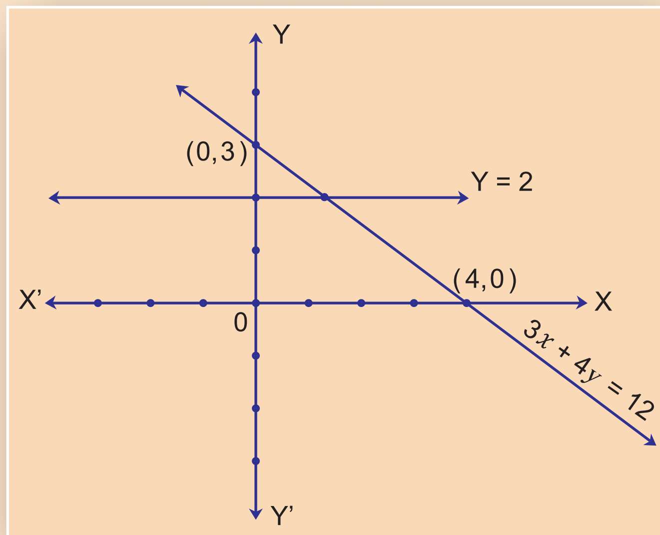
गणित भाग – I

इयत्ता दहावी



$$1 + 2 + 3 + \cdots \cdots + 78 + 79 + 80$$
$$= (1 + 80) + (2 + 79) + \cdots + (39 + 42) + (40 + 41)$$

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ अन्वये स्थापन करण्यात आलेल्या समन्वय समितीच्या दिनांक २९.१२.२०१७ रोजीच्या बैठकीमध्ये हे पाठ्यपुस्तक सन २०१८-१९ या शैक्षणिक वर्षापासून निर्धारित करण्यास मान्यता देण्यात आली आहे.

गणित

भाग I

इयत्ता दहावी

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे - ४११ ००४.

46FFCI

आपल्या स्मार्टफोनवरील DIKSHA App द्वारे पाठ्यपुस्तकाच्या पहिल्या पृष्ठावरील Q. R. Code द्वारे डिजिटल पाठ्यपुस्तक व प्रत्येक पाठामध्ये असलेल्या Q. R. Code द्वारे त्या पाठासंबंधित अध्ययन अध्यापनासाठी उपयुक्त दृकश्राव्य साहित्य उपलब्ध होईल.

गणित विषयतज्ज्ञ समिती

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. विनायक गोडबोले (सदस्य)
श्रीमती प्राजक्ती गोखले (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती पूजा जाधव (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय - राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती जयश्री पुरंदरे
श्री. राजेंद्र चौधरी
श्री. रामा व्हन्याळकर
श्री. आण्णापा परीट
श्री. अन्सार शेख
श्री. श्रीपाद देशपांडे
श्री. सुरेश दाते
श्री. उमेश रेळे
श्री. बन्सी हावळे
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री. प्रकाश झेंडे
श्री. लक्ष्मण दावणकर
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी
श्री. सुनिल श्रीवास्तव
श्री. अन्सारी अब्दुल हमीद
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्रीमती तरुबेन पोपट
श्री. प्रमोद ठोंबरे
डॉ. भारती सहस्रबुद्धे
श्री. वसंत शेवाळे
श्री. प्रताप काशिद
श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. गणेश कोलते
श्री. संदेश सोनावणे
श्री. सुधीर पाटील
श्री. प्रकाश कापसे
श्री. रवींद्र खंदारे
श्रीमती स्वाती धर्माधिकारी
श्री. अरविंदकुमार तिवारी
श्री. मल्लेशाम बेथी
श्रीमती आर्या भिडे

मुखपृष्ठ व संगणकीय आरेखन

श्री. संदीप कोळी, चित्रकार, मुंबई

अक्षरजुळणी

गणित विभाग, पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे

प्रमुख संयोजक

उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

निर्मिती

सच्चितानंद आफळे
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहायक निर्मिती अधिकारी

कागद

७० जी.एस.एम.क्रीमवोव्ह

मुद्रणादेश

N/PB/2018-19/50,000

मुद्रक

ASHOKA PRINT PACK, SANGLI

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ,
प्रभादेवी, मुंबई २५

भारताचे संविधान

उद्देशिका

आम्ही, भारताचे लोक, भारताचे एक सार्वभौम समाजवादी धर्मनिरपेक्ष लोकशाही गणराज्य घडविण्याचा व त्याच्या सर्व नागरिकांस:

सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक **न्याय;**
विचार, अभिव्यक्ती, विश्वास, श्रद्धा
व उपासना यांचे **स्वातंत्र्य;**
दर्जाची व संधीची **समानता;**

निश्चितपणे प्राप्त करून देण्याचा
आणि त्या सर्वांमध्ये व्यक्तीची प्रतिष्ठा
व राष्ट्राची एकता आणि एकात्मता
यांचे आश्वासन देणारी **बंधुता**
प्रवर्धित करण्याचा संकल्पपूर्वक निर्धार करून;

आमच्या संविधानसभेत
आज दिनांक सव्वीस नोव्हेंबर, १९४९ रोजी
याद्वारे हे संविधान अंगीकृत आणि अधिनियमित करून स्वत:प्रत अर्पण करीत आहोत.

राष्ट्रगीत

जनगणमन-अधिनायक जय हे
भारत-भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत-भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रांनो,

दहावीच्या वर्गात तुमचे स्वागत!

गणित भाग I आणि गणित भाग II ही पुस्तके यावर्षी तुम्हांला अभ्यासायची आहेत.

गणित भाग I मध्ये बीजगणित, आलेख, अर्थनियोजन व सांख्यिकी ही मुख्य क्षेत्रे आहेत. तुम्हांला यावर्षी नववीपर्यंत ओळख करून दिलेल्या घटकांचाच थोडा अधिक अभ्यास करायचा आहे. अर्थनियोजनात GST या नव्या करप्रणालीची ओळख करून दिली आहे. जेथे नवा भाग, सूत्रे किंवा उपयोजन आहे, तेथे सुलभ स्पष्टीकरण दिले आहे. प्रत्येक प्रकरणात नमुन्याची सोडवलेली उदाहरणे, सरावासाठी उदाहरणे आहेतच, शिवाय प्रज्ञावान विद्यार्थ्यांसाठी काही आव्हानात्मक प्रश्न तारांकित करून दिले आहेत. काही विद्यार्थ्यांना दहावीनंतर गणिताचा अभ्यास करायचा नसला, तरी गणितातील मूलभूत संकल्पना त्यांना समजाव्यात, इतर क्षेत्रात काम करताना आवश्यक ते गणित वापरता यावे, असे ज्ञान त्यांना या पुस्तकातून मिळेल. 'अधिक माहितीसाठी' या शीर्षकाखाली दिलेला मजकूर, ज्या विद्यार्थ्यांना दहावीनंतरही गणिताचा अभ्यास करून त्यात प्रावीण्य मिळवण्याची इच्छा आहे, त्यांना उपयोगी पडेल, म्हणून अशा विद्यार्थ्यांनी तो जरूर अभ्यासावा. सगळे पुस्तक एकदा तरी वाचून व समजून घ्यावे.

ॲपच्या माध्यमातून क्यू. आर. कोडद्वारे प्रत्येक पाठासंबंधी अधिक उपयुक्त दृक्-श्राव्य साहित्य आपणांस उपलब्ध होईल. त्याचा अभ्यासासाठी निश्चित उपयोग होईल.

दहावीची परीक्षा महत्त्वाची मानली जाते. या गोष्टीचा ताण न घेता चांगला अभ्यास करून मनासारखे यश मिळवण्यासाठी तुम्हांला शुभेच्छा!

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे.

पुणे
दिनांक : १८ मार्च २०१८, गुढीपाडवा
भारतीय सौर दिनांक : २७ फाल्गुन १९३९

इयत्ता १० वी गणित भाग I अभ्यासक्रमातून खालील क्षमता विद्यार्थ्यांमध्ये विकसित होतील.

क्षेत्र	घटक	क्षमता विधाने
1. **संख्याज्ञान**	1.1 अंकगणिती श्रेढी	• अंकगणिती श्रेढीचा उपयोग करून उदाहरणे सोडवता येणे. • भविष्यातील एखादी गोष्ट साध्य करण्यासाठी टप्प्याटप्प्याने नियोजन करता येणे.
2. **बीजगणित**	2.1 वर्गसमीकरणे 2.2 दोन चलांतील रेषीय समीकरणे	• व्यवहारातील ज्या समस्या वर्गसमीकरणाच्या रूपात व्यक्त करता येतात, त्यांची उकल शोधता येणे. • शाब्दिक उदाहरणांची उकल काढण्यासाठी किती चलांचा वापर करावा लागेल हा निर्णय घेता येणे. • शाब्दिक उदाहरणांचे रूपांतर दोन चलांमधील समीकरणात करून उकल काढता येणे.
3. **व्यावहारिक गणित**	3.1 अर्थनियोजन	• बचत, गुंतवणूक या बाबींची समज निर्माण होणे. • उद्योग, व्यवसायातील अर्थव्यवहारांची तोंडओळख होणे.
4. **सांख्यिकी व संभाव्यता**	4.1 संभाव्यता 4.2 आलेख व केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे	• खेळ, मतदान इत्यादी क्षेत्रात संभाव्यतेचा उपयोग करता येणे. • विशिष्ट प्रकारची माहिती गोळा केल्यावर त्याचे आलेख रूपात/चित्ररूपात प्रतिरूपण करण्यासाठी विशिष्ट आलेखांची निवड करता येणे. • वर्गीकृत सामग्री दिल्यावर मध्य, मध्यक, बहुलक काढता येणे.

शिक्षकांसाठी सूचना

प्रथम पुस्तकाचे सखोल वाचन करून ते समजून घ्यावे. विविध घटकांचे स्पष्टीकरण व सूत्रांचा पडताळा घेणे या महत्त्वाच्या गोष्टींसाठी कृतींची मदत घ्यावी.

प्रात्यक्षिकांतूनही मूल्यमापन करायचे आहे. त्यासाठीही कृती वापरता येतात. विद्यार्थ्यांना स्वतंत्र विचार करण्यास उत्तेजन द्यावे. एखादे उदाहरण वेगळ्या, परंतु तर्कशुद्ध पद्धतीने सोडवणाऱ्या विद्यार्थ्यांना खास शाबासकी द्यावी.

प्रात्यक्षिकांची यादी (नमुना)

1. आलेख कागदावर X-अक्षाला किंवा Y-अक्षाला समांतर रेषा काढून त्या रेषेवरील कोणत्याही चार बिंदूंचे निर्देशक लिहा. निर्देशकांवरून रेषेचे समीकरण कसे तयार होते ते लिहा.

   [समांतर रेषेऐवजी आरंभबिंदूतून जाणाऱ्या किंवा X व Y अक्षांना छेदणाऱ्या रेषा घेतल्या तरी चालेल.]

2. कोणतीही दोन अंकी संख्या मनात ठरवा. ती उघड न करता ओळखण्यासाठी कोडे तयार करा. संख्येच्या अंकांमधील दोन बैजिक संबंध तयार करा व कोडे सोडवून दाखवा.

   [वरील प्रात्यक्षिक तीन अंकी संख्येसाठीही करता येईल.]

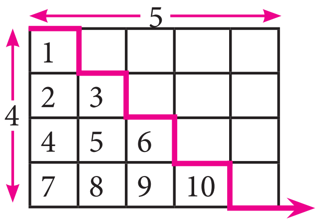
3. कोणत्याही खाद्यपदार्थाच्या पाकिटावरील घटकांची माहिती वाचा व ती माहिती दाखवणारा वृत्तालेख काढा. उदाहरणार्थ, बिस्किटाच्या पुड्यावरील कर्बोदके, प्रथिने, जीवनसत्त्वे, इत्यादी घटकांचा तक्ता पाहा. तो किती वजनासाठी दिला आहे हे पाहा. त्यावरून वजनांचे वितरण दाखवणारा वृत्तालेख काढा. त्यासाठी कर्बोदके, स्निग्ध, प्रथिने व इतर असे घटकांचे चार भाग करता येतील.

4. शिक्षकांनी दिलेली वारंवारता वितरण सारणी संगणकावर Excel sheet मध्ये तयार करा. त्या सारणीवरून वारंवारता बहुभुज व स्तंभालेख Excel मध्ये तयार करा.

5. एक फासा दहा वेळा फेकून मिळालेल्या निष्पत्ती नोंदवणे व त्यांची सारणी तयार करणे.

6. शिक्षकांनी दिलेले जीएसटी व्यवहाराचे करबीजक पाहा. त्यातील सर्व बाबींची नोंद करा. त्यातील कर आकारणीचे परत गणन करून दाखवा व सर्व गणन बरोबर असल्याची खात्री करा.

7. शिक्षकांनी सांगितलेल्या पहिल्या n क्रमवार नैसर्गिक संख्यांची बेरीज करण्यासाठी दिलेली कृती करून पाहा. उदाहरणार्थ, 1 पासून 4 पर्यंतच्या नैसर्गिक संख्यांची बेरीज करण्यासाठी 4×5 चा एक चौकटींचा कागद घ्या व आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे कापून घ्या. (येथे n = 4 आहे.) त्यावरून $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ या सूत्राचा पडताळा घ्या.



$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \therefore S_4 = \frac{4\ (4+1)}{2} = \frac{4\times5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

[टीप : येथे a = 1 व d = 1 आहे. जास्त संख्या घेऊन, a व d या संख्या बदलून; तसेच सम किंवा विषम संख्यांच्या बेरजेसाठी तसेच नैसर्गिक संख्यांच्या घनांच्या बेरजेसाठी अशा कृती करता येतील.]

8. एका कार्डावर पुढच्या बाजूस $\alpha = 6$ व मागच्या बाजूस $\alpha = -6$ लिहा. तसेच दुसऱ्या कार्डाच्या एकेका पृष्ठभागावर $\beta = -3$ व $\beta = 7$ असे लिहा. त्यावरून $(\alpha + \beta)$ व $(\alpha\beta)$ च्या वेगवेगळ्या किमती तयार होतील. त्या किमती वापरून वर्गसमीकरणे तयार करा.

अनुक्रमणिका

1 दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

चला, शिकूया.

- दोन चलांतील रेषीय समीकरणे सोडवण्याच्या पद्धती – आलेख पद्धत, क्रेमरची पद्धत.
- दोन चलांतील रेषीय समीकरणात रूपांतर करण्याजोगी समीकरणे.
- एकसामयिक समीकरणांचे उपयोजन.

जरा आठवूया.

दोन चलांतील रेषीय समीकरण (Linear equation in two variables)

ज्या समीकरणामध्ये दोन चले वापरली जातात आणि चल असलेल्या प्रत्येक पदाची कोटी 1 असते त्या समीकरणाला दोन चलांतील रेषीय समीकरण असे म्हणतात, हे आपण मागील इयत्तेत अभ्यासले आहे.

$ax + by + c = 0$ हे दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचे सामान्यरूप आहे. येथे a, b, c या वास्तव संख्या असून a आणि b हे एकाच वेळी शून्य नसतात हेही आपल्याला माहीत आहे.

उदा. $3x = 4y - 12$ या समीकरणाचे $3x - 4y + 12 = 0$ हे सामान्यरूप आहे.

कृती : खालील सारणी पूर्ण करा.

क्रमांक	समीकरण	दोन चलांतील रेषीय समीकरण आहे की नाही?
1	$4m + 3n = 12$	आहे.
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

एकसामयिक रेषीय समीकरणे (Simultaneous linear equations)

जेव्हा आपण दोन चलांतील दोन रेषीय समीकरणांचा एकाच वेळी विचार करतो तेव्हा त्या समीकरणांना एकसामयिक समीकरणे म्हणतात.

मागील इयत्तेत एका चलाचा लोप करून समीकरणे सोडवण्याच्या पद्धतींचा अभ्यास आपण केला आहे. त्याची थोडक्यात उजळणी करू

उदा. (1) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$5x - 3y = 8;\ 3x + y = 2$

उकल :

रीत I : $5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

$3x + y = 2 \ldots$ (II)

समीकरण (II) च्या दोन्ही बाजूंना 3 ने गुणू

$9x + 3y = 6 \ldots$ (III)

$5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

आता समीकरण (I) व (III) यांची बेरीज करू.

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 8 \\ +\ 9x + 3y = 6 \\ \hline 14x = 14 \end{array}$$

$\therefore\ x = 1$

$x = 1$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवू.

$3x + y = 2$

$\therefore\ 3 \times 1 + y = 2$

$\therefore\ 3 + y = 2$

$\therefore\ y = -1$

$x = 1,\ y = -1$ ही उकल आहे.

हीच उकल $(x, y) = (1, -1)$ अशीही लिहितात.

रीत (II)

$5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

$3x + y = 2 \ldots$ (II)

समीकरण (II) वरून y या चलाची किंमत x या चलाच्या रूपात लिहू.

$y = 2 - 3x \ldots$ (III)

आता y ची ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$5x - 3y = 8$

$\therefore\ 5x - 3(2 - 3x) = 8$

$\therefore\ 5x - 6 + 9x = 8$

$\therefore\ 14x - 6 = 8$

$\therefore\ 14x = 8 + 6$

$\therefore\ 14x = 14$

$\therefore\ x = 1$

$x = 1$ ही किंमत समीकरण (III) मध्ये ठेवू.

$y = 2 - 3x$

$\therefore\ y = 2 - 3 \times 1$

$\therefore\ y = 2 - 3$

$\therefore\ y = -1$

$x = 1,\ y = -1$ ही उकल आहे.

उदा. (2) सोडवा: $3x + 2y = 29;\ 5x - y = 18$

उकल : $3x + 2y = 29 \ldots$ (I) आणि $5x - y = 18 \ldots$ (II)

दिलेली समीकरणे y या चलाचा लोप करून सोडवू. त्यासाठी खालील चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

समीकरण (II) ला 2 ने गुणून

$\therefore\ 5x \times \boxed{} - y \times \boxed{} = 18 \times \boxed{}$

$\therefore\ 10x - 2y = \boxed{} \ldots$ (III)

समीकरण (I) मध्ये समीकरण (III) मिळवू.

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x + 2y = 29 \\
+ & \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} \\
\hline
 & \boxed{} = \boxed{}
\end{array}
\qquad \therefore\ x = \boxed{}
$$

$x = 5$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$3x + 2y = 29$

$\therefore\ 3 \times \boxed{} + 2y = 29$

$\therefore\ \boxed{} + 2y = 29$

$\therefore\ 2y = 29 - \boxed{}$

$\therefore\ 2y = \boxed{} \qquad \therefore\ y = \boxed{}$

$(x, y) = (\boxed{}, \boxed{})$ ही उकल आहे.

उदा. (3) $15x + 17y = 21;\ 17x + 15y = 11$

उकल : $15x + 17y = 21 \ldots$ (I)

$17x + 15y = 11 \ldots$ (II)

या दोन समीकरणांत x आणि y यांच्या सहगुणकांची अदलाबदल आहे. अशा प्रकारची एकसामयिक समीकरणे सोडवताना त्या दोन्ही समीकरणांची बेरीज आणि वजाबाकी घेतली असता दोन नवीन सोपी समीकरणे मिळतात. ती समीकरणे सोडवून समीकरणांची उकल सहज मिळते.

समीकरण (I) व समीकरण (II) यांची बेरीज करून,

$$
\begin{array}{rl}
 & 15x + 17y = 21 \\
+ & 17x + 15y = 11 \\
\hline
 & 32x + 32y = 32
\end{array}
$$

समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस 32 ने भागून

$$x + y = 1 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

समीकरण (I) मधून समीकरण (II) वजा करू.

$$\begin{array}{rcl} 15x + 17y & = & 21 \\ - \quad 17x + 15y & = & 11 \\ - \quad - & & - \\ \hline -2x + 2y & = & 10 \end{array}$$

समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस 2 ने भागून,

$$-x + y = 5 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

समीकरण (III) व समीकरण (IV) यांची बेरीज करू.

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ + \quad -x + y & = & 5 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \; 2y = 6 \qquad \therefore \; y = 3$

$y = 3$ ही किंमत समीकरण (III) मध्ये ठेवू.

$x + y = 1$

$\therefore \; x + 3 = 1$

$\therefore \; x = 1 - 3 \qquad \therefore \; x = -2$

$(x, y) = (-2, 3)$ ही समीकरणांची उकल आहे.

सरावसंच 1.1

1. खालील कृती पूर्ण करून एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$5x + 3y = 9$ ----- (I)

$2x - 3y = 12$ ----- (II)

समी. (I) व समी. (II) यांची बेरीज करू.

$$\begin{array}{rcl} 5x + 3y & = & 9 \\ + \quad 2x - 3y & = & 12 \\ \hline \boxed{}\, x & = & \boxed{} \end{array}$$

$x = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} \qquad x = \boxed{}$

$x = 3$ समी.(I) मध्ये ठेवू.

$5 \times \boxed{} + 3y = 9$

$3y = 9 - \boxed{}$

$3y = \boxed{}$

$y = \dfrac{\boxed{}}{3}$

$y = \boxed{}$

$(x, y) = (\boxed{}, \boxed{})$ ही समीकरणाची उकल आहे.

2. खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(1) $3a + 5b = 26;\ a + 5b = 22$ (2) $x + 7y = 10;\ 3x - 2y = 7$

(3) $2x - 3y = 9;\ 2x + y = 13$ (4) $5m - 3n = 19;\ m - 6n = -7$

(5) $5x + 2y = -3;\ x + 5y = 4$ (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3};\ 2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$

(7) $99x + 101y = 499;\ 101x + 99y = 501$

(8) $49x - 57y = 172;\ 57x - 49y = 252$

जरा आठवूया.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचा आलेख (Graph of a linear equation in two variables)

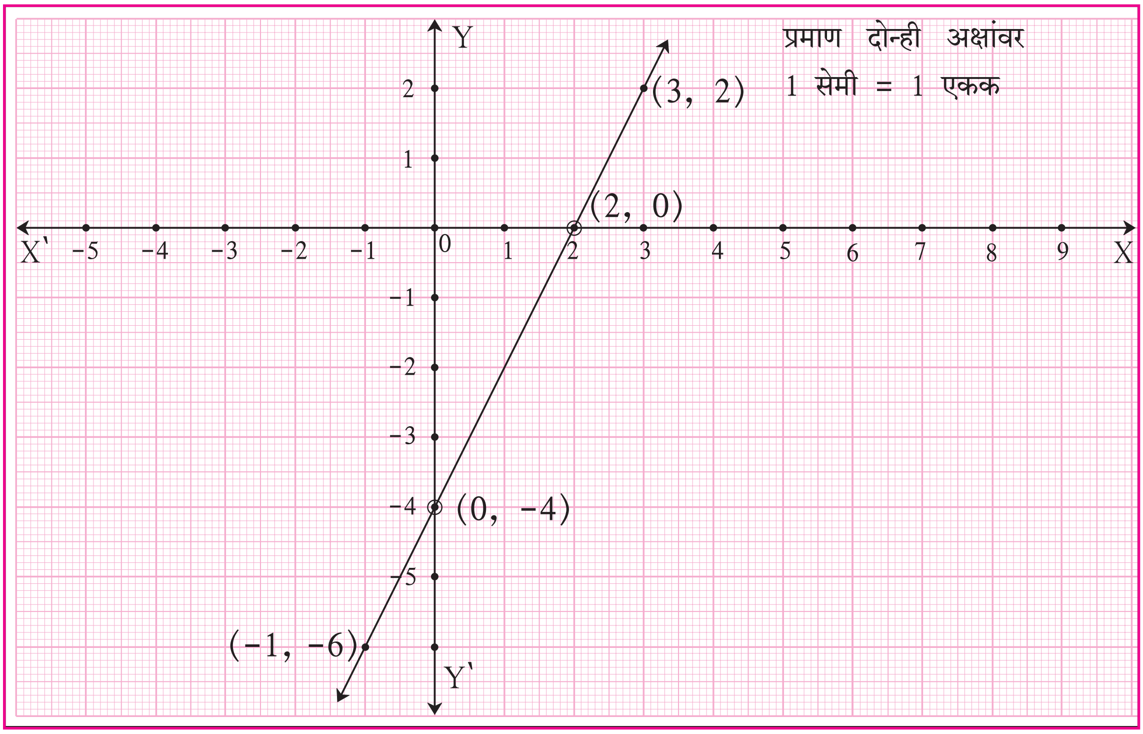
मागील इयत्तेत, दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचा आलेख ही एक सरळ रेषा असते असे आपण अभ्यासले आहे. जी क्रमित जोडी दिलेल्या समीकरणाचे समाधान करते ती जोडी त्या समीकरणाची उकल असते. तसेच ती क्रमित जोडी त्या समीकरणाच्या आलेखावरील एक बिंदू दर्शवते.

उदाहरण $2x - y = 4$ या समीकरणाचा आलेख काढा.

उकल : $2x - y = 4$ या समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी (x, y) च्या 4 क्रमित जोड्या मिळवू.

x	0	2	3	-1
y	-4	0	2	-6
(x, y)	$(0, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 2)$	$(-1, -6)$

क्रमित जोड्या मिळवताना सारणीत दाखवल्याप्रमाणे x व y यांची शून्य ही किंमत घेणे सोईचे असते.



दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचा आलेख काढताना खालील पायऱ्या ध्यानात घ्या.

दिलेल्या समीकरणासाठी किमान 4 क्रमित जोड्या (बिंदूंचे निर्देशक) शोधा

↓

आलेख कागदावर X-अक्ष व Y-अक्ष निश्चित करून बिंदू स्थापन करा.

↓

सर्व बिंदू एकरेषीय येतील. त्या बिंदूंतून जाणारी रेषा काढा.

रेषा निश्चित होण्यासाठी दोन बिंदू पुरेसे असतात, परंतु त्यांपैकी एका बिंदूचे निर्देशक काढताना चूक झाली, तर रेषाही चुकते.

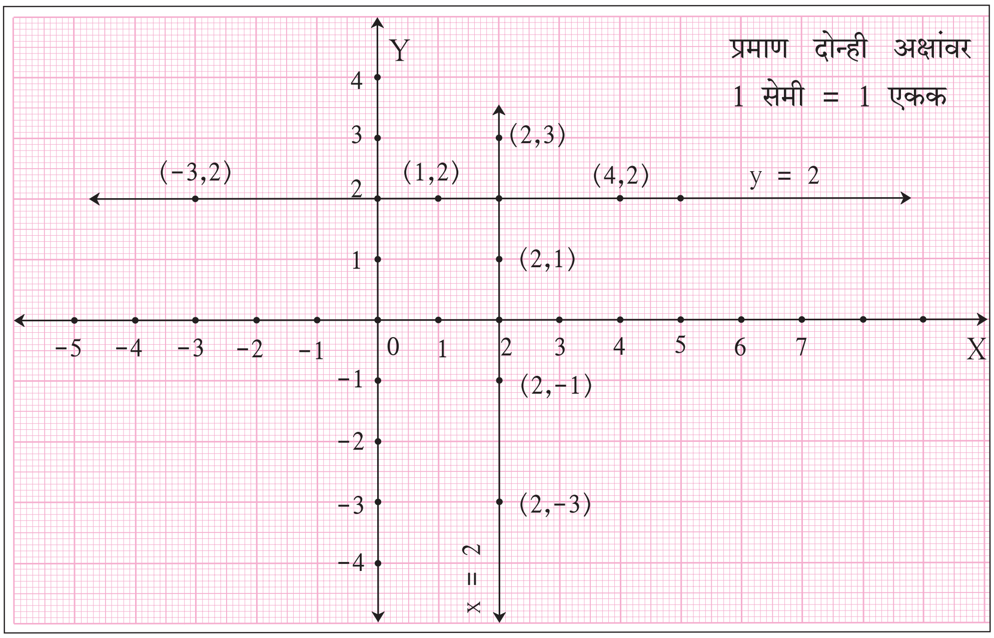
तीन बिंदूंचे निर्देशक काढताना एका बिंदूचे निर्देशक चुकले, तर तीन बिंदू एका रेषेत येणार नाहीत, त्यावरून कोणत्यातरी एकाचे निर्देशक चुकले आहेत हे लक्षात येईल, पण नेमक्या कोणत्या बिंदूचे निर्देशक चुकले आहेत, हे शोधायला वेळ लागेल.

चार बिंदूंचे निर्देशक काढताना जर एका बिंदूचे निर्देशक चुकले, तर तो वगळता इतर तीन बिंदू एकरेषीय येतील. त्यामुळे चूक लगेच लक्षात येईल. म्हणून चार बिंदूंचे निर्देशक ठरवणे हिताचे असते.

$0x + y = 2$ हे समीकरण सोईसाठी $y = 2$ असे लिहितात. या समीकरणाचा आलेख X-अक्षाला समांतर असतो. कारण x निर्देशक कोणताही घेतला तरी प्रत्येक बिंदूचा y निर्देशक 2 हाच येतो.

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(-3, 2)

तसेच $x + 0y = 2$ हे समीकरण $x = 2$ असे लिहितात व त्याचा आलेख Y- अक्षाला समांतर असतो.



जाणून घेऊया.

एकसामयिक समीकरणे सोडवण्याची आलेख पद्धत
(Solution of simultaneous equations by Graphical method)

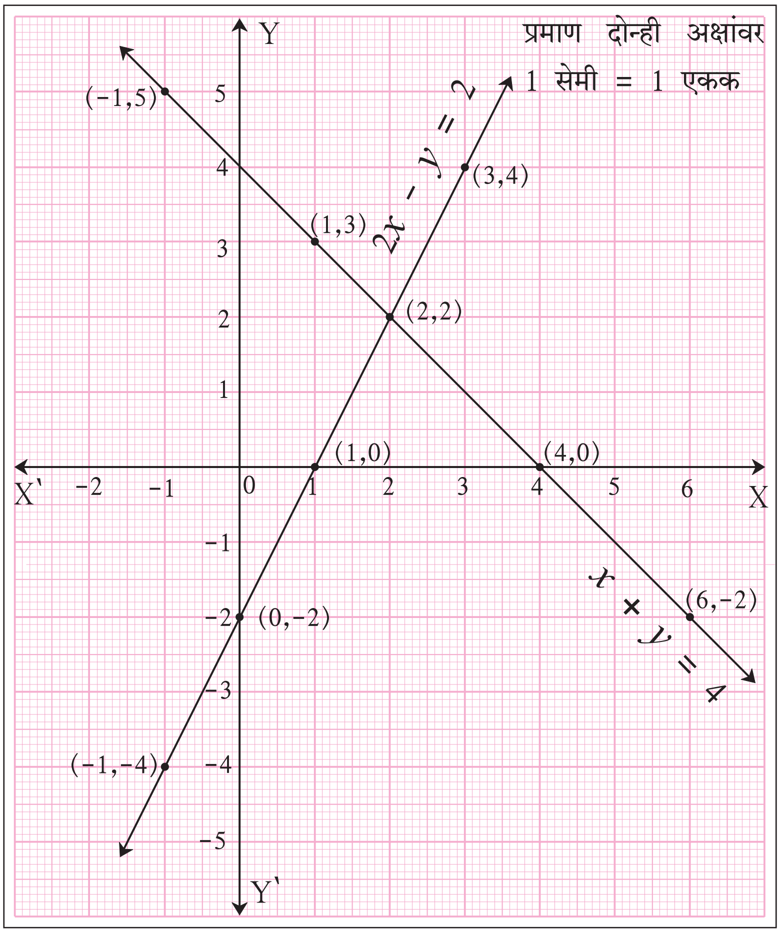
उदा. $x + y = 4$ आणि $2x - y = 2$ या समीकरणांचे आलेख काढून त्यांचे निरीक्षण करू.

$x + y = 4$

x	-1	4	1	6
y	5	0	3	-2
(x, y)	$(-1, 5)$	$(4, 0)$	$(1, 3)$	$(6, -2)$

$2x - y = 2$

x	0	1	3	-1
y	-2	0	4	-4
(x, y)	$(0, -2)$	$(1, 0)$	$(3, 4)$	$(-1, -4)$



आलेखावरील प्रत्येक बिंदू त्या आलेखाच्या समीकरणाचे समाधान करतो. दोन्ही रेषा परस्परांना (2, 2) या बिंदूत छेदतात.

म्हणून (2, 2) ही क्रमित जोडी, म्हणजेच $x = 2$ आणि $y = 2$ या किमती, $x + y = 4$ आणि $2x - y = 2$ या दोन्ही समीकरणांचे समाधान करतात.

चलांच्या ज्या किमतींनी दिलेल्या एकसामयिक समीकरणांचे समाधान होते, त्या किमती म्हणजे त्या समीकरणांची उकल असते.

$x + y = 4$ आणि $2x - y = 2$ या एकसामयिक समीकरणांची उकल $x = 2$ आणि $y = 2$ आहे.

ही समीकरणे निरसन पद्धतीने सोडवून या उकलीचा पडताळा घेऊ.

$x + y = 4$ . . . (I)

$2x - y = 2$ . . . (II)

समीकरण (I) व (II) यांची बेरीज करून,

$3x = 6 \quad \therefore \quad x = 2$

समीकरण (I) मध्ये $x = 2$ ही किंमत ठेवू.

$x + y = 4$

$\therefore \quad 2 + y = 4$

$\therefore \quad y = 2$

कृती I : $x - y = 1$; $5x - 3y = 1$ ही एकसामयिक समीकरणे आलेख पद्धतीने सोडवण्यासाठी खाली दिलेल्या सारण्या पूर्ण करून निर्देशक मिळवा.

$x - y = 1$

x	0		3	
y		0		-3
(x, y)				

$5x - 3y = 1$

x	2			-4
y		8	-2	
(x, y)				

- एकाच निर्देशक पद्धतीवर वरील निर्देशकांनुसार बिंदू स्थापन करा.
- समीकरणांचे आलेख काढा.
- रेषांच्या छेदनबिंदूचे निर्देशक वाचा. त्यांवरून एकसामयिक समीकरणांची उकल लिहा.

कृती II : वर दिलेली एकसामयिक समीकरणे निरसन पद्धतीने सोडवून, आलेखांवरून मिळालेल्या उकलीचा पडताळा घ्या.

विचार करूया.

$5x - 3y = 1$ चा आलेख काढण्यासाठी खालील सारणीत काही निर्देशक काढून दिले आहेत, ते पाहा.

x	0	$\frac{1}{5}$	1	-2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 0\right)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

- बिंदू स्थापन करण्यासाठी हे निर्देशक सोईचे आहेत का?
- निर्देशक शोधताना कोणती काळजी घ्यावी, म्हणजे बिंदू स्थापन करणे सोपे होईल?

सरावसंच 1.2

1. खालील एकसामयिक समीकरण आलेखाने सोडवण्यासाठी सारणी पूर्ण करा.

$x + y = 3$; $x - y = 4$

$x + y = 3$

x	3	$\square$	$\square$
y	$\square$	5	3
(x, y)	(3, 0)	$\square$	(0, 3)

$x - y = 4$

x	$\square$	-1	0
y	0	$\square$	-4
(x, y)	$\square$	$\square$	(0, -4)

2. खालील एकसामयिक समीकरणे आलेखाने सोडवा.

(1) $x + y = 6$; $x - y = 4$
(2) $x + y = 5$; $x - y = 3$
(3) $x + y = 0$; $2x - y = 9$
(4) $3x - y = 2$; $2x - y = 3$
(5) $3x - 4y = -7$; $5x - 2y = 0$
(6)★ $2x - 3y = 4$; $3y - x = 4$

चला, चर्चा करूया.

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ ही एकसामयिक समीकरणे दिलेली आहेत, ती आलेख पद्धतीने सोडवण्यासाठी निश्चित केलेल्या काही क्रमित जोड्या खालीलप्रमाणे आहेत.

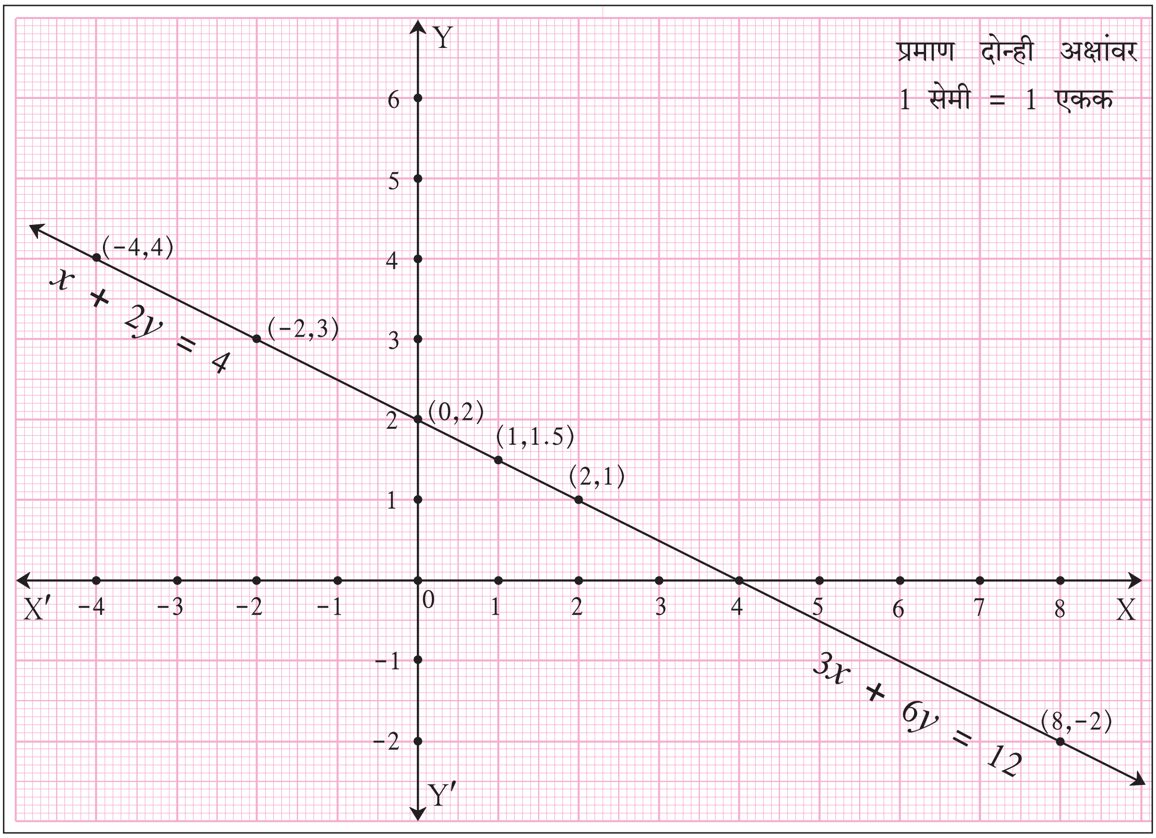
$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	$(-2, 3)$	$(0, 2)$	$(2, 1)$

$3x + 6y = 12$

x	-4	1	8
y	4	1.5	-2
(x, y)	$(-4, 4)$	$(1, 1.5)$	$(8, -2)$

या क्रमित जोड्या स्थापन करून काढलेला आलेख खाली दिला आहे. त्याचे निरीक्षण करा आणि दिलेल्या प्रश्नांवर चर्चा करा.



(1) वरील दोन्ही समीकरणांचे आलेख एकच आहेत का भिन्न आहेत?

(2) $x + 2y = 4$ आणि $3x + 6y = 12$ या एकसामयिक समीकरणांच्या उकली कोणत्या? त्या किती आहेत?

(3) वरील दोन्ही समीकरणांतील x चे सहगुणक, y चे सहगुणक आणि स्थिरपदे यांमध्ये कोणता संबंध दिसून येतो?

(4) दोन चलांतील दोन रेषीय समीकरणे दिली असता त्या समीकरणांचे आलेख ही एकच रेषा केव्हा असते हे कसे ओळखता येईल?

आता दुसरे उदाहरण पाहू.

$x - 2y = 4$ आणि $2x - 4y = 12$ या समीकरणांचे आलेख वरीलप्रमाणेच एकाच निर्देशकपद्धतीवर काढा. आलेखांचे निरीक्षण करा. $x - 2y = 4$; $2x - 4y = 12$ या एकसामयिक समीकरणांच्या उकलीचा विचार करा. x आणि y चे सहगुणक, तसेच स्थिरपदे यांच्यातील संबंधाचा विचार करून निष्कर्ष काढा.

ICT Tools or Links

Geogebra software च्या मदतीने X-अक्ष, Y-अक्ष काढा. विविध एकसामयिक समीकरणांचे आलेख काढून त्यांच्या उकली तपासा.

जाणून घेऊया.

निश्चयक (Determinant)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ हा चार घटकांचा निश्चयक आहे. यात (a, b), (c, d) या आडव्या ओळी आहेत, तसेच $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ हे दोन (उभे) स्तंभ आहेत. या निश्चयकाची कोटी 2 आहे, कारण प्रत्येक ओळीत व स्तंभात 2 घटक आहेत. हा निश्चयक एका संख्येसाठी लिहिला जातो. ती संख्या $ad-bc$ असते.

म्हणजे $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

$ad-bc$ ही $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ या निश्चयकाची किंमत आहे.

निश्चयकांना नाव देण्यासाठी सर्वसाधारणपणे A, B, C, D, ... अशी इंग्रजी कॅपिटल अक्षरे वापरतात.

सोडवलेले उदाहरण

उदाहरण खालील निश्चयकांच्या किमती काढा.

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ (2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$ (3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

उकल :

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$

(2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (4)] - [(-3\ ) \times 2] = -32 - (-6)$

$= -32 + 6 = -26$

(3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}\,] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$


जाणून घेऊया.

निश्चयक पद्धती (क्रेमरची पद्धती)Determinant method (Crammer's Method)

दिलेली एकसामयिक समीकरणे सोप्या पद्धतीने व कमीत कमी जागा वापरून निश्चयकांच्या साहाय्याने सोडवता येतात. यालाच एकसामयिक समीकरणे सोडवण्याची निश्चयक पद्धती म्हणतात. ही पद्धती गेब्रियल क्रेमर या स्विस गणितज्ञाने शोधून काढली म्हणून या पद्धतीला क्रेमरची पद्धती असेही म्हणतात.

या पद्धतीत दिलेली एकसामयिक समीकरणे $a_1x + b_1y = c_1$ आणि $a_2x + b_2y = c_2$ अशी लिहितात.

समजा, $a_1x + b_1y = c_1 \ . \ . \ .$ (I)

आणि $a_2x + b_2y = c_2 \ . \ . \ .$ (II)

येथे a_1, b_1, c_1 व a_2, b_2, c_2 या वास्तव संख्या आहेत.

आपण ही एकसामयिक समीकरणे निरसन पद्धतीने सोडवू.

समीकरण (I) ला b_2 ने गुणून

$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \ . \ . \ .$ (III)

समीकरण (II) ला b_1 ने गुणून

$a_2b_1x + b_2b_1y = c_2b_1 \ . \ . \ .$ (IV)

समीकरण (III) मधून (IV) वजा करून

$$\begin{array}{r} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ -\ a_2 b_1 x \pm b_2 b_1 y = c_2 b_1 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad . . . \quad \text{(V)}$$

त्याचप्रमाणे x चे निरसन करून, $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad . . . \quad \text{(VI)}$

वरील उकलींमधील $c_1 b_2 - c_2 b_1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_1 c_2 - a_2 c_1$ या राशी लक्षात ठेवण्यासाठी आणि थोड्या जागेत व्यवस्थित लिहिण्यासाठी निश्चयकांच्या रूपात लिहू.

खालील समीकरणातील सहगुणक व स्थिरपदे पाहा.

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

आणि $a_2 x + b_2 y = c_2$

येथे $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ हे तीन स्तंभ मिळतात.

समीकरण (V) व समीकरण (VI) मधील x व y यांच्या किमती निश्चयकाच्या रूपात लिहू.

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

आणि $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad (a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$

लक्षात ठेवण्यासाठी $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$, $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y$ असे लिहू.

म्हणजे थोडक्यात $x = \dfrac{D_x}{D}$ व $y = \dfrac{D_y}{D}$

D, D_x, D_y हे निश्चयक लिहिण्यास $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ या स्तंभांचा क्रम लक्षात ठेवा.

आणि $\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$ या समीकरणांपासून $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ हे तीन स्तंभ मिळतात.

- D मध्ये स्थिरपदांचा $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ हा स्तंभ वगळला आहे.
- D_x साठी D मधील $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ हा x च्या सहगुणकांचा स्तंभ वगळला आहे. त्याजागी स्थिर पदांचा स्तंभ घेतला आहे.
- D_y साठी D मधील $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ हा y च्या सहगुणकांचा स्तंभ वगळला आहे. त्याजागी स्थिर पदांचा स्तंभ घेतला आहे.

हे लक्षात ठेवूया.

क्रेमरची पद्धती वापरून एकसामयिक समीकरणे सोडवण्याची रीत

दिलेली समीकरणे $ax + by = c$ या स्वरूपात लिहा.

↓

D, D_x व D_y या निश्चयकांच्या किमती काढा.

↓

$x = \frac{D_x}{D}$ व $y = \frac{D_y}{D}$

यानुसार x व y च्या किमती काढा.

गेब्रियल क्रेमर (Gabriel Cramer)

(31 जुलै, 1704 ते 4 जानेवारी, 1752)

या स्विस गणितज्ञाचा जन्म जिनिव्हा येथे झाला. गणित विषयात ते बालपणापासूनच अतिशय प्रवीण होते. वयाच्या अठराव्या वर्षी त्यांना डॉक्टरेट ही पदवी मिळाली. ते जिनिव्हा येथे प्राध्यापक होते.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. क्रेमरच्या पद्धतीने खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$5x + 3y = -11$; $2x + 4y = -10$

उकल : दिलेली समीकरणे

$5x + 3y = -11$

$2x + 4y = -10$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 -(-30)$$

$$= -44 + 30 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 -(-22)$$

$$= -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

$\therefore$ $(x, y) = (-1, -2)$ ही दिलेल्या एकसामयिक समीकरणांची उकल आहे.

कृती 1 : निश्चयक पद्धतीने दिलेली एकसामयिक समीकरणे सोडवण्यासाठी खालील चौकटी पूर्ण करा.

$y + 2x - 19 = 0$; $2x - 3y + 3 = 0$

उकल : दिलेली समीकरणे $ax + by = c$ या स्वरूपात लिहू.

$2x + y = 19$

$2x - 3y = -3$

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{} \times (-3) - 2 \times (\boxed{}) = \boxed{} - (\boxed{})$$

$$= \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \boxed{} \\ \boxed{} & -3 \end{vmatrix} = 19 \times (\boxed{}) - (\boxed{}) \times (\boxed{}) = \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \square & 19 \\ 2 & \square \end{vmatrix} = [(\square) \times (\square)] - [(\square) \times (\square)]$$

$$= \square - \square = \square$$

$x = \dfrac{D_x}{D}$

$\therefore\ x = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$y = \dfrac{D_y}{D}$

$y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$\therefore\ (x,\ y) = (\square, \square)$ ही दिलेल्या एकसामयिक समीकरणांची उकल आहे.

कृती 2 : खालील कृती पूर्ण करा.

$3x - 2y = 3$ $\qquad$ $2x + y = 16$

वरील समीकरणांच्या निश्चयकांच्या किमती

$D = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ $\qquad$ $D_x = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ $\qquad$ $D_y = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$

क्रेमरच्या पद्धतीनुसार उकल येते.

$x = \dfrac{\square}{\square} = \square$ $\qquad$ $y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$\therefore\ (x,\ y) = (\square, \square)$ ही उकल आहे.

विचार करूया.

- जर, D = 0 असेल, तर उकलीचे स्वरूप काय असेल?
- सामाईक उकल शक्य नसेल, तर त्या समीकरणांच्या रेषांचे स्वरूप काय असेल?

सरावसंच 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{} - \boxed{} \times 4 = \boxed{} - 8 = \boxed{}$

2. खालील निश्चयकांच्या किंमती काढा.

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

3. खालील एकसामयिक समीकरणे क्रेमरच्या पद्धतीने सोडवा.

(1) $3x - 4y = 10$; $4x + 3y = 5$ (2) $4x + 3y - 4 = 0$; $6x = 8 - 5y$

(3) $x + 2y = -1$; $2x - 3y = 12$ (4) $6x - 4y = -12$; $8x - 3y = -2$

(5) $4m + 6n = 54$; $3m + 2n = 28$ (6) $2x + 3y = 2$; $x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

जाणून घेऊया.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणांत रूपांतर करण्याजोगी समीकरणे :
(Equations reducible to a pair of linear equations in two variables)

कृती : खालील सारणी पूर्ण करा.

समीकरणे	चलांची संख्या	रेषीय आहे की नाही.
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	नाही
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$	$\boxed{}$	$\boxed{}$

विचार करूया.

वरील सारणीत दोन चलांतील काही समीकरणे दिली आहेत. ती रेषीय नाहीत; परंतु त्या समीकरणांचे रेषीय समीकरणांत रूपांतर करता येईल का?

हे लक्षात ठेवूया.

दिलेल्या चलांमध्ये योग्य तो बदल करून आपण नवीन चलांची निर्मिती करू शकतो. ही नवीन चले वापरून तेच समीकरण रेषीय समीकरणाच्या रूपात लिहिता येते. कोणत्याही $\frac{m}{n}$ अशा अपूर्णांकाचा छेद शून्य असू शकत नाही हे विसरू नका.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) सोडवा : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

उकल : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) व (II) मध्ये $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ व $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ मानल्यास खालील समीकरणे मिळतात.

$$4m + 5n = 7 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$3m + 4n = 5 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

ही समीकरणे सोडवून,

$m = 3,\ n = -1$ ही उकल मिळते.

आता, $m = \frac{1}{x}$ $\quad \therefore\ 3 = \frac{1}{x}$ $\quad \therefore\ x = \frac{1}{3}$

तसेच, $n = \frac{1}{y}$ $\quad \therefore\ -1 = \frac{1}{y}$ $\quad \therefore\ y = -1$

$\therefore\ (x,\ y) = (\frac{1}{3},\ -1)$ ही दिलेल्या एकसामयिक समीकरणांची उकल आहे.

उदा.(2) सोडवा : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

उकल : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) व (II) मध्ये $\left(\frac{1}{x-y}\right) = a$ व $\left(\frac{1}{x+y}\right) = b$ ठेवून पुढील समीकरणे मिळतात.

$$4a + b = 3 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$2a - 3b = 5 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

समीकरण (III) व (IV) सोडवून $a = 1$ आणि $b = -1$ या उकली मिळतात.

पण $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ व $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$

$\left(\frac{1}{x-y}\right) = 1$ व $\left(\frac{1}{x+y}\right) = -1$

$$x - y = 1 \quad . . . \quad \text{(V)}$$

$$x + y = -1 \quad . . . \quad \text{(VI)}$$

समीकरण (V) व समीकरण (VI) सोडवून $x = 0$ आणि $y = -1$ या उकली मिळतात.

$\therefore$ $(x, y) = (0, -1)$ ही दिलेल्या समीकरणाची उकल आहे.

विचार करूया

वरील उदाहरणांमध्ये रूपांतरित करून आलेली एकसामयिक समीकरणे निरसन पद्धतीने सोडवली आहेत. ती समीकरणे क्रेमरच्या पद्धतीने किंवा आलेख पद्धतीने सोडवली असता त्याच उकली मिळतील का ते करून पाहा.

कृती : चौकटीतील समीकरणांची उकल काढण्यासाठी खालील कृती करा.

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2 \; ; \; \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = m$ व $\left(\frac{1}{y-2}\right) = n$ ठेवून,

नवी समीकरणे

$\boxed{\ }$ $\quad$ $\boxed{6m - 3n = 1}$

समीकरणे सोडवून,

$m = \boxed{\ }$ व $n = \boxed{\ }$

m व n च्या किमती ठेवून मिळणारी समीकरणे

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\boxed{\ }$

समीकरणे सोडवून,

$x = \boxed{\ }$ व $y = \boxed{\ }$

$\therefore$ $\boxed{(x, y) = (\quad , \quad)}$ ही दिलेल्या एकसामयिक समीकरणांची उकल आहे.

सरावसंच 1.4

1. खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15 \; ; \; \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 77$

(2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \; ; \; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85 \; ; \; \frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$

(4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \; ; \; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$

जाणून घेऊया.

एकसामयिक समीकरणांचे उपयोजन Application of simultaneous equations

कृती : पुढे चौकटींच्या खाली काही अटी दिल्या आहेत. त्यांवरून मिळणारी समीकरणे संबंधित चौकटींत लिहा.

सार्थकचे वय साक्षीच्या वयाच्या दुपटीपेक्षा 8 वर्षांनी कमी आहे.

मी सार्थक. माझे आजचे वय x वर्षे आहे.

माझे आजचे वय y वर्षे आहे. मी साक्षी

4 वर्षांपूर्वी साक्षीचे वय सार्थकपेक्षा 3 वर्षांनी कमी होते.

सार्थक व साक्षी यांच्या आजच्या वयांची बेरीज 25 वर्षे आहे.

उदा. (1) एका आयताची परिमिती 40 सेमी आहे. आयताची लांबी ही रुंदीच्या दुपटीपेक्षा 2 सेमीने जास्त आहे, तर आयताची लांबी व रुंदी काढा.

उकल : समजा, आयताची लांबी x सेमी व रुंदी y सेमी आहे.

पहिल्या अटीनुसार –

$$2(x + y) = 40$$

$$x + y = 20 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

दुसऱ्या अटीनुसार –

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore\ x - 2y = 2 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) व (II) निश्चयक पद्धतीने सोडवू.

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$x = \dfrac{D_x}{D}$ व $y = \dfrac{D_y}{D}$

$\therefore\ x = \dfrac{-42}{-3}$ व $y = \dfrac{-18}{-3}$

$\therefore\ x = 14$ व $y = 6$

$\therefore$ आयताची लांबी 14 सेमी व रुंदी 6 सेमी आहे.

उदा. (2)

सेल ! सेल !! सेल !!! फक्त दोनच दिवस

माझ्याकडे काही काटे असलेली आणि काही डिजिटल घड्याळे आहेत. ती मी सवलतीच्या दरात विकणार आहे.

पहिल्या दिवसाची विक्री

काटे असलेली घड्याळे = 11

डिजिटल घड्याळे = 6

मला मिळाले 4330 रु.

दुसऱ्या दिवसाची विक्री

काटे असलेली घड्याळे = 22

डिजिटल घड्याळे = 5

मला मिळाले 7330 रु.

तर मी विकलेल्या प्रत्येक प्रकारच्या घड्याळाची किंमत किती?

उकल : समजा, काटे असलेल्या एका घड्याळाची किंमत = x रु.

व एका डिजिटल घड्याळाची किंमत = y रु.

पहिल्या अटीनुसार,

$$11x + 6y = 4330 \quad . . . \quad (I)$$

दुसऱ्या अटीनुसार,

$$22x + 5y = 7330 \quad . . . \quad (II)$$

समीकरण (I) ला 2 ने गुणून,

$$22x + 12y = 8660 \quad . . . \quad (III)$$

समीकरण (II) मधून समीकरण (III) वजा करू.

$$\begin{array}{rcrcr} & 22x & + 5y & = & 7330 \\ - & 22x & \pm 12y & = & -8660 \\ \hline & & -7y & = & -1330 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = 190$$

$y = 190$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 1140 = 4330$$

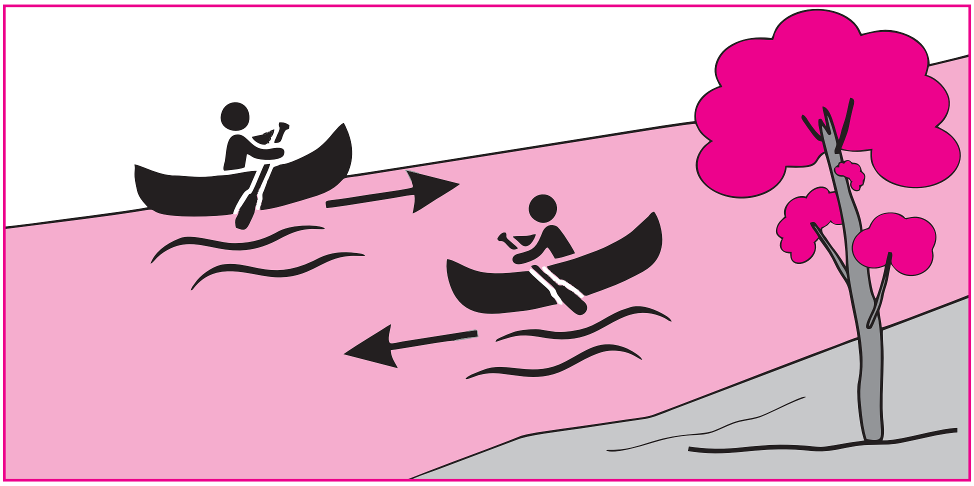
$$\therefore \quad 11x = 3190$$

$$\therefore \quad x = 290$$

$\therefore$ काटे असलेल्या एका घड्याळाची किंमत 290 रु. व

एका डिजिटल घड्याळाची किंमत 190 रु. आहे.

उदा. (3)



एक नाव 6 तासांत प्रवाहाच्या विरुद्ध दिशेने 16 किमी व प्रवाहाच्या दिशेने 24 किमी जाते.

तीच नाव 13 तासांत प्रवाहाच्या विरुद्ध दिशेने 36 किमी आणि प्रवाहाच्या दिशेने 48 किमी जाते.

सांगा बरे! नावेचा संथ पाण्यातील वेग व प्रवाहाचा वेग किती?

उकल : समजा, नावेचा संथ पाण्यातील वेग = x किमी/तास, व प्रवाहाचा वेग = y किमी/तास

$\therefore$ नावेचा प्रवाहाच्या दिशेने वेग = $(x + y)$ किमी/तास

नावेचा प्रवाहाच्या विरुद्ध दिशेने वेग = $(x - y)$ किमी/तास

अंतर = वेग $\times$ वेळ $\therefore$ वेळ = $\dfrac{\text{अंतर}}{\text{वेग}}$

नावेला प्रवाहाच्या विरुद्ध दिशेने 16 किमी जाण्यास लागणारा वेळ = $\dfrac{16}{x-y}$ तास

नावेला प्रवाहाच्या दिशेने 24 किमी जाण्यास लागणारा वेळ = $\dfrac{24}{x+y}$ तास

पहिल्या अटीनुसार,

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

दुसऱ्या अटीनुसार,

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) व (II) मध्ये $\dfrac{1}{x-y} = m$ व $\dfrac{1}{x+y} = n$ ठेवून खालील दोन समीकरणे मिळतात.

$$16m + 24n = 6 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$36m + 48n = 13 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

समीकरण (III) व (IV) सोडवून $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{12}$

m व n च्या किमती पुन्हा ठेवून खालील समीकरणे मिळतात.

$x - y = 4$ . . . (V)

$x + y = 12$ . . . (VI)

समीकरण (V) व (VI) सोडवली असता $x = 8$, $y = 4$ या किमती मिळतात.

$\therefore$ नावेचा संथ पाण्यातील वेग = 8 किमी/तास आणि प्रवाहाचा वेग = 4 किमी/तास

उदा. (4) काही रक्कम काही मुलांना सारखी वाटली. जर 10 मुले जास्त असती तर प्रत्येकास 2 रुपये कमी मिळाले असते आणि जर 15 मुले कमी असती तर प्रत्येकी 6 रुपये जास्त मिळाले असते, तर एकूण रक्कम किती होती? ती रक्कम किती मुलांना वाटली?

उकल : मुलांची संख्या x मानू व प्रत्येकाला मिळालेली रक्कम y रुपये मानू.

$\therefore$ एकूण xy रुपये वाटले.

पहिल्या अटीनुसार,

$$(x + 10)(y - 2) = xy$$

$$\therefore xy - 2x + 10y - 20 = xy$$

$$\therefore -2x + 10y = 20$$

$$\therefore -x + 5y = 10 \quad . . . \text{(I)}$$

दुसऱ्या अटीनुसार,

$$(x - 15)(y + 6) = xy$$

$$\therefore xy + 6x - 15y - 90 = xy$$

$$\therefore 6x - 15y = 90$$

$$\therefore 2x - 5y = 30 \quad . . . \text{(II)}$$

समीकरण (I) मध्ये समीकरण (II) मिळवू.

$$\begin{array}{rr} & -x + 5y = 10 \\ + & 2x - 5y = 30 \\ \hline & x = 40 \end{array}$$

$x = 40$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$-x + 5y = 10$

$\therefore -40 + 5y = 10$

$\therefore 5y = 50$

$\therefore \quad y = 10$

एकूण रक्कम $= xy = 40 \times 10 = 400$ रु.

$\therefore$ 40 मुलांना 400 रुपये सारखे वाटले.

उदा. (5) एक तीन अंकी संख्या तिच्या अंकांच्या बेरजेच्या 17 पट आहे. त्या संख्येत 198 मिळवल्यास तेच अंक उलट्या क्रमाने असलेली संख्या मिळते, तसेच एकक व शतक स्थानच्या अंकांची बेरीज ही मधल्या अंकापेक्षा 1 ने कमी आहे, तर ती तीन अंकी संख्या शोधा.

उकल : शतकस्थानचा अंक x मानू व एककस्थानचा अंक y मानू.

दशक स्थानचा (मधला) अंक = टोकाच्या अंकांच्या बेरजेपेक्षा 1 ने मोठा.

शतक	दशक	एकक
x	$x + y + 1$	y

$\therefore$ तीन अंकी संख्या $= 100x + 10(x + y + 1) + y$

$= 100x + 10x + 10y + 10 + y \quad = 110x + 11y + 10$

या संख्येतील अंकांची बेरीज $= \ x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$

$\therefore$ पहिल्या अटीनुसार,

तीन अंकी संख्या $= 17 \times$ (अंकांची बेरीज)

$\therefore \ 110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$

$\therefore \ 110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$

$\therefore \ 76x - 23y = 7 \ . \ . \ . \quad (\mathrm{I})$

दिलेल्या संख्येतील अंक उलट्या क्रमाने लिहून मिळणारी नवी संख्या

$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$

दिलेली संख्या $= 110x + 11y + 10$

दिलेल्या दुसऱ्या अटीनुसार, दिलेली संख्या + 198 = अंक उलट क्रमाने मांडून मिळालेली संख्या.

$\therefore \ 110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$

$\therefore \ 99x - 99y = -198$

$\therefore \ \ x - y = -2$

म्हणजेच $x = y - 2 \ . \ . \ . \quad (\mathrm{II})$

समीकरण (II) मध्ये मिळालेली x ची किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवून,

$\therefore \ 76(y - 2) - 23y = 7$

$\therefore \ 76y - 152 - 23y = 7$

$53y = 159$

$\therefore \quad y = 3 \qquad \therefore$ एकक स्थानचा अंक $= 3$

$y = 3$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवू.

$x = y - 2$

$\therefore \quad x = 3 - 2 = 1$

$\therefore \qquad x = 1 \qquad \therefore$ शतक स्थानचा अंक $= 1$

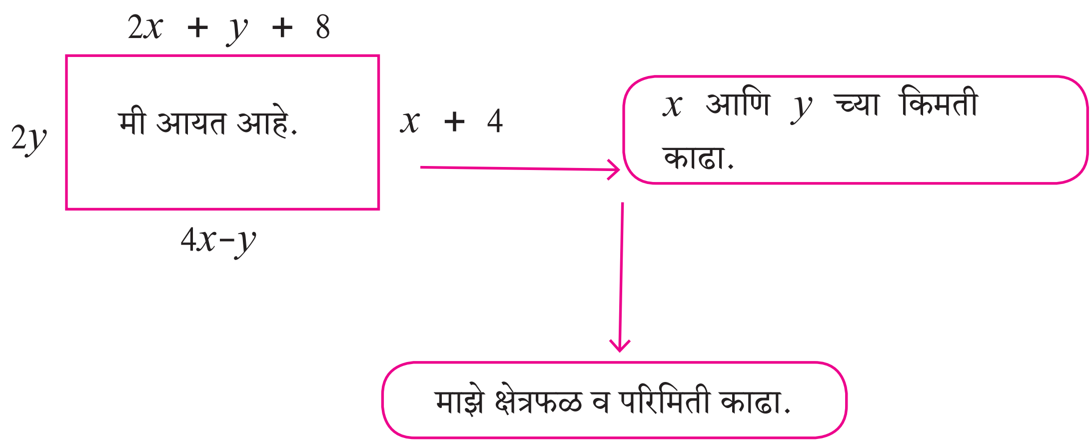
दशक स्थानचा अंक = मधला अंक $= x + y + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$

$\therefore$ दिलेली तीन अंकी संख्या $= 153$.

सरावसंच 1.5

1. दोन संख्यांमधील फरक 3 असून मोठ्या संख्येची तिप्पट आणि लहान संख्येची दुप्पट यांची बेरीज 19 आहे. तर त्या संख्या शोधा.

2. कृती पूर्ण करा.



3. वडिलांच्या वयामध्ये मुलाच्या वयाची दुप्पट मिळवल्यास बेरीज 70 येते आणि मुलाच्या वयामध्ये वडिलांच्या वयाची दुप्पट मिळवल्यास बेरीज 95 येते. तर दोघांची वये काढा.

4. एका अपूर्णांकाचा छेद हा अंशाच्या दुपटीपेक्षा 4 ने मोठा आहे. जर अंश आणि छेद दोन्ही 6 ने कमी केले तर छेद हा अंशाच्या 12 पट होतो, तर तो अपूर्णांक काढा.

5. 10 टनांची क्षमता असणाऱ्या मालवाहू ट्रकमध्ये A आणि B अशा दोन विशिष्ट वजनाच्या पेट्या भरलेल्या आहेत. जर A प्रकारच्या 150 पेट्या व B प्रकारच्या 100 पेट्या भरल्या तर ट्रकची 10 टनांची क्षमता पूर्ण होते. जर A प्रकारच्या 260 पेट्या भरल्या तर तो ट्रक त्याच्या 10 टनांच्या पूर्ण क्षमतेने भरण्यास B प्रकारच्या 40 पेट्या लागतात. तर प्रत्येक प्रकारच्या पेटीचे वजन किती?

6.★ विशालने 1900 किमी प्रवासापैकी काही अंतर बसने तर उरलेले अंतर विमानाने पूर्ण केले. बसचा सरासरी वेग 60 किमी दर तास आहे, तर विमानाचा सरासरी वेग 700 किमी/तास आहे. जर हा प्रवास त्याने 5 तासांत पूर्ण केला असेल तर विशालने बसने किती किमी प्रवास केला?

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. खालील प्रश्नासाठी दिलेल्या पर्यायांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(1) $4x + 5y = 19$ चा आलेख काढण्यासाठी $x = 1$ असताना y ची किंमत किती?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

(2) x व y ही चले असलेल्या एकसामयिक समीकरणासाठी जर $D_x = 49$, $D_y = -63$ व $D = 7$ असेल तर x = किती?

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ या निश्चयकाची किंमत किती?

(A) -1 (B) -41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3$; $3x - 2y - 4 = 0$ ही एकसामयिक समीकरणे सोडवण्यासाठी D ची किंमत किती?

(A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1

(5) $ax + by = c$; व $mx + ny = d$ या एकसामयिक समीकरणांमध्ये जर $an \neq bm$ तर दिलेल्या समीकरणांना -

(A) एकच उकल असेल. (B) उकल नसेल.

(C) असंख्य उकली असतील. (D) फक्त दोन उकली असतील.

2. $2x - 6y = 3$ या समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी खालील सारणी पूर्ण करा.

x	-5	$\boxed{}$
y	$\boxed{}$	0
(x, y)	$\boxed{}$	$\boxed{}$

3. खालील एकसामयिक समीकरणे आलेख पद्धतीने सोडवा.

(1) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1$; $3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0$; $5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0$; $2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10$; $x - y = 2$

4. खालील निश्चयकांच्या किमती काढा.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. खालील एकसामयिक समीकरणे क्रेमरच्या पद्धतीने सोडवा.

(1) $6x - 3y = -10$; $3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4$; $4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15$; $12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

6. खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(1) $\frac{2}{x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{6}$; $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=0$ (2) $\frac{7}{2x+1}+\frac{13}{y+2}=27$; $\frac{13}{2x+1}+\frac{7}{y+2}=33$

(3) $\frac{148}{x}+\frac{231}{y}=\frac{527}{xy}$; $\frac{231}{x}+\frac{148}{y}=\frac{610}{xy}$ (4) $\frac{7x-2y}{xy}=5$; $\frac{8x+7y}{xy}=15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)}+\frac{1}{5(2x-3y)}=\frac{1}{4}$; $\frac{5}{(3x+4y)}-\frac{2}{(2x-3y)}=-\frac{3}{2}$

7. खालील शाब्दिक उदाहरणे सोडवा.

(1) एक दोन अंकी संख्या व तिच्या अंकांची अदलाबदल करून येणारी संख्या यांची बेरीज 143 आहे, जर दिलेल्या संख्येतील एकक स्थानचा अंक हा दशक स्थानच्या अंकापेक्षा 3 ने मोठा असेल तर दिलेली मूळची संख्या कोणती? उत्तर काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

समजा एकक स्थानचा अंक = x

दशक स्थानचा अंक = y

$\therefore$ मूळ संख्या = $\boxed{}\, y + x$

अंकांची अदलाबदल करून मिळणारी संख्या = $\boxed{}\, x + y$

पहिल्या अटीवरून,

दोन अंकी संख्या + अंकांची अदलाबदल करून मिळणारी संख्या = 143

$\boxed{10y + x} + \boxed{} = 143$

$\boxed{}\, x + \boxed{}\, y = 143$

$x + y = \boxed{}$ . . . . . (I)

दुसऱ्या अटीवरून,

एकक स्थानचा अंक = दशक स्थानचा अंक + 3

$x = \boxed{} + 3$

$x - y = 3$ . . . . . (II)

(I) व (II) यांची बेरीज करून,

$2x = \boxed{}$ $\therefore\ x = 8$

$x = 8$ समीकरण (I) मध्ये ठेवून,

$x + y = 13$

$8 + \boxed{} = 13$

$\therefore\ y = \boxed{}$

मूळ संख्या $= 10\,y + x$

$= \boxed{} + 8 = 58$

(2) कांताबाईंनी दुकानातून दीड किलो चहा व पाच किलो साखर आणली. दुकानात जाऊन येण्यासाठी त्यांना 50 रुपये रिक्षाभाडे द्यावे लागले. यासाठी त्यांचे एकूण 700 रुपये खर्च झाले. नंतर त्यांना असे समजले, की या वस्तू ऑनलाइन ऑर्डर नोंदवून त्याच दराने घरपोच मिळतात. पुढील महिन्यात त्यांनी 2 किलोग्रॅम चहा व 7 किलोग्रॅम साखर ऑनलाइन मागवली, तेव्हा त्यांचा 880 रुपये खर्च झाला. तर चहा आणि साखर यांचा प्रतिकिलोग्रॅम दर काढा.

(3) अनुष्काजवळील 100 रुपयांच्या नोटा $\boxed{x}$ व 50 रुपयांच्या नोटा $\boxed{y}$.

अनुष्काला आनंदने वरील नोटांच्या रूपात दिलेली रक्कम 2500 रुपये आहे.
- - - - - - - - समीकरण I

आनंदने तिला नोटांच्या संख्यांची अदलाबदल करून पैसे दिले असते तर ती रक्कम 500 रुपयांनी कमी झाली असती.
- - - - - - - - समीकरण II

समीकरणे सोडवून उत्तर लिहा.

100 रुपयांच्या नोटांची संख्या $\boxed{}$ 50 रुपयांच्या नोटांची संख्या $\boxed{}$

(4) मनीषा आणि सविता यांच्या आजच्या वयांची बेरीज 31 वर्षे आहे. 3 वर्षांपूर्वी मनीषाचे वय सविताच्या त्या वेळच्या वयाच्या चौपट होते, तर त्या दोघींची आजची वये काढा.

★ (5) एका कारखान्यातील कुशल आणि अकुशल कामगारांच्या रोजगारांचे गुणोत्तर 5 : 3 आहे. एका कुशल आणि एका अकुशल कामगाराचा एका दिवसाचा एकूण रोजगार 720 रुपये आहे. तर प्रत्येक कुशल कामगाराचा आणि अकुशल कामगाराचा रोजगार काढा.

★ (6) एका सरळ रस्त्यावर A आणि B ही दोन ठिकाणे आहेत. त्यांतील अंतर 30 किमी आहे. हमीद मोटारसायकलने A पासून B च्या दिशेने जाण्यास निघतो. त्याच वेळी जोसेफ मोटारसायकलने B पासून A च्या दिशेने जाण्यास निघतो. ते दोघे 20 मिनिटांत एकमेकांना भेटतात. जोसेफ जर त्याच वेळी निघून विरुद्ध दिशेने गेला असता, तर त्याला हमीद तीन तासांनी भेटला असता, तर प्रत्येकाचा प्रवासाचा वेग किती होता?

46PBE6

2 वर्गसमीकरणे

चला, शिकूया.

- वर्गसमीकरण : ओळख
- वर्गसमीकरण सोडवण्याच्या पद्धती
- वर्गसमीकरणाच्या मुळांचे स्वरूप
- मुळे व सहगुणक यांतील संबंध
- वर्गसमीकरणांचे उपयोजन

जरा आठवूया.

विद्यार्थी मित्रांनो, इयत्ता नववीमध्ये आपण बहुपदी शिकलो आहोत. यामध्ये बहुपदीचे कोटीवरून होणारे प्रकार आपण अभ्यासले. एका चलातील ज्या बहुपदीची कोटी एक असते, तिला रेषीय बहुपदी आणि जिची कोटी दोन असते, तिला वर्ग बहुपदी म्हणतात.

कृती : खालील बहुपदींचे रेषीय बहुपदी आणि वर्ग बहुपदी असे वर्गीकरण करा.

$5x + 9$, $x^2 + 3x - 5$, $3x - 7$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$

रेषीय बहुपदी	वर्ग बहुपदी

आपण आता वर्ग बहुपदीची किंमत 0 घेऊन जे समीकरण मिळते त्याचा अभ्यास करू. अशा समीकरणाला वर्गसमीकरण म्हणतात. आपण दैनंदिन जीवनात अनेक वेळा या वर्गसमीकरणांचा वापर करतो.

उदाहरण : संकेतने 200 चौमी क्षेत्रफळाचा एक आयताकृती भूखंड खरेदी केला. भूखंडाची लांबी ही त्याच्या रुंदीपेक्षा 10 मीटर जास्त होती, तर त्या भूखंडाची लांबी व रुंदी किती होती?

समजा भूखंडाची रुंदी x मीटर आहे.

$\therefore$ लांबी = $(x + 10)$ मीटर

आयताकृती भूखंडाचे क्षेत्रफळ = लांबी $\times$ रुंदी

$\therefore 200 = (x + 10) \times x$

$\therefore 200 = x^2 + 10x$

म्हणजेच $x^2 + 10x = 200$

$\therefore x^2 + 10x - 200 = 0$

आता $x^2 + 10x - 200 = 0$ हे वर्गसमीकरण सोडवून आपण भूखंडाची रुंदी व लांबी ठरवू शकतो. वर्गसमीकरण कसे सोडवायचे याचा आपण अभ्यास करू.

जरा आठवूया.

कृती : $x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$; या बहुपदी घातांकरूपात लिहून त्यांतील पदांच्या सहगुणकांचे निरीक्षण करून ते रिकाम्या चौकटींत योग्य प्रकारे लिहा.

$x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x + 0$, $5x^2 + 0x + 0$

✦ x^2 चे सहगुणक अनुक्रमे $\boxed{1}$, $\boxed{3}$ व $\boxed{5}$ आहेत. म्हणजेच 0 नाहीत.

✦ x चे सहगुणक अनुक्रमे 3, $\boxed{}$ व $\boxed{}$ आहेत.

✦ स्थिरपदे अनुक्रमे $\boxed{}$, $\boxed{}$ व $\boxed{}$ आहेत.

येथे दुसऱ्या व तिसऱ्या बहुपदीमध्ये स्थिरपद 0 आहे.

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप (Standard form of quadratic equation)

ज्या एका चलातील समीकरणात सर्व घातांक पूर्ण संख्या असून चलाचा मोठ्यांत मोठा घातांक 2 असतो, ते वर्गसमीकरण असते.

ते सामान्य रूपात $ax^2 + bx + c = 0$ असे लिहिता येते. $ax^2 + bx + c = 0$, यामध्ये a, b व c वास्तव संख्या असून a ही शून्येतर संख्या असते.

$ax^2 + bx + c = 0$ या स्वरूपातील समीकरणास वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप म्हणतात.

कृती : खालील तक्ता पूर्ण करा.

वर्गसमीकरण	सामान्य रूप	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 0x - 4 = 0$	1	0	-4
$y^2 = 2y - 7$	. . . .	. . .	. . .	. . .
$x^2 + 2x = 0$	. . . .	. . .	. . .	. . .

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) खालीलपैकी कोणती समीकरणे वर्गसमीकरणे आहेत ते ठरवा.

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

उकल : (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ यामध्ये x हे एकच चल असून चलाचा सर्वांत मोठा घातांक 2 आहे.

$\therefore$ हे समीकरण वर्गसमीकरण आहे.

(2) $9y^2 + 5 = 0$ यामध्ये $\square$ चल असून चलाचा सर्वांत मोठा घातांक $\square$ आहे.

$\therefore$ हे समीकरण वर्गसमीकरण $\square$.

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ यामध्ये एकच चल असले तरी चलाचा सर्वांत मोठा घातांक 2 नाही.

$\therefore$ हे समीकरण वर्गसमीकरण $\square$.

(4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

$\therefore l(l - 5) + 2(l - 5) = 0$

$\therefore l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$

$\therefore l^2 - 3l - 10 = 0$ यामध्ये $\square$ हे एकच चल असून चलाचा सर्वांत मोठा घातांक $\square$ आहे.

$\therefore$ दिलेले समीकरण वर्गसमीकरण $\square$.

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरणाची मुळे (उकली) (Roots of a quadratic equation)

आपण आधीच्या वर्गात पाहिले आहे की x ची a ही किंमत घेऊन बहुपदीची किंमत शून्य येत असेल, तर $(x-a)$ हा त्या बहुपदीचा अवयव असतो म्हणजे $p(x)$ ही बहुपदी असेल आणि $p(a) = 0$ असेल तर $(x-a)$ हा $p(x)$ चा अवयव असतो. या स्थितीत a ही $p(x) = 0$ ची एक उकल आहे किंवा a हे $p(x) = 0$ चे एक मूळ आहे असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ,

$x^2 + 5x - 6$ या बहुपदीत $x = -6$ ठेवून,

$$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6$$
$$= 36 - 30 - 6 \quad = 0$$

$\therefore x = -6$ ही $x^2 + 5x - 6$ या समीकरणाची एक उकल आहे, म्हणजेच -6 हे $x^2 + 5x - 6 = 0$ या समीकरणाचे एक मूळ आहे.

$x^2 + 5x - 6$ या बहुपदीत $x = 2$ ठेवून,

$$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6$$
$$= 4 + 10 - 6$$
$$= 8 \neq 0$$

$\therefore x = 2$ ही $x^2 + 5x - 6 = 0$ या समीकरणाची उकल नाही.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. $2x^2 - 7x + 6 = 0$ या समीकरणाच्या (i) $x = \frac{3}{2}$ आणि (ii) $x = -2$ या उकली आहेत का हे ठरवा.

उकल: (i) $2x^2 - 7x + 6$ या बहुपदीत $x = \frac{3}{2}$ ही किंमत ठेवून बहुपदीची किंमत काढू.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

$\therefore$ या समीकरणाची $x = \frac{3}{2}$ ही एक उकल आहे.

(ii) $2x^2 - 7x + 6$ या बहुपदीत $x = -2$ ही किंमत ठेवून बहुपदीची किंमत काढू.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$

$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$

$$= 28 \neq 0$$

$\therefore$ $x = -2$ ही $2x^2 - 7x + 6$ या समीकरणाची उकल नाही.

कृती : जर $x = 5$ हे $kx^2 - 14x - 5 = 0$ या समीकरणाचे एक मूळ असेल, तर k ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : $kx^2 - 14x - 5 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ $\square$ आहे.

$\therefore$ $x = \square$ ही किंमत वरील वर्गसमीकरणात ठेवू.

$\therefore$ $k\square^2 - 14\square - 5 = 0$

$\therefore$ $25k - 70 - 5 = 0$

$\therefore$ $25k - \square = 0$

$\therefore$ $25k = \square$

$\therefore$ $k = \frac{\square}{\square} = 3$

हे लक्षात ठेवूया.

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ हे वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप असते. यात a, b व c वास्तव संख्या असून a ही शून्येतर संख्या असते

(2) चलाच्या ज्या किमतींनी वर्गसमीकरणाच्या दोन्ही बाजू समान होतात, (म्हणजेच वर्गसमीकरणाचे समाधान होते) त्या किमतींना वर्गसमीकरणाच्या उकली किंवा वर्गसमीकरणाची मुळे म्हणतात.

सरावसंच 2.1

1. कोणतीही दोन वर्गसमीकरणे लिहा.

2. खालील समीकरणांपैकी वर्गसमीकरणे कोणती ते ठरवा.

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $y^2 = 5y - 10$ (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$

(4) $x + \frac{1}{x} = -2$ (5) $(m + 2)(m - 5) = 0$ (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$

3. खालील समीकरणे $ax^2 + bx + c = 0$ या स्वरूपात लिहा. प्रत्येकातील a, b, c यांच्या किमती ठरवा.

(1) $2y = 10 - y^2$ (2) $(x - 1)^2 = 2x + 3$ (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$

(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$ (5) $p(3 + 6p) = -5$ (6) $x^2 - 9 = 13$

4. वर्गसमीकरणासमोर दिलेल्या चलाच्या किमती त्या समीकरणांची मुळे आहेत की नाही ते ठरवा.

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1, -1$ (2) $2m^2 - 5m = 0$, $m = 2, \frac{5}{2}$

5. जर $x = 3$ हे $kx^2 - 10x + 3 = 0$ या समीकरणाचे एक मूळ असेल तर k ची किंमत किती ?

6. $5m^2 + 2m + k = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ $\frac{-7}{5}$ असेल तर k ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : $5m^2 + 2m + k = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ $\boxed{\quad}$ आहे.

$\therefore m = \boxed{\quad}$ वरील वर्गसमीकरणात ठेवू.

$\therefore 5 \times \boxed{\quad}^2 + 2 \times \boxed{\quad} + k = 0$

$\therefore \boxed{\quad} + \boxed{\quad} + k = 0$

$\therefore \boxed{\quad} + k = 0$

$\therefore k = \boxed{\quad}$

जरा आठवूया.

आपण मागील वर्षी बहुपदी या प्रकरणात $x^2 - 4x - 5$, $2m^2 - 5m$, $a^2 - 25$ अशा वर्गबहुपदींचे अवयव पाडण्याच्या पद्धती अभ्यासल्या आहेत. खालील कृती करून त्यांची उजळणी करूया.

कृती : खालील वर्गबहुपदींचे अवयव पाडा.

(1) $x^2 - 4x - 5$

$= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5}$

$= x(\ldots.) + 1(\ldots.)$

$= (\ldots.)(\ldots.)$

(2) $2m^2 - 5m$

= . . . .

(3) $a^2 - 25$

$= a^2 - 5^2$

$= (\ldots.)(\ldots.)$

जाणून घेऊया.

अवयव पद्धतीने वर्गसमीकरणाची मुळे काढणे
(Solution of a quadratic equation by factorisation)

आपण चलाला वेगवेगळ्या किमती देऊन वर्गसमीकरणाची मुळे ठरवली, परंतु ही खूप वेळ लागणारी पद्धत आहे. म्हणून आपण या भागात वर्गसमीकरणाची मुळे अवयव पद्धतीने काढण्याचा अभ्यास करणार आहोत.

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

येथे $(x - 5)$ व $(x + 1)$ हे वर्गबहुपदी $x^2 - 4x - 5$ चे दोन रेषीय अवयव आहेत. म्हणून $x^2 - 4x - 5$ या वर्गबहुपदीपासून मिळणारे $x^2 - 4x - 5 = 0$ हे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

जर दोन संख्यांचा गुणाकार शून्य असेल, तर त्या दोन संख्यांपैकी किमान एक संख्या शून्य असते.

$\therefore$ $x - 5 = 0$ किंवा $x + 1 = 0$

$\therefore$ $x = 5$ किंवा $x = -1$

$\therefore$ दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे 5 आणि -1 आहेत.

हे उदाहरण सोडवताना आपण प्रथम वर्गबहुपदीचे दोन रेषीय अवयव मिळवले. या रीतीला वर्गसमीकरण सोडवण्याची अवयव पद्धत असे म्हणू.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. खालील वर्गसमीकरणे अवयव पद्धतीने सोडवा.

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$ (2) $3x^2 - x - 10 = 0$

(3) $3y^2 = 15y$ (4) $x^2 = 3$ (5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

$\therefore$ $\underline{m^2 - 13m} - \underline{1m + 13} = 0$

$\therefore$ $m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$

$\therefore$ $(m - 13)(m - 1) = 0$

$\therefore$ $m - 13 = 0$ किंवा $m - 1 = 0$

$\therefore$ $m = 13$ किंवा $m = 1$

$\therefore$ दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे 13 आणि 1 आहेत.

(2) $3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore$ $\underline{3x^2 - 6x} + \underline{5x - 10} = 0$

$\therefore$ $3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$

$\therefore$ $(3x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore$ $3x + 5 = 0$ किंवा $x - 2 = 0$

$\therefore$ $x = -\frac{5}{3}$ किंवा $x = 2$

$\therefore$ दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे $-\frac{5}{3}$ आणि 2 आहेत.

(3) $3y^2 = 15y$

$\therefore 3y^2 - 15y = 0$

$\therefore 3y(y - 5) = 0$

$\therefore 3y = 0$ किंवा $y - 5 = 0$

$\therefore y = 0$ किंवा $y = 5$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे 0 आणि 5 आहेत.

(4) $x^2 = 3$

$\therefore x^2 - 3 = 0$

$\therefore x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\therefore (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore x + \sqrt{3} = 0$ किंवा $x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore x = -\sqrt{3}$ किंवा $x = \sqrt{3}$

$\therefore$ दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे $-\sqrt{3}$ आणि $\sqrt{3}$

(5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

$\therefore 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore 3\sqrt{3}x(2x + \sqrt{3}) - 1(2x + \sqrt{3}) = 0$

$\therefore (2x + \sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$

$\therefore 2x + \sqrt{3} = 0$ किंवा $3\sqrt{3}x - 1 = 0$

$\therefore 2x = -\sqrt{3}$ किंवा $3\sqrt{3}x = 1$

$\therefore x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ किंवा $x = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ आणि $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -18$

-18

$9 \quad -2$

$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

सरावसंच 2.2

1. खालील वर्गसमीकरणे अवयव पद्धतीने सोडवा.

(1) $x^2 - 15x + 54 = 0$ (2) $x^2 + x - 20 = 0$ (3) $2y^2 + 27y + 13 = 0$

(4) $5m^2 = 22m + 15$ (5) $2x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} = 0$ (6) $6x - \dfrac{2}{x} = 1$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ हे वर्गसमीकरण अवयवपद्धतीने सोडवण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल (7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore \sqrt{2}x^2 + \boxed{} + \boxed{} + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore x(.....) + \sqrt{2}(.....) = 0$

$\therefore$ $(\ .\ .\ .\ .\ .\ )(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore$ $(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) = 0$ किंवा $(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore x = \boxed{\quad}$ किंवा $x = -\sqrt{2}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे $\boxed{\quad}$ आणि $-\sqrt{2}$

(8)★ $3x^2 - 2\sqrt{6}\ x + 2 = 0$ (9) $2m\,(m - 24) = 50$

(10) $25m^2 = 9$ (11) $7m^2 = 21m$ (12) $m^2 - 11 = 0$

जाणून घेऊया.

पूर्ण वर्ग पद्धतीने वर्गसमीकरण सोडवणे
(Solution of a quadratic equation by completing the square)

शिक्षक : $x^2 + 10\,x + 2 = 0$ हे वर्गसमीकरण आहे की नाही?

योगेश : हो सर. कारण ते $ax^2 + bx + c = 0$ या रूपात आहे. येथे x या चलाचा जास्तीत जास्त घातांक 2 आहे. a ची किंमत शून्य नाही.

शिक्षक : हे समीकरण तुम्हांला सोडवता येईल का?

वर्षा : नाही सर. कारण 2 या संख्येचे असे अवयव नाही सांगता येत, की ज्यांची बेरीज 10 येईल.

शिक्षक : म्हणूनच अशी उदाहरणे सोडवण्यासाठी वेगळी रीत वापरावी लागते. ही रीत समजून घेऊ.

$x^2 + 10\,x$ या राशीत योग्य पद मिळवून एक पूर्ण वर्गराशी मिळवू.

जर $x^2 + 10\,x + k = (x + a)^2$

तर $x^2 + 10\,x + k = x^2 + 2ax + a^2$

$\therefore$ सहगुणकांची तुलना करून, $10 = 2a$ आणि $k = a^2$

$\therefore$ $a = 5$ आणि म्हणून $k = a^2 = (5)^2 = 25$

आता, $x^2 + 10\,x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$

$x^2 + 10\,x + 2 = 0$ हे समीकरण आता तुम्ही सोडवू शकाल का?

रेहाना : हो सर, समीकरणाची डावी बाजू दोन वर्गांच्या वजाबाकीच्या रूपात आल्याने तिचे अवयव काढता येतील.

$(x + 5)^2 - (\sqrt{23}\,)^2 = 0$

$\therefore$ $(x + 5 + \sqrt{23}\,)(x + 5 - \sqrt{23}\,) = 0$

$\therefore$ $x + 5 + \sqrt{23} = 0$ किंवा $x + 5 - \sqrt{23} = 0$

$\therefore$ $x = -5 - \sqrt{23}$ किंवा $x = -5 + \sqrt{23}$

हमीद : सर, उकली काढण्याची जराशी वेगळी रीत मला सुचली आहे.

$(x+5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$

$\therefore (x+5)^2 = (\sqrt{23})^2$

$\therefore x + 5 = \sqrt{23}$ किंवा $x + 5 = -\sqrt{23}$

$\therefore x = -5 + \sqrt{23}$ किंवा $x = -5 - \sqrt{23}$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) सोडवा : $5x^2 - 4x - 3 = 0$

उकल : समीकरणातील वर्गराशीचे रूपांतर, दोन वर्गांच्या वजाबाकीच्या रूपात आणण्यासाठी x^2 चा सहगुणक 1 करणे सोईचे होईल. म्हणून दिलेल्या समीकरणाला 5 ने भागून,

$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

आता जर $x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x-a)^2$ तर $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2$.

$x^2 - \frac{4}{5}x$ ची तुलना $x^2 - 2ax$ शी करून,

$-2ax = -\frac{4}{5}x \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

$\therefore k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

आता, $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$

$\therefore x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5}$ किंवा $x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5}$ किंवा $x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{2+\sqrt{19}}{5}$ किंवा $x = \frac{2-\sqrt{19}}{5}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे $\frac{2+\sqrt{19}}{5}$ आणि $\frac{2-\sqrt{19}}{5}$

> समीकरण $x^2 + bx + c = 0$ या रूपात असते, तेव्हा
> $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$
> या रूपात,
> म्हणजेच $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ या रूपात लिहिता येते.

उदा. (2) सोडवा : $x^2 + 8x - 48 = 0$

रीत I : पूर्ण वर्ग पद्धती

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore\ x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$

$\therefore\ (x + 4)^2 - 64 = 0$

$\therefore\ (x + 4)^2 = 64$

$\therefore\ x + 4 = 8$ किंवा $x + 4 = -8$

$\therefore\ x = 4$ किंवा $x = -12$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे 4 आणि -12.

रीत II : अवयव पद्धती

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore\ x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$

$\therefore\ x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$

$\therefore\ (x + 12)(x - 4) = 0$

$\therefore\ x + 12 = 0$ किंवा $x - 4 = 0$

$\therefore\ x = -12$ किंवा $x = 4$

सरावसंच 2.3

खालील वर्गसमीकरणे पूर्ण वर्ग पद्धतीने सोडवा.

(1) $x^2 + x - 20 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (3) $m^2 - 5m = -3$

(4) $9y^2 - 12y + 2 = 0$ (5) $2y^2 + 9y + 10 = 0$ (6) $5x^2 = 4x + 7$

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरण सोडवण्याचे सूत्र (Formula for solving a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c$ या राशीला a ने भागून ($\because\ a \neq 0$) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ही राशी मिळते.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ही राशी दोन वर्गांच्या वजाबाकीच्या रूपात मांडून $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ या समीकरणाच्या, म्हणजेच $ax^2 + bx + c = 0$ या समीकरणाच्या सामान्य उकली किंवा मुळे मिळवता येतात.

$$ax^2 + bx + c = 0 \ldots \text{(I)}$$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \ldots\ldots$ दोन्ही बाजूंना a ने भागून,

$$\therefore\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \qquad \therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore \; x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ किंवा } x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore \; x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ किंवा } x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ किंवा } x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

या उकली थोडक्यात $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ अशा लिहितात आणि त्या α (अल्फा), β (बीटा) या अक्षरांनी दर्शवतात. $\therefore \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ आणि $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ . . . . (I)

$ax^2 + bx + c = 0$ या समीकरणातील a, b, c यांच्या किमती $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ या राशीत लिहून राशीला सोपे रूप दिले, की समीकरणाच्या उकली मिळतात. म्हणून $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ याला वर्गसमीकरण सोडवण्याचे सूत्र म्हणतात. या दोन उकलींपैकी कोणतीही उकल कोणत्याही अक्षराने दाखवली तरी चालते

विधान (I) ऐवजी $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ आणि $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ असेही मानता येते.

$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तर $\alpha > \beta$, $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तर $\alpha < \beta$ हे ध्यानात ठेवा.

सोडवलेली उदाहरणे

सूत्राचा उपयोग करून खालील वर्गसमीकरणे सोडवा.

उदा.(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

उकल : $m^2 - 14m + 13 = 0$ ची

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1,\; b = -14,\; c = 13,$

$\therefore \; b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 13$

$= 196 - 52$

$= 144$

$$m = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-14)\pm\sqrt{144}}{2\times 1}$$

$$= \frac{14\pm 12}{2}$$

$$\therefore m = \frac{14+12}{2} \text{ किंवा } m = \frac{14-12}{2}$$

$$\therefore m = \frac{26}{2} \text{ किंवा } m = \frac{2}{2}$$

$$\therefore m = 13 \text{ किंवा } m = 1$$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे 13 आणि 1 आहेत.

उदा. (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

उकल: $x^2 + 10x + 2 = 0$ ची

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1,\ b = 10,\ c = 2,$

$$\therefore b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 2$$
$$= 100 - 8$$
$$= 92$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2}$$
$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2}$$
$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}$$

$$\therefore x = -5 \pm \sqrt{23}$$

$\therefore x = -5 + \sqrt{23}$ किंवा $x = -5 - \sqrt{23}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे $-5 + \sqrt{23}$ आणि $-5 - \sqrt{23}$

उदा. (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

उकल: $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1,\ b = -2,\ c = -3,$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$\therefore x = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2}$ किंवा $x = \dfrac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$

$= \dfrac{2+4}{2}$ किंवा $\dfrac{2-4}{2}$

$= 3$ किंवा -1

अधिक माहितीसाठी :

$x^2 - 2x - 3 = 0$ हेच वर्गसमीकरण खाली आलेखाने सोडवले आहे, ते समजून घ्या.

$x^2 - 2x - 3 = 0$ म्हणजेच $x^2 = 2x + 3$

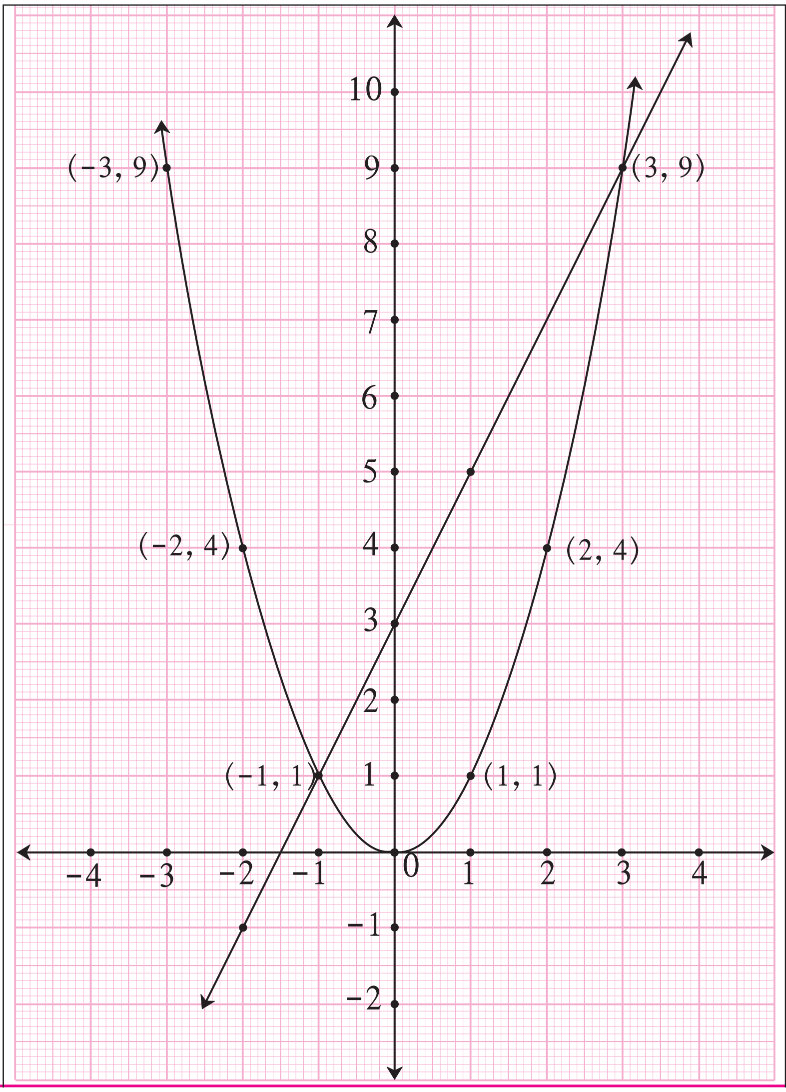
x च्या ज्या किमतींनी $x^2 = 2x + 3$ या समीकरणाचे समाधान होईल, त्या किमती या समीकरणाच्या उकली असणार. $y = x^2 = 2x + 3$ मानू. $y = x^2$ आणि $y = 2x + 3$ या समीकरणांचे आलेख काढू.

$y = x^2$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = 2x + 3$

x	-1	0	1	-2
y	1	3	5	-1



हे आलेख परस्परांना $(-1, 1)$ आणि $(3, 9)$ या बिंदूत छेदतात.

$\therefore x^2 = 2x + 3$ या समीकरणाच्या, म्हणजेच $x^2 - 2x - 3 = 0$ च्या उकली $x = -1$ किंवा $x = 3$ या आहेत.

सोबतच्या आकृतीत $y = x^2$ आणि $y = 2x + 3$ या समीकरणांचे आलेख काढले आहेत. त्यांच्या छेदनबिंदूंवरून $x^2 = 2x + 3$ या समीकरणाच्या, म्हणजेच $x^2 - 2x - 3 = 0$ च्या उकली कशा मिळतात, हे समजून घ्या.

उदा. (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

उकल: $25x^2 + 30x + 9 = 0$ ची

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 25,\ b = 30,\ c = 9,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$

$= 900 - 900 \quad = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$\therefore\ x = \dfrac{-30 + 0}{50}$ किंवा $x = \dfrac{-30 - 0}{50}$

$\therefore\ x = -\dfrac{30}{50}$ किंवा $x = -\dfrac{30}{50}$

$\therefore\ x = -\dfrac{3}{5}$ किंवा $x = -\dfrac{3}{5}$

लक्षात घ्या, की $25x^2 + 30x + 9 = 0$ या समीकरणाची दोन्ही मुळे समान आहेत.

तसेच $25x^2 + 30x + 9 = 0$.

म्हणजेच $(5x + 3)^2 = 0$ हे ध्यानात घ्या.

उदा. (5) $x^2 + x + 5 = 0$

उकल: $x^2 + x + 5 = 0$ ची

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1,\ b = 1,\ c = 5,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 1 - 20$

$= -19$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

परंतु $\sqrt{-19}$ ही वास्तव संख्या नाही. म्हणून दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव संख्या नाहीत.

कृती : $2x^2 + 13x + 15 = 0$ हे वर्गसमीकरण अवयवपद्धती, पूर्ण वर्गपद्धती व वर्गसूत्राचा वापर करून सोडवा. उत्तरे सारखीच येतात याचा पडताळा घ्या.

सरावसंच 2.4

1. खालील वर्गसमीकरणांची सामान्य रूपाशी तुलना करून a, b, c च्या किमती लिहा.

(1) $x^2 - 7x + 5 = 0$ (2) $2m^2 = 5m - 5$ (3) $y^2 = 7y$

2. खालील वर्गसमीकरणे सूत्राचा वापर करून सोडवा.

(1) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

(4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$ (5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$ (6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

3. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ हे वर्गसमीकरण सूत्राचा वापर करून खालील प्रवाह आकृतीत दिलेल्या माहितीच्या आधारे सोडवा.

उकल : $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ ची $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून a, b, c च्या किमती ठरवा. → $b^2 - 4ac$ ची किंमत काढा. → वर्गसमीकरण सोडवण्याचे सूत्र लिहा. → सूत्रामध्ये किमती घालून उकल काढा.

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरणाच्या मुळांचे स्वरूप (Nature of roots of a quadratic equation)

वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ची मुळे $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ अशी असतात, हे आपण अभ्यासले आहे.

(1) जर $b^2 - 4ac = 0$ असेल, तर $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ $\therefore x = \dfrac{-b+0}{2a}$ किंवा $x = \dfrac{-b-0}{2a}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान असतात.

(2) जर $b^2 - 4ac > 0$ असेल, तर $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

म्हणजेच $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ आणि $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व असमान असतात.

(3) जर $b^2 - 4ac < 0$ असेल तर $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ या वास्तव संख्या नसतात, म्हणजेच वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव नसतात.

वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ च्या मुळांचे स्वरूप $b^2 - 4ac$ च्या किमतीवरून निश्चित होते. म्हणून $b^2 - 4ac$ ला वर्गसमीकरणाचा विवेचक (discriminant) म्हणतात. तो Δ (डेल्टा) या चिन्हाने दर्शवतात. (Δ हे ग्रीक अक्षर आहे.)

कृती : खाली दिलेल्या माहितीवरून रिकाम्या जागा भरा.

	विवेचकाची किंमत		मुळांचे स्वरूप
(1)	50	→	
(2)	-30	→	
(3)	0	→	

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) $x^2 + 10x - 7 = 0$ या वर्गसमीकरणामध्ये विवेचकाची किंमत काढा.

उकल : $x^2 + 10x - 7 = 0$ ची तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ शी करून,

$a = 1,\ b = 10\ ,\ c = -7$,

$\therefore b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times (-7)$

$= 100 + 28$

$= 128$

उदा. (2) विवेचकावरून वर्गसमीकरणांच्या मुळांचे स्वरूप ठरवा.

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

उकल : $2x^2 - 5x + 7 = 0$ ची तुलना

$ax^2 + bx + c = 0$ शी करून,

$a = 2,\ b = -5\ ,\ c = 7$

$\therefore b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$

$\therefore \Delta = 25 - 56$

$= -31$

$\therefore b^2 - 4ac < 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव संख्या नाहीत.

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

उकल : $x^2 + 2x - 9 = 0$ ची तुलना

$ax^2 + bx + c = 0$ शी करून,

$a = \boxed{},\ b = 2,\ c = \boxed{}$

$\therefore b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \boxed{} \times \boxed{}$

$\therefore \Delta = 4 + \boxed{}$

$= 40$

$\therefore b^2 - 4ac > 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व असमान आहेत.

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

उकल : $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ ची तुलना

$ax^2 + bx + c = 0$ शी करून,

येथे $a = \sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}\ ,\ c = \sqrt{3}$,

$\therefore b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= 4 \times 3 - 4 \times 3$

$= 12 - 12$

$= 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान आहेत.

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरणाची मुळे आणि सहगुणक यांच्यामधील संबंध

(Relation between roots and coefficients of a quadratic equation)

जर $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची α व β मुळे असतील तर

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$\boxed{\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}}$$

तसेच

$$\alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$\boxed{\therefore \alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

कृती : खाली दिलेल्या चौकटींत योग्य संख्या भरा.

$10x^2 + 10x + 1 = 0$ करिता $\alpha + \beta = \boxed{}$ आणि

$\alpha \times \beta = \boxed{}$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) α आणि β ही $2x^2 + 6x - 5 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत, तर $\alpha + \beta$ आणि $\alpha \times \beta$ च्या किमती काढा.

उकल : $2x^2 + 6x - 5 = 0$ ची तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ शी करून,

$\therefore\ a = 2,\ b = 6,\ c = -5$

$$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$\text{आणि } \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$$

उदा. (2) $x^2 - 13x + k = 0$ या वर्गसमीकरणाच्या मुळांमधील फरक 7 आहे, तर k ची किंमत काढा.

उकल : $x^2 - 13x + k = 0$ ची तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1, \; b = -13 \;, \; c = k$

समजा, α आणि β ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत आणि $\alpha > \beta$ गृहीत धरून

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \; . \; . \; . \; (\mathrm{I})$

परंतु $\alpha - \beta = 7$ . . . . (दिले आहे) (II)

$2\alpha = 20$ . . . . (समीकरण (I) व (II) यांची बेरीज करून)

$\therefore \; \alpha = 10$

$\therefore \; 10 + \beta = 13$ . . . . . . ((I) वरून)

$\therefore \; \beta = 13 - 10$

$\therefore \; \beta = 3$

परंतु $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

$\therefore \; 10 \times 3 = \frac{k}{1}$

$\therefore \; k = 30$

उदा. (3) α आणि β ही $x^2 + 5x - 1 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत, तर

(i) $\alpha^3 + \beta^3$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ च्या किमती काढा.

उकल : $x^2 + 5x - 1 = 0$

येथे $a = 1, \; b = 5 \;, \; c = -1$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$

(i) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5)$

$= -125 - 15$

$\alpha^3 + \beta^3 = -140$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-5)^2 - 2 \times (-1)$

$= 25 + 2$

$\alpha^2 + \beta^2 = 27$

जाणून घेऊया.

मुळे दिली असता वर्गसमीकरण मिळवणे
(To obtain a quadratic equation having given roots)

समजा, α आणि β ही x या चलांतील वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.

$\therefore\ x = \alpha$ किंवा $x = \beta$

$\therefore\ x - \alpha = 0$ किंवा $x - \beta = 0$

$\therefore\ (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\therefore\ x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$

म्हणजेच α आणि β ही मुळे असणारे वर्गसमीकरण

x^2 − (मुळांची बेरीज) x + मुळांचा गुणाकार = 0 या सूत्राने मिळवता येईल.

कृती (I) : मुळांची बेरीज 10 आणि मुळांचा गुणाकार 9 असणारे वर्गसमीकरण लिहा.

वर्गसमीकरण $x^2 - \square\, x + \square = \square$

कृती (II) : $\alpha = 2$ आणि $\beta = 5$ ही मुळे असणारे वर्गसमीकरण कोणते ?

$x^2 - (\square + \square)\, x + \square \times \square = 0$ असे लिहिता येते.

म्हणजेच $x^2 - \square\, x + \square = 0$

या समीकरणाला कोणत्याही शून्येतर संख्येने गुणल्यास मिळणाऱ्या समीकरणाची मुळे α आणि β हीच असतात, हे ध्यानात घ्या.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. ज्या वर्गसमीकरणाची मुळे −3 व −7 आहेत असे वर्गसमीकरण तयार करा.

उकल : समजा $\alpha = -3$ आणि $\beta = -7$

$\therefore\ \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10$ आणि $\alpha \times \beta = (-3) \times (-7) = 21$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण, $x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (-10)\, x + 21 = 0$

$\therefore\ x^2 + 10x + 21 = 0$

हे लक्षात ठेवूया.

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे α आणि β असतील, तर

(i) $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ आणि $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ii) $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ आणि $\alpha \times \beta = \dfrac{c}{a}$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाच्या मुळांचे स्वरूप $b^2 - 4ac$ या राशीच्या किमतीवर अवलंबून असते. म्हणून या राशीला विवेचक (discriminant) म्हणतात. विवेचक Δ या ग्रीक अक्षराने दर्शवतात.

(3) जर $\Delta = 0$ असेल, तर वर्गसमीकरणाची दोन्ही मुळे समान वास्तवसंख्या असतात.

जर $\Delta > 0$ असेल, तर वर्गसमीकरणाची मुळे भिन्न वास्तवसंख्या असतात.

जर $\Delta < 0$ असेल, तर वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तवसंख्या नसतात.

(4) ज्याची मुळे α व β असतात, ते वर्गसमीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ असते.

सरावसंच 2.5

1. खालील रिकाम्या चौकटी भरा.

(1) वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ → $b^2 - 4ac = 5$ → मुळांचे स्वरूप ....

$b^2 - 4ac = -5$ → मुळांचे स्वरूप ....

(2) मुळांची बेरीज $= -7$ → वर्गसमीकरण . . . . ← मुळांचा गुणाकार $= 5$

(3) जर α व β ही खालील वर्गसमीकरणाची मुळे असतील, तर

$2x^2 - 4x - 3 = 0$ → $\alpha + \beta = \ldots\ldots$

$\alpha \times \beta = \ldots\ldots$

2. खालील वर्गसमीकरणांसाठी विवेचकाची किंमत काढा.

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$ (2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$ (3) $\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

3. विवेचकाच्या किमतीवरून खालील वर्गसमीकरणांच्या मुळांचे स्वरूप ठरवा.

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$ (3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

4. ज्या वर्गसमीकरणाची मुळे खालीलप्रमाणे आहेत अशी वर्गसमीकरणे तयार करा.

(1) 0 व 4 (2) 3 व -10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}$, $2+\sqrt{5}$

★ 5. $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ या वर्गसमीकरणाच्या मुळांची बेरीज ही त्यांच्या गुणाकाराच्या दुप्पट आहे, तर k ची किंमत काढा.

★ 6. जर α आणि β ही $y^2 - 2y - 7 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे असतील, तर

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$ च्या किमती काढा.

7. खालील प्रत्येक वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान असतील तर k ची किंमत काढा.

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x-2) + 6 = 0$

जाणून घेऊया.

वर्गसमीकरणाचे उपयोजन (Application of quadratic equation)

दैनंदिन जीवनातील अनेक बाबींची उकल करण्यासाठी वर्गसमीकरणे उपयोगी पडतात. हीच बाब आपण या भागात अभ्यासणार आहोत.

उदा. (1) तिवसा येथील श्री. रत्नाकरराव यांच्या शेतातील काटकोन चौकोनाकृती कांदाचाळीच्या तळाची लांबी ही रुंदीपेक्षा 7 मीटर जास्त आहे, आणि कर्ण हा लांबीपेक्षा 1 मीटर जास्त आहे. तर त्या कांदाचाळीच्या तळाची लांबी आणि रुंदी काढा.

उकल : समजा, काटकोन चौकोनाकृती कांदाचाळीच्या तळाची रुंदी x मीटर आहे.

$\therefore$ लांबी = $(x + 7)$ मीटर, कर्ण = $x + 7 + 1 = (x + 8)$ मीटर

पायथागोरसचे प्रमेय वापरून,

$$x^2 + (x+7)^2 = (x+8)^2$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$$

$$\therefore x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$$

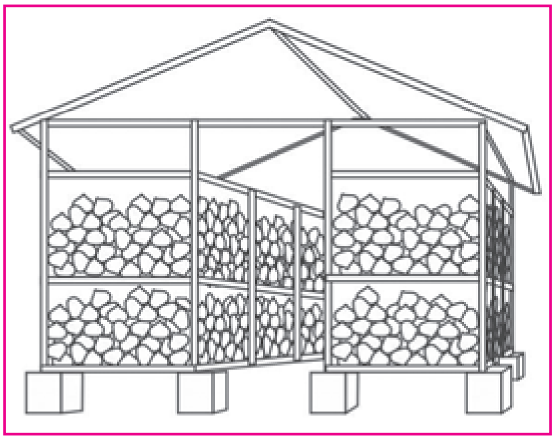
$$\therefore \underline{x^2 - 5x} + \underline{3x - 15} = 0$$

$$\therefore x(x-5) + 3(x-5) = 0$$

$$\therefore (x-5)(x+3) = 0$$

$\therefore x - 5 = 0$ किंवा $x + 3 = 0$

$\therefore x = 5$ किंवा $x = -3$



कांदाचाळ

परंतु रुंदी ऋण नसते. $\therefore x \neq -3$

$\therefore x = 5$ आणि $x + 7 = 5 + 7 = 12$

$\therefore$ कांदाचाळीच्या तळाची लांबी 12 मीटर आणि रुंदी 5 मीटर.

उदा. (2) एक आगगाडी एकसमान वेगाने (चालीने) 360 किमी अंतर जाते; परंतु तिचा वेग ताशी 5 किमीने वाढवल्यास तिला तेवढेच अंतर जाण्यासाठी 48 मिनिटे कमी लागतात, तर गाडीचा सुरुवातीचा वेग काढा.

उकल : समजा, आगगाडीचा सुरुवातीचा वेग ताशी x किमी आहे.

$\therefore$ वेग वाढवल्यानंतर गाडीचा ताशी वेग $(x+5)$ किमी असेल .

360 किमी अंतर कापण्यासाठी लागणारा सुरुवातीचा वेळ = $\frac{\text{अंतर}}{\text{वेग}} = \frac{360}{x}$ तास.

वेग वाढवल्यावर तेच अंतर जाण्यासाठी लागणारा वेळ = $\frac{360}{x+5}$

दिलेल्या अटीनुसार,

$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60}$ ------ ($\because$ 48 मिनिटे = $\frac{48}{60}$ तास)

$\therefore \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$

$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60\times 360}$ ----- (दोन्ही बाजूंना 360 ने भागून)

$\therefore \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5\times 360}$

$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5\times 90}$

$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$

$\therefore x^2 + 5x = 2250$

$\therefore x^2 + 5x - 2250 = 0$

$\therefore \underline{x^2 + 50x} - \underline{45x - 2250} = 0$

$\therefore x(\underline{x + 50}) - 45\,(\underline{x + 50}) = 0$

$\therefore (x + 50)(x - 45) = 0$

$\therefore x + 50 = 0$ किंवा $x - 45 = 0$

$\therefore x = -50$ किंवा $x = 45$

परंतु वेग ऋण नसतो. $\therefore x \neq -50$

$\therefore x = 45$

$\therefore$ आगगाडीचा सुरुवातीचा वेग ताशी 45 किमी.

-2250

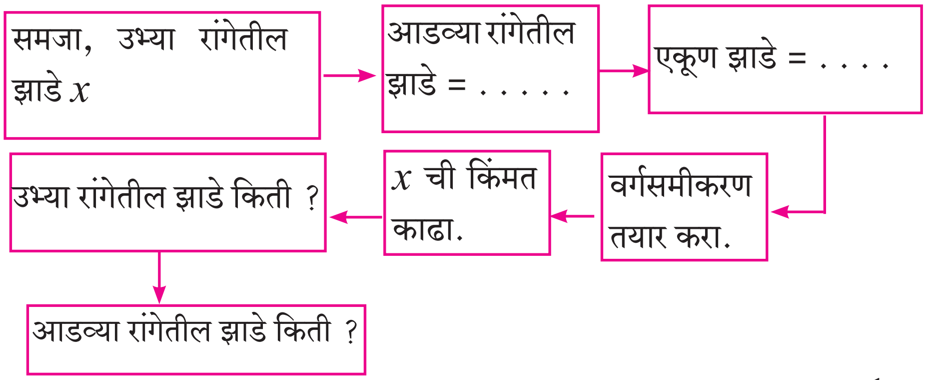
$+50 \quad -45$

सरावसंच 2.6

1. प्रगतीच्या 2 वर्षांपूर्वीच्या आणि 3 वर्षांनंतरच्या वयांचा गुणाकार 84 आहे, तर तिचे आजचे वय काढा.

2. दोन क्रमागत सम नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गांची बेरीज 244 आहे, तर त्या संख्या शोधा.

3. श्री. मधुसूदन यांच्या संत्राबागेत आडव्या रांगेतील झाडांची संख्या, उभ्या रांगेतील झाडांच्या संख्येपेक्षा 5 ने अधिक आहे. जर संत्राबागेत एकूण 150 झाडे असतील तर आडव्या तसेच उभ्या रांगेतील झाडांची संख्या किती ? खालील प्रवाहआकृतीच्या आधारे उदाहरण सोडवा.



4. विवेक, हा किशोरपेक्षा 5 वर्षांनी मोठा असून त्यांच्या वयांच्या गुणाकार व्यस्तांची बेरीज $\frac{1}{6}$ आहे, तर त्यांची आजची वये काढा.

5. सुयशला गणिताच्या पहिल्या चाचणीत मिळालेल्या गुणांपेक्षा दुसऱ्या चाचणीत 10 गुण अधिक मिळाले. दुसऱ्या चाचणीतील गुणांची 5 पट ही पहिल्या चाचणीतील गुणांच्या वर्गाइतकी आहे, तर त्याचे पहिल्या चाचणीतील गुण किती ?

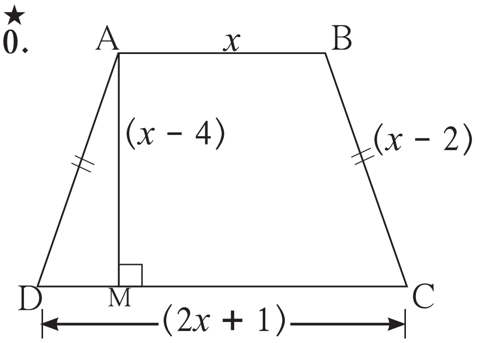
6.★ श्री. कासम यांचा मातीची भांडी बनवण्याचा कुटीर उद्योग आहे. ते दररोज ठरावीक संख्येएवढी भांडी तयार करतात. प्रत्येक भांड्याचे निर्मितिमूल्य, तयार केलेल्या भांड्यांच्या संख्येची 10 पट अधिक 40 रु. असते. जर एका दिवसातील भांड्यांचे निर्मितिमूल्य 600 रुपये असेल, तर प्रत्येक भांड्याचे निर्मितिमूल्य व एका दिवसात बनवलेल्या भांड्यांची संख्या काढा.

7.★ एका नदीत, बोटीने प्रवाहाच्या विरुद्ध 36 किमी जाऊन परत त्याच जागी येण्यास प्रतीकला 8 तास लागतात. बोटीचा संथ पाण्यातील वेग ताशी 12 किमी असल्यास नदीच्या प्रवाहाचा वेग काढा.

8.★ पिंटूला एक काम करण्यासाठी निशूपेक्षा 6 दिवस अधिक लागतात. दोघांनी मिळून काम केल्यास ते काम पूर्ण करण्यासाठी त्यांना 4 दिवस लागतात. तर ते काम एकट्यानेच पूर्ण करण्यास प्रत्येकास किती दिवस लागतील ?

9.★ 460 या संख्येला एका नैसर्गिक संख्येने भागल्यास भागाकार भाजकाच्या 5 पटीपेक्षा 6 ने अधिक येत असून बाकी 1 येते. तर भागाकार व भाजक किती ?

10.★



बाजूच्या समलंब □ABCD मध्ये AB || CD असून त्याचे क्षेत्रफळ 33 चौसेमी आहे, तर आकृतीतील दिलेल्या माहितीवरून चौकोनाच्या चारही बाजूंची लांबी खालील कृती पूर्ण करून काढा.

उकल : $\square$ABCD समलंब चौकोन आहे. AB || CD

$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \times \boxed{}$

$\therefore 33 = \frac{1}{2}(x + 2x + 1) \times \boxed{}$

$\therefore \boxed{} = (3x + 1) \times \boxed{}$

$\therefore 3x^2 + \boxed{} - \boxed{} = 0$

$\therefore 3x(\ldots.) + 10(\ldots.) = 0$

$\therefore (3x + 10)(----) = 0$

$\therefore (3x + 10) = 0$ किंवा $\boxed{} = 0$

$\therefore x = -\frac{10}{3}$ किंवा $x = \boxed{}$

परंतु लांबी ऋण नसते.

$\therefore x \neq -\frac{10}{3}$ $\quad \therefore x = \boxed{}$

AB = ---, CD = ---, AD = BC = ---

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. खालील प्रश्नांच्या उत्तरांचा अचूक पर्याय निवडा.

(1) खालीलपैकी कोणते वर्गसमीकरण आहे ?

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

(2) खालीलपैकी कोणते वर्गसमीकरण नाही ?

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) $x^2 + kx + k = 0$ ची मुळे वास्तव व समान असतील, तर k ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) 0 (B) 4 (C) 0 किंवा 4 (D) 2

(4) $\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ करिता विवेचकाची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) -5 (B) 17 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) खालीलपैकी कोणत्या समीकरणाची मुळे 3 व 5 आहेत ?

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) खालीलपैकी कोणत्या समीकरणाच्या मुळांची बेरीज -5 आहे ?

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) $\sqrt{5}m^2 - \sqrt{5}m + \sqrt{5} = 0$ ला खालीलपैकी कोणते विधान लागू पडते ?

(A) वास्तव व असमान मुळे (B) वास्तव व समान मुळे

(C) मुळे वास्तव संख्या नाहीत. (D) तीन मुळे.

(8) $x^2 + mx - 5 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ 2 असेल, तर m ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

2. खालीलपैकी कोणती समीकरणे वर्गसमीकरणे आहेत?

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. खालीलपैकी प्रत्येक समीकरणाच्या विवेचकाची किंमत काढा.

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. $2x^2 + kx - 2 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ -2 आहे, तर k ची किंमत किती?

5. असे वर्गसमीकरण तयार करा, की ज्याची मुळे खालीलप्रमाणे आहेत.

(1) 10 आणि -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ आणि $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 आणि 7

6. खाली दिलेल्या वर्गसमीकरणाच्या मुळांचे स्वरूप ठरवा.

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. खालील वर्गसमीकरणे सोडवा.

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0, x + 5 \neq 0)$ (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

8.★ $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान असतील तर m ची किंमत काढा.

9.★ एका वर्गसमीकरणाच्या दोन मुळांची बेरीज 5 आणि त्यांच्या घनांची बेरीज 35 आहे, तर ते वर्गसमीकरण कोणते?

10.★ असे वर्गसमीकरण तयार करा की ज्याची मुळे $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ या समीकरणाच्या मुळांच्या बेरजेचा वर्ग व वजाबाकीचा वर्ग असतील.

11.★ मुकुंदजवळ सागरपेक्षा 50 रुपये अधिक आहेत. त्यांच्याजवळील रकमांचा गुणाकार 15000 असेल, तर प्रत्येका जवळील रक्कम किती?

12.★ दोन संख्यांच्या वर्गांमधील फरक 120 आहे. लहान संख्येचा वर्ग हा मोठ्या संख्येच्या दुपटीइतका आहे, तर त्या संख्या शोधा.

13.★ रंजनाला वाढदिवसानिमित्त 540 संत्री काही विद्यार्थ्यांना समान वाटायची आहेत. जर 30 विद्यार्थी जास्त असते तर प्रत्येकाला 3 संत्री कमी मिळाली असती, तर विद्यार्थ्यांची संख्या काढा.

14.★ तळवेल येथील शेतकरी श्री दिनेश यांच्या आयताकृती शेताची लांबी ही रुंदीच्या दुपटीपेक्षा 10 मीटरने अधिक आहे. त्यांनी त्या शेतात पावसाचे पाणी पुनर्भरणासाठी शेताच्या रुंदीच्या $\frac{1}{3}$ पट बाजू असणाऱ्या चौरसाकृती शेततळ्याची निर्मिती केली. तेव्हा मूळ शेताचे क्षेत्रफळ हे शेततळ्याच्या क्षेत्रफळाच्या 20 पट होते, तर त्या शेताची लांबी आणि रुंदी तसेच शेततळ्याच्या बाजूची लांबी काढा.

15.★ एक टाकी दोन नळांच्या साहाय्याने 2 तासांत पूर्ण भरते. त्यातील फक्त लहान नळाने टाकी भरण्यास लागणारा वेळ, फक्त मोठ्या नळाने टाकी भरण्यास लागणाऱ्या वेळापेक्षा 3 तास जास्त असतो. तर प्रत्येक नळाने ती टाकी भरण्यास किती वेळ लागतो? ❑❑❑

4I3JUQ

3 अंकगणिती श्रेढी

चला, शिकूया.

- क्रमिका
- अंकगणिती श्रेढी
- अंकगणिती श्रेढीतील n वे पद
- अंकगणिती श्रेढीतील n पदांची बेरीज

जाणून घेऊया.

क्रमिका (Sequence)

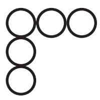
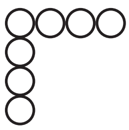
आपण 1, 2, 3, 4, . . . या संख्या क्रमाने लिहितो. ही संख्यांची मालिका आहे. या मालिकेतील कोणतीही संख्या कितव्या स्थानावर आहे हे आपण सांगू शकतो. जसे 13 ही संख्या 13 व्या क्रमांकावर आहे. संख्यांची दुसरी मालिका 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . . पाहा. या संख्या विशिष्ट क्रमाने लिहिल्या आहेत. येथे $16 = 4^2$ ही संख्या चौथ्या क्रमांकावर, तर $25 = 5^2$ ही संख्या 5 व्या स्थानावर आहे. $49 = 7^2$ ही संख्या सातव्या स्थानावर आहे. म्हणजे याही मालिकेत कोणतीही संख्या कितव्या स्थानावर आहे, हे सांगता येते.

नैसर्गिक संख्यांच्याप्रमाणे विशिष्ट क्रमाने मांडलेल्या संख्यांच्या समूहाला **क्रमिका** म्हणतात.

क्रमिकेमध्ये विशिष्ट स्थानावर विशिष्ट संख्या लिहिली जाते. त्या संख्या $a_1, a_2, a_3, a_4 . . ., a_n$ अशा क्रमाने दर्शवल्या की a_1 ही पहिली, a_2 ही दुसरी, . . . याप्रमाणे a_n ही n वी संख्या आहे हे स्पष्ट होते. संख्यांची क्रमिका $f_1, f_2, f_3, . . .$ अशा अक्षरांनीदेखील दर्शवली जाते. तिच्यात निश्चित क्रमाने संख्या लिहिल्या आहेत हे समजते.

एखाद्या वर्गातील मुले कवायतीसाठी मैदानावर गेल्यावर एका ओळीत उभी राहतात. त्यांचा क्रम ठरलेला असतो, तेव्हा त्यांची क्रमिका तयार होते. काही क्रमिकांमध्ये विशिष्ट आकृतिबंध असतो हे आपण अनुभवले आहे.

कृती : पुढील आकृतिबंध पूर्ण करा.

आकृतिबंध									
वर्तुळांची संख्या	1	3	5	7					

आकृतिबंध	ΔΔ Δ ΔΔ	ΔΔΔ Δ Δ ΔΔΔ	ΔΔΔΔ Δ Δ Δ ΔΔΔΔ				
त्रिकोणांची संख्या	5	8	11				

संख्यांचे तयार झालेले आकृतिबंध पाहा. आधीच्या संख्येवरून पुढील संख्या मिळवण्याचा नियम शोधा. या नियमावरून पुढच्या सगळ्या संख्या लिहिता येतात.

संख्यांची पुढील मालिका पाहा. 2, 11, −6, 0, 5, −37, 8, 2, 61

येथे $a_1 = 2$, $a_2 = 11$, $a_3 = -6$, . . . ही संख्यांची यादीदेखील क्रमिका आहे, परंतु विशिष्ट पदे त्या स्थानावर का आहेत हे सांगता येत नाही, तसेच क्रमवार पदांतील संबंधही निश्चितपणे सांगता येत नाही.

साधारणपणे ज्या क्रमिकेमध्ये पुढचे पद ठरवता येईल असा नियम असतो, अशा क्रमिका विचारात घेतल्या जातात.

उदा. (1) 4, 8, 12, 16, . . . (2) 2, 4, 8, 16, 32, . . .
(3) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots$

क्रमिकेतील पदे (Terms in a sequence)

क्रमिकेतील क्रमवार पदे $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n \ldots$.या प्रकारेही दर्शवतात. सामान्यपणे क्रमिका ही $\{t_n\}$ अशी लिहितात. क्रमिका अनंत असेल, तर प्रत्येक धन पूर्णांक n, याच्याशी निगडित अशी एक संख्या आहे असे गृहीत धरले जाते.

कृती I : खालील क्रमिका पाहा. यातील पदांचे क्रमांक $t_1, t_2, t_3 \ldots$ ने दाखवा.

(1) 9, 15, 21, 27, . . . येथे $t_1 = 9$, $t_2 = 15$, $t_3 = 21$, . . .

(2) 7, 7, 7, 7, . . . येथे $t_1 = 7$, $t_2 = \boxed{}$, $t_3 = \boxed{}$, . . .

(3) −2, −6, −10, −14, . . . येथे $t_1 = -2$, $t_2 = \boxed{}$, $t_3 = \boxed{}$, . . .

कृती II : खाली काही क्रमिका दिल्या आहेत. त्यांच्या पदांमध्ये काही नियम आढळतो का ते पाहा. दोन क्रमिकांमधील साम्य शोधा.

क्रमिकांच्या पदांमध्ये काही नियम आढळतो का हे पाहण्यासाठी पुढे दिलेली मांडणी पाहा आणि पुढील पानावरील रिकाम्या चौकटी भरा.

(1) 1, 4, 7, 10, 13, . . . (2) 6, 12, 18, 24, . . . (3) 3, 3, 3, 3, . . .

(4) 4, 16, 64, . . . (5) −1, −1.5, −2, −2.5, . . . (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

या क्रमिकांमधील संबंध शोधू. त्यासाठी केलेला विचार पाहू.

(1) 1   4   7   10 $\square$ $\square$, . . .

$1 (+3)$ $4 (+3)$ $7 (+3)$ $10 (+3)$ $\square$

(2) 6   12   18   24 $\square$ $\square$, . . .

$6 + 6$ $12 + 6$ $18 + 6$ $\square$ $\square$

(3) 3   3   3   3 $\square$ $\square$ . . .

$3 + 0$ $3 + 0$ $3 + 0$ $\square$ $\square$

(4) 4   16   64 $\square$ $\square$ $\square$, . . .

4×4 16×4 64×4 $\square \times 4$ $\square \times 4$

(5) -1 -1.5 -2 -2.5 $\square$ . . .

$(-1)+(-0.5)$ $-1.5 +(-0.5)$ $-2 + (-0.5)$ $-2.5 + (-0.5)$

(6) 1^3, 2^3, 3^3,   . . .

येथे क्रमिका (1), (2), (3), (5) यांच्यामध्ये आधीच्या पदात ठराविक संख्या मिळवून पुढचे पद मिळते, हे साम्य आहे. या प्रकारच्या क्रमिकांना अंकगणिती श्रेढी म्हणतात.

वरील (4) ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी नाही. या क्रमिकेमध्ये आधीच्या पदाला ठरावीक संख्येने गुणून पुढचे पद मिळते. या प्रकारच्या क्रमिकांना भूमिती श्रेढी (Geometric Progression) म्हणतात.

वरील (6) ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी नाही, तसेच भूमिती श्रेढीही नाही.

यावर्षी आपण अंकगणिती श्रेढीचा अभ्यास करणार आहोत.

अंकगणिती श्रेढी (Arithmetic Progression)

खाली काही क्रमिका दिल्या आहेत. प्रत्येक क्रमिकेतील पुढील तीन पदे लिहा.

(1) 100, 70, 40, 10, . . .   (2) -7, -4, -1, 2, . . .   (3) 4, 4, 4, . . .

दिलेल्या क्रमिकांमधील पुढील पदे काढण्यासाठी काय केले ते पाहा.

पहिले पद   दुसरे पद   तिसरे पद

(1) 100   70   40   10 $\boxed{-20}$ $\boxed{-50}$ . . .

100+(−30)   70+(−30)   40+(−30)   10+(−30)   (−20)+(−30)

(2) −7   −4   −1   2 $\boxed{5}$ $\boxed{8}$ . . .

−7+3   −4+3   −1+3   2+3   5+3

(3) 4   4   4   4   4   . . .

4 + 0   4 + 0   4 + 0   4 + 0

वरील संख्यांच्या प्रत्येक यादीतील प्रत्येक पद आधीच्या पदात विशिष्ट संख्या मिळवून तयार झाले आहे. दोन क्रमागत पदांमधील फरक स्थिर आहे.

उदा. (1) मधील फरक ऋण, (2) मधील फरक धन आणि (3) मधील फरक 0 आहे.

क्रमागत पदांमधील फरक स्थिर असेल तर त्याला **सामान्य फरक किंवा सामाईक फरक (Common difference)** म्हणतात. हा फरक d या अक्षराने दर्शवतात.

दिलेल्या क्रमिकेतील कोणत्याही दोन क्रमागत पदांमधील फरक $(t_{n+1} - t_n)$ स्थिर असेल तर त्या क्रमिकेस अंकगणिती श्रेढी म्हणतात. अशा श्रेढीत $t_{n+1} - t_n = d$ हा सामान्य फरक असतो.

अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद a आणि सामान्य फरक d असेल,

तर $t_1 = a$, $t_2 = a + d$, $t_3 = (a + d) + d = a + 2d$

पहिले पद a आणि सामान्य फरक d असलेली अंकगणिती श्रेढी

$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \ldots\ldots$ ही असते.

अंकगणिती श्रेढीसंबंधी काही उदाहरणे पाहू.

उदा. (1) अरिफाने दर महिन्याला 100 रुपयांची बचत केली. एका वर्षातील प्रत्येक महिनाअखेरची एकूण बचत खालीलप्रमाणे असेल.

महिना	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
बचत ₹	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

प्रत्येक महिन्यातील एकूण बचत दाखवणाऱ्या संख्या अंकगणिती श्रेढीत आहेत.

(2) प्रणवने मित्राकडून 10000 रुपये उसने घेतले आणि दरमहा 1000 रुपये याप्रमाणे फेडायचे ठरले, तर प्रत्येक महिन्यात फेडायची राहिलेली रक्कम खालीलप्रमाणे असेल.

महिना क्र.	1	2	3	4	5	...	...	...	...
फेडायची राहिलेली रक्कम ₹	10,000	9,000	8,000	7,000	...	...	2,000	1,000	0

(3) 5 चा पाढा, म्हणजे 5 ने विभाज्य संख्या पाहा.

5, 10, 15, 20, . . . 50, 55, 60, ... ही अंकगणिती श्रेढी आहे.

वरील (1) व (2) या अंकगणिती श्रेढी सांत आहेत. तर (3) ही अंकगणिती श्रेढी अनंत श्रेढी आहे.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) जर क्रमिकेमध्ये $(t_{n+1} - t_n)$ हा फरक स्थिर असेल तर त्या क्रमिकेला अंकगणिती श्रेढी म्हणतात.

(2) अंकगणिती श्रेढीच्या दोन क्रमागत पदांमधील स्थिर फरक d या अक्षराने दर्शवतात.

(3) d हा फरक धन, ऋण किंवा शून्य असू शकतो.

(4) अंकगणिती श्रेढीतील पहिले पद a, आणि सामान्य फरक d असेल तर त्या श्रेढीतील पदे $a, (a + d), (a + 2d),$ . . . अशी असतात.

कृती : सांत अंकगणिती श्रेढीचे एक आणि अनंत अंकगणिती श्रेढीचे एक उदाहरण लिहा.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) खालीलपैकी कोणती क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे हे ओळखा. जर असेल तर तिची पुढील दोन पदे काढा.

(i) 5, 12, 19, 26, . . . (ii) 2, −2, −6, −10, . . .

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . (iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

उकल : (i) 5, 12, 19, 26, . . . या क्रमिकेत,

पहिले पद $= t_1 = 5, \quad t_2 = 12, \quad t_3 = 19, \ldots$

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

येथे पहिले पद = 5 व सामान्य फरक = d = 7 आहे. तो स्थिर आहे.

∴ ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे. या श्रेढीतील पुढील दोन पदे.

$26 + 7 = 33, \quad 33 + 7 = 40.$

येथे 33 व 40 ही दिलेल्या श्रेढीतील पुढील दोन पदे आहेत.

(ii) 2, −2, −6, −10, . . . या क्रमिकेत,

$t_1 = 2$, $t_2 = -2$, $t_3 = -6$, $t_4 = -10$ . . .

$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$

$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$

$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$

यावरून प्रत्येक दोन क्रमागत पदांमधील फरक, म्हणजे $t_{n+1} - t_n = -4$ आहे. $\therefore$ $d = -4$ हा सामाईक फरक आहे. तो स्थिर आहे. $\therefore$ ही अंकगणिती श्रेढी आहे.

या श्रेढीतील पुढील दोन पदे $(-10) + (-4) = -14$ आणि $(-14) + (-4) = -18$ ही आहेत.

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . या क्रमिकेत,

$t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 2$, $t_5 = 3$, $t_6 = 3$ . . .

$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0$, $\quad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$

$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0$, $\quad t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

या क्रमिकेतील लगतच्या दोन पदांमधील फरक स्थिर नाही. $\therefore$ दिलेली क्रमिका अंकगणिती श्रेढी नाही.

(iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ या क्रमिकेत,

$t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = -\frac{1}{2}$, $t_4 = -\frac{3}{2}$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

येथे सामान्य फरक $d = -1$ हा स्थिर आहे.

$\therefore$ दिलेली क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे.

यातील पुढील दोन पदे शोधू.

$-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$, $\quad -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ पुढील दोन पदे $-\frac{5}{2}$ व $-\frac{7}{2}$ आहेत.

उदा. (2) पहिले पद a व सामान्य फरक d खाली दिले आहेत. त्यानुसार पहिली चार पदे काढून अंकगणिती श्रेढी लिहा.

(i) $a = -3, \quad d = 4$ (ii) $a = 200, \quad d = 7$

(iii) $a = -1, \quad d = -\frac{1}{2}$ (iv) $a = 8, \quad d = -5$

उकल : (i) $a = -3, d = 4$ यावरून,

$a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ अंकगणिती श्रेढी $-3, 1, 5, 9, \ldots$

(ii) $a = 200, d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

$\therefore$ अंकगणिती श्रेढी $200, 207, 214, 221, \ldots$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-\frac{1}{2})$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ अंकगणिती श्रेढी $-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \ldots$

(iv) $a = 8, d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

$\therefore$ अंकगणिती श्रेढी $8, 3, -2, -7, \ldots$

सरावसंच 3.1

1. खालीलपैकी कोणत्या क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहेत? ज्या अंकगणिती श्रेढी असतील, त्यांतील प्रत्येकीचा सामाईक फरक काढा.

(1) $2, 4, 6, 8, \ldots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \ldots$ (5) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$

(7) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \ldots$ (8) $127, 132, 137, \ldots$

2. जर अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद a व सामान्य फरक d असेल तर अंकगणिती श्रेढी लिहा.

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

3. खालील प्रत्येक अंकगणिती श्रेढीसाठी पहिले पद आणि सामान्य फरक काढा.

(1) 5, 1, –3, –7, . . .   (2) 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, . . .

(3) 127, 135, 143, 151, . . .   (4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$

विचार करूया.

- 5, 8, 11, 14, . . . ही अंकगणिती श्रेढी आहे का? जर असेल तर तिचे 100 वे पद कोणते असेल? या श्रेढीत 92 ही संख्या असेल का? 61 ही संख्या असेल का?

जाणून घेऊया.

अंकगणिती श्रेढीचे n वे पद (n^{th} term of an A. P.)

5, 8, 11, 14, . . . या क्रमिकेत दोन क्रमागत पदांमधील फरक 3 आहे म्हणून ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे.

यात पहिले पद 5 आहे. 5 मध्ये 3 मिळवल्यावर 8 हे दुसरे पद मिळते. या प्रकारे 100 वे पद मिळवण्यासाठी काय करावे लागेल?

	पहिले पद	दुसरे पद	तिसरे पद	. . .
संख्या	5,	5 + 3 = 8,	8 + 3 = 11,	. . .

या पद्धतीने 100 व्या पदापर्यंत जाण्यासाठी खूप वेळ लागेल. यासाठी एखादे सूत्र मिळते का ते पाहू.

5	8	11	14	. . .	. . .	. . .	. . .
5	5 + 1 × 3	5 + 2 × 3	5 + 3 × 3	. . .	$5 + (n - 1) \times 3$	$5 + n \times 3$	. . .
पहिले पद t_1	दुसरे पद t_2	तिसरे पद t_3	चौथे पद t_4	. . .	n वे पद t_n	$n + 1$ वे पद t_{n+1}	. . .

सामान्यपणे; $t_1, t_2, t_3, \ldots$ या अंकगणिती श्रेढीतील पहिले पद a आणि साधारण फरक d असेल, तर

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1)\,d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$t_4 = t_3 + d = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

$t_n = a + (n - 1)\, d$ हे सूत्र मिळते.

आता या सूत्राचा उपयोग करून 5, 8, 11, 14, . . . या अंकगणिती श्रेढीचे 100 वे पद काढू. येथे $a = 5$ आणि $d = 3$ आहे.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore\ t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$$

$$= 5 + 99 \times 3$$

$$= 5 + 297$$

$$= 302$$

या अंकगणिती श्रेढीचे 100 वे पद 302 आहे.

आता 61 ही संख्या या श्रेढीत आहे का? याचे उत्तर मिळवण्यासाठी हेच सूत्र वापरू.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$$

जर 61 हे n वे पद म्हणजे t_n असेल, तर

$$61 = 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

$$\therefore\ 3n = 59$$

$$\therefore\ n = \frac{59}{3}$$

परंतु n ही नैसर्गिक संख्या नाही.

$\therefore$ 61 ही संख्या या श्रेढीत नाही.

विचार करूया.

कबीरची आई त्याच्या प्रत्येक वाढदिवसाला त्याच्या उंचीची नोंद करते. तो 1 वर्षाचा झाला तेव्हा त्याची उंची 70 सेमी होती. 2 वर्षांचा झाला तेव्हा तो 80 सेमी उंच होता, 3 वर्षांचा झाला तेव्हा त्याची उंची 90 सेमी झाली. त्याची मीरामावशी दहावीत शिकत होती. ती म्हणाली, 'कबीरची उंची दरवर्षी अंकगणित श्रेणीत वाढते असं दिसतं आहे.' ते गृहीत धरून तिने कबीर 15 वर्षांचा होऊन दहावीत गेला, की त्याची उंची किती असेल ते मोजले. तिला आश्चर्याचा धक्का बसला. तुम्हीही कबीरची उंची अंकगणिती श्रेणीत वाढते हे गृहीत धरून तो 15 वर्षांचा झाल्यावर त्याची उंची किती असेल ते शोधा.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) खालील अंकगणिती श्रेढीसाठी t_n काढा व त्यावरून त्या श्रेढीचे 30 वे पद काढा.

3, 8, 13, 18, . . .

उकल : दिलेली अंकगणिती श्रेढी 3, 8, 13, 18, . . .

येथे $t_1 = 3,\ t_2 = 8, t_3 = 13, t_4 = 18, \ldots$

$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5,\quad n = 30$

आपणांस माहीत आहे की $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore t_n = 3 + (n - 1) \times 5 \because a = 3,\ d = 5$

$\therefore t_n = 3 + 5n - 5$

$\therefore t_n = 5n - 2$

$\therefore$ 30 वे पद $= t_{30} = 5 \times 30 - 2$

$= 150 - 2 = 148$

उदा. (2) खालील अंकगणिती श्रेढीचे कितवे पद 560 आहे?

2, 11, 20, 29, . . .

उकल : दिलेली अंकगणिती श्रेढी 2, 11, 20, 29, . .

येथे $a = 2, d = 11 - 2 = 9$

या श्रेढीचे n वे पद 560 आहे. $t_n = 560$

$t_n = a + (n- 1)d$

$\therefore\ 560 = 2 + (n - 1) \times 9$

$= 2 + 9n - 9$

$\therefore\quad 9n = 567$

$\therefore\quad n = \frac{567}{9} = 63$

$\therefore$ दिलेल्या अंकगणिती श्रेढीचे 63 वे पद 560 आहे.

उदा. (3) दिलेली क्रमिका 5, 11, 17, 23, . . आहे. या क्रमिकेत 301 ही संख्या आहे का?

उकल : 5, 11, 17, 23, . . . या क्रमिकेत

$t_1 = 5,\ t_2 = 11, t_3 = 17, t_4 = 23, \ldots$

$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$

$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$

$\therefore$ ही क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे.

या श्रेढीचे पहिले पद $a = 5$ आणि $d = 6$

जर 301 हे n वे पद असेल, तर

$t_n = a + (n - 1)d = 301$

$\therefore\ 301 = 5 + (n - 1) \times 6$

$= 5 + 6n - 6$

$\therefore\ 6n = 301 + 1 = 302$

$\therefore\ n = \frac{302}{6}$, हा धन पूर्णांक नाही.

यावरून दिलेल्या क्रमिकेत 301 ही संख्या असणार नाही.

उदा. (4) 4 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्या किती असतील?

उकल : 4 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्यांची यादी 12, 16, 20, 24, . . . 96 ही आहे.

अशा संख्या किती आहेत ते काढू.

$t_n = 96, a = 12, d = 4,\ n = ?$

$\therefore$ सूत्रावरून,

$96 = 12 + (n - 1) \times 4$

$= 12 + 4n - 4$

$\therefore\ 4n = 88$

$\therefore\ n = 22$

$\therefore$ 4 ने भाग जाणाऱ्या दोन अंकी संख्या 22 आहेत.

उदा. (5) जर एका अंकगणिती श्रेढीचे 10 वे पद 25 आणि 18 वे पद 41 असेल तर त्या श्रेढीचे 38 वे पद शोधा. तसेच, n वे पद 99 असेल तर n ची किंमत काढा.

उकल : दिलेल्या अंकगणिती श्रेढीमध्ये $t_{10} = 25$ व $t_{18} = 41$ आहे.

आपल्याला माहीत आहे की, $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \quad t_{10} = a + (10 - 1)d$

$\therefore \quad 25 = a + 9d \quad .... \text{(I)}$

तसेच $t_{18} = a + (18 - 1)d$

$\therefore \quad 41 = a + 17d \quad .... \text{(II)}$

$25 = a + 9d$ .... (I) वरून.

$a = 25 - 9d.$

ही किंमत समीकरण II मध्ये ठेवू.

समीकरण (II) $\quad a + 17d = 41$ आहे.

$\therefore \quad 25 - 9d + 17d = 41$

$\therefore \quad 8d = 41 - 25 = 16$

$\therefore \quad d = 2$

$d = 2$ ही किंमत समीकरण I मध्ये ठेवून.

$a + 9d = 25$

$\therefore a + 9 \times 2 = 25$

$\therefore a + 18 = 25$

$\therefore a = 7$

आता, $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \quad t_{38} = 7 + (38 - 1) \times 2$

$= 7 + 37 \times 2$

$= 7 + 74$

$= 81$

n वे पद 99 असेल तर n ची किंमत काढायची आहे.

$t_n = a + (n - 1)d$

$99 = 7 + (n - 1) \times 2$

$99 = 7 + 2n - 2$

$99 = 5 + 2n$

$\therefore \quad 2n = 94$

$\therefore \quad n = 47$

$\therefore$ दिलेल्या श्रेढीचे 38 वे पद 81 आहे आणि 99 हे 47 वे पद आहे.

सरावसंच 3.2

1. खाली दिलेल्या अंकगणिती श्रेढीवरून चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

(1) 1, 8, 15, 22, . . .

येथे $a = \square$, $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$

$t_3 - t_2 = \square - \square = \square \quad \therefore d = \square$

(2) 3, 6, 9, 12, . . .

येथे $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square \qquad \therefore d = \square$

(3) −3, −8, −13, −18, . . .

येथे $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square \qquad \therefore a = \square, d = \square$

(4) 70, 60, 50, 40, . . .

येथे $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, . . .

$\therefore a = \square, d = \square$

2. खालील क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे का ते ठरवा; असेल तर त्या श्रेढीचे विसावे पद काढा.

−12, −5, 2, 9, 16, 23, 30, . . .

3. दिलेली अंकगणिती श्रेढी 12, 16, 20, 24, . . . आहे. या श्रेढीचे 24 वे पद काढा.

4. खालील अंकगणिती श्रेढीचे 19 वे पद काढा.

7, 13, 19, 25, . . .

5. खालील अंकगणिती श्रेढीचे 27 वे पद काढा.

9, 4, −1, −6, −11, . . .

6. तीन अंकी नैसर्गिक संख्यासमूहात 5 ने भाग जाणाऱ्या संख्या किती आहेत ते शोधा.

7. एका अंकगणिती श्रेढीचे 11 वे पद 16 आणि 21 वे पद 29 आहे, तर त्या श्रेढीचे 41 वे पद काढा.

8. 11, 8, 5, 2, . . . या अंकगणिती श्रेढीत −151 ही संख्या कितवे पद असेल?

9. 10 पासून 250 पर्यंतच्या नैसर्गिक संख्यांपैकी किती संख्या 4 ने विभाज्य आहेत?

10. एका अंकगणिती श्रेढीचे 17 वे पद 10 व्या पदापेक्षा 7 ने जास्त आहे तर, सामान्य फरक काढा.

चतुर शिक्षिका

एक होता राजा. त्याने यशवंतराजे व गीतादेवी या आपल्या मुलांना घोडेस्वारी शिकवण्यासाठी अनुक्रमे तारा व मीरा या शिक्षिकांची नेमणूक केली. त्या दोघींना वर्षभरासाठी किती पगार द्यावा याबद्दल विचारले.

तारा म्हणाली, ''मला पहिल्या महिन्याचा पगार 100 मोहरा द्यावा व नंतर पुढील प्रत्येक महिन्यात 100 मोहरांची वाढ द्यावी. मीरा म्हणाली, ''मला पहिल्या महिन्यात 10 मोहरा पगार द्यावा आणि नंतर पुढील प्रत्येक महिन्याला आधीच्या महिन्याच्या पगाराच्या दुप्पट पगार मिळावा.''

महाराजांनी ते मान्य केले. तीन महिन्यांनंतर यशवंतराजे आपल्या बहिणीला म्हणाले, ''माझी शिक्षिका तुझ्या शिक्षिकेपेक्षा जास्त हुशार वाटते, तिने जास्त पगार मागितला आहे.'' गीतादेवी म्हणाली, ''मला प्रथम तसेच वाटले. म्हणून मी मीराताईंना विचारलेसुद्धा, 'तुम्ही कमी पगार का मागितला?', तर हसून त्यांनी सांगितले की 'आठ महिन्यांनंतर गंमत दिसेल, तू पाहा.' मी आठव्या महिन्याचा पगार काढून पाहिला. तू सुद्धा काढून पाहा.''

महिने	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ताराचा पगार	100	200	300	400	500	600	700	800	900	-	-	-
मीराचा पगार	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	-	-	-

तुम्ही ही सारणी पूर्ण करा.

ताराचा पगार 100, 200, 300, 400, . . . ही अंकगणिती श्रेढी आहे. आले का लक्षात?

$t_1 = 100,\quad t_2 = 200,\ t_3 = 300, \ldots \qquad t_2 - t_1 = 100 = d$

हा सामान्य फरक 100 आहे.

मीराचा पगार 10, 20, 40, 80, . . . ही अंकगणिती श्रेढी नाही. कारण 20 – 10 = 10, 40 – 20 = 20, 80 – 40 = 40 म्हणजे क्रमवार संख्यांतील फरक स्थिर नाही.

मात्र या श्रेढीत प्रत्येक पद आधीच्या पदाच्या दुप्पट होत जाते.

येथे $\frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2,\quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2,\qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$

$\therefore\ \frac{t_{n+1}}{t_n}$, म्हणजेच पुढचे पद व आधीचे पद यांचे गुणोत्तर, समान आहे. या प्रकारच्या श्रेढीला भूमितीय श्रेढी म्हणतात. $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ गुणोत्तर 1 पेक्षा जास्त असेल, तर भूमितीय श्रेढी ही अंकगणिती श्रेढीपेक्षा वेगाने वाढत जाते हे अनुभवा.

जर हे गुणोत्तर 1 पेक्षा कमी असेल तर ती श्रेढी कशी बदलत जाते हे अनुभवा.

आपण यांपैकी फक्त अंकगणिती श्रेढीचा अभ्यास करणार आहोत. अंकगणिती श्रेढीतील n वे पद कसे काढायचे हे आपण पाहिले आहे. आता पहिल्या n पदांची बेरीज कशी काढायची हे आपण पाहणार आहोत.

झटकन बेरीज

तीनशे वर्षांपूर्वीची गोष्ट आहे. जर्मनीमध्ये ब्यूटनेर (Buttner) नावाच्या गुरुजींची एकशिक्षकी शाळा होती. त्या गुरुजींना जोहान मार्टिन बार्टेलस हा एकमात्र मदतनीस होता. त्याचे काम म्हणजे मुलांना मुळाक्षरे शिकवणे व त्यांना लेखण्या करून देणे. ब्यूटनेर मात्र अत्यंत कडक शिस्तीचे होते. ब्यूटनेर गुरुजींना एक काम पूर्ण करायचे होते. वर्गातील मुले दंगा करू नये म्हणून त्यांना कामात गुंतवायला हवे, यासाठी त्यांनी मुलांना आकडेमोड करायला सांगायचे असे ठरवले. त्यांनी मुलांना सांगितले, 1 ते 100 संख्या पाटीवर लिहा व त्यांची बेरीज करा. गुरुजींनी त्यांचे काम सुरू केले. मुलांनी संख्या लिहायला सुरुवात केली. पाचच मिनिटांत एक पाटी पालथी पडल्याचा आवाज आला. त्यांनी कार्ल गाऊसकडे पाहिले आणि विचारले, ''हे काय? मी तुला 1 ते 100 संख्या लिहायला सांगून त्यांची बेरीजही करायला सांगितली आहे, पाटी पालथी का टाकलीस? तुला काहीच करायचे नाही का?''

कार्ल गाऊस म्हणाला, ''मी बेरीज केली आहे.''

गुरुजी म्हणाले, ''काय? इतक्या झटकन बेरीज झालीच कशी? संख्याही लिहिल्या नसतील. उत्तर किती आले?

कार्ल गाऊस म्हणाला, ''पाच हजार पन्नास.''

गुरुजी आश्चर्यचकित झाले व म्हणाले, ''कसं काढलं उत्तर?''

कार्ल गाऊसची झटकन बेरीज करण्याची पद्धती:

सलग क्रमाने संख्या	1 +	2 +	3 +	4 +	. . . .	100 +
उलट क्रमाने संख्या	100	99	98	97	. . . .	1
बेरीज	101	101	101	101		101

प्रत्येक जोडीतील संख्यांची बेरीज 101 येते. ही बेरीज 100 वेळा आली म्हणून 100×101 हा गुणाकार केला. तो 10100 आला. येथे 1 ते 100 संख्या दोनदा विचारात घेतल्या. म्हणून 10100 च्या निम्मे केले. ते 5050 आले. म्हणून 1, 2, 3, . . . , 100 या संख्यांची बेरीज 5050 आहे. गुरुजींनी त्याला शाबासकी दिली.

आता गाऊस यांची बेरीज करण्याची क्लृप्ती वापरून अंकगणिती श्रेढीच्या n पदांची बेरीज काढण्याचे सूत्र मिळवू.

जोहान फ्रेडरिच कार्ल गाऊस

30 एप्रिल 1777 – 23 फेब्रुवारी 1855.

कार्ल गाऊस हे थोर जर्मन गणितज्ञ होते. त्यांचा जन्म ब्रॉडन स्वाईक येथे एका अशिक्षित कुटुंबात झाला. ब्यूटनेर यांच्या शाळेत त्याने आपल्या बुद्धीची चुणूक दाखवली. त्यानंतर ब्यूटनेर यांचा मदतनीस जोहान मार्टिन बार्टेलस यांची गाऊसशी मैत्री झाली. दोघांनी मिळून बीजगणितावर एक पुस्तक प्रसिद्ध केले. बार्टेलसने गाऊसची असामान्य बुद्धी अनेकांच्या नजरेला आणून दिली.

जाणून घेऊया.

अंकगणिती श्रेढीतील पहिल्या n पदांची बेरीज (Sum of first n terms of an A. P.)

अंकगणिती श्रेढी $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots a+(n-1)d$

या श्रेढीत a हे पहिले पद आहे आणि d हा सामान्य फरक आहे. या श्रेढीतील पहिल्या n पदांची बेरीज S_n ने दाखवू.

$$S_n = [a] + [a+d] + \ldots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

ही पदे उलट क्रमाने मांडून,

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ldots + [a+d] + [a]$$

बेरीज करून,

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \ldots + [a+(n-2)d+a+d] + [a+(n-1)d+a]$$

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \ldots + [2a+(n-1)d] \ldots n \text{ वेळा.}$$

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d] \quad \text{किंवा} \quad S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

उदाहरणार्थ, 14, 16, 18, . . . या अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या 100 पदांची बेरीज काढू.

येथे $a = 14$, $d = 2$, $n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore S_{100} = \frac{100}{2}\,[2 \times 14 + (100-1) \times 2]$$

$$= 50\,[28 + 198]$$

$$= 50 \times 226 = 11{,}300$$

$\therefore$ दिलेल्या श्रेढीच्या पहिल्या 100 पदांची बेरीज 11,300

हे लक्षात ठेवूया.

दिलेल्या अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद a आणि सामान्य फरक d असेल, तर

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या n पदांच्या बेरजेचे अजून एक सूत्र मिळवू.

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots [a+(n-1)d]$ या अंकगणिती श्रेढीतील

पहिले पद = $t_1 = a$ आहे आणि n वे पद $[a+(n-1)d]$ आहे.

आता $S_n = \frac{n}{2}[\underline{a}+\underline{a+(n-1)d}]$

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n] = \frac{n}{2}$ [पहिले पद + शेवटचे पद]

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) पहिल्या n नैसर्गिक संख्यांची बेरीज करा.

उकल : पहिल्या n नैसर्गिक संख्या $1, 2, 3, \ldots, n$.

येथे $a = 1$, $d = 1$, n वे पद = n

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_n = \frac{n}{2}$ [पहिले पद + शेवटचे पद]

$= \frac{n}{2}[1+n] \quad = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ पहिल्या n नैसर्गिक संख्यांची बेरीज $\frac{n(n+1)}{2}$ असते.

उदा. (2) पहिल्या n सम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज करा.

उकल : पहिल्या n सम नैसर्गिक संख्या $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$.

t_1 = पहिले पद = 2 , t_n = शेवटचे पद = $2n$

रीत I

$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$= \frac{n}{2}[2+2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2(1+n)$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

रीत II

$S_n = 2 + 4 + 6 \ldots + 2n$

$= 2(1+2+3+\ldots+n)$

$= \frac{2[n(n+1)]}{2}$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

रीत III

$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2 \times 2+(n-1)2]$

$= \frac{n}{2}[4+2n-2]$

$= \frac{n}{2}[2+2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2(1+n)$

$= n(1+n) = n(n+1)$

$\therefore$ पहिल्या n सम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज $n(n+1)$ असते.

उदा. (3) पहिल्या n विषम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज काढा.

उकल : पहिल्या n विषम नैसर्गिक संख्या.

$1, 3, 5, 7, \ldots, (2n-1)$.

$a = t_1 = 1$ आणि $t_n = (2n-1)$, $d = 2$

रीत I

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n] = \frac{n}{2}[1 + (2n-1)] = \frac{n}{2}[1 + 2n - 1] = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

रीत II

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2] = \frac{n}{2}[2 + 2n - 2] = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

रीत III

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$$
$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$$
$$= n^2$$

$\therefore$ पहिल्या n विषम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज n^2 असते.

उदा. (4) 1 पासून 150 पर्यंतच्या सर्व विषम संख्यांची बेरीज करा.

उकल : 1 पासून 150 पर्यंतच्या सर्व विषम संख्या $1, 3, 5, 7, \ldots, 149$.

ही अंकगणिती श्रेढी आहे.

येथे $a = 1$ आणि $d = 2$, प्रथम 1 ते 150 पर्यंत विषम संख्या किती ते काढू. म्हणजे n ची किंमत काढू.

$t_n = a + (n-1)d$

$149 = 1 + (n-1)2$ $\quad\quad \therefore 149 = 1 + 2n - 2$

$\therefore n = 75$

आता $1 + 3 + 5 + \ldots + 149$ या 75 संख्यांची बेरीज करू.

$a = 1$ आणि $d = 2$, $n = 75$

रीत I $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$S_n = \boxed{}$

$S_n = \boxed{} \times \boxed{}$

$S_n = \boxed{}$

रीत II $S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$S_n = \frac{75}{2}[1 + 149]$

$S_n = \boxed{} \times \boxed{}$

$S_n = \boxed{}$

सरावसंच 3.3

1. एका अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद 6 व सामान्य फरक 3 आहे तर S_{27} काढा.

$a = 6,\ d = 3,\ S_{27} = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[\square + (n-1)\,d]$$

$$S_{27} = \frac{27}{2}\,[12 + (27-1)\,\square]$$

$$= \frac{27}{2} \times \square$$

$$= 27 \times 45 \quad = \square$$

2. पहिल्या 123 सम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज काढा.

3. 1 व 350 यांमधील सर्व सम संख्यांची बेरीज काढा.

4. एका अंकगणिती श्रेढीचे 19 वे पद 52 आणि 38 वे पद 128 आहे, तर तिच्या पहिल्या 56 पदांची बेरीज काढा.

5. 1 व 140 यांच्या दरम्यान, 4 ने भाग जाणाऱ्या नैसर्गिक संख्यांची बेरीज किती आहे, हे काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

1 व 140 च्या दरम्यान असलेल्या 4 ने भाग जाणाऱ्या संख्या

$\downarrow$

4, 8, ... , 136

$\downarrow$

या एकूण किती संख्या? $\therefore\ n = \square$

$\downarrow$

$a = \square,\ d = \square,\ t_n = \square$

$\downarrow$

$t_n = a + (n-1)d$

$\downarrow$

$136 = \square + (n-1) \times \square$

$\rightarrow n = \square \rightarrow S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)d]$

$S_{\square} = \frac{\square}{2}\,[\qquad\qquad] \quad = \square$

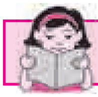
1 व 140 यांच्या दरम्यानच्या 4 ने भाग जाणाऱ्या संख्यांची बेरीज = $\square$

6.★ एका अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या 55 पदांची बेरीज 3300 आहे, तर तिचे 28 वे पद काढा.

7*. एका अंकगणिती श्रेढीतील तीन क्रमागत पदांची बेरीज 27 व त्यांचा गुणाकार 504 आहे, तर ती पदे शोधा.
(तीन क्रमागत पदे $a - d$, a, $a + d$ माना.)

8*. एका अंकगणिती श्रेढीतील चार क्रमागत पदांची बेरीज 12 आहे. तसेच त्या चार क्रमागत पदांपैकी तिसऱ्या व चौथ्या पदांची बेरीज 14 आहे, तर ती चार पदे काढा.
(चार क्रमागत पदे $a - d$, a, $a + d$, $a + 2d$ माना.)

9*. एका अंकगणिती श्रेढीचे नववे पद शून्य आहे, तर 29 वे पद हे 19 व्या पदाच्या दुप्पट आहे हे दाखवा.



जाणून घेऊया.

अंकगणिती श्रेढीचे उपयोजन (Applications of A. P.)

उदा. (1) मिक्सर तयार करणाऱ्या एका कंपनीने तिसऱ्या वर्षी 600 मिक्सर तयार केले आणि सातव्या वर्षी 700 मिक्सर तयार केले. दरवर्षी तयार होणाऱ्या मिक्सरच्या संख्येतील वाढ ठरावीक असेल तर पुढील संख्या काढा. (i) पहिल्या वर्षीचे उत्पादन (ii) 10 व्या वर्षीचे उत्पादन (iii) पहिल्या सात वर्षांतील एकूण उत्पादन.

उकल : कंपनी तयार करत असलेल्या मिक्सरची संख्येतील वाढ दरवर्षी ठरावीक असते.
यावरून लागोपाठच्या वर्षातील उत्पादन या संख्या अंकगणिती श्रेढीत आहेत. कंपनीने

(i) n व्या वर्षात t_n मिक्सर तयार केले आहेत असे मानू. दिलेल्या माहितीवरून,

$t_3 = 600$, $t_7 = 700$

आपल्याला माहीत आहे की $t_n = a+(n-1)d$

$t_3 = a+(3-1)d$

$= 600 = a+2d$ .... (I)

$t_7 = a+(7-1)d$

$= a+6d = 700$ .... (II)

$a+2d = 600$ $\therefore$ $a = 600 - 2d$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवून,

$600 - 2d + 6d = 700$

$4d = 100$ $\therefore$ $d = 25$

$a+2d = 600$ $\therefore$ $a + 2 \times 25 = 600$

$a + 50 = 600$ $\therefore$ $a = 550$

$\therefore$ पहिल्या वर्षातील उत्पादन 550 मिक्सर होते.

(ii) $t_n = a+(n-1)d$

$t_{10} = 550+(10-1) \times 25$

$= 550 + 225 = 775$

$\therefore$ 10 व्या वर्षातील उत्पादन 775 मिक्सर होते.

(iii) पहिल्या 7 वर्षांतील उत्पादन काढण्यासाठी S_n चे सूत्र वापरू.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore S_7 = \frac{7}{2}[1100 + 150] = \frac{7}{2}[1250] = 7 \times 625 = 4375$$

$\therefore$ पहिल्या 7 वर्षांत 4375 मिक्सरचे उत्पादन केले.

उदा. (2) उसने घेतलेल्या 3,25,000 रुपयांची फेड करण्यासाठी अजय शर्मा पहिल्या महिन्यात 30500 रुपये भरतात. त्यानंतर त्यांना दरमहा आधीच्या महिन्यात भरलेल्या रकमेपेक्षा 1500 रुपये कमी भरावे लागतात. तर उसने घेतलेल्या रकमेची फेड पूर्ण होण्यासाठी त्यांना किती महिने लागतील?

उकल : उसने पैसे पूर्ण फेडण्यासाठी n महिने लागतील असे मानू. 30,500 मधून दरमहा रु. 1500 कमी द्यायचे आहेत.

$\therefore$ 30,500; 30,500 − 1500; 30,500 − 2 × 1500, . . . ही देय रकमांची क्रमिका अंकगणिती श्रेढी आहे.

पहिले पद = a = 30500, d = −1500 उसनी घेतलेली रक्कम = S_n = 3,25,000

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$3{,}25{,}000 = \frac{n}{2}[2 \times 30500+(n-1)\times(-1500)]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$3{,}25{,}000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$\therefore 750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$\therefore 3n^2 - 125n + 1300 = 0$ . . . . . (दोन्ही बाजूंना 250 ने भागू.)

$$\therefore 3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$\therefore 3n(n-20) - 65(n-20) = 0$$

$$\therefore (n - 20)(3n - 65) = 0$$

$\therefore n - 20 = 0$, किंवा $3n - 65 = 0$

$n = 20$ किंवा $n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

n हा अंकगणिती श्रेढीतील पदाचा क्रमांक असल्याने n ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$\therefore n \neq \frac{65}{3}$ $\therefore n = 20$

(किंवा, 20 महिन्यांनंतर S_{20} = 3,25,000 म्हणून तेव्हा सर्व उसनी रक्कम फेडली जाईल. नंतरच्या काळाचा विचार करण्याची गरज नाही.)

$\therefore$ उसने घेतलेल्या रकमेची फेड पूर्ण होण्यासाठी त्यांना 20 महिने लागतील.

उदा. (3) अन्वर दर महिन्याला ठरावीक रकमेची बचत करतो. पहिल्या महिन्यात तो 200 रु. बचत करतो. दुसऱ्या महिन्यात 250 रु. बचत करतो. तिसऱ्या महिन्यात 300 रु. बचत करतो. तर 1000 रुपये बचत कितव्या महिन्यात होईल? त्या महिन्यात त्याची एकूण किती बचत झाली असेल?

उकल : पहिल्या महिन्यातील बचत 200 रु. ; दुसऱ्या महिन्यातील बचत 250 रु.; . . .

याप्रमाणे दरमहा होणारी बचत 200, 250, 300, . . . ही अंकगणिती श्रेढी आहे.

येथे $a = 200$, $d = 50$, t_n चे सूत्र वापरून प्रथम n काढू व त्यावरून S_n काढू.

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 200 + (n-1)50$$
$$= 200 + 50n - 50$$
$$\therefore\ 1000 = 150 + 50n$$
$$150 + 50n = 1000$$
$$50n = 1000 - 150$$
$$50n = 850$$
$$\therefore\ n = 17$$

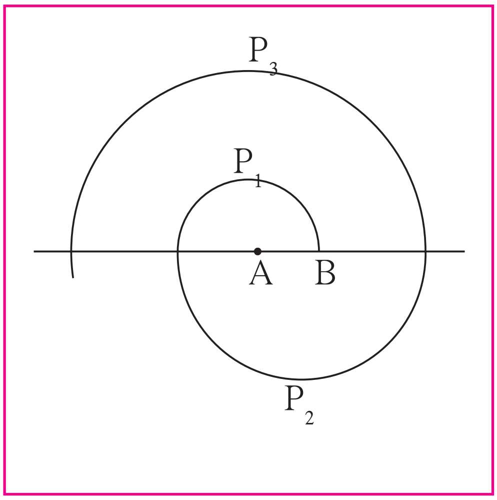
1000 रु. बचत 17 व्या महिन्यात होईल.

17 महिन्यांत एकूण बचत किती ते शोधू.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{17}{2}[2 \times 200+(17-1) \times 50]$$
$$= \frac{17}{2}[400 + 800]$$
$$= \frac{17}{2}[1200]$$
$$= 17 \times 600$$
$$= 10200$$

17 महिन्यांत एकूण बचत 10,200 रु.

उदा. (4) आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एका रेषेवर A केंद्रबिंदू घेऊन 0.5 सेमी त्रिज्येचे P_1 हे अर्धवर्तुळ काढले. ते ह्या रेषेला B बिंदूत छेदते. आता B केंद्रबिंदू घेऊन 1 सेमी त्रिज्येचे P_2 हे अर्धवर्तुळ रेषेच्या दुसऱ्या बाजूला काढले.



आता पुन्हा A केंद्र घेऊन 1.5 सेमी त्रिज्येचे अर्धवर्तुळ P_3 काढले. अशा प्रकारे A आणि B केंद्र घेऊन अनुक्रमे 0.5 सेमी, 1 सेमी, 1.5 सेमी, 2 सेमी, अशा त्रिज्यांची अर्धवर्तुळे काढल्यामुळे एक वलयाकार आकृती तयार होते, तर अशा प्रकारे 13 अर्धवर्तुळांनी तयार झालेल्या वक्रांची एकूण लांबी किती असेल? ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

उकल : A, B, A, B, . . . या क्रमाने केंद्र घेऊन काढलेले अर्धपरिघ अनुक्रमे $P_1, P_2, P_3, \ldots$ मानू. पहिल्या अर्धवर्तुळाची त्रिज्या 0.5 सेमी आहे. दुसऱ्या अर्धवर्तुळाची त्रिज्या 1.0 सेमी आहे, . . . याप्रमाणे माहिती दिली आहे. यावरून $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{13}$ काढू.

पहिल्या अर्धपरिघाची लांबी $= P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$$

$P_1, P_2, P_3, \ldots$ हे अर्धपरिघ, म्हणजे $\frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ या संख्या अंकगणिती श्रेढीत आहेत.

येथे $a = \frac{1}{2}\pi, d = \frac{1}{2}\pi$, यावरून S_{13} काढू.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7\pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

$$= 143 \text{ सेमी.}$$

$\therefore$ 13 अर्धवर्तुळांनी तयार झालेल्या वक्राची एकूण लांबी 143 सेमी. असेल.

उदा. (5) एका गावात 2010 साली 4000 लोक साक्षर होते. ही संख्या दरवर्षी 400 ने वाढते. तर 2020 साली किती लोक साक्षर असतील ?

उकल :

वर्ष	2010	2011	2012	...	2020
साक्षर लोक	4000	4400	4800	...	$\boxed{}$

$a = 4000, \quad d = 400 \quad n = 11$

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 4000 + (11-1)400$$
$$= 4000 + 4000$$
$$= 8000$$

2020 साली 8000 लोक साक्षर असतील.

उदा. (6) श्रीमती शेख यांना 2015 साली वार्षिक पगार 1,80,000 रु. मिळेल अशी नोकरी मिळाली. ऑफिसने त्यांना दरवर्षी 10,000 रुपये वाढ द्यायचे कबूल केले. तर कितव्या वर्षी त्यांचा वार्षिक पगार 2,50,000 रुपये होईल ?

उकल :

वर्ष	पहिले वर्ष (2015)	दुसरे वर्ष (2016)	तिसरे वर्ष (2017)	...
पगार रुपये	[1,80,000]	[1,80,000 + 10,000]		...

$a = 1,80,000, \qquad d = 10,000 \qquad n = ? \qquad t_n = 2,50,000$ रुपये.

$t_n = a+(n-1)d$

$2,50,000 = 1,80,000 + (n-1) \times 10,000$

$(n-1) \times 10000 = 70,000$

$n-1 = 7$

$n = 8$

$\therefore$ 8 व्या वर्षी त्यांचा वार्षिक पगार 2,50,000 रुपये होईल.

सरावसंच 3.4

1. सानिकाने 1 जाने. 2016 ला ठरवले की त्या दिवशी ₹ 10, दुसऱ्या दिवशी ₹ 11 तिसऱ्या दिवशी ₹ 12 अशा प्रकारे बचत करत रहायचे. तर 31 डिसेंबर 2016 पर्यंत तिची एकूण बचत किती झाली?

2. एका गृहस्थाने 8000 रुपये कर्जाऊ घेतले आणि त्यावर 1360 रुपये व्याज देण्याचे कबूल केले. प्रत्येक हप्ता आधीच्या हप्त्यापेक्षा 40 रुपये कमी देऊन सर्व रक्कम 12 मासिक हप्त्यांत भरली, तर त्याने दिलेला पहिला व शेवटचा हप्ता किती होता?

3. सचिनने राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्रांमध्ये पहिल्या वर्षी 5000 रुपये , दुसऱ्या वर्षी 7000 रुपये, तिसऱ्या वर्षी 9000 रुपये याप्रमाणे रक्कम गुंतवली, तर त्याची 12 वर्षांतील एकूण गुंतवणूक किती?

4. एका नाट्यगृहात खुर्च्यांच्या एकूण 27 रांगा आहेत. पहिल्या रांगेत 20 खुर्च्या आहेत, दुसऱ्या रांगेत 22 खुर्च्या तिसऱ्या रांगेत 24 खुर्च्या याप्रमाणे सर्व खुर्च्यांची मांडणी आहे. तर 15 व्या रांगेत एकूण किती खुर्च्या असतील आणि नाट्यगृहात एकूण किती खुर्च्या असतील?

5. कारगिल येथे एका आठवड्यातील सोमवार ते शनिवार या दिवसांच्या तापमानांची नोंद केली. त्या नोंदी अंकगणिती श्रेढीत आहेत असे आढळले. सोमवार व शनिवारच्या तापमानांची बेरीज मंगळवार व शनिवारच्या तापमानांच्या बेरजेपेक्षा 5° सेल्सियसने जास्त आहे. जर बुधवारचे तापमान -30° सेल्सियस असेल तर प्रत्येक दिवसाचे तापमान काढा.

6. जागतिक पर्यावरण दिनानिमित्त त्रिकोणाकृती भूखंडावर वृक्षारोपणाचा कार्यक्रम आयोजित करण्यात आला. पहिल्या ओळीत एक झाड दुसऱ्या ओळीत दोन झाडे, तिसऱ्या ओळीत तीन याप्रमाणे 25 ओळींत झाडे लावली, तर एकूण किती झाडे लावली?

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. खाली दिलेल्या उपप्रश्नांची पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(1) $-10, -6, -2, 2, \ldots$ ही क्रमिका ....

(A) अंकगणिती श्रेढी आहे, कारण $d = -16$ (B) अंकगणिती श्रेढी आहे कारण $d = 4$

(C) अंकगणिती श्रेढी आहे, कारण $d = -4$ (D) अंकगणिती श्रेढी नाही.

(2) ज्याचे पहिले पद -2 आहे आणि सामान्य फरक ही -2 आहे अशा अंकगणिती श्रेढीतील पहिली चार पदे ..... आहेत.

(A) $-2, 0, 2, 4$ (B) $-2, 4, -8, 16$

(C) $-2, -4, -6, -8$ (D) $-2, -4, -8, -16$

(3) पहिल्या 30 नैसर्गिक संख्यांची बेरीज खालीलपैकी कोणती?

(A) 464 (B) 465 (C) 462 (D) 461

(4) दिलेल्या अंकगणिती श्रेढीचे $t_7 = 4$, $d = -4$ तर $a = . . .$

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) एका अंकगणिती श्रेढीसाठी $a = 3.5$, $d = 0$, तर $t_n = . . .$

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) एका अंकगणिती श्रेढीची पहिली दोन पदे -3, 4 आहेत. तर 21 वे पद . . . आहे.

(A) -143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) जर एका अंकगणिती श्रेढीसाठी $d = 5$ तर $t_{18} - t_{13} = . . .$

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 च्या पहिल्या पाच पटींची बेरीज . . . आहे.

(A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) 15, 10, 5, . . . या अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या 10 पदांची बेरीज . . . आहे.

(A) -75 (B) -125 (C) 75 (D) 125

(10) एका अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद 1 असून n वे पद 20 आहे. जर $S_n = 399$ आहे, तर $n = . . .$

(A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. $-11, -8, -5, . . . , 49$ या अंकगणिती श्रेढीचे शेवटून चौथे पद काढा.

3. एका अंकगणिती श्रेढीचे 10 वे पद 46 आहे. 5 व्या व 7 व्या पदांची बेरीज 52 आहे. तर ती श्रेढी काढा.

4. ज्या अंकगणिती श्रेढीचे 4 थे पद -15, 9 वे पद -30 आहे, त्या श्रेढीतील पहिल्या 10 पदांची बेरीज काढा.

5. दोन अंकगणिती श्रेढी 9, 7, 5, . . . आणि 24, 21, 18, ... अशा दिल्या आहेत. जर या दोन अंकगणिती श्रेढीचे n वे पद समान असेल तर n ची किंमत काढा आणि ते n वे पद काढा.

6. जर एका अंकगणिती श्रेढीच्या तिसऱ्या व आठव्या पदांची बेरीज 7 असेल आणि सातव्या व 14 व्या पदांची बेरीज -3 असेल तर 10 वे पद काढा.

7. एका अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद -5 आणि शेवटचे पद 45 आहे. जर त्या सर्व पदांची बेरीज 120 असेल तर ती किती पदे असतील आणि त्यांचा सामाईक फरक किती असेल ?

8. 1 ते n नैसर्गिक संख्यांची बेरीज 36 आहे. तर n ची किंमत काढा.

9. 207 या संख्येचे तीन भाग असे करा की त्या संख्या अंकगणिती श्रेढीत असतील व लहान दोन भागांचा गुणाकार 4623 असेल.

10. एका अंकगणिती श्रेढीत 37 पदे आहेत. सर्वांत मध्यावर असलेल्या तीन पदांची बेरीज 225 आहे आणि शेवटच्या तीन पदांची बेरीज 429 आहे तर अंकगणिती श्रेढी लिहा.

11.★ ज्या अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद a आहे. दुसरे पद b आहे आणि शेवटचे पद c आहे. तर त्या श्रेढीतील सर्व पदांची बेरीज $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ एवढी आहे हे दाखवा.

12.★ जर अंकगणिती श्रेढीतील पहिल्या p पदांची बेरीज ही पहिल्या q पदांच्या बेरजेबरोबर असेल तर त्यांच्या पहिल्या (p + q) पदांची बेरीज शून्य असते हे दाखवा. $(p \neq q)$

13.★ अंकगणिती श्रेढीच्या m व्या पदाची m पट ही n व्या पदाच्या n पटीबरोबर असेल तर त्याचे $(m + n)$ वे पद शून्य असते हे दाखवा. $(m \neq n)$

14. 1000 रुपयांची रक्कम 10% सरळव्याज दराने गुंतवली, तर प्रत्येक वर्षाच्या शेवटी मिळणाऱ्या व्याजाची रक्कम अंकगणितीय श्रेढी होईल का हे तपासा. ती अंकगणितीय श्रेढी होत असेल तर 20 वर्षांनंतर मिळणाऱ्या व्याजाची रक्कम काढा. त्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

$$\text{सरळव्याज} = \frac{P \times R \times N}{100}$$

$$1 \text{ वर्षानंतर मिळणारे सरळव्याज} = \frac{1000 \times 10 \times 1}{100} = \square$$

$$2 \text{ वर्षांनंतर मिळणारे सरळव्याज} = \frac{1000 \times 10 \times 2}{100} = \square$$

$$3 \text{ वर्षांनंतर मिळणारे सरळव्याज} = \frac{\square \times \square \times \square}{100} = 300$$

अशा प्रकारे 4, 5, 6 वर्षांनंतर मिळणारे व्याज अनुक्रमे 400, $\square$, $\square$ असेल.

या संख्येवरून $d = \square$, आणि $a = \square$

20 वर्षांनंतर मिळणारे सरळव्याज,

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$t_{20} = \square + (20-1)\square$$

$$t_{20} = \square$$

20 वर्षांनंतर मिळणारे एकूण व्याज = $\square$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4 अर्थनियोजन

चला, शिकूया.

- जीएसटी ओळख
- जीएसटी गणन व इनपुट टॅक्स क्रेडीट
- कर बीजक (टॅक्स इन्व्हॉइस)
- शेअर्स, म्युच्युअल फंड व SIP

चला, चर्चा करूया.

शिक्षिका : विद्यार्थी मित्रांनो, आपल्या देशात व्यापारासाठी कोणती करप्रणाली चालू आहे?

आयुष : आपल्या देशात 'जीएसटी' म्हणजे वस्तू व सेवा कर ही करप्रणाली चालू आहे.

शिक्षिका : छान! त्याबद्दल तुम्हांला काय काय माहीत आहे?

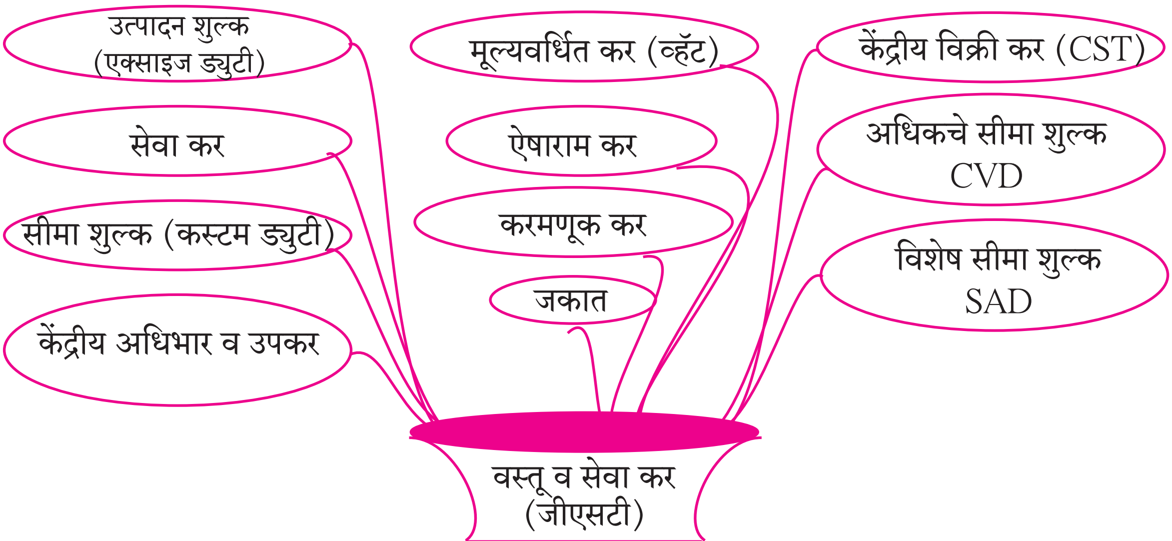
अयान : GST म्हणजे **G**oods and **S**ervice **T**ax.

आयशा : संपूर्ण देशात एकच करप्रणाली अमलात आली आहे.

शिक्षिका : बरोबर. पूर्वी विविध राज्यांत वेगवेगळे कर वेगवेगळ्या वेळी द्यावे लागत होते. पूर्वीच्या करांपैकी कोणते कर वस्तू व सेवा करामध्ये अंतर्भूत करण्यात आले आहेत, ते खालील चित्र पाहून सांगा.

शफीक : उत्पादन शुल्क, सीमा शुल्क, व्हॅट, करमणूक कर, केंद्रीय विक्री कर, सेवा कर, जकात इत्यादी.

शिक्षिका : हे सर्व कर रद्द करून आता फक्त वस्तू व सेवा हा एकच कर वस्तू व सेवांच्या खरेदी-विक्रीवर आकारला जातो. म्हणून म्हणतात 'एक देश, एक कर, एक बाजार'. ही करप्रणाली 1 जुलै 2017 पासून अमलात आली.



जाणून घेऊया.

करबीजक (Tax Invoice)

वस्तू खरेदीचा टॅक्स इन्व्हॉईस (नमुना)

SUPPLIER : A to Z SWEET MART GSTIN :27ABCDE1234H1Z5
143, Shivaji Rasta, Mumbai : 400001 Maharashtra
Mob. No. 92636 92111 email : atoz@gmail.com
Invoice No. GST/110 Invoice Date: 31-Jul-2017

S. No.	HSN code	Name of Product	Rate	Quantity	Taxable Amount	CGST		SGST		Total
						Rate	Tax	Rate	Tax	Rs.
1	210690	पेढे	रु.400 प्र. कि.	500 ग्रॅम	200.00	2.5%	5.00	2.5%	5.00	210.00
2	210691	चॉकलेट	रु. 80	1 बार	80.00	14%	11.20	14%	11.20	102.40
3	2105	आइस्क्रीम	रु.200	1 पॅक (500 ग्रॅम)	200.00	9%	18.00	9%	18.00	236.00
4	1905	ब्रेड	रु. 35	1 पॅक	35.00	0%	0.00	0%	0.00	35.00
5	210690	लोणी	रु.500 प्र. कि.	250 ग्रॅम	125.00	6%	7.50	6%	7.50	140.00
						एकूण रुपये	41.70		41.70	723.40

वेद : आम्हांला या बिलात काही नवे शब्द दिसतात. त्यांचे अर्थ सांगा.

शिक्षिका : **CGST** आणि **SGST** हे GST चे दोन भाग आहेत. **CGST** म्हणजे (Central Goods and Services Tax) म्हणजे **केंद्रीय वस्तू व सेवा कर,** हा केंद्र सरकारकडे जमा होतो. **SGST** म्हणजे (State Goods & Services Tax) **राज्य वस्तू व सेवा कर.** हा राज्य सरकारकडे जमा होतो.

रिया : वरच्या उजव्या कोपऱ्यात अंक व अक्षरांची खूप मोठी रांग दिसते ते काय आहे?

शिक्षिका : हा जीएस्‌टिन म्हणजे व्यापाऱ्याचा ओळख क्रमांक आहे. (GSTIN - GST Identification Number). ज्या व्यापाऱ्यांची मागील आर्थिक वर्षातील उलाढाल 20 लाख रुपयांपेक्षा जास्त असते, त्यांना हा क्रमांक घेणे बंधनकारक असते. PAN मध्ये जशी 10 अंकाक्षरे असतात, तशी प्रत्येक व्यापाऱ्याला दिलेल्या GSTIN मध्ये 15 अंकाक्षरे असतात. या 15 अंकांमध्येच त्या व्यापाऱ्याचा 10 अंकाक्षरांचा PAN समाविष्ट असतो.

उदाहरणार्थ, 27 A B C D E 1 2 3 4 H 1 Z 5 (शेवटी अंक किंवा अक्षर यांपैकी एक असते.)

10 अंकाक्षरी PAN

एका नोंदणीसाठी 1 अंक

सर्वांसाठी समान (बाय डीफॉल्ट)

राज्याचा 2 अंकी संकेतांक

चेक सम डिजिट

(चेक सम डिजिट म्हणजे GST च्या वेबसाइटवर GSTIN टाकला, की हा नंबर वैध आहे की नाही, हे समजते.)

'27' हा महाराष्ट्राचा राज्य संकेतांक (State Code) आहे. 27 या संकेतांकावरून या व्यापाऱ्याची नोंदणी महाराष्ट्रात झाली आहे, हे समजते.

जेनी : बीजकात HSN कोड हा शब्द देखील आहे.

शिक्षिका: HSN कोड म्हणजे त्या वस्तूचा वर्गीकरणातील विशिष्ट क्रमांक असतो. कर बीजकामध्ये त्याचा अंतर्भाव करायला हवा असतो. HSN म्हणजे **H**armonized **S**ystem of **N**omenclature.

जोसेफ : कर बीजकात दुकानाचे नाव, पत्ता, तारीख, बीजक क्रमांक, मोबाइल नंबर व इ-मेल आयडीसुद्धा आहे.

शिक्षिका : आता या बीजकात वस्तू व सेवाकराची आकारणी कशी केली आहे ते पाहू. त्यासाठी पुढील वाक्यांतील रिकाम्या चौकटी भरा. बीजकात पेढ्यांचा भाव 400 रु. प्रतिकिलो आहे. अर्धा किलोग्रॅम पेढे घेतले आहेत. म्हणून त्याची किंमत 200 रु. आहे.

- ✦ पेढ्यावर केंद्राचा कर 2.5% दराने ☐ रुपये, तसेच राज्याच्या कर ☐ दराने 5 रुपये.
- ✦ यावरून, पेढ्यांवरील वस्तू-सेवा कराचा दर 2.5%+2.5% = 5% व एकूण कर 10 रुपये.
- ✦ याप्रमाणे चॉकलेटवर वस्तू-सेवा कराचा एकूण दर ☐ % म्हणून त्यावरील एकूण कर ☐ रुपये.
- ✦ आइस्क्रीमवर वस्तू सेवा कराचा एकूण दर ☐ % आहे. म्हणून आइस्क्रीमची किंमत ☐ रुपये.
- ✦ लोण्यावर केंद्राचा दर ☐ % व राज्याचा दर ☐ % मिळून वस्तू-सेवा कराचा दर ☐ % आहे.

आदित्य : ब्रेडवर कराचा दर 0% आहे. तसेच प्रत्येक वस्तूवर केंद्र व राज्याचा कर दर समान आहे.

निनाद : वस्तूंप्रमाणे करांचे दर वेगवेगळे आहेत, जसे 0%, 5%, 12%, 18% व 28%.

शिक्षिका : प्रत्येक वस्तूवरील कराचा दर शासन निश्चित करते. आता एका सेवा बीजकाचाही नमुना पाहू. दिलेल्या माहितीवरून रिकाम्या जागा भरून सेवाबीजक पूर्ण करा.

<table>
<tr><th colspan="9">सेवा पुरवल्याचा टॅक्स इन्व्हॉइस (नमुना)</th></tr>
<tr><td colspan="9">आहार सोनेरी, खेड शिवापूर, पुणे   Invoice No. 58
Mob. No. 7588580000 email - ahar.khed@yahoo.com
GSTIN : 27 AAAAA5555B1ZA   Invoice Date : 25-Dec-2017</td></tr>
<tr><td>S A Code (SAC)</td><td>Food items</td><td>Qty</td><td>Rate (in Rs.)</td><td>Taxable amount</td><td colspan="2">CGST</td><td colspan="2">SGST</td></tr>
<tr><td>9963</td><td>Coffee</td><td>1</td><td>20</td><td>20.00</td><td>2.5%</td><td>0.50 रु.</td><td>2.5%</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>9963</td><td>Masala Tea</td><td>1</td><td>10</td><td>10.00</td><td>. . . .</td><td>. . .</td><td>2.5%</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>9963</td><td>Masala Dosa</td><td>2</td><td>60</td><td>. . . .</td><td>2.5%</td><td>. . .</td><td>. . .</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td colspan="4">Total</td><td>. . .</td><td></td><td>. . .</td><td></td><td>. . .</td></tr>
<tr><td colspan="9">Grand Total = -------- रुपये</td></tr>
</table>

शिक्षिका : वस्तू व सेवा या दोन्ही बिलांचे नीट निरीक्षण करून दोन्ही बिलांच्या कोडमधील फरक शोधा बरं.

पॅट्रीक : वस्तुबिलावर HSN कोड दिला आहे, तर उपाहारगृहाच्या बिलावर SAC कोड दिसतो आहे.

शिक्षिका : SAC म्हणजे सेवांच्या वर्गीकरणातील विशिष्ट क्रमांक असतो. त्यास SAC - Service Accounting Code म्हणतात.

खालील सारणीत काही वस्तू, सेवा आणि त्यांवरील करांचे दर नमुन्यादाखल दिले आहेत.

अ.क्र.	प्रकार	कराचा दर	वस्तू व सेवा प्रकार
I	शून्याधारित (Nil rated)	0%	**वस्तू** – अन्नधान्यासह जीवनावश्यक वस्तू, भाजीपाला, फळे, दूध, मीठ मातीची भांडी इत्यादी. **सेवा** – धर्मादाय संस्थांचे उपक्रम, पाण्याची वाहतूक, रस्ते व पुलांचा वापर, शिक्षण व आरोग्य सेवा, सार्वजनिक वाचनालय, शेतीसंबंधी सेवा इत्यादी.
II	निम्न दर	5%	**वस्तू** – सामान्य वापरातील वस्तू – जसे- LPG सिलिंडर, चहा, तेल, मध, फ्रोजन भाज्या, लवंग, मिरी, मसाले, मिठाई इत्यादी. **सेवा** – रेल्वे वाहतूक, बस वाहतूक, टॅक्सी सेवा, विमान वाहतूक (इकॉनॉमी क्लास), हॉटेल्समध्ये खाद्यपदार्थ व पेय पुरवणे, इत्यादी.
III	प्रमाण दर (स्तर I)	12%	**वस्तू** – ग्राहकोपयोगी वस्तू – लोणी, तूप, सुकामेवा, भाज्या व फळांपासून तयार केलेले लोणची, मुरांबा, जॅम, जेली, चटण्या, मोबाइल इत्यादी. **सेवा** – छपाईसाठी कामे, गेस्ट हाउस, बांधकाम व्यवसायाशी निगडित सेवा इत्यादी.
IV	प्रमाण दर (स्तर II)	18% (मोठ्या प्रमाणात वस्तू व सेवांचा समावेश)	**वस्तू** – मार्बल, ग्रॅनाईट, परफ्युम्स, धातूच्या वस्तू, संगणक, प्रिंटर, मॉनीटर, CCTV इत्यादी. **सेवा** – कुरिअर सर्व्हिसेस, आऊटडोअर केटरिंग, सर्कस, नाटक, प्रदर्शन, सिनेमा, चलन विनिमय सेवा, शेअर खरेदी-विक्रीवरील दलालीची सेवा इत्यादी.
V	उच्चतम दर	28%	**वस्तू** – ऐषारामाच्या वस्तू, मोटर सायकल पार्ट्स, लक्झरी कार, पान मसाला, व्हॅक्युम क्लीनर, डिश वॉशर AC युनिट, वॉशिंग मशीन, तंबाखू उत्पादने, शीतपेये इत्यादी. **सेवा** – पंचतारांकित हॉटेल निवास व्यवस्था, ॲम्युझमेंट पार्क, वॉटर पार्क, थीम पार्क, कॅसीनो, रेसकोर्स, IPL सारखे खेळ, विमान वाहतूक (बिझनेस क्लास) इत्यादी.
संदर्भ : www.cbec.gov.in (Central Board of Excise & Customs) ची वेबसाइट. या व्यतिरिक्त 0% ते 5% च्या दरम्यान कोणत्या वस्तूंवर जीएसटी आहे ते शोधा.			

टीप : – हे प्रकरण लिहिण्याच्या वेळी शासनाने ठरवलेले जीएसटीचे प्रकार व दर घेतले आहेत. त्यांत बदल होऊ शकतो. वीज, पेट्रोल, डीझेल इत्यादी जीएसटीच्या कक्षेत नाहीत.

कृती I : तुम्हांला लागणाऱ्या किमान दहा वस्तूंची यादी तयार करा व त्यावर जीएसटीचा दर किती आहे ते दिलेली यादी, वृत्तपत्रे, इंटरनेट, जीएसटीवरील पुस्तके किंवा वस्तू खरेदीच्या बिलांवरून शोधून लिहा. मित्रांबरोबर ही माहिती पडताळून पाहा.

वस्तू	जीएसटीचा दर	वस्तू	जीएसटीचा दर
1.स्केचबुक		6. - - - - --	
2.कंपासपेटी		7.- - - - -	
3.- - - - --		8. - - - - - -	
4.- - - - - -		9. - - - - - -	
5.- - - - - -		10. - - - - - -	

कृती II : कृती I प्रमाणे किमान दहा विविध सेवा(जसे - रेल्वे व एस.टी.बस बुकींग सेवा इत्यादी) मिळवण्यासाठी जीएसटीचे दर शोधा किंवा सेवा पुरवल्याची बिले मिळवा. त्यावरून खालीलप्रमाणे तक्ता पूर्ण करा.

सेवा	जीएसटीचा दर	सेवा	जीएसटीचा दर
1.रेल्वे बुकींग		6. - - - - --	
2.कुरिअर सर्व्हिस		7.- - - - -	
3.- - - - --		8. - - - - - -	
4.- - - - - -		9. - - - - - -	
5.- - - - - -		10. - - - - - -	

कृती III : खालील तक्ता पाहा व आणखी वस्तू व सेवा कोड शोधून लिहा.

सेवा	SAC	GST चा दर	वस्तू	HSN Code	GST चा दर
रेल्वे वाहतूक सेवा	996511	--	ड्युलक्स पेंट	3208	28%
विमान वाहतूक सेवा (इकॉनॉमी)	996411	--	बॉलबेरींग	84821011	28%
चलन विनिमय सेवा	997157	--	स्पीडोमीटर	8714	28%
ब्रोकर सेवा	997152	--	बटाटे	0701	0%
टॅक्सी सर्व्हिस	996423	--	--	--	--
5-स्टार हॉटेल सेवा	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--

कृती IV : कोणत्याही 5 वस्तू व 5 सेवांसाठी HSN व SAC तक्ता तयार करा. त्या तक्त्यामध्ये वस्तू व सेवांची चित्रे चिकटवा. त्या वस्तू व सेवांसाठी GST चे दर शोधून लिहा.

टीप : वस्तू व सेवांवरील दर तसेच HSN, SAC कोडवरील कृती इत्यादी माहितीसाठी आहेत. हे पाठ करण्याची गरज नाही.

उपक्रम : तुम्ही विविध प्रकारची बिले मिळवा. जसे वस्तू पुरवठा बिले, सेवा पुरवली असल्याची बिले इत्यादी. त्या बिलांचा जीएसटीच्या संदर्भात वेगवेगळ्या दृष्टिकोनातून अभ्यास करा व वर्गात चर्चा करा.:

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आरती गॅस एजन्सीने ₹545 करपात्र किमतीचा एक LPG सिलिंडर ग्राहकास विकला. जीएसटीचा दर 5% आहे, तर ग्राहकास दिलेल्या करबीजकात केंद्राचा व राज्याचा कर किती रुपये असेल? ग्राहकास एकूण किती रुपये द्यावे लागतील? आरती गॅस एजन्सीला एकूण किती वस्तू सेवा कर भरावा लागेल?

उकल : जीएसटी कराचा दर = 5% $\therefore$ सीजीएसटीचा दर 2.5%, व एसजीएसटीचा दर = 2.5%.

सीजीएसटी = $\frac{2.5}{100} \times 545 = 13.625 = 13.63$ रुपये

$\therefore$ एसजीएसटी = सीजीएसटी = 13.63 रुपये

ग्राहकास द्यावी लागणारी एकूण रक्कम = करपात्र किंमत + केंद्राचा कर + राज्याचा कर

= 545 + 13.63 + 13.63 = 572.26 रुपये

आरती गॅस एजन्सीला केंद्रांचा कर = 13.63 रुपये व राज्याचा कर = 13.63 रुपये भरावा लागेल. म्हणजे एकूण वस्तू सेवा-कर 27.26 रुपये भरावा लागेल.

उदा. (2) कुरिअर सेवा देणाऱ्या एका एजंटने एक पार्सल नाशिकहून नागपूरला पाठवण्यासाठी ग्राहकाकडून एकूण 590 रुपये घेतले. त्यात 500 रुपये करपात्र किमतीवर केंद्राचा कर 45 रुपये व राज्याचा कर 45 रुपये आहे, तर या व्यवहारात आकारलेला वस्तू सेवा कराचा दर काढा.

उकल : एकूण वस्तू व सेवा कर = केंद्राचा कर + राज्याचा कर = 45 + 45 = 90 रुपये.

$\therefore$ वस्तू सेवा कराचा दर = $\frac{90}{500} \times 100 = 18\%$

कुरीअर सेवा देणाऱ्या एजन्टने वस्तू सेवा कराचा दर 18% आकारला.

उदा. (3) श्रीकर यांनी 50,000 रुपये छापील किमतीचा लॅपटॉप विकत घेण्याचे ठरवले. दुकानदाराने या किमतीवर त्यांना 10% सूट दिली. लॅपटॉपवर वस्तू सेवा कराचा दर 18% आहे, तर दुकानदाराने आकारलेला केंद्राचा कर व राज्याचा कर काढा. श्रीकर यांना हा लॅपटॉप किती रुपयांना मिळाला?

उकल : येथे प्रथम सूट काढू. ती दिलेल्या किमतीतून वजा करू व उरलेल्या रकमेवर 18% दराने वस्तू व सेवा कराची आकारणी करू.

सूट = 50,000 रुपयांवर 10% = 5,000 रुपये

$\therefore$ लॅपटॉपची करपात्र किंमत = 50,000 − 5,000 = 45,000 रुपये.

$\therefore$ 18% जीएसटी दराने केंद्राचा कर = 9%

45,000 रुपयांवर 9% केंद्राचा कर = $\frac{9}{100} \times 45000 = 4050$ रुपये.

$\therefore$ राज्याचा कर = 4050 रुपये.

$\therefore$ लॅपटॉपची एकूण किंमत = 45000 + 4050 + 4050 = 53,100 रुपये.

उत्तर : श्रीकरला लॅपटॉप 53,100 रुपयांस मिळाला.

टीप : करपात्र किंमत म्हणजे ज्या किमतीवर कर आकारला जातो ती किंमत. बीजक मूल्य म्हणजे करासह दिलेली एकूण किंमत. उदाहरणात नमूद केले नसेल तर विक्रीची किंमत करपात्र आहे असे समजावे. जेवढा केंद्राचा कर असतो तेवढाच राज्याचा कर असतो.

सरावसंच 4.1

1. 'पावन मेडिकल्स' औषधांचा पुरवठा करतात. त्यांच्या दुकानातील काही औषधांवर GST चा दर 12% आहे, तर CGST व SGST चा दर किती असेल?

2. एका वस्तूवरील CGST चा दर 9% असेल तर SGST चा दर किती? तसेच GST चा दर किती?

3. 'मेसर्स रियल पेंट' ने प्रत्येकी ₹ 2800 करपात्र किमतीचे लस्टर पेंटचे 2 डबे विकले. GST चा दर 28% असल्यास कर बीजकात CGST व SGST किती रुपये आकारला असेल?

4. एका रिस्टवॉच बेल्टची करपात्र किंमत 586 रुपये आहे. GST चा दर 18% आहे. तर, ग्राहकाला तो बेल्ट किती रुपयांस मिळेल?

5. खेळण्यातील एका रिमोट कन्ट्रोल कारची जीएसटी करासह एकूण किंमत 1770 रुपये आहे. जीएसटीचा दर 18% आहे, तर त्या कारची करपात्र किंमत, त्यावरील CGST व SGST चे गणन करा.

6. 'टीपटॉप इलेक्ट्रॉनिक्स'ने एका कंपनीला दीड टनाचा व करासह 51,200 रुपये किमतीचा एअरकंडिशनर पुरवला. एअरकंडिशनर वरील CGST चा दर 14% आकारला. तर कर बीजकात खालील बाबी किती दर्शवल्या असतील ते काढा.

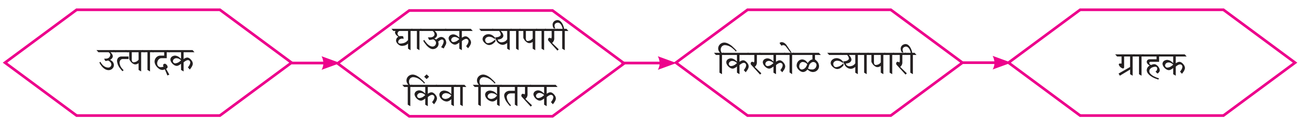
   (1) SGST चा दर (2) एसीवरील GST चा दर (3) एसीची करपात्र किंमत

   (4) GST ची एकूण रक्कम (5) CGST ची रक्कम (6) SGST ची रक्कम

7. प्रसादने 'महाराष्ट्र इलेक्ट्रॉनिक्स गुड्स'मधून 40,000 रुपये छापील किमतीचे वॉशिंग मशीन विकत घेतले. त्यावर दुकानदाराने 5% सूट दिली. जीएसटीचा दर 28% आहे. तर प्रसादला ते वॉशिंग मशीन किती रुपयांस मिळाले? कर बीजकात सीजीएसटी व एसजीएसटी किती रुपये असेल ते काढा.

जाणून घेऊया.

व्यवसाय साखळीतील जी. एस. टी. (G.S.T. in trading chain)



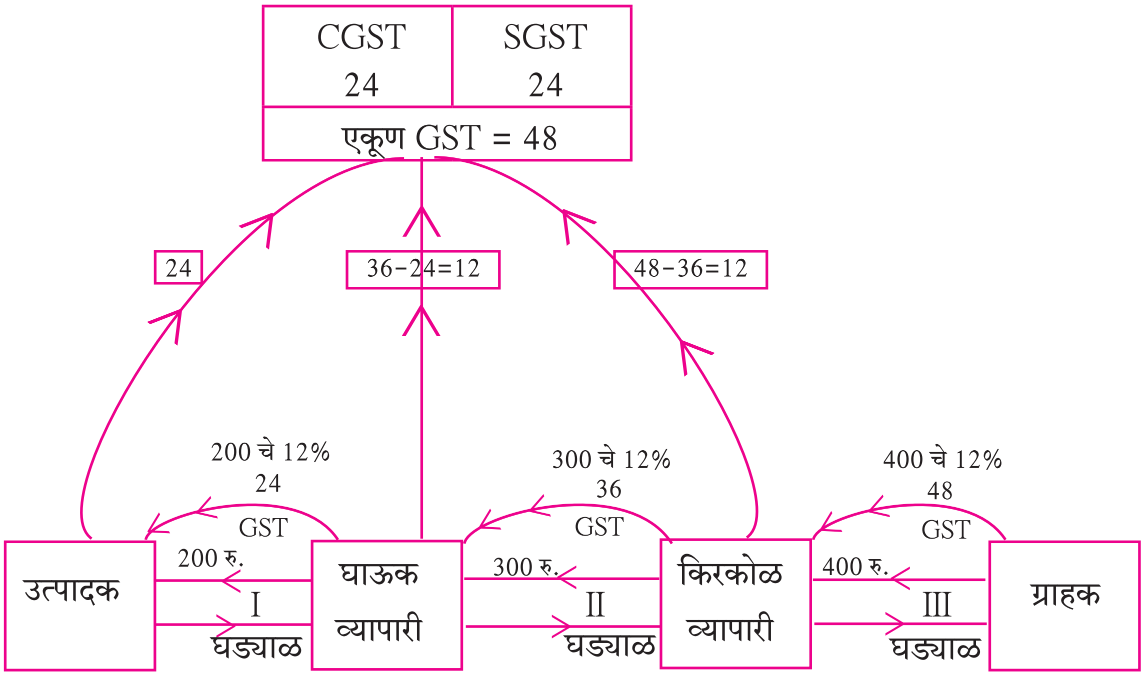
व्यवसाय साखळी (Trading Chain)

व्यवसाय साखळीत जीएसटी कशाप्रकारे आकारतात व शासनाकडे जमा करतात ते एका उदाहरणाने पाहूया.

उदाहरण. : समजा, एका उत्पादकाने घाऊक व्यापाऱ्यास एक घड्याळ नफ्यासह 200 रुपयांना विकले. घाऊक व्यापाऱ्याने किरकोळ व्यापाऱ्यास 300 रुपयांना व किरकोळ व्यापाऱ्याने ग्राहकास ते घड्याळ 400 रुपयांना विकले. GST चा दर 12% आहे. तर उत्पादक, घाऊक व किरकोळ व्यापारी खालीलप्रमाणे कराची वजावट घेऊन उरलेला टॅक्स कसा भरतात ते खालील ओघतक्त्यावरून अभ्यासा.

स्पष्टीकरण :

उत्पादकाकडून घड्याळ ग्राहकाकडे पोहोचेपर्यंत तीन व्यवहार होतात. प्रत्येक व्यवहारात झालेली कर आकारणी, जमा झालेला कर राज्यशासनाला आणि केंद्रशासनाला कसा पोहोचतो, हे खालील ओघतक्त्यात दाखवले आहे. त्याची संपूर्ण सारणी पुढे दाखवली आहे.



वरील व्यवहारात तीन वेगवेगळे आर्थिक व्यवहार एकाच राज्यात झाले आहेत. त्यांच्या प्रत्येकाच्या कर बीजकांतील GST ची आकारणी समजण्यासाठी थोडक्यात खाली दिली आहे.

कर बीजक I मधील GST आकारणी	
घड्याळाची किंमत	= ₹ 200
CGST 6%	= ₹ 12
SGST 6%	= ₹ 12
एकूण किंमत	= ₹ 224

उत्पादकाचे कर बीजक

(B2B)

कर बीजक II मधील GST आकारणी	
घड्याळाची किंमत	= ₹ 300
CGST 6%	= ₹ 18
SGST 6%	= ₹ 18
एकूण किंमत	= ₹ 336

घाऊक व्यापाऱ्याचे कर बीजक

(B2B)

कर बीजक III मधील GST आकारणी	
घड्याळाची किंमत	= ₹ 400
CGST 6%	= ₹ 24
SGST 6%	= ₹ 24
एकूण किंमत	= ₹ 448

किरकोळ व्यापाऱ्याचे कर बीजक

(B2C)

हे लक्षात ठेवूया.

दोन GSTIN धारक व्यापाऱ्यांमधील झालेल्या व्यवहारास Business to Business थोडक्यात **B2B** म्हणतात.

वस्तूचे उत्पादन झाल्यापासून ती ग्राहकापर्यंत पोहोचते, त्या साखळीतील अंतिम कडीतील व्यवहारास Business to Consumer थोडक्यात **B2C** म्हणतात.

या व्यवसाय साखळीतील प्रत्येक व्यापाऱ्याने भरलेल्या GST चे विवरण खालीलप्रमाणे आहे.

	CGST		SGST		एकूण GST
• उत्पादकाने	₹ 12	+	₹ 12	=	₹ 24 भरला.
• घाऊक व्यापाऱ्याने	₹ 6	+	₹ 6	=	₹ 12 भरला.
• किरकोळ व्यापाऱ्याने	₹ 6	+	₹ 6	=	₹ 12 भरला.
एकूण भरणा	₹ 24	+	₹ 24	=	₹ 48

टीप : हे तुमच्या लक्षात आले का? प्रत्येक व्यापाऱ्याने आपापल्या स्तरावर गोळा केलेल्या करामधून, खरेदीच्या वेळी दिलेला कर वळता करून घेऊन (इनपुट टॅक्स क्रेडिट) देय GST चा भरणा केला. शेवटी ग्राहकास ते घड्याळ 448 रुपयांना मिळाले. त्यांतील 48 रुपये हा निव्वळ कर वर दाखवल्याप्रमाणे अप्रत्यक्षपणे ग्राहकानेच भरला. म्हणून GST हा अप्रत्यक्ष कर (Indirect Tax) आहे. त्यापूर्वी घाऊक व किरकोळ व्यापाऱ्यांनी त्यांच्या खरेदीवर भरलेला कर त्यांना परत मिळतो.

खरेदीच्या वेळी दिलेल्या कराची वजावट (ITC – इनपुट टॅक्स क्रेडिट निविष्ट कराची जमा)

वस्तूचे उत्पादन केल्यापासून ती वापरणाऱ्या ग्राहकाकडे पोहोचेपर्यंत मधल्या प्रत्येक व्यवहारात GST आकारला जातो. वस्तू विकताना व्यापाऱ्याने गोळा केलेला कर म्हणजे आऊटपुट टॅक्स. त्याच व्यापाऱ्याने वस्तूखरेदीच्या वेळी दिलेला कर म्हणजेच इनपुट टॅक्स. हा व्यापारी त्याने गोळा केलेल्या करातून दिलेल्या कराची वजावट घेतो त्याला इनपुट टॅक्स क्रेडिट म्हणतात.

$\therefore$ देय GST = आऊटपुट टॅक्स – इनपुट टॅक्स क्रेडिट (ITC)

थोडक्यात शासनाकडे कराचा भरणा करताना साखळीतील प्रत्येक व्यापारी त्याने खरेदीच्या वेळी दिलेला कर, विक्रीच्या वेळी गोळा केलेल्या करामधून वजा करून उरलेला कर भरतो.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) श्री रोहित हे किरकोळ व्यापारी आहेत. त्यांनी वस्तूंच्या खरेदीच्या वेळी 6500 रुपये जीएसटी दिला व विक्री करून 8000 रुपये जीएसटी गोळा केला, तर (i) इनपुट टॅक्स व आऊटपुट टॅक्स किती? (ii) श्री. रोहित यांना इनपुट टॅक्स क्रेडिट किती रुपये मिळेल? (iii) त्यांनी देय असलेला जीएसटी काढा. (iv) केंद्राचा व राज्याचा देय कर काढा.

उकल : श्री. रोहित यांचा देय कर म्हणजे शासनाकडे भरायचा कर.

(i) विक्रीच्या वेळी घेतलेला (आऊटपुट टॅक्स) = 8000 रुपये

(ii) खरेदीच्या वेळी दिलेला (इनपुट टॅक्स) = 6500 रुपये

म्हणजेच इनपुट टॅक्स क्रेडिट (ITC) = 6500 रुपये

(iii) देय कर = विक्रीच्या वेळी घेतलेला कर (आऊटपुट टॅक्स) – इनपुट टॅक्स क्रेडिट (ITC)

= 8000 – 6500 = 1500 रुपये

(iv) $\therefore$ केंद्राचा देय कर = $\frac{1500}{2}$ = 750 रुपये आणि राज्याचा देय कर = 750 रुपये.

उदा. (2) मेसर्स जय केमिकल्सने 8000 रुपयांचा करपात्र किमतीचा लिक्विड सोप खरेदी केला व ग्राहकाला तो 10000 रुपये या करपात्र किमतीला विकला. GST चा दर 18% आहे, तर मेसर्स जय केमिकल्सचा केंद्राचा देय कर व राज्याचा देय कर काढा.

उकल : खरेदीच्या वेळी दिलेला कर (इनपुट टॅक्स) = 8000 रुपयांच्या खरेदीवर 18% दराने भरलेला कर

$= \frac{18}{100} \times 8000$

= 1440 रुपये

$\therefore$ ITC = 1440 रुपये

आऊटपुट टॅक्स = विक्रीच्या वेळी ग्राहकाकडून गोळा केलेला कर

$= \frac{18}{100} \times 10000$

= 1800 रुपये

देय कर = आऊटपुट टॅक्स – ITC

= 1800 – 1440 = 360 रुपये

मे. जय केमिकल्सचा केंद्राचा देय कर = 180 रुपये आणि राज्याचा देय कर = 180 रुपये

उदा. (3) मे. जय केमिकल्सने 8000 रुपयांचा (करासह किंमत) लिक्विड सोप खरेदी केला व ग्राहकाला 10,000 रुपयांना (करासह किंमत) विकला. तर जय केमिकल्सचा देय केंद्राचा देय कर व राज्याचा देय कर काढा. येथे कराचा दर 18% आहे.

उकल : येथे वस्तूच्या किमती करासहित दिलेल्या आहेत ते ध्यानात घ्या.

वस्तूची करासह किंमत = करपात्र किंमत + कर

लिक्विड सोपची करपात्र किंमत 100 रुपये असेल तर, करासह किंमत 118 रुपये होते.

$\dfrac{\text{करासह किंमत}}{\text{करपात्र किंमत}}$ हे गुणोत्तर स्थिर आहे.

118 रुपये एकूण किमतीसाठी जर 100 रुपये करपात्र किंमत तर 8000 रुपये एकूण किमतीसाठी, x रुपये करपात्र किंमत मानू.

$\therefore \dfrac{x}{8000} = \dfrac{100}{118}$

$\therefore x = \dfrac{8000}{118} \times 100 = 6779.66$ रुपये

$\therefore$ खरेदीच्या वेळी भरलेला GST = 8000 – 6779.66

$\therefore$ इनपुट टॅक्स = 1220.34 रुपये. $\therefore$ ITC = 1220.34 रुपये.

त्याचप्रमाणे 10,000 रु. एकूण किमतीसाठी, y रुपये करपात्र किंमत मानू.

$\therefore \dfrac{y}{10000} = \dfrac{100}{118}$

$\therefore y = \dfrac{10,00,000}{118} = 8474.58$ रुपये

$\therefore$ विक्रीच्या वेळी गोळा केलेला कर (आऊटपुट टॅक्स) = 10000.00 – 8474.58

= 1525.42 रुपये

$\therefore$ देय कर = गोळा केलेला कर – वजावटीची रक्कम = 1525.42 – 1220.34

= 305.08 रुपये

$\therefore$ केंद्राचा देय कर = राज्याचा देय कर = 305.08 ÷ 2 = 152.54 रुपये

उत्तर : जय केमिकल्सचा केंद्राचा देय कर व राज्याचा देय कर प्रत्येकी 152.54 रुपये आहे.

टीप : उदा. 2 व 3 काळजीपूर्वक अभ्यासा. व्यवहारात तुम्हांला या दोन्ही प्रकारची कर बीजके पाहायला मिळतात, म्हणून दुकानदाराने वस्तूची छापील किंमत करासह दिली आहे का छापील किमतीवर कर आकारणार आहे, हे समजून घ्या व त्यानंतर खरेदी करा.

ICT Tools or Links

ठरावीक तारखेपर्यंत कराचा भरणा करून त्यानंतर दिलेल्या तारखेच्या आत करविवरण पत्र (GST Returns) दाखल करणे आवश्यक असते. या सर्व गोष्टी आता 'ऑनलाइन' करता येतात. www.gst.gov.in या वेबसाइटवर सर्व विवरणपत्रके तुम्हांला पाहता येतील. (जीएसटी विवरणपत्रे तयार करण्यासाठी ऑफलाइन युटीलिटीसुद्धा वापरता येते.)

उदा. (4) एका सायकल उत्पादकाने, घाऊक व्यापाऱ्याला 4000 रुपये करपात्र किमतीने सायकल विकली. घाऊक व्यापाऱ्याने ती सायकल 4800 रुपये करपात्र किमतीने दुकानदाराला विकली व दुकानदाराने ती सायकल 5200 रुपये करपात्र किमतीने ग्राहकास विकली. GST चा दर 12% होता, तर विक्रीच्या प्रत्येक टप्प्यावर देय असणारा CGST व SGST काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : व्यवसाय साखळी

$\boxed{} \xrightarrow[12\%]{₹\,4000} \boxed{} \xrightarrow[12\%]{₹\,4800} \boxed{} \xrightarrow[12\%]{₹\,5200} \boxed{}$

उत्पादकाने विक्रीच्या वेळी गोळा केलेला कर = 4000 चे 12% = $\boxed{\ldots \times \frac{\cdots}{\cdots}}$ = $\boxed{}$

उत्पादकाचा देय कर = 480 रुपये.

घाऊक व्यापाऱ्याने विक्रीच्या वेळी गोळा केलेला कर = 4800 चे 12% = $\boxed{576 \text{ रुपये}}$

∴ घाऊक व्यापाऱ्याचा देय कर = घाऊक व्यापाऱ्याने गोळा केलेला कर – त्याने घेतलेली वजावट

= $\boxed{576}$ – $\boxed{480}$

= $\boxed{96}$ रुपये

दुकानदाराने विक्रीच्या वेळी गोळा केलेला कर = 5200 चे 12% = $\boxed{}$

∴ दुकानदाराचा देय GST = दुकानदाराने गोळा केलेला कर – दुकानदाराने घेतलेली वजावट

= $\boxed{}$ – $\boxed{}$

= $\boxed{}$

व्यवसाय साखळीत GST चा भरणा केल्याचे विवरण :

व्यक्ती	देय GST	देय CGST	देय SGST
उत्पादक	₹ 480	₹ 240	₹ $\boxed{}$
घाऊक व्यापारी	₹ 96	₹ $\boxed{}$	₹ $\boxed{}$
दुकानदार	₹ $\boxed{}$	₹ $\boxed{}$	₹ $\boxed{}$
एकूण	₹ $\boxed{}$	₹ $\boxed{}$	₹ $\boxed{}$

विचार करूया.

- समजा, एका व्यापाऱ्याचा जुलै महिन्यातील गोळा केलेला कर व वजावटीची रक्कम समान आहे, तर देय कर किती येईल?
- समजा, एका व्यापाऱ्याने गोळा केलेला जुलै महिन्यातील कर, त्याच्या वजावटीच्या रकमेपेक्षा कमी आहे. अशा वेळेस करगणना कशी होते?

सरावसंच 4.2

1. चेतना स्टोअर्सने 01 जुलै 2017 ते 31 जुलै 2017 या कालावधीत केलेल्या खरेदीवर 1,00,500 रुपये जीएसटी दिला व विक्रीवर 1,22,500 रुपये जीएसटी गोळा केला. तर सदर कालावधीत चेतना स्टोअर्सला भरावा लागणारा देय जीएसटी काढा.

2. नझमा या जीएसटी कायदा अंतर्गत नोंदणीकृत दुकानाच्या मालकीण आहेत. त्यांनी खरेदीवर एकूण जीएसटी 12,500 रुपये दिला होता व विक्रीवर एकूण जीएसटी 14,750 रुपये गोळा केला आहे, तर त्यांना किती रुपये इनपुट टॅक्स क्रेडिट मिळेल व त्यांचा देय जीएसटी काढा.

3. अमीर एन्टरप्राइझने चॉकलेट सॉसच्या बाटल्या खरेदी करताना 3800 रुपये जीएसटी भरला आणि त्या अकबरी ब्रदर्सला विकताना 4100 रुपये जीएसटी गोळा केला. मयंक फूड कॉर्नरने अकबरी ब्रदर्सकडून त्या बाटल्या 4500 रुपये जीएसटी देऊन विकत घेतल्या, तर प्रत्येक व्यवहारात देय जीएसटी काढा. त्यावरून प्रत्येकाला भरावा लागणारा केंद्राचा देय कर (CGST) व राज्याचा देय कर (SGST) काढा.

4. चंदीगढ हे संघराज्य आहे. येथील मलिक गॅस एजन्सीने काही गॅस टाक्या 24,500 रुपयांना खरेदी केल्या व तेथील ग्राहकांना 26,500 रुपयांना विकल्या. या व्यवहारात 5% दराने देय असलेला एकूण जीएसटी काढा व त्यावरून केंद्राचा देय कर (CGST) व संघराज्याचा देय कर (UTGST) काढा. (संघराज्यात SGST ऐवजी UTGST असतो.)

5. मे. ब्यूटी प्रॉडक्ट्सने 6000 रुपयांवर 18% दराने जीएसटी देऊन सौंदर्य प्रसाधनांची खरेदी केली आणि एकाच ग्राहकास ती सर्व 10,000 रुपयांना विकली. तर या व्यवहारासाठीचे मे. ब्यूटी प्रॉडक्ट्सने तयार केलेल्या करबीजकात केंद्राची व राज्याची (CGST व SGST) देय असणारी वस्तू व सेवा कराची रक्कम किती दाखवली असेल ते काढा.

6. खाली दिलेल्या माहितीवरून दुकानदार ते ग्राहक (B2C) यासाठीचे करबीजक (Tax Invoice) तयार करा.

   नाव, पत्ता, तारीख इत्यादी तुमच्या पसंतीनुसार घ्या.

   पुरवठादार : मे. - - -- - पत्ता - - - - - राज्य - - - - - तारीख

   इन्व्हॉइस क्रमांक - - - - - GSTIN - - - - - - -

वस्तूचा तपशील :	मोबाइल बॅटरीचा दर - ₹ 200	1 नग	GST चा दर 12%	HSN 8507,
	हेडफोनचा दर - ₹ 750	1 नग	GST चा दर 18%	HSN 8518,

7. खाली दिलेल्या माहितीवरून एका व्यापाऱ्याचे दुसऱ्या व्यापाऱ्यासाठीचे (B2B) टॅक्स इन्व्हॉइस तयार करा.
नाव, पत्ता, तारीख इत्यादी तुमच्या पसंतीनुसार घ्या.

पुरवठादार – नाव, पत्ता, राज्य, GSTIN, बिल क्रमांक व तारीख.

प्राप्तकर्ता – नाव, पत्ता, राज्य, GSTIN.

वस्तूंचा तपशील : (1) पेन्सिल बॉक्स 100, HSN 3924, दर 20 रु., GST 12%,
(2) जिग सॉ पझल्स 50, HSN 9503, दर 100 रु., GST 12%

अधिक माहितीसाठी

आपसमेळ योजना (Composition Scheme)

ज्या व्यक्तीच्या व्यवसायाची उलाढाल मागील आर्थिक वर्षामध्ये 1.5 कोटी रुपयांपेक्षा कमी आहे त्यांच्यासाठी आपसमेळ योजना (Composition Scheme) आहे. या योजनेअंतर्गत करदाते शासनाने निश्चित केलेल्या दराने करभरणा करतात.

आपसमेळ योजनेतील कराचे दर (GST rates for composition Scheme)

अनु. क्र.	पुरवठादार	जीएसटीचा दर	(CGST + SGST)
1.	उपाहारगृहे	5%	2.5% + 2.5%
2.	उत्पादक व विक्रेते	1%	0.5% + 0.5%

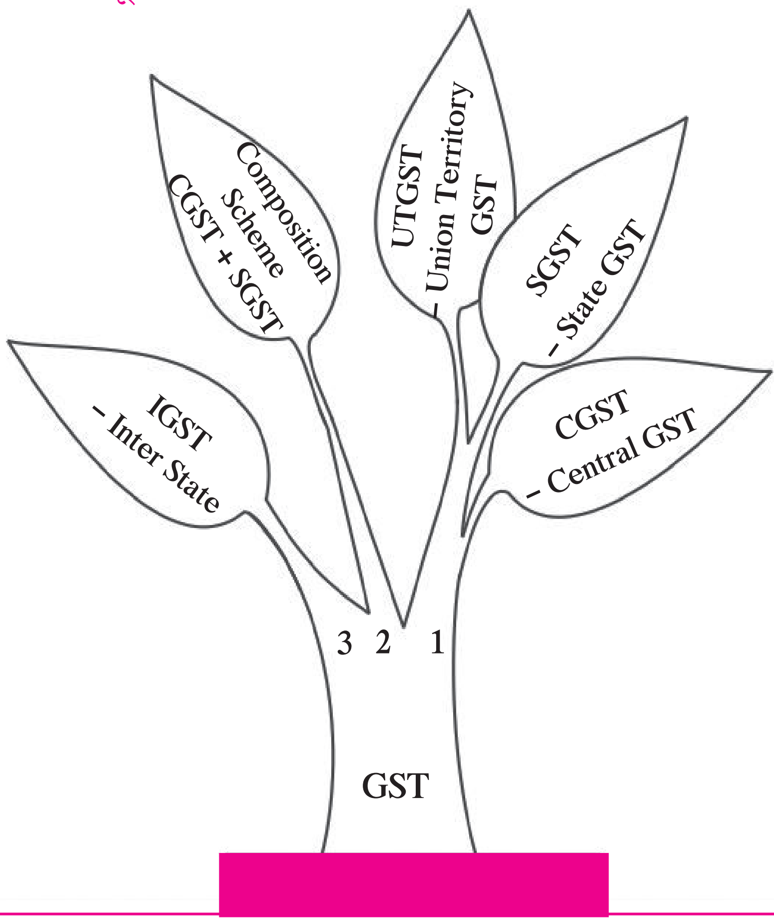
आपसमेळ योजनेतील व्यापाऱ्यांसाठी नियम :

- आपसमेळ योजनेतील व्यापाऱ्यास ग्राहकाकडून कोणताही कर गोळा करता येणार नाही म्हणून या योजनेतील व्यापारी करबीजक देऊ शकणार नाही. त्यांनी पुरवठ्याचे बिल (Bill of supply) द्यायचे आहे.
- व्यापाऱ्याने दर 3 महिन्यांनी वर दिलेल्या सारणीनुसार शासनाकडे विक्रीवरील कराचा भरणा करायचा असतो.
- या योजनेतील व्यापारी दुसऱ्या राज्यात विक्री करू शकणार नाही; परंतु तो दुसऱ्या राज्यातून खरेदी करू शकेल.
- या योजनेतील व्यापाऱ्यांना खरेदीवरील (निविष्ट) कराची वजावट म्हणजेच (ITC) लाभ मिळणार नाही.
- या योजनेतील व्यापाऱ्यांना आपल्या दुकानाच्या पाटीवर 'आपसमेळ योजनेतील व्यापारी' (Composition taxable person) असे लिहायचे आहे.
- या योजनेतील व्यापाऱ्याने पुरवठा बिलावर (Bill of supply) ठळक अक्षरात 'आपसमेळ योजनेतील व्यापारी विक्रीवर कर आकारण्यास अपात्र' (Composition taxable person not eligible to collect tax on supplies) असे छापायचे आहे.

GST ची ठळक वैशिष्ट्ये (Features of GST)

- विविध अप्रत्यक्ष कर संपुष्टात.
- वस्तू व सेवांबद्दलचे वाद संपुष्टात.
- व्यापाऱ्यांसाठी राज्यनिहाय नोंदणी.
- GSTIN असणाऱ्या व्यापाऱ्यांना व्यवहाराच्या व्यवस्थित नोंदी ठेवून वेळेवर GST चा भरणा करावा लागतो.
- व्यवहारात पारदर्शकता.
- साधी व समजण्यास सोपी करप्रणाली.
- करांवर कर भरावे लागत नाहीत. त्यामुळे वस्तू व सेवांच्या किमती आवाक्यात.
- वस्तू व सेवांची आंतरराष्ट्रीय बाजारपेठेशी तुलना म्हणून गुणवत्तेत वाढ.
- 'मेक इन इंडिया'ला गती.
- ही करप्रणाली तंत्रज्ञान आधारित केल्यामुळे त्वरित निर्णय घेण्यास मदत.
- वस्तू व सेवा कर हा दुहेरी मॉडेल (Dual model) आहे. म्हणजे केंद्र व राज्यासाठी एकाच वेळी समान कर आकारला जातो.

वस्तू व सेवा कराच्या अंतर्गत येणारे कर



1. **CGST-SGST (UTGST):**
   एका राज्यात खरेदी-विक्रीचे व्यवहार करणाऱ्या व्यापाऱ्यांसाठी.

2. **आपसमेळ योजना (composition Scheme) :**
   ज्यांची उलाढाल 20 लाखांपासून 1.5 कोटी रुपयांपर्यंत आहे अशा व्यापाऱ्यांना या योजनेचा लाभ घेता येतो. त्यांना SGST व CGST वेगळ्या दराने द्यावा लागतो.

3. **IGST :**
   आंतरराज्यीय (Inter State) व्यवहार करणाऱ्या व्यापाऱ्यांसाठी.

अधिक माहितीसाठी

एकात्मिक वस्तू व सेवा कर – IGST (Integrated GST)

ज्या वेळी विक्रीचा व्यवहार दोन राज्यांमध्ये होतो (Inter state) त्या वेळी जो जीएसटी आकारला जातो त्यास एकत्रित वस्तू व सेवा कर (IGST) म्हणतात व तो पूर्णपणे केंद्र सरकारकडे भरला जातो.

एका राज्यातील व्यापाऱ्याने दुसऱ्या राज्यातील व्यापाऱ्याकडून वस्तू खरेदी केल्या व आपल्या राज्यात विकल्या, तर त्याने IGST म्हणून भरलेल्या कराची वजावट (ITC) कशी घेता येते हे पाहू.

उदाहरणार्थ : व्यापारी M (महाराष्ट्रातील) यांनी 20,000 रुपयांचे स्कूटरचे सुटे भाग व्यापारी P (पंजाबमधील) यांच्याकडून विकत घेतले. त्या वेळी 28% दराने 5600 रुपये एकात्मिक वस्तू व सेवा कर (IGST) व्यापारी P यांना दिला.

M ने हे सर्व सुटे भाग येथील स्थानिक ग्राहकांस 25,000 रुपयांस विकले. त्या वेळी 28% दराने 7000 रुपये जीएसटी गोळा केला.

GST 7000 रुपये = CGST 3500 रुपये + SGST 3500 रुपये ग्राहकाकडून गोळा केले.

आता शासनाकडे कराचा भरणा करताना 5600 रुपयांची वजावट ITC कशी घेतात ते पाहा.

टीप : IGST चे क्रेडिट घेताना प्रथम ते IGST साठी, त्यानंतर CGST साठी व उरलेले क्रेडिट SGST साठी घेतात. येथे M यांच्या विक्रीच्या व्यवहारात IGST नाही म्हणून आधी CGST साठी क्रेडिट घ्यायचे व उरलेले SGST साठी क्रेडिट घ्यायचे.

∴ देय CGST = 3500 – 3500 = 0 रुपये

म्हणजे 5600 रुपयांपैकी 3500 रुपये क्रेडिट घेऊन झाले. उरलेले 5600 – 3500 = 2100 रुपयांचे क्रेडिट SGST साठी घेता येईल.

∴ देय SGST = 3500 – 2100 = 1400 रुपये

'M' यांना 1400 रुपये SGST भरावा लागेल.

लक्षात घ्या, की व्यापारी M यांना खरेदीच्या वेळी दिलेल्या 5600 रुपयांची पूर्ण वजावट (ITC) मिळाली. (म्हणजेच इनपुट टॅक्सचे पूर्ण क्रेडिट मिळाले.)

ITC असा घेतात

खरेदीच्या वेळी दिलेला कर (ITC) | गोळा केलेला कर (Output Liability)

IGST चे क्रेडिट घेताना (₹ 5600) $\xrightarrow{\text{प्रथम (₹ 0)}}$ IGST साठी वापरले.

IGST चे क्रेडिट घेताना (₹ 5600) $\xrightarrow{\text{नंतर (₹ 3500)}}$ CGST साठी वापरले.

IGST चे क्रेडिट घेताना (₹ 5600) $\xrightarrow{\text{शेवटी उरलेले (₹ 2100)}}$ SGST साठी वापरले.

(म्हणून ₹ 1400 SGST भरावा लागेल.)

जरा आठवूया.

आपण मागील वर्षी बचत व गुंतवणुकीचे महत्त्व जाणून घेतले आहे. त्यानुसार जे शक्य असेल ते तुम्ही अमलात आणायला सुरुवातही केली असेल. कारण नेहमी निरोगी राहण्यासाठी जशा आरोग्याच्या सवयी अंगी बाणाव्या लागतात, तसेच आर्थिक आरोग्यासाठी बचत व गुंतवणुकीची सवय लावावी लागते. सध्या गुंतवणुकीच्या प्रकारात एवढे वैविध्य आहे की त्याचा अभ्यास व अनुभव दोन्ही असणे महत्त्वाचे ठरते.

चला, चर्चा करूया.

श्वेता एका कंपनीत नोकरी करते. या महिन्यापासून तिचा पगार 5% वाढला व पुढील महिन्यात बोनसही मिळणार म्हणून ती पगारातील ही वाढीव रक्कम योग्य ठिकाणी गुंतवण्याचा विचार करते. तिची मैत्रीण नेहा आर्थिक सल्लागाराकडे नोकरी करते म्हणून ती गुंतवणुकीबाबत आपल्या मैत्रिणीला योग्य सल्ला देऊ शकते. नेहा सांगते, 'आपल्या गुंतवणुकीत विविधता असणे सर्वांत महत्त्वाचे असते. जीवन विमा, आरोग्य विमा, स्वत:चे घर असणे, बँकेत एफ.डी. व रिकरिंग खाते असणे या सर्वांचा विचार करावा.' श्वेता म्हणते, 'माझा विमा आहे व बँकेत एफ.डी. पण केलेल्या आहेत शिवाय पगारातून प्रॉव्हिडंट फंड कपात चालूच आहे तर अजून कोणकोणते मार्ग आहेत?' नेहा सांगते, ''सध्या शेअर्स, म्युच्युअल फंड (MF), डिबेंचर्स, बॉन्ड इत्यादींमध्ये गुंतवणूक करणाऱ्यांची संख्या वाढली आहे. तसेच एस.आय.पी करण्याकडेही लोकांचा कल वाढला आहे. तुला आता प्रत्येक महिन्यात एक ठरावीक रक्कम जास्त मिळणार आहे, म्हणून नियमित आवर्ती गुंतवणूक योजनेत (SIP - Systematic Investment Plan) तू दरमहा ठरावीक रक्कम ठेवू शकतेस.''

गुंतवणुकीचे मार्ग

म्युच्युअल फंड	शेअर्स
डिबेंचर्स	विविध प्रकारचे विमे
बॉन्डस्	भविष्य निर्वाह निधी
मुदत ठेव	स्थावर मालमत्ता
रिकरिंग खाते	दागिने

असे संवाद आपण ठिकठिकाणी ऐकतो व त्याबद्दल अचूक माहिती असणे 'बहुजन हिताय, बहुजन सुखाय' असते.

या प्रकरणात आपण शेअर्स, म्युच्युअल फंड, SIP यांबद्दल माहिती मिळवणार आहोत.

जाणून घेऊया.

शेअर्स (Shares)

व्यक्तीचे स्वत:चे दुकान असणे म्हणजे दुकानाची मालकी (प्रोप्रायटरशीप) असणे. दोन-चार व्यक्ती एकत्र येऊन व्यापार करणे म्हणजे भागीदारी (पार्टनरशीप), यासाठी भांडवल कमी लागते, परंतु एखादी कंपनी, उद्योग किंवा कारखाना सुरू करायचा असेल तर मोठ्या भांडवलाची गरज असते. हे भांडवल समाजाकडून उभे करावे लागते.

कारखाना किंवा कंपनी सुरू करण्यासाठी इच्छुक असलेल्या व्यक्ती एकत्र येतात व समाजाकडून भांडवल उभे करून कंपनी स्थापन करतात. भारतीय कंपनी कायदा 1956 नुसार कंपनीची नोंदणी होते. कंपनी स्थापन करणाऱ्या व्यक्तींना कंपनीचे **प्रवर्तक** (**प्रमोटर्स**) म्हणतात व अशी कंपनी म्हणजेच मर्यादित (पब्लिक लिमिटेड) कंपनी होय.

कंपनी सुरू करण्यासाठी जेवढा पैसा लागणार आहे त्यास **भांडवल** म्हणतात. या भांडवलाचे लहान लहान समान भाग करतात. हे भाग साधारणपणे ₹ 1, ₹ 2, ₹ 5, ₹ 10 किंवा ₹ 100 इत्यादी किमतीचे असतात. या प्रत्येक भागाला **शेअर** म्हणतात. हे शेअर विकून कंपनीसाठी भांडवल उभे केले जाते.

शेअर (Share) : कंपनीच्या भाग भांडवलातील एक भाग म्हणजे एक शेअर. शेअर सर्टिफिकेट (share certificate) वर एका शेअरची किंमत, शेअर्सची संख्या, अनुक्रमांक इत्यादी छापलेले असते.

भागधारक किंवा शेअरधारक –(Share holder) : कंपनीचे शेअर विकत घेणारी व्यक्ती त्या कंपनीची भागधारक म्हणजेच शेअरधारक होते. भागधारक हा त्याच्याकडे असलेल्या शेअर्सच्या प्रमाणात त्या कंपनीचा मालक असतो.

स्टॉक एक्सचेंज (Stock Exchange) : जेथे शेअर्सची खरेदी-विक्री होते. त्यास शेअरबाजार ('स्टॉक एक्सचेंज' किंवा 'स्टॉक मार्केट' किंवा इक्विटी मार्केट, कॅपिटल मार्केट किंवा शेअर मार्केट) म्हणतात. समाजाकडून भांडवल उभे करून सुरू केलेली, म्हणजेच पब्लिक लिमिटेड कंपनी शेअरबाजारात सूचीबद्ध (listed company) असणे आवश्यक असते.

दर्शनी किंमत (Face Value - FV) : कंपनीच्या शेअर सर्टिफिकेटवर छापलेली एका शेअरची किंमत म्हणजे शेअरची दर्शनी किंमत (FV) होय.

बाजारभाव (Market Value - MV) : ज्या किमतीने शेअरबाजारात शेअर्सची खरेदी-विक्री होते त्या किमतीला त्या शेअरचा बाजारभाव (MV) म्हणतात.

कंपनी स्थापन झाल्यावर जर तिची कामगिरी अपेक्षेपेक्षा चांगली झाली तर त्या शेअरची **मागणी** बाजारात वाढत जाते. शेअर्सची संख्या तर ठरावीक असते. म्हणजे **पुरवठा** वाढू शकत नाही, म्हणून त्या कंपनीच्या शेअर्सचे भाव वाढायला लागतात. याउलट जर कंपनीची कामगिरी खालावली तर शेअर्सचे भाव उतरतात. हा चढ-उतार अनुक्रमे ▲, ▼ या चिन्हांनी दाखवतात. या चढ-उताराचा परिणाम म्हणून बाजारपेठेतील निर्देशांक वाढतो किंवा कमी होतो.

शेअर बाजारात शेअर्सचे भाव प्रत्येक क्षणी बदलत असतात.

लाभांश (Dividend) : कंपनीला आर्थिक वर्षात झालेल्या नफ्याचे वाटप शेअर्सच्या संख्येनुसार भागधारकांना केले जाते. भागधारकांना मिळणारा नफ्याचा भाग (लाभाचा अंश) म्हणजेच लाभांश होय.

कंपनीची कामगिरी चांगली होत गेली की पर्यायाने कंपनीची मालमत्ताही वाढत जाते म्हणून शेअर्सवरील लाभांशही चांगला मिळतो.

शेअरधारकाला मिळालेल्या लाभांशावर आयकर भरावा लागत नाही.

हे लक्षात ठेवूया.

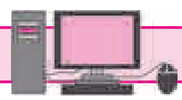
शेअरचा बाजारभाव कितीही कमी-जास्त झाला असला तरी वर्षाअखेर घोषित लाभांश हा नेहमी शेअर्सच्या संख्येच्या प्रमाणात (दर्शनी किमतीवर) मिळतो.

अधिक माहितीसाठी :

मुंबईतील **मुंबई शेअर बाजार (बॉम्बे स्टॉक एक्सचेंज BSE)** व **राष्ट्रीय शेअर बाजार (नॅशनल स्टॉक एक्सचेंज NSE)** हे भारतातील दोन मुख्य शेअर बाजार आहेत. मुंबई शेअर बाजार हा आशियातील सर्वांत जुना व राष्ट्रीय शेअर बाजार हा भारतातील सर्वांत मोठा शेअर बाजार आहे.

शेअर बाजारामधील चढ-उतार समजण्यासाठी SENSEX (सेन्सेक्स) व NIFTY (निफ्टी) असे दोन मुख्य निर्देशांक (Index) आहेत. SENSEX = SENSitive + indEX या दोन शब्दांनी तयार झाला आहे. BSE ने 1-1-1986 मध्ये SENSEX द्यायची सुरुवात केली. सर्वांत जास्त भाग-भांडवल असलेल्या नामांकित व प्रस्थापित अशा 30 कंपन्यांच्या भावातील चढ-उतारानुसार SENSEX ठरतो.

'निफ्टी' हा शब्द त्याच्या नावाप्रमाणे दोन शब्दांनी बनला आहे. **NIFTY** = NSE + FIFTY. निफ्टी हा NSE मधील सर्वांत उत्तम कामगिरी करणाऱ्या 50 कंपन्यांवरून ठरतो.



ICT Tools or Links

SEBI च्या वेबसाइटला भेट द्या, तसेच मुंबई शेअर बाजार, राष्ट्रीय शेअर बाजार व दूरदर्शनवरील चॅनल्स किंवा नेटवरील शेअरबाजाराची माहिती देणारे व्हिडिओ पाहा व शेअरबाजार समजून घ्या. शेअरमधील भावांचा चढ-उतार दूरदर्शनवर सतत दाखवला जातो, तो पाहा. सामान्यपणे वरची पट्टी मुंबई शेअर बाजारातील व खालची पट्टी राष्ट्रीय शेअर बाजारातील शेअर्सचे बाजारभाव दाखवतात. शेअर्सची बुक व्हॅल्यू (Book Value) म्हणजे काय याची माहिती मिळवा.

दर्शनी किंमत व बाजारभाव तुलना (Comparison of FV and MV) :

(1) जर बाजारभाव > दर्शनी किंमत असेल, तर तो शेअर अधिमूल्यावर (share is at premium) आहे असे म्हणतात.

(2) जर बाजारभाव = दर्शनी किंमत असेल, तर तो शेअर सममूल्यावर आहे (share is at par) असे म्हणतात.

(3) जर बाजारभाव < दर्शनी किंमत असेल, तर तो शेअर अवमूल्यावर आहे (share is at discount) असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ (1) समजा, शेअरची दर्शनी किंमत = 10 रुपये व बाजारभाव = 15 रुपये असेल, तर हा शेअर 15 − 10 = 5 रुपये अधिमूल्यावर म्हणजेच प्रीमियमवर आहे.

(2) समजा, शेअरची दर्शनी किंमत = 10 रुपये व बाजारभाव = 10 रुपये असेल, तर हा शेअर 10 − 10 = 0. म्हणजे तो शेअर सममूल्यावर म्हणजेच ॲट पार आहे.

(3) समजा, शेअरची दर्शनी किंमत = 10 रुपये व बाजारभाव = 7 रुपये असेल, तर हा शेअर 10 − 7 = 3 रुपये अवमूल्यावर आहे म्हणजेच तो डिस्काऊंटवर आहे.

एकूण गुंतवणूक (Sum invested) : शेअर्सच्या खरेदीसाठी लागलेली एकूण रक्कम म्हणजे एकूण गुंतवणूक.

एकूण गुंतवणूक = शेअर्सची संख्या × एका शेअरचा बाजारभाव

उदा. 100 रुपये दर्शनी किंमत असलेला एक शेअर 120 रुपये बाजारभावाने खरेदी केला, तर असे 50 शेअर्स घेण्यासाठी किती रुपये गुंतवणूक करावी लागेल?

उकल : एकूण गुंतवणूक = शेअर्सची संख्या × एका शेअरचा बाजारभाव

= 50 × 120 = 6000 रुपये

शेअर्सवरील परताव्याचा दर (Rate of Return) :

आपण शेअर्समध्ये गुंतवलेली रक्कम कालांतराने किती परतावा देते, हे समजणे खूप महत्त्वाचे असते. खालील उदाहरणावरून हे समजून घ्या.

उदा. (1) श्रीयशने 100 रुपये दर्शनी किंमत असणारा एक शेअर बाजारभाव 120 रुपये होता तेव्हा विकत घेतला. त्यावर त्याला कंपनीने 15% लाभांश दिला, तर गुंतवणुकीवर मिळालेल्या परताव्याचा दर काढा.

उकल : दर्शनी किंमत = 100 रुपये बाजारभाव = 120 रुपये लाभांश = 15% प्रतिशेअर परताव्याचा दर x% मानू.

येथे लक्षात घ्या, की 120 रुपये गुंतवले की 15 रुपये मिळतात.

जर,	120 : 15
तर,	100 : x

$$\therefore \frac{15}{120} = \frac{x}{100}$$

$$\therefore x = \frac{15 \times 100}{120} = \frac{25}{2} = 12.5\%$$

उत्तर : श्रीयशला परताव्याचा दर 12.5% मिळाला.

उदा. (2) दर्शनी किंमत = 100 रुपये अधिमूल्य = 65 रुपये तर त्या शेअरचा बाजारभाव काढा.

उकल : बाजारभाव = दर्शनी किंमत + अधिमूल्य = 100 + 65 = 165 रुपये

∴ शेअरचा बाजारभाव 165 रुपये प्रतिशेअर

उदा. (3) खालील तक्ता योग्य संख्या किंवा शब्द लिहून पूर्ण करा.

उदा. क्र.	दर्शनी किंमत	मूल्यप्रकार	बाजारभाव
(i)	₹ 10	अधिमूल्य ₹ 7	
(ii)	₹ 25		₹ 16
(iii)		सममूल्य	₹ 5

उकल : (i) 10 + 7 = 17 रुपये, (ii) अवमूल्य 25 − 16 = 9 रुपये, (iii) 5 रुपये.

उदा. (4) नीलभाईने खालीलप्रमाणे शेअर्समध्ये गुंतवणूक केली, तर त्याने एकूण किती गुंतवणूक केली?

कंपनी A : 350 शेअर्स, दर्शनी किंमत = 10 रुपये प्रतिशेअर अधिमूल्य = 7 रुपये

कंपनी B : 2750 शेअर्स, दर्शनी किंमत = 5 रुपये बाजारभाव = 4 रुपये

कंपनी C : 50 शेअर्स, दर्शनी किंमत = 100 रुपये बाजारभाव = 150 रुपये

उकल : कंपनी A : अधिमूल्य = 7 रुपये म्हणून बाजारभाव = दर्शनी किंमत + अधिमूल्य

= 10 + 7 = 17 रुपये

∴ कंपनी A मधील गुंतवणूक = शेअर्सची संख्या × बाजारभाव = 350 × 17 = 5950 रुपये

कंपनी B : दर्शनी किंमत = 5 रुपये, बाजारभाव = 4 रुपये

∴ कंपनी B मधील गुंतवणूक = शेअर्सची संख्या × बाजारभाव = 2750 × 4 = 11,000 रुपये

कंपनी C : दर्शनी किंमत = 100 रुपये, बाजारभाव = 150 रुपये

∴ कंपनी C मधील गुंतवणूक = शेअर्सची संख्या × बाजारभाव = 50 × 150 = 7500 रुपये

उत्तर : नीलभाईने तिन्ही कंपन्यांमध्ये केलेली एकूण गुंतवणूक = 5950 + 11000 + 7500

= 24,450 रुपये

उदा. (5) स्मिताने 12,000 रुपये गुंतवून 10 रुपये दर्शनी किमतीचे शेअर्स 2 रुपये अधिमूल्याने घेतले, तर तिला किती शेअर्स मिळतील हे काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : दर्शनी किंमत = 10 रुपये, अधिमूल्य = 2 रुपये.

∴ बाजारभाव = दर्शनी किंमत + $\boxed{}$ = $\boxed{}$ + $\boxed{}$ = $\boxed{}$

∴ शेअर्सची संख्या = $\dfrac{\text{एकूण गुंतवणूक}}{\text{बाजारभाव}}$ = $\dfrac{12000}{\boxed{}}$ = $\boxed{}$ शेअर्स

उत्तर : स्मिताला $\boxed{}$ शेअर्स मिळतील.

उदा. (6) 10 रुपये दर्शनी किमतीचे 50 शेअर्स 25 रुपये बाजारभावाने विकत घेतले. त्यांवर कंपनीने 30% लाभांश घोषित केला, तर (1) एकूण गुंतवणूक (2) मिळालेला लाभांश व (3) गुंतवणकीवरील परताव्याचा दर काढा.

उकल : शेअरची दर्शनी किंमत = 10 रुपये बाजारभाव = 25 रुपये, शेअर्सची संख्या = 50.

$\therefore$ एकूण गुंतवणूक $25 \times 50 = 1250$ रुपये

लाभांश $= 10 \times \dfrac{30}{100} = 3$ रुपये प्रतिशेअर

$\therefore$ 50 शेअरवरील एकूण लाभांश $= 50 \times 3 = 150$ रुपये

$$\therefore \text{ परताव्याचा दर } = \frac{\text{मिळालेला एकूण लाभांश}}{\text{एकूण गुंतवणूक}} \times 100$$

$$= \frac{150}{1250} \times 100 = 12\%$$

उत्तर : (1) एकूण गुंतवणूक 1250 रुपये (2) 50 शेअर्सवर मिळालेला लाभांश 150 रुपये

(3) गुंतवणुकीवर परताव्याचा दर 12%.

सरावसंच 4.3

1. पुढील तक्ता योग्य संख्या किंवा शब्द लिहून पूर्ण करा.

उदा. क्र.	दर्शनी किंमत	मूल्यप्रकार	बाजारभाव
(1)	100 रु.	सममूल्य	. . .
(2)	. . .	अधिमूल्य = 500 रु.	575 रु.
(3)	10 रु.	. . .	5 रु.

2. बाजारभाव 80 रुपये होता तेव्हा अमोलने 100 रुपये दर्शनी किमतीचे 50 शेअर्स विकत घेतले. त्यावर्षी कंपनीने 20% लाभांश दिला, तर गुंतवणुकीवर मिळालेला परताव्याचा दर काढा.

3. जोसेफ यांनी खालीलप्रमाणे शेअर्समध्ये गुंतवणूक केली, तर त्यांनी केलेली एकूण गुंतवणूक काढा.
   कंपनी A : दर्शनी किंमत 2 रुपये आणि अधिमूल्य 18 रुपये असलेले 200 शेअर्स.
   कंपनी B : बाजारभाव 500 रुपये असलेले 45 शेअर्स.
   कंपनी C : बाजारभाव 10,540 रुपये असणारा 1 शेअर

4. श्रीमती देशपांडे यांनी 20,000 रुपये गुंतवून 5 रुपये दर्शनी किमतीचे शेअर्स 20 रुपये अधिमूल्य देऊन घेतले, तर त्यांना किती शेअर्स मिळतील?

5. श्री. शांतिलाल यांनी 100 रुपये दर्शनी किमतीचे 150 शेअर्स 120 रुपये या बाजारभावाने खरेदी केले. नंतर 7% लाभांश कंपनीने दिला. गुंतवणुकीवरील परताव्याचा दर किती?

6. खालीलपैकी कोणती गुंतवणूक फायदेशीर आहे? दोन्ही कंपनीच्या शेअर्सची दर्शनी किंमत समान आहे. कंपनी A साठी बाजारभाव 80 रुपये असून लाभांश 16% आणि कंपनी B साठी बाजारभाव 120 रुपये असून लाभांश 20% आहे.

ICT Tools or Links

कोणत्याही पाच कंपन्यांच्या शेअर्सची दर्शनी किंमत व बाजारभाव इंटरनेटवरून किंवा अन्य स्रोतांवरून शोधा व त्याचा जोडस्तंभालेख काढा व तुलना करा. (शक्य असल्यास ▲, ▼ असे दोन्ही प्रकारचे शेअर्स घ्या.)

जाणून घेऊया.

शेअर्सच्या खरेदी-विक्रीवर दलाली आणि कर (Brokerage and taxes on share trading)

दलाली (Brokerage) : शेअर्सची खरेदी-विक्री खाजगी रीतीने करता येत नाही. ती शेअरबाजारातील अधिकृत व्यक्ती किंवा संस्थांकडून केली जाते. त्यांना **'शेअर दलाल' (Share Broker)** म्हणतात. दलालामार्फत शेअर्सची खरेदी करताना व विक्री करताना बाजारभावावर ज्या दराने दलाल रक्कम घेतो, तिला **'दलाली'** म्हणतात. म्हणजे शेअर्स विकणारा व खरेदी करणारा दोघेही दलाली देतात.

उदा (1) समजा, 100 रु. दर्शनी किमतीच्या शेअरचा बाजारभाव 150 रुपये आहे. दलालीचा दर 0.5% आहे. असे 100 शेअर विकत घेताना किती रक्कम द्यावी लागेल? असे 100 शेअर विकले तर किती रक्कम मिळेल?

हे शेअर खरेदी करताना –

एका शेअरची खरेदी किंमत = बाजारभाव + दलाली

= 150 रुपये + 150 रुपयांचे 0.5% = 150 + 0.75

$\therefore$ एका शेअरची खरेदीची किंमत = 150.75 रुपये

असे 100 शेअर्स खरेदी केले तर एकूण गुंतवणूक $100 \times 150.75 = 15075$ रुपये

यात 15000 रुपयांचे शेअर्स + 75 रुपये दलाली आहे.

हे शेअर विकताना –

एका शेअरची विक्री किंमत = बाजारभाव – दलाली

= 150 रुपये – 150 रुपयांचे 0.5% = 150 – 0.75

$\therefore$ एका शेअरची विक्री किंमत = 149.25 रुपये

$\therefore$ 100 शेअर्सची विक्री किंमत = $149.25 \times 100 = 14925$ रुपये

$\therefore$ 100 शेअर्स विकले तर 14925 रुपये मिळतील.

हे लक्षात घ्या.

- दलाली नेहमी शेअर्सच्या बाजारभावावर आकारली जाते.
- शेअर खरेदी-विक्रीच्या विवरणात दलाली व कर धरून शेअरची किंमत ठरवली जाते.

उपक्रम I : तुमच्या भागातील शेअर दलाली सेवा देणाऱ्या व्यक्ती किंवा संस्थेची माहिती मिळवा व ते आकारत असलेल्या दलालीच्या दरांची माहिती घ्या व तुलना करा.

उपक्रम II : डी-मॅट खाते (Demat A/c) व ट्रेडिंग खात्याचे विवरणपत्र (स्टेटमेंट) मिळवा. त्यात कोणकोणत्या बाबींचा समावेश असतो त्याची माहिती नेटवरून/दलालाची भेट घेऊन/वडीलधाऱ्यांकडून मिळवा. मित्रांबरोबर चर्चा करा.

अधिक माहितीसाठी : प्रत्येक शेअर दलाल सेबी (SEBI - Securities and Exchange Board of India) कायदा 1992 अंतर्गत नोंदणीकृत असतो व त्यावर सेबी चे नियंत्रण असते.

शेअर्स, बाँड्स्, म्युच्युअल फंड इत्यादींची नोंद ठेवण्यासाठी डी-मॅट खाते व त्यांची खरेदी-विक्री करण्यासाठी ट्रेडिंग खाते (Dematerialized Account, Trading Account) उघडणे आवश्यक असते. ही खाती बँकेत किंवा शेअर दलालाकडे उघडता येतात. DP म्हणजे Depository Participants म्हणतात. या DPs NSDL व CDSL या दोन Depositaries च्या अधीन असतात. डी-मॅट खात्यात शेअर्सच्या खरेदी-विक्रीचा हिशोब ठेवला जातो. हे बँकेच्या खात्यासारखेच असते. विकलेले शेअर्स खर्चाच्या बाजूला (Debit) नोंदले जातात. खरेदी केलेले शेअर्स जमेच्या बाजूला (Credit) नोंदले जातात. त्याचे विवरणपत्र (statement) मागणी केल्यास मिळते. यासाठी ठरावीक शुल्क भरावे लागते. या खात्यात तुमचे शेअर्स इलेक्ट्रॉनिक फॉर्ममध्ये जमा राहतात. या दोन्ही खात्यांना तुमच्या बँकेचे सेव्हींग खाते जोडावे लागते. शेअर्सच्या खरेदीच्या वेळी लागणारे पैसे गरजेनुसार त्यातून ट्रेडिंग खात्यात वर्ग करता येतात. तसेच विक्रीनंतर मिळालेले पैसे त्यात जमा होतात. शेअर दलाल व बँका या सर्व गोष्टींसाठी इच्छुक व्यक्तींना मार्गदर्शन करतात.

जाणून घेऊया.

दलालीवर वस्तू व सेवा कर (GST on brokerage services)

शेअर दलाल त्यांच्या खातेदारांच्या वतीने शेअर्सची खरेदी-विक्री करून देण्याची सेवा पुरवतात. दलाली सेवेवरील कराचा दर 18% आहे. त्याचा SAC क्रमांक शोधा.

टीप :- वस्तू व सेवा कराव्यतिरिक्त ग्राहकांच्या सुरक्षिततेसाठी शेअर्सच्या खरेदी-विक्रीवर आणखी काही अल्प दराचे कर आहेत. उदा.सिक्युरीटी ट्रॅन्झॅक्शन टॅक्स (STT), SEBI शुल्क, स्टँप ड्युटी इत्यादी. त्याचा

आपण येथे विचार करणार नाही. फक्त ब्रोकरेजवरील वस्तू सेवा कराचा विचार करणार आहोत.

उदा. (2) समजा, उदाहरण 1 नुसार, एका व्यक्तीने 15075 रु. शेअर्सच्या खरेदीसाठी दिले. या रकमेत 75 रुपये दलाली आहे, तर त्यांना 75 रुपयांवर 18% दराने किती कर द्यावा लागेल, तो काढा व त्याचे विवरणपत्र तयार करा.

उकल : 18% दराने 75 रुपयांवर GST $= \frac{18}{100} \times 75$

$= 13.50$ रुपये

शेअर खरेदीचे विवरणपत्र (B म्हणजे खरेदी केले.)

शेअर्सची संख्या	शेअर्सचा बाजारभाव	शेअरची दर्शनी किंमत	दलाली 0.5%	दलालीवर 9% CGST	दलालीवर 9% SGST	शेअर्सची एकूण खरेदी किंमत
100(B)	150 रुपये	15000 रुपये	75 रुपये	6.75 रुपये	6.75 रुपये	15088.50 रुपये

उदा. (3) बशीरखान यांनी 40 रु. बाजारभावाचे 100 शेअर्स खरेदी केले. दलालीचा दर 0.5% व दलालीवर वस्तू सेवा कराचा दर 18% आहे, तर त्यांना 100 शेअर्ससाठी एकूण खर्च किती करावा लागेल?

उकल : 100 शेअर्सची बाजारभावानुसार किंमत $40 \times 100 = 4000$ रुपये

एका शेअरवरील दलाली $= \frac{0.5}{100} \times 40 = 0.20$ रुपये

$\therefore$ एका शेअरची खरेदी किंमत = बाजारभाव + दलाली

$= 40 + 0.20 = 40.20$ रुपये

$\therefore$ 100 शेअर्सची खरेदीची किंमत $= 40.20 \times 100 = 4020$ रुपये

100 शेअर्सवरील दलाली $0.20 \times 100 = 20$ रुपये

$\therefore$ वस्तू सेवा कर $= \frac{18}{100} \times 20$

$= 3.60$ रुपये

उत्तर : बशीरखान यांना 100 शेअर्स खरेदीसाठी आलेला एकूण खर्च

$= 4020 + 3.60 = 4023.60$ रुपये

उदा. (4) पंकजरावांनी 1,25,295 रुपये गुंतवून 10 रुपये दर्शनी किमतीचे, बाजारभाव 125 रुपये असताना 100 शेअर विकत घेतले. या व्यवहारात दलालीचा दर 0.2% व दलालीवर 18% GST दिला, तर (1) किती शेअर्स विकत घेतले? (2) एकूण किती दलाली दिली? (3) या व्यवहारात वस्तू सेवा कर किती दिला?

उकल : गुंतवणूक = 1,25,295 रुपये, बाजारभाव = 125 रुपये, दलाली = 0.2%, कराचा दर = 18%.

एका शेअरवर दलाली $= 125 \times \frac{0.2}{100} = 0.25$ रुपये

एका शेअरच्या दलालीवर कर = 0.25 चे 18% = 0.045 रुपये

∴ एका शेअरची खरेदीची किंमत = बाजारभाव + दलाली + कर

= 125 + 0.25 + 0.045 = 125.295 रुपये

∴ शेअर्सची संख्या = $\frac{125295}{125.295}$ = 1000

एकूण दलाली = प्रतिशेअर दलाली × शेअर्सची संख्या

∴ = 0.25 × 1000 = 250 रुपये

एकूण कर = 1000 × 0.045 = 45 रुपये

उत्तर (1) 1000 शेअर्स विकत घेतले. (2) दलाली 250 रुपये दिली. (3) दलालीवर कर 45 रुपये दिला.

उदा. (5) नलिनीताईंनी 10 रुपये दर्शनी किमतीच्या शेअरचा बाजारभाव 60 रुपये असताना 6024 रुपये गुंतवले. त्यावर 60% लाभांश मिळाल्यानंतर 50 रुपये बाजारभावाने सर्व शेअर्स विकून टाकले. प्रत्येक व्यवहारात 0.4% दलाली दिली. तर या व्यवहारात त्यांना झालेला नफा किंवा तोटा किती हे काढण्यासाठी खालील चौकटी भरा.

उकल : येथे कराचा दर दिलेला नाही म्हणून शेअर्सच्या खरेदी-विक्रीच्या वेळी कराचा विचार केलेला नाही.

10 रु. दर्शनी किमतीचा शेअर 60 रुपयांना खरेदी केला.

प्रतिशेअर दलाली = $\frac{0.4}{100}$ × 60 = $\boxed{}$ रुपये

∴ एका शेअरची किंमत = 60 + 0.24 = $\boxed{}$ रुपये

∴ 6024 रुपयांना $\frac{6024}{60.24}$ = 100 शेअर्स खरेदी केले.

10 रुपये दर्शनी किमतीचे शेअर्स 50 रुपये बाजारभावाने विकले.

∴ प्रतिशेअर दलाली = $\frac{0.4}{100}$ × 50 = 0.20 रुपये

∴ एका शेअरची विक्री किंमत = 50 − 0.20 = $\boxed{}$ रुपये

∴ 100 शेअर्सची विक्री किंमत = 100 × 49.80 = $\boxed{}$ रुपये

लाभांश 60% मिळाला.

∴ 1 शेअरवरील लाभांश = $\frac{60}{100}$ × 10 = 6 रुपये

∴ 100 शेअरवरील लाभांश = 6 × 100 = $\boxed{}$ रुपये

∴ नलिनीताईंना शेअर विक्रीचे व लाभांशाचे एकूण उत्पन्न = $\boxed{}$ + $\boxed{}$ = 5580 रुपये

परंतु नलिनीताईंनी केलेली गुंतवणूक = 6024 रुपये होती.

∴ नलिनीताईंना झालेला तोटा = $\boxed{}$ − $\boxed{}$ = $\boxed{}$ रुपये

उत्तर : नलिनीताईंना या खरेदी-विक्रीच्या व्यवहारात 444 रुपये तोटा झाला.

कृती : उदाहरण 5 मध्ये खरेदी- विक्रीच्या वेळी दलालीवरील कर 18% दराने दिला असेल तर तोटा किती होईल तो काढा. तुमचे उत्तर 451.92 रुपये येते का याचा पडताळा घ्या.

जाणून घेऊया.

म्युच्युअल फंड (Mutual Fund – MF)

शेअर्सचा अभ्यास करताना आपण पाहिले, की कंपनी स्थापन करण्यासाठी इच्छुक व्यक्ती एकत्र येतात आणि समाजाचा सहभाग घेऊन मोठे भांडवल उभे करतात. कंपनीची कामगिरी सरस ठरली तर या सर्व शेअरधारकांना त्याचा फायदा होतो. त्यांना लाभांश मिळतो. शेअर्सचे बाजारभाव वाढतात म्हणून लाभ होतो. कंपनीचे भांडवल वाढते. पर्यायाने देशाच्या प्रगतीला हातभार लागतो. थोडक्यात समाजशास्त्राचे तत्त्व आहे. 'Together we can progress', परंतु प्रत्येक नाण्याला दोन बाजू असतात. शेअर्समध्ये फायदा होण्याऐवजी कधी कधी तोटाही होऊ शकतो. हा तोटा कमी करता येईल का? गुंतवणूकदारासाठी ही जोखीम कमी करता येते का? होय. त्यासाठी आजकाल बहुतेक लोक म्युच्युअल फंडात गुंतवणूक करतात.

म्युच्युअल फंड म्हणजे अनेक गुंतवणूकदारांचे पैसे एकत्र गोळा करून उभी केलेली रक्कम. ती रक्कम एकाच प्रकारच्या शेअर्समध्ये न गुंतवता गुंतवणुकीच्या विविध प्रकारांत गुंतवली जाते म्हणजे जोखीम कमी होते व एकूण लाभांश सर्व गुंतवणूकदारांमध्ये विभागला जातो. म्युच्युअल फंडामध्ये गुंतवणूक कशी करावी? त्यात परतावा कसा मिळतो? किती कालावधीसाठी गुंतवणूक करावी? त्यातील विविध प्रकार कोणते? अशा अनेक प्रश्नांची सविस्तर उत्तरे आर्थिक सल्लागार देऊ शकतात.

> Investments in Mutual Funds are subject to Market risks. Read all scheme related documents carefully. हे वाक्य तुम्ही बऱ्याचदा ऐकले असेल किंवा वाचले असेल. त्याचा अर्थ नीट समजून घ्या. क्वचित प्रसंगी म्युच्युअल फंडामध्ये केलेल्या गुंतवणुकीवर नफ्याऐवजी तोटा होतो आणि तो गुंतवणूकदारांना सोसावा लागतो.

म्युच्युअल फंड म्हणजे तज्ज्ञ व्यावसायिक लोकांद्वारे निर्माण करण्यात आलेली फंड योजना. या तज्ज्ञांना AMC म्हणजे 'असेट मॅनेजमेंट कंपनी' म्हणतात. ते बाजाराचा अंदाज घेऊन इच्छुक लोकांचे पैसे वेगवेगळ्या योजनांत [जसे, इक्विटी फंड (शेअर्स), डेब्ट फंड (डिबेंचर्स बाँड्स इत्यादी.) अथवा दोन्हींचा बॅलन्स फंड] गुंतवणूकदारांच्या सूचनेनुसार गुंतवतात.

आपण शेअरबाजारात पैसे गुंतवले की शेअर्स मिळतात, तसे म्युच्युअल फंडात पैसे गुंतवले की '**युनिट्स**' मिळतात.

प्रतियुनिट जो बाजारभाव असेल त्याला त्या युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य (Net asset value – NAV) म्हणतात.

एका युनिटचे नक्त मूल्य × युनिट्सची संख्या = म्युच्युअल फंड योजनेचे एकूण गुंतवणूक मूल्य.

टीप : शेअर्सच्या भावाप्रमाणे म्युच्युअल फंडातील युनिट्सचे नक्तमूल्य पण सतत बदलत राहते. गरज असेल तेव्हा हे युनिट्स विकता येतात.

राष्ट्रीयकृत बँक असो वा भारतीय पोस्ट सेवा असो त्यातील गुंतवणूक ही जास्त सुरक्षित असते. मात्र या गुंतवणुकीतून मिळणारा परतावा सहसा महागाईचा योग्य सामना करण्यास अपुरा पडतो. हे लक्षात घेतले पाहिजे, की योग्य रीतीने गुंतवलेला पैसासुद्धा पैसा निर्माण करू शकतो. त्यासाठी हवे असते ते पैशांचे नियोजन म्हणजेच अर्थनियोजन. (Financial Planning)

सारासार विचार करता गुंतवणुकीचे योग्य वेळी योग्य निर्णय घेणे महत्त्वाचे असते. त्याचा नियमित अभ्यास करण्याची सवय असावी लागते.

नियमित आवर्ती गुंतवणूक योजना (SIP –Systematic Investment Plan)

समजा, आपल्याला म्युच्युअल फंडात एकदम मोठ्या रकमेची गुंतवणूक करणे शक्य नसेल, तर आपण छोट्या हप्त्यांत दरमहा गुंतवणूक करू शकतो. जसे किमान 500 रुपये दरमहासुद्धा म्युच्युअल फंडात गुंतवू शकतो. अशा प्रकारे नियमितरीत्या मासिक किंवा त्रैमासिक गुंतवणूक करता येते. या योजनेमुळे बचतीची शिस्त लागते व भविष्यातील आर्थिक उद्दिष्टे सहज गाठता येतात. ही योजनासुद्धा दीर्घ मुदतीसाठी फायदेशीर ठरू शकते. त्याचे कारण शेअर बाजारातील चढ-उताराचा या योजनेमधील गुंतवणुकीवर परिणाम कमी होतो. कमीत कमी 3 ते 5 वर्षे, शक्य असल्यास 10-15 वर्षांसाठी या योजनेत गुंतवणूक केल्यास उत्तम.

म्युच्युअल फंडाचे फायदे

- अनुभवी, तज्ज्ञ फंड मॅनेजर्स
- गुंतवणुकीत वैविध्य (diversifications of funds)
- पारदर्शकता - गुंतवणुकीत पुरेशी सुरक्षितता.
- तरलता - पाहिजे तेव्हा विक्रीची सोय.
- मर्यादित जोखीम
- अल्प व दीर्घ मुदतीचे फायदे मिळतात.
- काही ठरावीक फंडांतील (ELSS) मधील गुंतवणुकीवर आयकर कलम 80C खाली वजावट मिळते.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) म्युचुअल फंड योजनेचे बाजारमूल्य 200 कोटी रुपये असून कंपनीने 8 कोटी युनिट्स केली असतील, तर एका युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य काढा.

उकल : एका युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य = 200 कोटी रुपये / 8 कोटी युनिट्स = 25 रुपये प्रतियुनिट.

उदा. (2) उदा. 1 मधील कंपनीत समजा तुम्ही रु. 10,000 ची गुंतवणूक केली तर तुम्हांला किती युनिट्स मिळतील?

उकल : युनिट्सची संख्या = केलेली गुंतवणूक / एका युनिटचे नक्त मूल्य
= 10,000/25 = 400 युनिट्स मिळतील.

सरावसंच 4.4

1. एका शेअरचा बाजारभाव 200 रुपये आहे. तो खरेदी करताना 0.3% दलाली दिली, तर या शेअरची खरेदीची किंमत किती ?
2. एका शेअरचा बाजारभाव 1000 रुपये असताना तो शेअर विकला, व त्यावर 0.1% दलाली दिली, तर विक्रीनंतर मिळणारी रक्कम किती ?
3. खालील शेअर खरेदी-विक्रीच्या विवरणपत्रातील रिकाम्या जागा भरा. (B - विकत घेतले, S - विकले)

शेअर्सची संख्या	शेअर्सचा बाजारभाव	शेअर्सची किंमत	दलालीचा दर 0.2%	दलालीवर CGST 9%	दलालीवर SGST 9%	शेअर्सची एकूण किंमत
100 B	45 रु.					
75 S	200 रु.					

4. श्रीमती देसाई यांनी 100 रुपये दर्शनी किमतीचे शेअर्स, बाजारभाव 50 रुपये असताना विकले तेव्हा त्यांना 4988.20 रुपये मिळाले. दलालीचा दर 0.2% व दलालीवरील जीएसटीचा दर 18% आहे, तर त्यांनी किती शेअर्स विकले ते काढा.
5. मिस्टर डीसोझा यांनी 50 रुपये दर्शनी किमतीचे 200 शेअर्स 100 रुपये अधिमूल्यावर खरेदी केले. त्यावर कंपनीने 50% लाभांश दिला. लाभांश मिळाल्यावर त्यातील 100 शेअर्स 10 रुपये अवमूल्याने विकले व उरलेले शेअर्स 75 रुपये अधिमूल्याने विकले. प्रत्येक व्यवहारात 20 रुपये दलाली दिली, तर त्यांना या व्यवहारात नफा झाला का तोटा ? किती रुपये ?

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4 A

1. खालील प्रश्नांसाठी उत्तराचा अचूक पर्याय निवडा.

(1) जीवनावश्यक वस्तूंवरील वस्तू व सेवा कराचा दर . . . आहे.

(A) 5% (B) 12% (C) 0% (D) 18%

(2) एकाच राज्यातील व्यापारात केंद्र शासनाकडून . . . आकारला जातो.

(A) IGST (B) CGST (C) SGST (D) UTGST

(3) आपल्या देशात . . . . या तारखेपासून वस्तू व सेवा कर ही करप्रणाली अमलात आली.

(A) 31 मार्च 2017 (B) 1 एप्रिल 2017

(C) 1 जानेवारी 2017 (D) 1 जुलै 2017

(4) स्टीलच्या भांड्यांवरील वस्तू व सेवा कराचा दर 18% आहे, तर त्यांवर राज्य वस्तू सेवा कराचा दर . . . आकारण्यात येतो.

(A) 18% (B) 9% (C) 36% (D) 0.9%

(5) GSTIN मध्ये एकूण . . . अंकाक्षरे असतात.

(A) 15 (B) 10 (C) 16 (D) 9

(6) जेव्हा एखादा नोंदणीकृत व्यापारी दुसऱ्या नोंदणीकृत व्यापाऱ्यास वस्तू विकतो तेव्हा त्याला GST अंतर्गत . . . . व्यवहार म्हणतात.

(A) BB (B) B2B (C) BC (D) B2C

2. 25,000 रुपये किमतीच्या एका वस्तूवर व्यापाऱ्याने 10% सूट देऊन उरलेल्या रकमेवर 28% GST आकारला. तर एकूण बिल किती रुपयांचे असेल? त्यात CGST व SGST शीर्षकाखाली किती रक्कम असायला हवी?

3. एका तयार कपड्यांच्या दुकानात 1000 रुपये किमतीच्या ड्रेसवर 5% सूट देऊन उरलेल्या रकमेवर 5% GST लावून तो विकला, तर तो ग्राहकाला किती रुपयांना पडेल?

4. सुरत, गुजरातमधील एका व्यापाऱ्याने 2.5 लाख करपात्र किमतीचे सुती कपडे राजकोट, गुजरात येथील व्यापाऱ्याला विकले, तर या व्यवहारात राजकोटमधील व्यापाऱ्याला 5% दराने किती रुपये जीएसटी द्यावा लागेल?

5. श्रीमती मल्होत्रा यांनी 85,000 रुपये करपात्र किमतीचे सोलार ऊर्जा संच विकत घेतले व 90,000 रुपयांना विकले. वस्तू व सेवा कराचा दर 5% असल्यास त्यांना या व्यवहारात किती रुपयांची वजावट (ITC) व किती रुपये कर भरावा लागेल?

6. Z-सिक्युरिटी सर्व्हिसेस देणाऱ्या कंपनीने 64,500 रुपये करपात्र किमतीची सेवा पुरवली. वस्तू सेवा कराचा दर 18% आहे. या सिक्युरिटी सर्व्हिसेस पुरवण्यासाठी कंपनीने लॉन्ड्री सर्व्हिसेस व युनिफॉर्मस् इत्यादी बाबींवर एकूण 1550 रुपये वस्तू सेवा कर भरला आहे, तर या कंपनीचा (इनपुट टॅक्स क्रेडिट) ITC किती? त्यावरून देय सीजीएसटी व देय एसजीएसटी काढा.

7. एका व्यापाऱ्याने पोलीस नियंत्रण कक्षासाठी वस्तू सेवा करासह 84,000 रुपये किमतीचे वॉकीटॉकी संच पुरवले. वस्तू सेवा कराचा दर 12% असल्यास त्याने आकारलेल्या करातील केंद्रीय जीएसटी व राज्य जीएसटी काढा. वॉकीटॉकी संचांची करपात्र किंमत काढा.

8.★ एका ठोक व्यापाऱ्याने 1,50,000 रुपये करपात्र किमतीचे विद्युत साहित्य खरेदी केले. ते सर्व साहित्य किरकोळ व्यापाऱ्यास 1,80,000 रुपये करपात्र किमतीला विकले. किरकोळ व्यापाऱ्याने ते सर्व साहित्य ग्राहकाला 2,20,000 रुपये करपात्र किमतीला विकले, तर 18% दराने(1)ठोक व किरकोळ विक्रीच्या करबीजकांतील करांची आकारणी करा.(2)ठोक व्यापाऱ्याचा तसेच किरकोळ व्यापाऱ्याचा देय सीजीएसटी व देय एसजीएसटी काढा.

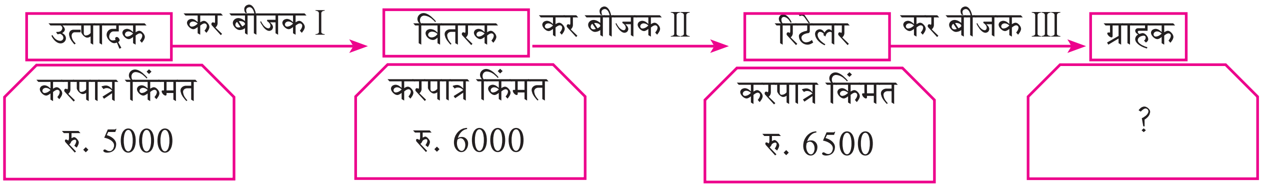
9.★ अण्णा पाटील (ठाणे, महाराष्ट्र) यांनी 14,000 रु. करपात्र किमतीचा एक व्हॅक्युम क्लीनर वसई (मुंबई) येथील एका व्यापाऱ्यास 28% GST दराने विकला. वसईतील व्यापाऱ्याने ग्राहकास तो व्हॅक्युम क्लीनर 16,800 रु. करपात्र किमतीस विकला. तर या व्यवहारातील खालील किमती काढा.

(1) अण्णा पाटलांनी दिलेल्या कर बीजकातील केंद्राचा व राज्याचा कर किती रुपये दाखवला असेल?

(2) वसईच्या व्यापाऱ्याने ग्राहकास केंद्राचा व राज्याचा किती कर आकारला असेल?

(3) वसईच्या व्यापाऱ्यासाठी शासनाकडे करभरणा करताना केंद्राचा देय कर व राज्याचा देय कर किती येईल ते काढा.

10★. खालील एका वस्तूच्या वितरण व्यवसाय साखळीतील कर बीजक A, B, C मधील वस्तू व सेवा कराच्या आकारणीचे गणन करा. GST दर 12% आहे.



(1) उत्पादकाने, वितरकाने व किरकोळ व्यापाऱ्याने (रिटेलरने) शासनाकडे किती रुपये वस्तू व सेवा कर कोणत्या शीर्षकाखाली भरला हे दाखवणारे विवरणपत्रक तयार करा.

(2) अंततः ग्राहकास ती वस्तू किती रुपयांना पडेल?

(3) या साखळीतील B2B व B2C बीजके कोणती ते लिहा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4 B

1. खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी अचूक पर्याय निवडा.

(1) दर्शनी किंमत 100 रुपये असलेल्या शेअरचा बाजारभाव 75 रुपये आहे. तर खालीलपैकी कोणते वाक्य योग्य आहे?

(A) हा शेअर 175 रुपये अधिमूल्यावर आहे. (B) हा शेअर 25 रुपये अवमूल्यावर आहे.

(C) हा शेअर 25 रुपये अधिमूल्यावर आहे. (D) हा शेअर 75 अवमूल्यावर आहे.

(2) 50% लाभांश घोषित केलेल्या कंपनीच्या 10 रुपये दर्शनी किमतीच्या एका शेअरवर किती लाभांश मिळेल?

(A) 50 रुपये (B) 5 रुपये (C) 500 रुपये (D) 100 रुपये

(3) एका म्युच्युअल फंडाचे एका युनिटचे नक्त मूल्य 10.65 रुपये असेल तर 500 युनिट्सच्या खरेदीसाठी लागणारी रक्कम किती रुपये असेल?

(A) 5325 (B) 5235 (C) 532500 (D) 53250

(4) दलालीवर वस्तू व सेवा कराचा दर . . . आहे.

(A) 5% (B) 12% (C) 18% (D) 28%

(5) शेअर्स विकत घेताना एका शेअरची किंमत काढण्यासाठी बाजारभाव, दलाली व GST यांची ....

(A) बेरीज करावी लागते. (B) वजाबाकी करावी लागते.

(C) गुणाकार करावा लागतो. (D) भागाकार करावा लागतो.

2. 100 रुपये दर्शनी किमतीचा शेअर 30 रुपये अधिमूल्यावर खरेदी केला. दलालीचा दर 0.3% आहे, तर एका शेअरची खरेदीची किंमत काढा.

3. प्रशांतने 100 रुपये दर्शनी किमतीचे 50 शेअर 180 रुपये बाजारभावाने खरेदी केले. त्यावर कंपनीने 40% लाभांश दिला, तर प्रशांतच्या गुंतवणुकीवरील परताव्याचा दर काढा.

4. जर 100 रुपये दर्शनी किमतीचे 300 शेअर्स 30 रुपये अवमूल्यावर विकले, तर किती रुपये मिळतील?

5. 100 दर्शनी किमतीच्या व 120 रुपये बाजारभावाच्या शेअर्समध्ये 60,000 रुपये गुंतवले, तर किती शेअर्स मिळतील?

6. श्रीमती मीता अग्रवाल यांनी 100 रुपये बाजारभावाने 10,200 रुपयांचे शेअर्स खरेदी केले. त्यांपैकी 60 शेअर्स 125 रुपये बाजारभावाने विकले व उरलेले शेअर्स 90 रुपये बाजारभावाने विकले. प्रत्येक वेळी दलाली 0.1% दराने दिली, तर या व्यवहारात त्यांना फायदा झाला की तोटा? किती रुपये?

7. शेअर बाजारात 100 रुपये दर्शनी किमतीचे दोन कंपन्यांचे शेअर्स खालीलप्रमाणे बाजारभाव व लाभांशाच्या दराने आहेत, तर कोणत्या कंपनीतील गुंतवणूक फायदेशीर होईल हे सकारण लिहा.
(1) कंपनी A - 132 रुपये 12% (2) कंपनी B - 144 रुपये 16%

8.★ श्री.आदित्य संघवी यांनी 100 रुपये दर्शनी किमतीचे शेअर्स 50 रुपये बाजारभाव असताना 50118 रुपये गुंतवून खरेदी केले. या व्यवहारात त्यांनी 0.2% दलाली दिली. दलालीवर 18% दराने GST दिला, तर त्यांना 50118 रुपयांत किती शेअर्स मिळतील?

9.★ श्री. बाटलीवाला यांनी एका दिवसात एकूण 30,350 रुपये किमतीच्या शेअर्सची विक्री केली व 69,650 रुपये किमतीच्या शेअर्सची खरेदी केली. त्या दिवशीच्या एकूण खरेदी-विक्रीवर 0.1% दराने दलाली व दलालीवर 18% वस्तू व सेवा कर दिला. तर या व्यवहारात दलाली आणि वस्तू व सेवा करावरील एकूण खर्च काढा.

10.★ श्रीमती अरुणा ठक्कर यांनी एका कंपनीचे 100 रुपये दर्शनी किमतीचे 100 शेअर्स 1200 रुपये बाजारभावाने विकत घेतले. प्रतिशेअर 0.3% दलाली व दलालीवर 18% GST दिला, तर
(1) शेअर्ससाठी एकूण गुंतवणूक किती रुपये केली? (2) गुंतवणुकीवर दलाली किती दिली?
(3) दलालीवरील जीएसटी काढा.
(4) 100 शेअर्ससाठी एकूण किती रुपये खर्च झाले?

11.★ श्रीमती अनघा दोशी यांनी 100 रुपये दर्शनी किमतीचे 660 रुपये बाजारभावाचे 22 शेअर्स घेतले. तर त्यांनी एकूण किती रुपये गुंतवणूक केली? त्या शेअर्सवरती 20% लाभांश घेतल्यावर 650 रुपये बाजारभावाने ते विकले. प्रत्येक व्यवहारात 0.1% दलाली दिली, तर या व्यवहारांत त्यांना किती टक्के नफा किंवा तोटा झाला तो काढा. (उत्तर जवळच्या पूर्णांकात लिहा.)

4ILBY1

5 संभाव्यता

चला, शिकूया.

- संभाव्यता : ओळख
- यादृच्छिक प्रयोग व निष्पत्ती
- नमुना अवकाश व घटना
- घटनेची संभाव्यता

चला, चर्चा करूया.

शिक्षक : विद्यार्थी मित्रहो, आपल्या वर्गातील विद्यार्थिसंख्येएवढ्या चिठ्ठ्या या खोक्यात ठेवल्या आहेत. प्रत्येकाने एक चिठ्ठी उचलावी. चिठ्ठ्यांवर वेगवेगळ्या वनस्पतींची नावे लिहिली आहेत. कोणत्याही दोन चिठ्ठ्यांवर एकाच वनस्पतीचे नाव दिसणार नाही. 'तुळस' या वनस्पतीची चिठ्ठी कोणाला मिळते ते पाहू. सर्वजण हजेरी क्रमांकाप्रमाणे रांगेत उभे रहा. शेवटची चिठ्ठी उचलेपर्यंत कोणीही चिठ्ठी उघडून पहायची नाही.

अरुणा : सर, रांगेत मी पहिल्यांदा आहे, पण मी पहिल्यांदा चिठ्ठी उचलणार नाही कारण एवढ्या सर्व चिठ्ठ्यांतून, ती चिठ्ठी मलाच येईल याची शक्यता फार कमी आहे.

झरीना : सर, रांगेत मी सर्वांत शेवटी आहे, मी शेवटी चिठ्ठी उचलणार नाही कारण 'तुळस' हे नाव असलेली चिठ्ठी बहुधा मी उचलण्यापूर्वीच उचलली गेली असेल.

थोडक्यात पहिल्या व शेवटच्या विद्यार्थ्यांना वाटत आहे, की त्यांना तुळस हे नाव असलेली चिठ्ठी मिळण्याची शक्यता फार कमी आहे.

वरील संवादामध्ये शक्यता कमी किंवा जास्त असण्याचा विचार झाला आहे.

शक्यता वर्तवण्यासंबंधी आपण दैनंदिन संभाषणात पुढील शब्दही वापरतो.

- संभवतः
- बहुतेक
- अशक्य
- निश्चित
- जवळपास
- 50 – 50

भविष्यातील शक्यतांविषयीची खालील विधाने पाहा.

- बहुतेक आजपासून पाऊस पडेल.
- महागाई वाढण्याचा संभव खूप आहे.
- भारताला पुढील क्रिकेट सामन्यात हरवणे अशक्य आहे.
- निश्चितच मला प्रथम श्रेणी मिळणार.
- बालकाला वेळेवर पोलिओचे डोस दिले, तर त्याला पोलिओ होण्याचा संभव नसतो.

सोबतच्या चित्रात क्रिकेटच्या सामन्यासाठी नाणेफेक चालू आहे.

त्यामध्ये कोणकोणत्या शक्यता आहेत?

किंवा

म्हणजेच, नाणेफेकीची फलिते असतात.

कृती 1 : एक नाणे वर्गातील प्रत्येकाने एकदा फेकून पाहा. तुम्हांला काय आढळले?

(शिक्षक फळ्यावर खालील तक्ता तयार करतात व तो भरून घेतात.)

शक्यता	छाप (H)	काटा (T)
विद्यार्थी संख्या	. . .	. . .

कृती 2 : आता, प्रत्येकाने ते नाणे दोनदा फेकून पाहा. कोणकोणत्या शक्यता आहेत?

शक्यता	H H	HT	TH	TT
विद्यार्थी संख्या				

कृती 3 : तुमच्याजवळ असणारा फासा एकदाच फेका, वरच्या पृष्ठभागावर टिंबे येण्याच्या कोणकोणत्या शक्यता आहेत याचा विचार करा.

ही प्रत्येक शक्यता म्हणजे फासा फेकण्याचे एक - एक संभाव्य फलित आहे.

जाणून घेऊया.

यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment)

ज्या प्रयोगात सर्व संभाव्य फलिते अगोदर माहीत असतात, पण त्यांपैकी कोणत्याही फलिताबद्दल निश्चित भाकीत आपण करू शकत नाही, सर्व फलिते सत्य असण्याची शक्यता समान असते, अशा प्रयोगाला 'यादृच्छिक प्रयोग' असे म्हणतात. उदाहरणार्थ नाणे फेकणे, फासा फेकणे, 1 ते 50 संख्या लिहिलेल्या कार्डांच्या संचातून एक कार्ड काढणे, खेळातील पत्त्यांच्या योग्य रीतीने पिसलेल्या पत्त्यांमधून एक पत्ता काढणे इत्यादी.

निष्पत्ती (Outcome)

यादृच्छिक प्रयोगाच्या फलिताला 'निष्पत्ती' म्हणतात.

उदाहरणार्थ, (1) एक नाणे फेकणे या यादृच्छिक प्रयोगाच्या दोनच निष्पत्ती आहेत.

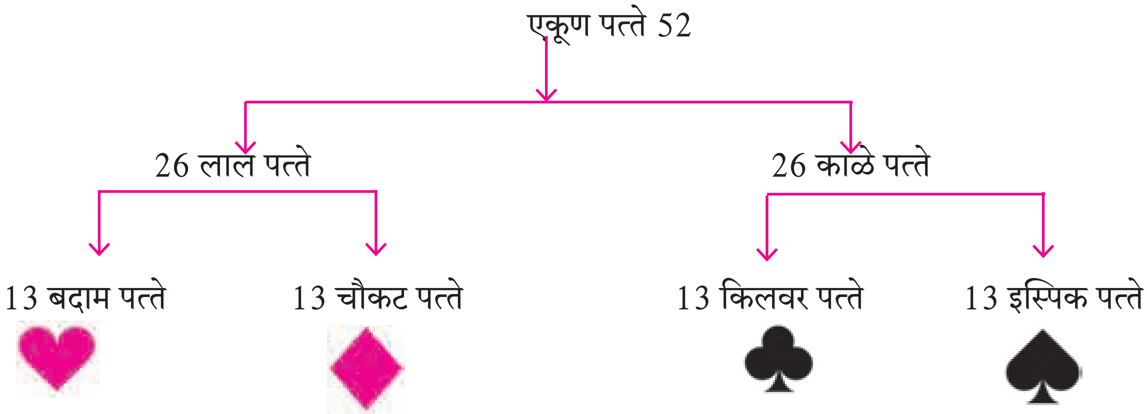
छाप (H) किंवा काटा (T)

(2) एक फासा फेकणे या यादृच्छिक प्रयोगात त्याच्या 6 पृष्ठभागांवर असणाऱ्या टिंबांच्या संख्येवरून 6 निष्पत्ती शक्य आहेत.

1 किंवा 2 किंवा 3 किंवा 4 किंवा 5 किंवा 6

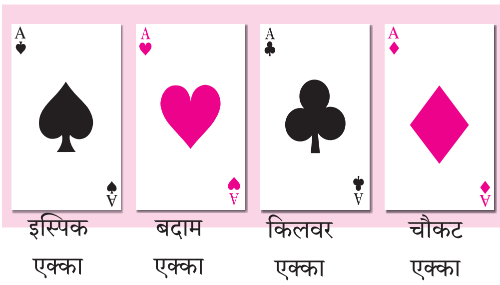
(3) 1 ते 50 संख्या लिहिलेल्या कार्डांच्या संचातून एक कार्ड काढणे, या प्रयोगात 50 निष्पत्ती शक्य आहेत.

(4) योग्य रीतीने पिसलेल्या खेळातील पत्त्यांमधून एक पत्ता काढणे या यादृच्छिक प्रयोगात 52 पत्ते असतात, ते खालीलप्रमाणे दाखवले आहेत.



पत्त्यांच्या कॅटमध्ये चौकट, बदाम, किलवर आणि इस्पिक असे चार संच असतात. प्रत्येक संचात राजा, राणी, गुलाम, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 आणि एक्का असे 13 पत्ते असतात.

राजा, राणी, गुलाम यांना चित्रयुक्त पत्ते म्हणतात. प्रत्येक कॅटमध्ये राजाच्या चित्राचे चार, राणीच्या चित्राचे चार आणि गुलामाच्या चित्राचे चार असे 12 चित्रयुक्त पत्ते असतात.



समसंभाव्य निष्पत्ती (Equally likely outcomes)

जर आपण एक फासा फेकला, तर फाशाच्या वरच्या पृष्ठभागावर 1, 2, 3, 4, 5, 6 यांपैकी एक संख्या मिळण्याची शक्यता समान असते. म्हणजेच त्या समसंभाव्य निष्पत्ती असतात. तथापि, जर फासा असा असेल की विशिष्ट अंकच वरच्या पृष्ठभागावर वारंवार मिळतो तर तो फासा असमतोल (biased) असतो. अशा बाबतीत निष्पत्ती समसंभाव्य नसतात.

यापुढे आपण यादृच्छिक प्रयोगांत वापरलेल्या बाबी या समतोल (fair किंवा unbiased) आहेत, असे गृहीत धरणार आहोत.

दिलेल्या निष्पत्तींपैकी कोणतीही निष्पत्ती प्राधान्य क्रमाने मिळत नसेल किंवा सर्व निष्पत्तींची समान शक्यता असेल, तर त्या समसंभाव्य निष्पत्ती आहेत असे म्हणतात. उदा. जर आपण एक नाणे फेकले तर छाप किंवा काटा मिळण्याची निष्पत्ती समसंभाव्य असते. तसेच 1 ते 6 संख्या विविध पृष्ठांवर असणारा फासा फेकला तर त्यांतील कोणताही एक अंक वरच्या पृष्ठावर येण्याची शक्यता तपासा. येथे सगळ्या निष्पत्ती समसंभाव्य आहेत.

सरावसंच 5.1

1. खालील प्रत्येक बाबतीत, किती शक्यता आहेत?

(1) वनिताला महाराष्ट्रातील खालील प्रेक्षणीय ठिकाणांची माहिती आहे. त्यांतील एका ठिकाणी मे महिन्याच्या सुट्टीत ती जाणार आहे.

अजिंठा, महाबळेश्वर, लोणार सरोवर, ताडोबा अभयारण्य, आंबोली, रायगड, माथेरान, आनंदवन.

(2) एका आठवड्यातील वार यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचा आहे.

(3) पत्त्यांच्या कॅटमधून एक पत्ता यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचा आहे.

(4) प्रत्येक कार्डावर एक संख्या याप्रमाणे 10 पासून 20 पर्यंतच्या संख्या लिहिल्या आहेत. त्यांतून एक कार्ड यादृच्छिक पद्धतीने निवडायचे आहे.

विचार करूया.

खालील प्रयोगांपैकी कोणत्या प्रयोगात अपेक्षित निष्पत्ती मिळण्याची शक्यता जास्त आहे?

(1) एक फासा टाकून 1 मिळणे.

(2) एक नाणे फेकून छाप मिळणे.

जाणून घेऊया.

नमुना अवकाश (Sample Space)

यादृच्छिक प्रयोगात, शक्य असणाऱ्या सर्व निष्पत्तींच्या संचाला नमुना अवकाश म्हणतात. नमुना अवकाश 'S' किंवा 'Ω' (हे ग्रीक अक्षर असून उच्चार ओमेगा आहे.) या चिन्हाने संचाच्या स्वरूपात दर्शवतात. नमुना अवकाशातील प्रत्येक घटकाला 'नमुना घटक' म्हणतात. नमुना अवकाश 'S' मधील एकूण घटकांची संख्या n(S) ने दर्शवतात. जर n(S) सांत असेल तर त्याला सांत नमुना अवकाश म्हणतात. सांत नमुना अवकाशाची काही उदाहरणे पुढील सारणीत दिलेली आहेत.

अ. क्र.	यादृच्छिक प्रयोग	नमुना अवकाश	नमुना घटकांची संख्या
1	एक नाणे फेकणे	$S = \{H, T\}$	$n(S) = 2$
2	दोन नाणी फेकणे	$S = \{HH, HT, TH, TT\}$	$n(S) = \boxed{}$
3	तीन नाणी फेकणे	$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$	$n(S) = 8$
4	एक फासा टाकणे	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$n(S) = \boxed{}$
5	दोन फासे टाकणे	$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$ $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$ $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$ $(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$ $(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$ $(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$	$n(S) = 36$
6	1 ते 25 संख्या लिहिलेल्या कार्डांच्या संचातून एक कार्ड काढणे.	$S = \{1, 2, 3, 4, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, 25\}$	$n(S) = \boxed{}$
7	योग्य रीतीने पिसलेल्या बावन्न पत्त्यांच्या कॅट मधून एक पत्ता काढणे.	चौकट : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा इस्पिक : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा बदाम : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा किलवर : एक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, राणी, राजा	$n(S) = 52$

हे लक्षात ठेवूया.

(i) एक नाणे दोनदा फेकणे किंवा दोन नाणी एकाच वेळी फेकणे या दोन्ही यादृच्छिक प्रयोगात नमुना अवकाश सारखाच असतो. हेच तीन नाण्यांच्या बाबतींतही सत्य असते.

(ii) एक फासा दोनदा फेकणे किंवा दोन फासे एकाच वेळी फेकणे या दोन्हींसाठी नमुना अवकाश सारखाच असतो.

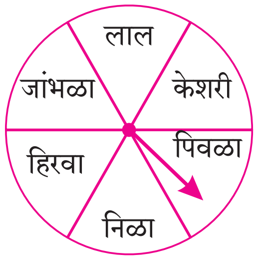
सरावसंच 5.2

1. खालील प्रत्येक प्रयोगासाठी नमुना अवकाश 'S' व त्यातील नमुना घटकांची संख्या $n(S)$ लिहा.

(1) एक फासा व एक नाणे एकाच वेळी फेकणे

(2) 2, 3, 5 या अंकांपासून, अंकांची पुनरावृत्ती न करता, दोन अंकी संख्या तयार करणे.

2. सहा रंगांच्या तबकडीवरील बाण फिरवल्यावर तो कोणत्या रंगावर स्थिर होतो हे पाहणे.



MARCH - 2019

M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

3. वर्ष 2019 च्या मार्च महिन्यातील 5 च्या पटीत येणाऱ्या तारखेचा वार मिळवणे. (सोबतचे कॅलेंडरचे पान पाहा.)

4. दोन मुलगे (B_1, B_2) व दोन मुली (G_1, G_2) यांच्यातून दोघांची एक रस्ता सुरक्षा समिती बनवायची आहे. तर यासाठी नमुना अवकाश लिहिण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

(1) दोन मुलांची समिती = $\boxed{}$ (2) दोन मुलींची समिती = $\boxed{}$

(3) एक मुलगा व एक मुलगी यांनी मिळून तयार होणारी समिती = $\boxed{B_1 G_1}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

(4) ∴ नमुना अवकाश = {..., ..., ..., ..., ..., ...}

जाणून घेऊया.

घटना (Event)

विशिष्ट अट पूर्ण करणाऱ्या निष्पत्तीला अपेक्षित निष्पत्ती (favourable outcome) म्हणतात.

नमुना अवकाश दिला असेल तर अपेक्षित निष्पत्तींच्या संचाला '**घटना**' म्हणतात. घटना हा नमुना अवकाशाचा उपसंच असतो.

या घटना इंग्रजीतील पहिल्या लिपितील A, B, C, D यांसारख्या अक्षरांनी दर्शवतात.

उदा. दोन नाणी फेकली असता समजा A ही घटना, कमीत कमी एक काटा मिळण्याची आहे.

येथे अपेक्षित निष्पत्ती खालीलप्रमाणे,

$$A = \{TT, TH, HT\}$$

घटना A मधील घटकांची संख्या n(A) ने दर्शवतात. येथे n(A) = 3

अधिक माहितीसाठी घटनेचे प्रकार

(i) निश्चित घटना (Certain event)	(iv) पूरक घटना (Complement of an event)
(ii) अशक्य घटना (Impossible event)	(v) परस्पर अपवर्जी घटना (Mutually exclusive event)
(iii) एकघटकी घटना (Simple event)	(vi) सर्वसमावेशी घटना (Exhaustive event)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) दोन नाणी एकाच वेळी फेकणे या प्रयोगासाठी नमुना अवकाश 'S' लिहा. त्यातील नमुना घटकांची संख्या n(S) लिहा. या प्रयोगासंबंधी खालील घटना संच स्वरूपात लिहा आणि त्यातील नमुना घटकांची संख्या लिहा.

(i) घटना A साठी अट, कमीत कमी एक छाप मिळण्याची आहे.

(ii) घटना B साठी अट, एकच छाप मिळण्याची आहे.

(iii) घटना C साठी अट, जास्तीत जास्त एक काटा मिळण्याची आहे.

(iv) घटना D साठी अट, एकही छाप न मिळण्याची आहे.

उकल : दोन नाणी एकाच वेळी फेकली असता,

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ $\quad$ $n(S) = 4$

(i) घटना A साठी अट, कमीत कमी एक छाप मिळण्याची आहे.

$A = \{HH, HT, TH\}$ $\quad$ $n(A) = 3$

(ii) घटना B साठी अट, एकच छाप मिळण्याची आहे.

$B = \{ HT, TH\}$ $\quad$ $n(B) = 2$

(iii) घटना C साठी अट, जास्तीत जास्त एक काटा मिळण्याची आहे.

$C = \{HH, HT, TH\}$ $\quad$ $n(C) = 3$

(iv) घटना D साठी अट, एकही छाप न मिळण्याची आहे.

$D = \{TT\}$ $\quad$ $n(D) = 1$

उदा. (2) एका पिशवीत 50 कार्डे आहेत. प्रत्येक कार्डावर 1 ते 50 यांपैकी एक संख्या लिहिली आहे. त्यांतून कोणतेही एक कार्ड यादृच्छिक पद्धतीने काढले तर नमुना अवकाश 'S' लिहा.

घटना A, B व त्यांतील नमुना घटकांची संख्या लिहा.

(i) घटना A साठी अट, कार्डावरील संख्येला 6 ने भाग जाणे, ही आहे.

(ii) घटना B साठी अट, कार्डावरची संख्या पूर्ण वर्ग असणे, ही आहे.

उकल : नमुना अवकाश, $S = \{1, 2, 3, \ldots, 49, 50\}$ $\quad$ $n(S) = 50$

(i) घटना A साठी अट, कार्डावरील संख्येला 6 ने भाग जाणे ही आहे.

$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$, $\quad$ $n(A) = 8$

(ii) घटना B साठी अट, कार्डावरची संख्या पूर्ण वर्ग असणे ही आहे.

$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$, $\quad$ $n(B) = 7$

उदा. (3) 3 मुले व 2 मुली यांतून दोन विद्यार्थ्यांची वृक्षसंवर्धन समिती खालील अटींप्रमाणे बनवायची आहे. नमुना अवकाश 'S' व नमुना घटकांची संख्या लिहा. तसेच खालील घटना संच स्वरूपात लिहा आणि नमुना घटकांची संख्या लिहा.

(i) घटना A साठी अट, समितीत कमीत कमी एक मुलगी असणे, ही आहे.

(ii) घटना B साठी अट, समितीत एक मुलगा व एक मुलगी असणे, ही आहे.

(iii) घटना C साठी अट, समितीत फक्त मुलगे असणे, ही आहे.

(iv) घटना D साठी अट, समितीत जास्तीत जास्त एक मुलगी असणे, ही आहे.

उकल : समजा, B_1, B_2, B_3 हे तीन मुलगे व G_1, G_2 या दोन मुली आहेत.

या मुला-मुलींतून दोन सभासदांची स्वच्छता समिती बनवायची आहे.

$S = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $\quad n(S) = 10$

(i) घटना A साठी अट समितीत कमीत कमी एक मुलगी असणे ही आहे.

$A = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $\quad n(A) = 7$

(ii) घटना B साठी अट समितीत एक मुलगा व एक मुलगी असणे ही आहे.

$B = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $\quad n(B) = 6$

(iii) घटना C साठी अट समितीत फक्त मुलगे असणे ही आहे.

$C = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$ $\quad n(C) = 3$

(iv) घटना D साठी अट समितीत जास्तीत जास्त एक मुलगी असणे ही आहे.

$D = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $\quad n(D) = 9$

उदा. (4) दोन फासे फेकले असता नमुना अवकाश 'S' व नमुना अवकाशातील घटकांची संख्या n(S) लिहा.

खालील अटी पूर्ण करणारी घटना संच स्वरूपात लिहा आणि त्यातील नमुना घटकांची संख्या लिहा.

(i) वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज मूळ संख्या असेल.

(ii) वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज 5 च्या पटीत आहे.

(iii) वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज 25 आहे.

(iv) पहिल्या फाशावर मिळालेला अंक दुसऱ्या फाशावरील अंकापेक्षा लहान आहे.

उकल : नमुना अवकाश,

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$$
$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$$
$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$$
$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$$
$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$$
$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \qquad n(S) = 36$$

(i) समजा, वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज मूळ संख्या असणे, ही घटना E ची अट आहे.

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4),$$
$$(4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\} \qquad n(E) = 15$$

(ii) वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज 5 च्या पटीत असणे, ही घटना F ची अट आहे.

$$F = \{ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4) \} \qquad n(F) = 7$$

(iii) घटना G साठी अट वरच्या पृष्ठभागावर येणाऱ्या अंकांची बेरीज 25 असणे, ही आहे.

$$G = \{ \ \} = \phi \qquad n(G) = 0$$

(iv) घटना H साठी अट पहिल्या फाशावर मिळालेला अंक दुसऱ्या फाशावरील अंकापेक्षा लहान असणे ही आहे.

$$H = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$$
$$(3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6) \} \qquad n(H) = 15$$

सरावसंच 5.3

1. खालील प्रत्येक प्रयोगासाठी नमुना अवकाश 'S' त्यातील नमुना घटकांची संख्या n(S) तसेच घटना A, B, C संच स्वरूपात लिहा आणि n(A), n(B) आणि n(C) लिहा.

(1) एक फासा टाकला असता,

घटना A साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावर सम संख्या मिळणे अशी आहे.

घटना B साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावर विषम संख्या मिळणे अशी आहे.

घटना C साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावर मूळ संख्या मिळणे अशी आहे.

(2) दोन फासे एकाच वेळी टाकले असता,

घटना A साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावरील अंकांची बेरीज 6 च्या पटीत असणे अशी आहे.

घटना B साठी अट, वरच्या पृष्ठभागावरील अंकांची बेरीज कमीत कमी 10 असणे अशी आहे.

घटना C साठी अट, दोन्ही फाशांवरील अंक समान असणे अशी आहे.

(3) तीन नाणी एकाच वेळी फेकली असता,

घटना A साठी अट, कमीत कमी दोन छाप मिळणे अशी आहे.

घटना B साठी अट, एकही छाप न मिळणे अशी आहे

घटना C साठी अट, दुसऱ्या नाण्यावर छाप मिळणे अशी आहे.

(4) अंकांची पुनरावृत्ती न करता 0, 1, 2, 3, 4, 5 या अंकांपासून दोन अंकी संख्या तयार केल्या आहेत.

घटना A साठी अट, तयार झालेली संख्या सम संख्या मिळणे अशी आहे.

घटना B साठी अट, तयार झालेली संख्या 3 ने भाग जाणारी असणे अशी आहे.

घटना C साठी अट, तयार झालेली संख्या 50 पेक्षा मोठी असणे अशी आहे.

(5) तीन पुरुष व दोन स्त्रिया यांच्यातून दोघांची 'पर्यावरण समिती' बनवायची आहे.

घटना A साठी अट, समितीत कमीत कमी एक स्त्री असावी अशी आहे.

घटना B साठी अट, समितीत एक पुरुष व एक स्त्री असावी अशी आहे.

घटना C साठी अट, समितीत एकही स्त्री नसावी अशी आहे.

(6) एक नाणे व एक फासा एकाच वेळी फेकले.

घटना A साठी अट, छाप आणि विषम संख्या मिळणे अशी आहे .

घटना B साठी अट, H किंवा T आणि समसंख्या मिळणे अशी आहे.

घटना C साठी अट, फाशावरील संख्या 7 पेक्षा मोठी आणि नाण्यावर काटा मिळणे अशी आहे.

जाणून घेऊया.

घटनेची संभाव्यता (Probability of an event)

एक सोपा प्रयोग विचारात घेऊ. एका पिशवीत समान आकाराचे चार चेंडू आहेत. त्यांतील तीन चेंडू पांढरे व चौथा चेंडू काळा आहे. डोळे मिटून त्यांतील एक चेंडू काढायचा आहे.

काढलेला चेंडू पांढरा असण्याची शक्यता जास्त आहे, हे सहज कळते.

गणिती भाषेत एखाद्या अपेक्षित घटनेची शक्यता दर्शवणाऱ्या संख्येला संभाव्यता असे म्हणतात. ती पुढील सूत्र वापरून संख्येने किंवा शतमानात दर्शवतात.

एखाद्या यादृच्छिक प्रयोगासाठी नमुना अवकाश S असेल आणि A ही त्या प्रयोगासंबंधी अपेक्षित घटना असेल, तर त्या घटनेची संभाव्यता 'P(A)' अशी दर्शवतात आणि पुढील सूत्राने ठरवतात.

$$P(A) = \frac{\text{घटना 'A' मधील नमुना घटकांची संख्या}}{\text{नमुना अवकाशातील एकूण घटकांची संख्या}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

वरील प्रयोगात, 'उचललेला चेंडू पांढरा असणे' ही घटना A असेल, तर n(A) = 3, कारण पांढरे चेंडू तीन आहेत आणि एकूण चेंडू चार असल्याने n(S) = 4

$\therefore$ उचललेला चेंडू पांढरा असणे, याची संभाव्यता $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{4}$

तसेच 'उचललेला चेंडू काळा असणे' ही घटना B असेल, तर n(B) = 1 $\therefore$ $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एक नाणे फेकले असता, खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(i) छाप मिळणे. (ii) काटा मिळणे.

उकल : समजा, 'S' नमुना अवकाश आहे.

$S = \{H, T\}$ $\qquad n(S) = 2$

(i) समजा, घटना A साठी अट छाप मिळण्याची आहे.

$A = \{H\}$ $\qquad n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

(ii) समजा, घटना B साठी अट काटा मिळण्याची आहे.

$B = \{T\}$ $\qquad n(B) = 1$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

उदा. (2) एक फासा टाकला असता खालील प्रत्येक अट पूर्ण करणाऱ्या घटनेची संभाव्यता काढा.

(i) वरच्या पृष्ठभागावर मूळ संख्या मिळणे. (ii) वरच्या पृष्ठभागावर मिळालेली संख्या सम असणे.

उकल : समजा, 'S' नमुना अवकाश आहे.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\qquad n(S) = 6$

(i) घटना A : वरच्या पृष्ठभागावर मूळ संख्या मिळणे.

$A = \{2, 3, 5\}$ $\qquad n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) घटना B : वरच्या पृष्ठभागावर सम संख्या मिळणे.

$B = \{2, 4, 6\}$ $\quad\quad$ $n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

उदा. (3) योग्य रीतीने पिसलेल्या 52 पत्त्यांच्या कॅटमधून एक पत्ता काढला, तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(i) तो पत्ता लाल असणे. $\quad\quad$ (ii) तो पत्ता चित्रयुक्त असणे.

उकल : समजा, 'S' नमुना अवकाश आहे. $\quad\quad$ $\therefore n(S) = 52$

(i) घटना A : काढलेला पत्ता लाल असणे.

एकूण लाल पत्ते = 13 चौकट पत्ते + 13 बदाम पत्ते

$n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) घटना B : काढलेला पत्ता चित्रयुक्त असणे.

कॅटमध्ये राजा, राणी आणि गुलाम हे चित्रयुक्त पत्ते असतात. एकूण 12 चित्रयुक्त पत्ते असतात.

$\therefore n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

उदा. (4) एका खोक्यात 5 स्ट्रॉबेरीची, 6 कॉफीची व 2 पेपरमिंटची चॉकलेट्स आहेत.त्या खोक्यातून एक चॉकलेट काढले, तर – (i) काढलेले चॉकलेट कॉफीचे असणे, आणि

(ii) काढलेले चॉकलेट पेपरमिंटचे असणे यांची संभाव्यता काढा.

उकल : समजा 'S' नमुना अवकाश आहे. $\quad\quad$ $\therefore n(S) = 5 + 6 + 2 = 13$

घटना A : काढलेले चॉकलेट कॉफीचे असणे

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

घटना B : काढलेले चॉकलेट पेपरमिंटचे असणे

$n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$

हे लक्षात ठेवूया.

- संभाव्यता सांगताना किंवा लिहिताना अपूर्णांकाचा किंवा शतमानाचा वापर केला जातो.
- कोणत्याही घटनेची संभाव्यता ही 0 ते 1 किंवा 0% ते 100% असते.

  समजा, घटना E असेल, तर $0 \leq P(E) \leq 1$ किंवा $0\ \% \leq P(E) \leq 100\ \%$

  उदा. $\frac{1}{4}$ ही संभाव्यता 25% अशी लिहिता येते.
- पाठाच्या सुरुवातीला वर्गातील मुलांना वनस्पतींच्या नावांच्या चिठ्ठ्या उचलायला सांगितले, त्या वेळी तुळस हे नाव असलेली चिठ्ठी विद्यार्थ्याला मिळण्याच्या संभाव्यतेचा विचार केला. एकाच चिठ्ठीवर तुळस हे नाव आहे. जर 40 विद्यार्थी प्रत्येकी एक चिठ्ठी उचलणार असतील तर प्रत्येकाला तुळस हे नाव लिहिलेली चिठ्ठी येण्याची संभाव्यता $\frac{1}{40}$ आहे. पहिल्याने, तसेच मध्ये कोणीही किंवा शेवटी चिठ्ठी उचलणाऱ्याला ती चिठ्ठी मिळण्याची संभाव्यता तेवढीच आहे.

सरावसंच 5.4

1. दोन नाणी फेकली असता खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

   (1) कमीत कमी एक छाप मिळणे. (2) एकही छाप न मिळणे.

2. दोन फासे एकाच वेळी टाकले असता खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

   (1) पृष्ठभागावरील अंकांची बेरीज कमीत कमी 10 असणे.

   (2) पृष्ठभागावरील अंकांची बेरीज 33 असणे.

   (3) पहिल्या फाशावरील अंक दुसऱ्या फाशावरील अंकापेक्षा मोठा असणे.

3. एका पेटीत 15 तिकिटे आहेत. प्रत्येक तिकीटावर 1 ते 15 पैकी एक संख्या लिहिलेली आहे. त्या पेटीतून एक तिकीट यादृच्छिक पद्धतीने काढले तर तिकिटावरची संख्या ही

   (1) सम संख्या असणे. (2) संख्या 5 च्या पटीत असणे, या घटनेची संभाव्यता काढा.

4. अंकांची पुनरावृत्ती न करता 2, 3, 5, 7, 9 या अंकांपासून दोन अंकी संख्या तयार केली, तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

   (1) ती संख्या विषम असेल. (2) ती संख्या 5 च्या पटीत असेल.

5. योग्य रीतीने पिसलेल्या 52 पत्त्यांच्या कॅटमधून एक पत्ता काढला तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

   (1) एक्का मिळणे. (2) इस्पिक पत्ता मिळणे.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह – 5

1. खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी अचूक पर्याय निवडा.

(1) खालील पर्यायांपैकी कोणती संभाव्यता असू शकणार नाही?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15 % D) 0.7

(2) एक फासा फेकला तर वरच्या पृष्ठभागावर 3 पेक्षा कमी संख्या येण्याची संभाव्यता ..... असते.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ D) 0

(3) 1 ते 100 यांमधून निवडलेली संख्या मूळ संख्या असण्याची संभाव्यता . . . . . असेल.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{13}{50}$

(4) प्रत्येक कार्डावर एक संख्या, याप्रमाणे 1 ते 40 या संख्या लिहिलेली 40 कार्डे एका पिशवीत आहेत. त्यांपैकी एक कार्ड उचलले असता त्या कार्डावरची संख्या 5 च्या पटीत असण्याची संभाव्यता ..... असेल.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

(5) जर $n(A) = 2$, $P(A) = \frac{1}{5}$, तर $n(S) = ?$

(A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

2. बास्केटबॉल खेळाडू जॉन, वसीम व आकाश एका ठरावीक जागेवरून बास्केटमध्ये बॉल टाकण्याचा सराव करत होते. बास्केटमध्ये बॉल पडण्याची जॉनची संभाव्यता $\frac{4}{5}$, वसीमची 0.83 व आकाशची 58% आहे, तर कोणाची संभाव्यता सर्वांत जास्त आहे?

3. एका हॉकी संघात 6 बचाव करणारे, 4 आक्रमक व एक गोलरक्षक असे खेळाडू आहेत. यादृच्छिक पद्धतीने त्यांतील एक खेळाडू संघनायक म्हणून निवडायचा आहे. तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) गोलरक्षक हा संघनायक असणे.

(2) बचाव करणारा खेळाडू संघनायक असणे.

4. जोसेफने एका टोपीत प्रत्येक कार्डावर इंग्रजी वर्णमालेतील एक अक्षर याप्रमाणे सर्व अक्षरांची 26 कार्डे ठेवली आहेत. त्यांतून अक्षराचे एक कार्ड यादृच्छिक पद्धतीने काढायचे आहे, तर काढलेले अक्षर स्वर असण्याची संभाव्यता काढा.

5. फुगेवाला 2 लाल, 3 निळे आणि 4 हिरवे अशा रंगीत फुग्यांतील एक फुगा प्रणालीला यादृच्छिक पद्धतीने देणार आहे. तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) मिळालेला फुगा लाल असणे.

(2) मिळालेला फुगा निळा असणे.

(3) मिळालेला फुगा हिरवा असणे.

6. एका खोक्यात 5 लाल पेनं, 8 निळी पेनं आणि 3 हिरवी पेनं आहेत. यादृच्छिक पद्धतीने ऋतुजाला एक पेन काढायचे आहे. तर काढलेले पेन निळे असण्याची संभाव्यता काढा.

7. एका फाशाची सहा पृष्ठे खालीलप्रमाणे आहेत.

A	B	C	D	E	A

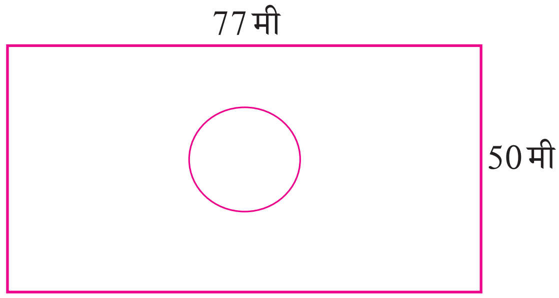
हा फासा एकदाच टाकला तर पुढील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) वरच्या पृष्ठभागावर 'A' मिळणे. (2) वरच्या पृष्ठभागावर 'D' मिळणे.

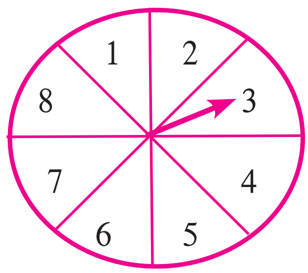
8. एका खोक्यात 30 तिकिटे आहेत. प्रत्येक तिकिटावर 1 ते 30 पैकी एकच संख्या लिहिली आहे. त्यांतून कोणतेही एक तिकीट यादृच्छिक पद्धतीने काढले तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) तिकिटावरील संख्या विषम असणे. (2) तिकिटावरील संख्या पूर्ण वर्ग असणे.

9. एका बागेची लांबी व रुंदी अनुक्रमे 77 मी व 50 मी आहे. बागेत 14 मीटर व्यासाचे तळे आहे. बागेजवळील इमारतीच्या गच्चीवर वाळत घातलेला टॉवेल वाऱ्यामुळे उडून बागेत पडला. तर तो बागेतील तळ्यात पडला असण्याची संभाव्यता काढा.



10. संधीच्या एका खेळामध्ये 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 यांपैकी एका अंकावर बाण स्थिरावतो आणि त्या समसंभाव्य निष्पत्ती आहेत. खालील घटनांची संभाव्यता काढा.



(1) तो बाण 8 या अंकावर स्थिरावणे.

(2) तो बाण विषम अंकावर स्थिरावणे.

(3) बाणाने दर्शवलेली संख्या 2 पेक्षा मोठी असणे.

(4) बाणाने दर्शवलेली संख्या 9 पेक्षा लहान असणे.

11. प्रत्येक कार्डावर एक याप्रमाणे 0 ते 5 या पूर्णांक संख्या लिहून तयार केलेली सहा कार्डे खोक्यात ठेवली आहेत. तर खालील प्रत्येक घटनेची संभाव्यता काढा.

(1) काढलेल्या कार्डावरील संख्या ही नैसर्गिक संख्या असणे.

(2) काढलेल्या कार्डावरील संख्या 1 पेक्षा लहान असणे.

(3) काढलेल्या कार्डावरील संख्या ही पूर्ण संख्या असणे.

(4) काढलेल्या कार्डावरील संख्या 5 पेक्षा मोठी असणे.

12. एका बॅगेत 3 लाल, 3 पांढरे व 3 हिरवे चेंडू आहेत. बॅगेतून 1 चेंडू यादृच्छिक पद्धतीने काढला असता खालील प्रत्येक घटनेची संभाव्यता काढा.

(1) काढलेला चेंडू लाल असणे. (2) काढलेला चेंडू लाल नसणे.

(3) काढलेला चेंडू लाल किंवा पांढरा असणे.

13. प्रत्येक कार्डावर एक याप्रमाणे mathematics या शब्दातील सर्व अक्षरे लिहिली आणि ती कार्डे पालथी ठेवली. त्यांतून एक कार्ड उचलल्यास ते अक्षर 'm' असण्याची संभाव्यता काढा.

14. एका शाळेतील 200 विद्यार्थ्यांपैकी 135 विद्यार्थ्यांना कबड्डी हा खेळ आवडतो व इतरांना हा खेळ आवडत नाही. सर्व विद्यार्थ्यांतून 1 विद्यार्थी निवडला तर त्याला कबड्डी हा खेळ आवडत नसण्याची संभाव्यता काढा.

15.★ 0, 1, 2, 3, 4 यांपैकी अंक घेऊन दोन अंकी संख्या तयार करायची आहे. अंकांची पुनरावृत्ती केलेली चालेल तर खालील घटनांची संभाव्यता काढा.

(1) ती संख्या मूळ असणे. (2) ती संख्या 4 च्या पटीत असणे.

(3) ती संख्या 11 च्या पटीत असणे.

16.★ एका फाशाच्या पृष्ठभागावर 0, 1, 2, 3, 4, 5, या संख्या आहेत. हा फासा दोनदा फेकला, तर वरच्या पृष्ठांवर मिळालेल्या संख्यांचा गुणाकार शून्य असण्याची संभाव्यता काढा.

17. खालील कृती करा –

कृती I : तुमच्या वर्गाचा एकूण पट n(S) = $\boxed{}$

वर्गातील चश्मा वापरणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या n(A) = $\boxed{}$

सर्व विद्यार्थ्यांमधून चश्मा घालणारा एक विद्यार्थी यादृच्छिक पद्धतीने निवडण्याची संभाव्यता P(A) = $\boxed{}$

सर्व विद्यार्थ्यांमधून चश्मा न घालणारा एक विद्यार्थी यादृच्छिक पद्धतीने निवडण्याची संभाव्यता P(B) = $\boxed{}$

कृती II : नमुना अवकाश स्वत: ठरवून खालील चौकटी भरा.

नमुना अवकाश

↓

S = {   }

↓

n(S) = $\boxed{}$

घटना A साठी अट 'सम संख्या मिळणे' ही आहे.

↓

A = {   }

↓

n(A) = $\boxed{}$

$$P(A) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

4IV7ZN

6 सांख्यिकी

चला, शिकूया.

- **केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे – वर्गीकृत वारंवारता सारणीवरून मध्य, मध्यक, बहुलक.**
- **सांख्यिक माहितीचे आलेखांद्‌वारे सादरीकरण – आयतालेख, वारंवारता बहुभुज, वृत्तालेख.**

मानवी जीवनात सांख्यिकी अनेक शाखांत उपयुक्त ठरते जसे, शेती, अर्थशास्त्र, वाणिज्य, औषधशास्त्र वनस्पतिशास्त्र, जैवतंत्रज्ञान, भौतिकशास्त्र, रसायनशास्त्र, शिक्षणशास्त्र, समाजशास्त्र, व्यवस्थापन इत्यादी. एखाद्या प्रयोगानंतर मिळणाऱ्या निष्पत्तींच्या अनेक शक्यता असतात. जेव्हा त्यांची शक्यता तपासायची असते, तेव्हा मोठ्या प्रमाणावर प्रयोग करून, सर्व बाबतींत व्यवस्थित नोंदी केल्या जातात. या नोंदींचा उपयोग करून विविध निष्पत्तींच्या संभाव्यता तपासता येतात. यासाठी संख्याशास्त्रात म्हणजेच सांख्यिकीत नियम तयार केले आहेत.

फ्रान्सिस गाल्टन (1822-1911) या ब्रिटिश शास्त्रज्ञाने संख्याशास्त्रात मूलभूत काम केले. ते प्रश्नावली तयार करून तिचे वाटप अनेक लोकांमध्ये करत असत व ती भरून देण्यास विनंती करत असत. या रीतीने खूप लोकांची माहिती गोळा करून त्यांची पूर्वपीठिका, आर्थिक स्थिती, आवडी-निवडी, आरोग्य इत्यादींची मोठ्या प्रमाणावर नोंद करत असत. वेगवेगळ्या लोकांच्या बोटांचे ठसे वेगवेगळे असतात हे माहीत झाले होते. गाल्टन यांनी अनेक लोकांच्या बोटांचे ठसे तपासून त्यांचे वर्गीकरण करण्याची पद्‌धत ठरवली. संख्याशास्त्राचा उपयोग करून दोन वेगळ्या व्यक्तींच्या बोटांचे ठसे सारखे असण्याची शक्यता जवळपास शून्य असते हे दाखवले. त्यामुळे बोटांच्या ठशांवरून एखाद्या व्यक्तीची ओळख पटवणे शक्य झाले. गुन्हेगारांना शोधण्यासाठी ही पद्‌धत न्यायालयातही मान्य झाली. प्राण्यांच्या व मानवाच्या अनुवंशशास्त्रात त्यांनी खूप काम केले.

फ्रान्सिस गाल्टन

जरा आठवूया.

सर्वेक्षणातून मिळालेल्या सांख्यिक सामग्रीमध्ये सर्वसाधारणपणे एक गुणधर्म आढळतो, तो म्हणजे सर्व प्राप्तांक एका विशिष्ट प्राप्तांकाभोवती किंवा त्याच्या आसपास केंद्रित होण्याची प्रवृत्ती. हा विशिष्ट प्राप्तांक त्या समूहाची प्रातिनिधिक संख्या असते. या संख्येला 'केंद्रीय प्रवृत्तीचे परिमाण' म्हणतात.

अवर्गीकृत सारणीसाठी, मध्य, मध्यक व बहुलक या परिमाणांचा अभ्यास आपण यापूर्वी केला आहे.

प्रात्यक्षिक 1 : तुमच्या वर्गातील सर्व मुलांची उंची मोजून सेंटिमीटरमध्ये नोंदवा. आपल्याला असे आढळते, की अनेक मुलांची उंची ही एखाद्या विशिष्ट संख्येभोवती किंवा त्याच्या आसपास केंद्रित झालेली असते.

प्रात्यक्षिक 2 : पिंपळाच्या झाडाखाली पडलेली पाने गोळा करा. प्रत्येक विद्यार्थ्याला एकेक पान द्या. आपापल्या पानाची लांबी देठापासून टोकापर्यंत मोजा व नोंदवा. सर्व निरीक्षणे (प्राप्तांक) नोंदवल्यावर आपल्या असे लक्षात येईल, की एका विशिष्ट संख्येभोवती ही निरीक्षणे केंद्रित झालेली आहेत.

आता आपण सांख्यिक सामग्रीच्या केंद्रीय प्रवृत्तींच्या परिमाणांचा 'मध्य', 'मध्यक' व 'बहुलक' यांचा अधिक अभ्यास करणार आहोत. त्यासाठी त्यातील परिभाषा आणि चिन्हे यांची माहिती करून घेऊ.

$$\text{सांख्यिक सामग्रीचा मध्य} = \frac{\text{सर्व प्राप्तांकाची बेरीज}}{\text{एकूण प्राप्तांक}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$ (येथे x_i हा i वा प्राप्तांक आहे.)

मध्य $\overline{X}$ ने दर्शवतात आणि ती दिलेल्या सामग्रीची सरासरी असते.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

जाणून घेऊया.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणीवरून मध्य (Mean from grouped frequency distribution)

जेव्हा प्राप्तांकांची संख्या मोठी असते तेव्हा वरील सूत्रात सर्व संख्या लिहून बेरीज करणे जिकिरीचे होते. त्यासाठी आपण अन्य काही पद्धतींचा वापर करतो.

कधी कधी मोठ्या प्रमाणात केलेल्या प्रयोगाची सामग्री वर्गीकृत सारणीत दिलेली असते. अशा वेळी सांख्यिक माहिती तपासण्याच्या संख्यांचा मध्य अचूक काढता येत नाही, म्हणून त्याच्या जवळपासची संख्या काढण्याची किंवा अंदाजे मध्य काढण्याची रीत अभ्यासू.

सरळ पद्धती (Direct method)

आता आपण वर्गीकृत सांख्यिक माहितीचा मध्य काढण्याची रीत उदाहरणाने अभ्यासू.

उदा. : खालील सारणीत एक काम पूर्ण करण्यास प्रत्येक कामगाराला लागणाऱ्या वेळेचे वारंवारता वितरण दिले आहे, त्यावरून ते काम पूर्ण करण्यास एका कामगारास लागणाऱ्या वेळेचा मध्य काढा.

प्रत्येकाला काम पूर्ण करण्यास लागलेला वेळ (तास)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
कामगारांची संख्या	10	15	12	8	5

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उकल :

(1) सारणीत दाखवल्याप्रमाणे उभे स्तंभ घेतले.

(2) पहिल्या स्तंभात वर्ग लिहिले.

(3) दुसऱ्या स्तंभात वर्गमध्य x_i लिहिला.

(4) तिसऱ्या स्तंभात त्या वर्गातील कामगारांची वारंवारता (f_i) लिहिली.

(5) चौथ्या स्तंभात प्रत्येक वर्गासाठी ($x_i \times f_i$) हा गुणाकार लिहिला.

(6) नंतर $\sum_{i=1}^{N} x_i f_i$ लिहिले.

(7) सूत्र वापरून मध्य काढला.

वर्ग (वेळ तासात)	वर्गमध्य x_i	वारंवारता (कामगारांची संख्या) f_i	वर्गमध्य ×वारंवारता $x_i f_i$
15-19	17	10	170
20-24	22	15	330
25-29	27	12	324
30-34	32	8	256
35-39	37	5	185
एकूण		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

$$\text{मध्य} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1265}{50} = 25.3 \quad \because \sum f_i = N$$

एका कामगारास काम पूर्ण करण्यास लागणाऱ्या वेळेचा मध्य = 25.3 तास (अंदाजे)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) खालील सारणीत 50 विद्यार्थ्यांच्या चाचणी परीक्षेच्या गुणांची टक्केवारी दिली आहे. त्यावरून गुणांच्या टक्केवारीचा मध्य काढा.

गुणांची टक्केवारी	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थी संख्या	3	7	15	20	5

उकल : पायऱ्यांच्या आधारे खालील सारणी तयार केली.

वर्ग (गुणांची टक्केवारी)	वर्गमध्य x_i	वारंवारता (विद्यार्थी संख्या) f_i	वर्गमध्य × वारंवारता $x_i f_i$
0-20	10	3	30
20-40	30	7	210
40-60	50	15	750
60-80	70	20	1400
80-100	90	5	450
एकूण		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{2840}{50} = 56.8$$

$\therefore$ गुणांच्या टक्केवारीचा मध्य = 56.8

उदा. (2) मागील उन्हाळ्यात महाराष्ट्रातील 30 शहरांतील एका दिवसाचे कमाल तापमान °C मध्ये खालील सारणीत दिले आहे, त्यावरून कमाल तापमानाचा मध्य काढा.

कमाल तापमान	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44
शहरांची संख्या	4	5	7	8	6

उकल :

वर्ग (तापमान °C)	वर्गमध्य x_i	वारंवारता (शहरांची संख्या) f_i	वर्गमध्य × वारंवारता $x_i f_i$
24-28	26	4	104
28-32	30	5	150
32-36	34	7	238
36-40	38	8	304
40-44	42	6	252
एकूण		$N = \sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

मध्य = $\overline{X} = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{1048}{30} = 34.9\ ^\circ C$

गृहीतमध्य पद्धती (Assumed mean method)

सोडवलेल्या वरील उदाहरणांवरून आपल्या लक्षात येते, की कधीकधी $x_i f_i$ हा गुणाकार खूप मोठी संख्या येते. त्यामुळे सरळ पद्धतीने मध्य काढणे थोडे कठीण होते. त्यासाठी आपण आणखी एक पद्धत 'गृहीतमध्य पद्धती' जाणून घेऊ. या पद्धतीने मध्य काढताना लहान संख्यांची बेरीज व भागाकार केल्यामुळे काम सोपे होते.

उदाहरणार्थ, 40, 42, 43, 45, 47, 48 हे प्राप्तांक आहेत. यांचा मध्य काढायचा आहे.

या उदाहरणातील संख्यांचे निरीक्षण केल्यास आपल्या असे लक्षात येते, की या सामग्रीचा मध्य 40 पेक्षा जास्त आहे म्हणून आपण 40 ही संख्या मध्य मानू. हा गृहीतमध्य आहे. 40-40 = 0, 42 - 40 = 2, 43-40 = 3, 45-40 = 5, 47 - 40 = 7, 48 - 40 = 8 हे फरक पाहा. त्यांना विचलन म्हणतात. त्यांचा मध्य काढू. तो 40 या मानलेल्या गृहीतमध्यात मिळवल्यास आपल्याला या सामग्रीचा मध्य मिळतो.

म्हणजेच, मध्य = गृहीतमध्य + गृहीतमध्यापासूनच्या विचलनांचा मध्य

$$\overline{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6}\right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

गृहीतमध्यासाठी A, गृहीतमध्यापासूनच्या विचलनासाठी d आणि विचलनांच्या मध्यासाठी $\overline{d}$ ही चिन्हे मानून $\overline{X} = A + \overline{d}$ हे सूत्र मिळते.

हेच उदाहरण आपण गृहीतमध्य 43 घेऊन करून पाहू. प्रत्येक प्राप्तांकातून 43 वजा करून वजाबाकी, म्हणजेच गृहीतमध्यापासूनचे विचलन मिळवू.

$40 - 43 = -3,\ 42 - 43 = -1,\ 43 - 43 = 0,\ 45 - 43 = 2,\ 47 - 43 = 4,\ 48 - 43 = 5$

गृहीतमध्यापासूनच्या विचलनांची बेरीज $= -3 - 1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7$

आता $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 43 + \left(\frac{7}{6}\right)$ (येथे एकूण विचलने 6 आहेत.)

$= 43 + 1\frac{1}{6}$

$= 44\frac{1}{6}$

आपल्या लक्षात येते, की याप्रमाणे गृहीतमध्य वापरून उदाहरण सोडवल्यास आकडेमोड कमी होते. तसेच प्राप्तांकांतील किंवा सोईची अन्य कोणतीही संख्या गृहीतमध्य मानली तरी सामग्रीचा मध्य बदलत नाही.

आता आपण दिलेल्या वारंवारता सारणीसाठी ही पद्धत कशी वापरता येते हे एका उदाहरणाने अभ्यासू.

उदा. : 100 भाजी विक्रेत्यांची रोजच्या विक्रीची वारंवारता सारणी खाली दिली आहे. गृहीतमध्य पद्धतीने दैनंदिन विक्रीचा मध्य काढा.

दैनंदिन विक्री रुपये	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
विक्रेत्यांची संख्या	15	20	35	30

उकल : गृहीतमध्य A = 2250 घेऊ. $d_i = x_i - A$ हे विचलन आहे.

वर्ग दैनंदिन विक्री (रुपये)	वर्गमध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	वारंवारता (विक्रेत्यांची संख्या) f_i	वारंवारता × विचलन $f_i d_i$
1000-1500	1250	-1000	15	-15000
1500-2000	1750	-500	20	-10000
2000-2500	2250→A	0	35	0
2500-3000	2750	500	30	15000
एकूण			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

पायऱ्या वापरून सारणी तयार केली.

(1) गृहीतमध्य A = 2250 घेतला. (साधारणपणे जास्तीत जास्त वारंवारता असणाऱ्या वर्गाचा वर्गमध्य हा गृहीतमध्य मानतात.)

(2) विक्रीचे वर्ग पहिल्या स्तंभात लिहिले.

(3) दुसऱ्या स्तंभात वर्गमध्य लिहिले.

(4) तिसऱ्या स्तंभात $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ च्या किमती लिहिल्या.

(5) चौथ्या स्तंभात प्रत्येक वर्गातील विक्रेत्यांची संख्या लिहिली व बेरीज $\sum f_i$ लिहिली.

(6) पाचव्या स्तंभात $(f_i \times d_i)$ हे गुणाकार करून त्यांची बेरीज $\sum f_i d_i$ केली.

सूत्र वापरून आता $\overline{d}$ व $\overline{X}$ काढला.

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = -\frac{10000}{100} = -100 \qquad \therefore \text{ मध्य } \overline{X} = A + \overline{d} = 2250 - 100 = 2150$$

दैनंदिन विक्रीचा मध्य = 2150 रुपये आहे.

कृती : हेच उदाहरण सरळ पद्धतीने सोडवा.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. (1) खालील सारणीत एका व्यावसायिकाकडील 50 कामगारांच्या दैनंदिन पगारांचे वारंवारता वितरण दिले आहे. त्यावरून एका कामगाराच्या दैनिक पगाराचा मध्य, गृहीतमध्य पद्धतीने काढा.

दैनिक पगार (रुपये)	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
कामगारांची संख्या (वारंवारता)	5	10	15	12	8

उकल : गृहीतमध्य A = 300 मानू.

वर्ग (पगार रुपये)	वर्गमध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	वारंवारता (कामगार संख्या) f_i	वारंवारता × विचलन $f_i d_i$
200-240	220	-80	5	-400
240-280	260	-40	10	-400
280-320	300 → A	0	15	0
320-360	340	40	12	480
360-400	380	80	8	640
एकूण			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

मध्य, $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 300 + 6.4$

$= 306.40$

कामगारांच्या दैनिक पगाराचा मध्य = 306.40 रुपये आहे.

मध्यप्रमाण विचलन पद्धती (Step deviation method)

आपण मध्य काढण्याच्या सरळ पद्धती व गृहीतमध्य पद्धती यांचा अभ्यास केला. अधिक सुलभतेने मध्य काढण्याची आणखी एक पद्धत उदाहरणातून अभ्यासू.

- प्रथम A हा गृहीतमध्य वजा करून d_i चा स्तंभ तयार करू.
- सर्व d_i चा मसावि g हा सहज मिळत असेल तर $u_i = \frac{d_i}{g}$ यांचा स्तंभ तयार करू.
- सर्व u_i या संख्यांचा मध्य $\overline{u}$ हा काढू.
- $\overline{X} = A + \overline{u}\, g$ या सूत्राने मध्य काढू

उदाहरण : 100 कुटुंबांनी आरोग्यविम्यासाठी गुंतवलेली वार्षिक रक्कम वारंवारता सारणीत दिली आहे. मध्य-प्रमाण विचलन पद्धतीने कुटुंबांच्या वार्षिक गुंतवणुकीचा मध्य काढा.

प्रत्येक कुटुंबाची विम्याची रक्कम (रुपये)	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3200
कुटुंबांची संख्या	3	15	20	25	30	7

उकल : A = 2200 मानू, सर्व d_i पाहून g = 400 आहे.

वर्ग विम्याची रक्कम(रुपये)	वर्गमध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	वारंवारता (कुटुंबांची संख्या) f_i	$f_i u_i$
800-1200	1000	-1200	-3	3	-9
1200-1600	1400	-800	-2	15	-30
1600-2000	1800	-400	-1	20	-20
2000-2400	2200→A	0	0	25	0
2400-2800	2600	400	1	30	30
2800-3200	3000	800	2	7	14
एकूण				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

वरील सारणी पुढील पायऱ्यांच्या आधारे केली.

(1) सारणीच्या पहिल्या स्तंभात विम्याच्या गुंतवणुकींचे वर्ग लिहिले.

(2) दुसऱ्या स्तंभात वर्गमध्य x_i लिहिला.

(3) तिसऱ्या स्तंभात $d_i = x_i - A$ यांच्या किमती लिहिल्या.

(4) di या सर्व किमतींचा मसावि 400 आहे. म्हणून $g = 400$ घेतला. चौथ्या स्तंभात $u_i = \frac{d_i}{g} = \frac{d_i}{400}$ या किमती लिहिल्या.

(5) पाचव्या स्तंभात प्रत्येक वर्गाची वारंवारता (कुटुंबांची संख्या) लिहिली.

(6) सहाव्या स्तंभात $f_i \times u_i$ हा गुणाकार प्रत्येक वर्गासाठी लिहिला.

u_i चा मध्य खालील सूत्राने काढला.

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$$\overline{X} = A + \overline{u}\, g$$

$$= 2200 + (-0.15)(400)$$

$$= 2200 + (-60.00)$$

$$= 2200 - 60 = 2140$$

∴ कुटुंबांच्या विम्याच्या वार्षिक गुंतवणुकीचा मध्य 2140 रुपये आहे.

कृती : सरळ पद्धतीने, गृहीतमध्य पद्धतीने वरील उदाहरण सोडवा. कोणत्याही पद्धतीने काढलेला मध्य सारखाच असतो हे अनुभवा.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. (1) शाळेतील 50 विद्यार्थ्यांनी पूरग्रस्तांसाठी जमवलेल्या निधींची वारंवारता सारणी दिली आहे. त्यावरून जमा केलेल्या निधींचा मध्य काढा.

निधी (रुपये)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
विद्यार्थी	2	4	24	18	1	1

लगतच्या वर्गात खूप कमी प्राप्तांक असले, तर त्यांचा मिळून एक वर्ग करणे सोईचे असते. या उदाहरणात 0 – 500 व 500 – 1000 यांचा एक वर्ग आणि 2000 – 2500 व 2500 – 3000 यांचा एक वर्ग केला.

निधी (रुपये)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
विद्यार्थी	6	24	18	2

उकल : A = 1250 मानू, सर्व d_i अभ्यासून g = 250 घेऊ.

वर्ग निधी (रुपये)	वर्गमध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	वारंवारता f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	-750	-3	6	-18
1000-1500	1250→A	0	0	24	0
1500 - 2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
एकूण				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\overline{u}\, g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\overline{X} = A + g\overline{u} = 1250 + 140 = 1390$$

$\therefore$ जमा केलेल्या नीधींचा मध्य 1390 रुपये आहे.

कृती –

1. हेच उदाहरण सरळ पद्धतीने सोडवा.
2. वरील उदाहरणात काढलेला मध्य गृहीतमध्य पद्धतीने काढून पडताळून पाहा.
3. A = 1750 घेऊन वरील पद्धतीने उदाहरण सोडवा.

सरावसंच 6.1

1. इयत्ता 10 वीच्या 50 विद्यार्थ्यांनी रोजच्या अभ्यासासाठी व्यतीत केलेले तास व विद्यार्थी संख्या यांची वारंवारता वितरण सारणी दिलेली आहे. त्यावरून विद्यार्थ्यांनी अभ्यासासाठी दिलेल्या वेळेचा मध्य सरळ पद्धतीने काढा.

वेळ (तास)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
विद्यार्थी संख्या	7	18	12	10	3

2. एका महामार्गावरील टोलनाक्यावर सकाळी 6 ते संध्याकाळी 6 या वेळेत जमा होणारा कर (रुपयांत) व वाहनसंख्या यांची वारंवारता सारणी दिली आहे. त्यावरून जमा होणाऱ्या कराचे 'गृहीतमध्य' पद्धतीने मध्य काढा.

जमा कर (रुपये)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
वाहन संख्या	80	110	120	70	40

3. एका दिवशी दूध विक्री केंद्रावरून 50 ग्राहकांना वितरित केलेल्या दुधाची वारंवारता वितरण सारणी दिलेली आहे. त्यावरून वितरित केलेल्या दुधाचा मध्य सरळ पद्धतीने काढा.

दूध वितरण (लीटर)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
ग्राहक संख्या	17	13	10	7	3

4. काही बागाइतदारांच्या संत्र्यांच्या उत्पन्नाची वारंवारता वितरण सारणी दिली आहे. त्यावरून उत्पन्नाचा मध्य, 'गृहीतमध्य' पद्धतीने काढा.

उत्पन्न (हजार रुपये)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
बागाइतदारांची संख्या	20	25	15	10	10

5. एका कंपनीतील 120 कर्मचाऱ्यांकडून दुष्काळग्रस्तांसाठी जमा केलेल्या निधीची वारंवारता वितरण सारणी दिली आहे. कर्मचाऱ्यांच्या जमा निधीचे मध्य, 'मध्य प्रमाण विचलन' पद्धतीने काढा.

निधी (रुपये)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500
कर्मचारी संख्या	35	28	32	15	10

6. एका कारखान्यातील 150 कामगारांची साप्ताहिक पगाराची वारंवारता वितरण सारणी दिली आहे. त्यावरून कामगारांच्या साप्ताहिक पगाराचा मध्य, 'मध्यप्रमाण विचलन' पद्धतीने काढा.

साप्ताहिक पगार रुपये	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
कामगारांची संख्या	25	45	50	30

जरा आठवूया.

विज्ञान प्रदर्शनात भाग घेण्यासाठी एका शाळेतून दोन विद्यार्थी व दोन विद्यार्थिनी दोन दिवसांसाठी वेगळ्या शहरात गेले होते. त्यांना आपले संध्याकाळचे जेवण कोठे घ्यावे हे ठरवायचे होते. कामाच्या जागेपासून एक किलोमीटर अंतराच्या आत भोजन देणारी दहा हॉटेल्स होती. त्यांचे जेवणाचे दर रुपयांत, चढत्या क्रमाने खालीलप्रमाणे होते.

40, 45, 60, 65, 70, 80, 90, 100 आणि 500

सर्व हॉटेलांतील जेवणाची सरासरी किंमत $\frac{1130}{10} = 113$ रु. होती.

विद्यार्थ्यांनी कोणत्या हॉटेलात जेवण घेण्याचे ठरवले असावे? 500 रुपये दराचे जेवण देणारे हॉटेल सोडून इतर सर्व हॉटेलांचा दर 113 रु. पेक्षा कमी होता. विद्यार्थ्यांनी मध्यम दराचे हॉटेल निवडायचे ठरवले. पहिल्या दिवशी 70 रु. दराचे व दुसऱ्या दिवशी 80 रु. दराचे जेवण घेतले.

काही वेळा प्राप्तांकांच्या सरासरीपेक्षा त्यांचा मध्यक वापरला जातो याचे हे उदाहरण आहे.

मागील इयत्तेत अवर्गीकृत सामग्रीसाठी 'मध्यक' ही संकल्पना आपण अभ्यासली आहे.

- दिलेल्या सामग्रीतील संख्या चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडल्या असता, मांडणीतील मध्यभागी येणाऱ्या संख्येला सामग्रीचा मध्यक म्हणतात.
- मध्यक हा दिलेल्या सामग्रीचे दोन समान भागांत विभाजन करतो. म्हणजेच दिलेल्या सामग्रीसाठी मध्यकाच्या वर आणि खाली दोन्ही बाजूंना समान प्राप्तांक असतात.
- दिलेले प्राप्तांक $k_1 \le k_2 \le k_3 \ldots \ldots \le k_n$ अशा रीतीने लिहितात.
- सामग्रीतील प्राप्तांक विषम असताना $\frac{n+1}{2}$ वा प्राप्तांक सामग्रीचा मध्यक असतो, कारण $k_{\frac{n+1}{2}}$ च्या आधी $\frac{n-1}{2}$ इतके प्राप्तांक व त्यानंतरही $\frac{n-1}{2}$ इतके प्राप्तांक असतात. n = 2m + 1 घेऊन हे पडताळा.
- सामग्रीतील प्राप्तांक n हा सम असताना सामग्रीचा मध्यक हा मध्यावरील दोन संख्यांची सरासरी असतो. कारण $k_{\frac{n}{2}}$ च्या आधी व $k_{\frac{n+2}{2}}$ च्या नंतर प्रत्येकी $\frac{n-2}{2}$ प्राप्तांक असतात. n = 2m घेऊन हे पडताळा.
- म्हणजेच $\frac{n}{2}$ वी संख्या व $\frac{n+2}{2}$ वी संख्या यांची सरासरी घेतल्यावर येणारी संख्या ही त्या सामग्रीचा मध्यक असते.

उदा. (1) 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 या प्राप्तांकांच्या मांडणीत चौथी संख्या मध्यावर येते, म्हणून दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक = 40

उदा. (2) 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 येथे प्राप्तांकांची संख्या 8 म्हणजे सम आहे, म्हणून चौथी व पाचवी अशा दोन संख्या मध्यावर आहेत, त्या 66 व 68 या आहेत. म्हणून दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक = $\frac{66+68}{2} = 67$

जाणून घेऊया.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणीवरून मध्यक (Median from grouped frequency distribution)

प्राप्तांकांची संख्या मोठी असते, तेव्हा अशा प्रकारे मांडणी करून मध्यक काढणे जिकिरीचे होते. म्हणून आता आपण वर्गीकृत वारंवारता वितरणाचे अंदाजे मध्यक काढण्याची रीत उदाहरणांच्या साहाय्याने अभ्यासू.

उदा. 6, 8, 10.4, 11, 15.5, 12, 18 या प्राप्तांकांची वर्गीकृत सारणी पुढे दिली आहे.

<table>
<tr><th>वर्ग</th><th>ताळ्याच्या खुणा</th><th>वारंवारता</th></tr>
<tr><td>6-10</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>11-15</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>16-20</td><td>|</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>वर्ग</th><th>ताळ्याच्या खुणा</th><th>वारंवारता</th></tr>
<tr><td>5.5-10.5</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10.5-15.5</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>15.5-20.5</td><td>||</td><td>2</td></tr>
</table>

पहिल्या सारणीत 10.4 व 15.5 हे दोन प्राप्तांक समाविष्ट करता आले नाहीत. कारण या संख्या 6-10, 11-15, 16-20 यांपैकी कोणत्याच वर्गात समाविष्ट होत नाहीत.

अशा वेळी वर्ग सलग करून घेतात हे आपल्याला माहीत आहे.

या सारणीत खालची वर्गमर्यादा 0.5 ने कमी व वरची वर्गमर्यादा 0.5 ने वाढवली असता, मिळालेली दुसरी वितरण सारणी तयार होईल. येथे 15.5 हा प्राप्तांक 15.5 - 20.5 या वर्गात समाविष्ट होईल.

वर्गीकरणाची पद्धत बदलली तर वारंवारता बदलू शकते हे वरील सारणींवरून लक्षात येते.

हे लक्षात ठेवूया.

वरील सारणींत 6-10 या वर्गाचा मध्य $= \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$;

तसेच 5.5-10.5 या वर्गाचा मध्य $= \frac{5.5+10.5}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

म्हणजे वर्गांची रचना वेगळ्या पद्धतीने केली तरी वर्गमध्य बदलत नाही हे लक्षात घ्या.

सोडवलेले उदाहरण

इयत्ता 10 वीच्या सराव परीक्षेत प्राप्त केलेल्या 100 विद्यार्थ्यांच्या गुणांची वारंवारता सारणी पुढे दिली आहे. विद्यार्थ्यांच्या गुणांचे मध्यक काढा.

परीक्षेतील गुण	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थी संख्या	4	20	30	40	6

उकल : N = 100

$\frac{N}{2}$ = 50 म्हणून 50 वी संख्या हा अंदाजे मध्यक असणार. यासाठी 50 वी संख्या कोणत्या वर्गात येते, हे आपल्याला शोधावे लागेल. 'वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी' प्रकारच्या संचित वारंवारता सारणीवरून हे शोधता येईल. त्यासाठी आपण वरील वारंवारता सारणीवरून 'पेक्षा कमी' संचित वारंवारता वितरण सारणी तयार करू.

वर्ग (विद्यार्थ्यांचे गुण)	वारंवारता विद्यार्थी संख्या f_i	संचित वारंवारता (पेक्षा कमी) cf
0-20	4	4
20-40	20	24
40-60	30	54
60-80	40	94
80-100	6	100

या सारणीवरून,

- $\frac{N}{2}$ = 50 या क्रमांकाचा प्राप्तांक 40-60 या वर्गात आहे. ज्या वर्गामध्ये मध्यक येतो, त्या वर्गाला **मध्यकवर्ग** म्हणतात. येथे 40 - 60 हा मध्यकवर्ग आहे.
- 40-60 या वर्गाची खालची मर्यादा 40 आहे व वारंवारता 30 आहे.
- पहिल्या 50 प्राप्तांकांपैकी सुरुवातीचे 24 प्राप्तांक हे 40 पेक्षा कमी आहेत. उरलेले 50 - 24 = 26 प्राप्तांक (40 - 60) या वर्गात आहेत. त्यातील 50 व्या प्राप्तांकाचा अंदाज पुढीलप्रमाणे करतात.
- या वर्गातील एकूण 30 पैकी 26 प्राप्तांक 50 व्या प्राप्तांकापर्यंत आहेत व वर्गांतर 20 आहे म्हणून 50 वा प्राप्तांक, 40 पेक्षा $\frac{26}{30} \times 20$ ने मोठा आहे असे मानतात.

  तो अंदाजे $40 + \frac{26}{30} \times 20 = 40 + \frac{52}{3} = 57\frac{1}{3}$ आहे.

  $\therefore$ मध्यक $= 57\frac{1}{3}$

- सूत्ररूपाने हे आपण खालीलप्रमाणे लिहू शकतो.

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

या सूत्रात L = मध्यकवर्गाची खालची सीमा, N = एकूण वारंवारता

h = मध्यक वर्गाचे वर्गांतर, f = मध्यक वर्गाची वारंवारता

cf = मध्यक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता.

वरील उदाहरणात; $\frac{N}{2} = 50$, $cf = 24$, $h = 20$, $f = 30$, $L = 40$,

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h \quad \ldots\ldots \text{(सूत्र)}$$

$$= 40 + \left(\frac{50-24}{30}\right) \times 20$$

$$= 40 + \frac{26 \times 20}{30}$$

$$= 40 + 17\frac{1}{3}$$

$$= 57\frac{1}{3}$$

हे लक्षात ठेवूया.

- मध्यक काढण्यासाठी दिलेले वर्ग सलग नसतील तर ते सलग करून घ्यावे लागतात.
- प्राप्तांकांची संख्या खूप मोठी असताना चढत्या क्रमाने प्रत्येक प्राप्तांक लिहिणे अवघड असते. म्हणून सामग्रीची मांडणी वर्गीकृत स्वरूपात करतात. अशा वर्गीकृत सामग्रीचा मध्यक अचूक काढणे शक्य नसते, परंतु अंदाजे मध्यक काढण्यासाठी पुढील सूत्र वापरतात.

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) सार्वजनिक वाहतूक सेवेच्या 60 बसेसनी एका दिवसात कापलेल्या अंतराची वारंवारता सारणी दिली आहे. बसेसनी एका दिवसात कापलेल्या अंतराचा मध्यक काढा.

दैनंदिन कापलेले अंतर (किमी)	200-209	210-219	220-229	230-239	240-249
बसेसची संख्या	4	14	26	10	6

उकल : सारणीत दिलेले वर्ग सलग नाहीत,

एका वर्गाची वरची मर्यादा व पुढील वर्गाची खालील मर्यादा यांतील फरक 1 आहे.

$\therefore$ 1 ÷ 2 = 0.5 ही किंमत प्रत्येक वर्गाच्या खालच्या मर्यादेतून वजा करू आणि वरच्या वर्गमर्यादेत मिळवून वर्गसीमा ठरवू. त्यानुसार वर्ग सलग करू व नवी सारणी लिहू.

नंतर त्यात 'पेक्षा कमी'चा संचित वारंवारतेचा स्तंभ तयार करू.

दिलेले वर्ग	सलग केलेले वर्ग	वारंवारता f_i	संचित वारंवारता पेक्षा कमी
200-209	199.5-209.5	4	4
210-219	209.5-219.5	14	18 $\rightarrow$ cf
220-229	219.5-229.5	26 $\rightarrow$ f	44
230-239	229.5-239.5	10	54
240-249	239.5-249.5	6	60

येथे एकूण वारंवारता = Σf_i = N = 60 $\therefore$ $\frac{N}{2}$ = 30. $\therefore$ मध्यक हा अंदाजे 30 वा प्राप्तांक.

पहिले 18 प्राप्तांक 219.5 पेक्षा कमी व उरलेले, 30 − 18 = 12 प्राप्तांक 219.5 − 229.5 या वर्गात आहेत. म्हणून हा मध्यकवर्ग आहे.

219.5-229.5 या वर्गाची संचित वारंवारता 44 आहे.

सूत्रामध्ये,

L = मध्यक वर्गाची खालची मर्यादा = 219.5, h = मध्यक वर्गाचे वर्गांतर = 10

cf = मध्यक वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता = 18,

f = मध्यक वर्गाची वारंवारता = 26

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$\therefore \text{ मध्यक } = 219.5 + \left(\frac{30-18}{26}\right)\times 10$$

$$= 219.5 + \left(\frac{12\times 10}{26}\right)$$

$$= 219.50 + 4.62$$

$$= 224.12$$

बसेसच्या दैनंदिन अंतरांचे मध्यक = 224.12 किलोमीटर

उदा.(2) खालील सारणीत एका दिवशी एका वस्तुसंग्रहालयाला भेट देणाऱ्या व्यक्तींची वये दिलेली आहेत. त्यावरून व्यक्तींच्या वयांचे मध्यक काढा.

वय (वर्षे)	व्यक्तींची संख्या
10 पेक्षा कमी	3
20 पेक्षा कमी	10
30 पेक्षा कमी	22
40 पेक्षा कमी	40
50 पेक्षा कमी	54
60 पेक्षा कमी	71

उकल : येथे पेक्षा कमी संचित वारंवारता वितरण दिलेले आहे. प्रथमतः या सर्व वर्गांच्या खऱ्या वर्गमर्यादा मिळवाव्या लागतील. आपल्याला माहीत आहे, की 'पेक्षा कमी' संचित वारंवारता ही वर्गाच्या वरच्या वर्गमर्यादेशी निगडित असते. पहिल्या वर्गाची वरची मर्यादा 10 आहे. कोणाही व्यक्तीचे वय धन संख्या असते म्हणून पहिला वर्ग 0–10 असा असेल. दुसऱ्या वर्गाची वरची मर्यादा 20 आहे, म्हणून दुसरा वर्ग 10–20 होईल. अशा प्रकारे वर्गांतर 10 घेऊन क्रमाने वर्ग तयार केले. याप्रमाणे शेवटचा वर्ग 50–60 झाला. अशा प्रकारे आपल्याला खालीलप्रमाणे वर्ग लिहिता येतात.

वय वर्षे	वर्ग	व्यक्तींची संख्या वारंवारता	संचित वारंवारता पेक्षा कमी
10 पेक्षा कमी	0–10	3	3
20 पेक्षा कमी	10–20	10 – 3 = 7	10
30 पेक्षा कमी	20–30	22 – 10 = 12	$22 \rightarrow cf$
40 पेक्षा कमी	30–40	$40 - 22 = 18 \rightarrow f$	40
50 पेक्षा कमी	40–50	54 – 40 = 14	54
60 पेक्षा कमी	50–60	71 – 54 = 17	71

येथे N = 71 $\therefore \frac{N}{2}$ = 35.5 आणि h = 10

35.5 ही संख्या 30-40 या वर्गात आहे. म्हणून हा मध्यकवर्ग आहे. त्याआधीच्या वर्गाची संचित वारंवारता 22 आहे, म्हणून cf = 22, L = 30, f = 18.

$$\text{मध्यक} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 30 + (35.5-22)\frac{10}{18}$$

$$= 30 + (13.5)\frac{10}{18}$$

$$= 30 + 7.5$$

$$= 37.5$$

$\therefore$ भेट देणाऱ्या व्यक्तींच्या वयांचे मध्यक = 37.5 वर्षे

सरावसंच 6.2

1. खालील सारणीत एका सॉफ्टवेअर कंपनीतील दैनंदिन कामाचे तास व तेवढा वेळ काम करणाऱ्या कर्मचाऱ्यांची संख्या दिली आहे. त्यावरून कंपनीतील कर्मचाऱ्यांच्या दैनंदिन कामाच्या तासांचे मध्यक काढा.

दैनंदिन कामाचे तास	8-10	10-12	12-14	14-16
कर्मचाऱ्यांची संख्या	150	500	300	50

2. एका आमराईतील आंब्याची झाडे व प्रत्येक झाडापासून मिळालेल्या आंब्यांची संख्या यांचे वारंवारता वितरण दिले आहे. त्यावरून दिलेल्या सामग्रीचे मध्यक काढा.

आंब्यांची संख्या	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
झाडांची संख्या	33	30	90	80	17

3. मुंबई-पुणे द्रुतगतीमार्गाच्या वाहतुकीचे नियंत्रण करणाऱ्या पोलीस चौकीवर केलेल्या सर्वेक्षणात पुढीलप्रमाणे निरीक्षणे आढळली. दिलेल्या नोंदींचे मध्यक काढा.

वाहनांची गती (किमी/तास)	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
वाहनांची संख्या	10	34	55	85	10	6

4. विविध कारखान्यांमध्ये उत्पादन होणाऱ्या दिव्यांची संख्या खालील सारणीत दिली आहे. त्यावरून दिव्यांच्या उत्पादनाचा मध्यक काढा.

दिव्यांची संख्या (हजार)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
कारखान्यांची संख्या	12	35	20	15	8	7	8

जाणून घेऊया.

वर्गीकृत वारंवारता वितरणावरून बहुलक (Mode from grouped frequency distribution)

दिलेल्या प्राप्तांकांत जास्तीत जास्त वेळा येणारा प्राप्तांक म्हणजे त्या समूहाचा बहुलक असतो हे आपण जाणतो.

उदाहरणार्थ, एखादी दुचाकी उत्पादक कंपनी विविध रंगांमध्ये दुचाकी गाड्या तयार करते. कोणत्या रंगाच्या गाड्यांची पसंती सर्वाधिक आहे हे जाणून घेण्यासाठी त्या कंपनीला रंगाचे बहुलक माहीत असणे आवश्यक असते. त्याचप्रमाणे विविध उत्पादने असणाऱ्या एखाद्या कंपनीला सर्वाधिक मागणी कोणत्या उत्पादनासाठी आहे हे जाणून घेण्याची आवश्यकता वाटेल. अशा वेळी त्या उत्पादनाचा बहुलक काढावा लागेल.

आपण अवर्गीकृत वारंवारता सारणीवरून बहुलक कसा काढायचा हे पाहिले आहे.

आता आपण वर्गीकृत वारंवारता वितरणावरून अंदाजे बहुलक कसा काढायचा ते अभ्यासू.

त्यासाठी पुढील सूत्र वापरतात.

$$\text{बहुलक} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

वरील सूत्रात, L = बहुलकीय वर्गाची खालची मर्यादा

f_1 = बहुलकीय वर्गाची वारंवारता

f_0 = बहुलकीय वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची वारंवारता

f_2 = बहुलकीय वर्गाच्या पुढच्या वर्गाची वारंवारता

h = बहुलकीय वर्गाचे वर्गांतर

हे सूत्र वापरून अंदाजे बहुलक कसा काढतात, हे उदाहरणांवरून अभ्यासू.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) खालील वारंवारता वितरण सारणीत क्रीडांगणावर खेळायला येणाऱ्या मुलांची संख्या व त्यांचे वयोगट दिले आहेत. त्यावरून क्रीडांगणावर खेळणाऱ्या मुलांच्या वयाचे बहुलक काढा.

मुलांचा वयोगट (वर्षे)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
मुलांची संख्या	43	$58 \rightarrow f_0$	$70 \rightarrow f_1$	$42 \rightarrow f_2$	27

वरील सारणीवरून असे लक्षात येते, की 10-12 या वयोगटांतील विद्यार्थी संख्या सर्वांत जास्त आहे, म्हणजेच 10-12 हा बहुलकीय वर्ग आहे.

उकल : येथे $f_1 = 70$, आणि 10-12 हा बहुलकीय वर्ग.

$\therefore$ दिलेल्या उदाहरणात,

L = बहुलकीय वर्गाची खालची मर्यादा = 10

h = बहुलकीय वर्गाचे वर्गांतर = 2

f_1 = बहुलकीय वर्गाची वारंवारता = 70

f_0 = बहुलकीय वर्गाच्या आधीच्या वर्गाची वारंवारता = 58

f_2 = बहुलकीय वर्गाच्या पुढच्या वर्गाची वारंवारता = 42

बहुलक = $L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 10 + \left[\frac{70-58}{2(70)-58-42}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\frac{12}{140-100}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\frac{12}{40}\right] \times 2$

$= 10 + \frac{24}{40}$

$= 10 + 0.6$

$= 10.6$

$\therefore$ क्रीडांगणावर खेळणाऱ्या मुलांच्या वयाचे बहुलक = 10.6 वर्षे

उदा. (2) खालील वारंवारता वितरण सारणीत एका पेट्रोलपंपावर पेट्रोल भरणाऱ्या वाहनांची संख्या आणि वाहनांमध्ये भरलेले पेट्रोल याची माहिती दिली आहे. त्यावरून वाहनात भरलेल्या पेट्रोलच्या आकारमानाचे बहुलक काढा.

भरलेले पेट्रोल (लीटर)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
वाहनांची संख्या	33	40	27	18	12

उकल : येथे दिलेले वर्ग सलग नाहीत. ते आपण सलग करून घेऊ आणि वारंवारता सारणी तयार करू.

वर्ग	सलग केलेले वर्ग	वारंवारता
1-3	0.5-3.5	$33 \to f_0$
4-6	3.5-6.5	$40 \to f_1$
7-9	6.5-9.5	$27 \to f_2$
10-12	9.5-12.5	18
13-15	12.5-15.5	12

येथे f_1 = बहुलकीय वर्गाची वारंवारता = 40, बहुलकीय वर्ग 3.5-6.5

बहुलक = $L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

बहुलक = $3.5 + \left[\frac{40-33}{2(40)-33-27}\right] \times h$

$= 3.5 + \left[\frac{7}{80-60}\right] \times 3$

$= 3.5 + \frac{21}{20}$

$= 3.5 + 1.05$

$= 4.55$

$\therefore$ वाहनात भरलेल्या पेट्रोलच्या आकारमानाचा बहुलक = 4.55 लीटर

सरावसंच 6.3

1. एका दूध संकलन केंद्रावर शेतकऱ्यांकडून संकलित केलेले दूध व लॅक्टोमीटरने मोजलेले दुधातील (फॅटचे) स्निग्धांशाचे प्रमाण दिले आहे. त्यावरून दुधातील स्निग्धांशाच्या प्रमाणाचे बहुलक काढा.

दुधातील स्निग्धांश (%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
संकलित दूध (लीटर)	30	70	80	60	20

2. काही कुटुंबांचा मासिक वीजवापर पुढील वर्गीकृत वारंवारता सारणीत दिला आहे. त्यावरून वीजवापराचे बहुलक काढा.

वीजवापर (युनिट)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
कुटुंबांची संख्या	13	50	70	100	80	17

3. चहाच्या 100 हॉटेलांना पुरवलेले दूध व हॉटेलांची संख्या यांची वर्गीकृत वारंवारता सारणी दिली आहे. त्यावरून पुरवलेल्या दुधाचे बहुलक काढा.

दूध (लीटर)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
हॉटेलांची संख्या	7	5	15	20	35	18

4. खालील वारंवारता वितरण सारणीत 200 रुग्णांची वये आणि उपचार घेणाऱ्या रुग्णांची एका आठवड्यातील संख्या दिली आहे. त्यावरून रुग्णांच्या वयाचे बहुलक काढा

वय (वर्षे)	5 पेक्षा कमी	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
रुग्णसंख्या	38	32	50	36	24	20

कृती :-

- तुमच्या वर्गातील 20 मुलांच्या वजनाचा मध्य काढा.
- तुमच्या वर्गातील मुलांच्या शर्टांच्या मापाचा बहुलक काढा.
- वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्याने आपल्या नाडीचे एका मिनिटात पडणारे ठोके मोजावेत व त्याची नोंद करावी. या नोंदींची सारणी करा व त्यावरून नाडीच्या ठोक्यांचा बहुलक काढा.
- वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्याच्या उंचीची नोंद करा. त्या नोंदींचे वर्गीकरण करा. उंचीचा मध्यक काढा.

हे लक्षात ठेवूया.

आपण केंद्रीय प्रवृत्तीच्या मध्य, मध्यक व बहुलक या परिमाणांचा अभ्यास केला. केंद्रीय प्रवृत्तीचे कोणते परिमाण निवडायचे हे ठरवण्यासाठी, ते निवडण्यासाठीचा हेतू आपल्याला स्पष्टपणे माहीत असणे आवश्यक असते.

समजा, एका शाळेतील 10 वी च्या पाच तुकड्यांपैकी कोणती तुकडी अंतर्गत परीक्षेत जास्त सरस आहे हे ठरवण्यासाठी त्या प्रत्येक तुकडीचा अंतर्गत परीक्षेतील गुणांचा 'मध्य' काढावा लागेल.

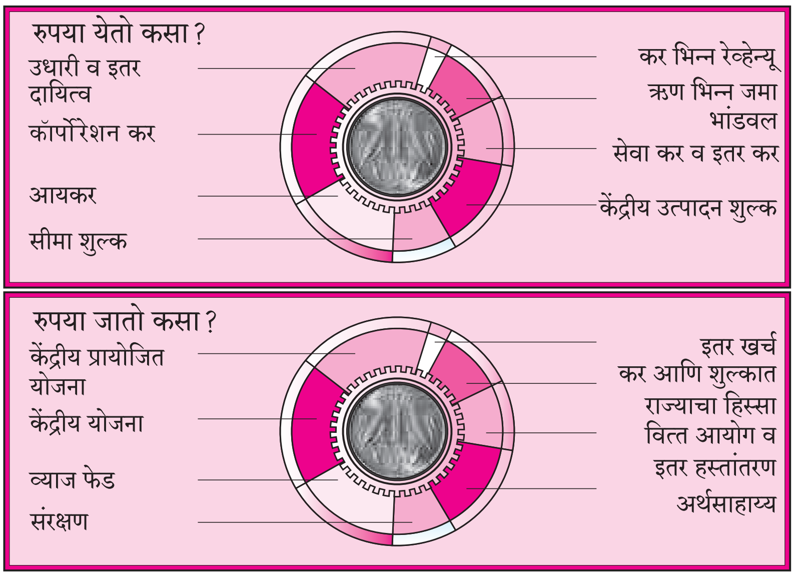
एखाद्या वर्गातील मुलांचे त्यांच्या परीक्षेतील गुणांवरून दोन गट करायचे असतील, तर त्या वर्गातील मुलांच्या गुणांचा 'मध्यक' हे परिमाण निवडावे लागेल.

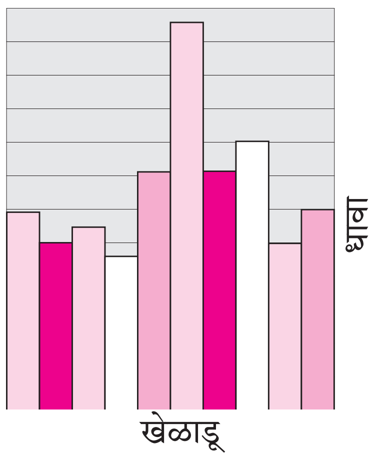
खडू तयार करणाऱ्या एखाद्या बचत गटाला कोणत्या रंगाच्या खडूंना सर्वाधिक मागणी आहे हे शोधायचे असेल, तर केंद्रीय प्रवृत्तीचे 'बहुलक' हे परिमाण निवडावे लागेल.

सांख्यिक सामग्रीचे चित्ररूप सादरीकरण (Pictorial representation of statistical data)

सांख्यिक माहितीचा मध्य, मध्यक, बहुलक यांवरून किंवा माहितीचे विश्लेषण करून त्याचा उपयोग काही विशिष्ट निष्कर्ष मिळवण्यासाठी होतो.

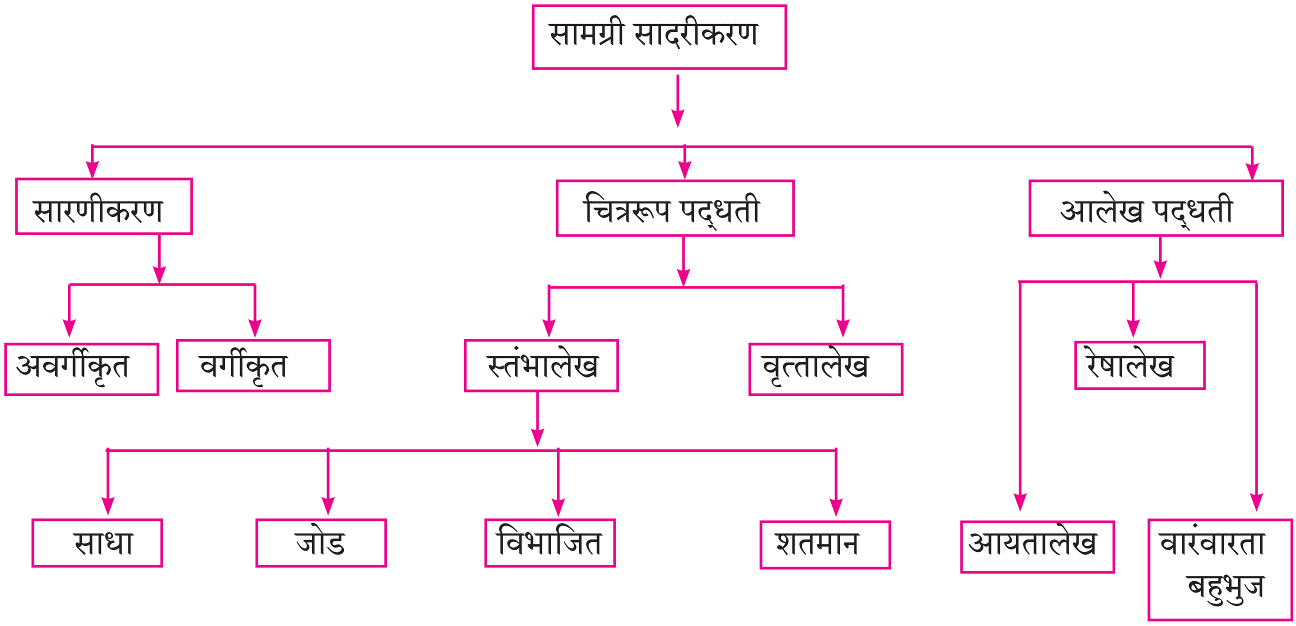
सांख्यिक माहिती संक्षिप्त रूपात सादर करण्याची एक पद्धत म्हणजे सारणीच्या रूपात सामग्री मांडणे हे आपल्याला माहीत आहे, परंतु सारणीच्या रूपात असल्यामुळे त्यावरून काही बाबी झटकन लक्षात येत नाहीत. सामान्य माणसांना त्या समजण्यासाठी, म्हणजेच सर्वसामान्य लोकांचे लक्ष सामग्रीतील महत्त्वाच्या बाबींकडे वेधण्यासाठी, त्या माहितीचे सादरीकरण वेगळ्या प्रकारे करता येईल का असा विचार करू. उदाहरणार्थ, अर्थसंकल्पातील बाबी, खेळातील माहिती इत्यादी.





सामग्रीचे सादरीकरण (Presentation of data)

चित्ररूप व आलेखरूप सादरीकरण हे सामग्रीचा अर्थबोध होण्यासाठी वापरले जाणारे लक्षवेधी प्रकार आहेत. सामग्री सादरीकरणाच्या विविध पद्धती दर्शवणारी शाखाकृती (tree chart) खाली दाखवली आहे.



मागील इयत्तांमध्ये आपण यांपैकी काही पद्धतींचा व आलेखांचा अभ्यास केला आहे. आता आपण आयतालेख, वारंवारता बहुभुज व वृत्तालेख यांच्या साहाय्याने सामग्रीचे प्रतिरूपण कसे करायचे ते पाहू.

फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल (1820-1910) या थोर स्त्रीला उत्कृष्ट व ध्येयनिष्ठ परिचारिका म्हणून ओळखले जाते. क्रीमियन युद्धातील जखमी सैनिकांची शुश्रूषा करून त्यांनी अनेकांचे प्राण वाचवले. संख्याशास्त्रात देखील फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल यांनी पायाभूत काम केले आहे. अनेक सैनिकांची अवस्था, त्यांच्यावर केलेले उपचार व त्यांचा उपयोग या सर्वांची व्यवस्थित नोंद करून त्यांनी महत्वाचे निष्कर्ष काढले. सैनिकांच्या मृत्यूंना त्यांच्या जखमांपेक्षा टायफॉइड, कॉलरा यांसारखे रोग जास्त कारणीभूत होते. त्यांची कारणे परिसराची अस्वच्छता, पिण्याचे अस्वच्छ पाणी, रुग्णांना दाटीवाटीने राहायला लागणे ही, होती. ही कारणमीमांसा चटकन ध्यानात यावी म्हणून फ्लॉरेन्स यांनी पायचार्टसारखे आलेख तयार केले. योग्य उपचार आणि स्वच्छतेचे नियम पाळून त्यांनी सैनिकांचा मृत्युदर खूप कमी करून दाखवला. शहराचे आरोग्य राखण्यासाठी, व्यवस्थित मलनिस्सारण करणारे ड्रेनेज आणि पिण्यासाठी सर्वांना शुद्ध पाणी आवश्यक आहे, हे त्यांचे निरीक्षण नगरपालिकांना पटले. अनेक निरीक्षणांची केलेली उत्तम नोंद, सांख्यिकीच्या आधारे विश्वासार्ह निष्कर्ष काढण्यास मदत करते, हे त्यांच्या कामावरून दिसले.

जाणून घेऊया.

आयतालेख : Histogram आयतालेख व तो काढण्याची रीत आपण एका उदाहरणाने समजून घेऊ.

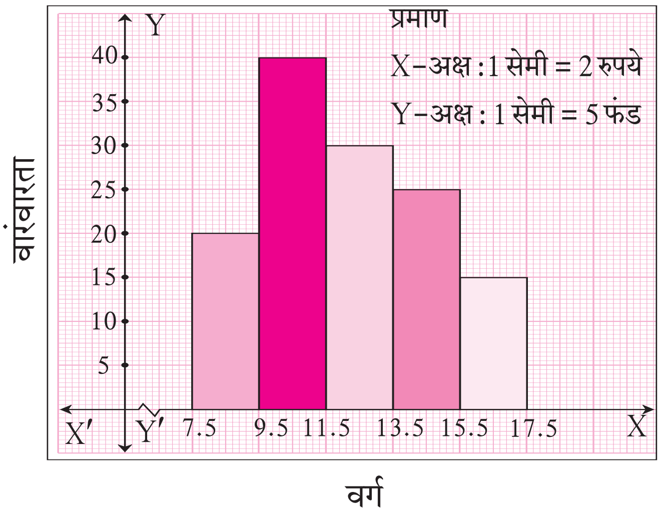
उदा : खालील सारणीत विविध कंपन्यांच्या म्युच्युअल फंडांचे एका युनिटचे नक्त मालमत्ता मूल्य (Net asset value) दिले आहे.

त्यावरून आयतालेख काढा.

नक्त मालमत्ता मूल्य (रुपये) (NAV)	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17
म्युच्यअल फंडाची संख्या	20	40	30	25	15

उकल : वरील सारणीसाठी दिलेले वर्ग सलग नाहीत. ते सर्वप्रथम सलग करून घेऊ.

सलग केलेले वर्ग	7.5-9.5	9.5-11.5	11.5-13.5	13.5-15.5	15.5-17.5
वारंवारता	20	40	30	25	15



आकृती 6.1

आयतालेख काढण्याची कृती

1. वर्ग सलग नसल्यास ते सलग करून घ्यावेत. अशा वर्गांना वर्धित वर्ग (extended class intervals) म्हणतात.

2. हे वर्धित वर्ग X- अक्षावर योग्य प्रमाण घेऊन दर्शवा.

3. Y- अक्षावर वारंवारता योग्य प्रमाण घेऊन दर्शवा.

4. X- अक्षावर प्रत्येक वर्धित वर्ग हा पाया घेऊन त्यावर आयत काढा. आयतांची उंची संगत वारंवारतांएवढी घ्या.

लक्षात घ्या.

X-अक्षावर आरंभबिंदू आणि पहिला वर्ग यांच्यामध्ये ‘—⁄\⁄—’ अशी खूण आहे. (या खुणेस अक्षसंकोच, krink mark, असे म्हणतात.) याचा अर्थ आरंभबिंदूपासून पहिल्या वर्गापर्यंत कोणतीही निरीक्षणे नाहीत. त्यामुळे X- अक्षाची घडी घातल्यासारखी ही खूण आहे. आवश्यकतेनुसार Y- अक्षावरही ही खूण वापरतात. त्यामुळे योग्य आकाराचा आलेख काढता येतो.

सरावसंच 6.4

1. पुढील सामग्री आयतालेखाद्‌वारे दर्शवा.

विद्यार्थ्यांची उंची (सेमी.)	135-140	140-145	145-150	150-155
विद्यार्थी संख्या	4	12	16	8

2. खालील सारणीत ज्वारीचे एकरी उत्पन्न दिले आहे. त्यावरून आयतालेख काढा.

एकरी उत्पन्न (क्विंटल)	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11
शेतकऱ्यांची संख्या	30	50	55	40	20

3. खालील सारणीत 210 कुटुंबांची वार्षिक गुंतवणूक दिली आहे. त्यावरून आयतालेख काढा.

गुंतवणूक (हजार रुपये)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
कुटुंबांची संख्या	30	50	60	55	15

4. खालील सारणीत विद्यार्थ्यांनी परीक्षेच्या तयारीसाठी दिलेला वेळ दर्शवला आहे. त्यावरून आयतालेख काढा.

वेळ (मिनिटांत)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
विद्यार्थी संख्या	14	20	24	22	16

जाणून घेऊया.

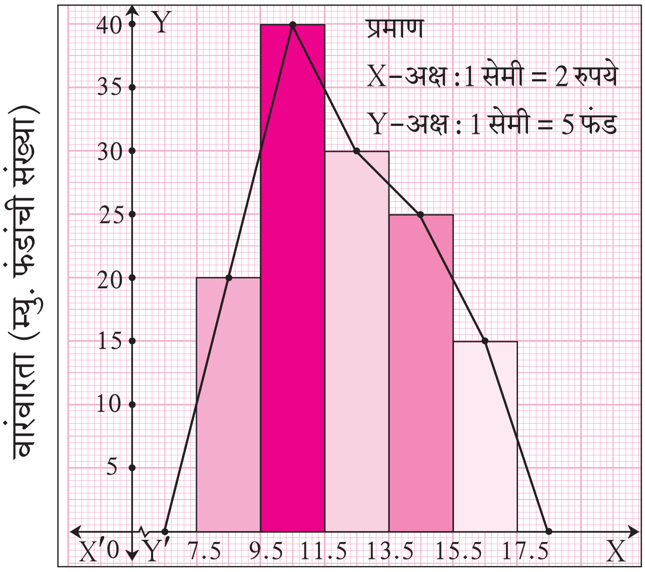
वारंवारता बहुभुज (Frequency polygon)

वारंवारता सारणीतील माहिती विविध प्रकारे दर्शवता येते. आपण आयतालेखाचा अभ्यास केला आहे. दुसरा प्रकार ‘वारंवारता बहुभुज’ हा आहे.

वारंवारता बहुभुज काढण्याच्या दोन पद्‌धतींचा अभ्यास करू.

(1) आयतालेखाच्या मदतीने (2) आयतालेख न वापरता.

(1) आयतालेखाच्या मदतीने वारंवारता बहुभुज काढण्याची रीत समजून घेण्यासाठी आपण आकृती 6.1 मध्ये दाखवलेल्या आयतालेखाचाच उपयोग करू.



आकृती 6.2

1. आयतालेखातील प्रत्येक आयताच्या वरच्या बाजूचा मध्यबिंदू दर्शवा.

2. पहिल्या आयताच्या आधी शून्य उंचीचा आयत आहे असे माना व त्याचा मध्यबिंदू दर्शवा. तसेच शेवटच्या आयतानंतर एक शून्य उंचीचा आयत मानून त्याच्याही मध्यबिंदूवर खूण करा. हे बिंदू X– अक्षावर येतील.

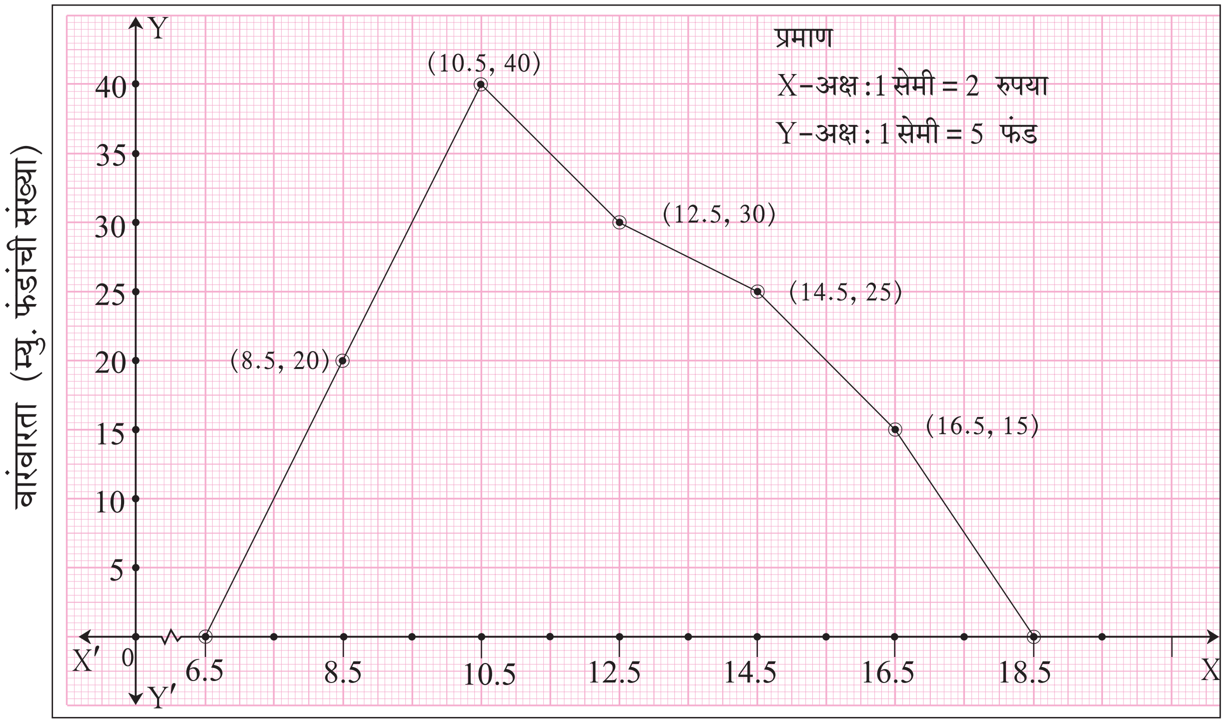
3. सर्व मध्यबिंदू क्रमाने सरळ रेघांनी जोडा.

4. तयार झालेली बंदिस्त आकृती म्हणजेच वारंवारता बहुभुज होय.

(2) आयतालेख न काढता, वारंवारता बहुभुज काढण्यासाठी बिंदूंचे निर्देशक कसे ठरवतात हे खालील सारणीवरून समजून घ्या.

वर्ग	सलग वर्ग	वर्गमध्य	वारंवारता	बिंदूंचे निर्देशक
6 - 7	5.5 - 7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 - 9	7.5 - 9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 - 11	9.5 - 11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 -13	11.5 - 13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 - 15	13.5 - 15.5	14.5	25	(14.5, 25)
16 - 17	15.5 - 17.5	16.5	15	(16.5, 15)
18 - 19	17.5 - 19.5	18.5	0	(18.5, 0)

सारणीतील पाचव्या स्तंभातील निर्देशकांशी संगत बिंदू आलेख कागदावर स्थापन करतात. ते क्रमाने जोडले, की वारंवारता बहुभुज मिळतो. हा बहुभुज आकृती 6.3 मध्ये दाखवला आहे. त्याचे निरीक्षण करा.



आकृती 6.3

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) सोबतच्या आकृतीत दाखवलेल्या वारंवारता बहुभुजाच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

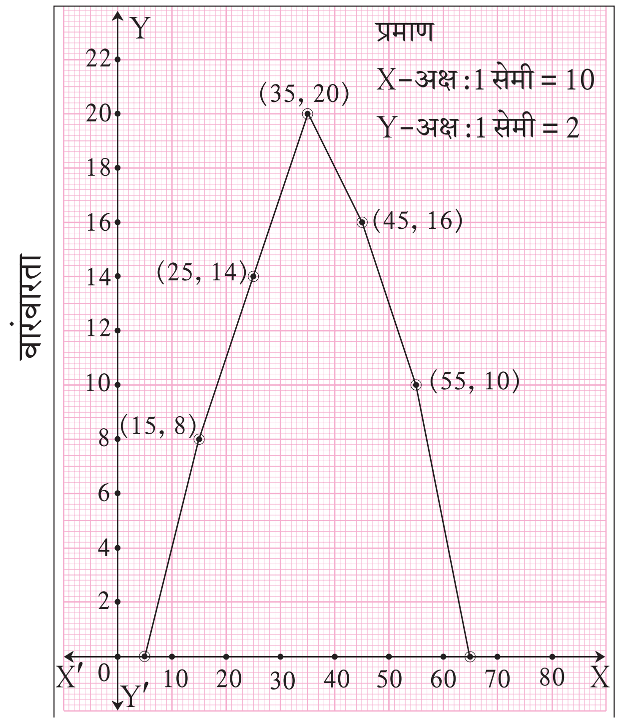
(1) 50-60 या वर्गाची वारंवारता लिहा.

(2) ज्या वर्गाची वारंवारता 14 आहे असा वर्ग लिहा.

(3) वर्गमध्य 55 असलेला वर्ग लिहा.

(4) सर्वाधिक वारंवारता असलेला वर्ग लिहा.

(5) शून्य वारंवारता असणारे वर्ग लिहा.



आकृती 6.4

उकल :

(1) वर्गमध्य X– अक्षावर दर्शवले आहेत. x– निर्देशक 55 असलेल्या बिंदूचा, (50–60 या वर्गाचा मध्य 55 आहे.) y– निर्देशक 10 आहे, म्हणून 50–60 या वर्गाची वारंवारता 10 आहे.

(2) वारंवारता Y– अक्षावर दर्शवल्या आहेत. y– निर्देशक 14 असलेल्या बिंदूचा x– निर्देशक 25 आहे. Y–अक्षावर 14 या वारंवारतेची खूण पाहा. 25 हा 20–30 या वर्गाचा मध्य आहे. म्हणून वारंवारता 14 असणारा वर्ग 20–30 आहे.

(3) 55 हा मध्य असलेला वर्ग 50–60 आहे.

(4) वारंवारता Y–अक्षावर दर्शवली आहे. बहुभुजावर y– निर्देशकाची सर्वाधिक किंमत 20 आहे. त्याचा संगत x– निर्देशक 35 आहे. वर्गमध्य 35 असणारा वर्ग 30–40 आहे. म्हणून 30–40 या वर्गाची वारंवारता सर्वाधिक आहे.

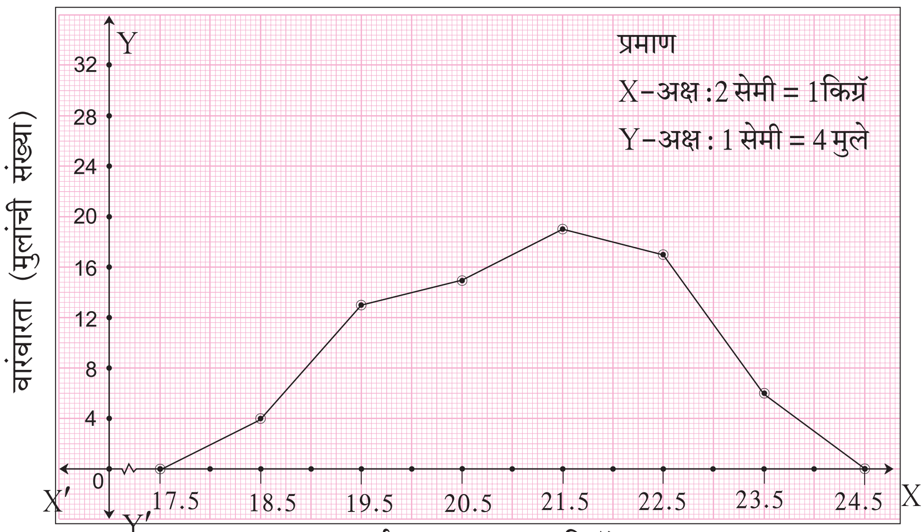
(5) शून्य वारंवारता असणारे वर्ग 0–10 आणि 60–70 हे आहेत.

उदा. (2) खालील सारणीत मुलांचे वजन व मुलांची संख्या दिलेली आहे. या सामग्रीवरून वारंवारता बहुभुज काढा.

मुलांचे वजन (किग्रॅ)	18–19	19–20	20–21	21–22	22–23	23–24
मुलांची संख्या	4	13	15	19	17	6

वारंवारता बहुभुज काढण्यासाठी आवश्यक बिंदूंसह खालील सारणी तयार करू व वारंवारता बहुभुज काढू.

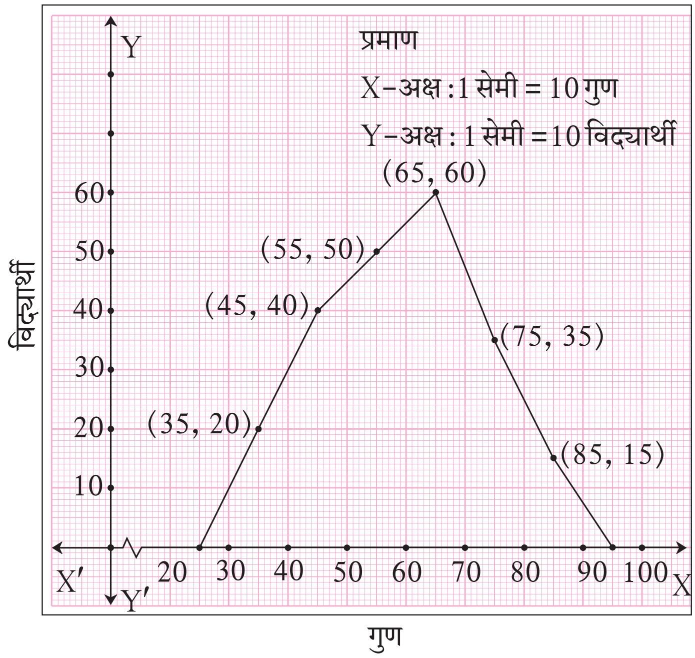
वर्ग	18–19	19–20	20–21	21–22	22–23	23–24
वर्गमध्य	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
वारंवारता	4	13	15	19	17	6
बिंदूचे निर्देशक	(18.5, 4)	(19.5,13)	(20.5,15)	(21.5,19)	(22.5,17)	(23.5,6)



आकृती 6.5

सरावसंच 6.5

1. खालील बहुभुजाचे निरीक्षण करून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आकृती 6.6

(1) जास्तीत जास्त विद्यार्थी कोणत्या वर्गात आहेत?

(2) शून्य वारंवारता असणारे वर्ग लिहा.

(3) 50 विद्यार्थी संख्या असणाऱ्या वर्गाचा मध्य किती?

(4) वर्गमध्य 85 असणाऱ्या वर्गाची खालची व वरची वर्गमर्यादा लिहा.

(5) 80-90 गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती?

2. खालील सामग्रीसाठी वारंवारता बहुभुज काढा.

वीज बिले (रुपये)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
कुटुंबे	240	300	450	350	160

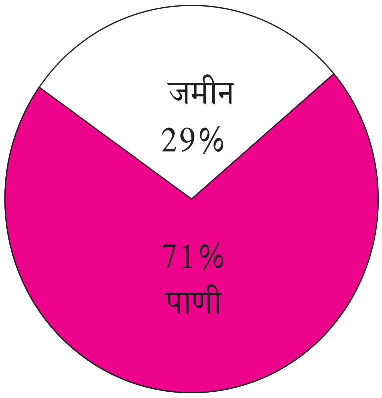
3. एका परीक्षेच्या निकालाच्या टक्केवारीचे वर्ग आणि त्या वर्गांत असणारी विद्यार्थी संख्या खालील सारणीत दिली आहे. या सारणीवरून वारंवारता बहुभुज काढा.

निकाल (टक्के)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थी संख्या	7	33	45	65	47	18	5

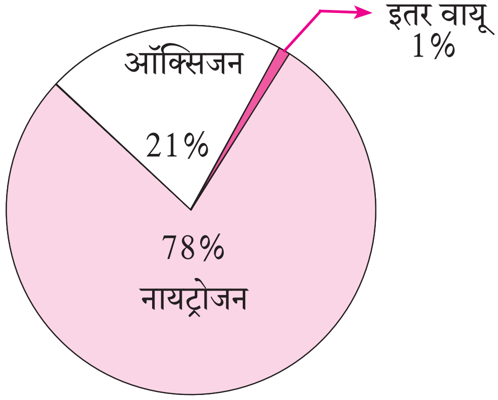
जरा आठवूया.

वृत्तालेख (Pie diagram)

मागील इयत्तांमध्ये आपण भूगोल व विज्ञान या विषयांमध्ये खालील आलेख पाहिले आहेत.अशा आलेखांना वृत्तालेख म्हणतात.



पृथ्वीवरील जमीन व पाणी यांचे प्रमाण



हवेतील विविध घटकांचे प्रमाण

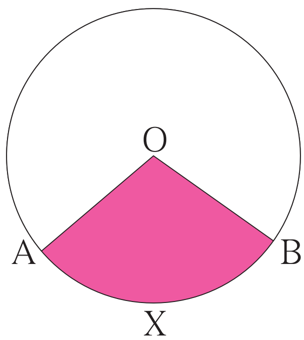
आकृती 6.7

वृत्तालेखात सांख्यिक सामग्री संपूर्ण वृत्तात म्हणजेच वर्तुळात दर्शवली जाते. सामग्रीतील वेगवेगळे घटक प्रमाणबद्ध वर्तुळपाकळ्यांनी त्यात दर्शवलेले असतात.

आकृती 6.8 मध्ये वर्तुळकेंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या OA व OB या त्रिज्या आहेत.

$\angle AOB$ हा केंद्रीय कोन आहे.

O – AXB हा छायांकित भाग म्हणजेच वर्तुळपाकळी (sector of a circle) आहे.



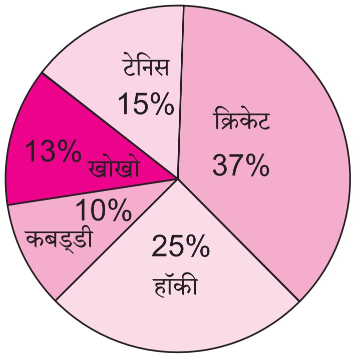
आकृती 6.8

जाणून घेऊया.

वृत्तालेखाचे वाचन Reading of Pie diagram

वृत्तालेखावरून दृष्टिक्षेपातच माहिती कशी मिळते, हे खालील उदाहरणावरून समजून घ्या.

इयत्ता 10 वीतील 120 मुलांना 'तुमचा आवडता खेळ कोणता', हा प्रश्न विचारला. मिळालेली माहिती वृत्तालेखाने दर्शवली आहे.



आकृती 6.9

कोणता खेळ सर्वाधिक आवडीचा आहे?

किती टक्के मुलांना खो-खो आवडतो?

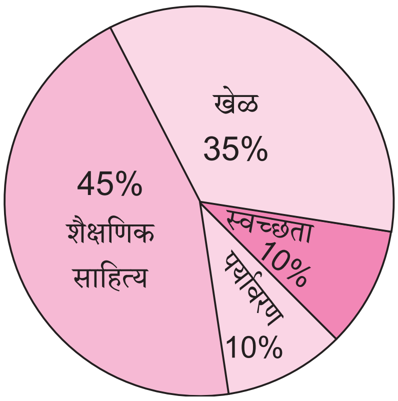
कबड्डी आवडणारी मुले किती टक्के?

यांसारख्या प्रश्नांची उत्तरे आपल्याला एका दृष्टिक्षेपात या वृत्तालेखावरून मिळतात.

आणखी एक वृत्तालेख पाहा.

सोबतच्या आकृतीतील वृत्तालेख एका शाळेच्या वार्षिक अर्थनियोजनाचा आहे. या वृत्तालेखावरून आपल्याला असे समजते, की

- 45% रक्कम शैक्षणिक साहित्यासाठी राखून ठेवली आहे.
- 35% रक्कम खेळाच्या साहित्यासाठी दर्शवली आहे.
- 10% रक्कम स्वच्छतेच्या साहित्यासाठी ठेवली आहे.
- 10% रक्कम पर्यावरण रक्षणासाठी ठेवलेली आहे.



आकृती 6.10

अशा प्रकारे वृत्तालेखातून आपल्याला एका दृष्टिक्षेपात माहिती मिळते.

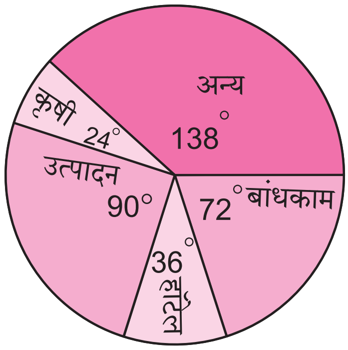
आता आपण वृत्तालेखाची अधिक माहिती घेऊ.

अनेक वेळा वृत्तालेखाद्‌वारे दिलेली विविध प्रकारची माहिती आपण वृत्तपत्रातून पाहतो, जसे वार्षिक अंदाजपत्रक, ऑलिंपिक स्पर्धांमधील विविध देशांची कामगिरी, देशाचा पैसा येतो कसा व जातो कसा इत्यादी.

त्यासाठी आपण माहिती कशी शोधायची हे उदाहरणांवरून समजून घेऊ.

नमुना उदाहरण :

एका सर्वेक्षणात मिळालेली कार्यकुशल व्यक्तींची वर्गवारी खालील वृत्तालेखात दाखवली आहे. जर उत्पादन क्षेत्रात कार्यरत असलेल्या व्यक्ती 4500 असतील तर पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आकृती 6.11

(i) सर्व क्षेत्रांतील एकूण कार्यकुशल व्यक्ती किती आहेत ?

(ii) बांधकाम क्षेत्रातील कार्यकुशल व्यक्तींची संख्या किती ?

(iii) कृषी क्षेत्रातील कार्यकुशल व्यक्ती किती ?

(iv) उत्पादन व बांधकाम क्षेत्रातील कुशल व्यक्तींच्या संख्यांतील फरक किती ?

उकल : (i) समजा, सर्व क्षेत्रांतील एकूण कार्यकुशल व्यक्तींची संख्या x आहे.

$\therefore$ x व्यक्तींसाठीचा केंद्रीय कोन = 360°

उत्पादन क्षेत्रातील कार्यकुशल व्यक्तींसाठीचा केंद्रीय कोन = $\dfrac{\text{उत्पादन क्षेत्रातील व्यक्ती}}{\text{एकूण व्यक्ती}} \times 360$

$$90 = \frac{4500}{x} \times 360$$

$$\therefore x = 18000$$

$\therefore$ सर्व क्षेत्रांतील कार्यकुशल व्यक्ती = 18000.

(ii) बांधकाम क्षेत्रासाठी केंद्रीय कोन 72° दाखवला आहे.

$$72 = \frac{\text{बांधकाम क्षेत्रातील व्यक्ती}}{18000} \times 360$$

$\therefore$ बांधकाम क्षेत्रातील व्यक्ती $= \dfrac{72 \times 18000}{360}$

$= 3600$

(iii) कृषी क्षेत्रासाठी केंद्रीय कोन = 24° आहे.

$$24 = \frac{\text{कृषी क्षेत्रातील व्यक्ती}}{\text{एकूण कार्यकुशल व्यक्ती}} \times 360$$

$$24 = \frac{\text{कृषी क्षेत्रातील व्यक्ती}}{18000} \times 360$$

$\therefore$ कृषी क्षेत्रातील व्यक्ती $= \dfrac{24 \times 18000}{360}$

$= 1200$

(iv) उत्पादन व बांधकाम या क्षेत्रांतील केंद्रीय कोनांतील फरक = 90° − 72° = 18°.

$$\therefore \text{ केंद्रीय कोनांतील फरक} = \frac{\text{दोन क्षेत्रांतील व्यक्तींच्या संख्यांतील फरक}}{\text{एकूण कार्यकुशल व्यक्ती}} \times 360$$

$$18 = \frac{\text{दोन क्षेत्रांतील व्यक्तींच्या संख्यांतील फरक}}{18000} \times 360$$

$$\text{उत्पादन व बांधकाम या क्षेत्रांतील कुशल व्यक्तींच्या संख्यांतील फरक} = \frac{18 \times 18000}{360}$$

$$= 900$$

हे लक्षात ठेवूया.

- सामग्रीतील प्रत्येक घटक त्याच्याशी निगडित वर्तुळपाकळीने दाखवलेला असतो.
- वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप त्या विशिष्ट घटकातील नोंदींच्या संख्येच्या प्रमाणात असते.
- $\text{केंद्रीय कोनाचे माप } (\theta) = \frac{\text{निगडित घटकातील संख्या}}{\text{एकूण घटकांतील संख्या}} \times 360$
- योग्य त्रिज्येचे वर्तुळ काढावे. प्रत्येक घटकातील संख्येच्या प्रमाणात केंद्रीय कोन घेऊन वर्तुळाचे पाकळ्यांत विभाजन केलेले असते.

जाणून घेऊया.

वृत्तालेख काढणे (To draw Pie diagram)

काढलेल्या वृत्तालेखावरून माहिती कशी वाचायची हे आपण पाहिले. आता वृत्तालेख कसा काढतात, ते पाहू.

1. वृत्तालेख काढताना संपूर्ण वर्तुळाची विभागणी प्रमाणबद्ध वर्तुळपाकळ्यांत करतात.
2. प्रत्येक घटकाशी संबंधित वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप खालील सूत्राने काढतात.

$$\text{वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप } \theta = \frac{\text{त्या घटकातील संख्या}}{\text{सर्व घटकांतील एकूण संख्या}} \times 360$$

योग्य त्रिज्येचे वर्तुळ काढून, सामग्रीत जेवढे घटक आहेत तेवढ्या वर्तुळपाकळ्यांत वर्तुळाचे विभाजन करतात.

वृत्तालेख काढण्याची कृती खालील उदाहरणांतून समजावून घेऊ.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका दुकानात दुचाकींच्या खरेदीसाठी रंगांची पसंती खालीलप्रमाणे होती. ही माहिती वृत्तालेखाने दर्शवण्यासाठी प्रत्येक घटक दर्शवणाऱ्या वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप ठरवा.

उकल : दुचाकींची एकूण मागणी 36 आहे.त्यांपैकी 10 दुचाकी पांढऱ्या रंगाच्या आहेत.

$\therefore$ पांढऱ्या दुचाकी दर्शवणाऱ्या वर्तुळपाकळीच्या केंद्रीय कोनाचे माप

$$= \frac{\text{पांढऱ्या दुचाकींची संख्या}}{\text{दुचाकींची एकूण संख्या}} \times 360$$

$$= \frac{10}{36} \times 360 = 100$$

याप्रमाणेच इतर रंगांच्या दुचाकींशी संगत वर्तुळपाकळ्यांच्या केंद्रीय कोनांची मापे काढून सारणीत दर्शवली आहेत.

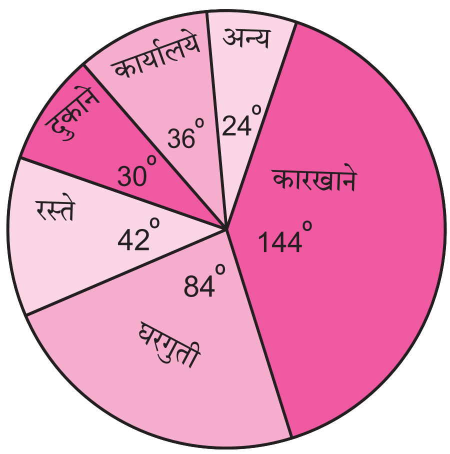
रंग	दुचाकींची मागणी	वर्तुळपाकळीचा केंद्रीय कोन
पांढरा	10	$\frac{10}{36} \times 360 = 100^\circ$
काळा	9	$\frac{9}{36} \times 360 = 90^\circ$
निळा	6	60°
राखाडी	7	70°
लाल	4	40°
एकूण	36	360°

उदा (2) एका गावात विविध स्थानांना दररोज होणारा वीजपुरवठा खालील सारणीत दर्शवला आहे या माहितीचा वृतालेख काढा.

स्थाने	कारखाने	घरे	रस्ते	दुकाने	कार्यालये	अन्य
वीजपुरवठा (हजार एकक)	24	14	7	5	6	4

उकल : एकूण वीजपुरवठा 60 हजार एकके आहे. त्यावरून केंद्रीय कोनांची मापे काढून सारणीत दाखवू.

वीजपुरवठा	एकक	केंद्रीय कोनाचे माप
कारखाने	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
घरगुती	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
रस्ते	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
दुकाने	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
कार्यालये	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
अन्य	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
एकूण	60	360°



आकृती 6.12

वृत्तालेख काढण्याच्या पायऱ्या :

(1) प्रथम आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे वर्तुळ काढून एक त्रिज्या काढली. नंतर सारणीत काढून घेतलेल्या केंद्रीय कोनांच्या मापांच्या वर्तुळपाकळ्या एकापाठोपाठ एक ($144^\circ, 84^\circ, 42^\circ, 30^\circ, 36^\circ$, व 24°) याप्रमाणे घड्याळाच्या काट्यांच्या दिशेने काढल्या. (वर्तुळपाकळ्या एकाच दिशेने एकापुढे एक काढताना त्यांचा क्रम बदलला तरी चालतो.)

(2) प्रत्येक पाकळीत संबंधित घटक नोंदवले.

कृती :

एका कुटुंबाचा विविध बाबींवर होणारा मासिक खर्च दिलेला आहे, त्यावरून केंद्रीय कोनांची मापे काढून वृत्तालेख काढा.

विविध बाबी	प्रतिशत खर्च	केंद्रीय कोनाचे माप
अन्न	40	$\frac{40}{100} \times 360 = \boxed{}$
कपडे	20	$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$
घरभाडे	15	$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$
शिक्षण	20	$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$
इतर खर्च	05	$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$
एकूण	100	360°

सरावसंच 6.6

1. एका रक्तदान शिबिरात विविध वयोगटांतील 200 व्यक्तींनी केलेले रक्तदान दिले आहे. त्यावरून वृत्तालेख काढा.

वयोगट (वर्षे)	20-25	25-30	30-35	35-40
व्यक्तींची संख्या	80	60	35	25

2. एका विद्यार्थ्याने विविध विषयांत 100 पैकी मिळवलेले गुण दिले आहेत. ही माहिती वृत्तालेखाद्वारे दाखवा.

विषय	इंग्रजी	मराठी	विज्ञान	गणित	सा. शास्त्र	हिंदी
गुण	50	70	80	90	60	50

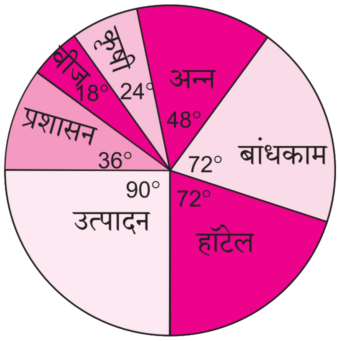
3. वृक्षारोपण कार्यक्रमांतर्गत शाळेतील वेगवेगळ्या इयत्तांतील विद्यार्थ्यांनी लावलेल्या झाडांची संख्या खालील सारणीत दिलेली आहे. ही माहिती वृत्तालेखाद्वारे दाखवा.

इयत्ता	5 वी	6 वी	7 वी	8 वी	9 वी	10 वी
झाडांची संख्या	40	50	75	50	70	75

4. एका फळविक्रेत्याकडे आलेल्या विविध फळांच्या मागणीची टक्केवारी खालील सारणीत दिली आहे. या माहितीचा वृत्तालेख काढा.

फळे	आंबा	मोसंबी	सफरचंद	चिकू	संत्री
मागणीची टक्केवारी	30	15	25	20	10

5. एका गावातील विविध व्यावसायिकांचे प्रमाण दर्शवणारा वृत्तालेख आकृती 6.13 मध्ये दिला आहे. त्यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आकृती 6.13

(1) एकूण व्यावसायिकांची संख्या 10000 असल्यास बांधकाम क्षेत्रात किती व्यावसायिक आहेत? (2) प्रशासन क्षेत्रात किती व्यावसायिक कार्यरत आहेत? (3) उत्पादन क्षेत्रात किती टक्के व्यावसायिक आहेत?

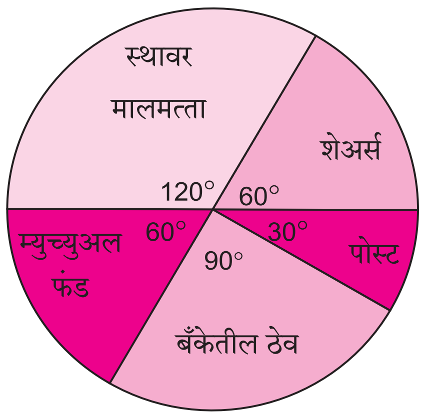
6. एका कुटुंबाच्या वार्षिक गुंतवणुकीचा वृत्तालेख सोबतच्या आकृतीत दिला आहे. त्यावरून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) शेअरमध्ये गुंतवलेली रक्कम रु. 2000 असल्यास एकूण गुंतवणूक किती?

(2) बँकेतील ठेवींची रक्कम किती?

(3) म्युच्युअल फंडापेक्षा स्थावर मालमत्तेत किती रक्कम जास्त गुंतवली?

(4) पोस्टातील गुंतवणूक किती?



आकृती 6.14

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. बहुपर्यायी प्रश्नांची उत्तरे दिलेल्या पर्यायांतून शोधून लिहा.

(1) विविध रक्तगटांच्या व्यक्तींचे रक्तगटानुसार वर्गीकरण वृत्तालेखात दाखवायचे आहे. O– रक्तगट असणाऱ्या व्यक्ती 40% असल्यास O– रक्तगट असणाऱ्या व्यक्तींसाठी वृत्तालेखातील केंद्रीय कोन किती घ्यावा?

(A) 114°　　(B) 140°　　(C) 104°　　(D) 144°

(2) इमारतीच्या बांधकामाचे विविध खर्च वृत्तालेखाद्वारे दाखवले असता, सिमेंटचा खर्च 75° च्या केंद्रीय कोनाने दाखवला आहे. सिमेंटचा खर्च रु. 45,000 असल्यास, इमारतीच्या बांधकामाचा एकूण खर्च किती रुपये ?

(A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) वर्गीकृत वारंवारता सारणीतील संचित वारंवारतेचा उपयोग . . . . . काढण्यासाठी होतो.

(A) मध्य (B) मध्यक (C) बहुलक (D) यांपैकी सर्व

(4) वर्गीकृत वारंवारता सारणीतील सामग्रीचा मध्य काढण्यासाठीच्या पुढील सूत्रात $\overline{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g$ मध्ये $u_i = . . .$

(A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

(5)

प्रतिलीटर कापलेले अंतर (किमी)	12-14	14-16	16-18	18-20
कारची संख्या	11	12	20	7

वरील सामग्रीसाठी कारच्या प्रतिलीटर कापलेल्या अंतराचे मध्यक . . . . . या वर्गात आहे.

(A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

(6)

प्रत्येक विद्यार्थ्याने लावलेली झाडे	1-3	4-6	7-9	10-12
विद्यार्थी संख्या	7	8	6	4

वरील वारंवारता सारणीतील सामग्रीसाठी वारंवारता बहुभुज काढायचा आहे. 4-6 या वर्गातील विद्यार्थी दर्शवण्यासाठीच्या बिंदूंचे निर्देशक . . . आहे.

(A) (4, 8) 0 (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. एका द्राक्षाच्या मोसमात बागाईतदारांना मिळालेल्या उत्पन्नाची वर्गीकृत वारंवारता सारणी खाली दिली आहे. त्यावरून उत्पन्नाचा मध्य काढा.

उत्पन्न (हजार रुपये)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
बागाईतदार	10	11	15	16	18	14

3. खालील वर्गीकृत वारंवारता सारणीत एका बँकेने शेततळ्यांसाठी उपलब्ध करून दिलेले कर्ज दिले आहे, तर बँकेने दिलेल्या रकमेचा मध्य काढा.

कर्ज (हजार रुपये)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
शेततळ्यांची संख्या	13	20	24	36	7

4. एका कारखान्यातील 120 कामगारांच्या आठवड्याच्या पगाराची वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी खाली दिली आहे. त्यावरून कामगारांच्या आठवड्याच्या पगाराचा मध्य काढा.

आठवड्याचा पगार (रुपये)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
कामगारांची संख्या	15	35	50	20

5. खालील वर्गीकृत वारंवारता सारणीत 50 पूरग्रस्तांच्या कुटुंबांना दिलेल्या मदतीची रक्कम दिली आहे. त्यावरून मदतीच्या रकमेचा मध्य काढा.

मदतीची रक्कम (हजार रुपये)	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
कुटुंबांची संख्या	7	13	20	6	4

6. खालील वर्गीकृत वारंवारता सारणीत सार्वजनिक बस सेवेच्या 250 बसेसनी एका दिवसात कापलेले अंतर दिले आहे. त्यावरून एका दिवसात कापलेल्या अंतराचे मध्यक काढा.

अंतर (किलोमीटर)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
बसची संख्या	40	60	80	50	20

7. एका जनरल स्टोअरमधील विविध वस्तूंच्या किमती व त्या वस्तूंची मागणी यांची वर्गीकृत वारंवारता सारणी दिली आहे. त्यावरून किमतीचा मध्यक काढा.

किंमत (रुपये)	20 पेक्षा कमी	20-40	40-60	60-80	80-100
वस्तूंची संख्या	140	100	80	60	20

8. खालील वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणीत एका मिठाईच्या दुकानातील विविध वजनांच्या मिठाईची मागणी दिली आहे. त्यावरून वजनाच्या मागणीचे बहुलक काढा.

मिठाईचे वजन (ग्रॅम)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
ग्राहक संख्या	10	60	25	20	15

9. खालील वारंवारता वितरणासाठी आयतालेख काढा.

वीजवापर (युनिट)	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
कुटुंबांची संख्या	150	400	460	540	600	350

10. एका हातमाग कारखान्यात मजुरांना एक साडी बनवण्यास लागणारे दिवस आणि मजुरांची संख्या यांची वर्गीकृत वारंवारता सारणी दिली आहे. या सामग्रीसाठी वारंवारता बहुभुज काढा.

दिवस	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
मजुरांची संख्या	5	16	30	40	35	14

11. एका वर्गातील विद्यार्थ्यांना विज्ञानाचा प्रयोग करण्यासाठी लागलेल्या वेळेची वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी दिली आहे. या माहितीसाठी आयतालेख काढून वारंवारता बहुभुज काढा.

प्रयोगासाठी लागलेला वेळ (मिनिटे)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
विद्यार्थ्यांची संख्या	8	16	22	18	14	12

12. खालील वर्गीकृत वारंवारता सारणीसाठी वारंवारता बहुभुज काढा.

रक्तदात्यांचे वय (वर्षे)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
रक्तदात्यांची संख्या	38	46	35	24	15	12

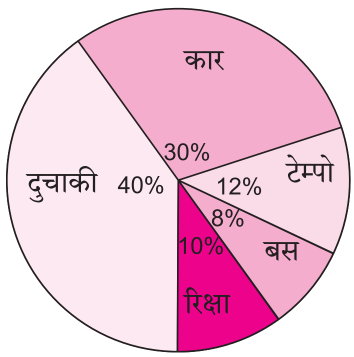
13. खालील सारणीत 150 गावांतील पावसाची वार्षिक सरासरी दिली आहे. त्यासाठी वारंवारता बहुभुज काढा.

सरासरी पाऊस (सेंटिमीटर)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
गावांची संख्या	14	12	36	48	40

14. सकाळी 8 ते 10 या वेळेत शहरातील एका चौकातील सिग्नलवरून पुढे जाणाऱ्या विविध वाहनांच्या संख्यांची शतमाने शेजारील वृत्तालेखात दिली आहेत.

(1) प्रत्येक प्रकारच्या वाहनासाठीच्या केंद्रीय कोनाचे माप काढा.

(2) दुचाकींची संख्या 1200 असल्यास वाहनांची एकूण संख्या किती ?



आकृती 6.15

15. खालील तक्त्यात ध्वनिप्रदूषण निर्माण करणारे घटक दिले आहेत. त्यासाठी वृत्तालेख काढा.

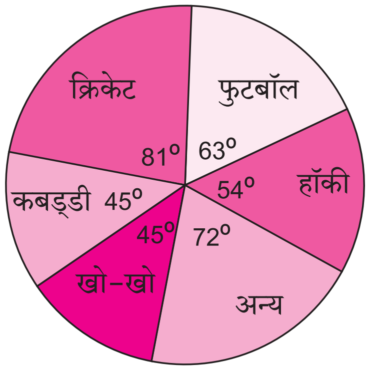
बांधकाम	रहदारी	विमान उड्डाणे	औद्योगिक	रेल्वेच्या गाड्या
10%	50%	9%	20%	11%

16. एका सर्वेक्षणातील शालेय विद्यार्थ्यांची विविध खेळांतील आवड जाणण्यासाठी केलेल्या सर्वेक्षणात मिळालेली माहिती शेजारील वृत्तालेखात दाखवली आहे. एकूण विद्यार्थी संख्या 1000 असल्यास,

(1) क्रिकेट आवडणारे विद्यार्थी किती ?

(2) फुटबॉल हा खेळ किती विद्यार्थ्यांना आवडतो ?

(3) अन्य खेळांना पसंती देणारे विद्यार्थी किती ?



आकृती 6.16

17. एका गावातील आरोग्य केंद्रात 180 स्त्रियांची तपासणी झाली. त्यांतील 50 स्त्रियांचे हिमोग्लोबीन कमी होते, 10 स्त्रियांना मोतीबिंदूचा त्रास होता, 25 स्त्रियांना श्वसनाचे विकार होते. उरलेल्या स्त्रिया निरोगी होत्या. ही माहिती दर्शवणारा वृत्तालेख काढा.

18. वनीकरणाच्या प्रकल्पात एका शाळेतील विद्यार्थ्यांनी पर्यावरण दिनानिमित्त 120 झाडे लावली. त्याची माहिती खालील सारणीत दिली आहे. ही माहिती दर्शवणारा वृत्तालेख काढा.

झाडांची नावे	करंज	बेहडा	अर्जुन	बकुळ	कडुनिंब
झाडांची संख्या	20	28	24	22	26

4J542B

उत्तरसूची

1. दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

सरावसंच 1.1

2. (1) (2, 4) (2) (3, 1) (3) (6,1) (4) (5, 2)
   (5) (−1, 1) (6) (1, 3) (7) (3, 2) (8) (7, 3)

सरावसंच 1.2

1. (1)

x	3	**−2**	0
y	**0**	5	3
(x, y)	(3, 0)	**(−2, 5)**	(0, 3)

(2)

x	**4**	−1	0
y	0	**−5**	−4
(x, y)	**(4, 0)**	**(−1,−5)**	(0,−4)

2. (1) (5, 1) (2) (4, 1) (3) (3, −3) (4) (−1, −5) (5) (1, 2.5) (6) (8, 4)

सरावसंच 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{5} - \boxed{2} \times 4 = \boxed{15} - 8 = \boxed{7}$
2. (1) −18 (2) 21 (3) $-\frac{4}{3}$
3. (1) (2, −1) (2) (−2, 4) (3) (3, −2) (4) (2, 6) (5) (6, 5) (6) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$

सरावसंच 1.4

1. (1) $(\frac{1}{9}, 1)$ (2) (3, 2) (3) $(\frac{5}{2}, -2)$ (4) (1, 1)

सरावसंच 1.5

1. त्या संख्या 5 आणि 2
2. $x = 12, y = 8$ क्षेत्रफळ = 640 चौ. एकक, परिमिती = 112 एकक
3. मुलाचे वय 15 वर्षे, वडिलांचे वय 40 वर्षे
4. $\frac{7}{18}$
5. A = 30 किग्रॅ, B = 55 किग्रॅ
6. 150 किमी.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. (1) B (2) A (3) D (4) C (5) A
2.

x	−5	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{13}{6}$	0
(x, y)	$(-5, -\frac{13}{6})$	$(\frac{3}{2}, 0)$

3. (1) (3, 2) (2) (−2, −1) (3) (0, 5) (4) (2, 4) (5) (3, 1)

4. (1) 22 (2) −1 (3) 13

5. (1) $(-\frac{2}{3}, 2)$ (2) (1, 4) (3) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (4) $(\frac{7}{11}, \frac{116}{33})$ (5) (2, 6)

6. (1) (6, −4) (2) $(-\frac{1}{4}, -1)$ (3) (1, 2) (4) (1, 1) (5) (2, 1)

7. (2) चहाचा दर ₹300 प्रति किग्रॅ.
साखरेचा दर ₹ 40 प्रति किग्रॅ.
(3) ₹100 च्या नोटांची संख्या 20
₹50 च्या नोटांची संख्या 10
(4) मनीषाचे आजचे वय 23 वर्षे
सविताचे आजचे वय 8 वर्षे
(5) कुशल कामगाराचा रोजगार 450 रु.
अकुशल कामगाराचा रोजगार 270 रु.
(6) हमीदचा वेग 50 किमी/तास
जोसेफचा वेग 40 किमी/तास

2. वर्गसमीकरणे

सरावसंच 2.1

1. $m^2 + 5m + 3 = 0$, $y^2 - 3 = 0$ (यांसारखी कोणतीही)
2. (1), (2), (4), (5) ही वर्गसमीकरणे आहेत.
3. (1) $y^2 + 2y - 10 = 0$, $a = 1, b = 2, c = -10$
(2) $x^2 - 4x - 2 = 0$, $a = 1, b = -4, c = -2$
(3) $x^2 + 4x + 3 = 0$, $a = 1, b = 4, c = 3$
(4) $m^2 + 0m + 9 = 0$, $a = 1, b = 0, c = 9$
(5) $6p^2 + 3p + 5 = 0$, $a = 6, b = 3, c = 5$
(6) $x^2 + 0x - 22 = 0$, $a = 1, b = 0, c = -22$
4. (1) 1 आहे, −1 नाही. (2) $\frac{5}{2}$ आहे, 2 नाही.
5. k = 3 6. k = −7

सरावसंच 2.2

1. (1) 9, 6 (2) −5, 4 (3) $-13, -\frac{1}{2}$ (4) $5, -\frac{3}{5}$
(5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (6) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ (7) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ (8) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
(9) 25, −1 (10) $-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ (11) 0, 3 (12) $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$

सरावसंच 2.3

1. (1) 4,−5 (2) $(\sqrt{6}-1), (-\sqrt{6}-1)$ (3) $\frac{\sqrt{13}+5}{2}, \frac{-\sqrt{13}+5}{2}$

(4) $\frac{\sqrt{2}+2}{3}, \frac{-\sqrt{2}+2}{3}$ (5) $-\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}$ (6) $\frac{2+\sqrt{39}}{5}, \frac{2-\sqrt{39}}{5}$

सरावसंच 2.4

1. (1) 1, −7, 5 (2) 2, −5, 5 (3) 1, −7, 0

2. (1) −1, −5 (2) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ (3) $\frac{-1+\sqrt{22}}{3}, \frac{-1-\sqrt{22}}{3}$

(4) $\frac{2+\sqrt{14}}{5}, \frac{2-\sqrt{14}}{5}$ (5) $\frac{-1+\sqrt{73}}{6}, \frac{-1-\sqrt{73}}{6}$ (6) $-1, -\frac{8}{5}$

3. $-\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

सरावसंच 2.5

1. (1) 5 असताना मुळे भिन्न वास्तव संख्या आहेत., −5 असताना मुळे वास्तव संख्या नाहीत.

(2) $x^2 + 7x + 5 = 0$ (3) $\alpha + \beta = 2, \alpha \times \beta = -\frac{3}{2}$

2. (1) 53 (2) −55 (3) 0

3. (1) वास्तव व समान. (2) वास्तव व असमान. (3) वास्तव संख्या नाहीत.

4. (1) $x^2 - 4x = 0$ (2) $x^2 + 7x - 30 = 0$

(3) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ (4) $x^2 - 4x - 1 = 0$

5. k = 3 **6.** (1) 18 (2) 50

7. (1) k = 12 किंवा k = −12 (2) k = 6

सरावसंच 2.6

1. 9 वर्षे **2.** 10 व 12 **3.** उभ्या रांगेत 10 व आडव्या रांगेत 15.

4. किशोरचे आजचे वय 10 वर्षे व विवेकचे आजचे वय 15 वर्षे

5. 10 गुण **6.** भांड्यांची संख्या 6 व प्रत्येक भांड्याचे निर्मिती मूल्य 100 रुपये.

7. 6 किमी/तास **8.** निशूला 6 दिवस व पिंटूला 12 दिवस.

9. भाजक = 9, भागाकार = 51 **10.** AB = 7 सेमी, CD = 15 सेमी, AD = BC = 5 सेमी.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. (1) B (2) A (3) C (4) B (5) B (6) D (7) C (8) C

2. (1) व (3) वर्गसमीकरणे आहेत.

3. (1) -15 (2) 1 (3) 21

4. k = 3 5. (1) $x^2 - 100 = 0$ (2) $x^2 - 2x - 44 = 0$ (3) $x^2 - 7x = 0$

6. (1) वास्तव संख्या नाहीत. (2) वास्तव व असमान. (3) वास्तव व समान.

7. (1) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{5}$ (3) 1, -4

(4) $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ (5) मुळे वास्तव संख्या नाहीत. (6) $(2+\sqrt{7})$, $(2-\sqrt{7})$

8. $m = 14$ 9. $x^2 - 5x + 6 = 0$ 10. $x^2 - 4pqx - (p^2 - q^2)^2 = 0$

11. सागरजवळ 100 रुपये व मुकुंदजवळ 150 रुपये.

12. 12 आणि $\sqrt{24}$ किंवा 12 आणि $-\sqrt{24}$ 13. विद्यार्थ्यांची संख्या 60

14. रुंदी 45 मी. लांबी 100 मी, शेततळ्याची बाजू 15 मी.

15. मोठ्या नळासाठी 3 तास व लहान नळासाठी 6 तास.

3. अंकगणिती श्रेढी

सरावसंच 3.1

1. (1) आहे, $d = 2$ (2) आहे. $d = \frac{1}{2}$ (3) आहे, $d = 4$ (4) नाही.

(5) आहे, $d = -4$ (6) आहे, $d = 0$ (7) आहे, $d = \sqrt{2}$ (8) आहे, $d = 5$

2. (1) 10, 15, 20, 25, . . . (2) $-3, -3, -3, -3$, . . . (3) $-7, -6.5, -6, -5.5$, . .

(4) -1.25, 1.75, 4.75, 7.75, . . .(5) 6, 3, 0, -3 . . . (6) $-19, -23, -27, -31$

3. (1) $a = 5, d = -4$ (2) $a = 0.6, d = 0.3$ (3) $a = 127, d = 8$ (4) $a = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$

सरावसंच 3.2

1. (1) $d = 7$ (2) $d = 3$ (3) $a = -3, d = -5$ (4) $a = 70, d = -10$

2. आहे. 121 3. 104 4. 115 5. -121 6. 180

7. 55 8. 55 वे 9. 60 10. 1

सरावसंच 3.3

1. 1215 2. 15252 3. 30450 5. 5040

5. 2380 6. 60 7. 4, 9, 14 किंवा 14, 9, 4 8. -3, 1, 5, 9

सरावसंच 3.4

1. 70455 रुपये 2. पहिला हप्ता 1000 रुपये, शेवटचा हप्ता 560 रुपये. 3. 1,92,000 रुपये

4. 48, 1242 5. $-20°, -25°, -30°, -35°, -40°, -45°$ 6. 325

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. (1) B (2) C (3) B (4) D (5) B (6) C (7) C (8) A (9) A (10) B

2. 40 3. 1, 6, 11, . . . 4. -195 5. 16, -21 6. -1 7. 6, 10

8. 8 9. 67, 69, 71 10. 3, 7, 11, ... 147. 14. 2000 रुपये.

4. अर्थनियोजन

सरावसंच 4.1

1. CGST 6%, SGST 6% 2. SGST 9%, GST 18%
3. CGST ₹ 784 व SGST ₹ 784
4. तो बेल्ट ग्राहकाला 691.48 रुपयांना मिळेल.
5. खेळण्यातील कारची करपात्र किंमत ₹ 1500 त्यावर CGST ₹ 135 SGST ₹ 135
6. (1) SGST चा दर 14% (2) एसीवरील GST चा दर 28%
   (3) एसीची करपात्र किंमत 40,000 रु. (4) GST ची एकूण रक्कम 11,200 रु.
   (5) CGST 5600 रु. (6) SGST 5600 रु.
7. प्रसादला ते वॉशिंग मशीन 48,640 रुपयांना मिळेल व बिलावर CGST 5320 रु. व SGST 5320 रु.

सरावसंच 4.2

1. चेतना स्टोअर्सला 22,000 रु. देय जीएसटी आहे.
2. नझमा यांना ₹ 12,500 चे इनपुट टॅक्स क्रेडिट मिळेल. त्यांचा देय जीएसटी ₹ 2250.
3. अमीर एन्टरप्राइझचा देय जीएसटी 300 रु. त्यातील केंद्राचा देय कर 150 रु. व राज्याचा देय कर 150 रु.
   अकबरी ब्रदर्सचा देय जीएसटी 400 रु. त्यातील केंद्राचा देय कर 200 रु. व राज्याचा देय कर 200 रु.
4. देय जीएसटी ₹ 100, CGST ₹ 50, UTGST ₹ 50. 5. CGST = SGST = ₹ 900

सरावसंच 4.3

1. (1) बाजारभाव 100 रुपये (2) दर्शनी किंमत 75 रुपये (3) अवमूल्य 5 रुपये.
2. 25% 3. 37,040 रुपये 4. 800 शेअर्स
5. परताव्याचा दर 5.83% 6. कंपनी A मधील गुंतवणूक फायदेशीर आहे.

सरावसंच 4.4

1. 200.60 रुपये 2. 999 रुपये
3.

शेअर्सची संख्या	शेअर्सचा बाजारभाव	शेअर्सची किंमत	दलालीचा दर 0.2%	दलालीवर CGST 9%	दलालीवर SGST 9%	शेअर्सची एकूण किंमत
100 B	₹ 45	₹ 4500	₹ 9	₹ 0.81	₹ 0.81	₹ 4510.62
75 S	₹ 200	₹15000	₹ 30	₹ 2.70	₹ 2.70	₹ 14964.60

4. 100 शेअर्स विकले. 5. तोटा 8560 रुपये.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4A

1. (1) C (2) B (3) D (4) B (5) A (6) B
2. एकूण बिल 28,800 रु. सीजीएसटी 3150 रु. एसजीएसटी 3150 रु.

3. ₹ 997.50 4. ₹ 12,500 5. ₹ 4250 ITC देय कर ₹ 250

6. ITC ₹ 1550 केंद्राचा कर ₹ 5030, देय एसजीएसटी 5030 रुपये.

7. करपात्र किंमत ₹ 75,000, केंद्राचा कर ₹ 4500, राज्याचा कर ₹ 4500

8.(1) ठोक व्यापाऱ्याच्या करबीजकात सीजीएसटी 16200 रुपये; एसजीएसटी 16200 रुपये.

किरकोळ व्यापाऱ्याच्या करबीजकात सीजीएसटी 19,800 रुपये; एसजीएसटी 19,800 रुपये.

(2) ठोक व्यापारी: देय कर (CGST) 2700 व (SGST) 2700,

किरकोळ व्यापारी: देय कर (CGST) 3600 व (SGST) 3600

9. (1) अण्णा पाटलांनी दिलेल्या करबीजकात सीजीएसटी ₹ 1960, एसजीएसटी ₹ 1960

(2) वसईच्या व्यापाऱ्याने ग्राहकास आकारलेला सीजीएसटी ₹ 2352 व एसजीएसटी ₹ 2352

(3) वसईच्या व्यापाऱ्याचा देय सीजीएसटी ₹ 392 व देय एसजीएसटी ₹ 392

10.

(1)

व्यक्ती	देय सीजीएसटी (₹)	देय एसजीएसटी (₹)	देय जीएसटी(₹)
उत्पादक	300	300	600
वितरक	360−300 =60	60	120
किरकोळ व्यापारी	390−360 = 30	30	60
एकूण कर	390	390	780

(2) अंतत: ग्राहकास ती वस्तू 7280 रुपयांना मिळेल.

(3) उत्पादक ते वितरक B2B, वितरक ते किरकोळ व्यापारी B2B, किरकोळ व्यापारी ते ग्राहक B2C

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4B

1. (1) B (2) B (3) A (4) C (5) A

2. ₹ 130.39 3. 22.2% 4. 21,000 रुपये मिळतील.

5. 500 शेअर्स मिळतील. 6. नफा 1058.52 रुपये 7. कंपनी B कारण परतावा जास्त.

8. 1000 शेअर्स मिळतील. 9. 118 रुपये.

10. (1) 1,20,000 रुपये (2) 360 रुपये (3) 64.80 रुपये (4) 120424.80 रुपये.

11. 1% नफा

5. संभाव्यता

सरावसंच 5.1

1. (1) 8 (2) 7 (3) 52 (4) 11

सरावसंच 5.2

1. (1) S = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T} n(S) = 12

(2) S = {23, 25, 32, 35, 52, 53} n(S) = 6

2. S = {लाल, जांभळा, केशरी, पिवळा, निळा, हिरवा} n(S) = 6

3. S = {मंगळवार, रविवार, शुक्रवार, बुधवार, सोमवार, शनिवार} n(S) = 6

4. (1) $\boxed{B_1B_2}$ (2) $\boxed{G_1G_2}$ (3) $\boxed{B_1G_1}$ $\boxed{B_2G_1}$ $\boxed{B_1G_2}$ $\boxed{B_2G_2}$

(4) S = {B_1B_2, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, G_1G_2,}

सरावसंच 5.3

1. (1) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6

A = {2, 4, 6} n(A) = 3, B = {1, 3, 5} n(B) = 3, C = {2, 3, 5} n(C) = 3

(2) S = {(1,1), . . ., (1, 6), (2,1), . . ., (2, 6), (3, 1), . . .,(3, 6),
(4, 1), . . .,(4,6),(5, 1), . . .,(5, 6),(6, 1), . . .,(6, 6)} n(S) = 36

A = {(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1) (6, 6)} n(A) = 6

B = {(4, 6) (5, 5) (5, 6) (6, 4) (6, 5) (6, 6)} n(B) = 6

C = {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6)} n(C) = 6

(3) S = {HHH, HHT, HTT, HTH, THT, TTH, THH, TTT} n(S) = 8

A = {HHH, HHT, HTH, THH} n(A) = 4

B = {TTT} n(B) = 1

C = {HHH, HHT, THH} n(C) = 3

(4) S = {10, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54} n(S) = 25

A = {10, 12, 14, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 42, 50, 52, 54} n(A) = 13

B = {12, 15, 21, 24, 30, 42, 45, 51, 54} n(B) = 9

C = {51, 52, 53, 54} n(C) = 4

(5) S = {M_1M_2, M_1M_3, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_3, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2}
n(S) = 10

A = {M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2} n(A) = 7

B = {M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2} n(B) = 6

C = {M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3} n(C) = 3

(6) S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6 T1, T2, T3, T4, T5, T6} n(S) = 12

A = {H1, H3, H5} n(A) = 3

B = {H2, H4, H6, T2, T4, T6} n(B) = 6

C = { } n(C) = 0

सरावसंच 5.4

1. (1) $\frac{3}{4}$, (2) $\frac{1}{4}$ **2.** (1) $\frac{1}{6}$ (2) 0 (3) $\frac{5}{12}$

3. (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{1}{5}$ 4. (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$ 5. (1) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{1}{4}$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह – 5

1. (1) B (2) B (3) C (4) A (5) A **2.** वसीमची **3.** (1) $\frac{1}{11}$ (2) $\frac{6}{11}$

4. $\frac{5}{26}$ **5.** (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ **6.** $\frac{1}{2}$ **7.** (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$

8. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ **9.** $\frac{1}{25}$ **10.** (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) 1

11. (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 1 (4) 0 **12.** (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{2}{11}$

14. $\frac{13}{40}$ **15.** (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{1}{5}$ **16.** $\frac{11}{36}$

6. सांख्यिकी

सरावसंच 6.1

(1) 4.36 तास (2) 521.43 रु. (3) 2.82 लीटर (4) 35310 रुपये
(5) 985 रुपये किंवा 987.5 रुपये. (6) 3070 रु. किंवा 3066.67 रुपये.

सरावसंच 6.2

(1) 11.4 तास (2) 184.4 म्हणजेच अंदाजे 184 आंबे (3) 74.558 ≈ 75 वाहने (4) 52.75 ≈ 53 दिवे

सरावसंच 6.3

1. 4.33 लीटर **2.** 72 युनिट **3.** 9.94 लीटर **4.** 12.31 वर्षे

सरावसंच 6.5

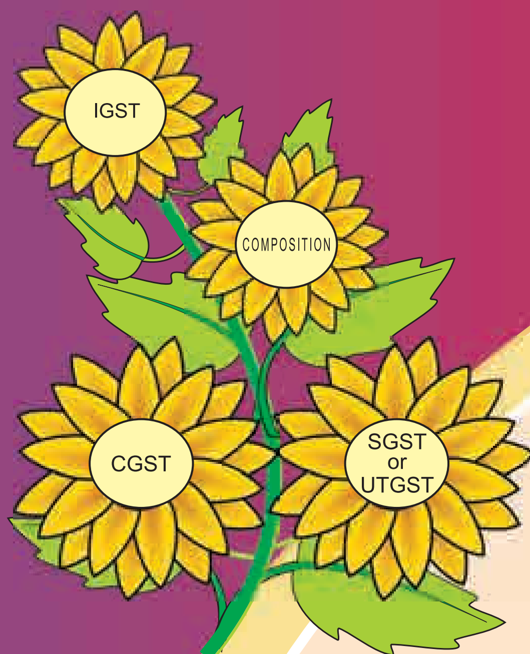
1. (1) 60–70 (2) 20–30 व 90–100 (3) 55 (4) 80 व 90 (5) 15

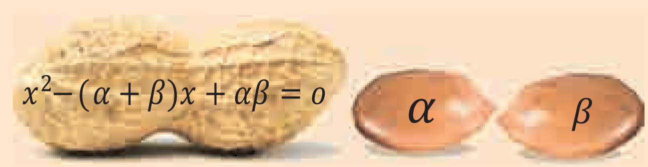
सरावसंच 6.6

5. (1) 2000 (2) 1000 (3) 25%
6. (1) 12000 रुपये (2) 3000 रुपये (3) 2000 रुपये (4) 1000 रुपये.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. (1) D (2) A (3) B (4) C (5) C (6) C
2. 52,500 रुपये **3.** 65,400 रुपये **4.** 4250 रुपये
5. 72,400 रुपये **6.** 223.13 किमी. **7.** 32 रुपये **8.** 397.06 ग्रॅम
14. (1) कार – 108°, टेम्पो – 43°, बस – 29°, रिक्षा – 36°, दुचाकी – 144°
    (2) वाहनांची एकूण संख्या – 3000
16. (1) क्रिकेट आवडणारे – 225, (2) फुटबॉल आवडणारे – 175 (3) अन्य खेळ आवडणारे – 200.





महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ,
पुणे–४११००४.

₹ ८०.००

गणित भाग –II

इयत्ता दहावी

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास–२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी–४ दिनांक २५.४.२०१६ अन्वये स्थापन करण्यात आलेल्या समन्वय समितीच्या दिनांक २९.१२.२०१७ रोजीच्या बैठकीमध्ये हे पाठ्यपुस्तक सन २०१८–१९ या शैक्षणिक वर्षापासून निर्धारित करण्यास मान्यता देण्यात आली आहे.

गणित

भाग II

इयत्ता दहावी

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे – ४११ ००४.

4JDZ3Y

आपल्या स्मार्टफोनवरील DIKSHA App द्वारे पाठ्यपुस्तकाच्या पहिल्या पृष्ठावरील Q. R. Code द्वारे डिजिटल पाठ्यपुस्तक व प्रत्येक पाठामध्ये असलेल्या Q. R. Code द्वारे त्या पाठासंबंधित अध्ययन अध्यापनासाठी उपयुक्त दृकश्राव्य साहित्य उपलब्ध होईल.

प्रथमावृत्ती : 2018 © महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ पुणे – ४११ ००४.

गणित विषयतज्ज्ञ समिती

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. विनायक गोडबोले (सदस्य)
श्रीमती प्राजक्ती गोखले (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती पूजा जाधव (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय – राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती जयश्री पुरंदरे
श्री. राजेंद्र चौधरी
श्री. रामा व्हन्याळकर
श्री. आण्णापा परीट
श्री. अन्सार शेख
श्री. श्रीपाद देशपांडे
श्री. सुरेश दाते
श्री. उमेश रेळे
श्री. बन्सी हावळे
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री. प्रकाश झेंडे
श्री. लक्ष्मण दावणकर
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी
श्री. सुनिल श्रीवास्तव
श्री. अन्सारी अब्दुल हमीद
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्रीमती तरुबेन पोपट
श्री. प्रमोद ठोंबरे
डॉ. भारती सहस्रबुद्धे
श्री. वसंत शेवाळे
श्री. प्रताप काशिद
श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. गणेश कोलते
श्री. संदेश सोनावणे
श्री. सुधीर पाटील
श्री. प्रकाश कापसे
श्री. रवींद्र खंदारे
श्रीमती स्वाती धर्माधिकारी
श्री. अरविंदकुमार तिवारी
श्री. मल्लेशाम बेथी
श्रीमती आर्या भिडे

मुखपृष्ठ व संगणकीय आरेखन

श्री. संदीप कोळी, चित्रकार, मुंबई

अक्षरजुळणी

गणित विभाग, पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे

प्रमुख संयोजक

उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

निर्मिती

सच्चितानंद आफळे
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहायक निर्मिती अधिकारी

कागद

७० जी.एस.एम.क्रीमवोव्ह

मुद्रणादेश

N/PB/2018-19/50,000

मुद्रक

SHREE OFFSET PRINTING, KOLHAPUR

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ,
प्रभादेवी, मुंबई २५

भारताचे संविधान

उद्देशिका

आम्ही, भारताचे लोक, भारताचे एक सार्वभौम समाजवादी धर्मनिरपेक्ष लोकशाही गणराज्य घडविण्याचा व त्याच्या सर्व नागरिकांस:

सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक **न्याय;**
विचार, अभिव्यक्ती, विश्वास, श्रद्धा
व उपासना यांचे **स्वातंत्र्य;**
दर्जाची व संधीची **समानता;**

निश्चितपणे प्राप्त करून देण्याचा
आणि त्या सर्वांमध्ये व्यक्तीची प्रतिष्ठा
व राष्ट्राची एकता आणि एकात्मता
यांचे आश्वासन देणारी **बंधुता**
प्रवर्धित करण्याचा संकल्पपूर्वक निर्धार करून;

आमच्या संविधानसभेत
आज दिनांक सव्वीस नोव्हेंबर, १९४९ रोजी
याद्‌वारे हे संविधान अंगीकृत आणि अधिनियमित करून स्वत:प्रत अर्पण करीत आहोत.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

राष्ट्रगीत

जनगणमन–अधिनायक जय हे
भारत–भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत–भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रांनो,

दहावीच्या वर्गात तुमचे स्वागत!

गणित भाग I आणि गणित भाग II ही पुस्तके यावर्षी तुम्हांला अभ्यासायची आहेत.

गणित भाग II मध्ये भूमिती, त्रिकोणमिती, निर्देशक भूमिती व महत्त्वमापन ही मुख्य क्षेत्रे आहेत. तुम्हांला या वर्षी नववीपर्यंत ओळख करून दिलेल्या घटकांचाच थोडा अधिक अभ्यास करायचा आहे. त्यांचा व्यवहारात होणारा उपयोग दिलेल्या उदाहरणांतून स्पष्ट होईल. जेथे नवा भाग, सूत्रे किंवा उपयोजन आहे, तेथे सुलभ स्पष्टीकरण दिले आहे. प्रत्येक प्रकरणात नमुन्याची सोडवलेली उदाहरणे, सरावासाठी उदाहरणे आहेतच, शिवाय प्रज्ञावान विद्यार्थ्यांसाठी काही आव्हानात्मक प्रश्न तारांकित करून दिले आहेत. काही विद्यार्थ्यांना दहावीनंतर गणिताचा अभ्यास करायचा नसला, तरी गणितातील मूलभूत संकल्पना त्यांना समजाव्यात, तसेच इतर क्षेत्रात काम करताना आवश्यक ते गणित वापरता यावे, असे ज्ञान त्यांना या पुस्तकातून मिळेल. 'अधिक माहितीसाठी' या शीर्षकाखाली दिलेला मजकूर, ज्या विद्यार्थ्यांना दहावीनंतरही गणिताचा अभ्यास करून त्यात प्रावीण्य मिळवण्याची इच्छा आहे, त्यांना उपयोगी पडेल, म्हणून अशा विद्यार्थ्यांनी तो जरूर अभ्यासावा. सगळे पुस्तक एकदा तरी वाचून व समजून घ्यावे.

ॲपच्या माध्यमातून क्यू. आर. कोडद्वारे प्रत्येक पाठासंबंधी अधिक उपयुक्त दृक्-श्राव्य साहित्य आपणांस उपलब्ध होईल. त्याचा अभ्यासासाठी निश्चित उपयोग होईल.

दहावीची परीक्षा महत्त्वाची मानली जाते. या गोष्टीचा ताण न घेता चांगला अभ्यास करून मनासारखे यश मिळवण्यासाठी तुम्हांला शुभेच्छा!

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे.

पुणे
दिनांक : १८ मार्च २०१८, गुढीपाडवा
भारतीय सौर दिनांक : २७ फाल्गुन १९३९

इयत्ता १० वी गणित भाग II अभ्यासक्रमातून खालील क्षमता विद्यार्थ्यांमध्ये विकसित होतील.

क्षेत्र	घटक	क्षमता विधाने
1. **भूमिती**	1.1 समरूप त्रिकोण 1.2 वर्तुळ	• समरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म, एकरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म व पायथागोरसचे प्रमेय यांचा उपयोग करून उदाहरणे सोडवता येणे. • समरूप त्रिकोणांची रचना करता येणे. • वर्तुळाच्या जीवेचे व स्पर्शिकेचे गुणधर्म यांचा उपयोग करता येणे. • वर्तुळाच्या स्पर्शिकांची रचना करता येणे.
2. **निर्देशक भूमिती**	2.1 निर्देशक भूमिती	• दोन बिंदूंमधील अंतर काढता येणे. • रेषाखंडाच्या विभाजक बिंदूचे निर्देशक काढता येणे. • रेषेचा चढ काढता येणे.
3. **महत्त्वमापन**	3.1 पृष्ठफळ व घनफळ	• वर्तुळकंसाची लांबी काढता येणे. • वर्तुळपाकळीचे व वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढता येणे. • दिलेल्या त्रिमितीय आकारांचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढता येणे.
4. **त्रिकोणमिती**	4.1 त्रिकोणमिती	• त्रिकोणमितीय नित्यसमानता वापरून उदाहरणे सोडवता येणे. • झाडाची उंची काढणे, नदीच्या पात्राची रुंदी काढणे अशा स्वरूपाच्या समस्यांसाठी त्रिकोणमितीचा उपयोग करता येणे.

शिक्षकांसाठी सूचना

प्रथम पुस्तकाचे सखोल वाचन करून ते समजून घ्यावे. विविध घटकांचे स्पष्टीकरण करणे व सूत्रांचा पडताळा घेणे या महत्त्वाच्या गोष्टींसाठी कृतींची मदत घ्यावी.

प्रात्यक्षिकांतूनही मूल्यमापन करायचे आहे. त्यासाठीही कृती वापरता येतात. विद्यार्थ्यांना स्वतंत्र विचार करण्यास उत्तेजन द्यावे. एखादे उदाहरण वेगळ्या परंतु तर्कशुद्ध पद्धतीने सोडवणाऱ्या विद्यार्थ्यांना खास शाबासकी द्यावी.

भूमितीतील प्रमेयांची विधाने लक्षात ठेवून त्यांचे उपयोजन करून उदाहरणे सोडवण्याचे कौशल्य विकसित करण्यासाठी पुस्तकातील कृतींखेरीज आणखी कृती तयार करता येतील.

प्रात्यक्षिकांची यादी (नमुना)

(1) पुठ्ठ्याचा एक त्रिकोणी तुकडा कापून घ्या. टेबलावर मेणबत्ती किंवा लहान दिवा लावा. भिंत व दिवा/मेणबत्ती यांमध्ये त्रिकोण धरा. त्याच्या सावलीचे निरीक्षण करा. सावली व मूळ त्रिकोण समरूप आहेत का ते ठरवा. (मूळचा त्रिकोण व त्याची सावली परस्परांशी समरूप असण्यासाठी कोणती खबरदारी घ्याल?)

(2) एकसारख्या मापाचे दोन काटकोन त्रिकोण कापून घ्या. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंना दोन्ही बाजूने A, B, C अशी नावे द्या. त्यांपैकी एका काटकोन त्रिकोणात कर्णावर शिरोलंब काढा. लंबपादास 'D' नाव द्या. एक त्रिकोण लंबावर कापून दोन लहान काटकोन त्रिकोण मिळवा. तीनही काटकोन त्रिकोण कोणत्या एकास एक संगतीने एकमेकांशी समरूप होतात ते लिहा.

(3) एक वर्तुळ काढा. त्याच्या अंतर्भागात, बाह्यभागात व वर्तुळावर प्रत्येकी एक, असे तीन बिंदू घ्या. या प्रत्येक बिंदूतून वर्तुळाला किती स्पर्शिका काढता येतील याची सारणी तयार करा. सारणीत कच्च्या आकृत्या काढून दाखवा.

(4) 'दोन बिंदूंतून असंख्य वर्तुळे काढता येतात' हे दर्शवण्यासाठी, दिलेल्या दोन बिंदूंतून कमीत कमी पाच वेगवेगळी वर्तुळे काढा.

(5) वर्तुळाचे गुणधर्म पडताळून पाहण्यासाठी उपयोगी पडेल असा खिळे बसवलेला जिओबोर्ड घ्या. रबरबँड वापरून खालीलपैकी कोणत्याही एका प्रमेयासाठी जिओबोर्डवर आकृती तयार करा.

(i) अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय (ii) स्पर्शिका-छेदिका कोनाचे प्रमेय

(iii) विरुद्ध वृत्तखंडातील कोनाचे प्रमेय

(6) एक वर्तुळ व एक कोनाची प्रतिकृती घेऊन वेगवेगळ्या स्थितींतील अंतर्खंडित कंस तयार करा. त्या आकृत्या वहीत काढा.

(7) एका कोनाचे चार समान भाग करा. कंपास व पट्टीचा वापर करा.

(8) एक चंचूपात्र घ्या. त्याची उंची व तळाची त्रिज्या मोजा. त्यावरून त्यात किती पाणी मावेल, ते सूत्राने काढा. ते पाण्याने भरून त्याचे आकारमान मोजपात्राच्या साहाय्याने मोजा. दोन्ही उत्तरांवरून निष्कर्ष काढा.

(9) शंकूछेदाच्या आकाराचा एक कागदी पेला घ्या. त्याच्या तळाची व वरील वर्तुळाकाराची त्रिज्या मोजा. पेल्याची उंची मोजा. त्या पेल्यात किती पाणी मावेल, ते सूत्रावरून काढा. तो पाण्याने पूर्ण भरून त्या पाण्याचे आकारमान मोजा. पाण्याचे आकारमान व सूत्राने काढलेले घनफळ यांची तुलना करून सूत्राचा पडताळा घ्या.

(10) जाड पुठ्ठ्याचे दोन समरूप त्रिकोण कापून घ्या. त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर (i) त्यांच्या परिमितींच्या वर्गांच्या प्रमाणात आहे का, किंवा (ii) त्यांच्या मध्यगांच्या वर्गांच्या प्रमाणात आहे का हे प्रत्यक्ष मोजमाप करून ठरवा.

अनुक्रमणिका

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

1 समरूपता

चला, शिकूया.

- दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर
- प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय
- प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास
- त्रिकोणाच्या कोन दुभाजकाचा गुणधर्म
- तीन समांतर रेषा व छेदिका यांच्यामुळे झालेल्या आंतरछेदांचे गुणोत्तर
- त्रिकोणाच्या समरूपतेच्या कसोट्या
- समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणधर्म

जरा आठवूया.

आपण गुणोत्तर व प्रमाण यांचा अभ्यास केला आहे. a आणि b या दोन संख्यांचे गुणोत्तर $\frac{m}{n}$ आहे, हेच विधान a आणि b या दोन संख्या $m{:}n$ या प्रमाणात आहेत असेही लिहितात.

या संकल्पनेसाठी आपण सामान्यपणे धन वास्तव संख्यांचा विचार करतो. आपल्याला हे माहीत आहे की रेषाखंडांची लांबी आणि एखाद्या आकृतीचे क्षेत्रफळ या धन वास्तव संख्या असतात .

आपल्याला त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र माहीत आहे.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ पाया $\times$ उंची

जाणून घेऊया.

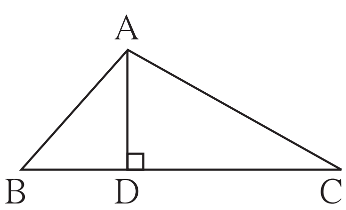
दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर (Ratio of areas of two triangles)

कोणत्याही दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढू.

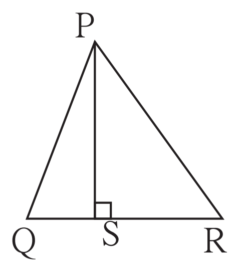
उदाहरण. Δ ABC चा BC हा पाया आहे व AD ही उंची आहे.

Δ PQR चा QR हा पाया आहे व PS ही उंची आहे.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



आकृती 1.1



आकृती 1.2

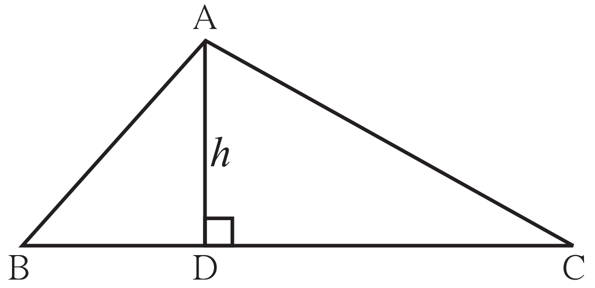
$$\therefore \frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

यावरून, दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या पाया व संगत उंची यांच्या गुणाकारांच्या गुणोत्तराएवढे असते.

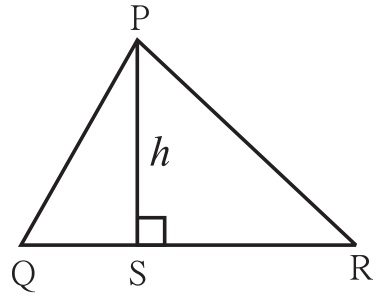
एका त्रिकोणाचा पाया b_1 व उंची h_1 आणि दुसऱ्या त्रिकोणाचा पाया b_2 व उंची h_2 असेल तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर = $\frac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$

या दोन त्रिकोणांच्या संबधात काही अटी घालून पाहू.

अट 1 : दोन्ही त्रिकोणांची उंची समान असेल, तर –



आकृती 1.3



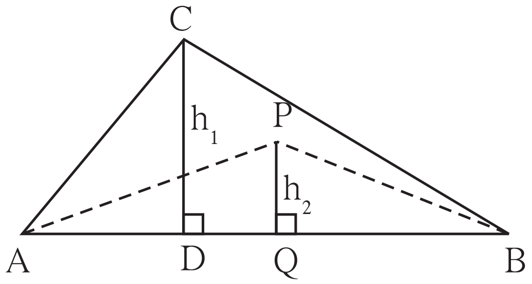
आकृती 1.4

$$\frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

गुणधर्म : समान उंची असलेल्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात.

अट 2 : दोन्ही त्रिकोणांचा पाया समान असेल तर –



आकृती 1.5

$$\frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

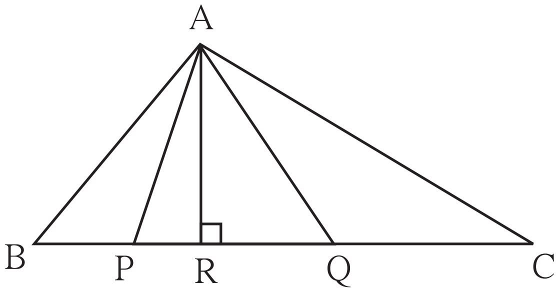
$$\therefore \frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

गुणधर्म : समान लांबीच्या पायांच्या दोन त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत उंचीच्या प्रमाणात असतात.

कृती :

खालील रिकाम्या चौकटी योग्य प्रकारे भरा.

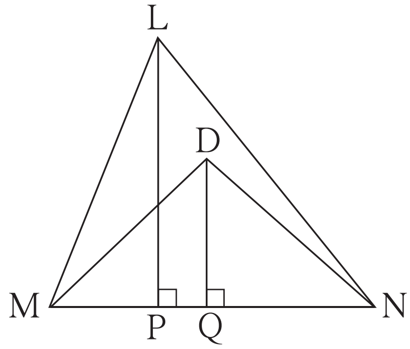
(i)



आकृती 1.6

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

(ii)



आकृती 1.7

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

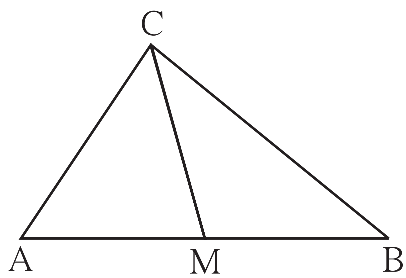
(iii) बिंदू M हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे.

रेख CM ही Δ ABC ची मध्यगा आहे.

$$\therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

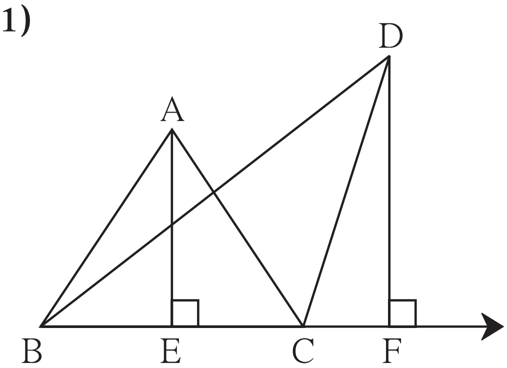
कारण लिहा.



आकृती 1.8

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1)



आकृती 1.9

शेजारील आकृतीत,

रेख AE $\perp$ रेख BC, रेख DF $\perp$ रेषा BC

AE = 4, DF = 6 तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ काढा.

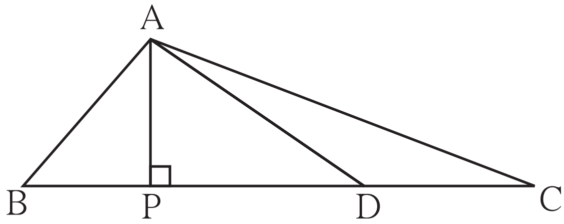
उकल : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \frac{AE}{DF}$ .... पाया समान, म्हणून क्षेत्रफळे उंचीच्या प्रमाणात

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

उदा. (2) Δ ABC च्या BC बाजूवर D बिंदू असा आहे, की DC = 6, BC = 15.

A(Δ ABD) : A(Δ ABC) आणि A(Δ ABD) : A(Δ ADC) काढा.

उकल : Δ ABD, Δ ADC, Δ ABC या तिन्ही त्रिकोणांचा A हा समाईक शिरोबिंदू आहे व त्यांचा पाया एका रेषेत आहे म्हणून या तीनही त्रिकोणांची उंची समान आहे.



आकृती 1.10

BC = 15, DC = 6 $\therefore$ BD = BC − DC = 15 − 6 = 9

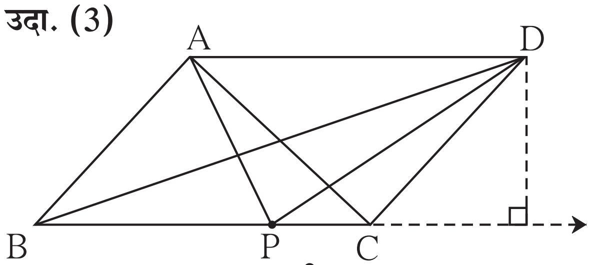
$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC}$$ .... उंची समान, म्हणून क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात

$$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC}$$ .... उंची समान, म्हणून क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

उदा. (3)



आकृती 1.11

$\square$ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. P हा बाजू BC वरील कोणताही एक बिंदू आहे. तर समान क्षेत्रफळांच्या त्रिकोणांच्या दोन जोड्या शोधा.

उकल : $\square$ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

$\therefore$ AD || BC व AB || DC

Δ ABC व Δ BDC विचारात घ्या.

हे त्रिकोण दोन समांतर रेषेमध्ये काढले आहेत. त्यामुळे समांतर रेषांमधील अंतर ही त्या दोन्ही त्रिकोणांची उंची होईल.

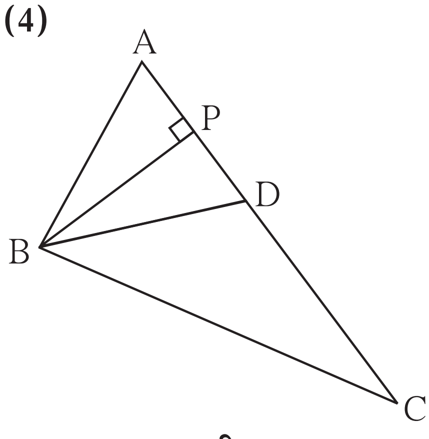
Δ ABC व Δ BDC चा BC हा पाया समान असून उंचीही समान आहे.

म्हणून A(Δ ABC) = A(Δ BDC)

Δ ABC व Δ ABD चा AB हा पाया समान असून त्यांची उंची सुद्धा समान आहे.

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ ABD)

उदा. (4)



आकृती 1.12

शेजारील आकृतीत Δ ABC च्या AC या बाजूवर D बिंदू असा आहे की AC = 16, DC = 9, BP $\perp$ AC, तर खालील गुणोत्तरे काढा.

i) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ ii) $\dfrac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)}$

उकल : Δ ABC च्या बाजू AC वर P व D बिंदू आहेत. म्हणून Δ ABD, Δ BDC, Δ ABC, Δ APB यांचा B हा सामाईक शिरोबिंदू विचारात घेतला तर त्यांच्या AD, DC, AC, AP या बाजू एका रेषेत आहेत. या सर्व त्रिकोणांची उंची समान आहे. म्हणून त्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या पायांच्या प्रमाणात आहेत. AC = 16, DC = 9

$\therefore$ AD = 16 − 9 = 7

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{7}{16}$ . . . . (समान उंचीचे त्रिकोण)

$\dfrac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{9}{16}$ . . . . (समान उंचीचे त्रिकोण)

$\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{7}{9}$ . . . . (समान उंचीचे त्रिकोण)

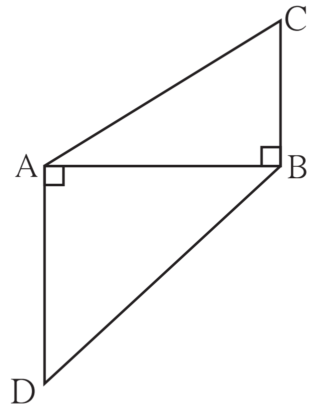
हे लक्षात ठेवूया.

- दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्या त्रिकोणांच्या पाया व संगत उंची यांच्या गुणाकारांच्या गुणोत्तराएवढे असते.
- समान उंचीच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात.
- समान पायांच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत उंचींच्या प्रमाणात असतात.

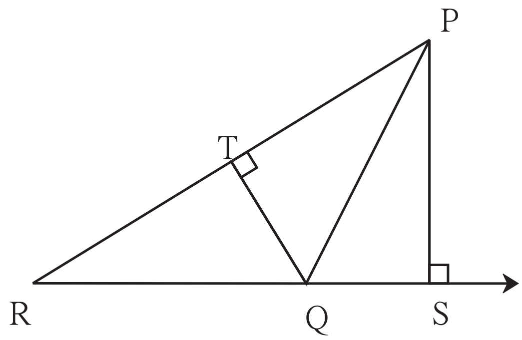
सरावसंच 1.1

1. एका त्रिकोणाचा पाया 9 आणि उंची 5 आहे. दुसऱ्या त्रिकोणाचा पाया 10 आणि उंची 6 आहे, तर त्या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

2. दिलेल्या आकृती 1.13 मध्ये BC $\perp$ AB, AD $\perp$ AB, BC = 4, AD = 8 तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ काढा.



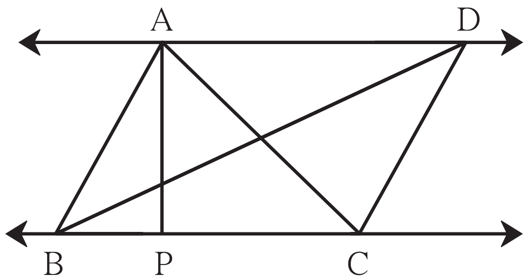
आकृती 1.13



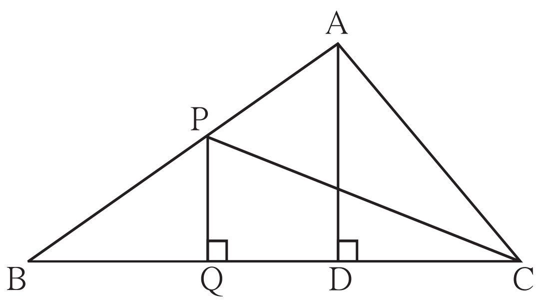
आकृती 1.14

3. शेजारील आकृती 1.14 मध्ये रेख PS $\perp$ रेख RQ रेख QT $\perp$ रेख PR. जर RQ = 6, PS = 6, PR = 12 तर QT काढा.

4. शेजारील आकृतीत AP $\perp$ BC, AD || BC, तर A(Δ ABC) : A(Δ BCD) काढा.



आकृती 1.15



आकृती 1.16

5. शेजारील आकृतीत, PQ $\perp$ BC, AD $\perp$ BC तर खालील गुणोत्तरे लिहा.

i) $\frac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$ ii) $\frac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$

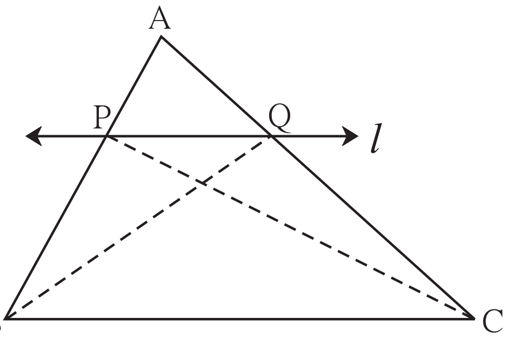
iii) $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$ iv) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$

जाणून घेऊया.

प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय (Basic Proportionality Theorem)

प्रमेय : **त्रिकोणाच्या एका बाजूला समांतर असणारी रेषा त्याच्या उरलेल्या बाजूंना भिन्न बिंदूंत छेदत असेल, तर ती रेषा त्या बाजूंना एकाच प्रमाणात विभागते.**

पक्ष : Δ ABC मध्ये रेषा l || रेख BC
आणि रेषा l ही बाजू AB ला P मध्ये व बाजू AC ला Q मध्ये छेदते.



आकृती 1.17

साध्य : $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

रचना : रेख PC व रेख BQ काढा.

सिद्धता : Δ APQ व Δ PQB हे समान उंचीचे त्रिकोण आहेत.

$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{AP}{PB}$ .... (क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात) ..... (I)

तसेच $\frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \frac{AQ}{QC}$ .... (क्षेत्रफळे पायांच्या प्रमाणात) ..... (II)

Δ PQB व Δ PQC यांचा रेख PQ हा समान पाया आहे. रेख PQ || रेख BC

म्हणून Δ PQB व Δ PQC यांची उंची समान आहे.

$\therefore A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC)$ .... (III)

$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$ .... [(I), (II) आणि (III)] वरून

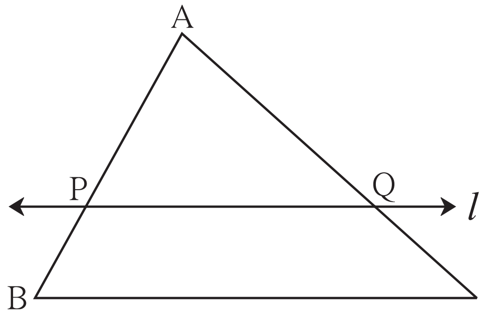
$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ .... [(I) व (II)] वरून

प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास (converse of B.P.T.)

प्रमेय : **एखादी रेषा जर त्रिकोणाच्या दोन भुजांना भिन्न बिंदूंत छेदून एकाच प्रमाणात विभागत असेल, तर ती रेषा उरलेल्या बाजूला समांतर असते.**

आकृती 1.18 मध्ये जर रेषा l ही Δ ABC च्या बाजू AB आणि बाजू AC ला अनुक्रमे P आणि Q बिंदूत छेदते आणि $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ तर रेषा l || रेख BC.

या प्रमेयाची सिद्धता अप्रत्यक्ष पद्धतीने देता येते.



आकृती 1.18

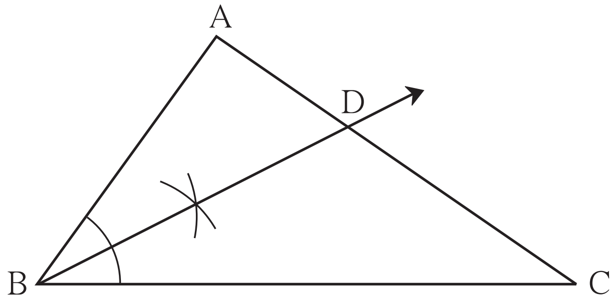
कृती :

- Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.
- त्रिकोणाचा $\angle$ B दुभागा. तो AC ला जेथे छेदतो त्याला D नाव द्या.
- बाजू मोजून लिहा.

  AB = $\boxed{}$ सेमी BC = $\boxed{}$ सेमी

  AD = $\boxed{}$ सेमी DC = $\boxed{}$ सेमी

- $\frac{AB}{BC}$ व $\frac{AD}{DC}$ ही गुणोत्तरे काढा.
- दोन्ही गुणोत्तरे जवळ जवळ सारखी आहेत, हे अनुभवा.
- याच त्रिकोणाचे इतर कोन दुभागा व वरीलप्रमाणे गुणोत्तरे काढा. ती गुणोत्तरेही समान येतात हे अनुभवा.



आकृती 1.19


जाणून घेऊया.

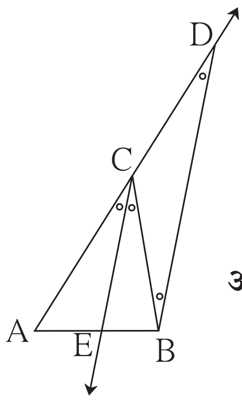
त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचे प्रमेय (Theorem of an angle bisector of a triangle)

प्रमेय : **त्रिकोणाच्या कोनाचा दुभाजक त्या कोनासमोरील बाजूला उरलेल्या बाजूंच्या लांबींच्या गुणोत्तरात विभागतो.**

पक्ष : Δ ABC च्या $\angle$ C चा दुभाजक रेख AB ला E बिंदूत छेदतो.

साध्य : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

रचना : बिंदू B मधून, किरण CE ला समांतर रेषा काढा, ती वाढवलेल्या AC ला बिंदू D मध्ये छेदते.



आकृती 1.20

सिद्धता : किरण CE || किरण BD व रेषा AD ही छेदिका

$\therefore \angle ACE \cong \angle CDB$ .... (संगत कोन)...(I)

आता BC ही छेदिका घेऊन

$\angle ECB \cong \angle CBD$ .... (व्युत्क्रम कोन)...(II)

परंतु $\angle ACE \cong \angle ECB$ .... (पक्ष)...(III)

$\therefore \angle CBD \cong \angle CDB$ .... [विधान (I), (II) आणि (III) वरून]

Δ CBD मध्ये, बाजू CB $\cong$ बाजू CD .... (एकरूप कोनासमोरील बाजू)

$\therefore$ CB = CD ...(IV)

आता, Δ ABD मध्ये, रेख EC || बाजू BD .... (रचना)

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD}$ .... (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)...(V)

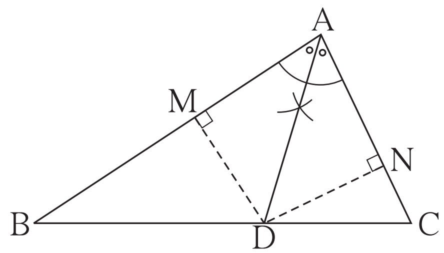
$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}$ .... [विधान (IV) आणि (V) वरून]

अधिक माहितीसाठी :

वरील प्रमेयाची सिद्धता दुसऱ्या प्रकारे तुम्ही लिहा.

त्यासाठी आकृती 1.21 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे Δ ABC काढा आणि DM $\perp$ AB आणि DN $\perp$ AC काढा.

(1) समान उंचीच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे त्यांच्या संगत पायांच्या प्रमाणात असतात,

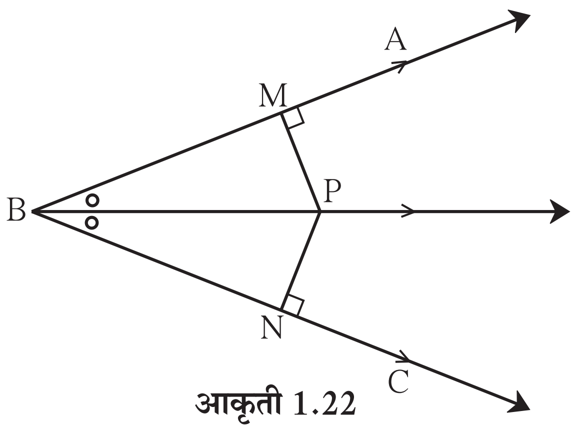


आकृती 1.21

आणि

(2) कोनदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा कोनाच्या भुजांपासून समदूर असतो,

या गुणधर्मांचा उपयोग करा.



आकृती 1.22

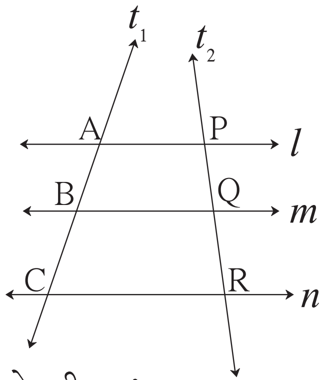
त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of angle bisector of triangle)

Δ ABC च्या बाजू BC वर जर बिंदू D असा असेल, की $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, तर किरण AD हा $\angle$ BAC चा दुभाजक असतो.

तीन समांतर रेषा व त्यांच्या छेदिका यांचा गुणधर्म
(Property of three parallel lines and their transversal)

कृती :

- तीन समांतर रेषा काढा.
- त्यांना l, m, n अशी नावे द्या.
- t_1 व t_2 या दोन छेदिका काढा.
- t_1 या छेदिकेवरील आंतरछेद AB व BC आहेत.
- t_2 या छेदिकेवरील आंतरछेद PQ व QR आहेत.
- $\frac{AB}{BC}$ व $\frac{PQ}{QR}$ ही गुणोत्तरे काढा. ती जवळपास सारखी आहेत ही अनुभवा.



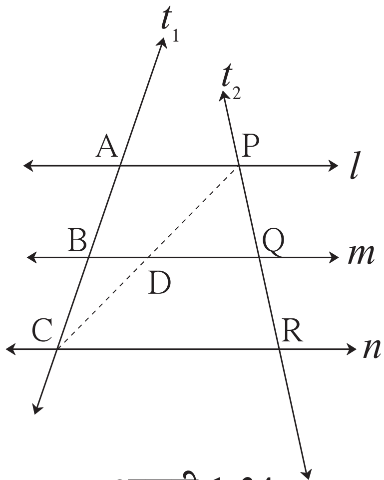
आकृती 1.23

प्रमेय : **तीन समांतर रेषांनी एका छेदिकेवर केलेल्या आंतरछेदांचे गुणोत्तर हे त्या रेषांनी दुसऱ्या कोणत्याही छेदिकेवर केलेल्या आंतरछेदांच्या गुणोत्तराएवढे असते.**

पक्ष : रेषा l || रेषा m || रेषा n

t_1 व t_2 या त्यांच्या छेदिका आहेत.

t_1 ही छेदिका त्या रेषांना अनुक्रमे A, B, C या बिंदूंत छेदते. t_2 ही छेदिका या रेषांना अनुक्रमे P, Q, R या बिंदूंत छेदते.



आकृती 1.24

साध्य : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

सिद्धता : रेख PC काढला. हा रेषाखंड रेषा m ला D बिंदूत छेदतो.

Δ ACP मध्ये, BD || AP

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC}$. . . . . (I) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

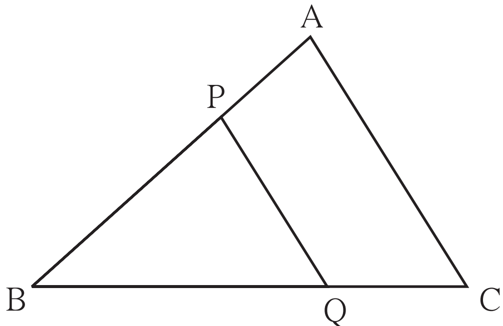
Δ CPR मध्ये DQ || CR

$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . (II) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . . (I) व (II) वरून.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

हे लक्षात ठेवूया.



आकृती 1.25

(1) प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय

Δ ABC मध्ये जर B-P-A ; B-Q-C

आणि रेख PQ || रेख AC असेल

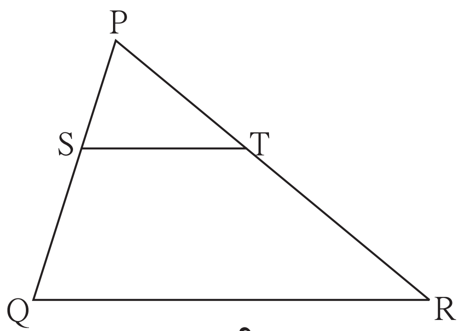
तर $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$

(2) प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास

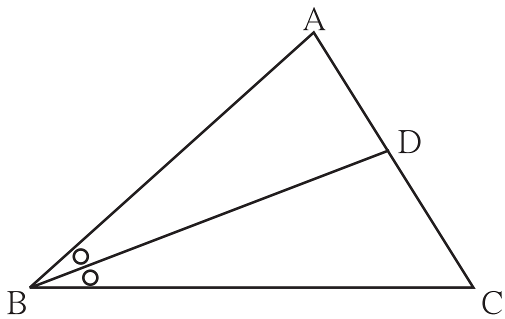
Δ PQR मध्ये जर P-S-Q ; P-T-R

आणि $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

तर रेख ST || रेख QR.



आकृती 1.26



आकृती 1.27

(3) त्रिकोणाच्या कोनदुभाजकाचे प्रमेय

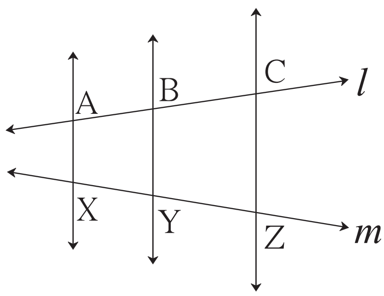
Δ ABC च्या $\angle$ ABC चा BD हा दुभाजक असेल आणि जर A-D-C,

तर $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

(4) तीन समांतर रेषा व त्यांच्या छेदिका यांचा गुणधर्म

जर रेषा AX || रेषा BY || रेषा CZ आणि रेषा l व रेषा m या छेदिका त्यांना अनुक्रमे A, B, C व X, Y, Z मध्ये छेदत असतील

तर $\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$

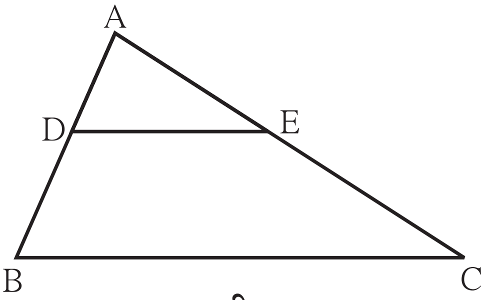


आकृती 1.28

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) Δ ABC मध्ये DE || BC (आकृती 1.29)
जर DB = 5.4 सेमी, AD = 1.8 सेमी
EC = 7.2 सेमी तर AE काढा.



आकृती 1.29

उकल : Δ ABC मध्ये DE || BC

$\therefore \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ ..... (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

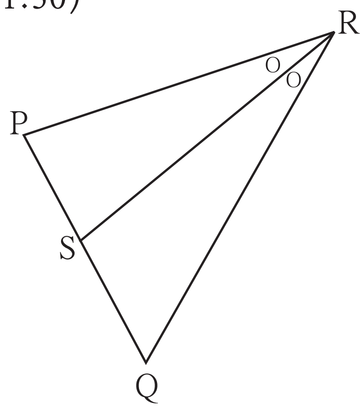
$\therefore \dfrac{1.8}{5.4} = \dfrac{AE}{7.2}$

$\therefore AE \times 5.4 = 1.8 \times 7.2$

$\therefore AE = \dfrac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$

AE = 2.4 सेमी

उदा. (2) Δ PQR मध्ये रेख RS हा $\angle$R चा दुभाजक आहे. (आकृती 1.30)
जर PR = 15, RQ = 20, PS = 12
तर SQ काढा.



आकृती 1.30

उकल : Δ PRQ मध्ये रेख RS हा $\angle$R चा दुभाजक आहे.

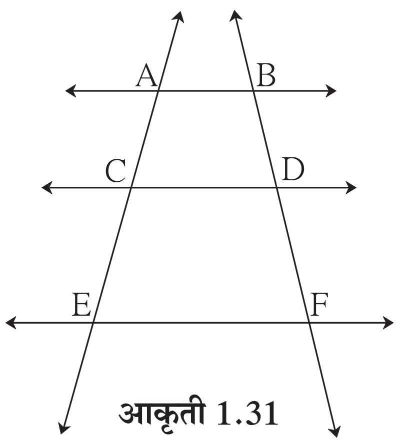
$\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{PS}{SQ}$ . . . . . . (कोनदुभाजकाचा गुणधर्म)

$\dfrac{15}{20} = \dfrac{12}{SQ}$

$SQ = \dfrac{12 \times 20}{15} = 16$

$\therefore$ SQ = 16

कृती :



आकृती 1.31

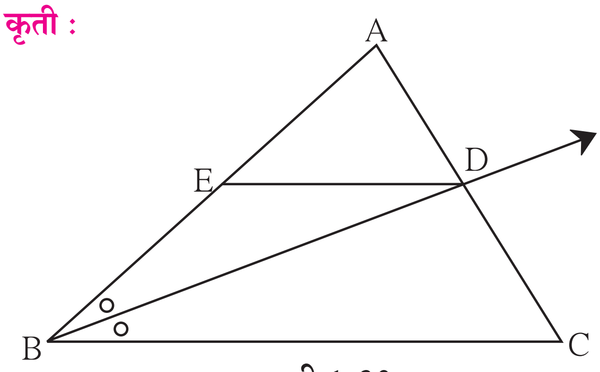
दिलेल्या आकृती 1.31 मध्ये AB || CD || EF
जर AC = 5.4, CE = 9, BD = 7.5 तर चौकटी योग्य प्रकारे भरून DF काढा.

उकल : AB || CD || EF

$\dfrac{AC}{\square} = \dfrac{\square}{DF}$ . . . . . ($\square$)

$\dfrac{5.4}{9} = \dfrac{\square}{DF}$ $\therefore$ DF = $\square$

कृती :



आकृती 1.32

Δ ABC मध्ये किरण BD हा $\angle$ ABC चा दुभाजक आहे. A-D-C रेख DE || बाजू BC, A-E-B, तर सिद्ध करा की, $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$

सिद्धता : Δ ABC मध्ये किरण BD हा $\angle$ B चा दुभाजक आहे.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ .... (कोन दुभाजकाचे प्रमेय) .... (I)

Δ ABC मध्ये DE || BC

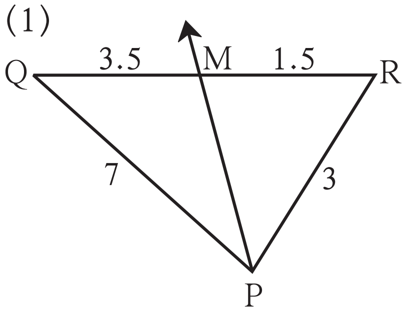
$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ .... (. . . . .) .... (II)

$\frac{AB}{\square} = \frac{\square}{EB}$ .... (I) व (II) वरून

सरावसंच 1.2

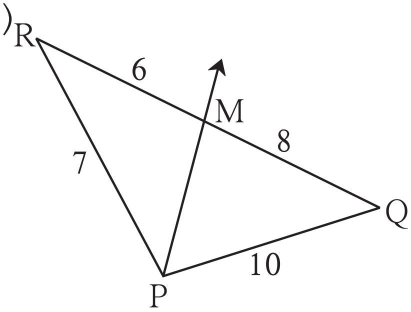
1. खाली काही त्रिकोण आणि रेषाखंडांच्या लांबी दिल्या आहेत. त्यांवरून कोणत्या आकृतीत किरण PM हा $\angle$ QPR चा दुभाजक आहे ते ओळखा.

(1)



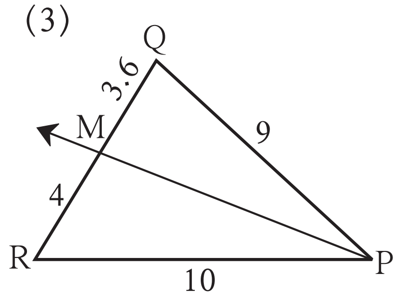
आकृती 1.33

(2)



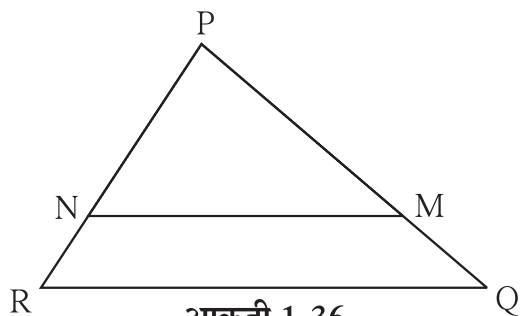
आकृती 1.34

(3)



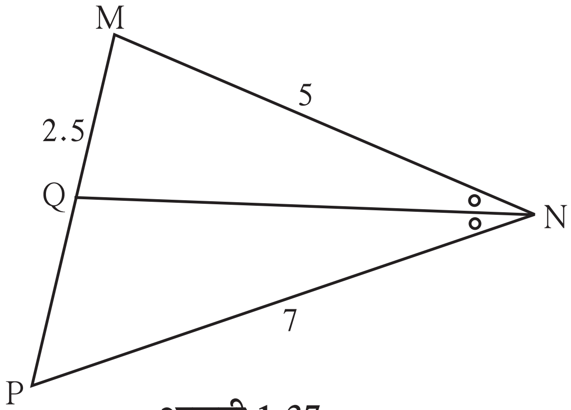
आकृती 1.35

2. जर Δ PQR मध्ये PM = 15, PQ = 25, PR = 20, NR = 8 तर रेषा NM ही बाजू RQ ला समांतर आहे का? कारण लिहा.



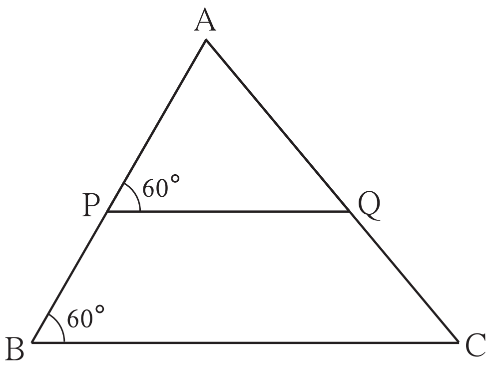
आकृती 1.36

3. Δ MNP च्या $\angle$ N चा NQ हा दुभाजक आहे. जर MN = 5, PN = 7, MQ = 2.5 तर QP काढा.



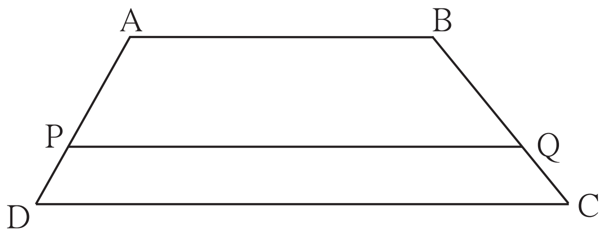
आकृती 1.37

4. आकृतीत काही कोनांची मापे दिली आहेत त्यावरून दाखवा, की $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$



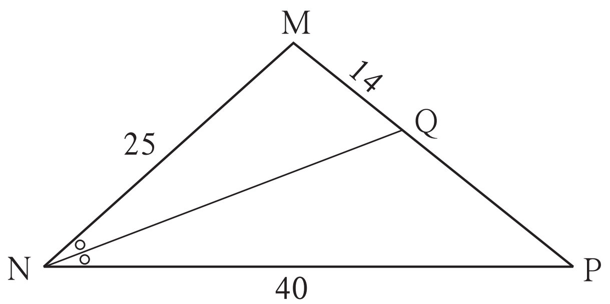
आकृती 1.38

5. समलंब चौकोन ABCD मध्ये, बाजू AB || बाजू PQ || बाजू DC, जर AP = 15, PD = 12, QC = 14 तर BQ काढा.



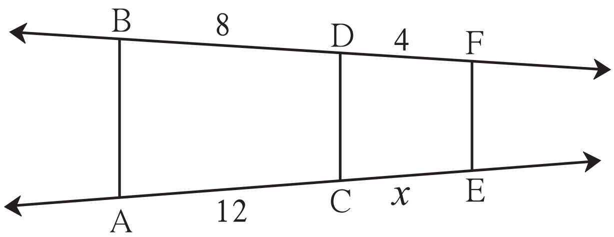
आकृती 1.39

6. आकृती 1.40 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून QP काढा.

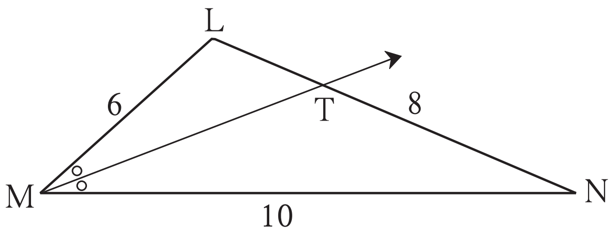


आकृती 1.40

7. आकृती 1.41 मध्ये जर AB || CD || FE तर x ची किंमत काढा व AE काढा.

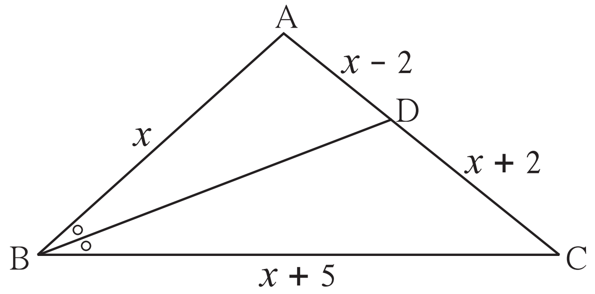


आकृती 1.41



आकृती 1.42

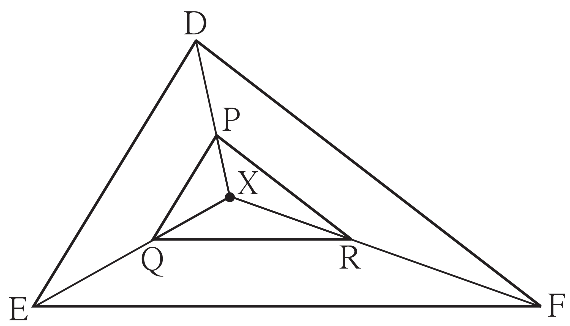
8. Δ LMN मध्ये किरण MT हा $\angle$ LMN चा दुभाजक आहे.
जर LM = 6, MN = 10, TN = 8 तर LT काढा.



आकृती 1.43

9. Δ ABC मध्ये रेख BD हा $\angle$ ABC चा दुभाजक आहे, जर AB = x, BC = x + 5, AD = x − 2, DC = x + 2
तर x ची किंमत काढा.

10. शेजारील आकृती 1.44 मध्ये त्रिकोणाच्या अंतर्भागात X हा एक कोणताही बिंदू आहे. बिंदू X हा त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंशी जोडला आहे. तसेच रेख PQ || रेख DE, रेख QR || रेख EF तर रेख PR || रेख DF हे सिद्ध करण्यासाठी खालील चौकटी पूर्ण करा.



आकृती 1.44

सिद्धता : Δ XDE मध्ये PQ || DE .... $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{XP}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{QE}$ .... (I) (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय)

Δ XEF मध्ये QR || EF .... $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ ....(II) $\boxed{}$

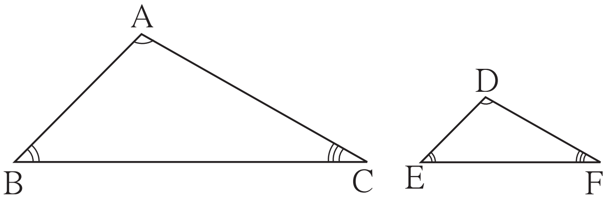
$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... विधान (I) व (II) वरून

$\therefore$ रेख PR || रेख DF .... (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

11*. Δ ABC मध्ये AB = AC, $\angle$ B व $\angle$ C चे दुभाजक बाजू AC व बाजू AB यांना अनुक्रमे बिंदू D व E मध्ये छेदतात. तर सिद्ध करा, की रेख ED || रेख BC.

जरा आठवूया.

समरूप त्रिकोण (Similar triangles)



आकृती 1.45

Δ ABC व Δ DEF मध्ये जर $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

आणि $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

तर Δ ABC व Δ DEF हे त्रिकोण समरूप असतात.

Δ ABC व Δ DEF समरूप आहेत हे $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ असे लिहितात.

जाणून घेऊया.

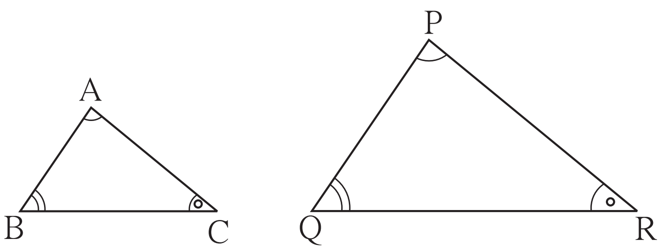
त्रिकोणांच्या समरूपतेच्या कसोट्या (Tests for similarity of triangles)

दोन त्रिकोण समरूप असण्यासाठी त्यांच्या तिन्ही संगत बाजू प्रमाणात असणे आणि तिन्ही संगत कोन एकरूप असणे आवश्यक असते; परंतु या सहा अटींपैकी तीन विशिष्ट अटींची पूर्तता झाल्यास उरलेल्या अटींची पूर्तता आपोआप होते; म्हणजे दोन त्रिकोण समरूप होण्यासाठी तीनच विशिष्ट अटी पुरेशा असतात. या तीन अटी तपासून दोन त्रिकोण समरूप आहेत का हे ठरविता येते. अशा पुरेशा अटींचा समूह म्हणजेच समरूपतेच्या कसोट्या होत. म्हणून दोन त्रिकोण समरूप आहेत का हे ठरवण्यासाठी त्या विशिष्ट अटी तपासणे पुरेसे असते.

समरूपतेची कोकोको कसोटी (AAA test for similarity of triangles)

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील दिलेल्या एकास एक संगतीनुसार होणारे संगत कोन जर एकरूप असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

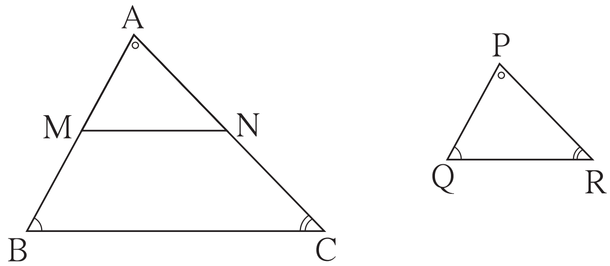
Δ ABC व Δ PQR मध्ये $ABC \leftrightarrow PQR$ या संगतीत जर $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, तर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



आकृती 1.46

अधिक माहितीसाठी :

कोकोको कसोटीची सिद्धता



आकृती 1.47

पक्ष : Δ ABC व Δ PQR मध्ये, $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$.

साध्य : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

सिद्धता : Δ ABC हा Δ PQR पेक्षा मोठा आहे असे मानू. मग AB वर बिंदू M, AC वर बिंदू N असा घ्या की, AM = PQ आणि AN = PR. त्यावरून $\Delta AMN \cong \Delta PQR$ हे दाखवा.

त्यावरून MN || BC दाखवता येते.

आता प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय वापरून, $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

म्हणजेच, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ .... (व्यस्त करून)

$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$ .... (योग क्रिया करून)

$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$. त्याचप्रमाणे $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ हे दाखविता येईल.

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ $\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

समरूप त्रिकोणांची कोको कसोटी (AA test for similarity of triangles)

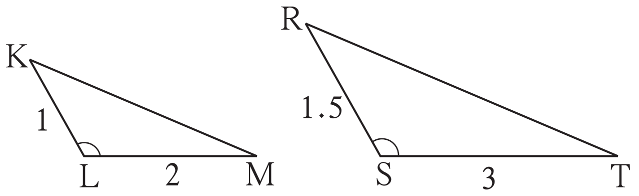
शिरोबिंदूंच्या एखाद्या एकास एक संगतीनुसार एका त्रिकोणाचे दोन कोन जर दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत कोनांशी एकरूप असतील, तर पहिल्या त्रिकोणाचा उरलेला कोन हा दुसऱ्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या कोनाशी एकरूप असतो हे आपल्याला माहीत आहे, म्हणजेच एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत कोनांशी एकरूप असतील तरीही ही अट दोन त्रिकोण समरूप होण्यासाठी पुरेशी असते.

यावरून, एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनांशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण समरूप असतात.

या गुणधर्माला समरूपतेची कोको कसोटी म्हणतात.

समरूपतेची बाकोबा कसोटी (SAS test for similarity of triangles)

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या एखाद्या एकास एक संगतीनुसार त्यांच्या संगत बाजूंच्या दोन जोड्या एकाच प्रमाणात असतील आणि त्या बाजूंनी समाविष्ट केलेले कोन एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण समरूप असतात.



आकृती 1.48

उदाहरणार्थ, जर Δ KLM व Δ RST मध्ये

$\angle KLM \cong \angle RST$

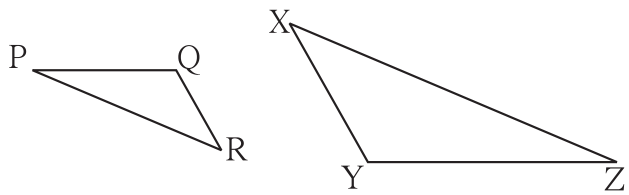
$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$

तर $\Delta KLM \sim \Delta RST$

समरूपतेची बाबाबा कसोटी (SSS test for similarity of triangles)

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूमधील एखाद्या एकास एक संगतीत जेव्हा एका त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंशी एकाच प्रमाणात असतात तेव्हा ते त्रिकोण समरूप असतात.

समरूपतेच्या या गुणधर्माला बाबाबा कसोटी म्हणतात.



आकृती 1.49

उदाहरणार्थ, जर Δ PQR व Δ XYZ मध्ये जर,

$\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$

तर $\Delta PQR \sim \Delta ZYX$

समरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म :

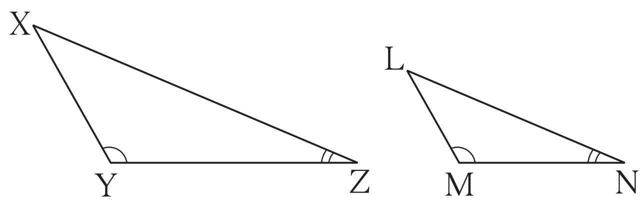
(1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ – परावर्तनता (Reflexivity)

(2) जर $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तर $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ – सममितता (Symmetry)

(3) जर $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ आणि $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ तर $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ – संक्रामकता (Transitivity)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) Δ XYZ मध्ये $\angle Y = 100°$, $\angle Z = 30°$, Δ LMN मध्ये $\angle M = 100°$, $\angle N = 30°$, तर Δ XYZ व Δ LMN हे समरूप आहेत काय?, असतील तर कोणत्या कसोटीनुसार?



आकृती 1.50

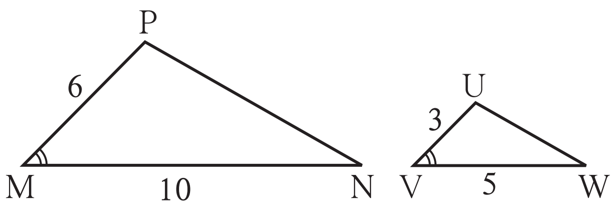
उकल : Δ XYZ व Δ LMN मध्ये,

$\angle Y = 100°$, $\angle M = 100°$ $\therefore \angle Y \cong \angle M$

$\angle Z = 30°$, $\angle N = 30°$ $\therefore \angle Z \cong \angle N$

$\therefore \Delta XYZ \sim \Delta LMN$ .... (कोको कसोटीनुसार)

उदा. (2) आकृती 1.51 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून त्रिकोण समरूप आहेत का? असतील तर कोणत्या कसोटीनुसार?



आकृती 1.51

उकल : Δ PMN व Δ UVW मध्ये

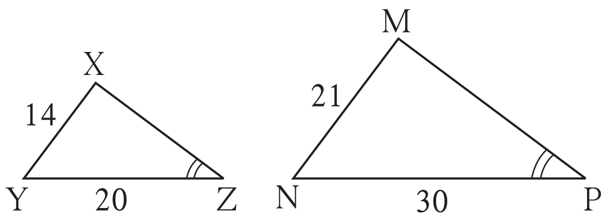
$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, $\frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$

$\therefore \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$

आणि $\angle M \cong \angle V$ .... (पक्ष)

$\therefore \Delta PMN \sim \Delta UVW$ .... (समरूपतेची बाकोबा कसोटी)

उदा. (3) आकृती 1.52 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून त्रिकोण समरूप आहेत असे म्हणता येईल का? म्हणता येत असेल तर कोणत्या कसोटीनुसार ?



आकृती 1.52

उकल : Δ XYZ व Δ MNP मध्ये

$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$,

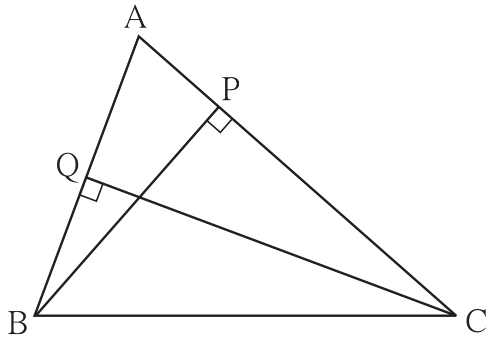
$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$

$\angle Z \cong \angle P$ दिले आहे. परंतु $\angle Z$ व $\angle P$ हे प्रमाणात असलेल्या बाजूंनी समाविष्ट केलेले कोन नाहीत.

$\therefore \Delta$ XYZ व Δ MNP हे समरूप आहेत असे म्हणता येणार नाही.

उदा. (4) शेजारील आकृतीमध्ये $BP \perp AC$, $CQ \perp AB$, A – P– C, A– Q– B , तर Δ APB व Δ AQC समरूप दाखवा.



आकृती 1.53

उकल : Δ APB व Δ AQC मध्ये

$\angle APB = \boxed{}^\circ$ (I)

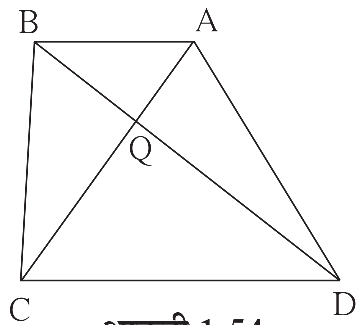
$\angle AQC = \boxed{}^\circ$ (II)

$\therefore \angle APB \cong \angle AQC$ .... (I) आणि (II) वरून

$\angle PAB \cong \angle QAC$ .... ($\boxed{}$)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta AQC$ ..... (कोको कसोटी)

उदा. (5) जर चौकोन ABCD चे कर्ण Q बिंदूत छेदत असतील आणि 2QA = QC आणि 2QB = QD. तर DC = 2AB दाखवा.



आकृती 1.54

पक्ष : 2QA = QC

2QB = QD

साध्य : CD = 2AB

सिद्धता : $2QA = QC \; \therefore \frac{QA}{QC} = \frac{1}{2}$ .... (I)

$2QB = QD \; \therefore \frac{QB}{QD} = \frac{1}{2}$ .... (II)

$\therefore \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (I) व (II) वरून

Δ AQB व Δ CQD मध्ये

$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (सिद्ध केले)

$\angle AQB \cong \angle DQC$ .... (परस्पर विरुध्द कोन)

$\therefore \Delta AQB \sim \Delta CQD$ .... (समरूपतेची बाकोबा कसोटी)

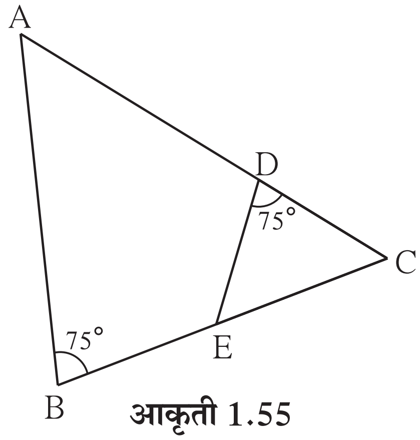
$\therefore \frac{AQ}{CQ} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD}$ .... (संगत बाजू प्रमाणात)

परंतु $\frac{AQ}{CQ} = \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$

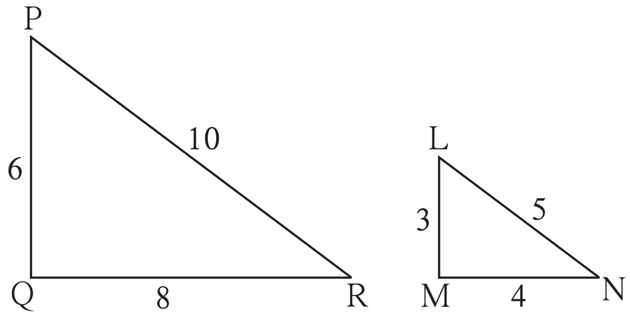
$\therefore 2AB = CD$

सरावसंच 1.3

1. आकृती 1.55 मध्ये $\angle ABC = 75°$, $\angle EDC = 75°$ तर कोणते दोन त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार समरूप आहेत? त्यांची समरूपता योग्य एकास एक संगतीत लिहा.



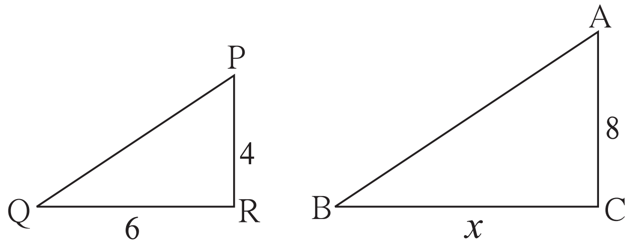
आकृती 1.55



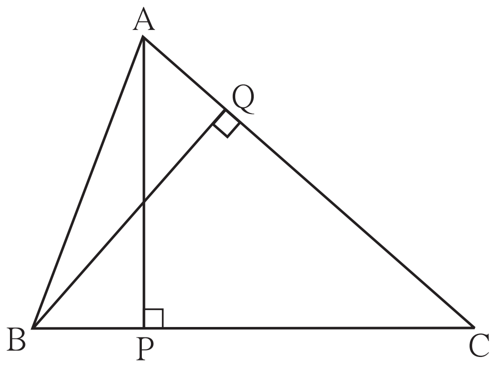
आकृती 1.56

2. आकृती 1.56 मधील त्रिकोण समरूप आहेत का? असतील तर कोणत्या कसोटीनुसार ?

3. आकृती 1.57 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे 8 मीटर व 4 मीटर उंचीचे दोन खांब सपाट जमिनीवर उभे आहेत. सूर्यप्रकाशाने लहान खांबाची सावली 6 मीटर पडते, तर त्याच वेळी मोठ्या खांबाची सावली किती लांबीची असेल?



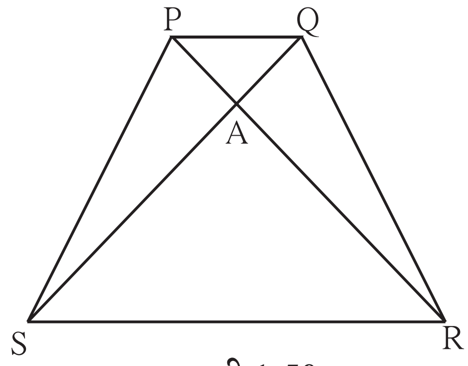
आकृती 1.57



आकृती 1.58

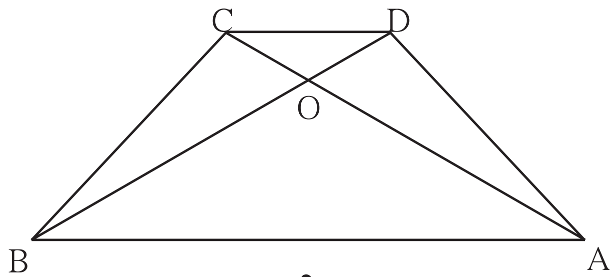
4. ΔABC मध्ये $AP \perp BC$, $BQ \perp AC$ B–P–C, A–Q – C तर, $\Delta CPA \sim \Delta CQB$ दाखवा. जर $AP = 7$, $BQ = 8$, $BC = 12$ तर AC काढा.

5. आकृतीत समलंब चौकोन PQRS मध्ये, बाजू PQ $\parallel$ बाजू SR, AR = 5AP, AS = 5AQ तर सिद्ध करा, SR = 5PQ



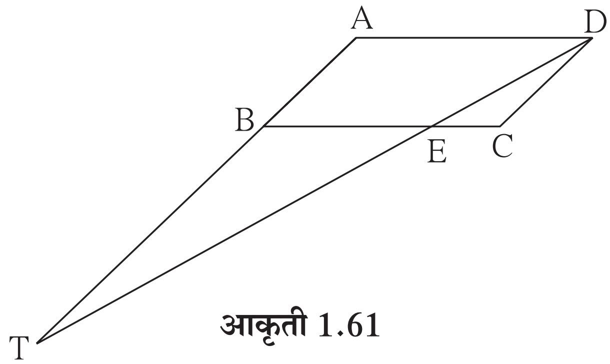
आकृती 1.59

6. समलंब चौकोन ABCD मध्ये, (आकृती 1.60) बाजू AB $\parallel$ बाजू DC कर्ण AC व कर्ण BD हे परस्परांना O बिंदूत छेदतात. AB = 20, DC = 6, OB = 15 तर OD काढा.



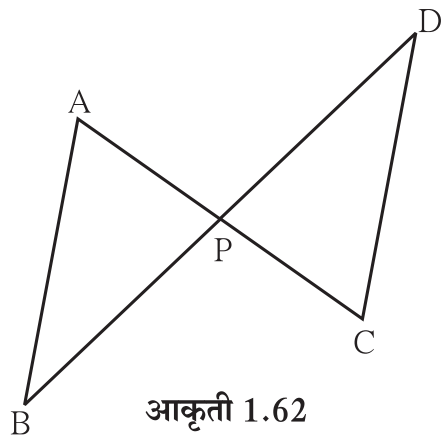
आकृती 1.60

7. □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. बाजू BC वर E हा एक बिंदू आहे, रेषा DE ही किरण AB ला T बिंदूत छेदते. तर DE × BE = CE × TE दाखवा.



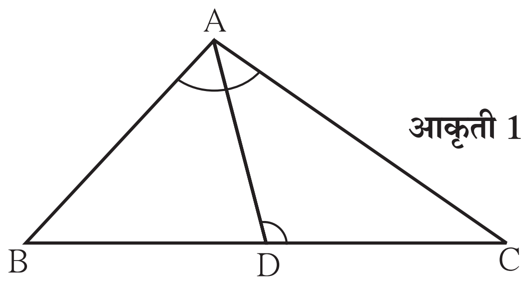
आकृती 1.61

8. आकृतीत रेख AC व रेख BD परस्परांना P बिंदूत छेदतात आणि $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ तर सिद्ध करा, $\Delta ABP \sim \Delta CDP$



आकृती 1.62

9. आकृतीत Δ ABC मध्ये बाजू BC वर D हा बिंदू असा आहे, की $\angle BAC = \angle ADC$ तर सिद्ध करा, $CA^2 = CB \times CD$

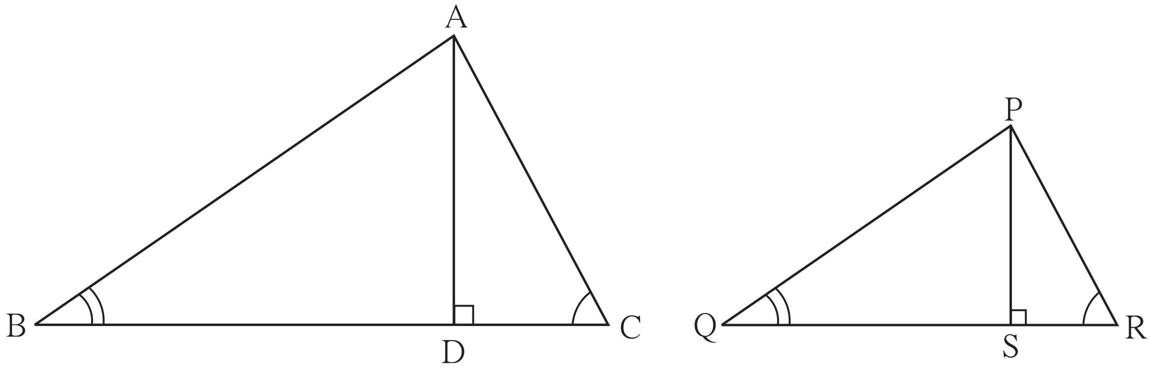


आकृती 1.63

जाणून घेऊया.

समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय (Theorem of areas of similar triangles)

प्रमेय : **जर दोन त्रिकोण समरूप असतील तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत भुजांच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते.**



आकृती 1.64

पक्ष : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $AD \perp BC$, $PS \perp QR$

साध्य : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AC^2}{PR^2}$

सिद्धता : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{BC \times AD}{QR \times PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS}$ .... (I)

ΔABD व ΔPQS मध्ये

$\angle B = \angle Q$ .... (पक्ष)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$

$\therefore$ कोको कसोटीनुसार $\Delta ABD \sim \Delta PQS$

$\therefore \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{AB}{PQ}$ .... (II)

परंतु $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ .... (III)

(II) व (III) वरून

$\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2}$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 16$, $A(\Delta PQR) = 25$ तर $\frac{AB}{PQ}$ या गुणोत्तराची किंमत काढा.

उकल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ .... (समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर संगत बाजूंच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते.)

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$ .... (वर्गमुळे घेऊन)

उदा. (2) दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत भुजांचे गुणोत्तर 2:5 आहे , लहान त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 64 चौसेमी असेल तर मोठ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती ?

उकल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ मानू.

ΔABC हा लहान त्रिकोण व ΔPQR हा मोठा त्रिकोण आहे, असे मानू.

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$ .... (समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांची गुणोत्तरे)

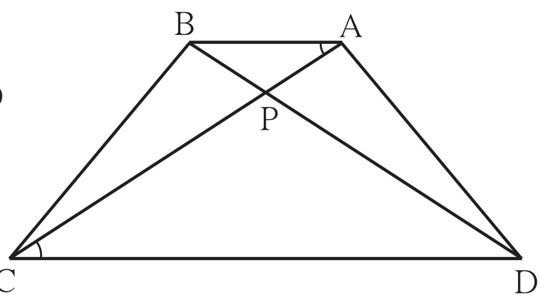
$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$

$4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$

$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$

$\therefore$ मोठ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = 400 चौसेमी

उदा. (3) समलंब चौकोन ABCD मध्ये बाजू AB || बाजू CD, कर्ण AC व कर्ण BD हे एकमेकांना P मध्ये छेदतात, तर सिद्ध करा $\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$



आकृती 1.65

उकल : समलंब चौकोन ABCD मध्ये बाजू AB || बाजू CD

ΔAPB व ΔCPD मध्ये

$\angle PAB \cong \angle PCD$ ..... (व्युत्क्रम कोन)

$\angle APB \cong \angle CPD$ ..... (परस्पर विरुद्ध कोन)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD$ ..... (कोको कसोटी)

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ .... (समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे प्रमेय)

सरावसंच 1.4

1. दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर 3 : 5 आहे, तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

2. Δ ABC ~ Δ PQR आणि AB : PQ = 2:3, तर खालील चौकटी पूर्ण करा.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\boxed{}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

3. Δ ABC ~ Δ PQR, A (Δ ABC) = 80, A(Δ PQR) = 125, तर खालील चौकटी पूर्ण करा.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \ldots\ldots)} = \frac{80}{125} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \qquad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

4. Δ LMN ~ Δ PQR, 9 × A (ΔPQR) = 16 × A (ΔLMN) जर QR = 20 तर MN काढा.

5. दोन समरूप त्रिकोणांची क्षेत्रफळे 225 चौसेमी व 81 चौसेमी आहेत. जर लहान त्रिकोणाची एक बाजू 12 सेमी असेल तर मोठ्या त्रिकोणाची संगत बाजू काढा.

6. Δ ABC व Δ DEF हे दोन्ही समभुज त्रिकोण आहेत. A (ΔABC) : A (Δ DEF) = 1 : 2 असून AB = 4 तर DE ची लांबी काढा .

7. आकृती 1.66 मध्ये रेख PQ || रेख DE, A (Δ PQF) = 20 एकक, जर PF = 2 DP आहे, तर A($\square$ DPQE) काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

A(Δ PQF) = 20 एकक, PF = 2 DP, DP = x मानू. $\therefore$ PF = 2x

DF = DP + $\boxed{}$ = $\boxed{}$ + $\boxed{}$ = 3x

Δ FDE व Δ FPQ मध्ये

$\angle$ FDE $\cong$ $\angle$ $\boxed{}$ (संगत कोन)

$\angle$ FED $\cong$ $\angle$ $\boxed{}$ (संगत कोन)

$\therefore$ Δ FDE ~ Δ FPQ .... (कोको कसोटी)

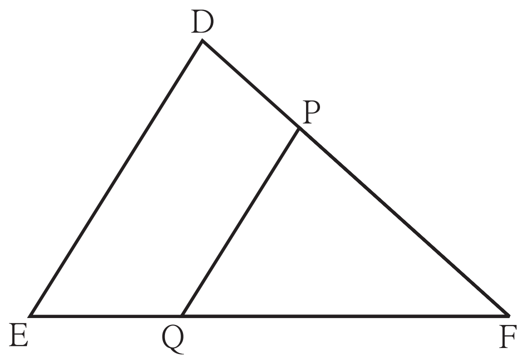
$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \boxed{} = \boxed{}$$

$$A(\square DPQE) = A(\Delta FDE) - A(\Delta FPQ)$$

$$= \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$



आकृती 1.66

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. खालील उपप्रश्नांची पर्यायी उत्तरे दिली आहेत त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

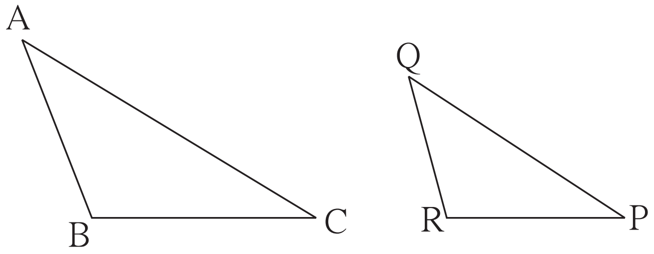
(1) जर Δ ABC व Δ PQR मध्ये एका एकास एक संगतीत $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ तर खालीलपैकी सत्य विधान कोणते ?

(A) $\Delta PQR \sim \Delta ABC$

(B) $\Delta PQR \sim \Delta CAB$

(C) $\Delta CBA \sim \Delta PQR$

(D) $\Delta BCA \sim \Delta PQR$

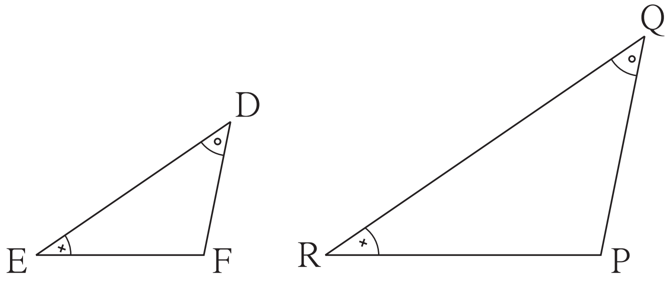


आकृती 1.67

(2) जर Δ DEF व Δ PQR मध्ये, $\angle D \cong \angle Q$, $\angle R \cong \angle E$, तर खालीलपैकी असत्य विधान कोणते ?

(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



आकृती 1.68

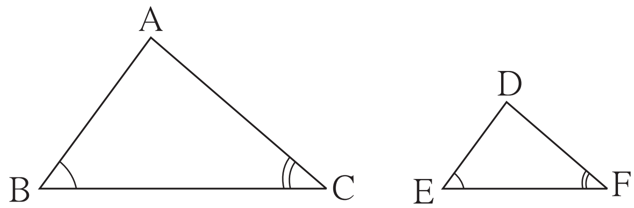
(3) Δ ABC व Δ DEF मध्ये $\angle B = \angle E$, $\angle F = \angle C$ आणि AB = 3 DE, तर त्या दोन त्रिकोणांबाबत सत्य विधान कोणते ?

(A) ते एकरूप नाहीत आणि समरूपही नाहीत.

(B) ते समरूप आहेत पण एकरूप नाहीत.

(C) ते एकरूप आहेत आणि समरूपही आहेत.

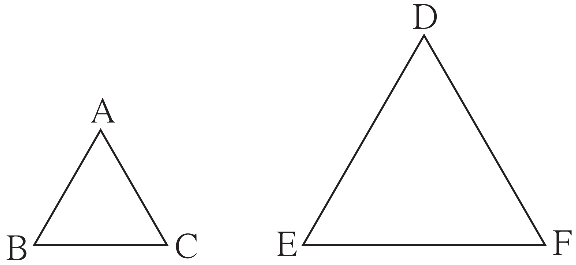
(D) वरीलपैकी एकही विधान सत्य नाही.



आकृती 1.69

(4) Δ ABC व Δ DEF हे दोन्ही समभुज त्रिकोण आहेत, $A(\Delta ABC) : A(\Delta DEF) = 1 : 2$ असून AB = 4 आहे तर DE ची लांबी किती ?

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

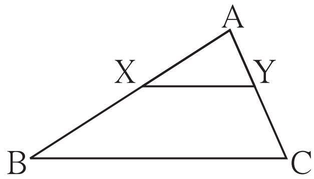


आकृती 1.70

(5) आकृती 1.71 मध्ये रेख XY || रेख BC तर खालील पैकी कोणते विधान सत्य आहे ?

(A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$ (B) $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{AC}$

(C) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$ (D) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$



आकृती 1.71

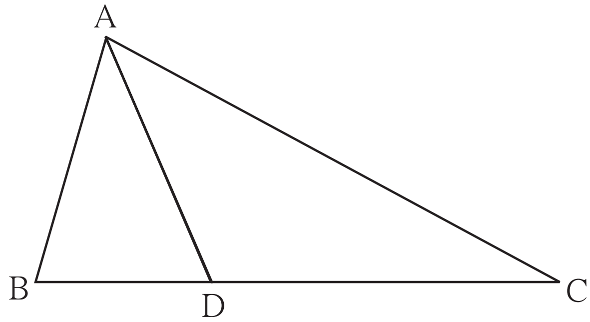
2. Δ ABC मध्ये B - D – C आणि BD = 7,

BC = 20 तर खालील गुणोत्तरे काढा.

(1) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$

(2) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$

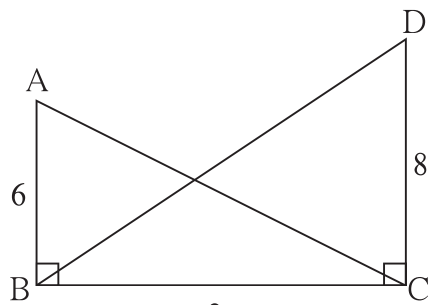
(3) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$



आकृती 1.72

3. समान उंचीच्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर 2 : 3 आहे, लहान त्रिकोणाचा पाया 6 सेमी असेल तर मोठ्या त्रिकोणाचा संगत पाया किती असेल ?

4.



आकृती 1.73

आकृती 1.73 मध्ये $\angle ABC = \angle DCB = 90°$

AB = 6, DC = 8

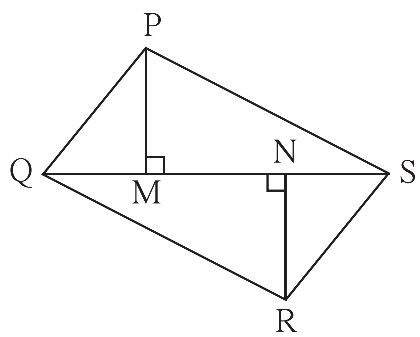
तर $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)}$ = किती ?

5. आकृती 1.74 मध्ये PM = 10 सेमी

A(Δ PQS) = 100 चौसेमी

A(ΔQRS) = 110 चौसेमी

तर NR काढा.

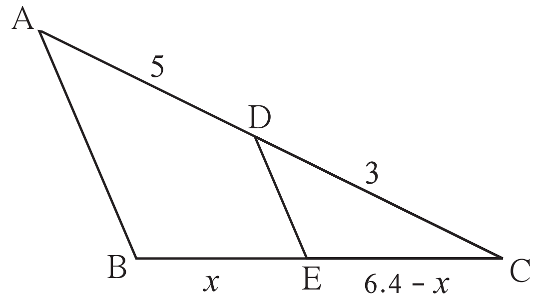


आकृती 1.74

6. Δ MNT ~ Δ QRS बिंदू T पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 5 असून बिंदू S पासून काढलेल्या शिरोलंबाची लांबी 9 आहे, तर $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ हे गुणोत्तर काढा.

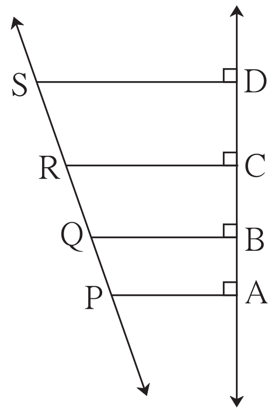
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

7. आकृती 1.75 मध्ये A – D – C व B – E – C . रेख DE || बाजू AB. जर AD = 5, DC = 3, BC = 6.4 तर BE काढा.



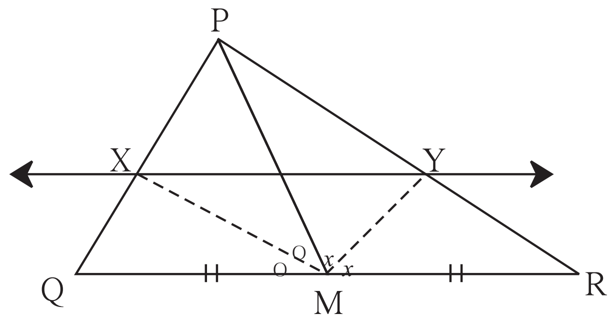
आकृती 1.75

8. आकृती 1.76 मध्ये, रेख PA, रेख QB, रेख RC व रेख SD हे रेषा AD ला लंब आहेत. AB = 60, BC = 70, CD = 80, PS = 280, तर PQ, QR, RS काढा.



आकृती 1.76

9. Δ PQR मध्ये रेख PM ही मध्यगा आहे. ∠PMQ व ∠PMR चे दुभाजक बाजू PQ व बाजू PR ला अनुक्रमे X आणि Y बिंदूत छेदतात, तर सिद्ध करा XY || QR.



आकृती 1.77

सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

Δ PMQ मध्ये किरण MX हा ∠PMQ चा दुभाजक आहे.

$\therefore \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$ .... (I) (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)

Δ PMR मध्ये किरण MY हा ∠PMR चा दुभाजक आहे.

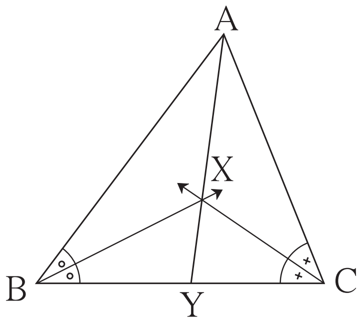
$\therefore \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$ .... (II) (कोनदुभाजकाचे प्रमेय)

परंतु $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MP}{MR}$ .... (M हा QR चा मध्य म्हणजेच MQ = MR)

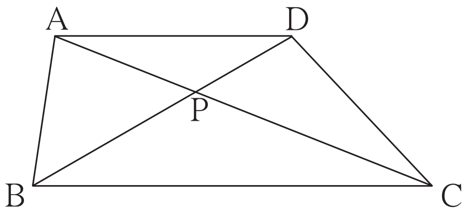
$\therefore \dfrac{PX}{XQ} = \dfrac{PY}{YR}$

∴ XY || QR .... (प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाचा व्यत्यास)

10*. आकृती 1.78 मध्ये Δ ABC च्या $\angle$ B व $\angle$ C चे दुभाजक एकमेकांना X मध्ये छेदतात, रेषा AX ही बाजू BC ला Y मध्ये छेदते जर AB = 5, AC = 4, BC = 6 तर $\frac{AX}{XY}$ ची किंमत काढा.



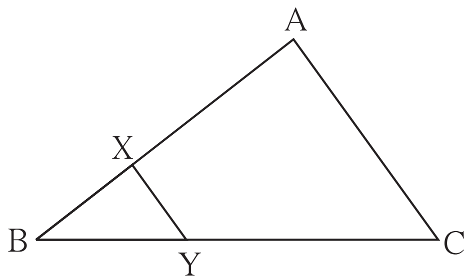
आकृती 1.78



आकृती 1.79

11. $\square$ ABCD मध्ये रेख AD $\parallel$ रेख BC. कर्ण AC आणि कर्ण BD परस्परांना बिंदू P मध्ये छेदतात. तर दाखवा की $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$

12. आकृती 1.80 मध्ये XY $\parallel$ बाजू AC.
जर 2AX = 3BX आणि XY = 9 तर
AC ची किंमत काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



आकृती 1.80

कृती : 2AX = 3BX $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

$\frac{AX + BX}{BX} = \frac{\boxed{} + \boxed{}}{\boxed{}}$ .... (योग क्रिया करून)

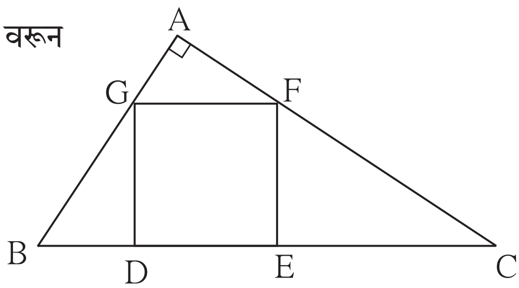
$\frac{AB}{BX} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (I)

Δ BCA ~ Δ BYX .... (समरूपतेची $\boxed{}$ कसोटी)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ .... (समरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू)

$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{AC}{9}$ $\therefore$ AC = $\boxed{}$ ....(I) वरून

13*. Δ ABC मध्ये $\angle$ A = 90°. $\square$ DEFG या चौरसाचे D व E हे शिरोबिंदू बाजू BC वर आहेत. बिंदू F हा बाजू AC वर आणि बिंदू G हाबाजू AB वर आहे. तर सिद्ध करा. $DE^2 = BD \times EC$ (Δ GBD व Δ CFE हे समरूप दाखवा. GD = FE = DE याचा उपयोग करा.)



आकृती 1.81

2 पायथागोरसचे प्रमेय

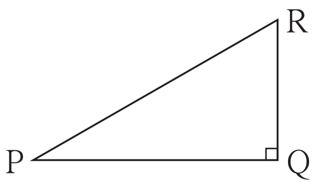
चला, शिकूया.

- पायथागोरसचे त्रिकुट
- भूमितीमध्याचे प्रमेय
- पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन
- समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण
- पायथागोरसचे प्रमेय
- अपोलोनियसचे प्रमेय

जरा आठवूया.

पायथागोरसचे प्रमेय :

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.



आकृती 2.1

Δ PQR मध्ये $\angle$ PQR = 90°

$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

हेच आपण $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ असे लिहू.

Δ PQR च्या PQ, QR व PR या बाजूंच्या लांबी अनुक्रमे r, p आणि q या अक्षरांनी दाखविण्याचाही संकेत आहे. त्यानुसार, आकृती 2.1 च्या संदर्भात पायथागोरसचे प्रमेय $q^2 = p^2 + r^2$ असेही लिहिता येईल.

पायथागोरसचे त्रिकुट :

नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये जर एका संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल तर त्याला पायथागोरसचे त्रिकुट म्हणतात.

उदाहरणार्थ :(11, 60, 61) या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये,

$11^2 = 121$, $60^2 = 3600$, $61^2 = 3721$ आणि $121 + 3600 = 3721$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका आहे.

$\therefore$ 11, 60, 61 हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

तसेच (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) ही देखील पायथागोरसची त्रिकुटे आहेत, हे पडताळा.

पायथागोरसच्या त्रिकुटांतील संख्या कोणत्याही क्रमाने लिहिता येतात.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

अधिक माहितीसाठी :

पायथागोरसची त्रिकुटे मिळवण्याचे सूत्र :

जर a, b, c या नैसर्गिक संख्या असतील आणि $a > b$, तर $[(a^2 + b^2),(a^2 - b^2),(2ab)]$ हे पायथागोरसचे त्रिकुट असते.

$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ .... (I)

$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ .... (II)

$(2ab)^2 = 4a^2b^2$ .... (III)

$\therefore$ (I), (II) व (III) वरून, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

$\therefore [(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

हे त्रिकुट, पायथागोरसची वेगवेगळी त्रिकुटे मिळवण्यासाठी सूत्र म्हणून वापरता येते.

उदाहरणार्थ, $a = 5$ आणि $b = 3$ घेतल्यास,

$a^2 + b^2 = 34$, $a^2 - b^2 = 16$ आणि $2ab = 30$.

(34, 16, 30) हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे, हे तुम्ही पडताळून पाहा.

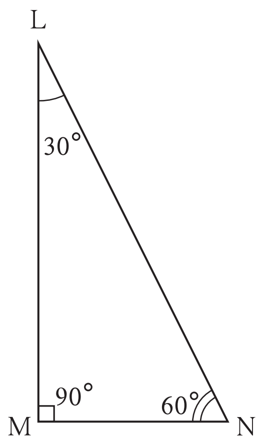
a आणि b साठी विविध नैसर्गिक संख्या घेऊन सूत्राच्या आधारे पायथागोरसची 5 त्रिकुटे तयार करा.

मागील इयत्तेत आपण $30° - 60° - 90°$ आणि $45° - 45° - 90°$ हे कोन असणाऱ्या काटकोन त्रिकोणांचे गुणधर्म पाहिले आहेत.

(I) कोनांची मापे $30°-60°-90°$ असणाऱ्या त्रिकोणाचा गुणधर्म

काटकोन त्रिकोणाचे लघुकोन 30° व 60° असतील, तर 30° मापाच्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या निम्मी असते व 60° मापाच्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या $\frac{\sqrt{3}}{2}$ पट असते.

आकृती 2.2 पाहा. Δ LMN मध्ये, $\angle L = 30°$, $\angle N = 60°$, $\angle M = 90°$



आकृती 2.2

$\therefore$ 30° कोनासमोरील बाजू = MN = $\frac{1}{2} \times$ LN

60° कोनासमोरील बाजू = LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ LN

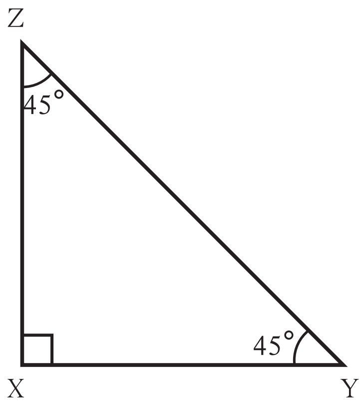
जर LN = 6 सेमी तर MN व LM काढू.

$MN = \frac{1}{2} \times LN = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ सेमी

$LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ सेमी

(II) कोनांची मापे $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ असणाऱ्या त्रिकोणाचा गुणधर्म

काटकोन त्रिकोणाचे लघुकोन 45° व 45° मापाचे असतील तर काटकोन करणारी प्रत्येक बाजू ही कर्णाच्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ पट असते .



आकृती 2.3

आकृती 2.3 पाहा. Δ XYZ मध्ये,

$$XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

$$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

जर $ZY = 3\sqrt{2}$ सेमी तर XY आणि XZ काढू.

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

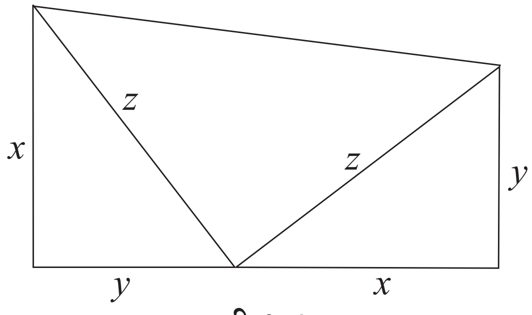
$\therefore$ XY = XZ = 3 सेमी

पायथागोरसचे प्रमेय इयत्ता 7 वी मध्ये क्षेत्रफळाच्या सहाय्याने अभ्यासले आहे. त्यामध्ये आपण चार काटकोन त्रिकोण व एक चौरस यांच्या क्षेत्रफळांचा उपयोग केला होता. याच प्रमेयाची सिद्धता आपण थोड्या वेगळ्या प्रकारेही देऊ शकतो.

कृती :

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे दोन एकरूप काटकोन त्रिकोण घ्या. त्यांच्या कर्णांच्या लांबीएवढ्या दोन भुजा असलेला एक समद्विभुज काटकोन त्रिकोण घ्या. हे तीन काटकोन त्रिकोण जोडून समलंब चौकोन तयार करा.

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ $\times$ (समांतर बाजूंच्या लांबीची बेरीज) $\times$ उंची ; या सूत्राचा उपयोग करून त्याचे क्षेत्रफळ तिन्ही त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेबरोबर लिहून पायथागोरसचे प्रमेय सिद्ध करा.



आकृती 2.4

जाणून घेऊया.

आता आपण पायथागोरसच्या प्रमेयाची सिद्धता समरूप त्रिकोणांच्या आधारे देणार आहोत.

ही सिद्धता देण्यासाठी आवश्यक असणारे काटकोन त्रिकोणाचे समरूपतेसंबंधीचे गुणधर्म अभ्यासू.

समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण (Similarity and right angled triangle)

प्रमेय : **काटकोन त्रिकोणात कर्णावर टाकलेल्या शिरोलंबामुळे जे त्रिकोण तयार होतात ते मूळ काटकोन त्रिकोणाशी व परस्परांशी समरूप असतात.**

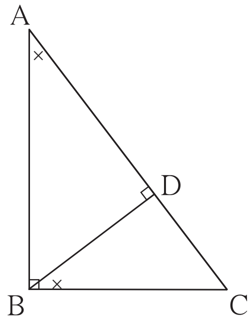
पक्ष : Δ ABC मध्ये $\angle$ ABC = 90°,

रेख BD $\perp$ रेख AC, A-D-C

साध्य : Δ ADB $\sim$ Δ ABC

Δ BDC $\sim$ Δ ABC

Δ ADB $\sim$ Δ BDC



आकृती 2.5

सिद्धता : Δ ADB आणि Δ ABC मध्ये

$\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ BAC ...(सामाईक कोन)

$\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ ABC ...(90° कोन)

Δ ADB $\sim$ Δ ABC ...(को को कसोटी)...(I)

तसेच, Δ BDC आणि Δ ABC मध्ये

$\angle$ BCD $\cong$ $\angle$ ACB ...(सामाईक कोन)

$\angle$ BDC $\cong$ $\angle$ ABC ...(90° कोन)

Δ BDC $\sim$ Δ ABC ...(को को कसोटी)..(II)

$\therefore$ Δ ADB $\sim$ Δ BDC विधान (I) व (II) वरून ...(III)

$\therefore$ Δ ADB $\sim$ Δ BDC $\sim$ Δ ABC विधान (I), (II) व (III) वरून..... संक्रामकता

भूमितीमध्याचे प्रमेय (Theorem of geometric mean)

काटकोन त्रिकोणात, कर्णावर काढलेला शिरोलंब, त्या शिरोलंबामुळे होणाऱ्या कर्णाच्या दोन भागांचा भूमितीमध्य असतो.

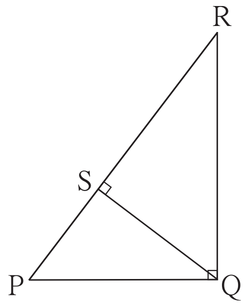
सिद्धता : काटकोन त्रिकोण PQR मध्ये रेख QS $\perp$ कर्ण PR

Δ QSR $\sim$ Δ PSQ .... (काटकोन त्रिकोणांची समरूपता)

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$QS^2 = PS \times SR$$



आकृती 2.6

$\therefore$ शिरोलंब QS हा रेख PS आणि रेख SR यांचा 'भूमितीमध्य' आहे.

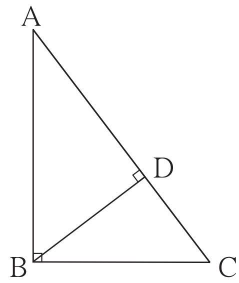
पायथागोरसचे प्रमेय (Theorem of Pythagoras)

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.

पक्ष : Δ ABC मध्ये, $\angle ABC = 90°$

साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : बिंदू B मधून बाजू AC वर रेख BD लंब काढला. A-D-C



आकृती 2.7

सिद्धता : काटकोन Δ ABC मध्ये रेख BD $\perp$ कर्ण AC ..... (रचना)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ ..... (काटकोन त्रिकोणाची समरूपता)

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ – संगतभुजा

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ .... (I)

तसेच, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ – संगतभुजा

$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

$BC^2 = DC \times AC$ .... (II)

(I) व (II) यांची बेरीज करून

$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$

$= AC\,(AD + DC)$

$= AC \times AC$ .... (A-D-C)

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

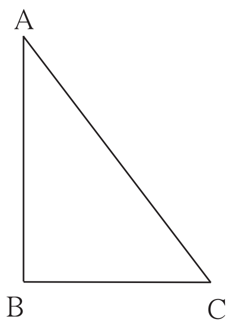
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

पायथागोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of Pythagoras' theorem)

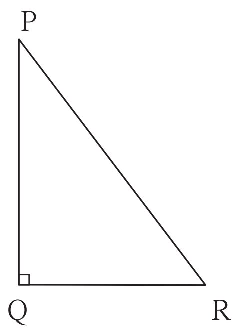
एखाद्या त्रिकोणातील एका बाजूचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल, तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.

पक्ष : Δ ABC मध्ये, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

साध्य : $\angle ABC = 90°$



आकृती 2.8



आकृती 2.9

रचना : Δ PQR असा काढा की, AB = PQ, BC = QR , $\angle$ PQR = 90°.

सिद्‌धता : Δ PQR मध्ये, $\angle$ Q = 90°

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ .... (पायथागोरसच्या प्रमेयावरून)

$= AB^2 + BC^2$ .... (रचना)

$= AC^2$ .... (पक्ष)

$\therefore PR^2 = AC^2$,

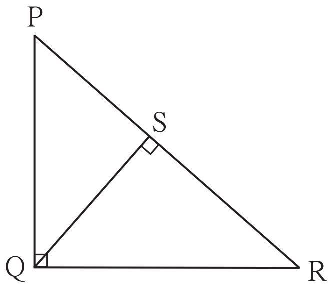
$\therefore PR = AC$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ .... (बाबाबा कसोटी)

$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90^\circ$

हे लक्षात ठेवूया.

(1) (a) समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण



आकृती 2.10

Δ PQR मध्ये $\angle$ Q = 90° , रेख QS $\perp$ रेख PR येथे $\Delta PQR \sim \Delta PSQ \sim \Delta QSR$ अशा रीतीने आकृतीमध्ये तयार होणारे सर्व काटकोन त्रिकोण परस्परांशी समरूप असतात.

(b) भूमितीमध्याचे प्रमेय :

वरील आकृतीत $\Delta PSQ \sim \Delta QSR$

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ रेख QS हा रेख PS व रेख SR या रेषाखंडाचा भूमितीमध्य आहे.

(2) पायथागोरसचे प्रमेय :

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.

(3) पायथागोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास :

एखाद्या त्रिकोणातील एका बाजूचा वर्ग हा त्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.

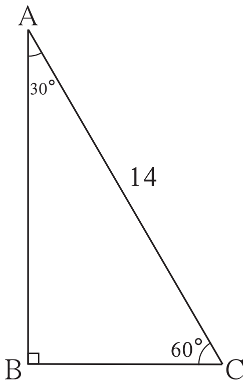
याशिवाय आणखी एक गुणधर्म खूप उपयोगी आहे. तोही लक्षात ठेवूया.

(4) काटकोन त्रिकोणात एक बाजू कर्णाच्या निम्मी असेल तर त्या बाजूच्या समोरील कोन 30° असतो. हा गुणधर्म $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ प्रमेयाचा व्यत्यास आहे.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आकृती 2.11 पाहा. Δ ABC मध्ये $\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$, AC=14 तर AB व BC काढा.

उकल :



आकृती 2.11

Δ ABC मध्ये,

$\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$, $\therefore \angle C = 60°$

$30° - 60° - 90°$ च्या प्रमेयानुसार,

$BC = \frac{1}{2} \times AC$

$BC = \frac{1}{2} \times 14$

$BC = 7$

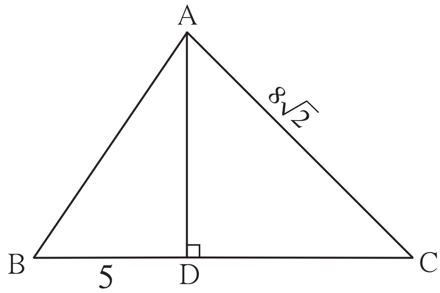
$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$

$AB = 7\sqrt{3}$

उदा. (2) आकृती 2.12 पाहा. Δ ABC मध्ये रेख AD $\perp$ रेख BC, $\angle C = 45°$, BD = 5 आणि $AC = 8\sqrt{2}$, तर AD आणि BC काढा.

उकल :



आकृती 2.12

Δ ADC मध्ये,

$\angle ADC = 90°$, $\angle C = 45°$, $\therefore \angle DAC = 45°$

$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2}$ ... ($45°-45°-90°$ च्या प्रमेयानुसार)

$\therefore DC = 8 \quad \therefore AD = 8$

$BC = BD + DC$

$= 5 + 8$

$= 13$

उदा. (3) आकृती 2.13 मध्ये $\angle PQR = 90°$, रेख QN $\perp$ रेख PR, PN = 9, NR = 16 तर QN काढा.

उकल : Δ PQR मध्ये, रेख QN $\perp$ रेख PR

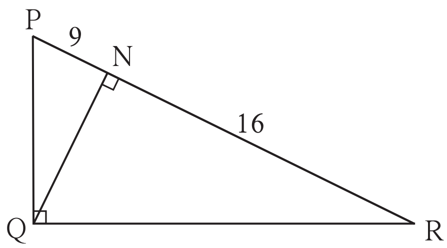
$\therefore QN^2 = PN \times NR$ .... (भूमितीमध्याचे प्रमेय)

$\therefore \quad QN = \sqrt{PN \times NR}$

$= \sqrt{9 \times 16}$

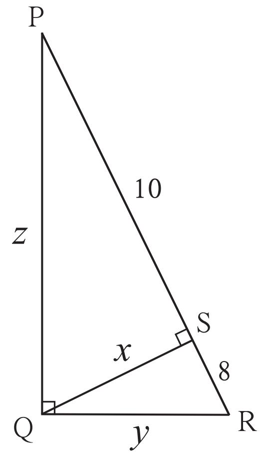
$= 3 \times 4$

$= 12$



आकृती 2.13

उदा. (4) आकृती 2.14 पाहा. Δ PQR मध्ये $\angle$ PQR = 90°, रेख QS $\perp$ रेख PR तर x, y, z च्या किमती काढा.



आकृती 2.14

उकल : Δ PQR मध्ये, $\angle$ PQR = 90°, रेख QS $\perp$ रेख PR

$$QS = \sqrt{PS \times SR} \quad \text{.......... (भूमितीमध्याचे प्रमेय)}$$
$$= \sqrt{10 \times 8}$$
$$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$$
$$= \sqrt{5 \times 16}$$
$$= 4\sqrt{5}$$
$$\therefore \; x = 4\sqrt{5}$$

Δ QSR मध्ये, $\angle$ QSR = 90°

$$\therefore QR^2 = QS^2 + SR^2$$
$$= \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 8^2$$
$$= 16 \times 5 + 64$$
$$= 80 + 64$$
$$= 144$$
$$\therefore QR = 12$$

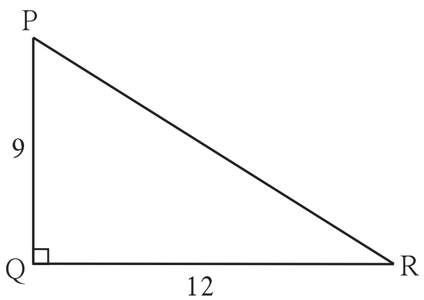
Δ PSQ मध्ये, $\angle$ QSP = 90°

$$\therefore PQ^2 = QS^2 + PS^2$$
$$= \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 10^2$$
$$= 16 \times 5 + 100$$
$$= 80 + 100$$
$$= 180$$
$$= 36 \times 5$$
$$\therefore PQ = 6\sqrt{5}$$

यावरून, $x = 4\sqrt{5}$, $y = 12$, $z = 6\sqrt{5}$

उदा. (5) काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजू 9 सेमी व 12 सेमी आहेत तर त्या त्रिकोणाचा कर्ण काढा.

उकल : Δ PQR मध्ये, $\angle$ Q = 90°



आकृती 2.15

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 \quad \text{(पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार)}$$
$$= 9^2 + 12^2$$
$$= 81 + 144$$
$$\therefore PR^2 = 225$$
$$\therefore PR = 15$$

त्रिकोणाचा कर्ण = 15 सेमी

उदा. (6) Δ LMN मध्ये $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$ तर Δ LMN हा काटकोन त्रिकोण आहे किंवा नाही ते ठरवा. (l, m, n, या अनुक्रमे $\angle$ L, $\angle$ M आणि $\angle$ N यांच्या समोरील बाजू आहेत.)

उकल : $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$

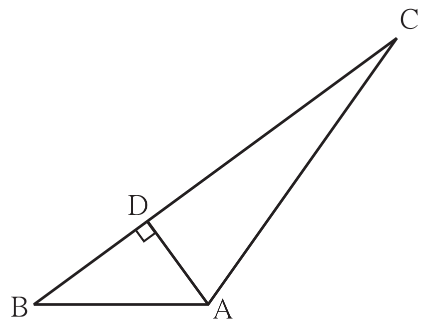
$l^2 = 25$, $m^2 = 169$, $n^2 = 144$

$\therefore m^2 = l^2 + n^2$

$\therefore$ पायथागोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार Δ LMN हा काटकोन त्रिकोण आहे.

उदा. (7) आकृती 2.16 पाहा. Δ ABC मध्ये, रेख AD $\perp$ रेख BC, तर सिद्ध करा :

$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



आकृती 2.16

उकल : पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार Δ ADC मध्ये,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore \; AD^2 = AC^2 - CD^2 \; \ldots \text{(I)}$

Δ ADB मध्ये,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\therefore \; AD^2 = AB^2 - BD^2 \; \ldots \text{(II)}$

$\therefore \; AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ .... [(I) आणि (II) वरून]

$\therefore \; AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

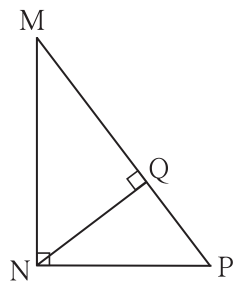
सरावसंच 2.1

1. खालील त्रिकुटांपैकी पायथागोरसची त्रिकुटे कोणती आहेत हे सकारण लिहा.

   (1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12) (3) (5, 12, 13)

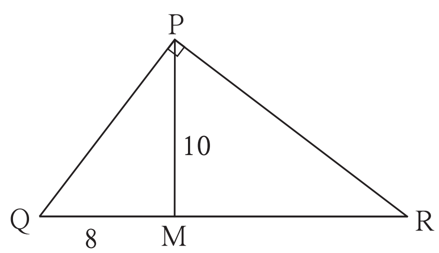
   (4) (24, 70, 74) (5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

2. आकृती 2.17 मध्ये $\angle$ MNP = 90°, रेख NQ $\perp$ रेख MP, MQ = 9, QP = 4 तर NQ काढा.



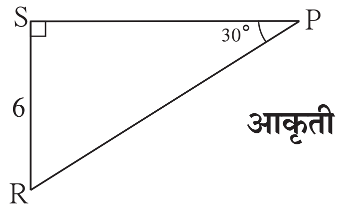
आकृती 2.17

3. आकृती 2.18 मध्ये $\angle$ QPR = 90°, रेख PM $\perp$ रेख QR आणि Q-M-R, PM = 10, QM = 8 यावरून QR काढा.

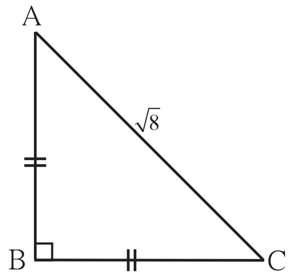


आकृती 2.18

4. आकृती 2.19 मधील Δ PSR मध्ये दिलेल्या माहितीवरून RP आणि PS काढा.



आकृती 2.19



आकृती 2.20

5. आकृती 2.20 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून AB आणि BC काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

AB = BC .... $\boxed{\quad\quad}$

$\therefore \angle BAC = \boxed{\quad\quad}$

$\therefore AB = BC = \boxed{\quad\quad} \times AC$

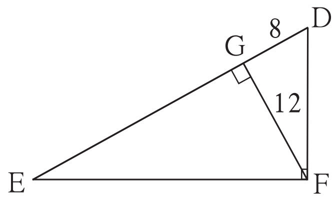
$= \boxed{\quad\quad} \times \sqrt{8}$

$= \boxed{\quad\quad} \times 2\sqrt{2}$

$= \boxed{\quad\quad}$

6. एका चौरसाचा कर्ण 10 सेमी आहे तर त्याच्या बाजूची लांबी व परिमिती काढा.

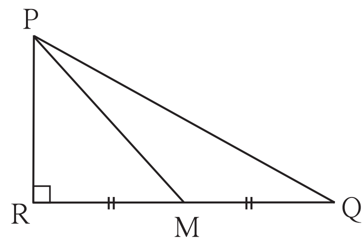
7. आकृती 2.21 मध्ये $\angle DFE = 90°$, रेख FG $\perp$ रेख ED. जर GD = 8, FG = 12, तर (1) EG (2) FD आणि (3) EF काढा.



आकृती 2.21

8. एका आयताची लांबी 35 सेमी व रुंदी 12 सेमी आहे तर त्या आयताच्या कर्णाची लांबी काढा.

9★. आकृती 2.22 मध्ये M हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे. $\angle PRQ = 90°$ असेल तर सिद्ध करा, $PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$



आकृती 2.22

10★. रस्त्याच्या दुतर्फा असलेल्या इमारतीच्या भिंती एकमेकींना समांतर आहेत. 5.8 मी लांबीच्या शिडीचे एक टोक रस्त्यावर ठेवले असता तिचे वरचे टोक पहिल्या इमारतीच्या 4 मीटर उंच असलेल्या खिडकीपर्यंत टेकते. त्याच ठिकाणी शिडी ठेवून रस्त्याच्या दुसऱ्या बाजूस वळविल्यास तिचे वरचे टोक दुसऱ्या इमारतीच्या 4.2 मीटर उंच असलेल्या खिडकीपर्यंत येते, तर रस्त्याची रुंदी काढा.

जाणून घेऊया.

पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन

पायथागोरसच्या प्रमेयामध्ये काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आणि काटकोन करणाऱ्या बाजू यांचा परस्पर संबंध म्हणजेच काटकोनासमोरील बाजू आणि इतर दोन बाजूंमधील संबंध सांगितला आहे.

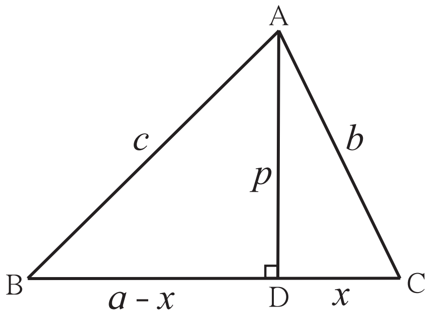
त्रिकोणातील लघुकोनासमोरील बाजूचा इतर दोन बाजूंशी असलेला संबंध तसेच विशालकोनासमोरील बाजूंचा इतर दोन बाजूंशी असलेला संबंध पायथागोरसच्या प्रमेयाने ठरविता येतो.हे संबंध खालील उदाहरणांतून समजून घ्या.

उदा.(1) Δ ABC मध्ये, $\angle$ C हा लघुकोन आहे, रेख AD $\perp$ रेख BC तर सिद्ध करा :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

दिलेल्या आकृतीमध्ये, AB = c, AC = b, AD = p, BC = a, DC = x मानू.

$\therefore$ BD = $a - x$



आकृती 2.23

Δ ADB मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$c^2 = (a-x)^2 + \boxed{}$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \boxed{}$ .... (I)

Δ ADC मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$b^2 = p^2 + \boxed{}$

$p^2 = b^2 - \boxed{}$ .... (II)

(II) मधील p^2 ची किंमत, (I) मध्ये ठेवून,

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

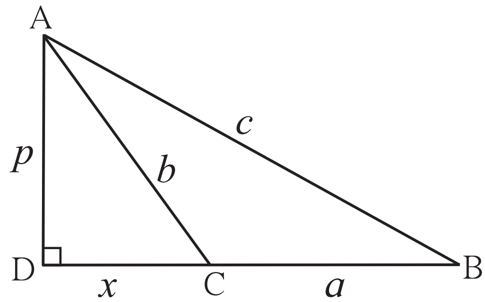
उदा.(2) Δ ABC मध्ये, $\angle$ ACB हा विशालकोन आहे, रेख AD $\perp$ रेख BC, तर सिद्ध करा :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

समजा AD = p, AC = b, AB = c,

BC = a, DC = x मानू.

DB = $a + x$



आकृती 2.24

Δ ADB मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ .... (I)

तसेच Δ ADC मध्ये,

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$\therefore \quad p^2 = b^2 - x^2 \qquad \text{..........} (II)$$

$\therefore$ (I) मध्ये (II) मधील p^2 ची किंमत घालून,

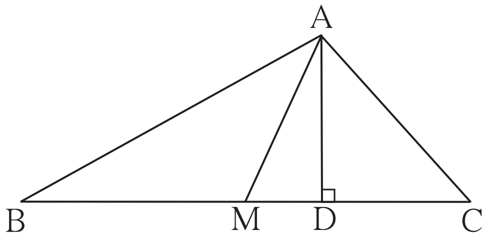
$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$= a^2 + 2ax + b^2$$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

अपोलोनियसचे प्रमेय (Appollonius' Theorem)

Δ ABC मध्ये, बिंदू M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू असेल, तर $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$



आकृती 2.25

पक्ष : Δ ABC मध्ये M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू आहे.

साध्य : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

रचना : रेख AD $\perp$ रेख BC काढला.

सिद्धता : जर रेख AM हा रेख BC ला लंब नसेल, तर $\angle$ AMB आणि $\angle$ AMC यांपैकी एक विशालकोन आणि दुसरा लघुकोन असतो.

आकृतीमध्ये $\angle$ AMB विशालकोन आणि $\angle$ AMC हा लघुकोन आहे.

वरील उदाहरण (1) व उदाहरण (2) वरून,

$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD$ ..... (I)

आणि $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$

$\therefore$ $AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD$ ($\because$ BM = MC) ....(II)

$\therefore$ (I) व (II) यांची बेरीज करून,

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

जर रेख AM $\perp$ बाजू BC तर या प्रमेयाची सिद्धता तुम्ही लिहा.

या उदाहरणावरून त्रिकोणाच्या बाजू आणि मध्यगा यांचा परस्परसंबंध समजतो.

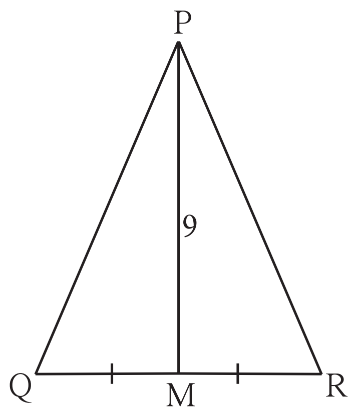
यालाच 'अपोलोनियसचे प्रमेय' म्हणतात.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) Δ PQR मध्ये, रेख PM ही मध्यगा आहे. PM = 9 आणि $PQ^2 + PR^2 = 290$, तर QR काढा.

उकल : Δ PQR मध्ये, रेख PM ही मध्यगा आहे.

M हा रेख QR चा मध्यबिंदू आहे.



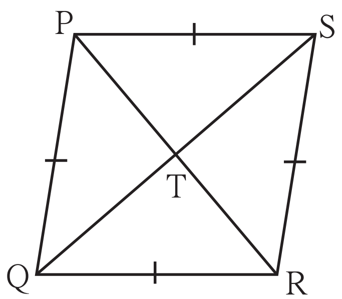
आकृती 2.26

$$QM = MR = \frac{1}{2}QR$$

$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$ (अपोलोनियसच्या प्रमेयानुसार)

$$290 = 2 \times 9^2 + 2QM^2$$
$$290 = 2 \times 81 + 2QM^2$$
$$290 = 162 + 2QM^2$$
$$2QM^2 = 290 - 162$$
$$2QM^2 = 128$$
$$QM^2 = 64$$
$$QM = 8$$
$$\therefore \quad QR = 2 \times QM$$
$$= 2 \times 8$$
$$= 16$$

उदा.(2) समभुज चौकोनाच्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज त्याच्या कर्णांच्या वर्गांच्या बेरजेइतकी असते, हे सिद्ध करा.



आकृती 2.27

पक्ष : $\square$ PQRS हा समभुज चौकोन असून कर्ण PR आणि SQ एकमेकांना T या बिंदूत छेदतात.

साध्य : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

सिद्धता : समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

$\therefore$ अपोलोनियसच्या प्रमेयानुसार,

$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2$ .... (I)

$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2$ .... (II)

$\therefore$ (I) व (II) यांची बेरीज करून,

$$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$$

$\therefore PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2$ .... (RT = PT)

$$= 4PT^2 + 4QT^2$$
$$= (2PT)^2 + (2QT)^2$$
$$= PR^2 + QS^2$$

(हे उदाहरण पायथागोरसच्या प्रमेयाचा उपयोग करूनही सोडविता येईल.)

सरावसंच 2.2

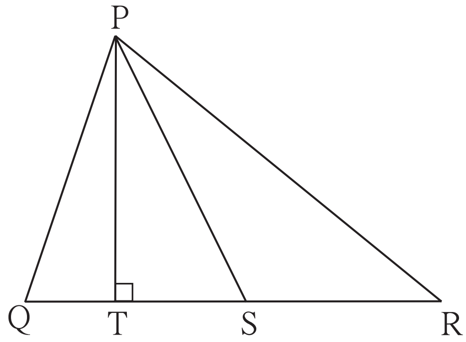
1. Δ PQR मध्ये, बिंदू S हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे, जर PQ = 11, PR = 17, PS = 13 असेल तर QR ची लांबी काढा.

2. Δ ABC मध्ये, AB = 10, AC = 7, BC = 9 तर बिंदू C मधून बाजू AB वर काढलेल्या मध्यगेची लांबी किती?

3. आकृती 2.28 मध्ये रेख PS ही Δ PQR ची मध्यगा आहे आणि PT $\perp$ QR तर सिद्ध करा,

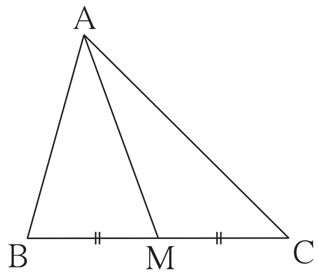
(1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

(2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$



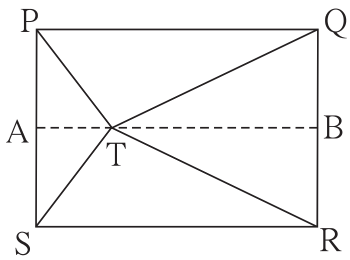
आकृती 2.28

4. आकृती 2.29 मध्ये, Δ ABC च्या बाजू BC चा बिंदू M हा मध्यबिंदू आहे. जर $AB^2 + AC^2$ = 290 सेमी, AM = 8 सेमी, तर BC काढा.



आकृती 2.29

5*. आकृती 2.30 मध्ये दाखविल्यानुसार T हा बिंदू आयत PQRS च्या अंतर्भागात आहे, तर सिद्ध करा, $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$
(आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे A–T–B असा रेख AB || बाजू SR काढा.)



आकृती 2.30

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(1) खालीलपैकी कोणते पायथागोरसचे त्रिकुट आहे ?

(A) (1, 5, 10)   (B) (3, 4, 5)   (C) (2, 2, 2)   (D) (5, 5, 2)

(2) काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज 169 असेल, तर त्याच्या कर्णाची लांबी किती?

(A) 15   (B) 13   (C) 5   (D) 12

(3) खालीलपैकी कोणत्या तारखेतील संख्या हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे?

(A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 3/5/17 (D) 4/9/15

(4) बाजूंच्या लांबी a, b, c असलेल्या त्रिकोणामध्ये जर $a^2 + b^2 = c^2$ असेल तर तो कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण असेल?

(A) विशालकोन त्रिकोण (B) लघुकोन त्रिकोण (C) काटकोन त्रिकोण (D)समभुज त्रिकोण

(5) एका चौरसाचा कर्ण $10\sqrt{2}$ सेमी असल्यास त्याची परिमिती .... असेल.

(A) 10 सेमी (B) $40\sqrt{2}$ सेमी (C) 20 सेमी (D) 40 सेमी

(6) एका काटकोन त्रिकोणात कर्णावरील शिरोलंबामुळे कर्णाचे 4 सेमी व 9 सेमी लांबीचे दोन भाग होतात, तर त्या शिरोलंबाची लांबी किती?

(A) 9 सेमी (B) 4 सेमी (C) 6 सेमी (D) $2\sqrt{6}$ सेमी

(7) काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 24 सेमी व 18 सेमी असतील तर त्याच्या कर्णाची लांबी .... असेल.

(A) 24 सेमी (B) 30 सेमी (C) 15 सेमी (D) 18 सेमी

(8) Δ ABC मध्ये, AB = $6\sqrt{3}$ सेमी, AC = 12 सेमी आणि BC = 6 सेमी तर $\angle$ A चे माप किती?

(A) $30°$ (B) $60°$ (C) $90°$ (D) $45°$

2. खालील उदाहरणे सोडवा.

(1) एका समभुज त्रिकोणाची बाजू $2a$ आहे, तर त्याची उंची काढा.

(2) 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी बाजू असलेला त्रिकोण काटकोन त्रिकोण होईल का? सकारण लिहा.

(3) आयताच्या बाजू 11 सेमी व 60 सेमी असतील, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

(4) एका काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 9 सेमी व 12 सेमी आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी काढा.

(5) समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाची बाजू x आहे, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

(6) Δ PQR मध्ये; PQ = $\sqrt{8}$, QR = $\sqrt{5}$, PR = $\sqrt{3}$; तर Δ PQR हा काटकोन त्रिकोण आहे का? असल्यास त्याचा कोणता कोन काटकोन आहे?

3. Δ RST मध्ये, $\angle$ S = $90°$, $\angle$ T = $30°$, RT = 12 सेमी तर RS व ST काढा.

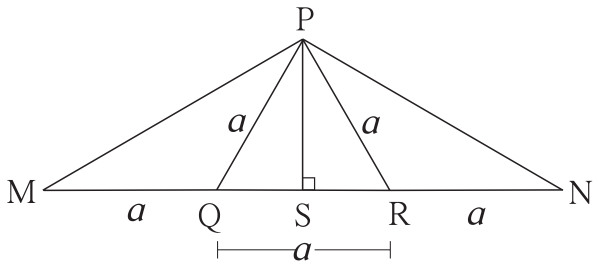
4. आयताचे क्षेत्रफळ 192 चौसेमी असून त्याची लांबी 16 सेमी आहे, तर आयताच्या कर्णाची लांबी काढा.

5*. एका समभुज त्रिकोणाची उंची $\sqrt{3}$ सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाच्या बाजूची लांबी व परिमिती काढा.

6. Δ ABC मध्ये रेख AP ही मध्यगा आहे. जर BC = 18, $AB^2 + AC^2 = 260$ तर AP काढा.

7★. Δ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे. पाया BC वर P बिंदू असा आहे की PC = $\frac{1}{3}$ BC, जर AB = 6 सेमी तर AP काढा.

8. आकृती 2.31 मध्ये, M-Q-R-N. दिलेल्या माहितीवरून सिद्ध करा:
PM = PN = $\sqrt{3} \times a$

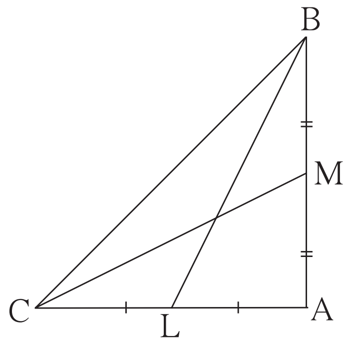


आकृती 2.31

9. सिद्ध करा: समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांच्या वर्गांची बेरीज ही त्या चौकोनाच्या बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर असते.

10. प्रणाली आणि प्रसाद एकाच ठिकाणावरून पूर्व आणि उत्तर दिशेला सारख्या वेगाने निघाले.दोन तासांनंतर त्यांच्यामधील अंतर $15\sqrt{2}$ किमी असेल तर त्यांचा ताशी वेग काढा.

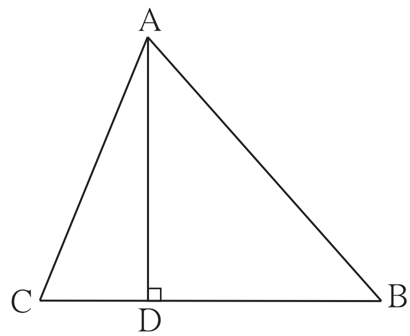
11★. Δ ABC मध्ये $\angle$ BAC = 90°, रेख BL व रेख CM या Δ ABC च्या मध्यगा आहेत, तर सिद्ध करा :
$4(BL^2 + CM^2) = 5\ BC^2$



आकृती 2.32

12. एका समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज 130 सेमी असून त्याच्या एका कर्णाची लांबी 14 सेमी आहे तर त्याच्या दुसऱ्या कर्णाची लांबी किती ?

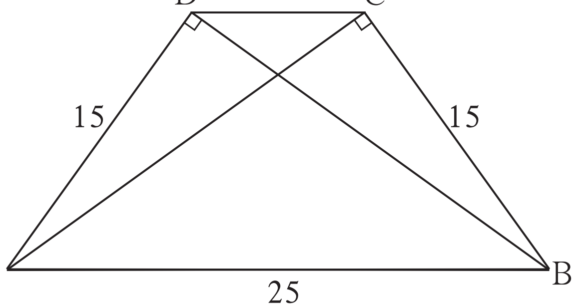
13. Δ ABC मध्ये रेख AD $\perp$ रेख BC आणि DB = 3CD, तर सिद्ध करा :
$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



आकृती 2.33

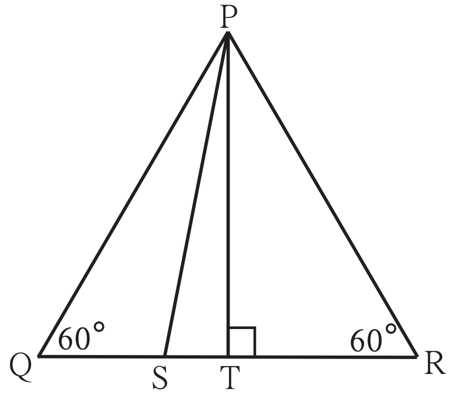
14★. समद्विभुज त्रिकोणामध्ये एकरूप बाजूंची लांबी 13 सेमी असून त्याचा पाया 10 सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातापासून पायाच्या समोरील शिरोबिंदूपर्यंतचे अंतर काढा.

15. समलंब चौकोन ABCD मध्ये,
रेख AB || रेख DC
रेख BD ⊥ रेख AD,
रेख AC ⊥ रेख BC,
जर AD = 15, BC = 15 आणि AB = 25
असेल तर A(□ABCD) किती?



आकृती 2.34

16★. आकृतीमध्ये Δ PQR हा समभुज त्रिकोण असून बिंदू S हा रेख QR वर अशा प्रकारे आहे की, $QS = \frac{1}{3}$ QR तर सिद्ध करा;9 $PS^2 = 7\ PQ^2$



आकृती 2.35

17★. रेख PM ही Δ PQR ची मध्यगा आहे. जर PQ = 40, PR = 42 आणि PM = 29, तर QR काढा.

18. रेख AM ही Δ ABC ची मध्यगा आहे. जर AB = 22, AC = 34, BC = 24, तर बाजू AM ची लांबी काढा.

ICT Tools or Links

इंटरनेटवरून 'Story on the life of Pythagoras' ची माहिती मिळवा. Slide show तयार करा.

□□□

4JHR79

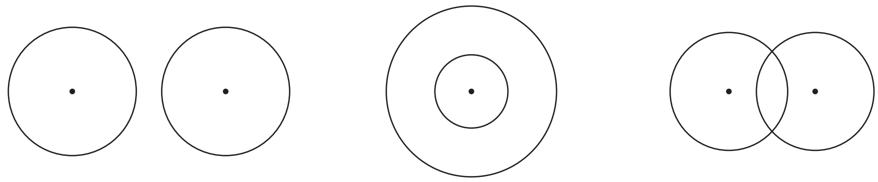
3 वर्तुळ

चला, शिकूया.

- एका, दोन, तीन बिंदूंतून जाणारी वर्तुळे
- स्पर्शवर्तुळे
- अंतर्लिखित कोन व अंतर्खंडित कंस
- स्पर्शिका छेदिका कोनाचे प्रमेय
- वृत्तछेदिका व स्पर्शिका
- वर्तुळकंस
- चक्रीय चौकोन
- जीवांच्या छेदनांचे प्रमेय

जरा आठवूया.

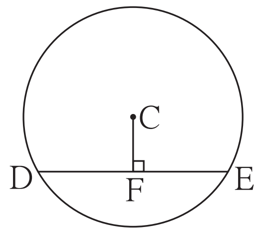
वर्तुळ या आकृतीसंबंधीच्या केंद्र, त्रिज्या, व्यास, जीवा, अंतर्भाग, बाह्यभाग या संज्ञांचा चांगला परिचय तुम्हाला झाला आहे. एकरूप वर्तुळे, समकेंद्री वर्तुळे व छेदणारी वर्तुळे या संज्ञा आठवा.



एकरूप वर्तुळे   समकेंद्री वर्तुळे   छेदणारी वर्तुळे

इयत्ता नववीत अभ्यासलेले जीवांचे गुणधर्म पुढील कृतींच्या सहाय्याने आठवा.

कृती I : सोबतच्या आकृतीत केंद्र C असलेल्या वर्तुळाची रेख DE ही जीवा आहे. रेख CF ⊥ जीवा DE. जर वर्तुळाचा व्यास 20 सेमी आणि DE = 16 सेमी असेल, तर CF = किती ?



आकृती 3.1

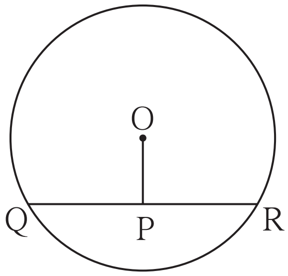
हा प्रश्न सोडविण्यासाठी उपयोगी पडणारी प्रमेये आणि गुणधर्म आठवून लिहा.

(1) वर्तुळकेंद्रातून जीवेवर काढलेला लंब ______

(2) ______

(3) ______

हे गुणधर्म वापरून प्रश्न सोडवा.



आकृती 3.2

कृती II : सोबतच्या आकृतीत केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची रेख QR ही जीवा आहे. बिंदू P हा जीवा QR चा मध्यबिंदू आहे. जर QR = 24, OP = 10 तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

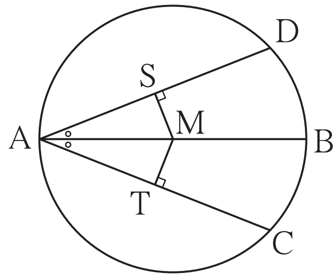
हा प्रश्न सोडविण्यासाठी उपयोगी पडणारी प्रमेये लिहा.

(1) ______________________

(2) ______________________

या प्रमेयांचा उपयोग करून उदाहरण सोडवा.

कृती III : आकृतीत वर्तुळकेंद्र M आणि
रेख AB हा व्यास आहे.
रेख MS $\perp$ जीवा AD
रेख MT $\perp$ जीवा AC
$\angle DAB \cong \angle CAB$.
तर सिद्ध करा; जीवा AD $\cong$ जीवा AC.



आकृती 3.3

हा प्रश्न सोडविण्यासाठी खालीलपैकी कोणते प्रमेय वापराल ?

(1) वर्तुळाच्या दोन जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समदूर असतील, तर त्या समान लांबीच्या असतात.

(2) एकाच वर्तुळाच्या एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समदूर असतात.

याशिवाय त्रिकोणांच्या एकरूपतेची खालीलपैकी कोणती कसोटी उपयोगी पडेल ?

(1) बाकोबा, (2) कोबाको, (3) बाबाबा, (4) कोकोबा, (5) कर्णभुजा.

योग्य ती कसोटी आणि प्रमेय वापरून सिद्धता लिहा.

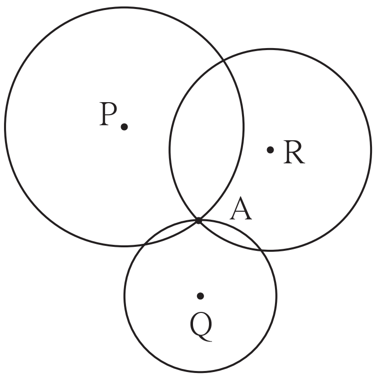
जाणून घेऊया.

एका, दोन, तीन बिंदूंतून जाणारी वर्तुळे

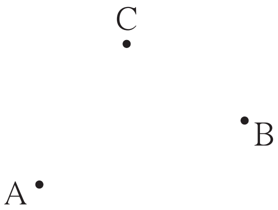
सोबतच्या आकृतीत, एका प्रतलात बिंदू A दाखविला आहे. केंद्रबिंदू P, Q, R असणारी तीनही वर्तुळे A या बिंदूतून जातात. बिंदू A मधून जाणारी आणखी किती वर्तुळे असतील असे तुम्हाला वाटते ?

तुमचे उत्तर 'कितीही' किंवा 'असंख्य' असे असेल, तर ते बरोबर आहे.

एकाच बिंदूतून जाणारी असंख्य वर्तुळे असतात.



आकृती 3.4

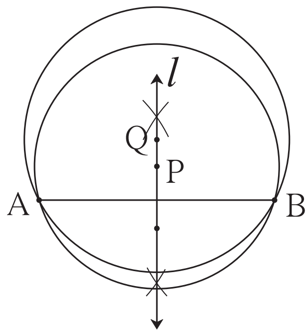


आकृती 3.5

सोबतच्या आकृतीतील A आणि B या दोन भिन्न बिंदूंतून जाणारी किती वर्तुळे असतील?

A, B, C या तिन्ही बिंदूंतून जाणारी किती वर्तुळे असतील? पुढे दिलेल्या कृतींतून काही उत्तर मिळते का पाहा.

कृती I : बिंदू A आणि बिंदू B यांना जोडणारा रेख AB काढा. या रेषाखंडाची लंबदुभाजक रेषा *l* काढा. रेषा *l* वरील बिंदू P हे केंद्र आणि PA त्रिज्या घेऊन वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ बिंदू B मधूनही जाते, हे पाहा. याचे कारण शोधा. (लंबदुभाजक रेषेचा गुणधर्म आठवा.)



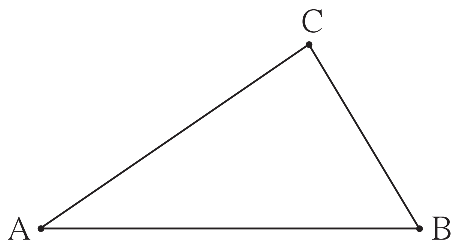
आकृती 3.6

रेषा *l* चा Q हा आणखी एक बिंदू घेऊन, केंद्र Q आणि त्रिज्या QA घेऊन काढलेले वर्तुळही बिंदू B मधून जाईल का ? विचार करा.

बिंदू A आणि बिंदू B मधून जाणारी आणखी किती वर्तुळे काढता येतील ? त्यांच्या केंद्रबिंदूंची स्थाने कोठे असतील ?

कृती II : नैकरेषीय बिंदू A, B, C काढा. या तिन्ही बिंदूंतून जाणारे वर्तुळ काढण्यासाठी काय करावे लागेल ? या तिन्ही बिंदूंतून जाणारे वर्तुळ काढा.

याच तीन बिंदूंतून जाणारे आणखी एक वर्तुळ काढता येईल का ? विचार करा.



आकृती 3.7

कृती III : एकरेषीय असलेले D, E, F हे बिंदू काढा. या तिन्ही बिंदूंतून जाणारे वर्तुळ काढण्याचा प्रयत्न करा. असे वर्तुळ काढता येत नसेल, तर ते का काढता येत नाही याचा विचार करा.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) एका बिंदूतून जाणारी असंख्य वर्तुळे असतात.

(2) दोन भिन्न बिंदूंतून जाणारी असंख्य वर्तुळे असतात.

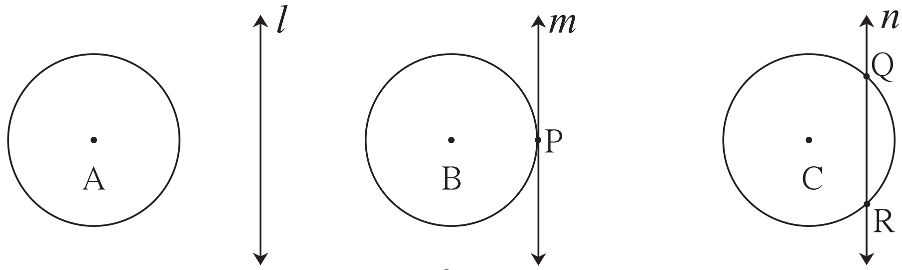
(3) तीन नैकरेषीय बिंदूंतून जाणारे एक आणि एकच वर्तुळ असते.

(4) तीन एकरेषीय बिंदूंतून जाणारे एकही वर्तुळ नसते.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

जाणून घेऊया.

वृत्तछेदिका आणि स्पर्शिका (Secant and tangent)



आकृती 3.8

आकृतीमध्ये, रेषा l व वर्तुळ यांच्यामध्ये एकही सामाईक बिंदू नाही.

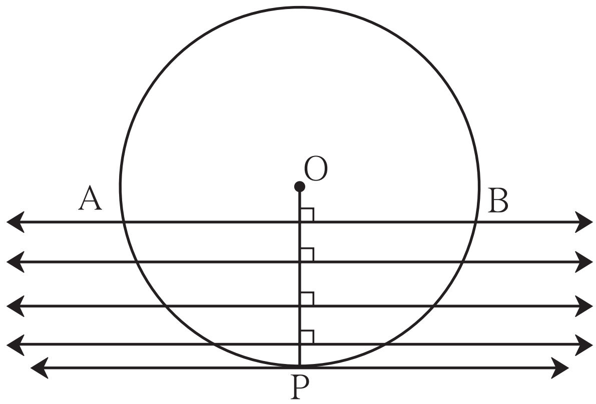
रेषा m व वर्तुळ यांच्यामध्ये बिंदू P हा एकच सामाईक बिंदू आहे. येथे m ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे व बिंदू P हा स्पर्शबिंदू आहे असे म्हणतात.

रेषा n व वर्तुळ यांना दोन सामाईक बिंदू आहेत. Q व R हे रेषा व वर्तुळ यांचे छेदनबिंदू आहेत व रेषा n ही वृत्तछेदिका आहे असे म्हणतात.

वर्तुळाच्या स्पर्शिकेचा एक महत्त्वाचा गुणधर्म एका कृतीतून समजून घ्या.

कृती :

केंद्र O असलेले एक पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. त्या वर्तुळाची रेख OP ही एक त्रिज्या काढा. या त्रिज्येला लंब असणारी एक रेषा काढा. ही रेषा आणि वर्तुळ यांच्या छेदनबिंदूंना A व B नावे द्या. कल्पना करा, की रेषा AB ही बिंदू O कडून बिंदू P कडे अशी सरकत आहे की तिची आधीची स्थिती नव्या स्थितीला समांतर राहील; म्हणजेच सरकलेली रेषा AB आणि त्रिज्या यांतील कोन काटकोनच राहील.



आकृती 3.9

हे घडताना बिंदू A आणि B वर्तुळावरून परस्परांच्या जवळ जवळ येऊ लागतील. सरते शेवटी ते बिंदू P मध्ये सामावले जातील.

या स्थितीत रेषा AB ची नवी स्थिती ही वर्तुळाची स्पर्शिका होईल, परंतु त्रिज्या OP आणि रेषा AB ची नवी स्थिती यांतील कोन मात्र काटकोनच राहील.

यावरून लक्षात येते, की वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका तो बिंदू जोडणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते. ह्या गुणधर्माला 'स्पर्शिका – त्रिज्या प्रमेय' म्हणतात.

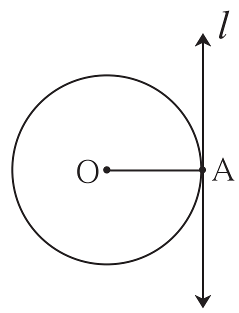
स्पर्शिका - त्रिज्या प्रमेय (Tangent theorem)

प्रमेय : **वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका, तो बिंदू केंद्राशी जोडणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते.**
हे प्रमेय अप्रत्यक्ष पद्धतीने सिद्ध करता येते.

अधिक माहितीसाठी :

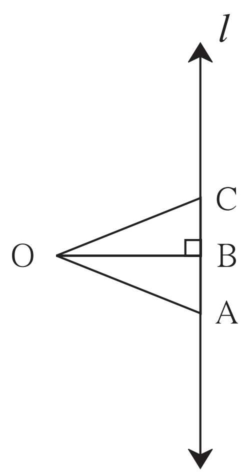
पक्ष : केंद्र O असलेल्या वर्तुळाला रेषा l ही बिंदू A मध्ये स्पर्श करते. रेख OA ही त्रिज्या आहे.

साध्य : रेषा $l \perp$ त्रिज्या OA.



आकृती 3.10

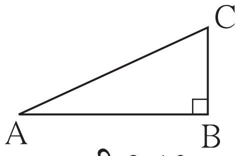
सिद्धता : समजा, रेषा l ही रेख OA ला लंब नाही.
समजा बिंदू O मधून l वर OB हा लंब टाकला.
साहजिकच बिंदू B हा बिंदू A पेक्षा भिन्न असला पाहिजे. (आकृती 3.11 पाहा.)
रेषा l वर बिंदू C असा घेता येईल, की A-B-C आणि BA = BC.
आता, Δ OBC आणि Δ OBA यांमध्ये,
रेख BC $\cong$ रेख BA .... (रचना)
$\angle$ OBC $\cong$ $\angle$OBA .... (प्रत्येक काटकोन)
रेख OB $\cong$ रेख OB
$\therefore$ Δ OBC $\cong$ Δ OBA .... (बाकोबा कसोटी)
$\therefore$ OC = OA
परंतु रेख OA ही त्रिज्या आहे, म्हणून
रेख OC ही सुद्धा त्रिज्या होईल.
$\therefore$ बिंदू C हा वर्तुळावर असेल.
म्हणजे रेषा l ही वर्तुळाला A आणि C या दोन बिंदूंत छेदेल.
हे विधान पक्षाशी विसंगत आहे. कारण रेषा l स्पर्शिका आहे.
म्हणजे रेषा l वर्तुळाला एकाच बिंदूत छेदते. .... (पक्ष)
$\therefore$ रेषा l ही त्रिज्या OA ला लंब नाही, हे असत्य आहे.
$\therefore$ रेषा $l \perp$ त्रिज्या OA.



आकृती 3.11

जरा आठवूया.

आपण शिकलेल्या कोणत्या प्रमेयाचा उपयोग करून काटकोन त्रिकोणात कर्ण ही सर्वात मोठी बाजू असते हे सिद्ध करता येईल ?

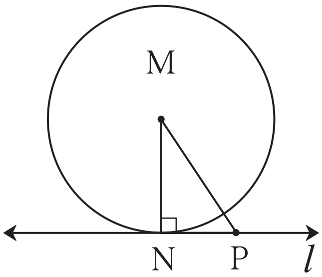


आकृती 3.12

जाणून घेऊया.

स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of tangent theorem)

प्रमेय : **वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या बाह्यटोकातून जाणारी आणि त्या त्रिज्येला लंब असणारी रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.**



आकृती 3.13

पक्ष : रेख MN ही केंद्र M असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या आहे. बिंदू N मधून जाणारी रेषा l ही त्रिज्या MN ला लंब आहे.

साध्य : रेषा l ही त्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

सिद्धता : रेषा l चा P हा N खेरीज दुसरा कोणताही बिंदू घेतला. रेख MP काढला.

आता, Δ MNP मध्ये $\angle$ N हा काटकोन आहे.

$\therefore$ रेख MP हा कर्ण आहे.

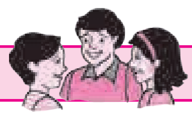
$\therefore$ रेख MP > रेख MN.

$\therefore$ बिंदू P हा वर्तुळावर असणे शक्य नाही.

म्हणजे रेषा l चा N खेरीज इतर कोणताही बिंदू वर्तुळावर नाही.

$\therefore$ रेषा l ही वर्तुळाला N या एकाच बिंदूत छेदते.

$\therefore$ रेषा l ही त्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

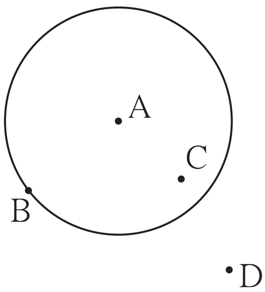


चला, चर्चा करूया.

केंद्र A असणाऱ्या वर्तुळावरील B हा एक बिंदू दिला आहे. या वर्तुळाची बिंदू B मधून जाणारी स्पर्शिका काढावयाची आहे.

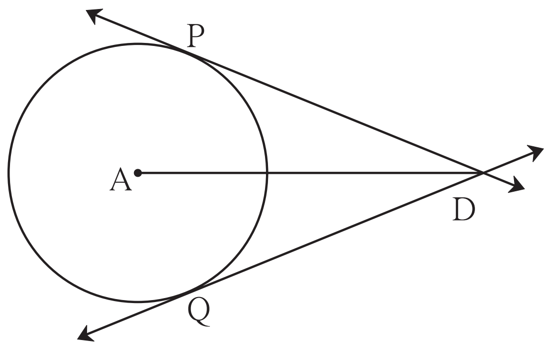
B या बिंदूतून जाणाऱ्या असंख्य रेषा असतात. त्यांपैकी कोणती रेषा या वर्तुळाची स्पर्शिका असेल ? ती कशी काढता येईल ?

बिंदू B मधून जाणाऱ्या एकापेक्षा जास्त स्पर्शिका असू शकतील का ?



आकृती 3.14

वर्तुळाच्या अंतर्भागातील C या बिंदूतून त्या वर्तुळाला स्पर्शिका काढता येतील का?



आकृती 3.15

वर्तुळाच्या बाह्यभागातील D या बिंदूतून जाणाऱ्या त्या वर्तुळाच्या स्पर्शिका असू शकतील का? असल्यास अशा किती स्पर्शिका असतील?

चर्चेतून तुमच्या लक्षात आलेच असेल, की आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वर्तुळाच्या बाह्यभागातून त्या वर्तुळाला दोन स्पर्शिका काढता येतील.

सोबतच्या आकृतीत रेषा DP आणि रेषा DQ या स्पर्शिका, केंद्र A असलेल्या वर्तुळाला बिंदू P आणि बिंदू Q मध्ये स्पर्श करतात.

रेख DP आणि रेख DQ यांना स्पर्शिकाखंड म्हणतात.

स्पर्शिकाखंडाचे प्रमेय (Tangent segment theorem)

प्रमेय : **वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूपासून त्या वर्तुळाला काढलेले स्पर्शिकाखंड एकरूप असतात.**

शेजारील आकृतीच्या आधारे पक्ष आणि साध्य ठरवा.

त्रिज्या AP आणि AQ काढून या प्रमेयाची खाली दिलेली सिद्धता रिकाम्या जागा भरून पूर्ण करा.

सिद्धता : Δ PAD आणि Δ QAD यांमध्ये,

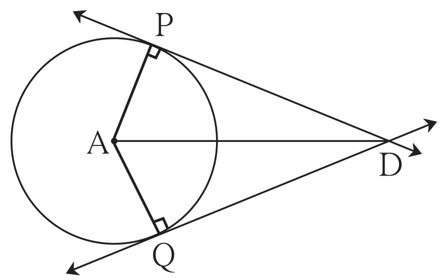
बाजू PA $\cong$ ______ (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

बाजू AD $\cong$ बाजू AD ______

$\angle APD = \angle AQD = 90^\circ$ ...... (स्पर्शिकेचे प्रमेय)

$\therefore$ Δ PAD $\cong$ Δ QAD ______

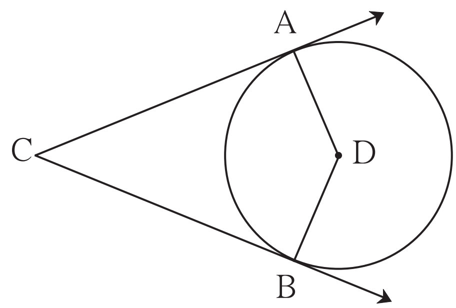
$\therefore$ बाजू DP $\cong$ बाजू DQ ______



आकृती 3.16

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) दिलेल्या आकृतीत, केंद्र D असलेले वर्तुळ $\angle ACB$ च्या बाजूंना बिंदू A आणि B मध्ये स्पर्श करते. जर $\angle ACB = 52^\circ$, तर $\angle ADB$ चे माप काढा.



आकृती 3.17

उकल : चौकोनाच्या चारही कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते.

$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$

$\therefore 52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ$ .... स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय

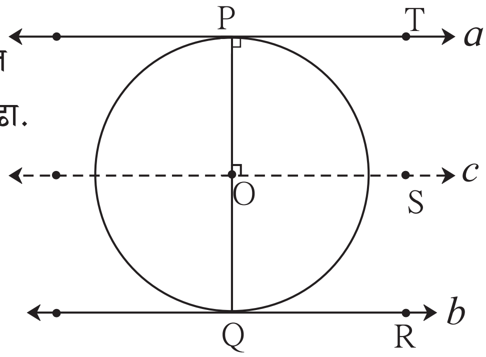
$\therefore \angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$

उदा. (2) रेषा a आणि रेषा b ह्या केंद्र O असणाऱ्या वर्तुळाच्या समांतर स्पर्शिका वर्तुळाला अनुक्रमे बिंदू P व Q मध्ये स्पर्श करतात, तर रेख PQ हा त्या वर्तुळाचा व्यास आहे हे सिद्ध करा.

सिद्धता : बिंदू O मधून रेषा a ला समांतर रेषा c काढा.

रेषा a, c, b यांवर अनुक्रमे बिंदू T, S, R आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे घ्या. त्रिज्या OP आणि त्रिज्या OQ काढा.



आकृती 3.18

आता, $\angle OPT = 90°$ ..... स्पर्शिका –त्रिज्या प्रमेय

$\therefore$ $\angle SOP = 90°$..... (अंतर्कोन गुणधर्म) .... (I)

आता, रेषा a || रेषा c ..... (रचना)

रेषा a || रेषा b ..... (पक्ष)

रेषा b || रेषा c

आता, $\angle OQR = 90°$ ..... स्पर्शिका –त्रिज्या प्रमेय

$\therefore$ $\angle SOQ = 90°$.....(अंतर्कोन गुणधर्म) .... (II)

$\therefore$ (I) व (II) वरून,

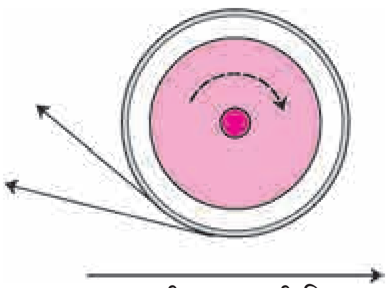
$\angle SOP + \angle SOQ = 90° + 90° = 180°$

$\therefore$ किरण OP आणि किरण OQ हे विरुद्ध किरण आहेत.

$\therefore$ बिंदू P, O, Q एकरेषीय आहेत.

$\therefore$ रेख PQ हा वर्तुळाचा व्यास आहे.

पावसाळ्यात थोडे पाणी साठलेल्या रस्त्यावरून मोटार सायकल जात असताना तिच्या मागील चाकावरून उडणाऱ्या पाण्याच्या धारा तुम्ही पाहिल्या असतील. त्या धारा वर्तुळाच्या स्पर्शिकांप्रमाणे दिसतात हे तुमच्या लक्षात आले असेल. त्या धारा तशाच का असतात याची माहिती तुमच्या विज्ञान शिक्षकाकडून घ्या.



चाकाची धावण्याची दिशा

फिरणाऱ्या भुईचक्रातून उडणाऱ्या ठिणग्या, सुरीला धार लावताना उडणाऱ्या ठिणग्या यांचे निरीक्षण करा.त्याही स्पर्शिकांप्रमाणेच दिसतात का?

हे लक्षात ठेवूया.

(1) स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय : वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका, तो बिंदू केंद्राशी जोडणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते.

(2) स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेयाचा व्यत्यास : वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या बाह्यटोकातून जाणारी आणि त्या त्रिज्येला लंब असणारी रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

(3) वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूपासून त्या वर्तुळाला काढलेले स्पर्शिकाखंड एकरूप असतात.

सरावसंच 3.1

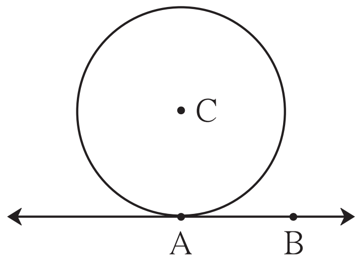
1. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 6 सेमी आहे. रेषा AB या वर्तुळाला बिंदू A मध्ये स्पर्श करते. या माहितीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

   (1) $\angle CAB$ चे माप किती अंश आहे? का?

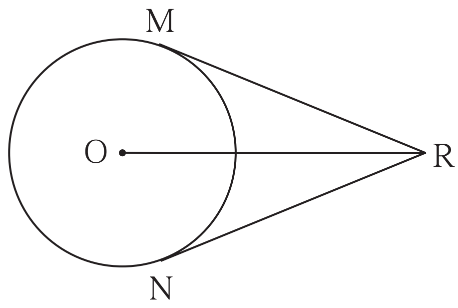
   (2) बिंदू C हा रेषा AB पासून किती अंतरावर आहे? का?

   (3) जर $d(A,B) = 6$ सेमी, तर $d(B,C)$ काढा.

   (4) $\angle ABC$ चे माप किती अंश आहे? का?



आकृती 3.19



आकृती 3.20

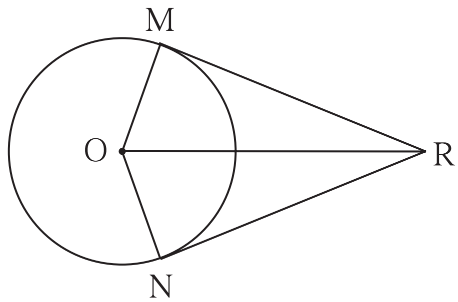
2. शेजारील आकृतीत, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागातील R या बिंदूपासून काढलेले RM आणि RN हे स्पर्शिकाखंड वर्तुळाला बिंदू M आणि N मध्ये स्पर्श करतात.
   जर OR = 10 सेमी व वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी असेल तर –

   (1) प्रत्येक स्पर्शिकाखंडाची लांबी किती?

   (2) $\angle MRO$ चे माप किती?

   (3) $\angle MRN$ चे माप किती?

3. रेख RM आणि रेख RN हे केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचे स्पर्शिकाखंड आहेत, तर रेख OR हा $\angle MRN$ आणि $\angle MON$ या दोन्ही कोनांचा दुभाजक आहे, हे सिद्ध करा.



आकृती 3.21

4. त्रिज्या 4.5 सेमी असलेल्या वर्तुळाच्या दोन स्पर्शिका परस्परांना समांतर आहेत. तर त्या स्पर्शिकांतील अंतर किती हे सकारण लिहा.

ICT Tools or Links

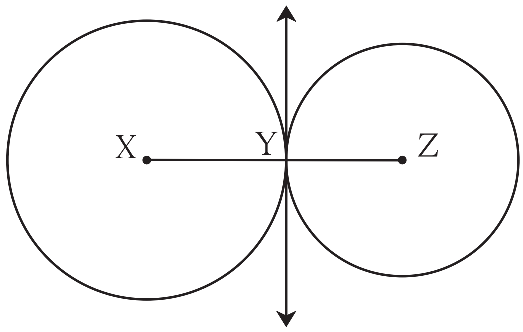
संगणकावर जिओजिब्रा या सॉफ्टवेअरच्या साहाय्याने वर्तुळ व वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूतून स्पर्शिका काढून स्पर्शिकाखंड एकरूप आहेत याचा पडताळा घ्या.

जाणून घेऊया.

स्पर्श वर्तुळे (Touching circles)

कृती I :

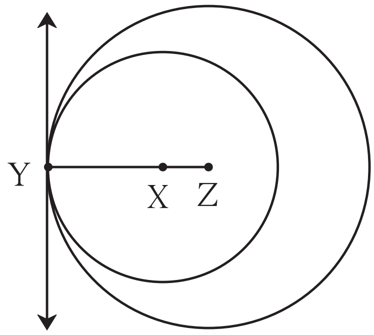
आकृती 3.22 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे, X-Y-Z हे एकरेषीय बिंदू काढा.
केंद्र X व त्रिज्या XY घेऊन वर्तुळ काढा.
केंद्र Z व त्रिज्या YZ घेऊन दुसरे वर्तुळ काढा.
ही दोन वर्तुळे Y या एकाच बिंदूत एकमेकांना छेदतात हे अनुभवा.
बिंदू Y मधून रेख XZ ला लंबरेषा काढा. ही रेषा दोन्ही वर्तुळांची सामाईक स्पर्शिका आहे हे लक्षात घ्या.



आकृती 3.22

कृती II :

आकृती 3.23 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे Y-X-Z हे एकरेषीय बिंदू काढा.
केंद्र Z आणि त्रिज्या ZY घेऊन वर्तुळ काढा.
केंद्र X आणि त्रिज्या XY घेऊन वर्तुळ काढा.
दोन्ही वर्तुळे Y या एकाच बिंदूत छेदतात हे अनुभवा.
बिंदू Y मधून रेख YZ ला लंबरेषा काढा. ही रेषा दोन्ही वर्तुळांची सामाईक स्पर्शिका आहे हे लक्षात घ्या.



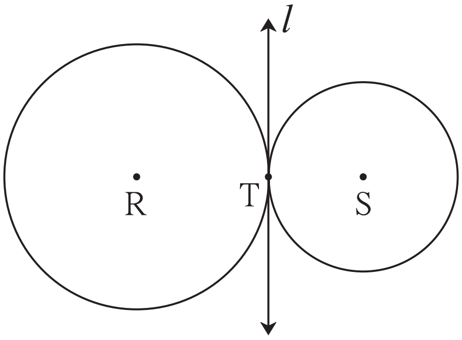
आकृती 3.23

वरील कृतींतून तुमच्या लक्षात आले असेल, की दोन्ही आकृत्यांतील वर्तुळे एकाच प्रतलात आहेत आणि एकमेकांना एकाच बिंदूत छेदतात. अशा वर्तुळांना एकमेकांना स्पर्श करणारी वर्तुळे किंवा **स्पर्शवर्तुळे** म्हणतात.

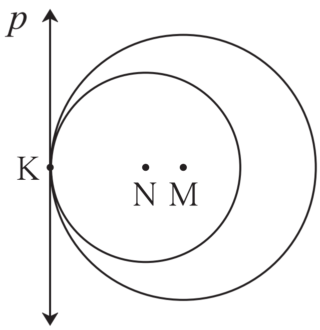
स्पर्शवर्तुळांची व्याख्या पुढीलप्रमाणे करता येते.

एका प्रतलातील दोन वर्तुळे त्याच प्रतलातील एका रेषेला एकाच बिंदूत छेदत असतील, तर त्यांना स्पर्शवर्तुळे म्हणतात. ती रेषा दोन्ही वर्तुळांची सामाईक स्पर्शिका असते.

दोन्ही वर्तुळे व रेषा यांच्यातील सामाईक बिंदूला **सामाईक स्पर्शबिंदू** म्हणतात.



आकृती 3.24



आकृती 3.25

आकृती 3.24 मध्ये, केंद्र R व S असणारी वर्तुळे रेषा l ला T या एकाच बिंदूत छेदतात. म्हणून ती दोन्ही स्पर्शवर्तुळे असून रेषा l ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका आहे. ह्या आकृतीतील वर्तुळे **बाह्यस्पर्शी** आहेत.

आकृती 3.25 मधील वर्तुळे **अंतर्स्पर्शी** असून रेषा p ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका आहे.

विचार करूया

(1) आकृती 3.24 मधील वर्तुळांप्रमाणे परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांना बाह्यस्पर्शी वर्तुळे का म्हणतात?

(2) आकृती 3.25 मधील वर्तुळांप्रमाणे एकमेकांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांना अंतर्स्पर्शी वर्तुळे का म्हणतात?

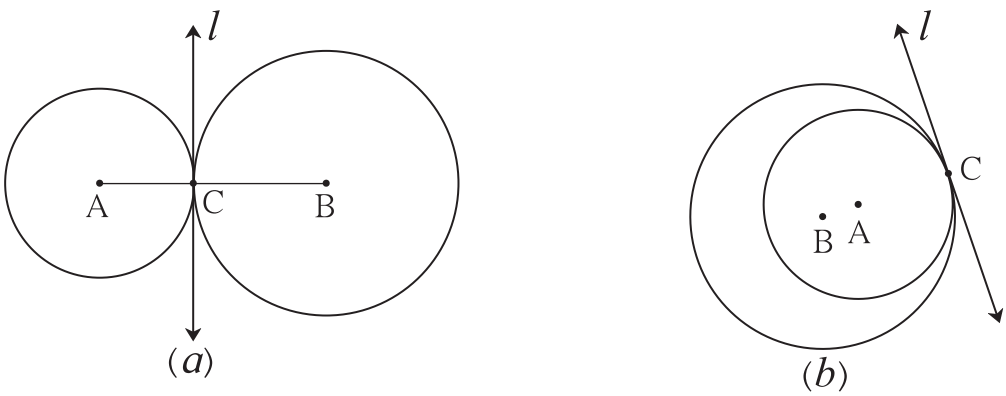
(3) आकृती 3.26 मध्ये, केंद्र A व B असणाऱ्या वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 3 सेमी व 4 सेमी असतील तर–

(i) आकृती 3.26 (a) मध्ये d(A,B) किती असेल?

(ii) आकृती 3.26 (b) मध्ये d(A,B) किती असेल?

स्पर्शवर्तुळांचे प्रमेय (Theorem of touching circles)

प्रमेय : परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू त्या वर्तुळांचे केंद्रबिंदू जोडणाऱ्या रेषेवर असतो.



आकृती 3.26

पक्ष : केंद्र A व B असणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू C आहे.

साध्य : बिंदू C हा रेषा AB वर आहे.

सिद्धता : समजा, रेषा l ही स्पर्शवर्तुळांची बिंदू C मधून जाणारी सामाईक स्पर्शिका आहे.
रेषा $l \perp$ रेख AC, रेषा $l \perp$ रेख BC. $\therefore$ रेख AC व रेख BC हे रेषा l ला लंब आहेत.
बिंदू C मधून रेषा l ला एकच लंब रेषा काढता येते. $\therefore$ C, A, B एकरेषीय आहेत.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू, त्या वर्तुळांचे केंद्रबिंदू जोडणाऱ्या रेषेवर असतो.
(2) बाह्यस्पर्शी वर्तुळांचा केंद्रांतील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांच्या बेरजेएवढे असते.
(3) अंतर्स्पर्शी वर्तुळांच्या केंद्रांतील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांतील फरकाएवढे असते.

सरावसंच 3.2

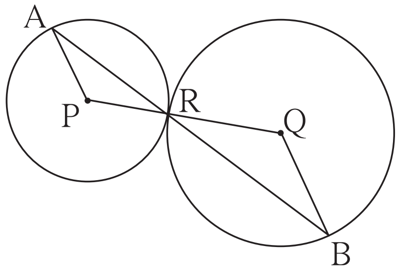
1. दोन अंतर्स्पर्शी वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 3.5 सेमी व 4.8 सेमी आहेत, तर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर किती आहे?

2. बाह्यस्पर्शी असलेल्या दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 5.5 सेमी व 4.2 सेमी असतील तर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर किती असेल?

3. त्रिज्या अनुक्रमे 4 सेमी आणि 2.8 सेमी असणारी, (i) बाह्यस्पर्शी (ii) अंतर्स्पर्शी, वर्तुळे काढा.

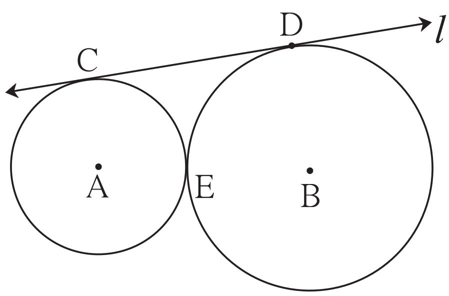
4. आकृती 3.27 मध्ये, केंद्र P आणि Q असलेली वर्तुळे परस्परांना बिंदू R मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू R मधून जाणारी रेषा त्या वर्तुळांना अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B मध्ये छेदते. तर –

(1) रेख AP || रेख BQ हे सिद्ध करा.
(2) Δ APR ~ Δ RQB हे सिद्ध करा.
(3) जर $\angle$ PAR चे माप 35° असेल, तर $\angle$ RQB चे माप ठरवा.



आकृती 3.27

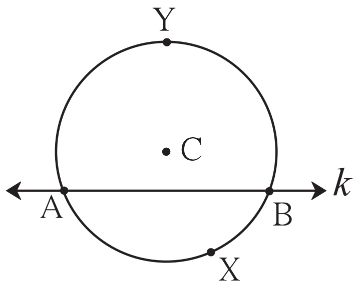
5. आकृती 3.28 मध्ये, केंद्र A व B असणारी वर्तुळे परस्परांना बिंदू E मध्ये स्पर्श करतात. रेषा l ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका त्यांना अनुक्रमे C व D मध्ये स्पर्श करते. जर वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 4 सेमी व 6 सेमी असतील, तर रेख CD ची लांबी किती असेल?



आकृती 3.28

जरा आठवूया.

वर्तुळकंस (Arc of a circle)



आकृती 3.29

वृत्तछेदिकेमुळे वर्तुळाचे दोन भागांत विभाजन होते. यांपैकी कोणताही एक भाग आणि वृत्तछेदिकेचे वर्तुळावरील बिंदू यांनी मिळून होणाऱ्या आकृतीला **वर्तुळकंस** म्हणतात.

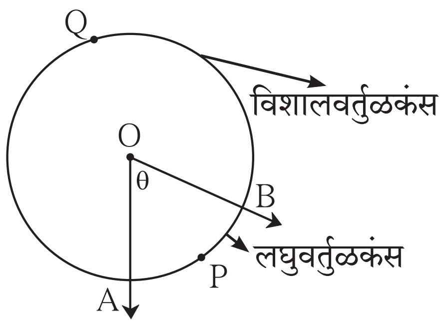
वर्तुळ आणि वृत्तछेदिका यांच्या छेदनबिंदूंना कंसांचे अंत्यबिंदू किंवा कंसांची टोके म्हणतात.

आकृती 3.29 मध्ये, वृत्तछेदिका k मुळे, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाचे AYB आणि AXB हे दोन कंस तयार झाले आहेत.

वृत्तछेदिकेच्या ज्या बाजूला वर्तुळकेंद्र असते त्या बाजूच्या कंसाला **विशालकंस** आणि विरुद्ध बाजूच्या कंसाला **लघुकंस** म्हणतात. आकृती 3.29 मध्ये कंस AYB हा विशालकंस आणि कंस AXB हा लघुकंस आहे. एखाद्या वर्तुळकंसाचे नाव तीन अक्षरे वापरून लिहिल्याने तो नेमका समजतो, परंतु काही संदिग्धता निर्माण होत नसेल तर लघुकंसाचे नाव त्याचे अंत्यबिंदू दर्शवणाऱ्या दोन अक्षरांनी लिहितात. उदाहरणार्थ, आकृती 3.29 मधील कंस AXB हा कंस AB असाही लिहितात.

आपण कंसाचे नाव लिहिण्यासाठी हीच पद्धत वापरणार आहोत.

केंद्रीय कोन (Central angle)



आकृती 3.30

ज्या कोनाचा शिरोबिंदू वर्तुळकेंद्रावर असतो. त्या कोनाला **केंद्रीय कोन** म्हणतात.

आकृती 3.30 मध्ये केंद्र O असलेले वर्तुळ असून $\angle$ AOB हा केंद्रीय कोन आहे.

वृत्तछेदिकेप्रमाणेच केंद्रीय कोनामुळेसुद्धा वर्तुळाचे दोन कंसांत विभाजन होते.

कंसाचे माप (Measure of an arc)

काही वेळा दोन कंसांची तुलना करण्याची गरज पडते. त्यासाठी कंसाच्या मापाची व्याख्या पुढीलप्रमाणे ठरवलेली आहे.

(1) लघुकंसाचे माप त्याच्या संगत केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.

आकृती 3.30 मध्ये केंद्रीय $\angle$ AOB चे माप θ आहे. म्हणून लघुकंस APB चे माप θ हेच आहे.

(2) विशालकंसाचे माप = 360° – संगत लघुकंसाचे माप.

आकृती 3.30 मध्ये विशालकंस AQB चे माप = 360° – कंस APB चे माप = 360° – θ

(3) अर्धवर्तुळकंसाचे माप, म्हणजेच अर्धवर्तुळाचे माप 180° असते.

(4) पूर्ण वर्तुळाचे माप 360° असते.

जाणून घेऊया.

कंसांची एकरूपता (Congruence of arcs)

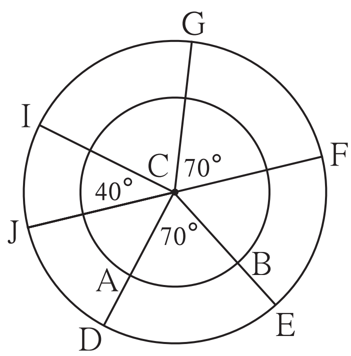
जेव्हा दोन प्रतलीय आकृत्या एकमेकींशी तंतोतंत जुळतात, तेव्हा त्या आकृत्या एकमेकींशी एकरूप आहेत, असे म्हणतात.एकरूपतेच्या या संकल्पनेच्या आधारे समान मापांचे कोन एकरूप असतात हे आपल्याला माहीत आहे.

त्याचप्रमाणे दोन कंसांची मापे समान असतील तर ते दोन कंस एकरूप असतील का?

या प्रश्नाचे उत्तर पुढील कृती करून शोधा.

कृती :

आकृती 3.31 मध्ये दर्शवल्याप्रमाणे केंद्र C असणारी दोन वर्तुळे काढा. $\angle$ DCE आणि $\angle$ FCG हे समान मापांचे कोन काढा. या कोनांच्या मापापेक्षा वेगळे माप असणारा $\angle$ ICJ काढा.



आकृती 3.31

$\angle$ DCE च्या भुजा आतील वर्तुळाला छेदल्यामुळे मिळणाऱ्या कंसाला AB नाव द्या.

कंसाच्या मापाच्या व्याख्येवरून, कंस AB आणि कंस DE यांची मापे समान आहेत, हे लक्षात आले का? हे कंस परस्परांशी तंतोतंत जुळतील का? निश्चितच नाही जुळणार.

आता C–DE; C–FG आणि C–IJ या वर्तुळपाकळ्या कापून वेगळ्या करा. त्या एकमेकींशी जुळवून DE, FG आणि IJ यांपैकी कोणते कंस परस्परांशी जुळतात हे पाहा.

या कृतीवरून, दोन कंस एकरूप होण्यासाठी 'त्यांची मापे समान असणे' पुरेसे नाही, हे लक्षात आले का?

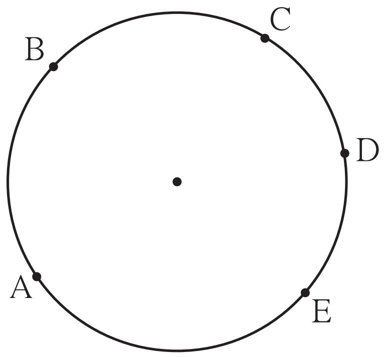
दोन कंस एकरूप असण्यासाठी आणखी कोणती अट पूर्ण होणे आवश्यक आहे असे तुम्हांला वाटते?

वरील कृतीवरून लक्षात येते, की –

दोन कंसांच्या त्रिज्या आणि त्यांची मापे समान असतात, तेव्हा ते दोन कंस परस्परांशी एकरूप असतात.

'कंस DE व कंस GF एकरूप आहेत' हे चिन्हाने कंस DE $\cong$ कंस GF असे दर्शवतात.

कंसांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म (Property of sum of measures of arcs)



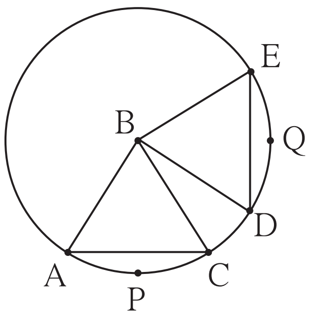
आकृती 3.32

आकृती 3.32 मध्ये A, B, C, D, E हे एकाच वर्तुळाचे बिंदू आहेत. या बिंदूमुळे अनेक कंस तयार झाले आहेत. यांपैकी कंस ABC आणि कंस CDE यांमध्ये C हा एक आणि एकच बिंदू सामाईक आहे. म्हणून कंस ABC आणि कंस CDE यांच्या मापांची बेरीज कंस ACE च्या मापाएवढी होते.

m(कंस ABC) + m(कंस CDE) = m(कंस ACE)

परंतु कंस ABC आणि कंस BCE यांमध्ये एकापेक्षा अधिक बिंदू [कंस BC चे सर्व] सामाईक आहेत. म्हणून कंस ABC आणि कंस BCE यांच्या मापांची बेरीज कंस ABE च्या मापाएवढी नसते.

प्रमेय : एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप कंसांच्या संगत जीवा एकरूप असतात.



आकृती 3.33

पक्ष : केंद्र B असलेल्या वर्तुळात कंस APC $\cong$ कंस DQE

साध्य : जीवा AC $\cong$ जीवा DE

सिद्धता : (रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.)

ΔABC आणि Δ DBE यांमध्ये,

बाजू AB $\cong$ बाजू DB .....(......................)

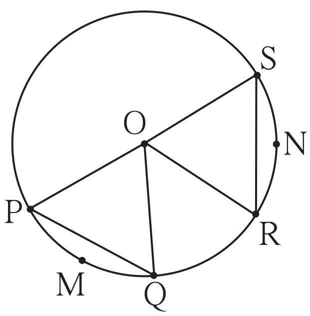
बाजू .... $\cong$ बाजू .....(......................)

$\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ DBE .....(एकरूप कंसांची व्याख्या)

$\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ DBE ..... (......................)

$\therefore$ जीवा AC $\cong$ जीवा DE .....(......................)

प्रमेय : एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात.



आकृती 3.34

पक्ष : रेख PQ आणि रेख RS ह्या केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या एकरूप जीवा आहेत.

साध्य : कंस PMQ $\cong$ कंस RNS

पुढील विचार लक्षात घेऊन सिद्धता लिहा. दोन कंस एकरूप असण्यासाठी त्यांच्या त्रिज्या आणि मापे समान असावी लागतात. कंस PMQ आणि कंस RNS हे एकाच वर्तुळाचे कंस असल्याने त्यांच्या त्रिज्या समान

आहेत. त्या कंसांची मापे, म्हणजे त्यांच्या संगत केंद्रीय कोनांची मापे होत. हे केंद्रीय कोन मिळण्यासाठी त्रिज्या OP, OQ, OR आणि OS काढाव्या लागतील. त्या काढल्यावर तयार होणारे Δ OPQ आणि Δ ORS हे एकरूप आहेत ना?

वरील दोन्ही प्रमेये तुम्ही एकरूप वर्तुळांसाठी सिद्ध करा.

विचार करूया

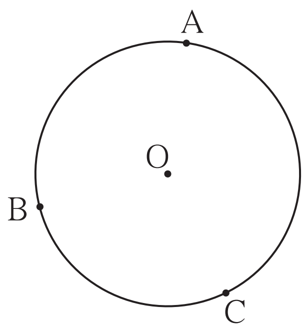
- वरील दोनपैकी पहिल्या प्रमेयात कंस APC आणि कंस DQE हे लघुकंस एकरूप मानले आहेत. त्यांचे संगत विशालकंस एकरूप मानूनही हे प्रमेय सिद्ध करता येईल का?
- दुसऱ्या प्रमेयात एकरूप जीवांचे संगत विशालकंसही एकरूप होतात का? जीवा PQ आणि जीवा RS हे व्यास असतानाही हे प्रमेय सत्य असते का?

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचे A, B, C हे तीन बिंदू आहेत.

(i) या तीन बिंदूंमुळे तयार होणाऱ्या सर्व कंसांची नावे लिहा.

(ii) कंस BC आणि कंस AB यांची मापे अनुक्रमे 110° आणि 125° असतील तर राहिलेल्या सर्व कंसांची मापे लिहा.



आकृती 3.35

उकल : (i) कंसांची नावे –

कंस AB, कंस BC, कंस AC, कंस ABC, कंस ACB, कंस BAC

(ii) कंस ABC चे माप = कंस AB चे माप + कंस BC चे माप

$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$

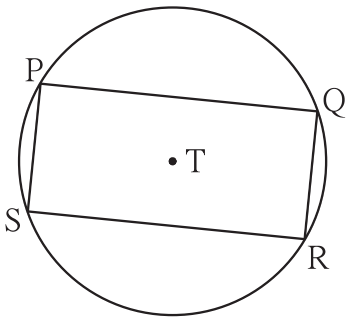
कंस AC चे माप = 360° – कंस ABC चे माप

$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

त्याचप्रमाणे कंस ACB चे माप = $360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$

आणि कंस BAC चे माप = $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

उदा. (2) आकृती 3.36 मध्ये केंद्र T असलेल्या वर्तुळात आयत PQRS अंतर्लिखित केला आहे.
तर दाखवा की –
(i) कंस PQ ≅ कंस SR
(ii) कंस SPQ ≅ कंस PQR



आकृती 3.36

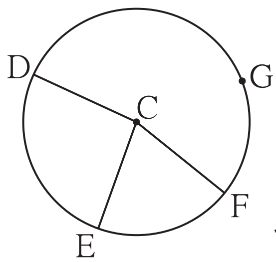
उकल : □ PQRS हा आयत आहे.
∴ जीवा PQ ≅ जीवा SR .... (आयताच्या संमुख बाजू)
∴ कंस PQ ≅ कंस SR ...... (एकरूप जीवांचे संगत कंस)
जीवा PS ≅ जीवा QR ..... (आयताच्या संमुख बाजू)
∴ कंस SP ≅ कंस QR ..... (एकरूप जीवांचे संगत कंस)
∴ कंस SP आणि कंस QR यांची मापे समान आहेत.
आता, कंस SP आणि कंस PQ यांच्या मापांची बेरीज
= कंस PQ आणि कंस QR यांच्या मापांची बेरीज
∴ कंस SPQ चे माप = कंस PQR चे माप
∴ कंस SPQ ≅ कंस PQR

हे लक्षात ठेवूया.

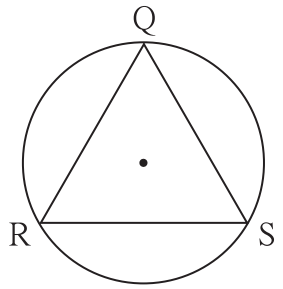
(1) ज्या कोनाचा शिरोबिंदू वर्तुळकेंद्रावर असतो त्या कोनाला केंद्रीय कोन म्हणतात.
(2) कंसाच्या मापाची व्याख्या – (i) लघुकंसाचे माप त्याच्या संगत केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.
(ii) विशालकंसाचे माप = 360° – संगत लघुकंसाचे माप. (iii) अर्धवर्तुळकंसाचे माप 180° असते.
(3) दोन वर्तुळकंसांच्या त्रिज्या आणि मापे समान असतात तेव्हा ते कंस एकरूप असतात.
(4) एकाच वर्तुळाच्या कंस ABC आणि कंस CDE यांमध्ये जेव्हा C हा एकच बिंदू सामाईक असतो, तेव्हा
m(कंस ABC) + m(कंस CDE) = m(कंस ACE)
(5) एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप कंसांच्या संगत जीवा एकरूप असतात.
(6) एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात.

सरावसंच 3.3

1. आकृती 3.37 मध्ये, केंद्र C असलेल्या वर्तुळावर G, D, E आणि F हे बिंदू आहेत. ∠ ECF चे माप 70° आणि कंस DGF चे माप 200° असेल, तर कंस DE आणि कंस DEF यांची मापे ठरवा.



आकृती 3.37



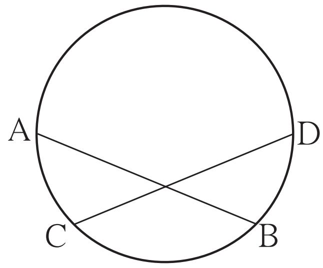
आकृती 3.38

2*. आकृती 3.38 मध्ये Δ QRS समभुज आहे. तर दाखवा की –

(1) कंस RS ≅ कंस QS ≅ कंस QR

(2) कंस QRS चे माप 240° आहे.

3. आकृती 3.39 मध्ये,
जीवा AB ≅ जीवा CD,
तर सिद्ध करा –
कंस AC ≅ कंस BD



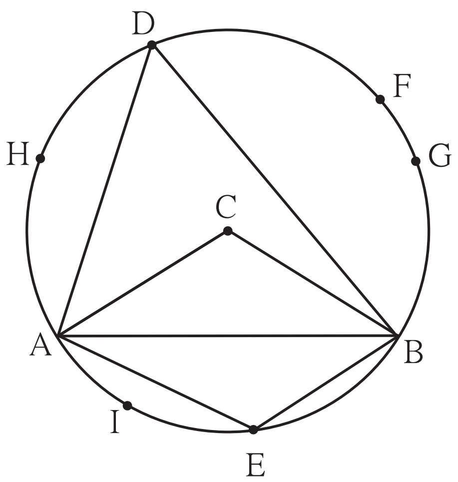
आकृती 3.39

जाणून घेऊया.

वर्तुळ आणि बिंदू, वर्तुळ आणि रेषा (स्पर्शिका) यांचा परस्परसंबंध असणारे काही गुणधर्म आपण पाहिले. आता वर्तुळ आणि कोन यांसंबंधीचे काही गुणधर्म आपण पाहू. यांतील काही गुणधर्म आधी कृतींतून माहीत करून घेऊ.

कृती I :

केंद्र C असलेले एक पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. आकृती 3.40 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे त्याची जीवा AB काढा. केंद्रीय कोन ACB काढा. जीवा AB मुळे झालेल्या विशालकंसावर बिंदू D आणि लघुकंसावर बिंदू E हे कोणतेही बिंदू घ्या.



आकृती 3.40

(1) ∠ADB आणि ∠ACB मोजा. त्यांच्या मापांची तुलना करा.

(2) ∠ADB आणि ∠AEB मोजा. आलेल्या मापांची बेरीज करून पाहा.

(3) कंस ADB वर F, G, H असे आणखी काही बिंदू घ्या.$\angle$AFB, $\angle$AGB, $\angle$AHB, ... यांची मापे मोजा. या मापांची $\angle$ADB च्या मापाशी आणि परस्परांशी तुलना करा.

(4) कंसAEB वर I हा आणखी एक कोणताही बिंदू घ्या. $\angle$ AIB मोजून त्याच्या मापाची $\angle$ AEB च्या मापाशी तुलना करा.

या कृतीतून तुम्हांला आलेले अनुभव असे असतील –

(1) $\angle$ ACB चे माप $\angle$ ADB च्या मापाच्या दुप्पट आहे.

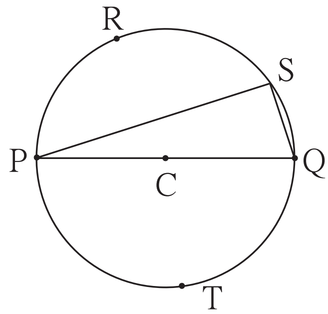
(2) $\angle$ ADB आणि $\angle$ AEB यांच्या मापांची बेरीज 180° आहे.

(3) $\angle$ AHB, $\angle$ ADB, $\angle$ AFB, $\angle$ AGB या सर्वांची मापे समान आहेत.

(4) $\angle$ AEB आणि $\angle$ AIB यांची मापे समान आहेत.

कृती II :

आकृती 3.41 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे केंद्र C असलेले पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. रेख PQ हा त्याचा कोणताही व्यास काढा. या व्यासामुळे तयार झालेल्या दोन्ही अर्धवर्तुळांवर R,S,T असे काही बिंदू घ्या. $\angle$PRQ, $\angle$PSQ, $\angle$PTQ मोजा. यांतील प्रत्येक कोन काटकोन आहे हे अनुभवा.



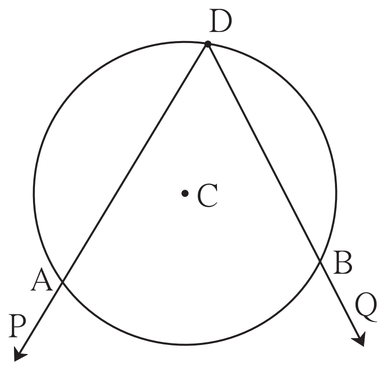
आकृती 3.41

वरील कृतींतून तुम्हांला आढळलेले गुणधर्म म्हणजे वर्तुळ आणि कोन यांसबंधीची प्रमेये आहेत. या प्रमेयांच्या सिद्धता आता आपण पाहू. त्यासाठी आधी काही संज्ञांची ओळख करून घ्यावी लागेल.

अंतर्लिखित कोन (Inscribed angle)

आकृती 3.42 मध्ये केंद्र C असलेले एक वर्तुळ आहे. $\angle$ PDQ चा शिरोबिंदू D या वर्तुळावर आहे. कोनाच्या भुजा DP आणि DQ वर्तुळाला अनुक्रमे A आणि B मध्ये छेदतात. अशा कोनाला वर्तुळात किंवा कंसात अंतर्लिखित केलेला कोन म्हणतात.

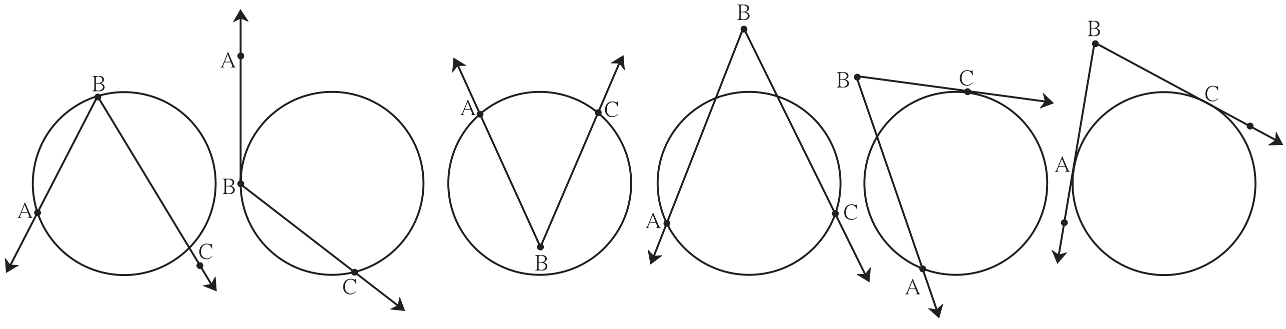
आकृती 3.42 मध्ये $\angle$ ADB हा कंस ADB मध्ये अंतर्लिखित आहे.



आकृती 3.42

अंतर्खंडित कंस (Intercepted arc)

पुढील आकृती 3.43 मधील (i) ते (vi) या सर्व आकृत्यांचे निरीक्षण करा.



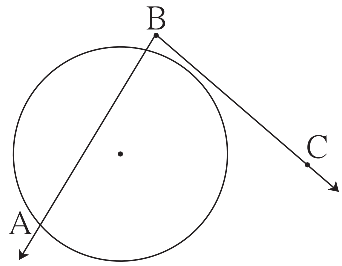
आकृती 3.43

प्रत्येक आकृतीतील $\angle$ ABC च्या अंतर्भागात येणाऱ्या वर्तुळकंसाला $\angle$ ABC ने अंतर्खंडित केलेला कंस म्हणतात. अंतर्खंडित कंसाचे अंत्यबिंदू हे वर्तुळ आणि कोन यांचे छेदन बिंदू असतात. कोनाच्या प्रत्येक बाजूवर कंसाचा एक अंत्यबिंदू असणे आवश्यक असते.

आकृती 3.43 मधील (i), (ii) व (iii) या आकृत्यांमध्ये कोनांनी प्रत्येकी एकच कंस अंर्खंडित केला आहे; तर (iv), (v) व (vi) मध्ये प्रत्येक कोनाने दोन कंस अंतर्खंडित केले आहेत.

आकृती (ii) व (v) मध्ये कोनाची एक भुजा आणि (vi) मध्ये कोनाच्या दोन्ही भुजा वर्तुळाला स्पर्श करतात, हेही लक्षात घ्या.

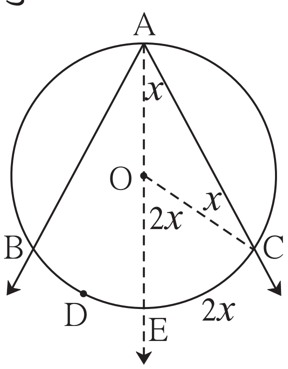
आकृती 3.44 मधील कंस हा अंतर्खंडित कंस नाही. कारण कोनाच्या BC या भुजेवर कंसाचा एकही अंत्यबिंदू नाही.



आकृती 3.44

अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय (Inscribed angle theorem)

प्रमेय : **वर्तुळात अंतर्लिखित केलेल्या कोनाचे माप त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.**



आकृती 3.45

पक्ष : केंद्र O असलेल्या वर्तुळात, $\angle$BAC हा कंस BAC मध्ये अंतर्लिखित केला आहे. त्या कोनामुळे कंस BDC अंतर्खंडित झाला आहे.

साध्य : $\angle BAC = \frac{1}{2}\, m$(कंस BDC)

रचना : किरण AO काढला. वर्तुळाला तो बिंदू E मध्ये छेदतो. त्रिज्या OC काढली.

सिद्‌धता : Δ AOC मध्ये.

बाजू OA $\cong$ बाजू OC ...... (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

$\therefore$ $\angle OAC = \angle OCA$ ..... (समद्‌विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

$\angle OAC = \angle OCA = x$ मानू. ...... (I)

आता, $\angle EOC = \angle OAC + \angle OCA$ .... (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय)

$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$

परंतु $\angle EOC$ हा केंद्रीय कोन आहे.

$\therefore$ m(कंस EC) $= 2x^\circ$ .... (कंसाच्या मापाची व्याख्या) ..... (II)

$\therefore$ (I) व (II) वरून.

$\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2}$ m(कंस EC) ..... (III)

याप्रमाणेच, त्रिज्या OB काढून, $\angle EAB = \frac{1}{2}$ m(कंस BE) हे सिद्‌ध करता येईल...... (IV)

$\therefore$ $\angle EAC + \angle EAB = \frac{1}{2}$ m(कंस EC) $+ \frac{1}{2}$ m(कंस BE) .... (III) व (IV) वरून

$\therefore$ $\angle BAC = \frac{1}{2}$ [m(कंस EC) + m(कंस BE)]

$= \frac{1}{2}$ [m(कंसBEC)] $= \frac{1}{2}$ [m(कंस BDC)] ..... (V)

लक्षात घ्या, की वर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन आणि वर्तुळकेंद्र यांसंबंधी तीन शक्यता संभवतात. वर्तुळकेंद्र कोनाच्या भुजेवर असेल, अंतर्भागात असेल किंवा बाह्यभागात असेल. यांपैकी पहिल्या दोन शक्यता (III) व (V) मध्ये सिद्‌ध झाल्या. आता राहिलेली तिसरी शक्यता विचारात घेऊ.

आकृती 3.46 मध्ये,

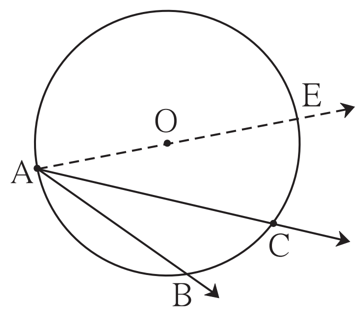
$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$

$= \frac{1}{2}$ m(कंस BCE) $- \frac{1}{2}$ m(कंस CE)

...... (III) वरून

$= \frac{1}{2}$ [m(कंस BCE) $-$ m(कंस CE)]

$= \frac{1}{2}$ [m(कंस BC)] ...... (VI)



आकृती 3.46

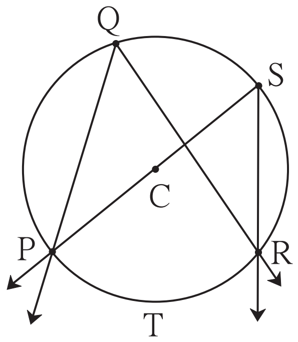
या प्रमेयाचे विधान पुढीलप्रमाणे सुद्‌धा लिहितात.

वर्तुळकंसाने वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूशी अंतरित (subtended) केलेल्या कोनाचे माप त्याच कंसाने वर्तुळकेंद्राशी अंतरित केलेल्या कोनाच्या मापाच्या निम्मे असते.

या प्रमेयाच्या पुढील उपप्रमेयांची विधानेही या परिभाषेत लिहिता येतील.

अंतर्लिखित कोनाच्या प्रमेयाची उपप्रमेये (Corollaries of inscribed angle theorem)

1. एकाच कंसात अंतर्लिखित झालेले सर्व कोन एकरूप असतात.



आकृती 3.47

आकृती 3.47 च्या आधारे पक्ष आणि साध्य लिहा.

पुढील प्रश्नांचा विचार करून सिद्धता लिहा.

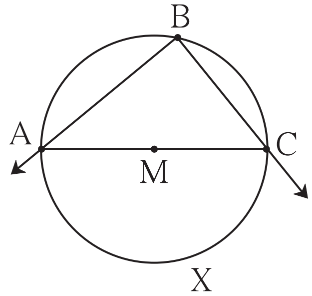
(1) $\angle$ PQR ने कोणता कंस अंतर्खंडित केला आहे?

(2) $\angle$ PSR ने कोणता कंस अंतर्खंडित केला आहे?

(3) अंतर्लिखित कोनाचे माप आणि त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाचे माप यांतील संबंध कसा असतो?

2. अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित झालेला कोन काटकोन असतो.

सोबतच्या आकृती 3.48 च्या आधारे या प्रमेयाचे पक्ष, साध्य आणि सिद्धता लिहा.



आकृती 3.48

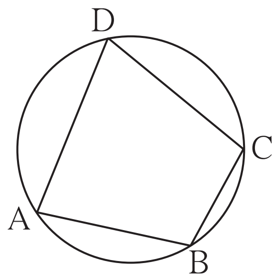
चक्रीय चौकोन (Cyclic quadrilateral)

चौकोनाचे चारही शिरोबिंदू एकाच वर्तुळावर असतील तर त्या चौकोनाला चक्रीय चौकोन म्हणतात.

चक्रीय चौकोनाचे प्रमेय (Theorem of cyclic quadrilateral)

प्रमेय : चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन परस्परांचे पूरककोन असतात.

पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.



आकृती 3.49

पक्ष : □ [ ] हा चक्रीय आहे.

साध्य : $\angle B + \angle D =$ [ ]

[ ] $+ \angle C = 180°$

सिद्धता : $\angle$ ADC हा अंतर्लिखित कोन असून त्याने कंस ABC अंतर्खंडित केला आहे.

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}$ [ ] .... (I)

तसेच [ ] हा अंतर्लिखित कोन असून त्याने कंस ADC अंतर्खंडित केला आहे.

$\therefore \boxed{\qquad} = \frac{1}{2}$ m(कंस ADC) ..... (II)

$\therefore \angle ADC + \boxed{\qquad} = \frac{1}{2} \boxed{\qquad} + \frac{1}{2}$ m(कंस ADC) .....[(I) व (II) वरून]

$= \frac{1}{2} [\boxed{\qquad}$ + m(कंस ADC)]

$= \frac{1}{2} \times 360^\circ$ .... [कंस ABC आणि कंस ADC मिळून पूर्ण वर्तुळ होते.]

$= \boxed{\qquad}$

त्याचप्रमाणे $\angle A + \angle C = \boxed{\qquad}$ हे सिद्ध करता येईल.

चक्रीय चौकोनाच्या प्रमेयाचे उपप्रमेय (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

प्रमेय : चक्रीय चौकोनाचा बाह्यकोन त्याच्या संलग्न कोनाच्या संमुख कोनाशी एकरूप असतो.

या प्रमेयाची सिद्धता तुम्ही लिहा.

विचार करूया

वरील प्रमेयात $\angle B + \angle D = 180^\circ$ हे सिद्ध केल्यावर उरलेल्या संमुख कोनांच्या मापांची बेरीजही 180° आहे, हे अन्य प्रकारे सिद्ध करता येईल का?

चक्रीय चौकोनाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

प्रमेय : चौकोनाचे संमुख कोन पूरक असतील तर तो चौकोन चक्रीय असतो.

हे प्रमेय अप्रत्यक्ष पद्धतीने सिद्ध करता येते. तुम्ही प्रयत्न करा.

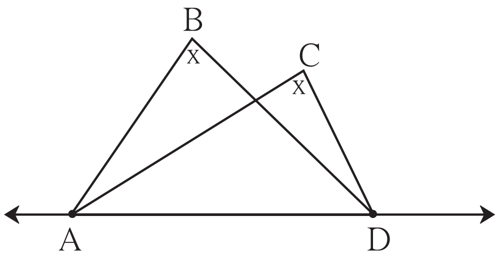
वरील व्यत्यासावरून आपल्या असे लक्षात येते, की चौकोनाचे संमुख कोन जर पूरक असतील तर त्या चौकोनाचे परिवर्तुळ असते.

प्रत्येक त्रिकोणाचे एक परिवर्तुळ असते, हे आपल्याला माहीत आहे, परंतु प्रत्येक चौकोनाचे परिवर्तुळ असतेच असे नाही, हे तुम्ही अनुभवा.

कोणती अट पूर्ण झाली असता चौकोनाचे परिवर्तुळ असते, म्हणजेच चौकोनाचे शिरोबिंदू एकाच वर्तुळावर असतात हे वरील प्रमेयाने आपल्याला समजते.

आणखी एका वेगळ्या परिस्थितीत चार नैकरेषीय बिंदू चक्रीय असतात. हे पुढील प्रमेयात सांगितले आहे.

प्रमेय : **रेषेचे दोन भिन्न बिंदू, त्या रेषेच्या एकाच बाजूला असणाऱ्या दोन भिन्न बिंदूंशी एकरूप कोन निश्चित करत असतील, तर ते चार बिंदू एकाच वर्तुळावर असतात.**



आकृती 3.50

पक्ष : बिंदू B व C हे रेषा AD च्या एकाच बाजूला आहेत. $\angle ABD \cong \angle ACD$

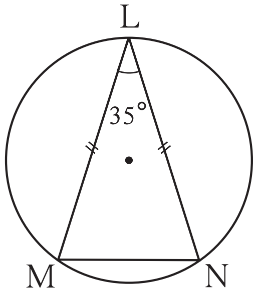
साध्य : बिंदू A, B, C, D एकाच वर्तुळावर आहेत. (म्हणजेच $\square$ ABCD चक्रीय आहे.)
याची देखील अप्रत्यक्ष सिद्धता देता येते.

विचार करूया

वरील प्रमेय कोणत्या प्रमेयाचा व्यत्यास आहे ?

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आकृती 3.51 मध्ये, जीवा LM $\cong$ जीवा LN
$\angle L = 35^\circ$ तर
(i) m(कंस MN) = किती ?
(ii) m(कंस LN) = किती ?



आकृती 3.51

उकल : (i) $\angle L = \frac{1}{2}\, m$(कंस MN) ...... (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$\therefore\ 35 = \frac{1}{2}\, m$(कंस MN)

$\therefore\ 2 \times 35 = m$(कंस MN) $= 70^\circ$

(ii) m(कंस MLN) $= 360^\circ - m$(कंस MN) ...... (कंसाच्या मापाची व्याख्या)

$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

आता, जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\therefore$ कंस LM $\cong$ कंस LN

परंतु m(कंस LM) + m(कंस LN) = m(कंस MLN) $= 290^\circ$ ..... (कंसाच्या बेरजेचा गुणधर्म)

m(कंस LM) = m(कंस LN) $= \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$

किंवा, (ii) जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\therefore\ \angle M = \angle N$ ...... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

$\therefore\ 2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

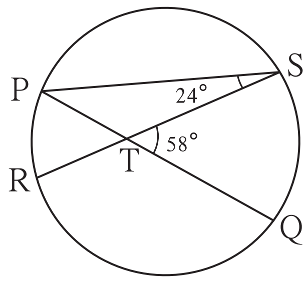
$\therefore\ \angle M = \frac{145^\circ}{2}$

$\therefore$ m(कंस LN) $= 2 \times \angle M$ .... (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$$= 2 \times \frac{145^\circ}{2}$$

$$= 145^\circ$$

उदा. (2) आकृती 3.52 मध्ये, जीवा PQ आणि जीवा RS एकमेकींना बिंदू T मध्ये छेदतात.



आकृती 3.52

(i) जर $\angle$ STQ = 58° आणि $\angle$ PSR = 24°, तर m(कंस SQ) काढा.

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(कंस PR) + m(कंस SQ)] हे पडताळून पाहा.

(iii) जीवा PQ आणि जीवा RS यांमधील कोनाचे माप कोणतेही असले तरी $m\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(कंस PR) + m(कंस SQ)] हे सिद्ध करा.

(iv) या उदाहरणात सिद्ध होणारा गुणधर्म शब्दांत लिहा.

उकल: (i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58^\circ - 24^\circ = 34^\circ$ .... (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय)

m(कंस QS) $= 2\ \angle SPQ = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$

(ii) m(कंस PR) $= 2\ \angle PSR = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$

आता, $\frac{1}{2}$ [m(कंस PR) + m(कंस SQ)] $= \frac{1}{2}[48 + 68]$

$$= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ$$

$$= \angle STQ$$

(iii) या गुणधर्माच्या सिद्धतेतील रिकाम्या चौकटी भरून ती पूर्ण करा.

$\angle STQ = \angle SPQ + \boxed{}$ .... (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय)

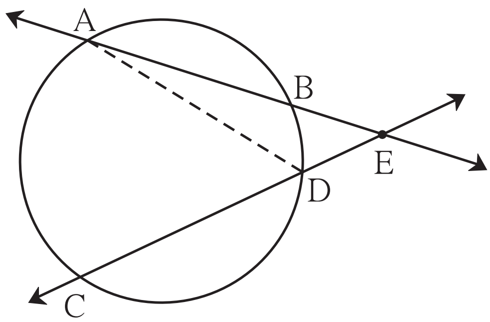
$= \frac{1}{2}$ m(कंस SQ) + $\boxed{}$ .... (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$= \frac{1}{2}\left[\boxed{} + \boxed{}\right]$

(iv) वर्तुळाच्या जीवा एकमेकींना वर्तुळाच्या अंतर्भागात छेदत असतील तर त्या जीवांमधील कोनाचे माप, त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेला कंस आणि त्याच्या विरुद्ध कोनाने अंतर्खंडित केलेला कंस, यांच्या मापांच्या बेरजेच्या निम्मे असते.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदा. (3) वर्तुळाच्या जीवांना सामावणाऱ्या रेषा वर्तुळाच्या बाह्यभागात छेदत असतील तर त्या रेषांमधील कोनाचे माप, त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंसांच्या मापांच्या फरकाच्या निम्मे असते, हे सिद्ध करा.



आकृती 3.53

पक्ष : वर्तुळाच्या जीवा AB आणि जीवा CD त्या वर्तुळाच्या बाह्यभागात बिंदू E मध्ये छेदतात.

साध्य : $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{कंस } AC) - m(\text{कंस } BD)]$

रचना : रेख AD काढला.

सिद्धता : या गुणधर्माची सिद्धता, वरील उदा. (2) मध्ये दिलेल्या सिद्धतेप्रमाणेच देता येते. त्यासाठी Δ AED चे कोन, त्या त्रिकोणाचाबाह्यकोन इत्यादी विचारात घ्या आणि सिद्धता लिहून काढा.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) वर्तुळात अंतर्लिखित केलेल्या कोनाचे माप, त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.

(2) वर्तुळाच्या एकाच कंसात अंतर्लिखित केलेले कोन एकरूप असतात.

(3) अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन काटकोन असतो.

(4) चौकोनाचे चारही शिरोबिंदू एकाच वर्तुळावर असतील तर त्या चौकोनाला चक्रीय चौकोन म्हणतात.

(5) चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन पूरक असतात.

(6) चक्रीय चौकोनाचा बाह्यकोन त्याच्या संलग्न-संमुख कोनाशी एकरूप असतो.

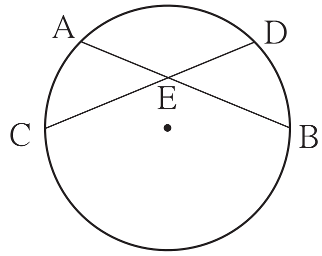
(7) चौकोनाचे संमुख कोन परस्परपूरक असतील तर तो चौकोन चक्रीय असतो.

(8) रेषेचे दोन भिन्न बिंदू, त्या रेषेच्या एकाच बाजूला असणाऱ्या दोन भिन्न बिंदूंशी एकरूप कोन निश्चित करत असतील, तर ते चार बिंदू एकाच वर्तुळावर असतात.

(9) सोबतच्या आकृती 3.54 मध्ये,

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{कंस } AC) + m(\text{कंस } DB)]$

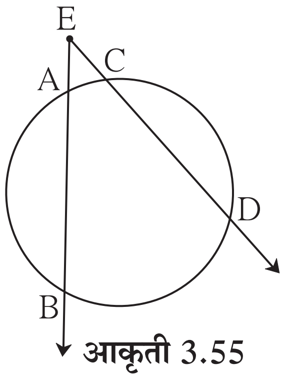
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2}[m(\text{कंस } AD) + m(\text{कंस } CB)]$



आकृती 3.54

(10) सोबतच्या आकृती 3.55 मध्ये,

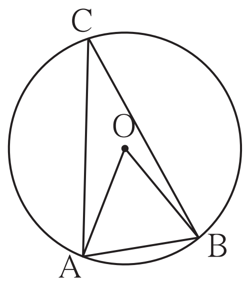
$\angle BED = \frac{1}{2}$ [m(कंस BD) – m(कंस AC)]



आकृती 3.55

सरावसंच 3.4

1. आकृती 3.56 मध्ये, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB ची लांबी वर्तुळाच्या त्रिज्येएवढी आहे. तर (1) $\angle AOB$ (2) $\angle ACB$ (3) कंस AB आणि (4) कंस ACB यांची मापे काढा.



आकृती 3.56

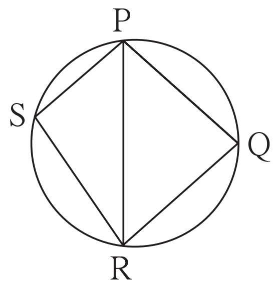
2. आकृती 3.57 मध्ये, $\square$ PQRS हा चक्रीय आहे. बाजू PQ $\cong$ बाजू RQ. $\angle PSR = 110^\circ$, तर

(1) $\angle PQR$ = किती ?

(2) m(कंस PQR) = किती ?

(3) m(कंस QR) = किती ?

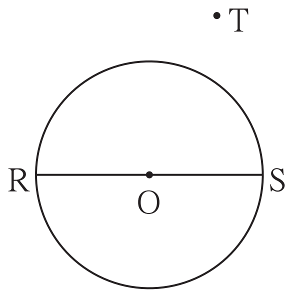
(4) $\angle PRQ$ = किती ?



आकृती 3.57

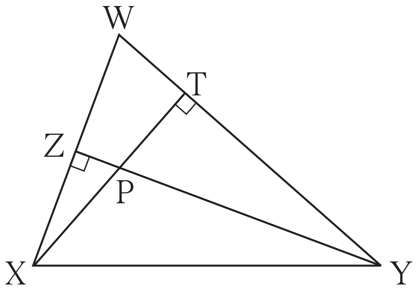
3. चक्रीय $\square$MRPN मध्ये, $\angle R = (5x - 13)^\circ$ आणि $\angle N = (4x + 4)^\circ$, तर $\angle R$ आणि $\angle N$ यांची मापे ठरवा.

4. आकृती 3.58 मध्ये रेख RS हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. बिंदू T हा वर्तुळाच्या बाह्य–भागातील बिंदू आहे. तर दाखवा, की $\angle RTS$ हा लघुकोन आहे.



आकृती 3.58

5. कोणताही आयत हा चक्रीय चौकोन असतो हे सिद्ध करा.



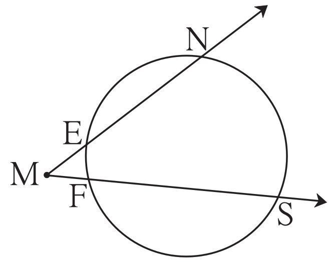
आकृती 3.59

6. आकृती 3.59 मध्ये, रेख YZ आणि रेख XT हे Δ WXY चे शिरोलंब बिंदू P मध्ये छेदतात तर सिद्‌ध करा,

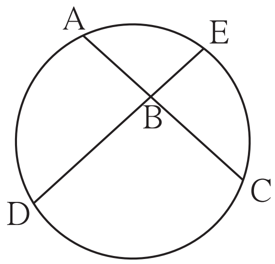
(1) $\square$ WZPT हा चक्रीय आहे.

(2) बिंदू X, Z, T, Y एकाच वर्तुळावर आहेत.

7. आकृती 3.60 मध्ये m(कंस NS) = 125°, m(कंस EF) = 37°, तर $\angle$NMS चे माप काढा.



आकृती 3.60



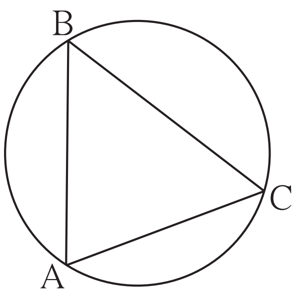
आकृती 3.61

8. आकृती 3.61 मध्ये जीवा AC आणि जीवा DE बिंदू B मध्ये छेदतात. जर $\angle$ABE = 108° आणि m(कंस AE) = 95° तर m(कंस DC) काढा.

जाणून घेऊया.

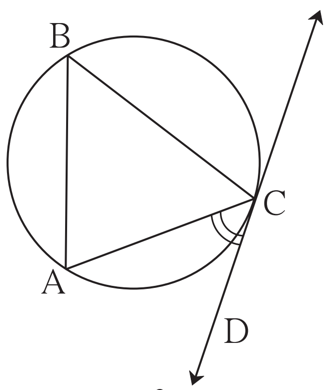
कृती :

एक पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. आकृती 3.62 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे या वर्तुळाची रेख AC ही एक जीवा काढा. वर्तुळावर B हा कोणताही बिंदू घ्या. $\angle$ABC हा अंतर्लिखित कोन काढा. $\angle$ABC चे माप मोजा व नोंदवून ठेवा.



आकृती 3.62

आता, आकृती 3.63 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे त्याच वर्तुळाची रेषा CD ही स्पर्शिका काढा. $\angle$ACD चे माप मोजा.



आकृती 3.63

$\angle ACD$ चे माप, $\angle ABC$ च्या मापाएवढेच आहे. असे तुम्हांला आढळेल.

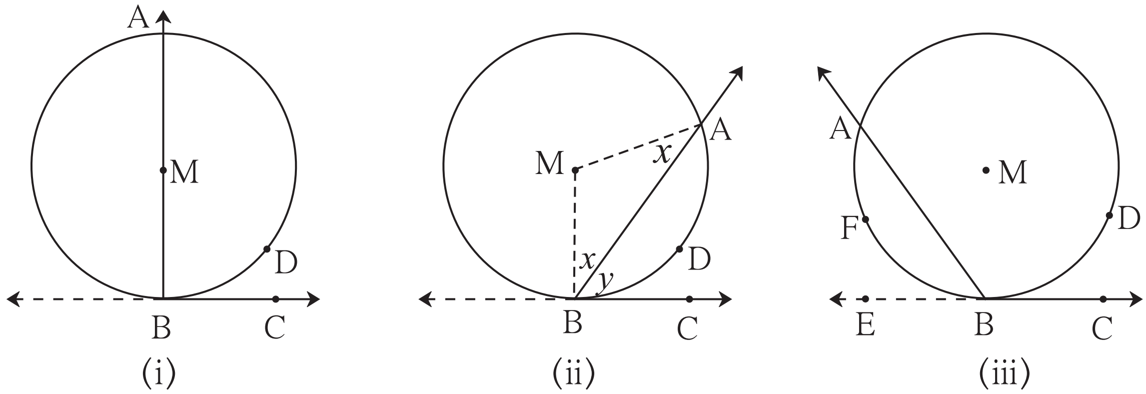
$\angle ABC = \frac{1}{2}\ m$(कंस AC) हे तुम्हांला माहीत आहे.

यावरून $\angle ACD$ चे माप सुद्धा (कंस AC) च्या मापाच्या निम्मे आहे हा निष्कर्ष मिळतो.

वर्तुळाच्या स्पर्शिकेचा हाही एक महत्त्वाचा गुणधर्म आहे. तो आपण आता सिद्ध करू.

स्पर्शिका–छेदिका कोनाचे प्रमेय (Theorem of angle between tangent and secant)

प्रमेय : **शिरोबिंदू वर्तुळावर असलेल्या कोनाची एक भुजा वर्तुळाची स्पर्शिका असेल आणि दुसरी भुजा वर्तुळाला आणखी एका बिंदूत छेदत असेल, तर त्या कोनाचे माप त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.**



आकृती 3.64

पक्ष : $\angle ABC$ चा शिरोबिंदू केंद्र M असलेल्या वर्तुळावर आहे. त्याची भुजा BC वर्तुळाला स्पर्श करते आणि भुजा BA वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते. कंस ADB हा $\angle ABC$ ने अंतर्खंडित केला आहे.

साध्य : $\angle ABC = \frac{1}{2}\ m$(कंसADB)

सिद्धता : या प्रमेयाची सिद्धता, तीन शक्यता विचारात घेऊन द्यावी लागेल.

(1) आकृती 3.64 (i) प्रमाणे वर्तुळकेंद्र M हे $\angle ABC$ च्या एका भुजेवर असल्यास,

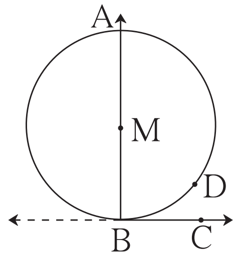
$\angle ABC = \angle MBC = 90°$ ..... (स्पर्शिकेचे प्रमेय).....(I)

कंस ADB हे अर्धवर्तुळ आहे.

$\therefore\ m$(कंस ADB) = 180° ..... (कंसाच्या मापाची व्याख्या).....(II)

(I) व (II) वरून

$\angle ABC = \frac{1}{2}\ m$(कंसADB)



आकृती 3.64(i)

(2) आकृती 3.64 (ii) प्रमाणे केंद्र M हे $\angle ABC$ च्या बाह्यभागात असल्यास,

त्रिज्या MA आणि त्रिज्या MB काढू.

आता, $\angle MBA = \angle MAB$ ..... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

तसेच, $\angle MBC = 90°$ ..... (स्पर्शिकेचे प्रमेय) ..... (I)

$\angle$ MBA = $\angle$ MAB = x, $\angle$ ABC = y मानू.

$\angle$ AMB = 180 − (x + x) = 180 − 2x

$\angle$ MBC = $\angle$ MBA + $\angle$ ABC = x + y

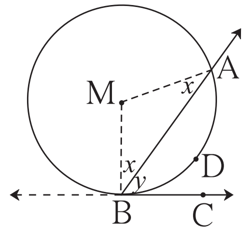
$\therefore$ $x + y = 90^\circ$ $\qquad$ $\therefore$ $2x + 2y = 180^\circ$

Δ AMB मध्ये $2x + \angle$ AMB = 180°

$\therefore$ $2x + 2y = 2x + \angle$ AMB

$\therefore$ $2y = \angle$ AMB

$\therefore$ $y = \angle \text{ABC} = \frac{1}{2}\angle \text{AMB} = \frac{1}{2}$ m(कंस ADB)



आकृती 3.64(ii)

(3) तिसऱ्या शक्यतेबाबत खाली दिलेली सिद्‌धता आकृती 3.64 (iii) च्या आधारे, तुम्ही पूर्ण करा.

किरण $\boxed{\qquad}$ हा किरण BC चा विरुद्‌ध किरण काढला.

आता, $\angle\text{ABE} = \frac{1}{2}$ m($\boxed{\qquad}$) ...... (2) मध्ये सिद्‌ध.

180 − $\boxed{\qquad}$ = $\angle$ABE ..... (रेषीय जोडीतील कोन)

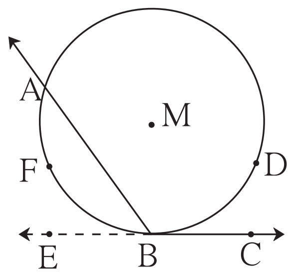
$\therefore$ 180 − $\boxed{\qquad}$ = $\frac{1}{2}$ m(कंस AFB)

$= \frac{1}{2}$ [360 − m($\boxed{\qquad}$)]

$\therefore$ 180 − $\angle$ABC = 180 − $\frac{1}{2}$ m(कंस ADB)

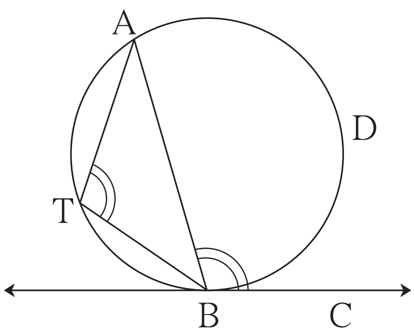
$\therefore$ −$\angle$ABC = − $\frac{1}{2}$ m($\boxed{\qquad}$)

$\therefore$ $\angle$ABC = $\frac{1}{2}$ m(कंस ADB)



आकृती 3.64(iii)

स्पर्शिका – छेदिका कोनाच्या प्रमेयाचे पर्यायी विधान



आकृती 3.65

आकृतीत AB ही वृत्तछेदिका आणि BC स्पर्शिका आहे. कंस ADB हा $\angle$ ABC ने अंतर्खंडित केलेला कंस आहे. जीवा AB वर्तुळाचे दोन कंसांत विभाजन करते. दोन्ही कंस परस्परांचे विरुद्‌ध कंस असतात. आता कंस ADB च्या विरुद्‌ध कंसावर T बिंदू घेतला. वरील प्रमेयावरून,

$\angle$ ABC = $\frac{1}{2}$ m (कंस ADB) = $\angle$ ATB.

$\therefore$ वर्तुळाची स्पर्शिका व स्पर्शबिंदूतून काढलेली जीवा यांतील कोन त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या विरुद्‌ध कंसात अंतर्लिखित केलेल्या कोनाएवढा असतो.

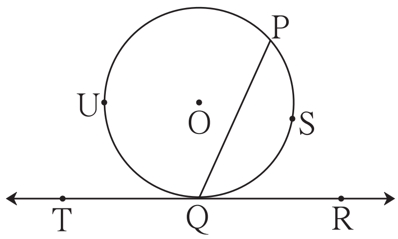
स्पर्शिका–छेदिका कोनांच्या प्रमेयाचा व्यत्यास

वर्तुळाच्या जीवेच्या एका अंत्यबिंदूतून जाणारी एक रेषा काढली असता, त्या रेषेने त्या जीवेशी केलेल्या कोनाचे माप त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असेल, तर ती रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

आकृती 3.66 मध्ये,

जर $\angle PQR = \frac{1}{2}\ m$(कंस PSQ) असेल,

[किंवा $\angle PQT = \frac{1}{2}\ m$(कंस PUQ) असेल,]



आकृती 3.66

तर रेषा TR ही वर्तुळाची स्पर्शिका असते. या व्यत्यास प्रमेयाचा उपयोग, वर्तुळाला स्पर्शिका काढण्याच्या एका रचनेसाठी होतो. या प्रमेयाची अप्रत्यक्ष सिद्‌धता देता येते.

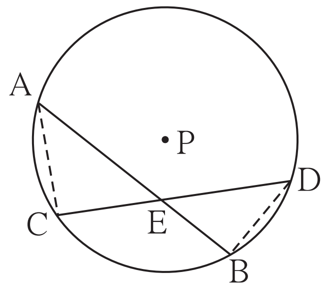
जीवांच्या अंतर्छेदनाचे प्रमेय (Theorem of internal division of chords)

एकाच वर्तुळाच्या दोन जीवा जेव्हा वर्तुळाच्या अंतर्भागात छेदतात, तेव्हा एका जीवेच्या झालेल्या दोन भागांच्या लांबींचा गुणाकार हा दुसऱ्या जीवेच्या दोन भागांच्या लांबींच्या गुणाकाराएवढा असतो.

पक्ष : केंद्र P असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB आणि जीवा CD, वर्तुळाच्या अंतर्भागात बिंदू E मध्ये छेदतात.

साध्य : $AE \times EB = CE \times ED$

रचना : रेख AC आणि रेख DB काढले.



आकृती 3.67

सिद्‌धता : Δ CAE आणि Δ BDE मध्ये,

$\angle AEC \cong \angle DEB$ ..... (विरुद्‌ध कोन)

$\angle CAE \cong \angle BDE$ ..... (एकाच वर्तुळकंसात अंतर्लिखित कोन)

$\therefore \Delta CAE \sim \Delta BDE$ ..... (को– को समरूपता कसोटी)

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ ..... (समरूप त्रिकोणांच्या संगत भुजा)

$\therefore AE \times EB = CE \times ED$

विचार करूया.

आकृती 3.67 मध्ये रेख AC आणि रेख DB काढून आपण प्रमेय सिद्‌ध केले. त्याऐवजी रेख AD आणि रेख CB काढून हे प्रमेय सिद्‌ध करता येईल का ?

अधिक माहितीसाठी

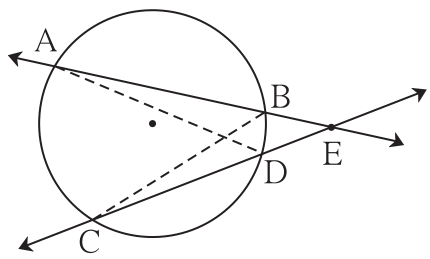
आकृती 3.67 मधील AB या जीवेचे बिंदू E मुळे AE आणि EB हे दोन भाग झाले आहेत. रेख AE आणि रेख EB या लगतच्या बाजू असणारा आयत काढला, तर AE × EB हे त्या आयताचे क्षेत्रफळ असेल. तसेच CE × ED हे जीवा CD च्या दोन भागांनी होणाऱ्या आयताचे क्षेत्रफळ असेल. आपण AE × EB = CE × ED हे सिद्ध केले.

म्हणून हे प्रमेय वेगळ्या शब्दांत पुढीलप्रमाणेही मांडतात.

एकाच वर्तुळाच्या दोन जीवा वर्तुळाच्या अंतर्भागात छेदत असतील, तर एका जीवेच्या दोन भागांनी होणाऱ्या आयताचे क्षेत्रफळ हे दुसऱ्या जीवेच्या दोन भागांनी होणाऱ्या आयताच्या क्षेत्रफळाएवढे असते.

जीवांच्या बाह्यछेदनाचे प्रमेय (Theorem of external division of chords)

एकाच वर्तुळाच्या AB आणि CD या जीवांना सामावणाऱ्या वृत्तछेदिका परस्परांना वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदू E मध्ये छेदत असतील, तर AE × EB = CE × ED.



आकृती 3.68

प्रमेयाचे वरील विधान व आकृतीच्या आधारे पक्ष व साध्य तुम्ही ठरवा.

रचना : रेख AD आणि रेख BC काढले.

रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

सिद्धता : Δ ADE आणि Δ CBE मध्ये,

$\angle$ AED ≅ $\boxed{}$ .... (सामाईक कोन)

$\angle$ DAE ≅ $\angle$ BCE .... ($\boxed{}$)

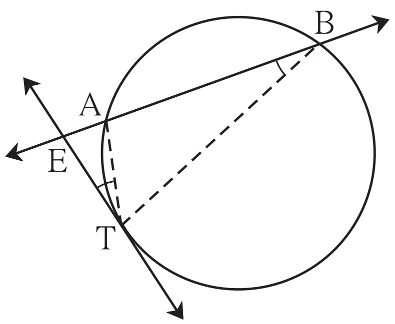
$\therefore \Delta$ ADE ~ $\boxed{}$ .... ($\boxed{}$)

$\therefore \dfrac{(AE)}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

$\therefore \boxed{}$ = CE × ED

स्पर्शिका छेदिका रेषाखंडांचे प्रमेय (Tangent secant segments theorem)

वर्तुळाच्या बाह्यभागातील E ह्या बिंदूतून काढलेली वृत्तछेदिका वर्तुळाला बिंदू A व B मध्ये छेदत असेल आणि त्याच बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करत असेल, तर $EA \times EB = ET^2$



आकृती 3.69

प्रमेयाचे वरील विधान लक्षात घेऊन पक्ष आणि साध्य ठरवा.

रचना : रेख TA आणि रेख TB काढले.

सिद्धता : Δ EAT आणि Δ ETB मध्ये,

$\angle AET \cong \angle TEB$ .... (समाईक कोन)

$\angle ETA \cong \angle EBT$.. (स्पर्शिका-छेदिका प्रमेय)

$\therefore \Delta EAT \sim \Delta ETB$ ..... (को-को समरूपता)

$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET}$ ..... (समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

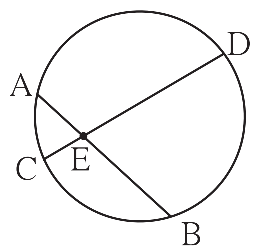
$\therefore EA \times EB = ET^2$

हे लक्षात ठेवूया.

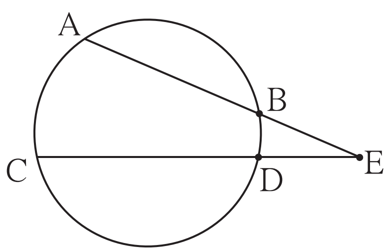
(1) आकृती 3.70 नुसार,

$AE \times EB = CE \times ED$

या गुणधर्माला जीवा अंतर्छेदनाचे प्रमेय म्हणतात.



आकृती 3.70



आकृती 3.71

(2) आकृती 3.71 नुसार,

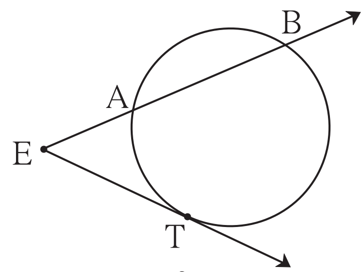
$AE \times EB = CE \times ED$

या गुणधर्माला जीवा बाह्यछेदनाचे प्रमेय म्हणतात.

(3) आकृती 3.72 नुसार,

$EA \times EB = ET^2$

या गुणधर्माला स्पर्शिका-छेदिका रेषाखंडांचे प्रमेय म्हणतात.



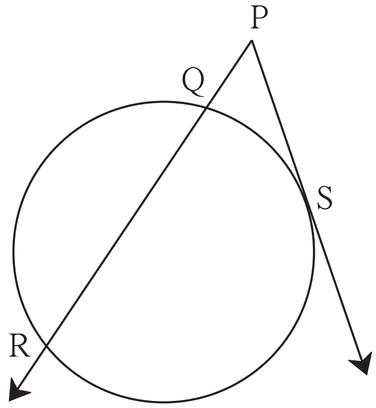
आकृती 3.72

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आकृती 3.73 मध्ये, रेख PS हा स्पर्शिकाखंड आहे. रेषा PR ही वृत्तछेदिका आहे.

जर PQ = 3.6,

QR = 6.4 तर PS काढा.



आकृती 3.73

उकल : $PS^2 = PQ \times PR$ .... (स्पर्शिका छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय)

$= PQ \times (PQ + QR)$

$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$

$= 3.6 \times 10$

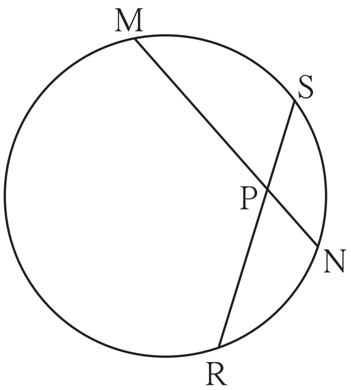
$= 36$

$\therefore PS = 6$

उदा. (2) आकृती 3.74 मध्ये, जीवा MN आणि जीवा RS परस्परांना बिंदू P मध्ये छेदतात.

जर PR = 6, PS = 4, MN = 11

तर PN काढा.



आकृती 3.74

उकल : जीवांच्या अंतर्छेदनाच्या प्रमेयावरून,

$PN \times PM = PR \times PS$... (I)

$PN = x$ मानू. $\therefore PM = 11 - x$

या किमती (I) मध्ये मांडून,

$x\,(11 - x) = 6 \times 4$

$\therefore\ 11x - x^2 - 24 = 0$

$\therefore\ x^2 - 11x + 24 = 0$

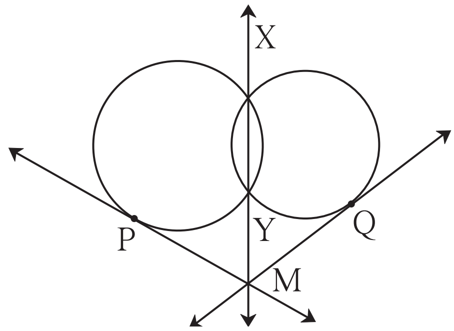
$\therefore\ (x - 3)\,(x - 8) = 0$

$\therefore\ x - 3 = 0$ किंवा $x - 8 = 0$

$\therefore\ x = 3$ किंवा $x = 8$

$\therefore$ PN = 3 किंवा PN = 8

उदा. (3) आकृती 3.75 मध्ये, दोन वर्तुळे एकमेकांना बिंदू X व Y मध्ये छेदतात. रेषा XY वरील बिंदू M मधून काढलेल्या स्पर्शिका त्या वर्तुळांना बिंदू P व Q मध्ये स्पर्श करतात. तर सिद्ध करा, रेख PM $\cong$ रेख QM.



आकृती 3.75

सिद्धता : रिकाम्या जागा भरून सिद्धता लिहा.

रेषा MX ही दोन्ही वर्तुळांची सामाईक .... आहे.

$\therefore PM^2 = MY \times MX$ ..... (I)

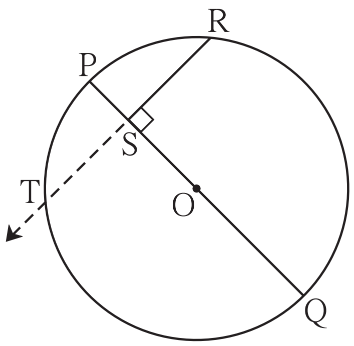
तसेच .... = ... × .... , (स्पर्शिका-छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय) ..... (II)

$\therefore$ (I) व (II) वरून ...... = QM^2

$\therefore$ PM = QM

रेख PM $\cong$ रेख QM

उदा. (4)



आकृती 3.76

आकृती 3.76 मध्ये, रेख PQ हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. बिंदू R हा वर्तुळावरील कोणताही बिंदू आहे.

रेख RS $\perp$ रेख PQ.

तर सिद्ध करा - SR हा PS आणि SQ यांचा भूमितीमध्य आहे.

[म्हणजेच $SR^2 = PS \times SQ$]

उकल : पुढे दिलेल्या पायऱ्यांनी सिद्धता लिहा.

(1) किरण RS काढा. तो वर्तुळाला ज्या बिंदूत छेदेल त्या बिंदूला T हे नाव द्या.

(2) RS = TS दाखवा.

(3)जीवांच्या अंतर्छेदनाचे प्रमेय वापरून समानता लिहा.

(4) RS = TS वापरून साध्य सिद्ध करा.

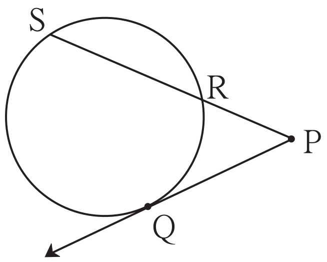
विचार करूया.

(1) वरील आकृती 3.76 मध्ये रेख PR आणि रेख RQ काढल्यास Δ PRQ कोणत्या प्रकारचा होईल?

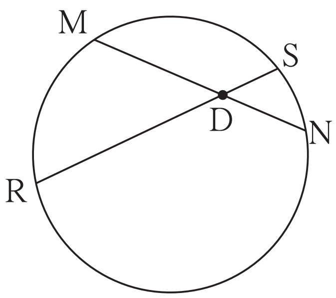
(2) वरील उदा. (4) मध्ये सिद्ध केलेला गुणधर्म याआधीही वेगळ्या रीतीने सिद्ध केला आहे का?

सरावसंच 3.5

1. आकृती 3.77 मध्ये, बिंदू Q हा स्पर्शबिंदू आहे.
जर PQ = 12, PR = 8,
तर PS = किती ? RS = किती ?



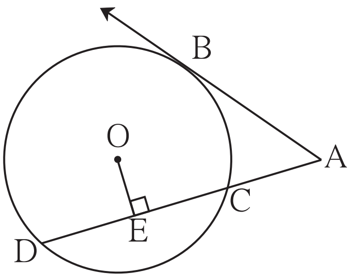
आकृती 3.77



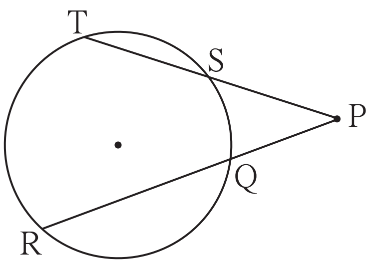
आकृती 3.78

2. आकृती 3.78 मध्ये, जीवा MN आणि RS एकमेकींना बिंदू D मध्ये छेदतात.
(1) जर RD = 15, DS = 4,
MD = 8 तर DN = किती ?
(2) जर RS = 18, MD = 9,
DN = 8 तर DS = किती ?

3. आकृती 3.79 मध्ये, बिंदू B हा स्पर्शबिंदू आणि बिंदू O वर्तुळकेंद्र आहे.
रेख OE ⊥ रेषा AD, AB = 12,
AC = 8, तर (1) AD (2) DC
आणि (3) DE काढा.



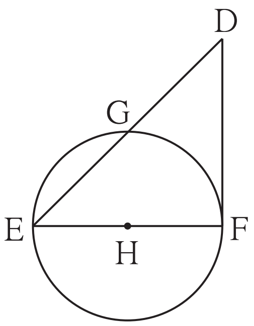
आकृती 3.79



आकृती 3.80

4. आकृती 3.80 मध्ये, जर PQ = 6,
QR = 10, PS = 8
तर TS = किती ?

5. आकृती 3.81 मध्ये, रेख EF हा व्यास आणि रेख DF हा स्पर्शिकाखंड आहे. वर्तुळाची त्रिज्या r आहे. तर सिद्ध करा –
$DE \times GE = 4r^2$



आकृती 3.81

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. पुढील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी चार पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(1) त्रिज्या अनुक्रमे 5.5 सेमी आणि 3.3 सेमी असलेली दोन वर्तुळे परस्परांना स्पर्श करतात. त्यांच्या केंद्रातील अंतर किती सेमी आहे?

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 किंवा 2.2

(2) परस्परांना छेदणाऱ्या दोन वर्तुळांपैकी प्रत्येक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळाच्या केंद्रातून जाते. जर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर 12 सेमी असेल, तर प्रत्येक वर्तुळाची त्रिज्या किती सेमी आहे?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) सांगता येणार नाही

(3) 'एक वर्तुळ एका समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व बाजूंना स्पर्श करते, तर तो समांतरभुज चौकोन .... असला पाहिजे', या विधानातील रिकाम्या जागी योग्य शब्द लिहा.

(A) आयत (B) समभुज चौकोन (C) चौरस (D) समलंब चौकोन

(4) एका वर्तुळाच्या केंद्रापासून 12.5 सेमी अंतरावरील एका बिंदूतून त्या वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शिकाखंडाची लांबी 12 सेमी आहे. तर त्या वर्तुळाचा व्यास किती सेमी आहे?

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) एकमेकांना बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांना जास्तीत जास्त किती सामाईक स्पर्शिका काढता येतील?

(A) एक (B) दोन (C) तीन (D) चार

(6) केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या कंस ACB मध्ये $\angle$ACB अंतर्लिखित केला आहे. जर $m\angle ACB = 65^\circ$ तर m(कंस ACB) = किती?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) एका वर्तुळाच्या जीवा AB आणि CD परस्परांना वर्तुळाच्या अंतर्भागात बिंदू E मध्ये छेदतात. जर (AE) = 5.6, (EB) = 10, (CE) = 8 तर (ED) = किती?

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) चक्रीय $\square$ ABCD मध्ये, कोन $\angle$ A च्या मापाची दुप्पट ही $\angle$C च्या मापाच्या तिप्पटी एवढी आहे. तर $\angle$C चे माप किती?

(A) 36 (B) 72 (C) 90 (D) 108

(9)★ एकाच वर्तुळावर बिंदू A, B, C असे आहेत, की m(कंस AB) = m(कंस BC) = 120°, दोन्ही कंसात B शिवाय एकही बिंदू सामाईक नाही. तर Δ ABC कोणत्या प्रकारचा आहे?

(A) समभुज त्रिकोण (B) विषमभुज त्रिकोण

(C) काटकोन त्रिकोण (D) समद्विभुज त्रिकोण

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(10) रेख XZ व्यास असलेल्या वर्तुळाच्या अंतर्भागात Y हा एक बिंदू आहे. तर खालीलपैकी किती विधाने सत्य आहेत ?

(i) $\angle XYZ$ हा लघुकोन असणे शक्य नाही.

(ii) $\angle XYZ$ हा काटकोन असणे शक्य नाही.

(iii) $\angle XYZ$ हा विशालकोन आहे.

(iv) $\angle XYZ$ च्या मापासंबंधी निश्चित विधान करता येणार नाही.

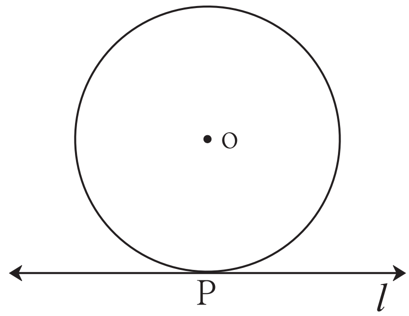
(A) फक्त एक (B) फक्त दोन (C) फक्त तीन (D) सर्व

2. बिंदू O केंद्र असलेल्या वर्तुळाला रेषा l बिंदू P मध्ये स्पर्श करते. जर वर्तुळाची त्रिज्या 9 सेमी असेल, तर खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) $d(O, P)$ = किती ? का ?

(2) जर $d(O, Q) = 8$ सेमी असेल. तर बिंदू Q चे स्थान कोठे असेल ?

(3) $d(O,R)=15$ सेमी असेल तर बिंदू R ची किती स्थाने रेषा l वर असतील ? ते बिंदू P पासून किती अंतरावर असतील ?



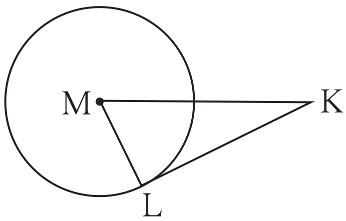
आकृती 3.82

3. सोबतच्या आकृतीत, बिंदू M वर्तुळकेंद्र आणि रेख KL हा स्पर्शिकाखंड आहे.

जर $MK = 12$, $KL = 6\sqrt{3}$ तर

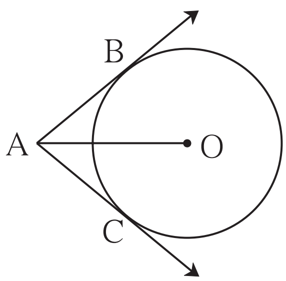
(1) वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

(2) $\angle K$ आणि $\angle M$ यांची मापे ठरवा.

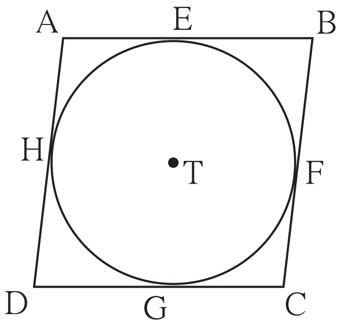


आकृती 3.83

4. आकृती 3.84 मध्ये, बिंदू O वर्तुळकेंद्र आणि रेख AB व रेख AC हे स्पर्शिकाखंड आहेत. जर वर्तुळाची त्रिज्या r असेल आणि $l(AB) = r$ असेल, तर $\square$ ABOC हा चौरस होतो, हे दाखवा.



आकृती 3.84



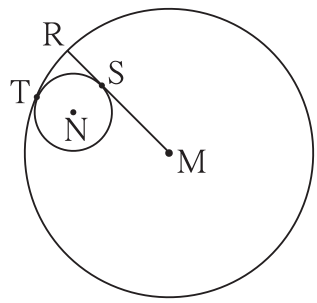
आकृती 3.85

5. आकृती 3.85 मध्ये, समांतरभुज □ ABCD हा केंद्र T असलेल्या वर्तुळाभोवती परिलिखित केला आहे. (म्हणजे त्या चौकोनाच्या बाजू वर्तुळाला स्पर्श करतात.) बिंदू E, F, G आणि H हे स्पर्शबिंदू आहेत. जर AE = 4.5 आणि EB = 5.5, तर AD काढा.

6. आकृती 3.86 मध्ये, केंद्र N असलेले वर्तुळ केंद्र M असणाऱ्या वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करते. मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या लहान वर्तुळाला बिंदू S मध्ये स्पर्श करते. जर मोठ्या व लहान वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 9 सेमी व 2.5 सेमी असतील तर खालील प्रश्नांची उत्तरे शोधा आणि त्यांवरून MS : SR हे गुणोत्तर काढा.

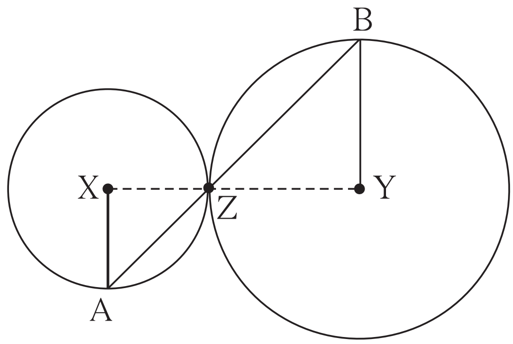
(1) MT = किती ? (2) MN = किती ?

(3) $\angle$NSM = किती ?



आकृती 3.86

7. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र X आणि Y असलेली वर्तुळे परस्परांना बिंदू Z मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू Z मधून जाणारी वृत्तछेदिका त्या वर्तुळांना अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B मध्ये छेदते. तर सिद्ध करा, त्रिज्या XA || त्रिज्या YB. खाली दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून पूर्ण सिद्धता लिहून काढा.



आकृती 3.87

रचना : रेख XZ आणि .... काढले.

सिद्धता : स्पर्शवर्तुळांच्या प्रमेयानुसार, बिंदू X, Z, Y हे .... आहेत.

$\therefore \angle$ XZA $\cong$ .... विरुद्ध कोन

$\angle$ XZA = $\angle$ BZY = a मानू ..... (I)

आता, रेख XA $\cong$ रेख XZ .... (..........)

$\therefore \angle$ XAZ = ... = a .... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय) (II)

तसेच रेख YB $\cong$ .... (..........)

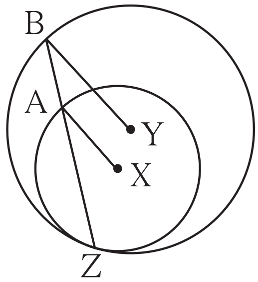
$\therefore \angle$ BZY = ... = a .... (..........) (III)

$\therefore$ (I), (II) व (III) वरून,

$\angle$ XAZ = ...

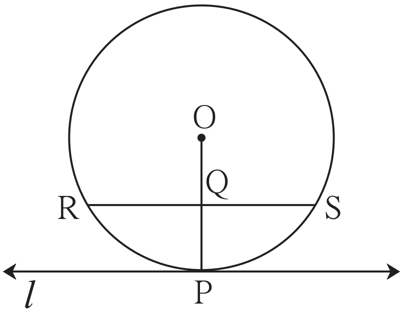
$\therefore$ त्रिज्या XA || त्रिज्या YB .... (..........)

8. आकृती 3.88 मध्ये, केंद्र X व Y असणारी अंतर्स्पर्शी वर्तुळे बिंदू Z मध्ये स्पर्श करतात. रेख BZ ही मोठ्या वर्तुळाची जीवा लहान वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते.
तर सिद्‌ध करा – रेख AX || रेख BY.



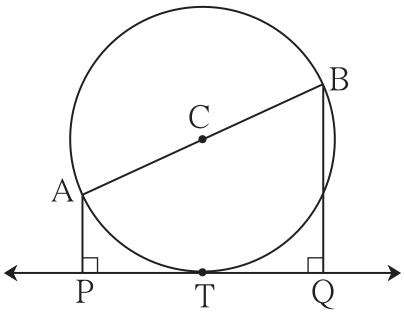
आकृती 3.88

9. शेजारील आकृतीत, रेषा l ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळाला बिंदू P मध्ये स्पर्श करते. बिंदू Q हा त्रिज्या OP चा मध्यबिंदू आहे. बिंदू Q ला सामावणारी जीवा RS || रेषा l.
जर RS 12 सेमी असेल, तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.



आकृती 3.89

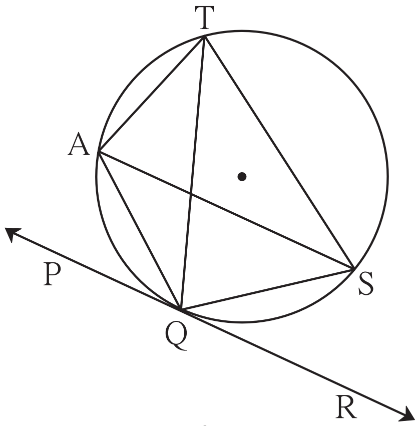
10★. आकृती 3.90 मध्ये, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाचा रेख AB हा व्यास आहे. वर्तुळाची स्पर्शिका PQ वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करते.
रेख AP $\perp$ रेषा PQ आणि रेख BQ $\perp$ रेषा PQ.
तर सिद्‌ध करा – रेख CP $\cong$ रेख CQ.



आकृती 3.90

11★. प्रत्येकी 3 सेमी त्रिज्येची, केंद्र A, B व C असणारी तीन वर्तुळे अशी काढा, की प्रत्येक वर्तुळ इतर दोन वर्तुळांना स्पर्श करेल.

12★. वर्तुळाचे कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नसतात, हे सिद्‌ध करा.



आकृती 3.91

13. आकृती 3.91 मध्ये रेषा PR वर्तुळाला बिंदू Q मध्ये स्पर्श करते. या आकृतीच्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) $\angle$TAQ आणि $\angle$TSQ यांच्या मापांची बेरीज किती?

(2) $\angle$AQP शी एकरूप असणारे कोन कोणते ?

(3) $\angle$QTS शी एकरूप असणारे कोन कोणते?

(4) जर $\angle TAS = 65^\circ$, तर $\angle$TQS आणि कंस TS यांची मापे सांगा.

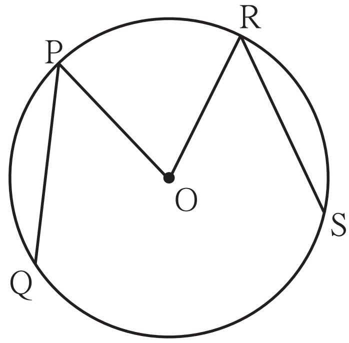
(5) जर $\angle AQP = 42^\circ$ आणि $\angle SQR = 58^\circ$, तर $\angle$ATS चे माप काढा.

14. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या रेख PQ आणि रेख RS या एकरूप जीवा आहेत. जर $\angle POR = 70^\circ$ आणि m(कंस RS) = 80°, तर –

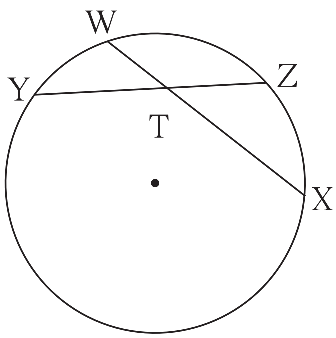
(1) m(कंस PR) किती?

(2) m(कंस QS) किती?

(3) m(कंस QSR) किती?



आकृती 3.92



आकृती 3.93

15. आकृती 3.93 मध्ये, m(कंस WY) = 44°, m(कंस ZX) = 68°, तर

(1) $\angle$ZTX चे माप ठरवा.

(2) WT = 4.8, TX = 8.0, YT = 6.4 तर TZ = किती?

(3) WX = 25, YT = 8, YZ = 26, तर WT = किती?.

16. आकृती 3.94 मध्ये,

(1) m(कंस CE) = 54°,

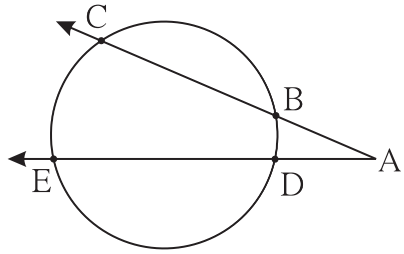
m(कंस BD) = 23°, तर ∠CAE = किती?

(2) AB = 4.2, BC = 5.4,

AE = 12.0 तर AD = किती?

(3) AB = 3.6, AC = 9.0,

AD = 5.4 तर AE = किती?



आकृती 3.94

17. शेजारी दिलेल्या आकृतीत, जीवा EF || जीवा GH. तर सिद्ध करा, जीवा EG ≅ जीवा FH .

पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरा आणि सिद्धता लिहा.

सिद्धता : रेख GF काढला.

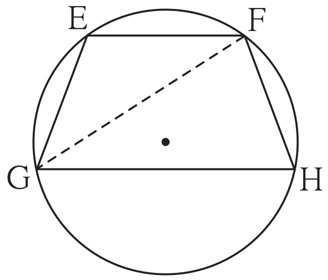
∠ EFG = ∠ FGH .... $\boxed{\quad\quad}$(I)

∠ EFG = $\boxed{\quad\quad}$ (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय) (II)

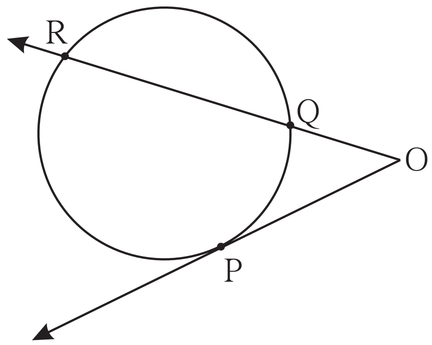
∠ FGH = $\boxed{\quad\quad}$ (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय) (III)

∴ m (कंस EG) = $\boxed{\quad\quad}$ [(I), (II) व (III) वरून]

जीवा EG ≅ जीवा FH ....($\boxed{\quad\quad}$)



आकृती 3.95



आकृती 3.96

18. शेजारच्या आकृतीत बिंदू P हा स्पर्शबिंदू आहे.

(1) m(कंस PR) = 140,

∠ POR = 36° तर

m(कंस PQ) = किती?

(2) OP = 7.2, OQ = 3.2,

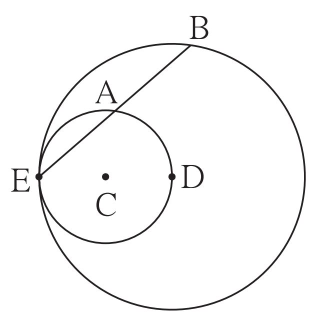
OR = किती? QR = किती?

(3) OP = 7.2, OR = 16.2, तर

QR = किती?

19. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र C असलेले वर्तुळ केंद्र D असलेल्या वर्तुळाला बिंदू E मध्ये आतून स्पर्श करते. बिंदू D हा आतील वर्तुळावर आहे. बाहेरील वर्तुळाची जीवा EB ही आतील वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते.

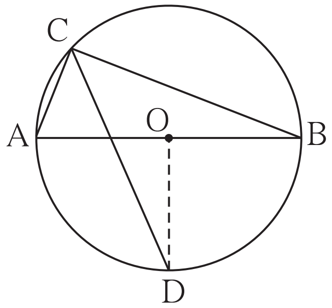
तर सिद्ध करा, की रेख EA ≅ रेख AB.



आकृती 3.97

20. आकृती 3.98 मध्ये, रेख AB हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. अंतर्लिखित कोन ACB चा दुभाजक वर्तुळाला बिंदू D मध्ये छेदतो. तर रेख AD ≅ रेख BD हे सिद्ध करा.

पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून ती पूर्ण करा आणि लिहा.



आकृती 3.98

सिद्धता : रेख OD काढला.

$\angle$ ACB = $\boxed{}$ (अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित कोन)

$\angle$ DCB = $\boxed{}$ (रेख CD हा $\angle$ C चा दुभाजक)

m(कंस DB) = $\boxed{}$ (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

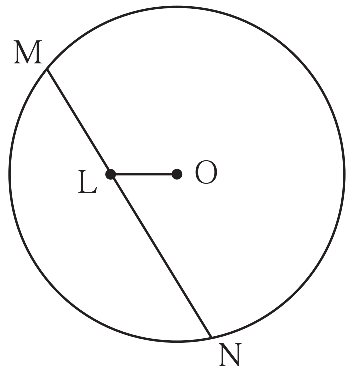
$\angle$ DOB = $\boxed{}$ (कंसाच्या मापाची व्याख्या) (I)

रेख OA ≅ रेख OB .... $\boxed{}$ (II)

$\therefore$ रेषा OD ही रेख AB ची $\boxed{}$ रेषा आहे. (I) व (II) वरून

$\therefore$ रेख AD ≅ रेख BD

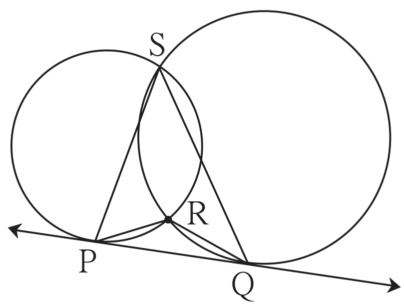
21. सोबतच्या आकृतीत रेख MN ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळातील जीवा आहे. MN = 25, जीवा MN वर बिंदू L असा आहे की ML = 9 आणि d(O,L) = 5 तर या वर्तुळाची त्रिज्या किती असेल?



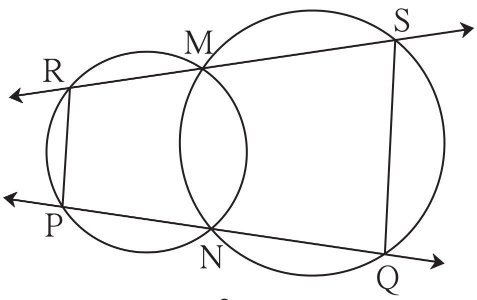
आकृती 3.99

22★. आकृती 3.100 मध्ये दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू S व R मध्ये छेदतात. त्यांची रेषा PQ ही सामाईक स्पर्शिका त्यांना बिंदू P व Q मध्ये स्पर्श करते, तर सिद्ध करा –

$\angle$ PRQ + $\angle$ PSQ = 180°



आकृती 3.100

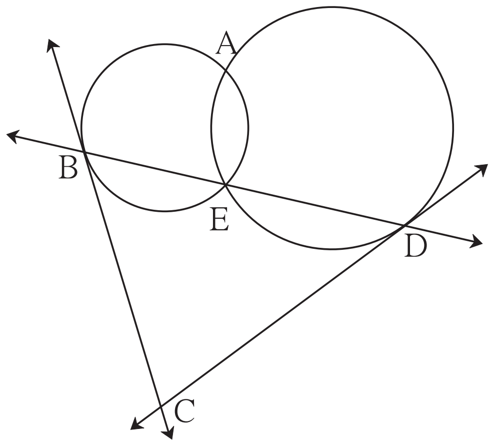


आकृती 3.101

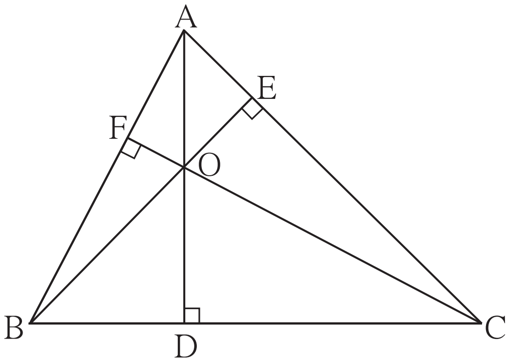
23★. आकृती 3.101 मध्ये, दोन वर्तुळे एकमेकांना बिंदू M व N मध्ये छेदतात. बिंदू M व N मधून काढलेल्या वृत्तछेदिका बिंदू R व S मध्ये, आणि बिंदू P व Q मध्ये छेदतात. तर रेख PR || रेख QS, हे सिद्ध करा.

24★. दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू A व E मध्ये छेदतात. बिंदू E मधून काढलेली त्यांची सामाईक वृत्तछेदिका वर्तुळांना बिंदू B व D मध्ये छेदते. बिंदू B व D मधून काढलेल्या स्पर्शिका एकमेकींना बिंदू C मध्ये छेदतात.

सिद्ध करा : □ ABCD चक्रीय आहे.

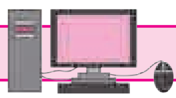


आकृती 3.102



आकृती 3.103

25★. Δ ABC मध्ये, रेख AD ⊥ बाजू BC, रेख BE ⊥ बाजू AC, रेख CF ⊥ बाजू AB. बिंदू O हा शिरोलंबसंपात आहे. तर बिंदू O हा Δ DEF चा अंतर्मध्य होतो, हे सिद्ध करा.



ICT Tools or Links

जिओजेब्राच्या सहाय्याने विविध वर्तुळे काढा.
त्यांमध्ये जीवा व स्पर्शिका काढून गुणधर्म तपासा.

4 भौमितिक रचना

चला, शिकूया.

- समरूप त्रिकोणाची रचना
  - ✻ दोन समरूप त्रिकोणांपैकी एका त्रिकोणाच्या बाजू आणि दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजू यांचे गुणोत्तर दिले असता दुसरा त्रिकोण काढणे.
    - (i) एकही शिरोबिंदू सामाईक नसताना.
    - (ii) एक शिरोबिंदू सामाईक असताना.
- वर्तुळाची स्पर्शिका काढणे.
  - ✻ वर्तुळाला वर्तुळावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.
    - (i) वर्तुळकेंद्राचा उपयोग करून.
    - (ii) वर्तुळकेंद्राचा उपयोग न करता.
  - ✻ वर्तुळाला त्याच्या बाहेरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.

जरा आठवूया.

खालील रचना आपण आधीच्या इयत्तांमध्ये शिकलो आहोत. त्या रचनांची उजळणी करा.

- दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून समांतर रेषा काढणे.
- दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे.
- त्रिकोणाच्या बाजू व कोन यांपैकी पुरेसे घटक दिले असता त्रिकोण काढणे.
- दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या संख्येएवढे समान भाग करणे.
- दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात विभाजन करणे.
- दिलेल्या कोनाशी एकरूप असलेला कोन काढणे.

इयत्ता नववीत तुम्ही शाळेच्या परिसराचा नकाशा तयार करण्याचा उपक्रम केला आहे. एखादी इमारत बांधण्यापूर्वी त्या इमारतीचा आराखडा तयार करतात. शाळेचा परिसर आणि त्याचा नकाशा, इमारत आणि तिचा आराखडा परस्परांशी समरूप असतात. भूगोल, वास्तुशास्त्र, यंत्रशास्त्र इ. क्षेत्रांमध्ये समरूप आकृत्या काढण्याची गरज असते. त्रिकोण ही सर्वांत साधी बंदिस्त आकृती आहे. म्हणून दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप त्रिकोण कसा काढता येतो, हे पाहूया.

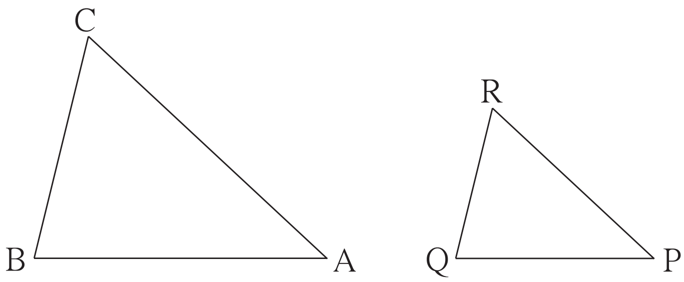
जाणून घेऊया.

समरूप त्रिकोणाची रचना

एका त्रिकोणाच्या बाजू दिल्या असता, त्याच्याशी समरूप असणारा आणि गुणोत्तराची अट पूर्ण करणारा त्रिकोण काढणे.

दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात आणि त्यांचे संगत कोन एकरूप असतात. याचा उपयोग करून दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप असणारा त्रिकोण काढता येतो.

उदा. (1) Δ ABC ~ Δ PQR, Δ ABC मध्ये AB = 5.4 सेमी, BC = 4.2 सेमी, AC = 6.0 सेमी. AB: PQ = 3:2 तर Δ ABC आणि Δ PQR काढा.



आकृती 4.1
कच्ची आकृती

प्रथम दिलेल्या मापांचा Δ ABC काढा.

Δ ABC आणि Δ PQR समरूप आहेत.

$\therefore$ त्यांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात आहेत.

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad .... \text{(I)}$$

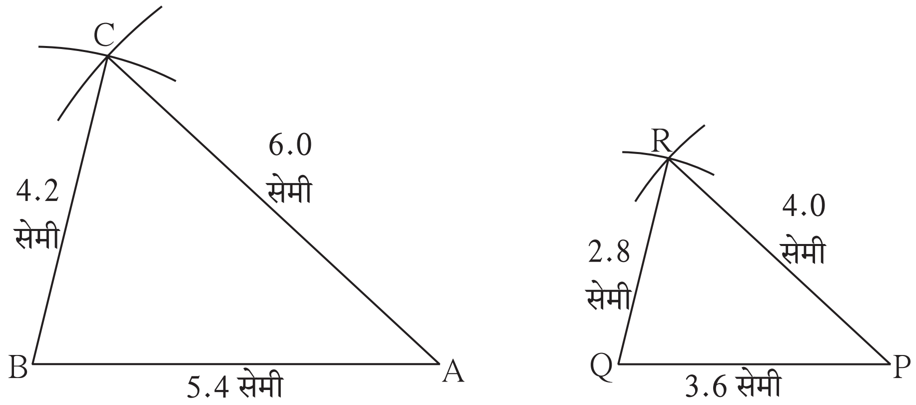
AB, BC, AC या बाजूंच्या लांबी माहीत असल्याने वरील समीकरणांवरून PQ, QR, PR या बाजूंच्या लांबी मिळतील.

समीकरण [I] वरून

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ PQ = 3.6 सेमी, QR = 2.8 सेमी आणि PR = 4.0 सेमी

Downloaded from https:// www.studiestoday.com



आकृती 4.2

Δ PQR च्या सर्व बाजूंच्या लांबी माहीत झाल्याने आपण त्या त्रिकोणाची रचना करू.

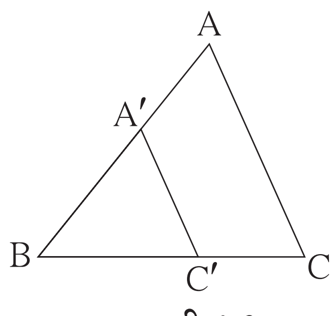
अधिक माहितीसाठी

काही वेळा, दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप असणारा जो त्रिकोण काढावयाचा आहे, त्याच्या बाजू मोजपट्टीने मोजून काढता येण्यासारख्या नसतात. अशावेळी, दिलेल्या रेषाखंडाचे 'दिलेल्या संख्येएवढे भाग करणे' या रचनेचा उपयोग करून त्रिकोणाच्या बाजू काढता येतात.

उदाहरणार्थ. बाजू AB ची लांबी $\frac{11.6}{3}$ सेमी असेल, तर 11.6 सेमी लांबीच्या रेषाखंडाचे 3 समान भाग करून AB रेषाखंड काढता येईल.

उदा. (1) मधील रचनेत दिलेल्या व काढावयाच्या त्रिकोणांत सामाईक शिरोबिंदू नव्हता. एक शिरोबिंदू सामाईक असेल तर त्रिकोण रचना पुढील उदाहरणात दाखवल्याप्रमाणे करणे सोयीचे असते.

उदा.(2) Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.
Δ ABC शी समरूप असणारा Δ A′BC′ असा काढा
की AB : A′B = 5:3



आकृती 4.3
कच्ची आकृती

विश्लेषण : B, A, A′ हे तसेच B, C, C′ हे एकरेषीय घेऊ.

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ $\therefore$ $\angle ABC = \angle A'BC'$

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$$

$\therefore$ Δ ABC च्या बाजू Δ A′BC′ च्या संगत बाजूंपेक्षा मोठ्या असणार.

$\therefore$ रेख BC चे 5 समान भाग केले तर त्यांतील तीन भागांएवढी रेख BC′ ची लांबी असेल.

Δ ABC काढून रेख BC वरील बिंदू B पासून तीन भागांएवढ्या अंतरावरील बिंदू हा बिंदू C′ असला पाहिजे. बिंदू C′ मधून रेख AC ला समांतर काढलेली रेषा, रेख BA ला ज्या बिंदूत छेदेल तो बिंदू A′ असेल.

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5} \text{ म्हणजेच, } \frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3}$$ .... व्यस्त क्रिया करून

रचनेच्या पायऱ्या:

(1) Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.

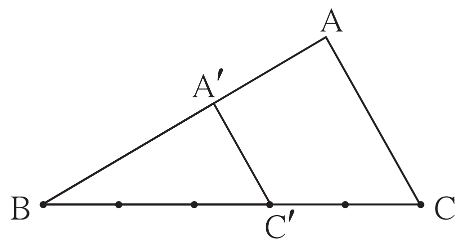
(2) रेख BC चे पाच समान भाग करा.

(3) बिंदू B पुढील तिसऱ्या बिंदूस C′ नाव द्या.

$\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$

(4) आता C′ मधून रेख CA ला समांतर रेषा काढा. ती रेख AB ला जेथे छेदते, त्या बिंदूला A′ नाव द्या.

(5) Δ ABC शी समरूप असणारा Δ A′BC′ हा इष्ट त्रिकोण आहे.

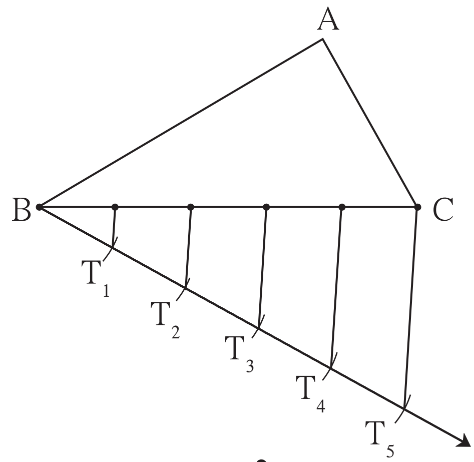


आकृती 4.4

टीप : BC चे पाच समान भाग करताना, रेषा BC च्या ज्या बाजूला A आहे त्याच्या विरुद्ध बाजूला B मधून एक किरण काढून असे भाग करणे सोयीचे असते.

त्या किरणावर $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ असे समान भाग घ्या.

T_5C जोडा व T_1, T_2, T_3, T_4, मधून रेख T_5C ला समांतर रेषा काढा.

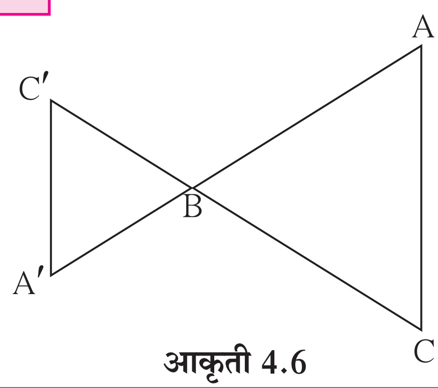


आकृती 4.5

विचार करूया.

समरूप त्रिकोण काढण्यासाठी सोबतच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणेही Δ A′BC′ काढता येईल.

या आकृतीप्रमाणे Δ A′BC′ काढावयाचा असेल तर रचनेच्या पायऱ्यांत कोणता बदल करावा लागेल?



आकृती 4.6

उदा.(3) Δ ABC शी समरूप असणारा Δ A′BC′ असा काढा, की AB : A′B = 5:7

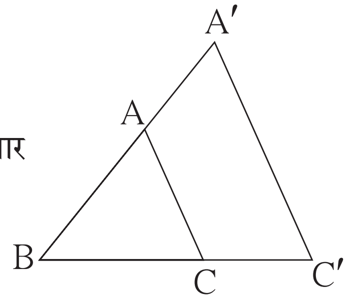
विश्लेषण : बिंदू B, A, A′ तसेच बिंदू B, C, C′ एकरेषीय घेऊ.

Δ ABC ~ Δ A′BC′ आणि AB : A′B = 5:7

$\therefore$ Δ ABC च्या बाजू Δ A′BC′ च्या संगत बाजूंपेक्षा लहान असणार

तसेच $\angle ABC \cong \angle A'BC'$

या बाबी विचारात घेऊन कच्ची आकृती काढू.



आकृती 4.7

कच्ची आकृती

आता $\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$

$\therefore$ रेख BC चे 5 समान भाग केले तर त्यांतील एका भागाच्या 7 पट रेख BC′ ची लांबी असेल.

$\therefore$ Δ ABC काढून रेख BC चे पाच समान भाग करू. बिंदू C′ हा किरण BC वर B पासून सात भाग अंतरावर असेल.

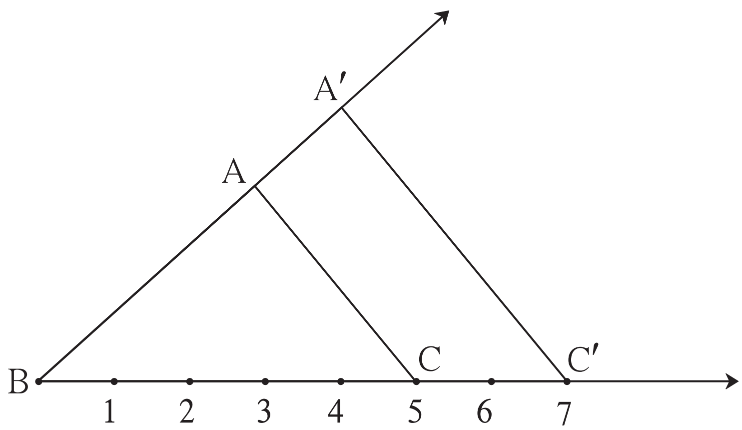
प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयानुसार, बिंदू C′ मधून बाजू AC ला समांतर रेषा काढली तर ती वाढवलेल्या किरण BA ला ज्या बिंदूत छेदते, तो A′ हा बिंदू असेल. रेख A′C′ काढून Δ A′BC′ हा अपेक्षित त्रिकोण मिळेल.

रचनेच्या पायऱ्या :

(1) Δ ABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढा.

(2) रेख BC चे 5 समान भाग करा. किरण BC वर बिंदू C′ असा घ्या, की रेख BC′ ची लांबी रेख BC च्या एका भागाच्या सात पट असेल.

(3) रेख AC ला C′ मधून समांतर रेषा काढा. ती रेषा किरण BA ला जेथे छेदते, त्या बिंदूला A′ हे नाव द्या. Δ A′BC′ हा Δ ABC शी समरूप असलेला इष्ट त्रिकोण आहे.



आकृती 4.8

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सरावसंच 4.1

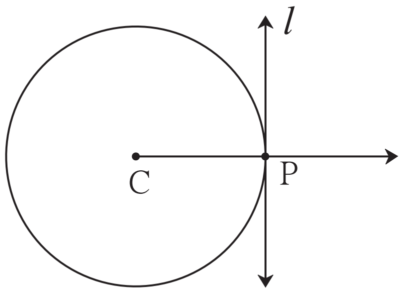
1. Δ ABC ~ Δ LMN , Δ ABC असा काढा, की AB = 5.5 सेमी, BC = 6 सेमी, CA = 4.5 सेमी आणि $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ तर Δ ABC व Δ LMN काढा.
2. Δ PQR ~ Δ LTR, Δ PQR मध्ये PQ = 4.2 सेमी, QR = 5.4 सेमी, PR = 4.8 सेमी आणि $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ तर Δ PQR व Δ LTR काढा.
3. Δ RST ~ Δ XYZ, Δ RST मध्ये RS = 4.5 सेमी, $\angle$ RST = 40°, ST = 5.7 सेमी आणि $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ तर Δ RST व Δ XYZ काढा.
4. Δ AMT ~ Δ AHE, Δ AMT मध्ये AM = 6.3 सेमी, $\angle$ TAM = 50°, AT = 5.6 सेमी आणि $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ तर Δ AHE काढा.

जाणून घेऊया.

दिलेल्या वर्तुळाला त्यावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढणे

(i) वर्तुळ केंद्राचा उपयोग करून.

विश्लेषण :



आकृती 4.9

समजा केंद्र C असलेल्या वर्तुळावरील P बिंदूतून जाणारी, रेषा l ही स्पर्शिका काढायची आहे.

त्रिज्येच्या बाह्यटोकाशी काढलेली लंबरेषा ही त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते या गुणधर्माचा उपयोग करू. समजा त्रिज्या CP काढली तर रेख CP $\perp$ रेषा l म्हणजे त्रिज्या CP ला बिंदू P मधून जाणारी लंब रेषा काढली की, ती अपेक्षित स्पर्शिका होईल.

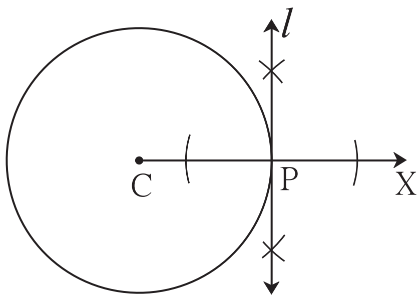
रेषेवरील दिलेल्या बिंदूतून जाणाऱ्या, त्या रेषेला लंब असणाऱ्या रेषेची रचना येथे करावी लागेल.म्हणून सोयीसाठी किरण CP काढून रेषा l ची रचना करू.

रचनेच्या पायऱ्या :

(1) केंद्र C असलेले एक वर्तुळ काढा, त्यावर P हा एक बिंदू घ्या.

(2) किरण CP काढा.

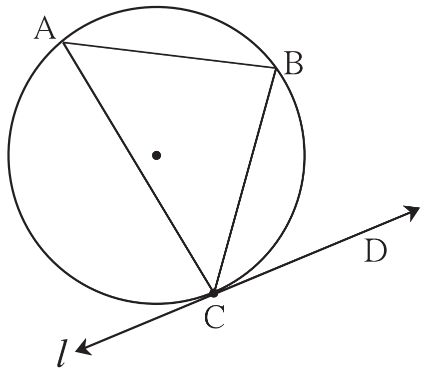
(3) बिंदू P मधून किरण CX ला लंब रेषा l काढा. रेषा l ही, P बिंदूतून जाणारी वर्तुळाची अपेक्षित स्पर्शिका आहे.



आकृती 4.10

ii) वर्तुळ केंद्राचा उपयोग न करता.

उदाहरण : कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. त्यावर C हा कोणताही एक बिंदू घ्या. वर्तुळ केंद्राचा उपयोग न करता, बिंदू C मधून जाणारी त्या वर्तुळाची स्पर्शिका काढा.



आकृती 4.11

विश्लेषण:

समजा, आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे रेषा l ही बिंदू C मधून जाणारी स्पर्शिका आहे. रेख CB ही जीवा आणि $\angle$ CAB हा अंतर्लिखित कोन काढला. स्पर्शिका-छेदिका कोनाच्या प्रमेयानुसार $\angle CAB \cong \angle BCD$.

स्पर्शिका छेदिका कोनाच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार,

जर $\angle CAB \cong \angle BCD$, तर रेषा l ही वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

म्हणून रेख CB ही वर्तुळाची जीवा आणि $\angle CAB$ हा अंतर्लिखित कोन काढू. $\angle BCD$ या कोनाची रचना अशी करू ,की $\angle BCD \cong \angle BAC$.

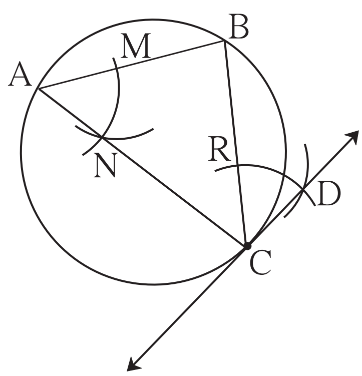
रेषा CD ही दिलेल्या वर्तुळाच्या बिंदू C मधून जाणारी त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असेल.

रचनेच्या पायऱ्या:

(1) एक वर्तुळ काढा. वर्तुळावर C हा कोणताही एक बिंदू घ्या.

(2) जीवा CB आणि अंतर्लिखित $\angle CAB$ काढा.

(3) कंपासमध्ये सोयिस्कर त्रिज्या घेऊन आणि बिंदू A केंद्र घेऊन $\angle BAC$ च्या भुजांना बिंदू M व बिंदू N मध्ये छेदणारा कंस काढा.



आकृती 4.12

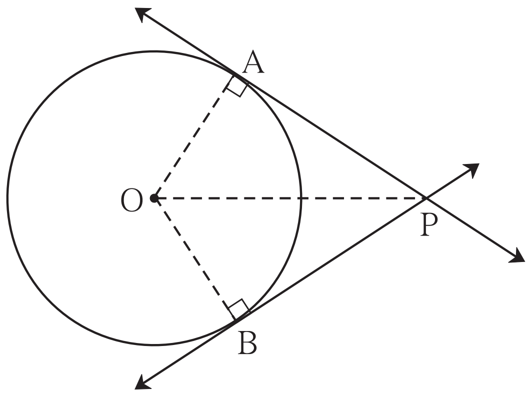
(4) तीच त्रिज्या आणि केंद्र C घेऊन, जीवा CB ला छेदणारा कंस काढा. छेदनबिंदूला R नाव द्या.

(5) कंपासमध्ये MN एवढी त्रिज्या घ्या. केंद्र R घेऊन आधी काढलेल्या कंसाला छेदणारा आणखी एक कंस काढा. त्या छेदनबिंदूला D नाव द्या. रेषा CD काढा.रेषा CD ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

(वरील आकृतीत $\angle$ MAN $\cong$ $\angle$ BCD याचे कारण ध्यानात घ्या. रेषाखंड MN व रेषाखंड RD काढल्यास बाबाबा कसोटीनुसार Δ MAN $\cong$ Δ RCD. $\therefore$ $\angle$ MAN $\cong$ $\angle$ BCD)

दिलेल्या वर्तुळाला त्याबाहेरील दिलेल्या बिंदूतून स्पर्शिका काढणे.

विश्लेषण :



आकृती 4.13

समजा, आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागात बिंदू P आहे.बिंदू P मधून काढलेल्या स्पर्शिका या वर्तुळाला बिंदू A आणि बिंदू B मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू A आणि बिंदू B यांची वर्तुळावरील स्थाने निश्चित करता आली, तर स्पर्शिका PA आणि PB काढता येतील. कारण त्रिज्या OA आणि OB काढल्या तर

त्रिज्या OA $\perp$ रेषा PA आणि त्रिज्या OB $\perp$ रेषा PB.

Δ OAP व Δ OBP हे काटकोन त्रिकोण असून, OP त्या दोन्हींचा कर्ण आहे. रेख OP व्यास असणारे वर्तुळ काढले तर ते केंद्र O असणाऱ्या वर्तुळाला ज्या बिंदूंत छेदेल, ते A आणि B असतील. कारण अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन काटकोन असतो.

रचनेच्या पायऱ्या:

(1) केंद्र O असलेले कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा.

(2) वर्तुळाच्या बाह्यभागात P हा एक बिंदू घ्या.

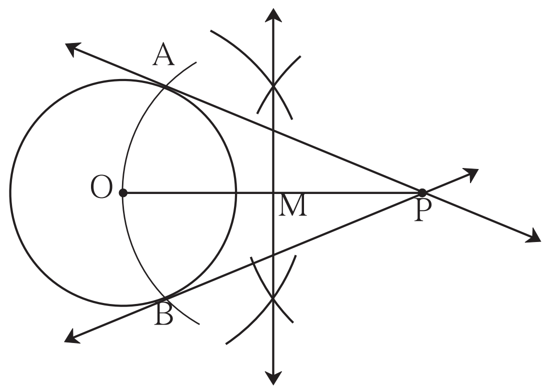
(3) रेख OP काढा. रेख OP चा लंबदुभाजक काढून मध्यबिंदू M मिळवा.

(4) केंद्र M व त्रिज्या OM घेऊन वर्तुळ कंस काढा.

(5) हा वर्तुळकंस दिलेल्या वर्तुळाला A आणि B बिंदूत छेदतो.

(6) रेषा PA व रेषा PB काढा.

रेषा PA व रेषा PB ह्या वर्तुळाच्या अपेक्षित स्पर्शिका आहेत.



आकृती 4.14

सरावसंच 4.2

1. केंद्र P व त्रिज्या 3.2 सेमी असलेल्या वर्तुळाला त्यावरील M बिंदूतून स्पर्शिका काढा.

2. 2.7 सेमी त्रिज्या असलेले वर्तुळ काढा. या वर्तुळाला त्यावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढा.

3. 3.6 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. या वर्तुळाला त्यावरील कोणत्याही बिंदूतून वर्तुळकेंद्र विचारात न घेता स्पर्शिका काढा.

4. 3.3 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा.त्यामध्ये 6.6 सेमी लांबीची जीवा PQ काढा. बिंदू P व बिंदू Q मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा. स्पर्शिकांबाबत तुमचे निरीक्षण नोंदवा.

5. 3.4 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा.त्यामध्ये 5.7 सेमी लांबीची जीवा MN काढा. बिंदू M व बिंदू N मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.
6. P केंद्र व 3.4 सेमी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 5.5 सेमी अंतरावर Q बिंदू घ्या. Q बिंदूतून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.
7. 4.1 सेमी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 7.3 सेमी अंतरावरील बिंदूतून स्पर्शिका काढा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. योग्य पर्याय निवडा :

(1) वर्तुळावरील दिलेल्या बिंदूतून वर्तुळाला काढता येणाऱ्या स्पर्शिकांची संख्या .... असते.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) वर्तुळाबाहेरील बिंदूतून वर्तुळाला जास्तीत जास्त .... स्पर्शिका काढता येतात.

(A) 2 (B) 1 (C) एक आणि एकच (D) 0

(3) जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$ तर ....

(A) ΔABC मोठा असेल. (B) ΔPQR मोठा असेल.

(C) दोन्ही त्रिकोण समान असतील. (D) निश्चित सांगता येणार नाही.

2. केंद्र O असलेले 3.5 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. वर्तुळ केंद्रापासून 5.7 सेमी अंतरावर बिंदू P घ्या. P बिंदूमधून वर्तुळाची स्पर्शिका काढा.
3. कोणतेही एक वर्तुळ काढा. त्यावर A हा बिंदू घेऊन त्यामधून वर्तुळाची स्पर्शिका वर्तुळकेंद्राचा उपयोग न करता काढा.
4. 6.4 सेमी व्यासाचे वर्तुळ काढा. वर्तुळकेंद्रापासून व्यासाएवढ्या अंतरावर बिंदू R घ्या. या बिंदूतून वर्तुळाच्या स्पर्शिका काढा.
5. केंद्र P असलेले वर्तुळ काढा. 100° मापाचा एक लघुकंस AB काढा. बिंदू A व बिंदू B मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.
6. केंद्र E असलेले 3.4 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. वर्तुळावर F बिंदू घ्या. बिंदू A असा घ्या, कि E-F-A आणि FA = 4.1 सेमी. बिंदू A मधून वर्तुळाला स्पर्शिका काढा.
7. जर $\Delta ABC \sim \Delta LBN$, ΔABC मध्ये AB = 5.1 सेमी, $\angle B = 40^\circ$, BC = 4.8 सेमी, $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ तर ΔABC व ΔLBN काढा.
8. ΔPYQ असा काढा की, PY = 6.3 सेमी, YQ = 7.2 सेमी, PQ = 5.8 सेमी. ΔXYZ हा ΔPYQ शी समरूप त्रिकोण असा काढा की, $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$.

4KFIAJ

5 निर्देशक भूमिती

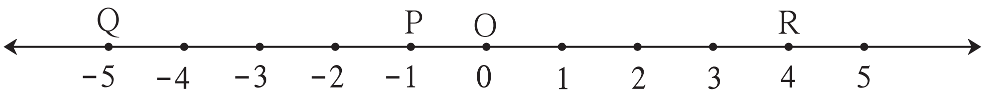
चला, शिकूया.

- अंतराचे सूत्र
- विभाजनाचे सूत्र
- रेषेचा चढ

जरा आठवूया.

संख्यारेषेवरील दोन बिंदूंतील अंतर कसे काढतात हे आपल्याला माहीत आहे.

P,Q आणि R बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे -1,-5 आणि 4 आहेत तर रेख PQ,रेख QR यांची लांबी काढा.



आकृती 5.1

बिंदू A आणि B यांचे निर्देशक x_1 आणि x_2 असतील, आणि $x_2 > x_1$ असेल तर
रेषाखंड AB ची लांबी = d(A,B) = $x_2 - x_1$
आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे बिंदू P,Q आणि R यांचे निर्देशक अनुक्रमे -1,-5 आणि 4 आहेत.

$\therefore$ d(P, Q) = $(-1)-(-5) = -1 + 5 = 4$

आणि d(Q, R) = $4 - (-5) = 4 + 5 = 9$

हीच संकल्पना वापरून आपण XY प्रतलातील,एकाच अक्षावर असणाऱ्या दोन बिंदूंतील अंतर काढू.

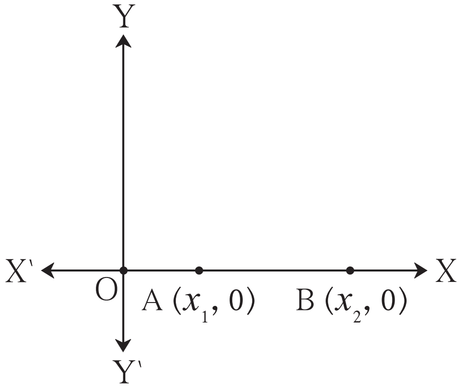
जाणून घेऊया.

(1) **एकाच अक्षावरील दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.**

एकाच अक्षावरील दोन बिंदू म्हणजे एकाच संख्यारेषेवरील दोन बिंदू होत. X अक्षावरील बिंदूंचे निर्देशक $(2, 0)$, $(\frac{-5}{2}, 0)$, $(8, 0)$ असे, तर Y अक्षावरील बिंदूंचे निर्देशक $(0, 1)$, $(0, \frac{17}{2})$, $(0, -3)$ असे असतात, हे ध्यानात घ्या.

X अक्षाचा ऋण निर्देशक दाखवणारा भाग किरण OX$'$ आहे व Y अक्षाचा ऋण निर्देशक दाखवणारा भाग किरण OY$'$ आहे.

i) X-अक्षावरील दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.

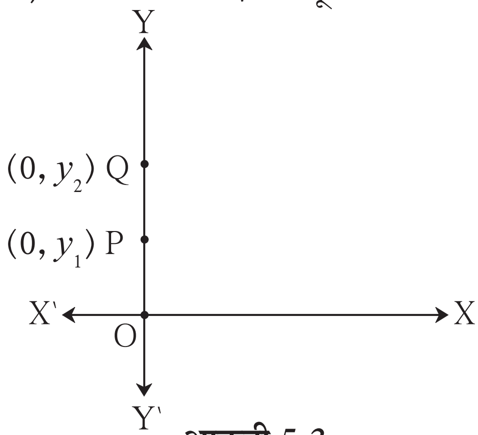


आकृती 5.2

वरील आकृतीत,
$A(x_1, 0)$ आणि $B(x_2, 0)$ हे दोन बिंदू X- अक्षावर असे आहेत की, $x_2 > x_1$

$\therefore$ $d(A, B) = x_2 - x_1$

ii) Y-अक्षावरील दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.

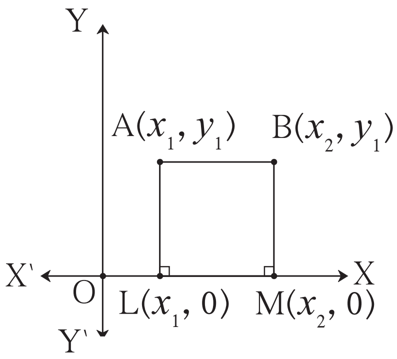


आकृती 5.3

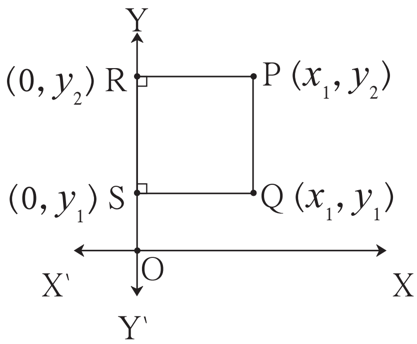
वरील आकृतीत,
$P(0, y_1)$ आणि $Q(0, y_2)$ हे दोन बिंदू Y- अक्षावर असे आहेत की, $y_2 > y_1$

$\therefore$ $d(P,Q) = y_2 - y_1$

2) दोन बिंदूंना जोडणारा XY प्रतलातील रेषाखंड एखाद्या अक्षाला समांतर असेल तर त्या दोन बिंदूंतील अंतर काढणे.



आकृती 5.4



आकृती 5.5

i) आकृतीत रेख AB हा X- अक्षाला समांतर आहे. म्हणून बिंदू A व बिंदू B चे y निर्देशक समान आहेत.
रेख AL आणि रेख BM हे X-अक्षावर लंब काढा.

$\therefore$ $\square$ABML हा आयत आहे.

$\therefore$ AB = LM

परंतु, $LM = x_2 - x_1$

$\therefore$ $d(A,B) = x_2 - x_1$

ii) आकृतीत रेख PQ हा Y- अक्षाला समांतर आहे. म्हणून बिंदू P व बिंदू Q चे x निर्देशक समान आहेत.
रेख PR आणि रेख QS हे Y-अक्षावर लंब काढा.

$\therefore$ $\square$PQSR हा आयत आहे.

$\therefore$ PQ = RS

परंतु, $RS = y_2 - y_1$

$\therefore$ $d(P,Q) = y_2 - y_1$

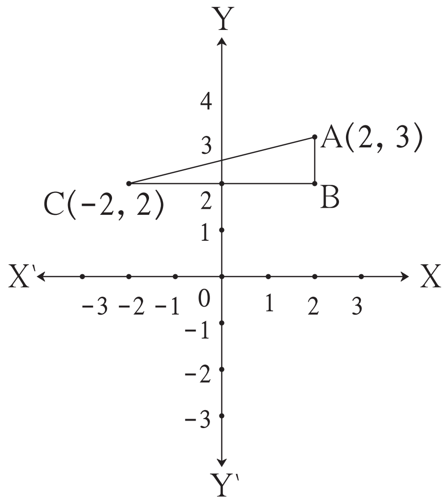
कृती :

आकृतीमध्ये रेख AB || Y-अक्ष आणि रेख CB || X-अक्ष असून A, C बिंदूंचे निर्देशक दिले आहेत.
AC काढण्यासाठी खालील चौकटी भरा.
Δ ABC हा काटकोन त्रिकोण आहे.
पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,
$(AB)^2 + (BC)^2 = \boxed{}$

AB, BC शोधण्यासाठी बिंदू B चे निर्देशक काढू.

CB || X- अक्ष $\therefore$ B चा y निर्देशक = $\boxed{}$

BA || Y- अक्ष $\therefore$ B चा x निर्देशक = $\boxed{}$



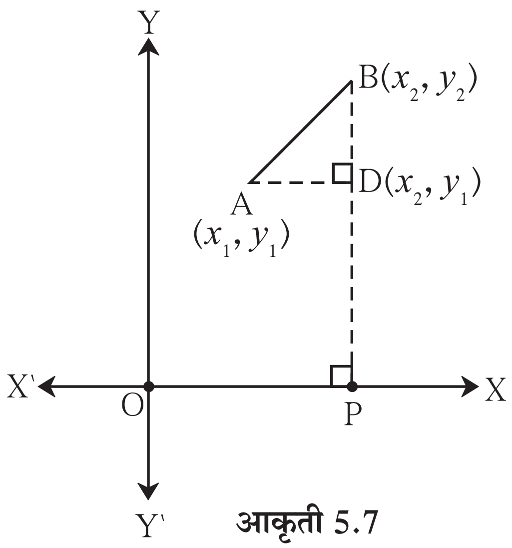
आकृती 5.6

AB = $\boxed{3} - \boxed{} = \boxed{}$ BC = $\boxed{} - \boxed{} = \boxed{4}$

$\therefore AC^2 = \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$ $\therefore AC = \boxed{\sqrt{17}}$

जाणून घेऊया.

अंतराचे सूत्र(Distance formula)



आकृती 5.7

आकृती 5.7 मध्ये, A(x_1, y_1) आणि B(x_2, y_2) हे XY प्रतलातील कोणतेही दोन बिंदू आहेत.
बिंदू B मधून BP हा X–अक्षावर लंब काढा तसेच बिंदू A मधून AD हा रेख BP वर लंब काढा.

रेख BP हा Y–अक्षाला समांतर आहे.

$\therefore$ बिंदू D चा x निर्देशक x_2 आहे.

रेख AD हा X–अक्षाला समांतर आहे.

$\therefore$ बिंदू D चा y निर्देशक y_1 आहे.

$\therefore$ AD = d(A, D) = $x_2 - x_1$,
BD = d(B, D) = $y_2 - y_1$

Δ ABD या काटकोन त्रिकोणात, $AB^2 = AD^2 + BD^2$

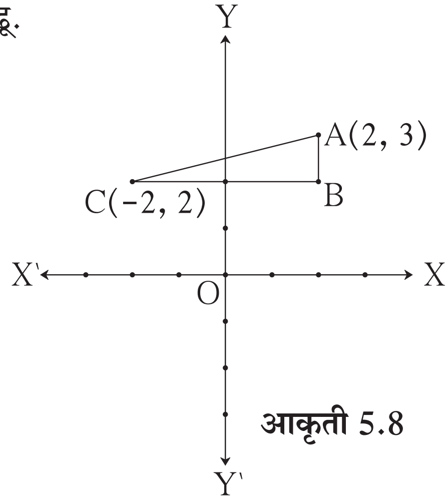
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

या निष्कर्षाला अंतराचे सूत्र असे म्हणतात.

हे लक्षात घ्या की, $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

मागील कृतीत आपण रेख AC ची लांबी काढण्यासाठी AB, BC या लांबी काढून पायथागोरसचे प्रमेय वापरले. आता अंतराचे सूत्र वापरून आपण त्याच रेषाखंडांच्या लांबी काढू.



आकृती 5.8

A(2, 3) आणि C(−2, 2) हे दिले आहे.

$A(x_1, y_1)$ आणि $C(x_2, y_2)$ मानू.

$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

$$AC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-2)^2+(2-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2+(-1)^2}$$

$$= \sqrt{16+1}$$

$$= \sqrt{17}$$

रेख AB || Y−अक्ष आणि रेख BC || X−अक्ष.

$\therefore$ बिंदू B चे निर्देशक (2, 2) आहेत.

$$\therefore\ AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+0} = 4$$

आकृती 5.1 मधील P व Q या बिंदूतील अंतर (−1) - (−5) = 4; असे आपण काढले होते. त्याच बिंदूंचे निर्देशक प्रतलात (−1, 0) व (−5, 0) हे असणार. अंतराचे वरील सूत्र वापरून P व Q मधील अंतर तेवढेच येईल, हे पडताळून पाहा.

हे लक्षात ठेवूया.

- आरंभबिंदू O चे निर्देशक (0, 0) असतात. म्हणून बिंदू P चे निर्देशक (x, y) असतील तर $d(O, P) = \sqrt{x^2+y^2}$.
- $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ हे दोन बिंदू XY प्रतलावर असतील तर

  $$d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

  म्हणजेच, $PQ^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) P(−1, 1), Q(5,−7) या दोन बिंदूंतील अंतर काढा.

उकल : $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ मानू.

$x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $x_2 = 5$, $y_2 = -7$

अंतराचे सूत्रानुसार $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{[5-(-1)]^2 + [(-7)-1]^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{36+64}$

$d(P, Q) = \sqrt{100} = 10$

∴ बिंदू P आणि Q मधील अंतर 10

उदा. (2) A(−3, 2), B(1, −2) आणि C(9, −10) हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उकल : जर d(A, B); d(B, C) आणि d(A, C) यांपैकी दोन अंतरांची बेरीज तिसऱ्या अंतराएवढी असेल, तरच बिंदू A, B, C एकरेषीय असतील.

∴ d(A, B), d(B, C) आणि d(A, C) काढू.

बिंदू A चे निर्देशक	बिंदू B चे निर्देशक	अंतराचे सूत्र
(−3, 2)	(1, −2)	$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	

$\therefore d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2 + [(-2)-2]^2}$ .... (अंतराच्या सूत्रावरून)

$= \sqrt{(1+3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{16+16}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ....(I)

$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2 + (-10+2)^2}$

$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$ ....(II)

आणि $d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2 + (-10-2)^2}$

$= \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2}$ ....(III)

$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ .... (I), (II) आणि (III) वरून

∴ d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)

∴ A, B, C हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

उदा. (3) P(6, -6), Q(3, -7) आणि R(3, 3) हे बिंदू एकरेषीय आहेत का ते ठरवा.

उकल : $PQ = \sqrt{(6-3)^2+(-6+7)^2}$ .... (अंतराचे सूत्र वापरून)

$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$ .... (I)

$QR = \sqrt{(3-3)^2+(-7-3)^2}$

$= \sqrt{(0)^2+(-10)^2} = \sqrt{100}$ .... (II)

$PR = \sqrt{(3-6)^2+(3+6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(9)^2} = \sqrt{90}$ .... (III)

(I), (II) आणि (III) वरून $\sqrt{10}$, $\sqrt{100}$ आणि $\sqrt{90}$ यांपैकी $\sqrt{100}$ ही सर्वांत मोठी संख्या आहे.

$\left(\sqrt{100}\right)$ आणि $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)$ या संख्या समान आहेत का ते पाहू.

यासाठी $\left(\sqrt{100}\right)^2$ आणि $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)^2$ यांची तुलना करा.

त्यावरून तुमच्या लक्षात येईल $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right) > \left(\sqrt{100}\right)$ $\therefore$ PQ + PR $\neq$ QR

$\therefore$ P(6, -6), Q(3, -7) आणि R(3, 3) हे बिंदू एकरेषीय नाहीत.

उदा. (4) (1, 7), (4, 2), (-1, -1) आणि (-4, 4) हे चौरसाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

उकल : जेव्हा चौकोनाच्या सर्व भुजा समान लांबीच्या आणि कर्ण समान लांबीचे असतात तेव्हा तो चौकोन चौरस असतो. $\therefore$ सर्व बाजूंच्या लांबी व कर्णांच्या लांबी अंतराच्या सूत्रावरून काढू.

समजा, A(1, 7), B(4, 2), C(-1, -1) आणि D(-4,4) हे दिलेले बिंदू आहेत.

$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

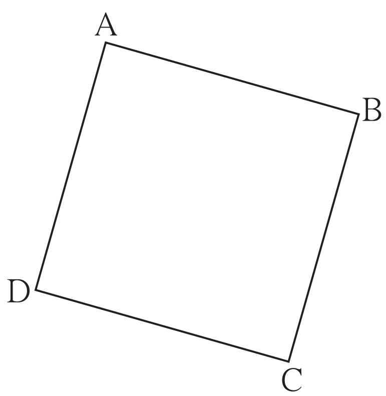
$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$



आकृती 5.9

$\therefore$ AB = BC = CD = DA आणि AC = BD

यावरून असे दिसते की, चौकोनाच्या चारही बाजूंची लांबी समान आहे तसेच दोन्ही कर्ण AC व BD यांची लांबी समान आहेत.

$\therefore$ (1,7), (4,2), (−1,−1) आणि (−4,4) या शिरोबिंदूंनी तयार झालेला चौकोन चौरस आहे.

उदा. (5) Y- अक्षावरील अशा बिंदूचे निर्देशक शोधा, की जो M (−5,−2)आणि N(3,2) पासून समान अंतरावर आहे.

उकल : समजा, Y- अक्षावरील बिंदू $P(0, y)$हा बिंदू M व N पासून समान अंतरावर आहे.

$$\therefore PM = PN \qquad \therefore PM^2 = PN^2$$

$$\therefore [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore 8y = -16 \quad \therefore y = -2$$

$\therefore$ M (−5, −2) आणि N (3, 2) या बिंदूंपासून समान अंतरावर असणाऱ्या Y- अक्षावरील बिंदूचे निर्देशक (0, −2) आहेत.

उदा. (6) A(−3, −4), B(−5, 0), C(3, 0) हे Δ ABC चे शिरोबिंदू आहेत. Δ ABC च्या परिकेंद्राचे निर्देशक शोधा.

उकल : समजा, बिंदू $P(a, b)$ हा Δ ABC चे परिकेंद्र आहे. $\therefore$ P हा बिंदू A, B, C पासून समदूर आहे.

$\therefore PA^2 = PB^2 = PC^2$ .... (I) $\quad \therefore PA^2 = PB^2$

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore -4a + 8b = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \text{ .... (II)}$$

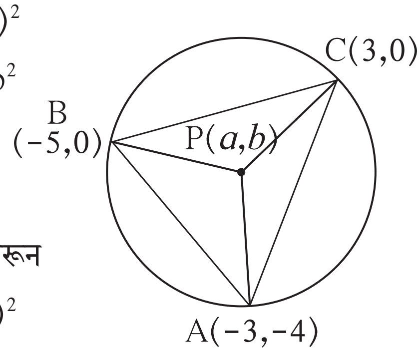
तसेच $PA^2 = PC^2$ .... (I) वरून

$$\therefore (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore 12a + 8b = -16$$

$$\therefore 3a + 2b = -4 \text{ .... (III)}$$



आकृती 5.10

समीकरण (II) आणि (III) सोडवून $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ परिकेंद्राचे निर्देशक $(-1, -\frac{1}{2})$ आहेत.

उदा. (7) बिंदू (x, y) हा $(7, 1)$ आणि $(3, 5)$ यांच्यापासून समदूर असेल तर $y = x-2$ दाखवा.

उकल : समजा, $P(x, y)$ हा बिंदू $A(7, 1)$ आणि $B(3, 5)$ यांच्यापासून समदूर आहे.

$$\therefore AP = BP$$
$$\therefore AP^2 = BP^2$$
$$\therefore (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$
$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$
$$\therefore -8x + 8y = -16$$
$$\therefore x - y = 2$$
$$\therefore y = x - 2$$

उदा. (8) बिंदू $A(2,-2)$ आणि बिंदू $B(-1, y)$ यांतील अंतर 5 आहे, तर y ची किंमत काढा.

उकल : $\therefore AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$ .... अंतराच्या सूत्रावरून

$\therefore 5^2 = (-3)^2 + (y+2)^2$

$\therefore 25 = 9 + (y+2)^2$

$\therefore 16 = (y+2)^2$

$\therefore y + 2 = \pm\sqrt{16}$

$\therefore y + 2 = \pm 4$

$\therefore y = 4 - 2$ किंवा $y = -4 - 2$

$\therefore y = 2$ किंवा $y = -6$

$\therefore y$ ची किंमत 2 किंवा -6 आहे.

सरावसंच 5.1

1. खाली दिलेल्या बिंदूंच्या प्रत्येक जोडीतील अंतर काढा.

   (1) $A(2, 3), B(4, 1)$ (2) $P(-5, 7), Q(-1, 3)$ (3) $R(0, -3), S(0, \frac{5}{2})$

   (4) $L(5, -8), M(-7, -3)$ (5) $T(-3, 6), R(9, -10)$ (6) $W(\frac{-7}{2}, 4), X(11, 4)$

2. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत हे ठरवा.

   (1) $A(1, -3), B(2, -5), C(-4, 7)$ (2) $L(-2, 3), M(1, -3), N(5, 4)$

   (3) $R(0, 3), D(2, 1), S(3, -1)$ (4) $P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)$

3. X- अक्षावरील असा बिंदू शोधा की जो बिंदू $A(-3, 4)$ आणि $B(1, -4)$ यांच्यापासून समदूर आहे.

4. $P(-2, 2), Q(2, 2)$ आणि $R(2, 7)$ हे काटकोन त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत, हे पडताळून पाहा.

5. P(2, −2), Q(7, 3), R(11, −1) आणि S (6, −6) हे शिरोबिंदू असलेला चौकोन समांतरभुज आहे हे दाखवा.
6. A(−4, −7), B(−1, 2), C(8, 5) आणि D(5, −4) हे ABCD या समभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा.
7. जर बिंदू L(x, 7) आणि M(1, 15) यातील अंतर 10 असेल, तर x ची किंमत काढा.
8. A(1, 2), B(1, 6), C($1 + 2\sqrt{3}$, 4) हे समभुज त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा.

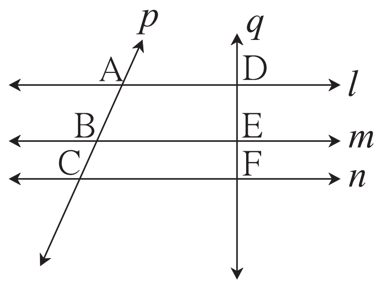
जरा आठवूया.

तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदांचा गुणधर्म :

आकृतीत रेषा l || रेषा m || रेषा n,

रेषा p व q या छेदिका आहेत.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$



आकृती 5.11

जाणून घेऊया.

रेषाखंडांचे विभाजन (Division of a line segment)

आकृती 5.12

आकृतीत, AP = 6 आणि PB = 10.

$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

हेच वेगळ्या शब्दांत 'बिंदू P हा रेख AB चे 3:5 या गुणोत्तरात विभाजन करतो', असे म्हणतात.

जेव्हा एखाद्या रेषाखंडावरील बिंदू त्याच रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात विभाजन करतो तेव्हा त्या विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक कसे काढतात ते पाहू.

जाणून घेऊया.

विभाजनाचे सूत्र (Section formula)

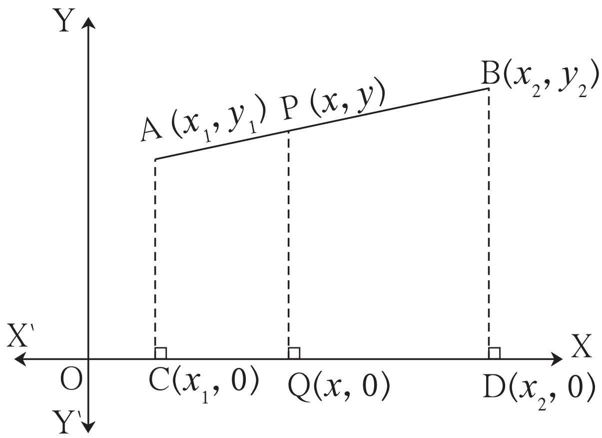
आकृती 5.13 मध्ये, XY प्रतलातील रेख AB वरील बिंदू P, रेख AB चे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ आणि $P(x, y)$ मानू.
रेख AC, रेख PQ आणि रेख BD हे X-अक्षावर लंब रेषाखंड काढले.

$\therefore C(x_1, 0)$; $Q(x, 0)$
आणि $D(x_2, 0)$.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} CQ = x - x_1 \\ \text{आणि } QD = x_2 - x \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

तसेच रेख AC || रेख PQ || रेख BD.



आकृती 5.13

$\therefore$ तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदांच्या गुणधर्माने, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{m}{n}$

आता, $CQ = x - x_1$ आणि $QD = x_2 - x$ .... (I) वरून

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

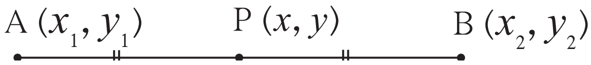
$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

याचप्रमाणे बिंदू A, P आणि B मधून Y- अक्षावर लंब काढून वरील प्रमाणेच कृती करून आपल्याला $y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$ मिळेल.

$\therefore$ बिंदू $A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$ असतात.

रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे सूत्र (Mid-point formula)

$A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ हे दोन बिंदू असून बिंदू $P(x, y)$ हा रेख AB चा मध्यबिंदू असेल, तर $m = n$ आता विभाजन सूत्रानुसार, x व y च्या किमती लिहू.



आकृती 5.14

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \because \ m = n$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \because \ m = n$$

$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ P या मध्यबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ हे आहेत. यालाच **मध्यबिंदूचे सूत्र** असे म्हणतात.

आपण मागील इयत्तेत दोन परिमेय संख्या a आणि b संख्यारेषेवर दाखवून, त्यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचा $\frac{a+b}{2}$ हा मध्यबिंदू असतो हे दाखवले होते. तो निष्कर्ष म्हणजे आता मिळालेल्या सूत्राचा विशिष्ट प्रकार आहे. हे लक्षात घ्या.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) जर A(3,5) आणि B(7,9) असून बिंदू Q रेख AB चे 2:3 या गुणोत्तरात विभाजन करत असेल, तर Q बिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल : दिलेल्या उदाहरणात $(x_1, y_1) = (3, 5)$

आणि $(x_2, y_2) = (7, 9)$ मानू.

तसेच, $m : n = 2:3$

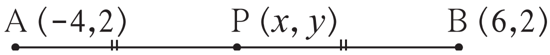
रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times7 + 3\times3}{2+3} = \frac{23}{5} \qquad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times9 + 3\times5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ बिंदू Q चे निर्देशक $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

उदा.(2) A(−4,2) B(6,2) या रेषाखंडांचा बिंदू P हा मध्यबिंदू आहे. तर P बिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल :



आकृती 5.15

$(-4, 2) = (x_1, y_1)$; $(6, 2) = (x_2, y_2)$ आणि बिंदू P चे निर्देशक (x, y) मानू.

$\therefore$ मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore$ मध्यबिंदू P चे निर्देशक (1,2) येतील.

जरा आठवूया.

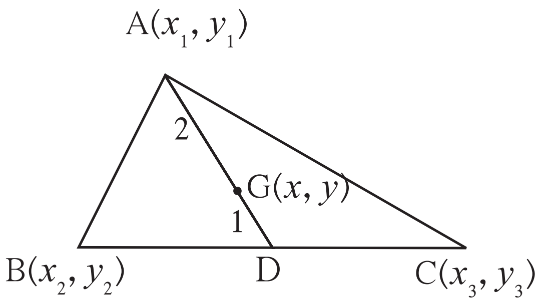
आपल्याला माहीत आहे की, त्रिकोणाच्या मध्यगा एकसंपाती असतात.
संपातबिंदू (centroid) मध्यगेचे 2:1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

जाणून घेऊया.

मध्यगासंपातबिंदूचे सूत्र (Centroid formula)

त्रिकोणाच्या तिन्ही शिरोबिंदूंचे निर्देशक दिले असता विभाजन सूत्राचा वापर करून मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक कसे काढता येतात ते आपण पाहू.

समजा, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ हे Δ ABC चे शिरोबिंदू असून रेख AD ही Δ ABC ची मध्यगा आहे. बिंदू $G(x, y)$ हा त्या त्रिकोणाचा मध्यगासंपातबिंदू आहे.
बिंदू D हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे.



आकृती 5.16

$\therefore$ बिंदू D चे निर्देशक $x = \frac{x_2 + x_3}{2}$, $y = \frac{y_2 + y_3}{2}$ .... रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूच्या सूत्रानुसार

बिंदू $G(x, y)$ हा Δ ABC चा मध्यगासंपातबिंदू आहे. $\therefore$ AG : GD = 2 : 1

$\therefore$ रेषाखंडाच्या विभाजनसूत्रानुसार,

$$x = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

म्हणजेच, शिरोबिंदू (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ असतात.

यालाच **मध्यगासंपातबिंदूचे सूत्र** म्हणतात.

हे लक्षात ठेवूया.

- विभाजनाचे सूत्र

  (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) या दोन भिन्न बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ असतात.

- मध्यबिंदूचे सूत्र

  (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) या दोन भिन्न बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ असतात.

- मध्यगासंपातबिंदूचे सूत्र

  (x_1, y_1), (x_2, y_2) आणि (x_3, y_3) हे त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूचे निर्देशक असतील तर मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ असतात.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

सोडवलेली उदाहरणे

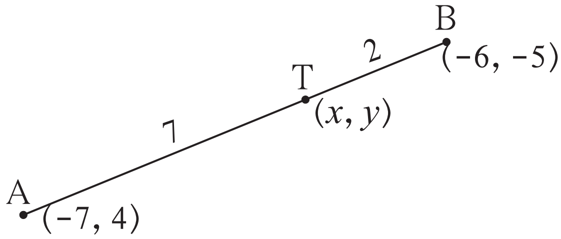
उदा. (1) A(−7,4) आणि B(−6,−5) असून बिंदू T हा रेख AB चे 7:2 या गुणोत्तरात विभाजन करतो, तर T बिंदूचे निर्देशक काढा.

उकल : समजा, T चे निर्देशक (x, y) आहेत.

∴ रेषाखंडाच्या विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$



आकृती 5.17

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

∴ T बिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ येतील.

उदा. (2) बिंदू P(−4, 6) हा A(−6, 10) आणि B(r, s) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला 2:1 या गुणोत्तरात विभागतो, तर बिंदू B चे निर्देशक काढा.

उकल : रेषाखंड विभाजनाच्या सूत्रानुसार

$$-4 = \frac{2\times r + 1\times(-6)}{2+1}$$

$$\therefore \quad -4 = \frac{2r-6}{3}$$

$$\therefore \quad -12 = 2r - 6$$

$$\therefore \quad 2r = -6$$

$$\therefore \quad r = -3$$

$$6 = \frac{2\times s + 1\times 10}{2+1}$$

$$\therefore \quad 6 = \frac{2s+10}{3}$$

$$\therefore \quad 18 = 2s + 10$$

$$\therefore \quad 2s = 8$$

$$\therefore \quad s = 4$$

∴ बिंदू B चे निर्देशक (−3, 4) आहेत.

उदा. (3) A(15,5), B(9,20) आणि P(11,15) असून A−P−B. तर बिंदू P हा रेख AB चे कोणत्या गुणोत्तरात विभाजन करतो, ते काढा.

उकल : बिंदू P(11,15) रेख AB चे $m : n$ या गुणोत्तरात विभाजन करतो, असे मानू.

∴ विभाजनाच्या सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$\therefore\ 11 = \frac{9m+15n}{m+n}$$

$$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$$

$$\therefore\ 2m = 4n$$

$$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

$\therefore$ विभाजन गुणोत्तर 2 : 1 आहे.

याप्रमाणे y – निर्देशकांच्या किमती घालून येणारे गुणोत्तर किती येते ते काढा. तुमचा निष्कर्ष लिहा.

उदा. (4) बिंदू A (2,−2) आणि B(−7,4) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे त्रिभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

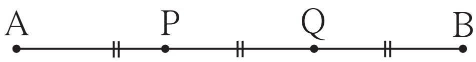
(रेषाखंडावरील जे दोन बिंदू त्या रेषाखंडाचे तीन समान भाग करतात, त्या बिंदूंना त्या रेषाखंडाचे त्रिभाजक बिंदू म्हणतात.)

उकल : समजा, बिंदू P आणि Q हे बिंदू A आणि बिंदू B यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे त्रिभाजक बिंदू आहेत. म्हणजेच बिंदू P आणि Q मुळे रेख AB चे तीन समान भाग होतात.

AP = PQ = QB .... (I)

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PQ+QB} = \frac{AP}{AP+AP} = \frac{AP}{2AP} = \frac{1}{2}$$ .... (I) वरून

बिंदू P रेख AB चे 1:2 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.



आकृती 5.18

$$\text{P चा } x \text{ निर्देशक} = \frac{1\times(-7)+2\times 2}{1+2} = \frac{-7+4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\text{P चा } y \text{ निर्देशक} = \frac{1\times 4+2\times(-2)}{1+2} = \frac{4-4}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

तसेच Q बिंदू रेख AB चे 2:1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो. म्हणजे $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1}$

$$\text{Q चा } x \text{ निर्देशक} = \frac{2\times(-7)+1\times 2}{2+1} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$\text{Q चा } y \text{ निर्देशक} = \frac{2\times 4+1\times -2}{2+1} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$\therefore$ रेषाखंडाच्या त्रिभाजक बिंदूंचे निर्देशक (−1, 0), (−4, 2) आहेत.

अधिक माहितीसाठी :

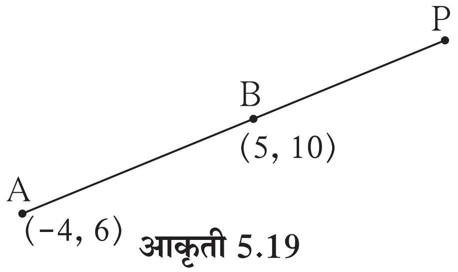
A आणि B या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे बाह्यविभाजन कसे करतात पाहा.

A(−4, 6), B(5, 10) असे बिंदू असतील तर AB रेषाखंडाचे 3:1 या गुणोत्तरामध्ये बाह्यविभाजन करणाऱ्या बिंदू P चे निर्देशक कसे काढता येतात ते पाहा.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ म्हणजे AP, PB पेक्षा मोठी असून A−B−P आहे.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ म्हणजेच AP = 3k, BP = k, तर AB = 2k

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$$



आकृती 5.19

आता बिंदू B हा रेषाखंड AP चे 2 : 1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो.

A व B चे निर्देशक दिले असता P चे निर्देशक काढायला आपण शिकलो आहोत.

सरावसंच 5.2

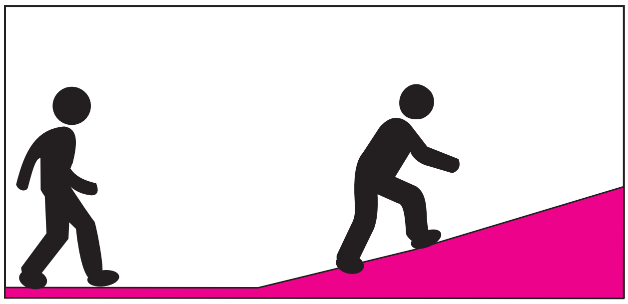
1. जर P बिंदू हा A(−1,7) आणि B(4,−3) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचे 2 : 3 या गुणोत्तरात विभाजन करत असेल तर P बिंदूचे निर्देशक काढा.
2. खालील प्रत्येक उदाहरणात रेख PQ चे a : b या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या A या बिंदूचे निर्देशक काढा.
   (1) P(−3, 7), Q(1, −4), a : b = 2 : 1
   (2) P(−2, −5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4
   (3) P(2, 6), Q(−4, 1), a : b = 1 : 2
3. P−T−Q असून, बिंदू T(−1, 6) हा बिंदू P(−3, 10) आणि बिंदू Q(6, −8) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला कोणत्या गुणोत्तरात विभागतो ?
4. रेख AB हा वर्तुळाचा व्यास असून बिंदू P हे केंद्र आहे. A(2, −3)आणि P (−2, 0) असल्यास B बिंदूचे निर्देशक काढा.
5. बिंदू A(8, 9) आणि B(1, 2) यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे P(k, 7) हा बिंदू कोणत्या गुणोत्तरात विभाजन करतो ते काढा आणि k ची किंमत काढा.
6. (22, 20) आणि (0, 16) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.
7. खाली त्रिकोणांचे शिरोबिंदू दिलेले आहेत. प्रत्येक त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातबिंदूचे निर्देशक काढा.
   (1)(−7, 6), (2, −2), (8, 5)
   (2) (3, −5), (4, 3), (11, −4)
   (3) (4, 7), (8, 4), (7, 11)

8. Δ ABC चा G हा मध्यगासंपात आहे. A, B व G यांचे निर्देशक अनुक्रमे (−14, −19), (3, 5) आणि (−4, −7) आहेत. तर C बिंदूचे निर्देशक काढा.
9. मध्यगासंपात G (1, 5) असलेल्या त्रिकोणाचे A (h, −6), B (2, 3) आणि C (−6, k) शिरोबिंदू आहेत, तर h आणि k ची किंमत काढा.
10. बिंदू A (2, 7) आणि B(−4, −8) यांना जोडणाऱ्या रेख AB चे त्रिभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.
11. A (−14, −10), B(6, −2) असलेल्या रेख AB चे चार एकरूप रेषाखंडांत विभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.
12. A (20, 10), B(0, 20) असलेल्या रेख AB चे पाच एकरूप रेषाखंडांत विभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

जाणून घेऊया.

रेषेचा चढ (Slope of a line)

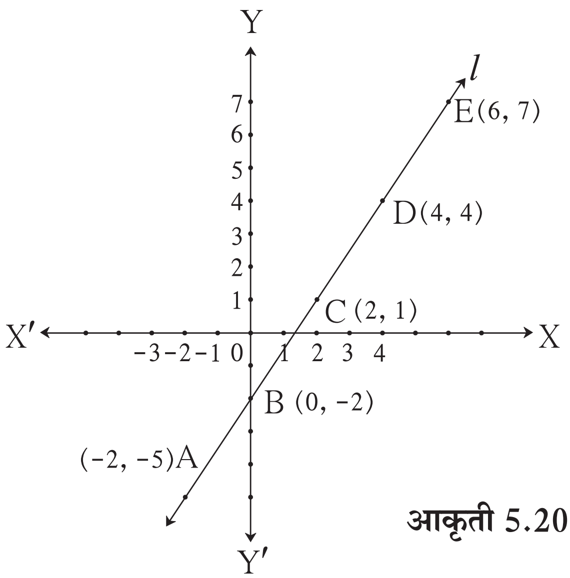
आपण सपाट जमिनीवर चालतो, तेव्हा श्रम करावे लागत नाहीत. चढावर चढताना थोडे श्रम करावे लागतात, माणसाला दम लागू शकतो. चढाच्या रस्त्यावरून जाताना गुरूत्वाकर्षण बलाच्या विरुद्ध काम करावे लागते, हे आपण विज्ञानात पाहिले आहे.



प्रतलीय निर्देशक भूमितीत रेषेचा चढ ही एक महत्वाची संकल्पना आहे. खाली दिलेल्या कृतीतून ही संकल्पना समजून घेऊ.

कृती I :

सोबतच्या आकृतीत A(−2, −5), B(0,−2), C(2,1), D(4,4), E(6,7) हे रेषा l चे बिंदू आहेत. या निर्देशकांचा वापर करून तयार केलेल्या पुढील सारणीचे निरीक्षण करा.



आकृती 5.20

अ. क्र.	पहिला बिंदू	दुसरा बिंदू	पहिल्या बिंदूचे निर्देशक (x_1, y_1)	दुसऱ्या बिंदूचे निर्देशक (x_2, y_2)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
1	C	E	(2, 1)	(6, 7)	$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2	A	D	(-2, -5)	(4, 4)	$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
3	D	A	(4, 4)	(-2, -5)	$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$
4	B	C	--	--	--
5	C	A	--	--	--
6	A	C	--	--	--

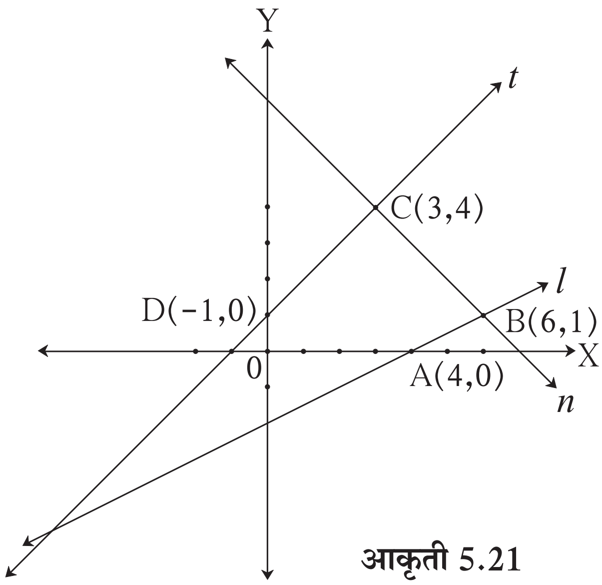
सारणीतील उरलेल्या चौकटी भरून सारणी पूर्ण करा. याप्रमाणे रेषा l वरील बिंदूंच्या आणखी काही जोड्या घ्या आणि प्रत्येक जोडीसाठी $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ हे गुणोत्तर काढा.

या कृतीतून लक्षात येते की, l रेषेच्या (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) या कोणत्याही दोन बिंदूंसाठी $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ हे गुणोत्तर स्थिर आहे.

रेषा l चे (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) हे कोणतेही दोन बिंदू असतील, तर $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ह्या स्थिर गुणोत्तराला रेषा l चा चढ म्हणतात.

रेषेचा चढ सामान्यपणे m या अक्षराने दाखवतात.

$$\therefore \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



आकृती 5.21

कृती II : आकृतीत रेषा l, t आणि n व त्यांवरील काही बिंदू दिले आहेत. त्यावरून त्या रेषांचे चढ काढा.

तुमच्या लक्षात येईल की,

(1) रेषा l आणि रेषा t यांचे चढ धन आहेत.

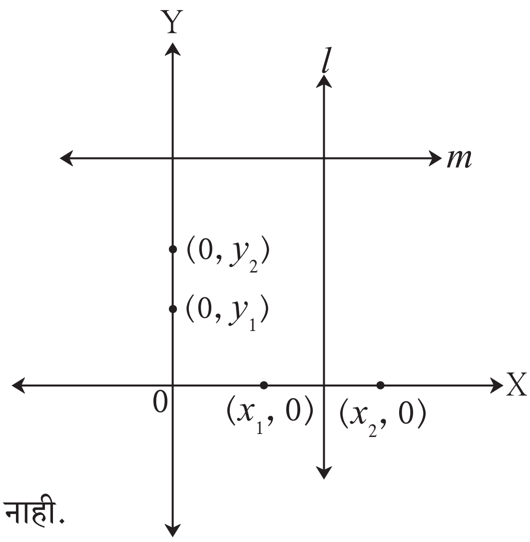
(2) रेषा n चा चढ ऋण आहे.

(3) रेषा t चा चढ, रेषा l च्या चढापेक्षा जास्त आहे.

(4) X- अक्षाच्या धन दिशेशी लघुकोन करणाऱ्या l व t या रेषांचे चढ धन आहेत.

(5) X- अक्षाच्या धन दिशेशी विशालकोन करणाऱ्या n या रेषेचा चढ ऋण आहे.

X-अक्ष, Y-अक्ष आणि अक्षांना समांतर रेषांचे चढ.



आकृती 5.22

आकृती 5.22 मध्ये, $(x_1, 0)$ आणि $(x_2, 0)$ हे X- अक्षाचे दोन बिंदू आहेत.

X- अक्षाचा चढ $= \dfrac{0-0}{x_2-x_1} = 0$

तसेच, $(0, y_1)$ आणि $(0, y_2)$ हे Y- अक्षाचे दोन बिंदू आहेत.

Y- अक्षाचा चढ $= \dfrac{y_2-y_1}{0-0} = \dfrac{y_2-y_1}{0}$,

परंतु 0 ने भागता येत नसल्याने Y- अक्षाचा चढ ठरविता येत नाही.

याप्रमाणेच रेषा m सारख्या X- अक्षाला समांतर असलेल्या कोणत्याही रेषेचा चढ काढून पाहा. तो शून्य येईल. तसेच, रेषा l सारख्या Y- अक्षाला समांतर असलेल्या रेषेचा चढ ठरविता येत नाही, असे दिसेल.

रेषेचा चढ – त्रिकोणमितीतील गुणोत्तर वापरून

आकृती 5.23 मध्ये, $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ हे रेषा l वरील दोन बिंदू आहेत.

रेषा l ही X अक्षाला T बिंदूत छेदते.

रेख QS $\perp$ X- अक्ष, रेख PR $\perp$ रेख QS $\therefore$ रेख PR $\parallel$ रेख TS .... संगत कोन कसोटी

$\therefore$ QR $= y_2 - y_1$ आणि PR $= x_2 - x_1$

$$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad .... \text{(I)}$$

रेषा TQ ही X- अक्षाशी θ कोन करते.

$$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \tan\theta \quad .... \text{(II)}$$

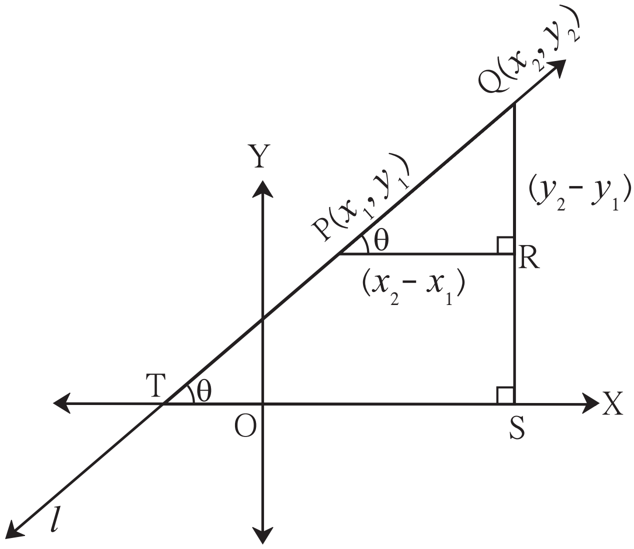
$\therefore$ (I) व (II) वरून, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

$\therefore$ $m = \tan\theta$

आता रेख PR || रेख TS, छेदिका रेषा l

$\therefore$ $\angle QPR = \angle QTS$ .... संगतकोन

यावरून, रेषेने X-अक्षाच्या धन दिशेशी केलेल्या कोनाचे **टॅन** गुणोत्तर म्हणजे त्या रेषेचा चढ होय, अशीही चढाची व्याख्या करता येते.



आकृती 5.23

दोन रेषांचा चढ समान असतो तेव्हा त्या रेषा X- अक्षाच्या धन दिशेशी समान मापाचे कोन करतात.

$\therefore$ त्या दोन रेषा समांतर असतात.

समांतर रेषांचा चढ (Slope of parallel lines)

कृती :

आकृती 5.24 मध्ये रेषा l आणि रेषा t या दोन्ही रेषांनी X- अक्षाच्या धन दिशेशी केलेला कोन θ आहे.

$\therefore$ रेषा l || रेषा t .... संगत कोन कसोटी

रेषा l वरील बिंदू A(-3, 0) आणि बिंदू B(0, 3) विचारात घ्या. रेषा AB चा चढ काढा.

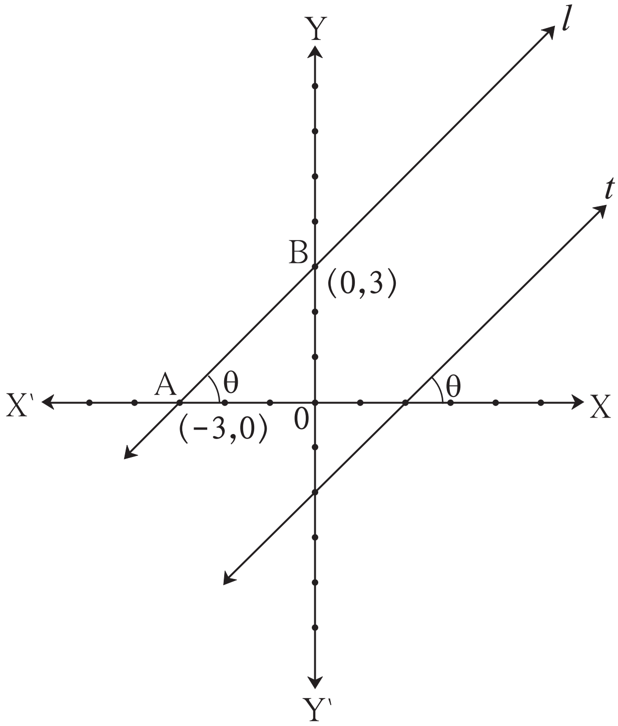
रेषा AB चा चढ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{} - \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$= \boxed{}$$

याचप्रमाणे रेषा t वरील सोयिस्कर बिंदू घेऊन तिचा चढ काढा.

यावरून समांतर रेषांचे चढ समान असतात याचा पडताळा तुम्ही घेऊ शकाल.



आकृती 5.24

या ठिकाणी $\theta = 45^\circ$ आहे.

चढ, $m = \tan\theta$ हे वापरूनही दोन्ही समांतर रेषांचे चढ समान येतात हे पडताळून पाहा.

याप्रमाणे $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$ घेऊन समांतर रेषांचे चढ समान असतात याचा पडताळा घ्या.

हे लक्षात ठेवूया.

X– अक्षाचा किंवा X– अक्षाला समांतर रेषेचा चढ शून्य असतो.

Y– अक्षाचा किंवा Y– अक्षाला समांतर रेषेचा चढ ठरविता येत नाही.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) A (–3, 5), आणि B (4, –1) या बिंदूंतून जाणाऱ्या रेषेचा चढ काढा.

उकल : समजा, $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $y_1 = 5$, $y_2 = -1$

$\therefore$ रेषा AB चा चढ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-1-5}{4-(-3)} = \dfrac{-6}{7}$

उदा. (2) P(–2, 3), Q(1, 2), R(4, 1) हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उकल : P(–2, 3), Q(1, 2) आणि R(4, 1) हे दिलेले बिंदू आहेत.

रेषा PQ चा चढ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-3}{1-(-2)} = -\dfrac{1}{3}$

रेषा QR चा चढ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-2}{4-1} = -\dfrac{1}{3}$

रेषा PQ आणि रेषा QR चा चढ समान आहे.

पण बिंदू Q दोन्ही रेषांवर आहे.

$\therefore$ बिंदू P, Q, R हे एकरेषीय आहेत.

उदा. (3) जर P(k, 0) आणि Q(–3, –2),हे दोन बिंदू जोडणाऱ्या रेषेचा चढ $\dfrac{2}{7}$ असेल, तर k ची किंमत काढा.

उकल : P(k, 0) आणि Q(–3, –2)

रेषा PQ चा चढ $= \dfrac{-2-0}{-3-k} = \dfrac{-2}{-3-k}$

रेषा PQ चा चढ $\dfrac{2}{7}$ दिला आहे.

$\therefore \dfrac{-2}{-3-k} = \dfrac{2}{7}$ $\qquad \therefore k = 4$

उदा. (4) A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) आणि D (7, 3) हे □ ABCD चे शिरोबिंदू असतील तर □ ABCD समांतरभुज चौकोन आहे हे दाखवा.

उकल : तुम्हास माहीत आहे की, रेषेचा चढ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

रेषा AB चा चढ = $\frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$ .... (I)

रेषा BC चा चढ = $\frac{4-2}{9-8} = 2$ .... (II)

रेषा CD चा चढ = $\frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2}$ .... (III)

रेषा DA चा चढ = $\frac{3-1}{7-6} = 2$ .... (IV)

रेषा AB चा चढ = रेषा CD चा चढ .... (I) व (III) वरून

∴ रेषा AB || रेषा CD

रेषा BC चा चढ = रेषा DA चा चढ .... (II) व (IV) वरून

∴ रेषा BC || रेषा DA

म्हणजेच चौकोनाच्या संमुख भुजांच्या दोन्ही जोड्या परस्परांना समांतर आहेत.

∴ □ ABCD समांतरभुज चौकोन आहे.

सरावसंच 5.3

1. रेषांनी X-अक्षाच्या धन दिशेशी केलेले कोन दिले आहेत, त्यावरून त्या रेषांचे चढ काढा.
   (1) 45° (2) 60° (3) 90°
2. खाली दिलेल्या बिंदूतून जाणाऱ्या रेषांचे चढ काढा.
   (1) A (2, 3) आणि B (4, 7) (2) P (−3, 1) आणि Q (5, −2)
   (3) C (5, −2) आणि D (7, 3) (4) L (−2, −3) आणि M (−6, −8)
   (5) E(−4, −2) आणि F (6, 3) (6) T (0, −3) आणि S (0, 4)
3. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत, हे ठरवा.
   (1) A(−1, −1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(−2, −3), E(1, 0), F(2, 1)
   (3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, −5), Q(1, −3), R(−2, 3)
   (5) R(1, −4), S(−2, 2), T(−3, 4) (6) A(−4, 4), K(−2, $\frac{5}{2}$), N(4, −2)
4. A (1, −1),B (0, 4),C (−5, 3) हे त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत, तर प्रत्येक बाजूचा चढ काढा.
5. A (−4, −7),B (−1, 2), C (8, 5) आणि D (5, −4) हे ABCD या समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

6. R(1, −1) आणि S (−2, k) असून RS या रेषेचा चढ −2 असेल तर k ची किंमत काढा.
7. B(k, −5) आणि C (1, 2) या रेषेचा चढ 7 असेल तर k ची किंमत काढा.
8. P(2, 4), Q (3, 6), R(3, 1) आणि S(5, k) असून रेषा PQ ही रेषा RS ला समांतर आहे, तर k ची किंमत काढा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. योग्य पर्याय निवडून रिकाम्या जागा भरा.

(1) रेख AB, हा Y−अक्षाला समांतर असून A बिंदूचे निर्देशक (1,3) आहेत तर, B बिंदूचे निर्देशक .... असू शकतील.

(A)(3,1) (B)(5,3) (C)(3,0) (D)(1,−3)

(2) खालीलपैकी .... हा बिंदू X− अक्षावर आरंभबिंदूच्या उजवीकडे आहे.

(A)(−2,0) (B)(0,2) (C)(2,3) (D)(2,0)

(3) (−3,4) या बिंदूचे आरंभबिंदूपासून अंतर ...... आहे.

(A)7 (B) 1 (C) 5 (D)−5

(4) एका रेषेने X− अक्षाच्या धन दिशेशी 30° चा कोन केला आहे, म्हणून त्या रेषेचा चढ .... आहे.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

2. खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नाहीत, ते ठरवा

(1) A (0,2) , B (1,−0.5), C (2,−3)

(2) P (1, 2) , Q (2, $\frac{8}{5}$) , R (3, $\frac{6}{5}$)

(3) L (1,2) , M (5,3) , N (8,6)

3. P (0,6) आणि Q (12,20) यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.

4. A (3,8) आणि B (−9,3) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला Y− अक्ष कोणत्या गुणोत्तरात विभाजित करतो ?

5. X−अक्षावरील असा बिंदू शोधा की जो P(2,−5) आणि Q(−2,9) पासून समदूर असेल.

6. खालील बिंदूंतील अंतरे काढा.

(1) A (a, 0), B (0, a) (2) P (−6, −3), Q (−1, 9) (3) R (−3a, a), S (a, −2a)

7. एका त्रिकोणाचे शिरोबिंदू A (−3,1), B (0,−2) आणि C (1,3) आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या परिकेंद्राचे निर्देशक काढा.

8. खालील बिंदूंना जोडणारे रेषाखंड त्रिकोण तयार करू शकतील का? त्रिकोण तयार झाल्यास त्याचा बाजूंवरून होणारा प्रकार सांगा.

(1) L (6,4) , M (−5,−3) , N (−6,8)

(2) P (−2,−6) , Q (−4,−2), R (−5,0)

(3) A ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), B ($-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), C ($-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$)

9. जर P (−12,−3) आणि Q (4, k) या बिंदूंतून जाणाऱ्या रेषेचा चढ $\frac{1}{2}$ असेल, तर k ची किंमत काढा.

10. A(4, 8) आणि B(5, 5) या बिंदूंना जोडणारी रेषा, C(2,4) आणि D(1,7) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेला समांतर आहे हे दाखवा.

11. P(1,−2), Q(5,2), R(3,−1), S(−1,−5) हे समांतरभुज चौकोनाचे शिरोबिंदू आहेत, हे दाखवा.

12. जर P(2,1), Q(−1,3), R(−5,−3) आणि S(−2,−5) तर □ PQRS हा आयत आहे हे दाखवा.

13. A (−1, 1), B (5, −3) आणि C (3, 5) हे शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाच्या मध्यगांच्या लांबी काढा.

14★. जर D (−7, 6), E (8, 5)आणि F (2, −2) हे त्रिकोणाच्या बाजूंचे मध्यबिंदू असतील, तर त्या त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक काढा.

15. A(4, −1), B(6, 0), C(7, −2) आणि D(5, −3) हे चौरसाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा

16. A(7, 1), B(3, 5) आणि C(2, 0) शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाच्या परिवर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक आणि परिवर्तुळाची त्रिज्या काढा.

17. जर A(4,−3) आणि B(8,5), तर रेख AB चे 3:1 या गुणोत्तरात विभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक काढा.

18★. A(−4, −2), B(−3, −7) C(3, −2) आणि D(2, 3) हे बिंदू क्रमाने जोडले तर तयार होणाऱ्या ABCD या चौकोनाचा प्रकार लिहा.

19★. रेख AB वरील बिंदू P, Q, R व S यांच्यामुळे त्या रेषाखंडाचे पाच एकरूप भाग होतात. जर A−P−Q − R−S−B आणि Q(12, 14), S(4, 18) ; तर A, P, R आणि B चे निर्देशक काढा.

20. P (6,−6), Q (3,−7) आणि R (3,3) यांतून जाणाऱ्या वर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक काढा.

21★. समांतरभुज चौकोनाच्या तीन शिरोबिंदूंचे निर्देशक A (5,6), B (1,−2) आणि C (3,−2) असतील तर चौथ्या बिंदूच्या निर्देशकांच्या शक्य त्या सर्व जोड्या काढा.

22. A (1,7), B (6,3) C (0,−3) आणि D (−3,3) हे शिरोबिंदू असलेला एक चौकोन आहे. त्या चौकोनाच्या प्रत्येक कर्णाचा चढ काढा.

4KPEC7

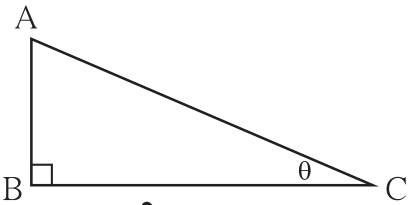
6 त्रिकोणमिती

चला, शिकूया.

- त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे
- उन्नतकोन व अवनत कोन
- त्रिकोणमितीय नित्यसमानता
- उंची व अंतरे यांवरील उदाहरणे

जरा आठवूया.

1. सोबतच्या आकृतीवरून रिकाम्या जागा भरा.



आकृती 6.1

$\sin\theta = \frac{\square}{\square}$, $\cos\theta = \frac{\square}{\square}$,

$\tan\theta = \frac{\square}{\square}$

2. पुढील गुणोत्तरांमधील संबंध पूर्ण करा.

(i) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \square$ (ii) $\sin\theta = \cos(90 - \square)$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \square)$ (iv) $\tan\theta \tan(90 - \theta) = \square$

3. पुढील समीकरण पूर्ण करा.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \square$

4. पुढील त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती लिहा.

(i) $\sin 30^\circ = \frac{1}{\square}$ (ii) $\cos 30^\circ = \frac{\square}{\square}$ (iii) $\tan 30^\circ = \frac{\square}{\square}$

(iv) $\sin 60^\circ = \frac{\square}{\square}$ (v) $\cos 45^\circ = \frac{\square}{\square}$ (vi) $\tan 45^\circ = \square$

इयत्ता नववीमध्ये आपण लघुकोनाची काही त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे अभ्यासली आहेत. यावर्षी लघुकोनाचीच आणखी काही त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे आपण अभ्यासणार आहोत.

जाणून घेऊया.

कोसेक, सेक आणि कॉट गुणोत्तरे (cosec, sec and cot ratios)

कोनाच्या साइन गुणोत्तराच्या व्यस्त गुणोत्तराला कोसीकँट (cosecant) गुणोत्तर म्हणतात.

ते थोडक्यात cosec असे लिहितात. $\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

तसेच कोसाइन आणि टँजंट गुणोत्तरांच्या व्यस्त गुणोत्तरांना अनुक्रमे सीकँट (secant) आणि कोटँजंट (cotangent) गुणोत्तरे म्हणतात; आणि ती थोडक्यात अनुक्रमे sec आणि cot अशी लिहितात.

$\therefore$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ आणि $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

आकृती 6.2 मध्ये,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$$

म्हणजेच, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{संमुख बाजू}}$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{लगतची बाजू}}{\text{संमुख बाजू}}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

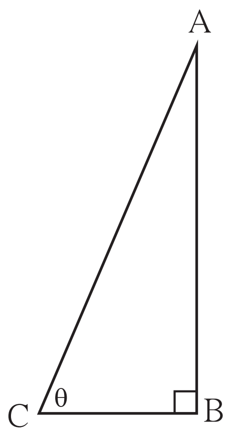
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC}$$

म्हणजेच, $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लगतची बाजू}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ हे तुम्हाला माहीत आहे.

$$\therefore \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



आकृती 6.2

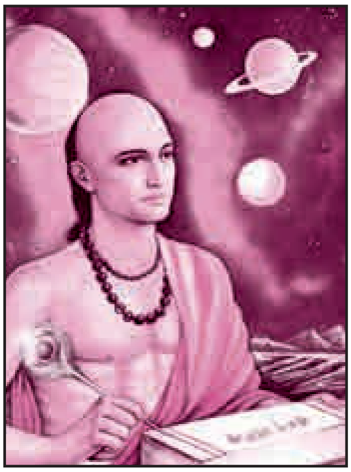
हे लक्षात ठेवूया.

त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील परस्परसंबंध

cosec, sec आणि cot या गुणोत्तरांच्या व्याख्यांवरून,

- $\frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta \qquad \therefore \sin\theta \times \text{cosec}\,\theta = 1$
- $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \therefore \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \qquad \therefore \tan\theta \times \cot\theta = 1$

अधिक माहितीसाठी



थोर भारतीय गणिती आर्यभट यांचा जन्म इ.स. 476 मध्ये कुसुमपूर येथे झाला. हे स्थान सध्याच्या बिहारमधील पाटणा या शहराजवळ होते. त्यांनी अंकगणित, बीजगणित आणि भूमिती या गणिताच्या शाखांत भरीव कार्य केले. 'आर्यभटीय' या ग्रंथात अनेक गणिती निष्कर्ष त्यांनी सूत्ररूपात लिहून ठेवले आहेत. उदाहरणार्थ,

(1) अंकगणिती श्रेढीतील n वे पद काढण्याचे आणि पहिल्या n पदांच्या बेरजेचे सूत्र

(2) $\sqrt{2}$ ची किंमत काढण्याचे सूत्र

(3) π या संख्येची 3.1416 ही चार दशांश स्थळांपर्यंत बरोबर असेलली किंमत, इत्यादी.

खगोलशास्त्राच्या अभ्यासात त्यांनी त्रिकोणमितीचा वापर केला आणि ***ज्या गुणोत्तर*** (sine ratio) ही संकल्पना प्रथमच वापरली.

जगातील गणिताच्या त्यांच्या काळातील ज्ञानाचा विचार करता त्यांची गणितातील कामगिरी उत्तुंग होती. त्यामुळे त्यांच्या ग्रंथाचा प्रसार संपूर्ण भारतात, तसेच अरबस्तानामार्फत युरोपमध्येही झाला होता.

पृथ्वी स्थिर असून सूर्य, चंद्र व तारे विशिष्ट क्रमाने पृथ्वीभोवती फिरतात असेच त्याकाळच्या सर्व निरीक्षकांचे मत होते. परंतु नावेतून जाणाऱ्याला काठावरील झाडे व वस्तू उलट दिशेला जात असल्याचा भास होतो, तसाच भास सूर्य, तारे इत्यादींबाबत पृथ्वीवरील लोकांना होतो; म्हणजे पृथ्वी भ्रमण करते असे आर्यभटीयात लिहिले आहे.

19 एप्रिल 1975 या दिवशी भारताने आपला पहिला उपग्रह अवकाशात प्रक्षेपित केला. या उपग्रहाला 'आर्यभट' हे नाव देऊन देशाने या श्रेष्ठ गणितीचा यथोचित गौरवच केला.

✲ 0°,30°,45°,60° आणि 90° मापाच्या कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांची सारणी.

त्रिकोणमितीय गुणोत्तर	कोनाचे माप (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ठरवता येत नाही
cosec θ $= \frac{1}{\sin\theta}$	ठरवता येत नाही	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec θ $= \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ठरवता येत नाही
cot θ $= \frac{1}{\tan\theta}$	ठरवता येत नाही	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

जाणून घेऊया.

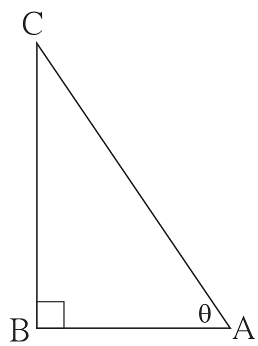
त्रिकोणमितीय नित्यसमानता (Trigonometrical identities)

सोबतच्या आकृती 6.3 मध्ये Δ ABC या काटकोन त्रिकोणात, $\angle B = 90°$

(i) $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$



आकृती 6.3

तसेच, पायथागोरसच्या सिद्धांतानुसार,

$BC^2 + AB^2 = AC^2$ . . . . .(I)

समीकरण (I) च्या दोन्ही बाजूंस AC^2 ने भागून

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$\therefore \dfrac{BC^2}{AC^2} + \dfrac{AB^2}{AC^2} = 1$

$\therefore \left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ .... [$(\sin\theta)^2$ हे $\sin^2\theta$ असे आणि $(\cos\theta)^2$ हे $\cos^2\theta$ असे लिहितात.]

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .... (II)

आता समीकरण (II) च्या दोन्ही बाजूंस $\sin^2\theta$ ने भागून

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ .... (III)

तसेच, समीकरण (II) च्या दोन्ही बाजूंस $\cos^2\theta$ ने भागून

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ .... (IV)

समीकरण (II), (III), व (IV) या मूलभूत त्रिकोणमितीय नित्यसमानता आहेत.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) जर $\sin\theta = \dfrac{20}{29}$ असेल तर $\cos\theta$ ची किंमत काढा.

उकल : रीत I

आपणास माहीत आहे की

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(\dfrac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\dfrac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \dfrac{400}{841}$

$= \dfrac{441}{841}$

दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन.

$\therefore \cos\theta = \dfrac{21}{29}$

रीत II

$\sin\theta = \dfrac{20}{29}$

आकृतीवरून $\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$

$\therefore AB = 20k$ व $AC = 29k$

$BC = x$ मानू.

पायथागोरसच्या सिद्धांताने

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$

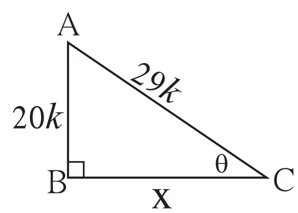
$400k^2 + x^2 = 841k^2$

$x^2 = 841k^2 - 400k^2$

$= 441k^2$

$\therefore x = 21k$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{21k}{29k} = \dfrac{21}{29}$



आकृती 6.4

उदा. (2) जर $\sec\theta = \frac{25}{7}$ तर $\tan\theta$ ची किंमत काढ़ा.

उकल : **रीत I**

आपणास माहीत आहे की,

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1+\tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$$

$$= \frac{625-49}{49}$$

$$= \frac{576}{49}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{24}{7}$$

रीत II

आकृतीवरून,

$$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$$

$$\therefore \quad PQ = 7k,\ PR = 25k$$

पायथागोरसच्या प्रमेयाने,

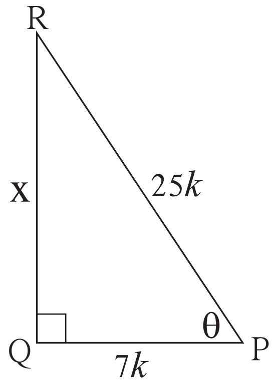
$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\therefore \quad (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$$

$$\therefore \quad QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$$

$$\therefore \quad QR = 24k$$

आता, $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$



आकृती 6.5

उदा. (3) जर $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ असेल तर $\sec\theta$ आणि $\mathrm{cosec}\theta$ च्या किंमत काढा.

उकल : $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$$\therefore \quad 5\sin\theta = 12\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{12}{5}$$

आपणास माहीत आहे की,

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1+\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1+\frac{144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{25+144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \sec^2\theta = \frac{169}{25}$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$$

आता, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{169}$$

$$= \frac{144}{169}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \quad \mathrm{cosec}\theta = \frac{13}{12}$$

उदा. (4) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तर $\frac{1-\sec\theta}{1+\mathrm{cosec}\,\theta}$ ची किंमत काढा.

उकल : **रीत I**

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$ $\therefore \mathrm{cosec}\theta = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\mathrm{cosec}\,\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

रीत II

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हे माहीत आहे.

$\therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore \sec\theta = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\mathrm{cosec}\,\theta = \mathrm{cosec}\,30^\circ = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\mathrm{cosec}\,\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

उदा. (5) दाखवा की, $\sec x + \tan x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

उकल : $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

उदा. (6) पुढील समीकरणांतून θ चे निरसन करा.

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$

उकल :

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$ .... (I)

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$ .... (II)

समीकरण (I) व (II) यांची बेरीज करून.

$x + y = 2a \cot\theta$

$\therefore \cot\theta = \frac{x+y}{2a}$ .... (III)

समीकरण (II) मधून (I) वजा करून,

$y - x = 2b \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{y-x}{2b}$ .... (IV)

आता, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(y-x)^2}{4b^2} - \frac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$$

किंवा $\left(\frac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{a}\right)^2 = 4$

सरावसंच 6.1

1. जर $\sin\theta = \frac{7}{25}$ तर $\cos\theta$ व $\tan\theta$ च्या किमती काढा.

2. जर $\tan\theta = \frac{3}{4}$ तर $\sec\theta$ व $\cos\theta$ च्या किमती काढा.

3. जर $\cot\theta = \frac{40}{9}$ तर $\operatorname{cosec}\theta$ व $\sin\theta$ च्या किमती काढा.

4. जर $5\sec\theta - 12\operatorname{cosec}\theta = 0$ असेल तर $\sec\theta$, $\cos\theta$ व $\sin\theta$ च्या किमती शोधा.

5. जर $\tan\theta = 1$ तर $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta}$ ची किंमत काढा.

6. सिद्ध करा.

   (1) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

   (2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(4) $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta \ \sec\theta$

(5) $\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \ \sec\theta$

(6) $\dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

(7) $\sec^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) $\sec\theta + \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) जर $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 2$ तर दाखवा की $\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = 2$

(10) $\dfrac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \dfrac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$

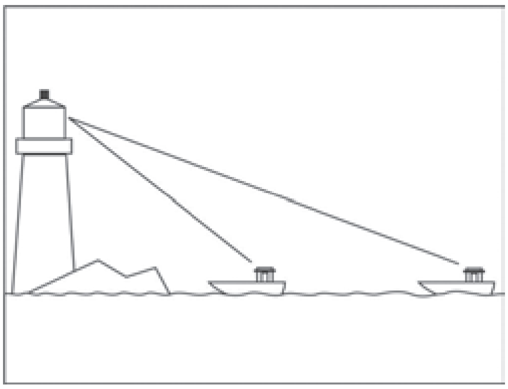
(11) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \dfrac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

जाणून घेऊया.

त्रिकोणमितीचे उपयोजन (Application of trigonometry)

बरेचदा आपल्याला मनोऱ्याची, इमारतीची किंवा झाडाची उंची, तसेच जहाजाचे दीपगृहापासूनचे अंतर किंवा नदीच्या पात्राची रुंदी इत्यादी जाणावी लागतात. ही अंतरे आपण प्रत्यक्षात मोजू शकत नाही परंतु त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचा उपयोग करून उंची किंवा अंतरे ठरवू शकतो.



आकृती 6.6

उंची किंवा अंतरे ठरविण्यासाठी, दिलेली माहिती दर्शविणारे कच्चे चित्र आपण आधी तयार करू. झाडे, टेकड्या, मनोरे अशा वस्तू जमिनीला लंब आहेत, हे दाखवण्यासाठी आपण आकृतीत लंब रेषाखंडांचा उपयोग करू. आपण निरीक्षकाची उंची लक्षात घेणार नाही, सामान्यपणे निरीक्षकाची दृष्टी क्षितिजसमांतर आहे असे मानू.

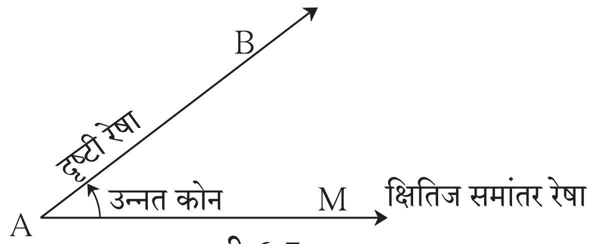
प्रथम आपण काही संबधित संज्ञांचा अभ्यास करू

(i) दृष्टीरेषा (Line of vision) :

बिंदू 'A' या ठिकाणी उभा असलेला निरीक्षक बिंदू 'B' कडे पाहत असेल तर रेषा AB ला दृष्टी रेषा म्हणतात.

(ii) उन्नतकोन (Angle of elevation) :

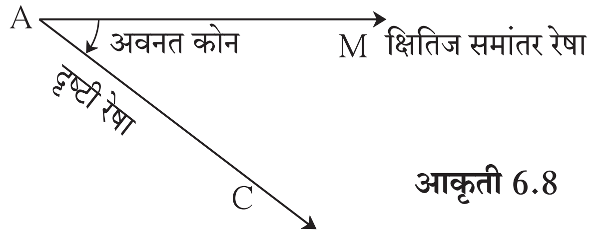
AM ही निरीक्षकाची सामान्य दृष्टीरेषा क्षितिज - समांतर आहे. निरीक्षण करण्याचा बिंदू B, हा A च्या तुलनेत अधिक उंचीवर असेल तर AB ही दृष्टीरेषा, रेषा AM शी जो कोन करते तो उन्नत कोन असतो. आकृतीत $\angle$ MAB हा उन्नत कोन आहे.



आकृती 6.7

(iii) अवनत कोन (Angle of depression) :

निरीक्षण करण्याचा बिंदू C हा रेषा AM या क्षितीजसमांतर रेषेच्या खाली असेल तर AC ही दृष्टीरेषा, रेषा AM शी अवनत कोन करते. आकृतीत $\angle$ MAC हा अवनत कोन आहे.



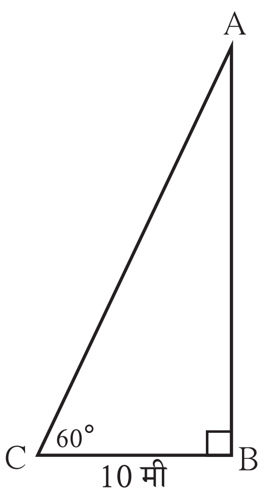
आकृती 6.8

जेव्हा आपण क्षितीज समांतर रेषेच्या वरच्या दिशेला पाहतो तेव्हा होणारा कोन उन्नतकोन असतो.
जेव्हा आपण क्षितीज समांतर रेषेच्या खालच्या दिशेला पाहतो तेव्हा होणारा कोन अवनतकोन असतो.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका झाडाच्या बुंध्यापासून 10 मी. अंतरावर असणाऱ्या निरीक्षकास झाडाच्या शेंड्याकडे पाहताना 60°मापाचा उन्नत कोन करावा लागतो. तर झाडाची उंची किती ? ($\sqrt{3}$ = 1.73)

उकल : आकृती 6.9 मध्ये C बिंदूजवळ निरीक्षक असून AB हे झाड आहे.



आकृती 6.9

AB = h = झाडाची उंची.

निरीक्षकाचे झाडापासूनचे अंतर BC = 10 मी.

आणि उन्नत कोन $(\theta)\angle BCA = 60^\circ$

आकृतीवरुन, $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$ .... (I)

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ .... (II)

$\therefore \quad \dfrac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ .... (I) व (II) वरून

$\therefore \quad AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$\therefore \quad AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ मी

$\therefore$ झाडाची उंची 17.3 मी. आहे.

उदा. (2) 40 मी उंच इमारतीच्या छतावरून, त्या इमारतीपासून काही मीटर अंतरावर उभ्या केलेल्या स्कूटरकडे पाहताना 30° मापाचा अवनतकोन होतो, तर ती स्कूटर इमारतीपासून किती दूर उभी आहे? ($\sqrt{3} = 1.73$)

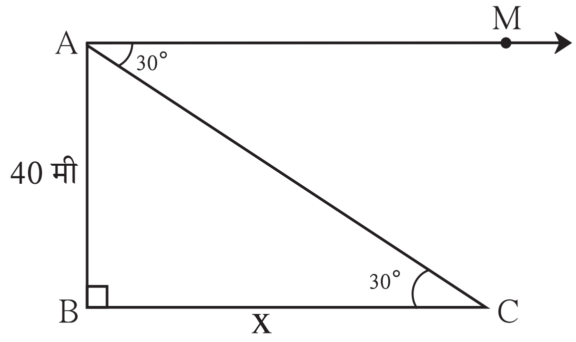
उकल : आकृती 6.10 मध्ये रेख AB ही इमारत आहे. इमारती पासून 'x' मी अंतरावर 'C' या ठिकाणी स्कूटर उभी आहे.

आकृतीत A या ठिकाणी निरीक्षक आहे.

AM ही क्षितीज समांतर रेषा आहे.

$\angle$ MAC हा अवनत कोन आहे.

$\angle$ MAC व $\angle$ ACB हे व्युत्क्रम कोन एकरूप आहेत, हे लक्षात घ्या.



आकृती 6.10

आकृतीवरुन, $\tan 30^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{40}{x}$

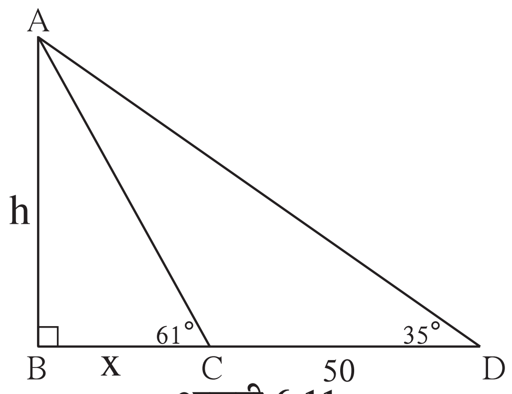
$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$

$= 40 \times 1.73$

$= 69.20$ मी.

$\therefore$ ती स्कूटर इमारतीपासून 69.20 मी. अंतरावर उभी आहे.

उदा. (3) नदीच्या पात्राची रुंदी काढण्यासाठी एका माणसाने पात्राच्या एका काठावरून विरुद्ध काठावर असणाऱ्या मनोऱ्याच्या वरच्या टोकाकडे पाहिले असता 61° मापाचा उन्नतकोन होतो. त्याच रेषेत नदीच्या पात्रापासून 50 मी अंतर मागे जाऊन पुन्हा मनोऱ्याच्या वरच्या टोकाकडे पाहिले असता 35° मापाचा उन्नत कोन होतो, तर नदीपात्राची रुंदी आणि मनोऱ्याची उंची काढा. ($\tan 61^\circ \approx 1.8$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$)



आकृती 6.11

उकल : रेख AB पैलतीरावरील मनोरा दाखवतो. 'A' हे मनोऱ्याचे टोक असून रेख BC नदीच्या पात्राची रुंदी दाखवतो.

मनोऱ्याची उंची h मी व नदी पात्राची रुंदी x मी मानू.

आकृतीवरून $\tan 61^\circ = \dfrac{h}{x}$

$$\therefore\ 1.8 = \frac{h}{x}$$

$h = 1.8 \times x$

$10h = 18x$ .... (I)..... 10 ने गुणून

काटकोन Δ ABD मध्ये,

तसेच, $\tan 35 = \dfrac{h}{x + 50}$

$$0.7 = \frac{h}{x + 50}$$

$\therefore\quad h = 0.7\ (x + 50)$

$\therefore\quad 10h = 7\ (x + 50)$ .... (II)

[(I) व (II) वरून]

$18x = 7(x + 50)$

$\therefore\ 18x = 7x + 350$

$\therefore\ 11x = 350$

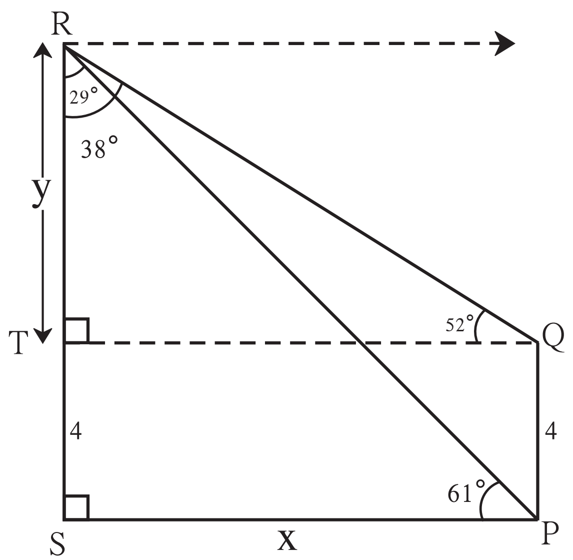
$\therefore\quad x = \dfrac{350}{11} = 31.82$

आता, $h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$

$= 57.28$ मी.

$\therefore$ पात्राची रुंदी = 31.82 मी. मनोऱ्याची उंची = 57.28 मी.

उदा. (4) रोशनी घराच्या दारात उभी होती. घरापासून थोड्या अंतरावरील झाडाच्या शेंड्यावर एक गरूड बसलेला तिला दिसला, तेव्हा तिच्या दृष्टीचा उन्नतकोन 61° होता. तो आणखी नीट दिसावा म्हणून ती घराच्या 4 मीटर उंचीवर असलेल्या गच्चीवर गेली. तेथून पाहताना तिच्या दृष्टीचा उन्नत कोन 52° होता. तर तो गरूड जमिनीपासून किती उंचीवर होता? (उत्तर जवळच्या पूर्णांकापर्यंत काढा.)



आकृती 6.12

($\tan 61^\circ = 1.80$, $\tan 52^\circ = 1.28$, $\tan 29^\circ = 0.55$, $\tan 38^\circ = 0.78$)

उकल : समजा, आकृती 6.12 मध्ये PQ हे घर आणि SR हे झाड आहे. गरुडाचे स्थान R पाशी आहे.

रेख QT $\perp$ रेख RS काढला.

$\therefore$ $\square$ TSPQ हा आयत आहे.

SP = x मानू. TR = y मानू.

आता, Δ RSP मध्ये, $\angle$ PRS = $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$

तसेच, Δ RTQ मध्ये, $\angle$ QRT = $90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29^\circ = \frac{SP}{RS}$

$\therefore 0.55 = \frac{x}{y+4}$

$\therefore x = 0.55(y + 4)$ .... (I)

तसेच, $\tan \angle QRT = \frac{TQ}{RT}$

$\therefore \tan 38^\circ = \frac{x}{y}$ .... [$\because$ SP = TQ = x]

$\therefore 0.78 = \frac{x}{y}$

$\therefore x = 0.78y$ .... (II)

$\therefore 0.78y = 0.55(y + 4)$ .... (I) व (II) वरून

$\therefore 78y = 55(y + 4)$

$\therefore 78y = 55y + 220$

$\therefore 23y = 220$

$\therefore y = 9.565 = 10$ (जवळच्या पूर्णांकापर्यंत)

$\therefore RS = y + 4 = 10 + 4 = 14$

$\therefore$ गरूड जमिनीपासून 14 मीटर उंचीवर होता.

उदा. (5) वादळामुळे एक झाड मोडले आणि झाडाचा शेंडा जमिनीवर टेकला. मोडलेला भाग जमिनीशी 30° चा कोन करतो. झाडाचा शेंडा आणि बुंधा यांमधील अंतर 10 मी असल्यास झाडाची उंची काढा.

उकल : समजा, आकृती 6.13 मध्ये AB या झाडाचा शेंडा 'A' आहे. वादळामुळे झाड 'C' या ठिकाणी मोडल्यामुळे D या ठिकाणी शेंडा टेकला.

$\angle$ CDB = 30°, BD = 10 मी, BC = x मी

CA= CD = y मी

काटकोन Δ CDB मध्ये,

$$\tan 30° = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

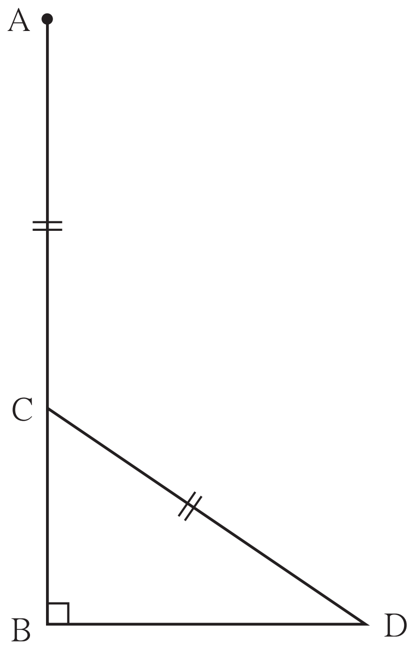
$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

झाडाची उंची $10\sqrt{3}$ मी आहे.



आकृती 6.13

सरावसंच 6.2

1. एक व्यक्ती एका चर्चपासून 80 मी अंतरावर उभी आहे. त्या व्यक्तीने चर्चच्या छताकडे पाहिले असता 45° मापाचा उन्नत कोन होतो, तर चर्चची उंची किती?

2. दीपगृहावरून एका जहाजाकडे पाहताना 60° मापाचा अवनत कोन होतो. जर दीपगृहाची उंची 90 मी असेल तर ते जहाज दीपगृहापासून किती अंतरावर आहे? ($\sqrt{3}$ =1.73)

3. 12 मी रुंदीच्या रस्त्याच्या दुतर्फा समोरासमोर दोन इमारती आहेत. त्यांपैकी एकीची उंची 10 मी असून तिच्या छतावरून दुसरीच्या छताकडे पाहिले असता उन्नत कोन 60° मापाचा होतो, तर दुसऱ्या इमारतीची उंची किती?

4. 18 मी व 7 मी उंचीचे खांब जमिनीवर उभे आहेत. त्यांच्या वरच्या टोकांना जोडणाऱ्या तारेची लांबी 22 मी आहे, तर त्या तारेने क्षितीज समांतर पातळीशी केलेल्या कोनाचे माप काढा.

5. वादळामुळे एक झाड मोडले आणि झाडाचा शेंडा जमिनीवर टेकला. मोडलेला भाग जमिनीशी 60° चा कोन करतो. झाडाचा शेंडा आणि बुंधा यांमधील अंतर 20 मी असल्यास झाडाची उंची काढा.

6. एक पतंग उडताना जमिनीपासून 60 मी लंबउंचीपर्यंत पोहचतो. पतंगांच्या दोऱ्याचे टोक जमिनीवर बांधले तेव्हा जमीन व दोरा यांच्या मध्ये 60° मापाचा कोन तयार होतो. दोरा कोठेही वाकलेला नाही असे गृहीत धरून दोऱ्याची लांबी काढा. ($\sqrt{3}$ =1.73)

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. दिलेल्या पर्यांयापैकी प्रश्नाच्या उत्तराचा अचूक पर्याय निवडा.

(1) $\sin\theta \ \operatorname{cosec}\theta$ = किती ?

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) $\operatorname{cosec}45°$ ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta$ = किती ?

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\operatorname{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) जेव्हा आपण क्षितीजसमांतर रेषेच्या वरच्या दिशेने पाहतो, तेव्हा .... कोन होतो.

(A)उन्नत कोन (B)अवनत कोन (C) शून्य (D)रेषीय

2. जर $\sin\theta = \frac{11}{61}$ तर नित्यसमानतेचा उपयोग करून $\cos\theta$ ची किंमत काढा.

3. जर $\tan\theta = 2$, तर इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती काढा.

4. जर $\sec\theta = \frac{13}{12}$, तर इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किमती काढा.

5. सिद्ध करा.

(1) $\sec\theta\,(1 - \sin\theta)\,(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta)\,(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \operatorname{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6 x + \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

(8) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} = \frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}$

(9) $\frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta - 1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

6. एक मुलगा एका इमारतीपासून 48 मीटर अंतरावर उभा आहे. त्या इमारतीच्या वरच्या टोकाकडे पाहताना त्या मुलाला 30° मापाचा उन्नतकोन करावा लागतो, तर त्या इमारतीची उंची किती ?

7. दीपगृहावरून एका जहाजाकडे पाहताना निरीक्षकाला 30° मापाचा अवनत कोन करावा लागतो. जर दीपगृहाची उंची 100 मी असेल तर ते जहाज दीपगृहापासून किती अंतरावर आहे?

8. 15 मी रुंदीच्या रस्त्याच्या दुतर्फा समोरासमोर दोन इमारती आहेत. त्यांपैकी एकीची उंची 12 मी असून तिच्या छतावरुन दुसरीच्या छताकडे पाहिले असता उन्नत कोन 30° चा होतो, तर त्या इमारतीची उंची किती ?

9. अग्निशामकदलाच्या वाहनावर बसवलेली शिडी जास्तीत जास्त 70° मापाच्या कोनातून उचलता येते. त्यावेळी तिची अधिकात अधिक लांबी 20 मी असते.शिडीचे वाहनावरील टोक जमिनीपासून 2 मी उंचीवर आहे. तर शिडीचे दुसरे टोक जमिनीपासून जास्तीत जास्त किती उंचीवर पोहोचवता येईल ? ($\sin 70^\circ \approx 0.94$)

10★. आकाशात उडत असलेल्या विमानाच्या चालकाने विमानतळावर विमान उतरविण्यास सुरूवात करताना 20° मापाचा अवनत कोन केला, तेव्हा विमानाचा सरासरी वेग ताशी 200 किमी होता. ते विमान 54 सेकंदांत विमान तळावर उतरले. विमान तळावर उतरण्यास वळण्याच्या क्षणी ते विमान जमिनीपासून किती उंचीवर होते? ($\sin 20^\circ \approx 0.342$)

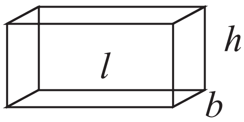
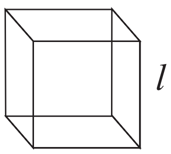
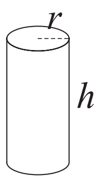
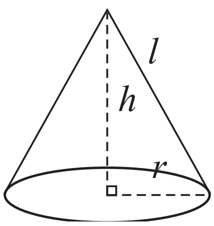
7 महत्त्वमापन

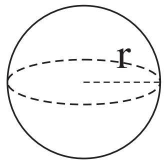
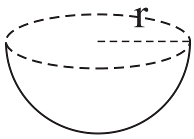
चला, शिकूया.

- विविध घनाकृतींच्या पृष्ठफळ व घनफळावर आधारित संमिश्र उदाहरणे.
- वर्तुळकंस – वर्तुळकंसाची लांबी.
- वर्तुळ पाकळीचे क्षेत्रफळ.
- वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ.

जरा आठवूया.

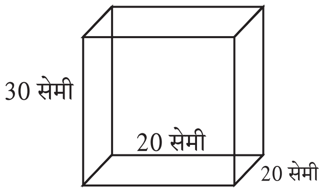
मागील इयत्तांमध्ये आपण काही त्रिमितीय आकृत्यांच्या पृष्ठफळांचा व घनफळांचा अभ्यास केलेला आहे. त्यासाठी लागणारी सूत्रे आठवू या.

क्र.	त्रिमितीय आकृती	सूत्रे
1 .	इष्टिकाचिती 	उभ्या पृष्ठांचे पृष्ठफळ $= 2h\,(\,l + b\,)$ एकूण पृष्ठफळ $= 2\;(lb + bh + hl\,)$ इष्टिकाचितीचे घनफळ $= lbh$
2 .	घन 	घनाचे उभे पृष्ठफळ $= 4l^2$ घनाचे एकूण पृष्ठफळ $= 6l^2$ घनाचे घनफळ $= l^3$
3 .	वृत्तचिती 	वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ $= 2\pi rh$ वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ $= 2\pi r\,(\,r + h\,)$ वृत्तचितीचे घनफळ $= \pi r^2h$
4 .	शंकू 	शंकूची तिरकस उंची $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$ शंकूचे वक्रपृष्ठफळ $= \pi rl$ शंकूचे एकूण पृष्ठफळ $= \pi r\,(r + l)$ शंकूचे घनफळ $= \frac{1}{3} \times \pi r^2h$

क्र.	त्रिमितीय आकृती	सूत्रे
5.	गोल 	गोलाचे पृष्ठफळ = $4\ \pi r^2$ गोलाचे घनफळ = $\frac{4}{3}\ \pi r^3$
6.	अर्धगोल 	अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ = $2\pi r^2$ भरीव अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ = $3\pi r^2$ अर्धगोलाचे घनफळ = $\frac{2}{3}\ \pi r^3$

खालील उदाहरणे सोडवा.

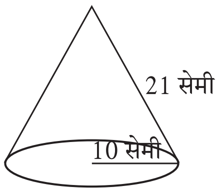
उदा.(1)



आकृती 7.1

शेजारच्या आकृतीत 30 सेमी उंची, 20 सेमी लांबी, व 20 सेमी रुंदीचा तेलाचा डबा आहे. त्यात किती लीटर तेल मावेल? (1 लीटर = 1000 सेमी^{3})

उदा.(2)



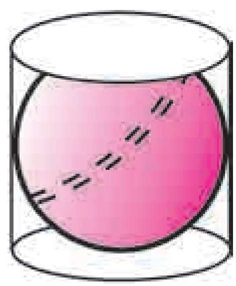
आकृती 7.2

बाजूच्या आकृतीत विदूषकाची टोपी आणि टोपीची मापे दाखवली आहे. ती टोपी तयार करण्यासाठी किती कापड लागेल?

विचार करूया.

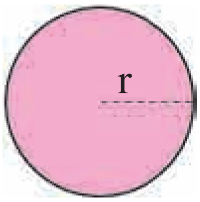
शेजारील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एका वृत्तचितीच्या आत एक गोल आहे. गोल वृत्तचितीच्या तळाला, वरच्या पृष्ठभागाला आणि वक्रपृष्ठाला स्पर्श करतो. वृत्तचितिच्या तळाची त्रिज्या r असेल तर

1. गोलाची त्रिज्या आणि वृत्तचितीची त्रिज्या यांचे गुणोत्तर काय आहे?
2. वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ आणि गोलाचे वक्रपृष्ठफळ यांचे गुणोत्तर काय आहे ?
3. वृत्तचितीचे घनफळ आणि गोलाचे घनफळ यांचे गुणोत्तर काय आहे?

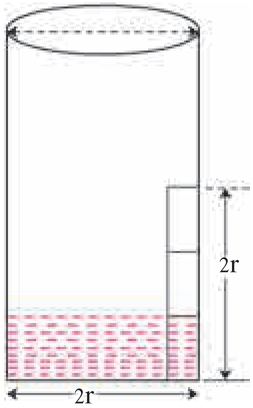


आकृती 7.3

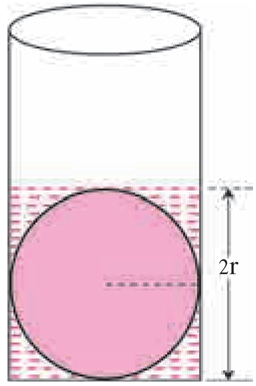
कृती :



आकृती 7.4



आकृती 7.5



आकृती 7.6

वरील आकृत्यांत दाखवल्याप्रमाणे एक चेंडू आणि चेंडूच्या त्रिज्येएवढीच (r) त्रिज्या असलेले एक चंचुपात्र घ्या. चंचुपात्राच्या व्यासाएवढ्या ($2r$) लांबीची एक कागदी पट्टी घ्या. तिच्या लांबीचे तीन समान भाग करणाऱ्या दोन रेघा पट्टीवर काढा. ती पट्टी चंचुपात्राला त्याच्या तळापासून उभी चिकटवा. चंचुपात्रात कागदी पट्टीच्या खालून पहिल्या भागापर्यंत पाणी भरा. नंतर चेंडू चंचुपात्रात तळाला टेकेपर्यंत सावकाश बसवा. चंचुपात्रातील पाण्याची पातळी कुठपर्यंत वाढली आहे, हे पाहा.

पाण्याची पातळी कागदी पट्टीच्या पूर्ण उंचीपर्यंत आलेली दिसेल.

या निरीक्षणावरून चेंडूच्या घनफळाचे सूत्र कसे मिळते हे समजून घ्या.

चंचुपात्र वृत्तचिती आकाराचे आहे. म्हणून चंचुपात्राच्या 2r एवढ्या उंचीपर्यंतच्या भागाचे घनफळ, वृत्तचितीच्या घनफळाच्या सूत्राने मिळेल. हे घनफळ V मानू.

$\therefore\ V = \pi \times r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

परंतु V = चेंडूचे घनफळ + आधी भरलेल्या पाण्याचे घनफळ

= चेंडूचे घनफळ + $\frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$\therefore$ चेंडूचे घनफळ $= V - \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} \qquad = \frac{4\pi r^3}{3}$

$\therefore$ गोलाच्या घनफळाचे सूत्र; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ असे मिळते.

(ह्या सूत्राचा उपयोग करून, आकृती 7.3 च्या संदर्भातील प्रश्न क्रमांक 3 चे उत्तर आता तुम्ही काढू शकाल.)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका वृत्तचिती आकाराच्या पाण्याच्या टाकीची त्रिज्या 2.8 मी आणि उंची 3.5 मी आहे. तर त्या टाकीमध्ये किती लीटर पाणी मावेल? एका व्यक्तीला रोज सरासरी 70 लीटर पाणी लागते, तर पूर्ण भरलेल्या टाकीतील पाणी रोज किती व्यक्तींना पुरेल? ($\pi = \frac{22}{7}$)

उकल : त्रिज्या (r) = 2.8 मीटर, उंची (h) = 3.5 मीटर, $\pi = \frac{22}{7}$

पाण्याच्या टाकीची धारकता = वृत्तचिती आकाराच्या टाकीचे घनफळ.

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$

= 86.24 मी^{3}

= 86.24 × 1000 लीटर (∵ 1मी^{3} = 1000 लीटर)

= 86240.00 लीटर

∴ टाकीमध्ये 86240 लीटर पाणी मावेल.

70 लीटर पाणी रोज एका व्यक्तीला पुरेसे असते.

∴ पूर्ण भरलेल्या टाकीतील पाणी $\frac{86240}{70}$ = 1232 व्यक्तींना पुरेल.

उदा. (2) 30 सेमी त्रिज्येचा एक भरीव गोल वितळवून त्यापासून 10 सेमी त्रिज्या व 6 सेमी उंची असणाऱ्या भरीव वृत्तचिती तयार केल्या, तर किती वृत्तचिती तयार होतील?

उकल : गोलाची त्रिज्या r = 30 सेमी

वृत्तचितीची त्रिज्या R = 10 सेमी

वृत्तचितीची उंची H = 6 सेमी

समजा n वृत्तचिती तयार होतील.

∴ गोलाचे घनफळ = n × एका वृत्तचितीचे घनफळ

∴ वृत्तचितींची संख्या = n = $\frac{\text{गोलाचे घनफळ}}{\text{एका वृत्तचितीचे घनफळ}}$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi (r)^3}{\pi (R)^2 H}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} \times (30)^3}{10^2 \times 6} \quad = \frac{\frac{4}{3} \times 30 \times 30 \times 30}{10 \times 10 \times 6} \quad = 60$$

∴ एकूण 60 वृत्तचिती तयार होतील .

उदा. (3) सर्कसच्या तंबूचा खालचा भाग वृत्तचिती आकाराचा व त्याच्या वरचा भाग शंकूच्या आकाराचा आहे. तंबूच्या तळाचा व्यास 48 मी असून वृत्तचिती भागाची उंची 15 मी आहे. तंबूची एकूण उंची 33 मी असल्यास तंबूस लागणाऱ्या कापडाचे क्षेत्रफळ व तंबूतील हवेचे घनफळ काढा.

उकल : तंबूची एकूण उंची 33 मी आहे.

वृत्तचिती भागाची उंची = H मानू. H = 15 मी आहे.

$\therefore$ शंक्वाकृती भागाची लंब उंची h = (33−15) = 18 मी राहील.

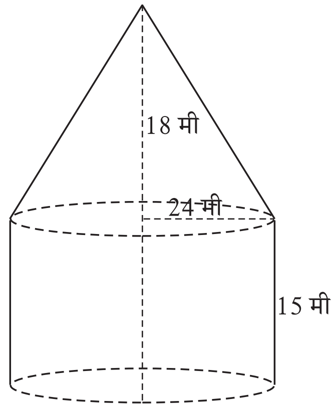
शंकूची तिरकस उंची (l) = $\sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{24^2 + 18^2}$

$= \sqrt{576 + 324}$

$= \sqrt{900}$

l = 30 मी



आकृती 7.7

सर्कसच्या तंबूस लागणारे कापड = वृत्तचिती भागाचे वक्रपृष्ठफळ + शंक्वाकृती भागाचे वक्रपृष्ठफळ

$= 2\pi rH + \pi rl$

$= \pi r\,(2H + l)$

$= \frac{22}{7} \times 24\,(2 \times 15 + 30)$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 60$

= 4525.71 चौमी.

तंबूतील हवेचे घनफळ = वृत्तचिती भागाचे घनफळ + शंक्वाकृती भागाचे घनफळ

$= \pi r^2H + \frac{1}{3}\pi r^2h$

$= \pi r^2\left(H + \frac{1}{3}h\right)$

$= \frac{22}{7} \times 24^2\,(15 + \frac{1}{3} \times 18)$

$= \frac{22}{7} \times 576 \times 21$

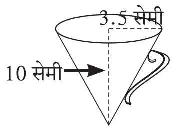
= 38,016 घमी

तंबूस लागणारे कापड = 4525.71 चौमी

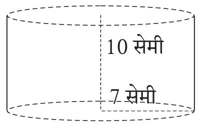
तंबूतील हवेचे घनफळ = 38016 घमी

सरावसंच 7.1

1. एका शंकूच्या तळाची त्रिज्या 1.5 सेमी असून त्याची लंब उंची 5 सेमी आहे, तर त्या शंकूचे घनफळ काढा.
2. 6 सेमी व्यास असलेल्या गोलाचे घनफळ काढा.
3. एका लंबवृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 5 सेमी व उंची 40 सेमी असेल तर तिचे एकूण पृष्ठफळ काढा.
4. एका गोलाची त्रिज्या 7 सेमी असेल तर त्याचे वक्रपृष्ठफळ काढा.
5. धातूच्या एका इष्टिकाचितीची लांबी, रुंदी आणि उंची अनुक्रमे 44 सेमी, 21 सेमी आणि 12 सेमी आहे. ती वितळवून 24 सेमी उंचीचा शंकू तयार केला. तर शंकूच्या तळाची त्रिज्या काढा.
6.



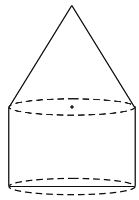
आकृती 7.8
पाण्याचा शंक्वाकृती जग



आकृती 7.9
वृत्तचिती आकाराचे भांडे

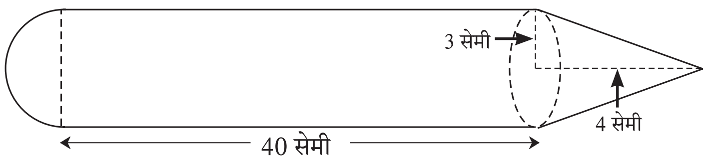
आकृती 7.8 व 7.9 मधील भांड्यांची मापे पाहा. त्यावरून वृत्तचिती आकाराच्या भांड्यात किती जग भरून पाणी मावेल हे काढा.

7. वृत्तचिती व शंकू समान तळाचे आहेत. वृत्तचितीवर शंकू ठेवला. वृत्तचिती भागाची उंची 3 सेमी असून तळाचे क्षेत्रफळ 100 चौसेमी आहे. जर संपूर्ण घनाकृतीचे घनफळ 500 घसेमी असेल तर संपूर्ण घनाकृतीची उंची काढा.



आकृती 7.10

8. शेजारील चित्रात दिलेल्या माहितीवरून; अर्धगोल, वृत्तचिती व शंकूपासून तयार झालेल्या खेळण्याचे एकूण पृष्ठफळ काढा.

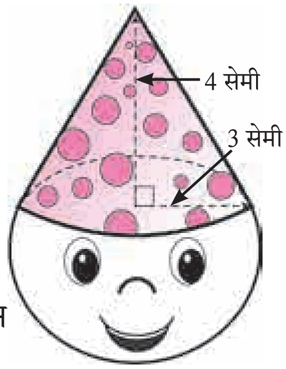


आकृती 7.11

9. आकृती 7.12 मध्ये वृत्तचिती आकाराच्या चपट्या गोळ्यांचे 10 सेमी लांबीचे एक वेष्टन आहे. एका गोळीची त्रिज्या 7 मिमी आणि उंची 5 मिमी असल्यास अशा किती गोळ्या त्या वेष्टनात मावतील?

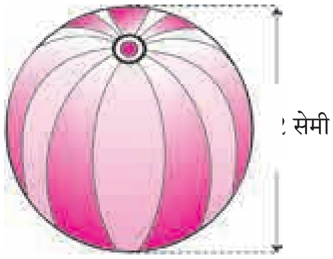
आकृती 7.12

10. आकृती 7.13 मध्ये मुलांचे एक खेळणे आहे. ते एक अर्धगोल व एक शंकू यांच्या सहाय्याने केले आहे. आकृतीत दर्शविलेल्या मापांवरून खेळण्याचे घनफळ व पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$)



आकृती 7.13

11. आकृतीत दाखविलेल्या बीच बॉलचे पृष्ठफळ व घनफळ काढा.



आकृती 7.14

12. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एका वृत्तचिती आकाराच्या ग्लासमध्ये पाणी आहे व त्यामध्ये एक धातूची 2 सेमी व्यासाची गोळी बुडालेली आहे. तर पाण्याचे घनफळ काढा.

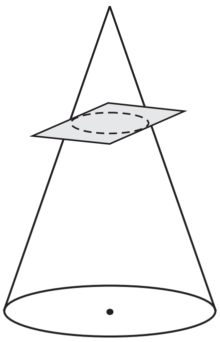
आकृती 7.15

जाणून घेऊया.

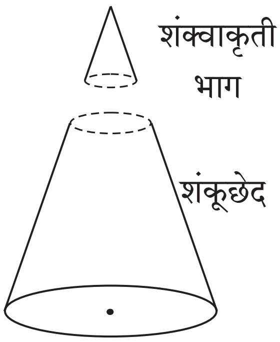
शंकूछेद (frustum of the cone)

आपण पाणी पिण्यासाठी निमुळत्या पेल्याचा (ग्लासचा) वापर करतो. ह्या पेल्याचा आकार, तसेच त्यातील पाण्याचा आकार हे शंकूछेदाचे आकार आहेत.

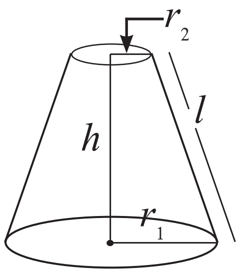
आकृती 7.16



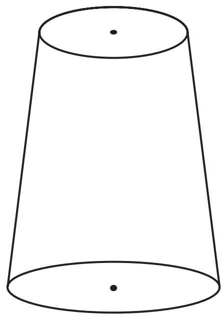
आकृती 7.17
शंकू कापताना



आकृती 7.18
शंकू कापल्यानंतर
वेगळे झालेले दोन भाग



आकृती 7.19
शंकूछेद



आकृती 7.20
पालथा ठेवलेला ग्लास

आकृतीमध्ये एक शंकू पालथा ठेवलेला दाखविलेला आहे. या शंकूचा त्याच्या तळाला समांतर असा छेद घेतला. त्यामुळे झालेल्या दोन भागांपैकी एका भागाचा आकार शंकूचाच आहे. राहिलेल्या भागाला शंकूछेद (frustum) म्हणतात.

शंकूप्रमाणेच शंकूछेदाचेही पृष्ठफळ व घनफळ काढता येते. त्यासाठी पुढील सूत्रांचा वापर आपण करणार आहोत.

हे लक्षात ठेवूया.

h = शंकूछेदाची उंची, l = शंकूछेदाची तिरकस उंची,

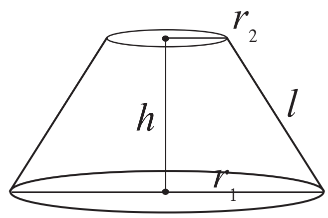
r_1 व r_2 = शंकूछेदाच्या वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या ($r_1 > r_2$)

शंकूछेदाची तिरकस उंची = l = $\sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ = $\pi l\,(r_1 + r_2)$

शंकूछेदाचे एकूण पृष्ठफळ = $\pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

शंकूछेदाचे घनफळ = $\frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$



आकृती 7.21

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका शंकूछेदाच्या आकाराच्या बादलीची उंची 28 सेमी आहे. बादलीच्या दोन्ही वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या 12 सेमी व 15 सेमी आहेत. तर बादलीमध्ये किती लीटर पाणी मावेल? ($\pi = \frac{22}{7}$)

उकल : बादलीच्या वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या r_1 = 15 सेमी, r_2 = 12 सेमी

बादलीची उंची h = 28 सेमी

बादलीची धारकता = शंकूछेदाचे घनफळ

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$$

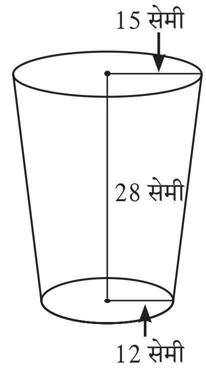
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28\,(15^2 + 12^2 + 15 \times 12)$$

$$= \frac{22 \times 4}{3} \times (225 + 144 + 180)$$

$$= \frac{22 \times 4}{3} \times 549$$

$$= 88 \times 183$$

= 16104 सेमी^{3} = 16.104 लीटर



आकृती 7.22

बादलीमध्ये 16.104 लीटर पाणी मावेल.

उदा. (2) शंकूछेदाच्या वर्तुळाकार भागांच्या त्रिज्या 14 सेमी आणि 8 सेमी आहेत. जर शंकूछेदाची उंची 8 सेमी असेल तर पुढील किमती काढा. (π= 3.14)

i) शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ ii) शंकूछेदाचे एकूण पृष्ठफळ iii) शंकूछेदाचे घनफळ .

उकल : येथे त्रिज्या r_1 = 14 सेमी , r_2 = 8 सेमी, उंची h = 8 सेमी

शंकूछेदाची तिरकस उंची $l = \sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

$l = \sqrt{8^2+(14-8)^2}$

$l = \sqrt{64+36}$ = 10 सेमी

शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ $= \pi(r_1 + r_2)\, l$
$= 3.14 \times (14 + 8) \times 10$
$= 690.8$ चौसेमी

शंकूछेदाचे एकूण पृष्ठफळ $= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^{\,2} + \pi r_2^{\,2}$
$= 3.14 \times 10\,(14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2$
$= 690.8 + 615.44 + 200.96$
$= 690.8 + 816.4$
$= 1507.2$ चौसेमी

शंकूछेदाचे घनफळ $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^{\,2} + r_2^{\,2} + r_1 \times r_2)$
$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8\,(14^2 + 8^2 + 14 \times 8)$
$= 3114.88$ घसेमी

सरावसंच 7.2

1. 30 सेमी उंची असलेल्या शंकूछेदाच्या आकाराच्या पाण्याच्या बादलीच्या वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या 14 सेमी व 7 सेमी असल्यास बादलीमध्ये किती लीटर पाणी मावेल? (1 लीटर = 1000 घसेमी)
2. शंकूछेदाच्या वर्तुळाकार भागांच्या त्रिज्या 14 सेमी व 6 सेमी आहेत व त्याची उंची 6 सेमी असल्यास पुढील किमती काढा. ($\pi = 3.14$)
   (1) शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ. (2) शंकूछेदाचे एकूण पृष्ठफळ. (3) शंकूछेदाचे घनफळ .
3. आकृती 7.23 मध्ये एका शंकूछेदाच्या वर्तुळाकार पायांचे परीघ अनुक्रमे 132 सेमी व 88 सेमी आहेत व उंची 24 सेमी आहे. तर त्या शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा. ($\pi = \frac{22}{7}$)

परीघ$_1 = 2\pi r_1 = 132$

$r_1 = \frac{132}{2\pi} = \boxed{}$ सेमी

परीघ$_2 = 2\pi r_2 = 88$

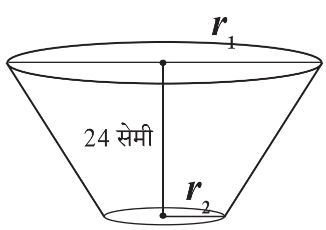
$r_2 = \frac{88}{2\pi} = \boxed{}$ सेमी

शंकूछेदाची तिरकस उंची $= l$

$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$l = \sqrt{\boxed{}^2 + \boxed{}^2}$

$l = \boxed{}$ सेमी



आकृती 7.23

शंकूछेदाचे वक्रपृष्ठफळ $= \pi(r_1 + r_2)l$

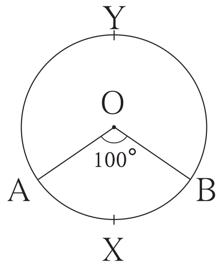
$= \pi \times \boxed{} \times \boxed{}$

$= \boxed{}$ चौसेमी

जरा आठवूया.

सोबतच्या आकृतीवरून सारणी पूर्ण करा.

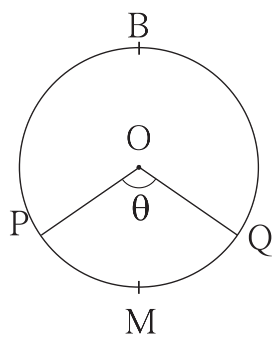
कंसाचा प्रकार	कंसाचे नाव	कंसाचे माप
लघुवर्तुळकंस	कंस AXB	....
....	कंस AYB	....



आकृती 7.24

जाणून घेऊया.

वर्तुळपाकळी (Sector of a circle)



आकृती 7.25

आकृतीमधील केंद्रीय कोनामुळे वर्तुळक्षेत्राचे दोन भागांत विभाजन झालेले आहे. या प्रत्येक भागाला वर्तुळपाकळी म्हणतात.

वर्तुळाच्या दोन त्रिज्या आणि त्यांची टोके जोडणाऱ्या वर्तुळकंसाने मर्यादित केलेल्या भागास वर्तुळपाकळी म्हणतात.

आकृतीमध्ये O –PMQ आणि O–PBQ या दोन वर्तुळपाकळ्या आहेत.

लघु वर्तुळपाकळी (Minor sector) :

दोन त्रिज्या व त्यांच्या संगत लघुकंसाने मर्यादित केलेल्या पाकळीस लघुवर्तुळपाकळी असे म्हणतात. आकृतीमध्ये O–PMQ ही लघुवर्तुळपाकळी आहे.

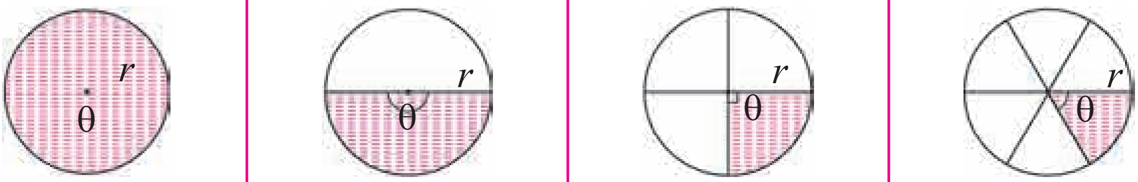
विशाल वर्तुळपाकळी (Major sector) :

दोन त्रिज्या व संगत विशालकंसाने मर्यादित केलेल्या पाकळीस विशालवर्तुळपाकळी असे म्हणतात. आकृतीमध्ये O–PBQ ही विशालवर्तुळपाकळी आहे.

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ (Area of a sector)

खालील आकृत्यांत दाखवल्याप्रमाणे समान त्रिज्या असलेल्या वर्तुळांच्या छायांकित भागांच्या क्षेत्रफळांचे निरीक्षण करा व खालील सारणी पूर्ण करा.

$\theta = 360°$	$\theta = 180°$	$\theta = 90°$	$\theta = 60°$
$A_1 = \pi r^2$	$A_2 = \frac{1}{2}\pi r^2$	$A_3 = \frac{1}{4}\pi r^2$	$A_4 = \frac{1}{6}\pi r^2$



आकृती 7.26

वर्तुळाच्या केंद्रीय कोनाचे माप = 360° = पूर्ण कोन

वर्तुळाचा केंद्रीय कोन = 360° , वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2			
वर्तुळ पाकळी	वर्तुळपाकळीच्या कंसाचे माप	$\frac{\theta}{360}$	वर्तुळ पाकळीचे क्षेत्रफळ A
A_1	360°	$\frac{360}{360}=1$	$1 \times \pi r^2$
A_2	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
A_3	90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
A_4	60°	....	....
A	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

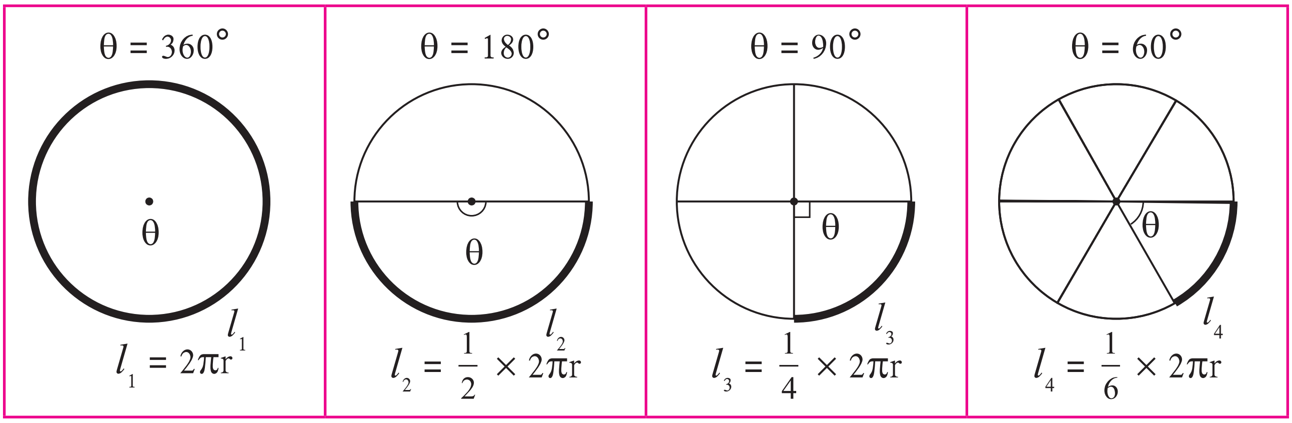
सारणीवरून लक्षात येते की, वर्तुळाच्या क्षेत्रफळास $\frac{\theta}{360}$ ने गुणल्यास, कंसाचे माप θ असलेल्या वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ मिळते. हे सूत्ररूपात पुढीलप्रमाणे लिहिता येते.

$$\text{वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ (A)} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

या सूत्रावरून $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360}$; म्हणजेच $\frac{\text{वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ}}{\text{वर्तुळाचे क्षेत्रफळ}} = \frac{\theta}{360}$

वर्तुळकंसाची लांबी (Length of an arc)

खाली दाखवल्याप्रमाणे समान त्रिज्या असलेल्या वर्तुळांच्या ठळक केलेल्या वर्तुळकंसांच्या लांबींचे निरीक्षण करा व खालील सारणी पूर्ण करा.



आकृती 7.27

वर्तुळाचा परीघ = $2\pi r$			
वर्तुळकंसांची लांबी	वर्तुळकंसाचे माप (θ)	$\frac{\theta}{360}$	वर्तुळकंसाची लांबी (l)
l_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times 2\pi r$
l_2	180°	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r$
l_3	90°	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r$
l_4	60°	....	....
l	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

वरील आकृतीबंधावरून लक्षात येते की, वर्तुळाच्या परिघाला $\frac{\theta}{360}$ ने गुणल्यास, कंसाचे माप θ असलेल्या वर्तुळकंसाची लांबी मिळते. हेच सूत्ररुपात पुढीलप्रमाणे लिहिता येते.

$$\text{वर्तुळकंसांची लांबी } (l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

या सूत्रावरून,

$$\therefore \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

$$\frac{\text{वर्तुळकंसाची लांबी}}{\text{परीघ}} = \frac{\theta}{360}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

वर्तुळकंसाची लांबी आणि वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ यांतील संबंध

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ $A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ I

तसेच वर्तुळकंसाची लांबी (l) $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \quad \text{.......... II}$$

$$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2$$ .... I व II वरून

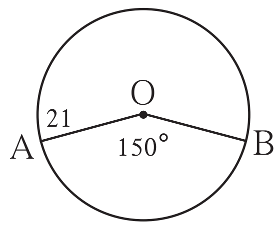
$$A = \frac{1}{2} lr = \frac{lr}{2}$$

$$\therefore \text{वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ} = \frac{\text{वर्तुळकंसाची लांबी} \times \text{त्रिज्या}}{2}$$

तसेच $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) 21 सेमी त्रिज्या असलेल्या वर्तुळपाकळीच्या कोनाचे माप 150° असल्यास वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ व संगत वर्तुळकंसाची लांबी काढा.



आकृती 7.28

उकल : येथे $r = 21$ सेमी, $\theta = 150$, $\pi = \frac{22}{7}$

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ (A) $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

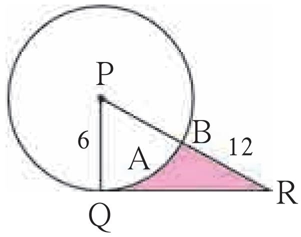
$= \frac{1155}{2}$ सेमी^{2} $= 577.5$ सेमी^{2}

वर्तुळकंसाची लांबी $= l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$= 55$ सेमी

उदा. (2) आकृतीमध्ये, वर्तुळाचे केंद्र P आणि वर्तुळाची त्रिज्या 6 सेमी आहे. रेख QR ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. PR = 12 सेमी असल्यास छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा. ($\sqrt{3}$ = 1.73)



आकृती 7.29

उकल : वर्तुळाच्या स्पर्शबिंदूतून काढलेली त्रिज्या स्पर्शिकेला लंब असते.

$\therefore$ Δ PQR मध्ये, $\angle$ PQR = 90°, PQ = 6 सेमी, PR = 12 सेमी

$\therefore$ $PQ = \frac{PR}{2}$

जर काटकोन त्रिकोणाची एक बाजू कर्णाच्या निम्म्या लांबीची असेल तर त्या बाजूसमोरील कोनाचे माप 30° असते.

$\therefore$ $\angle R = 30°$ आणि $\angle P = 60°$

30°-60°-90° प्रमेयाने, $QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$

$QR = 6\sqrt{3}$ सेमी

$\therefore$ $A(\Delta PQR) = \frac{1}{2}\, QR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$

$= 18\sqrt{3} = 18 \times 1.73$

= 31.14 सेमी^{2}

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\therefore$ $A(P-QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$

$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6 \quad = 3.14 \times 6$

= 18.84 सेमी^{2}

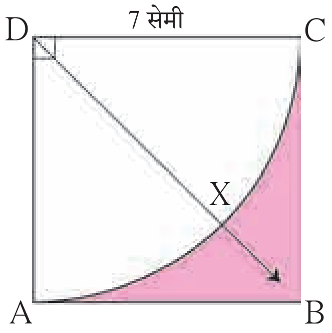
छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ = $A(\Delta PQR) - A(P-QAB)$

= 31.14 − 18.84

= 12.30 सेमी^{2}

छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ = 12.30 सेमी^{2}

उदा. (3) दिलेल्या आकृतीत, ABCD या चौरसाची प्रत्येक बाजू 7 सेमी आहे. बिंदू D हे केंद्र मानून DA त्रिज्येने काढलेली वर्तुळपाकळी D – AXC आहे, तर छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी रिकाम्या चौकटी भरून उदाहरण पूर्ण करा.



आकृती 7.30

उकल :

चौरसाचे क्षेत्रफळ = $\boxed{}$ (सूत्र)

= $\boxed{}$

= 49 चौसेमी

वर्तुळपाकळी (D– AXC) चे क्षेत्र = $\boxed{}$ (सूत्र)

$= \dfrac{\boxed{}}{360} \times \dfrac{22}{7} \times \boxed{}$

= 38.5 चौसेमी

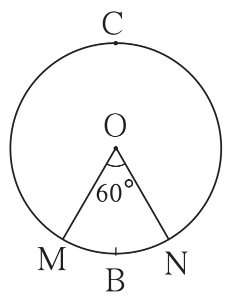
रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ = $\boxed{}$ चे क्षेत्रफळ – $\boxed{}$ चे क्षेत्रफळ

= $\boxed{}$ चौसेमी – $\boxed{}$ चौसेमी

= $\boxed{}$ चौसेमी

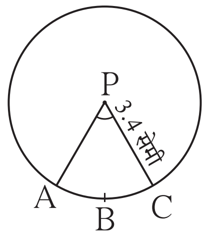
सरावसंच 7.3

1. वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी आहे. वर्तुळकंसाचे माप 54° असल्यास त्या कंसाने मर्यादित केलेल्या वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा. (π =3.14)
2. एका वर्तुळकंसाचे माप 80° आणि त्रिज्या 18 सेमी आहे, तर त्या वर्तुळकंसाची लांबी शोधा. (π =3.14)
3. वर्तुळपाकळीची त्रिज्या 3.5 सेमी असून तिच्या वर्तुळकंसाची लांबी 2.2 सेमी आहे, तर वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा.
4. वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी आहे , त्याच्या एका वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ 100 चौसेमी आहे, तर तिच्या संगत विशाल वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा. (π =3.14)
5. 15 सेमी त्रिज्या असलेल्या एका वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ 30 चौसेमी असेल तर संबंधित वर्तुळकंसाची लांबी काढा.
6. शेजारील आकृतीत वर्तुळाची त्रिज्या 7 सेमी आहे आणि m(कंस MBN)= 60° तर (1) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा .
   (2) A(O – MBN) काढा.
   (3) A(O – MCN) काढा.

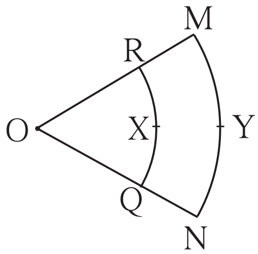


आकृती 7.31

7. 3.4 सेमी त्रिज्या असलेल्या वर्तुळपाकळीची परिमिती 12.8 सेमी आहे तर वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा.



आकृती 7.32



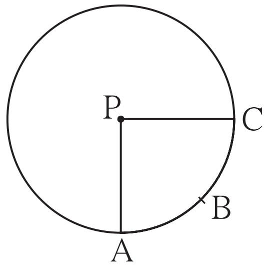
आकृती 7.33

8. आकृतीमध्ये, बिंदू O हे वर्तुळपाकळीचे केंद्र आहे. $\angle$ ROQ = $\angle$ MON = 60°, OR = 7 सेमी, OM = 21 सेमी, तर कंस RXQ व कंस MYN ची लांबी काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$)

9. आकृतीत A(P–ABC) = 154 चौसेमी आणि वर्तुळाची त्रिज्या 14 सेमी असेल, तर

(1) $\angle$ APC चे माप काढा.

(2) कंस ABC ची लांबी काढा.



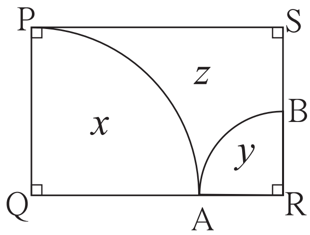
आकृती 7.34

10. वर्तुळपाकळीची त्रिज्या 7 सेमी आहे. जर वर्तुळपाकळीच्या कंसांची मापे पुढीलप्रमाणे असतील, तर त्या वर्तुळपाकळ्यांची क्षेत्रफळे काढा.

(1) 30° (2) 210° (3) 3 काटकोन

11. लघुवर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ 3.85 चौसेमी व संगत केंद्रीय कोनाचे माप 36° असल्यास त्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

12. आकृतीत □ PQRS हा आयत असून PQ = 14 सेमी, QR = 21 सेमी, तर आकृतीत दाखविलेल्या x, y आणि z या प्रत्येक भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



आकृती 7.35

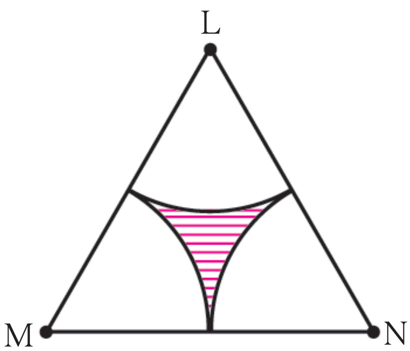
13. Δ LMN हा समभुज त्रिकोण आहे.LM = 14 सेमी. त्रिकोणाचा प्रत्येक शिरोबिंदू केंद्रबिंदू मानून व 7 सेमी त्रिज्या घेऊन आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे तीन वर्तुळपाकळ्या काढल्या. त्यावरून,

(1) A (Δ LMN) = ?

(2) एका वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढा.

(3) तीन वर्तुळपाकळ्यांचे एकूण क्षेत्रफळ काढा.

(4) रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

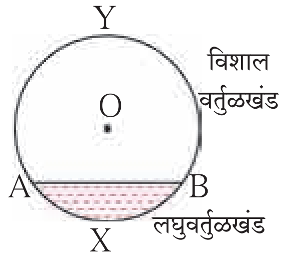


आकृती 7.36

जाणून घेऊया.

वर्तुळखंड (segment of a circle)

वर्तुळखंड म्हणजे जीवा व संगत वर्तुळकंस यांनी मर्यादित केलेला भाग होय.



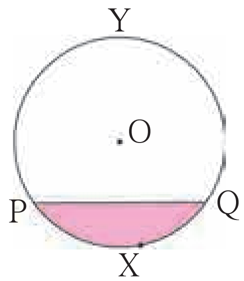
आकृती 7.37

लघुवर्तुळखंड : जीवा व लघुवर्तुळकंस यांनी मर्यादित केलेल्या भागास लघुवर्तुळखंड म्हणतात. आकृतीत वर्तुळखंड AXB हा लघुवर्तुळखंड आहे.

विशालवर्तुळखंड : जीवा व विशाल वर्तुळकंस यांनी मर्यादित केलेल्या भागास विशाल वर्तुळखंड म्हणतात. आकृतीत वर्तुळखंड AYB हा विशाल वर्तुळखंड आहे.

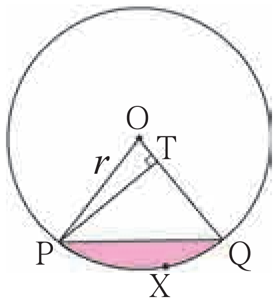
अर्धवर्तुळखंड : व्यासामुळे तयार होणाऱ्या वर्तुळखंडाला अर्धवर्तुळखंड म्हणतात.

वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ (Area of a Segment)



आकृती 7.38

आकृतीमध्ये PXQ हा लघुवर्तुळखंड आहे. तर वर्तुळखंड PYQ हा विशालवर्तुळखंड आहे.



आकृती 7.39

लघुवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ कसे काढता येईल?

वर्तुळकेंद्र O पासून OP व OQ या दोन त्रिज्या काढू. तुम्हाला वर्तुळपाकळी O-PXQ चे क्षेत्रफळ काढता येते. तसेच Δ OPQ चे क्षेत्रफळही काढता येते. वर्तुळपाकळीच्या क्षेत्रफळातून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ वजा केले की वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ मिळेल.

वर्तुळखंड PXQ चे क्षेत्रफळ = वर्तुळपाकळी (O – PXQ) चे क्षेत्रफळ – Δ OPQ चे क्षेत्रफळ

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta \text{ OPQ चे क्षेत्रफळ} \text{ ---------- (I)}$$

आकृतीत Δ OPQ मध्ये, रेख PT हा बाजू OQ वर टाकलेला लंब आहे.

काटकोन Δ OTP मध्ये, $\sin\theta = \frac{PT}{OP}$

$\therefore$ PT = OP $\times$ sin θ

PT = r sin θ ($\because$ OP = r)

Δ OPQ चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ $\times$ पाया $\times$ उंची

$= \frac{1}{2} \times OQ \times PT$

$= \frac{1}{2} \times r \times r \sin \theta$

$= \frac{1}{2} \times r^2 \sin \theta$ ---------------- (ii)

(I) व (II) वरून,

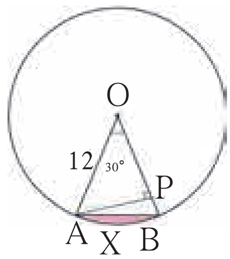
वर्तुळखंड PXQ चे क्षेत्रफळ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$

$= r^2 \left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2} \right]$

(आपण लघुकोनांचीच साइन गुणोत्तरे शिकलो आहोत. म्हणून θ हे माप 90° किंवा त्यापेक्षा कमी असतानाच हे सूत्र वापरता येईल, हे लक्षात घ्या.)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आकृतीत $\angle AOB = 30^\circ$, OA = 12 सेमी तर लघुवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढा. (π = 3.14 घ्या.)



आकृती 7.40

रीत I :

r = 12, $\theta = 30^\circ$, π = 3.14

वर्तुळपाकळी O-AXB चे

क्षेत्रफळ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2$

$= 3.14 \times 12$

= 37.68 चौसेमी

A(Δ OAB) = $\frac{1}{2} r^2 \times \sin \theta$

$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30$

$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2}$

.....($\because \sin 30 = \frac{1}{2}$)

= 36 चौसेमी

वर्तुळखंड AXB चे क्षेत्रफळ = वर्तुळपाकळी (O – AXB) चे क्षेत्रफळ – A(Δ OAB)

= 37.68 – 36

= 1.68 चौसेमी

रीत II :

वर्तुळखंड AXB चे क्षेत्रफळ $= r^2\left[\dfrac{\pi\theta}{360} - \dfrac{\sin\theta}{2}\right]$

$= 12^2\left[\dfrac{3.14\times 30}{360} - \dfrac{\sin 30}{2}\right]$

$= 144\left[\dfrac{3.14}{12} - \dfrac{1}{2\times 2}\right]$

$= \dfrac{144}{4}\left[\dfrac{3.14}{3} - 1\right]$

$= 36\left[\dfrac{3.14-3}{3}\right]$

$= \dfrac{36}{3}\times 0.14 = 12 \times 0.14$

= 1.68 चौसेमी.

उदा. (2) P केंद्र असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी आहे. जीवा AB ने वर्तुळकेंद्राशी काटकोन केलेला असल्यास लघुवर्तुळखंडाचे व विशालवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ काढा. (π = 3.14)

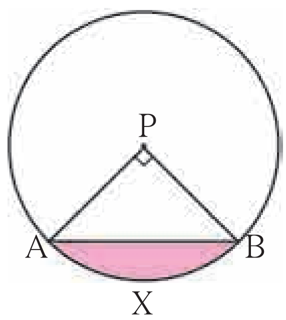
उकल : r = 10 सेमी, θ = 90, π = 3.14

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्र $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \dfrac{90}{360} \times 3.14 \times 10^2$

$= \dfrac{1}{4} \times 314$

= 78.5 चौसेमी



आकृती 7.41

A(ΔAPB) $= \dfrac{1}{2}$ × पाया × उंची

$= \dfrac{1}{2} \times 10 \times 10$

= 50 चौसेमी

लघुवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ – त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

= 78.5 – 50

= 28.5 चौसेमी

विशालवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ = वर्तुळाचे क्षेत्रफळ − लघुवर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ

$= 3.14 \times 10^2 - 28.5$

$= 314 - 28.5$

$= 285.5$ चौसेमी

उदा. (3) 14 सेमी त्रिज्या असलेल्या वर्तुळात एक सुसम षट्कोन अंतर्लिखित केलेला असल्यास षट्कोनाच्या बाहेरील व वर्तुळाच्या आतील भागाचे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$, $\sqrt{3} = 1.732$)

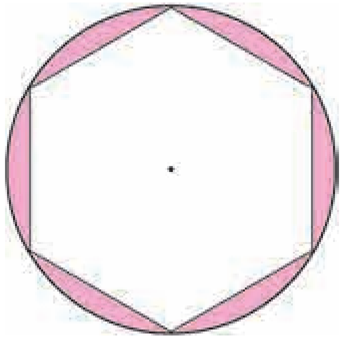
उकल : सुसम षट्कोनाची बाजू = सुसम षट्कोनाच्या परिवर्तुळाची त्रिज्या

$\therefore$ सुसम षट्कोनाची बाजू = 14 सेमी

सुसम षट्कोनाचे क्षेत्रफळ $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{बाजू})^2$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2$

$= 509.208$ चौसेमी



आकृती 7.42

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 616$ चौसेमी

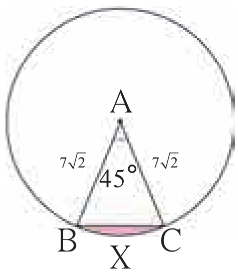
षट्कोनाच्या बाहेरील व वर्तुळाच्या आतील भागाचे क्षेत्रफळ = वर्तुळाचे क्षेत्र. − सुसम षट्कोनाचे क्षेत्र.

$= 616 - 509.208$

$= 106.792$ चौसेमी

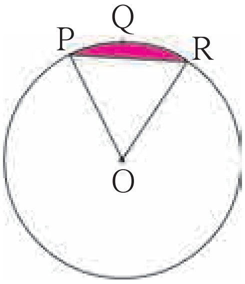
सरावसंच 7.4

1. आकृतीमध्ये A केंद्र असलेल्या वर्तुळात $\angle ABC = 45°$, $AC = 7\sqrt{2}$ सेमी, तर वर्तुळखंड BXC चे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{2} = 1.41$)



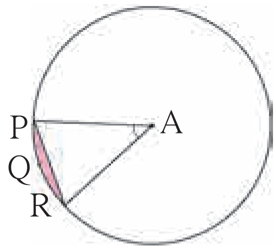
आकृती 7.43

2. आकृती 7.44 मध्ये O हे वर्तुळकेंद्र आहे. m(कंस PQR) = 60°, OP = 10 सेमी, तर छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

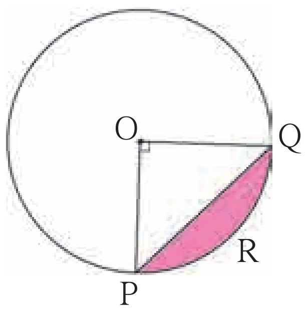


आकृती 7.44

3. A केंद्र असलेल्या वर्तुळात $\angle PAR = 30°$ $AP = 7.5$ तर, वर्तुळखंड PQR चे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3.14$)



आकृती 7.45

4. 

आकृती 7.46

केंद्र O असलेल्या वर्तुळात PQ ही जीवा आहे. $\angle POQ = 90°$, आणि छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ 114 चौसेमी आहे, तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा. ($\pi = 3.14$)

5. 15 सेमी त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाची PQ ही जीवा वर्तुळाच्या केंद्राशी 60° चा कोन करते. त्या जीवेमुळे झालेल्या विशालवर्तुळखंड आणि लघुवर्तुळखंड यांची क्षेत्रफळे काढा. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. **खाली दिलेल्या पर्यायांमधून अचूक पर्याय निवडा.**

(1) जर वर्तुळाचा परीघ व वर्तुळाचे क्षेत्रफळ यांचे गुणोत्तर 2:7 असेल तर वर्तुळाचा परीघ किती?

(A) 14π (B) $\frac{7}{\pi}$ (C) 7π (D) $\frac{14}{\pi}$

(2) 44 सेमी लांबी असलेल्या वर्तुळकंसाचे माप 160° असेल तर त्या वर्तुळाचा परीघ किती?

(A) 66 सेमी (B) 44 सेमी (C) 160 सेमी (D) 99 सेमी

(3) कंसाचे माप 90° आणि त्रिज्या 7 सेमी असलेल्या वर्तुळपाकळीची परिमिती काढा.

(A) 44 सेमी (B) 25 सेमी (C) 36 सेमी (D) 56 सेमी

(4) तळाची त्रिज्या 7 सेमी व उंची 24 सेमी असलेल्या शंकूचे वक्रपृष्ठफळ किती?

(A) 440 सेमी^{2} (B) 550 सेमी^{2} (C) 330 सेमी^{2} (D) 110 सेमी^{2}

(5) 5 सेमी त्रिज्येच्या वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ 440 सेमी^{2} असल्यास त्या वृत्तचितीची उंची किती?

(A) $\frac{44}{\pi}$ सेमी (B) 22π सेमी (C) 14π सेमी (D) $\frac{22}{\pi}$ सेमी

(6) एक शंकू वितळवून त्याच्या तळाच्या त्रिज्येएवढ्याच त्रिज्येची वृत्तचिती तयार केली. जर वृत्तचितीची उंची 5 सेमी असेल तर शंकूची उंची किती?

(A) 15 सेमी (B) 10 सेमी (C) 18 सेमी (D) 5 सेमी

(7) 0.01 सेमी बाजू असलेल्या घनाचे घनफळ किती घसेमी ?

(A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) एक घनमीटर घनफळ असलेल्या घनाच्या बाजूची लांबी किती ?

(A) 1 सेमी (B) 10 सेमी (C) 100 सेमी (D) 1000 सेमी

2. एका शंकूछेदाच्या आकाराच्या कपडे धुण्याच्या टबची उंची 21 सेमी आहे. टबच्या दोन्ही वर्तुळाकार बाजूंच्या त्रिज्या 20 सेमी व 15 सेमी आहेत. तर टबमध्ये किती लीटर पाणी मावेल? ($\pi = \frac{22}{7}$)

3★. प्लॅस्टिकच्या 1 सेमी त्रिज्येच्या लहान गोळ्या वितळवून वृत्तचिती आकाराची नळी तयार केली. नळीची जाडी 2 सेमी उंची 90 सेमी व बाह्यत्रिज्या 30 सेमी असेल तर त्या नळीसाठी किती गोळ्या वितळवल्या असतील ?

4. लांबी 16 सेमी, रुंदी 11 सेमी व उंची 10 सेमी असलेल्या धातूच्या इष्टिकाचितीपासून ज्याची जाडी 2 मिमी आहे व व्यास 2 सेमी आहे अशी काही नाणी तयार केली, तर किती नाणी तयार होतील ?

5. एका रोलरचा व्यास 120 सेमी आणि लांबी 84 सेमी आहे. एक मैदान एकदा सपाट करण्यासाठी रोलरचे 200 फेरे पूर्ण होतात. तर 10 रुपये प्रति चौरस मीटर या दराने ते मैदान सपाट करण्याचा एकूण खर्च काढा.

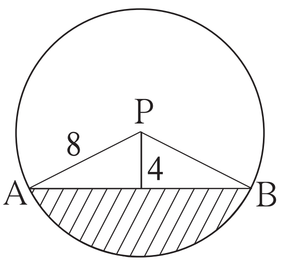
6. व्यास 12 सेमी व जाडी 0.01 मीटर असलेला एक धातूचा पोकळ गोल आहे. तर त्या गोलाच्या बाहेरील भागाचे पृष्ठफळ काढा व धातूची घनता 8.88 ग्रॅम प्रति घनसेंटिमीटर असल्यास त्या गोलाचे वस्तुमान काढा.

7. एका लंबवृत्तचितीच्या आकाराच्या बादलीचा तळाचा व्यास 28 सेमी व उंची 20 सेमी आहे. ही बादली वाळूने पूर्ण भरली आहे. त्या बादलीतील वाळू जमिनीवर अशा रीतीने ओतली, की वाळूचा शंकू तयार होईल. वाळूच्या शंकूची उंची 14 सेमी असेल तर शंकूच्या तळाचे क्षेत्रफळ काढा.

8. एका धातूच्या गोळ्याची त्रिज्या 9 सेमी आहे. तो गोल वितळवून 4 मिमी व्यासाची धातूची तार काढली, तर त्या तारेची लांबी किती मीटर असेल ?

9. 6 सेमी त्रिज्या असलेल्या एका वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ 15π सेमी^{2} आहे, तर त्या पाकळीच्या कंसाचे माप काढा व वर्तुळकंसाची लांबी काढा.

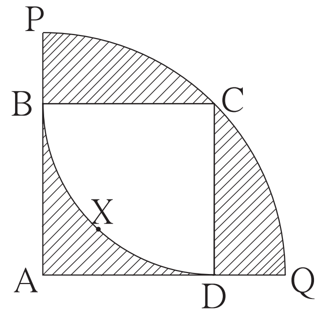
10.



आकृती 7.47

आकृतीत P हा वर्तुळाचा केंद्र असून रेख AB ही जीवा आहे. PA = 8 सेमी आणि जीवा AB वर्तुळकेंद्रापासून 4 सेमी अंतरावर असेल, तर रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

11. वर्तुळपाकळी A–PCQ मध्ये □ ABCD हा चौरस आहे. C – BXD या पाकळीची त्रिज्या 20 सेमी असेल तर रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी खालील कृती करा.



आकृती 7.48

उकल : चौरस ABCD ची बाजू = वर्तुळपाकळी C – BXD ची त्रिज्या = $\boxed{}$ सेमी

चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू^{2} = $\boxed{}^2$ = $\boxed{}$ ..... (I)

चौरसातील रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ

= चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ – वर्तुळपाकळी C – BXD चे क्षेत्रफळ

$$= \boxed{} - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \boxed{} - \frac{90}{360} \times \frac{3.14}{1} \times \frac{400}{1}$$

$$= \boxed{} - 314$$

$$= \boxed{}$$

मोठ्या वर्तुळपाकळीची त्रिज्या = चौरस ABCD च्या कर्णाची लांबी

$$= 20\sqrt{2}$$

मोठ्या वर्तुळपाकळीतील चौरसाबाहेरील रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ

= वर्तुळपाकळी A – PCQ चे क्षेत्रफळ – चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ

= A(A – PCQ) – A(□ ABCD)

$$= \left(\frac{\theta}{360} \times \pi \times r^2\right) - \boxed{}^2$$

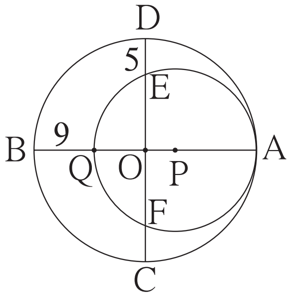
$$= \frac{90}{360} \times 3.14\,(20\sqrt{2}\,)^2 - (20)^2$$

$$= \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

$\therefore$ रेखांकित भागाचे एकूण क्षेत्रफळ = 86 + 228 = 314 चौसेमी

12.



आकृती 7.49

O आणि P केंद्र असलेली वर्तुळे बिंदू A मध्ये आतून स्पर्श करतात. जर, BQ = 9, DE = 5, तर वर्तुळाच्या त्रिज्या शोधण्यासाठी खालील कृती करा.

उकल : मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या R मानू.

लहान वर्तुळाची त्रिज्या r मानू.

OA, OB, OC आणि OD या मोठ्या वर्तुळाच्या त्रिज्या

$\therefore$ OA = OB = OC = OD = R

PQ = PA = r

OQ = OB − BQ = $\boxed{}$

OE = OD − DE = $\boxed{}$

P केंद्र असलेल्या वर्तुळात दोन जीवांच्या आंतरविभाजनाच्या गुणधर्मानुसार

$OQ \times OA = OE \times OF$

$\boxed{} \times R = \boxed{} \times \boxed{}$ $(\because\ OE = OF)$

$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$

$R = \boxed{}$

$AQ = 2r = AB - BQ$

$2r = 50 - 9 = 41$

$r = \boxed{} = \boxed{}$

उत्तरसूची

प्रकरण 1 समरूपता

सरावसंच 1.1

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 3 4. 1:1 5. (1) $\frac{BQ}{BC}$, (2) $\frac{PQ}{AD}$, (3) $\frac{BC}{DC}$, (4) $\frac{DC \times AD}{QC \times PQ}$

सरावसंच 1.2

1. (1) दुभाजक आहे. (2) दुभाजक नाही. (3) दुभाजक आहे.

2. $\frac{PN}{NR} = \frac{PM}{MQ} = \frac{3}{2}$, म्हणून रेषा NM || बाजू RQ 3. QP = 3.5 5. BQ = 17.5

6. QP = 22.4 7. x = 6 ; AE = 18 8. LT = 4.8 9. x = 10

10. पक्ष, XQ, PD, पक्ष, $\frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}} = \frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}}$, प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय, $\frac{\boxed{XP}}{\boxed{PD}} = \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}}$

सरावसंच 1.3

1. Δ ABC ~ Δ EDC कोको कसोटी 2. Δ PQR ~ Δ LMN ; बाबाबा समरूपता कसोटीनुसार

3. 12 मीटर 4. AC = 10.5 6. OD = 4.5

सरावसंच 1.4

1. क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर = 9 : 25 2. $\boxed{PQ^2}$, $\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$ 3. $\boxed{A(\Delta PQR)}$, $\frac{4}{5}$

4. MN = 15 5. 20 सेमी 6. $4\sqrt{2}$

7. $\boxed{PF}$; $\boxed{x} + \boxed{2x}$; $\boxed{\angle FPQ}$; $\boxed{\angle FQP}$; $\frac{DF^2}{PF^2}$; $\boxed{20}$; $\boxed{45}$; $\boxed{45} - \boxed{20}$; $\boxed{\text{25 चौरस एकक}}$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. (1) (B), (2) (B), (3) (B), (4) (D), (5) (A)

2. $\frac{7}{13}, \frac{7}{20}, \frac{13}{20}$ 3. 9 सेमी 4. $\frac{3}{4}$ 5. 11 सेमी 6. $\frac{25}{81}$ 7. 4

8. PQ = 80, QR = $\frac{280}{3}$, RS = $\frac{320}{3}$ 9. $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MQ}} = \frac{\boxed{PX}}{\boxed{XQ}}$, $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MR}} = \frac{\boxed{PY}}{\boxed{YR}}$,

10. $\frac{AX}{XY} = \frac{3}{2}$ 12. $\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{3}+\boxed{2}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\boxed{\text{को-को}}$, $\frac{\boxed{5}}{3}$, $\boxed{15}$

प्रकरण 2 पायथागोरसचे प्रमेय

सरावसंच 2.1

1. पायथागोरसची त्रिकुटे ; (1), (3), (4), (6) 2. NQ = 6 3. QR = 20.5

4. RP = 12, PS = $6\sqrt{3}$ **5.** $\boxed{\text{एकरूप कोनासमोरील बाजू}}$, $\boxed{45^\circ}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{2}$

6. बाजू = $5\sqrt{2}$ सेमी, परिमिती = $20\sqrt{2}$ सेमी **7.** (1) 18 (2) $4\sqrt{13}$ (3) $6\sqrt{13}$ **8.** 37 सेमी
10. 8.2 मी.

सरावसंच 2.2

1. 12 **2.** $2\sqrt{10}$ **4.** 18 सेमी

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. (1) (B), (2) (B), (3) (A), (4) (C), (5) (D), (6) (C), (7) (B), (8) (A).
2. (1) $a\sqrt{3}$, (2) काटकोन त्रिकोण होईल. (3) 61 सेमी, (4) 15 सेमी, (5) $x\sqrt{2}$, (6) $\angle$ PRQ.
3. RS = 6 सेमी, ST = $6\sqrt{3}$ सेमी **4.** 20 सेमी **5.** बाजू = 2 सेमी, परिमिती = 6 सेमी
6. 7 **7.** AP = $2\sqrt{7}$ सेमी **10.** 7.5 किमी / तास **12.** 8 सेमी **14.** 8 सेमी
15. 192 चौरस एकक **17.** 58 **18.** 26

प्रकरण 3 वर्तुळ

सरावसंच 3.1

1. (1) 90°, स्पर्शिका त्रिज्या प्रमेय (2) 6 सेमी ; कारण लंबांतर (3) $6\sqrt{2}$ सेमी (4) 45°
2. (1) $5\sqrt{3}$ सेमी (2) 30° (3) 60° **4.** 9 सेमी

सरावसंच 3.2

1. 1.3 सेमी 2. 9.7 सेमी **4.** (3) 110° **5.** $4\sqrt{6}$ सेमी

सरावसंच 3.3

1. m(कंस DE) = 90°, m(कंस DEF) = 160°

सरावसंच 3.4

1. (1) 60° (2) 30° (3) 60° (4) 300° **2.** (1) 70° (2) 220° (3) 110° (4) 55°
3. $\angle$R = 92°; $\angle$N = 88° **7.** 44° **8.** 121°

सरावसंच 3.5

1. PS = 18; RS = 10, **2.** (1) 7.5 (2) 12 किंवा 6
3. (1) 18 (2) 10 (3) 5 **4.** 4

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. (1) D (2) B (3) B (4) C (5) B (6) D (7) A (8) B (9) A (10) C.
2. (1) 9 सेमी (2) वर्तुळाच्या अंतर्भागात (3) 2 बिंदू, 12 सेमी
3. (1) 6 (2) $\angle$K = 30°; $\angle$M = 60° **5.** 10 **6.** (1) 9 सेमी (2) 6.5 सेमी

(3) 90° ; MS : SR = 2 : 1 **9.** $4\sqrt{3}$ सेमी

13. (1) 180° (2) $\angle AQP \cong \angle ASQ \cong \angle ATQ$

(3) $\angle QTS \cong \angle SQR \cong \angle SAQ$ (4) 65°, 130° (5) 100° **14.**(1) 70°

(2) 130° (3) 210° **15.** (1) 56° (2) 6 (3) 16 किंवा 9 **16.** (1) 15.5°

(2) 3.36 (3) 6 **18.** (1) 68° (2) OR = 16.2, QR = 13 (3) 13 **21.** 13

प्रकरण 4 भौमितिक रचना

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. (1) C (2) A (3) A

प्रकरण 5 निर्देशक भूमिती

सरावसंच 5.1

1. (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) 13 (5) 20 (6) $\frac{29}{2}$

2. (1) एकरेषीय आहेत. (2) एकरेषीय नाहीत. (3) एकरेषीय नाहीत. (4) एकरेषीय आहेत.

3. $(-1, 0)$ **7.** 7 किंवा -5

सरावसंच 5.2

1. (1, 3) **2.** (1) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{4}{7}, -\frac{11}{7}\right)$ (3) $\left(0, \frac{13}{3}\right)$ **3.** 2:7 **4.** $(-6, 3)$

5. 2:5, $k = 6$ **6.** (11, 18) **7.** (1) (1, 3) (2) $(6, -2)$ (3) $\left(\frac{19}{3}, \frac{22}{3}\right)$

8. $(-1, -7)$ **9.** $h = 7$, $k = 18$ **10.** (0, 2) ; $(-2, -3)$

11. $(-9, -8)$, $(-4, -6)$, $(1, -4)$ **12.** (16, 12), (12, 14), (8, 16), (4, 18)

सरावसंच 5.3

1. (1) 1 (2) $\sqrt{3}$ (3) चढ ठरवता येत नाही.

2. (1) 2 (2) $-\frac{3}{8}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) चढ ठरवता येत नाही.

3. (1) एकरेषीय आहेत. (2) एकरेषीय आहेत. (3) एकरेषीय नाहीत. (4) एकरेषीय आहेत.
(5) एकरेषीय आहेत. (6) एकरेषीय आहेत.

4. -5; $\frac{1}{5}$; $-\frac{2}{3}$ 6. $k = 5$ 7. $k = 0$ 8. $k = 5$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. (1) D (2) D (3) C (4) C

2. (1) एकरेषीय आहेत. (2) एकरेषीय आहेत. (3) एकरेषीय नाहीत. **3.** (6, 13) **4.** 3:1

5. (−7, 0) 6. (1) $a\sqrt{2}$ (2) 13 (3) $5a$ 7. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

8. (1) हो, विषमभुज त्रिकोण (2) नाही. (3) हो, समभुज त्रिकोण 9. $k = 5$

13. 5, $2\sqrt{13}$, $\sqrt{37}$ 14. (1, 3) 16. $\left(\frac{25}{6}, \frac{13}{6}\right)$, त्रिज्या = $\frac{13\sqrt{2}}{6}$ 17. (7, 3)

18. समांतरभुज चौकोन 19. A(20, 10), P(16, 12), R(8, 16), B(0, 20). 20. (3, −2)

21. (7, 6) व (3, 6) 22. 10 व 0

प्रकरण 6 त्रिकोणमिती

सरावसंच 6.1

1. $\cos\theta = \frac{24}{25}$; $\tan\theta = \frac{7}{24}$ 2. $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

3. $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{41}{9}$; $\sin\theta = \frac{9}{41}$ 4. $\sec\theta = \frac{13}{5}$; $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = \frac{12}{13}$

5. $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \mathrm{cosec}\,\theta} = \frac{1}{2}$

सरावसंच 6.2

1. चर्चची उंची 80 मीटर
2. जहाजाचे दीपगृहापासूनचे अंतर 51.60 मीटर
3. दुसऱ्या इमारतीची उंची $(10 + 12\sqrt{3})$ मीटर
4. तारेने क्षितिज समांतर पातळीशी केलेला कोन 30°
5. झाडाची उंची $(40 + 20\sqrt{3})$ मीटर
6. पतंगाच्या दोऱ्याची लांबी 69.20 मीटर

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. (1) A (2) B (3) C (4) A

2. $\cos 60 = \frac{60}{61}$ 3. $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{5}$; $\cot\theta = \frac{1}{2}$

4. $\sin\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{13}{5}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$; $\cot\theta = \frac{12}{5}$

6. इमारतीची उंची $16\sqrt{3}$ मीटर

7. जहाजाचे दीपगृहापासून अंतर $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ मीटर

8. इमारतीची उंची $(12 + 15\sqrt{3})$ मीटर

9. शिडीचे दुसरे टोक जमिनीपासून जास्तीत जास्त 20.80 मीटर उंच असेल.

10. विमान जमिनीपासून जास्तीत जास्त 1026 मीटर उंचीवर होते.

प्रकरण 7 महत्वमापन

सरावसंच 7.1

1. 11.79 घसेमी 2. 113.04 घसेमी 3. 1413 चौसेमी (π = 3.14 घेऊन) 4. 616 चौसेमी
5. 21 सेमी 6. 12 जग 7. 5 सेमी 8. 273π चौसेमी 9. 20 गोळ्या
10. 94.20 घसेमी, 103.62 चौसेमी 11. 5538.96 चौसेमी, 38772.72 घसेमी
12. 1468.67π घसेमी

सरावसंच 7.2

1. 10.780 लीटर 2. (1) 628 चौसेमी (2) 1356.48 चौसेमी (3) 1984.48 घसेमी

सरावसंच 7.3

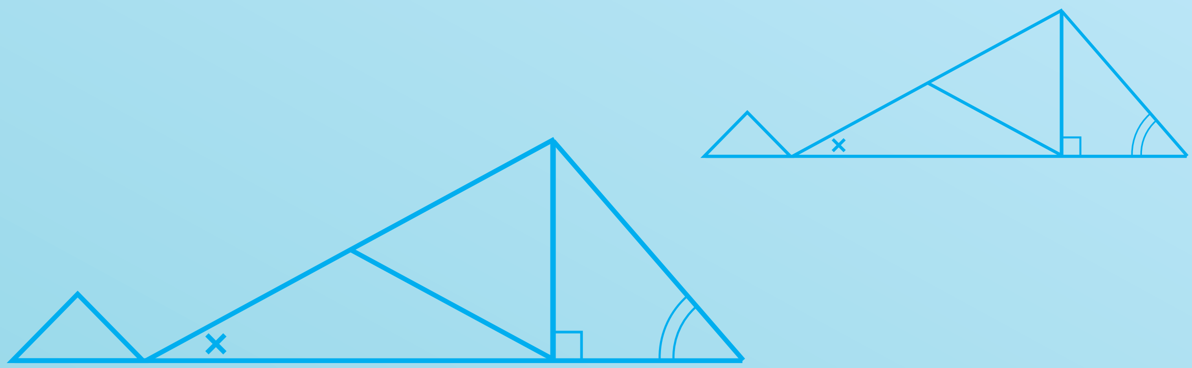
1. 47.1 चौसेमी 2. 25.12 सेमी 3. 3.85 चौसेमी 4. 214 चौसेमी 5. 4 सेमी
6. (1) 154 चौसेमी (2) 25.7 चौसेमी (3) 128.3 चौसेमी 7. 10.2 चौसेमी
8. 7.3 सेमी ; 22 सेमी 9. (1) 90° (2) 22 सेमी
10.(1) 12.83 चौसेमी (2) 89.83 चौसेमी (3) 115.5 चौसेमी 11. 3.5 सेमी
12. x = 154 चौसेमी ; y = 38.5 चौसेमी ; z = 101.5 चौसेमी
13. (1) 84.87 चौसेमी (2) 25.67 चौसेमी (3) 77.01 चौसेमी (4) 7.86 चौसेमी

सरावसंच 7.4

1. 3.72 चौसेमी 2. 9.08 चौसेमी 3. 0.65625 चौएकक 4. 20 सेमी
5. 20.43 चौसेमी ; 686.07 चौसेमी

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. (1) A, (2) D, (3) B, (4) B, (5) A, (6) A, (7) D, (8) C.
2. 20.35 लीटर 3. 7830 गोळ्या 4. 2800 नाणी ($\pi = \frac{22}{7}$ घेऊन) 5. 6336 रुपये
6. 452.16 चौसेमी ; 3385.94 ग्रॅम 7. 2640 चौसेमी 8. 108 मीटर
9. 150° ; 5π सेमी 10. 39.28 चौसेमी



महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ,
पुणे–४११००४.

₹ ७७.००