(adj\ A)| = |A|^2$$ (ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ)

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਹੋਵੇ ਤਾਂ $|adj\ A| = |A|^{n \text{ ï } 1}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ $n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਹੈ ਅਤੇ $n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ I ਹੈ। ਤਦ $n$ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿ AB = BA = I

ਹੁਣ AB = I ਹੈ ਤਾਂ $|AB| = |I|$ ਜਾਂ $|A|\,|B| = 1$ (ਕਿਉਂਕਿ $|I| = 1$, $|AB| = |A|\,|B|$)

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $|A| \neq 0$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ।

ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਓ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ ਤਦ $|A| \neq 0$

ਹੁਣ $$A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I \qquad \text{(ਪ੍ਰਮੇਯ 1)}$$

ਜਾਂ $$A\left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right) = \left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right)A = I$$

ਜਾਂ $$AB = BA = I, \text{ ਜਿੱਥੇ } B = \frac{1}{|A|}adj\ A$$

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}adj\ A$ (ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ)

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $A.\ adj\ A = |A|\,.\,I$ ਅਤੇ $A^{-1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|A| = 1\,(16 - 9) - 3\,(4 - 3) + 3\,(3 - 4) = 1 \neq 0$

ਹੁਣ $A_{11} = 7$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 0$, $A_{31} = -3$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 1$

ਇਸ ਲਈ $$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A.(adj\ A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| . I$$

ਅਤੇ $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\, A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)^{ï1} = B^{ï1}A^{ï1}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}$

ਕਿਉਂਕਿ $|AB| = ï\, 11 \neq 0$, $(AB)^{ï1}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$(AB)^{ï1} = \frac{1}{|AB|} . adj\,(AB) = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ $|A| = ï\, 11 \neq 0$ ਅਤੇ $|B| = 1 \neq 0$. ਇਸ ਲਈ $A^{ï1}$ ਅਤੇ $B^{ï1}$ ਦੋਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(AB)^{ï1} = B^{ï1} A^{ï1}$ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 26.** ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ਸਮੀਕਰਣ $A^2 - 4A + I = O$, ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ I, $2 \times 2$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ O, $2 \times 2$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $A^{-1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}8 & 12\\ 4 & 8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = O$

ਹੁਣ $A^2 - 4A + I = O$

ਇਸ ਲਈ $A A - 4A = -I$

ਜਾਂ $A\ A (A^{-1}) - 4\ A A^{-1} = -I A^{-1}$ (ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ $A^{-1}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਿਉਂਕਿ $|A| \neq 0$)

ਜਾਂ $A (A A^{-1}) - 4I = -A^{-1}$

ਜਾਂ $AI - 4I = -A^{-1}$

ਜਾਂ $A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

## ਅਭਿਆਸ 4.5

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ (adjoint) ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 5\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3 ਅਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 4 ਵਿੱਚ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $A (adj\ A) = (adj\ A).A = |A|.I$ ਹੈ।

**3.** $\begin{bmatrix}2 & 3\\ -4 & -6\end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5 ਤੋਂ 11 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰੇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ (ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

**5.** $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

**8.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

**11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

**12.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)^{\text{ï}1} = B^{\text{ï}1} A^{\text{ï}1}$ ਹੈ।

**13.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $A^2 \text{ ï } 5A + 7I = O$ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $A^{\text{ï}1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**14.** ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਲਈ $a$ ਅਤੇ $b$ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $A^2 + aA + bI = O$ ਹੋਵੇ।

**15.** ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਲਈ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $A^3 \text{ ï } 6A^2 + 5A + 11\,I = O$ ਹੈ।

ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $A^{\text{ï}1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**16.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $A^3 \text{ ï } 6A^2 + 9A \text{ ï } 4I = O$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $A^{\text{ï}1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**17.** ਜੇਕਰ A, $3 \times 3$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $|adj\ A|$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

**18.** ਜੇਕਰ A, ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $\det(A^{-1})$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\det(A)$ (B) $\dfrac{1}{\det(A)}$ (C) 1 (D) 0

## 4.7 ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ (Applications of Determinants and Matrices)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਅਗਿਆਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਅਤੇ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਸੰਗਤਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸੰਗਤ ਪ੍ਰਣਾਲੀ : ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ (ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ) ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਅਸੰਗਤ ਪ੍ਰਣਾਲੀ : ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਅਸੰਗਤ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

*ਟਿੱਪਣੀ* ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰਹਾਂਗੇ।

### 4.7.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੁਆਰਾ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ* (*Solution of a system of linear equations using inverse of a matrix*)

ਆਓ ਅਸੀਂ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਉਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

ਤਦ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ $AX = B$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

**ਸਥਿਤੀ 1.** ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਭਾਵ $|A| \neq 0$ ਤਦ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $AX = B$ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad (A^{-1} \text{ ਨਾਲ ਪੂਰਵ ਗੁਣਨ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad (\text{ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣਨ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$IX = A^{-1}B$$

ਜਾਂ $$X = A^{-1}B$$

ਇਹ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਵਿਧੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

**ਸਥਿਤੀ 2.** ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਦ $|A| = 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $(adj\,A)\,B$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $(adj\,A)\,B \neq O$, (O ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ), ਤਦ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਅਸੰਗਤ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $(adj\,A)\,B = O$, ਤਦ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅਨੰਤ ਹੱਲ ਹੋਣਗੇ ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

**ਉਦਾਹਰਣ 27.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$2x + 5y = 1$$
$$3x + 2y = 7$$

**ਹੱਲ :** ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ $AX = B$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $|A| = -11 \neq 0$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ਭਾਵ $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$x = 3, y = -1$$

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$

ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ AX = B ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$|A| = 3(2 - 3) + 2(4 + 4) + 3(-6 - 4) = -17 \neq 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -8, \quad A_{13} = -10$$
$$A_{21} = -5, \quad A_{22} = -6, \quad A_{23} = 1$$
$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = 9, \quad A_{33} = 7$$

ਇਸ ਲਈ $A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

ਅਤੇ $X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $x = 1, y = 2$ ਤੇ $z = 3$

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤੀਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ 11 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦੁੱਗਣਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰੋ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $x$, $y$ ਅਤੇ $z$, ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਤਦ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$x + y + z = 6$$
$$y + 3z = 11$$
$$x + z = 2y$$

ਜਾਂ $$x \text{ ï } 2y + z = 0$$

ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ A X = B ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ਹੈ।}$$

ਜਿੱਥੇ $|\mathrm{A}| = 1(1+6) + 0 + 1(3-1) = 9 \neq 0$ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ *adj* A ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\mathrm{A}_{11} = 1\,(1 + 6) = 7, \qquad \mathrm{A}_{12} = \text{ï }(0 \text{ ï } 3) = 3, \qquad \mathrm{A}_{13} = \text{ï } 1$$
$$\mathrm{A}_{21} = \text{ï }(1 + 2) = \text{ï } 3, \qquad \mathrm{A}_{22} = 0, \qquad \mathrm{A}_{23} = \text{ï }(\text{ï } 2 \text{ ï } 1) = 3$$
$$\mathrm{A}_{31} = (3 \text{ ï } 1) = 2, \qquad \mathrm{A}_{32} = \text{ï }(3 \text{ ï } 0) = \text{ï } 3, \qquad \mathrm{A}_{33} = (1 \text{ ï } 0) = 1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$adj\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 7 & \text{ï}3 & 2 \\ 3 & 0 & \text{ï}3 \\ \text{ï}1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\mathrm{A}^{\text{ï}1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\, adj.\,(\mathrm{A}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ਕਿਉਂਕਿ $$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{\text{ï}1}\,\mathrm{B}$$

$$\mathrm{X} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42-33+0 \\ 18+\ 0+0 \\ -6+33+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$x = 1, y = 2, z = 3$$

## ਅਭਿਆਸ 4.6

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀਆਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕਰਣ ਕਰੋ।

**1.** $x + 2y = 2$
$2x + 3y = 3$

**2.** $2x - y = 5$
$x + y = 4$

**3.** $x + 3y = 5$
$2x + 6y = 8$

**4.** $x + y + z = 1$
$2x + 3y + 2z = 2$
$ax + ay + 2az = 4$

**5.** $3x - y - 2z = 2$
$2y - z = -1$
$3x - 5y = 3$

**6.** $5x - y + 4z = 5$
$2x + 3y + 5z = 2$
$5x - 2y + 6z = -1$

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਤੋਂ 14 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰੋ।

**7.** $5x + 2y = 4$
$7x + 3y = 5$

**8.** $2x - y = -2$
$3x + 4y = 3$

**9.** $4x - 3y = 3$
$3x - 5y = 7$

**10.** $5x + 2y = 3$
$3x + 2y = 5$

**11.** $2x + y + z = 1$
$x - 2y - z = \frac{3}{2}$
$3y - 5z = 9$

**12.** $x - y + z = 4$
$2x + y - 3z = 0$
$x + y + z = 2$

**13.** $2x + 3y + 3z = 5$
$x - 2y + z = -4$
$3x - y - 2z = 3$

**14.** $x - y + 2z = 7$
$3x + 4y - 5z = -5$
$2x - y + 3z = 12$

**15.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $A^{-1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ। $A^{-1}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।
$2x - 3y + 5z = 11$
$3x + 2y - 4z = -5$
$x + y - 2z = -3$

**16.** 4 kg ਪਿਆਜ, 3 kg ਕਣਕ ਅਤੇ 2 kg ਚਾਵਲ ਦਾ ਮੁੱਲ Rs 60 ਹੈ। 2 kg ਪਿਆਜ, 4 kg ਕਣਕ ਅਤੇ 6 kg ਚਾਵਲ ਦਾ ਮੁੱਲ 90 ਰੁ: ਹੈ। 6kg ਪਿਆਜ, 2 kg ਅਤੇ 3 kg ਚਾਵਲ ਦਾ ਮੁੱਲ 70 ਰੁ: ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤੀ kg ਪਤਾ ਕਰੋ।

## *ਫੁੱਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ (Miscellancous Examples)*

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਜੇਕਰ $a, b, c$ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਭਿੰਨ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ।

ਹੱਲ : $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ’ਤੇ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 ï R_1$, ਅਤੇ $R_3 \to R_3 ï R_1$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ’ਤੇ)

$= (a+b+c)\,[(c ï b)(b ï c) ï (a ï c)(a ï b)]$ ($C_1$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ ’ਤੇ)

$= (a+b+c)(ï a^2 ï b^2 ï c^2 + ab + bc + ca)$

$$= \frac{-1}{2}(a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 ï 2ab ï 2bc ï 2ca)$$

$$= \frac{-1}{2}(a+b+c)[(a ï b)^2 + (b ï c)^2 + (c ï a)^2]$$

ਜੋ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ $a + b + c > 0$ ਅਤੇ $(a ï b)^2 + (b ï c)^2 + (c ï a)^2 > 0$)

ਉਦਾਹਰਣ 31. ਜੇਕਰ $a, b, c$ ਅੰਕ ਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੈ ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2y+4 & 5y+7 & 8y+a \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix}$$

ਹੱਲ : $R_1 \to R_1 + R_3 ï 2R_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ’ਤੇ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix} = 0$$ (ਕਿਉਂਕਿ $2b = a + c$)

ਉਦਾਹਰਣ 32. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x+y+z)^3$$

ਹੱਲ : ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ $R_1 \to xR_1$, $R_2 \to yR_2$, $R_3 \to zR_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਅਤੇ $xyz$, ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x(y+z)^2 & x^2y & x^2z \\ xy^2 & y(x+z)^2 & y^2z \\ xz^2 & yz^2 & z(x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$C_1$ , $C_2$ ਅਤੇ $C_3$ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $x, y, z$ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਾਹਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ

$$\Delta = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2$ï $C_1$, $C_3 \to C_3$ï $C_1$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 \text{ ï } (y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 \\ y^2 & (x+z)^2-y^2 & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)^2 \text{ ï } z^2 \end{vmatrix}$$

ਹੁਣ $C_2$ ਅਤੇ $C_3$ ਨਾਲ $(x+y+z)$ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਾਹਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x-(y+z) & x-(y+z) \\ y^2 & (x+z)-y & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)-z \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1$ ï $(R_2 + R_3)$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} 2yz & -2z & -2y \\ y^2 & x-y+z & 0 \\ z^2 & 0 & x+y \text{ ï } z \end{vmatrix}$$

$C_2 \to (C_2 + \frac{1}{y}\ C_1)$ ਅਤੇ $C_3 \to \left(C_3 + \frac{1}{z}C_1\right)$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = (x + y + z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & 0 & 0 \\ y^2 & x+z & \frac{y^2}{z} \\ z^2 & \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix}$$

$R_1$ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ

$\Delta = (x + y + z)^2\ (2yz)\ [(x + z)\ (x + y) - yz] = (x + y + z)^2\ (2yz)\ (x^2 + xy + xz)$

$= (x + y + z)^3\ (2xyz)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 33. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$x - y + 2z = 1$$
$$2y - 3z = 1$$
$$3x - 2y + 4z = 2$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਗੁਣਨਫਲ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

ਹੁਣ ਦਿੱਤੇ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} 1 & \text{ï}1 & 2 \\ 0 & 2 & \text{ï}3 \\ 3 & \text{ï}2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 0, y = 5$ ਅਤੇ $z = 3$

**ਉਦਾਹਰਣ 34.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

**ਹੱਲ :** ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta$ ਤੇ $R_1 \to R_1 \text{ ï } x R_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$$D = \begin{vmatrix} a(1-x^2) & c(1-x^2) & p(1-x^2) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$= (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 \text{ ï } x R_1$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

## *ਅਧਿਆਇ 4 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**1.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$, $\theta$ ਤੋਂ ਸਵਤੰਤਰ ਹੈ।

**2.** ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

**3.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**4.** ਜੇਕਰ $a, b$ ਅਤੇ $c$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$$

ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ $a + b + c = 0$ ਜਾਂ $a = b = c$ ਹੈ।

**5.** ਜੇਕਰ $a \neq 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

**6.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

**7.** ਜੇਕਰ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $(AB)^{-1}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**8.** ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$  (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

**9.** $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**10.** $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ 11 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

**11.** $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \gamma)$

**12.** $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1 + pxyz)(x - y)(y - z)(z - x)$,

**13.** $\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$

**14.** $\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1$

**15.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

**16.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$$

$$\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1$$

$$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2$$

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 17 ਤੋਂ 19 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**17.** ਜੇਕਰ $a, b, c$ ਅੰਕ ਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ :

(A) 0 (B) 1 (C) $x$ (D) $2x$

**18.** ਜੇਕਰ $x, y, z$ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A=\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੈ :

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**19.** ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, ਜਿੱਥੇ $0 \le \theta \le 2\pi$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ :

(A) $\det(A) = 0$  (B) $\det(A) \in (2, \infty)$

(C) $\det(A) \in (2, 4)$  (D) $\det(A) \in [2, 4]$.

## ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{11}]_{1\times 1}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|a_{11}|_{1\times 1} = a_{11}$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}$ ï $a_{12}\, a_{21}$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ($R_1$ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ 'ਤੇ)

  ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ **A** ਦੇ ਲਈ, |**A**| ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

- $|A'| = |A|$, ਜਿੱਥੇ $A' = A$ ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ ਜਾਂ ਥੰਮਾਂ ਨੂੰ ਪਰਸਪਰ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਕੋਈ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ ਜਾਂ ਥੰਮ ਸਮਾਨ ਜਾਂ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਨੂੰ ਅਚਲ $k$, ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ $k$ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ $k$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੇਵਲ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ

ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ $k$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ।

- ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{3\times3}$,ਤਾਂ $|k.A| = k^3|A|$
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਉਸ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਦੋ ਜਾਂ ਵਧੇਰੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ ਦੇ ਸਮਗੁਣਜ ਹੋਰ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ਅਤੇ $(x_3, y_3)$ ਸਿਖਰਾਂ ਵਾਲੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਇੱਕ ਅੰਸ਼ $a_{ij}$ ਦਾ ਲਘੂ, $i$ ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ $j$ ਵਾਂ ਥੰਮ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $M_{ij}$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- $a_{ij}$ ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ $|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ

  $a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$
- ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਹਿਖੰਡਨ $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $a_{ij}$ ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ $A_{ij}$ ਹੈ।
- $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$, ਜਿੱਥੇ A, $n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਵਿਚਿੱਤਰ ਜਾਂ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਜਾਂ $|A| \neq 0$

- ਜੇਕਰ $AB = BA = I$, ਜਿੱਥੇ B ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਦ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ B ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $A^{-1} = B$ ਜਾਂ $B^{-1} = A$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(A^{-1})^{-1} = A$
- ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ।
- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(adj\, A)$
- ਜੇਕਰ
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$
ਤਦ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ $A X = B$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

- ਸਮੀਕਰਣ $AX = B$ ਦਾ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ $X = A^{-1} B$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $|A| \neq 0$
- ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ $AX = B$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ

  (i) ਜੇਕਰ $|A| \neq 0$, ਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

  (ii) ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਅਤੇ $(adj\, A)\, B \neq O$, ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

  (iii) ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਅਤੇ $(adj\, A)\, B = O$, ਤਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

## *ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ*

ਗਣਨਾ ਬੋਰਡ ਤੇ ਛੜਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕੁਝ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਅਗਿਆਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੀ ਚੀਨੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਵਿਲੱਖਣ ਦੀ ਸਾਧਾਰਣ ਵਿਧੀ ਦੀ ਖੋਜ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਛੜਾਂ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਉੱਚਿਤ ਵਿਵਸਥਾ ਕ੍ਰਮ ਵਰਗੀ ਸੀ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਸਰਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਥੰਮਾਂ ਜਾਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਘਟਾਉਣ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਪੈਦਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਚੀਨੀ ਪਹਿਲੇ ਵਿਚਾਰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਸਨ (dMikami, China, pp 30, 93).

ਸਤਾਰਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਮਹਾਨ ਜਪਾਨੀ ਗਣਿਤਕਾਰ Seki Kowa ਦੁਆਰਾ 1683 ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਤ ਪੁਸਤਕ 'Kai Fukudai no Ho' ਨਾਲ ਗਿਆਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਪਸਾਰ ਦਾ ਗਿਆਨ ਸੀ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੇਵਲ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਵਿਲੱਖਣ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਪ੍ਰੰਤੂ ਯੁਗਮਤ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਸਿੱਧਾ

ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਸੀ। óT. Hayashi, ñThe Fakudoi and Determinants in Japanese Mathematics,ò in the proc. of the Tokyo Math. Soc., V.

Vendermonde ਪਹਿਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਸਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਸਵਤੰਤਰ ਫਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ , ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਨਿਆ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਸੰਸਥਾਪਕ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। Laplace (1772) ਨੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਇਸ ਦੇ ਪੂਰਕ ਲਘੂਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਕੇ ਪਸਾਰਣ ਦੀ ਵਿਆਪਕ ਵਿਧੀ ਦਿੱਤੀ। 1773 ਵਿੱਚ Lagrange ਨੇ ਦੂਸਰੇ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਦਰਜੇ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਨੂੰ ਵਿਹਾਰਿਆ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। 1801 ਵਿੱਚ Gauss ਨੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ।

ਅਗਲੇ ਮਹਾਨ ਯੋਗਦਾਨ ਦੇਣ ਵਾਲੇ Jacques - Philippe - Marie Binet, (1812) ਸੀ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ $m$-ਥੰਮਾ ਅਤੇ $n$-ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕੀਤਾ ਜੋ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ $m = n$ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਫਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਉਸੇ ਦਿਨ Cauchy (1812) ਨੇ ਵੀ ਉਸੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਤੇ ਖੋਜ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਅੱਜ ਦੇ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ Binet ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਗੁਣਨਫਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਦਿੱਤਾ।

ਇਹਨਾਂ ਸਿਧਾਂਤਾ ਤੇ ਮਹਾਨਤਮ ਯੋਗਦਾਨ ਵਾਲੇ Carl Gustav Jacob Jacobi ਸੀ। ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਸ਼ਬਦ ਨੂੰ ਅੰਤਿਮ ਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ।

ਅਧਿਆਇ 5

# ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਅਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਏਬਿਲਿਟੀ (Continuity and Differentiability)

❖ *The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking." — ALBERT EINSTEIN* ❖

## 5.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

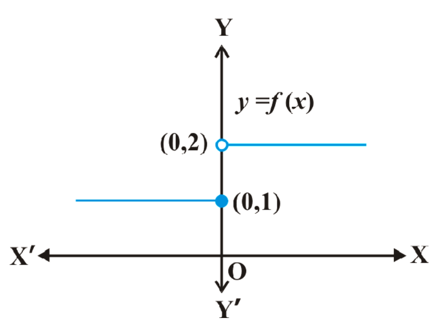
ਇਹ ਅਧਿਆਇ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਜਮਾਤ 11 ਵਿੱਚ ਪਏ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਏਸ਼ਨ (differentiation) ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰਤਾ (continuity),ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਏਬਿਲਿਟੀ (differentiability) ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ (inverse trigonometric) ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨਾ ਵੀ ਸਿੱਖਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਨਵੇਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਚਲ ਘਾਤੀ (exponential) ਅਤੇ ਲਘੂਗਣਕ (logarithmic) ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਾਨੂੰ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀਆਂ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਅਲ ਕੇਲਕੁਲਸ (differential calculus) ਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਜਿਆਮਿਤੀ ਰੂਪ ਤੋਂ (ਸਪਸ਼ਟ)(obvious) ਕੁਝ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ, ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਮੂਲ ਪ੍ਰਮੇਯ (theorems) ਨੂੰ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

**Sir Issac Newton (1642-1727)**

## 5.2 ਲਗਾਤਾਰਤਾ (Continuity)

ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਸੰਕਲਪਣਾ ਦਾ ਕੁਝ ਅਨੁਮਾਨ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਭਾਗ ਨੂੰ ਦੋ ਗੈਰ ਰਸਮੀ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ਼ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ਜੇਕਰ } x \le 0 \\ 2, \text{ਜੇਕਰ } x > 0 \end{cases}$$




ਚਿੱਤਰ 5.1

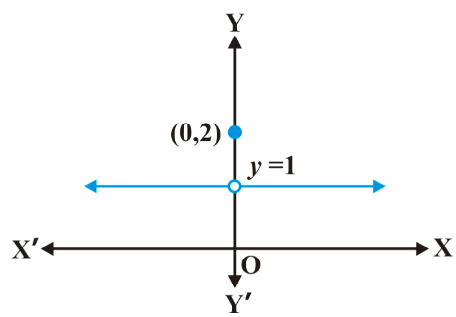
ਇਹ ਫਲਨ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ (real line) ਦੇ

ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੋਈ ਵੀ ਇਸ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਤੱਤ ਕੱਢ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $x = 0$ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, $x$&ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੋਰ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੀਮਤਾਂ ਵੀ $x = 0$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੱਗਭੱਗ ਸਮਾਨ ਹਨ। 0 ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਬਿੰਦੂ ਉਹ ਹੈ ਭਾਵ ï 0.1, ï 0.01, ï 0.001, ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ 1 ਹੈ ਅਤੇ 0 ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ 0.1, 0.01, 0.001, ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਹੈ। ਸੱਜਾ ਅਤੇ ਖੱਬਾ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (limits) ਦੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸਮਾਨ (ਸੰਪਾਤੀ) ਨਹੀਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ। (ਬਰਾਬਰ ਹੈ)A ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰ ਦਾ ਮਾਨ ਭਾਵ ਕਲਮ ਨੂੰ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸਤਹਿ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਚੁੱਕੇ, ਨਹੀਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਕਲਮ ਨੂੰ ਚੁੱਕਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਉਦੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਜ਼ੀਰੋ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸਿਉਂ (ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾਣ ਲਈ) ਆਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਫਲਨ $x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ ਥੱਲੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ਜੇਕਰ } x \neq 0 \\ 2, \text{ ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$$

ਇਹ ਅਲੇਖ ਵੀ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। $x = 0$ ਤੇ ਦੋਨੋਂ ਹੀ, ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਕੀਮਤ 2 ਹੈ, ਜੋ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੀ ਕੀਮਤਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.2

ਦੁਬਾਰਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਕਲਮ ਚੁੱਕੇ ਅਸੀਂ ਨਹੀਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਉਦਾਹਰਨ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੋਈ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਸ&ਪਾਸ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸਤਹਿ ਤੋਂ ਕਲਮ ਚੁੱਕੇ ਬਿਨਾਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ (precisely)] ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਮੰਨ ਲਉ $f$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕਿਸੀ ਉਪ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ $c$ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤਾਂ $f$ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \text{ ਹੈ।}$$

ਵਿਸਤਰਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਜੇਕਰ $x = c$ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਦੀ ਜੇਕਰ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ ਸਾਰੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ $x = c$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ

ਕਿ ਜੇਕਰ $x = c$ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਵੀ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਥੱਲੇ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਫਲਨ $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਫਲਨ $x = c$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਕੀਮਤ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $c$ ਤੇ $f$ ਟੁੱਟਵਾਂ (discontinuous) ਹੈ ਅਤੇ $c$ ਨੂੰ $f$ ਦਾ ਇੱਕ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ (point of discontinuity) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 2x + 3$ ਦੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਪਰਖ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਕਿ ਫਲਨ, $x = 1$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ 5 ਹੈ। ਹੁਣ ਫਲਨ ਦੀ $x = 1$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਾਫ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+3) = 2(1)+3 = 5 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ $$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 = f(1)$$

ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਪਰਖ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = x^2$, $x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ 0 ਹੈ। ਹੁਣ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

ਇਸ ਲਈ $x = 0$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = |x|$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ x, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 0 \end{cases}$$

ਸਾਫ਼ ਹੈ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $f(0) = 0$ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਤੇ $f$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (ï\ x) = 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 0 ਤੇ $f$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 0$ ਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 0$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਫਲਨ

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{ਜੇਕਰ } x \neq 0 \\ 1, & \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $x = 0$ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ 1 ਹੈ। ਜਦੋਂ $x \neq 0$, ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ ਬਹੁਪਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 + 3) = 0^3 + 3 = 3$$

ਕਿਉਂਕਿ $x = 0$ ਤੇ $f$ ਦੀ ਸੀਮਾ, $f(0)$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵੀ ਪੱਕੇ ਤੌਰ ਤੇ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਕੇਵਲ $x = 0$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੇ ਅਚਲ ਫਲਨ $f(x) = k$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਹ ਫਲਨ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ $k$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $c$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $c$ ਦੇ ਲਈ $f(c) = k = \lim_{x \to c} f(x)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ $f$ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਤੱਤਸਮਕ ਫਲਨ (Identity function) $f(x) = x$, ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਫ ਹੈ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $c$ ਦੇ ਲਈ $f(c) = c$ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\lim_{x\to c} f(x) = c = f(c)$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ $f$ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਵਧਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੀ, ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ :2. ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $f$ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਕੁਝ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਸਮਝਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $f$ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ $f$ ਦੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ $[a, b]$ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ (end points) $a$ ਅਤੇ $b$ ਸਹਿਤ ਉਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ।

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

ਅਤੇ $f$ ਦਾ $b$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

ਦੇਖੋ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ਅਤੇ $\lim_{x\to b^+} f(x)$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ, ਜੇਕਰ $f$ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਭਾਵ ਜੇਕਰ $f$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਇੱਕ ਤੱਤੀ (Singleton) ਹੈ, ਤਾਂ $f$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਕੀ $f(x) = |x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ?

ਹੱਲ : $f$ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ x, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 0 \end{cases}$

ਉਦਾਹਰਣ 3 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $c$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $c < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$f(c) = ï\ c$$

ਨਾਲ ਹੀ $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (-x) = \text{ï } c \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, ਹੈ, $f$ ਸਾਰੀਆਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ $c$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $c > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f(c) = c$

ਨਾਲ ਹੀ $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, ਇਸ ਲਈ $f$ ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $f$ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਫਲਨ $f(x) = x^3 + x^2$ ï $1$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $f$ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $c$ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $c$ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ $c^3 + c^2$ ï $1$ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (x^3 + x^2 - 1) = c^3 + c^2 - 1$$

ਇਸ ਲਈ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $f$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 9. ਕਿ $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $c$ ਨੂੰ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ :

ਹੁਣ $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

ਨਾਲ ਹੀ, ਕਿਉਂਕਿ $c \neq 0$, ਇਸ ਲਈ, $f(c) = \dfrac{1}{c}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f$ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਸ ਮੌਕੇ ਦਾ ਲਾਭ, ਅਨੰਤਤਾ (infinity) ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਚੁੱਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ਦਾ ਵਿਸਲੇਸ਼ਣ $x = 0$ ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਮਾਨਾਂ ਤੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ 0 ਦੇ ਨੇੜੇ ਦੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਮਸ਼ਹੂਰ ਤਰੀਕੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜ਼ਰੂਰੀ : ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $x = 0$ ਤੇ $f$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਥੱਲੇ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। (ਸਾਰਣੀ 5.1)

ਸਾਰਣੀ 5.1

| $x$ | 1 | 0.3 | 0.2 | $0.1 = 10^{ï 1}$ | $0.01 = 10^{ï 2}$ | $0.001 = 10^{ï 3}$ | $10^{ï n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 3.333... | 5 | 10 | $100 = 10^2$ | $1000 = 10^3$ | $10^n$ |

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ&ਜਿਵੇਂ $x$ ਸੱਜੇ ਤੋਂ 0 ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਉੱਪਰ ਨੂੰ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਚੁਣ ਕੇ, $f(x)$ ਦੇ ਮਾਨ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲੋਂ ਵੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸੂਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

(ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ : 0 ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਧਨਾਤਮਕ ਅਨੰਤ ਹੈ।)A ਇੱਥੇ $+\infty$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ 0 ਤੇ $f$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ)।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ 0 ਤੇ $f$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਸਾਰਨੀ ਨਾਲ ਵਿਸਤਰਿਤ ਸਾਫ਼ ਹੈ।

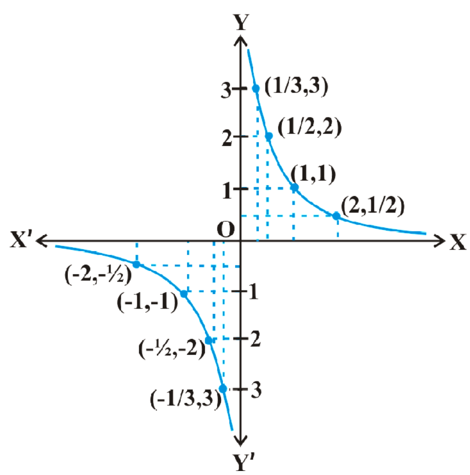
ਸਾਰਣੀ 5.2

| $x$ | ï 1 | ï 0.3 | ï 0.2 | $ï\ 10^{ï 1}$ | $ï\ 10^{ï 2}$ | $ï\ 10^{ï 3}$ | $ï\ 10^{ï n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ï 1 | ï 3.333... | ï 5 | ï 10 | $ï\ 10^2$ | $ï\ 10^3$ | $ï\ 10^n$ |

ਸਾਰਨੀ 5.2 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਚੁਣ ਕੇ, $f(x)$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲੋਂ ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤੀਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

(ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ : 0 ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਨੰਤ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦੇਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ï $\infty$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ 0 ਤੇ $f$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ)A ਚਿੱਤਰ 5.3 ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਤੱਥਾਂ ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਪ੍ਰਗਟਾਉਣਾ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 5.3

ਉਦਾਹਰਨ 10. ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x \le 1 \\ x-2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਫਲਨ $f$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 1. ਜਦੋਂ $c < 1$, ਤੋਂ $f(c) = c + 2$ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} x+2 = c+2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 2. ਜੇਕਰ $c > 1$, ਤਾਂ $f(c) = c$ ï $2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} (x$ ï $2) = c$ ï $2 = f(c)$ ਹੈ।

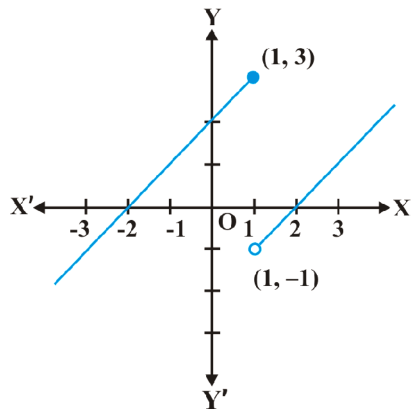
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਜਿੱਥੇ $x > 1$ ਹੈ, $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 3. ਜੇਕਰ $c = 1$, ਤਾਂ $x = 1$ ਤੇ $f$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਭਾਵ $\lim\limits_{x\to 1^{ï}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^{ï}} (x+2) = 1+2 = 3$ ਹੈ।

$x = 1$ ਤੇ $f$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਭਾਵ

$$\lim_{x\to 1^{+}} f(x) = \lim_{x\to 1^{ï}} (x-2) = 1-2 = -1 \text{ ਹੈ।}$$

ਹੁਣ ਕਿਉਂਕਿ $x = 1$ ਤੇ $f$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੰਪਾਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f$ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਬਿੰਦੂ ਕੇਵਲ $x = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



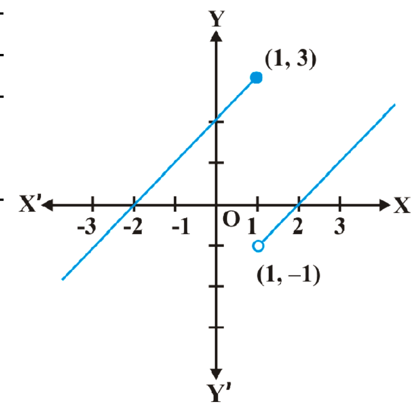

ਚਿੱਤਰ 5.4

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਨਿਮਨ ਲਿਖਿਤ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x < 1 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x = 1 \\ x-2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਪਿਛਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $x \ne 1$ ਦੇ ਲਈ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। $x = 1$ ਦੇ ਲਈ $f$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, $\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^{ï}} (x+2) = 1+2 = 3$ ਹੈ। $x = 1$ ਦੇ ਲਈ $f$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, $\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^{ï}} (x-2) = 1-2 = -1$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $x = 1$ ਤੇ $f$ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ : $x = 1$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f$ ਦਾ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਕੇਵਲ $x = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.5 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.5

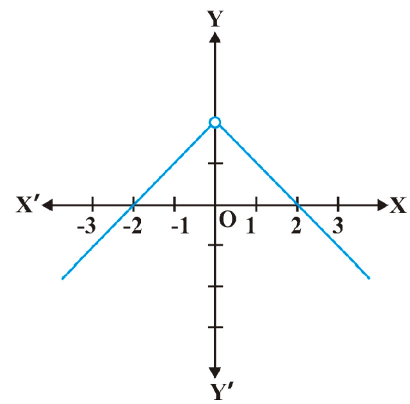
ਉਦਾਹਰਣ 12. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x<0 \\ -x+2, \text{ ਜ਼ੇਕਰ } x>0 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਵਿਚਾਰ ਅਧੀਨ ਫਲਨ 0 ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ

$D_1 \cup D_2$ ਹੈ ਇੱਥੇ $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ ਅਤੇ

$D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ਹੈ।

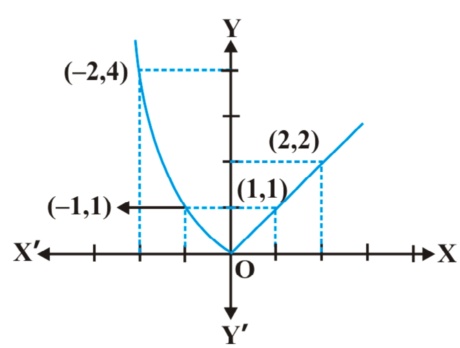


ਚਿੱਤਰ 5.6

ਸੂਰਤ : 1. ਜੇਕਰ $c \in D_1$, ਤਾਂ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} (x+2) =$ $c + 2 = f(c)$ ਇਸ ਲਈ $D_1$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਹੈ।

ਸੂਰਤ:2 .ਜੇਕਰ $c \in D_2$, ਤਾਂ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} (-x+2) =$ ï $c + 2 = f(c)$ ਇਸ ਲਈ $D_2$ ਵਿੱਚ ਵੀ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $f$ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ 5.6 ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਲਮ ਨੂੰ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸਤਹਿ ਤੋਂ ਉਠਾਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਸਾਨੂੰ ਕੇਵਲ ਉਹ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.7

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 0 \\ x^2, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ, ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.7 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਿਰੀਖਣ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਤਿੰਨ ਨਾ ਜੁੜੇ ਉੱਪ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਲਿਆ ਜਾਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ :

$D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$, $D_2 = \{0\}$ ਅਤੇ

$D_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 1. $D_1$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f(x) = x^2$ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $D_1$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ (ਉਦਾਹਰਣ 2 ਦੇਖੋ)

ਸੂਰਤ : 2. $D_3$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f(x) = x$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $D_3$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। (ਉਦਾਹਰਣ 6 ਦੇਖੋ)

ਸੂਰਤ : 3. ਅਸੀਂ ਹੁਣ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਸਲੇਸ਼ਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। 0 ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $f(0) = 0$ ਹੈ। 0 ਤੇ $f$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x \to 0^1} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^2 = 0 \text{ ਹੈ ਅਤੇ}$$

0 ਤੇ $f$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \text{ ਹੈ।}$$

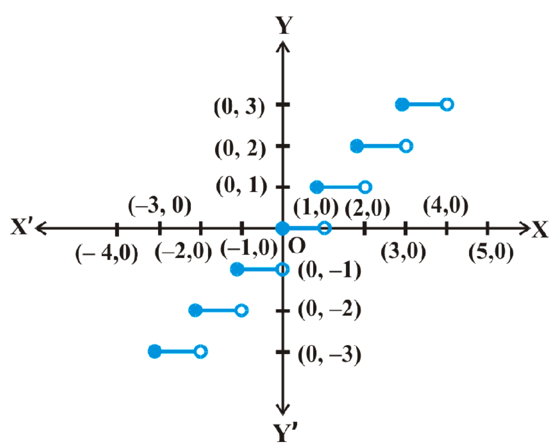
ਇਸ ਲਈ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ਇਸ ਲਈ 0 ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $f$ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ : $f$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਕੋਈ ਫਲਨ $p$, ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਕਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ $n$ ਦੇ ਲਈ $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। $a_i \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $a_n \neq 0$ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $c$ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ $c$ ਤੇ $p$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $c$ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ



ਚਿੱਤਰ 5.8

ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $p$ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਭਾਵ $p$ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. $f(x) = [x]$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਮਹੱਤਮਪੂਰਨ ਅੰਕ ਫਲਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $[x]$ ਉਸ ਮਹੱਤਮਪੂਰਨ ਅੰਕ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ $x$ ਦੇ ਘੱਟ ਜਾਂ ਉਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f$ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ 5.8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਅਜਿਹਾ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ $x$ ਦੇ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਟੁੱਟਣਾਂ ਹੈ। ਥੱਲੇ ਅਸੀਂ ਛਾਣਬੀਣ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ।

ਸੂਰਤ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $c$ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜੋ ਕਿਸੇ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਸਾਫ ਹੈ ਕਿ $c$ ਦੇ ਨੇੜੇ (ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ) ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $[c]$ ਹੈ, ਭਾਵ $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} [x] = [c]$ ਨਾਲ ਹੀ $f(c) = [c]$, ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ, ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਸੂਰਤ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $c$ ਇੱਕ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਛੋਟੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $r > 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ $[c$ ï $r] = c$ ï $1$ ਜਦੋਂ ਕਿ $[c + r] = c$ ਹੈ।

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = c \text{ ï } 1 \text{ ਅਤੇ } \lim_{x\to c^+} f(x) = c$$

ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੀ ਵੀ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਇਹ ਸੀਮਾਵਾਂ $c$ ਲਈ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ, ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ $x$ ਸਾਰੇ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਟੁੱਟਣਾਂ ਹੈ।

### 5.2.1 *ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Algebra of continuous functions)*

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਸੀਮਾ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਸਮਝਣ ਦੇ ਬਾਅਦ, ਅਸੀਂ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਕੁਝ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਤਰਕਸ਼ੀਲ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੋਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਬੀਜਿਕ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਅਤੇ $g$ ਦੋ ਅਜਿਹੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ। ਜੋ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ

(1) $f + g$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(2) $f$ ï $g$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(3) $f \,.\, g$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। (ਜਦੋਂ ਕਿ $g(c) \neq 0$ ਹੈ।)

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ $x = c$ ਤੇ $(f + g)$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] \quad (f + g \text{ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ})$$

$$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \quad (\text{ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੁਆਰਾ})$$

$$= f(c) + g(c) \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } f \text{ ਅਤੇ } g \text{ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ})$$

$$= (f + g)(c) \quad (f + g \text{ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇਸ ਲਈ] $f + g$ ਵੀ $x = c$ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਸਬੂਤ 1 ਦੇ ਬਾਕੀ ਭਾਗ ਦੀ ਉਤਪਤੀ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :*

(i) ਉਪਰੋਕਤ ਭਾਗ (3) ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਭਾਗ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $f$ ਇੱਕ ਅਚਲ ਫਲਨ $f(x) = \lambda$ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ $\lambda$, ਕੋਈ ਅਚੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ $(\lambda \,.\, g)(x) = \lambda \,.\, g(x)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $(\lambda \,.\, g)$ ਵੀ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $\lambda =$ ï 1, ਤਾਂ $f$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੋਂ ਹੀ ï $f$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਿਖਦੀ ਹੈ।

(ii) ਉਪਰੋਕਤ ਭਾਗ (4) ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਭਾਗ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $f$ ਇੱਕ ਅਚਲ ਫਲਨ $f(x) = \lambda$, ਤਾਂ $\frac{\lambda}{g}(x) = \frac{\lambda}{g(x)}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $\frac{\lambda}{g}$ ਵੀ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $g(x) \neq 0$ ਹੈ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $g$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਵਿੱਚ $\frac{1}{g}$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨੋਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਅਨੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਗੱਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ $f$ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},\ q(x) \neq 0$$

ਇੱਥੇ $p$ ਅਤੇ $q$ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹਨ। $f$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੇ $q$ ਦਾ ਮਾਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਉਦਾਹਰਨ 14)] ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਦੇ ਭਾਗ (4) ਦੁਆਰਾ $f$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17. sine ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਇੱਥੇ ਸਿੱਧ ਤਾਂ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਪਰ sine ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਨੇੜੇ ਦੇਖ ਕੇ ਇਹ ਤੱਥ ਆਪੇ ਹੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਦੇਖੋ ਕਿ $f(x) = \sin x$ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $c$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। $x = c + h$ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਜੇਕਰ $x \to c$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $h \to 0$ ਇਸ ਲਈ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c} \sin x \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(c+h) \\
&= \lim_{h\to 0} [\sin c \cos h + \cos c \sin h] \\
&= \lim_{h\to 0} [\sin c \cos h] + \lim_{h\to 0} [\cos c \sin h] \\
&= \sin c + 0 = \sin c = f(c)
\end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ਇਸ ਲਈ $f$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ cosine ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = \tan x$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\cos x \neq 0$, ਭਾਵ $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਹੁਣੇ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ sine ਅਤੇ cosine ਫਲਨ, ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਫਲਨ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ, $x$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ (composition) ਦੇ ਸੰਬੰਧਿਤ, ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਵਿਹਾਰ ਇੱਕ ਦਿਲਚਸਪ ਤੱਤ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $f$ ਅਤੇ $g$ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ

$$(f \text{ o } g)\ (x) = f(g(x)) \text{ ਹੈ।}$$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ $g$ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $f$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਸਬੂਤ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਵਿਅਕਤ)] ਸੰਯੋਜਨ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

**ਪ੍ਰਮੇਯ 2.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਅਤੇ $g$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨਾਂ ਵਾਲੇ (real valued) ਫਲਨ ਹਨ ਕਿ $c$ ਤੇ $(f \text{ o } g)$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ $c$ ਤੇ $g$ ਅਤੇ $g(c)$ ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਤਾਂ $c$ ਤੇ $(f \text{ o } g)$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 19.** ਦਰਸਾਓ ਕਿ $f(x) = \sin(x^2)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵਿਚਾਰ ਅਧੀਨ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਫਲਨ $f$ ਨੂੰ, $g$ ਅਤੇ $h$ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ $(g \text{ o } h)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੋਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $g(x) = \sin x$ ਅਤੇ $h(x) = x^2$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $g$ ਅਤੇ $h$ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 2 ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿ $f$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 20.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f(x) = |1 - x + |x||$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f$, ਜਿੱਥੇ $x$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x$ ਦੇ ਲਈ $g$ ਨੂੰ $g(x) = 1 - x + |x|$ ਅਤੇ $h$ ਨੂੰ $h(x) = |x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਤਾਂ

$$
\begin{aligned}
(h \text{ o } g)(x) &= h(g(x)) \\
&= h(1 - x + |x|) \\
&= |1 - x + |x|| = f(x)
\end{aligned}
$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $h$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਮਾਪ ਅੰਕ ਫਲਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹੋਣ ਕਾਰਨ $g$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਫਲਨ ਹੋਣ ਕਾਰਨ $f$ ਵੀ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 5.1

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = 5x - 3$, $x = 0$, $x = -3$ ਅਤੇ $x = 5$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।
2. $x = 3$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 2x^2 - 1$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।
3. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ :

   (a) $f(x) = x - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}, x \neq 5$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x+5}, x \neq$ ï 5 (d) $f(x) = |x$ ï $5|$

**4.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = x^n$, $x = n$, ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਇੱਥੇ $n$ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

**5.** ਕੀ $f(x) = \begin{cases} x, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq 1 \\ 5, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f$

$x = 0, x = 1,$ ਅਤੇ $x = 2$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਹੈ ?

$f$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ $f$ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

**6.** $f(x) = \begin{cases} 2x+3, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq 2 \\ 2x-3, \text{ ਜੇਕਰ } x > 2 \end{cases}$

**7.** $f(x) = \begin{cases} |x|+3, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq -3 \\ -2x, \text{ ਜੇਕਰ } -3 < x < 3 \\ 6x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 3 \end{cases}$

**8.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, \text{ ਜੇਕਰ } x \neq 0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$

**9.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ -1, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 0 \end{cases}$

**10.** $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 1 \\ x^2+1, \text{ ਜੇਕਰ } x < 1 \end{cases}$

**11.** $f(x) = \begin{cases} x^3-3, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq 2 \\ x^2+1, \text{ ਜੇਕਰ } x > 2 \end{cases}$

**12.** $f(x) = \begin{cases} x^{10}-1, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq 1 \\ x^2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$

**13.** ਕਿ $f(x) = \begin{cases} x+5, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq 1 \\ x-5, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ?

ਫਲਨ $f$, ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਇੱਥੇ $f$ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ?

**14.** $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ ਜੇਕਰ } 0 \leq x \leq 1 \\ 4, \text{ ਜੇਕਰ } 1 < x < 3 \\ 5, \text{ ਜੇਕਰ } 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$

**15.** $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } 0 \leq x \leq 1 \\ 4x, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$

**16.** $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{ਜੇਕਰ } x \le -1 \\ 2x, & \text{ਜੇਕਰ } -1 < x \le 1 \\ 2, & \text{ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$

**17.** $a$ ਅਤੇ $b$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{ਜੇਕਰ } x \le 3 \\ bx+3, & \text{ਜੇਕਰ } x > 3 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = 3$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

**18.** $\lambda$ ਦੀ ਕਿਸੀ ਕੀਮਤ ਲਈ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{ਜੇਕਰ } x \le 0 \\ 4x+1, & \text{ਜੇਕਰ } x > 0 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। $x = 1$ ਤੇ ਇਸ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

**19.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ $g(x) = x$ ï $[x]$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ $[x]$ ਉਸ ਮਹੱਤਮਪੂਰਣ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜੋ $x$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ $x$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

**20.** ਕੀ $f(x) = x^2$ ï $\sin x + 5$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = \pi$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ?

**21.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ (b) $f(x) = \sin x$ ï $\cos x$

(c) $f(x) = \sin x \,.\, \cos x$

**22.** cosine, cosecant, secant ਅਤੇ cotangent ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

**23.** $f$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ਜੇਕਰ } x < 0 \\ x+1, & \text{ਜੇਕਰ } x \ge 0 \end{cases}$$

**24.** ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{ਜੇਕਰ } x \ne 0 \\ 0, & \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

**25.** $f$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $f$ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x, & \text{ਜੇਕਰ } x\neq 0\\ -1, & \text{ਜੇਕਰ } x=0\end{cases}$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 26 ਤੋਂ 29 ਵਿੱਚ $k$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ Indicated ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ।

**26.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}, & \text{ਜੇਕਰ } x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 3, & \text{ਜੇਕਰ } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x=\dfrac{\pi}{2}$ ਤੇ

**27.** $f(x)=\begin{cases}kx^2, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq 2\\ 3, & \text{ਜੇਕਰ } x>2\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x=2$ ਤੇ

**28.** $f(x)=\begin{cases}kx+1, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq\pi\\ \cos x, & \text{ਜੇਕਰ } x>\pi\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x=\pi$ ਤੇ

**29.** $f(x)=\begin{cases}kx+1, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq 5\\ 3x-5, & \text{ਜੇਕਰ } x>5\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x=5$ ਤੇ

**30.** $a$ ਅਤੇ $b$ ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

$$f(x)=\begin{cases}5, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq 2\\ ax+b, & \text{ਜੇਕਰ } 2<x<10\\ 21, & \text{ਜੇਕਰ } x\geq 10\end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

**31.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f(x)=\cos(x^2)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

**32.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f(x)=|\cos x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

**33.** ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ $\sin|x|$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

**34.** $f(x)=|x|$ ï $|x+1|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੁੱਟ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

## 5.3. ਡਿਫਰੈਸ਼ਿਏਬਿਲਟੀ (Differentiability)

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਸਿਖਾਏ ਗਏ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਸਮਰਣ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ (Derivative) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $c$ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। $c$ ਦਾ $f$ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

ਜੇਕਰ ਇਸ ਸੀਮਾ ਦੀ ਅਸਤਿਤਵ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $c$ ਤੇ $f$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ $f'(c)$ ਜਾਂ $\frac{d}{dx}(f(x))|_c$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਜਦੋਂ ਵੀ ਇਸ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ, $f$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। $f$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ $f'(x)$ ਜਾਂ $\frac{d}{dx}(f(x))$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਤੇ ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ $\frac{dy}{dx}$ ਜਾਂ $y'$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ¶$x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ¸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $f'(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ :

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

(2) $(uv)' = u'v + uv'$ (ਲੈਬਨੀਜ ਜਾਂ ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ)

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, ਜਿੱਥੇ $v \neq 0$ (ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਾਰਨੀ ਦੇ ਕੁਝ ਮਿਆਰੀ (standard) ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵਾ ਦੀ ਸੂਚੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ :

ਸਾਰਣੀ 5.3

| $f(x)$ | $x^n$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\tan x$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $nx^{n-1}$ | $\cos x$ | $-\sin x$ | $\sec^2 x$ |

ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸੁਝਾਅ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।" ਹੁਣ ਸੁਭਾਵਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਬਿਲਕੁਲ ਢੁੱਕਵਾਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਵੀ। ਜੇਕਰ $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $c$ ਤੇ $f$ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਕਿਸੇ

ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੇ ਫਲਨ $f$ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਦੋਨੋਂ ਸੀਮਾਵਾਂ $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ਅਤੇ $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ਸੀਮਿਤ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੋਵੇ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ $a$ ਅਤੇ $b$ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਕਿ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ $a$ ਅਤੇ $b$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੀ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲ $(a, b)$ ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੰਤਰਾਲ $(a, b)$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੇਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ।

**ਪ੍ਰਮੇਯ 3.** ਜੇਕਰ ਫਲਨ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਵੀ ਹੈ।

**ਸਬੂਤ :** ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੇ $f$ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ ਇਸ ਲਈ :

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$$

ਪਰ $x \neq c$ ਦੇ ਲਈ

$$f(x) ï\ f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} . (x-c)$$

ਇਸ ਲਈ
$$\lim_{x \to c} [f(x)-f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} . (x-c)\right]$$

ਜਾਂ
$$\lim_{x \to c} [f(x)] - \lim_{x \to c} [f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right] . \lim_{x \to c} [(x-c)]$$
$$= f'(c) \,.\, 0 = 0$$

ਜਾਂ
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

**ਉਪ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.** ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਵਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਕਥਨ (converse) ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x) = |x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ

ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{ ਹੈ।}$$

ਕਿਉਂਕਿ 0 ਤੇ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 0 ਤੇ $f$ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f$ ਇੱਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

### 5.3.1 *ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ* (*Differentials of composite functions*)

ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ ਦੁਆਰਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ $f$ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਇੱਥੇ

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ $(2x + 1)^3$ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਥੱਲੇ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx}\left[(2x+1)^3\right] \\
&= \frac{d}{dx}(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) \\
&= 24x^2 + 24x + 6 \\
&= 6\,(2x + 1)^2
\end{aligned}$$

ਹੁਣ, ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ

$$f(x) = (h \circ g)(x)$$

ਇੱਥੇ $g(x) = 2x + 1$ ਅਤੇ $h(x) = x^3$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $t = g(x) = 2x + 1$. ਤਾਂ $f(x) = h(t) = t^3$.

ਇਸ ਲਈ : $\frac{df}{dx} = 6\,(2x + 1)^2 = 3(2x + 1)^2 \,.\, 2 = 3t^2 \,.\, 2 = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

ਇਸ ਦੂਸਰੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਲਾਭ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਈ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(2x + 1)^{100}$ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨਾ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਚਰਚਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਉਪਚਾਰਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਨੂੰ ਲੜੀ ਨਿਯਮ (chain rule) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. **(ਲੜੀ ਨਿਯਮ)** ਮੰਨ ਲਉ $f$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ $u$ ਅਤੇ $v$ ਦੋਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ; ਭਾਵ $f = v \text{ o } u$. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $t = u(x)$ ਅਤੇ, ਜੇਕਰ $\frac{dt}{dx}$ ਅਤੇ $\frac{dv}{dt}$ ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜੋ ਤਿੰਨ ਫਲਨ $u, v$ ਅਤੇ $w$ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ, ਭਾਵ $f = (w \text{ o } u) \text{ o } v$ ਹੈ, ਜੇਕਰ $t = u(x)$ ਅਤੇ $s = v(t)$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dt}(w \text{o} u) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਪਾਠਕ ਹੋਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਸੂਤਰਬੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. $f(x) = \sin (x^2)$ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $u(x) = x^2$ ਅਤੇ $v(t) = \sin t$ ਹੈ ਤਾਂ

$$f(x) = (v \text{ o } u)(x) = v(u(x)) = v(x^2) = \sin x^2$$

$t = u(x) = x^2$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\frac{dv}{dt} = \cos t$ ਅਤੇ $\frac{dt}{dx} = 2x$ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਵੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \,.\, 2x$$

ਸਧਾਰਨ ਅਭਿਆਸ ਨਾਲ ਅਖੀਰਲੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ $x$ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰਨ ਦਾ ਰਿਵਾਜ਼ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{df}{dx} = \cos t \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

ਵਿਕਲਪ : ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਵੀ ਇਸ ਦੀ ਕੀਮਤ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਥੱਲੇ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ ਹੈ,

$$y = \sin (x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x^2)$$

$$= \cos x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \cos x^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 22. $\tan(2x+3)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \tan(2x+3)$, $u(x) = 2x + 3$ ਅਤੇ $v(t) = \tan t$ ਹੈ।

$$(v \text{ o } u)(x) = v(u(x)) = v(2x+3) = \tan(2x+3) = f(x)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $f$ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਜੇਕਰ $t = u(x) = 2x + 3$. ਤਾਂ $\frac{dv}{dt} = \sec^2 t$ ਅਤੇ $\frac{dt}{dx} = 2$ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਹੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ :

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 2\sec^2(2x+3)$$

ਉਦਾਹਰਣ 23. $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $\sin(\cos(x^2))$ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ $f(x) = \sin(\cos(x^2))$ , $u$, $v$ ਅਤੇ $w$, ਤਿੰਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $f(x) = (w \text{ o } v \text{ o } u)(x)$, ਜਿੱਥੇ $u(x) = x^2$, $v(t) = \cos t$ ਅਤੇ $w(s) = \sin s$ ਹੈ। $t = u(x) = x^2$ ਅਤੇ $s = v(t) = \cos t$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{dw}{ds} = \cos s, \frac{ds}{dt} = -\sin t$ ਅਤੇ $\frac{dt}{dx} = 2x$ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਦੀ, $x$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ : ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਦੁਆਰਾ।

$$\frac{df}{dx} = \frac{dw}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = (\cos s)\ (-\sin t)\ (2x) = -2x \sin x^2 \cos(\cos x^2)$$

ਵਿਕਲਪ :

$$y = \sin(\cos x^2)$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(\cos x^2) = \cos(\cos x^2)\ \frac{d}{dx}(\cos x^2)$$

$$= \cos(\cos x^2)\ (-\sin x^2)\ \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -\sin x^2 \cos(\cos x^2)\ (2x)$$

$$= -2x \sin x^2 \cos(\cos x^2)$$

## ਅਭਿਆਸ 5.2

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 8 ਵਿੱਚ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**1.** $\sin (x^2 + 5)$ **2.** $\cos (\sin x)$ **3.** $\sin (ax + b)$

**4.** $\sec (\tan (\sqrt{x}))$ **5.** $\dfrac{\sin (ax+b)}{\cos (cx+d)}$ **6.** $\cos x^3 . \sin^2 (x^5)$

**7.** $2\sqrt{\cot(x^2)}$ **8.** $\cos(\sqrt{x})$

**9.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = |x$ ï $1|, x \in \mathbf{R}, x = 1$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**10.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮਹੱਤਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ $f(x) = [x],\ 0 < x < 3,\ x = 1$ ਅਤੇ $x = 2$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

### *5.3.2 ਅਸਪੱਸ਼ਟ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ* (***Derivatives of Implicit Functions***)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ $y = f(x)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ .........ਅਨੇਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਪਰ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਦਾ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ।ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ $x$ ਤੇ $y$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੰਬੰਧਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$x \text{ ï } y \text{ ï } \pi = 0$$

$$x + \sin xy \text{ ï } y = 0$$

ਪਹਿਲੀ ਹਾਲਤ (ਸੂਰਤ) ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ $y$ ਦੇ ਲਈ ਸਰਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਅਤੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ $y = x$ ï $\pi$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।ਦੂਜੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਬੰਧ $y$ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਆਸਾਨ ਤਰੀਕਾ ਹੈ।ਫਿਰ ਵੀ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੀ ਵੀ ਸੂਰਤ ਵਿੱਚ, $y$ ਦੀ $x$ ਤੇ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।ਜਦੋਂ $x$ ਅਤੇ $y$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਸ $y$ ਦੇ ਲਈ ਸਰਲ ਕਰਨਾ ਆਸਾਨ ਹੈ ਅਤੇ $y = f(x)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $y$ ਨੂੰ $x$ ਦੇ ਸਪੱਸ਼ਟ (explicit) ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।ਉਪਰੋਕਤ ਦੂਸਰੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $y$ ਨੂੰ $x$ ਦੇ (implicity) ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 24.** ਜੇਕਰ $x$ ï $y = \pi$ ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ $y$ ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਉਪਰੋਕਤ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੀਏ ?

$$y = x \text{ ï } \pi$$

ਤਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = 1$$

ਵਿਕਲਪ : ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਦਾ $x$, ਦੇ ਬਾਬਤ ਸਿੱਧਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d}{dx}(x-y) = \frac{d\pi}{dx}$$

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d\pi}{dx}$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਇੱਕ ਅਚਲ $\pi$ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) = 0$$

ਜੋ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਜੇਕਰ $y + \sin y = \cos x$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਸਿੱਧਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(\cos x)$$

ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} + \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = \text{ï}\ \sin x$$

ਇਸ ਤੋਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{1+\cos y}$$

ਜਿੱਥੇ $y \neq (2n + 1)\pi$

### 5.3.3 *ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ (Derivatives of Inverse Trigonometric Functions)*

ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਧਿਆਨ ਦਵਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਪਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ ਲੱਭਣ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. $f(x) = \sin^{\text{ï}1} x$ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = f(x) = \sin^{\text{ï}1} x$ ਹੈ ਤਾਂ $x = \sin y$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਕੇਵਲ $\cos y \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, $\sin^{-1} x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, ਇਸ ਲਈ $x \neq -1, 1$, ਇਸ ਲਈ $x \in (-1, 1)$

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਰੋਮਾਂਚਪੂਰਨ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੇਰ-ਫੇਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ $x \in (-1, 1)$ ਦੇ ਲਈ $\sin(\sin^{-1} x) = x$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\cos^2 y = 1 - (\sin y)^2 = 1 - (\sin(\sin^{-1} x))^2 = 1 - x^2$$

ਨਾਲ ਹੀ ਕਿਉਂਕਿ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos y$ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਅਤੇ $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

ਇਸ ਲਈ $x \in (-1, 1)$ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 27. $f(x) = \tan^{-1} x$ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \tan^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ $x = \tan y$ ਹੈ। $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+(\tan(\tan^{-1} x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

ਬਾਕੀ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਆਪਦੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਨੀ 5.4 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਾਰਨੀ 5 4

| $f(x)$ | $\cos^{\text{ï}1}x$ | $\cot^{\text{ï}1}x$ | $\sec^{\text{ï}1}x$ | $\text{cosec}^{\text{ï}1}x$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\dfrac{-1}{1+x^2}$ | $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ |
| Domain of $f'$ | (ï 1, 1) | **R** | (ï ∞, ï 1) ∪ (1, ∞) | (ï ∞, ï 1) ∪ (1, ∞) |

## ਅਭਿਆਸ 5.3

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ :'

**1.** $2x + 3y = \sin x$
**2.** $2x + 3y = \sin y$
**3.** $ax + by^2 = \cos y$
**4.** $xy + y^2 = \tan x + y$
**5.** $x^2 + xy + y^2 = 100$
**6.** $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$
**7.** $\sin^2 y + \cos xy = k$
**8.** $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$
**9.** $y = \sin^{\text{ï}1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

**10.** $y = \tan^{\text{ï}1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right),\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

**11.** $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

**12.** $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

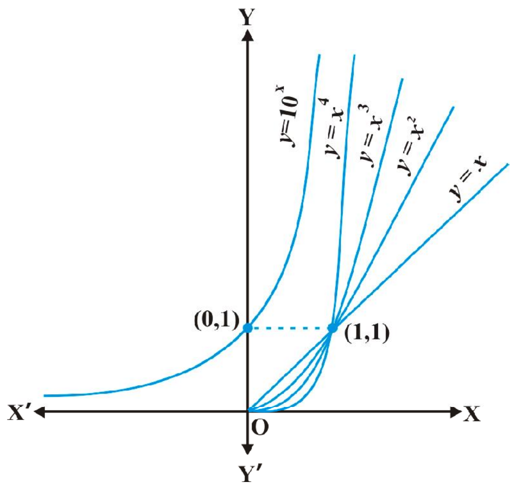
**13.** $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$

**14.** $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

**15.** $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2 - 1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

## 5.4 ਚਲ ਘਾਤ ਅਤੇ ਲਘੂ ਗਣਨ ਫਲਨ (Exponential and Logarithmic Functions)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਫਲਨਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ, ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਅਤੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਪਹਿਲੂਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਬੰਧਿਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਵਰਗ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਚਲ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਲਘੂਗਣਨ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੱਸਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਭਾਗ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਕਾਰਨ ਪ੍ਰੇਰਕ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (ਦਰੁਸਤ) (ਮੁੱਲਵਾਨ) ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਉੱਪਲਬਧੀਆਂ ਇਸ ਕਿਤਾਬ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇ-ਵਸਤੂ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.9

ਚਿੱਤਰ 5.9 ਵਿੱਚ $y = f_1(x) = x$, $y = f_2(x) = x^2$, $y = f_3(x) = x^3$ ਅਤੇ $y = f_4(x) = x^4$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਿਉਂ&ਜਿਉਂ $x$ ਦੀ ਘਾਤ ਵਧਦੀ ਹੈ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਣ ਵੀ ਵਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਣ ਵਧਣ ਨਾਲ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਤੇਜ਼ ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $x$ ($>1$) ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਵਾਧੇ ਦੇ ਸੰਗਤ $y = f_n(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਵਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $n$ ਦੀ ਕੀਮਤ 1] 2] 3] 4 ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਥਨ ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਮਾਨਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਇੱਥੇ $f_n(x) = x^n$ ਹੈ। ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ $n$ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $y = f_n(x)$ ਦਾ ਅਲੇਖ $y$-ਧੁਰੇ ਵੱਲ ਹੋਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਝੁਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ $f_{10}(x) = x^{10}$ ਅਤੇ $f_{15}(x) = x^{15}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $x$ ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ ਵਧ ਕੇ 2 ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $f_{10}$ ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ $2^{10}$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ $f_{15}$ ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ $2^{15}$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਵਾਧੇ ਦੇ ਲਈ, $f_{15}$ ਦਾ ਵਾਧਾ $f_{10}$ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵਾਧੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਘਾਤ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਘਾਤ ਵਧਾਉਂਦੇ ਜਾਓ, ਵਾਧਾ ਵਧਦਾ ਜਾਵੇਗਾ ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਸੁਭਾਵਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਅਧਿਕ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਸਾਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ $y = f(x) = 10^x$ ਹੈ।

ਸਾਡਾ ਦਾਅਵਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $n$ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਫਲਨ $f$] ਫਲਨ $f_n(x) = x^n$ ਮੁਕਾਬਲੇ ਅਧਿਕ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f_{100}(x) = x^{100}$ ਦੇ

ਮੁਕਾਬਲੇ $10^x$ ਅਧਿਕ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ $x$ ਦੇ ਵੱਡੇ ਮਾਨਾਂ ਲਈ, ਜਿਵੇਂ $x = 10^3, f_{100}(x) = (10^3)^{100} = 10^{300}$ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(10^3) = 10^{10^3} = 10^{1000}$ ਹੈ। ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ $f_{100}(x)$ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ $f(x)$ ਦੇ ਮਾਨ ਅਧਿਕ ਹਨ। ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਕਠਿਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $x$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜਿੱਥੇ $x > 10^3$, $f(x) > f_{100}(x)$ ਹੈ। ਪਰ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਸਬੂਤ ਦੇਣ ਲਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $x$ ਦੇ ò ¶ºâ Á » î Åé » ù Ú ã Õ ¶ÇÂ Ô ÇÃ ¾ Õ Æå ÅÜ ÅÃÔ ç ÅÔ ËÇÕ , ÇÕ Ã ¶ò Æèé Ãîê ßé Ã ¿ÇÖ Á Á $n$ ਦੇ ਲਈ $f_n(x)$ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ $f(x)$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦੀ ਹੈ।

**ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3.** ਫਲਨ $y = f(x) = b^x$, ਧਨਾਤਮਕ ਅਧਾਰ $b > 1$ ਦੇ ਲਈ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 5.9 ਵਿੱਚ $y = 10^x$ ਦਾ ਅਲੇਖ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਸਲਾਹ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਪਾਠਕ ਇਸ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ $b$ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੀਮਤਾਂ ਜਿਵੇਂ 2, 3, 4 ਦੇ ਲਈ ਖਿੱਚ ਕੇ ਦੇਖੋ। ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

(1) ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(2) ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ, ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(3) ਬਿੰਦੂ $(0, 1)$ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਹਮੇਸ਼ਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਇਹ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਕਥਨ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $b > 1$ ਦੇ ਲਈ $b^0 = 1$)

(4) ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਕ੍ਰਮ ਫਲਨ (increasing function) ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਨੂੰ ਵਧਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਉੱਪਰ ਉੱਠ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(5) $x$ ਦੇ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਵੱਡੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮਾਨ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਦੂਜੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ, ਅਲੇਖ ਦੀ ਪਹੁੰਚ $x$- ਧੁਰੇ ਵੱਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ (ਪਰ ਕਦੇ ਵੀ ਮਿਲਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ)

ਅਧਾਰ 10 ਵਾਲੇ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਚਲ ਘਾਤੀ ਫਲਨ **(common exponential Function)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਜਮਾਤ XI ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਨੁਬੰਧ A.1.4 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਸੀ ਕਿ ਸ਼੍ਰੇਣੀ

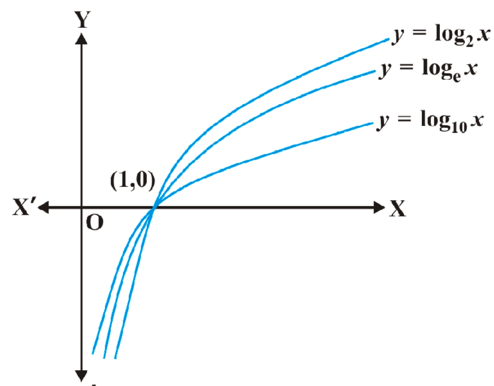
$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਕੀਮਤ 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ $e$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ $e$ ਨੂੰ ਅਧਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ $y = e^x$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਤਿਕ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ **(natural exponential function)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਰੋਮਾਂਚਿਕ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਉਲਟ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਜੇਕਰ 'ਹੈ' ਤਾਂ ਕੀ ਉਸ ਦੀ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ? ਇਹ ਖੋਜ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $b > 1$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $b$ ਅਧਾਰ ਤੇ $a$ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ $x$ ਹੈ, ਜੇਕਰ $b^x = a$ ਹੈ।

$b$ ਅਧਾਰ ਤੇ $a$ ਦੇ ਲਘੂਗਣਾਕ ਨੂੰ $\log_b a$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $b^x = a$, ਤਾਂ $\log_b a = x$ ਇਸ ਦਾ ਅਨੁਭਵ ਕਰਨ ਲਈ ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਸਪੱਸ਼ਟ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $2^3 = 8$ ਹੈ। ਲਘੂਗਣਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ $\log_2 8 = 3$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।




ਚਿੱਤਰ 5.10

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $10^4 = 10000$ ਅਤੇ $\log_{10} 10000 = 4$ ਸਰਵਾਗਸਮ ਕਥਨ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ $625 = 5^4 = 25^2$ ਅਤੇ $\log_5 625 = 4$ ਜਾਂ $\log_{25} 625 = 2$ ਸਰਵਾਗਸਮ ਕਥਨ ਹੈ।

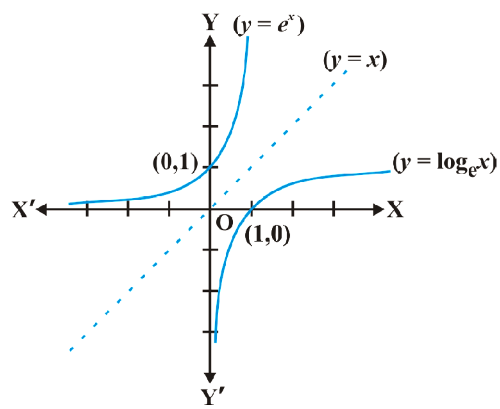
ਥੋੜ੍ਹਾ ਜਿਹਾ ਹੋਰ ਪਰਿਪੱਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਨਾਲ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $b > 1$ ਨੂੰ ਅਧਾਰ ਮੰਨਣ ਦੇ ਕਾਰਣ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਨੂੰ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਫਲਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ **(logarithmic function)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

$\log_b : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$

$x \to \log_b x = y$ ਜੇਕਰ $b^y = x$

ਪਹਿਲੇ ਕਥਨ ਤੋਂ, ਜੇਕਰ ਅਧਾਰ $b = 10$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ "ਸਾਧਾਰਨ ਲਘੂਗਣਕ" ਅਤੇ ਜੇਕਰ $b = e$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ "ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਲਘੂਗਣਕ" ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਕਸਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਲਘੂਗਣਕ ਨੂੰ $ln$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ $\log x$ ਅਧਾਰ $e$ ਵਾਲੇ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 5.10 ਵਿੱਚ 2 ਅਤੇ 10 ਅਧਾਰਿਤ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।

ਅਧਾਰ $b > 1$ ਵਾਲੇ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਥੱਲੇ ਸੂਚੀਬੱਧ ਹਨ :




ਚਿੱਤਰ 5.11

(1) ਗੈਰ ਧਨਾਤਮਕ (non-positive) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲਘੂਗਣਕ ਦੀ ਕੋਈ ਅਰਥਪੂਰਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R}^+$ ਹੈ।

(2) ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

(3) ਬਿੰਦੂ (1, 0) ਹਮੇਸ਼ਾ ਲਘੂਗਣਿਕ ਫਲਨਾ ਦਾ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(4) ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਇੱਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਵਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਫਲਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਜਿਉਂ ਜਿਉਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਵੱਲ ਚਲਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਨੂੰ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(5) 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਵਾਲੇ $x$ ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਲਈ $\log x$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਚੌਥੀ (ਚੌਥਾਈ)ਵਿੱਚ ਅਲੇਖ $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨੇੜੇ ਮਿਲਦਾ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਪਰ ਇਸ ਨੂੰ ਕਦੇ ਮਿਲਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ)A

(6) ਚਿੱਤਰ 5.11 ਵਿੱਚ $y = e^x$ ਅਤੇ $y = \log_e x$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਰੋਮਾਂਚਕਾਰੀ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਵਕਰ, ਰੇਖਾ $y = x$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਦਰਪਣ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹਨ।

ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣ ਹੇਠਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹੈ :

(1) ਅਧਾਰ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦਾ ਇੱਕ ਮਿਆਰੀ ਨਿਯਮ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\log_a p$ ਨੂੰ $\log_b p$ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲੱਭਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\log_a p = \alpha$, $\log_b p = \beta$ ਅਤੇ $\log_b a = \gamma$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $a^\alpha = p$, $b^\beta = p$ ਅਤੇ $b^\gamma = a$ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੀਜੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$(b^\gamma)^\alpha = b^{\gamma\alpha} = p$$

ਇਸ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$b^\beta = p = b^{\gamma\alpha}$$

ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ $\beta = \alpha\gamma$ ਜਾਂ $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\mathbf{\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}}$$

(2) ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਤੇ log ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਰੋਮਾਂਚਕ ਗੁਣ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\log_b pq = \alpha$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ $b^\alpha = pq$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $\log_b p = \beta$ ਅਤੇ $\log_b q = \gamma$ ਹੈ ਤਾਂ $b^\beta = p$ ਅਤੇ $b^\gamma = q$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰ $b^\alpha = pq = b^\beta b^\gamma = b^{\beta+\gamma}$ ਹੈ।

ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $\alpha = \beta + \gamma$, ਭਾਵ

$$\mathbf{\log_b pq = \log_b p + \log_b q}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੋਚਕ ਅਤੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਤੀਜਾ ਉਦੋਂ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ $p = q$ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\mathbf{\log_b p^2 = \log_b p + \log_b p = 2\log_b p}$$

ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਰਲ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਭਾਵ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $n$ ਦੇ ਲਈ

$$\mathbf{\log_b p^n = n\log_b p}$$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਨਤੀਜਾ $n$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਪਰ ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ

ਅਸੀਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਪਾਠਕ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਕੀ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ $x$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $x = e^{\log x}$ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਤਾਂ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ log ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਾਰੇ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਗੈਰ-ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{\log x}$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $y > 0$ ਤਾਂ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਲੈਣ ਤੇ $\log y = \log (e^{\log x}) = \log x \,.\, \log e = \log x$ ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ $y = x$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = e^{\log x}$ ਕੇਵਲ $x$ ਦੇ ਧਨ ਕੀਮਤਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਕਲਨ ਗਣਿਤ (differential calculus) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਚਲਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦਾ ਇੱਕ ਅਸਧਾਰਨ ਗੁਣ ਇਹ ਹੈ ਕਿ, ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਸ ਗੁਣ ਦੇ ਥੱਲੇ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਵਿੱਚ ਬਿਆਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਸਬੂਤ ਅਸੀਂ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5*

(1) $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $e^x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(2) $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $\log x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{1}{x}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

ਉਦਾਹਰਣ 29. $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $e^{-x}$ (ii) $\sin (\log x), x > 0$ (iii) $\cos^{-1} (e^x)$ (iv) $e^{\cos x}$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{-x}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \sin (\log x)$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \cdot \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\cos (\log x)}{x}$$

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \cos^{-1} (e^x)$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

* ਕ੍ਰਿਪਾ ਕਰਕੇ ਸੰਪੂਰਨ ਪਾਠ ਸਮੱਗਰੀ ਪੰਨਾ 303-304

(iv) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{\cos x}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x}$$

### ਅਭਿਆਸ 5.4

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**1.** $\dfrac{e^x}{\sin x}$

**2.** $e^{\sin^{-1} x}$

**3.** $e^{x^3}$

**4.** $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$

**5.** $\log(\cos e^x)$

**6.** $e^x + e^{x^2} + \ldots + e^{x^5}$

**7.** $\sqrt{e^{\sqrt{x}}},\ x > 0$

**8.** $\log(\log x),\ x > 1$

**9.** $\dfrac{\cos x}{\log x},\ x > 0$

**10.** $\cos(\log x + e^x)$

## 5.5. ਲਘੂਗਣਕੀ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ (Logarithmic Differentiation)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਵਰਗ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

$$y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$$

ਲਘੂਗਣਕ ($e$ ਅਧਾਰ ਤੇ ) ਲੈਣ ਨਾਲ ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ :

$$\log y = v(x)\ \log\,[u(x)]$$

ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ, $\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = v(x) \cdot \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log\,[u(x)]$

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log[u(x)]\right]$

ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਵਾਲੀ ਮੁੱਖ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $f(x)$ ਅਤੇ $u(x)$ ਨੂੰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ।

ਉਦਾਹਰਣ 30. $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $\sqrt{\dfrac{(x-3)\,(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)\,(x^2+4)}{(3x^2+4x+5)}}$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \frac{1}{2}[\log (x \text{ ï } 3) + \log (x^2 + 4) \text{ ï } \log (3x^2 + 4x + 5)]$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$, ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

ਉਦਾਹਰਨ 31. $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $a^x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $a$ ਇੱਕ ਧਨ ਅਚੱਲ ਹੈ ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $y = a^x$, ਤਾਂ

$$\log y = x \log a$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$, ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \log a$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = y \log a$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$$

ਵਿਕਲਪ
$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\log a)} = e^{x\log a}\frac{d}{dx}(x\log a)$$
$$= e^{x \log a} \,.\, \log a = a^x \log a$$

ਉਦਾਹਰਨ 32. $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $x^{\sin x}$, ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ $x > 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = x^{\sin x}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \sin x \log x$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \sin x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{d}{dx}(\sin x)$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)\frac{1}{x} + \log x \cos x$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x - 1}\cdot\sin x + x^{\sin x}\cdot\cos x \log x$$

ਉਦਾਹਰਣ 33. ਜੇਕਰ $y^x + x^y + x^x = a^b$ ਹੈ। ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y^x + x^y + x^x = a^b$

$u = y^x$, $v = x^y$ ਅਤੇ $w = x^x$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $u + v + w = a^b$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \quad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $u = y^x$ ਹੈ। ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log u = x \log y$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਲੈਣ ਤੇ

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log y) + \log y\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} + \log y \cdot 1$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] \quad \ldots (2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$v = x^y$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log v = y \log x$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = y\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{dy}{dx}$$

$$= y\cdot\frac{1}{x} + \log x\cdot\frac{dy}{dx}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^y\left[\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right] \qquad \ldots (3)$$

ਗਣਿਤ $w = x^x$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log w = x \log x$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\,.\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\cdot\frac{1}{x} + \log x\cdot 1$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ

$$\frac{dw}{dx} = w\,(1 + \log x)$$

$$= x^x\,(1 + \log x) \qquad \ldots (4)$$

(1), (2), (3) ਅਤੇ (4), ਦੁਆਰਾ

$$y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) + x^y\left(\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right) + x^x\,(1 + \log x) = 0$$

ਜਾਂ $$(x\,.\,y^{x-1} + x^y\,.\,\log x)\,\frac{dy}{dx} = -\,x^x\,(1 + \log x) - y\,.\,x^{y-1} - y^x\log y$$

ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-[y^x\log y + y\,.\,x^{y-1} + x^x(1+\log x)]}{x\,.\,y^{x-1} + x^y\log x}$$

## ਅਭਿਆਸ 5.5

1 ਤੋਂ 11 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**1.** $\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x$

**2.** $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

**3.** $(\log x)^{\cos x}$

**4.** $x^x$ ï $2^{\sin x}$

**5.** $(x+3)^2 \,.\, (x+4)^3 \,.\, (x+5)^4$

**6.** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

**7.** $(\log x)^x + x^{\log x}$

**8.** $(\sin x)^x + \sin^{\text{ï}1}\sqrt{x}$

**9.** $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

**10.** $x^{x\cos x} + \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

**11.** $(x\cos x)^x + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

12 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**12.** $x^y + y^x = 1$

**13.** $y^x = x^y$

**14.** $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

**15.** $xy = e^{(x \text{ ï } y)}$

**16.** $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $f'(1)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**17.** $(x^2$ ï $5x+8)(x^3+7x+9)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ

(ii) ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਇਕੱਲਾ ਬਹੁਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ

(iii) ਲਘੂਗਣਕ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੁਆਰਾ

ਇਸ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਤਿੰਨੋਂ ਉੱਤਰ ਸਮਾਨ ਹਨ।

**18.** ਜੇਕਰ $u, v$ ਅਤੇ $w$, $x$ ਦੇ ਫਲਨ ਹਨ, ਤਾਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਭਾਵ ਪਹਿਲੇ-ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ *(Repeat)* ਦੁਆਰਾ ਦੂਜੀ-ਲਘੂਗੁਣਕ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}(u.\,v.\,w) = \frac{du}{dx}\,v.\,w + u\,.\,\frac{dv}{dx}\,.\,w + u\,.\,v\,\frac{dw}{dx}$$

## 5.6 ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਰੂਪਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ (Derivatives of Functions in Parametric Forms)

ਕਦੀ – ਕਦੀ ਦੋ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਸੰਬੰਧ, ਨਾ ਤਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅਸਪਸ਼ਟ, ਪਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤੀਜੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਅਲੱਗ–ਅਲੱਗ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੁਆਰਾ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧ ਇਕ ਤੀਜੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤੀਜੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੋਰ ਸਾਫ਼–ਸੁਥਰੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦੋ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ $x$ ਅਤੇ $y$ ਦੇ ਵਿੱਚ $x = f(t)$, $y = g(t)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਸੰਬੰਧ, ਨੂੰ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ $t$ ਇੱਕ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਹੈ।

ਇਸ ਰੂਪ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \left(\text{ਜਦੋਂ ਕਦੀ } \frac{dx}{dt} \neq 0\right) \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \left(\text{ਕਿਉਂਕਿ } \frac{dy}{dt} = g'(t) \text{ ਅਤੇ } \frac{dx}{dt} = f'(t)\right) \text{ [ਬਸ਼ਰਤ } f'(t) \neq 0]$$

ਉਦਾਹਰਣ 34. ਜੇਕਰ $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

ਉਦਾਹਰਣ 35. ਜੇਕਰ $x = at^2$, $y = 2at$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $x = at^2$, $y = 2at$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dx}{dt} = 2at \text{ ਅਤੇ } \frac{dy}{dt} = 2a$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

**ਉਦਾਹਰਣ 35.** ਜੇਕਰ $x = a\,(\theta + \sin\theta)$, $y = a\,(1$ ï $\cos\theta)$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a\,(\sin\theta)$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a\,(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਇੱਥੇ, ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\frac{dy}{dx}$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ $x$ ਅਤੇ $y$ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ, ਕੇਵਲ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

**ਉਦਾਹਰਣ 35.** ਜੇਕਰ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ ਹੈ ਤਾਂ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = (a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$
$$= a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + (\sin^2\theta) = a^{\frac{2}{3}}$$

ਇਸ ਲਈ $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ਦੀ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\frac{dx}{d\theta}$ = ï $3a\cos^2\theta\sin\theta$ ਅਤੇ $\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅਸਪੱਸ਼ਟ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਕਾਫ਼ੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋਵੇਗਾ :

## ਅਭਿਆਸ 5.6

ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੇ $x$ ਅਤੇ $y$ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਲੁਪਤ ਕੀਤੇ, $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**1.** $x = 2at^2,\ y = at^4$

**2.** $x = a\cos\theta,\ y = b\cos\theta$

**3.** $x = \sin t,\ y = \cos 2t$

**4.** $x = 4t,\ y = \frac{4}{t}$

**5.** $x = \cos\theta$ ï $\cos 2\theta$, $y = \sin\theta$ ï $\sin 2\theta$

**6.** $x = a(\theta$ ï $\sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$

**7.** $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

**8.** $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$ $y = a\sin t$

**9.** $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$

**10.** $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta$ ï $\theta\cos\theta)$

**11.** ਜੇਕਰ $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

## 5.7 ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ (Second Order Derivative)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = f(x)$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \text{... (1)}$$

ਜੇਕਰ $f'(x)$ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਅਚਲ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ (1) ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ (Second Order Derivative) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। $f(x)$ ਦੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ $f''(x)$ ਨਾਲ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ $D^2(y)$ ਜਾਂ $y''$ ਜਾਂ $y_2$ ਨਾਲ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਟਿੱਪਣੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 38. ਜੇਕਰ $y = x^3 + \tan x$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = x^3 + \tan x$ ਹੈ। ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(3x^2 + \sec^2 x\right)$$
$$= 6x + 2 \sec x \,.\, \sec x \tan x = 6x + 2 \sec^2 x \tan x$$

ਉਦਾਹਰਣ 39. ਜੇਕਰ $y = \text{A} \sin x + \text{B} \cos x$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$\frac{dy}{dx} = \text{A} \cos x - \text{B} \sin x$$

ਅਤੇ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\text{A} \cos x - \text{B} \sin x)$$
$$= -\text{A} \sin x - \text{B} \cos x = -y$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 40. ਜੇਕਰ $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ ਹੈ। ਹੁਣ

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6\,(e^{2x} + e^{3x})$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} + 18e^{3x} = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$
$$- 30\,(e^{2x} + e^{3x}) + 6\,(3e^{2x} + 2e^{3x}) = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 41. ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $y = \sin^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

ਜਾਂ $$\sqrt{(1-x^2)}\,\frac{dy}{dx} = 1$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ਜਾਂ $$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\right) = 0$$

ਜਾਂ $$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

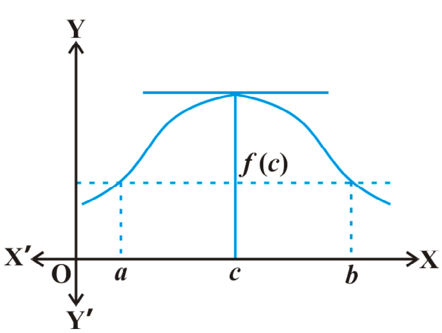
ਇਸ ਲਈ $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

ਵਿਕਲਪ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = \sin^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ

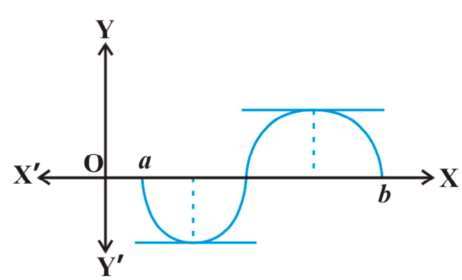
$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ ਭਾਵ } (1-x^2)\,y_1^2 = 1$$

ਇਸ ਲਈ $$(1-x^2)\cdot 2y_1y_2 + y_1^2(0-2x) = 0$$

ਇਸ ਲਈ $$(1 - x^2)\,y_2 - xy_1 = 0$$




ਚਿੱਤਰ 5.12




ਚਿੱਤਰ 5.13

## ਅਭਿਆਸ 5.7

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**1.** $x^2 + 3x + 2$ **2.** $x^{20}$ **3.** $x \cdot \cos x$

**4.** $\log x$ **5.** $x^3 \log x$ **6.** $e^x \sin 5x$

**7.** $e^{6x} \cos 3x$ **8.** $\tan^{-1} x$ **9.** $\log (\log x)$

**10.** $\sin (\log x)$ **11.** ਜੇਕਰ $y = 5\cos x - 3\sin x$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

**12.** ਜੇਕਰ $y = \cos^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ਨੂੰ ਕੇਵਲ $y$ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**13.** ਜੇਕਰ $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$

**14.** ਜੇਕਰ $y = \mathrm{A}e^{mx} + \mathrm{B}e^{nx}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\dfrac{dy}{dx} + mny = 0$

**15.** ਜੇਕਰ $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 49y$ ਹੈ।

**16.** ਜੇਕਰ $e^y(x+1) = 1$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ ਹੈ।

**17.** ਜੇਕਰ $y = (\tan^{-1} x)^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1) y_1 = 2$ ਹੈ।

### 5.8 ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ (Mean Value Theorem)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਲਨ ਗਣਿਤ ਦੇ ਦੋ ਮੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ, ਬਿਨਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ, ਵਿਅਕਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਦਾ ਵੀ ਗਿਆਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 6. ਰੋਲੇ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ **(Rolle's Theorem)** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਅੰਤਰਾਲ $(a, b)$ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ $f(a) = f(b)$ ਹੈ, ਇੱਥੇ $a$ ਅਤੇ $b$ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਤਾਂ ਇੱਥੇ ਕੋਈ $c$ ਅੰਤਰਾਲ $(a, b)$ ਵਿੱਚੋਂ ਹੈ, ਕਿ $f'(c) = 0$ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 5.12 ਅਤੇ 5.13 ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਅਜਿਹੇ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ, ਜੋ ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਪਿਛਲੇ ਪੰਨੇ ਤੇ ਬਣੇ ਚਿੱਤਰ 5.12 ਅਤੇ 5.13 ਇੱਥੇ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $a$ ਅਤੇ $b$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਵਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਾਲ ਤੇ ਕੀ ਵਾਪਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖੀ ਦੀ ਢਾਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

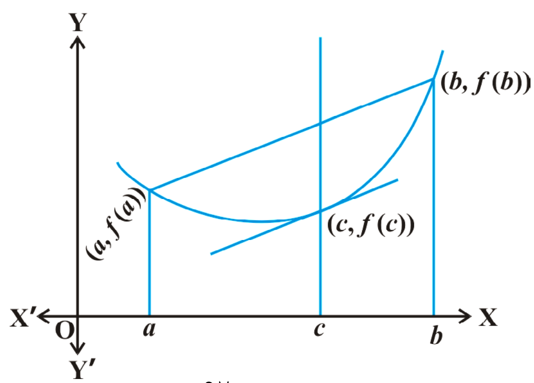
ਰੋਲੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਇਹੀ ਦਾਅਵਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $y = f(x)$ ਦਾ ਅਲੇਖ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ

ਦੀ ਢਾਲ ਕੁਝ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 7. ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ **(Mean Value Theorem)** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $(a, b)$ ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ। ਹੁਣ ਅੰਤਰਾਲ $(a, b)$ ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਅਜਿਹੇ $c$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ਹੈ।}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ (MVT), ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਸਤਾਰ (extension) ਹੈ। ਆਉ, ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਸਮਝੀਏ। ਫਲਨ $y = f(x)$ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.13 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ $f'(c)$ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(c, f(c))$ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਾਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 5.14 ਤੋਂ ਸਾਫ ਹੈ ਕਿ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ਬਿੰਦੂਆਂ $(a, f(a))$ ਅਤੇ $(b, f(b))$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ (Secant) ਦੀ ਢਲਾਨ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(a, b)$ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $(c, f(c))$ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $(a, f(a))$ ਅਤੇ $(b, f(b))$ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਨੰਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ $(a, b)$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c$ ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਜੋ $(c, f(c))$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $(a, f(a))$ ਅਤੇ $(b, f(b))$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਸਮਾਨੰਤਰ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 5.14

ਉਦਾਹਰਣ 42. ਫਲਨ $y = x^2 + 2$ ਦੇ ਲਈ ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ, ਜਦੋਂ $a =$ ï $2$ ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ $y = x^2 + 2$, ਅੰਤਰਾਲ [ï 2, 2] ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ (ï 2, 2) ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ $f$(ï 2) = $f$( 2) = 6 ਹੈ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ï 2 ਅਤੇ 2 ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c \in$ (ï 2, 2) ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿੱਥੇ $f'(c) = 0$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $f'(x) = 2x$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $c =$

0 ਤੇ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਅਤੇ $c = 0 \in (-2, 2)$

ਉਦਾਹਰਣ 43. ਅੰਤਰਾਲ $[2, 4]$ ਦੇ ਫਲਨ $f(x) = x^2$ ਦੇ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ $f(x) = x^2$ ਅੰਤਰਾਲ $[2, 4]$ ਦੇ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $(2, 4)$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $f'(x) = 2x$ ਅੰਤਰਾਲ $(2, 4)$ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਹੁਣ $f(2) = 4$ ਅਤੇ $f(4) = 16$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{16-4}{4-2} = 6$$

ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c \in (2, 4)$ ਅਜਿਹਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ $f'(c) = 6$ ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ $f'(x) = 2x$ ਜਿਸ ਦਾ ਭਾਵ $c = 3$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $c = 3 \in (2, 4)$, ਤੇ $f'(c) = 6$ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 5.8

1. ਫਲਨ $f(x) = x^2 + 2x - 8,\ x \in [-4, 2]$ ਦੇ ਲਈ ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।
2. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਕਿਸ ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੋਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਉਲਟ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ?
   (i) $f(x) = [x]$ ਦੇ ਲਈ $x \in [5, 9]$ (ii) $f(x) = [x]$ ਦੇ ਲਈ $x \in [-2, 2]$
   (iii) $f(x) = x^2 - 1$ ਦੇ ਲਈ $x \in [1, 2]$
3. ਜੇਕਰ $f : [-5, 5] \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $f'(x)$ ਕਿਸੀ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(-5) \neq f(5)$
4. ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) = x^2 - 4x - 3$, ਇੱਥੇ $a = 1$ ਅਤੇ $b = 4$ ਹੈ।
5. ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, ਜਿੱਥੇ $a = 1$ ਅਤੇ $b = 3$ ਹੈ। $f'(c) = 0$ ਦੇ ਲਈ $c \in (1, 3)$ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 2 ਦੇ ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੇ ਤਿੰਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਲਾਗੂ ਹੋਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

## *ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ*

ਉਦਾਹਰਣ 44. $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ (ii) $e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x$ (iii) $\log_7 (\log x)$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}} = (3x+2)^{\frac{1}{2}} + (2x^2+4)^{-\frac{1}{2}}$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > -\dfrac{2}{3}$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(3x+2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2+4)$$

$$= \frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3) - \left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} - \frac{2x}{\left(2x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > -\dfrac{2}{3}$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x$ ਹੈ। ਇਹ $[-1, 1]$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sec^2 x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec^2 x) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= e^{\sec^2 x} \cdot \left(2\sec x \frac{d}{dx}(\sec x)\right) - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\sec x\,(\sec x \tan x)\, e^{\sec^2 x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\sec^2 x \tan x\, e^{\sec^2 x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਸਿਰਫ਼ $[-1, 1]$ ਵਿੱਚ ਹੀ ਮੰਨਿਆ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ cosï 1 $x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਹੋਂਦ ਸਿਰਫ਼ (ï 1, 1) ਵਿੱਚ ਹੈ।

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \log_7 (\log x) = \dfrac{\log (\log x)}{\log 7}$ (ਅਧਾਰ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ)

ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > 1$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 7}\frac{d}{dx}(\log (\log x))$$
$$= \frac{1}{\log 7}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{d}{dx}(\log x)$$
$$= \frac{1}{x \log 7 \log x}$$

ਉਦਾਹਰਣ 45. $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\cos^{-1} (\sin x)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \cos^{-1} (\sin x)$ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$f(x) = \cos^{-1} (\sin x)$$
$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right], \text{ since } \frac{\pi}{2} - x \in [0.\pi]$$
$$= \frac{\pi}{2} - x$$

ਇਉਂ $f'(x) = -1$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲਈ $\cos x \neq -1$, ਅਤੇ $\pi$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਾਕ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚ $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ਨੂੰ ਕੱਟ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f'(x) = \frac{1}{2}$ ਹੈ।

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ $x$ ਨੂੰ ਲੱਭਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $-1 \le \frac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $\frac{2^{x+1}}{1+4^x}$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਾਰੇ $x$ ਨੂੰ ਲੱਭਣਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $\frac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$, ਭਾਵ ਇਹ ਸਾਰੇ $x$ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $2^{x+1} \le 1 + 4^x$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $2 \le \frac{1}{2^x} + 2^x$ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਸਾਰੇ $x$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਹੁਣ $2^x = \tan\theta$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਇਹ ਫਲਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$f(x) = \sin^{-1}\left[\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2^x \cdot 2}{1+(2^x)^2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$= \sin^{-1}[\sin 2\theta] = 2\theta = 2\tan^{-1}(2^x)$$

ਇਸ ਲਈ
$$f'(x) = 2\cdot\frac{1}{1+(2^x)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= \frac{2}{1+4^x}\cdot(2^x)\log 2$$

$$= \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}$$

ਉਦਾਹਰਣ 46. ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $0 < x < \pi$ ਦੇ ਲਈ $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ ਹੈ ਤਾਂ $f'(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਫਲਨ $y = (\sin x)^{\sin x}$ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $(\sin x>0)$ ਹੈ। ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਹੋਣ ਤੇ

$$\log y = \log (\sin x)^{\sin x} = \sin x \log (\sin x)$$

ਹੁਣ
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \log (\sin x))$$

$$= \cos x \log (\sin x) + \sin x \,.\, \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \cos x \log (\sin x) + \cos x$$

$$= (1 + \log (\sin x)) \cos x$$

ਹੁਣ $\dfrac{dy}{dx} = y((1 + \log (\sin x)) \cos x) = (1 + \log (\sin x)) (\sin x)^{\sin x} \cos x$

ਉਦਾਹਰਣ 47. ਧਨਾਤਮਕ ਚਲ $a$ ਦੇ ਲਈ $\dfrac{dy}{dx}$, ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ

$$y = a^{t+\frac{1}{t}}, \text{ ਅਤੇ } x = \left(t+\frac{1}{t}\right)^a \text{ ਹੈ।}$$

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦੋਨੋਂ $y$ ਅਤੇ $x$, ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $t \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^{t+\frac{1}{t}}\right) = a^{t+\frac{1}{t}}\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right).\log a$$

$$= a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{dx}{dt} = a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

$\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ $t \neq \pm 1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $t \neq \pm 1$ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}}$$

**ਉਦਾਹਰਣ 48.** $e^{\cos x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ $\sin^2 x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $u(x) = \sin^2 x$ ਅਤੇ $v(x) = e^{\cos x}$ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ ਸਾਨੂੰ $\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ :

$$\frac{du}{dx} = 2\sin x \cos x \text{ ਅਤੇ } \frac{dv}{dx} = e^{\cos x}(\text{ï } \sin x) = \text{ï } (\sin x)\, e^{\cos x} \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{du}{dv} = \frac{2\sin x \cos x}{-\sin x\, e^{\cos x}} = -\frac{2\cos x}{e^{\cos x}}$$

## ਅਧਿਆਇ 5 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆਂ 1 ਤੋਂ 11 ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ, $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**1.** $(3x^2 \text{ ï } 9x + 5)^9$

**2.** $\sin^3 x + \cos^6 x$

**3.** $(5x)^{3\cos x\, 2x}$

**4.** $\sin^{\text{ï }1}(x\sqrt{x}),\ 0 \le x \le 1.$

**5.** $\dfrac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}, \text{ ï } 2 < x < 2.$

**6.** $\cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right],\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

**7.** $(\log x)^{\log x},\ x > 1$

**8.** $\cos(a\cos x + b\sin x)$, ਕਿਸੇ ਅਚਲ $a$ ਅਤੇ $b$ ਦੇ ਲਈ

**9.** $(\sin x \text{ ï } \cos x)^{(\sin x \text{ ï } \cos x)},\ \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$

**10.** $x^x + x^a + a^x + a^a$, ਕਿਸੇ ਪੱਕਾ $a > 0$ ਅਤੇ $x > 0$ ਦੇ ਲਈ

**11.** $x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}$, $x > 3$ ਦੇ ਲਈ

**12.** ਜੇਕਰ $y = 12(1 \text{ ï } \cos t),\ x = 10(t \text{ ï } \sin t),\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**13.** ਜੇਕਰ $y = \sin^{\text{ï }1} x + \sin^{\text{ï }1}\sqrt{1-x^2},\ 0 < x < 1$, ਹੈ ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**14.** ਜੇਕਰ ï $1 < x < 1$ ਦੇ ਲਈ $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

**15.** ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ $c > 0$ ਦੇ ਲਈ $(x ï a)^2 + (y ï b)^2 = c^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$ $a$ ਅਤੇ $b$ ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਇੱਕ ਅਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ

**16.** ਜੇਕਰ $\cos y = x \cos (a + y)$, ਅਤੇ $\cos a \neq \pm 1$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

**17.** ਜੇਕਰ $x = a (\cos t + t \sin t)$ ਅਤੇ $y = a (\sin t ï t \cos t)$, ਤਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**18.** ਜੇਕਰ $f(x) = |x|^3$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f''(x)$ ਦੀ ਅਸਤਿਤਵ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**19.** ਗਣਿਤਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ ਧਨ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $n$ ਦੇ ਲਈ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ ਹੈ।

**20.** $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਦੁਆਰਾ cosines ਦੇ ਲਈ ਜੋੜ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**21.** ਕੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਜੋ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ ਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਾ ਹੋਵੇ ? ਆਪਣੇ ਜਾਇਜ਼ ਉੱਤਰ ਵੀ ਦੱਸੋ।

**22.** ਜੇਕਰ $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

**23.** ਜੇਕਰ $y = e^{a\cos^{-1}x}$, ï $1 \leq x \leq 1$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$

## *ਸਾਰ-ਅੰਸ਼*

- ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਆਪਣੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਅੰਤਰ, ਗੁਣਨਫਲ ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਜੇਕਰ $f$ ਅਤੇ $g$ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$ ਲਗਾਤਾਰ (ਨਿਰੰਤਰ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (ਜਿੱਥੇ $g(x) \neq 0$) ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

- ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ (ਸੀਮਿਤ) ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- ਲੜੀ&ਨਿਯਮ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਨਿਯਮ ਹੈ। ਜੇਕਰ $f = v \circ u$, $t = u(x)$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $\dfrac{dt}{dx}$ ਅਤੇ $\dfrac{dv}{dt}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

- ਕੁਝ ਮਾਨਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

- ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਤਕਨੀਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦਾ ਅਰਥ ਪੂਰਨ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ $f(x)$ ਅਤੇ $u(x)$ ਦੋਨੋ ਹੀ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣ।
- ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ : ਜੇਕਰ $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $(a, b)$ ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੋਵੇ, ਅਤੇ $f(a) = f(b)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $(a, b)$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ $c$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ $f'(c) = 0$.
- ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ : ਜੇਕਰ $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $(a, b)$ ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅੰਤਰਾਲ $(a, b)$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ $c$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸ ਲਈ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ਅਧਿਆਇ 6

# ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੇ ਅਣਉਪਯੋਗ (Application of Derivatives)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature — WHITEHEAD* ❖

## 6.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਯੋਜਕ ਫਲਨਾਂ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਨਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ, ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨਾਂ, ਚਲ ਘਾਤ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਲਘੁ-ਗਣਨ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ, ਵਿਗਿਆਨ, ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਕਈ ਹੋਰ ਖੇਤਰ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ (i) ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ, (ii) ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਲੰਬ ਰੂਪ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ, (iii) ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ 'ਤੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ, ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

## 6.2 ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ (Rate of Change of Quantities)

ਆਓ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਕਿ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{ds}{dt}$ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਮਤਲਬ ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ $t$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੂਰੀ $s$ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਤੋਂ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ $y$ ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ $x$ ਦੇ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਨਿਯਮ $y = f(x)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ (ਜਾਂ $f'(x)$), $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $y$ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (ਜਾਂ $f'(x_0)$) $x = x_0$ ਤੇ) $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $y$ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, ਜੇ ਦੋ ਚਲ $x$ ਅਤੇ $y$, ਚਲ $t$ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਬਾਬਤ ਬਦਲ ਰਹੇ ਹੋਣ ਭਾਵ $x = f(t)$ ਅਤੇ

$y = g(t)$ ਹੈ ਤਦ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}, \text{ ਜੇ } \frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $x$ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ $y$ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਦੀ ਗਣਨਾ $t$ ਦੇ ਬਾਬਤ $y$ ਅਤੇ $x$ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ’ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਚੱਕਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਇਸ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $r$ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $r = 5$ cm ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਰਧ ਵਿਆਸ $r$ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $A = \pi r^2$ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $r$ ਦੇ ਬਾਬਤ A ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $r = 5$ cm ਤਾਂ $\frac{dA}{dr} = 10\pi$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $10\pi$ cm²/cm ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਬਦਲ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਇੱਕ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ 9 cm³/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਇਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 10 cm ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਣ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $x$ cm ਹੈ। ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ V ਜਾਂ ਘਣ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ S ਹੈ। ਤਦ, $V = x^3$ ਅਤੇ $S = 6x^2$, ਇੱਥੇ $x$ ਸਮਾਂ $t$ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\frac{dV}{dt} = 9 \text{ cm}^3/\text{s} \text{ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)}$$

ਇਸ ਲਈ $$9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3)\cdot\frac{dx}{dt} \quad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

ਜਾਂ $$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \quad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2)\cdot\frac{dx}{dt} \quad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x} \quad \text{((1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ $$x = 10 \text{ cm}, \ \frac{dS}{dt} = 3.6 \text{ cm}^2/\text{s}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੱਥਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤਰੰਗਾਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਵਿੱਚ 4 cm/s ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਰੰਗ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਪਲ, ਚੱਕਰ ਰਾਹੀਂ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿੰਨੀ ਤੇਜੀ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਅਰਧ ਵਿਆਸ $r$ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $A = \pi r^2$ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮਾਂ $t$ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ A ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2)\cdot\frac{dr}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ $\frac{dr}{dt} = 4$ cm

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $r = 10$ cm

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ $r = 10$ cm ਤਦ ਚੱਕਰ ਤੋਂ ਘਿਰੇ ਹੋਏ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $80\pi$ cm²/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ।

> ਟਿੱਪਣੀ $x$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਣ ਨਾਲ ਜੇ $y$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $x$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਣ ਨਾਲ ਜੇ $y$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਘਟਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $x$, ਦੇ ਘਟਣ ਦੀ ਦਰ 3 cm/min ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ $y$, ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ 2 cm/min ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 10$ cm ਅਤੇ $y = 6$ cm ਹੈ ਤਦ ਆਇਤ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਲੰਬਾਈ $x$ ਘੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ $y$ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dx}{dt} = \text{ï } 3 \text{ cm/min} \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{dy}{dt} = 2 \text{ cm/min}$$

ਜੇ ਆਇਤ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ P ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇ, ਭਾਵ ਕਿ

$$P = 2(x + y)$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(-3+2) = -2 \text{ cm/min}$$

ਜੇ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇ

ਭਾਵ ਕਿ $A = x \,.\, y$

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\cdot y + x\cdot\dfrac{dy}{dt}$

$= ï\ 3(6) + 10(2)$ (ਕਿਉਂਕਿ $x = 10$ cm ਅਤੇ $y = 6$ cm)

$= 2\ \text{cm}^2/\text{min}$

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀਆਂ $x$ ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ $C(x)$ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ

$$C(x) = 0.005\, x^3\ ï\ 0.02\, x^2 + 30x + 5000$$

ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ (marginal cost ਜਾਂ MC) ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਮਤਲਬ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਕਿਸੇ ਪੱਧਰ ਤੇ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਦੇ ਤਤਕਾਲਿਕ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਕਿਸੇ ਪੱਧਰ ਤੇ $x$ ਇਕਾਈ ਦੇ ਬਾਬਤ, ਸੰਪੂਰਨ ਲਾਗਤ ਦੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ $\text{MC} = \dfrac{dC}{dx} = 0.005(3x^2) - 0.02(2x) + 30$

ਜਦੋਂ $x = 3$ ਹੈ ਤਦ $\text{MC} = 0.015(3^2) - 0.04(3) + 30$

$= 0.135\ ï\ 0.12 + 30 = 30.015$

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ Rs 30.02 (ਲੱਗਭਗ) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਕਿਸੇ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ $x$ ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਵੇਚਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 5$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇੱਥੇ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ (marginal revenue or MR) ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਮਤਲਬ ਕਿਸੇ ਪਲ ਵੇਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ (marginal revenue or MR) ਮਤਲਬ ਕਿਸੇ ਪਲ ਵੇਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ $\text{MR} = \dfrac{dR}{dx} = 6x + 36$

ਜਦੋਂ $x = 5$ ਹੈ, ਤਦ $\text{MR} = 6(5) + 36 = 66$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਭਾਵ ਆਮਦਨ Rs 66 ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 6.1

1. ਚੱਕਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਇਸ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ $r$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ
   (a) $r = 3$ cm ਹੈ। (b) $r = 4$ cm ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ 8 $\text{cm}^3/\text{s}$ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ

ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਇਸ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 12 cm ਹੋਵੇ ?

3. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3 cm/s ਦੀ ਇਕਸਮਾਨ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਘਣ ਦਾ ਕਿਨਾਰਾ 3 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿਨਾਰਾ 10 cm ਲੰਬਾ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੱਥਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤਰੰਗਾਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਵਿੱਚ 5 cm/s ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਰੰਗ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ 8 cm ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਪਲ, ਚੱਕਰ ਰਾਹੀਂ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ?
6. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 0·7 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਘੇਰੇ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ ਕੀ ਹੈ ਜਦੋਂ $r = 4.9$ cm ਹੈ ?
7. ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਈ $x$, 5 cm/min ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਘੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ $y$, 4 cm/min ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 8$ cm ਅਤੇ $y = 6$ cm ਹੈ ਤਦ ਆਇਤ ਦੇ (a) ਪਰਿਮਾਪ (b) ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਇੱਕ ਗੁਬਾਰਾ ਜੋ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੋਲਾਕਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਪੰਪ ਨਾਲ 900 cm$^3$ ਗੈਸ ਪ੍ਰਤੀ ਸੈਕਿੰਡ ਭਰ ਕੇ ਫੁਲਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਗੁਬਾਰੇ ਦੀ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 15 cm ਹੈ।
9. ਇੱਕ ਗੁਬਾਰਾ ਜੋ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੋਲਕਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ ਚਲ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ।
10. ਇੱਕ 5 m ਲੰਬੀ ਪੌੜੀ ਕੰਧ 'ਤੇ (ਝੁਕੀ ਹੋਈ) ਲੱਗੀ ਹੈ। ਪੌੜੀ ਦਾ ਹੇਠਲਾ ਸਿਰਾ, ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਦੀਵਾਰ ਤੋਂ 2 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਪਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੀਵਾਰ ਤੇ ਇਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਘੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਪੌੜੀ ਦਾ ਹੇਠਲਾ ਸਿਰਾ ਦੀਵਾਰ ਤੋਂ 4 m ਦੂਰ ਹੈ।
11. ਇੱਕ ਕਣ ਵਕਰ $6y = x^3 + 2$ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਚਲ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਵਕਰ 'ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $x$-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਨਾਲ $y$-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 8 ਗੁਣਾ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਬਦਲ ਰਿਹਾ ਹੈ।
12. ਹਵਾ ਦੇ ਇੱਕ ਬੁਲਬੁਲੇ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ $\frac{1}{2}$ cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬੁਲਬੁਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 1 cm ਹੈ ?
13. ਇੱਕ ਗੁਬਾਰਾ ਜੋ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੋਲਾਕਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਵਿਆਸ $\frac{3}{2}(2x+1)$ ਹੈ। $x$ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ?
14. ਇੱਕ ਪਾਇਪ ਤੋਂ ਰੇਤ 12 cm$^3$/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਡਿੱਗ ਰਹੀ ਹੈ। ਡਿੱਗਦੀ ਰੇਤ ਜ਼ਮੀਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਹਮੇਸ਼ਾ ਅਧਾਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦਾ ਛੇਵਾਂ ਹਿੱਸਾ ਹੈ। ਰੇਤ ਨਾਲ ਬਣੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਚਾਈ 4 cm ਹੈ ?

**15.** ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਦੀਆਂ $x$ ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ $C(x)$ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)

$$C(x) = 0.007x^3 \text{ ï } 0.003x^2 + 15x + 4000$$

ਨਾਲ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ 17 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ?

**16.** ਕਿਸੇ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ $x$ ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਵੇਚਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ $R(x)$ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ

$$R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $x = 7$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 17 ਅਤੇ 18 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ

**17.** ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ $r = 6$ cm ਤੇ $r$ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਹੈ :

(A) $10\pi$ (B) $12\pi$ (C) $8\pi$ (D) $11\pi$

**18.** ਇੱਕ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ $x$ ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਵੇਚਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 15$ ਹੈ ਤਾਂ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਹੈ :

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

## 6.3 ਵਧਦੇ (Increasing) ਅਤੇ ਘਟਦੇ (Decreasing) ਫਲਨ

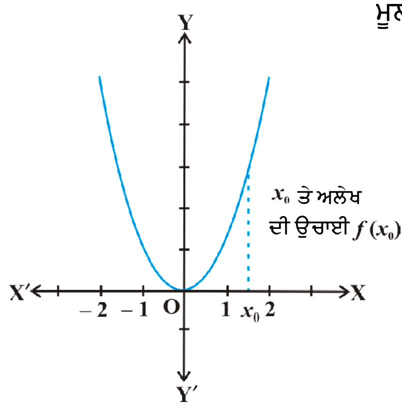
ਇਸ ਭਾਗ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਜਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਜੋ ਕਿ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਹੈ, ਚਿੱਤਰ 6.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਮੁੱਲ

| $x$ | $f(x) = x^2$ |
|---|---|
| ï 2 | 4 |
| $-\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{4}$ |
| ï 1 | 1 |
| $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 0 | 0 |

ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਧਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਘਟਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 6.1

ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਮੁੱਲ

| $x$ | $f(x) = x^2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 1 |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{4}$ |
| 2 | 4 |

ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਧਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਵੱਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਪਹਿਲਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6.1) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਾਲ ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲਗਾਤਾਰ ਵੱਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਕਾਰਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > 0$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲਗਾਤਾਰ ਘਟਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x < 0$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਘਟਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇਵਾਂਗੇ।

**ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1.** ਮੰਨ ਲਉ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ I ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ। ਤਦ $f$

(i) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

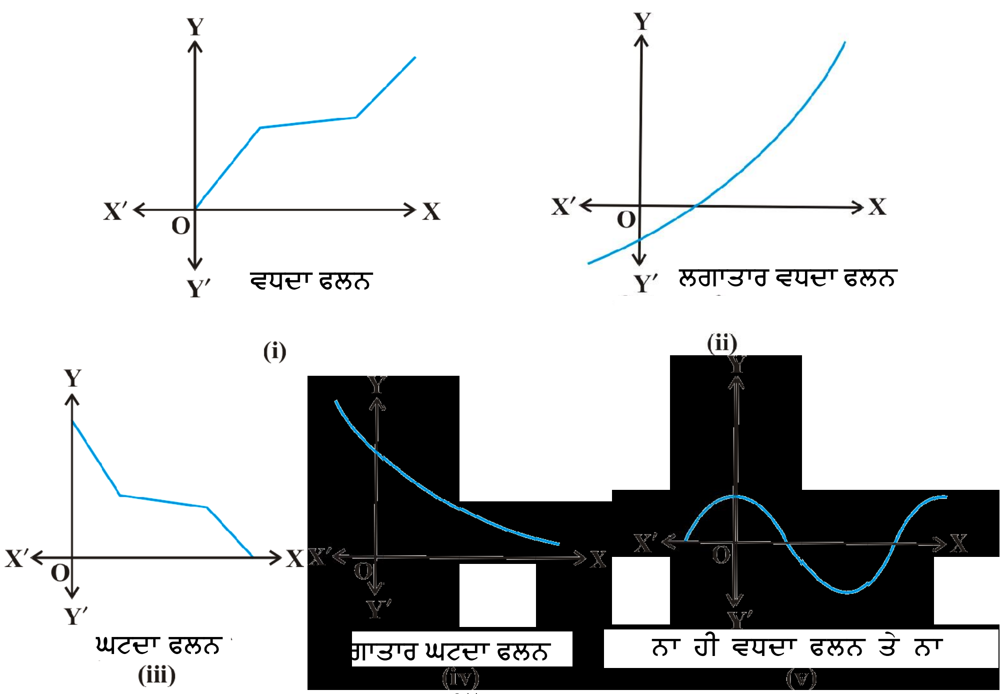
(ii) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਵਧਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

(iii) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਘਟਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

(iv) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਘਟਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿਤਰਨ ਚਿੱਤਰ 6.2 ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।




ਚਿੱਤਰ 6.2

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $x_0$ ਹੈ ਤਾਂ $x_0$ ਤੇ $f$ ਵਧਦਾ, ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ, ਘਟਦਾ ਅਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ $x_0$ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ I ਵਿੱਚ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f$ ਵਧਦਾ, ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ, ਘਟਦਾ ਅਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਵਧਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$x_0$ ਤੇ $f$ ਵਧਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ $\mathrm{I} = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ ਦੇ ਲਈ

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

ਬਾਕੀ ਹਾਲਤਾਂ ਦਾ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = 7x - 3$, **R** ਤੇ ਇੱਕ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ **R** ਵਿੱਚ $x_1$ ਅਤੇ $x_2$ ਕੋਈ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੈ; ਤਦ

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \\ &\Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਤੋਂ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ **R** ਤੇ $f$ ਇੱਕ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਧਦੇ ਅਤੇ ਘਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਪਰੀਖਿਅਣ ਦੇ ਸਬੂਤ ਲਈ ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤੇ ਗਏ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਲੋੜ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ $f$ ਅੰਤਰਾਲ $[a,b]$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ $(a,b)$ ਤੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ। ਤਦ

(a) $[a,b]$ ਵਿੱਚ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

(b) $[a,b]$ ਵਿੱਚ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) < 0$ ਹੈ।

(c) $[a,b]$ ਵਿੱਚ $f$ ਇੱਕ ਅਚਲ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਹੈ।

ਸਬੂਤ (a) ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ $x_1, x_2 \in [a, b]$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $x_1 < x_2$ ਤਦ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ $x_1$ ਅਤੇ $x_2$ ਦੇ ਮੱਧ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$$

ਅਰਥਾਤ $\quad f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad$ ( ਕਿਉਂਕਿ $f'(c) > 0$ )

ਅਰਥਾਤ $\quad f(x_2) > f(x_1)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$[a,b]$ ਦੇ ਸਾਰੇ $x_1, x_2$ ਦੇ ਲਈ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ਇਸ ਲਈ $[a,b]$ ਵਿੱਚ $f$ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਭਾਗ (b) ਅਤੇ (c) ਦੇ ਸਬੂਤ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ। ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਨੂੰ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀਆਂ*

(i) ਹੋਰ ਵਿਆਪਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਨੁਸਾਰ ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਇਲਾਵਾ $x$ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ $x$, $f$ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਤਦ $f$ ਨੂੰ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਇਲਾਵਾ $x$ ਲਈ $f^1(x) < 0$ ਅਤੇ $f(x) > 0$ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਤਦ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਫਲਨ ਕਿਸੀ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਪੱਕੇ ਤੌਰ ਤੇ $f$ ਉਸ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ, ਇਸ ਦੇ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਦਾ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f$,

$$f(x) = x^3 \text{ ï } 3x^2 + 4x,\ x \in \mathbf{R}$$

**R** ਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \text{ ï } 6x + 4 \\ &= 3(x^2 \text{ ï } 2x + 1) + 1 \\ &= 3(x \text{ ï } 1)^2 + 1 > 0, \quad \text{ਸਾਰੇ } x \in \mathbf{R} \text{ ਦੇ ਲਈ} \end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ $f$, **R** ਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = \cos x$

(a) $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

(b) $(\pi, 2\pi)$, ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(c) $(0, 2\pi)$ ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $f'(x) = \text{ï } \sin x$

(a) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ $x \in (0, \pi)$ ਦੇ ਲਈ $\sin x > 0$, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(x) < 0$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

(b) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ $x \in (\pi, 2\pi)$ ਦੇ ਲਈ $\sin x < 0$, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(\pi, 2\pi)$ ਵਿੱਚ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(c) ਉਪਰੋਕਤ (a) ਅਤੇ (b) ਨਾਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $(0, 2\pi)$ ਵਿੱਚ $f$ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = x^2 \text{ ï } 4x + 6$

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

ਜਾਂ $$f'(x) = 2x - 4$$

ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਬਿੰਦੂ $x = 2$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੋ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਅਰਥਾਤ $(-\infty, 2)$ ਅਤੇ $(2, \infty)$ (ਚਿੱਤਰ 6.3) ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਅੰਤਰਾਲ $(-\infty, 2)$ ਵਿੱਚ $f'(x) = 2x - 4 < 0$ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 6.3

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ $f$, ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਅੰਤਰਾਲ $(2, \infty)$ , ਵਿੱਚ $f'(x) > 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 11.** ਉਹ ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f$,

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$

ਚਿੱਤਰ 6.4

ਜਾਂ
$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - 12x - 72 \\ &= 12(x^2 - x - 6) \\ &= 12(x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

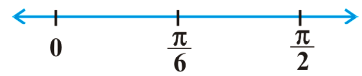
ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = -2, 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। $x = -2$ ਅਤੇ $x = 3$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਅਰਥਾਤ $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 6.4)।

ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(-\infty, -2)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ $f'(x)$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(-2, 3)$ ਵਿੱਚ $f'(x)$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ। ਫਲਸਰੂਪ ਫਲਨ $f$ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(-\infty, -2)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(-2, 3)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਪਰ $f$, **R** ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

| ਅੰਤਰਾਲ | $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ | ਫਲਨ $f$ ਦੀ ਕਿਸਮ |
|---|---|---|
| $(-\infty, -2)$ | $(-)(-) > 0$ | $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ |
| $(-2, 3)$ | $(-)(+) < 0$ | $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ |
| $(3, \infty)$ | $(+)(+) > 0$ | $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ |

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = \sin 3x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(a) ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਘਟਦਾ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 6.5

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$f(x) = \sin 3x$$

ਜਾਂ

$$f'(x) = 3\cos 3x$$

ਇਸ ਲਈ, $f'(x) = 0$ ਨਾਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\cos 3x = 0$ ਜਿਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ $3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (ਕਿਉਂਕਿ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $x = \frac{\pi}{6}$ ਅਤੇ $\frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਬਿੰਦੂ $x = \frac{\pi}{6}$, ਅੰਤਰਾਲ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ਨੂੰ ਦੋ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ਅਤੇ $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਸਾਰੇ $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਕਿਉਂਕਿ $0 \le x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \le 3x < \frac{\pi}{2}$ ਅਤੇ ਸਾਰੇ $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) < 0$ ਕਿਉਂਕਿ $\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x \le \frac{3\pi}{2}$

ਇਸ ਲਈ ਅੰਤਰਾਲ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ਵਿੱਚ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $x = 0$ ਜਾਂ $x = \frac{\pi}{6}$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਵੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਤੋਂ, $f$, $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਅਤੇ $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f$, ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ

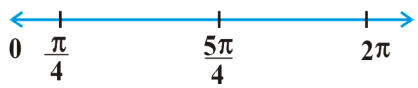
$$f(x) = \sin x + \cos x, \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

ਜਾਂ

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

ਹੁਣ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $\sin x = \cos x$ ਜਿਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $0 \le x \le 2\pi$,

ਬਿੰਦੂ $x = \frac{\pi}{4}$ ਅਤੇ $x = \frac{5\pi}{4}$ ਅੰਤਰਾਲ $[0, 2\pi]$ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ, ਅਰਥਾਤ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ ਅਤੇ $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ।




ਚਿੱਤਰ 6.6

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\quad f'(x) > 0 \quad$ ਜਦੋਂ $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad$ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਅਤੇ $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਅਤੇ $\quad f'(x) < 0$, ਜਦੋਂ $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad f$ ਅੰਤਰਾਲ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

| ਅੰਤਰਾਲ | $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ | ਫਲਨ ਦੀ ਕਿਸਮ |
|---|---|---|
| $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ | $> 0$ | $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ |
| $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ | $< 0$ | $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ |
| $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ | $> 0$ | $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ |

## ਅਭਿਆਸ 6.2

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ **R** ਤੇ $f(x) = 3x + 17$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਤੇ $f(x) = e^{2x}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ $f(x) = \sin x$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

   (a) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

   (c) $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਘਟਦਾ ਹੈ।
4. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = 2x^2$ ï $3x$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

**5.** ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = 2x^3$ ï $3x^2$ ï $36x + 7$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

**6.** ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਹਨ :

(a) $x^2 + 2x + 5$ (b) $10$ ï $6x$ ï $2x^2$

(c) ï $2x^3$ ï $9x^2$ ï $12x + 1$ (d) $6$ ï $9x$ ï $x^2$

(e) $(x + 1)^3$ $(x$ ï $3)^3$

**7.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}, x >$ ï $1$, ਆਪਣੇ ਸੰਪੂਰਨ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

**8.** $x$ ਦੇ ਉਹ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ $y = [x(x$ ï $2)]^2$ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

**9.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ $y = \frac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$, $\theta$ ਦਾ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

**10.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਲਘੂਗਣਨ ਫਲਨ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

**11.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ (ï $1, 1)$ ਵਿੱਚ $f(x) = x^2$ ï $x + 1$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

**12.** ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ ਫਲਨ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦੇ ਹਨ ?

(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

**13.** ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ $f(x) = x^{100} + \sin x$ ï $1$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

(A) $(0,1)$ (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

**14.** $a$ ਦਾ ਉਹ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ ਅੰਤਰਾਲ $[1, 2]$ ਵਿੱਚ $f(x) = x^2 + ax + 1$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

**15.** ਮੰਨ ਲਉ [ï $1, 1]$ ਨਾਲ ਇੱਕ ਨਾ ਜੁੜਾ ਅੰਤਰਾਲ I ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ I ਵਿੱਚ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਵਧਦਾ ਹੈ।

**16.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = \log \sin x$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

**17.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = \log|\cos x|$ ਅੰਤਰਾਲ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

**18.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਤੇ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਹੈ।

**19.** ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ $y = x^2 e^{-x}$ ਵਧਦਾ ਹੈ।

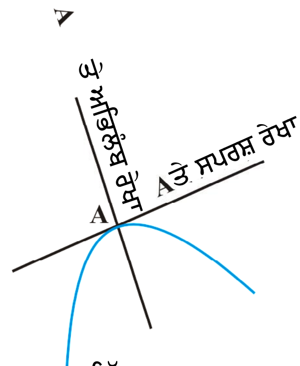
(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

## 6.4 ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ (Tangents and Normals)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡਿਫਰੇਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਵਕਰ ਤੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0)$ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਢਲਾਨ (slope) $m$ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ

$y - y_0 = m(x - x_0)$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 6.7

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)}$ $[= f'(x_0)]$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(x_0, y_0)$ ਤੇ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ

ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ, ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0)$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $\frac{-1}{f'(x_0)}$ ਹੈ। (ਜੇ $f'(x_0) \neq 0$), ਇਸ ਲਈ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0)$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ :

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

ਅਰਥਾਤ $(y - y_0)f'(x_0) + (x - x_0) = 0$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਜਦੋਂ $y = f(x)$ ਦੀ ਕੋਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $x$-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨ ਦਿਸ਼ਾ ਨਾਲ $\theta$ ਕੋਣ ਬਣਾਏ, ਤਦ
>
> $\frac{dy}{dx}$ = ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $= \tan\theta$

**ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀਆਂ (Particular cases)**

(i) ਜਦੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, $\tan\theta = 0$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\theta = 0$ ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, $(x_0, y_0)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ $y = y_0$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

(ii) ਜਦੋਂ $\theta \to \frac{\pi}{2}$, ਤਦ $\tan\theta \to \infty$, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $x$-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, $(x_0, y_0)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ $x = x_0$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

ਉਦਾਹਰਣ 14. $x = 2$ ਤੇ ਵਕਰ $y = x^3 - x$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੀ $x = 2$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = \left. 3x^2 - 1\right]_{x=2} = 11 \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਵਕਰ $y = \sqrt{4x-3} - 1$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $\frac{2}{3}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $(x, y)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x-3)^{\frac{-1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}} \text{ ਹੈ।}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਢਲਾਨ $\frac{2}{3}$ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{2}{\sqrt{4x-3}} = \frac{2}{3}$$

ਜਾਂ $\quad 4x - 3 = 9$

ਜਾਂ $\quad x = 3$

ਹੁਣ $y = \sqrt{4x-3} - 1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $x = 3$, $y = \sqrt{4(3)-3} - 1 = 2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ (3, 2) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਢਲਾਨ 2 ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵਕਰ $y + \frac{2}{(x-3)} = 0$ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ :

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(x,y)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-3)^2} \text{ ਹੈ।}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਢਲਾਨ 2 ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{2}{(x-3)^2} = 2$$

ਜਾਂ $\qquad (x - 3)^2 = 1$

ਜਾਂ $\qquad x - 3 = \pm 1$

ਜਾਂ $\qquad x = 2, 4$

ਹੁਣ $x = 2$ ਨਾਲ $y = 2$ ਅਤੇ $x = 4$ ਨਾਲ $y = -2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦਿੱਤੇ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ 2 ਵਾਲੀ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ (2] 2) ਅਤੇ (4] &2) ਤੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (2] 2) ਤੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ :

$$y - 2 = 2(x - 2) \text{ ਹੈ।}$$

ਜਾਂ $\qquad y - 2x + 2 = 0$

ਅਤੇ (4] &2) ਤੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ :

$$y - (-2) = 2(x - 4)$$

ਜਾਂ $\qquad y - 2x + 10 = 0$ gA

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਵਕਰ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ (i) $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ (ii) $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ਨੂੰ $x$, ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{25}\frac{dy}{dx} = 0$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = \frac{-25}{4}\frac{x}{y}$$

(i) ਹੁਣ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਸ ਦੀ ਢਲਾਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ $\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{-25}{4}\frac{x}{y}=0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤਦ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦੋਂ $x = 0$ ਹੋਵੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ਵਿੱਚ $x = 0$ ਤੇ $y^2 = 25$,ਅਰਥਾਤ $y = \pm 5$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ $(0, 5)$ ਅਤੇ $(0, -5)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ $x$&ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

(ii) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਸ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ $\frac{4y}{25x}=0$, ਜਾਂ $y = 0$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ। $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ਤੇ $y = 0$ ਤੋਂ $x = \pm 2$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਬਿੰਦੂ (2] 0) ਅਤੇ (&2] 0) ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਵਕਰ $y=\frac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਇਹ $x$-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $x$-ਧੁਰੇ ਤੇ $y = 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $y = 0$, ਤਦ ਵਕਰ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨਾਲ $x = 7$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਕਰ $x$-ਧੁਰੇ ਨੂੰ $(7, 0)$ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਵਕਰ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y(2x-5)}{(x-2)(x-3)} \qquad \text{(ਕਿਉਂ)}$$

ਜਾਂ
$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(7,0)} = \frac{1-0}{(5)(4)}=\frac{1}{20} \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ $(7, 0)$ ਤੇ ਢਲਾਨ $\frac{1}{20}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(7, 0)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ :

$$y-0=\frac{1}{20}(x-7) \qquad \text{ਜਾਂ} \qquad 20y-x+7=0 \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਵਕਰ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(1, 1)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$ ਦੀ $x$, ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}+\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ਇਸ ਲਈ, (1, 1) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,1)} = -1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ (1]1) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$y$ ï 1 = ï 1 ($x$ ï 1) ਜਾਂ $y + x$ ï 2 = 0 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ (1] 1) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਢਲਾਨ

$$\frac{-1}{\text{(1]1) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ}} = 1 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ, (1] 1) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$y$ ï 1 = 1 ($x$ ï 1) ਜਾਂ $y$ ï $x$ = 0 ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 20.** $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਵਕਰ ... (1)

ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ, ਜਿੱਥੇ $t = \frac{\pi}{2}$ ਹੈ, ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** (1) ਦਾ $t$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dx}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{dy}{dt} = -3b\cos^2 t\sin t$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3b\cos^2 t\sin t}{3a\sin^2 t\cos t} = \frac{-b}{a}\frac{\cos t}{\sin t}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $t = \frac{\pi}{2}$ ਤਦ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-b\cos\frac{\pi}{2}}{a\sin\frac{\pi}{2}} = 0$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ

ਅਤੇ ਜਦੋਂ $t = \frac{\pi}{2}$, ਤਦ $x = a$ ਅਤੇ $y = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $t = \frac{\pi}{2}$ ਤੇ ਅਰਥਾਤ $(a, 0)$ ਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $y$ ï 0 =0 ($x$ ï $a$) ਅਰਥਾਤ $y = 0$ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 6.3

1. ਵਕਰ $y = 3x^4$ ï $4x$ ਤੇ $x = 4$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਵਕਰ $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ ਤੇ $x = 10$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਵਕਰ $y = x^3$ ï $x + 1$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ $x$-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 2 ਹੈ।

4. ਵਕਰ $y = x^3$ ï $3x + 2$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ $x$-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 3 ਹੈ।

5. ਵਕਰ $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ ਤੇ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਢਲਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਵਕਰ $x = 1 - a\sin\theta, y = b\cos^2\theta$ ਤੇ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਢਲਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਵਕਰ $y = x^3$ ï $3x^2$ ï $9x + 7$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ $x$&ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

8. ਵਕਰ $y = (x$ ï $2)^2$ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ, ਬਿੰਦੂਆਂ (2] 0) ਅਤੇ (4] 4) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਜੀਵਾ ਦੇ, ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

9. ਵਕਰ $y = x^3$ ï $11x + 5$ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $y = x$ ï 11 ਹੈ।

10. ਢਲਾਨ ï 1 ਵਾਲੀ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵਕਰ $y = \frac{1}{x-1}, x \neq$ ï 1 ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ।

11. ਢਲਾਨ 2 ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵਕਰ $y = \frac{1}{x-3}, x \neq 3$ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ।

12. ਢਲਾਨ 0 ਵਾਲੀ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵਕਰ $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ।

13. ਵਕਰ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ
   (i) $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।    (ii) $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

14. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਕਰਾਂ ਤੇ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $y = x^4$ ï $6x^3 + 13x^2$ ï $10x + 5$ ਦੇ (0, 5) ਤੇ
   (ii) $y = x^4$ ï $6x^3 + 13x^2$ ï $10x + 5$ ਦੇ (1, 3) ਤੇ
   (iii) $y = x^3$ ਦੇ (1, 1) ਤੇ
   (iv) $y = x^2$ ਦੇ (0, 0) ਤੇ
   (v) $x = \cos t, y = \sin t$ ਦੇ $t = \frac{\pi}{4}$ ਤੇ

15. ਵਕਰ $y = x^2$ ï $2x + 7$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ
   (a) ਰੇਖਾ $2x$ ï $y + 9 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।
   (b) ਰੇਖਾ $5y$ ï $15x = 13$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

16. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਕਰ $y = 7x^3 + 11$ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ, ਜਿੱਥੇ $x = 2$ ਅਤੇ $x =$ ï 2 ਹੈ, ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

**17.** ਵਕਰ $y = x^3$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਬਿੰਦੂ ਦੇ $y$-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

**18.** ਵਕਰ $y = 4x^3$ ï $2x^5$, ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਲੰਘਦੀਆਂ ਹਨ।

**19.** ਵਕਰ $x^2 + y^2$ ï $2x$ ï $3 = 0$ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਉਹ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

**20.** ਵਕਰ $ay^2 = x^3$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(am^2, am^3)$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**21.** ਵਕਰ $y = x^3 + 2x + 6$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $x + 14y + 4 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

**22.** ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4ax$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(at^2, 2at)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**23.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਕਰ $x = y^2$ ਅਤੇ $xy = k$ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ* ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਦੋਂ $8k^2 = 1$ ਹੋਵੇ।

**24.** ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**25.** ਵਕਰ $y = \sqrt{3x-2}$ ਦੀ ਉਸ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $4x - 2y + 5 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 26 ਅਤੇ 27 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

**26.** ਵਕਰ $y = 2x^2 + 3 \sin x$ ਦੇ $x = 0$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਢਲਾਨ ਹੈ :

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) ï 3 (D) $-\frac{1}{3}$

**27.** ਕਿਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $y = x + 1$, ਵਕਰ $y^2 = 4x$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ ?

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1, ï 2) (D) (ï 1, 2) ਹੈ।

## 6.5 ਲਗਭਗਤਾਵਾਂ (Approximation)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਪਰਿਮਾਣਾਂ ਦੇ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਉ $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $y = f(x)$ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਵਕਰ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $\Delta x$, ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਛੋਟੇ ਵਾਧੇ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ $x$ ਵਿੱਚ ਹੋਏ ਛੋਟੇ ਵਾਧੇ $\Delta x$ ਦੇ ਸੰਗਤ $y$ ਵਿੱਚ ਹੋਏ ਵਾਧੇ ਨੂੰ $\Delta y$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\Delta y = f(x + \Delta x)$ ï $f(x)$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(i) $x$ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਨੂੰ $dx$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ $dx = \Delta x$ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(ii) $y$ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਨੂੰ $dy$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ $dy = f'(x)\, dx$ ਜਾਂ $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $x$ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ $dx = \Delta x$ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\Delta y$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਸਹੀ ਮੁੱਲ $dy$ ਹੁੰਦਾ

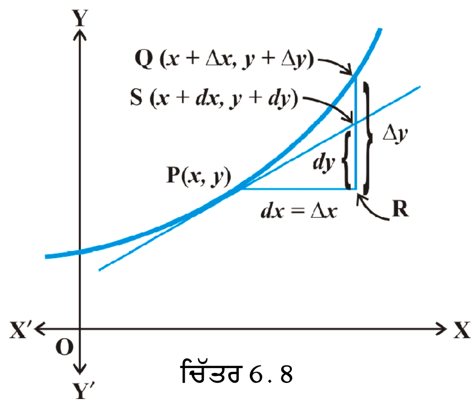
* ਦੋ ਵਕਰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਕੋਣ ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਹੋਣ।

ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ $dy \approx \Delta y$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$\Delta x$, $\Delta y$, $dx$ ਅਤੇ $dy$ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਚਿੱਤਰ 6.8 ਦੇਖੋ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਨਿਰਭਰ ਚਲ (Dependent variable) ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਅਲ, ਚਲ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਆਜ਼ਾਦ ਚਲ (Independent variable) ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਅਲ, ਚਲ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. $\sqrt{36.6}$ ਦੀ ਲਗਭਗਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਅਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ।




ਚਿੱਤਰ 6.8

ਹੱਲ : $y = \sqrt{x}$ ਲਵੋ ਇੱਥੇ $x = 36$ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ $\Delta x = 0.6$ ਹੈ।

ਤਦ $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{36.6} - \sqrt{36} = \sqrt{36.6} - 6$

$$\sqrt{36.6} = 6 + \Delta y$$

ਹੁਣ $\Delta y$ ਲਗਭਗ $dy$ ਦੇ ਬਰਾਰਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}}(0.6) \quad (\text{ ਕਿਉਂਕਿ } y = \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{36}}(0.6) = 0.05$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\sqrt{36.6}$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ $6 + 0.05 = 6.05$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 22. $(25)^{\frac{1}{3}}$ ਦੀ ਲਗਭਗਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $y = x^{\frac{1}{3}}$ ਇੱਥੇ $x = 27$ ਅਤੇ $\Delta x = -2$ ਹੈ।

ਤਦ
$$\Delta y = (x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$$

$$= (25)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}} = (25)^{\frac{1}{3}} - 3$$

ਜਾਂ

$$(25)^{\frac{1}{3}} = 3 + \Delta y$$

ਹੁਣ $\Delta y$ ਲਗਭਗ $dy$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}(-2) \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } y = x^{\frac{1}{3}})$$

$$= \frac{1}{3((27)^{\frac{1}{3}})^2}(-2) = \frac{-2}{27} = -0.074$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $(25)^{\frac{1}{3}}$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਹੈ :

3 + (ï 0. 074) = 2.926

**ਉਦਾਹਰਣ 23.** $f(3.02)$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ $x = 3$ ਅਤੇ $\Delta x = 0.02$ ਹੈ।

$$f(3.02) = f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 3$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\Delta y = f(x + \Delta x)$ ï $f(x)$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$$
$$\approx f(x) + f'(x)\,\Delta x \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } dx = \Delta x)$$
$$\approx (3x^2 + 5x + 3) + (6x + 5)\,\Delta x$$

$$f(3.02) = (3(3)^2 + 5(3) + 3) + (6(3) + 5)(0.02) \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } x = 3, \Delta x = 0.02)$$
$$= (27 + 15 + 3) + (18 + 5)(0.02)$$
$$= 45 + 0.46 = 45.46$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f(3.02)$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ 45-46 ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 24.** $x$ ਮੀਟਰ ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਿੱਚ 2% ਦੇ ਵਾਧੇ ਕਾਰਨ ਨਾਲ ਘਣ ਦੇ ਆਇਤਨ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਬਦਲਾਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ

$$V = x^3$$

ਜਾਂ
$$dV = \left(\frac{dV}{dx}\right)\Delta x = (3x^2)\,\Delta x$$

$$= (3x^2)(0.02x) \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } x \text{ ਦਾ } 2\% = .02x)$$
$$= 0.06x^3 \text{ m}^3$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਆਇਤਨ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਬਦਲਾਵ $0.06\, x^3\, \text{m}^3$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 9 cm ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 0-03 cm ਦੀ ਗਲਤੀ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਗਲਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ $r$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਮਾਪਣ ਵਿੱਚ ਗਲਤੀ $\Delta r$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $r = 9$ cm ਅਤੇ $\Delta r = 0.03$ cm ਹੈ। ਹੁਣ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ V

$$\text{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜਾਂ $$\frac{d\text{V}}{dr} = 4\pi r^2$$

ਇਸ ਲਈ $$d\text{V} = \left(\frac{d\text{V}}{dr}\right)\Delta r = (4\pi r^2)\Delta r$$

$$= [4\pi(9)^2]\,(0.03) = 9.72\pi \text{ cm}^3$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਇਤਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਗਲਤੀ $9.72\pi \text{ cm}^3$ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 6.4

1. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਅਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਦਸ਼ਮਲਵ ਦੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਤੱਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $\sqrt{25.3}$ (ii) $\sqrt{49.5}$ (iii) $\sqrt{0.6}$

   (iv) $(0.009)^{\frac{1}{3}}$ (v) $(0.999)^{\frac{1}{10}}$ (vi) $(15)^{\frac{1}{4}}$

   (vii) $(26)^{\frac{1}{3}}$ (viii) $(255)^{\frac{1}{4}}$ (ix) $(82)^{\frac{1}{4}}$

   (x) $(401)^{\frac{1}{4}}$ (xi) $(0.0037)^{\frac{1}{2}}$ (xii) $(26.57)^{\frac{1}{3}}$

   (xiii) $(81.5)^{\frac{1}{4}}$ (xiv) $(3.968)^{\frac{3}{2}}$ (xv) $(32.15)^{\frac{1}{5}}$

2. $f(2.01)$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$ ਹੈ।
3. $f(5.001)$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ $f(x) = x^3$ ï $7x^2 + 15$ ਹੈ।
4. $x$ m ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਿੱਚ 1% ਵਾਧੇ ਦੇ ਕਾਰਨ ਘਣ ਦੇ ਆਇਤਨ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਲਗਭਗ ਬਦਲਾਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. $x$ m ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਿੱਚ 1% ਘਾਟੇ ਦੇ ਕਾਰਨ ਘਣ ਦੇ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲਾ

ਲਗਭਗ ਬਦਲਾਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 m ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 0.02 m ਦੀ ਗਲਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਗਲਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ 9 m ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 0.03 cm ਦੀ ਗਲਤੀ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਗਲਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਜਦੋਂ $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$ ਹੋ, ਤਾਂ $f(3.02)$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਹੈ :

   (A) 47.66 (B) 57.66 (C) 67.66 (D) 77.66
9. ਭੁਜਾ ਵਿੱਚ 3% ਵਾਧੇ ਦੇ ਕਾਰਨ ਭੁਜਾ $x$ ਦੇ ਘਣ ਦੇ ਆਇਤਨ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਬਦਲਾਵ ਹੈ :

   (A) $0.06\ x^3\ \text{m}^3$ (B) $0.6\ x^3\ \text{m}^3$ (C) $0.09\ x^3\ \text{m}^3$ (D) $0.9\ x^3\ \text{m}^3$

## 6.6 ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (Maximum and Minimum)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂਆਂ (Turning points) ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਤੇ ਅਲੇਖ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਤੇ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (Absolute maximum value) ਅਤੇ ਅਸਲ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (Absolute minimum value) ਵੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਕਈ ਵਿਹਾਰਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

(i) ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੇ ਦਰੱਖਤਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਬਾਗ ਤੋਂ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਲਾਭ ਫਲਨ $P(x) = ax + bx^2$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ $a, b$ ਅਚਲ ਹੈ ਅਤੇ $x$ ਪ੍ਰਤੀ ਏਕੜ ਵਿੱਚ ਸੰਤਰੇ ਦੇ ਦਰੱਖਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ। ਪ੍ਰਤੀ ਏਕੜ ਕਿੰਨੇ ਦਰੱਖਤ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਦੇਣਗੇਂ ?

(ii) ਇੱਕ 60 m ਉੱਚੇ ਭਵਨ ਤੋਂ ਹਵਾ ਵਿੱਚ ਸੁੱਟੀ ਗਈ ਇੱਕ ਗੇਂਦ $h(x) = 60 + x - \frac{x^2}{60}$ ਦੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਰਸਤੇ ਤੇ ਚਲਦੀ ਹੈ, ਇੱਥੇ $x$ ਭਵਨ ਤੋਂ ਗੇਂਦ ਦੀ ਲੇਟਵੀਂ ਦੂਰੀ ਅਤੇ $h(x)$ ਉਸਦੀ ਉਚਾਈ ਹੈ। ਗੇਂਦ ਕਿੰਨੀ ਅਧਿਕਤਮ ਉਚਾਈ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚੇਗੀ ?

(iii) ਦੁਸ਼ਮਣ ਦਾ ਇੱਕ ਅਪਾਚੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਵਕਰ $f(x) = x^2 + 7$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਰਸਤੇ ਤੇ ਉੱਡ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਸੈਨਿਕ ਉਸ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਨੂੰ ਗੋਲੀ ਮਾਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਉਸ ਦੇ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਹੈ। ਇਹ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ ?

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਸਾਂਝਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਅਸੀਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੁਲਝਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਪਰੀਖਿਅਣ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ $f$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਤਦ

(a) $f$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ I ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(c) \geq f(x)$, ਸਾਰੇ $\forall \; x \in \mathrm{I}$ ਲਈ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ $f(c)$ ਨੂੰ I ਵਿੱਚ $f$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਨੂੰ I ਵਿੱਚ $f$ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(b) $f$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ I ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(c) \leq f(x)$, ਸਾਰੇ $\forall \; x \in \mathrm{I}$ ਲਈ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ $f(c)$ ਨੂੰ I ਵਿੱਚ $f$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਨੂੰ I ਵਿੱਚ $f$ ਦੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

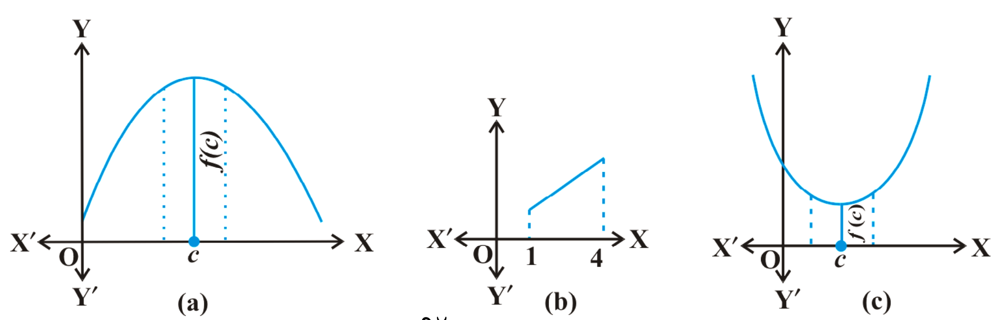
(c) I ਵਿੱਚ $f$ ਇੱਕ ਚਰਮ ਮੁੱਲ (extreme value) ਰੱਖਣ ਵਾਲਾ ਫਲਨ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(c)$, $f$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।
ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $f(c)$, I ਨੂੰ $f$ ਦਾ ਚਰਮ ਮੁੱਲ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਇੱਕ ਚਰਮ ਬਿੰਦੂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਚਿੱਤਰ 6.9 (a), (b) ਅਤੇ (c) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਲੇਖ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵੀ ਜੋ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ /ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। (ਉਦਾਹਰਨ 27)A

ਉਦਾਹਰਣ 26. $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੈ ਤਾਂ, ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ, ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6.10) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x) = 0$ ਜਦੋਂ $x = 0$ ਹੈ ਅਤੇ

$$f(x) \geq 0, \text{ ਸਾਰੇ } x \in \mathbf{R} \text{ ਦੇ ਲਈ}$$

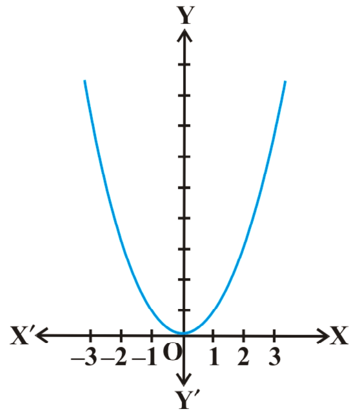



ਚਿੱਤਰ 6.9

ਇਸ ਲਈ, $f$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 0 ਹੈ ਅਤੇ $f$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **R** ਵਿੱਚ $f$ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ* ਜੇ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਕੇਵਲ [ï 2, 1] ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਕਰੀਏ ਤਦ $x =$ ï 2 ਤੇ $f$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (ï 2)$^2$ = 4 ਹੋਵੇਗਾ।

**ਉਦਾਹਰਣ 27.** $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ, ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.10

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6.11) ਤੋਂ

$f(x) \geq 0$, ਸਾਰੇ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਅਤੇ $f(x) = 0$ ਜਦੋਂ ਕਿ $x = 0$ ਹੈ।

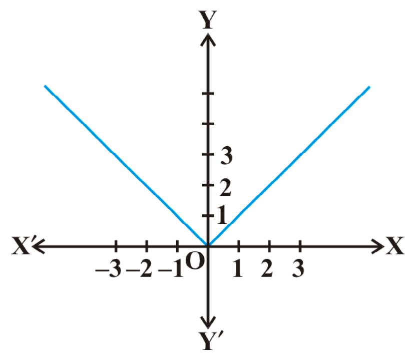
ਇਸ ਲਈ, $f$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 0 ਹੈ ਅਤੇ $f$ ਦੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਹੈ। ਅਤੇ ਅਲੇਖ ਨਾਲ ਇਹ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ **R** ਵਿੱਚ $f$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **R** ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ*

(i) ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਕੇਵਲ [ï 2, 1] ਤੱਕ ਸੀਮਤ ਕਰੀਏ, ਤਾਂ $f$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ |ï 2| = 2 ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਉਦਾਹਰਨ 27 ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਫਲਨ $f$, $x = 0$ ਤੇ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 28.** $f(x) = x, x \in (0, 1)$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ, ਪਤਾ ਕਰੋ।

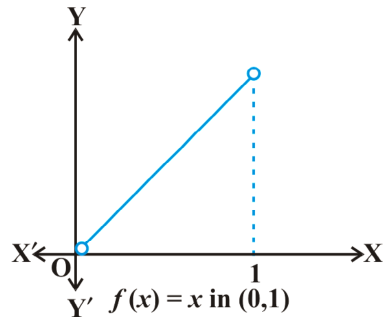


ਚਿੱਤਰ 6.11

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤੇ ਅੰਤਰਾਲ (0, 1) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ। ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6.12) ਤੋਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 0 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਉਪਲਬਧ ਹਨ ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ 0 ਦਾ ਨੇੜਲਾ ਬਿੰਦੂ $x_0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $\frac{x_0}{2} < x_0$ ਸਾਰੇ $x_0 \in (0,1)$ ਦੇ ਲਈ, ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ 1 ਦਾ ਨੇੜਲਾ ਬਿੰਦੂ $x_1$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਰੇ $x_1 \in (0,1)$ ਦੇ ਲਈ $\frac{x_1 + 1}{2} > x_1$ ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦਾ ਅੰਤਰਾਲ (0] 1) ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਪਾਠਕ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਉਦਾਹਰਨ 28 ਵਿੱਚ ਜਦੋਂਕਿ $f$ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ 0 ਅਤੇ 1 ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਲ ਕਰ ਲਿਆ ਗਿਆ ਅਰਥਾਤ $f$ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਵਧਾ ਕੇ $[0, 1]$ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਏ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $x = 0$ ਤੇ 0 ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $x = 1$ ਤੇ 1 ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਤੀਜੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ (ਇਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹਨ)। ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾਵੀ (monotonic) ਫਲਨ ਆਪਣੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ/ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6. 12

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਹੋਰ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

*ਟਿੱਪਣੀ* ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾਵੀ (monotonic) ਫਲਨ $f$ ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ I ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f$ ਜਾਂ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਹੈ।

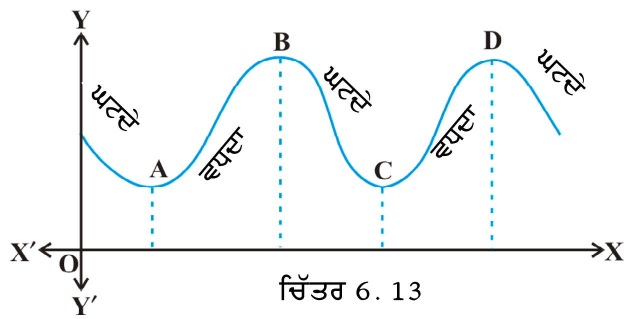
ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਉ ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ 6.13 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ। ਦੇਖੋ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਅਤੇ D ਤੇ ਘਟਦੇ ਤੋਂ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਵਧਦੇ ਤੋਂ ਘਟਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਆਪਣਾ ਸੁਭਾਵ ਬਦਲਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਛੋਟੀ ਪਹਾੜੀ ਜਾਂ ਛੋਟੀ ਘਾਟੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਮੋਟੇ ਤੌਰ ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ C ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਆਪਣੀ ਆਪਣੀ ਘਾਟੀਆਂ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ B ਅਤੇ D ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਆਪਣੀ ਆਪਣੀ ਪਹਾੜੀਆਂ ਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਰਨ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ C ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (ਜਾਂ ਮੁਕਾਬਲਤਨ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ) ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ B ਅਤੇ D ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (ਜਾਂ ਮੁਕਾਬਲਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ) ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਸਮਝਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਫਲਨ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਫਲਨ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. ਮੰਨ ਲਉ $f$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $c$ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅੰਦਰਲਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤਦ

(a) $c$ ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ $h > 0$ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ




ਚਿੱਤਰ 6. 13

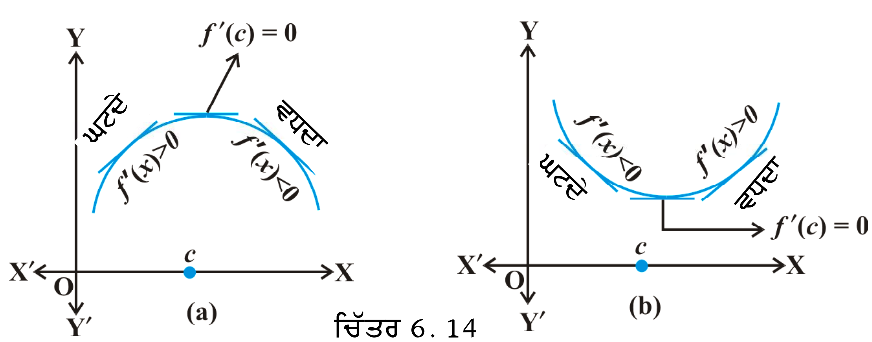
(*c* ï *h*, $c + h$) ਤੇ ਸਾਰੇ $x$ ਦੇ ਲਈ $f(c) > f(x)$ ਹੋਵੇ। ਤਦ $f(c)$, ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(b) $c$ ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ $h > 0$ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ (*c* ï *h*, $c + h$) ਤੇ ਸਾਰੇ $x$ ਦੇ ਲਈ $f(c) < f(x)$ ਹੋਵੇ। ਤਦ $f(c)$, ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਜਿਮਾਇਤੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਨਾਲ, ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਜੇ $x = c$, ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਤਾਂ $c$ ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6-14(a) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ (*c* ï *h*, *c*) ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f$ ਵਧਦਾ ਹੈ (ਅਰਥਾਤ $f'(x) > 0$) ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $(c, c + h)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਘਟਦਾ (ਅਰਥਾਤ $f'(x) < 0$) ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਇਹ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $f'(c)$ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ $c$, ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $c$ ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6-14(b) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ ਅੰਤਰਾਲ (*c* ï *h*, *c*) ਵਿੱਚ $f$ ਘਟਦਾ (ਅਰਥਾਤ $f'(x) < 0$) ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $(c, c + h)$ ਵਿੱਚ $f$ ਵਧਦਾ (ਅਰਥਾਤ, $f'(x) > 0$) ਹੈ। ਇਹ ਫਿਰ ਸਾਨੂੰ ਸੁਝਾਅ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $f'(c)$ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 6. 14

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਪ੍ਰਮੇਯ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ)।

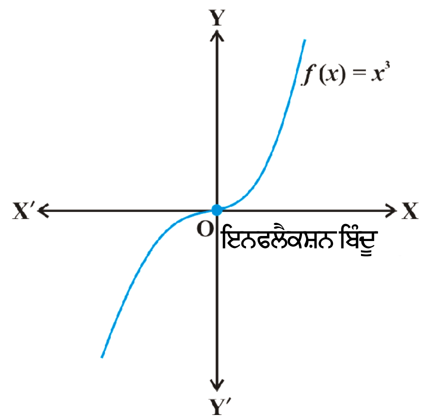
**ਪ੍ਰਮੇਯ 2.** ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ $f$ ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $c \in$ I ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਜੇ $f$ ਦਾ $x = c$ ਤੇ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਜਾਂ $f$ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਉਲਟ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਜਦੋਂ ਕਿ $f(x) = x^3$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $f'(x) = 3x^2$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f'(0) = 0$ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ 0 ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 6.15) ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c$, ਜਿਸ ਤੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਜਾਂ $f$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, $f$ ਦਾ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ (Critical Point) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜੇ $f$ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਅਤੇ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $h > 0$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ ($c$ ï $h$, $c$ + $h$) ਵਿੱਚ $f$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ।

**ਪ੍ਰਮੇਯ 3.** (ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ $f$ ਕਿਸੇ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਤਦ



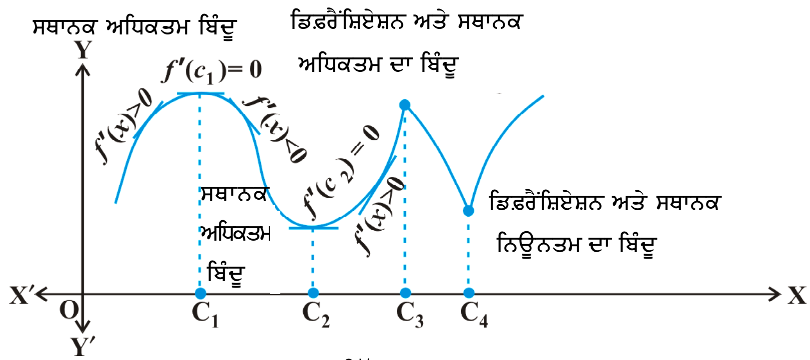

ਚਿੱਤਰ 6 . 15

(i) $x$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ&ਨਾਲ, ਜਦੋਂ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਧਨ ਤੋਂ ਰਿਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $c$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ $c$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $c$ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

(ii) $x$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ&ਨਾਲ, ਜਦੋਂ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਰਿਣ ਤੋਂ ਧਨ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $c$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਜਾਂ $c$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $c$ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

(iii) $x$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ ਜਦੋਂਕਿ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ ਤਾਂ $c$ ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ (Point of Inflection) (ਚਿੱਤਰ 6. 15) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਜਦੋਂ $c$ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $f(c)$ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ $c$ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $f(c)$ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 6.15 ਅਤੇ 6.16 ਪ੍ਰਮੇਯ 3 ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਨ।




ਚਿੱਤਰ 6 . 16

**ਉਦਾਹਰਣ 29.** $f(x) = x^3$ ï $3x + 3$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ $f(x) = x^3$ ï $3x + 3$

ਜਾਂ $f'(x) = 3x^2$ ï $3 = 3(x$ ï $1)(x + 1)$

ਜਾਂ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ਅਤੇ $x =$ ï $1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਕੇਵਲ $x = \pm 1$ ਹੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਜੋ $f$ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ/ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਸੰਭਾਵਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਪਹਿਲੇ ਅਸੀਂ $x = 1$ ਤੇ ਪਰੀਖਿਅਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ $f'(x) > 0$ ਹੈ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ $f'(x) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 1$] ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(1) = 1$ ਹੈ।

$x =$ ï $1$ ਦੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ï 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ ï 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ &1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ &1 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ $f'(x) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x =$ ï 1 ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f($ï $1) = 5$ ਹੈ।

| $x$ ਦੇ ਮੁੱਲ | | $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ |
|---|---|---|
| ਦੇ ਨੇੜੇ | ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ 1.1) | $>0$ |
| | ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ 0.9) | $<0$ |
| ਦੇ ਨੇੜੇ | ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ– 0.9) | $<0$ |
| | ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ–1.1) | $>0$ |

ਉਦਾਹਰਣ 30. $f(x) = 2x^3$ ï $6x^2 + 6x + 5$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = 2x^3 \text{ ï } 6x^2 + 6x + 5$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 6x^2 \text{ ï } 12x + 6 = 6(x \text{ ï } 1)^2$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੇਵਲ $x = 1$ ਹੀ $f$ ਦਾ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f$ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਰਾਂਗੇ। ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ ਕਿ ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) \geq 0$ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਬਿੰਦੂ $x = 1$ ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਇੱਕ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ (inflection) ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਉਦਾਹਰਨ 30 ਵਿੱਚ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਅੰਤਰਾਲ $\mathbf{R}$ ਵਿੱਚ ਕਦੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹ ਪ੍ਰੇਖਣ, ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਸੌਖਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. (ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$, ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜਾਂ $c \in$ I ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$, $c$ ਤੇ ਦੋ ਵਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ। ਤਦ

(i) ਜਦੋਂ ਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) < 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

(ii) ਜਦੋਂ ਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) > 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

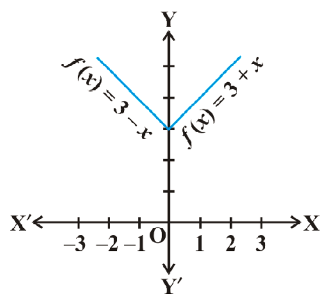
(iii) ਜਦੋਂ ਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਪਰੀਖਿਅਣ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਾਪਸ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਤੇ ਵਾਪਸ ਜਾ ਕੇ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $c$ ਅਧਿਕਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਜਾਂ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੇ $f$ ਦੋ ਵਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $c$ ਤੇ $f$ ਦੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਨ 31.** $f(x) = 3 + |x|, x \in \mathbf{R}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $x = 0$ ਤੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ 0 ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਇੱਕ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਹੁਣ 0 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ, $f(x) = 3$ ï $x$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f'(x) =$ ï $1 < 0$ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ 0 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ, $f(x) = 3 + x$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 1 > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 0, f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਾਂ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(0) = 3$ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 6.17

**ਉਦਾਹਰਣ 32.** $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ ï $12x^2 + 12$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 \text{ ï } 12x^2 + 12$$

ਜਾਂ $$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 \text{ ï } 24x = 12x\,(x \text{ ï } 1)\,(x + 2)$$

ਜਾਂ $x = 0, x = 1$ ਅਤੇ $x =$ ï $2$ ਤੇ $f'(x) = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$f''(x) = 36x^2 + 24x \text{ ï } 24 = 12\,(3x^2 + 2x \text{ ï } 1)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\begin{cases} f''(0) = -12 < 0 \\ f''(1) = 48 > 0 \\ f''(-2) = 84 > 0 \end{cases}$$

ਇਸ ਲਈ, ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 0$ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(0) = 12$ ਹੈ। ਜਦੋਂਕਿ $x = 1$ ਅਤੇ $x =$ ï $2$ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f(1) = 7$ ਅਤੇ $f($ï$\,2) =$ ï $20$ ਹਨ।

**ਉਦਾਹਰਣ 33.** $f(x) = 2x^3$ ï $6x^2 + 6x + 5$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ

$$f(x) = 2x^3 \text{ ï } 6x^2 + 6x + 5$$

ਜਾਂ
$$\begin{cases} f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2 \\ f''(x) = 12(x-1) \end{cases}$$

ਹੁਣ $f'(x) = 0$ ਤੋਂ $x = ï\,1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਾਂ $f''(1) = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅਸਫਲ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵੱਲ ਵਾਪਸ ਜਾਵਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ (ਉਦਾਹਰਨ 30) ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨਾਲ $x = 1$ ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 34. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 15 ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ $x$ ਹੈ ਤਦ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ $15\,ï\,x$ ਹੋਵੇਗੀ। ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S(x)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤਦ

$$S(x) = x^2 + (15\,ï\,x)^2 = 2x^2\,ï\,30x + 225$$

ਜਾਂ
$$\begin{cases} S'(x) = 4x - 30 \\ S''(x) = 4 \end{cases}$$

ਹੁਣ $S'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = \frac{15}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ $S''\left(\frac{15}{2}\right) = 4 > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ S ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ $x = \frac{15}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{15}{2}$ ਅਤੇ $15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇਗਾ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਉਦਾਹਰਣ 34 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $k$ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{k}{2}, \frac{k}{2}$ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 35. ਬਿੰਦੂ $(0, c)$ ਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ $0 \le c \le 5$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਤੇ $(h, k)$ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $(h, k)$ ਅਤੇ $(0, c)$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ D ਹੈ। ਤਦ

$$D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2} = \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \quad \ldots (1)$$

ਕਿਉਂਕਿ $(h, k)$ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $k = h^2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (1) ਤੋਂ

$$D \equiv D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

ਜਾਂ
$$D'(k) = \frac{1 + 2(k-c)}{\sqrt{k + (k-c)^2}}$$

ਹੁਣ $D'(k) = 0$ ਤੋਂ $k = \dfrac{2c-1}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਦੋਂ $k < \dfrac{2c-1}{2}$, ਤਦ $2(k-c)+1<0$, ਅਰਥਾਤ $D'(k)<0$ ਹੈ ਜਾਂ ਜਦੋਂ $k > \dfrac{2c-1}{2}$ ਤਦ $2(k-c)+1>0$ ਹੈ।ਅਰਥਾਤ $D'(k)>0$ (ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $k = \dfrac{2c-1}{2}$ ਤੇ $k$ ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$D\left(\frac{2c-1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2c-1}{2} + \left(\frac{2c-1}{2} - c\right)^2} = \frac{\sqrt{4c-1}}{2} \text{ ਹੈ।}$$

**ਟਿੱਪਣੀ** ਪਾਠਕ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਕਿ ਉਦਾਹਰਨ 35 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸੰਖੇਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸੌਖਾ ਅਤੇ ਸੰਖੇਪ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 36.** ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ AP ਅਤੇ BQ ਦੋ ਲੰਬਕਾਰੀ ਖੰਭੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ AP = 16 m, BQ = 22 m ਅਤੇ AB = 20 m ਹੋਵੇ ਤਾਂ AB ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ R ਤੋਂ A ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $RP^2 + RQ^2$ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ AB ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ R ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ AR = $x$ m ਹੈ। ਤਦ RB = (20 ï $x$) m (ਕਿਉਂਕਿ AB = 20 m) ਚਿੱਤਰ 6.18 ਤੋਂ

$$RP^2 = AR^2 + AP^2$$

ਅਤੇ $$RQ^2 = RB^2 + BQ^2$$

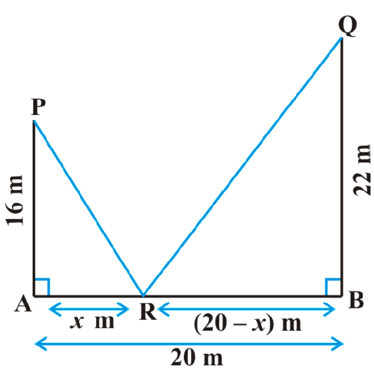
ਇਸ ਲਈ $RP^2 + RQ^2 = AR^2 + AP^2 + RB^2 + BQ^2$

= $x^2 + (16)^2 + (20$ ï $x)^2 + (22)^2$

= $2x^2$ ï $40x + 1140$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $S \equiv S(x) = RP^2 + RQ^2 = 2x^2$ ï $40x + 1140$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $S'(x) = 4x$ ï $40$ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 6.18

ਹੁਣ $S'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 10$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ $x$ ਦੇ ਲਈ $S''(x) = 4 > 0$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $S''(10) > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 10$, S ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AB ਤੇ R ਦੀ A ਤੋਂ ਦੂਰੀ AR = $x$ = 10 m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 37. ਜਦੋਂਕਿ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਤਿੰਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 10 cm ਹੈ ਤਦ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

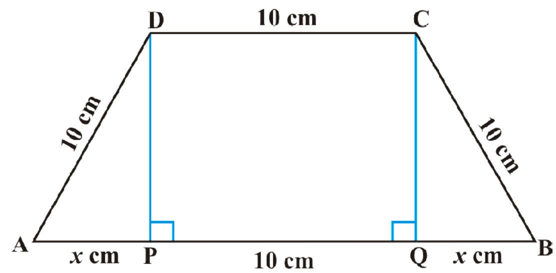
ਹੱਲ : ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 6.19 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। AB ਤੇ DP ਅਤੇ CQ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ AP = $x$ cm ਹੈ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\Delta APD \cong \Delta BQC$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ QB = $x$ cm ਹੈ ਅਤੇ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ DP = QC = $\sqrt{100-x^2}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A \equiv A(x)$

$= \frac{1}{2}$ (ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ) (ਉਚਾਈ)

$= \frac{1}{2}(2x+10+10)\left(\sqrt{100-x^2}\right)$

$= (x+10)\left(\sqrt{100-x^2}\right)$




ਚਿੱਤਰ 6.19

ਜਾਂ $$A'(x) = (x+10)\frac{(-2x)}{\sqrt{100-x^2}} + \left(\sqrt{100-x^2}\right)$$

$$= \frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}}$$

ਹੁਣ $A'(x) =$ ₀ ਨਾਲ $2x^2 + 10x$ ï 100 = 0, ਜਿਸ ਨਾਲ $x = 5$ ਅਤੇ $x =$ ï 10 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $x$ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰਿਣ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 5$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$A''(x) = \frac{\sqrt{100-x^2}(-4x-10) - (-2x^2-10x+100)\frac{(-2x)}{\sqrt[2]{100-x^2}}}{100-x^2}$$

$$= \frac{2x^3-300x-1000}{(100-x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ (ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)}$$

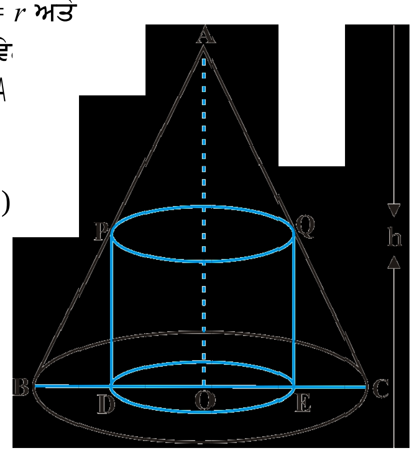
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$A''(5) = \frac{2(5)^3-300(5)-1000}{(100-(5)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2250}{75\sqrt{75}} = \frac{-30}{\sqrt{75}} < 0$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 5$ ਤੇ ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਧਿਕਤਮ ਹੈ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਖੇਤਰਫਲ

$$A(5) = (5+10)\sqrt{100-(5)^2} = 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 38. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਅਧਿਕਤਮ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ, ਵੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ ਉਸ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ $OC = r$ ਅਤੇ ਉਚਾਈ $OA = h$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਵੇ ਅਧਾਰ ਦੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ $OE = x$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 6.20)A ਦੀ ਉਚਚਾਈ QE ਦੇ ਲਈ




$$\frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC} \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } \Delta QEC \sim \Delta AOC)$$

ਜਾਂ
$$\frac{QE}{h} = \frac{r-x}{r}$$

ਜਾਂ
$$QE = \frac{h(r-x)}{r}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਵੇਲਣ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ S ਹੈ। ਤਦ

$$S \equiv S(x) = \frac{2\pi x h(r-x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$$

ਚਿੱਤਰ 6.20

ਜਾਂ
$$\begin{cases} S'(x) = \dfrac{2\pi h}{r}(r-2x) \\ S''(x) = \dfrac{-4\pi h}{r} \end{cases}$$

ਹੁਣ $S'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = \frac{r}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ $x$ ਦੇ ਲਈ $S''(x) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $S''\left(\frac{r}{2}\right) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = \frac{r}{2}$, S ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਦਰ, ਅਧਿਕਤਮ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਵੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ, ਉਸ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

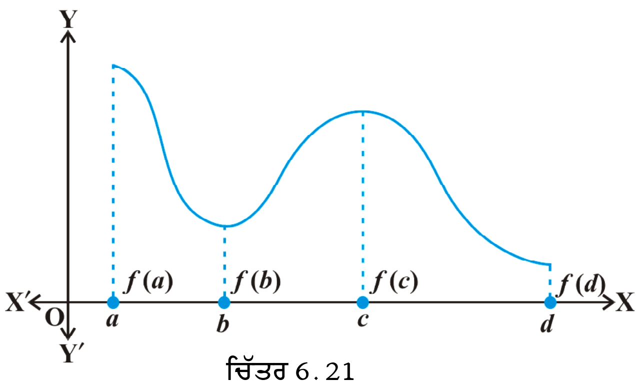
### 6.6.1 *ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (Maximum and Minimum Values of a Function in a Closed Interval)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = x + 2, x \in (0, 1)$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਇੱਕ ਫਲਨ $f$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ (0, 1) ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇਸ ਦਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਪਰ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ $f$ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ [0, 1] ਤੱਕ ਵਧਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਦ ਵੀ $f$ ਦਾ ਸ਼ਾਇਦ ਕੋਈ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $3 = f(1)$ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $2 = f(0)$ ਹੈ। $x = 1$ ਤੇ $f$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 3] [0, 1] ਤੇ $f$ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (global maximum or greatest value) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $x = 0$ ਤੇ $f$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 2] [0, 1] ਤੇ $f$ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (global minimum or least value) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਿਸੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਚਿੱਤਰ 6.21ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਅਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਕਿ $x = b$ ਤੇ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(b)$ ਹੈ। ਫਲਨ $f$ ਦਾ $x = c$ ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 6.21

ਨਾਲ ਹੀ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $f$ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(a)$ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(d)$ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $f$ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ (ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ, ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਨਾਲੋਂ ਵੱਖਰਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਦੋ ਨਤੀਜਿਆਂ (ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ) ਦੇ ਕਥਨ ਦੱਸਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $I = [a, b]$ ਤੇ $f$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਤਦ $f$ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ I ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰ $f$ ਇਹ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $f$ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ I ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰ $f$ ਇਹ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 6. ਮੰਨ ਲਉ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ $f$ ਇੱਕ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ I ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੋਈ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c$ ਹੈ। ਤਦ

(i) ਜਦੋਂ $c$ ਤੇ $f$ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਤਦ $f'(c) = 0$

(ii) ਜਦੋਂ $c$ ਤੇ $f$ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਤਦ $f'(c) = 0$

ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੀ ਰੌਸ਼ਨੀ ਵਿੱਚ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ।

### ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ

ਕਦਮ 1: ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ $f$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਰਥਾਤ $x$ ਦੇ ਉਹ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿੱਥੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(x) = 0$ ਜਾਂ $f$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕਦਮ 2: ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਲਓ।

ਕਦਮ 3: ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ (ਕਦਮ 1 ਅਤੇ ਕਦਮ 2 ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ) $f$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਕਦਮ 4: ਕਦਮ 3 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਣਨਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ $f$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲਓ। ਇਹ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੀ, $f$ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $f$ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੋਣਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 39. ਅੰਤਰਾਲ $[1, 5]$ ਵਿੱਚ $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 3)(x - 2)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 2$ ਅਤੇ $x = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $[1, 5]$ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਅਰਥਾਤ $x = 1, x = 2, x = 3$ ਅਤੇ $x = 5$ ਤੇ $f$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ :

$$f(1) = 2(1^3) - 15(1^2) + 36(1) + 1 = 24$$
$$f(2) = 2(2^3) - 15(2^2) + 36(2) + 1 = 29$$
$$f(3) = 2(3^3) - 15(3^2) + 36(3) + 1 = 28$$
$$f(5) = 2(5^3) - 15(5^2) + 36(5) + 1 = 56$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $[1, 5]$ ਤੇ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਲਈ $x = 5$ ਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 56 ਅਤੇ $x = 1$ ਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 24 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 40. $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}, x \in [-1, 1]$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਇੱਕ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ

$$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x-1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = \frac{1}{8}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ $f'(x)$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਅਤੇ $x = \frac{1}{8}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂਆਂ $x = 0, \frac{1}{8}$ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ $x = -1$ ਅਤੇ $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਨਾਲ

$$f(-1) = 12(-1^{\frac{4}{3}}) - 6(-1^{\frac{1}{3}}) = 18$$

$$f(0) = 12(0) - 6(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-9}{4}$$

$$f(1) = 12(1^{\frac{4}{3}}) - 6(1^{\frac{1}{3}}) = 6$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = -1$ ਤੇ $f$ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 18 ਹੈ ਅਤੇ $x = \frac{1}{8}$ ਤੇ $f$ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $\frac{-9}{4}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 41. ਦੁਸ਼ਮਣ ਦਾ ਇੱਕ ਅਪਾਚੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਵਕਰ $y = x^2 + 7$ ਅਨੁਸਾਰ ਉੱਡ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ (3] 7) ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਸੈਨਿਕ ਆਪਣੀ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਤੇ ਉਸ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਾਨਾ ਲਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $x$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਿੰਦੂ $(x, x^2 + 7)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(3, 7)$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸੈਨਿਕ ਅਤੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2}$, ਅਰਥਾਤ $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = (x - 3)^2 + x^4$

ਜਾਂ $f'(x) = 2(x - 3) + 4x^3 = 2(x - 1)(2x^2 + 2x + 3)$

ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤੇ $2x^2 + 2x + 3 = 0$ ਨਾਲ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ $f'$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ, ਅਰਥਾਤ $x = 1$ ਹੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f$ ਦਾ ਮੁੱਲ $f(1) = (1 - 3)^2 + (1)^4 = 5$ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸੈਨਿਕ ਅਤੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\sqrt{5}$ ਜਾਂ ਤਾਂ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{f(x)}$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $\sqrt{5}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੈਨਿਕ ਅਤੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ $\sqrt{5}$ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 6.5

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $f(x) = (2x \text{ ï } 1)^2 + 3$ (ii) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$
   (iii) $f(x) = \text{ï } (x \text{ ï } 1)^2 + 10$ (iv) $g(x) = x^3 + 1$
2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $f(x) = |x + 2| \text{ ï } 1$ (ii) $g(x) = \text{ï } |x + 1| + 3$
   (iii) $h(x) = \sin(2x) + 5$ (iv) $f(x) = |\sin 4x + 3|$
   (v) $h(x) = x + 1, x \in (\text{ï } 1, 1)$
3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੋਵੇ, ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = x^3 \text{ ï } 3x$
   (iii) $h(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$
   (iv) $f(x) = \sin x \text{ ï } \cos x,\ 0 < x < 2\pi$
   (v) $f(x) = x^3 \text{ ï } 6x^2 + 9x + 15$ (vi) $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x},\quad x > 0$
   (vii) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ (viii) $f(x) = x\sqrt{1 - x},\ 0 < x < 1$
4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।
   (i) $f(x) = e^x$ (ii) $g(x) = \log x$
   (iii) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
5. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $f(x) = x^3, x \in [\text{ï } 2, 2]$ (ii) $f(x) = \sin x + \cos x, x \in [0, \pi]$
   (iii) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{2}x^2,\ x \in \left[-2, \dfrac{9}{2}\right]$ (iv) $f(x) = (x-1)^2 + 3,\ x \in [-3, 1]$
6. ਜਦੋਂਕਿ ਲਾਭ ਫਲਨ $p(x) = 41 \text{ ï } 72x \text{ ï } 18x^2$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਕੰਪਨੀ ਵੱਲੋਂ ਕਮਾਇਆ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਅੰਤਰਾਲ $[0, 3]$ ਤੇ $3x^4 \text{ ï } 8x^3 + 12x^2 \text{ ï } 48x + 25$ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।
8. ਅੰਤਰਾਲ $[0, 2\pi]$ ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਫਲਨ $\sin 2x$ ਆਪਣਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ?
9. ਫਲਨ $\sin x + \cos x$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?

**10.** ਅੰਤਰਾਲ $[1, 3]$ ਵਿੱਚ $2x^3$ ï $24x + 107$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅੰਤਰਾਲ [ï 3, ï 1] ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**11.** ਜਦੋਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $[0, 2]$ ਵਿੱਚ $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ $x^4$ ï $62x^2 + ax + 9$ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ $a$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**12.** $[0, 2\pi]$ ਤੇ $x + \sin 2x$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**13.** ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 24 ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

**14.** ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x$ ਅਤੇ $y$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $x + y = 60$ ਅਤੇ $xy^3$ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

**15.** ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x$ ਅਤੇ $y$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 35 ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ $x^2 y^5$ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

**16.** ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 16 ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

**17.** 18 cm ਭੁਜਾ ਦੇ ਟੀਨ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵਰਗਕਾਰ ਟੁਕੜੇ ਨਾਲ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਟੀਨ ਦੇ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਮੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਢੱਕਣ ਰਹਿਤ ਬਕਸਾ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੱਟੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਸ ਨਾਲ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

**18.** 45 cm × 24 cm ਦੀ ਟੀਨ ਦੀ ਆਇਤਾਕਾਰ ਚਾਦਰ ਦੇ ਕੋਨੇ ਤੇ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਟੀਨ ਦੇ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਮੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਢੱਕਣ ਰਹਿਤ ਬਕਸਾ ਬਣਾਇਆ ਹੈ। ਕੱਟੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਸ ਨਾਲ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

**19.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਸਾਰੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਧਿਕਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**20.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦੋਂ ਉਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਉਸ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

**21.** 100 $cm^3$ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬੰਦ ਵੇਲਣਾਕਾਰ (ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ) ਡੱਬਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਊਨਤਮ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਦੀਆਂ ਵਿਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**22.** ਇੱਕ 28 cm ਲੰਬੇ ਤਾਰ ਨੂੰ ਦੋ ਟੁਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਟੁਕੜੇ ਨਾਲ ਵਰਗ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਦਾ ਚੱਕਰ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਟੁਕੜਿਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿੰਨੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਵਰਗ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

**23.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦਾ $\frac{8}{27}$ ਵਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**24.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਨਿਊਨਤਮ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਅਧਾਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੀ $\sqrt{2}$ ਗੁਣਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

**25.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਅਰਧ ਸਿਖਰ ਕੋਣ $\tan^{-1}\sqrt{2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**26.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਅਰਧ

ਸਿਖਰ ਕੋਣ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 27 ਤੋਂ 29 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**27.** ਵਕਰ $x^2 = 2y$ ਤੇ $(0, 5)$ ਤੋਂ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ :

(A) $(2\sqrt{2}, 4)$ (B) $(2\sqrt{2}, 0)$ (C) $(0, 0)$ (D) $(2, 2)$

**28.** $x$, ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

**29.** $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $0 \le x \le 1$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

## *ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ*

ਉਦਾਹਰਣ 42. ਇੱਕ ਕਾਰ ਸਮੇਂ $t = 0$ ਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਬਿੰਦੂ Q ਤੇ ਰੁਕ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕਾਰ ਵੱਲੋਂ $t$ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ, $x$ ਮੀਟਰ ਵਿੱਚ

$$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ

ਕਾਰ ਨੂੰ Q ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਵਿੱਚ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ P ਅਤੇ Q ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $t$ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਦਾ ਵੇਗ $v$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$

ਜਾਂ $$v = \frac{dx}{dt} = 4t - t^2 = t(4-t)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $v = 0$ ਤੋਂ $t = 0$ ਅਤੇ $t = 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ P ਅਤੇ Q ਤੇ ਕਾਰ ਦਾ ਵੇਗ $v = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ Q ਤੇ ਕਾਰ 4 ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਪਹੁੰਚੇਗੀ। ਹੁਣ 4 ਸੈਕਿੰਡਾਂ

ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਵੱਲੋਂ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ :

$$x]_{t=4} = 4^2\left(2-\frac{4}{3}\right) = 16\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ m}$$

ਉਦਾਹਰਣ 43. ਪਾਣੀ ਦੀ ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਆਕਾਰ, ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਉਲਟੇ ਲੰਬਕਾਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਵਰਗਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਸਿਖਰ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਧ ਸਿਖਰ ਕੋਣ $\tan^{-1}(0.5)$ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ 5 $m^3/h$ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਪਾਣੀ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਾਣੀ ਦੇ ਪੱਧਰ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ ਉਸ ਪਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ ਦੀ ਉਚਾਈ 10 m ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $r, h$ ਅਤੇ $\alpha$ ਚਿੱਤਰ 6.22 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ। ਤਦ

$\tan\alpha = \frac{r}{h}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right) = \tan^{-1}(0.5)$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

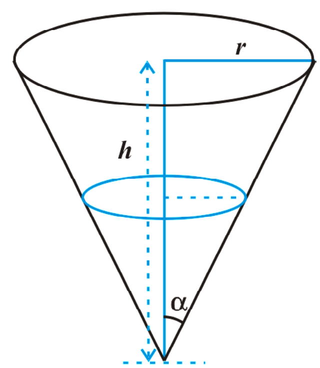
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{r}{h} = 0.5$ ਜਾਂ $r = \frac{h}{2}$

ਮੰਨ ਲਉ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ V ਹੈ ਤਦ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)\cdot\frac{dh}{dt}$ (ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)

$$= \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$





ਚਿੱਤਰ 6.22

ਹੁਣ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਅਰਥਾਤ $\frac{dV}{dt} = 5 \text{ m}^3/\text{h}$ ਅਤੇ $h = 4$ m ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $5 = \frac{\pi}{4}(4)^2\cdot\frac{dh}{dt}$

ਜਾਂ $\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88} \text{ m}/h \quad \left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਾਣੀ ਦੇ ਪੱਧਰ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ $\frac{35}{88}$ m/min ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 44. 2 m ਉਚਾਈ ਦਾ ਆਦਮੀ 6 m ਉੱਚੇ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਖੰਭੇ ਤੋਂ ਦੂਰ 5 km/h ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚਲਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 6.23 ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਉ, AB ਇੱਕ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਭਾ ਹੈ। B ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਬਲਬ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਮੇਂ $t$ ਤੇ ਆਦਮੀ MN ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ AM = $l$ m ਅਤੇ ਆਦਮੀ ਦਾ ਪਰਛਾਵਾਂ MS ਹੈ ਅਤੇ ਮੁੱਲ MS = $s$ m ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\Delta ASB \sim \Delta MSN$

ਜਾਂ $\frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$

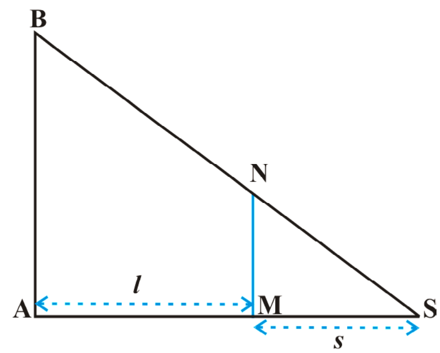
ਜਾਂ AS = $3s$

[(ਕਿਉਂਕਿ MN = 2 m ਅਤੇ AB = 6 m (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)]

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AM = $3s$ ï $s = 2s$ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ AM = $l$ ਮੀਟਰ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $l = 2s$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}$



ਚਿੱਤਰ 6.23

ਕਿਉਂਕਿ $\frac{dl}{dt} = 5$ km/h ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ $\frac{5}{2}$ km/h ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 45. ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (1] 2) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : $x^2 = 4y$ ਦਾ] $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(h, k)$ ਹਨ $(h, k)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(h,\,k)} = \frac{h}{2}$$

$\Rightarrow$ $(h, k)$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਢਲਾਨ $= \frac{-2}{h}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $(h, k)$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

$$y \text{ ï } k = \frac{-2}{h}(x-h) \qquad \ldots (1)$$

ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$2-k = \frac{-2}{h}(1-h) \text{ ਜਾਂ } k = 2+\frac{2}{h}(1-h) \qquad \ldots (2)$$

ਕਿਉਂਕਿ $(h, k)$ ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$h^2 = 4k \qquad \ldots (3)$$

ਹੁਣ (2) ਅਤੇ (3), ਤੋਂ $h = 2$ ਅਤੇ $k = 1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। $h$ ਅਤੇ $k$ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਲੰਬਰੂਪ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y-1 = \frac{-2}{2}(x-2) \text{ ਜਾਂ } x + y = 3 \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 46. ਵਕਰ $y = \cos(x + y)$, ï $2\pi \le x \le 2\pi$ ਦੀਆਂ ਉਹ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $x + 2y = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਹੱਲ : $y = \cos(x + y)$ ਦਾ $x$, ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$$

ਜਾਂ $(x, y)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $= \dfrac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$

ਕਿਉਂਕਿ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $x + 2y = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਢਲਾਣ $\frac{-1}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = \frac{-1}{2}$$

ਜਾਂ $\sin(x + y) = 1$

ਜਾਂ $x + y = n\pi + (ï\ 1)^n \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z},$

ਤਦ $y = \cos(x + y) = \cos\left(n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\right),\quad n \in \mathbf{Z},$

$= 0$ ਹਰੇਕ $n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਲਈ

ਨਾਲ ਹੀ ਕਿਉਂਕਿ $-2\pi \le x \le 2\pi$, ਇਸ ਲਈ $x = -\frac{3\pi}{2}$ ਅਤੇ $x = \frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੇ ਕੇਵਲ ਬਿੰਦੂਆਂ $\left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ ਅਤੇ $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ, ਰੇਖਾ $x + 2y = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ

$$y\ ï\ 0 = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2x + 4y + 3\pi = 0$$

ਜਾਂ $y\ ï\ 0 = \dfrac{-1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ਜਾਂ $2x + 4y - \pi = 0$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 47. ਉਹਨਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਫਲਨ

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

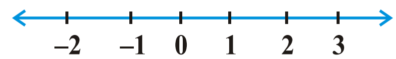
(a) ਸਖ਼ਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ (b) ਸਖ਼ਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

ਜਾਂ $f'(x) =$

$$\frac{3}{10}(4x^3) - \frac{4}{5}(3x^2) - 3(2x) + \frac{36}{5}$$



ਚਿੱਤਰ 6.24

$$= \frac{6}{5}(x-1)(x+2)(x-3)$$ (ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)

ਹੁਣ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 1, x =$ ï 2, ਅਤੇ $x = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। $x = 1,$ ï 2, ਅਤੇ 3 ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਚਾਰ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ (ï ∞, ï 2), (ï 2, 1), (1, 3) ਅਤੇ (3, ∞) ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਕਰਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 6.24)

ਅੰਤਰਾਲ (ï ∞, ï 2) ਨੂੰ ਲਉ, ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ï ∞ < $x$ < ï 2 ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $x$ ï 1 < 0, $x$ + 2 < 0 ਅਤੇ $x$ ï 3 < 0 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $x$ = ï 3 ਦੇ ਲਈ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(x)$ = ($x$ ï 1) ($x$ + 2) ($x$ ï 3)

= (ï 4) (ï 1) (ï 6) < 0) ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ï ∞ < $x$ < ï 2 ਹੈ, ਤਦ $f'(x) < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (ï ∞, ï 2) ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਅੰਤਰਾਲ (ï 2, 1), ਨੂੰ ਲਉ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ï 2 < $x$ < 1 ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ

$x$ ï 1 < 0, $x$ + 2 > 0 ਅਤੇ $x$ ï 3 < 0 ਹੈ।

(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $x = 0$, ਦੇ ਲਈ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $f'(x)$ = ($x$ ï 1) ($x$ + 2) ($x$ ï 3) = (ï 1) (2) (ï 3) = 6 > 0)

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ï 2 < $x$ < 1 ਹੈ, ਤਦ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (&2] 1) ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅੰਤਰਾਲ (1,3) ਨੂੰ ਲਉ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $1 < x < 3$ ਹੈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $x$ ï 1 > 0, $x$ + 2 > 0 ਅਤੇ $x$ ï 3 < 0 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $1 < x < 3$ ਹੈ ਤਾਂ $f'(x) < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲ (1, 3) ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰਾਲ (3, ∞), ਨੂੰ ਲਉ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $3 < x < \infty$ ਹੈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $x$ ï 1 > 0, $x$ + 2 > 0 ਅਤੇ $x$ ï 3 > 0 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $x > 3$ ਹੈ, ਤਾਂ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲ (3, ∞) ਵਿੱਚ ਫਲਨ $f$ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 48. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f$, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sin x + \cos x)^2}(\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{2 + \sin 2x} \qquad \text{(ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ $x$ ਦੇ ਲਈ $2 + \sin 2x > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad f'(x) > 0$ ਜਦੋਂ ਕਿ $\cos x - \sin x > 0$

ਜਾਂ $\quad f'(x) > 0$ ਜਦੋਂ ਕਿ $\cos x > \sin x$ ਜਾਂ $\cot x > 1$

ਹੁਣ $\quad \cot x > 1$ ਜਦੋਂ ਕਿ $\tan x < 1$, ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $0 < x < \frac{\pi}{4}$

ਇਸ ਲਈ ਅੰਤਰਾਲ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ $f$ ਇੱਕ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 49. 3 cm ਸਮ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਪਲੇਟ ਗਰਮ ਕੀਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਫੈਲਣ ਨਾਲ ਇਸ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 0.05 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.2 cm ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਪਲੇਟ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $r$ ਹੈ ਅਤੇ A ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ। ਤਦ

ਹੁਣ
$$A = \pi r^2$$

ਜਾਂ
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

ਹੁਣ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਲਗਭਗ ਦਰ $= dr = \frac{dr}{dt}\Delta t = 0.05 \text{ cm/s}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਲਗਭਗ ਦਰ

$$dA = \frac{dA}{dt}(\Delta t)$$

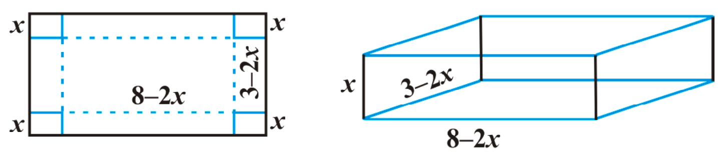
$$= 2\pi r\left(\frac{dr}{dt}\Delta t\right) = 2\pi r\,(dr)$$

$$= 2\pi\,(3.2)\,(0.05) \qquad (r = 3.2 \text{ cm})$$

$$= 0.320\pi \text{ cm}^2/\text{s}$$

ਉਦਾਹਰਣ 50. ਆਇਤਕਾਰ 3 m × 8 m ਐਲੁਮੀਨੀਅਮ ਦੀ ਚਾਦਰ ਨਾਲ, ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਕਿਨਾਰੇ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਮੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਖੁੱਲਾ ਬਕਸਾ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕੱਟ ਕੇ ਹਟਾਏ ਗਏ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ $x$ ਮੀ ਹੈ। ਤਦ, ਬਕਸੇ ਦੀ ਉਚਾਈ $x$ ਲੰਬਾਈ 8 ï 2$x$ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ 3 ï 2$x$ ਹੋਵੇਗੀ। (ਚਿੱਤਰ 6.25) ਜੇ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ V($x$) ਹੈ ਤਾਂ




ਚਿੱਤਰ 6.25

V($x$) = $x$(3 ï 2$x$) (8 ï 2$x$)

=4$x^3$ ï 22$x^2$ + 24$x$,

ਇਸ ਲਈ $\begin{cases} V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(x-3)(3x-2) \\ V''(x) = 24x - 44 \end{cases}$

ਹੁਣ $V'(x) = 0$ ਤਾਂ $x = \frac{2}{3}$ ਅਤੇ $x = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ $x \neq 3$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{2}{3}$

ਹੁਣ $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44 = -28 < 0$

ਇਸ ਲਈ, $x = \frac{2}{3}$ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜੇ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ ਭੁਜਾ $\frac{2}{3}$ m ਦਾ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਹਟਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਚਾਦਰ ਤੋਂ ਬਕਸਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਉਸ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{200}{27}\text{m}^3$$

ਉਦਾਹਰਨ 51. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ Rs $\left(5-\dfrac{x}{100}\right)$ ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਨਾਲ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ। $x$ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ Rs $\left(\dfrac{x}{5}+500\right)$ ਰੁਪਏ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਵੇਚਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਸ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ S($x$) ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ C($x$), $x$ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਤਦ, ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ

$$\mathrm{S}(x) = \left(5-\frac{x}{100}\right)x = 5x-\frac{x^2}{100}$$

ਅਤੇ

$$\mathrm{C}(x) = \frac{x}{5}+500$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਲਾਭ ਫਲਨ P ($x$) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{S}(x)-\mathrm{C}(x) = 5x-\frac{x^2}{100}-\frac{x}{5}-500$$

ਅਰਥਾਤ

$$\mathrm{P}(x) = \frac{24}{5}x-\frac{x^2}{100}-500$$

ਜਾਂ

$$\mathrm{P}'(x) = \frac{24}{5}-\frac{x}{50}$$

ਹੁਣ $\mathrm{P}'(x)=0$ ਨਾਲ $x=240$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\mathrm{P}''(x)=\dfrac{-1}{50}$. ਇਸ ਲਈ $\mathrm{P}''(240)=\dfrac{-1}{50}<0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x=240$ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਮਾਤਾ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ240 ਇਕਾਈਆਂ ਵੇਚਦਾ ਹੈ।

## *ਅਧਿਆਇ 6 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

1. ਡਿਫਰੈਨਸ਼ੀਅਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਰੇਕ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (a) $\left(\dfrac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ (b) $(33)^{-\frac{1}{5}}$

2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $x=e$ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਹੈ।
3. ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਆਧਾਰ $b$ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ 3 cm/s ਦੀ ਦਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਰਹੀਆਂ ਹਨ। ਜਿਸ ਸਮੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਆਧਾਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਉਸ ਸਮੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿੰਨੀ ਤੇਜੀ ਨਾਲ ਘੱਟ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

**4.** ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (1] 2) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**5.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਕਰ $x = a \cos\theta + a\theta \sin\theta, y = a \sin\theta$ ï $a\theta \cos\theta$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $\theta$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਅਚਲ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।

**6.** ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿਸ ਤੇ

$$f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$$

ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f$ (i) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ (ii) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

**7.** ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}, x \neq 0$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

(i) ਵਧਦਾ ਹੈ (ii) ਘਟਦਾ ਹੈ।

**8.** ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਉਸ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਸਿਖਰ, ਧੁਰੇ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੇ ਹੈ।

**9.** ਆਇਤਕਾਰ ਅਧਾਰ ਅਤੇ ਆਇਤਕਾਰ ਦੀਵਾਰਾਂ ਦੀ 2 m ਡੂੰਘੀ ਅਤੇ 8 $m^3$ ਆਇਤਨ ਦੀ ਇੱਕ ਬਿਨਾਂ ਢੱਕਣ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨਾ ਹੈ।ਜਦੋਂ ਕਿ ਟੈਂਕੀ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਅਧਾਰ ਦੇ ਲਈ Rs 70/$m^2$ ਅਤੇ ਦੀਵਾਰਾਂ ਤੇ Rs 45/$m^2$ ਦਰ ਨਾਲ ਖਰਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਖਰਚ ਨਾਲ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਲਾਗਤ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

**10.** ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $k$ ਹੈ, ਇੱਥੇ $k$ ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੀ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ।

**11.** ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੇ ਉੱਪਰ ਬਣੀ ਅਰਧ-ਚੱਕਰਕਾਰ ਖਿੜਕੀ ਦਾ ਸੰਪੂਰਨ ਪਰਿਮਾਪ 10 m ਹੈ।ਖਿੜਕੀ ਦਾ ਵਿਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪੂਰੀ ਖੁੱਲ੍ਹੀ ਖਿੜਕੀ ਵਿੱਚੋਂ ਅਧਿਕਤਮ ਰੋਸ਼ਨੀ ਆਵੇ।

**12.** ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤੋਂ $a$ ਅਤੇ $b$ ਦੂਰੀ ਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਰਣ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਲੰਬਾਈ $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ਹੈ।

**13.** ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ $f(x) = (x$ ï $2)^4 (x + 1)^3$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਦਾ]

(i) ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ii) ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ

(iii) ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ

**14.** $f(x) = \cos^2 x + \sin x, x \in [0, \pi]$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**15.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ $r$ ਅਰਧਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ $\frac{4r}{3}$ ਹੈ।

**16.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $[a, b]$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ $f$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(a, b)$ ਤੇ $f$ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

**17.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ R ਅਰਧਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ ਹੈ। ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**18.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਅਰਧ ਸਿਖਰ ਕੋਣ $\alpha$ ਅਤੇ ਉਚਾਈ $h$ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੁ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਦੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੀ ਇੱਕ ਤਿਹਾਈ ਹੈ ਅਤੇ ਬੇਲਣ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2\alpha$ ਹੈ।

19 ਤੋਂ 24 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

**19.** ਇੱਕ 10 m ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੀ ਵੇਲਣਕਾਰ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ 314 $m^3/h$ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕਣਕ ਭਰੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਭਰੀ ਗਈ ਕਣਕ ਦੀ ਡੂੰਘਾਈ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਹੈ :

(A) 1 m/h (B) 0.1 m/h

(C) 1.1 m/h (D) 0.5 m/h

**20.** ਵਕਰ $x = t^2 + 3t$ ï $8$, $y = 2t^2$ ï $2t$ ï $5$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (2,ï 1) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ :

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{-6}{7}$

**21.** ਰੇਖਾ $y = mx + 1$, ਵਕਰ $y^2 = 4x$ ਦੀ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ $m$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

**22.** ਵਕਰ $2y + x^2 = 3$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (1,1) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

(A) $x + y = 0$ (B) $x$ ï $y = 0$

(C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x$ ï $y = 1$

**23.** ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਦਾ ਬਿੰਦੂ (1,2) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਹੈ :

(A) $x + y = 3$ (B) $x$ ï $y = 3$

(C) $x + y = 1$ (D) $x$ ï $y = 1$

**24.** ਵਕਰ $9y^2 = x^3$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜਿੱਥੇ ਵਕਰ ਦੀ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ :

(A) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (B) $\left(4, \frac{-8}{3}\right)$

(C) $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$ (D) $\left(\pm 4, \frac{3}{8}\right)$

## ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਜਦੋਂ ਕਿ ਰਾਸ਼ੀ $y$ ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ $x$ ਬਾਬਤ ਕਿਸੇ ਨਿਯਮ $y = f(x)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਬਦਲਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ (ਜਾਂ $f'(x)$) $x$ ਬਾਬਤ $y$ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (ਜਾਂ $f'(x_0)$) $x = x_0$ ਤੇ) $x$ ਬਾਬਤ $y$ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਜਦੋਂ ਦੋ ਚਲਾਂ $x$ ਅਤੇ $y$, $t$ ਬਾਬਤ ਬਦਲ ਰਹੇ ਹੋਣ ਅਰਥਾਤ $x = f(t)$ ਅਤੇ $y = g(t)$, ਤਦ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}, \text{ ਜੇਕਰ } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

- ਇੱਕ ਫਲਨ $f$
  (a) ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ
  $[a, b]$ ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ
  ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਕਿ ਹਰੇਕ $x \in [a, b]$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) \ge 0$, ਹੈ।
  (b) ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਘਟਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ
  $[a, b]$ ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ
  ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂਕਿ ਹਰੇਕ $x \in [a, b]$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) \le 0$ ਹੈ।
- ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} (x - x_0) \text{ ਹੈ।}$$

- ਜਦੋਂਕਿ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0)$ ਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ $x = x_0$ ਹੈ।
- ਜਦੋਂਕਿ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $x = x_0$ ਤੇ, $x$&ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਤਾਂ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = 0$ ਹੈ।
- ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0)$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$y-y_0=\frac{-1}{\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0,y_0)}}(x-x_0) \text{ ਹੈ।}$$

- ਜਦੋਂਕਿ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0)$ ਤੇ $\frac{dy}{dx}=0$ ਤਦ ਲੰਬ ਅਭਿਲੰਬ ਸਮੀਕਰਣ $x = x_0$ ਹੈ।
- ਜਦੋਂਕਿ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0)$ ਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਅਭਿਲੰਬ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ $y = y_0$ ਹੈ।
- ਮੰਨ ਲਉ $y = f(x)$ ਅਤੇ $\Delta x$, $x$ ਵਿੱਚ ਛੋਟਾ ਵਾਧਾ ਹੈ ਅਤੇ $x$ ਦੀ ਵਾਧੇ ਦੇ ਸੰਗਤ $y$ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ $\Delta y$ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $\Delta y = f(x + \Delta x)$ ï $f(x)$ ਤਾਂ

$$dy = f'(x)dx \text{ ਜਾਂ } dy=\left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$$

ਜਦੋਂ $dx = \Delta x$ ਸਾਪੇਖਤਾ ਬਹੁਤ ਛੋਟਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ $\Delta y$ ਦੀ ਇੱਕ ਚੰਗਾ ਲਗਭਗਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $dy \approx \Delta y$ ਦੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

- ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c$ ਜਿਸ ਤੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(c) = 0$ ਜਾਂ $f$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। $f$ ਦਾ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- (ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ $f$ ਕਿਸੇ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ ਫਲਨ $f$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ $f$ ਹੈ।

  (i) ਜਦੋਂ $x$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ ਜਦੋਂਕਿ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਧਨ ਤੋਂ ਰਿਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $c$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ $c$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $c$ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

  (ii) ਜਦੋਂ $x$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵੱਲ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ, ਜਦੋਂ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਰਿਣ ਤੋਂ ਧਨ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $c$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਜਾਂ $c$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਨਿਕਟ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਹੋ ਤਾਂ $c$ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

  (iii) ਜਦੋਂ $x$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $c$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵੱਲ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ ਜਦੋਂਕਿ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ ਤਾਂ $c$ ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ (Point of Inflection) (ਚਿੱਤਰ 6.15) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

- (ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ $f$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ ਜਾਂ $c \in$ I ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$, $c$ ਤੇ ਦੋ ਵਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ। ਤਦ

  (i) ਜਦੋਂਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) < 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ

  $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

  (ii) ਜਦੋਂਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) > 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $f$ ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

  (iii) ਜਦੋਂਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) = 0$, ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਪਰੀਖਿਅਣ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

  ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਾਪਸ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਤੇ ਵਾਪਸ ਜਾ ਕੇ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $c$ ਅਧਿਕਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਜਾਂ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

- ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਅਸਲ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ (Working Rule)

  ਕਦਮ 1. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ $f$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਰਥਾਤ $x$ ਦੇ ਉਹ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿੱਥੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(x) = 0$ ਜਾਂ $f$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

  ਕਦਮ 2. ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਲਉ।

  ਕਦਮ 3. ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ (ਕਦਮ 1 ਅਤੇ ਕਦਮ 2 ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ) $f$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਰੋ।

  ਕਦਮ 4. ਕਦਮ 3 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਣਨਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ $f$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲਉ। ਇਹ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੀ, $f$ ਦਾ ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $f$ ਦਾ ਅਸਲ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੋਣਗੇ।

ਅੰਤਿਕਾ 1

# ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ (Proofs in Mathematics)

❖*Proofs are to Mathematics what calligraphy is to poetry. Mathematical works do consist of proofs just as poems do consist of characters*
*— VLADIMIR ARNOLD* ❖

## A.1.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਜਮਾਤ IX] X ਅਤੇ XI ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਥਨ, ਸੰਯੁਕਤ ਕਥਨ, ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਧਣ, ਉਲਟ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਰੂਪ ਅਤੇ ਅਨੁਮਾਨਤ ਕਥਨ, ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਅਤੇ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤੀ ਉਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

## A.1.2 ਸਬੂਤ ਕੀ ਹੈ? (What is a Proof?)

ਕਿਸੀ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਦੇ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਦੇ ਮਕਸਦ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪਦ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸਨੂੰ ਨਿਗਮਨ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਕੁਝ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪਦਾਂ ਰਾਹੀਂ ਕੇਵਲ ਮੰਨੇ ਹੋਏ ਤਰਕ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਰੇਕ ਸਬੂਤ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਆਪਣੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਨਤੀਜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਕਸਰ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਉਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਤੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧੇ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਉਸਦੇ ਤੁੱਲ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਅਸਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਅਤੇ ਅਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹਰੇਕ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰੀਕੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਹੇਠਾਂ ਕੀਤੀ ਹੋਈ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਇਹ ਉਕਤੀ ਦਾ ਉਹ ਸਬੂਤ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਉਕਤੀ ਦਾ ਸਬੂਤ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

**(i)** ਸਿੱਧੀ ਆਮਦ **(Approach)** ਇਹ ਤਰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੈ, ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂ ਕਲਪਿਤ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਸਿੱਧੇ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪਦਾਂ ਅਤੇ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਉਕਤੀਆਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਤਰਕ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ਹੈ ਤਾਂ $x = 3$ ਜਾਂ $x = 2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : $x^2 - 5x + 6 = 0$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

$\Rightarrow$ $(x - 3)(x - 2) = 0$ (ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਸਮਤੁੱਲ ਵਿਅੰਜਕ ਤੋਂ ਬਦਲਣ ਤੇ)

$\Rightarrow$ $x - 3 = 0$ ਜਾਂ $x - 2 = 0$ (ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਉਕਤੀ $ab = 0$ ਤਾਂ $a = 0$ ਜਾਂ $b = 0$, $a, b \in$ **R** ਰਾਹੀਂ)

$\Rightarrow$ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ ਜਾਂ $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਨ ਤੇ ਉਸਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦੀ)

$\Rightarrow$ $x + 0 = 3$ ਜਾਂ $x + 0 = 2$ (ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਤਤਸਮਕ (Identity) ਗੁਣ ਦੇ ਰਾਹੀਂ)

$\Rightarrow$ $x = 3$ ਜਾਂ $x = 2$ (ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਗੁਣ ਰਾਹੀਂ)

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ ;k $x = 2$

ਇੱਥੇ $p$ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ "$x^2 - 5x + 6 = 0$" ਹੈ ਅਤੇ $q$ ਨਤੀਜਾ ਕਥਨ "$x = 3$ ਜਾਂ $x = 2$" ਹੈ।

ਕਥਨ $p$ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ $x^2 - 5x + 6$ ਨੂੰ, ਇਸ ਦੇ ਤੁੱਲ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਅੰਜਕ $(x - 3)(x - 2)$ ਤੋਂ ਬਦਲ ਕੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ $r$ : "$(x - 3)(x - 2) = 0$" ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਥੇ ਦੋ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਠਦੇ ਹਨ :

(i) ਵਿਅੰਜਕ $(x - 3)(x - 2)$ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅੰਜਕ $x^2 - 5x + 6$ ਦੇ ਤੁੱਲ ਹੈ ?

(ii) ਕਿਸੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਸਮਾਨ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਅੰਜਕ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਿਵੇਂ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪਹਿਲੇ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ :

ਭਾਵ $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$

ਦੂਜਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਤਰਕ ਦੇ ਵੈਧ ਰੂਪ ਰਾਹੀਂ ਸੰਭਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ $r$ ਪੂਰਵ ਕਥਨ ਜਾਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਕਥਨ (Premise) $s$: "$x - 3 = 0$ ਜਾਂ $x - 2 = 0$" ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪਗ (steps) ਦਾ ਮਕਸਦ ਬ੍ਰੈਕੇਟ (brackets) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਇਹ ਕਾਰਵਾਈ ਲਗਾਤਾਰ ਤਦ ਤੱਕ ਚੱਲਦੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਆਖਰੀ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਨਹੀਂ ਪਹੁੰਚਦੇ।

ਤਰਕ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਤੁਲਤਾ ਨਿਗਮਨ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਹੈ ਕਿ $p \Rightarrow q$ ਸੱਚ ਹੈ।

$p$ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਨਿਗਮਨ ਰਾਹੀਂ $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ "$p \Rightarrow q$" ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ਜਿਹੜਾ $f(x) = 2x + 5$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ (one-one) ਫਲਨ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਫਲਨ $f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ)

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x_1) = f(x_2)$ ਭਾਵ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$\Rightarrow \quad 2x_1 + 5 ï \; 5 = 2x_2 + 5 ï \; 5$ (ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜਨ ਤੇ)

$\Rightarrow \quad 2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\Rightarrow \quad 2x_1 = 2x_2$ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ ਗੁਣ ਰਾਹੀਂ)

$\Rightarrow \quad \frac{2}{2} x_1 = \frac{2}{2} x_2$ (ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਨਾਲ)

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$

ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

**(ii)** ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ

ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ, ਉਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਵਿਧੀ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਰੂਪ ਨਿਗਮਿਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**N** ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ S ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ

(i) ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ $1 \in \mathrm{S}$ ਅਤੇ

(ii) ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ $k + 1 \in \mathrm{S}$ ਜਦੋਂ $k \in \mathrm{S}$, ਤਾਂ $\mathrm{S} = \mathbf{N}$

ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ñS($n$), $n = 1$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ" (ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸੰਖਿਆਂ $j$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ) ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਕਥਨ $n = k$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਣ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ $n = k + 1$ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਹੈ (ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $k \geq j$), ਤਾਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $n$, ਜਿੱਥੇ $n \geq j$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਜੇਕਰ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\quad \mathrm{P}(n) : \mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ P(1) ਸੱਚ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ P($k$) ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ,

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\,\theta & \sin k\,\theta \\ -\sin k\,\theta & \cos k\,\theta \end{bmatrix}$$

ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲਿਆ ਕਿ P($k$ + 1) ਸੱਚ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ P($k$) ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\,\theta & \sin(k+1)\,\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\,\theta \end{bmatrix} \text{ ਸੱਚ ਹੈ}$$

ਦੁਬਾਰਾ : $$A^{k+1} = A^k \,.\, A$$

ਕਿਉਂਕਿ P($k$) ਸੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\,\theta & \sin k\,\theta \\ -\sin k\,\theta & \cos k\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\,\theta\cos\theta - \sin k\,\theta\sin\theta & \cos k\,\theta\sin\theta + \sin k\,\theta\cos\theta \\ -\sin k\,\theta\cos\theta - \cos k\,\theta\sin\theta & -\sin k\,\theta\sin\theta + \cos k\,\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਗੁਣਾ ਰਾਹੀਂ)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\,\theta & \sin(k+1)\,\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\,\theta \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ P($k$ + 1) ਸੱਚ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ P($k$) ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ P($n$), $n$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

**(iii)** ਵੱਖ ਵੱਖ ਹਾਲਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਨ ਰਾਹੀਂ ਜਾਂ ਸੱਖਣਾਪਣ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ

ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ, ਜਦੋਂ $p$ ਨੂੰ ਕਈ ਕਥਨਾਂ $r, s, t$ (ਮੰਨ ਲਓ) ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ ਜਿਵੇਂ ਕਿ $p = r \vee s \vee t$ (ਜਿੱਥੇ ñ$\vee$ò ਪ੍ਰਤੀਕ ñਜਾਂò ਲਈ ਹੈ)

ਜੇਕਰ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨਾਂ $$r \Rightarrow q;$$
$$s \Rightarrow q;$$

ਅਤੇ

$$t \Rightarrow q$$

ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$, ਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $p \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੀ ਹਰੇਕ ਸੰਭਵ ਹਾਲਤ ਨੂੰ ਜਾਂਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਰੂਪ ਨਾਲ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੀ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ ਜਦੋਂ ਵਿਖੰਡਨ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC, ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$a = b \cos C + c \cos B$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $p$ ਕਥਨ ñABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈò ਅਤੇ $q$ ਕਥਨ

ñ$a = b \cos C + c \cos B$ò ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। ਸਿਖਰ A ਤੋਂ BC (ਤੇ) ਲੰਬ AD ਖਿੱਚੋ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਾਂ ਤਾਂ ਨਿਊਨਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਾਂ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $p$ ਨੂੰ $r$, $s$ ਅਤੇ $t$ ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ

$r$ : ABC ਇੱਕ ਨਿਊਨਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle C$ ਨਿਊਨਕੋਣ ਹੈ।

$s$ : ABC ਇੱਕ ਅਧਿਕਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ, $\angle C$ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ।

$t$ : ABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ, $\angle C$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਤਿੰਨਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਲਈ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹਾਲਤ **(i)** ਜਦੋਂ $\angle A$, $\angle B$, ਅਤੇ $\angle C$ ਤਿੰਨੋਂ ਹੀ ਨਿਊਨਕੋਣ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ A1.1)

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADB, ਰਾਹੀਂ

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

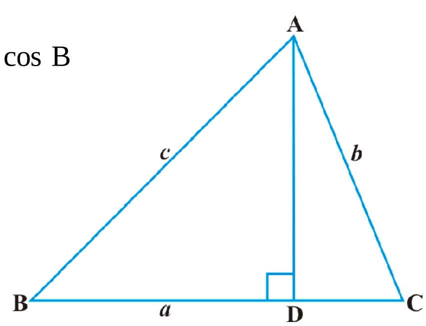
ਭਾਵ $BD = AB \cos B = c \cos B$

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADC ਰਾਹੀਂ

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

ਭਾਵ $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$

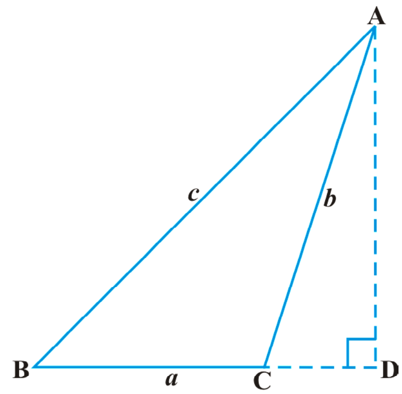


ਚਿੱਤਰ A1-1

ਹੁਣ

$$a = BD + CD$$
$$= c \cos B + b \cos C \quad \dots (1)$$

ਹਾਲਤ **(ii)** ਜਦੋਂ $\angle C$ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A1.2)




ਚਿੱਤਰ A1-2

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADB ਰਾਹੀਂ

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

ਭਾਵ $$BD = AB \cos B$$

$$= c \cos B$$

ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADC ਰਾਹੀਂ

$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$$= \cos (180 - C)$$

$$= -\cos C$$

ਭਾਵ $$CD = -AC \cos C$$

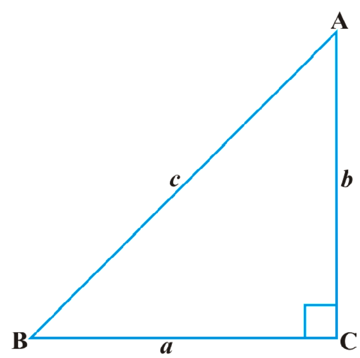
$$= -b \cos C$$

ਹੁਣ $$a = BC = BD - CD$$

ਭਾਵ $$a = c \cos B - (-b \cos C)$$

$$a = c \cos B + b \cos C \qquad \ldots (2)$$

ਹਾਲਤ **(iii)** ਜਦੋਂ $\angle C$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A1.3)




ਚਿੱਤਰ A1-3

ਤ੍ਰਿਭੁਜ ACB, ਰਾਹੀਂ

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

ਭਾਵ $$BC = AB \cos B$$

ਅਤੇ $$a = c \cos B,$$

$$b \cos C = b \cos 90^0 = 0$$

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $$a = 0 + c \cos B$$

$$= b \cos C + c \cos B \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਕਿ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ

$$a = b \cos C + c \cos B$$

ਹਾਲਤ **(i)** ਤੋਂ $r \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਹਾਲਤ **(ii)** ਤੋਂ $s \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਅਤੇ ਹਾਲਤ **(iii)** ਤੋਂ $t \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ ਭਾਵ $p \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਅਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਉਸ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਕੇ, ਦਿੱਤੀ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

**(i)** ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ (***Reductio Ad Absurdum***):
ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮਾਨਤਾ ਨਾਲ਼ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਗੱਲ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਨਤੀਜਾ ਝੂਠ ਹੈ। ਤਰਕ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਜਾਣੂ ਸੱਚ ਕਥਨ, ਝੂਠ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਇੱਕ ਵਿਰੋਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ (Infinite) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Prime Numbers) ਦਾ ਸਮੂਹ P ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਸੀਮਿਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਕਥਨ ਦੇ ਵਿਰੋਧ ਨੂੰ ਭਾਵ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਸੱਚ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੀਮਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੂਚੀਵਾਰ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ

$$N = (P_1\, P_2\, P_3 é\ P_k) + 1 \qquad \ldots (1)$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ N ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸੂਚੀ ਦੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

N ਜਾਂ ਤਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਸੰਯੁਕਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ N ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ (1) ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਜਿਹੜੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਦੂਜੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ N ਇੱਕ ਸੰਯੁਕਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਭਾਜਕ (Divisor) ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਸੂਚੀ ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਖਿਆ N ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਰਾਹੀਂ N ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਬਾਕੀ ਹਮੇਸ਼ਾ 1 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ N ਦਾ ਅਭਾਜ ਭਾਜਕ ਸੂਚੀ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ ਇਹ, ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾ ਲਈ ਹੈ, ਵਿਰੋਧ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਡੀ ਪਹਿਲਾਂ ਮੰਨੀ ਧਾਰਨਾ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਸੀਮਿਤ ਹੈ, ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ* (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤਾ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਵੱਖ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਨ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਵੀ ਹੈ।)

**(ii)** ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ (**contrapositive**) ਦੇ ਕਥਨ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ :
ਇੱਥੇ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਅਸੀਂ ਉਸਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ( ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਮਤੁਲਤਾ ਨੂੰ ਸਾਬਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ)A

ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਅਤੇ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਨਿਖੇਧਨ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = 2x + 5$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

ਇਸ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ñ$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ò $\Rightarrow$ ñ$x_1 = x_2$ò ਇਹ $p \Rightarrow q$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ ਕਥਨ $p$ ਹੈ ਅਤੇ $x_1 = x_2$ ਕਥਨ $q$ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ "ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ" ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਹੈ, ਭਾਵ, "ਜੇਕਰ $f(x_1) = f(x_2)$ ਤਾਂ $x_1 = x_2$ò ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਹੈ "ਜੇਕਰ $x_1 \neq x_2$ ਤਾਂ $f(x_1) \neq f(x_2)$ò

ਹੁਣ $\qquad x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow \qquad 2x_1 \neq 2x_2$

$\Rightarrow \qquad 2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$

$\Rightarrow \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$.

ਕਿਉਂਕਿ ñ$\sim q \Rightarrow \sim p$ò, ਅਤੇ ñ$p \Rightarrow q$ò ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਬੂਤ ਪੂਰਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A, Invertible ਹੈ ਤਾਂ A, Non-singular ਹੈ।

ਹੱਲ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਕ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਲਿਖਣ ਤੇ $p \Rightarrow q$ ਜਿੱਥੇ $p$ ਕਥਨ "ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A, invertible ਹੈ" ਅਤੇ $q$ ਕਥਨ ñA, non-singular ਹੈ।"

ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ non-singular ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A invertible ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਜੇਕਰ A ਇੱਕ non-singular ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੋਇਆ $|A| = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $\qquad \mathrm{A}^{-1} = \dfrac{adj\ \mathrm{A}}{|\mathrm{A}|}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $|\mathrm{A}| = 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ A, Invertible ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਯ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ non-singular ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ A, invertible ਨਹੀਂ ਹੈ। ਭਾਵ, $\sim q \Rightarrow \sim p$.

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A invertible ਹੈ ਤਾਂ A non-singular ਹੈ।

**(iii)** ਪ੍ਰਤਿ-ਉਦਾਹਰਣ **(counter example)** ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ :

ਗਣਿਤ ਦੇ ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹਾਲਤ ਵੀ ਆਉਂਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਪਰਿਕਲਪਿਤ ਵਿਆਪੀਕਰਣ ਦੇ ਜਾਇਜ਼ ਸਬੂਤ ਜਾਨਣ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ਾਂ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਦਾ ਸੱਚ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਣਿਆ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਇਹ ਫ਼ਾਇਦੇਮੰਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ ਨੂੰ ਝੂਠ ਸਾਬਿਤ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੱਭ ਸਕੀਏ। ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਨਾ ਮੰਨਣ ਵਾਲਾ ਉਦਾਹਰਣ ਪ੍ਰਤਿ-ਉਦਾਹਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਉਕਤੀ $p \Rightarrow q$ ਦਾ ਖੰਡਨ, ਉਕਤੀ $\sim (p \Rightarrow q)$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਮਾਤਰ ਇੱਕ ਸਬੂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵੀ ਸਬੂਤ ਦੇਣ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਕਥਨ ਹਰੇਕ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ $(2^{2^n} + 1)$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸੱਚ ਕਥਨ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਸੀ :

$2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹਾਲਾਂਕਿ, ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਵੇਖਣ ਤੇ ਇਹ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਠੀਕ ਲਗਦਾ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $4294967297 = 641 \times 6700417$ ਹੈ। ਜਿਹੜਾ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ (1 ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਖੁਦ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਕਿ “ਹਰੇਕ $n$ ਦੇ ਲਈ $2^{2^n} + 1$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\forall n \in N^+$ò ਝੂਠ ਹੈ।

ਸਿਰਫ਼ ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਕਿ $2^{2^5} + 1$ ਅਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ “ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਨੂੰ ਖੰਡਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਕਥਨ “ਹਰੇਕ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ + 1 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ” ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਕਥਨ “ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।” ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

ਇਹ ਸਾਰੇ ਫਲਨ $x$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਿਲਿਟੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਇਹ $x$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਲਈ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹਨ। ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ “ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ” ਸੱਚ ਹੈ। ਪਰ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ñ$\phi(x) = |x|$ò ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਿਲਿਟੀ ਨੂੰ ਜਾਂਚੀਏ, ਕਿ ਜਿਹੜਾ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ $x = 0$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ “ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ “ਝੂਠ ਹੈ। ਫਲਨ “$\phi(x) = |x|$ò ਦਾ ਕੇਵਲ ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਕਰਨ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ñ$\phi(x) = |x|$ò ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਭਾਵ, “ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ” ਦੇ ਖੰਡਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅੰਤਿਕਾ **2**

# ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling)

## A.2.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਇੱਕ ਉਪਰਾਲੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਅਰਥਾਤ ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਰੁਪਾਂਤਰਣ ਹੀ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਹੈ। ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਰੁਚੀ ਦੇ ਸਾਧਨਾਂ ਜਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਵਿਵਹਾਰ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਨ ਹਿਤ ਨਿਦਰਸ਼ਾਂ (Models) ਦੀ ਰਚਨਾ, ਵਿਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ, ਆਲੇਖਾਂ ਜਾਂ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰਾਂ, ਕੰਪਿਊਟਰ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ, ਗਣਿਤਕ ਸੂਤਰਾਂ ਆਦਿ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਵਿਭਿੰਨ ਗਣਿਤਕ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਧੇਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਇੱਕ ਵੱਖਰੇ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਕਲਨ ਅਤੇ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀਆਂ ਤਕਨੀਕਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

## A.2.2 ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਿਉਂ ? (Why Mathematical Modelling?)

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕ ਗਣਿਤ, ਬੀਜ ਗਣਿਤ, ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਤੇ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਆਦਿ ਦੇ ਸ਼ਾਬਦਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੈ। ਕਦੇ ਕਦੇ ਅਸੀਂ ਸਥਿਤੀਜਨਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਭੌਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ ਵਿੱਚ ਗਏ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਸਰਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਭੌਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ, ਭਾਵ ਭੌਤਿਕ ਨਿਯਮਾਂ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਜਿਸ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਗਣਿਤਕ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ। ਅਨੇਕ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਕੌਸ਼ਲ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) ਕਿਸੇ ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ ਜਦੋਂ ਨਦੀ ਨੂੰ ਪਾਰ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋਵੇ)A

(ii) ਕਿਸੇ ਗੋਲੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਲਈ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਗੋਲਾ ਸੁੱਟਣ ਵਾਲੇ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਮਾਧਿਅਮ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਰੋਧ, ਗੁਰੁੱਤਾਆਕਰਸ਼ਨ $g$ ਆਦਿ ਚਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹੋਵੇ)।

(iii) ਕਿਸੇ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦਾ ਸਿਖਰ ਤੇ ਨਹੀਂ ਪਹੁੰਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ)।

(iv) ਸੂਰਜ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(v) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਕਿ ਦਿਲ ਦੇ ਰੋਗੀਆਂ ਨੂੰ ਲਿਫਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਰਜਿਤ ਕਿਉਂ ਹੈ (ਬਿਨਾਂ ਮਨੁੱਖੀ ਸ਼ਰੀਰ ਕਿਰਿਆ ਵਿਗਿਆਨ ਜਾਣੇ)।

(vi) ਧਰਤੀ ਦਾ ਪੁੰਜ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(vii) ਖੜੀ ਫਸਲ ਨਾਲ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਦਾਲਾਂ ਦੀ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ (ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਫਸਲ ਦੇ ਕੱਟਣ ਦੀ ਆਗਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ)।

(viii) ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸ਼ਰੀਰ ਵਿੱਚ ਖੂਨ ਦਾ ਆਇਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ ਖੂਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਆਗਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ)।

(ix) ਸਾਲ 2009 ਈ. ਵਿੱਚ ਭਾਰਤ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ (ਜਦ ਕਿ ਸਾਲ 2009 ਈ. ਤੱਕ ਇੰਤਜਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਆਗਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ)।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਕਰੋਗੇ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਹ ਗਿਆਨਵਾਚਕ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਪ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦਾ ਉਪਰਾਲਾ ਕਰੋ ਉਹ ਵੀ ਬਿਨਾਂ ਗਣਿਤ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ। ਤਦ ਤੁਸੀਂ ਗਣਿਤ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਅਤੇ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਲੋੜ ਦੇ ਮਹੱਤਵ ਨੂੰ ਸਮਝ ਸਕਾਂਗੇ।

### A.2.3 ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (Principles of Mathematical Modelling)

ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਸਿਧਾਂਤ ਯੁਕਤ ਕਿਰਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁੱਝ ਸਿਧਾਂਤ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦਾ ਸਰੂਪ ਲਗਭਗ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਹੈ। ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਕੁੱਝ ਮੂਲ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

(i) ਨਿਦਰਸ਼ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ (ਅਸੀਂ ਮਾਡਲ ਕਿਉਂ ਖੋਜ ਰਹੇ ਹਾਂ)।

(ii) ਮਾਡਲ ਦੇ ਲਈ ਪੈਰਾਮੀਟਰ/ਚਲ ਨੂੰ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕਰੋ (ਅਸੀਂ ਕੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ)।

(iii) ਉਪਲਬਧ ਢੁੱਕਵੇਂ/ਸੰਗਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ (ਕੀ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ)।

(iv) ਪ੍ਰਯੋਗ ਯੋਗ ਪ੍ਰਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ (ਪੂਰਵਧਾਰਨਾ, ਕਲਪਨਾ)।

(v) ਸ਼ਾਸ਼ਕ/ਪ੍ਰਬੰਧਕ ਭੌਤਿਕ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।

(vi) ਪਹਿਚਾਣੋ :

(a) ਸਮੀਕਰਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

(b) ਗਣਨਾ ਜੋ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

(c) ਹੱਲ ਜੋ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(vii) ਉਹਨਾਂ ਪਰੀਖਣਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਜਾਂਚ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ :

(a) ਮਾਡਲ ਅਤੇ ਉਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਿਯਮਾਂ ਅਤੇ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਹੋਣਾ।

(b) ਮਾਡਲ ਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ

(viii) ਉਹਨਾਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਜੋ ਮਾਡਲ ਨੂੰ ਸੁਧਾਰ ਸਕਣ।

ਨਿਰਦੇਸ਼ਨ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

**ਪਗ 1:** ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।

**ਪਗ 2:** ਪੈਰਾਮੀਟਰ /ਚਲਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਭੌਤਿਕ ਨਿਯਮਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਗਣਿਤੀ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰਨਾ।

**ਪਗ 3:** ਗਣਿਤੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

**ਪਗ 4:** ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮ ਦੀ ਮੂਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (ਸਮੱਸਿਆ) ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ (ਪਰਿਣਾਮ) ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਜਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ।

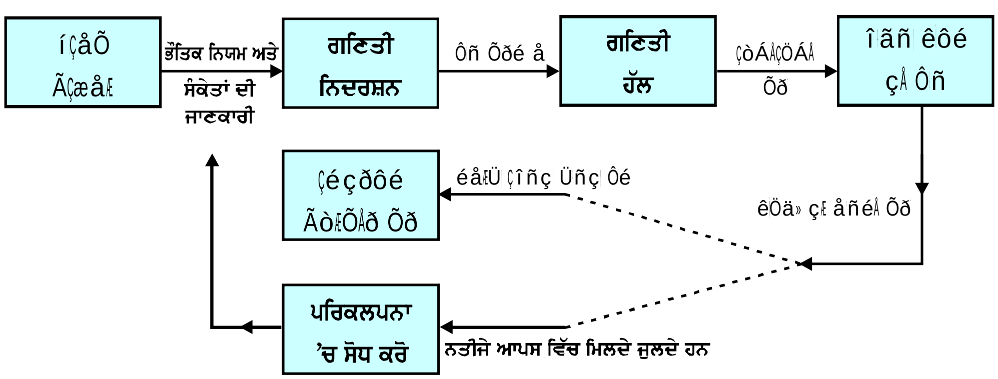
**ਪਗ 5:** ਜੇਕਰ ਪਰਿਣਾਮ ਲਗਭਗ ਮੇਲ ਖਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਮਾਡਲ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰੋ ਨਤੀਜਾ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ /ਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪਦ 2 ਤੇ ਜਾਓ।

ਉਪਰੋਕਤ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਆਲੇਖ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

**ਉਦਾਹਰਣ 1.** ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ : ਪਗ 1.** "ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ" ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

**ਪਗ 2.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ AB ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਮੀਨਾਰ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A.2.2)। ਮੰਨ ਲਉ PQ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਨਾਪਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੈ; ਜਿਸ ਦੀ ਅੱਖ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ PQ = $h$ ਅਤੇ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ H ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੀ ਅੱਖ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਕੋਣ $\alpha$ ਹੈ ਅਤੇ $l$ = QB = PC



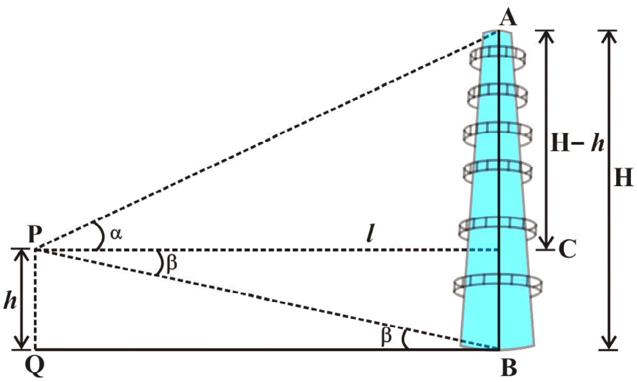

ÇÚåð **A.2.1**

ਹੁਣ $$\tan \alpha = \frac{AC}{PC} = \frac{H-h}{l}$$

ਜਾਂ $$H = h + l \tan \alpha \qquad \dots (1)$$

ਪਗ 3: ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪੈਰਾਮੀਟਰ $h$, $l$ ਅਤੇ $\alpha$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨਿਰੀਖਕ ਨੂੰ ਪਤਾ ਹਨ ਅਤੇ ਪਰਿਣਾਮ (1) ਨਾਲ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 4: ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦਾ ਅਧਾਰ ਨਾ ਪਹੁੰਚਣਯੋਗ ਹੋਵੇ, ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਨਿਰੀਖਕ ਨੂੰ $l$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇ, ਤਦ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਅਧਾਰ B ਦਾ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਨਿਵਾਣ ਕੋਣ $\beta$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\Delta PQB$




ਚਿੱਤਰ A.2.2

ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\tan \beta = \frac{PQ}{QB} = \frac{h}{l} \text{ ਜਾਂ } l = h \cot \beta$$

ਪਗ 5: ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਚਰਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $h$, $l$, $\alpha$ ਅਤੇ $\beta$ ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਮਾਨ ਪਤਾ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਵਸਾਇਕ ਫਰਮ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਉਤਪਾਦ $P_1$, $P_2$ ਅਤੇ $P_3$ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੱਚੇ ਮਾਲ $R_1$, $R_2$ ਅਤੇ $R_3$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਰਮ ਤੋਂ ਦੋ ਗਾਹਕ $F_1$ ਅਤੇ $F_2$ ਖਰੀਦ ਦੀ ਮੰਗ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਫਰਮ ਦੇ ਕੋਲ $R_1$, $R_2$ ਅਤੇ $R_3$ ਦੀ ਸੀਮਤ ਮਾਤਰਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾਓ, ਜੋ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚੇ ਮਾਲ $R_1$, $R_2$ ਅਤੇ $R_3$ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਗ 1. ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਭਲੀਭਾਂਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਜੋ ਗਾਹਕਾਂ $F_1$ ਅਤੇ $F_2$ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤਦ A ਦਾ ਰੂਪ ਅਜਿਹਾ ਹੋਵੇਗਾ।

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Å & Å & Å \\ Å & Å & Å \end{bmatrix} \end{array}$$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ B ....... ਹੈ, ਜੋ ਉਤਪਾਦ $P_1$, $P_2$ ਅਤੇ $P_3$ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਹਿੱਤ ਕੱਚੇ ਮਾਲ $R_1$, $R_2$ ਅਤੇ $R_3$, ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤਦ B ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ ;

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Å & Å & Å \\ Å & Å & Å \\ Å & Å & Å \end{bmatrix} \end{array}$$

ਪਗ 3. ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ (ਜੋ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$AB = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Å & Å & Å \\ Å & Å & Å \end{bmatrix} \end{array}$$

ਇਸ ਨਾਲ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਗਾਹਕਾਂ $F_1$ ਅਤੇ $F_2$ ਦੀਆਂ ਫਰਮਾਇਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਹਿੱਤ ਕੱਚੇ ਮਾਲ $R_1$, $R_2$ ਅਤੇ $R_3$ ਦੀਆਂ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਗਿਆਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਉਦਾਹਰਣ 2 ਦੇ ਮਾਡਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ, ਜਦ ਕਿ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ $R_1$ ਦੀਆਂ 330 ਇਕਾਈਆਂ, $R_2$ ਦੀਆਂ 455 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ $R_3$ ਦੀਆਂ 140 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $F_1$ ਅਤੇ $F_2$ ਦੀ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚੇ ਮਾਲ $R_1$ ਦੀਆਂ 355 ਇਕਾਈਆਂ। $R_2$ ਦੀਆਂ 467 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ $R_3$ ਦੀਆਂ 147 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਕੱਚੇ ਮਾਲ

ਦੀਆਂ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਤਿੰਨੋਂ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਹਿੱਤ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਜਾਂ ਤਾਂ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵਧਾਉਣ ਦੀ ਮੰਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ ਅਸੀਂ ਗਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਦੀ ਬੇਨਤੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 3 ਵਿੱਚ A ਨੂੰ $A_1$ ਨਾਲ ਬਦਲ ਦੇਈਏ, ਜਿੱਥੇ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਗਾਹਕ ਲੋਕ ਆਪਣੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ

$$A_1 B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

ਜਿੱਥੇ $R_1$ ਦੀਆਂ 311, $R_2$ ਦੀਆਂ 436 ਅਤੇ $R_3$ ਦੀਆਂ 138 ਇਕਾਈਆਂ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਅਰਥਾਤ $R_1$ ਦੀਆਂ 330, $R_2$ ਦੀਆਂ 455 ਅਤੇ $R_3$ ਦੀਆਂ 140 ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹਨ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਅਸੀਂ A ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦਾ ਪੂਰਵ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਹੋ ਜਾਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਗਾਹਕਾਂ ਦੀ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ $A_1$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦ ਆਦੇਸ਼ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਫਰਮ ਦੋਵੇਂ ਗਾਹਕਾਂ ਦੇ ਖਰੀਦ ਆਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪੁੱਛਗਿੱਛ : ਦਿੱਤੇ B ਅਤੇ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕੀ ਅਸੀਂ, ਫਰਮ ਦੇ ਮਾਲਕ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ, ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਹ ਗਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਬੇਨਤੀ ਕਰ ਸਕੇ ਕਿ ਉਹ ਆਪਣੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚਾ ਮਾਲ ਪੂਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਵੇ।

ਇਸ ਪੁੱਛਗਿੱਛ ਦਾ ਉੱਤਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $P_1$, $P_2$, $P_3$ ਅਤੇ $R_1$, $R_2$, $R_3$ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਰਮ ਦੇ ਕੋਲ $R_1$ ਦੀਆਂ 330 $R_2$ ਦੀਆਂ 455 ਅਤੇ $R_3$ ਦੀਆਂ 140 ਇਕਾਈਆਂ ਉਪਲਬਧ ਹਨ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਤਿੰਨੋਂ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚੇ ਮਾਲ $R_1$, $R_2$ ਅਤੇ $R_3$, ਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਬਣਾਈਆਂ ਹਨ ਕਿ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਪੂਰਾ ਹੋ ਜਾਵੇ ?

ਹੱਲ : ਪਗ 1. ਸਥਿਤੀ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਣ ਯੋਗ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਰਮ $P_1$ ਦੀਆਂ $x$ ਇਕਾਈਆਂ, $P_2$ ਦੀਆਂ $y$ ਅਤੇ $P_3$ ਦੀਆਂ $z$ ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਉਤਪਾਦ $P_1$ ਦੇ ਲਈ $R_1$ ਦੀਆਂ 3, $P_2$ ਦੇ ਲਈ $R_1$ ਦੀਆਂ 7 ਅਤੇ $P_3$ ਦੇ ਲਈ $R_1$ ਦੀਆਂ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਵੇਖੋ) ਅਤੇ $R_1$ ਦੀਆਂ ਕੁੱਲ 330 ਇਕਾਈਆਂ ਉਪਲਬਧ ਹਨ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$3x + 7y + 5z = 330 \text{ (ਕੱਚੇ ਮਾਲ } R_1 \text{ ਦੇ ਲਈ)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$4x + 9y + 12z = 455 \text{ (ਕੱਚੇ ਮਾਲ } R_2 \text{ ਦੇ ਲਈ)}$$

ਅਤੇ
$$3y + 7z = 140 \text{ (ਕੱਚੇ ਮਾਲ } R_3 \text{ ਦੇ ਲਈ)}$$

ਇਸ (ਉਪਯੁਕਤ) ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 455 \\ 140 \end{bmatrix}$$

ਪਗ 3. ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੁਆਰਾ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 20$, $y = 35$ ਅਤੇ $z = 5$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਰਮ $P_1$ ਦੀਆਂ 20, $P_2$ ਦੀਆਂ 35 ਅਤੇ $P_3$ ਦੀਆਂ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਉਤਪੰਨ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ:* ਕੋਈ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਨਿਰਮਾਤਾ ਗਾਹਕਾਂ $F_1$ ਅਤੇ $F_2$ ਦੀਆਂ ਮੰਗਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਉਦਾਹਰਣ 3 ਵਿੱਚ ਹੈ) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਕੇਵਲ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਦਾ ਫੈਸਲਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $F_1$ ਨੇ $P_3$ ਦੀਆਂ 6 ਇਕਾਈਆਂ ਮੰਗੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਿਰਮਾਤਾ ਉਸਦੀਆਂ ਕੇਵਲ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਹੀ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਇੱਕ ਦਵਾ ਨਿਰਮਾਤਾ $M_1$ ਅਤੇ $M_2$ ਦਵਾਈਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। $M_1$ ਦੀਆਂ 20,000 ਅਤੇ $M_2$ ਦੀਆਂ 40,000 ਬੋਤਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦਵਾਈ ਬਣਾਉਣ ਹਿੱਤ ਲੋੜੀਂਦਾ ਕੱਚਾ ਮਾਲ ਉਪਲਬਧ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਕੇਵਲ 45,000 ਬੋਤਲਾਂ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੀ ਦਵਾ ਭਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। $M_1$ ਦੀਆਂ 1000 ਬੋਤਲਾਂ ਭਰਨ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮਾਲ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘੰਟੇ ਅਤੇ $M_2$ ਦੀਆਂ 1000 ਬੋਤਲਾਂ ਭਰਨ ਦੇ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮਾਲ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 1 ਘੰਟਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਲਈ ਕੇਵਲ 66 ਘੰਟੇ ਉਪਲਬਧ ਹਨ। $M_1$ ਦੀ ਹਰੇਕ ਬੋਤਲ ਤੇ 8 ਰੁਪਏ ਅਤੇ $M_2$ ਦੀ ਹਰੇਕ ਬੋਤਲ ਤੇ 7 ਰੁਪਏ ਦਾ ਲਾਭ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਵਾ ਨਿਰਮਾਤਾ ਮਹੱਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਹਿੱਤ ਆਪਣੀ ਉਤਪਾਦਨ ਯੋਜਨਾ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬਣਾਈ ਜਾਵੇ ?

ਪਗ 1. ਦਿੱਤੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਮਹੱਤਵ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਹਿੱਤ ਦਵਾਈਆਂ $M_1$ ਅਤੇ $M_2$ ਦੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਵਾ $M_1$ ਦੀਆਂ $x$ ਅਤੇ ਦਵਾ $M_2$ ਦੀਆਂ $y$ ਬੋਤਲਾਂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ $M_1$ ਦੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ

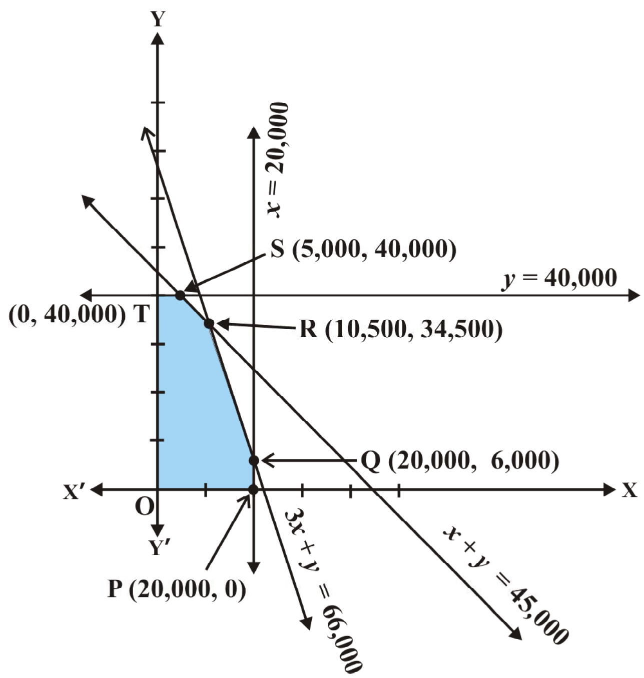
ਤੇ ਲਾਭ 8 ਰੁਪਏ ਅਤੇ $M_2$ ਦੀ ਹਰੇਕ ਬੋਤਲ ਤੇ ਲਾਭ 7 ਰੁਪਏ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ (objective function)] ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$$

ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਧਿਕਤਮ ਕਰਨਾ ਹੈ (ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਅਧਿਆਇ 12 ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ)।

$$\left.\begin{array}{l} x \le 20000 \\ y \le 40000 \\ x + y \le 45000 \\ 3x + y \le 66000 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (1)$$

ਪਗ 3. ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (constraints) (1) ਦੇ ਅਧੀਨ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ OPQRST ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਖੇਤਰ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A.2.3) ਬਿੰਦੂਆਂ O, P, Q, R, S ਅਤੇ T ਕੋਨਿਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) ਅਤੇ (0, 40000) ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ **A.2.3**

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ :

$$P\ (0, 0)\text{ ਤੇ } Z = 0$$

$$P\ (20000, 0)\text{ ਤੇ } Z = 8 \times 20000 = 160000$$

$$Q\ (20000, 6000)\text{ ਤੇ } Z = 8 \times 20000 + 7 \times 6000 = 202000$$

$$R\ (10500, 34500)\text{ ਤੇ } Z = 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$$

$$S = (5000, 40000)\text{ ਤੇ } Z = 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$$

$$T = (0, 40000)\text{ ਤੇ } Z = 7 \times 40000 = 280000$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $x = 10500$ ਅਤੇ $y = 34500$ ਤੇ ਮਹੱਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ 325500 ਰੁਪਏ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਮਾਤਾ (ਉਤਪਾਦਕ) ਨੂੰ 325500 ਰੁਪਏ ਦਾ ਮਹੱਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ $M_1$ ਦੀਆਂ 10500 ਅਤੇ $M_2$ ਦੀਆਂ 34500 ਬੋਤਲਾਂ ਉਤਪੰਨ ਕਰਨੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਕੋਈ ਨਵਾਂ ਉਤਪਾਦ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੇ ਕੁੱਝ ਲਾਗਤ (ਸਥਿਰ ਅਤੇ ਚਲ ਲਾਗਤ) ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕੰਪਨੀ ਉਸ ਉਤਪਾਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਮੁੱਲ ਤੇ ਵੇਚਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਲਾਭ-ਹਾਨੀ ਦੇ ਪਰੀਖਣ ਹਿੱਤ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਪਗ 1. ਇੱਥੇ ਸਥਿਤੀ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਹਿਚਾਣ ਯੋਗ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਲਾਗਤ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਸਥਿਰ ਅਤੇ ਚਰ। ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਸੰਖਿਆਂ ਤੋਂ ਸਵਤੰਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਕਿਰਾਇਆ, ਟੈਕਸ ਆਦਿ)। ਜਦ ਕਿ ਚਲ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਧਣ ਨਾਲ ਵਧਦੀ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਸਮੱਗਰੀ, ਪੈਕਿੰਗ ਆਦਿ) ਆਰੰਭ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਲ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਸਿੱਧਾ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਮਾਡਲ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਕੁੱਝ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਵੇਚਣ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ (ਕੰਪਨੀ) ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਧਨ ਮਹੱਤਮ ਹੈ। ਸੁਵਿਧਾ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦਿਤ ਇਕਾਈ ਤੁਰੰਤ ਵੇਚ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

### ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਤਪੰਨ ਅਤੇ ਵੇਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $x$ ਹੈ।

C = ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਹੈ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)

I = ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਹੈ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)

P = ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਹੈ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)

ਸਾਡੀ I ਉਪਰੋਕਤ ਮਾਨਤਾ (assumption) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ C ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਤੋਂ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਦਾ ਹੈ :

ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ $= a$ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ),

ਚਰ ਲਾਗਤ $= b$ (ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ)

ਅਤੇ $$C = a + bx \qquad \ldots (1)$$

ਨਾਲ ਹੀ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ I ਵੇਚਿਆ ਗਿਆ ਮੁੱਲ $s$ (ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ) ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\mathrm{I} = sx \qquad \ldots (2)$$

ਲਾਭ P ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\mathrm{P} = \mathrm{I} \text{ ï } \mathrm{C}$$
$$= sx \text{ ï } (a + bx)$$
$$= (s \text{ ï } b)\, x \text{ ï } a \qquad \ldots (3)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ $x$, C, I, P, $a$, $b$, ਅਤੇ $s$ ਦੇ ਵਿੱਚ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਪਰਸਪਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਗਣਿਤੀ ਮਾਡਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਣ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

ਸਵਤੰਤਰ $x$

ਆਸ਼ਰਿਤ (ਨਿਰਭਰ) C, I, P

ਪੈਰਾਮੀਟਰ $a$, $b$, $s$

ਉਤਪਾਦਕ ਨੂੰ $x$, $a$, $b$, $s$, ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ P ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 3. ਸੰਬੰਧ (3) ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮ ਵਿਛੇਦਨ ਬਿੰਦੂ (ਨਾ ਕੋਈ ਲਾਭ ਅਤੇ ਨਾ ਕੋਈ ਹਾਨੀ) ਦੇ ਲਈ P = 0, ਅਰਥਾਤ, $x = \dfrac{a}{s-b}$ ਇਕਾਈਆਂ।

ਪਗ 4 ਅਤੇ 5 ਸਮ ਵਿਛੇਦਨ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਵਿਚਾਰ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੰਪਨੀ ਕੁਝ ਇਕਾਈਆਂ ਹੀ ਉਤਪਾਦਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $x = \dfrac{a}{s-b}$ ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਹਾਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਉਹ ਵਧੇਰੇ ਇਕਾਈਆਂ ਉਤਪਾਦਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $\dfrac{a}{s-b}$ ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਇਕਾਈਆਂ ਨਾਲ ਉਸ ਨੂੰ ਲਾਭ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ ਸਮ ਵਿਛੇਦਨ ਬਿੰਦੂ ਅਵਾਸਤਵਿਕ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਦ ਕੋਈ ਹੋਰ ਮਾਡਲ ਉਪਯੁਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਧਨ ਪ੍ਰਵਾਹ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸੰਬੰਧ (3) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx} = s \text{ ï } b$$

ਭਾਵ $x$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ P ਦੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ, ਰਾਸ਼ੀ $s$ ï $b$ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਚਲ ਲਾਗਤ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਾਧੂ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਬਹੁਤ ਅਧਿਕ ਮਾਤਰਾ ਉਤਪੰਨ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਚਲ ਲਾਗਤ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਵੀ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ 1000 ਲੀਟਰ ਖਾਰਾ ਜਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀ ਲੀਟਰ 250 g ਖਾਰਾ ਹੈ। 200 g/L ਖਾਰਾ ਵਾਲਾ ਖਾਰਾ ਜਲ, 25 L/min ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮਿਸ਼ਰਣ ਸਮਾਨ ਦਰ ਨਾਲ ਟੈਂਕ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ $t$ ਤੇ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਪਗ 1 ਇੱਥੇ ਸਥਿਤੀ ਸਰਲਤਾ ਦੇ ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਨਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = y(t)$ ਦੁਆਰਾ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ, ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਆਰੰਭ ਹੋਣ ਦੇ ਬਾਅਦ, ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ $t$ (ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ) ਤੇ, ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਉਪਸਥਿਤ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ (ਕਿਲੋਗਰਾਮ ਵਿੱਚ) ਸੂਚਿਤ (ਪ੍ਰਗਟ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $t = 0$, ਅਰਥਾਤ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਅਤੇ ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $y = 250\text{ g} \times 1000 = 250\text{ kg}$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $y$ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ, ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ, ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਜਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ 5 kg/min (ਕਿਉਂਕਿ $25 \times 200\text{ g} = 5\text{ kg}$) ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਖਾਰਾ ਲਿਆਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਖਾਰੇ ਜਲ ਦਾ ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ $25\left(\frac{y}{1000}\right) = \frac{y}{40}$ kg/min

(ਕਿਉਂਕਿ $t$ ਸਮੇਂ ਤੇ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ $\frac{y}{1000}$ kg ਹੈ।)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $t$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40} \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40}y = 5 \qquad \dots (1)$$

ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 3. ਨਤੀਜਾ /ਪਰਿਣਾਮ (1) ਇੱਕ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਹੱਲ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$y e^{\frac{t}{40}} = 200 e^{\frac{t}{40}} + C \quad \text{ਜਾਂ} \quad y(t) = 200 + C\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \dots (2)$$

ਜਿੱਥੇ C ਇੰਟਰਗਰੇਸ਼ਨ/ਅਨੁਕੂਲਨ ਅਚੱਲ ਹੈ

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ $t = 0, y = 250$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $250 = 200 + C$

ਜਾਂ $C = 50$

ਤਦ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ

$$y = 200 + 50\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \dots (3)$$

ਜਾਂ
$$\frac{y - 200}{50} = e^{-\frac{t}{40}}$$

ਜਾਂ $$e^{\frac{t}{40}} = \frac{50}{y-200}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$t = 40\log\left(\frac{50}{y-200}\right) \quad \ldots (4)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਉਹ ਸਮਾਂ $t$ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ $y$ kg ਹੈ।

ਚਰਣ 4. ਸਮੀਕਰਣ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਮੇਸ਼ਾ $y > 200$ ਕਿਉਂਕਿ $e^{-\frac{t}{40}}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਟੈਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਤਰਾ ਲਗਭਗ 200 kg (ਪਰੰਤੂ ਠੀਕ ਠੀਕ 200 kg ਨਹੀਂ) ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t > 0$ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $0 < y$ ï $200 < 50$ ਅਰਥਾਤ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $200 < y < 250$ ਅਧੀਨ ਟੈਂਕ ਦੇ ਖਾਰੇ ਜਲ ਦੇ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਅਤੇ ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 200 kg ਅਤੇ 250 kg ਦੇ ਮੱਧ ਵਿੱਚ ਹੈ।

## ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਨੇਕ ਗਣਿਤੀ ਮਾਡਲ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ (application) ਬਹੁਤ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਗੰਭੀਰਤਾ ਨਾਲ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾਪੂਰਵਕ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ। ਕੁੱਝ ਵਿਸ਼ੇ ਜਿਵੇਂ ਗਣਿਤੀ, ਭੌਤਿਕੀ, ਗਣਿਤੀ ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ, ਸੰਕਿਰਿਆ ਵਿਗਿਆਨ (operations research)] ਜੀਵ ਗਣਿਤ (Bio-mathematics) ਆਦਿ, ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ (ਲਗਭਗ) ਸਮਾਨਅਰਥੀ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ ਅੱਜ ਵੀ ਕਈ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਮਾਡਲ ਅਜੇ ਬਣਨੇ ਹਨ। ਜਿਸ ਦੇ ਪਿੱਛੇ ਕਾਰਣ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉਹ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਬਹੁਤ ਜਟਿਲ ਹਨ ਜਾਂ ਵਿਕਸਿਤ ਮਾਡਲ ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਪੇਚੀਦਾ ਹਨ।

ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਅਤੇ ਸੁਪਰ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ (Super Computers) ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਨੇ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ, ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਮਾਡਲ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਯੋਗ ਬਣਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਤੇਜ਼ (fast) ਅਤੇ ਉੱਨਤ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਦੇ ਕਾਰਣ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੋ ਸਕਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਵਧੇਰੇ ਯਥਾਰਥ ਮਾਡਲਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੇ ਨਾਲ ਵੱਧ ਸਹਿਮਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਸਾਡੇ ਕੋਲ, ਕਿਸੇ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਯੁਕਤ ਵਿਭਿੰਨ ਚਲਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਚਲਾਂ ਦੇ ਮੂਲਅੰਕਣ ਹਿੱਤ ਵਧੇਰੇ ਮਾਰਗਦਰਸ਼ਨ ਸਿਧਾਂਤ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪੰਜ ਨਾਂ ਛੇ ਚਲਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਕੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਕੜੇ ਦੇ ਲਈ ਬਹੁਤ ਹੱਦ ਤੱਕ ਵਿਅਰਥ (accurate) ਮਾਡਲਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਠੀਕ ਠੀਕ ਮੁਲੰਕਣ ਹਿੱਤ ਸਾਨੂੰ ਚਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਰੱਖਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਵੱਡੀ ਜਟਿਲ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਆਪਣੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਮੱਸਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਵਾਤਾਵਰਣ (environment)] ਸਮੁੰਦਰ ਵਿਗਿਆਨ (oceanography)] ਜੰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਿਯੰਤਰਣ (population control) ਆਦਿ ਦੇ ਲੋਕ ਨਿਦਰਸ਼ਾਂ (world models) ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਿੱਖਿਆ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਾਖਾਵਾਂ ਗਣਿਤ, ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿਗਿਆਨ, ਭੌਤਿਕੀ, ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ, ਸਮਾਜ ਸ਼ਾਸਤਰ ਆਦਿ ਤੇ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ, ਇਸ ਚੁਣੌਤੀ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਸਾਹਸਪੂਰਵਕ ਕਰ ਰਹੇ ਹਨ।

# ਉੱਤਰਮਾਲਾ

## ਅਭਿਆਸ 1.1

1. (i) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ
   (ii) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ
   (iii) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ
   (iv) ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ
   (v) (a) ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ
   (b) ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ
   (c) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਤਾਂ ਸਕਰਮਕ
   (d) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਪਰੰਤੂ ਸਕਰਮਕ
   (e) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ

3. ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ

5. ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ

9. (i) {1, 5, 9}, (ii) {1}

12. $T_1$ ਅਤੇ $T_3$ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।

13. ਸਾਰੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਨਿੱਜਵਾਚਕ

14. ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = 2x + c, c \in \mathbf{R}$ ਦਾ ਨਿੱਜਵਾਚਕ

15. B

16. C

## ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਨਹੀਂ

2. (i) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਨਹੀਂ
   (ii) ਨਾ ਤਾਂ ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਰਜੈਕਟਿਵ
   (iii) ਨਾ ਤਾਂ ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਰਜੈਕਟਿਵ
   (iv) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਨਹੀਂ
   (v) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਨਹੀਂ

7. (i) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਸਰਜੈਕਟਿਵ
   (ii) ਨਾ ਤਾਂ ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਰਜੈਕਟਿਵ

9. ਨਹੀਂ

10. ਹਾਂ

11. D

12. A

## ਅਭਿਆਸ 1.3

1. $gof$ = {(1, 3), (3,1), (4,3)}

3. (i) $(gof)(x)$ = |5|$x$|ï 2|, $(fog)(x)$ = |5$x$ ï 2|
   (ii) $(gof)(x) = 2x$, $(fog)(x) = 8x$

**4.** $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਖੁਦ $f$ ਹੀ ਹੈ

**5.** (i) ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ $f$ ਇੱਕ ਬਹੁ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। (ii) ਨਹੀਂ ਕਿਉਂਕਿ $g$ ਇੱਕ ਬਹੁ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।

(iii) ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ $h$ ਇੱਕ, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ।

**6.** $f^{-1}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1-y}$, $y \neq 1$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ **7.** $f^{-1}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{4}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।

**11.** $f^{-1}$, $f^{-1}(a) = 1, f^{-1}(b) = 2$ ਅਤੇ $f^{-1}(c) = 3$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।

**13.** (C) **14.** (B)

## ਅਭਿਆਸ 1.4

**1.** (i) ਨਹੀਂ (ii) ਹਾਂ (iii) ਹਾਂ (iv) ਹਾਂ (v) ਹਾਂ

**2.** (i) $*$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।

(ii) $*$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ।

(iii) $*$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਸਹਿਚਰ ਹਨ।

(iv) $*$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ।

(v) $*$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਹਿਚਰ।

(vi) $*$ ਨਾ ਤਾਂ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਹਿਚਰ।

**3.**

| $\wedge$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

**4.** (i) $(2 * 3) * 4 = 1$ ਅਤੇ $2 * (3 * 4) = 1$ (ii) ਹਾਂ (iii) 1

**5.** ਹਾਂ

**6.** (i) $5 * 7 = 35, 20 * 16 = 80$ (ii) ਹਾਂ (iii) ਹਾਂ (iv) 1 (v) 1

**7.** ਨਹੀਂ **8.** $*$ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਸਹਿਚਰ ਦੋਵੇਂ ਹਨ, $*$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ; **N** ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**9.** (ii) , (iv), (v) ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ। (v) ਸਹਿਚਰ ਹੈ। **10.** (V)

**11.** ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**12.** (i) ਸੱਚ (ii) ਝੂਠ **13.** B

## *ਅਧਿਆਇ 1 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**1.** $g(y)=\frac{y-7}{10}$ **2.** $f$ ਦਾ ਉਲਟ ਖੁਦ $f$ ਹੈ।

**3.** $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$ **8.** ਨਹੀਂ **10.** $n!$

**11.** (i) $F^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$, (ii) $F^{-1}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। **12.** ਨਹੀਂ

**15.** ਹਾਂ **16.** A **17.** B **18.** ਨਹੀਂ

**19.** B

## ਅਭਿਆਸ 2.1

**1.** $\frac{-\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **4.** $\frac{-\pi}{3}$

**5.** $\frac{2\pi}{3}$ **6.** $-\frac{\pi}{4}$ **7.** $\frac{\pi}{6}$ **8.** $\frac{\pi}{6}$

**9.** $\frac{3\pi}{4}$ **10.** $\frac{-\pi}{4}$ **11.** $\frac{3\pi}{4}$ **12.** $\frac{2\pi}{3}$

**13.** B **14.** B

## ਅਭਿਆਸ 2.2

**5.** $\frac{1}{2}\tan^{-1} x$ **6.** $\frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$ **7.** $\frac{x}{2}$ **8.** $\frac{\pi}{4} - x$

**9.** $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ **10.** $3\tan^{-1}\frac{x}{a}$ **11.** $\frac{\pi}{4}$ **12.** 0

**13.** $\frac{x+y}{1-xy}$ **14.** $\frac{1}{5}$ **15.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ **16.** $\frac{\pi}{3}$

**17.** $\frac{-\pi}{4}$ **18.** $\frac{17}{6}$ **19.** B **20.** D

**21.** B

## *ਅਧਿਆਇ 2 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**1.** $\frac{\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **13.** $x=\frac{\pi}{4}$ **14.** $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

**15.** D **16.** C **17.** C

## ਅਭਿਆਸ 3.1

**1.** (i) $3 \times 4$ (ii) 12 (iii) 19, 35, ï 5, 12, $\frac{5}{2}$

**2.** $1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2, 24 \times 1; 1 \times 13, 13 \times 1$

**3.** $1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2, 18 \times 1; 1 \times 5, 5 \times 1$

**4.** (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

**5.** (i) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

**6.** (i) $x = 1, \quad y = 4, \quad z = 3$

(ii) $x = 4, \quad y = 2, \quad z = 0$ or $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 0$

(iii) $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$

**7.** $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

**8.** C **9.** B **10.** D

## ਅਭਿਆਸ 3.2

**1.** (i) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

**2.** (i) $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

**3.** (i) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

**4.** $A+B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B-C=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

**5.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**7.** (i) $X=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $X=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-12}{5} \\ \frac{-11}{5} & 3 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix}$

**8.** $X=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $x = 3, y = 3$ **10.** $x = 3, y = 6, z = 9, t = 6$

**11.** $x = 3, y =$ ï 4 **12.** $x = 2, y = 4, w = 3, z = 1$

**15.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ **17.** $k = 1$

**19.** (a) Rs 15000, Rs 15000 (b) Rs 5000, Rs 25000

**20.** Rs 20160 **21.** A **22.** B

## ਅਭਿਆਸ 3.3

**1.** (i) $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

**4.** $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

**10.** (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

**11.** A **12.** B

## ਅਭਿਆਸ 3.4

**1.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

**4.** $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

**7.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

**10.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **12.** ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**13.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  **14.** ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**15.** $\begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$  **16.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$  **17.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

**18.** D

## *ਅਧਿਆਇ 3 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**6.** $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

**7.** $x$ = ï 1  **9.** $x = \pm 4\sqrt{3}$

**10.** (a) ਬਜ਼ਾਰ -I ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ = Rs 46000

ਬਜ਼ਾਰ-II ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ = Rs 53000

(b) Rs 15000, Rs 17000

**11.** $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  **13.** C  **14.** B  **15.** C

## ਅਭਿਆਸ 4.1

**1.** (i) 18  **2.** (i) 1, (ii) $x^3$ ï $x^2 + 2$

**5.** (i) ï 12, (ii) 46, (iii) 0, (iv) 5  **6.** 0

**7.** (i) $x = \pm\sqrt{3}$, (ii) $x = 2$  **8.** (B)

## ਅਭਿਆਸ 4.2

**15.** C  **16.** C

## ਅਭਿਆਸ 4.3

**1.** (i) $\frac{15}{2}$, (ii) $\frac{47}{2}$, (iii) 15

**3.** (i) 0, 8, (ii) 0, 8  **4.** (i) $y = 2x$, (ii) $x$ ï $3y = 0$  **5.** (D)

## ਅਭਿਆਸ 4.4

**1.** (i) $M_{11} = 3, M_{12} = 0, \quad M_{21} = ï\ 4, M_{22} = 2, A_{11} = 3, A_{12} = 0, A_{21} = 4, A_{22} = 2$

(ii) $M_{11} = d, M_{12} = b, \quad M_{21} = c, \quad M_{22} = a$

$A_{11} = d, \quad A_{12} = ï\ b, A_{21} = ï\ c, \quad A_{22} = a$

**2.** (i) $M_{11} = 1, M_{12} = 0, M_{13} = 0, \quad M_{21} = 0, M_{22} = 1, M_{23} = 0, M_{31} = 0, M_{32} = 0, M_{33} = 1,$

$A_{11} = 1, A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, A_{21} = 0, A_{22} = 1, A_{23} = 0, \quad A_{31} = 0, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = 1$

(ii) $M_{11} = 11, M_{12} = 6, \quad M_{13} = 3, M_{21} = ï\,4, M_{22} = 2, M_{23} = 1, \quad M_{31} = ï\,20, M_{32} = ï\,13, M_{33} = 5$

$A_{11} = 11, \quad A_{12} = ï\ 6, A_{13} = 3, \quad A_{21} = 4, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = ï\,1, A_{31} = ï\,20, A_{32} = 13, A_{33} = 5$

**3.** 7 **4.** $(x\ ï\ y)\ (y\ ï\ z)\ (z\ ï\ x)$ **5.** (D)

## ਅਭਿਆਸ 4.5

**1.** $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

**6.** $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

**9.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & ï\ \cos\alpha \end{bmatrix}$

**13.** $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $a = ï\ 4, b = 1$ **15.** $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

**16.** $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **17.** B **18.** B

## ਅਭਿਆਸ 4.6

1. ਸੰਗਤ
2. ਸੰਗਤ
3. ਅਸੰਗਤ
4. ਸੰਗਤ
5. ਅਸੰਗਤ
6. ਸੰਗਤ
7. $x = 2, y =$ ï 3
8. $x = \frac{-5}{11}, y = \frac{12}{11}$
9. $x = \frac{-6}{11}, y = \frac{-19}{11}$
10. $x =$ ï $1, y = 4$
11. $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{-3}{2}$
12. $x = 2, y =$ ï $1, z = 1$
13. $x = 1, y = 2, z =$ ï 1
14. $x = 2, y = 1, z = 3$
15. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}, x = 1, y = 2, z = 3$
16. ਪਿਆਜ਼ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ kg = Rs 5
    ਕਣਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ kg = Rs 8
    ਚੌਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ kg = Rs 8

## *ਅਧਿਆਇ 4 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

3. 1
5. $x = \frac{-a}{3}$
7. $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
9. ï $2(x^3 + y^3)$
10. $xy$
16. $x = 2, y = 3, z = 5$
17. A
18. A
19. D

## ਅਭਿਆਸ 5.1

2. $f$, $x = 3$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।
3. (a), (b), (c) ਅਤੇ (d) ਸਾਰੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ।
5. $f$, $x = 0$ ਅਤੇ $x = 2$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ $x = 1$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ
6. $x = 2$ 'ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ
7. $x = 3$ 'ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ
8. $x = 0$ 'ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ
9. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ
10. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ
11. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ

**12.** $x = 1$ 'ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ

**13.** $x = 1$ 'ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**14.** $x = 1$ ਅਤੇ $x = 3$ 'ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**15.** ਕੇਵਲ $x = 1$ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

**16.** ਲਗਾਤਾਰ

**17.** $a = b + \frac{2}{3}$

**18.** $\lambda$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $f$, $x = 0$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਪਰੰਤੂ $f$, $\lambda$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $x = 1$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

**20.** $x = \pi$ 'ਤੇ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

**21.** (a), (b) ਅਤੇ (c) ਸਾਰੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ।

**22.** ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ cosine ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ cosecant ਫਲਨ $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ secant ਫਲਨ $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ cotangent ਫਲਨ, $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

**23.** ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**24.** ਹਾਂ, ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

**25.** ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ $f$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

**26.** $k = 6$

**27.** $k = \frac{3}{4}$

**28.** $k = \frac{-2}{\pi}$

**29.** $k = \frac{9}{5}$

**30.** $a = 2, b = 1$

**34.** ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 5.2

**1.** $2x \cos(x^2 + 5)$

**2.** ï $\cos x \sin(\sin x)$

**3.** $a \cos(ax + b)$

**4.** $\dfrac{\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x}).\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

**5.** $a \cos(ax + b) \sec(cx + d) + c \sin(ax + b) \tan(cx + d) \sec(cx + d)$

**6.** $10x^4 \sin x^5 \cos x^5 \cos x^3$ ï $3x^2 \sin x^3 \sin^2 x^5$

**7.** $\dfrac{-2\sqrt{2}\,x}{\sin x^2\sqrt{\sin 2x^2}}$

**8.** $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

## ਅਭਿਆਸ 5.3

**1.** $\dfrac{\cos x - 2}{3}$

**2.** $\dfrac{2}{\cos y - 3}$

**3.** $-\dfrac{a}{2by + \sin y}$

**4.** $\dfrac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$ **5.** $-\dfrac{(2x+y)}{(x+2y)}$ **6.** $-\dfrac{(3x^2+2xy+y^2)}{(x^2+2xy+3y^2)}$

**7.** $\dfrac{y \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$ **8.** $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}$ **9.** $\dfrac{2}{1+x^2}$ **10.** $\dfrac{3}{1+x^2}$

**11.** $\dfrac{2}{1+x^2}$ **12.** $\dfrac{-2}{1+x^2}$ **13.** $\dfrac{-2}{1+x^2}$ **14.** $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

**15.** $-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

## ਅਭਿਆਸ 5.4

**1.** $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}$ **2.** $\dfrac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$

**3.** $3x^2 e^{x^3}$ **4.** $-\dfrac{e^{-x}\cos(\tan^{-1} e^{ï x})}{1+e^{-2x}}$

**5.** ï $e^x \tan e^x,\ e^x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{N}$ **6.** $e^x + 2xe^{x^2} + 3x^2e^{x^3} + 4x^3e^{x^4} + 5x^4e^{x^5}$

**7.** $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}, x > 0$ **8.** $\dfrac{1}{x \log x}, x > 1$

**9.** $-\dfrac{(x \sin x \cdot \log x + \cos x)}{x(\log x)^2}, x > 0$ **10.** $-\left(\dfrac{1}{x} + e^x\right)\sin(\log x + e^x), x > 0$

## ਅਭਿਆਸ 5.5

**1.** ï $\cos x \cos 2x \cos 3x\,[\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x]$

**2.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-5}\right]$

**3.** $(\log x)^{\cos x}\left[\dfrac{\cos x}{x \log x} - \sin x \log(\log x)\right]$

**4.** $x^x(1 + \log x)$ ï $2^{\sin x}\cos x \log 2$

**5.** $(x + 3)(x + 4)^2(x + 5)^3(9x^2 + 70x + 133)$

**6.** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{x}\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]+x^{1+\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1-\log x}{x^2}\right)$

**7.** $(\log x)^{x-1}\,[1+\log x\,.\,\log(\log x)]+2x^{\log x-1}\,.\,\log x$

**8.** $(\sin x)^{x}\,(x\cot x+\log\sin x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

**9.** $x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]+(\sin x)^{\cos x}\,[\cos x\cot x-\sin x\log\sin x]$

**10.** $x^{x\cos x}\,[\cos x\,.\,(1+\log x)-x\sin x\log x]-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$

**11.** $(x\cos x)^{x}\,[1-x\tan x+\log(x\cos x)]+(x\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{x\cot x+1-\log(x\sin x)}{x^2}\right]$

**12.** $-\frac{yx^{y-1}+y^{x}\log y}{x^{y}\log x+xy^{x-1}}$

**13.** $\frac{y}{x}\left(\frac{y-x\log y}{x-y\log x}\right)$

**14.** $\frac{y\tan x+\log\cos y}{x\tan y+\log\cos x}$

**15.** $\frac{y(x-1)}{x(y+1)}$

**16.** $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}\right]$; $f'(1)=120$

**17.** $5x^4-20x^3+45x^2-52x+11$

## ਅਭਿਆਸ 5.6

**1.** $t^2$ **2.** $\frac{b}{a}$ **3.** $-4\sin t$ **4.** $-\frac{1}{t^2}$

**5.** $\frac{\cos\theta-2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta-\sin\theta}$ **6.** $-\cot\frac{\theta}{2}$ **7.** $-\cot 3t$ **8.** $\tan t$

**9.** $\frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$ **10.** $\tan\theta$

## ਅਭਿਆਸ 5.7

**1.** 2 **2.** $380\,x^{18}$ **3.** $-x\cos x-2\sin x$

**4.** $-\frac{1}{x^2}$ **5.** $x(5+6\log x)$ **6.** $2e^{x}(5\cos 5x-12\sin 5x)$

**7.** $9\, e^{6x}$ (3 cos $3x$ ï 4 sin $3x$) **8.** $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

**9.** $-\dfrac{(1+\log x)}{(x\log x)^2}$ **10.** $-\dfrac{\sin(\log x)+\cos(\log x)}{x^2}$

**12.** ï cot $y$ cosec$^2$ $y$

## ਅਧਿਆਇ 5 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

**1.** 27 ($3x^2$ ï $9x + 5)^8$ ($2x$ ï 3) **2.** 3sin$x$ cos$x$ (sin$x$ ï 2 cos$^4 x$)

**3.** $(5x)^{3\cos 2x}\left[\dfrac{3\cos 2x}{x}-6\sin 2x\log 5x\right]$

**4.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}$ **5.** $-\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}\,\sqrt{2x+7}}+\dfrac{\cos^{-1}\dfrac{x}{2}}{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}\right]$

**6.** $\dfrac{1}{2}$ **7.** $(\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{\log(\log x)}{x}\right], x>1$

**8.** ($a$ sin $x$ ï $b$ cos $x$) sin ($a$ cos $x$ + $b$ sin $x$)

**9.** (sin$x$ ï cos$x$)$^{\sin x \text{ ï } \cos x}$ (cos$x$ + sin$x$) (1 + log (sin$x$ ï cos $x$)), sin$x$ > cos$x$

**10.** $x^x$ (1 + log $x$) + $ax^{a\text{ï}1}$ + $a^x$ log $a$

**11.** $x^{x^2-3}\left[\dfrac{x^2-3}{x}+2x\log x\right]+(x-3)^{x^2}\left[\dfrac{x^2}{x-3}+2x\log(x-3)\right]$

**12.** $\dfrac{6}{5}\cot\dfrac{t}{2}$ **13.** 0 **17.** $\dfrac{\sec^3 t}{at}, 0<t<\dfrac{\pi}{2}$

## ਅਭਿਆਸ 6.1

**1.** (a) $6\pi$ cm$^2$/cm (b) $8\pi$ cm$^2$/cm

**2.** $\dfrac{8}{3}$ cm$^2$/s **3.** $60\pi$ cm$^2$/s **4.** 900 cm$^3$/s

**5.** $80\pi$ cm$^2$/s **6.** $1.4\pi$ cm/s

**7.** (a) ï2 cm/min (b) 2 cm$^2$/min

**8.** $\dfrac{1}{\pi}$ cm/s **9.** $400\pi$ cm$^3$/cm **10.** $\dfrac{8}{3}$ cm/s

**11.** (4, 11) and $\left(-4, \dfrac{-31}{3}\right)$ **12.** $2\pi$ cm$^3$/s

**13.** $\dfrac{27}{8}\pi(2x+1)^2$ **14.** $\dfrac{1}{48\pi}$ cm/s **15.** Rs 20.967

**16.** Rs 208 **17.** B **18.** D

## ਅਭਿਆਸ 6.2

**4.** (a) $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ (b) $\left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right)$

**5.** (a) $(-\infty, -2)$ and $(3, \infty)$ (b) $(-2, 3)$

**6.** (a) $x < -1$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਅਤੇ $x > -1$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ

(b) $x > -\dfrac{3}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਅਤੇ $x < -\dfrac{3}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ

(c) $-2 < x < -1$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਅਤੇ $x < -2$ ਅਤੇ $x > -1$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

(d) $x < -\dfrac{9}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਅਤੇ $x > -\dfrac{9}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

(e) $(1, 3)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$, ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਅਤੇ $(-\infty, -1)$ ਅਤੇ $(-1, 1)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

**8.** $0 < x < 1$ ਅਤੇ $x > 2$ **12.** A, B

**13.** D **14.** $a = -2$ **19.** D

## ਅਭਿਆਸ 6.2

**1.** 764 **2.** $\dfrac{-1}{64}$ **3.** 11 **4.** 24

**5.** 1 **6.** $\dfrac{-a}{2b}$ **7.** $(3, -20)$ ਅਤੇ $(-1, 12)$

**8.** (3, 1) **9.** $(2, -9)$

**10.** (i) $y + x + 1 = 0$ ਅਤੇ $y + x - 3 = 0$

**11.** ਵਕਰ 'ਤੇ ਕੋਈ ਅਜਿਹੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਹੀਂ ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਨ 2 ਹੋਵੇ।

**12.** $y = \dfrac{1}{2}$ **13.** (i) $(0, \pm 4)$ (ii) $(\pm 3, 0)$

**14.** (i) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ : $10x + y = 5$; ਅਭਿਲੰਬ : $x - 10y + 50 = 0$

(ii) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ : $y = 2x + 1$; ਅਭਿਲੰਬ : $x + 2y - 7 = 0$

(iii) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ : $y = 3x - 2$; ਅਭਿਲੰਬ : $x + 3y - 4 = 0$

(iv) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ : $y = 0$; ਅਭਿਲੰਬ : $x = 0$

(v) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ : $x + y - \sqrt{2} = 0$; ਅਭਿਲੰਬ $x = y$

**15.** (a) $y - 2x - 3 = 0$ (b) $36y + 12x - 227 = 0$

**17.** (0, 0), (3, 27) **18.** (0, 0), (1, 2), (−1, −2)

**19.** $(1, \pm 2)$ **20.** $2x + 3my - am^2(2 + 3m^2) = 0$

**21.** $x + 14y - 254 = 0$, $x + 14y + 86 = 0$

**22.** $ty = x + at^2$, $y = -tx + 2at + at^3$

**24.** $\dfrac{x x_0}{a^2} - \dfrac{y y_0}{b^2} = 1$, $\dfrac{y - y_0}{a^2 y_0} + \dfrac{x - x_0}{b^2 x_0} = 0$

**25.** $48x - 24y = 23$ **26.** D **27.** A

## ਅਭਿਆਸ 6.4

**1.** (i) 5.03 (ii) 7.035 (iii) 0.8
(iv) 0.208 (v) 0.9999 (vi) 1.96875
(vii) 2.9629 (viii) 3.9961 (ix) 3.009
(x) 20.025 (xi) 0.06083 (xii) 2.984
(xiii) 3.0046 (xiv) 7.904 (xv) 2.00187

**2.** 28.21 **3.** −34.995 **4.** $0.03\, x^3$ m$^3$

**5.** $0.12\, x^2$ m$^2$ **6.** $3.92\,\pi$ m$^3$ **7.** $2.16\,\pi$ m$^2$

**8.** D **9.** C

## ਅਭਿਆਸ 6.5

**1.** (i) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = 3 (ii) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = −2
(iii) ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 10 (iv) ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ

**2.** (i) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = −1; ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ
(ii) ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 3; ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ
(iii) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = 4; ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 6

(iv) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = 2; ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 4

(v) ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ

**3.** (i) $x = 0$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, = 0

(ii) $x = 1$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, = ï 2

$x =$ ï 1 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, = 2

(iii) $x = \frac{\pi}{4}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, = $\sqrt{2}$

(iv) $x = \frac{3\pi}{4}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, = $\sqrt{2}$

$x = \frac{7\pi}{4}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, = ï $\sqrt{2}$

(v) $x = 1$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, = 19

$x = 3$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, = 15

(vi) $x = 2$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, = 2

(vii) $x = 0$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = $\frac{1}{2}$

(viii) $x = \frac{2}{3}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

**5.** (i) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = ï 8, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 8

(ii) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = ï 1, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = $\sqrt{2}$

(iii) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = ï 10, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 8

(iv) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = 3, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 19

**6.** ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ = 113 ਇਕਾਈ

**7.** $x = 2$ 'ਤੇ ਨਿਊਨਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = ï 39, $x = 0$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 25.

**8.** $x = \frac{\pi}{4}$ ਅਤੇ $\frac{5\pi}{4}$ 'ਤੇ

**9.** ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = $\sqrt{2}$

**10.** $x = 3$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 89; $x =$ ï 2 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 139

**11.** $a = 120$

**12.** $x = 2\pi$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = $2\pi$; $x = 0$ 'ਤੇ ਨਿਊਨਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = 0

**13.** 12, 12 **14.** 45, 15 **15.** 25, 10 **16.** 8, 8

**17.** 3 cm **18.** $x = 5$ cm

**21.** ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm ਅਤੇ ਉਚਾਈ $= 2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm

**22.** $\frac{112}{\pi+4}$ cm, $\frac{28\pi}{\pi+4}$ cm **27.** A **28.** D **29.** C

## ਅਧਿਆਇ 6 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

**1.** (a) 0.677 (b) 0.497

**3.** $b\sqrt{3}$ cm²/s **4.** $x + y$ ï $3 = 0$

**6.** (i) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ ਅਤੇ $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

**7.** (i) $x <$ ï $1$ ਅਤੇ $x > 1$ (ii) ï $1 < x < 1$

**8.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ **9.** Rs 1000

**11.** ਲੰਬਾਈ $= \frac{20}{\pi+4}$ m, ਚੌੜਾਈ $= \frac{10}{\pi+4}$ m

**13.** (i) $x = \frac{2}{7}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ii) $x = 2$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ

(iii) $x =$ ï $1$ 'ਤੇ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ

**14.** ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \frac{5}{4}$, ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 1$

**17.** $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ **19.** A **20.** B **21.** A

**22.** B **23.** A **24.** A

# ਪੂਰਕ ਪਾਠ ਸਮੱਗਰੀ

## ਅਭਿਆਸ 5

### ਪ੍ਰਮੇਯ 5 (ਪੰਨਾ 190 'ਤੇ ਸਿਰਲੇਖ "ਪ੍ਰਮੇਯ" ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੈ)

**(i) ਚਲ ਘਾਤੀ ਫਲਨ $f(x) = e^x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ**

ਜੇਕਰ $f(x) = e^x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot 1 \quad [\text{ਕਿਉਂਕਿ } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1]$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ਹੈ।

**(ii) ਲਘੂਗਣਕੀ ਫਲਨ $f(x) = \log_e x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ**

ਜੇਕਰ $f(x) = \log_e x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e(x+\Delta x) - \log_e x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \quad \left[\text{ਕਿਉਂਕਿ } \lim_{h \to 0} \frac{\log_e(1+h)}{h} = 1\right]$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$ ਹੈ।

# ਗਣਿਤ

*(ਬਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)*

*ਭਾਗ -2*

## ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ 2017 .................. ਕਾਪੀਆਂ



ਸੰਯੋਜਕ : ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ
ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚਿੱਤਰਕਾਰ : ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ (ਆਰਟਿਸਟ)
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਅਨੁਵਾਦਕ
* ਸ਼੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ ਗੌ. ਸੀ. ਸੈ. ਸ. ਪਾਸੀ ਰੋਡ, ਪਟਿਆਲਾ।
* ਸ਼੍ਰੀ ਨੀਰਜ ਸ਼ਰਮਾ, ਸੀ. ਸੈ. ਸ. ਮਹਿੰਦਰਗੰਜ ਰਾਜਪੁਰਾ ਪਟਿਆਲਾ।
* ਸ਼੍ਰੀ ਹਰਪ੍ਰੀਤ ਸਿੰਘ, ਧਨਾਲ ਕਲਾਂ ਬਲਾਕ ਪੂਰਬੀ–3 ਜਲੰਧਰ।
* ਸ਼੍ਰੀਮਤੀ ਬਬੀਤਾ ਭੰਡਾਰੀ, ਸੀ. ਸੈ. ਸ. ਸਹੌੜਾ, ਐਸ. ਏ. ਐਸ. ਨਗਰ।

## ਚੇਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ–ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ਼ ਪਾਠ–ਪੁਸਤਕਾਂ ’ਤੇ ਜਿਲਦ–ਸਾਜ਼ੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ–ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ਼ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ. 7 ਅਨੁਸਾਰ)
2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਵਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ–ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਲ੍ਹੀ/ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ–ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫ਼ੌਜਦਾਰੀ ਜੁਰਮ ਹੈ।

   (ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੀਆਂ ਪਾਠ–ਪੁਸਤਕਾਂ ਬੋਰਡ ਦੇ ‘ਵਾਟਰ ਮਾਰਕ’ ਵਾਲ਼ੇ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਪਰ ਹੀ ਛਪਵਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

1¾ñ : ₹

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼–8, ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ–160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ. ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

# ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਤਾਂ ਪ੍ਰਫੁੱਲਿਤ ਹੋਵੇਗੀ ਹੀ ਸਗੋਂ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ (ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ.) ਵੱਲੋਂ ਬਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਦਮ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇਕਸਾਰਤਾ ਲਿਆਉਣ ਲਈ ਚੁੱਕਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਪੱਧਰ ਦੇ ਇਮਤਿਹਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਔਕੜ ਨਾ ਆਵੇ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਮੈਨ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

# NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਪ੍ਰਧਾਨ, ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸਲਾਹਕਾਰ ਕਮੇਟੀ

ਜੇ. ਵੀ. ਨਾਰਲੀਕਾਰ, ਇਮੇਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਅੰਤਰ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ ਕੇਂਦਰ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਖਗੋਲ ਭੌਤਿਕੀ, (IUCCA), ਗਣੇਸ਼ ਖੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ।

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ. ਕੇ. ਜੈਨ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਦਿੱਲੀ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਦਿੱਲੀ।

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕਮ ਸਿੰਘ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

ਮੈਂਬਰ

- ਆਸ਼ੂਤੋਸ਼ ਕੇ. ਵਲਝਵਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਏ. ਕੇ. ਰਾਜਪੂਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਉਦੈ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਐਸ. ਕੇ. ਐਸ. ਗੌਤਮ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਐਮ. ਬੀ. ਤ੍ਰਿਪਾਠੀ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਰਾਜ ਪ੍ਰਤਿਭਾ ਵਿਕਾਸ ਵਿਦਿਯਾਲਯ, ਸੂਰਜਮਲ ਬਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ।
- ਪ੍ਰਦਿੱਤੋ ਹਰੇ, ਵਰਿਸ਼ਟ ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਸਰਲਾ ਬਿੜ੍ਹਲਾ ਅਕੈਡਮੀ ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
- ਬੀ. ਐੱਸ. ਪੀ. ਰਾਜੂ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਸੰਜੇ ਕੁਮਾਰ ਸਿੰਹਾ, ਪੀ. ਜੀ. ਟੀ., ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਸਕੂਲ, ਚਾਣਕਯਪੁਰੀ ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਸੰਜੇ ਮੁਦਗਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ. ਆਈ. ਈ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਸੀ. ਆਰ. ਪ੍ਰਦੀਪ, ਸਹਾਇਕ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਵਿਭਾਗ, ਭਾਰਤੀ ਵਿਗਿਆਨ ਸੰਸਥਾਨ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
- ਸੁਜਾਤਾ ਵਰਮਾ, ਰੀਡਰ, ਇ. ਗਾ. ਮੁ. ਵਿ. ਵਿ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
- ਸਨੇਹਾ ਟਾਇਟਸ, ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਆਦਿਤੀ ਮਾਲਯਾ ਸਕੂਲ ਇਲਹਾਰਿਕਾ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

- ਬੀ. ਪੀ. ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

# PSEB ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਸੋਧ ਕਮੇਟੀ

ਮੈਂਬਰ

— ਸ. ਅਵਤਾਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਕੰਨਿਆ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਖੰਨਾ ਰੋਡ, ਸਮਰਾਲਾ, (ਲੁਧਿਆਣਾ)।

— ਸ੍ਰੀ ਆਰ. ਕੇ. ਗੋਇਲ, ਰਿਟਾਇਰਡ (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਾਹਮਣੇ ਮਨਸਾ ਦੇਵੀ ਮੰਦਿਰ, ਚੱਕਰੀਆਂ ਰੋਡ, ਮਾਨਸਾ।

— ਸ੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਗੌਰਮਿੰਟ ਮਲਟੀਪਰਪਜ਼ ਸਕੂਲ ਪਾਸੀ ਰੋਡ, ਪਟਿਆਲਾ।

— ਸ. ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ (ਲੜਕੇ) ਅਬੋਹਰ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।

— ਸ੍ਰੀ ਨੀਰਜ ਸ਼ਰਮਾ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਮਹਿੰਦਰਗੰਜ ਰਾਜਪੁਰਾ, ਪਟਿਆਲਾ।

— ਸ. ਵਿਕਰਮ ਸੇਠੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਕਰਨੀਖੇੜਾ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।

— ਸ੍ਰੀਮਤੀ ਬੰਬੀਤਾ ਭੰਡਾਰੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਸਹੌੜਾ, ਐੱਸ. ਏ. ਐੱਸ. ਨਗਰ।

# ਵਿਸ਼ਾ ਸੂਚੀ

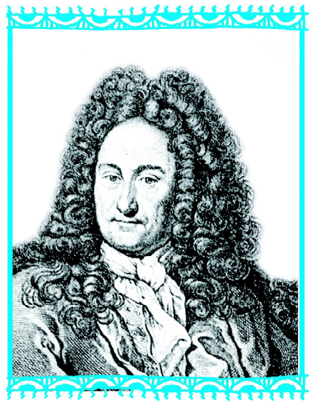
ਅਧਿਆਇ **7**

# ਇਨਟਿਗਰਲ Integrals

❖ *Just as a mountaineer climbs a mountain – because it is there, so a good mathematics student studies new material because it is there. – JAMES B. BRISTOL* ❖

## 7.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਕਲਨ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਤੇ ਕੇਂਦਰਤ ਹੈ।ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਢਲਾਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲ ਪ੍ਰੇਰਣਾ ਸੀ। ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ, ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨਾਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਹੈ।



G .W. Leibnitz
(1646–1716)

ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ $f$ ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ ਅਰਥਾਤ I ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $f'$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਤਾਂ ਇੱਕ ਕੁਦਰਤੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕਿ I ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਅਸੀਂ ਫਲਨ $f$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਉਹ ਸਾਰੇ ਫਲਨ ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਉਸ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ।ਅੱਗੇ, ਉਹ ਸੂਤਰ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਕਿਰਿਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਬਹੁਤ ਅਮਲੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੀ ਹੈ।ਉਦਾਹਰਨ ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਪਲ ਉਸ ਵਸਤੂ ਦਾ ਤਤਕਾਲੀ ਵੇਗ ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੁਦਰਤੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕੀ ਅਸੀਂ ਉਸ ਪਲ ਤੇ ਉਸ ਵਸਤੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਅਮਲੀ ਅਤੇ ਗੈਰ ਅਮਲੀ ਹਲਾਤ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਰਗੀਆਂ ਮੁਸ਼ਕਿਲਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਯਤਨਾਂ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਹੈ।

(a) ਜਦੋਂ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ,

(b) ਦਿੱਤੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫਲਨ ਦੇ ਗਰਾਫ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਦੋ ਰੂਪਾਂ ਵੱਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ।ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠਾ ਰੂਪ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਮੱਧ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਅਮਲੀ ਔਜ਼ਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਵਿੱਤ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਿਕਤਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦਿਲਚਸਪ ਮੁਸ਼ਕਿਲਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਅਨੰਤ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਮੁੱਢਲੇ ਗੁਣਾਂ ਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਤਕਨੀਕਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਾਂਗੇ।

## 7.2 ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੇ ਉਲਟ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ (Integration as the Inverse Process of Differentiation)

ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮੂਲ ਅਰਥਾਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਜਾਂ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \ldots (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \quad \ldots (2)$$

ਅਤੇ
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \ldots (3)$$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨ (1) ਵਿੱਚ ਫਲਨ $\cos x$ ਫਲਨ $\sin x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\cos x$ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ) $\sin x$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (2) ਅਤੇ (3) ਨਾਲ $x^2$ ਅਤੇ $e^x$ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{x^3}{3}$ ਅਤੇ $e^x$ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ C] ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਚਲ ਫਲਨ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਿਫਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \mathrm{C}) = \cos x\,,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + \mathrm{C}\right) = x^2 \text{ ਅਤੇ } \frac{d}{dx}(e^x + \mathrm{C}) = e^x$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਐਂਟੀ-ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿਲੱਖਣ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਐਂਟੀ-ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਅਚਲ C ਨੂੰ ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਚੁਣ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹੀ ਕਾਰਨ ਹੈ ਕਿ C ਨੂੰ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ C ਇੱਕ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ

ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ F ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$, ਸਾਰੇ $x \in \mathrm{I}$ (ਅੰਤਰਾਲ) ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ C, (ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ) ਦੇ ਲਈ $\frac{d}{dx}\left[\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}\right] = f(x)$, $x \in \mathrm{I}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\{\mathrm{F} + \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbf{R}\}$, $f$ ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ C ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਇੱਕੋ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵਾਲੇ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਚਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਓ $g$ ਅਤੇ $h$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਫਲਨ ਹਨ ਜਿਸਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

$f(x) = g(x)$ ï $h(x)$, $\forall x \in \mathrm{I}$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f = g$ ï $h$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਤਾਂ $\frac{df}{dx} = f' = g'$ ï $h'$ ਨਾਲ $f'(x) = g'(x)$ ï $h'(x)$ $\forall x \in \mathrm{I}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਜਾਂ $f'(x) = 0$, ਸਾਰੇ $\forall x \in \mathrm{I}$ ਲਈ (ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਨਾਲ)

ਜਾਂ I ਵਿੱਚ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ $f$ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਸਿਫਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f$ ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਟਿੱਪਣੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਣਾ ਜਾਇਜ਼ ਹੈ ਕਿ ਪਰਿਵਾਰ $\{\mathrm{F} + \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbf{R}\}$, $f$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਸੰਕੇਤ, $\int f(x)\, dx$ ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦੇ ਪੂਰੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਏਗਾ। ਜਿਸ ਨੂੰ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿੱਚ $f$ ਦੇ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\int f(x)\, dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਸੰਕੇਤਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = f(x)$, ਤਾਂ ਅਸੀਂ $y = \int f(x)\, dx$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਸੌਖਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਸੰਕੇਤਾਂ@ਪਦਾਂ ਵਾਕਾਂਸ ਦਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥਾਂ ਸਮੇਤ ਸਾਰਣੀ 7.1 ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਕਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

**ਸਾਰਣੀ 7.1**

| ਸੰਕੇਤ@ਪਦ@ਵਾਕਾਂਸ਼ | ਅਰਥ |
|---|---|
| $\int f(x)\, dx$ | $f$ ਦਾ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਇਨਟਿਗਰਲ |
| $\int f(x)\, dx$ ਵਿੱਚ $f(x)$ | ਇਨਟੈਗਰੈਂਡ |

| $\int f(x)\,dx$ ਵਿੱਚ $x$ | ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਚਲ |
|---|---|
| ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਕਰਨਾ | ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ |
| $f$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ | ਇੱਕ ਫਲਨ F ਜਿਸਦੇ ਲਈ $F'(x) = f(x)$ |
| ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ | ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ |
| ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਅਚਲ | ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਚਲ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। |

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦੇ ਸੂਤਰ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਤੁਰੰਤ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਅਸੀਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।

ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ **Derivatives**

ਇਨਟਿਗਰਲ (ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ) **Integrals (Antiderivatives)**

(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ $\qquad$ $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ

$\frac{d}{dx}(x) = 1$ $\qquad$ $\int dx = x + C$

(ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(iii) $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ $\qquad$ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(iv) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ $\qquad$ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(v) $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \text{cosec}^2 x$ $\qquad$ $\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

(vi) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ $\qquad$ $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

(vii) $\frac{d}{dx}(-\text{cosec}\, x) = \text{cosec}\, x \cot x$ $\qquad$ $\int \text{cosec}\, x \cot x\,dx = -\text{cosec}\, x + C$

(viii) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(ix) $\frac{d}{dx}\left(-\cos^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

(x) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\frac{d}{dx}\left(-\cot^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$

(xii) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

(xiii) $\frac{d}{dx}\left(-\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1} x + C$

(xiv) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ $\qquad$ $\int e^x\, dx = e^x + C$

(xv) $\frac{d}{dx}\left(\log|x|\right) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$

(xvi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$ $\qquad$ $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

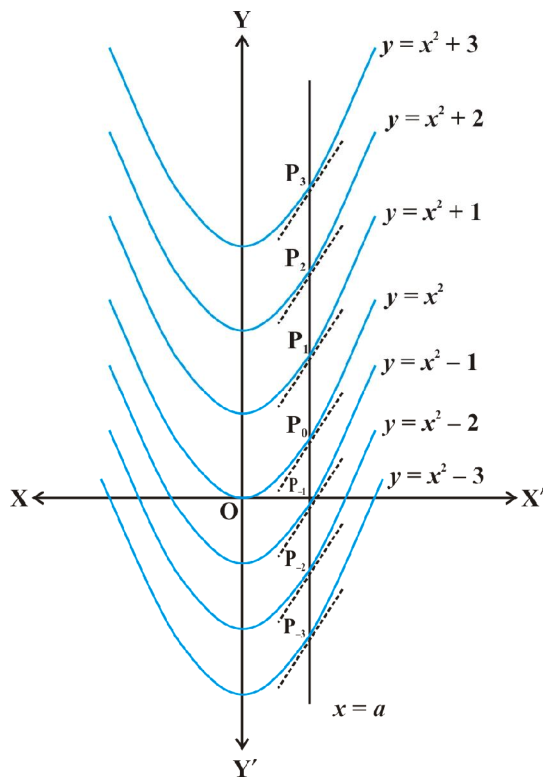
**ਟਿੱਪਣੀ** ਅਮਲੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਉਸ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਵੱਖ ਫਲਨ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਖਾਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਵੀ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

### 7.2.1 *ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਜਿਆਮਿਤਕ ਵਿਆਖਿਆ (Geometrical interpretation of indefinite integral)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = 2x$ ਤਾਂ $\int f(x)\, dx = x^2 + C$ ਅਤੇ C ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਭਿੰਨ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਸਾਰੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਜਿਆਮਤਿਕ ਤੌਰ ਤੇ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $y = x^2 + C$, ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ, ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। C, ਨੂੰ

ਵਿਭਿੰਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।ਇਹ ਸਭ ਦਾ ਸਥਾਪਿਤ ਰੂਪ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਹੈ।ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਧੁਰਾ $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਹੈ।

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $C = 0$ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ $y = x^2$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਸਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ। $C = 1$ ਦੇ ਲਈ, ਵਕਰ $y = x^2 + 1$ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। C = ï 1, ਦੇ ਲਈ ਵਕਰ $y = x^2$ ï 1 ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ C, ਦੇ ਹਰੇਕ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਲਈ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਿਖਰ $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਹੈ ਅਤੇ C ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਿਖਰ $y$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਹੈ।ਇਹਨਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 7.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 7.1

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਰੇਖਾ $x = a$ ਨਾਲ ਕੱਟਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।ਚਿੱਤਰ 7.1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $a > 0$ ਲਿਆ ਹੈ।ਇਹ ਸਿੱਟਾ $a < 0$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਜਦੋਂਕਿ ਰੇਖਾ $x = a$ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2$ ï 1, $y = x^2$ ï 2 ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_{ï1}$, $P_{ï2}$ ਆਦਿ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮੁੱਲ $2a$ ਹੈ।ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int 2x\,dx = x^2 + C = F_C(x)$ (ਮੰਨ ਲਓ) ਨਾਲ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਕਰਾਂ $y = F_C(x)$, $C \in \mathbf{R}$, ਦੇ ਰੇਖਾ $x = a$, ਨਾਲ ਕੱਟਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਇੱਥੇ $a \in \mathbf{R}$ ਇਸ ਤੋਂ ਉਪਰੰਤ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ $\int f(x)\,dx = F(x) + C = y$ (ਮੰਨ ਲਓ) ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। C ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਮੈਂਬਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਵਕਰ ਨੂੰ

ਆਪਣੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਬਦੀਲ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਇਹੀ ਜਿਆਮਿਤਕ ਵਿਆਖਿਆ ਹੈ।

### 7.2.2 *ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Some properties of indefinite integrals)*

ਇਸ ਉਪਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉਲਟ ਹਨ।

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

ਅਤੇ $\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathrm{C}$, ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ।

**ਪ੍ਰਮਾਣ** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ F] $f$ ਦਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ ਅਰਥਾਤ

$$\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$$

ਤਾਂ $$\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੈ ਕਿ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $$\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathrm{C}$$

ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਦੋ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਮਤੁੱਲ ਹਨ।

**ਪ੍ਰਮਾਣ** ਮੰਨ ਲਉ $f$ ਅਤੇ $g$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\right] = 0$$

ਜਾਂ $\int f(x)\,dx - \int g\,(x)\,dx = \text{C}$ , ਜਿੱਥੇ C ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $\int f(x)\,dx = \int g\,(x)\,dx + \text{C}$

ਇਸ ਲਈ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ $\left\{\int f(x)\,dx + \text{C}_1, \text{C}_1 \in \mathbf{R}\right\}$

ਜਾਂ $\left\{\int g(x)\,dx + \text{C}_2, \text{C}_2 \in \mathbf{R}\right\}$ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int f(x)\,dx$ ਅਤੇ $\int g(x)\,dx$ ਸਮਤੁੱਲ ਹਨ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਦੋ ਪਰਿਵਾਰਾਂ $\left\{\int f(x)\,dx + \text{C}_1,\text{C}_1 \in \mathbf{R}\right\}$ ਅਤੇ $\left\{\int g(x)\,dx + \text{C}_2,\text{C}_2 \in \mathbf{R}\right\}$ ਦੀ ਸਮਤੁਲਨਾ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$ , ਲਿਖ ਕੇ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਦਾ ਕੋਈ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

**ਪ੍ਰਮਾਣ** ਗੁਣ (i) ਨਾਲ

$$\frac{d}{dx}\left[\int [f(x) + g(x)]\,dx\right] = f(x) + g(x) \qquad \ldots (1)$$

ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = f(x) + g(x) \qquad \ldots (2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣ (ii) ਦੀ ਰੋਸ਼ਨੀ ਵਿੱਚ (1) ਅਤੇ (2) ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(iv) ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $k$, ਦੇ ਲਈ $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

**ਪ੍ਰਮਾਣ** : ਗੁਣ (i) ਨਾਲ $\frac{d}{dx}\int k\,f(x)\,dx = k\,f(x)$

ਅਤੇ $\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)\,dx\right] = k\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = k\,f(x)$

ਇਸ ਲਈ ਗੁਣ (ii) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(v) ਗੁਣ (iii) ਅਤੇ (iv) ਦਾ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸੀਮਿਤ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $k_1$, $k_2, \ldots, k_n$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$$\int\left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2\,(x) + \ldots + k_n f_n\,(x)\right] dx$$

$$= k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2\,(x)\,dx + \ldots + k_n\int f_n(x)\,dx$$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਲੱਭਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ। ਲੋੜੀਂਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਖੋਜ, ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਨਿਰੀਖਣ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਰਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੋਂ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

**ਉਦਾਹਰਣ 1.** ਨਿਰੀਖਣ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\cos 2x$ (ii) $3x^2 + 4x^3$ (iii) $\dfrac{1}{x}, x \neq 0$

**ਹੱਲ :**

(i) ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਖੋਜ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\cos 2x$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\dfrac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$

ਜਾਂ $\cos 2x = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(\sin 2x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$

ਇਸ ਲਈ $\cos 2x$ ਦਾ ਇੱਕ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\dfrac{1}{2}\sin 2x$ ਹੈ।

(ii) ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਖੋਜ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $3x^2 + 4x^3$ ਹੈ।

ਹੁਣ $\dfrac{d}{dx}\left(x^3 + x^4\right) = 3x^2 + 4x^3$

ਇਸ ਲਈ $3x^2 + 4x^3$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $x^3 + x^4$ ਹੈ।

(iii) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}, x > 0$ ਅਤੇ $\dfrac{d}{dx}[\log(-x)] = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}, x < 0$

ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। $\dfrac{d}{dx}\left(\log|x|\right) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$

ਇਸ ਲਈ $\int\dfrac{1}{x}dx = \log|x|$, ਜੋ ਕਿ $\dfrac{1}{x}$ ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 2.** ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int\dfrac{x^3-1}{x^2}dx$ (ii) $\int(x^{\frac{2}{3}}+1)\,dx$ (iii) $\int(x^{\frac{2}{3}} + 2\,e^x$ ï $\dfrac{1}{x})\,dx$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੈ :

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx = \int x\,dx - \int x^{-2}\,dx \qquad \text{(ਗੁਣਾ v ਨਾਲ)}$$

$$= \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}+C_1\right)-\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C_2\right);\ C_1, C_2 \text{ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੇ ਅਚਲ ਹਨ।}$$

$$= \frac{x^2}{2}+C_1-\frac{x^{-1}}{-1}-C_2$$

$$= \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C_1-C_2$$

$$= \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C, \text{ ਇੱਥੇ } C = C_1 \text{ ï } C_2 \text{ ਇੱਕ ਹੋਰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਚਲ ਹੈ।}$$

**ਟਿੱਪਣੀ** ਇਸਦੇ ਅੱਗੇ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਆਖਰੀ ਉੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਅਚਲ ਲਿਖਾਂਗੇ।

(ii) ਇੱਥੇ

$$\int (x^{\frac{2}{3}}+1)\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+x+C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+x+C$$

(iii) ਇੱਥੇ $\int (x^{\frac{3}{2}}+2e^x-\frac{1}{x})\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int 2e^x\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+2e^x \text{ ï } \log|x|+C$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2e^x \text{ ï } \log|x|+C$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ (ii) $\int \operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx$

(iii) $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ

$$\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx$$

$$= \text{ï}\ \cos x + \sin x + C$$

(ii) ਇੱਥੇ

$$\int (\operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$$

$$= \text{ï}\ \cot x - \operatorname{cosec} x + C$$

(iii) ਇੱਥੇ

$$\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. $f(x) = 4x^3$ ï 6 ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ F(0) = 3 ਹੈ।

ਹੱਲ : $f(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $x^4$ ï $6x$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $\frac{d}{dx}(x^4 - 6x) = 4x^3$ ï 6, ਇਸ ਲਈ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F,

$F(x) = x^4$ ï $6x + C$, ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇੱਥੇ C ਅਚਲ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $F(0) = 3$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ 3 = 0 ï $6 \times 0 + C$

ਜਾਂ $C = 3$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $F(x) = x^4$ ï $6x + 3$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਫਲਨ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :*

(i) ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕਿ $f$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ ਤਾਂ F + C, ਜਿੱਥੇ C ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ, ਵੀ $f$ ਦਾ ਇੱਕ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਇੱਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਪਤਾ

ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ F ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਅਚਲ ਜੋੜ ਕੇ $f$ ਦੇ ਅਨੰਤ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ $F(x) + C, C \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵਿਹਾਰਕ ਵਰਤੋਂ ਵਿੱਚ, ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸ਼ਰਤ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ C ਦਾ ਇੱਕ ਖਾਸ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਕਦੇ&ਕਦੇ F ਨੂੰ ਅਧਾਰੀ ਫਲਨਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਬਹੁਪਦ, ਲਘੂਗਣਕ, ਚਲ ਘਾਤ ਫਲਨ, ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਆਦਿ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\int f(x)\, dx$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਔਖਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ : ਨਿਰੀਖਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $\int e^{-x^2} dx$ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਨਿਰੀਖਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਉਸ ਫਲਨ ਦਾ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $e^{-x^2}$ ਹੈ।

(iii) ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਚਲ $x$, ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਉਸ ਹਿਸਾਬ ਨਾਲ ਨਵੀਨੀਕਰਨ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ :

$$\int y^4\, dy = \frac{y^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5} y^5 + C$$

### 7.2.3 *ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ* (*Comparision between differentiation and integration*)

1. ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਤੇ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ।
2. ਦੋਵੇਂ ਰੈਖਿਕਤਾ ਗੁਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਰਥਾਤ

   (i) $$\frac{d}{dx}\left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\right] = k_1 \frac{d}{dx} f_1(x) + k_2 \frac{d}{dx} f_2(x)$$

   (ii) $$\int \left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\right] dx = k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx$$

   ਇੱਥੇ $k_1, k_2$ ਅਚਲ ਹਨ।
3. ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਫਲਨ ਡਿਫਰੈਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਠੀਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰੇ ਫਲਨ ਇਨਟਿਗਰੇਬਲ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।ਅਸੀਂ ਨਾਨ ਡਿਫਰੈਸ਼ੀਏਬਲ ਅਤੇ ਨਾਨ ਇਨਟਿਗਰੇਬਲ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਉੱਚ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।
4. ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਉਹ ਕਿਸੇ ਜੋੜਨ ਅਚਲ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।ਅਰਥਾਤ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਦੋ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਵਿੱਚ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਅਚਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨ P ਦਾ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਹੁਪਦ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਘਾਤ ਬਹੁਪਦ P ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਇੱਕ ਘੱਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨ P ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਹੁਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਘਾਤ

ਬਹੁਪਦ P ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

6. ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਚਰਚਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਪਰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਦੇ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਉਸ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਭਾਗ 7.7 ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।
7. ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਜ਼ਿਆਮਿਤਕ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਬਾਰਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ, ਜਿਆਮਿਤਕ ਤੌਰ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਕਰਾਂ, ਚਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਧੁਰੇ ਦੇ, ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕੱਟਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ, ਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ।
8. ਕੁੱਝ ਭੌਤਿਕ ਪਰਿਮਾਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਦਾਹਰਨ : ਕਿਸੇ ਕਣ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੇਂ $t$ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਜਦੋਂ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ $t$ ਤੇ ਜਦੋਂ ਵੇਗ ਪਤਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
9. ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾ ਦਾ ਭਾਵ ਜੁੜਿਆ ਹੈ ਠੀਕ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਭਾਵ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਜੁੜਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਭਾਗ 7.7 ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।
10. ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉਲਟ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਪਭਾਗ 7.2.2 (i) ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਚੁੱਕੀ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 7.1

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਇਨਟਿਗਰਲ) ਨਿਰੀਖਣ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\sin 2x$ **2.** $\cos 3x$ **3.** $e^{2x}$

**4.** $(ax + b)^2$ **5.** $\sin 2x$ ï $4\,e^{3x}$

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**6.** $\int (4\,e^{3x} + 1)\,dx$ **7.** $\int x^2 (1$ ï $\frac{1}{x^2})\,dx$ **8.** $\int (ax^2 + bx + c)\,dx$

**9.** $\int (2x^2 + e^x)\,dx$ **10.** $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **11.** $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\,dx$

**12.** $\int \frac{x^3 + 3x + 4}{\sqrt{x}}\,dx$ **13.** $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}\,dx$ **14.** $\int (1 - x)\sqrt{x}\,dx$

**15.** $\int \sqrt{x}\,(3x^2 + 2x + 3)\,dx$ **16.** $\int (2x - 3\cos x + e^x)\,dx$

**17.** $\int (2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\, dx$

**18.** $\int \sec x\,(\sec x + \tan x)\, dx$

**19.** $\int \frac{\sec^2 x}{\text{cosec}^2 x}\, dx$

**20.** $\int \frac{2 ï\ 3\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 21 ਅਤੇ 22 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦਾ ਚੋਣ ਕਰੋ :

**21.** $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ।

(A) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

(B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^2 + C$

(C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

(D) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

**22.** ਜਦੋਂ ਕਿ $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(2) = 0$ ਤਾਂ $f(x)$ ਹੈ :

(A) $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$

(B) $x^3 + \frac{1}{x^4} + \frac{129}{8}$

(C) $x^4 + \frac{1}{x^3} + \frac{129}{8}$

(D) $x^3 + \frac{1}{x^4} - \frac{129}{8}$

## 7.3 ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ (Methods of Integration)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ, ਜੋ ਕੁੱਝ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨਾਲ ਸਰਲਤਾਪੂਰਵਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਸਨ। ਇਹ ਨਿਰੀਖਣ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਵਿਧੀ ਸੀ, ਇਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ F ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $f$ ਹੈ ਇਸ ਤੋਂ $f$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਪਰ ਨਿਰੀਖਣ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਇਹ ਵਿਧੀ ਬਹੁਤ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਉਹਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹੋਰ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਮੁੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹਨ।

1. ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ
2. ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ
3. ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ

### 7.3.1 *ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ (Integration by substitution)*

ਇਸ ਉਪਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਜ਼ਾਦ ਚਲ $x$ ਨੂੰ $t$ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਲਈ $x = g(t)$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int f(x)\, dx$ ਹੋਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ

ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{I} = \int f(x)\, dx \text{ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।}$$

ਹੁਣ $x = g(t)$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{dx}{dt} = g'(t)$

ਅਸੀਂ $dx = g'(t)\, dt$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\mathrm{I} = \int f(x)\, dx = \int f\{g(t)\}\, g'(t)\, dt$

ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਚਲ ਬਦਲਣ ਦਾ ਸੂਤਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਉਪਲਬਧ ਔਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਔਜ਼ਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹਮੇਸ਼ਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਸਹੀ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 5.** ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

(i) $\sin mx$ (ii) $2x \sin (x^2 + 1)$ (iii) $\frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(iv) $\frac{\sin (\tan^{-1} x)}{1+x^2}$

**ਹੱਲ :**

(i) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $mx$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $m$ ਹੈ। ਅੰਤ $mx = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਕਿ $mdx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \sin mx\, dx = \frac{1}{m}\int \sin t\, dt$ = ï $\frac{1}{m}\cos t + C$ = ï $\frac{1}{m}\cos mx + C$

(ii) $x^2 + 1$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $2x$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $x^2 + 1 = t$ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ $2x\, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int 2x \sin (x^2+1)\, dx = \int \sin t\, dt$ = ï $\cos t + C$ = ï $\cos (x^2 + 1) + C$

(iii) $\sqrt{x}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ

$\sqrt{x} = t$ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$ ਜਿਸ ਨਾਲੇ $dx = 2t\, dt$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\tan^4 t \sec^2 t \, 2t \, dt}{t} = 2\int \tan^4 t \ \sec^2 t \, dt$

ਫਿਰ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੂਸਰਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ $\tan t = u$ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂਕਿ $\sec^2 t \, dt = du$

ਇਸ ਲਈ $2\int \tan^4 t \sec^2 t \, dt = 2\int u^4 \, du = 2\frac{u^5}{5} + C$

$= \frac{2}{5}\tan^5 t + C$ (ਕਿਉਂਕਿ $u = \tan t$)

$= \frac{2}{5}\tan^5 \sqrt{x} + C$ (ਕਿਉਂਕਿ $t = \sqrt{x}$)

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}\tan^5 \sqrt{x} + C$

ਦੂਜਾ ਬਦਲ $\tan \sqrt{x} = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ

(iv) $\tan^{-1} x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{1}{1+x^2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $\tan^{-1} x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਤਾਂ ਕਿ $\frac{dx}{1+x^2} = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2} dx = \int \sin t \, dt = -\cos t + C = -\cos(\tan^{-1} x) + C$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ, ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਹਵਾਲੇ ਤੋਂ ਵਰਤਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

(i) $\int \tan x \, dx = \log|\sec x| + C$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$\cos x = t$, ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂਕਿ $\sin x \, dx = -dt$

ਹੁਣ $\int \tan x \, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C$

ਅਰਥਾਤ $\int \tan x \, dx = \log|\sec x| + C$

(ii) $\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + C$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$\sin x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂਕਿ $\cos x \, dx = dt$

ਤਦ $\int \cot x \, dx = \int \frac{dt}{t}$

$$= \log |t| + C$$

$$= \log |\sin x| + C$$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ, $\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x \, (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$

$\sec x + \tan x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ $\sec x \, (\tan x + \sec x) \, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \sec x \, dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \text{cosec}\, x \, dx = \log |\text{cosec}\, x - \cot x| + C$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ, $\int \text{cosec}\, x \, dx = \int \frac{\text{cosec}\, x \, (\text{cosec}\, x + \cot x)}{(\text{cosec}\, x + \cot x)} dx$

$\text{cosec}\, x + \cot x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ

ਤਾਂ ਜੋ ï $\text{cosec}\, x \, (\cot x + \text{cosec}\, x) \, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \text{cosec}\, x \, dx = \text{ï} \int \frac{dt}{t} = \text{ï} \log |t| = \text{ï} \log |\text{cosec}\, x + \cot x| + C$

$$= \text{ï} \log \left| \frac{\text{cosec}^2 x - \cot^2 x}{\text{cosec}\, x - \cot x} \right| + C$$

$$= \log |\text{cosec}\, x - \cot x| + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ (ii) $\int \frac{\sin x}{\sin (x + a)} dx$ (iii) $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\, (\sin x)\, dx$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x\, (\sin x)\, dx$$

$t = \cos x$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $dt = -\sin x\, dx$

ਇਸ ਲਈ $\int \sin^2 x \cos^2 x\, (\sin x)\, dx = -\int (1 - t^2)\, t^2\, dt$

$$= -\int (t^2 - t^4)\, dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + \text{C}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + \text{C}$$

(ii) $x + a = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)}\, dx = \int \frac{\sin (t-a)}{\sin t}\, dt$

$$= \int \frac{\sin t \cos a - \cos t \sin a}{\sin t}\, dt$$

$$= \cos a \int dt - \sin a \int \cot t\, dt$$

$$= (\cos a)\, t - (\sin a)\left[\log |\sin t| + \text{C}_1\right]$$

$$= (\cos a)\, (x+a) - (\sin a)\left[\log |\sin (x+a)| + \text{C}_1\right]$$

$$= x \cos a + a \cos a - (\sin a) \log |\sin (x+a)| - \text{C}_1 \sin a$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)}\, dx = x \cos a - \sin a \log |\sin (x+a)| + \text{C}$

ਇੱਥੇ $\text{C} = -\text{C}_1 \sin a + a \cos a$, ਇੱਕ ਹੋਰ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ।

(iii) $\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos x + \sin x}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x + \sin x + \cos x - \sin x)\, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $\quad I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੁਣ $\cos x + \sin x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ($-\sin x + \cos x$) $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\quad I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_2 = \log|\cos x + \sin x| + C_2$

I ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + C, \left(C = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)$$

## ਅਭਿਆਸ 7.2

1 ਤੋਂ 37 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\frac{2x}{1+x^2}$ **2.** $\frac{(\log x)^2}{x}$ **3.** $\frac{1}{x + x\log x}$

**4.** $\sin x \sin(\cos x)$ **5.** $\sin(ax+b)\cos(ax+b)$

**6.** $\sqrt{ax+b}$ **7.** $x\sqrt{x+2}$ **8.** $x\sqrt{1+2x^2}$

**9.** $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$ **10.** $\frac{1}{x-\sqrt{x}}$ **11.** $\frac{x}{\sqrt{x+4}}, x > 0$

**12.** $(x^3-1)^{\frac{1}{3}} x^5$ **13.** $\frac{x^2}{(2+3x^3)^3}$ **14.** $\frac{1}{x(\log x)^m}, x > 0, m \neq 1$

**15.** $\frac{x}{9-4x^2}$ **16.** $e^{2x+3}$ **17.** $\frac{x}{e^{x^2}}$

**18.** $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ **19.** $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ **20.** $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

**21.** $\tan^2 (2x \text{ ï } 3)$ **22.** $\sec^2 (7 \text{ ï } 4x)$ **23.** $\dfrac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

**24.** $\dfrac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}$ **25.** $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(1-\tan x)^2}$ **26.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

**27.** $\sqrt{\sin 2x}\,\cos 2x$ **28.** $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ **29.** $\cot x \log \sin x$

**30.** $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ **31.** $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$ **32.** $\dfrac{1}{1+\cot x}$

**33.** $\dfrac{1}{1-\tan x}$ **34.** $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}$ **35.** $\dfrac{(1+\log x)^2}{x}$

**36.** $\dfrac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}$ **37.** $\dfrac{x^3 \sin\left(\tan^{-1} x^4\right)}{1+x^8}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 38 ਅਤੇ 39 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ :

**38.** $\displaystyle\int \frac{10x^9 + 10^x \log_e^{10} dx}{x^{10} + 10^x}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $10^x \text{ ï } x^{10} + C$ (B) $10^x + x^{10} + C$

(C) $(10^x - x^{10})^{\text{ï}1} + C$ (D) $\log(10^x + x^{10}) + C$

**39.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x \text{ ï } \cot x + C$

(C) $\tan x \cot x + C$ (D) $\tan x \text{ ï } \cot 2x + C$

### 7.3.2 *ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ* (*Integration using trigonometric identities*)

ਜਦੋਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਜੁੜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਝ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$ (iii) $\int \sin^3 x\, dx$

ਹੱਲ :

(i) ਤਤਸਮਕ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(ii) ਤਤਸਮਕ $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$, ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ (ਕਿਉਂ)

ਤਦ $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right] + C$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

(iii) ਤਤਸਮਕ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx = \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

ਦੂਜਾ ਬਦਲ : $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$

$\cos x = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $-\sin x\, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx = -\int (1-t^2)\, dt = -\int dt + \int t^2\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਉੱਤਰ ਸਮਤੁੱਲ ਹਨ।

## ਅਭਿਆਸ 7.3

1 ਤੋਂ 22 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\sin^2 (2x + 5)$ **2.** $\sin 3x \cos 4x$ **3.** $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$

**4.** $\sin^3 (2x + 1)$ **5.** $\sin^3 x \cos^3 x$ **6.** $\sin x \sin 2x \sin 3x$

**7.** $\sin 4x \sin 8x$ **8.** $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **9.** $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

**10.** $\sin^4 x$ **11.** $\cos^4 2x$ **12.** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

**13.** $\dfrac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}$ **14.** $\dfrac{\cos x - \sin x}{1+\sin 2x}$ **15.** $\tan^3 2x \sec 2x$

**16.** $\tan^4 x$ **17.** $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ **18.** $\dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

**19.** $\dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$ **20.** $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2}$ **21.** $\sin^{-1} (\cos x)$

**22.** $\dfrac{1}{\cos (x-a) \cos (x-b)}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 22 ਅਤੇ 23 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**23.** $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x + \text{cosec } x + C$

(C) $-\tan x + \cot x + C$ (D) $\tan x + \sec x + C$

**24.** $\displaystyle\int \frac{e^x (1+x)}{\cos^2 (e^x x)} dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $-\cot (ex^x) + C$ (B) $\tan (xe^x) + C$

(C) $\tan (e^x) + C$ (D) $\cot (e^x) + C$

## 7.4 ਕੁੱਝ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ (Integrals of Some Particular Functions)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਇਨਟਿਗਰਲ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਦੂਸਰੇ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

**(1)** $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ **(2)** $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

**(3)** $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{\text{ï} 1} \frac{x}{a} + C$ **(4)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

**(5)** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{\text{ï} 1} \frac{x}{a} + C$ **(6)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

**(1)** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)\text{ ï } (x-a)}{(x-a)(x+a)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|(x-a)| - \log|(x+a)|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

**(2)** ਉਪਰੋਕਤ (1) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{1}{a^2 \text{ ï } x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right]$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{a^2 \text{ ï } x^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right]$

$$= \frac{1}{2a}[-\log|a-x| + \log|a+x|] + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

ਟਿੱਪਣੀ (1) ਵਿੱਚ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਭਾਗ 7.5 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

**(3)** ਮੰਨ ਲਉ $x = a \tan\theta$ ਤਦ $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\tan^2\theta + a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

**(4)** ਮੰਨ ਲਉ $x = a\sec\theta$ ਤਦ $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \log\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$, ਇੱਥੇ $C = C_1 - \log|a|$

**(5)** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = a\sin\theta$ ਤਦ $dx = a\cos\theta\, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}} = \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

**(6)** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = a\tan\theta$ ਤਦ $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2}}$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \log\left|(\sec\theta + \tan\theta)\right| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+\mathrm{C}$$, ਇੱਥੇ C = $\mathrm{C}_1$ ï $\log|a|$

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਹੁਣ ਕੁਝ ਹੋਰ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਵਰਤੋਂ ਦੇ ਪੱਖ ਨਾਲ ਉਪਯੋਗੀ ਹਨ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸਿੱਧੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

**(7)** ਇਨਟਿਗਰਲ $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ

$ax^2 + bx + c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ $x+\frac{b}{2a}=t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx=dt$ ਅਤੇ $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$ ਲਿਖਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋਏ ਇਹ ਇਨਟਿਗਰਲ $\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

**(8)** $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ (7) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

**(9)** $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$, ਜਿੱਥੇ $p, q, a, b, c$ ਅਚਲ ਹਨ, ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹੈ ਤਾਂਕਿ

$$px + q = \mathrm{A}\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + \mathrm{B} = \mathrm{A}\,(2ax+b) + \mathrm{B}$$

A ਅਤੇ B, ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ $x$ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ। A ਅਤੇ B ਦੇ ਪਤਾ ਲੱਗਣ ਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪਤਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

**(10)** $\int\frac{(px+q)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ (9) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵਧਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪਤਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ, ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

**ਉਦਾਹਰਣ 8.** ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{dx}{x^2-16}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

**ਹੱਲ :**

(i) ਇੱਥੇ $\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$ [7.4 (1) ਨਾਲ]

(ii) $\int \frac{dx}{2x-x^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

$x$ ï $1 = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1}(t) + C$ [7.4 (5) ਨਾਲ]

$= \sin^{-1}$ ($x$ ï 1) $+ C$

**ਉਦਾਹਰਣ 9.** ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ (ii) $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}$

**ਹੱਲ :**

(i) ਇੱਥੇ $x^2$ ï $6x + 13 = x^2$ ï $6x + 3^2$ ï $3^2 + 13 = (x$ ï $3)^2 + 4$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{1}{(x-3)^2+2^2}\,dx$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $x$ ï $3 = t$ rc $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} + C$ [7.4 (3) ਨਾਲ]

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2} + C$$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ 7.4(7) ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਦੇ ਹਰ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$$3x^2+13x-10 = 3\left(x^2+\frac{13x}{3}-\frac{10}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x+\frac{13}{6}\right)^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2\right] \quad \text{(ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਤੇ)}$$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2+13x-10}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{13}{6}\right)^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2}$

ਹੁਣ $x+\frac{13}{6}=t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2+13x-10}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2}$

$$=\frac{1}{3\times 2\times\frac{17}{6}}\log\left|\frac{t-\frac{17}{6}}{t+\frac{17}{6}}\right|+C_1 \qquad \text{[7.4 (i) ਤੋਂ]}$$

$$=\frac{1}{17}\log\left|\frac{x+\frac{13}{6}-\frac{17}{6}}{x+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}}\right|+C_1 = \frac{1}{17}\log\left|\frac{6x-4}{6x+30}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right|+C_1+\frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right|+C, \text{ where } C = C_1+\frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

(iii) ਇੱਥੇ $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2-\frac{2x}{5}\right)}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}} \quad \text{(ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਲਈ)}$$

ਹੁਣ $x-\frac{1}{5}=t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log\left|t+\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\right| + C \qquad [7.4\ (4)\ \text{ਨਾਲ}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log\left|x-\frac{1}{5}+\sqrt{x^2-\frac{2x}{5}}\right| + C$$

**ਉਦਾਹਰਣ 10.** ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\,dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$

**ਹੱਲ :**

(i) ਸੂਤਰ 7.4(9) ਦਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$x+2 = A\frac{d}{dx}\left(2x^2+6x+5\right)+B = A\,(4x+6)+B$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ $x$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$4A = 1$ ਅਤੇ $6A + B = 2$ ਅਰਥਾਤ $A = \frac{1}{4}$ ਅਤੇ $B = \frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

$$= \frac{1}{4}I_1 + \frac{1}{2}I_2 \quad (\text{ਮੰਨ ਲਉ}) \qquad \ldots (1)$$

$I_1$ ਵਿੱਚ $2x^2 + 6x + 5 = t$, ਰੱਖਣ ਤੇ $(4x + 6)\,dx = dt$ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_1 = \log|2x^2+6x+5| + C_1 \qquad \ldots (2)$$

ਅਤੇ $$\mathrm{I}_2 = \int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

ਹੁਣ $x+\frac{3}{2}=t$, ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\times\frac{1}{2}}\tan^{-1}2t + \mathrm{C}_2 \qquad \text{[7.4 (3) ਨਾਲ]}$$

$$= \tan^{-1}2\left(x+\frac{3}{2}\right)+\mathrm{C}_2 = \tan^{-1}(2x+3)+\mathrm{C}_2 \qquad \ldots (3)$$

(2) ਅਤੇ (3) ਦੀ ਵਰਤੋਂ (1) ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}dx = \frac{1}{4}\log\left|2x^2+6x+5\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+3)+\mathrm{C},$$

ਜਿੱਥੇ $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}_1}{4}+\frac{\mathrm{C}_2}{2}$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ 7-4 (10) ਦੀ ਕਿਸਮ ਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $x+3$

$$x+3 = \mathrm{A}\frac{d}{dx}(5-4x-x^2)+\mathrm{B} = \mathrm{A}(-4-2x)+\mathrm{B}$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ $x$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$-2\mathrm{A} = 1$ ਅਤੇ $-4\mathrm{A}+\mathrm{B} = 3$,

ਅਰਥਾਤ $\mathrm{A} = -\frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\mathrm{B} = 1$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-4-2x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \qquad \ldots (1)$$

$\mathrm{I}_1$, ਵਿੱਚ $5-4x-x^2 = t$, ਰੱਖਣ ਤੇ $(-4-2x)\,dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $$\mathrm{I}_1 = \int \frac{(-4-2x)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+\mathrm{C}_1$$

$$= 2\sqrt{5-4x-x^2} + C_1 \qquad \text{... (2)}$$

ਹੁਣ $\quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ

$x + 2 = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\quad I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \sin^{-1}\frac{t}{3} + C_2$ [7.4 (5) ਨਾਲ]

$$= \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + C_2 \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਨਾਂ (2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ (1) ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\sqrt{5\text{ ï }4x\text{ ï }x^2} + \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + C \text{ ਜਿੱਥੇ } C = C_2 - \frac{C_1}{2}$$

## ਅਭਿਆਸ 7.4

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 23 ਤੱਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\frac{3x^2}{x^6+1}$ **2.** $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ **3.** $\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

**4.** $\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$ **5.** $\frac{3x}{1+2x^4}$ **6.** $\frac{x^2}{1-x^6}$

**7.** $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ **8.** $\frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$ **9.** $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}}$

**10.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **11.** $\frac{1}{9x^2+6x+5}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

**13.** $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ **14.** $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ **15.** $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

**16.** $\frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$ **17.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ **18.** $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$

**19.** $\dfrac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$ **20.** $\dfrac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ **21.** $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

**22.** $\dfrac{x+3}{x^2-2x-5}$ **23.** $\dfrac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 24 ਤੋਂ 25 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**24.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $x\tan^{-1}(x+1)+C$ (B) $\tan^{-1}(x+1)+C$

(C) $(x+1)\tan^{-1}x+C$ (D) $\tan^{-1}x+C$

**25.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\dfrac{1}{9}\sin^{-1}\left(\dfrac{9x-8}{8}\right)+C$ (B) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{8x-9}{9}\right)+C$

(C) $\dfrac{1}{3}\sin^{-1}\left(\dfrac{9x-8}{8}\right)+C$ (D) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{9x-8}{9}\right)+C$

## 7.5 ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ (Integration by Partial Fractions)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ਦੋ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ $P(x)$ ਅਤੇ $Q(x)$, ਚਲ $x$ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ ਹਨ ਅਤੇ $Q(x)\neq 0$. ਜਦਕਿ $P(x)$ ਦੀ ਘਾਤ $Q(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਉਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਣਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਅਣਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਉਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ਅਣਉਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$, ਇੱਥੇ $T(x)$ $x$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ।ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਸੇ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਹਰ ਨੂੰ ਇੱਕ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹਾਂ, ਇੱਥੇ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਧੀ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜਨ ਦੇ ਨਾਂ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਪਹਿਲਾਂ ਪਤਾ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰਲ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 7.2 ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਕਿ ਵੱਖ ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਰਲ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

| | ਸਾਰਣੀ 7.2 | |
|---|---|---|
| ਲੜੀ ਨੰ: | ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦਾ ਰੂਪ | ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀ ਕਿਸਮਾਂ |
| 1. | $\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a \neq b$ | $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$ |
| 2. | $\frac{px+q}{(x-a)^2}$ | $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$ |
| 3. | $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ | $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$ |
| 4. | $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$ | $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}$ |
| 5. | $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$ | $\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$, |

ਇੱਥੇ $x^2 + bx + c$ ਦਾ ਅੱਗੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ A, B ਅਤੇ C ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਉੱਚਿਤ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

**ਉਦਾਹਰਣ 11.** $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ:** ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ [ਸਾਰਣੀ 7.2 (i)], ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}, \text{ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ} \qquad \text{--- (1)}$$

ਇੱਥੇ A ਅਤੇ B ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਉੱਚਿਤ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$1 = \mathrm{A}\,(x + 2) + \mathrm{B}\,(x + 1)$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ $x$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$$

ਅਤੇ

$$2\mathrm{A} + \mathrm{B} = 1$$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ A = 1 ਅਤੇ B = ï 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\dfrac{1}{(x+1)\,(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{ï\ 1}{x+2}$

ਇਸ ਲਈ
$$\int \frac{dx}{(x+1)\,(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log|x+1| - \log|x+2| + \mathrm{C} = \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + \mathrm{C}$$

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਥਨ ਜੋ $x$ ਦੇ ਸਾਰੇ (ਯੋਗ) ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਕੁਝ ਲੇਖਕ ਸੰਕੇਤ ≡ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਕੇਤ = ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ $x$ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 12.** $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ ਇਨਟਿਗਰਲ $\dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $x^2 + 1$ ਨੂੰ $x^2$ ï $5x + 6$ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{(x-2)\,(x-3)}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ
$$\frac{5x-5}{(x-2)\,(x-3)} = \frac{\mathrm{A}}{x-2} + \frac{\mathrm{B}}{x-3}$$

ਜਦੋਂ ਕਿ $5x$ ï $5 = \mathrm{A}\,(x$ ï $3) + \mathrm{B}\,(x$ ï $2)$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ $x$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ A + B = 5 ਅਤੇ 3A + 2B = 5

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ A = ï 5 ਅਤੇ B = 10 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 10\int \frac{dx}{x-3}$$

= $x$ ï 5 log |$x$ ï 2| + 10 log |$x$ ï 3| + C

ਉਦਾਹਰਣ 13. $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਸਾਰਣੀ 7.2 (4) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਕਿਸਮ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}$$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਜਦੋਂ ਕਿ 3$x$ ï 2 = A ($x$ + 1) ($x$ + 3) + B ($x$ + 3) + C ($x$ + 1)$^2$

= A ($x^2$ + 4$x$ + 3) + B ($x$ + 3) + C ($x^2$ + 2$x$ + 1 )

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ $x^2$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ, $x$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਾਂ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ A + C = 0, 4A + B + 2C = 3 ਅਤੇ 3A + 3B + C = ï 2 ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $A = \frac{11}{4}, B = \frac{-5}{2}$ ਅਤੇ $C = \frac{-11}{4}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2} - \frac{11}{4(x+3)}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{11}{4}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4}\log|x+3| + C$$

$$= \frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2(x+1)} + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 14. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ ਨੂੰ ਲਉ ਅਤੇ $x^2 = y$ ਰੱਖੋ

ਤਾਂ
$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$$

$$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4}$$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਜਦੋਂ ਕਿ
$$y = A(y+4) + B(y+1)$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ $y$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $A + B = 1$ ਅਤੇ $4A + B = 0$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$A = -\frac{1}{3} \quad \text{V|j} \quad B = \frac{4}{3}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^2+4)}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਨਾ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਲਈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਨ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸੁਮੇਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਤਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. $\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \sin\phi$

ਤਦ
$$dy = \cos\phi \; d\phi$$

ਇਸ ਲਈ
$$\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi = \int \frac{(3y \text{ ï } 2)\, dy}{5 - (1 - y^2) - 4y}$$

$$= \int \frac{3y-2}{y^2-4y+4}\,dy = \int \frac{3y-2}{(y-2)^2} = \mathrm{I} \qquad \text{(ਮੰਨ ਲਉ)}$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\dfrac{3y-2}{(y-2)^2} = \dfrac{A}{y-2} + \dfrac{B}{(y-2)^2}$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ [ਸਾਰਣੀ 7.2 (2) ਨਾਲ]

ਇਸ ਲਈ $3y$ ï 2 = A ($y$ ï 2) + B

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ $y$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ A = 3 ਅਤੇ B ï 2A = ï 2, ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ A = 3 ਅਤੇ B = 4 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{I} = \int [\frac{3}{y-2} + \frac{4}{(y-2)^2}]\,dy \;=\; 3\int \frac{dy}{y-2} + 4\int \frac{dy}{(y-2)^2}$$

$$= \;3\log|\,y-2\,| + 4\left(-\frac{1}{y-2}\right) + C \;=\; 3\log|\sin\phi - 2\,| + \frac{4}{2-\sin\phi} + C$$

$$= \;3\log(2-\sin\phi) + \frac{4}{2-\sin\phi} + C$$ (ਕਿਉਂਕਿ 2 ï $\sin\phi$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ)

**ਉਦਾਹਰਣ 16.** $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1\,dx}{(x+2)(x^2+1)}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ।ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਨੂੰ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜਦੇ ਹਾਂ [ਸਾਰਣੀ 2.2(5)]A

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

ਇਸ ਲਈ $x^2 + x + 1 = A(x^2+1) + (Bx + C)(x+2)$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ $x^2$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ, $x$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ A + B =1, 2B + C = 1 ਅਤੇ A + 2C = 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $A = \frac{3}{5}, B = \frac{2}{5}, C = \frac{1}{5}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)$$

ਇਸ ਲਈ
$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx = \frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5}\int\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{5}\log|x+2| + \frac{1}{5}\log|x^2+1| + \frac{1}{5}\tan^{-1}x + C$$

## ਅਭਿਆਸ 7.5

1 ਤੋਂ 21 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\frac{x}{(x+1)(x+2)}$ **2.** $\frac{1}{x^2-9}$ **3.** $\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

**4.** $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ **5.** $\frac{2x}{x^2+3x+2}$

**6.** $\frac{1-x^2}{x(1-2x)}$ **7.** $\frac{x}{(x^2+1)(x \text{ ï } 1)}$ **8.** $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

**9.** $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$ **10.** $\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$ **11.** $\frac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$

**12.** $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$ **13.** $\frac{2}{(1-x)(1+x^2)}$ **14.** $\frac{3x-1}{(x+2)^2}$

**15.** $\frac{1}{x^4-1}$ **16.** $\frac{1}{x(x^n+1)}$ [ਸੰਕੇਤ : ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $x^{n \text{ ï } 1}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ ਅਤੇ $x^n = t$ ਰੱਖੋ ]

**17.** $\frac{\cos x}{(1 \text{ ï } \sin x)(2 \text{ ï } \sin x)}$ [ਸੰਕੇਤ : $\sin x = t$ ਰੱਖੋ ]

**18.** $\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ **19.** $\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$ **20.** $\frac{1}{x(x^4-1)}$

**21.** $\dfrac{1}{(e^x-1)}$ [ਸੰਕੇਤ : $e^x = t$ ਰੱਖੋ ]

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 22 ਅਤੇ 23 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**22.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right|+\text{C}$ (B) $\log\left|\dfrac{(x-2)^2}{x-1}\right|+\text{C}$

(C) $\log\left|\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2\right|+\text{C}$ (D) $\log|(x-1)(x-2)|+\text{C}$

**23.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\log|x|-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+\text{C}$ (B) $\log|x|+\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+\text{C}$

(C) $-\log|x|+\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+\text{C}$ (D) $\dfrac{1}{2}\log|x|+\log(x^2+1)+\text{C}$

## 7.6 ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ (Integration by Parts)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਕਿ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਚਲ $x$ (ਮੰਨ ਲਉ) ਦੇ $u$ ਅਤੇ $v$ ਦੋ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ ਡਿਫਰੈਸ਼ਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

ਭਾਵ $$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx \qquad \text{... (1)}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $u = f(x)$ ਅਤੇ $\dfrac{dv}{dx} = \text{g}(x)$ ਤਦ

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \text{ ਅਤੇ } v = \int g(x)\, dx$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x) \int g(x)\, dx - \int [\int g(x)\, dx\, f'(x)]\, dx$$

ਭਾਵ
$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x) \int g(x)\, dx - \int [f'(x) \int g(x)\, dx]\, dx$$

ਜੇ ਅਸੀਂ $f$ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ $g$ ਨੂੰ ਦੂਸਰਾ ਫਲਨ ਮੁੱਲ ਲਈਏ ਤਾਂ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ = (ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ) × (ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ) ð [(ਪਹਿਲਾਂ ਦਾ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਗੁਣਾਂਕ) × (ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ)] ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ

**ਉਦਾਹਰਣ 17.** $\int x \cos x\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** $f(x) = x$ (ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ) ਅਤੇ $g(x) = \cos x$ (ਦੂਜਾ ਫਲਨ) ਰੱਖੋ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int x \cos x\, dx = x \int \cos x\, dx - \int [\frac{d}{dx}(x) \int \cos x\, dx]\, dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C$$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ $f(x) = \cos x$ ਅਤੇ $g(x) = x$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ

$$\int x \cos x\, dx = \cos x \int x\, dx - \int [\frac{d}{dx}(\cos x) \int x\, dx]\, dx$$

$$= (\cos x)\frac{x^2}{2} + \int \sin x \frac{x^2}{2}\, dx$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int x \cos x\, dx$, ਤੁਲਾਨਾਤਮਕ ਰੂਪ ਨਾਲ $x$ ਦੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਔਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੀ ਉੱਚਿਤ ਚੋਣ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ*

1. ਇਹ ਜ਼ਿਕਰਯੋਗ ਹੈ, ਕਿ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਉਦਾਹਰਣਾਂ $\int \sqrt{x} \sin x\, dx$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\sqrt{x} \sin x$ ਹੈ।
2. ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ

ਨਹੀਂ ਜੋੜਿਆ ਸੀ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਫਲਨ $\cos x$ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ $\sin x + k$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ, ਜਿੱਥੇ $k$ ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ, ਤਦ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਿੱਚ ਆਖਰੀ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਅਚਲ ਜੋੜਨਾ ਗੈਰ-ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

$$\int x \cos x\, dx = x(\sin x + k) - \int (\sin x + k)\, dx$$

$$= x(\sin x + k) - \int \sin x\, dx - \int k\, dx$$

$$= x(\sin x + k) + \cos x - kx + \mathrm{C} = x \sin x + \cos x + \mathrm{C}$$

3. ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਫਲਨ $x$ ਦੀ ਘਾਤ ਹੈ ਜਾਂ $x$ ਦਾ ਬਹੁਪਤਦ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਵੀ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ ਦੂਸਰਾ ਫਲਨ ਉਲਟ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਜਾਂ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. $\int \log x\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣ ਵਿੱਚ ਅਯੋਗ ਹਾਂ, ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\log x$ ਹੈ। ਅਸੀਂ $\log x$ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਫਲਨ 1 ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਦੂਸਰੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ $x$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int (\log x \cdot 1)\, dx = \log x \int 1\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int 1\, dx\right] dx$$

$$= \log x \,.\, x - \int \frac{1}{x}\, x\, dx = x \log x - x + \mathrm{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 19. $\int x e^x dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $x$ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ $e^x$ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਉ।

ਦੂਸਰੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ $= e^x$

ਇਸ ਲਈ $\int x e^x dx = x e^x - \int 1 . e^x dx = xe^x - e^x + \mathrm{C}$

ਉਦਾਹਰਣ 20. $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ $= \sin^{-1} x$, ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਫਲਨ $= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਰਥਾਤ $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$t = 1 ï\ x^2$ ਰੱਖੋ ਤਦ

ਹੁਣ $dt = ï\ 2x\ dx$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = ï\ \sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-\sqrt{1-x^2})\,dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + x + C = x - \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + C$$

ਵਿਕਲਪ $\sin^{ï1}x = \theta$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਤੇ ਤਦ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵੀ ਇਸ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 21.** $\int e^x \sin x\,dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** $e^x$ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ $\sin x$ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਵੋ। ਤਦ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$I = \int e^x \sin x\,dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x\,dx$$

$$= ï\ e^x \cos x + I_1 \text{ (ਮੰਨ ਲਉ)} \qquad \ldots (1)$$

$I_1$ ਵਿੱਚ $e^x$ ਅਤੇ $\cos x$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

$I_1$ ਦਾ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \text{ ਅਤੇ } 2I = e^x(\sin x\ ï\ \cos x)$$

ਇਸ ਲਈ $$I = \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

ਵਿਕਲਪ : $\sin x$ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ $e^x$ ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈਣ ਤੇ ਵੀ ਉਪਰੋਕਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

### 7.6.1 $\int e^x [f(x) + f'(x)]\,dx$ *ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ*

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\,dx = \int e^x f(x)\,dx + \int e^x f'(x)\,dx$$

$$= I_1 + \int e^x f'(x)\,dx, \text{ ਜਿੱਥੇ } I_1 = \int e^x f(x)\,dx \qquad \ldots (1)$$

$I_1$ ਵਿੱਚ $f(x)$ ਅਤੇ $e^x$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। $I_1 = f(x)\,e^x - \int f'(x)\,e^x dx + C$

$I_1$ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\mathrm{I} = e^x f(x) - \int f'(x)\, e^x dx + \int e^x f'(x)\, dx + \mathrm{C} = e^x f(x) + \mathrm{C}$$

ਇਸ ਲਈ $\int e^x \left(f(x) + f'(x)\right) dx = e^x f(x) + \mathrm{C}$

**ਉਦਾਹਰਣ 22.** ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int e^x (\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$  (ii) $\int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx$

**ਹੱਲ :**

(i) ਇੱਥੇ $\mathrm{I} = \int e^x (\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$

ਹੁਣ $f(x) = \tan^{-1}x$, ਲਓ, ਤਦ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ $e^x\, [f(x) + f'(x)]$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\mathrm{I} = \int e^x (\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\, dx = e^x \tan^{-1}x + \mathrm{C}$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\mathrm{I} = \int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx = \int e^x \left[\frac{x^2-1+1+1)}{(x+1)^2}\right] dx$

$$= \int e^x \left[\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}\right] dx = \int e^x \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right] dx$$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ਹੁਣ $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ $e^x\, [f(x) + f'(x)]$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x\, dx = \frac{x-1}{x+1} e^x + \mathrm{C}$

## ਅਭਿਆਸ 7.6

1 ਤੋਂ 22 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

**1.** $x \sin x$  **2.** $x \sin 3x$  **3.** $x^2 e^x$  **4.** $x \log x$

**5.** $x \log 2x$  **6.** $x^2 \log x$  **7.** $x \sin^{-1}x$  **8.** $x \tan^{-1} x$

**9.** $x \cos^{-1} x$  **10.** $(\sin^{-1}x)^2$  **11.** $\frac{x \cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$  **12.** $x \sec^2 x$

**13.** $\tan^{-1}x$  **14.** $x (\log x)^2$  **15.** $(x^2 + 1) \log x$

**16.** $e^x\,(\sin x + \cos x)$ **17.** $\dfrac{x\,e^x}{(1+x)^2}$ **18.** $e^x\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

**19.** $e^x\left(\dfrac{1}{x}\ \text{ï}\ \dfrac{1}{x^2}\right)$ **20.** $\dfrac{(x-3)\,e^x}{(x-1)^3}$ **21.** $e^{2x}\sin x$

**22.** $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 23 ਅਤੇ 24 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**23.** $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\dfrac{1}{3}e^{x^3}+\text{C}$ (B) $\dfrac{1}{3}e^{x^2}+\text{C}$

(C) $\dfrac{1}{2}e^{x^3}+\text{C}$ (D) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+\text{C}$

**24.** $\int e^x \sec x\,(1+\tan x)\,dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $e^x \cos x + \text{C}$ (B) $e^x \sec x + \text{C}$

(C) $e^x \sin x + \text{C}$ (D) $e^x \tan x + \text{C}$

### 7.6.2 *ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਕਿਸਮਾਂ (Integrals of some more types)*

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਕੁੱਝ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਾਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।ਜਿਵੇਂ ਕਿ

(i) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\text{I}=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

ਅਚਲ ਫਲਨ 1 ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਅਤੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\text{I} = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,x\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \text{I} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

ਅਰਥਾਤ $$2I = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

ਅਰਥਾਤ $$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਸਰੇ ਦੋ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਚਲ ਫਲਨ 1 ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈ ਕੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

(ii) $$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

(iii) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

ਵਿਕਲਪ : ਇਨਟਿਗਰਲ (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $x = a \sec\theta$, $x = a \tan\theta$ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ $x = a \sin\theta$, ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਵੀ ਇਹਨਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 23.** $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 4}\, dx$

ਹੁਣ $x + 1 = y$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dy$, ਤਦ

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx = \int \sqrt{y^2 + 2^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} y \sqrt{y^2 + 4} + \frac{4}{2} \log \left| y + \sqrt{y^2 + 4} \right| + C$$ [7.6.2 (ii) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ]

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 2 \log \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + C$$

**ਉਦਾਹਰਣ 24.** $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx = \int \sqrt{4 - (x+1)^2}\, dx$

ਹੁਣ $x + 1 = y$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dy$, ਤਦ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx = \int \sqrt{4 - y^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} y \sqrt{4-y^2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \frac{y}{2} + C \quad [7.6.2 \text{ (iii) ਦੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ}]$$

$$= \frac{1}{2} (x+1) \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \sin^{-1} \left( \frac{x+1}{2} \right) + C$$

## ਅਭਿਆਸ 7.7

1 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

**1.** $\sqrt{4-x^2}$ **2.** $\sqrt{1-4x^2}$ **3.** $\sqrt{x^2+4x+6}$

**4.** $\sqrt{x^2+4x+1}$ **5.** $\sqrt{1-4x-x^2}$ **6.** $\sqrt{x^2+4x-5}$

**7.** $\sqrt{1+3x-x^2}$ **8.** $\sqrt{x^2+3x}$ **9.** $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 10 ਅਤੇ 11 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**10.** $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right| + C$ (B) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(C) $\frac{2}{3}x\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ (D) $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}x^2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$

**11.** $\int \sqrt{x^2-8x+7}\, dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(B) $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

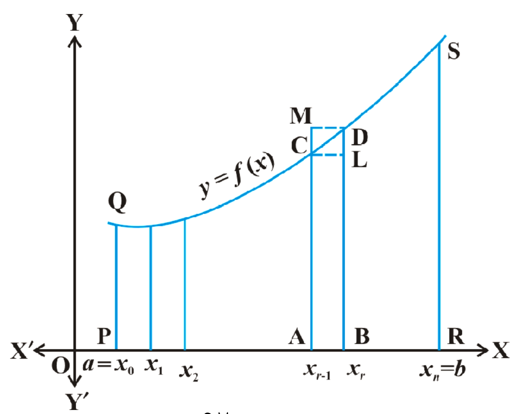
(C) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - 3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(D) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - \frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

## 7.7 *ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ* (Definite Integral)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਪਿਛਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ $\int_a^b f(x)\,dx$, ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ çü ‰ ¶ $b$] ਇਨਟਿਰਗਲ ਦੀ ਉੱਚ ਸੀਮਾ ਅਤੇ $a$, ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਾਂ ਜਦੋਂ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ F ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਅਰਥਾਤ $F(b)$ ï $F(a)$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰਵਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਰੂਪਾਂ ਦੀ ਅਸੀਂ ਵੱਖ&ਵੱਖ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

### 7.7.1 *ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ (Definite integral as the limit of a sum)*




ਚਿੱਤਰ 7.2

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ $f$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਲਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ ਗਰਾਫ $x$- ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਵਕਰ ਹੈ।

ਵਕਰ $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ ਅਤੇ $x$-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਹੈ। ਇਸ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਇਸ ਵਕਰ, $x$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ PRSQP ਨੂੰ ਲਵੋ। (ਚਿੱਤਰ 7.2 ਦੇਖੋ)A

ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਨੂੰ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{r ï 1}, x_r], \ldots [x_{n ï 1}, x_n]$, ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ, $n$ ਸਮਾਨ ਉੱਪਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ ਜਿੱਥੇ $x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \ldots,\ x_r = a + rh$ ਅਤੇ $x_n = b = a + nh$ ਅਰਥਾਤ $n = \dfrac{b-a}{h}$ ਇੱਥੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $n \to \infty$ ਤਾਂ $h \to 0$

ਅਧਿਐਨ ਅਧੀਨ ਖੇਤਰ PRSQP, $n$ ਉਪਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਹਰੇਕ ਉਪਖੇਤਰ ਉਪਅੰਤਰਾਲਾਂ

ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। $[x_{r-1}, x_r]$, $r = 1, 2, 3, \ldots, n$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 7.2 ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਆਇਤ (ABLC) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ < ਖੇਤਰ (ABDCA) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ < ਆਇਤ (ABDM) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ... (1)

ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦਕਿ $x_r - x_{r-1} \to 0$ ਅਰਥਾਤ $h \to 0$, ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਨ (1) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਤਿੰਨਾਂ ਖੇਤਰਫਲ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਲਗਭਗ ਸਮਾਨ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜਫਲਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$s_n = h\,[f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})] = h\sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) \qquad \ldots (2)$$

ਅਤੇ
$$S_n = h\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] = h\sum_{r=1}^{n} f(x_r) \qquad \ldots (3)$$

ਇੱਥੇ $s_n$ ਅਤੇ $S_n$ ਉਪਅੰਤਰਾਲਾਂ $[x_{r-1}, x_r]$ $r = 1, 2, 3, \ldots, n$, ਤੇ ਬਣੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਅਤੇ ਉੱਪਰਲੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਅਸਮਾਨਤਾਂ (1) ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਇਖਤਿਆਰੀ ਉਪ ਅੰਤਰਾਲ $[x_{r-1}, x_r]$ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$s_n < \text{ਖੇਤਰਫਲ PRSQP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ} < S_n \qquad \ldots (4)$$

ਜਦੋਂ $n \to \infty$ ] ਤਾਂ ਆਇਤਕਾਰ ਪੱਟੀਆਂ ਤੰਗ ਹੁੰਦੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ (2) ਅਤੇ (3) ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਸੀਮਿਤ ਮੁੱਲ ਹੀ ਵਕਰ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

ਸੰਕੇਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \text{ਖੇਤਰ PRSQP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ} = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \ldots (5)$$

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਵਕਰ ਦੇ ਹੇਠਲੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਅਤੇ ਵਕਰ ਦੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੇ ਕਿਸੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੀਮਿਤ ਮੁੱਲ ਵੀ ਹੈ। ਸੁਵਿਧਾ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਉਪਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੇ ਵਕਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਉਚਾਈ ਵਾਲੇ ਆਇਤਾਂ ਨੂੰ ਲਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ (5) ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\,[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a + (n-1)\,h)]$$

ਜਾਂ
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a + (n-1)\,h)] \qquad \ldots (6)$$

ਜਿੱਥੇ
$$h = \frac{b-a}{n} \to 0 \text{ ਜੇਕਰ } n \to \infty$$

ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਅੰਜਕ (6) ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਉਸ ਚਲ ਤੇ ਨਹੀਂ, ਜਿਸਦਾ ਅਸੀਂ ਅਜ਼ਾਦ ਚਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਚੋਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇ $x$ ਦੇ ਥਾਂ ਤੇ ਅਜ਼ਾਦ ਚਲ ਨੂੰ $t$ ਅਰਥਾਤ $u$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਿਰਫ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_a^b f(t)\,dt$ ਅਰਥਾਤ $\int_a^b f(u)\,du$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਚਲ ਇੱਕ ਬਣਾਉਟੀ/ ਫਰਜ਼ੀ (dummy) ਚਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਜੋੜਫਲ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)\,h]$$

ਇੱਥੇ $$h=\frac{b-a}{n}$$

ਇਸ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ $a=0,\ b=2,\ f(x)=x^2+1,\ h=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$

ਇਸ ਲਈ
$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(0)+f(\frac{2}{n})+f(\frac{4}{n})+\ldots+f(\frac{2\,(n-1)}{n})]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[1+(\frac{2^2}{n^2}+1)+(\frac{4^2}{n^2}+1)+\ldots+\left(\frac{(2n-2)^2}{n^2}+1\right)]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ \text{ਪਦ}})+\frac{1}{n^2}(2^2+4^2+\ldots+(2n-2)^2]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[n+\frac{2^2}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[n+\frac{4}{n^2}\,\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[n+\frac{2}{3}\,\frac{(n-1)\ (2n-1)}{n}]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\ [1+\frac{2}{3}(1-\frac{1}{n})\ (2-\frac{1}{n})] = 2\ [1+\frac{4}{3}] = \frac{14}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\int_0^2 e^x\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

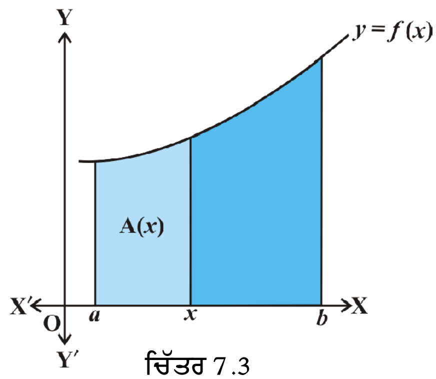
ਹੱਲ : ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$\int_0^2 e^x\,dx =$$

$$(2-0)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^0+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{4}{n}}+\ldots+e^{\frac{2n-2}{n}}\right]$$

ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ $n$ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ

ਇੱਥੇ $a = 1,\ r = e^{\frac{2}{n}}$, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ




ਚਿੱਤਰ 7.3

$$\int_0^2 e^x\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^{\frac{2n}{n}}-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^2-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right]$$

$$= \frac{2\,(e^2-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}}\right]\cdot 2} = e^2-1 \qquad [\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h} = 1 \text{ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ}]$$

## ਅਭਿਆਸ 7.8

ਜੋੜਾਂ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\int_a^b x\,dx$ **2.** $\int_0^5 (x+1)\,dx$ **3.** $\int_2^3 x^2\,dx$

**4.** $\int_1^4 (x^2-x)\,dx$ **5.** $\int_{-1}^1 e^x\,dx$ **6.** $\int_0^4 (x+e^{2x})\,dx$

## 7.8 ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Calculus)

### 7.8.1 *ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ (Area function)*

ਅਸੀਂ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਨੂੰ ਵਕਰ $y = f(x)$, $x$-ਧੁਰੇ, ਅਤੇ ਕੋਟੀ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $x$ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $\int_a^x f(x)\,dx$ ਚਿੱਤਰ 7-3 ਵਿੱਚ ਹਲਕਾ ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ $x \in [a,$

$b]$ ਦੇ ਲਈ $f(x) > 0$ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਕਥਨ ਹੋਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $x$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹੈ।

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਛਾਇਆ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, $x$ ਦਾ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਅਸੀਂ $x$ ਦੇ ਇਸ ਫਲਨ ਨੂੰ $A(x)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਫਲਨ $A(x)$ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) = \int_a^x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} \qquad \ldots (1)$$

ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਦੋ ਆਧਾਰਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਹਨ। ਪਰ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਸਿਰਫ ਇਸ ਦਾ ਕਥਨ ਦੱਸਾਂਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣ ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।

### 7.8.2 *ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ* (First fundamental theorem of integral calculus)

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : ਮੰਨ ਲਉ $f$ ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ $A(x)$ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ $x \in [a, b]$ ਸਾਰੇ ਦੇ ਲਈ $A'(x) = f(x)$

### 7.8.3 *ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ* (Second fundamental theorem of integral calculus)

ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ $f$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $f$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ। ਤਾਂ $\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} = [\mathbf{F}(\boldsymbol{x})]_a^b = \mathbf{F}(\boldsymbol{b}) - \mathbf{F}(\boldsymbol{a})$

*ਟਿੱਪਣੀ*

1. ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਮੇਯ 2 ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\int_a^b f(x)\, dx =$ ($f$ ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਦਾ ਉੱਪਰਲੀ ਸੀਮਾ $b$ ਤੇ ਮੁੱਲ) ï (ਉਸੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ $a$ ਤੇ ਮੁੱਲ)।
2. ਇਹ ਪ੍ਰਮੇਯ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਆਸਾਨ ਵਿਧੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਹੈ। ਇਹ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਮਜ਼ਬੂਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।
4. $\int_a^b f(x)\, dx$ ਵਿੱਚ, $[a, b]$ ਦੇ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਯੋਗ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_{-2}^{3} x(x^2 ï 1)^{\frac{1}{2}}\, dx$ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਨਾ ਗਲਤ ਹੈ

ਕਿਉਂਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[-2, 3]$ ਦੇ ਭਾਗ $-1 < x < 1$ ਦੇ ਲਈ $f(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਫਲਨ $f$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਕਦਮ **(Steps for calculating $\int_a^b f(x)\,dx$ )**

(i) ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int f(x)\,dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ $F(x)$ ਹੈ। ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਚਲ C ਨੂੰ ਲੈਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ $F(x)$ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $F(x) + C$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + C]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ, ਗਾਇਬ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(ii) $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੋ ਕਿ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

**ਉਦਾਹਰਣ 28.** ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int_2^3 x^2\,dx$ (ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$ (iii) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\,dt$

**ਹੱਲ :**

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_2^3 x^2\,dx$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = F(x)$

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$I = F(3) - F(2) = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$30 - x^{\frac{3}{2}} = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $-\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = dt$ ਅਰਥਾਤ $\sqrt{x}\,dx = -\frac{2}{3}dt$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int \frac{\sqrt{x}}{(30 ï\ x^{\frac{3}{2}})^2} dx = ï\ \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 ï\ x^{\frac{3}{2}})}\right] = \mathrm{F}(x)$

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\mathrm{I} = \mathrm{F}(9)\ ï\ \mathrm{F}(4) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 ï\ x^{\frac{3}{2}})}\right]_4^9 = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 ï\ 27)} - \frac{1}{30 ï\ 8}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{22}\right] = \frac{19}{99}$$

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$

ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{ï\,1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)} = ï\ \log|x+1| + 2\log|x+2| = \mathrm{F}(x)$

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

I = F(2) ï F(1) = [ï log3 + 2 log4] ï [ï log2 + 2 log3]

$$= ï\ 3\log 3 + \log 2 + 2\log 4 = \log\left(\frac{32}{27}\right)$$

(iv) ਮੰਨ ਲਉ, $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\, dt$ . ਹੁਣ $\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

$\sin 2t = u$ ਰੱਖਣ ਤੇ $2\cos 2t\, dt = du$ ਭਾਵ $\cos 2t\, dt = \frac{1}{2}du$

ਇਸ ਲਈ $\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\int u^3 du$

$$= \frac{1}{8}[u^4] = \frac{1}{8}\sin^4 2t = \mathrm{F}(t)$$ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ

$$\mathrm{I} = \mathrm{F}(\frac{\pi}{4})\ ï\ \mathrm{F}(0) = \frac{1}{8}[\sin^4\frac{\pi}{2}\ ï\ \sin^4 0] = \frac{1}{8}$$

## ਅਭਿਆਸ 7.9

1 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx$ **2.** $\int_{2}^{3}\frac{1}{x}\,dx$ **3.** $\int_{1}^{2}(4x^3-5x^2+6x+9)\,dx$

**4.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx$ **5.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$ **6.** $\int_{4}^{5}e^x\,dx$ **7.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

**8.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{cosec} x\,dx$ **9.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **10.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ **11.** $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-1}$

**12.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$ **13.** $\int_{2}^{3}\frac{x\,dx}{x^2+1}$ **14.** $\int_{0}^{1}\frac{2x+3}{5x^2+1}\,dx$ **15.** $\int_{0}^{1}x\,e^{x^2}\,dx$

**16.** $\int_{1}^{2}\frac{5x^2}{x^2+4x+3}$ **17.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2\sec^2 x+x^3+2)\,dx$

**18.** $\int_{0}^{\pi}(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2})\,dx$ **19.** $\int_{0}^{2}\frac{6x+3}{x^2+4}\,dx$

**20.** $\int_{0}^{1}(x\,e^x+\sin\frac{\pi x}{4})\,dx$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 21 ਅਤੇ 22 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**21.** $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

**22.** $\int_{0}^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{4+9x^2}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

## 7.9 ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (Evaluation of Definite Integrals by Substitution)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $\int_a^b f(x)\,dx$, ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਕਦਮ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

1. ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਬਾਰੇ, ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਅਤੇ $y = f(x)$ ਅਰਥਾਤ $x = g(y)$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਜਾਣੀ ਪਛਾਣੀ ਕਿਸਮ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਏ।
2. ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਚਲ ਦੀ ਜ਼ਿਕਰ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਨਵੇਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਦਾ, ਨਵੇਂ ਚਲ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।
3. ਨਵੇਂ ਚਲ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਮੂਲ ਚਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।
4. ਕਦਮ (3) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਉੱਤਰ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ, ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਪਰਲੀ ਸੀਮਾ ਵਾਲੇ ਮੁੱਲ ਨਾਲ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਵਾਲੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਤੇਜ਼ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕਦਮ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਕਦਮ (3) ਨੂੰ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਚਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੀ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਚਲ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਆਖਰੀ ਕਦਮ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰ ਸਕੀਏ।

ਆਉ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

**ਉਦਾਹਰਣ 29.** $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** $t = x^5 + 1$, ਰੱਖਣ ਤੇ $dt = 5x^4\,dx$

ਇਸ ਲਈ
$$\int 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}} - \left((-1)^5+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ਵਿਕਲਪ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਤਾਂ ਬਦਲੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਨਵੀਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ $t = x^5 + 1$. ਤਦ $dt = 5x^4\,dx$ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ

ਜਦ $x = -1$ ਤਾਂ $t = 0$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 1$ ਤਾਂ $t = 2$

ਇਸ ਲਈ ਜਿਵੇਂ&ਜਿਵੇਂ $x$, ï 1 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਤਿਵੇਂ&ਤਿਵੇਂ $t$] 0 ਤੋਂ 2 ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} \text{ ï } 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

**ਉਦਾਹਰਣ 30.** $\int_0^1 \frac{\tan^{\text{ï}1} x}{1+x^2}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $t = \tan^{\text{ï}1}x$, ਤਦ $dt = \frac{1}{1+x^2}dx$. ਜਦ $x = 0$ ਤਾਂ $t = 0$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 1$ ਤਾਂ $t = \frac{\pi}{4}$ ਇਸ ਲਈ ਜਿਵੇਂ&ਜਿਵੇਂ $x$, 0 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਤਿਵੇਂ&ਤਿਵੇਂ $t$, 0 l $\frac{\pi}{4}$ ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int_0^1 \frac{\tan^{\text{ï}1} x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,dt\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{16} \text{ ï } 0\right] = \frac{\pi^2}{32}$$

## ਅਭਿਆਸ 7.10

1 ਤੋਂ 8 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\cos^5\phi\,d\phi$ **3.** $\int_0^1 \sin^{\text{ï}1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

**4.** $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\,dx$ ($x + 2 = t^2$ ਰੱਖੋ) **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

**6.** $\int_0^2 \frac{dx}{x+4 \text{ ï } x^2}$ **7.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **8.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} \text{ ï } \frac{1}{2x^2}\right)e^{2x}dx$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 9 ਤੋਂ 10 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**9.** ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 6 (B) 0 (C) 3 (D) 4

**10.** ਜਦੋਂ ਕਿ $f(x) = \int_0^x t\sin t\,dt$, ਤਦ $f'(x)$ ਹੈ :

(A) $\cos x + x\sin x$ (B) $x\sin x$ (C) $x\cos x$ (D) $\sin x + x\cos x$

## 7.10 ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Some Properties of Definite Integrals)

ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਸੂਚੀ ਬੰਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗੁਣ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਦੀ ਉਪਯੋਗੀ ਹੋਣਗੇ।

**P$_0$ :** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

**P$_1$ :** $\int_a^b f(x)\,dx =$ ï $\int_b^a f(x)\,dx$, ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

**P$_2$ :** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ ] $a, b, c$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

**P$_3$ :** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

**P$_4$ :** $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $P_4$, $P_3$ ਦੀ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਥਿਤੀ ਹੈ)

**P$_5$ :** $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

**P$_6$ :** $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, ਜਦੋਂ $f(2a-x) = f(x)$

= 0, ਜਦਕਿ $f(2a$ ï $x)$ = ï $f(x)$

**P$_7$ :** (i) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, ਜਦਕਿ ਇੱਕ ਜਿਸਤ $f$ ਫਲਨ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ $f$(ï $x$) = $f(x)$

(ii) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, ਜਦੋਂ ਕਿ $f$ ਟਾਂਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦਕਿ $f$(ï $x$) = ï $f(x)$

ਇੱਕ&ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

**P$_0$** ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ $x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਸਿੱਧੇ ਤੌਰ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**P$_1$** ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ। ਤਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ , ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦ $a = b$, ਤਾਂ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

**P$_2$** ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ, ਤਦ

$\int_a^b f(x)\,dx$ = F($b$) ï F($a$) ... (1)

$\int_a^c f(x)\,dx$ = F($c$) ï F($a$) ... (2)

ਅਤੇ $\int_c^b f(x)\,dx$ = F($b$) ï F($c$) ... (3)

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ਇਸ ਤੋਂ ਗੁਣਧਰਮ $P_2$ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**$P_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $t = a + b - x$. ਤਦ $dt = -dx$. ਜਦ $x = a$ ਤਦ, $t = b$ ਅਤੇ ਜਦ $x = b$ ਤਦ $t = a$. ਇਸ ਲਈ

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt \quad (P_1 \text{ ਤੋਂ})$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)\,dx \quad (P_0 \text{ ਤੋਂ})$$

**$P_4$ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ :** $t = a - x$ ਰੱਖੋ ਅਤੇ $P_3$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧੋ। ਹੁਣ $dt = -dx$, ਜਦ $x = a, t = 0$

**$P_5$ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ :** $P_2$, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ $t = 2a - x$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ, ਤਦ $dt = -dx$ ਅਤੇ ਜਦ $x = a$, ਤਦ $t = a$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 2a$, ਤਦ $t = 0$ ਅਤੇ $x = 2a - t$ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਦੂਸਰਾ ਇਨਟਿਗਰਲ

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-x)\,dx \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

**$P_6$ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ :** $P_5$, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \quad \text{... (1)}$$

ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(2a-x) = f(x)$, ਜਦ (1) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

ਅਤੇ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(2a-x) = -f(x)$, ਜਦ (1) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

**$P_7$ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ**

$P_2$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ $t = ï\ x$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$dt = ï\ dx$ ਜਦ $x = ï\ a$ ਤਦ $t = a$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 0$, ਤਦ $t = 0$ ਅਤੇ $x = ï\ t$ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(ï\ x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \qquad (P_0\ \text{I}) \qquad \dots (1)$$

(i) ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਕਿ $f$ ਜਿਸਤ ਫਲਨ ਹੈ ਤਦ $f(ï\,x) = f(x)$ ਤਾਂ (1) ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(ii) ਜਦਕਿ $f$ ਟਾਂਕ ਫਲਨ ਹੈ ਤਦ $f(ï\,x) = -f(x)$ ਤਾਂ (1) ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 31. $\int_{-1}^{2} \left| x^3\ ï\ x \right| dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $[ï\,1, 0]$ ਤੇ $x^3\ ï\ x \geq 0$ ਅਤੇ $[0, 1]$ ਅਤੇ $x^3\ ï\ x \leq 0$ ਤੇ $[1, 2]$ ਅਤੇ $x^3 ï$ $x \geq 0$ ਤਦ ਅਸੀਂ ਨਾਲ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\int_{-1}^{2} \left| x^3\ ï\ x \right| dx = \int_{-1}^{0} (x^3\ ï\ x)\,dx + \int_0^1 ï\ (x^3\ ï\ x)\,dx + \int_1^2 (x^3\ ï\ x)\,dx \qquad (P_2 \text{ ਤੋਂ})$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3\ ï\ x)\,dx + \int_0^1 (x\ ï\ x^3)\,dx + \int_1^2 (x^3\ ï\ x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\ ï\ \frac{x^2}{2}\right]_{ï\,1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\ ï\ \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4}\ ï\ \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= ï\left(\frac{1}{4}\ ï\ \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\ ï\ \frac{1}{4}\right) + (4\ ï\ 2)\ ï\left(\frac{1}{4}\ ï\ \frac{1}{2}\right)$$

$$= ï\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 32. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin^2 x$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਫਲਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx \qquad [P_7 \text{ (1) ਨਾਲ}]$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos 2x)}{2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 33. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)\, dx}{1+\cos^2(\pi - x)} \qquad (P_4 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} - \mathrm{I}$$

ਅਰਥਾਤ $$2\,\mathrm{I} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

ਅਰਥਾਤ $$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

$\cos x = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $-\sin x\, dx = dt$

ਜਦੋਂ $x = 0$ ਤਦ $t = 1$ ਅਤੇ ਜਦ $x = \pi$ ਤਦ $t = -1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\mathrm{I} = \frac{-\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} \qquad (P_1 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \pi\int_0^{1} \frac{dt}{1+t^2} \text{ ਕਿਉਂਕਿ } \frac{1}{1+t^2} \text{ ਜਿਸਤ ਫਲਨ ਹੈ} \qquad (P_7 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \pi\left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \pi\left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0\right] = \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 34. $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ ਅਤੇ $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$

ਤਦ $f(ï\ x) = \sin^5 (ï\ x) \cos^4 (ï\ x) = ï\ \sin^5 x \cos^4 x = ï\ f(x)$, ਅਰਥਾਤ $f$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਫਲਨ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $I = 0$ [$P_7$ (ii) ਨਾਲ]

ਉਦਾਹਰਣ 35. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ ... (1)

ਤਦ $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 (\frac{\pi}{2} - x)}{\sin^4 (\frac{\pi}{2} - x) + \cos^4 (\frac{\pi}{2} - x)} dx$$ ($P_4$ ਨਾਲ)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx \quad \text{... (2)}$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

ਇਸ ਲਈ $$I = \frac{\pi}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 36. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\, dx}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$ ... (1)

ਤਦ $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}\, dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)} + \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}}$$ ($P_3$ ਨਾਲ)

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx \qquad \ldots (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $2\mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

ਇਸ ਲਈ $\mathrm{I} = \frac{\pi}{12}$

ਉਦਾਹਰਣ 37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$

ਤਦ $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx$ ($P_4$ ਨਾਲ)

I, ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$2\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x \cos x + \log 2 - \log 2)\, dx$$ ( $\log 2$ ਜੋੜਨ ਅਤੇ ਘਟਾਉਣ ਤੇ)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dx$$ (ਕਿਉਂ ?)

ਪਹਿਲੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ $2x = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $2\, dx = dt$ ਜਦ $x = 0$ ਤਾਂ $t = 0$ ਅਤੇ ਜਦ $x = \frac{\pi}{2}$ ਤਾਂ $t = \pi$

ਇਸ ਲਈ $2\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$ [$P_6$ ਨਾਲ ਕਿਉਂਕਿ $\sin(\pi \text{ ï } t) = \sin t$)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2$$ (ਚਲ $t$ ਨੂੰ $x$ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਤੇ)

$$= \mathrm{I} - \frac{\pi}{2}\log 2$$

ਇਸ ਲਈ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \frac{\text{ï}\ \pi}{2}\log 2$

## ਅਭਿਆਸ 7.11

ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ 1 ਤੋਂ 19 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx$ **3.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x\, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x+\cos^{\frac{3}{2}} x}$

**4.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^5 x+\cos^5 x}$ **5.** $\int_{-5}^{5} |x+2|\, dx$ **6.** $\int_2^{8} |x-5|\, dx$

**7.** $\int_0^{1} x(1-x)^n\, dx$ **8.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\, dx$ **9.** $\int_0^{2} x\sqrt{2-x}\, dx$

**10.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log\sin x-\log\sin 2x)\, dx$ **11.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

**12.** $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\sin x}$ **13.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$ **14.** $\int_0^{2\pi} \cos^5 x\, dx$

**15.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x\cos x}\, dx$ **16.** $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\, dx$ **17.** $\int_0^{a} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}\, dx$

**18.** $\int_0^{4} |x-1|\, dx$

**19.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\int_0^{a} f(x)g(x)\, dx = 2\int_0^{a} f(x)\, dx$, ਜਦੋਂ ਕਿ $f$ ਅਤੇ $g$ ਨੂੰ $f(x) = f(a-x)$ ਅਤੇ $g(x)+g(a-x) = 4$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 20 ਅਤੇ 21 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**20.** $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3+x\cos x+\tan^5 x+1)\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 0 (B) 2 (C) $\pi$ (D) 1

**21.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 0 (D) $-2$

## *ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ*

**ਉਦਾਹਰਣ 38.** $\int \cos 6x \sqrt{1+\sin 6x}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** $t = 1 + \sin 6x$, ਰੱਖਣ ਤੇ $dt = 6 \cos 6x\, dx$

ਇਸ ਲਈ
$$\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\, dx = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}} dt$$
$$= \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} = \frac{1}{9}(1+\sin 6x)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}$$

**ਉਦਾਹਰਣ 39.** $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਿਆ ਹੈ $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \int \frac{(1-\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{4}}}{x^4} dx$

ਹੁਣ $1-\frac{1}{x^3} = 1 - x^{-3} = t$, ਰੱਖਣ ਤੇ $\frac{3}{x^4}dx = dt$

ਇਸ ਲਈ
$$\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}}\, dt$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + \mathrm{C} = \frac{4}{15}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}} + \mathrm{C}$$

**ਉਦਾਹਰਣ 40.** $\int \frac{x^4\, dx}{(x-1)(x^2+1)}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਿਆ ਹੈ $\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x+1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

$$= (x+1) + \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\mathrm{A}}{(x-1)} + \frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{(x^2+1)}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ... (2)

$$1 = A\,(x^2 + 1) + (Bx + C)\,(x - 1)$$
$$= (A + B)\,x^2 + (C - B)\,x + A - C$$

ਇਸ ਲਈ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $A + B = 0$, $C - B = 0$ ਅਤੇ $A - C = 1$, ਜਿਸ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $A = \frac{1}{2}, B = C = -\frac{1}{2}$

A, B ਅਤੇ C ਦਾ ਮੁੱਲ (2) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{1}{(x-1)\,(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \qquad \ldots (3)$$

(3) ਅਤੇ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{x^4}{(x-1)\,(x^2+x+1)} = (x+1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

ਇਸ ਲਈ

$$\int \frac{x^4}{(x-1)\,(x^2+x+1)}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 41. $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$

$$= \int \log(\log x)\,dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

ਆਉ, ਪਹਿਲੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ 1 ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਦ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$I = x\log(\log x) - \int \frac{1}{x\log x}\,x\,dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \qquad \ldots (1)$$

ਫਿਰ $\int \frac{dx}{\log x}$, ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, 1 ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਵੋ ਅਤੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਰੋ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x\left\{-\frac{1}{(\log x)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} dx\right] \quad \ldots (2)$$

(2) ਅਤੇ (1), ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ

$$\mathrm{I} = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} + \mathrm{C}$$

ਉਦਾਹਰਨ 41. $\int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਿਆ ਹੈ ਕਿ $\mathrm{I} = \int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx = \int \sqrt{\tan x}\,(1+\cot x)\, dx$

ਹੁਣ $\tan x = t^2$, ਰੱਖਣ ਤੇ $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

ਅਰਥਾਤ $dx = \dfrac{2t\, dt}{1+t^4}$

ਹੁਣ $$\mathrm{I} = \int t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{2t}{(1+t^4)}\, dt$$

$$= 2\int \frac{(t^2+1)}{t^4+1}\, dt = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)} = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 + 2}$$

ਤਦ $t - \dfrac{1}{t} = y$, ਰੱਖਣ ਤੇ $\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) dt = dy$

ਤਦ $$\mathrm{I} = 2\int \frac{dy}{y^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}} + \mathrm{C} = \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2}} + \mathrm{C}$$

$$= \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}\, t}\right) + \mathrm{C} = \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2\tan x}}\right) + \mathrm{C}$$

**ਉਦਾਹਰਣ 43.** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x \cos 2x \, dx}{\sqrt{9 - \cos^4(2x)}}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\displaystyle I = \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{9 - \cos^4 2x}} \, dx$

ਹੁਣ $\cos^2 (2x) = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਤਾਂ ਕਿ $4 \sin 2x \cos 2x \, dx = - \, dt$

ਇਸ ਲਈ
$$I = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{9 - t^2}} = -\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + C = -\frac{1}{4}\sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\cos^2 2x\right] + C$$

**ਉਦਾਹਰਣ 44.** $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin(\pi x)| \, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ $f(x) = |x \sin \pi x| = \begin{cases} x \sin \pi x, -1 \le x \le 1 & \text{ਦੇ ਲਈ} \\ -x \sin \pi x, 1 \le x \le \frac{3}{2} & \text{ਦੇ ਲਈ} \end{cases}$

ਇਸ ਲਈ
$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| \, dx = \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} - x \sin \pi x \, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} x \sin \pi x \, dx$$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦੋਵਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| \, dx = \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right] = \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

**ਉਦਾਹਰਣ 45.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\displaystyle I = \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \, dx}{a^2 \cos^2(\pi - x) + b^2 \sin^2(\pi - x)}$

($P_4$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \mathrm{I}$$

ਇਸ ਲਈ $$2\mathrm{I} = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

ਅਰਥਾਤ $$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

($P_6$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)

$$= \pi \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 + \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 + cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right]$$

($\tan x = t$ ਅਤੇ $\cot x = u$ ਰੱਖੋ ।)

$$= \pi \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosec^2 x\, dx}{a^2 \cot^2 x + b^2} \right]$$

$$= \pi \left[ \int_0^1 \frac{dt}{a^2 + b^2 + t^2} - \int_1^0 \frac{dt}{a^2 u^2 + b^2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{ab} \left[ \tan^{-1} \frac{bt}{a} \right]_0^1 - \frac{\pi}{ab} \left[ \tan^{-1} \frac{au}{b} \right]_1^0$$

$$= \frac{\pi}{ab} \left[ \tan^{-1} \frac{b}{a} + \tan^{-1} \frac{a}{b} \right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2ab}$$

## ਅਭਿਆਸ 7 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1 ਤੋਂ 24 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ ।

**1.** $\frac{1}{x - x^3}$ **2.** $\frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$

**3.** $\frac{1}{x\sqrt{ax - x^2}}$ [ਸੰਕੇਤ : $x = \frac{a}{t}$ ਰੱਖੋ] **4.** $\frac{1}{x^2 (x^4 + 1)^{\frac{3}{4}}}$

**5.** $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ [ਸੰਕੇਤ: $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)}$, $x = t^6$ ਰੱਖੋ]

**6.** $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$ **7.** $\dfrac{\sin x}{\sin(x-a)}$ **8.** $\dfrac{e^{5\log x}-e^{4\log x}}{e^{3\log x}-e^{2\log x}}$

**9.** $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ **10.** $\dfrac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$ **11.** $\dfrac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

**12.** $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$ **13.** $\dfrac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$ **14.** $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

**15.** $\cos^3 x\; e^{\log \sin x}$ **16.** $e^{3\log x}(x^4+1)^{-1}$ **17.** $f'(ax+b)\,[f(ax+b)]^n$

**18.** $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x\sin(x+\alpha)}}$ **19.** $\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{x}-\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x}+\cos^{-1}\sqrt{x}}$, $(x\in[0,1])$

**20.** $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ **21.** $\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$ **22.** $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

**23.** $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **24.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}$

25 ਤੋਂ 33 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**25.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$ **26.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$ **27.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\,dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

**28.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$ **29.** $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$ **30.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx$

**31.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\tan^{-1}(\sin x)\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$

**33.** $\displaystyle\int_1^4\left(|x-1|+|x-2|+|x-3|\right)dx$

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ (ਪ੍ਰਸ਼ਨ 34 ਤੋਂ 39 ਤੱਕ)।

**34.** $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{x^2(x+1)}=\frac{2}{3}+\log\frac{2}{3}$ **35.** $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x dx=1$

**36.** $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{17}\cos^4 x\,dx=0$ **37.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\frac{2}{3}$

**38.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\, dx = 1 - \log 2$ **39.** $\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$

**40.** ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\int_0^1 e^{2-3x} dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

41 ਤੋਂ 44 ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**41.** $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\tan^{-1}(e^x) + C$ (B) $\tan^{-1}(e^{-x}) + C$

(C) $\log(e^x - e^{-x}) + C$ (D) $\log(e^x + e^{-x}) + C$

**42.** $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{-1}{\sin x + \cos x} + C$ (B) $\log|\sin x + \cos x| + C$

(C) $\log|\sin x - \cos x| + C$ (D) $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

**43.** ਜਦੋਂ ਕਿ $f(a + b - x) = f(x)$, ਤਾਂ $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)\, dx$ (B) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)\, dx$

(C) $\frac{b-a}{2}\int_a^b f(x)\, dx$ (D) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\, dx$

**44.** $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right) dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 1 (B) 0 (C) $-1$ (D) $\frac{\pi}{4}$

## *ਸਾਰ-ਅੰਸ਼*

- ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਕਲਨ ਵਿੱਚ, ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਅਰਥਾਤ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਹੈ ਜੋ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੀ ਉਲਟ ਹੈ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$ . ਤਾਂ ਅਸੀਂ $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਅਨੰਤ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ C ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਚਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

- ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ, ਜਿਆਮਿਤਕ ਤੌਰ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਲਈ ਇੱਕ ਵਕਰ ਨੂੰ *y*&ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਆਪਣੇ ਸਮਾਂਤਰ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਜਾਂ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ, ਸਮਿਤੀ ਬਦਲ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ।

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2. ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $k$, ਦੇ ਲਈ $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

   ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਕਿ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ , ਫਲਨ ਹੈ, ਅਤੇ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ , ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ

   $$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)]\,dx$$

   $$= k_1 \int f_1(x)\,dx + k_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots + k_n \int f_n(x)\,dx$$

- ਕੁੱਝ ਮਾਨਕ/ਮਿਆਰੀ ਇਨਟਿਗਰਲ

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}$, $n \neq$ ï 1. ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\int dx = x + \mathrm{C}$

(ii) $\int \cos x\,dx = \sin x + \mathrm{C}$

(iii) $\int \sin x\,dx =$ ï $\cos x + \mathrm{C}$

(iv) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + \mathrm{C}$

(v) $\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx =$ ï $\cot x + \mathrm{C}$

(vi) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + \mathrm{C}$

(vii) $\int \mathrm{cosec}\,x \cot x\,dx =$ ï $\mathrm{cosec}\,x + \mathrm{C}$

(viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + \mathrm{C}$

(ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + \mathrm{C}$

(x) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + \mathrm{C}$

(xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + \mathrm{C}$

(xii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + \mathrm{C}$

(xiii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\mathrm{cosec}^{-1} x + \mathrm{C}$

(xiv) $\int e^x dx = e^x + \mathrm{C}$

(xv) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + \mathrm{C}$

(xvi) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + \mathrm{C}$

◆ **ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ**

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$, ਦੋ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ $\mathrm{P}(x)$ ਅਤੇ $\mathrm{Q}(x)$, ਚਲ $x$ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ ਹਨ ਅਤੇ $\mathrm{Q}(x) \neq 0$. ਜੇ ਬਹੁਪਦ $\mathrm{P}(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਬਹੁਪਦ $\mathrm{Q}(x)$, ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ $\mathrm{P}(x)$ ਨੂੰ $\mathrm{Q}(x)$ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \mathrm{T}(x) + \frac{\mathrm{P}_1(x)}{\mathrm{Q}(x)}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕੇ ਇੱਥੇ $\mathrm{T}(x)$, ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $\mathrm{P}_1(x)$ ਦੀ ਘਾਤ $\mathrm{Q}(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਬਹੁਪਦ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ $\mathrm{T}(x)$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ $\frac{\mathrm{P}_1(x)}{\mathrm{Q}(x)}$ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਦੀ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਇਸਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

1. $\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{x-b}, \ a \neq b$

2. $\frac{px+q}{(x-a)^2} = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{(x-a)^2}$

3. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{x-b} + \frac{\mathrm{C}}{x-c}$

4. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{(x-a)^2} + \frac{\mathrm{C}}{x-b}$

5. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+bx+c}$,

   ਇੱਥੇ $x^2 + bx + c$ ਦੇ ਅੱਗੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ।

◆ **ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ**

ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੇ ਚਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਅ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਮੌਲਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੇ ਚਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ, ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਜਦ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਮੌਜੂਦ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੁਝ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਤਪਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਾਨਕ/ਮਿਆਰੀ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(i) $\int \tan x \, dx = \log |\sec x| + \mathrm{C}$  (ii) $\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + \mathrm{C}$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

- ਕੁੱਝ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਇਨਟਿਗਰਲ

(i) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(ii) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$ (iii) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$ (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log | x + \sqrt{x^2 + a^2} | + C$

- ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨਾਂ $f_1$ ਅਤੇ $f_2$, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\int f_1(x) \, . \, f_2(x) \, dx = f_1(x) \int f_2(x) \, dx - \int \left[ \frac{d}{dx} f_1(x) \, . \int f_2(x) \, dx \right] dx$, ਅਰਥਾਤ ਦੋ

ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ = ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ × ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ï {ਪਹਿਲਾ ਦਾ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਗੁਣਾਂਕ × ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ} ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਉਚਿਤ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

- $\int e^x [f(x) + f'(x)] \, dx = \int e^x f(x) \, dx + C$

- ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਖਾਸ ਕਿਸਮਾਂ

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

ਅਰਥਾਤ



(iv) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ਅਰਥਾਤ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ਵਰਗੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

(v) $\int \frac{px+q\,dx}{ax^2+bx+c}$ ਅਰਥਾਤ $\int \frac{px+q\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ਵਰਗੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਮਾਨਕ/ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$px+q = \mathrm{A}\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + \mathrm{B} = \mathrm{A}\,(2ax+b) + \mathrm{B}$, A ਅਤੇ B ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

- ਅਸੀਂ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਨੂੰ ਵਕਰ, $y = f(x)$, $a \le x \le b$, $x$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ordinates $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ।ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $x$ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਦ $\int_a^x f(x)\,dx$ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ A $(x)$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਸਾਨੂੰ ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵੱਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

7.8.2 ਇਨਇਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ **(First fundamental theorem of integral calculus)**

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ $\mathrm{A}(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, ਸਾਰੇ $\forall\ x \ge a$, ਦੇ ਲਈ, ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $f$ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਤਦ $\mathrm{A}'(x) = f(x)$ ਸਾਰੇ $\forall\ x \in [a, b]$ ਦੇ ਲਈ।

- ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ $f$, $x$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ F ਇੱਕ ਦੂਸਰਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$, $f$ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਸਾਰੇ $x$ ਦੇ ਲਈ ਹੈ।

ਤਦ $\int_a^b f(x)\,dx = \left[\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}\right]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

ਇਸ ਨੂੰ ਵਿਸਥਾਰ $[a, b]$ ਤੇ $f$ ਦਾ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ $a$ ਅਤੇ $b$ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਅਖਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, $a$ ਨੂੰ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ $b$ ਨੂੰ ਉਪਰਲੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

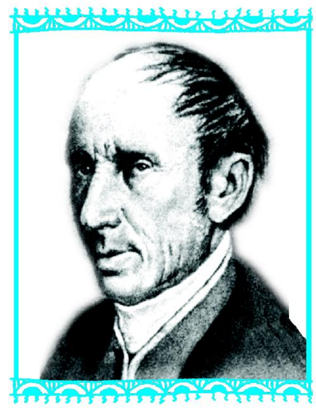
ਪਾਠ **8**

# ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ
# (Application of Integrals)

❖ *One should study Mathematics because it is only through Mathematics that nature can be conceived in harmonious form. – BIRKHOFF* ❖

## 8.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ, ਆਇਤਾਂ, ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਅਤੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਜਿਆਮਤੀ ਸ਼ਕਲਾਂ ਆਦਿ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਦੇ ਲਈ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਵਿਹਾਰਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੂਤਰ ਅਧਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਅਧਾਰੀ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕ ਸਾਧਾਰਨ ਸ਼ਕਲਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਪਰ ਫਿਰ ਵੀ ਇਹ ਸੂਤਰ ਵਕਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਦੇ ਲਈ ਕਾਫੀ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੇ ਕੁਝ ਸੰਕਲਪਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ।



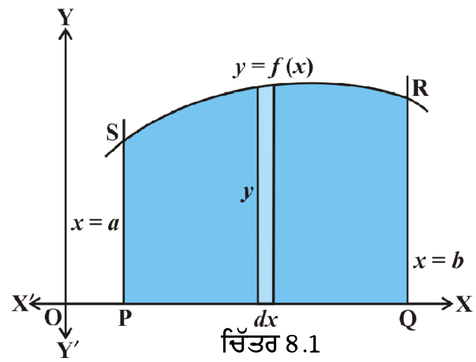
A.L. Cauchy
(1789-1857)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਜੋੜ ਦੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਵਕਰ $y = f(x)$, ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$, $x = b$ ਅਤੇ $x$-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਾਧਾਰਨ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਚੱਕਰਾਂ, ਪੇਰਾਬੋਲਾ ਅਤੇ ਇਲਿਪਸ (ਕੇਵਲ ਮਾਨਕ ਰੂਪ) ਦੀਆਂ ਚਾਪਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਨਿਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਖਾਸ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਵਕਰਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

## 8.2 ਸਧਾਰਨ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਖੇਤਰਫਲ (Area Under Simple Curves)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤੀ ਜਾਏ, ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਕਰ $y = f(x)$, $x$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਆਸਾਨ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਨਾਲ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 8.1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਕਰ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ

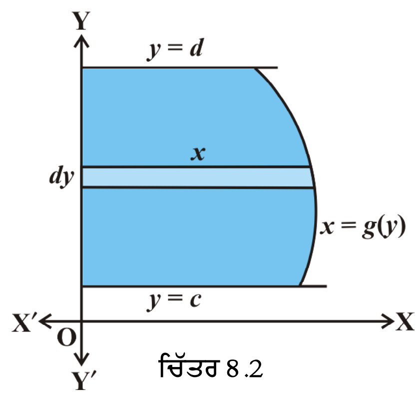
ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਪਤਲੀ ਅਤੇ ਲੰਬਕਾਰੀ, ਜ਼ਿਆਦਾ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਪੱਟੀਆਂ ਨਾਲ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। $y$ ਉਚਾਈ ਅਤੇ $dx$ ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਪੱਟੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਵਿੱਚ $d$A (ਅਧਾਰੀ ਪੱਟੀ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ) = $ydx$, ਜਿੱਥੇ $y = f(x)$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.1

ਇਹ ਖੇਤਰਫਲ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕਿਸੇ ਇਖਤਿਆਰੀ ਸਥਿਤੀ ਤੇ ਅਤੇ $a$ ਅਤੇ $b$ ਦੇ ਵਿੱਚ $x$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੁੱਲ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵਕਰ $y = f(x)$, ਕੋਟੀ $x = a$, $x = b$ ਅਤੇ $x$&ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ A ਨੂੰ, ਖੇਤਰ PQRSP ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਪਤਲੀ ਪੱਟੀਆਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ:

$$\mathrm{A} = \int_a^b d\mathrm{A} = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



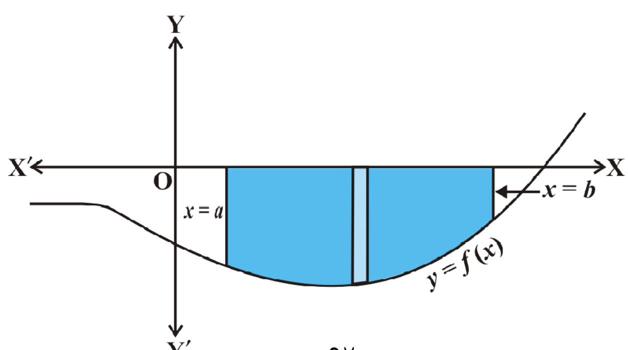
ਚਿੱਤਰ 8.2

ਵਕਰ $x = g(y)$, $y$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = c$, $y = d$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{A} = \int_c^d x\,dy = \int_c^d g(y)\,dy$$

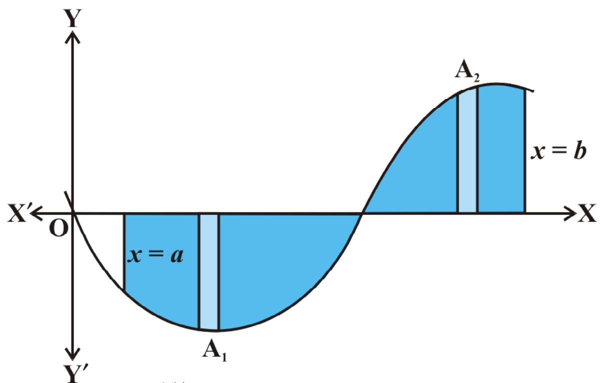
ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8 . 2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਜਦਕਿ ਵਿਚਾਰ ਅਧੀਨ ਵਕਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਜਿਵੇਂਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਥੇ $x = a$ ਤੋਂ $x = b$ ਤੱਕ $f(x) < 0$ ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ, $x$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$, $x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਸਿਰਫ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਜਦਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਅਰਥਾਤ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 8.3

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਕਰ ਦਾ ਕੁੱਝ ਭਾਗ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਭਾਗ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ $A_1 < 0$ ਅਤੇ $A_2 > 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਵਕਰ $y = f(x)$, $x$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਸੂਤਰ $A = |A_1| + A_2$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 8.4

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = a^2$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਚਿੱਤਰ 8.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਹੋਏ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ

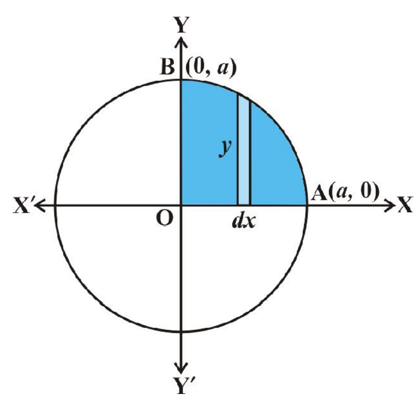
= 4 (ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ, $x$- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀ Ordinates $x = 0$ ਅਤੇ $x = a$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ AOBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

[ਕਿਉਂਕਿ ਚੱਕਰ $x$- ਧੁਰੇ ਅਤੇ $y$- ਧੁਰੇ ਦੋਵਾਂ ਤੇ ਸਮਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ।]

$$= 4\int_0^a y\,dx \text{ (ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ)}$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx,$$

ਕਿਉਂਕਿ $x^2 + y^2 = a^2$ ਤੋਂ $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਖੇਤਰ AOBA ਪਹਿਲੇ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $y$ ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :




ਚਿੱਤਰ 8.5

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi a^2$$

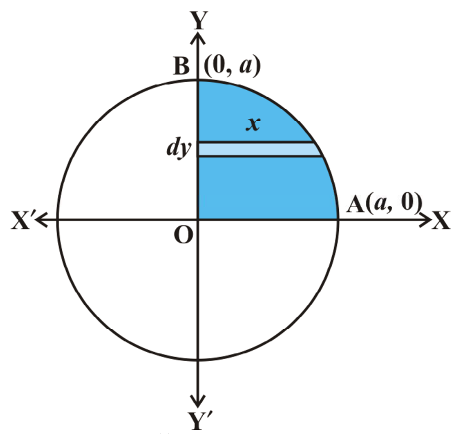
ਦੂਜਾ ਬਦਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.6 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\int_0^a x\,dy = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi a^2$$



ਚਿੱਤਰ 8.6

ਉਦਾਹਰਨ 2. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਦਾ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 8.7 ਵਿੱਚ ਇਲਿਪਸ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ABA′B′A ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\begin{pmatrix}\text{ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ } x-\text{ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ } x=0, x=a \text{ ਦੁਆਰਾ ਪਹਿਲੇ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ} \\ \text{ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ } OBA \text{ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ}\end{pmatrix}$$

(ਕਿਉਂਕਿ ਇਲਿਪਸ $x$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ $y$-ਧੁਰੇ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਸਮਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ)

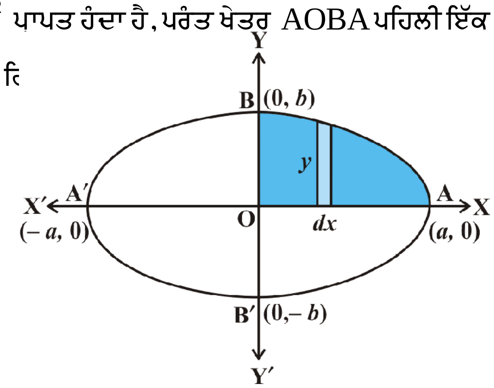
$$= 4\int_0^a y\,dx \quad \text{(ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ)}$$

ਹੁਣ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ਨਾਲ $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਖੇਤਰ AOBA ਪਹਿਲੀ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $y$ ਧਨਾਤਮਕ ਲਿਆ ਕਿ

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a \quad \text{(ਕਿਉਂ)}$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$



ਚਿੱਤਰ 8.7

$$=\frac{4b}{a}\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2}=\pi ab \text{ ਹੈ।}$$

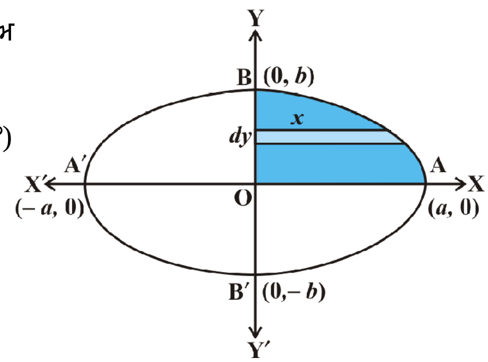
ਦੂਜਾ ਬਦਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.8 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\int_0^b x dy = 4\frac{a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2-y^2}\,dy \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$=\frac{4a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2}+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{b}\right]_0^b$$

$$=\frac{4a}{b}\left[\left(\frac{b}{2}\times 0+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}1\right)-0\right]$$

$$=\frac{4a}{b}\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab \quad \text{gA}$$




ਚਿੱਤਰ 8.8

### 8.2.1 *ਇੱਕ ਵਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (The area of the region bounded by a curve and a line)*

ਇਸ ਉਪਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ, ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।ਉਪਰੋਕਤ ਜ਼ਿਕਰ ਕੀਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਸਿਰਫ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣਗੇ।ਕਿਉਂਕਿ ਹੋਰ ਰੂਪਾਂ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।

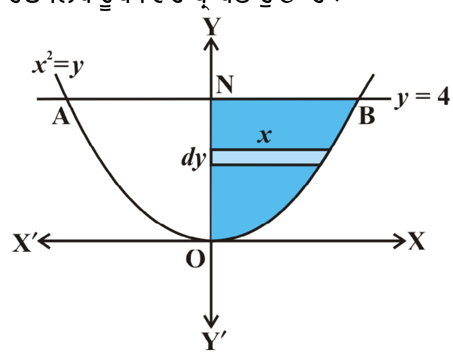
ਉਦਾਹਰਨ 3. ਵਕਰ $y = x^2$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $y = 4$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਨ $y = x^2$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਵਕਰ ਸਿਰਫ $y$-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਮਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ।ਇਸ ਲਈ ਚਿੱਤਰ 8.9 ਤੋਂ, ਖੇਤਰ AOBA ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$2\int_0^4 x dy =$ 2 (ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ, $y$ ï ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = 0$ ਅਤੇ $y = 4$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ BOND ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

$$= 2\int_0^4 \sqrt{y}\,dy \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

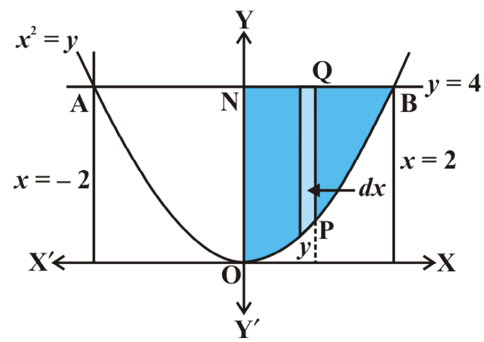
$$= 2\times\frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{3}\times 8 = \frac{32}{3}$$




ਚਿੱਤਰ 8.9

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਲਈਆਂ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.9 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਦੂਜਾ ਬਦਲ : ਖੇਤਰ AOBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ PQ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.10 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ $x^2 = y$ ਅਤੇ $y = 4$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਨਾਲ $x =$ ï 2 ਅਤੇ $x = 2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.7

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੇਤਰ AOBA ਨੂੰ ਵਕਰਾਂ $y = x^2$, $y = 4$ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x =$ ï 2 ਅਤੇ $x = 2$ ਵਿੱਚ ਘਿਰਿਆ ਖੇਤਰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਖੇਤਰ AOBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_{-2}^{2} y dx$$ [$y$ = (ਬਿੰਦੂ Q ਦਾ $y$ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ï ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $y$) = 4 ï $x^2$]

$$= 2\int_{0}^{2}\left(4 - x^2\right)dx \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left[4 \times 2 - \frac{8}{3}\right] = \frac{32}{3}$$

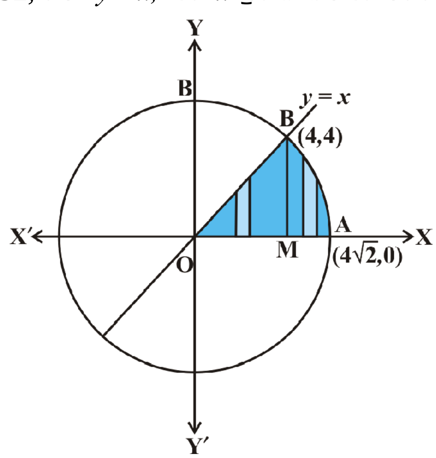
*ਟਿੱਪਣੀ :* ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲੰਬਕਾਰੀ ਜਾਂ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਵੀ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਦੇ ਅੱਗੇ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਪੱਟੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਨੂੰ ਤਰਜੀਹ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਨ 3. ਪਹਿਲੀ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 32$, ਰੇਖਾ $y = x$, ਅਤੇ $x$-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਨ ਹਨ :

$$y = x \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ $$x^2 + y^2 = 32 \qquad \ldots (2)$$



ਚਿੱਤਰ 8.11

ਸਮੀਕਰਨ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਚੱਕਰ ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ B(4, 4) ਤੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 8-11)A $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ BM ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ।

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ OBMO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ BMAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਹੁਣ, ਖੇਤਰ OBMO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^4 y\,dx = \int_0^4 x\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 = 8 \qquad \text{... (3)}$$

ਦੁਬਾਰਾ ਖੇਤਰ BMAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_4^{4\sqrt{2}} y dx = \int_4^{4\sqrt{2}} \sqrt{32 - x^2}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x\sqrt{32 - x^2} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{ï1} \frac{x}{4\sqrt{2}}\right]_4^{4\sqrt{2}}$$

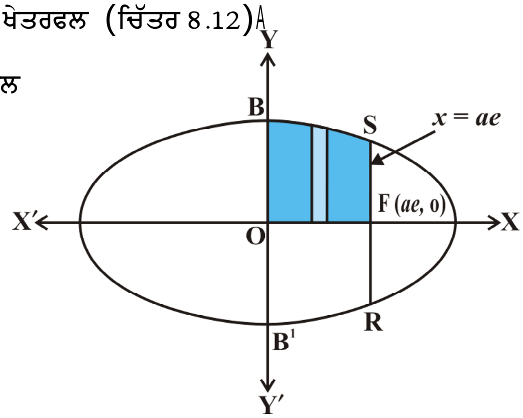
$$= \left(\frac{1}{2} 4\sqrt{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{ï1} 1\right) - \left(\frac{4}{2}\sqrt{32 - 16} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{ï1} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 8\,\pi\ ï\ (8 + 4\pi) = 4\pi\ ï\ 8 \qquad \text{... (4)}$$

ਸਮੀਕਰਨ (3) ਅਤੇ (4) ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A = $4\pi$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਨ 5.** ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = 0$ ਅਤੇ $x = ae$, ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $b^2 = a^2\,(1\ ï\ e^2)$ ਅਤੇ $e < 1$ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰ BOB′RFSB ਇਲਿਪਸ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ordinates $x = 0$ ਅਤੇ $x = ae$ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (ਚਿੱਤਰ 8.12)A




ਚਿੱਤਰ 8.12

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਖੇਤਰ BOB′RFSB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 2\int_0^{ae} y dx = 2\frac{b}{a}\int_0^{ae} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{ï1}\frac{x}{a}\right]_0^{ae}$$

$$= \frac{2b}{2a}\left[ae\sqrt{a^2 - a^2e^2} + a^2\sin^{ï1} e\right]$$

$$= ab\left[e\sqrt{1 - e^2} + \sin^{ï1} e\right]$$

## ਅਭਿਆਸ 8.1

1. ਵਕਰ $y^2 = x$, ਰੇਖਾਵਾਂ $x = 1, x = 4$ ਅਤੇ $x$-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਵਕਰ $y^2 = 9x, x = 2, x = 4$ ਅਤੇ $x$-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ $x^2 = 4y, y = 2, y = 4$ ਅਤੇ $y$-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 4$, ਰੇਖਾ $x = \sqrt{3}\,y$ ਅਤੇ $x$-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ ਦੁਆਰਾ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = a^2$ ਦੇ ਕੱਟੇ ਗਏ ਛੋਟੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਜੇਕਰ ਵਕਰ $x = y^2$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x = 4$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਰੇਖਾ $x = a$ ਨਾਲ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $a$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਅਤੇ $y = |x|$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x = 4y$ ï 2 ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਵਕਰ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x = 3$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 12 ਅਤੇ 13 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

12. ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 4$ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = 0, x = 2$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

    (A) $\pi$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

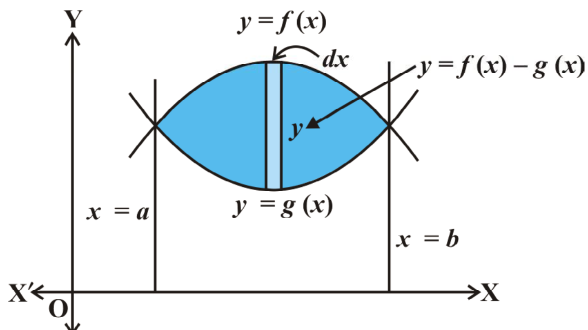
13. ਵਕਰ $y^2 = 4x$, $y$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $y = 3$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

    (A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

## 8.3 ਦੋ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (Area Between Two Curves)

ਲੈਬਨਿਜ ਦੀ ਚੇਤਨਾ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਦੀ ਸਚਾਈ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਸੇ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਛੋਟੀਆਂ-ਛੋਟੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰ ਕੇ, ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਇਨਿਟਗਰੇਸ਼ਨ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ, ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਅਤੇ $y = g(x)$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ ਇੱਥੇ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) \geq g(x)$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.13 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਤੋਂ $y$ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ ਇਹਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।

ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਸਥਾਪਨਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਣਾ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.13 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਧਾਰੀ ਪੱਟੀ ਦੀ ਉਚਾਈ $f(x)$ ï $g(x)$ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ $dx$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲ




ਚਿੱਤਰ 8.13

$$dA = [f(x) \text{ ï } g(x)]\, dx, \quad \text{ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ } A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

ਦੂਜਾ ਬਦਲ :

A = [ ਵਕਰ $y = f(x)$, $x$- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a, x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ]

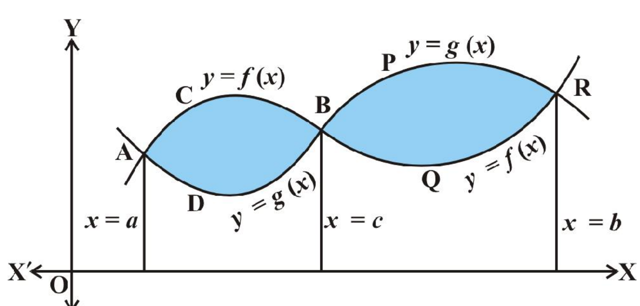
ï [ ਵਕਰ $y = g(x)$, $x$- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a, x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ]

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \text{ ਜਿੱਥੇ } [a, b] \text{ ਵਿੱਚ } f(x) \ge g(x)$$

ਜਦਕਿ $[a, c]$ ਵਿੱਚ $f(x) \ge g(x)$ ਅਤੇ $[c, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) \le g(x)$ ਇੱਥੇ $a < c < b$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.14 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਵਰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

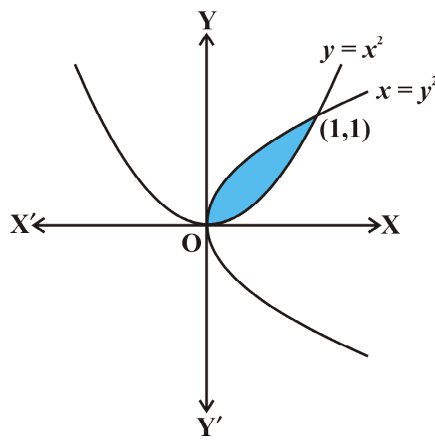
ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ ACBDA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ BPRQB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$$




ਚਿੱਤਰ 8.14

ਉਦਾਹਰਨ 6. ਦੋ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਅਤੇ $y^2 = x$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.15

ਹੱਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.15 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ O (0, 0) ਅਤੇ A (1, 1) ਹਨ। ਇੱਥੇ $y^2 = x$ ਅਰਥਾਤ $y = \sqrt{x} = f(x)$ ਅਤੇ $y = x^2 = g(x)$, ਹਨ। ਇੱਥੇ [0, 1] ਵਿੱਚ $f(x) \geq g(x)$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ਉਦਾਹਰਨ 7. $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 8x$ ਅਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4x$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

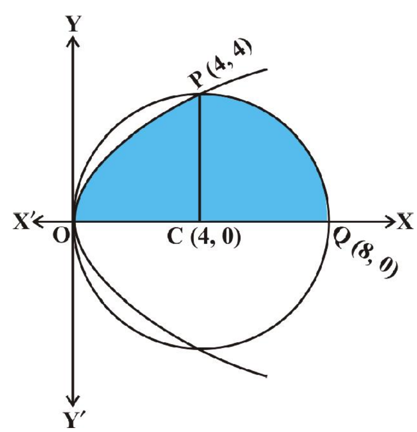
ਹੱਲ : ਚੱਕਰ ਦਾ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਮੀਕਰਨ $x^2 + y^2 = 8x$, $(x ï\ 4)^2 + y^2 = 16$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ (4, 0) ਹੈ ਅਤੇ ਅਰਧਵਿਆਸ 4 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ। ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4x$ ਦੇ ਨਾਲ ਇਸਦੇ ਕੱਟਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$x^2 + 4x = 8x$$

ਅਰਥਾਤ $x^2\ ï\ 4x = 0$

ਅਰਥਾਤ $x\,(x\ ï\ 4) = 0$

ਅਰਥਾਤ $x = 0, x = 4$



ਚਿੱਤਰ 8.16

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ O(0, 0) ਅਤੇ $x$- ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ P(4,4) ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 8. 16 ਤੋਂ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ OPQCO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= (ਖੇਤਰ OCPO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ) + (ਖੇਤਰ PCQP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

$$= \int_0^4 y dx + \int_4^8 y dx$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx + \int_4^8 \sqrt{4^2-(x-4)^2}\,dx \quad \text{(ਕਿਉਂ?)}$$

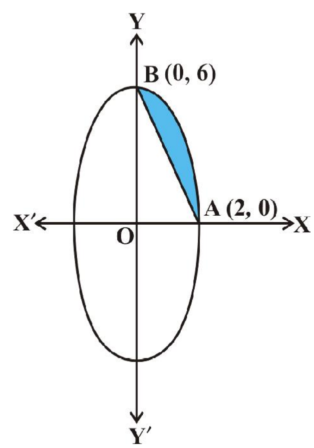
$$= 2\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 + \int_0^4 \sqrt{4^2-t^2}\,dt, \quad \text{tg} \quad x-4=t$$

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{t}{2}\sqrt{4^2-t^2} + \frac{1}{2}\times 4^2 \times \sin^{-1}\frac{t}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{4}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 4^2 \times \sin^{-1}1\right] = \frac{32}{3} + \left[0 + 8\times\frac{\pi}{2}\right] = \frac{32}{3} + 4\pi = \frac{4}{3}(8+3\pi)$$

ਉਦਾਹਰਨ 8. ਚਿੱਤਰ 8.17 ਵਿੱਚ AOBA ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਇਲਿਪਸ $9x^2 + y^2 = 36$ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ OA = 2 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ OB = 6 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ = ਲਘੂ ਚਾਪ AB ਅਤੇ ਜੀਵਾ AB ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਇਆ ਸਮੀਕਰਨ $9x^2 + y^2 = 36$, ਅਰਥਾਤ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$ ਅਰਥਾਤ $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੀ ਸ਼ਕਲ ਚਿੱਤਰ 8.17 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚਿੱਤਰ ਵਰਗੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਜੀਵਾ AB ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ :



ਚਿੱਤਰ 8.17

$$y - 0 = \frac{6-0}{0-2}(x-2)$$

ਅਰਥਾਤ $\quad y = -3(x-2)$

ਅਰਥਾਤ $\quad y = -3x + 6$

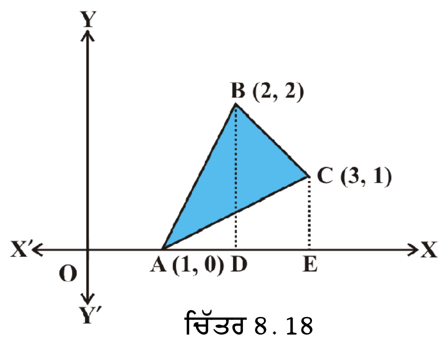
ਚਿੱਤਰ 8.17 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 3\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^2 (6-3x)\,dx \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 3\left[\frac{2}{2}\times 0 + 2\sin^{-1}(1)\right] - \left[12 - \frac{12}{2}\right] = 3\times 2\times\frac{\pi}{2} - 6 = 3\pi - 6$$

ਉਦਾਹਰਨ 9. ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ (1, 0), (2, 2) ਅਤੇ (3, 1) ਹਨ।




ਚਿੱਤਰ 8.18

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A (1, 0), B (2, 2) ਅਤੇ C (3, 1) ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 8.18)

Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = Δ ABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਲੰਬ ਚਤਰਭੁਜ BDEC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ï Δ AEC ਖੇਤਰਫਲ

ਹੁਣ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC ਅਤੇ CA ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $y = 2(x$ ï $1), y = 4$ ï $x, y = \frac{1}{2}(x$ ï $1)$ ਹਨ।

çÅ Å à ö » Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_1^2 2(x-1)\,dx + \int_2^3 (4-x)\,dx - \int_1^3 \frac{x-1}{2}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3$$

$$= 2\left[\left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] + \left[\left(4\times 3 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(4\times 2 - \frac{2^2}{2}\right)\right]$$

$$\text{ï } \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^2}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{3}{2}$$

ਉਦਾਹਰਨ 10. ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ $x^2 + y^2 = 4$ ਅਤੇ $(x$ ï $2)^2 + y^2 = 4$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਹਨ :

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ $$(x \text{ ï } 2)^2 + y^2 = 4 \quad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਨ (1) ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਚੱਕਰ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 2 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ। ਸਮੀਕਰਨ (2) ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਚੱਕਰ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ C(2, 0) ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 2 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ। ਸਮੀਕਰਨ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$(x \text{ ï } 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

ਅਰਥਾਤ $$x^2 \text{ ï } 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2$$

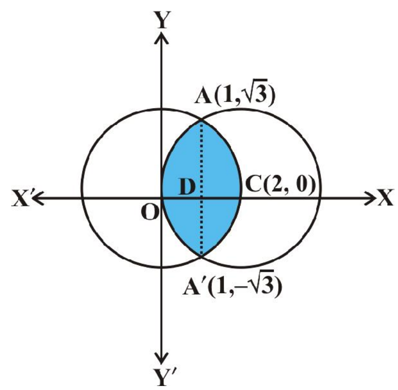
ਅਰਥਾਤ $x = 1$ ਜਿਸ ਨਾਲ $y = \pm\sqrt{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ $A(1, \sqrt{3})$ ਅਤੇ $A'(1,$ ï $\sqrt{3})$ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.19 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ O ACA′O ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 2 [ਖੇਤਰ ODCAO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ] (ਕਿਉਂ ?)

= 2 [ਖੇਤਰ ODAO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ DCAD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ]

$$= 2\left[\int_0^1 y\,dx + \int_1^2 y\,dx\right]$$



ਚਿੱਤਰ 8.19

$$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\right]$$

(ਕਿਉਂ)

$$= 2\left[\frac{1}{2}\,(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1 +$$

$$2\left[\frac{1}{2}\,x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1 + \left[x\sqrt{4-x^2} + 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} + 4\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) - 4\sin^{-1}(-1)\right] + \left[4\sin^{-1}1 - \sqrt{3} - 4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right) + 4\times\frac{\pi}{2}\right] + \left[4\times\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \left(-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + \left(2\pi - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

## ਅਭਿਆਸ 8.2

**1.** ਪੈਰਾਬੋਲਾ $x^2 = 4y$ ਅਤੇ ਚੱਕਰ $4x^2 + 4y^2 = 9$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**2.** ਵਕਰਾਂ $(x$ ï $1)^2 + y^2 = 1$ ਅਤੇ $x^2 + y^2 = 1$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**3.** ਵਕਰਾਂ $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$ ਅਤੇ $x = 3$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**4.** ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ (ï 1, 0), (1, 3) ਅਤੇ (3, 2) ਹਨ।

**5.** ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨ $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ ਅਤੇ $x = 4$ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਅਤੇ 7 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ :

**6.** ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 4$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x + y = 2$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਛੋਟੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

(A) 2 (π ï 2) (B) π ï 2 (C) 2π ï 1 (D) $2(\pi + 2)$

**7.** ਚੱਕਰ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ $y = 2x$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

## ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

**ਉਦਾਹਰਨ 11.** ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4ax$ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ (latus-rectum) ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

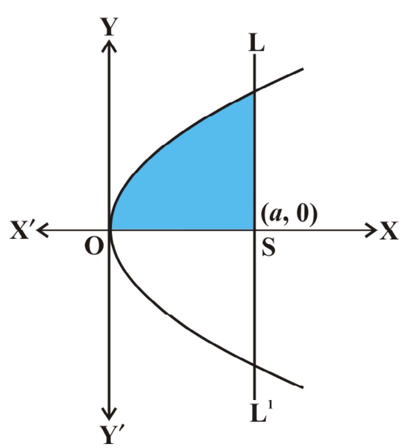
**ਹੱਲ :** ਚਿੱਤਰ 8.20 ਤੋਂ, ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4ax$ ਦਾ ਸਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ। ' latus-rectum LSL ਜੀਵਾਂ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ $x = a$ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਖੇਤਰ OLL′O ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 2 (ਖੇਤਰ OLSO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

$$= 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$$

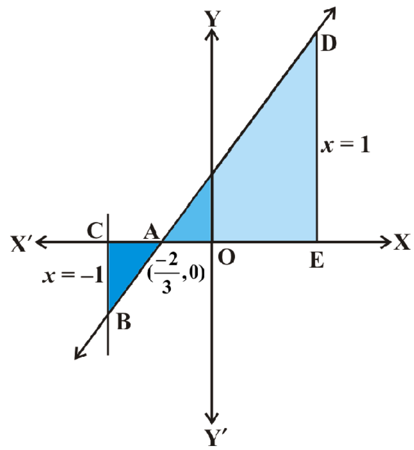
$$= 2 \times 2\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{8}{3}\sqrt{a}\left[a^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3}a^2$$




ਚਿੱਤਰ 8.20

ਉਦਾਹਰਨ 12. ਰੇਖਾ $y = 3x + 2$, $x$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ ordinates $x$ = ï 1 ਅਤੇ $x = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.21

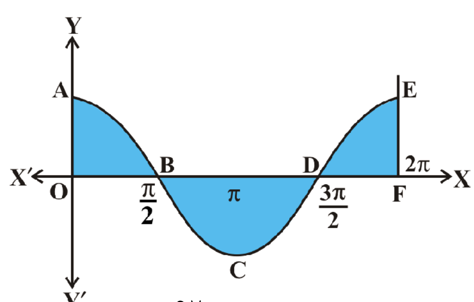
ਹੱਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.21 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਰੇਖਾ $y = 3x + 2$, $x$- ਧੁਰੇ ਨੂੰ $x = \frac{-2}{3}$ ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $x \in \left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਗਰਾਫ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਹੈ ਅਤੇ $x \in \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਗਰਾਫ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੈ।

ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ ACBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ ADEA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \left|\int_{-1}^{\frac{-2}{3}} (3x+2)dx\right| + \int_{\frac{-2}{3}}^{1} (3x+2)dx$$

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}}\right| + \left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1} = \frac{1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{13}{3}$$

ਉਦਾਹਰਨ 13. $x = 0$ ਅਤੇ $x = 2\pi$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਵਕਰ $y = \cos x$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.22

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 8.22 ਤੋਂ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

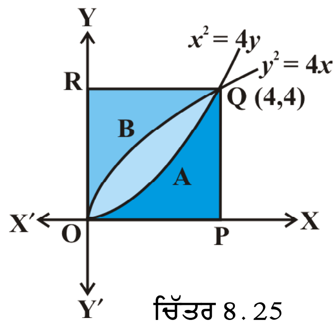
= ਖੇਤਰ OABO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ BCDB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ DEFD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\, dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 1 + 2 + 1 = 4$$

ਉਦਾਹਰਨ 14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਕਰ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ $x^2 = 4y$, ਰੇਖਾਵਾਂ $x = 0, x = 4, y = 4$ ਅਤੇ $y = 0$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਵਰਗ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 8.25

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਪੇਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ $x^2 = 4y$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ (0,0) ਅਤੇ (4,4) ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.23 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਵਕਰਾਂ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ $x^2 = 4y$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ OAQBO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[2 \times \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \qquad \ldots (1)$$

ਦੁਬਾਰਾ ਵਕਰਾਂ $x^2 = 4y$, $x = 0$, $x = 4$ ਅਤੇ $x$-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ OPQAO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}\left[x^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad \ldots (2)$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਕਰ $y^2 = 4x$, $y$-ਧੁਰੇ $y = 0$ ਅਤੇ $y = 4$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ OBQRO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^4 x dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \frac{1}{12}\left[y^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਨਾਂ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

ਖੇਤਰ OAQBO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ OPQAO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ OBQRO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਰਥਾਤ, ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ $x^2 = 4y$ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਖੇਤਰਫਲ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਰਗ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 15. ਖੇਤਰ $\{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1, 0 \le y \le x + 1, 0 \le x \le 2\}$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਖੇਤਰ ਦਾ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਤਿਆਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸ ਦਾ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹ ਖੇਤਰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਖੇਤਰ ਹੈ :

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1\}$$
$$A_2 = \{(x, y) : 0 \le y \le x + 1\}$$
ਅਤੇ
$$A_3 = \{(x, y) : 0 \le x \le 2\}$$

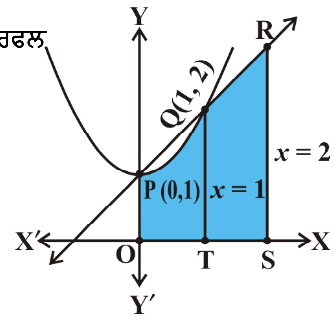
ਵਕਰਾਂ $y = x^2 + 1$ ਅਤੇ $y = x + 1$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ P(0, 1) ਅਤੇ Q(1, 2) ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 8.24 ਨਾਲ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰ, ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ OPQRSTO ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= ਖੇਤਰ OTQPO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ TSRQT ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^1 (x^2+1)\,dx + \int_1^2 (x+1)\,dx \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right]_0^1 + \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}+1\right)-0\right] + \left[(2+2)-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] = \frac{23}{6}$$




ਚਿੱਤਰ 8.24

## *ਅਧਿਆਇ 8 ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**1.** ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰਾਂ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
 (i) $y = x^2$; $x = 1$, $x = 2$ ਅਤੇ $x$- ਧੁਰਾ
 (ii) $y = x^4$; $x = 1$, $x = 5$ ਅਤੇ $x$- ਧੁਰਾ

**2.** ਵਕਰਾਂ $y = x$ ਅਤੇ $y = x^2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**3.** ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$ ਅਤੇ $y = 4$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**4.** $y = |x+3|$ ਦਾ ਗਰਾਫ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ $\int_{-6}^{0} |x+3|\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**5.** $x = 0$ ਅਤੇ $x = 2\pi$ ਅਤੇ ਵਕਰ $y = \sin x$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**6.** ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4ax$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $y = mx$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**7.** ਪੈਰਾਬੋਲਾ $4y = 3x^2$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $2y = 3x + 12$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**8.** ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਛੋਟੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**9.** ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਛੋਟੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**10.** ਪੈਰਾਬੋਲਾ $x^2 = y$, ਰੇਖਾ $y = x + 2$ ਅਤੇ $x$-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**11.** ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵਕਰ $|x|+|y|=1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
[ਸੰਕੇਤ : ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰ, ਰੇਖਾਵਾਂ $x + y = 1$, $x$ï $y = 1$, ï $x + y = 1$ ਅਤੇ ï $x$ ï $y = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਹੈ।]

**12.** ਵਕਰਾਂ $\{(x, y) : y \geq x^2$ ਅਤੇ $y = |x|\}$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**13.** ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC, ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ

ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ A(2, 0), B (4, 5) ਅਤੇ C (6, 2) ਹੈ।

**14.** ਇੰਟੀਗ੍ਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਰੇਖਾਵਾਂ $2x + y = 4$, $3x$ ï $2y = 6$ ਅਤੇ $x$ ï $3y + 5 = 0$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**15.** ਖੇਤਰ $\{(x, y) : y^2 \le 4x,\ 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ :

**16.** ਵਕਰ $y = x^3$, $x$- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ ordinates $x =$ ï $2$, $x = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

(A) ï 9 (B) $\frac{-15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

**17.** ਵਕਰ $y = x\,|x|$, $x$- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x =$ ï $1$ ਅਤੇ $x = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

[ਸੰਕੇਤ : $y = x^2$ ਜਦ ਕਿ $x > 0$ ਅਤੇ $y =$ ï $x^2$ ਜਦ $x < 0$]

**18.** $x^2 + y^2 = 16$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜੋ ਕਿ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 6$ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ :

(A) $\frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$ (B) $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ (C) $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$ (D) $\frac{4}{3}(8\pi + \sqrt{3})$

**19.** $y$-ਧੁਰੇ $y = \cos x$ ਅਤੇ $y = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

(A) $2(\sqrt{2} - 1)$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2} + 1$ (D) $\sqrt{2}$

## *ਸਾਰ*

- ਵਕਰ $y = f(x)$, $x$- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ $(b > a)$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੂਤਰ : ਖੇਤਰਫਲ $= \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ਹੈ।
- ਵਕਰ $x = \phi(y)$, $y$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = c$, $y = d$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੂਤਰ :

  ਖੇਤਰਫਲ: $= \int_c^d x\,dy = \int_c^d \phi(y)\,dy$ ਹੈ।
- ਦੋ ਵਕਰਾਂ $y = f(x)$, $y = g(x)$ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a$, $x = b$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

  ਖੇਤਰਫਲ: $= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$, ਜਿੱਥੇ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) \ge g(x)$
- ਜਦਕਿ $[a, c]$ ਵਿੱਚ $f(x) \ge g(x)$ ਅਤੇ $[c, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) \le g(x)$, $a < c < b$, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

  ਖੇਤਰਫਲ $= \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$

## *ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ*

ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦਾ ਮੂਲ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਵਿਕਾਸ ਕਾਲ ਤੋਂ ਹੀ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਹ ਪੁਰਾਣੇ ਯੂਨਾਨੀ ਗਣਿਤਕਾਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਵਿਕਸਿਤ (exhaustion) ਵਿਧੀ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਜਨਮ ਸਮਤਲ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਠੋਸ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ (exhaustion) ਵਿਧੀ, ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਖੀਣਤਾ (exhaustion) ਵਿਧੀ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਕਾਸ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਯੂਡੋਕਸ (Eudoxus (440 ਈਸਾ ਪੂਰਵ) ਅਤੇ ਆਰਕੀਮੀਡੀਜ਼ (Archimedes (300 ਈਸਾ ਪੂਰਵ) ਦੇ ਕੰਮਾਂ ਨਾਲ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਕਲਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਵਿਕਾਸ ਈਸਾ ਤੋਂ 17ਵੀਂ ਸਦੀ ਬਾਦ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। ਸੰਨ 1665 ਵਿੱਚ ਨਿਊਟਨ ਨੇ ਕਲਨ ਤੇ ਆਪਣਾ ਕੰਮ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (Theory of fluxion) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਵਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ। ਨਿਊਟਨ ਨੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਨਾਲ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਇਆ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ) ਜਾਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਉਲਟ ਵਿਧੀ (Inverse Method of tangents) ਦਾ ਨਾਂ ਦਿੱਤਾ।

1684ï 86, ਦੇ ਵਿੱਚ ਲਿਬਨਿਜ (Leibnitz) ਨੇ (Acta Eruditorum) ਵਿੱਚ ਆਰਟੀਕਲ ਛਾਪਿਆ ਜਿਸ ਨੂੰ (Calculous Summatorius) ਨਾਂ ਦਿੱਤਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਅਣਗਣਿਤ ਛੋਟੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸੀ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸੰਕੇਤ 'ô'ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ। ਸੰਨ 1696 ਈ. ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਜੇਂ ਬਰਨੋਲੀ (J.Bernoulli) ਦੇ ਸੁਝਾਅ ਨੂੰ ਮੰਨ ਕੇ ਆਪਣੇ ਆਰਟੀਕਲ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਕਲਨ (Calculus Integrali) ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ। ਇਹ ਤੋਂ ਨਿਊਟਨ ਵੱਲੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਉਲਟ ਵਿਧੀ (Inverse Method of tangents) ਦੇ ਸੰਗਤ ਸੀ।

ਨਿਊਟਨ ਅਤੇ ਲਿਬਨਿਜ ਦੋਨਾਂ ਨੇ ਪੂਰਨ ਤੌਰ ਤੇ ਅਜ਼ਾਦ ਰਸਤਾ ਅਪਣਾਇਆ ਜੋ ਬਿਲਕੁਲ ਵੱਖ ਸਨ। ਪਰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵਿਹਾਰਕ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਪਾਏ ਗਏ। ਲੈਵਨਿਜ ਨੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ।

ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਤਾਰੀਫ਼ ਕੀਤੀ।

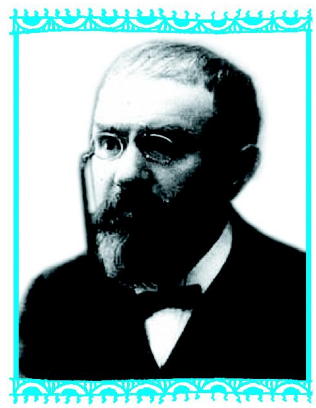
ਸਿੱਟਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀਆਂ ਆਧਾਰਭੂਤ ਧਾਰਨਾਵਾਂ, ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਅਤੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਕਲਨ ਨਾਲ ਇਸਦੇ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਪੀ . ਡੀ . ਫਰਮੈਟ, ਆਈ . ਨਿਊਟਨ ਅਤੇ ਜੀ . ਲਿਬਨਿਜ ਦੇ ਕੰਮਾਂ ਦੁਆਰਾ 17 ਵੀ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ, ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ 19ਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਏ . ਐਲ . ਕੋਚੀ (A.L.Cauchy) ਵੱਲੋਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਲੀ ਸੋਫੀ (Lie Sophie) ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕੁਟੇਸ਼ਨ ਹੈ : "It may be said that the conceptions of differential quotient and integral which in their origin certainly go back to Archimedes were introduced in Science by the investigations of Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat and Wallis... The discovery that differentiation and integration are inverse operations belongs to Newton and Leibnitz".

ਅਧਿਆਇ 9

# ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ
# Differential Equations

❖ *He who seeks for methods without having a definite problem in mind seeks for the most part in vain – D. HILBERT* ❖

## 9.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)



Henri Poincare
(1854-1912 )

ਜਮਾਤ XI ਅਤੇ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ, ਕਿ ਇੱਕ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਫਲਨ '$f$' ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ; ਮਤਲਬ ਕਿਸੇ ਫਲਨ $f$ ਦੇ ਦੱਸੇ ਹੋਏ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਦਰਸਾਏ $x$ ਲਈ, $f'(x)$ ਕਿਵੇਂ ਲੱਭਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਗਣਿਤ ਦੇ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ, ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਫਲਨ $f$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ $g$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ $f$ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਭਿਆ (ਪਤਾ) ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਲੜੀਬੰਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ $g$ ਲਈ ਫਲਨ $f$ ਲੱਭਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \text{ ਇੱਥੇ } y = f(x) \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਦੀ ਬਕਾਇਦਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਭੌਤਿਕ, ਰਸਾਇਣਿਕ ਵਿਗਿਆਨ, ਜੀਵ-ਵਿਗਿਆਨ, ਰਾਜਨੀਤਕ ਭੂਗੋਲ, ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਆਦਿ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਖੀਰ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਆਧੁਨਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਖੋਜਾਂ ਲਈ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ ਨਾਲ ਪੜ੍ਹਨ ਦੀ ਬਹੁਤ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਕੁਝ ਮੂਲ ਰੂਪ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਅਤੇ ਖਾਸ ਹੱਲ, ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣਾ (ਪੈਦਾ) ਕਰਨਾ, ਪਹਿਲੇ ਕੋਟੀ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਡਿਗਰੀ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ (ਤਰੀਕੇ) ਅਤੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

## 9.2 ਮੌਲਿਕ ਸੰਕਲਪ (Basic Concepts)

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਹੇਠ ਲਿਖਿਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹਾਂ

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \ldots (2)$$

$$x + y = 7 \quad \ldots (3)$$

ਆਉ, ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਈ ਸਮੀਕਰਣ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \ldots (4)$$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਸੁਤੰਤਰ ਅਤੇ/ਨਿਭਰਰ (ਇੱਕ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਵਿੱਚ ਚਲ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ($x$) ਦੇ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ ($y$) ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ ਸਾਪੇਖ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਦੇ ਨਾਲ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਵੇ, ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੁਤੰਤਰ (ਅਜ਼ਾਦ) ਚਲ ਦਾ, ਨਿਰਭਰ ਚਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਵੇ, (ਆਮ ਵਿਆਪਕ) ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ :

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \quad \ldots (5)$$

ਇੱਕ ਆਮ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਬੇਸ਼ੱਕ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵੀ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਆਸ਼ਂਕ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਪਰ ਇਸ ਸਤਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਆਮ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਤੱਕ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਅੱਗੇ ਅਸੀਂ ਆਮ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਲਈ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਹੀ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

**ਟਿੱਪਣੀ**

1. ਅਸੀਂ ਡਿਫਰੈਸ਼ਨਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਿਸ਼ਾਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

2. ਉੱਚੇ ਦਰਜੇ ਵਾਲੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾ ਦੇ ਲਈ, ਜ਼ਿਆਦਾ ਡੈਸ਼ (dashes) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਗੈਰ ਸੁਵਿਧਾਜਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $n$ ਵੇ ਕੋਟੀ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{d^ny}{dx^n}$ ਦੇ ਵਾਸਤੇ ਅਸੀਂ ਸੰਕੇਤ $y_n$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

### 9.2.1 *ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (Order of a differential equation)*

ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ, ਉੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਉੱਚ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ, ਉਸ ਵਿੱਚ ਪਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ ਦਾ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਨਾਲ, ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ :

$$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad \text{... (6)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad \text{... (7)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0 \qquad \text{...(8)}$$

ਸਮੀਕਰਨ (6)] (7) ਅਤੇ (8) ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵੱਡੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਹਾਜ਼ਰ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ,2 ਅਤੇ 3 ਹੈ।

### 9.2.2 *ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਡਿਗਰੀ/ਕੋਟੀ (Degree of a differential equation)*

ਕਿਸੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਡਿਗਰੀ/ਕੋਟੀ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਮੁੱਖ ਬਿੰਦੂ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਬਹੁਪਦੀ $y', y'', y'''$ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{... (9)}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - \sin^2 y = 0 \qquad \text{... (10)}$$

$$\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{... (11)}$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (9) $y'''$, $y''$ ਅਤੇ $y'$ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।ਸਮਕੀਰਣ (10) $y'$ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਹੈ। (ਜੇਕਰ ਇਹ $y$ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਕੋਟੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।ਪਰ ਸਮੀਕਰਣ (11) $y'$ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਡੈਰੀਵੇਟਵਾਂ ਦਾ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜ਼ੂਦ ਉੱਚਤਮ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਦੀ ਘਾਤ (ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ)

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (6)] (7)] (8) ਅਤੇ (9) ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦੀ ਘਾਤ ਇੱਕ ਹੈ, ਸਮੀਕਰਣ (10) ਦੀ ਘਾਤ 2 ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (11) ਦੀ ਘਾਤ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

**ਉਦਾਹਰਨ 1.** ਹੇਠ ਦਰਸਾਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$  (ii) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$

**ਹੱਲ :**

(i) ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜ਼ੂਦ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{dy}{dx}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 1 ਹੈ। ਇਹ $y'$ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਘਾਤ 1 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸੈਮੀਕਰਣ ਦੀ ਕੋਟੀ/ਡਿਗਰੀ 1 ਹੈ।

(ii) ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜ਼ੂਦ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 2 ਹੈ। ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਘਾਤ 1 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 1 ਹੈ।

(iii) ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜ਼ੂਦ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $y'''$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 3 ਹੈ। ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਬਹੁਪਦੀ) ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਦਰਸਾਈ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 9.1

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ (ਜੇਕਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ) ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$  **2.** $y' + 5y = 0$  **3.** $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

**4.** $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$  **5.** $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x$

**6.** $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$ **7.** $y''' + 2y'' + y' = 0$

**8.** $y' + y = e^x$ **9.** $y'' + (y')^2 + 2y = 0$ **10.** $y'' + 2y' + \sin y = 0$

**11.** ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਡਿਗਰੀ

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ ਦੀ ਘਾਤ ਹੈ।

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

**12.** ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ।

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

## 9.3. ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਅਤੇ ਖਾਸ ਹੱਲ (General and Particular Solutions of a Differential Equation)

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਹੈ :

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$\sin^2 x \text{ ï } \cos x = 0 \quad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦਾ ਹੱਲ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ ਜਦੋਂ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਅਨਜਾਣ ਸਮੀਕਰਣ $x$ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{... (3)}$$
ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਇਸ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ $\phi$ ਹੈ ਜੋ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ ਭਾਵ ਜਦੋਂ ਇਸ ਫਲਨ $\phi$ ਨੂੰ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਅਨਜਾਣ $y$ (ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ) ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਤੇ ਭਰ ਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਫਲਨ $y = \phi(x)$ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਫਲਨ (ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਤਰ) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਫਲਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

$$y = \phi(x) = a \sin(x + b) \quad \text{... (4)}$$

ਇੱਥੇ $a, b \in \mathbf{R}$. ਜੇਕਰ ਇਸ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਦੋਨੋਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $a$ ਅਤੇ $b$ ਨੂੰ ਕੁਝ ਖਾਸ ਕੀਮਤ $a = 2$ ਅਤੇ $b = \frac{\pi}{4}$ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਲਾ ਫਲਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$y = \phi_1(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \ldots (5)$$

ਜੇਕਰ ਇਸ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਮੁੜ ਤੋਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\phi_1$ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਫਲਨ $\phi$ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ $a, b$ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਫਲਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਹੱਲ, $\phi_1$ ਜੋ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਵਿੱਚ $\phi_1$ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਨੂੰ ਖਾਸ ਕੀਮਤ ਦੇਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, ਹੱਲ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ $a$ ਅਤੇ $b$ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਜਿਹਾ ਹੱਲ, ਜੋ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਆਪਕ

ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਨੂੰ ਖਾਸ ਕੀਮਤ ਦੇਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ, ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $y = e^{ï 3x}$, ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ $y = e^{ï 3x}$ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{ï 3x} \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਚਲ $x$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{ï 3x}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ ਅਤੇ $y$ ਦੀ ਕੀਮਤ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਭਰ ਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= 9e^{ï 3x} + (ï\, 3e^{ï 3x})\ ï\ 6.e^{ï 3x} = 9\, e^{ï 3x}\, ï\ 9\, e^{ï 3x} = 0 =$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਪੜਤਾਲ ਕਿ ਫਲਨ $y = a \cos x + b \sin x$, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $a, b \in \mathbf{R}$, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ

$$y = a \cos x + b \sin x \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $x$, ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin x + b \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a \cos x - b \sin x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ਅਤੇ $y$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਭਰ ਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= (-a \cos x - b \sin x) + (a \cos x + b \sin x) = 0 =$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 9.2

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ (ਸਪੱਸ਼ਟ ਅਤੇ ਅਸਪੱਸ਼ਟ) ਸੰਗਤ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

1. $y = e^x + 1$ : $y'' - y' = 0$
2. $y = x^2 + 2x + C$ : $y' - 2x - 2 = 0$
3. $y = \cos x + C$ : $y' + \sin x = 0$
4. $y = \sqrt{1+x^2}$ : $y' = \frac{xy}{1+x^2}$
5. $y = Ax$ : $xy' = y \; (x \neq 0)$
6. $y = x \sin x$ : $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ ($x \neq 0$ ਅਤੇ $x > y$ ਅਰਥਾਤ $x < -y$)
7. $xy = \log y + C$ : $y' = \frac{y^2}{1 - xy} \; (xy \neq 1)$
8. $y - \cos y = x$ : $(y \sin y + \cos y + x)\, y' = y$

**9.** $x + y = \tan^{-1}y$ : $y^2 y' + y^2 + 1 = 0$

**10.** $y = \sqrt{a^2 - x^2}\; x \in (-a, a) : x + y\dfrac{dy}{dx} = 0\ (y \neq 0)$

**11.** ਚਾਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੀ ਕੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**12.** ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੀ ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਚਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ।

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

## 9.4. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਵਾਲੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ (Formation of a Differential Equation whose Solution is Given)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0 \quad \ldots (1)$$

ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ (&1] 2) ਹੈ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1 ਇਕਾਈ ਹੈ।

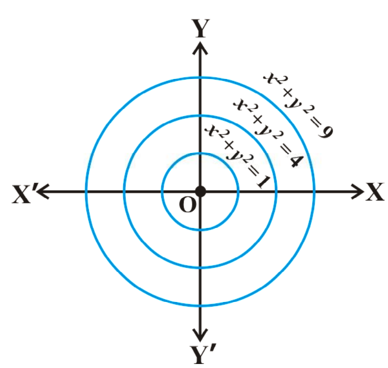
ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ $x$, ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y},\ (y \neq 2) \quad \ldots (2)$$

ਇਹ ਇੱਕ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ (ਖੰਡ (ਭਾਗ) 9-5-1 ਦਾ ਉਦਾਹਰਨ 9 ਦੇਖੋ) ਕਿ ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਮੈਂਬਰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵਤਰ ਹੈ। ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰੀਏ :

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots (3)$$

$r$, ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕੀਮਤਾਂ ਦੇਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਅਲੱਗ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਉਦਾਹਰਣ $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ ਆਦਿ (ਚਿੱਤਰ 9.1 ਦੇਖੋ)। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਸਮਕੇਂਦਰੀ ਵਤਰਾਂ (ਚੱਕਰਾਂ) ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਭਿੰਨ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 9.1

ਸਾਡਾ ਧਿਆਨ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ ਦੁਆਰਾ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਹ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $r$ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੋਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਕੁਲ ਦੇ ਭਿੰਨ ਮੈਂਬਰਾਂ ਲਈ $r$ ਦਾ ਮਾਨ ਭਿੰਨ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ਅਤੇ} \quad x + y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \dots (4)$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਸਮਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਆਓ ਫਿਰ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

$$y = mx + c \qquad \dots (5)$$

ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) $m$ ਅਤੇ $c$, ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਕੀਮਤਾਂ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ

$y = x$ $(m = 1, \ c = 0)$

$y = \sqrt{3}\,x$ $(m = \sqrt{3}, \ c = 0)$

$y = x + 1$ $(m = 1, \ c = 1)$

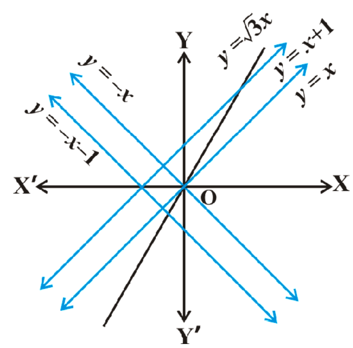
$y = -x$ (m = ï 1, c = 0)

y = – x ï 1 (m = ï 1, c = ï 1)

ਆਦਿ (ਚਿੱਤਰ 9.2) ਵੇਖੋ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (5) ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $m$, $c$ ਪ੍ਰਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਹੈ।

ਹੁਣ ਸਾਡੀ ਦਿਲਚਸਪੀ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ ਦੁਆਰਾ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਹ ਸਮੀਕਰਣ $m$ ਅਤੇ $c$ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੁਲ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੈਂਬਰਾਂ ਲਈ $m$ ਅਤੇ $c$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਿੰਨ ਹੈ। ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੋ ਵਾਰ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ



ਚਿੱਤਰ 9.2

$$\frac{dy}{dx} = m \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \dots (6)$$

ਸਮੀਕਰਨ (6)] ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸਮੀਕਰਣ (3) ਅਤੇ (5) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਅਤੇ (6) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

### 9.4.1 *f ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿ.ਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ (Procedure to form a Differential Equation that will represent a given Family of curves)*

(a) ਜੇਕਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਤਰ ਦਾ ਪਰਿਵਾਰ $F_1$ ਕੇਵਲ ਇਕ ਪ੍ਰਾਚਲ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$F_1(x, y, a) = 0 \qquad \dots (1)$$

ਉਦਾਹਰਣ : ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = ax$ ਦਾ ਕੁਲ $f(x, y, a) : y^2 = ax$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $y', y, x,$ ਅਤੇ $a$ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$g(x, y, y', a) = 0 \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚੋਂ $a$ ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\mathrm{F}(x, y, y') = 0 \qquad \ldots (3)$$

(b) ਜੇਕਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰਾਂ ਦਾ ਕੁਲ $\mathrm{F}_2$ ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) $a,$ ਅਤੇ $b$ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\mathrm{F}_2(x, y, a, b) = 0 \qquad \ldots (4)$$

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $y', x, y, a, b$ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$g(x, y, y', a, b) = 0 \qquad \ldots (5)$$

ਪਰ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦੋ ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਤੀਜੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ, ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$h(x, y, y', y'', a, b) = 0 \qquad \ldots (6)$$

ਸਮੀਕਰਣ (4)] (5) ਅਤੇ (6) ਤੋਂ $a$ ਅਰਥਾਤ $b$ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\mathrm{F}(x, y, y', y'') = 0 \qquad \ldots (7)$$

**ਟਿੱਪਣੀ** ਕਿਸੀ ਵਤਰ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਓਨਾ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿੰਨਾ, ਉਸ ਵਤਰ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਅਚਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 4.** ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ $y = mx$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ $m$ ਇੱਕ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ

$$y = mx \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = m$$

$m$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $y = \frac{dy}{dx} \cdot x$ ਭਾਵ $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਪ੍ਰਾਚਲ $m$ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 5.** ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਕੁਲ $y = a\sin(x + b)$, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $a$, $b$ ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਅਚੱਲ ਹੈ, ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = a\sin(x + b)$ ... (1)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = a\cos(x+b) \quad \text{... (2)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \text{ï}\ a\sin(x+b) \quad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ $a$ ਅਤੇ $b$ ਨੂੰ ਅਲੋਪ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{... (4)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਅਚਲ $a$ ਅਤੇ $b$ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਲੋੜੀਂਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

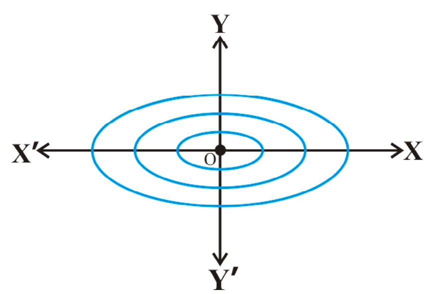
**ਉਦਾਹਰਣ 6.** ਅਜਿਹੇ ਐਲਿਪਸ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸੰਯੁਗਮੀ ਨਾਭ $x$-ਧੁਰੇ ਤੇ ਹੈ ਪਰ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਐਲਿਪਸ ਦੇ ਕੁਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 9.3 ਦੇਖੋ।)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{... (1)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $$\frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-b^2}{a^2} \quad \text{... (2)}$$



ਚਿੱਤਰ 9.3

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

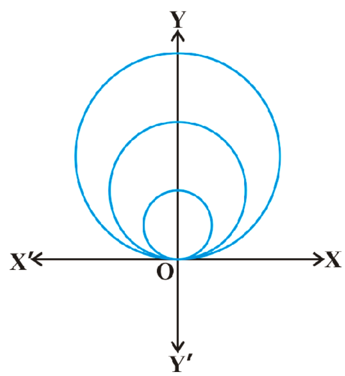
$$\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

ਅਰਥਾਤ $$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ ï } y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. $x$&ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਛੂਹਣ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ, $x$&ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਛੂਹਣ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕੁਲ ਨੂੰ C ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। $(0, a)$ ਉਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੈਂਬਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 9.4 ਦੇਖੋ)A ਇਸ ਲਈ ਕੁਲ C ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :




ਚਿੱਤਰ 9.4

$x^2 + (y ï a)^2 = a^2$ ਅਰਥਾਤ $x^2 + y^2 = 2ay$ ... (1)

ਜਿਸ ਵਿੱਚ $a$ ਇੱਕ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2a\frac{dy}{dx}$$

ਅਰਥਾਤ $$x + y\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dx}$$

ਅਰਥਾਤ $$a = \frac{x + y\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਤੋਂ $a$ ਦਾ ਮੁੱਲ, ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$x^2 + y^2 = 2y\frac{\left[x + y\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dy}{dx}}$$

ਅਰਥਾਤ $$\frac{dy}{dx}(x^2 + y^2) = 2xy + 2y^2\frac{dy}{dx}$$

ਅਰਥਾਤ $$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 ï y^2}$$

ਇਹ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਅਜਿਹੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਸਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਧੁਰਾ ਜਮਾਂ $x$-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਉੱਪਰ ਚਰਚਿਤ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ P ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੈਂਬਰ ਦੀ ਨਾਭ $(a, 0)$ ਤੇ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $a$ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਅਚੱਲ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 9.5

ਦੇਖੋ)। ਇਸ ਲਈ ਕੁਲ P ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

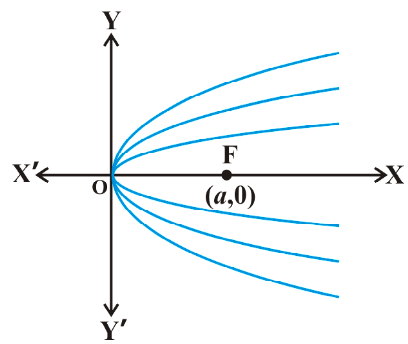
$$y^2 = 4ax \quad \text{... (1)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \quad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਤੋਂ $4a$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$y^2 = \left(2y\frac{dy}{dx}\right)(x)$$




ਚਿੱਤਰ 9.5

ਜਾਂ $$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 9.3

1 ਤੋਂ 5 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਚੱਲ ਵਿੱਚ $a$ ਅਤੇ $b$ ਨੂੰ ਅਲੋਪ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ **2.** $y^2 = a\,(b^2$ ï $x^2)$ **3.** $y = a\,e^{3x} + b\,e^{ï\,2x}$

**4.** $y = e^{2x}(a + bx)$ **5.** $y = e^x(a\cos x + b\sin x)$

**6.** $y$-ਧਰੇ ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**7.** ਅਜਿਹੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਕੁਲ ਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਸਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਧੁਰਾ ਧਨਾਤਮਕ $y$-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ।

**8.** ਅਜਿਹੇ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਫੋਕਸ ਸੰਯੁਗਮੀ ਨਾਭਿਆ $y$-ਧੁਰੇ ਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

**9.** ਅਜਿਹੇ ਹਾਇਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਫੋਕਸ $x$-ਧੁਰੇ ਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

**10.** ਅਜਿਹੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ $y$-ਧੁਰੇ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3 ਇਕਾਈ ਹੈ।

**11.** ਹੇਠ ਲਿਖਤ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮਕੀਰਣ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ $y = c_1\,e^x + c_2\,e^{ïx}$ ਹੈ ?

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (C) $\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} - 1 = 0$

**12.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਇੱਕ ਖਾਸ ਹੱਲ $y = x$ ਹੈ ?

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = x$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = x$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = 0$

## 9.5. ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ/ਡਿਗਰੀ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ (Methods of Solving First order, First Degree Differential Equations)

ਇਸ ਸ਼ੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀਆਂ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

### 9.5.1 ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ *(Differential equations with variables separable)*

ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੇਠ ਦਰਸਾਇਆ ਰੂਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x, y) \qquad \dots (1)$$

ਜੇਕਰ $\mathrm{F}(x, y)$ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ $g(x)$, $h(y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $g(x)$, $x$ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $h(y)$, $y$ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਹੋਣ ਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = h(y)\, g(x) \qquad \dots (2)$$

ਜੇਕਰ $h(y) \neq 0$, ਤਾਂ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx \qquad \dots (3)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx \qquad \dots (4)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਮੀਕਰਣ (4)] ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ :

$$\mathrm{H}(y) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{C} \qquad \dots (5)$$

ਇੱਥੇ H $(y)$ ਅਤੇ G $(x)$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{h(y)}$ ਅਤੇ $g(x)$ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਹਨ ਅਤੇ C ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}$, $(y \neq 2)$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \quad (y \neq 2) \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚੋਂ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(2 - y)\, dy = (x + 1)\, dx \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int (2-y)\, dy = \int (x+1)\, dx$$

ਜਾਂ $\quad 2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + C_1$

ਜਾਂ $\quad x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2\,C_1 = 0$

ਜਾਂ $\quad x^2 + y^2 + 2x - 4y + C = 0 \qquad \ldots (3)$

ਇੱਥੇ $\quad C = 2C_1$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ ।

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $1 + y^2 \neq 0$, ਇਸ ਲਈ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

ਅਰਥਾਤ $\quad \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$

ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $y = 1$ ਜਦੋਂ $x = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ $y \neq 0$, ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{y^2} = -4x\,dx \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int \frac{dy}{y^2} = -4\int x\,dx$$

ਜਾਂ $$-\frac{1}{y} = ï\ 2x^2 + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$y = \frac{1}{2x^2 - \mathrm{C}} \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $y = 1$ ਅਤੇ $x = 0$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ C = ï 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

C ਦੀ ਕੀਮਤ (2) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ $y = \frac{1}{2x^2+1}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਬਿੰਦੂ (1] 1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\,.dy = (2x^2 + 1).\,dx\ (x \neq 0)$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$dy = \left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx$$

ਜਾਂ $$dy = \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੇ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\int dy = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx$$

ਜਾਂ $$y = x^2 + \log|x| + \mathrm{C} \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਪਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਖਾਸ ਮੈਂਬਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (1] 1) ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦਾ ਹੋਵੇ।

---

* ਲੈਬਨੀਜ਼ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਸੰਕੇਤ $\frac{dy}{dx}$ ਬਹੁਤ ਲਚਕੀਲਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਿਣਤੀ ਅਤੇ ਔਪਚਾਰਿਕ ਰੁਪਾਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ $dx$ ਅਤੇ $dy$ ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਰਤਦੇ ਹਾਂ। $dx$ ਅਤੇ $dy$ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਸਤ੍ਰਾ ਮੰਨ ਕੇ ਅਸੀਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਣਤੀਆਂ ਦਾ ਨੇੜਲੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ : Introduction to calculus and Analysis, volume-I page 172, By Richard Courant, Fritz John Spinger ð Verlog New York.

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $x = 1,\ y = 1$ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ C = 0 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। C ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਭਰ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y = x^2 + \log|x|$ ਦਾ ਰੂਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਬਿੰਦੂ (ï 2, 3), ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $(x, y)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਵ (ਢਲਾਣ) $\dfrac{2x}{y^2}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿਸੇ ਵਤਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\dfrac{dy}{dx}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \qquad \text{... (1)}$$

ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$y^2\, dy = 2x\, dx \qquad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰਲ

$$\int y^2 dy = \int 2x\, dx$$

ਜਾਂ

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + \text{C} \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ $x =$ ï $2,\ y = 3$ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ C = 5 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

C ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\dfrac{y^3}{3} = x^2 + 5$ ਜਾਂ

$$y = (3x^2 + 15)^{\frac{1}{3}}$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਕਿਸੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿੰਨੇ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ 1000 ਰੁ: ਦੀ ਰਕਮ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ $t$ ਤੇ ਮੂਲਧਨ P ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਮੁਸ਼ਕਲ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ :

$$\frac{d\text{P}}{dt} = \left(\frac{5}{100}\right) \times \text{P}$$

ਜਾਂ

$$\frac{d\text{P}}{dt} = \frac{\text{P}}{20} \qquad \text{... (1)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{d\text{P}}{\text{P}} = \frac{dt}{20} \qquad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨੀਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\log P = \frac{t}{20} + C_1$$

ਜਾਂ $$P = e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{C_1}$$

ਜਾਂ $$P = C\, e^{\frac{t}{20}} \quad (\text{ਇੱਥੇ } e^{C_1} = C) \qquad \ldots (3)$$

ਹੁਣ $P = 1000$, ਜਦੋਂ $t = 0$

P ਅਤੇ $t$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ C = 1000 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$P = 1000\, e^{\frac{t}{20}}$$

ਮੰਨ ਲਉ $t$ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਦੋਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ

$$2000 = 1000\, e^{\frac{t}{20}} \Rightarrow t = 20 \log_e 2$$

## ਅਭਿਆਸ 9.4

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **2.** $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2}\ (-2 < y < 2)$

**3.** $\frac{dy}{dx} + y = 1\ (y \neq 1)$ **4.** $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

**5.** $(e^x + e^{\text{ï}x})\, dy\ \text{ï}\ (e^x\ \text{ï}\ e^{\text{ï}x})\, dx = 0$ **6.** $\frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$

**7.** $y \log y\, dx\ \text{ï}\ x\, dy = 0$ **8.** $x^5 \frac{dy}{dx} = -y^5$

**9.** $\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$ **10.** $e^x \tan y\, dx + (1\ \text{ï}\ e^x) \sec^2 y\, dy = 0$

11 ਤੋਂ 14 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**11.** $(x^3 + x^2 + x + 1)\frac{dy}{dx} = 2x^2 + x$; $y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 0$

**12.** $x(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}=1$; $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = 2$

**13.** $\cos\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=a \;\; (a \in \text{R})$; $y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 0$

**14.** $\dfrac{dy}{dx}=y\tan x$ ; $y = 2$ ਜੇਕਰ $x = 0$

**15.** ਬਿੰਦੂ (0] 0) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਅਜਿਹੇ ਵਕਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $y' = e^x \sin x$ ਹੈ।

**16.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $xy\dfrac{dy}{dx}=(x+2)(y+2)$ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (1] &1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਵਤਰ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**17.** ਬਿੰਦੂ (0, ï 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਜਿਹੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $(x, y)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਲਾਣ ਅਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ $y$ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ $x$ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

**18.** ਇੱਕ ਵਤਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $(x, y)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ, ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ, ਬਿੰਦੂ (ï 4, ï 3). ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੀ ਢਲਾਣ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਵਤਰ ਬਿੰਦੂ (ï 2, 1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**19.** ਇੱਕ ਗੋਲਾਕਾਰ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਵਾ ਭਰ ਕੇ ਫੁਲਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਸਥਿਰ ਚਾਲ ਨਾਲ ਬਦਲ ਰਿਹਾ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3 ਇਕਾਈ ਹੈ ਅਤੇ 3 ਸੈਕਿੰਡ ਬਾਅਦ 6 ਇਕਾਈ ਹੈ ਤਾਂ $t$ ਸੈਕਿੰਡ ਬਾਅਦ ਇਸ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**20.** ਕਿਸੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ $r$% ਸਲਾਨਾ ਦੇ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ 100 ਰੁ: 10 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਦੁੱਗਣੇ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ $r$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\log_e 2 = 0.6931$).

**21.** ਕਿਸੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ 5% ਸਲਾਨਾ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ 1000 ਰੁ: ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਵਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ 10 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਇਹ ਰਕਮ ਕਿੰਨੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ($e^{0.5}$ = 1.648)

**22.** ਕਿਸੀ ਜੀਵਾਣੂ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ ਜੀਵਾਣੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 1] 00] 000 ਹੈ। ਦੋ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 10% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿੰਨੇ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਜੀਵਾਣੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2,00,000 ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਜੀਵਾਣੂਆਂ ਦਾ ਵਾਧਾ ਦਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮੌਜੂਦ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ।

**23.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $e^x + e^{ïy} = C$ (B) $e^x + e^y = C$

(C) $e^{ïx} + e^y = C$ (D) $e^{ïx} + e^{ïy} = C$

### 9.5.2 *ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ* (Homogenous differential equations)

$x$ ਅਤੇ $y$ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$F_1(x, y) = y^2 + 2xy$, $\quad F_2(x, y) = 2x ï \ 3y$,

$F_3(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$, $\quad F_4(x, y) = \sin x + \cos y$

ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚ $x$ ਅਤੇ $y$ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਅਚਲ $\lambda$ ਦੇ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\lambda x$ ਅਤੇ $\lambda y$ ਨਾਲ ਤਬਦੀਲ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

$F_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 (y^2 + 2xy) = \lambda^2 F_1(x, y)$

$F_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda (2x ï \ 3y) = \lambda F_2(x, y)$

$F_3(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 F_3(x, y)$

$F_4(\lambda x, \lambda y) = \sin \lambda x + \cos \lambda y \neq \lambda^n F_4(x, y)$, ਕੋਈ ਵੀ $n$ ਦੇ ਲਈ

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ $F_1, F_2, F_3$ ਨੂੰ $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਫਲਨ $F_4$ ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਫਲਨ $F(x, y)$, $n$ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੀ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਅਚਲ $\lambda$ ਦੇ ਲਈ $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$

ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ $F_1, F_2, F_3$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, 1, 0 ਕੋਟੀ ਵਾਲੀ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ $F_4$ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$F_1(x, y) = x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}\right) = x^2 h_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

ਜਾਂ
$$F_1(x, y) = y^2\left(1 + \frac{2x}{y}\right) = y^2 h_2\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$F_2(x, y) = x^1\left(2 - \frac{3y}{x}\right) = x^1 h_3\left(\frac{y}{x}\right)$$

ਜਾਂ
$$F_2(x, y) = y^1\left(2\frac{x}{y} - 3\right) = y^1 h_4\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$F_3(x, y) = x^\circ \cos\left(\frac{y}{x}\right) = x^\circ h_5\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F_4(x, y) \neq x^n h_6\left(\frac{y}{x}\right), n \in \mathbf{N} \text{ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕੀਮਤ ਲਈ}$$

ਜਾਂ $$F_4(x, y) \neq y^n h_7\left(\frac{x}{y}\right), n \in \mathbf{N}$$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਫਲਨ F $(x, y)$, $n$ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ

$$F(x, y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{ਜਾਂ} \quad y^n h\left(\frac{x}{y}\right)$$

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸਮਰੂਪ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $F(x, y)$ ਗੈਰ ਜੀਰੋ ਕੋਟੀ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ।

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \dots (1)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $\frac{y}{x} = v$ ਜਾਂ

$$y = v\,x \qquad \dots (2)$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \dots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਤੋਂ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = g(v) - v \qquad \dots (4)$$

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \qquad \dots (5)$$

ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\int \frac{dv}{g(v) - v} = \int \frac{1}{x}dx + C \qquad \dots (6)$$

ਜੇਕਰ $v$ ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (6)] ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਜੇਕਰ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dx}{dy} = \mathrm{F}(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇੱਥੇ F $(x, y)$ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $\frac{x}{y} = v$ ਜਾਂ $x = vy$ ਭਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\frac{dx}{dy} = \mathrm{F}(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਕੇ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅੱਗੇ ਵਧਦੇ ਹਾਂ।

**ਉਦਾਹਰਣ 15.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(x$ ï $y)$ $\frac{dy}{dx} = x + 2y$ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{x - y} \qquad \text{... (1)}$$

ਮੰਨ ਲਉ $\quad \mathrm{F}(x, y) = \frac{x + 2y}{x - y}$

ਹੁਣ $\quad \mathrm{F}(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(x + 2y)}{\lambda(x - y)} = \lambda^{\circ} \cdot \mathrm{F}(x, y)$

ਇਸ ਲਈ F$(x, y)$ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ।

ਅੰਤ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

***ਬਦਲ:***

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1 + \frac{2y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $g\left(\frac{y}{x}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਭਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y = vx \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (4)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ $y$ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} - v$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+v+1}{1-v}$$

ਜਾਂ $$\frac{v-1}{v^2+v+1}dv = \frac{-dx}{x} \qquad \ldots (5)$$

ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int \frac{v-1}{v^2+v+1}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}dv - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dv = -\log|x| + C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) = -\log|x| + C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right)+\text{C}$$

$v$ ਨੂੰ $\frac{y}{x}$, ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+\text{C}$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right)x^2\right|=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+\text{C}_1$$

ਜਾਂ $$\log\left|(y^2+xy+x^2)\right|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+2\text{C}_1$$

ਜਾਂ $$\log\left|(x^2+xy+y^2)\right|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{\sqrt{3}x}\right)+\text{C}$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x$ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{... (1)}$$

ਇੱਥੇ $\frac{dy}{dx}=\text{F}(x,\ y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

ਇੱਥੇ $\text{F}(x, y)=\dfrac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$ ਹੈ।

$x$ ਨੂੰ $\lambda x$ ਨਾਲ ਅਤੇ $y$ ਨੂੰ $\lambda y$ ਨਾਲ ਤਬਦੀਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\text{F}(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda\left[y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x\right]}{\lambda\left(x\cos\frac{y}{x}\right)} = \lambda^0[\text{F}(x, y)]$$

F $(x, y)$ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਤੇ ਭਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y = vx \qquad \dots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \dots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ $y$ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v}$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v} - v$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos v}$$

ਜਾਂ $$\cos v\, dv = \frac{dx}{x}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \cos v\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

ਜਾਂ $$\sin v = \log|x| + \log|\text{C}|$$

ਜਾਂ $$\sin v = \log|\text{C}x|$$

$v$ ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|\text{C}x|$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $2y\,e^{\frac{x}{y}}dx + (y - 2x\,e^{\frac{x}{y}})\,dy = 0$ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $x = 0$ ਜਦੋਂ $y = 1$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x\,e^{\frac{x}{y}} - y}{2y\,e^{\frac{x}{y}}} \quad \ldots (1)$$

ਮੰਨ ਲਉ $\quad F(x, y) = \dfrac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2ye^{\frac{x}{y}}}$ ਤਾਂ $F(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda\left(2xe^{\frac{x}{y}} - y\right)}{\lambda\left(2ye^{\frac{x}{y}}\right)} = \lambda^{\circ}\,[F(x, y)]$

ਅੰਤ : F $(x, y)$ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।
ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ $x = vy$ ਭਰਦੇ ਹਾਂ।
ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ $y$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ $x$ ਅਤੇ $\dfrac{dx}{dy}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^{v} - 1}{2e^{v}}$$

ਜਾਂ $$y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^{v} - 1}{2e^{v}} - v$$

ਜਾਂ $$y\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{2e^{v}}$$

ਜਾਂ $$2e^{v}dv = \frac{-dy}{y}$$

ਜਾਂ $$\int 2e^v . dv = -\int \frac{dy}{y}$$

ਜਾਂ 2 $e^v$ = ï log |$y$| + C

$v$ ਨੂੰ $\frac{x}{y}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2\, e^{\frac{x}{y}} + \log |y| = C \quad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਅਤੇ $y = 1$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2\, e^0 + \log |1| = C \Rightarrow C = 2$$

C ਦੀ ਕੀਮਤ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2\, e^{\frac{x}{y}} + \log |y| = 2$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $(x, y)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\frac{x^2 + y^2}{2xy}$ ਹੈ, $x^2$ ï $y^2 = cx$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \text{ ਜਾਂ } \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} \quad \ldots (1)$$

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ : ਸਮੀਕਰਣ (1) ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $y = vx$ ਭਰਦੇ ਹਾਂ।

$y = vx$ ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \text{ ਜਾਂ } v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v}$$

ਅੰਤ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v} \text{ ਜਾਂ } \frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x} \text{ ਜਾਂ } \frac{2v}{v^2-1}dv = -\frac{dx}{x}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{2v}{v^2-1}\,dv = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

ਜਾਂ $\log|v^2 - 1| = - \log|x| + \log|C_1|$

ਜਾਂ $\log|(v^2 - 1)(x)| = \log|C_1|$

ਜਾਂ $(v^2 - 1)\, x = \pm C_1$

$v$ ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x = \pm C_1$$

ਜਾਂ $(y^2 - x^2) = \pm C_1 x$ ;k $x^2 - y^2 = Cx$

## ਅਭਿਆਸ 9.5

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

**1.** $(x^2 + xy)\, dy = (x^2 + y^2)\, dx$

**2.** $y' = \dfrac{x+y}{x}$

**3.** $(x - y)\, dy - (x + y)\, dx = 0$

**4.** $(x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

**5.** $x^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$

**6.** $x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2+y^2}\, dx$

**7.** $\left\{x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)+y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right\}y\,dx = \left\{y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)-x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right\}x\,dy$

**8.** $x\dfrac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

**9.** $y\,dx + x\log\left(\dfrac{y}{x}\right)dy - 2x\,dy = 0$

**10.** $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

11 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਲੱਭਿਆ ਜਾਵੇ।

**11.** $(x + y)\, dy + (x - y)\, dx = 0;\ y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 1$

**12.** $x^2\, dy + (xy + y^2)\, dx = 0;\ y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 1$

**13.** $\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)-y\right]dx+x\,dy=0;\ y=\frac{\pi}{4}$ ਜੇਕਰ $x = 1$

**14.** $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}+\text{cosec}\left(\frac{y}{x}\right)=0;\ y = 0$ ਜੇਕਰ $x = 1$

**15.** $2xy+y^2-2x^2\frac{dy}{dx}=0;\ y = 2$ ਜੇਕਰ $x = 1$

**16.** $\frac{dx}{dy}=h\left(\frac{x}{y}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਪ੍ਰਤੀ ਸਥਾਪਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

(A) $y = vx$ (B) $v = yx$ (C) $x = vy$ (D) $x = v$

**17.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ?

(A) $(4x + 6y + 5)\, dy$ ï $(3y + 2x + 4)\, dx = 0$

(B) $(xy)\, dx$ ï $(x^3 + y^3)\, dy = 0$

(C) $(x^3 + 2y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

(D) $y^2\, dx + (x^2$ ï $xy$ ï $y^2)\, dy = 0$

### 9.5.3 *ਰੇਖੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (Linear differential equations)*

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q},$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ P ਅਤੇ Q ਅਚਲ ਭਾਵ ਸਿਰਫ $x$ ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ, ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਕੁਝ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

$$\frac{dy}{dx}+y=\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x}\right)y=e^x$$

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{y}{x\log x}\right)=\frac{1}{x}$$

ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਦੂਜਾ ਰੂਪ ਸੈਕਿੰਡ $\frac{dx}{dy}+\mathrm{P}_1x=\mathrm{Q}_1$ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\mathrm{P}_1$ ਅਤੇ $\mathrm{Q}_1$ ਅਚਲ ਭਾਵ ਸਿਰਫ $y$ ਦੇ ਫਲਨ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਹਨ :

$$\frac{dx}{dy}+\frac{-2x}{y}=y^2e^{-y}$$

ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{dy}{dx}+\text{P}\,y=\text{Q} \quad \text{... (1)}$$

ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ $x$ ਦੇ ਫਲਨ $g\,(x)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$g\,(x)\,\frac{dy}{dx}+\text{P}.\,g\,(x)\,y=\text{Q}.\,g\,(x) \quad \text{... (2)}$$

$g\,(x)$ ਦੀ ਚੋਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $y\,.\,g\,(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਬਣ ਜਾਵੇ :

ਜਾਂ $$g\,(x)\,\frac{dy}{dx}+\text{P}.\,g\,(x)\,y=\frac{d}{dx}\,[y\,.\,g\,(x)]$$

ਜਾਂ $$g\,(x)\,\frac{dy}{dx}+\text{P}.\,g\,(x)\,y=g\,(x)\,\frac{dy}{dx}+y\,g'\,(x)$$

$\Rightarrow$ $$\text{P}.\,g\,(x)=g'\,(x)$$

ਜਾਂ $$\text{P}=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਇਨਟੈਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\int \text{P}dx=\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$$

ਜਾਂ $$\int \text{P}.dx=\log\left(g\,(x)\right)$$

ਜਾਂ $$\text{g}\,(x)=e^{\int \text{P}\,dx}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ $g(x)=e^{\int pdx}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $x$ ਅਤੇ $y$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਫਲਨ $g(x)=e^{\int pdx}$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ **(I.F.)** ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $g\,(x)$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$e^{\int pdx}\frac{dy}{dx}+\text{P}\,e^{\int pdx}y=\text{Q}.\,e^{\int pdx}$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int \text{P}dx}\right)=\text{Q}e^{\int \text{P}dx}$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$, ਨਾਲ ਇਨਟੈਗਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y \cdot e^{\int \mathrm{P}\, dx} = \int \left(\mathrm{Q} \cdot e^{\int \mathrm{P}\, dx}\right) dx$$

ਜਾਂ
$$y = e^{-\int \mathrm{P}\, dx} \cdot \int \left(\mathrm{Q} \cdot e^{\int \mathrm{P}\, dx}\right) dx + \mathrm{C}$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

*ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਰੇਖੀ ਡਿ.ਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਕਦਮ*

(i) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ P, Q ਅਚਲ ਜਾਂ ਸਿਰਫ $x$ ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ।

(ii) ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ (I.F.) = $e^{\int \mathrm{P}\, dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

$$y \,.\, (\mathrm{I.F.}) = \int (\mathrm{Q} \times \mathrm{I.F.})\, dx + \mathrm{C}$$

ਜੇਕਰ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1 x = \mathrm{Q}_1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\mathrm{P}_1$ ਅਤੇ $\mathrm{Q}_1$ ਅਚਲ ਜਾਂ ਕੇਵਲ $y$ ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ I.F. = $e^{\int \mathrm{P}_1 dy}$ ਅਤੇ

$x \,.\, (\mathrm{I.F.}) = \int (\mathrm{Q}_1 \times \mathrm{I.F.})\, dy + \mathrm{C}$ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ:

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ P = ï 1 ਅਤੇ Q = $\cos x$

ਇਸ ਲਈ $\mathrm{I.F.} = e^{\int -1\, dx} = e^{-x}$

ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ I.F. ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x} y = e^{-x} \cos x$$

ਜਾਂ
$$\frac{d}{dx}\left(y e^{-x}\right) = e^{-x} \cos x$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਇਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y\,e^{-x} = \int e^{-x} \cos x\,dx + \mathrm{C} \quad \ldots (1)$$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $\quad \mathrm{I} = \int e^{-x} \cos x\,dx$

$$= \cos x \left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int (-\sin x)\,(-e^{-x})\,dx$$

$$= -\cos x\,e^{-x} - \int \sin x\,e^{-x}\,dx$$

$$= -\cos x\,e^{-x} - \left[\sin x(-e^{-x}) - \int \cos x\,(-e^{-x})\,dx\right]$$

$$= -\cos x\,e^{-x} + \sin x\,e^{-x} - \int \cos x\,e^{-x}\,dx$$

ਜਾਂ $\quad \mathrm{I} = -e^{-x} \cos x + \sin x\,e^{-x} - \mathrm{I}$

ਜਾਂ $\quad 2\mathrm{I} = (\sin x - \cos x)\,e^{-x}$

ਜਾਂ $\quad \mathrm{I} = \dfrac{(\sin x - \cos x)\,e^{-x}}{2}$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ I ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$y\,e^{-x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right)e^{-x} + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $\quad y = \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + \mathrm{C}e^{x}$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2\ (x \neq 0)$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \quad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ $x$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$$

ਇਹ $\dfrac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\mathrm{P} = \dfrac{2}{x}$ ਅਤੇ $\mathrm{Q} = x$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad \text{I.F.} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ [ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $^{f(x)} = f(x)$]

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ

$$y \,.\, x^2 = \int (x)\,(x^2)\,dx + \mathrm{C} = \int x^3 dx + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$y = \frac{x^2}{4} + \mathrm{C}\,x^{-2}$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $y\,dx$ ï $(x + 2y^2)\,dy = 0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$$

ਇਹ $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1 x = \mathrm{Q}_1$ ,ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਇੱਥੇ $\mathrm{P}_1 = -\frac{1}{y}$ ਅਤੇ $\mathrm{Q}_1 = 2y$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\mathrm{I.F} = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\log y} = e^{\log (y)^{-1}} = \frac{1}{y}$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

ਇਸ ਲਈ $$x\frac{1}{y} = \int (2y)\left(\frac{1}{y}\right)dy + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$\frac{x}{y} = \int 2dy + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$\frac{x}{y} = 2y + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$x = 2y^2 + \mathrm{C}y$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{dx}{dy} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x \; (x \neq 0)$$

ਦਾ ਖ਼ਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = \frac{\pi}{2}$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ , ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇੱਥੇ P = cot $x$ ਅਤੇ Q = $2x + x^2 \cot x$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\text{I.F} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

ਇਸ ਲਈ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

$$y \,.\, \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \sin x\, dx + \text{C}$$

ਜਾਂ $$y \sin x = \int 2x \sin x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + \text{C}$$

ਜਾਂ $$y \sin x = \sin x\left(\frac{2x^2}{2}\right) - \int \cos x\left(\frac{2x^2}{2}\right) dx + \int x^2 \cos x\, dx + \text{C}$$

ਜਾਂ $$y \sin x = x^2 \sin x - \int x^2 \cos x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + \text{C}$$

ਜਾਂ $$y \sin x = x^2 \sin x + \text{C} \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ $y = 0$ ਅਤੇ $x = \frac{\pi}{2}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{C}$$

ਜਾਂ $$\text{C} = \frac{-\pi^2}{4}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ C ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y \sin x = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4}$$

ਜਾਂ $$y = x^2 - \frac{\pi^2}{4 \sin x} \; (\sin x \neq 0)$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 23.** ਬਿੰਦੂ (0, 1) ਵਿੱਚ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਤਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $(x, y)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ $x$ ਭੁਜਾ ਅਤੇ $x$ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ $y$ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (ਅੰਕ) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਤਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} - xy = x \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1)] $\frac{dy}{dx}+\text{P}y=\text{Q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇੱਥੇ P = ï $x$ ਅਤੇ Q = $x$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\text{I.F.} = e^{\int -x\,dx} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

$$y.e^{\frac{-x^2}{2}} = \int (x)\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)dx + \text{C} \qquad \text{... (2)}$$

ਮੰਨ ਲਉ $\text{I} = \int (x)\, e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$

ਮੰਨ ਲਉ $\frac{-x^2}{2} = t$ , ਤਾਂ ï $x\,dx = dt$ ਜਾਂ $x\,dx$ = ï $dt$

ਇਸ ਲਈ $\text{I} = -\int e^t\, dt = -e^t$ = ï $e^{\frac{-x^2}{2}}$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ I ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$y\, e^{\frac{-x^2}{2}} = -e^{\frac{-x^2}{2}} + \text{C}$$

ਜਾਂ $y = -1 + \text{C}\, e^{\frac{x^2}{2}}$ ... (3)

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ, ਪਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਮੈਂਬਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (0]1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਅਤੇ $y = 1$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

1 = ï 1 + C . $e^0$ ਜਾਂ C = 2

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ C ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y = -1 + 2\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

ਇਹ ਵਤਰਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 9.6

1 ਤੋਂ 12 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**1.** $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ **2.** $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$ **3.** $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$

**4.** $\frac{dy}{dx} + (\sec x)\, y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$ **5.** $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

**6.** $x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^2\log x$

**7.** $x\log x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{2}{x}\log x$

**8.** $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx\ (x \neq 0)$

**9.** $x\dfrac{dy}{dx}+y-x+xy\cot x=0\ \ (x\neq 0)$

**10.** $(x+y)\dfrac{dy}{dx}=1$

**11.** $y\, dx + (x$ ï $y^2)\, dy = 0$

**12.** $(x+3y^2)\dfrac{dy}{dx}=y\ \ (y>0)$.

13 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

**13.** $\dfrac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x;\ y=0$ ਜੇਕਰ $x=\dfrac{\pi}{3}$

**14.** $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+2xy=\dfrac{1}{1+x^2};\ y=0$ ਜੇਕਰ $x=1$

**15.** $\dfrac{dy}{dx}-3y\cot x=\sin 2x;\ y=2$ ਜੇਕਰ $x=\dfrac{\pi}{2}$

**16.** ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਕਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $(x, y)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਲਾਣ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

**17.** ਬਿੰਦੂ (0] 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਵਕਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਾ ਜੋੜ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਤੋਂ 5 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।

**18.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\dfrac{dy}{dx}-y=2x^2$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ :

(A) $e^{\text{ï}x}$ (B) $e^{\text{ï}y}$ (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) $x$

**19.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(1-y^2)\dfrac{dx}{dy}+yx = ay(-1<y<1)$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ :

(A) $\dfrac{1}{y^2-1}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ (C) $\dfrac{1}{1-y^2}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

*ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ*

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$, ਜਿੱਥੇ $c_1$, $c_2$ ਸਵੈ ਇੱਛ ਅਚਲ ਹੈ, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2+b^2)y = 0 \text{ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।}$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ :

$$y = e^{ax}\left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right] \qquad \dots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\left[ï\ bc_1 \sin bx + bc_2 \cos bx\right] + \left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right]e^{ax}.a$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx] \qquad \dots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ $x$, ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)(-\sin bx \,.\, b) + (ac_2 - bc_1)(\cos bx \,.\, b)]$$

$$+ [(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]\, e^{ax}.a$$

$$= e^{ax}[(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{dy}{dx}$ ਅਤੇ $y$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ
$$= e^{ax}[a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

$$-2ae^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]$$

$$+(a^2+b^2)e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$$

$$= e^{ax}\begin{bmatrix}\left(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2 - 2a^2c_2 + 2abc_1 + a^2c_2 + b^2c_2\right)\sin bx \\ +(a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1 - 2abc_2 - 2a^2c_1 + a^2c_1 + b^2c_1)\cos bx\end{bmatrix}$$

$$= e^{ax}[0 \times \sin bx + 0 \cos bx] = e^{ax} \times 0 = 0 = \text{ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ}$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਦੂਜੇ ਚੌਥਾਈ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਰੇਸ਼ਕ ਅੰਕ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਚੌਥਾਈ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕੁਲ C ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕੁਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੈਂਬਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ($\text{ï } a, a$) ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 9.6 ਦੇਖੋ)A

ਕੁਲ C ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$(x + a)^2 + (y \text{ ï } a)^2 = a^2 \quad \dots (1)$$

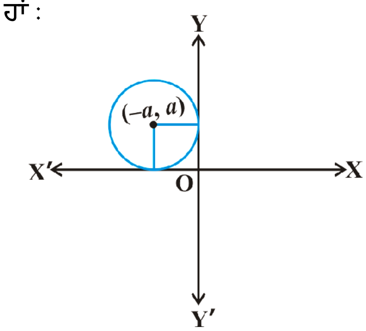
ਜਾਂ $$x^2 + y^2 + 2ax \text{ ï } 2ay + a^2 = 0 \quad \dots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ $x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2a - 2a\frac{dy}{dx} = 0$$

ਜਾਂ $$x + y\frac{dy}{dx} = a\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)$$

ਜਾਂ $$a = \frac{x + y\,y'}{y' - 1}$$



ਚਿੱਤਰ 9.6

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ $a$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\left[x + \frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2 + \left[y - \frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2 = \left[\frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2$$

ਜਾਂ $$[x\,y' - x + x + y\,y']^2 + [y\,y' - y - x - y\,y']^2 = [x + y\,y']^2$$

ਜਾਂ $$(x + y)^2\ y'^2 + [x + y]^2 = [x + y\,y']^2$$

ਜਾਂ $$(x + y)^2\,[(y')^2 + 1] = [x + y\,y']^2$$

ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕੁਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜਦੋਂ $x = 0$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = e^{(3x+4y)}$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot e^{4y} \qquad \text{... (1)}$$

ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{e^{4y}} = e^{3x} dx$$

ਇਸ ਲਈ $$\int e^{-4y} dy = \int e^{3x} dx$$

ਜਾਂ $$\frac{e^{-4y}}{-4} = \frac{e^{3x}}{3} + \text{C}$$

ਜਾਂ $$4 e^{3x} + 3 e^{-4y} + 12 \text{ C} = 0 \qquad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਜਾਂ $y = 0$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$4 + 3 + 12 \text{ C} = 0 \text{ ਅਤੇ } \text{C} = \frac{-7}{12}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ C ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ

$4 e^{3x} + 3 e^{-4y} - 7 = 0$, ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 27.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$(x\,dy - y\,dx)\, y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y\,dx + x\,dy)\, x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\left[x y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] dy = \left[xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = \frac{xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ $x^2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2}\right) \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{... (1)}$$

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ; ਸਮੀਕਰਣ (1)] $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਸਮਰੂਪੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ

$$y = vx \qquad \text{... (2)}$$

ਭਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

ਜਾਂ $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + v^2 \sin v}{v \sin v - \cos v}$$ [ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ]

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right) dv = \frac{2\,dx}{x}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right) dv = 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

ਜਾਂ $$\int \tan v\,dv - \int \frac{1}{v}\,dv = 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

ਜਾਂ $$\log|\sec v| - \log|v| = 2\log|x| + \log|C_1|$$

ਜਾਂ $$\log\left|\frac{\sec v}{v\,x^2}\right| = \log|C_1|$$

ਜਾਂ $$\frac{\sec v}{v\,x^2} = \pm C_1 \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚੋਂ $v$ ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)} = C$$ ] ਜਿੱਥੇ $C = \pm C_1$

ਜਾਂ $$\sec\left(\frac{y}{x}\right) = C\,xy$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ
$(\tan^{-1}y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1)] $\frac{dx}{dy} + P_1\, x = Q_1$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ

$P_1 = \frac{1}{1+y^2}$ ਅਤੇ $Q_1 = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

$$x\, e^{\tan^{-1} y} = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y}\, dy + C \qquad \ldots (2)$$

ਮੰਨ ਲਉ $\quad I = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y}\, dy$

$\tan^{-1} y = t$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\left(\frac{1}{1+y^2}\right) dy = dt$

ਇਸ ਲਈ $\quad I = \int t\, e^t\, dt$, $I = t\, e^t - \int 1 \,.\, e^t\, et$, $I = t\, e^t - e^t = e^t\, (t - 1)$

ਜਾਂ $\quad I = e^{\tan^{-1} y} (\tan^{-1}y - 1)$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚੋਂ I ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ

$x \,.\, e^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y} (\tan^{-1}y - 1) + C$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਜਾਂ $\quad x = (\tan^{-1}y - 1) + C\, e^{-\tan^{-1}y}$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

## *ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**1.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਕੋਟੀ (ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-6y=\log x$ (ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+7y=\sin x$

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4}-\sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0$

**2.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਲਈ ਪਰਖ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ (ਅਸਪਸ਼ਟ ਜਾਂ ਸਪਸ਼ਟ) ਸੰਗਤ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

(i) $xy = a\,e^x + b\,e^{ïx} + x^2$ : $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-xy+x^2-2=0$

(ii) $y = e^x (a \cos x + b \sin x)$ : $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0$

(iii) $y = x \sin 3x$ : $\frac{d^2y}{dx^2}+9y-6\cos 3x=0$

(iv) $x^2 = 2y^2 \log y$ : $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}-xy=0$

**3.** $(x ï a)^2 + 2y^2 = a^2$, ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਏ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰੋ ਜਦ ਕਿ $a$ ਇੱਕ ਸਵੈ ਇਛਤ ਅਚਲ ਹੈ।

**4.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x^2 ï y^2 = c(x^2 + y^2)^2$ ਇੱਥੇ $c$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਹੈ, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ] $(x^3 ï 3x\,y^2)\,dx = (y^3 ï 3x^2y)\,dy$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

**5.** ਪਹਿਲੇ ਚੌਥਾਈ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੈ।

**6.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$] ਜਦੋਂਕਿ $x \neq 1$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**7.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx}+\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}=0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ $(x + y + 1) = A(1 ï x ï y ï 2xy)$ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ A ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਹੈ।

**8.** ਬਿੰਦੂ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0$ ਹੈ।

**9.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(1 + e^{2x})\,dy + (1 + y^2)\,e^x\,dx = 0$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 0$.

**10.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $y\,e^{\frac{x}{y}}dx = \left(x\,e^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dy\ (y \neq 0)$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**11.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ($x$ ï $y$) $(dx + dy) = dx$ ï $dy$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y$ = ï 1, ਜੇਕਰ $x = 0$ (ਸੰਕੇਤ $x$ ï $y = t$ ਰੱਖੋ)A

**12.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dy} = 1\ (x \neq 0)$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**13.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 4x\operatorname{cosec} x\ (x \neq 0)$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = \frac{\pi}{2}$.

**14.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(x + 1)\frac{dy}{dx} = 2\,e^{ïy}$ ï $1$ ਦਾ ਇੱਕ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = 0$.

**15.** ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਜੰਨ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੇਂ ਉਸ ਪਿੰਡ ਦੇ ਬਸਿੰਦਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੰਨ 1999 ਵਿੱਚ ਪਿੰਡ ਦੀ ਜੰਨਸੰਖਿਆ 20,000 ਸੀ, ਅਤੇ ਸੰਨ 2004 ਵਿੱਚ 25,000 ਸੀ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਸੰਨ 2009 ਵਿੱਚ ਪਿੰਡ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

**16.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{y\,dx - x\,dy}{y} = 0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $xy = C$ (B) $x = Cy^2$ (C) $y = Cx$ (D) $y = Cx^2$

**17.** $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $y\,e^{\int P_1\,dy} = \int\left(Q_1 e^{\int P_1\,dy}\right)dy + C$

(B) $y\,.\,e^{\int P_1\,dx} = \int\left(Q_1 e^{\int P_1\,dx}\right)dx + C$

(C) $x\,e^{\int P_1\,dy} = \int\left(Q_1 e^{\int P_1\,dy}\right)dy + C$

(D) $x\,e^{\int P_1\,dx} = \int\left(Q_1 e^{\int P_1\,dx}\right)dx + C$

**18.** ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $e^x\,dy + (y\,e^x + 2x)\,dx = 0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $x\,e^y + x^2 = C$ (B) $x\,e^y + y^2 = C$ (C) $y\,e^x + x^2 = C$ (D) $y\,e^y + x^2 = C$

## ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਜ਼ਾਦ ਚਾਲ (ਚਲਾਂ)ਦੇ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਵੇ, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।
- ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ, ਉਸ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਘਾਤ (ਜੇਕਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ) ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸ਼ਾਮਿਲ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਦੀ ਉੱਚਤਮ ਘਾਤ (ਕੇਵਲ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਫਲਨ, ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਹੱਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉੱਨੇ ਹੀ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚੱਲ ਹੋਣ, ਜਿੰਨਾ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲਾਂ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਖਾਸ ਹੱਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਕਿਸੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਤੋਂ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਸ ਫਲਨ ਦਾ ਸਿਲਸਿਲੇਵਾਰ ਉਨੀ ਹੀ ਵਾਰ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿੰਨੇ ਉਸ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹੈ ਅਤੇ ਤਾਂ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚੱਲਾਂ ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
- ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਲੱਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $y$ ਵਾਲੇ ਪਦ $dy$ ਦੇ ਨਾਲ ਰਹਿਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਅਤੇ $x$ ਵਾਲੇ ਪਦ $dx$ ਦੇ ਨਾਲ ਰਹਿਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸਨੂੰ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ਜਾਂ $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $f(x, y)$ ਅਤੇ $g(x, y)$ ਜ਼ੀਰੋ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ, ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ P ਅਤੇ Q ਅਚਲ ਜਾਂ ਕੇਵਲ $x$ ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ, ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

## ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਟਿੱਪਣੀ

ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ। ਰੋਚਕ ਤੱਤ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਮੌਜੂਦਗੀ ਨਵੰਬਰ 11,1675 ਨੇ Gottfried Wilthelm Freiherr Leibnitz (1646-1716) ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$, ਨੂੰ ਲਿਖਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ

ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ $\int$ ਅਤੇ $dy$ ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾਇਆ। ਦਰਅਸਲ Leibnitz ਅਜਿਹੇ ਵਕਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਮਗਨ ਸੀ ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋਵੇ, ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੇ ਸੰਨ 1691 ਚਲਾ ਨੂੰ ਵੱਖ ਕਰਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਅਗਵਾਈ ਦਾ ਮਾਰਗ ਦਰਸ਼ਨ ਕਰਵਾਇਆ। ਇੱਕ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਪਹਿਲੀ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਕੀਤਾ। ਉਹ ਅੱਗੇ ਵਧੇ ਅਤੇ ਥੋੜ੍ਹੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ 'ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ। ਕਿੰਨਾਂ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਖੋਜ ਇਕੱਲੇ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੁਆਰਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਜਨਮ ਦੇ ਪੰਜੀ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਪੂਰੀ ਹੋਈ ।

ਆਰੰਭ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ 'ਹੱਲ' ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਇਨਟੈਗਰਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਇਹ ਸ਼ਬਦ ਸੰਨ 1690 ਵਿੱਚ : James Bernoulli, (1654 & 1705) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਚਲਣ ਵਿੱਚ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ। ਸ਼ਬਦ 'ਹੱਲ' ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰਯੋਗ Joseph Louis Lagrange (1736&1813)] ਦੁਆਰਾ ਸੰਨ 1774 ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਹ ਘਟਨਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਜਨਮ ਤੋਂ ਲੱਗਭਗ 100 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਘਟਿਤ ਹੋਈ। ਇਹ Jules Henri Poincare (1854 & 1912)] ਸੀ, ਜਿਸ ਨੇ ਸ਼ਬਦ 'ਹੱਲ' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਲਈ ਸਖਤ ਵਕਾਲਤ ਕੀਤੀ ਸੀ ਇਸ ਲਈ ਆਧੁਨਿਕ ਸ਼ਬਦਾਵਲੀ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ ਹੱਲ ਨੂੰ ਆਪਣਾ ਉੱਚਿਤ ਸਥਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ। ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਨਾਮਕਰਨ John Bernoulli (1667&1748)] James Bernoulli ਦੇ ਭਰਾ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਮਈ 20, 1715 ਨੂੰ Leibnitz ਨੂੰ ਲਿਖੀ ਆਪਣੀ ਚਿੱਠੀ ਵਿੱਚ, ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ।

$$x^2 y'' = 2y$$

ਨੂੰ ਹੱਲ ਤਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ, ਪੈਰਾਬੋਲਾ, ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਅਤੇ ਘਣਾਕਾਰ ਵਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦਾ ਮਾਰਗਦਰਸ਼ਨ ਕਰਵਾਉਂਦੇ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹੇ ਸਰਲ ਦਿਖਾਈ ਦੇਣ ਵਾਲੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੇਕ ਰੂਪ ਧਾਰਨ ਕਰਦੇ ਹਨ। 20ਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਅੱਧ ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਗੁਣਾਤਮਕ ਸੁਭਾਅ ਅਤੇ ਸਿਰਲੇਖ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲਾਂ ਦੀ ਕਠਿਨਾਈ ਕੁਦਰਤ ਦੀ ਖੋਜ ਲਈ ਧਿਆਨ ਆਕਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਇਸ ਨੇ ਸਾਰੀਆਂ ਖੋਜਾਂ ਲਈ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਸਥਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ।

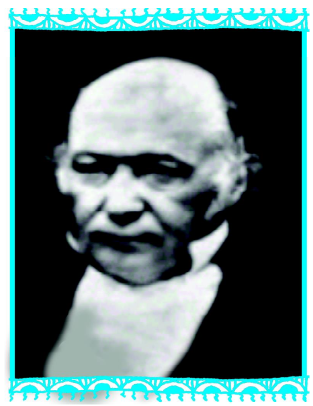
Final

ਅਧਿਆਇ 10

# ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Vector Algebra)

❖ *In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In Mathematics alone each generation builds a new story to the old structure. – HERMAN HANKEL* ❖

## 10.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)



W.R. Hamilton
(1805-1865)

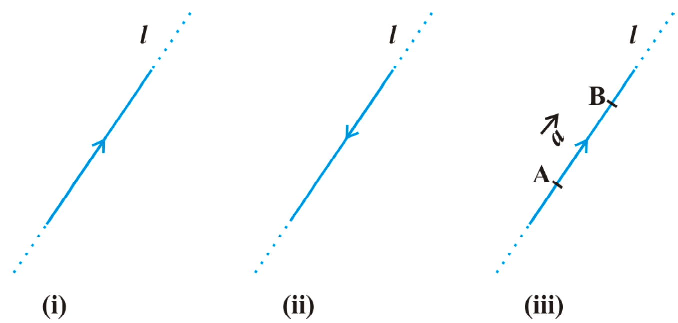
ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਦੈਨਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਮਿਲਦੇ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਹਾਡੀ ਉਚਾਈ ਕੀ ਹੈ ? ਇੱਕ ਫੁੱਟਬਾਲ ਦੇ ਖਿਡਾਰੀ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਟੀਮ ਦੇ ਦੂਜੇ ਖਿਡਾਰੀ ਕੋਲ ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਪਹੁੰਚਾਉਣ ਲਈ ਗੇਂਦ ਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਹਾਰ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ? ਪ੍ਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਸੰਭਾਵਿਤ ਉੱਤਰ 1.6 ਮੀਟਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ (ਸਿਰਫ) ਇੱਕ ਕੀਮਤ (ਅਕਾਰ) ਜੋ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਕੇਲਰ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਰ ਦੂਸਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਬਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ) ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮਾਸਪੇਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਸ਼ਕਤੀ ਅਕਾਰ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਦਿਸ਼ਾ (ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੂਜਾ ਖਿਲਾੜੀ ਸਥਿਤ ਹੈ) ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਗਣਿਤ, ਭੌਤਿਕ ਅਤੇ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਭਾਵ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਲੰਬਾਈ, ਪੁੰਜ, ਸਮੇਂ, ਦੂਰੀ, ਗਤੀ, ਖੇਤਰਫਲ, ਆਇਤਨ, ਤਾਪਮਾਨ, ਕੰਮ, ਧਨ, ਵੋਲਟੇਜ ਘਣਤਾ, ਪ੍ਰਤੀਰੋਧਕ ਆਦਿ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਜਿਵੇਂ ਵਿਸਥਾਪਨ, ਵੇਗ, ਪ੍ਰਵੇਗ, ਬਲ ਭਾਰ, ਘੁੰਮਣ (ਮੂਵਮੈਂਟ) ਬਿਜਲਈ ਖੇਤਰ ਦੀ ਤੀਬਰਤਾ ਆਦਿ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਕੁਝ ਅਧਾਰਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ, ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਵਿਭਿੰਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਬੀਜਕ ਅਤੇ ਜਿਉਮੈਟ੍ਰਿਕ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦਾ ਮਿਲਿਆ ਰੂਪ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦਾ ਪੂਰਨ ਸੋਝੀ (ਬੋਧ) ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਿਤ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਸ਼ਾਲ ਉਪਯੋਗਤਾ ਵੱਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

## 10.2 ਕੁਝ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (ਸੰਕਲਪ) (Some Basic Concepts)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਿਸੀ ਤਲ ਜਾਂ ਤਿੰਨ&ਵਿਮਾਈ ਪੁਲਾੜ ਵਿੱਚ $l$ ਕੋਈ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਤੀਰ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੋ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੀ ਕੋਈ ਵੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। [ਚਿੱਤਰ 10.1 (i), (ii)]A

ਹੁਣ ਪ੍ਰੇਖਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ ά ôਨੂੰ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੀ




ਚਿੱਤਰ 10.1

ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ά ôਦੇ ਅਕਾਰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.1(iii))। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਦੋਨੋਂ ਹੁੰਦੇ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਦੋਨੋਂ ਹੈ, ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਵੈਕਟਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.1(iii)), ਜਿਸਨੂੰ $\overrightarrow{AB}$ ਜਾਂ ਸਧਾਰਨ $\vec{a}$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਵੈਕਟਰ ^$\overrightarrow{AB}$* ਜਾਂ ਵੈਕਟਰ ^$\vec{a}$* ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

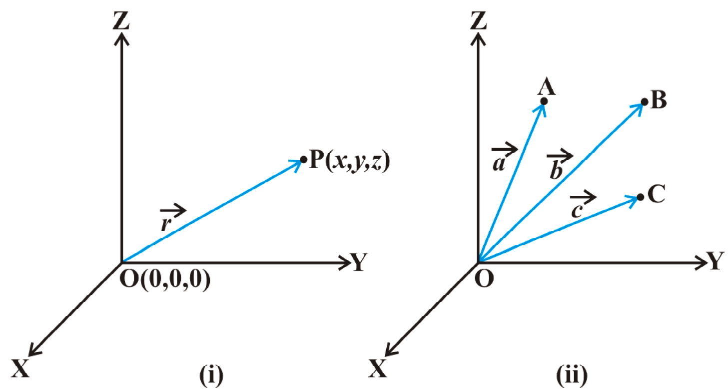
ਉਹ ਬਿੰਦੂ A ਜਿੱਥੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਆਰੰਭ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ B ਜਿੱਥੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$, ਖਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੀ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਵਾਲੀ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਅਕਾਰ (ਜਾਂ ਲੰਬਾਈ) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $|\overrightarrow{AB}|$ ਜਾਂ $|\vec{a}|$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤੀਰ ਦਾ ਨਿਸ਼ਾਨ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ* ਕਿਉਂਕਿ ਲੰਬਾਈ ਕਦੀ ਵੀ ਰਿਣਾਤਮ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹ $|\vec{a}| < 0$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ।

### ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ (Position Vector)

ਕਲਾਸ XI ਤੋਂ, ਤਿੰਨ&ਵਿਮਾਈ ਸਮਕੋਣੀ ਅਧਿਤਕਾਰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ right handed rectangular Co-ordination System ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 10-2 (i))A ਪੁਲਾੜ ਵਿੱਚ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O(0, 0, 0) ਦੇ ਬਾਬਤ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ P ਲਵੋ ਜਿਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x, y, z)$ ਹੈ। ਤਾਂ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ਜਿਸ ਵਿੱਚ O ਅਤੇ P ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਆਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, O ਦੇ ਬਾਬਤ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ (ਕਲਾਸ XI ਤੋਂ) ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $\overrightarrow{OP}$ (ਜਾਂ $\vec{r}$) ਦਾ ਅਕਾਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



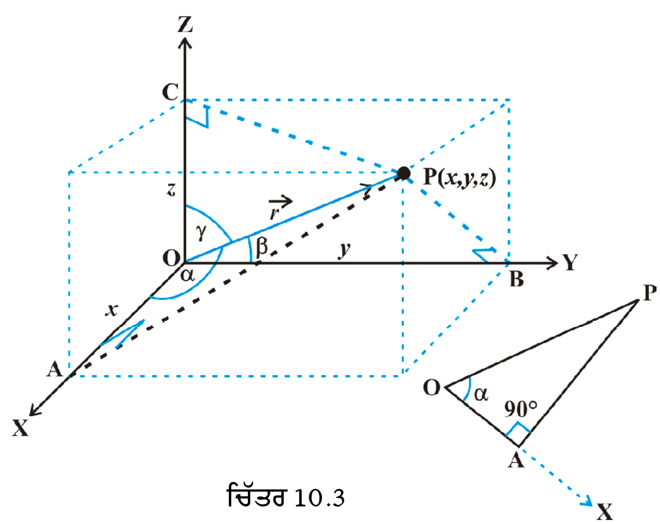

ਚਿੱਤਰ 10.2

ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਬਾਬਤ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਆਦਿ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ [ਚਿੱਤਰ 10.2(ii)]।

**ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ (Direction Cosines)**

ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P($x$, $y$, $z$) ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overline{\text{OP}}$ ( ਜਾਂ $\vec{r}$) ਲਵੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਦੁਆਰਾ $x, y$ ਅਤੇ $z$-ਧੁਰੇ ਦੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਏ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਕੋਣ $\alpha$, $\beta$, ਅਤੇ $\gamma$ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਣ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਕੋਸਾਇਨ ਕੀਮਤ ਭਾਵ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ਅਤੇ $\cos\gamma$ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $l, m$ ਅਤੇ $n$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 10.3, ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OAP ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਿਕੋਣ ਤੋਂ ਅਸੀਂ




ਚਿੱਤਰ 10.3

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\left(r \text{ ਨੂੰ } |\vec{r}| \text{ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ}\right)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OBP ਅਤੇ OCP ਤੋਂ ਅਸੀਂ $\cos\beta = \frac{y}{r}$ ਅਤੇ $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਭੁਜਾਂ ਨੂੰ $(lr, mr, nr)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜ਼ਾਹਿਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $lr, mr$ ਅਤੇ $nr$ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $a, b, c$ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ* ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ਪਰ ਵਿਆਪਕ : $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$

## 10.3 ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Types of Vectors)

**ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ [Zero (null) Vector]** ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਜਿਸ ਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\vec{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ ਕੋਈ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦਿਸ਼ਾ ਪ੍ਰਦਾਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਦਾ ਅਕਾਰ ਜ਼ੀਰੋ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਵਿਕਲਪੀ : ਇਸ ਨੂੰ ਕੋਈ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਧਾਰਨ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

**ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ (Unit Vector)** ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਜਿਸ ਦਾ ਅਕਾਰ ਇੱਕ (ਭਾਵ 1 ਇਕਾਈ) ਹੈ, ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ $\hat{a}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

**ਸਹਿ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ (Co-initial Vectors)** ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੈਕਟਰ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਸਹਿ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।

**ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ (Collinear Vectors)** ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਨਅੰਤਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

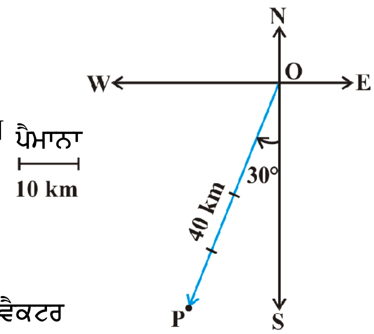
**ਸਮਾਨ ਵੈਕਟਰ (Equal Vectors)** ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $\vec{a} = \vec{b}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

**ਰਿਣਾਤਮਕ ਵੈਕਟਰ (Negative of a Vector)** ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਜਿਸ ਦਾ ਆਕਾਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ (ਮੰਨ ਲਉ $\overrightarrow{AB}$) ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ, ਪਰ ਜਿਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਉਲਟ ਹੈ, ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ $\overrightarrow{BA}$, ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਵੈਕਟਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਵੀ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਬਦਲੀ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਆਪਣੇ ਸਮਾਨਾਂਤਰ ਵਿਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸੁਤੰਤਰ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹੈ। ਇਸ ਪੂਰੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੁਤੰਤਰ (ਆਜ਼ਾਦ) ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਹੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਦੱਖਣ ਤੋਂ 30° ਪੱਛਮ ਵਿੱਚ, 40 km ਦੇ ਵਿਸਥਾਪਨ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਵੈਕਟਰ $\overline{OP}$ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10-4 ਦੇਖੋ)A



ਚਿੱਤਰ 10.4

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਣੀਬੱਧ ਕਰੋ।

(i) 5 s (ii) 1000 cm$^3$ (iii) 10 N
(iv) 30 km/h (v) 10 g/cm$^3$
(vi) 20 m/s ਉੱਤਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ

ਹੱਲ :

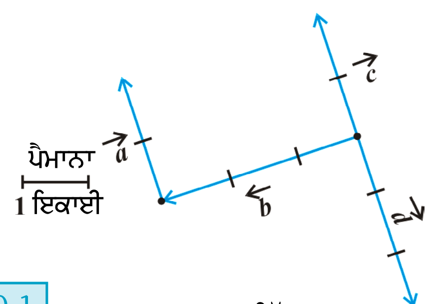
(i) ਸਮੇਂ-ਸਕੇਲਰ (ii) ਆਇਤਨ-ਸਕੇਲਰ (iii) ਬਲ-ਵੈਕਟਰ
(iv) ਗਤੀ-ਸਕੇਲਰ (v) ਘਣਤਾ-ਸਕੇਲਰ (vi) ਵੇਗ-ਵੈਕਟਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਚਿੱਤਰ 10.5 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ?

(i) ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ
(ii) ਸਮਾਨ ਹੈ।
(iii) ਸਹਿ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) ............ : $\vec{a}, \vec{c}$ ਅਤੇ $\vec{d}$
(ii) ਸਮਾਨ ਵੈਕਟਰ : $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{c}$
(iii) .........ਵੈਕਟਰ : $\vec{b}, \vec{c}$ ਅਤੇ $\vec{d}$



ਚਿੱਤਰ 10.5

## ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਉੱਤਰ ਤੋਂ 30° ਪੂਰਬ ਵਿੱਚ 40 km ਦੇ ਵਿਸਥਾਪਨ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਨਿਰੂਪਨ ਕਰੋ।
2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਣੀਬੱਧ ਕਰੋ।
   (i) 10 kg (ii) 2 ਮੀਟਰ ਉੱਤਰ ਪੱਛਮ (iii) 40°
   (iv) 40 ਵੋਲਟ (v) $10^{ï19}$ ਕੁਲਮ (vi) 20 m/s$^2$
3. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਣੀਬੱਧ ਕਰੋ।
   (i) ਸਮੇਂ ਦੀ ਮਿਆਦ (ii) ਦੂਰੀ (iii) ਬਲ
   (iv) ਵੇਗ (v) ਕੰਮ
4. ਚਿੱਤਰ 10.6 (ਇੱਕ ਵਰਗ) ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵੈਕਟਰਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।
   (i) ਸਹਿ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ (ii) ਸਮਾਨ
   (iii) ਸਮਰੇਖੀ ਪਰ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ

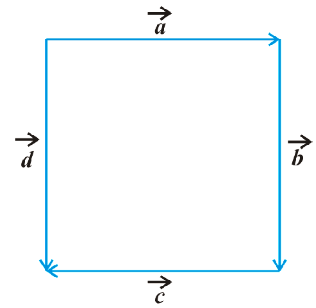
**5.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਜਾਂ ਗਲਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿਉ।

(i) $\vec{a}$ ਅਤੇ $-\vec{a}$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

(ii) ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਅਕਾਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਮਾਨ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

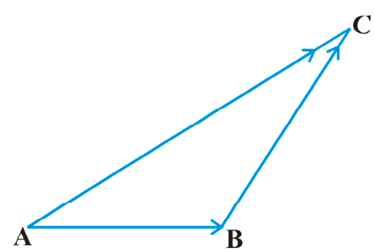
(iv) ਸਮਾਨ ਅਕਾਰ ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।




ਚਿੱਤਰ 10.6

## 10.4 ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ (Addition of Vectors)

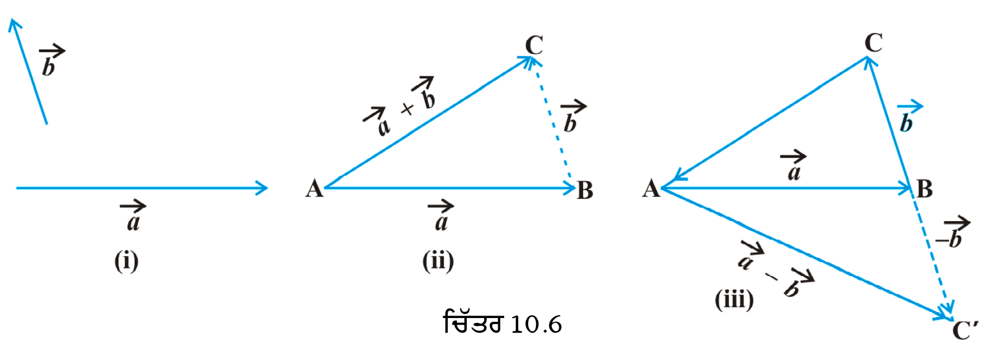
ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ : ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਵਿਸਥਾਪਨ। ਹੁਣ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਚੱਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਬਿੰਦੂ B ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ C ਤੱਕ ਚੱਲਦੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.7)। ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ C ਤੱਕ ਲੜਕੀ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕੁਲ ਵਿਸਥਾਪਨ ਜੋ ਵੈਕਟਰ ਕਿ $\overrightarrow{AC}$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ ਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 10.7

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ : ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ10.8 (i)], ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂਕਿ ਇੱਕ ਦਾ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਦੂਜੇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਵੇ [ਚਿੱਤਰ 10.8(ii)]।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ : ਚਿੱਤਰ 10.8 (ii) ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਤਬਦੀਲ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਟਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ, $\vec{a}$ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਤੀਜੀ ਭੁਜਾ AC ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}+\vec{b}$ ਸਾਨੂੰ ਵੈਕਟਰਾ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਜੋੜ (ਜਾਂ ਪਰਿਣਾਮੀ) ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ; ਭਾਵ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [ਚਿੱਤਰ 10.8 (ii)]।




ਚਿੱਤਰ 10.6

ਹੁਣ ਦੁਬਾਰਾ : ਕਿਉਂਕਿ $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ , ਇਸ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਨ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਜੇਕਰ ਇਹ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਜੀਰੋ ਅਕਾਰ ਵੱਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ [ਚਿੱਤਰ 10.8(iii)]।

ਹੁਣ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{BC'}$ ਦੀ ਰਚਨਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਅਕਾਰ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{BC}$, ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ, ਪਰ ਇਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ $\overrightarrow{BC}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ ਹੋਵੇ ਚਿੱਤਰ 10-8 (iii) ਭਾਵ $\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{BC}$ ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ [ਚਿੱਤਰ 10-8 (iii)] ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'}$

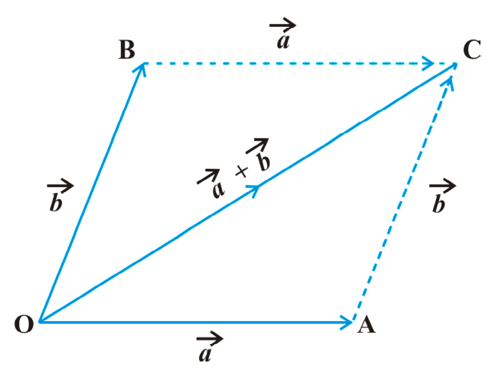
$= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}) = \vec{a} - \vec{b}$

ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AC'}$, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਕਿਸੀ ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੱਕ ਪਾਣੀ ਦੇ ਵਹਾਅ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਨਾਉ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਇਸ ਨਾਵ (ਕਿਸ਼ਤੀ) ਤੇ ਦੋ ਵੇਗ ਵੈਕਟਰ ਕੰਮ ਕਰ ਰਹੇ ਹਨ, ਇੱਕ ਇੰਜਨ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸ਼ਤੀ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਵੇਗ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਨਦੀ ਦੇ ਪਾਣੀ ਦੇ ਵਹਾਅ ਦਾ ਵੇਗ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵੇਗਾਂ ਦੇ ਇਕੱਠੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸ਼ਤੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਵੇਗ ਨਾਲ ਚੱਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਗਤੀ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ (ਭਾਵ ਵਿਲੋਪਣ ਵੇਗ) ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਵਿਚਾਰ ਲਿਆਉਣ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਦਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਿਯਮ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ (ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਸਹਿਤ) ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ rFkk $\vec{b}$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.9) ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਵਿਕਰਣ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਜੋੜ $\vec{a} + \vec{b}$ ਨੂੰ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਸਹਿਤ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਿਯਮ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਚਿੱਤਰ 10. 9 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ ਜਾਂ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (ਕਿਉਂਕਿ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$) ਜੋ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਿਯਮ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ ਦੇ ਦੋ ਨਿਯਮ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 10.7

**ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of vector addition)**

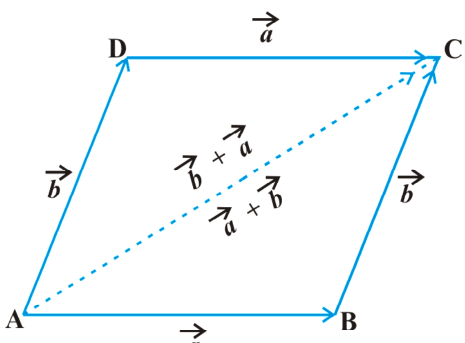
ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ rFk $\vec{b}$ ਦੇ ਲਈ

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a} \qquad \text{( ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ)}$$

ਸਬੂਤ : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਨੂੰ ਲਉ (ਚਿੱਤਰ 10.10) ਮੰਨ ਲਉ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$

ਹੁਣ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਅਤੇ ਸਮਾਂਨਤਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਚਿੱਤਰ 10.10 ਵਿੱਚ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ vkj $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADC ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = \vec{b}+\vec{a}$

ਇਸ ਲਈ $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$




ਚਿੱਤਰ 10.10

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2. ਮੰਨ ਲਉ, ਵੈਕਟਰ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਵਾਸਤੇ

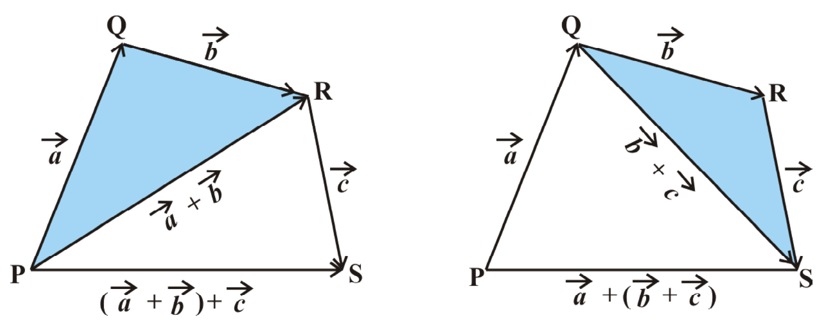
ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ)

ਵਿਸ਼ੇਸਤਾ : ਮੰਨ ਲਉ, ਵੈਕਟਰ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{RS}$ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.11(i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਤਾਂ $\qquad \vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$

ਅਤੇ $\qquad \vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{QS}$

ਇਸ ਲਈ $\qquad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PS}$




(i) ਚਿੱਤਰ 10.11 (ii)

ਅਤੇ $$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$$

ਇਸ ਲਈ $$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

**ਟਿੱਪਣੀ** ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਬਰੈਕਟਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :
ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੀ ਬਰੈਕਟ $\vec{a}$ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

ਇੱਥੇ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{0}$ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਲਈ ਜੁੜਣਯੋਗ ਪਛਾਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

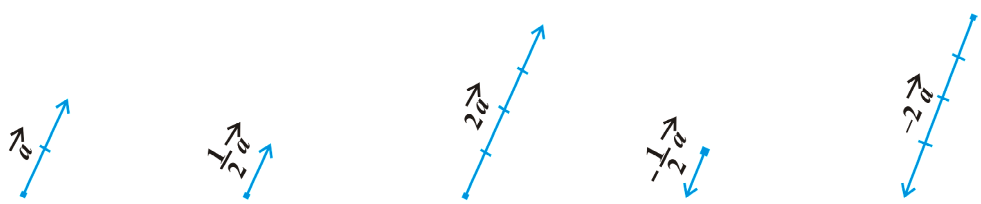
## 10.5 ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ (Multiplication of a Vector by Scalar)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ $\lambda$ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ। ਹੁਣ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਸਕੇਲਰ $\lambda$, ਨਾਲ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸ ਨੂੰ $\lambda\vec{a}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਸਕੇਲਰ $\lambda$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ $\lambda\vec{a}$ ਵੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਰੇਖੀ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ। $\lambda$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\lambda\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ, $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਜਾਂ ਉਲਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। $\lambda\vec{a}$ ਦਾ ਆਕਾਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਤੋਂ $|\lambda|$ ਗੁਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਸਧਾਰਨ [ਰੂਪ ਦੀ ਕਲਪਨਾ (visualisation)] ਚਿੱਤਰ 10.12 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਜਦੋਂ $\lambda = ï\ 1$, ਤਾਂ $\lambda\vec{a} = -\vec{a}$ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਆਕਾਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਤੋਂ ਉਲਟ ਹੈ। ਵੈਕਟਰ ï $\vec{a}$ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ (ਜਾਂ ਜੁੜਨਯੋਗ ਉਲਟ) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਮੇਸ਼ਾ $\vec{a} + (ï\ \vec{a}) = (ï\ \vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ ਹੀ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।




ਚਿੱਤਰ 10.12

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\vec{a} \neq 0$, ਜੋ ਕਿ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lambda \vec{a}$ , $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

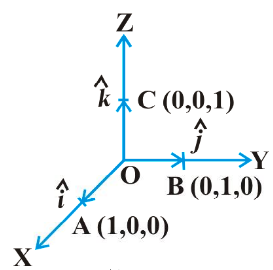
$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \text{ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।}$$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਕਿਸੀ ਵੀ ਸਕੈਲਰ $k$ ਦੇ ਲਈ $k\vec{0} = \vec{0}$

### 10.5.1 *ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਘਟਕ* (Components of a vector)

ਆਉ ਬਿੰਦੂਆਂ A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) ਅਤੇ C(0,0, 1) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $x$-ਭੁਜਾ $y$-ਭੁਜ ਅਤੇ $z$-ਭੁਜ ਤੇ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਾਂ ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ ਅਤੇ } |\overrightarrow{OC}| = 1$$




ਚਿੱਤਰ 10.13

ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OC}$ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਅਕਾਰ 1 ਹੈ। ਕ੍ਰਮਵਾਰ OX, OY ਅਤੇ OZ ਭੁਜਾ ਦੇ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\hat{i}, \hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.13)।

ਹੁਣ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P $(x, y, z)$ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ਲਵੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.14 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $P_1$ ਦੇ ਤਲ XOY ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦਾ ਪੈਰ ਬਿੰਦੂ $P_1$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P_1P$, $z$-ਭੁਜ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $\hat{i}, \hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $x, y$ ਅਤੇ $z$-ਭੁਜ ਦੇ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OR} = z\hat{k}$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\overrightarrow{QP_1} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

ਅਤੇ

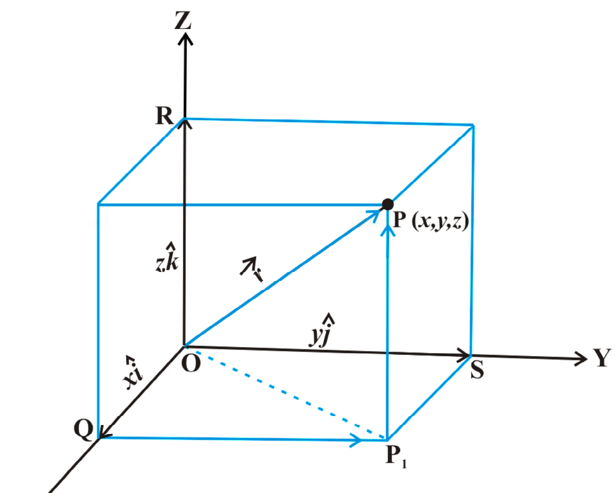
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ O ਦੇ ਹਵਾਲੇ ਦੇ ਨਾਲ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ( ਜਾਂ $\vec{r}$) $= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਵੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਇਹ ਰੂਪ ਘਟਕ ਰੂਪ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ $x, y$ ਅਤੇ $z$, $\vec{r}$ ਦੇ ਸੇਕੈਲਰ ਘਟਕ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ ਅਤੇ $z\hat{k}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ $\vec{r}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਘਟਕ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਕਦੇ-ਕਦੇ $x$, $y$ ਅਤੇ $z$ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣੀ ਘਟਕ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਦੀ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਦੋ ਬਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਤੁਰੰਤ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ $OQP_1$ ਵਿੱਚ (ਚਿੱਤਰ 10.14)

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{QP_1}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$




ਚਿੱਤਰ 10.14

ਅਤੇ ਸਮਕੋਣ ਤਿਕੋਣ $OP_1P$, ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{P_1P}|^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2}$$

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $|\vec{r}| = |x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ

(i) ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਜੋੜ

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਅੰਤਰ

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ ਜੇਕਰ

$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$ ਅਤੇ $a_3 = b_3$

(iv) ਕਿਸੇ ਸਕੈਲਰ $\lambda$ ਦਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਗੁਣਾ

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਵੈਕਟਰਾ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਸਕਲੇਰ ਨਾਲ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਗੁਣਾ ਇਕੱਠੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵੰਡਣਾਤਮਕ ਨਿਯਮ ਨਾਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

î ẽ ñ À °ÇÕ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਕੋਈ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ $k$ ਅਤੇ $m$ ਦੋ ਸਕੈਲਰ ਹੈ ਤਾਂ

(i) $k\vec{a}+m\vec{a}=(k+m)\vec{a}$ (ii) $k(m\vec{a})=(km)\vec{a}$ (iii) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

*ਟਿੱਪਣੀ*

1. ਤੁਸੀਂ ਨੋਟਿਸ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\lambda$ ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਕੀਮਤ ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $\lambda\vec{a}$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਸਮਰੇਖੀ ਤਾਂ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\lambda$ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਗੈਰ ਜੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਮੌਜ਼ੂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਭਾਵ $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, ਤਾਂ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਸਮਰੇਖੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ

$$b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}=\lambda(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}=(\lambda a_1)\hat{i}+(\lambda a_2)\hat{j}+(\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1=\lambda a_1,\ b_2=\lambda a_2,\ b_3=\lambda a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=\lambda$$

2. ਜੇਕਰ $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ਤਾਂ $a_1, a_2, a_3$ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ $l, m, n$ ਕਿਸੀ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਇਨ ਹੈ ਤਾਂ

$$l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k}=(\cos\alpha)\hat{i}+(\cos\beta)\hat{j}+(\cos\gamma)\hat{k}$$

ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜਿੱਥੇ : $\alpha$, $\beta$ ਅਤੇ $\gamma$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੁਆਰਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $x$, $y$ ਅਤੇ $z$ ਭੁਜ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਏ ਗਏ ਕੋਣ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ :4. $x$, $y$ ਅਤੇ $z$ ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=x\hat{i}+2\hat{j}+z\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}=2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}$ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਸਮਾਨ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $x=2$, $y=2$, $z=1$

ਉਦਾਹਰਣ :5. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}$ ਅਤੇ $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}$ ਤਦ ਕੀ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ਹੈ ? ਕੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ਅਤੇ $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

ਇਸ ਲਈ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ਪਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਭਿੰਨ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ :6. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

ਹੱਲ. ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਇਕਾਈ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਹੁਣ $$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

ਇਸ ਲਈ $$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

ਉਦਾਹਰਣ :7. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ 7 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\vec{a}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ 7 ਮਾਪ ਅੰਕ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ $7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ :8. ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c},\ \text{ਜਿੱਥੇ}\ \vec{c} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}\ \text{ਹੈ।}$$

ਅਤੇ $$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ

$$\hat{c} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k}\ \text{ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ : 9. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

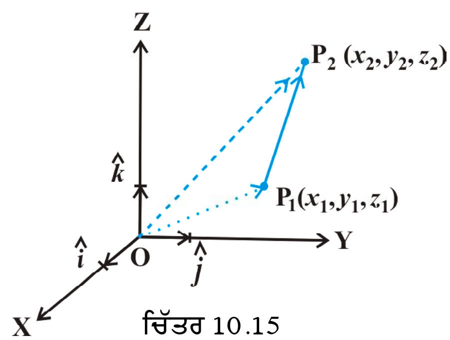
ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ $a, b, c$ ਵੈਕਟਰ ਦੇ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਘਟਕ $x, y, z$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰਾ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $a = 1, b = 1$ ਅਤੇ $c = -2$ ਹੈ। ਅੱਗੇ : ਜੇਕਰ $l, m$ ਅਤੇ $n$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਇਨ ਹਨ ਤਾਂ

$$l = \frac{a}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}},\quad m = \frac{b}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}},\quad n = \frac{c}{|\vec{r}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}}\ (\text{ਕਿਉਂਕਿ } |\vec{r}| = \sqrt{6})$$

ਇਸ ਲਈ : ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ ਹਨ।

### 10.5.2 *ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ (Vector joining two points)*

ਜੇਕਰ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $P_1$ ਨੂੰ $P_2$ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10-15)। $P_1$ ਅਤੇ $P_2$ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ $OP_1P_2$ ਤੋਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$



ਚਿੱਤਰ 10.15

ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

ਭਾਵ

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ਦਾ ਆਕਾਰ $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ : 10.** ਬਿੰਦੂਆਂ P(2, 3, 0) ਅਤੇ Q(−1, −2, −4) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਅਤੇ P ਤੋਂ Q ਵੱਲ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਕਿਉਂਕਿ ਵੈਕਟਰ P ਤੋਂ Q ਵੱਲ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ; P ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਅਤੇ Q] ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{PQ}$, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

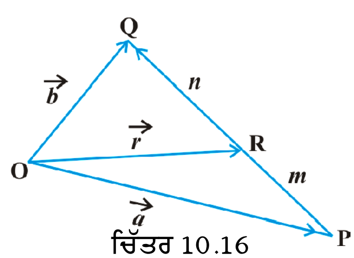
$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-4-0)\hat{k}$$

ਭਾਵ

$$\overrightarrow{PQ} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

### 10.5.3 *ਕਾਟ ਸੂਤਰ (Section Formula)*

ਮੰਨ ਲਉ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ P ਅਤੇ Q ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OQ}$ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਬਿੰਦੂਆਂ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਕਿਸੇ ਤੀਜੇ ਬਿੰਦੂ R ਦੁਆਰਾ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਵਿਭਜਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। (ਅੰਦਰੂਨੀ ਚਿੱਤਰ 10-16) ਅਤੇ ਬਾਹਰੀ (ਚਿੱਤਰ 10-17)। ਇੱਥੇ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OR}$ ਲੱਭਣਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 10.16

**ਸਥਿਤੀ:** ਜਦੋਂ **R, PQ** ਦੀ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.16)। ਜੇਕਰ R, $\overrightarrow{PQ}$ ਦੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ $m\,\overrightarrow{RQ} = n\,\overrightarrow{PR}$, ਜਿੱਥੇ $m$ ਅਤੇ $n$ ਧਨਾਤਮਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ R,

$\overrightarrow{PQ}$ ਨੂੰ $m : n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ORQ ਅਤੇ OPR ਤੋਂ

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \vec{b} - \vec{r}$$

ਅਤੇ

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{a}$$

ਇਸ ਲਈ $m(\vec{b} - \vec{r}) = n(\vec{r} - \vec{a})$ (ਕਿਉਂ ?)

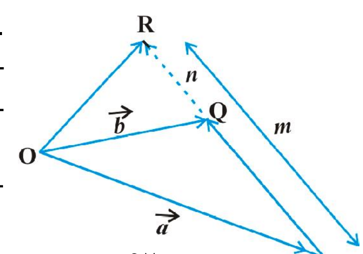
ਜਾਂ $\vec{r} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$ (ਹੱਲ/ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ R ਜੋ ਕਿ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ $m : n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**ਸਥਿਤੀ II** ਜਦੋਂ **R, PQ** ਦੀ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10-17)। ਇਹ ਤਸਦੀਕ ਕਰਨਾ ਅਸੀਂ ਪਾਠਕਾਂ ਲਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਛੱਡਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾਖੰਡ PQ ਨੂੰ $m : n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ R $\left(\text{ਭਾਵ } \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{m}{n}\right)$ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 10.17

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਜੇਕਰ R, PQ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $m = n$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਸਥਿਤੀ I ਤੋਂ $\overrightarrow{PQ}$ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OR} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ।

**ਉਦਾਹਰਣ : 11.** ਦੋ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਲਵੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (i) ਅੰਦਰੂਨੀ (ii) ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ।

**ਹੱਲ :**

(i) P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2.1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ :

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) + (3\vec{a} - 2\vec{b})}{3} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ :

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) - (3\vec{a} - 2\vec{b})}{2-1} = 4\vec{b} - \vec{a}$$

**ਉਦਾਹਰਣ : 12.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $A(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$, $B(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$, $C(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k})$ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।

**ਹੱਲ :** ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ ਕਿ

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i}+(-3+1)\hat{j}+(-5-1)\hat{k} = -\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i}+(-4+3)\hat{j}+(-4+5)\hat{k} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

ਅਤੇ
$$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i}+(-1+4)\hat{j}+(1+4)\hat{k} = -\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6+35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 10.2

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਅੰਕ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ :
$$\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k};\quad \vec{b} = 2\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k};\quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$
2. ਸਮਾਨ ਮਾਪ ਅੰਕ ਵਾਲੇ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।
3. ਸਮਾਨ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੇ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।
4. $x$ ਅਤੇ $y$ ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}+3\hat{j}$ ਅਤੇ $x\hat{i}+y\hat{j}$ ਸਮਾਨ ਹੋਣ।
5. ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ $(2, 1)$ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ $(-5, 7)$ ਹੈ। ਇਸ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸਕੈਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਘਟਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = \hat{i}-6\hat{j}-7\hat{k}$ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{PQ}$, ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(1, 2, 3)$ ਅਤੇ $(4, 5, 6)$ ਹਨ।
9. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = -\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}+\vec{b}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਵੈਕਟਰ $5\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ 8 ਇਕਾਈ ਹੈ।
11. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $-4\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
12. ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**13.** ਬਿੰਦੂਆਂ A (1, 2, –3) ਅਤੇ B(–1, –2, 1) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ A ਤੋਂ B ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**14.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ਧੁਰਿਆਂ OX, OY ਅਤੇ OZ ਦੇ ਨਾਲ ਬਰਾਬਰ (ਸਮਾਨ) ਝੁਕਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

**15.** ਬਿੰਦੂਆਂ P ($\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$) ਅਤੇ Q ($-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (i) ਅੰਦਰੂਨੀ (ii) ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**16.** ਦੋ ਬਿੰਦੂ P(2, 3, 4) ਅਤੇ Q(4, 1, –2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**17.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\vec{a}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ ਹੈ, ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਨ।

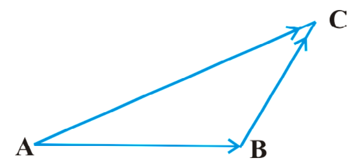
**18.** ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC (ਚਿੱਤਰ 10.18), ਦੇ ਲਈ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$




ਚਿੱਤਰ 10. 18

**19.** ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(A) $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, ਕਿਸੀ ਸਕੇਲਰ $\lambda$ ਦੇ ਲਈ

(B) $\vec{a}=\pm\vec{b}$

(C) $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਘਟਕ ਸਮਾਨਅਨੁਪਾਤੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(D) ਦੋਨੋਂ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਹੈ; ਪਰ ਮਾਪ ਅੰਕ ਵਿਭਿੰਨ ਹੈ।

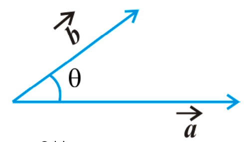
## 10.6 ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ (Product of Two Vectors)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਮਕ ਇੱਕ ਦੂਜੀ ਅਲਜਬਰੇ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਯਾਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਵੀ ਦੋ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ : ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿੱਥੇ ਨਤੀਜਾ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿੱਥੇ ਨਤੀਜਾ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਇਹ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਜਿਉਮੈਟਰੀ, ਮਕੈਨਿਕ ਅਤੇ ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਉਪਯੋਗ ਹਨ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ (ਅਨੁਭਾਗ) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

### 10.6.1 *ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ* [*Scalar (or dot) product of two vectors*]

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ $\theta$, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$, ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ $0 \le \theta \le \pi$ (ਚਿੱਤਰ 10.19)।




ਚਿੱਤਰ 10.19

ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b} = \vec{0}$, ਤਾਂ $\theta$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹੈ।

**ਨਿਰੀਖਣ**

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
3. ਜੇਕਰ $\theta = 0$, ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$
   ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੋਂ $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\theta = 0$ ਹੈ।
4. ਜੇਕਰ $\theta = \pi$, ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$
   ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੋਂ $\vec{a}\cdot(-\vec{a}) = -|\vec{a}|^2$, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\theta$, $\pi$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
5. ਨਿਰੀਖਣ ਪ੍ਰੇਖਣ 2 ਅਤੇ 3 ਦੀ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਆਪਸੀ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ
   $$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$
   ਅਤੇ
   $$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$
6. ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ $\theta$,
   $$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ ਜਾਂ } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) \text{ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।}$$
7. ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਭਾਵ
   $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

**ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Two important properties of scalar product)**

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1.(ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਜੋੜ ਉੱਪਰ ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ)ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਅਤੇ $\lambda$ ਇੱਕ ਸਕੈਲਰ ਹੈ, ਤਾਂ

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$$

ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\
&= a_1\hat{i}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_2\hat{j}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_3\hat{k}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\
&= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k})\\
&\quad + a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})
\end{aligned}$$

(ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ)

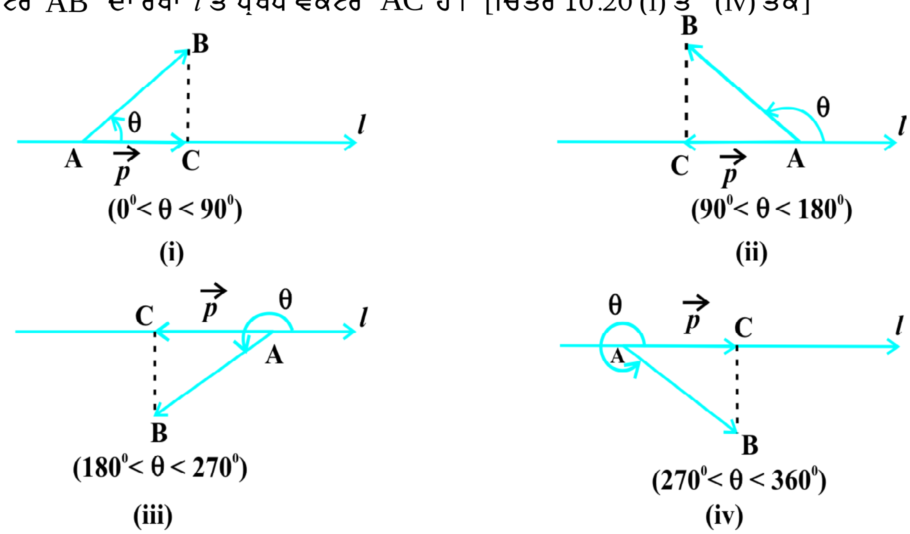
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

(ਨਿਰੀਖਣ 5 ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ )

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

### 10.6.2 *ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਕਿਸੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਪ੍ਰਖੇਪ* (*Projection of a vector on a line*)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਕਿਸੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਰੇਖਾ $l$ (ਮੰਨ ਲਉ) ਦੇ ਨਾਲ ਘੱਬੇ ਗੇੜੇ (ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਤੋਂ À ñ à ç¢ ô À) ਵਿੱਚ $\theta$ ਕੋਣ ਬਣਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.20 ਦੇਖੋ) ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ $l$ ਉੱਪਰ ਪ੍ਰਖੇਪ Projection ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\vec{p}$ (ਮੰਨ ਲਉ) ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦਾ $l$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਵੱਲ (ਜਾਂ ਉਲਟ) ਹੋਣਾ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ $\cos\theta$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ। ਵੈਕਟਰ $\vec{p}$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਖੇਪ (Projection) ਵੈਕਟਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ $|\vec{p}|$, ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਰੇਖਾ $l$ ਤੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ ਪ੍ਰਖੇਯ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ ਰੇਖਾ $l$ ਤੇ ਪ੍ਰੇਖਪ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AC}$ ਹੈ। [ਚਿੱਤਰ 10.20 (i) ਤੋਂ (iv) ਤੱਕ]




ਚਿੱਤਰ 10.20

### ਨਿਰੀਖਣ

1. ਰੇਖਾ $l$ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਜੇਕਰ $\hat{p}$ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ $l$ ਤੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਪ੍ਰਖੇਪ $\vec{a}.\hat{p}$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਦੂਜੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$, ਤੇ $\vec{a}\cdot\hat{b}$, ਜਾਂ $\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$, ਜਾਂ $\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ $\theta = 0$, ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਪ੍ਰਖੇਪ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਖੁਦ $\overrightarrow{AB}$ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $\theta = \pi$ ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਪ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{BA}$ ਹੋਵੇਗਾ।
4. ਜੇਕਰ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ਜਾਂ $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਪ੍ਰਖੇਪ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਹੋਵੇਗਾ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਜੇਕਰ $\alpha, \beta$ ਅਤੇ $\gamma$ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਣ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\hat{i}}{|\vec{a}||\hat{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|},\quad \text{and}\quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $|\vec{a}|\cos\alpha$, $|\vec{a}|\cos\beta$ ਅਤੇ $|\vec{a}|\cos\gamma$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : OX, OY ਅਤੇ OZ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ $\vec{a}$ ਦੇ $\vec{a}$ ਦੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $a_1$, $a_2$ ਅਤੇ $a_3$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $x$, $y$, ਅਤੇ $z$ ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ $\vec{a}$ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ

$$\vec{a} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜ਼ਾਹਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : 13. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ਅਤੇ 2 ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, ਇਹਨਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1, |\vec{a}| = 1$ ਅਤੇ $|\vec{b}| = 2$. ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ : 14. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ $\theta$ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})\cdot(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 1 - 1 - 1 = -1$

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\qquad \cos\theta = \dfrac{-1}{3}$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਕੋਣ $\qquad \theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : 15. ਜੇਕਰ $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}+\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}$ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਜੀਰੋ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $\qquad \vec{a}+\vec{b} = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) + (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

ਅਤੇ $\qquad \vec{a}-\vec{b} = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) - (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

ਇਸ ਲਈ $\qquad (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})\cdot(4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) = 24 - 8 - 16 = 0$

ਇਸ ਲਈ $\qquad \vec{a}+\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}$ ਪਰਸਪਰ ਵੈਕਟਰ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ : 16. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ਦਾ, ਵੈਕਟਰ $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਤੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹੈ।

$$\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}}(2\,.\,1+3\,.\,2+2\,.\,1) = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{6} \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਨ : 17. ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$ ਤਾਂ $|\vec{a}-\vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\ &= \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2\\ &= (2)^2 - 2(4) + (3)^2\end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ $\qquad |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$, ਤਾਂ $|\vec{x}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $|\vec{a}| = 1$. ਇਹ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ

$$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$$

ਜਾਂ $\qquad \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{x} - \vec{a}\cdot\vec{a} = 8$

ਜਾਂ $\qquad |\vec{x}|^2 - 1 = 8$ ਜਾਂ $|\vec{x}|^2 = 9$

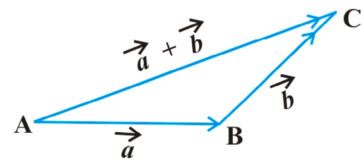
ਇਸ ਲਈ $\qquad |\vec{x}| = 3$ (ਕਿਉਂਕਿ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ)

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$, ਦੇ ਲਈ ਹਮੇਸ਼ਾ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ (Cauchy-Schwartz ਅਸਮਾਨਤਾ)।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਜੇਕਰ $\vec{a}=\vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b}=\vec{0}$. ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 0 = |\vec{a}||\vec{b}|$. ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|\vec{a}| \neq 0 \neq |\vec{b}|$ ਹਾਂ ਅਸੀਂ

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \leq 1$$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$




ਚਿੱਤਰ 10.21

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਲਈ ਹਮੇਸ਼ਾ $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ (ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਸਮਾਨਤਾ)

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ, ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ $\vec{a}=0$ ਜਾਂ $\vec{b}=0$ ਵਿੱਚ ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ ?)। ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $|\vec{a}| \neq \vec{0} \neq |\vec{b}|$ ਤਾਂ

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$ (ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ।)

$$\leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$ (ਕਿਉਂਕਿ $x \leq |x|\ \forall x \in \mathbf{R}$)

$$\leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$ (ਉਦਾਹਰਨ 19 ਤੋਂ)

$$= (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$$

ਇਸ ਲਈ : $$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਸਮਾਨਤਾ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨਤਾ ਰੱਖੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ 20 ਵਿੱਚ) ਇਸ ਲਈ

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|,$$ ਤਦ

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$$

ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $A(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$, $B(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ ਅਤੇ $C(7\hat{i}-\hat{k})$ ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\overrightarrow{AB} = (1+2)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-5)\hat{k} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (7-1)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (-1-3)\hat{k} = 6\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (7+2)\hat{i} + (0-3)\hat{j} + (-1-5)\hat{k} = 9\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14},\ |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{14} \text{ ਅਤੇ } |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$$

ਇਸ ਲਈ $\quad |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਉਦਾਹਰਨ 21 ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ ਪਰ ਫਿਰ ਵੀ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 10.3

1. ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\sqrt{3}$ ਅਤੇ 2 ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{6}$ ਹੈ ਤਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਵੈਕਟਰ $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ਅਤੇ $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਵੈਕਟਰ $\hat{i} + \hat{j}$ ਤੇ ਵੈਕਟਰ $\hat{i} - \hat{j}$ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਵੈਕਟਰ $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ ਦਾ, ਵੈਕਟਰ $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ ਤੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ :

   $$\frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}),\ \frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}),\ \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

   ਇਹ ਵੀ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਇਹ ਵੈਕਟਰ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੰਬ ਹਨ।
6. ਜੇਕਰ $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = 8$ ਅਤੇ $|\vec{a}| = 8|\vec{b}|$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $|\vec{a}|$ ਅਤੇ $|\vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. $(3\vec{a} - 5\vec{b})\cdot(2\vec{a} + 7\vec{b})$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਆਕਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਆਕਾਰ ਸਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ $60°$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।
9. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$, ਦੇ ਲਈ $(\vec{x} - \vec{a})\cdot(\vec{x} + \vec{a}) = 12$ ਹੈ ਤਾਂ $|\vec{x}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਜੇਕਰ $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ, ਤਾਂ $\lambda$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**11.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਲਈ $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$, $|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

**12.** ਜੇਕਰ $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, ਤਾਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕਿ ਨਿਸ਼ਕਰਸ਼ (ਨਤੀਜਾ) ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

**13.** ਜੇਕਰ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**14.** ਜੇਕਰ $\vec{a}=\vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b}=\vec{0}$, ਜਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ਪਰ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

**15.** ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਸਿਖਰ, A, B, C ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (1, 2, 3), (−1, 0, 0), (0, 1, 2) ਹੈ ਤਾਂ $\angle ABC$ ਪਤਾ ਕਰੋ। [$\angle ABC$, ਸਿਖਰ $\overrightarrow{BA}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{BC}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ।]

**16.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A(1, 2, 7), B(2, 6, 3) ਅਤੇ C(3, 10, −1) ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ।

**17.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ ਅਤੇ $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

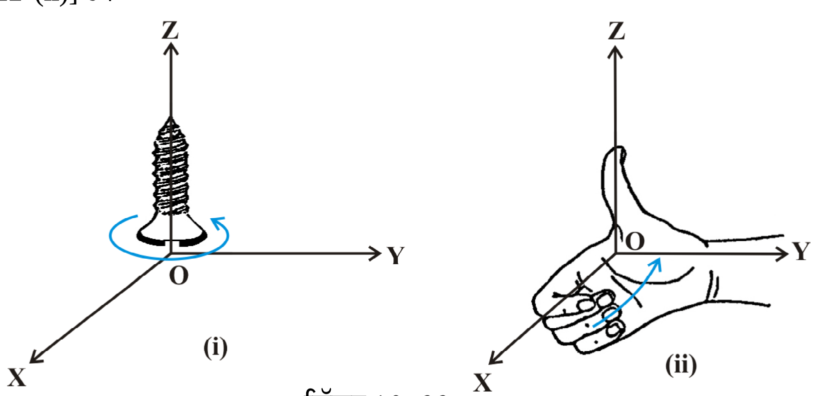
**18.** ਜੇਕਰ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਆਕਾਰ $|a|$ ਹੈ ਤਾਂ $\lambda$ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਸਕੇਲਰ ਹੈ ਤਾਂ $\lambda\vec{a}$ ਇੱਕ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੇਕਰ

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = 1/|\lambda|$

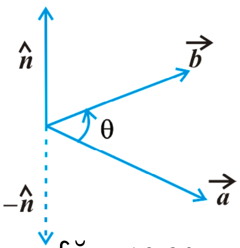
### 10.6.3 *ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ [Vector (or cross) product of two vectors]*

ਭਾਗ 10.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰੈ ਵਿਮਾਈ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਆਇਤਾਕਾਰ ਤਾਲਮੇਲ ਸਿਸਟਮ (ਪ੍ਰਣਾਲੀ) ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ $x$ ਭੁਜ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਗੇੜ (ਘੜੀ ਵਿਪਰੀਤ) ਘੁਮਾ ਕੇ ਧਨਾਤਮਕ $y$-ਭੁਜ ਤੇ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਧਨਾਤਮਕ $z$-ਭੁਜ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੱਜੇ ਹੱਥ (ਮਿਆਰੀ) ਪੇਚ ਅੱਗੇ ਵੱਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ 10.22 (i)]।

ਇੱਕ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਤਾਲਮੇਲ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀਆਂ ਉਂਗਲੀਆਂ ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ $x$- ਭੁਜ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਤੋਂ ਦੂਰ ਧਨਾਤਮਕ $y$-ਭੁਜ ਦੇ ਵੱਲ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅੰਗੂਠਾ ਧਨਾਤਮਕ $z$-ਭੁਜਾ ਦੇ ਵੱਲ ਇਸ਼ਾਰਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। [ਚਿੱਤਰ 10-22 (ii)] ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.22



ਚਿੱਤਰ 10.23

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$, ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\times\vec{b}$ ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\theta$, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ $0\le\theta\le\pi$ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$, ਦੋਨਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਨਿਰਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 10.23) ਇਸ ਲਈ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ $\vec{a}$ ਤੋਂ $\vec{b}$ ਦੇ ਵੱਲ ਘੁੰਮਾਉਣ ਤੇ ਇਹ $\hat{n}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਚੱਲਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $\vec{a}=\vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b}=\vec{0}$, ਤਾਂ $\theta$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰੇਖਣ :

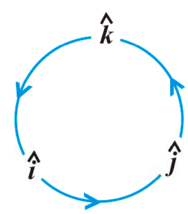
1. $\vec{a}\times\vec{b}$ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।
2. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਹਨ ਤਾਂ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ (ਜਾਂ ਸਮਰੇਖੀ) ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\,||\,\vec{b}$$

ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ ਅਤੇ $\vec{a}\times(-\vec{a})=\vec{0}$, ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\theta = 0$ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\theta=\pi$, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ $\sin\theta$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

3. ਜੇਕਰ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ਤਾਂ $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$
4. ਨਿਰੀਖਣ (ਪ੍ਰੇਖਣ) 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਝਲਕ ਵਿੱਚ ਆਪਸੀ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰਾਂ $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਦੇ ਲਈ (ਚਿੱਤਰ 10.24), ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$$
$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\quad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i},\quad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$



ਚਿੱਤਰ 10.24

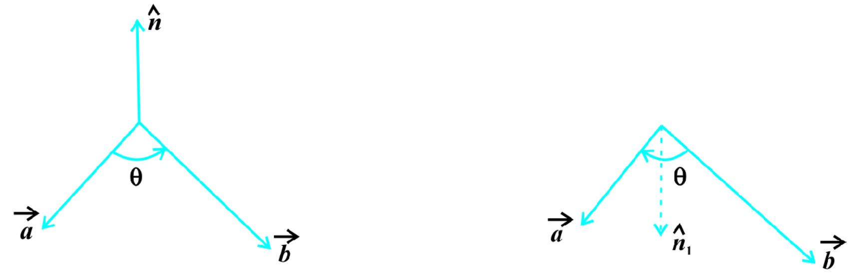
5. ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ $\theta$ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

6. ਇਹ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ ਅਸਲ ਵਿੱਚ $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, ਜਿੱਥੇ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $\theta$, $\vec{a}$ ਤੋਂ $\vec{b}$ ਵੱਲ ਲੰਘੇ ਹੁੰਦੇ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 10.25(i) ਜਦੋਂ ਕਿ

$\vec{b} \times \vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\, \hat{n}_1$, ਜਿੱਥੇ $\vec{b}$, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\hat{n}_1$ ਇੱਕ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਨਿਰਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\theta$, $\vec{b}$ ਤੋਂ $\vec{a}$ ਤੋਂ ਦੇ ਵੱਲ ਚੱਕਰੀ ਕ੍ਰਮਹੁੰਦਾ ਹੈ ਚਿੱਤਰ 10-25(ii)।

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ




(i) ਚਿੱਤਰ 10.25 (ii)

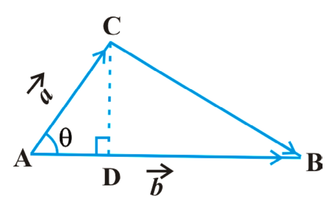
ਲੰਬ ਹੋਣਗੇ $\hat{n}$ ਅਤੇ $\hat{n}_1$ ਕਾਗਜ਼ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\hat{n}_1$ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਥੱਲੇ ਵੱਲ (ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ) ਹੋਵੇਗਾ ਇਸ ਲਈ $\hat{n}_1 = -\hat{n}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$
$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}_1 = -\vec{b}\times\vec{a}$$

7. ਨਿਰੀਖਣ (ਪ੍ਰੇਖਣ) 4 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਫ਼ਲਕ ਵਿੱਚ
$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k},\quad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i} \text{ ਅਤੇ } \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j} \text{ ਹੈ।}$$

8. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 10.26 ਤੋਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} AB \cdot CD$.




ਚਿੱਤਰ 10.26

ਪਰੰਤੂ $AB = |\vec{b}|$ (ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ) ਅਤੇ $CD = |\vec{a}|\sin\theta$

ਇਸ ਲਈ : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

9. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 10-27 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = AB. DE.

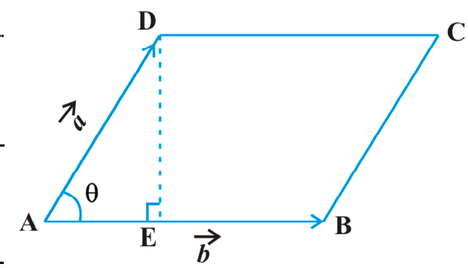
ਪਰ $AB = |\vec{b}|$ (ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ), ਅਤੇ

$DE = |\vec{a}|\sin\theta$ ਇਸ ਲਈ

ਇਸ ਲਈ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ

ਖੇਤਰਫਲ = $|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = |\vec{a}\times\vec{b}|$

ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸਾਂਗੇ।




ਚਿੱਤਰ 10.27

**ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 3.** ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਤੇ ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ (Distributivity of vector product over addition) ਜੇਕਰ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ $\lambda$ ਇੱਕ ਸਕੈਲਰ ਹੈ ਤਾਂ

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

(ii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਖਿਆ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\
&= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})\\
&\quad + a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})\\
&\quad + a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k}) \qquad \text{(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1 ਤੋਂ)}\\
&= a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})-a_1b_3(\hat{k}\times\hat{i})-a_2b_1(\hat{i}\times\hat{j})\\
&\quad + a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})-a_3b_2(\hat{j}\times\hat{k})
\end{aligned}$$

(ਕਿਉਂਕਿ $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$ ਅਤੇ $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{k}\times\hat{i}$, $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{i}\times\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{j}\times\hat{k}$)

$$= a_1b_2\hat{k} - a_1b_3\hat{j} - a_2b_1\hat{k} + a_2b_3\hat{i} + a_3b_1\hat{j} - a_3b_2\hat{i}$$

(ਕਿਉਂਕਿ $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ ਅਤੇ $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$)

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$, ਤਾਂ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2-15) - (-4-9)\hat{j} + (10-3)\hat{k} = -17\hat{i}+13\hat{j}+7\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-17)^2+(13)^2+(7)^2} = \sqrt{507}$

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਵੈਕਟਰ $(\vec{a}+\vec{b})$ ਅਤੇ $(\vec{a}-\vec{b})$ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\vec{a}+\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}=-\hat{j}-2\hat{k}$

ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ, ਜੋ $\vec{a}+\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}$ ਦੋਨਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k} \ (=\vec{c}, \text{ ਮੰਨ ਲਉ })$$

ਹੁਣ $|\vec{c}| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ

$$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k} \text{ ਹੈ।}$$

> ☛ *ਟਿੱਪਣੀ* ਕਿਸੇ ਤਲ ਤੇ ਦੋ ਅਭਿਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾਵਾ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\vec{a}+\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}$ ਤੇ ਦੂਜਾ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}-\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$ ਹੋਵੇਗਾ।ਪਰੰਤੂ ਇਹ $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ ਦਾਇੱਕ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜਾਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) ਅਤੇ C(2, 3, 1) ਹੈ।

ਹੱਲ: ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AB}=\hat{j}+2\hat{k}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{AC}=\hat{i}+2\hat{j}$. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ ਹੈ।

ਹੁਣ
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} = -4\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ
$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਉਸ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਸੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹੈ। ਉਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{25+1+16}=\sqrt{42}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\sqrt{42}$ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 10-4

1. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ਤਾਂ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} + \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a} - \vec{b}$ ਦੀ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ਹੈ।

3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$, $\hat{i}$ ਦੇ ਨਾਲ $\frac{\pi}{3}$, $\hat{j}$ ਦੇ ਨਾਲ $\frac{\pi}{4}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਦੇ ਨਾਲ ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ $\theta$ ਬਣਦਾ ਹੈ ਕਿ $\theta$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $\vec{a}$ ਦਾ ਘਟਕ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

5. $\lambda$ ਅਤੇ $\mu$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{0}$

6. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ਅਤੇ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

7. ਮੰਨ ਲਉ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$; $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$; $c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੈ, ਹੁਣ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

8. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b} = \vec{0}$ ਤਾਂ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਉਲਟ ਸਹੀ ਹੈ ? ਉਦਾਹਰਣ ਸਹਿਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

9. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) ਅਤੇ C(1, 5, 5) ਹੈ।

10. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹਨ।

11. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $|\vec{a}| = 3$ ਅਤੇ $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$, ਤਾਂ $\vec{a} \times \vec{b}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ :

    (A) $\pi/6$ (B) $\pi/4$ (C) $\pi/3$ (D) $\pi/2$

12. ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੇ ਸਿਖਰ A, B, C ਅਤੇ D ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :

    $-\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$ ਅਤੇ $-\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, ਹੈ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

    (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1

    (C) 2 (D) 4

## *ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ*

ਉਦਾਹਰਣਾਂ 26. XY-ਤਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।

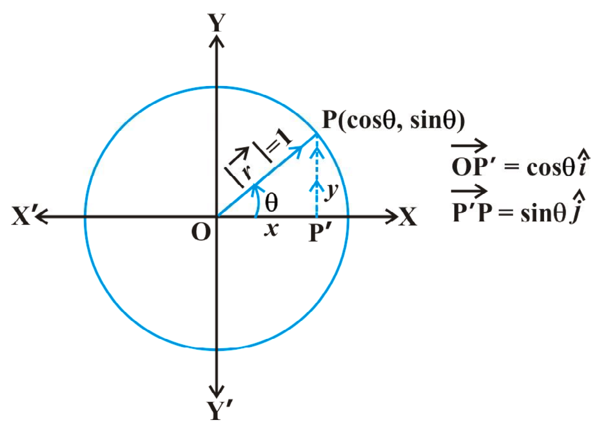
ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, XY-ਤਲ ਦਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.28)। ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = \cos\theta$ ਅਤੇ $y = \sin\theta$ (ਕਿਉਂਕਿ $|\vec{r}| = 1$). ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਨੂੰ

$$\vec{r}\left(=\overrightarrow{OP}\right) = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} \qquad \ldots (1)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ $\qquad |\vec{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

ਜਿਵੇਂ&ਜਿਵੇਂ $\theta$, 0 ਤੋਂ $2\pi$, ਤੱਕ ਤਬਦੀਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਬਿੰਦੂ P (ਚਿੱਤਰ 10.28) ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 1$ ਦੀ ਬਣਾਵਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (1) ਤੋਂ




ਚਿੱਤਰ 10.28

XY-ਤਲ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ A, B, C ਅਤੇ D, ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+5\hat{j}$, $3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ਅਤੇ $\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$ ਹੈ, ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਿੱਟਾ ਕੱਢੋ ਕਿ AB ਅਤੇ CD ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $\theta$, AB ਅਤੇ CD, ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ ਹੈ। ਤਾਂ $\theta$, $\overrightarrow{AB}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{CD}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਵੀ ਕੋਣ ਹੈ।

ਹੁਣ $\qquad \overrightarrow{AB}$ = B ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ – A ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ

$$= (2\hat{i}+5\hat{j}) - (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = \hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $\qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}$

ਇਸ ਲਈ $\overrightarrow{CD} = -2\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $|\overrightarrow{CD}| = 6\sqrt{2}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$$

$$= \frac{1(-2)+4(-8)+(-1)(2)}{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})} = \frac{-36}{36} = -1$$

ਕਿਉਂਕਿ $0 \le \theta \le \pi$, ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $\theta = \pi$. ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ AB ਅਤੇ CD ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਵਿਕਲਪ : $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ] ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AB}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{CD}$ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 28.** ਮੰਨ ਲਓ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ, ਹੋਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਹੈ ਤਾਂ $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = 0,\ \vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{a}) = 0,\ \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 0$

ਹੁਣ
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})$$
$$+\ \vec{c}.(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c}.\vec{c}$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$
$$= 9 + 16 + 25 = 50$$

ਇਸ ਲਈ
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

**ਉਦਾਹਰਣ 29.** ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸ਼ਰਤ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4$ ਅਤੇ $|\vec{c}| = 2$ ਤਾਂ ਰਾਸ਼ੀ $\mu = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

ਜਾਂ
$$\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$$

ਇਸ ਲਈ
$$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = -|\vec{a}|^2 = -9 \qquad \ldots (1)$$

ਦੁਬਾਰਾ
$$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

ਜਾਂ
$$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} = -|\vec{b}|^2 = -16 \qquad \ldots (2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} = -4$ ... (3)

(1), (2) ਅਤੇ (3) ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}) = -29$$

ਜਾਂ $$2\mu = -29, \text{ i.e., } \mu = \frac{-29}{2}$$

**ਉਦਾਹਰਣ 30.** ਜੇਕਰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}, \hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੀ ਸੱਜ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹਵਾਲੇ ਨਾਲ $\vec{\alpha} = 3\hat{i}-\hat{j}$, $\vec{\beta} = 2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$, ਤਾਂ $\vec{\beta}$ ਨੂੰ $\vec{\beta}=\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਪ੍ਰਤੱਖ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $\vec{\beta}_1$, $\vec{\alpha}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ ਦੇ ਲੰਬ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha}$, $\lambda$ ਇੱਕ ਸਕੈਲਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $\vec{\beta}_1 = 3\lambda\hat{i}-\lambda\hat{j}$

ਹੁਣ $$\vec{\beta}_2 = \vec{\beta}-\vec{\beta}_1 = (2-3\lambda)\hat{i}+(1+\lambda)\hat{j}-3\hat{k}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_2 = 0$

ਜਾਂ $$3(2-3\lambda)-(1+\lambda) = 0$$

ਜਾਂ $$\lambda = \frac{1}{2}$$

ਇਸ ਲਈ $$\vec{\beta}_1 = \frac{3}{2}\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j} \text{ ਅਤੇ } \vec{\beta}_2 = \frac{1}{2}\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j}-3\hat{k}$$

## *ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

1. XY-ਤਲ ਵਿੱਚ, $x$-ਭੁਜ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।
2. ਬਿੰਦੂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸਕੈਲਰ ਘਟਕ ਅਤੇ ਅਕਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਪੱਛਮੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 4 km ਚੱਲਦੀ ਹੈ। ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹ ਉੱਤਰ ਤੋਂ 30° ਪੱਛਮ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 3 km ਚੱਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਰੁਕ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਪ੍ਰਸਥਾਨ ਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੜਕੀ ਦਾ ਵਿਸਥਾਪਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{b}+\vec{c}$, ਤਾਂ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ $|\vec{a}| = |\vec{b}|+|\vec{c}|$? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।
5. $x$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ $x(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।
6. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਆਕਾਰ 5 ਇਕਾਈ ਹੈ।

**7.** ਜੇਕਰ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, ਤਾਂ ਵੈਕਟਰ $2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**8.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A $(1, -2, -8)$, B $(5, 0, -2)$ ਅਤੇ C $(11, 3, 7)$ ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ ਅਤੇ B ਦੁਆਰਾ AC ਨੂੰ ਵੰਡਣ ਵਾਲਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**9.** ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ P $(2\vec{a}+\vec{b})$ ਅਤੇ Q $(\vec{a}-3\vec{b})$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 1:2 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।ਇਹ ਵੀ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P ਰੇਖਾਖੰਡ RQ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

**10.** ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ ਅਤੇ $\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ ਹੈ।ਇਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**11.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ OX, OY ਅਤੇ OZ ਭੁਜਾ ਦੇ ਨਾਲ ਬਰਾਬਰ ਝੁਕੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਹੈ।

**12.** ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}=\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$. ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{d}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋਨਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{c}\cdot\vec{d}=15$

**13.** ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ਦਾ, ਵੈਕਟਰਾਂ $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ ਅਤੇ $\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ $\lambda$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**14.** ਜੇਕਰ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ਸਮਾਨ ਆਕਾਰਾਂ ਵਾਲੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਲੰਭ ਹਨ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਦੇ ਨਾਲ ਬਰਾਬਰ ਝੁਕਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

**15.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$

16 ਤੋਂ 19 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**16.** ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0$ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ :

(A) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ (B) $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

(C) $0<\theta<\pi$ (D) $0\leq\theta\leq\pi$

**17.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਤਾਂ $\vec{a}+\vec{b}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੇਕਰ :

(A) $\theta=\frac{\pi}{4}$ (B) $\theta=\frac{\pi}{3}$ (C) $\theta=\frac{\pi}{2}$ (D) $\theta=\frac{2\pi}{3}$

**18.** $\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}\cdot(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}\cdot(\hat{i}\times\hat{j})$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਹੈ ?

(A) 0 (B) $-1$ (C) 1 (D) 3

**19.** ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਤਾਂ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$ ਜਦੋਂ $\theta$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\pi$

## *ਸਾਰ-ਅੰਸ਼*

- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $P(x, y, z)$ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overline{OP}(=\vec{r}) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਹੈ ਅਤੇ ਆਕਾਰ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸਕੇਲਰ ਘਟਕ ਇਸਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹੈ ਅਤੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਨਾਲ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਜੈਕਸ਼ਨ (ਵਧਾ) ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
- ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਕਾਰ $(r)$, ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ $a, b, c$ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਇਨ $(l, m, n)$ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ :
$$l = \frac{a}{r}, \quad m = \frac{b}{r}, \quad n = \frac{c}{r}$$
- ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨੋਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲੈਣ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ $\vec{0}$ ਹੈ।
- ਦੋ ਸਹਿ&ਮੁੱਢਲੇ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਸਕੇਲਰ $\lambda$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਇਸ ਦੇ ਆਕਾਰ ਨੂੰ $|\lambda|$ ਦੇ ਗੁਣਾਕ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\lambda$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਅਨੁਸਾਰ ਇਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਬਾਰਬਰ ਅਤੇ ਉਲਟ ਰੱਖਦਾ ਹੈ।
- ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ] $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਿਸ਼ਾ ਹੈ।
- ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹੈ, ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ $m : n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ (i) $\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਤੇ (ii) $\frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਤੇ, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ

$\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ $\theta$, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

- ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ

  $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੋ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਰੱਖਣ ਵਾਲੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\hat{n}$ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਸਮਕੋਣ ਤਾਲਮੇਲ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਨਿਰਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

- ਜੇਕਰ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ਅਤੇ $\lambda$ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ ਤਾਂ

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i} + (a_2+b_2)\hat{j} + (a_3+b_3)\hat{k}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ਅਤੇ $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

## *ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਟਿੱਪਣੀ*

ਵੈਕਟਰ ਸ਼ਬਦ ਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤੀ ਲੈਟਿਨ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਇੱਕ ਸ਼ਬਦ ਵੈਕਟਸ (vectus) ਤੋਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ "ਲੈ ਲਈ"। ਆਧੁਨਿਕ ਵੈਕਟਰ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਪੈਦਾਇਸ਼ੀ ਵਿਚਾਰ ਦੀ ਮਿਤੀ ਸੰਨ 1800 ਦੇ ਆਸ ਪਾਸ ਮੰਨੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ Caspar Wessel (1745&1818 ਈ.) ਅਤੇ Jean Robert Argand (1768-1822 ਈ.) ਨੇ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਵਰਨਣ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਭੁਜ-ਤਲ (ਨਿਰਦੇਸ਼-ਤਲ) ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਲਾਇਨ ਖੰਡ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $a + ib$ ਦਾ ਜਨਮ ਜਾਂ ਵਿਆਖਿਆ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਆਇਰਿਸ਼ ਗਣਿਤਕਾਰ William Rowen Hamilton (1805-1865 ਈ.) ਨੇ ਆਪਣੀ ਕਿਤਾਬ "*Lectures on Quaternions*" (1853 ਈ.) ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ਸੀ। (quaternians) [ਕੁਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬੀਜਕ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪਾਲਣ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਚਾਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ] ਦੀ ਹੈਮਿਲਟਨ ਵਿਧੀ ਵੈਕਟਰਾਂ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿ-ਵਿਸਾਈ ਬ੍ਰਹਿਮੰਡ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਭਾਵੇਂ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਜ਼ਰੂਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ

ਜੋੜਫਲ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਬਹੁਤ-ਦਿਨਾਂ ਤੋਂ Plato (384-322 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ) ਦੇ ਇੱਕ ਅਨੁਜਾਈ ਅਤੇ ਯੂਨਾਨੀ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨਕ Aristotle (427-348 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ) ਦੇ ਕਾਲ ਵਿੱਚੋਂ ਹੈ। ਉਸ ਸਮੇਂ ਇਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਸੀ ਕਿ ਦੋ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਬਲਾਂ ਦੀ ਸੰਯੁਕਤ ਕਿਰਿਆ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਨਿਯਮ ਅਨੁਪਾਤ ਜੋੜ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਬਲਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸਹੀ ਨਿਯਮ ਕਿ ਬਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਦੀ ਖੋਜ Sterin Simon (1548-1620 ਈਸਵੀ) ਦੁਆਰਾ ਲੰਬਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਸੰਨ 1586 ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਲੇਖ ਕਿਤਾਬ "*DeBeghinselen der Weeghconst*" (ਵਜਨ ਕਰਨ ਦੀ ਕਲਾ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ) ਵਿੱਚ ਬਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੀ ਜਿਉਮੈਟਰੀ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਯੰਤਰਿਕ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਦਾ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਇਆ। ਪਰ ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵੀ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 200 ਸਾਲ ਲੱਗ ਗਏ।

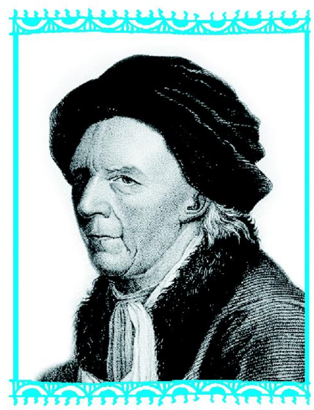
ਸੰਨ 1880 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਮਰੀਕੀ ਭੌਤਿਕ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਅਤੇ ਹਿਸਾਬਦਾਨ Josaih Willard Gibbs (1839-1903 ਈਸਵੀ) ਅਤੇ ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਇੰਜੀਨੀਅਰ Oliver Heaviside (1850-1925 ਈਸਵੀ) ਨੇ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ (ਸਕੈਲਰ) ਨੂੰ ਕਾਲਪਨਿਕ (ਵੈਕਟਰ) ਭਾਗ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ ਦਾ ਬਿਉਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਸੰਨ 1881 ਅਤੇ 1884 ਵਿੱਚ Gibbs ਨੇ "*Entitled Element of Vector Analysis*" ਨਾਮਕ ਇੱਕ ਲੇਖ ਕਿਤਾਬ ਛਪਾਈ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵੈਕਟਰਾ ਦਾ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਅਤੇ ਸੰਖੇਪ ਵਿਵਰਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਲੇਕਿਨ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦਾ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਤੀ D. Heaviside ਅਤੇ P.G. Tait (1831-1901 ਈਸਵੀ) ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਲਈ ਸਬੂਤ (ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ) ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 11

# ਤਿੰਨ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ
# (Three Dimensional Geometry)

❖ *The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination. – A.DEMORGAN* ❖

## 11.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)



**Leonhard Euler**
**(1707-1783)**

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਵਿਸਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਦੋ-ਵਿਮਾਈ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਵਿਮਾਈ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਦੀ ਜਾਣ ਪਛਾਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਵਿਧੀ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਿਆ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੈੱਕਟਰਜ਼ ਦੀ ਮੂਲ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰਜ਼ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਤਿੰਨ ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। ਤਿੰਨ ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਉਪਗਮਨ (approach) ਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਇਸ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਅਤੇ ਰੁਚੀਪੂਰਨ ਬਣਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।*

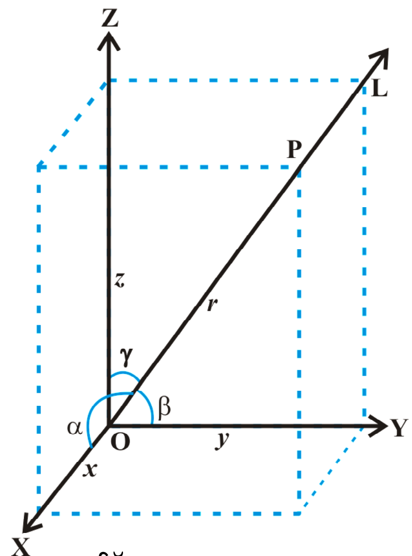
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਵਿਭਿੰਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰਿਖ (space) ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਤਲਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ, ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ, ਦੋ ਤਲਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤਲ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ, ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤਲ ਦੀ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਧੇਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਵੈਕਟਰਾਂ (Vecters) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਨੁਵਾਦ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਜੋ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਚਿੱਤਰਣ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।

## 11.2 ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ (Direction Cosines and Direction Ratios of a Line)

ਅਧਿਆਇ 10 ਵਿੱਚ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਵੈਕਟਰ ਰੇਖਾ L ਦੁਆਰਾ $x$, $y$ ਅਤੇ $z$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\alpha$] $\beta$ ਅਤੇ $\gamma$ ਬਣਾਏ ਗਏ ਕੋਣ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ ਤਦ ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ

* For various activities in three dimensional geometry, one may refer to the Book ***"A Hand Book for designing Mathematics Laboratory in Schools",*** NCERT, 2005

ਕੋਸਾਈਨ ਦਾ ਨਾਮ : $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ਅਤੇ $\cos\gamma$ ਰੇਖਾ L ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਇਨ (direction cosines or dc's) ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ।




ਚਿੱਤਰ 11.1

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ L ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿਪਰੀਤ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਆਪਣੇ ਸੰਪੂਰਕਾਂ ਅਰਥਾਤ $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$ ਅਤੇ $\pi-\gamma$ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੋ ਵਿਪਰੀਤ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਵਧਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਲਈ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਦੇ ਵਿਲੱਖਣ ਸਮੂਹ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਰੇਖਾ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਨੂੰ $l$, $m$ ਅਤੇ $n$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਹੀਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੁਆਰਾ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ (direction ratios or *dr's*) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l$, $m$, $n$ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ $a$, $b$, $c$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫਰ $\lambda \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ $a = \lambda l$, $b=\lambda m$ ਅਤੇ $c = \lambda n$

*ਟਿੱਪਣੀ* ਕੁਝ ਲੇਖਕ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਦਿਸ਼ਾ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ $a, b, c$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹੈ। ਤਦ

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k$$ (ਮੰਨ ਲਉ), $k$ ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $l = ak,\ m = bk,\ n = ck$ ... (1)

ਪਰੰਤੂ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

ਇਸ ਲਈ $k^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 1$

ਜਾਂ $$k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

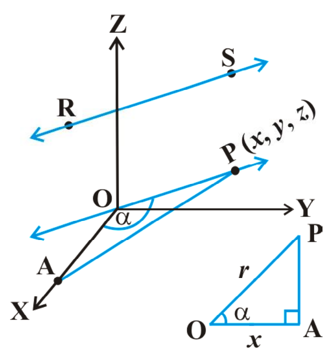
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (1) ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ($d.c.$ਝ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ

$$l=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ n=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a, b, c$ ਹਨ, ਤਾਂ $ka, kb, kc; k \neq 0$ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਦੋ ਸਮੂਹ ਵੀ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

### 11.2.1 *ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ (Relation between the direction cosines of a line)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ RS ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹਨ। ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਇਸ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P$(x, y, z)$ ਲਉ। P ਤੋਂ $x$-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ PA ਖਿੱਚੋ (ਚਿੱਤਰ 11.2)।




ਚਿੱਤਰ 11.2

ਜੇਕਰ OP $= r$.ਤਾਂ $\cos\alpha = \frac{\text{OA}}{\text{OP}} = \frac{x}{r}$. ਜਿਸ ਤੋਂ $x = lr$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ($y = mr$ ਅਤੇ $z = nr$)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (l^2 + m^2 + n^2)$

ਪਰੰਤੂ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

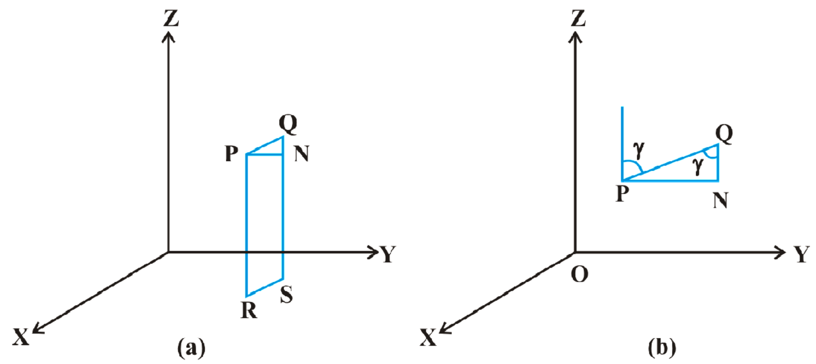
ਇਸ ਲਈ $\mathbf{l^2 + m^2 + n^2 = 1}$

### 11.2.2 ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ *(Direction cosines of a line passing through two points)*

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ P$(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ Q$(x_2, y_2, z_2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ (ਚਿੱਤਰ 11.3(a)।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਰੇਖਾ PQ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ $x, y$ ਅਤੇ $z$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\alpha, \beta, \gamma$ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ P ਅਤੇ Q ਤੋਂ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ XY-ਤਲ ਨੂੰ R ਅਤੇ S ਤੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। P ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਲੰਬ




ਚਿੱਤਰ 11 . 3

ਖਿੱਚੀਏ ਜੋ QS ਨੂੰ N ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।ਹੁਣ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PNQ ਵਿੱਚ, $\angle PQN = \gamma$ (ਚਿੱਤਰ 11.3 (b)) ਇਸ ਲਈ

$$\cos\gamma = \frac{NQ}{PQ} = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{PQ}$ ਅਤੇ $\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{PQ}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ PQ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ਹਨ

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ} \text{ ਹੈ।}$$

ਜਿੱਥੇ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

**ਟਿੱਪਣੀ :** ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਲਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

$x_2$ ï $x_1$, $y_2$ ï $y_1$, $z_2$ ï $z_1$, ਜਾਂ $x_1$ ï $x_2$, $y_1$ ï $y_2$, $z_1$ ï $z_2$

**ਉਦਾਹਰਣ 1.** ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ $x, y$ ਅਤੇ $z$-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 90°, 60° ਅਤੇ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹਨ। ਤਦ $l = \cos 90° = 0$, $m = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $n = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ 2] &1] &2 ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :-

$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}},\ \frac{-1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}},\ \frac{-2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}$$

ਅਰਥਾਤ
$$\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (ï 2, 4, ï 5) ਅਤੇ (1, 2, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ

$$\frac{x_2-x_1}{PQ}, \frac{y_2-y_1}{PQ}, \frac{z_2-z_1}{PQ} \text{ ਹਨ।}$$

ਜਿੱਥੇ
$$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ਇੱਥੇ P ਅਤੇ Q ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (ï 2, 4, ï 5) ਅਤੇ (1, 2, 3) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ
$$PQ = \sqrt{(1-(-2))^2+(2-4)^2+(3-(-5))^2} = \sqrt{77}$$

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਹਨ :

$$\frac{3}{\sqrt{77}},\ \frac{-2}{\sqrt{77}},\ \frac{8}{\sqrt{77}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. $x$, $y$ ਅਤੇ $z$-ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $x$-ਧੁਰਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $x$, $y$ ਅਤੇ $z$-ਧੁਰਾ ਦੇ ਨਾਲ 0°, 90° ਅਤੇ 90° ਦੇ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ cos 0°, cos 90°, cos 90° ਅਰਥਾਤ 1,0,0 ਹਨ।
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $y$-ਧੁਰੇ ਅਤੇ $z$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 0, 1, 0 ਅਤੇ 0, 0, 1 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A (2, 3, ï 4), B (1, ï 2, 3) ਅਤੇ C (3, 8, ï 11) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ

1 ï 2, ï 2 ï 3, 3 + 4 ਅਰਥਾਤï 1, ï 5, 7 ਹਨ।

B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ 3 ï 1, 8 + 2, ï 11 ï 3, ਅਰਥਾਤ, 2, 10,ï 14 ਹਨ।

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ AB ਅਤੇ BC ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AB ਅਤੇ BC ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ AB ਅਤੇ BC ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚ B ਸਾਂਝਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A, B, ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

## ਅਭਿਆਸ 11.1

1. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ $x$, $y$ ਅਤੇ $z$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 90°, 135°, 45° ਦੇ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕੀ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਸਮਾਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ï 18, 12, ï 4, ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਕੀ ਹਨ।
4. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (2, 3, 4), (ï 1, ï 2, 1), (5, 8, 7) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
5. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ (3, 5, ï 4), (ï 1, 1, 2) ਅਤੇ (ï 5, ï 5, ï 2) ਹਨ।

## 11.3 ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a Line in Space)

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਦੋ ਵਿਮਾਈ ਤਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜ਼ਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

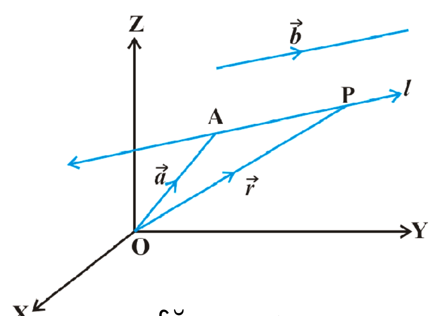
ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਵਿਲੱਖਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ

(i) ਇਹ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਾਂ

(ii) ਇਹ ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

### 11.3.1 *ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ A ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a line through a given point A and parallel to a given vector $\vec{b}$)*

ਸਮਕੋਣਿਕ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A ਦਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ $l$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $l$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.4)।




ਚਿੱਤਰ 11.4

ਤਦ $\overrightarrow{AP}$ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{b}$, ਜਿੱਥੇ $\lambda$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ $\quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$ ï $\overrightarrow{OA}$

ਅਰਥਾਤ $\quad \lambda \vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$

ਉਲਟ : ਪੈਰਾਮੀਟਰ $\lambda$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ ਰੇਖਾ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \qquad \dots (1)$$

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਜੇਕਰ $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ $a, b, c$ ਹਨ ਅਤੇ ਉਲਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ $a, b, c$ ਹੋਣ ਤਾਂ $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ $b$ ਨੂੰ $|\vec{b}|$ ਨਾ ਸਮਝਾਇਆ ਜਾਵੇ।

**ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਕਾਰਟੀਜਨ ਰੂਪ ਵਿਉਂਤਪੰਨ ਕਰਨਾ (Derivation of Cartesian Form from Vector Form)**

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x_1, y_1, z_1)$ ਹਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $a, b, c$ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x, y, z)$ ਹਨ। ਤਦ

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k};\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

ਅਤੇ
$$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$x = x_1 + \lambda a;\ y = y_1 + \lambda b;\ z = z_1 + \lambda c \qquad \text{... (2)}$$

ਇਹ ਰੇਖਾ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ। (2) ਤੋਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰ $\lambda$ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \qquad \text{... (3)}$$

ਇਹ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ:* ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹਨ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 6.** ਬਿੰਦੂ $(5, 2, -4)$ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) \quad [(1) \text{ ਤੋਂ}]$$

ਕਿਉਂਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $P(x, y, z)$ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

$$= (5+3\lambda)\,\hat{i} + (2+2\lambda)\,\hat{j} + (-4-8\lambda)\,\hat{k}$$

$\lambda$ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

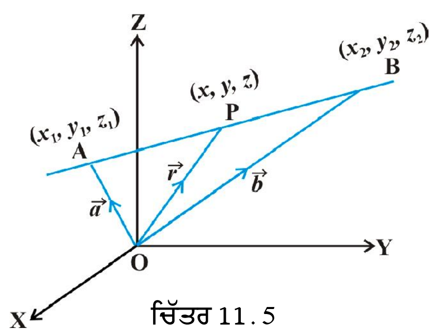
$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8}$$

ਜੋ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਹੈ।

### 11.3.2 *ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a line passing through two given points)*

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2, z_2)$, ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 11.5)।

ਮੰਨ ਲਉ $\vec{r}$ ਇੱਕ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ। ਤਦ P ਰੇਖਾ ਤੇ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ P ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ




ਚਿੱਤਰ 11.5

$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

ਜਾਂ $$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}),\ \lambda \in \mathbf{R} \quad \ldots (1)$$

ਜੋ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿਉਤਪੰਨ ਕਰਨਾ

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k},\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda[(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1);\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1);\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$$

$\lambda$ ਦਾ ਵਿਲੋਪਣ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

ਜੋ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 7.** ਬਿੰਦੂਆਂ $(-1, 0, 2)$ ਅਤੇ $(3, 4, 6)$ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਹੱਲ :** ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(-1, 0, 2)$ ਅਤੇ $B(3, 4, 6)$ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਹਨ।

ਤਦ $\qquad \vec{a} = -\hat{i} + 2\hat{k}$

ਅਤੇ $\qquad \vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

ਇਸ ਲਈ $\qquad \vec{b} - \vec{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ

$$\vec{r} = -\hat{i} + 2\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$$

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਨ $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z+6}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਮਿਆਰੀ ਮਾਨਕ ਰੂਪ

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x_1 = -3, y_1 = 5, z_1 = -6; a = 2, b = 4, c = 2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ, ਬਿੰਦੂ $(-3, 5, -6)$ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ

$$\vec{r} = (-3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}) + \lambda\,(2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$$

ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

## 11.4 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਕੋਣ (Angle between two lines)

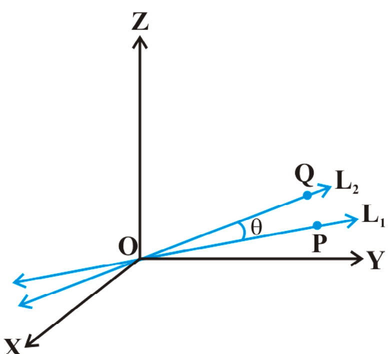
ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $L_1$ ਅਤੇ $L_2$ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲ਼ੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a_1, b_1, c_1$ ਅਤੇ $a_2, b_2, c_2$, ਹਨ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $L_1$ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ $L_2$ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ Q ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 11.6 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ OP ਅਤੇ OQ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ OP ਅਤੇ OQ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ। ਹੁਣ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਵੈਕਟਰ OP ਅਤੇ OQ ਦੇ ਘਟਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a_1, b_1, c_1$ ਅਤੇ $a_2, b_2, c_2$ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ $\theta$

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਫਿਰ ਤੋਂ $\sin\theta$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

$$= \sqrt{1 - \frac{(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2}{\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right)}}$$




ਚਿੱਤਰ 11.6

$$= \frac{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)-\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)^2}}{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)}\sqrt{\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a_1\,b_2-a_2\,b_1)^2+(b_1\,c_2-b_2\,c_1)^2+(c_1\,a_2-c_2\,a_1)^2}}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad \ldots (2)$$

**ਟਿੱਪਣੀ** ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $L_1$ ਅਤੇ $L_2$ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਹੀਂ ਨਿਕਲਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $L_1$ ਅਤੇ $L_2$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $L'_1$ ਅਤੇ $L'_2$ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $L_1$ ਅਤੇ $L_2$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਥਾਂ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹੋਣ ਜਿਵੇਂ $L_1$ ਦੇ ਲਈ $l_1, m_1, n_1$ ਅਤੇ $L_2$ ਦੇ ਲਈ $l_2, m_2, n_2$ ਤਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਲੈਣਗੇ।

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1m_2 + n_1n_2| \text{ (ਕਿਉਂਕਿ } l_1^2+m_1^2+n_1^2=1=l_2^2+m_2^2+n_2^2) \quad \ldots (3)$$

ਅਤੇ $$\sin\theta = \sqrt{(l_1\,m_2-l_2\,m_1)^2-(m_1\,n_2-m_2\,n_1)^2+(n_1\,l_2-n_2\,l_1)^2} \quad \ldots (4)$$

ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ $a_1, b_1, c_1$ ਅਤੇ $a_2, b_2, c_2$ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ

(i) ਅਭਿਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ $\theta = 90°$, ਅਰਥਾਤ (1) ਤੋਂ $\boldsymbol{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$

(ii) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ, ਜੇਕਰ $\theta = 0$, ਅਰਥਾਤ (2) ਤੋਂ $\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ।

ਤਦ $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ $$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \quad \ldots (2)$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a_1, b_1, c_1$ ਅਤੇ $a_2, b_2, c_2$ ਹੈ ਤਦ

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਰੇਖਾ-ਜੋੜੇ

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

ਅਤੇ $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਰੇਖਾ-ਜੋੜੇ :

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$$

ਅਤੇ $$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ 3, 5, 4 ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ 1, 1, 2 ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ $\theta$ ਹੋਵੇ ਤਦ

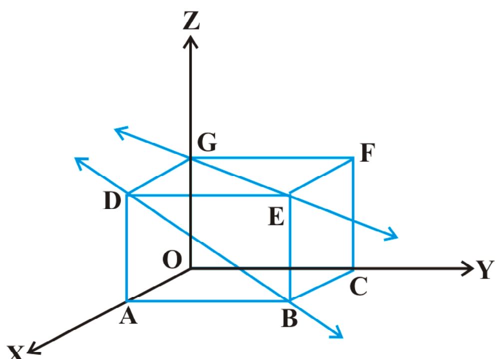
$$\cos\theta = \left|\frac{3.1+5.1+4.2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਕੋਣ $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ ਹੈ।

## 11.5 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ (Shortest Distance between two lines)

ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪਰਸਪਰ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਸਿਫਰ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੋਵੇਗੀ ਅਰਥਾਤ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਸਰੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਲੰਬ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀਆਂ ਵੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਨਾ ਤਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਗੈਰ ਸਹਿਸਮਤਲੀ (noncoplanar) ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ (skew lines) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 11.7 ਵਿੱਚ $x, y$ ਅਤੇ $z$-ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 1] 3] 2 ਇਕਾਈ ਦੇ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ ਕਮਰੇ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 11.7

ਰੇਖਾ GE ਛੱਤ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾ DB, A ਦੇ ਠੀਕ ਉੱਪਰ ਛੱਤ ਦੇ ਕੋਨੇ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦੀ ਹੋਈ ਦੀਵਾਰ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਹੈ। ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਿਖਮਤਲੀ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਦੇ ਮਿਲਦੀਆਂ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

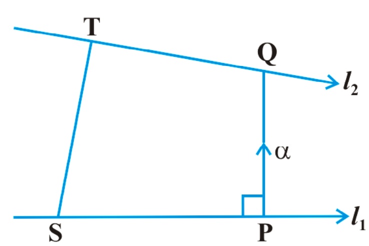
ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਅਰਥ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਤੋਂ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਦੂਸਰੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ। ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੋਵੇਂ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇਗਾ।

### 11.5.1 *ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ* (*Distance between two skew lines*)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ $l_1$ ਅਤੇ $l_2$ ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ (ਚਿੱਤਰ 11.8) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1 \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ $$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2 \qquad \text{... (2)}$$



ਚਿੱਤਰ 11.8

ਰੇਖਾ $l_1$ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ S ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_1$ ਅਤੇ $l_2$ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ T ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_2$ ਲਉ। ਤਦ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਕਾਰ ST ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਖੇਪ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇਗਾ (ਸੈਕਸ਼ਨ10.6.2)।

ਜੇਕਰ $l_1$ ਅਤੇ $l_2$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{PQ}$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਦੋਵੇਂ $\vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{b}_2$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇਗੀ। $\overrightarrow{PQ}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{n}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \qquad \text{... (3)}$$

ਤਦ $$\overrightarrow{PQ} = d\,\hat{n}$$

ਜਿੱਥੇ $d$, ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਕਾਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $\overrightarrow{ST}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{PQ}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ, ਤਦ

$$PQ = ST\,|\cos\theta|$$

ਪਰੰਤੂ $$\cos\theta = \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}}{|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{ST}|}\right|$$

$$= \left|\frac{d\,\hat{n}\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{d\ ST}\right| \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } \overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1)$$

$$= \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{ST\,\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}\right| \quad ((3) \text{ ਦੇ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$d = PQ = ST\,|\cos\theta|$$

ਜਾਂ $$d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \text{ ਹੈ।}$$

**ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)**

ਰੇਖਾਵਾਂ :

$$l_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

ਅਤੇ $$l_2 : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਹੈ :

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

### 11.5.2 *ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ* *(Distance between parallel lines)*

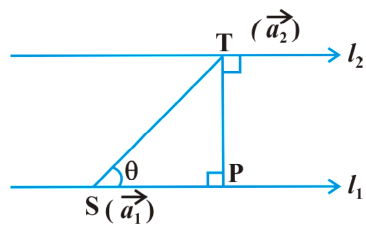
ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $l_1$ ਅਤੇ $l_2$ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਸਹਿ ਸਮਤਲੀ (Coplanar) ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b} \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ

$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}$$

é (2)



ਚਿੱਤਰ 11.9

ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $l_1$ ਤੇ ਬਿੰਦੂ S ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_1$ ਅਤੇ $l_2$ ਤੇ ਬਿੰਦੂ T ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_2$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.9)

ਕਿਉਂਕਿ $l_1$, ਅਤੇ $l_2$ ਸਹਿਸਮਤਲੀ ਹਨ।ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ T ਤੋਂ $l_1$ ਤੇ ਪਾਏ ਗਏ ਲੰਬ ਦਾ ਪੈਰ P ਹੈ ਤਦ ਰੇਖਾਵਾਂ $l_1$ ਅਤੇ $l_2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ = |TP|

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{ST}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ।ਤਦ

$$\vec{b} \times \overrightarrow{ST} = (|\vec{b}||\overrightarrow{ST}|\sin\theta)\hat{n} \qquad \text{... (3)}$$

ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $l_1$ ਅਤੇ $l_2$ ਦੇ ਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{n}$ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ

$$\overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

ਇਸ ਲਈ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = |\vec{b}|\,\text{PT}\,\hat{n} \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ PT = ST}\sin\theta)$$

ਅਰਥਾਤ

$$|\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)| = |\vec{b}|\,\text{PT}\cdot 1 \qquad (\text{as } |\hat{n}| = 1)$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$d = |\overrightarrow{PT}| = \left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right| \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਰੇਖਾਵਾਂ $l_1$ ਅਤੇ $l_2$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ :

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ

$$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) \qquad \text{... (2)}$$

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$, ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j},\ \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $\quad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$

ਅਤੇ $\quad \vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad |\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9 + 1 + 49} = \sqrt{59}$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| = \frac{|3 - 0 + 7|}{\sqrt{59}} = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $l_1$ ਅਤੇ $l_2$:

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

ਅਤੇ $\quad \vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ ÇÕ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। (ਕਿਉਂ) ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਕਿ

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \right|$$

$$= \frac{|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7} \text{ ਹੈ।}$$

## ਅਭਿਆਸ 11.2

1. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13};\ \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13};\ \frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ ਵਾਲੀਆਂ ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੈ।

2. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂਆਂ (1, – 1, 2), (3, 4, – 2) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਬਿੰਦੂਆਂ (0, 3, 2) ਅਤੇ (3, 5, 6) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

3. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂਆਂ (4, 7, 8), (2, 3, 4) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, ਬਿੰਦੂਆਂ (– 1, – 2, 1), (1, 2, 5) ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

4. ਬਿੰਦੂ (1, 2, 3) ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵੈਕਟਰ $3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

5. ਬਿੰਦੂ ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (– 2, 4, – 5) ਤੋਂ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

7. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ (5, – 2, 3) ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2, – 5), ਅਤੇ (3, – 2, 6) ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੇਖਾ–ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) $\vec{r}=2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})$ ਅਤੇ

   $\vec{r}=7\hat{i}-6\hat{k}+\mu(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

   (ii) $\vec{r}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}+\lambda(\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})$ ਅਤੇ

   $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}-56\hat{k}+\mu(3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})$

11. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੇਖਾ–ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-3}$ ਅਤੇ $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-5}{4}$

   (ii) $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ ਅਤੇ $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$

12. $p$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}$

ਅਤੇ $\dfrac{7-7x}{3p}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{6-z}{5}$ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ।

**13.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ $\dfrac{x-5}{7}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z}{1}$ ਅਤੇ $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ।

**14.** ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ ਅਤੇ $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ ਦੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**15.** ਰੇਖਾਵਾਂ $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y+1}{-6}=\dfrac{z+1}{1}$ ਅਤੇ $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z-7}{1}$ ਦੇ ਵਿਚਾਕਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**16.** ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :
$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ ਅਤੇ $\vec{r}=4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$

**17.** ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
$\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}-(2s+1)\hat{k}$

## 11.6 ਸਮਤਲ (Plane)

ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਨੂੰ ਵਿਲੱਖਣ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸ਼ਰਤ ਪਤਾ ਹੋਵੇ :

(i) ਸਮਤਲ ਦਾ ਅਭਿਲੰਬ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਅਭਿਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ।

(ii) ਇਹ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਦਿਸ਼ਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

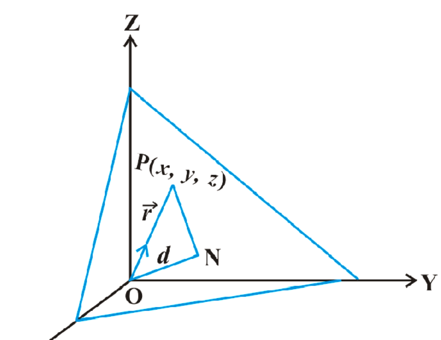
(iii) ਇਹ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤਿੰਨ ਗੈਰ ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

### 11.6.1 *ਅਭਿਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a Plane in normal form)*

ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦੂਰੀ $d\ (d \neq 0)$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.10)।

ਜੇਕਰ $\overrightarrow{ON}$ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ $\overrightarrow{ON}$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ $\hat{n}$ ਇਕਾਈ ਅਭਿਲੰਬ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਦ $\overrightarrow{ON}=d\,\hat{n}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{ON}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 11.10

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\overrightarrow{\mathrm{NP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}} = 0$ ... (1)

ਮੰਨ ਲਉ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ ਤਾਂ $\overrightarrow{\mathrm{NP}} = \vec{r} - d\,\hat{n}$ (ਕਿਉਂਕਿ $\overrightarrow{\mathrm{ON}} + \overrightarrow{\mathrm{NP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (1) ਰੂਪ ਦਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

$$(\vec{r} - d\,\hat{n}) \cdot d\,\hat{n} = 0$$

ਜਾਂ $$(\vec{r} - d\,\hat{n}) \cdot \hat{n} = 0 \quad (d \neq 0)$$

ਜਾਂ $$\vec{r} \cdot \hat{n} - d\,\hat{n} \cdot \hat{n} = 0$$

ਅਰਥਾਤ $$\vec{r} \cdot \hat{n} = d \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } \hat{n} \cdot \hat{n} = 1)$$

... (2)

ਇਹ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

**ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)**

ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $\hat{n}$ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P$(x, y, z)$ ਹੈ। ਤਦ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

ਮੰਨ ਲਉ $\hat{n}$ ਦਾ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹਨ। ਤਦ

$$\hat{n} = l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}$$

$\vec{r} \cdot \hat{n}$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (2) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

$$(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}) \cdot (l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}) = d$$

ਅਰਥਾਤ $$\boldsymbol{lx + my + nz = d} \quad \ldots (3)$$

ਇਹ ਸਮਤਲ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

> *ਟਿੱਪਣੀ* ਸਮੀਕਰਣ (3) ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ $\vec{r} \cdot (a\,\hat{i} + b\,\hat{j} + c\,\hat{k}) = d$ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਤਾਂ $ax + by + cz = d$ ਸਮਤਲ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $a, b$ ਅਤੇ $c$ ਸਮਤਲ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ $\dfrac{6}{\sqrt{29}}$ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇਸ ਦਾ ਅਭਿਲੰਬ ਵੈਕਟਰ $2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $\vec{n} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$ ਹੈ। ਤਦ

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮਤਲ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{-3}{\sqrt{29}}\hat{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{k}\right) = \frac{6}{\sqrt{29}} \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਸਮਤਲ $\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਪਾਏ ਗਏ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮਤਲ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\vec{r}\cdot(-6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 1 \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $$|-6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{36+9+4} = 7$$

ਇਸ ਲਈ (1) ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 7 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\vec{r}\cdot\left(-\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}\right) = \frac{1}{7}$$

ਜੋ ਕਿ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r}\,.\,\hat{n} = d$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $\hat{n} = -\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\hat{n}$ ਦਾ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $\frac{-6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਸਮਤਲ $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ $2, -3, 4$ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਹਨ :

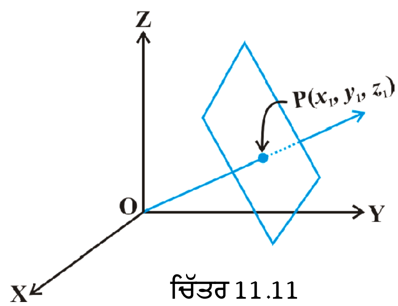
$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}, \frac{-3}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}, \frac{4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}} \text{ , ਅਰਥਾਤ } \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ ਅਰਥਾਤ $2x - 3y + 4z = 6$ ਨੂੰ $\sqrt{29}$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{-3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

ਅਤੇ ਇਹ $lx + my + nz = d$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਦੀ ਦੂਰੀ $d$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮਤਲ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ $\frac{6}{\sqrt{29}}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲ $2x ï 3y + 4z ï 6 = 0$ ਤੇ ਪਾਏ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਪੈਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 11.11

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਤੇ ਪਾਏ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਪੈਰ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x_1, y_1, z_1)$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.11)A

ਤਦ ਰੇਖਾ OP ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ $x_1, y_1, z_1$ ਹਨ।

ਸਮਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

ਜਿੱਥੇ OP ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\frac{x_1}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{y_1}{\frac{-3}{\sqrt{29}}} = \frac{z_1}{\frac{4}{\sqrt{29}}} = k$$

ਅਰਥਾਤ $$x_1 = \frac{2k}{\sqrt{29}}, y_1 = \frac{-3k}{\sqrt{29}}, z_1 = \frac{4k}{\sqrt{29}}$$

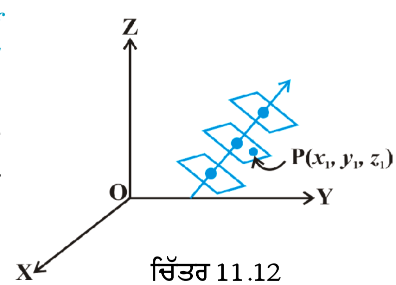
ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $k = \frac{6}{\sqrt{29}}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੰਬ ਦੇ ਪੈਰ (ਪਾਦ) ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{12}{29}, \frac{-18}{29}, \frac{24}{29}\right)$ ਹੈ।

**ਟਿੱਪਣੀ** ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਦੀ ਦੂਰੀ $d$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹੋਣ ਤਦ ਲੰਬ ਦੇ ਪਾਦ $(ld, md, nd)$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

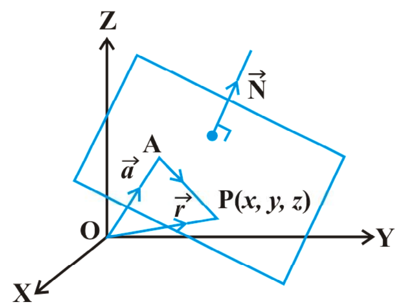
### 11.6.2 *ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ ਤੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a plane perpendicular to a given vector and passing through a given point)*

ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ ਤੇ ਲੰਬ ਅਨੇਕ ਸਮਤਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ P$(x_1, y_1, z_1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11-12)A



ਚਿੱਤਰ 11.12

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A, ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ, ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{\mathrm{N}}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.13)।



ਚਿੱਤਰ 11.13

ਤਦ ਬਿੰਦੂ P ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\vec{\mathrm{N}}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{\mathrm{N}} = 0$. ਪਰੰਤੂ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{r} - \vec{a}$ . ਇਸ ਲਈ

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{\mathrm{N}}=0 \qquad \ldots (1)$$

ਇਹ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

### ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਬਿੰਦੂ A $(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P $(x, y, z)$ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{\mathrm{N}}$ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ A, B ਅਤੇ C ਹੈ, ਤਦ

$$\vec{a}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k};\quad \vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{\mathrm{N}}=\mathrm{A}\hat{i}+\mathrm{B}\hat{j}+\mathrm{C}\hat{k}$$

ਹੁਣ $\quad(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{\mathrm{N}}=0$

ਇਸ ਲਈ $\quad\left[(x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k}\right]\cdot(\mathrm{A}\hat{i}+\mathrm{B}\hat{j}+\mathrm{C}\hat{k})=0$

ਅਰਥਾਤ $\quad\mathbf{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$

**ਉਦਾਹਰਣ 17.** ਉਸ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (5, 2, – 4) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ 2, 3, – 1 ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (5, 2, – 4) ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਦਾ ਅਭਿਲੰਬ ਵੈਕਟਰ $\vec{\mathrm{N}}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{\mathrm{N}}=0$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਜਾਂ $\quad[\vec{r}-(5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})]\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=0 \qquad \ldots (1)$

(1) ਨੂੰ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

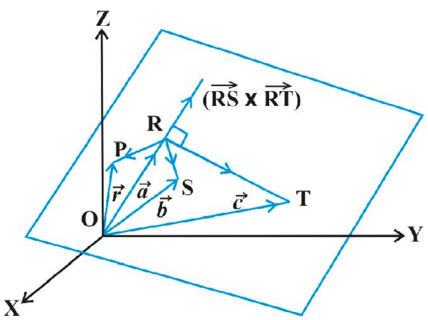
$$[(x-5)\hat{i}+(y-2)\hat{j}+(z+4)\hat{k}]\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=0$$

ਜਾਂ $\quad 2(x-5)+3(y-2)-1(z+4)=0$

ਅਰਥਾਤ $\quad 2x+3y-z=20$

ਜੋ ਸਮਤਲ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

### 11.6.3 *ਤਿੰਨ ਬਿਖਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a plane passing through three non-collinear points)*




ਚਿੱਤਰ 11.14

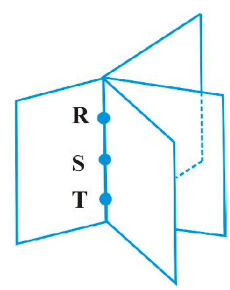
ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਤਿੰਨ ਬਿਖਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ R, S ਅਤੇ T ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\vec{a}$ , $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 11.14)।

ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{RS}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{RT}$ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}$ ਬਿੰਦੂਆਂ R, S ਅਤੇ T ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਹੋਏ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇਗਾ। ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}$ ਤੇ ਲੰਬ, ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}) = 0$ ਹੈ।

ਜਾਂ $$(\vec{r} - \vec{a}) \,.\, [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0 \qquad \ldots (1)$$

ਇਹ ਤਿੰਨ ਬਿਖਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਹੈ।

> *ਟਿੱਪਣੀ* ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਬਿਖਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂ ਕਹਿਣਾ ਕਿਉਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ? ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਤਦ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੇ ਕਈ ਸਮਤਲ ਹੋਣਗੇ। (ਚਿੱਤਰ 11.15)।




ਚਿੱਤਰ 11.15

ਇਹ ਸਮਤਲ ਇੱਕ ਕਿਤਾਬ ਦੇ ਪੰਨਿਆਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂਆਂ R, S ਅਤੇ T ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪੰਨਿਆਂ ਦੇ ਜੁੜਨ (binding) ਵਾਲੇ ਸਥਾਨ ਦਾ ਮੈਂਬਰ ਹੈ।

**ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)**

ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂਆਂ R, S ਅਤੇ T ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ ਅਤੇ $(x_3, y_3, z_3)$ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x, y, z)$ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ। ਤਦ

$$\overrightarrow{RP} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$
$$\overrightarrow{RS} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$
$$\overrightarrow{RT} = (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ਜੋ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ ਅਤੇ $(x_3, y_3, z_3)$ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਬਿੰਦੂਆਂ R(2, 5, ï 3), S(ï 2, ï 3, 5) ਅਤੇ T(5, 3,ï 3) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{c} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

ਤਦ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}) = 0 \quad (\text{ਕਿਉਂ ?})$$

ਜਾਂ $$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0$$

ਅਰਥਾਤ $$[\vec{r} - (2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})] \cdot [(-4\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j})] = 0$$

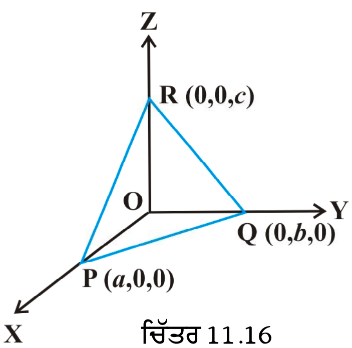
### 11.6.4 *ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਅੰਤਰ ਖੰਡ-ਰੂਪ (Intercept form of the equation of a plane)*

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਉਸ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕੀ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਕੱਟੇ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਗਮਨ (deduce) ਕਰਾਂਗੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0 \quad (\mathrm{D} \neq 0) \text{ ਹੈ।} \qquad \dots (1)$$

ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਦੁਆਰਾ $x$, $y$, ਅਤੇ $z$-ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਕੱਟੇ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a$, $b$ ਅਤੇ $c$ (ਚਿੱਤਰ 11.16) ਹੈ।

ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ $x$, $y$ ਅਤੇ $z$-ਧੁਰਿਆਂ ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, ਅਤੇ $(0, 0, c)$ ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.16

ਇਸ ਲਈ $$\mathrm{A}a + \mathrm{D} = 0 \text{ ਜਾਂ } \mathrm{A} = \frac{-\mathrm{D}}{a}$$

$$\mathrm{B}b + \mathrm{D} = 0 \text{ ਜਾਂ } \mathrm{B} = \frac{-\mathrm{D}}{b}$$

$$\mathrm{C}c + \mathrm{D} = 0 \text{ ਜਾਂ } \mathrm{C} = \frac{-\mathrm{D}}{c}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (1) ਜੋ ਕਿ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \dots (2)$$

ਜੋ ਕਿ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ $x$, $y$ ਅਤੇ $z$-ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2] 3 ਅਤੇ 4 ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \ldots (1)$$

ਜਿੱਥੇ $a = 2, b = 3, c = 4$ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$a, b$ ਅਤੇ $c$ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਤੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਸਮਤਲ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ ਜਾਂ $6x + 4y + 3z = 12$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

### 11.6.5 *ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਸਮਤਲਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲਾ ਸਮਤਲ (Plane passing through the intersection of two given planes)*

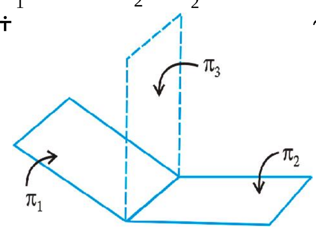
ਮੰਨ ਲਉ $\pi_1$ ਅਤੇ $\pi_2$ ਦੋ ਸਮਤਲ ਜਿਸਦੇ ਸਮਕੀਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\vec{r}\cdot\hat{n}_1 = d_1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot\hat{n}_2 = d_2$ ਹਨ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ 7)

ਜੇਕਰ ਇਸ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{t}$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\vec{t}\cdot\vec{n}_1 = d_1 \text{ ਅਤੇ } \vec{t}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

ਇਸ ਲਈ $\lambda$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\vec{t}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1+\lambda d_2$$




ਚਿੱਤਰ 11.17

ਕਿਉਂਕਿ $\vec{t}$ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰੇਖਾ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨ $\vec{\boldsymbol{r}}\cdot(\vec{\boldsymbol{n}}_1+\lambda\vec{\boldsymbol{n}}_2) = d_1 + \lambda d_2$ ਸਮਤਲ $\pi_3$ ਦਾ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$, $\pi_1$ ਅਤੇ $\pi_2$, ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ $\pi_3$ ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$\vec{\boldsymbol{r}}\cdot(\vec{\boldsymbol{n}}_1+\lambda\vec{\boldsymbol{n}}_2) = \boldsymbol{d}_1 + \lambda\boldsymbol{d}_2$ ਹੈ। ... (1)

**ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)**

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ :

$$\vec{n}_1 = A_1\hat{i}+B_2\hat{j}+C_1\hat{k}$$

$$\vec{n}_2 = A_2\hat{i}+B_2\hat{j}+C_2\hat{k}$$

ਅਤੇ

$$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

ਤਾਂ (1) ਦਾ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਰੂਪ ਹੈ :

$$x(A_1+\lambda A_2)+y(B_1+\lambda B_2)+z(C_1+\lambda C_2) = d_1+\lambda d_2$$

ਜਾਂ

$$\mathbf{(A_1}x+\mathbf{B_1}y+\mathbf{C_1}z-\boldsymbol{d}_1) + \lambda(\mathbf{A_2}x+\mathbf{B_2}y+\mathbf{C_2}z-\boldsymbol{d}_2) = \mathbf{0} \quad \ldots (2)$$

ਜੋ ਹਰੇਕ $\lambda$ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮਤਲਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5$, ਦੇ ਕਾਟ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $(1,1,1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\vec{n}_1=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{n}_2 = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $d_1=6$ ਅਤੇ $d_2=-5$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸੂਤਰ $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)=d_1+\lambda d_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\vec{r}\cdot[\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})] = 6-5\lambda$$

ਜਾਂ
$$\vec{r}\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)]\hat{k} = 6-5\lambda \qquad \ldots (1)$$

ਜਿੱਥੇ $\lambda$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)\hat{k}]=6-5\lambda$$

ਜਾਂ
$$(1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+(1+4\lambda)z=6-5\lambda$$

ਜਾਂ
$$(x+y+z-6)+\lambda(2x+3y+4z+5)=0 \qquad \ldots (2)$$

ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸਮਤਲ ਬਿੰਦੂ (1,1,1) ਤੋਂ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਬਿੰਦੂ, (2) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ ਅਰਥਾਤ

$$(1+1+1-6)+\lambda(2+3+4+5)=0$$

ਜਾਂ
$$\lambda=\frac{3}{14}$$

$\lambda$ ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\vec{r}\cdot\left[\left(1+\frac{3}{7}\right)\hat{i}+\left(1+\frac{9}{14}\right)\hat{j}+\left(1+\frac{6}{7}\right)\hat{k}\right] = 6-\frac{15}{14}$$

ਜਾਂ
$$\vec{r}\cdot\left(\frac{10}{7}\hat{i}+\frac{23}{14}\hat{j}+\frac{13}{7}\hat{k}\right)=\frac{69}{14}$$

ਜਾਂ
$$\vec{r}\cdot(20\hat{i}+23\hat{j}+26\hat{k})=69$$

ਜੋ ਸਮਤਲ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

## 11.7 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਹਿ ਤਲੀ ਹੋਣਾ (Coplanarity of two lines)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1 \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ $$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2 \text{ ਹਨ।} \quad \ldots (2)$$

ਰੇਖਾ (1) ਬਿੰਦੂ A, ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_1$ ਹੈ, ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਅਤੇ $\vec{b}_1$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਰੇਖਾ (2) ਬਿੰਦੂ B ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_2$ ਹੈ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{b}_2$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਤਦ

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਹਿ-ਤਲੀ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\overrightarrow{AB}, \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{b}_2$ ਅਤੇ ਸਹਿ-ਤਲੀ ਹਨ,

ਅਰਥਾਤ $$\overrightarrow{AB}.(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0 \text{ ਜਾਂ } (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

**ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)**

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $(x_2, y_2, z_2)$ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{b}_2$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a_1, b_1, c_1$ ਅਤੇ $a_2, b_2, c_2$ ਹਨ। ਤਦ

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 = a_1 \hat{i} + b_1 \hat{j} + c_1 \hat{k}; \text{ ਅਤੇ } \vec{b}_2 = a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j} + c_2 \hat{k}$$

ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਹਿ-ਤਲੀ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$ ਜਿਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (4)$$

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ

$$\frac{x+3}{ï\ 3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5} \text{ ਅਤੇ } \frac{x+1}{ï\ 1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5} \text{ ਸਹਿ-ਤਲੀ ਹਨ।}$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x_1 = ï\ 3, y_1 = 1, z_1 = 5, a_1 = ï\ 3, b_1 = 1, c_1 = 5$

$$x_2 = ï\ 1, y_2 = 2, z_2 = 5, a_2 = ï\ 1, b_2 = 2, c_2 = 5$$

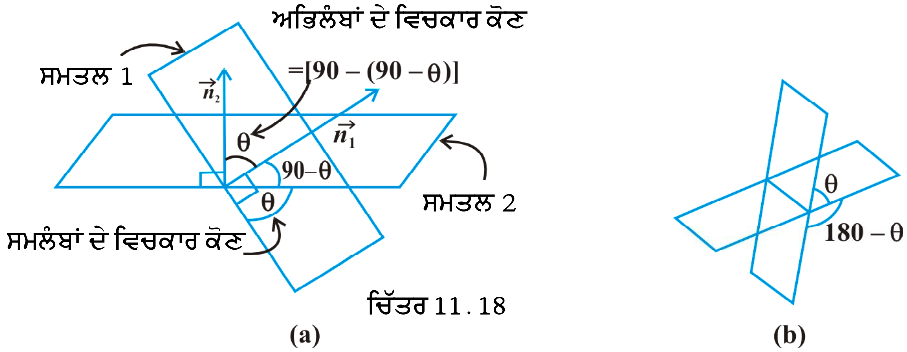
ਹੁਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਲੈਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

## 11.8 ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ (Angle between two planes)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.18 (a))। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ 180 – θ (ਚਿੱਤਰ 11.18 (b)) ਵੀ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਨੂੰ ਹੀ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਲਿਆਂਗੇ।




ਚਿੱਤਰ 11.18

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲਾਂ, $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ। ਤਦ ਕਿਸੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲਾਂ ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਅਭਿਲੰਬਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ।

ਤਦ $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}\right|$$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਦੋਵੇਂ ਸਮਤਲ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ $\vec{n}_1$ ਅਤੇ $\vec{n}_2$ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

**ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)**

ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲਾਂ

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ ਅਤੇ } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ।

ਤਾਂ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $A_1, B_1, C_1$ ਅਤੇ $A_2, B_2, C_2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\cos\theta = \left|\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$$

**ਟਿੱਪਣੀ**

1. ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਸਮਤਲ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹਨ ਤਦ $\theta = 90°$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\cos\theta = 0$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\cos\theta = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
2. ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਸਮਤਲ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ ਤਾਂ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ $2x + y - 2z = 5$ ਅਤੇ $3x - 6y - 2z = 7$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਵੈਕਟਰ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ ਹੈ। ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਤੋਂ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਅਭਿਲੰਬ

$$\vec{N}_1 = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{N}_2 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k} \text{ ਹਨ।}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}\right| = \left|\frac{(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{4+1+4}\ \sqrt{9+36+4}}\right| = \left(\frac{4}{21}\right)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ $3x - 6y + 2z = 7$ ਅਤੇ $2x + 2y - 2z = 5$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮਤਲਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਸਮੀਕਰਨਾਂ

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ ਅਤੇ } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ
$$A_1 = 3,\ B_1 = -6,\ C_1 = 2$$
$$A_2 = 2,\ B_2 = 2,\ C_2 = -2$$

ਫਿਰ ਤੋਂ
$$\cos\theta = \left|\frac{3\times 2 + (-6)\,(2) + (2)\,(-2)}{\sqrt{\left(3^2 + (-6)^2 + (-2)^2\right)}\ \sqrt{\left(2^2 + 2^2 + (-2)^2\right)}}\right|$$

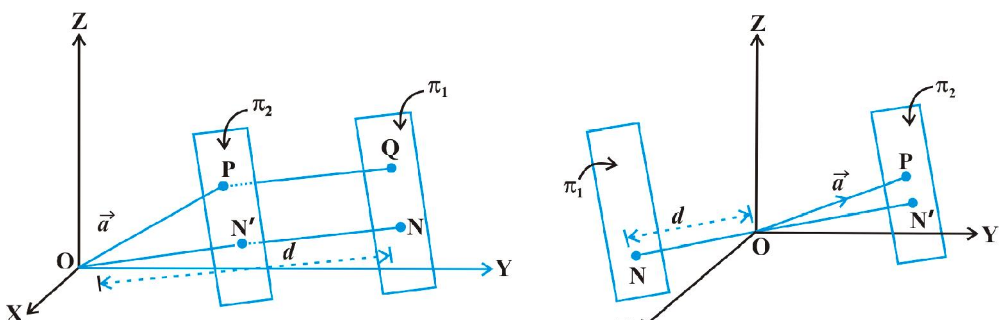
$$= \left|\frac{-10}{7 \times 2\sqrt{3}}\right| = \frac{5}{7\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{21}$$

ਇਸ ਲਈ $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{21}\right)$$

## 11.9 ਸਮਤਲ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ (Distance of a point from a plane)

### ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ (Vector Form)

ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ $\pi_1$ ਜਿਸਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ (ਚਿੱਤਰ 11.19) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।




(a) (b)

ਚਿੱਤਰ 11.19

ਫਿਰ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਸਮਤਲ $\pi_1$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਸਮਤਲ $\pi_2$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਮਤਲ $\pi_2$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{n}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \hat{n} = 0$ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ $$\vec{r} \cdot \hat{n} = \vec{a} \cdot \hat{n}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇਸ ਸਮਤਲ ਦੀ ਦੂਰੀ $ON' = |\vec{a} \cdot \hat{n}|$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P ਤੋ. ਸਮਤਲ $\pi_1$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ (ਚਿੱਤਰ 11.21 (a))

$$PQ = ON - ON' = |d - \vec{a} \cdot \hat{n}|$$

ਹੈ, ਜੋ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 11.19 (b) ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

**ਟਿੱਪਣੀ** 1. ਜੇਕਰ ਸਮਤਲ $\pi_2$ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r}\,.\,\vec{N} = d$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\vec{N}$ ਸਮਤਲ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਹੈ ਤਾਂ ਲੰਬ ਦੀ ਦੂਰੀ $\dfrac{|\vec{a}\,.\,\vec{N} - d|}{|\vec{N}|}$ ਹੈ।

2. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਸਮਤਲ $\vec{r}\,.\,\vec{N} = d$ ਦੀ ਦੂਰੀ $\dfrac{|d|}{|\vec{N}|}$ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a} = 0$)।

**ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)**

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ

$$Ax + By + Cz = D \text{ ਹੈ।}$$

ਤਦ

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (1) ਦੇ ਦੁਆਰਾ P ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ

$$\left|\frac{(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})\cdot(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{A x_1 + B y_1 + C z_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

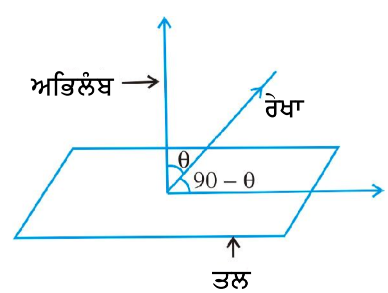
ਉਦਾਹਰਣ 24. ਬਿੰਦੂ (2, 5, – 3) ਦੀ ਸਮਤਲ $\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{N} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $d = 4$.

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (2, 5, – 3) ਦੀ ਦਿੱਤੇ ਸਮਤਲ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਹੈ।

$$\frac{|(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}) - 4|}{|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|}$$

$$= \frac{|12 - 15 - 6 - 4|}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{13}{7}$$




ਚਿੱਤਰ 11.20

## 11.10 ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ (Angle between a line and a plane)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ, ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਦਾ ਕੋਣ ਪੂਰਕ (complementary angle) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 11.20)

**ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ (Vector Form)**

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ ਹੈ। ਤਦ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ $\theta$, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{n}|}\right|$$

ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ $\phi$, $90° - \theta$, ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$

ਅਰਥਾਤ $$\sin\phi = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}\right| \quad \text{ਜਾਂ } \phi = \sin^{-1}\left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$$

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਰੇਖਾ $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-3}{6}$ ਅਤੇ ਸਮਤਲ $10x + 2y - 11z = 3$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਤੇ ਅਸੀਂ

$$\vec{r} = (-\hat{i} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}) = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਥੇ $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{n} = 10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\sin\phi = \left|\frac{(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})\cdot(10\hat{i}+2\hat{j}-11\hat{k})}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\,\sqrt{10^2+2^2+11^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-40}{7\times 15}\right| = \left|\frac{-8}{21}\right| = \frac{8}{21} \quad \text{ਜਾਂ } \phi = \sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$$

## ਅਭਿਆਸ 11.3

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (a) $z = 2$ (b) $x + y + z = 1$
   (c) $2x + 3y - z = 5$ (d) $5y + 8 = 0$
2. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 7 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਹੈ।
3. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮਤਲਾਂ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (a) $\vec{r}\cdot(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$ (b) $\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$
   (c) $\vec{r}\cdot[(s - 2t)\hat{i} + (3 - t)\hat{j} + (2s + t)\hat{k}] = 15$
4. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਪੈਰ/ਪਾਦ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ।
   (a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ (b) $3y + 4z - 6 = 0$
   (c) $x + y + z = 1$ (d) $5y + 8 = 0$
5. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਅਧੀਨ ਸਮਤਲਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ
   (a) ਬਿੰਦੂ $(1, 0, -2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਂਦਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਹੈ।
   (b) ਬਿੰਦੂ $(1, 4, 6)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।
6. ਉਹਨਾਂ ਸਮਤਲਾਂ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦਾ ਹੈ।
   (a) $(1, 1, -1)$, $(6, 4, -5)$, $(-4, -2, 3)$
   (b) $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(-2, 2, -1)$
7. ਸਮਤਲ $2x + y - z = 5$ ਦੁਆਰਾ ਕੱਟੇ ਗਏ : ਅੰਤਰ ਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ $y$-ਧੁਰੇ ਤੇ ਅੰਤਰ ਖੰਡ 3 ਅਤੇ ਜੋ ਤਲ ZOX ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।
9. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਸਮਤਲਾਂ $3x - y + 2z - 4 = 0$ ਅਤੇ $x + y + z - 2 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $(2, 2, 1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।
10. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$, $\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਅਤੇ $(2, 1, 3)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।
11. ਤਲਾਂ $x + y + z = 1$ ਅਤੇ $2x + 3y + 4z = 5$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਤਲ $x - y + z = 0$ ਤੇ ਲੰਬ ਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਸਮਤਲਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$ ਹਨ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**13.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜਾਂ ਲੰਬ ਹਨ, ਅਤੇ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਨਾ ਤੇ ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਲੰਬ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

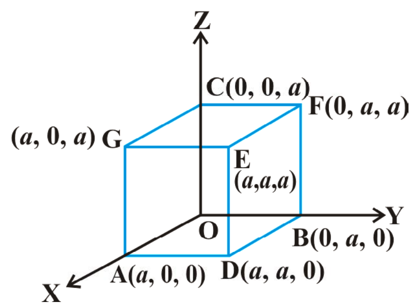
(a) $7x + 5y + 6z + 30 = 0$ ਅਤੇ $3x - y - 10z + 4 = 0$

(b) $2x + y + 3z - 2 = 0$ ਅਤੇ $x - 2y + 5 = 0$

(c) $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ ਅਤੇ $3x - 3y + 6z - 1 = 0$

(d) $2x - y + 3z - 1 = 0$ ਅਤੇ $2x - y + 3z + 3 = 0$

(e) $4x + 8y + z - 8 = 0$ ਅਤੇ $y + z - 4 = 0$




ਚਿੱਤਰ 11.21

**14.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸੰਗਤ ਸਮਤਲਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

| | ਬਿੰਦੂ | ਸਮਤਲ |
|---|---|---|
| (a) | $(0, 0, 0)$ | $3x - 4y + 12z = 3$ |
| (b) | $(3, -2, 1)$ | $2x - y + 2z + 3 = 0$ |
| (c) | $(2, 3, -5)$ | $x + 2y - 2z = 9$ |
| (d) | $(-6, 0, 0)$ | $2x - 3y + 6z - 2 = 0$ |

## *ਫੁਟਕਲ ਵਿਭਿੰਨ ਉਦਾਹਰਣਾਂ*

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਇੱਕ ਘਣ ਦੇ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੇ ਨਾਲ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$$

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਘਣ, ਇੱਕ ਸਮਕੋਣਿਕ ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ ਫਲਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ OADBEFCG ਇੱਕ ਘਣ ਜਿਸ ਦੀ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ $a$ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.21)।

OE, AF, BG ਅਤੇ CD ਚਾਰ ਵਿਕਰਣ ਹਨ

ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ O ਅਤੇ E ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ OE ਅਰਥਾਤ ਵਿਕਰਣ OE ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ

$$\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

ਅਰਥਾਤ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ AF, BG ਅਤੇ CD ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$$ ਅਤੇ $$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}},$$ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਜੋ OE, AF, BG, ਅਤੇ CD, ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\alpha, \beta, \gamma,$ ਅਤੇ $\delta$ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹਨ।

ਤਦ $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(l + m + n);\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(-l + m + n)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}(l - m + n);\ \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}(l + m - n)$$

ਵਰਗ ਕਰਕੇ ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$$

$$= \frac{1}{3}\left[ (l + m + n)^2 + (-l + m + n)^2 \right] + (l - m + n)^2 + (l + m - n)^2]$$

$$= \frac{1}{3}[4(l^2 + m^2 + n^2)] = \frac{4}{3}$$ ( ਕਿਉਂਕਿ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$)

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਉਸ ਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ $(1, -1, 2)$ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਜੋ ਸਮਤਲਾਂ $2x + 3y - 2z = 5$ ਅਤੇ $x + 2y - 3z = 8$ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$A(x - 1) + B(y + 1) + C(z - 2) = 0 \text{ ਹੈ।} \quad \ldots (1)$$

ਸਮਤਲਾਂ $2x + 3y - 2z = 5$ ਅਤੇ $x + 2y - 3z = 8$, ਦੇ ਨਾਲ (1) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਣ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$2A + 3B - 2C = 0 \text{ ਅਤੇ } A + 2B - 3C = 0$$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A = -5C$ ਅਤੇ $B = 4C$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$-5C(x - 1) + 4C(y + 1) + C(z - 2) = 0$$

ਅਰਥਾਤ $$5x - 4y - z = 7$$

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਬਿੰਦੂ $P(6, 5, 9)$ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(3, -1, 2)$, $B(5, 2, 4)$ ਅਤੇ $C(-1, -1, 6)$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਸਮਤਲ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ A, B, ਅਤੇ C ਹਨ। ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਦਾ ਪਾਦ D ਹੈ। ਅਸੀਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੂਰੀ PD ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ PD, $\overrightarrow{AP}$ ਦਾ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ਤੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $PD = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ $\overrightarrow{AP}$ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ।

ਫਿਰ ਤੋਂ $\overrightarrow{AP} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$

ਅਤੇ
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\hat{i} - 16\hat{j} + 12\hat{k}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $= \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\overrightarrow{PD} = (3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot \frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$$
$$= \frac{3\sqrt{34}}{17}$$

ਵਿਕਲਪ : ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਤਦ ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਸਮਤਲ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**ਉਦਾਹਰਣ 29.** ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ
$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta}$$

ਅਤੇ
$$\frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$ ਸਹਿ ਤਲੀ ਹਨ।

**ਹੱਲ :** ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ

$x_1 = a - d$ ਅਤੇ $x_2 = b - c$

$y_1 = a$ $\quad y_2 = b$

$z_1 = a + d$ $\quad z_2 = b + c$

ਅਤੇ $a_1 = \alpha - \delta$ $\quad a_2 = \beta - \gamma$

$b_1 = \alpha$ $\quad b_2 = \beta$

$c_1 = \alpha + \delta$ $\quad c_2 = \beta + \gamma$

ਹੁਣ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-c-a+d & b-a & b+c-a-d \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}$$

ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਤੀਸਰੇ ਥੰਮ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2\begin{vmatrix} b-a & b-a & b+c-a-d \\ \alpha & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} = 0$$

ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਥੰਮ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਹਿ ਤਲੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A(3, 4, 1) ਅਤੇ B(5, 1, 6) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ XY- ਤਲ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ :

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,[\,(5-3)\hat{i} + (1-4)\hat{j} + (6-1)\hat{k}\,]$$

ਅਰਥਾਤ $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,(2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$ ਹੈ। ... (1)

ਮੰਨ ਲਉ P ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾ AB, XY-ਤਲ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਤਦ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $x\hat{i} + y\hat{j}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਪੱਕੇ ਤੌਰ ਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

ਅਰਥਾਤ $x\hat{i} + y\hat{j} = (3+2\lambda)\hat{i} + (4-3\lambda)\hat{j} + (1+5\lambda)\hat{k}$

$\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$x = 3 + 2\lambda$$
$$y = 4 - 3\lambda$$
$$0 = 1 + 5\lambda$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$x = \frac{13}{5} \text{ ਅਤੇ } y = \frac{23}{5}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$ ਹਨ।

## *ਅਧਿਆਇ 11 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

1. ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ $(2, 1, 1)$ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਬਿੰਦੂਆਂ $(3, 5, -1)$ ਅਤੇ $(4, 3, -1)$ ਦੁਆਰਾ ਬਣੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।
2. ਜੇਕਰ ਦੋ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l_1, m_1, n_1$ ਅਤੇ $l_2, m_2, n_2$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ
   $m_1 n_2 - m_2 n_1,\ n_1 l_2 - n_2 l_1,\ l_1 m_2 - l_2 m_1$ ਹਨ।
3. ਉਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ $a, b, c$ ਅਤੇ $b - c, c - a, a - b$ ਹਨ।
4. $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C, ਅਤੇ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 7)$, $(-4, 3, -6)$ ਅਤੇ $(2, 9, 2)$ ਹੋਣ ਤਾਂ AB ਅਤੇ CD ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{2k} = \dfrac{z-3}{2}$ , $\dfrac{x-1}{3k} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-6}{-5}$ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ ਤਾਂ $k$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਬਿੰਦੂ $(1, 2, 3)$ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਤਲ $\vec{r}\cdot(\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) + 9 = 0$ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਬਿੰਦੂ $(a, b, c)$ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਤਲ $\vec{r}\cdot(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ ਅਤੇ
   $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂਆਂ $(5, 1, 6)$ ਅਤੇ $(3, 4, 1)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ YZ- ਤਲ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।
11. ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂਆਂ $(5, 1, 6)$ ਅਤੇ $(3, 4, 1)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ZX- ਤਲ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।
12. ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂਆਂ $(3, -4, -5)$ ਅਤੇ $(2, -3, 1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, ਸਮਤਲ $2x + y + z = 7$ ਦੇ ਪਾਰ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
13. ਬਿੰਦੂ $(-1, 3, 2)$ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਸਮਤਲਾਂ $x + 2y + 3z = 5$ ਅਤੇ $3x + 3y + z = 0$ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਤੇ ਲੰਬ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
14. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ $(1, 1, p)$ ਅਤੇ $(-3, 0, 1)$ ਸਮਤਲ $\vec{r}\cdot(3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13 = 0$ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $p$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**15.** ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+4=0$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ $x$-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**16.** ਜੇਕਰ O ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(1, 2, -3)$, ਹਨ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ OP ਤੇ ਲੰਬ ਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**17.** ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4=0$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5=0$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਤਲ $\vec{r}\cdot(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$ ਉੱਪਰ ਲੰਬ ਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**18.** ਬਿੰਦੂ $(-1, -5, -10)$ ਤੋਂ ਰੇਖਾ $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$ ਅਤੇ ਸਮਤਲ $\vec{r}\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**19.** ਬਿੰਦੂ $(1, 2, 3)$ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**20.** ਬਿੰਦੂ $(1, 2, -4)$ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ ਅਤੇ $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**21.** ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅੰਤਰ ਖੰਡ $a, b, c$ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ $p$ ਇਕਾਈ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 22 ਅਤੇ 23 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

**22.** ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ $2x + 3y + 4z = 4$ ਅਤੇ $4x + 6y + 8z = 12$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਹੈ :

(A) 2 ਇਕਾਈ (B) 4 ਇਕਾਈ (C) 8 ਇਕਾਈ (D) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ ਇਕਾਈ

**23.** ਸਮਤਲ $2x - y + 4z = 5$ ਅਤੇ $5x - 2.5y + 10z = 6$ ਹਨ :

(A) ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ (B) ਸਮਾਂਤਰ

(C) $y$-ਧੁਰੇ ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ (D) ਬਿੰਦੂ $\left(0, 0, \frac{5}{4}\right)$ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦੇ ਹਨ।

## *ਸਾਰ-ਅੰਸ਼*

- ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਰੇਖਾ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਦਾ ਕੋਸਾਈਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹਨ ਤਾਂ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ

  $\dfrac{x_2 - x_1}{PQ}, \dfrac{y_2 - y_1}{PQ}, \dfrac{z_2 - z_1}{PQ}$ ਹਨ।

  ਜਿੱਥੇ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ $a, b, c$ ਹਨ ਤਾਂ

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \, ; \, m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \, ; \, n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ : ਅੰਤਰਿਖ ਦੀਆਂ ਉਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਨਾ ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਕਾਟਵੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਭਿੰਨ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ : ਉਹ ਕੋਣ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (ਤਰਜੀਹ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ) ਤੋਂ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਦੋ ਕਾਟਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ $l_1, m_1, n_1$ ਅਤੇ $l_2, m_2, n_2$ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਤਦ

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

- ਜੇਕਰ $a_1, b_1, c_1$ ਅਤੇ $a_2, b_2, c_2$ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਤਦ

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right|$$

- ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ ਵਿੱਚ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ ਹੈ।
- ਬਿੰਦੂ $(x_1, y_1, z_1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਜਿਸਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹਨ, ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

  $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ ਹੈ।

- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹਨ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\,(\vec{b} - \vec{a})$ ਹੈ।
- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $(x_2, y_2, z_2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ

  $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$, ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਨਿਊਨਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਤਾਂ

  $\cos\theta = \left|\dfrac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\,|\vec{b}_2|}\right|$
- ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ ਅਤੇ

  $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਤਦ

  $\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$.
- ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਉਹ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਹੈ ਜੋ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।
- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

  $$\left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 \text{ ï } \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \text{ ਹੈ।}$$
- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$ ਅਤੇ $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

  $$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}} \text{ ਹੈ।}$$
- ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ

$$\left|\frac{\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right| \text{ ਹੈ।}$$

- ਇੱਕ ਸਮਤਲ, ਜਿਸਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ $d$ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{n}$ ਹੈ, ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਨ $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਸਮਤਲ, ਜਿਸਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ $d$ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $l, m, n$ ਹਨ, ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $lx + my + nz = d$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{N}$ ਤੇ ਲੰਬ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $(\vec{r}-\vec{a}).\vec{N} = 0$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ $(x_1, y_1, z_1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਜਿਸਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ A, B, C ਹਨ, ਤੇ ਲੰਬ ਸਮਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ A ($x$ ï $x_1$) + B ($y$ ï $y_1$) + C ($z$ ï $z_1$) = 0 ਹੈ।
- ਤਿੰਨ ਬਿਖਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ ਅਤੇ $(x_3, y_3, z_3)$ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $(\vec{r}-\vec{a}).[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})] = 0$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ਅਤੇ $(0, 0, c)$ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} = 1$ ਹੈ।
- ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1+\lambda d_2$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $\lambda$ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਅਚਲ ਹੈ।
- ਸਮਤਲਾਂ
  $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$
  ਅਤੇ $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$
  ਦੇ ਕਾਟ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ
  $(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$ ਹੈ।

- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ ਸਹਿ ਤਲੀ ਹਨ ਜੇਕਰ

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

- ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2, z_2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦੀ ਹੈ ਤਦ

ਸਮਤਲੀ ਹੈ ਜੇਕਰ $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$

- ਦੋ ਤਲ ਜਿਸਦੇ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ

$\theta$ ਹੈ ਤਦ $\theta = \cos^{-1}\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

- ਰੇਖਾ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ ਅਤੇ ਤਲ $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ $\phi$ ਹੈ ਤਦ

$$\sin\phi = \left|\frac{\vec{b}\cdot\hat{n}}{|\vec{b}||\hat{n}|}\right|$$

- ਤਲਾਂ $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ਅਤੇ
$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ $\theta$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\theta = \cos^{-1}\left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$$

- ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ, ਤੋਂ ਤਲ $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ $|d - \vec{a}\cdot\hat{n}|$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $(x_1, y_1, z_1)$ ਦੀ ਤਲ $Ax + By + Cz + D = 0$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ

$$\left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \text{ ਹੈ।}$$

ਅਧਿਆਇ 12

# ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ Linear Programming

❖ *The mathematical experience of the student is incomplete if he never had the opportunity to solve a problem invented by himself. — G POLYA* ❖

## 12.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

L. Kantorovich

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਅਤੇ ਦਿਨ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਜਮਾਤ ਗਿਆਰਵੀਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੈਖਿਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਅਤੇ ਰੈਖਿਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਗਰਾਫ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਗਣਿਤ ਦੇ ਕਈ ਉਪਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ/(Inequations) ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਰੈਖਿਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ/ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਕੁਝ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਕ ਫਰਨੀਚਰ ਵਪਾਰੀ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਜਿਵੇਂ ਮੇਜ਼ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦਾ ਵਪਾਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਨਿਵੇਸ਼ ਦੇ ਲਈ ਉਸਦੇ ਕੋਲ 50,000 ਰੁ: ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਕੇਵਲ 60 ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਹੈ। ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ਤੇ 2500 ਰੁ: ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੁਰਸੀ ਤੇ 500 ਰੁ: ਦੀ ਲਾਗਤ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ਨੂੰ ਵੇਚ ਕੇ ਉਹ 250 ਰੁ: ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੁਰਸੀ ਨੂੰ ਵੇਚਣ ਤੇ 75 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਉਸ ਨੇ ਖਰੀਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਦ ਉਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਉਪਲਬਧ ਨਿਵੇਸ਼ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਸਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਖੋਜਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਨ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਖਵਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਨ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ (Optimisation Problems) ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ, ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਜਾਂ ਸੰਸਧਾਨਾਂ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਉਪਯੋਗ ਆਦਿ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ।

ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਣ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਉਪਰੋਕਤ ਦਰਸਾਈ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਨ ਸਮੱਸਿਆ ਵੀ ਇੱਕ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ। ਉਦਯੋਗ, ਵਣਿਜ, ਪ੍ਰਬੰਧਨ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਰਿਤ ਉਪਯੋਗ ਦੇ ਕਾਰਣ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਵਧੇਰੇ ਮਹੱਤਵਸ਼ਾਲੀ ਹਨ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗਰਾਫ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਜਦਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੋਰ ਵਿਧੀਆਂ ਵੀ ਹਨ।

## 12.2 ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਣ (Linear Programming Problem and its Mathematical Formulation)

ਅਸੀਂ ਆਪਣਾ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਉਪਰੋਕਤ ਫਰਨੀਚਰ ਡੀਲਰ ਦੀ ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰੇਗਾ। ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨਪੂਰਵਕ ਦੇਖਿਆ ਕਿ

(i) ਵਪਾਰੀ ਆਪਣੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਮੇਜ਼ਾਂ ਜਾਂ ਕੁਰਸੀਆਂ ਜਾਂ ਦੋਵਾਂ ਦੇ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਹ ਨਿਵੇਸ਼ ਦੀਆਂ ਵਿਭਿੰਨ ਯੋਜਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਵਿਭਿੰਨ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕੇਗਾ।

(ii) ਕੁਝ ਵਧੇਰੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜਾਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ/ਬੰਦਸ਼ਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਉਸਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਅਧਿਕਤਮ 50,000 ਰੁ: ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਕੋਲ ਅਧਿਕਤਮ 60 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਉਪਲਬਧ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਕੋਈ ਕੁਰਸੀ ਨਹੀਂ ਖਰੀਦਦਾ ਕੇਵਲ ਮੇਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚੈ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਉਹ 50,000 ÷ 2500, ਜਾਂ 20 ਮੇਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ Rs (250 × 20) ਜਾਂ Rs 5000 ਹੋਵੇਗਾ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਕੋਈ ਮੇਜ਼ ਨਾ ਖਰੀਦ ਕੇ ਕੇਵਲ ਕੁਰਸੀਆਂ ਹੀ ਖਰੀਦਣ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤਦ ਉਹ ਆਪਣੀ ਉਪਲਬਧ 5000 ਰੁ: ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ 50,000 ÷ 500, ਅਰਥਾਤ 100 ਕੁਰਸੀਆਂ ਹੀ ਖਰੀਦ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਉਹ ਕੇਵਲ 60 ਨਗਾਂ ਨੂੰ ਹੀ ਰੱਖ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਕੇਵਲ 60 ਕੁਰਸੀਆਂ ਖਰੀਦਣ ਲਈ ਬੰਧਿਤ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ Rs 60 × 75 ਅਰਥਾਤ **Rs** 4500 ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਜਿਹੀਆਂ ਹੋਰ ਵੀ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਹ 10 ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ 50 ਕੁਰਸੀਆਂ ਖਰੀਦਣ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਸ ਦੇ ਕੋਲ 60 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦਾ ਸਥਾਨ ਉਪਲਬਧ ਹੈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਰੁ: (10 × 250 + 50 × 75), ਅਰਥਾਤ Rs 6250 ਆਦਿ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਰਨੀਚਰ ਵਪਾਰੀ ਵਿਭਿੰਨ ਚੋਣ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਆਪਣੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਭਿੰਨ ਨਿਵੇਸ਼ ਯੋਜਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਪਣਾ ਕੇ ਵਿਭਿੰਨ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕੇਗਾ। ਹੁਣ ਸਮੱਸਿਆ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਤੋਂ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯਾਸ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

### 12.2.1 *ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਣ (Mathematical Formulation of the Problem)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਮੇਜ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $x$ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $y$ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਫਰਨੀਚਰ ਵਪਾਰੀ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $x$ ਅਤੇ $y$ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ, ਅਰਥਾਤ

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{c}\text{ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ} \\ \text{ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ/ਬੰਦਿਸ਼}\end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} \ldots (1) \\ \ldots (2) \end{array}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ

ਵਪਾਰੀ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਇੱਥੇ ਇਹ ਰਾਸ਼ੀ Rs 50]000 ਹੈ) ਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹੈ ਅਤੇ ਵਪਾਰੀ ਦੇ ਕੋਲ ਕੇਵਲ ਅਧਿਕਤਮ ਵਸਤੂਆਂ (ਇੱਥੇ ਇਹ 60 ਹੈ)ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਦਾ ਵੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹੈ। ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਤੇ

$$2500x + 500y \le 50,000 \quad \text{(ਨਿਵੇਸ਼ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ)}$$

ਜਾਂ $$5x + y \le 100 \qquad \dots (3)$$

ਅਤੇ $$x + y \le 60 \quad \text{(ਸਟੋਰ ਕਰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ)} \qquad \dots (4)$$

ਵਪਾਰੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਉਸ ਦਾ ਲਾਭ Z (ਮੰਨ ਲਉ) ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ $x$ ਅਤੇ $y$ ਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$Z = 250x + 75y$ (ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ)

ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੁਣ ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$Z = 250x + 75y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ

ਜਿੱਥੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ

$$5x + y \le 100$$

$$x + y \le 60$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0$$

ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਰੇਖੀ ਫਲਨ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਦਕਿ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੁਅਰਾ ਕੁੱਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।ਕੁਝ ਹੋਰ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵੀ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦਕਿ Z , ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਗੈਰਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਉਹ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ $x$ ਅਤੇ $y$ ਵਰਗੇ ਕੁਝ ਅਨੇਕ ਚਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਫਲਨ Z (ਜੋ ਕਿ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ)ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਨ) ਪਤਾ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ।ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਚਲ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।ਰੇਖੀ ਪਦ ਤੋਂ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਗਣਿਤੀ ਸੰਬੰਧ ਰੇਖੀ ਹਨ ਜਦਕਿ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਤੋਂ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਜਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਅੱਗੇ ਵਧਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਪਦਾਂ (ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉੱਪਰ ਹੋ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ) ਨੂੰ ਰਸਮੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਸੀਂ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ : ਰੇਖੀ ਫਲਨ $Z = ax + by$, ਜਦਕਿ $a, b$ ਅਚਲ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮਕੀਰਣ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਹੋਣਾ ਹੈ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ $Z = 250x + 75y$ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਚਲ $x$ ਅਤੇ $y$ ਨੂੰ ਨਿਰਣਾਤਮਕ ਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ : ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਚਲਾਂ ਤੇ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਜਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਬੰਦਸ਼, ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸ਼ਰਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ਨੂੰ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ/ਸ਼ਰਤਾਂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਅਸਮਤਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਧਾਂ ਦੇ ਅਧੀਨ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਸਮੱਸਿਆ ਜੋ ਚਲਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦੋ ਚਲ $x$ ਅਤੇ $y$) ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਕਰੇ, ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਸਮੱਸਿਆ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਅਨੁਕੂਲਤਮ (optimal) ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ। ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਸਮੱਸਿਆ ਵਪਾਰੀ ਦੁਆਰਾ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦੀ ਖਰੀਦ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਣ ਦੀ ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੀ ਸੰਬੰਧਿਤ ਰਹਾਂਗੇ।

### 12.2.2 *ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ* ***(Graphical Method of Solving Linear Programming Problems)***

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੋ ਚਲਾਂ $x$ ਅਤੇ $y$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸੈਕਸ਼ਨ 12.2 ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੋਈ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਆਲੇਖ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ। ਆਉ ਹੁਣ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਧਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖੀਚੀਏ।

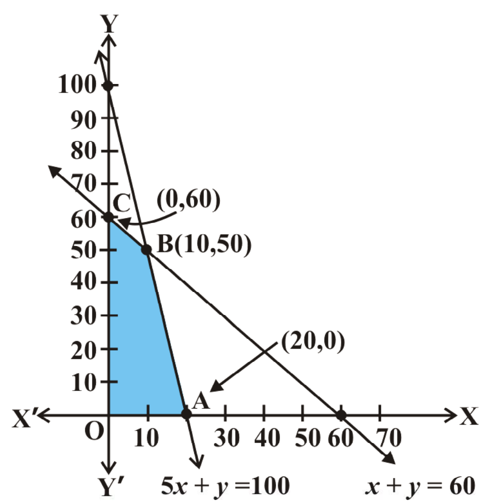
$$5x + y \leq 100 \quad \ldots (1)$$

$$x + y \leq 60 \quad \ldots (2)$$

$$x \geq 0 \quad \ldots (3)$$

$$y \geq 0 \quad \ldots (4)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਆਲੇਖ (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ) ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (4) ਤੱਕ, ਦੁਆਰਾ ਨਿਯਤ ਸਾਰੇ ਅਰਧਤਲਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਮਿਤ ਹੈ ਇਸ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਵਪਾਰੀ ਨੂੰ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਵਿਕਲਪ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਖੇਤਰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਖੇਤਰ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 12.1)। ਇਸ ਖੇਤਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 12.1

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (Feasible Ragion) ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਗੈਰਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ $x, y \geq 0$ ਅਧੀਨ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਯਤ ਸਾਂਝਾ ਖੇਤਰ (ਜਾਂ ਹੱਲ ਖੇਤਰ) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਚਿੱਤਰ 12.1 ਵਿੱਚ ਖੇਤਰ OABC ( ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ। ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੋ ਖੇਤਰ ਹੈ ਉਸ ਨੂੰ ਗੈਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਸਮੂਹ : ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਅਤੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਧਾਂ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 12.1 ਵਿੱਚ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਅਤੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (10] 50) ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (0] 60)] (20] 0) ਆਦਿ ਵੀ ਹੱਲ ਹਨ।

ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਦੇ ਬਾਹਰ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਗੈਰ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (25] 40) ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗੈਰ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਹਨ।

ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ : ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਦੋ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ ( ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਦੇਵੇ, ਇੱਕ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਜਿਹੇ ਅਨੰਤ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = 250x + 75y$ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਉਪਰਾਲਾ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਥਿਊਰਮਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਕਿ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮੁੱਢਲਾ ਸਿਧਾਂਤ (ਅਧਾਰਭੂਤ) ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਥਿਊਰਮਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹਨ।

ਥਿਊਰਮ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ R ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ* (ਉੱਤਮ ਬਹੁਭੁਜ) ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $Z = ax + by$ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਜਦੋਂ Z ਦਾ ਇੱਕ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਹੋਵੇ ਜਿੱਥੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਚਲ $x$ ਅਤੇ $y$ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਵੇ ਤਦ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੋਨੇ (ਸਿਖਰ) ਤੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਥਿਊਰਮ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ R ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ ਅਤੇ $Z = ax + by$ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਜੇਕਰ R ਪ੍ਰਬਿੰਧਤ ਖੇਤਰ ਹੋਵੇ ਤਦ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ Z, R ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਰੱਖਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ R ਦੇ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ (corner) (ਸਿਖਰ) ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਜੇਕਰ R ਗੈਰ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹੈ ਤਦ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ R ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ (ਥਿਊਰਮ 1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ)

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (ਉਪਯੁਕਤ) ਖੇਤਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ O, A, B ਅਤੇ C ਹਨ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੈ ਜਿਵੇਂ (0, 0), (20, 0), (10, 50) ਅਤੇ (0, 60) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆ ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

| ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਸਿਖਰ | **Z ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ** | |
|---|---|---|
| O (0,0) | 0 | |
| A (0,60) | 4500 | |
| B (10,50) | **6250** ← | ਅਧਿਕਤਮ |
| C (20,0) | 5000 | |

ਅਸੀਂ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਪਾਰੀ ਨੂੰ ਨਿਵੇਸ਼ ਯੋਜਨਾ (10] 50) ਅਰਥਾਤ 10 ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ 50 ਕੁਰਸੀਆਂ ਖਰੀਦਣ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਸੁਮੇਲ ਹੈ :

1. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ (ਸਿਖਰ) ਨੂੰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਨਿਰੀਖਣ ਦੁਆਰਾ ਜਾਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = ax + by$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।ਮੰਨਿਆ ਕਿ M ਅਤੇ $m$, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।
3. (i) ਜਦੋਂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ (bounded) ਹੈ, M ਅਤੇ $m$, Z ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹਨ।

   (ii) ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਗੈਰ ਘਿਰਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
4. (a) M ਨੂੰ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ $ax + by > M$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਰਧ ਤਲ ਦਾ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਨਾ ਪਵੇ ਨਹੀਂ ਤਾਂ Z ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

   (b) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $m$, ਨੂੰ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ $ax + by < m$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅਰਧ ਤਲ ਅਤੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।ਨਹੀਂ ਤਾਂ Z ਦਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਕੋਨਾਂ ਵਿਧੀ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ :

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਆਲੇਖ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ :

$$x + y \leq 50 \qquad \ldots (1)$$

* ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

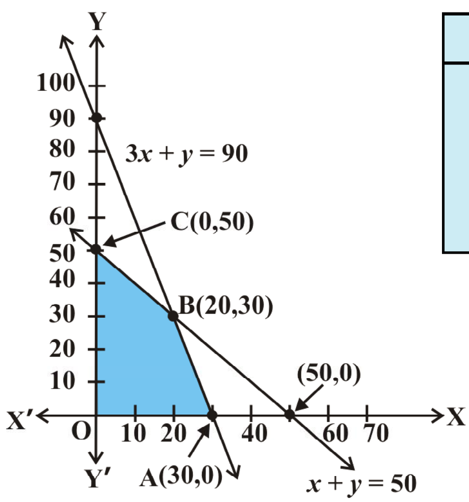
** ਇੱਕ ਕਾਟ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਸੀਮਾਬੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਗੈਰ ਸੀਮਾਬੱਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।ਗੈਰ ਸੀਮਾਬੱਧ ਤੋਂ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਧਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$3x + y \leq 90$ ... (2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ... (3)

$Z = 4x + y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 12.2 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ (1) ਤੋਂ (3) ਦੇ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਸੀਮਾਬੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।




| ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂ | Z ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ | |
|---|---|---|
| (0, 0) | 0 | |
| (30, 0) | **120** ← | ਅਧਿਕਤਮ |
| (20, 30) | 110 | |
| (0, 50) | 50 | |

ਚਿੱਤਰ 12.2

ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ O, A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 0), (30, 0), (20, 30) ਅਤੇ (0, 50) ਹਨ। ਹੁਣ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : ਬਿੰਦੂ (30] 0) ਤੇ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 120 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਆਲੇਖ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਨਿਮਨ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ

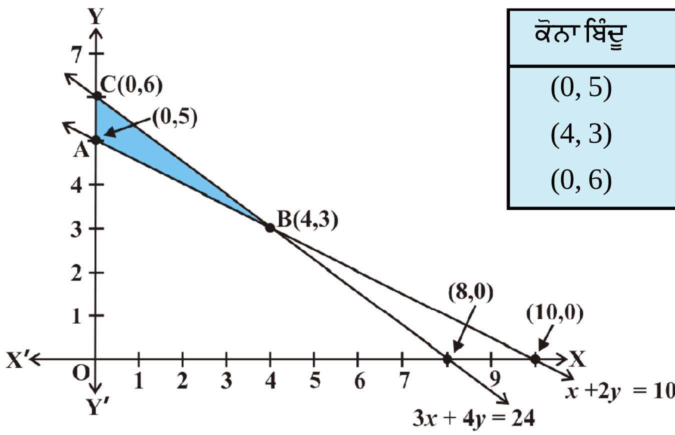
$x + 2y \geq 10$ ... (1)

$3x + 4y \leq 24$ ... (2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ... (3)

$Z = 200\,x + 500\,y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 12. 3 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ (1) ਤੋਂ (3) ਦੇ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ABC ਹੈ ਜੋ ਸੀਮਾਬੱਧ ਹੈ। ਨੁੱਕਰ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 5), (4, 3) ਅਤੇ (0, 6) ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆ ਤੇ $Z = 200x + 500y$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।




| ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ | Z ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ |
|---|---|
| (0, 5) | 2500 |
| (4, 3) | **2300** ← ਨਿਊਨਤਮ |
| (0, 6) | 3000 |

ਚਿੱਤਰ 12.3

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (4, 3) ਤੇ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ Rs 2300 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

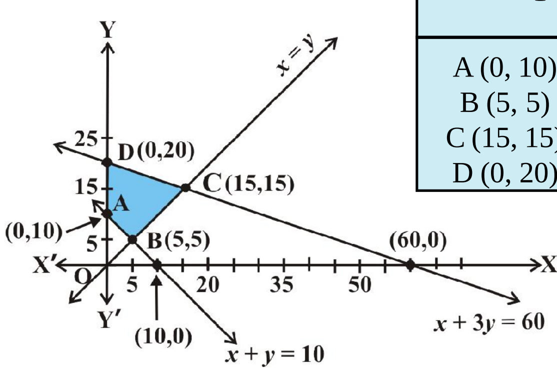
ਉਦਾਹਰਣ 3. ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

ਨਿਮਨ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$x + 3y \le 60 \quad \ldots (1)$$
$$x + y \ge 10 \quad \ldots (2)$$
$$x \le y \quad \ldots (3)$$
$$x \ge 0, y \ge 0 \quad \ldots (4)$$

Z = $3x + 9y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ABCD ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 12.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਖੇਤਰ ਸੀਮਾਬੱਧ /ਘਿਰਿਆ




| ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ | Z ਦੇ ਸੰਗ ਮੁੱਲ Z = 3x + 9y |
|---|---|
| A (0, 10) | 90 |
| B (5, 5) | **60** ← ਨਿਊਨਤਮ |
| C (15, 15) | **180** } ← ਅਧਿਕਤਮ (ਬਹੁ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ) |
| D (0, 20) | **180** |

ਚਿੱਤਰ 12.4

(bounded) ਹੈ।ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਅਤੇ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 10), (5, 5), (15,15) ਅਤੇ (0, 20) ਹਨ।ਹੁਣ ਅਸੀਂ Z ਦੇ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਬਿੰਦੂ B (5] 5) ਤੇ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 60 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਦੋ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਹਰੇਕ C (15, 15) ਅਤੇ D (0, 20) ਤੇ 120 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ, ਸਮੱਸਿਆ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ C ਅਤੇ D, ਤੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ ਰੱਖਦੀ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ ਦੋਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਉਕਤ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 180 ਉਤਪੰਨ ਕਰਦੇ ਹਨ।ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ CD ਤੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ C ਅਤੇ D ਵੀ ਇੱਕ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।ਇਹ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ ਜੇਕਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਉਕਤ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਉਤਪੰਨ ਕਰਦੇ ਹਨ।

**ਉਦਾਹਰਣ 4.** ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ Z = ï 50*x* + 20*y* ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ ਪਤਾ ਕਰੋ :

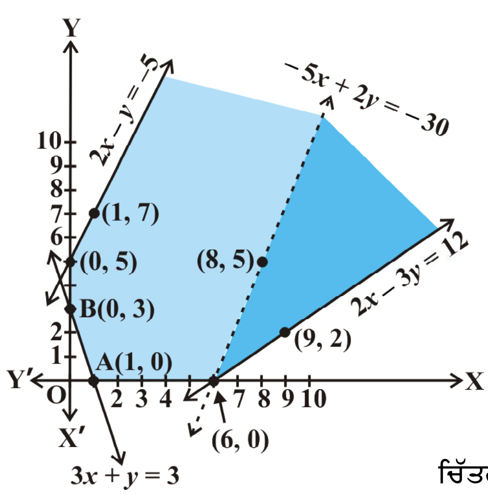
2*x* ï *y* ≥ ï 5 ... (1)

$3x + y \geq 3$ ... (2)

2*x* ï 3*y* ≤ 12 ... (3)

$x \geq 0, y \geq 0$ ... (4)

**ਹੱਲ :** ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਦੇ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।ਚਿੱਤਰ 12.5 ਵਿੱਚ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ।




| ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ | Z = – 50*x* + 20*y* |
|---|---|
| (0, 5) | 100 |
| (0, 3) | **60** |
| (1, 0) | **–50** |
| (6, 0) | **–300** ← ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ |

ਚਿੱਤਰ 12.5

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨੁੱਕਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ Z ਦਾ ਮਾਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ :

ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ (6] 0) ਤੇ Z ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ –300 ਹੈ ? ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ –300 ਹੈ ? ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ ਇਹ Z ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ (ਥਿਊਰਮ 2 ਤੋਂ) ਹੁੰਦਾ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ –300] Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਹੀਂ ਵੀ। ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਸਿੱਟਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

$$ï\ 50x + 20y < ï\ 300$$

ਅਰਥਾਤ
$$ï\ 5x + 2y < ï\ 30$$

ਅਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਆਲੇਖ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਖੁੱਲੇ ਅਰਧ ਤਲ ਅਤੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾਂ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਤਦ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ –300 ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ–300 ਹੋਵੇਗਾ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.5 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $Z = ï\,50\,x + 20\,y$, ਦਾ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

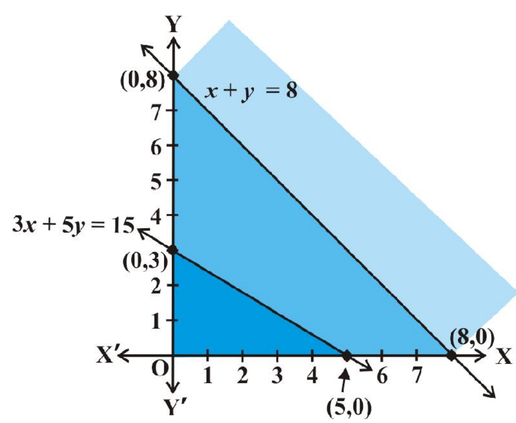
ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $Z = ï\ 50\,x + 20\,y$, (0]5) ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 100 ਰੱਖਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਦੇ ਲਈ, ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ $ï\ 50\,x + 20\,y > 100$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਰੱਖਦਾ ਹੈ।

**ਉਦਾਹਰਣ 5.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ $Z = 3x + 2y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :

$$x + y \geq 8 \qquad \dots (1)$$
$$3x + 5y \leq 15 \qquad \dots (2)$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0 \qquad \dots (3)$$

**ਹੱਲ :** ਅਸਮਤਾਵਾਂ (1) ਤੋਂ (3) ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚੋ (ਚਿੱਤਰ 12.6)A ਕੀ ਕੋਈ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ ? ਇਹ ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ ਹੈ ?

ਚਿੱਤਰ 12.6 ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜੋ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰ ਸਕੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.6

*ਟਿੱਪਣੀ :* ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੋਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਵੇਚਨਾ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਆਮ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(1) ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਉੱਤਲ ਬਹੁਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(2) ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਹੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਸਿਖਰ

(ਕੋਨੇ ਤੇ) ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦੇ ਦੋ ਕੋਨੇ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰ) ਇੱਕ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸਮਾਨ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਦੇਵੇਗਾ।

## ਅਭਿਆਸ 12.1

ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਨਿਮਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ $Z = 3x + 4y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
   $x + y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0$
2. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = \text{ï}\ 3x + 4y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
   $x + 2y \leq 8,\ 3x + 2y \leq 12,\ x \geq 0,\ y \geq 0$
3. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 5x + 3y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
   $3x + 5y \leq 15,\ 5x + 2y \leq 10,\ x \geq 0,\ y \geq 0$
4. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 3x + 5y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
   $x + 3y \geq 3,\ x + y \geq 2,\ x, y \geq 0$
5. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 3x + 2y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
   $x + 2y \leq 10,\ 3x + y \leq 15,\ x, y \geq 0$
6. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = x + 2y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
   $2x + y \geq 3,\ x + 2y \geq 6,\ x, y \geq 0$

ਦਿਖਾਓ ਕਿ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘਟਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 5x + 10y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
   $x + 2y \leq 120,\ x + y \geq 60,\ x\ \text{ï}\ 2y \geq 0,\ x, y \geq 0$
8. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = x + 2y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
   $x + 2y \geq 100,\ 2x\ \text{ï}\ y \leq 0,\ 2x + y \leq 200;\ x, y \geq 0$
9. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = \text{ï}\ x + 2y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
   $x \geq 3,\ x + y \geq 5,\ x + 2y \geq 6,\ y \geq 0$
10. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = x + y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
    $x\ \text{ï}\ y \leq \text{ï}1,\ \text{ï}x + y \leq 0,\ x, y \geq 0$

## 12.3 ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ(Different Types of Linear Programming Problems)

ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਹੇਠਾਂ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਹਨ :

1. ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ : ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਿਭਿੰਨ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਨਗ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਜਨ ਸ਼ਕਤੀ, ਮਸ਼ੀਨ ਦੇ ਘੰਟੇ, ਹਰੇਕ ਨਗ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਲਾਗਤ, ਕੰਮ ਦੇ ਘੰਟੇ, ਸਮਾਨ/ਮਾਲ ਭੰਡਾਰਣ ਗੋਦਾਮ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਆਦਿ ਨਜ਼ਰ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾਇਆ ਜਾ ਸਕੇ।

2. ਆਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ : ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਿਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਘਟਕ/ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤ ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਲੋੜੀਂਦੀ ਮਾਤਰਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਲਾਗਤ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।
3. ਪਰਿਵਹਨ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ : ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਰਿਵਹਨ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਤੈਅ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਲਾਂਟ/ਕਾਰਖਾਨਿਆਂ ਤੋਂ ਵਿਭਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਵਿਭਿੰਨ ਬਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨਾਂ ਨੂੰ ਭੇਜਣ ਵਿੱਚ ਢੋ-ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

ਹੁਣ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. **(ਆਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ):** ਇੱਕ ਆਹਾਰ ਵਿਗਿਆਨੀ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਭੋਜਨ ਪਦਾਰਥਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦਾ ਘਟਕ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 8 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਵਿਟਾਮਿਨ C ਦਾ ਘਟਕ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 10 ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ। ਭੋਜਨ I ਵਿੱਚ 2 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਪ੍ਰਤਿ kg ਅਤੇ 1 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ C ਪ੍ਰਤਿ kg ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਭੋਜਨ II ਵਿੱਚ 1 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਪ੍ਰਤਿ kg ਅਤੇ 2 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ C ਪ੍ਰਤਿ kg ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਤਿ kg ਭੋਜਨ I ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਵਿੱਚ 50 ਰੁ: ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿ kg ਭੋਜਨ II ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਵਿੱਚ 70 ਰੁ: ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਭੋਜਨ ਮਿਸ਼ਰਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਨ ਵਿੱਚ ਭੋਜਨ I ਦਾ $x$ kg ਅਤੇ ਭੋਜਨ II ਦਾ $y$ kg ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $x \geq 0, y \geq 0$. ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

| ਸਰੋਤ | ਭੋਜਨ ਪਦਾਰਥ I ($x$) | II ($y$) | ਲੋੜ-ਜ਼ਰੂਰਤ (ਇਕਾਈਆਂ ਵਿੱਚ) |
|---|---|---|---|
| ਵਿਟਾਮਿਨ A (ਇਕਾਈ/kg) | 2 | 1 | 8 |
| ਵਿਟਾਮਿਨ C (ਇਕਾਈ/kg) | 1 | 2 | 10 |
| ਲਾਗਤ (Rs/kg) | 50 | 70 | |

ਕਿਉਂਕਿ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 8 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਵਿਟਾਮਿਨ C ਦੇ 10 ਇਕਾਈ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$$2x + y \geq 8$$

$$x + 2y \geq 10$$

ਭੋਜਨ I ਦੇ $x$ kg ਅਤੇ ਭੋਜਨ II ਦੇ $y$ kg ਖਰੀਦਣ ਦਾ ਮੁੱਲ Z ਹੈ ਜਿੱਥੇ

$$Z = 50x + 70y$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ

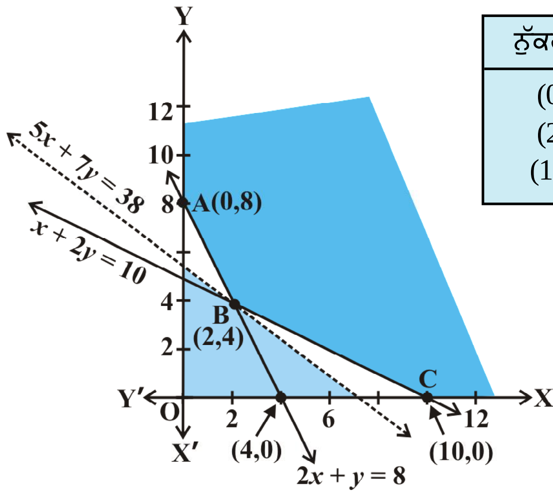
$$2x + y \geq 8 \quad \ldots (1)$$

$$x + 2y \geq 10 \quad \ldots (2)$$

$$x, y \geq 0 \quad \ldots (3)$$

$Z = 50x + 70y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ

ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (1) ਤੋਂ (3) ਤੱਕ ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 12.7 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।




| ਨੁੱਕਰ ਬਿੰਦੂ | $Z = 50x + 70y$ | |
|---|---|---|
| (0,8) | 560 | |
| (2,4) | **380** | ← ਨਿਊਨਤਮ |
| (10,0) | 500 | |

ਚਿੱਤਰ 12.7

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A(0,8), B(2,4) ਅਤੇ C(10,0) ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ (2] 4) ਤੇ Z ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ 380 ਹੈ, ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 380 ਹੈ (ਕਿਉਂ ?) ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਬੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਣਾ ਪਵੇਗਾ।

$$50x + 70y < 380$$

ਅਰਥਾਤ $$5x + 7y < 38$$

ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਖੁੱਲ੍ਹਾ ਅਰਧ ਤਲ, ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 12.7 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 12.7 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (2] 4) ਤੇ Z ਦਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 380 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਗਿਆਨੀ ਦੀ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮਿਸ਼ਰਨ ਯੋਜਨਾ ਭੋਜਨ dÎôਦੀ 2 kg ਅਤੇ ਭੋਜਨ dIôਦੇ 4 kg ਦੇ ਮਿਸ਼ਰਨ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਮਿਸ਼ਰਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 380 ਰੁ: ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. (ਵਿਤਰਣ ਸਮੱਸਿਆ) ਕਿਸਾਨਾਂ ਦੀ ਸਹਿਕਾਰੀ ਸਮਿਤੀ ਦੇ ਕੋਲ ਦੋ ਫਸਲਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ X ਅਤੇ Y ਨੂੰ ਉਗਾਉਣ ਲਈ 50 ਹੈਕਟੇਅਰ ਭੂਮੀ ਹੈ। ਫਸਲਾਂ X ਅਤੇ Y ਨੂੰ ਉਗਾਉਣ ਲਈ 50 ਹੈਕਟੇਅਰ ਭੂਮੀ ਹੈ। ਫਸਲਾਂ

X ਅਤੇ Y ਤੋਂ ਹੈਕਟੇਅਰ ਲਾਭ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 10,500 ਰੁ: ਅਤੇ 9000 ਰੁ: ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਸਲਾਂ X ਅਤੇ Y ਦੇ ਲਈ ਘਾਹ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਬੂਟੀ ਨਾਸ਼ਕ ਦ੍ਰਵ ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 20 ਲਿਟਰ ਪ੍ਰਤੀ ਹੈਕਟੇਅਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੀ ਭੂਮੀ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਨਾਲੀਆਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧਿਤ ਤਲਾਬ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਜੀਵ ਧਾਰੀਆਂ ਅਤੇ ਮੱਛਲੀਆਂ ਦੀ ਜੀਵਨ ਸੁਰੱਖਿਆ ਹਿੱਤ ਬੂਟੀ ਨਾਸ਼ਕ ਦ੍ਰਵ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 800 ਲੀਟਰ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਹਰੇਕ ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨੀ ਭੂਮੀ ਦਾ ਵਿਤਰਣ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਸਮਿਤੀ ਦੇ ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ ?

**ਹੱਲ:** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ $x$ ਹੈਕਟੇਅਰ ਭੂਮੀ ਅਤੇ Y ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ $y$ ਹੈਕਟੇਅਰ ਭੂਮੀ ਦੀ ਵੰਡ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ : $x \geq 0, y \geq 0$

X ਫਸਲ ਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਹੈਕਟੇਅਰ ਲਾਭ = Rs 10500

Y ਫਸਲ ਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਹੈਕਟੇਅਰ ਲਾਭ = Rs 9000

ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਲਾਭ = Rs $(10500x + 9000y)$

ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਨਿਮਨ ਹੈ :

ਨਿਮਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ

$x + y \leq 50$ (ਭੂਮੀ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ) ... (1)

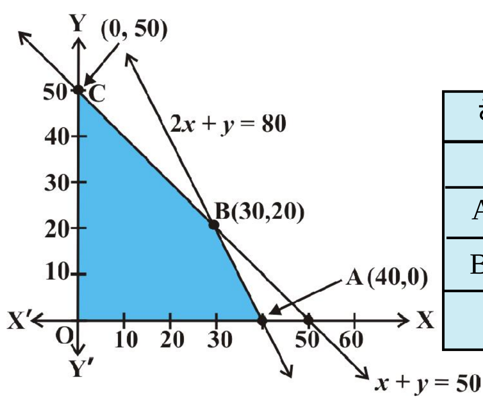
$20x + 10y \leq 800$ (ਬੂਟੀ ਨਾਸ਼ਕ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ)

ਅਰਥਾਤ $2x + y \leq 80$ ... (2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ... (3)

$Z = 10500\,x + 9000\,y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :

ਹੁਣ ਅਸੀਂ (1) ਤੋਂ (3) ਤੱਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿਚੱਦੇ ਹਾਂ ਚਿੱਤਰ 12.8 ਵਿੱਚ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਨੂੰ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਸੀਮਾਬੱਧ ਹੈ।




| ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ | $Z = 10500x + 9000y$ | |
|---|---|---|
| O (0, 0) | 0 | |
| A ( 40, 0) | 420000 | |
| B (30, 20) | **495000** ← | ਅਧਿਕਤਮ |
| C (0,50) | 450000 | |

ਚਿੱਤਰ 12.8

ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 0), (40, 0), (30, 20) ਅਤੇ (0, 50) ਹਨ। ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = 10500\,x + 9000y$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਇਹਨਾਂ ਸਿਖਰਾਂ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰਨਾਂ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਉਸ ਸਿਖਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦੇ ਜਿਸ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਿਤੀ ਨੂੰ X ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ 30 ਹੈਕਟੇਅਰ ਅਤੇ Y ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ 20 ਹੈਕਟੇਅਰ ਦੀ ਵੰਡ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਕਿ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ 495000 ਰੁ: ਦਾ ਹੋ ਸਕੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ **(Manufacturing Problem)** ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਣਕਰਤਾ ਕੰਪਨੀ ਇੱਕ ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਦੋ ਨਮੂਨੇ A ਅਤੇ B ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਨਮੂਨਾ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਗ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ 9 ਘੰਟੇ ਲੇਬਰ ਅਤੇ 1 ਘੰਟਾ ਪਾਲਿਸ਼ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਲਗਦਾ ਹੈ ਜਦਕਿ ਨਮੂਨਾ B ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਗ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ 12 ਘੰਟੇ ਲੇਬਰ ਅਤੇ ਪਾਲਿਸ਼ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 3 ਘੰਟੇ ਲੇਬਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਬਣਾਉਣ ਅਤੇ ਪਾਲਿਸ਼ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਪਲਬਧ ਅਧਿਕਤਮ ਲੇਬਰ ਘੰਟੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 180 ਅਤੇ 30 ਹਨ। ਕੰਪਨੀ ਨਮੂਨਾ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਗ ਤੇ Rs 8000 ਅਤੇ ਨਮੂਨਾ B ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਗ ਤੇ Rs 12000 ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਨਮੂਨਾ A ਅਤੇ ਨਮੂਨਾ B ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਨਗਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀ ਹਫਤਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਪ੍ਰਤੀ ਹਫਤਾ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਨਮੂਨਾ A ਦੇ ਨਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $x$ ਹੈ ਅਤੇ ਨਮੂਨਾ B ਦੇ ਨਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $y$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਲਾਭ $= (\text{Rs } 8000\,x + 12000\,y)$

$$Z = 8000\,x + 12000\,y$$

ਹੁਣ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧਾ ਦੇ ਤਹਿਤ

$$9x + 12y \le 180$$

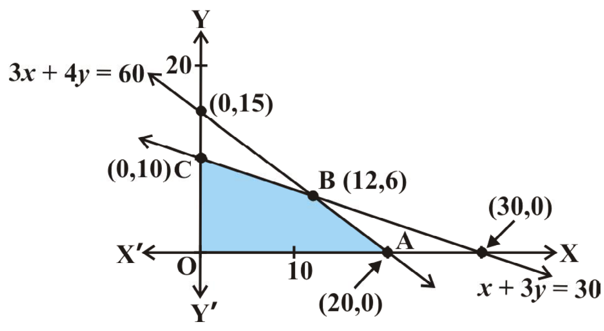
ਅਰਥਾਤ $3x + 4y \le 60$ (ਬਣਾਉਣ–ਨਿਰਮਾਣ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ... (1)

$x + 3y \le 30$ (ਪਾਲਿਸ਼ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ... (2)

$x \ge 0,\ y \ge 0$ (ਗੈਰ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਰਿਣਾਤਮਕ) ... (3)

$Z = 8000\,x + 12000\,y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਨ ਕਰੋ।

ਰੇਖੀ ਸਮੀਰਕਨ (1)ਤੋਂ (3) ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਚਿੱਤਰ 12.9 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੈ ।




ਚਿੱਤਰ 12.8

ਹਰੇਕ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ Z ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

| ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ | $Z = 8000x + 12000y$ | |
|---|---|---|
| 0 (0, 0) | 0 | |
| A (20, 0) | 160000 | |
| B (12, 6) | **168000** ← | ਅਧਿਕਤਮ |
| C (0, 10) | 120000 | |

ਅਸੀਂ ਸਿਖਰ B (12, 6) ਤੇ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 16,8000 ਰੁ: ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਨਮੂਨਾ A ਦੇ 12 ਨਗ ਅਤੇ ਨਮੂਨਾ B ਦੇ 6 ਨਗਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ 168,000 ਰੁ: ਹੋਵੇਗਾ।

## ਅਭਿਆਸ 12.2

1. ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਆਹਾਰ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚ 8 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 11 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ B ਹੋਵੇ। ਆਹਾਰ P ਦੀ ਲਾਗਤ 60 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਅਤੇ ਆਹਾਰ Q ਦੀ ਲਾਗਤ 80 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਹੈ। ਆਹਾਰ P ਵਿੱਚੋਂ 3 ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 5 ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਵਿਟਾਮਿਨ B ਹੈ ਜਦਕਿ ਆਹਾਰ Q ਵਿੱਚ 4 ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 2 ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਵਿਟਾਮਿਨ B ਹੈ। ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੇਕ ਨੂੰ 200 ਗ੍ਰਾਮ ਆਟਾ ਅਤੇ 25 ਗ੍ਰਾਮ ਵਸਾ (fat) ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੇਕ ਦੇ ਲਈ 100 ਗ੍ਰਾਮ ਆਟਾ ਅਤੇ 50 ਗ੍ਰਾਮ ਵਸਾ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕੇਕਾਂ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੋ ਜੋ 5 ਕਿਲੋ ਆਟੇ ਅਤੇ 1 ਕਿਲੋ ਵਸਾ ਤੋਂ ਬਣ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਇਹ ਮੁੱਲ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕੇਕਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਹੋਰ ਪਦਾਰਥਾਂ ਦੀ ਕਮੀ ਨਹੀਂ ਰਹੇਗੀ।
3. ਇੱਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਟੈਨਿਸ ਦੇ ਰੈਕਟ ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਕਟ ਦੇ ਬੱਲੇ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਟੈਨਿਸ ਰੈਕਟ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ 1.5 ਘੰਟਾ ਯਾਂਤ੍ਰਿਕ ਸਮਾਂ ਅਤੇ 3 ਘੰਟੇ ਸ਼ਿਲਪਕਾਰ ਦਾ ਸਮਾਂ ਲਗਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਕ੍ਰਿਕਟ ਬੱਲੇ ਨੂੰ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 3 ਘੰਟੇ ਯਾਂਤਰਿਕ ਸਮਾਂ ਅਤੇ 1 ਘੰਟਾ ਸ਼ਿਲਪਕਾਰ ਦਾ ਸਮਾਂ ਲਗਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਵਿਭਿੰਨ ਯੰਤਰਾਂ ਦੇ ਉਪਲਬਧ ਯਾਂਤਰਿਕ ਸਮੇਂ ਦੇ 42 ਘੰਟੇ ਅਤੇ ਸ਼ਿਲਪਕਾਰ ਸਮੇਂ ਦੇ 24 ਘੰਟਿਆਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹਨ।
   (i) ਰੈਕਟਾਂ ਅਤੇ ਬੱਲਿਆਂ ਦੀ ਕਿੰਨੀ ਸੰਖਿਆ ਬਣਾਈ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਕਾਰਖਾਨਾ ਪੂਰੀ ਸਮਰੱਥਾ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰੇ ?
   (ii) ਜੇਕਰ ਰੈਕਟ ਅਤੇ ਬੱਲੇ ਤੇ ਲਾਭ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 20 ਰੁ: ਅਤੇ 10 ਰੁ: ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਾਰਖਾਨੇ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਕਾਰਖਾਨਾ ਪੂਰੀ ਸਮਰੱਥਾ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰੇ।

4. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਤਾ ਨੱਟ ਅਤੇ ਬੋਲਟ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਪੈਕਟ ਨਟਾਂ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਮਸ਼ੀਨ A ਤੇ ਇੱਕ ਘੰਟਾ ਅਤੇ ਮਸ਼ੀਨ B ਤੇ 3 ਘੰਟੇ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਜਦਕਿ ਇੱਕ ਪੈਕਟ ਬੋਲਟ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 3 ਘੰਟੇ ਮਸ਼ੀਨ A ਤੇ ਅਤੇ 1 ਘੰਟਾ ਮਸ਼ੀਨ B ਤੇ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਨਟਾਂ ਤੋਂ 17. 50 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਪੈਕਟ ਅਤੇ ਬੋਲਟਾਂ ਤੇ 7.00 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਪੈਕੇਟ ਲਾਭ ਕਮਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਤੀ ਦਿਨ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਉਪਯੋਗ 12 ਘੰਟੇ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਹਰੇਕ (ਨਟ ਅਤੇ ਬੋਲਟ) ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪੈਕਟ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾਇਆ ਜਾ ਸਕੇ।

5. ਇੱਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪੇਚ A ਅਤੇ B ਬਣਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਦੋ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਵੈਚਾਲਕ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਹਸਤਚਾਲਕ ਹੈ। ਇੱਕ ਪੈਕਟ ਪੇਚ A ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 4 ਮਿੰਟ ਸਵੈਚਾਲਕ ਅਤੇ 6 ਮਿੰਟ ਹਸਤਚਾਲਕ ਮਸ਼ੀਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੈਕਟ ਪੇਚ B ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 6 ਮਿੰਟ ਸਵੈਚਾਲਕ ਅਤੇ 3 ਮਿੰਟ ਹਸਤਚਾਲਕ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਕੰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਮਸ਼ੀਨ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿਨ ਦੇ ਲਈ ਅਧਿਕਤਮ 4 ਘੰਟੇ ਕੰਮ ਦੇ ਲਈ ਉਪਲਬਧ ਹੈ। ਨਿਰਮਾਤਾ ਪੇਚ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਪੈਕਟ ਤੇ 7 ਰੁ: ਅਤੇ ਪੇਚ B ਦੇ ਹਰੇਕ ਪੈਕਟ ਤੇ 10 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਨਿਰਮਿਤ ਸਾਰੇ ਪੇਚਾਂ ਦੇ ਪੈਕਟ ਵਿਕ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਕਿੰਨੇ ਪੈਕਟ ਵਿਭਿੰਨ ਪੇਚਾਂ ਦੇ ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਜਿਸ ਨਾਲ ਲਾਭ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਘਰੇਲੂ ਉਦਯੋਗ ਨਿਰਮਾਤਾ ਪੈਡਸਟਲ ਲੈਂਪ ਅਤੇ ਲੱਕੜੀ ਦੇ ਸ਼ੇਡ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰਗੜਨੇ/ ਕੱਟਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਪਰੇਅਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਲੈਂਪ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 2 ਘੰਟੇ ਰਗੜਨ/ਕੱਟਣ ਅਤੇ 3 ਘੰਟੇ ਸਪਰੇਅਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ, ਜਦਕਿ ਇੱਕ ਸੇਡ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 1 ਘੰਟਾ ਰਗੜਨ/ਕੱਟਣ ਅਤੇ 2 ਘੰਟੇ ਸਪਰੇਅਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਪਰੇਅਰ ਦੀ ਮਸ਼ੀਨ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਅਧਿਕਤਮ 20 ਘੰਟੇ ਅਤੇ ਰਗੜਨ/ਕੱਟਣ ਦੀ ਮਸ਼ੀਨ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਅਧਿਕਤਮ 12 ਘੰਟੇ ਦੇ ਲਈ ਉਪਲਬਧ ਹੈ। ਇੱਕ ਲੈਂਪ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਤੇ 5 ਰੁ: ਅਤੇ ਇੱਕ ਸ਼ੇਡ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਤੇ 3 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਸਾਰੇ ਨਿਰਮਿਤ ਲੈਂਪ ਅਤੇ ਸ਼ੇਡ ਵਿਕ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਉਹ ਨਿਰਮਾਣ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਕਿਹੋ ਜਿਹੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਣ ਕਿ ਲਾਭ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

7. ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਪਲਾਈਵੁੱਡ ਦੇ ਵਿਲੱਖਣ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀ ਹੈ। A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 5 ਮਿੰਟ ਕੱਟਣ ਅਤੇ 10 ਮਿੰਟ ਜੋੜਨ ਵਿੱਚ ਲਗਦੇ ਹਨ। B ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਲਈ 8 ਮਿੰਟ ਕੱਟਣ ਅਤੇ 8 ਮਿੰਟ ਜੋੜਨ ਵਿੱਚ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕੱਟਣ ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਲ ਸਮਾਂ 3 ਘੰਟੇ 20 ਮਿੰਟ ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਦੇ ਲਈ 4 ਘੰਟੇ ਉਪਲਬਧ ਹਨ। ਹਰੇਕ A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੇ 5 ਰੁ: ਅਤੇ ਹਰੇਕ B ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੇ 6 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਹੋਣਾ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਲਾਭ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਕਿੰਨੇ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੰਪਨੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਮਾਣ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

8. ਇੱਕ ਸੌਦਾਗਰ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਨਿੱਜੀ ਕੰਪਿਊਟਰ-ਇੱਕ ਡੈਸਕਟਾਪ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਪੋਰਟੇਬਲ ਨਮੂਨਾ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 25,000 ਰੁ: ਅਤੇ 40,000 ਰੁ: ਹੋਵੇਗੀ, ਵੇਚਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਮੰਗ 250 ਨਗਾਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਨਹੀਂ

ਹੋਵੇਗੀ।ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਦੇ ਨਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨੂੰ ਸੌਦਾਗਰ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਕਰਨ ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੇ ਕੋਲ ਨਿਵੇਸ਼ ਦੇ ਲਈ 70 ਲੱਖ ਰੁਪਏ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਡੈਸਕਟਾਪ ਨਮੂਨੇ ਤੇ ਉਸ ਦਾ ਲਾਭ 4500 ਰੁ: ਅਤੇ ਪੋਰਟੇਬਲ ਨਮੂਨੇ ਤੇ 5000 ਰੁ: ਹੋਵੇ।

**9.** ਇੱਕ ਭੋਜਨ ਪਦਾਰਥ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 80 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 100 ਇਕਾਈ ਖਣਿਜ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਭੋਜਨ $F_1$ ਅਤੇ $F_2$ ਉਪਲਬਧ ਹਨ।ਭੋਜਨ $F_1$ ਦੀ ਲਾਗਤ 4 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਅਤੇ $F_2$ ਦੀ ਲਾਗਤ 5 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਹੈ।ਭੋਜਨ $F_1$ ਦੀ ਇਕਾਈ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 3 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 4 ਇਕਾਈ ਖਣਿਜ ਹੈ। $F_2$ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 6 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 3 ਇਕਾਈ ਖਣਿਜ ਹਨ।ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੂਤਰਬੱਧ ਕਰੋ।ਉਸ ਆਹਾਰ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਭੋਜਨਾਂ ਦਾ ਮਿਸ਼ਰਣ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤ ਹਨ।

**10.** ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਰਸਾਇਣਿਕ ਖਾਦਾਂ $F_1$ ਅਤੇ $F_2$ ਹਨ। $F_1$ ਵਿੱਚ 10% ਨਾਈਟਰੋਜਨ ਅਤੇ 6% ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਹੈ।ਅਤੇ $F_2$ ਵਿੱਚ 5% ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਅਤੇ 10% ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਹੈ।ਮਿੱਟੀ ਦੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਪਰੀਖਣ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਪਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ 14kg ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਅਤੇ 14kg ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।ਜੇਕਰ $F_1$ ਦੀ ਕੀਮਤ 6 ਕਿਲੋ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਅਤੇ $F_2$ ਦੀ ਕੀਮਤ 5 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਹੈ, ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਖਣਿਜ ਰਸਾਇਣ ਉਪਯੋਗ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਕਿ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਤੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤ ਮਿਲ ਸਕਣ।ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਕੀ ਹੈ।

**11.** ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ : $2x + y \le 10$, $x + 3y \le 15$, $x, y \ge 0$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ : (0, 0), (5,0), (3, 4) ਅਤੇ (0, 5) ਹਨ।ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $Z = px + qy$, ਜਿੱਥੇ $p, q > 0$, $p$ ਅਤੇ $q$ ਦੇ ਲਈ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਉੱਚਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, (3] 4) ਅਤੇ (0] 5) ਦੋਵਾਂ ਤੇ ਘਟਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(A) $p = q$ (B) $p = 2q$ (C) $p = 3q$ (D) $q = 3p$

## *ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਨ (Miscellaneerus Examples)*

ਉਦਾਹਰਣ 9 (ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ) ਇੱਕ ਭੋਜਨ ਵਿਗਿਆਨੀ ਦੋ ਭੋਜਨਾਂ P ਅਤੇ Q ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਆਹਾਰ ਤਿਆਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਭੋਜਨ P ਦਾ ਹਰੇਕ ਪੈਕੇਟ (ਜਿਸ ਵਿੱਚ 30 ਗ੍ਰਾਮ ਮਾਤਰਾ ਹੈ) ਵਿੱਚ ਕੈਲਸ਼ੀਅਮ ਦੇ 12 ਇਕਾਈ, ਲੋਹ ਤੱਤ ਦੇ 4 ਇਕਾਈ, ਕੈਲਸਟਰੋਲ ਦੇ 6 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੀ 6 ਇਕਾਈ ਮਾਤਰਾ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਜਦ ਕਿ ਉਸੇ ਮਾਤਰਾ ਦੇ ਭੋਜਨ Q ਦੇ ਪੈਕੇਟ ਵਿੱਚ ਕੈਲਸ਼ੀਅਮ ਤੱਤ ਦੇ 3 ਇਕਾਈ, ਲੋਹ ਤੱਤ ਦੇ 20 ਇਕਾਈ, ਕੈਲਸਟਰੋਲ ਦੇ 4 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੇ 3 ਇਕਾਈ ਮਾਤਰਾ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 240 ਇਕਾਈ ਕੈਲਸ਼ੀਅਮ, ਲੋਹ ਤੱਤ ਦੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 460 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਕੈਲਸਟਰੋਲ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 300 ਇਕਾਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਹਨ।ਹਰੇਕ ਭੋਜਨ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪੈਕਟਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।

ਹੱਲ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਭੋਜਨ P ਅਤੇ Q ਦੇ ਪੈਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $x$ ਅਤੇ $y$ ਹੈ।ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ : $x \ge 0, y$

$\geq 0$. ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ

$12x + 3y \geq 240$ (ਕੈਲਸ਼ੀਅਮ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ਅਰਥਾਤ $4x + y \geq 80$ ... (1)

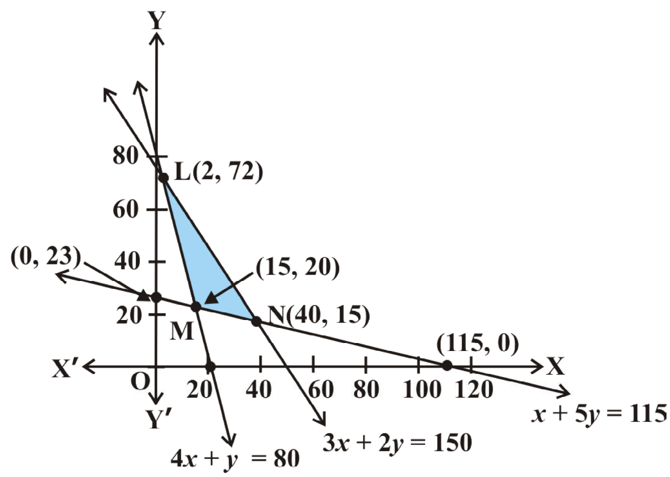
$4x + 20y \geq 460$ (ਲੋਹ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ਅਰਥਾਤ $x + 5y \geq 115$ ... (2)

$6x + 4y \leq 300$ (ਕੈਸਟਰੋਲ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ਅਰਥਾਤ $3x + 2y \leq 150$ ... (3)

$x \geq 0, y \geq 0$ $x \geq 0, y \geq 0$ ... (4)

$Z = 6x + 3y$ (ਵਿਟਾਮਿਨA) ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਦਾ ਆਲੇਖ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਦੇ ਤਹਿਤ ਚਿੱਤਰ 12.10 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।ਉਸ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਜੋ ਕਿ ਘਿਰਿਆ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 12.10

ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ L, M ਅਤੇ N ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (2, 72), (15, 20) ਅਤੇ (40, 15) ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

| ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰ) | $Z = 6x + 3y$ | |
|---|---|---|
| (2, 72) | 228 | |
| (15, 20) | **150** ← | ਨਿਊਨਤਮ |
| (40, 15) | 285 | |

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ Z ਦਾ ਮੁੱਲ, ਬਿੰਦੂ (15, 20) ਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਧੀਨ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਿਊਨਤਮ ਤਦ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦ ਕਿ ਭੋਜਨ P ਦੇ 15 ਪੈਕੇਟ ਅਤੇ ਭੋਜਨ Q ਦੇ 20 ਪੈਕਟ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਆਹਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 150 ਇਕਾਈ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ **(Manufacturing problem)** ਇੱਕ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਮਸ਼ੀਨਾਂ I, II ਅਤੇ III ਲੱਗੀਆਂ ਹਨ। ਮਸ਼ੀਨ I ਅਤੇ II ਅਧਿਕਤਮ 12 ਘੰਟੇ ਤੱਕ ਚਲਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਸਮਰੱਥਾ ਰੱਖਦੀ ਹੈ। ਜਦ ਕਿ ਮਸ਼ੀਨ III ਪ੍ਰਤਿਦਿਨ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 5 ਘੰਟ ਚੱਲਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਨਿਰਮਾਣਕਰਤਾ ਕੇਵਲ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸਮਾਨ M ਅਤੇ N ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨੋਂ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। M ਅਤੇ N ਦੇ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਇੱਕ ਨਗ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨੋਂ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਲੱਗੇ ਸਮੇਂ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ) ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

| ਉਤਪਾਦ | ਮਸ਼ੀਨ ਤੇ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ) | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| M | 1 | 2 | 1 |
| N | 2 | 1 | 1.25 |

ਉਹ ਉਤਪਾਦ M ਤੇ 600 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਅਤੇ ਉਤਪਾਦ N ਤੇ 400 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਲਾਭ ਕਮਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਉਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਤਪਾਦ ਵਿਕ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਤਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਨਗਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਹੋਵੇ ? ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨਿਆ ਕਿ ਉਤਪਾਦ M ਅਤੇ N ਦੇ ਨਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $x$ ਅਤੇ $y$ ਹੈ।

ਉਤਪਾਦਨ ਤੇ ਕੁੱਲ ਲਾਭ = Rs $(600\,x + 400\,y)$ ਰੁ:

ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰਬੱਧ ਰੂਪ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

$Z = 600\,x + 400\,y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ

ਜਿੱਥੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ।

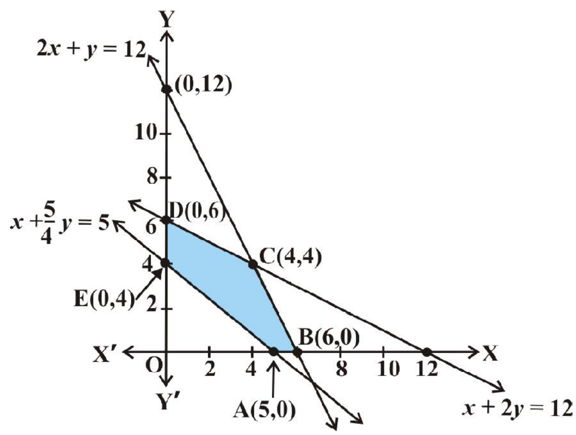
$x + 2y \le 12$ (ਮਸ਼ੀਨ I ਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ... (1)

$2x + y \le 12$ (ਮਸ਼ੀਨ II ਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ... (2)

$x + \frac{5}{4}\,y \ge 5$ (ਮਸ਼ੀਨ III ਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ... (3)

$x \ge 0,\; y \ge 0$ ... (4)

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (1) ਤੋਂ (4) ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 12. 11 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ABCDE (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (1) ਤੋਂ (4) ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੈ, ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C, D ਅਤੇ E ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (5, 0) (6, 0), (4, 4), (0, 6) ਅਤੇ (0, 4) ਹਨ।




ਚਿੱਤਰ 12.11

ਇਹਨਾਂ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (ਸਿਖਰਾਂ) ਤੇ Z =600+400 $y$ ਦਾ ਮਾਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

| ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ | $Z = 600x + 400y$ ਦਾ ਮੁੱਲ | |
|---|---|---|
| (5, 0) | 3000 | |
| (6, 0) | 3600 | |
| (4, 4) | **4000** ← | ਅਧਿਕਤਮ |
| (0, 6) | 2400 | |
| (0, 4) | 1600 | |

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (4] 4), Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਤਪਾਦਕ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ 4000 ਰੁ: ਲਾਭ ਕਮਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦ ਦੇ 4 ਨਗਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

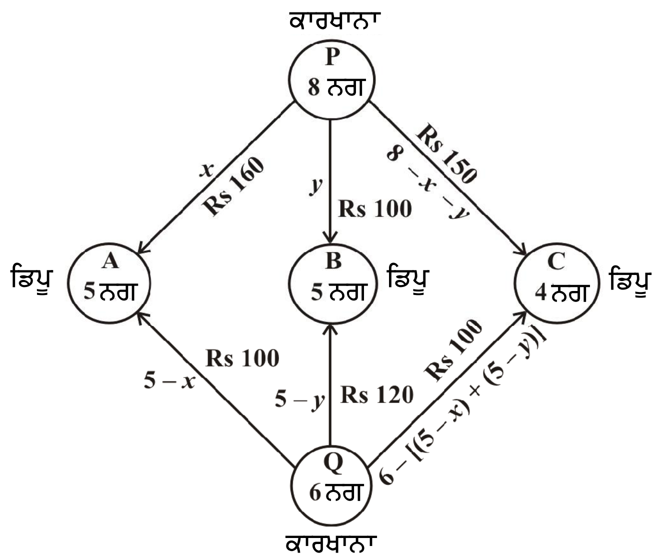
ਉਦਾਹਰਣ 11. ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ (**Transportation Problem**) P ਅਤੇ Q ਦੋ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਦੋ ਕਾਰਖਾਨੇ ਸਥਾਪਿਤ ਹਨ।ਇਹਨਾਂ ਸਥਾਨਾਂ ਤੋਂ ਸਮਾਨ A, B ਅਤੇ C ਤੇ ਸਥਿਤ ਤਿੰਨ ਡਿਪੂਆਂ ਵਿੱਚ ਭੇਜੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।ਇਹਨਾਂ ਡਿਪੂਆਂ ਦੀ ਹਫਤਾਵਾਰ ਲੋੜ ਸਮਾਨ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 5] 5 ਅਤੇ 4 ਇਕਾਈ ਹੈ, ਜਦਕਿ P ਅਤੇ Q ਤੇ ਸਥਾਪਿਤ ਕਾਰਖਾਨਿਆਂ ਦੀ ਉਤਪਾਦਨ ਸਮਰੱਥਾ 8 ਅਤੇ 6 ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਰਣੀਬੱਧ ਹੈ:

| ਤੋਂ /ਤੱਕ | ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) | | |
|---|---|---|---|
| | **A** | **B** | **C** |
| P | 160 | 100 | 150 |
| Q | 100 | 120 | 100 |

ਹਰੇਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਤੋਂ ਕਿੰਨੇ ਨਗ ਹਰੇਕ ਡਿਪੂ ਨੂੰ ਭੇਜੇ ਜਾਣ ਜਿਸ ਨਾਲ ਢੋਆ-ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ ? ਨਿਊਨਤਮ ਢੋਆ-ਢੋਆਈ ਲਾਗਤ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਹੱਲ: ਚਿੱਤਰ 12.12 ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 12.12

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਮਾਲ ਦੇ $x$ ਨਗਾਂ ਅਤੇ $y$ ਨਗਾਂ ਨੂੰ ਕਾਰਖਾਨੇ P ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : A ਅਤੇ B ਡਿੱਪੂ ਨੂੰ ਭੇਜਿਆ ਗਿਆ। ਤਦ $(8 ï x ï y)$ ਨਗਾਂ ਨੂੰ C ਡਿਪੂਆਂ ਤੱਕ ਭੇਜਿਆ ਜਾਵੇਗਾ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x \geq 0, y \geq 0$ ਅਤੇ $8 ï x ï y \geq 0$

ਅਰਥਾਤ $x \geq 0, y \geq 0$ ਅਤੇ $x + y \leq 8$

ਹੁਣ ਡਿੱਪੂ A ਤੇ ਨਗਾਂ ਦੀ ਹਫਤਾਵਾਰ ਜ਼ਰੂਰਤ 5 ਨਗ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ P ਕਾਰਖਾਨੇ ਤੋਂ $x$ ਨਗ ਡਿੱਪੂ A ਨੂੰ ਭੇਜਿਆ ਜਾ ਚੁੱਕੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਕਾਰਖਾਨੇ Q ਤੋਂ $(5 ï x)$ ਨਗ, ਡਿੱਪੂ A ਨੂੰ ਭੇਜੇ ਜਾਣਗੇ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ $5 ï x \geq 0$, ਅਰਥਾਤ $x \leq 5$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(5 ï y)$ ਅਤੇ $6 ï (5 ï x + 5 ï y) = x + y ï 4$ ਨਗ ਕਾਰਖਾਨੇ Q ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਡਿੱਪੂ B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਭੇਜੇ ਜਾਣਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$5 ï y \geq 0, \quad x + y ï 4 \geq 0$$

ਅਰਥਾਤ $y \leq 5, \quad x + y \geq 4$

ਕੁੱਲ ਢੋਆ-ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ/ਖਰਚ, ਜੋ Z ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

$$Z = 160\,x + 100\,y + 100\,(5 ï x) + 120\,(5 ï y) + 100\,(x + y ï 4) + 150\,(8 ï x ï y)$$
$$= 10\,(x ï 7\,y + 190)$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੱਸਿਆ ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \ldots (1)$$

$$x + y \leq 8 \quad \ldots (2)$$

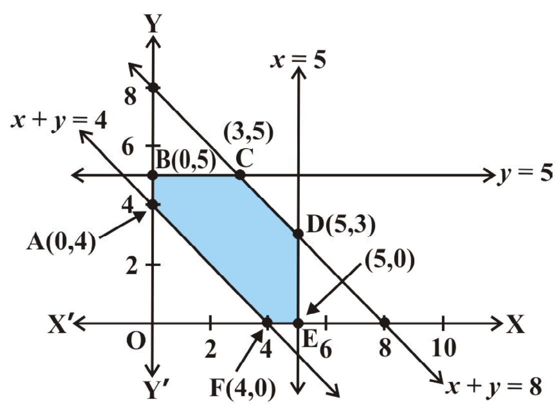
$$x \leq 5 \quad \ldots (3)$$

$$y \leq 5 \quad \ldots (4)$$

$$x + y \geq 4 \quad \ldots (5)$$

Z = 10 (*x* ï 7y + 190) ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ

ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (1) ਤੋਂ (5) ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ABCDEF ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 12.13)




ਚਿੱਤਰ 12.13

ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੈ। ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (0, 4), (0, 5), (3, 5), (5, 3), (5, 0) ਅਤੇ (4, 0) ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

| ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ | **Z = 10 (*x* – 7 *y* + 190)** | |
|---|---|---|
| (0, 4) | 1620 | |
| (0, 5) | **1550** ← | ਨਿਊਨਤਮ |
| (3, 5) | 1580 | |
| (5, 3) | 1740 | |
| (5, 0) | 1950 | |
| (4, 0) | 1940 | |

ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (0] 5) ਤੇ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 1550 ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਾਰਖਾਨੇ P ਤੋਂ 5, 0 ਅਤੇ 3 ਨਗ ਅਤੇ Q ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਡਿੱਪੂ A, B ਅਤੇ C ਤੱਕ 5] 0 ਅਤੇ 1 ਨਗ ਭੇਜਿਆ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਸੰਗਤ ਨਿਊਨਤਮ ਪਰਿਵਰਤਨ ਲਾਗਤ 1500 ਰੁ: ਹੋਵੇਗਾ।

## *ਅਧਿਆਇ 12 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**1.** ਉਦਾਹਰਣ 9 ਤੇ ਧਿਆਨ ਕਰੋ ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਭੋਜਨ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪੈਕਟਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮਾਤਰਾ ਕਿੰਨੀ ਹੈ ?

**2.** ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਰੇ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। P ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਰੇ, ਜਿਸ ਦਾ ਮੁੱਲ 250 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਥੈਲਾ ਜੋ ਕਿ ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤ A ਦੇ 3 ਇਕਾਈ, ਤੱਤ B ਦੇ 2.5 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਤੱਤ C ਦੇ 2 ਇਕਾਈ ਰੱਖਦਾ ਹੈ ਜਦ ਕਿ Q ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਚਾਰਾ ਜਿਸਦਾ ਮੁੱਲ 200 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਥੈਲਾ ਹੈ, ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤ A ਦਾ 1.5 ਇਕਾਈ, ਤੱਤ B ਦਾ 11 . 25 ਇਕਾਈ ਅ ਤੇ ਤੱਤ C ਦੇ ਤਿੰਨ ਇਕਾਈ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤਾਂ A, B, ਅਤੇ C ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਜ਼ਰੂਰਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 18 ਇਕਾਈ, 45 ਅਤੇ 24 ਇਕਾਈ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਥੈਲਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੇ ਹਰੇਕ ਥੈਲੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ ? ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੇ ਹਰੇਕ ਥੈਲੇ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?

**3.** ਇੱਕ ਭੋਜਨ ਵਿਗਿਆਨੀ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਭੋਜਨਾਂ X ਅਤੇ Y ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A, ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 10 ਇਕਾਈ, ਵਿਟਾਮਿਨ B ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 12 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਵਿਟਾਮਿਨ C ਦੀ 8 ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ। 1kg ਭੋਜਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨਾਂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

| ਭੋਜਨ | ਵਿਟਾਮਿਨ **A** | ਵਿਟਾਮਨ **B** | ਵਿਟਾਮਿਨ **C** |
|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 |
| Y | 2 | 2 | 1 |

ਭੋਜਨ X ਦੇ 1kg ਦਾ ਮੁੱਲ 16 ਰੁ: ਅਤੇ Y ਦੇ 1kg ਦਾ ਮੁੱਲ 20 ਰੁ: ਹੈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਆਹਾਰ ਦੇ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਣ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**4.** ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਖਿਲੌਣੇ A ਅਤੇ B ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਦੇ ਲਈ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਖਿਲੌਣੇ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਲਈ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ (ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ।

| ਖਿਲੌਣਿਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ | ਮਸ਼ੀਨ | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| A | 12 | 18 | 6 |
| B | 6 | 0 | 9 |

ਹਰ ਮਸ਼ੀਨ ਅਧਿਕਤਮ 6 ਘੰਟੇ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਦੇ ਲਈ ਉਪਲਬਧ ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਖਿਲੌਣਿਆਂ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਤੇ 7.50 ਰੁ: ਲਾਭ ਅਤੇ B ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਖਿਲੌਣਿਆਂ ਤੇ 5 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 15 ਖਿਲੌਣਿਆਂ ਅਤੇ B ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 30 ਖਿਲੌਣੇ ਨਿਰਮਿਤ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

**5.** ਇੱਕ ਹਵਾਈ ਜ਼ਹਾਜ਼ ਅਧਿਕਤਮ 200 ਯਾਤਰੀਆਂ ਨੂੰ ਯਾਤਰਾ ਕਰਵਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪਹਿਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਟਿਕਟ ਤੇ 1000 ਰੁ: ਅਤੇ ਸਸਤੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਟਿਕਟ ਤੇ 600 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਏਅਰਲਾਈਨ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 20 ਸੀਟਾਂ ਪਹਿਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਲਈ ਰਿਜ਼ਰਵ ਕਰਦੀ ਹੈ ਫਿਰ ਵੀ ਪਹਿਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀ ਥਾਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 4 ਗੁਣਾ ਯਾਤਰੀ ਸਸਤੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਟਿਕਟ ਨਾਲ ਯਾਤਰਾ ਕਰਨ ਨੂੰ ਪਹਿਲ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਕਿੰਨੇ ਟਿਕਟ ਵੇਚੇ ਜਾਣ ਤਾਂ ਕਿ ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਨ ਹੋਵੇ ? ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਿੰਨਾ ਹੈ ?

**6.** ਦੋ ਅਨਾਜ ਭੰਡਾਰਾਂ A ਅਤੇ B ਦੀ ਭੰਡਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 100 ਕੁਇੰਟਲ ਅਤੇ 50 ਕੁਇੰਟਲ ਹੈ । ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਰਾਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਦੁਕਾਨਾਂ D, E ਅਤੇ F ਤੇ ਅੰਨ ਉਪਲਬਧ ਕਰਾਉਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 60] 50] ਅਤੇ 40 ਕੁਇੰਟਲ ਹਨ।

ਭੰਡਾਰਾਂ ਤੋਂ ਦੁਕਾਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀ ਕੁਇੰਟਲ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

| ਪ੍ਰਤੀ ਕੁਇੰਟਲ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ (ਰੁਪਇਆ ਵਿੱਚ) | | |
|---|---|---|
| ਤੋਂ/ ਤੱਕ | **A** | **B** |
| D | 6 | 4 |
| E | 3 | 2 |
| F | 2.50 | 3 |

ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਦੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਪੂਰਤੀ ਦੀ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ? ਨਿਊਨਤਮ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?

**7.** ਇੱਕ ਤੇਲ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਦੋ ਡਿੱਪੂ A ਅਤੇ B ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਸਮਰੱਥਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 7000 ਲੀਟਰ ਅਤੇ 4000 ਲੀਟਰ ਦੀ ਹੈ। ਕਾਰਖਾਨੇ ਦੁਆਰਾ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰੈਟੋਲ ਪੰਪਾਂ D, E ਅਤੇ F ਦੇ ਲਈ ਪੂਰਤੀ ਕਰਨੀ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 4500 ਲੀਟਰ, 3000 ਲੀਟਰ ਅਤੇ 3500 ਲੀਟਰ ਦੀ ਹੈ। ਡਿੱਪੂ ਤੋਂ ਪ੍ਰੈਟੋਲ ਪੰਪਾਂ ਦੀਆਂ ਦੂਰੀਆਂ (km ਵਿੱਚ) ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ।

| ਦੂਰੀਆਂ (**km** ਵਿੱਚ) | | |
|---|---|---|
| ਤੋਂ / ਨੂੰ | **A** | **B** |
| D | 7 | 3 |
| E | 6 | 4 |
| F | 3 | 2 |

ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਪ੍ਰਤੀ 10 ਲੀਟਰ ਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋਮੀਟਰ 1 ਰੁਪਇਆ ਹੈ ? ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਹੋ ਜਿਹੀ ਪੂਰਤੀ ਯੋਜਨਾ ਅਪਣਾਈ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਨ ਹੋ ਜਾਵੇ ? ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਕੀ ਹੈ ?

**8.** ਇੱਕ ਫਲ ਉਤਪਾਦਕ ਆਪਣੇ ਬਾਗ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਖਾਦਾਂ P ਬਰਾਂਡ ਅਤੇ Q ਬਰਾਂਡ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੇ ਹਰੇਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ, ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ, ਪੋਟਾਸ਼ ਅਤੇ ਕਲੋਰੀਨ ਦੀ ਮਾਤਰਾ (kg ਵਿੱਚ) ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪਰੀਖਣ ਸੰਕੇਤ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਬਾਗ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 250kg ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 270kg ਪੋਟਾਸ਼ ਅਤੇ ਕਲੋਰੀਨ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 310kg ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਕ ਬਾਗ ਦੇ ਲਈ ਮਿਲਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਥੈਲਿਆਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਮਿਲਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਦੀ ਨਿਮਨਤਮ ਮਾਤਰਾ ਕੀ ਹੈ ?

| **kg ਪ੍ਰਤੀ ਥੈਲਾ** | | |
|---|---|---|
| | **ਬਰਾਂਡ P** | **ਬਰਾਂਡ Q** |
| ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ | 3 | 3.5 |
| ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ | 1 | 2 |
| ਪੋਟਾਸ਼ | 3 | 1.5 |
| ਕਲੋਰੀਨ | 1.5 | 2 |

**9.** ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 8 ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ। ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਕ ਬਾਗ ਵਿੱਚ ਮਿਲਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਨ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਥੈਲਿਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਇਆ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਮਿਲਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮਾਤਰਾ ਕੀ ਹੈ ?

**10.** ਇੱਕ ਖਿਲੌਣਾ ਕੰਪਨੀ A ਅਤੇ B ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗੁੱਡੀਆਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਮਾਰਕੀਟ ਪਰੀਖਣਾਂ ਅਤੇ ਉਪਲਬਧ ਸੰਸਾਧਨਾਂ ਤੋਂ ਸੰਕੇਤ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਕੱਠਾ ਉਤਪਾਦਨ ਪੱਧਰ ਪ੍ਰਤੀ ਹਫਤੇ 1200 ਗੁੱਡੀਆਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਅਤੇ B ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗੁੱਡੀਆਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਮੰਗ A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗੁੱਡੀਆਂ ਤੋਂ ਅੱਧੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗੁੱਡੀਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਪੱਧਰ ਦੂਸਰੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਗੁੱਡੀਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਪੱਧਰ ਦੇ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ 600 ਨਗ ਵਧੇਰੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਕੰਪਨੀ A ਅਤੇ B ਹਰੇਕ ਗੁੱਡੀ ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 12 ਰੁ: ਅਤੇ 16 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਨਗਾਂ ਦਾ ਹਫਤਾਵਾਰ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

## *ਸਾਰ-ਅੰਸ਼*

- ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਉਹ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਈ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਫਲਨ ਨੂੰ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਇਹ ਹੋਵੇ ਕਿ ਚਲ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ।ਚਰਾਂ ਨੂੰ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਚਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ।
- ਕੁੱਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਹਨ :
  - (i) ਆਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ
  - (ii) ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ
  - (iii) ਢੋਆ-ਢੁਆਈ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ
- ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾ ਅਤੇ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ $x \geq 0, y \geq 0$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਸਾਂਝਾ ਖੇਤਰ, ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ, ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਜਾਂ ਹੱਲ ਖੇਤਰ) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਦੇ ਅਤੇ ਸੀਮਾਂਤ ਬਿੰਦੂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਭਾਗ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਅਸੰਗਤ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਜੋ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਇੱਕ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਥਿਊਰਮ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਆਧਾਰਭੂਤ ਮਹੱਤਵ ਦੇ ਹਨ:
  ਥਿਊਰਮ 1. ਮੰਨਿਆ ਕਿ R ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਉੱਤਲ ਬਹੁਭੁਜ) ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨਿਆ ਕਿ $Z = ax + by$ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਜਦ Z ਇੱਕ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਚਲਾਂ $x$ ਅਤੇ $y$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰ) ਤੇ ਹੋਣਾ ਹੀ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
  ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਮੰਨਿਆ ਕਿ R ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਉੱਤਲ ਬਹੁਭੁਜ) ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨਿਆ ਕਿ $Z = ax + by$ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਜੇਕਰ R ਘਿਰਿਆ ਹੈ ਤਦ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ, R ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ R ਦੇ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰ) ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ ਤਦ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।ਫਿਰ ਵੀ ਜੇਕਰ ਇਹ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ R ਦੇ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
- ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਵਿਧੀ : ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਵਿਧੀ ਨਿਮਨ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ :
  - (1) ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰਾਂ) ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(2) ਹਰੇਕ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = ax + by$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਮੰਨਿ ਲਉ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : M ਅਤੇ $m$ ਹਨ।

(3) ਜੇਕਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ M ਅਤੇ $m$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ ਤਦ

(i) ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ M ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜੇਕਰ $ax + by > M$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਖੁੱਲਾ ਅਰਧਤਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $m$ ਹੈ ਜੇਕਰ $ax + by < m$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਖੁੱਲਾ ਅਰਧਤਲ ਅਤੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

- ਜੇਕਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਦੋ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਹੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਤਦ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਵੀ ਉਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ ਹੈ।

## *ਇਤਿਹਾਸਕ ਟਿੱਪਣੀ*

ਦੂਜੇ ਵਿਸ਼ਵ ਯੁੱਧ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਯੁੱਧ ਸੰਚਾਲਨ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣੀ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਦੁਸ਼ਮਣਾਂ ਨੂੰ ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਹਾਨੀ ਪਹੁੰਚੇ, ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿਧੀ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਆਈ।

ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦਾ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਰੂਸੀ ਗਣਿਤਕਾਰ L.Kantoro Vich ਅਤੇ ਅਮਰੀਕੀ ਅਰਥਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ F.L.Hitch Cock ਨੇ 1941 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ। ਦੋਵਾਂ ਨੇ ਸਵਤੰਤਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਨੂੰ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਨਾਮ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਗਿਆ। ਸੰਨ 1945 ਵਿੱਚ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਅਰਥਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ G.Stigler ਨੇ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਤਹਿਤ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਆਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ। ਸੰਨ 1947 ਵਿੱਚ G.B. Dantzig ਨੇ ਇੱਕ ਨਿਪੁੰਨ ਵਿਧੀ ਜੋ SIMPLEX METHOOD ਦੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹੈ ਦਾ ਸੁਝਾਅ ਦਿੱਤਾ ਜੋ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਸੀਮਤ ਤਦਬੀਰਾਂ (Steps) ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮਰੱਥ ਵਿਧੀ ਹੈ।

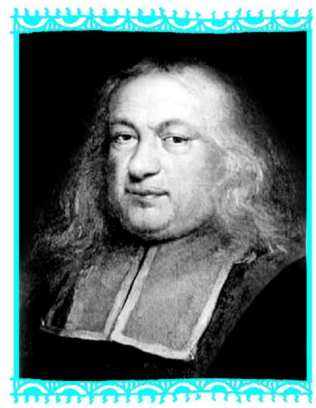
ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿਧੀ ਤੇ ਅਰੰਭਿਕ ਕੰਮ ਕਰਨ ਦੇ ਕਾਰਨ ਸੰਨ 1975 ਵਿੱਚ L.Katorovich ਅਤੇ ਅਮਰੀਕੀ ਗਣਿਤ ਅਰਥਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ T.C.Koopmans ਨੂੰ ਅਰਥ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰ ਵਿੱਚ ਨੋਬਲ ਪੁਰਸਕਾਰ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਆਗਮਨ ਅਤੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਦੇ ਆਗਮਨ ਦੇ ਨਾਲ ਕਈ ਖੇਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਜਟਿਲ ਸਮੱਸਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਮਾਡਲ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਬਹੁਤ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 13

# ਸੰਭਾਵਨਾ Probability

❖ *The Theory of probabilities is simply the science of logic quantitatively treated – C.S. PEIRCE* ❖

## 13.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)



**Pierre de Fermat (1601-1665)**

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਅਨਿਸ਼ਚਤਿਤਾ ਦੀ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ। ਅਸੀ ਰੂਸੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਏ.ਐਨ.ਕੌਲਮੋਗਰੋਬ (1903&1987) ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਸੀ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਸੀ।ਅਸੀ ਸਮ&ਸੰਭਾਵੀ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਅਤੇ ਕਲਾਸੀਕਲ ਸਿਧਾਂਤਾ (classical theory) ਦੀ ਸਮਤੁਲਤਾ ਵੀ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਸਮਤੁਲਤਾ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀ ਵਿਲੱਗ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਜੋੜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ (conditional probability) ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ] ਜਦੋਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੋਵੇ, ਅਤੇ ਇਸ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਮਦਦ ਤੋਂ ਬੇਯਜ਼&ਪ੍ਰਮੇਯ (Bayes' theorem), ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਅਤੇ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਸਮਝਾਂਗੇ। ਅਸੀ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਚਲ (random variable) ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਵੀ ਸਮਝਾਂਗੇ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ (mean) ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਣ (variance) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਲੱਗ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ (discrete probability distribution) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ਜਿਸਨੂੰ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ (binomial distribution) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਲਵਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ&ਸੰਭਾਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਦੱਸਿਆ ਨਾ ਜਾਵੇ।

## 13.2 ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ (Conditional Probability)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀ ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ (sample space) ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਣ ਤਾਂ, ਕੀ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਦੂਜੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਆਉ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੇ (fair) ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ&ਸੰਭਾਵੀ ਹਨ।

ਆਉ ਹੁਣ ਤਿੰਨ ਨਿਰਪੱਖ (fair) ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਸਿੱਕੇ ਨਿਰਪੱਖ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰੇਕ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{8}$ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ ¶ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ ਆਉਣ¸ ਅਤੇ F ਘਟਨਾ ¶ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਉਣਾ¸ ਨੂੰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ:

ਤਾਂ $E = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

ਅਤੇ $F = \{THH, THT, TTH, TTT\}$

ਇਸ ਲਈ $P(E) = P(\{HHH\}) + P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\})$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \text{ (ਕਿਉਂ ?)}$$

ਅਤੇ $P(F) = P(\{THH\}) + P(\{THT\}) + P(\{TTH\}) + P(\{TTT\})$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

ਨਾਲ ਹੀ $E \cap F = \{THH\}$

ਇਸ ਲਈ $P(E \cap F) = P(\{THH\}) = \frac{1}{8}$

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਘਟਨਾ F ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ, ਤਾਂ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਤੇ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਹਨਾ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ ਜਿਹਨਾ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਘਟਨਾ E ਲਈ ਇਸ ਸੂਚਨਾ ਤੋਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਤੋਂ ਘਟਾ ਕੇ ਇਸਦਾ ਉਪ-ਸਮੂਹ F ਬਣ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਬਾਕੀ ਸੂਚਨਾ ਨੇ ਸਾਨੂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਹ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹਾਲਾਤ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਨਵੇਂ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਨਾਲ ਹਨ।

ਹੁਣ F ਦਾ ਉਹ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਜਿਹੜਾ E ਦੀ ਅਨੁਕੂਲ ਹੈ, THH ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

F ਨੂੰ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{4}$

ਜਾਂ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਤੇ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{4}$

ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਘਟਿਤ ਹੋ ਚੁੱਕੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ P (E|F) ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਭਾਵ $P(E|F) = \dfrac{1}{4}$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ F ਦੇ ਉਹ ਤੱਤ ਜਿਹੜੇ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਵੀ ਸੰਗਤ ਵਿੱਚ ਹਨ] E ਅਤੇ F ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ $E \cap F$ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਘਟਿਤ ਹੋ ਚੁੱਕੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$P(E|F) = \frac{(E \cap F) \text{ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{F \text{ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

$$= \frac{n(E \cap F)}{n(F)}$$

ਹੁਣ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਕੁਲ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P (E|F) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ%

$$P(E|F) = \frac{\frac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \qquad \ldots (1)$$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ (1) ਤਾਂ ਹੀ ਮੰਨਣ ਯੋਗ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ $P(F) \neq 0$ ਭਾਵ $F \neq \phi$ (ਕਿਉਂ ?)
ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1: ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਤੇ] E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ%

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \text{ ਜਦੋਂ ਕਿ } P(F) \neq 0 \text{ ਹੈ।}$$

### 13.2.1 ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ *(Properties of conditional probability)*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ E ਅਤੇ F ਕਿਸੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ:

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1 $P(S|F) = P(F|F) = 1$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $P(S|F) = \dfrac{P(S \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(F)}{P(F)} = 1$

ਨਾਲ ਹੀ $$P(F|F) = \frac{P(F\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

ਇਸ ਲਈ $$P(S|F) = P(F|F) = 1$$

**ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2** ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ F ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $P(F) \neq 0$, ਤਾਂ,

$P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F)$ ï $P[(A \cap B)|F]$

ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਨਾ- ਜੁੜੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ,

$$P[(A\cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F)$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P[(A\cup B)|F)] = \frac{P[(A\cup B)\cap F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[(A\cap F) \cup (B\cap F)]}{P(F)}$$

(ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਤੇ ਸੰਘ ਦੇ ਵੰਡ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ)

$$= \frac{P(A\cap F)+P(B\cap F)\text{ï } P(A\cap B \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A\cap F)}{P(F)} + \frac{P(B\cap F)}{P(F)} - \frac{P[(A\cap B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= P(A|F) + P(B|F) \text{ ï } P(A\cap B|F)$$

ਜਦੋਂ A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ- ਜੁੜੇ ਹੋਣ ਤਾਂ

$$P[(A \cap B)|F)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F)$$

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ- ਜੁੜੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ, $P(A \cup B) = P(A|F) + P(B|F)$

**ਗੁਣ 3** $P(E'|F) = 1$ ï $P(E|F)$

ਗੁਣ 1 ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $P(S|F) = 1$

$\Rightarrow \quad P[(E \cup E')|F)] = 1$ ਕਿਉਂਕਿ $S = E \cup E'$

$\Rightarrow \quad P(E|F) + P(E'|F) = 1$ ਕਿਉਂਕਿ E ਅਤੇ E′ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ- ਜੁੜੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ

ਇਸ ਲਈ $$P(E'|F) = 1 - P(E|F)$$

ਆਓ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, ਤਾਂ $P(A|B)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}}{\frac{9}{13}} = \frac{4}{9}$$

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬੱਚੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਬੱਚਿਆਂ ਵਿਚੋਂ ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਬੱਚਾ ਲੜਕਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਲੜਕਾ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ $b$ ਲੜਕੇ ਨੂੰ ਅਤੇ $g$ ਲੜਕੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ

$$S = \{(b,b),\ (g,b),\ (b,g),\ (g,g)\}$$

ਮੰਨ ਲਉ E ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ:

E : ਦੋਵੇਂ ਬੱਚੇ ਲੜਕੇ ਹਨ

F : ਬੱਚਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਲੜਕਾ ਹੈ

ਤਾਂ $E = \{(b,b)\}$ ਅਤੇ $F = \{(b,b), (g,b), (b,g)\}$

ਹੁਣ $E \cap F = \{(b,b)\}$

ਇਸ ਲਈ $P(F) = \frac{3}{4}$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

ਇਸ ਲਈ $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਇੱਕ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਦੱਸ ਕਾਰਡ 1ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖ ਕੇ ਰੱਖੇ ਹੋਏ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾ ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਬਕਸੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਕਾਰਡ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਕਾਰਡ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਜਿਸਤ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A ਘਟਨਾ 'ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਕਾਰਡ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ ' ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਕਾਰਡ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ $P(A|B)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ਤਾਂ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ਅਤੇ $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

ਹੁਣ $$P(A) = \frac{5}{10},\ P(B) = \frac{7}{10} \text{ ਅਤੇ } P(A \cap B) = \frac{4}{10}$$

ਤਾਂ $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ 1000 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 430 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ 430 ਵਿੱਚੋਂ 10% ਲੜਕੀਆਂ ਜਮਾਤ XII ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦੀਆਂ ਹਨ। ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਮਾਤ XII ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲੜਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ 'ਬੇਤਰਤੀਬ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਮਾਤ XII ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ' ਅਤੇ F ਘਟਨਾ 'ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲੜਕੀ ਹੈ' ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ $P(E|F)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $$P(F) = \frac{430}{1000} = 0.43 \text{ ਅਤੇ } P(E \cap F) = \frac{43}{1000} = 0.043 \quad (\text{ਕਿਉਂ?})$$

ਤਾਂ $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.043}{0.43} = 0.1$$

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ:

A : ' ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਆਉਣਾ'

B : ' ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 5 ਆਉਣਾ'

ਜੇਕਰ B ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ 216 ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ।

ਹੁਣ, $$B = \{(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\}$$

$$A = \left\{\begin{matrix} (1,1,4) & (1,2,4) \ldots (1,6,4) & (2,1,4) & (2,2,4) & \ldots (2,6,4) \\ (3,1,4) & (3,2,4) \ldots (3,6,4) & (4,1,4) & (4,2,4) & \ldots (4,6,4) \\ (5,1,4) & (5,2,4) \ldots (5,6,4) & (6,1,4) & (6,2,4) & \ldots (6,6,4) \end{matrix}\right\}$$

ਅਤੇ $$A \cap B = \{(6,5,4)\}$$

ਹੁਣ $$P(B) = \frac{6}{216} \text{ ਅਤੇ } P(A \cap B) = \frac{1}{216}$$

ਤਾਂ $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}$$

ਉਦਾਹਰਣ 6: ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਸੰਖਿਆ 4 ਦੇ ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਆਉਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E ਘਟਿਤ ‘ ਸੰਖਿਆ 4 ਦਾ ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਆਉਣਾ ’ ਅਤੇ F ਘਟਨਾ ‘ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਆਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਹੋਣਾ ’ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $E = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4), (6,4)\}$

ਅਤੇ $F = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(E) = \frac{11}{36}$] $P(F) = \frac{5}{36}$

ਅਤੇ $E \cap F = \{(2,4), (4,2)\}$

ਹੁਣ $P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ:

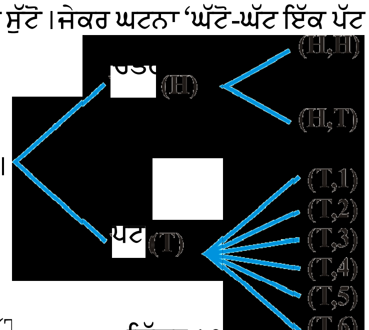
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ- ਸੰਭਾਵੀ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ, ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਉਸ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਦੋ ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਨਾ ਹੋਣ। ਸੰਭਾਵਨਾ $P(E \cap F)$ ਅਤੇ $P(F)$ ਦਾ ਪਰੀਕਲਨ ਉਸ ਅਨੁਸਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਇਸਨੂੰ ਸਮਝੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 7: ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲੇ ਜਾਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਵੇ ਪਰ ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟੋ। ਜੇਕਰ ਘਟਨਾ ‘ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪੱਟ ਆਉਣਾ’ ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਨਾ ‘ਪਾਸੇ ਤੇ 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆਂ ਦਾ ਆਉਣਾ’ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਚਿੱਤਰ 13.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਰੁਪ-ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

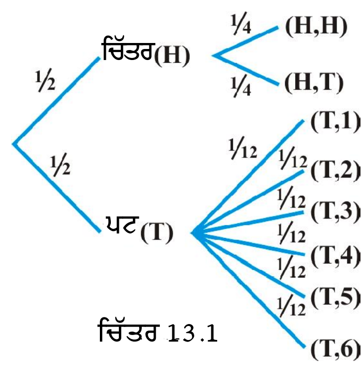



ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

S = {(H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T

ਚਿੱਤਰ 13.1

ਜਿੱਥੇ (H,H) ਦਰਸ਼ਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਇਆ ਹੈ, ਅਤੇ $(T, i)$ ਦਰਸ਼ਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਪਟ ਆਇਆ ਅਤੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਸੰਖਿਆਂ $i$ ਆਈ।



ਚਿੱਤਰ 13.1

çÂ Â ñ Â Æ 8 ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ (H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3) (T,4), (T,5), (T,6) ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}$ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 13-2 ਤੋਂ ਸਾਫ਼ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਵੋ F ਘਟਨਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪੱਟ ਆਉਣਾ' ਅਤੇ E ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $F = \{(H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$

$E = \{(T,5), T,6)\}$ ਅਤੇ, $E \cap F = \{(T,5), (T,6)\}$

ਹੁਣ
$$P(F) = P(\{(H,T)\}) + P(\{(T,1)\}) + P(\{(T,2)\}) + P(\{(T,3)\}) + P(\{(T,4)\}) + P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\})$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

ਅਤੇ
$$P(E \cap F) = P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

ਇਸ ਲਈ
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$$

## ਅਭਿਆਸ 13.1

1. ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = 0.2]$ ਹੈ, ਤਾਂ $P(E|F)$ ਅਤੇ $P(F|E)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. $P(A|B)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ $P(B) = 0.5$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = 0.32$ ਹੋਵੇ।
3. ਜੇਕਰ $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$ ਅਤੇ $P(B|A) = 0.4$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(A \cup B)$
4. $P(A \cup B)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ $2\,P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ ਅਤੇ $P(A|B) = \frac{2}{5}$

**5.** ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ ਅਤੇ $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(B|A)$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਵਿੱਚ $P(E|F)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**6.** ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ:

(i) E : ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਚਿੱਤ, F : ਪਹਿਲੀ ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਤੇ ਚਿੱਤ

(ii) E : ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ, F : ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਇੱਕ ਚਿੱਤ

(iii) E : ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਪਟ, F : ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਪਟ

**7.** ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ :

(i) E : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਉਣਾ F : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣਾ

(ii) E : ਕੋਈ ਪਟ ਨਾ ਆਉਣਾ F ਕੋਈ ਚਿੱਤ ਨਾ ਆਉਣਾ

**8.** ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

E : ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਆਉਣਾ

F : ਪਹਿਲੀ ਦੋ ਉਛਾਲਾਂ ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 6 ਅਤੇ 5 ਆਉਣਾ

**9.** ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਮਾਤਾ, ਪਿਤਾ ਅਤੇ ਪੁੱਤਰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਖੜੇ ਹਨ:

E : ਪੁੱਤਰ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੇ ਖੜਾ ਹੈ, F : ਪਿਤਾ ਵਿਚਕਾਰ ਖੜਾ ਹੈ।

**10.** ਇੱਕ ਕਾਲੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ :

(a) ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 9 ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਕਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 5 ਆਇਆ ਹੈ।

(b) ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 8 ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

**11.** ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾਵਾਂ $E = \{1,3,5\}$, $F = \{2,3\}$, ਅਤੇ $G = \{2,3,4,5\}$ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $P(E|F)$ ਅਤੇ $P(F|E)$ (ii) $P(E|G)$ ਅਤੇ $P(G|E)$

(iii) $P(E \cup F|G)$ ਅਤੇ $P(E \cap F|G)$

**12.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਜਨਮ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਬੱਚੇ ਦਾ ਮੁੰਡਾ ਜਾਂ ਕੁੜੀ ਹੋਣਾ ਸਮ- ਸੰਭਾਵੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪਰਿਵਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬੱਚੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆ ਦੇ ਕੁੜੀ ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ (*i*) ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਬੱਚਾ ਕੁੜੀ ਹੈ (*ii*) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਬੱਚਾ ਕੁੜੀ ਹੈ।

**13.** ਇੱਕ ਅਧਿਆਪਕ ਦੇ ਕੋਲ 300 ਸੱਚ/ਝੂਠ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਸਾਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨ, 200 ਸੱਚ/ਝੂਠ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ, 500 ਬਹੁ- ਵਿਕਲਪ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਅਸਾਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਤੇ 400 ਬਹੁ- ਵਿਕਲਪ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇੱਕ ਅਸਾਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੀ ਬਹੁ-ਵਿਕਲਪੀ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

**14.** ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੱਖ- ਵੱਖ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ç Å Ü ਠ 4 ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**15.** ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਈ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ ਤਾਂ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਸੁੱਟੋ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਆਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲੋ। ਘਟਨਾ 'ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਪਾਸ਼ੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਆਉਣਾ ' ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਨਾ 'ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪੱਟ ਆਉਣਾ' ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

**16.** ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$ ਤਾਂ $P(A|B)$ ਹੈ :

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ (D) 1

**17.** ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $P(A|B) = P(B|A) \neq 0$ ਤਾਂ

(A) $A \subset B$ (B) $A = B$ (C) $A \cap B = \phi$

(D) $P(A) = P(B)$

## 13.3 ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ (Multiplication Theorem on Probability)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E ਅਤੇ F ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸਮੂਹ $E \cap F$ ਦੋਵੇਂ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ $E \cap F$ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਦੇ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾ $E \cap F$ ਨੂੰ EF ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਕਸਰ ਅਸੀਂ ਸੰਯੁਕਤ ਘਟਨਾ EF ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੂਜੇ ਪੱਤੇ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰਾਣੀ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਇਛੁਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਘਟਨਾ EF ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ $P(E|F)$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਨ।

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) \neq 0$$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P(E \cap F) = P(F) . P(E|F) \qquad \dots (1)$$

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}, P(E) \neq 0$$

ਜਾਂ $$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$ (ਕਿਉਂਕਿ $E \cap F = F \cup E$)

ਇਸ ਲਈ $P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F|E)$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ,

$P(E \cap F) = P(E)\ P(F|E) = P(F).\ P(E|F)$ ਜਦੋਂ ਕਿ $P(E) \neq 0$ ਅਤੇ $P(F) \neq 0$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਨ ਨਿਯਮ ' ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਵੇਖੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 8: ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 10 ਕਾਲੀਆਂ ਅਤੇ 5 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਗੇਂਦਾਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਗੇਂਦ ਦੂਜੀ ਦੇ ਕੱਢਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲੀ ਮੁੜ ਨਹੀਂ ਰੱਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਗੇਂਦ ਦਾ ਕੱਢਣਾ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਕੱਢਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨਿਆ ਕਿ E 'ਪਹਿਲੀ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਦੇ ਨਿਕਲਣ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਅਤੇ F 'ਦੂਜੀ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਨਿਕਲਣ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ $P(E \cap F)$ ਜਾਂ $P(EF)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $P(E) = P =$ (ਪਹਿਲੀ ਕੱਢੀ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ) $\frac{10}{15}$

ਨਾਲ ਹੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਵਿੱਚ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਹੈ ਭਾਵ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ, ਹੁਣ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 9 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਅਤੇ 5 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਦੂਜੀ ਗੇਂਦ ਕਾਲੀ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਗੇਂਦ ਕਾਲੀ ਹੈ ਕੁਝ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਕੇਵਲ F ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਜਦੋਂ E ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਪਤਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $$P(F|E) = \frac{9}{14}$$

ਹੁਣ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F|E) = P(E)\ .\ P(F|E),\ P(G|EF)$$

$$= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ: ਜੇਕਰ E, F ਅਤੇ G ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ,

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\ P(F|E)\ P(G|E \cap F) = P(E)\ P(F|E)\ P(G|EF)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਚਾਰ ਜਾਂ ਵੱਧ ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਉਦਾਹਰਣ ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਦਾ ਸਪੱਸ਼ਟੀਕਰਨ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9: 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਚੰਗੀ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਪੱਤੇ ਬਗੈਰ ਬਦਲੇ ਕੱਢੇ ਗਏ। ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪੱਤਿਆਂ ਦਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਦਾ ਇੱਕਾ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ K ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੈ' ਨੂੰ ਅਤੇ A ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਹੈ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ P (KKA) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ:

ਹੁਣ $$P(K) = \frac{4}{52}$$

ਨਾਲ ਹੀ P(K|K) ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਣ ਤੇ ਕਿ 'ਪਹਿਲਾ ਕੱਢਿਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੈ' ਪਰ ਦੂਜੇ ਪੱਤੇ ਦਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚ (52 – 1) = 51 ਪੱਤੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਤਿੰਨ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$P(K|K) = \frac{3}{51}$$

ਇਸ ਲਈ P(A|KK) ਤੀਜੇ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਪੱਤੇ ਦੇ ਇੱਕੇ ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਕੱਢੇ ਜਾ ਚੁੱਕੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚ 50 ਪੱਤੇ ਹੀ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$P(A|KK) = P(A|KK) = \frac{4}{50}$$

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ:

$$P(KKA) = P(K)\ P(K|K)\ P(A|KK)$$
$$= \frac{4}{52}\times\frac{3}{51}\times\frac{4}{50}=\frac{2}{5525}$$

## 13.4 ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ (Independent Events)

52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਮੰਨਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ॥ ਘਟਨਾਵਾਂ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਚਿੜੀ ਦਾ ਹੈ' ਅਤੇ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ

ਅਤੇ

$$P(E) = \frac{13}{52}=\frac{1}{4} \text{ rFkk } P(F)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

ਨਾਲ ਹੀ ^E ਅਤੇ F 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਚਿੜੀ ਦਾ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ $$P(E\cap F) = \frac{1}{52}$$

ਇਸ ਲਈ $$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}}=\frac{1}{4}$$

ਕਿਉਂਕਿ $P(E) = \frac{1}{4} = P(E|F)$, ਹੈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਨੇ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪਾਇਆ।

ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਕਿ $$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{13} = P(F)$$

ਦੁਬਾਰਾ $P(F) = \frac{1}{13} = P(F|E)$ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਨੇ ਘਟਨਾ F ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪਾਇਆ।

ਇਸ ਲਈ E ਅਤੇ F ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਦੂਜੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2: ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ

$$P(F|E) = P(F) \text{ ਜਦੋਂ ਕਿ } P(E) \neq 0$$

$$P(E|F) = P(E) \text{ ਜਦੋਂ ਕਿ } P(F) \neq 0$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $P(E) \neq 0$ ਅਤੇ $P(F) \neq 0$ ਹੋਣਾ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਤੋਂ

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F|E) \qquad \ldots (1)$$

ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ (1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F) \qquad \ldots (2)$$

ਇਸ ਲਈ (2) ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3: ਮੰਨ ਲਓ E ਅਤੇ F ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ

$$P(E \cap F) = P(E)\ \ P(F)$$

## ਟਿੱਪਣੀ

1. ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਆਸ਼ਰਿਤ (dependent) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ] ਜੇਕਰ ਉਹ ਅਜਾਦ ਨਾ ਹੋਣ ਭਾਵ ਜੇਕਰ $P(E \cap F) \neq P(E)\ .\ P(F)$ ਹੈ।
2. ਕਦੇ-ਕਦੇ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਭਰਮ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। 'ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 'ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ 'ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 'ਘਟਨਾਵਾਂ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਨਤੀਜਾ ਸਦਾ ਲਈ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਨਤੀਜੇ ਸਦਾ ਲਈ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ 'ਅਜਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਅਤੇ 'ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ ਦੋ ਇਹੋ ਅਜਿਹੀਆਂ ਅਜਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਘਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹਨ।ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੀਆਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਘਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਅਜਾਦ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

3. ਦੋ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਜਾਦ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਜੋੜਾ E ਅਤੇ F ਲਈ, ਜਿੱਥੇ E ਪਹਿਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਅਤੇ F ਦੂਜੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਦੇ ਨਾਲ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਪੂਰੇ ਕੀਤੇ ਜਾਣ, ਸੰਭਾਵਨਾ P(E) ਅਤੇ P(F) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $P(E \cap F) = P(E), P(F)$

4. ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)\ P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)\ P(C)$$

ਅਤੇ $$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ \ P(C)$$

ਜੇਕਰ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਵੀ ਸ਼ਰਤ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਨਹੀਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10: ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ', ਨੂੰ E ਤੋਂ ਅਤੇ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੈ', ਨੂੰ F ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕੀ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ?

ਹੱਲ: ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ਹੁਣ $E = \{3, 6\}, F = \{2, 4, 6\}$ ਅਤੇ $E \cap F = \{6\}$

ਤਾਂ $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ $P(E \cap F) = P(E) . P(F)$

ਇਸ ਲਈ E ਅਤੇ F ਅਜਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 11: ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ (unbiased) ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ।ਮੰਨ ਲਵੋ A ਘਟਨਾ 'ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ 'ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਅਜ਼ਾਦ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ 36 ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮ- ਸੰਭਾਵੀ ਮੰਨਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ ਅਤੇ } P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

ਨਾਲ ਹੀ $P(A \cap B) = P$ (ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤਾ ਹੋਣਾ)

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

ਹੁਣ $$P(A)\,.\,P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$

ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ 'ਤਿੰਨ ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ F ਘਟਨਾ 'ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ G ਘਟਨਾ 'ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਜੋੜੇ (E,F), (E,G) ਅਤੇ (F,G) ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ? ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਨਿਰਭਰ ਹਨ ?

ਹੱਲ: ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ, $E = \{HHH, TTT\}$, $F = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

ਅਤੇ $G = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

ਨਾਲ ਹੀ $E \cap F = \{HHH\}$, $E \cap G = \{TTT\}$, $F \cap G = \{HHT, HTH, THH\}$

ਇਸ ਲਈ $$P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\ P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ P(G) = \frac{7}{8}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{8},\ P(E \cap G) = \frac{1}{8},\ P(F \cap G) = \frac{3}{8}$$

ਨਾਲ ਹੀ $P(E)\,.\,P(F) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, $P(E)\cdot P(G) = \frac{1}{4}\times\frac{7}{8} = \frac{7}{32}$ ਅਤੇ $P(F)\cdot P(G) = \frac{1}{2}\times\frac{7}{8} = \frac{7}{16}$

ਇਸ ਲਈ $$P(E \cap F) = P(E)\,.\,P(F)$$

$$P(E \cap G) \neq P(E)\,.\,P(G)$$

ਅਤੇ $$P(F \cap G) \neq P(F)\,.\,P(G)$$

ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾਵਾਂ (E ਅਤੇ F) ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ (F ਅਤੇ G) ਅਤੇ (E ਅਤੇ G) ਆਸ਼ਰਿਤ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 13: ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਦੋ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ E ਅਤੇ F′ ਅਜ਼ਾਦ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਹੱਲ: ਕਿਉਂਕਿ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $P(E \cap F) = P(E)\,.\,P(F)$ ... (1)

ਚਿੱਤਰ 13.3 ਦੇ ਵੈੱਨ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $E \cap F$ ਅਤੇ $E \cap F'$ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F')$$

ਕਿਉਂਕਿ $E \cap F$ ਅਤੇ $E \cap F'$ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ,

ਇਸ ਲਈ $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F')$

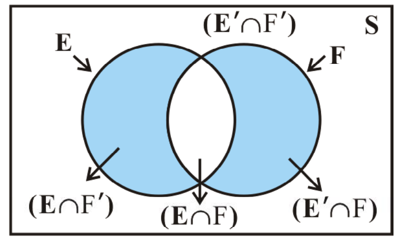
ਜਾਂ $P(E \cap F') = P(E) - P(E \cap F)$

$= P(E) - P(E) . P(F)$ (1) ਤੋਂ

$= P(E) [1 - P(F]$

$= P(E) . P(F')$

ਇਸ ਲਈ E ਅਤੇ F′ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ,




ਚਿੱਤਰ 13. 3

*ਟਿੱਪਣੀ* ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ

(a) E′ ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹੈ

(b) E′ ਅਤੇ F′ ਅਜ਼ਾਦ ਹੈ

ਉਦਾਹਰਣ 14: ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ, A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਦੇ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= 1- P(A') \; P(B')$

ਹੱਲ: P(A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਦਾ ਹੋਣਾ) $= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A) \; P(B)$

$= P(A) + P(B) \; [1-P(A)]$

$= P(A) + P(B) . P(A')$

$= 1- P(A') + P(B) \; P(A')$

$= 1- P(A') \; [1- P(B)]$

$= 1- P(A') \; P(B')$

## ਅਭਿਆਸ 13.2

1. ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{3}{5}$ ] $P(B) = \frac{1}{5}$ ਅਤੇ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $P(A \cap B)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਬਿਨਾਂ ਬਦਲੇ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕੱਢੇ ਗਏ। ਦੋਵੇਂ ਪੱਤਿਆਂ ਦੇ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕੋਂ ਬਕਸੇ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਬਗੈਰ ਬਦਲੇ ਤਿੰਨ ਸੰਤਰੇ ਕੱਢ ਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਤਿੰਨੇ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਸੰਤਰੇ ਚੰਗੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਕਸੇ ਨੂੰ ਵੇਚਣ ਲਈ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਬਕਸੇ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ 15 ਸੰਤਰੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 12 ਚੰਗੇ ਅਤੇ 3 ਖਰਾਬ ਸੰਤਰੇ ਹਨ, ਕੀ ਵਿਕਰੀ ਲਈ ਸਵੀਕਾਰ ਹੋਣ ਲਈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਉ A ਘਟਨਾ ' ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣਾ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਆਉਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

5. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੇ 1, 2, 3 ਲਾਲ ਰੰਗ ਨਾਲ ਅਤੇ 4, 5, 6 ਹਰੇ ਰੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਉ A ਘਟਨਾ ' ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੈ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ ' ਸੰਖਿਆ ਲਾਲ ਰੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖੀ ਹੋਈ ਹੈ', ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਕੀ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ?

6. ਮੰਨ ਲਉ E ਅਤੇ F ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$ ਤਾਂ ਕੀ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ?

7. A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ ਅਤੇ P(B) ਹੈ $p.p$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ (i) ਘਟਨਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ (ii) ਘਟਨਾਵਾਂ ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ।

8. ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ P(A) = 0.3 ਅਤੇ P(B) = 0.4. ਹੈ, ਤਾਂ

   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$

   (iii) $P(A|B)$ (iv) $P(B \mid A)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ ਤਾਂ P(A&ਨਹੀਂ ਅਤੇ B&ਨਹੀਂ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(A) = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $P(B) = \frac{7}{12}$ ਅਤੇ P(A&ਨਹੀਂ ਅਤੇ B&ਨਹੀਂ) $= \frac{1}{4}$ ਹੈ। ਕੀ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੈ ?

11. A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ P(A) = 0.3, ਅਤੇ P (B) = 0.6 ਤਾਂ

    (i) P(A ਅਤੇ B) (ii) P(A ਅਤੇ B&ਨਹੀਂ)

    (iii) P(A ਜਾਂ B) (iv) P(A ਅਤੇ B ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ ) ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਦੋ ਗੇਂਦਾ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਬਿਨਾਂ ਬਦਲੇ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 10 ਕਾਲੀਆਂ ਅਤੇ 8 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ (i) ਦੋਵੇਂ ਗੇਂਦਾ ਲਾਲ ਹਨ।, (ii) ਪਹਿਲੀ ਕਾਲੀ ਤੇ ਦੂਜੀ ਲਾਲ ਹੈ (iii) ਇੱਕ ਕਾਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਲਾਲ ਹੈ।

**14.** ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ A ਅਤੇ B ਰਾਹੀਂ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\frac{1}{3}$ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ, ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ:

(i) ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਹੋਵੇਗੀ।

(ii) ਉਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇਹ ਇੱਕ ਹੱਲ ਕਰੇਗਾ।

**15.** ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹੈ ?

(i) E : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਹੁਕਮ ਦਾ ਹੈ।
F : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਹੈ।

(ii) E : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ।
F : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੈ।

(iii) E : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਜਾਂ ਬੇਗਮ ਹੈ।
F : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬੇਗਮ ਜਾਂ ਗੁਲਾਮ ਹੈ।

**16.** ਇੱਕ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ 60% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਿੰਦੀ ਦਾ, 40% ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਤੇ 20% ਦੋਵੇਂ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(a) ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਨਾ ਤਾਂ ਹਿੰਦੀ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ।

(b) ਜੇਕਰ ਉਹ ਹਿੰਦੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਵੀ ਪੜ੍ਹਨ ਵਾਲਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(c) ਜੇਕਰ ਉਹ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਹਿੰਦੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਵੀ ਪੜ੍ਹਨ ਵਾਲਾ, ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**17.** ਜੇਕਰ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੀ ਹੈ ?

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

**18.** ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅਜ਼ਾਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ

(A) A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ (B) $P(A'B') = [1ï P(A)][1ï P(B)]$

(C) $P(A) = P(B)$ (D) $P(A) + P(B) = 1$

## 13.5 ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ (Bayes' Theorem)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਥੈਲੇ I ਅਤੇ II ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਥੈਲੇ I ਵਿੱਚ 2 ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ 3 ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਹਨ। ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚ

4 ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ 5 ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਹਨ। ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ çÂ ö æ ë ¶ù Ú ë ä ç ÆÃ ¿ Âò é Â $\frac{1}{2}$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਥੈਲੇ (ਮੰਨ ਲਉ ਥੈਲਾ I) ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਖਾਸ ਰੰਗ (ਮੰਨ ਲਉ ਸਫ਼ੇਦ) ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ ਕਿ ਗੇਂਦ ਕਿਹੜੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਪਰ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਗੇਂਦ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਥੈਲੇ (ਮੰਨ ਲਉ ਥੈਲੇ&II) ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਕੱਢੀ ਗਈ ਗੇਂਦ ਦਾ ਰੰਗ ਪਤਾ ਹੈ ? ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਥੈਲੇ II ਦੇ ਚੁਨਣ ਦੀ ਉਲਟ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਘਟਨਾ ਦਾ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਗਣਿਤਗ ਜਾਨ ਬੇਯਜ਼ ਨੇ ਉਲਟ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹਲ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਸੂਤਰ ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮੌਤ ਦੇ ਬਾਅਦ 1763 ਈ. ਵਿੱਚ ਪਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਈ ਸੀ। ਬੇਯਜ਼ ਦੇ ਕਥਨ ਅਤੇ ਸਬੂਤ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਤੇ ਕੁਝ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

### 13.5.1 ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ *(Partition of a sample space)*

ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2 \ldots E_n$ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ:

(a) $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3, \ldots n$

(b) $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ ਅਤੇ

(c) $P(E_i) > 0$, ਹਰੇਕ $i = 1, 2, \ldots, n$ ਲਈ ਹੋਵੇ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, \ldots E_n$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਵਿਭਾਜਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਗੈਰ ਸੰਯੁਕਤ ਹਨ, ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਘਟਨਾ E ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ E′ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ $E \cap E' = \phi$ ਅਤੇ $E \cup E' = S$.

ਵੈੱਨ-ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ 13.3, ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਅਸਾਨੀ ਤੋਂ ਪ੍ਰੇਖਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S, ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ $\{E \cap F, E \cap F'\}$ ਸਮੂਹ E ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ।

ਸਮੂਹ $\{E' \cap F, E \cap F, E \cap F'\}$ ਸਮੂਹ $E \cup F$ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੂਹ $\{E \cap F', E \cap F, E' \cap F, E' \cap F'\}$ ਸੰਪੂਰਨ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

### 13.5.2 ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ *(Theorem of Total Probability)*

ਮੰਨ ਲਉ $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S, ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ A ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ,

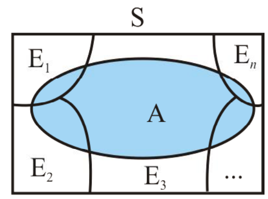
$$P(A) = P(E_1)\ P(A|E_1) + P(E_2)\ P(A|E_2) + \ldots + P(E_n)\ P(A|E_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A \mid E_j)$$

ਉਤਪੱਤੀ: ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ13-4) ਇਸ ਲਈ,

$$S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n \quad ... (1)$$

ਅਤੇ $$E_i \cap E_j = \phi \ \forall \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, ...., n$$



ਚਿੱਤਰ 13.4

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ A, ਲਈ

$$A = A \cap S$$
$$= A \cap (E_1 \cup E_2 ... E_n)$$
$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)$$

ਨਾਲ ਹੀ $A \cap E_i$, ਅਤੇ $A \cap E_j$, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮੂਹਾਂ $E_i$ ਅਤੇ $E_j$ ਦੇ ਉਪਸਮੂਹ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $i \neq j$ ਹੈ, ਲਈ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $i \neq j, \ i, j = 1, 2 ..., n$ ਲਈ $A \cap E_i$ ਅਤੇ $A \cap E_j$ ਵੀ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$P(A) = P[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ..... \cup (A \cap E_n)]$$
$$= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + ... + P(A \cap E_n)$$

ਹੁਣ $P(A \cap E_i) = P(E_i) P(A|E_i)$ ਕਿਉਂਕਿ $P(E_i) \neq 0 \forall i = 1,2,..., n$

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਇਸ ਲਈ $$P(A) = P(E_1) P(A|E_1) + P(E_2) P(A|E_2) + ... + P(E_n) P(A|E_n)$$

ਜਾਂ $$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A \mid E_j)$$

ਉਦਾਹਰਣ 15: ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਨੇ ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਦਾ ਠੇਕਾ ਲਿਆ ਹੈ। ਹੜਤਾਲ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.65 ਹੈ। ਹੜਤਾਲ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਅਤੇ ਹੜਤਾਲ ਹੋਣ ਦੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਦੇ ਸਮਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 0-80 ਅਤੇ 0-32 ਹਨ। ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਸਮੇਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 'ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਦਾ ਸਮੇਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣਾ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ A ਅਤੇ 'ਹੜਤਾਲ ਹੋਣ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ B ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ P(A) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$P(B) = 0.65, \ P(\text{ਹੜਤਾਲ ਨਹੀਂ}) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$$
$$P(A \mid B) = 0.32, \ P(A \mid B') = 0.80$$

ਕਿਉਂਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ B ਅਤੇ B′ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਇਸਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$= P(B) \ . \ P(A \mid B) + P(B') \ P(A \mid B')$$
$$= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.8$$

$$= 0.208 + 0.28 = 0.488$$

ਇਸ ਲਈ ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਸਮੇਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.488 ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਕਥਨ ਲਿਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਬੇਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ **(Bayes' Theorem)** ਜੇਕਰ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਵਿਭਾਵਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ ਭਾਵ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ਜੋੜਿਆ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ ਅਤੇ $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ ਹੈ ਅਤੇ A ਕੋਈ ਘਟਨਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਤਾਂ

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

ਉਤਪੱਤੀ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{P(A)} \qquad \text{(ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਤੋਂ)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)} \qquad \text{(ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਨਿਯਮ ਤੋਂ)}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸ਼ਬਦਾਵਲੀ ਵਰਤੀ ਜਾਦੀ ਹੈ: ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, \ldots E_n$ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾ (hypotheses) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

$P(E_i)$ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾ $E_i$ ਦੀ ਪੂਰਵਕਾਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (a priori) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ

$P(E_i A)$ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾ $E_i$ ਦੀ ਉੱਤਰਕਾਲ ਦੀ (a posteriori) ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਕਾਰਣਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸੂਤਰ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $E_i$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾਵਾਂ $E_i$ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਘਟਦੀ ਹੈ (ਭਾਵ $E_i$ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਘਟਨਾ ਘਟਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਘਟਿਤ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ) ਇਸ ਲਈ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤਾ ਸੂਤਰ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਖਾਸ $E_i$ (ਭਾਵ ਇੱਕ ਕਾਰਣ) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਘਟਨਾ A ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਯੋਗ ਹੈ। ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਨੂੰ ਹੇਠ-ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16: ਦੋ ਥੈਲੇ I ਅਤੇ II ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਥੈਲੇ I ਵਿੱਚ 3 ਲਾਲ ਅਤੇ 4 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਅਤੇ 6 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਗਈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਗੇਂਦ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ ?

ਤਾਂ $\quad P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

ਨਾਲ ਹੀ $\quad P(A|E_1) = P($ਥੈਲੇ I ਵਿੱਚੋਂ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣਾ$) = \frac{3}{7}$

ਅਤੇ $\quad P(A|E_2) = P($ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚੋਂ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣਾ$) = \frac{5}{11}$

ਹੁਣ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚੋਂ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ = $P(E_2|A)$,

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ :$P(E_2|A) = \frac{P(E_2)P(A|E_2)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \frac{35}{68}$

ਉਦਾਹਰਣ 17: ਤਿੰਨ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਬਕਸੇ I, II ਅਤੇ III ਦਿੱਤੇ ਹਨ ਜਿੱਥੇ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਿੱਕੇ ਹਨ। ਬਕਸੇ I ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕੇ ਸੋਨੇ ਦੇ ਹਨ, ਬਕਸੇ II ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕੇ ਚਾਂਦੀ ਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਕਸੇ III ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੋਨੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਚਾਂਦੀ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਇਨਸਾਨ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਕਸਾ ਚੁਣਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕਾ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਵੀ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $E_1$, $E_2$ ਅਤੇ $E_3$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਬਕਸੇ I, II ਅਤੇ III ਦੇ ਚੋਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $\quad P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$

ਨਾਲ ਹੀ ਮੰਨ ਲਉ A ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਸਿੱਕਾ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੈ।

ਤਾਂ $\quad P(A|E_1) = P($ਬਕਸੇ I ਤੋਂ ਸੋਨੇ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ$) = \frac{2}{2} = 1$

$\quad P(A|E_2) = P($ਬਕਸੇ II ਤੋਂ ਸੋਨੇ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ$) = 0$

$\quad P(A|E_3) = P($ਬਕਸੇ III ਤੋਂ ਸੋਨੇ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ$) = \frac{1}{2}$

ਹੁਣ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਵੀ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

= ਕੱਢਿਆ ਸਿੱਕਾ ਸੋਨੇ ਦੇ ਬਕਸੇ I ਵਿੱਚੋਂ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

= $P(E_1|A)$

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)\,P(A|E_1)}{P(E_1)\,PA|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + P(E_3)\,P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 18: ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਇੱਕ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦੀ ਵਿਸ਼ਵਾਸ਼ ਯੋਗਤਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ।

ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪਾਜ਼ਿਟਿਵ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ 90% ਪਤਾ ਲੱਗਣ ਵਿੱਚ ਅਤੇ 10% ਪਤਾ ਨਾ ਲੱਗਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹੈ। ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਤੋਂ ਅਜ਼ਾਦ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ, ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ 99% ਸਹੀ ਪਤਾ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਨੈਗੀਟਿਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ 1% ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਜਨ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ 0.1% ਵਿਅਕਤੀ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਦਾ ਸ਼ਿਕਾਰ ਹਨ, ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਰੋਗ ਵਿਗਿਆਨੀ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਦਾ ਸ਼ਿਕਾਰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਵਿਅਕਤੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਦਾ ਸ਼ਿਕਾਰ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ E ਚੁਣੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੋਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਅਤੇ A ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿੱਚ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੋਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਅਸੀਂ $P(E|A)$ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ $E'$ ਚੁਣੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $\{E, E'\}$ ਜਨ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ :

$$P(E) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

$$P(E') = 1 \text{ ï } P(E) = 0.999$$

$P(A|E) = P$ (ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਆਉਣਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ.ਆਈ. ਵੀ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੈ) = 90% = $\frac{9}{10} = 0.9$

ਅਤੇ $P(A|E') = P$ (ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਆਉਣਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਨਹੀਂ ਹੈ) $= 1\% = 0.01$

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(E|A) = \frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E)+P(E')P(A|E')}$$

$$= \frac{0.001\times0.9}{0.001\times0.9+0.999\times0.01} = \frac{90}{1089} = 0.083 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣੇ ਹੋਏ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੈ, 0.083 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19: ਇੱਕ ਬੋਲਟ ਬਣਉਣ ਦੇ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਮਸ਼ੀਨਾਂ A, B ਅਤੇ C ਕੁਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 25%, 35% ਅਤੇ 40% ਬੋਲਟ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੇ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5] 4] ਅਤੇ 2 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਭਾਗ ਖਰਾਬ ਹੈ। ਬੋਲਟਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬੋਲਟ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਖਰਾਬ ਪਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ $B_1$, $B_2$, $B_3$ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

$B_1$ : ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ A ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

$B_2$ : ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

$B_3$ : ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ C ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਘਟਨਾਵਾਂ $B_1$, $B_2$, $B_3$ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਪਰਿਪੂਰਣ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ: E ਬੋਲਟ ਖਰਾਬ ਹੈ।

ਘਟਨਾ E, ਘਟਨਾਵਾਂ $B_1$ ਜਾਂ $B_2$ ਜਾਂ $B_3$ ਨਾਲ ਘਟਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ:

$$P(B_1) = 25\% = 0.25,\ P(B_2) = 0.35 \text{ ਅਤੇ } P(B_3) = 0.40$$

ਦੁਬਾਰਾ $P(E|B_1)$ =ਬੋਲਟ ਖਰਾਬ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਦੋਂ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਉਹ ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

$$= 5\% = 0.05$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $P(E|B_2) = 0.04,\ P(E|B_3) = 0.02$

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(B_2|E) = \frac{P(B_2)P(E|B_2)}{P(B_1)P(E|B_1)+P(B_2)P(E|B_2)+P(B_3)P(E+|B_3)}$$

$$= \frac{0.35\times0.04}{0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02} = \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

ਉਦਾਹਰਣ 20: ਇੱਕ ਡਾਕਟਰ ਨੇ ਇੱਕ ਰੋਗੀ ਨੂੰ ਵੇਖਣ ਆਉਣਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਤਜ਼ਰਬਿਆਂ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦੇ ਟ੍ਰੇਨ, ਬੱਸ ਜਾਂ ਸਕੂਟਰ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਤੋਂ ਆਉਣ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ ਅਤੇ $\frac{2}{5}$ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਟ੍ਰੇਨ, ਬੱਸ ਜਾਂ ਸਕੂਟਰ ਤੇ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਉਣ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$, ਅਤੇ $\frac{1}{12}$ ਹਨ, ਪਰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਤੇ ਆਉਣ ਤੇ ਉਸਨੂੰ ਦੇਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਇਆ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਟ੍ਰੇਨ ਤੇ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 'ਡਾਕਟਰ ਦੇ ਰੋਗੀ ਕੋਲ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਉਣ" ਦੀ ਘਟਨਾ E ਹੈ। ਜੇਕਰ ਡਾਕਟਰ ਦੇ ਟ੍ਰੇਨ, ਬੱਸ, ਸਕੂਟਰ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $T_1$, $T_2$, $T_3$, ਅਤੇ $T_4$ ਹੋਣ ਤਾਂ

$$P(T_1) = \frac{3}{10}, P(T_2) = \frac{1}{5}, P(T_3) = \frac{1}{10} \text{ ਅਤੇ } P(T_4) = \frac{2}{5} \qquad \text{(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)}$$

$$P(E|T_1) = \text{ਡਾਕਟਰ ਦੇ ਟ੍ਰੇਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਤੇ ਦੇਰ ਨਾਲ ਪਹੁੰਚਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{1}{4}$$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ $P(E|T_2) = \frac{1}{3}$, $P(E|T_3) = \frac{1}{12}$, $P(E|T_4) = 0$, ਕਿਉਂਕਿ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਤੇ ਉਸਨੂੰ ਦੇਰ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ।

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$P(T_1|E)$ = ਡਾਕਟਰ ਰਾਹੀਂ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਉਣ ਤੇ ਟ੍ਰੇਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \frac{P(T_1)P(E|T_1)}{P(T_1)P(E|T_1) + P(T_2)P(E|T_2) + P(T_3)P(E|T_3) + P(T_4)P(E|T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{5} \times 0} = \frac{3}{40} \times \frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ 4 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਵਾਰੀ ਸੱਚ ਬੋਲਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E] 'ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟ ਕੇ ਇਹ ਦੱਸਣ ਦੀ ਕਿ ਉਸ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $S_1$] ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਅਤੇ $S_2$ ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਨਹੀਂ ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ।

$$P(S_1) = \text{ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{1}{6}$$

$$P(S_2) = \text{ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{5}{6}$$

$P(E|S_1)$ = ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਦੱਸਣ ਤੇ ਕਿ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਹੈ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \text{ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸੱਚ ਬੋਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{3}{4}$$

$P(E|S_2)$ = ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਦੱਸਣ ਤੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਨਹੀਂ ਹੈ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \text{ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਸੱਚ ਨਾਂ ਬੋਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$P(S_1|E)$ = ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਦੱਸਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਿ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ, ਜਦੋਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਹੈ

$$= \frac{P(S_1)\,P(E|S_1)}{P(S_1)\,P(E|S_1) + P(S_2)\,P(E|S_2)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}\times\frac{24}{8} = \frac{3}{8}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{8}$ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 13.3

1. ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਅਤੇ 5 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾ ਹਨ। ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਰੰਗ ਨੋਟ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੁਬਾਰਾ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਰੰਗ ਦੀਆਂ 2 ਹੋਰ ਗੇਂਦਾਂ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਲਸ਼ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੀ ਗੇਂਦ ਦੀ ਲਾਲ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?
2. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 4 ਲਾਲ ਅਤੇ 4 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾ ਹਨ ਅਤੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 2 ਲਾਲ ਅਤੇ 6 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਥੈਲਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਲਾਲ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਗੇਂਦ ਪਹਿਲੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਹੈ ?
3. ਇਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਕਾਲਜ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 60% ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 40% ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਰਹਿਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 30% ਅਤੇ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਨਾ ਰਹਿਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 20% ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ A&ਗਰੇਡ ਲਿਆ। ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਕਾਲਜ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਇਹ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਕਿ ਉਸਨੂੰ A-ਗਰੇਡ ਮਿਲਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ

ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਰਹਿਣ ਵਾਲਾ ਹੈ ?

**4.** ਇੱਕ ਬਹੁ&ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਉਹ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਸਦੇ ਉੱਤਰ ਜਾਨਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{4}$ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{4}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣ ਤੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{4}$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ?

**5.** ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਰੋਗ ਦੇ ਸਹੀ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਲਈ ਖ਼ੂਨ ਦੀ ਜਾਂਚ 99% ਅਸਰਦਾਰ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਰੋਗੀ ਉਸ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹੈ। ਪਰ 0.5% ਵਾਰੀ ਕਿਸੇ ਠੀਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਖ਼ੂਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਗਲਤ ਰਿਪੋਰਟ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅਬਾਦੀ ਵਿੱਚ 0.1% ਲੋਗ ਉਸ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹਨ ਤਾਂ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਅਕਤੀ ਉਸ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਖ਼ੂਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੂੰ ਇਹ ਰੋਗ ਹੈ ?

**6.** ਤਿੰਨ ਸਿੱਕੇ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਇੱਕੋ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਚਿੱਤ ਹੈ। ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਪੱਖਪਾਤੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ 75% ਵਾਰੀ ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਸਿੱਕਾ ਨਿਰਪੱਖ ਹੈ। ਤਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਚਿੱਤ ਵਾਲੇ ਸਿੱਕੇ ਹਨ ?

**7.** ਇੱਕ ਬੀਮਾ ਕੰਪਨੀ 2000 ਸਕੂਟਰ ਚਾਲਕਾਂ, 4000 ਕਾਰ ਚਾਲਕਾਂ ਅਤੇ 6000 ਟਰੱਕ ਦਾ ਬੀਮਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 0.01] 0.03 ਅਤੇ 0.15 ਹੈ। ਬੀਮਾ ਕਰਵਾਉਣ ਵਾਲੇ ਚਾਲਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੁਰਘਟਨਾ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸਕੂਟਰ ਚਾਲਕ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

**8.** ਇੱਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਹਨ। ਪਹਿਲੇ ਵਿਵਰਨ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੁੱਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ 60% ਮਸ਼ੀਨ A ਅਤੇ 40% ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਪੈਦਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਮਸ਼ੀਨ A ਦਾ 2% ਅਤੇ ਮਸ਼ੀਨ B ਦਾ 1% ਪੈਦਾਵਾਰ ਖਰਾਬ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕੁੱਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਢੇਰ ਬਣਾ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਢੇਰ ਤੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਗਈ ਵਸਤੂ ਖਰਾਬ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਇਸ ਵਸਤੂ ਦੇ ਮਸ਼ੀਨ A ਰਾਹੀਂ ਬਣੇ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

**9.** ਦੋ ਟੋਲੀਆਂ ਇੱਕ ਨਿਗਮ ਦੇ ਨਿਦੇਸ਼ਕ ਮੰਡਲ ਵਿੱਚ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਟੋਲੀ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 0.6 ਅਤੇ 0.4 ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ ਪਹਿਲੀ ਟੋਲੀ ਜਿੱਤਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.7 ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਦੂਜੀ ਟੋਲੀ ਜਿੱਤਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.3 ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਨਵਾਂ ਉਤਪਾਦ ਦੂਜੇ ਦਲ ਰਾਹੀਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

**10.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕੋਈ ਕੁੜੀ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ 5 ਜਾਂ 6 ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ

ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੋਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ 1] 2] 3 ਜਾਂ 4 ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਆਉਣਾ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਨੋਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਸਤੇ ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਪੱਟ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਉਛਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 1] 2] 3 ਜਾਂ 4 ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

**11.** ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਦੇ ਕੋਲ A, B ਅਤੇ C ਮਸ਼ੀਨ ਆਪਰੇਟਰ ਹਨ। ਪਹਿਲਾ ਆਪਰੇਟਰ A 1% ਖਰਾਬ ਸਮੱਗਰੀ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਆਪਰੇਟਰ B ਅਤੇ C ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5% ਅਤੇ 7% ਖਰਾਬ ਸਮੱਗਰੀ ਬਣਾਓਂਦੇ ਹਨ। ਕਾਰਜ 'ਤੇ A ਕੁੱਲ 50% ਸਮਾਂ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ, B ਕੁੱਲ ਸਮਾਂ ਦਾ 30% ਅਤੇ C ਕੁੱਲ ਸਮਾਂ ਦਾ 20% ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਖਰਾਬ ਸਮੱਗਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ A ਰਾਹੀਂ ਬਨਾਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

**12.** 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪਤਾ ਗਵਾਚ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਪੱਤਿਆਂ ਵਿਚੋਂ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਇੱਟ ਦੇ ਹਨ। ਗਵਾਚੇ ਪੱਤੇ ਦੇ ਇੱਟ ਦੇ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

**13.** A ਰਾਹੀਂ ਸੱਚ ਬੋਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{4}{5}$ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ A ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚਿੱਤ ਆਇਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ:

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

**14.** ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $A \subset B$ ਹੈ ਅਤੇ $P(B) \neq 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਠੀਕ ਹੈ:

(A) $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (B) $P(A|B) < P(A)$

(C) $P(A|B) \geq P(A)$ (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

## 13.6 ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਚਲ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ (Random Variables and its Probability Distribution)

ਅਸੀਂ, ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀ ਬਣਤਰ ਬਾਰੇ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਾਫ਼ੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਖਾਸ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਚਾਹਵਾਨ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਪਰ ਇਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਚਾਹਵਾਨ ਸੀ।

ਆਓ ਕੁਝ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

(i) ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਆਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਚਾਹਵਾਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 50 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

(iii) 20 ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਤੋਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 6 ਖਰਾਬ ਹਨ, 4 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ (ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ) ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ 4 ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਖਰਾਬ ਵਸਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਨਾ ਕਿ ਖਰਾਬ ਅਤੇ ਠੀਕ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਨਿਯਮ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਲਈ ਇਹ ਵਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਵੱਖ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਚਲ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਚਲ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ X ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X, ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ (domain) ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ (ਜਾਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ (codomain) ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਉਹ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਆਉ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਉਛਾਲੇ ਜਾਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ਜੇਕਰ X, ਪ੍ਰਾਪਤ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਲਈ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ:

$$X\,(HH) = 2,\ X\,(HT) = 1,\ X\,(TH) = 1,\ X\,(TT) = 0.$$

ਇੱਕ ਹੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ Y] ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਲਈ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਪੱਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਘਟਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤਾਂ

$$Y\,(HH) =2,\ Y\,(HT) = 0,\ Y\,(TH) = 0,\ Y\,(TT) = -2.$$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਵਿੱਚ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਵੱਖ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 22: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਦੀ ਖੇਡ ਖੇਡਦਾ ਹੈ। ਖੇਡ ਦੇ ਆਯੋਜਕ ਰਾਹੀਂ ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਹਰੇਕ ਚਿੱਤ ਲਈ 2 ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਪੱਟ ਲਈ ਉਹ ਵਿਅਕਤੀ ਆਯੋਜਕ ਨੂੰ 1.50 ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ X ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਜਿੱਤੀ ਗਈ ਜਾਂ ਹਾਰੀ ਗਈ ਰਾਸ਼ੀ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ: X ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮੁੱਲ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਤਾਂ

$$X\,(HHH) = Rs\,(2 \times 3) = Rs\ 6$$
$$X\,(HHT) = X\,(HTH) = X\,(THH) = Rs\,(2 \times 2 - 1 \times 1.50) = Rs\ 2.50$$
$$X\,(HTT) = X\,(THT) = X\,(TTH) = Rs\,(1 \times 2 - 2 \times 1.50) = -Re\ 1$$

ਅਤੇ $$X\,(TTT) = -Rs\,(3 \times 1.50) = -Rs\ 4.50$$

ਇੱਥੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਚਿੰਨ੍ਹ, ਖਿਡਾਰੀ ਦੀ ਹਾਨੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਦੇ ਲਈ X ਦਾ ਇੱਕ ਬੇਜੋੜ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ X ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਹੈ: $\{-1,\ 2.50,\ -4.50,\ 6\}$

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 2 ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ 1 ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਹੈ। ਬੇਤਰਤੀਬ ਨਾਲ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਰੰਗ ਨੋਟ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੁਬਾਰਾ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ। ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ X ਦੋ ਵਾਰੀ ਕੱਢਣ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ X ਦਾ ਵਿਵਰਨ ਦਿਉ, ਜਿੱਥੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਦਾ ਕੱਢਣਾ ਸਫਲਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ $w_1, w_2, r$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{w_1\,w_1,\ w_1\,w_2,\ w_2\,w_2,\ w_2\,w_1,\ w_1\,r,\ w_2\,r,\ r\,w_1,\ r\,w_2,\ r\,r\}$$

ਹੁਣ X = ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

ਇਸ ਲਈ $X\,(\{w_1, w_1\}) = X\,(\{w_1\,w_2\}) = X\,(\{\,w_2\,w_2\}) = X\,(\{w_2\,w_1\}) = 0$

$X\,(\{w_1, r\}) = X\,(\{w_2\,r\}) = X\,(\{\,rw_1\}) = X\,(\{rw_2\}) = 1$ ਅਤੇ $X\,(\{rr\}) = 2$

ਇਸ ਲਈ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਹੜਾ 0, 1 ਜਾਂ 2 ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ।

### 13.6.1 ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ *(Probability distribution of a random variable)*

ਆਉ ਦਸ ਪਰਿਵਾਰਾਂ $f_1, f_2 \ldots f_{10}$ ਤੋਂ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਪ੍ਰਕਾਰ ਚੁਨਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਚੋਣ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਰਿਵਾਰ $f_1, f_2 \ldots f_{10}$ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 3, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 6, 4, 5 ਮੈਂਬਰ ਹਨ।

ਆਉ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਚੁਣੀਏ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਨੋਟ ਕਰਕੇ, X ਤੋਂ ਦਰਸਾਈਏ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

$$X(f_1) = 3,\ X(f_2) = 4,\ X(f_3) = 3,\ X(f_4) = 2,\ X(f_5) = 5,$$
$$X(f_6) = 4,\ X(f_7) = 3,\ X(f_8) = 6,\ X(f_9) = 4,\ X(f_{10}) = 5$$

ਇਸ ਲਈ 2] 3] 4] 5] 6 ਵਿੱਚੋਂ X ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ X ਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਹੋਵੇਗਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਰਿਵਾਰ $f_4$ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। X ਦਾ ਮੁੱਲ 3 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ $f_1, f_3, f_7$ ਵਿਚੋਂ ਕਿਸੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ

X = 4, ਜਦੋਂ ਪਰਿਵਾਰ $f_2, f_6$ ਜਾਂ $f_9$ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

$X = 5$, ਜਦੋਂ ਪਰਿਵਾਰ $f_5$ ਜਾਂ $f_{10}$ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਅਤੇ $X = 6$, ਜਦੋਂ ਪਰਿਵਾਰ $f_8$ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਮੰਨਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਣਾ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਵਾਰ $f_4$ ਨੂੰ ਚੁਣੇ ਜਾਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{10}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ X ਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{10}$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $P(X = 2) = \frac{1}{10}$

ਨਾਲ ਹੀ $f_1, f_2,$ ਜਾਂ $f_7$ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$P(\{f_1, f_2, f_3\}) = \frac{3}{10}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ X ਦਾ ਮਾਨ 3 ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{3}{10}$

ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $P(X = 3) = \frac{3}{10}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$P(X = 4) = P(\{f_2, f_6, f_9\}) = \frac{3}{10}$, $P(X = 5) = P(\{f_5, f_{10}\}) = \frac{2}{10}$

ਅਤੇ $P(X = 6) = P(\{f_8\}) = \frac{1}{10}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਵਿਵਰਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੇ ਨਾਲ ਉਸਦੀ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

**ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5:** ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਣਾਲ਼ੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X | : | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| P(X) | : | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

ਜਿੱਥੇ $$p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ i = 1, 2, ..., n$$

ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x_1, x_2, ... x_n$ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਹਨ ਅਤੇ $p_i\ (i = 1,2, ... n)$ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦਾ ਮਾਨ $x_i$ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਭਾਵ $P(X=x_i) = p_i$

*ਟਿੱਪਣੀ:* ਜੇਕਰ $x_i$ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X, ਦਾ ਕੋਈ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਹੈ ਤਾਂ ਕਥਨ $X = x_i$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਕੁਝ ਬਿੰਦੂਆਂ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ X ਦਾ $x_i$ ਮੁੱਲ ਲੈਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ $P(X = x_i) \neq 0$ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ X ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਲਈ ਸਾਰੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹਿਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24 ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਪੱਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਕੱਡੇ ਗਏ। ਇੱਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ X ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ X ਦਾ ਮੁੱਲ 0, 1, ਜਾਂ 2 ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਪੱਤਿਆਂ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਪੱਤਿਆਂ ਦਾ ਕੱਢਣਾ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $P(X = 0)$ = P(ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ)

= P(ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ) × P (ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ)

$$= \frac{48}{52} \times \frac{48}{52} = \frac{144}{169}$$

ਅਤੇ $P(X = 1)$ = P (ਇੱਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਜਾਂ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਇੱਕਾ)

= P (ਇੱਕਾ) . P(ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ) + P (ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ) . P (ਇੱਕਾ)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{48}{52} + \frac{48}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{24}{169}$$

ਅਤੇ $P(X = 2)$ = P (ਇੱਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕਾ) = P(ਇੱਕਾ) × P (ਇੱਕਾ)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ:

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{144}{169}$ | $\frac{24}{169}$ | $\frac{1}{169}$ |

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ, ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਜੋੜੇ (doublets) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। (1,1) , (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), ਅਤੇ (6,6) ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਸੰਭਵ ਜੋੜੇ ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ, X ਦਾ ਮੁੱਲ 0, 1, 2, ਜਾਂ 3 ਹੈ।

ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਨਾ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ਹੈ।

ਹੁਣ

$$P(X = 0) = P\,(\text{“ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲਾ ਜੋੜਾ” ਨਹੀਂ}) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$$

$$P(X = 1) = P\,(\text{‘ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲਾ ਜੋੜਾ’ ਅਤੇ ਦੋ “ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲਾ ਜੋੜੇ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ” ਦੋ})$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = 3\left(\frac{1}{6}\times\frac{5^2}{6^2}\right) = \frac{75}{216}$$

$$P(X = 2) = P\,(\text{ਦੋ ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਜੋੜੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਜੋੜੇ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਨਹੀਂ})$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$= 3\left(\frac{1}{6^2}\times\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$$

$$P(X = 3) = P\,(\text{ਤਿੰਨ “ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਜੋੜੇ”}) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

ਇਸ ਲਈ X ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ:

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

ਪੜਤਾਲ : ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}$$

$$= \frac{125+75+15+1}{216}=\frac{216}{216}=1$$

ਇਸ ਲਈ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਸਹੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣੇ ਹੋਏ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਿਵਸ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਨ ਦੇ ਘੰਟੇ X ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। X ਦੇ ਮੁੱਲ $x$ ਲੈਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $k$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1 & \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \\ kx & \text{ਜੇਕਰ } x = 1 \text{ ਜਾਂ } 2 \\ k(5-x) & \text{ਜੇਕਰ } x = 3 \text{ ਜਾਂ } 4 \\ 0 & \text{ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ} \end{cases}$$

(a) $k$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(b) ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ ? ਕੇਵਲ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ ? ਵੱਧੋਂ-ਵੱਧ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ ?

ਹੱਲ: X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੈ:

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(X) | 0.1 | $k$ | $2k$ | $2k$ | $k$ |

(a) ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

ਇਸ ਲਈ $0.1 + k + 2k + 2k + k = 1$

$\Rightarrow \quad k = 0.15$

(b) P(ਤੁਸੀਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ) = P (X ≥ 2)

$= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$= 2k + 2k + k = 5k = 5 \times 0.15 = 0.75$

P(ਕੇਵਲ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ) = P (X = 2)

$= 2k = 2 \times 0.15 = 0.3$

P(ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ) = P (X ≤ 2)

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0.1 + k + 2k = 0.1 + 3k = 0.1 + 3 \times 0.15 = 0.55$

### 13.6.2 ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ *(Mean of a random variable)*

ਕਾਫ਼ੀ ਸਮੱਸਿਆਂਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਗੁਣ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਣਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਚਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਮੱਧਮਾਨ, ਮੱਧਿਕਾ ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਮੱਧਮਾਨ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਔਸਤ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6 ਮੰਨ ਲਉ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਭਾਵਨਾ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ਹਨ। X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ, ਜਿਸਨੂੰ μ , ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਸੰਖਿਆ $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਭਾਵ $x$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਚਲ X, ਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਔਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਤੁੱਲ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਨੂੰ X ਦਾ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ (Expectation) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਨੂੰ E (X) ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ:

ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ X ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਗਤ

ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X] ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ 36 ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਹਨਾ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਜੋੜੇ $(x_i, y_i)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ਅਤੇ $y_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੇ ਮੁੱਲ ਭਾਵ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 2] 3] 4] 5] 6] 7] 8] 9] 10] 11 ਜਾਂ 12 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $$P(X = 2) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 4) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 5) = P(\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 6) = P(\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7) = P(\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}) = \frac{6}{36}$$

$$P(X = 8) = P(\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 9) = P(\{(3, 6), (4,5), (5,4), (6,3)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 10) = P(\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 11) = P(\{(5, 6), (6, 5)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 12) = P(\{(6, 6) = \frac{1}{36}$$

X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ:

| X ਜਾਂ $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X) ਜਾਂ $p_i$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

ਇਸ ਲਈ $$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}$$

$$+\,6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$

$$= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 7 ਹੈ।

### 13.6.3 ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ *(Variance of a random variable)*

ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦਾ ਮਧਮਾਨ ਉਸ ਚਲ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਚਰਨ ਬਾਰੇ ਕੋਈ ਸੂਚਨਾ ਨਹੀਂ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।ਨਾਲ ਹੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਵਾਲੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਸਮਾਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ X ਅਤੇ Y ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

| X | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{2}{8}$ |

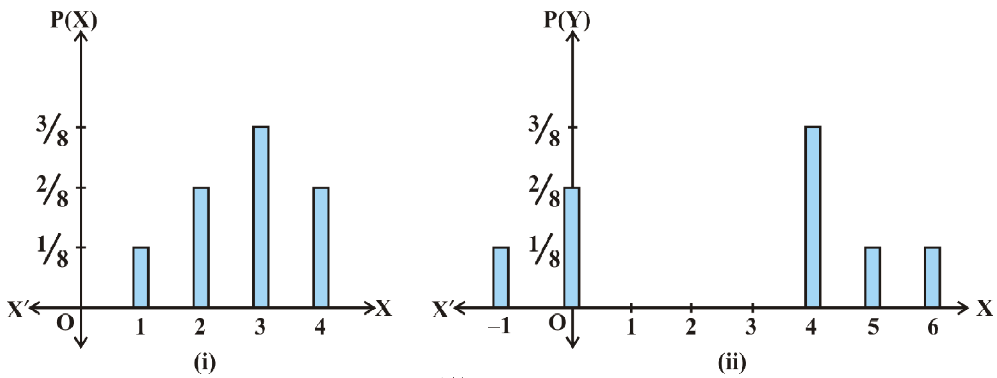
| Y | ï 1 | 0 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(Y) | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ $$E(X) = 1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{2}{8}+3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{2}{8}=\frac{22}{8}=2.75$$

ਅਤੇ $$E(Y) = -1\times\frac{1}{8}+0\times\frac{2}{8}+3\times\frac{4}{8}+5\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{8}=\frac{22}{8}=2.75$$

ਚਲ X ਅਤੇ Y ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਹਨਾ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਸਮਾਨ ਹਨ ਇਹ ਇਹਨਾ ਚਲਾਂ ਦੇ ਚਿੱਤਰਾਤਮਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਵੀ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰਖੇਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 13-5)A

X ਨੂੰ Y ਤੋਂ ਵੱਖ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਵ ਦੀ ਸੀਮਾ ਤੱਕ ਦੇ ਮਾਪ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਿਚਲਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਵ ਦਾ ਮਾਪ ਹੀ ਪ੍ਰਸਰਨ ਹੈ।




ਚਿੱਤਰ 13.5

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਵ ਨੂੰ ਪ੍ਰਸਰਨ ਤੋਂ ਮਾਪਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 7. ਮੰਨ ਲਉ X ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ $x_1, x_2 \dots x_n$ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ $\mu = E(X)$, X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। X ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ var (X) ਜਾਂ $\sigma_x^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)$$

ਜਾਂ ਭਾਵ $$\sigma_x^2 = E(X - \mu)^2$$

ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ $$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}}\,(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)}$$

ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (standard deviation) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਹੋਰ ਸੂਤਰ:

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon)^2 \, p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\, x_i) \, p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \, p(x_i)) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2 \, p(x_i) - \sum_{i=1}^{n} 2\varepsilon x_i p(x_i)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2\, p(x_i) + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} p(x_i) - 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i) + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \left[\text{ਕਿਉਂਕਿ } \sum_{i=1}^{n} p\,(x_i) = 1 \text{ ਅਤੇ } \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathrm{P}(x_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2\, p(x_i) - \varepsilon^2$$

ਜਾਂ $\mathrm{Var(X)} = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2\, p(x_i)) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)\right)^2$

ਜਾਂ $\mathrm{Var(X)} = \mathrm{E(X^2)} - [\mathrm{E(X)}]^2]$ ਜਿੱਥੇ $\mathrm{E(X^2)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i)$

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ਮੰਨ ਲਓ X, ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਤਾਂ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਹੜਾ 1, 2, 3, 4, 5, ਜਾਂ 6 ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

ਇਸ ਲਈ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ :

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

ਹੁਣ $\mathrm{E(X)} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$

$$= 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

ਨਾਲ ਹੀ $\mathrm{E(X^2)} = 1^2\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{1}{6} + 3^2\times\frac{1}{6} + 4^2\times\frac{1}{6} + 5^2\times\frac{1}{6} + 6^2\times\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

ਇਸ ਲਈ $\mathrm{Var(X)} = \mathrm{E\,(X^2)}$ ï $(\mathrm{E(X)})^2$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{35}{12}$$

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿਚੋਂ ਦੋ ਪੱਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੇ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਬਾਦਸ਼ਾਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕੱਢਣ ਵਿੱਚ ਬਾਦਸ਼ਾਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ X ਤੋਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਹੜਾ 0 , 1 ਜਾਂ 2 ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $P(X = 0) = P$ (ਕੋਈ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਨਹੀਂ)

$$= \frac{{}^{48}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{\frac{48!}{2!(48-2)!}}{\frac{52!}{2!(52-2)!}} = \frac{48\times 47}{52\times 51} = \frac{188}{221}$$

$P(X = 1) = P$ (ਇੱਕ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਨਹੀਂ) $= \dfrac{{}^{4}C_1\,{}^{48}C_1}{{}^{52}C_2}$

$$= \frac{4\times 48\times 2}{52\times 51} = \frac{32}{221}$$

ਅਤੇ $P(X = 2) = P$ (ਦੋਵੇਂ ਬਾਦਸ਼ਾਹ) $= \dfrac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2} == \dfrac{4\times 3}{52\times 51} = \dfrac{1}{221}$

ਇਸ ਲਈ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ :

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{188}{221}$ | $\frac{32}{221}$ | $\frac{1}{221}$ |

ਹੁਣ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{X} = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$

$$= 0\times\frac{188}{221} + 1\times\frac{32}{221} + 2\times\frac{1}{221} = \frac{34}{221}$$

ਨਾਲ ਹੀ $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i) = 0^2\times\frac{188}{221} + 1^2\times\frac{32}{221} + 2^2\times\frac{1}{221} = \frac{36}{221}$

ਹੁਣ $\text{Var}(X) = E(X^2) – [E(X)]^2$

$$= \frac{36}{221} – \left(\frac{34}{221}\right)^2 = \frac{6800}{(221)^2}$$

ਇਸ ਲਈ $\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{\sqrt{6800}}{(221)} = 0.37$ (ਲੱਗਭਗ)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |



## ਅਭਿਆਸ 13.4

1. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਲਈ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਆਪਣਾ ਉੱਤਰ ਕਾਰਣ ਨਾਲ ਲਿਖੋ।

(i)

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X) | 0.4 | 0.4 | 0.2 |

(ii)

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(X) | 0.1 | 0.5 | 0.2 | ï 0.1 | 0.3 |

(iii)

| Y | ï 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| P(Y) | 0.6 | 0.1 | 0.2 |

(iv)

| Z | 3 | 2 | 1 | 0 | ï 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(Z) | 0.3 | 0.2 | 0.4 | 0.1 | 0.05 |

2. ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਅਤੇ 2 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਦੋ ਗੇਂਦਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀਆਂ ਗਈਆਂ। ਮੰਨ ਲਉ X ਕਾਲੀ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। X ਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹਨ ? ਕੀ X ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ?
3. ਮੰਨ ਲਉ X ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਪਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 6 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। X ਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹਨ ?
4. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀ ਦੋ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ
   (ii) ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਪਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ
   (iii) ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀ ਚਾਰ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ
5. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ :
   (i) ^4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ' ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਫਲਤਾ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
   (ii) ^ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣਾ' ਨੂੰ ਸਫਲਤਾ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
6. 30 ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਵਿੱਚੋਂ, ਵਿੱਚੋਂ 6 ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਹਨ। 4 ਬਲਬ ਦਾ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਬਗੈਰ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਖਰਾਬ ਬਲਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਗੈਰ ਨਿਰਪੱਖ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਟ ਆਉਣ ਤੋਂ ਤਿਗੁਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕਾ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਪਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

**8.** ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X) | 0 | $k$ | $2k$ | $2k$ | $3k$ | $k^2$ | $2k^2$ | $7k^2+k$ |

ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $k$ (ii) $P(X < 3)$ (iii) $P(X > 6)$ (iv) $P(0 < X < 3)$

**9.** ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਸੰਭਾਵਨਾ ਫਲਨ $P(x)$ ਹੇਠ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $k$ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਹੈ

$$P(x)=\begin{cases} k & \text{ਜੇਕਰ } x=0 \\ 2k & \text{ਜ਼ੇਕਰ } x=1 \\ 3k & \text{ਜੇਕਰ } x=2 \\ 0 & \text{ਜੇਕਰ} \end{cases}$$

(a) $k$ ਦਾ ਮੁੱਲਪਤਾ ਕਰੋ।

(b) $P(X < 2)$, $P(X \le 2)$, $P(X \ge 2)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**10.** ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**11.** ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ X, ਛੇ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ X ਦਾ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**12.** ਪਹਿਲੀਆਂ ਛੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ (ਬਿਨਾ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੇ) ਨਾਲ ਚੁਣੀਆਂ ਗਈਆਂ। ਮੰਨ ਲਉ X ਦੋਵੇਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। E(X) ਪਤਾ ਕਰੋ।

**13.** ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ X ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। X ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**14.** ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ 15 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਉਮਰ 14] 17] 15] 14] 21] 17] 19] 20] 16] 18] 20] 17] 16] 19 ਅਤੇ 20 ਸਾਲ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਚੁਣੇ ਜਾਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਚੁਣੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਉਮਰ ਨੂੰ (X)ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ। ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ। X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**15.** ਇੱਕ ਬੈਠਕ ਵਿੱਚ 70% ਭਾਗੀਦਾਰਾਂ ਨੇ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਦਾ ਸਮਰਥਨ ਕੀਤਾ ਅਤੇ 30% ਭਾਗੀਦਾਰਾਂ ਨੇ ਵਿਰੋਧ ਕੀਤਾ। ਇੱਕ ਭਾਗੀਦਾਰ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਭਾਗੀਦਾਰ ਨੇ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਦਾ ਵਿਰੋਧ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $X = 0$ ਲਿਆ ਗਿਆ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਉਸਨੇ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਦਾ ਸਮਰਥਨ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $X = 1$ ਲਿਆ ਗਿਆ। E(X) ਅਤੇ var (X) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ:

**16.** ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪਾਸੇ, ਜਿਸਦੇ ਤਿੰਨ ਫਲਨਾਂ 'ਤੇ 1 ਹੋਰ ਤਿੰਨ 'ਤੇ 2 ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ 'ਤੇ 5 ਲਿਖਿਆ ਹੈ, ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ :

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) $\frac{8}{3}$

**17.** ਮੰਨ ਲਓ ਤਾਸ਼ ਦੀ ਇੱਕ ਦੱਥੀ ਤੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਓ X ਇੱਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਤਾਂ E(X) ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ:

(A) $\frac{37}{221}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{2}{13}$

## 13.7 ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਅਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਵੰਡ (Bernoulli Trails and Binomial Distribution)

### 13.7.1 ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ

ਕਈ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕਰਤੀ ਦੋ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਾਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਉਛਾਲਿਆ ਹੋਇਆ ਸਿੱਕਾ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਇੱਕ ਪਟ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਹਾਂ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਅੰਡੇ ਤੋਂ ਚੂਜ਼ਾ 'ਨਿਕਲ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ' ਜਾਂ 'ਨਹੀਂ ਨਿਕਲਿਆ ਹੈ ', ਇੱਕ ਫੈਸਲਾ ਹਾਂ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਆਦਿ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਰਿਵਾਜ਼ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨੂੰ 'ਸਫਲਤਾ' ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਨੂੰ 'ਅਸਫਲਤਾ' ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਨੂੰ ਸਫਲਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ 'ਪਟ' ਆਉਣ ਨੂੰ ਅਸਫਲਤਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਹਰੇਕ ਵਾਰੀ, ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਪ੍ਰੇਖਣ (trial) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਮੰਨ ਲਓ, ਚਾਰ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 4 ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਠੀਕ ਦੋ ਹੋਣਗੇ ਭਾਵ ਸਫਲਤਾ ਜਾਂ ਅਸਫਲਤਾ। ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਕਿਸੇ ਦੂਜੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਤੋਂ ਅਜ਼ਾਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਅਜ਼ਾਦ ਪ੍ਰੇਖਣ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਕੇਵਲ ਦੋ ਨਤੀਜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਅਕਸਰ 'ਸਫਲਤਾ' ਜਾਂ 'ਅਸਫਲਤਾ' ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 8. ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਦੇ ਹਨ :

(i) ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (ਸੀਮਿਤ) ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ,

(ii) ਪ੍ਰੇਖਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਅਜ਼ਾਦ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

(iii) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੇ ਠੀਕ ਦੋ ਹੀ ਨਤੀਜੇ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ, ਸਫਲਤਾ ਜਾਂ ਅਸਫਲਤਾ

(iv) ਕਿਸੇ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਰਹਿਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ 50 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣਾ 50 ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਹਾਲਤ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਸਫਲਤਾ (ਮੰਨ ਲਉ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣਾ) ਜਾਂ ਅਸਫਲਤਾ (ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣਾ) ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਰੀ 50 ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ($p$) ਇੱਕ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਬਗੈਰ ਸ਼ੱਕ ਪਾਸੇ ਦੀ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਉਛਾਲਾਂ ਅਜ਼ਾਦ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਪਾਸਾ ਨਿਰਪੱਖ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਛੇ ਫ਼ਲਕਾਂ ਤੇ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਲਿਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਤਾਂ $p = \frac{1}{2}$ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਅਤੇ $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ ਅਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 30. 7 ਲਾਲ ਅਤੇ 9 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਛੇ ਗੇਂਦਾਂ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੇਖਣ ਯਤਨ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਕੱਢਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਗੇਂਦ ਨੂੰ :

(i) ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

(ii) ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਨਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ :

(i) ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਯਤਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸੀਮਿਤ (ਨਿਸ਼ਚਿਤ) ਹੈ। ਜਦੋਂ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਫਲਤਾ (ਮੰਨ ਲਉ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $p = \frac{7}{16}$ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਛੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਕੱਢਣਾ ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੇਖਣ ਯਤਨ ਹਨ।

(ii) ਜਦੋਂ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ ਬਗੈਰ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੇ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਤਾਂ ਪਹਿਲੇ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ (ਭਾਵ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਦਾ ਕੱਢਣਾ) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{7}{16}$ ਹੈ, ਦੂਜੇ ਯਤਨ ਵਿੱਚ $\frac{6}{15}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਰੇ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ ਨਹੀਂ ਹਨ।

### 13.7.2 *ਦੋ ਪਦੀ ਵੰਡ (Binomial Distribution)*

ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਸਫਲਤਾ (ਮੰਨ ਲਉ ਚਿੱਤ) ਜਾਂ ਅਸਫਲਤਾ (ਪੱਟ)ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਅਤੇ ਅਸਫਲਤਾ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ S ਅਤੇ F ਮੰਨ ਲਉ।

ਇਹ ਸੋਚੋ ਕਿ ਸਾਡੀ ਛੇ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਫਲਤਾ ਦੇ ਵੱਖ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਦਿਲਚਸਪੀ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਛੇ ਵੱਖ ਤਰੀਕੇ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ:

SFFFFF, FSFFFF, FFSFFF, FFFSFF, FFFFSF, FFFFFS

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਦੋ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਅਤੇ ਚਾਰ ਅਸਫਲਤਾਵਾਂ $\frac{6!}{4! \times 2!}$ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਕ੍ਰਮਾਂ ਦੀ ਲਿਸਟ ਬਨਾਉਣਾ ਬਹੁਤ ਲੰਬਾ ਕੰਮ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ 0] 1] 2] ---] $n$ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਲੰਬਾ ਅਤੇ ਸਮਾਂ ਲੈਣ ਵਾਲਾ ਕੰਮ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। $n$ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਸੂਤਰ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਲਿਸਟ ਬਨਾਉਣ ਤੋਂ ਬਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਤਿੰਨ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਅਤੇ ਅਸਫਲਤਾ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $p$ ਅਤੇ $q$ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$$S = \{SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF\} \text{ ਹੈ}$$

ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦਾ ਗਿਣਤੀ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਹੈ ਅਤੇ 0, 1, 2, ਜਾਂ 3 ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(\text{ਕੋਈ ਸਫਲਤਾ ਨਹੀਂ}) \\
&= P(\{FFF\}) = P(F)\,P(F)\,P(F) \\
&= q\,.\,q\,.\,q = q^3 \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ}) \\
P(X = 1) &= P(\text{ਇੱਕ ਸਫਲਤਾ}) \\
&= P(\{SFF, FSF, FFS\}) \\
&= P(\{SFF\}) + P(\{FSF\}) + P(\{FFS\}) \\
&= P(S)\,P(F)\,P(F) + P(F)\,P(S)\,P(F) + P(F)\,P(F)\,P(S) \\
&= p.q.q + q.p.q + q.q.p = 3qp^2 \\
P(X = 2) &= P(\text{ਦੋ ਸਫਲਤਾਵਾਂ}) \\
&= P(\{SSF, SFS, FSS\}) \\
&= P(\{SSF\}) + P(\{SFS\}) + P(\{FSS\}) \\
&= P(S)\,P(S)\,P(F) + P(S)\,P(F)\,P(S) + P(F)\,P(S)\,P(S) \\
&= p.p.q. + p.q.p + q.p.p = 3qp^2
\end{aligned}$$

ਅਤੇ $P(X = 3) = P(\text{ਤਿੰਨ ਸਫਲਤਾਵਾਂ}) = P(\{SSS\})$

$$= P(S)\,.\,P(S)\,.\,P(S) = p^3$$

ਇਸ ਲਈ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X) | $q^3$ | $3q^2p$ | $3qp^2$ | $p^3$ |

ਨਾਲ ਹੀ $(q + p)^3$ ਦਾ ਦੋ–ਪਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

$$q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3$$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ 0] 1] 2] ਜਾਂ 3 ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: $(q + p)^3$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤੀਜੀ ਅਤੇ ਚੌਥਾ ਪਦ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ ਕਿਉਂਕਿ $q + p = 1$ ਹੈ। ਜਿਸ ਤੋਂ ਇਹ ਅਰਥ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 1 ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $n$-ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ 0, 1, 2 ...., $n$ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $(q + p)^n$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤੀਜੀ, ...$n$ਵੀਂ ਪਦ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $n$ &ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ $x$&ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ $x$ ਸਫਲਤਾਵਾਂ (S) ਦੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ($n$ï $x$) ਅਸਫਲਤਾਵਾਂ (F) ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਹੁਣ $x$ ਸਫਲਤਾਵਾਂ (S) ਅਤੇ ($n$ï $x$) ਅਸਫਲਤਾਵਾਂ (F), $\frac{n!}{x!(n-x)!}$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ $x$ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਅਤੇ $(n - x)$ ਅਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਅਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \mathrm{P}(x \text{ ਸਫਲਤਾਵਾਂ}).\ \mathrm{P}[(n-x)\text{ਅਸਫਲ੍ਤਾਵਾਂ}]$$

$$= \underbrace{\mathrm{P(S).P(S)...P(S)}}_{x \text{ ਬਾਂਰ}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(F).P(F)...P(F)}}_{(n-x) \text{ ਬਾ੍ਰ}} = p^x q^{n-x}$$

ਇਸ ਲਈ $n$-ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਵਿੱਚ $x$ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\mathrm{P}(x \text{ ਸਫਲਤਾਵਾਂ}) = {}^nC_x p^x q^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, ..., n$, ($q$ = 1 ï $p$)

ਇਸਲਈ P ($x$ ਸਫਲਤਾਵਾਂ) ਭਾਵ ${}^nC_x p^x q^{n-x}$, $(q + p)^n$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦਾ $(x + 1)$ ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $n$&ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ $(q + p)^n$ ਦੇ ਦੋ&ਪਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।ਇਸ ਲਈ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ X ਦੀ ਵੰਡ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ:

| X | 0 | 1 | 2 | ... | $x$ | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P (X) | ${}^nC_0\, q^n$ | ${}^nC_1\, q^{n-1}p^1$ | ${}^nC_2\, q^{n-2}p^2$ | | ${}^nC_x\, q^{n-x}p^x$ | | ${}^nC_n\, p^n$ |

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਨੂੰ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $n$ ਅਤੇ $p$, ਪ੍ਰਾਚਲ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ $n$ ਅਤੇ $p$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$x$ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ P (X = $x$) ਨੂੰ P($x$) ਤੋਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ

$\mathrm{P}(x) = {}^nC_x q^{n-x}p^x$, $x = 0, 1, ..., n$ ($q$ = 1 ï $p$) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ P($x$) ਨੂੰ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਸੰਭਾਵਨਾ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇੱਕ $n$-ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $p$, ਵਾਲੇ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਨੂੰ B($n$, $p$) ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 31. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 10 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) ਠੀਕ ਛੇ ਚਿੱਤ

(ii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਛੇ ਚਿੱਤ

(iii) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਛੇ ਚਿੱਤ

ਹੱਲ: ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ, ਬਾਰ ਬਾਰ ਉਛਾਲਣਾ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।10 ਯਤਨਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ X ਮੰਨ ਲਉ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਇਹ ਵੰਡ $n = 10$ ਅਤੇ $p = \frac{1}{2}$ ਵਾਲੀ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad P(X = x) = {}^nC_x q^{n-x} p^x$

ਇੱਥੇ $\quad n = 10,\ p = \frac{1}{2},\quad q = 1 ï\ p = \frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ $\quad P(X = x) = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} \left(\frac{1}{2}\right)^x = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

ਹੁਣ

(i) P(ਠੀਕ ਛੇ ਚਿੱਤ) $P(X=6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10!}{6!\times 4!}\frac{1}{2^{10}} = \frac{105}{512}$

(ii) P(ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਛੇ ਚਿੱਤ) = $P(X \geq 6)$

$$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= {}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_7\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \left(\frac{10!}{6!\times 4!}\right) + \left(\frac{10!}{7!\times 3!}\right) + \left(\frac{10!}{8!\times 2!}\right) + \left(\frac{10!}{9!\times 1!}\right) + \left(\frac{10!}{10!}\right)\frac{1}{2^{10}} = \frac{193}{512}$$

(iii) P (ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਛੇ ਚਿੱਤ) = $P(X \leq 6)$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$+ P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$+ {}^{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{848}{1024} = \frac{53}{64}$$

ਉਦਾਹਰਣ 32. 10% ਖਰਾਬ ਅੰਡਿਆਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਤੋਂ 10 ਅੰਡੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕੱਢੇ ਗਏ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ 10 ਅੰਡਿਆਂ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ ਅੰਡਾ ਖਰਾਬ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ X ਖਰਾਬ ਅੰਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅੰਡਿਆਂ ਨੂੰ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ X ਦੀ ਵੰਡ $n = 10$ ਅਤੇ

$p = 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ ਵਾਲ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

ਹੁਣ P(ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ ਖਰਾਬ ਅੰਡਾ) $= P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - {}^{10}C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 1 - \frac{9^{10}}{10^{10}}$$

## ਅਭਿਆਸ 13.5

**1.** ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ 6 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਇੱਕ ਸਫਲਤਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

(i) ਠੀਕ 5 ਸਫਲਤਾਵਾਂ ? (ii) ਘੱਟੋ&ਘੱਟ 5 ਸਫਲਤਾਵਾਂ ? (iii) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 5 ਸਫਲਤਾਵਾਂ ?

**2.** ਪਾਸਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਜੋੜੀ ਨੂੰ 4 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ 'ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ' ਇੱਕ ਸਫਲਤਾ ਹੈ, ਤਾਂ 2 ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**3.** ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਵਿੱਚ 5% ਨੁਕਸਦਾਰ ਵਸਤੂਆਂ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ 10 ਵਸਤਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨੁਕਸਦਾਰ ਵਸਤੂਆਂ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੀਆਂ ?

**4.** 52 ਤਾਸ਼ ਦੇ ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ 5 ਪੱਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ

(i) ਸਾਰੇ 5 ਪੱਤੇ ਹੁਕਮ ਦੇ ਹੋਣ ?

(ii) ਸਿਰਫ਼ 3 ਪੱਤੇ ਹੁਕਮ ਦੇ ਹੋਣ ?

(iii) ਇੱਕ ਵੀ ਪੱਤਾ ਹੁਕਮ ਦਾ ਨਾ ਹੋਵੇ ?

**5.** ਕਿਸੇ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਇੱਕ ਬਲਬ ਦੀ 150 ਦਿਨਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਫ਼ਿਊਜ਼ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0-05 ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 5 ਬਲਬਾਂ ਵਿੱਚੋਂ :

(i) ਇੱਕ ਵੀ ਨਹੀਂ (ii) ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ

(iii) ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ (iv) ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ, 150 ਦਿਨਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਫ਼ਿਊਜ਼ ਹੋ ਜਾਣਗੇ।

**6.** ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 10 ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਤੇ 0 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਅੰਕ ਲਿਖਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਗੇਂਦਾਂ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਗੇਂਦ 'ਤੇ ਅੰਕ 0 ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਹੋਵੇ ?

**7.** ਇੱਕ ਸੱਚ&ਝੂਠ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 20&ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਾਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲ ਕੇ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉੱਤਰ 'ਸੱਚ' ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਪਟ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ 'ਝੂਠ' ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਘੱਟੋ&ਘੱਟ 12 ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

**8.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X, $B\left(6,\frac{1}{2}\right)$ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ X=3 ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲਾ ਨਤੀਜਾ ਹੈ।

(ਸੰਕੇਤ: $P(X = 3)$ ਸਾਰੇ $P(x_i)$, $x_i = 0,1,2,3,4,5,6$ ਵਿਚੋਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।)

**9.** ਇੱਕ ਬਹੁ&ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ 5 ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਤਿੰਨ ਸੰਭਾਵੀ ਉੱਤਰ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕੇਵਲ ਅਨੁਮਾਨ ਨਾਲ ਚਾਰ ਜਾਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇਵੇਗਾ ?

**10.** ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਲਾਟਰੀ ਦੇ 50 ਟਿਕਟ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ ਉਸਦੇ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{100}$ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ (a) ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ (b) ਠੀਕ ਇੱਕ ਵਾਰੀ (c) ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਦੋ ਵਾਰੀ, ਇਨਾਮ ਜਿੱਤੇਗਾ।

**11.** ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ 7 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਠੀਕ ਦੋ ਵਾਰੀ 5 ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**12.** ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਛੇ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 2 ਵਾਰੀ ਛੇ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋA

**13.** ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਬਣੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ 10% ਵਸਤੂਆਂ ਨੁਕਸਦਾਰ ਹਨ। ਇਸ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ 12 ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੇ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚੋਂ 9 ਨੁਕਸਦਾਰ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

**14** ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 100 ਬਲਬ ਹਨ।ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ 10 ਖਰਾਬ ਹਨ। 5 ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਲਬ ਦਾ ਖਰਾਬ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ:

(A) $10^{ï 1}$ (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\frac{9}{10}$

**15.** ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਾ ਤੈਰਾਕ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{5}$ ਹੈ ਤਾਂ 5 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਦਾ ਤੈਰਾਕ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ:

(A) ${}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$ (B) $\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

(C) ${}^5C_1\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4$ (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

## ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 33. ਚਾਰ ਡੱਬਿਆਂ ਵਿੱਚ ਰੰਗੀਨ ਗੇਂਦਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

| ਡੱਬਾ | ਰੰਗ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ਕਾਲਾ | ਸਫ਼ੇਦ | ਲਾਲ | ਨੀਲਾ |
| I | 3 | 4 | 5 | 6 |
| II | 2 | 2 | 2 | 2 |
| III | 1 | 2 | 3 | 1 |
| IV | 4 | 3 | 1 | 5 |

ਇੱਕ ਡਿੱਬੇ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਫੇਰ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਗਈ। ਜੇਕਰ ਗੇਂਦ ਦਾ ਰੰਗ ਕਾਲਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਡੱਬੇ III ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ A, $E_1$, $E_2$, $E_3$ ਅਤੇ $E_4$ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ :

A : ਇੱਕ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣਾ　　　$E_1$ : ਡੱਬੇ&I ਦੀ ਚੋਣ

$E_2$ : ਡੱਬੇ&II ਦੀ ਚੋਣ　　　$E_3$ : ਡੱਬੇ&III ਦੀ ਚੋਣ

$E_4$ : ਡੱਬੇ&IV ਦੀ ਚੋਣ

ਕਿਉਂਕਿ ਡੱਬਿਆਂ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੈ:

ਇਸ ਲਈ　$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$

ਨਾਲ ਹੀ　$P(A|E_1) = \frac{3}{18}$, $P(A|E_2) = \frac{2}{8}$, $P(A|E_3) = \frac{1}{7}$ ਅਤੇ $P(A|E_4) = \frac{4}{13}$

P(ਡੱਬੇ& III ਦੀ ਚੋਣ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਹੈ )

$= P(E_3|A)$ ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3).P(A|E_3)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)+P(E_4)P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{13}} = 0.165$$

ਉਦਾਹਰਣ 34. ਦੋ&ਪੱਦੀ ਵੰਡ $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹਲ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X ਉਹ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਵੰਡ $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $n = 4,\ p = \frac{1}{3}$ ਅਤੇ $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(X = x) = {}^4C_x \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ x = 0, 1, 2, 3, 4$

ਭਾਵ X ਦੀ ਵੰਡ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ:

| $x_i$ | $P(x_i)$ | $x_i\ P(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | ${}^4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^4$ | 0 |
| 1 | ${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$ | ${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$ |
| 2 | ${}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$ | $2\left({}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$ |
| 3 | ${}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3$ | $3\left({}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$ |
| 4 | ${}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$ | $4\left({}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$ |

ਹੁਣ ਮੱਧਮਾਨ $(\mu) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$

$$= 0 + {}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) + 2.\,{}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3.\,{}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4.\,{}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 4 \times \frac{2^3}{3^4} + 2 \times 6 \times \frac{2^2}{3^4} + 3 \times 4 \times \frac{2}{3^4} + 4 \times \frac{1}{3^4}$$

$$= \frac{32 + 48 + 24 + 4}{3^4} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 35. ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਾਨੇਬਾਜ਼ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨਾ ਸਹੀ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{4}$ ਹੈ। ਉਹ ਘੱਟੋ-ਘੱਟੋ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰੀ ਗੋਲੀ ਚਲਾਵੇ ਕਿ ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟੋ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਗੋਲੀ ਲੱਗਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0·99 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਨਿਸ਼ਾਨੇਬਾਜ਼ $n$ ਵਾਰੀ ਗੋਲੀ ਚਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਬਿਨਾ ਸ਼ੱਕ $n$ ਵਾਰੀ ਗੋਲੀ ਚਲਾਉਣਾ $n$ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ ਹਨ।

$p$ = ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਾਨਾ ਸਹੀ ਲੱਗਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{3}{4}$ ਅਤੇ $q$ = ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਨੂੰ ਗੋਲੀ ਨਾ ਲੱਗਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{4}$

ਤਾਂ $P(X=x) = {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x = {}^nC_x \left(\frac{1}{4}\right)^{n-x} \left(\frac{3}{4}\right)^x = {}^nC_x \frac{3^x}{4^n}$

ਹੁਣ ਦਿੱਤਾ ਹੈ

P(ਘੱਟੋ-ਘੱਟੋ ਇੱਕ ਗੋਲੀ ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਨੂੰ ਲੱਗਣਾ) > 0.99

ਭਾਵ $P(x \geq 1) > 0.99$

ਇਸ ਲਈ 1 ï $P(x = 0) > 0.99$

ਜਾਂ $1 - {}^nC_0 \frac{1}{4^n} > 0.99$

ਜਾਂ ${}^4C_0 \frac{1}{4^n} < 0.01$ ਭਾਵ $\frac{1}{4^n} < 0.01$

ਜਾਂ $4^n > \frac{1}{0.01} = 100$ ... (1)

ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ $n$ ਦਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ 4 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਨਿਸ਼ਾਨੇਬਾਜ਼ ਨੂੰ ਘੱਟੋ ਘੱਟ 4 ਗੋਲੀਆਂ ਚਲਾਉਣੀਆਂ ਪੈਣਗੀਆਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 36. A ਅਤੇ B ਵਾਰੀ ਸਿਰ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੇ ਛੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ ਖੇਡ ਜਿੱਤ ਨਹੀਂ ਲੈਂਦਾ। ਜੇਕਰ A ਤੋਂ ਖੇਡ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹਲ: ਮੰਨ ਲਉ S ਸਫਲਤਾ (ਪਾਸੇ ਤੇ 6 ਆਉਣਾ) ਨੂੰ ਅਤੇ F ਅਸਫਲਤਾ (ਪਾਸੇ ਤੇ 6 ਨਾ ਆਉਣਾ) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $P(S) = \frac{1}{6}, P(F) = \frac{5}{6}$

P(A ਦੇ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣਾ) $= P(S) = \frac{1}{6}$

A ਨੂੰ ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਦਾ ਮੌਕਾ ਤਾਂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ A ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਅਤੇ B ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਅਸਫਲਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

P(A ਦਾ ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣਾ) $= P(FFS) = P(F)P(F)P(S) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ P(A ਦਾ ਪੰਜਵੀਂ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣਾ) $= P\,(FFFFS) = \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)$

ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋਰ, ਇਸ ਲਈ P(A ਦਾ ਜਿੱਤਣਾ) $= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

P(B ਜਿੱਤਣਾ) = 1 ï P(A ਜਿੱਤਣਾ) $= 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ $(a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n\,ï\,1} + \ldots,$ ਜਿੱਥੇ $r|< 1,)$ ਤਾਂ ਇਸ ਅਨੰਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{a}{1-r}\cdot$ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਜਮਾਤ XI ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦਾ A.1.3)

ਉਦਾਹਰਣ 37. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ 90% ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤਾਂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਹੀਂ ਲਗਾਈ ਜਾਂਦੀ ਤਾਂ ਇਹ ਮਾਤਰ 40% ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤਾਂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਦਾ ਤਜਰਬਾ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਮਸ਼ੀਨ 80% ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਠੀਕ ਸਥਾਪਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਮਸ਼ੀਨ 2 ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤਾਂ ਬਣਾਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਮਸ਼ੀਨ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਹੈ।

ô ñ : ਮੰਨ ਲਉ A ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮਸ਼ੀਨ ਦੋ ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤੂਆਂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਮੰਨ ਲਉ $B_1$ ਸਹੀ ਕਾਰਜ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $B_2$ ਗਲਤ ਕਾਰਜ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $P(B_1) = 0.8,\ P(B_2) = 0.2$

$P(A|B_1) = 0.9 \times 0.9$ ਅਤੇ $P(A|B_2) = 0.4 \times 0.4$

ਇਸ ਲਈ $P(B_1|A) = \dfrac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2)}$

$$= \frac{0.8\times0.9\times0.9}{0.8\times0.9\times0.9 + 0.2\times0.4\times0.4} = \frac{648}{680} = 0.95$$

## *ਅਧਿਆਇ 13 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

1. A ਅਤੇ B ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(A) \neq 0$ ਹੈ $P(B|A)$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :
   (i) A, ਸਮੂਹ B ਦਾ ਉਪਸਮੂਹ ਹੈ (ii) $A \cap B = \phi$
2. ਇੱਕ ਸ਼ਾਦੀਸ਼ੁਦਾ ਜੋੜੇ ਦੇ ਦੋ ਬੱਚੇ ਹਨ :
   (i) ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਮੁੰਡਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ ਮੁੰਡਾ ਹੈ।
   (ii) ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਕੁੜੀ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਵੱਡਾ ਬੱਚਾ ਕੁੜੀ ਹੈ।
3. ਸੋਚੋ ਕਿ 5% ਮਰਦਾਂ ਅਤੇ 0.25% ਔਰਤਾਂ ਦੇ ਵਾਲ ਧੌਲੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਧੌਲੇ ਵਾਲਾਂ ਵਾਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ। ਇਸ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਮਰਦ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? ਇਹ ਮੰਨੋ ਕਿ ਮਰਦਾਂ ਅਤੇ ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
4. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 90% ਵਿਅਕਤੀ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ 10 ਇਨਸਾਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣੇ ਗਏ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 6 ਇਨਸਾਨ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਹੋਣਗੇ ?
5. ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 25 ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 10 ਗੇਂਦਾਂ ਚਿੰਨ੍ਹ 'X' ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 15 ਚਿੰਨ੍ਹ 'Y'. ਵਾਲੀਆਂ ਹਨ। ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸ ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨੋਟ ਕਰਕੇ ਉਸਨੂੰ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ ਪੁਨਰ&ਸਥਾਪਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ 6 ਗੇਂਦਾਂ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) ਸਾਰੀਆਂ ਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ 'X' ਅੰਕਿਤ ਹੋਵੇ।
   (ii) 2 ਤੋਂ ਵੱਧ ਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ 'Y' ਅੰਕਿਤ ਨਾ ਹੋਵੇ।
   (iii) ਘੱਟੋ&ਘੱਟ1 ਗੇਂਦ ਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ 'Y' ਅੰਕਿਤ ਹੋਵੇ।
   (iv) 'X' ਅਤੇ 'Y' ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਅੰਕਿਤ ਗੇਂਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।
6. ਇੱਕ ਬਾਧਾ ਦੌੜ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਯੋਗੀ ਨੂੰ 10 ਬਾਧਾਵਾਂ ਪਾਰ ਕਰਨੀਆਂ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਿ ਉਹ ਹਰੇਕ ਬਾਧਾ ਨੂੰ ਪਾਰ ਕਰੇਗਾ $\frac{5}{6}$ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ 2 ਤੋਂ ਘੱਟ ਬਾਧਾਵਾਂ ਨੂੰ ਗਿਰਾ ਦੇਵੇਗਾ (ਨਹੀਂ ਪਾਰ ਕਰੇਗਾ) ?
7. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਬਾਰ&ਬਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਉਸ ਤੇ 6 ਦਾ ਅੰਕ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦਾ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਤੀਜਾ 6 ਦਾ ਅੰਕ ਉਸਨੂੰ ਛੇਂਵੀਂ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
8. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਲੀਪ ਸਾਲ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ 53 ਮੰਗਲਵਾਰ ਹੋਣਗੇ ?
9. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਫਲ ਹੋਣ ਦਾ ਸੰਯੋਗ ਉਸਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਤੋਂ ਦੋ ਗੁਣਾ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਆਉਣ ਵਾਲੇ 6 ਯਤਨਾਂ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ&ਘੱਟ 4 ਸਫਲ ਹੋਣਗੇ।

**10.** ਇੱਕ ਇਨਸਾਨ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲੇ ਕਿ ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 90% ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇ ?

**11.** ਇੱਕ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਬਾਅਦ 6 ਆਉਣ 'ਤੇ ਇੱਕ ਰੁਪਿਆ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੋਰ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣ ਤੇ ਉਹ ਇੱਕ ਰੁਪਿਆ ਹਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦਾ ਹੈ, ਕਿ ਉਹ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟੇਗਾ ਪਰ ਜਦੋਂ ਵੀ 6 ਆਏਗਾ ਉਹ ਖੇਡ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਊਗਾ। ਉਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਜਿੱਤੀ ਜਾ ਹਾਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**12.** ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਡੇ ਕੋਲ A, B, C ਅਤੇ D ਬਕਸੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀ ਸੰਗਮਰਮਰ ਦੀ ਲਾਲ, ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ ਕਾਲੀਆਂ ਟੁਕੜੀਆਂ ਦਾ ਵਿਵਰਨ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ। ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਕਸਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਇੱਕ ਟੁਕੜਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਟੁਕੜਾ ਲਾਲ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਬਾਕਸ A_ ਬਾਕਸ B] ਬਾਕਸ C ਤੋਂ ਕੱਢੇ ਜਾਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

| ਬਾਕਸ | ਸੰਗਮਰਮਰ ਦੇ ਟੁਕੜਿਆਂ ਦਾ ਰੰਗ | | |
|---|---|---|---|
| | ਲਾਲ | ਸਫ਼ੇਦ | ਕਾਲਾ |
| A | 1 | 6 | 3 |
| B | 6 | 2 | 2 |
| C | 8 | 1 | 1 |
| D | 0 | 6 | 4 |

**13.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਰੋਗੀ ਨੂੰ ਦਿਲ ਦਾ ਦੌਰਾ ਪੈਣ ਦਾ ਸੰਯੋਗ 40% ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਧਿਆਨ ਅਤੇ ਯੋਗ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਦਿਲ ਦਾ ਦੌਰਾ ਪੈਣ ਦੇ ਖਤਰੇ ਨੂੰ 30% ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਵਾਈ ਰਾਹੀਂ ਖਤਰੇ ਨੂੰ 25% ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੇਂ ਰੋਗੀ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਵਿਕਲਪ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਵਿਕਲਪਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਰੋਗੀਆਂ ਤੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਰੋਗੀ ਦਿਲ ਦੇ ਦੌਰੇ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਰੋਗੀ ਰਾਹੀਂ ਧਿਆਨ ਅਤੇ ਯੋਗ ਵਿਧੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

**14.** ਜੇਕਰ 2 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਇੱਕ ਹੋਣ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? (ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਦੀ ਚੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।)

**15.** ਇੱਕ ਇਲੈਕਟ੍ਰਾਨਿਕ ਅਸੈਂਬਲੀ ਦੇ ਦੋ ਸਹਾਇਕ ਬਟਨ A ਅਤੇ B ਹਨ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਨਿਰੀਖਣਾਂ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਂ ਪਤਾ ਹਨ :

P(A ਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਦੀ ) = 0.2

P ( ਸਿਰਫ਼ B ਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਦੀ ) = 0.15

P( A ਅਤੇ B ਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਦੀ ) = 0.15

ਤਾਂ, ਹੇਠਲੀ ਸੰਭਾਵਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) P ( A ਅਸਫਲ/ B ਅਸਫਲ ਹੋ ਚੁੱਕਾ ਹੋਵੇ )

(ii) P (ਕੇਵਲ A ਅਸਫਲ)

**16.** ਥੈਲੇ 1 ਵਿੱਚ 3 ਲਾਲ ਅਤੇ 4 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚ 4 ਲਾਲ ਅਤੇ 5 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਥੈਲੇ 1 ਤੋਂ ਥੈਲੇ 2 ਵਿੱਚ ਭੇਜੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਥੈਲੇ 2 ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕੱਢੀ ਹੋਈ ਗੇਂਦ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ। ਭੇਜੀ ਹੋਈ ਗੇਂਦ ਦਾ ਰੰਗ ਕਾਲਾ ਸੀ ਇਸ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ:

**17.** ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(A) \neq 0$ ਅਤੇ $P(B/A) = 1$, ਤਾਂ

(A) $A \subset B$  (B) $B \subset A$  (C) $B = \phi$  (D) $A = \phi$

**18.** ਜੇਕਰ $P(A/B) > P(A)$, ਹੈ, ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸਹੀ ਹੈ :

(A) $P(B|A) < P(B)$  (B) $P(A \cap B) < P(A) . P(B)$

(C) $P(B|A) > P(B)$  (D) $P(B|A) = P(B)$

**19.** ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ :

P(A) + P(B) ï P(A ਅਤੇ B) = P(A), ਤਾਂ

(A) $P(B|A) = 1$  (B) $P(A|B) = 1$

(C) $P(B|A) = 0$  (D) $P(A|B) = 0$

## *ਸਾਰ-ਅੰਸ਼*

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਮੁੱਖ ਬਿੰਦੂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ:

- ਘਟਨਾ E ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਹੇਠ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ : $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$, $P(F) \neq 0$
- $0 \leq P(E|F) \leq 1$,  P (E′| F) = 1 ï P (E|F)

  P (E ∪ F|G) = P (E|G) + P (F|G) ï P (E ∩ F|G)
- $P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E)$, $P(E) \neq 0$

  ਜਾਂ $P(E \cap F) = P(F)\ (E|F)$, $P(F) \neq 0$
- ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ

  $P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$

  ਅਤੇ $P(E|F) = P(E)$, $P(F) \neq 0$

  $P(F|E) = P(F)$, $P(E) \neq 0$

- ਕੁੱਲ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ :
  ਮੰਨ ਲਉ $\{E_1, E_2, ...E_n\}$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਅਤੇ $E_1, E_2, ...E_n$, ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ&ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ A ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ, ਤਾਂ
  $P(A) = P(E_1)\, P(A|E_1) + P(E_2)\, P(A|E_2) + ... + P(E_n)\, P(A|E_n)$
- ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ: ਜੇਕਰ $E_1, E_2, ....E_n$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਵਿਭਾਜਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਜੋੜਵਾਰ ਨਾ ਜੁੜੇ ਹਨ ਅਤੇ $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ ਅਤੇ A ਇੱਕ ਗੈਰ&ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਤਾਂ

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)\,P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\,P(A|E_j)}$$

- ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਹੈ :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X | : | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| P(X) | : | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

  ਜਿੱਥੇ $p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ i = 1, 2, ..., n$

- ਮੰਨ ਲਉ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ $x_1, x_2, x_3, ... ,x_n$ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ ਹਨ। X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ μ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਸੰਖਿਆ $\sum_{i=1} x_i p_i$ ਹੈ। ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਨੂੰ X, ਦਾ ਪੂਰਵ-ਅਨੁਮਾਨ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸਨੂੰ E (X) ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਮੰਨ ਲਉ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਹਨ, ਜਿਹਨਾ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $p_1, p_2, ..., p_n$ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ μ = E (X), X ਦਾ ਮਧਮਾਨ ਹੈ।
  X, ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ var (X) ਜਾਂ $\sigma_x^2$ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ:

$$\sigma_x^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon)^2\, p(x_i)$$

  ਜਾਂ ਸਮਤੁਲਤਾ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $\sigma_x^2 = E(X ï\ \mu)^2$

  ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon)^2\, p(x_i)}$

  ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- var (X) = E $(X^2)$ ï $[E(X)]^2$

- ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਯਤਨਾਂ ਨੂੰ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਕਰਦੇ ਹਨ:
  - (i) ਯਤਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।
  - (ii) ਯਤਨ ਅਜ਼ਾਦ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।
  - (iii) ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਦੇ ਠੀਕ ਦੋ ਹੀ ਨਤੀਜੇ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ: ਸਫਲਤਾ ਅਤੇ ਅਸਫਲਤਾ।
  - (iv) ਕਿਸੇ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਰਾਬਰ ਰਹਿਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।
- ਦੋ ਪਦੀ ਵੰਡ $B(n, p)$, ਲਈ $P(X = x) = {}^nC_x\, q^{n-x} p^x$ ਹੈ।

## *ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ*

ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ (ਮੌਕਾ) ਦੇ ਮਾਪ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਸੰਦਰਭ ਦਾਤੇ ਤੇ ਦੈਵੀ ਸੁਖਾਂਤ ਨਾਟਕ ਤੇ ਇੱਕ ਵਿਆਖਿਆ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਜੇਰਨੀਮੋਂਕਾਰਡਨ (1501–1576) ਨੇ ਜੂਏ ਦੇ ਖੇਡ ਤੇ ਇੱਕ ਵੱਡੇ ਨਿਬੰਧ ਜਿਸਦਾ ਨਾਂ 'ਲਿਬਰ ਡੇ ਲੂਡੋ ਅਲਕਾਏ' ਲਿਖਿਆ ਸੀ ਜਿਹੜਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ 1663 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਇਸ ਨਿਬੰਧ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਦੱਸਿਆ ਹੈ। ਗੈਲੀਲੀਉ (1564–1642) ਨੇ ਤਿੰਨ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਹੈਰਾਨੀ ਵਾਲੀ ਟਿੱਪਣੀ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਗੈਲੀਲੀਉ ਨੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨ ਕੀਤਾ ਸੀ ਕਿ ਜਦੋਂ ਤਿੰਨ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 10 ਹੋਣਾ ਜੋੜ 9 ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਭਾਵੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜੋੜ ਨੂੰ 10 ਹੋਣ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜੋੜ 9 ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਇਸ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਯੋਗਦਾਨ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਹ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਲੇਖ ਸਤਾਰਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਦੋ ਮਹਾਨ ਗਣਿਤਗਾਂ ਪਾਸਕਲ (1623–1662) ਅਤੇ ਪਿਅਰੇ ਦ ਫ਼ਰਮਾਂ (1601–1665) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਏ ਪੱਤਰ-ਵਿਹਾਰ ਤੋਂ ਹੋਇਆ। ਇੱਕ ਫ਼ਰਾਂਸੀਸੀ ਜੁਆਰੀ ਸ਼ੇਵੇਲਿਅਰ ਡੇ ਮੇਰੇ ਨੇ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਤਰਕ ਅਤੇ ਜੂਏ ਵਿੱਚ ਜਮ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰੇਖਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰਵਿਰੋਧ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਲਈ ਪਾਸਕਲ ਤੋਂ ਪੁੱਛਿਆ। ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਹੱਲ ਲਈ 1654 ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਕੋਲ ਪਾਸਕਲ ਅਤੇ ਫ਼ਰਮਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਏ ਪੱਤਰ ਵਿਹਾਰ ਦੀ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਨੀਂਵ ਰੱਖੀ ਗਈ। ਪਾਸਕਲ ਨੇ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਫ਼ਰਮਾਂ ਨੇ ਸੰਚਯ ਦੀ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ।

ਮਹਾਨ ਹਾਲੈਂਡ ਨਿਵਾਸੀ ਵਿਗਿਆਨੀ ਹਿਯਜੇਨ (1629–1695) ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਅਤੇ ਫ਼ਰਮਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਏ ਪੱਤਰ ਵਿਹਾਰ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲੀ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਪੁਸਤਕ 'ਡੇ ਰੇਸ਼ਿਯੋਸਿਨਿਸ ਇਨ ਲੂਡੋ ਅਲਾਇ' ਨੂੰ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੰਯੋਗ ਦੇ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਰੋਚਕ ਪਰ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਸਮੱਸਿਆਂਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦਿੱਤੇ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਅੱਗੇ ਮਹਾਨ ਕਾਰਜ ਜੈਕਬ ਬਰਨੌਲੀ (1654&1705) ਨੇ ਇੱਕ ਪੁਸਤਕ 'ਆਰਸ ਕੰਜੇਕਟੇਂਡੀ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਿਹੜਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਭਤੀਜੇ ਨਿਕਾਲਸ ਬਰਨੌਲੀ ਨੇ 1713 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ

ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ 'ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਵੰਡ' ਦੀ ਖੋਜ ਦਾ ਸਿਹਰਾ ਵੀ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਅੱਗੇ ਖਾਸ ਕਾਰਜ 'ਅਬਰਾਹਮ ਡੇ ਮੋਵਿਅਰ' (1667 & 1754) ਦੀ ਪੁਸਤਕ 'ਦੀ ਡਾਕਟ੍ਰਿਨ ਆਫ ਚਾਂਸ' ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ 1718 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਥਾਮਸ ਬੇਜ਼ (1702&1761) ਨੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨਾਂ ਤੇ ਮਸ਼ਹੂਰ ਪ੍ਰਮੇਯ 'ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ' ਨੂੰ ਵਿਉਤਪੱਤੀ ਕਰਨ ਲਈ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ। ਮਸ਼ਹੂਰ ਖਗੋਲਸ਼ਾਸਤਰੀ 'ਪਿਅਰੇ ਸਾਈਮਨ ਡੇ ਲਾਪਲਾਸ' (1749&1827) ਨੇ ਵੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਕਾਰਜ ਕੀਤਾ ਅਤੇ 1812 ਵਿੱਚ ਇੱਕ 'ਥਿਊਰੀ ਐਨਾਲਿਟਿਕ ਡੇਸ ਪ੍ਰਾਬੇਬਿਨਿਟੀਜ਼' ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਰੂਸੀ ਗਣਿਤਗਾਂ ਸ਼ੇਬੀਸ਼ੇਵ (1821&1894), ਮਾਰਕੋਵ (1856&1922), ਏ. ਲਿਆਪੋਨੋ (1821&1918), ਅਤੇ ਏ. ਐਨ. ਕਾਲਮੋਗ੍ਰੋਵ (1903&1987) ਨੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਸਾਰਥਕ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ। ਕਾਲਮੋਗ੍ਰੋਵ ਨੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸਮੂਹ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ। ਜਿਸਨੂੰ 1933 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪੁਸਤਕ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਅਧਾਰਭੂਤ ਸਿਧਾਂਤ' ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਸ਼ਠ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ।

# ਉੱਤਰਮਾਲਾ

## ਅਭਿਆਸ 7.1

**1.** $-\frac{1}{2}\cos 2x$ **2.** $\frac{1}{3}\sin 3x$ **3.** $\frac{1}{2}e^{2x}$

**4.** $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$ **5.** $-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{4}{3}e^{3x}$ **6.** $\frac{4}{3}e^{3x}+x+C$

**7.** $\frac{x^3}{3}-x+C$ **8.** $\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$ **9.** $\frac{2}{3}x^3+e^x+C$

**10.** $\frac{x^2}{2}+\log|x|-2x+C$ **11.** $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$

**12.** $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}+C$ **13.** $\frac{x^3}{3}+x+C$

**14.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$ **15.** $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+C$

**16.** $x^2-3\sin x+e^x+C$ **17.** $\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

**18.** tan $x$ + sec $x$ + C **19.** tan $x$ ï $x$ + C

**20.** 2 tan $x$ ï 3 sec $x$ + C **21.** C

**22.** A

## ਅਭਿਆਸ 7.2

**1.** log (1 + $x^2$) + C **2.** $\frac{1}{3}(\log|x|)^3+C$ **3.** $\log|1+\log x|+C$

**4.** cos (cos $x$) + C **5.** $-\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b)+C$

**6.** $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C$ **7.** $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$

**8.** $\frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ **9.** $\frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}+C$ **10.** $2\log|\sqrt{x}-1|+C$

**11.** $\frac{2}{3}\sqrt{x+4}(x-8)+C$

**12.** $\frac{1}{7}(x^3-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{4}(x^3-1)^{\frac{4}{3}}+C$

**13.** $-\frac{1}{18(2+3x^3)^2}+C$

**14.** $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m}+C$

**15.** $-\frac{1}{8}\log|9-4x^2|+C$

**16.** $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$

**17.** $-\frac{1}{2e^{x^2}}+C$

**18.** $e^{\tan^{-1}x}+C$

**19.** $\log(e^x+e^{-x})+C$

**20.** $\frac{1}{2}\log(e^{2x}+e^{-2x})+C$

**21.** $\frac{1}{2}\tan(2x-3)-x+C$

**22.** $-\frac{1}{4}\tan(7-4x)+C$

**23.** $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2+C$

**24.** $\frac{1}{2}\log|2\sin x+3\cos x|+C$

**25.** $\frac{1}{(1-\tan x)}+C$

**26.** $2\sin\sqrt{x}+C$

**27.** $\frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{3}{2}}+C$

**28.** $2\sqrt{1+\sin x}+C$

**29.** $\frac{1}{2}(\log\sin x)^2+C$

**30.** ï $\log|1+\cos x|+C$

**31.** $\frac{1}{1+\cos x}+C$

**32.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+C$

**33.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x-\sin x|+C$

**34.** $2\sqrt{\tan x}+C$

**35.** $\frac{1}{3}(1+\log x)^3+C$

**36.** $\frac{1}{3}(x+\log x)^3+C$

**37.** $-\frac{1}{4}\cos(\tan^{-1}x^4)+C$

**38.** D

**39.** B

## ਅਭਿਆਸ 7.3

**1.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin(4x+10)+C$

**2.** $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x+C$

**3.** $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}\sin 12x+x+\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]+C$

**4.** $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}\cos^3(2x+1)+C$

**5.** $\frac{1}{6}\cos^6 x-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

**6.** $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+C$

**7.** $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 12x\right]+C$

**8.** $2\tan\frac{x}{2}-x+C$

**9.** $x-\tan\frac{x}{2}+C$

**10.** $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

**11.** $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C$

**12.** $x$ ï $\sin x$ + C

**13.** 2 ($\sin x$ + $x\cos\alpha$) + C

**14.** $-\frac{1}{\cos x+\sin x}+C$

**15.** $\frac{1}{6}\sec^3 2x-\frac{1}{2}\sec 2x+C$

**16.** $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$

**17.** $\sec x$ ï $\operatorname{cosec} x$ + C

**18.** $\tan x$ + C

**19.** $\log|\tan x|+\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

**20.** $\log|\cos x+\sin x|+C$

**21.** $\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}+C$

**22.** $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right|+C$

**23.** A

**24.** B

## ਅਭਿਆਸ 7.4

**1.** $\tan^{-1}x^3+C$

**2.** $\frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|+C$

**3.** $\log\left|\frac{1}{2-x+\sqrt{x^2-4x+5}}\right|+C$

**4.** $\frac{1}{5}\sin^{\text{ï}1}\frac{5x}{3}+C$

**5.** $\frac{3}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\,x^2+C$

**6.** $\frac{1}{6}\log\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right|+C$

**7.** $\sqrt{x^2-1}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

**8.** $\frac{1}{3}\log\left|x^3+\sqrt{x^6+a^6}\right|+C$

**9.** $\log\left|\tan x+\sqrt{\tan^2 x+4}\right|+C$

**10.** $\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$

**11.** $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{2}\right)+C$

**12.** $\sin^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right)+C$

**13.** $\log\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C$

**14.** $\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right)+C$

**15.** $\log\left|x-\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x-a)(x-b)}\right|+C$

**16.** $2\sqrt{2x^2+x-3}+C$

**17.** $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

**18.** $\frac{5}{6}\log\left|3x^2+2x+1\right|-\frac{11}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$

**19.** $6\sqrt{x^2-9x+20}+34\log\left|x-\frac{9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right|+C$

**20.** $-\sqrt{4x-x^2}+4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

**21.** $\sqrt{x^2+2x+3}+\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$

**22.** $\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x-5\right|+\frac{2}{\sqrt{6}}\log\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$

**23.** $5\sqrt{x^2+4x+10}-7\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$

**24.** B

**25.** B

## ਅਭਿਆਸ 7.5

**1.** $\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$

**2.** $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

**3.** $\log|x-1|-5\log|x-2|+4\log|x-3|+C$

**4.** $\frac{1}{2}\log|x-1|-2\log|x-2|+\frac{3}{2}\log|x-3|+C$

**5.** $4\log|x+2|-2\log|x+1|+C$

**6.** $\frac{x}{2}+\log|x|-\frac{3}{4}\log|1-2x|+C$

**7.** $\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

**8.** $\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$

**9.** $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$

**10.** $\frac{5}{2}\log|x+1|-\frac{1}{10}\log|x-1|-\frac{12}{5}\log|2x+3|+C$

**11.** $\frac{5}{3}\log|x+1|-\frac{5}{2}\log|x+2|+\frac{5}{6}\log|x-2|+C$

**12.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{3}{2}\log|x-1|+C$

**13.** $-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\tan^{-1}x+C$

**14.** $3\log|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$

**15.** $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

**16.** $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$

**17.** $\log\left|\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

**18.** $x+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-3\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

**19.** $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)+C$

**20.** $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^4-1}{x^4}\right|+C$

**21.** $\log\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)+C$

**22.** B

**23.** A

## ਅਭਿਆਸ 7.6

**1.** $-x\cos x+\sin x+C$

**2.** $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

**3.** $e^x(x^2-2x+2)+C$

**4.** $\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$

**5.** $\dfrac{x^2}{2}\log 2x - \dfrac{x^2}{4} + C$ **6.** $\dfrac{x^3}{3}\log x - \dfrac{x^3}{9} + C$

**7.** $\dfrac{1}{4}(2x^2-1)\sin^{-1}x + \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$ **8.** $\dfrac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

**9.** $(2x^2-1)\dfrac{\cos^{-1}x}{4} - \dfrac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$

**10.** $\left(\sin^{-1}x\right)^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x - 2x + C$

**11.** $-\left[\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x + x\right] + C$ **12.** $x\tan x + \log|\cos x| + C$

**13.** $x\tan^{-1}x - \dfrac{1}{2}\log(1+x^2) + C$ **14.** $\dfrac{x^2}{2}(\log x)^2 - \dfrac{x^2}{2}\log x + \dfrac{x^2}{4} + C$

**15.** $\left(\dfrac{x^3}{3} + x\right)\log x - \dfrac{x^3}{9} - x + C$ **16.** $e^x \sin x + C$

**17.** $\dfrac{e^x}{1+x} + C$ **18.** $e^x \tan\dfrac{x}{2} + C$

**19.** $\dfrac{e^x}{x} + C$ **20.** $\dfrac{e^x}{(x-1)^2} + C$

**21.** $\dfrac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + C$ **22.** $2x\tan^{-1}x - \log(1+x^2) + C$

**23.** A **24.** B

## ਅਭਿਆਸ 7.7

**1.** $\dfrac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\dfrac{x}{2} + C$ **2.** $\dfrac{1}{4}\sin^{-1}2x + \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + C$

**3.** $\dfrac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+6} + \log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + C$

**4.** $\dfrac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+1} - \dfrac{3}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right| + C$

**5.** $\dfrac{5}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + \dfrac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2} + C$

6. $\dfrac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-5}-\dfrac{9}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|+C$

7. $\dfrac{(2x-3)}{4}\sqrt{1+3x-x^2}+\dfrac{13}{8}\sin^{-1}\left(\dfrac{2x-3}{\sqrt{13}}\right)+C$

8. $\dfrac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x}-\dfrac{9}{8}\log\left|x+\dfrac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right|+C$

9. $\dfrac{x}{6}\sqrt{x^2+9}+\dfrac{3}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$

10. A  11. D

## ਅਭਿਆਸ 7.8

1. $\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$  2. $\dfrac{35}{2}$  3. $\dfrac{19}{3}$

4. $\dfrac{27}{2}$  5. $e-\dfrac{1}{e}$  6. $\dfrac{15+e^8}{2}$

## ਅਭਿਆਸ 7.9

1. 2  2. $\log\dfrac{3}{2}$  3. $\dfrac{64}{3}$

4. $\dfrac{1}{2}$  5. 0  6. $e^4$ (e ï 1)

7. $\dfrac{1}{2}\log 2$  8. $\log\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right)$  9. ´/2

10. ´/4  11. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$  12. ´/4

13. $\dfrac{1}{2}\log 2$  14. $\dfrac{1}{5}\log 6+\dfrac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

15. $\dfrac{1}{2}$(e ï 1)  16. 5 ï $\dfrac{5}{2}\left(9\log\dfrac{5}{4}-\log\dfrac{3}{2}\right)$

**17.** $\frac{\pi^4}{1024}+\frac{\pi}{2}+2$ **18.** 0 **19.** $3\log 2+\frac{3\pi}{8}$

**20.** $1+\frac{4}{´}-\frac{2\sqrt{2}}{´}$ **21.** D **22.** C

## ਅਭਿਆਸ 7.10

**1.** $\frac{1}{2}\log 2$ **2.** $\frac{64}{231}$ **3.** $\frac{´}{2}$ ï $\log 2$

**4.** $\frac{16\sqrt{2}}{15}(\sqrt{2}+1)$ **5.** $\frac{´}{4}$ **6.** $\frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{21+5\sqrt{17}}{4}$

**7.** $\frac{´}{8}$ **8.** $\frac{e^2(e^2-2)}{4}$ **9.** D

**10.** B

## ਅਭਿਆਸ 7.11

**1.** $\frac{´}{4}$ **2.** $\frac{´}{4}$ **3.** $\frac{´}{4}$ **4.** $\frac{´}{4}$

**5.** 29 **6.** 9 **7.** $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

**8.** $\frac{´}{8}\log 2$ **9.** $\frac{16\sqrt{2}}{15}$ **10.** $\frac{´}{2}\log\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{´}{2}$

**12.** $\pi$ **13.** 0 **14.** 0 **15.** 0

**16.** ï $\pi\log 2$ **17.** $\frac{a}{2}$ **18.** 5 **20.** C

**21.** C

## *ਅਧਿਆਇ 7 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**1.** $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2}{1-x^2}\right|+C$ **2.** $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

**3.** ï $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{(a-x)}{x}}+C$ **4.** ï $\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}+C$

**5.** $2\sqrt{x}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-6\log(1+x^{\frac{1}{6}})+C$

**6.** $-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{4}\log(x^2+9)+\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{3}+C$

**7.** $\sin a\log|\sin(x-a)|+x\cos a+C$

**8.** $\frac{x^3}{3}+C$

**9.** $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$

**10.** $-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

**11.** $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C$

**12.** $\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4)+C$

**13.** $\log\left(\frac{1+e^x}{2+e^x}\right)+C$

**14.** $\frac{1}{3}\tan^{-1}x-\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

**15.** $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

**16.** $\frac{1}{4}\log(x^4+1)+C$

**17.** $\frac{[f(ax+b)]^{n+1}}{a(n+1)}+C$

**18.** $\frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}}+C$

**19.** $\frac{2(2x-1)}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x-x^2}}{\pi}-x+C$

**20.** $-2\sqrt{1-x}+\cos^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}+C$

**21.** $e^x\tan x+C$

**22.** $-2\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+3\log|x+2|+C$

**23.** $\frac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\right]+C$

**24.** $-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{3}\right]+C$

**25.** $e^{\frac{\pi}{2}}$

**26.** $\frac{\pi}{8}$

**27.** $\frac{\pi}{6}$

**28.** $2\sin^{-1}\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$

**29.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

**30.** $\frac{1}{40}\log 9$

**31.** $\frac{\pi}{2}-1$

**32.** $\frac{\pi}{2}(\pi-2)$

**33.** $\frac{19}{2}$ **40.** $\frac{1}{3}\left(e^2-\frac{1}{e}\right)$

**41.** A **42.** B

**43.** D **44.** B

## ਅਭਿਆਸ 8.1

**1.** $\frac{14}{3}$ **2.** $16-4\sqrt{2}$ **3.** $\frac{32-8\sqrt{2}}{3}$

**4.** $12\pi$ **5.** $6\pi$ **6.** $\frac{´}{3}$

**7.** $\frac{a^2}{2}\left(\frac{´}{2}-1\right)$ **8.** $(4)^{\frac{2}{3}}$ **9.** $\frac{1}{3}$

**10.** $\frac{9}{8}$ **11.** $8\sqrt{3}$ **12.** A **13.** B

## ਅਭਿਆਸ 8.2

**1.** $\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **2.** $\left(\frac{2´}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**3.** $\frac{21}{2}$ **4.** 4 **5.** 8

**6.** B **7.** B

## *ਅਧਿਆਇ 8 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**1.** (i) $\frac{7}{3}$ (ii) 624.8

**2.** $\frac{1}{6}$ **3.** $\frac{7}{3}$ **4.** 9 **5.** 4

**6.** $\frac{8}{3}\frac{a^2}{m^3}$ **7.** 27 **8.** $\frac{3}{2}(´-2)$

**9.** $\frac{ab}{4}(\pi-2)$ **10.** $\frac{9}{2}$ **11.** 2 **12.** $\frac{1}{3}$

**13.** 7 **14.** $\frac{7}{2}$ **15.** $\frac{9\pi}{8}-\frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3\sqrt{2}}$

**16.** D **17.** C **18.** C **19.** B

## ਅਭਿਆਸ 9.1

**1.** ਕ੍ਰਮ 4; ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ **2.** ਕ੍ਰਮ 1; ਘਾਤ 1

**3.** ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1 **4.** ਕ੍ਰਮ 4; ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ

**5.** ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1 **6.** ਕ੍ਰਮ 3; ਘਾਤ 2

**7.** ਕ੍ਰਮ 3; ਘਾਤ 1 **8.** ਕ੍ਰਮ 1; ਘਾਤ 1

**9.** ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1 **10.** ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1

**11.** D **12.** A

## ਅਭਿਆਸ 9.2

**11.** D **12.** D

## ਅਭਿਆਸ 9.3

**1.** $y'' = 0$ **2.** $xy\,y'' + x\,(y')^2 - y\,y' = 0$

**3.** $y'' - y' - 6y = 0$ **4.** $y'' - 4y' + 4y = 0$

**5.** $y'' - 2y' + 2y = 0$ **6.** $2xyy' + x^2 = y^2$

**7.** $xy' - 2y = 0$ **8.** $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$

**9.** $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$ **10.** $(x^2 - 9)\,(y')^2 + x^2 = 0$

**11.** B **12.** C

## ਅਭਿਆਸ 9.4

**1.** $y = 2\tan\frac{x}{2} - x + C$ **2.** $y = 2\sin(x + C)$

**3.** $y = 1 + Ae^{-x}$ **4.** $\tan x \tan y = C$

**5.** $y = \log(e^x + e^{-x}) + C$ **6.** $\tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{3} + C$

**7.** $y = e^{cx}$ **8.** $x^{-4} + y^{-4} = C$

**9.** $y = x \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$

**10.** $\tan y = C(1 - e^x)$

**11.** $y = \frac{1}{4}\log\left[(x+1)^2(x^2+1)^3\right] - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$

**12.** $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{3}{4}$

**13.** $\cos\left(\frac{y-2}{x}\right) = a$

**14.** $y = \sec x$

**15.** $2y - 1 = e^x(\sin x - \cos x)$

**16.** $y - x + 2 = \log(x^2(y+2)^2)$

**17.** $y^2 - x^2 = 4$

**18.** $(x+4)^2 = y + 3$

**19.** $(63t + 27)^{\frac{1}{3}}$

**20.** 6.93%

**21.** Rs 1648

**22.** $\dfrac{2\log 2}{\log\left(\frac{11}{10}\right)}$

**23.** A

## ਅਭਿਆਸ 9.5

**1.** $(x-y)^2 = Cx\,e^{\frac{-y}{x}}$

**2.** $y = x\log|x| + Cx$

**3.** $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C$

**4.** $x^2 + y^2 = Cx$

**5.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\sqrt{2}y}{x-\sqrt{2}y}\right| = \log|x| + C$

**6.** $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$

**7.** $xy\cos\left|\frac{y}{x}\right| = C$

**8.** $x\left[1 - \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] = C\sin\left(\frac{y}{x}\right)$

**9.** $cy = \log\frac{y}{x} - 1$

**10.** $ye^{\frac{x}{y}} + x = C$

**11.** $\log(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} + \log 2$

**12.** $y + 2x = 3x^2 y$

**13.** $\cot\left(\frac{y}{x}\right) = \log|ex|$

**14.** $\cos\left(\frac{y}{x}\right) = \log|ex|$

**15.** $y = \frac{2x}{1-\log|x|}\ (x \neq 0,\ x \neq e)$

**16.** C

**17.** D

## ਅਭਿਆਸ 9.6

1. $y = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x) + C\,e^{-2x}$
2. $y = e^{-2x} + Ce^{-3x}$
3. $xy = \frac{x^4}{4} + C$
4. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + C$
5. $y = (\tan x - 1) + C\,e^{-\tan x}$
6. $y = \frac{x^2}{16}(4\log|x| - 1) + Cx^{-2}$
7. $y\log x = \frac{-2}{x}(1 + \log|x|) + C$
8. $y = (1+x^2)^{-1}\ \log|\sin x| + C(1+x^2)^{-1}$
9. $y = \frac{1}{x} - \cot x + \frac{C}{x\sin x}$
10. $(x + y + 1) = C\,e^y$
11. $x = \frac{y^2}{3} + \frac{C}{y}$
12. $x = 3y^2 + Cy$
13. $y = \cos x - 2\cos^2 x$
14. $y(1 + x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$
15. $y = 4\sin^3 x - 2\sin^2 x$
16. $x + y + 1 = e^x$
17. $y = 4 - x - 2\,e^x$
18. C
19. D

## ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

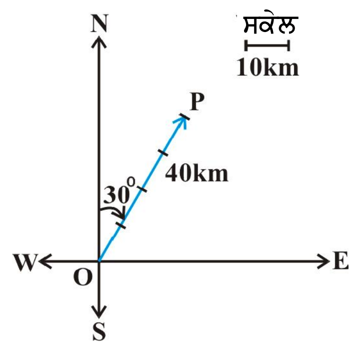
1. (i) ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1 (ii) ਕ੍ਰਮ 1; ਘਾਤ 3
   (iii) ਕ੍ਰਮ 4; ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ
3. $y' = \frac{2y^2 - x^2}{4xy}$
5. $(x + yy')^2 = (x - y)^2\,(1 + (y')^2)$
6. $\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = C$
8. $\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}$
9. $\tan^{-1} y + \tan^{-1}(e^x) = \frac{\pi}{2}$
10. $e^{\frac{x}{y}} = y + C$
11. $\log|x - y| = x + y + 1$
12. $y\,e^{2\sqrt{x}} = (2\sqrt{x} + C)$
13. $y\sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}\ (\sin x \neq 0)$
14. $y = \log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|, x \neq -1$

**15.** 31250 **16.** C

**17.** C **18.** C

## ਅਭਿਆਸ 10.1

**1.** ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ਲੋੜੀਂਦੇ ਵਿਸਥਾਪਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।




**2.** (i) ਸਕੇਲਰ (ii) ਵੈਕਟਰ (iii) ਸਕੇਲਰ (iv) ਸਕੇਲਰ (v) ਸਕੇਲਰ
(vi) ਵੈਕਟਰ

**3.** (i) ਸਕੇਲਰ (ii) ਸਕੇਲਰ (iii) ਵੈਕਟਰ (iv) ਵੈਕਟਰ (v) ਸਕੇਲਰ

**4.** (i) ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇੱਕੋ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਹਨ।

(ii) ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{d}$ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

(iii) ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਇੱਕੋ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ ਪਰ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ।

**5.** (i) ਸੱਚ (ii) ਝੂਠ (iii) ਝੂਠ (iv) ਝੂਠ

## ਅਭਿਆਸ 10.2

**1.** $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=\sqrt{62}, |\vec{c}|=1$

**2.** ਸੰਭਾਵੀ ਉੱਤਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਨੰਤ ਹੈ।

**3.** ਸੰਭਾਵੀ ਉੱਤਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਨੰਤ ਹੈ।

**4.** $x = 2, y = 3$ **5.** $-7$ ਅਤੇ 6; $-7\hat{i}$ ਅਤੇ $6\hat{j}$

**6.** $-4\hat{j}-\hat{k}$ **7.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$

**8.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$ **9.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

**10.** $\frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i}-\frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j}+\frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$

**13.** $-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$ **15.** (i) $-\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{4}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$ (ii) $-3\hat{i}+3\hat{k}$

**16.** $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ **18.** (C) **19.** (B), (C), (D)

## ਅਭਿਆਸ 10.3

**1.** $\frac{\pi}{4}$ **2.** $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$ **3.** 0

**4.** $\frac{60}{\sqrt{114}}$ **6.** $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}},\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$ **7.** $6|\vec{a}|^2+11\vec{a}.\vec{b}-35|\vec{b}|^2$

**8.** $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=1$ **9.** $\sqrt{13}$ **10.** 8

**12.** ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਕੋਈ ਵੀ ਵੈਕਟਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। **13.** $\frac{-3}{2}$

**14.** ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਲਵੋ।

**15.** $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{102}}\right)$ **18.** (D)

## ਅਭਿਆਸ 10.4

**1.** $19\sqrt{2}$ **2.** $\pm\frac{2}{3}\hat{i}\mp\frac{2}{3}\hat{j}\mp\frac{1}{3}\hat{k}$ **3.** $\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}$

**5.** $3,\frac{27}{2}$ **6.** ਜਾਂ $|\vec{a}|=0$ ਜਾਂ $|\vec{b}|=0$

**8.** ਨਹੀਂ, ਕੋਈ ਵੀ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਇੱਕੋ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਵੈਕਟਰਾਂ ਨੂੰ ਲਵੋ।

**9.** $\frac{\sqrt{61}}{2}$ **10.** $15\sqrt{2}$ **11.** (B) **12.** (C)

### *ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**1.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}$

**2.** $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1; \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

**3.** $\frac{-5}{2}\hat{i}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

**4.** ਨਹੀਂ, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉ।

**5.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$  **6.** $\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\hat{i}+\frac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}$  **7.** $\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{i}-\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$

**8.** $2:3$  **9.** $3\vec{a}+5\vec{b}$  **10.** $\frac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})$; $11\sqrt{5}$

**12.** $\frac{1}{3}(160\hat{i}-5\hat{j}-70\hat{k})$  **13.** $\lambda = 1$  **16.** (B)

**17.** (D)  **18.** (C)  **19.** (B)

## ਅਭਿਆਸ 11.1

**1.** $0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$  **2.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$  **3.** $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$

**5.** $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{17}$; $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}$; $\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$

## ਅਭਿਆਸ 11.2

**4.** $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$ ਜਿੱਥੇ $\lambda$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

**5.** $\vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-1}$ ਹੈ।

**6.** $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}$

**7.** $\vec{r} = (5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k})$

**8.** ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ : $\vec{r} = \lambda(5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$;

ਰੇਖਾ ਦੀ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ : $\frac{x}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$

**9.** ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ : $\vec{r} = 3\hat{i}-2\hat{j}-5\hat{k}+\lambda(11\hat{k})$

ਰੇਖਾ ਦੀ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ : $\frac{x-3}{0}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+5}{11}$

**10.** (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$, (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)$

**11.** (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

**12.** $p = \frac{70}{11}$ **14.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **15.** $2\sqrt{29}$

**16.** $\frac{3}{\sqrt{19}}$ **17.** $\frac{8}{\sqrt{29}}$

## ਅਭਿਆਸ 11.3

**1.** (a) 0, 0, 1; 2 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}; \frac{5}{\sqrt{14}}$ (d) 0, 1, 0; $\frac{8}{5}$

**2.** $\vec{r} \cdot \left(\frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right) = 7$

**3.** (a) $x + y - z = 2$ (b) $2x + 3y - 4z = 1$

(c) $(s - 2t)x + (3 - t)y + (2s + t)z = 15$

**4.** (a) $\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$ (b) $\left(0, \frac{18}{25}, \frac{24}{25}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (d) $\left(0, \frac{-8}{5}, 0\right)$

**5.** (a) $[\vec{r} - (\hat{i} - 2\hat{k})]\cdot(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0$; $x + y - z = 3$

(b) $[\vec{r} - (\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})]\cdot(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$; $x - 2y + z + 1 = 0$

**6.** (a) ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਤਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਨੰਤ ਹੋਵੇਗੀ।

(b) $2x + 3y - 3z = 5$

**7.** $\frac{5}{2}$, 5, $-5$ **8.** $y = 3$ **9.** $7x - 5y + 4z - 8 = 0$

**10.** $\vec{r}\cdot(38\hat{i} + 68\hat{j} + 3\hat{k}) = 153$ **11.** $x - z + 2 = 0$

**12.** $\cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{731}}\right)$

**13.** (a) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ (b) ਤਲ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਹਨ।

(c) ਤਲ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। (d) ਤਲ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

(e) $45^{\circ}$

**14.** (a) $\frac{3}{13}$ (b) $\frac{13}{3}$

(c) 3 (d) 2

## *ਅਧਿਆਇ 11 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**3.** $90°$ **4.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ **5.** $0^{\circ}$

**6.** $k = \frac{-10}{7}$ **7.** $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$

**8.** $x + y + z = a + b + c$ **9.** 9

**10.** $\left(0, \frac{17}{2}, \frac{-13}{2}\right)$ **11.** $\left(\frac{17}{3}, 0, \frac{23}{3}\right)$ **12.** (1, ï 2, 7)

**13.** $7x$ ï $8y + 3z + 25 = 0$ **14.** $p = \frac{3}{2}$ ਜਾਂ $\frac{11}{6}$

**15.** $y$ ï $3z + 6 = 0$ **16.** $x + 2y$ ï $3z$ ï $14 = 0$

**17.** $33x + 45y + 50z$ ï $41 = 0$ **18.** 13

**19.** $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(-3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})$

**20.** $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ **22.** D

**23.** B

## ਅਭਿਆਸ 12.1

**1.** (0, 4) ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ Z = 16

**2.** (4, 0) ਤੇ ਘੱਟ-ਘੱਟ Z = ï 12

**3.** $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ $Z = \frac{235}{19}$

**4.** $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ Z = 7

5. (4, 3) ਤੇ Z = 18
6. (6, 0) ਅਤੇ (0, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ Z = 6.
7. (60, 0) ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ Z = 300;

   (120, 0) ਅਤੇ (60, 30) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ Z = 600;
8. (0, 50) ਅਤੇ (20, 40) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ Z = 100.

   (0, 200) ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ Z = 400
9. Z ਦਾ ਕੋਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।
10. ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਸੰਗਤ ਖੇਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ Z ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

## ਅਭਿਆਸ 12.2

1. $\left(\frac{8}{3},0\right)$ ਅਤੇ $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ = Rs 160 .
2. ਕੇਕਾਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ = 30 ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਅਤੇ 10 ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ।
3. (i) 4 ਟੈਨਿਸ ਰੈਕਟ ਅਤੇ 12 ਕ੍ਰਿਕਟ ਦੇ ਬੱਲੇ

   (ii) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 200
4. ਨੱਟ ਦੇ ਤਿੰਨ ਪੈਕਿਟ ਅਤੇ ਬੋਲਟ ਦੇ ਤਿੰਨ ਪੈਕਿਟ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 73.50
5. 30 ਪੈਕਿਟ A ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪੇਚ ਅਤੇ 20 ਪੈਕਿਟ B ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪੇਚਾਂ ਦੇ ਅਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 410
6. 4 ਅਧਾਰ ਲੈਂਪ ਅਤੇ 4 ਕਾਠ ਦੇ ਢੱਕਣ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 32
7. A ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 8 ਚਿੰਨ੍ਹ ਅਤੇ B ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 20 ਚਿੰਨ੍ਹ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 160
8. 200 ਡੈਸਕਟਾਪ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਅਤੇ 50 ਪੋਰਟੇਬਲ ਨਮੂਨੇ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 1150000
9. $Z = 4x + 6y$ ਦਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਅਨੁਮਾਨ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ $3x + 6y \geq 80$, $4x + 3y \geq 100$, $x \geq 0$ ਅਤੇ $y \geq 0$, ਜਿੱਥੇ $x$ ਅਤੇ $y$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੋਜ $F_1$ ਅਤੇ $F_2$ ਦੀ ਇਕਾਈਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ; ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਮੁੱਲ = Rs 104
10. ਰਸਾਇਣਕ ਖਾਦ $F_1$ ਦੇ 100 kg ਅਤੇ ਰਸਾਇਣਕ ਖਾਦ $F_2$ ਦੇ 80 kg; ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ = Rs 1000
11. (D)

## *ਅਧਿਆਇ 12 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

1. P ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 40 ਪੈਕਿਟ ਅਤੇ Q ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 15 ਪੈਕਿਟ; ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਨੁਮਾਨ = 285 ਇਕਾਈ
2. P ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 3 ਬੈਗ ਅਤੇ Q ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 6 ਬੈਗ; ਘੋਲ ਦੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਕੀਮਤ = Rs 1950
3. ਘੋਲ ਦੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਕੀਮਤ Rs 112 (X ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ 2kg ਅਤੇ Y ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ 4 kg).
5. ਐਗਜ਼ੀਕਿਊਟਿਵ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀ 40 ਟਿਕਟਾਂ ਅਤੇ ਇਕੋਨਾਮੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀ 160 ਟਿਕਟਾਂ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 136000.
6. A ਤੋਂ : 10, 50 ਅਤੇ 40 ਇਕਾਈ; B ਤੋਂ : 50, 0 ਅਤੇ 0 ਇਕਾਈ D, E ਅਤੇ F ਤੱਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਕੀਮਤ = Rs 510
7. A ਤੋਂ : 500, 3000 ਅਤੇ 3500 ਲੀਟਰ; B ਤੋਂ 4000, 0 ਅਤੇ 0 ਲੀਟਰ ਤੇਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ; D, E ਅਤੇ F ਨੂੰ ਭੇਜੀ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਕੀਮਤ = Rs 4400
8. P ਦੇ 40 ਬੈਗ ਅਤੇ Q ਦੇ 100 ਬੈਗ; ਨਾਈਟ੍ਰੋਜ਼ਨ ਦੀ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਰਾਸ਼ੀ = 470 kg.
9. P ਦੇ 140 ਬੈਗ ਅਤੇ Q ਦੇ 50 ਬੈਗ; ਨਾਈਟ੍ਰੋਜ਼ਨ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਰਾਸ਼ੀ = 595 kg.
10. A ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ 800 ਗੁੱਡੀਆਂ ਅਤੇ B ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ 400 ਗੁੱਡੀਆਂ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 16000

## ਅਭਿਆਸ 13.1

1. $P(E|F) = \frac{2}{3}, P(F|E) = \frac{1}{3}$     2. $P(A|B) = \frac{16}{25}$
3. (i) 0.32    (ii) 0.64    (iii) 0.98
4. $\frac{11}{26}$
5. (i) $\frac{4}{11}$    (ii) $\frac{4}{5}$    (iii) $\frac{2}{3}$
6. (i) $\frac{1}{2}$    (ii) $\frac{3}{7}$    (iii) $\frac{6}{7}$
7. (i) 1    (ii) 0
8. $\frac{1}{6}$    9. 1    10. (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{9}$
11. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$    (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$    (iii) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

**12.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}$ **13.** $\frac{5}{9}$

**14.** $\frac{1}{15}$ **15.** 0 **16.** C **17.** D

## ਅਭਿਆਸ 13.2

**1.** $\frac{3}{25}$ **2.** $\frac{25}{102}$ **3.** $\frac{44}{91}$

**4.** A ਅਤੇ B ਆਜ਼ਾਦ ਹਨ।

**6.** E ਅਤੇ F ਆਜ਼ਾਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

**7.** (i) $p=\frac{1}{10}$ (ii) $p=\frac{1}{5}$

**8.** (i) 0.12 (ii) 0.58 (iii) 0.3 (iv) 0.4

**9.** $\frac{3}{8}$ **10.** A ਅਤੇ B ਆਜ਼ਾਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

**11.** (i) 0.18 (ii) 0.12 (iii) 0.72 (iv) 0.28

**12.** $\frac{7}{8}$ **13.** (i) $\frac{16}{81}$, (ii) $\frac{20}{81}$, (iii) $\frac{40}{81}$

**14.** (i) $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{1}{2}$ **15.** (i), (ii) **16.** (a) $\frac{1}{5}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$

**17.** D **18.** B

## ਅਭਿਆਸ 13.3

**1.** $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{9}{13}$ **4.** $\frac{12}{13}$

**5.** $\frac{22}{133}$ **6.** $\frac{4}{9}$ **7.** $\frac{1}{52}$ **8.** $\frac{1}{4}$

**9.** $\frac{2}{9}$ **10.** $\frac{8}{11}$ **11.** $\frac{5}{34}$ **12.** $\frac{11}{50}$

**13.** A **14.** C

## ਅਭਿਆਸ 13.4

1. (ii), (iii) ਅਤੇ (iv)

2. X = 0, 1, 2; ਹਾਂ

3. X = 6, 4, 2, 0

4. (i)

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

(ii)

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

(iii)

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ |

5. (i)

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

(ii)

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P(X) | $\frac{25}{36}$ | $\frac{11}{36}$ |

6.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{256}{625}$ | $\frac{256}{625}$ | $\frac{96}{625}$ | $\frac{16}{625}$ | $\frac{1}{625}$ |

7.

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{9}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

8. (i) $k = \frac{1}{10}$ (ii) $P(X < 3) = \frac{3}{10}$ (iii) $P(X > 6) = \frac{17}{100}$

(iv) $P(0 < X < 3) = \frac{3}{10}$

**9.** (a) $k = \frac{1}{6}$ (b) $P(X < 2) = \frac{1}{2}, P(X \le 2) = 1, P(X \ge 2) = \frac{1}{2}$

**10.** 1.5 **11.** $\frac{1}{3}$ **12.** $\frac{14}{3}$

**13.** Var(X) = 5.833, S.D = 2.415

**14.**

| X | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{3}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{3}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

ਮੱਧਮਾਨ = 17.53, Var(X) = 4.78 ਅਤੇ S.D(X) = 2.19

**15.** E(X) = 0.7 ਅਤੇ Var (X) = 0.21 **16.** B **17.** D

## ਅਭਿਆਸ 13.5

**1.** (i) $\frac{3}{32}$ (ii) $\frac{7}{64}$ (iii) $\frac{63}{64}$

**2.** $\frac{25}{216}$ **3.** $\left(\frac{29}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9$

**4.** (i) $\frac{1}{1024}$ (ii) $\frac{45}{512}$ (iii) $\frac{243}{1024}$

**5.** (i) $(0.95)^5$ (ii) $(0.95)^4 \times 1.2$ (iii) 1 ï $(0.95)^4 \times 1.2$

(iv) 1 ï $(0.95)^5$

**6.** $\left(\frac{9}{10}\right)^4$ **7.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left[20C_{12} + {}^{20}C_{13} + ... + {}^{20}C_{20}\right]$

**9.** $\frac{11}{243}$

**10.** (a) $1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{50}$ (b) $\frac{1}{2}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$ (c) $1 - \frac{149}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$

**11.** $\frac{7}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^5$ **12.** $\frac{35}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^4$ **13.** $\frac{22 \times 9^3}{10^{11}}$

**14.** C **15.** A

## *ਅਧਿਆਇ 13 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ*

**1.** (i) 1 (ii) 0

**2.** (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

**3.** $\frac{20}{21}$

**4.** $1-\sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.9)^r (0.1)^{10-r}$

**5.** (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (ii) $7\left(\frac{2}{5}\right)^4$ (iii) $1-\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (iv) $\frac{864}{3125}$

**6.** $\frac{5^{10}}{2\times 6^9}$

**7.** $\frac{625}{23328}$

**8.** $\frac{2}{7}$

**9.** $\frac{31}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^4$

**10.** $n \geq 4$

**11.** $\frac{-91}{54}$

**12.** $\frac{1}{15}, \frac{2}{5}, \frac{8}{15}$

**13.** $\frac{14}{29}$

**14.** $\frac{3}{16}$

**15.** (i) 0.5 (ii) 0.05

**16.** $\frac{16}{31}$

**17.** A

**18.** C

**19.** B

# ਪੂਰਕ ਪਾਠ ਸਮਗਰੀ

## ਅਧਿਆਇ 7

### 7.6.3. $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\, dx.$

ਅਸੀਂ ਅਚਲ A ਅਤੇ B ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੁਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$px + q = \mathrm{A}\left[\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)\right]+\mathrm{B}$$

$$= \mathrm{A}(2ax + b) + \mathrm{B}$$

ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਵਿੱਚ $x$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ µ

$$2a\mathrm{A} = p \text{ ਅਤੇ } \mathrm{A}b + \mathrm{B} = q$$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, A ਅਤੇ B ਦੇ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਇਨਟੇਗਰਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈµ

$$\mathrm{A}\int (2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx+\mathrm{B}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$= \mathrm{AI}_1+\mathrm{BI}_2, \text{ ਜਿੱਥੇ}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int (2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\, dx \text{ ਹੈ।}$$

$ax^2 + bx + c = t$, ਰੱਖੋ। ਤਾਂ $(2ax + b)dx = dt$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $$\mathrm{I}_1 = \frac{2}{3}(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}+\mathrm{C}_1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $$\mathrm{I}_2 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪੰਨੇ 328 ਤੇ 7.6.2 ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕੀਤੇ ਇਨਟੇਗਰਲ ਸੂਤਰ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਆਖਿਰਕਾਰ ਪਤਾ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25 . $\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$x = A\left[\frac{d}{dx}\left(1+x-x^2\right)\right]+B$$

$$= A(1-2x)+B$$

ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਵਿੱਚ, $x$ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $-2A=1$ ਅਤੇ $A+B=0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, ਅਸੀਂ $A=-\frac{1}{2}$ ਅਤੇ $B=\frac{1}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਇਨਟੇਗਰਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2 \qquad (1)$$

$I_1 = \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

$1+x-x^2=t$ ਰੱਖੋ। ਤਾਂ $(1-2x)dx=dt$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $I_1 = \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C_1$

$=\frac{2}{3}\left(1+x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C_1$, ਜਿੱਥੇ $C_1$ ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ।

ਅੱਗੇ, $I_2=\int\sqrt{1+x-x^2}\,dx$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਇਹ ਇਨਟੇਗਰਲ $= \int\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$

$x-\frac{1}{2}=t$ ਰੱਖੋ। ਤਾਂ $dx=dt$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $\qquad I_2 = \int\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-t^2}\,dt$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{\frac{5}{4}-t^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\sin^{-1}\frac{2t}{\sqrt{5}} + C_2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2x-1)}{2}\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{5}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2$$

$$= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{1+x-x^2} + \frac{5}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2,$$

ਜਿੱਥੇ $C_2$ ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ।

(1) ਵਿੱਚ $I_1$ ਅਤੇ $I_2$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ μ

$$\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{1+x-x^2}$$

$$+\frac{5}{16}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C, \text{ ਜਿੱਥੇ}$$

$$C = -\frac{C_1+C_2}{2} \text{ ਇੱਕ ਹੋਰ ਅਚਲ ਹੈ।}$$

ਅਭਿਆਸ 7.7 ਦੇ ਆਖਿਰ ਵਿੱਚ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰੋ :

**12.** $x\sqrt{x+x^2}$ **13.** $(x+1)\sqrt{2x^2+3}$ **14.** $(x+3)\sqrt{3-4x-x^2}$

ਉੱਤਰ

**12.** $\frac{1}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{8} + \frac{1}{16}\log|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}|+C$

**13.** $\frac{1}{6}(2x^2+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{2}\sqrt{2x^2+3} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right| + C$

**14.** $-\frac{1}{3}(3-4x-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right) + \frac{(x+2)\sqrt{3-4x-x^2}}{2} + C$

ਅਧਿਆਇ 10

## 10.7 ਤੀਹਰੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ

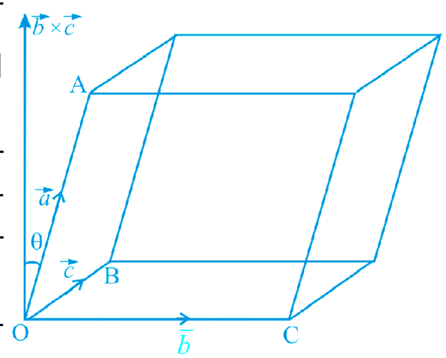
ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਹਨ। $\vec{a}$ ਅਤੇ $(\vec{b}\times\vec{c})$ ਦੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਭਾਵ, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ਨੂੰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਦਾ ਇਸ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਤੀਹਰੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ (ਜਾਂ $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$) ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : μ

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

### ਪ੍ਰੇਖਣ

**1.** ਕਿਉਂਕਿ $(\vec{b}\times\vec{c})$ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਭਾਵ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ।

**2.** ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਤੀਹਰੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤੋਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜੁੜਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ ਫ਼ਲਕ ਦਾ ਆਇਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.28)।




ਚਿੱਤਰ 10.28

ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ, ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ ਫ਼ਲਕ ਦੇ ਅਧਾਰ ਨੂੰ ਬਨਾਉਣ ਵਾਲੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $|\vec{b}\times\vec{c}|$ ਹੈ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਸਮਿਲਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਤੱਲ ਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $\vec{a}$ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਪਣ ਹੀ ਇਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਹੈ, ਜਿਹੜੀ $\vec{b}\times\vec{c}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $\vec{a}$ ਦਾ ਘਟਕ ਹੈ। ਭਾਵ ਇਹ $\dfrac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{|(\vec{b}\times\vec{c})|}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ ਫ਼ਲਕ ਦਾ ਆਇਤਨ

$$\frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{|(\vec{b}\times\vec{c})|}\,|\vec{b}\times\vec{c}| = |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})| \text{ ਹੈ।}$$

**3.** ਜੇਕਰ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$, ਹੈ, ਤਾਂ

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (b_2c_3 - b_3c_2)\hat{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\hat{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{k}$$

ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**4.** ਜੇਕਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਹਨ, ਤਾਂ

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

(ਤਿੰਨਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਚੱਕਰੀ ਕ੍ਰਮ ਬਦਲਣ ਤੋਂ ਤੀਹਰੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਦਲਾਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਪਾਠਕ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ µ

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + b_3(a_2c_1 - a_1c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਪਾਠਕ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$ ਹੈ।

**5.** ਤੀਹਰੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ ਵਿੱਚ, ਡੋਟ (dot) ਅਤੇ ਕਰਾਸ (cross) ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ,

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}\,] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}\,] = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$$

**6.** $= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,] =$ ï $[\vec{a},\, \vec{c},\vec{b}\,]$. ਅਸਲ ਵਿੱਚ,

$$= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,] = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$= \vec{a}.(\text{ï } \vec{c}\times\vec{b})$$

$$= \text{ï } (\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b}))$$

$$= \text{ï } \left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]$$

**7.** $[\vec{a},\vec{a},\vec{b}\,]=0.$ ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ

$$[\vec{a},\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{a},]$$

$$= [\vec{b},\vec{a},\vec{a}]$$

$$= \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{a})$$

$$= \vec{b}.\vec{0}=0. \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}\,)$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ 7 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਨਤੀਜਾ, ਦੋਵੇਂ ਬਰਾਬਰ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਹਾਲਤਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤੇ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

### 10-7-1 ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਸਮਤਲੀ ਹੋਣਾ

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ , $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ , $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਾਂਤਰ ਵੈਕਟਰ ਹਨ, ਤਾਂ $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{0}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਜੇਕਰ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ $\vec{b}\times\vec{c}$ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ ਹੈ।

ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}\times\vec{c}$ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋਵੇਂ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਵੈਕਟਰ ਹਨ, ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}\times\vec{c}$ ਦੋਵੇਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਵੈਕਟਰ ਹਨ। ਪਰ $\vec{b}\times\vec{c}$ ਦੋਵੇਂ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\vec{a}$] $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਇਹ ਸਮਤਲੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ $\vec{a}=0$ ਹੈ, ਤਾਂ $\vec{a}$ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$] ਦੇ ਸਮਤਲੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੇਕਰ $(\vec{b}\times\vec{c})=0$ ਹੈ, ਤਾਂ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਾਂਤਰ ਵੈਕਟਰ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹੋਣਗੇ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਜਿਹੜਾ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਵੀ ਇਸ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਚਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸਮਤਲਤਾ ਦੀ ਚਰਚਾ, ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਸਮਤਲਤਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ, ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ A, B, C ਅਤੇ D ਸਮਤਲੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{AD}$ ਸਮਤਲੀ ਹੋਣ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-10.$

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}=0.$

ਇਸ ਲਈ : ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਵੈਕਟਰ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਜੇਕਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=\lambda\hat{i}+7\hat{j}+3\hat{k}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ, ਤਾਂ $\lambda$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$,

ਅਰਥਾਤ $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ \lambda & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow \quad 1(-3+7) - 3(6+\lambda) + 1(14+\lambda) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = 0.$

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰਾਂ $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}, -(\hat{j}+\hat{k}), 3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $4(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ A, B, C ਅਤੇ D ਸਮਤਲੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ A, B, C ਅਤੇ D ਸਮਤਲੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਤਿੰਨੋਂ ਵੈਕਟਰ $\overline{AB}, \overline{AC}$ ਅਤੇ $\overline{AD}$ ਸਮਤਲੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਅਰਥਾਤ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $\overline{AB} = -(\hat{j}+\hat{k}) - (4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -4\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}$

$\overline{AC} = (3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}) - (4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$

ਅਤੇ $\overline{AD} = 4(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) - (4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -8\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

ਇਸ ਲਈ, A, B, C ਅਤੇ D ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ:

$$\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = (\vec{a}+\vec{b}).((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a}))$$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})$$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a})$$

(ਕਿਉਂਕਿ $\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}$ ਹੈ।)

$$=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right]+\left[\vec{a},\vec{c},\vec{a}\right]+\left[\vec{b},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{b},\vec{a}\right]+\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]$$

$=2\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$ (ਕਿਉਂ?)

**ਉਦਾਹਰਣ 31.** ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

**ਹੱਲ :** ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ :

$$\begin{aligned}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}\right] &= \vec{a}.(\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{d}))\\ &= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d})\\ &= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{d})\\ &= \left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right]\end{aligned}$$

## ਅਭਿਆਸ 10.5

**1.** ਜੇਕਰ $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ਹੈ, ਤਾਂ $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ਉੱਤਰ : 24)

**2.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

**3.** ਜੇਕਰ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ਅਤੇ $\hat{i}+\lambda\hat{j}-3\hat{k}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ, ਤਾਂ $\lambda$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ਉੱਤਰ $\lambda$ = 15)

**4.** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}$ ਅਤੇ $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ ਹੈ। ਤਾਂ,

(a) ਜੇਕਰ $c_1=1$ ਅਤੇ $c_2=2$ ਹਨ, ਤਾਂ $c_3$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਤੋਂ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹੋ ਜਾਣ।

(ਉੱਤਰ $c_3 = 2$)

(b) ਜੇਕਰ $c_2 = -1$ ਅਤੇ $c_3 = 1$ ਹਨ, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $c_1$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਸਮਤਲੀ ਨਹੀਂ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

**5.** ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰਾਂ $4\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k}, 2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}, 3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $5\hat{i}+8\hat{j}+5\hat{k}$ ਵਾਲੇ ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

**6.** ਜੇਕਰ ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ A(3, 2, 1), B(4, $x$, 5), C(4, 2, $-2$) ਅਤੇ D(6, 5, $-1$) ਸਮਤਲੀ ਹਨ, ਤਾਂ $x$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਉੱਤਰ $x = 5$)

**7.** ਜੇਕਰ $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}$ ਅਤੇ $\vec{c}+\vec{a}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹੋਣਗੇ।