Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जरा आठवूया.

पूर्ण वर्ग संख्येचे वर्गमूळ काढणे

दिलेल्या संख्येला त्याच संख्येने गुणले असता येणारा गुणाकार हा त्या संख्येचा वर्ग असतो.

उदा. $6 \times 6 = 6^2 = 36$

$6^2 = 36$ याचे वाचन आपण 6 चा वर्ग 36 आहे असे करतो.

उदा. $(-5) \times (-5) = (-5)^2 = 25$

$(-5)^2 = 25$ याचे वाचन (-5) चा वर्ग 25 असे आहे.

जाणून घेऊया.

✱ दिलेल्या संख्येचे वर्गमूळ काढणे.

उदा. $3 \times 3 = 3^2 = 9$ येथे 3 चा वर्ग 9 आहे.

हीच माहिती 9 चे वर्गमूळ 3 आहे अशा रूपात लिहिता येते.

वर्गमुळासाठी $\sqrt{\ }$ ही खूण वापरतात. $\sqrt{9}$ म्हणजे 9 चे वर्गमूळ $\therefore \sqrt{9} = 3$ आहे.

उदा. $7 \times 7 = 7^2 = 49$ $\therefore \sqrt{49} = 7$

उदा. $8 \times 8 = 8^2 = 64$ यावरून $\sqrt{64} = 8$

$(-8) \times (-8) = (-8)^2 = 64$ यावरून 64 चे वर्गमूळ -8 असेही मिळते.

x ही धन संख्या असेल तर तिची दोन वर्गमुळे असतात.

त्यांपैकी ऋण वर्गमूळ $-\sqrt{x}$ ने व धन वर्गमूळ $\sqrt{x}$ ने दर्शवले जाते.

उदा. 81 चे वर्गमूळ काढा.

$81 = 9 \times 9 = -9 \times -9$ $\therefore \sqrt{81} = 9$ आणि $-\sqrt{81} = -9$

आपण बहुतेक वेळा धन वर्गमुळाचा विचार करतो.

✱ दिलेल्या संख्येचे अवयव पद्धतीने वर्गमूळ काढणे.

उदा. 144 चे वर्गमूळ काढा.

दिलेल्या संख्येचे मूळ अवयवां पासून समान अवयवांच्या जोड्या करा.

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$144 = 2 \times 72$

$= 2 \times 2 \times 36$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 18$

$= \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

मिळालेल्या अवयवांमधील समान अवयवांच्या जोड्या तयार करा.

प्रत्येक जोडीतील एक अवयव घेऊन त्यांचा गुणाकार करा.

$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3 = 12$ $\therefore \sqrt{144} = 12$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदा. 324 चे वर्गमूळ काढा.

दिलेल्या संख्येचे मूळ अवयव काढून समान अवयवांच्या जोड्या करा.

$$\begin{aligned}324 &= 2 \times 162\\ &= 2 \times 2 \times 81\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 27\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9\\ &= \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}\end{aligned}$$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

वर्गमुळासाठी प्रत्येक जोडीतील एक संख्या घ्या व गुणाकार करा.

$\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

$\therefore \sqrt{324} = 18$

सरावसंच 30

⊙ वर्गमूळ काढा.

(i) 625 (ii) 1225 (iii) 289 (iv) 4096 (v) 1089

✸ अधिक माहितीसाठी (भागाकार पद्धतीने वर्गमूळ)

(1) 9801 चे वर्गमूळ काढा.

	99
9	$\overline{98}\,\overline{01}$
+9	−81
189	1701
+ 9	−1701
198	0000

$\sqrt{9801} = 99$

(2) 19321 चे वर्गमूळ काढा.

	139
1	$\overline{1}\,\overline{93}\,\overline{21}$
+ 1	−1
23	093
+ 3	− 69
269	2421
+ 9	− 2421
278	0000

(3) 141.61 चे वर्गमूळ काढा.

	11.9
1	$\overline{1}\,\overline{41}.\overline{61}$
+ 1	− 1
21	041
+ 1	− 21
229	2061
+ 9	− 2061
238	0000

ज्या संख्येचे मूळ अवयव फार मोठे आहेत व त्यामुळे अवयव पाडणे कठीण आहे, तिचे वर्गमूळ शोधण्यासाठी ही पद्धत उपयोगी पडते.

आता आणखी एक उपयोग पाहण्यासाठी $\sqrt{137}$ काढू.

	11.7
1	$\overline{1}\,\overline{37}.\overline{00}$
+ 1	−1
21	037
+ 1	− 21
227	1600
+ 7	− 1589
234	11

$\sqrt{137} > 11.7$

पण $(11.8)^2 = 139.24$

$\therefore 11.7 < \sqrt{137} < 11.8$

याप्रमाणे $\sqrt{137}$ च्या जवळपासची संख्या शोधता येते.

ज्या संख्येचे वर्गमूळ पूर्ण संख्या नाही, तिच्या वर्गमुळाच्या जवळपासचा दशांश अपूर्णांक या पद्धतीने मिळू शकतो.

❑❑❑

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

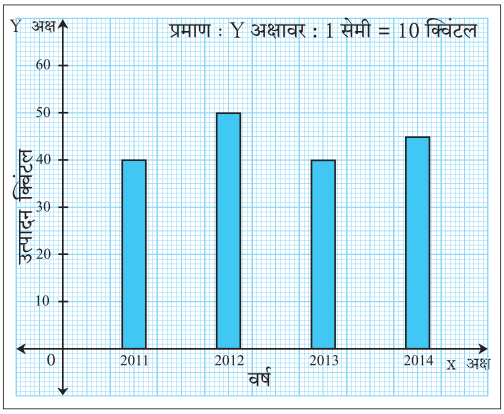
7 जोडस्तंभालेख

चला, चर्चा करूया.

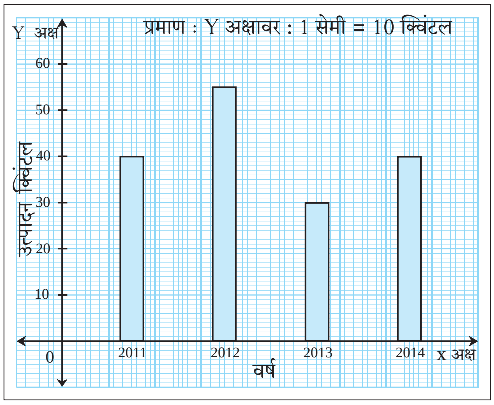
जोडस्तंभालेख

अजय आणि विजय यांच्या शेतातील गव्हाचे उत्पादन क्विंटलमध्ये किती आहे याची माहिती खाली दोन स्तंभालेखांमध्ये दर्शवली आहे. त्यांचे निरीक्षण करा.

अजयचे गहू उत्पादन

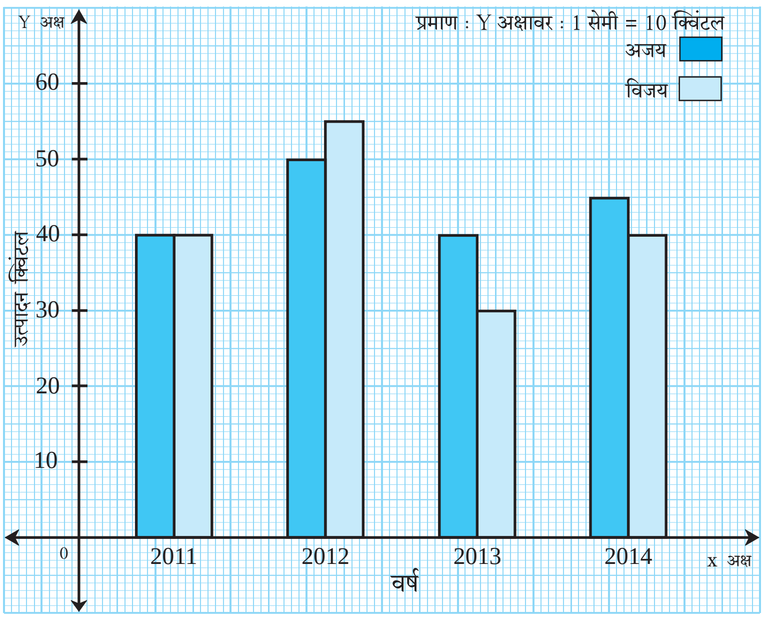


विजयचे गहू उत्पादन



दोन्ही आलेखांतील माहिती एकाच आलेखात दाखवता येते का ते पाहू. पुढील आलेख पाहा. याप्रमाणे कमी जागेत जास्त माहिती देता येईल, तसेच अजय व विजय यांच्या गव्हाच्या उत्पादनाची तुलना करणे सोपे जाईल. अशा प्रकारच्या स्तंभालेखाला जोडस्तंभालेख म्हणतात.

अजयचे आणि विजयचे गहू उत्पादन



जोडस्तंभालेखाचे निरीक्षण करून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

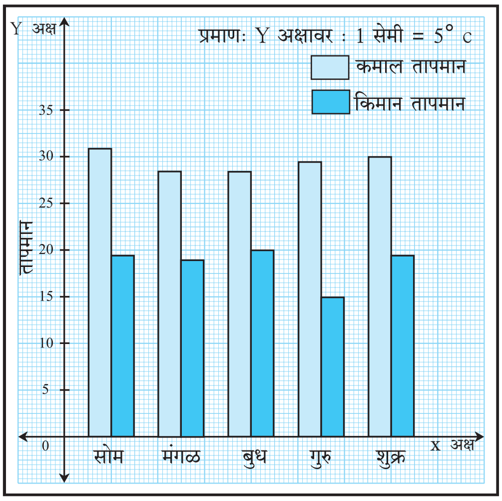
- कोणत्या वर्षी दोघांचे गव्हाचे उत्पादन सारखेच आहे ?
- 2014 साली कोणाचे गव्हाचे उत्पादन जास्त होते ?
- 2013 साली प्रत्येकाचे गव्हाचे उत्पादन किती होते ?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जोडस्तंभालेखाचे वाचन

पुणे शहरातील पाच दिवसांचे कमाल व किमान तापमान (°C मध्ये) दिले आहे. जोडस्तंभालेखाचे निरीक्षण करून पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या.



- X – अक्षावर कोणती माहिती दर्शवली आहे ?
- Y – अक्षावर कोणती माहिती दर्शवली आहे ?
- सर्वांत जास्त तापमान कोणत्या दिवशी आहे ?
- किमान तापमान कोणत्या दिवशी सर्वांत जास्त आहे ?
- गुरुवारी कमाल व किमान तापमानांत फरक किती ?
- कोणत्या दिवशी कमाल व किमान तापमानांतील फरक सर्वांत जास्त आहे ?

जाणून घेऊया.

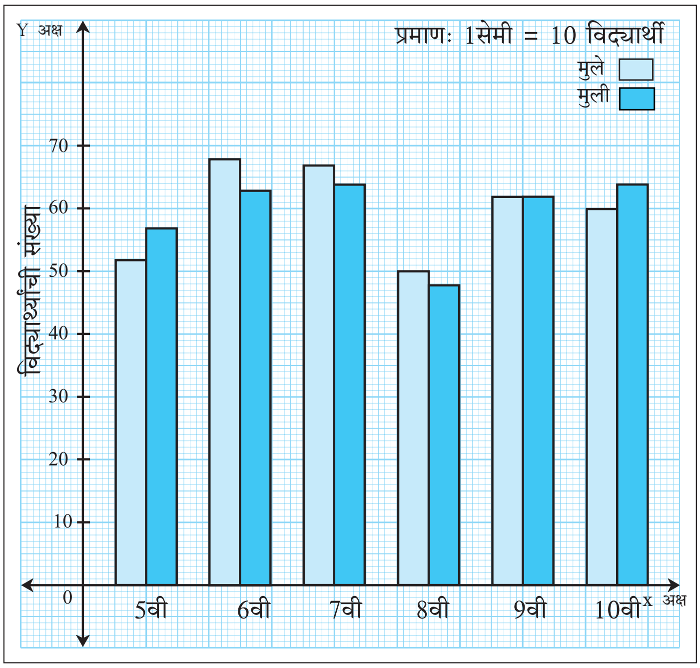
जोडस्तंभालेख (Joint bar graph) काढणे

एका शाळेतील मुले आणि मुली यांची संख्या दिली आहे. माहितीवरून जोडस्तंभालेख तयार करा.

इयत्ता	5वी	6वी	7वी	8वी	9वी	10वी
मुले	52	68	67	50	62	60
मुली	57	63	64	48	62	64

जोडस्तंभालेखासाठी पायऱ्या

1. आलेख कागदावर X अक्ष व Y अक्ष आणि त्यांचा छेदनबिंदू दाखवा.
2. दोन जोडस्तंभालेखांतील अंतर समान ठेवून X अक्षावर इयत्ता दाखवा.
3. Y अक्षावर प्रमाण ठरवा.
   जसे 1 एकक = 10 मुले/मुली,
   Y अक्षावर मुलांची/मुलींची संख्या दर्शवा.
4. ठरविलेल्या प्रमाणानुसार प्रत्येक इयत्तेतील मुलांच्या व मुलींच्या संख्या दाखवणाऱ्या स्तंभांची उंची ठरवा व स्तंभालेख काढा. दोन स्तंभ वेगळे दाखवण्यासाठी वेगळे रंग वापरा.



Downloaded from https:// www.studiestoday.com

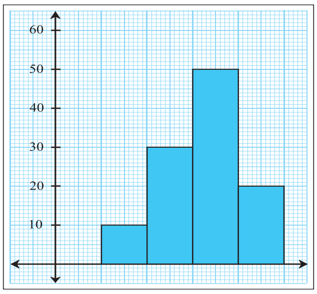
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

हे मला समजले.

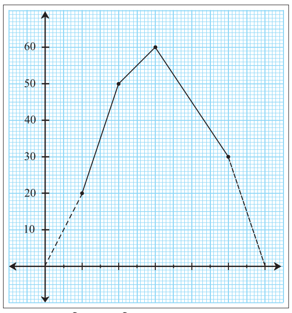
- जोडस्तंभालेखात सर्व स्तंभांची रुंदी समान असावी.
- लगतच्या दोन्ही जोडस्तंभांतील अंतर समान असावे.
- जोडस्तंभालेखाचा वापर तुलनात्मक अभ्यासासाठी करतात.

गणित माझा सोबती : वर्तमानपत्र, मासिके, माहितीचे सादरीकरण

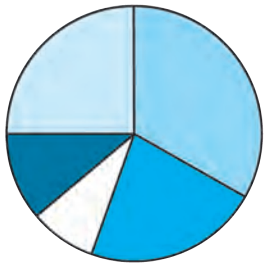
- वृत्तपत्रातील विविध प्रकारच्या आलेखांचा संग्रह करून त्यावर चर्चा करा.



1. स्तंभालेख



2. रेषालेख



3. वृत्तालेख

ICT Tools or Links

माहितीचे सादरीकरण करताना जोडस्तंभालेखाऐवजी विविध आलेखांचा वापर केला जातो. MS-Excell, Graph Matica, Geogebra यांमध्ये असलेले वेगवेगळे आलेख शिक्षकांच्या मदतीने पाहा.

सरावसंच 31

1. जागतिक वृक्षदिनी दोन शाळांनी लावलेल्या रोपांची संख्या सारणीमध्ये दिली आहे, त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

रोपाचे नाव / शाळेचे नाव	बदाम	करंज	कडुलिंब	अशोक	गुलमोहर
नूतन विद्यालय	40	60	72	15	42
भारत विद्यालय	42	38	60	25	40

2. एका ज्यूस सेंटरवर शनिवारी व रविवारी वेगवेगळ्या फळांचे ज्यूस घेण्यासाठी आलेल्या ग्राहकांची संख्या सारणीत दर्शवली आहे. त्या माहितीवरून जोडस्तंभालेख काढा.

फळे / वार	मोसंबी	संत्री	सफरचंद	अननस
शनिवार	43	30	56	40
रविवार	59	65	78	67

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

3. ग्रामपंचायत निवडणुकीमध्ये पाच मतदान केंद्रांवर खालीलप्रमाणे मतदान झाले. त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

केंद्र क्रमांक / व्यक्ती	1	2	3	4	5
पुरुष	200	270	560	820	850
स्त्रिया	700	240	340	640	470

4. भारतातील पाच शहरांचे कमाल व किमान तापमान °C मध्ये दिले आहे. त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

शहर / तापमान	दिल्ली	मुंबई	कोलकता	नागपूर	कपूरथला
कमाल तापमान	35	32	37	41	37
किमान तापमान	26	25	26	29	26

5. सारणीमध्ये सोलापूर, पुणे येथील शासकीय रुग्णालयात एका दिवसात लसीकरण केलेल्या बालकांची संख्या दिली आहे. त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

लसीचे नाव / शहर	डी. पी.टी. पूरक	पोलिओ पूरक	गोवर	कावीळ
सोलापूर	65	60	65	63
पुणे	89	87	88	86

6. महाराष्ट्र व गुजरात राज्यांतील साक्षर लोकांचे प्रमाण शेकडेवारीमध्ये दिलेले आहे. त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

सन / राज्य	1971	1981	1991	2001	2011
महाराष्ट्र	46	57	65	77	83
गुजरात	40	45	61	69	79

गणिती गंमत

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

यावरून $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ हे सूत्र लक्षात येते का ?

हे सूत्र $n = 5, 6, 7, 8, \dots$ या संख्यांसाठी पडताळून पहा.

विज्ञानाच्या प्रयोगांतील नोंदींवरून अनुमान काढण्यासाठी तसेच भूगोल, अर्थशास्त्र यांमध्येही जोडस्तंभालेखाचा उपयोग होतो.

❑❑❑

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

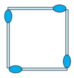
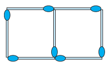
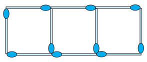
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

8 बैजिक राशी व त्यांवरील क्रिया

जाणून घेऊया.

बैजिक राशी (Algebraic expressions)

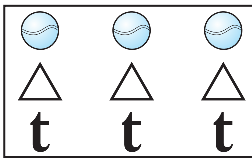
- खाली दिलेल्या काड्यांची रचना पाहा व आकृतिबंधाचे निरीक्षण करा.

काड्यांची रचना				......	..	......	..	......
चौरस	1	2	3	4	..	10	..	n
काड्यांची संख्या	4	7	10	13	..	......	..	......
	3 + 1	6 + 1	9 + 1	12 + 1	..	......	..	......
	$3 \times 1 + 1$	$3 \times 2 + 1$	$3 \times 3 + 1$	$3 \times 4 + 1$		$3 \times 10 + 1$		$3 \times n + 1$

वरील आकृतिबंधाचे निरीक्षण करून लक्षात येते की, काड्यांची संख्या = 3 × चौरसांची संख्या + 1

चौरसांची संख्या बदलती आहे. ती 2, 3, 4, ... , 10,... यांपैकी काहीही असू शकते. चौरसांची संख्या माहीत नसल्यास ती अक्षराने दाखवतात. येथे चौरसांची संख्या n या अक्षराने दाखवली आहे.

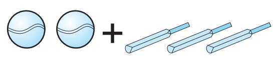
n हे चल आहे. चलाचा उपयोग केलेली $3 \times n + 1$ म्हणजेच $3n + 1$ ही बैजिक राशी आहे.



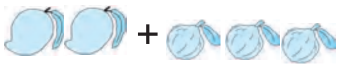
= 3 चेंडू

= 3 त्रिकोण

= $3t$

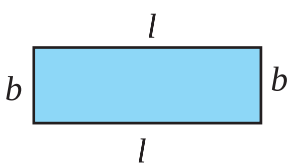


= □ चेंडू + □ बॅट



= □ आंबे + □ पेरू

$x + x + y + y + y = 2x + 3y$



आयताची परिमिती $= 2l + 2b$

$= 2(l + b)$

हे मला समजले.

- $3n + 1$, $3t$, $2x + 3y$, $2(l + b)$ या बैजिक राशी आहेत.
  या राशींमध्ये n, t, y, l, b, x ही चले आहेत.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.

$3x$ या राशीत 3 हा x या चलाचा सहगुणक (coefficient) आहे.

$-15t$ मध्ये -15 हा t या चलाचा सहगुणक आहे.

ज्या राशीत गुणाकार ही एकच क्रिया असते त्या राशीला पद (term) म्हणतात.

बैजिक राशी एकपदी असते किंवा अनेक पदांची बेरीज असते.

पद	सहगुणक	चले
$11mn$	11	m, n
$-9x^2y^3$	-9	x, y
$\frac{5}{6}p$	$\frac{5}{6}$	p
a	1	a

उदा. बैजिक राशी : $4x^2 - 2y + \frac{5}{6}xz$

या राशीत $4x^2$ हे पहिले पद आहे. त्यात 4 हा सहगुणक आहे.

$-2y$ हे दुसरे पद आहे. त्यात -2 हा सहगुणक आहे.

$\frac{5}{6}xz$ हे तिसरे पद आहे. त्यात $\frac{5}{6}$ हा सहगुणक आहे.

लक्षात ठेवा:

- $15 - x$ या बैजिक राशीत दोन पदे आहेत. पहिले पद 15 ही एक संख्या आहे.
  $15 - x = 15 + (-x)$ $\therefore$ दुसरे पद $-x$ आहे. या पदामधील x या चलाचा सहगुणक (-1) आहे.
- ज्या पदांतील चले व त्यांचे घातांक समान असतात, त्या पदांना सरूप पदे (सजातीय पदे) म्हणतात.

सजातीय पदे (सरूप पदे) (Like terms)

(i) $2x, \; 5x, \; -\frac{2}{3}x$ (ii) $-5x^2y, \; \frac{6}{7}yx^2$

विजातीय पदे (भिन्नरूप पदे) (Unlike terms)

(i) $7xy, \; 9y^2, \; -2xyz, \; 8mn, \; 8m^2n^2, \; 8m^3n$

बैजिक राशींचे प्रकार (Types of algebraic expressions)

पदांच्या संख्येवरून राशीचे नाव ठरते. एक पद असल्यास एकपद राशी, दोन पदे असल्यास द्विपद राशी, तीन पदे असल्यास त्रिपद राशी, तीनहून जास्त पदे असल्यास बहुपद राशी असे नाव दिले जाते.

एकपद राशी	द्विपद राशी	त्रिपद राशी	बहुपद राशी
• $4x$	• $2x - 3y$	• $a + b + c$	• $a^3 - 3a^2b + 3ab - b^3$
• $\frac{5}{6}m$	• $2l + 2b$	• $x^2 - 5x + 6$	• $4x^4 - 7x^2 + 9 - 5x^3 - 16x$
• -7	• $3mn - 5m^2n$	• $8a^3 - 5a^2b + c$	• $5x^5 - \frac{1}{2}x + 8x^3 - 5$

सरावसंच 32

⊙ खालील राशींचे पदांच्या संख्येवरून एकपद राशी, द्विपद राशी इत्यादी प्रकारे वर्गीकरण करा.

(i) $7x$ (ii) $5y - 7z$ (iii) $3x^3 - 5x^2 - 11$ (iv) $1 - 8a - 7a^2 - 7a^3$

(v) $5m - 3$ (vi) a (vii) 4 (viii) $3y^2 - 7y + 5$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.

बैजिक राशींची बेरीज (Addition of algebraic expressions)

✸ एकपदींची बेरीज (Addition of monomials)

उदा. 3 पेरू + 4 पेरू = (3 + 4) पेरू = 7 पेरू   **उदा.** $3x + 4x = (3 + 4)\ x = 7x$

सजातीय पदांची बेरीज एकाच प्रकारच्या वस्तूंच्या बेरजेप्रमाणे करतात.

उदा. बेरीज करा.

(i) $-3x - 8x + 5x = (-3 - 8 + 5)x = -6x$

(ii) $\frac{2}{3}ab - \frac{5}{7}ab = (\frac{2}{3} - \frac{5}{7})\ ab = \frac{-1}{21}\ ab$

(iii) $-2p^2 + 7p^2 = (-2 + 7)p^2 = 5p^2$

> विचार करा.
> $3x + 4y$ = किती?
> 3 पेरू + 4 आंबे = 7 पेरू ?
> $7m - 2n = 5m$?

✸ द्विपद राशींची बेरीज (Addition of binomial expressions)

आडवी मांडणी

उदा. $(2x + 4y) + (3x + 2y)$

$= 2x + 3x + 4y + 2y$

$= 5x + 6y$

उभी मांडणी

$$\begin{array}{r} 2x + 4y \\ +\quad 3x + 2y \\ \hline 5x + 6y \end{array}$$

सजातीय पदांची बेरीज करताना त्या पदांच्या सहगुणकांची बेरीज करून त्यापुढे चल लिहितात.

उदा. बेरीज करा. $9x^2y^2 - 7xy$; $3x^2y^2 + 4xy$

आडवी मांडणी

$(9x^2y^2 - 7xy) + (3x^2y^2 + 4xy)$

$= 9x^2y^2 - 7xy + 3x^2y^2 + 4xy$

$= (9x^2y^2 + 3x^2y^2) + (-7xy + 4xy)$

$= 12x^2y^2 - 3xy$

उभी मांडणी

$$\begin{array}{r} 9x^2y^2 - 7xy \\ +\quad 3x^2y^2 + 4xy \\ \hline 12x^2y^2 - 3xy \end{array}$$

सांभाळा बरे!

$3x + 7y$ येथे दोन्ही पदे सजातीय नाहीत त्यामुळे त्यांची बेरीज $3x + 7y$ किंवा $7y + 3x$ अशीच लिहावी लागते.

सरावसंच 33

⊙ बेरीज करा.

(i) 9p + 16q ; 13p + 2q   (ii) 2a + 6b + 8c; 16a + 13c + 18b

(iii) $13x^2 - 12y^2$; $6x^2 - 8y^2$ (iv) $17a^2b^2 + 16c$; $28c - 28a^2b^2$

(v) $3y^2 - 10y + 16$; $2y - 7$ (vi) $-3y^2 + 10y - 16$; $7y^2 + 8$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.

बैजिक राशींची वजाबाकी (Subtraction of algebraic expressions)

पूर्णांकांची वजाबाकी करताना एका पूर्णांकातून दुसरा पूर्णांक वजा करणे म्हणजेच पहिल्या पूर्णांकात दुसऱ्या पूर्णांकांची विरुद्ध संख्या मिळवणे हे आपण अभ्यासले आहे.

याच नियमाचा वापर आपण बैजिक राशीच्या वजाबाकीसाठी करणार आहोत.

उदा. $18 - 7$

$= 18 + (-7) = 11$

उदा. $9x - 4x$

$= [9 + (-4)]x = 5x$

उदा. पहिल्या राशीतून दुसरी राशी वजा करा.

$16x + 23y + 12z$; $9x - 27y + 14z$

आडवी मांडणी

$(16x + 23y + 12z) - (9x - 27y + 14z)$

$= 16x + 23y + 12z - 9x + 27y - 14z$

$= (16x - 9x) + (23y + 27y) + (12z - 14z)$

$= 7x + 50y - 2z$

उभी मांडणी

$$\begin{array}{rrrr} & 16x & + 23y & + 12z \\ - & \oplus 9x & \ominus 27y & \oplus 14z \\ & - & + & - \\ \hline & 7x & + 50y & - 2z \end{array}$$

(जी राशी वजा करायची त्या राशीतील प्रत्येक पदाचे चिन्ह बदलून बेरीज करावी.)

सरावसंच 34

⊙ पहिल्या राशीतून दुसरी राशी वजा करा.

(i) $(4xy - 9z)$; $(3xy - 16z)$ (ii) $(5x + 4y + 7z)$; $(x + 2y + 3z)$

(iii) $(14x^2 + 8xy + 3y^2)$; $(26x^2 - 8xy - 17y^2)$

(iv) $(6x^2 + 7xy + 16y^2)$; $(16x^2 - 17xy)$ (v) $(4x + 16z)$; $(19y - 14z + 16x)$

जाणून घेऊया.

बैजिक राशींचा गुणाकार (Multiplication of algebraic expressions)

✸ **एकपदीला एकपदीने गुणणे**

उदा. $3x \times 12y$

$= 3 \times 12 \times x \times y$

$= 36xy$

उदा. $(-12x) \times 3y^2$

$= -12 \times 3 \times x \times y \times y$

$= -36xy^2$

उदा. $2a^2 \times 3ab^2$

$= 2 \times 3 \times a^2 \times a \times b^2$

$= 6a^3 b^2$

उदा. $(-3x^2) \times (-4xy)$

$= (-3) \times (-4) \times x^2 \times x \times y$

$= 12x^3y$

दोन एकपदींचा गुणाकार करताना, सर्वप्रथम सहगुणकांचा चिन्हे लक्षात घेऊन गुणाकार करावा. नंतर चलांचा गुणाकार करावा.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

✸ द्विपदीला एकपदीने गुणणे

उदा. $x\,(x + y)$

$= x \times x \; + \; x \times y$

$= x^2 + xy$

उदा. $(7x - 6y) \times 3z = 7x \times 3z - 6y \times 3z$

$= 7 \times 3 \times x \times z \; - \; 6 \times 3 \times y \times z$

$= 21xz - 18yz$

✸ द्विपदीला द्विपदीने गुणणे

उदा.

$$\begin{array}{rl} & 3x + 4y \\ \times & 5x + 7y \\ \hline & 15x^2 + 20xy \quad \text{[5x ने गुणून]} \\ & \quad + 21xy + 28y^2 \quad \text{[7y ने गुणून]} \\ \hline & 15x^2 + 41xy + 28y^2 \quad \text{[बेरीज करून]} \end{array}$$

$(3x + 4y)\;(5x + 7y)$

$= 3x\,(5x + 7y) + 4y\,(5x + 7y)$

$= 3x \times 5x + 3x \times 7y + 4y \times 5x + 4y \times 7y$

$= 15x^2 + 21xy + 20xy + 28y^2$

$= 15x^2 + 41xy + 28y^2$

उदा. एका आयताकृती शेताची लांबी $(2x + 7)$ मी व रुंदी $(x + 2)$ मी आहे, तर त्या शेताचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल : आयताकृती शेताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी $= (2x + 7) \times (x + 2)$

$= 2x\,(x + 2) + 7\,(x + 2)$

$= 2x^2 + 11x + 14$

आयताकृती शेताचे क्षेत्रफळ $(2x^2 + 11x + 14)$ मी^{2}

सरावसंच 35

1. गुणाकार करा.

   (i) $16xy \times 18xy$ (ii) $23xy^2 \times 4yz^2$

   (iii) $(12a + 17b) \times 4c$ (iv) $(4x + 5y) \times (9x + 7y)$

2. एका आयताची लांबी $(8x + 5)$ सेमी व रुंदी $(5x + 3)$ सेमी आहे, तर त्या आयताचे क्षेत्रफळ काढा.

जरा आठवूया.

एकचल समीकरणे (Equations in one variable)

- खालील समीकरणे सोडवा.

  (1) $x + 7 = 4$ (2) $4p = 12$ (3) $m - 5 = 4$ (4) $\frac{t}{3} = 6$

जाणून घेऊया.

उदा. $2x + 2 = 8$

$\therefore\; 2x + 2 - 2 = 8 - 2$

$\therefore\; 2x = 6$

$\therefore\; x = 3$

उदा. $3x - 5 = x - 17$

$3x - 5 + 5 - x = x - 17 + 5 - x$

$\therefore\; 2x = -12$

$\therefore\; x = -6$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदा. एका आयताची लांबी ही त्याच्या रुंदीच्या दुपटीपेक्षा 1 सेमी जास्त आहे. त्या आयताची परिमिती 50 सेमी असल्यास त्याची लांबी किती ?

उकल : आयताची रुंदी x सेमी मानू.

आयताची लांबी $(2x + 1)$ सेमी होईल.

$2 \times$ लांबी $+ 2 \times$ रुंदी $=$ आयताची परिमिती

$2(2x + 1) + 2x = 50$

$\therefore \ 4x + 2 + 2x = 50$

$6x + 2 = 50$

$6x = 50 - 2$

$\therefore \ 6x = 48 \ \therefore \ x = 8$

आयताची रुंदी 8 सेमी आहे.

आयताची लांबी $= 2x + 1 = 2 \times 8 + 1$

$\therefore$ आयताची लांबी $= 17$ सेमी आहे.

उदा. एक नैसर्गिक संख्या व तिची लगतची पुढची संख्या यांची बेरीज 69 आहे, तर त्या संख्या कोणत्या ?

उकल : एक नैसर्गिक संख्या x मानू.

पुढची लगतची संख्या $x + 1$ आहे.

$(x) + (x + 1) = 69$

$\therefore \ x + x + 1 = 69$

$\therefore \ 2x + 1 = 69$

$2x = 69 - 1$

$\therefore 2x = 68 \ \therefore \ x = 34$

नैसर्गिक संख्या $= 34$

लगतची पुढील नैसर्गिक संख्या $= 34 + 1$

$= 35$

लक्षात ठेवा :

एखादे पद समीकरणातील '=' या चिन्हाच्या एका बाजूकडून दुसऱ्या बाजूकडे नेत असताना त्याचे चिन्ह बदलावे लागते.

सरावसंच 36

1. $(3x - 11y) - (17x + 13y)$ या वजाबाकीसाठी अचूक पर्याय निवडा.
   (i) $7x - 12y$ (ii) $-14x - 54y$ (iii) $-3(5x + 4y)$ (iv) $-2(7x + 12y)$
2. $(23x^2y^3z) \times (-15x^3yz^2)$ याचे उत्तर .... येईल .
   (i) $-345x^5y^4z^3$ (ii) $345x^2y^3z^5$ (iii) $145x^3y^2z$ (iv) $170x^3y^2z^3$
3. खालील समीकरणे सोडवा.
   (i) $4x + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ (ii) $10 = 2y + 5$ (iii) $5m - 4 = 1$
   (iv) $6x - 1 = 3x + 8$ (v) $2(x - 4) = 4x + 2$ (vi) $5(x + 1) = 74$
4. राकेशचे वय सानियाच्या वयापेक्षा 5 वर्षांनी कमी आहे. त्यांच्या वयांची बेरीज 27 वर्षे आहे, तर प्रत्येकाचे वय किती ?
5. एका वनराईमध्ये अशोकाची जेवढी झाडे लावली त्यापेक्षा जांभळाची 60 झाडे अधिक लावली. तेथे दोन्ही प्रकारची एकूण झाडे 200 असतील, तर जांभळाची झाडे किती लावली ?
6. शुभांगीजवळ 50 रुपयांच्या जेवढ्या नोटा आहेत त्याच्या दुप्पट नोटा 20 रुपयांच्या आहेत. तिच्याजवळ एकूण 2700 रुपये आहेत तर 50 रुपयांच्या नोटा किती ?

7*. विराटने केलेल्या धावा रोहितच्या धावांच्या दुप्पट होत्या. दोघांच्या मिळून झालेल्या धावा द्विशतकापेक्षा दोनने कमी होत्या तर दोघांनी प्रत्येकी किती धावा काढल्या ?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. खालील उदाहरणे सोडवा.

(i) $(-16) \times (-5)$ (ii) $(72) \div (-12)$ (iii) $(-24) \times (2)$

(iv) $125 \div 5$ (v) $(-104) \div (-13)$ (vi) $25 \times (-4)$

2. मूळ अवयव पाडून खालील संख्यांचा मसावि व लसावि काढा.

(i)75, 135 (ii) 114, 76 (iii) 153, 187 (iv) 32, 24, 48

3*. संक्षिप्त रूप द्या.

(i) $\frac{322}{391}$ (ii) $\frac{247}{209}$ (iii) $\frac{117}{156}$

4. खालील संख्यांचे वर्गमूळ काढा.

(i) 784 (ii) 225 (iii) 1296 (iv) 2025 (v) 256

5. एका निवडणुकीसाठी चार मतदान केंद्रे दिलेली आहेत. प्रत्येक केंद्रावरील स्त्रिया व पुरुष यांनी केलेल्या मतदानाची माहिती सारणीत दिलेली आहे. त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

मतदार केंद्रे	नवोदय विद्यालय	विद्यानिकेतन शाळा	सिटी हायस्कूल	एकलव्य शाळा
स्त्रिया	500	520	680	800
पुरुष	440	640	760	600

6. पदावली सोडवा.

(i) $45 \div 5 + 20 \times 4 - 12$ (ii) $(38 - 8) \times 2 \div 5 + 13$

(iii) $\frac{5}{3} + \frac{4}{7} \div \frac{32}{21}$ (iv) $3 \times \{ 4 [85 + 5 - (15 \div 3)] + 2 \}$

7. सोडवा.

(i) $\frac{5}{12} + \frac{7}{16}$ (ii) $3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{12}{5} \times \frac{(\ \ 10)}{3}$ (iv*) $4\frac{3}{8} \div \frac{25}{18}$

8. ΔABC असा काढा की, $m\angle A = 55^\circ$, $m\angle B = 60^\circ$, आणि $l(AB) = 5.9$ सेमी.

9. ΔXYZ असा काढा की, $l(XY) = 3.7$ सेमी $l(YZ) = 7.7$ सेमी, $l(XZ) = 6.3$ सेमी.

10. ΔPQR असा काढा की, $m\angle P = 80^\circ$, $m\angle Q = 70^\circ$, $l(QR) = 5.7$ सेमी.

11. दिलेल्या मापावरून ΔEFG काढा. $l(FG) = 5$ सेमी, $m\angle EFG = 90^\circ$, $l(EG) = 7$ सेमी.

12. ΔLMN मध्ये $l(LM) = 6.2$ सेमी, $m\angle LMN = 60^\circ$, $l(MN) = 4$ सेमी तर ΔLMN काढा.

13. खालील कोनांच्या कोटिकोनांची मापे लिहा.

(i) 35° (ii) a° (iii) 22° (iv) $(40-x)^\circ$

14. खालील कोनांच्या पूरक कोनांची मापे लिहा.

(i) 111° (ii) 47° (iii) 180° (iv) $(90-x)^\circ$

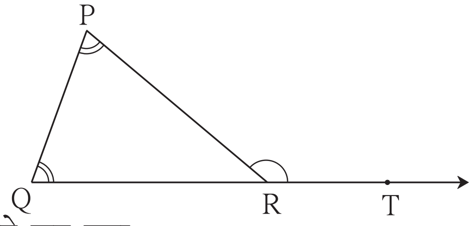
15. खालील आकृत्या काढा.

(i) संलग्न कोनांची जोडी (ii) पूरक कोन आहेत परंतु संलग्न नाहीत असे कोन

(iii) दोन संलग्न कोटिकोनांची जोडी

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

16. 

ΔPQR मध्ये $\angle P$ व $\angle Q$ यांची मापे समान आहेत व $m\angle PRQ = 70^\circ$ तर खालील कोनांची मापे काढा.

(i) $m\angle PRT$ (ii) $m\angle P$ (iii) $m\angle Q$

17. सोपे रूप द्या.

(i) $5^4 \times 5^3$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9$ (iii) $\left(\frac{7}{2}\right)^8 \times \left(\frac{7}{2}\right)^6$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \div \left(\frac{5}{4}\right)$

18. किंमत काढा.

(i) $17^{16} \div 17^{16}$ (ii) 10^{-3} (iii) $(2^3)^2$ (iv) $4^6 \times 4^{-4}$

19. सोडवा.

(i) $(6a-5b-8c) + (15b+2a-5c)$ (ii) $(3x+2y)(7x-8y)$

(iii) $(7m-5n) - (-4n-11m)$ (iv) $(11m-12n+3p) - (9m+7n-8p)$

20. खालील समीकरणे सोडवा.

(i) $4(x + 12) = 8$ (ii) $3y + 4 = 5y - 6$

बहुपर्यायी प्रश्न

खालील प्रश्नांना पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्या उत्तरांपैकी योग्य पर्याय निवडा.

1. त्रिकोणाचे तीनही कोनदुभाजक एकसंपाती असतात. त्यांच्या संपातबिंदूस .... म्हणतात.

(i) परिमध्य (ii) शिरोबिंदू (iii) अंतर्मध्य (iv) छेदबिंदू

2. $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^3\right]^4 =$ ....

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^7$ (ii) $\left(\frac{3}{7}\right)^{10}$ (iii) $\left(\frac{7}{3}\right)^{12}$ (iv) $\left(\frac{3}{7}\right)^{20}$

3. $5 \div \left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{3}$ याचे सरळरूप .... आहे.

(i) 3 (ii) 5 (iii) 0 (iv) $\frac{1}{3}$

4. $3x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + x$ या समीकरणाची उकल .... आहे.

(i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) 4 (iv) $\frac{3}{2}$

5*. खालीलपैकी कोणत्या पदावलीची किंमत 37 आहे ?

(i) $10 \times 3 + (5 + 2)$ (ii) $10 \times 4 + (5 - 3)$

(iii) $8 \times 4 + 3$ (iv) $(9 \times 3) + 2$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

9 समप्रमाण आणि व्यस्तप्रमाण

विभाग दुसरा

चला, चर्चा करूया.

समप्रमाण (Direct proportion)

आपण मागील इयत्तेत दोन संख्यांची तुलना करून ती गुणोत्तराच्या रूपात कशी लिहितात ते पाहिले आहे.

उदा. आता खालील चित्र पाहा. येथे वर्तुळात दाखवलेल्या व्यासांमुळे वर्तुळाचे झालेले भाग दाखवले आहेत.

(A) (B) (C) (D)

येथे व्यासांची संख्या व तयार होणाऱ्या वर्तुळाच्या भागांची संख्या यांचा काही संबंध दिसून येतो का ?

- आकृती (A) मध्ये **एका** व्यासामुळे वर्तुळाचे ☐ भाग झाले आहेत.
- आकृती (B) मध्ये **दोन** व्यासांमुळे वर्तुळाचे ☐ भाग झाले आहेत.
- आकृती (D) मध्ये **चार** व्यासांमुळे वर्तुळाचे ☐ भाग झाले आहेत.

$\frac{\text{व्यासांची संख्या}}{\text{भागांची संख्या}} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ येथे व्यासांची संख्या व त्यामुळे झालेल्या भागांची संख्या यांचे गुणोत्तर स्थिर आहे.

उदा. नगरपालिकेच्या शाळेतील विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या वह्यांची संख्या खालील सारणीत दाखवली आहे.

मुले	15	12	10	5
वह्या	90	72	60	30

$\frac{\text{मुलांची संख्या}}{\text{वह्यांची संख्या}} = \frac{15}{90} = \frac{12}{72} = \frac{10}{60} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

म्हणजेच हे गुणोत्तर 1:6 असे स्थिर किंवा कायम (constant) आहे.

वरील दोन्ही उदाहरणांत असे दिसते की, व्यासांची संख्या वाढली तर वर्तुळातील भागांची संख्या वाढते. विद्यार्थ्यांची संख्या कमी झाली तर वह्यांची संख्या देखील कमी होते. व्यासांची संख्या व वर्तुळ भागांची संख्या या समप्रमाणात आहेत तसेच विद्यार्थी संख्या व वह्यांची संख्या समप्रमाणात आहेत.

उपक्रम : ✸ मोटार सायकलमध्ये भरलेले पेट्रोल आणि तिने कापलेले अंतर हे समप्रमाणात असते का ? विचार करा.

✸ विज्ञानातील व दैनंदिन व्यवहारातील सम प्रमाणात बदलणाऱ्या संख्यांची उदाहरणे देता येतील का? त्याची चर्चा करा.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदा. 10 पेनांची किंमत 60 रुपये असेल तर, अशा 13 पेनांची किंमत किती रुपये ?

उकल : 13 पेनांची किंमत काढायची आहे. ती x रुपये होईल असे मानू.

पेनांची संख्या व त्यांची किंमत समप्रमाणात असल्यामुळे त्यांचे गुणोत्तर मांडून समीकरण मिळवू.

$$\frac{10}{60} = \frac{13}{x}$$

$\therefore$ $10x = 780$ (दोन्ही बाजूंना $60x$ ने गुणले)

$x = 78$

13 पेनांची किंमत 78 रुपये आहे.

सरावसंच 37

1. 7 किग्रॅ कांदे 140 रुपयांना तर 12 किग्रॅ कांदे किती रुपयांना मिळतील ?
2. 600 रुपयांमध्ये 15 पेंढ्या कडबा मिळतो, तर 1280 रुपयांमध्ये किती पेंढ्या कडबा मिळेल ?
3. रोज 13 किग्रॅ 500 ग्रॅम पूरक खुराक 9 गाईंना पुरतो, त्याच प्रमाणात 12 गाईंना किती खुराक लागेल ?
4. 12 क्विंटल सोयाबीनला 36,000 रुपये पडतात, तर 8 क्विंटल सोयाबीनची किंमत किती ?
5. दोन मोबाइलची किंमत 16,000 रुपये आहे असे 13 मोबाइल खरेदी केले, तर एकूण किती रुपये लागतील ?

जाणून घेऊया.

व्यस्तप्रमाण (Inverse proportion)

वृक्षारोपण करण्यासाठी 90 खड्डे खणायचे आहेत. त्यासाठी काही स्वयंसेवक जमले आहेत. एक स्वयंसेवक रोज एक खड्डा खणतो.

15 स्वयंसेवकांना ते खड्डे खणायला $\frac{90}{15} = 6$ दिवस लागतील.

10 स्वयंसेवकांना ते खड्डे खणायला $\frac{90}{10} = 9$ दिवस लागतील.

स्वयंसेवकांची संख्या व खड्डे खणण्यासाठी लागणारे दिवस हे समप्रमाणात आहेत का ?

स्वयंसेवकांची संख्या **कमी झाली** की लागणारे दिवस **वाढतात** याउलट स्वयंसेवकांची संख्या वाढली तर कामाचे दिवस कमी होतात. स्वंयसेवक व दिवस यांच्या संख्यांचा गुणाकार स्थिर आहे. या संख्या व्यस्त प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

उदा. समजा सुधाला एका संग्रहातील 48 उदाहरणे सोडवायची आहेत. तिने रोज 1 उदाहरण केले तर तिला संग्रह पूर्ण करण्यास 48 दिवस लागतील. तिने रोज 8 उदाहरणे सोडवली तर, संग्रह पूर्ण करण्यास तिला $\frac{48}{8} = 6$ दिवस लागतात. ती रोज 12 उदाहरणे करत असेल तर तिला $\frac{48}{12} = 4$ दिवस लागतील.

रोज सोडवलेली उदाहरणे व लागणारे दिवस व्यस्त प्रमाणात आहेत. त्यांचा गुणाकार स्थिर आहे.

$8 \times 6 = 12 \times 4 = 48 \times 1$ हे लक्षात घ्या.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदा. एक मोठी भिंत बांधायला 15 मजुरांना 8 तास लागतात; तर 12 मजुरांना तेच काम करायला किती तास लागतील ?

उकल : मजुरांची संख्या वाढली की कामाचे तास कमी होतात.

मजुरांची संख्या व त्यांना लागणारा वेळ यांचे प्रमाण व्यस्त आहे.

मजुरांची संख्या व भिंत बांधायला लागणारे तास यांचा गुणाकार स्थिर आहे.

आता x या चलाचा वापर करून हे उदाहरण सोडवू.

12 मजुरांना x तास लागतात असे मानू.

15 मजुरांना 8 तास लागतात.

12 मजुरांना x तास लागतात.

$12 \times x = 15 \times 8$

$\therefore \quad 12x = 120$

$\therefore \quad x = 10$

यावरून 12 मजुरांना भिंत बांधायला 10 तास लागतील.

उदा. वर्गामध्ये 40 पानी हस्तलिखित अंक तयार करण्याचे काम चालू केले. एका विद्यार्थ्याला हा अंक तयार करायला 80 दिवस लागतात, तर 4 विद्यार्थ्यांना अंक तयार करायला किती दिवस लागतील ?

उकल : एकच काम जास्त विद्यार्थी करत असतील तर कमी दिवस लागतील म्हणजे विद्यार्थी संख्या व दिवसांची संख्या यांचे प्रमाण व्यस्त आहे. चार विद्यार्थ्यांना x दिवस लागतात असे मानू.

विद्यार्थी	दिवस
1	80
4	x

$4x = 80 \times 1$

$x = \frac{80}{4}$

$x = 20$

$\therefore$ 4 विद्यार्थ्यांना 20 दिवस लागतील.

उदा. एका शाळेतील 7 वी चे विद्यार्थी सहलीसाठी एका शेतमळ्यामध्ये बसने गेले. त्या वेळी आलेले त्यांचे काही अनुभव पाहू. प्रत्येक अनुभवातील संख्या समप्रमाणात आहेत की व्यस्तप्रमाणात ते लिहा.

- सहलीसाठी प्रत्येक मुलाकडून खर्चासाठी 60 रुपये घेतले.

  एकूण 45 विद्यार्थी होते म्हणून ☐ रुपये जमले.

  जर 50 विद्यार्थी असते तर ☐ रुपये जमले असते.

  विद्यार्थ्यांची संख्या व जमणारी वर्गणी हे .... प्रमाणात आहेत.

- शाळेजवळच्या मिठाईवाल्याने सहलीसाठी 90 लाडू दिले.

  45 विद्यार्थी सहलीला आले तर प्रत्येकाला ☐ लाडू मिळाले.

  30 विद्यार्थी सहलीला आले असते तर प्रत्येकाला ☐ लाडू मिळाले असते.

  विद्यार्थ्यांची संख्या व प्रत्येकाला मिळणारे लाडू .... प्रमाणामध्ये आहेत.

- सहलीचे ठिकाण शाळेपासून 120 किमी होते.

  शेतमळ्यात जाताना बसचा वेग ताशी 40 किमी होता म्हणून ☐ तास लागले.

  परत येताना बसचा वेग ताशी 60 किमी होता म्हणून ☐ तास लागले.

  बसचा वेग व लागणारा वेळ हे .... प्रमाणात आहेत.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

- शेतकऱ्याने त्याच्या झाडांची बोरे जमा केली. ती 180 होती.
  त्याने 45 विद्यार्थ्यांना ती समान वाटली. प्रत्येकाला ☐ बोरे मिळाली.
  जर 60 विद्यार्थी असते तर प्रत्येकाला ☐ बोरे मिळाली असती.
  विद्यार्थ्यांची संख्या व प्रत्येकाला मिळणारी बोरांची संख्या हे .... प्रमाणामध्ये आहेत.

सरावसंच 38

1. एका शेताची खुरपणी पूर्ण करण्यास 5 मजुरांना 12 दिवस लागतात, तर 6 मजुरांना किती दिवस लागतील ? 15 मजुरांना किती दिवस लागतील ?
2. मोहनरावांनी रोज 40 पाने याप्रमाणे एक पुस्तक वाचले, तर ते पुस्तक 10 दिवसांत वाचून पूर्ण होते. तेच पुस्तक 8 दिवसांत वाचून पूर्ण करायचे असल्यास दररोज किती पाने वाचावीत ?
3. मेरीचा सायकल चालवण्याचा वेग ताशी 6 किमी आहे. ती 12 किमी अंतरावरील मावशीच्या घरी जाणार आहे, तर तिला किती वेळ लागेल ? तिच्या सायकलचा वेग ताशी 4 किमी झाला, तर तिला किती वेळ लागेल ?
4. एका शासकीय गोदामातील धान्यसाठा 4000 माणसांना 30 दिवस पुरतो, तर तो धान्यसाठा 6000 माणसांना किती दिवस पुरेल?

जाणून घेऊया.

भागीदारी (Partnership)

एखादा व्यवसाय चालू करताना जागा, कच्ची सामग्री इत्यादींसाठी पैसे लागतात. त्या रकमेला भांडवल म्हणतात. अनेकदा दोन किंवा अधिक व्यक्ती मिळून भांडवल गोळा करतात. म्हणजेच त्या व्यक्ती भागीदारीत गुंतवणूक करून व्यवसाय सुरू करतात. भागीदारीच्या व्यवसायात बँकेमध्ये भागीदारांचे संयुक्त खाते असते. त्या व्यवसायासाठी भांडवलाची ज्या प्रमाणात गुंतवणूक असते त्या प्रमाणात व्यवसायात झालेला नफा किंवा तोटा याचे वाटप केले जाते.

उदा. झेलम व अथर्व यांनी अनुक्रमे 2100 व 2800 रुपये भांडवल घालून व्यवसाय चालू केला. त्यांना 3500 रुपये फायदा झाला. तो कसा वाटावा ?

उकल : भांडवलाचे प्रमाण काढू. 2100:2800 म्हणजे $\frac{2100}{2800} = \frac{3}{4}$ म्हणून भांडवलाचे प्रमाण 3:4 आहे.

नफ्याचे वाटप भांडवलाच्या प्रमाणात करायचे आहे. झेलमचा नफा $3x$ व अथर्वचा नफा $4x$ मानू.

$\therefore\ 3x + 4x = 3500$ एकूण नफा 3500 आहे.

$\therefore\ 7x = 3500$ $\therefore\ x = 500$

झेलमला $3x = 1500$ रुपये व अथर्वला $4x = 2000$ रुपये नफा मिळेल.

उदा. एका व्यवसायात चिन्मय आणि सॅम यांनी 130000 रुपये भांडवल 3:2 या प्रमाणात गुंतवले तर प्रत्येकाची गुंतवणूक किती ? या व्यवसायात त्यांना 36000 रुपयांचा नफा झाला, तर प्रत्येकाचा नफा किती असेल ?

उकल : चिन्मय आणि सॅम यांच्या गुंतवणुकीचे प्रमाण 3:2 आहे.

गुंतवणुकीच्या **प्रमाणात** नफ्याची वाटणी होते म्हणून नफ्याचे प्रमाण 3:2 असेल.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

चिन्मयची गुंतवणूक $3y$ व सॅमची गुंतवणूक $2y$ मानू.

$3y + 2y$ = एकूण गुंतवणूक

$\therefore 5y = 130000$

$\frac{5y}{5} = \frac{130000}{5}$ ..... (5 ने भागून)

$\therefore y = 26000$

$\therefore$ चिन्मयची गुंतवणूक $= 3y$

$= 3 \times 26000$

$= 78,000$

सॅमची गुंतवणूक $= 2y$

$= 2 \times 26000$

$= 52000$

चिन्मयचा नफा $3x$ व सॅमचा नफा $2x$ मानू.

$3x + 2x$ = एकूण नफा

$5x = 36000$

$\frac{5x}{5} = \frac{36000}{5}$ ..... (5 ने भागून)

$\therefore x = 7200$

$\therefore$ चिन्मयचा नफा $= 3x$

$= 3 \times 7200$

$= 21600$

सॅमचा नफा $= 2x$

$= 2 \times 7200$

$= 14400$

उदा. अब्दुल, सेजल व सोहम यांनी सायलीला 30 रुपये व 70 रुपये आणि 50 रुपये दिले. सायलीने त्यात 150 रुपये घालून कागद, रंग या वस्तू आणल्या. त्यापासून सर्वांनी भेटकार्डे बनवली व ती सर्व भेटकार्डे विकली. त्यांना एकूण 420 रुपये नफा मिळाला. तर प्रत्येकाला किती नफा मिळाला ?

उकल : चौघांचे मिळून एकूण भांडवल 300 रुपये होते. त्यांपैकी सायलीचे 150 रुपये होते म्हणजे निम्मे भांडवल तिचे होते. त्यांना एकूण 420 रुपये नफा मिळाला. सायलीचा नफा 420 ची निमपट म्हणजे 210 रुपये झाला. उरलेला 210 रुपये नफा अब्दुल, सेजल व सोहम यांना वाटला.

अब्दुल, सेजल व सोहम यांचे भांडवल अनुक्रमे 30 रुपये व 70 रुपये आणि 50 रुपये आहे. भांडवलाचे प्रमाण 30:70:50 आहे. म्हणजेच 3:7:5 आहे. तिघांचा नफा 210 रुपये आहे.

त्यांचा नफा अनुक्रमे $3k$, $7k$, $5k$ मानू. $3k + 7k + 5k = 210$

$\therefore 15k = 210$

$\therefore k = 14$

म्हणजे अब्दुलचा नफा $= 3k = 3 \times 14 = 42$ रुपये

सेजलचा नफा $= 7k = 7 \times 14 = 98$ रुपये, सोहमचा नफा $= 5k = 5 \times 14 = 70$ रुपये

उदा. सरिताबेन, आयेशा आणि मीनाक्षी यांनी प्रत्येकी 2400, 5200 व 3400 रुपये गुंतवून व्यवसाय चालू केला. त्यांना 50% नफा झाला. तो त्यांनी कसा वाटून घ्यावा ? तो काढून न घेता पुढच्या वर्षाच्या व्यवसायासाठी भांडवलात मिळवला, तर प्रत्येकीची पुढच्या वर्षासाठी भागीदारी किती असेल ?

उकल : एकूण भांडवल $= 2400 + 5200 + 3400 = 11000$ रुपये

या भांडवलावर 50% नफा झाला.

$\therefore$ एकूण नफा $= \frac{11000 \times 50}{100} = 5500$

भांडवलाच्या प्रमाणात नफा वाटायचा आहे.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

आपण दोन संख्यांचे प्रमाण दोन्ही संख्यांना सामाईक विभाजकाने भागून सोपे करून घेतो. त्याचप्रमाणे दोनपेक्षा अधिक संख्यांचे प्रमाण सोपे करता येते.

भागीदारीचे प्रमाण = 2400 : 5200 : 3400

= 24 : 52 : 34 (100 ने भागून)

= 12 : 26 : 17 (2 ने भागून)

सरिताबेनचा नफा =12p, आयेशाचा नफा = 26p, मीनाक्षीचा नफा = 17p मानू.

$\therefore$ 12p + 26p + 17p = 55p = 5500 $\therefore$ p = $\frac{5500}{55}$ = 100

$\therefore$ सरिताबेनचा नफा = 12 × 100 = 1200, आयेशाचा नफा = 26 × 100 = 2600 व मीनाक्षीचा नफा = 17 × 100 = 1700,

नफा काढून न घेता तो भांडवलात मिळवला तर प्रत्येकीचे नवे भांडवल काढू.

पुढच्या वर्षासाठी सरिताबेनचे भांडवल = 2400 + 1200 = ₹ 3600

पुढच्या वर्षासाठी आयेशाचे भांडवल = 5200 + 2600 = ₹ 7800

पुढच्या वर्षासाठी मीनाक्षीचे भांडवल = 3400 + 1700 = ₹ 5100

चला, चर्चा करूया.

- वरील उदाहरणात सरिताबेन, आयेशा व मीनाक्षी यांतील प्रत्येकीने नफा काढून न घेता स्वत:च्या गुंतवणुकीत मिळवला, तर पुढच्या वर्षासाठी त्यांच्या गुंतवणुकीचे प्रमाण काढा.

सरावसंच 39

1. सुरेश आणि रमेश यांनी 144000 रुपये 4:5 या प्रमाणात गुंतवून एक भूखंड खरेदी केला. काही वर्षांनी तो विकून त्यांना 20% नफा मिळाला, तर प्रत्येकाला किती नफा मिळाला?
2. विराट व सम्राट यांनी अनुक्रमे 50000 रुपये व 120000 रुपये गुंतवून व्यवसाय चालू केला. या व्यवसायात त्यांना 20% तोटा झाला. तर प्रत्येकाला किती तोटा झाला ?
3. श्वेता, पियुष आणि नचिकेत या तिघांनी मिळून सोलापुरी चादर व टॉवेल विकण्याचा व्यवसाय 80000 रुपये गुंतवून सुरू केला. त्यांपैकी श्वेताचे भांडवल 30000 रुपये होते व पियुषचे भांडवल 12000 रुपये होते. त्यांना वर्षाखेरीस 24% नफा झाला, तर नचिकेतची भागीदारी किती होती ? नचिकेतला मिळालेल्या नफ्याची रक्कम किती?
4. अ व ब यांनी मिळालेला 24500 रुपये नफा 3:7 या प्रमाणात वाटून घेतला. प्रत्येकाने आपल्याला मिळालेल्या नफ्यापैकी 2% रक्कम सैनिक कल्याण निधीला दिली, तर प्रत्येकाने किती रक्कम निधीसाठी दिली ?

5*. जया, सीमा, निखिल आणि निलेश यांनी व्यवसायासाठी 3:4:7:6 या प्रमाणात 360000 रुपयांची भागीदारी केली. तर जयाचे भांडवल किती रुपये होते ? त्यांना या व्यवहारात 12% नफा झाला. तर निखिलच्या वाट्याला किती रुपये मिळतील ?

❑❑❑

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

10 बँक व सरळव्याज

जरा आठवूया.

बँक ही पैशांचे व्यवहार करणारी सरकारमान्य संस्था असते. बँकेमुळे पैशाचे नियोजन म्हणजे अर्थनियोजन करणे सोपे जाते. बँकेमध्ये रोख रकमेचा भरणा करणे किंवा रोख रक्कम काढणे असा व्यवहार करता येतो. त्यासाठी बँकेत खाते उघडावे लागते. बँकेमध्ये विविध प्रकारची खाती असतात.

जाणून घेऊया.

विविध खाती

✸ चालू खाते (Current account)

चालू खाते मुख्यत: व्यापाऱ्यांसाठी व रोज पैशांचे व्यवहार करणाऱ्यांसाठी असते. यामध्ये खातेदार एका दिवसात कितीही वेळा देवघेव करू शकतो. बँक या खात्यासाठी पासबुक व मागणी केल्यास चेकबुक देते. या प्रकारच्या खात्यावर बँक व्याज देत नाही. चेकच्या साहाय्याने बँकेत पैसे भरता येतात किंवा बँकेतून पैसे काढता येतात.

✸ बचत खाते (Savings account)

खातेदाराला ठरावीक रक्कम बँकेत जमा करून बचत खाते उघडता येते. काही बँकांमध्ये काहीही रक्कम जमा न करता खाते उघडता येते. या खात्यावर दररोजच्या जमा शिलकेच्या आधारे बँक काही व्याज देते. अनेकदा ठरावीक काळामध्ये किती वेळा पैसे काढता येतात यावर निर्बंध असतात. या खात्यासाठी बँक पासबुक व मागणीनुसार चेकबुक देते.

✸ आवर्ती ठेव खाते (Recurring deposit account)

या खात्यामध्ये दर महिन्याला ठराविक रक्कम जमा करतात. ती किती असावी हे बँक खातेदार ठरवतात. या प्रकारच्या ठेवींवर बँक व्याज देते. हे व्याज बचत खात्यापेक्षा जास्त असते, अशा खात्यामुळे खातेदाराची सक्तीची बचत होते.

उपरोक्त खात्यांसाठी बँकेत कधी कधी संयुक्त खाते असणे सोईचे असते. उदा., पति-पत्नी, पालक व पाल्य इत्यादी. तसेच व्यवसायातील भागीदारी, हाउसिंग सोसायटी, सेवाभावी न्यास इत्यादींसाठी बँकेतील खाते एकाहून जास्त व्यक्तींना वापरणे जरुरीचे असते.

✸ मुदत ठेव (Fixed deposit)

ठेवीदार ठरावीक रक्कम ठरावीक कालावधीसाठी बँकेत जमा करून ठेवतो. या प्रकारच्या ठेवींवर बँक बचत खात्यापेक्षा अधिक व्याजदर देते. मुदत ठेवींवरील व्याजदर प्रत्येक बँकेत भिन्न असू शकतो. ज्येष्ठ नागरिकांना नियमित दरापेक्षा थोडा जास्त व्याजदर मिळतो.

क्रेडिट, ए.टी.एम/डेबिट कार्ड : बँकेत न जाता रोख रक्कम मिळवण्यासाठी ATM (Automated teller machine) कार्डाचा उपयोग होतो. रोख रकमेशिवाय व्यवहार करण्यासाठी क्रेडिट कार्ड व डेबिट कार्ड वापरता येते. ही कार्डे विनंतीवरून त्या बँकेच्या खातेदारास मिळू शकतात.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

चला, चर्चा करूया.

- तुम्ही बँकेचे पासबुक पाहिले आहे का ?

  या ठिकाणी बँक पासबुकाचे एक पान दिलेले आहे. त्यातील नोंदींचे निरीक्षण करा.

ओळ क्र. पंक्ति क्र. LINE NO.	तारीख दिनांक DATE	तपशील ब्यौरा PARTICULARS	चेक क्रमांक चेक क्रमांक CHEQUE No.	रक्कम काढली निकाली गई रकम AMOUNT WITHDRAWN	रक्कम ठेवली जमा की गई रकम AMOUNT DEPOSITED	शिल्लक बाकी जमा BALANCE
1.	2.2.2016	cash			1500.00	7000.00
2.	8.2.2016	cheque	232069		5000.00	12000.00
3.	12.2.2016	cheque	243965	3000.00		9000.00
4.	15.2.2016	self		1500.00		7500.00
5.	26.2.2016	interest			135.00	7635.00

- दिनांक 2.2.16 रोजी बँकेत जमा केलेली रक्कम ☐ रुपये. शिल्लक रक्कम ☐ रुपये.
- दिनांक 12.2.16 रोजी चेक क्र. 243965 ने ☐ रक्कम काढली. शिल्लक रक्कम ☐ रुपये.
- दिनांक 26.2.16 रोजी बँकेने व्याज (interest) दिले आहे. त्याची रक्कम ☐ रुपये.

बचत खाते व आवर्ती ठेव खाते यासाठी पासबुक असते. त्या पासबुकामध्ये तारखेनुसार ठेवलेले पैसे, काढलेले पैसे व शिल्लक या सर्वांची नोंद असते.

उपक्रम : तुमच्या घरातील मोठ्या व्यक्तीच्या परवानगीने त्यांच्या बँकेच्या पासबुकातील नोंदींचा अर्थ समजून घ्या.

जरा आठवूया.

सुविद्याने संगणक खरेदी करण्यासाठी द.सा.द.शे. 8 दराने बँकेकडून 30000 रुपये एका वर्षासाठी कर्जाऊ घेतले. मुदत पूर्ण झाल्यावर घेतलेल्या रकमेपेक्षा तिला 2400 रुपये जादा द्यावे लागले.

- या माहितीवरून खालील चौकटीत योग्य संख्या लिहा.

मुद्दल = ₹ ☐ , व्याजाचा दर = ₹ ☐ , व्याज = ₹ ☐ , मुदत = ☐ वर्ष

बँकेत परत केलेली एकूण रक्कम = 30000 + 2400 = ☐

जाणून घेऊया.

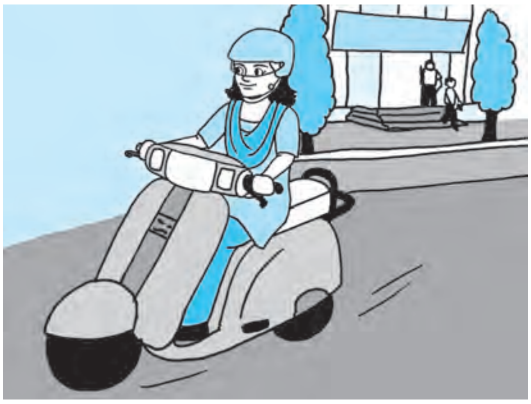
वरील उदाहरणात सुविद्याने बँकेत एकूण किती रक्कम जमा केली हे काढण्यासाठी मुद्दल व व्याज यांची बेरीज केली. या रकमेला रास असे म्हणतात.

मुद्दल + व्याज = रास

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदा. नेहाने दुचाकी वाहन घेण्यासाठी द.सा.द.शे. 12 दराने बँकेकडून रुपये 50,000 कर्ज घेतले. एका वर्षानंतर ती बँकेस एकूण किती रक्कम परत देईल ?



उकल : वरील उदाहरणात मुदतीनंतर बँकेस एकूण परत केलेली रक्कम काढायची आहे म्हणजेच रास काढायची आहे. येथे मुद्दल 50000 रुपये आहे. द.सा.द.शे. 12 दराने म्हणजे 100 रुपये मुद्दलावर 1 वर्षाचे व्याज 12 रुपये आहे.

व्याजाचे मुद्दलाशी असलेले गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहून समीकरण मिळवू.

50000 रुपये मुद्दलावर मिळणारे व्याज x रुपये मानू.

100 रुपये मुद्दलावर मिळणारे व्याज 12 रुपये आहे.

$$\frac{x}{50000} = \frac{12}{100}$$

$$\frac{x}{50000} \times 50000 = \frac{12}{100} \times 50000$$ (दोन्ही बाजूंना 50000 ने गुणू)

$$x = 6000$$

(बँकेस परत देण्याची रक्कम) रास = मुद्दल + व्याज

= 50000 + 6000

∴ बँकेस परत देण्याची रक्कम = ₹ 56000

उदा. आकाशने द.सा.द.शे. 8 दराने बँकेत 25000 रुपये 3 वर्षांसाठी ठेव म्हणून ठेवले, तर त्याला प्रत्येक वर्षी किती व्याज मिळाले ? एकूण किती व्याज मिळाले ?

उकल : या उदाहरणात मुद्दल 25000 रुपये, मुदत 3 वर्ष, व्याजाचा दर शेकडा 8 आहे.

100 रुपये मुद्दलावर 8 रुपये व्याज आहे म्हणून 25000 रुपये मुद्दलावर 1 वर्षाला x रुपये व्याज आहे, असे मानू. व्याजाचे मुद्दलाशी असलेले गुणोत्तर पाहू.

$$\frac{x}{25000} = \frac{8}{100}$$

$$\therefore \frac{x}{25000} \times 25000 = \frac{8}{100} \times 25000$$ (दोन्ही बाजूंना 25000 ने गुणू)

$$\therefore x = 2000$$

आकाशला 1 वर्षासाठी 2000 रुपये व्याज मिळाले.

आकाशला 3 वर्षांचे एकूण = 2000 × 3 = 6000 रुपये व्याज मिळाले.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.

सरळव्याजाची उदाहरणे सोडवताना एका सूत्राचा उपयोग होतो, ते सूत्र पाहू.

दरवर्षी मुद्दल कायम ठेवून एकाच दराने व्याजाची आकारणी होते. त्या आकारणीला सरळव्याजाची आकारणी म्हणतात. 'म' मुद्दल 'क' वर्षांसाठी ठेवले आणि व्याज दर दसादशे 'द' असेल तर एकूण किती व्याज मिळेल ते काढू. 'म' मुद्दलावर 1 वर्षाचे व्याज 'व' मानू.

1 वर्षाचे व्याज व मुद्दल यांचे गुणोत्तर पाहू.

$$\therefore \frac{\text{व}}{\text{म}} = \frac{\text{द}}{100} \qquad \therefore \text{व} = \frac{\text{म} \times \text{द}}{100}$$

$$\text{क वर्षाचे व्याज} = \text{व} \times \text{क} = \frac{\text{म} \times \text{द} \times \text{क}}{100}$$

$$\therefore \text{एकूण व्याज} = \frac{\text{मुद्दल} \times \text{दर} \times \text{काळ}}{100}$$

आधीचे उदाहरण सूत्राने सोडवू.

वरील उदाहरणात म = 25000, द = 8, क = 3

$$\text{एकूण व्याज} = \frac{\text{म} \times \text{द} \times \text{क}}{100} = \frac{25000 \times 8 \times 3}{100} = 6000$$

म्हणून एकूण व्याज 6000 रुपये आहे.

हे मला समजले.

- $\text{एकूण व्याज} = \frac{\text{म} \times \text{द} \times \text{क}}{100}$ येथे म = मुद्दल, द = व्याजाचा दर, क = मुदत (वर्षे)

उदा. संदीपभाऊने मुलाच्या शिक्षणासाठी द.सा.द.शे. $8\frac{1}{2}$ दराने बँकेकडून 120000 रुपये शैक्षणिक कर्ज 4 वर्षांसाठी घेतले. त्यांनी ती मुदत संपली तेव्हा बँकेला एकूण किती रक्कम परत केली ?

उकल : या उदाहरणात मुद्दल 120000 रुपये आहे. सूत्र वापरून व्याज काढू.

म = 120000, द = 8.5, क = 4

$$\therefore \text{एकूण व्याज} = \frac{\text{म} \times \text{द} \times \text{क}}{100} = \frac{120000 \times 8.5 \times 4}{100}$$

$$= \frac{120000 \times 85 \times 4}{100 \times 10}$$

$$= 120 \times 85 \times 4$$

$$= 40800$$

बँकेस परत केलेली एकूण रक्कम म्हणजेच रास = 120000 + 40800 = 160800 रुपये दिले.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सरावसंच 40

1. रिहानाने 1500 रुपये शाळेतील संचयिकेमध्ये द.सा.द.शे. 9 दराने 2 वर्षांसाठी ठेवल्यास तिला एकूण किती रक्कम मिळेल ?
2. जेठालाल यांनी बँकेकडून द.सा.द.शे. 10 दराने 2,50,000 रुपये 5 वर्षांच्या मुदतीने गृहकर्ज घेतले. तर त्यांना प्रत्येक वर्षी किती व्याज द्यावे लागेल ? तसेच त्यांना बँकेला एकूण किती रक्कम द्यावी लागेल?

3*. श्रीकांतने 85,000 रुपये द.सा.द.शे. 7 दराने $2\frac{1}{2}$ वर्षांसाठी 'बचत' बँकेत ठेवले. तर त्यांना मुदतीच्या शेवटी किती सरळव्याज मिळाले ?

4. व्याजाच्या काही दराने 5000 रुपये मुद्दलावर 4 वर्षांत 1200 रुपये व्याज होते, तर त्याच दराने त्याच मुदतीत 15000 रुपये मुद्दलाचे व्याज किती होईल ?
5. पंकजने 1,50,000 रुपये द.सा.द.शे. 10 दराने 2 वर्षांसाठी बँकेत ठेव म्हणून ठेवले, तर त्या मुदतीनंतर एकूण किती रक्कम त्यांना परत मिळेल ?

जाणून घेऊया.

मुद्दल, मुदत, दर, रास यांपैकी तीन बाबी दिल्यास चौथी बाब काढणे.

सूत्रामध्ये शोधण्याच्या संख्येसाठी अक्षर मानून समीकरण मांडून उदाहरण सोडवता येते.

उदा. मुद्दल = 25000 रुपये, रास = 31,000 रुपये, मुदत = 4 वर्षे तर व्याजाचा दर किती ?

येथे रास – मुद्दल = एकूण व्याज

31000 – 25000 = 6000

मुद्दल = 25000 रुपये, मुदत = 4 वर्षे, व्याज = 6000 रुपये,

आता आपण सूत्राच्या साहाय्याने व्याजाचा दर काढूया. दर = द मानू

$$\text{सरळव्याज} = \frac{\text{मुद्दल} \times \text{दर} \times \text{कालावधी}}{100}$$

$$6000 = \frac{25000 \times \text{द} \times 4}{100}$$

$$\text{द} = \frac{6000 \times 100}{25000 \times 4}$$

$\therefore$ द = 6 $\quad\therefore$ व्याजाचा दर द.सा.द.शे 6 रुपये आहे.

उदा. उन्मेशने काही रक्कम 5 वर्षांसाठी सरळव्याजाने कर्जाऊ घेतली. व्याजाचा दर द.सा.द.शे. 9 आहे. त्याने मुदतीअखेर एकूण 17400 रुपये परत केले. तर त्याने किती कर्ज घेतले होते ?

$\text{व्याज} = \frac{\text{मुद्दल} \times \text{दर} \times \text{कालावधी}}{100}$ हे सूत्र उदाहरण सोडवण्यासाठी चटकन वापरता येत नाही.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

कारण व्याज व मुद्दल दोन्ही माहीत नाहीत; परंतु 100 रुपये मुद्दलावर 5 वर्षांत 45 रुपये व्याज होते. म्हणून 100 + 45 = 145 रुपये रास होते. आता मुद्दल व रास यांचे गुणोत्तर दोन प्रकारे मांडून समीकरण मिळवू.

उन्मेशचे मुद्दल म असेल तर $\frac{\text{म}}{17400} = \frac{100}{145}$

$\therefore$ म = $\frac{100 \times 17400}{145} = 12000$

$\therefore$ उन्मेशचे कर्ज 12000 रुपये होते.

चला, चर्चा करूया.

- सूत्र वापरून नवीन प्रकारचे समीकरण मांडून हे उदाहरण सोडवता येईल का ?

सरावसंच 41

1. 1700 रुपयांचे, द.सा.द.शे. काही दराने, 2 वर्षांचे व्याज 340 रुपये येते, तर व्याजाचा दर शे ....असेल.
   (i) 12 %   (ii) 15 %   (iii) 4 %   (iv) 10 %
2. 3000 रुपयांचे विशिष्ट दराचे, विशिष्ट वर्षांचे व्याज 600 रुपये येते; तर 1500 रुपयांचे तितक्याच दराचे तितक्याच वर्षांचे व्याज किती रुपये येईल ?
   (i) 300 रुपये   (ii) 1000 रुपये   (iii) 700 रुपये   (iv) 500 रुपये
3. जावेदने 12000 रुपये द.सा.द.शे. 9 दराने काही वर्षांसाठी बँकेत ठेवले. तो दरवर्षी व्याजाची रक्कम काढून घेई. किती वर्षांत त्याला व्याजासह एकूण 17400 रुपये मिळतील?

4*. लताबेन यांनी गृहोद्योग सुरू करण्यासाठी बँकेतून काही रक्कम द.सा.द.शे. 10 दराने $2\frac{1}{2}$ वर्षांसाठी कर्जाऊ. घेतली. त्यांनी कर्ज फेडण्यासाठी एकूण 10250 रुपये व्याज दिले, तर त्यांनी एकूण किती रक्कम कर्जाऊ घेतली होती ?

5. खालील सारणीतील रिकाम्या जागा भरा.

	मुद्दल	व्याजाचा दर (द.सा.द.शे.)	मुदत (काळ)	व्याज	रास
(i)	4200	7%	3 वर्षे	......	......
(ii)	......	6%	4 वर्षे	1200	......
(iii)	8000	5%	......	800	......
(iv)	......	5%	......	6000	18000
(v)	......	$2\frac{1}{2}$ %	5 वर्षे	2400	......

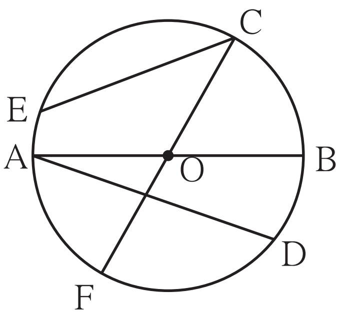
उपक्रम : ✸ विविध बँकांना प्रत्यक्ष भेट द्या व त्यांच्या विविध खात्यांवर दिले जाणारे व्याज जाणून घ्या.
✸ शाळेमध्ये शिक्षकांच्या मदतीने संचयिका (बचत बँक) तयार करा. त्यात खाते उघडून आर्थिक बचत करा.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

11 वर्तुळ

जरा आठवूया.



- शेजारील वर्तुळातील त्रिज्या, जीवा व व्यास ओळखा व त्यांची नावे खालील सारणीत लिहा.

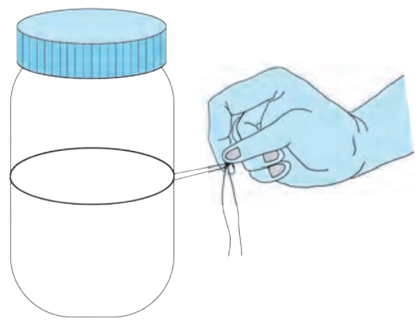
त्रिज्या				
जीवा				
व्यास				

वर्तुळाचा परीघ (Circumference of a circle)

कृती I पाण्याची दंडगोलाकृती बाटली कागदावर ठेवून तळाभोवती वर्तुळ काढा. दोऱ्याच्या साहाय्याने वर्तुळाचा परीघ मोजा.

कृती II बांगडीचा परीघ दोऱ्याने मोजा.

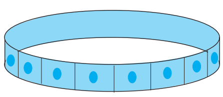
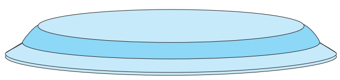
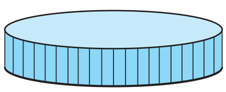
कृती III कोणत्याही एका वर्तुळाकार वस्तूचा दोऱ्याच्या साहाय्याने परीघ मोजा.



जाणून घेऊया.

परीघ व व्यास संबंध

कृती I खाली दिलेल्या वस्तूंचे परीघ व व्यास मोजून परिघाचे व्यासाशी असणारे गुणोत्तर सारणीत लिहा.

अ. क्र.	वस्तू	परीघ	व्यास	परिघाचे व्यासाशी गुणोत्तर
1.	 बांगडी	19 सेमी	6 सेमी	$\frac{19}{6} = 3.16$
2.	वर्तुळाकार पालथी थाळी 	....	....	....
3.	 बरणीचे झाकण	....	....	....

सारणीवरून परिघाचे व्यासाशी असलेले गुणोत्तर तपासा. आपणांस काय आढळून येते ?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

कोणत्याही वर्तुळाच्या परिघाचे त्याच्या व्यासाशी असणारे गुणोत्तर तिपटीपेक्षा किंचित जास्त असून जवळपास स्थिर असते. ही स्थिर संख्या π (पाय) या ग्रीक वर्णाक्षराने दर्शवली जाते. ही संख्या परिमेय संख्या नाही हे थोर गणितज्ज्ञांनी परिश्रमाने सिद्ध केले आहे. व्यवहारामध्ये π ची किंमत $\frac{22}{7}$ किंवा 3.14 अशी घेतली जाते. उदाहरणात π ची किंमत दिली नसेल तर ती $\frac{22}{7}$ असे गृहीत धरतात.

त्रिज्या 'r', व्यास 'd' व परीघ 'c' असल्यास $\frac{\text{परीघ (c)}}{\text{व्यास (d)}} = \pi$ म्हणजेच $\boxed{c = \pi d}$

पण $d = 2r$ $\therefore c = \pi \times 2r$ म्हणजेच $\boxed{c = 2\pi r}$

उदा. एका वर्तुळाचा व्यास 14 सेमी आहे, तर त्याचा परीघ काढा.

उकल : वर्तुळाचा व्यास : $d = 14$ सेमी

वर्तुळाचा परीघ $= \pi d$

$c = \frac{22}{7} \times 14$

$\therefore$ वर्तुळाचा परीघ = 44 सेमी

उदा. एका वर्तुळाची त्रिज्या 35 सेमी आहे, तर त्याचा परीघ काढा.

उकल : वर्तुळाची त्रिज्या : $r = 35$ सेमी

वर्तुळाचा परीघ $= 2\pi r$

$c = 2 \times \frac{22}{7} \times 35$

$\therefore$ वर्तुळाचा परीघ = 220 सेमी

उदा. एका वर्तुळाचा परीघ 198 सेमी आहे, तर त्याची त्रिज्या व व्यास काढा.

उकल : वर्तुळाचा परीघ, $c = 2\pi r$

$198 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$

$r = 198 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22}$

त्रिज्या = 31.5 सेमी

$\therefore$ व्यास = $2 \times 31.5 = 63$ सेमी

उदा. एका वर्तुळाचा परीघ 62.80 सेमी आहे. $\pi = 3.14$ घेऊन वर्तुळाचा व्यास काढा.

उकल : वर्तुळाचा परीघ, $c = \pi d$

$62.80 = 3.14 \times d$

$\frac{62.80}{3.14} = d$

$20 = d$

$\therefore$ व्यास = 20 सेमी

उदा. एका वर्तुळाकार जागेची त्रिज्या 7.7 मीटर आहे. त्या जागेस तीन पदरी तारेचे कुंपण घालण्यासाठी प्रतिमीटर 50 रुपये प्रमाणे किती खर्च येईल ?

उकल : वर्तुळाकार जागेचा परीघ $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 7.7 = 48.4$

एकपदरी कुंपण घालण्यासाठी लागणाऱ्या तारेची लांबी = 48.4 मी

एकपदरी कुंपणाचा खर्च = तारेची लांबी $\times$ प्रतिमीटर दर

$= 48.4 \times 50$

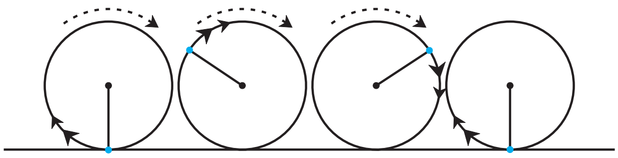
$= 2420$ रुपये

$\therefore$ तीनपदरी कुंपणाचा खर्च $= 3 \times 2420 = 7260$ रुपये

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदा. एका बसच्या चाकाचा व्यास 0.7 मी आहे. दोन गावांमधील 22 किमी अंतर पूर्ण करण्यासाठी चाकाचे किती फेरे होतील ?



उकल : चाकाचा परीघ $= \pi d$

$= \frac{22}{7} \times 0.7$

$= 2.2$ मी

सजातीय राशींचे गुणोत्तर काढताना त्यांची एकके समान असावी लागतात.

22 किमी $= 22 \times 1000 = 22000$ मीटर

म्हणजे चाकाचा एक फेरा पूर्ण झाला की 2.2 मी. अंतर पार होते. (1 फेरा = 1 परीघ)

चाकाचे एकूण फेरे $= \frac{\text{अंतर}}{\text{परीघ}} = \frac{22000}{2.2} = \frac{220000}{22} = 10000$

22 किमी अंतर पूर्ण करण्यासाठी बसच्या चाकाचे 10000 फेरे होतील.

सरावसंच 42

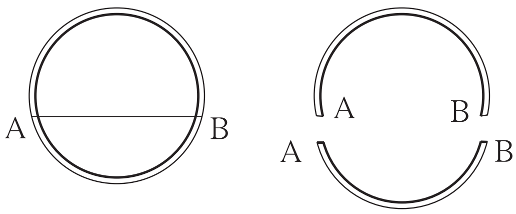
1. खालील सारणी पूर्ण करा.

अ.क्र.	त्रिज्या (r)	व्यास (d)	परीघ (c)
(i)	7 सेमी	....	....
(ii)	....	28 सेमी	....
(iii)	....	....	616 सेमी
(iv)	....	....	72.6 सेमी

2. एका वर्तुळाचा परीघ 176 सेमी आहे. तर त्याची त्रिज्या काढा.
3. एका वर्तुळाकार बागेची त्रिज्या 56 मीटर आहे. बागेभोवती तारेचे चार पदरी कुंपण घालण्यासाठी प्रतिमीटर 40 रुपये प्रमाणे किती खर्च येईल ?
4. एका बैलगाडीच्या चाकाचा व्यास 1.4 मीटर आहे. त्या बैलगाडीला 1.1 किलोमीटर अंतर पूर्ण करण्यासाठी तिच्या चाकाचे किती फेरे होतील ?

जरा आठवूया.

वर्तुळकंस (Arc of the circle)

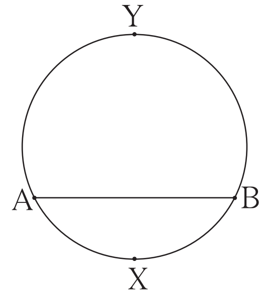


बाजूला एक प्लॅस्टिकची वर्तुळाकार बांगडी दाखवली आहे. समजा ही बांगडी A व B बिंदूपाशी तुटली, तर चित्रातील बांगडीच्या प्रत्येक तुकड्याला वर्तुळाच्या संदर्भात काय म्हणतात ?

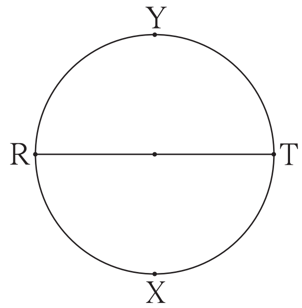
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.



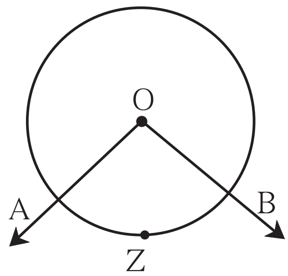
सोबतच्या आकृतीमध्ये जीवा AB मुळे वर्तुळाचे दोन भाग झाले आहेत. त्यांपैकी कंस AXB हा लहान आहे, त्याला **लघुकंस** म्हणतात आणि कंस AYB हा मोठा आहे, त्याला **विशालकंस** म्हणतात. लघुकंस AXB हा कंस AB असाही लिहितात.



ज्या दोन वर्तुळकंसांचे अंत्यबिंदू सामाईक असतात आणि ते दोन वर्तुळकंस मिळून वर्तुळ पूर्ण होते, ते कंस एकमेकांचे संगतकंस असतात. येथे कंस AYB व कंस AXB हे एकमेकांचे संगतकंस आहेत.

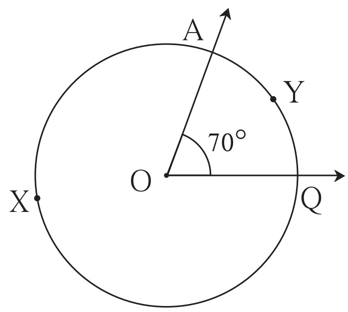
सोबतच्या आकृतीमध्ये जीवा RT हा वर्तुळाचा व्यास आहे. व्यासामुळे वर्तुळाचे दोन्ही कंस समान होतात. त्यांना **अर्धवर्तुळकंस** म्हणतात, हे ध्यानात घ्या.

केंद्रीय कोन व कंसाचे माप (Central angle and Measure of an arc)



सोबतच्या आकृतीमध्ये, वर्तुळकेंद्र 'O' हा ∠AOB चा शिरोबिंदू आहे. वर्तुळाचा केंद्रबिंदू हा ज्या कोनाचा शिरोबिंदू असतो. त्या कोनाला **केंद्रीय कोन** म्हणतात. आकृतीतील ∠AOB हा कंस AZB शी निगडित केंद्रीय कोन आहे. **वर्तुळ कंसाने केलेल्या केंद्रीय कोनाचे माप हे त्या कंसाचे माप मानले जाते.**

✸ **लघुकंसाचे माप**

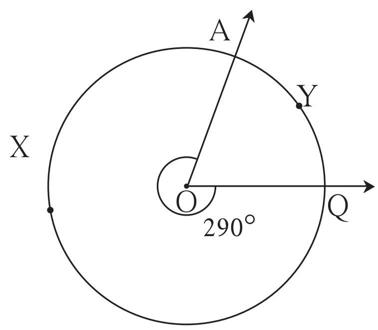


शेजारील आकृतीमध्ये ∠AOQ या केंद्रीय कोनाचे माप 70° आहे.

∴ लघुकंस AYQ चे माप 70° आहे.

∴ m(कंस AYQ) = 70° असे लिहितात.

✸ **विशालकंसाचे माप**



विशालकंसाचे माप = 360°– संगत लघुकंसाचे माप

∴ आकृतीतील विशालकंस AXQ चे माप

360° – 70° = 290° आहे.

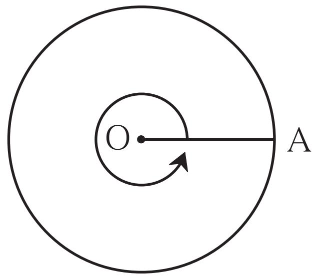
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

✸ वर्तुळाचे माप

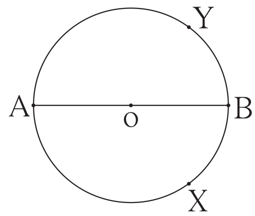
आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वर्तुळाची OA ही त्रिज्या घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने पूर्ण कोनातून फिरते. त्या वेळी होणारा कोन 360°मापाचा आहे. तिचे A हे टोक एक वर्तुळ पूर्ण करते. वर्तुळाने केलेला केंद्रीय कोन 360°आहे.

$\therefore$ पूर्ण वर्तुळाचे माप 360° असते.



✸ अर्धवर्तुळकंसाचे माप

आता, आकृतीवरून अर्धवर्तुळ कंस AXB व अर्धवर्तुळकंस AYB यांची मापे ठरवा.



हे मला समजले.

- लघुकंसाचे माप हे त्याच्या संबंधित केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.
- विशालकंसाचे माप = 360° – संगत लघुकंसाचे माप
- अर्धवर्तुळकंसाचे माप 180° असते.

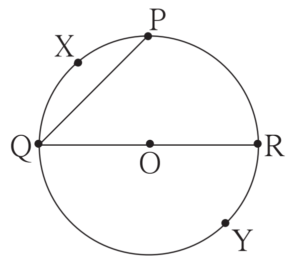
सरावसंच 43

1. अचूक पर्याय निवडा.

   जर कंस AXB व कंस AYB हे एकमेकांचे संगतकंस असतील आणि m(कंस AXB) = 120° तर m(कंस AYB) = किती ?

   (i) 140° (ii) 60° (iii) 240° (iv) 160°

2. ‘O’ केंद्र असलेल्या वर्तुळात काही कंस दाखवले आहेत. त्यांपैकी वर्तुळामधील लघुकंस, विशालकंस व अर्धवर्तुळकंस यांची नावे लिहा.



3. O केंद्र असलेल्या वर्तुळात लघुकंस PXQ चे माप 110° आहे, तर विशालकंस PYQ चे माप काढा.

ICT Tools or Links

Geogebra Software चा उपयोग करून केंद्रीय कोन आणि कंसाची विविध मापे यांचा सहसंबंध move option चा उपयोग करून अनुभवा.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

12 परिमिती व क्षेत्रफळ

जरा आठवूया.

परिमिती (Perimeter)

बंदिस्त आकृतीच्या सर्व बाजूंच्या लांबींची बेरीज म्हणजे त्या आकृतीची परिमिती असते.

बहुभुजाकृतीची परिमिती = तिच्या सर्व बाजूंच्या लांबींची बेरीज.

$\therefore$ चौरसाची परिमिती = 4 × बाजू

a बाजू असलेल्या चौरसाची परिमिती = $4a$

आयताची परिमिती = 2 लांबी + 2 रुंदी

लांबी l आणि रुंदी b असलेल्या आयताची परिमिती= $2l + 2b$

उदा. एका आयताची परिमिती 64 सेमी आहे. त्याची लांबी 17 सेमी असेल, तर रुंदी किती असेल ?

उकल : आयताची रुंदी x सेमी मानू.

2 लांबी + 2 रुंदी = परिमिती

2 (लांबी + रुंदी) = 64

$$2\,(17 + x) = 64$$

$$\frac{2(17+x)}{2} = \frac{64}{2}$$

$$17 + x = 32$$

$$x = 15$$

आयताची रुंदी 15 सेमी आहे.

उदा. लांबी 28 सेमी व रुंदी 20 सेमी असलेल्या एका आयताची परिमिती एका चौरसाच्या परिमिती एवढी आहे. तर त्या चौरसाची बाजू किती ?

उकल : आयताची परिमिती = 2 (लांबी + रुंदी)

$= 2\,(28 + 20)$

$= 96$

चौरसाची बाजू a असेल तर $4a = 96$

चौरसाची परिमिती = 96

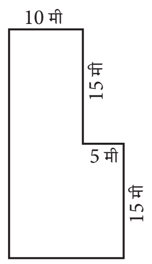
$$4a = 96$$

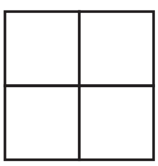
$$\therefore\ a = \frac{96}{4} = 24$$

चौरसाची बाजू 24 सेमी आहे.

सरावसंच 44

1. एका आयताची लांबी व रुंदी दुप्पट केली, तर त्या आयताची परिमिती मूळ आयताच्या परिमितीच्या किती पट होईल ?
2. एका चौरसाची बाजू तिप्पट केली, तर त्याची परिमिती मूळ चौरसाच्या परिमितीच्या किती पट होईल?
3. शेजारी मैदानाची आकृती दिली आहे. त्यामध्ये बाजूंच्या लांबींची मापे दिली आहेत. त्यावरून मैदानाची परिमिती काढा.





4. एक मीटर लांबीचा चौरसाकृती कापडाचा तुकडा घेऊन आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे चार समान आकारांचे रुमाल केले. सर्व रुमालांना बाजूने लेस लावण्यासाठी किती लांबीची लेस लागेल ?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जरा आठवूया.

क्षेत्रफळ (Area)

- चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू = $(\text{बाजू})^2$
- आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी = $l \times b$

क्षेत्रफळ हे चौरस मीटर, चौरस सेमी, चौरस किमी इत्यादी एककांत मोजतात.

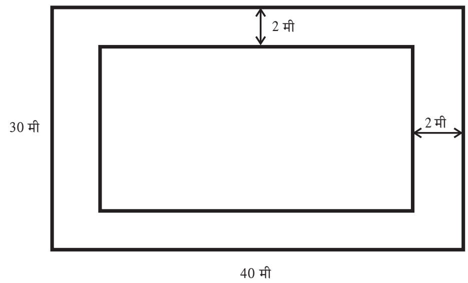
कृती I

खो-खो, कबड्डी या खेळांसाठी आखलेली पटांगणे, टेनिस कोर्ट, बॅडमिंटन कोर्ट यांपैकी शक्य असेल त्यांची लांबी व रुंदी मोजा. परिमिती व क्षेत्रफळे काढा.

कृती II

अनिरुद्धच्या घराच्या एका भिंतीला नवा रंग द्यायचा आहे. भिंतीची लांबी 7 मीटर व उंची 5 मीटर आहे. रंगाऱ्याने रंग देण्याचा दर प्रतिचौरस मीटर 120 रुपये सांगितला, तर त्याला रंगाऱ्याला किती रुपये द्यावे लागतील हे ठरवा.

उदा. एका 40 मीटर लांब व 30 मीटर रुंद अशा एका आयताकृती बागेच्या आत कुंपणालगत बागेभोवती 2 मीटर रुंदीचा रस्ता करायचा आहे. त्या रस्त्यावर 25 सेमी × 20 सेमी आकाराच्या फरश्या बसवायच्या आहेत तर अश्या किती फरश्या आणाव्या लागतील ?



फरश्या बसवण्याच्या भागाचे क्षेत्रफळ काढू.

बागेचे क्षेत्रफळ = 40 × 30 = 1200 चौमी

रस्ता सोडून आतील बागेचे क्षेत्रफळ = 36 × 26 = 936 चौमी

∴ फरश्या बसवण्याचा भाग = 1200 − 936 = 264 चौमी

100 सेमी = 1 मी
25 सेमी = $\frac{25}{100}$ मी

प्रत्येक फरशीचे क्षेत्रफळ = $\frac{25}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{1}{20}$ चौमी

एका फरशीचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{20}$ चौमी तर 264 चौमी जागेत बसणाऱ्या फरश्यांची संख्या काढू.

$$\text{फरश्यांची संख्या} = \frac{\text{जागेचे एकूण क्षेत्रफळ}}{\text{एका फरशीचे क्षेत्रफळ}}$$

$$= 264 \div \frac{1}{20}$$

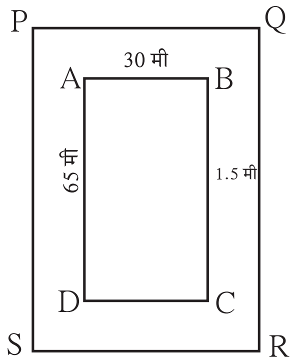
$$= 264 \times 20 = 5280$$

म्हणून 5280 फरश्या आणाव्या लागतील.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदा. एका आयताकृती क्रीडांगणाची लांबी 65 मीटर व रुंदी 30 मीटर आहे. त्या क्रीडांगणालगत बाहेरून चारही बाजूंना 1.5 मीटर रुंदीचा रस्ता आहे. त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा.



उकल : उदाहरणात क्रीडांगणाचा आकार आयताकृती आहे.

समजा □ ABCD हे क्रीडांगण आहे. त्याभोवती 1.5 मीटर रुंदीचा रस्ता आहे.

□ ABCD च्या सर्व बाजूंनी 1.5 मीटर अंतर ठेवल्यावर □ PQRS हा आयत मिळतो.

आयत PQRS ची लांबी = 65 + 1.5 + 1.5 = 68 मीटर

आयत PQRS ची रुंदी = 30 + 1.5 + 1.5 = 33 मीटर

रस्त्याचे क्षेत्रफळ = आयत PQRS चे क्षेत्रफळ – आयत ABCD चे क्षेत्रफळ

= 68 × 33 – 65 × 30 = ☐ – ☐ = ☐ चौरस मीटर

चला, चर्चा करूया.

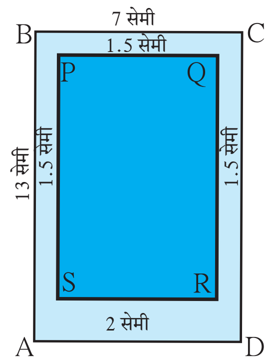
- वरील उदाहरणातील रस्त्याचे क्षेत्रफळ वेगळ्या रितीने काढता येईल का ?

उदा. एका मोबाइलची लांबी 13 सेमी व रुंदी 7 सेमी आहे. त्यावरील PQRS हा स्क्रीन आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे आहे.तर स्क्रीनचे क्षेत्रफळ किती ?

उकल: मोबाइलच्या कडांनी तयार झालेला आयत ABCD मानू. त्याची लांबी 13 सेमी व रुंदी 7 सेमी आहे. AB, BC व DC च्या बाजूने 1.5 सेमी अंतर सोडले व DA च्या बाजूने 2 सेमी अंतर सोडले तर तयार होणारा आयत PQRS मानू.

आयत PQRS ची लांबी = ☐ सेमी

आयत PQRS ची रुंदी= ☐ सेमी



स्क्रीनचे क्षेत्रफळ = आयत PQRS चे क्षेत्रफळ = ... × .... = ☐ चौसेमी

कृती

वेगवेगळ्या आकारांचे मोबाइल पाहा. त्यांच्यावर बसवलेल्या स्क्रीनचे क्षेत्रफळ काढा.

सरावसंच 45

1. एका चौरसाची बाजू 12 सेमी असल्यास, त्या चौरसाचे क्षेत्रफळ काढा.
2. एका आयताची लांबी 15 सेमी आणि रुंदी 5 सेमी असल्यास त्या आयताचे क्षेत्रफळ काढा.
3. एका आयताचे क्षेत्रफळ 102 चौसेमी आहे. आयताची लांबी 17 सेमी आहे, तर आयताची परिमिती किती?

4*. एका चौरसाची बाजू तिप्पट केली तर, त्याचे क्षेत्रफळ मूळ चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या किती पट होईल ?

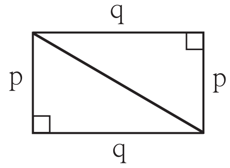
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.

काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (Area of right angled triangle)

कृती एकाच मापाचे दोन काटकोन त्रिकोण कापून घ्या. ते आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे जोडा. एक आयत तयार होतो हे अनुभवा. त्रिकोणाच्या काटकोन करणाऱ्या बाजू p व q या लांबीच्या आहेत व आयताच्याही त्याच बाजू आहेत. आकृतीवरून दिसते की, आयताचे क्षेत्रफळ = 2 × काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ



∴ 2 × काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $p \times q$

∴ काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{p \times q}{2}$

हे मला समजले.

- काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या लांबीचा गुणाकार

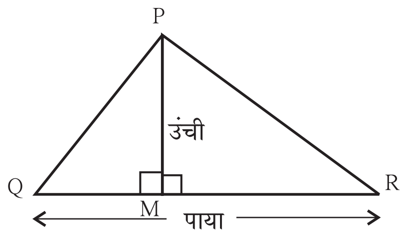
काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या दोन भुजांपैकी एक भुजा पायासाठी मानली तर काटकोन करणारी दुसरी भुजा या वेळी उंची असते.

काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ पाया × उंची

ΔABC हा कोणताही त्रिकोण असेल तर पायासाठी कोणतीही एक बाजू घेतात. त्या बाजूच्या समोरील शिरोबिंदूपासून पायावर टाकलेल्या लंबाचे माप ही त्या त्रिकोणाची उंची असते.

ΔPQR या कोणत्याही त्रिकोणात QR हा पाया घेतला. P पासून QR या पायावर PM हा लंब काढला.

आकृती 1: बिंदू M, रेख QR वर आहे.



ΔPMR व ΔPMQ काटकोन त्रिकोण आहेत.

$A(\Delta PQR) = A(\Delta PMQ) + A(\Delta PMR)$

$= \frac{1}{2} \times l(QM) \times l(PM) + \frac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM)$

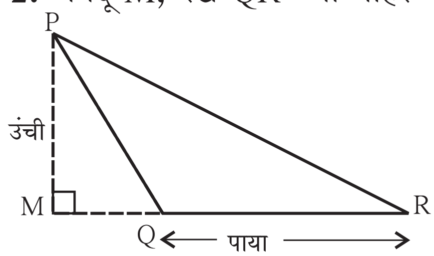
$= \frac{1}{2} [l(QM) + l(MR)] \times l(PM)$

$= \frac{1}{2} l(QR) \times l(PM)$

$= \frac{1}{2}$ × पाया × उंची

$A(\Delta PQR) = \frac{1}{2}$ × पाया × उंची

आकृती 2: बिंदू M, रेख QR च्या बाहेर आहे.



ΔPMR व ΔPMQ काटकोन त्रिकोण आहेत.

$A(\Delta PQR) = A(\Delta PMR) - A(\Delta PMQ)$

$= \frac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM) - \frac{1}{2} \times l(MQ) \times l(PM)$

$= \frac{1}{2} [l(MR) - l(MQ)] \times l(PM)$

$= \frac{1}{2} \times l(QR) \times l(PM)$

$= \frac{1}{2}$ × पाया × उंची

$A(\Delta PQR) = \frac{1}{2}$ × पाया × उंची

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

हे मला समजले.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ उंची

उदा. एका काटकोन त्रिकोणाच्या काटकोन करणाऱ्या बाजू 3.5 सेमी व 4.2 सेमी आहेत, तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल: काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या लांबीचा गुणाकार

$= \frac{1}{2} \times 3.5 \times 4.2$

$= 7.35$ चौसेमी

उदा. एका त्रिकोणाचा पाया 5.6 सेमी व उंची 4.5 सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती ?

उकल: त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ उंची

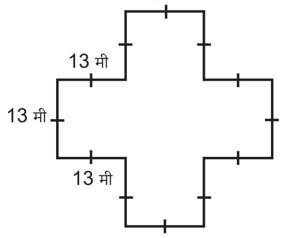
$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 4.5$

$= 12.6$ सेमी^{2}

(चौसेमी हे सेमी^{2} असेही लिहितात.)

सरावसंच 46

1. एका दिनदर्शिकेच्या पानाची लांबी 45 सेमी व रुंदी 26 सेमी आहे, तर त्या पानाचे क्षेत्रफळ किती ?
2. एका त्रिकोणाची उंची 3.6 सेमी व पाया 4.8 सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती ?
3. एका आयताकृती भूखंडाची लांबी 75.5 मीटर व रुंदी 30.5 मीटर आहे. त्याचा दर 1000 रुपये चौरस मीटर असल्यास, त्या भूखंडाची किंमत किती ?
4. आयताकृती सभागृहाची लांबी 12 मीटर व रुंदी 6 मीटर आहे. या खोलीत 30 सेमी बाजू असलेल्या चौरसाकृती फरश्या बसवायच्या आहेत; तर संपूर्ण सभागृहात किती फरश्या बसतील ? या उदाहरणातील चौरसाकृती फरश्या 15 सेमी बाजूच्या घेतल्या तर किती फरश्या लागतील ?
5. शेजारील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे मापे असलेल्या बागेची परिमिती व क्षेत्रफळ काढा.

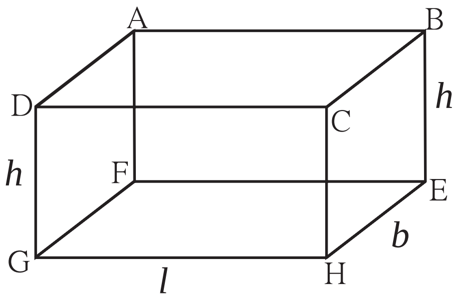


जाणून घेऊया.

पृष्ठफळ (Surface area)

कोणत्याही त्रिमितीय वस्तूच्या सर्व पृष्ठभागांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज म्हणजे त्या वस्तूचे पृष्ठफळ असते.

✱ **इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ**



- इष्टिकाचितीला सहा पृष्ठे असतात.
- प्रत्येक पृष्ठ आयताकार असते.
- समोरासमोरील आयताकार पृष्ठांचे क्षेत्रफळ समान असते.
- प्रत्येक कड तिला जोडणाऱ्या इतर दोन कडांना लंब असते.
- इष्टिकाचितीच्या आडव्या पृष्ठाची लांबी l ने व रुंदी b ने दाखवू. उभ्या पृष्ठांची उंची h ने दाखवू.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

आयत ABCD चे क्षेत्रफळ = आयत GHEF चे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी = $l \times b$

आयत ADGF चे क्षेत्रफळ = आयत BCHE चे क्षेत्रफळ = रुंदी × उंची = $b \times h$

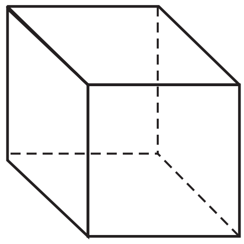
आयत CHGD चे क्षेत्रफळ = आयत ABEF चे क्षेत्रफळ = लांबी × उंची = $l \times h$

इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ = सर्व आयतांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज

इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ = 2 (लांबी × रुंदी + रुंदी × उंची + लांबी × उंची)

$= 2\ (l \times b + b \times h + l \times h) = 2\ (lb + bh + lh)$

✸ घनाचे पृष्ठफळ



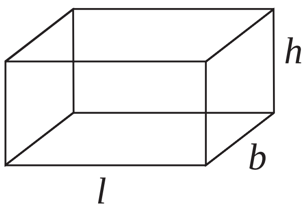
- घनाला 6 पृष्ठे असतात.
- प्रत्येक पृष्ठ चौरसाकार असते.
- सर्व पृष्ठांचे क्षेत्रफळ समान असते.
- चौरसाची बाजू l मानू.
- घनाच्या एका पृष्ठाचे क्षेत्रफळ = चौरसाचे क्षेत्रफळ
- घनाचे एकूण पृष्ठफळ = 6 चौरसांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज

= 6 × बाजू^{2}

$= 6 \times l^2$

उदा. लांबी 1.5 मीटर, रुंदी 1.2 मीटर व उंची 1.3 मीटर अशी मापे असलेली पत्र्याची इष्टिकाचिती आकाराची बंद पेटी तयार करायची असल्यास त्यास किती पत्रा लागेल ?

उकल : पेटीची लांबी = l = 1.5 मीटर, रुंदी = b = 1.2 मीटर, उंची = h = 1.3 मीटर



पेटीचे पृष्ठफळ $= 2\ (l \times b + b \times h + l \times h)$

$= 2\ (1.5 \times 1.2 + 1.2 \times 1.3 + 1.5 \times 1.3)$

$= 2\ (1.80 + 1.56 + 1.95)$

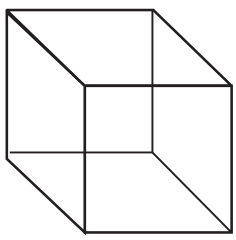
$= 2\ (5.31)$

= 10.62 चौमी.

पेटी तयार करण्यासाठी एकूण 10.62 चौमी पत्रा लागेल.

उदा. एका घनाकृती पेटीची बाजू 0.4 मी आहे. त्या पेटीला बाहेरून रंग देण्यासाठी दर चौरस मीटरला 50 रुपये प्रमाणे किती खर्च येईल ?

उकल : बाजू = l = 0.4 मीटर



घनाचे एकूण पृष्ठफळ $= 6 \times (l)^2$

$= 6 \times (0.4)^2$

= 6 × 0.16 = 0.96 चौमी

1 चौमी रंगवण्याचा खर्च 50 रुपये.

∴ 0.96 चौमी रंगवण्याचा खर्च = 0.96 × 50

= 48 रुपये

पेटी रंगवण्यासाठी 48 रूपये खर्च येईल.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सरावसंच 47

1. घनाच्या बाजू खालीलप्रमाणे असल्यास त्यांचे एकूण पृष्ठफळ काढा.
   (i) 3 सेमी (ii) 5 सेमी (iii) 7.2 मी (iv) 6.8 मी (v) 5.5 मी
2. खाली इष्टिकाचितीची लांबी, रुंदी व उंची अनुक्रमे दिलेली आहे, त्यावरून त्यांचे एकूण पृष्ठफळ काढा.
   (i) 12 सेमी, 10 सेमी, 5 सेमी. (ii) 5 सेमी, 3.5 सेमी, 1.4 सेमी.
   (iii) 2.5 सेमी, 2 मी, 2.4 मी. (iv) 8 मी, 5 मी, 3.5 मी.
3. एका आगपेटीची लांबी 4 सेमी, रुंदी 2.5 सेमी व उंची 1.5 सेमी आहे. त्या आगपेटीला बाहेरून रंगीत कागद तंतोतंत चिकटवायचा आहे, तर एकूण किती कागद लागेल ?
4. बागेतला पालापाचोळा ट्रॉलीवरून वाहून नेण्यासाठी झाकण नसलेली पत्र्याची पेटी तयार करायची आहे. तिची लांबी 1 5 मीटर, रुंदी 1 मीटर व उंची 1 मीटर आहे त्यासाठी एकूण किती पत्रा लागेल ? ती पेटी आतून व बाहेरून गंजविरोधक रंगाने रंगवायची आहे, तर 150 रुपये प्रतिचौरस मीटरप्रमाणे ती पेटी रंगवण्यास किती खर्च येईल ?

गणिती गंमत

काही तीन अंकी संख्या अशा असतात की, त्यातील अंकांचा जो गुणाकार येईल त्याने त्या संख्येस भाग जातो.

उदा. (i) 175 ही संख्या घ्या, $1 \times 7 \times 5 = 35$, $\frac{175}{35} = 5$

(ii) 816 ही संख्या घ्या, $8 \times 1 \times 6 = 48$, $\frac{816}{48} = 17$

(iii) 612 ही संख्या घ्या, $6 \times 1 \times 2 = 12$, $\frac{612}{12} = 51$

याप्रमाणे 135, 312,672 या सुद्‌धा संख्या आहेत.

अशा आणखी काही संख्या शोधा.

❑❑❑

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

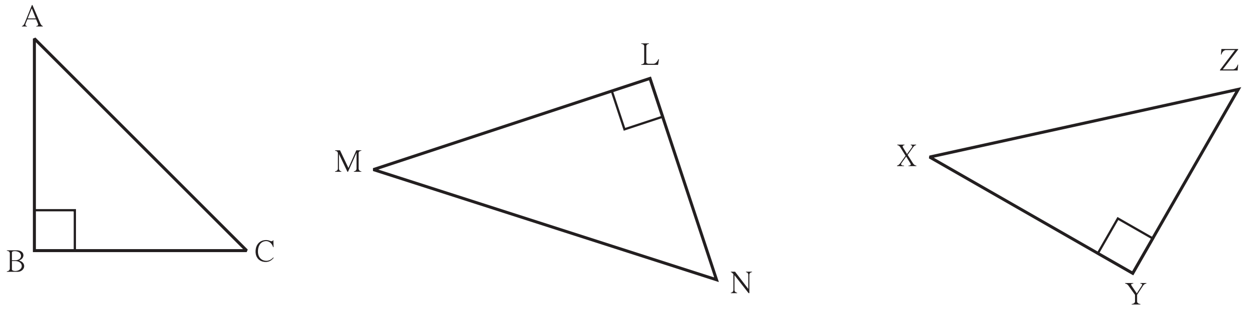
13 पायथागोरसचा सिद्धान्त

जरा आठवूया.

काटकोन त्रिकोण (Right angled triangle)

ज्या त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असतो, त्या त्रिकोणास काटकोन त्रिकोण म्हणतात आणि त्या काटकोनासमोरील बाजूला कर्ण म्हणतात, हे आपणांस माहीत आहे.

- खालील काटकोन त्रिकोणातील कर्णांची नावे लिहा.



ΔABC चा कर्ण ☐ ΔLMN चा कर्ण ☐ ΔXYZ चा कर्ण ☐

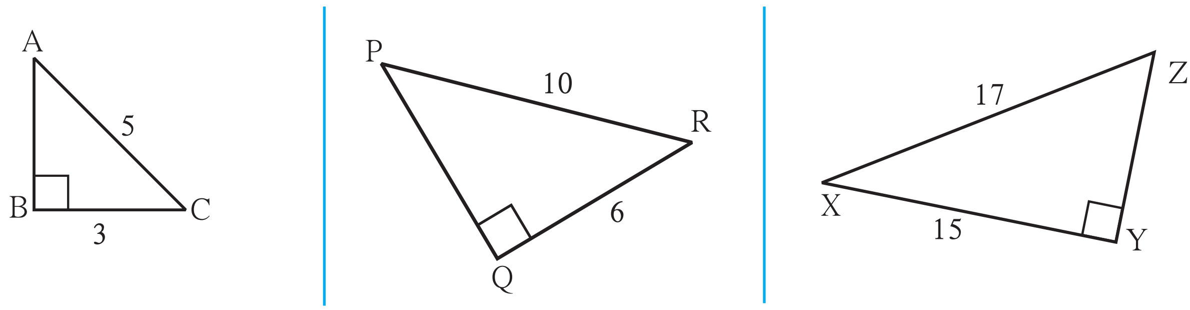
पायथागोरसचा सिद्धान्त (Theorem of Pythagoras)

पायथागोरस हा थोर ग्रीक गणिती ख्रिस्तपूर्व सहाव्या शतकात होऊन गेला. गणित विषयातील त्याचे योगदान खूप मोठे आहे. गणित शिकवण्याची त्याची हातोटी विलक्षण लोकप्रिय होती. त्याने अनेक शिष्य तयार केले.

काटकोन त्रिकोणासंबंधीचा एक सिद्धान्त फार पूर्वीपासून अनेक देशांतील लोकांना माहीत होता. भारतातील शुल्वसूत्र या ग्रंथातही तो आहे. त्या सिद्धान्ताची सिद्धता पायथागोरसने प्रथम दिली म्हणून त्याचे नाव त्या सिद्धान्ताला दिले गेले. **काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.** हा तो पायथागोरसचा सिद्धान्त आहे.

कृती कर्ण आणि काटकोन करणारी एक भुजा दिली असता खालील कच्च्या आकृतीतील मापांप्रमाणे काटकोन त्रिकोण काढा. तिसऱ्या भुजेची लांबी मोजा. पायथागोरसच्या सिद्धान्ताचा पडताळा घ्या.

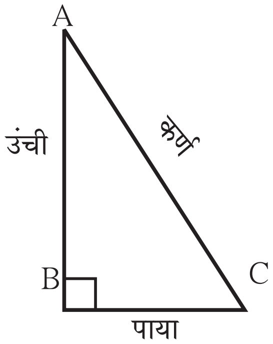
(i)   (ii)   (iii)



Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.



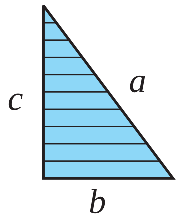
सोबतच्या आकृतीवरून, पायथागोरसचा सिद्धान्त खालीलप्रमाणे लिहितात. ΔABC मध्ये $\angle B$ काटकोन असेल तर,

$[l(AC)]^2 = [l(AB)]^2 + [l(BC)]^2$

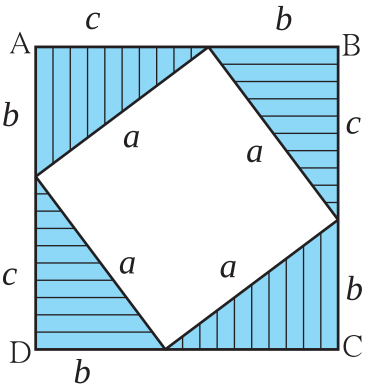
साधारणपणे काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजूंपैकी एक बाजू पाया म्हणून घेतात व दुसरी बाजू उंची म्हणून घेतात. मग हा सिद्धान्त **(कर्ण)**^{2} = **(पाया)**^{2} + **(उंची)**^{2} असा लिहितात.

पायथागोरसच्या **सिद्धान्ताचा पडताळा** घेण्यासाठी खालील कृती करा.

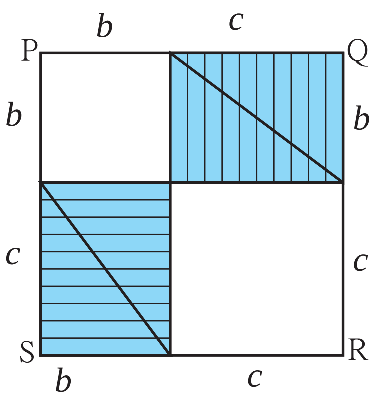
कृती एका कार्डशीटचे समान मापाचे 8 काटकोन त्रिकोण कापा. त्याच्या भुजा कोणत्याही लांबीच्या असू शकतात. त्या त्रिकोणाचा कर्ण 'a' एकक, काटकोन करणाऱ्या बाजू 'b' एकक व 'c' एकक आहेत, असे मानू. त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\frac{bc}{2}$ आहे, हे लक्षात घ्या.



आता वेगळ्या कार्डशीटवर (b + c) एकक बाजू असणारे दोन चौरस पेन्सिलने काढा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे आधी कापलेल्या 8 त्रिकोणांपैकी 4 त्रिकोण चौरस ABCD मध्ये ठेवा आणि राहिलेले 4 त्रिकोण आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे चौरस PQRS मध्ये ठेवा. त्रिकोणांनी झाकलेले भाग रेखांकित करा.



आकृती (i)



आकृती (ii)

आकृत्यांचे निरीक्षण करा. आकृती (i) मध्ये रिकाम्या जागेत ज्याची बाजू 'a' आहे असा चौरस तयार झाला आहे. आकृती (ii) मध्ये रिकाम्या जागेत 'b' व 'c' बाजू असलेले दोन चौरस तयार झाले आहेत.
दोन्ही चौरसांमध्ये रेखांकित केलेला भाग समान म्हणजे चार काटकोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळाइतका आहे.

आकृती (i) मध्ये चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ $= a^2 + 4 \times$ काटकोन त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ

$$= a^2 + 4 \times \frac{1}{2}\ bc$$

$$= a^2 + 2bc$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

आकृती (ii) मध्ये चौरस PQRS चे क्षेत्रफळ $= b^2 + c^2 + 4 \times$ काटकोन त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ

$$= b^2 + c^2 + 4 \times \frac{1}{2} bc$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc$$

चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ = चौरस PQRS चे क्षेत्रफळ

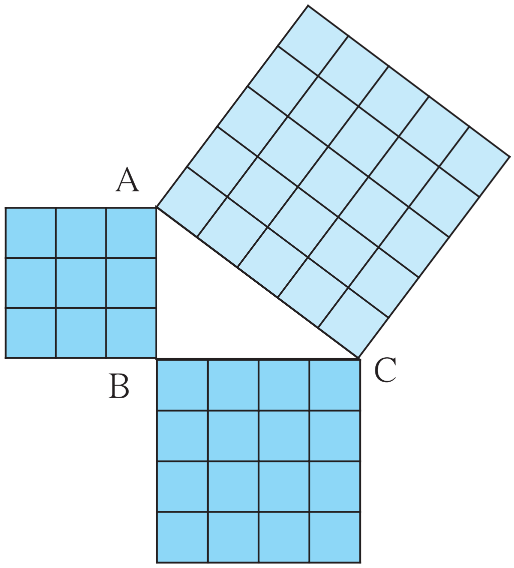
$$\therefore \quad a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

चला, चर्चा करूया.

- आकृती (i) मध्ये रिकाम्या चौकोनाचा प्रत्येक कोन काटकोन आहे, हे कोनमापकाशिवाय पडताळून पाहता येईल का ?

कृती एका कार्डशीटवर 3 सेमी, 4 सेमी व 5 सेमीच्या मापाचा एक काटकोन त्रिकोण काढा. प्रत्येक बाजूवर चौरसाची रचना करा. प्रत्येक चौरसाचे क्षेत्रफळ काढून पायथागोरसच्या सिद्धान्ताचा पडताळा घ्या.



पायथागोरसचा सिद्धान्त वापरून काटकोन त्रिकोणाच्या दोन बाजू दिल्यास तिसरी बाजू काढता येते.

उदा. ΔABC मध्ये $\angle C = 90^\circ$, $l(AC) = 5$ सेमी आणि $l(BC) = 12$ सेमी, तर $l(AB) =$ किती?

उकल : काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये $\angle C = 90^\circ$ म्हणून बाजू AB हा कर्ण आहे. पायथागोरस सिद्धान्तानुसार,

$$l(AB)^2 = l(AC)^2 + l(BC)^2$$

$$= 5^2 + 12^2$$

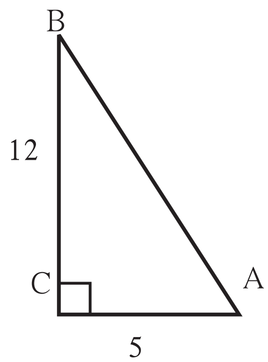
$$= 25 + 144$$

$$\therefore l(AB)^2 = 169$$

$$\therefore l(AB)^2 = 13^2$$

$$\therefore l(AB) = 13$$

$\therefore$ रेख AB ची लांबी = 13 सेमी

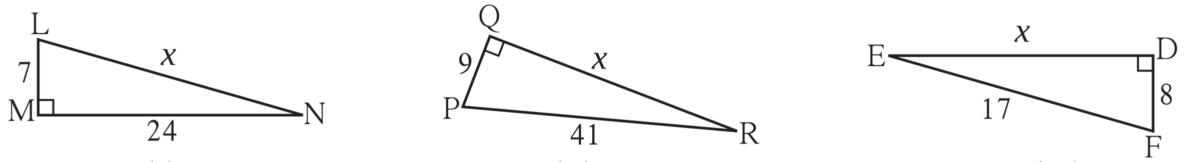


Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सरावसंच 48

1. खालील आकृत्या पाहा व 'x' ची किंमत काढा.



(i) (ii) (iii)

2. काटकोन ΔPQR मध्ये $\angle P = 90^\circ$ जर $l(PQ) = 24$ सेमी आणि $l(PR) = 10$ सेमी, तर रेख QR ची लांबी काढा.
3. काटकोन ΔLMN मध्ये $\angle M = 90^\circ$ जर $l(LM) = 12$ सेमी आणि $l(LN) = 20$ सेमी, तर रेख MN ची लांबी काढा.
4. 15 मी लांबीची एक शिडी जमिनीपासून 9 मीटर उंचीवरील एका खिडकीपाशी पोहचते, तर भिंतीचा पाया व शिडीचे खालचे टोक यांमधील अंतर काढा.

जाणून घेऊया.

नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये जर मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल तर त्याला **पायथागोरसचे त्रिकुट** म्हणतात. ज्या त्रिकोणाच्या भुजांची लांबी अशा त्रिकुटातील संख्यांनी दर्शवली जाते तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.

उदा. (7,24,25) हा संख्या समूह पायथागोरसचे त्रिकुट आहे का ?

7, 24, 25 यातील प्रत्येक संख्येचा वर्ग करू.

$7^2 = 49,\ 24^2 = 576,\ 25^2 = 625$

$\therefore 49 + 576 = 625$

$\therefore 7^2 + 24^2 = 25^2$

$\therefore$ 7, 24 व 25 हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

उपक्रम : 1 ते 50 या संख्यासमूहातील संख्या पाहा व त्यांमधील पायथागोरसची त्रिकुटे शोधा.

सरावसंच 49

1. पुढे काही त्रिकुटे दिली आहेत, त्यांतील पायथागोरसचे त्रिकुट ठरवा.

   (i) 3, 4, 5 (ii) 2, 4, 5

   (iii) 4, 5, 6 (iv) 2, 6, 7

   (v) 9, 40, 41 (vi) 4, 7, 8

2. खाली काही त्रिकोणांच्या बाजू दिल्या आहेत, त्यावरून कोणते त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहेत, ते ओळखा.

   (i) 8, 15, 17 (ii) 11, 12, 15 (iii) 11, 60, 61 (iv) 1.5, 1.6, 1.7

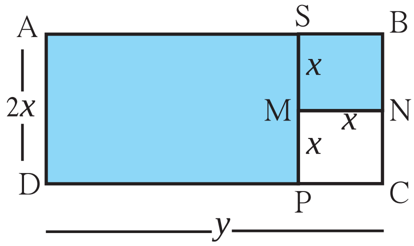
   (v) 40, 20, 30

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

14 बैजिक सूत्रे – वर्ग विस्तार

जरा आठवूया.



शेजारील आकृतीत आयत ABCD दाखवला आहे. या आयताची लांबी y एकक आहे व रुंदी $(2x)$ एकक आहे. या आयताकृती तुकड्यातून x एकक बाजू असलेला चौरस कापून घेतला. रंगीत भागाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी बैजिक राशींवरील क्रियांचा वापर करता येईल.

आयत ABCD चे क्षेत्रफळ हे A(□ABCD) असे लिहू.

रंगीत भागाचे क्षेत्रफळ = A(□ABCD) – A(□MNCP) = $2xy - x^2$

रंगीत भागाचे क्षेत्रफळ = A(□ASPD) + A(□SBNM) = $(y - x) \times 2x + x^2$

$= 2xy - 2x^2 + x^2$

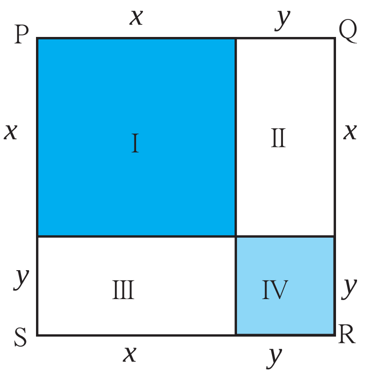
$= 2xy - x^2$

जाणून घेऊया.

वर्गविस्तार

बैजिक राशींचा गुणाकार करुन मिळालेली राशी ही त्या गुणाकाराचा विस्तार असतो. विशिष्ट प्रकारच्या राशींचे विस्तार एकदम लिहिता यावे यासाठी सूत्रे तयार केली जातात. त्यांपैकी काही सूत्रे आपण पाहू.

कृती I



- शेजारील आकृतीत □PQRS या चौरसाची बाजू $(x + y)$ आहे.

∴ A (□PQRS) = $(x + y)^2$

PQRS हा चौरस I, II, III, IV अशा आयतांमध्ये विभागला आहे.

PQRS या चौरसाचे क्षेत्रफळ हे आयत I, II, III, IV यांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज आहे.

∴ A (□PQRS) = A (आयत I) + A (आयत II) + A (आयत III) + A (आयत IV)

$(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

∴ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

आता $(x + y)^2$ हा बैजिक राशींचा गुणाकार करू.

$(x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y)$

$= x^2 + xy + yx + y^2$ ∴ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)$ या द्विपदीचा वर्ग करून आलेली बैजिक राशी ही क्षेत्रफळाच्या मापनावरून मिळालेल्या राशीएवढी आहे. ∴ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ हे द्विपदीच्या वर्गविस्ताराचे सूत्र आहे.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

कृती II शेजारील आकृतीत PQRS हा a बाजू असलेला चौरस असून त्याचे 4 आयतांत विभाजन केले आहे. जसे $(a - b)$ बाजूचा चौरस, b बाजूचा चौरस व $(a - b)$ आणि b बाजू असलेले 2 आयत.

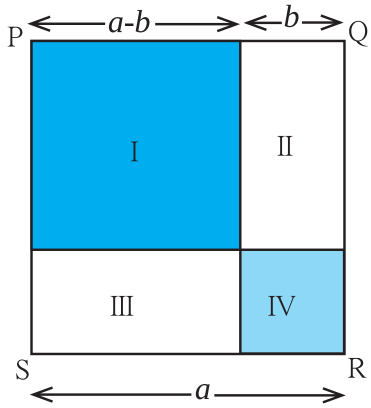
A (चौरस I) + A (आयत II) + A (आयत III) + A (चौरस IV) = A (□PQRS)

$(a - b)^2 + (a - b)\,b + (a - b)\,b + b^2 = a^2$

$(a - b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2 = a^2$

$(a - b)^2 + 2ab - b^2 = a^2$

$\therefore (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



बैजिक राशींचा गुणाकार करून सूत्र तयार करू.

$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$

$= a\,(a - b) - b\,(a - b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

हे मला समजले.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

वर्ग विस्तार सूत्रांमध्ये a आणि b साठी कोणत्याही संख्या घेतल्यास ते पडताळता येते.
जसे $a = 5$, $b = 3$ घेतल्यास.

$(a + b)^2 = (5 + 3)^2 = 8^2 = 64$

$a^2 + 2ab + b^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$= 25 + 30 + 9 = 64$

$(a - b)^2 = (5 - 3)^2 = 2^2 = 4$

$a^2 - 2ab + b^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$= 25 - 30 + 9 = 4$

खालील किमती घेऊन वर्ग विस्तार सूत्रे पडताळा.

(i) $a = -7$, $b = 8$ (ii) $a = 11$, $b = 3$ (iii) $a = 2.5$, $b = 1.2$

विस्तार करा.

उदा. $(2x + 3y)^2$

$= (2x)^2 + 2(2x) \times (3y) + (3y)^2$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

उदा. $(5x - 4)^2$

$= (5x)^2 - 2(5x) \times (4) + 4^2$

$= 25x^2 - 40x + 16$

उदा. $(51)^2$

$= (50 + 1)^2$

$= 50^2 + 2 \times 50 \times 1 + 1 \times 1$

$= 2500 + 100 + 1$

$= 2601$

उदा. $(98)^2$

$= (100 - 2)^2$

$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सरावसंच 50

1. विस्तार करा.

   (i) $(5a + 6b)^2$ (ii) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$ (iii) $(2p - 3q)^2$ (iv) $\left(x \quad \frac{2}{x}\right)^2$

   (v) $(ax + by)^2$ (vi) $(7m - 4)^2$ (vii) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ (viii) $\left(a \quad \frac{1}{a}\right)^2$

2. $(8 - \frac{1}{x})$ या द्विपदीचा वर्ग खालीलपैकी कोणता ? योग्य पर्याय लिहा.

   (i) $64 - \frac{1}{x^2}$ (ii) $64 + \frac{1}{x^2}$ (iii) $64 - \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$ (iv) $64 + \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$

3. $m^2n^2 + 14mnpq + 49p^2q^2$ हा वर्ग विस्तार खालीलपैकी कोणत्या राशींचा आहे ?

   (i) $(m + n)(p + q)$ (ii) $(mn - pq)$ (iii) $(7mn + pq)$ (iv) $(mn + 7pq)$

4. विस्तार सूत्राचा उपयोग करून किंमत काढा.

   (i) $(997)^2$ (ii) $(102)^2$ (iii) $(97)^2$ (iv) $(1005)^2$

जाणून घेऊया.

✻ $(a + b)$ $(a - b)$ चा विस्तार

$$
\begin{aligned}
(a + b)(a - b) &= (a + b) \times (a - b)\\
&= a(a - b) + b(a - b)\\
&= a^2 - ab + ba - b^2\\
&= a^2 - b^2\\
(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

हे मला समजले.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

उदा. $(3x + 4y)(3x - 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

उदा. $102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = (100)^2 - (2)^2 = 10000 - 4 = 9996$

सरावसंच 51

1. विस्तार सूत्र वापरून खालील गुणाकार लिहा.

   (i) $(x + y)(x - y)$ (ii) $(3x - 5)(3x + 5)$

   (iii) $(a + 6)(a - 6)$ (iv) $\left(\frac{x}{5}+6\right)\left(\frac{x}{5} \quad 6\right)$

2. विस्तार सूत्राचा उपयोग करून किंमत काढा.

   (i) 502×498 (ii) 97×103 (iii) 54×46 (iv) 98×102

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.

बैजिक राशींचे अवयव पाडणे.

आपण पूर्ण संख्यांचे अवयव पाडायला शिकलो आहोत. आता बैजिक राशींचे अवयव पाडण्याची क्रिया पाहू. प्रथम एकपदीचे अवयव पाहू.

$15 = 3 \times 5$ म्हणजे 3 व 5 हे 15 चे अवयव आहेत.

तसेच $3x = 3 \times x$ म्हणजे 3 व x हे $3x$ चे अवयव आहेत.

$5t^2$ ही राशी पाहा. $5t^2 = 5 \times t^2 = 5 \times t \times t$

$1, 5, t, t^2, 5t, 5t^2$ हे सगळे $5t^2$ चे अवयव आहेत.

$6\,ab^2 = 2 \times 3 \times a \times b \times b$

एकपदीचे अवयव पाडताना प्रथम सहगुणकाचे अवयव पाडता आले तर पाडावेत, नंतर चलभागाचे अवयव पाडावेत.

सरावसंच 52

⦿ खालील राशींचे सर्व अवयव सुटे करून राशी गुणाकार रूपात लिहा.

(i) $201\,a^3 b^2$ (ii) $91\,xyt^2$ (iii) $24\,a^2 b^2$ (iv) tr^2s^3

जाणून घेऊया.

द्विपदीचे अवयव पाडणे

$4xy + 8xy^2$ या द्विपदीतील प्रत्येक पदाचे 4 x आणि y हे अवयव आहेत.

$\therefore\ 4xy + 8xy^2 = 4(xy + 2xy^2) = 4x\,(y + 2xy) = 4xy\,(1 + 2y)$

दोन्ही पदांचे सामाईक अवयव शोधून ते कंसाबाहेर गुणाकाराच्या रूपात लिहीत गेले, की द्विपदीचे अवयव पाडता येतात.

$9a^2bc + 12abc^2 = 3(3a^2bc + 4abc^2) = 3abc\,(3a + 4c)$ याप्रमाणे अवयव पाडता येतात.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ हे सूत्र आपल्याला माहीत आहे.

यावरून, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ असेही अवयव मिळतात.

अवयव पाडा.

उदा. $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2$
$= (a + 2b)(a - 2b)$

उदा. $3a^2 - 27b^2 = 3(a^2 - 9b^2)$
$= 3(a + 3b)(a - 3b)$

सरावसंच 53

⦿ खालील राशींचे अवयव पाडा.

(i) $p^2 - q^2$ (ii) $4x^2 - 25y^2$ (iii) $y^2 - 4$ (iv) $p^2 - \frac{1}{25}$

(v) $9x^2 - \frac{1}{16}y^2$ (vi) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (vii) $a^2b - ab$ (viii) $4x^2y - 6x^2$

(ix) $\frac{1}{2}y^2 - 8z^2$ (x) $2x^2 - 8y^2$

❑❑❑

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

15 सांख्यिकी

जाणून घेऊया.

सरासरी

अस्मिताला रोज घरापासून सायकलने शाळेत जाण्यासाठी किती मिनिटे लागतात ते दिले आहे. अस्मिताला सोमवार ते शनिवार सायकलने शाळेत जाण्यासाठी लागलेला वेळ खालील सारणीत दिला आहे.

वार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
मिनिटे	20	20	22	18	18	20

यावरून असे दिसते की कधी तिला 18 मिनिटे लागतात, कधी 22 मिनिटे लागतात, तर कधी 20 मिनिटे लागतात. शाळेच्या 6 दिवसांचा विचार केला तर तिला शाळेत जाण्यासाठी दररोज अंदाजे किती मिनिटे लागतात ?

गणितात असा अंदाज करण्यासाठी सरासरी काढतात. येथे 6 दिवसांच्या मिनिटांची बेरीज करून त्या बेरजेला 6 ने भागले तर जी संख्या मिळते ती अंदाजे रोज लागणारी वेळ असते. ती या सर्व संख्यांची सरासरी आहे.

$$\text{सरासरी} = \frac{\text{सहा दिवसांतील शाळेत जाण्यासाठी लागणाऱ्या मिनिटांची बेरीज}}{\text{एकूण दिवस}}$$

$$= \frac{20 + 20 + 22 + 18 + 18 + 20}{6} = \frac{118}{6} = 19\frac{2}{3}$$

अस्मिताला शाळेत जाण्यासाठी सरासरी $19\frac{2}{3}$ मिनिटे एवढा वेळ रोज लागतो.

उदा. एका शाळेने, विद्यार्थ्यांचे घर शाळेपासून किती दूर आहे हे जाणून घेण्यासाठी सर्वेक्षण केले. त्यांपैकी खाली सहा विद्यार्थ्यांचे त्यांच्या घरापासून शाळेपर्यंतचे अंतर दिले आहे. त्या अंतरांची सरासरी काढू.
950 मी, 800 मी, 700 मी, 1.5 किमी, 1 किमी, 750 मी.

उकल : विद्यार्थ्यांच्या घरापासून शाळेपर्यंतच्या अंतराची सरासरी काढण्याकरिता सर्व अंतरे एकाच एककात मोजावी लागतात.

1 किमी = 1000 मीटर
1.5 किमी = 1500 मीटर

$$\text{सरासरी} = \frac{\text{सहा विद्यार्थ्यांचे घर व शाळा यांमधील अंतरांची बेरीज}}{\text{एकूण विद्यार्थी}}$$

$$= \frac{950 + 800 + 700 + 1500 + 1000 + 750}{6} = \frac{5700}{6} = 950 \text{ मी}$$

शाळेतील विद्यार्थ्यांचे घर व शाळा यांमधील अंतरांची सरासरी 950 मीटर आहे.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

चला, चर्चा करूया.

उदा. एका आठवड्यात सातही दिवस दोरीच्या उड्यांचा सराव ऋतुजा करत होती. प्रत्येक दिवशी एका मिनिटात तिने मारलेल्या उड्यांची संख्या खाली दिली आहे.

60, 62, 61, 60, 59, 63, 58

$$\text{सरासरी} = \frac{\text{सात दिवसांत मारलेल्या उड्यांची बेरीज}}{\text{एकूण दिवस}}$$

$$= \frac{\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{7} = \frac{\square}{\square}$$

एका मिनिटात मारलेल्या उड्यांची सरासरी = 60.42

ज्या संख्येबद्दल माहिती हवी, तिचे जेवढे नमुने आपल्याला दिलेल्या सामग्रीत मिळतात, त्यांना प्राप्तांक म्हणतात.

आपण जाणतो की, दोरीच्या उड्या नैसर्गिक संख्यांमध्ये मोजतात. कोणत्याही दिवशी अपूर्णांकात उड्या मारलेल्या नसतात. पण सरासरी अपूर्णांकात येऊ शकते.

हे मला समजले.

$$\text{सरासरी} = \frac{\text{दिलेल्या माहितीमधील सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{एकूण प्राप्तांकांची संख्या}}$$

उपक्रम : ✸ वर्गातील विद्यार्थ्यांचे 10 चे गट करून प्रत्येक गटातील मुलांच्या उंचीची सरासरी काढा.
✸ वर्गशिक्षकांकडून हजेरी पत्रक घेऊन एका आठवड्याची सरासरी हजेरी काढा.

सरावसंच 54

1. एका शहरामध्ये एका आठवड्यात पडलेला पाऊस मिमी मध्ये दिला आहे. त्यावरून आठवड्याची पावसाची सरासरी काढा.
9, 11, 8, 20, 10, 16, 12
2. शाळेच्या स्नेहसंमेलनामध्ये स्वयंसिद्धा महिला बचत गटाने आपला खाद्यपदार्थांचा स्टॉल लावला होता. दर तासाला झालेली विक्री ₹ 960, ₹ 830, ₹ 945, ₹ 800, ₹ 847, ₹ 970 याप्रमाणे आहे. तर ताशी सरासरी किती रुपयांची विक्री झाली ?
3. विदर्भात 5 वर्षांत पडलेल्या पावसाची नोंद खाली दाखवली आहे. त्यावरून पावसाची 5 वर्षांतील सरासरी काढा.
900 मिमी, 650 मिमी, 450 मिमी, 733 मिमी, 400 मिमी
4. एका शेतकऱ्याने पशुखाद्याची पोती आणली. त्यांची वजने कि.ग्रॅ मध्ये खाली दिली आहेत. तर पोत्यांचे सरासरी वजन काढा.
49.8, 49.7, 49.5, 49.3, 50, 48.9, 49.2, 48.8

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.

वारंवारता वितरण सारणी (Frequency distribution table)

कधी कधी दिलेल्या माहितीमध्ये काही प्राप्तांक अनेक वेळा येतात. **एखादा प्राप्तांक किती वेळा आला आहे हे दाखवणाऱ्या संख्येला त्या प्राप्तांकाची वारंवारता म्हणतात.** अशावेळी वारंवारता सारणी तयार करतात. या सारणीमध्ये प्राप्तांक, ताळ्याच्या खुणा व वारंवारता असे तीन स्तंभ असतात.

1. पहिल्या स्तंभामध्ये लहान संख्येपासून सुरुवात करून मोठ्या संख्येपर्यंतचे प्राप्तांक लिहा.
   उदा. 1, 2, 3, 4, 5, 6 या संख्या एकाखाली एक क्रमाने मांडाव्या.
2. माहितीमधील संख्या क्रमाने वाचा. प्रत्येक वेळी माहितीमधील संख्या वाचली, की सारणीमध्ये त्या संख्येजवळच्या स्तंभात '।' अशी खूण करा. या खुणेला ताळ्याची खूण म्हणतात.
   जसे 3 ही संख्या वाचून 3 या संख्येसमोर दुसऱ्या स्तंभात '।' अशी खूण करा. चार खुणांपर्यंतच्या खुणा ।।।। अशा लिहिल्या तर पाचवी खूण 卌 अशी करा. त्यामुळे ताळ्याच्या एकूण खुणा मोजणे सोपे होते.
3. प्रत्येक संख्येसमोरील ताळ्याच्या एकूण खुणांची संख्या मोजून लिहा. तिला वारंवारता म्हणतात. तिसऱ्या स्तंभात वारंवारता लिहा.
4. शेवटी सर्व वारंवारतांची बेरीज करतात. ती N या अक्षराने दर्शवतात. ही बेरीज एकूण प्राप्तांकांइतकी असते.

दिलेल्या माहितीवरून वारंवारता सारणी तयार करणे

उदा. एका वर्गातील काही मुलींचे घरापासून शाळेपर्यंतचे अंतर (किमी) मध्ये दिले आहे.
1, 3, 2, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6
त्यावरून वारंवारता सारणी कशी तयार करतात ते पाहू.

प्राप्तांक	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता
1	।।	2
2	।	1
3	।।	2
4	卌	5
5	।।	2
6	।।।	3
	एकूण वारंवारता	N = 15

प्राप्तांक मोजताना जी संख्या मोजली, ती लक्षात ठेवण्यासाठी त्या संख्येवर रेघ ओढतात. येथे पहिले तीन प्राप्तांक मोजून झाल्यानंतर प्राप्तांकाची यादी प्राप्तांक मोजताना दिली आहे.
(~~1~~, ~~3~~, ~~2~~, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6)

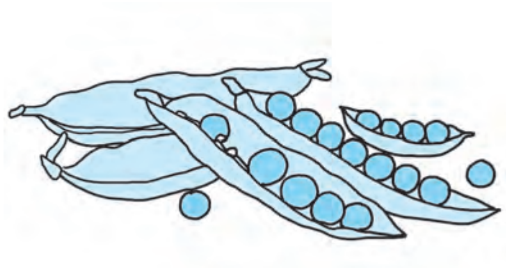
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

गणित माझा सोबती : घरात, बाजारात

प्रियाच्या आईने बाजारातून वाटाण्याच्या शेंगा आणल्या. आईने शेंगा सोलण्यास सुरुवात केली. प्रिया जवळच बसून आपला गणिताचा अभ्यास करत होती. तिचे लक्ष सहज आई सोलत असलेल्या शेंगांकडे गेले. काही शेंगांमधून 4 दाणे तर काही शेंगांमधून 7 दाणे निघाले. मग प्रियाने त्यांतील 50 शेंगा उचलल्या, त्या सोलल्या आणि त्यांतील दाण्यांच्या संख्यांची नोंद घेतली.

प्रियाने वाटाण्याच्या शेंगांमधील दाण्यांची वारंवारता सारणी तयार केली.



दाण्यांची संख्या	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता
2	卌 |||	8
3	卌 卌 卌	15
4	卌 卌 ||	12
5	||	2
6	卌 ||	7
7	|||	3
8	|||	3
	एकूण वारंवारता	N = 50

4, 3, 2, 4, 3, 4, 3, 3, 2, 8
2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5, 2, 8
8, 2, 5, 3, 4, 4, 3, 6, 2, 3
4, 4, 3, 3, 2, 6, 4, 4, 7, 2
3, 6, 3, 6, 6, 6, 7, 6, 7, 3

आई : तू सोललेल्या शेंगांमध्ये सरासरी किती दाणे निघाले हे काढता येईल का ?

प्रिया : या 50 संख्यांची बेरीज करून बेरजेला 50 ने भागायचे ना ? किचकट काम आहे.

आई : आपण ते काम सोपं करू. वारंवारता सारणीत 2 दाणे किती शेंगांमध्ये, 3 दाणे किती शेंगांमध्ये इत्यादी माहिती आहे ना ?

प्रिया : हो ! 2 दाणे 8 शेंगांमध्ये, 3 दाणे 15 शेंगांमध्ये, 4 दाणे 12 शेंगांमध्ये वगैरे माहिती आहे. आता आलं लक्षात. 2×8, 3×15, 4×12 असे गुणाकार करून त्यांची बेरीज केली तरी त्या पन्नास संख्यांची बेरीज मिळेल.

आई : सात लहान गुणाकार व त्यांची बेरीज करणं जरा सोपं आहे ना ! खूप मोठी सामग्री असते त्या वेळी वारंवारता सारणीचा असा उपयोग होतो.

प्रिया : मग एकूण प्राप्तांकांची बेरीज 206 आली म्हणून सरासरी $= \frac{206}{50} = 4.12$ एवढी झाली.

आई : कोणत्याही शेंगेमध्ये वाटाण्याचे दाणे पूर्ण संख्येतच असतात पण सरासरी ही अपूर्णांकात येऊ शकते. येथे प्रत्येक शेंगेमध्ये साधारण 4 दाणे आहेत असे म्हणता येईल.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

हे मला समजले.

- प्राप्तांकांचे वर्गीकरण सोप्या पद्धतीने करण्यासाठी ताळ्याच्या खुणांचा वापर करता येतो.
- खुणांची संख्या वारंवारता दाखवते, अशा प्रकारच्या सारणीला वारंवारता सारणी म्हणतात.
- प्राप्तांकांची संख्या मोठी असते त्या वेळी वारंवारता सारणीचा उपयोग सरासरी काढण्यासाठी होतो.

सरावसंच 55

1. एका वर्गातील 30 मुलांची उंची (सेमी) मध्ये दिली आहे. त्यावरून वारंवारता सारणी तयार करा.
   131, 135, 140, 138, 132, 133, 135, 133, 134, 135, 132, 133, 140, 139, 132, 131, 134, 133, 140, 140, 139, 136, 137, 136, 139, 137, 133, 134, 131, 140
2. एका वसाहतीमध्ये 50 कुटुंबे राहतात. प्रत्येक कुटुंबातील व्यक्तींची संख्या पुढे दिली आहे. त्यावरून वारंवारता सारणी तयार करा.
   5, 4, 5, 4, 5, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 5, 1, 3, 2, 4, 5, 3, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2.
3. एक फासा 40 वेळा फेकला तर वरच्या पृष्ठभागावर मिळालेल्या संख्यांची नोंद केली.
   त्यावरून वारंवारता सारणी तयार करा.
   3, 2, 5, 6, 4, 2, 3, 1, 6, 6, 2, 3, 5, 3, 5, 3, 4, 2, 4, 5, 4, 2, 6,
   3, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 1, 4, 3, 3, 2, 2, 5, 3, 3, 4,
4. एका वसतिगृहाच्या खानावळीमध्ये 30 मुलांना जेवणामध्ये खालीलप्रमाणे पोळ्यांची संख्या लागते. त्यावरून वारंवारता सारणी तयार करा.
   3, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2

सरासरीचा उपयोग विज्ञानाच्या सर्व शाखा, वैद्यक शाखा, भूगोल, अर्थशास्त्र, सामाजिक शास्त्रे इत्यादी विषयांतही होतो.

❑❑❑

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

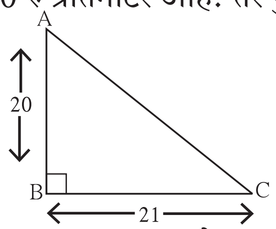
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. एंजलने 15000 रुपये द.सा.द.शे. 9 दराने काही वर्षांसाठी बँकेत ठेवले. तिला मुदतीअखेर 5400 रुपये सरळव्याज मिळाले, तर तिने किती वर्षांसाठी रक्कम ठेवली ?
2. एका रस्त्याच्या डांबरीकरणाचे काम करण्यासाठी 10 मजुरांना 4 दिवस लागतात. तर 8 मजुरांना किती दिवस लागतील ?
3. नसरुद्दीन व महेश यांनी प्रत्येकी ₹ 40,000 व ₹ 60,000 गुंतवून व्यवसाय चालू केला. या व्यवसायात त्यांना 30% नफा झाला. तर प्रत्येकाला किती नफा मिळाला ?
4. एका वर्तुळाचा व्यास 5.6 सेमी आहे तर त्याचा परीघ काढा.
5. विस्तार करा.

   (i) $(2a - 3b)^2$ (ii) $(10 + y)^2$ (iii) $\left(\frac{p}{3}+\frac{q}{4}\right)^2$ (iv) $\left(y \quad \frac{3}{y}\right)^2$
6. सूत्राचा उपयोग करून गुणाकार करा.

   (i) $(x - 5)(x + 5)$ (ii) $(2a - 13)(2a + 13)$

   (iii) $(4z - 5y)(4z + 5y)$ (iv) $(2t - 5)(2t + 5)$
7. एका बैलगाडीच्या चाकाचा व्यास 1.05 मीटर आहे, तर चाकाच्या 1000 फेऱ्यांमध्ये बैलगाडी किती किलोमीटर अंतर कापेल ?
8. एका 40 मी लांबीच्या आयताकृती बागेचे क्षेत्रफळ 1000 चौमी आहे, तर बागेची रुंदी काढा व तसेच बागेची परिमिती काढा. या बागेभोवती दरवाजाची 4 मीटर जागा सोडून 3 पदरी कुंपण घालायचे आहे, त्याचा खर्च 250 रु प्रतिमीटर आहे. तर कुंपण घालण्यासाठी लागणारा खर्च काढा.
9. 

   आकृतीत दिलेल्या माहितीवरून कर्ण AC काढा तसेच ΔABC ची परिमिती काढा.
10. एका घनाची बाजू 8 सेमी आहे तर त्या घनाचे एकूण पृष्ठफळ किती ?
11. अवयव पाडा. $365y^4z^3 - 146y^2z^4$

बहुपर्यायी प्रश्न

खालील प्रश्नांना पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्या उत्तरांपैकी योग्य पर्याय निवडा.

1. 33, 34, 35, x, 37, 38, 39 या संख्यांची सरासरी 36 आहे तर x ची किंमत .... असेल.

   (i) 40 (ii) 32 (iii) 42 (iv) 36
2. $(61^2 - 51^2)$ ही वर्गसंख्यांची वजाबाकी .... ही येते.

   (i) 1120 (ii) 1230 (iii) 1240 (iv) 1250
3. 2600 रुपयांची 8 : 5 या प्रमाणात, समीर व सुनीता या दोघांमध्ये वाटणी केली तर प्रत्येकाच्या वाट्याला .... व .... इतके रुपये येतील.

   (i) ₹ 1500, ₹ 1100 (ii) ₹ 1300, ₹ 900

   (iii) ₹ 800, ₹ 500 (iv) ₹ 1600, ₹ 1000

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उत्तरसूची

सरावसंच 1 1. -- 2. -- 3. त्रिकोणाच्या अंतर्भागात
4. काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावर.
5. त्रिकोणाचा परिमध्य काढणे. सरावसंच 2 --
सरावसंच 3 -- सरावसंच 4 -- सरावसंच 5 --

सरावसंच 6 1. (i) रेख MG ≅ रेख GR
(ii) रेख MG ≅ रेख NG (iii) रेख GC ≅ रेख GB
(iv) रेख GE ≅ रेख GR
2. (i) रेख AB ≅ रेख WA (ii) रेख AP ≅ रेख YC
(iii) रेख AC ≅ रेख PY (iv) रेख PW ≅ रेख BY
(v) रेख YA ≅ रेख YQ (vi) रेख BW ≅ रेख ZX
(वरील प्रश्नांसाठी प्रत्येकाची अनेक बरोबर उत्तरे येऊ शकतात.)

सरावसंच 7 ⊙ ∠AOB ≅ ∠BOC ,
∠AOB ≅ ∠RST, ∠AOC ≅ ∠PQR ,
∠DOC ≅ ∠LMN , ∠BOC ≅ ∠RST

सरावसंच 8 ⊙ (i) 35 (ii) −54 (iii) −36 (iv) −56
(v) 124 (vi) 84 (vii) 441 (viii) −105

सरावसंच 9 1. (i) −6 (ii) $\frac{-7}{2}$ (iii) $\frac{-3}{4}$ (iv) $\frac{-2}{3}$
(v) $\frac{-17}{4}$ (vi) 6 (vii) $\frac{5}{3}$ (viii) $\frac{-1}{6}$ (ix) $\frac{6}{5}$
(x) $\frac{1}{63}$ 2. 24 ÷ 5, 72 ÷ 15, −48 ÷ (−10) इ.
3. −5 ÷ 7, −15 ÷ 21, 20 ÷ (−28) इत्यादी अनेक

सरावसंच 10 1. 1 2. 4,5 व 17,19
3. 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 एकूण 16 मूळ संख्या
4. 59 व 61, 71 व 73 5. (2,3),(5,7), (11,12),(17,19),(29,30) इत्यादी अनेक 6. 2

सरावसंच 11 ⊙ (i) 2 × 2 × 2 × 2 × 2
(ii) 3 × 19 (iii) 23 (iv) 2 × 3 × 5 × 5
(v) 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 3
(vi) 2 × 2 × 2 × 2 × 13 (vii) 3 × 3 × 5 × 17
(viii) 2 × 3 × 3 × 19 (ix) 13 × 29 (x) 13 × 43

सरावसंच 12 1. (i) 5 (ii) 8 (iii) 5 (iv) 1
(v) 2 (vi) 7 (vii) 3 (viii) 3 (ix) 1 (x) 21
2. (i) मसावि 25, संक्षिप्त रूप $\frac{11}{21}$
(ii) मसावि 19, संक्षिप्त रूप $\frac{4}{7}$
(iii) मसावि 23, संक्षिप्त रूप $\frac{7}{3}$

सरावसंच 13 1. (i) 60 (ii) 120 (iii) 288
(iv) 60 (v) 3870 (vi) 90 (vii) 1365 (viii) 180
(ix) 567 (x) 108
2. (i) 1; 1184 (ii) 1; 2346 (iii) 15; 60
(iv) 9; 126 (v) 26; 312

सरावसंच 14 1. (i) 30 (ii) 40, 20
2. (i) 14; 28 (ii) 16; 32 (iii) 17; 510
(iv) 23; 69 (v) 7; 588
3. (i) 252 (ii) 150 (iii) 1008 (iv) 60 (v) 240
4. 365 5. (i) $\frac{12}{11}$ (ii) $\frac{17}{19}$ (iii) $\frac{23}{29}$ 6. 144
7. 255 8. 14 मी 9. 18 व 20

सरावसंच 15 1. अंतर्भागातील बिंदू : R,C,N,X
बाह्यभागातील बिंदू : T, U, Q, V, Y
कोनांच्या भुजांवरील बिंदू : A, W, G, B
2. ∠ANB व ∠BNC, ∠BNC व ∠ANC,
∠ANC व ∠ANB, ∠PQR व ∠PQT
3. (i) संलग्न आहेत.
(ii) आणि (iii) संलग्न नाहीत कारण अंतर्भाग भिन्न नाहीत.
(iv) संलग्न आहेत.

सरावसंच 16 1. (i) 50° (ii) 27° (iii) 45°
(iv) 35° (v) 70° (vi) 0° (vii) $(90-x)^\circ$
2. 20° आणि 70°

सरावसंच 17 1. (i) 165° (ii) 95° (iii) 60°
(iv) 143° (v) 72° (vi) 180° (vii) $(180-a)^\circ$
2. कोटिकोनांच्या जोड्या : (i) ∠B व ∠N
(ii) ∠D व ∠F (iii) ∠Y व ∠E
पूरक कोनांच्या जोड्या : (i) ∠B व ∠G (ii) ∠N व ∠J.
3. ∠X व ∠Z हे एकमेकांचे कोटिकोन आहेत.
4. 65° व 25°

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

5. (i) ∠P व ∠M (ii) ∠T व ∠N (iii) ∠P व ∠T (iv) ∠M व ∠N(v) ∠P व ∠N (vi) ∠M व ∠T
6. 160° **7.** $m\angle A = (160 - x)°$

सरावसंच 18 **1.** किरण PL व किरण PM; किरण PN व किरण PT.
2. नाहीत. कारण त्या किरणांनी एक रेषा तयार होत नाही.

सरावसंच 19 ---

सरावसंच 20 **1.** $m\angle APB = 133°$, $m\angle BPC = 47°$, $m\angle CPD = 133°$
2. $m\angle PMS = (180 - x)°$, $m\angle SMQ = x°$, $m\angle QMR = (180 - x)°$

सरावसंच 21 **1.** $m\angle A = m\angle B = 70°$
2. 40°, 60°, 80° **3.** $m\angle ACB = 34°$, $m\angle ACD = 146°$, $m\angle A = m\angle B = 73°$

सरावसंच 22 **1.** (i) $\frac{71}{252}$ (ii) $\frac{67}{15}$ (iii) $\frac{430}{323}$ (iv) $\frac{255}{77}$ **2.** (i) $\frac{16}{77}$ (ii) $\frac{14}{45}$ (iii) $\frac{-13}{6}$ (iv) $\frac{7}{6}$
3. (i) $\frac{6}{55}$ (ii) $\frac{16}{25}$ (iii) $-\frac{2}{3}$ (iv) 0
4. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $-\frac{8}{3}$ (iii) $-\frac{39}{17}$ (iv) $\frac{1}{7}$ (v) $-\frac{3}{22}$
5. (i) $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{100}{121}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $-\frac{1}{6}$ (v) $\frac{2}{5}$ (vi) $-\frac{10}{7}$ (vii) $-\frac{9}{88}$ (viii) $\frac{25}{2}$

सरावसंच 23 ⊙(i) $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ (ii) $\frac{23}{30}, \frac{22}{30}, \frac{21}{30}$
(iii) $-\frac{9}{15}, -\frac{7}{15}, \frac{4}{15}$ (iv) $\frac{6}{9}, 0, -\frac{4}{9}$ (v) $-\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$
(vi) $\frac{17}{24}, \frac{11}{24}, \frac{-13}{24}$ (vii) $\frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}$
(viii) $-\frac{1}{8}, -\frac{2}{8}, -\frac{5}{8}$ इत्यादी अनेक

सरावसंच 24 ⊙(i) 3.25 (ii) −0.875 (iii) 7.6
(iv) $0.41\dot{6}$ (v) $3.\overline{142857}$ (vi) $1.\dot{3}$ (vii) $0.\dot{7}$

सरावसंच 25 **1.** 149 **2.** 0 **3.** 4 **4.** 60 **5.** $\frac{17}{20}$

सरावसंच 26 **1.** -- **2.**(i) 1024 (ii) 125 (iii) 2401 (iv) −216 (v) 729 (vi) 8 (vii) $\frac{64}{125}$ (viii) $\frac{1}{16}$

सरावसंच 27 ⊙(i) 7^6 (ii) $(-11)^7$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^8$ (iv) $\left(\frac{3}{2}\right)^8$ (v) $(a)^{23}$ (vi) $\left(\frac{p}{5}\right)^{10}$

सरावसंच 28
1. (i) a^2 (ii) m^{-3} (iii) p^{-10} (iv) 1
2.(i) 1 (ii) 49 (iii) $\frac{4}{5}$ (iv) 16

सरावसंच 29 **1.** (i) $\left(\frac{15}{12}\right)^{12}$ (ii) 3^{-8}
(iii) $\left(\frac{1}{7}\right)^{12}$ (iv) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (v) 6^{20} (vi) $\left(\frac{6}{7}\right)^{10}$
(vii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ (viii) $\left(\frac{5}{8}\right)^6$ (ix) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (x) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$
2. (i) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{11}\right)^5$ (iii) $\left(\frac{6}{1}\right)^3$ किंवा 6^3
(iv) $\frac{1}{y^4}$

सरावसंच 30 **1.** (i) 25 (ii) 35 (iii) 17 (iv) 64 (v) 33

सरावसंच 31 --

सरावसंच 32 ⊙(i) एकपदी = $7x$; a ; 4
(ii) द्विपदी = $5y - 7z$; $5m - 3$
(iii) त्रिपदी = $3x^3 - 5x^2 - 11$; $3y^2 - 7y + 5$
(iv) बहुपदी = $1 - 8a - 7a^2 - 7a^3$

सरावसंच 33 ⊙(i) $22p + 18q$
(ii) $18a + 24b + 21c$ (iii) $19x^2 - 20y^2$
(iv) $-11a^2b^2 + 44c$ (v) $3y^2 - 8y + 9$
(vi) $4y^2 + 10y - 8$

सरावसंच 34 ⊙(i) $xy + 7z$ (ii) $4x + 2y + 4z$
(iii) $-12x^2 + 16xy + 20y^2$
(iv) $-10x^2 + 24xy + 16y^2$
(v) $-12x + 30z - 19y$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सरावसंच 35 1. (i) $288x^2y^2$ (ii) $92xy^3z^2$ (iii) $48ac + 68bc$ (iv) $36x^2 + 73xy + 35y^2$

2. $(40x^2 + 49x + 15)$ चौसेमी

सरावसंच 36 1. $-2(7x + 12y)$ 2. $-345x^5y^4z^3$

3. (i) 1 (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) 1 (iv) 3 (v) −5 (vi) $\frac{69}{5}$

4. 16 वर्षे, 11 वर्षे 5. 130 6. 30 नोटा 7. 132, 66

संकीर्ण 1 1. (i) 80 (ii) −6 (iii) −48 (iv) 25 (v) 8 (vi) −100 2. (i) 15; 675 (ii) 38; 228 (iii) 17; 1683 (iv) 8; 96

3. (i) $\frac{14}{17}$ (ii) $\frac{13}{11}$ (iii) $\frac{3}{4}$ 4. (i) 28 (ii) 15 (iii) 36 (iv) 45 (v) 16 5. --

6. (i) 77 (ii) 25 (iii) $\frac{49}{24}$ (iv) 1026

7. (i) $\frac{41}{48}$ (ii) $\frac{23}{20}$ (iii) −8 (iv) $\frac{63}{20}$ 8. --

9. -- 10. -- 11. -- 12.-- 13. (i) 55° (ii) $(90 - a)°$ (iii) 68° (iv) $(50 + x)°$

14. (i) 69° (ii) 133° (iii) 0° (iv) $(90 + x)°$

15. -- 16. (i) 110° (ii) 55° (iii) 55°

17. (i) 5^7 (ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

18. (i) 1 (ii) $\frac{1}{1000}$ (iii) 64 (iv) 16

19. (i) $8a + 10b - 13c$ (ii) $21x^2 - 10xy - 16y^2$ (iii) $18m - n$ (iv) $2m - 19n + 11p$

20. (i) $x = -10$ (ii) $y = 5$

बहुपर्यायी प्रश्न 1. अंतर्मध्य 2. $\left(\frac{7}{3}\right)^{12}$ 3. 3 4. $\frac{3}{2}$ 5. $10 \times 3 + (5 + 2)$

सरावसंच 37 1. ₹ 240 2. 32 पेंढ्या 3.18 किग्रॅ 4. ₹ 24000 5. ₹ 104000

सरावसंच 38 1. 10 दिवस; 4 दिवस 2. 50 पाने 3. 2 तास; 3 तास 4. 20 दिवस

सरावसंच 39 1. ₹ 12800; ₹ 16000 2. ₹ 10000; ₹ 24000 3. ₹ 38000; ₹ 9120 4. ₹ 147; ₹ 343 5. ₹ 54000; ₹ 15120

सरावसंच 40 1. ₹ 1770 2. ₹ 25000; ₹ 375000 3. ₹ 14875 4. ₹ 3600 5. ₹ 180000

सरावसंच 41 1. 10% 2. ₹ 300 3. 5 वर्षे 4. ₹ 41000 5. (i) ₹ 882, ₹ 5082 (ii) ₹ 5000, ₹ 6200 (iii) 2 वर्षे, ₹ 8800 (iv) ₹ 12000, 10 वर्षे (v) ₹ 19200, ₹ 21600

सरावसंच 42 1. (i) 14 सेमी; 44 सेमी (ii) 14 सेमी; 88 सेमी (iii) 98 सेमी; 196 सेमी (iv) 11.55 सेमी; 23.1 सेमी 2. 28 सेमी 3. ₹ 56320 4. 250 फेरे

सरावसंच 43 1. 240°

2. लघुकंसाची नावे : कंस PXQ, कंस PR, कंस RY, कंस XP, कंस XQ, कंस QY

विशालकंसाची नावे : कंस PYQ, कंस PQR, कंस RQY, कंस XQP, कंस QRX

अर्धवर्तुळकंसाची नावे : कंस QPR, कंस QYR

3. 250°

सरावसंच 44 1. 2 पट 2. 3 पट 3. 90 मी 4. 8 मी

सरावसंच 45 1. 144 चौसेमी 2. 75 चौसेमी 3. 46 सेमी 4. 9 पट

सरावसंच 46 1. 1170 चौसेमी 2. 8.64 चौसेमी 3. ₹ 2302750 4. 800 फरश्या ; 3200 फरश्या 5. 156 मी ; 845 चौमी

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सरावसंच 47 **1.** (i) 54 चौसेमी (ii) 150 चौसेमी (iii) 311.04 चौमी (iv) 277.44 चौमी (v) 181.5 चौमी **2.** (i) 460 चौसेमी (ii) 58.8 चौसेमी (iii) 31.6 चौमी (iv) 171 चौसेमी **3.** 39.5 चौसेमी **4.** 6.5 चौमी, ₹ 1950

सरावसंच 48 **1.** (i) 25 एकक (ii) 40 एकक (iii) 15 एकक **2.** 26 सेमी **3.** 16 सेमी **4.** 12 मी

सरावसंच 49 **1.** (i) आहे (ii) नाही (iii) नाही (iv) नाही (v) आहे (vi) नाही

2. (i) आहे (ii) नाही (iii) आहे (iv) नाही (v) नाही

सरावसंच 50 **1.** (i) $25a^2+60ab+36b^2$ (ii) $\frac{a^2}{4}+\frac{ab}{3}+\frac{b^2}{9}$ (iii) $4p^2 \quad 12pq+9q^2$ (iv) $x^2 \quad 4+\frac{4}{x^2}$ (v) $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$ (vi) $49m^2 \quad 56m+16$ (vii) $x^2+x+\frac{1}{4}$ (viii) $a^2 \quad 2+\frac{1}{a^2}$ **2.** $64 \quad \frac{16}{x}+\frac{1}{x^2}$ **3.** $(mn+7pq)^2$ **4.** (i) 994009 (ii) 10404 (iii) 9409 (iv) 1010025

सरावसंच 51 **1.** (i) x^2-y^2 (ii) $9x^2-25$ (iii) a^2-36 (iv) $\frac{x}{25}^2-36$ **2.** (i) 249996 (ii) 9991 (iii) 2484 (iv) 9996

सरावसंच 52 ⦿ (i) $3\times67\times a\times a\times a\times b\times b$ (ii) $13\times7\times x\times y\times t\times t$ (iii) $2\times2\times2\times3\times a\times a\times b\times b$ (iv) $t\times r\times r\times s\times s\times s$

सरावसंच 53 ⦿ (i) $(p+q)(p \quad q)$ (ii) $(2x+5y)(2x \quad 5y)$ (iii) $(y+2)(y \quad 2)$ (iv) $\left(p+\frac{1}{5}\right)\left(p \quad \frac{1}{5}\right)$ (v) $\left(3x+\frac{1}{4}y\right)\left(3x \quad \frac{1}{4}y\right)$ (vi) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x \quad \frac{1}{x}\right)$ (vii) $ab(a \quad 1)$ (viii) $2x^2(2xy \quad 3x)$ (ix) $\frac{1}{2}(y+4z)(y \quad 4z)$ (x) $2(x+2y)(x \quad 2y)$

सरावसंच 54 **1.** 12.29 मिमी **2.** ₹ 892 **3.** 626.6 मिमी **4.** 49.4 किग्रॅ

सरावसंच 55 **1.**

उंची	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	एकूण
मुले	3	3	5	3	3	2	2	1	3	5	30

2.

व्यक्ती	1	2	3	4	5	एकूण
कुटुंबे	1	13	16	13	7	50

3.

पृष्ठभाग	1	2	3	4	5	6	एकूण
वारंवारता	2	8	13	8	5	4	40

4.

पोळ्या	2	3	4	5	एकूण
मुले	9	10	8	3	30

संकीर्ण 2 **1.** 4 वर्षे **2.** 5 दिवस **3.** ₹ 12000 ; ₹ 18000 **4.** 17.6 सेमी

5. (i) $4a^2 \quad 12ab+9b^2$ (ii) $100+20y+y^2$ (iii) $\frac{p^2}{9}+\frac{pq}{6}+\frac{q^2}{16}$ (iv) $y^2 \quad 6+\frac{9}{y^2}$

6. (i) x^2-25 (ii) $4a^2-169$ (iii) $16z^2-25y^2$ (iv) $4t^2-25$ **7.** 3.3 किमी

8. 25 मी ; 130 मी ; ₹ 94500

9. 29 एकक ; 70 एकक **10.** 384 सेमी^{2}

11. $73y^2z^3(5y^2 \quad 2z)$

बहुपर्यायी प्रश्न **1.** 36 **2.** 1120 **3.** ₹ 1600, ₹ 1000.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com