गणित भाग-I

इयत्ता नववी

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास–२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी–४ दिनांक २५.४.२०१६ अन्वये स्थापन करण्यात आलेल्या समन्वय समितीच्या दि.३.३.२०१७ रोजीच्या बैठकीमध्ये हे पाठ्यपुस्तक निर्धारित करण्यास मान्यता देण्यात आली आहे.

गणित

भाग - I

इयत्ता नववी

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे – ४११ ००४.

शेजारचा 'क्यू आर कोड' तसेच या पुस्तकात इतर ठिकाणी दिलेले 'क्यू आर कोड' स्मार्टफोनचा वापर करून स्कॅन करता येतात. स्कॅन केल्यावर आपल्याला या पाठ्यपुस्तकाच्या अध्ययन-अध्यापनासाठी उपयुक्त लिंक/लिंक्स (URL) मिळतील.

प्रथमावृत्ती : 2017

गणित विषयतज्ज्ञ समिती

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. दादासो सरडे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती लता टिळेकर (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

प्रमुख संयोजक : **उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले**
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

मुखपृष्ठ व सजावट : धनश्री मोकाशी, पुणे.
संगणकीय आरेखन : संदीप कोळी, मुंबई.
चित्रकार : धनश्री मोकाशी.

गणित विषय – राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती पूजा जाधव
श्री. प्रमोद ठोंबरे
श्री. राजेंद्र चौधरी
श्री. आण्णापा परीट
श्री. श्रीपाद देशपांडे
श्री. बन्सी हावळे
श्री. उमेश रेळे
श्री. चंदन कुलकर्णी
श्रीमती अनिता जावे
श्रीमती बागेश्री चव्हाण
श्री. कल्याण कडेकर
श्री. संदेश सोनावणे
श्री. सुजित शिंदे
डॉ. हनुमंत जगताप
श्री. प्रताप काशिद
श्री. काशिराम बाविसाने
श्री. पप्पु गाडे
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री. राम व्हन्याळकर
श्री. अन्सार शेख
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्री. गणेश कोलते
श्री. सुरेश दाते
श्री. प्रकाश झेंडे
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी
श्री. सूर्यकांत शहाणे
श्री. प्रकाश कापसे
श्री. सलीम हाश्मी
श्रीमती आर्या भिडे
श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. लक्ष्मण दावणकर
श्री. सुधीर पाटील
श्री. राजाराम बंडगर
श्री. प्रदीप गोडसे
श्री. रवींद्र खंदारे
श्री. सागर सकुडे

श्रीमती प्राजक्ती गोखले (निमंत्रित सदस्य)
श्री. वि. दि. गोडबोले (निमंत्रित सदस्य)
श्रीमती तरूबेन पोपट (निमंत्रित सदस्य)

निर्मिती : **सच्चितानंद आफळे**
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहा. निर्मिती अधिकारी

अक्षरजुळणी : गणित विभाग,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

कागद : ७० जी.एस.एम. क्रीमवोव्ह

मुद्रणादेश : N/PB/2017-18/25,000

मुद्रक : SAKAL PAPERS PVT. LTD., KOLHAPUR

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ,
प्रभादेवी, मुंबई २५.

भारताचे संविधान

उद्देशिका

आम्ही, भारताचे लोक, भारताचे एक सार्वभौम समाजवादी धर्मनिरपेक्ष लोकशाही गणराज्य घडविण्याचा व त्याच्या सर्व नागरिकांस:

सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक **न्याय;**
विचार, अभिव्यक्ती, विश्वास, श्रद्धा
व उपासना यांचे **स्वातंत्र्य;**
दर्जाची व संधीची **समानता;**

निश्चितपणे प्राप्त करून देण्याचा
आणि त्या सर्वांमध्ये व्यक्तीची प्रतिष्ठा
व राष्ट्राची एकता आणि एकात्मता
यांचे आश्वासन देणारी **बंधुता**
प्रवर्धित करण्याचा संकल्पपूर्वक निर्धार करून;

आमच्या संविधानसभेत
आज दिनांक सव्वीस नोव्हेंबर, १९४९ रोजी
याद्वारे हे संविधान अंगीकृत आणि अधिनियमित करून स्वत:प्रत अर्पण करीत आहोत.

राष्ट्रगीत

जनगणमन-अधिनायक जय हे
भारत-भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत-भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रांनो,

इयत्ता नववीच्या वर्गात तुमचे स्वागत !

प्राथमिक शिक्षणाचा अभ्यासक्रम पूर्ण करून तुम्ही माध्यमिक स्तरावरील अभ्यासाला सुरूवात करत आहात. इयत्ता आठवीपर्यंत गणिताच्या अभ्यासासाठी एकच पाठ्यपुस्तक होते, आता गणित भाग I व गणित भाग II अशा दोन पाठ्यपुस्तकांचा अभ्यास करायचा आहे.

गणित भाग I या पाठ्यपुस्तकात संख्याज्ञान, बीजगणित, याशिवाय व्यावहारिक गणित, अर्थनियोजन आणि माहितीचे वर्गीकरण या क्षेत्रांतील घटकांची ओळख होईल. हा भाग सगळ्या विद्यार्थ्यांना अनेक क्षेत्रांत उपयोगी पडणार आहे. बीजगणित व सांख्यिकीमधील संबोध उच्चशिक्षणातील अभ्यासासाठी पायाभूत आहेत.

या पाठ्यपुस्तकात संकल्पना समजून घेण्यासाठी विविध कृती दिल्या आहेत. उजळणीसाठी तसेच सरावसंचांमध्येही कृती दिल्या आहेत. त्या कृती तुम्ही करायच्या आहेत. इंटरनेटच्या मदतीने पुस्तकातील संकल्पनांची आणखी काही माहिती व उदाहरणे मिळतात का, तेही पाहायचे आहे. कृती करताना, उदाहरणे सोडवताना, निष्कर्ष काढताना तुमच्या मित्रमैत्रिणींशी चर्चा करायची आहे. पाठ्यपुस्तकाचे सखोल वाचन, कृतियुक्त अध्ययन व सराव या त्रिसूत्रीतून ही गणित यात्रा तुम्ही आनंदात पार कराल यात शंका नाही.

चला तर मग ! आता शिक्षक, पालक, मित्र-मैत्रिणी, इंटरनेट या सगळ्यांना घेऊन गणिताचा अभ्यास करूया. या अभ्यासासाठी तुम्हांला अनेक शुभेच्छा !

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे

पुणे
दिनांक : २८ एप्रिल २०१७, अक्षय्य तृतीया
भारतीय सौर दिनांक : ८ वैशाख १९३९

इयत्ता ९ वी गणित भाग I अभ्यासक्रमातून खालील क्षमता विद्यार्थ्यांमध्ये विकसित होतील.

क्षेत्र	घटक	क्षमता विधाने
1. संख्याज्ञान	1.1 संच 1.2 वास्तव संख्या व वर्गकरणी	• संख्याप्रणालीतील संच व उपसंच ठरवता येणे. • सांत व अनंत संच ओळखता येणे. • संच दाखवण्यासाठी वेनचित्राचा उपयोग करता येणे. • संचावर आधारित उदाहरणे तयार करता येणे. • संख्यारेषेवरील प्रत्येक बिंदूशी निगडीत एक वास्तव संख्या आहे हे समजणे. • वर्गकरणीच्या संख्या ओळखून त्यावर क्रिया करता येणे.
2. बीजगणित	2.1 बहुपदी 2.2 दोन चलांतील रेषीय समीकरणे	• बहुपदीची ओळख व त्यांच्यावरील क्रिया करता येणे. • दोन चलांचा उपयोग करून शाब्दिक उदाहरणे सोडवता येणे.
3. **व्यावहारिक गणित**	3.1 अर्थनियोजन 3.2 गुणोत्तर प्रमाण	• विविध प्रकारची कर आकारणी समजणे व कर आकारणी करता येणे. • पगारदारांची आयकर गणना करता येणे. • समान गुणोत्तराच्या सिद्धांताचा उपयोग करता येणे. • समप्रमाण व व्यस्तप्रमाण यावर आधारित शाब्दिक उदाहरणे सोडवता येणे.
4.माहितीचे व्यवस्थापन (सांख्यिकी)	4.1 वारंवारता सारणी 4.2 केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे	• वर्गीकृत व अवर्गीकृत वारंवारता सारणी तयार करता येणे. • संचित वारंवारता सारणी तयार करता येणे. • दिलेल्या सामग्रीची केंद्रीय प्रवृत्ती ओळखून त्याच्या परिमाणांचा उपयोग करता येणे.

शिक्षकांसाठी सूचना

इयत्ता नववी भाग-I या पुस्तकात आलेल्या मूलभूत संकल्पना, मूर्ताकडून अमूर्ताकडे या पद्धतीने विकसित केलेले संबोध, अर्थशास्त्रातील गणिताशी निगडित संकल्पना, सांख्यिकी ह्या क्षेत्राचा विस्तार, अशा सर्व बाबी शिक्षकांनी बारकाईने अभ्यासाव्यात. वर्गामध्ये अध्यापन करताना प्रात्यक्षिके, कृती, चर्चा, प्रश्नोत्तरे, सामूहिक उपक्रम अशा विविध पद्धतींचा उपयोग करणे अपेक्षित आहे. त्यासाठी शिक्षकांनी पाठ्यपुस्तकाचे सखोल वाचन करून पाठ्यपुस्तकातील विविध कृती विद्यार्थ्यांकडून करून घ्याव्यात. त्याबरोबरच तशा अनेक नवीन कृती तयार करण्याचा प्रयत्न करावा.

गणितात आकडेमोडीपेक्षा मूळ संकल्पना समजणे जास्त महत्त्वाचे असते. विद्यार्थ्यांच्या तर्कसंगत विचारशक्तीला चालना देणारी विविध उदाहरणे पाठ्यपुस्तकात समाविष्ट केलेली आहेत. अशी अनेक उदाहरणे शिक्षक व विद्यार्थी यांनी मिळून तयार करावीत. पाठ्यपुस्तकात आव्हानात्मक उदाहरणे तारांकित करून दिली आहेत. विद्यार्थ्यांने वेगळा विचार करून एखादे उदाहरण तर्कशुद्ध पद्धतीने सोडवले असेल तर त्याला शिक्षकांनी प्रोत्साहन द्यावे.

मूल्यमापन करताना मुक्तप्रश्न व कृतिपत्रिका यांचाही विचार शिक्षकांनी करणे अपेक्षित आहे. अशी मूल्यमापन पद्धती विकसित करण्याचा शिक्षकांनी प्रयत्न करावा.

पाठ्यपुस्तकामध्ये नमुन्यादाखल जी प्रात्यक्षिकांची यादी दिली आहे, त्या व्यतिरिक्त तुम्ही स्वत:ही निरनिराळी प्रात्यक्षिके तयार करू शकता. पाठ्यपुस्तकातील विविध कृती या प्रात्यक्षिकांमध्ये अंतर्भूत केलेल्या आहेत. त्यादेखील विद्यार्थ्यांकडून करून घ्याव्यात. त्यावर आधारित मूल्यमापन पद्धतीचा उपयोग पुढच्या इयत्तांच्या क्षमता विकसित करण्याकरिता निश्चितच होईल अशी आम्हांस आशा आहे.

नमुना प्रात्यक्षिकांची यादी

(1) आपल्या वर्गातील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच हा विश्वसंच मानून खो-खो, कबड्डी यांसारखे कोणतेही दोन खेळ खेळणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच वेन आकृतीने दाखविणे.

(2) संख्यारेषेवर $2+\sqrt{3}$, $5-\sqrt{2}$ यांसारख्या संख्या दाखवणे.

(3) तीन किंवा चार कोटी असणाऱ्या बहुपदींना रेषीय बहुपदीने विविध पद्धती वापरून भागणे व उत्तर एकच येते का, ते पाहणे.

(4) आयकर भरणाऱ्या व्यक्तीचे विवरणपत्र (वार्षिक उत्पन्न, गुंतवणूक इत्यादी बाबी) दिले असता त्याला भरावा लागणारा आयकर सारणीच्या आधारे काढणे.

(5) दिलेल्या संख्यात्मक माहितीवरून वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करणे.

(6) सहज उपलब्ध असलेल्या औषधाच्या पाकिटावरून त्यातील वेगवेगळ्या घटकांचे शतमान काढणे.

(7) एखादे आव्हानात्मक शाब्दिक उदाहरण दोन चले वापरून सोडवणे.

अनुक्रमणिका

1 संच

चला, शिकूया.

- संच : ओळख
- संचाचे प्रकार
- वेन चित्रे
- समान संच, उपसंच
- विश्वसंच, पूरक संच
- छेद संच, संयोग संच
- संचातील घटकांची संख्या

जरा आठवूया.

खाली काही चित्रे दिली आहेत. त्यांमध्ये आपल्या परिचयाचे वस्तुसमूह आहेत.

				1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
फुलांचा गुच्छ	किल्ल्यांचा जुडगा	पक्ष्यांचा थवा	वह्यांचा गठ्ठा	संख्यांचा गट

वरील प्रत्येक वस्तुसमूहासाठी आपण विशिष्ट शब्द वापरतो. या सर्व उदाहरणांत समूहांतील घटक आपणांस अचूक व नेमकेपणाने सांगता येतात. वस्तूंच्या अशा समूहांना 'संच' असे म्हणतात.

आता हे समूह पाहा. 'गावातील आनंदी मुले', 'वर्गातील हुशार मुले.' समूहाच्या या दोन्ही उदाहरणांमध्ये 'आनंदी' आणि 'हुशार' या दोन्ही शब्दांचे अर्थ सापेक्ष आहेत म्हणजे 'आनंदी' वृत्ती व 'हुशारी' या दोन्ही शब्दांचे अर्थ नेमकेपणाने सांगता येत नाहीत म्हणून या समूहांना संच म्हणता येणार नाही.

आता पुढे काही उदाहरणे दिली आहेत. त्यांतील कोणत्या समूहांना संच म्हणता येईल ते सांगा.

(1) आठवड्याचे सात वार

(2) एका वर्षाचे महिने

(3) वर्गातील शूर मुले

(4) पहिल्या 10 मोजसंख्या

(5) महाराष्ट्रातील बळकट गड-किल्ले

(6) आपल्या सूर्यमालेतील ग्रह

जाणून घेऊया.

संच (Sets)

ज्या समूहांतील घटक अचूक व नेमकेपणाने सांगता येतात, त्या समूहांना संच असे म्हणतात.

संचाला नाव देण्यासाठी सर्वसाधारणपणे A, B, C,.....,Z यांपैकी इंग्रजी वर्णमालेतील पहिल्या लिपीतील अक्षरे वापरतात.

संचाचे घटक दाखवण्यासाठी a, b, c,... यांपैकी इंग्रजी अक्षरे वापरतात.

a हा संच A चा घटक आहे हे '$a \in A$' असे लिहितात आणि a हा संच A चा घटक नाही हे दाखवण्यासाठी '$a \notin A$' असे लिहितात.

आता आपण संख्यांचे संच पाहू.

N = { 1, 2, 3, . . .} हा नैसर्गिक संख्यासंच (Set of natural numbers) आहे.

W = {0, 1, 2, 3, . . .} हा पूर्ण संख्यासंच (Set of whole numbers) आहे.

I = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...} हा पूर्णांक संख्यासंच (Set of integers) आहे.

Q हा सर्व परिमेय संख्यांचा संच (Set of rational numbers) आहे.

R हा वास्तव संख्यांचा संच (Set of real numbers) आहे.

संच लिहिण्याच्या पद्धती

संच लिहिण्याच्या दोन पद्धती आहेत.

(1) यादी पद्धती (Listing method or roster method)

या पद्धतीत संचाचे सर्व घटक महिरपी कंसात लिहितात व प्रत्येक घटक वेगळा दाखवण्यासाठी दोन लगतच्या घटकांमध्ये स्वल्पविराम देतात. यामध्ये घटकांचा क्रम महत्त्वाचा नसतो, पण सगळे घटक दर्शवणे आवश्यक असते.

उदा. 1 ते 10 मधील विषम संख्यांचा संच यादी पद्धतीने पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

जसे, A = {3, 5, 7, 9} किंवा A = {7, 3, 5, 9}

जसे, remember या शब्दातील अक्षरांचा संच {r, e, m, b} असा लिहितात. येथे remember या शब्दात r, m, e ही अक्षरे एकापेक्षा अधिक वेळा आली असली तरी संचात ती एकदाच लिहिली आहेत .

(2) गुणधर्म पद्धती (Rule method or set builder form)

या पद्धतीत घटकांची यादी न करता संचाचा सर्वसाधारण घटक चलाने दर्शवून त्याच्यापुढे उभी रेघ काढतात. उभ्या रेघेपुढे त्या चलाचा गुणधर्म लिहितात. **उदा.** $A = \{x \mid x \in N, 1 < x < 10\}$ याचे वाचन संच A चे घटक x असे आहेत की, x ही 1 व 10 च्या दरम्यानची नैसर्गिक संख्या आहे, असे करतात.

उदा. B = { x | x ही 1 ते 10 मधील मूळ संख्या आहे.} यामध्ये 1 ते 10 मधील सर्व मूळसंख्यांचा समावेश होईल म्हणून B हा संच {2, 3, 5, 7} असा यादी पद्धतीनेही लिहिता येईल.

Q हा परिमेय संख्या संच गुणधर्म पद्धतीने पुढीलप्रमाणे लिहिता येतो.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0 \right\}$$

याचे वाचन $\frac{p}{q}$ या स्वरूपाच्या अशा संख्या आहेत की, p ही कोणतीही पूर्णांक संख्या आणि q ही शून्येतर पूर्णांक संख्या असेल.

नमुना उदाहरणे : खालील उदाहरणांत प्रत्येक संच दोन्ही पद्धतींनी लिहिला आहे.

गुणधर्म पद्धत	यादी पद्धत
A = { x | x हा DIVISION या शब्दातील अक्षर आहे.}	A = {D, I, V, S, O, N}
B = { y | y ही संख्या अशी आहे की $y^2 = 9$}	B = { −3, 3}
C = {z | z ही 5 च्या पटीतील 30 पेक्षा लहान नैसर्गिक संख्या आहे.}	C = { 5, 10, 15, 20, 25}

उदा. : पुढील सारणीतील रिकाम्या जागा भरून ती सारणी पूर्ण करा

यादी पद्धत	गुणधर्म पद्धत
A = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}	A = {x | x ही 15 पेक्षा लहान सम नैसर्गिक संख्या आहे.}
....	B = { x | x ही 1 ते 20 मधील पूर्ण वर्गसंख्या आहे.}
C = { a, e, i, o, u}	....
....	D = { y | y हा इंद्रधनुष्यातील रंग आहे.}
....	P = {x | x ही पूर्णांक संख्या अशी आहे की, $-3 < x < 3$}
M = {1, 8, 27, 64, 125.......}	M = {x | x हा धन पूर्णांकांचा घन आहे.}

सरावसंच 1.1

(1) पुढील संच यादी पद्धतीने लिहा.

(i) सम पूर्णांक संख्यांचा संच (ii) 1 ते 50 मधील सम मूळ संख्यांचा संच

(iii) सर्व ऋण पूर्णांकांचा संच (iv) संगीतातील सात मूळ स्वरांचा संच

(2) खाली चिन्हांत दिलेली विधाने शब्दांत लिहा.

(i) $\frac{4}{3} \in Q$ (ii) $-2 \notin N$ (iii) P = {p | p ही विषम संख्या आहे.}

(3) कोणतेही दोन संच यादी पद्धतीने आणि गुणधर्म पद्धतीने लिहा.

(4) खालील संच यादी पद्धतीने लिहा.

(i) भारतीय सौर वर्षातील सर्व महिन्यांचा संच.

(ii) 'COMPLEMENT' या शब्दातील अक्षरांचा संच.

(iii) मानवाच्या सर्व ज्ञानेंद्रियांचा संच.

(iv) 1 ते 20 मधील मूळ संख्यांचा संच.

(v) पृथ्वीवरील खंडांचा संच.

(5) खालील संच गुणधर्म पद्धतीने लिहा.

(i) A = { 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

(ii) B = { 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

(iii) C = {S, M, I, L, E}

(iv) D = {रविवार, सोमवार, मंगळवार, बुधवार, गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार}

(v) X = {a, e, t}

जाणून घेऊया.

संचांचे प्रकार (Types of sets)

संचाचे नाव	व्याख्या	उदाहरण
एकघटक संच (Singleton Set)	ज्या संचात फक्त एकच घटक असतो, अशा संचास 'एकघटक संच' असे म्हणतात.	A = {2} A हा सम मूळ संख्यांचा संच आहे.
रिक्त संच (Null Set) (Empty Set)	ज्या संचात दिलेल्या गुणधर्माचा एकही घटक नसतो, त्यास 'रिक्त संच' म्हणतात. हा संच { } किंवा ϕ (फाय) या चिन्हाने दाखवतात.	B = {x|x ही 2 व 3 मधील नैसर्गिक संख्या आहे.} $\therefore$ B = { } किंवा ϕ
सांत संच (Finite Set)	जो संच रिक्त आहे किंवा ज्या संचातील घटकांची संख्या मर्यादित असते व मोजता येते, त्याला 'सांत संच' म्हणतात.	C = {p| p ही 1 ते 22 मधील 4 ने विभाज्य संख्या आहे.} C = {4, 8, 12, 16, 20}
अनंत संच (Infinite Set)	ज्या संचातील घटकांची संख्या अमर्याद असते व मोजता येत नाही त्याला 'अनंत संच' म्हणतात.	N = {1, 2, 3, . . . }

उदा. पुढील संच यादी पद्धतीने लिहून त्यांचे सांत संच व अनंत संच असे वर्गीकरण करा.

(i) A = $\{x \mid x \in$ N आणि x ही विषम संख्या आहे.$\}$ (ii) B = $\{x \mid x \in \mathrm{N}$ आणि $3x - 1 = 0\}$

(iii) C = $\{x \mid x \in$ N आणि x ही 7 ने विभाज्य संख्या आहे.$\}$

(iv) $\mathrm{D} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathrm{W}, a + b = 9\}$ (v) $\mathrm{E} = \{x \mid x \in \mathrm{I}, x^2 = 100\}$

(vi) $\mathrm{F} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathrm{Q}, a + b = 11\}$

उकल : (i) A = $\{x \mid x \in$ N आणि x ही विषम संख्या आहे.$\}$

A = $\{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\}$ हा अनंत संच आहे.

(ii) B = $\{x \mid x \in \mathrm{N}$ आणि $3x - 1 = 0\}$

$3x - 1 = 0 \quad \therefore\ 3x = 1 \quad x = \frac{1}{3}$

पण $\frac{1}{3} \notin \mathrm{N} \quad \therefore\ \mathrm{B} = \{\quad\}$ $\therefore$ B हा सांत संच आहे.

(iii) C = $\{x \mid x \in$ N आणि x ही 7 ने विभाज्य संख्या आहे.$\}$

C = $\{7, 14, 21, \ldots\}$ हा अनंत संच आहे.

(iv) $\mathrm{D} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathrm{W}, a + b = 9\}$

आपण a आणि b च्या अशा जोड्या शोधू शकतो की, a, b पूर्ण संख्या असून a + b = 9 आहे.

आधी a ची आणि नंतर b ची किंमत, असा क्रम ठेवून D हा संच यादी पद्धतीने पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

D = $\{(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0)\}$,

या संचाचे घटक म्हणजेच संख्यांच्या जोड्या मोजता येतात व निश्चित आहेत.

$\therefore$ D हा संच, सांत संच आहे.

(v) $\mathrm{E} = \{x \mid x \in \mathrm{I}, x^2 = 100\}$

E = $\{-10, 10\}$. $\therefore$ E हा सांत संच आहे.

(vi) $\mathrm{F} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathrm{Q}, a + b = 11\}$

F = $\{(6, 5), (3, 8), (3.5, 7.5), (-15, 26), \ldots\}$ अशा असंख्य जोड्या मिळतात.

$\therefore$ F हा अनंत संच आहे.

हे लक्षात घ्या !

संख्यांचे N, W, I, Q, R हे सगळे संच अनंत संच आहेत.

जाणून घेऊया.

समान संच (Equal sets)

संच A मधील प्रत्येक घटक संच B मध्ये आणि B या संचातील प्रत्येक घटक हा संच A मध्ये असेल तर ते संच समान आहेत असे म्हणतात.

'A आणि B हे समान संच आहेत' हे चिन्हात $A = B$ असे लिहितात.

उदा (1) $A = \{ x \mid x$ हे 'listen' या शब्दातील अक्षर आहे.$\}$ $\quad \therefore A = \{ l, i, s, t, e, n\}$

$B = \{ y \mid y$ हे 'silent' या शब्दातील अक्षर आहे.$\}$ $\quad \therefore B = \{ s, i, l, e, n, t\}$

A आणि B यांतील घटकांचा क्रम वेगवेगळा आहे, पण घटक तेच आहेत म्हणून A व B हे संच समान आहेत. म्हणजेच $A = B$ आहे.

उदा (2) $A = \{x \mid x = 2n, n \in N, 0 < x \leq 10\}$, $\quad A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{ y \mid y$ ही समसंख्या आहे, $1 \leq y \leq 10\}$, $\quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\therefore$ A व B हे समान संच आहेत.

आता खालील संचांचा विचार करू.

$C = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad D = \{ 2, 3, 5, 7\}$

C आणि D समान संच आहेत असे म्हणता येईल का? अर्थातच नाही.

कारण $1 \in C, 1 \notin D, 2 \in D, 2 \notin C$

म्हणून C व D समान संच नाहीत. म्हणजेच $C \neq D$

उदा (3) जर $A = \{1, 2, 3\}$ आणि $B = \{ 1, 2, 3, 4\}$ तर $A \neq B$ याचा पडताळा घ्या.

उदा (4) $A = \{x \mid x$ ही मूळ संख्या व $10 < x < 20\}$ आणि $B = \{11, 13, 17, 19\}$

येथे $A = B$ आहे याचा पडताळा घ्या.

सरावसंच 1.2

(1) खालीलपैकी कोणते संच समान आहेत व कोणते नाहीत ते सकारण लिहा.

$A = \{ x \mid 3x - 1 = 2\}$

$B = \{ x \mid x$ नैसर्गिक संख्या आहे पण x मूळही नाही व संयुक्तही नाही.$\}$

$C = \{x \mid x \in N, x < 2\}$

(2) A व B समान आहेत का ते सकारण लिहा.

A = सम असलेल्या मूळसंख्या $\quad B = \{x \mid 7x - 1 = 13\}$

(3) खालीलपैकी कोणते संच रिक्त आहेत ते सकारण लिहा.

(i) $A = \{ a \mid a$ ही शून्यापेक्षा लहान असणारी नैसर्गिक संख्या आहे.$\}$

(ii) $B = \{x \mid x^2 = 0\}$ (iii) $C = \{ x \mid 5x - 2 = 0, x \in N\}$

(4) खालीलपैकी कोणते संच सांत व कोणते अनंत आहेत ते सकारण लिहा.

(i) A = { x | $x < 10$, x ही नैसर्गिक संख्या}

(ii) B = {y | $y < -1$, y ही पूर्णांक संख्या}

(iii) C = तुमच्या शाळेतील 9 वी मधील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच

(iv) तुमच्या गावातील रहिवाशांचा संच

(v) प्रयोगशाळेतील उपकरणांचा संच

(vi) पूर्ण संख्यासंच

(vii) परिमेय संख्यासंच

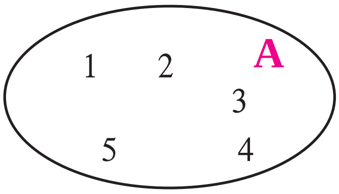
जाणून घेऊया.

वेन आकृती (Venn diagrams)

संच लिहिण्यासाठी बंदिस्त आकृत्यांचा उपयोग ब्रिटिश तर्कशास्त्रज्ञ जॉन वेन यांनी प्रथम केला. म्हणून अशा आकृत्यांना 'वेन आकृती' म्हणतात. वेगवेगळ्या संचांतील संबंध समजण्यासाठी आणि संचांवर आधारित उदाहरणे सोडवण्यासाठी या आकृत्यांचा चांगला उपयोग होतो. वेन आकृत्यांनी संच कसे दाखवले जातात ते खालील उदाहरणांवरून समजून घ्या.

उदा. A = { 1, 2, 3, 4, 5}

वेन आकृतीने A हा संच खाली दाखवला आहे.

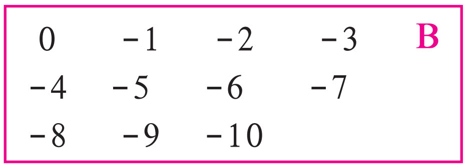


1834-1883

तर्कशास्त्र व संभाव्यता या विषयांना गणिती रूप देण्याचे काम जॉन वेन यांनी प्रथम केले. **'लॉजिक ऑफ चान्स'** हे त्यांचे प्रसिद्ध पुस्तक आहे.

B = {x | $-10 \leq x \leq 0$, x पूर्णांक}

शेजारील वेन आकृती B हा संच दर्शवते.



उपसंच (Subset)

जर A आणि B हे दोन संच असतील आणि संच B चा प्रत्येक घटक, संच A चा देखील घटक असेल तर संच B ला संच A चा उपसंच म्हणतात आणि $B \subseteq A$ अशा चिन्हाने दाखवतात. त्याचे वाचन 'B उपसंच A' असे किंवा 'B हा A चा उपसंच आहे' असे करतात.

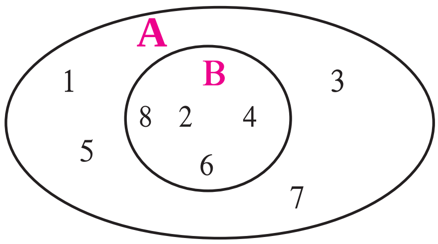
उदा (1) A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

B = {2, 4, 6, 8}

B मधील प्रत्येक घटक A चा देखील घटक आहे.

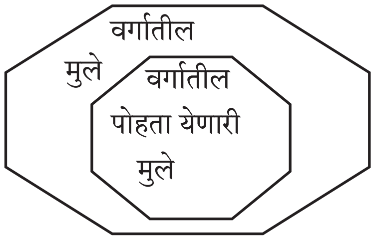
म्हणजेच $B \subseteq A$.

ही माहिती वेन आकृतीने कशी दाखवली आहे ते पाहा.



कृती : वर्गातील मुलांचा संच व त्याच वर्गातील पोहता येणाऱ्या मुलांचा संच वेन आकृतीने दाखवले आहेत.

त्याप्रमाणे खालील उपसंचांसाठी वेन आकृत्या काढा.



(1) (i) वर्गातील मुलांचा संच

(ii) वर्गातील सायकल चालवू शकणाऱ्या मुलांचा संच

(2) खाली काही फळांचा एक संच दिला आहे.

{पेरू, संत्रे, आंबा, फणस, चिकू, जांभूळ, सीताफळ, पपई, करवंद}

पुढील उपसंच दाखवा. (i) एक बी असणारी फळे (ii) एकापेक्षा जास्त बिया असणारी फळे

आता आणखी काही उपसंच पाहू.

उदा (2) N = नैसर्गिक संख्या संच. I = पूर्णांक संख्या संच.

येथे $N \subseteq I$. कारण सर्व नैसर्गिक संख्या ह्या पूर्णांक संख्या सुद्धा असतात हे आपल्याला माहीत आहे.

उदा (3) P = { x | x हे 25 चे वर्गमूळ आहे.} $S = \{ y \mid y \in I, -5 \leq y \leq 5\}$

यादी पद्धतीने P हा संच लिहू. $P = \{-5, 5\}$

यादी पद्धतीने S हा संच लिहू. $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

येथे P चा प्रत्येक घटक S चा घटक आहे.

$\therefore P \subseteq S$

हे लक्षात ठेवूया.

(i) प्रत्येक संच स्वत:चा उपसंच असतो. म्हणजेच $A \subseteq A$

(ii) रिक्त संच हा प्रत्येक संचाचा उपसंच असतो. म्हणजेच $\phi \subseteq A$

(iii) जर $A = B$ तर $A \subseteq B$ आणि $B \subseteq A$

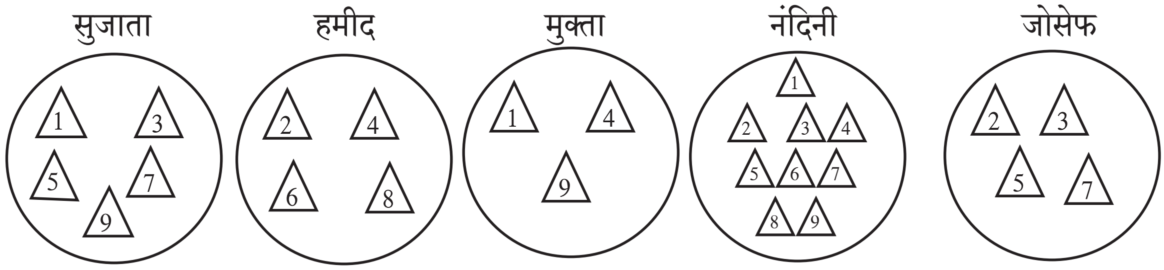
(iv) जर $A \subseteq B$ व $B \subseteq A$ तर $A = B$

उदा. $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ या संचाचे उपसंच पाहू.

जसे $P = \{1, 3\}$, $T = \{4, 7, 8\}$, $V = \{1, 4, 8\}$, $S = \{1, 4, 7, 8\}$

असे आणखी अनेक उपसंच तयार करता येतील. त्यांपैकी कोणतेही पाच उपसंच लिहा.

कृती : प्रत्येक विद्यार्थ्याने कागदाचे साधारण सारख्या आकाराचे नऊ त्रिकोण आणि एक थाळी घ्यावी. त्रिकोणावर 1 ते 9 या संख्या लिहाव्यात. मग प्रत्येकाने आपापल्या थाळीत संख्या लिहिलेले काही त्रिकोणी कागद ठेवावेत. आता प्रत्येकाजवळ 1 ते 9 या संख्या असणाऱ्या संचाचा उपसंच तयार होईल.



सुजाता, हमीद, मुक्ता, नंदिनी आणि जोसेफ यांच्या थाळ्यांमधून कोणकोणत्या संख्या दिसत आहेत ते पाहा. प्रत्येकाने कोणता विचार करून संख्या निवडल्या आहेत हे ओळखा. त्यावरून प्रत्येक संच गुणधर्म पद्धतीने लिहा.

चला, चर्चा करूया.

उदा. खाली काही संच दिलेले आहेत.

$A = \{ \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ $B = \{1, 2, 3, \ldots..\}$

$C = \{\ldots, -12, -6, 0, 6, 12, 18\ldots..\}$ $D = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots..\}$

$I = \{ \ldots.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots..\}$

यावरून पुढीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत यावर चर्चा करा.

(i) A हा B, C, D या प्रत्येक संचाचा उपसंच आहे. (ii) B हा वरील सर्व संचांचा उपसंच आहे.

जाणून घेऊया.

विश्वसंच (Universal set)

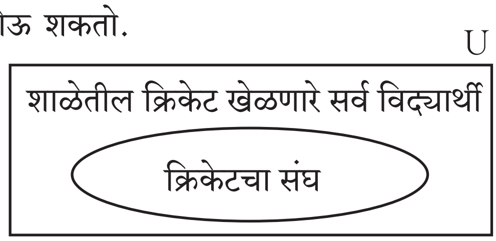
आपण ज्या संचांचा विचार करणार आहोत त्या सर्वांना सामावून घेणारा एक मोठा संच **विश्वसंच** म्हणून घेता येतो. त्याच्या बाहेरील घटकांचा आपण विचार करत नाही. विचारात घेतलेला प्रत्येक संच विश्वसंचाचा उपसंच असतो.

उदा (1) आपल्याला शाळेतील वारंवार अनुपस्थित राहणाऱ्या 9 वीच्या काही विद्यार्थ्यांच्या अनुपस्थितीचा अभ्यास करायचा आहे. त्यासाठी 9वी या इयत्तेतील विद्यार्थ्यांच्या संचाचा विचार करावा लागेल. येथे त्या इयत्तेतील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच किंवा शाळेतील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच हा विश्वसंच घेता येईल.

आता दुसरे उदाहरण पाहू.

उदा (2) आपल्याला शाळेतील क्रिकेट खेळणाऱ्या मुलांतून 15 मुलांचा संघ निवडायचा आहे; तर शाळेतील क्रिकेट खेळणाऱ्या सर्व खेळाडूंचा संच हा विश्वसंच होऊ शकतो.

त्यांतील योग्य त्या 15 खेळाडूंचा संघ हा त्या विश्वसंचाचा उपसंच आहे.



विश्वसंच साधारणपणे 'U' या अक्षराने दर्शवतात.

वेन आकृतीमध्ये विश्वसंच सामान्यत: आयताने दाखवतात.

पूरक संच (Complement of a set)

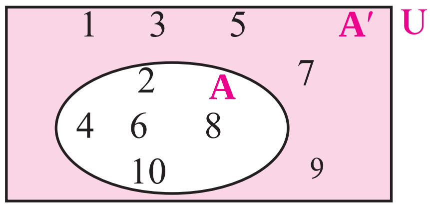
समजा U हा विश्वसंच आहे. जर $B \subseteq U$, तर संच B मध्ये नसलेल्या परंतु विश्वसंच U मध्ये असलेल्या घटकांच्या संचाला संच B चा पूरक संच म्हणतात. संच B चा पूरक संच B' किंवा B^C ने दर्शवतात.

$\therefore$ $B' = \{x \mid x \in U$, आणि $x \notin B\}$ असे B' चे वर्णन करता येईल.

उदा (1) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

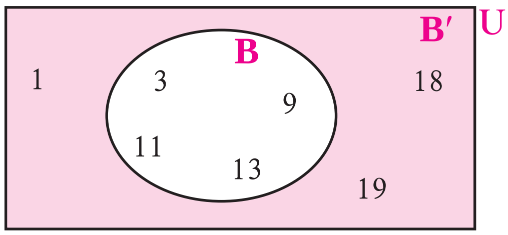
$\therefore$ $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



उदा (2) समजा $U = \{1, 3, 9, 11, 13, 18, 19\}$

$B = \{3, 9, 11, 13\}$

$\therefore$ $B' = \{1, 18, 19\}$



आता $(B')'$ काढा. त्यावरून काय निष्कर्ष निघतो?

$(B')'$ हा संच म्हणजे B' मध्ये नसलेल्या परंतु U मध्ये असलेल्या घटकांचा संच.

$(B')' = B$ मिळाले का?

वरील माहिती वेन आकृतीवरून समजून घ्या.

पूरक संचाचा पूरक संच म्हणजे दिलेला संच असतो.

हे लक्षात ठेवूया.

पूरक संचाचे गुणधर्म

(i) A आणि A' यांच्यामध्ये सामाईक घटक नसतो.

(ii) $A \subseteq U$ आणि $A' \subseteq U$

(iii) विश्वसंचाचा पूरक संच हा रिक्तसंच असतो. $U' = \phi$

(iv) रिक्तसंचाचा पूरक संच हा विश्वसंच असतो. $\phi' = U$

सरावसंच 1.3

(1) जर $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{c, d, e, f\}$, $C = \{b, d\}$, $D = \{a, e\}$ तर पुढीलपैकी कोणती विधाने सत्य व कोणती विधाने असत्य आहेत ते लिहा.

(i) $C \subseteq B$ (ii) $A \subseteq D$ (iii) $D \subseteq B$ (iv) $D \subseteq A$ (v) $B \subseteq A$ (vi) $C \subseteq A$

(2) 1 ते 20 मधील नैसर्गिक संख्यांचा विश्वसंच घेऊन X आणि Y वेन आकृतीने दाखवा.

(i) $X = \{ x \mid x \in N$, आणि $7 < x < 15\}$

(ii) $Y = \{ y \mid y \in N$, y ही 1 ते 20 मधील मूळसंख्या आहे.}

(3) $U = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$P = \{1, 3, 7, 10\}$

तर (i) U, P आणि P' वेन आकृतीने दाखवा. (ii) $(P')' = P$ याचा पडताळा घ्या.

(4) जर $A = \{1, 3, 2, 7\}$ तर A या संचाचे कोणतेही तीन उपसंच लिहा.

(5) (i) पुढील संचांपैकी कोणते संच दुसऱ्या कोणत्या संचांचे उपसंच आहेत, ते लिहा.

P हा पुण्यातील रहिवाशांचा संच आहे. M हा मध्यप्रदेशातील रहिवाशांचा संच आहे.

I हा इंदौरमधील रहिवाशांचा संच आहे. B हा भारतातील रहिवाशांचा संच आहे.

H हा महाराष्ट्रातील रहिवाशांचा संच आहे.

(ii) वरीलपैकी कोणता संच या उदाहरणात विश्वसंच म्हणून घेता येईल?

(6*) खाली काही संच दिले आहेत. त्यांचा अभ्यास करताना कोणता संच त्या संचांसाठी विश्वसंच घेता येईल?

(i) A = 5 च्या पटीतील संख्यांचा संच, B = 7 च्या पाढ्यातील संख्यांचा संच.

C = 12 च्या पटीतील संख्यांचा संच.

(ii) P = 4 च्या पटीतील पूर्णांक संख्यांचा संच. T = सर्व सम वर्ग संख्यांचा संच.

(7) वर्गातील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच हा विश्वसंच मानू. गणितात 50% किंवा त्यापेक्षा अधिक गुण मिळवणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच A मानला तर A चा पूरक संच लिहा.

जाणून घेऊया.

संचांवरील क्रिया

दोन संचांचा छेद (Intersection of two sets)

समजा A आणि B हे दोन संच आहेत. A आणि B या संचांमधील सामाईक घटकांच्या संचाला A आणि B या संचांचा छेदसंच असे म्हणतात. तो $A \cap B$ असा लिहितात आणि त्याचे वाचन A छेद B असे करतात.

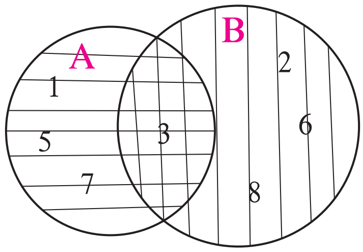
$\therefore \quad A \cap B = \{x \mid x \in A$ आणि $x \in B\}$

उदा (1) A = { 1, 3, 5, 7} B = { 2, 3, 6, 8}

आता वेन आकृती काढू.

A आणि B या दोन्ही संचांतील 3 हा सामाईक घटक आहे.

$\therefore A \cap B = \{3\}$



उदा (2) A = {1, 3, 9, 11, 13} B = {1, 9, 11}

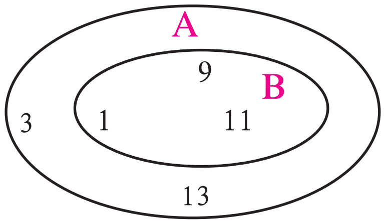
संच A व संच B मध्ये 1, 9, 11 हे सामाईक घटक आहेत.

$\therefore A \cap B = \{1, 9, 11\}$ परंतु $B = \{1, 9, 11\}$

$\therefore A \cap B = B$

येथे B हा A चा उपसंच आहे, हे लक्षात ठेवूया.

$\therefore$ जर $B \subseteq A$ तर $A \cap B = B$. तसेच जर $B \cap A = B$, तर $B \subseteq A$



हे लक्षात ठेवूया.

छेदसंचाचे गुणधर्म

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) जर $A \subseteq B$ तर $A \cap B = A$

(3) जर $A \cap B = B$ तर $B \subseteq A$

(4) $A \cap B \subseteq A$ आणि $A \cap B \subseteq B$

(5) $A \cap A' = \phi$

(6) $A \cap A = A$

(7) $A \cap \phi = \phi$

कृती : वेगवेगळी उदाहरणे घेऊन वरील गुणधर्मांचा पडताळा घ्या.

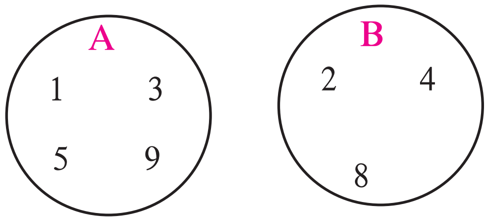
जाणून घेऊया.

विभिन्न संच (Disjoint sets)

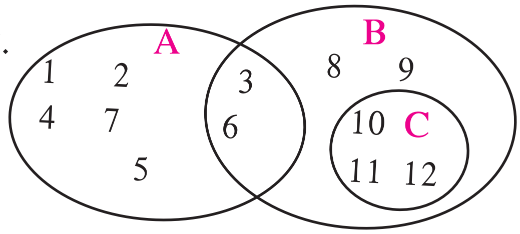
समजा, A = { 1, 3, 5, 9}

आणि B = {2, 4, 8} हे दोन संच दिले आहेत.

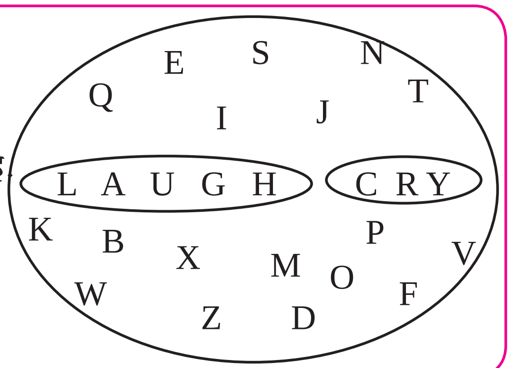
संच A व B मध्ये एकही सामाईक घटक नाही. म्हणजेच ते संच पूर्णपणे भिन्न किंवा विभक्त आहेत. म्हणून त्यांना 'विभक्त' किंवा 'विभिन्न' संच असे म्हणतात. या संचांची वेन आकृती पाहा.



कृती I : येथे A, B, C हे संच वेन आकृत्यांनी दाखवले आहेत. त्यांपैकी कोणते दोन संच विभिन्न आहेत ते लिहा.



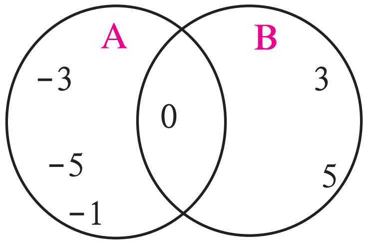
कृती II : इंग्रजी अक्षरांचा संच हा विश्वसंच आहे असे समजा.
येथे संचांचे घटक इंग्रजी अक्षरे आहेत.
समजा, LAUGH या शब्दातील अक्षरांचा एक संच आहे
आणि CRY या शब्दातील अक्षरांचा दुसरा संच आहे.
हे विभक्त संच आहेत, असे म्हणता येईल.
या दोन्ही संचांचा छेद रिक्त आहे हे अनुभवा.



दोन संचांचा संयोग (Union of two sets)

समजा, A आणि B हे दोन संच आहेत. या दोन्ही संचातील घटकांनी मिळून होणाऱ्या संचाला A आणि B या संचांचा संयोग संच म्हणतात. तो $A \cup B$ असा लिहितात आणि A संयोग B असा वाचतात.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ किंवा $x \in B\}$



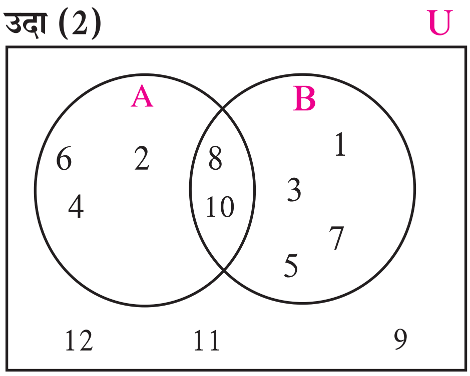
उदा (1) $A = \{-1, -3, -5, 0\}$

$B = \{0, 3, 5\}$

$A \cup B = \{-3, -5, 0, -1, 3, 5\}$

लक्षात घ्या की, $A \cup B = B \cup A$

उदा (2)



शेजारील वेन आकृतीत दर्शवलेल्या संचांवरून खालील संच यादी पद्धतीने लिहा.

(i) U (ii) A (iii) B (iv) $A \cup B$ (v) $A \cap B$

(vi) A' (vii) B' (viii) $(A \cup B)'$ (ix) $(A \cap B)'$

उकल : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

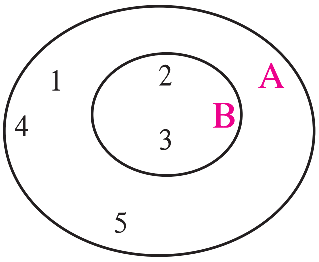
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ $A \cap B = \{8, 10\}$

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$ $B' = \{2, 4, 6, 9, 11, 12\}$

$(A \cup B)' = \{9, 11, 12\}$ $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

उदा (3)



$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3\}$

आता या उदाहरणाची वेन आकृती पाहू.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

संच A आणि संच $A \cup B$ मध्ये नेमके तेच घटक आहेत.

यावरून, जर $B \subseteq A$ तर $A \cup B = A$

हे लक्षात ठेवूया.

संयोग संचाचे गुणधर्म

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) जर $A \subseteq B$ तर $A \cup B = B$

(3) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

(4) $A \cup A' = U$

(5) $A \cup A = A$

(6) $A \cup \phi = A$

जाणून घेऊया.

संचातील घटकांची संख्या (Number of elements in a set)

समजा $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ हा दिलेला संच आहे. या संचात 5 घटक आहेत.

संच A मधील घटकांची संख्या $n(A)$ अशी दाखवतात. $\therefore n(A) = 5$

समजा $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore n(B) = 6$

संयोग संच आणि छेद संच यांतील घटकांच्या संख्या

वरील संच A आणि संच B विचारात घेतल्यास,

$n(A) + n(B) = 5 + 6 = 11$ ----(1)

$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore n(A \cup B) = 9$--------(2)

$A \cap B$ काढू. म्हणजेच संच A आणि संच B मधील सामाईक घटक पाहू.

$A \cap B = \{6, 12\}$ $\therefore n(A \cap B) = 2$--------(3)

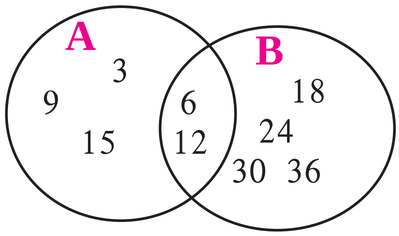
लक्षात घ्या, $n(A)$ आणि $n(B)$ मोजताना $A \cap B$ चे घटक दोनदा मोजले आहेत.

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$ तसेच $n(A \cup B) = 9$

समीकरणे (1), (2) आणि (3) वरून असे दिसते की,

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

वरील नियमाचा पडताळा सोबतच्या वेन आकृतीवरून घ्या.



$n(A) = \boxed{}$, $n(B) = \boxed{}$

$n(A \cup B) = \boxed{}$, $n(A \cap B) = \boxed{}$

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

हे लक्षात ठेवूया.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

म्हणजेच $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

आता $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 13\}$

हे संच घेऊन वरील नियमाचा पडताळा घ्या.

जाणून घेऊया.

संचांवर आधारित शाब्दिक उदाहरणे

उदा. एका वर्गात 70 विद्यार्थी आहेत. त्यांपैकी 45 विद्यार्थ्यांना क्रिकेट हा खेळ आवडतो. 52 विद्यार्थ्यांना खो-खो हा खेळ आवडतो. असा एकही विद्यार्थी नाही की ज्याला यांपैकी एकही खेळ आवडत नाही. तर क्रिकेट आणि खो-खो हे दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या मुलांची संख्या काढा. फक्त क्रिकेट आवडणारी मुले किती ?

उकल : हे उदाहरण आपण दोन रीतींनी सोडवू.

रीत I : वर्गातील एकूण विद्यार्थी = 70

क्रिकेट आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच A मानू. खो-खो आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच B मानू.

प्रत्येक विद्यार्थ्याला क्रिकेट व खो-खो पैकी एक तरी खेळ आवडतो.

क्रिकेट किंवा खो-खो आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या म्हणजेच $n(A \cup B)$

$\therefore\ n(A \cup B) = 70$

क्रिकेट आणि खो-खो हे दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या मुलांची संख्या = $n(A \cap B)$

$n(A) = 45, \qquad n(B) = 52$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ हे आपल्याला माहीत आहे.

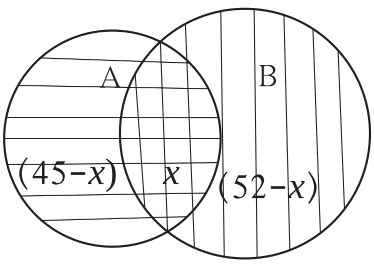
$$\therefore\ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
$$= 45 + 52 - 70 = 27$$

$\therefore$ दोन्ही खेळ आवडणारी मुले 27, क्रिकेट आवडणारी मुले 45 आहेत. $\therefore$ फक्त क्रिकेट आवडणारी मुले

$= 45 - 27 = 18$

$A \cap B$ हा दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच आहे. $\therefore\ n(A \cap B) = 27$

रीत II : दिलेली माहिती वेन आकृतीत दर्शवूनही दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या मुलांची संख्या पुढीलप्रमाणे काढता येते.



$n(A \cap B) = x$ मानू. $n(A) = 45$, $n(B) = 52$,

$n(A \cup B) = 70$ हे आपल्याला माहित आहे.

$\therefore\ n(A \cap B) = x = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 52 + 45 - 70 = 27$

वेन आकृती वरून फक्त क्रिकेट आवडणारी मुले $= 45 - 27$

$= 18$

सरावसंच 1.4

(1) जर $n(A) = 15$, $n(A \cup B) = 29$, $n(A \cap B) = 7$ तर $n(B)$ = किती ?

(2) एका वसतिगृहात 125 विद्यार्थी आहेत, त्यांपैकी 80 विद्यार्थी चहा घेतात, 60 विद्यार्थी कॉफी घेतात आणि 20 विद्यार्थी चहा व कॉफी ही दोन्ही प्रकारची पेये घेतात, तर एकही पेय न घेणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या काढा.

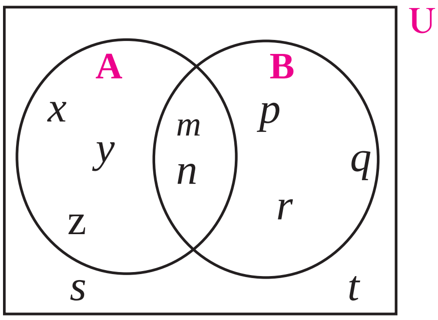
(3) एका स्पर्धा परीक्षेला 50 विद्यार्थी इंग्रजीत उत्तीर्ण झाले. 60 विद्यार्थी गणित विषयात उत्तीर्ण झाले. 40 विद्यार्थी दोन्ही विषयांत उत्तीर्ण झाले. एकही विद्यार्थी दोन्ही विषयांत अनुत्तीर्ण झाला नाही. तर एकूण विद्यार्थी किती होते ?

(4*) एका शाळेतील इयत्ता नववीच्या 220 विद्यार्थ्यांच्या आवडींचे सर्वेक्षण केले. त्यांपैकी 130 विद्यार्थ्यांनी गिरिभ्रमणाची आवड आहे असे सांगितले व 180 विद्यार्थ्यांनी आकाशदर्शनाची आवड आहे असे सांगितले. 110 विद्यार्थ्यांनी गिरिभ्रमण आवडते व आकाशदर्शनही आवडते असे सांगितले. तर किती विद्यार्थ्यांना या दोन्हींपैकी कशाचीच आवड नाही ? किती विद्यार्थ्यांना फक्त गिरिभ्रमण आवडते ? किती विद्यार्थ्यांना फक्त आकाशदर्शन आवडते ?

(5) शेजारील वेन आकृतीवरून पुढील सर्व संच लिहा.

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) U

(v) A' (vi) B' (vii) $(A \cup B)'$



संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

(1) खालील प्रश्नांसाठी अचूक पर्याय निवडा.

(i) $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, तर $M \cap N$ = ?

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (B) $\{1, 3, 5\}$ (C) ϕ (D) $\{2, 4, 6\}$

(ii) $P = \{x \mid x$ ही विषम नैसर्गिक संख्या, $1 < x \leq 5\}$ हा संच यादीपद्धतीने कसा लिहिला जाईल ?

(A) $\{1, 3, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{3, 5\}$

(iii) $P = \{1, 2, \ldots\ldots\ldots 10\}$, हा कोणत्या प्रकारचा संच आहे ?

(A) रिक्त संच (B) अनंत संच (C) सांत संच (D) यांपैकी नाही

(iv) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ आणि $M = \{1, 2, 4\}$ तर खालीलपैकी N हा संच कोणता ?

(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{3, 4, 5, 6\}$ (C) $\{2, 5, 6\}$ (D) $\{4, 5, 6\}$

(v) जर $P \subseteq M$, तर $P \cap (P \cup M)$ हा खालीलपैकी कोणता संच आहे?

(A) P (B) M (C) $P \cup M$ (D) $P' \cap M$

(vi) खालीलपैकी कोणता संच रिक्त संच आहे?

(A) समांतर रेषांच्या छेदन बिंदूंचा संच (B) सम मूळसंख्यांचा संच

(C) 30 पेक्षा कमी दिवस असलेल्या इंग्रजी महिन्यांचा संच

(D) $P = \{x \mid x \in I, -1 < x < 1\}$

(2) खालील उपप्रश्नांसाठी अचूक पर्याय निवडा.

(i) खालीलपैकी कोणता समूह संच आहे?

(A) इंद्रधनुष्यातील रंग (B) शाळेच्या आवारातील उंच झाडे

(C) गावातील श्रीमंत लोक (D) पुस्तकातील सोपी उदाहरणे

(ii) $N \cap W$ हा संच खालीलपैकी कोणता?

(A) $\{1, 2, 3, ...\}$ (B) $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{ \}$

(iii) $P = \{x \mid x$ हे indian या शब्दातील अक्षर आहे$\}$ तर P हा संच यादी पद्धतीने खालीलपैकी कोणता ?

(A) $\{i, n, d\}$ (B) $\{i, n, d, a\}$ (C) $\{i, n, a\}$ (D) $\{n, d, a\}$

(iv) जर $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ व $M = \{3, 4, 7, 8\}$ तर $T \cup M = ?$

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ (B) $\{1, 2, 3, 7, 8\}$

(C) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ (D) $\{3, 4\}$

(3) एका गटातील 100 लोकांपैकी 72 लोक इंग्रजी बोलतात आणि 43 लोक फ्रेंच बोलतात. हे 100 लोक इंग्रजी किंवा फ्रेंच यांपैकी किमान एक भाषा बोलतात, तर किती लोक फक्त इंग्रजी बोलतात? किती लोक फक्त फ्रेंच बोलतात? आणि किती लोक इंग्रजी आणि फ्रेंच या दोन्ही भाषा बोलतात?

(4) पार्थने वृक्षसंवर्धन सप्ताहात 70 झाडे लावली तर प्रज्ञाने 90 झाडे लावली. त्यांपैकी 25 झाडे दोघांनीही मिळून लावली, तर पार्थ किंवा प्रज्ञा यांनी एकूण किती झाडे लावली?

(5) जर $n(A) = 20$, $n(B) = 28$ व $n(A \cup B) = 36$ तर $n(A \cap B) = ?$

(6) एका वर्गातील 28 विद्यार्थ्यांपैकी 8 विद्यार्थ्यांच्या घरी फक्त कुत्रा पाळला आहे, 6 विद्यार्थ्यांच्या घरी फक्त मांजर पाळले आहे. 10 विद्यार्थ्यांच्या घरी कुत्रा आणि मांजर दोन्हीही पाळले आहे तर किती विद्यार्थ्यांच्या घरी कुत्रा किंवा मांजर यांपैकी एकही प्राणी पाळलेला नाही?

(7) पुढील प्रत्येक उदाहरणातील संचांचा छेद संच वेन आकृतीच्या साहाय्याने दाखवा.

(i) $A = \{3, 4, 5, 7\}$ $B = \{1, 4, 8\}$

(ii) $P = \{a, b, c, e, f\}$ $Q = \{l, m, n, e, b\}$

(iii) X = $\{x \mid x$ ही 80 व 100 यांच्या दरम्यानची मूळसंख्या आहे $\}$

Y = $\{y \mid y$ ही 90 व 100 मधील विषम संख्या आहे $\}$

(8) खालीलपैकी कोणते संच कोणत्या संचांचे उपसंच आहे ते लिहा.

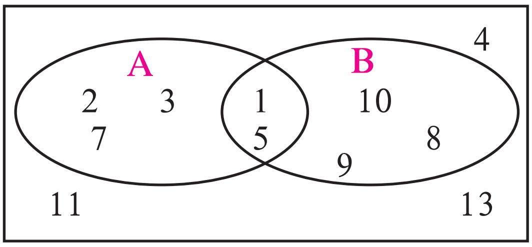
X = सर्व चौकोनांचा संच. Y = सर्व समभुज चौकोनांचा संच.

S = सर्व चौरसांचा संच. T = सर्व समांतरभुज चौकोनांचा संच.

V = सर्व आयतांचा संच.

(9) जर M हा कोणताही एक संच असेल, तर $M \cup \phi$ आणि $M \cap \phi$ लिहा.

(10*)



शेजारील वेन आकृतीवरून U, A, B, $A \cup B$ आणि $A \cap B$ हे संच लिहा.

(11) जर $n(A) = 7$, $n(B) = 13$, $n(A \cap B) = 4$, तर $n(A \cup B\} = ?$

कृती I : रिकाम्या जागी संचाचे घटक लिहा.

$U = \{1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15\}$

$A = \{1, 11, 13\}$ $B = \{8, 5, 10, 11, 15\}$ $A' = \{........\}$ $B' = \{........\}$

$A \cap B = \{...........\}$ $A' \cap B' = \{...............\}$

$A \cup B = \{...........\}$ $A' \cup B' = \{...........\}$

$(A \cap B)' = \{...........\}$ $(A \cup B)' = \{...........\}$

पडताळा घ्या : $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

कृती II : तुमच्या आसपासच्या 20 कुटुंबाकडून पुढील माहिती मिळवा.

(i) मराठी वर्तमानपत्रे घेणाऱ्या कुटुंबांची संख्या.

(ii) इंग्रजी वर्तमानपत्रे घेणाऱ्या कुटुंबांची संख्या.

(iii) इंग्रजी व मराठी या दोन्ही भाषांतील वर्तमानपत्रे घेणाऱ्या कुटुंबांची संख्या.

मिळवलेली माहिती वेन आकृतीने दाखवा.

2 वास्तव संख्या

चला, शिकूया.

- परिमेय संख्यांचे गुणधर्म
- अपरिमेय संख्यांचे गुणधर्म
- करणी
- वर्गकरणींची तुलना
- वर्गकरणींवरील क्रिया
- वर्गकरणींचे परिमेयीकरण

जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण नैसर्गिक संख्या, पूर्णांक संख्या आणि वास्तव संख्या यांचा अभ्यास केला आहे.

N = नैसर्गिक संख्यासंच = $\{1, 2, 3, 4, ...\}$

W = पूर्ण संख्यासंच = $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

I = पूर्णांक संख्यासंच = $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...\}$

Q = परिमेय संख्यासंच = $\{\frac{p}{q}, | p, q \in I, q \neq 0\}$

R = वास्तव संख्यासंच.

$N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q \subseteq R$.

परिमेय संख्यांमधील क्रमसंबंध : $\frac{p}{q}$ आणि $\frac{r}{s}$ या परिमेय संख्या असून $q > 0, s > 0$

(i) जर $p \times s = q \times r$ तर $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ (ii) जर $p \times s > q \times r$ तर $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$

(iii) जर $p \times s < q \times r$ तर $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्यांचे गुणधर्म (Properties of rational numbers)

a, b, c या परिमेय संख्या असतील तर

गुणधर्म	बेरीज	गुणाकार
1. क्रमनिरपेक्षता	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
2. साहचर्य	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. अविकारक	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
4. व्यस्त	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$

जरा आठवूया.

कोणत्याही परिमेय संख्येचे दशांश अपूर्णांकी रूप खंडित किंवा अखंड आवर्ती असते.

खंडित रूप

(1) $\frac{2}{5} = 0.4$

(2) $-\frac{7}{64} = -0.109375$

(3) $\frac{101}{8} = 12.625$

अखंड आवर्ती रूप

(1) $\frac{17}{36} = 0.472222... = 0.47\dot{2}$

(2) $\frac{33}{26} = 1.2692307692307... = 1.2\overline{692307}$

(3) $\frac{56}{37} = 1.513513513... = 1.\overline{513}$

जाणून घेऊया.

अखंड आवर्ती दशांश रूपातील परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ या रूपात मांडणे.

उदा (1) 0.777.... हा आवर्ती दशांश अपूर्णांक $\frac{p}{q}$ रूपात लिहा.

उकल : समजा $x = 0.777... = 0.\dot{7}$

$$\therefore\ 10x = 7.777... = 7.\dot{7}$$

$$\therefore\ 10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$$

$$\therefore\ 9x = 7$$

$$\therefore\ x = \frac{7}{9}$$

$$\therefore\ 0.777... = \frac{7}{9}$$

उदा (2) 7.529529529... हा आवर्ती दशांश अपूर्णांक $\frac{p}{q}$ रूपात लिहा.

उकल : समजा, $x = 7.529529... = 7.\overline{529}$

$$\therefore\ 1000x = 7529.529529... = 7529.\overline{529}$$

$$\therefore\ 1000x - x = 7529.\overline{529} - 7.\overline{529}$$

$$\therefore\ 999x = 7522.0 \qquad \therefore\ x = \frac{7522}{999}$$

$$\therefore\ 7.\overline{529} = \frac{7522}{999}$$

विचार करूया.

$2.4\dot{3}$ ही संख्या $\frac{p}{q}$ रूपात लिहिण्यासाठी काय कराल ?

हे लक्षात ठेवूया.

(1) दिलेल्या संख्येत दशांश चिन्हानंतर लगेच किती अंक आवर्ती आहेत हे पाहून त्याप्रमाणे त्या संख्येला 10, 100, 1000 यांपैकी योग्य संख्येने गुणावे. उदा. $2.\dot{3}$ या संख्येत 3 हा एकच अंक आवर्ती आहे. म्हणून $2.\dot{3}$ ही संख्या $\frac{p}{q}$ रूपात आणण्यासाठी तिला 10 ने गुणावे.

$1.\overline{24}$ या संख्येत 2, 4 हे दोन अंक आवर्ती आहेत. म्हणून $1.\overline{24}$ ला 100 ने गुणावे.

$1.\overline{513}$ या संख्येत 5, 1, 3 हे तीन अंक आवर्ती आहेत. म्हणून $1.\overline{513}$ ला 1000 ने गुणावे.

(2) परिमेय संख्येच्या छेदाचे मूळ अवयव तपासा. त्यांत 2 आणि 5 यांच्या व्यतिरिक्त मूळसंख्या नसतील तर त्या परमेय संख्येचे दशांश रूप खंडित असते. 2 व 5 व्यतिरिक्त मूळसंख्या ही छेदाचा अवयव असेल तर त्या संख्येचे दशांश रूप अखंड आवर्ती असते.

सरावसंच 2.1

1. खालीलपैकी कोणत्या परिमेय संख्यांचे दशांश रूप खंडित असेल आणि कोणत्या संख्येचे दशांश रूप अखंड आवर्ती असेल ते लिहा.

   (i) $\frac{13}{5}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{29}{16}$ (iv) $\frac{17}{125}$ (v) $\frac{11}{6}$

2. खालील परिमेय संख्या दशांश रूपात लिहा.

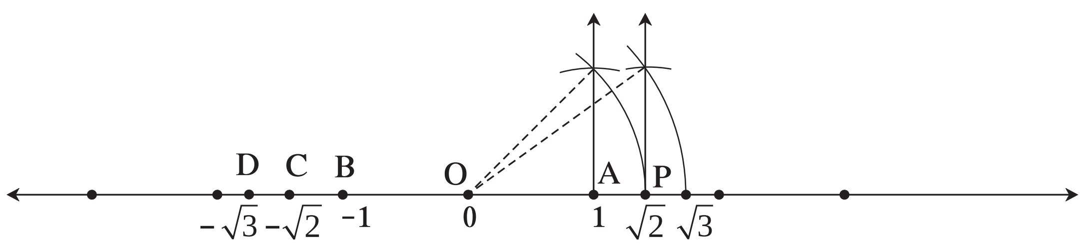
   (i) $\frac{127}{200}$ (ii) $\frac{25}{99}$ (iii) $\frac{23}{7}$ (iv) $\frac{4}{5}$ (v) $\frac{17}{8}$

3. खालील परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ रूपात लिहा.

   (i) $0.\dot{6}$ (ii) $0.\overline{37}$ (iii) $3.\overline{17}$ (iv) $15.\overline{89}$ (v) $2.\overline{514}$

जरा आठवूया.

खालील संख्यारेषेवर दाखवलेल्या $\sqrt{2}$ व $\sqrt{3}$ ह्या संख्या परिमेय नाहीत, म्हणजेच त्या अपरिमेय आहेत.



या संख्यारेषेवर OA = 1 एकक अंतर आहे. O च्या डावीकडे B बिंदूही 1 एकक अंतरावर आहे. B बिंदूचा निर्देशक -1 आहे. P बिंदूचा निर्देशक $\sqrt{2}$ असून त्याची विरुद्ध संख्या C या बिंदूने दर्शवली आहे. C बिंदूचा निर्देशक $-\sqrt{2}$ आहे. त्याप्रमाणे $\sqrt{3}$ ची विरुद्ध संख्या $-\sqrt{3}$ दर्शवणारा बिंदू D आहे.

जाणून घेऊया.

अपरिमेय आणि वास्तव संख्या (Irrational and real numbers)

$\sqrt{2}$ ही संख्या अपरिमेय आहे हे अप्रत्यक्ष सिद्धता देऊन सिद्ध करता येते.

$\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे हे गृहीत धरू. ती $\frac{p}{q}$ मानू.

$\frac{p}{q}$ हे त्या परिमेय संख्येचे संक्षिप्त रूप आहे म्हणजेच p व q मध्ये 1 पेक्षा वेगळा सामाईक विभाजक नाही, असे मानू.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\qquad\therefore\quad 2 = \frac{P^2}{q^2}$ (दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून)

$\therefore\quad 2q^2 = p^2$

$\therefore\quad p^2$ ही समसंख्या आहे.

$\therefore\quad p$ सुद्धा समसंख्या आहे, म्हणजेच 2 हा p चा विभाजक आहे. ....(I)

$\therefore\quad p = 2t \qquad \therefore\ p^2 = 4t^2 \qquad t \in I$

$\therefore\quad 2q^2 = 4t^2\ (\because\ p^2 = 2q^2)\quad \therefore\ q^2 = 2t^2\quad \therefore\ q^2$ ही सम संख्या आहे. $\therefore\ q$ ही सम संख्या आहे.

$\therefore\quad$ 2 हा q चा सुद्धा विभाजक आहे. .... (II)

विधान (I) व (II) वरून 2 हा p आणि q यांचा सामाईक विभाजक आहे.

ही विसंगती आहे. कारण $\frac{p}{q}$ मध्ये p आणि q चा 1 व्यतिरिक्त एकही सामाईक विभाजक नाही.

$\therefore\quad \sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे हे गृहीत चुकीचे आहे. $\therefore\ \sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

याच पद्धतीने $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ या अपरिमेय संख्या आहेत हे दाखवता येते. त्यासाठी 3 किंवा 5 हा, n चा विभाजक असेल तरच तो n^2 चा ही विभाजक असतो या नियमाचा उपयोग करा.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ अशा संख्या, संख्यारेषेवर दाखवता येतात.

जी संख्या संख्यारेषेवर बिंदूने दाखवता येते, ती वास्तव संख्या आहे असे म्हणतात.

थोडक्यात, संख्यारेषेवरील प्रत्येक बिंदूचा निर्देशक ही वास्तव संख्या असते आणि प्रत्येक वास्तव संख्येशी निगडित असणारा बिंदू संख्यारेषेवर असतो.

आपल्याला माहीत आहे, की प्रत्येक परिमेय संख्या वास्तव संख्या असते. परंतु $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, π, $3+\sqrt{2}$ अशा वास्तव संख्या परिमेय नाहीत. म्हणून प्रत्येक वास्तव संख्या ही परिमेय असतेच असे नाही हे लक्षात ठेवा.

अपरिमेय संख्यांची दशांश रूपात मांडणी

आपण 2 व 3 या संख्यांची वर्गमुळे भागाकार पद्धतीने काढू.

2 चे वर्गमूळ

$$\begin{array}{r|l}
 & 1.41421\ldots \\
\hline
1 & 2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ldots. \\
+1 & -1 \\
\hline
24 & 100 \\
+4 & -96 \\
\hline
281 & 400 \\
+1 & -281 \\
\hline
2824 & 11900 \\
+4 & -11296 \\
\hline
28282 & 60400 \\
+2 & -56564 \\
\hline
282841 & 0383600
\end{array}$$

$\therefore\ \sqrt{2} = 1.41421\ldots$

3 चे वर्गमूळ

$$\begin{array}{r|l}
 & 1.732\ldots. \\
\hline
1 & 3.\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ldots. \\
+1 & -1 \\
\hline
27 & 200 \\
+7 & -189 \\
\hline
343 & 1100 \\
+3 & -1029 \\
\hline
3462 & 007100 \\
+2 & -6924 \\
\hline
3464 & 0176
\end{array}$$

$\therefore\ \sqrt{3} = 1.732\ldots$

येथे भागाकारातील दशांश चिन्हापुढील अंकांची संख्या कधीही संपत नाही. म्हणजेच अनंत अंकांचा क्रम मिळतो. हा क्रम काही अंकांच्या गटाच्या आवर्तनाने तयार होत नाही. म्हणून हे संख्येचे दशांशरूप अखंड अनावर्ती असते.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ या संख्या अपरिमेय संख्या आहेत. म्हणजेच 1.4142... आणि 1.732... यासुद्धा अपरिमेय संख्या आहेत. **यावरून लक्षात घ्या, की अखंड अनावर्ती दशांश रूपातील संख्या अपरिमेय असते.**

संख्या π

कृती I

जाड कार्डबोर्डवर वेगवेगळ्या त्रिज्यांची वर्तुळे काढा. तीन, चार वर्तुळाकृती चकत्या कापा. प्रत्येक चकतीच्या कडेवरून दोरा फिरवून प्रत्येक वर्तुळाकृती चकतीचा परीघ मोजा. खालील सारणी पूर्ण करा.

अ. क्र.	त्रिज्या	व्यास (d)	परीघ (c)	गुणोत्तर = $\frac{c}{d}$
1	7 सेमी			
2	8 सेमी			
3	5.5 सेमी			

शेजारील सारणीवरून $\frac{c}{d}$ हे गुणोत्तर प्रत्येक वेळी 3.1 च्या जवळपास येते. म्हणजे स्थिर असते हे लक्षात येईल. ते गुणोत्तर π या चिन्हाने दर्शवतात.

कृती II

π ची अंदाजे किंमत काढण्यासाठी 11 सेमी, 22 सेमी व 33 सेमी लांबीचे तारेचे तुकडे घ्या. प्रत्येक तारेपासून वर्तुळ तयार करा. त्या वर्तुळांचे व्यास मोजा व खालील सारणी पूर्ण करा.

वर्तुळ क्र.	परीघ	व्यास	परीघ व व्यास यांचे गुणोत्तर
1	11 सेमी		
2	22 सेमी		
3	33 सेमी		

परीघ व व्यास यांचे गुणोत्तर $\frac{22}{7}$ च्या जवळपास आले का याचा पडताळा घ्या.

वर्तुळाचा परीघ व व्यास यांचे गुणोत्तर ही स्थिर संख्या असते, ती अपरिमेय असते. ती संख्या π या चिन्हाने दर्शवली जाते. π ची अंदाजे किंमत $\frac{22}{7}$ किंवा 3.14 घेतात.

थोर भारतीय गणिती आर्यभट यांनी इ. स. 499 मध्ये π ची किंमत $\frac{62832}{20000} = 3.1416$ अशी काढली होती.

$\sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे हे आपण पाहिले आहे. आता $2 + \sqrt{3}$ ही संख्या अपरिमेय आहे का ते पाहू.

समजा, $2 + \sqrt{3}$ ही संख्या अपरिमेय नाही असे मानू. म्हणजेच ती परिमेय असायला हवी.

जर $2 + \sqrt{3}$ परिमेय असेल तर $2 + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ आहे असे मानू.

$\therefore\ \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$ हे समीकरण मिळते.

येथे डावी बाजू अपरिमेय संख्या आणि उजवी बाजू परिमेय संख्या अशी विसंगती येते.

म्हणजेच $2 + \sqrt{3}$ ही परिमेय संख्या नसून ती अपरिमेय संख्या आहे, हे सिद्ध होते.

त्याचप्रमाणे $2\sqrt{3}$ अपरिमेय आहे हे दाखवता येते.

दोन अपरिमेय संख्याची बेरीज किंवा गुणाकार परिमेय असू शकतो हे पुढीलप्रमाणे पडताळता येते.

जसे, $2 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 2$, $\quad 4\sqrt{5} \div \sqrt{5} = 4$, $\quad (3 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5}) = 3$,

$2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ $\quad \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$, $\quad 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

हे लक्षात ठेवूया.

अपरिमेय संख्यांचे गुणधर्म

(1) परिमेय संख्या व अपरिमेय संख्या यांची बेरीज किंवा वजाबाकी ही अपरिमेय संख्या असते.

(2) शून्येतर परिमेय संख्या व अपरिमेय संख्या यांचा गुणाकार किंवा भागाकार हीसुद्धा एक अपरिमेय संख्या असते.

(3) दोन अपरिमेय संख्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार हे मात्र परिमेय किंवा अपरिमेय असू शकतात.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.

वास्तव संख्यांवरील क्रमसंबंधाचे गुणधर्म

1. जर a आणि b या दोन वास्तव संख्या असतील तर त्यांच्यामध्ये $a = b$ किंवा $a < b$ किंवा $a > b$ यांपैकी कोणता तरी एकच संबंध असतो.
2. जर $a < b$ आणि $b < c$ तर $a < c$
3. जर $a < b$ तर $a + c < b + c$
4. जर $a < b$ आणि जर $c > 0$ तर $ac < bc$ आणि जर $c < 0$ तर $ac > bc$

   परिमेय व अपरिमेय संख्या घेऊन वरील नियम पडताळून पाहा.

ऋण संख्येचे वर्गमूळ

जर $\sqrt{a} = b$ तर $b^2 = a$ हे आपल्याला माहीत आहे.

यावरून जर $\sqrt{5} = x$ तर $x^2 = 5$ हे आपल्याला समजते.

तसेच आपल्याला हे माहीत आहे, की कोणत्याही वास्तव संख्येचा वर्ग ही नेहमी ऋणेतर संख्या येते. म्हणजे कोणत्याही वास्तव संख्येचा वर्ग कधीही ऋण नसतो. पण $(\sqrt{-5})^2 = -5$ $\therefore$ $\sqrt{-5}$ ही वास्तव संख्या नाही.

म्हणजेच ऋण वास्तव संख्येचे वर्गमूळ वास्तव संख्या नसते.

सरावसंच 2.2

(1) $4\sqrt{2}$ ही संख्या अपरिमेय आहे हे सिद्‌ध करा.

(2) $3 + \sqrt{5}$ ही संख्या अपरिमेय संख्या आहे हे सिद्‌ध करा.

(3) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ या संख्या संख्यारेषेवर दाखवा.

(4) खाली दिलेल्या संख्यांच्या दरम्यानच्या कोणत्याही तीन परिमेय संख्या लिहा.

(i) 0.3 आणि −0.5 (ii) −2.3 आणि −2.33

(iii) 5.2 आणि 5.3 (iv) −4.5 आणि −4.6

जाणून घेऊया.

धन परिमेय संख्येचे मूळ (Root of positive rational number)

जर $x^2 = 2$ तर $x = \sqrt{2}$ किंवा $x = -\sqrt{2}$, असते. $\sqrt{2}$ आणि $-\sqrt{2}$ ह्या अपरिमेय संख्या आहेत हे आपल्याला माहीत आहे. $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{8}$, यांसारख्या संख्या सुद्‌धा अपरिमेय असतात.

n धन पूर्णांक संख्या असून व $x^n = a$ असेल, तर x हे a चे n वे मूळ आहे असे म्हणतात. हे मूळ परिमेय किंवा अपरिमेय असते.

उदा. $2^5 = 32$ $\therefore$ 2 हे 32 चे 5 वे मूळ परिमेय आहे, पण $x^5 = 2$ तर $x = \sqrt[5]{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

करणी (Surds)

आपल्याला माहीत आहे की 5 ही परिमेय संख्या आहे परंतु $\sqrt{5}$ ही परिमेय नाही. ज्याप्रमाणे वास्तव संख्येचे वर्गमूळ किंवा घनमूळ परिमेय किंवा अपरिमेय असू शकते त्याचप्रमाणे n वे मूळ देखील परिमेय किंवा अपरिमेय असू शकते.

जर n ही 1 पेक्षा मोठी पूर्णांक संख्या असेल आणि a या धन वास्तव संख्येचे n वे मूळ x ने दाखवले तर $x^n = a$ किंवा $\sqrt[n]{a} = x$ असे लिहितात.

जर a ही धन **परिमेय संख्या असेल आणि a चे n वे मूळ x ही अपरिमेय संख्या असेल तर x ही करणी (अपरिमेय मूळ) आहे असे म्हणतात.**

$\sqrt[n]{a}$ ही करणी संख्या असेल तर $\sqrt{\ }$ या चिन्हाला **करणी चिन्ह** (radical sign) म्हणतात. n या संख्येला त्या **करणीची कोटी** (order of the surd) म्हणतात आणि a ला करणीस्थ संख्या (radicand) असे म्हणतात.

(1) समजा $a = 7$, $n = 3$, तर $\sqrt[3]{7}$ ही करणी आहे. कारण $\sqrt[3]{7}$ ही अपरिमेय आहे.

(2) समजा $a = 27$ आणि $n = 3$ असेल तर $\sqrt[3]{27} = 3$ ही अपरिमेय संख्या नाही म्हणून $\sqrt[3]{27}$ ही करणी नाही.

(3) $\sqrt[3]{8}$ ही करणी आहे का?

समजा $\sqrt[3]{8} = p$ $\qquad$ $p^3 = 8$. $\qquad$ कोणत्या संख्येचा घन 8 आहे?

आपल्याला माहीत आहे की, 2 या संख्येचा घन 8 आहे.

$\sqrt[3]{8}$ मध्ये $a = 8$ ही परिमेय संख्या आहे. येथे $n = 3$ ही धन पूर्णांक संख्या आहे. परंतु $\sqrt[3]{8}$ ही संख्या अपरिमेय नाही कारण 8 चे घनमूळ 2 आहे. $\therefore$ $\sqrt[3]{8}$ ही करणी नाही.

(4) आता $\sqrt[4]{8}$ चा विचार करू,

येथे $a = 8$, करणीची कोटी $n = 4$; परंतु 8 ही संख्या कोणत्याही परिमेय संख्येचा चौथा घात नाही.

म्हणजे $\sqrt[4]{8}$ ही अपरिमेय संख्या आहे. $\therefore$ $\sqrt[4]{8}$ ही करणी आहे.

आपण फक्त कोटी 2 असणाऱ्या म्हणजे $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{42}$ इत्यादी करणींचा विचार करणार आहोत.

कोटी 2 असणाऱ्या करणींना **वर्ग करणी** म्हणतात.

करणीचे सोपे रूप

कधी कधी करणी संख्यांना सोपे रूप देता येते. जसे (i) $\sqrt{48} = \sqrt{16\times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{98} = \sqrt{49\times 2} = \sqrt{49}\times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ....अशा काही करणी सोप्या रूपातील करणी आहेत. त्यांना आणखी सोपे रूप देता येत नाही.

सजातीय करणी (Similar or like surds)

$\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ या काही सजातीय करणी आहेत. जर p आणि q या परिमेय संख्या असतील तर $p\sqrt{a}$, $q\sqrt{a}$ या सजातीय करणी आहेत असे म्हणतात. **दोन करणी सजातीय असण्यासाठी त्यांची कोटी समान असावी लागते. तसेच करणीस्थ संख्याही समान असाव्या लागतात.**

$\sqrt{45}$ व $\sqrt{80}$ या करणींची कोटी 2 आहे, म्हणजे यांची कोटी समान आहे, परंतु करणीस्थ संख्या समान नाहीत. म्हणून या करणी सजातीय नाहीत असे दिसते. या करणींना सोपे रूप देऊ.

$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ आणि $\sqrt{80} = \sqrt{16\times5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$ व $4\sqrt{5}$ या करणी सजातीय आहेत

म्हणजे $\sqrt{45}$ व $\sqrt{80}$ या करणींची सोपी रूपे सजातीय करणी आहेत.

हे लक्षात ठेवूया.

सोप्या रूपातील करणींची कोटी व करणीस्थ संख्या समान होत असतील तर त्या करणींना सजातीय करणी म्हणतात.

जाणून घेऊया.

करणींची तुलना (Comparison of surds)

समजा a, b, k या धनवास्तव संख्या असल्या तर

$a < b$ यावरून $ak < bk$ मिळते. $\therefore a^2 < ab < b^2$

म्हणजे $a < b$ तर $a^2 < b^2$

उलट $a^2 < b^2$ असेल तर $a = b$, $a > b$ आणि $a < b$ या शक्यता पाहू.

$a = b$ वरून $a^2 = b^2$, $a > b$ वरून $a^2 > b^2$ मिळते परंतु हे अशक्य

$\therefore a < b$ मिळते. म्हणजे $a^2 < b^2$ तर $a < b$

येथे a आणि b या वास्तव संख्या असल्याने त्या परिमेय संख्या किंवा करणी असू शकतात.

याचा उपयोग करून दोन करणींमधील लहान-मोठेपणा तपासू.

(i) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{5}$

$\sqrt{36} \times \sqrt{2} \;\boxed{?}\; \sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{72} \;\boxed{?}\; \sqrt{125}$

परंतु $72 \;\boxed{<}\; 125$

$\therefore 6\sqrt{2} \;\boxed{<}\; 5\sqrt{5}$

किंवा

$(6\sqrt{2})^2 \;\boxed{\;\;}\; (5\sqrt{5})^2$,

$72 < 125$

$\therefore 6\sqrt{2} \;\boxed{<}\; 5\sqrt{5}$

(ii) $8\sqrt{3}, \sqrt{192}$

$\sqrt{64} \times \sqrt{3} \;\boxed{?}\; \sqrt{192}$

$\sqrt{192} \;\boxed{?}\; \sqrt{192}$

परंतु $192 \;\boxed{=}\; 192$

$\therefore \sqrt{192} \;\boxed{=}\; \sqrt{192}$

$\therefore 8\sqrt{3} \;\boxed{=}\; \sqrt{192}$

(iii) $7\sqrt{2}, 5\sqrt{3}$

$\sqrt{49} \times \sqrt{2} \;\boxed{?}\; \sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{98} \;\boxed{?}\; \sqrt{75}$

परंतु $98 \;\boxed{>}\; 75$

$\therefore 7\sqrt{2} \;\boxed{>}\; 5\sqrt{3}$

किंवा

$(7\sqrt{2})^2 \;\boxed{\;\;}\; (5\sqrt{3})^2$,

$98 > 75$

$\therefore 7\sqrt{2} \;\boxed{>}\; 5\sqrt{3}$

सजातीय करणींवरील क्रिया (Operations on like surds)

सजातीय करणींवर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या क्रिया करता येतात.

विचार करूया.

$\sqrt{9+16} \overset{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$

$\sqrt{100+36} \overset{?}{=} \sqrt{100}+\sqrt{36}$

उदा (1) सोपे रूप द्या : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3}$

उकल : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3} = (7 + 29)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

उदा (2) सोपे रूप द्या : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3}$

उकल : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = (7 - 29)\sqrt{3} = -22\sqrt{3}$

उदा (3) सोपे रूप द्या : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8}$

उकल : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = \left(13 + \frac{1}{2} - 5\right)\sqrt{8} = \left(\frac{26+1-10}{2}\right)\sqrt{8}$

$$= \frac{17}{2}\sqrt{8} = \frac{17}{2}\sqrt{4\times 2}$$

$$= \frac{17}{2} \times 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$$

उदा (4) सोपे रूप द्या : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$

उकल : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125} = 8\sqrt{5} + \sqrt{4\times 5} - \sqrt{25\times 5}$

$$= 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$$

$$= (8 + 2 - 5)\sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

उदा (5) करणींचा गुणाकार करा : $\sqrt{7} \times \sqrt{42}$

उकल : $\sqrt{7} \times \sqrt{42} = \sqrt{7\times 42} = \sqrt{7\times 7\times 6} = 7\sqrt{6}$ ($7\sqrt{6}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.)

उदा (6) करणींचा भागाकार करा : $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

उकल : $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$ (5 ही परिमेय संख्या आहे.)

उदा (7) $\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{25\times 2} \times \sqrt{9\times 2} = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$

दोन करणींचा गुणाकार किंवा भागाकार ही परिमेय संख्या असू शकते, हे वरील उदाहरणांवरून लक्षात घ्या.

करणीचे परिमेयीकरण (Rationalization of surd)

दोन करणींचा गुणाकार परिमेय संख्या येत असेल तर त्यांपैकी कोणत्याही एका करणीस दुसऱ्या करणीचा **परिमेयीकरण गुणक** (Rationalizing Factor) म्हणतात.

उदा (1) $\sqrt{2}$ या करणीला $\sqrt{2}$ ने गुणले असता $\sqrt{2\times2} = \sqrt{4}$ मिळतात. $\sqrt{4} = 2$ ही परिमेय संख्या आहे.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ चा परिमेयीकरण गुणक $\sqrt{2}$ आहे.

उदा (2) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ हा गुणाकार करा.

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ ही परिमेय संख्या आहे.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ चा $\sqrt{8}$ हा परिमेयीकरणाचा गुणक आहे.

त्याप्रमाणे तर $8\sqrt{2}$ ही करणीसुद्धा $\sqrt{2}$ या करणीचा परिमेयीकरण गुणक आहे.

कारण $\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \times 2 = 16$.

$\sqrt{6}$, $\sqrt{16}$ $\sqrt{50}$ हे $\sqrt{2}$ चे परिमेयीकरण गुणक आहेत का हे पडताळा.

हे लक्षात ठेवूया.

दिलेल्या करणीचा परिमेयीकरण गुणक एकमेव नसतो. एखादी करणी दिलेल्या करणीचा परिमेयीकरण गुणक असेल तर तिला शून्येतर परिमेय संख्येने गुणून येणारी करणीसुद्धा दिलेल्या करणीचा परिमेयीकरण गुणक असते.

उदा (3) $\sqrt{27}$ चा परिमेयीकरण गुणक लिहा.

उकल : $\sqrt{27} = \sqrt{9\times3} = 3\sqrt{3}$ $\therefore$ $3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$ ही परिमेय संख्या आहे.

$\therefore$ $\sqrt{3}$ हा $\sqrt{27}$ या करणीचा परिमेयीकरण गुणक आहे.

लक्षात घ्या की, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ म्हणजे $3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9 \times 3 = 27$.

म्हणजे $\sqrt{27}$ या दिलेल्या करणीचा $3\sqrt{3}$ हा सुद्धा परिमेयीकरण गुणक असेल. या व्यतिरिक्त $4\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$ असे अनेक गुणक मिळतील. यांपैकी $\sqrt{3}$ हा सर्वांत सोप्या मांडणीतील परिमेयीकरण गुणक आहे.

उदा (4) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ च्या छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल : $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ....अंशाला व छेदाला $\sqrt{5}$ ने गुणू.

उदा (5) $\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$ च्या छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल : $\dfrac{3}{2\sqrt{7}} = \dfrac{3}{2\sqrt{7}} \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2\times7} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ (येथे $2\sqrt{7}$ ला $\sqrt{7}$ ने गुणणे पुरेसे आहे.)

हे लक्षात ठेवूया.

छेदाचे परिमेयीकरण करण्यासाठी परिमेयीकरण गुणकाचा उपयोग होतो.
कोणत्याही संख्येचा छेद परिमेय संख्या असणे सोईचे असते म्हणून छेदांचे परिमेयीकरण करतात.

सरावसंच 2.3

(1) पुढील करणींच्या कोटी सांगा.

(i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[4]{10}$ (iv) $\sqrt{39}$ (v) $\sqrt[3]{18}$

(2) पुढीलपैकी कोणत्या संख्या करणी आहेत हे सांगा.

(i) $\sqrt[3]{51}$ (ii) $\sqrt[4]{16}$ (iii) $\sqrt[5]{81}$ (iv) $\sqrt{256}$ (v) $\sqrt[3]{64}$ (vi) $\sqrt{\frac{22}{7}}$

(3) खालील जोड्यांपैकी कोणत्या करणींच्या जोड्या सजातीय व कोणत्या विजातीय आहेत हे ओळखा.

(i) $\sqrt{52}$, $5\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{68}$, $5\sqrt{3}$ (iii) $4\sqrt{18}$, $7\sqrt{2}$

(iv) $19\sqrt{12}$, $6\sqrt{3}$ (v) $5\sqrt{22}$, $7\sqrt{33}$ (vi) $5\sqrt{5}$, $\sqrt{75}$

(4) खालील करणींना सोपे रूप द्या.

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{250}$ (iv) $\sqrt{112}$ (v) $\sqrt{168}$

(5) खालील संख्यांमधील लहानमोठेपणा ठरवा.

(i) $7\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247}$, $\sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7}$, $\sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5}$, $7\sqrt{2}$ (v) $4\sqrt{42}$, $9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3}$, 9 (vii) 7, $2\sqrt{5}$

(6) सोपे रूप द्या.

(i) $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (ii) $9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125}$

(iii) $7\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{7} - \frac{3}{5}\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

(7) गुणाकार करा आणि तो सोप्या रूपात लिहा.

(i) $3\sqrt{12} \times \sqrt{18}$ (ii) $3\sqrt{12} \times 7\sqrt{15}$

(iii) $3\sqrt{8} \times \sqrt{5}$ (iv) $5\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}$

(8) भागाकार करा आणि तो सोप्या रूपात लिहा.

(i) $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{125} \div \sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{54} \div \sqrt{27}$ (iv) $\sqrt{310} \div \sqrt{5}$

(9) छेदाचे परिमेयीकरण करा.

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{6}{9\sqrt{3}}$ (v) $\frac{11}{\sqrt{3}}$

जरा आठवूया.

आपल्याला हे माहीत आहे, की

जर $a > 0$, $b > 0$ तर $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\sqrt{a^2} = a$

गुणाकार करा.

उदा (1) $\sqrt{2}\,(\sqrt{8} + \sqrt{18})$

$= \sqrt{2\times8}+\sqrt{2\times18}$

$= \sqrt{16}+\sqrt{36}$

$= 4 + 6$

$= 10$

उदा (2) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$

$= \sqrt{3}\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)$

$= \sqrt{3}\times2\sqrt{3}-\sqrt{3}\times3\sqrt{2}-\sqrt{2}\times2\sqrt{3}+\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$

$= 2\times3-3\sqrt{6}-2\sqrt{6}+3\times2$

$= 6-5\sqrt{6}+6$

$= 12-5\sqrt{6}$

जाणून घेऊया.

वर्ग करणीचे द्विपद रूप (Binomial quadratic surd)

- $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} + \sqrt{5}$ ही वर्ग करणीची द्विपद रूपे आहेत; तसेच $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} - \sqrt{5}$ ही सुद्धा करणींची द्विपद रूपे आहेत.

खालील गुणाकार अभ्यासा.

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$
- $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 = 3 - 7 = -4$
- $(\frac{3}{2} + \sqrt{5})(\frac{3}{2} - \sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{9-20}{4} = -\frac{11}{4}$

$(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ व $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ या द्विपद करणींच्या जोडीचा गुणाकार परिमेय संख्या आहे. अशा द्विपद करणींच्या जोड्यांना **अनुबद्ध जोड्या** म्हणतात.

द्विपद करणी व तिची अनुबद्ध जोडी या दोन्ही संख्या परस्परांचे परिमेयीकरणाचे गुणक असतात.

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ किंवा $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ यांपैकी प्रत्येक द्विपद करणी ही $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ या द्विपद करणीची अनुबद्ध जोडी आहे.

तसेच $7 + \sqrt{3}$ ची अनुबद्ध जोडी $7 - \sqrt{3}$ आहे.

हे लक्षात ठेवूया.

द्विपद करणींच्या अनुबद्ध जोडीतील पदांचा गुणाकार नेहमी परिमेय संख्या येतो.

जाणून घेऊया.

छेदाचे परिमेयीकरण (Rationalization of the denominator)

द्विपद करणी व तिची अनुबद्ध जोडी यांचा गुणाकार परिमेय असतो, या गुणधर्माचा उपयोग करून, छेद द्विपद करणी असणाऱ्या संख्यांच्या छेदांचे परिमेयीकरण करता येते.

उदा.(1) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ या संख्येच्या छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल : $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ या द्विपद करणींची अनुबद्ध जोडी $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ आहे

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

उदा (2) $\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ या संख्येच्या छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल : $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ या द्विपद करणीचीअनुबद्ध जोडी $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ आहे.

$$\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$= \frac{8\times 3\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{9\times 2-5} = \frac{24\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{18-5} = \frac{24\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{13}$$

सरावसंच 2.4

(1) गुणाकार करा

(i) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}$ (iii) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) खालील संख्यांच्या छेदांचे परिमेयीकरण करा.

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{4}{7+4\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

जाणून घेऊया.

केवलमूल्य (Absolute value)

x ही वास्तव संख्या असेल तर x चे केवलमूल्य (Absolute Value) किंवा संख्या रेषेवरील शून्यापासूनचे तिचे अंतर $|x|$ असे लिहितात. $|x|$ चे वाचन x चे केवलमूल्य असे करतात.

केवलमूल्याची व्याख्या पुढीलप्रमाणे करतात.

जर $x > 0$ तर $|x| = x$ — जर x धन असेल तर x चे केवलमूल्य x असते.

जर $x = 0$ तर $|x| = 0$ — जर x शून्य असेल तर x चे केवलमूल्य शून्यच असते.

जर $x < 0$ तर $|x| = -x$ — जर x ऋण असेल तर x चे केवलमूल्य x च्या विरुद्ध संख्येएवढे असते.

उदा (1) $|3| = 3$ $\quad |-3| = -(-3) = 3$ $\quad |0| = 0$

कोणत्याही वास्तवसंख्येचे केवलमूल्य ऋण नसते.

उदा (2) खालील किंमत काढा.

(i) $|9-5| = |4| = 4$ (ii) $|8-13| = |-5| = 5$

(iii) $|8|-|-3| = 5$ (iv) $|8|\times|4| = 8 \times 4 = 32$

उदा (3) सोडवा $|x-5| = 2$

उकल : $|x-5| = 2$ $\quad \therefore x - 5 = +2$ किंवा $x - 5 = -2$

$\therefore x = 2 + 5$ किंवा $x = -2+5$

$\therefore x = 7$ किंवा $x = 3$

सरावसंच 2.5

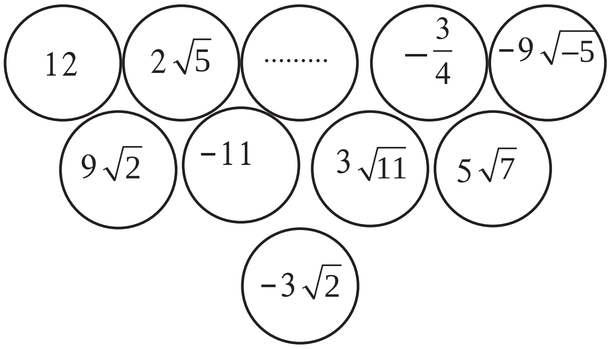
(1) किंमत काढा.

i) $|15 - 2|$ (ii) $|4 - 9|$ (iii) $|7|\times|-4|$

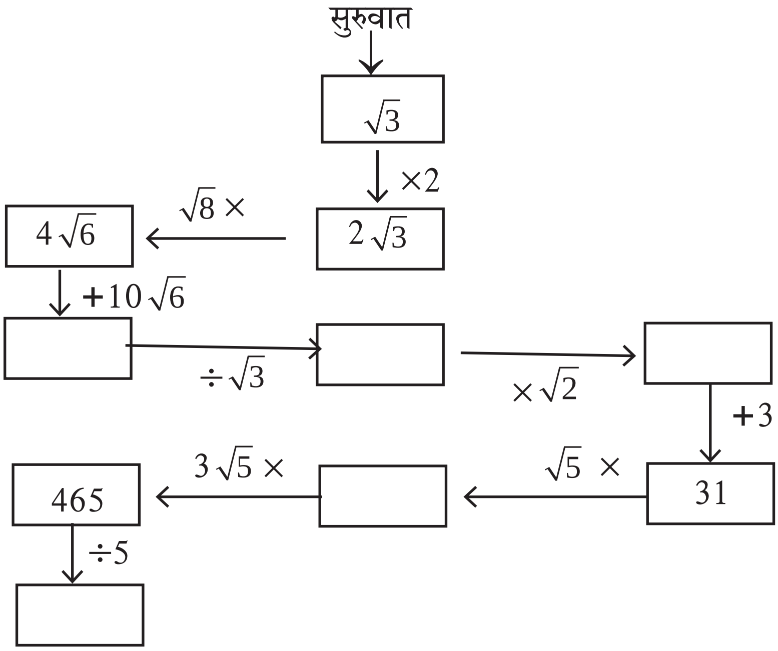
(2) सोडवा

(i) $|3x-5| = 1$ (ii) $|7-2x| = 5$ (iii) $\left|\frac{8-x}{2}\right| = 5$ (iv) $\left|5+\frac{x}{4}\right| = 5$

कृती (I) : शेजारील कार्डांवर काही वास्तवसंख्या लिहिल्या आहेत. त्यांचा उपयोग करून बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकाराची दोन दोन उदाहरणे तयार करा व सोडवा.



कृती (II) :



संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

(1) खालील प्रश्नांच्या बहुपर्यायी उत्तरांपैकी योग्य पर्याय निवडा

(i) खालीलपैकी अपरिमेय संख्या कोणती ?

(A) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\sqrt{196}$

(ii) खालीलपैकी अपरिमेय संख्या कोणती ?

(A) 0.17 (B) $1.\overline{513}$ (C) $0.27\overline{46}$ (D) 0.101001000.....

(iii) खालीलपैकी कोणत्या संख्येचे दशांशरूप अखंड आवर्ती असेल ?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{137}{25}$

(iv) संख्या रेषेवरील प्रत्येक बिंदू काय दर्शवितो ?

(A) नैसर्गिक संख्या (B) अपरिमेय संख्या (C) परिमेय संख्या (D) वास्तव संख्या.

(v) $0.\dot{4}$ या संख्येचे परिमेय रुप कोणते ?

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{40}{9}$ (C) $\frac{3.6}{9}$ (D) $\frac{36}{9}$

(vi) जर n ही पूर्ण वर्ग संख्या नसेल तर $\sqrt{n}$ ही खालीलपैकी कोणती संख्या असेल?

(A) नैसर्गिक संख्या (B) परिमेय संख्या

(C) अपरिमेय संख्या (D) A, B, C हे तिन्ही पर्याय असू शकतात.

(vii) खालीलपैकी कोणती संख्या करणी नाही?

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt[3]{17}$ (C) $\sqrt[3]{64}$ (D) $\sqrt{193}$

(viii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ या करणीची कोटी किती?

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 5

(ix) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ या द्विपद करणीची अनुबद्ध जोडी कोणती?

(A) $-2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

(x) $\left|12-(13+7)\times 4\right|$ ची किंमत किती?

(A) −68 (B) 68 (C) −32 (D) 32.

(2) खालील संख्या $\frac{p}{q}$ रूपात लिहा.

(i) 0.555 (ii) $29.\overline{568}$ (iii) 9.315 315 ..... (iv) 357.417417..... (v) $30.\overline{219}$

(3) खालील संख्या दशांश रूपात लिहा.

(i) $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{9}{11}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\frac{121}{13}$ (v) $\frac{29}{8}$

(4) $5+\sqrt{7}$ ही संख्या अपरिमेय आहे हे दाखवा.

(5) खालील करणी सोप्या रूपात लिहा.

(i) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}\sqrt{45}$

(6) खालील करणींचा सोपा परिमेयीकरण गुणक लिहा.

(i) $\sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{27}$ (iv) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ (v) $3\sqrt{72}$ (vi) $4\sqrt{11}$

(7) सोपे रूप द्या.

(i) $\frac{4}{7}\sqrt{147}+\frac{3}{8}\sqrt{192}-\frac{1}{5}\sqrt{75}$ (ii) $5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{216}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-\frac{3}{\sqrt{6}}$

(iv) $4\sqrt{12}-\sqrt{75}-7\sqrt{48}$ (v*) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) छेदाचे परिमेयीकरण करा.

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ (v) $\frac{12}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3 बहुपदी

चला, शिकूया.

- बहुपदीची ओळख
- बहुपदींवरील क्रिया
- बहुपदीची कोटी
- संश्लेषक भागाकार
- बहुपदीची किंमत
- शेषसिद्धांत

चला, चर्चा करूया.

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$; $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$; 6 या सर्व बैजिक राशी आहेत.

शिक्षक : विद्यार्थी मित्रांनो, $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$, 6 या प्रत्येक राशीतील एकेक पद घ्या. त्या पदातील चलांचे घातांक सांगा.

माधुरी : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ या राशीतील पदांच्या चलांचे घातांक अनुक्रमे 3, 2, 1 आहेत.

विवेक : सर, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$ या राशीतील पदांच्या चलांचे घातांक अनुक्रमे 2, 3, 5 आहेत.

रोहित : सर, 6 या राशीमध्ये चल नाही. येथे $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ असे लिहिता येते, म्हणून 6 या राशीतील चलाचा घातांक 0 आहे.

शिक्षक : म्हणजे वरील सर्व राशींमध्ये चलांचे घातांक धनपूर्णांक किंवा शून्य, म्हणजेच पूर्ण संख्या आहेत.

ज्या बैजिक राशीमध्ये चलांचे घातांक पूर्ण संख्या असतात, त्या राशीला **बहुपदी** (polynomial) असे म्हणतात. 6 ही सुद्धा बहुपदी आहे. 6, -7, $\frac{1}{2}$, 0, $\sqrt{3}$ इत्यादी स्थिर संख्यांना **स्थिर बहुपदी** (Constant polynomial) म्हणतात.

$\sqrt{y} + 5$ व $\frac{1}{y} - 3$ या बहुपदी आहेत काय ?

सारा : सर, $\sqrt{y} + 5$ ही बहुपदी नाही. कारण $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$, यामध्ये y चा घातांक $\frac{1}{2}$ असून ती पूर्ण संख्या नाही.

जॉन : सर, $\frac{1}{y} - 3$ ही सुद्धा बहुपदी नाही. कारण $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$, येथे y चा घातांक -1 असून ती पूर्ण संख्या नाही.

शिक्षक : बहुपदी नसलेल्या कोणत्याही पाच बैजिक राशी लिहून त्या बहुपदी का नाहीत याचे स्पष्टीकरण द्या.

खालील प्रश्नांची उत्तरे वेगवेगळी उदाहरणे घेऊन व त्यांवर चर्चा करून शोधा.

- प्रत्येक बैजिक राशी ही बहुपदी असते काय ?
- प्रत्येक बहुपदी ही बैजिक राशी असते काय?

बहुपदीचे प्रकार (पदांच्या संख्येवरून)

$2x$, 5	$x^4 + x$, $m^2 - 3m$	$\frac{1}{2}y^2 - 2y + 5$, $x^3 - \sqrt{3}\, x^2 + 5x$
प्रत्येक बहुपदीत एकच पद	प्रत्येक बहुपदीत दोन पदे	प्रत्येक बहुपदीत तीन पदे
एकपदी	द्विपदी	त्रिपदी

एका चलातील बहुपदी तिच्यातील चलानुसार $p(x)$, $q(m)$, $r(y)$ अशा प्रकारे दर्शवतात.

उदाहरणार्थ $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ $\quad q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7$ $\quad r(y) = y^2 + 5$

जाणून घेऊया.

एका चलातील बहुपदीची कोटी (Degree of a polynomial in one variable)

शिक्षक : $2x^7 - 5x + 9$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक कोणता आहे ?

जिजा : सर, सर्वांत मोठा घातांक 7 आहे.

शिक्षक : एका चलातील बहुपदीमध्ये, चलाच्या सर्वांत मोठ्या घातांकास त्या **बहुपदीची कोटी** म्हणतात. मग सांगा बरं, वरील बहुपदीची कोटी किती ?

अशोक : सर, $2x^7 - 5x + 9$ या बहुपदीची कोटी 7 आहे.

शिक्षक : 10 या बहुपदीची कोटी किती ?

राधा : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ म्हणून 10 या बहुपदीची कोटी 0 आहे.

शिक्षक : 10 प्रमाणेच **कोणत्याही शून्येतर स्थिर बहुपदीची कोटी 0 असते.**
शून्य बहुपदीची कोटी निश्चित करता येत नाही.

एकापेक्षा अधिक चलांतील बहुपदीची कोटी

बहुपदीमधील प्रत्येक पदामध्ये असलेल्या चलांच्या घातांकांची जी बेरीज सर्वाधिक असते, त्या बेरजेस त्या **बहुपदीची कोटी** म्हणतात.

उदा. $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ ही दोन चलांतील बहुपदी आहे. या बहुपदीची कोटी 9 आहे.
(येथे घातांकांच्या बेरजा $3 + 6 = 9$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$)

कृती I : चल x व कोटी 5 असलेल्या एकपदी, द्विपदी व त्रिपदीचे प्रत्येकी एक उदाहरण लिहा.

एकपदी   द्विपदी   त्रिपदी

कृती II : 5 कोटी असलेल्या दोन चलांतील एका द्विपदीचे उदाहरण तयार करा.

बहुपदीचे प्रकार (कोटीवरून)

एका चलातील बहुपदी

$3x - 1,\ 7y$	$2y^2 + y + 1,\ - 3x^2$	$x^3 + x^2 + 2x + \sqrt{3}$, $m - m^3$
कोटी 1	कोटी 2	कोटी 3
रेषीय बहुपदी	वर्ग बहुपदी	घन बहुपदी
सामान्यरूप $ax + b$ येथे a व b सहगुणक व $a \neq 0$	सामान्यरूप $ax^2 + bx + c$ येथे a, b, c सहगुणक व $a \neq 0$	सामान्यरूप $ax^3 + bx^2 + cx + d$ येथे a, b, c, d सहगुणक व $a \neq 0$

बहुपदी : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ **ही** x **या चलातील कोटी** n **असलेली बहुपदी आहे. येथे** $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_2, a_1, a_0$ **हे सहगुणक असून** $a_n \neq 0$

बहुपदीचे प्रमाणरूप, सहगुणक रूप व घातांक रूप
(Standard form, coefficient form and index form of a polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ ही बहुपदी x च्या घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने $x^4 - 3x^2 + x + 5$ अशी लिहिता येईल. या बहुपदीत x च्या तिसऱ्या घाताचे पद नाही. म्हणजेच ते $0x^3$ आहे असे मानता येते. हे पद घेऊन $p(x)$ ही बहुपदी $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ अशी लिहिता येईल. अशा प्रकारे घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहिलेल्या बहुपदीला प्रमाण रूपातील बहुपदी म्हणतात.

काही वेळा प्रमाणरूपातील बहुपदी मधले चल अध्याहृत मानून तिचे फक्त सहगुणक क्रमाने लिहितात, उदाहरणार्थ $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$ ही बहुपदी $(1, -3, 0, -8)$ अशी लिहितात. याला बहुपदीचे सहगुणक रूप असे म्हणतात.

$(4, 0, -5, 0, 1)$ ही बहुपदी y हे चल वापरून $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$ म्हणजेच $4y^4 - 5y^2 + 1$ अशी लिहिता येईल. या रूपाला बहुपदीचे घातांक रूप म्हणतात.

बहुपदीचे सहगुणकरूप व प्रमाणरूप

उदा. $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

बहुपदी घातांकाच्या उतरत्या क्रमाने लिहा.	$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$
बहुपदीत नसलेली पदे शून्य सहगुणक घेऊन समाविष्ट करा आणि ती प्रमाणरूपात लिहा.	$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$
दिलेल्या बहुपदीचे सहगुणक रूप लिहा.	$(3, 0, 5, 0, -7, 2)$
बहुपदीची कोटी लिहा.	5

उदा (1) $x^3 + 3x - 5$ ही बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

उकल : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

$\therefore$ दिलेल्या बहुपदीचे सहगुणक रूप $(1, 0, 3, -5)$

उदा (2) $(2, -1, 0, 5, 6)$ ही सहगुणक रूपातील बहुपदी घातांक रूपात लिहा.

उकल : बहुपदीचे सहगुणक रूप $(2, -1, 0, 5, 6)$

$\therefore$ घातांक रूपातील बहुपदी $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

म्हणजेच $2x^4 - x^3 + 5x + 6$

सरावसंच 3.1

1. खालील राशी बहुपदी आहेत का ते लिहा. स्पष्टीकरण द्या.

   (i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

   (iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

2. खालील प्रत्येक बहुपदीतील m^3 चा सहगुणक लिहा.

   (i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}\,m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

3. खालील माहितीवरून x हे चल वापरून प्रत्येकी एक बहुपदी लिहा.

   (i) कोटी 7 असलेली एकपदी (ii) कोटी 35 असलेली द्विपदी (iii) कोटी 8 असलेली त्रिपदी

4. खालील प्रत्येक बहुपदीची कोटी लिहा.

(i) $\sqrt{5}$ (ii) x° (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}\,m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$

(vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

5. खालील बहुपदींचे रेषीय, वर्ग व घन बहुपदी याप्रकारे वर्गीकरण करा.

(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}\,y - \frac{1}{2}$

(iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

6. खालील बहुपदी प्रमाण रूपात लिहा.

(i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

7. खालील बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

(i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

8. खालील सहगुणक रूपातील बहुपदी x चल वापरून घातांकरूपात लिहा.

(i) $(1, 2, 3)$ (ii) $(5, 0, 0, 0, -1)$ (iii) $(-2, 2, -2, 2)$

9. खाली काही बहुपदी दिल्या आहेत. त्या बहुपदी दिलेल्या चौकटींत योग्य ठिकाणी लिहा.

$x + 7$,
x^2,
$x^3 + x^2 + x + 5$,
$2x^2 + 5x + 10$,
$x^3 + 9$,
$3x^2 + 5x$

वर्ग बहुपदी	द्विपदी
....	....
घन बहुपदी	त्रिपदी
....	....
रेषीय बहुपदी	एकपदी
....	....

जरा आठवूया.

(1) दोन सरूप बैजिक पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी करताना त्यांच्या सहगुणकांची बेरीज किंवा वजाबाकी करतात. जसे, $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) दोन बैजिक पदांचा गुणाकार किंवा भागाकार करताना त्यांच्या सहगुणकांचा गुणाकार किंवा भागाकार होतो. तसेच घातांकांच्या नियमांचाही उपयोग होतो.

जसे, $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$

जाणून घेऊया.

बहुपदींवरील क्रिया

बहुपदींची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या क्रिया बैजिक राशींवरील क्रियांप्रमाणेच करतात.

उदा (1) $7a^2 + 5a + 6$ मधून $5a^2 - 2a$ वजा करा.

उकल : $(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$

$$= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a$$

$$= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6$$

$$= 2a^2 + 7a + 6$$

उदा (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

उदा (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = \ ?$

उकल : $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$

$$\left.\begin{aligned} &= m^2 (m^3 + 2m - 2) - 5 (m^3 + 2m - 2) \\ &= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10 \end{aligned}\right\}$$ (पहिल्या बहुपदीतील प्रत्येक पदाने दुसऱ्या बहुपदीस गुणले.)

$= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10$ (सरूप पदांची एकत्र मांडणी केली.)

$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$

गुणाकाराची कोटी 5 आहे हे लक्षात ठेवूया.

उदा (4) $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ आणि $2m^2n - mn^2 + mn$ यांची बेरीज करा.

उकल : $(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$

$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$

$= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn}$ (सरूप पदांची एकत्र मांडणी केली.)

$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn$ (सरूप पदांची बेरीज केली.)

विचार करूया.

एका बहुपदीची कोटी 3 व दुसऱ्या बहुपदीची कोटी 5 असेल तर बहुपदींच्या गुणाकाराची कोटी किती असेल?

गुण्य व गुणक बहुपदींच्या कोटी आणि त्यांच्या गुणाकाराची कोटी यांच्यामध्ये कोणता संबंध असतो ?

उदा (5) $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ हा भागाकार करा आणि भाज्य = भाजक $\times$ भागाकार + बाकी या स्वरूपात उत्तर लिहा.

उकल : प्रथम $p(x) = 2 + 2x^2$ ही भाज्य बहुपदी प्रमाण रूपात लिहू

$\therefore \quad 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$

रीत I :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 4 \\
\hline
x + 2 & 2x^2 + 0x + 2 \\
- & 2x^2 + 4x \\
 & \underline{- \quad -} \\
 & -4x + 2 \\
- & -4x - 8 \\
 & \underline{+ \quad +} \\
 & 10
\end{array}
$$

भाज्य = भाजक $\times$ भागाकार + बाकी

$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$

$q(x)$, भाजक $= (x + 2)$

$s(x)$, भागाकार $= 2x - 4$ व $r(x)$, बाकी $= 10$

$\therefore \; p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$.

रीत II : भागाकाराची रेषीय पद्धती

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ हा भागाकार करा.

$2x^2$ हे पद मिळवण्यासाठी $(x + 2)$ ला $2x$ ने गुणून $4x$ वजा करू.

$2x(x+2) - 4x = 2x^2$

$\therefore \quad$ भाज्य $= 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2 \quad$ ...(I)

आता $-4x$ हे पद मिळवण्यासाठी $(x+2)$ ला -4 ने गुणू व 8 मिळवू.

$-4\,(x+2) + 8 = -4x$

$\therefore \; (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2 \qquad$ ...(I) वरून

$\therefore \; (2x^2 + 2) = (x + 2)\,(2x - 4) + 10$

भाज्य = भाजक $\times$ भागाकार + बाकी.

हे लक्षात ठेवूया.

युक्लिडचा भागाकार सिद्धांत

जर $s(x)$ आणि $p(x)$ या दोन बहुपदी असतील आणि $s(x)$ ची कोटी $p(x)$ च्या कोटीएवढी किंवा त्यापेक्षा जास्त असेल, आणि $s(x)$ ला $p(x)$ ने भागून येणारा भागाकार $q(x)$ असेल, तर $s(x) = p(x)\, q(x) + r(x)$. येथे $r(x) = 0$ किंवा $r(x)$ ची कोटी $p(x)$ च्या कोटीपेक्षा कमी असते.

सरावसंच 3.2

(1) दिलेली अक्षरे वापरून उत्तरे लिहा.

(i) लाट गावात a झाडे आहेत. झाडांची संख्या दरवर्षी b ने वाढते, तर x वर्षानंतर त्या गावात किती झाडे असतील?

(ii) कवायतीसाठी एका रांगेत y मुले अशा x रांगा केल्या. तर कवायतीसाठी एकूण किती मुले हजर होती?

(iii) एका दोन अंकी संख्येच्या एकक व दशक स्थानचा अंक अनुक्रमे m व n आहे, तर ती दोन अंकी संख्या दर्शवणारी बहुपदी कोणती?

(2) खालील बहुपदींची बेरीज करा.

(i) $x^3 - 2x^2 - 9$; $5x^3 + 2x + 9$

(ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$; $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii) $2y^2 + 7y + 5$; $3y + 9$; $3y^2 - 4y - 3$

(3) पहिल्या बहुपदीतून दुसरी बहुपदी वजा करा.

(i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}$; $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$; $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

(4) खालील बहुपदींचा गुणाकार करा.

(i) $2x$; $x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1$; $y^2 - 2y^3 + 3y$

(5) पहिल्या बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागा व उत्तर 'भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी' या रूपात लिहा.

(i) $x^3 - 64$; $x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$; $x^2 - x$

(6*) खालील माहिती पदावलीच्या रूपात लिहा. पदावलीला सोपे रूप द्या.

एका आयताकृती शेताची लांबी $(2a^2 + 3b^2)$ मीटर आणि रुंदी $(a^2 + b^2)$ मीटर आहे. शेतकऱ्याने शेतामध्ये $(a^2 - b^2)$ मीटर बाजू असलेल्या चौरसाकृती जागेवर घर बांधले, तर उरलेल्या शेताचे क्षेत्रफळ किती?

कृती : खालील उतारा वाचा व चौकटीत योग्य राशी लिहा व चर्चा करा.

शिरळस गावी कोरडवाहू शेती करणाऱ्या गोविंदचे 5 एकर शेत आहे. त्याच्या घरी पत्नी, 2 मुले व त्याची वृद्ध आई आहे. त्याने शेतीसाठी बँकेचे सव्वा लाख रुपये कर्ज, द.सा.द.शे. 10 या दराने घेतले. त्याने शेतातील x एकर जमिनीत सोयाबीन आणि y एकर जमिनीत कापूस व तूर यांचे पीक घेतले. शेतीसाठी आलेला खर्च पुढीलप्रमाणे आहे.

बियाणांसाठी त्याने एकूण रु.10,000 दिले. सोयाबीन पिकासाठी खते व कीटकनाशके यांसाठी 2000 x रुपये आणि मजुरी व मशागत यांसाठी 4000 x^2 रुपये खर्च झाला. कापूस व तूर या पिकांसाठी खते व कीटकनाशके यांचा खर्च 8000 y रुपये आणि मजुरी व मशागत यांसाठी 9000 y^2 रुपये खर्च झाला.

शेतीसाठी एकूण खर्च किती आला ते x आणि y वापरून लिहू.

$\boxed{\quad\quad} + \boxed{2000\ x} + \boxed{4000\ x^2} + \boxed{8000\ y} + \boxed{\quad\quad}$ रुपये

त्याच्या शेतात सोयाबीनचे उत्पन्न 5 x^2 क्विंटल निघाले. ते 2800 रु. प्रतिक्विंटल प्रमाणे विकले गेले.

कापसाचे उत्पन्न $\frac{5}{3}y^2$ क्विंटल निघाले व ते 5000 रु. प्रतिक्विंटलप्रमाणे विकले गेले.

तुरीचे उत्पन्न $4y$ क्विंटल निघाले व ते 4000 रु. प्रतिक्विंटलप्रमाणे विकले.

सर्व शेतमालाची विक्री झाल्यावर त्यातून किती रुपये एकूण उत्पन्न आले.

ते x आणि y च्या पदावली रूपात लिहू.

$\boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad}$ रुपये

जाणून घेऊया.

संश्लेषक भागाकार पद्धती (Synthetic Division)

एका बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने कसे भागायचे हे आपल्याला माहीत आहे. आता आपण भाजक $x + a$ किंवा $x - a$ बहुपदी असेल तर भागाकाराची सोपी पद्धत समजून घेऊ.

उदा (1) $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ या बहुपदीला $(x + 2)$ ने भागा.

उकल : प्रथम भाज्य बहुपदी प्रमाण रूपात लिहून नंतर ती सहगुणक रूपात लिहू.

भाज्याचे प्रमाणरूप : $3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0\,x - 1$

$\therefore$ भाज्य बहुपदीचे सहगुणक रूप = $(3, 2, 0, -1)$

भाजक बहुपदी $= x + 2$

खालील पायऱ्यांनी संश्लेषक पद्धतीने भागाकार करू.

(1) बाजूला दाखवल्याप्रमाणे एक उभी व एक आडवी अशा दोन रेषा काढू.

....	पहिली ओळ
....	दुसरी ओळ
....	तिसरी ओळ

(2) भाजक $x + 2$ असून 2 ची विरुद्ध संख्या -2 आहे. $\therefore$ पहिल्या ओळीत उभ्या रेषेच्या डावीकडे -2 लिहू.आडव्या रेषेच्या वर पहिल्या ओळीत भाज्य बहुपदीचे सहगुणक रूप लिहू.

- 2	3	2	0	- 1	पहिली ओळ
	3				तिसरी ओळ

(3) आडव्या रेषेच्या खाली म्हणजे तिसऱ्या ओळीत भाज्यातील पहिला सहगुणक तसाच लिहू.

(4) तिसऱ्या ओळीतील 3 व भाजकातील -2 यांचा गुणाकार-6. हा दुसऱ्या ओळीतील 2 या सहगुणकाखाली लिहू. नंतर 2 आणि -6 यांची बेरीज -4 ही तिसऱ्या ओळीत खाली लिहू.

- 2	3	2	0	- 1	
		-6	8	-16	
	3	- 4	8	$\boxed{-17}$	बाकी

याप्रमाणे गुणाकार व बेरजा करून; शेवटची बेरीज करून आलेली संख्या ही भागाकारातील बाकी असते. येथे बाकी -17 आहे.

$(3, -4, 8)$ हे भागाकाराचे सहगुणक रूप होय.

$\therefore$ भागाकार $= 3x^2 - 4x + 8$ व बाकी $= -17$

$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

या पद्धतीला **भागाकाराची संश्लेषक पद्धत** म्हणतात.

हा भागाकार रेषीय पद्धतीने पुढीलप्रमाणे करता येईल.

$$\begin{aligned}
3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2 (x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\
&= 3x^2 (x + 2) - 4x^2 - 1 \\
&= 3x^2 (x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\
&= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8x - 1 \\
&= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\
&= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8 (x + 2) - 17
\end{aligned}$$

$\therefore\quad 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

उदा (2) $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$ हा भागाकार करा.

उकल : संश्लेषक पद्धत : भाज्य $= 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

भाजक $= y - 1$ $\quad -1$ ची विरुद्ध संख्या 1 आहे.

1	2	-3	0	5	-4	
		2	-1	-1	4	
	2	-1	-1	4	$\boxed{0}$	बाकी

भागाकाराचे सहगुणक रूप $(2, -1, -1, 4)$ आहे.

$\therefore$ भागाकार $= 2y^3 - y^2 - y + 4$ व बाकी $= 0$

रेषीय पद्धत : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$$

$$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$$

हे लक्षात ठेवूया.

संश्लेषक पद्धतीने भागाकार करताना फक्त $x + a$ किंवा $x - a$ या रूपातील ज्या बहुपदीची कोटी 1 आहे असेच भाजक घेतले आहेत.

सरावसंच 3.3

1. खालील भागाकार संश्लेषक पद्धतीने आणि रेषीय पद्धतीने करा. भागाकार आणि बाकी लिहा.

   (i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

   (iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

   (v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

जाणून घेऊया.

बहुपदीची किंमत (Value of polynomial)

बहुपदीतील चलाला एखादी किंमत दिली की त्या बहुपदीचीही एक किंमत मिळते. उदाहरणार्थ, $x + 7$ या बहुपदीत x ला 2 ही किंमत दिली, तर त्या बहुपदीची 9 ही किंमत मिळते.

$p(x)$ या बहुपदीत x ला a ही किंमत देऊन येणारी बहुपदीची किंमत $p(a)$ ने दर्शवतात.

उदा (1) $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ या बहुपदींची किंमत $x = 2$ असताना काढा.

बहुपदी $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$

या बहुपदीमध्ये $x = 2$ ठेवून,

$$\therefore p(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5$$
$$= 2 \times 4 - 6 + 5$$
$$= 8 - 6 + 5$$
$$\therefore p(2) = 7$$

उदा (2) $y = -2$ असताना बहुपदी $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ ची किंमत काढा.

उकल : $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\therefore p(-2) = 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= -16 + 4 + \sqrt{7}$$
$$= -12 + \sqrt{7}$$

$\therefore$ $y = -2$ असताना बहुपदीची किंमत $-12 + \sqrt{7}$ आहे.

उदा (3) $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ या बहुपदीकरिता $p(0)$ काढा.

उकल : $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\therefore p(0) = 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2$$
$$= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2$$
$$= 2$$

उदा (4) जर $m^2 - am + 7$ या बहुपदीची किंमत $m = -1$ असताना 10 असेल, तर a ची किंमत काढा.

उकल : $p(m) = m^2 - am + 7$

$$\therefore p(-1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 7$$
$$= 1 + a + 7$$
$$= 8 + a$$

परंतु $p(-1) = 10$ (दिलेले आहे.)

$$\therefore 8 + a = 10$$
$$\therefore a = 10 - 8$$
$$\therefore a = 2$$

सरावसंच 3.4

(1) $x = 0$ असताना $x^2 - 5x + 5$ या बहुपदीची किंमत काढा.

(2) जर $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ तर $p\,(3\sqrt{2})$ काढा.

(3) जर $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ तर $p(a) + p(-a) = ?$

(4) जर $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ तर $p(2)$ काढा.

हे लक्षात ठेवूया.

चलाच्या एखाद्या किमतीसाठी बहुपदीची किंमत काढताना **प्रत्येक पदात** x च्या जागी दिलेली किंमत भरून त्या राशीची किंमत काढायची असते.

जाणून घेऊया.

शेष सिद्धांत (Remainder Theorem)

$p(x)$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने भागल्यास उरणारी बाकी आणि या बहुपदीत x ला $-a$ ही किंमत देऊन येणारी त्या बहुपदीची किंमत यांचा परस्पर संबंध असतो. हा संबंध जाणण्यासाठी खालील उदाहरण अभ्यासा.

उदा. $p(x) = (4x^2 - x + 2)$ ला $(x + 1)$ ने भागा.

[येथे $(x + a)$ म्हणजे $(x + 1)$ आहे हे लक्षात ठेवूया.]

उकल : भाज्य बहुपदी $= 4x^2 - x + 2$

भाजक बहुपदी $= x + 1$

भागाकार $4x - 5$

भाजक $x + 1 \overline{)\ 4x^2 - x + 2}$ भाज्य

$$\begin{array}{rrrr}
 & 4x^2 & -\ x & +\ 2 \\
- & 4x^2 & +\ 4x & \\
 & - & - & \\
\hline
 & & -\ 5x & +\ 2 \\
- & & -\ 5x & -\ 5 \\
 & & + & + \\
\hline
 & & & 7
\end{array}$$

बाकी

भागाकार $= 4x - 5$ व बाकी $= 7$ .... (I)

हेच उदाहरण संश्लेषक भागाकार पद्धतीने करू.

$p(x)$ चे सहगुणक रूप $= (4, -1, 2)$

भाजक बहुपदी $= x + 1$

1 ची विरुद्ध संख्या -1

$$\begin{array}{r|rrr}
-1 & 4 & -1 & 2 \\
 & & -4 & 5 \\
\hline
 & 4 & -5 & \boxed{7}
\end{array}$$

बाकी

भागाकार $= 4x - 5$ बाकी $= 7$

आता आपण बाकी आणि भाज्य बहुपदीची किंमत यांमधील संबंध बघू.

भाज्य बहुपदीची म्हणजे $4x^2 - x + 2$ या बहुपदीची $x = -1$ असताना किंमत काढू.

$p(x) = 4x^2 - x + 2$

$\therefore\ p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$

$= 4 \times 1 + 1 + 2$

$= 4 + 1 + 2$

$= 7$

$\therefore\quad x = -1$ असताना बहुपदी $p(x)$ ची किंमत 7 आहे. ...... (II)

म्हणून विधान (I) व (II) वरून, $p(x) = 4x^2 - x + 2$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने म्हणजेच येथे $x + 1$ ने भागून मिळणारी बाकी आणि $x = -1$ असताना $p(x)$ या बहुपदीची किंमत म्हणजेच $p(-1)$ समान आहेत.

यावरून पुढील गुणधर्म लक्षात येतो.

$p(x)$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने भागल्यास उरणारी **बाकी** ही $p(-a)$ एवढी,
म्हणजेच $p(x)$ मध्ये $x = -a$ मांडून येणाऱ्या **बहुपदींच्या किमतीएवढी** असते.

('शेष' या शब्दाचा अर्थ 'बाकी' असा आहे.)

या गुणधर्माला **शेष सिद्धांत** म्हणतात.

युक्लिडचा भागाकाराचा नियम वापरून हा गुणधर्म सिद्ध करू.

$p(x)$ ला $(x + a)$ ने भागल्यास

$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ [$q(x)$ = भागाकार, $r(x)$ = बाकी]

जर, $r(x) \neq 0$, तर नियमाप्रमाणे $r(x)$ ची कोटी 1 पेक्षा कमी म्हणजे 0 आहे. म्हणून $r(x)$ ही वास्तव संख्या आहे.

$\therefore\quad r(-a)$ ही सुद्धा वास्तव संख्या आहे.

आता, $p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ ....(1)

यामध्ये $x = -a$ किंमत घेऊन

$$p(-a) = q(-a) \times (a - a) + r(-a)$$

$$= q(-a) \times 0 + r(-a) ....(2)$$

$\therefore\quad p(-a) = r(-a)$ ....(1) आणि (2) वरून

कृती : खालील उदाहरणांचा पडताळा घ्या.

(1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ या बहुपदीस $x + 2$ या बहुपदीने भागा आणि बाकी काढा.

(2) $x = -2$ असताना $p(x) = 3x^2 + x + 7$ या बहुपदीची किंमत काढा.

(3) आता भागाकारात मिळालेली बाकी ही $p(-2)$ ची किंमत आहे का ?

आणखी एक उदाहरण घेऊन वरीलप्रमाणे पडताळा घ्या.

उदा (1) $x^4 - 5x^2 - 4x$ या बहुपदीस $x + 3$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

उकल : **शेष सिद्धांताने**

भाज्य बहुपदी $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

भाजक $= x + 3$

$\therefore$ $x = -3$ घेऊ.

$\therefore$ $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

संश्लेषक भागाकार पद्धतीने

प्रमाण रूप $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

सहगुणक रूप $= (1, 0, -5, -4, 0)$

-3	1	0	-5	-4	0
		-3	9	-12	48
	1	-3	4	-16	$\boxed{48}$ बाकी

बाकी $= 48$

उदा (2) शेष सिद्धांताचा उपयोग करून $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ या बहुपदीस $x - 1$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

उकल : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

भाजक $= x - 1$ $\therefore$ $x = 1$ घेऊ.

$\therefore$ शेष सिद्धांतानुसार बाकी $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$ शेषसिद्धांतानुसार बाकी $= -6$

उदा (3) जर $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ या बहुपदीस $(t-3)$ ने भागल्यावर बाकी 62 उरत असेल, तर k ची किंमत काढा.

उकल : दिलेल्या बहुपदीला $(t-3)$ ने भागल्यावर बाकी 62 उरते हे दिले आहे. म्हणून दिलेल्या भाज्य बहुपदीची किंमत $t = 3$ असताना काढू.

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

$\therefore$ शेष सिद्धांतानुसार

बाकी $= p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50$

$= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50$

$= 27 - 27 + 3k + 50$

$= 3k + 50$

परंतु बाकी 62 दिली आहे.

$\therefore 3k + 50 = 62$

$\therefore 3k = 62 - 50$

$\therefore 3k = 12$

$\therefore k = \frac{12}{3}$

$\therefore k = 4$

हे लक्षात ठेवूया.

शेष सिद्धांत : $p(x)$ ही कोणतीही बहुपदी असून 'a' ही वास्तव संख्या असेल आणि जर $p(x)$ ला $(x + a)$ ने भागले तर येणारी बाकी ही $p(-a)$ एवढी असते.

$p(x) = s(x)\ (x - a) + r(x)$ $\qquad$ $r(x)$ ची कोटी < 1 किंवा $r(x) = 0$

या समीकरणात $x = a$ घालून $p(a) = 0 + r\ (a) = r\ (a)$ मिळते.

$\therefore$ $r(a)$ ची कोटी $= 0$ किंवा $r(a) = 0$ म्हणजेच $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे असे लक्षात येते.

जाणून घेऊया.

अवयव सिद्धांत (Factor Theorem)

जर 21 ला 7 ने भागले तर बाकी 0 येते. म्हणून आपण 7 हा 21 चा अवयव आहे असे म्हणतो.

त्याचप्रमाणे दिलेल्या बहुपदीला भाजक बहुपदीने भागल्यास बाकी 0 आली तर ती बहुपदी दिलेल्या बहुपदीचा अवयव आहे असे म्हणतात.

उदा (1) $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ या बहुपदीस $(x - 1)$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

$(x - 1)$ हा $p(x)$चा अवयव आहे का हे ठरवा.

उकल : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$

$= 1 + 4 - 5$

$= 0$

येथे, शेष सिद्धांतानुसार बाकी $= 0$

$\therefore$ $(x - 1)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव आहे.

उदा (2) $p(x)= x^3 + 4x - 5$ या बहुपदीला $x + 2$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

$(x + 2)$ हा $p(x)$चा अवयव आहे का हे ठरवा.

उकल : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$

$p(-2) = -8 -8 - 5$

$= -21$

शेष सिद्धांतानुसार बाकी -21 आली.

येथे बाकी $\neq 0$

$\therefore$ $(x + 2)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव नाही.

कृती : $(x - 1)$ हा $x^3 + 4x - 5$ या बहुपदीचा अवयव आहे का हे पडताळा.

हे लक्षात ठेवूया.

$p(x)$ ही बहुपदी असून a ही कोणतीही वास्तव संख्या असेल आणि जर $p(a) = 0$ असेल तर $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव असतो.

याउलट $(x - a)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव असेल तर $p(a) = 0$ असते.

उदा (1) अवयव सिद्धांताचा उपयोग करून, $x - 2$ हा $x^3 - x^2 - 4$ या बहुपदीचा अवयव आहे का ते ठरवा.

उकल : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ भाजक $= x - 2$

$\therefore p(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

$\therefore$ अवयव सिद्धांतानुसार, $(x - 2)$ हा $(x^3 - x^2 - 4)$ या बहुपदीचा अवयव आहे.

उदा (2) जर $(x - 1)$ हा $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ चा अवयव असेल तर m ची किंमत काढा.

उकल : $(x - 1)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे. $\therefore p(1) = 0$

$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$

$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$

$\therefore 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$

$\therefore 1 - 2 + m - 4 = 0$ $\therefore m - 5 = 0$ $\therefore m = 5$

कृती : आपण कोरडवाहू शेती करणाऱ्या गोविंदच्या शेतीच्या संदर्भात बहुपदींच्या रूपात शेतीचा खर्च व उत्पन्न या बाबी पाहिल्या होत्या. त्याने बँकेचे कर्ज सव्वा लाख रुपये घेतले व ते 10% व्याजदराने परत केले होते. बियाणांसाठी खर्च 10,000 रुपये, सोयाबीनच्या पिकासाठी खते-कीटकनाशकांसाठी $2000x$ रुपये व त्याच्या मशागतीसाठी $4000x^2$ रुपये खर्च आला होता. कापूस व तूर या पिकांसाठी खते-कीटकनाशकांसाठी $8000y$ रुपये व मशागतीसाठी $9000y^2$ रुपये एवढा खर्च केला होता.

एकूण उत्पन्न $14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y$ एवढे झाले.

$x = 2$, $y = 3$ या किमती घेऊन गोविंदच्या शेतीचा जमाखर्च लिहून काढा.

उकल :

जमा	**खर्च**
1,25,000 रुपये बँकेचे कर्ज	1,37,000 रुपये बँकेची व्याजासह परतफेड.
₹ [ ] सोयाबीनचे उत्पन्न	₹ [ ] बियाणांसाठी
₹ [ ] कापसाचे उत्पन्न	₹ [ ] सोयाबीन:खते व कीटकनाशके
₹ [ ] तुरीचे उत्पन्न	₹ [ ] सोयाबीन: मजुरी व मशागत
₹ [ ] एकूण जमा	₹ [ ] कापूस व तूर : खते व कीटकनाशके
	₹ [ ] कापूस व तूर : मजुरी व मशागत
	₹ [ ] एकूण खर्च

सरावसंच 3.5

(1) x ची दिलेली किंमत घेऊन $2x - 2x^3 + 7$ या बहुपदीची किंमत काढा.

(i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$

(2) खालील प्रत्येक बहुपदीकरिता $p(1)$, $p(0)$ आणि $p(-2)$ काढा.

(i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) जर $m^3 + 2m + a$ या बहुपदीची किंमत $m = 2$ असताना 12 आहे, तर a ची किंमत काढा.

(4) जर $mx^2 - 2x + 3$ या बहुपदीकरता $p(-1) = 7$ असेल तर m ची किंमत काढा.

(5) खालीलपैकी पहिल्या बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागल्यास, येणारी बाकी शेष सिद्धांताचा उपयोग करून काढा.

(i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$

(ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$

(iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$

(6) $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ या बहुपदीस $y + 2$ ने भागल्यास बाकी 50 उरते, तर m ची किंमत काढा.

(7) अवयव सिद्धांताचा उपयोग करून, $x + 3$ हा $x^2 + 2x - 3$ चा अवयव आहे का ते ठरवा.

(8) जर $x - 2$ हा $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ या बहुपदीचा अवयव असेल तर m ची किंमत काढा.

(9) खालील उदाहरणात $q(x)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे किंवा नाही हे अवयव सिद्धांताने ठरवा.

(i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$

(ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$

(10) $(x + 1)$ ने $(x^{31} + 31)$ ला भागल्यास येणारी बाकी काढा.

(11) $m - 1$ हा $m^{21} - 1$ व $m^{22} - 1$ या बहुपदींचा अवयव आहे हे दाखवा.

(12*) जर $x - 2$ आणि $x - \frac{1}{2}$ हे दोन्ही $nx^2 - 5x + m$ या बहुपदीचे अवयव असतील तर दाखवा की $m = n = 2$

(13) (i) जर $p(x) = 2 + 5x$ तर $p(2) + p(-2) - p(1)$ काढा.

(ii) जर $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ तर $p(5\sqrt{3})$ काढा.

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण बहुपदींचे अवयव कसे काढावे याचा अभ्यास केला आहे. काही उदाहरणे पाहू. अवयव काढा.

उदा (1) $4x^2 - 25$

$= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

उदा (2) $3x^2 + 7x + 2$

$= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

उदा (3) $63x^2 + 5x - 2$

$= 63x^2 + 14x - 9x - 2$

$= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$

$= (9x + 2)(7x - 1)$

उदा (4) $6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 2)$

जाणून घेऊया.

बहुपदींचे अवयव (Factors of polynomials)

काही वेळा दिलेल्या बहुपदीचे रूपांतर $ax^2 + bx + c$ असे करता येते. त्यामुळे तिचे अवयव शोधणे सोपे जाते.

उदा (1) $(y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50$ चे अवयव काढा.

उकल : दिलेल्या बहुपदीत $(y^2-3y) = x$ मानू.

$$\therefore (y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$$
$$= x^2 - 10x + 5x - 50$$
$$= x(x - 10) + 5(x - 10)$$
$$= (x - 10)(x + 5)$$
$$= (y^2-3y - 10)(y^2-3y + 5)$$
$$= [y^2-5y + 2y - 10](y^2-3y + 5)$$
$$= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2-3y + 5)$$
$$= (y - 5)(y + 2)(y^2-3y + 5)$$

उदा (2) अवयव पाडा.

$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

उकल : $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$

$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$

$= (m - 14)(m + 6) + 64$ . . . . ($x^2 - 5x$ साठी m मानून.)

$= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$

$= m^2 - 8m - 20$

$= (m - 10)(m + 2)$

$= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2)$ .... m च्या जागी $x^2 - 5x$ लिहून

सरावसंच 3.6

(1) खालील बहुपदींचे अवयव काढा.

(i) $2x^2 + x - 1$ (ii) $2m^2 + 5m - 3$ (iii) $12x^2 + 61x + 77$

(iv) $3y^2 - 2y - 1$ (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) खालील बहुपदींचे अवयव काढा.

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ (ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ (iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

(1) खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी दिलेल्या पर्यायांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(i) खालीलपैकी बहुपदी कोणती ?

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$ (C) $x^{-2} + 7$ (D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{7}$ या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 5 (C) 2 (D) 0

(iii) 0 बहुपदीची कोटी किती असते ?

(A) 0 (B) 1 (C) निश्चित करता येत नाही (D) कोणतीही वास्तव संख्या

(iv) $2x^2 + 5x^3 + 7$ या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(v) $x^3 - 1$ या बहुपदीचे सहगुणक रूप कोणते ?

(A) (1, – 1) (B) (3, – 1) (C) (1, 0, 0, – 1) (D) (1, 3, – 1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ तर $p(7\sqrt{7}) = $?

(A) 3 (B) $7\sqrt{7}$ (C) $42\sqrt{7} + 3$ (D) $49\sqrt{7}$

(vii) $2x^3 + 2x$ या बहुपदीची $x = -1$ असताना किंमत किती ?

(A) 4 (B) 2 (C) – 2 (D) – 4

(viii) $3x^2 + mx$ या बहुपदीचा $x - 1$ हा अवयव असेल तर m ची किंमत किती ?

(A) 2 (B) – 2 (C) – 3 (D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ हा गुणाकार करून मिळणाऱ्या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) खालीलपैकी रेषीय बहुपदी कोणती ?

(A) $x + 5$ (B) $x^2 + 5$ (C) $x^3 + 5$ (D) $x^4 + 5$

(2) खालील प्रत्येक बहुपदीची कोटी लिहा.

(i) $5 + 3x^4$ (ii) 7 (iii) $ax^7 + bx^9$ {a, b या स्थिर संख्या आहेत.}

(3) खालील बहुपदी प्रमाण रूपात लिहा.

(i) $4x^2+7x^4-x^3-x+9$ (ii) $p+2p^3+10p^2+5p^4-8$

(4) खालील बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

(i) x^4+16 (ii) $m^5+2m^2+3m+15$

(5) खालील सहगुणक रूपातील बहुपदी x हे चल वापरून घातांक रूपात लिहा.

(i) (3, −2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, −3, 0)

(6) बेरीज करा.

(i) $7x^4-2x^3+x+10$; $3x^4+15x^3+9x^2-8x+2$ (ii) $3p^3q+2p^2q+7$; $2p^2q+4pq-2p^3q$

(7) वजाबाकी करा.

(i) $5x^2-2y+9$; $3x^2+5y-7$ (ii) $2x^2+3x+5$; x^2-2x+3

(8) खालील गुणाकार करा.

(i) $(m^3-2m+3)(m^4-2m^2+3m+2)$ (ii) $(5m^3-2)(m^2-m+3)$

(9) $3x^3-8x^2+x+7$ या बहुपदीला $x-3$ या बहुपदीने संश्लेषक पद्धतीने भागा व बाकी काढा.

(10) m च्या कोणत्या किमतीकरिता $x+3$ हा $x^3-2mx+21$ या बहुपदीचा अवयव असेल?

(11) 2016 वर्षाच्या शेवटी कोवाड, वरूड व चिखली गावांची लोकसंख्या अनुक्रमे $5x^2-3y^2$, $7y^2+2xy$ आणि $9x^2+4xy$ होती. 2017 वर्षाच्या सुरुवातीला तीनही गावांतून शिक्षण व रोजगाराकरिता अनुक्रमे x^2+xy-y^2, $5xy$ व $3x^2+xy$ माणसे दुसऱ्या गावी गेली. तर 2017 च्या सुरुवातीला त्या गावांची एकूण लोकसंख्या किती होती ?

(12) $bx^2 + x + 5$ व bx^3-2x+5 या बहुपदींना $x-3$ ने भागल्यास येणारी बाकी अनुक्रमे m व n असेल आणि जर $m - n = 0$ असेल तर b ची किंमत काढा.

(13) सरळरूप द्या. $(8m^2 + 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) $x^2 + 13x + 7$ मधून कोणती बहुपदी वजा करावी म्हणजे $3x^2 + 5x - 4$ ही बहुपदी मिळेल?

(15) $4m + 2n + 3$ या राशीत कोणती राशी मिळवावी म्हणजे $6m + 3n + 10$ ही बहुपदी मिळेल?

4 गुणोत्तर व प्रमाण

चला, शिकूया.

- गुणोत्तर
- गुणोत्तराचे गुणधर्म
- समान गुणोत्तरांवरील क्रिया
- समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत
- परंपरित प्रमाण
- गुणोत्तरातील k पद्धती

जरा आठवूया.

आपण मागील इयत्तांमध्ये गुणोत्तर व प्रमाण यांचा अभ्यास केला आहे. त्यावर आधारित उदाहरणेही आपण सोडवली आहेत.

उदा विमलने तयार केलेले रव्याचे लाडू रुचकर असतात. ती एक वाटी तूप, 3 वाट्या रवा आणि 2 वाट्या साखर घेऊन लाडू बनविते.

येथे रवा आणि साखर यांचे प्रमाण 3:2 किंवा $\frac{3}{2}$ आहे.

जर लाडवांसाठी 12 वाट्या रवा घेतला तर किती साखर लागेल?

साखर x वाट्या लागेल असे मानू. यावरून $\frac{3}{2} = \frac{12}{x}$ $\therefore$ $3x = 24$ $\therefore$ $x = 8$

म्हणजे 12 वाट्या रवा घेऊन लाडू करण्यासाठी 8 वाट्या साखर लागेल.

हेच उदाहरण पुढीलप्रमाणेही करता येते.

रवा $3k$ वाट्या असेल तर साखर $2k$ वाट्या लागेल. कारण $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

$3k = 12$ असेल तर $k = 4$ $\therefore$ $2k = 8$ वाट्या साखर लागेल.

जाणून घेऊया.

गुणोत्तर व प्रमाण (Ratio and proportion)

दोन संख्यांच्या गुणोत्तराची संकल्पना तीन किंवा अधिक संख्यांसाठी विस्तारित करता येते. लाडवांचे उदाहरण पाहा. तूप, रवा आणि साखर यांचे प्रमाण 1 : 3 : 2 आहे.

येथे तूप व रवा यांचे गुणोत्तर 1 : 3 आणि रवा व साखर यांचे गुणोत्तर 3 : 2 आहे. ही माहिती एकाच प्रमाणाने दिली आहे.

तूप 1k = k वाटी, रवा 3k वाट्या आणि साखर 2k वाट्या असे मानता येईल.

आता 12 वाट्या रवा असेल तर लाडवांसाठी किती वाट्या तूप व किती वाट्या साखर लागेल हे काढता येईल.

कारण 3k = 12 $\therefore$ $k = 4$ आणि 2k = 8 म्हणजे 4 वाट्या तूप आणि 8 वाट्या साखर लागेल.

हीच कल्पना चार वा अधिक बाबींच्या प्रमाणासाठी देखील वापरता येते.

जर a, b, c, d या चार संख्यांचे प्रमाण $2 : 3 : 7 : 4$ असे असेल तर त्या संख्या $2m$, $3m$, $7m$, $4m$ मानू. दिलेली माहिती वापरून m ची किंमत काढता येईल. उदाहरणार्थ, या चार संख्यांची बेरीज 48 असेल तर त्या चार संख्या काढू.

$2m + 3m + 7m + 4m = 16\,m = 48$

$\therefore \quad m = 3$

$\therefore \quad 2m = 6,\ \ 3m = 9,\ \ 7m = 21,\ \ 4m = 12$ अशा संख्या मिळाल्या.

$\therefore$ इष्ट संख्या = 6, 9, 21, 12

उदा (1) खताच्या 18 : 18 : 10 या प्रकारामध्ये नायट्रोजनची संयुगे 18%, फॉस्फरसची संयुगे 18% आणि पोटॅशियमची संयुगे 10% असतात. उरलेला भाग इतर पदार्थांचा असतो. तर त्या प्रकारच्या 20 किलोग्रॅम खतामध्ये प्रत्येक प्रकारच्या संयुगाचे वस्तुमान किती असेल ?

उकल : 20 किग्रॅ खतातील नायट्रोजनच्या संयुगाचे वस्तुमान x किग्रॅ मानू.

$$\therefore \quad \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \qquad \therefore \quad x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$ नायट्रोजनचे संयुग 3.6 किग्रॅ असेल.

फॉस्फरसच्या संयुगाचे शतमान 18 हेच असते. $\therefore$ फॉस्फरसचे संयुग 3.6 किग्रॅ असेल.

20 किग्रॅ खतातील पोटॅशियमच्या संयुगाचे वस्तुमान y किग्रॅ मानल्यास

$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \qquad \therefore y = 2 \qquad \therefore$ पोटॅशियमचे संयुग 2 किग्रॅ असेल.

समप्रमाण

एक मोटरगाडी 1 लीटर पेट्रोलमध्ये 10 किमी अंतर जाते.

म्हणून 20 लीटर पेट्रोलमध्ये ती गाडी $20 \times 10 = 200$ किमी अंतर कापेल.

तर 40 लीटर पेट्रोलमध्ये तीच गाडी $40 \times 10 = 400$ किमी अंतर जाईल.

वरील माहिती सारणी रूपात लिहू.

पेट्रोल : x लीटर	1	20	40	
अंतर : y किमी	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

गाडीने वापरलेले पेट्रोल (लीटरमध्ये) आणि तेवढ्या पेट्रोलमध्ये कापलेले अंतर (किलोमीटरमध्ये) या राशींचे गुणोत्तर स्थिर आहे. अशा वेळी त्या दोन राशी समप्रमाणात आहेत, म्हणजेच या दोन राशी समचलनात बदलतात असे म्हणतात.

व्यस्तप्रमाण

एका मोटारीला ताशी 50 किमी वेगाने 100 किमी जाण्यास दोन तास लागतात. एका बैलगाडीचा वेग ताशी 5 किमी आहे, तर तेवढेच अंतर जाण्यास बैलगाडीला 20 तास लागतात.

$\therefore$ वेग $\times$ वेळ = अंतर हे लक्षात घेऊन वरील माहिती सारणी रूपात लिहू.

मोटार	वेग/ताशी x	वेळ y	$x \times y$	$x \times y = k$
	50	2	100	
बैलगाडी	5	20	100	

म्हणजे वाहनाचा वेग आणि प्रवासाला लागणारा वेळ यांचा गुणाकार स्थिर आलेला दिसतो. अशा वेळी त्या राशी व्यस्त प्रमाणात आहेत, किंवा त्या राशी व्यस्त चलनात बदलतात असे म्हणतात.

वरील उदाहरणात, वाहनाचा वेग आणि ठरावीक अंतर जाण्यास लागणारा वेळ हे व्यस्त प्रमाणात आहेत.

जरा आठवूया.

गुणोत्तराचे गुणधर्म

(1) a आणि b या दोन संख्यांचे गुणोत्तर $a : b$ किंवा $\frac{a}{b}$ अशा स्वरूपात लिहिता येते. येथे a ला पूर्वपद (पहिले पद) आणि b ला उत्तर पद (दुसरे पद) म्हणतात.

(2) दोन संख्यांच्या गुणोत्तरात उत्तरपद 100 असते तेव्हा त्या गुणोत्तरास शतमान असे म्हणतात.

(3) प्रमाणातील सर्व संख्यांना एकाच शून्येतर संख्येने गुणले किंवा भागले तर ते प्रमाण बदलत नाही.

उदा. 3:4 = 6:8 = 9:12 तसेच 2:3:5 = 8:12:20 किंवा k ही शून्येतर संख्या असेल, तर

$a : b = ak : bk$ $\qquad$ $a : b : c = ak : bk : ck$

(4) ज्या संख्यांचे गुणोत्तर काढायचे आहे त्या एकाच प्रकारच्या मापनाच्या असल्या तर प्रत्येकीच्या मापनाचे एकक समान असले पाहिजे.

(5) गुणोत्तराला एकक नसते.

जसे, 2 किलोग्रॅम व 300 ग्रॅम यांचे गुणोत्तर 2:300 नसते परंतु 2 किलोग्रॅम = 2000 ग्रॅम म्हणून ते गुणोत्तर 2000 : 300 म्हणजेच 20:3 आहे.

उदा (1) सीमाच्या व राजश्रीच्या वयांचे गुणोत्तर 3 : 1 आहे. राजश्रीच्या व अतुलच्या वयांचे गुणोत्तर 2 : 3 आहे. तर सीमा, राजश्री आणि अतुल यांच्या वयांचे गुणोत्तर काढा.

उकल : सीमाचे वय : राजश्रीचे वय = 3 : 1 $\qquad$ राजश्रीचे वय : अतुलचे वय = 2 : 3

पहिल्या गुणोत्तराचे उत्तरपद हे दुसऱ्या गुणोत्तरातील पूर्वपद असायला हवे.

यासाठी म्हणजे सलग गुणोत्तर मिळवण्यासाठी पहिल्या गुणोत्तरातील पदांना 2 ने गुणू म्हणजे 3:1 = 6:2 मिळेल.

$$\frac{\text{सीमाचे वय}}{\text{राजश्रीचे वय}} = \frac{6}{2}, \qquad \frac{\text{राजश्रीचे वय}}{\text{अतुलचे वय}} = \frac{2}{3}$$

∴ सीमाचे वय : राजश्रीचे वय : अतुलचे वय हे गुणोत्तर 6 : 2 : 3 असे आहे.

उदा (2) एका आयताकृती शेताची लांबी 1.2 किमी असून त्याची रुंदी 400 मी आहे, तर लांबीचे रुंदीशी गुणोत्तर काढा.

उकल : येथे लांबी किलोमीटरमध्ये व रुंदी मीटरमध्ये आहे. गुणोत्तरासाठी दोन्ही एकके समान हवीत म्हणून किलोमीटरचे मीटरमध्ये रूपांतर करू.

1.2 किमी = 1.2×1000 = 1200 मीटर ∴ 1200 मीटरचे 400 मीटरशी गुणोत्तर घेऊ.

अपेक्षित गुणोत्तर = $\frac{1200}{400} = \frac{3}{1}$, म्हणजेच 3:1 आहे.

उदा (3) महेश यांच्या दरमहा खर्चाचे त्यांच्या उत्पन्नाशी असलेले गुणोत्तर 3:5 आहे, तर त्यांचा खर्च त्यांच्या उत्पन्नाच्या शेकडा किती आहे ?

उकल : खर्चाचे उत्पन्नाशी असलेले गुणोत्तर 3:5 आहे. याचे शतमानात रूपांतर करायचे म्हणजे दुसरे पद 100 करायचे.

$\frac{3}{5} = \frac{3\times 20}{5\times 20} = \frac{60}{100}$ म्हणजे $\frac{\text{खर्च}}{\text{उत्पन्न}} = \frac{60}{100} = 60\%$ ∴ महेश यांचा खर्च उत्पन्नाच्या 60% आहे.

उदा (4) एका बागेत आंबा व चिकूच्या झाडांच्या संख्यांचे गुणोत्तर 2:3 आहे. जर त्या बागेत प्रत्येक प्रकारची 5 झाडे जास्त लावली असती तर त्यांच्या संख्यांचे गुणोत्तर 5 : 7 झाले असते. तर त्या बागेत आंब्याची व चिकूची झाडे किती आहेत ?

उकल : सुरुवातीचे गुणोत्तर 2 : 3 आहे.

बागेतील आंब्याची झाडे = $2x$ व चिकूची झाडे = $3x$ मानू.

दिलेल्या अटीनुसार, $\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore x = 10$$

∴ बागेतील आंब्याची झाडे = $2x = 2 \times 10 = 20$

∴ बागेतील चिकूची झाडे = $3x = 3 \times 10 = 30$

उदा (5) दोन संख्यांचे गुणोत्तर 5 : 7 आहे. जर प्रत्येक संख्येत 40 मिळवले तर येणाऱ्या बेरजांचे गुणोत्तर 25 : 31 होते. तर त्या संख्या काढा.

उकल : पहिली संख्या = $5x$ आणि दुसरी संख्या = $7x$ मानू.

दिलेल्या अटीवरून.

$$\frac{5x+40}{7x+40}=\frac{25}{31}$$

$$31(5x+40)=25(7x+40)$$

$$155x+1240=175x+1000$$

$$1240-1000 = 175x-155x$$

$$240=20x$$

$$x=12$$

$\therefore$ पहिली संख्या = $5 \times 12 = 60$

दुसरी संख्या = $7 \times 12 = 84$

$\therefore$ दिलेल्या संख्या 60 व 84 आहेत.

सरावसंच 4.1

(1) खाली दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांमधील पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 72, 60 (ii) 38,57 (iii) 52,78

(2) पुढील राशींपैकी पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 700 रुपये, 308 रुपये (ii) 14 रु, 12 रु. 40 पै.

(iii) 5 लीटर, 2500 मिलिलीटर (iv) 3 वर्षे 4 महिने, 5 वर्षे 8 महिने

(v) 3.8 किलोग्रॅम, 1900 ग्रॅम (vi) 7 मिनिटे 20 सेकंद, 5 मिनिटे 6 सेकंद.

(3) पुढील शतमाने संक्षिप्त गुणोत्तरांच्या रूपात लिहा.

(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%

(4) एक लहान घर 3 माणसे 8 दिवसांत बांधू शकतात, तर तेच घर 6 दिवसांत बांधण्यास किती माणसे लागतील?

(5) पुढील गुणोत्तरांचे शतमानात रूपांतर करा.

(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$

(6) आभा आणि तिची आई यांच्या वयांचे गुणोत्तर 2:5 आहे. आभाच्या जन्माच्या वेळी तिच्या आईचे वय 27 वर्षे होते. तर आभा आणि तिची आई यांची आजची वये काढा.

(7) वत्सला व सारा यांची आजची वये अनुक्रमे 14 वर्षे व 10 वर्षे आहेत; किती वर्षांनी त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 5:4 होईल?

(8) रेहाना व तिची आई यांच्या आजच्या वयांचे गुणोत्तर 2 : 7 आहे. 2 वर्षांनी त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 1 : 3 होईल. तर रेहानाचे आजचे वय किती?

जाणून घेऊया.

गुणोत्तरांची तुलना

जर $b > 0, d > 0$ तर $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ या गुणोत्तरांची तुलना पाहू. ही तुलना खालील नियमांनुसार करता येते.

(i) जर $ad > bc$ तर $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) जर $ad < bc$ तर $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) जर $ad = bc$ तर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

खाली दिलेल्या गुणोत्तरांच्या प्रत्येक जोडीतील क्रमसंबंध ठरवा.

उदा (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

उकल : 4×8 $\boxed{?}$ 7×9

$32 < 63$

$\therefore \quad \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

उदा (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} \times \sqrt{5},$ $\boxed{?}$ $\sqrt{8} \times \sqrt{7}$

$\sqrt{65}$ $\boxed{?}$ $\sqrt{56}$

$\sqrt{65} > \sqrt{56}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

उदा (3) जर a व b पूर्णांक संख्या असतील आणि $a < b$, $b \neq \pm 1$ तर $\frac{a-1}{b-1}, \frac{a+1}{b+1}$ या गुणोत्तरांतील क्रमसंबंध ठरवा.

उकल : $a < b$

$\therefore a - 1 < b - 1$

आता $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$ या वजाबाकीचा विचार करू.

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab-b+a-1)-(ab+b-a-1)}{b^2-1}$$

$$= \frac{ab-b+a-1-ab-b+a+1}{b^2-1}$$

$$= \frac{2a-2b}{b^2-1}$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

आता $a < b$ $\therefore a - b < 0$

तसेच $b^2-1 > 0$ कारण $b \neq \pm 1$

$\frac{2(a-b)}{b^2-1} < 0 \ldots\ldots\ldots\ (2)$

$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0 \ldots (1)$ व (2) वरून

$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$

उदा (4) जर $a : b = 2 : 1$ आणि $b : c = 4 : 1$ तर $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ या राशीची किंमत काढा.

उकल : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$ $\therefore a = 2b$ $\frac{b}{c} = \frac{4}{1}$ $\therefore b = 4c$

$a = 2b = 2 \times 4c = 8c$ $\therefore a = 8c$

आता $a = 8c$, $b = 4c$ या किमती घालून

$$\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = 512$$

सरावसंच 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ या गुणधर्माचा उपयोग करून रिकाम्या जागी योग्य संख्या लिहा.

(i) $\frac{5}{7} = \frac{....}{28} = \frac{35}{....} = \frac{....}{3.5}$ (ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{....} = \frac{....}{42} = \frac{....}{3.5}$

(2) पुढील गुणोत्तरे काढा.

(i) वर्तुळाच्या त्रिज्येचे त्याच्या परिघाशी असलेले गुणोत्तर.

(ii) r त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाच्या परिघाचे, त्याच्या क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(iii) बाजू 7 सेमी असलेल्या चौरसाच्या कर्णाचे त्याच्या बाजूशी असलेले गुणोत्तर.

(iv) लांबी 5 सेमी व रुंदी 3.5 सेमी असलेल्या आयताच्या परिमितीचे, क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(3) पुढे दिलेल्या गुणोत्तरांच्या जोड्यांमधील लहान-मोठेपणा ठरवा.

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) □ABCD समांतरभुज चौकोन आहे. त्याच्या $\angle A$ व $\angle B$ च्या मापांचे गुणोत्तर 5 : 4 आहे. तर $\angle B$ चे माप काढा.

(ii) अल्बर्ट आणि सलीम यांच्या आजच्या वयांचे गुणोत्तर 5 : 9 आहे. पाच वर्षांनंतर त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 3 : 5 होईल, तर त्यांची आजची वये काढा.

(iii) एका आयताच्या लांबी व रुंदीचे गुणोत्तर 3 : 1 आहे. आयताची परिमिती 36 सेमी आहे, तर आयताची लांबी व रुंदी काढा.

(iv) दोन संख्यांचे गुणोत्तर 31 : 23 असून त्यांची बेरीज 216 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(v) दोन संख्यांचा गुणाकार 360 आहे व त्याचे गुणोत्तर 10 : 9 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(5*) जर $a : b = 3 : 1$ आणि $b : c = 5 : 1$ तर (i) $\left(\dfrac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\dfrac{a^2}{7bc}$ या राशींच्या किमती काढा.

(6*) $\sqrt{0.04\times0.4\times a} = 0.4\times0.04\times\sqrt{b}$ तर $\dfrac{a}{b}$ हे गुणोत्तर काढा.

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ तर x ची किंमत काढा.

जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांवरील क्रिया

समानतेच्या गुणधर्मांचा उपयोग करून दोन समान गुणोत्तरांवर काही क्रिया करता येतात. त्यांचा अभ्यास करू.

जर a , b, c, d या धन संख्या असतील तर त्यांसाठी खालील गुणधर्म समजून घेऊ.

(I) व्यस्त क्रिया (Invertendo) जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ तर $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad a\times d = b\times c$$

$$\therefore \quad b\times c = a\times d$$

$$\therefore \quad \frac{b\times c}{a\times c} = \frac{a\times d}{a\times c} \qquad \text{(दोन्ही बाजूंस } a \times c \text{ ने भागून.)}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$\therefore$ जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ तर $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$ **या गुणधर्माला 'व्यस्त क्रिया' म्हणतात.**

(II) एकांतर क्रिया (Alternando) जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ तर $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad a\times d = b\times c$$

$$\frac{a\times d}{c\times d} = \frac{b\times c}{c\times d} \qquad \text{(दोन्ही बाजूंस } c \times d \text{ ने भागून)}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ तर $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ **या गुणधर्माला 'एकांतर क्रिया' म्हणतात.**

(III) योग क्रिया (Componendo) जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad \text{(दोन्ही बाजूंत 1 मिळवून)}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ **या गुणधर्माला 'योग क्रिया' म्हणतात.**

(IV) वियोग क्रिया (Dividendo) जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad \text{(दोन्ही बाजूंतून 1 वजा करून)}$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ **या गुणधर्माला 'वियोग क्रिया' म्हणतात.**

(V) योग वियोग क्रिया (Componendo-dividendo) जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, $a \neq b, c \neq d$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad \text{(योग क्रिया करून)} \quad ....(1)$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad \text{(वियोग क्रिया करून)} \quad ....(2)$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \quad \text{(1) व (2) वरून.}$$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ **या गुणधर्माला 'योग-वियोग क्रिया' म्हणतात.**

योग क्रिया आणि वियोग क्रिया यांचे सामान्य रूप

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (एकदा योग क्रिया)

$$\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d} \quad \text{(दोनदा योग क्रिया करून)}$$

सामान्यपणे $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$ (m वेळा योग क्रिया करून) ...(1)

तसेच जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-mb}{b}=\frac{c-md}{d}$ (m वेळा वियोग क्रिया करून) ...(2)

आणि जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+mb}{a-mb}=\frac{c+md}{c-md}$ ...((1) व (2) वरून, भागाकार करून)

हे लक्षात ठेवूया.

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (व्यस्त क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (एकांतर क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (योग क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (वियोग क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (योग-वियोग क्रिया)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) जर $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ तर $\frac{a+7b}{7b}$ हे गुणोत्तर काढा.

रीत I

उकल : जर $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ तर $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=k$, एकांतर क्रिया करून

$\therefore a = 5k,\ b = 3k$

$\therefore \frac{a+7b}{7b}=\frac{5k+7\times 3k}{7\times 3k}$

$=\frac{5k+21k}{21k}$

$=\frac{26k}{21k} \quad =\frac{26}{21}$

रीत II

$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$

$\therefore \frac{a}{7b}=\frac{5}{21}$

$\therefore \frac{a+7b}{7b}=\frac{5+21}{21}$ (योगक्रिया करून)

$\therefore \frac{a+7b}{7b}=\frac{26}{21}$

उदा. (2) जर $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ तर $\frac{5a-b}{b}$ काढा.

रीत I

उकल : $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{4}$ एकांतर क्रिया करून

$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{4}=m$ मानू

$\therefore a = 7m,\quad b = 4m$

$\therefore \frac{5a-b}{b}=\frac{5(7m)-4m}{4m}$

$=\frac{35m-4m}{4m}$

$=\frac{31}{4}$

रीत II

$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\frac{5a}{b}=\frac{5\times 7}{4}$

$=\frac{35}{4}$

$\frac{5a-b}{b}=\frac{35-4}{4}$ (वियोग क्रिया करून)

$\frac{5a-b}{b}=\frac{31}{4}$

उदा. (3) जर $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ तर $\frac{a+2b}{a-2b}$ ची किंमत काढा.

उकल : रीत I : समजा $a = 7m,\ b = 3m$

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7m+2\times 3m}{7m-2\times 3m}$$

$$= \frac{7m+6m}{7m-6m}$$

$$= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}$$

रीत II : $\therefore \frac{a}{b} = \frac{7}{3}$

$\therefore \frac{a}{2b} = \frac{7}{6}$ ...... दोन्ही बाजूंना $\frac{1}{2}$ ने गुणून

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7+6}{7-6}$ (योग-वियोग क्रिया करून)

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$

उदा (4) जर $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ तर $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ ची किंमत काढा.

उकल : **रीत I**

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ .... एकांतर क्रियेने

आता $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ च्या प्रत्येक पदास b ने भागून.

$$\frac{\frac{5a}{b}+\frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b}-\frac{2b}{b}} = \frac{5\left(\frac{a}{b}\right)+3}{7\left(\frac{a}{b}\right)-2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)+3}{7\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$= \frac{\frac{15}{2}+3}{\frac{21}{2}-2}$$

$$= \frac{15+6}{21-4}$$

$$= \frac{21}{17}$$

रीत II

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ = t मानू.

$\therefore$ a = 3t व b = 2t या किमती ठेवून.

$$\frac{5a+3b}{7a-2b} = \frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad (t \neq 0)$$

$$= \frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$= \frac{21t}{17t}$$

$$= \frac{21}{17}$$

उदा (5) जर $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{5}$ तर $\dfrac{4x-y}{4x+y}$ ची किमत काढा.

उकल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4x}{y} = \frac{16}{5} \qquad \text{...(दोन्ही बाजूंना 4 ने गुणून)}$$

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{16+5}{16-5} \qquad \text{...(वियोग-योग क्रिया करून)}$$

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \frac{4x-y}{4x+y} = \frac{11}{21}$$

$\therefore$

उदा (6) जर $5x = 4y$ तर $\dfrac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ ची किंमत काढा.

उकल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25} \qquad \text{...(दोन्ही बाजूंस 3 ने गुणून)}$$

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{48+25}{48-25} \qquad \text{...(योग-वियोग क्रिया करून)}$$

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{73}{23}$$

$\therefore$

जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांच्या गुणधर्मांचा उपयोग (Use of equal ratios)

काही समीकरणे सोडवण्यासाठी इतर पद्धतींपेक्षा समान गुणोत्तरांवरील क्रियांचा उपयोग करणे सोईचे असते.

उदा (1) समीकरण सोडवा. $\dfrac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \dfrac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

उकल : $\dfrac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \dfrac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

$$\frac{\left(6x^2+10x+14\right)}{10x+14} = \frac{\left(6x^2+8x+6\right)}{8x+6} \qquad \text{(दोन्ही बाजूंस 2 ने गुणून)}$$

$$\frac{(6x^2+10x+14)-(10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)-(8x+6)}{8x+6}$$ (वियोग क्रिया करून)

$$\therefore \quad \frac{6x^2}{10x+14}=\frac{6x^2}{8x+6}$$

हे समीकरण $x=0$ या किमतीसाठी सत्य आहे. $\therefore$ $x=0$ ही एक उकल आहे.

जर $x \neq 0$ तर $x^2 \neq 0$, $\therefore$ $6x^2$ ने भागून, $\frac{1}{10x+14}=\frac{1}{8x+6}$

$\therefore \quad 8x+6=10x+14$

$\therefore \quad 6-14=10x-8x$

$\therefore \quad -8=2x$

$\therefore \quad x=-4$

$\therefore$ $x=-4$ किंवा $x=0$ या दिलेल्या समीकरणाच्या उकली आहेत.

उदा (2) सोडवा $\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\frac{5}{1}$

$$\frac{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}=\frac{5+1}{5-1}$$ (योग-वियोग क्रिया करून)

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}}=\frac{6}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{2}$$ (दोन्ही बाजूंचे वर्ग करून)

$$\therefore \quad \frac{x+7}{x-2}=\frac{9}{4}$$

$\therefore \quad 4x+28=9x-18$

$\therefore \quad 28+18=9x-4x$

$\therefore \quad 46=5x$

$\therefore \quad \frac{46}{5}=x$

$\therefore$ $x=\frac{46}{5}$ ही समीकरणाची उकल आहे.

कृती

जाड कागदाचे पाच तुकडे घ्या. प्रत्येक कागदावर खालीलपैकी एक एक विधान लिहा.

(i) $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$ (ii) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ (iii) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bd}$ (iv) $\dfrac{c}{d} = \dfrac{c-a}{d-b}$ (v) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{rc}{rd}$

a, b, c, d या धनसंख्या आहेत आणि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ही माहिती दिली आहे. वरीलपैकी प्रत्येक विधान सत्य की असत्य आहे हे कार्डाच्या मागे लिहा. विधान असत्य असल्यास त्याचे कारण लिहा.

सरावसंच 4.3

(1) जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7}{3}$ तर पुढील गुणोत्तरांच्या किंमती काढा.

(i) $\dfrac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\dfrac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\dfrac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\dfrac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) जर $\dfrac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2} = \dfrac{47}{7}$ तर पुढील गुणोत्तरांच्या किंमती ठरवा.

(i) $\dfrac{a}{b}$ (ii) $\dfrac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\dfrac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\dfrac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) जर $\dfrac{3a+7b}{3a-7b} = \dfrac{4}{3}$ तर $\dfrac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ या गुणोत्तराची किंमत काढा.

(4) पुढील समीकरणे सोडवा.

(i) $\dfrac{x^2+12x-20}{3x-5} = \dfrac{x^2+8x+12}{2x+3}$ (ii) $\dfrac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12} = \dfrac{2x+3}{x-5}$

(iii) $\dfrac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2} = \dfrac{17}{8}$ (iv*) $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}} = \dfrac{4}{1}$

(v) $\dfrac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9} = \dfrac{61}{36}$ (vi) $\dfrac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3} = \dfrac{61}{189}$

कृती : खाली दिलेल्या मधल्या चौकटीतील a आणि b च्या किमती बदलून, म्हणजे $a : b$ चे गुणोत्तर बदलून वेगवेगळी उदाहरणे तयार करता येतील. तसे बदल करून शिक्षकांनी भरपूर सराव द्यावा.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2} =$ -----

$\dfrac{3a}{4b} =$ -----

$\dfrac{2a-b}{2a+b} =$ -----

$\dfrac{a^2+b^2}{b^2} =$ ---

$\dfrac{a}{2b} =$ -----

जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत (Theorem on equal ratios)

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ या गुणधर्माला समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत म्हणतात.

सिद्धता : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ मानू. $\therefore$ $a = bk$ आणि $c = dk$

$$\therefore \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

आपल्याला माहीत आहे की, $\frac{a}{b} = \frac{al}{bl}$

$\therefore$ जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, तर $\frac{al}{bl} = \frac{cm}{dm} = \frac{al+cm}{bl+dm} = k$

याच पद्धतीने विचार करून जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots\dots$ (सांत पदे) आणि जर l, m, n या शून्येतर संख्या असतील तर प्रत्येक गुणोत्तर = $\frac{al+cm+en+\dots}{bl+dm+fn+\dots}$ (सांत पदे) हे समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताचे सामान्य रूप मिळते.

विचार करूया.

एका व्यायामशाळेत शिशुगटात 35 मुली व 42 मुलगे, बालगटात 30 मुली व 36 मुलगे आणि तरुण गटात 20 मुली व 24 मुलगे आहेत. तर प्रत्येक गटातील मुलींची संख्या आणि मुलग्यांची संख्या यांचे गुणोत्तर किती आहे ?

सांघिक कवायतीसाठी तिन्ही गट मैदानावर एकत्र केले. आता एकत्र झालेल्या समूहातील मुलींची संख्या व मुलग्यांची संख्या यांचे गुणोत्तर किती आहे ?

वरील प्रश्नांच्या उत्तरातून तुम्हांला समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताचा पडताळा आला का ?

उदा (1) खालील विधानातील रिकाम्या जागा भरा.

(i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{\dots\dots\dots\dots}$ (ii) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5x-3y+4z}{\dots\dots\dots\dots\dots}$

उकल : (i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{4\times3+9\times7} = \frac{4a+9b}{12+63} = \frac{4a+9b}{75}$

(ii) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5\times x}{5\times3} = \frac{-3\times y}{-3\times5} = \frac{4\times z}{4\times4}$

$$\therefore \quad = \frac{5x}{15} = \frac{-3y}{-15} = \frac{4z}{16}$$

$$= \frac{5x-3y+4z}{15-15+16}$$ ----(समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांतावरून)

$$= \frac{5x-3y+4z}{16}$$

उदा (2) जर $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ आणि $x+y+z\neq 0$ तर

प्रत्येक गुणोत्तर = $\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$ हे दाखवा.

उकल : $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ = k मानू.

$\therefore$ समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताने

$$k=\frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$

$$=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{x-2y+3z}=\frac{b}{y-2z+3x}=\frac{c}{z-2x+3y}=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

उदा (3) जर $\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}=\frac{x}{a+b-c}$ तर $\frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$ हे सिद्ध करा.

उकल : प्रथम दिलेल्या समान गुणोत्तरांमध्ये व्यस्त क्रिया करून

$$\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$$

आता $\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$ = k मानू.

$\therefore$ समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताने

$$k=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x}$$

$$=\frac{2a}{z+x} \quad .....(I)$$

$$k=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y}$$

$$=\frac{2b}{x+y} \quad ....(II)$$

$$k=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z}$$

$$=\frac{2c}{y+z} \quad ......(III)$$

$$\therefore \quad \frac{2a}{z+x}=\frac{2b}{x+y}=\frac{2c}{y+z}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$$

उदा (4) सोडवा : $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{7x-3}{5x+2}$

उकल : उदाहरणाचे निरीक्षण केल्यावर असे दिसते की उजव्या बाजूच्या गुणोत्तरातील पूर्वपदाला व उत्तरपदाला $2x$ ने गुणले तर पहिल्या गुणोत्तरातील प्रत्येकी दोन पदे मिळतात. म्हणून दुसऱ्या गुणोत्तरातील दोन्ही पदांना $2x$ ने गुणू.परंतु त्याआधी x शून्य नाही हे निश्चित करून घेऊ.

जर $x = 0$ असेल तर $\dfrac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \dfrac{8}{7}$ आणि $\dfrac{7x-3}{5x+2}=\dfrac{-3}{2}$

$\therefore$ $\dfrac{8}{7}=\dfrac{-3}{2}$ हे विसंगत विधान मिळते.

$\therefore$ $x \neq 0$

$\therefore$ दुसऱ्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांना $2x$ ने गुणून.

$$\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)}=k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4k+7}=\frac{14x^2-6x}{10x^2+4x}=k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x}=\frac{8}{7}=k$$

$$\therefore \quad k=\frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad \frac{7x-3}{5x+2}=\frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad 49x-21=40x+16$$

$$\therefore \quad 49x-40x=16+21$$

$$\therefore \quad 9x=37 \qquad \therefore \; x=\frac{37}{9}$$

सरावसंच 4.4

(1) पुढील विधानांतील रिकाम्या जागा भरा.

(i) $\dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{3x+5y}{.......}=\dfrac{7x-9y}{......}$ (ii) $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{7}=\dfrac{a-2b+3c}{......}=\dfrac{......}{6-8+14}$

(2) $5m-n=3m+4n$ तर पुढील राशींच्या किमती काढा. ''

(i) $\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (ii) $\dfrac{3m+4n}{3m-4n}$

(3) (i) जर $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ आणि a, b, c पैकी कोणत्याही दोन संख्या समान नाहीत

तर $\dfrac{y-z}{a(b-c)}=\dfrac{z-x}{b(c-a)}=\dfrac{x-y}{c(a-b)}$ हे दाखवा.

(ii) जर $\dfrac{x}{3x-y-z}=\dfrac{y}{3y-z-x}=\dfrac{z}{3z-x-y}$ आणि $x+y+z \neq 0$ तर प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत 1 आहे असे दाखवा.

(iii) जर $\dfrac{ax+by}{x+y}=\dfrac{bx+az}{x+z}=\dfrac{ay+bz}{y+z}$ आणि $x+y+z \neq 0$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\dfrac{a+b}{2}$ आहे, हे सिद्ध करा.

(iv) जर $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}$ तर $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ हे दाखवा.

(v) जर $\dfrac{3x-5y}{5z+3y}=\dfrac{x+5z}{y-5x}=\dfrac{y-z}{x-z}$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\dfrac{x}{y}$ एवढे आहे हे दाखवा.

(4) सोडवा. (i) $\dfrac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21}=\dfrac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\dfrac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4}=\dfrac{y+8}{1+2y}$

जाणून घेऊया.

परंपरित प्रमाण (Continued Proportion)

पुढील गुणोत्तरे विचारात घ्या. 4:12 आणि 12:36 ही गुणोत्तरे समान आहेत. या दोन प्रमाणांतील पहिल्याचे उत्तरपद आणि दुसऱ्याचे पूर्व पद समान आहे. म्हणून 4, 12, 36 या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

जेव्हा $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ तेव्हा a, b, c या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

जर $ac = b^2$, तर दोन्ही बाजूंना bc ने भागून $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ हे समीकरण मिळते.

$\therefore$ $ac = b^2$ असेल, तर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतात.

जेव्हा a, b, c परंपरित प्रमाणात असतात तेव्हा b ला a आणि c यांचा '**भूमितीय मध्य**' (Geometric mean) किंवा '**मध्यम प्रमाण पद**' (Mean proportional) म्हणतात.

यावरून लक्षात घ्या, की खालील सर्व विधाने समान अर्थाची आहेत.

$\therefore$ (1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ (2) $b^2 = ac$ (3) a, b, c परंपरित प्रमाणात आहेत.

(4) b हा a व c यांचा भूमितीमध्य आहे. (5) b हे a व c चे मध्यम प्रमाणपद आहे.

परंपरित प्रमाणाची संकल्पनासुद्‌धा विस्तारित करता येते.

जर $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{e}=\dfrac{e}{f}$ तर a, b, c, d, e आणि f या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत, असे म्हणतात.

उदा (1) x ही संख्या 25 व 4 यांचा भूमितीमध्य आहे तर x ची किंमत काढा.

उकल : x हा 25 व 4 यांचा भूमितीमध्य आहे.

$$\therefore\ x^2 = 25 \times 4$$
$$\therefore\ x^2 = 100$$
$$\therefore\ x = 10$$

उदा (2) जर $4\,a^2b$, $8\,ab^2$, p परंपरित प्रमाणात असतील तर p ची किंमत काढा.

उकल : दिलेल्या माहितीवरून $4\,a^2b$, $8\,ab^2$, p परंपरित प्रमाणात आहेत.

$$\therefore \quad \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

उदा (3) 7, 12 आणि 18 या प्रत्येक संख्येतून कोणती संख्या वजा केली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील ?

उकल : 7, 12 आणि 18 या प्रत्येक संख्येतून x ही संख्या वजा केली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात येतील असे मानू.

$(7-x)$, $(12-x)$, $(18-x)$ परंपरित प्रमाणात आहेत.

$$\therefore \quad (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$\therefore \quad 144-24x + x^2 = 126 - 25x + x^2$$

$$\therefore \quad -24x + 25x = 126 - 144$$

$$\therefore \quad x = -18$$

पडताळा

$(7-x) = 7-(-18) = 25$

$(12-x) = 12-(-18) = 30$

$(18-x) = 18-(-18) = 36$

302 = 900 आणि $25 \times 36 = 900$

25, 30, 36 या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत.

$\therefore$ 7, 12, 18 मधून -18 वजा केल्यास येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील.

k – पद्धती (k –method)

गुणोत्तरातील k – पद्धती ही समान गुणोत्तरांवरील म्हणजेच प्रमाणावरील काही प्रश्न सोडवण्याची एक सोपी रीत आहे. या रीतीमध्ये दिलेल्या समान गुणोत्तरांपैकी प्रत्येकाची किंमत k मानतात.

उदा (1) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर दाखवा की $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$

उकल : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ मानू $\therefore$ $a = bk$, $c = dk$

a आणि c च्या किमती दोन्ही बाजूंत ठेवून.

डावी बाजू $= \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$

उजवी बाजू $= \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू.

$$\therefore \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

उदा (2) जर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा $\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

उकल : a, b, c हे परंपरित प्रमाणात आहेत. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ मानू.

$\therefore\ b = ck,\ a = bk = ck \times k = ck^2$

a आणि b च्या किमती घालून

डावी बाजू $= \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)} = \frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3} = \frac{(k+1)^2}{k}$

उजवी बाजू $= \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{(ck+c)^2}{(ck)c} = \frac{c^2(k+1)^2}{c^2k} = \frac{(k+1)^2}{k}$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू. $\therefore \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

उदा (3) जर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील,

तर सिद्ध करा $\frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

उकल : a, b, c परंपरित प्रमाणात आहेत. $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

समजा, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \text{k}$ $\therefore b = ck$ आणि $a = ck^2$

डावी बाजू $= \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$

उजवी बाजू $= \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

$$= \frac{(k^2c)^2+k^2c(ck)+(ck)^2}{(ck)^2+(ck)(c)+c^2}$$

$$= \frac{k^4c^2+k^3c^2+c^2k^2}{c^2k^2+c^2k+c^2}$$

$$= \frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)}$$

$$= k^2$$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू

$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

उदा (4) पाच संख्या परंपरित प्रमाणात असून पहिले पद 5 व शेवटचे पद 80 आहे. तर त्या संख्या काढा.

उकल : समजा, परंपरित प्रमाण असलेल्या पाच संख्या a, ak, ak^2, ak^3, ak^4 आहेत.

येथे $a = 5$ आणि $ak^4 = 80$

$\therefore 5 \times k^4 = 80$

$\therefore k^4 = 16$

$\therefore k = 2 \quad \because 2^4 = 16$

$ak = 5 \times 2 = 10 \qquad ak^2 = 5 \times 4 = 20$

$ak^3 = 5 \times 8 = 40 \qquad ak^4 = 5 \times 16 = 80$

$\therefore$ त्या संख्या 5, 10, 20, 40, 80 आहेत.

सरावसंच 4.5

(1) 12, 16 आणि 21 या प्रत्येक संख्येत कोणती संख्या मिळवली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील ?

(2) $(23-x)$ व $(19-x)$ यांचे $(28-x)$ हे x चे मध्यम प्रमाणपद आहे, तर x ची किंमत काढा.

(3) तीन संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत. त्यांचे मध्यम प्रमाणपद 12 असून उरलेल्या दोन संख्यांची बेरीज 26 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(4) जर $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ तर a, b, c या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत हे दाखवा.

(5) जर $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ आणि $a, b, c > 0$ तर सिद्ध करा की,

(i) $(a + b + c)(b - c) = ab - c^2$

(ii) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

(iii) $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a+c}{b}$

(6) $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ यांतील मध्यम प्रमाणपद काढा.

कृती : भूगोलाच्या पुस्तकातील भारताचा राजकीय नकाशा पाहा. त्यात दिलेले अंतराचे प्रमाण लक्षात घ्या. त्यावरून वेगवेगळ्या शहरांतील सरळ रेषेतील अंतरे काढा.

जसे, (i) नवी दिल्ली ते बंगळुरू (ii) मुंबई ते कोलकता (iii) जयपूर ते भुवनेश्वर

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

(1) खालील प्रश्नांसाठी बहुपर्यायी उत्तरांतील अचूक पर्याय निवडा.

(i) जर 6 : 5 = y : 20 तर y ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5

(ii) 1 मिलिमीटरचे 1 सेंटिमीटरशी असलेले गुणोत्तर खालीलपैकी कोणते ?

(A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1

(iii*) जतीन, नितीन व मोहसीन यांची वये अनुक्रमे 16, 24 व 36 वर्षे आहेत, तर नितीनच्या वयाचे मोहसीनच्या वयाशी असलेले गुणोत्तर कोणते ?

(A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(iv) शुभम व अनिल यांना 3 : 5 या प्रमाणात 24 केळी वाटली, तर शुभमला मिळालेली केळी किती ?

(A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 व 25 यांचे मध्यम प्रमाणपद खालीलपैकी कोणते ?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) खाली दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांमधील पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) पुढील गुणोत्तरे संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) वर्तुळाची त्रिज्या व व्यास यांचे गुणोत्तर.

(ii) आयताची लांबी 4 सेमी व रुंदी 3 सेमी असल्यास आयताच्या कर्णाचे लांबीशी असलेले गुणोत्तर.

(iii) चौरसाची बाजू 4 सेमी असल्यास चौरसाच्या परिमितीचे त्याच्या क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(4) पुढील संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत का ते ठरवा.

(i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5) a, b, c या तीन संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत. जर $a = 3$ आणि $c = 27$ असेल तर $b =$ किती ?

(6) पुढील गुणोत्तरांचे शतमान रूपांतर करा.

(i) 37 : 500 (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$

(7) पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 1024 MB, 1.2 GB [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 17 रुपये, 25 रुपये 60 पैसे (iii) 5 डझन, 120 नग

(iv) 4 चौमी, 800 चौसेमी (v) 1.5 किग्रॅ, 2500 ग्रॅम

(8) जर $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ तर पुढील राशींच्या किमती काढा.

(i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9) a, b, c, d प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा.

(i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$

(ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$

(iii) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा.

(i) $\dfrac{a}{a+2b} = \dfrac{a-2b}{a-4c}$ (ii) $\dfrac{b}{b+c} = \dfrac{a-b}{a-c}$

(11) सोडवा : $\dfrac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58} = \dfrac{2x+3}{3x+2}$

(12) जर $\dfrac{2x-3y}{3z+y} = \dfrac{z-y}{z-x} = \dfrac{x+3z}{2y-3x}$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\dfrac{x}{y}$ आहे, हे सिद्ध करा.

(13*) जर $\dfrac{by+cz}{b^2+c^2} = \dfrac{cz+ax}{c^2+a^2} = \dfrac{ax+by}{a^2+b^2}$ तर $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ हे सिद्ध करा.

5 दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

चला, शिकूया.

- दोन चलांतील रेषीय समीकरणे
- एकसामायिक समीकरणे
- एकसामयिक समीकरणे सोडविणे
- एकसामायिक समीकरणांवरील शाब्दिक उदाहरणे

जरा आठवूया.

उदा. खालील समीकरणे सोडवा.

(1) $m+3=5$ $m = \square$

(2) $3y+8=22$ $y = \square$

(3) $\frac{x}{3}=2$ $x = \square$

(4) $2p = p+\frac{4}{9}$ $p = \square$

(5) कोणत्या संख्येत 5 मिळवल्यास 14 ही संख्या मिळेल ?

$\square + 5 = 14$

$x + 5 = 14$

$x = \square$

(6) 8 मधून किती वजा केल्यास 2 उरतील ?

$8 - \square = 2$

$8 - y = 2$

$y = \square$

वरील प्रत्येक समीकरणात चलाचा घातांक 1 आहे. या समीकरणांना एका चलातील रेषीय समीकरणे म्हणतात.

जाणून घेऊया.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणे (Linear equations in two variables)

ज्या दोन संख्यांची बेरीज 14 आहे, अशा संख्या शोधा.

संख्यांसाठी x व y ही चले वापरून हे उदाहरण समीकरण रूपात $x + y = 14$ असे होईल.

हे दोन चलांतील समीकरण आहे. येथे x आणि y या दोन्ही चलांच्या अनेक किमती शोधता येतात.

जसे, $9 + 5 = 14$	$7 + 7 = 14$	$8 + 6 = 14$	$4 + 10 = 14$
$(-1) + 15 = 14$	$15 + (-1) = 14$	$2.6 + 11.4 = 14$	$0 + 14 = 14$
$100 + (-86) = 14$	$(-100) + (114) = 14$	$\square + \square = 14$	$\square + \square = 14$

म्हणजे वरील समीकरणांच्या $(x = 9, y = 5)$ $(x = 7, y = 7)$ $(x = 8, y = 6)$ इत्यादी अनेक उकली मिळतात.

$x = 9$, $y = 5$ ही उकल $(9, 5)$ अशा क्रमाने कंसात लिहिण्याचा संकेत आहे. या जोडीतील पहिली संख्या x ची किंमत व दुसरी संख्या y ची किंमत असते. $x + y = 14$ हे समीकरण सत्य ठरवणाऱ्या $(9,5)$, $(7,7)$, $(8,6)$, $(4,10)$, $(10,4)$, $(-1,15)$, $(2.6, 11.4)$, ... अशा अनंत क्रमित जोड्या म्हणजे अनंत उकली आहेत.

आता दुसरे उदाहरण पाहा.

अशा दोन संख्या शोधा की ज्यांची वजाबाकी 2 आहे.

मोठी संख्या x व लहान संख्या y मानल्यास $x-y = 2$ हे समीकरण मिळेल.

x आणि y किंमतींसाठी पुढीलप्रमाणे अनेक समीकरणे मिळतील.

$10 - 8 = 2$ $\quad 9 - 7 = 2$ $\quad 8 - 6 = 2$ $\quad (-3) - (-5) = 2$ $\quad 5.3-3.3=2$

$15 - 13 = 2$ $\quad 100 - 98 = 2$ $\quad \square - \square = 2$ $\quad \square - \square = 2$

येथे $x = 10$ आणि $y = 8$ या किंमती घेतल्या तर $(10,8)$ ही क्रमित जोडी या समीकरणाचे समाधान करते म्हणजे ही जोडी या समीकरणाची उकल आहे. $(10, 8)$ ही जोडी $(8, 10)$ अशी लिहून चालणार नाही. कारण $(8, 10)$ याचा अर्थ $x = 8$, $y = 10$ असा आहे. या किमतींनी $x-y = 2$ या समीकरणाचे समाधान होत नाही. यावरून जोडीतील संख्यांचा क्रम महत्त्वाचा असतो, हे नीट लक्षात घ्या.

आता $x-y = 2$ या समीकरणाच्या उकली क्रमित जोड्यांच्या रूपात लिहू.

$(7, 5)$, $(-2, -4)$, $(0, -2)$, $(5.2, 3.2)$, $(8, 6)$ इत्यादी अनंत उकली आहेत.

$4m - 3n = 2$ या समीकरणाच्या उकली काढा.

तुम्हीही अशी तीन वेगवेगळी समीकरणे तयार करा व त्यांच्या उकली शोधा.

आता पहिली दोन समीकरणे पाहा.

$x + y = 14$ I

$x - y = 2$ II

समीकरण I च्या उकली $(9, 5)$, $(7, 7)$, $(8, 6)$...

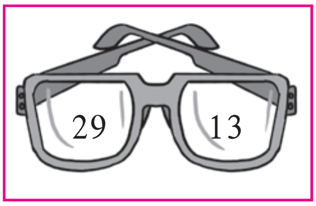
समीकरण II च्या उकली $(7, 5)$, $(-2, -4)$, $(0, -2)$, $(5.2, 3.2)$, $(8, 6)$...

$(8, 6)$ ही जोडी उकलींच्या दोन्ही समूहांत सामाईक आहे. ही जोडी दोन्ही समीकरणांचे समाधान करते. म्हणून ती दोन्ही समीकरणांची सामाईक उकल आहे.

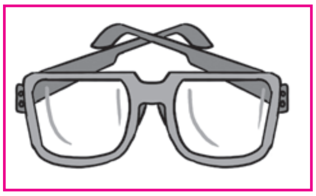
हे लक्षात ठेवूया.

जेव्हा दोन चलांतील दोन रेषीय समीकरणांचा एकाच वेळी विचार करून त्यांची सामाईक उकल मिळते तेव्हा त्या समीकरणांना **एकसामयिक समीकरणे** (Simultaneous equations) म्हणतात.

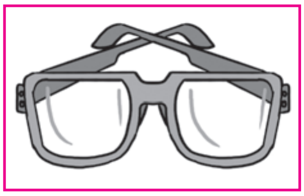
कृती : खाली दिलेल्या चश्म्यांच्या काचांवर अशा संख्या लिहा की,



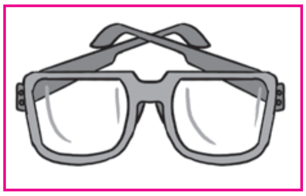
(i) ज्यांची बेरीज 42 आणि वजाबाकी 16 आहे.



(ii) ज्यांची बेरीज 37 आणि वजाबाकी 11 आहे.



(iii) ज्यांची बेरीज 54 आणि वजाबाकी 20 आहे.



(iv) ज्यांची बेरीज.. आहे आणि वजाबाकी.. आहे.

विचार करूया.

$x+y = 5$ आणि $2x + 2y = 10$ ही दोन चलांतील दोन समीकरणे आहेत.

$x+y = 5$ या समीकरणाच्या वेगवेगळ्या पाच उकली शोधा. त्याच उकलींनी $2x + 2y = 10$ या समीकरणाचेही समाधान होते का हे तपासा.

या दोन्ही समीकरणांचे निरीक्षण करा.

दोन चलांतील दोन समीकरणांच्या सर्व उकली समान असणे यासाठी आवश्यक असणारी अट मिळते का ते पाहा.

जाणून घेऊया.

चलाचा लोप करून एकसामायिक समीकरण सोडवण्याची पद्धत (Elimination method)

$x + y = 14$ आणि $x - y = 2$ हे एकसामायिक समीकरण चलांना किंमती देऊन आपण सोडवले. परंतु प्रत्येक वेळी ही रीत सोईची होईल असे नाही. उदाहरणार्थ, $2x + 3y = -4$ आणि $x - 5y = 11$ हे समीकरण x व y यांना वेगवेगळ्या किमती देऊन सोडवण्याचा प्रयत्न करून पाहा. या रीतीने उकल मिळवणे सोपे नाही हे तुमच्या लक्षात येईल.

म्हणून एकसामायिक समीकरण सोडवण्यासाठी वेगळी पद्धत वापरली जाते. या पद्धतीत दोनपैकी एका चलाचा लोप करून एका चलातील रेषीय समीकरण मिळवतात. त्यावरून त्या चलाची किंमत काढतात. ही किंमत दिलेल्यापैकी कोणत्याही समीकरणात मांडली की दुसऱ्या चलाची किंमत मिळते.

ही पद्धत समजण्यासाठी पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा (1) सोडवा : $x + y = 14$ आणि $x - y = 2$.

उकल : दोन्ही समीकरणांची बेरीज करून एका चलातील समीकरण मिळवू.

$$\begin{array}{rrcl} & x + y & = & 14 \quad \text{.........I} \\ + & x - y & = & 2 \quad \text{.........II} \\ \hline & 2x + 0 & = & 16 \\ & 2x & = & 16 \\ & x & = & 8 \end{array}$$

$x = 8$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$$x + y = 14$$
$$\therefore\ 8 + y = 14$$
$$\therefore\ y = 6$$

येथे (8, 6) ही पहिल्या समीकरणाची उकल आहे. हीच उकल दुसऱ्या समीकरणाचीही आहे याचा पडताळा घेऊ.

$x - y = 8 - 6 = 2$ हे सत्य आहे.

(8,6) ही दिलेल्या दोन्ही समीकरणांची सामाईक उकल आहे.

म्हणजेच $x + y = 14$ आणि $x - y = 2$ या एकसामयिक समीकरणांची (8, 6) ही उकल आहे.

उदा (2) आई व मुलगा यांच्या वयांची बेरीज 45 आहे. आईच्या वयाच्या दुपटीतून मुलाचे वय वजा केले तर वजाबाकी 54 येते, तर त्या दोघांची वये काढा.

दिलेली माहिती चलाचा उपयोग करून लिहिली की, उदाहरण सोडवणे सोपे जाते.

उकल : आईचे आजचे वय x वर्षे व मुलाचे आजचे वय y वर्षे मानू.

पहिल्या अटीनुसार $x+y = 45$ I

दुसऱ्या अटीनुसार $2x-y = 54$ II

समीकरण (I) व (II) यांची बेरीज करून

$$\begin{aligned} 3x+0 &= 99 \\ 3x &= 99 \\ x &= 33 \end{aligned}$$

$x = 33$ ही किंमत पहिल्या समीकरणात घालू

$$\begin{aligned} 33+y &= 45 \\ y &= 45-33 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

$x=33$ व $y = 12$ ही उकल दुसऱ्या समीकरणाचे समाधान करते. याचा पडताळा घ्या.

आईचे आजचे वय 33 वर्षे व मुलाचे वय 12 वर्षे आहे.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणांचे सामान्यरूप

$ax + by + c = 0$ या समीकरणात a, b, c या वास्तव संख्या असतील आणि a व b एकाच वेळी 0 नसतील तर हे समीकरण दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचे सामान्य रूप असते.

या समीकरणात दोन्ही चलांचा घातांक 1 आहे. हे समीकरण रेषीय आहे.

उदा (1) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा

$$3x + y = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$2x + 3y = 1 \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

येथे एका चलाचा लोप करण्यासाठी दोन्ही समीकरणांतील एकाही चलाचा सहगुणक समान किंवा विरुद्ध संख्या नाही. तो समान करून घेऊ.

समीकरण I च्या दोन्ही बाजूंना 3 ने गुणू.

$\therefore \quad 3x \times 3 + 3 \times y = 5 \times 3$

$\therefore \quad 9x + 3y = 15 \quad \ldots\ldots\text{(III)}$

$\quad 2x + 3y = 1 \quad \ldots\ldots\text{(II)}$

आता समीकरण II हे समीकरण III मधून वजा करू

$$\begin{array}{r} 9x + 3y = 15 \\ \underset{-}{+}\, 2x \underset{-}{+} 3y \underset{-}{=} 1 \\ \hline 7x = 14 \\ x = 2 \end{array}$$

$x = 2$ ही किंमत कोणत्याही समीकरणात ठेवू.

$2x + 3y = 1$

$\therefore \quad 2 \times 2 + 3y = 1$

$\therefore \quad 4 + 3y = 1$

$\therefore \quad 3y = -3$

$\therefore \quad y = -1$

येथे $(2, -1)$ ही उकल दुसऱ्या समीकरणासाठीही सत्य आहे, हे पडताळा.

उदा (2) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$$3x - 4y - 15 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$y + x + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

दोन्ही समीकरणे स्थिरांक उजवीकडे घेऊन लिहू.

$$3x - 4y = 15 \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$x + y = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

y चलाचा लोप करण्यासाठी समीकरण II ला 4 ने गुणू व समीकरण I मध्ये ते मिळवू.

$$\begin{array}{rrcl} & 3x - 4y & = & 15 \\ + & 4x + 4y & = & -8 \\ & 7x & = & 7 \\ & x & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

$x = 1$ ही किंमत समीकरण II मध्ये ठेवू.

$x + y = -2$

$\therefore 1 + y = -2$

$\therefore y = -2 - 1$

$\therefore y = -3$

$(1, -3)$ ही उकल आहे. ही उकल समीकरण I साठी सुद्धा सत्य आहे, हे पडताळा.

विचार करूया.

$3x - 4y - 15 = 0$ आणि $y + x + 2 = 0$ हीच समीकरणे x या चलाचा लोप करून सोडवता येतील का? त्याची उकल तीच येईल का?

जाणून घेऊया.

एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात ठेवून चलाचा लोप करणे (Substitution method)

चलाचा लोप करण्याची आणखी एक पद्धत आहे. समीकरणातील एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात काढून ती दुसऱ्या समीकरणात ठेवून पहिल्या चलाचा लोप करता येतो. ही पद्धत पुढील उदाहरणांतून समजावून घेऊ.

उदा (1) सोडवा : $8x + 3y = 11$; $3x - y = 2$

उकल : $8x + 3y = 11$ .... (I)

$3x - y = 2$ ....(II)

समीकरण (II) मध्ये y ची किंमत x चलात मांडणे सोपे होईल.

$3x - y = 2$

$3x - 2 = y$

आता $y = 3x - 2$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$8x + 3y = 11$

$\therefore\ 8x + 3(3x-2) = 11$

$\therefore\ 8x + 9x - 6 = 11$

$\therefore\ 17x - 6 = 11$

$\therefore\ 17x = 11 + 6 = 17$

$\therefore\ x = 1$

x ची ही किंमत $y = 3x - 2$ यात ठेवू.

$\therefore\ y = 3 \times 1 - 2$

$\therefore\ y = 1$

$\therefore$ (1, 1) ही या समीकरणांची उकल आहे.

उदा (2) सोडवा. $3x - 4y = 16$; $2x - 3y = 10$

उकल : $3x-4y=16$ ....(I)

$2x - 3y = 10$ ....(II)

समी. I वरून x या चलाची किंमत y च्यारूपात मांडू.

$3x - 4y = 16$

$3x = 16 + 4y$

$$x = \frac{16+4y}{3}$$

x ची ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवू.

$2x - 3y = 10$

$$2\left(\frac{16+4y}{3}\right) - 3y = 10$$

$$\frac{32+8y}{3} - 3y = 10$$

$$\frac{32+8y-9y}{3} = 10$$

$32 + 8y - 9y = 30$

$32 - y = 30 \qquad \therefore\ y = 2$

आता $y = 2$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवून

$3x - 4y = 16$

$\therefore\ 3x - 4\times2 = 16$

$\therefore\ 3x - 8 = 16$

$\therefore\ 3x = 16 + 8$

$\therefore\ 3x = 24$

$\therefore\ x = 8$

$\therefore\ x = 8$ व $y = 2$

$\therefore$ (8, 2) ही या समीकरणांची उकल आहे.

सरावसंच 5.1

(1) x आणि y या चलांचा उपयोग करून दोन चलांतील 5 रेषीय समीकरणे लिहा.

(2) $x + y = 7$ या समीकरणाच्या 5 उकली लिहा.

(3) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(i) $x + y = 4$; $2x - 5y = 1$

(ii) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(iii) $3x - 5y = 16$; $x - 3y = 8$

(iv) $2y - x = 0$; $10x + 15y = 105$

(v) $2x + 3y + 4 = 0$; $x - 5y = 11$

(vi) $2x - 7y = 7$; $3x + y = 22$

जाणून घेऊया.

एकसामयिक समीकरणांवरील शाब्दिक उदाहरणे

शाब्दिक उदाहरणे सोडवताना दिलेल्या माहितीवरून समीकरण तयार करणे हा एक अत्यंत महत्त्वाचा टप्पा आहे. समीकरणाची उकल काढण्याची प्रणाली पुढील पायऱ्यांमधून दाखविली आहे.

पायऱ्या	उदाहरण
शाब्दिक उदाहरण काळजीपूर्वक वाचून समजून घ्या.	दोन संख्यांची बेरीज 36 आहे एका संख्येच्या आठ पटींतून 9 वजा केले असता दुसरी संख्या मिळते.
↓	↓
उदाहरणातील माहितीवरून राशींसाठी चले वापरा.	पहिली संख्या = x मानू. दुसरी संख्या = y मानू.
↓	↓
चले वापरून विधाने गणिती भाषेत लिहा.	संख्यांची बेरीज 36 $\therefore x + y = 36$ लहान संख्येची 8 पट = $8x$ लहान संख्येची 8 पट – 9 = $8x - 9$ $\therefore$ मोठी संख्या = $y = 8x - 9$
↓	↓
योग्य पद्धतींचा उपयोग करून समीकरणे सोडवा.	$x + y = 36$ $\therefore 8x - y = 9$ $\therefore\ 9x = 45$ $\therefore\ x = 5$ $\therefore\ 5 + y = 36$ $\therefore\ y = 36 - 5$ $\therefore\ y = 31$
↓	↓
उकल मिळवा.	$x = 5,\ y = 31$
↓	↓
आलेले उत्तर समीकरणात ठेवून पडताळा घ्या.	$31 + 5 = 36$ ....(I) $31 = 8 \times 5 - 9$ ....(II)
↓	↓
उत्तर लिहा.	$\therefore$ त्या संख्या 5 व 31 आहेत.

शाब्दिक उदाहरणे

आता आपण विविध प्रकारच्या शाब्दिक उदाहरणांचा विचार करू.

(1) वयांशी निगडित उदाहरणे

(2) संख्यांशी निगडित उदाहरणे

(3) अपूर्णांकांवर आधारित उदाहरणे

(4) आर्थिक व्यवहारांवर आधारित उदाहरणे

(5) भौमितिक आकृत्यांच्या गुणधर्मांवर आधारित उदाहरणे

(6) वेग, अंतर, वेळ यांवर आधारित उदाहरणे

उदा (1) दोन संख्यांची बेरीज 103 आहे. जर मोठ्या संख्येला लहान संख्येने भागले तर भागाकार 2 येतो व बाकी 19 उरते, तर त्या संख्या शोधा.

उकल : पायरी 1 : शाब्दिक उदाहरण समजावून घेणे.

पायरी 2 : शोधण्याच्या संख्यांसाठी अक्षरे मानणे.

तसेच भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी हा नियम लक्षात घेणे.

मोठी संख्या x मानू व लहान संख्या y मानू.

पायरी 3 : दिलेली माहिती : संख्यांची बेरीज = 103

म्हणून $x + y = 103$ हे एक समीकरण मिळाले.

मोठ्या संख्येला लहान संख्येने भागल्यास भागाकार 2 येतो, बाकी 19 उरते म्हणून

$x = 2 \times y + 19$ ...(भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी)

म्हणजेच $x - 2y = 19$ हे दुसरे समीकरण मिळते.

पायरी 4 : आता तयार समीकरणांची उकल काढू.

$$x + y = 103 \quad \text{................(I)}$$
$$x - 2y = 19 \quad \text{................(II)}$$

समीकरण (I) मधून समीकरण (II) वजा करू.

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 103 \\ x - 2y & = & 19 \\ - \quad + & & - \\ \hline 0 + 3y & = & 84 \\ \therefore \quad y & = & 28 \end{array}$$

पायरी 5 : $x + y = 103$ या समीकरणात y ची किंमत ठेवू.

$\therefore \quad x + 28 = 103$

$\therefore \quad x = 103 - 28$

$\therefore \quad x = 75$

पायरी 6 : दिलेल्या संख्या 75 व 28 आहेत.

उदा (2) सलीलचे वय संग्रामच्या वयाच्या निम्म्यापेक्षा 23 वर्षांनी जास्त आहे. पाच वर्षांपूर्वी त्यांच्या वयांची बेरीज 55 वर्षे होती, तर त्यांची आजची वये काढा.

उकल : सलीलचे आजचे वय x मानू व संग्रामचे आजचे वय y मानू.

सलीलचे वय संग्रामच्या वयाच्या निम्म्यापेक्षा 23 ने जास्त आहे, म्हणून $x = \frac{y}{2} + \square$

पाच वर्षांपूर्वीचे सलीलचे वय = $x - 5$. पाच वर्षांपूर्वीचे संग्रामचे वय = $y - 5$

पाच वर्षांपूर्वीची त्यांच्या वयांची बेरीज = 55

$\square + \square = 55$

समीकरणे सोडवून उकल काढणे.

$2x = y + 46$ $\qquad$ $2x - y = 46$ ....(I)

$(x - 5) + (y-5) = 55$

$x + y = 65$ $\qquad$ ....(II)

समीकरण (I) व समीकरण (II) यांची बेरीज करू.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 46 \\ + \quad x + y &= 65 \\ \hline \therefore \quad 3x &= 111 \\ \therefore \quad x &= 37 \end{aligned}$$

$x = 37$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवू.

$$\begin{aligned} x+y &= 65 \\ \therefore \quad 37 + y &= 65 \\ \therefore \quad y &= 65 - 37 \\ \therefore \quad y &= 28 \end{aligned}$$

सलीलचे आजचे वय 37 वर्षे आहे व संग्रामचे आजचे वय 28 वर्षे आहे.

उदा (3) एक दोन अंकी संख्या तिच्या अंकांच्या बेरजेच्या चौपट आहे. तिच्या अंकांची अदलाबदल केल्यास मिळणारी संख्या ही मूळच्या संख्येच्या दुपटीपेक्षा 9 ने कमी आहे, तर ती संख्या शोधा.

उकल : मूळच्या संख्येतील एककस्थानचा अंक x आणि दशकस्थानचा अंक y मानू.

	दशकस्थानचा अंक	एककस्थानचा अंक	संख्या	अंकांची बेरीज
मूळच्या संख्येसाठी	y	x	$10y + x$	$y + x$
अंकांची अदलाबदल केल्यावर मिळणाऱ्या संख्येसाठी	x	y	$10x + y$	$x + y$

पहिल्या अटीनुसार $\quad 10y + x = 4\,(y+x)$

$\therefore 10y + x = 4y + 4x$

$\therefore\ x - 4x + 10y - 4y = 0$

$\therefore\ -3x + 6y = 0$ $\qquad$ $\therefore\ -3x = -6y$ $\qquad$ $\therefore x = 2y$ .....(I)

दुसऱ्या अटीनुसार $10x + y = 2(10y+x)-9$

$$10x+y = 20y + 2x-9$$

$$10x-2x+y-20y = -9$$

$$8x - 19y = -9 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)}$$

$$x = 2y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)}$$

$x = 2y$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवून.

$$16y - 19y = -9 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)}$$

$$\therefore\ -3y = -9$$

$$\therefore\ y = 3$$

$y = 3$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू. $x - 2y = 0$

$$x - 2 \times 3 = 0 \qquad \therefore\ x - 6 = 0 \qquad \therefore\ x = 6$$

मूळची दोन अंकी संख्या : $10y + x = 10 \times 3 + 6$

$$= 36$$

उदा (4) एका गावाची लोकसंख्या 50,000 होती. एका वर्षात पुरुषांची संख्या 5% ने वाढली व स्त्रियांची संख्या 3% ने वाढली. त्यामुळे या वर्षी लोकसंख्या 52,020 झाली. तर गेल्या वर्षी त्या गावात पुरुष किती होते व स्त्रिया किती होत्या?

उकल : आधीच्या वर्षी गावातील पुरुषांची संख्या x व स्त्रियांची संख्या y होती असे मानू.

पहिल्या अटीनुसार $\square + \square = 50000$ ....(I)

पुरुषांची संख्या 5% ने वाढली. पुरुषांची संख्या $\frac{\square}{\square}x$ झाली.

स्त्रियांची संख्या 3% ने वाढली. स्त्रियांची संख्या $\frac{\square}{\square}y$ झाली.

दुसऱ्या अटीनुसार $\frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square}y = 52020$

$$\square x + \square y = 5202000 \qquad \ldots\ldots\text{(II)}$$

समीकरण (I) ला 103 ने गुणू.

$$\square x + \square y = 5150000 \qquad \ldots\ldots\text{(III)}$$

समीकरण (II) मधून समीकरण (III) वजा करू.

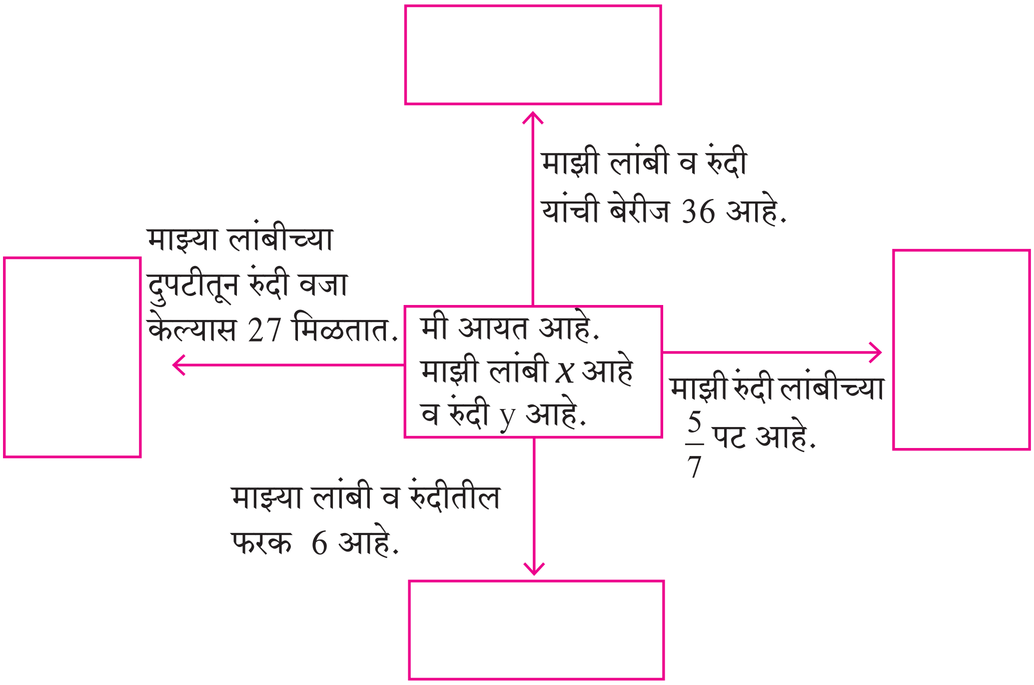
$$2x = 5202000 - 5150000$$

$$2x = 52000$$

$\therefore$ पुरुषांची संख्या $= x = \square$ $\therefore$ स्त्रियांची संख्या $= y = \square$

कृती I : पुढे दिलेल्या आकृतीत बाणाजवळ काही सूचना लिहिल्या आहेत. त्यावरून मिळणारे समीकरण बाणांपुढील चौकटींत लिहा. चौकटींतील कोणतीही दोन समीकरणे घेऊन त्या समीकरणांची उकल काढा. उकलींचा पडताळा घ्या.

यांपैकी कोणत्याही दोन समीकरणांची एक जोडी, अशा किती जोड्या मिळतील? त्यांच्या उकलींवर चर्चा करा.



सराव संच 5.2

(1) एका पाकिटात काही 5 रुपयांच्या व काही 10 रुपयांच्या नोटा आहेत. नोटांची एकूण किंमत 350 रु. आहे. 5 रुपयांच्या नोटांची संख्या 10 रुपयांच्या नोटांच्या संख्येच्या दुपटीपेक्षा 10 ने कमी आहे, तर पाकिटात 5 रुपयांच्या व 10 रुपयांच्या किती नोटा आहेत?

(2) एका अपूर्णांकाचा छेद अंशाच्या दुपटीपेक्षा 1 ने जास्त आहे. अंश व छेद यांत प्रत्येकी 1 मिळवल्यास अंशाचे छेदाशी असलेले गुणोत्तर 1 : 2 होते, तर तो अपूर्णांक काढा.

(3) प्रियांका व दीपिका यांच्या वयांची बेरीज 34 वर्षे आहे. प्रियांका दीपिकापेक्षा 6 वर्षांनी मोठी आहे, तर त्यांची वये काढा.

(4) एका प्राणिसंग्रहालयात सिंह आणि मोर यांची एकूण संख्या 50 आहे. त्यांच्या पायांची एकूण संख्या 140 आहे, तर प्राणिसंग्रहालयातील सिंहांची व मोरांची संख्या काढा.

(5) संजयला नोकरीमध्ये काही मासिक पगार मिळतो. दरवर्षी त्याच्या पगारामध्ये निश्चित रकमेची वाढ होते. जर चार वर्षांनी त्याचा मासिक पगार 4,500 रुपये झाला व 10 वर्षांनी मासिक पगार 5,400 रुपये झाला, तर त्याचा सुरुवातीचा पगार व वार्षिक वाढीची रक्कम काढा.

(6) 3 खुर्च्या व 2 टेबलांची किंमत 4500 रुपये आहे. 5 खुर्च्या व 3 टेबलांची किंमत 7000 रुपये आहे, तर 2 खुर्च्या व 2 टेबलांची किंमत काढा.

(7) एका दोन अंकी संख्येतील अंकांची बेरीज 9 आहे. जर अंकांची अदलाबदल केली तर मिळणारी संख्या ही आधीच्या संख्येपेक्षा 27 ने मोठी आहे, तर ती दोन अंकी संख्या काढा.

(8*) Δ ABC मध्ये कोन A चे माप हे $\angle$B व $\angle$C या कोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे आहे. तसेच $\angle$B व $\angle$C यांच्या मापांचे गुणोत्तर 4:5 आहे. तर त्या त्रिकोणाच्या कोनांची मापे काढा.

(9*) एका 560 सेमी लांबीच्या दोरीचे दोन तुकडे असे करायचे आहेत, की लहान तुकड्याच्या लांबीची दुप्पट ही मोठ्या तुकड्याच्या लांबीच्या $\frac{1}{3}$ पट आहे, तर मोठ्या तुकड्याची लांबी काढा.

(10) एका स्पर्धा परीक्षेत 60 प्रश्न होते. प्रत्येक प्रश्नांच्या बरोबर उत्तराकरिता 2 गुण आणि चुकीच्या उत्तराकरिता ऋण एक गुण देण्यात येणार होता. यशवंतने सर्व 60 प्रश्न सोडवले तेव्हा त्याला 90 गुण मिळाले, तर त्याची किती प्रश्नांची उत्तरे चुकली होती ?

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

(1) खालीलपैकी योग्य पर्याय निवडा.

(i) $3x + 5y = 9$ आणि $5x + 3y = 7$ तर $x + y$ ची किंमत खालीलपैकी कोणती आहे ?

(A) 2 (B) 16 (C) 9 (D) 7

(ii) आयताच्या लांबीतून व रुंदीतून 5 वजा केले तर त्याची परिमिती 26 येते. या माहितीचे गणिती भाषेतील रूपांतर खालीलपैकी कोणते ?

(A) $x - y = 8$ (B) $x + y = 8$ (C) $x + y = 23$ (D) $2x + y = 21$

(iii) अजय हा विजयपेक्षा 5 वर्षांनी लहान आहे. त्या दोघांच्या वयाची बेरीज 25 आहे, तर अजयचे वय किती ?

(A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 5

(2) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(i) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(ii) $x - 2y = -1$; $2x - y = 7$

(iii) $x + y = 11$; $2x - 3y = 7$

(iv) $2x + y = -2$; $3x - y = 7$

(v) $2x - y = 5$; $3x + 2y = 11$

(vi) $x - 2y = -2$; $x + 2y = 10$

(3) चलाचे सहगुणक समान करून खालील समीकरणे सोडवा.

(i) $3x-4y=7$; $5x+2y=3$

(ii) $5x + 7y=17$; $3x-2y=4$

(iii) $x-2y= -10$; $3x-5y= -12$

(iv) $4x + y=34$; $x+4y= 16$

(4) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$

(ii) $\frac{x}{3}+5y=13$; $2x+\frac{y}{2}=19$

(iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$; $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

(5*) एक दोन अंकी संख्या, त्या संख्येतील अंकांच्या बेरजेच्या चौपटीपेक्षा 3 ने मोठी आहे. जर त्या संख्येमध्ये 18 मिळवले तर येणारी बेरीज ही मूळ संख्येतील अंकांची अदलाबदल करून येणारी संख्या मिळते, तर ती संख्या काढा.

(6) 6 पुस्तके व 7 पेन यांची एकूण किंमत 79 रुपये आहे आणि 7 पुस्तके व 5 पेन यांची एकूण किंमत 77 रुपये आहे, तर एक पुस्तक व दोन पेन यांची किंमत काढा.

(7*) दोन व्यक्तींच्या उत्पन्नांचे गुणोत्तर 9:7 आहे व त्यांच्या खर्चांचे गुणोत्तर 4:3 आहे. प्रत्येकाची बचत 200 रुपये असेल तर प्रत्येकाचे उत्पन्न काढा.

(8*) एका आयताची लांबी 5 एककाने कमी केली व रुंदी 3 एककाने वाढवली तर त्याचे क्षेत्रफळ 9 चौरस एककाने कमी होते. जर लांबी 3 एककाने कमी केली व रुंदी 2 एककाने वाढवली तर त्याचे क्षेत्रफळ 67 चौरस एककाने वाढते, तर आयताची लांबी व रुंदी काढा.

(9*) एका रस्त्यावरील A व B या दोन ठिकाणांमधील अंतर 70 किमी आहे. एक कार A ठिकाणाहून व दुसरी कार B या ठिकाणाहून निघते. जर त्या एकाच दिशेने निघाल्या तर एकमेकींना 7 तासात भेटतात व विरुद्ध दिशेने निघाल्यास 1 तासात भेटतात, तर त्यांचे वेग काढा.

(10*) एक दोन अंकी संख्या व त्या संख्येतील अंकांची अदलाबदल करून येणारी संख्या यांची बेरीज 99 आहे, तर ती संख्या काढा.

कृती : अपूर्णांक शोधा.

$$\frac{\text{अंश } x}{\text{छेद } y}$$

अपूर्णांकाच्या अंशाला 3 ने गुणले व छेदातून 3 वजा केले तर मिळणारा अपूर्णांक $\frac{18}{11}$ आहे.

समीकरण I

$$11x - 6y + 18 = 0$$

अपूर्णांकाचा अंश 8 ने वाढवला आणि छेद दुप्पट केला तर मिळणारा अपूर्णांक $\frac{1}{2}$ आहे.

समीकरण II

$$x - y + 8 = 0$$

$$\therefore \text{ दिलेला अपूर्णांक } = \frac{\square}{\square}$$

आलेल्या उत्तराचा पडताळा घ्या.

◈◈◈

6 अर्थनियोजन

चला, शिकूया.

- अर्थनियोजनाची ओळख
- बचत व गुंतवणूक
- कररचना
- आयकर–गणन

चला, चर्चा करूया.

अनघा : आपण कॉम्प्युटर विकत घ्यायचा का?
आई : हो, घेऊया पण पुढच्या वर्षी घेऊया.
अनघा : या वर्षी का नको?
आई : त्याची किंमत काही कमी नसते.
अनघा : म्हणजे पैसे साठवायला हवेत, असेच ना?
आई : हो.

आपल्या आजूबाजूला अशा प्रकारचे अनेक संवाद कानांवर पडतात.

प्रत्येक व्यक्तीला विविध गरजा भागवण्यासाठी पैशांची गरज असते. त्यामुळेच वर्तमानातील आवश्यक गरजा पूर्ण करून इतर गरजा भागवण्यासाठी प्रत्येकजण पैसे साठवण्याचा प्रयत्न करतो. त्यालाच आपण 'बचत' करणे असे म्हणतो. ही बचत सुरक्षित राहून तिच्यात वाढ होण्यासाठी ती आपण 'ठेव' म्हणून ठेवतो किंवा जमीन, घर यांसारख्या स्थावर बाबी खरेदी करतो. यालाच 'गुंतवणूक करणे' असे म्हणतात.

प्रत्येक गुंतवणूकदार आवश्यक तेवढी रक्कम खर्च करतो आणि उरलेल्या रकमेची बचत करतो, तसेच बचत केलेल्या रकमेची विचारपूर्वक गुंतवणूकही करतो. याला '**अर्थनियोजन**' म्हणतात. संपत्तीची वृद्धी आणि सुरक्षितता हे अर्थनियोजनाचे मुख्य प्रयोजन असते.

प्रत्येकाच्या आयुष्यात येणाऱ्या अपेक्षित व अनपेक्षित घटनांकरिता तरतूद म्हणून अर्थनियोजनाचा उपयोग होतो. काही उदाहरणे पुढे दिली आहेत.

अपेक्षित घटना

(1) मुलांचे शिक्षण व त्यांच्यासाठी इतर खर्च
(2) व्यवसायासाठी भांडवल
(3) वाहन खरेदी
(4) घराचे बांधकाम किंवा खरेदी
(5) वृद्‌धापकाळातील गरजा

अनपेक्षित घटना

(1) नैसर्गिक आपत्ती
(2) कुटुंबातील एखाद्या सदस्याचे आजारपण
(3) अपघातामुळे झालेले नुकसान
(4) आकस्मिक मृत्यू

अर्थनियोजन का करावे याचे उत्तर वरील घटना किंवा इतरही काही कारणे यांमधून मिळते. अर्थनियोजन करताना काही बाबी लक्षात ठेवणे गरजेचे असते.

जाणून घेऊया.

बचत (Savings)

(1) बचत सुरक्षित राहणे व तिच्यात वाढ होणे हिताचे असते. आपली बचत केलेली रक्कम बँकेत किंवा पोस्टात सुरक्षित राहते. बँकेतील बचत खात्यात जमा झालेल्या रकमेमुळे रोकडरहित (cashless) व्यवहार करणे सोईचे होते. अशा व्यवहारांमुळे स्वत:जवळ अधिक रक्कम ठेवावी लागत नाही व ती रक्कम हरवण्याची वा चोरीला जाण्याची भीती राहात नाही.

(2) आपण केलेली बचत रोख स्वरूपात असेल आणि तिची गुंतवणूक न करता ती तशीच ठेवली तर तिचे मूल्य काळाबरोबर कमी होते. म्हणजेच वस्तू विकत घेण्याची त्या रकमेची शक्ती म्हणजे पैशाची क्रयशक्ती (Purchasing power) कमी होते. (उदा. आज 10 रुपयांमध्ये 2 पेन्सिली मिळत असतील, तर काही वर्षांनंतर त्याच किमतीत एकच पेन्सिल मिळेल.) यासाठी बचतीची योग्य ठिकाणी गुंतवणूक करून त्यात वाढ होणे आवश्यक आहे.

(3) बचत केलेली रक्कम व्यवसाय वृद्धी, नवे उद्योग चालू करणे, अशा कामांसाठी वापरली गेली तर राष्ट्रीय उत्पादनात वाढ होते.

(4) एकूण मिळकतीपैकी बचतीचा काही भाग समाजकार्यासाठी खर्च केल्यास त्याचा दूरगामी फायदा सर्वांनाच होतो.

(5) आवश्यक तेवढा खर्च करून झाल्यावर चैनीच्या गोष्टींवरील खर्च कमी करून शिक्षण, वैद्यकीय उपचार, इत्यादींसाठी बचत करणे हिताचे असते.

चला, चर्चा करूया.

वरील चित्राचे निरीक्षण करा. बचतीचे व गुंतवणुकीचे काही मार्ग चित्रात दाखवले आहेत, त्यांवर चर्चा करा. यापेक्षा वेगळे आणखी कोणते मार्ग आहेत का याची माहिती मिळवा. ते चित्रातील रिकाम्या जागी लिहा.

जाणून घेऊया.

गुंतवणूक (Investments)

गुंतवणुकीचे अनेक प्रकार आहेत.गुंतवणूकदार बँक, पोस्ट अशा आर्थिक व्यवहार करणाऱ्या संस्थांमध्ये गुंतवणूक करणे पसंत करतात कारण तेथे पैशांची सुरक्षितता जास्त असते. शेअर्स, म्युच्युअल फंड इत्यादींमध्ये गुंतवणूक करण्यात थोडी जोखीम असते. कारण ज्या उद्योगात हे पैसे गुंतवले जातात त्या उद्योगास तोटा झाल्यास, गुंतवलेली रक्कम कमी होते. याउलट फायदा झाल्यास रक्कम सुरक्षित राहते आणि लाभांश मिळू शकतो.

गुंतवणूकदाराने गुंतवणूक करताना दोन मुख्य बाबी विचारात घेतल्या पाहिजेत. एक म्हणजे जोखीम व दुसरी म्हणजे लाभ. अधिक जोखीम पत्करून गुंतवणूकदार अधिक लाभ मिळवू शकतो, परंतु अधिक जोखीम असल्यामुळे तोटाही होऊ शकतो हे ध्यानात ठेवले पाहिजे.

उत्पन्न व गुंतवणुकीवर आधारित काही उदाहरणे खाली सोडवून दाखवली आहेत, ती अभ्यासा.

उदा (1) श्यामरावांचे 2015-16 चे सर्व प्रकारचे कर भरून झाल्यावर वार्षिक उत्पन्न 6,40,000 रुपये आहे. ते दर महिना विम्याचा 2,000 रुपयांचा हप्ता भरतात. वार्षिक उत्पन्नाचा 20% भाग ते भविष्य-निर्वाह निधीमध्ये गुंतवतात. आपत्कालीन खर्चासाठी महिना 500 रुपये बाजूला ठेवतात, तर वर्षामध्ये खर्चासाठी त्यांच्याकडे किती रुपये रक्कम उरते ?

उकल : (i) श्यामरावांचे वार्षिक उत्पन्न = 6,40,000 रुपये

(ii) विम्यासाठी नियोजन = $2000 \times 12 = 24,000$ रुपये

(iii) भविष्य निर्वाह निधीसाठी गुंतवलेली रक्कम = $6,40,000 \times \frac{20}{100} = 1,28,000$ रुपये

(iv) आपत्कालीन खर्चासाठी बाजूला काढलेली रक्कम = $500 \times 12 = 6000$ रुपये

$\therefore$ एकूण नियोजित रक्कम = $24,000 + 1,28,000 + 6,000 = 1,58,000$ रुपये

$\therefore$ वर्षभराच्या खर्चासाठी उरणारी रक्कम = $6,40,000 - 1,58,000 = 4,82,000$ रुपये

उदा (2) श्री शहा यांनी 3,20,000 रुपये बँकेत 10% चक्रवाढव्याजाने 2 वर्षांकरिता गुंतवले. त्याचप्रमाणे त्यांनी 2,40,000 रुपये करमुक्त म्युच्युअल फंडामध्ये गुंतवले. त्याचे बाजारभावाप्रमाणे 2 वर्षांनंतर त्यांना 3,05,000 रुपये मिळाले. तर त्यांची कोणती गुंतवणूक जास्त फायदेशीर ठरली ?

उकल : (i) चक्रवाढ व्याजाने गुंतवलेल्या रकमेवरील व्याज प्रथम काढू.

चक्रवाढ व्याज = रास − मुद्दल.

म्हणजेच $I = A - P$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$$

$$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

$$= 3,20,000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 - 1\right]$$

$= 3,20,000 \left[(1.1)^2 - 1\right]$

$= 3,20,000 \; [1.21 - 1]$

$= 3,20,000 \times 0.21$

$= 67,200$ रुपये

शहा यांनी 3,20,000 रुपये बँकेत गुंतवल्यावर त्यांना 67,200 रुपये व्याज मिळाले.
मिळालेले व्याज गुंतवणुकीच्या शेकडा किती होते ते काढू.

व्याजाचे शतमान = $\dfrac{100 \times 67200}{3,20,000} = 21$ $\therefore$ बँकेतील गुंतवणुकीमुळे 21% फायदा झाला.

(ii) म्युच्युअल फंडामध्ये 2 वर्षांअखेरीस मिळालेली रक्कम = 3,05,000 रुपये

$\therefore$ म्युच्युअल फंडातील लाभांश = 3,05,000 − 2,40,000 = 65,000 रुपये

$\therefore$ लाभांशाचे शतमान = $\dfrac{65000 \times 100}{2,40,000} = 27.08$

म्युच्युअल फंडातील गुंतवणुकीमुळे त्यांना 27.08% फायदा झाला.
यावरून असे लक्षात येते की, श्री शहा यांची म्युच्युअल फंडातील गुंतवणूक जास्त फायदेशीर होती.

उदा (3) करीमभाई यांनी काचउद्योगात 4,00,000 रुपयांची गुंतवणूक केली. 2 वर्षांअखेरीस त्यांना त्या व्यवसायातून 5,20,000 रुपये मिळाले. गुंतवणुकीची रक्कम वगळता मिळालेला नफा त्यांनी 3 : 2 या प्रमाणात अनुक्रमे मुदत ठेव व शेअर्समध्ये गुंतवला तर त्यांनी प्रत्येक बाबीमध्ये किती रक्कम गुंतवली ?

उकल : करीमभाई यांना 2 वर्षांअखेर झालेला नफा = 5,20,000 − 4,00,000 = 1,20,000 रुपये

मुदत ठेवीमध्ये गुंतवलेली रक्कम = $\dfrac{3}{5} \times 1,20,000$

$= 3 \times 24,000$

$= 72,000$ रुपये

शेअर्समध्ये गुंतवलेली रक्कम = $\dfrac{2}{5} \times 1,20,000$

$= 2 \times 24,000$

$= 48,000$ रुपये

करीमभाई यांनी मुदत ठेव व शेअर्स या दोहोंमध्ये अनुक्रमे 72,000 व 48,000 रुपयांची गुंतवणूक केली.

उदा (4) श्री अनिल यांचे मासिक उत्पन्न व खर्च यांचे गुणोत्तर 5:4 आहे. श्री अमन यांचे तेच गुणोत्तर 3:2 आहे. तसेच अमन यांच्या मासिक उत्पन्नाच्या 4% उत्पन्न हे अनिल यांच्या मासिक उत्पन्नाच्या 7% एवढे आहे. अनिल यांचे मासिक उत्पन्न 9600 रुपये असल्यास

(i) श्री अमन यांचे मासिक उत्पन्न काढा. (ii) श्री अनिल व श्री अमन यांची बचत काढा.

उकल: आपणास माहीत आहे की, बचत = उत्पन्न − खर्च

अनिल यांचे उत्पन्न व खर्चाचे गुणोत्तर 5 : 4	अमन यांचे उत्पन्न व खर्चाचे गुणोत्तर 3 : 2
अनिल यांचे उत्पन्न $5x$ मानू.	अमन यांचे उत्पन्न $3y$ मानू.
अनिल यांचा खर्च $4x$ मानू.	अमन यांचा खर्च $2y$ मानू.

अनिल यांचे मासिक उत्पन्न 9600 रुपये म्हणजे $5x = 9600$ यावरून x काढू.

$$\therefore\ 5x = 9600$$
$$x = 1920$$

मासिक खर्च $= 4x = 4 \times 1920 = 7680$ रुपये

अनिल यांचा मासिक खर्च 7680 रुपये $\therefore$ अनिल यांची बचत 1920 रुपये

अमन यांच्या उत्पन्नाचा 4% = अनिल यांच्या उत्पन्नाचा 7% हे दिले आहे.

$$\therefore\ \frac{4}{100} \times 3y = 9600 \times \frac{7}{100}$$

$$\therefore\ 12y = 9600 \times 7$$

$$\therefore\ y = \frac{9600 \times 7}{12} = 5600$$

अमन यांचे उत्पन्न $= 3y = 3 \times 5600 = 16,800$ रुपये

अमन यांचा खर्च $= 2y = 2 \times 5600 = 11,200$ रुपये

$\therefore$ अमन यांची बचत $16,800 - 11,200 = 5,600$ रुपये

श्री अमन यांचे मासिक उत्पन्न 16,800 रुपये श्री अमन यांची बचत 5,600 रुपये

श्री अनिल यांची मासिक बचत 1,920 रुपये

कृती I : अमिताने 35000 रुपयांपैकी काही रक्कम 4% व उरलेली रक्कम 5% व्याजाने एक वर्षासाठी गुंतवली. तिला एकूण व्याज 1530 रु. मिळाले, तर तिने वेगवेगळ्या व्याजाने गुंतवलेली रक्कम काढा. उत्तर शब्दांत लिहा.

4% दराने x रु. गुंतवले. 5% दराने y रु. गुंतवले.

$\boxed{\square + \square = 35000}$ ..... (I)

व्याज ↓

$\boxed{\frac{4}{100}x + \frac{5}{100}y = 1530}$ ..... (II)

$x = \square$ $y = \square$

उपक्रम : (1) पालकांच्या मदतीने तुमच्या घरातील आठवड्याचा जमाखर्च लिहून काढा. त्यासाठी खर्चाच्या प्रकाराचे स्तंभ तयार करा. अन्नधान्य, शिक्षण, वैद्यकीय खर्च, प्रवास, कपडे व किरकोळ खर्च अशा बाबींचा विचार करून सर्व खर्च लिहून काढा. जमेच्या बाजूला घरखर्चासाठी मिळालेली रक्कम, आधीची शिल्लक व काही नवी मिळकत झाल्यास ती नोंदवा.

(2) सुट्टीत संपूर्ण महिन्याचा जमाखर्च लिहा.

पृष्ठ 52 वरील गोविंदचा जमाखर्च अभ्यासा.

कृती II : कोरडवाहू जमीन असणाऱ्या शेतकऱ्याचे उत्पन्न वाढवण्यासाठी कोणकोणते उपाय करता येतील यावर वर्गात चर्चा करा. काही विद्यार्थ्यांनी खालीलप्रमाणे मते व्यक्त केली आहेत.

सोहेल : शेतकऱ्यांना फक्त शेतमाल विकला जातो तेव्हाच पैसे मिळतात, त्यातला फायदा वर्षभर पुरला पाहिजे म्हणून त्यांचे अर्थनियोजन जास्त महत्त्वाचे आहे.

प्रकाश : शेतमालाला रास्त भाव मिळाला तर उत्पन्न वाढेल.

नर्गिस : अर्थशास्त्राचा नियम आहे की एखाद्या वस्तूचा पुरवठा मागणीपेक्षा खूप जास्त झाला तर तिची किंमत कमी होते, मग तिची किंमत कमी झाली की फायदा कमी होणारच!

रीटा : जर शेतीचे उत्पन्न खूप झाले आणि भाव पडण्याची भीती असेल तर काही माल नीट साठवून ठेवावा, नंतर योग्य वेळी, बाजारात भाव वाढला की विकण्यास काढावा.

आझम : त्यासाठी चांगली गोदामे बांधायला हवीत.

रेश्मा : शेतकऱ्याला कमी व्याजाने सहज कर्ज मिळायला हवे.

वत्सला : दुध, कुक्कुटपालन यांसारखे शेतीपूरक व्यवसाय केले तर थोडे अधिक उत्पन्न मिळेल, शिवाय जनावरांच्या मलमूत्रापासून चांगले सेंद्रीय खत मिळेल.

कुणाल : शेतमालावर प्रक्रिया करणारे कारखाने काढले व सरबते, जॅम, लोणची, वाळवलेल्या भाज्या, फळाचा गर अशा वस्तू नीट पॅकिंग करून ठेवल्या तर वर्षभर विकता येतील.
निर्यातक्षम मालाचे अधिक उत्पन्न घ्यावे.

सरावसंच 6.1

1. अलकाला दरमहा पाठवलेल्या रकमेपैकी 90% रक्कम ती खर्च करते आणि महिना 120 रुपयांची बचत करते. तर तिला पाठवण्यात येणारी रक्कम काढा.
2. सुमितने 50,000 रुपये भांडवल घेऊन खाद्यपदार्थांचा व्यवसाय चालू केला. त्यामध्ये त्याला पहिल्या वर्षी 20% तोटा झाला. उरलेल्या भांडवलात दुसऱ्या वर्षी त्याने मिठाईचा व्यवसाय चालू केला, त्यात त्याला 5% नफा झाला. तर मूळ भांडवलावर त्याला शेकडा किती तोटा किंवा नफा झाला ?
3. निखिलने आपल्या मासिक उत्पन्नाचा 5% भाग मुलांच्या शिक्षणासाठी खर्च केला, 14% भाग शेअर्समध्ये गुंतवला, 3% भाग बँकेत ठेवला आणि 40% भाग दैनंदिन खर्चासाठी वापरला. गुंतवणूक व खर्च जाऊन त्याच्याकडे 19,000 रुपये उरले. तर त्याचे मासिक उत्पन्न काढा.
4. सय्यदभाई यांनी आपल्या उत्पन्नापैकी 40,000 रुपये 8% चक्रवाढ व्याजाने 2 वर्षांकरिता बँकेत गुंतवले. श्री फर्नांडीस यांनी 1,20,000 रुपये म्युच्युअल फंडामध्ये 2 वर्षांकरिता गुंतवले. 2 वर्षांनंतर श्री फर्नांडीस यांना 1,92,000 रुपये मिळाले. तर सय्यदभाई व श्री फर्नांडीस यांपैकी कोणाची गुंतवणूक जास्त फायदेशीर ठरली ?
5. समीराने आपल्या उत्पन्नाच्या 3% उत्पन्न समाजकार्यासाठी दिले व 90% उत्पन्न खर्च केले. तिच्याकडे 1750 रुपये शिल्लक राहिले. तर तिचे मासिक उत्पन्न काढा.

चला, चर्चा करूया.

कर म्हणजे काय? कोणकोणत्या प्रकारचे कर असतात? यांबद्दलची माहिती खालील वेबसाईटवर मिळवा.

ICT Tools or Links — www.incometaxindia.gov.in, www.mahavat.gov.in

जाणून घेऊया.

करआकारणी

राष्ट्राच्या उभारणीसाठी शासन विविध योजना आखत असते. या योजनांच्या कार्यवाहीसाठी शासनाला फार मोठ्या रकमेची गरज असते. अनेक प्रकारच्या करांची आकारणी करून ही रक्कम उभी केली जाते.

करांची उपयुक्तता (Utility of taxes)

- पायाभूत सुविधा पुरवणे.
- विविध कल्याणकारी योजनांची अंमलबजावणी करणे.
- वेगवेगळ्या क्षेत्रांमध्ये विकास कामे आणि संशोधन यांबाबत योजना राबवणे.
- कायदा आणि सुव्यवस्था राखणे.
- नैसर्गिक आपत्तीमुळे बाधित झालेल्या लोकांना मदत करणे.
- राष्ट्राचे आणि नागरिकांचे संरक्षण करणे, इत्यादी.

करांचे प्रकार (Types of taxes)

प्रत्यक्ष कर (Direct taxes)	**अप्रत्यक्ष कर** (Indirect taxes)
ज्या करांचा भार प्रत्यक्ष करदात्यावर पडतो, ते कर म्हणजे प्रत्यक्ष कर.	ज्या करांचा भार प्रत्यक्षपणे करदात्यावर पडत नाही, ते कर म्हणजे अप्रत्यक्ष कर.
उदा. आयकर, संपत्तीकर, व्यवसाय कर अबकारी कर, कस्टम ड्युटी, इत्यादी.	उदा. केंद्रीय विक्री कर, मूल्यवर्धित कर, सेवाकर, इत्यादी.

2017 साली ज्या प्रकारे कर आकारणी केली जात आहे त्यानुसार त्याचे प्रकार वर दाखवले आहेत.

उपक्रम : विविध प्रकारचे कर भरणाऱ्या नोकरदार किंवा व्यावसायिकांकडून वेगवेगळ्या करांविषयी माहिती मिळवा.

जाणून घेऊया.

आयकर (Income tax)

व्यक्तीचे, संस्थेचे किंवा इतर कायदेशीर उद्योगांचे भारतातील उत्पन्न, आयकर अधिनियमान्वये ठरलेल्या मर्यादेपेक्षा अधिक असेल तर त्यावर आयकर (प्राप्तीकर) आकारला जातो.

या प्रकरणात आपण प्रत्यक्ष करापैकी फक्त व्यक्तींना भराव्या लागणाऱ्या आयकराचा विचार करणार आहोत.

आयकराची आकारणी केंद्र सरकार करते. भारतामध्ये आयकर आकारणी दोन अधिनियमांद्‌वारे केली जाते.

(1) आयकर कायदा 1961 हा दि. 01.04.1962 पासून अस्तित्वात आला.

(2) प्रत्येक वर्षी संसदेत संमत केला जाणारा अर्थविषयक तरतुदी असणारा कायदा.

दरवर्षी साधारणपणे फेब्रुवारी महिन्यात अर्थमंत्री आगामी आर्थिक वर्षासाठी तरतुदी असणारे अर्थसंकल्प (Budget) सादर करतात. त्यात आयकराचे दर सुचवलेले असतात. संसदेने अर्थसंकल्प मंजूर केला की हे दर पुढील वर्षासाठी लागू होतात.

आयकराचे दर प्रत्येक वर्षीच्या अर्थसंकल्पात निश्चित केले जातात.

आयकराच्या संदर्भातील बाबी :

- **करदाता** (An assessee) : आयकर नियमावलीमध्ये समाविष्ट असलेल्या नियमांनुसार ज्या व्यक्तीने आयकर देणे अपेक्षित आहे त्या व्यक्तीला 'करदाता' म्हणतात.
- **वित्तीय वर्ष** (Financial year) : ज्या एक वर्षाच्या कालावधीत उत्पन्न मिळवले जाते त्या वर्षाला 'वित्तीय वर्ष' असे म्हणतात. आपल्या देशात सध्या 1 एप्रिल ते 31 मार्च हे वित्तीय वर्ष असते.
- **कर आकारणी वर्ष** (Assessment year) : वित्तीय वर्षाच्या लगतच्या पुढील वित्तीय वर्षास 'कर आकारणी वर्ष' असे म्हणतात. चालू वर्षात मागील वित्तीय वर्षासाठी कर आकारणी निश्चित केली जाते.

'वित्तीय वर्ष' व 'संबंधित कर आकारणी वर्ष' खाली नमूद केले आहे.

आर्थिक वर्ष (Financial Year)	संबंधित कर आकारणी वर्ष (Assessment Year)
2016-17 म्हणजे 01-04-2016 ते 31-03-17	2017-18
2017-18 म्हणजे 01-04-2017 ते 31-03-18	2018-19

- **कायम खाते क्रमांक** (PAN) : प्रत्येक व्यक्तीने अर्ज केल्यावर आयकर विभागाकडून एक विशिष्ट असा दहा अंकाक्षरात्मक क्रमांक दिला जातो. त्यास '**कायम खाते क्रमांक**' म्हणजे 'Permanent Account Number (PAN)' म्हणतात. अनेक महत्त्वाच्या कागदपत्रांत आणि आर्थिक व्यवहारांत हा क्रमांक नमूद करणे आवश्यक असते.

पॅनकार्डाचा उपयोग : आयकर विभागाकडे करभरणा करण्यासाठीचे चलन, करविवरणपत्र (रिटर्नचा फॉर्म) इतर पत्रव्यवहार यांवर पॅन क्रमांक लिहिणे बंधनकारक असते. तसेच मोठे आर्थिक व्यवहार करताना पॅन नोंदवावा लागतो. अनेक वेळा पॅनकार्डाचा उपयोग ओळखीचा पुरावा (Identity proof) म्हणूनही होतो.

जाणून घेऊया.

आयकर आकारणी

आयकराची आकारणी उत्पन्नावर होत असल्यामुळे उत्पन्नाचे विविध स्रोत जाणणे आवश्यक आहे.

उत्पन्नाचे मुख्यतः पाच स्रोत आहेत :

(1) पगाराद्‌वारे मिळणारे उत्पन्न.
(2) घर मिळकतीतून मिळणारे उत्पन्न.
(3) धंदा आणि व्यवसायातून मिळणारे उत्पन्न.
(4) भांडवली नफ्यातून (Capital gain) मिळणारे उत्पन्न.
(5) इतर स्रोतांतून मिळणारे उत्पन्न.

पगारदार व्यक्तीच्या आयकर गणनेसाठी महत्त्वाच्या बाबी :

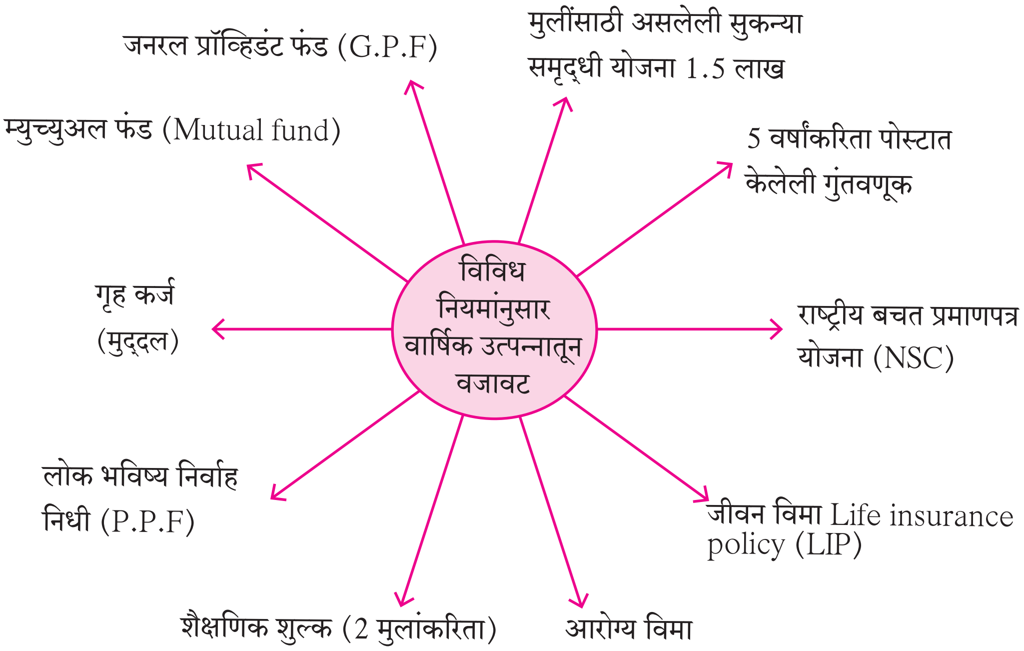
आयकराचे गणन करण्यासाठी एकूण वार्षिक उत्पन्न विचारात घेतले जाते. आयकर अधिनियमांच्या 80C, 80D, 80G इत्यादी कलमांना अनुसरून एकूण वार्षिक उत्पन्नातून काही वजावट मिळते. ही वजावट करून उरलेल्या उत्पन्नाला **करपात्र उत्पन्न** म्हणतात. आयकराची आकारणी या उत्पन्नावरच केली जाते.

कर आकारणीचे नियम काही वेळा बदलले जातात, म्हणून प्रत्यक्ष कर आकारणी करताना अद्ययावत नियम माहीत असणे आवश्यक असते.

करपात्र उत्पन्नापैकी ठरावीक मर्यादेपर्यंतच्या रकमेवर कर आकारला जात नाही. या रकमेस करपात्र उत्पन्नातील **मूळ सवलत रक्कम** असे म्हणतात.

- शेतकऱ्यांना शेतमालाच्या उत्पन्नावर आयकरातून सूट असते.
- आयकर कलम 80 G अन्वये पंतप्रधान मदतनिधी, मुख्यमंत्री मदतनिधी किंवा मान्यताप्राप्त संस्थांना देणग्या दिल्यास आयकरात 100% सूट मिळते.
- 80 D या कलमान्वये आरोग्यासाठीच्या विमा हप्त्यावर सूट दिली जाते.
- सामान्यत: एकूण गुंतवणुकींवर 80C या कलमान्वये विविध प्रकारच्या गुंतवणुकींपैकी जास्तीत जास्त 1,50,000 रुपयांपर्यंत वजावट मिळते.

2017-18 च्या अर्थसंकल्पानुसार ज्यांची वार्षिक उत्पन्नातून वजावट दाखवता येते अशा काही महत्त्वाच्या गुंतवणुकी खालील आकृतीत दाखवल्या आहेत :



करदात्याच्या वयानुसार आयकराचे दर प्रत्येक वर्षीच्या अर्थसंकल्पात ठरवले जातात.
उत्पन्नाच्या टप्प्याप्रमाणे आयकराचे दर दर्शवणाऱ्या नमुना सारण्या खाली दिल्या आहेत.

सारणी I

60 वर्षांपर्यंतच्या व्यक्ती			
करपात्र उत्पन्नाचे टप्पे (रुपयांत)	प्राप्तिकर (आयकर)	शिक्षण उपकर	माध्यमिक व उच्च शिक्षण उपकर
2,50,000 पर्यंत	करमुक्त	करमुक्त	करमुक्त
2,50,001 ते 5,00,000	5 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा अडीच लाख यावर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
5,00,001 ते 10,00,000	₹ 12,500 + 20 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा पाच लाख यावर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
10,00,000 पेक्षा अधिक	₹ 1,12,500 + 30 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा दहा लाख यावर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
(वार्षिक उत्पन्न 50 लाख रुपये ते एक कोटी रुपयांच्या दरम्यान असणाऱ्यांना आयकराच्या 10 टक्के सरचार्ज आणि वार्षिक उत्पन्न एक कोटी रुपयांहून अधिक असणाऱ्यांना आयकराच्या 15 टक्के सरचार्ज)			

कृती : वरील सारणी (I) चे निरीक्षण करा व खालील उदाहरणातील चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

उदा. • मेहता यांचे वार्षिक उत्पन्न साडेचार लाख रुपये आहे. त्यांनी उत्पन्नातून वजावट मिळणारी कोणतीही बचत केलेली नाही, तर त्यांचे करपात्र उत्पन्न कोणत्या टप्प्यात बसेल? ☐

• त्यांना किती रकमेवर किती टक्के दराने आयकर भरावा लागेल ? ₹ ☐ वर ☐ दराने

• उपकर किती रकमेवर आकारला जाईल? ☐

सारणी II

ज्येष्ठ नागरिक (वय वर्षे साठ ते ऐंशी)			
करपात्र उत्पन्नाचे टप्पे (रुपयांत)	प्राप्तिकर (आयकर)	शिक्षण उपकर	माध्यमिक व उच्च शिक्षण उपकर
3,00,000 पर्यंत	करमुक्त	करमुक्त	करमुक्त
3,00,001 ते 5,00,000	5 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा तीन लाख यांवर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
5,00,001 ते 10,00,000	₹ 10,000 + 20 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा पाच लाख यांवर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
10,00,000 पेक्षा अधिक	₹ 1,10,000 + 30 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा दहा लाख यांवर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
(वार्षिक उत्पन्न 50 लाख रुपये ते एक कोटी रुपयांच्या दरम्यान असणाऱ्यांना आयकराच्या 10 टक्के सरचार्ज आणि वार्षिक उत्पन्न एक कोटी रुपयांहून अधिक असणाऱ्यांना आयकराच्या 15 टक्के सरचार्ज)			

कृती : सारणी II वरून खालील कृती पूर्ण करा.

उदा. श्री. पंडित यांचे वय 67 वर्षे आहे. गेल्या वर्षी त्यांचे वार्षिक उत्पन्न 13,25,000 रुपये होते. तर त्यांचे करपात्र उत्पन्न किती होते? त्यांना किती आयकर भरावा लागेल ?

13,25,000 – 10,00,000 = 3,25,000

म्हणून त्यांना सारणीप्रमाणे 1,10,000 रुपये आयकर भरावा लागणार आहेच. शिवाय 3,25,000 रुपयांवर 30% म्हणजे $3,25,000 \times \frac{30}{100} = \boxed{}$ रु. आयकर भरावा लागेल.

म्हणजे आयकराची रक्कम $\boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

देय आयकराच्या 2% शिक्षण उपकर म्हणजे $\boxed{} \times \frac{2}{100} = \boxed{}$.

देय आयकराच्या 1% माध्यमिक व उच्च शिक्षण उपकर भरावा लागेल. म्हणजे $\boxed{} \times \frac{1}{100} = \boxed{}$

∴ एकूण आयकर = आयकर + शिक्षण उपकर + माध्यमिक व शिक्षण उपकर.

$= \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$

$= \boxed{₹\ 2,13,725}$

सारणी III

अति ज्येष्ठ नागरिक (वय वर्षे ऐंशीपेक्षा अधिक)			
उत्पन्नाचे टप्पे (रुपयांत)	प्राप्तिकर (आयकर)	शिक्षण उपकर	माध्यमिक व उच्च शिक्षण उपकर
5,00,000 पर्यंत	करमुक्त	करमुक्त	करमुक्त
5,00,001 ते 10,00,000	20 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा पाच लाख यावर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
10,00,000 पेक्षा अधिक	₹ 1,00,000 + 30 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा दहा लाख यावर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
(वार्षिक उत्पन्न 50 लाख रुपये ते एक कोटी रुपयांच्या दरम्यान असणाऱ्यांना आयकराच्या 10 टक्के सरचार्ज आणि वार्षिक उत्पन्न एक कोटी रूपयांहून अधिक असणाऱ्यांना आयकराच्या 15 टक्के सरचार्ज)			

उपक्रम : 80C, 80G, 80D या अधिनियमांची माहिती मिळवा.
पॅनकार्ड पाहा त्यावर कोणती माहिती असते त्याची नोंद करा.
रोकडरहित (Cashless) व्यवहारासाठी वापरल्या जाणाऱ्या मार्गांची माहिती मिळवा.

वरील सारण्या व व्यक्तींना मिळणाऱ्या विविध सवलतींचा उपयोग करून आयकराचे गणन कसे करतात ते आपण पुढील उदाहरणांवरून समजून घेऊ.

उदा (1) श्री म्हात्रे यांचे वय 50 वर्षे आहे. त्यांचे एकूण वार्षिक उत्पन्न 12,00,000 रुपये आहे. त्यांनी खालीलप्रमाणे गुंतवणूक केली.

(i) विमा हप्ता : ₹ 90,000 (ii) भविष्य निर्वाह निधी : ₹ 25,000

(iii) सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधी : ₹ 15,000 (iv) राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र योजना : ₹ 20,000

यावरून आयकरासाठी मान्य असणारी कपात, करपात्र उत्पन्न व आयकर काढा.

उकल : (1) एकूण वार्षिक उत्पन्न = 12,00,000 रुपये आहे.

(2) 80C नुसार एकूण गुंतवणूक

गुंतवणूक	रक्कम (रुपये)
(i) विमा हप्ता	90,000
(ii) भविष्य निर्वाह निधी	25,000
(iii) सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधी	15,000
(iv) राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र योजना	20,000
एकूण	1,50,000

नियम 80C नुसार आयकरासाठी जास्तीत जास्त 1,50,000 रुपयांची वजावट मान्य असते.

(3) ∴ करपात्र उत्पन्न = [1] मधील रक्कम − [2] मधील रक्कम

$= 12,00,000 - 1,50,000 = 10,50,000$

(4) श्री. म्हात्रे यांना भराव्या लागणाऱ्या आयकराचे गणन सारणी (I) च्या साहाय्याने करू.

श्री. म्हात्रे यांचे करपात्र उत्पन्न = ₹10,50,000 म्हणजे दहा लाखांपेक्षा अधिक आहे.

∴ सारणी (I) नुसार आयकर = ₹ 1,12,500 + 30% (एकूण उत्पन्न वजा दहा लाख यांवर 30%)

$\therefore 10,50,000 - 10,00,000 = 50,000$

∴ आयकर $= 1,12,500 + 50,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 15,000$

$= 1,27,500$

याशिवाय 2% शिक्षण उपकर आणि 1% माध्यमिक व उच्चशिक्षण उपकर यांचाही समावेश करावा लागेल.

शिक्षण उपकर $= 1,27,500 \times \frac{2}{100} = 2550$ रुपये

माध्यमिक व उच्चशिक्षण उपकर $= 1,27,500 \times \frac{1}{100} = 1275$ रुपये

∴ एकूण आयकर $= 1,27,500 + 2550 + 1275 = 1,31,325$ रुपये

श्री म्हात्रे यांना भरावा लागणारा एकूण आयकर = 1,31,325 रुपये

उदा (2) अहमदभाई हे 62 वर्षांचे ज्येष्ठ नागरिक एका कंपनीत नोकरी करतात. त्यांचे एकूण वार्षिक उत्पन्न 6,20,000 रुपये आहे. त्यांनी सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधीमध्ये 1,00,000 रुपये गुंतवले. तसेच विम्याचा वार्षिक हप्ता 80,000 रुपये भरला व मुख्यमंत्रीनिधीला 10,000 रुपये देणगी दिली, तर अहमदभाई यांनी किती आयकर भरावा लागेल?

उकल : (1) एकूण वार्षिक उत्पन्न = 6,20,000 रुपये

(2) एकूण कपात (नियम 80C प्रमाणे)

(i) सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधी = 1,00,000 रुपये

(ii) विमा = 80,000 रुपये

1,80,000 रुपये

(iii) 80C नुसार जास्तीत जास्त 1,50,000 रुपये कपात मान्य.

(3) मुख्यमंत्री निधीला दिलेली रक्कम (80 G प्रमाणे कपात) = 10000 रुपये.

(4) करपात्र उत्पन्न = (1) – [(2) + (3)]

= 6,20,000 – [1,50,000 + 10000]

= 4,60,000 रुपये

सारणी (II) प्रमाणे करपात्र उत्पन्न तीन लाख ते पाच लाख रुपये या मर्यादेत आहे.

$\therefore$ देय आयकर = (करपात्र उत्पन्न – 3,00,000) $\times \frac{5}{100}$

$= (4,60,000 - 3,00,000) \times \frac{5}{100}$

$= 1,60,000 \times \frac{5}{100}$

= 8000 रुपये

शिक्षण उपकर हा आयकरावर आकारला जातो, म्हणून,

शिक्षण उपकर : $8,000 \times \frac{2}{100} = 160$ माध्यमिक व उच्चशिक्षण उपकर : $8,000 \times \frac{1}{100} = 80$

$\therefore$ एकूण आयकर = 8000 + 160 + 80 = ₹ 8,240

$\therefore$ अहमदभाई यांना एकूण 8240 रुपये इतका आयकर भरावा लागेल.

उदा (3) श्रीमती हिंदुजा यांचे वय 50 वर्षे आहे. त्यांचे करपात्र उत्पन्न 16,30,000 रुपये आहे. तर त्यांना एकूण किती आयकर भरावा लागेल ?

उकल : श्रीमती हिंदुजा यांचे करपात्र उत्पन्न दहा लाखांपेक्षा अधिक या गटात आहे.

आता आपण सारणी I वापरून त्यांच्या आयकराचे गणन करूया.

सारणी I प्रमाणे, दहालाखांपेक्षा अधिक उत्पन्नासाठी,

आयकर = रु. 1,12,500 + (करपात्र उत्पन्न वजा दहा लाख यावर 30%)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

श्रीमती हिंदुजा यांचे उत्पन्न – दहा लाख $= 16,30,000 - 10,00,000$

$= 6,30,000$ रुपये

सारणी I वरून

देय आयकर $= 1,12,500 + 6,30,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 30 \times 6,300$

$= 1,12,500 + 1,89,000$

$= 3,01,500$ रुपये

यावर 1% माध्यमिक व उच्चशिक्षण कर $= \frac{1}{100} \times 3,01,500 = ₹\ 3015$

2% शिक्षण कर $= \frac{2}{100} \times 3,01,500 = ₹\ 6030$

$\therefore$ एकूण आयकर $= 3,01,500 + 3015 + 6030$

$= 3,10,545$

$\therefore$ एकूण भरावा लागणारा आयकर 3,10,545 रुपये

सरावसंच 6.2

(1) खालील सारणीचे निरीक्षण करा. सारणीमध्ये दिलेल्या व्यक्तींना दिलेल्या करपात्र उत्पन्नावर आयकर भरावा लागेल किंवा नाही ते लिहा.

अ.क्र.	व्यक्ती	वय	करपात्र उत्पन्न (₹)	आयकर भरावा लागेल किंवा नाही
(i)	कु. निकिता	27	₹ 2,34,000	
(ii)	श्री कुलकर्णी	36	₹ 3,27,000	
(iii)	श्रीमती मेहता	44	₹ 5,82,000	
(iv)	श्री बजाज	64	₹ 8,40,000	
(v)	श्री डीसिल्व्हा	81	₹ 4,50,000	

(2) श्री कर्तारसिंग (वय 48 वर्षे) खाजगी कंपनीत नोकरी करतात. योग्य भत्ते वगळून त्यांचा मासिक पगार 42,000 रुपये आहे. ते भविष्य निर्वाह निधी खात्यात दरमहा 3000 रुपये गुंतवतात. त्यांनी 15,000 रुपयांचे राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र घेतले आहे व त्यांनी 12000 रुपयांची देणगी पंतप्रधान मदत निधीला दिली आहे, तर त्यांच्या आयकराचे गणन करा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

(1) खालीलपैकी योग्य पर्याय निवडा.

(i) विविध प्रकारच्या गुंतवणुकींपैकी 80 C कलमांनुसार आयकर गणनेसाठी जास्तीत जास्त किती रुपये वजावट मिळते ?

(A) दीड लाख रुपये (B) अडीच लाख रुपये (C) एक लाख रुपये (D) दोन लाख रुपये

(ii) एका व्यक्तीने 2017-18 मध्ये मिळवलेल्या उत्पन्नाचे कर आकारणी वर्ष खालीलपैकी कोणते ?

(A) 2016-17 (B) 2018-19 (C) 2017-18 (D) 2015-16

(2) श्री शेखर उत्पन्नाच्या 60% खर्च करतात. त्यानंतर उरलेल्या उत्पन्नातून 300 रुपये अनाथाश्रमाला देणगी देतात तेव्हा त्यांच्याकडे 3,200 रुपये उरतात, तर त्यांचे उत्पन्न काढा.

(3) श्री हिरालाल यांनी 2,15,000 रुपये म्युच्युअल फंडामध्ये गुंतवले. त्याचे 2 वर्षांनी त्यांना 3,05,000 रुपये मिळाले. श्री रमणिकलाल यांनी 1,40,000 रुपये 8% दराने चक्रवाढ व्याजाने 2 वर्षांकरिता बँकेत गुंतवले. तर प्रत्येकाला झालेला शेकडा फायदा काढा. कोणाची गुंतवणूक अधिक फायदेशार झाली?

(4) एका बचत खात्यामध्ये वर्षाच्या सुरुवातीला 24,000 रुपये होते. त्यामध्ये 56,000 रुपयांची भर घातली व ती सर्व रक्कम 7.5% दराने चक्रवाढ व्याजाने बँकेत गुंतवली. तर 3 वर्षांनंतर एकूण किती रक्कम परत मिळेल?

(5) श्री मनोहर यांनी आपल्या उत्पन्नाचा 20% भाग आपल्या मोठ्या मुलाला आणि 30% भाग धाकट्या मुलास दिला. नंतर उरलेल्या रकमेच्या 10% रक्कम देणगी म्हणून शाळेला दिली. तेव्हा त्यांच्याकडे 1,80,000 रुपये उरले. तर श्री मनोहर यांचे उत्पन्न काढा.

(6*) कैलासचा उत्पन्नाच्या 85% इतका खर्च होत असे. त्याचे उत्पन्न 36% वाढले तेव्हा त्याचा खर्च पूर्वीच्या खर्चाच्या 40% वाढला. तर त्याची आता होणारी शेकडा बचत काढा.

(7*) रमेश, सुरेश आणि प्रीती या तिघांचेही एकूण वार्षिक उत्पन्न 8,07,000 रुपये आहे. ते तिघे आपल्या उत्पन्नाचा अनुक्रमे 75%, 80% आणि 90% भाग खर्च करतात. जर त्यांच्या बचतींचे गुणोत्तर 16 : 17 : 12 असेल तर प्रत्येकाची वार्षिक बचत काढा.

(8) खालील व्यक्तींचे देय आयकराचे गणन करा.

(i) श्री कदम यांचे वय 35 वर्षे असून त्यांचे करपात्र उत्पन्न 13,35,000 रुपये आहे.

(ii) श्री खान यांचे वय 65 वर्षे असून त्यांचे करपात्र उत्पन्न 4,50,000 रुपये आहे.

(iii) कु. वर्षा (वय 26 वर्षे) यांचे करपात्र उत्पन्न 2,30,000 रुपये आहे.

◈◈◈

ICT Tools or Links

भारत सरकारच्या www.incometaxindia.gov.in या वेबसाइटला भेट द्या. त्या साइटवरील incometax calculator या मेन्यू वर क्लिक करा. येणाऱ्या फॉर्ममध्ये काल्पनिक उत्पन्न आणि वजावटीच्या काल्पनिक रकमा लिहून आयकराची रक्कम काढण्याचा प्रयत्न करा.

7 सांख्यिकी

चला, शिकूया.

- **जोडस्तंभालेख**
- **विभाजित स्तंभालेख**
- **शतमान स्तंभालेख**
- **प्राथमिक व दुय्यम सामग्री**
- **अवर्गीकृत व वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी**
- **संचित वारंवारता सारणी**
- **मध्य, मध्यक आणि बहुलक (अवर्गीकृत सामग्रीसाठी)**

जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण साधा स्तंभालेख व जोडस्तंभालेख कसे काढायचे हे पाहिले आहे. तसेच वर्तमानपत्रे, मासिके, दूरदर्शन इत्यादी माध्यमांतून विविध आलेख पाहून त्यांची माहिती मिळवली आहे.

माहितीच्या स्वरूपाप्रमाणे त्या माहितीचे योग्य सादरीकरण करणारा आलेख काढता येणे महत्त्वाचे असते.

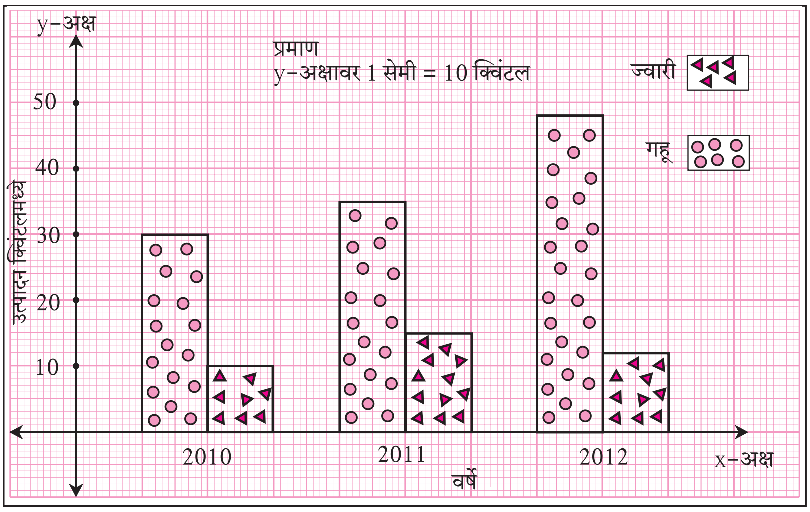
उदा. एका शेतकऱ्याला त्याच्या शेतातून गहू व ज्वारी या दोन पिकांचे तीन वर्षांत मिळालेले उत्पादन दर्शवणारा जोडस्तंभालेख काढून दाखवला आहे. त्यावरून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) तीन वर्षांमध्ये कोणत्या धान्याचे उत्पादन सतत वाढले?

(ii) 2012 मध्ये 2011 पेक्षा ज्वारीचे उत्पादन किती कमी झाले?

(iii) 2010 मधील गव्हाचे उत्पादन व 2012 मधील गव्हाचे उत्पादन यांतील फरक किती?

(iv) या आलेखातील माहितीवरून खालील सारणी पूर्ण करा.



उत्पादन (क्विंटल) / वर्ष	गहू	ज्वारी	एकूण उत्पादन
2011			
2012	48	12	60

जाणून घेऊया.

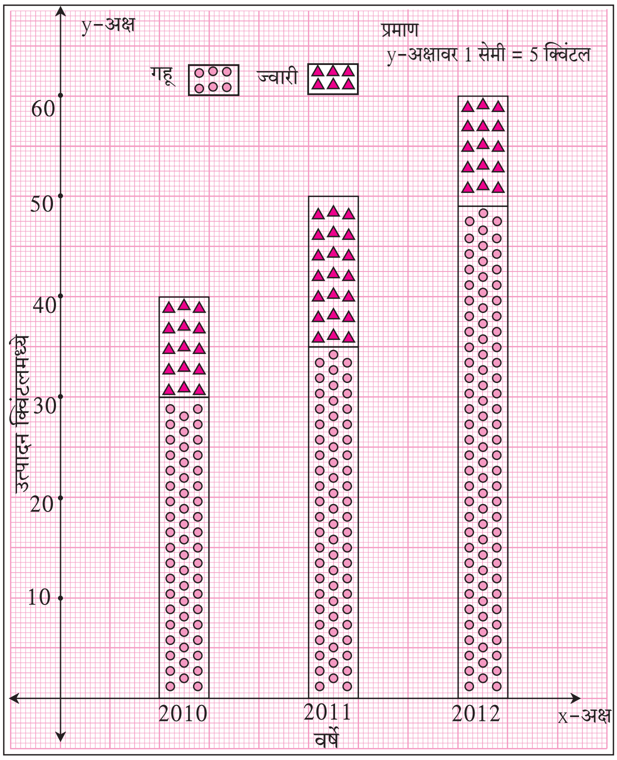
विभाजित स्तंभालेख (Sub-divided bar diagram)

सामग्रीतील माहितीची तुलना दर्शवणारा स्तंभालेख वेगळ्या पद्धतीनेही काढता येतो. त्याला विभाजित स्तंभालेख म्हणतात. त्यासाठी सामग्रीतील एकाच प्रकारच्या दोन बाबींच्या बेरजा करतात, आलेल्या बेरजा योग्य प्रमाण घेऊन स्तंभांनी दर्शवतात, स्तंभांचे प्रत्येक बाब दर्शवणारे प्रमाणबद्ध भाग करतात. मागील उदाहरणातील माहिती दर्शवणारा विभाजित स्तंभालेख कसा काढायचा हे पाहू.

(i) एकूण उत्पादनाएवढी प्रत्येक स्तंभाची उंची योग्य प्रमाणाने दाखवावी.

(ii) त्यामध्ये गव्हाचे उत्पादन हा एकूण उत्पादनाच्या स्तंभाचा एक भाग असेल. तो काही खुणेने दर्शवावा.

(iii) स्तंभाचा राहिलेला भाग हा साहजिकच ज्वारीचे उत्पादन दाखवेल. तो वेगळ्या खुणेने दर्शवावा.



या रीतीने शेजारी काढलेला विभाजित स्तंभालेख पाहा.

दोन बाबींची शतमानाने केलेली तुलना कधी कधी जास्त उपयोगी असते, हे आपण अभ्यासले आहे. उदाहरणार्थ, 2000 रुपयांवर 600 रुपये नफा आणि 1500 रुपयांवर 510 रुपये नफा, यांत 600 रुपये नफा हा जास्त दिसतो. पण दोन्ही नफ्यांची अनुक्रमे 30% आणि 34% ही शतमाने लक्षात घेतली, तर 1500 रुपयांवर 510 रुपये नफा हा व्यवहार अधिक फायदेशीर आहे, हे लक्षात येते.

शतमान स्तंभालेख (Percentage bar diagram)

दिलेल्या माहितींची तुलना वेगळ्या प्रकारे समजण्यासाठी दिलेली माहिती शतमानांत रूपांतरित करून जो विभाजित स्तंभालेख काढतात, त्याला शतमान स्तंभालेख म्हणतात. मागील उदाहरणांतील माहितीची शतमाने शेजारील सारणीत काढून दाखवली आहेत.

वर्ष	गव्हाचे उत्पादन (क्विं.)	ज्वारीचे उत्पादन (क्विं.)	एकूण उत्पादनाच्या प्रमाणात गव्हाच्या उत्पादनाचे शतमान
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	48	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$

ही माहिती दर्शवणारा स्तंभालेख खालील पायऱ्यांनी काढला आहे.

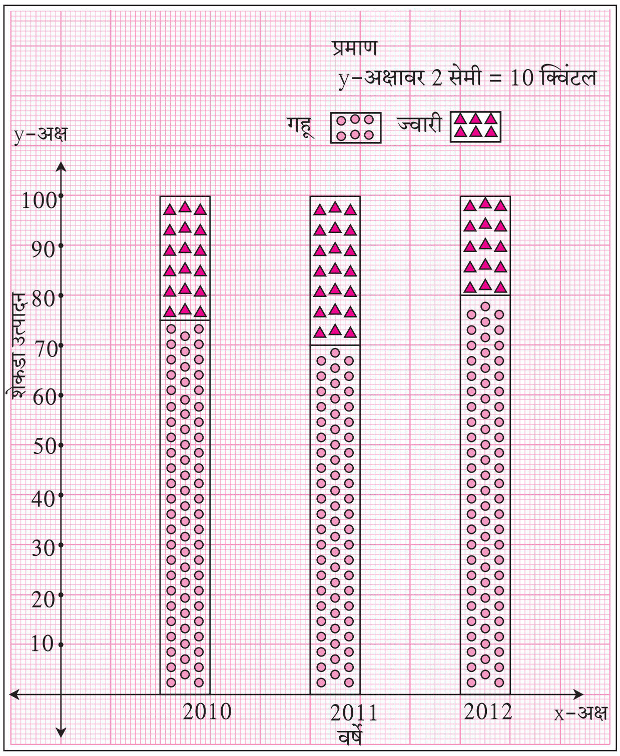
(i) प्रत्येक वर्षातील गहू व ज्वारीच्या एकूण उत्पादनात असलेले गव्हाच्या उत्पादनाचे व ज्वारीच्या उत्पादनाचे शतमान काढले.

(ii) प्रत्येक स्तंभाची Y-अक्षावरील उंची प्रमाणाने 100 घेतली.

(iii) गव्हाच्या उत्पादनाचे एकूण उत्पादनाशी असलेले शतमान, घेतलेल्या प्रमाणाने स्तंभाचा भाग खुणा करून दर्शवले.

(iv) स्तंभाचा उरलेला भाग हा एकूण उत्पादनातील ज्वारीचे शतमान दर्शवतो.

दोनपेक्षा अधिक बाबींची माहिती ही विभाजित किंवा शतमान स्तंभालेखाने दर्शवता येते.



सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) शेजारी शतमान स्तंभालेख दिला आहे. त्यामध्ये दोन कुटुंबांची विविध बाबींवरील खर्चांची माहिती दिली आहे. त्यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

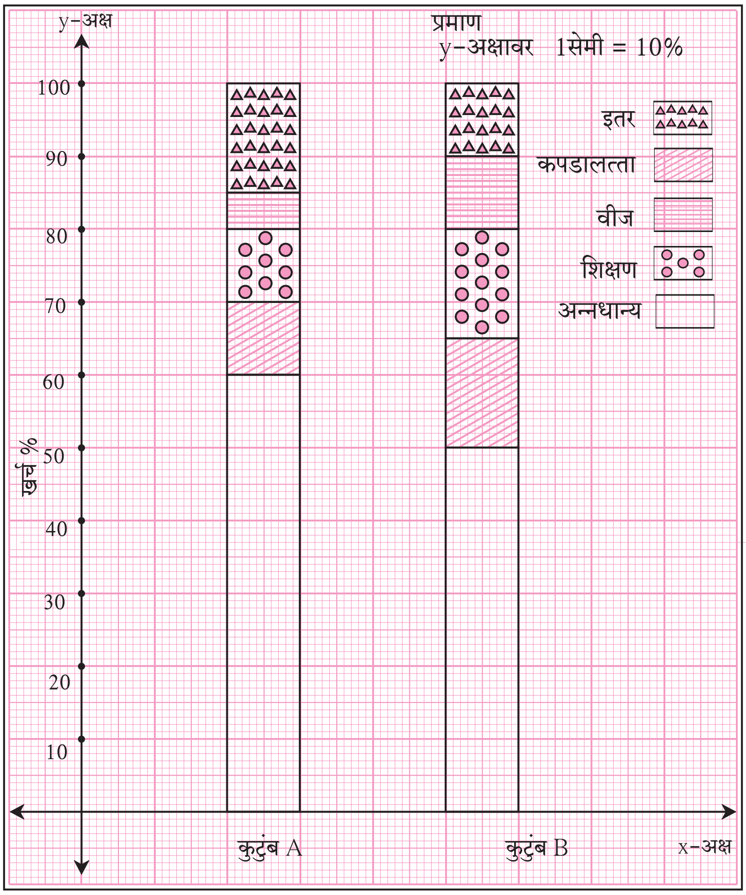
(i) प्रत्येक कुटुंबाच्या विविध बाबींवरील खर्चांची शतमाने लिहा.

(ii) कोणत्या कुटुंबाचा अन्नधान्याचा खर्च त्याच्या एकूण खर्चाच्या प्रमाणात जास्त आहे? किती टक्क्यांनी जास्त आहे?

(iii) दोन्ही कुटुंबांच्या इतर खर्चांची टक्केवारी किती किती आहे?

(iv) कोणत्या कुटुंबाच्या वीजखर्चाची टक्केवारी जास्त आहे ?

(v) कोणत्या कुटुंबाच्या शिक्षणखर्चाची टक्केवारी जास्त आहे?



उकल : (i)

खर्च / कुटुंब	अन्नधान्य	कपडालत्ता	शिक्षण	वीज	इतर
A	60%	10%	10%	5%	15%
B	50%	15%	15%	10%	10%

(ii) कुटुंब A चा अन्नधान्याचा खर्च एकूण खर्चाच्या प्रमाणात कुटुंब B च्या खर्चापेक्षा 10% जास्त आहे.

(iii) कुटुंब A चा इतर खर्च 15% आणि कुटुंब B चा इतर खर्च 10% आहे.

(iv) कुटुंब B च्या वीजखर्चाचे शतमान जास्त आहे. (v) कुटुंब B च्या शिक्षणखर्चाचे शतमान जास्त आहे.

सरावसंच 7.1

(1) खालील सारणीमध्ये भारतातील ट्रक व बस यांची जवळच्या पूर्ण लाखांतील संख्या खाली दिली आहे. त्यावरून शतमान स्तंभालेख काढा. (शतमाने जवळच्या पूर्णांकापर्यंत घ्या.)

वर्ष	ट्रकची संख्या	बसची संख्या
2005-2006	47	9
2007-2008	56	13
2008-2009	60	16
2009-2010	63	18

(2) खालील सारणीमध्ये भारतातील पक्क्या रस्त्यांची व कच्च्या रस्त्यांची माहिती दिली आहे. त्यावरून विभाजित व शतमान स्तंभालेख काढा. (शतमाने जवळच्या पूर्णांकापर्यंत घ्या.)

वर्षे	पक्के रस्ते (लक्ष किमी)	कच्चे रस्ते (लक्ष किमी)
2000-2001	14	10
2001-2002	15	11
2003-2004	17	13
2007-2008	20	19

कृती : खालील सारणीमध्ये विविध राज्यांतील प्रत्येक 1000 मुलग्यांमागे असणारी मुलींची संख्या दिली आहे. त्यावरून दिलेल्या सारणीमधील रिकाम्या चौकटी भरा.

राज्ये	मुलग्यांची संख्या	मुलींची संख्या	एकूण	मुलग्यांचे शतमान (जवळच्या पूर्णांकापर्यंत)	मुलींचे शतमान (जवळच्या पूर्णांकापर्यंत)
आसाम	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960} \times \frac{100}{1} = \quad = 51\%$	$100 - 51 = 49\%$
बिहार	1000	840	1840		
पंजाब	1000	900			
केरळ	1000	1080			
महाराष्ट्र	1000	900			

सारणीवरून मिळालेल्या माहितीचा शतमान स्तंभालेख काढा. त्यावरून निष्कर्ष काढून चर्चा करा.

विचार करूया. पृष्ठ क्रमांक 111 वरील कृतीसाठी दिलेल्या सारणीत पाच राज्यातील दर हजार मुलग्यांमागे असलेली मुलींची संख्या दिली आहे.

त्याच राज्यांतील साक्षरतेचे प्रमाण खाली दिले आहे.

आसाम (73%), बिहार (64%), पंजाब (77%), केरळ (94%) व महाराष्ट्र (83%)

सारणीतील मुलींची संख्या आणि त्या त्या राज्यातील साक्षरतेचे प्रमाण यांचा विचार करा. त्यावरून काही निष्कर्ष मिळतो का?

चला, चर्चा करूया.

पुढील माहिती दर्शवण्यासाठी कोणत्या प्रकारचा स्तंभालेख काढणे योग्य ठरेल ?

(1) चार गावांमधील साक्षरांचे शेकडा प्रमाण.

(2) एका कुटुंबाचा विविध घटकांवर होणारा खर्च.

(3) पाच तुकड्यांपैकी प्रत्येक तुकडीतील मुलगे व मुली यांच्या संख्या.

(4) तीन दिवस चाललेल्या विज्ञान प्रदर्शनाला रोज भेट देणाऱ्या व्यक्तींची संख्या.

(5) जानेवारी ते जून या प्रत्येक महिन्यातील तुमच्या गावाचे कमाल व किमान तापमान.

(6) दुचाकी चालवताना हेल्मेट वापरणाऱ्या आणि न वापरणाऱ्या 100 कुटुंबांतील व्यक्तींची संख्या

जाणून घेऊया.

सांख्यिकी (Statistics)

एखाद्या मोठ्या समूहाचा अभ्यास करण्यासाठी त्यातील काही घटकांचा पुरेसा लहान गट यादृच्छिक पद्धतीने निवडतात. हा मोठ्या गटाचा प्रातिनिधिक गट असतो. या प्रातिनिधिक गटाची अभ्यासासंबंधित माहिती जमा करतात. ही माहिती बहुतांश वेळा सांख्यिक स्वरूपात असते. तिचे विश्लेषण करून काही निष्कर्ष काढतात. या प्रकारच्या अभ्यासाला सांख्यिकी (statistics) असे नाव आहे.

Statistics हा शब्द status या लॅटिन शब्दापासून तयार झाला आहे. याचा अर्थ राज्यातील स्थिती असा होतो. यावरून पूर्वी सांख्यिकी हे शास्त्र राज्याच्या प्रशासकीय व्यवहाराशी संबंधित होते असे दिसते. परंतु सध्या या शास्त्राचा उपयोग सर्वच क्षेत्रांत केला जातो. **सर रोनाल्ड ऐल्मर फिशर (Sir Ronald Aylmer Fisher)** (17 फेब्रुवारी 1890 – 29 जुलै 1962) ह्यांना संख्याशास्त्राचे जनक मानतात.

माहितीचे संकलन (Data collection)

शिक्षिका : एका गावातील प्रत्येक कुटुंबाकडे किती शेती आहे ही माहिती संकलित करायची आहे, काय कराल?

रॉबर्ट : गावातील प्रत्येक घरी जाऊन प्रत्येकाकडे किती शेती आहे याची नोंद करू.

शिक्षिका : अगदी बरोबर, विद्यार्थी मित्रांनो एखाद्या विशिष्ट समूहाविषयी आपण जी माहिती एकत्र करतो ती प्रामुख्याने संख्यांच्या स्वरूपात असते. तिला सामग्री म्हणतात. सामग्री संकलित करण्यापूर्वी ती आपण कशासाठी वापरणार आहोत हे माहीत असायला हवे. जर एखाद्या व्यक्तीने माहिती घेण्याच्या ठिकाणी जाऊन प्रश्न विचारणे, मोजदाद करणे इत्यादी प्रकारे सामग्रीचे संकलन केले तर त्या सामग्रीला प्राथमिक सामग्री म्हणतात.

आफरीन : म्हणजेच रॉबर्टने सांगितल्याप्रमाणे प्रत्येक घरी जाऊन शेतीची संकलित केलेली माहिती ही प्राथमिक सामग्री राहील.

शिक्षिका : शाब्बास आफरीन !

रमेश : परंतु वरील माहिती अगदी कमी वेळात संकलित करायची असेल तर ?

शिक्षिका : रमेशचे म्हणणे बरोबर आहे. तर अशा वेळी माहिती संकलनाचा दुसरा उपाय काय असेल यावर विचार करा.

केतकी : आपण तलाठी कार्यालयात जाऊन त्यांच्याकडील उपलब्ध नोंदींवरून शेतीची माहिती संकलित करू शकतो.

शिक्षिका : बरोबर, काही परिस्थितीत वेळेची उपलब्धता, साधनांचा अभाव अशा कारणांमुळे सामग्रीचे संकलन व्यक्तिशः करणे शक्य होत नाही. अशा वेळी इतरांनी संकलित केलेली सामग्री, कार्यालयीन दस्तऐवजांत प्रसिद्ध झालेली सामग्री, सरकारी विभागांतील उपलब्ध माहिती, शोध निबंध, या स्वरूपांत असलेली सामग्री वापरतात. अशा सामग्रीला दुय्यम सामग्री असे म्हणतात. म्हणजेच केतकीने सुचवल्यानुसार तलाठी कार्यालयात जाऊन शेतीची संकलित केलेली माहिती ही दुय्यम सामग्री होय.

खालील उदाहरणे पाहा.

(i) वर्तमानपत्रातील माहिती वापरून केलेला तक्ता ही दुय्यम सामग्री होईल.

(ii) उपाहारगृहात पदार्थांचा दर्जा समजण्यासाठी ग्राहकांना त्यांचे अभिप्राय विचारून मिळवलेली माहिती, ही प्राथमिक सामग्री होईल.

(iii) वर्गातील विद्यार्थ्यांच्या उंचींची प्रत्यक्ष मोजून केलेली नोंद, ही प्राथमिक सामग्री होईल.

प्राथमिक सामग्री	दुय्यम सामग्री
1. संकलन करण्यास जास्त वेळ लागतो.	1. त्वरित उपलब्ध होऊ शकते.
2. अद्ययावत व तपशीलवार असते.	2. ह्यामध्ये पूर्वी संकलित केलेली माहिती घेतल्यामुळे ती अद्ययावत असतेच असे नाही. माहितीचा तपशील क्वचित कमी पडतो.
3. अचूक आणि विश्वसनीय असते.	3. ही कमी विश्वसनीय असू शकते.

कृती : तुम्ही अनेक वेळा वेगवेगळ्या कारणांसाठी माहिती गोळा करता; अशी 3 ते 4 उदाहरणे घेऊन गोळा केलेली सामग्री प्राथमिक आहे की दुय्यम आहे यांवर चर्चा करा.

सरावसंच 7.2

(1) खालीलप्रमाणे गोळा केलेल्या सामग्रीचे प्राथमिक सामग्री किंवा दुय्यम सामग्री यामध्ये वर्गीकरण करा.

(i) प्रत्यक्ष वर्गात जाऊन शाळेतील प्रत्येक वर्गातील विद्यार्थ्यांची हजेरीची माहिती गोळा केली.

(ii) प्रत्येक विद्यार्थ्याच्या उंचीची माहिती वरिष्ठ कार्यालयास तातडीने पाठवायची असल्याने शाळेतील शारीरिक शिक्षण विभागातील नोंदींवरून माहिती गोळा केली.

(iii) नांदपूर येथील प्रत्येक कुटुंबातील शालाबाह्य विद्यार्थ्यांची माहिती प्रत्यक्ष घरी जाऊन गोळा केली.

(iv) विज्ञान प्रकल्पासाठी प्रत्यक्ष जंगलात जाऊन झाडांची पाहणी करून माहिती गोळा केली.

जरा आठवूया.

सामग्रीचे वर्गीकरण (Classification of data)

उदा (1) एका शाळेतील इयत्ता 9 वीच्या 50 विद्यार्थ्यांनी प्रथम घटक चाचणीत गणितात 20 पैकी मिळवलेले गुण खालीलप्रमाणे आहेत.

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20,
8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14,
20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10

येथे संकलित केलेल्या संख्यात्मक माहितीस काय म्हणतात ?...... कच्ची सामग्री.

यातील प्रत्येक संख्येला काय म्हणतात ?....... प्राप्तांक.

वरील माहितीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे मिळवा.

(i) 15 गुण मिळवणारे एकूण विद्यार्थी किती ?

(ii) 15 गुणांपेक्षा जास्त गुण मिळवणारे एकूण विद्यार्थी किती ?

(iii) 16 गुणापेक्षा कमी गुण मिळवणारे एकूण विद्यार्थी किती ?

(iv) सर्वांत कमी गुण किती आहेत ?

(v) सर्वांत जास्त गुण किती आहेत ?

चला, चर्चा करूया.

(1) तुम्हांला वरील प्रश्नांची उत्तरे अगदी सहजपणे मिळाली की प्रत्येक वेळी गुणांचे निरीक्षण करावे लागले ?

(2) वरील कामात सुलभता येण्यासाठी काय करता येईल ?

शमीम : वरील उत्तरे प्रत्येक वेळी निरीक्षणातून मिळत असल्यामुळे हे काम किचकट व कंटाळवाणे झाले आहे, परंतु दिलेली कच्ची सामग्री चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लिहिल्यास या कामात सुलभता येऊ शकेल.

शमीमच्या म्हणण्यानुसार सामग्रीतील गुण चढत्या क्रमाने लिहू.

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

माहिती चढत्या क्रमाने लिहिल्यावर उदा 1 मधील पाचही प्रश्नांची उत्तरे सुलभतेने मिळतात काय? याचा पडताळा घ्या.

पडताळ्यावरून हे स्पष्ट होईल की सामग्री चढत्या क्रमाने मांडल्यामुळे पाचही प्रश्नांची उत्तरे अगदी सहज मिळतात.

जरा आठवूया.

मार्टीन : सामग्री सारणी स्वरूपात मांडूनसुद्धा वरील कामात अधिक सुलभता आणता येते, हे आम्ही मागील इयत्तेत अभ्यासले आहे. या सारणीला वारंवारता वितरण सारणी म्हणतात.

शिक्षिका : मार्टीन, अगदी बरोबर ! आता ही सारणी आधीचेच उदा. 1 च्या आधारे तयार करा.

उदाहरण (1) मध्ये सर्वांत कमी गुण 6 आहेत आणि सर्वांत जास्त गुण 20 आहेत. म्हणून सारणीमध्ये प्राप्तांकांच्या स्तंभात 6 ते 20 प्राप्तांक लिहा. दुसऱ्या स्तंभात ताळ्याच्या खुणा करून शेवटच्या स्तंभात खुणा मोजून वारंवारता लिहा.

वारंवारता वितरण सारणी

प्राप्तांक (गुण)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f)(विद्यार्थी संख्या)
6	|	1
7	||	2
8		
9		
10	$\cancel{||||}$	5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	$\cancel{||||}$ |	6
18		
19		
20	||||	4
		एकूण N = 50

N ही सर्व वारंवारतांची बेरीज आहे.

चला, चर्चा करूया.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी (Grouped frequency distribution table)

वरील वारंवारता वितरण सारणीमध्ये,

(1) ही सारणी खूप मोठी झाली असे वाटते काय ?

(2) जेव्हा सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या जास्त असेल तेव्हा ही सारणी तयार करणे कठीण होईल काय ?

शिक्षिका : वरील चर्चेवरून लक्षात आले की, जेव्हा सामग्रीतील प्राप्तांकाची संख्या जास्त असते तेव्हा वारंवारता वितरण सारणीचा विस्तार मोठा होतो. ती तयार करण्यास खूप वेळ लागतो. सारणीचा विस्तार आणि वेळ कमी करण्यासाठी काही उपाय सुचवता येतील काय ?

रोहित : अशा वेळी सामग्रीचे गट पाडावेत.

शिक्षिका : शाब्बास रोहित, सामग्रीचे गट पाडले म्हणजेच वर्ग तयार केले तर ती सामग्री आटोपशीर होऊन वेळही कमी लागेल.अशा सारणीलाच वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी म्हणतात.

ही सारणी दोन पद्धतींनी मांडता येते. (1) समावेशक पद्धती व (2) असमावेशक पद्धती

(1) समावेशक पद्धती (खंडित वर्ग) (Inclusive method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

वरील सामग्रीमध्ये सर्वात लहान प्राप्तांक $\boxed{}$ व सर्वांत मोठा प्राप्तांक $\boxed{}$ आहे. सर्वांत मोठ्या आणि सर्वांत लहान प्राप्तांकांतील फरक 20 − 6 = 14 आहे. या फरकालाच **सामग्रीचा विस्तार** असे म्हणतात. हा विस्तार लक्षात घेऊन सामग्रीचे सोईस्कर असे कोणते वर्ग तयार करता येतील ?

(i) 6 ते 8, 9 ते 11, 12 ते 14, 15 ते 17, 18 ते 20 किंवा

(ii) 6 ते 10, 11 ते15, 16 ते 20 असे वर्ग करता येतील.

ही सारणी तयार करताना 6, 10 आणि त्यांमधील सर्व प्राप्तांकांचा 6 ते 10 या वर्गात समावेश झाला म्हणून सारणी तयार करण्याच्या या पद्धतीला समावेशक पद्धती म्हणतात. 6 ते 10, 11 ते15, 16 ते 20 या वर्गांना खंडित वर्ग म्हणतात.

6 ते 10, 11 ते15 आणि 16 ते 20 हे वर्ग घेऊन वरील सामग्रीची वारंवारता वितरण सारणी तयार करू.

वर्गीकृत वारंवारता सारणी (समावेशक पद्धती)

वर्ग	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
6 ते 10	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$	**10**
11 ते 15	.....	.....
16 ते 20	.....	20
		N = 50

जाणून घेऊया.

सांख्यिकीमधील काही संज्ञा (Basic terms in statistics)

(1) **वर्ग (Class) :** प्राप्तांकाच्या सोईस्कर आकाराच्या गटांना वर्ग असे म्हणतात.
6 ते 10, 11 ते15 हे वर्ग 6−10, 11−15 असेही लिहितात.

(2) **वर्गमर्यादा (Class limits) :** वर्ग दर्शवणाऱ्या संख्यांना वर्गमर्यादा म्हणतात.
6 ते 10 या वर्गाची 6 ही खालची वर्गमर्यादा व 10 ही वरची वर्गमर्यादा आहे.

(3) **वारंवारता (Frequency) :** प्रत्येक वर्गात जेवढे प्राप्तांक येतात, त्या प्राप्तांकाच्या एकूण संख्येस त्या वर्गाची वारंवारता म्हणतात.
वरील सारणीत 11 ते 15 या वर्गात 20 प्राप्तांक येतात. 11 ते 15 या वर्गाची वारंवारता 20 आहे असे म्हणतात.

4. **वर्गांतर किंवा वर्गअवकाश** (Class width) : अखंडित वर्ग दिले असताना लगत येणाऱ्या दोन वर्गांच्या खालच्या (किंवा वरच्या) मर्यादांतील फरकाला वर्गांतर असे म्हणतात.

उदा. 5 - 10, 10 - 15, 15 - 20, ... असे वर्ग असल्यास, 5-10 चे वर्गांतर = 10 - 5 = 5 आहे.

5. **वर्गमध्य** (Class mark) : वर्गाच्या खालच्या व वरच्या वर्गमर्यादेच्या सरासरीस वर्गमध्य म्हणतात.

$$\text{वर्गमध्य} = \frac{\text{खालची वर्गमर्यादा} + \text{वरची वर्गमर्यादा}}{2}$$

उदा. 11 ते 15 या वर्गाचा वर्गमध्य $= \frac{\square + \square}{2} = \frac{26}{2} = 13$

(2) असमावेशक पद्धती (अखंडित वर्ग) (Exclusive method)

उदा. 6, 10, 10.3, 11, 15.7, 19, 20, 12, 13 हे प्राप्तांक दिले आहेत.
6-10, 11-15, 16-20 असे वर्ग घेऊन याची वर्गीकृत वारंवारता सारणी तयार करा.

उकल :

वर्ग (प्राप्तांक)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f)
6-10	||	**2**
11-15	|||	**3**
16-20	||	**2**

वरील सारणीत दिलेल्या प्राप्तांकांपैकी 10.3 व 15.7 हे दोन प्राप्तांक समाविष्ट करता आले नाहीत.

कारण 10.3, 15.7 ह्या संख्या 6-10, 11-15, 16-20 ह्यापैकी कोणत्याही वर्गात समाविष्ट होत नाहीत. याकरिता वर्गरचना बदलावी लागेल. म्हणून हे वर्ग 5-10, 10-15, 15-20, ... याप्रमाणे सलग लिहिल्यास वरील प्रश्न निर्माण होणार नाही. परंतु 10 या प्राप्तांकांची नोंद 5-10, 10-15 यांपैकी कोणत्या वर्गात करायची हा प्रश्न निर्माण होतो. ही अडचण दूर करण्यासाठी 10 हा प्राप्तांक 5-10 या वर्गात न घेता 10-15 या वर्गात समाविष्ट करावा असा संकेत मानतात. म्हणून 10 ची नोंद 10-15 या वर्गात होईल. या पद्धतीला असमावेशक पद्धती म्हणतात. अशा प्रकारे वर्ग घेतल्यामुळे 10.3 व 15.7 या संख्यांचा सारणीमध्ये समावेश करता आला.

आता याप्रमाणे वर्ग घेऊन आणि संकेत पाळून तयार केलेली सारणी पाहा.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी **(असमावेशक पद्धती)**

वर्ग (अखंडित) गुण	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
5-10	|	1
10-15	~~||||~~	5
15-20	||	2
20-25	|	1

हे लक्षात ठेवूया.

वारंवारता वितरण सारणी

अवर्गीकृत

इयत्ता नववीतील विद्यार्थ्यांची वये	विद्यार्थ्यांची संख्या
14	12
15	23
16	10

वर्गीकृत

समावेशक पद्धती (खंडित वर्ग)

बुटाचा क्रमांक	विद्यार्थी संख्या
2-4	12
5-7	29
8-10	7

असमावेशक पद्धती (अखंडित वर्ग)

उंची (सेमी)	विद्यार्थी संख्या
145-150	18
150-155	27
155-160	3

सरावसंच 7.3

(1) 20 ते 25 या वर्गाची खालची व वरची मर्यादा लिहा.

(2) 35 ते 40 या वर्गाचा वर्गमध्य काढा.

(3*) एका वर्गाचा मध्य 10 असून वर्गअवकाश 6 आहे, तर तो वर्ग कोणता ?

(4) खालील सारणी पूर्ण करा.

वर्ग (वय वर्षे)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
12-13	𝍸	$\boxed{}$
13-14	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	$\boxed{}$
14-15		$\boxed{}$
15-16	𝍷𝍷𝍷𝍷	$\boxed{}$
		$N=\sum f = 35$

(5) एका शाळेच्या हरितसेनेतील 45 विद्यार्थ्यांपैकी प्रत्येकाने केलेल्या वृक्षारोपणाची संख्या खाली दिली आहे.
3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5 , 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.
यावरून अवर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(6) π ची 50 दशांश स्थळांपर्यंत किंमत खाली दिलेली आहे.
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510
यावरून दशांश चिन्हानंतरच्या अंकांची अवर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(7*) खालील सारणीतील माहितीवरून वर्गांतर काढा व अखंडित वर्ग व खंडित वर्ग असणारी वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(i)

वर्गमध्य	वारंवारता
5	3
15	9
25	15
35	13

(ii)

वर्गमध्य	वारंवारता
22	6
24	7
26	13
28	4

(8) एका शाळेतील इयत्ता 9 वीच्या 46 विद्यार्थ्यांना त्यांच्या कंपासमधील पेन्सिलींची लांबी मोजावयास सांगितली. ती सेंटिमीटरमध्ये खालीलप्रमाणे आहे.

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16,
5.5, 9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5,
7.2, 4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7,
14.5, 10

0-5, 5-10, 10-15, ... याप्रमाणे वर्ग घेऊन असमावेशक पद्धतीने वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(9) एका गावातील सहकारी दूध संकलन केंद्रावर 50 व्यक्तींनी प्रत्येकी किती लीटर दूध जमा केले आहे त्याची माहिती खाली दिली आहे.

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,
7, 35

योग्य वर्ग घेऊन वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(10) एका संस्थेला 'दिव्यांग विकास निधी' साठी गावातील 38 लोकांनी प्रत्येकी काही रुपये दिले, ही माहिती खाली दिली आहे.

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,
250, 100

(i) 100-149, 150-199, 200-249, ... असे वर्ग घेऊन वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(ii) सारणीवरून 350 रुपये व त्यापेक्षा अधिक निधी देणाऱ्यांची संख्या किती आहे हे लिहा.

जाणून घेऊया.

वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणी (Less than cumulative frequency)

उदा. इयत्ता 9 वीच्या एका शाळेतील 50 विद्यार्थ्यांनी प्रथम घटक चाचणीत गणितात 40 पैकी मिळवलेल्या गुणांची वारंवारता वितरण सारणी पुढे दिली आहे.

वर्ग	वारंवारता(विद्यार्थी संख्या) (f)
0-10	02
10-20	12
20-30	20
30-40	16
	एकूण N = 50

(1) सारणीवरून खालील विधानातील रिकाम्या जागा भरा.

(i) 10 ते 20 या वर्गाची खालची वर्गमर्यादा $\square$ व वरची वर्गमर्यादा $\square$ आहे.

(ii) 10 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? $\boxed{2}$

(iii) 20 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? $2 + \square = 14$

(iv) 30 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? $\square + \square = 34$

(v) 40 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? $\square + \square = 50$

हे लक्षात ठेवूया.

एखाद्या विशिष्ट वर्गाची वारंवारता आणि त्या वर्गाच्या आधीच्या सर्व वर्गांच्या वारंवारता यांच्या बेरजेला त्या वर्गाची वरच्या मर्यादेपेक्षा कमी प्रकारची (Less than cumulative frequency) संचित वारंवारता म्हणतात. थोडक्यात हिला 'पेक्षा कमी संचित वारंवारता' सुद्‌धा म्हणतात.

वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणीचा अर्थ

वर्ग (गुण)	वारंवारता	पेक्षा कमी संचित वारंवारता
0-10	2	2
10-20	12	$2 + 12 = \square$
20-30	20	$\square + 20 = 34$
30-40	16	$34 + \square = 50$
एकूण 50		

वर्ग	संचित वारंवारता	वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमीचा अर्थ
0-10	2	2 विद्यार्थ्यांना 10 पेक्षा कमी गुण
10-20	14	14 विद्यार्थ्यांना 20 पेक्षा कमी गुण
20-30	34	34 विद्यार्थ्यांना 30 पेक्षा कमी गुण
30-40	50	50 विद्यार्थ्यांना 40 पेक्षा कमी गुण
एकूण 50		

(2) खालच्या वर्गमर्यादेएवढी किंवा त्यापेक्षा जास्त संचित वारंवारता सारणी

वर्ग	वारंवारता	संचित वारंवारता
0–10	2	50
10–20	12	50 – 2 = 48
20–30	20	48 – 12 = 36
30–40	16	36 – 20 = 16
एकूण 50		

वर्ग	संचित वारंवारता	खालची वर्गमर्यादा किंवा खालच्या वर्गमर्यादेपेक्षा जास्तचा अर्थ
0–10	50	50 विद्यार्थ्यांना 0 किंवा 0 पेक्षा जास्त गुण मिळाले
10–20	48	48 विद्यार्थ्यांना 10 किंवा10 पेक्षा जास्त गुण मिळाले
20–30	36	36 विद्यार्थ्यांना 20 किंवा 20 पेक्षा जास्त गुण मिळाले
30–40	16	16 विद्यार्थ्यांना 30 किंवा 30 पेक्षा जास्त गुण मिळाले.

उदा. एका स्पोर्ट्स क्लबच्या टेबलटेनिसच्या सामन्यांसाठी आलेल्या खेळाडूंच्या वयांचे वर्गीकरण खालील सारणीत दिले आहे. त्यावरून खालची वर्गमर्यादा किंवा तिच्याहून जास्त वारंवारता सारणी पूर्ण करा.

उकल : खालच्या वर्गमर्यादेपेक्षा जास्त संचित वारंवारता सारणी

वय (वर्ष)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (विद्यार्थी संख्या)	खालची वर्गमर्यादा किंवा तिच्याहून जास्त संचित वारंवारता
10–12	𝍸 ||||	09	50
12 – 14	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	$\square$	$\square$ – 9 = 41
14–16	𝍸 𝍸 |||	$\square$	41 – 23 = $\square$
15 – 16	𝍸	05	$\square$ – 13 = $\square$
		एकूण N = 50	

सरावसंच 7.4

(1) खालील संचित वारंवारता सारणी पूर्ण करा

वर्ग (उंची –सेमी मध्ये)	वारंवारता (विद्यार्थी संख्या)	पेक्षा कमी संचित वारंवारता
150–153	05	05
153–156	07	05+ $\square$ = $\square$
156–159	15	$\square$ + 15 = $\square$
159–162	10	$\square$ + $\square$ = 37
162–165	05	37+5=42
165–168	03	$\square$ + $\square$ = 45
	एकूण N = 45	

(2) खालील संचित वारंवारता सारणी पूर्ण करा.

वर्ग (मासिक उत्पन्न रुपये)	वारंवारता (व्यक्तींची संख्या)	पेक्षा जास्त किंवा तेवढीच संचित वारंवारता
1000-5000	45	....
5000-10000	19	....
10000-15000	16	....
15000-20000	02	....
20000-25000	05	....
	एकूण N = 87	

(3) एका वर्गातील 62 विद्यार्थ्यांना गणित विषयात 100 पैकी मिळालेले गुण खाली दिले आहेत.
0-10, 10-20 ..... हे वर्ग घेऊन वारंवारता सारणी आणि संचित वारंवारता सारणी (पेक्षा जास्त) तयार करा.

55, 60, 81, 90, 45, 65, 45, 52, 30, 85, 20, 10,
75, 95, 09, 20, 25, 39, 45, 50, 78, 70, 46, 64,
42, 58, 31, 82, 27, 11, 78, 97, 07, 22, 27, 36,
35, 40, 75, 80, 47, 69, 48, 59, 32, 83, 23, 17,
77, 45, 05, 23, 37, 38, 35, 25, 46, 57, 68, 45,
47, 49

तयार केलेल्या सारणीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) 40 किंवा 40 पेक्षा अधिक गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती?
(ii) 90 किंवा 90 पेक्षा अधिक गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(iii) 60 किंवा 60 पेक्षा अधिक गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती
(iv) 0-10 या वर्गाची पेक्षा जास्त किंवा तेवढीच संचित वारंवारता किती?

(4) वरील उदाहरण (3) साठी पेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणी तयार करा यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) 40 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती?
(ii) 10 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(iii) 60 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती?
(iv) 50-60 या वर्गाची पेक्षा कमी संचित वारंवारता किती?

जाणून घेऊया.

केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे : (Measures of central tendancy)

केंद्रीय प्रवृत्ती : सर्वेक्षणाने मिळवलेल्या सांख्यिक सामग्रीमध्ये सामान्यपणे एक गुणधर्म आढळतो. सामग्रीतील एखाद्या संख्येच्या आसपास इतर संख्यांची गर्दी अधिक झालेली दिसते. समूहाच्या या गुणधर्माला समूहाची केंद्रीय प्रवृत्ती म्हणतात.

समूहातील ज्या संख्येच्या आसपास इतर संख्यांची अधिक गर्दी असते, ती संख्या त्या समूहाचे प्रतिनिधित्व करते असे मानतात. अशा संख्येला केंद्रीय प्रवृत्तीचे परिमाण म्हणतात.

सांख्यिकीमध्ये केंद्रिय प्रवृत्तीची पुढील परिमाणे प्रामुख्याने वापरली जातात.

(1) **मध्य (Mean) :** सामग्रीतील सर्व संख्यांच्या अंकगणितीय सरासरीला त्या सामग्रीचा मध्य असे म्हणतात.

$$\text{सामग्रीचा 'मध्य'} = \frac{\text{सामग्रीतील सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{सामग्रीतील प्राप्तांकांची एकूण संख्या}}$$

उदा (1) 25, 30, 27, 23 आणि 25 या प्राप्तांकांचा मध्य काढा.

उकल : $\frac{25+30+27+23+25}{5} = \frac{130}{5} = 26$

उदा (2) इयत्ता नववीच्या 35 विद्यार्थ्यांना प्रथम सत्र परीक्षेत बीजगणितात 40 पैकी मिळालेले गुण खालीलप्रमाणे आहेत. त्यावरून गुणांचा मध्य काढा.

40, 35, 30, 25, 23, 20, 14, 15, 16, 20, 17, 37,
37, 20, 36, 16, 30, 25, 25, 36, 37, 39, 39, 40,
15, 16, 17, 30, 16, 39, 40, 35, 37, 23, 16.

उकल : येथे प्राप्तांकाची संख्या जास्त असल्यामुळे बेरीज तर करता येईल, परंतु आकडेमोड क्लिष्ट होईल. येथे 3 विद्यार्थ्यांना प्रत्येकी 30 गुण आहेत. त्यांच्या गुणांची बेरीज 30 + 30 + 30 = 90 अशी करण्याऐवजी 30 × 3 = 90 अशी करणे सोईचे आहे. त्यासाठी वारंवारता सारणी उपयोगी पडते.

संख्याशास्त्रात $\sum_{i=1}^{n}$ हे चिन्ह वापरणे खूप सोईचे असते. $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ याचा अर्थ समजून घेऊ.

i हा धन पूर्णांक आहे.

f_i विद्यार्थ्यांना प्रत्येकी x_i गुण मिळाले असे समजू. Σ (सिग्मा) हे चिन्ह बेरजेसाठी वापरले जाते. $\sum_{i=1}^{n}$ हे चिन्ह i च्या 1 ते n या किमतींसाठी n पदांची बेरीज ठरवते.

गुण	विद्यार्थी संख्या	$f_i \times x_i$
14	1	14 × 1 = 14
15	2	15 × 2 = ...
16	5	16 × .... = ...
17	2	17 × 2 = 34
20	3	.... × 3 = ...
23	2	23 × 2 = ...
25	3	25 × 3 = ...
30	3	.... × .... = ...
35	2	35 × 2 = 70
36	2	.... × .... = ...
37	4	..... × .... = ...
39	3	39 × 3 = 117
40	3	.... × .... = 120
	N= $\boxed{}$	$\sum f_i x_i = 956$

$$\text{मध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$$

$$= 27.31 \text{ (अंदाजे)}$$

∴ दिलेल्या सामग्रीचा मध्य 27.31 आहे.

(2) **मध्यक (Median) :** सामग्रीतील संख्या चढत्या (किंवा उतरत्या) क्रमाने मांडतात. या मांडणीतील मध्यभागी येणाऱ्या संख्येला त्या सामग्रीचा मध्यक म्हणतात.

सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या सम असेल तर मध्यावर येणाऱ्या दोन संख्यांची सरासरी हा मध्यक मानतात.

उदा. (1) 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 या सामग्रीचा मध्यक काढा.

उकल : दिलेले प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडू.

54, 63, 66, **72**, 78, 87, 92

या मांडणीत चौथी संख्या मध्यावर येते, ती 72 आहे.

$\therefore$ दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक = 72

उदा. (2) 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33, 21, 43 या सामग्रीचा मध्यक काढा.

उकल : दिलेले प्राप्तांक चढत्या क्रमाने लिहू.

21, 23, 25, 30, **32**, **33**, 36, 40, 42, 43

येथे प्राप्तांकांची संख्या 10, म्हणजे सम आहे.

$\therefore$ पाचवी व सहावी अशा दोन संख्या मध्यावर येतील. त्या अनुक्रमे 32 व 33 आहेत.

$\therefore$ सामग्रीचा मध्यक $= \frac{32+33}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

विचार करूया.

सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या n असताना,

(i) n विषम असेल तर कितवा प्राप्तांक त्या सामग्रीचा मध्यक असेल ?

(ii) n सम असताना कितव्या दोन प्राप्तांकांची सरासरी त्या सामग्रीचा मध्यक असेल ?

(3) **बहुलक (Mode) :** सामग्रीमध्ये सर्वाधिक वेळा येणारा प्राप्तांक म्हणजे त्या सामग्रीचा बहुलक होय.

उदा. (1) 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95 या सामग्रीचा बहुलक काढा.

उकल : सामग्रीतील प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडले तर कोणता प्राप्तांक सर्वाधिक वेळा आला आहे, हे ओळखणे सोपे जाईल.

दिलेल्या सामग्रीचा चढता क्रम : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 75 90, 95

यावरून सर्वाधिक वेळा आलेला प्राप्तांक = 55

$\therefore$ दिलेल्या सामग्रीचा बहुलक 55.

उदा (2) एका कारखान्यातील कामगारांची वये खालील सारणीत दिली आहेत.

वय (वर्षे)	19	21	25	27	30
कामगार	5	15	13	15	7

यावरून त्यांच्या वयाचा बहुलक काढा.

उकल : येथे सर्वाधिक वारंवारता 15 आहे. परंतु ही वारंवारता दोन प्राप्तांकांची आहे.

$\therefore$ बहुलक = 21 व 27 $\therefore$ वयाचा बहुलक 21 वर्षे व 27 वर्षे

सरावसंच 7.5

(1) मुकुंदचे 7 वर्षांचे सोयाबीनचे एकरी उत्पन्न क्विंटलमध्ये 10,7,5,3,9,6,9 असे आहे. यावरून एकरी उत्पन्नाचा मध्य काढा.

(2) दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक काढा. 59,75,68,70,74,75,80

(3) गणिताच्या गृहपाठांत 7 विद्यार्थ्यांना मिळालेले 100 पैकी गुण खालीलप्रमाणे आहेत.
99, 100, 95, 100, 100, 80, 90 यावरून मिळालेल्या गुणांचे बहुलक काढा.

(4) एका कारखान्यातील 30 कामगारांना मिळत असलेला मासिक पगार रुपयांमध्ये खालीलप्रमाणे आहे.
5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000
यावरून कामगारांचा मासिक पगाराचा मध्य काढा.

(5) एका टोपलीतील 10 टोमॅटोंचे वजन ग्रॅममध्ये प्रत्येकी 60, 70, 90, 95, 50, 65,70, 80, 85, 95 अशी आहेत. यावरून टोमॅटोंच्या वजनांचा मध्यक काढा.

(6) एका हॉकी खेळाडूने 9 सामन्यांत केलेले गोल खालीलप्रमाणे आहेत.
5, 4, 0, 2, 2, 4, 4, 3, 3 यावरून मध्य, मध्यक व बहुलक काढा.

(7) 50 प्राप्तांकांचा मध्य 80 आला. परंतु यांतील 19 हा प्राप्तांक चुकून 91 घेण्यात आला असे नंतर लक्षात आले, तर दुरुस्तीनंतरचा मध्य किती?

(8) येथे 10 प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडलेले आहेत, 2, 3, 5, 9, $x + 1$, $x + 3$, 14, 16, 19, 20 जर त्यांचा मध्यक 11 आहे तर x ची किंमत काढा.

(9*) 35 प्राप्तांकांचा मध्य 20 आहे. यांपैकी पहिल्या 18 प्राप्तांकांचा मध्य 15 व शेवटच्या 18 प्राप्तांकांचा मध्य 25 असेल तर 18 वा प्राप्तांक काढा.

(10) पाच प्राप्तांकांचा मध्य 50 आहे. यांपैकी एक प्राप्तांक कमी झाल्यास मध्य 45 होतो, तर तो प्राप्तांक कोणता?

(11*) एका वर्गात 40 विद्यार्थी असून त्यांपैकी 15 मुलगे आहेत. एका परीक्षेत मुलग्यांना मिळालेल्या गुणांचा मध्य 33 व मुलींच्या गुणांचा मध्य 35 आहे यावरून वर्गातील एकूण विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गुणांचा मध्य काढा.

(12) 10 विद्यार्थ्यांची किलोग्रॅममधील वजने खालीलप्रमाणे आहेत.
40, 35, 42, 43, 37, 35, 37, 37, 42, 37 यावरून बहुलक काढा..

(13) खालील सारणीत काही कुटुंबांतील 14 वर्षांखालील अपत्यांची संख्या दर्शवली आहे. यावरून 14 वर्षाखालील अपत्यांच्या संख्यांचा बहुलक काढा.

अपत्यांची संख्या	1	2	3	4
कुटुंबे (वारंवारता)	15	25	5	5

(14) खालील सामग्रीचा बहुलक काढा.

प्राप्तांक (गुण)	35	36	37	38	39	40
विद्यार्थी संख्या	09	07	09	04	04	02

'केंद्रीय प्रवृत्तीचे कोणते परिमाण घेणे योग्य असते ?' या प्रश्नाचे उत्तर, ते कोणत्या हेतूने निवडायचे याच्याशी संबंधित असते.

समजा, एखाद्या क्रिकेटच्या खेळाडूने सलग अकरा सामन्यांमध्ये अनुक्रमे 41, 58, 35, 80, 23, 12, 63, 48, 107, 9 आणि 73 धावा काढल्या. त्याचे एकूण कर्तृत्व ठरवताना त्याने प्रत्येक सामन्यात काढलेल्या धावा विचारात घेणे आवश्यक आहे. म्हणून त्याच्या धावांची केंद्रीय प्रवृत्ती 'मध्य' या परिमाणाने ठरवणे योग्य होईल.

तसेच कपडे तयार करणाऱ्या एखाद्या कंपनीला कोणत्या मापाचे शर्ट जास्त संख्येने शिवावे ते ठरवायचे आहे. त्यासाठी (34, 36, 38, 40, 42, 44 यांपैकी) कोणत्या मापाचे शर्ट अधिकाधिक लोक वापरतात हे सर्वेक्षणाने शोधावे लागेल. म्हणजे केंद्रीय प्रवृत्तीचे 'बहुलक' हे परिमाण निवडणे योग्य होईल.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

(1) योग्य पर्याय निवडा.

(i) खालीलपैकी कोणती सामग्री प्राथमिक सामग्री नाही ?

(A) वर्गाला भेट देऊन विद्यार्थ्यांच्या हजेरीची माहिती गोळा केली.

(B) प्रत्यक्ष भेट देऊन घरातील व्यक्तींच्या संख्येची माहिती गोळा केली.

(C) तलाठ्याकडे जाऊन गावातील प्रत्येक शेतकऱ्याचे सोयाबीनच्या लागवडीखालील क्षेत्र नोंदवले.

(D) प्रत्यक्ष पाहणी करून नाल्यांच्या स्वच्छतेची माहिती घेतली.

(ii) 25-35 ह्या वर्गाची वरची वर्गमर्यादा कोणती ?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) 25-35 ह्या वर्गाचा वर्गमध्य कोणता?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) 0-10, 10-20, 20-30 .... असे वर्ग असणाऱ्या वारंवारता सारणीत 10 हा प्राप्तांक कोणत्या वर्गात समाविष्ट करावा ?

(A) 0-10 (B) 10-20 (C) 0-10 व 10-20 ह्या दोन्ही वर्गांत (D) 20-30

(v*) जर $\bar{x}$ हा $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ आणि $\bar{y}$ हा $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n$ चा मध्य असेल आणि $\bar{z}$ हा $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n$ यांचा मध्य असेल तर $\bar{z}$ = ?

(A) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ (B) $\bar{x}+\bar{y}$ (C) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{n}$ (D) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2n}$

(vi*) पाच संख्यांचा मध्य 50 असून त्यांतील 4 संख्यांचा मध्य 46 आहे, तर पाचवी संख्या कोणती ?

(A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

(vii*) 100 प्राप्तांकांचा मध्य 40 आहे. जर त्यांतील 9 वा प्राप्तांक 30 आहे. त्याच्या जागी 70 घेतले व उरलेले प्राप्तांक तसेच ठेवले तर नवीन मध्य कोणता आहे ?

(A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15 ह्या सामग्रीचा बहुलक कोणता ?

(A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) 7, 10, 7, 5, 9, 10 ह्या सामग्रीचा मध्यक कोणता?

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) खालील सारणीनुसार 30-40 ह्या वर्गाची वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता किती?

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
वारंवारता	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 कर्मचाऱ्यांच्या पगारांचा मध्य 10,250 रुपये आहे. जर त्यामध्ये कार्यालय प्रमुखाचा पगार मिळवला तर मध्य 750 रुपयांनी वाढतो, तर कार्यालय प्रमुखाचा पगार काढा.

(3) नऊ संख्यांचा मध्य 77 आहे, जर त्यांच्यामध्ये पुन्हा एक संख्या मिळवली असता मध्य 5 ने वाढतो, तर मिळवलेली संख्या कोणती?

(4) एका शहराचे एका महिन्याचे दररोजचे कमाल तापमान सेल्सिअस अंशांमध्ये खालीलप्रमाणे आहे. योग्य वर्ग घेऊन वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी (सलग वर्ग) तयार करा.

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2

सारणीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) कमाल तापमान $34^{\circ}c$ पेक्षा कमी असणारे दिवस किती?

(ii) कमाल तापमान $34^{\circ}c$ किंवा त्यापेक्षा जास्त असणारे दिवस किती ?

(5) जर खालील प्राप्तांकांचा मध्य 20.2 असेल तर p ची किंमत काढा–

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	p	10	6

(6) मॉडेल हायस्कूल नांदपूर येथील इयत्ता 9 वीच्या 68 विद्यार्थ्यांनी लेखी परीक्षेत गणितात 80 पैकी मिळवलेले गुण खाली दिले आहेत.

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

30-40, 40-50 ...... हे वर्ग घेऊन वरच्या वर्ग मर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणी तयार करा. त्या सारणीच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) 80 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती?

(ii) 40 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?

(iii) 60 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती

(7) उदा. 6 मधील सामग्रीच्या आधारे 30-40, 40-50 .... असे वर्ग घेऊन खालच्या वर्ग मर्यादेपेक्षा जास्त संचित वारंवारता सारणी तयार करा. यावरून

(i) 70 किंवा 70 पेक्षा जास्त गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?

(ii) 30 किंवा 30 पेक्षा जास्त गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?

(8) खालील 10 प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडलेले आहेत.

45,47,50,52,x, x+2, 60,62,63,74 यांचा मध्यक 53 आहे. यावरून x ची किंमत काढा. तसेच दिलेल्या सामग्रीचा मध्य व बहुलक काढा.

◈ ◈ ◈

गणिती गंमत

पास्कलचा त्रिकोण किंवा मेरूप्रस्तर

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

....

....

....

संख्यांचा वरील आकृतिबंध त्रिकोणाकार मांडणीत आहे. ही मांडणी पास्कलचा त्रिकोण म्हणून ओळखली जाते. या मांडणीतील पुढील तीन ओळी तुम्ही लिहा. या मांडणीत आडव्या ओळींत येणाऱ्या संख्या $(x + y)$ या द्विपदीच्या घातांच्या विस्ताराचे क्रमवार येणारे सहगुणक असतात. खालील विस्तार पाहा.

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = 1x + 1y$

$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

या विस्तारांतील x आणि y च्या घातांकांचे निरीक्षण करा. त्यावरून $(x + y)^{10}$ चा विस्तार लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

उत्तरसूची

1. संच

सरावसंच 1.1

(1) (i) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ (ii) $\{2\}$ (iii) $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ (iv) {सा, रे, ग, म, प, ध, नी}

(2) (i) $\frac{4}{3}$ हा संच Q चा घटक आहे. (ii) -2 हा संच N चा घटक नाही.

(iii) संच P चे घटक p असे आहेत की p ही विषम संख्या आहे.

(4) (i) A = {चैत्र, वैशाख, ज्येष्ठ, आषाढ, श्रावण, भाद्रपद, अश्विन, कार्तिक, अग्रहायण, पौष, माघ, फाल्गुन}

(ii) $X = \{C, O, M, P, L, E, N, T\}$ (iii) Y = {नाक, कान, डोळे, जीभ, त्वचा}

(iv) $Z = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

(v) E = {आशिया, आफ्रिका, युरोप, ऑस्ट्रेलिया, अंटार्क्टिका, दक्षिण अमेरिका, उत्तर अमेरिका}

(5) (i) $A = \{x | x = n^2, n \in N, n \leq 10\}$ (ii) $B = \{x | x = 6n, n \in N, n < 9\}$

(iii) C = {y | y हे 'SMILE' या शब्दातील अक्षर आहे.}

(iv) D = {z | z हा आठवड्यातील दिवस आहे.} (v) X = {y | y हे 'eat' या शब्दातील अक्षर आहे}

सरावसंच 1.2

(1) $A = B = C$ (2) $A = B$ (3) संच A आणि C हे रिक्त संच आहेत.

(4) (i), (iii), (iv), (v) या उदाहरणातील संच सांत संच आहेत तर (ii), (vi), (vii) यांतील संच अनंत संच आहेत.

सरावसंच 1.3

(1) (i), (ii), (iii), (v) यांतील विधाने असत्य तर (iv), (vi) यांतील विधाने सत्य आहेत.

(4) $\{1\}, \{3\}, \{2\}, \{7\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 7\}, \{3, 2\}, \{3, 7\}, \{2, 7\}, \{1, 3, 2\}, \{1, 3, 2, 7\}$ यांसारखे कोणतीही 3.

(5) (i) $P \subseteq H,\ P \subseteq B,\ I \subseteq M,\ I \subseteq B,\ H \subseteq B,\ M \subseteq B$ (ii) संच B

(6) (i) N, W, I यांपैकी कोणताही संच (ii) N, W, I यांपैकी कोणताही संच

(7) गणितात 50% पेक्षा कमी गुण मिळवणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच

सरावसंच 1.4

(1) $n(B) = 21$ (2) एकही पेय न घेणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या = 5

(3) एकूण विद्यार्थ्यांची संख्या = 70

(4) गिरिभ्रमण व आकाशदर्शन या दोन्हींपैकी कशाचीच आवड नसणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या = 20

फक्त गिरिभ्रमण आवडणारे विद्यार्थी = 20, फक्त आकाशदर्शन आवडणारे विद्यार्थी = 70

(5) (i) $A = \{x, y, z, m, n\}$ (ii) $B = \{p, q, r, m, n\}$

(iii) $A \cup B = \{x, y, z, m, n, p, q, r\}$ (iv) $U = \{x, y, z, m, n, p, q, r, s, t\}$

(v) $A' = \{p, q, r, s, t\}$ (vi) $B' = \{x, y, z, s, t\}$ (vii) $(A \cup B)' = \{s, t\}$

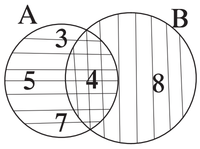
संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

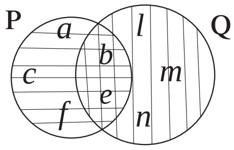
(1) (i) (C) (ii) (D) (iii) (C) (iv) (B) (v) (A) (vi) (A)

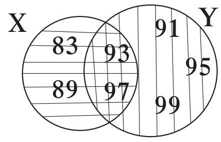
(2) (i) (A) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)

(3) फक्त इंग्रजी बोलणारे 57, फक्त फ्रेंच बोलणारे 28, दोन्ही भाषा बोलणारे 15

(4) 135 (5) 12 (6) 4

(7) (i) 

(ii) 

(iii) 

(8) $S \subseteq X$, $V \subseteq X$, $S \subseteq X$, $T \subseteq X$, $S \subseteq Y$, $S \subseteq V$, $S \subseteq T$, $V \subseteq T$, $Y \subseteq T$,

(9) $M \cup \phi = M$, $M \cap \phi = \phi$

(10) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$, $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ $B = \{1, 5, 8, 9, 10\}$
$M \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{1, 5\}$

(11) $n(A \cup B) = 16$

2. वास्तव संख्या

सरावसंच 2.1

(1) खंडित : (i), (iii), (iv) अखंड आवर्ती : (ii), (v)

(2) (i) 0.635 (ii) $0.\overline{25}$ (iii) $3.\overline{285714}$ (iv) 0.8 (v) 2.125

(3) (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{37}{99}$ (iii) $\frac{314}{99}$ (iv) $\frac{1574}{99}$ (v) $\frac{2512}{999}$

सरावसंच 2.2

(4) (i) −0.4, −0.3, 0.2 यांसारख्या असंख्य संख्या

(ii) −2.310, −2.320, −2.325 यांसारख्या असंख्य संख्या

(iii) 5.21, 5.22, 5.23 यांसारख्या असंख्य संख्या

(iv) −4.51, −4.55, −4.58 यांसारख्या असंख्य संख्या

सरावसंच 2.3

(1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 2 (v) 3

(2) (i), (iii), (vi) करणी आहे. व (ii), (iv), (v) करणी नाही.

(3) सजातीय करणी: (i), (iii), (iv) व विजातीय करणी : (ii), (v), (vi)

(4) (i) $3\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{10}$ (iv) $4\sqrt{7}$ (v) $2\sqrt{42}$

(5) (i) $7\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247} < \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5} < 7\sqrt{5}$ (v) $4\sqrt{42} > 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3} < 9$ (vii) $7 > 2\sqrt{5}$

(6) (i) $13\sqrt{5}$ (ii) $10\sqrt{5}$ (iii) $24\sqrt{3}$ (iv) $\frac{12}{5}\sqrt{7}$

(7) (i) 54 (ii) $126\sqrt{5}$ (iii) $6\sqrt{10}$ (iv) 80

(8) (i) 7 (ii) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{62}$.

(9) (i) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{14}}{14}$ (iii) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ (iv) $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (v) $\frac{11}{3}\sqrt{3}$

सरावसंच 2.4

(1) (i) $-3+\sqrt{21}$ (ii) $\sqrt{10}-\sqrt{14}$ (iii) $-18+13\sqrt{6}$

(2) (i) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$ (ii) $\frac{3\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}{2}$ (iii) $28-16\sqrt{3}$ (iv) $4-\sqrt{15}$

सरावसंच 2.5

(1) (i) 13 (ii) 5 (iii) 28 (2) (i) 2 किंवा $\frac{4}{3}$ (ii) 1 किंवा 6 (iii) -2 किंवा 18 (iv) 0 किंवा -40

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

(1) (i) B (ii) D (iii) C (iv) D (v) A

(vi) C (vii) C (viii) C (ix) C (x) B

(2) (i) $\frac{555}{1000}$ (ii) $\frac{29539}{999}$ (iii) $\frac{9306}{999}$ (iv) $\frac{357060}{999}$ (v) $\frac{30189}{999}$

(3) (i) $-0.\overline{714285}$ (ii) $0.\overline{81}$ (iii) 2.2360679... (iv) $9.\overline{307692}$ (v) 3.625

(5) (i) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (ii) $-\frac{5}{3}\sqrt{5}$

(6) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{10}$ (v) $\sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{11}$

(7) (i) $6\sqrt{3}$ (ii) $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ (iii) $\frac{15}{2}\sqrt{6}$ (iv) $-25\sqrt{3}$ (v) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

(8) (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ (iii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{37}$ (v) $\frac{6\left(4\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{23}$

3. बहुपदी

सरावसंच 3.1

(1) (i) नाही, कारण $\frac{1}{y}$ मध्ये y चा घातांक (-1) आहे.

(ii) नाही, कारण $5\sqrt{x}$ ला मध्ये x चा घातांक $\left(\frac{1}{2}\right)$ अपूर्णांक आहे.

(iii) आहे. (iv) नाही, कारण $2m^{-2}$ मध्ये घातांक (-2) आहे. (v) आहे.

(2) (i) 1 (ii) $-\sqrt{3}$, (iii) $-\frac{2}{3}$

(3) (i) x^7 (ii) $2x^{35}-7$ (iii) x^8-2x^5+3 या तिन्ही उदाहरणांत यांसारखी अनेक उत्तरे असू शकतात.

(4) (i) 0 (ii) 0 (iii) 2 (iv) 10 (v) 1 (vi) 5 (vii) 3 (viii) 10

(5) (i) वर्ग (ii) रेषीय (iii) रेषीय (iv) घन (v) वर्ग (vi) घन

(6) (i) $m^3 + 5m + 3$ (ii) $y^5 + 2y^4 + 3y^3 - y^2 - 7y - \frac{1}{2}$

(7) (i) (1, 0, 0, −2) (ii) (5, 0) (iii) (2, 0, −3, 0, 7) (iv) $\left(\frac{-2}{3}\right)$

(8) (i) $x^2 + 2x + 3$ (ii) $5x^4 - 1$ (iii) $-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

(9) वर्ग बहुपदी : x^2; $2x^2 + 5x + 10$; $3x^2 + 5x$; घन बहुपदी : $x^3 + x^2 + x + 5$; $x^3 + 9$

रेषीय बहुपदी : $x + 7$; द्विपदी : $x + 7$, $x^3 + 9$; त्रिपदी : $2x^2 + 5x + 10$; एकपदी : x^2

सरावसंच 3.2

(1) (i) $a + bx$ (ii) xy (iii) $10n + m$

(2) (i) $6x^3 - 2x^2 + 2x$ (ii) $-2m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 3m - 6 + \sqrt{2}$ (iii) $5y^2 + 6y + 11$

(3) (i) $-6x^2 + 10x$ (ii) $10ab^2 + a^2b - 7ab$

(4) (i) $2x^3 - 4x^2 - 2x$ (ii) $x^8 + 2x^7 + 2x^5 - x^3 - 2x^2 - 2$ (iii) $-4y^4 + 7y^2 + 3y$

(5) (i) $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 0$

(ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2 = (x^2 - x)(5x^3 + 9x^2 + 6x + 8) + (8x + 2)$

(6) $a^4 + 7a^4 b^2 + 2b^4$

सरावसंच 3.3

(1) (i) भागाकार = $2m + 7$, बाकी = 45

(ii) भागाकार = $x^3 + 3x - 2$, बाकी = 9

(iii) भागाकार = $y^2 + 6y + 36$, बाकी = 0

(iv) भागाकार = $2x^3 - 3x^2 + 7x - 17$, बाकी = 51

(v) भागाकार = $x^3 - 4x^2 + 13x - 52$, बाकी = 200

(vi) भागाकार = $y^2 - 2y + 3$, बाकी = 2

सरावसंच 3.4

(1) 5 (2) 1 (3) $4a^2 + 20$ (4) −11

सरावसंच 3.5

(1) (i) −41 (ii) 7 (iii) 7 (2) (i) 1, 0, −8 (ii) 4, 5, 13 (iii) −2, 0, 10

(3) 0 (4) 2 (5) (i) 17 (ii) $2a^3 - a^2 - a$ (iii) 1544 (6) 92 (7) आहे

(8) 2 (9) (i) नाही (ii) आहे (10) 30 (11) आहे

(13) (i) −3 (ii) 80

सरावसंच 3.6

(1) (i) $(x + 1)(2x - 1)$ (ii) $(m + 3)(2m - 1)$ (iii) $(3x + 7)(4x + 11)$

(iv) $(y - 1)(3y + 1)$ (v) $(x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1)$ (vi) $(x - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

(2) (i) $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ (ii) $(x - 13)(x - 2)$

(iii) $(x-8)(x+2)(x-4)(x-2)$ (iv) $(x^2-2x+10)(x^2-2x-2)$

(v) $(y^2+5y-22)(y+4)(y+1)$ (vi) $(y+6)(y-1)(y+4)(y+1)$

(vii) $(x^2-8x+18)(x^2-8x+13)$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

(1) (i) D (ii) D (iii) C (iv) A (v) C (vi) A (vii) D (viii) C (ix) A (x) A

(2) (i) 4 (ii) 0 (iii) 9

(3) (i) $7x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 9$ (ii) $5p^4 + 2p^3 + 10p^2 + p - 8$

(4) (i) (1, 0, 0, 0, 16) (ii) (1, 0, 0, 2, 3, 15)

(5) (i) $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 7x + 18$ (ii) $6x^3 + x^2 + 0x + 7$ (iii) $4x^3 + 5x^2 - 3x + 0$

(6) (i) $10x^4 + 13x^3 + 9x^2 - 7x + 12$ (ii) $p^3q + 4p^2q + 4pq + 7$

(7) (i) $2x^2 - 7y + 16$ (ii) $x^2 + 5x + 2$

(8) (i) $m^7 - 4m^5 + 6m^4 + 6m^3 - 12m^2 + 5m + 6$

(ii) $5m^5 - 5m^4 + 15m^3 - 2m^2 + 2m - 6$

(9) बाकी = 19 (10) $m = 1$ (11) एकूण लोकसंख्या $= 10x^2 + 5y^2 - xy$

(12) $b = \frac{1}{2}$ (13) $11m^2 - 8m + 5$ (14) $-2x^2 + 8x + 11$ (15) $2m + n + 7$

4. गुणोत्तर प्रमाण

सरावसंच 4.1

(1) (i) 6 : 5 (ii) 2 : 3 (iii) 2 : 3

(2) (i) 25 : 11 (ii) 35 : 31 (iii) 2 : 1 (iv) 10 : 17 (v) 2 : 1 (vi) 220 : 153

(3) (i) 3 : 4 (ii) 11 : 25 (iii) 1 : 16 (iv) 13 : 25 (v) 4 : 625

(4) 4 माणसे (5) (i) 60% (ii) 94% (iii) 70% (iv) 91% (v) 43.75%

(6) आभाचे वय 18 वर्षे आईचे वय 45 वर्षे (7) 6 वर्षांनी (8) रेहानाचे आजचे वय 8 वर्षे.

सरावसंच 4.2

(1) (i) अनुक्रमे 20, 49, 2.5 (ii) अनुक्रमे 7, 27, 2.25

(2) (i) $1 : 2\pi$ (ii) $2 : r$ (iii) $\sqrt{2} : 1$ (iv) 34 : 35

(3) (i) $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18} > \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) 80° (ii) अल्बर्टचे आजचे वय 25 वर्षे, सलीमचे आजचे वय 45 वर्षे

(iii) लांबी 13.5 सेमी, रुंदी 4.5 सेमी (iv) 124, 92 (v) 20, 18

(5) (i) 729 (ii) 45 : 7 (6) 2 : 125 (7) $x = 5$

सरावसंच 4.3

(1) (i) 22 : 13 (ii) 125 : 71 (iii) 316 : 27 (iv) 38 : 11

(2) (i) 3 : 5 (ii) 1 : 6 (iii) 7 : 43 (iv) 71 : 179 (3) 170 : 173

(4) (i) $x = 8$ (ii) $x = 9$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 6$ (v) $x = \frac{9}{14}$ (vi) $x = 3$

सरावसंच 4.4

(1) (i) 36, 22 (ii) 16, $2a - 2b + 2c$

(2) (i) 29 : 21 (ii) 23 : 7 (4) (i) $x = 2$ (ii) $y = 1$

सरावसंच 4.5

(1) $x = 4$ (2) $x = \frac{347}{14}$ (3) 18, 12, 8 किंवा 8, 12, 18 (6) $\frac{x+y}{xy}$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

(1) (i) B (ii) A (iii) B (iv) D (v) C

(2) (i) 7 : 16 (ii) 2 : 5 (iii) 5 : 9 (iv) 6 : 7 (v) 6 : 7

(3) (i) 1 : 2 (ii) 5 : 4 (iii) 1 : 1

(4) (i) व (iii) परंपरित प्रमाणात आहेत (ii) व (iv) परंपरित प्रमाणात नाहीत. (5) $b = 9$

(6) (i) 7.4% (ii) 62.5% (iii) 73.33% (iv) 31.25% (v) 12%

(7) (i) 5 : 6 (ii) 85 : 128 (iii) 1 : 2 (iv) 50 : 1 (v) 3 : 5

(8) (i) $\frac{17}{9}$ (ii) 19 (iii) $\frac{35}{27}$ (iv) $\frac{13}{29}$

(11) $x = 9$

5. दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

सरावसंच 5.1

(3) (i) $x = 3;\ y = 1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 2;\ y = -2$

(iv) $x = 6;\ y = 3$ (v) $x = 1;\ y = -2$ (vi) $x = 7;\ y = 1$

सरावसंच 5.2

(1) 5 रुपयांच्या 30 नोटा व 10 रुपयांच्या 20 नोटा आहेत.

(2) $\frac{5}{9}$ (3) प्रियांकाचे वय 20 वर्षे, दीपिकाचे वय 14 वर्षे (4) 20 सिंह, 30 मोर

(5) सुरुवातीचा पगार ₹ 3900, वार्षिक वाढ ₹ 150

(6) ₹ 4000 (7) 36 (8) $\angle A = 90^0$, $\angle B = 40^0$, $\angle C = 50^0$

(9) 420 सेमी (10) 10

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

(1) (i) A (ii) C (iii) C

(2) (i) $x = 2;\ y = 1$ (ii) $x = 5;\ y = 3$ (iii) $x = 8;\ y = 3$

(iv) $x = 1;\ y = -4$ (v) $x = 3;\ y = 1$ (vi) $x = 4;\ y = 3$

(3) (i) $x = 1;\ y = -1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 26;\ y = 18$ (iv) $x = 8;\ y = 2$

(4) (i) $x = 6;\ y = 8$ (ii) $x = 9;\ y = 2$ (iii) $x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{3}$ (5) 35

(6) ₹ 71 (7)प्रत्येकाचे मासिक उत्पन्न अनुक्रमे ₹ 1800 व ₹ 1400

(8) लांबी 347 एकक, रुंदी 207 एकक (9) 40 किमी/तास, 30 किमी/तास

(10) (i) 54, 45 (ii) 36, 63 इत्यादी.

6. अर्थनियोजन

सरावसंच 6.1

(1) ₹ 1200 (2) दुसऱ्या वर्षानंतरचे भांडवल ₹ 42,000, मूळ भांडवलावर शेकडा 16 तोटा झाला.

(3) मासिक उत्पन्न ₹ 50,000 (4) श्री. फर्नांडीस (5) ₹ 25,000

सरावसंच 6.2

(1) (i) आयकर भरावा लागणार नाही (ii) भरावा लागेल (iii) भरावा लागेल

(iv) भरावा लागेल (v) भरावा लागणार नाही

(2) ₹ 9836.50

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

(1) (i) A (ii) B (2) उत्पन्न ₹ 8750

(3) हिरालालचा शेकडा फायदा 36.73, रमणिकलालचा शेकडा फायदा 16.64, हिरालाल

(4) ₹ 99383.75 (5) ₹ 4,00,000 (6) 12.5%

(7) रमेशची बचत ₹ 48000 ; सुरेशची बचत ₹ 51000 ; प्रितीची बचत ₹ 36000

(8) (i) ₹ 213000 (ii) ₹ 7500 (iii) कर नाही.

7. सांख्यिकी

सरावसंच 7.2

(1) प्राथमिक सामग्री : (i), (iii), (iv) दुय्यम सामग्री : (ii)

सरावसंच 7.3

(1) खालची वर्ग मर्यादा = 20, वरची वर्ग मर्यादा = 25 (2) 37.5 (3) 7–13

सरावसंच 7.4

(3) (i) 38 (ii) 3 (iii) 19 (iv) 62 (4) (i) 24 (ii) 3 (iii) 43 (iv) 43

सरावसंच 7.5

(1) 7 क्विंटल (2) 74 (3) 100 (4) ₹ 4900 (5) 75 ग्रॅम

(6) मध्य = 3, मध्यक = 3, बहुलक = 4 (7) 78.56 (8) $x = 9$ (9) 20 (10) 70

(11) 34.25 (12) 37 किग्रॅ (13) 2 (14) 35 व 37

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

(1) (i) C (ii) B (iii) D (iv) B (v) A (vi) D

(vii) B (viii) A (ix) C (x) C

(2) ₹ 26000 (3) ₹ 127

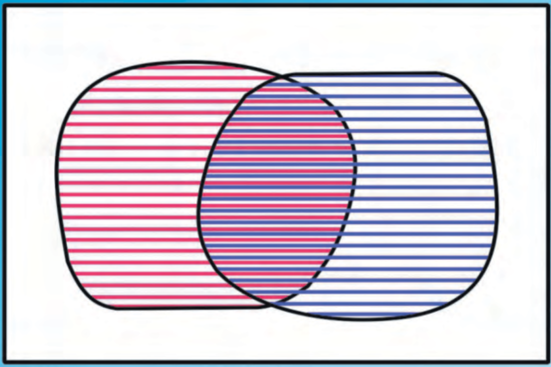
(4) (i) 24 (ii) 06

(5) P = 20

(6) (i) 66 (ii) 14 (iii) 45

(7) (i) 11 (ii) 68

(8) $x = 52$, मध्य = 55.9, बहुलक = 52



$$x + y = 4$$

$$2x + 3y = 3$$

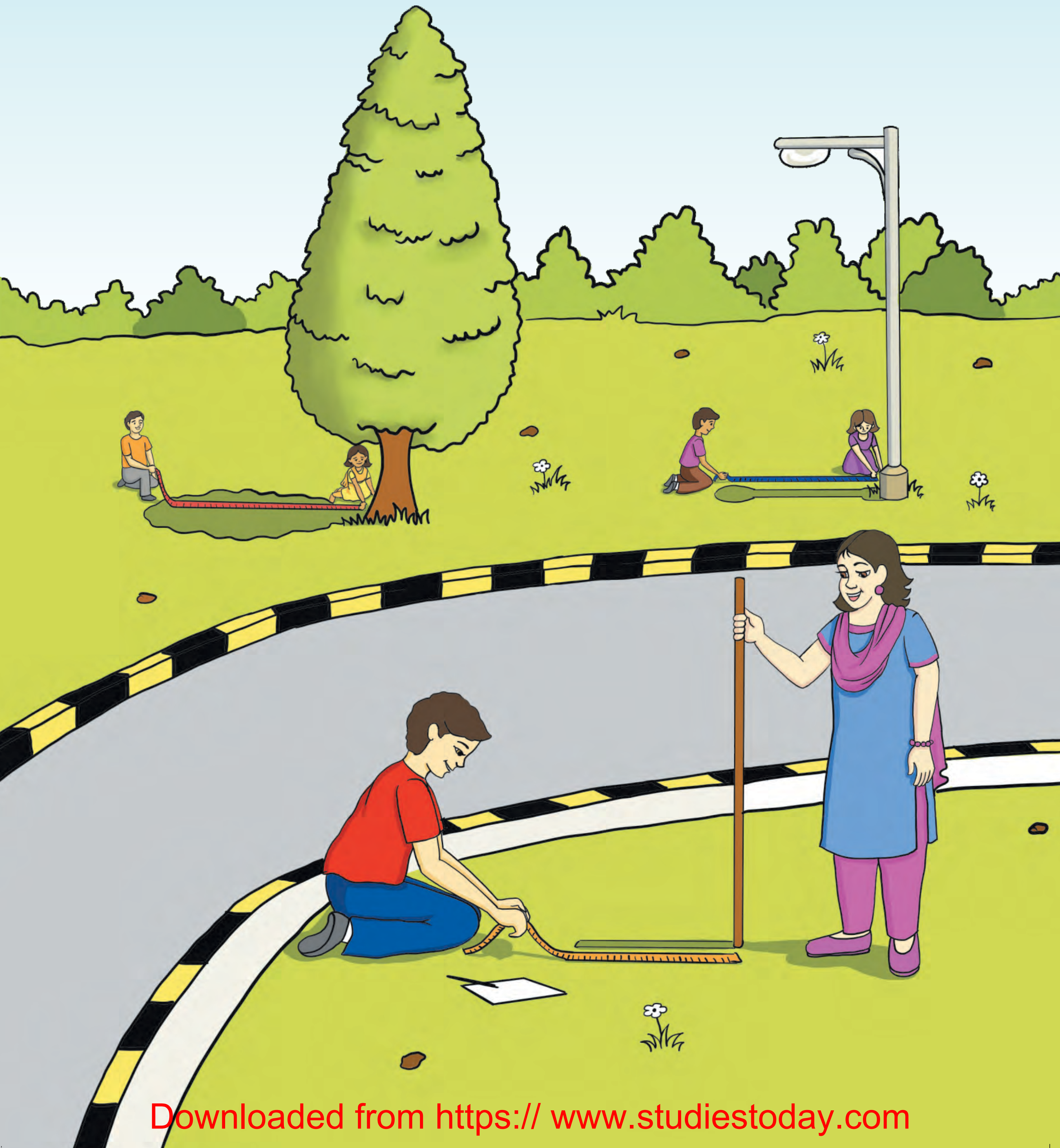
$$x = \boxed{}, \quad y = \boxed{}$$

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती
व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ,
पुणे–४११००४. ₹ ६४.००

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

गणित भाग-II

इयत्ता नववी



Downloaded from https:// www.studiestoday.com

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ अन्वये स्थापन करण्यात आलेल्या समन्वय समितीच्या दि.३.३.२०१७ रोजीच्या बैठकीमध्ये हे पाठ्यपुस्तक निर्धारित करण्यास मान्यता देण्यात आली आहे.

गणित

भाग - II

इयत्ता नववी

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे - ४११ ००४.

शेजारचा 'क्यू आर कोड' तसेच या पुस्तकात इतर ठिकाणी दिलेले 'क्यू आर कोड' स्मार्टफोनचा वापर करून स्कॅन करता येतात. स्कॅन केल्यावर आपल्याला या पाठ्यपुस्तकाच्या अध्ययन-अध्यापनासाठी उपयुक्त लिंक/लिंक्स (URL) मिळतील.

प्रथमावृत्ती : 2017

गणित विषयतज्ज्ञ समिती

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. दादासो सरडे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती लता टिळेकर (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय – राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती पूजा जाधव
श्री. प्रमोद ठोंबरे
श्री. राजेंद्र चौधरी
श्री. आण्णापा परीट
श्री. श्रीपाद देशपांडे
श्री. बन्सी हावळे
श्री. उमेश रेळे
श्री. चंदन कुलकर्णी
श्रीमती अनिता जावे
श्रीमती बागेश्री चव्हाण
श्री. कल्याण कडेकर
श्री. संदेश सोनावणे
श्री. सुजित शिंदे
डॉ. हनुमंत जगताप
श्री. प्रताप काशिद
श्री. काशिराम बाविसाने
श्री. पप्पु गाडे
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री. रामा व्हन्याळकर
श्री. अन्सार शेख
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्री. गणेश कोलते
श्री. सुरेश दाते
श्री. प्रकाश झेंडे
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी
श्री. सूर्यकांत शहाणे
श्री. प्रकाश कापसे
श्री. सलीम हाश्मी
श्रीमती आर्या भिडे
श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. लक्ष्मण दावणकर
श्री. सुधीर पाटील
श्री. राजाराम बंडगर
श्री. प्रदीप गोडसे
श्री. रवींद्र खंदारे
श्री. सागर सकुडे

श्रीमती प्राजक्ती गोखले (निमंत्रित सदस्य)
श्री. वि. दि. गोडबोले (निमंत्रित सदस्य)
श्रीमती तरूबेन पोपट (निमंत्रित सदस्य)

प्रमुख संयोजक : **उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले**
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

मुखपृष्ठ व सजावट : धनश्री मोकाशी, पुणे.
संगणकीय आरेखन : संदीप कोळी, मुंबई.
चित्रकार : धनश्री मोकाशी.

निर्मिती : **सच्चितानंद आफळे**
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहा. निर्मिती अधिकारी

अक्षरजुळणी : गणित विभाग,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

कागद : ७० जी.एस.एम. क्रीमवोव्ह
मुद्रणादेश : N/PB/2017-18/50,000
मुद्रक : SANDESH OFFSET PRINTERS, SANGLI

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ,
प्रभादेवी, मुंबई २५.

भारताचे संविधान

उद्‌देशिका

आम्ही, भारताचे लोक, भारताचे एक सार्वभौम
समाजवादी धर्मनिरपेक्ष लोकशाही गणराज्य घडविण्याचा
व त्याच्या सर्व नागरिकांस:
सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक **न्याय;**
विचार, अभिव्यक्ती, विश्वास, श्रद्‌धा
व उपासना यांचे **स्वातंत्र्य;**
दर्जाची व संधीची **समानता;**
निश्चितपणे प्राप्त करून देण्याचा
आणि त्या सर्वांमध्ये व्यक्तीची प्रतिष्ठा
व राष्ट्राची एकता आणि एकात्मता
यांचे आश्वासन देणारी **बंधुता**
प्रवर्धित करण्याचा संकल्पपूर्वक निर्धार करून;
आमच्या संविधानसभेत
आज दिनांक सव्वीस नोव्हेंबर, १९४९ रोजी
याद्‌वारे हे संविधान अंगीकृत आणि अधिनियमित
करून स्वत:प्रत अर्पण करीत आहोत.

राष्ट्रगीत

जनगणमन-अधिनायक जय हे
भारत-भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत-भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रांनो,

इयत्ता नववीच्या वर्गात तुमचे स्वागत !

प्राथमिक शिक्षणाचा अभ्यासक्रम पूर्ण करून तुम्ही माध्यमिक स्तरावरील अभ्यासाला सुरूवात करत आहात. इयत्ता आठवीपर्यंत गणिताच्या अभ्यासासाठी एकच पाठ्यपुस्तक होते, आता गणित भाग I व गणित भाग II अशा दोन पाठ्यपुस्तकांचा अभ्यास करायचा आहे.

गणित इयत्ता आठवीपर्यंतच्या पाठ्यपुस्तकांत रेषा, त्रिकोण, चौकोन, वर्तुळ इत्यादींचे गुणधर्म पडताळले होते. आता आणखी काही गुणधर्म तुम्ही तर्कशुद्ध पायऱ्यांनी सिद्ध करायला शिकणार आहात. तर्कशुद्ध मांडणी करणे हे कौशल्य व्यवहारात सर्व क्षेत्रांत महत्त्वाचे आहे. पाठ्यपुस्तकात ही कौशल्ये सावकाश शिकण्याची संधी आहे.

पाठ्यपुस्तकात नमूद केलेल्या कृतींविषयी शिक्षकांशी, वर्गातील मित्रमैत्रिणींशी चर्चा करा व त्या कृती करून गुणधर्मांच्या सिद्धता अभ्यासा. सिद्धतेतील प्रत्येक पायरीला दिलेल्या कारणांची चर्चा करा व तो गुणधर्म समजावून घ्या.

या पाठ्यपुस्तकात उच्च गणिताच्या अभ्यासासाठी उपयुक्त अशा त्रिकोणमिती व निर्देशक भूमिती यांसारख्या घटकांचा समावेश केला आहे. तसेच व्यवहारात उपयुक्त अशा पृष्ठफळ व घनफळ या घटकांचा अभ्यासही तुम्ही येथे करणार आहात.

इंटरनेटचा उपयोग करून अनेक कृती समजावून घ्या. पाठ्यपुस्तकाचे सखोल वाचन, कृतियुक्त अध्ययन व सराव या त्रिसूत्रीतून ही गणितयात्रा तुम्ही आनंदात पार कराल यात शंका नाही.

चला तर मग ! आता शिक्षक, पालक, मित्र-मैत्रिणी, इंटरनेट या सगळ्यांना घेऊन गणिताचा अभ्यास करूया. या अभ्यासासाठी तुम्हांला अनेक शुभेच्छा !

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे

पुणे
दिनांक : २८ एप्रिल २०१७, अक्षय्य तृतीया
भारतीय सौर दिनांक : ८ वैशाख १९३९

इयत्ता ९ वी गणित भाग II अभ्यासक्रमातून खालील क्षमता विद्यार्थ्यांमध्ये विकसित होतील.

क्षेत्र	घटक	क्षमता विधाने
1. **भूमिती**	1.1 युक्लिडची भूमिती	• दिलेल्या विधानातील वापरता येण्याजोगी उपलब्ध माहिती (पक्ष) व त्यावरून सिद्ध करण्याचे विधान (साध्य) हे व्यवस्थित मांडता येणे. • तर्कसंगत मांडणी करून साध्य विधान सिद्ध करण्याची क्षमता विकसित होणे.
	1.2 समांतर रेषा व कोनांच्या जोड्या	• समांतर रेषा व छेदिका यांच्यामुळे तयार झालेल्या कोनांच्या विविध जोड्या ओळखता येणे. • कोनांच्या जोड्यांचे गुणधर्म समजणे व त्यांचा वापर करता येणे.
	1.3 त्रिकोणाचे कोन व बाजू यांची प्रमेये	• दिलेली माहिती पक्ष व साध्य स्वरूपात लिहून सिद्धता देता येणे.
	1.4 समरूप त्रिकोण	• समरूप त्रिकोण ओळखून त्यांच्या बाजूंची गुणोत्तरे लिहिता येणे.
	1.5 वर्तुळ	• एकरूप त्रिकोणांच्या कसोट्या वापरून वर्तुळाचे गुणधर्म सिद्ध करता येणे. • अंतर्वर्तुळ, परिवर्तुळ काढता येणे.
	1.6 भौमितिक रचना	• त्रिकोणाच्या विशिष्ट बाबी दिल्या असता त्रिकोण रचना करता येणे.
	1.7 चौकोन	• विशिष्ट चौकोनाच्या गुणधर्मांच्या सिद्धता लिहिता येणे. • ICT Tools च्या सहाय्याने त्रिकोण, चौकोन, वर्तुळ यांच्या गुणधर्मांचा पडताळा घेता येणे.
2. **निर्देशक भूमिती**	2.1 निर्देशक भूमिती	• प्रतलातील प्रत्येक बिंदूशी निगडीत निर्देशकांच्या जोडीचा अर्थ सांगता येणे. • निर्देशकांचा उपयोग करून विशिष्ट बिंदूचे वर्णन करता येणे. • ICT Tools चा उपयोग करुन प्रतलातील बिंदूंचे निर्देशक शोधता येणे.
3. **महत्त्वमापन**	3.1 पृष्ठफळ व घनफळ	• गोल व शंकू यांचे पृष्ठफळ व घनफळ काढता येणे.
4. **त्रिकोणमिती**	4.1 त्रिकोणमिती	• समरूप त्रिकोण व पायथागोरसचे प्रमेय वापरून त्रिकोणमितीची गुणोत्तरे सांगता येणे व त्यांचा उपयोग करता येणे.

शिक्षकांसाठी सूचना

इयत्ता नववी भाग-II या पाठ्यपुस्तकाचे शिक्षकांनी प्रथम सखोल वाचन करावे. त्यामध्ये दिलेल्या सर्व कृती व प्रात्यक्षिके समजावून घ्यावीत. कृतींचे दोन भाग आहेत. एक सिद्‌धता लेखन करणे व दुसरा गुणधर्मांचा आणि शिकलेल्या निष्कर्षांचा प्रात्यक्षिकांद्‌वारे पडताळा घेणे. या कृती करण्याकरिता व पुस्तक अधिक उद्‌बोधक होण्याकरिता चर्चा, प्रश्नोत्तरे, सामूहिक उपक्रम अशा विविध पद्‌धतींचा उपयोग शिक्षकांनी करणे अपेक्षित आहे. पाठ्यपुस्तकातील कृती विद्यार्थ्यांनी कराव्यात व त्यासारख्या अनेक कृती तयार करण्यासाठी विद्यार्थ्यांना मार्गदर्शन करावे.

प्रमेयांच्या सिद्‌धता पाठ करण्यापेक्षा त्यांचा तर्कसंगत विचार करून त्यांची मांडणी करणे जास्त महत्त्वाचे आहे. या तर्कसंगत विचारशक्तीला चालना देणारी विविध उदाहरणे पाठ्यपुस्तकात समाविष्ट केलेली आहेत. अशी अनेक उदाहरणे शिक्षक व विद्यार्थी यांनी मिळून तयार करावीत. आव्हानात्मक उदाहरणे पाठ्यपुस्तकात तारांकित करून दिली आहेत. विद्यार्थ्यांनी वेगळा विचार करून, तर्कशुद्‌ध पद्‌धतीने एखादी सिद्‌धता दिली, कृती केली किंवा उदाहरणे सोडवली असतील तर त्या विद्यार्थ्यांचे शिक्षकांनी कौतुक करावे.

मूल्यमापन करताना मुक्त प्रश्न व कृतिपत्रिका यांचाही विचार शिक्षकांनी करणे अपेक्षित आहे. अशी मूल्यमापन पद्‌धती विकसित करण्याचा शिक्षकांनी प्रयत्न करावा. याचबरोबर पाठ्यपुस्तकामध्ये नमुन्यादाखल प्रात्यक्षिकांची यादी दिली आहे. त्या व्यतिरिक्त उपलब्ध साहित्यातून तुम्ही स्वत: निरनिराळी प्रात्यक्षिके तयार करू शकता, तसेच साहित्यनिर्मिती देखील करू शकता. पाठ्यपुस्तकातील विविध कृती या प्रात्यक्षिकांमध्ये अंतर्भूत केल्या आहेत. त्यावर आधारित मूल्यमापन पद्‌धतीचा वापर पुढच्या इयत्तांच्या क्षमता विकसित करण्याकरिता निश्चितच होईल अशी आम्हांस आशा आहे.

नमुना प्रात्यक्षिकांची यादी

(1) संख्यारेषेवरील दोन बिंदूंमधील अंतर काढणे.

(2) समांतर रेषा व छेदिका यांच्यामुळे होणाऱ्या कोनांचे गुणधर्म साहित्याचा वापर करून तपासणे.

(3) विविध साहित्यांच्या आधारे त्रिकोणाच्या बाजूंचे व कोनांचे गुणधर्म तपासणे.

(4) काटकोन त्रिकोण व मध्यगा यांच्या गुणधर्मांचा पडताळा घेणे.

(5) त्रिकोण रचनांसाठी त्रिकोणांची वेगवेगळी मापे घेऊन सर्व प्रकारच्या भौमितिक रचना करणे.

(6) शंकूच्या वक्रपृष्ठफळाचा अंदाज करण्यासाठी एक कृती दिली आहे. ती कृती 'r' ही त्रिज्या असणाऱ्या वर्तुळासाठी करणे व वर्तुळाचे क्षेत्रफळ πr^2 आहे याचा पडताळा घेणे.

(7) एखाद्या खोलीचा, त्यातील सर्व वस्तूंची मापे लक्षात घेऊन प्रमाणबद्‌ध नकाशा, आलेख कागदावर काढणे.

(8) शाळेच्या मैदानावर x आणि y अक्ष आखून विद्यार्थ्यांच्या स्थानाचे निर्देशक ठरवण्याची कृती करणे.

(9) वृत्तचिती आकाराच्या डब्याचे घनफळ सूत्राच्या साहाय्याने काढणे व त्याच डब्यात काठोकाठ पाणी भरून पाण्याचे घनफळ मोजणे. दोन्ही उत्तरांची तुलना करणे व याप्रमाणे अनेक त्रिमितीय आकाराच्या वस्तूंच्या घनफळाचा पडताळा घेणे.

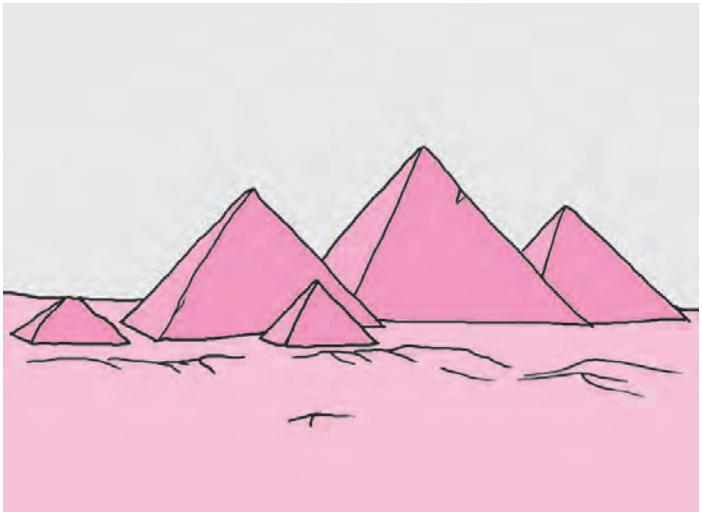
अनुक्रमणिका

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

1 भूमितीतील मूलभूत संबोध

चला, शिकूया.

- बिंदू, रेषा व प्रतल
- बिंदूचे निर्देशक व अंतर
- दरम्यानता
- सशर्त विधाने
- सिद्धता



शेजारील चित्र ओळखले का ? इजिप्त मधील पिरॅमिडचे हे चित्र आहे. इ.स.पूर्व 3000 या काळात एवढ्या प्रचंड रचना पूर्वीच्या लोकांनी कशा केल्या असतील ? स्थापत्य शास्त्र आणि भूमिती या क्षेत्रांमध्ये विकास झाल्याखेरीज अशा रचना होऊ शकत नाहीत.

भूमिती या नावावरूनच त्या शास्त्राचा उगम समजतो. 'भू' म्हणजे जमीन आणि 'मिती' म्हणजे मापन. यांवरून जमीन मोजण्याच्या गरजेतून हा विषय निर्माण झाला असावा.

अनेक देशांत भूमितीचा विकास वेगवेगळ्या काळांत व वेगवेगळ्या रचनांसाठी झाला. थेल्स हा आद्य ग्रीक गणितज्ञ इजिप्तमध्ये गेला होता तेव्हा त्याने पिरॅमिडची सावली मोजून व समरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म वापरून पिरॅमिडची उंची ठरवली अशी कथा आहे. पायथागोरस हा थेल्सचा विद्यार्थी होता असेही सांगितले जाते.

प्राचीन भारतीयांना देखील भूमिती या विषयाचे सखोल ज्ञान होते. वैदिक काळात भारतीय लोक यज्ञकुंडाची रचना करण्यासाठी भूमितीय गुणधर्मांचा उपयोग करत होते. दोरीच्या साहाय्याने मापन कसे करावे व विविध आकार कसे तयार करावेत याचा उल्लेख शुल्वसूत्रात आढळतो. नंतरच्या काळात आर्यभट, वराहमिहीर, ब्रह्मगुप्त, भास्कराचार्य इत्यादी गणितज्ञांनी या विषयात मोलाची भर घातली.

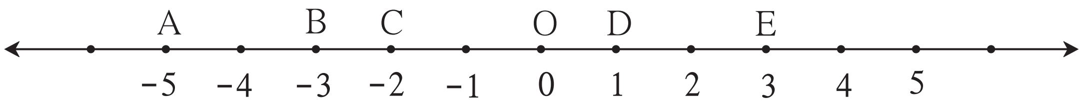
जाणून घेऊया.

भूमितीतील मूलभूत संबोध : बिंदू, रेषा व प्रतल
(Basic concepts in geometry : point, line and plane)

ज्याप्रमाणे आपण संख्यांची व्याख्या करत नाही त्याप्रमाणे बिंदू, रेषा व प्रतल यांच्या व्याख्या केल्या जात नाहीत. भूमितीतील हे काही मूलभूत संबोध आहेत. रेषा व प्रतल हे बिंदूंचे संच आहेत. रेषा म्हणजेच सरळ रेषा असते, हे ध्यानात ठेवा.

बिंदूंचे निर्देशक व अंतर (Co-ordinates of points and distance)

खालील संख्यारेषा पाहा.



आकृती 1.1

येथे D हा बिंदू रेषेवरील 1 ही संख्या दाखवतो. म्हणजे 1 ही संख्या बिंदू D चा **निर्देशक** आहे असे म्हणतात. B बिंदू हा संख्यारेषेवर −3 ही संख्या दर्शवतो म्हणून बिंदू B चा निर्देशक −3 हा आहे. त्याचप्रमाणे A चा निर्देशक −5 व E चा निर्देशक 3 आहे.

D बिंदूपासून E बिंदू हा 2 एकक अंतरावर आहे म्हणजेच E व D या बिंदूंमधील अंतर 2 आहे. येथे एकके मोजून आपण दोन बिंदूंमधील अंतर काढू शकतो. या संख्यारेषेवरील A व B बिंदूंमधील अंतरही 2 आहे.

आता बिंदूंच्या निर्देशकांचा उपयोग करून अंतर कसे काढायचे हे पाहू.

दोन बिंदूंमधील अंतर काढणे म्हणजे त्या बिंदूंच्या निर्देशकांपैकी मोठ्या निर्देशकातून लहान निर्देशक वजा करणे.

D बिंदूचा निर्देशक 1 आहे, E चा निर्देशक 3 आहे आणि $3 > 1$ हे आपल्याला माहीत आहे.

बिंदू E व D मधील अंतर $3-1$ म्हणजे 2 आहे.

बिंदू E व D यांमधील अंतर हे d (E,D) असे दर्शवतात. हे अंतर म्हणजेच l(ED), ही रेख ED ची लांबी होय.

$d(E, D) = 3 - 1 = 2$

$\therefore\ l(ED) = 2$

$d(E, D) = l(ED) = 2$

तसेच $d(D, E) = 2$

$d(C, D) = 1 - (-2)$

$= 1 + 2 = 3$

$\therefore\ d(C, D) = l(CD) = 3$

तसेच $d(D, C) = 3$

d(A,B) काढू. A चा निर्देशक −5 आहे, B चा निर्देशक −3 आहे आणि $-3 > -5$

$\therefore\ d(A, B) = -3 - (-5) = -3+5 = 2.$

वरील सर्व उदाहरणांत दिसून येते, की दोन भिन्न बिंदूंमधील अंतर ही धन संख्या असते. तसेच P, Q एकच बिंदू असतील तर $d(P, Q) = 0$, हे ध्यानात घ्या.

हे लक्षात ठेवूया.

- दोन बिंदूंमधील अंतर हे त्यांच्या निर्देशकांपैकी मोठ्या निर्देशकातून लहान निर्देशक वजा केल्यावर मिळते.
- कोणत्याही दोन बिंदूंमधील अंतर ही ऋणेतर वास्तव संख्या असते.

जाणून घेऊया.

दरम्यानता (Betweenness)

जर P, Q, R हे एकरेषीय भिन्न बिंदू असतील तर खाली दिल्याप्रमाणे तीन शक्यता संभवतात.

आकृती 1.2

(i) बिंदू Q हा P आणि R यांच्या दरम्यान असेल.

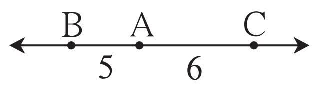
(ii) बिंदू R हा P आणि Q यांच्या दरम्यान असेल.

(iii) बिंदू P हा R आणि Q यांच्या दरम्यान असेल.

जर d (P, Q) + d (Q, R) = d (P, R) असेल तर Q हा बिंदू P आणि R च्या दरम्यान आहे असे म्हणतात. ही दरम्यानता P – Q – R अशी दर्शवतात.

उदा (1) एका संख्यारेषेवर A, B आणि C हे बिंदू असे आहेत, की d (A, B) = 5, d (B,C) = 11 आणि d (A, C) = 6, तर त्यांपैकी कोणता बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान असेल ?

उकल : येथे A, B आणि C यांपैकी कोणता बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान आहे हे खालीलप्रमाणे ठरवता येईल.



आकृती 1.3

d(B,C) = 11 . . . . (I)

d(A,B) + d(A,C)= 5+6 = 11 . . . . (II)

$\therefore$ d (B, C) = d (A, B) + d (A, C) . . . . (I) आणि (II) वरून

म्हणजे बिंदू A हा बिंदू B व बिंदू C च्या दरम्यान आहे.

उदा (2) एका रस्त्यावर सरळ रेषेत U, V व A ही शहरे आहेत. U व A यांमधील अंतर 215 किमी, V व A यांमधील अंतर 140 किमी आणि U व V यांमधील यांतील अंतर 75 किमी आहे. तर कोणते शहर कोणत्या दोन शहरांच्या दरम्यान आहे ?

उकल : d (U,A) = 215; d (V,A) = 140; d (U,V) = 75

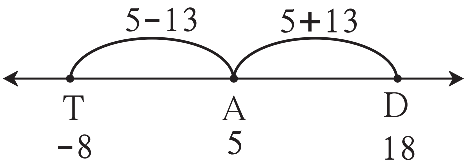
d (U,V) + d (V,A) = 75 + 140 = 215; d (U,A) = 215

$$\therefore d\,(U,A) = d\,(U,V) + d\,(V,A)$$

$\therefore$ V हे शहर U व A या शहरांच्या दरम्यान आहे.

उदा (3) एका संख्यारेषेवरील A बिंदूचा निर्देशक 5 आहे. तर त्याच रेषेवरील A पासून 13 एकक अंतरावरील बिंदूंचे निर्देशक काढा.

उकल : संख्यारेषेवर A पासून 13 एकक अंतरावर आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे A च्या डावीकडे T व उजवीकडे D असे दोन बिंदू घेऊ.



आकृती 1.4

बिंदू A च्या डावीकडील बिंदू T चा निर्देशक $5 - 13 = -8$ असेल.

बिंदू A च्या उजवीकडील बिंदू D चा निर्देशक $5 + 13 = 18$ असेल.

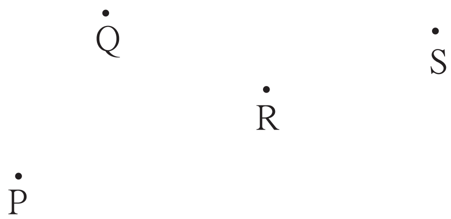
$\therefore$ बिंदू A पासून 13 एकक अंतरावरील बिंदूंचे निर्देशक −8 आणि 18 असतील.

पडताळून पाहा : $d(A,D) = d(A,T) = 13$

कृती :

(1) शेजारील आकृतीत दिलेले A, B, C हे बिंदू एकरेषीय आहेत का, हे दोरा ताणून धरून तपासा. ते एका रेषेत असल्यास कोणता बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान आहे ते लिहा.

(2) शेजारील आकृतीत दिलेले P, Q, R, S हे चार बिंदू आहेत. त्यांपैकी कोणते तीन बिंदू एकरेषीय आहेत व कोणते तीन बिंदू एकरेषीय नाहीत ते तपासा. एकरेषीय असणाऱ्या तीन बिंदूंमधील दरम्यानता लिहा.

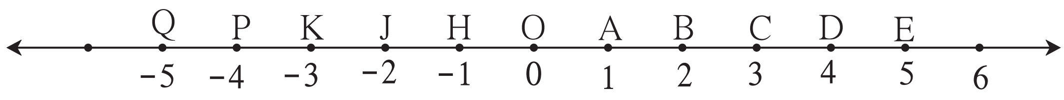


(3) कवायतीसाठी मुलांना सरळ ओळींमध्ये उभे राहण्यास सांगितले आहे. प्रत्येक ओळीतील मुले सरळ रेषेत आहेत का हे कसे तपासाल ?

(4) प्रकाशकिरण एका सरळ रेषेत जातात हे तुम्ही कसे पडताळले होते ? आधीच्या इयत्तेत केलेला विज्ञानातील प्रयोग आठवा.

सरावसंच 1.1

1. खाली दिलेल्या संख्यारेषेच्या आधारे पुढील अंतरे काढा.



आकृती 1.5

(i) d(B,E) (ii) d(J, A) (iii) d(P, C) (iv) d(J, H)
(v) d(K, O) (vi) d(O, E) (vii) d(P, J) (viii) d(Q, B)

2. बिंदू A चा निर्देशक x आणि बिंदू B चा निर्देशक y आहे. तर खालील बाबतीत d(A, B) काढा.

(i) $x = 1, y = 7$ (ii) $x = 6, y = -2$ (iii) $x = -3, y = 7$
(iv) $x = -4, y = -5$ (v) $x = -3, y = -6$ (vi) $x = 4, y = -8$

3. खाली दिलेल्या माहितीवरून कोणता बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान आहे ते ठरवा. दिलेले बिंदू एकरेषीय नसतील तर तसे लिहा.

(i) d(P, R) = 7, d(P, Q) = 10, d(Q, R) = 3
(ii) d(R, S) = 8, d(S, T) = 6, d(R, T) = 4
(iii) d(A, B) = 16, d(C, A) = 9, d(B, C) = 7
(iv) d(L, M) = 11, d(M, N) = 12, d(N, L) = 8
(v) d(X, Y) = 15, d(Y, Z) = 7, d(X, Z) = 8
(vi) d(D, E) = 5, d(E, F) = 8, d(D, F) = 6

4. एका संख्यारेषेवर A, B, C हे बिंदू असे आहेत की, d(A,C) = 10, d(C,B) = 8 तर d(A, B) काढा. सर्व पर्यायांचा विचार करा.

5. X, Y, Z हे एकरेषीय बिंदू आहेत, d(X,Y) = 17, d(Y,Z) = 8 तर d(X,Z) काढा.

6. आकृती काढून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) जर A-B-C आणि l(AC) = 11, l(BC) = 6.5, तर l(AB) = ?
(ii) जर R-S-T आणि l(ST) = 3.7, l(RS) = 2.5, तर l(RT) = ?
(iii) जर X-Y-Z आणि l(XZ) = $3\sqrt{7}$, l(XY) = $\sqrt{7}$, तर l(YZ) = ?

7. एकरेषीय नसलेले तीन बिंदू कोणती आकृती तयार करतात ?

जाणून घेऊया.

इयत्ता नववीच्या गणित भाग I मध्ये 'संच' या प्रकरणात आपण संयोगसंच, छेदसंच यांचा अभ्यास केला आहे. याचा उपयोग करून रेषाखंड, किरण, रेषा यांचे वर्णन बिंदूसंच रूपात करू.

(1) **रेषाखंड (Line segment) :**

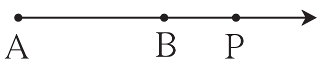
बिंदू A, बिंदू B आणि या दोन बिंदूंच्या दरम्यानचे सर्व बिंदू यांचा संयोगसंच म्हणजे रेषाखंड AB असतो.
रेषाखंड AB हे थोडक्यात रेख AB असे लिहितात.
रेख AB म्हणजेच रेख BA.
बिंदू A व बिंदू B हे रेख AB चे अंत्यबिंदू आहेत.

आकृती 1.6

रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंमधील अंतराला त्या रेषाखंडाची लांबी म्हणतात. l(AB) = d (A,B)
l(AB) = 5 हे AB = 5 असेही लिहितात.

(2) **किरण AB (Ray AB) :**

समजा A आणि B हे दोन भिन्न बिंदू आहेत. रेख AB वरील बिंदू आणि A-B-P असे सर्व बिंदू P यांचा संयोगसंच म्हणजे किरण AB होय. येथे बिंदू A ला किरणाचा आरंभबिंदू म्हणतात.



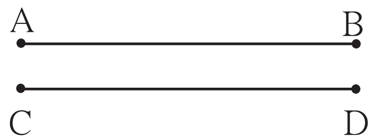
आकृती 1.7

(3) **रेषा AB (Line AB) :**

किरण AB चा बिंदूसंच आणि त्याच्या विरूद्ध किरणाचा बिंदूसंच मिळून जो संयोगसंच तयार होतो तो म्हणजे रेषा AB हा बिंदूसंच आहे.
रेख AB चा बिंदूसंच हा रेषा AB च्या बिंदूसंचाचा उपसंच आहे.

(4) **एकरूप रेषाखंड (Congruent segments) :**

जर दिलेल्या दोन रेषाखंडांची लांबी समान असेल तर ते रेषाखंड एकरूप असतात.
जर l(AB) = l(CD) तर रेख AB $\cong$ रेख CD



आकृती 1.8

(5) **रेषाखंडांच्या एकरूपतेचे गुणधर्म (Properties of congruent segements) :**

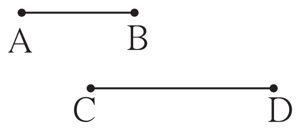
(i) परावर्तनता (Reflexivity) रेख AB $\cong$ रेख AB
(ii) सममितता (Symmetry) जर रेख AB $\cong$ रेख CD तर रेख CD $\cong$ रेख AB
(iii) संक्रामकता (Transitivity) जर रेख AB $\cong$ रेख CD व रेख CD $\cong$ रेख EF तर रेख AB $\cong$ रेख EF

(6) **रेषाखंडाचा मध्यबिंदू (Midpoint of a segment) :**

जर A-M-B आणि रेख AM $\cong$ रेख MB, तर M बिंदू हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे असे म्हणतात. प्रत्येक रेषाखंडाला एक आणि एकच मध्यबिंदू असतो.

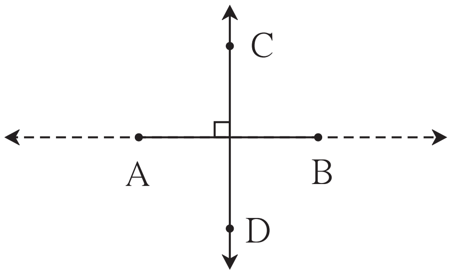
आकृती 1.9

(7) **रेषाखंडांची तुलना (Comparison of segments) :**
रेख AB ची लांबी रेख CD पेक्षा कमी असेल, म्हणजेच जर l(AB) < l(CD) तर रेख AB < रेख CD किंवा रेख CD > रेख AB असे लिहितात.
रेषाखंडाचा लहान-मोठेपणा हा त्यांच्या लांबीवर अवलंबून असतो.



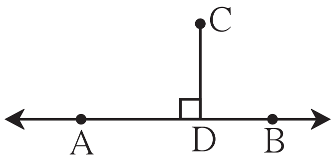
आकृती 1.10

(8) **रेषाखंडांची किंवा किरणांची लंबता**
(Perpendicularity of segments or rays) :
दोन रेषाखंड, दोन किरण किंवा एक किरण व एक रेषाखंड यांना सामावणाऱ्या रेषा जर परस्परांना लंब असतील तर ते दोन रेषाखंड, ते दोन किरण किंवा एक किरण आणि एक रेषाखंड परस्परांना लंब आहेत असे म्हणतात.
आकृती 1.11 मध्ये रेख AB $\perp$ रेषा CD,
रेख AB $\perp$ किरण CD.



आकृती 1.11

(9) **बिंदूचे रेषेपासूनचे अंतर (Distance of a point from a line) :**
जर रेख CD $\perp$ रेषा AB आणि बिंदू D हा रेषा AB वर असेल तर रेख CD च्या लांबीला बिंदू C चे रेषा AB पासूनचे अंतर असे म्हणतात.
बिंदू D ला CD या लंबाचा **लंबपाद** म्हणतात.
जर l(CD) = a, तर C बिंदू रेषा AB पासून a अंतरावर आहे असे म्हणतात.



आकृती 1.12

सरावसंच 1.2

1. खालील सारणीत संख्यारेषेवरील बिंदूंचे निर्देशक दिले आहेत. त्यावरून पुढील रेषाखंड एकरूप आहेत का ते ठरवा.

बिंदू	A	B	C	D	E
निर्देशक	–3	5	2	–7	9

(i) रेख DE व रेख AB (ii) रेख BC व रेख AD (iii) रेख BE व रेख AD

2. बिंदू M हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे आणि AB = 8 तर AM = किती?
3. बिंदू P हा रेख CD चा मध्यबिंदू आहे आणि CP = 2.5 तर रेख CD ची लांबी काढा.
4. जर AB = 5 सेमी, BP = 2 सेमी आणि AP = 3.4 सेमी तर या रेषाखंडांचा लहान-मोठेपणा ठरवा.

5. आकृती 1.13 च्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) किरण RP च्या विरुद्ध किरणाचे नाव लिहा.

(ii) किरण PQ व किरण RP यांचा छेदसंच लिहा.

(iii) रेख PQ व रेख QR चा संयोग संच लिहा.

(iv) रेख QR हा कोणकोणत्या किरणांचा उपसंच आहे?

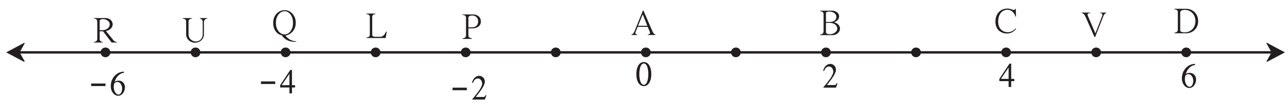
(v) R हा आरंभबिंदू असलेल्या विरूद्ध किरणांची जोडी लिहा.

(vi) S हा आरंभबिंदू असलेले कोणतेही दोन किरण लिहा.

(vii) किरण SP आणि किरण ST यांचा छेदसंच लिहा.

आकृती 1.13

6. खालील आकृती 1.14 च्या आधारे प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आकृती 1.14

(i) बिंदू B पासून समदूर असणारे बिंदू कोणते?

(ii) बिंदू Q पासून समदूर असणाऱ्या बिंदूंची एक जोडी लिहा.

(iii) d (U,V), d (P,C), d (V,B), d (U, L) काढा.

जाणून घेऊया.

सशर्त विधाने आणि व्यत्यास (Conditional statements and converse)

जी विधाने जर-तर रूपांत लिहिता येतात त्यांना सशर्त विधाने असे म्हणतात. सशर्त विधानांतील ‘जर’ ने सुरू होणाऱ्या विधानास पूर्वांग (पूर्वार्ध)आणि ‘तर’ ने सुरू होणाऱ्या विधानास उत्तरांग (उत्तरार्ध) असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ : समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात. हे विधान आहे.

सशर्त विधान : जर दिलेला चौकोन समभुज चौकोन असेल तर त्याचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

एखादे सशर्त विधान दिले असेल आणि त्यातील पूर्वांग व उत्तरांग यांची अदलाबदल केली तर मिळणारे नवे विधान हे मूळ विधानाचा **व्यत्यास** (Converse) आहे असे म्हणतात.

एखादे सशर्त विधान सत्य असेल तर त्याचा व्यत्यास हा सत्य असतोच असे नाही. पुढील उदाहरणे पाहा.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सशर्त विधान : जर एखादा चौकोन समभुज असेल तर त्याचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

व्यत्यास : जर एखाद्या चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतील तर तो चौकोन समभुज असतो.
या उदाहरणात मूळ विधान व त्याचा व्यत्यास हे दोन्हीही सत्य आहेत.

सशर्त विधान : जर एखादी संख्या ही मूळ संख्या असेल तर ती सम किंवा विषम असते.

व्यत्यास : जर एखादी संख्या सम किंवा विषम असेल तर ती मूळ संख्या असते.
या उदाहरणात मूळ विधान सत्य आहे पण व्यत्यास असत्य आहे.

जाणून घेऊया.

सिद्धता (Proofs)

आपण कोन, त्रिकोण, चौकोन या आकृत्यांच्या अनेक गुणधर्मांचा अभ्यास केला आहे. हे गुणधर्म आपण प्रायोगिक पद्धतीने शिकलो. या इयत्तेत आपण भूमिती या विषयाकडे वेगळ्या दृष्टिकोनातून पाहणार आहोत. या दृष्टिकोनाचे श्रेय इसवी सनापूर्वी तिसऱ्या शतकात होऊन गेलेल्या ग्रीक गणिती युक्लिड यांच्याकडे जाते. भूमिती विषयाची त्या काळात जी माहिती होती, तिचे सुसंबद्ध संकलन यांनी केले. त्यात सुसूत्रता आणली. त्यांनी प्रामुख्याने असे दाखवले की, काही स्वयंसिद्ध व सर्वमान्य विधाने **गृहीतके** (Postulates) म्हणून स्वीकारली, तर त्यांच्या आधारावर तर्कशुद्ध मांडणीने नवीन गुणधर्म सिद्ध करता येतात. सिद्ध केलेल्या गुणधर्मांना **प्रमेये** (Theorems) म्हणतात.

युक्लिड यांनी मांडलेल्या गृहीतकांपैकी काही गृहीतके खाली दिली आहेत.

(1) एका बिंदूतून जाणाऱ्या असंख्य रेषा असतात.

(2) दोन बिंदूंतून एक आणि एकच रेषा जाते.

(3) कोणताही बिंदू केंद्र मानून दिलेल्या त्रिज्येचे वर्तुळ काढता येते.

(4) सर्व काटकोन परस्परांशी एकरूप असतात.

(5) दोन रेषा व त्यांची छेदिका काढली असता एका बाजूला तयार झालेल्या आंतरकोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षा कमी असेल तर त्या रेषा त्याच दिशेने वाढवल्यावर एकमेकींना छेदतात.


युक्लिड

यांतील काही गृहीतके आपण कृतीने पडताळून पाहिली आहेत.

एखाद्या गुणधर्माची तर्कशुद्ध सिद्धता देता येत असेल तर तो गुणधर्म सत्य मानला जातो. त्यासाठी केलेल्या तर्कशुद्ध मांडणीला त्या गुणधर्माची, म्हणजेच त्या प्रमेयाची **सिद्धता** (Proof) म्हणतात.

एखादे सशर्त विधान सत्य आहे असे आपल्याला सिद्ध करायचे असते, तेव्हा त्यातील पूर्वांगाला **पक्ष** आणि उत्तरांगाला **साध्य** म्हणतात.

सिद्धतेचे **प्रत्यक्ष** आणि **अप्रत्यक्ष** असे दोन प्रकार आहेत.

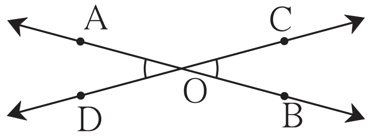
एकमेकांना छेदणाऱ्या दोन रेषांनी केलेल्या कोनांच्या गुणधर्माची **प्रत्यक्ष सिद्धता** देऊ.

प्रमेय : दोन रेषा एकमेकींना छेदल्यास होणारे परस्पर विरुद्ध कोन समान मापाचे असतात.

पक्ष : रेषा AB आणि रेषा CD या परस्परांना O बिंदूत छेदतात. A – O – B, C – O – D

साध्य : (i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle BOC = \angle AOD$



आकृती 1.15

सिद्धता : $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ . . . . (I) रेषीय जोडीतील कोन

$\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$ . . . . (II) रेषीय जोडीतील कोन

$\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$ . . . . विधान (I)व (II) वरून

$\therefore \angle AOC = \angle BOD$. . . . . . . $\angle BOC$ चा लोप करून.

याचप्रमाणे $\angle BOC = \angle AOD$ सिद्ध करता येईल.

अप्रत्यक्ष सिद्धता (Indirect proof) :

या पद्धतीत सुरुवातीस साध्य असत्य आहे असे गृहीत धरतात. त्या आधारे केवळ तर्काच्या आणि आधी मान्य झालेल्या सत्यांच्या आधारे पायरी पायरीने एका निष्कर्षापर्यंत पोहोचतात. हा निष्कर्ष माहीत असलेल्या सत्य गुणधर्माशी किंवा पक्षाशी, म्हणजेच दिलेल्या माहितीशी विसंगत असतो. त्यामुळे साध्य असत्य आहे हे मानणे चुकीचे आहे असा निष्कर्ष काढावा लागतो. म्हणजेच साध्य सत्य आहे हे स्वीकारले जाते. खालील उदाहरण अभ्यासा.

विधान : दोनपेक्षा मोठी असणारी मूळ संख्या विषम असते.

सशर्त विधान : जर p ही 2 पेक्षा मोठी मूळ संख्या असेल तर p ही विषम संख्या असते.

पक्ष : p ही 2 पेक्षा मोठी मूळ संख्या आहे. म्हणजेच p चे 1 व p हे दोनच विभाजक आहेत.

साध्य : p ही विषम संख्या आहे.

सिद्धता : p ही संख्या विषम नाही असे मानू.

म्हणजे p ही सम संख्या आहे.

$\therefore$ 2 हा p चा विभाजक आहे ..... (I)

पण p ही 2 पेक्षा मोठी मूळ संख्या दिलेली आहे. ....(पक्ष)

$\therefore$ p चे 1 व p हे दोनच विभाजक आहेत. ..... (II)

विधान (I) व (II) वरून पक्षाशी विसंगती येते.

म्हणून मानलेले विधान चूक आहे.

म्हणजे p ही 2 पेक्षा मोठी मूळ संख्या असेल तर ती संख्या विषम आहे हे सिद्ध होते.

सरावसंच 1.3

1. खालील विधाने जर-तर रूपांत लिहा.
   (i) समांतरभुज चौकोनाचे संमुख कोन एकरूप असतात.
   (ii) आयताचे कर्ण एकरूप असतात.
   (iii) समद्विभुज त्रिकोणात शिरोबिंदू व पायाचा मध्यबिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड पायाला लंब असतो.
2. पुढील विधानांचे व्यत्यास लिहा.
   (i) दोन समांतर रेषा व त्यांची छेदिका दिली असता होणारे व्युत्क्रम कोन एकरूप असतात.
   (ii) दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणाऱ्या आंतरकोनांची एक जोडी पूरक असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.
   (iii) आयताचे कर्ण एकरूप असतात.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

   (i) प्रत्येक रेषाखंडाला किती मध्यबिंदू असतात ?
   (A) एकच (B) दोन (C) तीन (D) अनेक

   (ii) दोन भिन्न रेषा परस्परांना छेदतात तेव्हा त्यांच्या छेदसंचात किती बिंदू असतात ?
   (A) अनंत (B) दोन (C) एक (D) एकही नाही

   (iii) तीन भिन्न बिंदूंना समाविष्ट करणाऱ्या किती रेषा असतात ?
   (A) दोन (B) तीन (C) एक किंवा तीन (D) सहा

   (iv) बिंदू A चा निर्देशक -2 व B चा निर्देशक 5 असेल तर $d(A,B) =$ किती ?
   (A) -2 (B) 5 (C) 7 (D) 3

   (v) जर P-Q-R आणि $d(P,Q) = 2$, $d(P,R) = 10$, तर $d(Q,R) =$ किती ?
   (A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20

2. संख्यारेषेवरील P,Q,R या बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे 3, -5 व 6 आहेत, तर खालील विधाने सत्य आहेत की असत्य ते लिहा.

   (i) $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$ (ii) $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$
   (iii) $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$ (iv) $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$

3. खाली काही बिंदूंच्या जोड्यांचे निर्देशक दिले आहेत. त्यावरून प्रत्येक जोडीतील अंतर काढा.

   (i) 3, 6 (ii) -9, -1 (iii) -4, 5 (iv) x, -2
   (v) $x + 3$, $x - 3$ (vi) -25, -47 (vii) 80, -85

4. संख्यारेषेवर P बिंदूचा निर्देशक -7 आहे तर P पासून 8 एकक अंतरावर असणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

5. दिलेल्या माहितीनुसार खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

   (i) जर A-B-C व d(A,C) = 17, d(B,C) = 6.5 तर d (A,B) = ?

   (ii) जर P-Q-R व d(P,Q) = 3.4, d(Q,R)= 5.7 तर d(P,R) = ?

6. संख्यारेषेवर A बिंदूचा निर्देशक 1 आहे. A पासून 7 एकक अंतरावरील बिंदूंचे निर्देशक काढा.

7. पुढील विधाने सशर्त रूपात लिहा.

   (i) प्रत्येक समभुज चौकोन हा चौरस असतो.

   (ii) रेषीय जोडीतल कोन परस्परांचे पूरक असतात.

   (iii) त्रिकोण ही तीन रेषाखंडांनी तयार झालेली आकृती असते.

   (iv) केवळ दोनच विभाजक असलेल्या संख्येला मूळ संख्या म्हणतात.

8. पुढील विधानांचे व्यत्यास लिहा.

   (i) जर एखाद्या बहुभुजाकृतीच्या कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असेल तर ती आकृती त्रिकोण असते.

   (ii) दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90^0 असेल तर ते परस्परांचे कोटिकोन असतात.

   (iii) दोन समांतर रेषांना छेदिकेने छेदले असता होणारे संगत कोन एकरूप असतात.

   (iv) संख्येतील अंकांच्या बेरजेला 3 ने भाग जात असेल तर त्या संख्येला 3 ने भाग जातो.

9. पुढील विधानांतील पक्ष व साध्य लिहा.

   (i) जर त्रिकोणाच्या तीनही बाजू एकरूप असतील तर त्याचे तीनही कोन एकरूप असतात.

   (ii) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

10*. खालील विधानांसाठी नामनिर्देशित आकृती काढून त्यावरून पक्ष, साध्य लिहा.

   (i) दोन समभुज त्रिकोण, समरूप असतात.

   (ii) जर रेषीय जोडीतील कोन एकरूप असतील तर त्यांपैकी प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

   (iii) त्रिकोणाच्या दोन बाजूंवर काढलेले शिरोलंब जर एकरूप असतील तर त्या दोन बाजू एकरूप असतात.

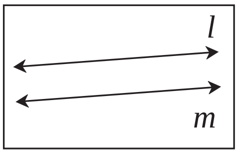
2 समांतर रेषा

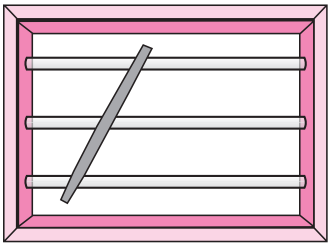
चला, शिकूया.

- समांतर रेषा व छेदिका यांमुळे होणाऱ्या कोनांचे गुणधर्म
- रेषांच्या समांतरतेच्या कसोट्या
- समांतर रेषांच्या गुणधर्मांचा उपयोग

जरा आठवूया.

समांतर रेषा : ज्या रेषा एकाच प्रतलात असतात परंतु एकमेकींना छेदत नाहीत त्या रेषांना समांतर रेषा असे म्हणतात.

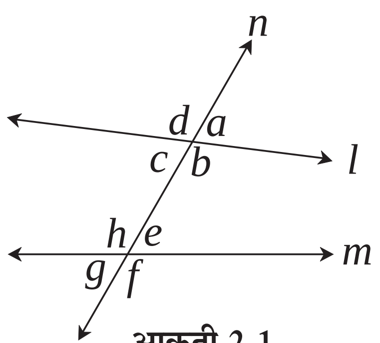




शेजारील चित्रात दाखवल्या प्रमाणे खिडकीच्या आडव्या समांतर गजांवर एखादी काठी तिरकी धरून पाहा. किती कोन झालेले दिसतात ?

- दोन रेषा व त्यांची छेदिका यांच्यामुळे होणाऱ्या कोनांच्या जोड्या आठवतात का ?

आकृती 2.1 मध्ये रेषा l व रेषा m यांची रेषा n ही छेदिका आहे. येथे एकूण आठ कोन तयार झाले आहेत. त्यांच्यातील कोनांच्या जोड्या पुढीलप्रमाणे आहेत.



आकृती 2.1

संगत कोनांच्या जोड्या

(i) $\angle d$, $\angle h$

(ii) $\angle a$, $\boxed{}$

(iii) $\angle c$, $\boxed{}$

(iv) $\angle b$, $\boxed{}$

आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या

(i) $\angle c$, $\angle e$

(ii) $\angle b$, $\angle h$

बाह्यव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या

(i) $\angle d$, $\angle f$

(ii) $\angle a$, $\angle g$

छेदिकेच्या एका बाजूच्या आंतरकोनांच्या जोड्या

(i) $\angle c$, $\angle h$

(ii) $\angle b$, $\angle e$

महत्त्वाचे काही गुणधर्म :

(1) दोन रेषा एकमेकींना छेदल्यावर होणारे विरुद्ध कोन समान मापाचे असतात.

(2) रेषीय जोडीतील कोन परस्परांचे पूरक असतात.

(3) जेव्हा संगतकोनांची एक जोडी एकरूप असते तेव्हा संगत कोनांच्या उरलेल्या सर्व जोड्या एकरूप असतात.

(4) जेव्हा व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असते तेव्हा व्युत्क्रम कोनांच्या इतर सर्व जोड्या एकरूप असतात.

(5) जेव्हा छेदिकेच्या एकाच बाजूच्या आंतरकोनांची बेरीज 180° होते तेव्हा आंतरकोनांच्या दुसऱ्या जोडीतील कोनांची बेरीजही 180° होते.

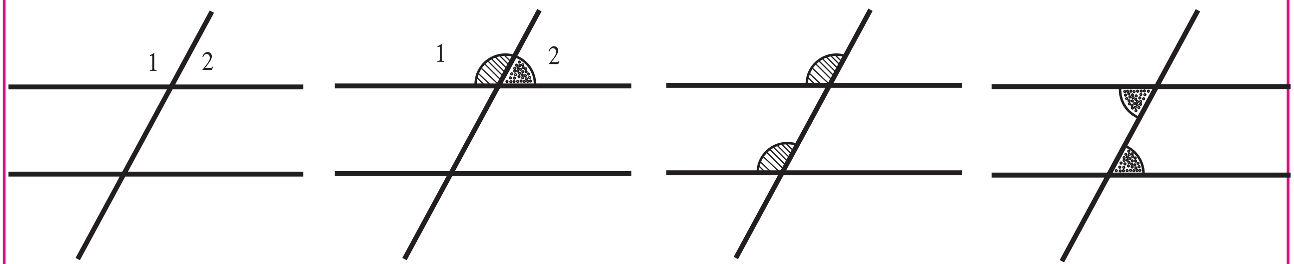
जाणून घेऊया.

समांतर रेषांचे गुणधर्म (Properties of parallel lines)

कृती :

दोन समांतर रेषा व त्यांची छेदिका यांच्यामुळे तयार झालेल्या कोनांच्या गुणधर्मांचा पडताळा घेणे.

जाड रंगीत कागदाचा एक तुकडा घ्या. त्यावर दोन समांतर रेषा काढून एक छेदिका काढा. या तिन्ही रेषांवर सरळ काड्या डिंकाने चिकटवा. येथे तयार झालेल्या आठ कोनांपैकी कोन 1 व कोन 2 च्या कोनांच्या मापांएवढे रंगीत पत्रिकेचे तुकडे कापा. (खालील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे) हे तुकडे संबंधित संगतकोन, व्युत्क्रमकोन व आंतरकोनांजवळ ठेवून गुणधर्मांचा पडताळा घ्या.



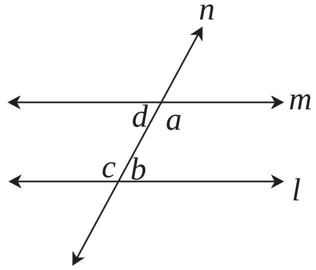
दोन समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या कोनांचे, कृतीने पडताळलेले गुणधर्म आता सिद्ध करू. हे गुणधर्म सिद्ध करण्यासाठी आपण युक्लिडचे पुढे दिलेले प्रसिद्ध गृहीतक वापरणार आहोत.

दोन रेषा व त्यांची एक छेदिका काढली असता एका बाजूला तयार झालेल्या आंतरकोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षा कमी असेल तर त्या सरळ रेषा त्याच दिशेने वाढवल्यावर एकमेकींना छेदतात.

आंतरकोनांचे प्रमेय (Interior angle theorem)

प्रमेय : दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर छेदिकेच्या कोणत्याही एका बाजूला असणारे आंतरकोन एकमेकांचे पूरककोन असतात.

पक्ष : रेषा $l \parallel$ रेषा m आणि रेषा n ही छेदिका आहे.
त्यामुळे आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे $\angle a$, $\angle b$ व $\angle c$, $\angle d$ हे आंतरकोन झाले आहेत.



आकृती 2.2

साध्य : $\angle a + \angle b = 180°$
$\angle d + \angle c = 180°$

सिद्धता : $\angle a$ व $\angle b$ यांच्या मापांच्या बेरजेबाबत तीन शक्यता आहेत.

(i) $\angle a + \angle b < 180°$ (ii) $\angle a + \angle b > 180°$ (iii) $\angle a + \angle b = 180°$

यांपैकी (i) $\angle a + \angle b < 180°$ सत्य मानू.

रेषा l व रेषा m या $\angle a$ आणि $\angle b$ छेदिकेच्या ज्या बाजूला आहेत त्या दिशेने वाढवल्यास एकमेकींना छेदतील. ...(युक्लिडच्या गृहीतकानुसार)

परंतु रेषा l आणि रेषा m या समांतर रेषा आहेत. ....पक्ष

$\therefore$ $\angle a + \angle b < 180°$ हे अशक्य आहे. . . . .(I)

आता $\angle a + \angle b > 180°$ ही शक्यता सत्य मानू.

$\therefore$ $\angle a + \angle b > 180°$

परंतु $\angle a + \angle d = 180°$

आणि $\angle c + \angle b = 180°$ . . . . . रेषीय जोडीतील कोन

$\therefore$ $\angle a + \angle d + \angle b + \angle c = 180° + 180° = 360°$

$\therefore \angle c + \angle d = 360° - (\angle a + \angle b)$

जर $\angle a + \angle b > 180°$ असेल तर $[360° - (\angle a + \angle b)] < 180°$

$\therefore \angle c + \angle d < 180°$

$\therefore$ तसे असल्यास $\angle c$ आणि $\angle d$ छेदिकेच्या ज्या बाजूला आहेत त्या दिशेने वाढवल्यास रेषा l आणि रेषा m एकमेकींना छेदतील.

$\therefore \angle c + \angle d < 180$ हे अशक्य.

म्हणजेच $\angle a + \angle b > 180^\circ$ हे अशक्य. ...... (II)

$\therefore \angle a + \angle b = 180^\circ$ ही एकच शक्यता उरते. ......(I) व (II) वरून

$\therefore \angle a + \angle b = 180^\circ$ तसेच $\angle c + \angle d = 180^\circ$

लक्षात घ्या की, या सिद्धतेमध्ये आपण $\angle a + \angle b > 180^\circ$, $\angle a + \angle b < 180^\circ$ या दोन्ही शक्यता विसंगतीमुळे नाकारल्या म्हणजे ही एक अप्रत्यक्ष सिद्धता आहे.

संगत कोनांचे व व्युत्क्रम कोनांचे गुणधर्म (Corresponding angle and alternate angle theorem)

प्रमेय : दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणाऱ्या संगत कोनांच्या जोडीतील कोनांची मापे समान असतात.

पक्ष : रेषा $l \parallel$ रेषा m
रेषा n ही छेदिका आहे.

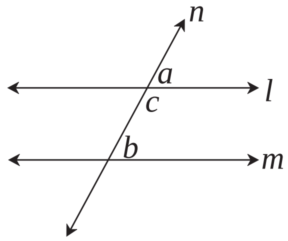
साध्य : $\angle a = \angle b$

सिद्धता : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (I) रेषीय जोडीतील कोन

$\angle b + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (II) समांतर रेषांचा आंतरकोनांचा गुणधर्म

$\angle a + \angle c = \angle b + \angle c$ . . . विधान (I) व (II) वरून

$\therefore \angle a = \angle b$



आकृती 2.3

प्रमेय : दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांच्या जोडीतील कोनांची मापे समान असतात.

पक्ष : रेषा $l \parallel$ रेषा m
रेषा n ही छेदिका आहे.

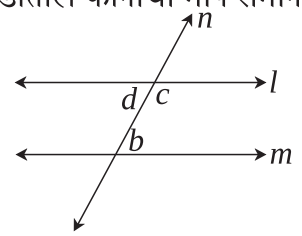
साध्य : $\angle d = \angle b$

सिद्धता : $\angle d + \angle c = 180^\circ$ . . . . (I) रेषीय जोडीतील कोन

$\angle c + \angle b = 180^\circ$ . . . . (II) समांतर रेषांचा आंतरकोनांचा गुणधर्म

$\angle d + \angle c = \angle c + \angle b$ . . . . विधान (I) व (II) वरून

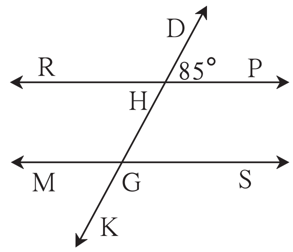
$\therefore \angle d = \angle b$



आकृती 2.4

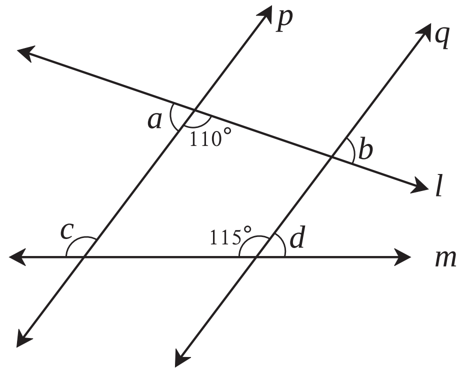
सरावसंच 2.1

1. आकृती 2.5 मध्ये रेषा RP || रेषा MS व रेषा DK ही त्यांची छेदिका आहे. $\angle DHP = 85°$ तर खालील कोनांची मापे काढा.
(i) $\angle RHD$ (ii) $\angle PHG$
(iii) $\angle HGS$ (iv) $\angle MGK$

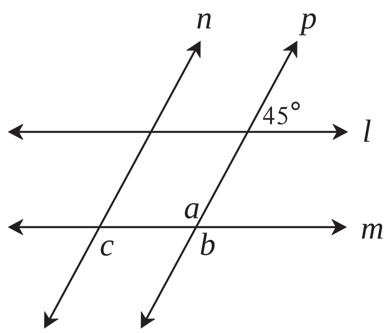


आकृती 2.5

2. आकृती 2.6 पाहा. रेषा p || रेषा q आणि रेषा l व रेषा m या छेदिका आहेत. काही कोनांची मापे दाखवली आहेत. यावरून $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ यांची मापे काढा.



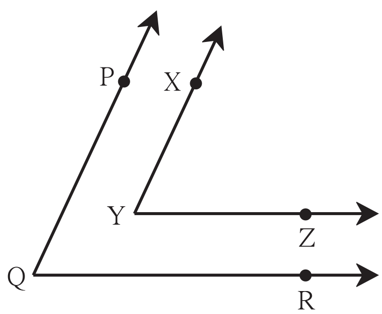
आकृती 2.6



आकृती 2.7

3. आकृती 2.7 मध्ये रेषा l || रेषा m व रेषा n || रेषा p आहे. एका कोनाच्या दिलेल्या मापावरून $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ ची मापे काढा.

4*. आकृती 2.8 मध्ये, $\angle PQR$ आणि $\angle XYZ$ यांच्या भुजा परस्परांना समांतर आहेत. तर सिद्ध करा, की $\angle PQR \cong \angle XYZ$

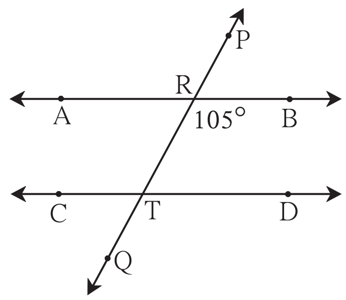


आकृती 2.8

5. आकृती 2.9 मध्ये, रेषा AB || रेषा CD आणि रेषा PQ ही छेदिका आहे तर आकृतीत दाखवलेल्या कोनांच्या मापांवरून पुढील कोनांची मापे काढा.

(i) $\angle ART$ (ii) $\angle CTQ$

(iii) $\angle DTQ$ (iv) $\angle PRB$



आकृती 2.9

जाणून घेऊया.

समांतर रेषांच्या गुणधर्मांचा उपयोग

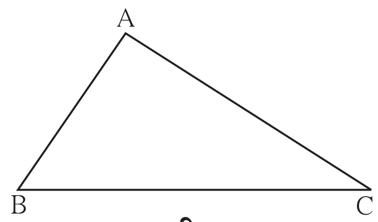
समांतर रेषा व त्यांची छेदिका यांच्यामुळे होणाऱ्या कोनांच्या गुणधर्मांचा उपयोग करून त्रिकोणाचा एक गुणधर्म सिद्ध करु.

प्रमेय : कोणत्याही त्रिकोणाच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

पक्ष : Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण आहे.

साध्य : $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

रचना : A बिंदूतून रेख BC ला समांतर रेषा l काढा.
त्यावर P व Q बिंदू असेही घ्या की, P-A-Q



आकृती 2.10

सिद्धता : रेषा PQ || रेख BC व रेख AB ही छेदिका.

$\therefore$ $\angle ABC = \angle PAB$.......(व्युत्क्रम कोन).....I

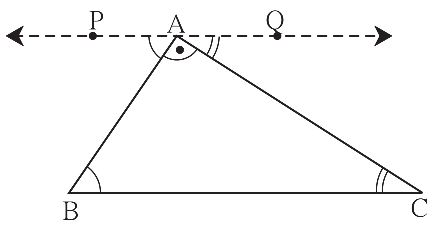
रेषा PQ || रेख BC व रेख AC ही छेदिका.

$\therefore$ $\angle ACB = \angle QAC$.......(व्युत्क्रम कोन).....II

विधान I व II यावरून,

$\angle ABC + \angle ACB = \angle PAB + \angle QAC$ . . . III

समीकरण III च्या दोन्ही बाजूंत $\angle BAC$ मिळवू.



आकृती 2.11

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle PAB + \angle QAC + \angle BAC$

$= \angle PAB + \angle BAC + \angle QAC$

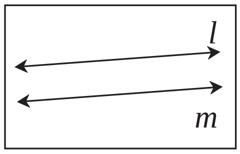
$= \angle PAC + \angle QAC$ ...($\because \angle PAB + \angle BAC = \angle PAC$)

$= 180^\circ$ ...(रेषीय जोडीतील कोन)

म्हणजेच त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

चला, चर्चा करूया.

शेजारील प्रतलात रेषा l व रेषा m या एकमेकींना समांतर आहेत का हे कसे ठरवाल ?



आकृती 2.12

जाणून घेऊया.

रेषांच्या समांतरतेच्या कसोट्या (Tests for parallel lines)

दोन रेषा व त्यांची छेदिका त्यांच्यामुळे होणारे कोन तपासून आपण त्या दोन रेषा समांतर आहेत का ते ठरवू शकतो.

(1) छेदिकेच्या एका बाजूच्या आंतरकोनांची जोडी पूरक कोनांची असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

(2) व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी समान असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

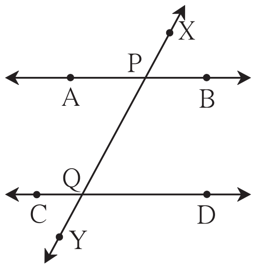
(3) संगत कोनांची एक जोडी समान असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

समांतर रेषांची आंतरकोन कसोटी (Interior angles test)

प्रमेय : दोन भिन्न रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता छेदिकेच्या एका बाजूच्या आंतरकोनांची बेरीज $180°$ असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

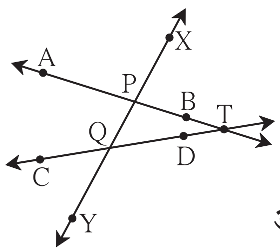
पक्ष : रेषा AB व रेषा CD यांची रेषा XY ही छेदिका आहे.
$\angle BPQ + \angle PQD = 180°$

साध्य : रेषा AB || रेषाCD



आकृती 2.13

सिद्धता : ही कसोटी आपण अप्रत्यक्ष पद्धतीने सिद्ध करणार आहोत.
साध्यातील विधान चूक आहे असे मानू.
∴ रेषा AB व रेषा CD समांतर नाहीत
हे विधान सत्य मानू.
समजा, रेषा AB व रेषा CD या T बिंदूत छेदतात.
त्यामुळे Δ PQT तयार झाला.



आकृती 2.14

$\angle TPQ + \angle PQT + \angle PTQ = 180°$ . . . . . . त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज
परंतु $\angle TPQ + \angle PQT = 180°$ दिले आहे. . . . . पक्ष
यामुळे त्रिकोणाच्या दोन कोनांची बेरीजच $180°$ आहे.
पण त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज $180°$ असते.
∴ $\angle PTQ = 0°$ मिळतो.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

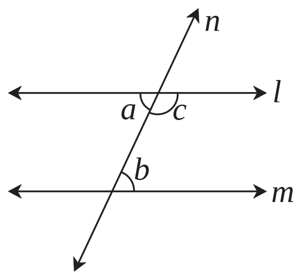
$\therefore$ PT व QT या रेषा म्हणजेच रेषा AB आणि रेषा CD या भिन्न राहणार नाहीत.
आपल्याला रेषा AB व रेषा CD या भिन्न रेषा आहेत असे दिले आहे.
म्हणजे पक्षाशी विसंगती मिळते.
$\therefore$ आपण गृहीत धरलेले विधान चूक आहे. म्हणजे रेषा AB व रेषा CD समांतर आहेत.
यावरून दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणाऱ्या एका बाजूच्या आंतरकोनांची जोडी पूरक असेल तर त्या रेषा समांतर असतात, हे सिद्ध होते. या गुणधर्माला समांतर रेषांची **आंतरकोन कसोटी** म्हणतात.

ही कसोटी गृहीत धरून इतर दोन कसोट्या सिद्ध करू.

व्युत्क्रम कोन कसोटी (Alternate angles test)

प्रमेय : दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

पक्ष : रेषा l व रेषा m यांची रेषा n ही छेदिका.
$\angle a$ व $\angle b$ ही व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप आहे.
$\therefore \angle a = \angle b$



आकृती 2.15

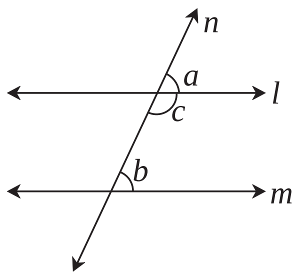
साध्य : रेषा $l \parallel$ रेषा m

सिद्धता : $\angle a + \angle c = 180°$ . . . . . रेषीय जोडीतील कोन
$\angle a = \angle b$ . . . . पक्ष
$\therefore \angle b + \angle c = 180°$
परंतु $\angle b$ व $\angle c$ हे छेदिकेच्या एका बाजूचे आंतरकोन आहेत.
$\therefore$ रेषा $l \parallel$ रेषा m . . . . आंतरकोन कसोटीवरून.
या गुणधर्माला समांतर रेषांची **व्युत्क्रम कोन कसोटी** म्हणतात.

संगतकोन कसोटी (Corresponding angles Test)

प्रमेय : दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता होणाऱ्या संगत कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

पक्ष : रेषा l व रेषा m यांची रेषा n ही छेदिका
$\angle a$ व $\angle b$ ही संगत कोनांची जोडी आहे.
$\therefore \angle a = \angle b$



आकृती 2.16

साध्य : रेषा $l \parallel$ रेषा m

सिद्धता : $\angle a + \angle c = 180°$ . . . . रेषीय जोडीतील कोन
$\angle a = \angle b$ . . . . पक्ष
$\therefore \angle b + \angle c = 180°$
म्हणजेच छेदिकेच्या एका बाजूचे आंतरकोन पूरक कोन आहेत.
$\therefore$ रेषा $l \parallel$ रेषा m . . . . आंतरकोनांची कसोटी
या गुणधर्माला समांतर रेषांची **संगतकोन कसोटी** म्हणतात.

उपप्रमेय I जर एक रेषा त्याच प्रतलातील दोन रेषांना लंब असेल तर त्या दोन रेषा परस्परांना समांतर असतात.

पक्ष : रेषा $n \perp$ रेषा l आणि रेषा $n \perp$ रेषा m

साध्य : रेषा $l \parallel$ रेषा m

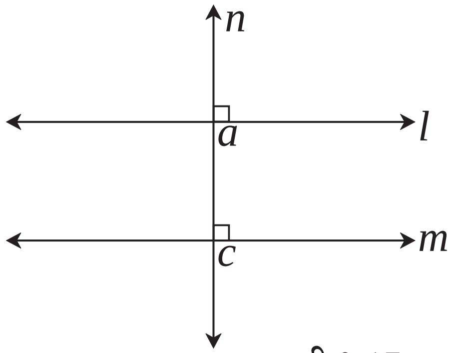
सिद्धता : रेषा $n \perp$ रेषा l व रेषा $n \perp$ रेषा m हे दिले आहे.

$\therefore \angle a = \angle c = 90°$

$\angle a$ व $\angle c$ हे रेषा l व रेषा m यांच्या

रेषा n या छेदिकेमुळे झालेले संगतकोन आहेत.

$\therefore$ रेषा $l \parallel$ रेषा m . . . . रेषांच्या समांतरतेची संगतकोन कसोटी

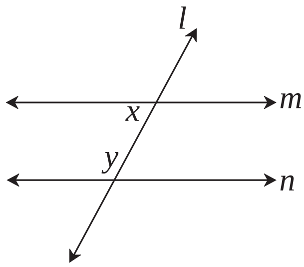


आकृती 2.17

उपप्रमेय II जर एका प्रतलातील दोन रेषा त्याच प्रतलातील तिसऱ्या रेषेला समांतर असतील तर त्या रेषा परस्परांना समांतर असतात हे सिद्ध करा.

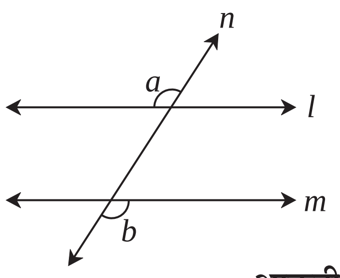
सरावसंच 2.2

1. आकृती 2.18 मध्ये $y = 108°$ आणि $x = 71°$ तर रेषा m व रेषा n समांतर होतील का ? कारण लिहा.



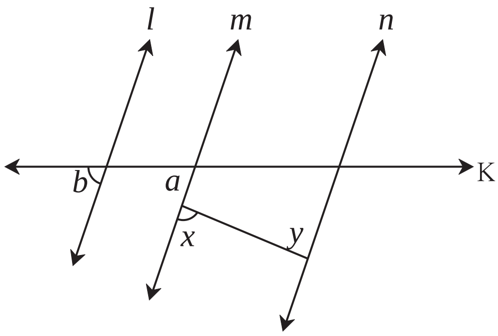
आकृती 2.18

2. आकृती 2.19 मध्ये जर $\angle a \cong \angle b$ तर सिद्ध करा रेषा $l \parallel$ रेषा m



आकृती 2.19

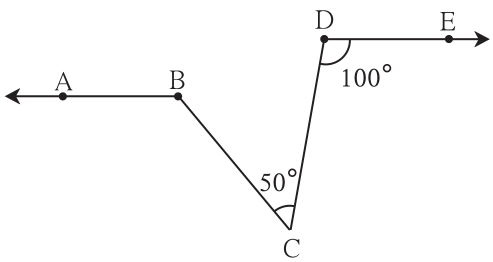
3. आकृती 2.20 मध्ये जर $\angle a \cong \angle b$ आणि $\angle x \cong \angle y$ तर सिद्ध करा की रेषा $l \parallel$ रेषा n



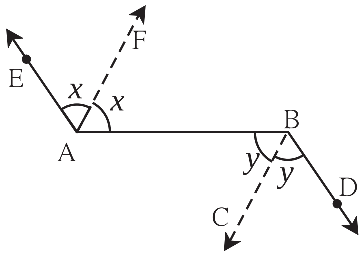
आकृती 2.20

4. आकृती 2.21 मध्ये जर किरण BA $\parallel$ किरण DE, $\angle C = 50°$ आणि $\angle D = 100°$, तर $\angle ABC$ चे माप काढा.

(सूचना : बिंदू C मधून रेषा AB ला समांतर रेषा काढा.)



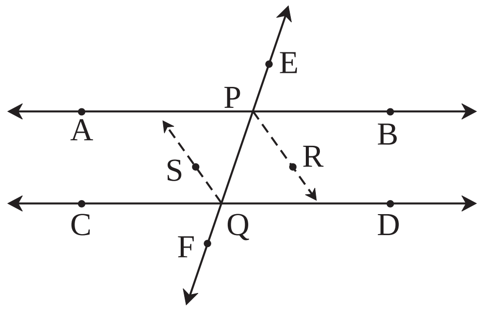
आकृती 2.21

5. 

आकृती 2.22

आकृती 2.22 मध्ये किरण AE || किरण BD किरण AF हा $\angle$EAB चा आणि किरण BC हा $\angle$ABD चा दुभाजक आहे, तर सिद्ध करा की, रेषा AF || रेषा BC

6. रेषा AB व रेषा CD या रेषांना रेषा EF ही अनुक्रमे P व Q बिंदूत छेदते. किरण PR व किरण QS हे समांतर किरण असून अनुक्रमे $\angle$BPQ व $\angle$PQC चे दुभाजक आहेत, तर सिद्ध करा रेषा AB || रेषा CD



आकृती 2.23

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. खालील विधानांतील रिकाम्या जागा भरण्यासाठी दिलेल्या पर्यायांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(i) दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता छेदिकेच्या एकाच बाजूच्या आंतरकोनांची बेरीज . . . . असते.

(A) $0°$ (B) $90°$ (C) $180°$ (D) $360°$

(ii) दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता . . . . कोन तयार होतात.

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

(iii) दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणाऱ्या कोनांपैकी एका कोनाचे माप $40°$ असेल तर त्याच्या संगतकोनाचे माप . . . . असते.

(A) $40°$ (B) $140°$ (C) $50°$ (D) $180°$

(iv) Δ ABC मध्ये $\angle A = 76°$, $\angle B = 48°$, तर $\angle C$ चे माप . . . . आहे.

(A) $66°$ (B) $56°$ (C) $124°$ (D) $28°$

(v) दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांच्या जोडीतील एका कोनाचे माप $75°$ असेल तर दुसऱ्या कोनाचे माप . . . . असते.

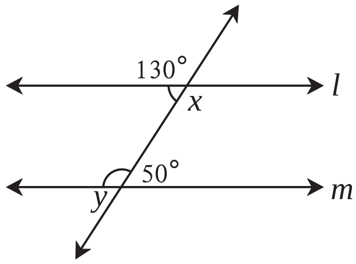
(A) $105°$ (B) $15°$ (C) $75°$ (D) $45°$

2*. किरण PQ आणि किरण PR परस्परांशी लंब आहेत. बिंदू B हा $\angle$QPR च्या आंतरभागात व बिंदू A हा $\angle$RPQ च्या बाह्यभागात आहे. किरण PB आणि किरण PA परस्परांना लंब आहेत. यावरून आकृती काढा व खालील कोनांच्या जोड्या लिहा.

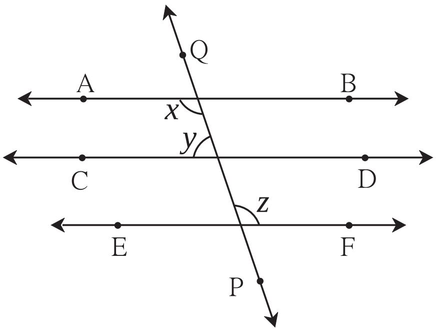
(i) कोटिकोन (ii) पूरक कोन (iii) एकरूप कोन

3. जर एखादी रेषा एका प्रतलातील दोन समांतर रेषांपैकी एका रेषेला लंब असेल तर ती दुसऱ्या रेषेलाही ती लंब असते हे सिद्‌ध करा.

4. आकृती 2.24 मध्ये दर्शवलेल्या कोनांच्या मापांवरून $\angle x$ आणि $\angle y$ यांची मापे काढा आणि सिद्‌ध करा की रेषा l || रेषा m



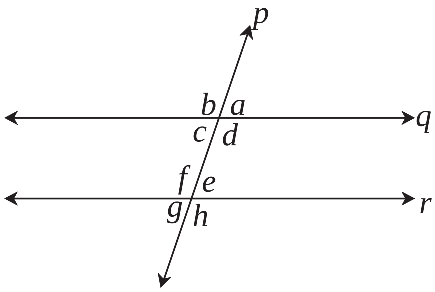
आकृती 2.24



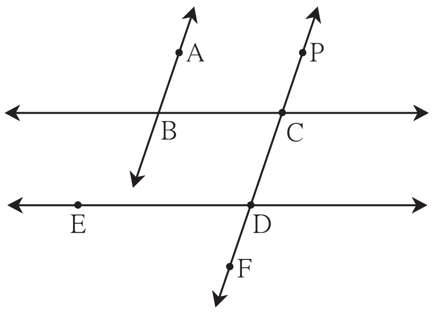
आकृती 2.25

5. रेषा AB || रेषा CD || रेषा EF आणि रेषा QP ही त्यांची छेदिका आहे. जर $y : z = 3 : 7$ तर x ची किंमत काढा. (आकृती 2.25 पाहा.)

6. आकृती 2.26 मध्ये जर रेषा q || रेषा r रेषा p ही त्यांची छेदिका असेल आणि $a = 80°$ तर f व g काढा.



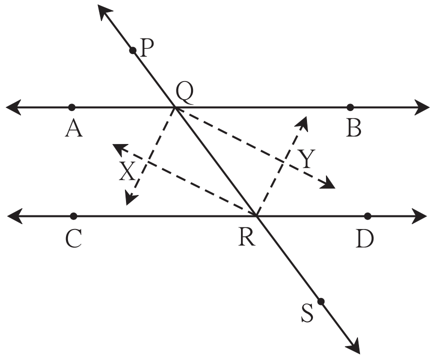
आकृती 2.26



आकृती 2.27

7. आकृती 2.27 मध्ये जर रेषा AB || रेषा CF आणि रेषा BC || रेषा ED तर सिद्‌ध करा $\angle ABC = \angle FDE$.

8. आकृती 2.28 मध्ये रेषा AB || रेषा CD व रेषा PS ही त्यांची छेदिका आहे. किरण QX, किरण QY, किरण RX, किरण RY हे कोनदुभाजक आहेत, तर □ QXRY हा आयत आहे हे दाखवा.



आकृती 2.28

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

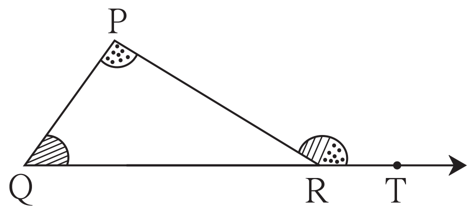
3 त्रिकोण

चला, शिकूया.

- त्रिकोणाच्या दूरस्थ आंतरकोनांचे प्रमेय
- त्रिकोणांची एकरूपता
- समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय
- $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ मापाच्या त्रिकोणाचा गुणधर्म
- त्रिकोणाची मध्यगा
- काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावरील मध्यगेचा गुणधर्म
- लंबदुभाजकाचे प्रमेय
- कोनदुभाजकाचे प्रमेय
- समरूप त्रिकोण

कृती

एका जाड कागदावर कोणत्याही मापाचा Δ PQR काढा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे किरण QR वर T हा बिंदू घ्या. रंगीत जाड कागदाचे $\angle$P व $\angle$Q च्या मापाचे तुकडे कापा. ते तुकडे ठेवून $\angle$PRT भरून जातो हे अनुभवा.



आकृती 3.1

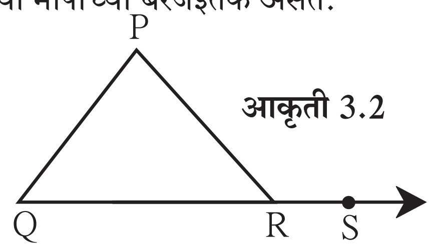
जाणून घेऊया.

त्रिकोणाच्या दूरस्थ आंतरकोनांचे प्रमेय (Theorem of remote interior angles of a triangle)

प्रमेय : त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप हे त्याच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेइतके असते.

पक्ष : Δ PQR या त्रिकोणाचा $\angle$PRS हा बाह्यकोन आहे.

साध्य : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$



आकृती 3.2

सिद्धता : त्रिकोणाच्या तिन्ही आंतरकोनांची बेरीज 180° असते.

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$---(I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$---(II). . . . (रेषीय जोडीतील कोन)

$\therefore$ विधान I व II वरून

$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$ ---------($\angle$PRQ चा लोप करून)

$\therefore$ त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप हे त्याच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे असते.

विचार करूया.

आकृती 3.3 मध्ये बिंदू R मधून रेख PQ ला समांतर रेषा काढून याच प्रमेयाची वेगळी सिद्धता देता येईल का?

जाणून घेऊया.

त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय (Property of an exterior angle of triangle)

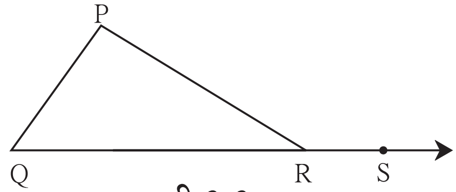
a आणि b या दोन संख्यांची बेरीज $(a + b)$ ही a पेक्षा मोठी असते व b पेक्षाही मोठी असते.

म्हणजेच $a + b > a,\ a + b > b$

याचा उपयोग करून त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचा खालील गुणधर्म मिळतो.

Δ PQR मध्ये $\angle PRS$ हा बाह्यकोन असेल तर

$\angle PRS > \angle P$, $\angle PRS > \angle Q$



आकृती 3.3

$\therefore$ त्रिकोणाचा बाह्यकोन हा त्याच्या प्रत्येक दूरस्थ आंतरकोनापेक्षा मोठा असतो.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) एका त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांचे गुणोत्तर 5 : 6 : 7 आहे, तर त्याच्या सर्व कोनांची मापे काढा.

उकल : त्या कोनांची मापे $5x$, $6x$, $7x$ मानू.

$$5x + 6x + 7x = 180^\circ$$

$$18x = 180^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

$5x = 5 \times 10 = 50^\circ$, $6x = 6 \times 10 = 60^\circ$, $7x = 7 \times 10 = 70^\circ$

त्रिकोणाच्या कोनांची मापे 50°, 60°, 70° आहेत.

उदा (2) शेजारील आकृती 3.4 चे निरीक्षण करून $\angle PRS$ व $\angle RTS$ यांची मापे काढा.

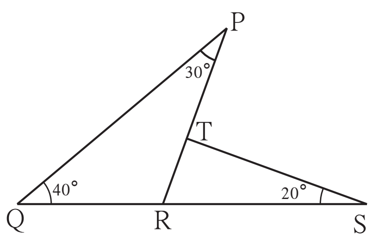
उकल : Δ PQR चा $\angle PRS$ हा बाह्यकोन आहे.

दूरस्थ आंतरकोनाच्या प्रमेयावरून,

$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

$= 40^\circ + 30^\circ$

$\angle PRS = 70^\circ$



आकृती 3.4

Δ RTS मध्ये

$\angle TRS + \angle RTS + \angle TSR = \boxed{}$ .... त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज

$\therefore \boxed{} + \angle RTS + \boxed{} = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS + 90^\circ = 180^\circ$

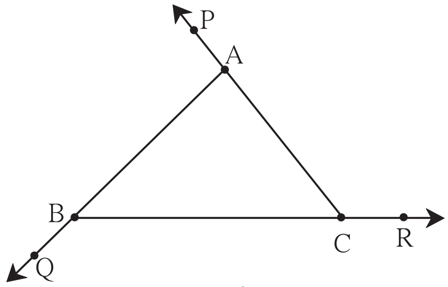
$\therefore \angle RTS = \boxed{}$

उदा (3) सिद्‌ध करा, की त्रिकोणाच्या बाजू एकाच दिशेने वाढवल्यास होणाऱ्या बाह्यकोनांची बेरीज 360° असते.

पक्ष : $\angle PAB$, $\angle QBC$ आणि $\angle ACR$ हे ΔABC चे बाह्यकोन आहेत.

साध्य : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360^\circ$.

सिद्‌धता : या उदाहरणाची सिद्‌धता दोन रीतीने देता येते.



आकृती 3.5

रीत I

ΔABC मध्ये जर $\angle PAB$ हा बाह्यकोन विचारात घेतला तर $\angle ABC$ व $\angle ACB$ हे त्याचे दूरस्थ आंतरकोन आहेत, म्हणून

$\angle BAP = \angle ABC + \angle ACB$ ---- (I)

तसेच $\angle ACR = \angle ABC + \angle BAC$ ---- (II) . . . . दूरस्थ आंतरकोनाच्या प्रमेयानुसार

आणि $\angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB$ ---- (III)

विधान (I), (II), (III) यांच्या दोन्ही बाजूंची बेरीज करू.

$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$

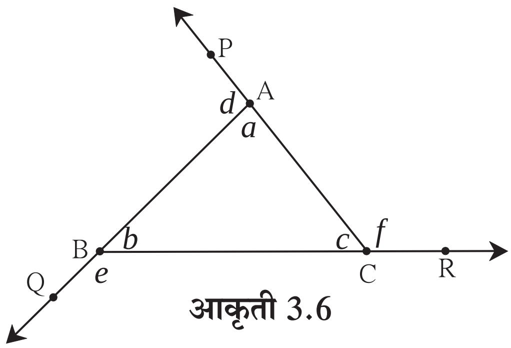
$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$

$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$

$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$

$= 2 \times 180^\circ$ . . . . . (त्रिकोणांच्या आंतरकोनांची बेरीज)

$= 360^\circ$.



आकृती 3.6

रीत II

$\angle c + \angle f = 180^\circ$ . . . . रेषीय जोडीतील कोन

तसेच $\angle a + \angle d = 180^\circ$

व $\angle b + \angle e = 180^\circ$

$\therefore \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$

$\angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540^\circ$

$\therefore \quad \angle f + \angle d + \angle e + 180^\circ = 540^\circ$

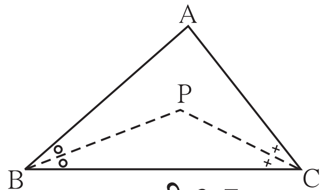
$\therefore f + d + e = 540^\circ - 180^\circ$

$= 360^\circ$

उदा (4) आकृती 3.7 मध्ये Δ ABC च्या $\angle B$ व $\angle C$ चे दुभाजक जर बिंदू P मध्ये छेदत असतील तर सिद्ध करा की,

$\angle BPC = 90 + \frac{1}{2} \angle BAC$

रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.



आकृती 3.7

सिद्धता : Δ ABC मध्ये,

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \boxed{}$ ...... (त्रिकोणांच्या कोनांच्या मापांची बेरीज)

$\therefore \frac{1}{2} \angle BAC + \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times \boxed{}$ ..... (प्रत्येक पदाला $\frac{1}{2}$ ने गुणून.)

$\therefore \frac{1}{2} \angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$ ......(I)

Δ BPC मध्ये

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$ ...... (त्रिकोणांच्या आंतरकोनांच्या मापांची बेरीज)

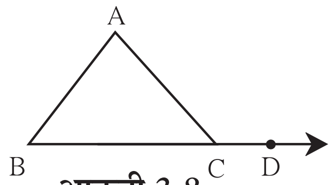
$\therefore \angle BPC + \boxed{} = 180^\circ$ ...... (विधान I वरून)

$\therefore \quad \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC)$

$\therefore \quad = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC$

$= 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC$

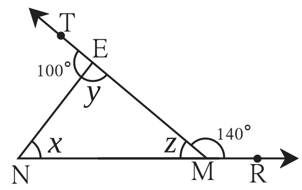
सरावसंच 3.1



आकृती 3.8

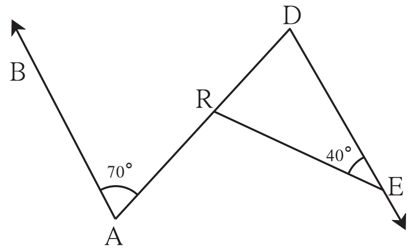
1. आकृती 3.8 मध्ये Δ ABC चा $\angle ACD$ हा बाह्यकोन आहे. $\angle B = 40^\circ$, $\angle A = 70^\circ$ तर m $\angle ACD$ काढा.
2. Δ PQR मध्ये $\angle P = 70^\circ$, $\angle Q = 65^\circ$ तर $\angle R$ चे माप काढा.
3. त्रिकोणाच्या कोनांची मापे x°, $(x-20)^\circ$, $(x-40)^\circ$ असतील तर प्रत्येक कोनाचे माप किती ?
4. त्रिकोणाच्या तीन कोनांपैकी एक कोन सर्वांत लहान कोनाच्या दुप्पट व दुसरा कोन सर्वांत लहान कोनाच्या तिप्पट आहे तर त्या तिन्ही कोनांची मापे काढा.

5. आकृती 3.9 मध्ये दिलेल्या कोनांच्या मापांवरून x, y, z च्या किमती काढा.



आकृती 3.9

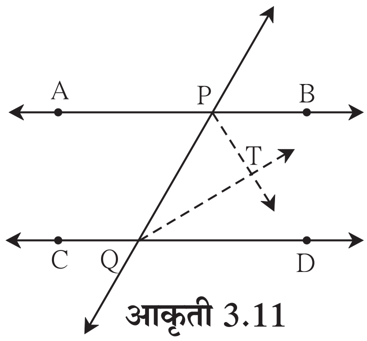
6. आकृती 3.10 मध्ये रेषा AB || रेषा DE आहे. दिलेल्या मापांवरून ∠DRE व ∠ARE ची मापे काढा.



आकृती 3.10

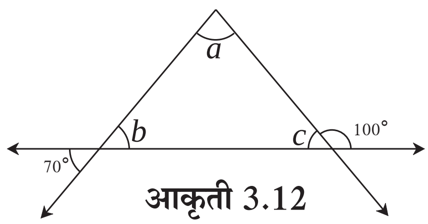
7. Δ ABC मध्ये ∠A व ∠B चे दुभाजक बिंदू O मध्ये छेदतात. जर ∠C = 70° तर ∠AOB चे माप काढा.

8. आकृती 3.11 मध्ये रेषा AB || रेषा CD आणि रेषा PQ ही त्यांची छेदिका आहे. किरण PT आणि किरण QT हे अनुक्रमे ∠BPQ व ∠PQD चे दुभाजक आहेत, तर सिद्ध करा की ∠PTQ = 90°



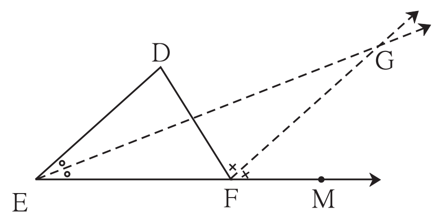
आकृती 3.11

9. आकृती 3.12 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून $\angle a$, $\angle b$ व $\angle c$ यांची मापे काढा.



आकृती 3.12

10*. आकृती 3.13 मध्ये रेख DE || रेख GF आहे. किरण EG व किरण FG हे अनुक्रमे ∠DEF व ∠DFM या कोनांचे दुभाजक आहेत. तर सिद्ध करा की,
(i) ∠DEF = ∠EDF (ii) EF = FG

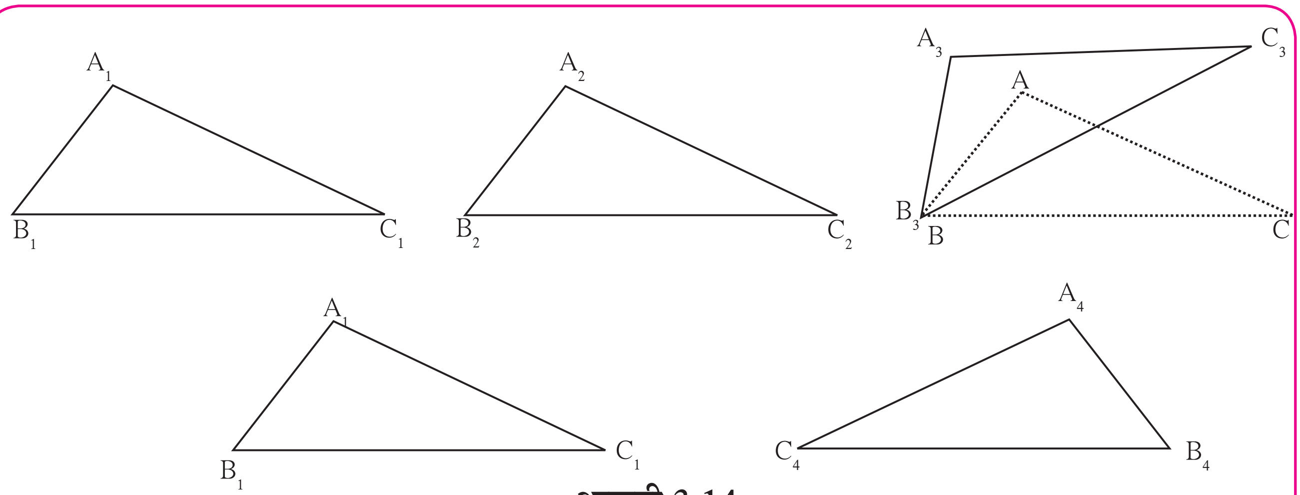


आकृती 3.13

जाणून घेऊया.

त्रिकोणांची एकरूपता (Congruence of triangles)

एक रेषाखंड दुसऱ्यावर ठेवल्यास तंतोतंत जुळला तर ते दोन रेषाखंड एकरूप असतात. तसेच एक कोन उचलून दुसऱ्या कोनावर ठेवल्यावर तंतोतंत जुळतो तेव्हा ते दोन कोन एकरूप असतात हे आपण जाणतो. त्याचप्रमाणे एक त्रिकोण उचलून दुसऱ्या त्रिकोणावर ठेवल्यावर तंतोतंत जुळला तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे म्हणतात. जर Δ ABC आणि Δ PQR हे एकरूप असतील तर ते $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ असे दाखवतात.



आकृती 3.14

कृती : कोणत्याही मापाचा एक त्रिकोण Δ ABC पुठ्ठ्यावर कापून घ्या.

तो जाड कागदावर एका जागी ठेवून भोवती पेन्सिल गिरवून त्याची प्रत काढा. या त्रिकोणाला $\Delta A_1B_1C_1$ नाव द्या.

आता तो पुठ्ठ्याचा त्रिकोण बाजूला सरकवून तेथे याची दुसरी प्रत काढा.

तिला $\Delta A_2B_2C_2$ नाव द्या. मग आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे तो त्रिकोण थोडा फिरवून आणखी एक प्रत काढा. त्या प्रतीला $\Delta A_3B_3C_3$ नाव द्या. नंतर पुठ्ठ्याचा त्रिकोण उचलून दुसऱ्या जागी पालथा ठेवा व त्याची प्रत तयार करा. नव्या त्रिकोणाला $\Delta A_4B_4C_4$ हे नाव द्या.

आता $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$, $\Delta A_3B_3C_3$ आणि $\Delta A_4B_4C_4$ हे सर्व Δ ABC शी एकरूप आहेत हे ध्यानात आले का ? कारण Δ ABC यांपैकी प्रत्येकाशी तंतोतंत जुळतो. $\Delta A_3B_3C_3$ साठी पडताळू. मात्र तो तसा जुळवताना $\angle A$ हा $\angle A_3$ वर, $\angle B$ हा $\angle B_3$ वर आणि $\angle C$ हा $\angle C_3$ वर ठेवला तरच $\Delta ABC \cong \Delta A_3B_3C_3$ असे म्हणता येते.

मग $AB = A_3B_3$, $BC = B_3C_3$, $CA = C_3A_3$ हे देखील मिळते.

यावरून दोन त्रिकोणांची एकरूपता तपासताना त्यांचे कोन आणि भुजा विशिष्ट क्रमाने म्हणजे एकास एक संगतीने लिहाव्या लागतात. हे ध्यानात घ्या.

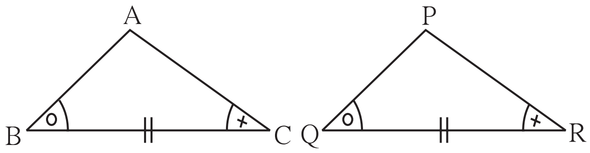
जर $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, तर $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ . . . . (I)

आणि $AB = PQ$, $BC = QR$, $CA = RP$ . . . . . . (II) अशी सहा समीकरणे मिळतात.

म्हणजे या दोन त्रिकोणांतील, कोनांच्या आणि बाजूंच्या एकास एक संगतीने, तीन कोन समान आणि तीन बाजू समान आहेत असा अर्थ आहे.

वरील सहाही समीकरणे एकरूप त्रिकोणांसाठी सत्य असतात. त्यासाठी तीन विशिष्ट समीकरणे समान आहेत असे समजले तर सहाही समीकरणे सत्य होऊन ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात. कसे ते पाहू.

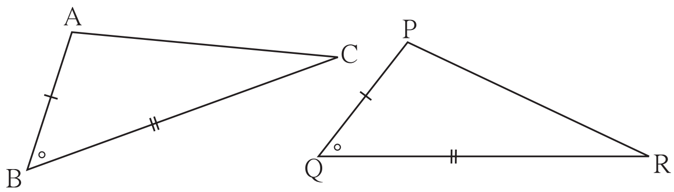
(1) जर एकास एक संगतीने ΔABC चे दोन कोन ΔPQR च्या दोन कोनांबरोबर असतील आणि त्या कोनांमधील समाविष्ट बाजू समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.



या गुणधर्माला कोन-बाजू-कोन कसोटी असे म्हणतात. हे थोडक्यात **कोबाको कसोटी** असे लिहितात.

आकृती 3.15

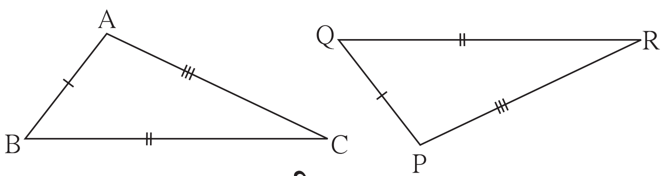
(2) जर एकास एक संगतीने Δ ABC मधील दोन बाजू व Δ PQR मधील दोन बाजू बरोबर असतील आणि Δ ABC च्या त्या दोन बाजूंमधला कोन हा Δ PQR च्या संगत बाजूंमधल्या कोनाएवढा असेल तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.



आकृती 3.16

या गुणधर्माला बाजू-कोन-बाजू कसोटी म्हणतात आणि हे थोडक्यात **बाकोबा कसोटी** असे लिहितात.

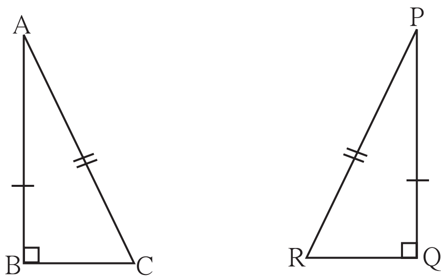
(3) जर Δ ABC च्या तीन बाजू एकास एक संगतीने Δ PQR च्या बाजूंएवढ्या असतील, तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.



आकृती 3.17

या गुणधर्माला बाजू-बाजू-बाजू कसोटी म्हणतात आणि हे थोडक्यात **बाबाबा कसोटी** असे लिहितात.

(4) Δ ABC, Δ PQR या दोन काटकोन त्रिकोणांत $\angle B$, $\angle Q$ हे काटकोन असून दोन्ही त्रिकोणांचे कर्ण समान आणि AB = PQ असेल तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.



या गुणधर्माला **कर्णभुजा कसोटी** म्हणतात.

आकृती 3.18

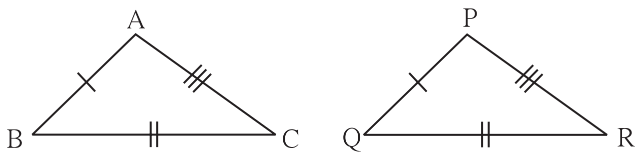
हे लक्षात ठेवूया.

आपण काही बाबी दिल्या असता त्रिकोण रचना केल्या आहेत. (उदा.दोन कोन आणि समाविष्ट बाजू, तीन बाजू, दोन बाजू व समाविष्ट कोन) यांपैकी कोणतीही माहिती दिली असेल तर एकमेव त्रिकोण काढता येतो, हे आपण अनुभवले आहे. म्हणून दोन त्रिकोणांमधील एकास एक संगतीने या तीन बाबी समान झाल्या तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात. मग एकास एक संगतीने त्यांचे तीनही कोन समान आणि तीनही बाजू समान आहेत हे समजते. दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर एकास एक संगतीने त्यांचे कोन समान असतात आणि तीन बाजू समान असतात. याचा उपयोग भूमितीतील अनेक उदाहरणांत होतो.

सरावसंच 3.2

1. पुढीलपैकी प्रत्येक उदाहरणातील त्रिकोणांच्या जोडीचे सारख्या खुणांनी दाखवलेले भाग एकरूप आहेत. त्यावरून प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण ज्या कसोटीने एकरूप होतात ती कसोटी आकृतीखालील रिकाम्या जागेत लिहा.

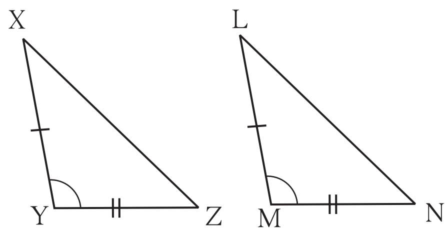
(i)



. . . . कसोटीने

Δ ABC $\cong$ Δ PQR

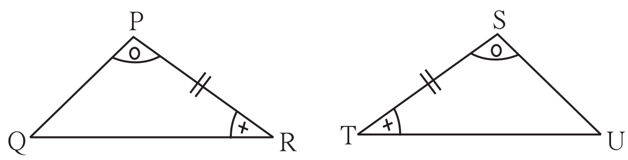
(ii)



. . . . कसोटीने

Δ XYZ $\cong$ Δ LMN

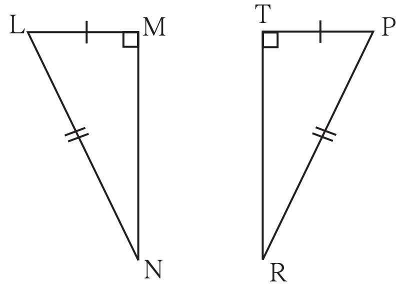
(iii)



. . . . कसोटीने

Δ PRQ $\cong$ Δ STU

(iv)



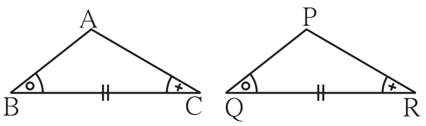
. . . . कसोटीने

Δ LMN $\cong$ Δ PTR

आकृती 3.19

2. खालील त्रिकोणांच्या जोड्यांमध्ये दर्शवलेल्या माहितीचे निरीक्षण करा. ते त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार एकरूप आहेत ते लिहा व त्यांचे उरलेले एकरूप घटक लिहा.

(i)



आकृती 3.20

आकृतीत दर्शवलेल्या माहितीवरून,

Δ ABC व Δ PQR मध्ये

$\angle ABC \cong \angle PQR$

रेख BC $\cong$ रेख QR

$\angle ACB \cong \angle PRQ$

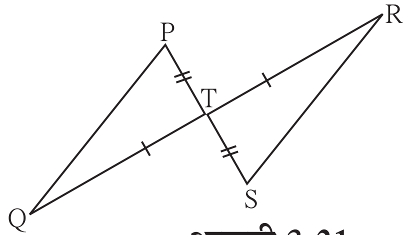
$\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ PQR .... $\boxed{\quad\quad}$ कसोटी

$\therefore \angle BAC \cong$ $\boxed{\quad\quad}$ ....एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन.

रेखAB $\cong$ $\boxed{\quad\quad}$ आणि $\boxed{\quad\quad}$ $\cong$ रेख PR

.....एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू

(ii)



आकृती 3.21

आकृतीत दर्शवलेल्या माहितीवरून,

Δ PTQ व Δ STR मध्ये

रेख PT $\cong$ रेख ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ .... परस्पर विरुद्ध कोन

रेख TQ $\cong$ रेख TR

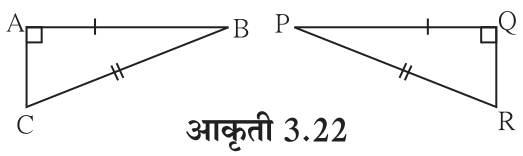
$\therefore$ Δ PTQ $\cong$ Δ STR .... $\boxed{\quad\quad}$ कसोटी

$\therefore \angle TPQ \cong$ $\boxed{\quad\quad}$ } ..... एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन.

व $\boxed{\quad\quad}$ $\cong \angle TRS$

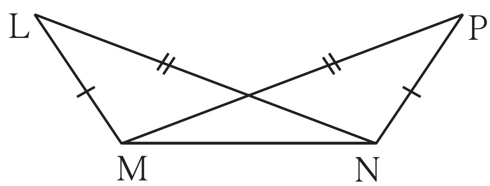
रेख PQ $\cong$ $\boxed{\quad\quad}$ एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू.

3. खालील आकृतीतील माहितीवरून Δ ABC व Δ PQR या त्रिकोणांच्या एकरूपतेची कसोटी लिहून उरलेले एकरूप घटक लिहा.



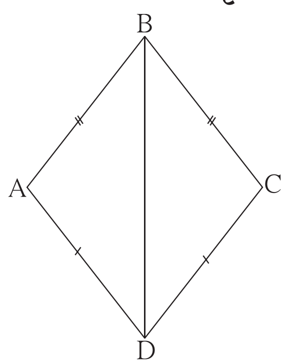
आकृती 3.22

4. खालील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे Δ LMN व Δ PNM या त्रिकोणांमध्ये LM = PN, LN = PM आहे तर या त्रिकोणांच्या एकरूपतेची कसोटी लिहा व उरलेले एकरूप घटक लिहा.



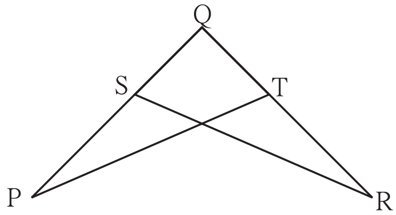
आकृती 3.23

5. आकृती 3.24 मध्ये रेख AB $\cong$ रेख BC आणि रेख AD $\cong$ रेख CD. तर सिद्ध करा की, Δ ABD $\cong$ Δ CBD



आकृती 3.24

6. आकृती 3.25 मध्ये $\angle P \cong \angle R$
रेख PQ $\cong$ रेख QR
तर सिद्‌ध करा की,
Δ PQT $\cong$ Δ RQS



आकृती 3.25

जाणून घेऊया.

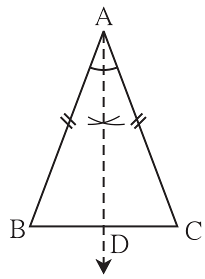
समद्‌विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय (Isosceles triangle theorem)

प्रमेय : जर त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतील तर त्या बाजूंसमोरील कोन एकरूप असतात.

पक्ष : Δ ABC मध्ये बाजू AB $\cong$ बाजू AC

साध्य : $\angle ABC \cong \angle ACB$

रचना : Δ ABC मध्ये $\angle BAC$ चा दुभाजक काढा,
तो बाजू BC ला जेथे छेदतो. त्या बिंदूला D नाव द्या.



आकृती 3.26

सिद्‌धता : Δ ABD व Δ ACD मध्ये
रेख AB $\cong$ रेख AC .... पक्ष
$\angle BAD \cong \angle CAD$........रचना
रेख AD $\cong$ रेख AD .... सामाईक बाजू
$\therefore$ Δ ABD $\cong$ Δ ACD ...... $\boxed{\qquad}$
$\therefore \angle ABD \cong$ $\boxed{\qquad}$ ....एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन
$\therefore \angle ABC \cong \angle ACB$ $\quad \because$ B - D - C

उपप्रमेय : त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू एकरूप असतील, तर त्याचे तिन्ही कोन एकरूप असतात आणि प्रत्येक कोनाचे माप 60° असते. (या उपप्रमेयाची सिद्‌धता तुम्ही लिहा.)

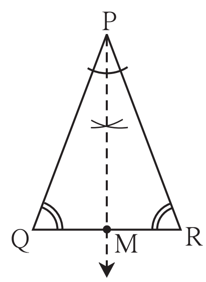
समद्‌विभुज त्रिकोणाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of an isosceles triangle theorem)

प्रमेय : जर त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप असतील तर त्या कोनांसमोरील बाजू एकरूप असतात.

पक्ष : Δ PQR मध्ये $\angle PQR \cong \angle PRQ$

साध्य : बाजू PQ $\cong$ बाजू PR

रचना : $\angle P$ चा दुभाजक काढा. तो बाजू QR
ला जेथे छेदतो त्या बिंदूला M नाव द्या.



आकृती 3.27

सिद्‌धता : Δ PQM व Δ PRM मध्ये
$\angle PQM \cong$ $\boxed{\qquad}$........ पक्ष
$\angle QPM \cong \angle RPM$........$\boxed{\qquad}$
रेख PM $\cong$ $\boxed{\qquad}$ .... सामाईक बाजू
$\therefore$ Δ PQM $\cong$ Δ PRM ...... $\boxed{\qquad}$ कसोटी
$\therefore$ रेख PQ $\cong$ रेख PR.......एकरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू

उपप्रमेय : त्रिकोणाचे तीनही कोन एकरूप असतील तर त्याच्या तीनही बाजू एकरूप असतात.
(या उपप्रमेयाची सिद्धता तुम्ही लिहा.)
वरील दोन्ही प्रमेयांची विधाने परस्परांचे व्यत्यास आहेत.
वरील दोन्ही उपप्रमेयांची विधाने परस्परांचे व्यत्यास आहेत.

विचार करूया

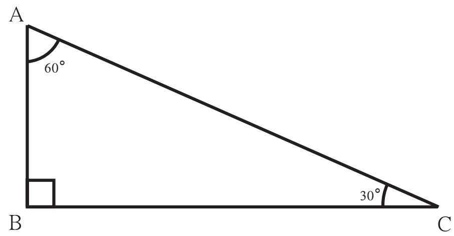
(1) समद्विभुज त्रिकोणाच्या प्रमेयाची सिद्धता वेगळी रचना करून देता येईल का ?
(2) समद्विभुज त्रिकोणाच्या प्रमेयाची सिद्धता कोणतीही रचना न करता देता येईल का ?

जाणून घेऊया.

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ मापाच्या त्रिकोणाचा गुणधर्म (Property of $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ triangle)

कृती I

गटातील प्रत्येकाने, एका कोनाचे माप 30° आहे असा काटकोन त्रिकोण काढावा. प्रत्येकाने 30° मापाच्या कोनासमोरील बाजूची आणि कर्णाची लांबी मोजावी. गटातील एका विद्यार्थ्याने सर्वांनी काढलेल्या त्रिकोणांसाठी पुढील सारणी पूर्ण करावी.



आकृती 3.28

त्रिकोण क्रमांक	1	2	3	4
30° कोनासमोरील बाजूची लांबी				
कर्णाची लांबी				

वरील सारणीवरून कोनांची मापे 30°, 60° आणि 90° असणाऱ्या त्रिकोणाच्या बाजूंचा काही गुणधर्म मिळतो का ?

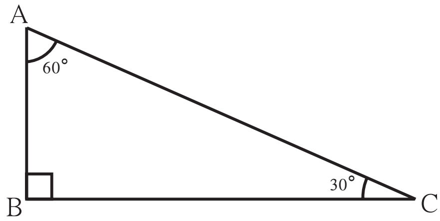
कृती II

कंपासपेटीतील एका गुण्याचे कोन 30°,60° आणि 90° असतात. त्यांच्या बाजूंच्या संदर्भात हा गुणधर्म मिळतो का याचा पडताळा घ्या.

या कृतींवरून आपल्याला मिळालेला एक महत्वाचा गुणधर्म आता सिद्ध करू.

प्रमेय : जर काटकोन त्रिकोणाचे लघुकोन 30° व 60° असतील तर 30° च्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या निम्मी असते.

(खाली दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरा.)



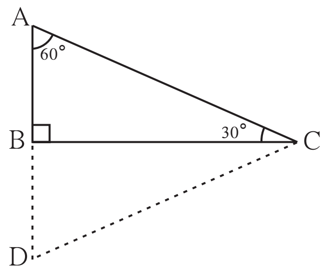
आकृती 3.29

पक्ष : काटकोन Δ ABC मध्ये

$\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$

साध्य : $AB = \frac{1}{2} AC$

रचना : AB रेषाखंड वाढवून त्यावर D बिंदू असा घ्या की AB = BD, नंतर DC रेषाखंड काढा.



आकृती 3.30

सिद्धता : Δ ABC व Δ DBC मध्ये

रेख AB $\cong$ रेख DB .... $\boxed{\quad}$

$\angle ABC \cong \angle DBC$ .... $\boxed{\quad}$

रेख BC $\cong$ रेख BC .... $\boxed{\quad}$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ..... $\boxed{\quad}$

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ .... एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन

Δ ABC मध्ये $\angle BAC = 60^\circ \; \therefore \angle BDC = 60^\circ$

आता Δ ADC मध्ये,

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60^\circ$ ... ($\because$ त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज 180°)

$\therefore \Delta$ ADC हा समभुज त्रिकोण होईल.

$\therefore AC = AD = DC$ .... समद्विभुज त्रिकोणाच्या व्यत्यासाचे उपप्रमेय

परंतु $AB = \frac{1}{2} AD$........ रचना $\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ .... ($\because AD = AC$)

कृती

वरील आकृती 3.29 च्या आधारे रिकाम्या चौकटी भरून खालील प्रमेयाची सिद्धता पूर्ण करा.

काटकोन त्रिकोणात इतर कोन 30°, 60° असतील तर 60° कोनासमोरील बाजू ही $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ कर्ण असते.

वरील प्रमेयात $AB = \frac{1}{2} AC$ हे आपण पाहिले.

$AB^2 + BC^2 = \boxed{\quad}$ . . . . . पायथागोरसचा सिद्धांत वापरून

$\frac{1}{4} AC^2 + BC^2 = \boxed{\quad}$

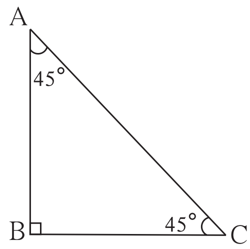
$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 = \boxed{\quad}$

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

कृती

काटकोन त्रिकोणाचे कोन जर 45°, 45°, 90° असतील तर काटकोन करणारी प्रत्येक बाजू ही $\frac{1}{\sqrt{2}} \times$ कर्ण असते.



आकृती 3.31

Δ ABC मध्ये, $\angle B = 90^\circ$ आणि $\angle A = \angle C = 45^\circ$

$\therefore$ BC = AB

पायथागोरसच्या सिद्धांतानुसार,

$AB^2 + BC^2 = \boxed{}$

$AB^2 + \boxed{} = AC^2 \ldots (\because BC = AB)$

$\therefore\ 2AB^2 = \boxed{}$

$\therefore\ AB^2 = \boxed{}$

$\therefore\ AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\ AC$

या गुणधर्माला $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ च्या त्रिकोणाचे प्रमेय म्हणतात.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) त्रिकोणाचे कोन 30°, 60° व 90° असतील तर 30° च्या कोनासमोरील बाजू $\frac{\text{कर्ण}}{2}$ असते आणि 60° च्या कोनासमोरील बाजू $\frac{\sqrt{3}}{2}$ कर्ण असते.
या प्रमेयाला $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ चे प्रमेय म्हणतात.

(2) त्रिकोणाचे कोन 45°, 45° व 90° असतील तर काटकोन करणारी प्रत्येक बाजू $\frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{2}}$ असते.
या प्रमेयाला $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ प्रमेय म्हणतात.

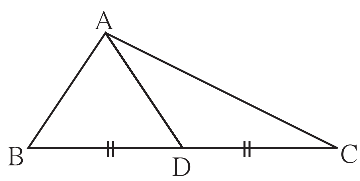
जरा आठवूया.

त्रिकोणाची मध्यगा

त्रिकोणाचा शिरोबिंदू व त्याच्या समोरील बाजूचा मध्यबिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड म्हणजे त्या त्रिकोणाची मध्यगा होय.

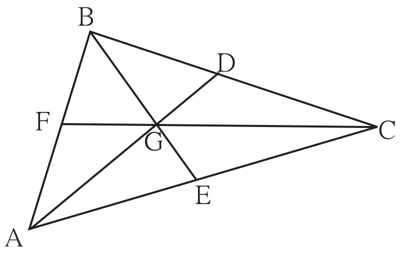
आकृतीत D हा बाजू BC चा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore$ रेख AD ही Δ ABC ची एक मध्यगा आहे.



आकृती 3.32

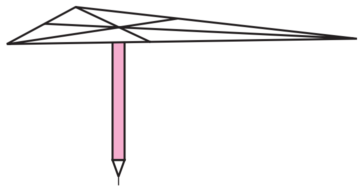
कृती I : कोणताही एक त्रिकोण ABC काढा. या त्रिकोणाच्या AD, BE, व CF या मध्यगा काढा. त्यांच्या संपात बिंदूला G नाव द्या. AG व GD यांच्या लांबीची तुलना कर्कटकाच्या साहाय्याने करा. AG ची लांबी GD च्या दुप्पट आहे. याचा पडताळा घ्या. त्याचप्रमाणे BG ची लांबी GE च्या दुप्पट आणि CG ची लांबी GF च्या लांबीच्या दुप्पट आहे का याचाही पडताळा घ्या.



आकृती 3.33

यावरून मध्यगा संपात बिंदू प्रत्येक मध्यगेचे 2:1 या प्रमाणात विभाजन करतो हा गुणधर्म लक्षात घ्या.

कृती II: Δ ABC हा एक त्रिकोण पुठ्ठ्यावर काढा व कापा. त्याच्या तिन्ही मध्यगा काढा. त्यांच्या संपातबिंदूला G नाव द्या. तळाचा पृष्ठभाग सपाट असणारी पेन्सिल घ्या व सपाट भाग वर करून ती उभी धरा. पेन्सिलवर बिंदू G ठेवून त्रिकोण तोलून धरता येतो हे पडताळा. यावरून G बिंदूचा, म्हणजे मध्यगा संपात बिंदूचा एक महत्त्वाचा गुणधर्म लक्षात येतो.


आकृती 3.34

जाणून घेऊया.

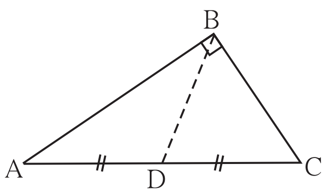
काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णाच्या मध्यगेचा गुणधर्म

कृती : समजा आकृती 3.35 मध्ये Δ ABC हा काटकोन त्रिकोण आहे. रेख BD ही मध्यगा आहे. खालील रेषाखंडाची लांबी मोजा.

l(AD) =......... l(DC) =........... l(BD) = ...

यावरून (BD) = $\frac{1}{2}$ (AC) हा गुणधर्म मिळतो याचा पडताळा घ्या.

हा गुणधर्म सिद्ध करु.



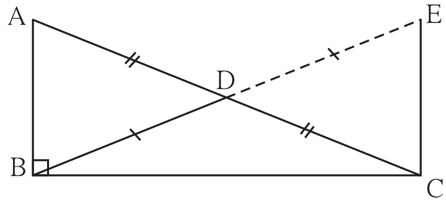
आकृती 3.35

प्रमेय : काटकोन त्रिकोणात कर्णावर काढलेल्या मध्यगेची लांबी कर्णाच्या निम्मी असते.

पक्ष : काटकोन Δ ABC मध्ये रेख BD ही मध्यगा आहे.

साध्य : BD = $\frac{1}{2}$AC

रचना : किरण BD वर E बिंदू असा घ्या की B - D - E आणि l(BD) = l(DE). रेख EC काढा.



आकृती 3.36

सिद्धता : (सिद्धतेतील मुख्य पायऱ्या दाखवल्या आहेत. मधल्या पायऱ्या विधाने व कारणे या रूपात लिहा व सिद्धता पूर्ण करा.)

Δ ADB $\cong$ Δ CDE ...... बाकोबा कसोटी

रेषा AB || रेषा EC ....व्युत्क्रम कोन कसोटी.

Δ ABC $\cong$ Δ ECB ...... बाकोबा कसोटी

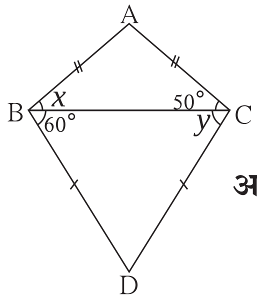
BD = $\frac{1}{2}$(AC)

हे लक्षात ठेवूया.

कोणत्याही काटकोन त्रिकोणात कर्णावर काढलेल्या मध्यगेची लांबी कर्णाच्या निम्मी असते.

सरावसंच 3.3

1. आकृती 3.37 मध्ये दाखवलेली माहिती पाहा. x आणि y च्या किंमती काढा. तसेच $\angle$ABD व $\angle$ACD ची मापे काढा.

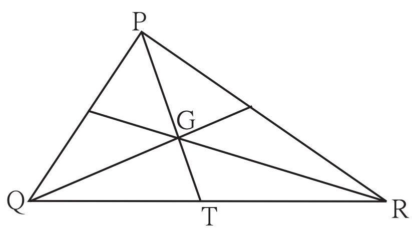


आकृती 3.37

2. काटकोन त्रिकोणात कर्णाची लांबी 15 असेल तर त्यावर काढलेल्या मध्यगेची लांबी काढा.

3. Δ PQR मध्ये $\angle$Q = 90°, PQ = 12, QR = 5 आणि QS ही PR ची मध्यगा असेल तर QS काढा.

4. आकृती 3.38 मध्ये Δ PQR चा G हा मध्यगा संपात बिंदू आहे. जर GT = 2.5 सेमी, तर PG आणि PT यांची लांबी काढा.



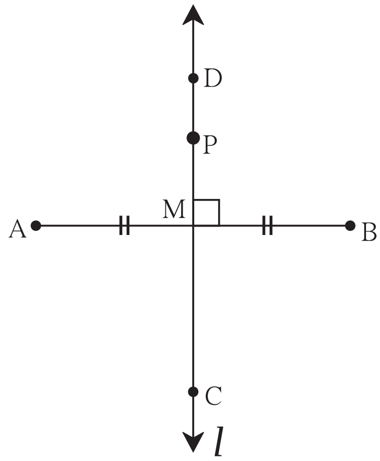
आकृती 3.38

जरा आठवूया.

कृती : सोईस्कर लांबीचा रेख AB काढा. त्याच्या मध्यबिंदूला M हे नाव द्या. बिंदू M मधून जाणारी आणि रेख AB ला लंब असणारी रेषा l काढा. रेषा l ही रेख AB ची लंबदुभाजक रेषा आहे, हे लक्षात आले का ?

रेषा l वर **कोठेही** P हा बिंदू घ्या. PA आणि PB या अंतरांची तुलना कर्कटकाने करा. काय आढळले ? PA = PB असे आढळले ना ? यावरून लक्षात येते की, रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील कोणताही बिंदू त्या रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असतो.

आता कंपासच्या साह्याने बिंदू A आणि B यांच्यापासून समदूर असणारे, C आणि D यांसारखे काही बिंदू घ्या. सर्व बिंदू रेषा l वरच आले ना ? यावरून काय लक्षात आले ? रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असणारा प्रत्येक बिंदू त्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावर असतो. हे दोन गुणधर्म लंबदुभाजकाच्या प्रमेयाचे दोन भाग आहेत. ते आता आपण सिद्ध करू.



आकृती 3.39

जाणून घेऊया.

लंबदुभाजकाचे प्रमेय (Perpendicular bisector theorem)

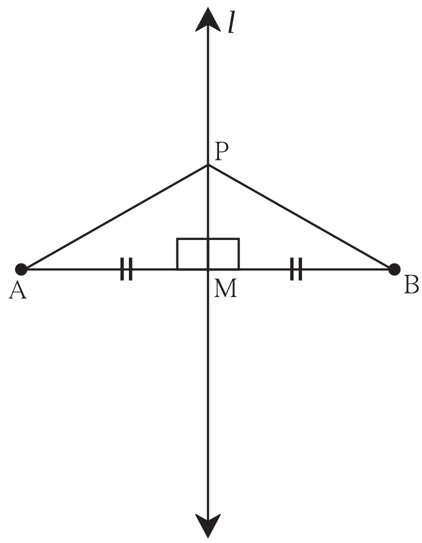
भाग I : रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंपासून समान अंतरावर असतो.

पक्ष : रेषा l ही रेख AB ची लंबदुभाजक रेषा,
रेख AB ला M मध्ये छेदते.
बिंदू P हा रेषा l वरील कोणताही बिंदू आहे.

साध्य : l (PA) = l (PB)

रचना : रेख AP व रेख BP काढा.

सिद्धता : Δ PMA व Δ PMB मध्ये
रेख PM $\cong$ रेख PM .... सामाईक बाजू
$\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB ....प्रत्येकी काटकोन
रेख AM $\cong$ रेख BM .... M हा मध्यबिंदू



आकृती 3.40

$\therefore \Delta$ PMA $\cong \Delta$ PMB ...... बाकोबा कसोटी

$\therefore$ रेख PA $\cong$ रेख PB.......एकरूप त्रिकोणाच्या संगत भुजा

$\therefore$ l (PA) = l (PB)

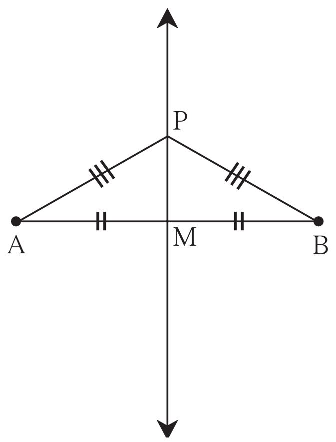
यावरून रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा त्याच्या अंत्यबिंदूंपासून समदूर असतो.

भाग II : रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असणारा कोणताही बिंदू त्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावर असतो.

पक्ष : बिंदू P हा रेषाखंड AB च्या टोकांपासून समदूर असलेला कोणताही बिंदू आहे. म्हणजेच PA = PB.

साध्य : P हा रेख AB च्या लंबदुभाजकावर आहे.

रचना : रेख AB चा M हा मध्यबिंदू घेतला. रेषा PM काढली.



आकृती 3.41

सिद्धता : Δ PAM व Δ PBM मध्ये

रेख PA $\cong$ रेख PB .... $\boxed{}$

रेख AM $\cong$ रेख BM .... $\boxed{}$

रेख PM $\cong$ $\boxed{}$ .... सामाईक बाजू

$\therefore \Delta$ PAM $\cong \Delta$ PBM ...... $\boxed{}$ कसोटी.

$\therefore$ $\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB.......एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन

परंतु $\angle$PMA + $\boxed{}$ = 180°

$\angle$PMA + $\angle$PMA = 180° .... ($\because$ $\angle$PMB = $\angle$PMA)

2 $\angle$PMA = $\boxed{}$

$\therefore$ $\angle$PMA = 90°

$\therefore$ रेख PM $\perp$ रेख AB ......(1)

तसेच, रेख AB चा M हा मध्यबिंदू आहे. ......(2) (रचना)

$\therefore$ रेषा PM ही रेख AB ची लंबदुभाजक रेषा आहे म्हणजेच P हा रेख AB च्या लंबदुभाजकावर आहे.

कोनदुभाजकाचे प्रमेय (Angle bisector theorem)

भाग I : कोनदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा त्या कोनाच्या भुजांपासून समदूर असतो.

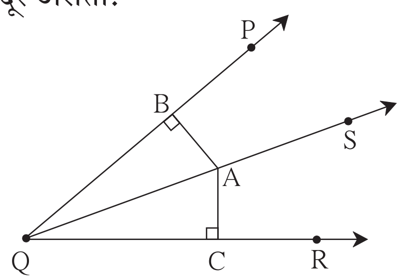
पक्ष : किरण QS हा $\angle$PQR चा दुभाजक आहे.

A हा कोनदुभाजकावरील कोणताही एक बिंदू आहे.

रेख AB $\perp$ किरण QP   रेख AC $\perp$ किरणQR

साध्य : रेख AB $\cong$ रेख AC

सिद्धता : त्रिकोणांच्या एकरूपतेची योग्य कसोटी वापरून सिद्धता लिहा.



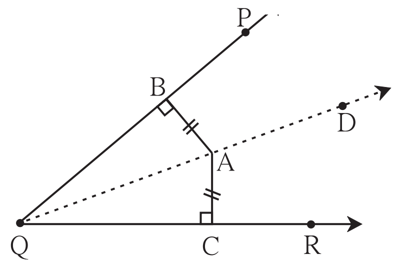
आकृती 3.42

भाग II : कोनाच्या भुजांपासून समान अंतरावर असणारा कोणताही बिंदू त्या कोनाच्या दुभाजकावर असतो.

पक्ष : $\angle PQR$ च्या अंतर्भागात A हा एक बिंदू असा आहे की,
रेख $AC \perp$ रेख QR
रेख $AB \perp$ किरण QP
$AB = AC$

साध्य : किरण QA हा $\angle PQR$ चा दुभाजक आहे.
म्हणजेच $\angle BQA = \angle CQA$

सिद्धता : त्रिकोणाच्या एकरूपतेची योग्य कसोटी वापरून सिद्धता लिहा.

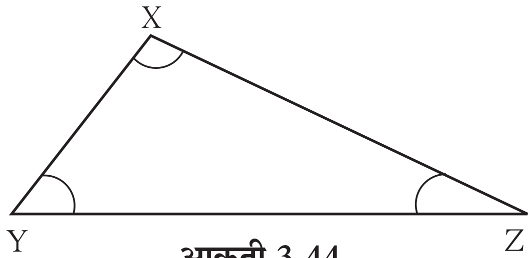


आकृती 3.43

जरा आठवूया.

कृती

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे बाजू $XZ >$ बाजू XY असा ΔXYZ काढा.
$\angle Z$ व $\angle Y$ मोजा. कोणता कोन मोठा आहे ?



आकृती 3.44

जाणून घेऊया.

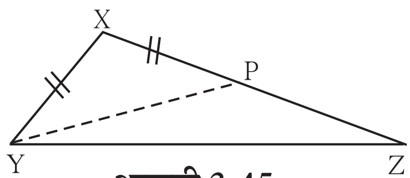
त्रिकोणातील बाजू व कोन यांच्या असमानतेचे गुणधर्म

प्रमेय : जर त्रिकोणाच्या दोन बाजूंपैकी एक बाजू दुसरीपेक्षा मोठी असेल तर मोठ्या बाजूसमोरील कोन लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा मोठा असतो.

पक्ष : ΔXYZ मध्ये बाजू $XZ >$ बाजू XY

साध्य : $\angle XYZ > \angle XZY$

रचना : बाजू XZ वर P बिंदू असा घ्या की
$l(XY) = l(XP)$, रेख YP काढा.



आकृती 3.45

सिद्धता : ΔXYP मध्ये

$XY = XP$ ....रचना

$\therefore \angle XYP = \angle XPY$.....समान भुजांसमोरील कोनांची मापे समान .....(I)

$\angle XPY$ हा ΔYPZ चा बाह्यकोन

$\therefore \angle XPY > \angle PZY$ ....बाह्यकोनाचे प्रमेय

$\angle XYP > \angle PZY$ ....विधान (I) वरून

$\angle XYP + \angle PYZ > \angle PZY$ (जर $a > b$ आणि $c > 0$ तर $a + c > b$)

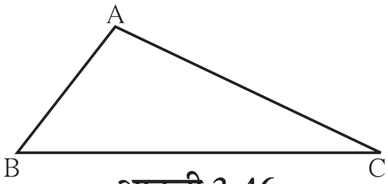
$\angle XYZ > \angle PZY$ म्हणजेच $\angle XYZ > \angle XZY$

प्रमेय : त्रिकोणाचे दोन कोन असमान मापांचे असतील तर मोठ्या कोनासमोरील बाजू ही लहान कोनासमोरील बाजूपेक्षा मोठी असते.

या प्रमेयाची सिद्धता अप्रत्यक्ष पद्धतीने देता येते. खाली दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

पक्ष : ΔABC मध्ये $\angle B > \angle C$

साध्य : $AC > AB$



आकृती 3.46

सिद्धता : Δ ABC च्या बाजू AB आणि बाजू AC च्या लांबींमध्ये खालीलपैकी एक आणि एकच शक्यता असते.

(i) $AC < AB$ (ii) $\boxed{\quad\quad}$ (iii) $\boxed{\quad\quad}$

(i) $AC < AB$ हे गृहीत धरू.

त्रिकोणाच्या असमान बाजूंपैकी मोठ्या बाजूसमोरील कोन लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा $\boxed{\quad\quad}$ असतो.

$\therefore \angle C > \boxed{\quad\quad}$

परंतु $\angle C < \angle B$ .... पक्ष.

म्हणजे विसंगती निर्माण होते.

$\therefore \boxed{\quad\quad} < \boxed{\quad\quad}$ हे चूक आहे.

(ii) जर $AC = AB$

तर $\angle B = \angle C$

परंतु $\boxed{\quad\quad} > \boxed{\quad\quad}$ ...... पक्ष.

म्हणजे पुन्हा विसंगती निर्माण होते.

$\therefore \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$ हे चूक आहे.

$\therefore AC > AB$ ही एकच शक्यता उरते.

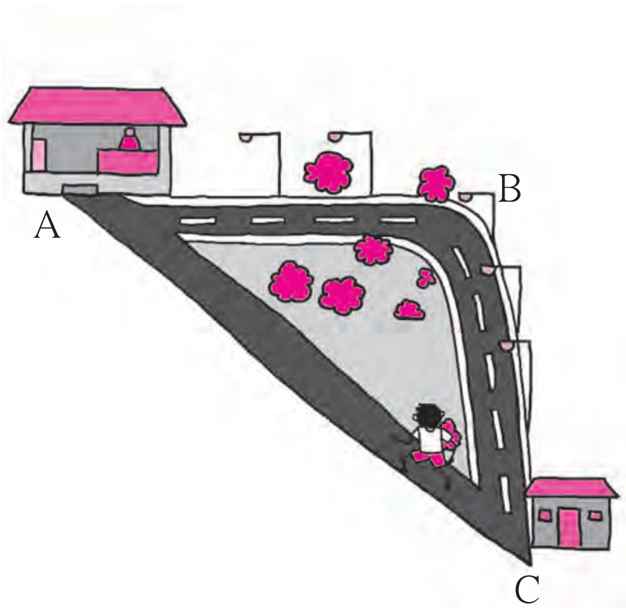
$\therefore AC > AB$

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण एक कृती केली होती. त्यावरून त्रिकोणाचा एक गुणधर्म पाहिला होता. तो आठवूया.

शेजारील चित्रात दाखवल्याप्रमाणे A या ठिकाणी दुकान आहे. समीर C या ठिकाणी उभा होता. दुकानात पोहोचण्यासाठी त्याने $C \rightarrow B \rightarrow A$ या डांबरी मार्गाऐवजी $C \rightarrow A$ हा मार्ग घेतला. कारण त्याच्या लक्षात आले की हा मार्ग कमी लांबीचा आहे. म्हणजे त्रिकोणाचा कोणता गुणधर्म त्याच्या लक्षात आला होता?

त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षा मोठी असते, हा गुणधर्म आता सिद्ध करू.



प्रमेय : त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज ही तिसऱ्या बाजूच्या लांबीपेक्षा जास्त असते.

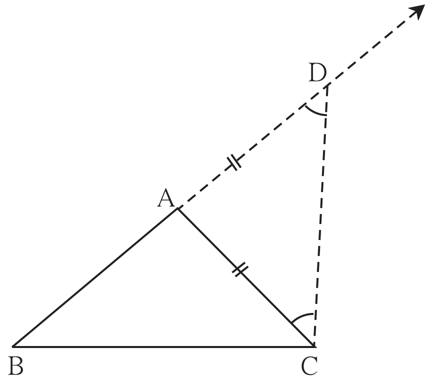
पक्ष : Δ ABC हा कोणताही त्रिकोण आहे.

साध्य : AB + AC > BC

AB + BC > AC

AC + BC > AB

रचना : किरण BA वर D बिंदू असा घ्या की AD = AC



आकृती 3.47

सिद्धता : Δ ACD मध्ये, AC = AD ..... रचना

$\therefore$ $\angle ACD = \angle ADC$ ...... (एकरूप बाजूंसमोरील कोन)

$\therefore$ $\angle ACD + \angle ACB > \angle ADC$

$\therefore$ $\angle BCD > \angle ADC$

$\therefore$ बाजू BD > बाजू BC ....(त्रिकोणात मोठ्या कोनासमोरील बाजू मोठी)

$\therefore$ BA + AD > BC ....($\because$ BD = BA + AD)

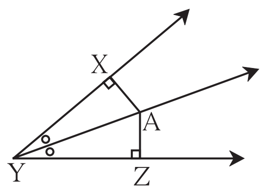
BA + AC > BC .... ($\because$ AD = AC)

तसेच AB + BC > AC

आणि BC + AC > AB हे सिद्ध करता येईल.

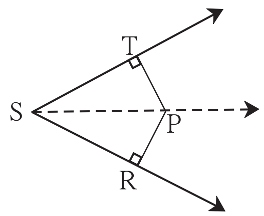
सरावसंच 3.4

1. आकृती 3.48 मध्ये, बिंदू A हा $\angle XYZ$ च्या दुभाजकावर आहे. जर AX = 2 सेमी तर AZ काढा.



आकृती 3.48

2. आकृती 3.49 मध्ये $\angle RST = 56^\circ$, रेख PT $\perp$ किरण ST, रेख PR $\perp$ किरण SR आणि रेख PR $\cong$ रेख PT असेल तर $\angle RSP$ काढा. कारण लिहा.



आकृती 3.49

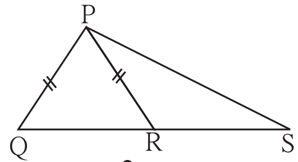
3. Δ PQR मध्ये PQ = 10 सेमी, QR = 12 सेमी, PR = 8 सेमी तर या त्रिकोणाचा सर्वांत मोठा व सर्वांत लहान कोन ओळखा.

4. Δ FAN मध्ये $\angle F = 80^\circ$, $\angle A = 40^\circ$ तर त्रिकोणाच्या सर्वात मोठ्या व सर्वांत लहान बाजूंची नावे सकारण लिहा.

5. सिद्ध करा की समभुज त्रिकोण समकोन त्रिकोण असतो.

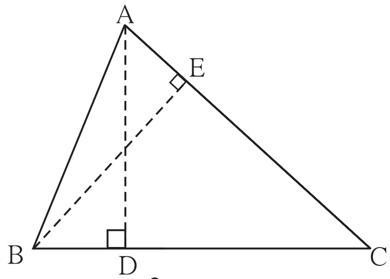
6. Δ ABC मध्ये $\angle$BAC चा दुभाजक बाजू BC वर लंब असेल तर सिद्ध करा की Δ ABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.

7. आकृती 3.50 मध्ये जर रेख PR $\cong$ रेख PQ तर दाखवा की रेख PS > रेख PQ



आकृती 3.50

8. आकृती 3.51 मध्ये Δ ABC चे रेख AD आणि रेख BE हे शिरोलंब आहेत आणि AE = BD आहे, तर सिद्ध करा की रेख AD $\cong$ रेख BE

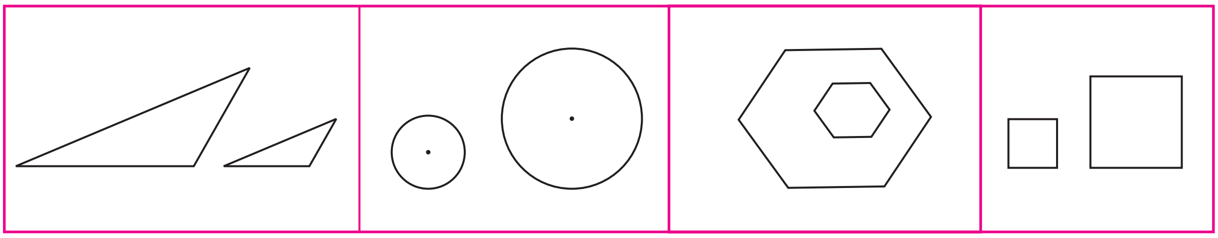


आकृती 3.51

जाणून घेऊया.

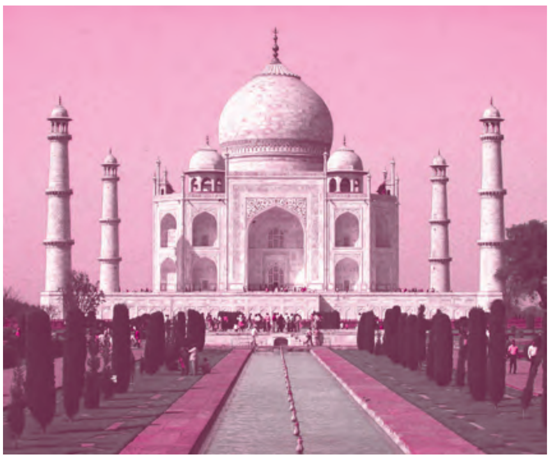
समरूप त्रिकोण (Similar triangles)

पुढील आकृत्यांचे निरीक्षण करा.



प्रत्येक भागात दाखवलेल्या दोन-दोन आकृत्यांचा आकार (Shape) सारखा आहे. परंतु त्या आकृत्या लहान-मोठ्या आहेत, म्हणजे त्या एकरूप नाहीत.

अशा सारख्या दिसणाऱ्या आकृत्यांना म्हणजेच समान रूप असलेल्या आकृत्यांना **समरूप** आकृत्या असे म्हणतात.



एखादा फोटो, त्या फोटोवरून काढलेला मोठा फोटो यांत समरूपता आढळते. तसेच रस्ते आणि रस्त्यांचा नकाशा यांत समरूपता आढळते.

दोन आकृत्यांमधील बाजूंची प्रमाणबद्धता हा समरूप आकृत्यांचा महत्त्वाचा गुणधर्म आहे. समरूप आकृत्यांमध्ये जर कोन असतील तर ते मात्र एकरूप, त्याच मापाचे असावे लागतील. दोन रस्त्यांमध्ये जो कोन आहे तोच कोन त्यांच्या नकाशात नसेल तर तो नकाशा दिशाभूल करणारा ठरेल.

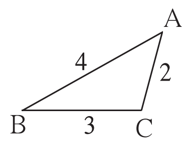
ICT Tools or Links

मोबाइलवर किंवा संगणकावर एखादा फोटो काढा. तो लहान किंवा मोठा करताना तुम्ही काय करता ते आठवा. तसेच एखाद्या फोटोतील एखादा भाग पाहण्यासाठी तुम्ही कोणती कृती करता ते आठवा.

आता आपण समरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म एका कृतीतून समजून घेऊ.

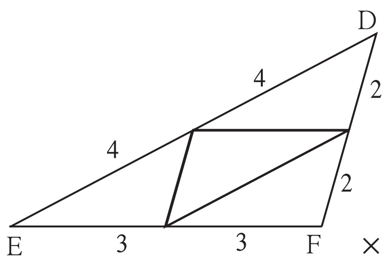
कृती : 4 सेमी, 3 सेमी व 2 सेमी बाजू असलेला एक त्रिकोण कागदावर काढा. हा त्रिकोण एका जाड कागदावर ठेवा. त्याभोवती पेन्सिल फिरवून तसे 14 त्रिकोण कापून तयार करा.

कागदाचे हे त्रिकोणाकृती तुकडे एकरूप आहेत हे लक्षात घ्या. ते खाली दाखवल्याप्रमाणे रचून तीन त्रिकोण तयार करा.



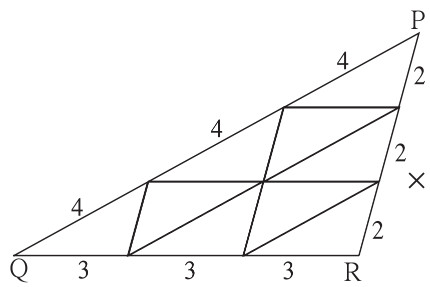
आकृती 3.52

त्रिकोणांची संख्या 1



आकृती 3.53

त्रिकोणांची संख्या 4



आकृती 3.54

त्रिकोणांची संख्या : 9

Δ ABC व Δ DEF हे ABC $\leftrightarrow$ DEF या संगतीत समरूप आहेत.

$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

आणि $\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{AC}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, म्हणजेच संगत बाजू प्रमाणात आहेत.

त्याचप्रमाणे Δ DEF आणि Δ PQR यांचा विचार करा. DEF $\leftrightarrow$ PQR या संगतीत त्यांचे कोन एकरूप आणि बाजू प्रमाणात आहेत का ?

जाणून घेऊया.

त्रिकोणांची समरूपता

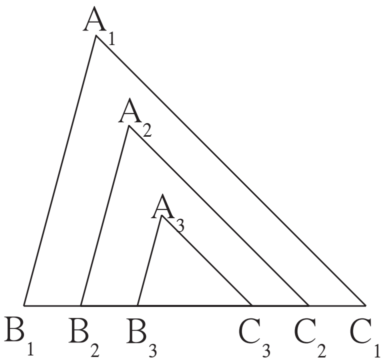
Δ ABC आणि Δ PQR मध्ये जर (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ आणि

(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$; तर Δ ABC आणि Δ PQR समरूप आहेत असे म्हणतात.

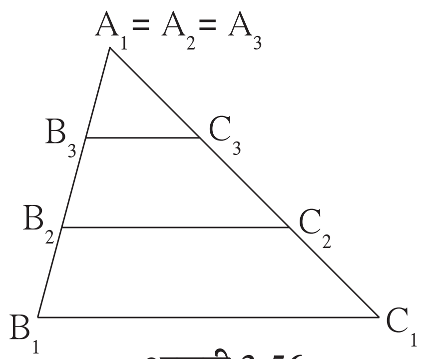
'Δ ABC आणि Δ PQR समरूप आहेत' '$\Delta ABC \sim \Delta PQR$' असे लिहितात.

समरूप त्रिकोणांचे संगत कोन आणि संगत बाजू यांचा परस्पर संबंध खालील कृतीतून समजून घेऊ.

कृती : $\Delta A_1B_1C_1$ हा कोणताही त्रिकोण जाड कागदावर काढा आणि कापून घ्या. $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$ मोजा. तसेच जाड कागदावर $\Delta A_2B_2C_2$ व $\Delta A_3B_3C_3$ हे आणखी दोन त्रिकोण असे काढा की $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$, $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$, $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$ आणि $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$ आता ते दोन त्रिकोण कापा व बाजूला ठेवा. तीनही त्रिकोणांच्या भुजांची लांबी मोजा. या त्रिकोणांची रचना खालीलप्रमाणे दोन्ही प्रकारे करा.



आकृती 3.55



आकृती 3.56

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}, \frac{B_1C_1}{B_2C_2}, \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$ ही गुणोत्तरे तपासा . ती समान आहेत हे पडताळा .

त्याचप्रमाणे $\frac{A_1C_1}{A_3C_3}, \frac{B_1C_1}{B_3C_3}, \frac{A_1B_1}{A_3B_3}$ ही गुणोत्तरे देखील समान आहेत का ते पाहा.

या कृतीवरून लक्षात घ्या, की ज्या त्रिकोणांचे संगत कोन समान मापांचे असतात, त्यांच्या संगत बाजूंची गुणोत्तरेही समान असतात. म्हणजेच त्यांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात.

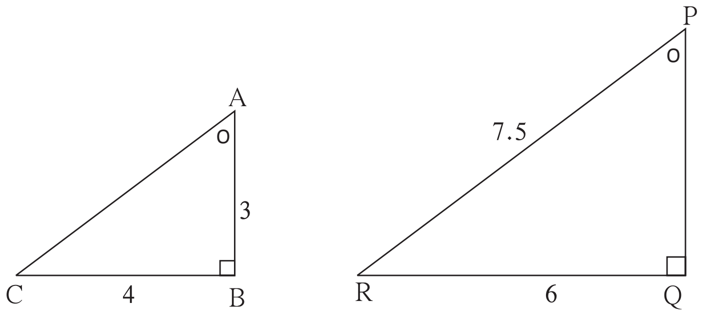
आपण पाहिले, की Δ ABC आणि Δ PQR मध्ये जर (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, तर (ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ म्हणजे जर संगत कोन समान असतील तर संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात.

हा नियम थोडे श्रम घेऊन सिद्ध करता येतो. आपण तो अनेक उदाहरणांत वापरणार आहोत.

हे लक्षात ठेवूया.

- दोन त्रिकोणांचे संगत कोन समान असतात तेव्हा ते त्रिकोण समरूप असतात.
- दोन त्रिकोण समरूप असतात तेव्हा त्यांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात व संगतकोन एकरूप असतात.

उदा. आकृती 3.57 मध्ये Δ ABC आणि Δ PQR दाखविले आहेत. त्या त्रिकोणात दाखवलेल्या माहितीचे निरीक्षण करा. त्यावरून ज्यांची लांबी दिलेली नाही, त्या बाजूंची लांबी काढा.



आकृती 3.57

उकल : प्रत्येक त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज 180° असते.

दिलेल्या माहितीनुसार

$\angle A = \angle P$ आणि $\angle B = \angle Q$ $\quad \therefore \angle C = \angle R$

$\therefore$ Δ ABC आणि Δ PQR हे समकोन त्रिकोण आहेत.

$\therefore$ त्यांच्या बाजू एका प्रमाणात आहेत.

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

तसेच $6 \times AC = 7.5 \times 4$

$$\therefore AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

सरावसंच 3.5

1. जर $\Delta XYZ \sim \Delta LMN$ तर त्यांचे एकरूप असणारे संगत कोन लिहा आणि संगत बाजूंची गुणोत्तरे लिहा.
2. Δ XYZ मध्ये XY = 4 सेमी, YZ = 6 सेमी, XZ = 5 सेमी, जर $\Delta XYZ \sim \Delta PQR$ आणि PQ = 8 सेमी असेल तर Δ PQR च्या उरलेल्या बाजू काढा.
3. समरूप त्रिकोणांच्या जोडीची कच्ची आकृती काढा. त्रिकोणांना नावे द्या. त्यांचे संगत कोन सारख्या खुणांनी दाखवा. त्रिकोणांच्या संगत बाजूंच्या लांबी प्रमाणात असलेल्या संख्यांनी दाखवा.

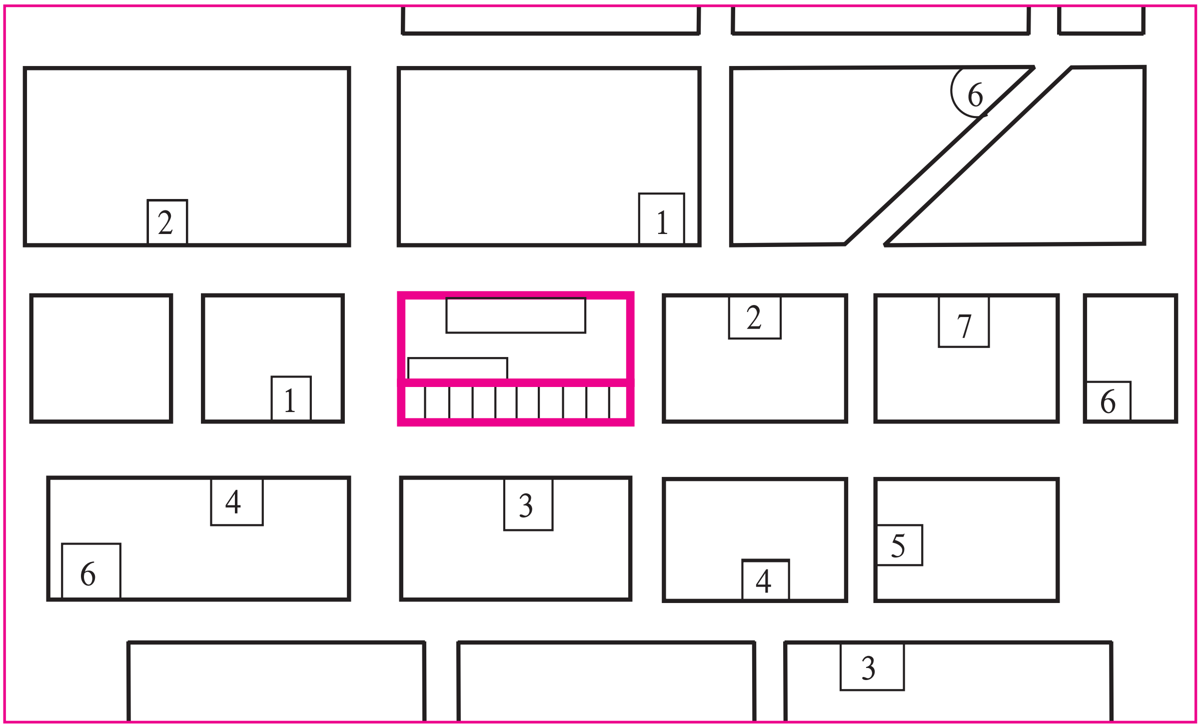
जरा आठवूया.

तुम्ही नकाशा तयार करताना रस्त्यावरील अंतरे योग्य प्रमाणात दाखवायची आहेत. जसे 1 सेमी = 100 मी किंवा 1 सेमी = 50 मी त्रिकोणांच्या गुणधर्मांचा विचार केला का ? त्रिकोणात मोठ्या कोनासमोरील बाजू मोठी असते, हे आठवा.

उपक्रम :

तुमच्या शाळेच्या किंवा घराच्या भोवतालच्या 500 मीटर परिसरातील रस्त्याचा नकाशा तयार करा.

रस्त्यांवरील दोन ठिकाणांमधील अंतर कसे मोजाल ? साधारण 2 मीटर अंतरामध्ये तुमची किती पावले (Steps) चालून होतात ते पाहा. दोन मीटर अंतरामध्ये तीन पावले चालून झाली तर त्या प्रमाणात 90 पावले म्हणजे 60 मीटर असे मानून अंतरे ठरवा. थोडक्यात, परिसरातील सर्व रस्त्यांवर चालून तुम्हांला वेगवेगळी अंतरे ठरवावी लागतील. नंतर रस्ते जिथे एकमेकांना छेदतात तेथे जो कोन होतो त्याच्या मापाचा अंदाज घ्या. रस्त्यांच्या मोजलेल्या लांबींसाठी योग्य प्रमाण घेऊन नकाशा तयार करा. परिसरातील दुकाने, टपऱ्या, इमारती, बसस्टॉप, रिक्षास्टँड इत्यादी दाखवण्याचा प्रयत्न करा. खाली नकाशाचा एक नमुना सूचीसह दिला आहे.



सूची : 1. पुस्तकांचे दुकान 2. बस थांबा 3. स्टेशनरीचे दुकान 4. बँक
5. औषधांचे दुकान 6. उपाहार गृह 7. सायकलचे दुकान

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(i) एका त्रिकोणाच्या दोन भुजा 5 सेमी व 1.5 सेमी असतील तर त्रिकोणाच्या तिसऱ्या भुजेची लांबी . . . . नसेल.

(A) 3.7 सेमी (B) 4.1 सेमी (C) 3.8 सेमी (D) 3.4 सेमी

(ii) Δ PQR मध्ये जर $\angle R > \angle Q$ तर . . . . असेल.

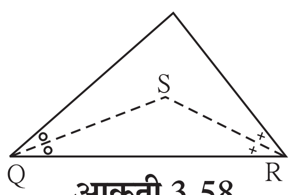
(A) $QR > PR$ (B) $PQ > PR$ (C) $PQ < PR$ (D) $QR < PR$

(iii) Δ TPQ मध्ये $\angle T = 65^\circ$, $\angle P = 95^\circ$ तर खालील विधानांपैकी सत्य विधान कोणते ?

(A) $PQ < TP$ (B) $PQ < TQ$ (C) $TQ < TP < PQ$ (D) $PQ < TP < TQ$

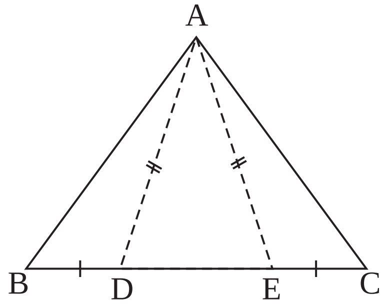
2. Δ ABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे. ज्यात AB = AC आहे आणि BD व CE या दोन मध्यगा आहेत, तर BD = CE दाखवा.

3. Δ PQR मध्ये जर $PQ > PR$ आणि $\angle Q$ व $\angle R$ चे दुभाजक S मध्ये छेदतात तर दाखवा की, $SQ > SR$.



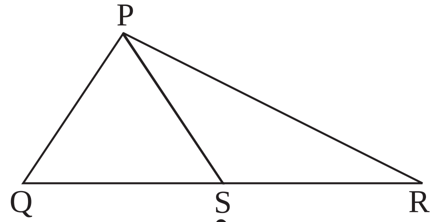
आकृती 3.58

4. आकृती 3.59 मध्ये Δ ABC च्या BC बाजू वर D आणि E बिंदू असे आहेत की BD = CE तसेच AD = AE तर दाखवा की, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.



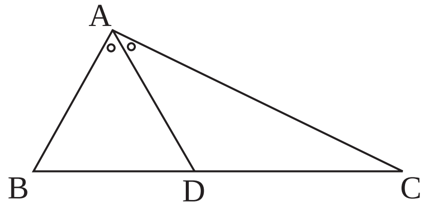
आकृती 3.59

5. आकृती 3.60 मध्ये Δ PQR च्या बाजू QR वर S हा कोणताही एक बिंदू आहे तर सिद्ध करा की, $PQ + QR + RP > 2PS$



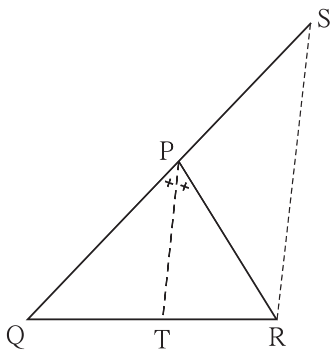
आकृती 3.60

6. आकृती 3.61 मध्ये Δ ABC च्या $\angle BAC$ चा दुभाजक BC ला D बिंदूत छेदतो, तर सिद्ध करा की AB > BD



आकृती 3.61

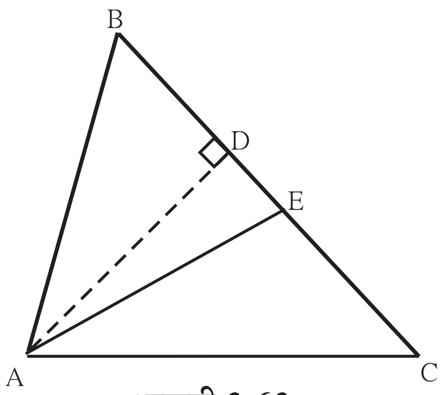
7. आकृती 3.62 मध्ये रेख PT हा $\angle QPR$ चा दुभाजक आहे. बिंदू R मधून काढलेली रेख PT ला समांतर असणारी रेषा, किरण QP ला S बिंदूत छेदते, तर सिद्ध करा, PS = PR



आकृती 3.62

8. आकृती 3.63 मध्ये रेख AD $\perp$ रेख BC. रेख AE हा $\angle CAB$ चा दुभाजक असून E-D-C. तर दाखवा, की

$$m\angle DAE = \frac{1}{2}(m\angle C - m\angle B)$$



आकृती 3.63

विचार करूया

आपण शिकलो, की दोन त्रिकोण समकोन असतील, तर त्यांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात. दोन चौकोन समकोन असतील, तर त्यांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात का ? विविध आकृत्या काढून पडताळा.

हाच गुणधर्म इतर बहुभुजाकृतींच्या बाबतीत तपासून पाहा.

4 त्रिकोण रचना

चला, शिकूया.

त्रिकोणाच्या घटकांची खालील माहिती दिली असता त्रिकोण काढणे.

- पाया, पायालगतचा एक कोन व उरलेल्या दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज
- पाया, पायालगतचा एक कोन व उरलेल्या दोन बाजूंतील फरक
- परिमिती व पायालगतचे कोन

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण खालील त्रिकोण रचना शिकलो आहोत.

✻ सर्व बाजूंची लांबी दिली असता त्रिकोण काढणे.

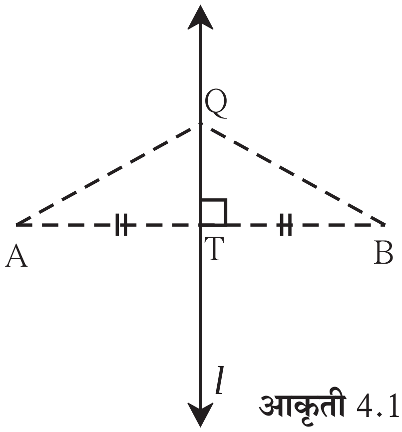
✻ पाया व त्याला समाविष्ट करणारे कोन दिले असता त्रिकोण काढणे.

✻ दोन बाजू व त्यांमधील समाविष्ट कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.

✻ कर्ण व एक बाजू दिली असता काटकोन त्रिकोण काढणे.

लंबदुभाजकाचे प्रमेय

- दिलेल्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंपासून समान अंतरावर असतो.
- रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंपासून समान अंतरावर असणारा प्रत्येक बिंदू रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असतो.



आकृती 4.1

जाणून घेऊया.

त्रिकोण रचना (Constructions of triangles)

त्रिकोण रचना करण्यासाठी आवश्यक अशा तीन बाबी लागतात. तीन कोन व तीन बाजू यांपैकी फक्त दोन बाबी दिल्या आणि या व्यतिरिक्त त्या त्रिकोणासंबंधी आणखी काही माहिती दिली तर त्या माहितीचा आणि दिलेल्या दोन बाबींचा उपयोग करून त्रिकोण कसा काढावा ते पाहू.

एखादा बिंदू दोन भिन्न रेषांवर असेल तर तो बिंदू त्या रेषांचा छेदनबिंदू असतो या गुणधर्माचा पुढील रचनांमध्ये अनेकदा उपयोग केला आहे.

रचना I

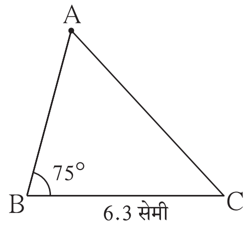
त्रिकोणाचा पाया, पायालगतचा एक कोन आणि उरलेल्या दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज दिली असता त्रिकोण काढणे.

उदा. Δ ABC असा काढा की ज्यामध्ये BC = 6.3 सेमी, $\angle B = 75^\circ$ आणि AB + AC = 9 सेमी आहे.

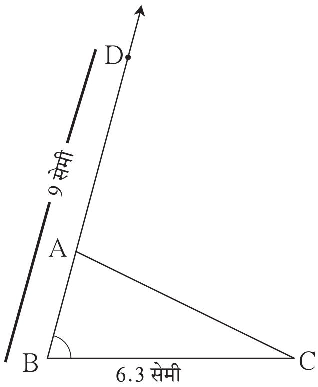
उकल : प्रथम अपेक्षित त्रिकोणाची कच्ची आकृती काढू.

स्पष्टीकरण : कच्च्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे

BC = 6.3 सेमी हा रेषाखंड प्रथम काढू.
बिंदू B जवळ रेषाखंड BC शी 75° कोन करणाऱ्या किरणावर D बिंदू असा घेऊ की
BD = AB + AC = 9 सेमी
किरण BD वर बिंदू A शोधायचा आहे.
BA + AD = BA + AC = 9
$\therefore$ AD = AC
$\therefore$ बिंदू A हा रेख CD च्या लंबदुभाजकावर आहे.
$\therefore$ किरण BD व रेख CD चा लंबदुभाजक यांचा छेदनबिंदू म्हणजे बिंदू A आहे.



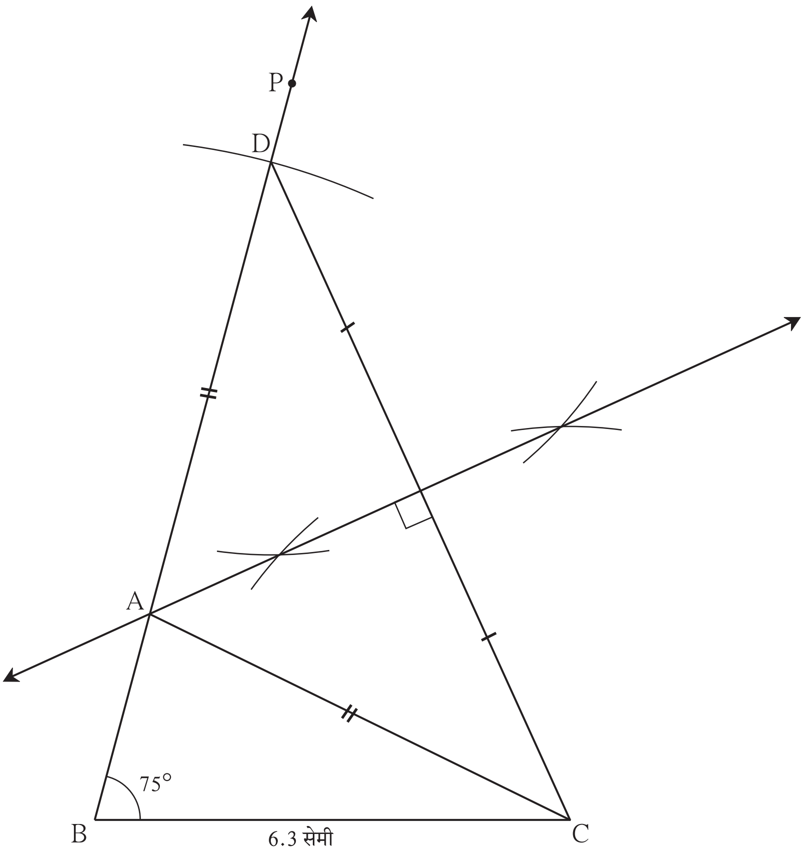
कच्ची आकृती 4.2



कच्ची आकृती 4.3

रचनेच्या पायऱ्या

(1) रेख BC हा 6.3 सेमी काढा.
(2) B बिंदूपाशी 75° चा कोन करणारा किरण BP काढा.
(3) किरण BP वर d(B,D) = 9 सेमी असा D बिंदू घ्या.
(4) रेख DC काढा.
(5) रेख DC चा लंबदुभाजक काढा.
(6) रेख DC चा लंबदुभाजक व किरण BP यांच्या छेदनबिंदूला A नाव द्या.
(7) रेख AC काढा.
Δ ABC हा अपेक्षित त्रिकोण आहे.



पक्की आकृती 4.4

सरावसंच 4.1

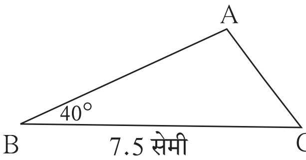
1. Δ PQR असा काढा की पाया QR = 4.2 सेमी, $m\angle Q = 40^\circ$ आणि PQ + PR = 8.5 सेमी
2. Δ XYZ असा काढा की पाया YZ = 6 सेमी, XY + XZ = 9 सेमी. $m\angle XYZ = 50^\circ$
3. Δ ABC असा काढा की पाया BC = 6.2 सेमी, $m\angle ACB = 50^\circ$, AB + AC = 9.8 सेमी
4. Δ ABC असा काढा की पाया BC = 5.2 सेमी, $\angle ACB = 45^\circ$ आणि Δ ABC ची परिमिती 10 सेमी

रचना II

त्रिकोणाचा पाया, उरलेल्या दोन बाजूंच्या लांबीतील फरक आणि पायालगतचा एक कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.

उदा (1)Δ ABC मध्ये BC = 7.5 सेमी, $m\angle ABC = 40^\circ$, AB – AC = 3 सेमी तर Δ ABC काढा.

उकल : प्रथम कच्ची आकृती काढू.



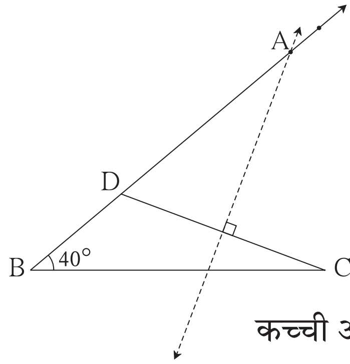
कच्ची आकृती 4.5

स्पष्टीकरण : AB – AC = 3 सेमी $\therefore$ AB > AC आहे.
BC हा रेषाखंड काढू. रेख BC शी 40° कोन करणारा किरण BL काढता येतो. त्या किरणावर A बिंदू शोधायचा आहे. BD = 3 सेमी असा D बिंदू त्या किरणावर घेतला. आता, B–D–A आणि BD = AB –AD = 3 आणि AB – AC = 3 दिले आहे.

$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ A हा बिंदू रेख DC च्या लंबदुभाजकावर आहे.

$\therefore$ बिंदू A हा किरण BL आणि रेख DC च्या लंबदुभाजकाचा छेदनबिंदू आहे.



कच्ची आकृती 4.6

रचनेच्या पायऱ्या

(1) रेख BC हा 7.5 सेमी काढा.

(2) B बिंदूपाशी 40° कोन करणारा किरण BL काढा.

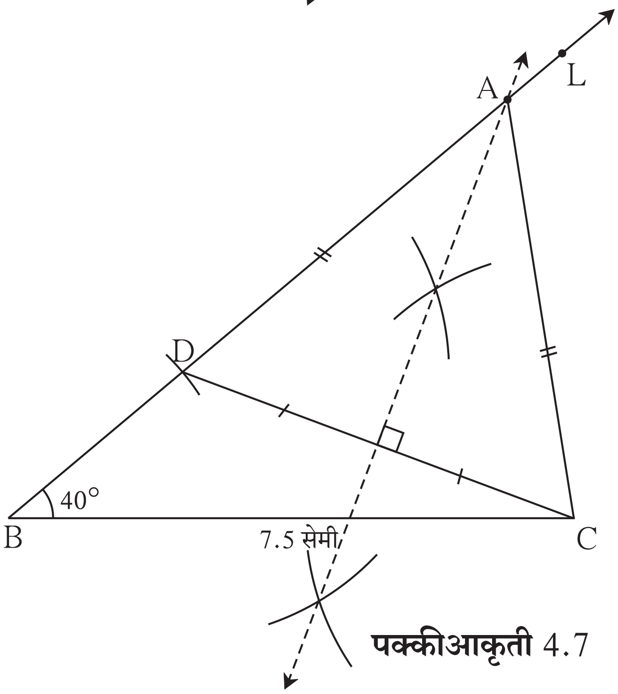
(3) किरण BL वर D बिंदू असा घ्या की BD = 3 सेमी.

(4) रेख CD काढून त्याचा लंबदुभाजक काढा.

(5) रेख CD चा लंबदुभाजक किरण BL ला जेथे छेदतो त्या बिंदूला A नाव द्या.

(6) रेख AC काढा.

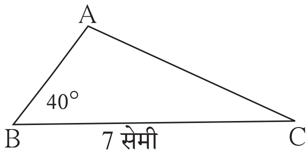
Δ ABC हा अपेक्षित त्रिकोण आहे.



पक्कीआकृती 4.7

उदा. 2 Δ ABC मध्ये बाजू BC = 7 सेमी, $\angle B = 40^\circ$ आणि AC – AB = 3 सेमी तर Δ ABC काढा.

उकल : कच्ची आकृती काढू.



कच्ची आकृती 4.8

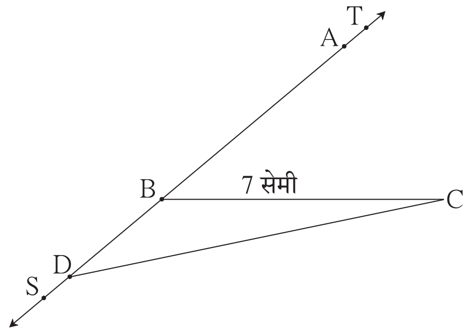
BC = 7 सेमी काढू. AC > AB. BC या रेषाखंडाच्या B बिंदूपाशी 40° चा कोन करणारा किरण BT काढता येतो. बिंदू A या किरणावर आहे. किरण BT च्या विरूद्ध किरणावर बिंदू D असा घ्या की, BD = 3 सेमी.

आता AD = AB + BD = AB + 3 = AC

(कारण AC – AB = 3 सेमी दिले आहे.)

$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ A हा बिंदू रेख CD च्या लंबदुभाजकावर आहे.



कच्ची **आकृती** 4.9

रचनेच्या पायऱ्या

(1) BC हा 7 सेमी लांबीचा रेषाखंड काढा.

(2) बिंदू B पाशी 40° चा कोन करणारा किरण BT काढा.

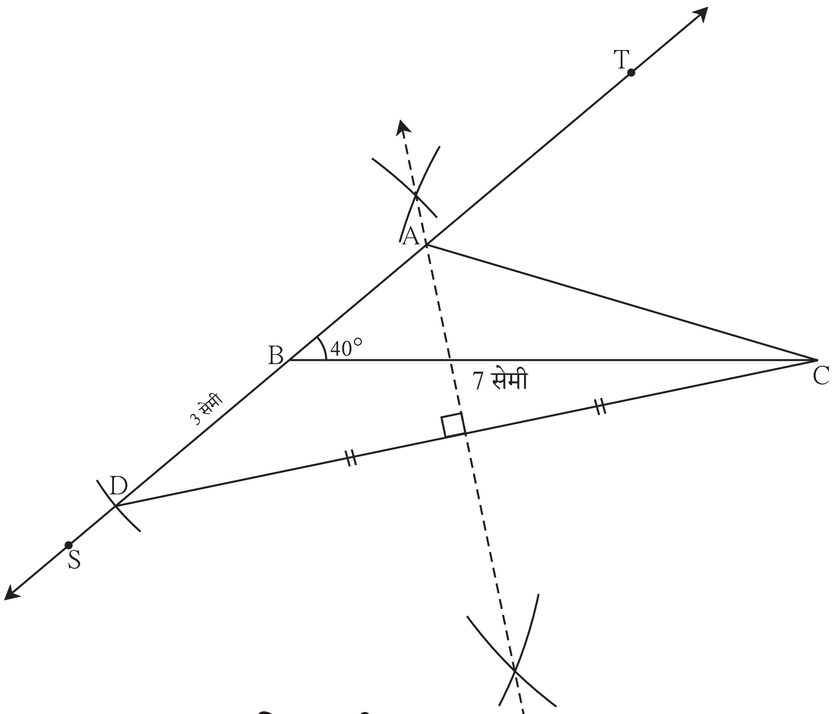
(3) किरण BT च्या विरूद्ध किरण BS वर बिंदू D असा घ्या की BD = 3 सेमी.

(4) रेख DC चा लंबदुभाजक काढा.

(5) रेख DC चा लंबदुभाजक किरण BT ला जेथे छेदतो त्या बिंदूला A नाव द्या.

(6) रेख AC काढा.

Δ ABC हा अपेक्षित त्रिकोण आहे.



पक्की आकृती 4.10

सरावसंच 4.2

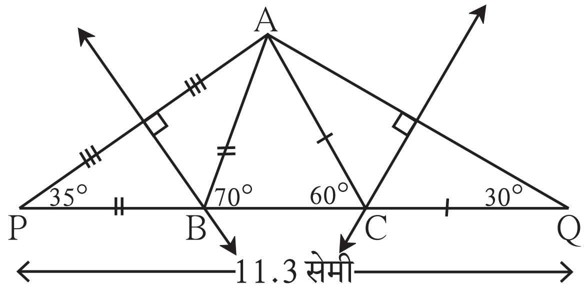
1. Δ XYZ असा काढा की YZ = 7.4 सेमी. m$\angle$XYZ = 45° आणि XY – XZ = 2.7 सेमी.
2. Δ PQR असा काढा की QR = 6.5 सेमी. m$\angle$PQR = 60° आणि PQ – PR = 2.5 सेमी.
3. Δ ABC असा काढा की BC = 6 सेमी. m$\angle$ABC = 100° आणि AC – AB = 2.5 सेमी.

रचना III

त्रिकोणाची परिमिती आणि पायालगतचे दोन्ही कोन दिले असता त्रिकोण काढणे.

उदा. Δ ABC मधील AB + BC + CA = 11.3 सेमी, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$ तर Δ ABC काढा.

उकल : कच्ची आकृती काढू.



कच्ची आकृती 4.11

स्पष्टीकरण : या आकृतीत रेख BC वर बिंदू P व Q असे घेतले की,

PB = AB, CQ = AC

$\therefore$ PQ = PB + BC + CQ = AB + BC +AC = 11.3 सेमी.

आता ΔPBA मध्ये PB = BA

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB$ आणि $\angle APB + \angle PAB$ = बाह्यकोन ABC = 70°. . . . (दूरस्थ आंतरकोनाचे प्रमेय)

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB = 35°$ त्याचप्रमाणे $\angle CQA = \angle CAQ = 30°$

आता PAQ हा त्रिकोण काढता येईल, कारण त्याचे दोन कोन व समाविष्ट बाजू PQ माहीत आहेत.

मग BA = BP $\therefore$ बिंदू B रेख AP च्या लंबदुभाजकावर आहे व CA = CQ

$\therefore$ बिंदू C रेख AQ च्या लंबदुभाजकावर आहे.

$\therefore$ AP व AQ चे लंबदुभाजक काढा व ते रेषा PQ ला जेथे छेदतील तेथे अनुक्रमे B आणि C बिंदू मिळतात.

रचनेच्या पायऱ्या

(1) रेख PQ हा 11.3 सेमी लांबीचा रेषाखंड काढा.

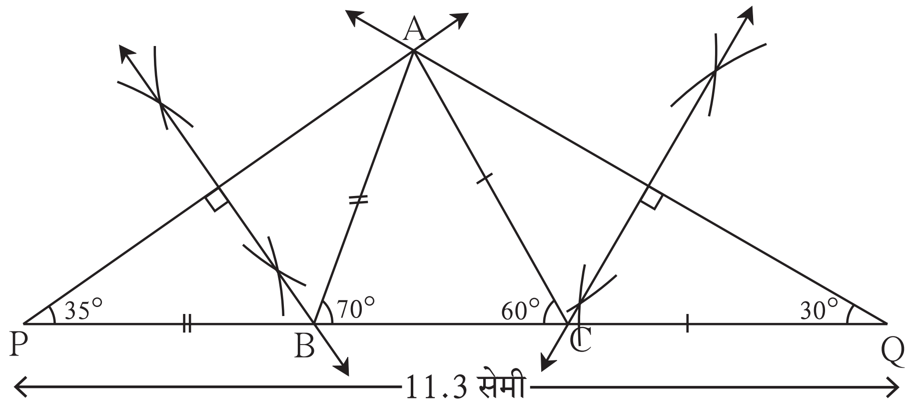
(2) बिंदू P पाशी 35° मापाचा कोन करणारा किरण काढा.

(3) बिंदू Q पाशी 30° मापाचा कोन करणारा किरण काढा.

(4) दोन्ही किरणांच्या छेदनबिंदूला A हे नाव द्या.

(5) रेख AP व रेख AQ चे लंबदुभाजक काढा. ते रेषा PQ ला ज्या बिंदूंत छेदतील त्यांना अनुक्रमे B आणि C ही नावे द्या.

(6) रेख AB आणि रेख AC काढा. Δ ABC हा अपेक्षित त्रिकोण आहे.



पक्की आकृती 4.12

सरावसंच 4.3

1. Δ PQR असा काढा, की $\angle Q = 70^\circ$, $\angle R = 80^\circ$ आणि PQ + QR + PR = 9.5 सेमी.
2. Δ XYZ असा काढा, की $\angle Y = 58^\circ$, $\angle X = 46^\circ$ आणि त्रिकोणाची परिमिती 10.5 सेमी असेल.
3. Δ LMN असा काढा, की $\angle M = 60^\circ$, $\angle N = 80^\circ$ आणि LM + MN + NL = 11 सेमी.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. Δ XYZ असा काढा की XY + XZ = 10.3 सेमी, YZ = 4.9 सेमी, $\angle XYZ = 45^\circ$
2. Δ ABC असा काढा की $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, AB + BC + AC = 11.2 सेमी.
3. ज्या त्रिकोणाची परिमिती 14.4 सेमी आहे आणि ज्याच्या बाजूंचे गुणोत्तर 2:3:4 आहे, असा त्रिकोण काढा.
4. Δ PQR असा काढा की PQ – PR = 2.4 सेमी, QR = 6.4 सेमी आणि $\angle PQR = 55^\circ$.

ICT Tools or Links

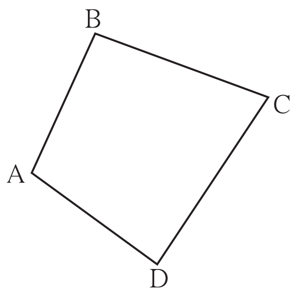
संगणकावर या त्रिकोण रचना जिओजिब्रा या सॉफ्टवेअरच्या साहाय्याने करून पाहाव्यात व आनंद घ्यावा. रचना क्रमांक 3 ही या सॉफ्टवेअरमध्ये वेगळ्याप्रकारे करून दाखवली आहे, ती रीतही अभ्यासावी.

5 चौकोन

चला, शिकूया.

- समांतरभुज चौकोन
- समांतरभुज चौकोनाच्या कसोट्या
- समभुज चौकोन
- आयत
- चौरस
- समलंब चौकोन
- त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूंचे प्रमेय

जरा आठवूया.



आकृती 5.1

1. □ABCD या चौकोनाच्या संदर्भात खालील जोड्या लिहा.

लगतच्या बाजूंच्या जोड्या :
(1) ... , ... (2) ... , ...
(3) ... , ... (4) ... , ...

लगतच्या कोनांच्या जोड्या :
(1) ... , ... (2) ... , ...
(3) ... , ... (4) ... , ...

संमुख बाजूंच्या जोड्या (1) ..... , ... (2) ..... , ...
संमुख कोनांच्या जोड्या (1) ..... , ... (2) ..... , ...

आठवा पाहू माझा प्रकार आणि माझे गुणधर्म

मी चौकोन आहे

माझ्या संमुख बाजूंच्या दोन्ही जोड्या समांतर
माझे गुणधर्म
- संमुख बाजू एकरूप
- संमुखकोन ....
- कर्ण ....

माझे सर्व कोन काटकोन
माझे गुणधर्म
- संमुख बाजू....
- कर्ण.....

माझ्या सर्व बाजू समान लांबीच्या
माझे गुणधर्म
- संमुख कोन ....
- कर्ण .....

माझे सर्व कोन समान, सर्व बाजू समान
माझे गुणधर्म
- कर्ण .....

माझ्या संमुख भुजांची एकच जोडी समांतर

चौकोनाचे वेगवेगळे प्रकार आणि त्यांचे गुणधर्म तुम्हांला माहीत आहेत. बाजू व कोन मोजणे, घड्या घालणे अशा कृतींतून ते तुम्ही जाणून घेतले आहे. हे गुणधर्म तर्काने कसे सिद्ध होतात हे आता आपण अभ्यासणार आहोत.

एखादा गुणधर्म तर्काने सिद्ध केला की त्या गुणधर्माला प्रमेय म्हणतात.

आयत, समभुज चौकोन आणि चौरस हे विशिष्ट असे समांतरभुज चौकोनच असतात. कसे, हे या पाठाचा अभ्यास करताना तुम्हांला समजेल. म्हणून अभ्यासाची सुरुवात समांतरभुज चौकोनापासून करू.

जाणून घेऊया.

समांतरभुज चौकोन (Parellelogram)

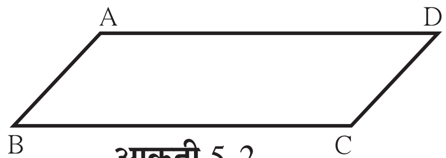
ज्या चौकोनाच्या संमुख बाजूंच्या दोन्ही जोड्या समांतर असतात, त्या चौकोनाला समांतरभुज चौकोन असे म्हणतात.

प्रमेय सिद्ध करताना, उदाहरणे सोडवताना या चौकोनाची आकृती वारंवार काढावी लागते. म्हणून ही आकृती कशी काढता येते हे पाहू.

समजा आपल्याला □ABCD हा समांतरभुज चौकोन काढायचा आहे.

रीत I :

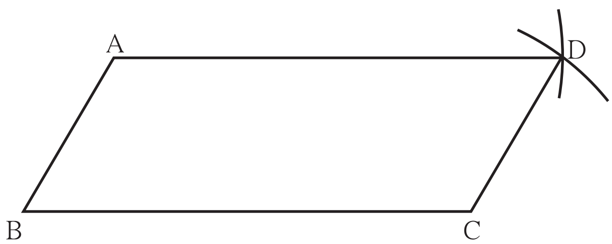
- प्रथम AB आणि BC हे कोणत्याही लांबीचे, एकमेकांशी कोणत्याही मापाचा कोन करणारे रेषाखंड काढू.
- आता रेख AD आणि रेख BC समांतर असले पाहिजेत. म्हणून बिंदू A मधून रेख BC ला समांतर रेषा काढू.
- तसेच रेख AB ॥ रेख DC, म्हणून बिंदू C मधून रेख AB ला समांतर रेषा काढू.
  दोन्ही रेषा ज्या बिंदूत छेदतील, तो बिंदू D असणार. म्हणून तयार झालेला चौकोन ABCD हा समांतरभुज चौकोन असणार.



आकृती 5.2

रीत II :

- रेख AB आणि रेख BC हे कोणत्याही लांबीचे, एकमेकांशी कोणत्याही मापाचा कोन करणारे रेषाखंड काढू.
- कंपासमध्ये BC हे अंतर घेऊन आणि बिंदू A केंद्र घेऊन एक कंस काढू.
- कंपासमध्ये AB हे अंतर घेऊन, बिंदू C केंद्र घेऊन पहिल्या कंसाला छेदणारा कंस काढू.
- कंसांच्या छेदनबिंदूला D नाव देऊ.
  रेख AD आणि रेख CD जोडू.
  तयार झालेला □ABCD हा समांतरभुज चौकोन असेल.



आकृती 5.3

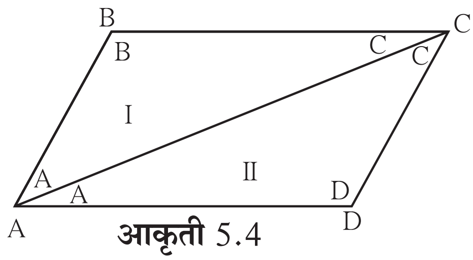
दुसऱ्या रीतीने काढलेल्या चौकोनात आपण संमुख बाजू समान असलेला चौकोन काढलेला आहे. याच्या संमुख बाजू समांतर का येतात, हे एका प्रमेयाच्या सिद्धतेनंतर तुम्हांला समजेल.

कृती I लगतच्या बाजू वेगवेगळ्या लांबीच्या आणि त्यामधील कोन वेगवेगळ्या मापांचे घेऊन पाच वेगवेगळे समांतरभुज चौकोन काढा.

समांतरभुज चौकोनाची प्रमेये सिद्ध करण्यासाठी एकरूप त्रिकोणांचा उपयोग होतो. तो कसा करून घ्यायचा हे समजण्यासाठी पुढील कृती करा.

कृती II

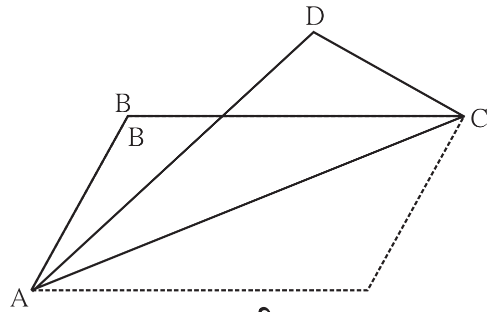
- एका जाड कागदावर □ABCD हा समांतरभुज चौकोन काढा. त्याचा कर्ण AC काढा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे शिरोबिंदूंची नावे चौकोनाच्या आतही लिहा.



आकृती 5.4

- कर्ण AC वर घडी घालून ΔADC आणि ΔCBA एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात का हे पाहा.

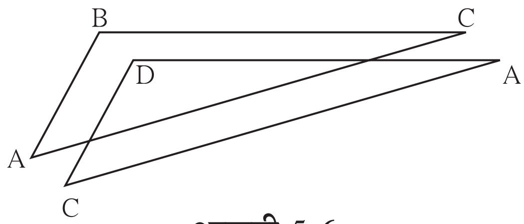
- □ABCD त्याच्या AC कर्णावर कापून ΔADC आणि ΔCBA वेगळे करा. ΔCBA फिरवून घेऊन ΔADC शी तंतोतंत जुळतो का ते पाहा.



आकृती 5.5

काय आढळले? ΔCBA च्या कोणत्या बाजू ΔADC च्या कोणत्या बाजूंशी जुळल्या? ΔCBA चा कोणता कोन ΔADC च्या कोणत्या कोनाशी जुळला?

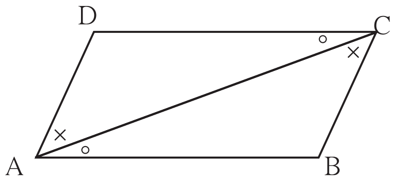
बाजू DC ही बाजू AB शी आणि बाजू AD ही बाजू CB शी तंतोतंत जुळते. तसेच ∠B हा ∠D शी जुळतो.



आकृती 5.6

म्हणजेच समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजू व संमुख कोन एकरूप आहेत असे दिसते. समांतरभुज चौकोनाचे हेच गुणधर्म आपण सिद्ध करूया.

प्रमेय 1. समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा एकरूप असतात व संमुख कोन एकरूप असतात.



आकृती 5.7

पक्ष : □ABCD समांतरभुज चौकोन आहे.
म्हणजेच बाजू AB ।। बाजू DC, बाजू AD ।। बाजू BC.

साध्य : रेख AD ≅ रेख BC ; रेख DC ≅ रेख AB
$\angle ADC \cong \angle CBA$, आणि $\angle DAB \cong \angle BCD$.

रचना : कर्ण AC काढा.

सिद्धता : रेख DC ।। रेख AB व कर्ण AC ही छेदिका.

$\therefore$ $\angle DCA \cong \angle BAC$ ....(1) } .....व्युत्क्रम कोन
आणि $\angle DAC \cong \angle BCA$ ....(2) }

आता, ΔADC व ΔCBA यांमध्ये,

$\angle DAC \cong \angle BCA$ .... विधान (2) वरून

$\angle DCA \cong \angle BAC$ .... विधान (1) वरून

बाजू AC ≅ बाजू CA .... सामाईक बाजू

$\therefore$ $\Delta ADC \cong \Delta CBA$ ...... कोबाको कसोटी

$\therefore$ बाजू AD ≅ बाजू CB .... एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू

आणि बाजू DC ≅ बाजू AB .... एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू

तसेच, $\angle ADC \cong \angle CBA$ .... एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन

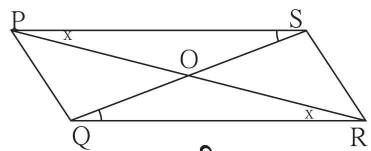
याप्रमाणेच $\angle DAB \cong \angle BCD$ हे सिद्ध करता येईल.

विचार करूया

वरील प्रमेयात $\angle DAB \cong \angle BCD$ हे सिद्ध करण्यासाठी रचनेत काही बदल करावा लागेल का? तो बदल करून सिद्धता कशी लिहिता येईल?

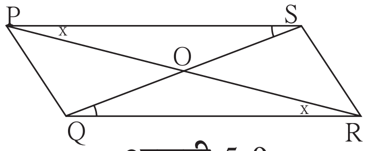
समांतरभुज चौकोनाचा आणखी एक गुणधर्म समजून घेण्यासाठी पुढील कृती करा.

कृती : □PQRS हा कोणताही एक समांतरभुज चौकोन काढा. कर्ण PR आणि कर्ण QS काढून त्यांच्या छेदनबिंदूला O हे नाव द्या. प्रत्येक कर्णाच्या झालेल्या दोन भागांच्या लांबीची तुलना कर्कटकाच्या साहाय्याने करा. काय आढळले?



आकृती 5.8

प्रमेय : समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.



आकृती 5.9

पक्ष : □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.
कर्ण PR व कर्ण QS हे O बिंदूत छेदतात.

साध्य : रेख PO ≅ रेख RO, रेख SO ≅ रेख QO

सिद्धता : ΔPOS व ΔROQ मध्ये

∠OPS ≅ ∠ORQ .... व्युत्क्रम कोन

बाजू PS ≅ बाजू RQ .... समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा

∠PSO ≅ ∠RQO .... व्युत्क्रम कोन

∴ ΔPOS ≅ ΔROQ .... कोबाको कसोटी

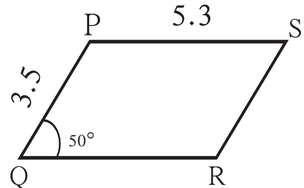
∴ रेख PO ≅ रेख RO ....
आणि रेख SO ≅ रेख QO .... } ...... एकरूप त्रिकोणाच्या संगत भुजा

हे लक्षात ठेवूया.

- समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा एकरूप असतात.
- समांतरभुज चौकोनाचे संमुख कोन एकरूप असतात.
- समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे. PQ = 3.5, PS = 5.3 ∠Q = 50° तर □PQRS च्या इतर बाजूंच्या लांबी आणि कोनांची मापे काढा.



आकृती 5.10

उकल : □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

∴ ∠Q + ∠P = 180° ....आंतरकोन

∴ 50° + ∠P = 180°

∴ ∠P = 180° − 50° = 130°

आता, ∠P = ∠R आणि ∠Q = ∠S ....समांतरभुज चौकोनाचे संमुख कोन

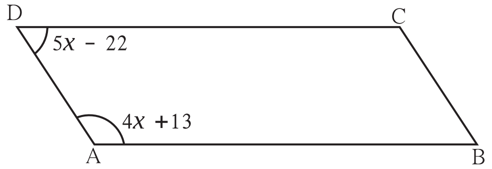
∴ ∠R = 130° आणि ∠S = 50°

तसेच, PS = QR आणि PQ = SR ....समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा.

∴ QR = 5.3 आणि SR = 3.5

उदा (2) □ABCD समांतरभुज आहे. □ABCD मध्ये $\angle A = (4x + 13)^\circ$ आणि $\angle D = (5x - 22)^\circ$ तर $\angle B$ आणि $\angle C$ यांची मापे काढा.

उकल : समांतरभुज चौकोनाचे लगतचे कोन पूरक असतात.



आकृती 5.11

$\angle A$ आणि $\angle D$ हे लगतचे कोन आहेत.

$\therefore\ (4x + 13)^\circ + (5x - 22)^\circ = 180$

$\therefore\ 9x - 9 = 180$

$\therefore\ 9x = 189$

$\therefore\ x = 21$

$\therefore\ \angle A = 4x + 13 = 4 \times 21 + 13 = 84 + 13 = 97^\circ \quad \therefore\ \angle C = 97^\circ$

$\angle D = 5x - 22 = 5 \times 21 - 22 = 105 - 22 = 83^\circ \quad \therefore\ \angle B = 83^\circ$

सरावसंच 5.1

1. समांतरभुज □WXYZ चे कर्ण बिंदू O मध्ये छेदतात. $\angle XYZ = 135^\circ$ तर $\angle XWZ = ?$, $\angle YZW = ?$ जर $l(OY) = 5$ सेमी तर $l(WY) = ?$

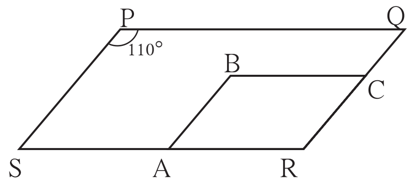
2. समांतरभुज □ABCD मध्ये $\angle A = (3x + 12)^\circ$, $\angle B = (2x - 32)^\circ$ तर x ची किंमत काढा, त्यावरून $\angle C$ आणि $\angle D$ ची मापे काढा.

3. एका समांतरभुज चौकोनाची परिमिती 150 सेमी आहे आणि एक बाजू दुसरीपेक्षा 25 सेमी मोठी आहे. तर त्या समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व बाजूंची लांबी काढा.

4. एका समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या दोन कोनांचे गुणोत्तर 1 : 2 आहे. तर त्या समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व कोनांची मापे काढा.

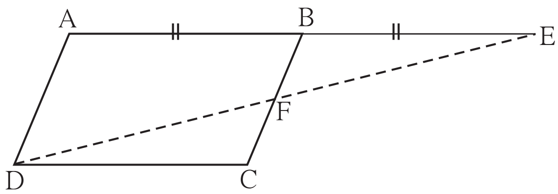
5*. समांतरभुज □ABCD चे कर्ण परस्परांना बिंदू O मध्ये छेदतात. जर AO = 5, BO = 12 आणि AB = 13 तर □ABCD समभुज आहे हे दाखवा.

6. आकृती 5.12 मध्ये □PQRS व □ABCR हे दोन समांतरभुज चौकोन आहेत. $\angle P = 110^\circ$ तर □ABCR च्या सर्व कोनांची मापे काढा.



आकृती 5.12

7. आकृती 5.13 मध्ये □ABCD समांतरभुज चौकोन आहे. किरण AB वर बिंदू E असा आहे की BE = AB. तर सिद्ध करा, की रेषा ED ही रेख BC ला F मध्ये दुभागते.



आकृती 5.13

जरा आठवूया.

समांतर रेषांच्या कसोट्या

1. जर दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता होणाऱ्या संगत कोनाची एक जोडी एकरूप असेल, तर त्या दोन रेषा एकमेकींना समांतर असतात.
2. जर दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असेल, तर त्या दोन रेषा एकमेकींना समांतर असतात.
3. जर दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता आंतरकोनांची एक जोडी पूरक असेल, तर त्या दोन रेषा एकमेकींना समांतर असतात.

जाणून घेऊया.

समांतरभुज चौकोनाच्या कसोट्या (Tests for parallelogram)

समजा, □PQRS मध्ये PS = QR आणि PQ = SR आहे. □PQRS हा समांतरभुज आहे हे सिद्ध करायचे आहे. त्यासाठी या चौकोनाच्या बाजूंच्या कोणत्या जोड्या समांतर आहेत असे दाखवावे लागेल? त्यासाठी समांतर रेषांची कोणती कसोटी उपयोगी पडेल? कसोटीसाठी आवश्यक असणारे कोन मिळवण्यासाठी कोणती रेषा छेदिका म्हणून घेणे सोईचे होईल?

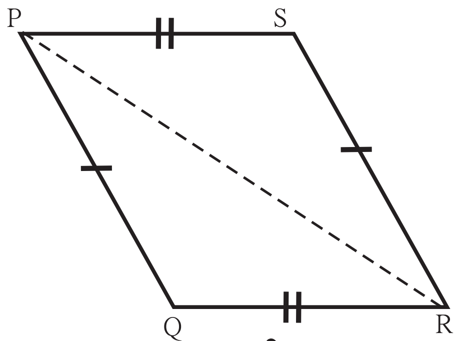
आकृती 5.14

प्रमेय : चौकोनाच्या संमुख बाजूंच्या जोड्या एकरूप असतील तर तो चौकोन समांतरभुज असतो.

पक्ष : □PQRS मध्ये
बाजू PS ≅ बाजू QR
बाजू PQ ≅ बाजू SR

साध्य : □PQRS हा समांतरभुज आहे.

रचना : कर्ण PR काढला.



आकृती 5.15

सिद्धता : Δ SPR व Δ QRP मध्ये,
बाजू SP ≅ बाजू QR ....(पक्ष)
बाजू SR ≅ बाजू QP .... (पक्ष)
बाजू PR ≅ बाजू RP .... सामाईक बाजू
∴ Δ SPR ≅ Δ QRP ...... बाबाबा कसोटी
∴ ∠SPR ≅ ∠QRP .... एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन
तसेच ∠PRS ≅ ∠RPQ ..... एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन

∠SPR आणि ∠QRP हे रेख PS आणि रेख QR यांच्या PR या छेदिकेमुळे झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

∴ बाजू PS || बाजू QR ......(I) समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी.

तसेच $\angle$PRS आणि $\angle$RPQ हे रेख PQ आणि रेख SR यांच्या PR या छेदिकेमुळे झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

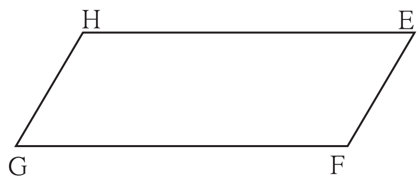
∴ बाजू PQ || बाजू SR ......(II) समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी.

∴ (I) व (II) वरून □PQRS हा समांतरभुज आहे.

समांतरभुज चौकोन काढण्याच्या दोन रीती सुरुवातीला दिल्या आहेत. दुसऱ्या रीतीत प्रत्यक्षात संमुख बाजू समान असलेला चौकोन काढला आहे. असा चौकोन समांतरभुज का असतो, हे आता लक्षात आले का?

प्रमेय : चौकोनाच्या संमुख कोनांच्या जोड्या एकरूप असतील तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.

खाली दिलेल्या पक्ष, साध्य आणि सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरा.



आकृती 5.16

पक्ष : □EFGH मध्ये $\angle E \cong \angle G$

आणि $\angle$.......... $\cong$ $\angle$..........

साध्य : □EFGH हा ....

सिद्धता : $\angle E = \angle G = x$ आणि $\angle H = \angle F = y$ मानू.

चौकोनाच्या कोनांच्या मापांची बेरीज .... असते.

∴ $\angle E + \angle G + \angle H + \angle F =$ ....

∴ $x + y +$ .... + ... = ...

∴ $\square x + \square y =$ .....

∴ $x + y = 180°$

∴ $\angle G + \angle H =$ ....

रेख HE आणि रेख GF यांना छेदिका HG ने छेदल्यामुळे $\angle$G आणि $\angle$H हे आंतरकोन तयार झाले आहेत.

∴ बाजू HE || बाजू GF .... (I) समांतर रेषांची आंतरकोन कसोटी.

त्याचप्रमाणे $\angle G + \angle F =$ ....

∴ बाजू .... || बाजू .... (II) समांतर रेषांची आंतरकोन कसोटी.

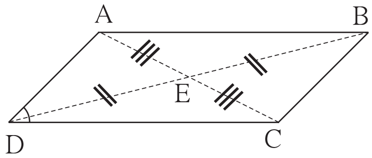
∴ (I) व (II) वरून □EFGH हा .... आहे.

प्रमेय : चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागत असतील तर तो चौकोन समांतरभुज असतो.

पक्ष : □ABCD चे कर्ण परस्परांना बिंदू E मध्ये दुभागतात. म्हणजेच रेख AE ≅ रेख CE
रेख BE ≅ रेख DE

साध्य : □ABCD हा समांतरभुज आहे.

सिद्धता : पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधा आणि सिद्धता तुम्ही स्वतः लिहा.



आकृती 5.17

1. रेख AB || रेख DC हे सिद्ध करण्यासाठी व्युत्क्रम कोनांची कोणती जोडी एकरूप दाखवावी लागेल? व्युत्क्रम कोनांची ती जोडी कोणत्या छेदिकेमुळे मिळेल?
2. व्युत्क्रम कोनांच्या निवडलेल्या जोडीतील कोन हे कोणकोणत्या त्रिकोणांचे कोन आहेत?
3. त्यांपैकी कोणते त्रिकोण कोणत्या कसोटीने एकरूप होतात?
4. याप्रमाणे विचार करून रेख AD || रेख BC हे सिद्ध करता येईल ना?

एखादा चौकोन समांतरभुज आहे असे सिद्ध करायचे असते तेव्हा वरील प्रमेये उपयोगी पडतात. म्हणून या प्रमेयांना समांतरभुज चौकोनाच्या कसोट्या म्हणतात.

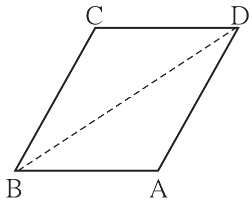
आणखी एक प्रमेय समांतरभुज चौकोनाची कसोटी म्हणून उपयोगी पडते.

प्रमेय : चौकोनाच्या संमुख बाजूंची एक जोडी एकरूप आणि समांतर असेल तर तो चौकोन समांतरभुज असतो.

पक्ष : □ABCD मध्ये रेख CB ≅ रेख DA आणि रेख CB || रेख DA

साध्य : □ABCD समांतरभुज आहे.

रचना : कर्ण BD काढला.



आकृती 5.18

खाली थोडक्यात दिलेली सिद्धता तुम्ही विस्ताराने लिहा.

Δ CBD ≅ Δ ADB ....बा-को-बा कसोटी.

$\therefore$ $\angle$CDB ≅ $\angle$ABD ..... एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन.

$\therefore$ रेख CD || रेख BA ..... समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी.

हे लक्षात ठेवूया.

- ज्या चौकोनाच्या संमुख कोनांच्या जोड्या एकरूप असतात तो चौकोन समांतरभुज असतो.
- ज्या चौकोनाच्या संमुख बाजूंच्या जोड्या एकरूप असतात तो चौकोन समांतरभुज असतो.
- ज्या चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात तो चौकोन समांतरभुज असतो.
- चौकोनाच्या संमुख बाजूंची एक जोडी एकरूप आणि समांतर असेल तर तो चौकोन समांतरभुज असतो.

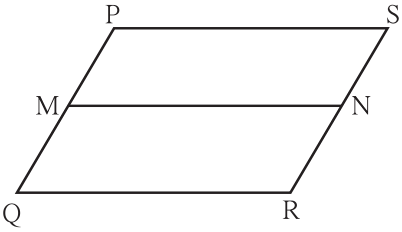
या प्रमेयांना समांतरभुज चौकोनाच्या कसोट्या म्हणतात.

विचार करूया

वहीमधील छापलेल्या रेषा एकमेकींना समांतर असतात. या रेषांचा उपयोग करून एखादा समांतरभुज चौकोन कसा काढता येईल?

सोडवलेली उदाहरणे –

उदा (1) □PQRS हा समांतरभुज आहे. बाजू PQ चा मध्यबिंदू M आणि बाजू RS चा मध्यबिंदू N आहे तर □PMNS आणि □MQRN समांतरभुज आहेत हे सिद्ध करा.



आकृती 5.19

पक्ष : □PQRS समांतरभुज आहे. बाजू PQ आणि बाजू RS यांचे अनुक्रमे M आणि N हे मध्यबिंदू आहेत.

साध्य : □PMNS समांतरभुज आहे.
□MQRN समांतरभुज आहे.

सिद्धता : बाजू PQ || बाजू SR

∴ बाजू PM || बाजू SN ...... (∵ P-M-Q; S-N-R) ......(I)

तसेच बाजू PQ = बाजू SR.

∴ $\frac{1}{2}$ बाजू PQ = $\frac{1}{2}$ बाजू SR

∴ बाजू PM = बाजू SN ..... (∵ M व N हे मध्यबिंदू आहेत.)......(II)

∴ (I) व (II) वरून □PMNQ हा समांतरभुज आहे,

त्याचप्रमाणे □MQRN समांतरभुज आहे हे सिद्ध करता येईल.

उदा (2) Δ ABC च्या बाजू AB आणि AC यांचे अनुक्रमे D व E हे मध्यबिंदू आहेत. किरण ED वर बिंदू F असा आहे, की ED = DF. तर सिद्ध करा, □AFBE हा समांतरभुज आहे.
या उदाहरणासाठी पक्ष आणि साध्य तुम्ही लिहा आणि सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून ती पूर्ण करा.

पक्ष : --------------------

साध्य : -----------------------

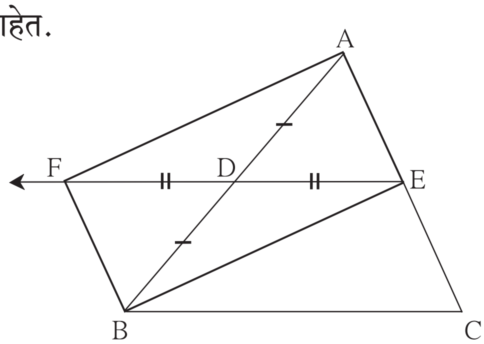
सिद्धता : रेख AB आणि रेख EF हे □AFBE चे ________ आहेत.

रेख AD ≅ रेख DB....... ________

रेख ________ ≅ रेख ________.......रचना.

∴ □AFBE चे कर्ण परस्परांना ________

∴ ________ कसोटीने □AFBE समांतरभुज आहे.

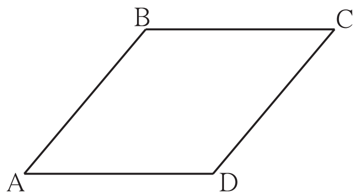


आकृती 5.20

उदा (3) कोणताही समभुज चौकोन हा समांतरभुज असतो हे सिद्ध करा.

पक्ष : □ABCD समभुज आहे

साध्य : □ABCD समांतरभुज आहे.



आकृती 5.21

सिद्धता : बाजू AB = बाजू BC = बाजू CD = बाजू DA (पक्ष)

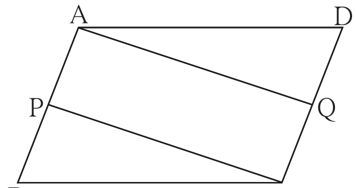
∴ बाजू AB = बाजू CD आणि बाजू BC = बाजू AD

∴ □ABCD समांतरभुज आहे..... (समांतरभुज चौकोनाची संमुख भुजा कसोटी)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सरावसंच 5.2

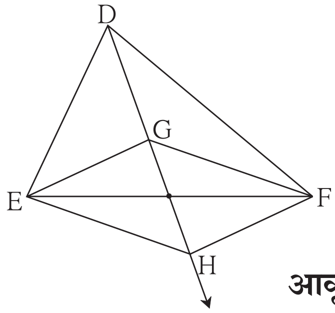
1. आकृती 5.22 मध्ये, □ABCD हा समांतरभुज आहे. बिंदू P व बिंदू Q हे अनुक्रमे बाजू AB व बाजू DC यांचे मध्यबिंदू आहेत तर सिद्ध करा की, □APCQ समांतरभुज आहे.



आकृती 5.22

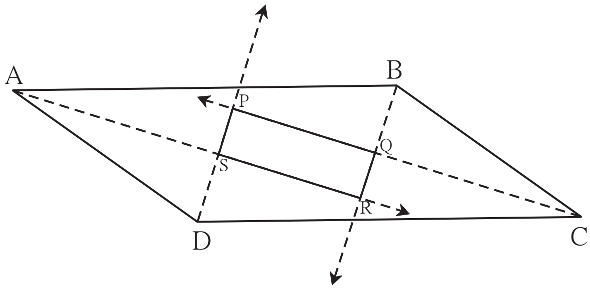
2. कोणताही आयत समांतरभुज असतो, हे सिद्ध करा.

3. आकृती 5.23 मध्ये, बिंदू G हा Δ DEF चा मध्यगा संपात आहे. किरण DG वर बिंदू H असा घ्या, की D-G-H आणि DG = GH, तर सिद्ध करा □GEHF समांतरभुज आहे.



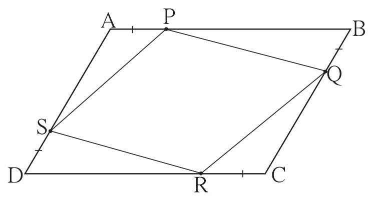
आकृती 5.23

4*. समांतरभुज चौकोनाच्या चारही कोनांच्या दुभाजकांमुळे तयार झालेला चौकोन आयत असतो, हे सिद्ध करा. (आकृती 5.24)



आकृती 5.24

5. शेजारील आकृती 5.25 मध्ये □ABCD ह्या समांतरभुज चौकोनाच्या बाजूंवर P, Q, R, S बिंदू असे आहेत की, AP = BQ = CR = DS तर सिद्ध करा, की □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.



आकृती 5.25

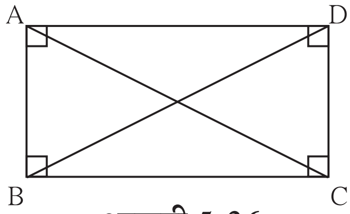
जाणून घेऊया.

आयत, समभुज चौकोन आणि चौरस यांचे विशेष गुणधर्म
(Properties of rectangle, rhombus and square)

आयत, समभुज चौकोन आणि चौरस हे समांतरभुज चौकोनही असतात. त्यामुळे संमुख बाजू समान असणे, संगत कोन समान असणे आणि कर्ण परस्परांना दुभागणे हे गुणधर्म या तिन्ही प्रकारच्या चौकोनांत असतात.

परंतु यापेक्षा काही अधिक गुणधर्म या प्रत्येक प्रकारच्या चौकोनात असतात. ते आपण पाहू.

या गुणधर्मांच्या सिद्धता पुढे थोडक्यात दिल्या आहेत. दिलेल्या पायऱ्या विचारात घेऊन तुम्ही त्या सिद्धता विस्ताराने लिहा.



आकृती 5.26

प्रमेय : आयताचे कर्ण एकरूप असतात.

पक्ष : □ABCD हा आयत आहे.

साध्य : कर्ण AC ≅ कर्ण BD

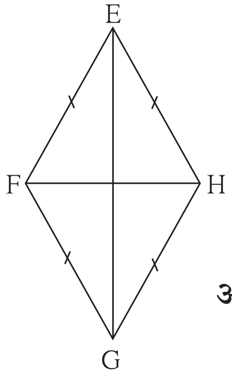
सिद्धता : थोडक्यात दिलेली सिद्धता कारणे देऊन पूर्ण करा.

Δ ADC ≅ Δ DAB ...... बाकोबा कसोटी.

कर्ण AC ≅ कर्ण BD..... (एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

प्रमेय : चौरसाचे कर्ण एकरूप असतात.

पक्ष, साध्य आणि सिद्धता तुम्ही लिहा.



आकृती 5.27

प्रमेय : समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

पक्ष : □EFGH समभुज आहे.

साध्य : (i) कर्ण EG हा कर्ण HF चा लंबदुभाजक आहे.

(ii) कर्ण HF हा कर्ण EG चा लंबदुभाजक आहे.

सिद्धता : (i) रेख EF ≅ रेख EH } पक्ष
रेख GF ≅ रेख GH

रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असणारा प्रत्येक बिंदू त्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावर असतो.

$\therefore$ बिंदू E व बिंदू G हे रेख HF च्या लंबदुभाजकावर आहेत.

दोन भिन्न बिंदूंतून एक आणि एकच रेषा जाते.

$\therefore$ रेषा EG ही कर्ण HF ची लंबदुभाजक रेषा आहे.

$\therefore$ कर्ण EG हा कर्ण HF चा लंबदुभाजक आहे.

(ii) याप्रमाणेच कर्ण HF हा कर्ण EG चा लंबदुभाजक आहे हे सिद्ध करता येईल.

पुढील प्रमेयांच्या सिद्धता तुम्ही लिहा.

- चौरसाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.
- समभुज चौकोनाचे कर्ण त्याचे संमुख कोन दुभागतात.
- चौरसाचे कर्ण त्याचे संमुख कोन दुभागतात.

हे लक्षात ठेवूया.

- आयताचे कर्ण एकरूप असतात.
- समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.
- समभुज चौकोनाचे कर्ण संमुख कोन दुभागतात.
- चौरसाचे कर्ण एकरूप असतात.
- चौरसाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.
- चौरसाचे कर्ण संमुख कोन दुभागतात.

सरावसंच 5.3

1. □ABCD या आयताचे कर्ण O मध्ये छेदतात. जर AC = 8 सेमी, तर BO = ?
   जर $\angle CAD = 35^\circ$ तर $\angle ACB$ = ?
2. □PQRS या समभुज चौकोनात जर PQ = 7.5 सेमी, तर QR = ?
   जर $\angle QPS = 75^\circ$ तर $\angle PQR$ = ?, $\angle SRQ$ = ?
3. □ IJKL या चौरसाचे कर्ण परस्परांना बिंदू M मध्ये छेदतात. तर $\angle IMJ$, $\angle JIK$ आणि $\angle LJK$ यांची मापे ठरवा.
4. एका समभुज चौकोनाच्या कर्णांची लांबी अनुक्रमे 20 सेमी, 21 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाची बाजू व परिमिती काढा.
5. खालील विधाने सत्य की असत्य हे सकारण लिहा.
   (i) प्रत्येक समांतरभुज चौकोन समभुज चौकोन असतो. (ii) प्रत्येक समभुज चौकोन हा आयत असतो.
   (iii) प्रत्येक आयत हा समांतरभुज चौकोन असतो. (iv) प्रत्येक चौरस हा आयत असतो.
   (v) प्रत्येक चौरस हा समभुज चौकोन असतो. (vi) प्रत्येक समांतरभुज चौकोन आयत असतो.

जाणून घेऊया.

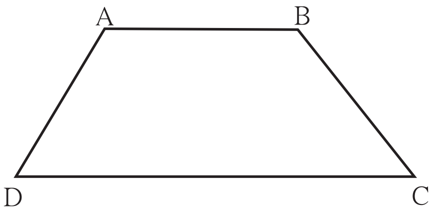
समलंब चौकोन (Trapezium)

ज्या चौकोनाच्या संमुख बाजूंची एकच जोडी समांतर असते, त्या चौकोनाला समलंब चौकोन म्हणतात.

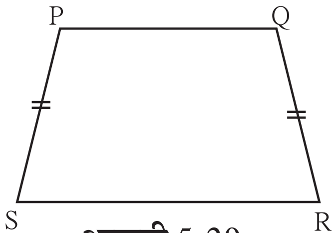
सोबतच्या आकृतीत □ABCD च्या फक्त AB आणि DC याच बाजू एकमेकींना समांतर आहेत. म्हणजे हा समलंब चौकोन आहे.

समांतर रेषांच्या गुणधर्मानुसार $\angle A$ आणि $\angle D$ ही लगतच्या कोनांची जोडी पूरक आहे. तसेच $\angle B$ आणि $\angle C$ ही लगतच्या कोनांची जोडीसुद्धा पूरक आहे. समलंब चौकोनात लगतच्या कोनांच्या दोन जोड्या पूरक असतात.

समलंब चौकोनाच्या समांतर नसलेल्या (असमांतर) बाजूंची जोडी एकरूप असेल तर त्या चौकोनाला **समद्विभुज समलंब चौकोन (Isosceles trapezium)** म्हणतात.



आकृती 5.28

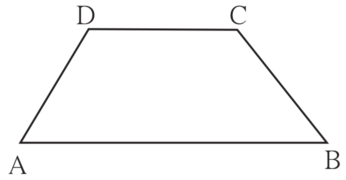


आकृती 5.29

समलंब चौकोनाच्या असमांतर बाजूंचे मध्यबिंदू जोडणाऱ्या रेषाखंडाला त्या समलंब चौकोनाची मध्यगा म्हणतात.

सोडवलेली उदाहरणे :

उदा (1) □ABCD च्या कोनांची मापे 4 : 5 : 7 : 8 या प्रमाणात आहेत. तर □ABCD समलंब आहे, हे दाखवा.



आकृती 5.30

उकल : समजा, ∠A, ∠B, ∠C, ∠D यांची मापे अनुक्रमे $(4x)^\circ$, $(5x)^\circ$, $(7x)^\circ$, व $(8x)^\circ$ असे मानू.

चौकोनाच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते.

$\therefore\ 4x + 5x + 7x + 8x = 360$

$\therefore\ 24x = 360 \qquad \therefore\ x = 15$

$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ$, $\angle B = 5 \times 15 = 75^\circ$, $\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ$,

आणि $\angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$

आता, $\angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$

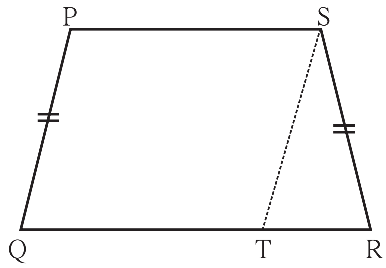
∴ बाजू CD ∥ बाजू BA...... (I)

परंतु $\angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$

∴ बाजू BC आणि बाजू AD एकमेकींना समांतर नाहीत. ....(II)

∴ □ABCD हा समलंब चौकोन आहे. ....(I) व (II) वरून

उदा (2) समलंब □PQRS मध्ये बाजू PS ∥ बाजू QR आणि बाजू PQ ≅ बाजू SR, बाजू QR > बाजू PS तर सिद्ध करा ∠PQR ≅ ∠SRQ



आकृती 5.31

पक्ष : □PQRS मध्ये बाजू PS ∥ बाजू QR
आणि बाजू PQ ≅ बाजू SR

साध्य : ∠PQR ≅ ∠SRQ

रचना : बिंदू S मधून बाजू PQ ला समांतर रेषाखंड काढला. तो बाजू QR ला T मध्ये छेदतो.

सिद्धता : □PQRS मध्ये,

रेख PS ∥ रेख QT ....पक्ष आणि Q-T-R

रेख PQ ∥ रेख ST ....रचना

∴ □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

∴∠PQT ≅ ∠STR ..... संगत कोन (I)

तसेच रेख PQ ≅ रेख ST

परंतु रेख PQ ≅ रेख SR ......(पक्ष)

∴ रेख ST ≅ रेख SR

∴∠STR ≅ ∠SRT.....समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय (II)

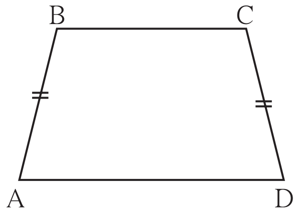
∴∠PQT ≅ ∠SRT ....(I) व (II) वरून.

∴ ∠PQR ≅ ∠SRQ .... Q-T-R.

यावरून सिद्ध होते, की समद्विभुज समलंब चौकोनाचे पायालगतचे कोन एकरूप असतात.

सरावसंच 5.4

1. □IJKL मध्ये बाजू IJ || बाजू KL असून $\angle I = 108°$ $\angle K = 53°$ तर $\angle J$ आणि $\angle L$ यांची मापे काढा.
2. □ABCD मध्ये बाजू BC || बाजू AD असून बाजू AB ≅ बाजू DC जर $\angle A = 72°$ तर $\angle B$, आणि $\angle D$ यांची मापे ठरवा.
3. आकृती 5.32 मधील □ABCD मध्ये बाजू BC < बाजू AD असून बाजू BC || बाजू AD आणि जर बाजू BA ≅ बाजू CD तर $\angle ABC \cong \angle DCB$ हे सिद्ध करा.



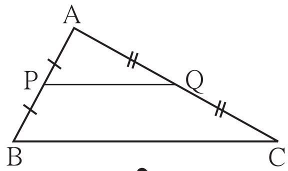
आकृती 5.32


जाणून घेऊया.

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूंचे प्रमेय (Theorem of midpoints of two sides of a triangle)

विधान : त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंचे मध्यबिंदू जोडणारा रेषाखंड तिसऱ्या बाजूला समांतर असतो व त्या बाजूच्या निम्म्या लांबीचा असतो.

पक्ष : Δ ABC मध्ये बिंदू P हा रेख AB चा मध्यबिंदू व बिंदू Q हा रेख AC चा मध्यबिंदू आहे.



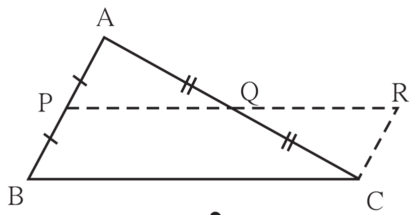
आकृती 5.33

साध्य : रेख PQ || रेख BC

आणि $PQ = \frac{1}{2}$ BC

रचना : रेख PQ हा R पर्यंत असा वाढवा की PQ = QR

रेख RC काढा.



आकृती 5.34

सिद्धता : Δ AQP व Δ CQR मध्ये

रेख PQ ≅ रेख QR ...... रचना

रेख AQ ≅ रेख QC ...... Q हा AC चा मध्यबिंदू.

$\angle AQP \cong \angle CQR$ ..... परस्पर विरुद्ध कोन.

∴ Δ AQP ≅ Δ CQR .... बाकोबा कसोटी

$\angle PAQ \cong \angle RCQ$ ..... (1) एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन.

∴ रेख AP ≅ रेख CR ......(2) एकरूप त्रिकोणांच्या संगत भुजा

विधान (1) वरून रेषा AB || रेषा CR.........व्युत्क्रम कोन कसोटी.

विधान (2) वरून रेख AP ≅ रेख CR

परंतु रेख AP ≅ रेख PB ≅ रेख CR आणि रेख PB || रेख CR

∴ □PBCR हा समांतरभुज चौकोन आहे.

∴ रेख PQ || रेख BC आणि PR = BC ..... कारण संमुख बाजू समान लांबीच्या असतात.

$PQ = \frac{1}{2}$ PR ...... रचना

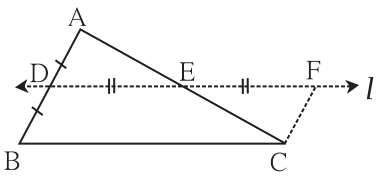
$\therefore$ $PQ = \frac{1}{2}$ BC $\quad\because$ PR = BC

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूंच्या प्रमेयाचा व्यत्यास

प्रमेय : त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यबिंदूतून जाणारी व दुसऱ्या बाजूला समांतर असणारी रेषा तिसऱ्या बाजूला दुभागते.

या विधानासाठी आकृती, पक्ष, साध्य, रचना दिलेली आहे. त्यावरून त्या विधानाची सिद्धता लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

पक्ष : Δ ABC च्या बाजू AB चा मध्यबिंदू D आहे.बिंदू D मधून जाणारी बाजू BC ला समांतर असणारी रेषा l ही बाजू AC ला बिंदू E मध्ये छेदते.



आकृती 5.35

साध्य : AE = EC

रचना : रेषा l वर बिंदू F असा घ्या की D-E-F आणि DE = EF. रेख CF काढला.

सिद्धता : रेषा l || रेख BC (पक्ष) आणि केलेली रचना यांचा उपयोग करून □BCFD हा समांतरभुज चौकोन आहे, हे दाखवा.

Δ ADE $\cong$ Δ CFE हे सिद्ध करा आणि त्यावरून साध्य सिद्ध करा.

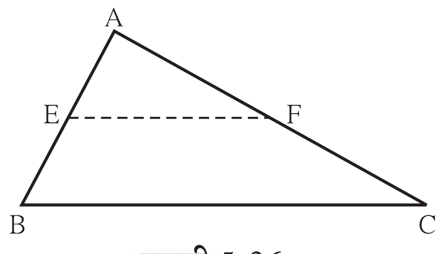
सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) Δ ABC च्या बाजू AB व AC चे अनुक्रमे बिंदू E व F हे मध्यबिंदू आहेत. जर EF = 5.6 तर BC ची लांबी काढा.

उकल : Δ ABC मध्ये बिंदू E व बिंदू F हे अनुक्रमे बाजू AB व बाजू AC चे मध्यबिंदू आहेत.

$EF = \frac{1}{2}$ BC ....मध्यबिंदूचे प्रमेय.

$5.6 = \frac{1}{2}$ BC $\quad\therefore$ BC = 5.6 × 2 = 11.2



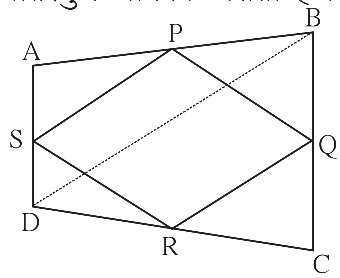
आकृती 5.36

उदा (2) कोणत्याही चौकोनाचे मध्यबिंदू जोडून होणारा चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो हे सिद्ध करा.

पक्ष : □ABCD च्या बाजू AB, BC, CD व AD चे मध्यबिंदू अनुक्रमे P, Q, R, S आहेत.

साध्य : □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

रचना : कर्ण BD काढा.



आकृती 5.37

सिद्धता : Δ ABD मध्ये S हा AD चा मध्यबिंदू व P हा AB चा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore$ मध्यबिंदूच्या प्रमेयानुसार, PS $\parallel$ DB आणि PS = $\frac{1}{2}$ BD .... (1)

तसेच Δ DBC मध्ये Q व R हे अनुक्रमे BC व DC या बाजूंचे मध्यबिंदू आहेत.

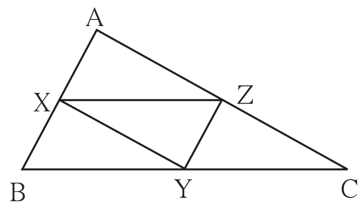
$\therefore$ QR $\parallel$ BD, QR = $\frac{1}{2}$ BD .... (2) मध्यबिंदूच्या प्रमेयानुसार

$\therefore$ PS $\parallel$ QR, PS = QR .... (1) व (2) वरून

$\therefore$ □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

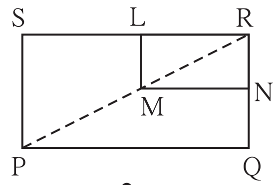
सरावसंच 5.5

1. आकृती 5.38 मध्ये Δ ABC च्या बाजू AB, बाजू BC व बाजू AC चे अनुक्रमे बिंदू X, Y, Z हे मध्यबिंदू आहेत. AB = 5 सेमी, AC = 9 सेमी व BC = 11 सेमी, तर XY, YZ, XZ ची लांबी काढा.



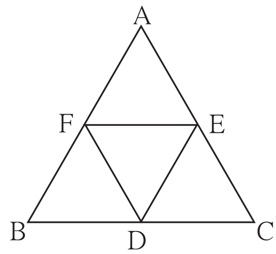
आकृती 5.38

2. आकृती 5.39 मध्ये □PQRS आणि □MNRL हे आयत आहेत. बिंदू M हा PR चा मध्यबिंदू आहे. तर सिद्ध करा (i) SL = LR, (ii) LN = $\frac{1}{2}$SQ.



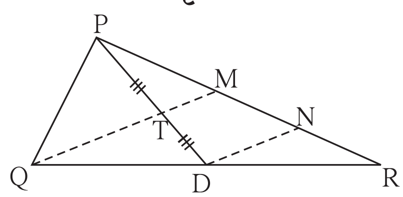
आकृती 5.39

3. आकृती 5.40 मध्ये Δ ABC या समभुज त्रिकोणात बिंदू F, D, E हे अनुक्रमे बाजू AB, बाजू BC, बाजू AC चे मध्यबिंदू आहेत तर Δ FED हा समभुज त्रिकोण आहे हे सिद्ध करा.



आकृती 5.40

4. आकृती 5.41 मध्ये रेख PD ही Δ PQR ची मध्यगा आहे. बिंदू T हा PD चा मध्यबिंदू आहे. QT वाढवल्यावर PR ला M बिंदूत छेदतो, तर दाखवा की $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$.
[सूचना : DN $\parallel$ QM काढा.]



आकृती 5.41

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(i) ज्या चौकोनाच्या लगतच्या बाजूंच्या सर्व जोड्या एकरूप असतात त्या चौकोनाचे नाव कोणते ?

(A) आयत (B) समांतरभुज चौकोन (C) समलंब चौकोन (D) समभुज चौकोन

(ii) एका चौरसाच्या कर्णाची लांबी $12\sqrt{2}$ सेमी आहे. तर त्याची परिमिती किती ?

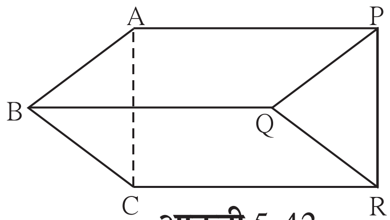
(A) 24 सेमी (B) $24\sqrt{2}$ सेमी (C) 48 सेमी (D) $48\sqrt{2}$ सेमी

(iii) एका समभुज चौकोनाच्या संमुख कोनांची मापे $(2x)^\circ$ व $(3x - 40)^\circ$ असतील तर x = ?

(A) 100 ° (B) 80 ° (C) 160 ° (D) 40 °

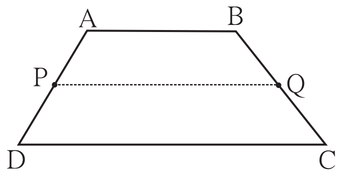
2. एका काटकोन चौकोनाच्या लगतच्या बाजू अनुक्रमे 7 सेमी व 24 सेमी आहेत तर त्या चौकोनाच्या कर्णाची लांबी काढा.
3. चौरसाच्या कर्णाची लांबी 13 सेमी आहे तर चौरसाची बाजू काढा.
4. समांतरभुज चौकोनाच्या दोन लगतच्या बाजूंचे गुणोत्तर 3:4 आहे जर त्याची परिमिती 112 सेमी असेल तर त्याच्या प्रत्येक बाजूची लांबी काढा.
5. समभुज चौकोनाचे कर्ण PR व कर्ण QS यांची लांबी अनुक्रमे 20 सेमी व 48 सेमी आहे, तर समभुज चौकोन PQRS च्या बाजू PQ ची लांबी काढा.
6. आयत PQRS चे कर्ण परस्परांना M बिंदूत छेदतात. जर $\angle QMR = 50^\circ$ तर $\angle MPS$ चे माप काढा.

7. शेजारील आकृती 5.42 मध्ये
रेख AB $\parallel$ रेख PQ , रेख AB $\cong$ रेख PQ,
रेख AC $\parallel$ रेख PR, रेख AC $\cong$ रेख PR
तर सिद्ध करा की,
रेख BC $\parallel$ रेख QR व रेख BC $\cong$ रेखQR.



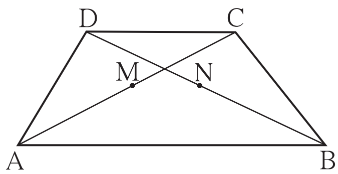
आकृती 5.42

8*. शेजारील आकृती 5.43 मध्ये $\square ABCD$ हा समलंब चौकोन आहे. AB $\parallel$ DC आहे. P व Q हे अनुक्रमे रेख AD व रेख BC चे मध्यबिंदू आहेत, तर सिद्ध करा की, PQ $\parallel$ AB व $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$



आकृती 5.43

9. शेजारील आकृती 5.44 मध्ये $\square ABCD$ हा समलंब चौकोन आहे. AB $\parallel$ DC. M आणि N हे अनुक्रमे कर्ण AC व कर्ण DB चे मध्यबिंदू आहेत. तर सिद्ध करा की, MN $\parallel$ AB



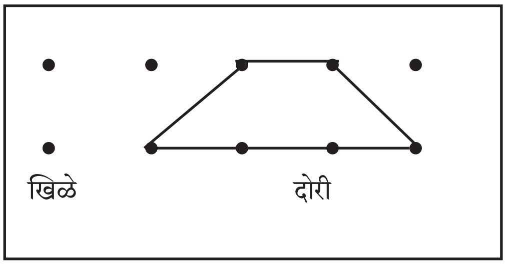
आकृती 5.44

कृती

चौकोनाच्या विविध गुणधर्मांचा पडताळा घेणे.

साहित्य : 15 सेमी × 10 सेमी चा प्लायवुडचा तुकडा; 12 ते 15 खिळे, जाडा दोरा, कात्री.

सूचना : 15 सेमी × 10 सेमी चा प्लायवुडच्या तुकड्यावर सरळरेषेत 2 सेमी अंतरावर 5 खिळे ठोका. तसेच खालच्या सरळ रेषेत सुद्‌धा खिळे ठोका. दोन रेषांमधील अंतरसुद्‌धा 2 सेमी ठेवा. दोऱ्याने वेगवेगळे चौकोन (खिळ्याचे आधाराने) तयार करा. बाजूसंबंधी गुणधर्म दोऱ्याने पडताळा. यावरून चौकोनांच्या कोनांसंबंधी गुणधर्म पडताळा.



आकृती 5.45

अधिक माहितीसाठी

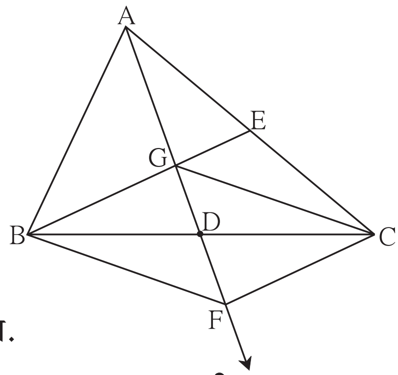
त्रिकोणांचा मध्यगा संपातबिंदू प्रत्येक मध्यगेला 2 : 1 या प्रमाणात विभागतो, हा गुणधर्म तुम्हाला माहीत आहे.

त्याची खाली दिलेली सिद्‌धता अभ्यासा.

पक्ष : Δ ABC च्या रेख AD आणि रेख BE या मध्यगा, बिंदू G मध्ये छेदतात.

साध्य : AG : GD = 2 : 1

रचना : किरण AD वर बिंदू F असा घेतला की G–D–F आणि GD = DF



आकृती 5.46

सिद्‌धता : □BGCF चे कर्ण परस्परांना दुभागतात. .... पक्ष व रचना.

$\therefore$ □BGCF समांतरभुज आहे.

$\therefore$ रेषा BE || रेषा FC .... समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंना सामावणाऱ्या रेषा.

आता Δ AFC च्या बाजू AC चा E हा मध्यबिंदू आहे. .... (पक्ष)

रेख EB || रेषा FC

त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यबिंदूतून दुसऱ्या बाजूला समांतर असलेली रेषा तिसऱ्या बाजूला दुभागते.

$\therefore$ रेख AF चा G हा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore$ AG = GF

परंतु AG = 2 GD

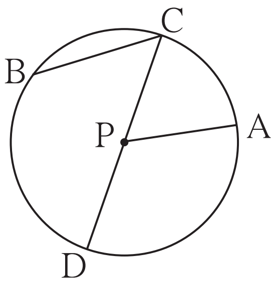
$\therefore \dfrac{AG}{GD} = \dfrac{2}{1}$ म्हणजेच AG = GD = 2 : 1

6 वर्तुळ

चला, शिकूया.

- वर्तुळ
- वर्तुळाच्या जीवेचे गुणधर्म
- अंतर्वर्तुळ
- परिवर्तुळ

जरा आठवूया.



आकृती 6.1

शेजारच्या आकृतीतील P केंद्र असलेल्या वर्तुळाचे निरीक्षण करा. या आकृतीवरून खालील सारणी पूर्ण करा.

---	रेख PA	---	---	---	---	$\angle CPA$
जीवा	---	व्यास	त्रिज्या	केंद्र	केंद्रीय कोन	---

जाणून घेऊया.

वर्तुळ (Circle)

बिंदूंच्या संचाच्या रूपात या वर्तुळाचे वर्णन करू.

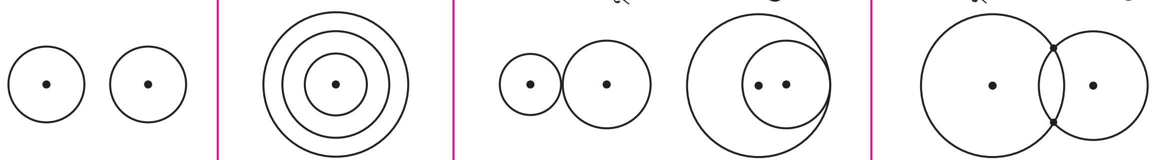
- प्रतलातील एका स्थिर बिंदूपासून समान अंतरावर असणाऱ्या सर्व बिंदूंच्या संचाला **वर्तुळ** (Circle) म्हणतात. त्या स्थिर बिंदूला वर्तुळाचा **केंद्रबिंदू** किंवा **वर्तुळकेंद्र** (Centre of a circle) म्हणतात.

वर्तुळासंबंधी काही संज्ञा

- वर्तुळकेंद्र आणि वर्तुळावरील कोणताही बिंदू जोडणाऱ्या रेषाखंडाला वर्तुळाची **त्रिज्या** (radius) म्हणतात.
- वर्तुळकेंद्र आणि वर्तुळाचा कोणताही बिंदू यांमधील अंतरालाही वर्तुळाची **त्रिज्या** म्हणतात.
- वर्तुळावरील कोणतेही दोन बिंदू जोडणाऱ्या रेषाखंडाला वर्तुळाची **जीवा** (Chord) म्हणतात.
- वर्तुळाच्या केंद्रातून जाणाऱ्या जीवेला त्या वर्तुळाचा **व्यास** (Diameter) म्हणतात. व्यास ही वर्तुळाची सर्वात मोठी जीवा असते.

प्रतलातील वर्तुळे

एकरूप वर्तुळे | एककेंद्री वर्तुळे | एकाच बिंदूत छेदणारी वर्तुळे | दोन बिंदूत छेदणारी वर्तुळे

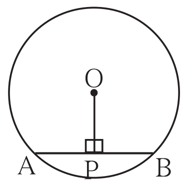


- त्रिज्या समान
- केंद्र एक व त्रिज्या भिन्न
- केंद्र भिन्न, त्रिज्या भिन्न व सामाईक बिंदू एकच
- केंद्र भिन्न, त्रिज्या भिन्न व सामाईक बिंदू दोन

आकृती 6.2

वर्तुळाच्या जीवेचे गुणधर्म (Properties of chord)

कृती I : गटातील प्रत्येक विद्यार्थ्याने खालील कृती करावी.
आपापल्या वहीत एक वर्तुळ काढा. त्यात एक जीवा काढा.
वर्तुळ केंद्रातून जीवेवर लंब टाका. जीवेचे जे दोन भाग झाले आहेत. त्यांची लांबी मोजा.
गटप्रमुखाने खालीलप्रमाणे एक सारणी तयार करावी.
त्या सारणीत सर्वांची निरीक्षणे नोंदवावी.



आकृती 6.3

विद्यार्थी / लांबी	1	2	3	4	5	6
l (AP)	...... सेमी					
l (PB)	...... सेमी					

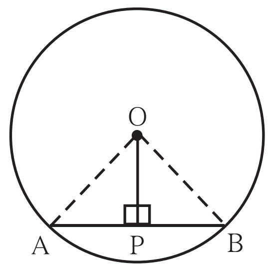
या निरीक्षणांवरून लक्षात येणारा गुणधर्म लिहा. या गुणधर्माची सिद्धता पाहू.

प्रमेय : वर्तुळाच्या केंद्रातून जीवेवर काढलेला लंब जीवेला दुभागतो.

पक्ष : O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची रेख AB ही जीवा आहे.
रेख OP $\perp$ जीवा AB

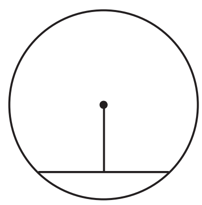
साध्य : रेख AP $\cong$ रेख BP

सिद्धता : रेख OA व रेख OB काढा.
Δ OPA व Δ OPB मध्ये
$\angle$OPA $\cong$ $\angle$OPB . . . . रेख OP $\perp$ जीवा AB,
रेख OP $\cong$ रेख OP . . . . सामाईक भुजा
कर्ण OA $\cong$ कर्ण OB . . . . एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या
$\therefore$ Δ OPA $\cong$ Δ OPB . . . . कर्ण भुजा प्रमेय
रेख PA $\cong$ रेख PB . . . . एकरूप त्रिकोणाच्या संगत भुजा



आकृती 6.4

कृती II : गटातील प्रत्येक विद्यार्थ्याने खालील कृती करावी.
आपापल्या वहीत एक वर्तुळ काढा. त्यात एक जीवा काढा.
जीवेचा मध्य शोधा. तो मध्यबिंदू व वर्तुळकेंद्र जोडणारा रेषाखंड काढा.
या रेषाखंडाने जीवेशी केलेले कोन मोजा.
काय आढळते ?
तुम्ही मोजलेल्या कोनांची मापे एकमेकांना सांगा.
यावरून कोणता गुणधर्म लक्षात येतो, ते ठरवा.

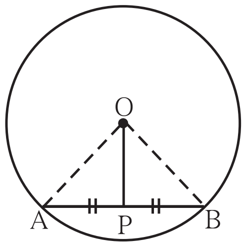

आकृती 6.5

प्रमेय : वर्तुळाचा केंद्र व जीवेचा मध्य यांना जोडणारा रेषाखंड जीवेस लंब असतो.

पक्ष : O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची रेख AB ही जीवा आहे.
जीवा AB चा P हा मध्यबिंदू आहे, म्हणजेच रेख AP $\cong$ रेख PB

साध्य : रेख OP $\perp$ जीवा AB

सिद्धता : रेख OA व रेख OB काढा.



आकृती 6.6

Δ AOP व Δ BOP मध्ये

रेख OA $\cong$ रेख OB . . . . (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

रेख OP $\cong$ रेख OP. . . . . (सामाईक भुजा)

रेख AP $\cong$ रेख BP . . . . (पक्ष)

$\therefore$ Δ AOP $\cong$ Δ BOP . . . . (बाबाबा कसोटी)

$\therefore$ $\angle$OPA $\cong$ $\angle$OPB . . . . (एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन) . . . .(I)

आता $\angle OPA + \angle OPB = 180^\circ$ . . . (रेषीय जोडीतील कोन)

$\angle OPB + \angle OPB = 180^\circ$ . . . . . . (I) (वरून)

$2 \angle OPB = 180^\circ$

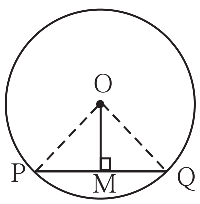
$\angle OPB = 90^\circ$

$\therefore$ रेख OP $\perp$ जीवा AB

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) एका वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी आहे. त्या वर्तुळाच्या एका जीवेची लांबी 8 सेमी आहे तर त्या जीवेचे वर्तुळ केंद्रापासूनचे अंतर काढा.

उकल :



आकृती 6.7

प्रथम दिलेली माहिती दर्शवणारी आकृती काढू.
समजा, O केंद्र असलेल्या वर्तुळात जीवा PQ ची लांबी 8 सेमी आहे.
रेख OM $\perp$ जीवा PQ काढला.

आपल्याला माहीत आहे की वर्तुळकेंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो.

$\therefore$ PM = MQ = 4 सेमी

वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी म्हणजे OQ = 5 सेमी हे दिले आहे.

काटकोन Δ OMQ मध्ये पायथागोरसच्या प्रमेयावरून

$OM^2 + MQ^2 = OQ^2$

$OM^2 + 4^2 = 5^2$

$\therefore \ OM^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$\therefore \ OM = 3$

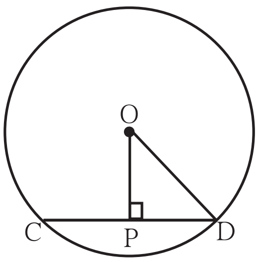
म्हणजे वर्तुळकेंद्रापासून जीवेचे अंतर 3 सेमी आहे.

उदा (2) एका वर्तुळाची त्रिज्या 20 सेमी आहे. ह्या वर्तुळाची एक जीवा वर्तुळाच्या केंद्रापासून 12 सेमी अंतरावर आहे, तर त्या जीवेची लांबी ठरवा.

उकल : समजा वर्तुळाचे केंद्र O आहे. त्रिज्या = OD = 20 सेमी जीवा CD केंद्र O पासून 12 सेमी अंतरावर आहे. रेख OP $\perp$ रेख CD

$\therefore$ OP = 12 सेमी

$\therefore$ CP = PD ...... वर्तुळकेंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो.



आकृती 6.8

काटकोन Δ OPD मध्ये पायथागोरसच्या प्रमेयावरून

$OP^2 + PD^2 = OD^2$

$(12)^2 + PD^2 = 20^2$

$PD^2 = 20^2 - 12^2$

$PD^2 = (20+12)(20-12)$

$= 32 \times 8 = 256$

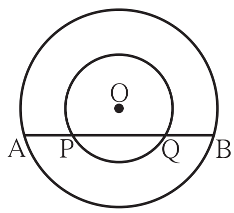
$\therefore PD = 16$ $\qquad\qquad$ $\therefore CP = 16$

CD = CP + PD = 16 + 16 = 32

$\therefore$ जीवेची लांबी 32 सेमी आहे.

सरावसंच 6.1

1. वर्तुळकेंद्र O पासून जीवा AB चे अंतर 8 सेमी आहे. जीवा AB ची लांबी 12 सेमी आहे, तर वर्तुळाचा व्यास काढा.
2. एका वर्तुळाचा व्यास 26 सेमी असून जीवेची लांबी 24 सेमी आहे, तर त्या जीवेचे केंद्रापासूनचे अंतर काढा.
3. वर्तुळाच्या केंद्रापासून जीवेचे अंतर 30 सेमी असून वर्तुळाची त्रिज्या 34 सेमी आहे, तर जीवेची लांबी काढा.
4. O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 41 सेमी आहे. वर्तुळाची जीवा PQ ची लांबी 80 सेमी आहे, तर जीवा PQ चे केंद्रापासूनचे अंतर काढा.
5. आकृती 6.9 मध्ये केंद्र O असलेली दोन वर्तुळे आहेत. मोठ्या वर्तुळाची AB ही जीवा लहान वर्तुळाला बिंदू P व Q मध्ये छेदते. तर सिद्ध करा : AP = BQ
6. सिद्ध करा की, वर्तुळाचा व्यास जर वर्तुळाच्या दोन जीवांना दुभागत असेल तर त्या जीवा परस्परांना समांतर असतात.



आकृती 6.9

कृती I

(1) सोईच्या त्रिज्येची वर्तुळे काढा.

(2) प्रत्येक वर्तुळात समान लांबीच्या दोन जीवा काढा.

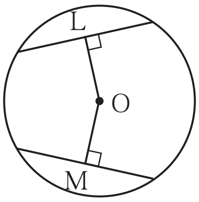
(3) वर्तुळकेंद्रातून प्रत्येक जीवेवर लंब काढा.

(4) वर्तुळकेंद्रापासून प्रत्येक जीवेचे अंतर मोजा.

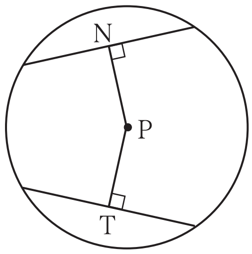
जाणून घेऊया.

वर्तुळाच्या एकरूप जीवा व त्यांचे केंद्रापासूनचे अंतर यांसंबंधीचे गुणधर्म

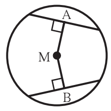
कृती II



आकृती (i)



आकृती (ii)



आकृती (iii)

आकृती (i)मध्ये OL = OM, आकृती (ii) मध्ये PN = PT, आकृती (iii) मध्ये MA = MB असे आढळले का ? या कृतीतून लक्षात येणारा गुणधर्म शब्दांत लिहा.

जाणून घेऊया.

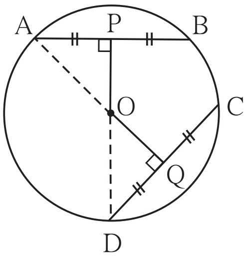
एकरूप जीवांचे गुणधर्म (Properties of congruent chords)

प्रमेय : एकाच वर्तुळातील एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समान अंतरावर असतात.

पक्ष : O केंद्र असलेल्या वर्तुळात
जीवा AB $\cong$ जीवा CD
OP $\perp$ AB, OQ $\perp$ CD

साध्य : OP = OQ

रचना : रेख OA व रेख OD जोडा.



आकृती 6.10

सिद्धता : AP = $\frac{1}{2}$ AB, DQ = $\frac{1}{2}$ CD . . . वर्तुळकेंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो.

AB = CD . . . . पक्ष

$\therefore$ AP = DQ

$\therefore$ रेख AP $\cong$ रेख DQ . . . . (I) . . . समान लांबीचे रेषाखंड

काटकोन Δ APO आणि काटकोन Δ DQO मध्ये

रेख AP $\cong$ रेख DQ . . . . (I) वरून

कर्ण OA $\cong$ कर्ण OD . . . . एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या

$\therefore$ Δ APO $\cong$ Δ DQO . . . . कर्णभुजा प्रमेय

रेख OP $\cong$ रेख OQ . . . . एकरूप त्रिकोणाच्या संगतभुजा

$\therefore$ OP = OQ . . . . एकरूप रेषाखंडांची लांबी समान

वर्तुळातील एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समान अंतरावर असतात.

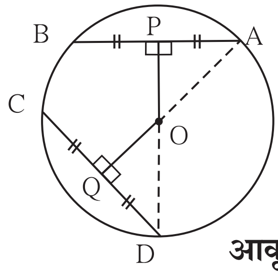
प्रमेय : एकाच वर्तुळातील केंद्रापासून समान अंतरावर असणाऱ्या जीवा एकरूप असतात.

पक्ष : O केंद्र असलेल्या वर्तुळात

रेख OP $\perp$ जीवा AB

रेख OQ $\perp$ जीवा CD

आणि OP = OQ



आकृती 6.11

साध्य : जीवा AB $\cong$ जीवा CD

रचना : रेख OA व रेख OD काढा.

सिद्धता : खालील विधानांसाठी गाळलेल्या जागा भरा.

काटकोन Δ OPA व काटकोन Δ OQD मध्ये

कर्ण OA $\cong$ कर्ण OD . . . . $\boxed{}$

रेख OP $\cong$ रेख OQ . . . . पक्ष

$\therefore$ Δ OPA $\cong$ Δ OQD . . . . $\boxed{}$

$\therefore$ रेख AP $\cong$ रेख QD . . . . एकरूप त्रिकोणाच्या संगत भुजा

$\therefore$ AP = QD . . . . (I)

परंतु AP = $\frac{1}{2}$ AB,   OQ = $\frac{1}{2}$ CD . . . . . $\boxed{}$

$\therefore$ AP = QD . . . . विधान (I) वरून

$\therefore$ AB = CD

$\therefore$ रेख AB $\cong$ रेख CD

वरील दोन्ही प्रमेये एकमेकांचे व्यत्यास आहेत हे जाणून घ्या.

हे लक्षात ठेवूया.

एका वर्तुळातील एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समान अंतरावर असतात.

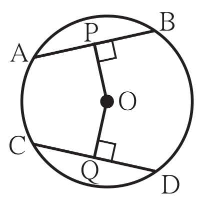
कृती : वरील दोन्ही प्रमेये एकाच वर्तुळाऐवजी एकरूप वर्तुळे घेऊन सिद्ध करता येतात.

1. एकरूप वर्तुळांतील एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्रांपासून समान अंतरावर असतात.
2. एकरूप वर्तुळांत वर्तुळकेंद्रांपासून समान अंतरावर असणाऱ्या जीवा एकरूप असतात.

   या दोन्ही प्रमेयांसाठी पक्ष, साध्य, सिद्धता लिहा.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. दिलेल्या आकृती 6.12 मध्ये बिंदू O हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू असून AB = CD आहे. जर OP = 4 सेमी तर OQ ची लांबी काढा.



आकृती 6.12

उकल : O केंद्र असलेल्या वर्तुळात

जीवा AB $\cong$ जीवा CD दिले आहे.

$OP \perp AB$, $OQ \perp CD$

$OP = 4$ सेमी आहे. म्हणजे जीवा AB चे O या वर्तुळ केंद्रापासूनचे अंतर 4 सेमी आहे.

आपल्याला माहीत आहे की एकाच वर्तुळातील एकरूप जीवा केंद्रापासून समान अंतरावर असतात.

$\therefore$ $OQ = 4$ सेमी

सरावसंच 6.2

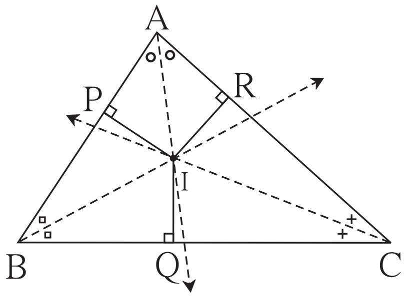
1. एका वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी आहे. त्या वर्तुळात प्रत्येकी 16 सेमी लांबीच्या दोन जीवा आहेत, तर त्या जीवा वर्तुळकेंद्रापासून किती अंतरावर असतील ?
2. एका वर्तुळात दोन समान लांबीच्या जीवा आहेत. केंद्रापासून त्या 5 सेमी अंतरावर असून वर्तुळाची त्रिज्या 13 सेमी आहे तर त्या जीवांची लांबी काढा.
3. केंद्र C असलेल्या वर्तुळाच्या रेख PM आणि रेख PN ह्या एकरूप जीवा आहेत, तर किरण PC हा $\angle NPM$ चा दुभाजक आहे. हे सिद्ध करा.

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण विविध त्रिकोण काढून त्यांचे कोनदुभाजक एकसंपाती असतात या गुणधर्माचा पडताळा घेतला आहे. त्रिकोणाच्या कोनांच्या दुभाजकांचा संपातबिंदू 'I' या अक्षराने दर्शवितात, हे आपल्याला माहीत आहे.

जाणून घेऊया.

त्रिकोणाचे अंतर्वर्तुळ (Incircle of a triangle)



आकृती 6.13

ΔABC च्या तिन्ही कोनांचे दुभाजक I या बिंदूत मिळालेले आहेत.

कोनदुभाजकाच्या I या संपात बिंदूमधून त्रिकोणाच्या तिन्ही भुजांवर लंब काढले आहेत.

$IP \perp AB$, $IQ \perp BC$, $IR \perp AC$

कोन दुभाजकांवरील प्रत्येक बिंदू कोनाच्या दोन्ही भुजांपासून समान अंतरावर असतो हे आपण अभ्यासले आहे.

$\angle B$ च्या दुभाजकावर I हा बिंदू आहे म्हणून $IP = IQ$.

$\angle C$ च्या दुभाजकावर I हा बिंदू आहे म्हणून $IQ = IR$

$IP = IQ = IR$

बिंदू I हा त्रिकोणाच्या तिन्ही भुजांपासून म्हणजेच AB, AC, BC पासून समदूर आहे.

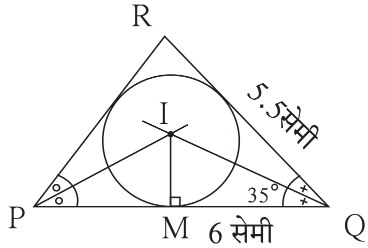
$\therefore$ बिंदू I हा केंद्र मानून व IP ही त्रिज्या घेऊन काढलेले वर्तुळ बाजू AB, AC व BC यांना आतून स्पर्श करेल. अशा वर्तुळाला त्रिकोणाचे अंतर्वर्तुळ म्हणतात.

जाणून घेऊया.

त्रिकोणाचे अंतर्वर्तुळ काढणे (To construct incircle of a triangle)

उदा. Δ PQR असा काढा की, PQ = 6 सेमी, $\angle Q = 35°$, QR = 5.5 सेमी Δ PQR चे अंतर्वर्तुळ काढा.

प्रथम कच्ची आकृती काढा व दिलेली माहिती त्यात दाखवा.



कच्चीआकृती 6.14

रचनेच्या पायऱ्या :

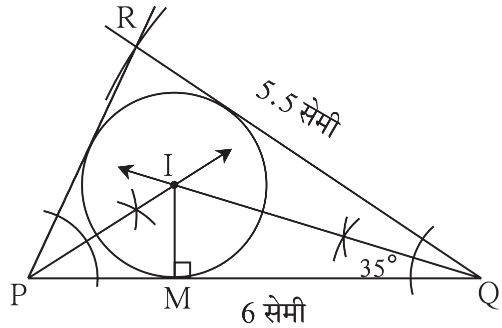
(1) Δ PQR हा दिलेल्या मापाचा त्रिकोण काढा.

(2) कोणत्याही दोन कोनांचे दुभाजक काढा.

(3) कोनदुभाजकांच्या छेदन बिंदूला I नाव द्या.

(4) बिंदू I मधून बाजू PQ वर IM हा लंब काढा.

(5) IM ही त्रिज्या व I हे केंद्र घेऊन वर्तुळ काढा.



आकृती 6.15

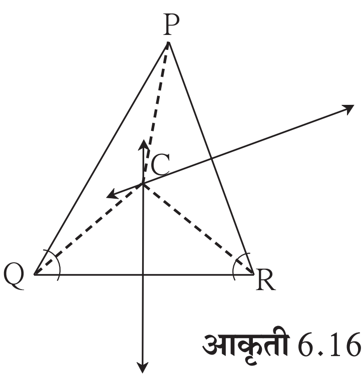
हे लक्षात ठेवूया.

त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळाला त्रिकोणाचे अंतर्वर्तुळ म्हणतात आणि त्या वर्तुळाच्या केंद्राला अंतर्वर्तुळकेंद्र किंवा अंतर्मध्य किंवा अंतर्केंद्र असे म्हणतात.

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक एकसंपाती असतात या गुणधर्माचा पडताळा विविध त्रिकोण काढून घेतला आहे. त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लंबदुभाजकांचा संपातबिंदू C या अक्षराने दाखवतात.

जाणून घेऊया.



आकृती 6.16

Δ PQR च्या बाजूंचे लंबदुभाजक C या बिंदूत मिळाले आहेत. म्हणून C हा लंबदुभाजकांचा संपातबिंदू आहे.

त्रिकोणाचे परिवर्तुळ (Circumcircle)

बिंदू C हा त्रिकोण PQR च्या तिन्ही बाजूंच्या लंबदुभाजकावरचा बिंदू आहे. PC, QC, RC जोडा. रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समान अंतरावर असतो. हे आपण अभ्यासले आहे.

बिंदू C हा रेख PQ च्या लंबदुभाजकावर आहे. $\therefore$ PC = QC I

बिंदू C हा रेख QR च्या लंबदुभाजकावर आहे. $\therefore$ QC = RC II

$\therefore$ PC = QC = RC . . . . . विधान I व II वरून

$\therefore$ C बिंदू केंद्र घेऊन व PC ही त्रिज्या घेऊन काढलेले वर्तुळ या त्रिकोणाच्या तीनही शिरोबिंदूतून जाईल. अशा वर्तुळाला त्रिकोणाचे परिवर्तुळ म्हणतात.

हे लक्षात ठेवूया.

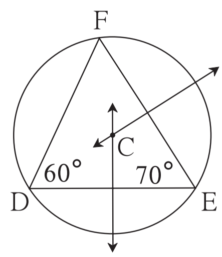
त्रिकोणाच्या सर्व शिरोबिंदूतून जाणाऱ्या वर्तुळाला त्रिकोणाचे परिवर्तुळ म्हणतात.
आणि त्या वर्तुळाच्या केंद्राला परिकेंद्र असे म्हणतात.

जाणून घेऊया.

त्रिकाणाचे परिवर्तुळ काढणे

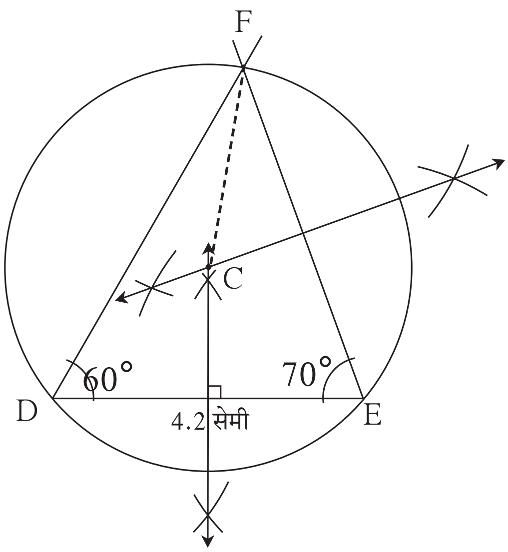
उदा. Δ DEF मध्ये DE = 4.2 सेमी, $\angle$D = 60°, $\angle$E = 70° तर Δ DEF काढा व त्याचे परिवर्तुळ काढा.

प्रथम कच्ची आकृती काढा. त्यात दिलेली माहिती लिहा.



कच्चीआकृती

आकृती 6.17



आकृती 6.18

रचनेच्या पायऱ्या :

(1) दिलेल्या मापाचा त्रिकोण DEF काढा.

(2) कोणत्याही दोन भुजांचे लंबदुभाजक काढा.

(3) ते लंबदुभाजक जेथे मिळतील त्या बिंदूला C नाव द्या.

(4) रेख CF काढा.

(5) CF ही त्रिज्या व C हे केंद्र घेऊन वर्तुळ काढा.

कृती

विविध मापांचे व विविध प्रकारचे त्रिकोण काढा. त्यांची अंतर्वर्तुळे व परिवर्तुळे काढा. आपले निरीक्षण खालील सारणीत नोंदवा व चर्चा करा.

त्रिकोणाचा प्रकार	समभुज त्रिकोण	समद्विभुज त्रिकोण	विषमभुज त्रिकोण
अंतर्वर्तुळाच्या केंद्राचे स्थान	त्रिकोणाच्या आत	त्रिकोणाच्या आत	त्रिकोणाच्या आत
परिवर्तुळाच्या केंद्राचे स्थान	त्रिकोणाच्या आत	त्रिकोणाच्या आत किंवा बाहेर किंवा त्रिकोणावर	

त्रिकोणाचा प्रकार	लघुकोन त्रिकोण	काटकोन त्रिकोण	विशालकोन त्रिकोण
अंतर्वर्तुळाच्या केंद्राचे स्थान			
परिवर्तुळाच्या केंद्राचे स्थान		कर्णाच्या मध्यावर	

हे लक्षात ठेवूया.

- त्रिकोणाचे अंतर्वर्तुळ त्रिकोणाच्या सर्व बाजूंना आतून स्पर्श करते.
- त्रिकोणाचे अंतर्वर्तुळ काढण्यासाठी त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन कोनांचे दुभाजक काढावे लागतात.
- त्रिकोणाचे परिवर्तुळ त्रिकोणाच्या तिन्ही शिरोबिंदूतून जाते.
- त्रिकोणाचे परिवर्तुळ काढण्यासाठी त्याच्या कोणत्याही दोन बाजूंचे लंबदुभाजक काढावे लागतात.
- लघुकोन त्रिकोणाचे परिकेंद्र त्रिकोणाच्या आत असते.
- काटकोन त्रिकाणाचे परिकेंद्र कर्णाचा मध्यबिंदू असतो.
- विशालकोन त्रिकोणाचे परिकेंद्र त्रिकोणाच्या बाहेर असते.
- कोणत्याही त्रिकोणाचा अंतर्मध्य त्रिकोणाच्या अंतर्भागात असतो.

कृती : कोणताही एक समभुज त्रिकोण काढून त्याचे परिवर्तुळ व अंतर्वर्तुळ काढा.

वरील कृती करत असताना तुम्हांला खालील बाबतींत काय आढळले?

(1) त्रिकोणाचे परिवर्तुळ व अंतर्वर्तुळ काढताना त्याचे कोनदुभाजक आणि बाजूंचे लंबदुभाजक हे एकच आले का?

(2) परिवर्तुळ व अंतर्वर्तुळ यांचे केंद्र एकच आहे का? तसे असल्यास त्याचे कारण काय असावे?

(3) परिवर्तुळाची त्रिज्या व अंतर्वर्तुळाची त्रिज्या मोजून त्यांचे गुणोत्तर काढा.

हे लक्षात ठेवूया.

- समभुज त्रिकोणाचे परिवर्तुळ व अंतर्वर्तुळ काढताना त्याचे कोनदुभाजक आणि बाजूंचे लंबदुभाजक हे एकच येतात.
- समभुज त्रिकोणाचे परिवर्तुळ व अंतर्वर्तुळ यांचे केंद्र एकच येते.
- समभुज त्रिकोणाच्या परिवर्तुळाच्या त्रिज्येचे अंतर्वर्तुळाच्या त्रिज्येशी गुणोत्तर 2 : 1 असते.

सरावसंच 6.3

1. Δ ABC असा काढा की, $\angle B = 100°$, BC = 6.4 सेमी $\angle C = 50°$. या त्रिकोणाचे अंतर्वर्तुळ काढा.
2. Δ PQR असा काढा की, $\angle P = 70°$, $\angle R = 50°$, QR = 7.3 सेमी. या त्रिकोणाचे परिवर्तुळ काढा.
3. Δ XYZ असा काढा की, XY = 6.7 सेमी, YZ = 5.8 सेमी, XZ = 6.9 सेमी. या त्रिकोणाचे अंतर्वर्तुळ काढा.
4. Δ LMN मध्ये, LM = 7.2 सेमी, $\angle M = 105°$, MN = 6.4 सेमी. तर त्रिकोण LMN काढा व त्याचे परिवर्तुळ काढा.
5. Δ DEF काढा. DE = EF = 6 सेमी $\angle F = 45°$. या त्रिकोणाचे परिवर्तुळ काढा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(i) एका वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी असून त्याच्या एका जीवेचे केंद्रापासूनचे अंतर 6 सेमी आहे, तर त्या जीवेची लांबी किती ?

(A) 16 सेमी (B) 8 सेमी (C) 12 सेमी (D) 32 सेमी

(ii) त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांचे दुभाजक एकसंपाती असतात. त्या संपात बिंदूला काय म्हणतात ?

(A) मध्यगासंपात (B) परिकेंद्र (C) अंतर्केंद्र (D)लंबसंपात

(iii) त्रिकोणाच्या सर्व शिरोबिंदूंतून जाणाऱ्या वर्तुळाला काय म्हणतात ?

(A) परिवर्तुळ (B) अंतर्वर्तुळ (C) एकरूप वर्तुळ (D) एककेंद्री वर्तुळ

(iv) एका वर्तुळाची जीवा 24 सेमी लांबीची असून तिचे केंद्रापासून अंतर 5 सेमी असेल तर त्या वर्तुळाची त्रिज्या किती असेल ?

(A) 12 सेमी (B) 13 सेमी (C) 14 सेमी (D) 15 सेमी

(v) 2.9 सेमी त्रिज्या असणाऱ्या वर्तुळात जास्तीत जास्त किती लांबीची जीवा असू शकते ?

(A) 3.5 सेमी (B) 7 सेमी (C) 10 सेमी (D) 5.8 सेमी

(vi) एका वर्तुळाची त्रिज्या 4 सेमी आहे. O हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आहे. l(OP) = 4.2 सेमी असल्यास बिंदू 'P' चे स्थान कुठे असेल ?

(A) केंद्रबिंदूवर (B) वर्तुळाच्या अंतर्भागात (C) वर्तुळाच्या बाह्यभागात (D) वर्तुळावर

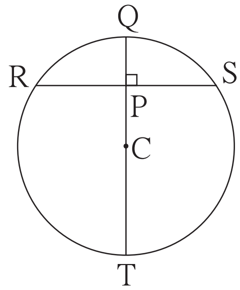
(vii) एका वर्तुळात समांतर असणाऱ्या जीवांची लांबी 6 सेमी व 8 सेमी आहे. त्या वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी असल्यास त्या जीवांमधील अंतर किती?

(A) 2 सेमी (B) 1 सेमी (C) 8 सेमी (D) 7 सेमी

2. समभुज Δ DSP मध्ये DS = 7.5 सेमी तर Δ DSP चे परिवर्तुळ व अंतर्वर्तुळ काढा. परिवर्तुळ व अंतर्वर्तुळ यांच्या त्रिज्या मोजून लिहा. परिवर्तुळाच्या त्रिज्येचे अंतर्वर्तुळाच्या त्रिज्येशी गुणोत्तर काढा.

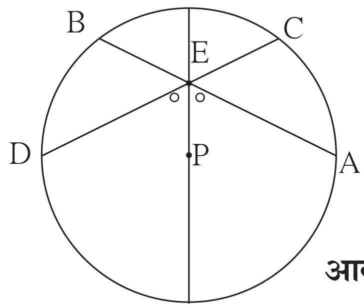
3. Δ NTS मध्ये NT = 5.7 सेमी, TS = 7.5 सेमी आणि $\angle$NTS = 110° आहे तर Δ NTS काढून त्याचे परिवर्तुळ व अंतर्वर्तुळ काढा.

4. आकृती 6.19 मध्ये C हे वर्तुळाचे केंद्र आहे. रेख QT हा व्यास आहे. CT = 13, CP = 5 असेल तर जीवा RS काढा.



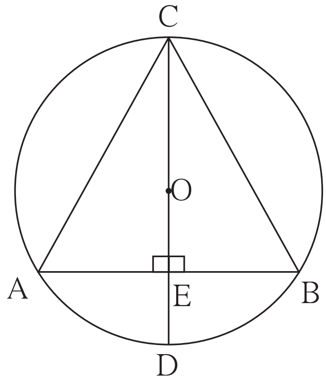
आकृती 6.19

5. आकृती 6.20 मध्ये P हे वर्तुळाचे केंद्र आहे. जीवा AB आणि जीवा CD व्यासावर बिंदू E मध्ये छेदतात.
जर $\angle$AEP $\cong$ $\angle$DEP
तर सिद्ध करा, की AB = CD.



आकृती 6.20

6. आकृती 6.21 मध्ये O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा CD हा व्यास व AB ही जीवा आहे. व्यास CD हा जीवा AB ला E बिंदूपाशी लंब आहे, तर दाखवा की Δ ABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.



आकृती 6.21

ICT Tools or Links

Geogebra software च्या मदतीने विविध वर्तुळे काढून त्यामध्ये जीवा व्यास यांचे गुणधर्म प्रात्यक्षिकाद्वारे अनुभवा. परिवर्तुळ, अंतर्वर्तुळ काढा. Move option चा उपयोग करून मूळ त्रिकोणाचे आकार बदलून अंतर्केंद्र, परिकेंद्र यांचे स्थान कसे बदलते हे प्रात्यक्षिकाद्वारे अनुभवा.

7 निर्देशक भूमिती

चला, शिकूया.

- अक्ष, आरंभबिंदू व चरण
- बिंदूचे प्रतलातील निर्देशक
- बिंदू स्थापन करणे
- X–अक्षाला समांतर रेषा
- Y–अक्षाला समांतर रेषा
- रेषेचे समीकरण

एका इमारतीसमोरील पटांगणात चिंटू व त्याचे मित्र क्रिकेट खेळत होते. एक आजोबा तेथे आले.

आजोबा : अरे चिंटू, दत्ताभाऊ याच सोसायटीत राहतात ना ?

चिंटू : हो, येथेच राहतात. दुसऱ्या मजल्यावर त्यांचे घर आहे. येथून ती खिडकी दिसते ना, तेथे.

आजोबा : अरे, दुसऱ्या मजल्यावर मला पाच खिडक्या दिसत आहेत. नक्की घर कोणते ?

चिंटू : दुसऱ्या मजल्यावर डावीकडून तिसरी खिडकी त्यांची.

चिंटूने केलेले दत्ताभाऊंच्या घराच्या स्थानाचे वर्णन म्हणजेच निर्देशक भूमितीतील मूळ संकल्पना आहे.

घराचे स्थान नेमके समजण्यासाठी नुसता मजल्याचा क्रमांक सांगून पुरेसा नाही तर डावीकडून किंवा उजवीकडून कितवे घर हेही सांगावे लागले. म्हणजे क्रमाने दोन संख्या सांगाव्या लागल्या. जमिनीपासून **दुसरा** मजला व डावीकडून **तिसरी** खिडकी. अशा दोन **क्रमवाचक** संख्या वापराव्या लागल्या.

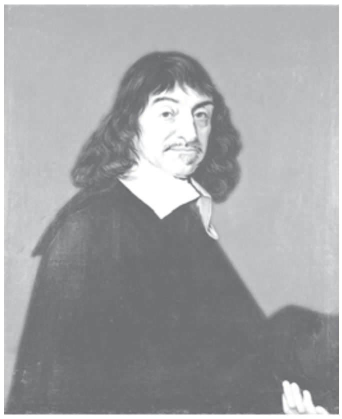
जाणून घेऊया.

अक्ष, आंरभबिंदू व चरण (Axes, origin, quadrants)

दत्ताभाऊंच्या घराचे स्थान दोन क्रमवाचक संख्यांनी नेमकेपणाने सांगता आले. तसेच एकमेकींना लंब असणाऱ्या दोन रेषांपासूनच्या अंतरांनी प्रतलातील एखाद्या बिंदूचे स्थान नेमकेपणाने सांगता येते.

एखाद्या बिंदूचे प्रतलातील स्थान सांगण्यासाठी, त्याच प्रतलात सोयीच्या ठिकाणी एक आडवी संख्यारेषा काढतात. या संख्यारेषेला X– अक्ष म्हणतात.

रेने देकार्त (1596–1650)



सतराव्या शतकातील फ्रेंच गणिती रेने देकार्त यांनी प्रतलातील बिंदूचे स्थान अचूकपणे दर्शवण्यासाठी 'निर्देशक पद्धती' सुचवली. या पद्धतीला 'कार्तेशियन निर्देशक पद्धत' असे म्हणतात. देकार्त यांच्या नावावरून हे नाव दिले आहे. देकार्त यांनी प्रथमच भूमिती आणि बीजगणित यांमधील सहसंबंध प्रस्थापित केल्यामुळे गणितामध्ये क्रांती घडून आली.

कार्तेशियन निर्देशक पद्धती ही विश्लेषक भूमितीचा (Analytical Geometry) पाया आहे. 'ला जॉमेट्रिक' हे रेने देकार्त यांचे पहिले पुस्तक. या पुस्तकात त्यांनी भूमितीच्या अभ्यासासाठी बीजगणिताचा वापर केला होता. प्रतलातील बिंदू वास्तव संख्यांच्या क्रमित जोडीने दर्शवता येतात, हे त्यांनी प्रथम या पुस्तकात मांडले. या क्रमित जोडीला 'कार्तेशियन निर्देशक' म्हणतात.

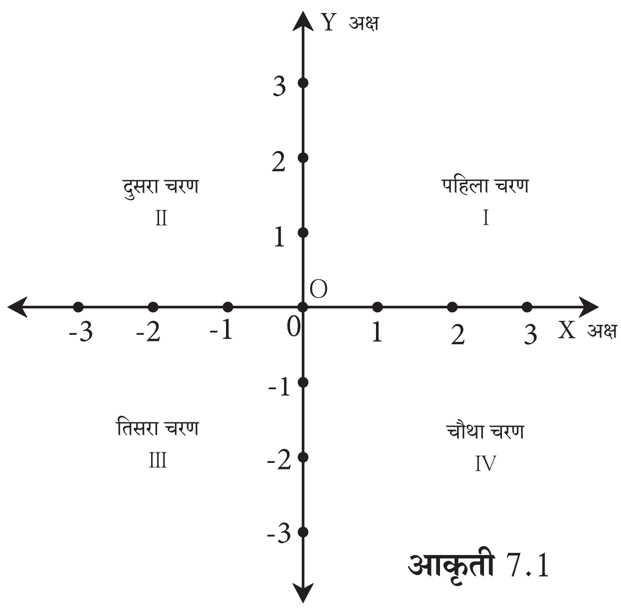
निर्देशक भूमितीचा उपयोग भौतिकशास्त्र, अभियांत्रिकी, नौकानयनशास्त्र, भूकंपशास्त्र आणि कला अशा विविध क्षेत्रांत केला जातो. तंत्रज्ञानाच्या प्रगतीमध्ये निर्देशक भूमिती महत्त्वाची भूमिका बजावते. जिओजेब्रामध्ये भूमिती आणि बीजगणित यांमधील सहसंबंध स्पष्टपणे दिसतो. Geometry आणि Algebra या शब्दांवरूनच Geogebra हे नाव दिले आहे.

X–अक्षावरील 0 हा निर्देशक असलेल्या बिंदूतून X–अक्षाला लंब असणारी दुसरी रेषा म्हणजे Y–अक्ष होय. सामान्यपणे दोन्ही संख्यारेषांवरील 0 ही संख्या एकाच बिंदूने दर्शवली जाते त्या बिंदूला आरंभबिंदू (Origin) म्हणतात. तो 'O' या इंग्रजी अक्षराने दाखवितात.

X–अक्षावर O च्या उजवीकडे धन संख्या तर डावीकडे ऋण संख्या दाखवतात.

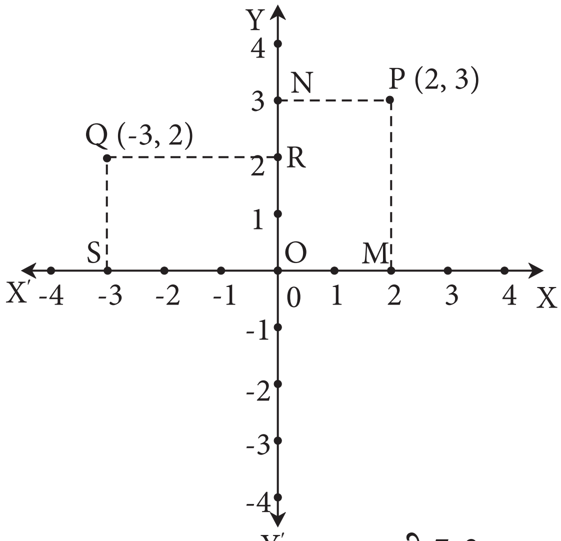
Y–अक्षावर O च्या वरच्या बाजूला धन संख्या व खालच्या बाजूला ऋण संख्या दाखवतात.

X आणि Y अक्षांमुळे प्रतलाचे चार विभाग होतात. त्या प्रत्येक विभागाला **चरण** असे म्हणतात. या चरणांमध्ये अक्षांवरील बिंदू समाविष्ट केले जात नाहीत. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे, घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने चरणांचे क्रमांक मानण्याचा संकेत आहे.



आकृती 7.1

प्रतलातील बिंदूचे सहनिर्देशक (Co-ordinates of a point in a plane)



आकृती 7.2

X-अक्ष आणि Y-अक्ष यांनी निश्चित झालेल्या प्रतलात बिंदू P दाखवला आहे. त्याचे स्थान त्याच्या दोन्ही अक्षांपासूनच्या अंतरांमुळे निश्चित करता येते. त्यासाठी रेख PM $\perp$ X-अक्ष आणि रेख PN $\perp$ Y-अक्ष काढले.

M चा X अक्षावरील निर्देशक 2 आहे. N चा Y अक्षावरील निर्देशक 3 आहे. म्हणून P चा x निर्देशक 2 आणि y निर्देशक 3 आहे.

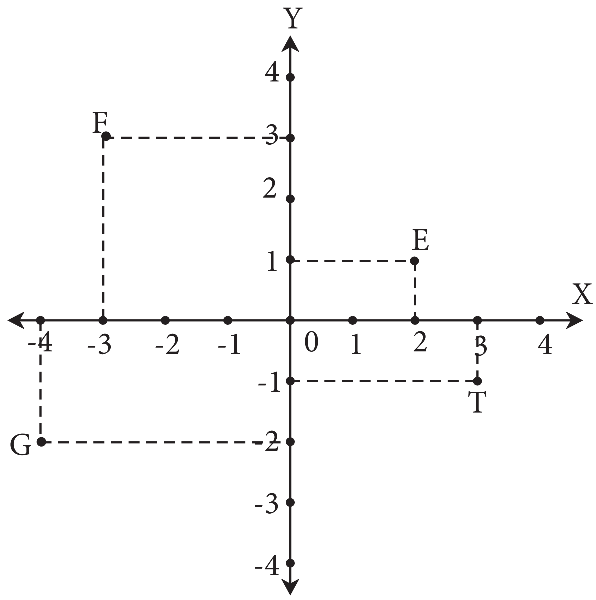
बिंदूचे स्थान सांगताना त्याचा x निर्देशक प्रथम सांगावा असा संकेत आहे. या संकेतानुसार P बिंदूच्या निर्देशकांचा अंतराचा 2, 3 हा क्रम निश्चित होतो आणि बिंदू P चे स्थान संख्यांच्या (2, 3) या जोडीने थोडक्यात सांगता येते.

बिंदू Q पासून X अक्षावर QS हा लंब काढला व Y अक्षावर QR हा लंब काढला. Q चा X अक्षावरील निर्देशक –3 आणि Y अक्षावरील निर्देशक 2 आहे म्हणून बिंदू Q चे निर्देशक (–3,2) आहेत.

उदा. सोबतच्या आकृतीत दाखवलेल्या E, F, G, T या बिंदूंचे निर्देशक लिहा.

उकल :

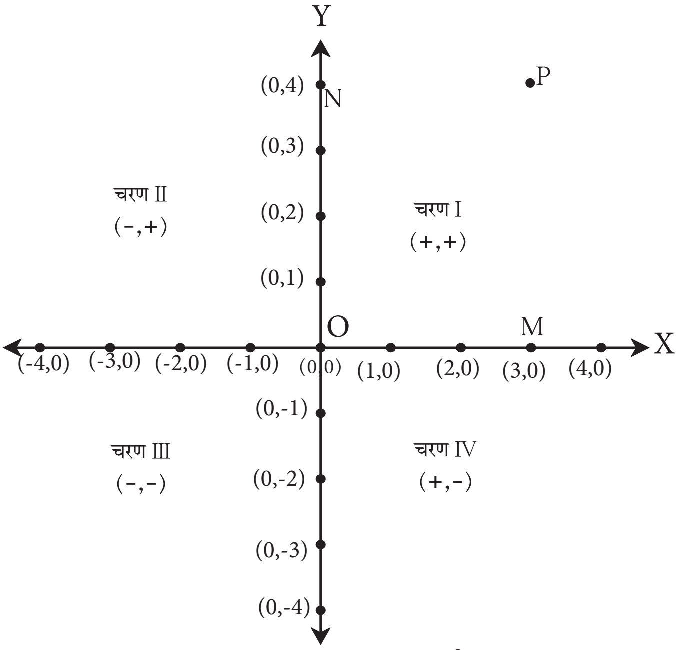
- बिंदू E चे निर्देशक (2,1) आहेत.
- बिंदू F चे निर्देशक (–3,3) आहेत.
- बिंदू G चे निर्देशक (–4,–2) आहेत.
- बिंदू T चे निर्देशक (3,–1) आहेत.



आकृती 7.3

जाणून घेऊया.

अक्षांवरील बिंदूंचे निर्देशक (Co-ordinates of points on the axes)



आकृती 7.4

M बिंदूचा x निर्देशक म्हणजे M बिंदूचे Y अक्षापासूनचे अंतर होय. त्या बिंदूचे X अक्षापासूनचे अंतर शून्य आहे. म्हणून M चा y निर्देशक 0 आहे.

यावरून X अक्षावरील M बिंदूचे सह निर्देशक (3,0) असे आहेत. Y अक्षावरील N बिंदूचा y निर्देशक 4 आहे. कारण तो बिंदू X अक्षापासून 4 अंतरावर आहे आणि बिंदू N चे Y अक्षापासूनचे अंतर शून्य आहे म्हणून त्याचा y निर्देशक 0 आहे.

यावरून Y अक्षावरील N या बिंदूचे सह निर्देशक (0,4) असे आहेत.

आता 'O' हा आरंभबिंदू X आणि Y दोन्ही अक्षांवर आहे म्हणजे त्या बिंदूचे X आणि Y या दोन्ही अक्षांपासूनचे अंतर 0 आहे म्हणून 'O' चे निर्देशक (0,0) आहेत.

यावरून प्रतलातील प्रत्येक बिंदूशी निर्देशकांची एक आणि एकच जोडी (क्रमित जोडी) निगडित असते.

हे लक्षात ठेवूया.

- X −अक्षावरील प्रत्येक बिंदूचा y निर्देशक शून्य असतो.
- Y −अक्षावरील प्रत्येक बिंदूचा x निर्देशक शून्य असतो.
- आरंभ बिंदूचे निर्देशक (0,0) असतात.

उदा. खालील बिंदू कोणत्या चरणात आहेत किंवा कोणत्या अक्षावर आहेत ते ओळखा.
A(5,7), B(−6,4), C(4,−7), D(−8,−9), P(−3,0), Q(0,8)

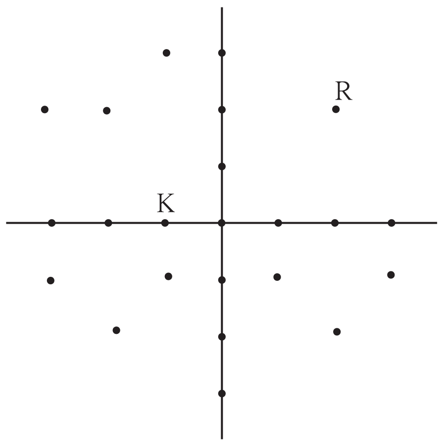
उकल : A(5,7) चा x निर्देशक धन आहे व y निर्देशक धन आहे. $\therefore$ बिंदू A हा पहिल्या चरणात आहे.
B(−6,4) चा x निर्देशक ऋण आहे व y निर्देशक धन आहे. $\therefore$ बिंदू B हा दुसऱ्या चरणात आहे.
C(4,−7) चा x निर्देशक धन आहे व y निर्देशक ऋण आहे. $\therefore$ बिंदू C हा चौथ्या चरणात आहे.
D(−8,−9) चा x निर्देशक ऋण आहे व y निर्देशक ऋण आहे. $\therefore$ बिंदू D हा तिसऱ्या चरणात आहे.

P(−3,0) चा y निर्देशक शून्य आहे. ∴ बिंदू P हा X अक्षावर आहे.

Q(0,8) चा x निर्देशक शून्य आहे. ∴ बिंदू Q हा Y अक्षावर आहे.

कृती शाळेच्या मैदानावर बाजूच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे आडव्या व उभ्या रांगेत विद्यार्थिनींना बसवा यामुळे X− अक्ष व Y− अक्ष तयार होतील.

- रंगीत ठिपक्यांच्या ठिकाणी चारही चरणांत विद्यार्थ्यांना बसवा.
- आता वेगवेगळ्या विद्यार्थ्यांच्या नावाच्या आद्याक्षराचा उच्चार करून आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे उभे करा व त्यांचे निर्देशक त्यांना विचारा. उदा. राजेंद्र (2, 2) व कीर्ती (−1, 0)
- अशाप्रकारे मैदानातील या कृतीने प्रतलातील बिंदूचे स्थान गमतीने सहज स्पष्ट होईल.



आकृती 7.5

जाणून घेऊया.

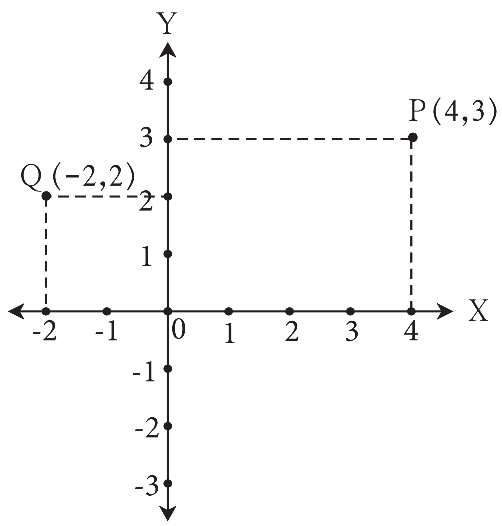
दिलेल्या निर्देशकांशी निगडित बिंदू स्थापन करणे (To plot the points with given co-ordinates)

समजा P (4,3) व Q (−2,2) हे बिंदू स्थापन करायचे आहेत.

बिंदू स्थापन करण्याच्या पायऱ्या

(i) प्रतलात X−अक्ष व Y−अक्ष काढा. आरंभबिंदू दाखवा.

(ii) P (4,3) हा बिंदू दाखवण्यासाठी X अक्षावरील 4 ही संख्या दाखवणाऱ्या बिंदूतून Y अक्षाला समांतर रेषा काढा.
Y अक्षावरील 3 ही संख्या दाखवणाऱ्या बिंदूतून X अक्षाला समांतर रेषा काढा.



आकृती 7.6

(iii) या दोन समांतर रेषांचा छेदनबिंदू म्हणजेच P (4,3) हा बिंदू होय. हा बिंदू कोणत्या चरणात आहे ? निरीक्षण करा.

(iv) त्याचप्रमाणे Q (−2,2) हा बिंदू स्थापन करा. हा बिंदू दुसऱ्या चरणात आला का ? याच निर्देशक पद्धतीवर R(−3,−4), S(3,−1) हे बिंदू स्थापन करा.

उदा. खालील बिंदू कोणत्या चरणात किंवा अक्षावर आहेत ते लिहा.

(i) (5,3) (ii) (−2,4) (iii) (2,−5) (iv) (0,4)
(v) (−3,0) (vi) (−2,2.5) (vii) (5,3.5) (viii) (−3.5,1.5)
(ix) (0, −4) (x) (2,−4)

उकल :

	निर्देशक	चरण / अक्ष
(i)	(5,3)	चरण I
(ii)	(−2,4)	चरण II
(iii)	(2,−5)	चरण IV
(iv)	(0,4)	Y अक्ष
(v)	(−3,0)	X अक्ष

	निर्देशक	चरण / अक्ष
(vi)	(−2, −2.5)	चरण III
(vii)	(5,3.5)	चरण I
(viii)	(−3.5,1.5)	चरण II
(ix)	(0, −4)	Y अक्ष
(x)	(2,−4)	चरण IV

सरावसंच 7.1

1. खाली दिलेले बिंदू त्यांच्या सहनिर्देशकांवरून कोणत्या चरणात किंवा कोणत्या अक्षावर आहेत ते लिहा.
   - A(−3,2), • B(−5,−2), • K(3.5,1.5), • D(2,10),
   - E(37,35), • F(15,−18), • G(3,−7), • H(0,−5),
   - M(12,0), • N(0,9), • P(0,2.5), • Q(−7,−3)

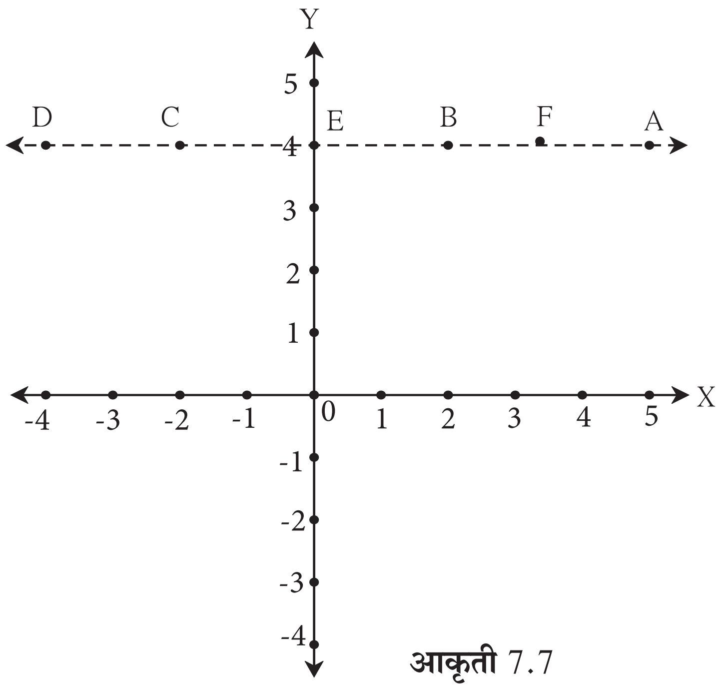
2. खालील बिंदू कोणत्या चरणात असतील ?
   (i) ज्यांचे दोन्ही निर्देशक धन आहेत. (ii) ज्यांचे दोन्ही निर्देशक ऋण आहेत.
   (iii) ज्यांचा x निर्देशक धन व y निर्देशक ऋण आहे. (iv) ज्यांचा x निर्देशक ऋण व y निर्देशक धन आहे.

3. प्रतलात निर्देशक पद्धती निश्चित करा व खालील बिंदू स्थापन करा.
   L(−2,4), M(5,6), N(−3,−4), P(2,−3), Q(6,−5), S(7,0), T(0,−5)

जाणून घेऊया.

X –अक्षाला समांतर रेषा (Lines parallel to X–axis)

- आलेख कागदावर खालील बिंदू स्थापन करा.
  A(5,4), B(2,4), C(−2,4), D(−4,4), E(0,4), F(3,4)
- बिंदूंच्या सहनिर्देशकांचे निरीक्षण करा.
- सर्व बिंदूंचा y निर्देशक समान आहे हे लक्षात आले का ?
- सर्व बिंदू एकरेषीय आहेत.
- ही रेषा कोणत्या अक्षाला समांतर आहे ?
- रेषा DA वरील प्रत्येक बिंदूचा y निर्देशक समान म्हणजे 4 आहे. तो स्थिर आहे. म्हणून रेषा DA चे वर्णन y = 4 या समीकरणाने करतात. कोणत्याही बिंदूचा y निर्देशक 4 असेल तर तो बिंदू त्या रेषेवर म्हणजे रेषा DA वर असेल.
  X अक्षाला 4 एकक अंतरावर समांतर असलेल्या रेषेचे समीकरण y = 4 आहे.



आकृती 7.7

चला, चर्चा करूया.

- X अक्षाला समांतर व त्याच्यापासून 6 एकक अंतरावर X अक्षाच्या खाली अशी रेषा काढता येईल का ?
- (−3,−6), (10,−6), ($\frac{1}{2}$, −6) हे सर्व बिंदू त्या रेषेवर असतील का ?
- या रेषेचे समीकरण कोणते असेल ?

हे लक्षात ठेवूया.

जर b > 0 असेल आणि y = b ही X अक्षाला समांतर असणारी (0, b) बिंदूतून जाणारी रेषा काढली तर ती रेषा X अक्षाला त्याच्या वरच्या बाजूला समांतर असेल आणि b < 0 असेल तर ती रेषा X अक्षाला त्याच्या खालच्या बाजूला समांतर असेल.

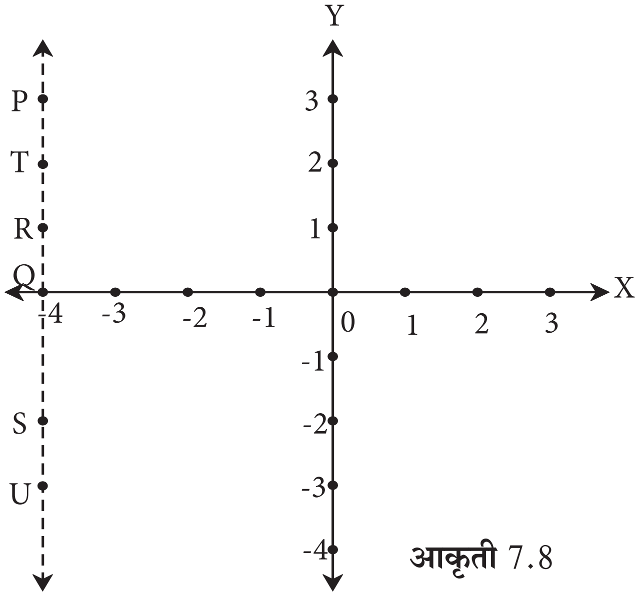
X अक्षाला समांतर असणाऱ्या रेषेचे समीकरण y = b या स्वरूपाचे असते.

जाणून घेऊया.

Y–अक्षाला समांतर रेषा (Lines parallel to Y–axis)

- आलेख कागदावर खालील बिंदू स्थापन करा.
  P(–4,3), Q(–4,0), R(–4,1), S(–4,–2), T(–4,2), U(–4,–3)
- बिंदूंच्या सहनिर्देशकांचे निरीक्षण करा.
- सर्व बिंदूंचा x निर्देशक समान आहे हे लक्षात आले का ?
- सर्व बिंदू एकरेषीय आहेत का ?
- ही रेषा कोणत्या अक्षाला समांतर आहे ?
- रेषा PS वरील प्रत्येक बिंदूचा x निर्देशक समान म्हणजे –4 आहे. तो स्थिर आहे. म्हणून रेषा PS चे वर्णन $x = -4$ या समीकरणाने करतात. ज्या बिंदूचा x निर्देशक –4 आहे तो प्रत्येक बिंदू रेषा PS वर असेल.

  Y अक्षाला त्याच्या डावीकडे 4 एकक अंतरावर समांतर असलेल्या रेषेचे समीकरण $x = -4$ आहे.



आकृती 7.8

चला, चर्चा करूया.

- Y अक्षाला समांतर व त्याच्यापासून 2 एकक अंतरावर उजवीकडे अशी रेषा काढता येईल का ?
- (2,10), (2,8), $(2, -\frac{1}{2})$ हे सर्व बिंदू या रेषेवर असतील का ?
- या रेषेचे समीकरण कोणते असेल ?

हे लक्षात ठेवूया.

जर $x = a$ ही Y अक्षाला समांतर असणारी $(a, 0)$ बिंदूतून जाणारी रेषा काढली आणि $a > 0$ असेल तर ती रेषा Y अक्षाच्या उजवीकडे असते. जर $a < 0$ असेल तर ती रेषा Y अक्षाच्या डावीकडे असते.

Y अक्षाला समांतर असणाऱ्या रेषेचे समीकरण $x = a$ या रूपात असते.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) X–अक्षावरील प्रत्येक बिंदूचा y निर्देशक 0 असतो याउलट ज्या बिंदूचा y निर्देशक 0 असतो तो बिंदू X–अक्षावर असतो, म्हणून X अक्षाचे समीकरण $y = 0$ असे लिहितात.

(2) Y–अक्षावरील प्रत्येक बिंदूचा x निर्देशक 0 असतो याउलट ज्या बिंदूचा x निर्देशक 0 असतो तो बिंदू Y–अक्षावर असतो, म्हणून Y अक्षाचे समीकरण $x = 0$ असे लिहितात.

जाणून घेऊया.

रेषीय समीकरणाचा आलेख (Graph of linear equations)

उदा. $x = 2$ आणि $y = -3$ या समीकरणांचे आलेख काढा.

उकल (i) आलेख कागदावर X अक्ष व Y अक्ष काढा.

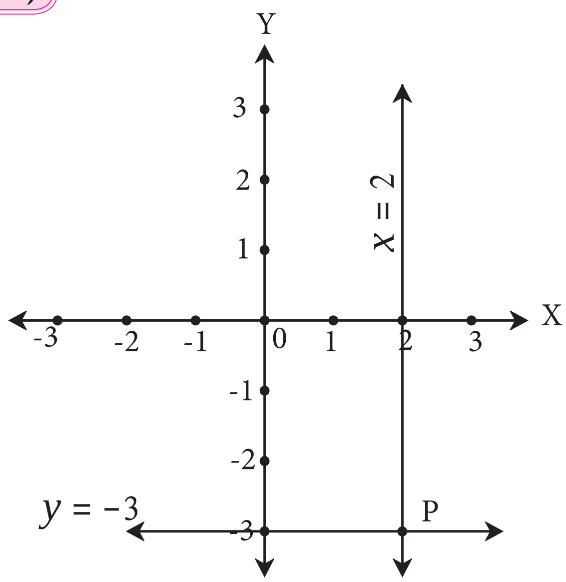
(ii) $x = 2$ दिले आहे म्हणून Y अक्षाच्या उजवीकडे, 2 एकक अंतरावर Y अक्षाला समांतर रेषा काढा.

(iii) $y = -3$ दिले आहे, म्हणून X अक्षाच्या खालच्या बाजूला 3 एकक अंतरावर X अक्षाला समांतर रेषा काढा.

(iv) अक्षांना समांतर काढलेल्या या रेषा म्हणजे दिलेल्या समीकरणांचे आलेख आहेत.

(v) या दोन रेषा एकमेकींना जेथे छेदतात त्या P बिंदूचे निर्देशक लिहा.

(vi) P चे निर्देशक (2,–3) आहेत का याचा पडताळा घ्या.

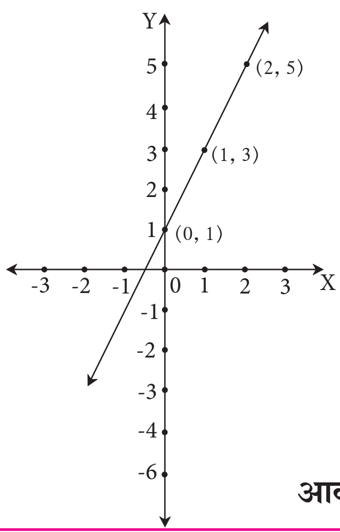


आकृती 7.9

सामान्यरूपातील रेषीय समीकरणाचा आलेख

कृती : आलेख कागदावर (0,1) (1,3) (2,5) हे बिंदू स्थापन करा. ते एकरेषीय आहेत का हे तपासा, जर एकरेषीय असतील तर, त्यांतून जाणारी रेषा काढा.

- ती रेषा कोणकोणत्या चरणांतून जाते ते पाहा.
- ती रेषा Y अक्षाला ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूचे निर्देशक लिहा.
- त्या रेषेवर तिसऱ्या चरणातील कोणताही एक बिंदू दाखवा. त्याचे निर्देशक लिहा.



आकृती 7.10

उदा. $2x - y + 1 = 0$ हे एक दोन चलांतील सामान्यरूपातील समीकरण आहे. या समीकरणाचा आलेख काढू.

उकल : $2x - y + 1 = 0$ म्हणजेच $y = 2x + 1$

x ला काही किमती घेऊन व त्यांवरून y च्या संगत किमती काढू.

उदाहरणार्थ, जर $x = 0$ ही किंमत समीकरणात ठेवली तर $y = 1$ ही किंमत मिळते.

याप्रमाणे x च्या $0, 1, 2, \frac{1}{2}, -2$ या किमती घेऊन y च्या किंमती काढू.

या किमती क्रमित जोडीच्या रूपात सारणीत लिहू.

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$	-2
y	1	3	5	2	-3
(x, y)	$(0,1)$	$(1,3)$	$(2,5)$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(-2,-3)$

हे बिंदू स्थापन करू. स्थापन केलेले बिंदू एकरेषीय आहेत याची खात्री करू. त्या सर्व बिंदूंतून जाणारी रेषा काढू. ही रेषा म्हणजेच $2x - y + 1 = 0$ या समीकरणाचा आलेख आहे.

ICT Tools or Links

Geogebra Software च्या मदतीने X-अक्ष, Y-अक्ष काढा. विविध बिंदू स्थापन करा. Algebric View मध्ये बिंदूंचे निर्देशक पाहा व अभ्यासा. अक्षांना समांतर असणाऱ्या रेषांची समीकरणे पाहा. Move Option चा उपयोग करून रेषांची स्थाने बदलत राहा. X-अक्षाचे व Y-अक्षाचे समीकरण कोणते येते ?

सरावसंच 7.2

1. आलेख कागदावर A (3,0), B(3,3), C(0,3) हे बिंदू स्थापन करा. AB व BC जोडा. कोणती आकृती मिळते ते लिहा.
2. Y-अक्षाला समांतर आणि त्या अक्षाच्या डावीकडील 7 एकक अंतरावरील रेषेचे समीकरण लिहा.
3. X-अक्षाला समांतर आणि त्या अक्षाच्या खाली 5 एकक अंतरावर असलेल्या रेषेचे समीकरण लिहा.
4. Q(-3,-2) हा बिंदू Y-अक्षाला समांतर असणाऱ्या रेषेवर आहे. त्या रेषेचे समीकरण लिहा व त्याचा आलेख काढा.
5. Y-अक्ष आणि रेषा $x = -4$ या समांतर रेषा आहेत, तर या दोन रेषांमधील अंतर किती आहे ?

6. खालीलपैकी कोणत्या समीकरणांचे आलेख X अक्षाला समांतर आहेत व कोणत्या समीकरणांचे आलेख Y अक्षाला समांतर आहेत ते लिहा.

(i) $x = 3$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x + 6 = 0$ (iv) $y = -5$

7. आलेखकागदावर A(2,3), B(6,−1) आणि C(0,5) हे बिंदू स्थापन करा. जर हे बिंदू एकरेषीय असतील तर त्यांना सामावणारी रेषा काढा. ही रेषा X अक्ष व Y अक्ष यांना ज्या बिंदूत छेदते त्या बिंदूंचे निर्देशक लिहा.

8. खालील समीकरणांचे आलेख एकाच निर्देशक पद्धतीवर काढा. त्यांच्या छेदनबिंदूंचे निर्देशक लिहा. $x + 4 = 0$, $y - 1 = 0$, $2x + 3 = 0$, $3y - 15 = 0$

9. खालील समीकरणांचे आलेख काढा.

(i) $x + y = 2$ (ii) $3x - y = 0$ (iii) $2x + y = 1$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(i) X अक्षावरील कोणताही बिंदू खालीलपैकी कोणत्या रूपात असतो ?

(A) (b, b) (B) $(0, b)$ (C) $(a, 0)$ (D) (a, a)

(ii) रेषा $y = x$ या रेषेवरील प्रत्येक बिंदूचे निर्देशक खालीलपैकी कोणत्या रूपात असतील ?

(A) (a, a) (B) $(0, a)$ (C) $(a, 0)$ (D) $(a, -a)$

(iii) X अक्षाचे समीकरण खालीलपैकी कोणते ?

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x = y$

(iv) (−4, −3) हा बिंदू कोणत्या चरणात असेल ?

(A) पहिल्या (B) दुसऱ्या (C) तिसऱ्या (D) चौथ्या

(v) (−5,5), (6,5), (−3,5), (0,5) या बिंदूंना सामावणाऱ्या रेषेचे स्वरूप कसे असेल ?

(A) आरंभबिंदूतून जाणारी (B) Y अक्षाला समांतर

(C) X अक्षाला समांतर (D) यांपैकी कोणतेही नाही.

(vi) P(−1,1), Q(3,−4), R(1,−1), S(−2,−3), T(−4,4) यांपैकी चौथ्या चरणातील बिंदू कोणते ?

(A) P आणि T (B) Q आणि R (C) फक्त S (D) P आणि R

2. आकृतीत काही बिंदू दाखवले आहेत.

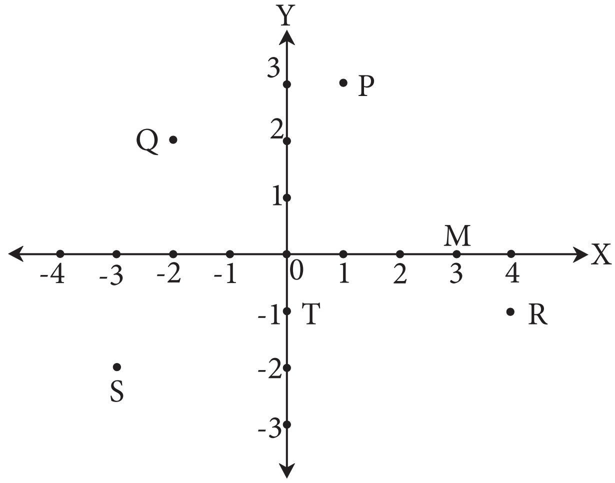
खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) Q आणि R या बिंदूंचे निर्देशक लिहा.

(ii) T व M बिंदूंचे निर्देशक लिहा.

(iii) तिसऱ्या चरणात कोणता बिंदू आहे ?

(iv) कोणत्या बिंदूचे x आणि y निर्देशक समान आहेत ?



आकृती 7.11

3. खालील बिंदू आलेखावर स्थापन न करता ते कोणत्या चरणात किंवा अक्षावर असतील हे लिहा.

(i) (5, −3) (ii) (−7, −12) (iii) (−23, 4)

(iv) (−9, 5) (v) (0, −3) (vi) (−6, 0)

4. खालील बिंदू आलेख कागदावर स्थापन करा.

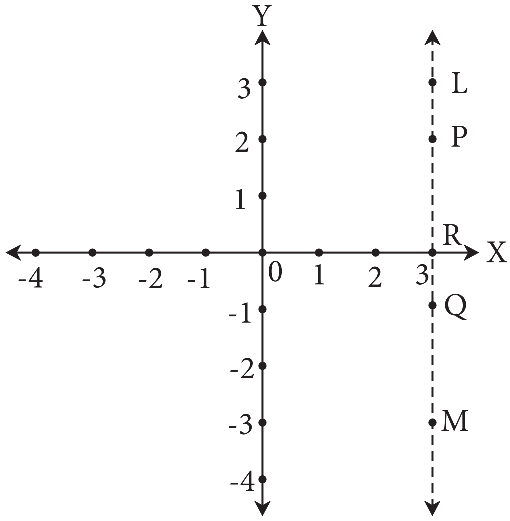
A(1,3), B(−3,−1), C(1,−4), D(−2,3), E(0,−8), F(1,0)

5. शेजारील आलेखात रेषा LM ही Y अक्षाला समांतर रेषा आहे.

(i) रेषा LM चे Y अक्षापासूनचे अंतर किती ?

(ii) P, Q, R या बिंदूंचे सहनिर्देशक लिहा.

(iii) बिंदू L आणि M यांच्या x निर्देशकांतील फरक किती ?



आकृती 7.12

6. X- अक्षाला समांतर आणि X-अक्षापासून 5 एकक अंतरावर किती रेषा आहेत ? त्यांची समीकरणे लिहा.

7*. कोणतीही वास्तव संख्या a ही घेऊन Y-अक्ष आणि $x = a$ या रेषेमधील अंतर ठरवा.

8 त्रिकोणमिती

चला, शिकूया.

- त्रिकोणमितीची ओळख
- त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे
- त्रिकोणमितीय गुणोत्तरातील संबंध
- विशिष्ट कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे

त्रिकोणमितीची ओळख(Introduction to trigonometry)

आपण जमिनीवरील अंतरे दोरीने, चालत जाऊन मोजू शकतो, परंतु समुद्रातील जहाजाचे दीपस्तंभापासूनचे अंतर कसे मोजत असतील ? झाडाची उंची कशी मोजायची ?

वरील चित्रांचे निरीक्षण करा. चित्रातील प्रश्न गणिताशी निगडित आहेत. या प्रश्नांची उत्तरे मिळवण्यासाठी गणित विषयाच्या त्रिकोणमिती या शाखेचा उपयोग होतो. त्रिकोणमितीचा उपयोग अभियांत्रिकी, खगोलशास्त्र, नौकाशास्त्र इत्यादी शाखांमध्येही केला जातो.

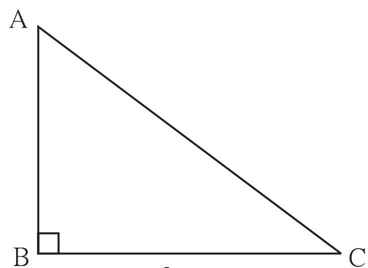
त्रिकोणमिती (Trigonometry) हा शब्द तीन ग्रीक शब्दांपासून तयार झाला आहे. Tri म्हणजे तीन, gona म्हणजे बाजू, metron म्हणजे मोजमाप.

जरा आठवूया.

आपण त्रिकोणाचा अभ्यास केला आहे. काटकोन त्रिकोण, पायथागोरसचे प्रमेय आणि समरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म यांच्या आधारे त्रिकोणमिती विषयाची सुरुवात होते.

त्यांची उजळणी करू.

- Δ ABC मध्ये $\angle B$ हा काटकोन आहे तर $\angle B$ या काटकोनासमोरील बाजू AC ही कर्ण आहे.
  $\angle A$ समोरील बाजू BC आहे, $\angle C$ समोरील बाजू AB आहे.



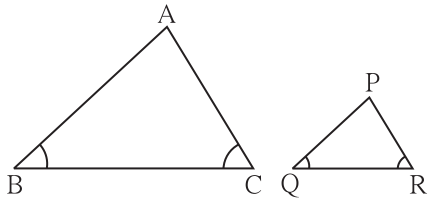
आकृती 8.1

या त्रिकोणाच्या संदर्भात पायथागोरसच्या प्रमेयाचे विधान

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

- जर Δ ABC ~ Δ PQR तर त्यांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात, म्हणजे $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$



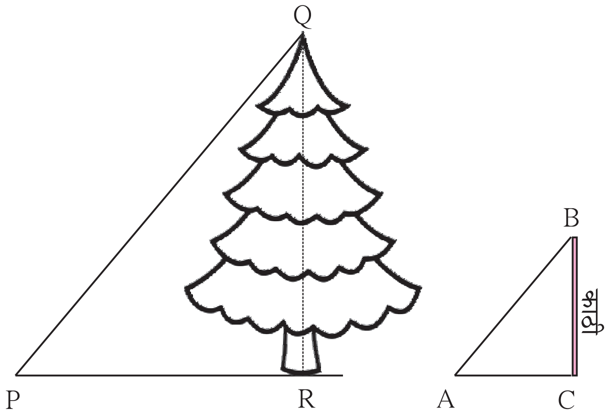
आकृती 8.2

एखाद्या मोठ्या झाडाची उंची मोजायची असेल तर समरूप त्रिकोणांच्या गुणधर्मांचा उपयोग करून ती कशी काढता येते ते पाहू.

कृती : हा प्रयोग दिवसा चांगले ऊन असेल तेव्हा करता येतो. शेजारील आकृती पाहा.
QR ही झाडाची उंची आहे. BC ही एका काठीची उंची आहे.

लहान काठी जमिनीत उभी रोवून तिची उंची व तिच्या सावलीची लांबी मोजा. झाडाच्या सावलीची लांबी मोजा. सूर्याचे किरण समांतर असल्यामुळे Δ PQR व Δ ABC हे समकोन म्हणजेच समरूप त्रिकोण आहेत, हे जाणून घ्या. समकोन त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात याचा उपयोग करून $\frac{QR}{PR} = \frac{BC}{AC}$ मिळते. म्हणून झाडाची उंची

QR = $\frac{BC}{AC} \times PR$ हे समीकरण मिळते.



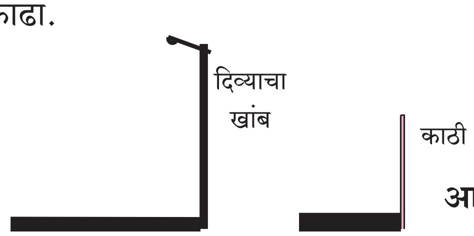
आकृती 8.3

PR, BC व AC आपल्याला माहीत आहेत. या किमती समीकरणात घालून QR ची लांबी, म्हणजेच झाडाची उंची ठरवता येते.

विचार करूया

हा प्रयोग सकाळी 8 वाजता न करता दुपारी 11:30 किंवा 1:30 ला करणे सोयीचे आहे. ते का?

कृती : वरील कृती करून तुम्ही स्वतः परिसरातील उंच झाडाची उंची काढा.
परिसरात झाड नसेल तर एखाद्या खांबाची उंची काढा.

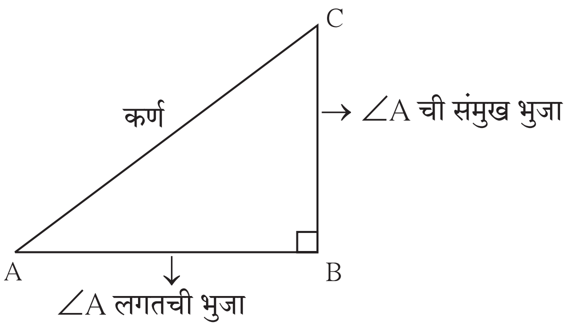


आकृती 8.4

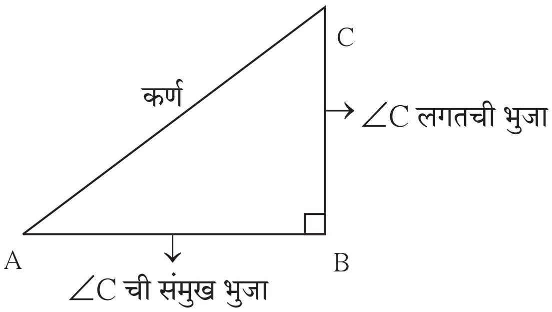
जाणून घेऊया.

त्रिकोणाच्या संदर्भातील काही संज्ञा (Terms related to triangle)

काटकोन Δ ABC मध्ये, $\angle B = 90°$ आहे तर $\angle A$ व $\angle C$ हे लघुकोन आहेत.

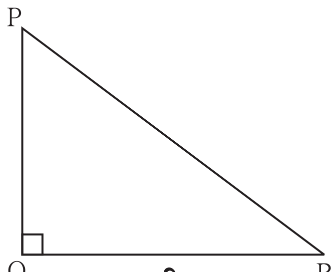


आकृती 8.5



आकृती 8.6

उदा. काटकोन Δ PQR मध्ये



आकृती 8.7

$\angle P$ समोरील बाजू = . . . $\angle P$ लगतची बाजू = ...
$\angle R$ समोरील बाजू = . . . $\angle R$ लगतची बाजू = ...

त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे (Trigonometic ratios)

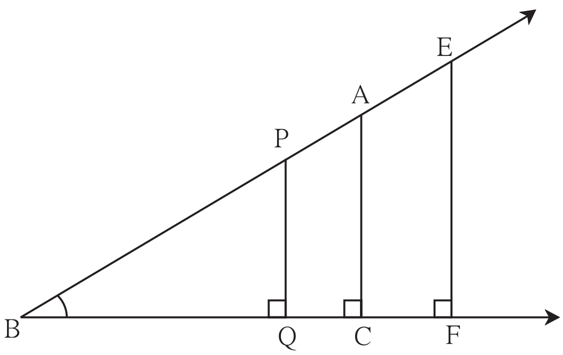
शेजारील आकृती 8.8 मध्ये काही काटकोन त्रिकोण दाखवले आहेत. त्यांचा $\angle B$ हा सामाईक कोन आहे. त्यामुळे हे सर्व काटकोन त्रिकोण समरूप आहेत.

येथे Δ PQB ~ Δ ACB आहे.

$\therefore \frac{PB}{AB} = \frac{PQ}{AC} = \frac{BQ}{BC}$

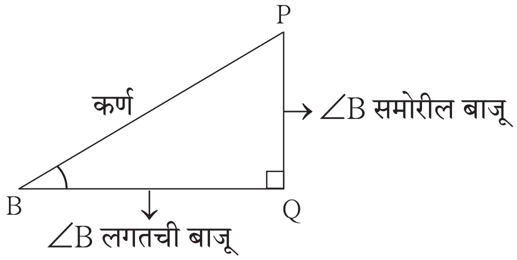
$\frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{AB} \quad \therefore \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB}$ . . . . . एकांतर क्रिया

$\frac{QB}{BC} = \frac{PB}{AB} \quad \therefore \frac{QB}{PB} = \frac{BC}{AB}$ . . . . . एकांतर क्रिया

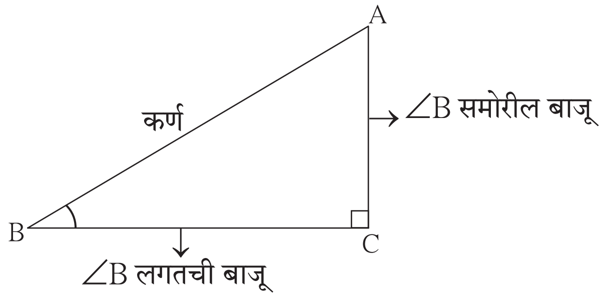


आकृती 8.8

खालील आकृत्या 8.9 आणि 8.10 या आकृती 8.8 मधून वेगळ्या केलेल्या त्रिकोणांच्या आहेत.



आकृती 8.9



आकृती 8.10

(i) Δ PQB मध्ये,

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ च्या समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$$

Δ ACB मध्ये,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ च्या समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$$

$\frac{PQ}{PB}$ व $\frac{AC}{AB}$ ही गुणोत्तरे समान आहेत.

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ च्या समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$$

या गुणोत्तराला B या कोनाचे साइन (sine) गुणोत्तर असे म्हणतात. हे गुणोत्तर थोडक्यात **sinB** असे लिहितात.

(ii) Δ PQB व Δ ACB मध्ये

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ च्या लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}} \quad \text{आणि} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ च्या लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$$

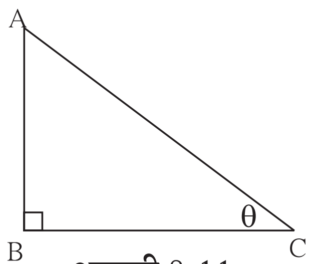
$$\frac{BQ}{PB} = \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ च्या लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$$

या गुणोत्तराला कोन B चे कोसाईन (cosine) गुणोत्तर असे म्हणतात. हे गुणोत्तर थोडक्यात **cosB** असे लिहितात.

(iii) $\frac{PQ}{BQ} = \frac{AC}{BC} = \frac{\angle B \text{ च्या समोरील बाजू}}{\angle B \text{ च्या लगतची बाजू}}$

या गुणोत्तराला कोन B चे टँजंट (tangent) गुणोत्तर असे म्हणतात. हे गुणोत्तर थोडक्यात **tanB** असे लिहितात.

उदा.



आकृती 8.11

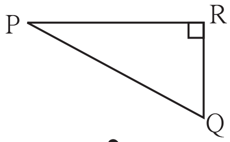
काही वेळा काटकोन त्रिकोणाच्या लघुकोनांची मापे θ(थीटा), α (अल्फा), β (बीटा) इत्यादी ग्रीक अक्षरांनी दर्शवतात. सोबतच्या आकृतीत, Δ ABC च्या C या लघुकोनाचे माप θ या अक्षराने दाखवले आहे. अशावेळी sinC, cosC, tanC ही गुणोत्तरे अनुक्रमे sinθ, cosθ, tan θ अशीही लिहितात.

$$\sin C = \sin\theta = \frac{AB}{AC}, \quad \cos C = \cos\theta = \frac{BC}{AC}, \quad \tan C = \tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

हे लक्षात ठेवूया.

- sin गुणोत्तर $= \dfrac{\text{कोनासमोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$
- cos गुणोत्तर $= \dfrac{\text{कोनालगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$
- tan गुणोत्तर $= \dfrac{\text{कोनासमोरील बाजू}}{\text{कोनालगतची बाजू}}$

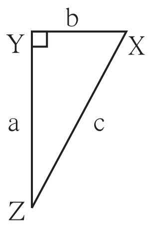
सरावसंच 8.1

1. 

आकृती 8.12

शेजारील आकृती 8.12 मध्ये Δ PQR चा $\angle R$ हा काटकोन आहे तर खालील गुणोत्तरे लिहा.

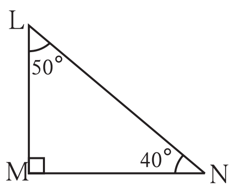
(i) sin P (ii) cos Q (iii) tan P (iv) tan Q

2. 

आकृती 8.13

आकृती 8.13 मध्ये Δ XYZ हा काटकोन त्रिकोण आहे. $\angle XYZ = 90^\circ$ आहे. बाजूंची लांबी a,b,c अशी दिली आहे. यावरून खालील गुणोत्तरे लिहा.

(i) sin X (ii) tan Z (iii) cos X (iv) tan X

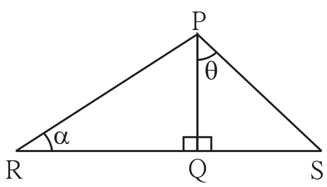
3. 

आकृती 8.14

काटकोन Δ LMN मध्ये, $\angle LMN = 90^\circ$ $\angle L = 50^\circ$ आणि $\angle N = 40^\circ$ आहे. यावरून खालील गुणोत्तरे लिहा.

(i) $\sin 50^\circ$ (ii) $\cos 50^\circ$

(iii) $\tan 40^\circ$ (iv) $\cos 40^\circ$

4. 

आकृती 8.15

दिलेल्या आकृतीमध्ये $\angle PQR = 90^\circ$, $\angle PQS = 90^\circ$, $\angle PRQ = \alpha$ व $\angle QPS = \theta$ तर खालील त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे लिहा.

(i) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$

(ii) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$

जाणून घेऊया.

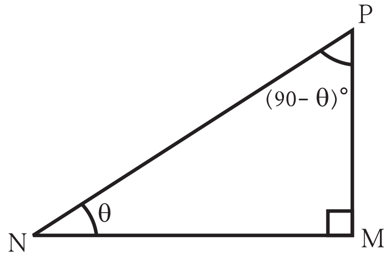
त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील संबंध (Relations among trigonometric ratios)

आकृती 8.16 मध्ये,

Δ PMN हा काटकोन त्रिकोण आहे.

$m\angle M = 90^\circ$, $\angle P$ व $\angle N$ हे परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

$\therefore$ जर $m\angle N = \theta$ तर $m\angle P = 90 - \theta$



आकृती 8.16

$$\sin\theta = \frac{PM}{PN} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\cos\theta = \frac{NM}{PN} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{NM} \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\sin(90-\theta) = \frac{NM}{PN} \quad \ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\cos(90-\theta) = \frac{PM}{PN} \quad \ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\tan(90-\theta) = \frac{NM}{PM} \quad \ldots\ldots\ldots(6)$$

$\therefore\ \sin\theta = \cos(90-\theta)$ .... (1) व (5) वरून

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$ .... (2) व (4) वरून

आता हेही लक्षात घ्या: $\tan\theta \times \tan(90-\theta) = \dfrac{PM}{NM} \times \dfrac{NM}{PM}$ .... (3) व (6) वरून

$$\therefore\ \tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$$

तसेच $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \dfrac{PM}{PN} \times \dfrac{PN}{NM} = \dfrac{PM}{NM} = \tan\theta$

हे लक्षात ठेवूया.

$\cos(90-\theta) = \sin\theta$, $\quad \sin(90-\theta) = \cos\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$, $\quad \tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$

✲ अधिक माहितीसाठी

$$\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta, \quad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta, \quad \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

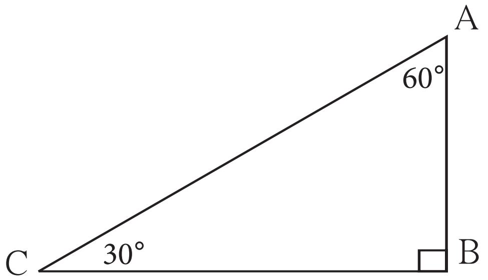
म्हणजेच $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ आणि $\cot\theta$ ही अनुक्रमे $\sin\theta$, $\cos\theta$ आणि $\tan\theta$ यांची व्यस्त गुणोत्तरे आहेत.

- $\sec\theta = \operatorname{cosec}(90-\theta)$
- $\operatorname{cosec}\theta = \sec(90-\theta)$
- $\tan\theta = \cot(90-\theta)$
- $\cot\theta = \tan(90-\theta)$

जरा आठवूया.

$30°-60°-90°$ मापाच्या त्रिकोणाचा गुणधर्म

एखाद्या त्रिकोणाच्या कोनांची मापे $30°, 60°, 90°$ असतील तर आपल्याला माहीत आहे की, $30°$ कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या निम्मी असते आणि $60°$ कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या लांबीच्या $\frac{\sqrt{3}}{2}$ पट असते.



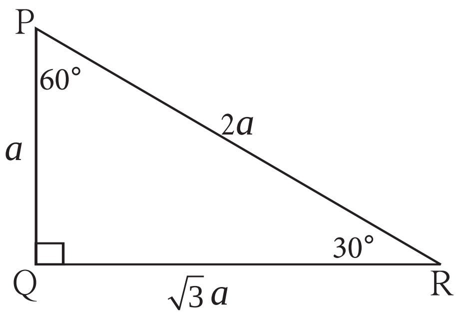
आकृती 8.17

शेजारील आकृतीमध्ये, काटकोन Δ ABC मध्ये $\angle C = 30°$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$ आहे.

$\therefore AB = \frac{1}{2}AC$ आणि $BC = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$

जाणून घेऊया.

$30°$ व $60°$ या कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे (Trignometric ratios of $30°$ and $60°$ angles)



आकृती 8.18

काटकोन Δ PQR मध्ये जर $\angle R = 30°$, $\angle P = 60°$, $\angle Q = 90°$ आणि समजा $PQ = a$

तर $PQ = \frac{1}{2} PR$

$a = \frac{1}{2} PR$

$\therefore PR = 2a$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} PR$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$

$QR = \sqrt{3}\,a$

$\therefore$ जर $PQ = a$ तर $PR = 2a$ आणि $QR = \sqrt{3}\,a$

(I) 30° मापाच्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे.

$$\sin 30° = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(II) 60° मापाच्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे.

$$\sin 60° = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

काटकोन Δ PQR मध्ये $\angle Q = 90°$ दिला आहे. $\angle P$ व $\angle R$ हे परस्परांचे कोटिकोन आहेत, म्हणून कोटिकोनाच्या साइन व कोसाइन या गुणोत्तरांमधील संबंध येथे पडताळून पाहा.

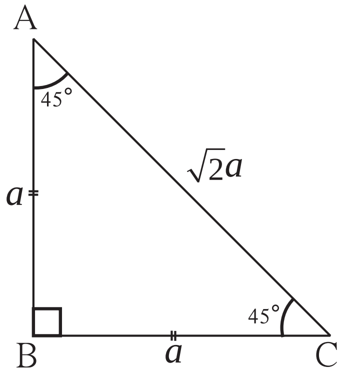
$\sin\theta = \cos(90-\theta)$
$\sin 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60°$
$\sin 30° = \cos 60°$

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$
$\cos 30° = \sin(90° - 30°) = \sin 60°$
$\cos 30° = \sin 60°$

हे लक्षात ठेवूया.

$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$

(III) 45° मापाच्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे.



आकृती 8.19

काटकोन Δ ABC मध्ये $\angle B = 90°$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 45°$ $\therefore$ हा समद्विभुज काटकोन त्रिकोण आहे. समजा, AB = a तर BC = a
पायथागोरसच्या प्रमेयावरून AC ची लांबी काढू.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= a^2 + a^2$$
$$AC^2 = 2a^2$$
$$\therefore AC = \sqrt{2}\,a$$

मागील आकृती 8.19 मध्ये $\angle C = 45^\circ$ आहे.

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

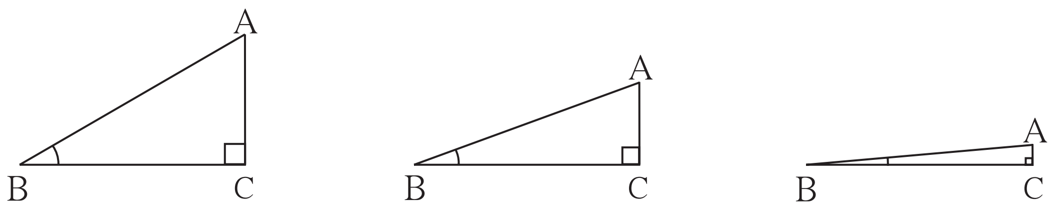
$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

हे लक्षात ठेवूया.

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^\circ = 1$

(IV) 0° व 90° मापांच्या कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे

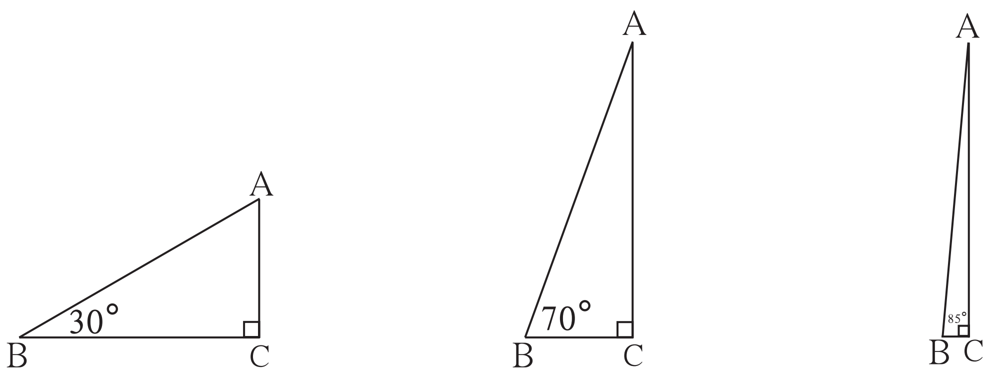


आकृती 8.20

काटकोन Δ ACB मध्ये $\angle C = 90^\circ$ आणि $\angle B = 30^\circ$ आहे. $\sin 30^\circ = \frac{AC}{AB}$ हे आपल्याला माहीत आहे. AB ची लांबी स्थिर ठेवून, $\angle B$ चे माप जसेजसे कमी होते तशीतशी $\angle B$ समोरील बाजू AC ची लांबी कमी होते म्हणून $\angle B$ चे माप कमी झाले की $\sin \theta$ ची किंमत कमी होते.

$\therefore$ $\angle B$ चे माप 0° होईल तेव्हा AC ची लांबी ही 0 होईल.

$\therefore \sin 0^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB}$ $\qquad \therefore \sin 0^\circ = 0$



आकृती 8.21

आता आकृती 8.21 पाहा. या काटकोन त्रिकोणात $\angle B$ चे माप जसजसे वाढत जाते तसतसे AC ची लांबी वाढताना दिसते. $\angle B$चे माप जर 90° झाले तर AC ही AB एवढी होईल.

$$\therefore \sin 90^\circ = \frac{AC}{AB} \qquad \therefore \sin 90^\circ = 1$$

आपण कोटिकोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे पाहिली आहेत.

$$\sin\theta = \cos(90-\theta) \text{ आणि } \cos\theta = \sin(90-\theta)$$

$$\therefore \cos 0^\circ = \sin(90-0)^\circ = \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{आणि } \cos 90^\circ = \sin(90-90)^\circ = \sin 0^\circ = 0$$

हे लक्षात ठेवूया.

$\sin 0^\circ = 0,\quad \sin 90^\circ = 1,\quad \cos 0^\circ = 1,\quad \cos 90^\circ = 0$

आपल्याला माहीत आहे की,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \therefore \tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{परंतु } \tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$$

परंतु $\frac{1}{0}$ हा भागाकार करता येत नाही. θ लघुकोन असून तो मोठा होत होत 90°च्या जवळ जाऊ लागतो, तसा $\tan\theta$ अनिर्बंधपणे मोठा होत जातो. परंतु tan 90 ची किंमत ठरवता येत नाही.

हे लक्षात ठेवूया.

विशिष्ट मापाच्या कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे

गुणोत्तरे \ कोनांची मापे	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ठरवता येत नाही

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) किंमत काढा : $2\tan 45° + \cos 30° - \sin 60°$

उकल : $2\tan 45° + \cos 30° - \sin 60°$

$$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

उदा (2) किंमत काढा. $\frac{\cos 56°}{\sin 34°}$

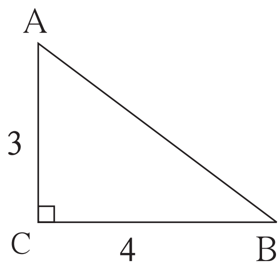
उकल : $56° + 34° = 90°$ म्हणजे 56 व 34 ही कोटिकोनांची मापे आहेत.

$$\sin \theta = \cos (90 - \theta)$$

$\therefore \quad \sin 34° = \cos (90 - 34)° = \cos 56°$

$\therefore \quad \frac{\cos 56°}{\sin 34°} = \frac{\cos 56°}{\cos 56°} = 1$

उदा (3) काटकोन Δ ACB मध्ये जर $\angle C = 90°$, AC = 3, BC = 4 तर $\angle A$ व $\angle B$ ची खालील त्रिकाणमितीय गुणोत्तरे काढा.
sin A, sin B, cos A, tan B



आकृती 8.22

उकल: काटकोन Δ ACB मध्ये पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 5^2$$

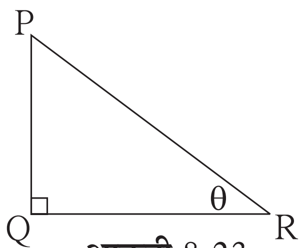
$$AB = 5$$

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$

उदा (4) काटकोन Δ PQR मध्ये $\angle Q = 90°$, $\angle R = \theta$ आणि जर $\sin \theta = \frac{5}{13}$ तर $\cos \theta$, $\tan \theta$ काढा.

उकल :



आकृती 8.23

काटकोन Δ PQR मध्ये $\angle R = \theta$

$$\sin \theta = \frac{5}{13}$$

$\therefore \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

$\therefore$ PQ = $5k$ आणि PR = $13k$ मानू.

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून QR काढू.

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

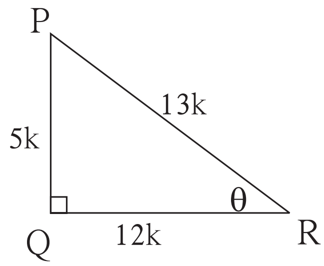
$(5k)^2 + QR^2 = (13k)^2$

$25k^2 + QR^2 = 169\,k^2$

$QR^2 = 169\,k^2 - 25k^2$

$QR^2 = 144\,k^2$

$QR = 12k$



आकृती 8.24

आता काटकोन Δ PQR मध्ये PQ = $5k$ आणि PR = $13k$, QR = $12k$

$\cos\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$

विचार करूया

(1) वरील उदाहरण सोडवताना PQ आणि PR या बाजूंची लांबी 5k आणि 13k का घेतली आहे ?

(2) PQ आणि PR ची लांबी अनुक्रमे 5 आणि 13 घेता येईल का ? घेता येत असल्यास लेखनात काही बदल करावा लागेल का ?

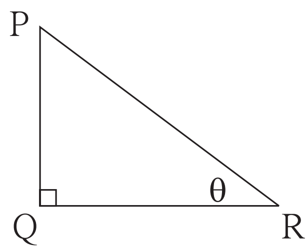
त्रिकोणमितीमधील महत्त्वाचे समीकरण

Δ PQR हा काटकोन त्रिकोण आहे

$\angle PQR = 90^\circ$, $\angle R = \theta$ मानू.

$\sin\theta = \frac{PQ}{PR}$ ....(1)

$\cos\theta = \frac{QR}{PR}$ ....(2)



आकृती 8.25

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\therefore \frac{PQ^2}{PR^2} + \frac{QR^2}{PR^2} = \frac{PR^2}{PR^2}$ .... प्रत्येक पदाला PR^2 ने भागले

$\therefore \left(\frac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\frac{QR}{PR}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$.... (1) व (2) वरून

हे लक्षात ठेवूया.

$(\sin\theta)^2$ म्हणजे $\sin\theta$ चा वर्ग, हा $\sin^2\theta$ असा लिहितात.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ हे समीकरण आपण पायथागोरसचे प्रमेय वापरून θ हा एक लघुकोन असणाऱ्या काटकोन त्रिकोणाच्या साहाय्याने सिद्‌ध केले. $\theta = 0^\circ$ किंवा $\theta = 90^\circ$ असेल तरीही हे समीकरण सत्य असते याचा पडताळा घ्या.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ हे समीकरण कोणत्याही मापाच्या कोनासाठी सत्य असल्यामुळे त्याला त्रिकोणमितीतील मूलभूत नित्य समानता म्हणतात.

(i) $0 \le \sin\theta \le 1,\ 0 \le \sin^2\theta \le 1$ (ii) $0 \le \cos\theta \le 1,\ 0 \le \cos^2\theta \le 1$

सरावसंच 8.2

1. खालील सारणीत प्रत्येक स्तंभात एक गुणोत्तर दिले आहे. त्यावरून इतर दोन गुणोत्तरे काढा आणि रिकाम्या जागा भरा.

$\sin\theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos\theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan\theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. किमती काढा.

(i) $5\sin 30^\circ + 3\tan 45^\circ$

(ii) $\frac{4}{5}\tan^2 60^\circ + 3\sin^2 60^\circ$

(iii) $2\sin 30^\circ + \cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ$

(iv) $\dfrac{\tan 60}{\sin 60 + \cos 60}$

(v) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$

(vi) $\cos 60^\circ \times \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \times \sin 30^\circ$

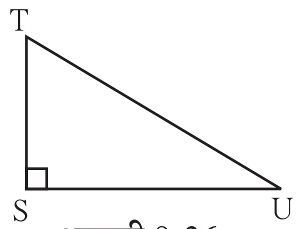
3. जर $\sin\theta = \frac{4}{5}$ तर $\cos\theta$ काढा.

4. जर $\cos\theta = \frac{15}{17}$ तर $\sin\theta$ काढा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 8

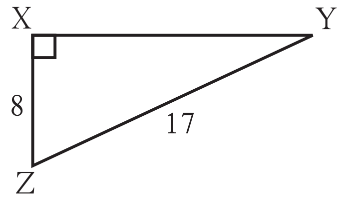
1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या उत्तराचा अचूक पर्याय निवडा.
   (i) खालीलपैकी कोणते विधान सत्य आहे.
   (A) $\sin\theta = \cos(90-\theta)$ (B) $\cos\theta = \tan(90-\theta)$
   (C) $\sin\theta = \tan(90-\theta)$ (D) $\tan\theta = \tan(90-\theta)$
   (ii) $\sin 90°$ ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?
   (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
   (iii) $2\tan 45° + \cos 45° - \sin 45°$ = किती ?
   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
   (iv) $\frac{\cos 28°}{\sin 62°}$ = किती ?
   (A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

2. काटकोन Δ TSU मध्ये $TS = 5$, $\angle S = 90°$, $SU = 12$ तर $\sin T$, $\cos T$, $\tan T$ काढा. तसेच $\sin U$, $\cos U$, $\tan U$ काढा.



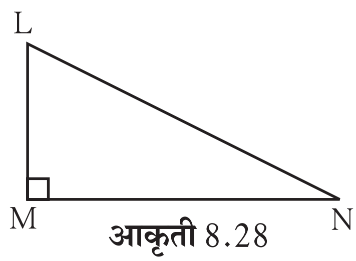
आकृती 8.26

3. काटकोन Δ YXZ मध्ये, $\angle X = 90°$, $XZ = 8$ सेमी, $YZ = 17$ सेमी तर $\sin Y$, $\cos Y$, $\tan Y$, $\sin Z$, $\cos Z$, $\tan Z$ काढा.



आकृती 8.27

4. काटकोन Δ LMN मध्ये $\angle N = \theta$, $\angle M = 90°$, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ तर $\sin\theta$ आणि $\tan\theta$ ही गुणोत्तरे काढा, तसेच $(\sin^2\theta)$ व $(\cos^2\theta)$ ची किंमत काढा.



आकृती 8.28

5. गाळलेल्या जागा भरा.
   (i) $\sin 20° = \cos \square°$
   (ii) $\tan 30° \times \tan \square° = 1$
   (iii) $\cos 40° = \sin \square°$

9 पृष्ठफळ व घनफळ

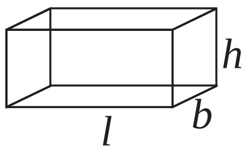
चला, शिकूया.

- शंकूचे पृष्ठफळ
- शंकूचे घनफळ
- गोलाचे पृष्ठफळ
- गोलाचे घनफळ

जरा आठवूया.

आपण मागील इयत्तेत इष्टिकाचिती, घन, वृत्तचिती या घनाकृतींचे पृष्ठफळ व घनफळ कसे काढतात हे अभ्यासले आहे.

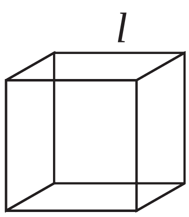
इष्टिकाचिती



आकृती 9.1

- इष्टिकाचितीची लांबी, रुंदी व उंची अनुक्रमे l , b, h असेल तर,
  (i) इष्टिकाचितीच्या उभ्या पृष्ठांचे क्षेत्रफळ $= 2(l + b) \times h$
  येथे इष्टिकाचितीच्या उभ्या 4 पृष्ठांचे क्षेत्रफळ विचारात घेतले आहे.
  (ii) इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ $= 2(lb + bh + lh)$
  येथे इष्टिकाचितीच्या सहा पृष्ठांचे क्षेत्रफळ विचारात घेतले आहे.
  (iii) इष्टिकाचितीचे घनफळ $= l \times b \times h$

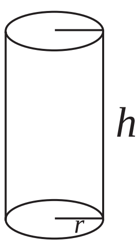
घन



आकृती 9.2

- घनाची कड (edge) l असल्यास
  (i) घनाचे एकूण पृष्ठफळ $= 6l^2$
  (ii) घनाचे उभे पृष्ठफळ $= 4l^2$
  (iii) घनाचे घनफळ $= l^3$

वृत्तचिती



आकृती 9.3

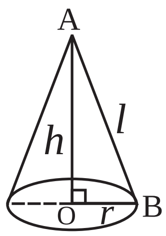
- वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या r व उंची h असल्यास
  (i) वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ $= 2\pi rh$
  (ii) वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ $= 2\pi r(r + h)$
  (iii) वृत्तचितीचे घनफळ $= \pi r^2 h$

सरावसंच 9.1

1. एका इष्टिकाचिती आकाराच्या औषधाच्या खोक्याची लांबी, रुंदी व उंची अनुक्रमे 20 सेमी, 12 सेमी व 10 सेमी आहे तर या खोक्याच्या उभ्या पृष्ठांचे क्षेत्रफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा.
2. एका इष्टिकाचिती आकाराच्या खोक्याचे एकूण पृष्ठफळ 500 चौ एकक आहे. तिची रुंदी व उंची अनुक्रमे 6 व 5 एकक आहे, तर त्या खोक्याची लांबी किती असेल ?
3. एका घनाकृतीची बाजू 4.5 सेमी आहे, या घनाकृतीच्या उभ्या पृष्ठांचे क्षेत्रफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा.
4. एका घनाचे एकूण पृष्ठफळ 5400 चौसेमी आहे तर त्या घनाच्या उभ्या पृष्ठांचे क्षेत्रफळ काढा.
5. एका इष्टिकाचितीचे घनफळ 34.50 घन मी असून तिची रुंदी व उंची अनुक्रमे 1.5 मी व 1.15 मी आहे तर त्या इष्टिकाचितीची लांबी काढा.
6. 7.5 सेमी कडा असलेल्या घनाचे घनफळ किती ?
7. एका वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 20 सेमी व उंची 13 सेमी आहे तर त्या वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा. (π = 3.14 घ्या.)
8. वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ 1980 सेमी^{2} असून तळाची त्रिज्या 15 सेमी असल्यास त्या वृत्तचितीची उंची काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

जाणून घेऊया.

शंकूशी संबंधित संज्ञा व त्यांचा परस्पर संबंध (Terms related with a cone and their relation)



आकृती 9.4

सोबतची 9.4 ही आकृती शंकूची आहे. शंकूच्या तळाचा केंद्रबिंदू O आणि शंकूचा शिरोबिंदू A आहे. रेख OA हा त्रिज्या OB ला लंब आहे. म्हणजे AO ही शंकूची लंबउंची (h) आहे. AB ही शंकूची तिरकस उंची (l) आहे.

Δ AOB काटकोन त्रिकोण आहे.

$\therefore$ पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$
$$\therefore l^2 = h^2 + r^2$$

म्हणजेच, **(तिरकस उंची)^2 = (लंब उंची)^2 + (तळाची त्रिज्या)^2**

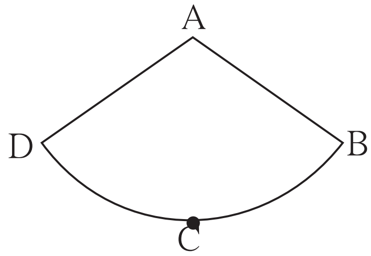
शंकूचे पृष्ठफळ (Surface area of a cone)

शंकूला दोन पृष्ठे असतात. (i) वर्तुळाकार तळ (ii) वक्रपृष्ठ

यांपैकी वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाच्या सूत्रावरून शंकूच्या तळाचे क्षेत्रफळ काढता येईल.

शंकूच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ काढण्याचे सूत्र कसे काढता येईल ?

त्यासाठी शंकूच्या वक्रपृष्ठाची घडण पाहू.



आकृती 9.5

आकृती 9.4 मधील शंकू त्याच्या AB या तिरकस उंचीवर कापून उलगडला, की त्याची घडण सोबतच्या आकृती 9.5 प्रमाणे मिळते. या आकृतीला वर्तुळपाकळी असे नाव आहे.

आकृती 9.4 आणि आकृती 9.5 यांची तुलना करा. त्यावरून पुढील बाबी तुमच्या लक्षात आल्या का ?

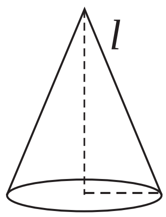
(i)वर्तुळपाकळीची त्रिज्या AB ही शंकूच्या तिरकस उंचीएवढी आहे.

(ii) वर्तुळपाकळीचा कंस BCD हे शंकूच्या तळाच्या परिघाचेच रूपांतर आहे.

(iii) शंकूच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ = A–BCD या वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ

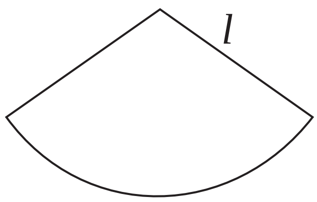
यावरून, शंकूच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी त्याच्या घडणीचे, म्हणजेच वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढावे लागेल. हे क्षेत्रफळ कसे काढता येते, हे पुढील कृतीतून समजून घ्या.

कृती शंकूच्या घडणीचा विचार करू.



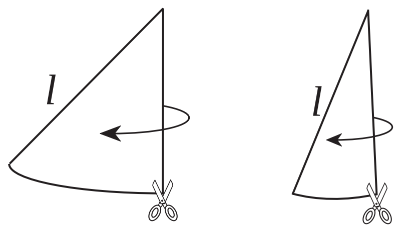
शंकू

आकृती 9.6



वक्रपृष्ठाची घडण

आकृती 9.7

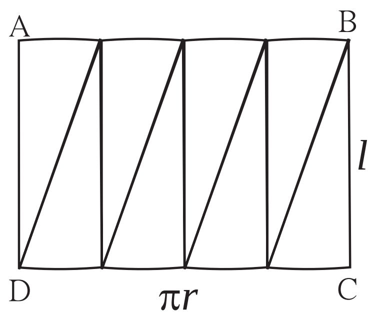


घडणीचे तुकडे

आकृती 9.8

तळाचा परीघ = $2\pi r$

एका वक्रपृष्ठाचे आकृती 9.8 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे शक्य तेवढे लहान तुकडे करा. ते आकृती 9.9 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे एकमेकांना जोडा.



आकृती 9.9

शंकूच्या वक्रपृष्ठाचे तुकडे अशा प्रकारे जोडल्यामुळे □ABCD हा जवळपास आयत झाला आहे.

AB व CD ची एकूण लांबी ही $2\pi r$ आहे.

$\therefore$ ABCD ह्या आयताच्या AB बाजूची लांबी πr आणि CD बाजूची लांबी πr आहे.

आयताच्या BC या बाजूची लांबी = शंकूची तिरकस उंची = l आहे.

$\therefore$ शंकूचे वक्रपृष्ठफळ म्हणजेच या आयताचे क्षेत्रफळ होईल.

$\therefore$ शंकूच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ = आयताचे क्षेत्रफळ = AB × BC = $\pi r \times l = \pi r l$

आता, शंकूच्या एकूण पृष्ठफळाचे सूत्रही काढता येईल.

शंकूचे एकूण पृष्ठफळ = वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ + तळाचे क्षेत्रफळ

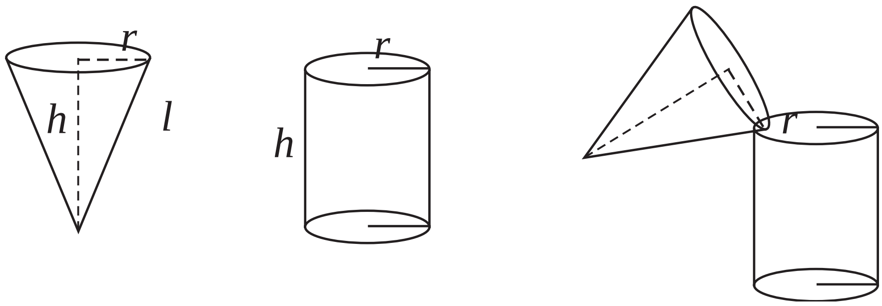
$= \pi rl + \pi r^2$

$= \pi r(l + r)$

येथे एक महत्त्वाची बाब लक्षात आली का ? शंकू बंदिस्त नसेल (म्हणजे विदूषकाच्या/ वाढदिवसाच्या टोपी सारखा असेल) तर वक्रपृष्ठ हे त्याचे एकच पृष्ठ असेल. म्हणजे त्याचे पृष्ठफळ πrl या सूत्राने मिळेल.

कृती : एक कार्डबोर्ड घ्या. त्याच्यापासून एक बंद वृत्तचिती तयार करा म्हणजेच तळाची त्रिज्या व उंची समान असलेला एक शंकू व एका बाजूने बंद अशी वृत्तचिती तयार करा, म्हणजेच शंकूची लंबउंची व वृत्तचितीची उंची समान होईल असा एक शंकू व वृत्तचिती घ्या.

शंकू बारीक वाळूने पूर्ण भरून घ्या व ती वाळू त्या वृत्तचितीमध्ये ओता. वृत्तचिती पूर्ण भरेपर्यंत ही कृती करा. वृत्तचिती वाळूने पूर्ण भरण्यासाठी किती शंकू भरून वाळू लागली ? मोजा.



आकृती 9.10

वृत्तचिती भरण्यासाठी वाळूने भरलेले असे तीन शंकू लागले.

जाणून घेऊया.

शंकूचे घनफळ (Volume of a cone)

$$3 \times \text{शंकूचे घनफळ} = \text{वृत्तचितीचे घनफळ}$$

$$\therefore\ 3 \times \text{शंकूचे घनफळ} = \pi r^2 h$$

$$\therefore\ \text{शंकूचे घनफळ} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

हे लक्षात ठेवूया.

(i) शंकूच्या तळाचे क्षेत्रफळ = πr^2 (ii) शंकूचे वक्रपृष्ठफळ = πrl

(iii) शंकूचे एकूण पृष्ठफळ = $\pi r(l + r)$ (iv) शंकूचे घनफळ = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) शंकूच्या तळाची दिलेली त्रिज्या (r) व दिलेली लंब उंची (h) घेऊन त्याची तिरकस (l)उंची काढा.

(i) $r = 6$ सेमी, $h = 8$ सेमी

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (6)^2 + (8)^2$

$\therefore l^2 = 36 + 64$

$\therefore l^2 = 100$

$\therefore l = 10$ सेमी

(ii) $r = 9$ सेमी, $h = 12$ सेमी

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (9)^2 + (12)^2$

$\therefore l^2 = 81 + 144$

$\therefore l^2 = 225$

$\therefore l = 15$ सेमी

उदा (2) एका शंकूच्या तळाची त्रिज्या 12 सेमी व लंब उंची 16 सेमी असल्यास शंकूची तिरकस उंची, वक्रपृष्ठफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$)

(i) $r = 12$ सेमी, $h = 16$ सेमी

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (12)^2 + (16)^2$

$\therefore l^2 = 144 + 256$

$\therefore l^2 = 400$

$\therefore l = 20$ सेमी

(ii) शंकूचे वक्रपृष्ठफळ $= \pi r l$

$= 3.14 \times 12 \times 20$

$= 753.6$ चौसेमी

(iii) शंकूचे एकूण पृष्ठफळ $= \pi r(l + r)$

$= 3.14 \times 12(20+12)$

$= 3.14 \times 12 \times 32$

$= 1205.76$ चौसेमी

उदा (3) एका शंकूचे एकूण पृष्ठफळ 704 चौसेमी व तळाची त्रिज्या 7 सेमी असल्यास शंकूची तिरकस उंची काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

शंकूचे एकूण पृष्ठफळ $= \pi r(l + r)$

$\therefore \quad 704 = \frac{22}{7} \times 7\ (l + 7)$

$\therefore \quad \frac{704}{22} = l + 7$

$\therefore \quad 32 = l + 7$

$\therefore \quad 32 - 7 = l$

$\therefore \quad l = 25$ सेमी

उदा (4) एका शंकूच्या तळाचे क्षेत्रफळ 1386 चौसेमी आहे आणि शंकूची उंची 28 सेमी असल्यास, शंकूचे वक्रपृष्ठफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

शंकूच्या तळाचे क्षेत्रफळ = πr^2

$\therefore \quad 1386 = \frac{22}{7} \times r^2$

$\therefore \quad \frac{1386 \times 7}{22} = r^2$

$\therefore \quad 63 \times 7 = r^2$

$\therefore \quad 441 = r^2$

$\therefore \quad r = 21$ सेमी

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (21)^2 + (28)^2$

$\therefore l^2 = 441 + 784$

$\therefore l^2 = 1225$

$\therefore l = 35$ सेमी

शंकूचे वक्रपृष्ठफळ = πrl

$= \frac{22}{7} \times 21 \times 35$

$= 22 \times 21 \times 5$

= 2310चौसेमी

सरावसंच 9.2

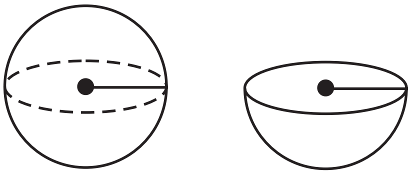
1. शंकूची लंब उंची 12 सेमी व तिरकस उंची 13 सेमी असेल तर शंकूच्या तळाची त्रिज्या किती ?
2. एका शंकूचे एकूण पृष्ठफळ 7128 सेमी^{2} आणि शंकूच्या तळाची त्रिज्या 28 सेमी असेल तर शंकूचे घनफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)
3. एका शंकूचे वक्रपृष्ठफळ 251.2 सेमी^{2} व तळाची त्रिज्या 8 सेमी असल्यास शंकूची तिरकस उंची व लंब उंची काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
4. 6 मी त्रिज्या व 8 मी तिरकस उंचीची पत्र्याची बंदिस्त शंक्वाकार घनाकृती बनविण्याचा दर 10 रु प्रति चौरस मीटर असल्यास ती घनाकृती बनवण्यासाठी लागणारा खर्च काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)
5. शंकूचे घनफळ 6280 घसेमी असून, तळाची त्रिज्या 20 सेमी आहे तर शंकूची लंबउंची काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
6. शंकूचे वक्रपृष्ठफळ 188.4 चौसेमी व तिरकस उंची 10 सेमी आहे. तर शंकूची लंबउंची काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
7. एका शंकूचे घनफळ 1232 सेमी^{3} व उंची 24 सेमी आहे, तर त्या शंकूचे वक्रपृष्ठफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)
8. एका शंकूचे वक्रपृष्ठफळ 2200 चौसेमी आहे व तिरकस उंची 50 सेमी आहे तर त्या शंकूचे एकूण पृष्ठफळ व घनफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

9*. एका शंक्वाकृती तंबूत 25 माणसे राहिली आहेत. प्रत्येकाला जमिनीवरील 4 चौमी जागा लागते. जर तंबूची उंची 18 मीटर असेल तर तंबूचे घनफळ किती ?

10*. एका शेतामध्ये गुरांसाठी कोरडा चारा शंक्वाकार रास करून ठेवला असून, राशीची उंची 2.1 मी आहे. तळाचा व्यास 7.2 मीटर आहे, तर चाऱ्याच्या राशीचे घनफळ काढा. पावसाची लक्षणे दिसली तर अशा प्रसंगी हा ढिग प्लॅस्टिकने आच्छादित करायचा असल्यास शेतकऱ्याला किती चौ.मीटर प्लॅस्टिकचा कागद लागेल ? ($\pi = \frac{22}{7}$ व $\sqrt{17.37} = 4.17$ घ्या.)

जाणून घेऊया.

गोलाचे पृष्ठफळ (Surface area of sphere)



आकृती 9.11

पोकळ गोलाचे वक्रपृष्ठफळ = $4\pi r^2$

∴ अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ = $2\pi r^2$

भरीव अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ = वक्रपृष्ठफळ + वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

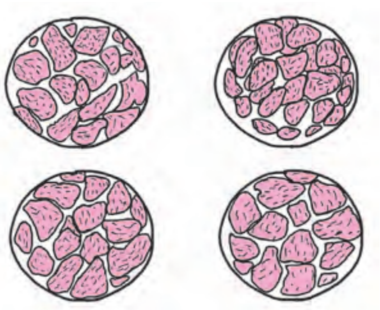
$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

कृती :

एक मोसंबे घेऊन त्याचे दोन अर्धे भाग करा.

एक भाग कागदावर पालथा ठेवून, भोवती पेन्सिल फिरवून वर्तुळ काढा. अशी एकूण चार वर्तुळे काढा. आता मोसंब्याच्या चार समान फोडी करा.



प्रत्येक फोडीच्या सालीचे लहान लहान तुकडे करा. एक वर्तुळ त्या तुकड्यांनी जवळपास भरता येते हे अनुभवा. चारही वर्तुळे पूर्ण भरतील. यावरून,

गोलाचे वक्रपृष्ठफळ = 4 × वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

$= 4\ \pi r^2$

सोडवलेली उदाहरणे

(1) एका गोलाची त्रिज्या 7 सेमी आहे, तर त्या गोलाचे वक्रपृष्ठफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

गोलाचे वक्रपृष्ठफळ $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 88 \times 7$

$= 616$

गोलाचे वक्रपृष्ठफळ = 616 चौसेमी.

(2) वक्रपृष्ठफळ 1256 चौसेमी असणाऱ्या गोलाची त्रिज्या काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)

गोलाचे वक्रपृष्ठफळ $= 4\pi r^2$

$\therefore 1256 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\therefore 1256 = \frac{1256}{4\times 3.14} = r^2$

$\therefore 1256 = \frac{31400}{314} = r^2$

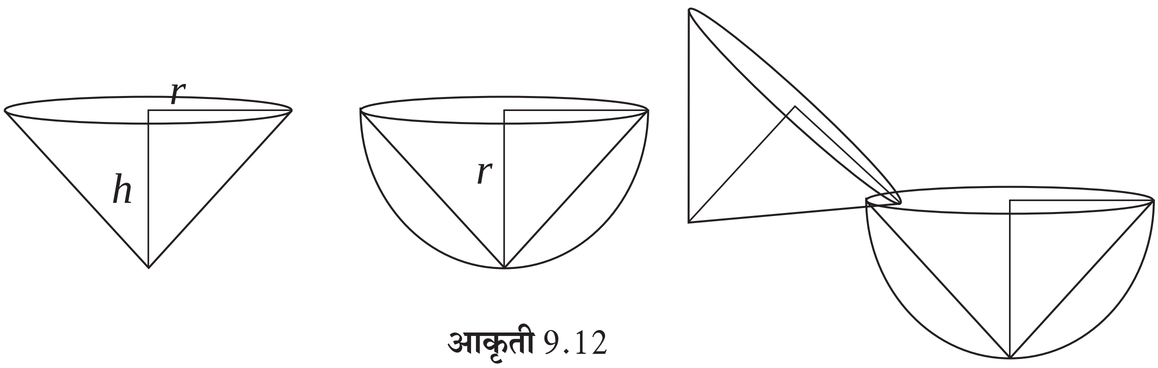
$\therefore 100 = r^2$

$\therefore 10 = r$

$\therefore r = 10$ सेमी

कृती : एक शंकू व एक अर्धगोल असे घ्या की, अर्धगोलाची त्रिज्या व शंकूची उंची समान असेल, तसेच शंकूची तळाची त्रिज्या व अर्धगोलाची त्रिज्या समान असावी.

शंकू वाळूने पूर्ण भरा. पूर्ण भरलेला शंकू अर्धगोलात ओता. अर्धगोल पूर्ण भरण्यासाठी किती शंकू लागतात ते पाहा.



आकृती 9.12

एक अर्धगोल भरण्यासाठी दोन शंकू भरून वाळू लागली.

$\therefore$ 2 × शंकूचे घनफळ = अर्धगोलाचे घनफळ

$\therefore$ अर्धगोलाचे घनफळ = 2 × शंकूचे घनफळ

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r$

$= \frac{2}{3} \pi r^3$

$\therefore$ गोलाचे घनफळ = 2 × अर्धगोलाचे घनफळ

$= \frac{4}{3} \pi r^3$

$\therefore$ गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3} \pi r^3$

हे लक्षात ठेवूया.

- अर्धगोलाचे घनफळ = $\frac{2}{3}\pi r^3$
- भरीव अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ = $2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) एका गोलाची त्रिज्या 21 सेमी आहे, तर त्या गोलाचे घनफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

उकल : गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$

$= 88 \times 441$

$\therefore$ गोलाचे घनफळ = 38808 घसेमी

उदा (2) 113040 घसेमी घनफळ असणाऱ्या गोलाची त्रिज्या शोधा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)

उकल : गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$113040 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times r^3$

$\frac{113040 \times 3}{4 \times 3.14} = r^3$

$\frac{28260 \times 3}{3.14} = r^3$

$\therefore 9000 \times 3 = r^3$

$\therefore r^3 = 27000$

$\therefore r = 30$ सेमी

गोलाची त्रिज्या 30 सेमी आहे.

उदा (3) वक्रपृष्ठफळ 314 चौसेमी असणाऱ्या गोलाचे घनफळ किती ? ($\pi = 3.14$ घ्या.)

गोलाचे वक्रपृष्ठफळ $= 4\pi r^2$

$314 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\frac{314}{4 \times 3.14} = r^2$

$\frac{31400}{4 \times 314} = r^2$

$\therefore \frac{100}{4} = r^2$

$\therefore 25 = r^2$

$\therefore r = 5$ सेमी

गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 5^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125$

$= 523.33$ घसेमी

सरावसंच 9.3

1. खाली दिलेल्या संख्या गोलांच्या त्रिज्या दर्शवतात.
   (i) 4 सेमी (ii) 9 सेमी (iii) 3.5 सेमी
   तर त्या गोलांची वक्रपृष्ठफळे व घनफळे शोधा.($\pi = 3.14$ घ्या.)
2. 5 सेमी त्रिज्या असणाऱ्या भरीव अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
3. 2826 सेमी^{2} वक्रपृष्ठफळ असणाऱ्या गोलाचे घनफळ काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
4. 38808 घसेमी घनफळ असणाऱ्या गोलाचे वक्रपृष्ठफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)
5. एका अर्धगोलाचे घनफळ 18000 π घसेमी आहे, तर त्या गोलाचा व्यास काढा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 9

1. 0.9 मी व्यास व 1.4 मी लांबी असणाऱ्या रोड रोलरच्या 500 फेऱ्यांमध्ये सपाट केलेल्या जमिनीचे क्षेत्रफळ किती ? ($\pi = \frac{22}{7}$)
2. एक इष्टिकाचिती आकाराचे घरगुती मत्स्यालय बनवण्यासाठी 2 मिमी जाडीची काच वापरली. मत्स्यालयाची (च्या भिंतींची) बाहेरून लांबी, रुंदी व उंची अनुक्रमे सेंटिमीटरमध्ये $60.4 \times 40.4 \times 40.2$ आहे, तर त्या मत्स्यालयात जास्तीत जास्त किती पाणी मावेल?
3. एका शंकूच्या तळाची त्रिज्या व लंबउंची यांचे गुणोत्तर 5:12 आहे. शंकूचे घनफळ 314 घमी असल्यास त्याची लंबउंची व तिरकस उंची काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
4. एका गोलाचे घनफळ 904.32 घसेमी आहे तर त्या गोलाची त्रिज्या काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
5. एका घनाचे एकूण पृष्ठफळ 864 चौसेमी आहे तर त्याचे घनफळ काढा.
6. ज्या गोलाचे पृष्ठफळ 154 चौसेमी आहे. अशा गोलाचे घनफळ काढा.
7. एका शंकूचे एकूण पृष्ठफळ 616 चौसेमी आहे. त्याची तिरकस उंची ही तळाच्या त्रिज्येच्या तिप्पट असल्यास तिरकस उंची काढा.
8. वर्तुळाकार विहिरीचा आतील व्यास 4.20 मीटर आहे. विहिरीची खोली 10 मीटर आहे. तर त्याचे आतील वक्रपृष्ठफळ किती? विहिरीच्या आतील वक्रपृष्ठाला गिलावा करण्यासाठी प्रतिचौमी 52 रुपये दराने किती खर्च येईल?
9. एका रोडरोलरची लांबी 2.1 मीटर असून त्याचा व्यास 1.4 मीटर आहे. एका मैदानाचे सपाटीकरण करताना रोलरचे 500 फेरे पूर्ण होतात, तर रोलरने किती चौमी मैदान सपाट होईल? सपाटीकरणाचा दर प्रति चौमी 7 रुपये दराने किती खर्च येईल?

उत्तरसूची

1. भूमितीतील मूलभूत संबोध

सरावसंच 1.1

1. (i) 3 (ii) 3 (iii) 7 (iv) 1
(v) 3 (vi) 5 (vii) 2 (viii) 7

2. (i) 6 (ii) 8 (iii) 10 (iv) 1 (v) 3 (vi) 12

3. (i) P-R-Q (ii) एकरेषीय नाहीत (iii) A-C-B (iv) एकरेषीय नाहीत
(v) X-Y-Z (vi) एकरेषीय नाहीत

4. 18 व 2 **5.** 25 व 9 **6.** (i) 4.5 (ii) 6.2 (iii) $2\sqrt{7}$ **7.** त्रिकोण

सरावसंच 1.2

1. (i) नाहीत (ii) नाहीत (iii) आहेत **2.** 4 **3.** 5 **4.** BP < AP < AB

5. (i) किरण RS किंवा किरण RT (ii) किरण PQ (iii) रेख QR (iv) किरण QR व किरण RQ इ.
(v) किरण RQ व किरण RT इ. (vi) किरण SR , किरण ST इ. (vii) बिंदू S

6. (i) बिंदू A व बिंदू C , बिंदू D व बिंदू P (ii) बिंदू L व बिंदू U , बिंदू P बिंदू R
(iii) $d(U,V) = 10$, $d(P,C) = 6$, $d(V,B) = 3$, $d(U,L) = 2$

सरावसंच 1.3

1. (i) जर एखादा चौकोन समांतरभुज असेल तर त्या चौकोनाचे संमुख कोन एकरूप असतात.
(ii) जर एखादा चौकोन आयत असेल तर त्या चौकोनाचे कर्ण एकरूप असतात.
(iii) जर एखादा त्रिकोण समद्विभुज असेल तर त्या त्रिकोणाचा शिरोबिंदू व पायाचा मध्यबिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड पायाला लंब असतो.

2. (i) जर दोन रेषा व त्यांची छेदिका दिली असता होणारे व्युत्क्रम कोन एकरूप असतील तर त्या दोन रेषा समांतर असतात.
(ii) दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणाऱ्या आंतरकोनांची जोडी पूरक असते .
(iii) जर एखाद्या चौकोनाचे कर्ण एकरूप असतील तर तो चौकोन आयत असतो.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. (i) A (ii) C (iii) C (iv) C (v) B

2. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य

3. (i) 3 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 2 (v) 6 (vi) 22 (vii) 165

4. -15 व 1 (5) (i) 10.5 (ii) 9.1 (6) -6 व 8

2. समांतर रेषा

सरावसंच 2.1

1. (i) 95° (ii) 95° (iii) 85° (iv) 85°
2. $\angle a = 70°$, $\angle b = 70°$, $\angle c = 115°$, $\angle d = 65°$
3. $\angle a = 135°$, $\angle b = 135°$, $\angle c = 135°$
5. (i) 75° (ii) 75° (iii) 105° (iv) 75°

सरावसंच 2.2

1. नाही. **4.** $\angle ABC = 130°$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. (i) C (ii) C (iii) A (iv) B (v) C **4.** $x = 130°$ $y = 50°$
5. x = $126^{0°}$ **6.** f = 100° $g = 80°$

3. त्रिकोण

सरावसंच 3.1

1. 110° **2.** 45° **3.** 80°, 60°, 40° **4.** 30°, 60°, 90°
5. 60°, 80°, 40° **6.** $\angle DRE = 70°$, $\angle ARE = 110°$
7. $\angle AOB = 125°$ **9.** 30°, 70°, 80°

सरावसंच 3.2

1. (i) बाबाबा (ii) बाकोबा (iii) कोबाको (iv) कर्णभुजा
2. (i) कोबाको, $\angle BAC \cong \angle QPR$,रेख AB ≅ रेख PQ, रेख AC ≅ रेख PR
   (ii) बाकोबा, $\angle TPQ \cong \angle TSR$, $\angle TQP \cong \angle TRS$, रेख PQ ≅ रेख SR
3. कर्णभुजा, $\angle ACB \cong \angle QRP$, $\angle ABC \cong \angle QPR$, रेख AC ≅ रेख QR
4. बाबाबा, $\angle MLN \cong \angle MPN$, $\angle LMN \cong \angle MNP$, $\angle LNM \cong \angle PMN$

सरावसंच 3.3

1. $x = 50°$, $y = 60°$, $m\angle ABD = 110°$, $m\angle ACD = 110°$.
2. 7.5 एकक **3.** 6.5 एकक **4.** $l(PG) = 5$ सेमी , $l(PT) = 7.5$ सेमी

सरावसंच 3.4

1. 2 सेमी **2.** 28° **3.** $\angle QPR$, $\angle PQR$ **4.** बाजू NA, बाजू FN

सरावसंच 3.5

1. $\frac{XY}{LM} = \frac{YZ}{MN} = \frac{XZ}{LN}$, $\angle X \cong \angle L$, $\angle Y \cong \angle M$, $\angle Z \cong \angle N$
2. $l(QR) = 12$ सेमी, $l(PR) = 10$ सेमी

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. (i) D (ii) B (iii) B

5. चौकोन

सरावसंच 5.1

1. m$\angle$XWZ = 135°, m$\angle$YZW = 45° , l (WY) = 10 सेमी
2. x = 40° , $\angle$C = 132° , $\angle$D = 48°
3. 25 सेमी, 50 सेमी, 25 सेमी, 50 सेमी
4. 60°, 120°, 60°, 120°
6. $\angle$A = 70° , $\angle$B = 110° , $\angle$C = 70° , $\angle$R = 110°

सरावसंच 5.3

1. BO = 4 सेमी, $\angle$ACB = 35°
2. QR = 7.5 सेमी, $\angle$PQR = 105°, $\angle$SRQ = 75°
3. $\angle$IMJ = 90°, $\angle$JIK = 45°, $\angle$LJK = 45°
4. बाजू = 14.5 सेमी, परिमिती = 58 सेमी
5. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) सत्य (vi) असत्य

सरावसंच 5.4

1. $\angle$J = 127°, $\angle$L = 72° 2. $\angle$B = 108°, $\angle$D = 72°

सरावसंच 5.5

1. XY = 4.5 सेमी, YZ = 2.5 सेमी, XZ = 5.5 सेमी

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. (i) D (ii) C (iii) D 2. 25 सेमी, 3. $6.5\sqrt{2}$ सेमी
4. 24 सेमी, 32 सेमी, 24 सेमी, 32 सेमी 5. PQ = 26 सेमी 6. $\angle$MPS = 65°

6. वर्तुळ

सरावसंच 6.1

1. 20 सेमी 2. 5 सेमी 3. 32 एकक 4. 9 एकक

सरावसंच 6.2

1. 12 सेमी 2. 24 सेमी

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. (i) A (ii) C (iii) A (iv) B (v) D (vi) C (vii) D 2. 2:1 4. 24 एकक

7. निर्देशक भूमिती

सरावसंच 7.1

1. बिंदू A : चरण II, बिंदू B : चरण III, बिंदू K : चरण I, बिंदू D : चरण I
बिंदू E : चरण I, बिंदू F : चरण IV, बिंदू G : चरण IV, बिंदू H : Y-अक्ष
बिंदू M : X-अक्ष, बिंदू N : Y-अक्ष, बिंदू P : Y-अक्ष, बिंदू Q : चरण III

2. (i) चरण I (ii) चरण III (iii) चरण IV (iv) चरण II

सरावसंच 7.2

1. चौरस 2. $x = -7$ 3. $y = -5$ 4. $x = -3$ 5. 4 एकक

6. (i) Y-अक्ष (ii) X-अक्ष (iii) Y-अक्ष (iv) X-अक्ष

7. X अक्षाला (5,0) , Y अक्षाला (0,5)

8. (-4,1), (-1.5, 1), (-1.5,5), (-4,5)

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. (i) C (ii) A (iii) B (iv) C (v) C (vi) B **2.** (i) Q (2,2), R(4,-1) (ii) T(0,-1), M(3,0) (iii) बिंदू S (iv) बिंदू O **3.** (i) चरण IV (ii) चरण III (iii) चरण II (iv) चरण II (v) Y अक्ष (vi) X अक्ष **5.** (i) 3 (ii) P(3,2), Q(3,-1), R (3,0) (iii) 0 **6.** दोन रेषा. $y = 5, y = -5$ **7.** $|a|$

8. त्रिकोणमिती

सरावसंच 8.1

1. (i) $\frac{QR}{PQ}$ (ii) $\frac{QR}{PQ}$ (iii) $\frac{QR}{PR}$ (iv) $\frac{PR}{QR}$

2. (i) $\frac{a}{c}$ (ii) $\frac{b}{a}$ (iii) $\frac{b}{c}$ (iv) $\frac{a}{b}$

3. (i) $\frac{MN}{LN}$ (ii) $\frac{LM}{LN}$ (iii) $\frac{LM}{MN}$ (iv) $\frac{MN}{LN}$

4. (i) $\frac{PQ}{PR}, \frac{RQ}{PR}, \frac{PQ}{RQ}$ (ii) $\frac{QS}{PS}, \frac{PQ}{PS}, \frac{QS}{PQ}$

सरावसंच 8.2

1. $\sin\theta : \frac{12}{37}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{21}{29}, \frac{8}{17}, \frac{1}{3}$; $\cos\theta : \frac{60}{61}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{20}{29}, \frac{15}{17}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta : \frac{12}{35}, \frac{11}{60}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \frac{3}{4}$

2. (i) $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{93}{20}$ (iii) 5 (iv) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (v) $\frac{3}{4}$ (vi) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{8}{17}$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 8

1. (i) A (ii) D (iii) C (iv) D
2. $\sin T = \frac{12}{13}$, $\cos T = \frac{5}{13}$, $\tan T = \frac{12}{5}$, $\sin U = \frac{5}{13}$, $\cos U = \frac{12}{13}$, $\tan U = \frac{5}{12}$
3. $\sin Y = \frac{8}{17}$, $\cos Y = \frac{15}{17}$, $\tan Y = \frac{8}{15}$, $\sin Z = \frac{15}{17}$, $\cos Z = \frac{8}{17}$, $\tan Z = \frac{15}{8}$
4. $\sin \theta = \frac{7}{25}$, $\tan \theta = \frac{7}{24}$, $\sin^2 \theta = \frac{49}{625}$, $\cos^2 \theta = \frac{576}{625}$
5. (i) 70 (ii) 60 (iii) 50

9. पृष्ठफळ व घनफळ

सरावसंच 9.1

1. 640 चौसेमी, 1120 चौसेमी 2. 20 एकक 3. 81 चौसेमी, 121.50 चौसेमी
4. 3600 चौसेमी 5. 20 मी 6. 421.88 घसेमी
7. 1632.80 चौसेमी, 4144.80 चौसेमी 8. 21 सेमी

सरावसंच 9.2

1. 5 सेमी 2. 36960 घसेमी 3. 10 सेमी, 6 सेमी 4. ₹ 2640
5. 15 सेमी 6. 8 सेमी 7. 550 चौसेमी 8. 2816 चौसेमी, 9856 घसेमी
9. 600 घमी 10. 28.51 घमी, 47.18 चौमी

सरावसंच 9.3

1. (i) 200.96 चौसेमी, 267.95 घसेमी (ii) 1017.36 चौसेमी, 3052.08 घसेमी
(iii) 153.86 चौसेमी, 179.50 घसेमी
2. 157 चौसेमी, 235.5 चौसेमी 3. 14130 घसेमी 4. 5544 चौसेमी 5. 60 सेमी

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 9

1. 1980 चौमी 2. 96801.6 घसेमी 3. 12 मी, 13 मी
4. 6 सेमी 5. 1728 घसेमी 6. 179.67 घसेमी
7. 21 सेमी 8. 132 चौमी, ₹ 6864 9. 4620 चौमी, ₹ 32340

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे–४११००४.

₹ ६१.००

Downloaded from https:// www.studiestoday.com