സ്റ്റാൻഡേർഡ് IX

ഗണിതം

ഭാഗം – 1

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി, കേരളം
2019

NT-503-1-MATHS-9-M-VOL.1

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

അളവുകളിലൂടെയും അവയുടെ പരസ്പര ബന്ധങ്ങളിലൂടെയും ലോകത്തെ മനസ്സിലാക്കാനാണ് മനുഷ്യർ പലതരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കിയത്. ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളും രൂപപ്പെടുന്നതും, അത്തരം അളവുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഭൗതിക സാഹചര്യങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് ഈ സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകൾ നിർവചിക്കപ്പെടുന്നതെല്ലാം ഇതുവരെയുള്ള ഗണിതപഠനത്തിൽ കണ്ടു. എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ടോ ഭിന്നസംഖ്യകൾകൊണ്ടോ സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെയും അവ സൂചിപ്പിക്കാനുള്ള പുതിയ സംഖ്യകളെയും ഈ പുസ്തകത്തിൽ പരിചയപ്പെടാം.

ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ പഠനവും ഇതിൽ തുടരുന്നു. സമാന്തര വരകളും ത്രികോണങ്ങളും വൃത്തങ്ങളുമെല്ലാം തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധങ്ങളാണ് പ്രധാനമായും ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. അവ തിരിച്ചറിയുന്നതിലൂടെ പുതിയ ജ്യാമിതീയ തത്വങ്ങളും പ്രയോഗങ്ങളും രൂപപ്പെടുന്നത് വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ചലനാത്മകമായി ജ്യാമിതി അവതരിപ്പിക്കാൻ ജിയോജിബ്ര എന്ന കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രോഗ്രാം ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതിയും വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. കൂടുതൽ പഠനവിഭവങ്ങൾ സമഗ്രപോർട്ടൽ, ക്യൂ.ആർ. കോഡ് എന്നിവ മുഖേന ലഭ്യമാണ്.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജെ. പ്രസാദ്
ഡയറക്ടർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ്:

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയ സേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക. സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സംസ്കാരസമന്വയത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

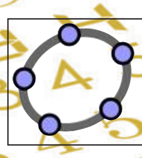
(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽകൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക.

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

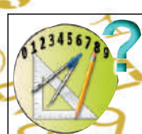
ഉള്ളടക്കം

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.


ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത


കണക്ക് ചെയ്തുനോക്കാം

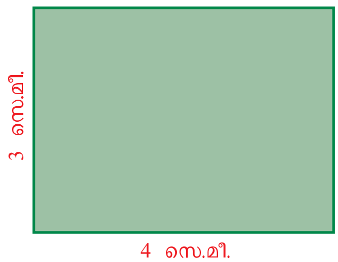

ഗവേഷണം


ചർച്ച ചെയ്യാം

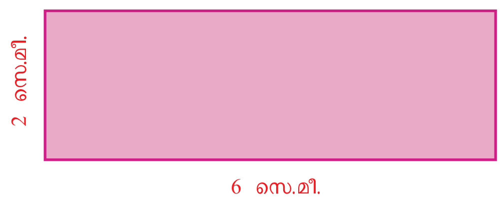
1 പരപ്പളവ്

ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കണം. പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയിരിക്കണം. എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

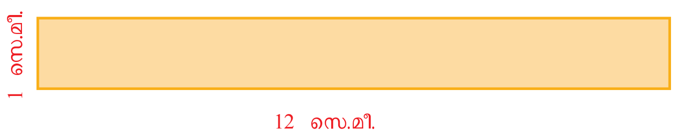
ഇങ്ങനെയാവാം:



ഇങ്ങനെയുമാവാം:



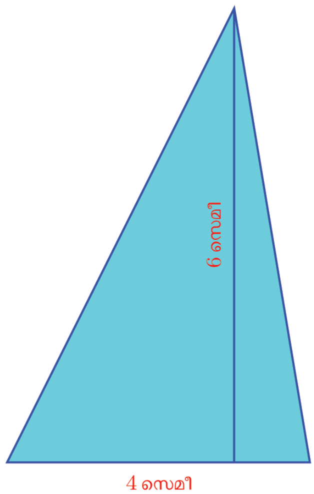
ഇനിയും പലതരത്തിലാകാം, അല്ലേ?

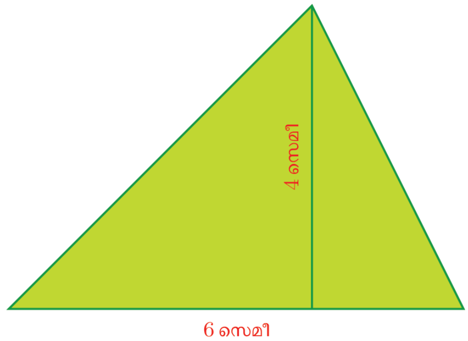


ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആകണം എന്നു കൂടി പറഞ്ഞാലോ? ഒരെണ്ണം മാത്രമല്ലേയുള്ളൂ?

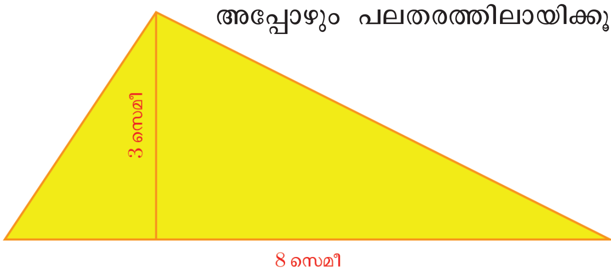
Min = 0, Max = 50 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമിക്കുക. നീളം a ആകത്തക്കവിധം ഒരു വര വരച്ച് അഗ്രബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി വരയ്ക്ക് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അഗ്രബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി കൊണ്ട് ആരം 12/a ആയ വൃത്തങ്ങൾ വരച്ച്, വൃത്തങ്ങളും ലംബങ്ങളും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ഉപയോഗിച്ച് ചതുരം പൂർത്തിയാക്കിയതിനുശേഷം വൃത്തങ്ങളും വരകളും മറച്ചു വയ്ക്കാം. ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡർ മാറ്റുമ്പോൾ പരപ്പളവ് 12 ആയ വ്യത്യസ്ത ചതുരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നത് കാണാം.

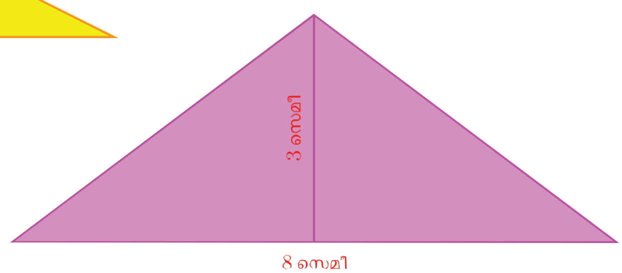
12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമാണ് വേണ്ടതെങ്കിലോ? അതും പലതരത്തിലാവാം:

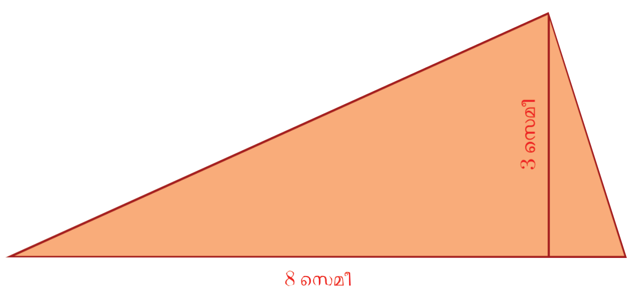




ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെന്നുകൂടി പറഞ്ഞാലോ? അപ്പോഴും പലതരത്തിലായിക്കൂടേ?



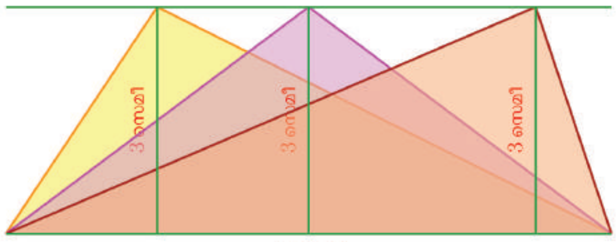




Min = 0, Max = 5 ആകത്തക്ക വിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമിക്കുക. നീളം a ആകത്തക്ക വിധം ഒരു വര AB നിർമിച്ച് A യിൽകൂടി ഈ വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. A കേന്ദ്രമായി ആരം 24/a ആയ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വൃത്തവും ലംബവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. C യിൽ കൂടി AB യ്ക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു വര വരച്ച് അതിൽ ഒരു ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം ABD നിർമിച്ച് പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വിലയും, D എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനവും മാറ്റിയാൽ പരപ്പളവ് 12 ആയ വ്യത്യസ്ത ത്രികോണങ്ങൾ ലഭിക്കും. a യുടെ വില 8 ആക്കിയതിനു ശേഷം D മാത്രം മാറ്റിയാൽ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 8 ഉം പരപ്പളവ് 12 ഉം ആയ വ്യത്യസ്ത ത്രികോണങ്ങൾ ലഭിക്കും.

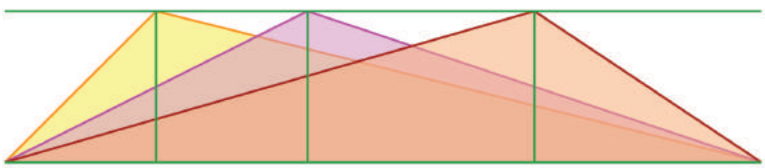
ഇവയുടെയെല്ലാം പാദം ഒഴികെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം മാറിയിട്ടുണ്ട്; പാദവും ഉയരവും മാറാത്തതിനാൽ പരപ്പളവ് മാറിയിട്ടുമില്ല.

ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മേൽമൂല, പാദത്തിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിലാണ്. ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറയാം: മേൽമൂലകളെല്ലാം പാദത്തിനു സമാന്തരമായി, 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിലുള്ള വരയിലാണ്.



ഇതേ പാദവും പരപ്പളവുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മേൽമൂല ഈ വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കണമല്ലോ; മറിച്ച്, ഈ വരയിലെ ഏത് ബിന്ദു എടുത്ത്, താഴത്തെ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ചാലും ഇതേ പാദവും പരപ്പളവുമുള്ള ത്രികോണം കിട്ടും.

പാദവും പരപ്പളവും മാറ്റിയാലും ഇപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ശരിയല്ലേ?

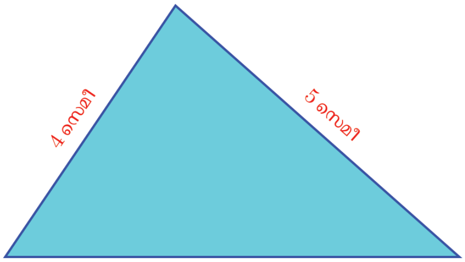


6TCAJH

ഒരേ പാദവും പരപ്പളവുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മൂന്നാം മൂല, പാദത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലാണ്; മറിച്ച്, ഒരേ പാദവും മൂന്നാം മൂലകളെല്ലാം പാദത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലുമായ ത്രികോണങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ പരപ്പളവാണ്.

ഇത് എങ്ങനെയെല്ലാം ഉപയോഗിക്കാമെന്നു നോക്കാം.

വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5, 6 സെന്റിമീറ്ററായി ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

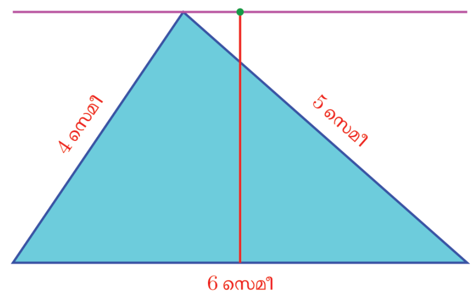


ഇനി താഴത്തെ വശം ഇതുതന്നെയായി, ഇതേ പരപ്പുള്ള സമപാർശ്വത്രികോണം വരയ്ക്കണം:

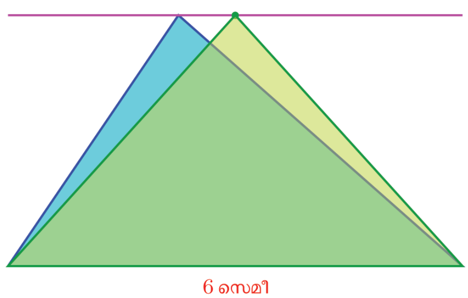
വരയ്ക്കേണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം മാറാത്തതിനാൽ, മേൽമൂല എവിടെയെടുക്കണം എന്നു മാത്രം തീരുമാനിച്ചാൽ മതി. പരപ്പളവ് മാറാതിരിക്കാൻ, അത് താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി ഇപ്പോഴുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂലയിലൂടെയുള്ള വരയിലായിരിക്കണം.

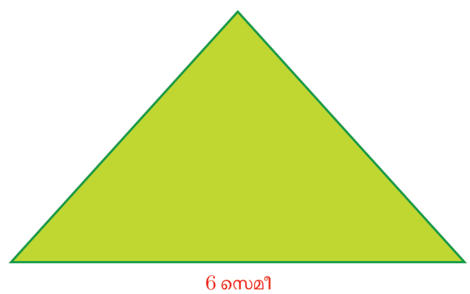
സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മേൽമൂല പാദത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയിലായിരിക്കുമെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടതല്ലേ?

അപ്പോൾ ഈ വരച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂലയിലൂടെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായ വരയും, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയും മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവാണ് നമുക്കു വേണ്ട മൂന്നാംമൂല:



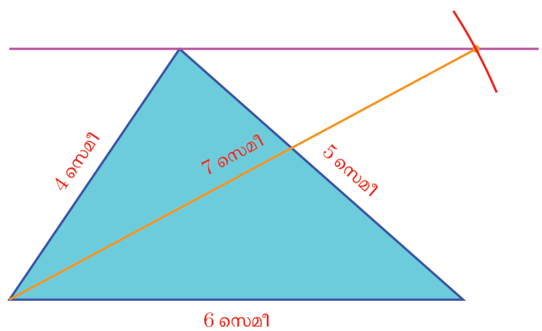
ഇനി ത്രികോണം വരയ്ക്കാമല്ലോ:



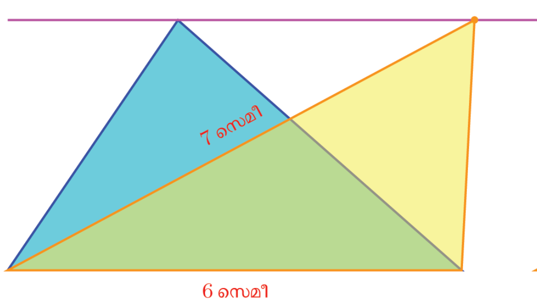


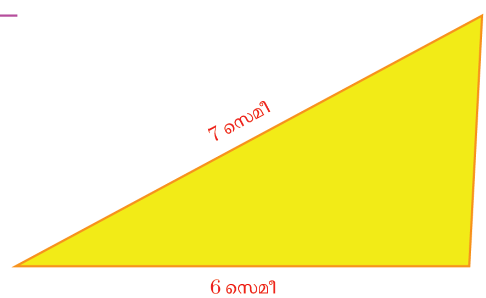
ഇനി ഇതേ പരപ്പുള്ള മറ്റൊരു ത്രികോണം, താഴത്തെ വശം ഇതുതന്നെയും, ഇടതുവശം 7 സെന്റിമീറ്ററുമായി വരയ്ക്കാമോ?

ഇടതുമൂലയിൽ നിന്ന്, 7 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, മുകളിലെ വരയെ മുറിക്കുന്ന സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിച്ചാൽപ്പോരേ?



അപ്പോൾ ത്രികോണം ഇങ്ങനെയാകും:

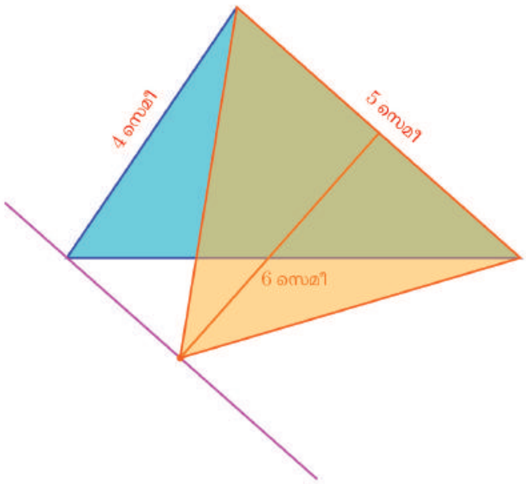


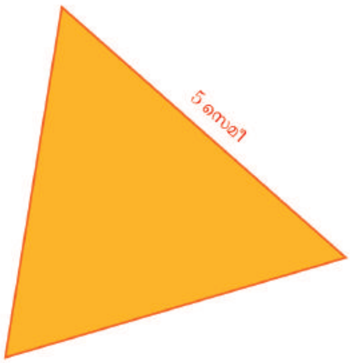


ഇതേ പരപ്പുള്ള സമപാർശ്വത്രികോണം, പാദം 5 സെന്റിമീറ്ററായി വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ?

താഴത്തെ വശം 5 സെന്റിമീറ്ററായി ആദ്യത്തെ ചിത്രം മാറ്റിവരച്ച്, മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ വരയ്ക്കാം.

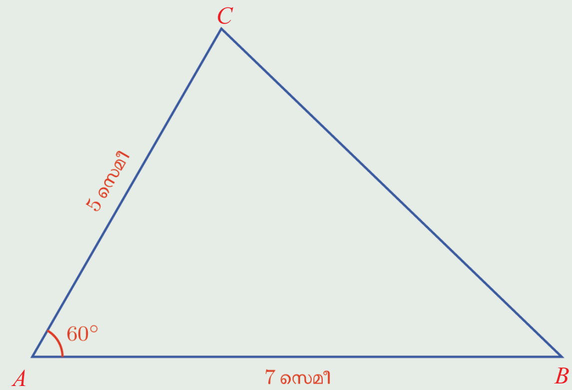
അൽപം ചരിഞ്ഞ ത്രികോണമായാലും മതിയെങ്കിൽ, ഇതേ ചിത്രത്തിൽത്തന്നെ ഇടതുമൂലയിലൂടെ വലതു വശത്തിനു സമാന്തരവര വരച്ചും ചെയ്യാം:





(1) വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവുള്ള മൂന്നു വ്യത്യസ്ത മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(2) ചുവടെ കാണുന്ന ത്രികോണം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.



ഇതേ പരപ്പുള്ള *ABP, BCQ, CAR* എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ വരയ്ക്കുക.

i) $\angle BAP = 90^\circ$

ii) $\angle BCQ = 60^\circ$

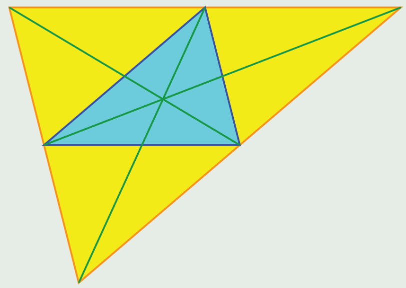
iii) $\angle ACR = 30^\circ$

(3) ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, അതിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും വൃത്തകേന്ദ്രവും മൂലകളായി ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പുള്ള മറ്റൊരു ത്രികോണം, എല്ലാ മൂലകളും വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയായി വരയ്ക്കുക.

(4) രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 8, 6 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററും, ആയ (തുല്യമല്ലാത്ത) എത്ര ത്രികോണം വരയ്ക്കാം? പരപ്പളവ് 24 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

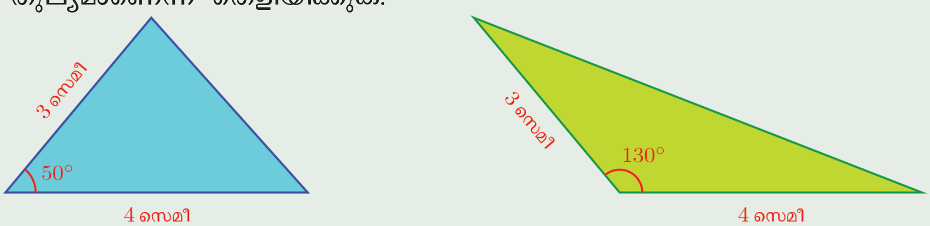
നീളം 4 ആയ ഒരു വര AB വരയ്ക്കുക. A കേന്ദ്രമായി ആരം 3 ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle slider α നിർമിച്ച് $\angle BAB' = \alpha$ ആകത്തക്കവിധം AB′ എന്ന വര വരയ്ക്കുക. (Angle with given size ഉപയോഗിച്ച് B, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α എന്ന് നൽകിയാൽ B′ എന്ന ബിന്ദു ലഭിക്കും). AB′ എന്ന വരയും വൃത്തവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. C യിൽക്കൂടി AB യ്ക്ക് സമാന്തര വര വരച്ച് വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. ABC, ABD എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. $\angle BAC$, $\angle BAD$ എന്നീ കോണളവുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? കോണളവ് മാറ്റി നോക്കൂ.

(5) ചിത്രത്തിലെ നീല ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിനും എതിർമൂലയിലൂടെ സമാന്തരവര വരച്ചാണ് വലിയ ത്രികോണം ഉണ്ടായിരിക്കുന്നത്:



ചിത്രത്തിൽ നീല ത്രികോണത്തിന്റെ അതേ പരപ്പളവുള്ള വേറെ എത്ര ത്രികോണങ്ങളുണ്ട്? അവയിൽ, എല്ലാ അളവുകളും നീല ത്രികോണത്തിന്റേതുതന്നെയായ എത്രയെണ്ണമുണ്ട്?

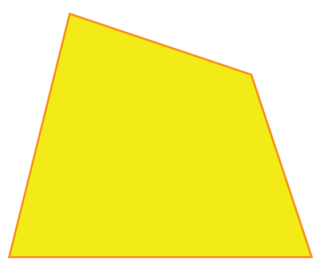
(6) ചിത്രത്തിലെ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



രണ്ട് വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ മാറാതെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള എത്ര വ്യത്യസ്ത ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം?

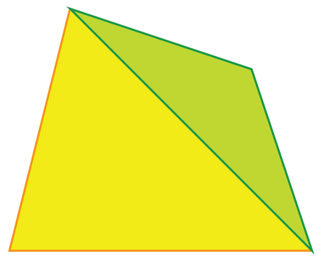
ചതുർഭുജവും ത്രികോണവും

സവിശേഷതകളൊന്നുമില്ലാത്ത ഒരു സാധാരണ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?

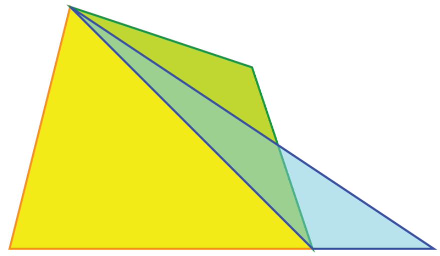


Downloaded from https:// www.studiestoday.com

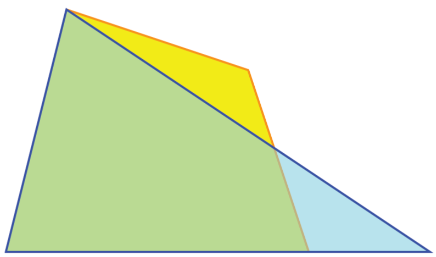
ഒരു വികർണം വരച്ചു രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക, അല്ലേ?



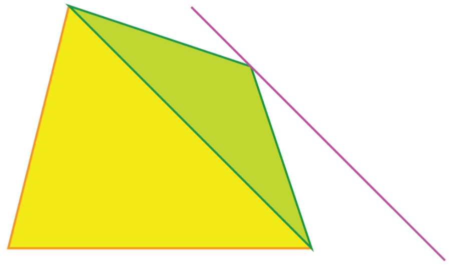
മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. പാദവും പരപ്പളവും മാറാതെ പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മുകളിലെ മൂല ചതുർഭുജത്തിന്റെ പാദത്തിലെത്തിച്ചാലോ?



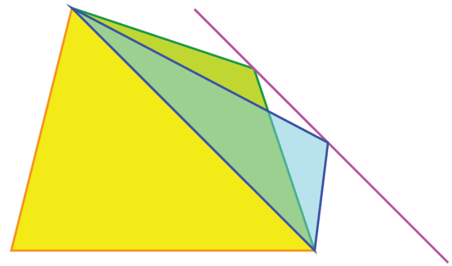
അപ്പോൾ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, മഞ്ഞയും നീലയും ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണല്ലോ. ഇവ ചേർന്ന രൂപമാകട്ടെ, വലിയൊരു ത്രികോണവും. അങ്ങനെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഒറ്റ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവായി മാറ്റാം:



ഇനി ഈ ആഗ്രഹം സാധിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ പാദവും പരപ്പളവും മാറാതെ മൂല മാറ്റാൻ, ആ മൂലയിലൂടെ എതിർവശത്തിന് സമാന്തരവര വരച്ചാൽപ്പോരേ?



പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മുകൾ മൂല ഈ വരയിലൂടെ എത്ര നീക്കിയാലും പരപ്പളവ് മാറില്ല. അതുകൊണ്ടു തന്നെ അങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന പുതിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് മാറുന്നില്ല.



മുറിച്ചുമാറ്റലും തിരിച്ചടുക്കലും

കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു രൂപത്തിനെ കഷണങ്ങളാക്കി മറ്റൊരു രൂപമാക്കി അടുക്കിയാൽ പരപ്പളവു മാറുന്നില്ല. പരപ്പളവു മാറാതെ രൂപം മാറ്റുന്ന ഒരു രീതിയിൽ നിന്ന്, മുറിച്ചു ചേർത്തു വയ്ക്കുന്ന ഒരു രീതി എപ്പോഴും കിട്ടണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ചതുർഭുജത്തെ പരപ്പളവു മാറാതെ ത്രികോണമാക്കി വരയ്ക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ച്, കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു ചതുർഭുജത്തെ മുറിച്ചടുക്കി ത്രികോണമാക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ മുറിച്ചെടുക്കുന്ന രീതികൾ വിശദീകരിക്കുന്ന പല വെബ്സൈറ്റുകളുടേയും വിവരങ്ങൾ

www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book/webdiss.html

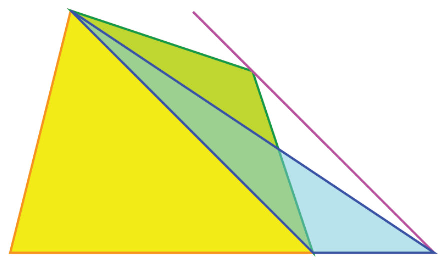
എന്ന വെബ്പേജിലുണ്ട്.

6TL6LA

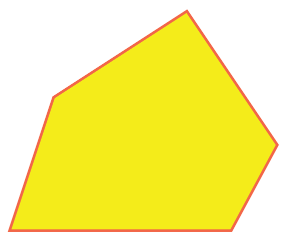
ജിയോജിബ്രയിൽ ചതുർഭുജം, പഞ്ചഭുജം, ഷഡ്ഭുജം തുടങ്ങിയ രൂപങ്ങൾ വരച്ച് അവയ്ക്ക് തുല്യ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ നിർമിക്കുക.

ത്രികോണമൂല, സമാന്തരവരയും ചതുർഭുജത്തിന്റെ പാദം നീട്ടിയതും തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന സ്ഥാനത്തെത്തിച്ചാലോ?

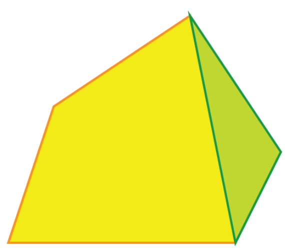
ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമായില്ലേ?



ഈ സൂത്രം ആവർത്തിച്ചുപയോഗിച്ച്, ഏതു ബഹുഭുജത്തിനും അതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമുണ്ടാക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ പഞ്ചഭുജം നോക്കൂ.

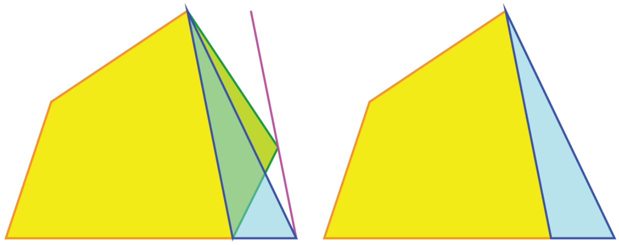


ഒന്നിടവിട്ട രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഇതിനെ ഒരു ചതുർഭുജവും ത്രികോണവുമാക്കി ഭാഗിക്കാം:

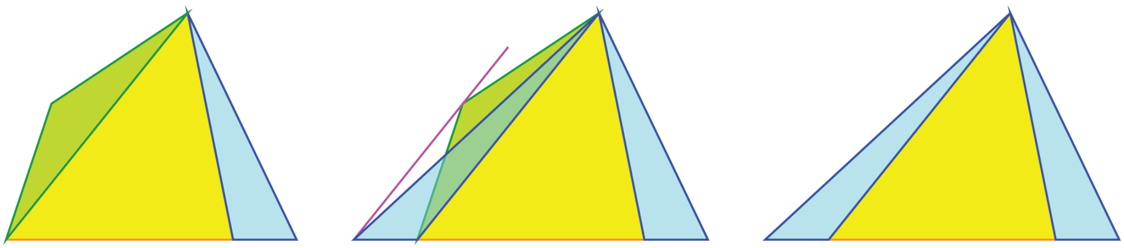


ഇനി പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു മുകൾ മൂല എതിർവശത്തിനു സമാന്തരമായി നീക്കി പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ പാദത്തിലെത്തിച്ചാൽ, പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ അതേ പരപ്പളവുള്ള ചതുർഭുജമായി:

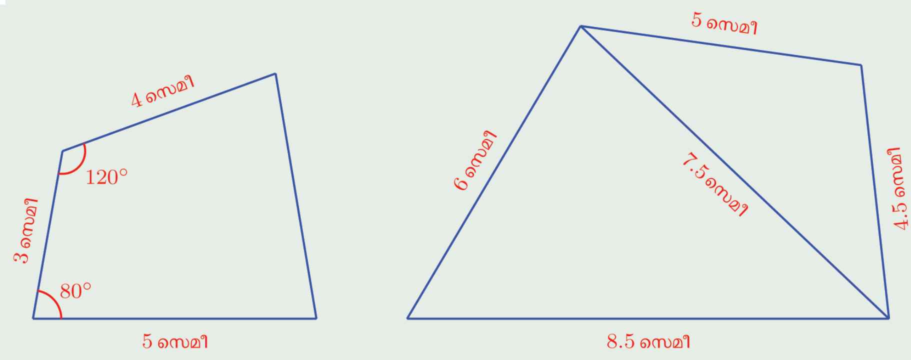
6TV2HX



ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഇടതു മുകൾ മൂലയും ഇതുപോലെ താഴ്ത്തിയാൽ ഇതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണമാകും:



(1) ചുവടെയുള്ള രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങളും നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക. അവയുടെ അതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണങ്ങളും വരച്ച്, പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക. (അതിനാവശ്യമായ നീളങ്ങൾ അളന്നെടുക്കണം)

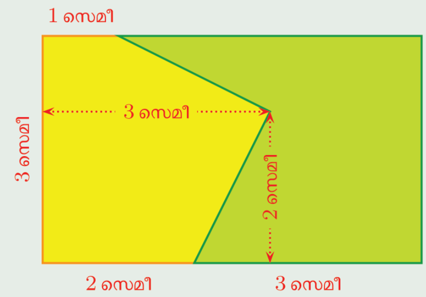


(2) ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു കോൺ 60° യുമായ സമഭുജ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവിനു തുല്യ പരപ്പളവുള്ള മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(3) ഒരു സമപഞ്ചഭുജം വരച്ച്, അതേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

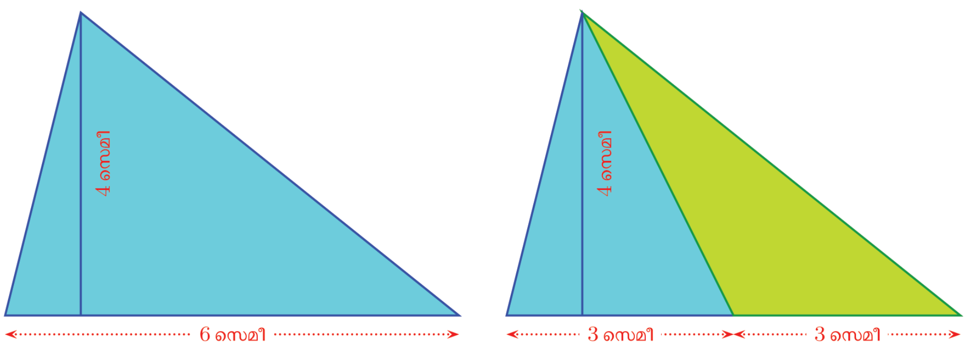
(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ചതുരത്തിനെ രണ്ടായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഈ ഭാഗങ്ങളെ വേർതിരിക്കുന്ന ഒടിഞ്ഞ വരയ്ക്കു പകരം ഒരു നേർവര വരച്ച്, ചതുരത്തിനെ ഇതേ പരപ്പളവുള്ള മറ്റു രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുക. ഈ ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



ത്രികോണഭാഗം

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.



ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയും, എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അതിനെ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളാക്കുന്നു.

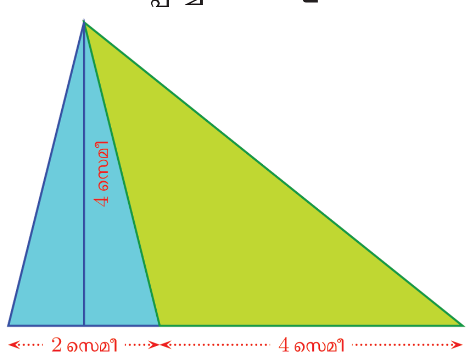
ഈ ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?

രണ്ടിന്റെയും പാദം 3 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

ഉയരമോ? രണ്ടിനും 4 സെന്റിമീറ്റർതന്നെയല്ലേ?

അപ്പോൾ രണ്ടിന്റെയും പരപ്പളവും ഒന്നുതന്നെ: 6 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി മുകളിലെ മൂല താഴത്തെ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിനു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ? ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക.



ഇപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 4 ഉം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 8 ഉം ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററായി.

അതായത്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. താഴത്തെ വശത്തിനെ മുറിച്ചിരിക്കുന്നതും ഇതേ കണക്കിലല്ലേ? ചെറിയ കഷണത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് വലിയ കഷണത്തിന്റെ നീളം.

ഇക്കാര്യം അംശബന്ധമായി പറഞ്ഞാലോ?

താഴത്തെ വശത്തെ മുറിച്ചിരിക്കുന്നത് $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ; ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നതും അതേ അംശബന്ധത്തിൽ.

മുകളിലെ മൂലയിൽ നിന്നുള്ള വര, താഴത്തെ വശത്തിനെ എങ്ങനെ ഭാഗിച്ചാലും ഇതു ശരിയാകുമോ? $2 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നതെങ്കിലോ?

നീളങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാകും:

ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം $6 \times \frac{2}{5}$ സെന്റിമീറ്റർ

വലിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം $6 \times \frac{3}{5}$ സെന്റിമീറ്റർ

പരപ്പളവുകൾ ഇങ്ങനെയും:

ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times \frac{2}{5} \times 2 = 12 \times \frac{2}{5}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

വലിയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times \frac{3}{5} \times 2 = 12 \times \frac{3}{5}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ

അതായത്, മുകളിൽ നിന്നുള്ള വര, മുഴുവൻ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവായ 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററിനെ $2 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽത്തന്നെയാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്.

നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ഏതായാലും, അത് പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണെന്നു കാണാമല്ലോ. ത്രികോണത്തിന്റെ അളവുകൾ മാറിയാലും ഇപ്പറഞ്ഞതിന് മാറ്റമില്ല.

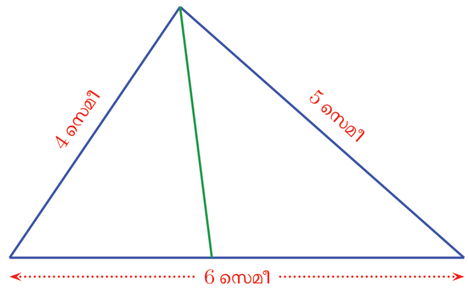
ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏതു മൂലയിൽ നിന്നും എതിർവശത്തേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ഒരു വര, ഈ വശത്തിന്റെ നീളത്തെയും, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്.

ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ നിന്നു വരയ്ക്കുന്ന എതിർവശത്തിന്റെ സമഭാജി, ത്രികോണത്തെയും സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു എന്നു കണ്ടു. അപ്പോൾ

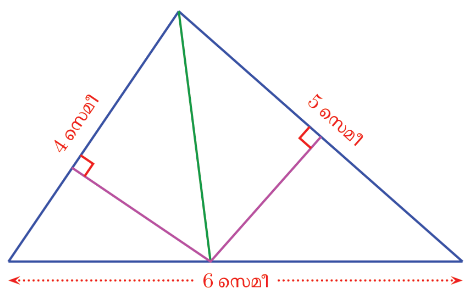
വേറൊരു ചോദ്യമാകാം: ഒരു മൂലയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജി, എതിർ വശത്തെ (ത്രികോണത്തെയും) ഏത് അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്?

ചിത്രത്തിൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജി വരച്ചിരിക്കുന്നു.

താഴത്തെ വശത്തിനെ കോൺസമഭാജി മുറിക്കുന്ന അംശബന്ധമാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്.



ഇവിടെ ത്രികോണഭാഗങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും ഒരു വശം അറിയാം. അപ്പോൾ ഈ വശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. അതിന് എതിർമൂലയിൽ നിന്ന് ലംബം വരയ്ക്കണം. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും, അറിയാവുന്ന വശത്തിന്റെ എതിർ മൂല ഒരേ ബിന്ദുവാണല്ലോ.



ഈ ലംബങ്ങൾ കണ്ടിട്ട് ഒരേ നീളമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ? അതു ശരിയാണോ എന്ന് നോക്കാം. ചിത്രത്തിൽ മുകൾ ഭാഗത്ത് ഇടതും വലതുമുള്ള മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കർണമാണ്. ഈ കർണം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ കോണിന്റെ സമഭാജി ആയതിനാൽ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ മുകളിലെ രണ്ട് കോണുകളും തുല്യമാണ്; മട്ടത്രികോണമായതിനാൽ കർണത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റത്തുള്ള കോണുകളും തുല്യം തന്നെ. അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളും തുല്യമാകണമല്ലോ. അതായത്, നമ്മൾ വരച്ച ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

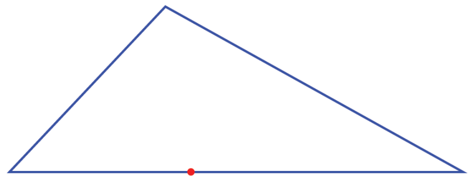
അപ്പോൾ ത്രികോണഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ, 4 നെയും 5 നെയും ഈ നീളത്തിന്റെ പകുതികൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്; അതായത്, അവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 4 : 5.

നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, കോൺസമഭാജി എതിർവശത്തിന്റെ നീളത്തെ ഭാഗിക്കുന്നതും ഇതേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

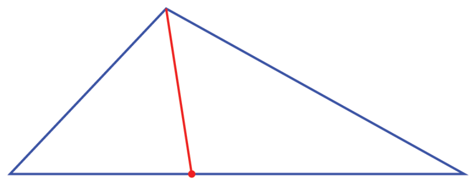
വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായാലും, ഇതു ശരിയാകും.

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏതു കോണിന്റെയും സമഭാജി എതിർ വശത്തെ ഭാഗിക്കുന്നത്, കോണിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

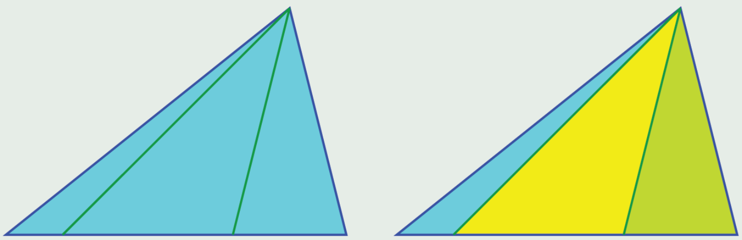
ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിൽപ്പറയാം:



ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്ത് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ബിന്ദു, ആ വശത്തിനെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, മുകളിലത്തെ കോണിന്റെ സമഭാജി ഈ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകണം. അതായത്, മേൽമൂലയും ഈ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയാണ് മേൽക്കോണിന്റെ സമഭാജി.

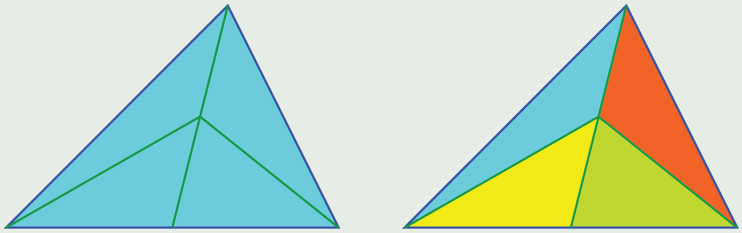


(1) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുകൾ മൂലയിൽ നിന്ന് താഴത്തെ വശത്തിലേക്ക് രണ്ടു വരകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



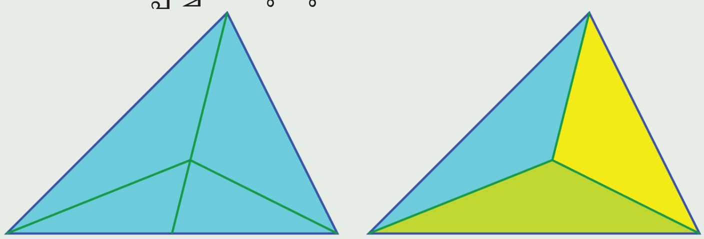
വരകൾ താഴത്തെ വരയുടെ നീളത്തെ ഭാഗിക്കുന്ന അംശബന്ധവും, ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവിന്റെ അംശബന്ധവും ഒന്നു തന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയും താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ച ശേഷം, ഈ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവുമായി മറ്റു രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന നാലു ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ നാലിലൊന്നാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

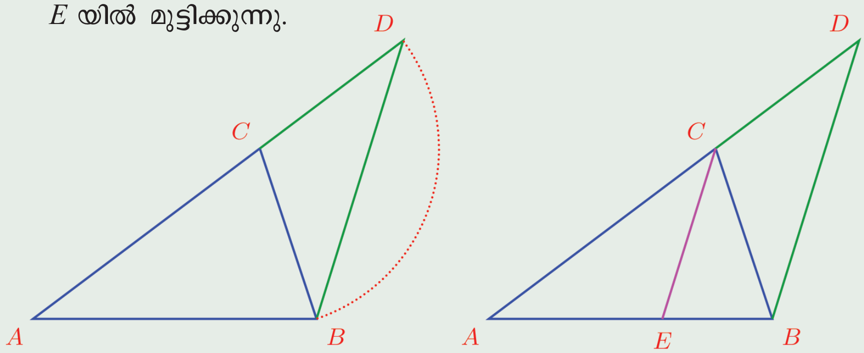
(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയും താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചശേഷം, ഈ വരയെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവുമായി മറ്റു രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും കോണിന്റെ വശങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബദൂരങ്ങൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) ചിത്രത്തിൽ ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ AC എന്ന വശം, CB എന്ന വശത്തിന്റെ നീളവും ചേർത്ത് D യിലേയ്ക്ക് നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. തുടർന്ന്, DB യ്ക്ക് സമാന്തരമായി C യിൽക്കൂടി വര വരച്ച്, AB യിലെ E യിൽ മുട്ടിക്കുന്നു.

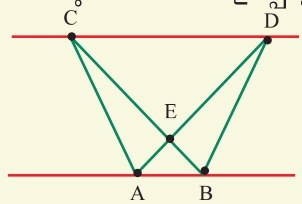


i) CE എന്ന വര, $\angle C$ യെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നുവെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) ഇതുപയോഗിച്ച്, 8 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയെ 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

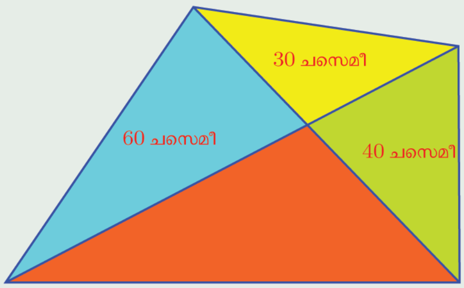
iii) 8 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കാൻ ഇതു പയോഗിക്കാൻ കഴിയുമോ? എങ്ങനെ?

രണ്ട് സമാന്തരവരകൾ വരച്ച്, A, B, C, D എന്നിങ്ങനെ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.



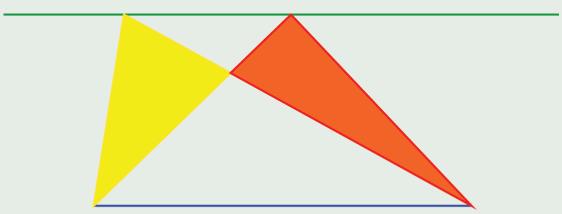
AD, BC എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. AEC, BED എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് പരപ്പളവ് കാണുക. പരപ്പളവുകൾക്ക് എന്താണ് ബന്ധം? ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

(6) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ അതിനെ നാലു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. മൂന്നു ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്:

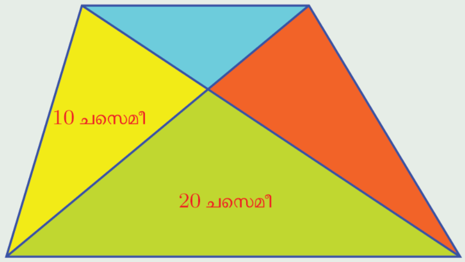


ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(7) ചിത്രത്തിൽ താഴെയും മുകളിലും വിലങ്ങനെയുള്ള വരകൾ സമാന്തരമാണ്. മഞ്ഞയും ചുവപ്പും ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

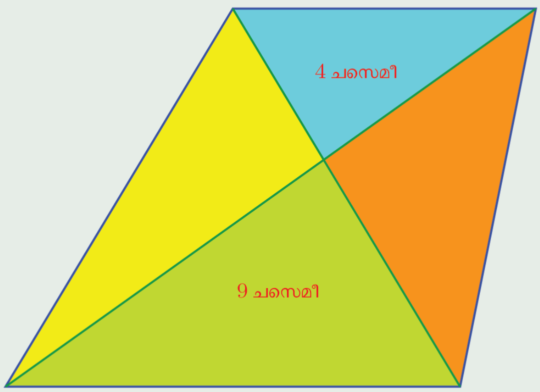


(8) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ലംബകത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ അതിനെ നാലു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.



മഞ്ഞ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 10 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 20 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ലംബകത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(9) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ലംബകത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ അതിനെ നാലു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു:



നീല ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 4 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും, പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 9 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ലംബകത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവെത്രയാണ്?

2 ദശാംശരൂപങ്ങൾ

ആദ്യരൂപങ്ങൾ

ചില ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം ദശാംശരൂപങ്ങൾ ആറാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{3}{10} = 0.3$$

$$\frac{29}{100} = 0.29$$

$$\frac{347}{1000} = 0.347$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.

മറിച്ച്, ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതിയ സംഖ്യകളെ 10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി

$$0.7 = \frac{7}{10}$$

$$0.91 = \frac{91}{100}$$

$$0.673 = \frac{673}{1000}$$

ഇവയെ $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$ എന്നിങ്ങനെ 10 ന്റെ കൃതികളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾ സ്ഥാനവിലകളായി ഉപയോഗിച്ച് പിരിച്ചെഴുതാമെന്നും അറിയാമല്ലോ.

$$0.91 = \frac{91}{100} = \frac{90}{100} + \frac{1}{100} = \frac{9}{10} + \frac{1}{100}$$

$$0.671 = \frac{671}{1000} = \frac{600}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000}$$

അപ്പോൾ 0.03 എന്നെഴുതുന്നതിന്റെ അർഥമെന്താണ്?

ദശാംശഭിന്നങ്ങൾ

എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 1, 10, 100, 1000, ... എന്നിവ ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ എഴുതുന്നത്. ഉദാഹരണമായി,

$$(3 \times 100) + (5 \times 10) + 1$$

എന്നതിന്റെ ചുരുക്കമാണ് 351.

ഇങ്ങനെ എഴുതിയാൽ ക്രിയകൾ എളുപ്പം ചെയ്യാം. (25 നെ XXV എന്നും 13 നെ XIII എന്നും എഴുതി ഗുണിക്കാൻ ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ).

ഇതുപോലെ ഭിന്നസംഖ്യകളെ

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

എന്നിങ്ങനെ 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് പിരിച്ചെഴുതാമോ എന്ന് ആദ്യം ആലോചിച്ചത് ഡച്ചുകാരനായ ഷിമൺ സ്റ്റെവിൻ ആണ്, ഇത് പതിനാറാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്. ഇത് ക്രിയാരീതികൾ എളുപ്പമാക്കും എന്നാണ് അദ്ദേഹം പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$$

എന്നു കണക്കാക്കുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പം

$$0.75 + 0.40 = 1.15$$

എന്നു ചെയ്യുന്നതാണല്ലോ.

$$0.03 = \frac{0}{10} + \frac{3}{100} = \frac{3}{100}$$

0.0203 ആയാലോ?

$$0.0203 = \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{3}{10000} = \frac{200}{10000} + \frac{3}{10000} = \frac{203}{10000}$$

ചില ഭിന്നങ്ങളുടെ ഛേദം 10 ന്റെ കൃതിയല്ലെങ്കിലും, അത്തരത്തിലുള്ള രൂപത്തിൽ മാറ്റിയെഴുതാം, ഉദാഹരണമായി, $10 = 2 \times 5$ ആയതിനാൽ

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0.2$$

എന്നും തുടർന്ന്

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times 2}{5\times 2} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times 2}{5\times 2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4\times 2}{5\times 2} = \frac{8}{10} = 0.8$$

എന്നുമെല്ലാം എഴുതാം.

2 ഉം 5 ഉം 10 ന്റെ ഘടകങ്ങളായതുകൊണ്ടാണല്ലോ ഇതു സാധിച്ചത്. അപ്പോൾ $\frac{1}{4}$ നെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

4 എന്ന സംഖ്യ 10 ന്റെ ഘടകമല്ലെങ്കിലും, 100 ന്റെ ഘടകമാണല്ലോ. $4 \times 25 = 100$. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times 25}{4\times 25} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times 25}{4\times 25} = \frac{75}{100} = 0.75$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം.
കൂടാതെ

$$\frac{1}{25} = \frac{1\times 4}{25\times 4} = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$\frac{2}{25} = \frac{2\times 4}{25\times 4} = \frac{8}{100} = 0.08$$

$$\frac{13}{25} = \frac{13\times 4}{25\times 4} = \frac{52}{100} = 0.52$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇനി $\frac{1}{8}$ ആയാലോ?

8 എന്ന സംഖ്യ 10 ന്റെയോ, 100 ന്റെയോ ഘടകമല്ല.

പക്ഷേ $8 = 2 \times 2 \times 2$ ആയതിനാൽ, മൂന്നു തവണ 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ, മൂന്നു 10 കളുടെ ഗുണിതമാകില്ലേ?

കണക്കു ഭാഷയിൽ,

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000$$

അതായത്,

$$8 \times 125 = 1000$$

ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 125}{8 \times 125} = \frac{125}{1000} = 0.125$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{375}{1000} = 0.375$$

എന്നും

$$\frac{1}{125} = \frac{1 \times 8}{125 \times 8} = \frac{8}{1000} = 0.008$$

$$\frac{3}{125} = \frac{3 \times 8}{125 \times 8} = \frac{24}{1000} = 0.024$$

$$\frac{13}{125} = \frac{13 \times 8}{125 \times 8} = \frac{104}{1000} = 0.104$$

എന്നുമെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ?

ഇനി $\frac{3}{160}$ ആയാലോ?

ആദ്യം ഛേദത്തിനെ ഘടകങ്ങളാക്കാം

$$160 = 32 \times 5 = 2^5 \times 5$$

ഇതിനെ ഗുണിച്ച്, 10 ന്റെ ഏതു കൃതിയാക്കാം?

അതിന് ഏതു സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കണം?

$$160 \times 5^4 = (2^5 \times 5) \times 5^4 = 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$$

അപ്പോൾ

$$\frac{3}{160} = \frac{3 \times 5^4}{160 \times 5^4} = \frac{3 \times 625}{100000} = \frac{1875}{100000} = 0.01875$$

പൊതുവെ ഏതുതരം ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ് ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയുന്നതെന്ന് ഇനി പറയാമോ?

(1) ചുവടെയുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

(i) $\frac{3}{20}$ (ii) $\frac{3}{40}$ (iii) $\frac{13}{40}$

(iv) $\frac{7}{80}$ (v) $\frac{5}{16}$

(2) ചുവടെയുള്ള തുകകളുടെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}$

(ii) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4}$

(iii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$

(3) ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യയെ മറ്റൊരു രണ്ടക്കസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ 5.875 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

പുതിയ രൂപങ്ങൾ

ഛേദം 10 ന്റെ കൃതിയല്ലാത്ത ചില ഭിന്നങ്ങളെ, അത്തരം രൂപത്തിലാക്കി ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നത് കണ്ടല്ലോ.

$\frac{1}{3}$ നെ ഇങ്ങനെ മാറ്റാൻ കഴിയുമോ?

3 നെ ഏതു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും 10 ന്റെ ഒരു കൃതിയും കിട്ടില്ലല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?)

അപ്പോൾ $\frac{1}{3}$ ന് ആദ്യം പറഞ്ഞ രീതിയിലുള്ള ദശാംശരൂപമില്ല.

പക്ഷേ 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളൊന്നും $\frac{1}{3}$ ന് തുല്യമല്ലെങ്കിലും, ഇത്തരത്തിലുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്ന രീതിയിൽ ഉണ്ടാക്കാം.

ആദ്യം 10 ഛേദമായ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യ, $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തായി കണ്ടുപിടിക്കാം. അതിന് 10 നെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$\frac{10}{3}$ ന്റെ $\frac{1}{10}$ ഭാഗമാണല്ലോ $\frac{1}{3}$; അതായത്

$$\frac{1}{3} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{10}$$

ഇനി

$$\frac{1}{3} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{30}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയും എഴുതാം:

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

ഇതുപോലെ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തുള്ള, 100 ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാം.

അതിന് ആദ്യം 100 നെ 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ച്, ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$$

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, ഇതിൽനിന്ന്

$$\frac{1}{3} = \frac{100}{3} \times \frac{1}{100} = \left(33 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{100} = \frac{33}{100} + \frac{1}{300}$$

ഇത് ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം:

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

$\frac{1}{30}$ നേക്കാൾ വളരെ ചെറിയ സംഖ്യയാണല്ലോ $\frac{1}{300}$. അപ്പോൾ $\frac{33}{100}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യ $\frac{3}{10}$ നേക്കാൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്ത സംഖ്യയാണ്.

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{3333}{10000} = \frac{1}{30000}$$

എന്നെല്ലാം കാണാം.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ,

$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \dots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്നു.

അൽപം മാറ്റി ഇങ്ങനെയും പറയാം:

$$0.3, 0.33, 0.333...$$

എന്നിങ്ങനെ ദശാംശരൂപമുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്:

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

ഇതിലെ 0.333... എന്ന ദശാംശരൂപം, ആദ്യം കണ്ട ദശാംശരൂപങ്ങളിൽനിന്നു വ്യത്യസ്തമാണ് എന്നത് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം.

10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ് ആദ്യഭാഗത്ത് ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതിയത്. ഉദാഹരണമായി, 0.3 എന്നത് $\frac{3}{10}$ എന്ന ഭിന്നത്തിന്റെ ദശാംശരൂപവും, 0.33 എന്നത് $\frac{33}{100}$ എന്ന ഭിന്നത്തിന്റെ ദശാംശരൂപവുമൊക്കെയാണ്.

എന്നാൽ 0.333... സൂചിപ്പിക്കുന്നത് 10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെയല്ല, 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ഒരു നിര ക്രമേണ സമീപിക്കുന്ന ഭിന്നസംഖ്യയെയാണ്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ ഇങ്ങനെ സമീപിക്കുന്ന ഭിന്നസംഖ്യ $\frac{1}{3}$ ആയതിനാൽ, ഇതിനെ $\frac{1}{3}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം എന്നു പറയുന്നു.

$\frac{1}{3}$ പോലുള്ള സംഖ്യകളെ ഉൾക്കൊള്ളാനായി, ദശാംശരൂപം എന്നതിന്റെ അർഥം അൽപം വിപുലീകരിക്കുകയാണ് ഇവിടെ ചെയ്യുന്നത്.

മറ്റൊരുദാഹരണം നോക്കാം: $\frac{1}{6}$ നും 10 ന്റെ കൃതി ഛേദമായ തുല്യഭിന്നമില്ലല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?); ഇതിന്റെയും ഈ പുതിയ രീതിയിലുള്ള ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കാം.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ 10, 100, 1000, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ 6 കൊണ്ട് ഹരിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$\frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

$$\frac{1000}{6} = \frac{500}{3} = 166\frac{2}{3}$$

ഇനി ഇവയിൽനിന്ന് $\frac{1}{6}$ നോട് അടുത്ത, ഛേദം 10 ന്റെ കൃതിയായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം:

$$\frac{1}{6} = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{6} = \left(16 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{100} = \frac{16}{100} + \frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{6} = \left(166 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{1000} = \frac{166}{1000} + \frac{1}{1500}$$

ഇതിൽനിന്ന് $\frac{1}{6}$ നോട് അടുത്തുവരുന്ന, 10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കാണാമല്ലോ.

$\frac{1}{10}, \frac{16}{100}, \frac{166}{1000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ (അഥവാ, 0.1, 0.16, 0.166, ... എന്നിങ്ങനെ ദശാംശരൂപമുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ) $\frac{1}{6}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി ദശാംശരൂപമായി എഴുതാം.

$$\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$$

ഇങ്ങനെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ 10, 100, 1000, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ ഹരിക്കാൻ, ഓരോന്നിനും ആദ്യം മുതൽ തുടങ്ങേണ്ടതില്ല. ഒരു ഹരണത്തിന്റെ തുടർച്ചയായി അടുത്തത് ചെയ്യാം. ഉദാഹരണമായി, $\frac{1}{7}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം 10 നെ 7 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$$

അടുത്തതായി 100 നെ 7 കൊണ്ടു ഹരിക്കണം. അതിന് ആദ്യത്തെ ക്രിയ ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെ തുടരാം:

ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശം

10 ന്റെ ഏതെങ്കിലും കൃതി ഛേദമായി വരാത്ത ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപം അനന്തമായി തുടരുന്നു. പക്ഷേ ഇവയിലെല്ലാം, ഒരു ഘട്ടത്തിനുശേഷം ഒരു കൂട്ടം അക്കങ്ങൾ ഒരേ ക്രമത്തിൽ തുടർച്ചയായി ആവർത്തിക്കുന്നതു കാണാം.

ഇതിനൊരു കാരണമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{17}$ നോക്കാം. 10, 100, 1000, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള 10 ന്റെ കൃതികളെ തുടർച്ചയായി 17 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാണല്ലോ ഇതിന്റെ ദശാംശരൂപത്തിലെ അക്കങ്ങൾ കണക്കാക്കേണ്ടത്. ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ ഓരോഘട്ടത്തിലും കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടത്തെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് വീണ്ടും 17 കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതാണ് അടുത്ത ഘട്ടം.

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ 1 മുതൽ 16 വരെയുള്ള ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ ആകണമല്ലോ. അപ്പോൾ പരമാവധി 16 ഹരണം കഴിയുമ്പോൾ മുമ്പു കിട്ടിയ ഏതെങ്കിലുമൊരു ശിഷ്ടം വീണ്ടും വരും. തുടർന്ന് പഴയ അക്കങ്ങൾ അതേ ക്രമത്തിൽ ആവർത്തിക്കും.

കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് $\frac{1}{17}$ കണക്കാക്കിയാൽ

$$\frac{1}{17} = 0.05882352941176470588235294117647\ldots$$

എന്നിങ്ങനെ പതിനാറക്കക്കൂട്ടങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നത് കാണാം.

എന്നാൽ $\frac{1}{13}$ ന്റെ ദശാംശരൂപത്തിൽ പന്ത്രണ്ടക്കക്കൂട്ടങ്ങളല്ല, ആറക്കക്കൂട്ടങ്ങളാണ് ആവർത്തിക്കുന്നതെന്നും കാണാം:

$$\frac{1}{13} = 0.076923076923\ldots$$

ഇത്തരം ദശാംശരൂപങ്ങളെക്കുറിച്ച് കൂടുതലറിയാൻ വിക്കിപ്പീഡിയ നോക്കുക:

https://en.wikipedia.org/wiki/Repeating_decimal

മറിച്ചൊരു ചിന്ത

10 ന്റെ കൃതികൾ ഛേദമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപം മാത്രമാണ് ഷിമൺ സ്റ്റെവിൻ അവതരിപ്പിച്ചത്. അങ്ങനെയല്ലാത്ത ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപം ഉണ്ടാക്കിയത് പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്.

അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യമുണ്ട്: അക്കങ്ങൾ ചാക്രികമായി ആവർത്തിക്കുന്ന രൂപത്തിൽ ഒരു ദശാംശഭിന്നം എഴുതിയാൽ, അത് ഏത് ഭിന്നസംഖ്യയെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്?

ഉദാഹരണമായി 0.121212... ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപമാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആ സംഖ്യ x എന്നെടുത്ത്, ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

- $\frac{12}{100}, \frac{1212}{10000}, \frac{121212}{1000000}$ എന്നീ സംഖ്യകൾ x നോട് അടുക്കുന്നു.
- ഇവയെ 100 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ $12, 12\frac{12}{100}, 12\frac{1212}{10000}, \ldots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ $100x$ നോട് അടുക്കുന്നു.
- $12, 12+\frac{12}{100}, 12+\frac{1212}{10000}, \ldots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ ആദ്യം പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, $12 + x$ നോടാണ് അടുക്കുന്നതെന്നു കാണാം.
- അപ്പോൾ $100x = 12 + x$
- ഇതിൽനിന്ന് $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

ഈ രീതി ചുരുക്കി

$$x = 0.1212\ldots$$

$$100x = 12.1212\ldots = 12 + x$$

എന്നെഴുതാറുണ്ട്.

$$\frac{100}{7} = \left(1+\frac{3}{7}\right) \times 10 = 10 + \frac{30}{7} = 10 + 4 + \frac{2}{7} = 14\frac{2}{7}$$

ഇനി ഇങ്ങനെ തുടരാമല്ലോ:

$$\frac{1000}{7} = \frac{100}{7} \times 10 = 140 + \frac{20}{7} = 140 + 2 + \frac{6}{7} = 142\frac{6}{7}$$

തുടർന്നുള്ള മൂന്നു ഹരണങ്ങളും വേഗം എഴുതാം (പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം തെറ്റാതിരിക്കാൻ കൃതികൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം):

$$\frac{10^4}{7} = 1420 + \frac{60}{7} = 1420 + 8 + \frac{4}{7} = 1428\frac{4}{7}$$

$$\frac{10^5}{7} = 14280 + \frac{40}{7} = 14280 + 5 + \frac{5}{7} = 14285\frac{5}{7}$$

$$\frac{10^6}{7} = 142850 + \frac{50}{7} = 142850 + 7 + \frac{1}{7} = 142857\frac{1}{7}$$

ഇനി തുടരേണ്ടതുണ്ടോ? അൽപം ആലോചിക്കാം. അടുത്ത ഹരണം ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\frac{10^7}{7} = 1428570 + \frac{10}{7}$$

ഇതിൽ $\frac{10}{7}$ ആദ്യം കണ്ടുപിടിച്ചതല്ലേ? അപ്പോൾ

$$\frac{10^7}{7} = 1428571\frac{3}{7}$$

ഇനിയും തുടർന്നാലോ? $\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ അതിനുശേഷം $\frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$ എന്നിങ്ങനെ മുമ്പ് ചെയ്ത ക്രിയകൾതന്നെ അതേ ക്രമത്തിൽ ആവർത്തിക്കും.

ഈ ചിന്തകളുടെ അവസാനം

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$$

എന്ന് ആറക്കക്കൂട്ടങ്ങളുടെ ആവർത്തനമായി എഴുതാം. (വ്യക്തമായില്ലെങ്കിൽ, ഈ ക്രിയകളുടെ തുടക്കം മുതൽ ഒന്നുകൂടി വായിച്ചു നോക്കൂ)

?

(1) ചുവടെയുള്ള ഭിന്നങ്ങൾ ഓരോന്നിനും അടുത്തടുത്തുവരുന്ന 10 ന്റെ കൃതി ഛേദമായ ഭിന്നങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച്, ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതുക.

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{1}{9}$

(2) (i) ഏതു സംഖ്യയുടെയും $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, \dots$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഭാഗങ്ങളെടുത്താൽ, അവ സംഖ്യയുടെ $\frac{1}{9}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നു ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു വിശദീകരിക്കുക.

(ii) മുകളിൽ പറഞ്ഞ പൊതുതത്വം ഒരക്കസംഖ്യകളിൽ ഉപയോഗിച്ച് $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ എന്നിവയുടെ ദശാംശരൂപങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(iii) ഒരേയൊരു അക്കം ആവർത്തിച്ചുവരുന്ന ദശാംശരൂപങ്ങളെക്കുറിച്ച് പൊതുവേ എന്തു പറയാം?

(3) (i) $\frac{1}{11}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(ii) $\frac{2}{11}, \frac{3}{11}$ എന്നീ ഭിന്നങ്ങളുടെ ദശാംശരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(iii) $\frac{10}{11}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം എന്താണ്?

രണ്ടു രൂപങ്ങൾ

0.4999... എന്ന ദശാംശരൂപം ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഇത്തരം ദശാംശരൂപങ്ങളുടെ നിർവചനമനുസരിച്ച്, $\frac{4}{10}, \frac{49}{100}, \frac{499}{1000} \dots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഏതു സംഖ്യയോട് അടുക്കുന്നു എന്നാണ് കാണേണ്ടത്.

$$\frac{1}{2} - \frac{49}{100} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{499}{1000} = \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{4999}{10000} = \frac{1}{10000}$$

എന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ല. അതായത്, ഈ സംഖ്യകൾ $\frac{1}{2}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു. അപ്പോൾ, പുതിയ ദശാംശരീതി അനുസരിച്ച്.

$$\frac{1}{2} = 0.4999\ldots$$

എന്നും എഴുതാം.

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

എന്ന ദശാംശരൂപം നേരത്തെ കണ്ടതാണല്ലോ.

ഇതുപോലെ 0.19, 0.199, 0.1999... എന്നീ സംഖ്യകൾ $\frac{1}{5}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ $\frac{1}{5}$ ന് 0.2 എന്ന പഴയ രൂപത്തിനുപുറമെ, 0.1999... എന്ന പുതിയ രൂപവുമുണ്ട്.

ഇതുപോലെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും പുതിയ ദശാംശരൂപങ്ങളുണ്ട്.

$$1 = 0.999\ldots$$

$$2 = 1.999\ldots$$

$$3 = 2.999\ldots$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, പുതിയ ദശാംശരൂപങ്ങൾ അനുവദിച്ചപ്പോൾ, പഴയ രൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരു പുതുരൂപവുംകൂടി കിട്ടുന്നു.

(4) ചുവടെയുള്ള ക്രിയാഫലങ്ങൾ കണക്കാക്കി ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതുക:

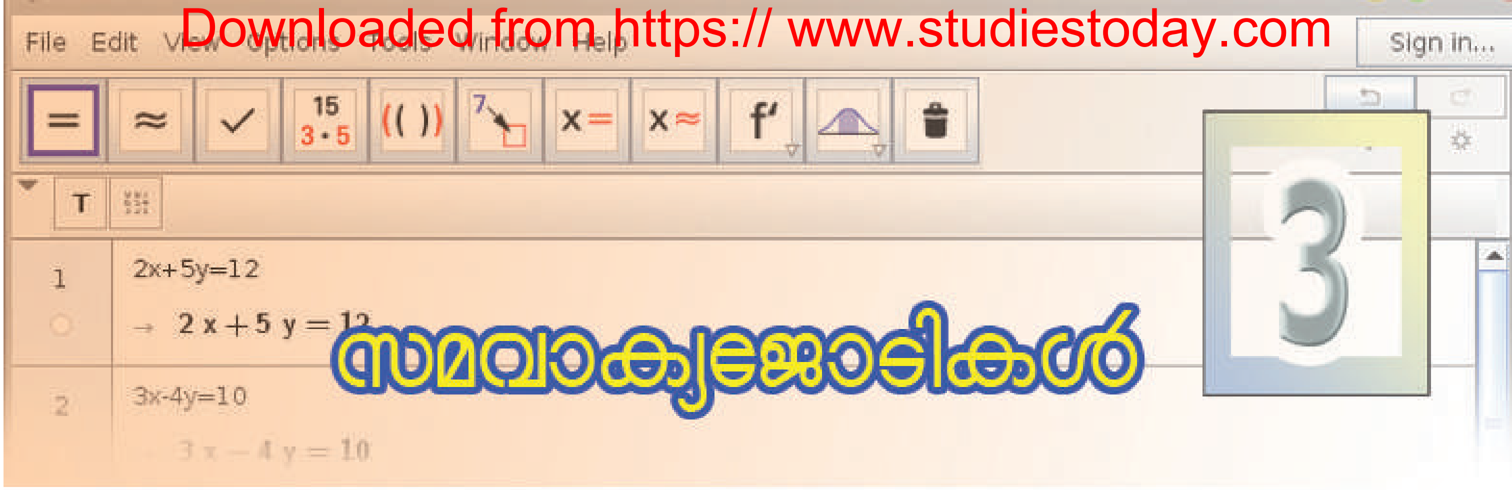
(i) 0.111... + 0.222...

(ii) 0.333... + 0.777...

(iii) 0.333... × 0.666...

(iv) $(0.333...)^2$

(v) $\sqrt{0.444...}$



3 സമവാക്യജോടികൾ

മനക്കണക്കും ബീജഗണിതവും

ആദ്യംതന്നെ ഒരു കണക്കാവാം.

> ഒരു ചെപ്പിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പുമായി 100 മുത്തുകളുണ്ട്; വെളുപ്പിനേക്കാൾ 10 കൂടുതലാണ് കറുപ്പ്; കറുപ്പെത്ര? വെളുപ്പെത്ര?

പലതരത്തിൽ ആലോചിക്കാം. കൂടുതലുള്ള 10 കറുത്ത മുത്തുകൾ തൽക്കാലം മാറ്റിവച്ചാൽ, ചെപ്പിൽ 90 മുത്തുകൾ; ഇതിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പും തുല്യം, അതായത് 45 വീതം. ഇനി മാറ്റിവച്ച കറുപ്പും കൂടിയെടുത്താൽ, കറുപ്പ് 55 ആകും; വെളുപ്പ് 45 തന്നെ

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചും ചെയ്യാം (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). കറുത്ത മുത്തുകൾ x എണ്ണം എന്നെടുത്താൽ, വെളുത്ത മുത്തുകൾ $x - 10$; എല്ലാംകൂടി 100 ആയതിനാൽ

$$x + (x - 10) = 100$$

ഇതിൽനിന്ന് x മാത്രം വേർതിരിച്ചെടുക്കാം

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= 100 \\ 2x &= 110 \\ x &= 55 \end{aligned}$$

അങ്ങനെ, കറുത്ത മുത്തുകൾ 55 എന്നു കിട്ടും; 10 കുറച്ച് വെളുത്ത മുത്തുകൾ 45 എന്നും കാണാം.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചുതന്നെ മറ്റൊരു വഴിയുണ്ട്: കറുത്ത മുത്തുകൾ x എണ്ണം, വെളുത്ത മുത്തുകൾ y എണ്ണം എന്നെടുത്താൽ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങൾ രണ്ടു സമവാക്യമാക്കാം.

$$x + y = 100$$

$$x - y = 10$$

ഇതിൽ നിന്ന് x ഉം y ഉം വേർതിരിച്ചെടുക്കുന്നതെങ്ങനെ?

NT-503-3-MATHS-9-M-VOL.1

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും കൂട്ടിയാൽ, വലിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കിട്ടുമെന്ന്, എഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ? (**മാറുന്ന സംഖ്യകളും മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **തുകയും വ്യത്യാസവും** എന്ന ഭാഗം)

തുകയിൽ നിന്ന് വ്യത്യാസം കുറച്ചാൽ, ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കിട്ടുമെന്നും കണ്ടു.

അപ്പോൾ മുത്തുകണക്കിൽ

$$2x = (x + y) + (x - y) = 110$$

$$2y = (x + y) - (x - y) = 90$$

ഇനി $x = 55, y = 45$ എന്നും കാണാം

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

> ഒരു മേശയ്ക്കും കസേരയ്ക്കും കൂടി 5000 രൂപയാണ് വില. ഒരു മേശയ്ക്കും നാലു കസേരയ്ക്കും കൂടി 8000 രൂപയും. ഓരോന്നിന്റെയും വിലയെത്രയാണ്?

ആദ്യം മനസിൽത്തന്നെ ചെയ്യാമോ എന്നു നോക്കാം. ഒരു മേശയും നാലു കസേരയുമായപ്പോൾ, വില 3000 രൂപ കൂടി. ഇതിനു കാരണം, മൂന്നു കസേരകൂടി വാങ്ങുന്നതുകൊണ്ടല്ലേ? അതായത്, മൂന്നു കസേരയുടെ വിലയാണ് കൂടുതൽ വന്ന 3000 രൂപ, അപ്പോൾ ഒരു കസേരയുടെ വില 1000 രൂപ, മേശയുടെ വില 4000 രൂപ

ഇങ്ങനെയൊന്നും ആലോചിക്കാതെ, കസേരയുടെ വില x രൂപ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം; ഇനി അൽപമൊന്നാലോചിച്ചാൽ, മേശയുടെ വില $5000 - x$ രൂപ എന്നു കാണാം. ഒരു മേശയും, നാലു കസേരയുമായാൽ $(5000 - x) + 4x$ രൂപ; ഇത് 8000 രൂപയാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അതായത്,

$$(5000 - x) + 4x = 8000$$

ഇതിൽനിന്ന് x കണക്കാക്കാം:

$$5000 + 3x = 8000$$

$$3x = 3000$$

$$x = 1000$$

അങ്ങനെ കസേരയുടെ വില 1000 രൂപ എന്നു കിട്ടും; മേശയുടെ വില $5000 - 1000 = 4000$ രൂപയെന്നും.

ആദ്യം ഒന്നുംതന്നെ ആലോചിക്കാതെ, കസേരയുടെ വില x രൂപ, മേശയുടെ വില y രൂപ എന്നെടുത്തും തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാക്കാം;

$$x + y = 5000$$

$$4x + y = 8000$$

ഇനി ആദ്യത്തെ സമവാക്യമനുസരിച്ച്, y എന്ന സംഖ്യ x എന്ന സംഖ്യയിൽനിന്നു കണക്കാക്കാം:

$$y = 5000 - x$$

അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ y യ്ക്കു പകരം $5000 - x$ ഉപയോഗിക്കാം:

$$4x + (5000 - x) = 8000$$

ഇത് കസേരയുടെ വില മാത്രം x എന്നെടുത്തു കിട്ടിയ പഴയ സമവാക്യംതന്നെയല്ലേ? ഇതിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെ പോലെ വില രണ്ടും കണക്കാക്കാം.

ഒരു കണക്കുകൂടി;

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ $\frac{1}{2}$ കിട്ടി. ഛേദത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് $\frac{1}{3}$ ഉം. ഏതാണാ ഭിന്നസംഖ്യ?

ഇത് മനക്കണക്കായി ചെയ്യാൻ പ്രയാസമുണ്ട്; അംശമോ ഛേദമോ x എന്നു മാത്രമെടുത്താലും ഏറെയൊന്നും മുന്നോട്ട് പോകില്ല. അംശം x ഉം ഛേദം y ഉം എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങളോരോന്നും സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$$

ആദ്യത്തെ സമവാക്യമനുസരിച്ച് y എന്ന സംഖ്യ, $x + 1$ എന്ന സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് ആകണമല്ലോ. അതായത്,

$$2\,(x + 1) = y$$

ഇനി രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിൽനിന്ന് $y + 1$ എന്ന സംഖ്യ, x എന്ന സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്നും കിട്ടും. അതായത്,

$$y + 1 = 3x$$

ആദ്യത്തെ സമവാക്യം പറയുന്നത് y എന്ന സംഖ്യയും $2\,(x + 1)$ എന്ന സംഖ്യയും തുല്യമാണെന്നാണ്; അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ y യ്ക്കു പകരം $2\,(x + 1)$ എഴുതാം. അതായത്

$$3x = 2\,(x + 1) + 1 = 2x + 3$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x = 3$ എന്നു കാണാം. തുടർന്ന് ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് $y = 2 \times 4 = 8$ എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ $\frac{3}{8}$ ആണ് കണക്കിലെ ഭിന്നസംഖ്യ.

ചുവടെപ്പറയുന്ന കണക്കുകളോരോന്നും മനക്കണക്കായോ, ഒരക്ഷരം മാത്രമുള്ള സമവാക്യമാക്കിയോ, രണ്ടക്ഷരമുള്ള രണ്ടു സമവാക്യമാക്കിയോ ചെയ്യുക.

(1) ചുറ്റളവ് ഒരു മീറ്ററായ ചതുരത്തിൽ, വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ അഞ്ചുസെന്റിമീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു ക്ലാസിൽ ആൺകുട്ടികളേക്കാൾ 4 പെൺകുട്ടികൾ കൂടുതലുണ്ട്. 8 ആൺകുട്ടികൾ മാത്രം വരാതിരുന്ന ഒരു ദിവസം , ആൺകുട്ടികളുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് പെൺകുട്ടികളായി. ക്ലാസിൽ എത്ര പെൺകുട്ടികളും എത്ര ആൺകുട്ടികളുമാണ്?

(3) ഒരാൾ 10000 രൂപ ഭാഗിച്ച് രണ്ടു പദ്ധതികളിലായി നിക്ഷേപിച്ചു; 8 ശതമാനവും, 9 ശതമാനവുമാണ് വാർഷിക പലിശ നിരക്ക്. ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞ് രണ്ടു പദ്ധതിയിൽനിന്നുമായി 875 രൂപ പലിശ കിട്ടി. ഓരോന്നിലും എത്ര രൂപയാണ് നിക്ഷേപിച്ചത്?

(4) മൂന്നര മീറ്റർ നീളമുള്ള കമ്പി രണ്ടായി മുറിച്ച്, ഒരു കഷണം വളച്ചൊരു സമചതുരവും, മറുകഷണം വളച്ചൊരു സമഭുജത്രികോണവുമുണ്ടാക്കണം. രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമായിരിക്കണം. എങ്ങനെ മുറിക്കണം?

(5) ഒരു സെക്കന്റിൽ u മീറ്റർ എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഓരോ സെക്കന്റിലും a മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കൂടി, നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു, t സെക്കന്റിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം $ut + \frac{1}{2}at^2$ ആണ്. ഇങ്ങനെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു 2 സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്ററും, 4 സെക്കന്റിൽ 28 മീറ്ററും സഞ്ചരിക്കുന്നു. യാത്രയുടെ തുടക്കത്തിൽ വേഗം എന്തായിരുന്നു? ഓരോ സെക്കന്റിലും വേഗം കൂടുന്നതിന്റെ നിരക്കെന്താണ്?

രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ

ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

2 പേനയ്ക്കും 3 നോട്ടുബുക്കിനും കൂടി 40 രൂപ. 2 പേനയ്ക്കും 5 നോട്ടുബുക്കിനുമാണെങ്കിൽ 60 രൂപ. ഒരു പേനയുടെ വില എത്രയാണ്? ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെയോ?

നേരത്തെ ചെയ്ത കസേര-മേശ കണക്കുപോലെ ആലോചിച്ചു നോക്കൂ. ആദ്യം പറഞ്ഞ 40 രൂപയിൽനിന്ന് വില 60 രൂപയായി കൂടിയതെങ്ങനെ?

2 നോട്ടുബുക്ക് കൂടി വാങ്ങിയതുകൊണ്ടല്ലേ? അതായത്, 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വിലയാണ് കൂടുതലായ 20 രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 10 രൂപ.

ഇനി ആദ്യം പറഞ്ഞതിൽനിന്ന് 2 പേനയുടെ വില കിട്ടാൻ, 40 രൂപയിൽനിന്ന് മൂന്നു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില കുറച്ചാൽപ്പോരേ? അതായത്, 40 – 30 = 10 രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ.

ഇനി, പേനയുടെ വില x രൂപ, നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില y രൂപ എന്നെടുത്ത്, കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കി, ഇതു ചെയ്യുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

2 പേനയുടെയും 3 നോട്ടുബുക്കിന്റെയും വില 40 രൂപ	$2x + 3y = 40$
2 പേനയുടെയും 5 നോട്ടുബുക്കിന്റെയും വില 60 രൂപ	$2x + 5y = 60$
കൂടുതലായത് 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില	$(2x + 5y) - (2x + 3y) = 2y$
കൂടുതലായത് 20 രൂപ	$60 - 40 = 20$
2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 20 രൂപ	$2y = 20$
ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 10 രൂപ	$y = 10$
2 പേനയുടെ വില, 40 രൂപയിൽനിന്ന് 30 രൂപ കുറച്ചത്	$2x = 40 - (3 \times 10) = 10$
ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ	$x = 5$

അൽപം വ്യത്യസ്തമായ ഒരു കണക്ക് നോക്കൂ:

> 3 പെൻസിലിനും 4 പേനയ്ക്കും കൂടി 26 രൂപയാണ് വില. 6 പെൻസിലിനും 3 പേനയ്ക്കുമാണെങ്കിൽ 27 രൂപയും. പെൻസിലിന്റേയും പേനയുടേയും വില എത്രയാണ്?

ആദ്യം ബീജഗണിതമില്ലാതെ നോക്കാം. ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ വില കൂടാൻ കാരണം, ആദ്യത്തെ കണക്കുപോലെ, ഒരു സാധനം മാത്രം കൂടിയതു കൊണ്ടല്ല. അപ്പോൾ അതുപോലെ അത്ര എളുപ്പമല്ല ഇതിലെ കാര്യങ്ങൾ.

രണ്ടു വിവരങ്ങളിലും പെൻസിലോ, പേനയോ ഒരേ എണ്ണമായിരുന്നെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ കണക്കുപോലെ ചെയ്യാമായിരുന്നു. അങ്ങനെയാക്കിയാലോ?

വിലകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതിവച്ചു തുടങ്ങാം.

പെൻസിൽ	പേന	വില
3	4	26
6	3	27

ആദ്യം പറഞ്ഞതിൽ 3 പെൻസിലും, രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതിൽ 6 പെൻസിലുമാണ്. ആദ്യത്തേതിലും 6 പെൻസിൽതന്നെ ആക്കാൻ പറ്റുമോ?

6 പെൻസിലും, 8 പേനയുമായാലോ?

	പെൻസിൽ	പേന	വില
	3	4	26
$\times 2$	6	3	27
	6	8	52

മൂന്നാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടാമത്തെ വരിയേക്കാൾ വില 25 രൂപ കൂടിയത്, 5 പേനയുടെ മാത്രം വിലയല്ലേ?

അപ്പോൾ, ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ. ഇനി ആദ്യത്തെ വരിയിൽ നിന്ന്, 3 പെൻസിലിന്റെ വില $26 - 20 = 6$ രൂപ, ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില 2 രൂപ എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

ഇനി ഈ ചിന്തകളെല്ലാം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതിനോക്കാം. ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില x രൂപയെന്നും, ഒരു പേനയുടെ വില y രൂപയെന്നുമെടുത്താൽ, കണക്കിലെ വിവരങ്ങളും അതുപയോഗിച്ച് വിലകൾ കണ്ടുപിടിച്ച രീതിയുമെല്ലാം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

3 പെൻസിലിന്റെയും 4 പേനയുടെയും വില 26 രൂപ	$3x + 4y = 26$
6 പെൻസിലിന്റെയും 3 പേനയുടെയും വില 27 രൂപ	$6x + 3y = 27$
6 പെൻസിലിന്റെയും 8 പേനയുടെയും വില 52 രൂപ	$6x + 8y = 2(3x + 4y) = 52$
കൂടുതലായത് 5 പേനയുടെ വില	$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 5y$
കൂടുതലായത് 25 രൂപ	$5y = 25$
ഒരു പേനയുടെ വില 5 രൂപ	$y = 5$
3 പെൻസിലിന്റെ വില 26 രൂപയിൽ നിന്ന് 20 രൂപ കുറച്ചത്	$3x = 26 - (4 \times 5) = 6$
ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില, 2 രൂപ	$x = 2$

ഈ ചെയ്തതെല്ലാം ചുരുക്കിയെഴുതാം. ആദ്യം കണക്കിൽ നിന്നു കിട്ടിയ വിവരങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതാം. അവയെ 1-ാം സമവാക്യമെന്നും, 2-ാം സമവാക്യമെന്നും വിളിക്കാം.

$$3x + 4y = 26 \quad (1)$$

$$6x + 3y = 27 \quad (2)$$

$3x + 4y$ എന്ന സംഖ്യ 26 ആണെന്നാണ് 1-ാം സമവാക്യം പറയുന്നത്; അപ്പോൾ അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് 52.

$$6x + 8y = 52 \quad (3)$$

ഇനി 2-ാം സമവാക്യവും, 3-ാം സമവാക്യവും ഉപയോഗിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 52 - 27$$

ഇത് ലഘൂകരിച്ച്

$$5y = 25$$

എന്നും അതിൽനിന്ന് $y = 5$ എന്നും കിട്ടും. തുടർന്ന് 1-ാം സമവാക്യത്തിൽ y ആയി 5 എടുത്താൽ x ഉം കണക്കാക്കാം.

$$3x + (4 \times 5) = 26$$

$$3x = 26 - 20 = 6$$

$$x = 2$$

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

ചെറിയ പാത്രത്തിൽ അഞ്ചു തവണയും, വലിയ പാത്രത്തിൽ രണ്ടു തവണയും വെള്ളം നിറച്ചൊഴിച്ചപ്പോൾ 20 ലിറ്റർ. ചെറിയ പാത്രത്തിൽ രണ്ടു തവണയും, വലിയ പാത്രത്തിൽ മൂന്നു തവണയും നിറച്ചൊഴിച്ചപ്പോഴോ, 19 ലിറ്ററും. ഓരോ പാത്രത്തിലും എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?

ചെറിയ പാത്രത്തിൽ x ലിറ്ററും, വലിയ പാത്രത്തിൽ y ലിറ്ററും കൊള്ളും എന്നെടുത്ത്, കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളാക്കാം:

$$5x + 2y = 20 \quad (1)$$

$$2x + 3y = 19 \quad (2)$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഇതിലെ (1) ലും $2x$ തന്നെയാക്കണമെങ്കിൽ, $\frac{2}{5}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം; മറിച്ച്, (2) ൽ $5x$ ആക്കണമെങ്കിൽ $\frac{5}{2}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം.

ഒരു ജോടി സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ CAS ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന്, 5x+2y=20, 2x+3y=19 എന്നീ സമവാക്യജോടികളുടെ പരിഹാരം കാണാൻ CAS തുറന്ന് (view→CAS), Solve({5x+2y=20, 2x+3y=19}, {x, y}) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

വ്യത്യസ്ത വിവരങ്ങൾ

രാമു 7 രൂപ കൊടുത്ത് ഒരു പെൻസിലും ഒരു പേനയും വാങ്ങി. അജു 4 പെൻസിലും 4 പേനയും വാങ്ങി; 28 രൂപയായി. ഈ വിവരങ്ങൾ വച്ചുകൊണ്ട് ഓരോന്നിന്റേയും വില കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഇവർ ശ്രമിച്ചു. പെൻസിലിന്റെ വില x എന്നെടുത്ത് ആദ്യം പറഞ്ഞതുപയോഗിച്ച് പേനയുടെ വില $7 - x$ എന്നാക്കി. രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതുപയോഗിച്ച്

$$4x + 4(7 - x) = 28$$

എന്നെഴുതി. ഇതു ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയതോ? $28 = 28$

ഇവിടെ, പെൻസിലിന്റെ വില x, പേനയുടെ വില y എന്നെടുത്തിരുന്നെങ്കിലോ?

$$x + y = 7$$

$$4x + 4y = 28$$

രണ്ടാമതെഴുതിയ സമവാക്യത്തിനെ

$$4(x + y) = 28$$

എന്നാക്കിയാൽ വീണ്ടും

$$x + y = 7$$

എന്നു തന്നെയല്ലേ കിട്ടുന്നത്?

അതായത്, ഈ കണക്കിൽ രണ്ടായിപ്പറഞ്ഞുവെങ്കിലും, വിലകൾ തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം മാത്രമേ യഥാർത്ഥത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളൂ. അതുമാത്രം ഉപയോഗിച്ച് വിലകൾ വെവ്വേറെ കണ്ടുപിടിക്കാനും കഴിയില്ല.

കണക്കും കാര്യവും

10 മീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം. നീളം, വീതിയേക്കാൾ 5.5 മീറ്റർ കൂടുതലാകണം. നീളവും വീതിയും എത്രയാകണം?

വീതി x എന്നെടുത്താൽ, നീളം $x + 5.5$ ആകണം. ചുറ്റളവ് 10 മീറ്ററാകണം എന്നതിനാൽ

$$x + (x + 5.5) = \frac{10}{2} = 5$$

അതായത്,

$$2x + 5.5 = 5$$

അഥവാ

$$2x = -0.5$$
$$x = -0.25$$

ഇത് ശരിയാകില്ലല്ലോ. ചതുരത്തിന്റെ അളവുകളെങ്ങനെ ന്യൂനസംഖ്യകളാകാം?

ഇതിന്റെ അർഥം, ഈ നിബന്ധനകൾ രണ്ടും ശരിയാകുന്ന തരത്തിൽ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതാണ്. ഈ കണക്കിൽ വീതി x, നീളം y എന്നെടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് കിട്ടുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ

$$x + y = 5$$
$$y - x = 5.5$$

ഇത് രണ്ടും ശരിയാകുന്ന അധിസംഖ്യകൾ ഇല്ലെന്ന് പെട്ടെന്ന് മനസിലാക്കാം. (രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുക, അവയുടെ വ്യത്യാസത്തെക്കാൾ ചെറുതാകില്ലല്ലോ.)

ഇങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ, ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇല്ലാതെ ചെയ്യാനൊരു മാർഗമുണ്ട്. (1) ലും (2) ലും $10\,x$ ആക്കാം; അതിന് (1) നെ 2 കൊണ്ടും, (2) നെ 5 കൊണ്ടും ഗുണിച്ചാൽ മതി. സമവാക്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ മാറും.

$$(1) \times 2: \quad 10x + 4y = 40 \qquad (3)$$

$$(2) \times 5: \quad 10x + 15y = 95 \qquad (4)$$

ഇനി (4) ൽ നിന്ന് (3) കുറച്ച്

$$(4) - (3): \quad 11y = 55$$

എന്നും, അതിൽ നിന്ന്

$$y = 5$$

എന്നും കാണാം. തുടർന്ന്, ഇത് (1) ൽ ഉപയോഗിച്ച് x ഉം കണക്കാക്കാം.

$$5x + 10 = 20$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

അങ്ങനെ ചെറിയ പാത്രത്തിൽ 2 ലിറ്ററും, വലിയ പാത്രത്തിൽ 5 ലിറ്ററും കൊള്ളുമെന്നു കണക്കാക്കാം.

?

(1) രാജു ഇരുന്നൂറു പേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം ഏഴെണ്ണവും, നൂറുപേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം അഞ്ചെണ്ണവും വാങ്ങി. വില 107 രൂപ. ജോസഫ് ഇരുന്നൂറു പേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം അഞ്ചെണ്ണവും, നൂറുപേജുള്ള നോട്ടുപുസ്തകം ഏഴെണ്ണവുമാണ് വാങ്ങിയത്. വില 97 രൂപയേ ആയുള്ളൂ. ഓരോ തരത്തിലുമുള്ള നോട്ടുബുക്കുകളുടെ വില എത്രയാണ്?

(2) ഒരു സഖ്യയുടെ നാലു മടങ്ങും, മറ്റൊരു സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങും കൂട്ടിയപ്പോൾ 43 കിട്ടി. ആദ്യത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങിൽനിന്ന്, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് കുറച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് 11. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

(3) ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 11 ആണ്. ഈ സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യയേക്കാൾ 27 കൂടുതലാണ്. സംഖ്യകൾ എന്താണ്?

(4) നാലു വർഷം മുമ്പ്, റഹിമിന്റെ പ്രായം, രാമുവിന്റ പ്രായത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങായിരുന്നു. രണ്ടു വർഷം കഴിയുമ്പോൾ ഇത് രണ്ടു മടങ്ങാകും. അവരുടെ ഇപ്പോഴത്തെ പ്രായം എത്രയാണ്?

(5) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 5 മീറ്റർ കൂട്ടുകയും, വീതി 3 മീറ്റർ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ, പരപ്പളവ് 5 ചതുരശ്രമീറ്റർ കുറയും. നീളം 3 മീറ്ററും, വീതി 2 മീറ്ററും കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് 50 ചതുരശ്രമീറ്റർ കൂടും. നീളവും വീതിയും എത്രയാണ്?

മറ്റു ചില സമവാക്യങ്ങൾ

ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

രണ്ടു സമചതുരങ്ങളിൽ വലുതിന്റെ വശം, ചെറുതിന്റെ വശത്തേക്കാൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്, വലുതിന്റെ പരപ്പളവ്, ചെറുതിന്റെ പരപ്പളവിനേക്കാൾ 55 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്. രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

വലുതിന്റെ ഒരു വശം x സെന്റിമീറ്ററെന്നും, ചെറുതിന്റെ ഒരു വശം y സെന്റിമീറ്റർ എന്നുമെടുത്താൽ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങൾ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$x - y = 5$$
$$x^2 - y^2 = 55$$

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും?

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ എന്നറിയാമല്ലോ. ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും എഴുതാം.

$$x + y = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ ചതുരക്കണക്കിൽ

$$x + y = \frac{55}{5} = 11$$

ഇപ്പോൾ $x + y = 11$ എന്ന തുകയും, $x - y = 5$ എന്ന വ്യത്യാസവും ആയില്ലേ? ഇനി സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$x = \frac{1}{2}(11 + 5) = 8$$

$$y = \frac{1}{2}(11 - 5) = 3$$

അതായത്, സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ, 8 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 10 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് $5\frac{1}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ, y മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ചുറ്റളവ്, $2(x+y)$ മീറ്റർ, പരപ്പളവ് xy ചതുരശ്രമീറ്റർ, അപ്പോൾ കണക്കിലെ വിവരങ്ങൾ ഇങ്ങനെ സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$x + y = 5$$

$$xy = 5\frac{1}{4}$$

ഇനിയോ? ഇവയിൽനിന്ന് $x - y$ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$ എന്നറിയാമല്ലോ. ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ കണക്കിൽ

$$(x-y)^2 = 5^2 - \left(4 \times 5\frac{1}{4}\right) = 25 - 21 = 4$$

അപ്പോൾ $x - y = 2$. ഇനി, $x + y = 5$ എന്നതും കൂടി ഉപയോഗിച്ചാൽ

$x = 3\frac{1}{2}, y = 1\frac{1}{2}$

അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, $3\frac{1}{2}$ മീറ്ററും, $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററും

(1) 10 മീറ്റർ നീളമുള്ള കയർ രണ്ടായി മുറിച്ച്, ഓരോ കഷണം കൊണ്ടും സമചതുരമുണ്ടാക്കണം. അവയുടെ അകത്തുള്ള പരപ്പളവുകളുടെ വ്യത്യാസം $1\frac{1}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്ററാകണം. എങ്ങനെ മുറിക്കണം?

(2) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം, വീതിയേക്കാൾ 1 മീറ്റർ കൂടുതലാണ്; അതിന്റെ പരപ്പളവ് $3\frac{3}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ. നീളവും വീതിയും എത്രയാണ്?

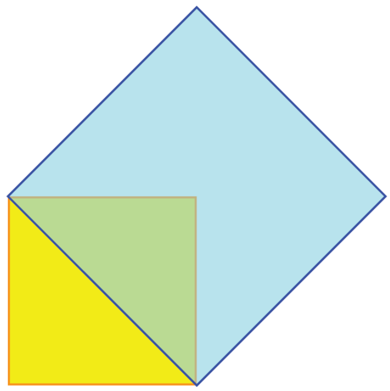
(3) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം $6\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് $7\frac{1}{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

4 പുതിയസംഖ്യകൾ

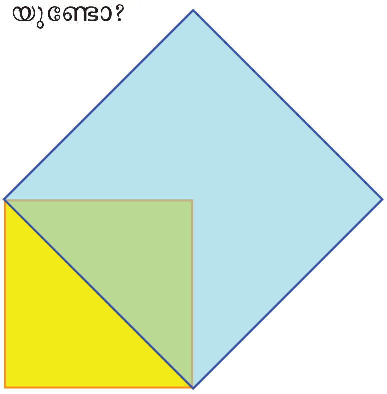
നീളങ്ങളും സംഖ്യകളും

ചിത്രം നോക്കൂ:

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണം വശമായി മറ്റൊരു സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്ന് ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ?



അതായത്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം ഒരു മീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു ചതുരശ്രമീറ്റർ.

അതിന്റെ ഒരുവശത്തിന്റെ നീളമെത്രയാണ്?

ഏതായാലും, ഒരു മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്; രണ്ടു മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവും (അതെങ്ങനെ?) ഒന്നിനും രണ്ടിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ഭിന്നസംഖ്യ ആകാം; പക്ഷേ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു ചതുരശ്രമീറ്ററായതിനാൽ, വശത്തിന്റെ നീളമായ ഈ സംഖ്യയുടെ വർഗം രണ്ടാകണം.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് രണ്ട്?

ഒന്നരയാകുമോ?

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

അത് കൂടുതലാണ്, ഒന്നേകാൽ ആയാലോ?

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

അത് കുറഞ്ഞുംപോയി. ഒന്നും മൂന്നിലൊന്നും ആയാലോ?

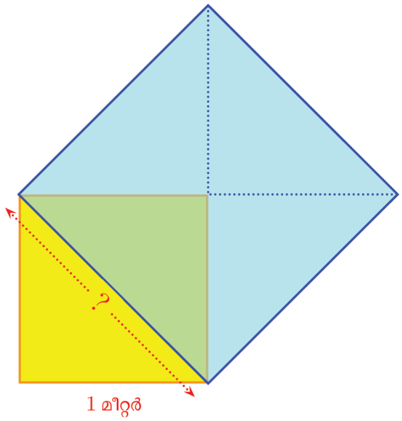
$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$$

അതും കുറവ് തന്നെ; പക്ഷേ ഒന്നേകാലിനേക്കാൾ മെച്ചമാണ്.

ഇങ്ങനെ പല ഭിന്നസംഖ്യകളെടുത്ത് പരിശോധിച്ചാലും വർഗങ്ങൾ 2 നോട് വളരെ അടുത്തുവരുമെന്നല്ലാതെ, കൃത്യം 2 കിട്ടില്ല. ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇതു തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യാം (ഈ പാഠഭാഗത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള അനുബന്ധം നോക്കുക).

അതായത്,

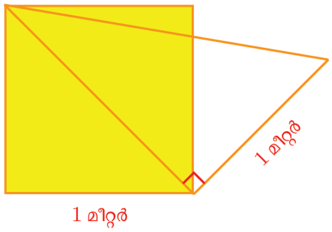
ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല.



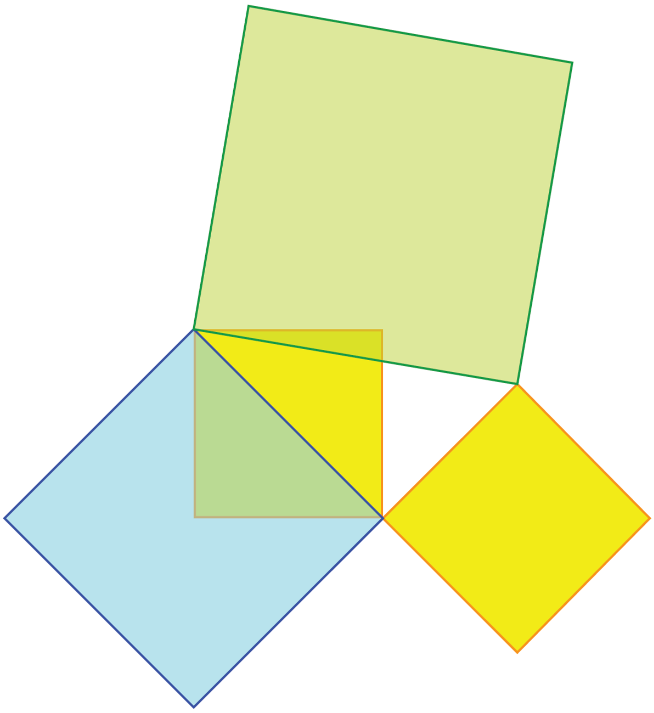
അപ്പോൾ നമ്മുടെ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നം എന്തായി? വശങ്ങൾ ഒരു മീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം, ഒരു മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം രണ്ട് ആകണം (വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യയായാലും പരപ്പളവ് അതിന്റെ വർഗമാണെന്ന് ആറാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ) പക്ഷേ വർഗം രണ്ട് ആയ ഭിന്നസംഖ്യ ഇല്ല. അപ്പോൾ എന്തു പറയാം?

വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 1 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ പലതുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിൽ വരച്ചിരിക്കുന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളമെന്താണ്? ഇതിന്റെ വശങ്ങളിലെല്ലാം സമചതുരങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കാം.



പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, നമ്മുടെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വശമായ (പച്ച) സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $1 + 2 = 3$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ അതിന്റെ നീളം 1 മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 3 ആകണം.

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ലെന്നു കണ്ടതുപോലെതന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 3 അല്ലെന്നും കാണാം. അപ്പോൾ ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളവും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: വ്യാപ്തം 2 ഘനസെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ട ഉണ്ടാക്കണമെന്നു കരുതുക. ഇതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായിരിക്കണം? ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നതുപോലെതന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും മൂന്നാംകൃതിയും 2 അല്ല. അപ്പോൾ ഈ സമചതുരക്കട്ടയുടെ വശത്തിന്റെ നീളവും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ ആവശ്യമായി വരും.

സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്

എന്തിനേയും അളന്ന് സംഖ്യയാക്കുക; ഈ സംഖ്യകളിലൂടെയും അവയുടെ പരസ്പരബന്ധങ്ങളിലൂടെയും ലോകത്തെ മനസിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കുക – ഇതാണ് ഗണിതത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ധർമം.
അളക്കപ്പെടുന്ന വസ്തുവിന്റെ സ്വഭാവം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത തരത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കേണ്ടി വരും.
പ്രകൃതിയിൽ നിന്ന് നേരിട്ട് കിട്ടുന്നതു മാത്രം ഭക്ഷിച്ചു നടന്നിരുന്ന കാലത്ത് മനുഷ്യന് കൂട്ടത്തിലെ ആളുകളുടെ എണ്ണം, വളർത്തുന്ന കന്നുകാലികളുടെ എണ്ണം തുടങ്ങിയവ മാത്രമേ ആവശ്യമായിരുന്നുള്ളു. അക്കാലത്ത് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയായിരുന്നു.
ബി.സി. അയ്യായിരത്തോടടുപ്പിച്ച്, നദീതീരങ്ങളിൽ സ്ഥിരമായി താമസിച്ചുകൊണ്ട് മനുഷ്യർ വ്യാപകമായ കൃഷി തുടങ്ങിയതോടെ, കൃഷിയിടങ്ങൾ തിട്ടപ്പെടുത്താനും, പാർപ്പിടങ്ങൾ പണിയാനുമെല്ലാം പലതരത്തിലുള്ള നീളവും പരപ്പുമെല്ലാം അളക്കേണ്ടതായി വന്നു. ഇക്കാലത്താണ് ഭിന്നസംഖ്യകൾ എന്ന സങ്കേതം ഉണ്ടായത്. പങ്കുവയ്ക്കുമ്പോഴും ഭിന്നസംഖ്യകൾ ആവശ്യമുണ്ടല്ലോ. എല്ലാ അളവുകളേയും ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ല എന്ന തിരിച്ചറിവിൽനിന്നാണ് പുതിയ തരം സംഖ്യകൾ ആവശ്യമായി വന്നത്.
പിൽക്കാലത്ത് ഭൗതികമായ ആവശ്യങ്ങൾക്കല്ലാതെ ഗണിതത്തിന്റെ തന്നെ സൗകര്യങ്ങൾക്കായും പുതിയതരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കപ്പെട്ടു. ന്യൂനസംഖ്യകൾ, സങ്കീർണസംഖ്യകൾ (complex numbers) എന്നിവ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടായവയാണ്. ഇത്തരം സംഖ്യകൾപോലും ഊർജതന്ത്രം പോലുള്ള മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിൽ വളരെയധികം ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട് എന്നത് മറ്റൊരു കാര്യം.

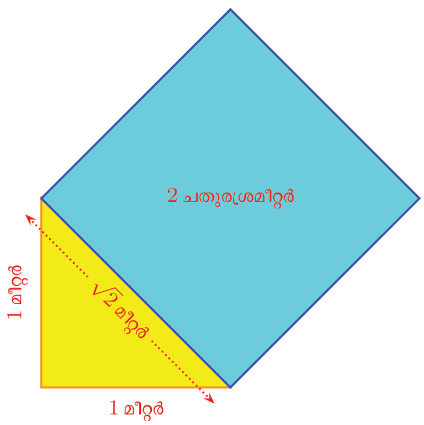
അളവുകളും സംഖ്യകളും

എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ പുതിയ സംഖ്യകളുണ്ടാക്കണം. നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണം തന്നെയെടുക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം 1 ആയ (മീറ്ററോ, സെന്റിമീറ്ററോ എന്തുമാകട്ടെ) സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളത്തെ എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കും?

ഈ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയും ചോദിക്കാം: പരപ്പളവ് 2 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കും?

വശം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയ സമചതുരമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നീളം പരപ്പളവിന്റെ വർഗമൂലമാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി , പരപ്പളവ് 4 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{4} = 2$; പരപ്പളവ് $2\frac{1}{4}$ ആണെങ്കിൽ, വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$

ഇതുപോലെ പരപ്പളവ് 2 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ എന്നെഴുതാം.



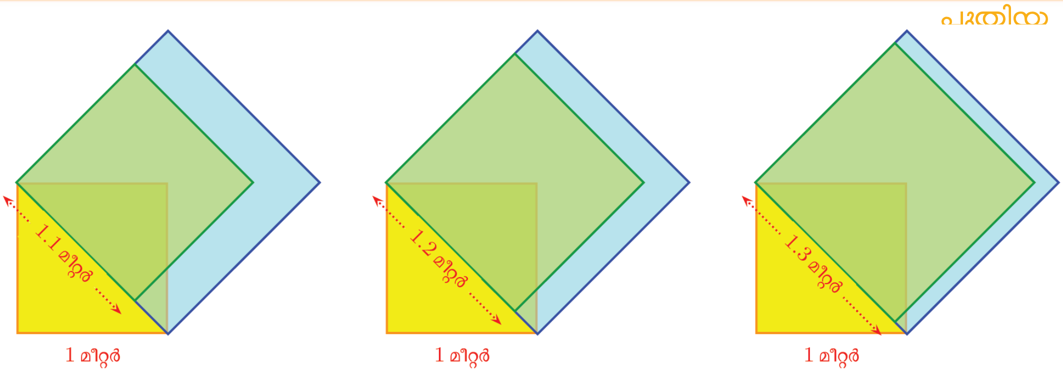
നീളത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഒരു ചിഹ്നം കൊടുത്തതു കൊണ്ടായില്ലല്ലോ. അതിന്റെ വലുപ്പമറിയാൻ, അറിയാവുന്ന നീളങ്ങളുമായി ഒത്തുനോക്കണ്ടേ? അതിനുള്ള വഴി, ഈ നീളത്തോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നതാണ്. ഇത്തരം നീളങ്ങൾ വികർണത്തിൽത്തന്നെ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, ഇവ വശങ്ങളായ സമചതുരങ്ങൾ, വികർണം വശമായ സമചതുരത്തോട് അടുക്കുമല്ലോ.

തകരുന്ന വിശ്വാസങ്ങൾ

എല്ലാ അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് താരതമ്യം ചെയ്യാം എന്നായിരുന്നു ബി.സി. ആറാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പൈഥാഗറസിന്റേയും ശിഷ്യരുടേയും വിശ്വാസം. കുറേക്കൂടി കൃത്യമായിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഏതു രണ്ട് അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം എന്നതാണ് ഈ വിശ്വാസം. എന്നാൽ, ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റേയും വശത്തിന്റേയും നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എണ്ണൽസംഖ്യകൾകൊണ്ട് എഴുതാൻ സാധ്യമല്ല. ഈ അംശബന്ധം എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് $a : b$ എന്നെഴുതണമെങ്കിൽ, വികർണത്തിന്റെ നീളം വശത്തിന്റെ $\frac{a}{b}$ മടങ്ങാകണം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ വികർണത്തിന്റെ വർഗം വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ മടങ്ങാകണം. വികർണത്തിലെ സമചതുരം, വശത്തിലെ സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ ആകണം. ഇതു സാധ്യമല്ല എന്നു കണ്ടല്ലോ.

പൈഥാഗറസിന്റെ തന്നെ ശിഷ്യനായ ഹിപ്പാസസ് ആണ് ഈ വസ്തുത കണ്ടെത്തിയതെന്നാണ് കരുതപ്പെടുന്നത്.

സമചതുരത്തിന്റെ വികർണവും വശവും പോലെ, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് താരതമ്യം ചെയ്യാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെ ഒരുമിച്ചളക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകൾ (incommensurable magnitudes) എന്നാണ് പറയുന്നത്.



സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാൽ, ഈ വരകളുടെ നീളങ്ങളായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരും.

ഇങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപമാണ് സൗകര്യം. ആദ്യം 1.1, 1.2, 1.3, . . . എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിയാൽ.

$$1.4^2 = 1.96$$

$$1.5^2 = 2.25$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ പത്തിലൊന്നുകൾ വരെ എടുത്താൽ, ഇങ്ങനെ കിട്ടും.

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

ഇനി 1.4 നും 1.5 നും ഇടയ്ക്കുള്ള 1.41, 1.42, 1.43, . . . എന്നീ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിയാൽ

$$1.41^2 = 1.9881; \quad 1.42^2 = 2.0164$$

എന്നും കാണാം, അതായത് നൂറിലൊന്നുകൾ വരെ എടുത്താൽ, നേരത്തെ എഴുതിയത് പോലെ,

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ

1.4^2	=	1.96	1.5^2	=	2.25
1.41^2	=	1.9881	1.42^2	=	2.0164
1.414^2	=	1.999396	1.415^2	=	2.002225
1.4142^2	=	1.99996164	1.4143^2	=	2.00024449
1.41421^2	=	1.9999899241	1.41422^2	=	2.0000182084

എന്നെല്ലാം കാണാം. അതായത്, അഞ്ചു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെയെടുത്താൽ

$$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$$

ഇതിൽ

$$2 - 1.41421^2 = 0.0000100759 < 0.00002$$

ആണെന്നും കാണണം.

6U4XPK

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

$\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

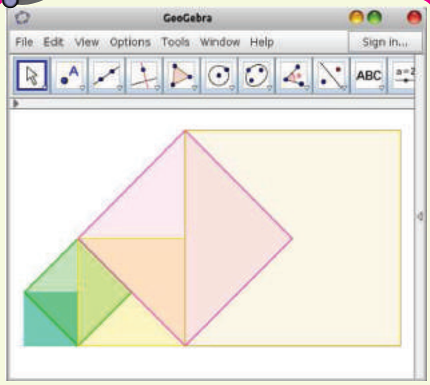
അപ്പോൾ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യ, ഒരു ദശാംശസ്ഥാനം മാത്രമെടുത്താൽ 1.4, രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെയെടുത്താൽ 1.41 എന്നിങ്ങനെ പറയാം. ഇതെഴുതുന്നത്

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$

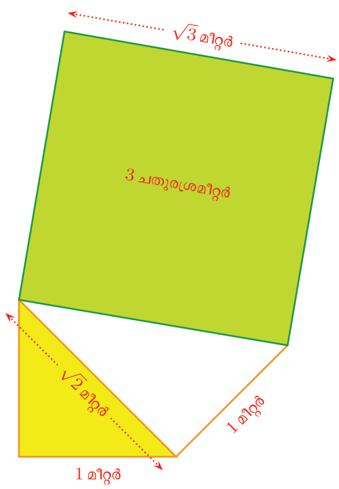
$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

എന്നൊക്കെയാണ്. ഇതിൽ ≈ എന്ന ചിഹ്നത്തിന്റെ അർഥം, ഏകദേശം തുല്യം എന്നാണ്.

ഇതുപോലെ പരപ്പളവ് 3 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ ആണെന്നു പറയാം.



ചിത്രത്തിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക. ഇത്തരം ഒരു ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. (Regular polygon ഉപയോഗിക്കാം) Area ഉപയോഗിച്ച് ഓരോ സമചതുരത്തിന്റേയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കി നോക്കൂ. ഇതിൽ ഏതൊക്കെ ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളാണ് ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയുന്നവ?

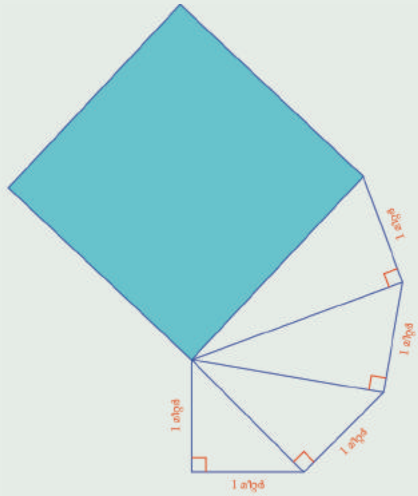


നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകളിലൂടെ, 1.7, 1.73, 1.732, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 3 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നും കാണാം. ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$ എന്നെഴുതാം.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ x ഏത് അധിസംഖ്യ ആയാലും, പരപ്പളവ് x ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{x}$ എന്നെഴുതാം. ചിലപ്പോൾ $\sqrt{x}$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആകാം; അല്ലെങ്കിൽ, വർഗം x നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന, ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കി, $\sqrt{x}$ നെ ദശാംശരൂപത്തിലും എഴുതാം.

(1) ചിത്രത്തിൽ ഏറ്റവും മുകളിലെ മട്ട ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വശമാക്കി സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

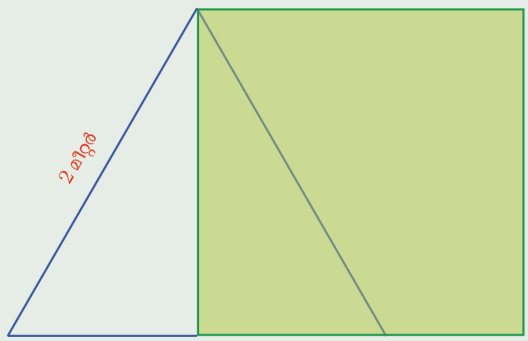
സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക.



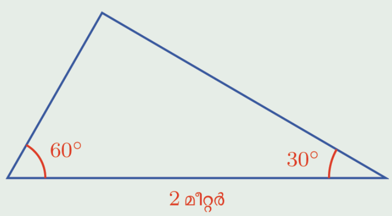
(2) വശങ്ങളുടെ നീളം 2 മീറ്റർ ആയ ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി വശമാക്കി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നു.

i) സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്?

ii) ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി എത്ര മീറ്ററാണ്?



iii) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളമെത്രയാണ്?



6UDTR8

(3) ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയെയും രണ്ടു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാമെന്ന് എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സർവസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇതുപയോഗിച്ച് 7 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, 11 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നീ പരപ്പളവുകളുള്ള സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(4) 13 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാനുള്ള രണ്ടു വ്യത്യസ്ത മാർഗങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുക.

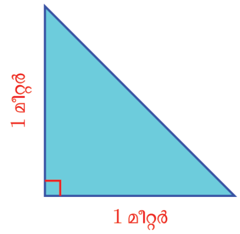
(5) $\sqrt{2}$ നേക്കാൾ വലുതും, $\sqrt{3}$ നേക്കാൾ ചെറുതുമായ മൂന്നു ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

NT-503-4-MATHS-9-M-VOL.1

കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

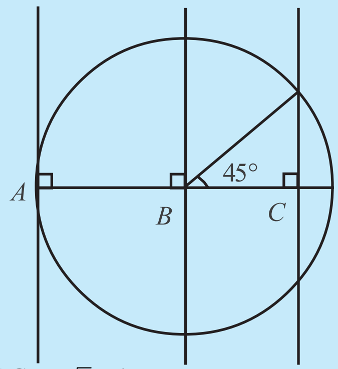
ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്ററായ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?

ചുറ്റളവോ?



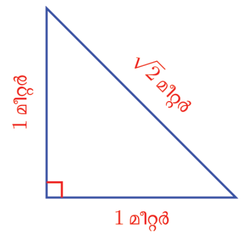
അങ്ങനെയും അംശബന്ധം

ഈ ചിത്രത്തിൽ B വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ്.



$AB : BC = \sqrt{2} : 1$

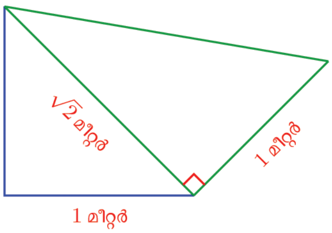
ഇതിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണല്ലോ.



അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ 2 മീറ്ററും $\sqrt{2}$ മീറ്ററും കൂട്ടണം. ഈ നീളത്തെ $2 + \sqrt{2}$ മീറ്റർ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

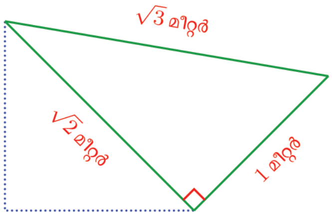
$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ 1.4, 1.41, 1.414, ...എന്നിങ്ങനെ തുടരുമല്ലോ. അപ്പോൾ $2 + \sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ, ഇവയോടെല്ലാം 2 കൂട്ടിയതാണ്; അതായത്, 3.4, 3.41, 3.414, ... എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകൾ.

ഈ കണക്കിൽ, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായ അളവ് മതിയെന്നു തീരുമാനിച്ചാൽ ചുറ്റളവ് 3.41 മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം. ഇനി അതല്ല, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമാകണമെന്നുണ്ടെങ്കിൽ 3.414 മീറ്റർ എന്നെടുക്കണം.



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം പാദമാക്കി ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടാക്കിയാലോ?

ഇതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നു കണ്ടല്ലോ.



ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ് $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നെഴുതാം.

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ, ഇവ ഓരോന്നിനോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി കൂട്ടണം:

$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414
$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	:	3.1	3.14	3.146

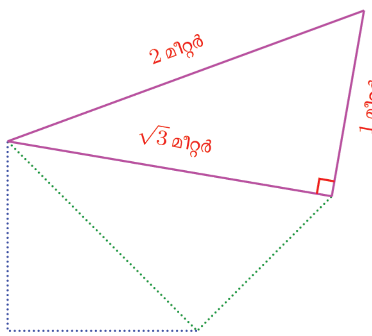
ഇവയോട് 1 കൂട്ടിയാൽ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയുടെ ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും.

അപ്പോൾ പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി 4.146 മീറ്റർ.

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്? ഏകദേശം $4.146 - 3.414 = 0.732$ മീറ്റർ എന്നു പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{3}-2 = \sqrt{3}-1 \approx 0.732$$

ഇനി ഈ ത്രികോണത്തിന്റെയും മുകളിൽ ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണം വരച്ചാലോ? അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?



ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ്, രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $2+1+\sqrt{3} = 3+\sqrt{3}$ മീറ്റർ. ഇതിനോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാതെതന്നെ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണെന്ന് നോക്കാം.

രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ മീറ്റർ ആണല്ലോ; അപ്പോൾ ചുറ്റളവിലെ വ്യത്യാസം

$$(3+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2-\sqrt{2}$$

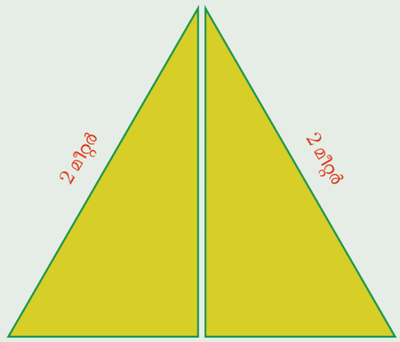
ഇത് മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കൃത്യമായി

$$2 - 1.414 = 0.586$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. അതായത്, ഏകദേശം 586 മില്ലിമീറ്റർ (അഥവാ 58.6 സെന്റിമീറ്റർ) കൂടുതലാണ്.

(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററും, മറ്റൊരു വശം $\frac{1}{2}$ മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ്, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.

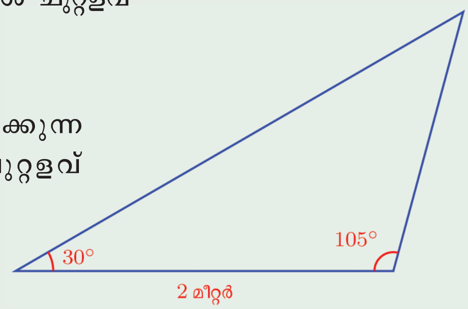
(2) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിനെ ഒരു മൂലയിലൂടെ മുറിച്ച് രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



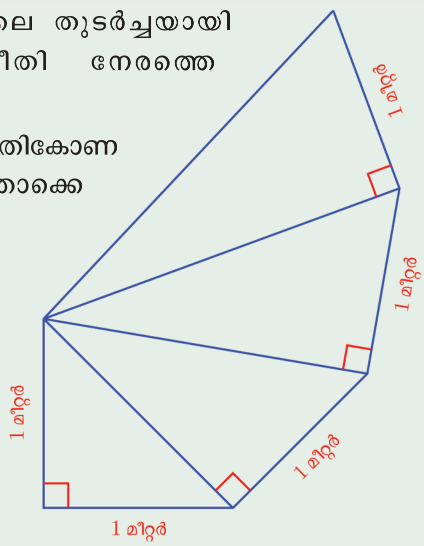
i) ഇവയിലൊന്നിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്? (കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യം നോക്കുക)

ii) മുഴുവൻ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കുറഞ്ഞു?

(3) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.



(4) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തുടർച്ചയായി മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്ന രീതി നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.



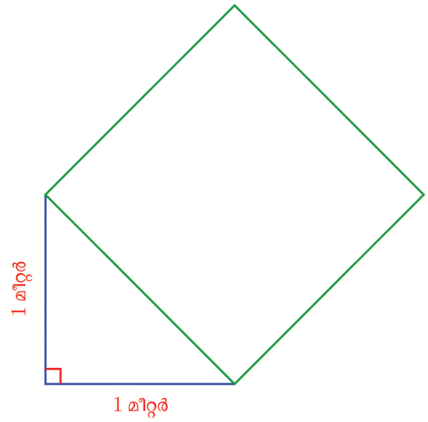
i) ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ്?

ii) പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന് ഒമ്പതാമത്തെ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണ്?

iii) ബീജഗണിതഭാഷയിൽ, n-ാം ത്രികോണത്തിന്റെയും, അതിനു തൊട്ടു മുമ്പുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെയും ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എങ്ങനെ എഴുതാം?

(5) ലംബവശങ്ങൾ $\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്ററും, $\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്ററും ആയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം എത്രയാണ്? ലംബവശങ്ങളുടെ തുക കർണത്തെക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

ഗുണനം



തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രം പല തവണ കണ്ടുകഴിഞ്ഞല്ലോ, ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?

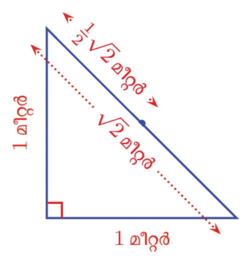
അതിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണെന്നറിയാം, അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ ഇതിന്റെ നാലു മടങ്ങ് കണക്കാക്കിയാൽ മതി.

മറ്റു സംഖ്യകളിലെന്നപോലെ $\sqrt{2}$ന്റെ 4 മടങ്ങിനെയും $4 \times \sqrt{2}$ എന്നെഴുതാം. ഇതു സാധാരണയായി ഗുണനചിഹ്നം ഇല്ലാതെ, $4\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ഈ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ നാലു മടങ്ങ് എടുക്കണം.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായെടുത്താൽ,

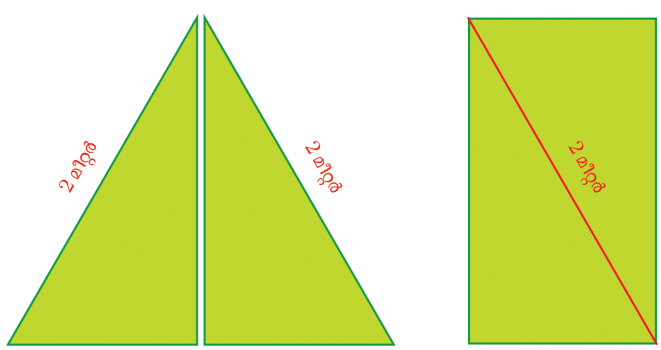
$$4 \times 1.414 = 5.656 \text{ മീറ്റർ}$$



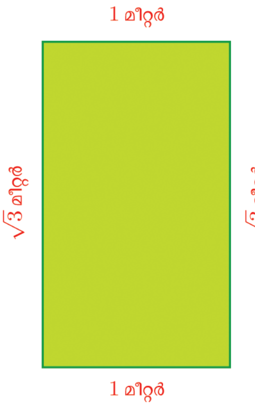
ഇതുപോലെ $\sqrt{2}$ന്റെ പകുതിയെ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ പകുതി എടുത്താൽ, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും. അതായത്, $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071 \ldots$

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:



ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തെ തുല്യമായ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളായി മുറിച്ച്, മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ചതുരമാക്കിയിരിക്കുന്നു.



ഈ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?

മട്ടത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഓരോന്നിന്റെയും പാദം 1 മീറ്ററാണ്; ഉയരം $\sqrt{3}$ മീറ്ററാണെന്ന് മുമ്പൊരു കണക്കിൽ കണ്ടിട്ടുമുണ്ട്.

അപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് $2\sqrt{3}+2$ മീറ്റർ

ഈ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$\sqrt{3}$: 1.7 1.73 1.732 . . .

$2\sqrt{3}$: 3.4 3.46 3.464 . . .

$2\sqrt{3}+2$: 5.4 5.46 5.464 . . .

മറ്റു സംഖ്യകളിലേതുപോലെ ഇവിടെയും $2\sqrt{3}+2$ ഉം $2(\sqrt{3}+1)$ ഉം ഒന്നു തന്നെയാണോ? രണ്ടാമത് പറഞ്ഞ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്ന സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$\sqrt{3}$: 1.7 1.73 1.732 . . .

$\sqrt{3}+1$: 2.7 2.73 2.732 . . .

$2(\sqrt{3}+1)$: 5.4 5.46 5.464 . . .

അതായത്, $2\sqrt{3}+2$ എന്ന സംഖ്യയോടും $2(\sqrt{3}+1)$ എന്ന സംഖ്യയോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഒന്നുതന്നെയാണ്: അപ്പോൾ

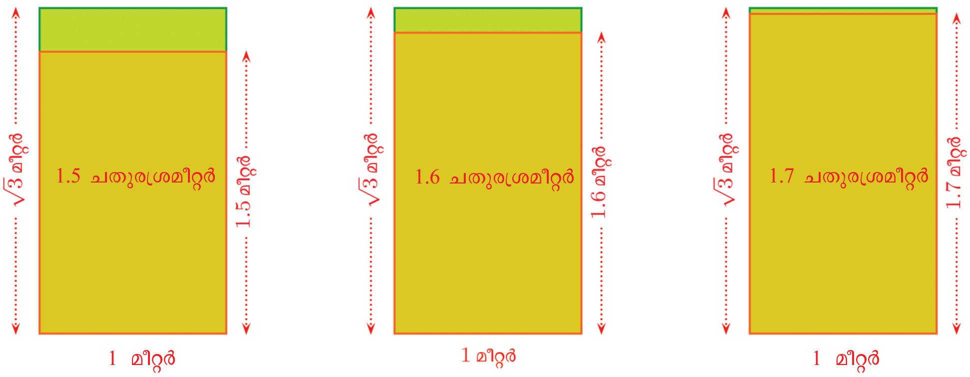
$$2\sqrt{3}+2 = 2(\sqrt{3}+1)$$

ഇനി മുകളിലെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്ന് നോക്കാം.

വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ ഗുണനഫലമാണ് പരപ്പളവ്.

ഇവിടെയും പരപ്പളവ്, വശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായ $1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണോ?

ഇതുകാണാൻ, മുമ്പൊരിക്കൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഒരു വശം 1 മീറ്ററും മറ്റേ വശം $\sqrt{3}$ മീറ്ററിനോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യാനീളങ്ങളും ആയ ചതുരങ്ങൾ ഇതിനുള്ളിൽ വരച്ചു നോക്കാം:



തുടർന്ന് അകത്തെ ചതുരങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ 1.73, 1.732,. . .എന്നിങ്ങനെ മീറ്റർ ആയി എടുക്കുമ്പോൾ അവയുടെ പരപ്പളവുകളും ഇതേ സംഖ്യകൾ ചതുരശ്രമീറ്ററിലായി കിട്ടും.

അതായത്, വശങ്ങളുടെ നീളം $\sqrt{3}$മീറ്ററും 1 മീറ്ററുമായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്റർതന്നെയാണ്.

ഇനി ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ എന്നായാലോ? ഈ പരപ്പളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ്. ഇതിനെ സംഖ്യാപരമായി വിശദീകരിക്കാൻ, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ എന്നിവയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി ഗുണിച്ച് വേണ്ടത്ര ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ എടുക്കണം.

$\sqrt{3}$	:	1.7	1.73	1.732	1.7320	1.73205 . . .
$\sqrt{2}$	:	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421 . . .
$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$	:	2.4	2.44	2.449	2.4494	2.44948 . . .

$$\sqrt{3}\times\sqrt{2} = 2.44948\ .\ .\ .$$

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യമുണ്ട് 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, 1.4142^2, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ($\sqrt{2} = 1.41421\ .\ .\ .$ എന്നെഴുതുന്നതിന്റെ അർഥംതന്നെ ഇതല്ലേ?) 1.7^2, 1.73^2,1.732^2, 1.7320^2, 1.73205^2,. . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന വർഗങ്ങൾ 3 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നും കണ്ടു.

അപ്പോൾ ഈ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം 6 നോട് അടുത്തടുത്തു വരണമല്ലോ?

മാത്രവുമല്ല, ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമായതിനാൽ

ദശാംശക്കണക്ക്

ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനം വരെ ചുരുക്കിയെഴുതുമ്പോൾ, അടുത്ത സ്ഥാനത്തെ അക്കം അഞ്ചോ, അഞ്ചിൽ ക്കൂടുതലോ ആണെങ്കിൽ, നമുക്കു വേണ്ട സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയാണ് എടുക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $1.7 \times 1.4 = 2.38$ ആയതിനാൽ, ഈ ഗുണനഫലത്തെ ഒരു ദശാംശസ്ഥാനത്തേക്ക് ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് 2.4 എന്നാണ്.

$$1.7^2 \times 1.4^2 = (1.7 \times 1.4)^2$$

$$1.73^2 \times 1.41^2 = (1.73 \times 1.41)^2$$

$$1.732^2 \times 1.414^2 = (1.732 \times 1.414)^2$$

എന്നെല്ലാം കാണാം. ഇതിലെ 1.7×1.4, 1.73×1.41 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഗുണനഫലങ്ങൾ പട്ടികയിലെ അവസാന വരിയിൽ കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അപ്പോൾ 2 നോടും, 3 നോടും, 6 നോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

3	:	1.7^2	1.73^2	1.732^2	1.7320^2	1.73205^2 . . .
2	:	1.4^2	1.41^2	1.414^2	1.4142^2	1.41421^2 . . .
6	:	2.4^2	2.44^2	2.449^2	2.4494^2	2.44948^2 . . .

ഇതിലെ അവസാനവരിയിൽ എന്താണ് കാണുന്നത്?

2.4, 2.44, 2.449, 2.4494, 2.44948, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 6 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

പുതിയ സംഖ്യകളുടെ നിർവചനമനുസരിച്ച്, ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\sqrt{6} = 2.44948\ldots$$

$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് നേരത്തേ കണ്ടു. അപ്പോൾ

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

2 നും 3 നും പകരം മറ്റു സംഖ്യകളെടുത്താലും, ഇതുപോലെതന്നെ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലമാണെന്നു കാണാം (വർഗമൂലങ്ങൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആണെങ്കിൽ ഇതു ശരിയാണെന്ന് എഴാംക്ലാസിൽതന്നെ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.)

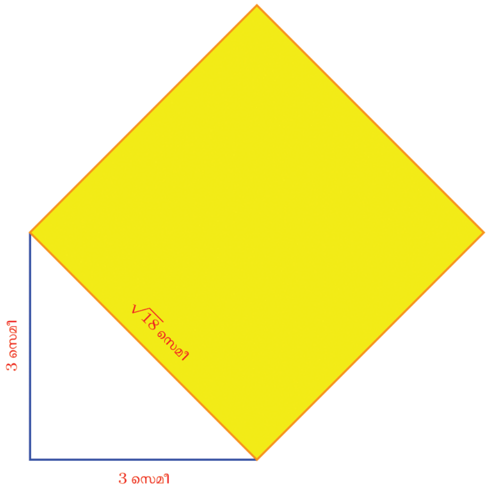
***x, y* എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$**

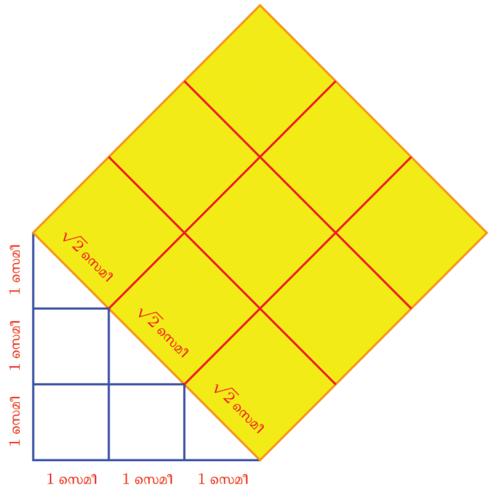
വർഗമൂലങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ചെഴുതാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ലംബവശങ്ങൾ രണ്ടും 3 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളം നോക്കാം. പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, ഈ കർണം വശമായ സമചതുരത്തിന്റ പരപ്പളവ് $3^2 + 3^2 = 18$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ കർണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{18}$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി 18 നെ 9×2 എന്നെഴുതിയാൽ ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

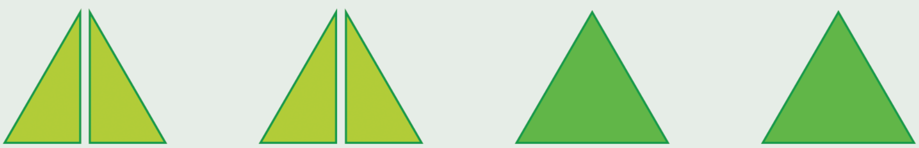
$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

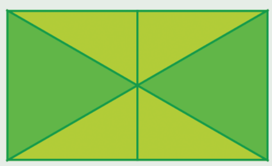
ഇക്കാര്യം ജ്യാമിതീയമായും കാണാം.





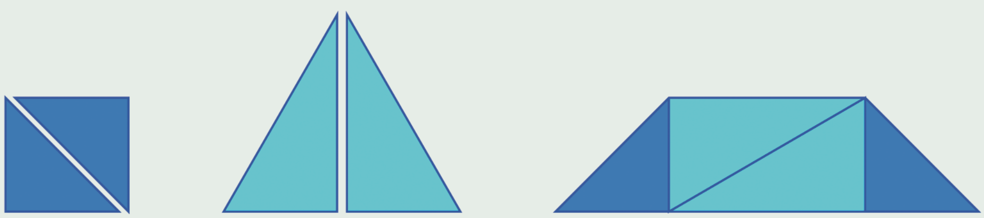
(1) ഒരേ വലുപ്പമുള്ള നാലു സമഭുജത്രികോണങ്ങളിൽ രണ്ടെണ്ണം നെടുകെ മുറിച്ചതും, രണ്ടെണ്ണം മുഴുവനായും ചേർത്തുവച്ച് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കി.





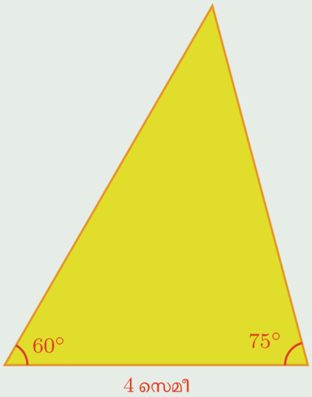
സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, പരപ്പളവും എത്രയാണ്?

(2) ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് നീളമുള്ള വശങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു സമഭുജത്രികോണവും ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ മുറിച്ചു മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ലംബകമുണ്ടാക്കുന്നു.



സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ലംബകത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും എത്രയാണ്?

(3) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.



(4) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിൽ ഗുണനഫലം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $\sqrt{3}, \sqrt{12}$ ii) $\sqrt{3}, \sqrt{1.2}$ iii) $\sqrt{5}, \sqrt{8}$

iv) $\sqrt{0.5}, \sqrt{8}$ v) $\sqrt{7\frac{1}{2}}, \sqrt{3\frac{1}{3}}$

ഹരണം

$2 \times 3 = 6$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{6}{2} = 3$ എന്നോ, $\frac{6}{3} = 2$ എന്നോ ഹരണമായും എഴുതാമല്ലോ. ഇതുപോലെ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ എന്ന ഗുണനത്തെയും ഹരണമായി എഴുതാം.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയ ഏത് x, y എടുത്താലും $x \times y = z$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{z}{x} = y$ എന്നും $\frac{z}{y} = x$ എന്നും ഹരണമായി എഴുതാം.

ഇതുപോലെ,

x, y എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും,

$$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{z}$$

എന്ന ഗുണനത്തെ ഹരണമായി

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y} \quad , \quad \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$ **എന്നെഴുതാം.**

ഇനി $\frac{6}{2} = 3$ ഉം, $\frac{6}{3} = 2$ ഉം ആയതിനാൽ

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3} \qquad \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

എന്നും കാണാം. നേരത്തെ കണ്ടതെന്താണ്?

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ഈ രണ്ടു ജോടി സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}}$$

എന്നെല്ലാം കാണാം;

ഇതുപോലെ $3 \times \frac{2}{3} = 2$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

എന്നും തുടർന്ന് ഈ ഗുണനത്തെ ഹരണമായി

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ എന്നും എഴുതാം

ഇനി ഇത്തരം വർഗമൂലങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ഉദാഹരണമായി $\sqrt{\frac{1}{2}}$ കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

എന്നെഴുതാം, തുടർന്ന് $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഏതെങ്കിലും ദശാംശസംഖ്യകൊണ്ട് ഒന്നിനെ ഹരിച്ച് $\frac{1}{\sqrt{2}}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപം കണക്കാക്കാം.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1.414} = 0.707$$ (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ചോളൂ.)

മറ്റൊരു എളുപ്പവഴിയുണ്ട്: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ആയതിനാൽ ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാം.

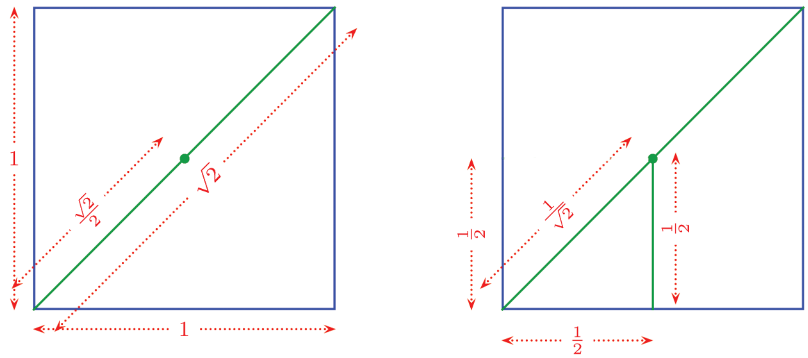
$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ഇനി

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707$$ (ഇതിന് കാൽക്കുലേറ്റർ വേണ്ടല്ലോ?)

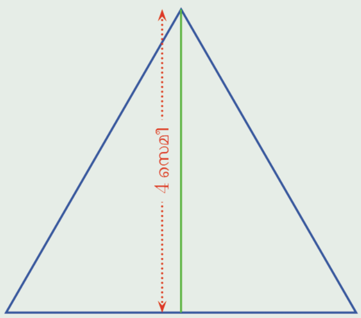
എന്നു എളുപ്പത്തിൽ കാണാമല്ലോ.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ എന്നത്, ജ്യാമിതീയമായും കാണാം



ഇതുപോലെ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ഉം കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

(1) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.



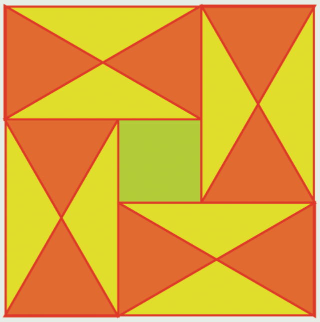
(2) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ എന്നു തെളിയിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച്, $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(4) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ ലഘൂകരിച്ചെഴുതുക. അതുപയോഗിച്ച് $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ഇവ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(5) $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ എന്നും $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ എന്നും തെളിയിക്കുക. ഇതുപോലുള്ള മറ്റു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

(6) ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളെല്ലാം സമഭുജമാണ്.



പുറത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും, അകത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

അനുബന്ധം

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നു തെളിയിക്കാൻ അത്തരം ഭിന്നസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ശ്രമം വിജയിക്കില്ല എന്നു സമർഥിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയ്ക്കും പല രൂപങ്ങളുണ്ടല്ലോ, അംശത്തിനും ഛേദത്തിനും പൊതുവായ ഘടകങ്ങളില്ലാത്ത ഏറ്റവും ലളിതമായ ലഘുരൂപവുമുണ്ട്. വർഗം 2 ആയ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ അത്തരമൊരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ലഘുരൂപത്തിന്റെ അംശവും ഛേദവും എങ്ങനെയായിരിക്കണമെന്നു നോക്കാം. അവ p, q എന്നെടുത്താൽ $\frac{p^2}{q^2} = 2$ ആകണം, p, q ഇവയ്ക്ക് പൊതുവായി ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടാകാനും പാടില്ല.

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

എന്നതിനെ

$$p^2 = 2q^2$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ p^2 ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാകണം ($2q^2$ ഇരട്ടസംഖ്യയാണല്ലോ). ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗം ഒറ്റസംഖ്യകളും (ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗം ഇരട്ടസംഖ്യകളും) ആയതിനാൽ, p തന്നെ ഇരട്ടസംഖ്യയാകണം. ഇനി, p, q ഇവയ്ക്ക് പൊതുഘടകമൊന്നും ഇല്ലാത്തതിനാൽ q ഒറ്റ സംഖ്യയാകണം

p ഇരട്ടസംഖ്യ ആയതിനാൽ അതിനെ $2k$ എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ $p^2 = 2q^2$ എന്ന സമവാക്യം $4k^2 = 2q^2$ എന്നാകും. ഇതിൽ

$$q^2 = 2k^2$$

എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ q^2 ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. p യുടെ കാര്യത്തിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ, ഇതിൽ നിന്ന് q തന്നെ ഇരട്ടസംഖ്യയാണെന്നും വരും.

ആദ്യം കണ്ടത് q ഒറ്റ സംഖ്യയാണെന്നല്ലേ? അപ്പോൾ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 2 ആകണമെങ്കിൽ അതിന്റെ ലഘുരൂപത്തിൽ ഛേദം ഒറ്റസംഖ്യയും ഇരട്ടസംഖ്യയും ആകണം. ഇതു സാധ്യമല്ലല്ലോ. അതായത് വർഗം 2 ആയ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയും ഇല്ല.

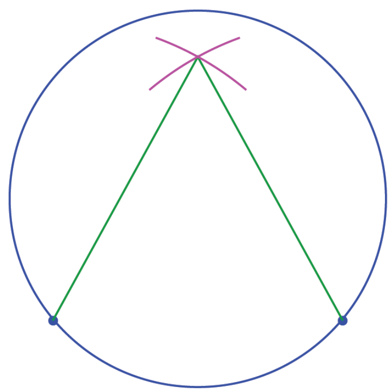
വൃത്തങ്ങൾ

വൃത്തങ്ങളും വരകളും

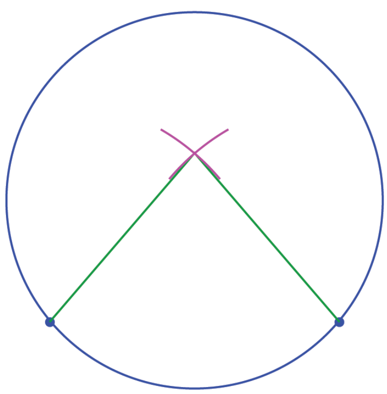
വളയോ ചെറിയൊരു വട്ടപ്പാത്രത്തിന്റെ അടപ്പോ, നോട്ടുബുക്കിൽവച്ചൊരു വട്ടം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ കേന്ദ്രമെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

വൃത്തത്തിലെ ഏതു സ്ഥാനത്തുനിന്നും കേന്ദ്രത്തിലേക്ക് ഒരേ അകലമാണ്.

അപ്പോൾ ഈ വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ അവ രണ്ടിൽനിന്നും ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് കേന്ദ്രം. എങ്ങനെയാണ് അത്തരമൊരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക?



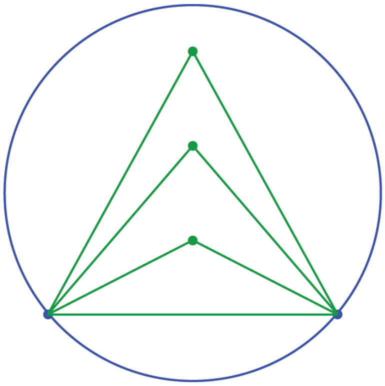
ഇത് കേന്ദ്രത്തിനു മേലേയായി, അകലമൽപ്പം കുറച്ചെടുത്താലോ?



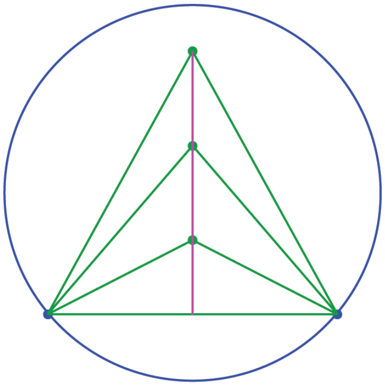
ഇപ്പോഴുമത്ര ശരിയായില്ല. ഇങ്ങനെ തെറ്റിയും തിരുത്തിയും വരച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതിനു പകരം, പ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ച് അൽപമൊന്ന് ആലോചിക്കാം.

വൃത്തത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിൽ അനേകം ബിന്ദുക്കളുണ്ട്. അവയിലേതാണ് കേന്ദ്രമെന്ന് മുൻകൂട്ടി നിശ്ചയിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ആ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര പാദമായ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാം മൂലകളല്ലേ?



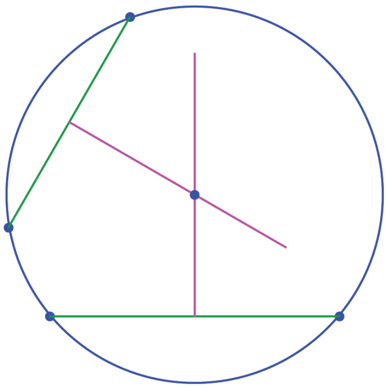
ഇങ്ങനെയുള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം, പാദത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയിലാണെന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ട്; (എട്ടാംക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം)



അപ്പോൾ നമ്മളന്വേഷിക്കുന്ന വൃത്തകേന്ദ്രം, വൃത്തത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലാണെന്നു കിട്ടി.

അതുകൊണ്ടായില്ലല്ലോ; ഈ വരയിലെ വിടെയാണ് കേന്ദ്രമെന്നറിയണ്ടേ?

വൃത്തത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലുമായിരിക്കണം കേന്ദ്രം; രണ്ടു വരകളിലും ആകണമെന്നതിനാൽ, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുതന്നെ കേന്ദ്രം:



ജോലി കഴിഞ്ഞു; ഇനി അതിൽനിന്നറിഞ്ഞത് ഓർത്തുവയ്ക്കാം.

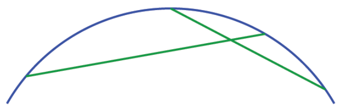
വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെയും ലംബസമഭാജി, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.

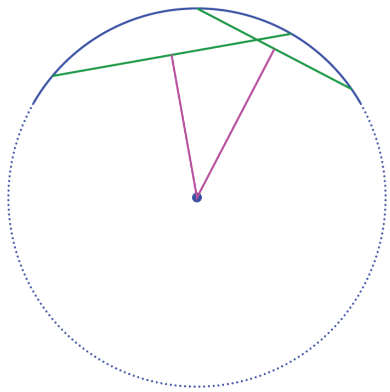
“വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര” എന്നു നീട്ടിപ്പറയുന്നതിനു പകരം, അത്തരം വരകൾക്കെല്ലാം ഒരു പേരു കൊടുക്കാറുണ്ട്.

(ഏറെ ആലോചിക്കുകയും, അവസാനമെല്ലാം ചുരുക്കിപ്പറയുകയുമാണല്ലോ കണക്കിന്റെ രീതി). വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഒരു വരയെ പൊതുവായി **ഞാൺ (chord)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ നേരത്തെ പറഞ്ഞ തത്വം ഇങ്ങനെയാക്കാം.

വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും ലംബസമഭാജി, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.

ഇനി വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം മാത്രം (ഉദാഹരണമായി, ഒരു വളക്കഷണം) കിട്ടിയാലും, ഇതുപോലെ വൃത്തകേന്ദ്രവും അതുവഴി മുഴുവൻ വൃത്തവും കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. ഈ കഷണത്തിൽ രണ്ടു ഞാണുകൾ വരച്ച്, അവയുടെ ലംബസമഭാജികൾ വരച്ചാൽപ്പോരേ?



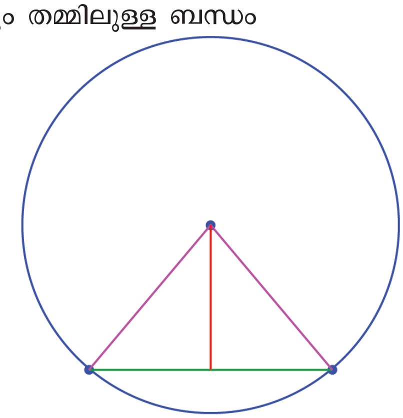


ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ഒരു ഞാൺ വരച്ച് അതിന്റെ ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കുക. ഈ വര കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നില്ലേ? ഞാണിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങളും വൃത്തകേന്ദ്രവും ചേർന്നൊരു സമപാർശ്വത്രികോണമാകും എന്നതിൽനിന്നാണ് മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ തത്വത്തിലെത്തിയത്.

സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ പാദവും മൂന്നാം മൂലയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പലതരത്തിൽപ്പറയാമെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടു:

- മൂന്നാംമൂലയിൽനിന്നുള്ള ലംബം, പാദത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.
- മൂന്നാംമൂലയും പാദത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, പാദത്തിനു ലംബമാണ്.
- പാദത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയിലാണ് മൂന്നാംമൂല.

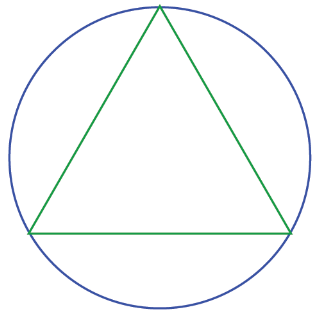


ഇതിൽ അവസാനം പറഞ്ഞതിൽ പാദം വൃത്തത്തിലെ ഞാണും, മൂന്നാംമൂല വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി എടുത്തതാണ് നമ്മുടെ വൃത്തതത്വം. ഇതുപോലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു ത്രികോണതത്വങ്ങളും വൃത്തതത്വങ്ങളായി മാറ്റിയെഴുതാമല്ലോ.

വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബം, ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.

വൃത്തകേന്ദ്രവും ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ഞാണിനു ലംബമാണ്.

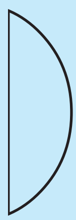
മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, അതിനുള്ളിലൊരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കണം; ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കണം.



ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഒരേ നീളമുള്ള മൂന്നു ഞാണുകൾ, ഓരോ ജോടിയും വൃത്തത്തിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതരത്തിൽ വരച്ചാൽമതി.

ഞാണും ചരടും

ഒരു വില്ലിന്റെ അറ്റങ്ങൾ തമ്മിൽ വലിച്ചു കെട്ടുന്ന ചരടിനെയാണ് സാധാരണയായി “ഞാൺ” എന്നു പറയുന്നത്. ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തഭാഗവും വരയും നോക്കിയാൽ ഏതാണ്ട് ഒരു വില്ലുപോലെ തോന്നുമല്ലോ.



വൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ എന്നത് ഈ വില്ലിലെ ചരടിന്റെ സ്ഥാനത്താണുതാനും.

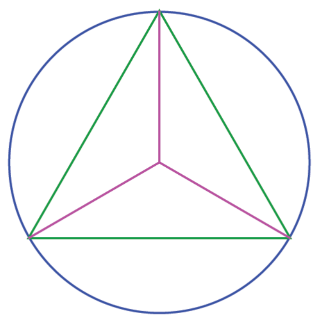
സംസ്കൃതത്തിലെ “ജ്യാ” എന്ന വാക്കിൽ നിന്നാണ് “ഞാൺ” എന്ന മലയാള വാക്കുണ്ടായത്. പ്രാചീന ഭാരതത്തിലെ ഗണിതശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ “ജ്യാ” എന്ന സംസ്കൃത പദമാണ് ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഇംഗ്ലീഷിലെ Chord എന്ന വാക്ക്, ലാറ്റിൻ ഭാഷയിലെ Chorda എന്ന വാക്കിൽ നിന്നാണ് വന്നത്. കയറ് എന്നാണിതിന്റെ അർത്ഥം. ചരട് എന്നതിന് ഇപ്പോൾ ഇംഗ്ലീഷിൽ Cord എന്ന വാക്കാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

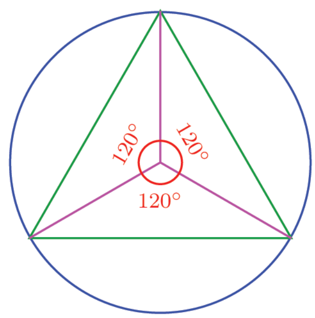
ഒരേ നീളത്തിൽ രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വരയ്ക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. പക്ഷേ, ഇവയുടെ മറ്റേ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണിന് ഈ നീളമാകണമെന്നില്ലല്ലോ.

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ഞാൺതന്നെ ആലോചിച്ചു വരയ്ക്കണം. സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശമായ ഞാണിന്റെ സവിശേഷത എന്താണെന്നു നോക്കാം.

ഇത്തരമൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ വൃത്തകേന്ദ്രമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന കോണുകളുടെ അളവെന്താണ്?

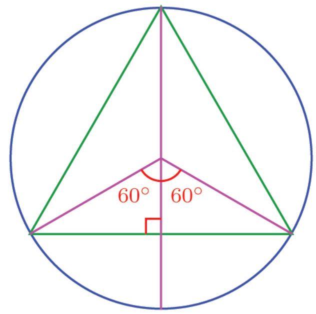


സമഭുജത്രികോണത്തിനകത്തുള്ള മൂന്നു ചെറുത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേപോലെയല്ലേ? അതുകൊണ്ട് അവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ എന്താണ്?

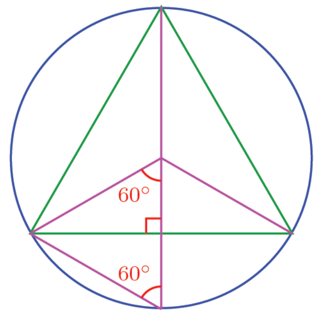


Downloaded from https:// www.studiestoday.com

അതായത് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ, 120° ഇടവിട്ട് മൂന്ന് ആരങ്ങൾ വരച്ചാൽ, അവയുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച് സമഭുജത്രികോണമാക്കാം.



കോണുകളൊന്നും വരയ്ക്കാതെ ഇതു ചെയ്യാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. അത് കാണാൻ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു ലംബമായ ആരം വരയ്ക്കുക. ഇത് ആ വശത്തിനെയും, അതിനെതിരെയുള്ള കോണിനെയും സമഭാഗം ചെയ്യുമല്ലോ (കാരണം?).



ഇനി ഈ ആരവും ലംബമായ വശത്തിന്റെ അറ്റവും യോജിപ്പിച്ചാലോ? ചെറിയൊരു സമഭുജത്രികോണം കിട്ടില്ലേ? (അതെങ്ങനെ?):

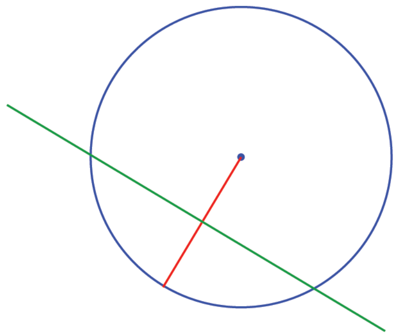
വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം, ഈ ചെറിയ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്ന് എതിർവശത്തേക്കുള്ള ലംബമാണ്; അതിനാൽ അത്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഈ വശത്തിനെ സമഭാഗം ചെയ്യും.

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

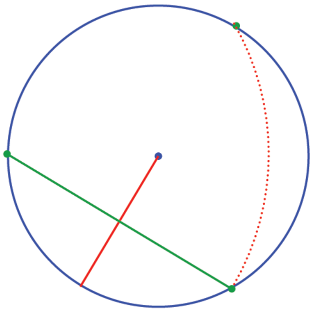
വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശവും, അതിനു ലംബമായ ആരത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യും; അഥവാ, ഈ ആരത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയാണ്.

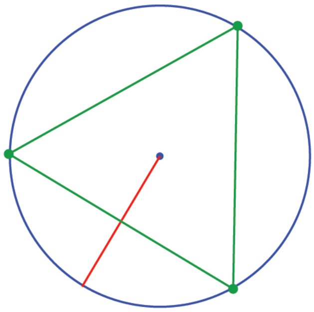
വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ ഒരു എളുപ്പവഴി ആയില്ലേ?

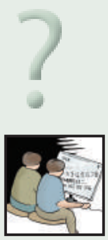
വൃത്തത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ആരത്തിന് ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കുക.



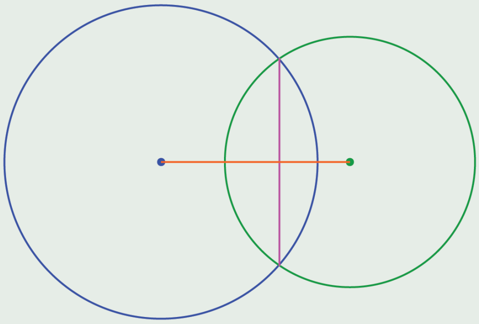
ഈ വര വൃത്തത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന ഞാണാണ്, സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം. ഇതിന്റെ ഒരറ്റത്തുനിന്ന്, മറ്റേ അറ്റത്തിന്റെ അകലത്തിൽത്തന്നെ ഒരു ബിന്ദു കൂടി വൃത്തത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ മൂന്നാം മൂലയുമായി.







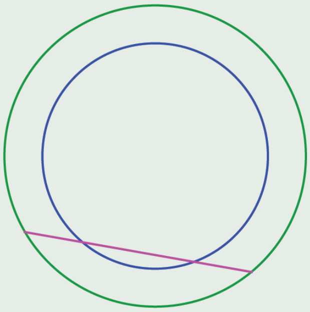
(1) രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



ഒരേ കേന്ദ്രമുള്ള രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ പുറമെയുള്ള വൃത്തത്തിന് AB എന്ന ഒരു ഞാൺ വരയ്ക്കുക. ഈ വര അകത്തെ വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ C, D ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. AC, DB എന്നീ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ നീളങ്ങൾ തുല്യമാണോ? A, B ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

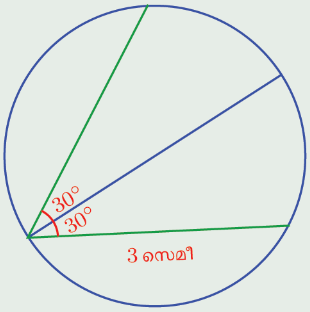
(2) ഒരേ കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളും, ഒരു വരയുമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്;

വരയുടെ ഇരുഭാഗത്തും, വൃത്തങ്ങൾക്കിടയിലെ ഭാഗങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

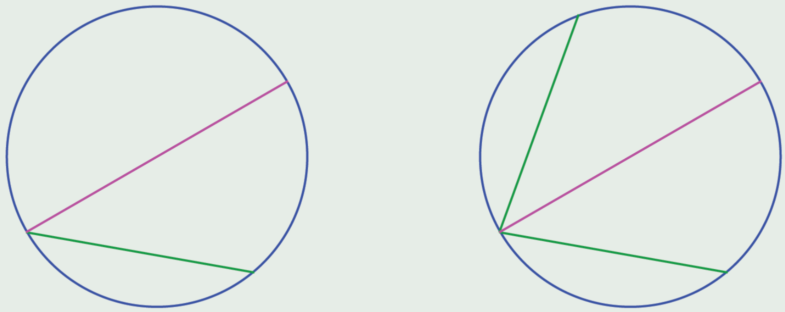


(3) ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ ഇരുവശത്തുമായി രണ്ടു ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ ഞാണിന്റെ നീളം എന്താണ്?



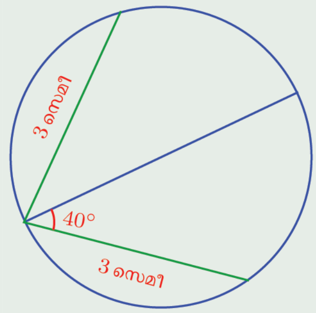
(4) വൃത്തത്തിൽ ഒരു ഞാണും, അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുകൂടി ഒരു വ്യാസവും വരയ്ക്കുന്നു. വ്യാസത്തിന്റെ മറുഭാഗത്ത്, ഇതേ ചരിവിൽ മറ്റൊരു ഞാണും വരയ്ക്കുന്നു.



ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

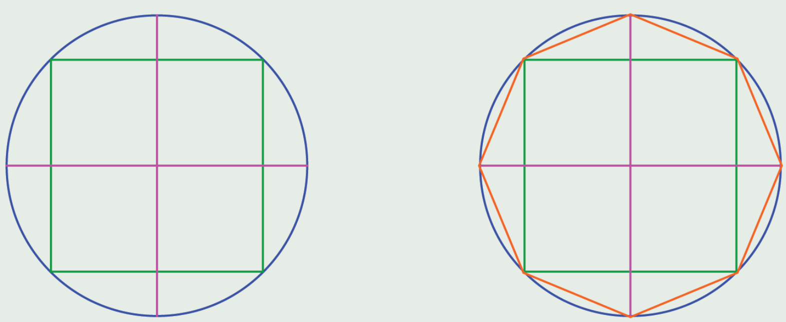
(5) ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന് മുകളിലും താഴെയുമായി രണ്ടു ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

മുകളിലെ ഞാൺ വ്യാസവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ എന്താണ്?



(6) വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു വരയ്ക്കുന്ന ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകൾ ചേരുന്ന കോണിനെ, ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

(7) ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിലൂടെയുള്ള വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ വ്യാസങ്ങൾ വൃത്തത്തെ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളും, സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക.

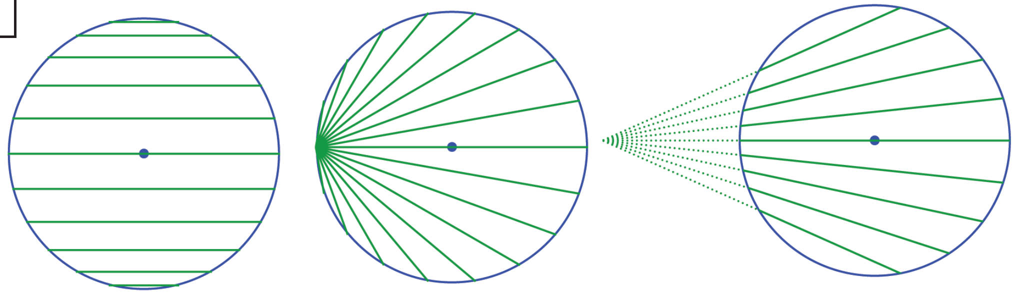


ഇതൊരു സമഅഷ്ടഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക

തുല്യഞാണുകൾ

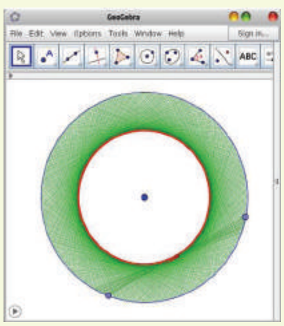
വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഞാണുകളാണ് വ്യാസങ്ങൾ, ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏറ്റവും നീളംകൂടിയ ഞാണുകളും വ്യാസങ്ങൾതന്നെ.

കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും അകലുംതോറും, ഞാണിന്റെ നീളം കുറഞ്ഞുവരും:

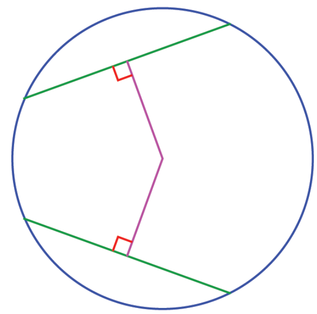


നിരങ്ങിനീങ്ങിയാലും കറങ്ങിനീങ്ങിയാലും, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണുന്നില്ലേ?

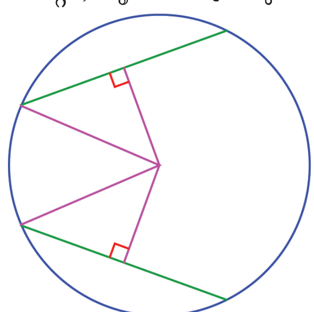
ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ഒരു ഞാൺ വരയ്ക്കുക. ഈ ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി Trace On നൽകുക. ഞാണിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾക്ക് Animation നൽകി നോക്കൂ. ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത എന്താണ്? എന്തുകൊണ്ടാണിങ്ങനെ? ഞാണിന് Trace On നൽകി നോക്കൂ. ഞാണിന് നിറം നൽകി ചിത്രം മനോഹരമാക്കുകയുമാവാം.



ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ ലംബദൂരത്തിലുള്ള രണ്ടു ഞാണുകൾ. ഇവയ്ക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണിക്കാൻ, ഓരോന്നിന്റെയും ഒരറ്റം, വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുക.



ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ കർണങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങളാകയാൽ തുല്യമാണ്; ഒരു ജോടി ലംബവശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുമുണ്ട്. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് തത്വമനുസരിച്ച്, മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

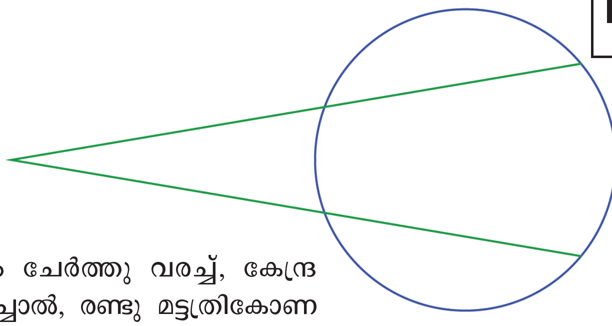
കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബം മുറിച്ച കഷണങ്ങളായതിനാൽ, ഈ മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങൾ ഞാണുകളുടെ പകുതിയാണ്, അങ്ങനെ ഞാണുകളുടെ പകുതികൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാം; ഞാണുകളും.

6VFCXT

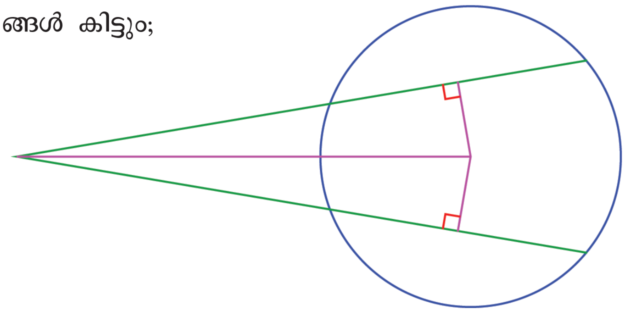
വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

മറിച്ച്, ഞാണുകൾ തുല്യമാണ് എന്നെടുത്തു തുടങ്ങിയാൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കാമോ? ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ.

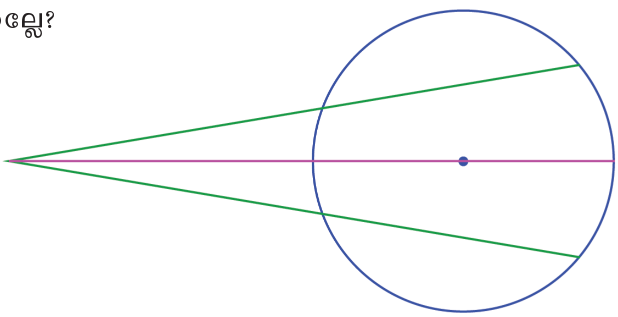
ഇതുപയോഗിച്ചൊരു കണക്കുനോക്കാം. വലതുവശത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ടു ഞാണുകൾ നീട്ടി, വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ മുട്ടിക്കുന്നു.



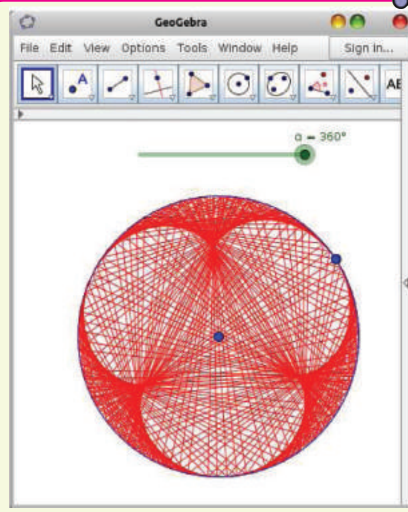
ഈ ബിന്ദുവും, വൃത്തകേന്ദ്രവും ചേർത്തു വരച്ച്, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബങ്ങളും വരച്ചാൽ, രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും;



രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെയും കർണം ഒരേ വരയാണ്. ഞാണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള അകലങ്ങളും തുല്യമാണ്. അങ്ങനെ ത്രികോണങ്ങളുടെ ഒരു ജോടി ലംബവശങ്ങളും തുല്യമായി. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഇവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണ്; അതായത്, വൃത്തകേന്ദ്രവും, ഞാണുകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, നീട്ടിവരച്ച ഞാണുകൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയാണ്. ഈ വര വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസം നീട്ടിയതല്ലേ?



വൃത്തത്തിൽത്തന്നെ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകൾ ചേരുന്ന കോണിനെ, ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്ന് നേരത്തെ ഒരു കണക്കിൽ കണ്ടല്ലോ. കൂട്ടിമുട്ടുന്നത് വൃത്തത്തിനു പുറത്താണെങ്കിലും ഇത് ശരിയാണെന്ന് ഇപ്പോൾ കണ്ടു.



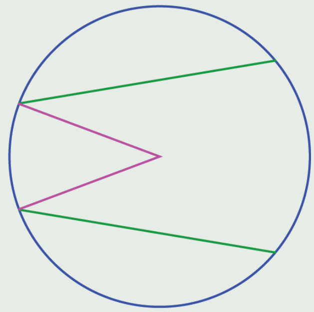
ഇത്തരം ചിത്രങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. A കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ B എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഒരു Angle slider α നിർമിക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ α എന്ന് നൽകുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. ഇതുപോലെ $\angle B'AB'' = \alpha$ വരത്തക്കവിധം മറ്റൊരു ബിന്ദു B'' വൃത്തത്തിൽ നിർമിക്കുക. B', B'' എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാൺ വരച്ച് Trace On നൽകുക. സ്ലൈഡറിന് Animation നൽകി നോക്കൂ. $\angle B'AB'' = \alpha$ എന്നതിന് പകരം 2α, 3α, 4α, ... എന്നിങ്ങനെ നൽകി നോക്കൂ. 3α എന്ന് നൽകുമ്പോഴുള്ള ചിത്രമാണ് മുകളിൽ.

(1) വൃത്തത്തിലെ ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകളെല്ലാം കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(2) വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ടു ഞാണുകൾക്കിടയിലുള്ള കോണിനെ ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു. ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

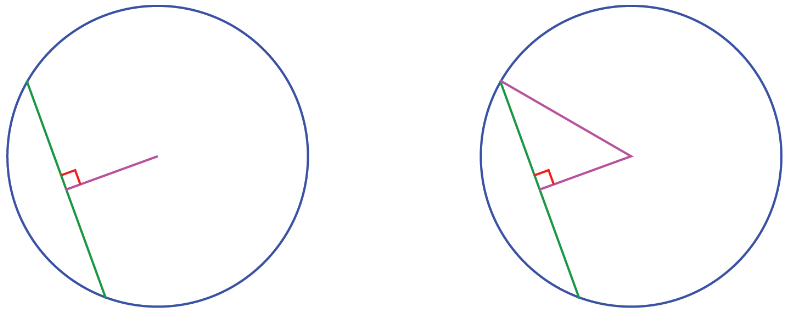
(3) ചിത്രത്തിൽ, ആരങ്ങളും ഞാണുകളും തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ തുല്യമാണ്.

ഞാണുകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



ഞാണുകളുടെ നീളം

കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള അകലമാണ്, ഞാണുകളുടെ നീളം നിശ്ചയിക്കുന്നതെന്നു കണ്ടല്ലോ. അതിന്റെ കണക്കെന്താണെന്നു നോക്കാം.



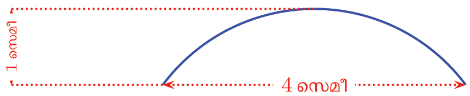
മുകളിലെ ഇടത്തെ ചിത്രത്തിൽ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണും, അതിലേയ്ക്ക് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബവും ആണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്; വലത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ഞാണിന്റെ ഒരറ്റം വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ച് ഒരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടാക്കിയതും.

ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും, ഒരു ലംബവശം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബവും, മൂന്നാമത്തെ വശം ഞാണിന്റെ പകുതിയുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് തത്വമുപയോഗിച്ച്, ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം കണക്കാക്കാം;

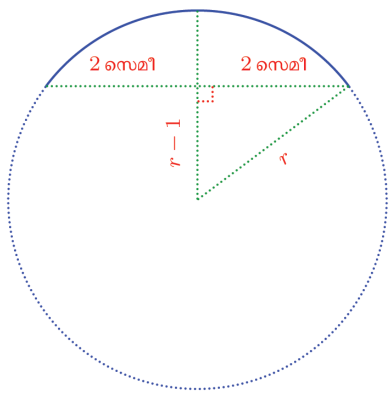
വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും പകുതിയുടെ വർഗം, ആരത്തിന്റെയും കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നു ഞാണിലേയ്ക്കുള്ള ലംബദൂരത്തിന്റെയും വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് (ലംബമായി) 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗം $4^2 - 3^2 = 7$; അപ്പോൾ ഞാണിന്റെ നീളം $2\sqrt{7}$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി ഈ കണക്കുനോക്കൂ: ഒരു വളക്കഷണത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 4 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം, 1 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്:



മുഴുവൻ വളയുടെ ആരം കണക്കാക്കണം. ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മുഴുവൻ വള സങ്കൽപിക്കാം;



വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ചിത്രത്തിലെ മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$r^2 - (r - 1)^2 = 4$$

എന്നു കാണാം. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ $2r - 1 = 4$ എന്നും, അതിൽ നിന്ന് $r = 2\frac{1}{2}$ എന്നും കിട്ടും; അതായത്, വളയുടെ ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ.

താമരക്കണക്ക്

ഭാസ്കരാചാര്യരുടെ **ലീലാവതി** എന്ന ഗണിതപുസ്തകത്തെക്കുറിച്ചു കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അതിലെ ഒരു ശ്ലോകത്തിന്റെ വിവർത്തനം ഇങ്ങനെയാണ്:

“ചക്രവാകപ്പക്ഷികളും, ക്രൗഞ്ചപ്പക്ഷികളും കളിയാടുന്ന ഒരു തടാകത്തിൽ, അര കൈപ്പാട് ഉയരത്തിൽ ഒരു താമരമൊട്ട് ഉയർന്നു നില്ക്കുന്നു. കാറ്റത്ത് മെല്ലെ ആടി, അത് രണ്ടു കൈപ്പാട് അകലെയായി ജലത്തിൽ മുങ്ങി. വേഗം പറയൂ, കണക്കുകാരാ, തടാകത്തിന്റെ ആഴമെത്ര?”

ചക്രക്രൗഞ്ചാകുലിതസലിലേ
ക്വാപിദൃഷ്ടം തഡാഗേ
തോയാമൂർദ്ധ്വം കമലകലികാഗ്രം
വിതസ്തതിപ്രമാണം
മന്ദം മന്ദം ചലിതമനിലേനാഹതം
ഹസ്തയുഗ്മം
തസ്മിന്മഗ്നം ഗണക, കഥയ
ക്ഷിപ്രമംഭഃ പ്രമാണം

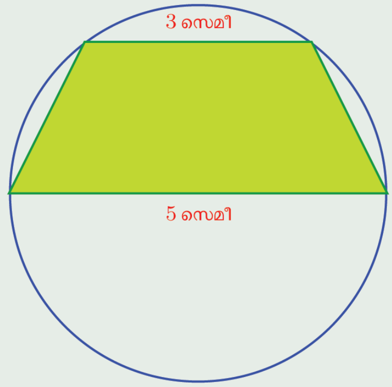
വളയുടെ ആരം കണ്ടുപിടിച്ച രീതിയിൽ ഈ കണക്കിന് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

(1) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററാണ്. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 2 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ഞാണിന്റെ നീളമെത്രയാണ്?

(2) ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസത്തിന് ഇരുവശത്തുമായി, 6, 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള സമാന്തര ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലമെത്രയാണ്? ഇതേ നീളമുള്ള സമാന്തര ഞാണുകൾ, വ്യാസത്തിന്റെ ഒരേ വശത്തു വരച്ചാൽ, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്തായിരിക്കും?

(3) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിൽ താഴത്തെ വശം വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും, മുകളിലെത്തെ വശം അതിനു സമാന്തരമായ ഞാണുമാണ്.

ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



(4) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, 4 സെന്റിമീറ്ററും 6 സെന്റിമീറ്ററും നീളമുള്ള സമാന്തരമായ രണ്ടു ഞാണുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 5 സെന്റിമീറ്ററാണ്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

ബിന്ദുക്കളും വൃത്തങ്ങളും

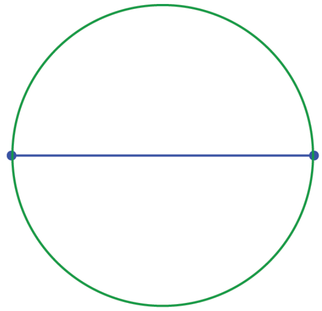
വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളെക്കുറിച്ചാണ് ഇത്രയും നേരം പറഞ്ഞുകൊണ്ടിരുന്നത്; ഇനി മറിച്ചൊരു ചോദ്യം, ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും അവ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം. ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

നോട്ടുബുക്കിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ?

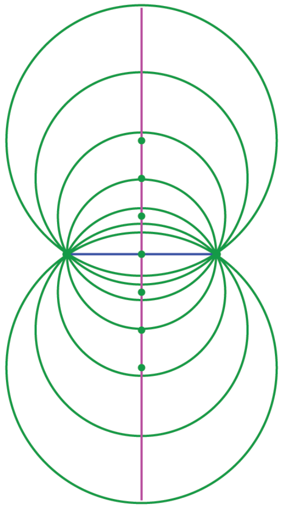
വളരെയെളുപ്പം ചെയ്യാവുന്നത്, ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി വൃത്തം വരയ്ക്കുകയാണ്;

മറ്റൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ?



അങ്ങനെയൊരു വൃത്തം വരച്ചാൽ, ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അതിന്റെ ഞാണാകും, അപ്പോൾ വൃത്തകേന്ദ്രം, ഈ വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലായിരിക്കണം.

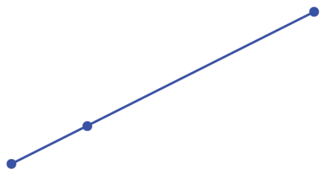
ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദുവും കേന്ദ്രമായി ആദ്യത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ.



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വരയും അതിന്റെ ലംബസമഭാജിയും വരയ്ക്കുക. ലംബസമഭാജിയിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി, വരയുടെ ഒരു അഗ്രബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിന് Animation നൽകി നോക്കൂ. വൃത്തത്തിന് Trace On നൽകാവുന്നതാണ്.

അപ്പോൾ പുതിയൊരു ചോദ്യം; ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

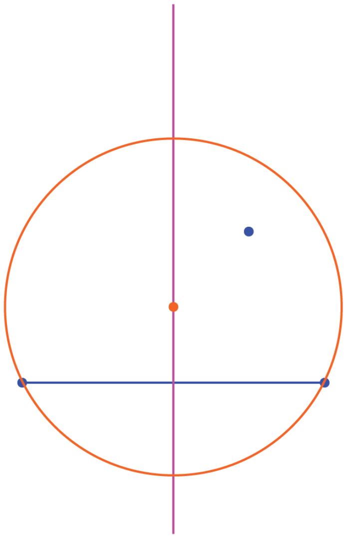
ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ സാധിക്കില്ല.



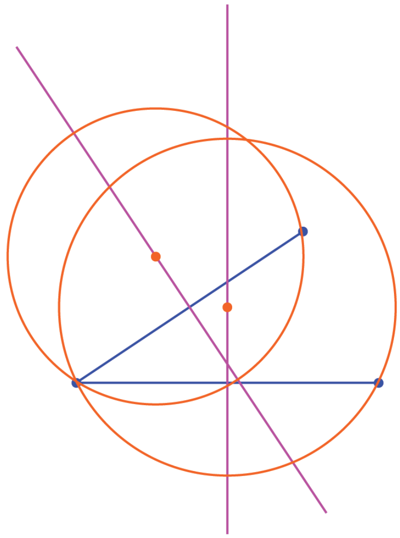
ഒരേ വരയിലല്ലെങ്കിലോ?

വരയ്ക്കാൻ തുടങ്ങുന്നതിനു മുമ്പ് അൽപമൊന്നാലോചിക്കാം.

ഇതിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായെടുത്താലും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം.



ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ജോടി ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബ സമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായെടുത്താലും അവയിലൂടെയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

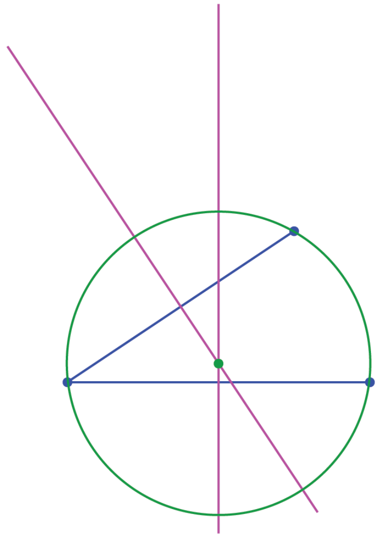


അങ്ങനെ രണ്ടു ജോടി ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

പക്ഷേ, നമുക്കു വേണ്ടത്, മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും കടന്നു പോകുന്ന ഒറ്റ വൃത്തമല്ലേ?

ആദ്യമെടുത്ത ഒരു ജോടി ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വൃത്തം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രം ആദ്യത്തെ സമഭാജിയിലായിരിക്കണം. രണ്ടാമത്തെ ജോടിയിലൂടെയുള്ള വൃത്തം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രം രണ്ടാമത്തെ സമഭാജിയിലുമായിരിക്കണം.

രണ്ടു സമഭാജിയിലുമുള്ള ബിന്ദു എടുത്താലോ? അതായത്, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു?



വരയും വട്ടവും

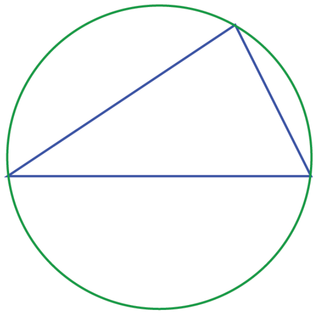
ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന എത്ര വരകൾ വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാം. അതു പോലെ വൃത്തങ്ങളും.

രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരു വര മാത്രമല്ലേ വരയ്ക്കാൻ കഴിയുള്ളൂ? പക്ഷേ, വൃത്തങ്ങൾ എത്രവേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാം.

ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും വര വരയ്ക്കാൻ കഴിയണമെന്നില്ല. അങ്ങനെ വര വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ അവയിലൂടെ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കയില്ല. വര വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കാത്ത മൂന്നു ബിന്ദുക്കളായാലോ, അവയിലൂടെ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

ഏതെങ്കിലും നാലു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ വര വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ? വൃത്തമോ?

മിച്ചമുള്ള ഒരു ജോടി ബിന്ദുക്കളുംകൂടി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഒരു ത്രികോണമാകും; വൃത്തം അതിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിലൂടെയും കടന്നുപോകും;

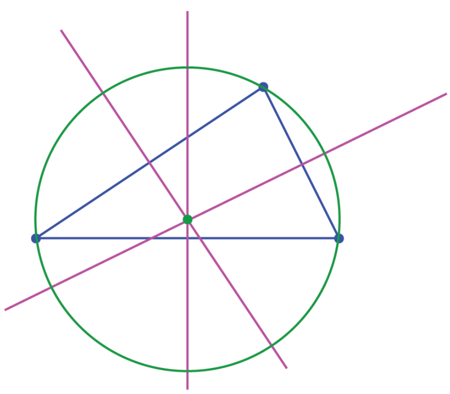


ഇങ്ങനെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ **പരിവൃത്തം (circumcircle)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇപ്പോൾ ചെയ്തതുപോലെ, ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും രണ്ടു വശങ്ങളുടെ ലംബസമഭാജികൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി, മൂന്നു മൂലകളിലൂടെയുമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Circle Through 3 Points ഉപയോഗിക്കാം. ഇതുപയോഗിച്ച് ബിന്ദുക്കളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി.
ഒരു Angle Slider α നിർമിച്ച് ഒരു കോൺ α ആയി ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക. Midpoint or Centre ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തകേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്താം. Slider നീക്കി α മാറ്റുമ്പോൾ പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറുന്നത് നോക്കൂ. പരിവൃത്തകേന്ദ്രം ത്രികോണത്തിനകത്ത് വരുന്നതെപ്പോഴാണ്? പുറത്ത് വരുന്നതോ? ഇത് എപ്പോഴെങ്കിലും ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും വശത്ത് വരുമോ?

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം. ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെയും, ഇടതു വശത്തിന്റെയും ലംബസമഭാജികൾ വരച്ചാണ് പരിവൃത്തകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിച്ചത്. വലതു വശം പരിവൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ ലംബസമഭാജിയും പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.



6VP8ZG

ഏതു ത്രികോണത്തിലും മൂന്നു വശങ്ങളുടെയും ലംബസമഭാജികൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു.

(1) രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5 സെന്റിമീറ്ററായും അവ ചേരുന്ന കോൺ 60°, 90°, 120° ഇവയിലൊന്നായും ഓരോ ത്രികോണം വരച്ച്, അവയുടെയെല്ലാം പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക. (പരിവൃത്തത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക)

(2) ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും, പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും, പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണക്കാക്കുക.

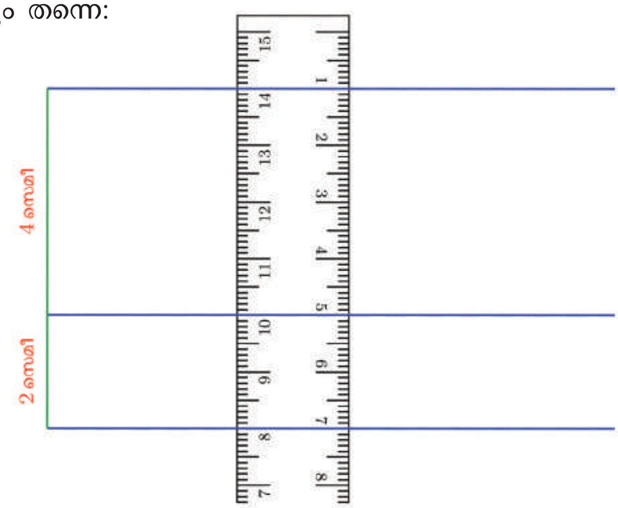
6 സമാന്തരവരകൾ

സമാന്തരഭാഗം

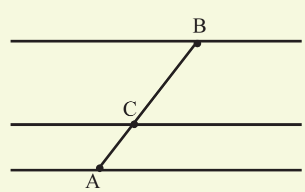
സമാന്തരവരകളെക്കുറിച്ച് പലതും പഠിച്ചു; അവയുപയോഗിച്ച് പലതും വരച്ചു. സമാന്തരവിശേഷങ്ങൾ ഇനിയുമുണ്ട് പലതും.

ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു വരയും, അതിനു സമാന്തരമായി 2 സെന്റിമീറ്റർ താഴെ ഒരു വരയും, 4 സെന്റിമീറ്റർ മുകളിൽ സമാന്തരമായിത്തന്നെ മറ്റൊരു വരയും വരച്ചു തുടങ്ങാം:

ഇനി താഴത്തെ വരയിൽ എവിടെനിന്നും കുത്തനെ അളന്നാൽ, വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററും തന്നെ:

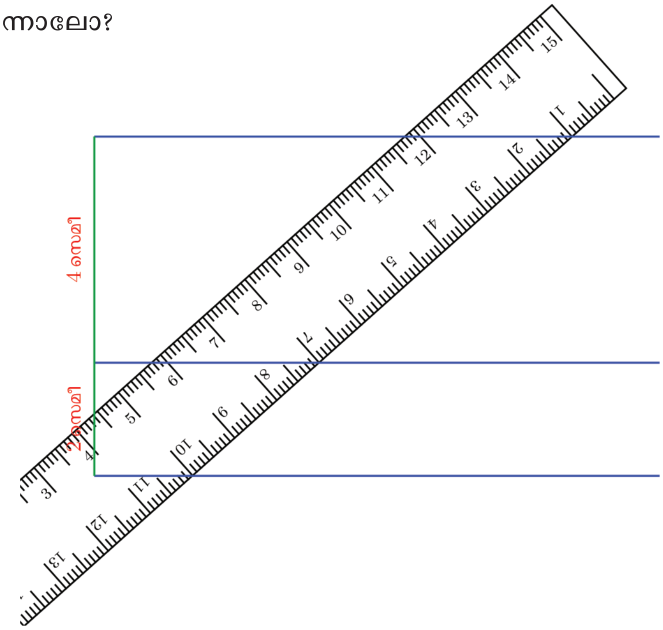


ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു വര വരച്ച് അതിന്റെ ഒരു വശത്ത് അകലം 2 ആയി ഒരു വരയും മറു വശത്ത് അകലം 4 ആയി മറ്റൊരു വരയും വരയ്ക്കുക (ഗ്രിഡ് ഉപയോഗിക്കാം). A, B എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ ഓരോ വരകളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക.



AC, BC എന്നിവയുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? A, B ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. സമാന്തര വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും മാറ്റി നോക്കൂ.

ചരിച്ചളന്നാലോ?

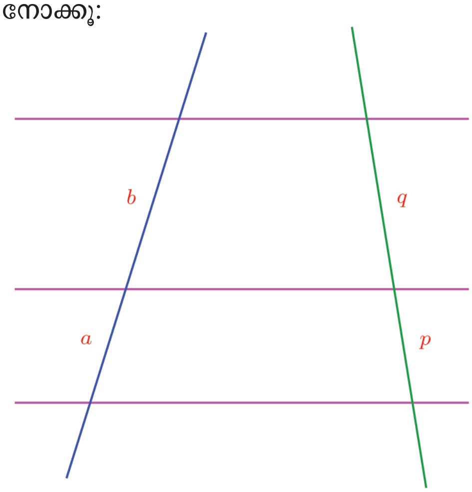


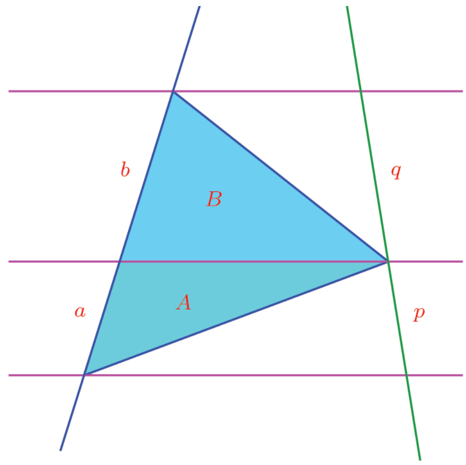
സ്കേലിന്റെ വലതുവക്ക് നോക്കൂ; ഈ ചരിവിൽ വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ്?

ഇനിയും പല രീതിയിൽ ചരിച്ചുവച്ചു നോക്കൂ; എന്താണ് കാണുന്നത്? എങ്ങനെ അളന്നാലും, ഏറ്റവും താഴത്തെ വരയും നടുവിലെ വരയും തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുതന്നെയല്ലേ, നടുവിലെ വരയും ഏറ്റവും മുകളിലെ വരയും തമ്മിലുള്ള അകലം?

മറ്റൊരുരീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, കുത്തനെയുള്ള അകലങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണ് ഏതു ചരിവിലുമുള്ള അകലങ്ങളുടേതും.

എങ്ങനെ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ വരച്ചാലും ഇതു ശരിയാണോ എന്നു നോക്കാം. ആദ്യം നമ്മുടെ ഊഹമെന്താണെന്ന് കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാക്കാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:





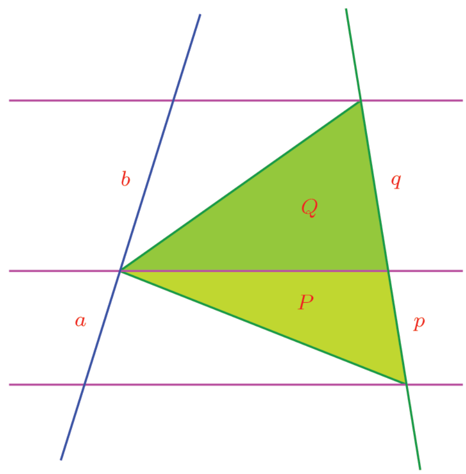
വിലങ്ങനെ മൂന്നു സമാന്തര വരകൾ; അവയെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന രണ്ടു ചരിഞ്ഞ വരകൾ. ഇടതു വരയെ സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളുടെ നീളം a, b എന്നും, വലതു വരയെ സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളുടെ നീളം p, q എന്നുമെടുത്താൽ $a : b$ എന്ന അംശബന്ധവും, $p : q$ എന്ന അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണോ എന്നാണ് അന്വേഷിക്കേണ്ടത്.

അതിന് ആദ്യം നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധമായ $a : b$ യെ രണ്ടു പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമായി മാറ്റാം:

ആദ്യ ചിത്രത്തിൽ, $a : b$ എന്ന അംശബന്ധം, താഴെയും മുകളിലുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണല്ലോ (**പരപ്പളവ്** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണഭാഗം**)

ഈ പരപ്പളവുകളെ A, B എന്നെടുത്താൽ,

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

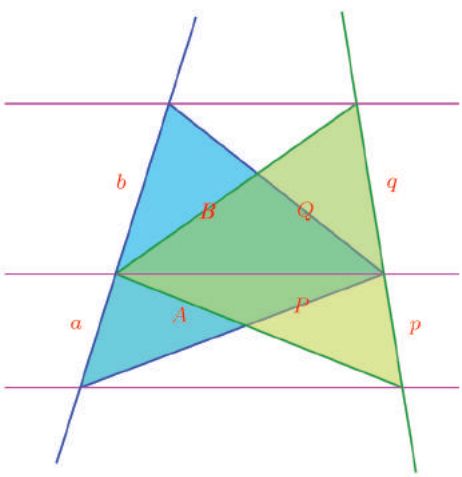


ഇതുപോലെ p, q എന്നീ നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെയും, പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമാക്കാം:

ചിത്രത്തിലേതുപോലെ, പച്ച ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ P, Q എന്നെടുത്താൽ,

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$$

ഇനി എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും ഒരുമിച്ചുവച്ചു നോക്കാം:



ഇപ്പോൾ താഴത്തെ നീല ത്രികോണത്തിന്റെയും പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെയും ഒരു വശം ഒരേ വരയാണ്; അവയുടെ മൂന്നാം മൂലകൾ ഈ വശത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലുമാണ്. അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണ്:

$$A = P$$

ഇതുതന്നെയല്ലേ മുകളിലെ നീലയും പച്ചയും ത്രികോണങ്ങളുടെ കാര്യവും?

$$B = Q$$

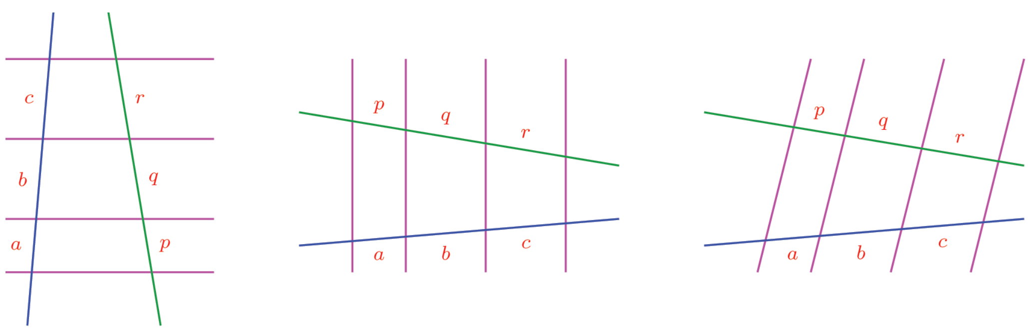
$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ എന്നും, $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ എന്നും നേരത്തെ കണ്ടതാണല്ലോ. ഇപ്പോൾ ഇതിലെ $A = P$ യും $B = Q$ യും ആണെന്നും കിട്ടി. അങ്ങനെ

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

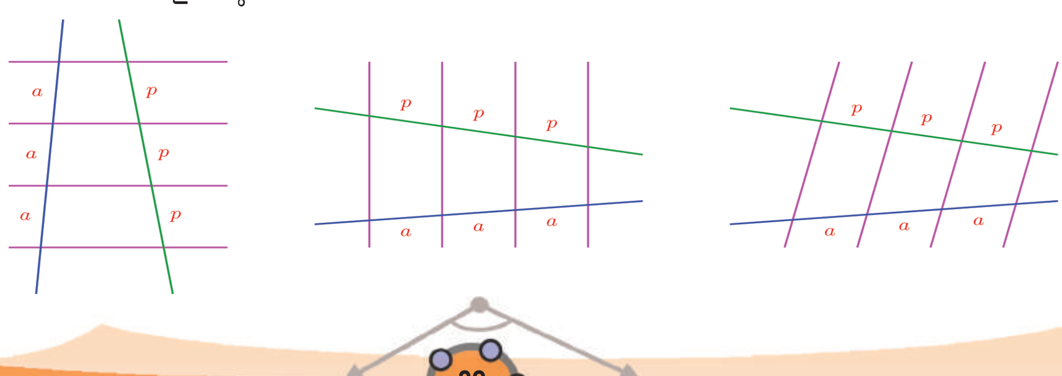
എന്നു കാണാം. അതായത്, മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ ഏതു രണ്ടു വരകളേയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്. മൂന്നിലധികം സമാന്തരവരകളായാലും, ഇതുപോലെതന്നെ തുടരാമല്ലോ:

മൂന്നോ അതിലധികമോ സമാന്തരവരകൾ, ഏതു രണ്ടു വരകളെയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഉദാഹരണമായി ചുവടെയുള്ള മൂന്നു ചിത്രങ്ങളിലും a, b, c എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും p, q, r എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണ്.



അപ്പോൾ ചില സമാന്തരവരകൾ ഒരു വരയെ സമഭാഗങ്ങളാക്കുകയാണെങ്കിലോ? ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, ഇവ ഏതു വരയെയും സമഭാഗങ്ങളാക്കും.



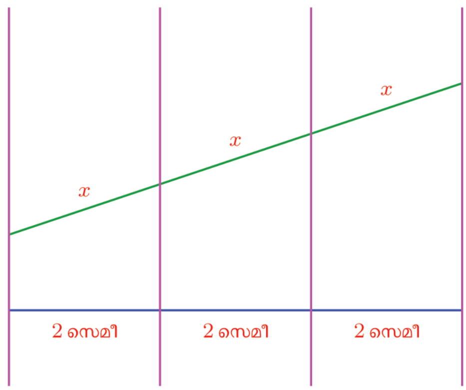
മൂന്നോ അതിലധികമോ സമാന്തരവരകൾ ഒരു വരയെ തുല്യഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ഏതു വരയെയും തുല്യഭാഗങ്ങളായി ത്തന്നെ മുറിക്കും.

ഇനി ഈ തത്വങ്ങളുടെ ചില പ്രയോഗങ്ങൾ നോക്കാം.

7 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കാൻ, ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കാം; ഒരറ്റത്തു നിന്ന് 3.5 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ഒരു കുത്തിട്ടാലും മതി. മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയിൽ ഇതെളുപ്പമാണ്.

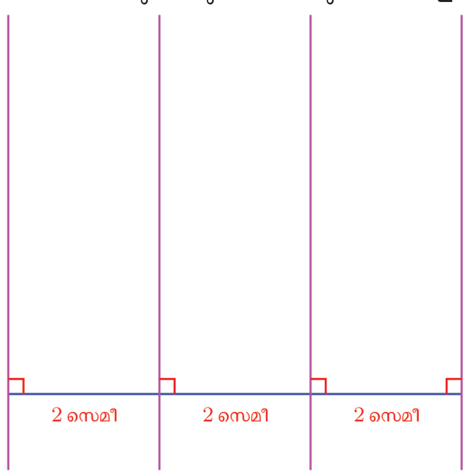
6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന നാലു സമാന്തര വരകൾ, ഏതു വരയെയും മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:

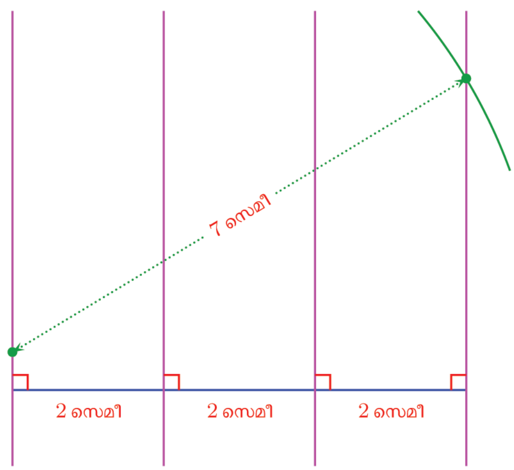


രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ നീളം 7 സെന്റിമീറ്ററാക്കിയാലോ?

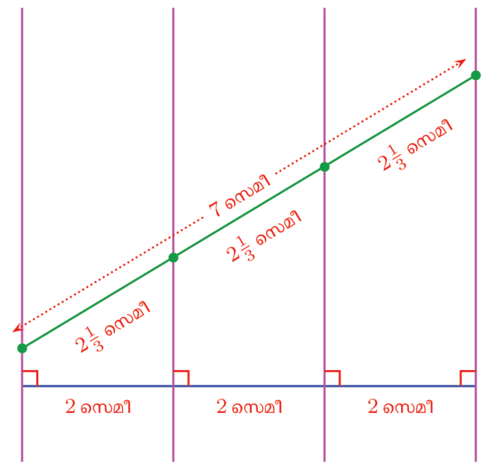
അപ്പോൾ നമ്മുടെ പ്രശ്നം തീർക്കാനുള്ള വഴി തെളിഞ്ഞില്ലേ?

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിൽ 2 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക; ആദ്യത്തെ ലംബത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് 7 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, ഇത് അവസാനത്തെ ലംബത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.



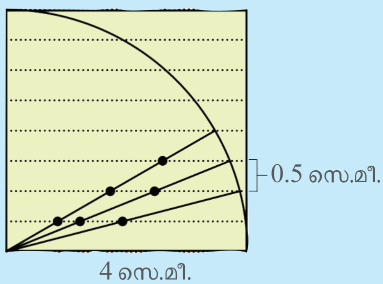


ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും, അതിന്റെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളുമായി:



വൃത്ത വിഭജനം

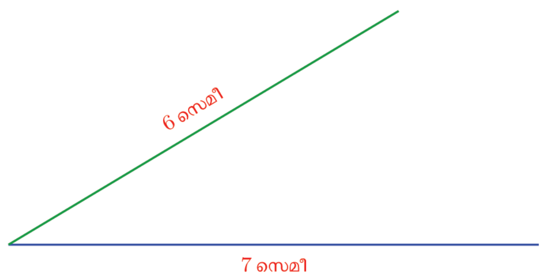
ചിത്രം നോക്കൂ:



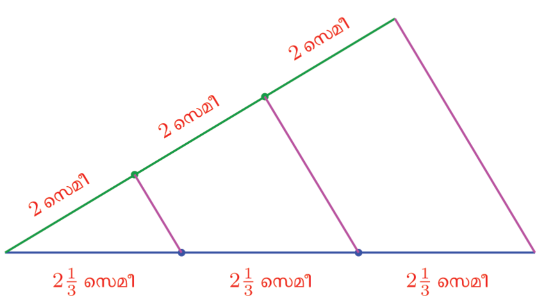
4 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ, രണ്ടും മൂന്നും, നാലും സമഭാഗങ്ങളാക്കിയിരിക്കുന്നത് കണ്ടില്ലേ? ഇതുപോലെ എട്ട് സമഭാഗങ്ങൾ വരെ ഈ ചിത്രം ഉപയോഗിച്ചുതന്നെ സാധിക്കുമല്ലോ. ഇതുപോലെ വരയിട്ട നോട്ടുപുസ്തകത്തിൽ ഒരു വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 7 സമഭാഗങ്ങളാക്കാമോ?

മറ്റൊരു രീതിയിലും വരയ്ക്കാം:

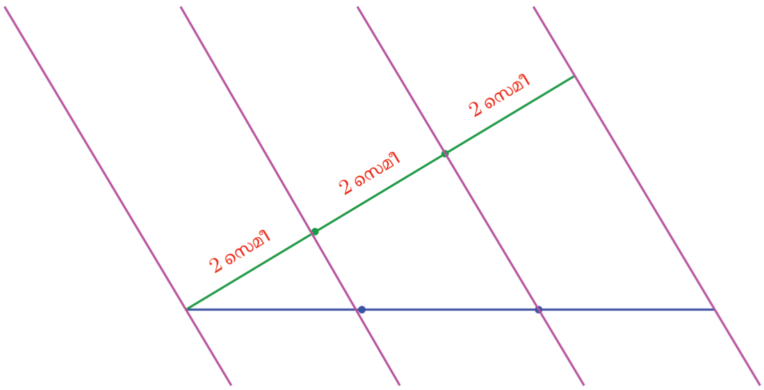
ആദ്യം 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിലൊരു വര വരച്ച്, അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുനിന്ന് 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിലൊരു വര അൽപം ചരിച്ചു വരയ്ക്കുക:



വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഇനി താഴത്തെ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കാൻ, മുകളിലെ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ആ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ സമാന്തരവരകൾ വരച്ചാൽപ്പോരേ?



ഇതെന്തുകൊണ്ടാണെന്നു മനസിലായില്ലെങ്കിൽ, അൽപം നീട്ടിയ സമാന്തരവരകളും, നാലാമതൊരു സമാന്തരവരയും സങ്കൽപിച്ചുനോക്കൂ.



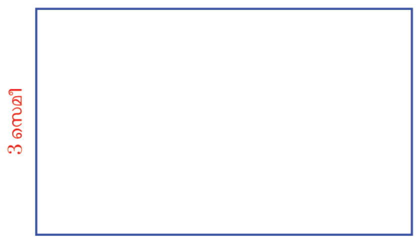
നിഴൽക്കണക്ക്

ഒരു മരത്തിന്റെ ഏറ്റവും താഴത്തെ ചില്ല വരെയുള്ള ഉയരം 1 മീറ്ററും അതുവരെയുള്ള നിഴലിന്റെ നീളം 2 മീറ്ററുമാണ്. നിഴലിന്റെ ആകെ നീളം 8 മീറ്റർ.

മരത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

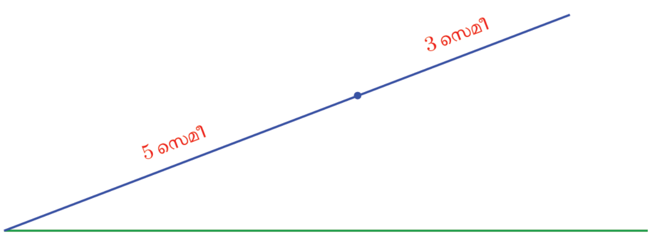
ഇവിടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവെന്താണ്?



നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഇതിന്റെതന്നെയായി, 17 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവിൽ ചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

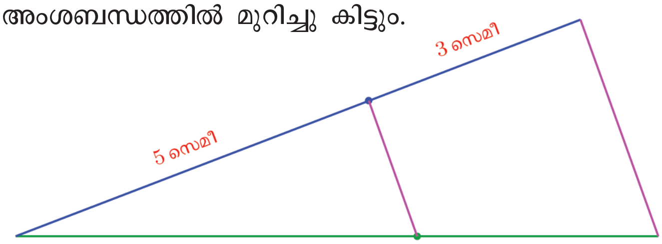
ചുറ്റളവ് 17 സെന്റിമീറ്ററെന്നാൽ, നീളത്തിന്റെയും വീതിയുടെയും തുക 8.5 സെന്റിമീറ്റർ. ഈ നീളമുള്ള വരയെ 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന കഷണങ്ങൾ നീളവും വീതിയുമായി ചതുരം വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

അപ്പോൾ ആദ്യം 8.5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരയ്ക്കാം. ഇതിനെ 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ കണക്കിന്റെ രണ്ടാം വഴിയിൽ ചെയ്തതുപോലെ ഒരറ്റത്തുനിന്ന് 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ മറ്റൊരു വരയും വരച്ച്, അതിനെ 5 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററുമായി ഭാഗിക്കാം:

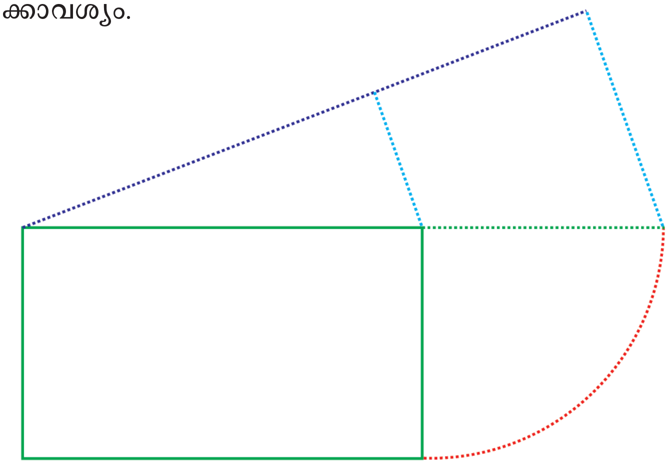


ജിയോജിബ്രയിൽ A എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി AB എന്ന വരയും AC എന്ന വരയും വരയ്ക്കുക. Min = 0, Max = 1 ആയ ഒരു സ്ലൈഡർ c നിർമിക്കുക. A കേന്ദ്രമായി ആരം AB യുടെ c ഭാഗം വരത്തക്കവിധം ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക (ഇതിനായി വൃത്തത്തിന്റെ ആരം നൽകാനുള്ള ജാലകത്തിൽ c * AB എന്ന് നൽകിയാൽ മതി). ഈ വൃത്തം AB യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇതുപോലെ A കേന്ദ്രമായും ആരം AC യുടെ c ഭാഗമായും ഒരു വൃത്തം വരച്ച് ഇത് AC യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. AD, AE എന്നീ വരകളും BC, DE എന്നീ വരകളും വരച്ച് അവയുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ നീളങ്ങൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം? എന്തുകൊണ്ട്? സ്ലൈഡർ നിരക്കി, D, E ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഇനി വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച്, അതിനൊരു സമാന്തരവരയും വരച്ചാൽ, താഴത്തെ വരയും 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ മുറിച്ചു കിട്ടും.



ഈ കഷണങ്ങൾ നീളവും വീതിയുമായ ചതുരമാണ് നമുക്കാവശ്യം.

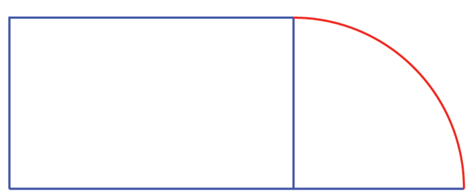


അൽപം വ്യത്യാസമുള്ള മറ്റൊരു കണക്ക്:

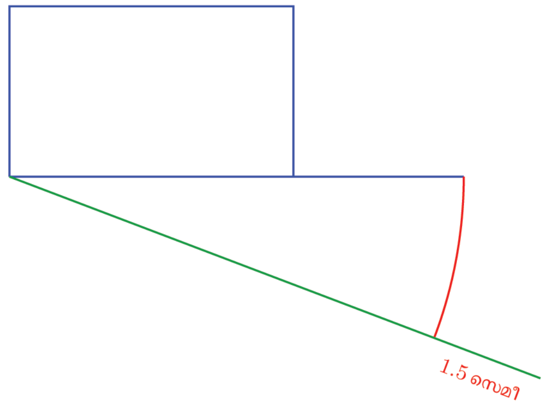
ഇവിടെ ഒരു ചതുരം വരച്ചിട്ടുണ്ട്:

ഇതിന്റെ നീളവും വീതിയുമൊന്നും പറഞ്ഞിട്ടില്ല. വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം മാറാതെ, ചുറ്റളവ് 3 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വരയ്ക്കണം.

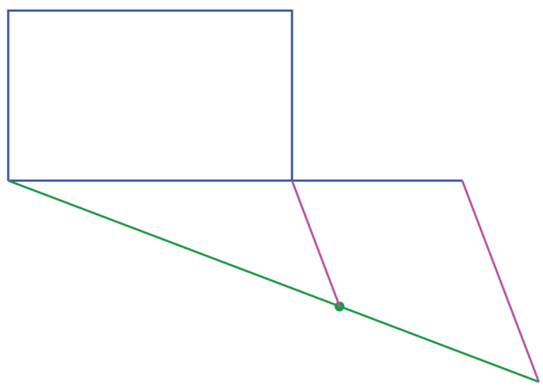
അതിനാദ്യം നീളവും വീതിയും ഒരു വരയിലാക്കാം:



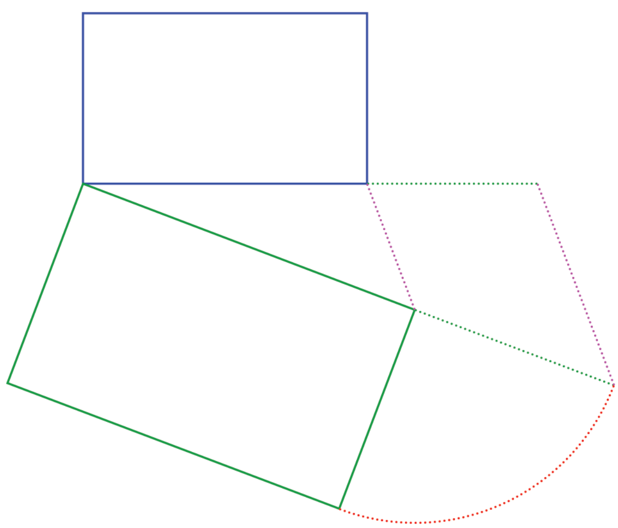
ഇനി ഇതിനു താഴെ, ഇതേ നീളമുള്ള വര അൽപം ചരിച്ചു വരച്ച്, അതിനെ 1.5 സെന്റിമീറ്റർ കൂടി നീട്ടാം: (എന്തുകൊണ്ട്?)



ഇനി പഴയതുപോലെ വരകളുടെ അറ്റം യോജിപ്പിച്ച്, സമാന്തരവര വരച്ച്, താഴത്തെ വരയെ ഭാഗിക്കാം:



ഇനി ഈ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളും നീളവും വീതിയുമായി ചതുരം വരച്ചാൽ മതി:



(1) 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വര വരച്ച് അതിനെ 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുക.

(2) 15 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവും, വീതിയും നീളവും 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമായ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

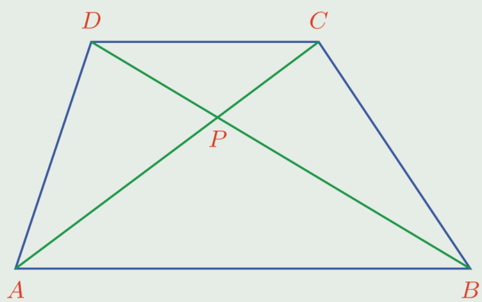
(3) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ തരത്തിലുമുള്ള ത്രികോണം, ചുറ്റളവ് 10 സെന്റിമീറ്ററായി വരയ്ക്കുക

i) സമഭുജത്രികോണം.

ii) വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 4 : 5

iii) വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 : 4

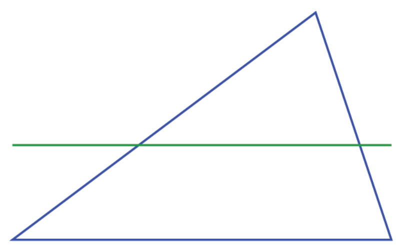
(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ *ABCD* എന്ന ലംബകത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ *P* എന്ന ബിന്ദുവിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു:



$PA \times PD = PB \times PC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

ത്രികോണഭാഗം

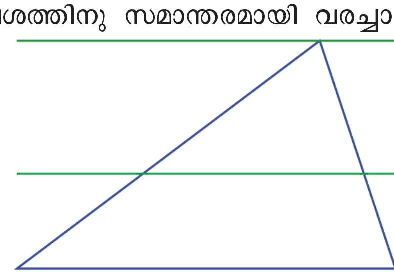
ഒരു ത്രികോണം വരച്ച്, അതിനുള്ളിൽത്തന്നെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വര വരയ്ക്കുക:



ജിയോജിബ്രയിൽ ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. AB എന്ന വശത്ത് ഒരു ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തി, അതിലൂടെ BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഈ വര AC യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. D, E എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ AB, AC എന്നീ വരകളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ മുറിക്കുന്നതെന്ന് പരിശോധിക്കൂ. നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കാവുന്നതാണ്.

ഈ വര ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽ മൂലയിലൂടെ ഒരു വര കൂടി താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരച്ചാലോ?



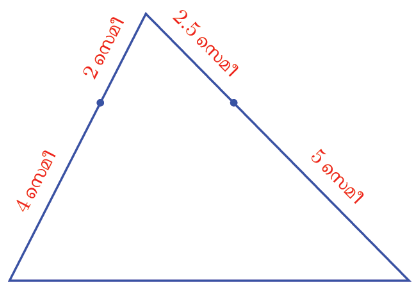
ഇപ്പോൾ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നു; മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഒന്നുതന്നെ ആണല്ലോ. ഈ ഭാഗങ്ങൾ, ആദ്യം വരച്ച വര വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ ഇവിടെ എന്താണു കണ്ടത്?

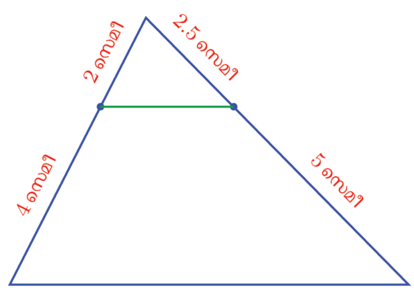
ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് മുറിക്കുന്നത്.

മറിച്ച്, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

ഉദാഹരണമായി ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ $1:2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.



ഇടതുവശത്തിലെ ബിന്ദുവിലൂടെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര വലതുവശത്തിലെ ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുമല്ലോ, മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, താഴത്തെ വരയ്ക്കു സമാന്തരമാണ്.

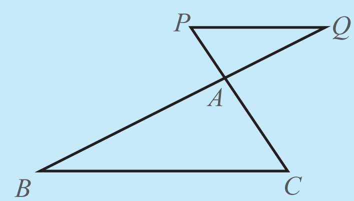


അംശബന്ധം മാറ്റിയാലും ഇപ്പറഞ്ഞത് ശരിയാകുമല്ലോ: അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്.

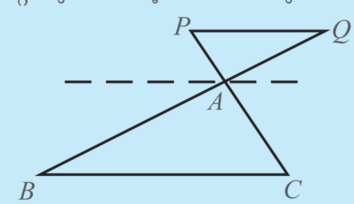
ത്രികോണ ബാഹ്യം

ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി ത്രികോണത്തിനു പുറത്ത് വരച്ചാലും ആ വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഖണ്ഡിക്കുന്നതെന്നു കാണാം. ചിത്രം നോക്കൂ.



BC യ്ക്കു സമാന്തരമാണ് PQ

A യിൽക്കൂടി BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി മറ്റൊരു വര കൂടി വരയ്ക്കുക.



അപ്പോൾ

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AQ}$$

കൂടാതെ, ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$\frac{PC}{AP} = \frac{AP+AC}{AP} = 1 + \frac{AC}{AP}$$

$$\frac{QB}{AQ} = \frac{AQ+AB}{AQ} = 1 + \frac{AB}{AQ}$$

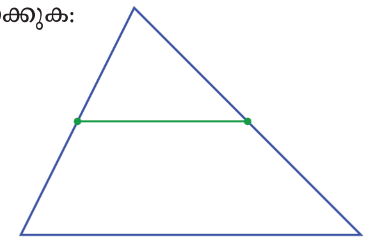
എന്നും കാണാം.

ഈ മൂന്നു സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

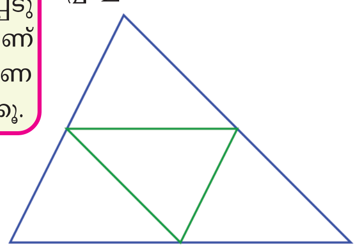
ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കുക:

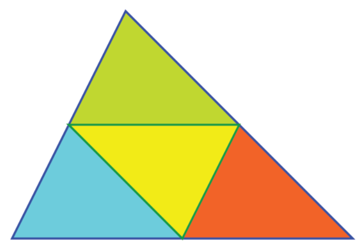


നീല ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് പച്ച വര വരച്ചിരിക്കുന്നത്. മേൽപ്പറഞ്ഞ തത്വം അനുസരിച്ച്, ഈ വര, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണല്ലോ.

ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ?

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും ഉള്ളിലുള്ള ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ.





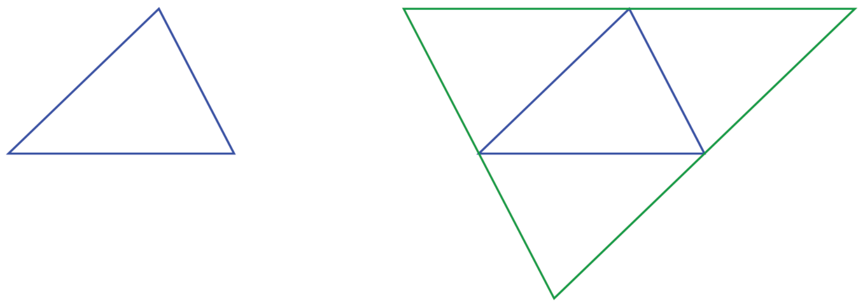
നടുവിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമാണ്.

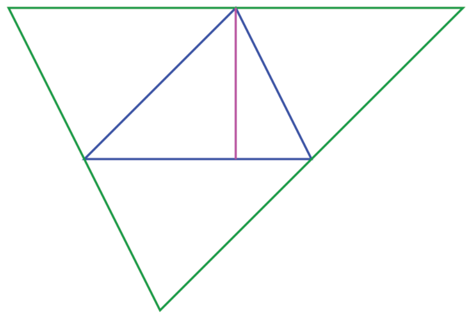
ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ? അതു ശരിയാണോ എന്നു നോക്കാം. ആദ്യം നീലത്രികോണവും മഞ്ഞത്രികോണവും എടുക്കാം. നീലത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശവും, മഞ്ഞത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശവും ഒരേ വരയാണ്. നീലത്രികോണത്തിൽ ഈ വശത്തിന്റെ മുകളിലെ കോണും, മഞ്ഞത്രികോണത്തിൽ ഈ വശത്തിന്റെ താഴെയുള്ള കോണും തുല്യമാണ്; മറിച്ചും (എന്തുകൊണ്ട്?) അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ്. ഇതുപോലെ പച്ചത്രികോണവും, ചുവന്ന ത്രികോണവും എല്ലാം മഞ്ഞത്രികോണത്തിനു തുല്യമാണെന്നു കാണാം. അതായത്, ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ്.

ഇതിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യം കിട്ടും. ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമായതിനാൽ, ഓരോ വശവും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ പകുതിയാണ്. അതായത്,

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ നീളം, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇനി ഒരു ചെറിയ ത്രികോണത്തിൽനിന്നു തുടങ്ങി, ഓരോ മൂലകളിലൂടെയും എതിർവശത്തിനു സമാന്തരവര വരച്ചാലോ?

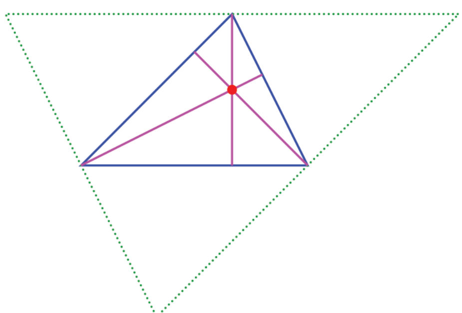




ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു പകർപ്പുകൾ കൂടി ചേർത്തുവച്ച വലിയ ത്രികോണമായി, അല്ലേ?

ഇതിൽ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്ന് എതിർവശത്തേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ ലംബസമഭാജിയാണ്.

അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ മൂലകളിൽ നിന്നും എതിർവശങ്ങളിലേക്ക് ലംബം വരച്ചാലോ? വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളുടെയും ലംബസമഭാജികളായി. ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ ലംബസമഭാജികളെല്ലാം ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമെന്ന് **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ:



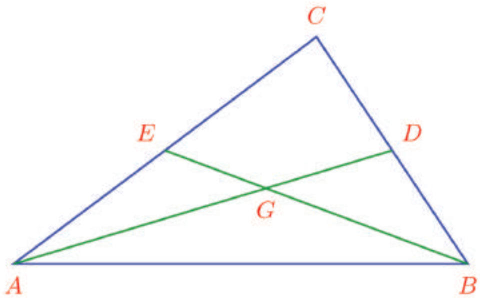
ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും എതിർവശത്തേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. ഇവ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നുണ്ടോ? ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ.

ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും എതിർവശത്തേയ്ക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും.

ഇതേപോലെ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയും എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമെന്നും തെളിയിക്കാം. ഇത്തരമൊരു വരയെ ത്രികോണത്തിന്റെ **നടുവര** **(median)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നുമുള്ള നടുവരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്നു ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിലേക്കും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

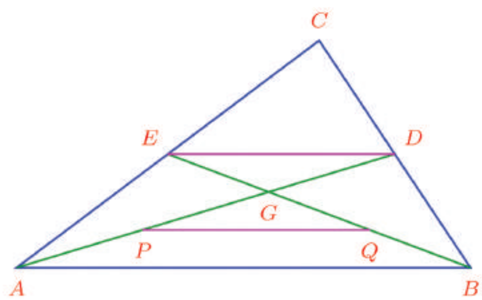
ചിത്രത്തിൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ രണ്ടു മൂലകളിൽ നിന്നുമുള്ള നടുവരകൾ G എന്ന ബിന്ദുവിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു.



ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരവും അതിന്റെ പകുതിയുമാണ്. അതായത്,

$$ED = \frac{1}{2} AB$$

ഇനി താഴത്തെ വശത്തിന്മേൽത്തന്നെ GAB എന്ന മറ്റൊരു ചെറിയ ത്രികോണമുണ്ടല്ലോ; അതിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾകൂടി യോജിപ്പിച്ചാലോ?



$$PQ = \frac{1}{2} AB$$

അപ്പോൾ

$$PQ = ED$$

$PQDE$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിലെ, PQ, ED എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യവും സമാന്തരവുമായതിനാൽ, ഈ ചതുർഭുജമൊരു സാമാന്തരികമാണ്; അതിനാൽ അവയുടെ വികർണങ്ങളായ PD, QE ഇവ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യും; അതായത്,

$$PG = GD$$

AG യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണല്ലോ, P; അപ്പോൾ

$$AP = PG = GD$$

ഇതുപോലെ

$$BQ = QG = GE$$

എന്നും കാണാം. അതായത്, നടുവരകൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു, അവയെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു.

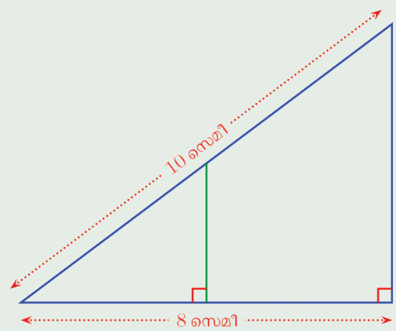
ഇനി A, B, ഇവയിലൂടെയുള്ള നടുവരകൾക്കു പകരം, B, C എന്നീ മൂലകളിലൂടെയുള്ള നടുവരകളാണ് വരയ്ക്കുന്നതെങ്കിലോ?

അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു BE യെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും; അതായത്, മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു G തന്നെയാണ്.

ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും നടുവരകൾ ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും; ആ ബിന്ദു നടുവരകളെയെല്ലാം, മൂലകളിൽനിന്ന് 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും.

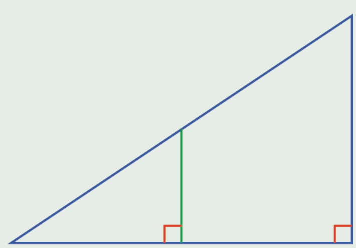
നടുവരകൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ **മധ്യമകേന്ദ്രം (centroid)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

(1) ചിത്രത്തിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് പാദത്തിലേയ്ക്ക് ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശത്തിന്റെ നീളവും, ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെ നീളവും കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ച്, കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് പാദത്തിലേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക:



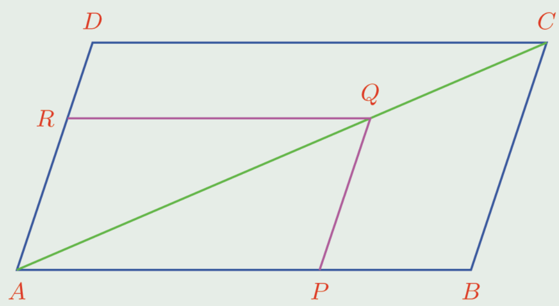
i) ഈ ലംബം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) ഈ ലംബം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

iii) വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് മൂന്നു മൂലകളിലേയ്ക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

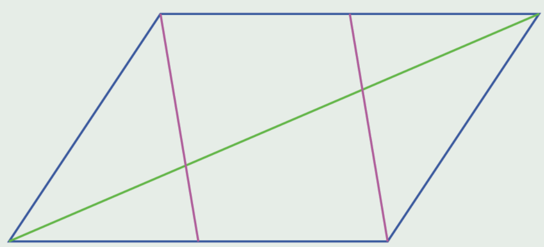
iv) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം, കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) $ABCD$ എന്ന സാമാന്തരികത്തിൽ AB യിലെ ഒരു ബിന്ദു P യിൽക്കൂടി BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര AC യുമായി Q ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. Q വിലൂടെ AB യ്ക്കു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, AD യുമായി R ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു:



$\frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RD}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടു മൂലകളെ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു:



ഈ വരകൾ ചിത്രത്തിലെ വികർണത്തെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം സാമാന്തരികം ആയിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക. ആദ്യത്തെ ചതുർഭുജം ചതുരമായാലോ? സമഭുജസാമാന്തരികമായാലോ?

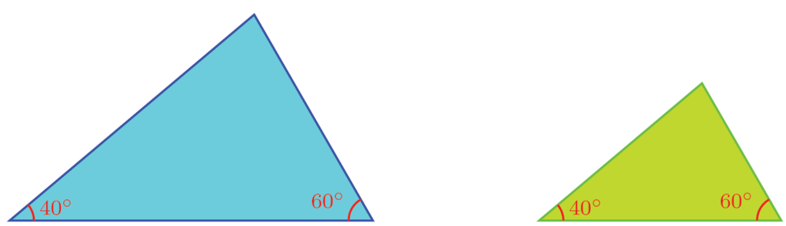
7 സദൃശ ത്രികോണങ്ങൾ

കോണുകളും വശങ്ങളും

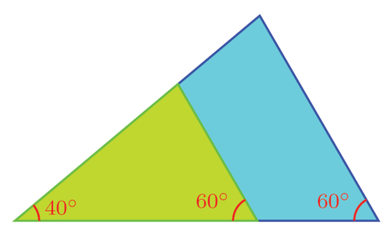
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണെന്ന് അറിയാമല്ലോ; മറിച്ച്, കോണുകൾ തുല്യമായാൽ വശങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല എന്നും അറിയാം (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **തുല്യ ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം).

അപ്പോൾ ഒരു ചോദ്യമുണ്ട്: ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വ്യത്യസ്ത വലിപ്പത്തിൽ കട്ടിക്കടലാസിൽ വരച്ച്, വെട്ടിയെടുക്കുക. ഉദാഹരണമായി ഇങ്ങനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാകാം:

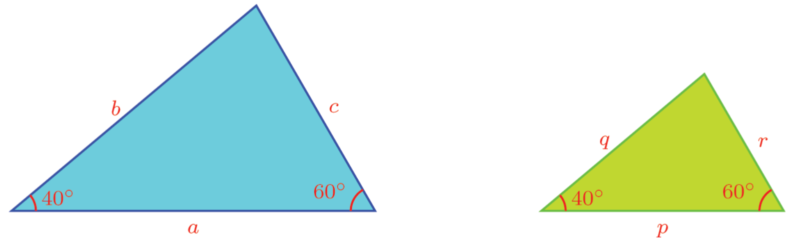


വശങ്ങളുടെ നീളം തട്ടിച്ചുനോക്കാൻ, ചെറിയ ത്രികോണമെടുത്ത് വലുതിന്റെ ഉള്ളിൽ വയ്ക്കുക. ഇടതു മൂലകൾ ചേർന്നിരിക്കട്ടെ. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ മൂലയിലെ വശങ്ങളും ചേർന്നിരിക്കും.

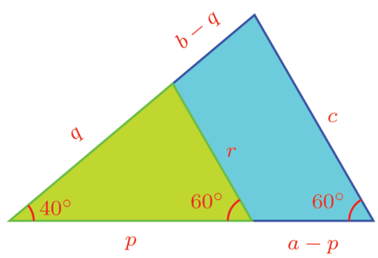


ഇതിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വലതു വശങ്ങൾ, താഴത്തെ വരയുമായി ഒരേ ചരിവിലാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ വശങ്ങൾ സമാന്തരമാണ്. അതിനാൽ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. (**സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠം)

ഇക്കാര്യം അൽപംകൂടി വ്യക്തമാക്കാൻ, ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം:



ചേർത്തുവയ്ക്കുമ്പോൾ അളവുകൾ ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം:



അപ്പോൾ നേരത്തെ പറഞ്ഞ അംശബന്ധങ്ങളുടെ തുല്യത ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\frac{a-p}{p} = \frac{b-q}{q}$$

ഇതൽപം ലഘൂകരിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാമല്ലോ:

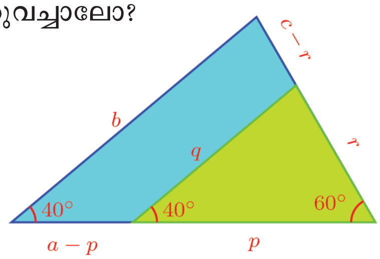
$$\frac{a}{p} - 1 = \frac{b}{q} - 1$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$$

എന്നു കാണാം.

ത്രികോണങ്ങളുടെ ഇടതു മൂലകൾ ചേർത്തുവയ്ക്കുന്നതിനു പകരം, വലതു മൂലകൾ ചേർത്തുവച്ചാലോ?



അപ്പോൾ ആദ്യം കണ്ടതുപോലെ

$$\frac{a-p}{p} = \frac{c-r}{r}$$

എന്നും തുടർന്ന്

$$\frac{a}{p} = \frac{c}{r}$$

എന്നു കാണാം.

രണ്ടു തരത്തിൽ ത്രികോണങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയ കാര്യങ്ങൾ ഒന്നിച്ചെഴുതിയാലോ?

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ ആണല്ലോ. ഇതിലെ 80° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളാണ് a യും p യും; 60° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ b യും q യും; 40° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ c യും r ഉം;

a എന്ന നീളം p എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് $\frac{a}{p}$

b എന്ന നീളം q എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് $\frac{b}{q}$

c എന്ന നീളം r എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് $\frac{c}{r}$

അപ്പോൾ $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ എന്നതിന്റെ അർഥം, മേൽപ്പറഞ്ഞ മടങ്ങുകൾ തുല്യമാണെന്നാണ്.

അതായത്, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $(a, p), (b, q), (c, r)$ എന്നിങ്ങനെ ജോടികളാക്കിയാൽ, വലിയ നീളങ്ങളായ a, b, c എന്നിവ ചെറിയ നീളങ്ങളായ p, q, r ഇവയുടെ ഒരേ മടങ്ങാണ്.

സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാൽ; p, q, r എന്നീ സംഖ്യകളെ ഒരേ സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നവയാണ് a, b, c എന്നീ സംഖ്യകൾ.

$$a = kp, \; b = kq, \; c = kr$$

ഇതിൽ കോണുകൾ $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$ എന്നതിനുപകരം, വേറെ ഏതായാലും ഇപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ശരിയാകുമല്ലോ. അപ്പോൾ പൊതുവായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ ജോടികളായെടുത്താൽ, വലിയ നീളങ്ങളെല്ലാം ചെറിയ നീളങ്ങളുടെ ഒരേ മടങ്ങാണ് (അഥവാ, ചെറിയ നീളങ്ങളെല്ലാം വലിയ നീളങ്ങളുടെ ഒരേ ഭാഗമാണ്)

ഇത് ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ വലിപ്പക്രമത്തിൽ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

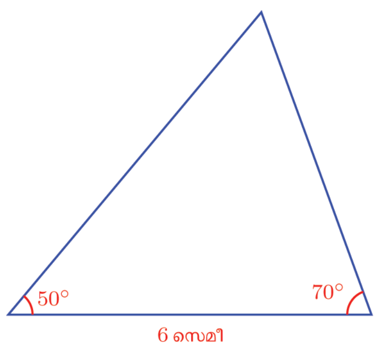
ജിയോജിബ്രയിൽ ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Min = 0 ആയി ഒരു സ്ലൈഡർ d ഉണ്ടാക്കുക. Segment with Given Length ഉപയോഗിച്ച് നീളം AB യുടെ d മടങ്ങോ ഭാഗമോ വരത്തക്ക വിധം ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഇതിനായി വര യുടെ നീളം d * AB എന്നു കൊടുത്താൽ മതി. ഇനി $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle B$ ആകത്തക്ക വിധം ത്രികോണം DEF വരയ്ക്കണം. ഇതിനായി Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് E, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α ($\angle A$ യുടെ അളവ്) എന്നു നൽകുക. അതേപോലെ D, E എന്നിവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ β എന്ന് clockwise ആയി നൽകുക. DE', ED' എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടേയും വശങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ? ത്രികോണം ABC യുടെ അളവുകളും സ്ലൈഡറും മാറ്റി നോക്കൂ.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇതു പറയാം: രണ്ടു അളവുകളിൽ ഒന്നു മറ്റൊന്നിന്റെ എത്ര മടങ്ങ് (അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗം) എന്നതിനെ മാറ്റത്തിന്റെ തോത് (scale factor) എന്നു പറയാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും 4 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും എടുത്താൽ, വലിയ നീളം ചെറിയ നീളത്തിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാണ്. മറിച്ച്, ചെറിയ നീളം വലിയ നീളത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്. ഇവിടെ ചെറിയ നീളത്തിൽനിന്ന് വലിയ നീളത്തിലേക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $1\frac{1}{2}$ എന്നും, വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതിലേക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $\frac{2}{3}$ എന്നും പറയാം.

ഈ ഭാഷയിൽ, നമ്മുടെ പൊതുതത്വം ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:



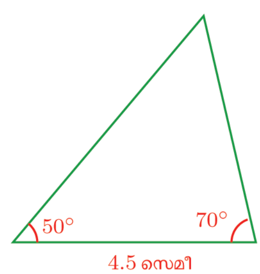
ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കി ചെറിയ ത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

താഴത്തെ വശം 4.5 സെന്റിമീറ്ററാക്കിയാൽ മതി. മറ്റു വശങ്ങളോ?

വലിയ ത്രികോണം വരച്ച്, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ അളന്ന് $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കി വരയ്ക്കണോ?

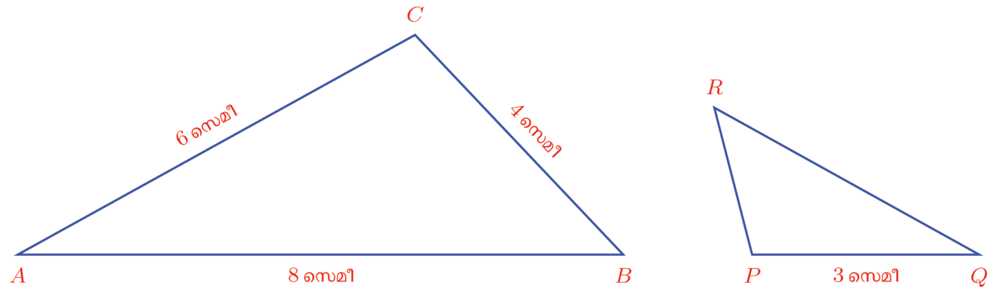
4.5 സെന്റിമീറ്റർ വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ഇതേ കോണുകൾ വരച്ചാൽപ്പോരേ?

കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ; ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച് മറ്റു വശങ്ങളും $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാകുമല്ലോ.



Downloaded from https:// www.studiestoday.com

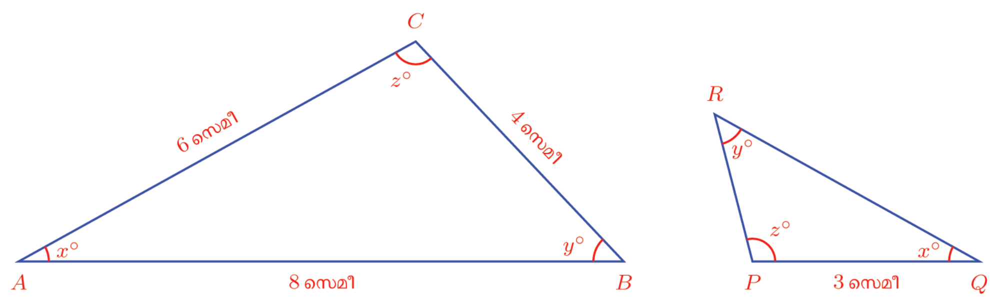
മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:



$$\angle P = \angle C \quad \angle Q = \angle A \quad \angle R = \angle B$$

PQR എന്ന ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ആദ്യം കോണുകളുടെ അളവുകൾ x°, y°, z° എന്നെടുത്ത്, ചിത്രത്തിൽ തുല്യമായ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം.



ഇനി തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികൾ എഴുതാം.

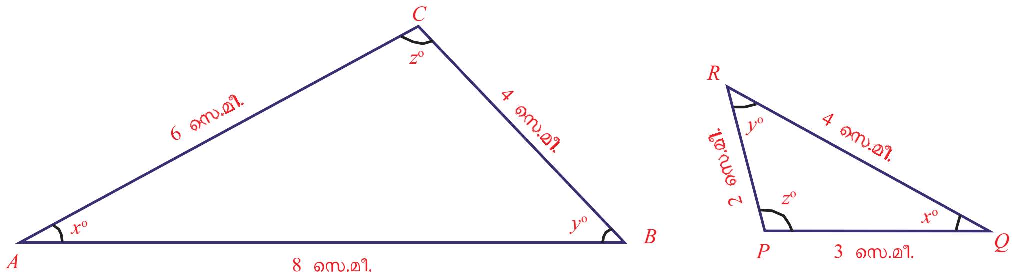
x	BC	PR
y	AC	PQ
z	AB	QR

ഇതിൽ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെയും നീളം അറിയാമല്ലോ.

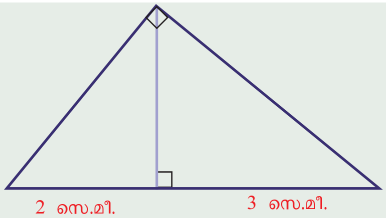
x	BC	$= 4$	PR
y	AC	$= 6$	$PQ = 3$
z	AB	$= 8$	QR

ഇതിൽ y° കോണിന്റെ എതിർവശങ്ങളിൽ, വലുതിന്റെ പകുതിയാണ് ചെറുത്. അപ്പോൾ മറ്റു കോണുകളുടെയും എതിർവശങ്ങളും ഇങ്ങനെതന്നെ ആകണം.

x	$BC = 4$		$PR = 2$
y	$AC = 6$		$PQ = 3$
z	$AB = 8$		$QR = 4$



(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയിൽനിന്ന് കർണത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം, കർണത്തിനെ 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.



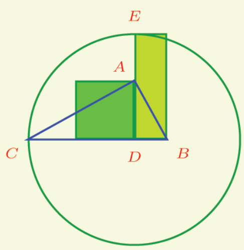
i) ലംബം മുറിച്ചുണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ചെറിയ മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ii) ലംബത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നെടുത്താൽ $\frac{h}{2} = \frac{3}{h}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

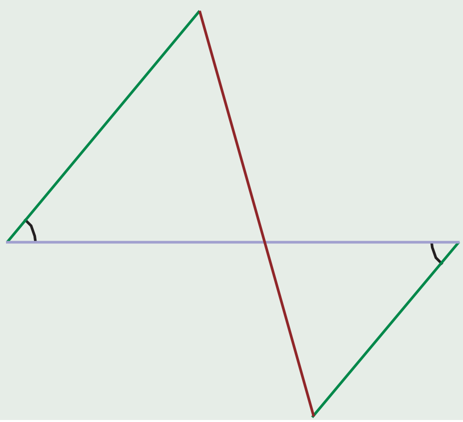
iii) വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

iv) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയിൽനിന്നു കർണത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ നീളം h എന്നും, അത് കർണത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം a, b, എന്നുമെടുത്താൽ $h^2 = ab$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

ABC എന്ന മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക. മട്ടമൂലയിൽ നിന്നും കർണത്തിലേക്ക് ഒരു ലംബം വരച്ച്, കർണവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. D കേന്ദ്രമായി, C യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, വൃത്തവും ലംബവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. AD ഒരു വശമായിവരുന്ന സമചതുരവും, BD, DE ഇവ വശങ്ങളായി വരുന്ന ചതുരവും നിർമിക്കുക. സമചതുരത്തിന്റെയും ചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തുല്യമല്ലേ? മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ.



(2) വിലങ്ങനെയുള്ള ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ഒരേ വലുപ്പമുള്ള കോണുകൾ മുകളിലും താഴെയുമായി വരച്ച്, ചരിഞ്ഞ വരകളിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്നു.

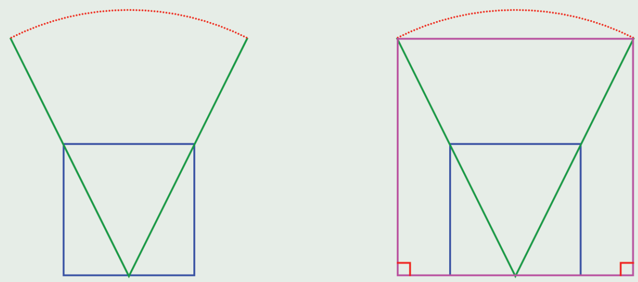


i) വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ ഭാഗങ്ങളും, ചരിഞ്ഞ വരയുടെ ഭാഗങ്ങളും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള ചരിഞ്ഞ വരകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

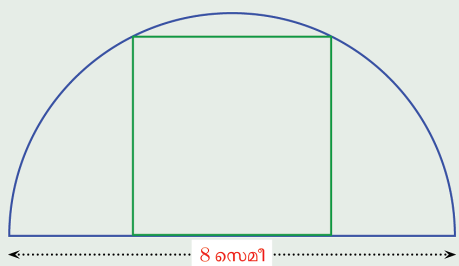
iii) ഇതുപയോഗിച്ച്, 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുക.

(3) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും മുകൾ വശത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളും യോജിപ്പിച്ച്, ഒരേ നീളത്തിൽ നീട്ടുന്നു. ഈ വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുകയും, അവയിൽനിന്ന് സമചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം നീട്ടിയ വരയിലേക്ക് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

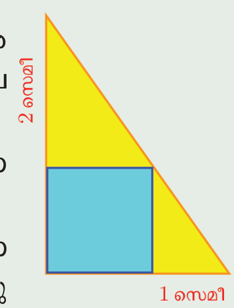


i) ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജവും സമചതുരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ, ഒരു അർധവൃത്തത്തിൽ രണ്ടു മൂലകളും, അതിന്റെ വ്യാസത്തിൽ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുമായി ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.



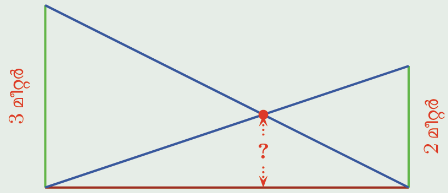
(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ മട്ടമൂലയും, മൂന്നു വശങ്ങളിലെയും ഓരോ ബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി ഒരു സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



i) സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

ii) വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 5 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

(5) 3 മീറ്ററും 2 മീറ്ററും ഉയരമുള്ള രണ്ടു കമ്പുകൾ കുത്തനെ നിലത്തു നാട്ടി. ഓരോ കമ്പിന്റെയും മുകളറ്റത്ത് നിന്ന് മറ്റെ കമ്പിന്റെ ചുവട്ടിലേക്ക് കയർ വലിച്ചു കെട്ടിയിരിക്കുന്നു.



i) കയറുകൾ പരസ്പരം മുറിച്ചുകടക്കുന്നത്, നിലത്തുനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ്?

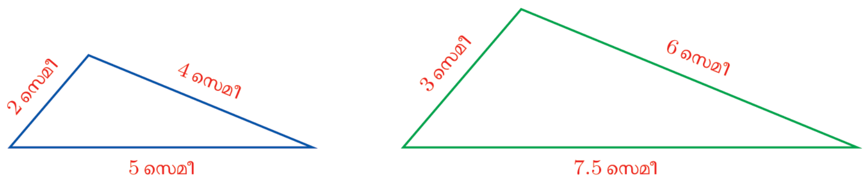
ii) കമ്പുകളുടെ നീളം a, b എന്നും, കയറുകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന സ്ഥാനത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നുമെടുത്ത് a, b, h ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

iii) കമ്പുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയായാലും ഈ ഉയരം മാറുന്നില്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

Min = 0 ആകത്തക്കവിധം a, b എന്നീ പേരുകളിൽ രണ്ട് സ്ലൈഡറുകൾ നിർമിക്കുക. AB എന്ന ഒരു വര വരച്ച് അഗ്രബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. A, B ഇവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി, ആരങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b ആയ വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ ലംബങ്ങളുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ C, D അടയാളപ്പെടുത്തുക. CB, AD എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. E യിലൂടെ AB യ്ക്ക് ലംബം വരച്ച് AB യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. ലംബവരകളും വൃത്തങ്ങളും മറച്ചു വച്ചതിനുശേഷം AC, FE, BD എന്നീ വരകൾ വരച്ച് നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. AC = 3 ഉം BD = 2 ഉം ആകുമ്പോൾ EF എത്രയാണ്? AB യുടെ നീളം മാറ്റി നോക്കൂ. a, b ഇവ മാറ്റി നോക്കൂ.

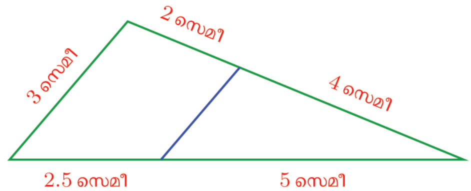
വശങ്ങളും കോണുകളും

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യമുണ്ട്: ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതാക്കുകയോ വലുതാക്കുകയോ ചെയ്താൽ കോണുകൾ മാറാതിരിക്കുമോ?

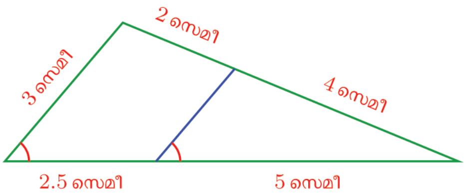


ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം ഒന്നര മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണോ?

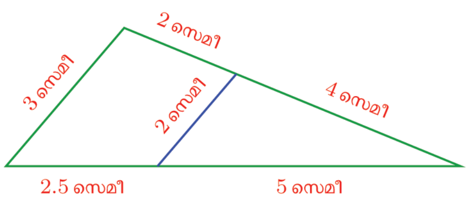
ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കാം:



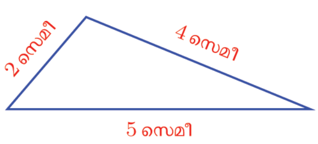
ഈ വര, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെയും വലതുവശത്തെയും (1 : 2 എന്ന) ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽത്തന്നെയാണല്ലോ ഭാഗിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഈ വര ഇടതുവശത്തിനു സമാന്തരമാണ് (**സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണഭാഗം**). അതുകൊണ്ട് ഇവ രണ്ടും താഴത്തെ വശവുമായി ഒരേ ചരിവിലാണ്.

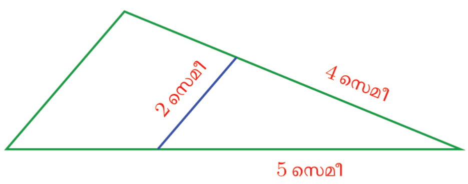


അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണവും അതിനുള്ളിലെ കൊച്ചു ത്രികോണവും മാത്രം നോക്കിയാൽ (പുറത്തുള്ള ചെറിയ ത്രികോണം തൽക്കാലം നോക്കണ്ട) അവ രണ്ടിനും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കാണാം. നേരത്തെ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച്, ഈ രണ്ടു ത്രികോണത്തിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്. ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്; രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വലതുവശങ്ങളും അങ്ങനെതന്നെ. മൂന്നു വശങ്ങളും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലായതിനാൽ, ഇടതു വശങ്ങളും ഇതുപോലെ ആയിരിക്കണം. അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാംവശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ.



ഇനി വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പുറത്ത് മാറ്റി നിർത്തിയിരിക്കുന്ന ചെറുത്രികോണത്തെ വീണ്ടും നോക്കാം:





അകത്തും പുറത്തുമുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്. അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ കോണുകളാണ് (എട്ടാംക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വശങ്ങളും കോണുകളും** എന്ന ഭാഗം).

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾതന്നെയാണെന്നു നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

ആദ്യം വരച്ച ചെറിയ ത്രികോണത്തിനും വലിയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണ്.

ഈ ഉദാഹരണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളവും മാറ്റത്തിന്റെ തോതുമെല്ലാം മാറ്റിയാലും ഇതേ വാദങ്ങൾകൊണ്ടുതന്നെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു സമർഥിക്കാം.

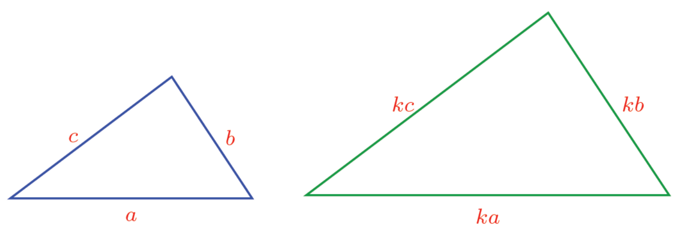
കൂടുതൽ കൃത്യത വേണമെന്നു തോന്നുന്നവർക്ക്, ഇതുതന്നെ പൊതുവായി അൽപം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചു ചെയ്യാം.

ഒരു ത്രികോണവും, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഒരേ തോതിൽ മാറ്റിയ മറ്റൊരു ത്രികോണവുമെടുക്കുക. അതായത്, ഒരു ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളങ്ങളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ.

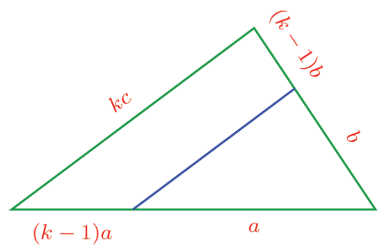
അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ a, b, c വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ ka, kb, kc എന്നുമെടുക്കാം:

ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക (വശങ്ങൾ a, b, c എന്ന പേരിലാവാം). Min = 0 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ k നിർമിക്കുക. ka നീളത്തിൽ ഒരു വര DE വരച്ച് അഗ്രബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കിക്കൊണ്ട് ആരം kb, kc ആകത്തക്കവിധം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം DEF വരയ്ക്കുക. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവ തുല്യമല്ലേ? സ്ലൈഡറിന്റെ വിലയും ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളും മാറ്റി നോക്കൂ.

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും ചുറ്റളവും പരപ്പളവും അടയാളപ്പെടുത്തുക ചുറ്റളവ് മാറുന്ന തോത് എന്താണ്? പരപ്പളവ് മാറുന്ന തോതോ?

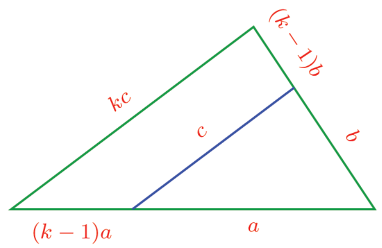


ഉദാഹരണത്തിൽ ചെയ്തപോലെ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടുവശങ്ങളുടെ നീളം, വലിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ആ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുക.

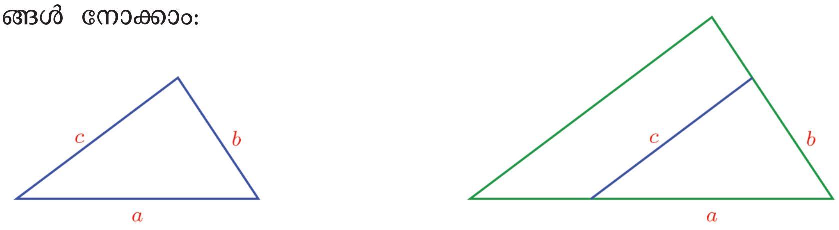


ഈ വര വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെയും വലതുവശത്തെയും $k - 1 : 1$ എന്ന ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്; അതിനാൽ ഈ വര, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തിനു സമാന്തരമാണ്. അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണത്തിനും, അതിനുള്ളിലെ കൊച്ചു ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കാണാം. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഇവ രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങളുടെ മാറ്റവും ഒരേ തോതിലാണ്. വലിയ ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ $\frac{1}{k}$ ഭാഗമാണ് അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ത്രികോണ

ത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം. വലതു വശങ്ങളും ഇതുപോലതന്നെ. അപ്പോൾ ഇടതുവശങ്ങളും ഇങ്ങനെതന്നെയാകണം.



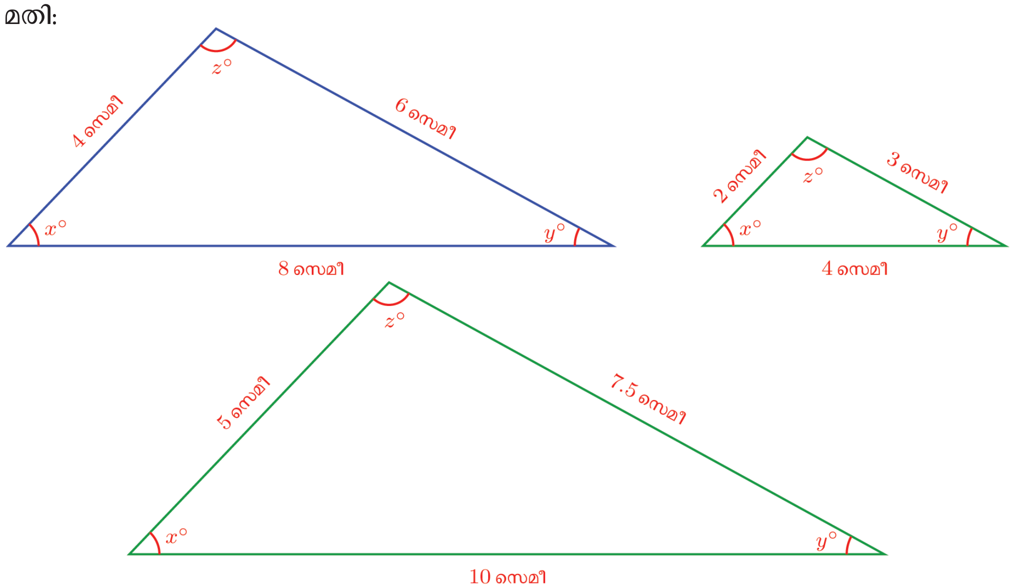
ഇനി ഉദാഹരണത്തിലെപ്പോലെ, പുറത്തും അകത്തുമുള്ള ചെറുത്രികോണങ്ങൾ നോക്കാം:



ഈ രണ്ടു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമായതിനാൽ, കോണുകളും തുല്യമാണ്. അകത്തെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും തുല്യമാണെന്നു നേരത്തെ കണ്ടു. അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിനും, വലിയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണ്.

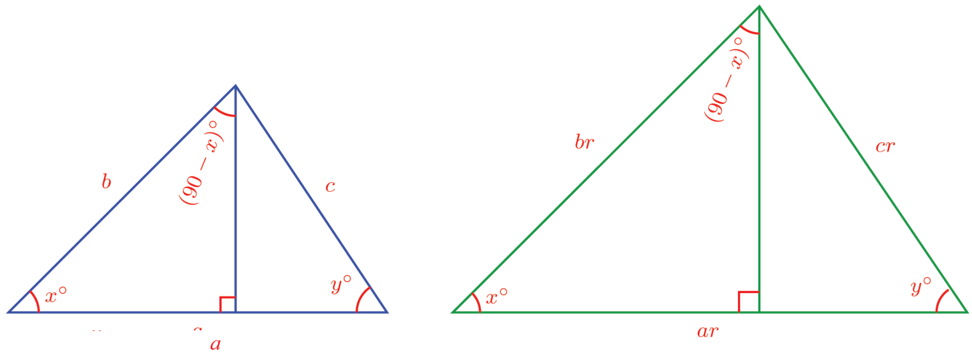
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളത്തിന്റെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെങ്കിൽ, അവയ്ക്കു ഒരേ കോണുകളാണ്.

അപ്പോൾ കോണുകൾ മാറാതെ ഒരു ത്രികോണം ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി മാറ്റാൻ, കോണുകൾ അളക്കണമെന്നില്ല; വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ മാറ്റിയാൽ മതി:

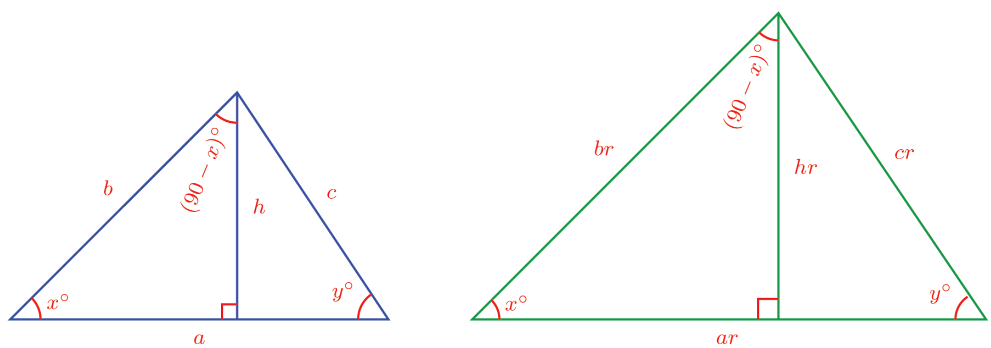


ഇതുപയോഗിച്ചുള്ള ഒരു കണക്കു നോക്കാം: ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കുകയോ ചെറുതാക്കുകയോ ചെയ്താൽ, ചുറ്റളവുകളും അതേ തോതിലാണ് മാറുന്നതെന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ല. (ചെയ്തുനോക്കൂ!) പരപ്പളവുകളും ഇതേ തോതിലാണോ മാറുന്നത്?

പരപ്പളവുകൾ മാറുന്നത് എങ്ങനെയാണെന്നറിയാൻ, ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കാം. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, രണ്ടിനും ഒരേ കോണുകളാണ്. പരപ്പളവ് ഒത്തുനോക്കാൻ, ഒരേ കോണുള്ള മൂലകളിൽ നിന്നുള്ള ലംബങ്ങളും വരയ്ക്കാം:



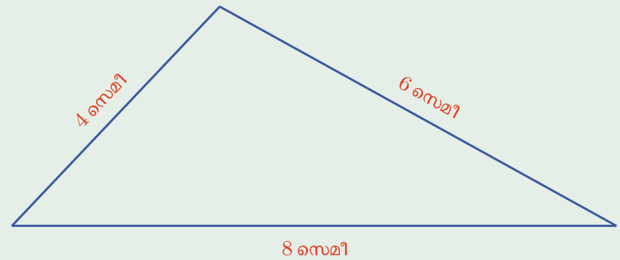
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും ഇടതുഭാഗത്തുള്ള മട്ടത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം നോക്കുക: രണ്ടിലും കോണുകൾ x°, 90°, $(90 - x)^\circ$ തന്നെയാണ്; ഒരേ കോണുകളായതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ്. നീല മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം b യും, പച്ച മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം br ഉം ആണ്. അപ്പോൾ നീല ത്രികോണത്തിലെ ലംബം h എന്നെടുത്താൽ പച്ച ത്രികോണത്തിലെ ലംബം hr ആണ്.



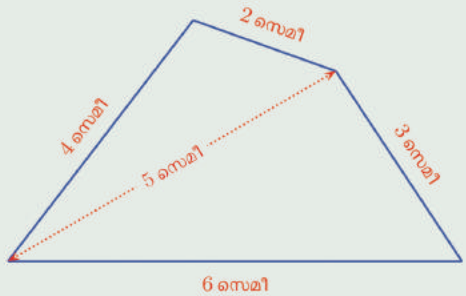
ഇനി മുഴുവൻ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ. നീല ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ah$; പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ahr^2$

അപ്പോൾ പരപ്പളവ് മാറുന്ന തോത്, വശങ്ങൾ മാറുന്ന തോതിന്റെ വർഗമാണ്.

(1) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ അതേ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളം $1\frac{1}{4}$ മടങ്ങുമായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.



(2) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ചിത്രം നോക്കൂ.



i) ഇതേ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളമെല്ലാം $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുമായ ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക.

ii) കോണുകൾ വ്യത്യസ്തവും, വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഇതിലെ വശങ്ങളുടെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുമായ ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക.

ത്രികോണവിശേഷം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ, മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഇവയുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തുല്യമാണ്; മറിച്ച് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഒന്നിന്റെ കോണുകൾ തന്നെയാണ് രണ്ടാമത്തേതിന്റെയും. ഇത് ബഹുഭുജങ്ങളിൽ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് മാത്രമുള്ള സവിശേഷതയാണ്.

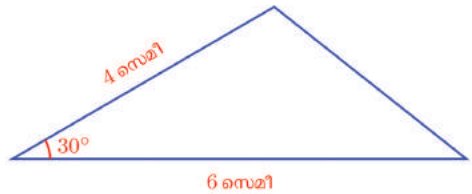
മൂന്നാംവഴി

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തെ കോണുകളും അറിയാമെങ്കിൽ കോണുകൾ മാറാതെ, വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി, മാറ്റി വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് ആദ്യഭാഗത്ത് കണ്ടു: അറിയാവുന്ന വശം വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റിവരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തും അതേ കോണുകൾ വരച്ചാൽ മതി; മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളും അതേ തോതിൽ മാറിക്കൊള്ളും.

മൂന്നു വശങ്ങളുമാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിൽ ഇത്തരത്തിൽ മാറ്റിവരയ്ക്കുന്ന രീതി രണ്ടാം ഭാഗത്തിലും കണ്ടു: എല്ലാ വശങ്ങളും വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി

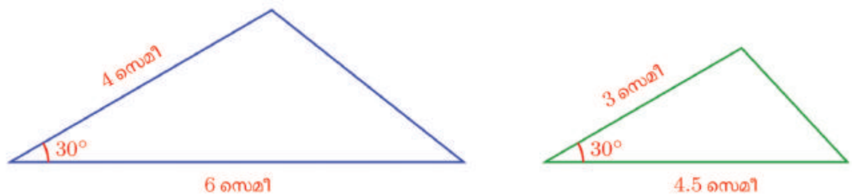
വരച്ചാൽ മതി; കോണുകൾ ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റേതുതന്നെയായിരിക്കും.

ഇനി മാറ്റേണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും, അവ ചേരുന്ന കോണുമാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിലോ? ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കുക.



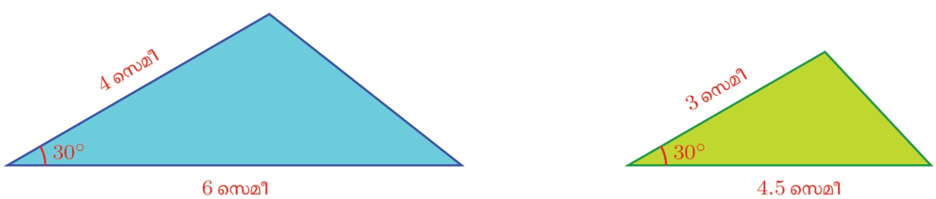
കോണുകൾ മാറാതെ ഇതിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കണം.

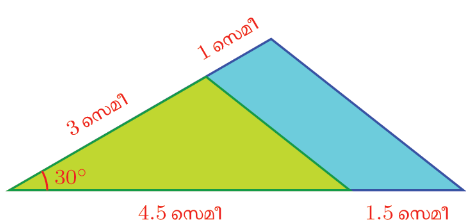
വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും, 4 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും $\frac{3}{4}$ ഭാഗവും അവ ചേരുന്ന കോൺ 30° യുമായി ത്രികോണം വരയ്ക്കാം.



പക്ഷേ ഈ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാംവശവും ആദ്യത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാംവശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാണെന്ന് അറിയില്ലല്ലോ.

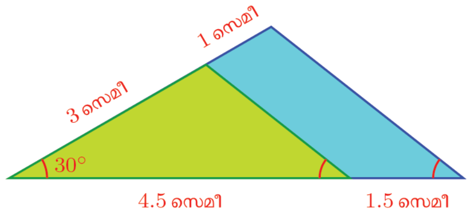
ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, പാഠത്തിന്റെ ആദ്യഭാഗത്തു ചെയ്തതുപോലെ ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കട്ടിക്കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത്, ഇടതുമൂലകൾ ചേർത്തു വയ്ക്കുക. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ മൂലയിലെ വശങ്ങളും ചേർന്നിരിക്കും.





ഇപ്പോൾ പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശം, നീല ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തെയും താഴത്തെ വശത്തെയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഈ വര, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിനു

സമാന്തരമാണ്. അതുകൊണ്ട് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വലതു വശങ്ങൾ താഴത്തെ വശവുമായി ഒരേ ചരിവിലാണ്.

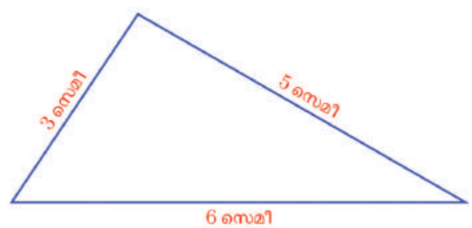


അങ്ങനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാം. അപ്പോൾ ഇവയുടെ വശങ്ങൾ മൂന്നും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്. അങ്ങനെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു വശം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം തന്നെയാണെന്നും കാണാം.

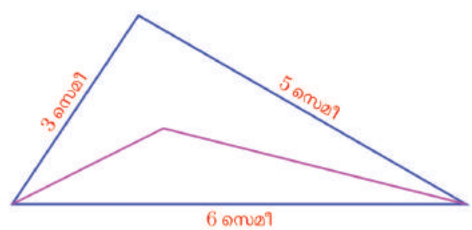
ഇതിൽ അളവുകളും തോതുമെല്ലാം മാറിയാലും, ഇതേ രീതിയിൽത്തന്നെ മേൽപ്പറഞ്ഞ നിഗമനത്തിലെത്താമല്ലോ.

രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലും, അവ ചേരുന്നത് ഒരേ കോണിലുമായ ത്രികോണങ്ങളിൽ മൂന്നാം വശങ്ങളിലെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിലാണ്.

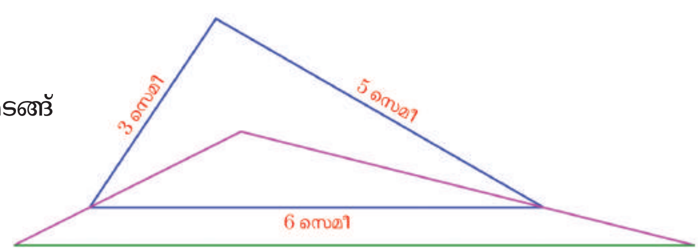
ഈ തത്വമുപയോഗിച്ച്, വശങ്ങളോ കോണുകളോ അളക്കാതെതന്നെ ഒരു ത്രികോണത്തിനെ വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക;



ത്രികോണത്തിനുള്ളിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിക്കുക:

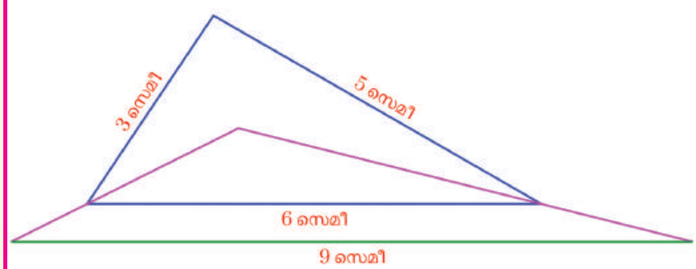


ഈ വരകളോരോന്നും, അവയുടെ ഒന്നര മടങ്ങ് നീട്ടി, അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുക:

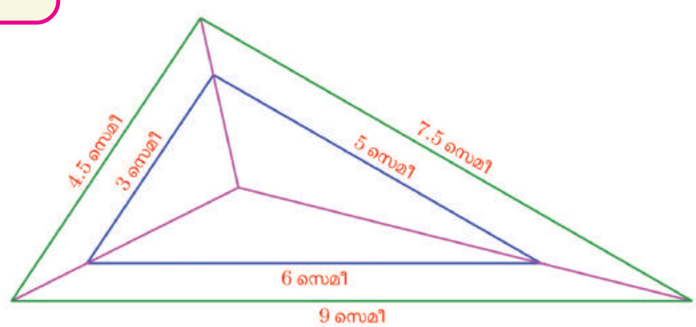


ജിയോജിബ്രയിൽ ത്രികോണങ്ങളുടെ തോത് മാറ്റി വരയ്ക്കാൻ ഒരു വഴിയുണ്ട്. ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. D എന്ന ഒരു ബിന്ദു ത്രികോണത്തിനകത്തോ പുറത്തോ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Ray ഉപയോഗിച്ച് D യിൽനിന്നും ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലേക്ക് വരകൾ വരയ്ക്കുക. Min = 0 ആകത്തക്ക വിധം ഒരു സ്ലൈഡർ g നിർമിക്കുക. D കേന്ദ്രമായി ആരം g * AD വരത്തക്കവിധം ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അത് AD യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. അതുപോലെ D കേന്ദ്രമായി ആരം g * BD ആയി വൃത്തം വരച്ച് BD യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F ഉം, ആരം g * CD വരുന്ന വൃത്തം വരച്ച് CD യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു G യും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇനി വൃത്തങ്ങൾ മറച്ചുവയ്ക്കാം. EFG എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. രണ്ട് ത്രികോണത്തിന്റേയും വശങ്ങളും കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. g = 1 ആകുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? g ആയി 0.5, 2 എന്നിങ്ങനെ എടുക്കുമ്പോഴോ? D യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഇപ്പോൾ പുതിയൊരു ത്രികോണവും അതിനുള്ളിലൊരു ചെറുത്രികോണവുമായി. വരച്ചതിന്റെ കണക്കനുസരിച്ച്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും ഭാഗങ്ങളുടെ ഒന്നര മടങ്ങാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും ഭാഗങ്ങൾ; ഈ വശങ്ങൾ ചേരുന്നത് രണ്ടു ത്രികോണത്തിലും ഒരേ കോണായതിനാൽ, വലിയ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ വശവും, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാംവശത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങാണ്.



ത്രികോണത്തിനകത്തെ ബിന്ദു, മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുമായി ഇതേപോലെ യോജിപ്പിച്ചു നീട്ടിയാലോ?



വശങ്ങളെല്ലാം ഒന്നര മടങ്ങായില്ലേ? വശങ്ങളുടെ നീളമറിയില്ലെങ്കിലും ഇങ്ങനെ മാറ്റിവരയ്ക്കാം.

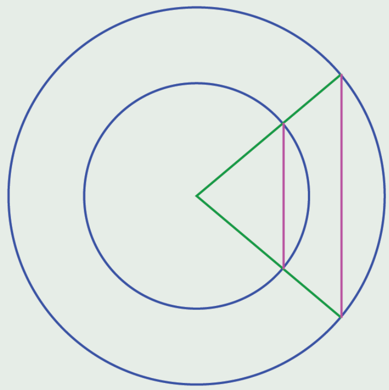
വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലായ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശം (similar) ആണെന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇതുവരെ കണ്ട തത്വങ്ങളനുസരിച്ച് ഇങ്ങനെ പറയാം,

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാകാൻ, ചുവടെപ്പറയുന്ന ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ബന്ധമുണ്ടായാൽ മതി.

- ഒരേ കോണുകളാകുക
- വശങ്ങളിലെയെല്ലാം മാറ്റം ഒരേ തോതിലാകുക.
- രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാകുകയും, അവ ഒരേ കോണിൽ ചേരുകയും ചെയ്യുക.

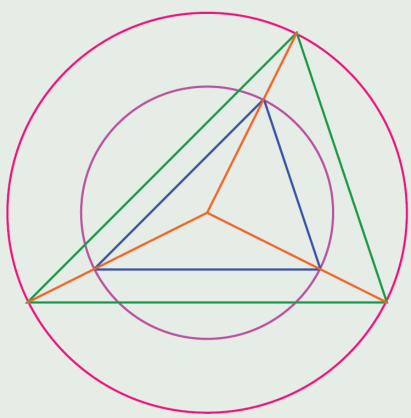
സദൃശത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Dilate from Point ഉപയോഗിക്കാം. Min = 0 വരത്തക്ക വിധം സ്ലൈഡർ a ഉണ്ടാക്കുക. ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന് അകത്തോ പുറത്തോ ആയി ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Dilate from Point ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിലും തുടർന്ന് ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Scale Factor ആയി a എന്ന് നൽകുക. ത്രികോണത്തിന് സദൃശമായി മറ്റൊരു ത്രികോണം കിട്ടും. a യും ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനവും മാറ്റി നോക്കൂ. ത്രികോണത്തിന് പകരം ഏത് രൂപത്തിന്റെയും സദൃശരൂപങ്ങൾ ഇതുപോലെ നിർമിക്കാം.

(1) ചിത്രത്തിലെ രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾക്കും ഒരേ കേന്ദ്രമാണ്. വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് ആരങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ആരങ്ങൾ ചെറിയ വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഇങ്ങനെയുണ്ടായ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ പരിവൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ വരകൾ നീട്ടി, അതേ കേന്ദ്രമായ മറ്റൊരു വൃത്തത്തിൽ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണംകൂടി ഉണ്ടാക്കുന്നു.



i) ഈ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

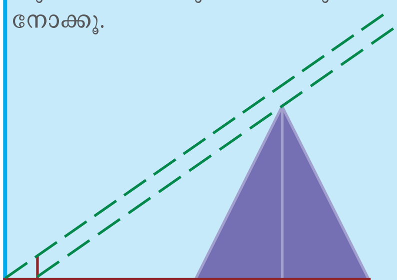
ii) ത്രികോണങ്ങളിലെ വശങ്ങൾ മാറിയ തോത്, വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ മാറിയ തോതു തന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

വളരെപ്പഴയ നിഴൽക്കണക്ക്

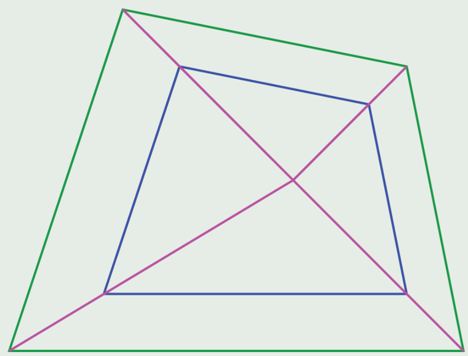
ഗ്രീസിലെ ഗണിതജ്ഞനായ ഥേലീസ്, ത്രികോണങ്ങളുടെ തുല്യത എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച്, കടലിൽക്കിടക്കുന്ന കപ്പലിലേക്കുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കിയ കഥ കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ?

ഥേലീസിനെക്കുറിച്ചുതന്നെ മറ്റൊരു കഥയുണ്ട്. ഈജിപ്റ്റിലെ രാജാവ്, ഒരു പിരമിഡിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കാൻ ഥേലീസിനോട് ആവശ്യപ്പെട്ടുവത്രേ. ഥേലീസിന്റെ മാർഗം ഇങ്ങനെയാണ് രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്. “പിരമിഡിന്റെ നിഴലിന്റെ അറ്റത്ത്, സ്വന്തം വടി കുത്തിനിർത്തി, സൂര്യരശ്മികളുണ്ടാക്കിയ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ, നിഴലുകളുടെ അംശബന്ധം, പിരമിഡിന്റേയും വടിയുടേയും അംശബന്ധത്തിനു തുല്യമാണെന്ന് കാണിച്ചു.”

ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം നോക്കൂ.



(3) ഒരു ചതുർഭുജത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവും ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ, ഒരേ തോതിൽ പുറത്തേക്കു നീട്ടുന്നു; ഈ വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ചതുർഭുജമുണ്ടാക്കുന്നു.



i) വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, ചെറിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെ ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കിയതാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ABCD എന്ന ചതുർഭുജം വരച്ച് അതിനകത്ത് E എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Min = 0 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ k നിർമിക്കുക. Ray Tool ഉപയോഗിച്ച് E യിൽനിന്ന്, A യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വര വരയ്ക്കുക. E കേന്ദ്രമായി ആരം k*EA എന്ന് നൽകി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇതുപോലെ EB, EC, ED എന്നീ വരകൾ നീട്ടി വരച്ച് ആരം k*EB, k*EC, k*ED ആയ വൃത്തങ്ങൾ വരച്ച് വരകളുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ G, H, I ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ചതുർഭുജം FGHI വരയ്ക്കുക. രണ്ട് ചതുർഭുജങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തി അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണക്കാക്കുക. ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ആദ്യത്തെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളും സ്ലൈഡറിന്റെ വിലയും മാറ്റി മാറ്റി നോക്കൂ.

ഗവേഷണം

സദൃശ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോൺസമഭാജികൾ, നടുവരകൾ, പരിവൃത്ത ആരങ്ങൾ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

സ്റ്റാൻഡേർഡ് IX

ഗണിതം

ഭാഗം – 2

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി, കേരളം
2019

NT-827-1-MATHS-9-M-VOL.2

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

അളവുകളിലൂടെയും അവയുടെ പരസ്പര ബന്ധങ്ങളിലൂടെയും ലോകത്തെ മനസ്സിലാക്കാനാണ് മനുഷ്യർ പലതരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കിയത്. ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളും രൂപപ്പെടുന്നതും, അത്തരം അളവുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഭൗതിക സാഹചര്യങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് ഈ സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകൾ നിർവചിക്കപ്പെടുന്നതെല്ലാം ഇതുവരെയുള്ള ഗണിതപഠനത്തിൽ കണ്ടു. എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ടോ ഭിന്നസംഖ്യകൾകൊണ്ടോ സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെയും അവ സൂചിപ്പിക്കാനുള്ള പുതിയ സംഖ്യകളെയും ഈ പുസ്തകത്തിൽ പരിചയപ്പെടാം.

ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ പഠനവും ഇതിൽ തുടരുന്നു. സമാന്തരവരകളും ത്രികോണങ്ങളും വൃത്തങ്ങളുമെല്ലാം തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധങ്ങളാണ് പ്രധാനമായും ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. അവ തിരിച്ചറിയുന്നതിലൂടെ പുതിയ ജ്യാമിതീയ തത്വങ്ങളും പ്രയോഗങ്ങളും രൂപപ്പെടുന്നത് വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ചലനാത്മകമായി ജ്യാമിതി അവതരിപ്പിക്കാൻ ജിയോജിബ്ര എന്ന കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രോഗ്രാം ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതിയും വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. കൂടുതൽ പഠനവിഭവങ്ങൾ സമഗ്രപോർട്ടൽ, ക്യൂ.ആർ. കോഡ് എന്നിവ മുഖേന ലഭ്യമാണ്.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജെ. പ്രസാദ്

ഡയറക്ടർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ – താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ്:

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയ സേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക. സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സംസ്കാരസമന്വയത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

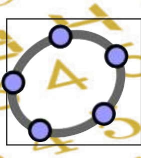
(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽകൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക.

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

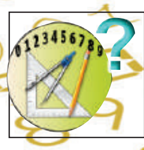
ഉള്ളടക്കം

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.


ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത


കണക്ക് ചെയ്തുനോക്കാം


ഗവേഷണം

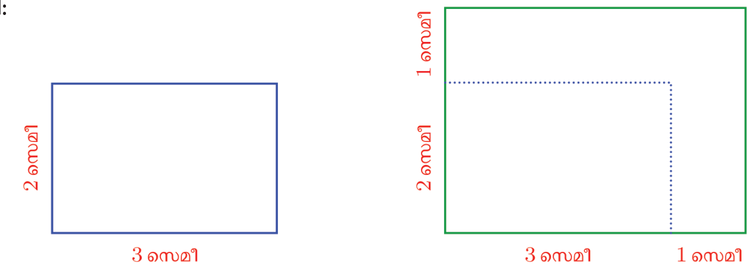

ചർച്ചചെയ്യാം


എൻ.എസ്.ക്യൂ.എഫ്.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

അളവുകളുടെ ബീജഗണിതം

വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 സെന്റിമീറ്റർ വീതം നീട്ടി, അൽപംകൂടി വലിയ ചതുരമാക്കി:



പുതിയ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവെന്താണ്?

ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും; ചുറ്റളവ് 14 സെന്റിമീറ്റർ.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം:

ആദ്യം ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 10 സെന്റിമീറ്റർ, നാലു വശത്തിലും 1 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂടി; ആകെ 4 സെന്റിമീറ്റർ കൂടി. പുതിയ ചുറ്റളവ്, $10 + 4 = 14$ സെന്റിമീറ്റർ.

വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററാണ് നീട്ടിയതെങ്കിലോ? രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതുപോലെ ആലോചിച്ചാൽ, ഓരോ വശത്തിലും 2 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂടി. ആകെ കൂടിയ നീളം $4 \times 2 = 8$ സെന്റിമീറ്റർ; പുതിയ ചുറ്റളവ് $10 + 8 = 18$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാൻ എളുപ്പമാണല്ലോ. കൂട്ടിയ നീളം $2\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററാണെങ്കിൽ, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്,

$$\left(4 \times 2\frac{1}{2}\right) + 10 = 20 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഓരോ വശവും കൂട്ടിയത് എത്ര സെന്റിമീറ്ററായാലും, അതിന്റെ നാലു മടങ്ങ് 10 സെന്റിമീറ്ററിനോട് കൂട്ടിയാൽ, പുതിയ ചുറ്റളവായി.

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതാം; ഓരോ വശവും കൂട്ടിയത് x സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, പുതിയ ചുറ്റളവ് p സെന്റിമീറ്ററെന്നും എഴുതിയാൽ,

$$p = 4x + 10$$

ഇനി പല നീളങ്ങൾ കൂട്ടുന്നതനുസരിച്ച്, മാറുന്ന ചുറ്റളവുകൾ പെട്ടെന്നെഴുതാമല്ലോ.

3 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് 22 സെന്റിമീറ്റർ

$3\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് 24 സെന്റിമീറ്റർ

$3\frac{3}{4}$ സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് 25 സെന്റിമീറ്റർ

ബീജഗണിതരീതിയിൽ ഇതൽപംകൂടി ചുരുക്കിയെഴുതാം;

$x = 3$ എന്നെടുത്താൽ $p = 22$

$x = 3\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ $p = 24$

$x = 3\frac{3}{4}$ എന്നെടുത്താൽ $p = 25$

ഇതിനിയും ചുരുക്കിയെഴുതാൻ ഒരു ബീജഗണിതരീതിയുണ്ട്;

$$p(3) = 22$$

$$p\left(3\frac{1}{2}\right) = 24$$

$$p\left(3\frac{3}{4}\right) = 25$$

പൊതുവായി ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$p(x) = 4x + 10$$

ഈ ചുരുക്കെഴുത്ത് ഒന്നുകൂടി നോക്കാം. ആദ്യം നമ്മുടെ കണക്ക് സാധാരണഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

വശങ്ങളുടെ നീളം രണ്ടു സെന്റിമീറ്ററും, മൂന്നു സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരു പോലെ കൂട്ടി വലിയ ചതുരമാക്കിയാൽ ആ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, കൂട്ടിയ നീളത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങ് പത്തിനോട് കൂട്ടിയതാണ്. ഉദാഹരണമായി വശങ്ങളെല്ലാം ഒന്നര സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, ചുറ്റളവ് പതിനാറു സെന്റിമീറ്ററാകും.

ഇത് ബീജഗണിതരീതിയിൽ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിയെഴുതാം:

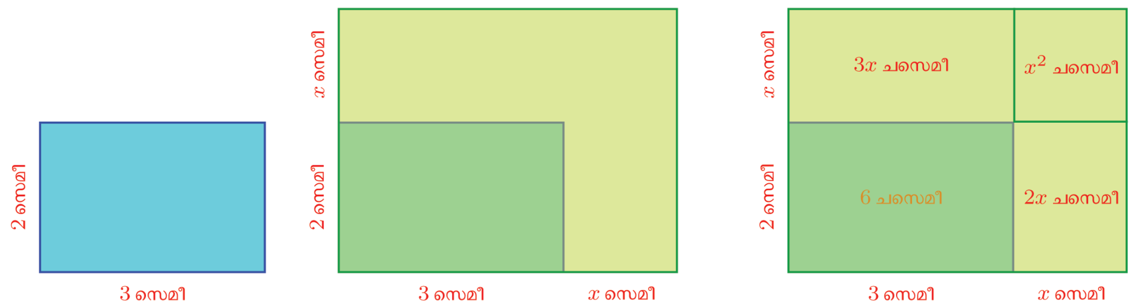
വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വലിയ ചതുരമാക്കിയതിന്റെ ചുറ്റളവ് p സെന്റിമീറ്റർ എന്നെഴുതിയാൽ, $p = 4x + 10$.

ഉദാഹരണമായി, $x = 1\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ, $p = 16$

ഇതിലെ x മാറുന്നതനുസരിച്ചാണ് p മാറുന്നതെന്നു വ്യക്തമാക്കാനായി, p എന്നുമാത്രം എഴുതുന്നതിനുപകരം $p(x)$ എന്നെഴുതാം; അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയത് ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം;

വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വലിയ ചതുരമാക്കിയതിന്റെ ചുറ്റളവ് $p(x) = 4x + 10$. ഉദാഹരണമായി, $p\left(1\frac{1}{2}\right) = 16$

ഇനി, ഈ കണക്കിൽത്തന്നെ പരപ്പളവ് മാറുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. പല നീളങ്ങൾ കൂട്ടുമ്പോൾ പരപ്പളവ് മാറുന്നത് ഒന്നൊന്നായി നോക്കുന്നതിനു പകരം, പൊതുവേ കൂട്ടുന്ന നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം:



ചിത്രത്തിൽനിന്ന്, പുതിയ പരപ്പളവ്

$$6 + 2x + 3x + x^2 = 6 + 5x + x^2$$

(എട്ടാംക്ലാസിലെ **സർവസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം ഓർക്കുക)

ചുറ്റളവ് കണക്കിലെപ്പോലെ, വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂടുമ്പോഴുള്ള പരപ്പളവിനെ $a(x)$ എന്നെഴുതിയാൽ

$$a(x) = x^2 + 5x + 6$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$a(1) = 1 + 5 + 6 = 12$$

$$a\left(1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 6 = 15\frac{3}{4}$$

$$a(2) = 4 + 10 + 6 = 20$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം. ഇതെല്ലാം സാധാരണഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

വശങ്ങളെല്ലാം 1 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ.

വശങ്ങളെല്ലാം $1\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് $15\frac{3}{4}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ.

വശങ്ങളെല്ലാം 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് 20 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളുടെ നീളം 1, 2, 3 സെന്റിമീറ്ററായ ചതുരക്കട്ടയുടെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരുപോലെ കൂട്ടി വലിയ ചതുരക്കട്ടയാക്കിയാൽ വ്യാപ്തം എങ്ങനെ മാറുമെന്നു നോക്കാം. കൂട്ടിയ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വലിയ കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ ഘന സെന്റിമീറ്റർ. ഇതു വിസ്തരിച്ചെഴുതാൻ, ആദ്യം നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ

$$(x + 2)\ (x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

എന്നെഴുതാം. ഇനി ഇതിനെ $x + 1$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം; അതിന് ആദ്യത്തെ തുകയിലെ മൂന്നു സംഖ്യകളിലോരോന്നിനെയും, രണ്ടാമത്തെ തുകയിലെ ഓരോന്നുകൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, കൂട്ടണം.

$$(x + 1)\ (x^2 + 5x + 6) = x^3 + 5x^2 + 6x + x^2 + 5x + 6 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

വിശദമായി പറഞ്ഞാൽ,

വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ചതുരക്കട്ടയുടെ വശങ്ങളെല്ലാം x സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടി വലിയ ചതുരക്കട്ടയാക്കിയതിന്റെ വ്യാപ്തം $v(x)$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ എന്നെഴുതിയാൽ, $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

വ്യത്യസ്തമായ മറ്റൊരു സന്ദർഭം നോക്കാം. 49 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ നേരെ മുകളിലേക്കെറിയുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ മേലോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ, ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയുമെന്നും, 5 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ വേഗം 0 ആകുകയും, തുടർന്ന് ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കൂടുന്ന വേഗത്തോടെ താഴോട്ടു വീഴുമെന്നും കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട് (എട്ടാംക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ, **ന്യൂനവേഗം** എന്ന ഭാഗം) സമയവും ദൂരവുമായുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ സമവാക്യവും അറിയാം. x സെക്കന്റിലെ വേഗം, ഇപ്പോൾ ചെയ്യുന്നതുപോലെ $s(x)$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നെഴുതിയാൽ

$$s(x) = 49 - 9.8x$$

59K727

വ്യത്യസ്ത സമയങ്ങളിലെ വേഗം ഇതിൽനിന്നു കണക്കാക്കാം.

സമയം x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
വേഗം $s(x)$	49	39.2	29.4	19.6	9.8	0	–9.8	–19.6	–29.4	–39.2	–49

ഇതിൽ താഴത്തെ വരിയിലെ പൂജ്യത്തിന്റെ ഇരുവശത്തും ഒരേ സംഖ്യകൾ ന്യൂനമായി വരുന്നതിന്റെ കണക്കെന്താണ്? ഇതിന്റെ ഭൗതികമായ വിശദീകരണം എന്താണ്?

(1) ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം മറ്റേവശത്തിന്റെ നീളത്തേക്കാൾ 1 സെന്റിമീറ്റർ കുറവായ ചതുരങ്ങളിൽ, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുക്കുക.

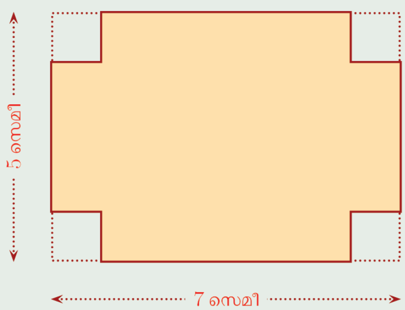
i) ഇവയുടെ ചുറ്റളവുകൾ $p(x)$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, x ഉം $p(x)$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

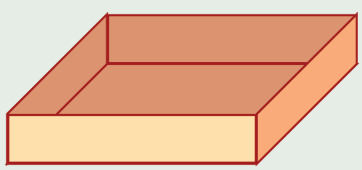
ii) ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ $a(x)$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, x ഉം $a(x)$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

iii) $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$, $p(5)$ എന്നിവ കണക്കാക്കുക. എന്തെങ്കിലും ക്രമം കാണുന്നുണ്ടോ?

iv) $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, $a(4)$, $a(5)$ എന്നിവ കണക്കാക്കുക. എന്തെങ്കിലും ക്രമം കാണുന്നുണ്ടോ?

(2) ചിത്രത്തിൽക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽനിന്നും ചെറു സമചതുരങ്ങൾ വെട്ടിമാറ്റി, മേലോട്ട് മടക്കി, ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാക്കുന്നു.





59U33U

i) വെട്ടിയെടുക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, പെട്ടിയുടെ മൂന്നളവുകളും എഴുതുക.

ii) പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം $v(x)$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്ത്, x ഉം $v(x)$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

iii) $v\left(\frac{1}{2}\right)$, $v(1)$, $v\left(1\frac{1}{2}\right)$ ഇവ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു മീറ്റർ നീളമുള്ള കയറുകൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കാവുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $a(x)$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നുമെടുക്കുക.

i) x ഉം $a(x)$ ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമവാക്യമായി എഴുതുക.

ii) $a(10)$, $a(40)$ ഇവ ഒരേ സംഖ്യ ആകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

iii) x ആയി രണ്ടു വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ $a(x)$ ആയി ഒരേസംഖ്യതന്നെ കിട്ടാൻ, ഈ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്തായിരിക്കണം?

സവിശേഷ വാചകങ്ങൾ

പലതരം അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതുന്നതു കണ്ടല്ലോ. കേവലസംഖ്യകളിന്മേലുള്ള ക്രിയകളായും ഇവയെ കാണാം. ഉദാഹരണമായി ആദ്യത്തെ ചതുരക്കണക്കിൽ വശങ്ങളുടെ നീളം നീട്ടിയതും പുതിയ ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

$$p(x) = 4x + 10$$

എന്നെഴുതി. ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ക്രിയ എന്നതിൽക്കവിഞ്ഞ് പൊതുവെ സംഖ്യകളെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 10 കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയായും ഇതിനെ കാണാം. ഇതുപോലെ നേരത്തെ ചെയ്തു കണ്ട പല ബന്ധങ്ങളും പരിശോധിക്കാം.

- $a(x) = x^2 + 5x + 6$
- $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
- $s(x) = 49 - 9.8x$

ചതുരത്തിൽനിന്ന് പെട്ടിയുണ്ടാക്കിയില്ലേ. ഇത്തരം ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാക്കുന്നത് ജിയോജിബ്രയിൽ കാണിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. Min = 0, Max = 2.5 വരത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a ഉണ്ടാക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം $7 - 2a$, $5 - 2a$ ആയ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇനി ജിയോജിബ്രയിലെ 3D Graphics തുറക്കുക (View → 3D Graphics) നമ്മൾ വരച്ച ചതുരം 3D Graphics ൽ കാണാം. Extrude to Prism or Cylinder ഉപയോഗിച്ച് ഈ ചതുരത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ പെട്ടിയുടെ ഉയരമായി സ്ലൈഡറിന്റെ പേര് നൽകുക. Volume ഉപയോഗിച്ച് പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം അടയാളപ്പെടുത്താം. സ്ലൈഡർ നീക്കി a മാറ്റുമ്പോൾ പെട്ടിയും, വ്യാപ്തവും എങ്ങനെ മാറുന്നുവെന്നു നോക്കുക.

ഇവയെല്ലാം സംഖ്യകളിലെ ക്രിയകളായി കണ്ടാൽ, അവയ്ക്കെല്ലാം പൊതുവായ ചില സ്വഭാവങ്ങൾ കാണാം. x എന്ന സംഖ്യയുടെ പല കൃതികളെ നിശ്ചിതസംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിക്കുകയും, അത്തരം ഗുണനഫലങ്ങൾ കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും മാത്രമാണ് ഇതിലെല്ലാം ചെയ്തിരിക്കുന്നത്; x അല്ലാത്ത ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്തിട്ടുമുണ്ട്. ഇത്തരം ക്രിയകൾ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ബീജഗണിത വാചകത്തിന്റെ പൊതുവായ പേരാണ് **ബഹുപദം (polynomial)**.

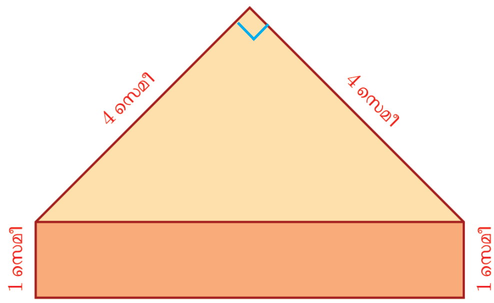
സംഖ്യകളിൽ ഇങ്ങനെയല്ലാത്ത ക്രിയകൾ ചെയ്യുന്ന സാഹചര്യങ്ങളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു വശം മറ്റേ വശത്തിനേക്കാൾ 1 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലായ ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം വികർണങ്ങളുടെ നീളം നോക്കാം.

ചെറിയ വശം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വികർണത്തിന്റെ നീളം

$$\sqrt{x^2+(x+1)^2} = \sqrt{2x^2+2x+1} \text{ സെ.മീ.}$$

ഇതിൽ സംഖ്യകളുടെ വർഗമൂലമെടുക്കുക എന്ന ക്രിയ ഉള്ളതിനാൽ നമ്മുടെ നിർവചനമനുസരിച്ച് ഇതൊരു ബഹുപദമല്ല.

ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ഒരു സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിൽ ഒരു ചതുരം ചേർത്തുവച്ച ഈ രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?

ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 8 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററെന്ന് എളുപ്പം കാണാം. ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശം സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണമായതിനാൽ $4\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $4\sqrt{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ; ആകെ പരപ്പളവ് $8 + 4\sqrt{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം വേറെ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യയായാലോ? ഈ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, മൊത്തം പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\,x \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ 2 ന്റെ വർഗമൂലമുണ്ട്; എന്നാൽ മാറുന്ന സംഖ്യകളിൽ ചെയ്യുന്ന ക്രിയകളിൽ വർഗമെടുക്കലും, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ എന്നീ നിശ്ചിതസംഖ്യകൾകൊണ്ടുള്ള ഗുണനവും മാത്രമേയുള്ളൂ. അപ്പോൾ ഇതും ഒരു ബഹുപദം തന്നെയാണ്.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. പരപ്പളവ് 25 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററായ ചതുരങ്ങളിലെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ ചുറ്റളവ്,

$$2x + \frac{50}{x} \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

ഇതിൽ മാറുന്ന സംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമമെടുക്കുന്ന ക്രിയ ഉള്ളതുകൊണ്ട് ഇതൊരു ബഹുപദമല്ല.

ഒരു ബഹുപദത്തിൽ, മാറുന്ന സംഖ്യകളുടെ കൃതികളാണെടുക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ വരുന്ന ഏറ്റവും വലിയ കൃത്യങ്കത്തെ **ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം (degree of the polynomial)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ മുകളിൽ നിരത്തിയ ബഹുപദങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേതിന്റെ കൃത്യങ്കം 2, രണ്ടാമത്തേതിന്റെ കൃത്യങ്കം 3, മൂന്നാമത്തേതിന്റെ കൃത്യങ്കം 1.

കൃത്യങ്കം 1 ആയ ബഹുപദം എന്നതിനു പകരം ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം (first degree polynomial), കൃത്യങ്കം 2 ആയ ബഹുപദം എന്നതിനു പകരം രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം (second degree polynomial) എന്നിങ്ങനെയെല്ലാം പറയാം.

കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, ബഹുപദങ്ങളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ രൂപം എഴുതാം.

ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം : $ax + b$

രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം : $ax^2 + bx + c$

മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം : $ax^3 + bx^2 + cx + d$

ഇവിടെ a, b, c, d എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ, നിശ്ചിത സംഖ്യകളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. അതായത്, ഒരു നിശ്ചിത ബഹുപദത്തിൽ, a, b, c, d ഇവ മാറ്റുന്നില്ല; x ആയി പല സംഖ്യകൾ എടുക്കുകയും ചെയ്യാം.

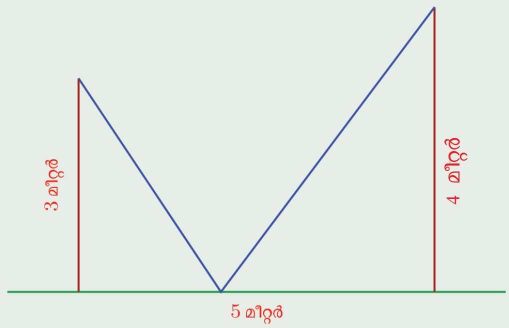
ഈ സംഖ്യകൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ, ഭിന്നസംഖ്യകളോ, ഭിന്നമല്ലാത്ത സംഖ്യകളോ, ന്യൂനസംഖ്യകളോ എന്തുമാകാം. ഇവയെ ബഹുപദത്തിലെ **ഗുണകങ്ങൾ (coefficients)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

(1) ചുവടെയുള്ള കണക്കുകളിലെല്ലാം, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതി ബഹുപദമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. തീരുമാനത്തിന്റെ കാരണവും എഴുതുക.

i) സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിനു ചുറ്റും 1 മീറ്റർ വീതിയിലൊരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും, പാതയുടെ പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

ii) 7 ലിറ്റർ വെള്ളവും, 3 ലിറ്റർ ആസിഡും ചേർന്ന ദ്രാവകത്തിൽ, വീണ്ടും ഒഴിക്കുന്ന ആസിഡിന്റെ അളവും, ദ്രാവകത്തിലെ ആസിഡിന്റെ ശതമാനത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

iii)



3 മീറ്ററും, 4 മീറ്ററും ഉയരമുള്ള രണ്ടു കമ്പുകൾ 5 മീറ്റർ അകലത്തിൽ നിലത്തു കുത്തനെ നാട്ടിയിരിക്കുന്നു. ഒരു കമ്പിന്റെ മുകളിൽനിന്ന് ഒരു കയറു വലിച്ചു നിലത്തുറപ്പിച്ച്, അവിടെ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ കമ്പിലേക്ക് വലിച്ചു കെട്ടണം.

ഒരു കമ്പിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് നിലത്തു കയർ ഉറപ്പിച്ച സ്ഥാനത്തേക്കുള്ള അകലവും മൊത്തം കയറിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

(2) ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ക്രിയകളോരോന്നും ബീജഗണിതവാചകമായി എഴുതുക. ഏതെല്ലാമാണ് ബഹുപദമെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

i) സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക

ii) സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വർഗമൂലത്തിന്റെയും തുക

iii) സംഖ്യയോട് അതിന്റെ വർഗമൂലം കൂട്ടിയതും, സംഖ്യയിൽനിന്ന് വർഗമൂലം കുറച്ചതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം

(3) ചുവടെയുള്ള ബഹുപദങ്ങളിൽ $p(1)$ ഉം $p(10)$ ഉം കണക്കാക്കുക.

i) $p(x) = 2x + 5$

ii) $p(x) = 3x^2 + 6x + 1$

iii) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 7$

(4) ചുവടെയുള്ള ബഹുപദങ്ങളിൽ $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$ ഇവ കണക്കാക്കുക.

i) $p(x) = 3x + 5$

ii) $p(x) = 3x^2 + 6x + 1$

iii) $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$

iv) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 7$

v) $p(x) = 5x^3 - x^2 + 2x - 3$

(5) ചുവടെപ്പറയുന്ന തരത്തിലുള്ള $p(x)$ എന്ന ബഹുപദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $p(1) = 1$ ഉം $p(2) = 3$ ഉം ആയ ഒരു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം

ii) $p(1) = -1$ ഉം $p(-2) = 3$ ഉം ആയ ഒരു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം

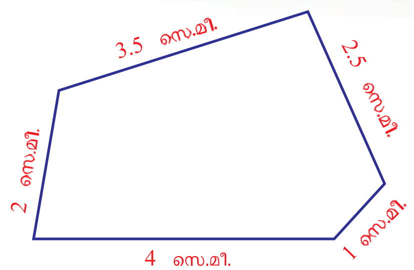
iii) $p(0) = 0, p(1) = 2, p(2) = 6$ ആയ ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം

iv) $p(0) = 0, p(1) = 2,$ ആയ മൂന്നു വ്യത്യസ്ത രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ

9 വൃത്തങ്ങളുടെ അളവുകൾ

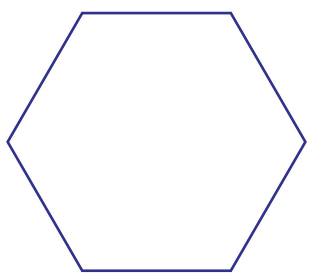
വൃത്തവും ബഹുഭുജങ്ങളും

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം കൂട്ടിയാൽ മതി:



ചുറ്റളവ് $4+1+2.5+3.5+2=13$ സെന്റിമീറ്റർ

സമബഹുഭുജമാണെങ്കിൽ, വളരെ എളുപ്പമായി:

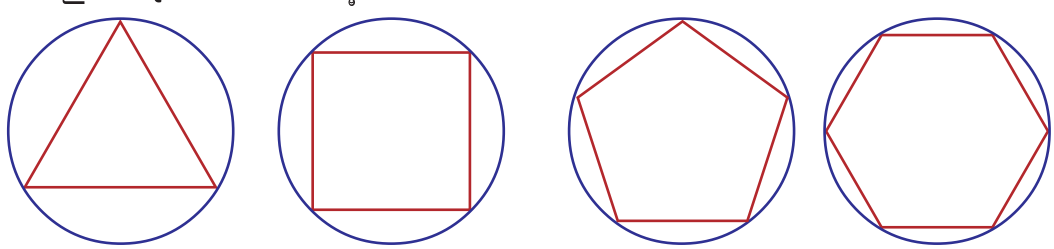


ചുറ്റളവ് $6 \times 2 = 12$ സെന്റിമീറ്റർ

വൃത്തമായാലോ?

നൂലോ ചരടോ വച്ച് അളന്നെടുക്കാം; അളക്കാതെ കണക്കാക്കുന്നതാണല്ലോ ഗണിതരസം.

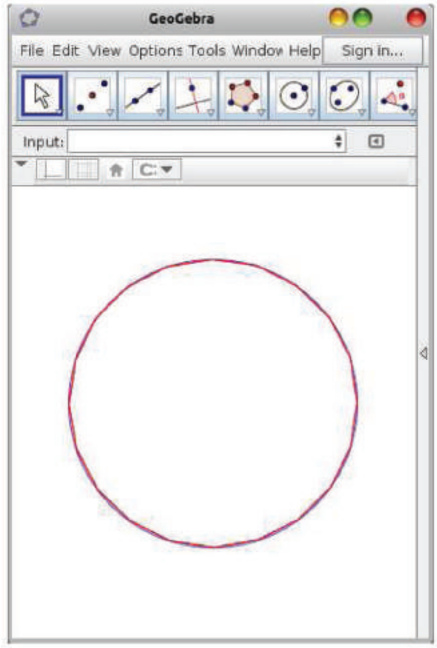
ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.



വൃത്തത്തിനകത്തെ സമബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുംതോറും, അത് വൃത്തത്തിനോടടുക്കുന്നില്ലേ?

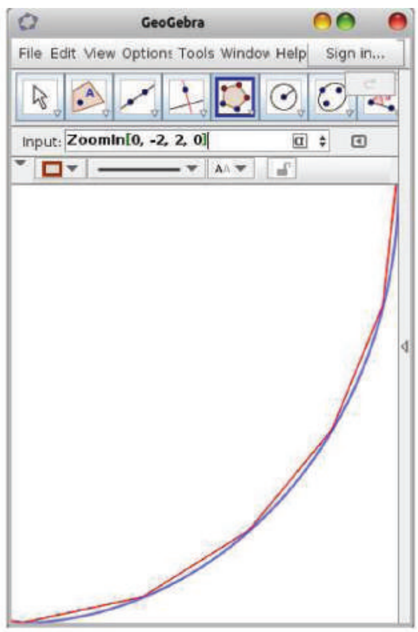
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ 20 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജം GeoGebra യിൽ വരച്ചതാണിത്. വൃത്തവും ബഹുഭുജവും വേർതിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്നില്ല അല്ലേ?



ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തത്തിൽ സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. Min = 3, Max = 100 വരത്തക്കവിധം n എന്ന Integer Slider ഉണ്ടാക്കുക. വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവിലും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലും ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ തുറക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി $\left(\frac{360}{n}\right)^{o}$ എന്ന് എഴുതുക. വൃത്തത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദുകൂടി കിട്ടും. Regular Polygon ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ തുറക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ മൂലകളുടെ എണ്ണം n എന്ന് നൽകുക. n വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജം കിട്ടും. Distance or Length ഉപയോഗിച്ച് ബഹുഭുജത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ അതിന്റെ ചുറ്റളവ് കിട്ടും. ആരം $\frac{1}{2}$ ആയ വൃത്തത്തിൽ ഇത്തരത്തിൽ ക്രമബഹുഭുജങ്ങൾ വരച്ച് അവയുടെ ചുറ്റളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ ചുറ്റളവിന് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

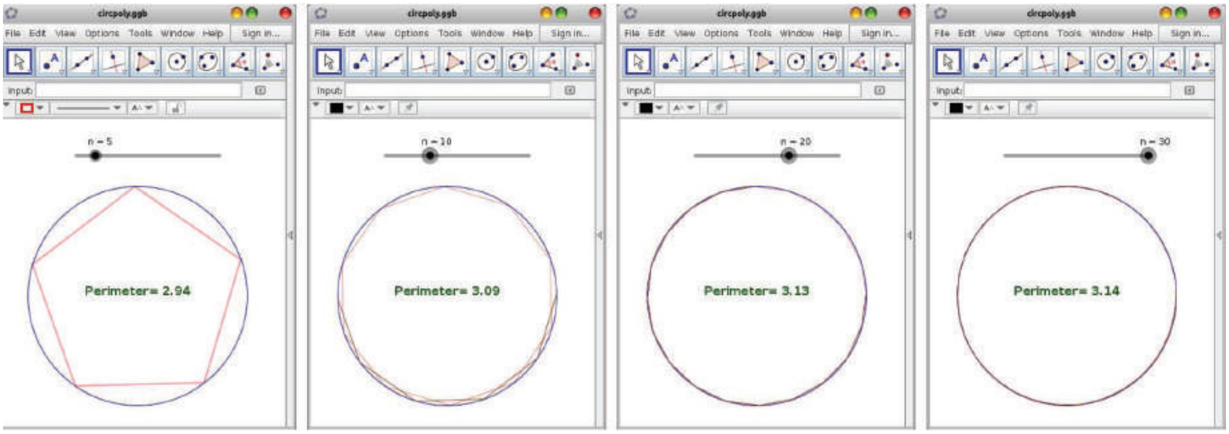
ചിത്രത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം പെരുപ്പിച്ചു കാണിക്കുന്നതാണ് ഈ ചിത്രം.



അപ്പോൾ വശങ്ങളെത്ര കൂടിയാലും ബഹുഭുജം വൃത്തമാകില്ല; എത്രയും അടുത്തുവരാമെന്നു മാത്രം.

ഏതായാലും, ഈ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുത്തടുത്തു വരുമല്ലോ; വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുംതോറും കൂടുതൽ കൂടുതലടുക്കുകയും ചെയ്യും. പ്രാചീനകാലം മുതൽതന്നെ കണക്കുജോലിക്കാർ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവളക്കാൻ ഈ രീതിയാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്.

ഇനിപ്പോൾ ഇതിന്റെ ഗണിതം കൃത്യമായി എഴുതിക്കൊടുത്താൽ, കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കമ്പ്യൂട്ടറിനെക്കൊണ്ട് ചെയ്യിക്കാം. വ്യാസം 1 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ 5, 10, 20, 30 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ ജിയോജിബ്ര കണക്കാക്കിയതിന്റെ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.



ഈ സംഖ്യകൾ, വ്യാസം 1 ആയ (സെന്റിമീറ്ററോ, മീറ്ററോ എന്തായാലും) വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നറിയാം. അപ്പോൾ ചില ചോദ്യങ്ങളുണ്ട്.

5A3Y5H

- 2.94, 3.09, 3.13, 3.14, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഈ സംഖ്യകൾ ഏതു സംഖ്യയുടെ അടുത്തേക്കാണ് നീങ്ങുന്നത്?
- ഈ സംഖ്യയിൽനിന്ന് വ്യാസം 1 അല്ലാത്ത വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവെങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിന് ആദ്യം ഉത്തരം പറയാം.

അതിനുമുമ്പ് ചില കണക്കുകളാവാം.

(1) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം, അതിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം തന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

i) വ്യാസം ഒരു സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

ii) അത്തരമൊരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം വ്യാസം ഒരു സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിലാണ്. സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

(3) വ്യാസം ഒരു സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

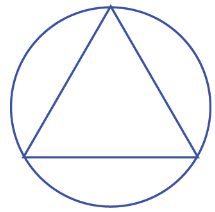
ബഹുഭുജങ്ങളിലൂടെ

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും, സമചതുരത്തിന്റേയും ഷഡ്ഭുജത്തിന്റേയും അളവുകളുമായി താരതമ്യം ചെയ്തുകൊണ്ടുള്ള കണക്കുകൾ പ്രാചീനകാലത്തു തന്നെ കാണാം. ഉദാഹരണമായി, ബി.സി. 1600 ലേതെന്നു കണക്കാക്കപ്പെടുന്ന, ബാബിലോണിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ, വൃത്തത്തിന്റെ അന്തർഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}$ ഭാഗമാണെന്ന് പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്; അതായത് $\frac{24}{25}$ ഭാഗം. ഇത് ഏകദേശം ശരിയുമാണ്.

വൃത്തത്തെ ഒറ്റപ്പെട്ട ബഹുഭുജങ്ങളുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിനു പകരം, ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂട്ടിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ, ക്രമേണ വൃത്തത്തിനോടടുക്കാം എന്ന ചിന്ത ഗ്രീസിലാണ് ഉണ്ടായത്. ബി.സി. അഞ്ചാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ആന്റിഫോൺ അവതരിപ്പിച്ച ഈ ആശയം, നാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന യൂഡോക്സസ് കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാക്കി. ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ക്രിയാപദ്ധതി ആവിഷ്കരിച്ചത്, ബി.സി. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന, ലോകത്തിലെ തന്നെ എക്കാലത്തേയും മികച്ച ശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ ഒരാളായ ആർക്കിമിഡിസ് ആണ്.

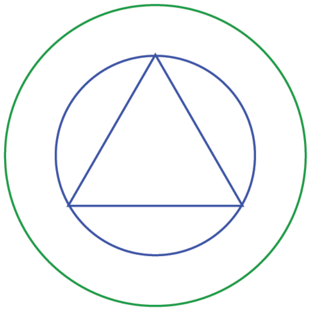
വ്യാസവും ചുറ്റളവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

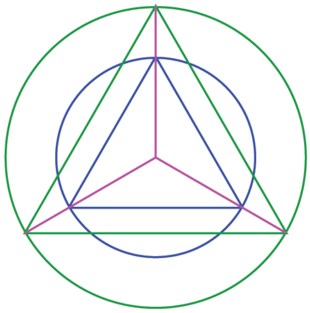


വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇതേ കേന്ദ്രമായി, അൽപം വലിയൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക



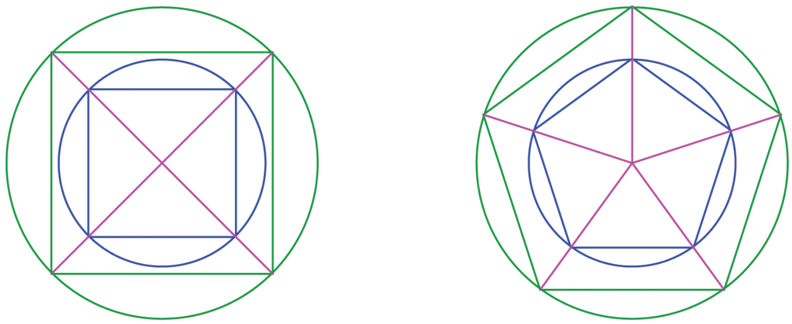
വൃത്തകേന്ദ്രവും ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ നീട്ടി, വലിയ വൃത്തത്തിൽ മുട്ടിക്കുക; ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച്, ഒരു വലിയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.



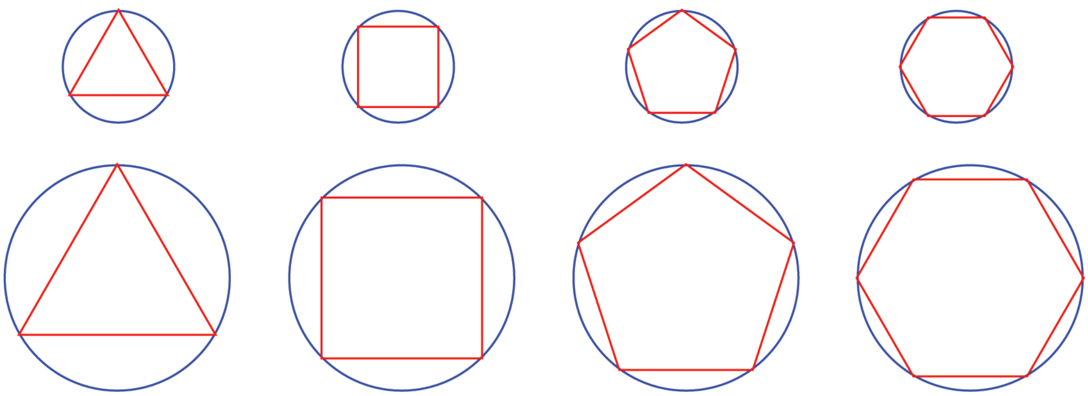
ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം മാറിയത്, വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങളുടെ തോതിലാണല്ലോ. (**സദൃശത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ, **മൂന്നാംവഴി** എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള രണ്ടാമത്തെ കണക്ക്).

അപ്പോൾ വൃത്തങ്ങളിലെ സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളും, അതിനാൽ ചുറ്റളവുകളും ആരങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണ്; ആരങ്ങളുടെ അംശബന്ധംതന്നെയാണ് വ്യാസങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും.

ത്രികോണങ്ങൾക്കു പകരം മറ്റു ബഹുഭുജങ്ങളെടുത്താലും ഇതുപോലെ ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ച്, ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, വ്യാസങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധമാണെന്നു കാണാം.



ഇനി ഒരു വൃത്തത്തിലും, വ്യാസം രണ്ടു മടങ്ങായ വൃത്തത്തിലും, സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു എന്നു കരുതുക.



ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ, അതതു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിലേക്കാണ് നീങ്ങുന്നത്; വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ, അതിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെയെല്ലാം ചുറ്റളവ്, ചെറിയ വൃത്തത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

ഇക്കാര്യം സംഖ്യാപരമായി നോക്കാം. ചെറിയ വൃത്തത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് p_1, സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് p_2, പഞ്ചഭുജത്തിന്റേത് p_3, എന്നിങ്ങനെ എടുക്കാം; ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് c എന്നും. അപ്പോൾ p_1, p_2, p_3, . . . എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സംഖ്യകൾ c എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തുവരും.

വലിയ വൃത്തത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ $2p_1$, $2p_2$, $2p_3$, . . . എന്നാണല്ലോ. p_1, p_2, p_3, . . . എന്നീ സംഖ്യ

ജിയോജിബ്രയിൽ a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡറും m, n എന്നീ പേരുകളിൽ രണ്ട് Interger Slider ഉം നിർമിക്കുക. ആരം a ആയി ഒരു വൃത്തവും ആരം ma ആയി മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. രണ്ട് വൃത്തങ്ങളിലും വശങ്ങളുടെ എണ്ണം n വരത്തക്കവിധം സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരച്ച് അവയുടെ ചുറ്റളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. m = 2 ആകുമ്പോൾ (വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം ചെറുതിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങ്) . ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? ബഹുഭുജങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം മാറ്റി നോക്കൂ. m = 3 ആകുമ്പോഴോ? ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എന്തായാലും ഈ ബന്ധങ്ങൾ നിലനിൽക്കുന്നുണ്ടോ? a മാറ്റി നോക്കൂ.

കൾ c യോട് അടുക്കുന്നതിനാൽ $2p_1, 2p_2, 2p_3, \ldots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ $2c$ യോടടുക്കും; അതായത്, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്.

ജ്യാമിതീയമായി നോക്കുമ്പോൾ വലിയ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുക്കുന്നു എന്നാണ് കാണുന്നത്. സംഖ്യാപരമായി ആലോചിക്കുമ്പോൾ അവ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് അടുക്കുന്നുവെന്നും കിട്ടുന്നു. അങ്ങനെ വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്നുവരുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം രണ്ടു മടങ്ങിനു പകരം മറ്റെതെങ്കിലും മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആണെങ്കിൽ, ചുറ്റളവും അതേ തോതിൽ മാറുമെന്ന് ഇതുപോലെ കാണാം.

വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ മാറുന്നത്, വ്യാസങ്ങളുടെ തോതിലാണ്.

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം;

വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, വ്യാസങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ, വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, ഏതു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കാനും വ്യാസത്തിനെ ഈ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതി.

അങ്ങനെ ആദ്യഭാഗത്ത് ചോദിച്ച രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരമായി.

?

(1) ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു വരച്ച സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 24 സെന്റിമീറ്റർ.

i) ഇതേ വൃത്തത്തിൽ മൂലകളെടുത്തു വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

ii) ഈ വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിൽ മൂലകളെടുത്തു വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്?

iii) ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തിന്റെ പകുതി വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിൽ മൂലകളെടുത്തു വരയ്ക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവെത്രയാണ്?

(2) ഒരു കമ്പി വളച്ച് 4 സെന്റിമീറ്റർ വ്യാസമുള്ള വൃത്തമുണ്ടാക്കി. ഇതിന്റെ പകുതി നീളമുള്ള കമ്പി വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമെന്തായിരിക്കും?

(3) വ്യാസം 2 മീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് ഏകദേശം 6.28 മീറ്ററാണെന്നു അളന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു. വ്യാസം 3 മീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവെത്രയാണെന്ന് അളക്കാതെ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

പുതിയൊരു സംഖ്യ

വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എന്താണെന്ന ആദ്യത്തെ ചോദ്യം പരിശോധിക്കാം.

ആദ്യഭാഗത്തു കണ്ടതുപോലെ ഇങ്ങനെയൊരു വൃത്തത്തിൽ മൂലകളായി വരയ്ക്കുന്ന സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കിയാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് ഏകദേശം തുല്യമായ സംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപം കിട്ടും. സാധാരണയായി ജിയോജിബ്രയിൽ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കൃത്യമായാണ് സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നത്. ഇത് പതിനഞ്ചു ദശാംശസ്ഥാനം വരെയാക്കാം (Options → Rounding) നാലു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ എടുത്താൽ ഈ സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ കിട്ടും:

വശങ്ങൾ	ചുറ്റളവ്	വശങ്ങൾ	ചുറ്റളവ്
3	2.5981	15	3.1187
4	2.8284	20	3.1287
5	2.9389	25	3.1333
6	3.0000	30	3.1359
7	3.0372	35	3.1374
8	3.0615	40	3.1384
9	3.0782	45	3.1390
10	3.0902	50	3.1395

അപ്പോൾ വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് ഏകദേശം 3.14 നോടടുത്ത ഒരു സംഖ്യയാണെന്നു കാണാം.

വശത്തിന്റെ നീളം 1 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം പോലെ തന്നെ, വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി എഴുതാൻ കഴിയില്ല. വികർണക്കണക്കുപോലെ ഇതു തെളിയിക്കുക അത്ര എളുപ്പമല്ല; പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ് ഒരു തെളിവ് കണ്ടുപിടിച്ചത്.

$\sqrt{2}$, $2 + \sqrt{3}$ എന്നീ സംഖ്യകളിൽ നിന്ന് ഈ സംഖ്യയ്ക്ക് ഒരു പ്രധാന വ്യത്യാസമുണ്ട്; ഇതിനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയോ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയോ മൂലങ്ങളൊന്നും ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാൻ കഴിയില്ല. ഗണിതത്തിൽ ഈ സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഒരു പ്രത്യേക ചിഹ്നമുണ്ട്: π

ഗ്രീക്ക് ഭാഷയിലെ “പൈ” (pi) എന്ന അക്ഷരമാണിത്.

അതായത്, വ്യാസം 1 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് π സെന്റിമീറ്റർ, വ്യാസം 2 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 2π സെന്റിമീറ്റർ; വ്യാസം

5ACU75

$1\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $\frac{3}{2}\pi$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ.

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, അതിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ π മടങ്ങാണ്.

പലപ്പോഴും വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നത് നിശ്ചിത ആരത്തിൽ ആയതിനാൽ ഇക്കാര്യം ആരത്തിന്റെ കണക്കായാണ് സാധാരണയായി പറയുന്നത്.

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, അതിന്റെ ആരത്തിന്റെ 2π മടങ്ങാണ്.

പേരു വന്ന വഴി

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് മാറുന്നത് വ്യാസത്തിന്റെ തോതിലാണെന്ന് അറിഞ്ഞതോടെ, എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും ചുറ്റളവ്, വ്യാസത്തിന്റെ ഒരേ മടങ്ങാണെന്ന് തിരിച്ചറിഞ്ഞു. എത്ര മടങ്ങ്, എന്നായി പിന്നീടുള്ള അന്വേഷണം.

ആദ്യകാലത്ത് ഈ സംഖ്യയുടെ ഏകദേശവിലകളായ ഭിന്നസംഖ്യകളാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. വിവിധ ദേശങ്ങളിൽ, വിവിധ കാലത്ത്, ഇത്തരം ഏകദേശവിലകൾ കൂടുതൽ മെച്ചപ്പെട്ടു. ഈ സംഖ്യ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി എഴുതാൻ കഴിയില്ലെന്ന് തെളിയിച്ചത് വളരെക്കാലത്തിനുശേഷമാണെങ്കിലും, ഇക്കാര്യം നേരത്തെതന്നെ തിരിച്ചറിഞ്ഞിട്ടുണ്ടാകണം.

ഈ വൃത്തസംഖ്യയ്ക്ക് π എന്ന പേരിട്ടത് എ.ഡി. 1707 ൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ വില്യം ജോൺസ് എന്ന (അത്രയൊന്നും പ്രസിദ്ധനല്ലാത്ത) ഗണിതകാരനാണ്.

സ്വിറ്റ്സർലാണ്ടിൽ ജനിച്ച പ്രസിദ്ധ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ലിയോൺഹാർഡ് ഓയ്ലെർ (Leonhard Euler) അദ്ദേഹത്തിന്റെ കൃതികളിൽ ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങിയതോടെയാണ്, ഈ ചിഹ്നത്തിനു പ്രചാരം ലഭിച്ചതും, അത് ഉറച്ചതും.

ഭിന്നസംഖ്യ അല്ലാത്തതിനാൽ, π യോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാനേ കഴിയൂ. ബി.സി മൂന്നാംനൂറ്റാണ്ടിൽ, ഗ്രീസിലെ ആർക്കിമീഡീസ് 96 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജമുപയോഗിച്ച്, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വ്യാസത്തിന്റെ $3\frac{10}{71}$ മടങ്ങിനേക്കാൾ കൂടുതലും $3\frac{1}{7}$ മടങ്ങിനേക്കാൾ കുറവുമാണെന്ന് കണക്കാക്കി. ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, നാലു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ.

$$3.1408 < \pi < 3.1428$$

(ആർക്കമിഡീസ് നിശ്ചയിച്ച $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ ആണ്, ഏറെക്കാലം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്)

എ.ഡി. പതിനാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കേരളത്തിലെ മാധവൻ, എത്ര കൃത്യതയിലും π കണക്കാക്കാൻ, ജ്യാമിതി ഉപയോഗിക്കാതെ തികച്ചും സംഖ്യാപരമായ ഒരു മാർഗം കണ്ടുപിടിച്ചു. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\pi = 3.1415926535\ldots$$

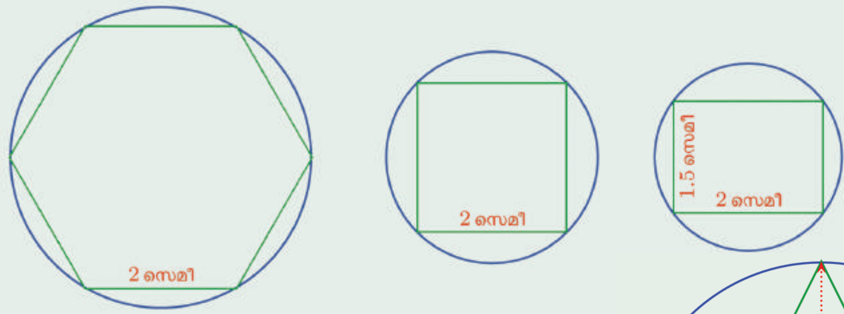
എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

പ്രായോഗികപ്രശ്നങ്ങളിൽ സാധാരണയായി നാലു ദശാംശം വരെ മാത്രമേ π ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരാറുള്ളൂ. ഉദാഹരണമായി, ആരം 5 മീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കിയാൽ

$$\pi \times 2 \times 5 \approx 31.416 \text{ മീറ്റർ}$$

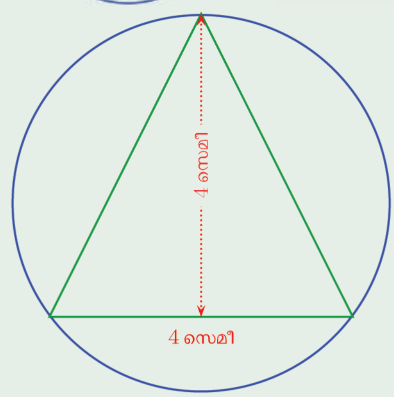
ഇനിയുള്ള കണക്കുകളിലെല്ലാം, ചുറ്റളവ് π യുടെ ഗുണിതമായി എഴുതിയാൽ മതി.

(1) ചുവടെ ചിത്രങ്ങളിൽ മൂലകളെല്ലാം വൃത്തങ്ങളിലായ സമഷഡ്ഭുജം, സമചതുരം, ചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു. വൃത്തങ്ങളുടെയെല്ലാം ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

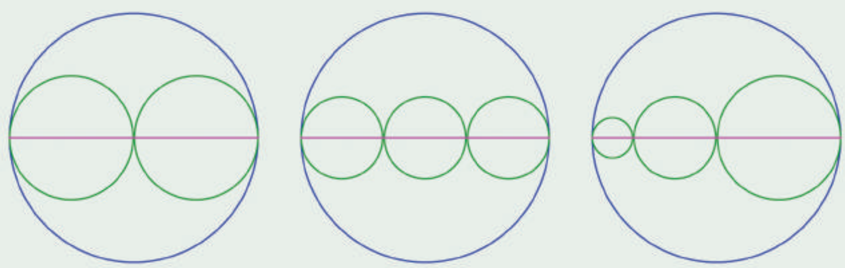


(2) ചിത്രത്തിൽ, വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവെത്രയാണ്?

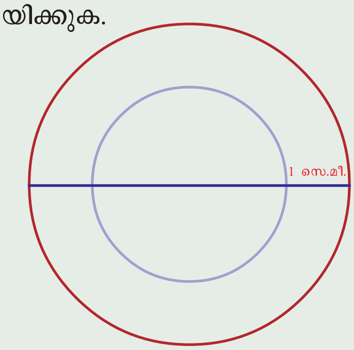


(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിലെല്ലാം, വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ ഒരേ വരയിലാണ്. ആദ്യത്തെ രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിൽ, ചെറിയ വൃത്തങ്ങൾക്ക് ഒരേ വ്യാസമാണ്:



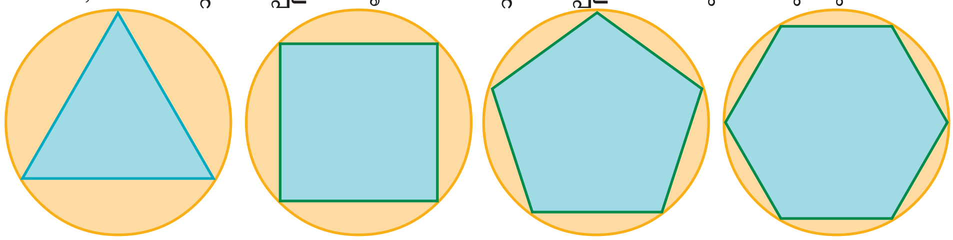
എല്ലാ ചിത്രങ്ങളിലും, ചെറിയ വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകളുടെ തുകയാണ് വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിൽ, ഒരേ കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ചിത്രത്തിലെ വര, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്. വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

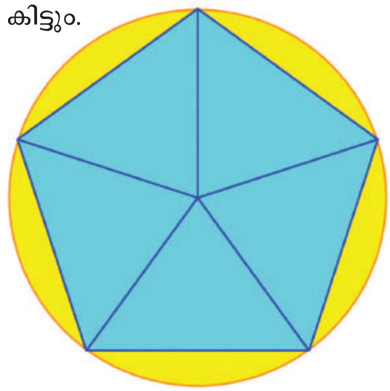


പരപ്പളവ്

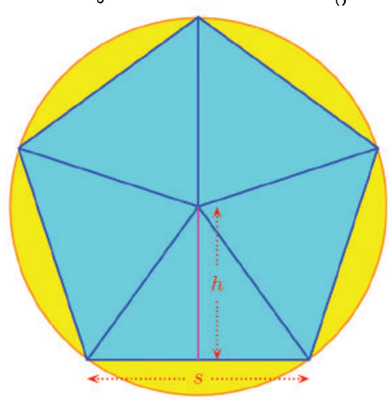
വൃത്തത്തിനകത്തെ സമബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച് അതിന്റെ ചുറ്റളവ് വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുക്കുന്നതുപോലെ, അതിന്റെ പരപ്പളവ് വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോടും അടുക്കും:



വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, അതിനുള്ളിലെ സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കൂടുന്നു എന്നു കണക്കാക്കിയാൽ മതി. വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ബഹുഭുജത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച്, ബഹുഭുജത്തിനെ തുല്യത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിയാൽ ബഹുഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കിട്ടും.



പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം s എന്നും, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം h എന്നുമെടുത്താൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}sh$



ചരിത്രത്തിലൂടെ π

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ചിന്തകൾക്ക് നാലായിരത്തോളം ആണ്ടുകളുടെ പഴക്കമുണ്ടെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇന്നത്തെ ഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഇവയെല്ലാം π എന്ന സംഖ്യയുടെ അടുത്തുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ശ്രമങ്ങളായി വ്യാഖ്യാനിക്കാം.

പുരാതന ഈജിപ്റ്റിൽ നിന്നുള്ള ആഹ്മോസ് പപ്പൈറസിനെക്കുറിച്ച് എട്ടാം ക്ലാസിൽ കേട്ടല്ലോ. അതിലെ ഒരു കണക്കു ചെയ്യാനുപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന മാർഗം, ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ നോക്കിയാൽ π എന്നത് $\frac{256}{81} \approx 3.16$ എന്നു കിട്ടും. ഏതാണ്ട് ഇക്കാലത്തുതന്നെയുള്ള (ബി.സി. 1500) ബാബിലോണിയയിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ നിന്ന്, ഇത്, $\frac{25}{8} = 3.125$ എന്നു കിട്ടും. ബി.സി. പത്താം നൂറ്റാണ്ടിലേതെന്നു കരുതപ്പെടുന്ന, ഭാരതത്തിലെ ശതപഥബ്രാഹ്മണമെന്ന കൃതിയിൽ, ഇത് $\frac{339}{108} = 3.138$ ആണ്.

വൃത്തത്തിനകത്തും പുറത്തും 96 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജം വരച്ച്, ആർക്കിമിഡിസ് കണ്ടുപിടിച്ചത്, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ എന്നാണ്. അതായത് $3.1408 < \pi < 3.1428$.

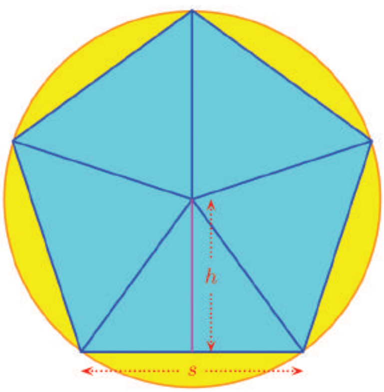
എ.ഡി. 480 ൽ ചൈനയിലെ ചൂഷാങ്ഴി, ഈ രീതിയിൽ 12288 വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജങ്ങളുപയോഗിച്ച് $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ എന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു. ഇത് എട്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ ശരിയാണ്. ഏതാണ്ട് ആയിരം കൊല്ലങ്ങൾക്കു ശേഷമാണ് ഇതിനേക്കാൾ അടുത്ത ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ചത്.

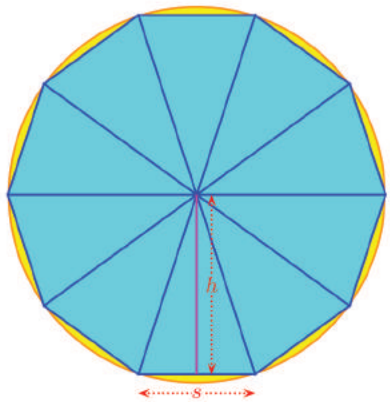
ഇത്തരം അഞ്ചു ത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് പഞ്ചഭുജം; അതിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ്

$$5 \times \frac{1}{2} sh = \frac{1}{2} \times 5s \times h$$

ഇതിലെ s എന്നത് പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ, $5s$ എന്നത് പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്; ഇതിനെ p എന്നെഴുതിയാൽ, പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ph$

സമപഞ്ചഭുജത്തിനു പകരം, ഏതു സമബഹുഭുജമെടുത്താലും അതിന്റെ പരപ്പളവ്, ഇതുപോലെ ചുറ്റളവിന്റെയും കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബനീളത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു കാണാം. വൃത്തത്തിനുള്ളിലെ ബഹുഭുജം മാറുമ്പോൾ, ചുറ്റളവും, ഈ ലംബനീളവും മാറും:





വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണം മുതലുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ ക്രമമായി $p_1, p_2, p_3, \ldots$ എന്നും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരു വശത്തേക്കുള്ള ലംബനീളങ്ങൾ $h_1, h_2, h_3, \ldots$ എന്നുമെടുത്താൽ, പരപ്പളവുകൾ $\frac{1}{2}p_1h_1$, $\frac{1}{2}p_2h_2$, $\frac{1}{2}p_3h_3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയാകും.

ഇവയിലെ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ എന്നീ ചുറ്റളവുകൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനോട് അടുത്തടുത്ത് വരും; $h_1, h_2, h_3, \ldots$ എന്നീ ലംബനീളങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിനോട് അടുത്തടുത്തു വരും. അതിനാൽ, ഇവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും, ആരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിനോട് അടുത്തടുത്തുവരും. ഗുണനഫലങ്ങളുടെ പകുതിയോ?

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, ജ്യാമിതീയമായി നോക്കുമ്പോൾ വൃത്തത്തിനകത്തെ സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോട് അടുക്കുന്നു എന്നു കാണാം; ഇക്കാര്യം സംഖ്യാപരമായി വിശകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ ഈ പരപ്പളവുകൾ വൃത്തത്തിന്റെ

π കേരളത്തിൽ

പതിനാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കേരളത്തിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന, ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞനും ഗണിതകാരനുമായിരുന്ന മാധവൻ (സംഗമഗ്രാമ മാധവൻ) π യോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച മാർഗം ഗണിതചരിത്രത്തിലെ ഒരു വഴിത്തിരിവാണ്.

$$1, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$$

എന്നിങ്ങനെ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾ കൂട്ടിയും കുറച്ചും തുടർന്നാൽ $\frac{\pi}{4}$നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്ന് അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചു. ഇതെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്

$$\frac{1}{4}\pi = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

(പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ സ്കോട്‌ലാൻഡിലെ ഗ്രിഗറി, ജർമനിയിലെ ലൈബ്നിറ്റ്സ് എന്നിവർ ഇതേ രീതി തന്നെ അവരുടേതായ രീതികളിൽ വീണ്ടും കണ്ടുപിടിക്കുകയുണ്ടായി).

ഈ രീതിയിൽക്കിട്ടുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ വളരെ പതുക്കെയാണ് π യെ സമീപിക്കുന്നത് എന്നൊരു പോരായ്മയുണ്ട്. ആർക്കിമിഡീസ് കണ്ടുപിടിച്ച ഭിന്നസംഖ്യയിലെത്താൻ ഏതാണ്ട് 4000 സംഖ്യകളുടെ ഇത്തരത്തിലുള്ള തുക വേണ്ടിവരും. എന്നാൽ മാധവൻ തന്നെ

$$\frac{1}{\sqrt{12}}\pi = 1-\frac{1}{3\times 3}+\frac{1}{5\times 3^2}-\frac{1}{7\times 3^3}+\cdots$$

എന്ന പുതുക്കിയ രീതി ഉപയോഗിച്ച്, $\pi \approx 3.14159265359$ എന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു.

5ALQ8S

ചുറ്റളവിന്റെയും ആരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയോട് അടുക്കുന്നു എന്നു മനസിലാക്കാം. ഇതിൽനിന്ന് പരപ്പളവിനെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, അതിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും ആരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

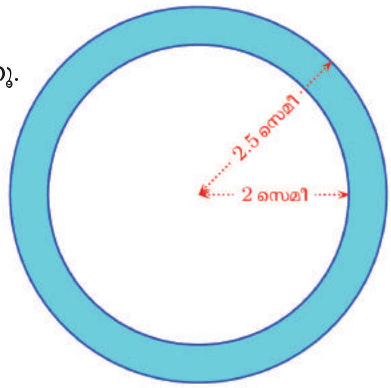
വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ ചുറ്റളവ് $2\pi r$ എന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആരവർഗത്തിന്റെ π മടങ്ങാണ്.

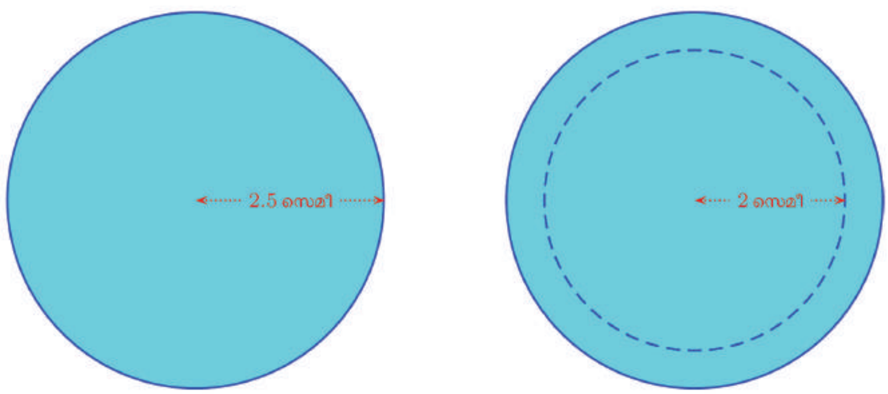
ഉദാഹരണമായി, ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 25π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി ചിത്രം നോക്കൂ.



ഈ വൃത്തവലയത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

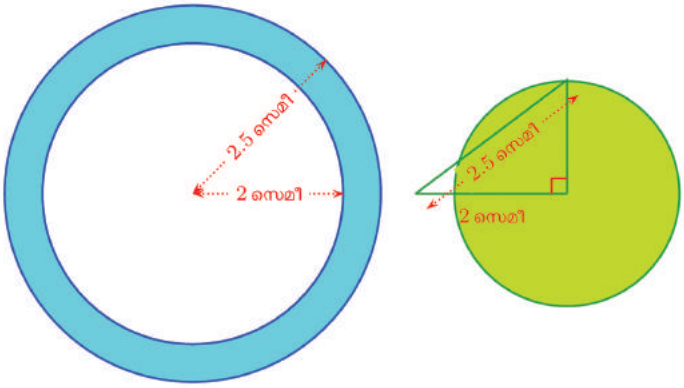
ഒരു വലിയ വൃത്തത്തിൽനിന്ന് ഒരു ചെറിയ വൃത്തം മുറിച്ചു മാറ്റിയതായി ഇതിനെ കാണാമല്ലോ.



അപ്പോൾ വലയത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$6.25\pi - 4\pi = 2.25\pi \text{ ച.സെ.മീ.}$$

ഇനി ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ഒരു മട്ടത്രികോണവും ഒരു വൃത്തവും വരച്ചാലോ?



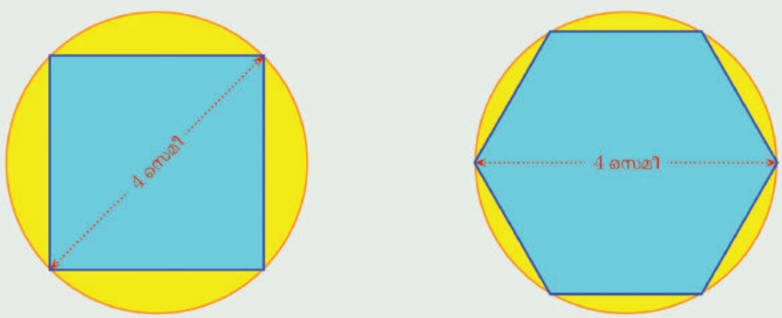
പുതിയ വൃത്തത്തിന്റെയും വലയത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

കണക്ക്, കമ്പ്യൂട്ടർ, π

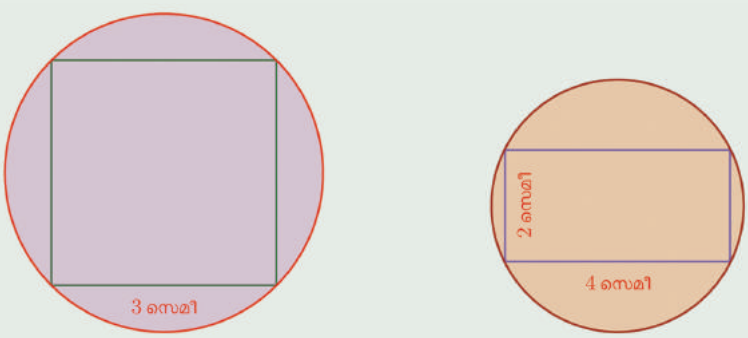
ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഭാരതത്തിലെ പ്രസിദ്ധ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ശ്രീനിവാസ രാമാനുജൻ, π യോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മാധവന്റെ മാർഗം പോലെയുള്ള അനേകം രീതികൾ കണ്ടുപിടിച്ചു.

ഇവയിൽ ചിലത് കമ്പ്യൂട്ടറിൽ ഉപയോഗിച്ച്, 1989 ൽ നൂറു കോടിയിലധികം ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കൃത്യമായി കണ്ടുപിടിച്ചു. ഇന്നത് ഏതാണ്ട് 10^{13} സ്ഥാനങ്ങൾ വരെയായിട്ടുണ്ട്.

(1) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ, വൃത്തത്തിന്റെയും ബഹുഭുജത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കണക്കാക്കുക.



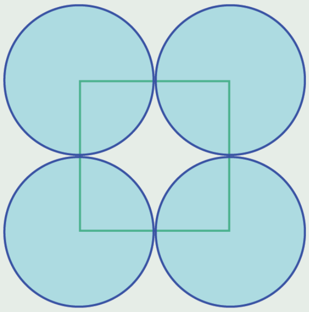
(2) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും, ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചത് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

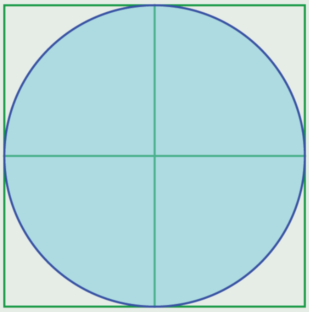


രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

NT-827-3-MATHS-9-M-VOL.2

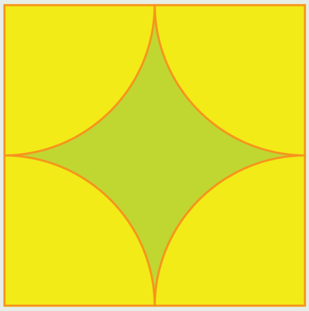
(3) ഒരു സമചതുരം വരച്ച്, അതിന്റെ നാലു മൂലകൾ കേന്ദ്രമായും, വശത്തിന്റെ പകുതി ആരമായും വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വലുപ്പമുള്ള നാലു സമചതുരങ്ങൾ ചേർന്ന സമചതുരം വരച്ച്, അതിനുള്ളിൽ കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

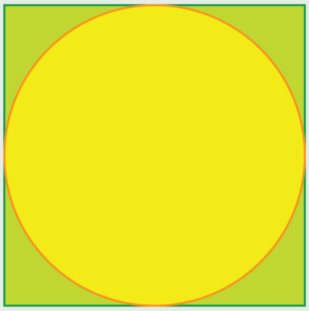




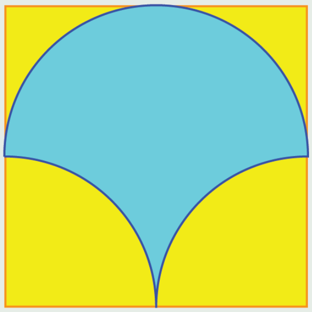
വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് നാലു ചെറുവൃത്തങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) ചുവടെയുള്ള രണ്ട് ചിത്രങ്ങളിലെയും സമചതുരങ്ങൾക്ക് ഒരേ വലുപ്പമാണ്. പച്ച ഭാഗങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.





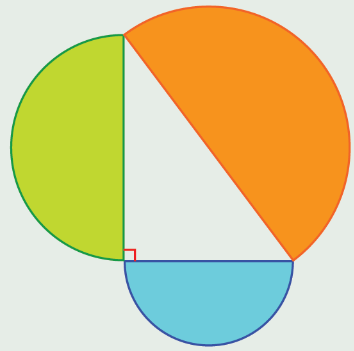
(5) ഒരു സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ വൃത്തഭാഗങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു.



ചിത്രത്തിൽ നീലനിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

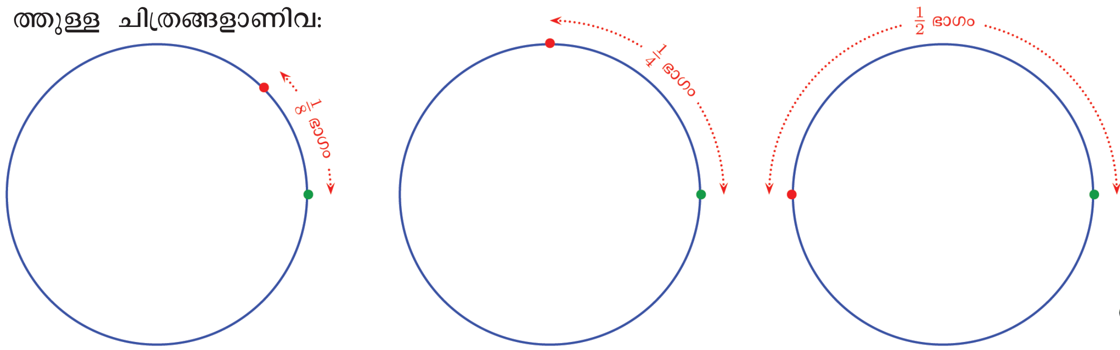
(6) ചിത്രത്തിൽ, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വ്യാസമായി അർധവൃത്തങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

വലിയ അർധവൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, മറ്റു രണ്ട് അർധവൃത്തങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



നീളവും കോണും

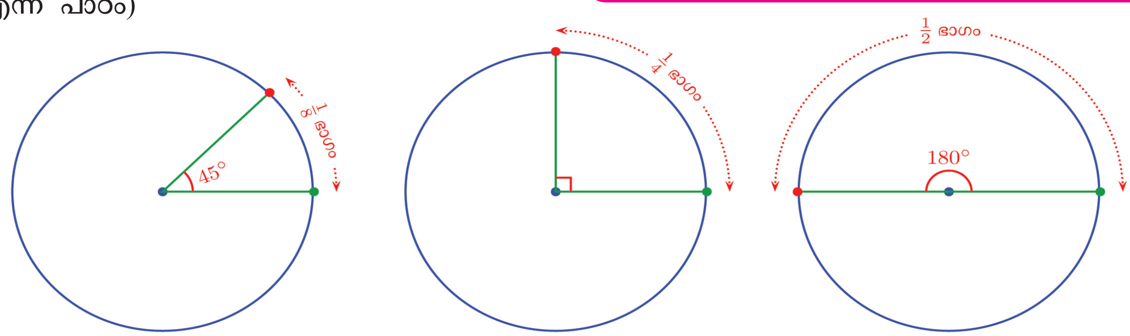
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങി, വൃത്തത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദു സങ്കൽപ്പിക്കുക. സഞ്ചാരത്തിന്റെ പല സമയത്തുള്ള ചിത്രങ്ങളാണിവ:



ഈ സഞ്ചാരം ഒരു കറക്കമായതിനാൽ, വൃത്തത്തിലൂടെ എത്ര ദൂരം നീങ്ങി എന്നതിനു പകരം, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ എത്ര ഡിഗ്രി തിരിഞ്ഞു എന്നും പറയാം.

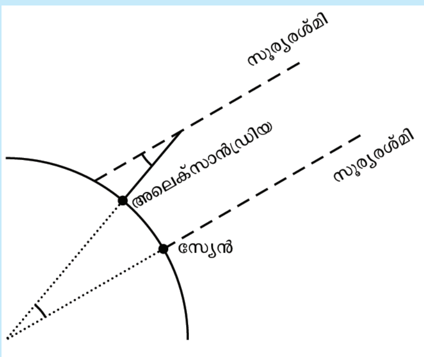
വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽ $360^\circ \div 8 = 45^\circ$ എടുത്തതും, $\frac{1}{4}$ ഭാഗം കിട്ടാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽ $360^\circ \div 4 = 90^\circ$ എടുത്തതുമെല്ലാം ഓർമയുണ്ടോ? (ആറാം ക്ലാസിലെ **കോണുകൾ** എന്ന പാഠം)

A എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ചുറ്റളവ് 24 ആയ വൃത്തം വരയ്ക്കുക. (ആരം 12/Pi എന്ന് നൽകിയാൽ മതി). വൃത്തത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു B അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഒരു Angle Slider α നിർമിച്ച് Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B യിലും തുടർന്ന് A യിലും ക്ലിക്കു ചെയ്ത് കോണളവ് α എന്ന് കൊടുക്കുക. ഒരു പുതിയ ബിന്ദു B′ കിട്ടും. Circular Arc ഉപയോഗിച്ച് A, B, B′ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്കു ചെയ്ത് ചാപം BB′ വരയ്ക്കുക. ചാപത്തിന്റെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. വ്യത്യസ്ത കോണളവുകൾക്ക് ചാപനീളം വൃത്തത്തിന്റെ ആകെ ചുറ്റളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്ന് നോക്കൂ.



ഭൂമിയുടെ ചുറ്റളവ്

ബി.സി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഗ്രീക്കു ശാസ്ത്രജ്ഞനും കവിയും ആയിരുന്നു ഇറാതോസ്തെനിസ്. ഭൂമിയുടെ ചുറ്റളവ് ആദ്യമായി കണക്കു കൂട്ടിയത് അദ്ദേഹമാണ്.
വർഷത്തിൽ ഒരു ദിവസം ഈജിപ്റ്റിലെ സ്യേൻ പട്ടണത്തിൽ നട്ടുച്ചയ്ക്ക് സൂര്യൻ നേരേ തലയ്ക്കു മുകളിലായിരിക്കുമെന്നും, അതിനാൽ ആ സമയത്ത്, വസ്തുക്കൾക്ക് നിഴൽ ഉണ്ടാകില്ലെന്നും ഇറാതോസ്തെനിസ് അറിഞ്ഞു. അദ്ദേഹം ജോലി ചെയ്തിരുന്ന അലക്സാൻഡ്രിയയിൽ അതേ സമയത്ത്, സൂര്യരശ്മികൾ പതിക്കുന്നത് എത്ര ചരിഞ്ഞിട്ടാണെന്ന് നിലത്തു കുത്തനെ നാട്ടിയ ഒരു കമ്പിന്റെ നിഴലിൽ നിന്ന് അദ്ദേഹം കണക്കുകൂട്ടി.
സൂര്യരശ്മികൾ സമാന്തരമാണെന്നു

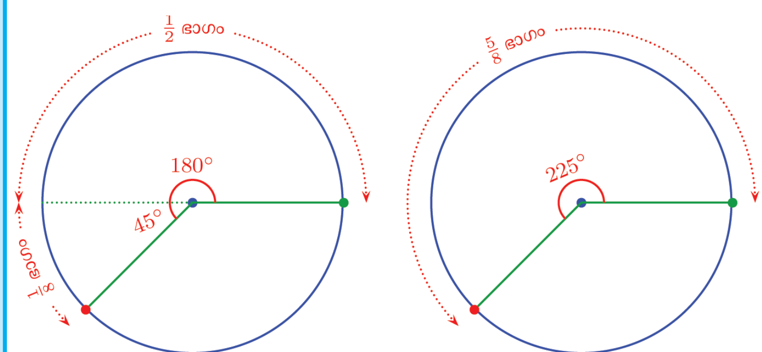


കരുതിയാൽ, അലക്സാൻഡ്രിയയും സ്യേനും തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഭൂമിയിലെ ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണും ഇതു തന്നെയാണ്. രണ്ടു പട്ടണങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ദൂരമാണ്, ഈ ചാപത്തിന്റെ നീളം.
അപ്പോൾ, അലക്സാൻഡ്രിയയിലെ സൂര്യരശ്മികളുടെ ചരിവ്, a° എന്നും, സ്യേനിലേക്കുള്ള ദൂരം d എന്നുമെടുത്താൽ, ഭൂമിയുടെ ചുറ്റളവ് $\frac{360}{a} \times d$ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം.

അങ്ങനെ സഞ്ചാരം നീളമായും, കോണായും പറയാം.

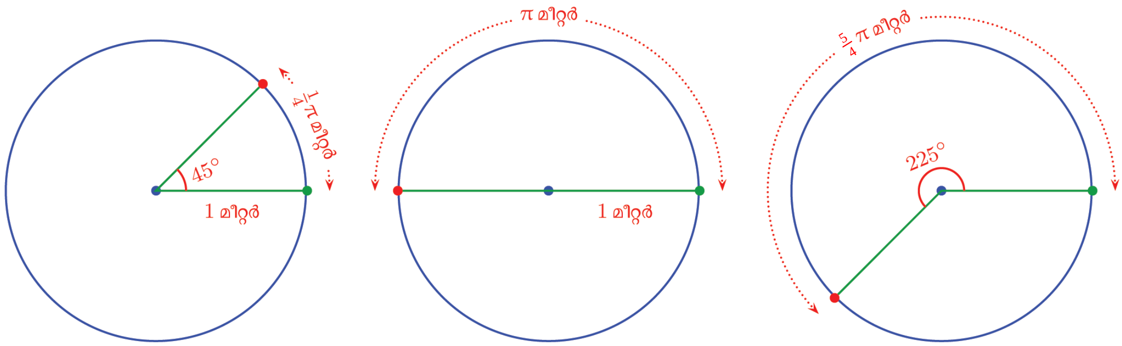
അപ്പോളൊരു ചോദ്യം. വൃത്തത്തിന്റെ പകുതി കഴിഞ്ഞ്, വീണ്ടുമൊരു എട്ടിലൊരു ഭാഗം നീങ്ങുമ്പോൾ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ ഭാഗം; ഇത് തിരിവായി എങ്ങനെ പറയും?

വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗം 180°; $\frac{1}{8}$ ഭാഗമെന്നാൽ 45°; അപ്പോൾ 180° തിരിഞ്ഞുകഴിഞ്ഞ്, വീണ്ടും 45° യും കൂടി തിരിഞ്ഞു: ആകെ $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ തിരിഞ്ഞുവെന്നു പറയാം:



ഇങ്ങനെ വൃത്തം മുഴുവൻ ചുറ്റി തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തെത്തുന്നതു വരെയുള്ള യാത്രയിലെ ഓരോ സമയത്തും എത്ര സഞ്ചരിച്ചു എന്നത്, വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങളായോ, തിരിവിന്റെ അളവായി 360° വരെയുള്ള കോണുകളായോ പറയാം.

ഇതിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 1 മീറ്റർ എന്നു കൂടി എടുത്താലോ? വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 2π മീറ്റർ, അപ്പോൾ ദൂരങ്ങളെല്ലാം വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗത്തിനു പകരം നീളമായിത്തന്നെ പറയാം.

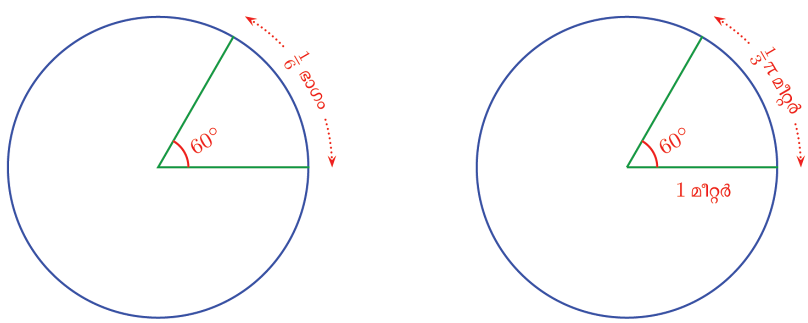


അങ്ങനെ ഓരോ സമയത്തും എത്ര ദൂരം നീങ്ങിയെന്നു മീറ്ററായി പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ എത്ര തിരിഞ്ഞുവെന്നു ഡിഗ്രിയായും പറയാം.

60° തിരിയുമ്പോൾ, വൃത്തത്തിലൂടെ എത്ര മീറ്റർ നീങ്ങും?

വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗം നീങ്ങിയെന്ന് ആദ്യം നോക്കാം. 1° എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{360}$ ഭാഗമാണല്ലോ. അപ്പോൾ 60° എന്നത്, വൃത്തത്തിന്റെ $60 \times \frac{1}{360} = \frac{1}{6}$ ഭാഗം; വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 2π മീറ്ററായതിനാൽ, ഇത് $\frac{1}{3}\pi$ മീറ്റർ:

5AVLAF

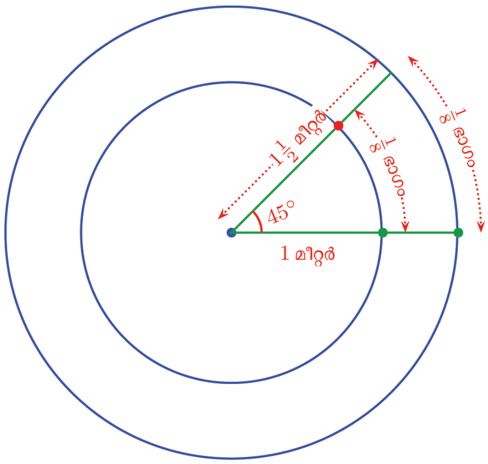


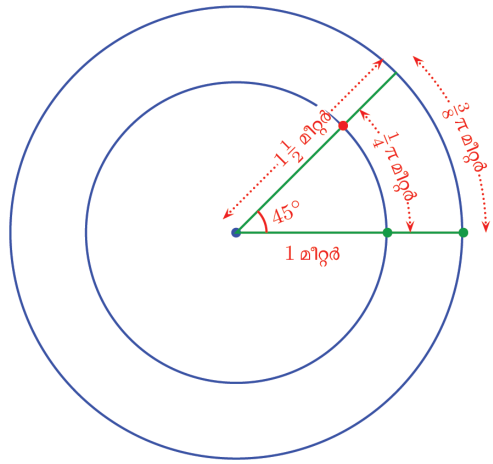
പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ 360° യുടെ എത്ര ഭാഗമാണോ തിരിഞ്ഞത്, 2π മീറ്ററിന്റെ അത്രയും ഭാഗമാണ് വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങിയത്,

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററാക്കിയാലോ? ചുറ്റളവ് 3π മീറ്ററാകും. അപ്പോൾ തിരിവിനനുസരിച്ച് നിങ്ങിയ ദൂരം കണക്കാക്കാൻ, 3π മീറ്ററിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ എടുക്കണം. അതായത്, തിരിയുന്നതിനനുസരിച്ചുള്ള വൃത്തഭാഗങ്ങൾക്കു മാറ്റമില്ലെങ്കിലും, നീളങ്ങളുടെ മീറ്റർ കണക്ക് മാറും.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ഉദാഹരണമായി. 45° തിരിയുമ്പോൾ, ഈ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം തന്നെയാണ് നീങ്ങുന്നത്; പക്ഷേ, വൃത്തം വലുതായതിനാൽ നീങ്ങിയ ദൂരം $\frac{3}{8}\pi$ മീറ്റർ ആകും.



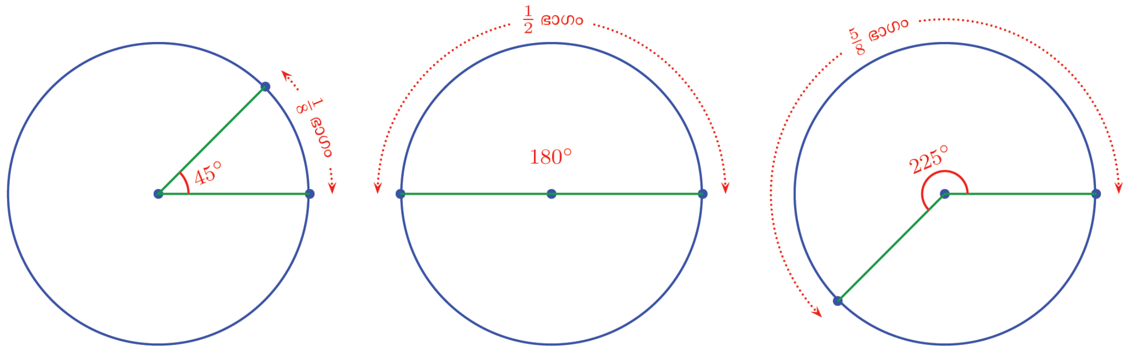


പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

> ആരം r മീറ്ററായ വൃത്തത്തിലൂടെയുള്ള സഞ്ചാരത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് x° തിരിയുമ്പോൾ, വൃത്തത്തിലൂടെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം $2\pi r \times \frac{x}{360}$ മീറ്റർ.

ഇനി ഇക്കാര്യം കണക്കുഭാഷയിലെങ്ങനെയാണ് പറയുന്നതെന്നു നോക്കാം. ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ഭാഗത്തിനു **ചാപം (arc)** എന്നാണു പറയുന്നത്; ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന ആരങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണിനെ, ചാപത്തിന്റെ **കേന്ദ്രകോൺ (central angle)** എന്നും.

അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 45°, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 180°, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{5}{8}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 225° എന്നെല്ലാം പറയാം.



വൃത്തത്തിലൂടെയുള്ള സഞ്ചാരത്തിന്റെ തത്വം, വൃത്തത്തിന്റെ കേവലഗണിത തത്വമാക്കാം:

ആരം r ആയ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ x° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം $2\pi r \times \frac{x}{360}$.

മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ,

ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 360° യുടെ എത്ര ഭാഗമാണോ, ചുറ്റളവിന്റെ അത്രയും ഭാഗമാണ് ചാപത്തിന്റെ നീളം

ഉദാഹരണമായി, ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 60° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

ഇതു മനസിൽത്തന്നെ ചെയ്യാം. 60° എന്നത് 360° യുടെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമായതിനാൽ, ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ് ചാപം. വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, 6π സെന്റിമീറ്റർ, ചാപത്തിന്റെ നീളം π സെന്റിമീറ്റർ.

ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 50° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളമോ?

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 5π സെന്റിമീറ്റർ; അതിന്റെ $\frac{50}{360}$ ഭാഗമാണ് ചാപത്തിന്റെ നീളം, അതായത്

$$5\pi \times \frac{50}{360} = \frac{25}{36}\pi \approx 2.2 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം. ആരം 9 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു ഇരുമ്പുവട്ടത്തിൽ നിന്ന്, കേന്ദ്രകോൺ 30° ആയ ഒരു കഷണം മുറിച്ചെടുത്തു. ഇതു വളച്ച് ചെറിയൊരു വട്ടമുണ്ടാക്കി. ചെറുവട്ടത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

കേന്ദ്രകോൺ 30° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$; അതായത്, മുറിച്ചെടുത്ത കഷണത്തിന്റെ നീളം $18\pi \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}\pi$ സെന്റിമീറ്റർ. ഇതാണ് ചെറിയ വട്ടത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്; അപ്പോൾ അതിന്റെ

ആരം $\frac{3}{2}\pi \div 2\pi = \frac{3}{4}$ സെന്റിമീറ്റർ

കുറെക്കൂടി എളുപ്പത്തിൽ ഇതു കണക്കാക്കാം. വലിയ വട്ടത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{12}$ ഭാഗമാണ് ചെറിയ വട്ടത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്. ആരവും ചുറ്റളവും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലായതിനാൽ, വലിയ വട്ടത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{1}{12}$ ഭാഗം തന്നെയാണ് ചെറിയ വട്ടത്തിന്റെ ആരം: അതായത്, $9 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ സെന്റിമീറ്റർ.

(1) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 40° ആയ ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളം 3π സെന്റിമീറ്ററാണ്. വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്? ആരമോ?

(2) ഒരു വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 25° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

i) ഇതേ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 75° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

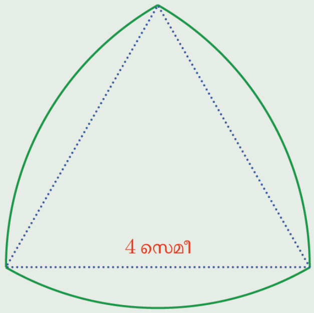
ii) ആരം ഇതിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 75° ആയ ചാപത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

(3) ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വളയിൽനിന്ന് ഒരു കഷണം മുറിച്ചെടുത്ത്, ആരം $\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്ററായ മോതിരമുണ്ടാക്കണം.

i) മുറിച്ചെടുക്കുന്ന കഷണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്ര ഡിഗ്രിയായിരിക്കണം?

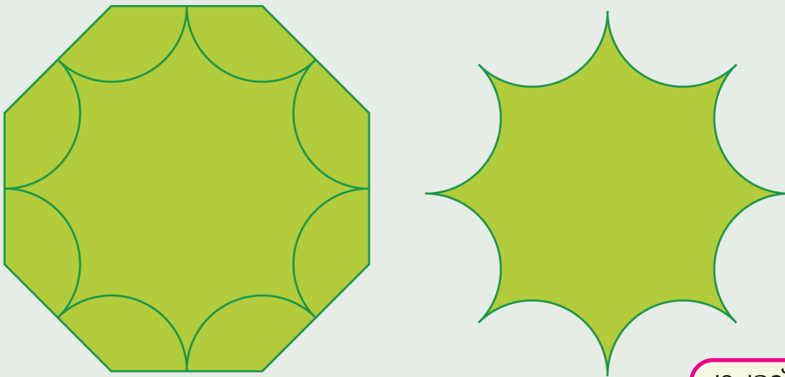
ii) വളയുടെ മിച്ചമുള്ള ഭാഗം കൊണ്ട് അൽപം ചെറിയ മറ്റൊരു വളയുണ്ടാക്കി. അതിന്റെ ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

(4) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂല കേന്ദ്രമായും മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തഭാഗങ്ങൾ വരച്ച ചിത്രം നോക്കുക.



ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

(5) ഒരു സമ അഷ്ടഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ കേന്ദ്രമായി വൃത്തഭാഗങ്ങൾ വരച്ച്, ചുവടെക്കാണുന്ന രൂപം വെട്ടിയെടുക്കുന്നു.

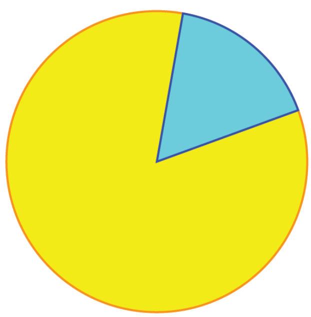


വെട്ടിയെടുത്ത രൂപത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

പരപ്പളവ് 24 ആയ, A കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക (circle with centre and radius എന്ന ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം, ആരം sqrt(24/Pi) എന്നു കൊടുത്താൽ മതി). അതിൽ B എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. α എന്ന പേരിൽ സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി $\angle BAB'=\alpha$ ആയി B′ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Circular Sector ഉപയോഗിച്ച് A, B, B′ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് വൃത്താംശം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. കോണളവും വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവും വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്തുക.

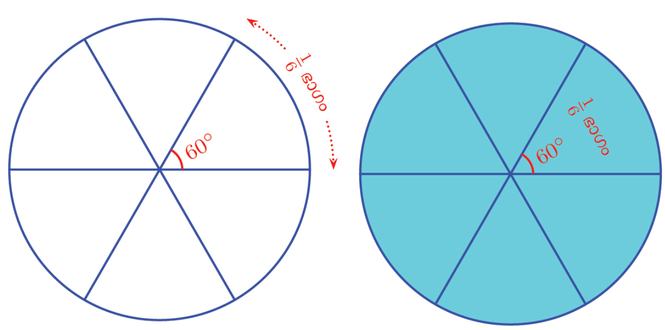
കോണും പരപ്പളവും

വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയുടെ ഒരു ഭാഗമാണ് ചാപം. ഒരു ചാപവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽക്കൂടിയുള്ള ആരങ്ങളും ചേർന്നാൽ വൃത്തപ്പരപ്പിന്റെ ഒരു ഭാഗമാകും.



ഇത്തരമൊരു വൃത്തഭാഗത്തെ **വൃത്താംശം (sector)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇതിലെ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിനെ വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എന്നും പറയാം.

കേന്ദ്രകോൺ മാറുന്നതിനുസരിച്ച്, ചാപത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നതുപോലെ, വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവും മാറും. രണ്ടിന്റെയും കണക്ക് ഒരു പോലെയാണ്. ഉദാഹരണമായി കേന്ദ്രകോൺ 60° ആയ ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ്; കേന്ദ്രകോൺ 60° ആയ വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗവും.



ഇതുപോലെ, കേന്ദ്രകോൺ 1° ആയ ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{360}$ ഭാഗവും, കേന്ദ്രകോൺ 1° ആയ വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{360}$ ഭാഗവുമാണ്.

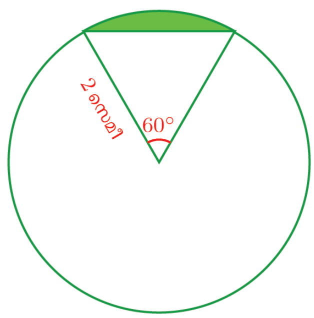
അപ്പോൾ കേന്ദ്രകോണും ചാപത്തിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധംപോലെ കേന്ദ്രകോണും വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധവും ഇങ്ങനെ പറയാം.

ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 360° യുടെ എത്ര ഭാഗമാണോ, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ അത്രയും ഭാഗമാണ് വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെയും പറയാം.

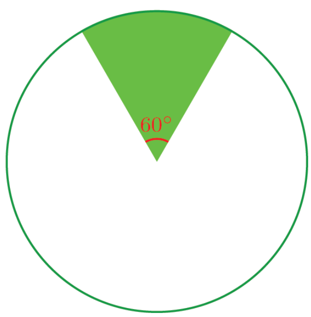
ആരം r ആയ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ x° ആയ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$

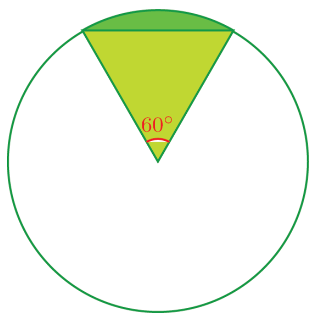
ഉദാഹരണമായി, ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 40° ആയ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{40}{360} = \frac{1}{9}$ ഭാഗമാണ്; വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 9π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, അപ്പോൾ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.



ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കുക. ചിത്രത്തിലെ നിറമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?

വൃത്താംശത്തിൽനിന്നൊരു ത്രികോണം മാറ്റിയാൽ ഈ ഭാഗം കിട്ടുമല്ലോ.



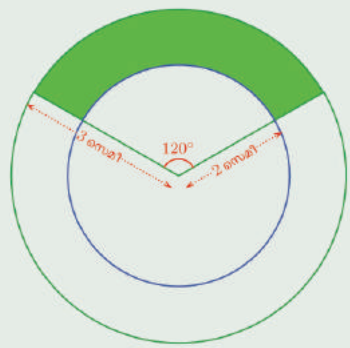


വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗം; അതായത്, $4\pi \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

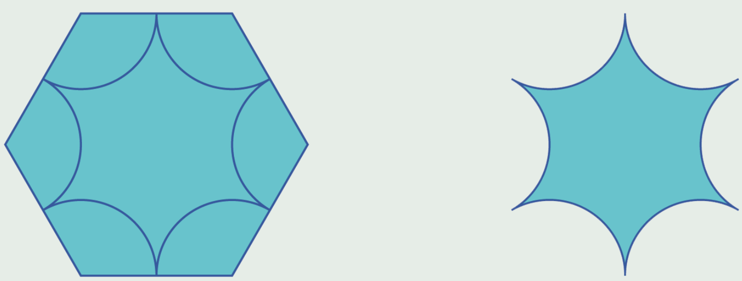
ത്രികോണം സമഭുജമാണ് (കാരണം?) അതിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ ആദ്യ ചിത്രത്തിലെ വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

(1) ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ 120° ആയ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്? ആരം 6 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രകോൺ ഇതുതന്നെയായ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?

(2) ചിത്രത്തിലെ പച്ചനിറമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക



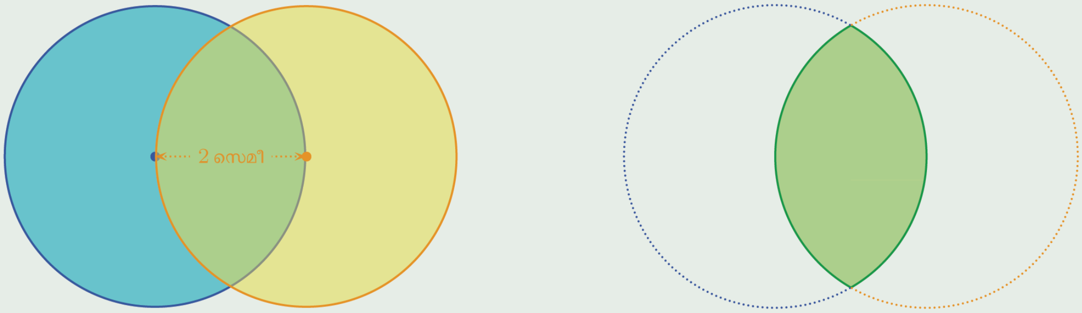
(3) ഒരു സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ കേന്ദ്രമായി വൃത്തഭാഗങ്ങൾ വരച്ച്, ചുവടെ കാണുന്ന രൂപം വെട്ടിയെടുക്കുന്നു.



2 സെമീ

മുറിച്ചെടുത്ത രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

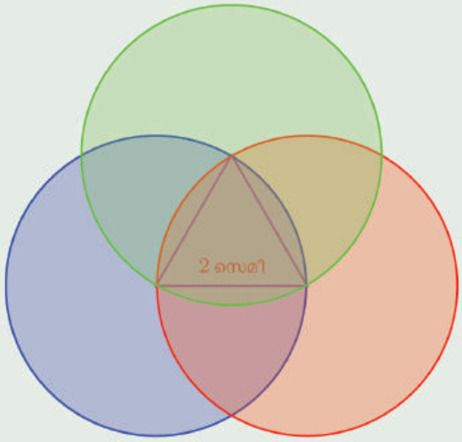
(4) രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിൽ ഓരോന്നും മറ്റൊന്നിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന ചിത്രമാണ് ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്നത്;



രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിലും ഉൾപ്പെടുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

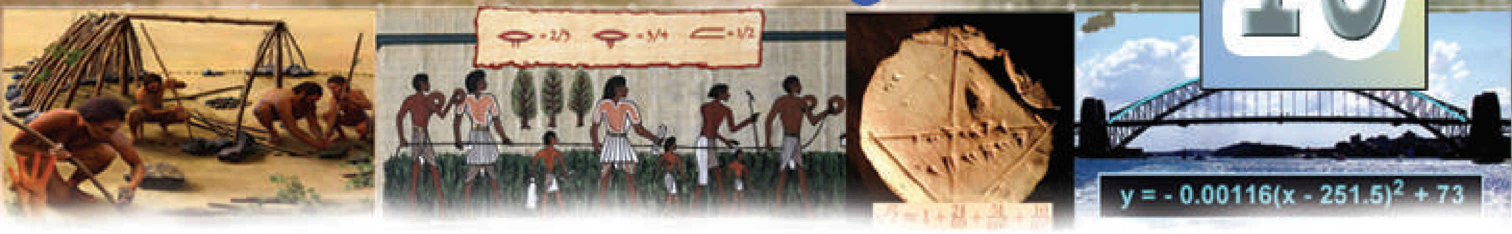
(5) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയും കേന്ദ്രമായി, മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരച്ച ചിത്രമാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്.

മൂന്നു വൃത്തങ്ങളിലും ഉൾപ്പെടുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



രേഖീയസംഖ്യകൾ

10

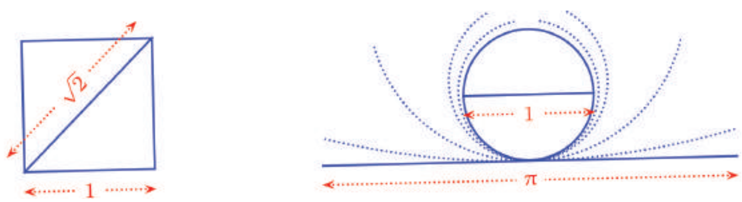


ബിന്ദുക്കളും സംഖ്യകളും

വരകളുടെ നീളങ്ങളെ സംഖ്യകളായി പറയുന്നതെങ്ങനെയാണ്? ഏതെങ്കിലും ഒരു നിശ്ചിത നീളം 1 എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് നീളത്തെ 2 എന്നും, പകുതി നീളത്തെ $\frac{1}{2}$ എന്നും, അതിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങ് നീളത്തെ $1\frac{1}{2}$ എന്നുമൊക്കെ പറയാം.

ഇങ്ങനെ 1 എന്നെടുക്കുന്ന നീളത്തെ, നീളത്തിന്റെ ഒരു **ഏകകം (unit length)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത്തരമൊരു ഏകകം നിശ്ചയിക്കുന്നതോടെ, മറ്റു പല നീളങ്ങളെയും ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ എണ്ണൽസംഖ്യകളായും ഭിന്ന സംഖ്യകളായും പറയാം.

പക്ഷേ ഈ ഏകകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളായോ, ഭിന്നസംഖ്യകളായോ പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വശത്തിന്റെ നീളം ഈ ഏകകമായ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണം, ഈ ഏകകം വ്യാസമായ വൃത്തം നിവർത്തിയ വരയുടെ നീളം:



അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളും കേവലസംഖ്യകളുടെ ക്രിയാബന്ധങ്ങളുമെല്ലാം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കുമ്പോൾ സൗകര്യത്തിനായി ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. (എട്ടാംക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ **ഉപയോഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം) അപ്പോൾ, $\sqrt{2}$, π പോലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ന്യൂനമായ $-\sqrt{2}$, $-\pi$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളും ആവശ്യമുണ്ട്.

എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും, ഭിന്നസംഖ്യകൾക്കും അവയുടെ ന്യൂനങ്ങൾക്കും പൂജ്യത്തിനുമെല്ലാം പൊതുവായി **ഭിന്നകസംഖ്യകൾ (rational numbers)** എന്നു പറയുന്നു. ഇങ്ങനെ അല്ലാത്ത സംഖ്യകളെയെല്ലാം **അഭിന്നകസംഖ്യകൾ (irrational numbers)** എന്നും പറയുന്നു.

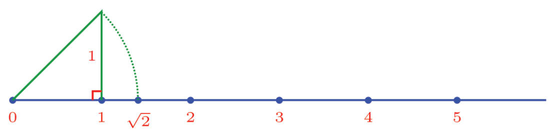
5B5HC3

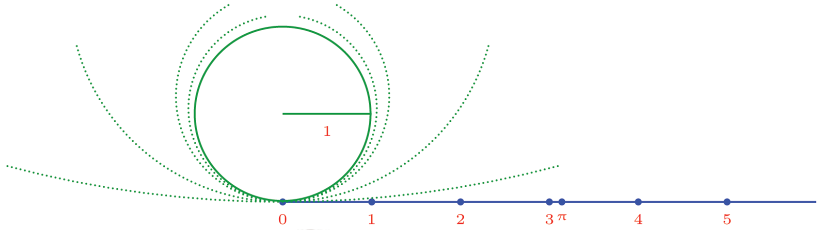
എണ്ണൽസംഖ്യകളെയും ഭിന്നരൂപത്തിൽ എഴുതാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 5 നെ $\frac{5}{1}$ എന്നോ, $\frac{10}{2}$ എന്നോ പലതരത്തിൽ എഴുതാം. അംശമോ ഛേദമോ ന്യൂന എണ്ണൽസംഖ്യയായെടുത്ത്, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ന്യൂനങ്ങളെയും ഭിന്നരൂപത്തിലെഴുതാം. പൂജ്യത്തിനെ $\frac{0}{1}$ എന്നും എഴുതാം. അപ്പോൾ ഭിന്നകങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ ഒരു രൂപമുണ്ട്: x, y എണ്ണൽസംഖ്യകളോ അവയുടെ ന്യൂനങ്ങളോ ആയ $\frac{x}{y}$. ഇതിൽ x പൂജ്യവുമാകാം. എന്നാൽ അഭിന്നകങ്ങളിൽ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ പോലുള്ള വർഗമൂലങ്ങളും, ഭിന്നകങ്ങളുടെ ക്രിയകളായൊന്നും പറയാൻ കഴിയാത്ത π പോലുള്ള സംഖ്യകളുമെല്ലാമുണ്ട്; നിയതമായ ഒരു പൊതുരൂപത്തിലും അവയെ തളയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഭിന്നകങ്ങളെയും, അഭിന്നകങ്ങളെയുമെല്ലാം ചേർത്ത് സംഖ്യകളെ പൊതുവായി **രേഖീയസംഖ്യകൾ (real numbers)** എന്നു പറയുന്നു.

എന്തുകൊണ്ട് ഈ പേര് എന്നു നോക്കാം. ഒരു വരയുടെ ഇടത്തെ അറ്റത്ത് ഒരു ബിന്ദുവും അതിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് മറ്റൊരു ബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, ആദ്യത്തെ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം 1 (ഏകകം) ആയെടുത്ത്, വലതുവശത്തുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും അകലം സംഖ്യകളായി എഴുതാമല്ലോ.

എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും അകലം അടയാളപ്പെടുത്തണമെങ്കിൽ, അഭിന്നകസംഖ്യകളും വേണ്ടിവരും.





ഈ വര 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഇടത്തോട്ടും നീട്ടാമല്ലോ, ആ ഭാഗത്തെ ബിന്ദുക്കളെ എങ്ങനെ സംഖ്യകൾക്കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തും?

അതിന് വലതുവശത്തെ സംഖ്യകളുടെ ന്യൂനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

അങ്ങനെ ഈ വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളെയും രേഖീയ സംഖ്യകൾകൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്താം. മറിച്ച്, രേഖീയ സംഖ്യകളെയെല്ലാം ഈ വരയിലെ (രേഖയിലെ) ബിന്ദുക്കളായി കാണാം.

ഇത്തരമൊരു വരയെ **സംഖ്യാരേഖ (number line)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സംഖ്യാരേഖയിൽ 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വലത്തേയ്ക്ക് നീങ്ങുംതോറും സംഖ്യകൾ വലുതാകുന്നുണ്ടല്ലോ. ഇടത്തേയ്ക്ക് നീങ്ങുമ്പോഴോ?

-1, -2 ഇവയിൽ ഏതാണ് വലുത്?

-1 എന്നാൽ പൂജ്യത്തിൽനിന്ന് 1 കുറവ്; -2 ആയാലോ? പൂജ്യത്തിൽ നിന്ന് 2 കുറവ്, അതായത് -1 ൽ നിന്ന് വീണ്ടും 1 കുറവ്. അതിനാൽ -1 നേക്കാൾ ചെറിയ സംഖ്യയാണ് -2. ഗണിതഭാഷയിൽ $-2 < -1$.

അപ്പോൾ സംഖ്യാരേഖയിൽ പൂജ്യത്തിൽനിന്ന് വലത്തോട്ടു നീങ്ങുമ്പോൾ വലിയസംഖ്യകളും, ഇടത്തോട്ടു നീങ്ങുമ്പോൾ ചെറിയ സംഖ്യകളുമാണ് കാണുന്നത്.

പൂജ്യത്തിനുപകരം, ഏതു സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങിയാലും, ഇതുതന്നെയാണല്ലോ സംഭവിക്കുന്നത്. അപ്പോൾ ഏതു രണ്ടു രേഖീയസംഖ്യകൾ എടുത്താലും, സംഖ്യാരേഖയിൽ ഇവയിലെ വലിയ സംഖ്യയുടെ സ്ഥാനം, ചെറിയ സംഖ്യയുടെ വലതു ഭാഗത്തായിരിക്കും.

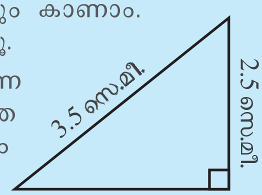
അങ്ങനെ വലുത്, ചെറുത് എന്ന സംഖ്യാബന്ധം, സംഖ്യാരേഖയിൽ വലത്, ഇടത് എന്ന ജ്യാമിതീയ ബന്ധമായി മാറുന്നു.

ഇനി സംഖ്യാരേഖയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്ന ജ്യാമിതീയ ആശയം, ഈ ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തുന്ന സംഖ്യകളുപയോഗിച്ച് പറയുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. ആദ്യം പൂജ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലമെടുക്കാം.

അഭിന്നക അളവുകൾ

നീളങ്ങൾ മാത്രമല്ല, പരപ്പളവും വ്യാപ്തവുമെല്ലാം അഭിന്നകസംഖ്യകളായി വരാം. ഉദാഹരണമായി $\sqrt{3}$ നീളവും $\sqrt{2}$ വീതിയുമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$ ആണല്ലോ.

$\sqrt{6}$ നെ നീളമായും കാണാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

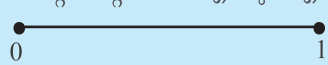


ഈ മട്ടത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

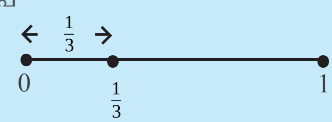
അധിസംഖ്യകളായ എല്ലാ അഭിന്നകസംഖ്യകളേയും നീളങ്ങളായി കാണുന്നത് ഒരു സൗകര്യമാണ്.

സംഖ്യാസാന്ദ്രത

0 നും 1 നും ഇടയിൽ എത്ര സംഖ്യകളുണ്ട്? എണ്ണൽസംഖ്യകളൊന്നും തന്നെയില്ല. എന്നാൽ, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ പോലെയുള്ള ഭിന്നകസംഖ്യകളും $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{3}{\pi}$ പോലെയുള്ള അഭിന്നകസംഖ്യകളുമെല്ലാം ചേർന്ന് എണ്ണിയാൽ തീരാത്ത സംഖ്യകൾ 0 നും 1 നും ഇടയിലുണ്ടല്ലോ. ഇത് ജ്യാമിതീയമായും കാണാം. ഒരു വര വരച്ച് ഒരറ്റത്ത് 0 എന്നും മറ്റേ അറ്റത്ത് 1 എന്നും എഴുതുക.

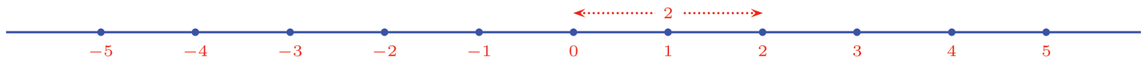


ഇനി, ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദു എടുത്താലും 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം ഉപയോഗിച്ച് ആ ബിന്ദുവിനെ സൂചിപ്പിക്കാം.

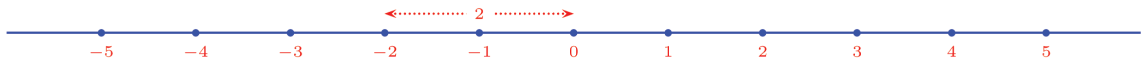


അപ്പോൾ വരയിലെ ഓരോ ബിന്ദുവും ഒരു സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. വരയിലെത്ര ബിന്ദുക്കളുണ്ട്?

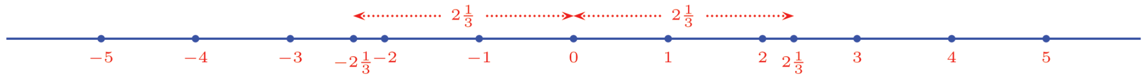
ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യകളായി അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതുതന്നെ 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള അകലമനുസരിച്ചാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 2 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുവും 0 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം 2.



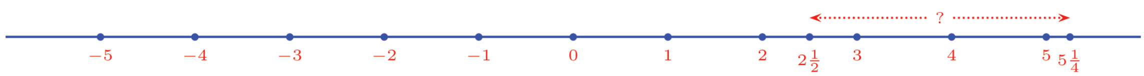
ഇതേ അകലത്തിൽ 0 എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ഇടതുവശത്തുള്ള ബിന്ദുവിനെയാണ് −2 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയത്.



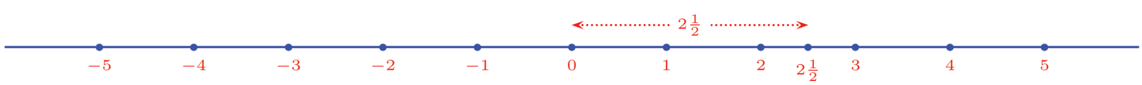
ഇതുപോലെ $2\frac{1}{3}$ എന്ന ബിന്ദുവും 0 എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലവും $-2\frac{1}{3}$ എന്ന ബിന്ദുവും 0 എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലവും $2\frac{1}{3}$ തന്നെയാണ്:

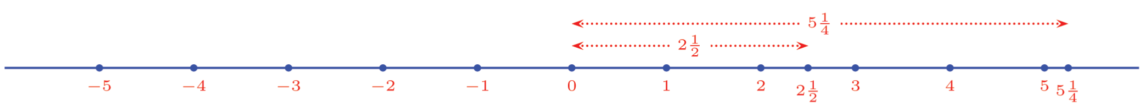


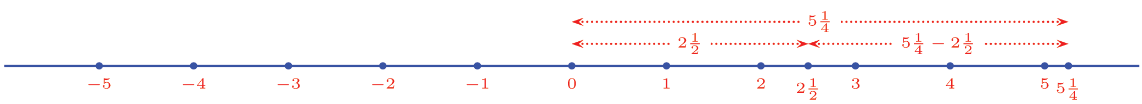
ഇനി പൊതുവേ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി $2\frac{1}{2}$ എന്ന ബിന്ദുവും, $5\frac{1}{4}$ എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലമെന്താണ്?



ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം, 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ഇവ ഓരോന്നിലേക്കുമുള്ള അകലങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമല്ലേ?



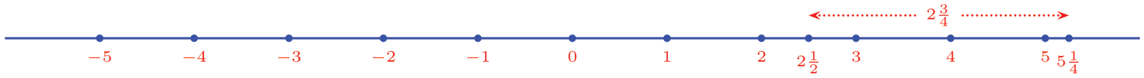




Downloaded from https:// www.studiestoday.com

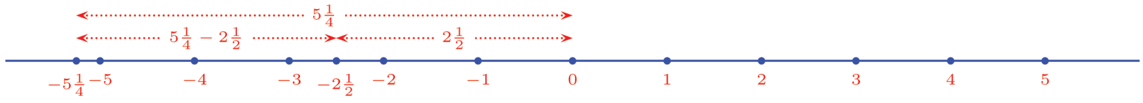
അതായത്, $2\frac{1}{2}$ എന്ന ബിന്ദുവും $5\frac{1}{4}$ എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം

$$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$$

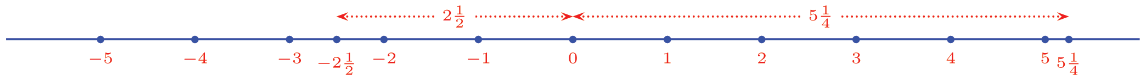


$-2\frac{1}{2}$ ഉം $-5\frac{1}{4}$ ഉം തമ്മിലുള്ള അകലമായാലോ?

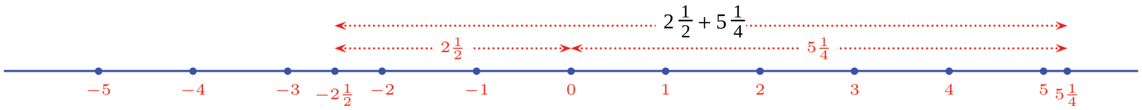
അപ്പോഴും പൂജ്യത്തിൽനിന്നുള്ള വലിയ അകലത്തിൽനിന്ന് ചെറിയ അകലം കുറച്ചാൽപ്പോരേ?



ഇനി $-2\frac{1}{2}$ ഉം $5\frac{1}{4}$ ഉം ആയാലോ?



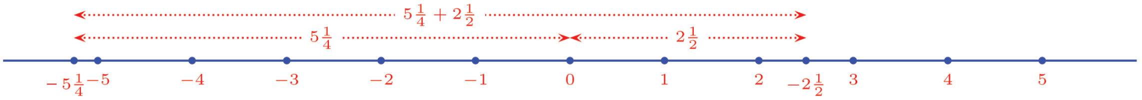
ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ പൂജ്യത്തിനിരുവശത്തും ആയതിനാൽ, ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കാൻ, പൂജ്യത്തിൽനിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടണം:



അതായത്, $-2\frac{1}{2}$ ഉം $5\frac{1}{4}$ ഉം തമ്മിലുള്ള അകലം

$$2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4}$$

$2\frac{1}{2}$ ഉം $-5\frac{1}{4}$ ഉം തമ്മിലുള്ള അകലവും ഇതുതന്നെയാണല്ലോ:



ഇപ്പോൾ കണ്ട അകലങ്ങളെല്ലാം ഒരുമിച്ചെഴുതിനോക്കാം.

ബിന്ദുക്കൾ	അകലം
$2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2}, -5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$
$2\frac{1}{2}, -5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$

ഇതിലെ ആദ്യത്തെ ജോടി സംഖ്യകളിൽ, അകലം കണക്കാക്കിയത്, വലിയ സംഖ്യയായ $5\frac{1}{4}$ ൽ നിന്ന്, ചെറിയ സംഖ്യയായ $2\frac{1}{2}$ കുറച്ചിട്ടാണ്.

രണ്ടാമത്തെ ജോടിയിലോ? അതിൽ വലിയ സംഖ്യ $-2\frac{1}{2}$; ഇതിൽനിന്ന് ചെറിയ സംഖ്യയായ $-5\frac{1}{4}$ കുറച്ചുനോക്കാം.

$$-2\frac{1}{2} - \left(-5\frac{1}{4}\right) = -2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$$

ഇതുതന്നെയല്ലേ അകലമായി കിട്ടിയതും? അപ്പോൾ ഈ ജോടിയിലും അകലം, വലിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ചെറിയ സംഖ്യ കുറച്ചതുതന്നെയാണ്.

മൂന്നാമത്തെ ജോടിയിലോ? വലിയ സംഖ്യ $5\frac{1}{4}$ ചെറിയ സംഖ്യ $-2\frac{1}{2}$. വലു തിൽ നിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽ

$$5\frac{1}{4} - \left(-2\frac{1}{2}\right) = 5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$$

ഈ ജോടിയിലും അകലം, വലിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ചെറിയ സംഖ്യ കുറച്ചതാണ്. അവസാന ജോടിയും നോക്കാം. വലുത് $2\frac{1}{2}$, ചെറുത് $-5\frac{1}{4}$

$$2\frac{1}{2} - \left(-5\frac{1}{4}\right) = 2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4}$$

അപ്പോൾ ബിന്ദുക്കൾ രണ്ടും പൂജ്യത്തിന്റെ വലതുവശത്താ യാലും രണ്ടും ഇടതുവശത്തായാലും, ഒന്നു വലതുവശത്തും മറ്റൊന്ന് ഇടതുവശത്തുമായാലും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം

അല്പം ചരിത്രം

എല്ലാ അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യ കളും അവയുടെ അംശബന്ധങ്ങളും കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാമെന്ന പൈഥാഗ റസിന്റെ തത്വശാസ്ത്രം, ഹിപ്പാസസിന്റെ വാദങ്ങളിലൂടെ തകർന്നത് പറഞ്ഞല്ലോ. എന്നാൽ അഭിന്നകസംഖ്യകൾ എന്നൊരു സങ്കല്പം ഗ്രീസിലെ ഗണിതചിന്തയിൽ ഉണ്ടായില്ല. സംഖ്യകൾക്കു പകരം നീള ങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതിയാണ് തുടർന്നു ണ്ടായത്. അതുകൊണ്ടു തന്നെ സംഖ്യാപ രമായ തത്വങ്ങളെല്ലാം ജ്യാമിതീയ ഭാഷയി ലാണ് അക്കാലത്തെ ഗ്രീക്കുഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ കാണുന്നത്.

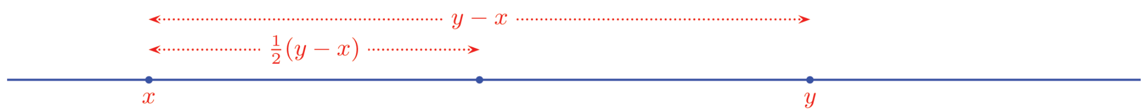
സംഖ്യകളിലെ വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചതുതന്നെയാണ്.

ഒരു സംഖ്യ പൂജ്യമായാലും, ഇതു ശരിയാകുമോ? ഉദാഹരണമായി, 0, 2 ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം 2 ഇനി 0, -2ആയാലും, അകലം 2 തന്നെ, വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽ $0 - (-2) = 2$

സംഖ്യാരേഖയിൽ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും, അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളിൽ വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചതാണ്.

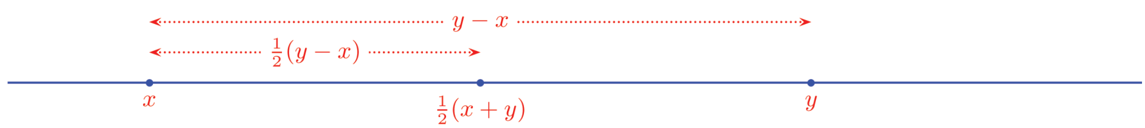
ഇതുപയോഗിച്ച്, സംഖ്യാരേഖയിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ മധ്യബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാം. ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളിൽ ചെറുത് x എന്നും, വലുത് y എന്നുമെടുക്കാം. അപ്പോൾ x ന്റെ വലതുവശത്താണ് y. അവ തമ്മിലുള്ള അകലം $y - x$

x എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് $y - x$ അകലെയാണ് y എന്ന ബിന്ദു; മധ്യബിന്ദു എന്നത്, x ൽ നിന്ന് ഇതിന്റെ പകുതി ദൂരം വലത്തോട്ടാണ്:



അതായത്, മധ്യബിന്ദു

$$x + \frac{1}{2}(y - x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(x + y)$$



സംഖ്യാരേഖയിൽ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെയും മധ്യബിന്ദു, അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ പകുതി സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ്.

ഉദാഹരണമായി, $-2\frac{1}{2}$ ന്റെയും $4\frac{3}{4}$ ന്റെയും മധ്യബിന്ദു.

$$\frac{1}{2}\left(-2\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4} = 1\frac{1}{8}$$

(1) സംഖ്യാരേഖയിൽ, ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി സംഖ്യകളും സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കുക

i) $1, -5$ ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ iii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

iv) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ v) $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}$

(2) ഒന്നാം ചോദ്യത്തിലെ ഓരോ ജോടി ബിന്ദുക്കളുടെയും മധ്യബിന്ദുവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യ കണക്കാക്കുക.

(3) സംഖ്യാരേഖയിൽ $\frac{1}{3}$ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനും $\frac{1}{2}$ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ഭാഗത്തിനെ നാലു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

ബീജഗണിതം

സംഖ്യാരേഖയിൽ 3 എന്ന ബിന്ദുവും 0 എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം 3 തന്നെ. -2 എന്ന ബിന്ദുവും 0 എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം 2.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ ഒരു അധിസംഖ്യയും പൂജ്യവും തമ്മിലുള്ള അകലം ആ സംഖ്യ തന്നെ. ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയും പൂജ്യവും തമ്മിലുള്ള അകലം, സംഖ്യയുടെ ന്യൂനം കളഞ്ഞാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്.

ഇത് ബീജഗണിതത്തിലെങ്ങനെ പറയും?

x അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ x ഉം, പൂജ്യവും തമ്മിലുള്ള അകലം x തന്നെ. x ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിലോ?

(സംഖ്യകളെ അക്ഷരങ്ങളായെഴുതുമ്പോൾ, ന്യൂനസംഖ്യയാണോ അധിസംഖ്യയാണോ എന്നൊന്നും നോക്കാതെ രണ്ടു തരത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെയും x, y എന്നൊക്കെ ഒരുപോലെയാണ് എഴുതുന്നതെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ)

അപ്പോൾ ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയുടെ ന്യൂനചിഹ്നം കളയുക എന്നതിനെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയണം. ഒരു സംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം അതേ സംഖ്യയാണെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ?

ഉദാഹരണമായി,

$$-(-2) = 2$$

അതായത്, ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയുടെ ന്യൂനം കളയുക എന്നതിനു പകരം, അതിന്റെ ന്യൂനമെടുക്കുക എന്നു പറഞ്ഞാൽ മതി. അപ്പോൾ x ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, ന്യൂനചിഹ്നം കളഞ്ഞ അധിസംഖ്യ കിട്ടാൻ $-x$ എടുത്താൽ മതി. ഉദാഹരണമായി $x = -3$ ആണെങ്കിൽ

$$-x = -(-3) = 3$$

ഇനി സംഖ്യാരേഖയിൽ x എന്നൊരു ന്യൂനസംഖ്യയും പൂജ്യവും തമ്മിലുള്ള അകലം $-x$ എന്നു പറയാം.

ഇങ്ങനെ $x > 0$ ആണെങ്കിൽ (അതായത് x അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ) x തന്നെയായും, $x < 0$ ആണെങ്കിൽ (അതായത് x ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ) $-x$ ആയും എടുക്കുന്ന ക്രിയയെ ചുരുക്കി $|x|$ എന്നാണെഴുതുന്നത്. ഇതിനെ x ന്റെ **കേവലമൂല്യം (absolute value)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി

$$|5| = 5 \qquad |-5| = 5$$

$$\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

$$|\pi| = \pi \qquad |-\pi| = \pi$$

പൂജ്യത്തിന്റെ കേവലമൂല്യം പൂജ്യംതന്നെയായിട്ടാണ് എടുക്കുന്നത്. ഇതെല്ലാം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$|x| = \begin{cases} x \ , & x > 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ -x \ , & x < 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ 0 \ , & x = 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \end{cases}$$

ഇതുവരെ പറഞ്ഞതെല്ലാം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

സംഖ്യാരേഖയിൽ പൂജ്യം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും, മറ്റൊരുസംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം, ഈ സംഖ്യയുടെ കേവല മൂല്യമാണ്.

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ

സംഖ്യാരേഖയിൽ 0 സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും x എന്ന സംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം $|x|$

ഇനി സംഖ്യാരേഖയിലെ x, y എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ബീജഗണിതത്തിൽ എങ്ങനെ എഴുതാമെന്നു നോക്കാം. വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്നു ചെറിയ സംഖ്യകുറച്ചുകിട്ടുന്നതാണ് അകലമെന്നു കണ്ടു. അപ്പോൾ x, y ഇവയിൽ വലുതേതാണ് എന്നതിനെ അനുസരിച്ചാണ് അകലം തീരുമാനിക്കേണ്ടത്.

$x > y$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $x - y$

$x < y$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $y - x$

x എന്ന സംഖ്യ y എന്ന സംഖ്യയേക്കാൾ വലുതാണെന്ന് പറയുന്നതിനു പകരം $x - y$ അധിസംഖ്യയാണെന്നു പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ $x - y > 0$ എന്നും പറയാം. ഇതുപോലെ x എന്ന സംഖ്യ y എന്ന സംഖ്യയേക്കാൾ ചെറുതാ

ണെന്നു പറയുന്നതിനുപകരം $x - y$ ന്യൂനസംഖ്യയാണെന്നു പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ $x - y < 0$ എന്നും പറയാം.

$x - y > 0$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $x - y$

$x - y < 0$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $y - x$

ഇനി $x - y$, $y - x$, എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ എന്നോർത്തുനോക്കൂ. ഒരു സംഖ്യയിൽനിന്നു മറ്റൊന്നു കുറയ്ക്കുന്നതിന്റെ ന്യൂനമാണ് മറിച്ചു കുറയ്ക്കുന്നതെന്ന് എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ? (**ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഉപയോഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം)

അതായത് x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും

$$y - x = -(x - y)$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ അകലക്കണക്ക് വീണ്ടും മാറ്റിയെഴുതാം.

$x - y > 0$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $x - y$

$x - y < 0$ ആണെങ്കിൽ, അകലം $-(x - y)$

ഇതൊന്നുകൂടി ശ്രദ്ധിച്ചുനോക്കൂ. $x - y$ അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ അതുതന്നെയും, $x - y$ ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ന്യൂനവുമല്ലേ എടുത്തിരിക്കുന്നത്? ഇതല്ലേ $x - y$ എന്ന സംഖ്യയുടെ കേവലമൂല്യം?

അപ്പോൾ അകലത്തെക്കുറിച്ച് രണ്ടായിക്കണ്ടത്, ഇനി ഒന്നാക്കാം.

സംഖ്യാരേഖയിൽ x, y എന്നീ സംഖ്യകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|x - y|$.

സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ,

സംഖ്യാരേഖയിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അവ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവലമൂല്യമാണ്.

ഉദാഹരണമായി, സംഖ്യാരേഖയിലെ 2, 5 എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$|2 - 5| = |-3| = 3$$

2, −5 ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലമോ?

$$|2 - (-5)| = |2 + 5| = |7| = 7$$

ഇനി ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം.

$|x - 1| = 3$ ആകണമെങ്കിൽ x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം?

ഇത് പലതരത്തിൽ ചെയ്യാം. ജ്യാമിതീയമായി നോക്കിയാൽ $|x-1|$ എന്നത് സംഖ്യാരേഖയിൽ x, 1 എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്. ഈ അകലം 3 ആകണം.

1 ന്റെ വലതുവശത്ത്, അകലം 3 ആയ സംഖ്യ $1 + 3 = 4$

1 ന്റെ ഇടതുവശത്ത്, അകലം 3 ആയ സംഖ്യ $1-3=-2$ ഉം

അപ്പോൾ $x = 4$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -2$

ഇനി ബീജഗണിതരീതിയിൽ ആലോചിച്ചാലോ? $x > 1$ ആണെങ്കിൽ $|x-1|=x-1$ ആണല്ലോ. $x-1=3$ ആകണമെങ്കിൽ $x = 4$ ആകണം.

$x < 1$ ആയാലോ? അപ്പോൾ $|x-1| = 1-x$ ആണ്. $1-x=3$ ആകണമെങ്കിൽ $x = 1-3 = -2$ ആകണം.

ചോദ്യം അൽപം മാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കിയാലോ?

> $|x+1|=3$ ആകണമെങ്കിൽ x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം?

ജ്യാമിതീയമായി ഇതു ചെയ്യാൻ, $|x+1|$ നെ ഒരു അകലമായി കാണണം. സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവലമൂല്യമാണല്ലോ അകലമായി കിട്ടുന്നത്. അപ്പോൾ ആദ്യം $x+1$ നെ തുകയ്ക്കു പകരം വ്യത്യാസമായി എഴുതണം:

$$x+1 = x-(-1)$$

ഇതിൽനിന്ന് $|x+1|$ എന്നത്, സംഖ്യാരേഖയിൽ x ഉം -1 ഉം തമ്മിലുള്ള അകലമാണെന്ന് കാണാം.

ഇനി ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ചെയ്തതുപോലെ -1 ന്റെ വലതുവശത്ത് 3 അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദു $-1+3=2$ എന്നും, ഇടതുവശത്ത് അകലം 3 ആയ ബിന്ദു $-1-3=-4$ എന്നും കാണാം.

ഈ കണക്കും ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ചെയ്തുനോക്കൂ.

ഒരു കണക്കുകൂടി:

> x ഏതു സംഖ്യ ആയാലും $|x|^2 = x^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

x അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ $|x| = x$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

$$|x|^2 = x^2$$

വർഗമൂലവും കേവലമൂല്യവും

x അധിസംഖ്യയായാലും ന്യൂനസംഖ്യയായാലും, $|x|$ അധിസംഖ്യതന്നെയാണ്. ഇതേപോലെ, x അധിസംഖ്യയായാലും ന്യൂനസംഖ്യയായാലും x^2 അധിസംഖ്യതന്നെ.

ഏതു അധിസംഖ്യയ്ക്കും രണ്ടുവർഗമൂലമുണ്ട്. അതിലെ അധിസംഖ്യയായ വർഗമൂലത്തെയാണ് $\sqrt{\ }$ ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$\sqrt{x^2}$ എന്താണ്?

ഉദാഹരണമായി, $x = 4$

എന്നെടുത്താൽ $x^2 = 16$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16} = 4 = x$$

$x = -4$ ആയാലോ?

$x^2 = 16$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16} = 4 = -x$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

ഇതിൽ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് ഇതാണ്

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ ആണെങ്കിലും $\sqrt{x^2}$ എന്നത് x തന്നെ ആകണമെന്നില്ല.

x ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിലോ? $|x| = -x$. അപ്പോൾ

$$|x|^2 = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = x \times x = x^2$$

അവസാനമായി, $x = 0$ ആണെങ്കിലോ? $|x| = 0$

$$|x|^2 = 0^2 = 0$$

ഇനി $x = 0$ ആയതിനാൽ

$$x^2 = 0^2 = 0$$

അപ്പോൾ, $x = 0$ ആണെങ്കിൽ

$$|x|^2 = 0 = x^2$$

(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ സമവാക്യവും ശരിയാകുന്ന x കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $|x-1| = |x-3|$ ii) $|x-3| = |x-4|$

iii) $|x+2| = |x-5|$ iv) $|x| = |x+1|$

(2) $1 < x < 4$, $1 < y < 4$ ആണെങ്കിൽ $|x-y| < 3$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) $x < 3$, $y > 7$ ആണെങ്കിൽ $|x-y| > 4$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) $|x+y| = |x| + |y|$ ആകുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകൾ x, y കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) $|x+y| < |x| + |y|$ ആകുന്ന സംഖ്യകൾ x, y ഉണ്ടോ?

(6) $|x+y| > |x| + |y|$ ആകുന്ന സംഖ്യകൾ x, y ഉണ്ടോ?

(7) $|x-2| + |x-8| = 6$ ആകണമെങ്കിൽ, x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം?

(8) $|x-2| + |x-8| = 10$ ആകണമെങ്കിൽ, x ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം?

x ആയി പല സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ, $|x-2| + |x-8|$ എന്ന സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാവാം?

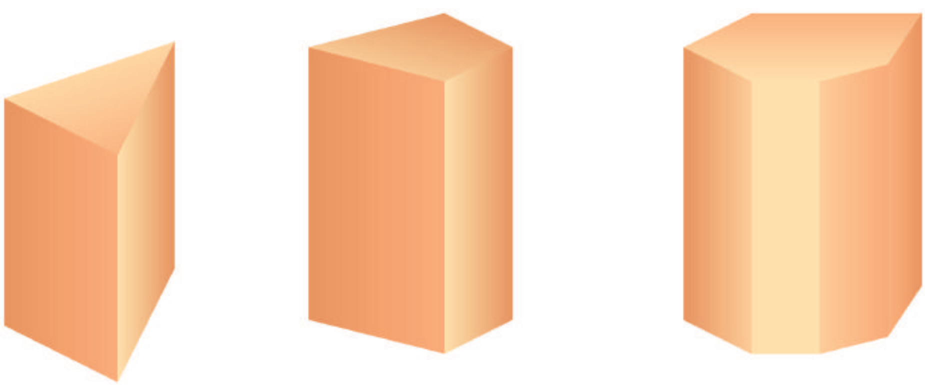
11 സ്തംഭങ്ങൾ

പാദം പലതരം

ചതുരക്കട്ടകളെക്കുറിച്ചും, അവയുടെ വ്യാപ്തത്തെക്കുറിച്ചും ആറാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചല്ലോ:

പല ചതുരങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഇതിന്റെ പുറംകൂട്, അഥവാ ഉപരിതലം. താഴെയും മുകളിലും ഒരേ പോലുള്ള രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ, ഇടതും വലതും രണ്ടെണ്ണം, മുന്നിലും പിന്നിലും മൂന്നാമതൊരു ജോടി; ആകെ ആറു ചതുരങ്ങൾ.

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



പരപ്പും, ഉയരവുമുള്ള ഇവയെ ത്രിമാനരൂപങ്ങൾ (three dimensional shapes) അല്ലെങ്കിൽ ഘനരൂപങ്ങൾ (solids) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇവയ്ക്കെല്ലാം പൊതുവായ മറ്റു ചില സവിശേഷതകളുണ്ട്.

ഘനരൂപങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ

വിവിധതരം ഘനരൂപങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാം. ഇതിനായി തുടക്കത്തിൽ ചില തയാറെടുപ്പുകൾ ആവശ്യമാണ്.

- ജിയോജിബ്ര തുറന്ന് View വിൽനിന്ന് Algebra, Graphic, 3D എന്നിവ തുറക്കുക.
- 3D Graphics ൽ വലതുക്ലിക്ക് ചെയ്ത് Graphic എന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന Preferences എന്ന ജാലകത്തിൽ Show Axes, Use clipping, Show clipping എന്നിവയ്ക്ക് നേരെയുള്ള ✓ അടയാളം കളയുക.
- Options → Labelling → No New Object നൽകിയാൽ വരയ്ക്കുന്ന രൂപങ്ങളുടെ പേര് എഴുതിവരുന്നത് ഒഴിവാക്കാം. ഇനി സ്തംഭങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

Graphic ൽ ത്രികോണം, ചതുരം എന്നിങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ജ്യാമിതീയരൂപം വരയ്ക്കുക (ഇതിനായി Grid ഉപയോഗിക്കാം). ഈ രൂപം 3D Graphics ലും കാണാൻ കഴിയും. 3D Graphics ൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് Extrude to Prism or Cylinder ഉപയോഗിച്ച് 3D Graphics ൽ കാണുന്ന ജ്യാമിതീയരൂപത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ തുറക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം നൽകുക. 3D Graphics ൽ ഒരു സ്തംഭം ലഭിക്കും. Rotate 3D Graphics View ഉപയോഗിച്ച് ഈ സ്തംഭത്തിനെ തിരിച്ചും മറിച്ചുമൊക്കെ നോക്കാൻ കഴിയും.

Graphics ൽ വരച്ച ജ്യാമിതീയരൂപത്തിന്റെ ആകൃതി മാറ്റുന്നതിനനുസരിച്ച് സ്തംഭത്തിന്റേയും ആകൃതി മാറുന്നത് കാണാം. ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമായി സ്ലൈഡറിന്റെ പേര് കൊടുത്താൽ ഉയരം ആവശ്യത്തിനനുസരിച്ച് മാറ്റാം.

ആദ്യത്തെ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലം, ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും, മൂന്നു ചതുരങ്ങളും ചേർന്നതാണ്. രണ്ടാമത്തേതിൽ ത്രികോണങ്ങൾക്കു പകരം ചതുർഭുജങ്ങളും, മൂന്നാമത്തേതിൽ ഷഡ്ഭുജങ്ങളുമാണ്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു ബഹുഭുജങ്ങളും, അവയുടെ വശങ്ങളോരോന്നും എതിർവശങ്ങളായി ഒരേ ഉയരത്തിൽ നിൽക്കുന്ന ചതുരങ്ങളുമാണ് ഇവയുടെയെല്ലാം ഉപരിതലം. ഇത്തരം രൂപങ്ങളുടെ പൊതുവായ പേര് ബഹുഭുജസ്തംഭം (prism) എന്നാണ്.

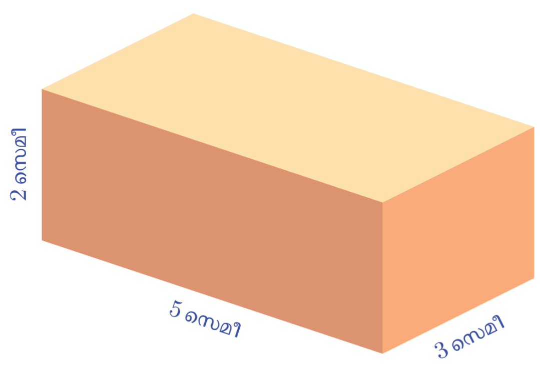
ഒരു സ്തംഭത്തിലെ ബഹുഭുജങ്ങളെയും ചതുരങ്ങളെയുമെല്ലാം അതിന്റെ മുഖങ്ങൾ (faces) എന്നാണ് പറയുന്നത്. താഴത്തും മുകളിലുമുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളെ പാദമുഖങ്ങളെന്നും, ചതുരങ്ങളെ പാർശ്വമുഖങ്ങളെന്നും പറയുന്നു. പാദമുഖങ്ങളുടെ ആകൃതിയനുസരിച്ച്, സ്തംഭങ്ങളെ, ത്രികോണസ്തംഭം, ചതുർഭുജസ്തംഭം എന്നെല്ലാം തരംതിരിക്കാം.

മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നത്, ഒരു ത്രികോണസ്തംഭവും, ഒരു ചതുർഭുജസ്തംഭവും, ഒരു ഷഡ്ഭുജസ്തംഭവുമാണ്. ഇതുവരെ ചതുരക്കട്ട എന്നു വിളിച്ചിരുന്ന രൂപത്തിനെ (അല്പം കൂടി കനത്തിൽ) ചതുരസ്തംഭം എന്നു വിളിക്കാം.

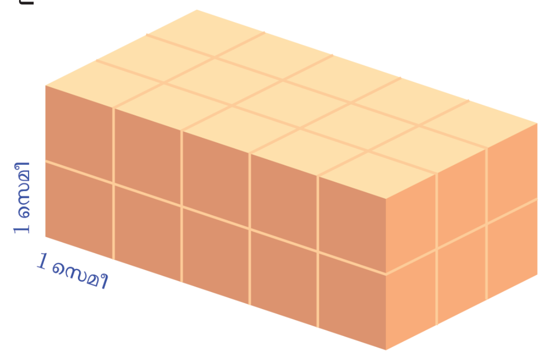
ബഹുഭുജങ്ങളും ചതുരങ്ങളും കാർഡ് ബോർഡിൽ വെട്ടിയെടുത്ത് പൊള്ളയായ പലതരം സ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കി നോക്കൂ.

വ്യാപ്തം

ആറാംക്ലാസിൽ ചതുരസ്തംഭങ്ങളുടെ (ചതുരക്കട്ടകളുടെ) വ്യാപ്തം കണക്കാക്കിയത് ഓർമയുണ്ടോ? ഉദാഹരണമായി, ഈ ചതുരസ്തംഭം നോക്കുക.



ചുവടെ കാണുന്നതു പോലെ ഇതിനെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരു സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരക്കട്ടകളായി ഭാഗിക്കാം:

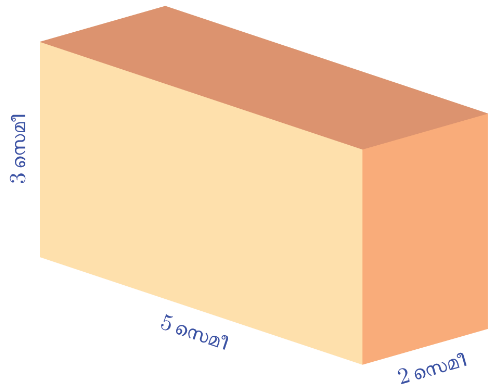


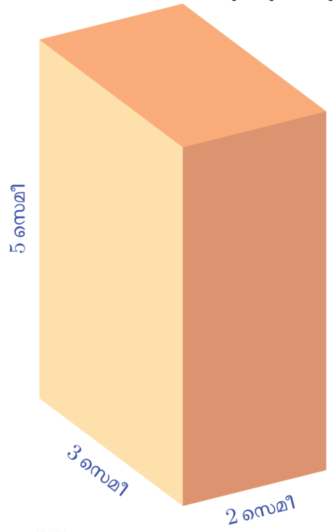
ഇതിൽ $5 \times 3 \times 2 = 30$ ചെറുസമചതുരക്കട്ടകളുണ്ട്. അതിനാൽ ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 30 ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

ആറാംക്ലാസിൽ **ഭാഗങ്ങളുടെ ഭാഗം** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഭിന്നപ്പരപ്പ്** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടതുപോലെ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെയും നീളവും വീതിയും ഉയരവുമെല്ലാം ഭിന്നസംഖ്യകളായാലും വ്യാപ്തം, ഈ നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണെന്നു കാണാം. **പുതിയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഗുണനം** എന്ന ഭാഗത്തിൽ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് വിശദീകരിച്ചതുപോലെ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ അളവുകൾ അഭിന്നകസംഖ്യകളാണെങ്കിലും, വ്യാപ്തം അവയുടെ ഗുണനഫലമാണെന്നും കാണാം.

ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം. മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദം ഒരു ചതുരമാണ്: വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും; പരപ്പളവ് 5×3 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ ഈ പരപ്പളവിന്റെയും സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമായ 2 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ് വ്യാപ്തം.

ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ എല്ലാ മുഖങ്ങളും ചതുരമായതിനാൽ, ഏതു മുഖവും പാദമായെടുക്കാം:



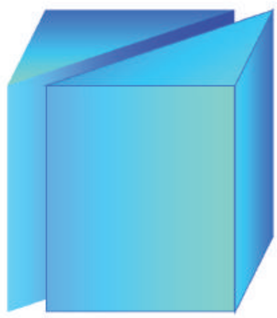


എങ്ങനെയെടുത്താലും, പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം തന്നെയല്ലേ വ്യാപ്തം?

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമോ എന്നു നോക്കാം. ആദ്യമൊരു മട്ടത്രികോണസ്തംഭമെടുക്കാം:

ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണാൻ Volume ഉപയോഗിച്ച് സ്തംഭത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി. സ്തംഭം വരയ്ക്കുമ്പോൾ Algebra ജാലകത്തിൽ Prism എന്നതിന് താഴെ ഒരു അക്ഷരവും സംഖ്യയും കാണാം. സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തെയാണ് സംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

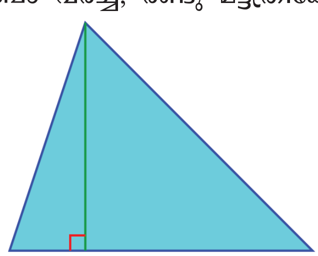
ഇതേപോലെയുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണ സ്തംഭം കൂടി ചേർത്തു വച്ച് ഒരു ചതുരസ്തംഭമുണ്ടാക്കാമല്ലോ:



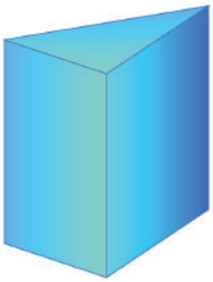
5BEDDQ

പാദമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് a എന്നെടുത്താൽ, ഇത്തരം രണ്ടെണ്ണം ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് (പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നതിനെ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം) $2a$; ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം തന്നെയാണ് ചതുരസ്തംഭത്തിന്റേയും ഉയരം. അത് h എന്നെടുത്താൽ, ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $2ah$. ഇത് ഒരേ വലുപ്പമുള്ള രണ്ട് ത്രികോണസ്തംഭങ്ങൾ ചേർന്ന വ്യാപ്തമാണ്. അപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ah. അതായത്, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം.

ഇനി പാദം മട്ടമല്ലാത്ത ത്രികോണമാണെങ്കിലോ? ഏതു ത്രികോണത്തെയും, ഒരു ശീർഷത്തിലൂടെ ലംബം വരച്ച്, രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളാക്കാം.



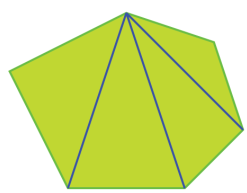
അപ്പോൾ പാദം മട്ടത്രികോണമല്ലാത്ത സ്തംഭത്തിന്റെയും പാദവും, മുകളിലെ ത്രികോണവും സമാന്തരവരകൾ കൊണ്ടു ഭാഗിച്ച്, ഈ വരകളിലൂടെ സ്തംഭത്തെ നെടുകെ മുറിച്ചാൽ, രണ്ടു മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളാകും.



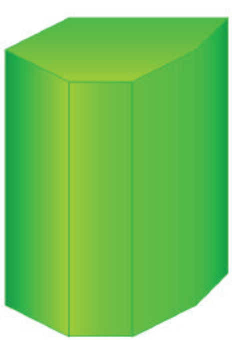
ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം കൂട്ടിയാൽ, ആദ്യത്തെ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കിട്ടുകയും ചെയ്യും. ഭാഗിക്കുന്നതിനു മുമ്പുള്ള സ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് a, ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന സ്തംഭങ്ങളുടെ പാദപ്പരപ്പ് b, c എന്നെടുത്താൽ $a = b + c$. എല്ലാ സ്തംഭങ്ങൾക്കും ഒരേ ഉയരമാണ്. ഇത് h എന്നെടുത്താൽ, മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക $bh + ch = (b + c)h = ah$. ഇത് ആദ്യത്തെ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തമല്ലേ?

അങ്ങനെ ഏതു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്നു കിട്ടി.

ഏതു ബഹുഭുജത്തിലും, ഒരു നിശ്ചിത മൂലയും മറ്റെല്ലാ മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച്, ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം; ബഹുഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അങ്ങനെ ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയുമാണ്:

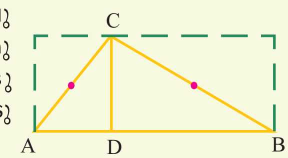


അപ്പോൾ ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തേയും, ത്രികോണസ്തംഭങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം:



ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ച് അതുപയോഗിച്ച് ഒരു മട്ടത്രികോണസ്തംഭം വരയ്ക്കുക. Graphics ലെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Reflect about Point ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിലും ഈ ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്കുചെയ്യുമ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പ്രതിബിംബമായി മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടും. രണ്ട് മട്ടത്രികോണങ്ങളും ചേർന്ന് ഒരു ചതുരം രൂപപ്പെടുന്നത് കാണാം. പുതിയ മട്ടത്രികോണം പാദമാക്കിക്കൊണ്ട് ആദ്യത്തെ സ്തംഭത്തിന്റെ അതേ ഉയരത്തിൽ മറ്റൊന്ന് വരയ്ക്കുക. രണ്ട് മട്ടത്രികോണസ്തംഭങ്ങളും ചേർന്ന് ഒരു ചതുരസ്തംഭം കിട്ടും.

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതുപയോഗിച്ച് ഒരു ത്രികോണസ്തംഭം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്നും എതിർവശത്തേക്കുള്ള ലംബം വരച്ച് എതിർവശവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ഈ ബിന്ദു മട്ടമൂലയായിവരുന്ന രണ്ട് മട്ടത്രികോണങ്ങളും വരയ്ക്കുക. ഓരോ മട്ടത്രികോണത്തിനും അതിന്റെ കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂള്ള പ്രതിബിംബം വരയ്ക്കുക (Reflect about Point ഉപയോഗിക്കാം). ആദ്യത്തെ ത്രികോണസ്തംഭം മറച്ചതിനുശേഷം അതേ ഉയരത്തിൽ, ഇപ്പോൾ ലഭിച്ച നാല് മട്ടത്രികോണങ്ങളും പാദങ്ങളാകുന്ന നാല് ത്രികോണസ്തംഭങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഇവ നാലും ചേർന്ന് ഒരു ചതുരസ്തംഭം ആകുന്നത് കാണാം. ഇതിന്റെ വ്യാപ്തവും, ആദ്യത്തെ ത്രികോണ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

സ്തംഭത്തിന്റെ പാദപ്പരപ്പ് a ആണെന്നും, സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം h ആണെന്നും എടുക്കാം. പാദത്തെ n ത്രികോണങ്ങളാക്കാമെങ്കിൽ ചിത്രത്തിൽ കണ്ടതുപോലെ സ്തംഭത്തെ n ത്രികോണസ്തംഭങ്ങളായി മുറിക്കാം. ഇവയുടെ പാദപ്പരപ്പ് $b_1, b_2, ..., b_n$ എന്നെടുത്താൽ, വ്യാപ്തം $b_1h, b_2h, ..., b_nh$ എന്നാകും. അപ്പോൾ ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$b_1h + b_2h + ... + b_nh = (b_1 + b_2 + ... + b_n)h = ah$$

അതായത്,

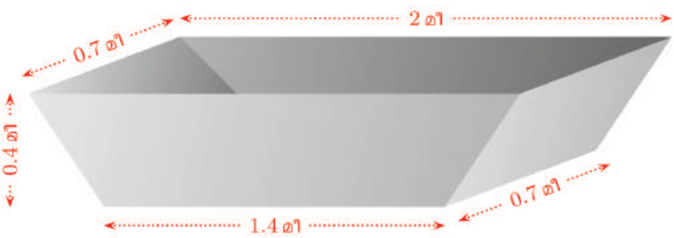
5BN9FD

ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

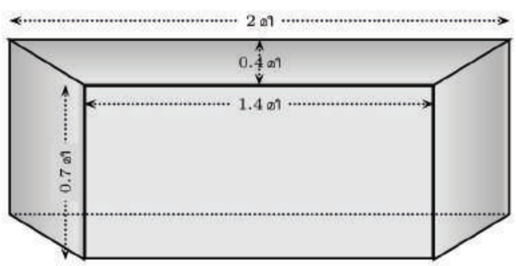
ഉദാഹരണമായി ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ പാദം, വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററായ സമഭുജത്രികോണവും, ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 \times 10 = 40\sqrt{3} \text{ ഘനസെന്റിമീറ്റർ}$$

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ചിത്രമാണ് കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഇതിലെത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?



മുന്നിലെയും പിന്നിലെയും മുഖങ്ങൾ ഒരേപോലെയുള്ള സമപാർശ്വലംബകങ്ങളായ സ്തംഭമാണിത്. ഇതൊരു സ്തംഭമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ ഈ സ്തംഭത്തെ ചരിച്ച് ഇങ്ങനെ വയ്ക്കുന്നതായി കരുതുക:



ഈ ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{2} \times (2 + 1.4) \times 0.4 = 0.68 \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

സംഭരണിയുടെ വ്യാപ്തം,

$$0.68 \times 0.7 = 0.476 \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

ഒരു ഘനമീറ്ററെന്നാൽ ആയിരം ലിറ്റർ. അപ്പോൾ സംഭരണിയിൽ 476 ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.

(സ്തംഭം എപ്പോഴും പാദം താഴെയായി വയ്ക്കണമെന്നില്ല)

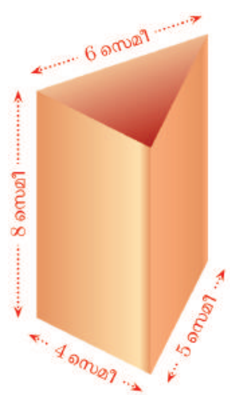
(1) ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 15 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(2) മഴവെള്ളം ശേഖരിക്കാനായി, സ്കൂൾമുറ്റത്ത് സമഷഡ്ഭുജാകൃതിയിൽ ഒരു കുഴിയുണ്ട്. ഇതിന്റെ ഒരു വശം 2 മീറ്ററും, കുഴിയുടെ ആഴം 3 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ ഒരു മീറ്റർ ഉയരത്തിൽ വെള്ളമുണ്ട്. അത് എത്ര ലിറ്ററാണ്?

(3) സ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ പാദം, വശങ്ങളെല്ലാം 16 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരമാണ്. പാത്രത്തിൽ 10 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ വെള്ളമുണ്ട്. ഇതിൽ, വക്കുകളെല്ലാം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരക്കട്ട മുക്കിയാൽ, വെള്ളത്തിന്റെ നിരപ്പ് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ ഉയരും?

പരപ്പളവ്

കട്ടിക്കടലാസുകൊണ്ട് ഇവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ഒരു കുഴലുണ്ടാക്കണം:



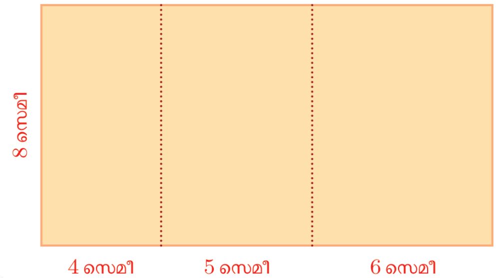
മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചൊട്ടിച്ച് ഉണ്ടാക്കാം. ഒറ്റച്ചതുരം മടക്കിയൊട്ടിച്ചും ഉണ്ടാക്കാം:

ഇതുണ്ടാക്കാൻ എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം?

ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$(4 + 5 + 6) \times 8 = 15 \times 8 = 120$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

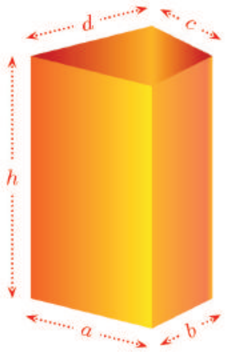
ഒരു സ്തംഭത്തെ പൊളിച്ച് നിവർത്തിവയ്ക്കുന്ന രൂപം എങ്ങനെയുണ്ടാകുമെന്ന് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് കാണാൻ കഴിയും. ഒരു സ്തംഭം വരയ്ക്കുക. 3D Graphics ലെ Net ഉപയോഗിച്ച് സ്തംഭത്തിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ സ്തംഭം പൊളിച്ച് നിവർത്തിയ രൂപം കിട്ടും. ഇതിനോടൊപ്പം Graphics ൽ ഒരു സ്ലൈഡറും കിട്ടും. സ്ലൈഡർ നീക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് സ്തംഭം രൂപപ്പെട്ടുവരുന്നത് കാണാം. ആദ്യം വരച്ച സ്തംഭം മറച്ചു വയ്ക്കണമെങ്കിൽ Algebra View ലെ Prism എന്നതിൽ സ്തംഭത്തിന്റെ പേരിനു നേരെയുള്ള ബിന്ദുവിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി. വരച്ച ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ മറച്ചുവയ്ക്കാൻ Algebra View യിലെ Point എന്ന് എഴുതിയിരിക്കുന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഒരുമിച്ചെടുക്കുക. തുടർന്ന് വലതു ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് Show Object എന്നതിന് നേരെയുള്ള ✓ അടയാളം കളയുക.

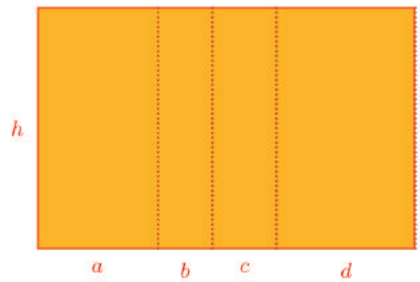


ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ് കൂട്ടിയതാണിത്. പൊതുവെ ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവിന്റെ തുകയെ അതിന്റെ പാർശ്വതല പരപ്പളവ് (lateral surface area) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത് ചുരുക്കി, പാർശ്വപ്പരപ്പ് എന്നും പറയാം.

ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാൻ, 15 നെ 8 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയാണ് ചെയ്തത്; ഇതിലെ $4 + 5 + 6 = 15$, പാദമായ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, 8 സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവുമല്ലേ? അൽപമൊന്നാലോചിച്ചാൽ, ഏതു ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമെന്നു കാണാം.

പാദം ത്രികോണത്തിനു പകരം ചതുർഭുജമായാലോ?





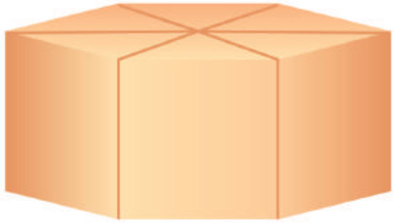
ഈ ചതുർഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് $(a + b + c + d)\,h$; അതായത്, പാദചതുർഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം. ഇതുപോലെ ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാം:

ഏതു ബഹുഭുജസ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പ്, പാദചുറ്റളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

അടഞ്ഞ സ്തംഭമാണെങ്കിൽ ഉപരിതലത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, പാർശ്വപ്പരപ്പിനോട് പാദപ്പരപ്പുകൾ കൂട്ടിയാൽ മതി.

ഒരു കണക്കു നോക്കാം:

മരം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് 48 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും, അതിന്റെ ഉയരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം ആറെണ്ണം ചേർത്തുവച്ച് ഒരു ഷഡ്ഭുജസ്തംഭമുണ്ടാക്കി:



Net ഉപയോഗിച്ച് ഒരു സ്തംഭത്തിനെ പൊളിച്ചുനിവർത്തിയ രൂപം നിർമിക്കുമ്പോൾ Algebra ജാലകത്തിൽ Net എന്ന് എഴുതിയതിനു ചുവടെ ഒരക്ഷരവും ഒരു സംഖ്യയും കാണാം (ഉദാഹരണമായി h=22). സ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവിനെയാണ് ഈ സംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഇതു മുഴുവൻ വർണക്കടലാസൊട്ടിച്ച് ഭംഗിയാക്കാൻ, എത്ര ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം?

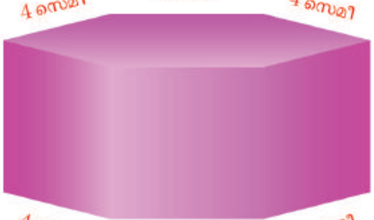
ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ മുഴുപ്പരപ്പാണിവിടെ വേണ്ടത്; അതിന് പാർശ്വപ്പരപ്പും, പാദപ്പരപ്പുകളും കൂട്ടണം.

പാർശ്വപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കാൻ, ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് വേണം. അതിന് ത്രികോണപാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കണക്കാക്കണം.

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും പാർശ്വപ്പരപ്പിനെ ഉയരം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, പാദ ചുറ്റളവു കിട്ടും. അപ്പോൾ, കണക്കിൽ പറഞ്ഞ ത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് $48 \div 4 = 12$ സെന്റിമീറ്റർ.

പാദം ഒരു സമഭുജത്രികോണമായതിനാൽ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ മൂന്നുമടങ്ങാണ് ചുറ്റളവ്; ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം $12 \div 3 = 4$ സെന്റിമീറ്റർ.

കണക്കിലെ ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് ഇനി കണക്കാക്കാമല്ലോ.



വശങ്ങളെല്ലാം 4 സെന്റിമീറ്ററായ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $6 \times 4 = 24$ സെന്റിമീറ്റർ. സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവും 4 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ പാർശ്വപ്പരപ്പ് $24 \times 4 = 96$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി രണ്ടു പാദങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടണം. ഒരു ത്രികോണപാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3} \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

ഇവ ആറെണ്ണം ചേർന്ന ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

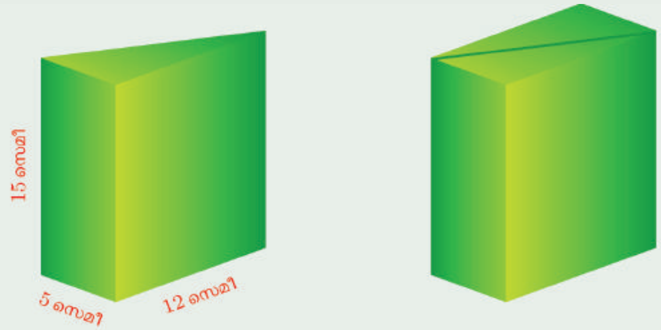
അപ്പോൾ ഷഡ്ഭുജസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതലം മുഴുവനെടുത്താൽ പരപ്പളവ്

$$96 + \left(2 \times 24\sqrt{3}\right) = 96 + 48\sqrt{3} = 48\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

$\sqrt{3}$ നോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യയായി 1.73 എടുത്താൽ, ഇത് 179 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററിനേക്കാൾ അല്പം കൂടുതലെന്നു കാണാം. ഏതായാലും 180 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് മതിയാകും.

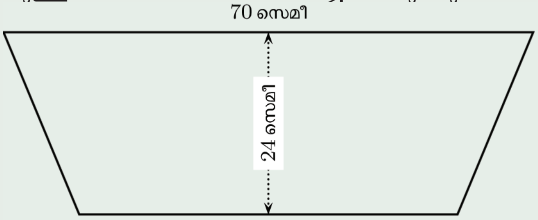
(1) ഒരു സമഭുജത്രികോണസ്തംഭത്തിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 12 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ആകെ ഉപരിതലപ്പരപ്പ് കണക്കാക്കുക.

(2) ചിത്രത്തിൽക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, പാദം മട്ടത്രികോണമായ രണ്ടു സ്തംഭങ്ങൾ ചേർത്തു വച്ച് ഒരു ചതുരസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കി.



ഈ ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതലപ്പരപ്പെത്രയാണ്?

(3) സ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ലംബകമുഖങ്ങളുടെ അളവുകൾ ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



സംഭരണിയുടെ നീളം 80 സെന്റിമീറ്റാണ്. ഇതിന്റെ അകത്തും പുറത്തും ചായമടിക്കാൻ., ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 100 രൂപാ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ വേണം?

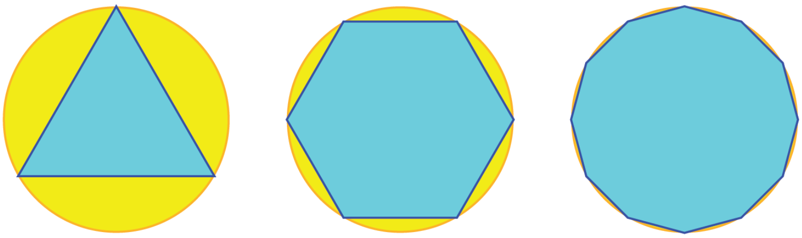
വൃത്തസ്തംഭം

അറ്റത്ത് തുല്യമായ ബഹുഭുജങ്ങളും, വശങ്ങളിൽ ചതുരങ്ങളുമായ രൂപങ്ങളാണ് ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങൾ. അറ്റത്ത് വൃത്തങ്ങളും, വശങ്ങൾ ചതുരങ്ങളായി മടങ്ങാതെ ഒഴുക്കൻ വളവുമായ സ്തംഭങ്ങളുമുണ്ട്; കട്ടിയും പൊള്ളയുമായ ഇത്തരം രൂപങ്ങൾ ധാരാളം കണ്ടിട്ടുണ്ടാകുമല്ലോ:

ഇത്തരം ഘനരൂപത്തെ വൃത്തസ്തംഭം (cylinder) എന്നാണു പറയുന്നത്.

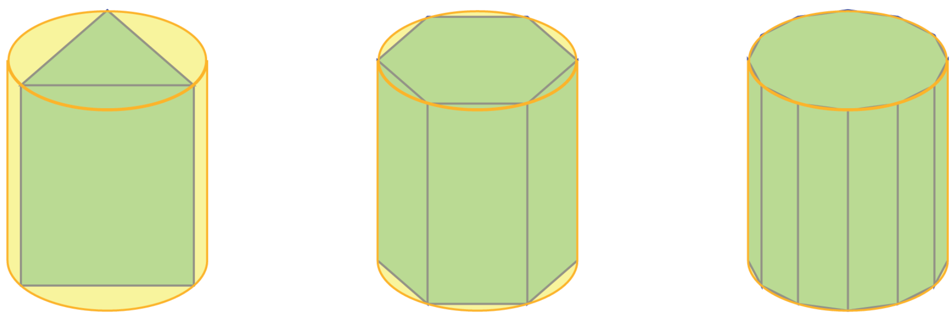
വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണോ?

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കിയത്, അതിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുതലാക്കിയിട്ടാണല്ലോ:



അപ്പോൾ ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളിൽ പാദത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ അവ വൃത്തസ്തംഭത്തിനോട് അടുക്കും:

n എന്ന പേരിൽ ഒരു Integer Slider ഉണ്ടാക്കുക. ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, മൂലകൾ വൃത്തത്തിൽ ആയി n വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക. 3D Graphics തുറന്ന്, ബഹുഭുജസ്തംഭവും വൃത്തസ്തംഭവും വരയ്ക്കുക. വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂട്ടി നോക്കൂ. ബഹുഭുജസ്തംഭം വൃത്തസ്തംഭത്തിനോട് അടുത്തുവരുന്നതായി കാണാം.



5BX5H1

വൃത്തസ്തംഭത്തിനുള്ളിലെ വിവിധ ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദപ്പരപ്പ് p_1, $p_2, p_3, \ldots$ എന്നും, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ തന്നെ പാദപ്പരപ്പ് c എന്നുമെടുത്താൽ, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ c എന്ന സംഖ്യയുടെ അടുത്തടുത്തു വരും. എല്ലാ സ്തംഭങ്ങൾക്കും ഒരേ ഉയരമാണ്; അത് h എന്നെടുത്താൽ, ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം $p_1h, p_2h, p_3h, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഈ സംഖ്യകൾ ch എന്ന സംഖ്യയുടെ അടുത്തടുത്തു വരും. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം അടുത്തടുത്തു വരുന്നത്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിനോടാണ്. അങ്ങനെ, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ch എന്നു കിട്ടും.

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പാദപ്പരപ്പിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

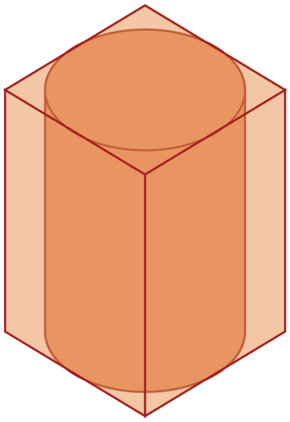
വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ π കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം

3 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

സമചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കെല്ലാം 10 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുണ്ട്. സ്തംഭത്തിന് 20 സെന്റി മീറ്റർ ഉയരവുമുണ്ട്. ഇതിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തമാണ് ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദം; ഉയരം, സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റേതുതന്നെ:



അതായത്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ വ്യാസം, സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു തുല്യമാകണം.

അപ്പോൾ, പാദവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റീമീറ്റർ; പാദപരപ്പളവ് 25π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, വ്യാപ്തം $25\pi \times 20 = 500\pi$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

(1) ഇരുമ്പുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 32 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതുരുക്കി, പാദത്തിന്റെ ആരം 20 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കി. ഈ സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

(2) ഒരേ ഉയരമുള്ള രണ്ടു വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

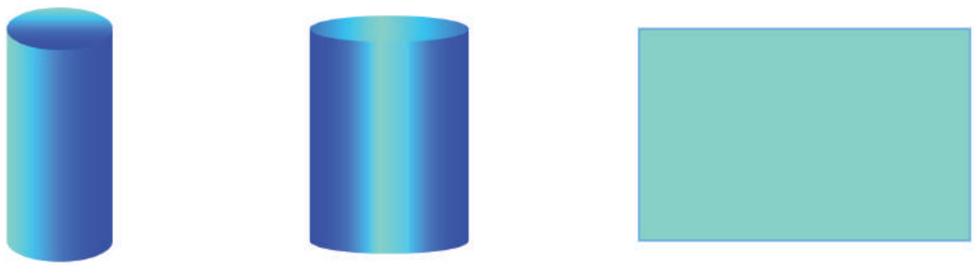
(3) രണ്ടു വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും ഉയരം 5:4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമാണ്.

i) ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

ii) ആദ്യത്തെ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 720 ഘനസെന്റിമീറ്റർ; രണ്ടാമത്തേതിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

വക്രതലം

ചതുരാകൃതിയിലുള്ള കടലാസോ തകിടോ വളച്ച്, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള കുഴലുണ്ടാക്കാം; മറിച്ച്, പൊള്ളയായ, രണ്ടറ്റവും തുറന്ന ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിനെ മുറിച്ച് വളവു നിവർത്തിയാൽ ഒരു ചതുരമാകും:



ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രതലപരപ്പളവ് (curved surface area) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ചുരുക്കി വക്രപ്പരപ്പ് എന്നും പറയാം.

ഈ ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം തന്നെയാണ്. മറ്റേ വശം പാദവൃത്തം നിവർത്തിയെടുത്തതാണ്; അതായത്, അതിന്റെ നീളം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്. ഈ നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണ് വക്രപ്പരപ്പ്.

ജിയോജിബ്രയിൽ വൃത്തസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കുമ്പോൾ Algebra ജാലകത്തിൽ Cylinder എന്നതിനു ചുവടെ കാണുന്ന സംഖ്യ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യപ്തവും Surface എന്നതിനു ചുവടെ കാണുന്ന സംഖ്യ വക്രതല പരപ്പളവുമാണ്.

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രതല പരപ്പളവ്, പാദചുറ്റളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വ്യാസത്തിന്റെ π മടങ്ങാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 3 സെന്റീമീറ്ററും, ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ വക്രപരപ്പ് $\pi \times 6 \times 5 = 30\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇത് അടഞ്ഞ സ്തംഭമാണെങ്കിൽ, ഉപരിതലത്തിന്റെ മൊത്തം പരപ്പളവ് കിട്ടാൻ, രണ്ടറ്റത്തെയും വൃത്തങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കൂടി കൂട്ടണം. അതായത്, $30\pi + (2 \times 3^2 \times \pi) = 48\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

(1) ഒരു കിണറിന്റെ അകത്തെ വ്യാസം 2.5 മീറ്ററും, ആഴം 8 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിന്റെ ഉൾഭാഗം സിമന്റ് തേയ്ക്കുന്നതിന്, ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 350 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?

(2) 1.20 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു റോളറിന്റെ വ്യാസം 80 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്.

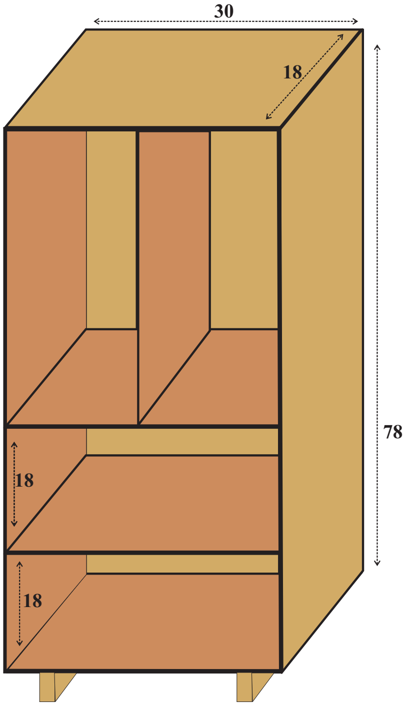
ഇത് ഒരു പ്രാവശ്യം കറക്കുമ്പോൾ, നിരപ്പാവുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(3) ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രപ്പരപ്പും, പാദപ്പരപ്പും തുല്യമാണ്. പാദത്തിന്റെ ആരവും സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

ഒരു അലമാരയുടെ ചിത്രമാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. നീളങ്ങൾ എല്ലാം ഇഞ്ചിലാണ്. മുൻഭാഗത്ത് രണ്ട് അടപ്പുകളും വേണം. ഇതുണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ ഓരോ പ്ലൈവുഡ് കഷണത്തിന്റെയും ചിത്രം പ്രത്യേകം വരച്ച് അളവുകൾ എഴുതുക (ഒരേ അളവുകൾ ഉള്ളത് ഒരെണ്ണം വരച്ച് എണ്ണം എഴുതിയാൽ മതി). അലമാര ഉണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ പ്ലൈവുഡിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

18 മില്ലിമീറ്റർ (ഏകദേശം $\frac{3}{4}$ ഇഞ്ച്) കനമുള്ള പ്ലൈവുഡാണ് നിർമാണത്തിന് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്. മാർക്കറ്റിൽ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വലിപ്പത്തിലുള്ള ഷീറ്റുകൾ കിട്ടും. 96×48 ഇഞ്ച് വലിപ്പമുള്ളതും 72×48 ഇഞ്ച് വലിപ്പമുള്ളതും.

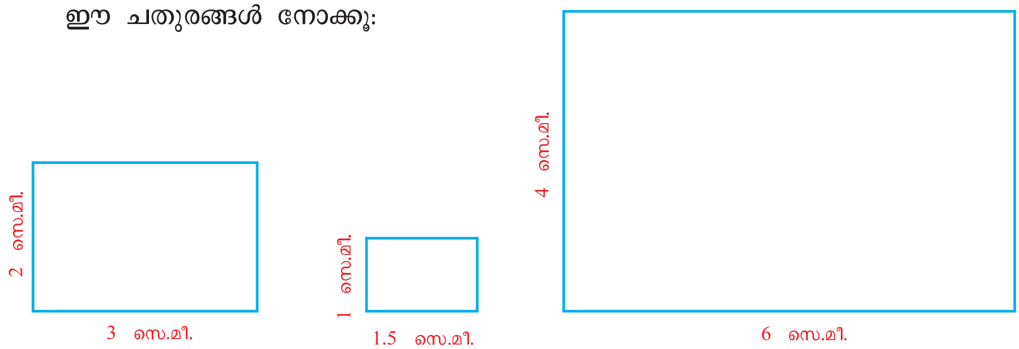
ഈ അലമാരയുണ്ടാക്കാൻ ഇത്തരത്തിലുള്ള ഓരോ ഷീറ്റും എത്രവീതം വാങ്ങണം? (ഓരോ ഷീറ്റും പരമാവധി ഉപയോഗപ്പെടുത്താൻ ശ്രദ്ധിക്കുക). കട്ടിയുള്ള കാർഡ്ബോർഡ് ഉപയോഗിച്ച് ഇതിന്റെ ഒരു ചെറുമാതൃക ഉണ്ടാക്കി നോക്കൂ.



Downloaded from https:// www.studiestoday.com

12 അനുപാതം

ഈ ചതുരങ്ങൾ നോക്കൂ:

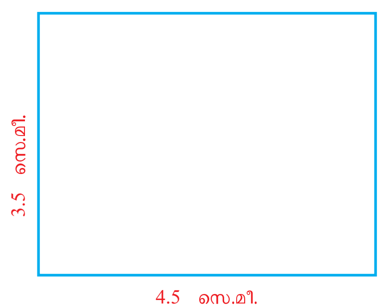


നീളവും വീതിയുമെല്ലാം വ്യത്യസ്തമാണ്; പക്ഷേ അതിലൊരു കണക്കില്ലേ?

ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണ്, രണ്ടാമത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളം; രണ്ടു മടങ്ങാണ് മൂന്നാമത്തെ ചതുരത്തിൽ. വീതിയും ഇതുപോലെതന്നെയല്ലേ?

അതായത്, ഈ ചതുരങ്ങളിൽ, നീളവും വീതിയും ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്.

ഇനി ഈ ചതുരം നോക്കൂ:



ഇതും ഇക്കൂട്ടത്തിൽപ്പെടുത്താമോ?

ആദ്യചതുരത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങാണ് ഇതിന്റെ നീളം; വീതി ഒന്നേമുക്കാൽ മടങ്ങും. നീളവും വീതിയും മാറിയത് ഒരേ തോതിലല്ലാത്തതിനാൽ, ഈ ചതുരം ഇക്കൂട്ടത്തിൽ ചേരില്ല.

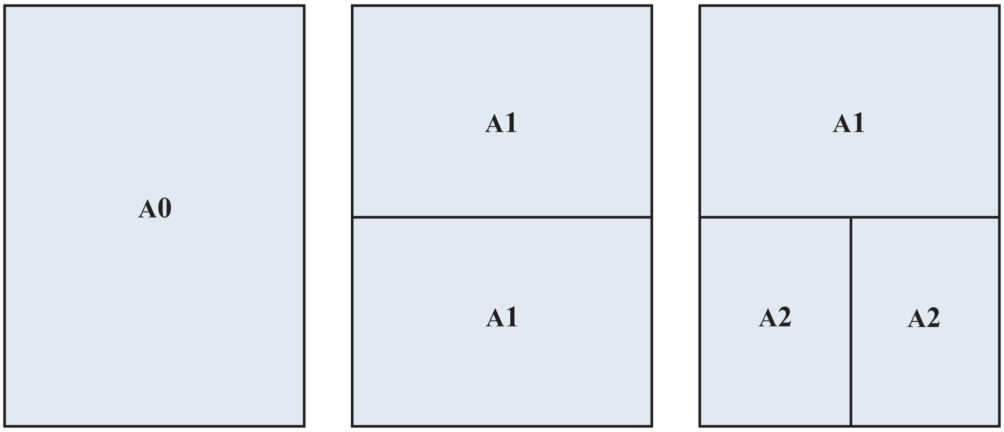
കൂട്ടത്തിലെ ആദ്യത്തെ ചതുരവുമായി ഒത്തുനോക്കിയാണല്ലോ തീരുമാനിച്ചത്. അല്ലാതെയും ഇതു കാണാം. കൂട്ടത്തിലെ എല്ലാ ചതുരത്തിലും, നീളം വീതിയുടെ ഒന്നര മടങ്ങല്ലേ? പുതിയ ചതുരത്തിൽ അങ്ങനെയല്ലല്ലോ. മറ്റൊരുവിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, കൂട്ടത്തിലെ മൂന്നു ചതുരങ്ങളിലും, നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 2; പുതിയ ചതുരത്തിൽ ഇത് 9 : 7. ഈ അംശബന്ധങ്ങൾ തുല്യമല്ല

അംശബന്ധങ്ങളുടെ തുല്യതയെ പൊതുവെ **അനുപാതം (proportion)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇതനുസരിച്ച്, ആദ്യം വരച്ച മൂന്നു ചതുരങ്ങളിലും, നീളവും വീതിയും **ആനുപാതികമാണ് (proportional)** എന്നു പറയാം.

നീളവും വീതിയും ആനുപാതികമായ ചതുരങ്ങൾ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ആവശ്യമുണ്ട്. പല വലുപ്പത്തിൽ ടെലിവിഷനുകൾ ഉണ്ടാക്കാറുണ്ടെങ്കിലും, എല്ലാറ്റിലും നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 16 : 9 ആയിരിക്കുമെന്നും, ഓരോ ദേശത്തെയും പതാകയുടെ നീളവും വീതിയും നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിലാണെന്നും മറ്റും ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ?

അനുപാതം ഉപയോഗിക്കുന്ന മറ്റൊരു സന്ദർഭം നോക്കാം: എഴുതാനും മറ്റും സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്നത് A4 കടലാസാണല്ലോ. A0, A1, A2, ... എന്നിങ്ങനെ പല വലുപ്പത്തിലുള്ള കടലാസുകളുണ്ട്. എന്താണിതിന്റെ കണക്ക്?

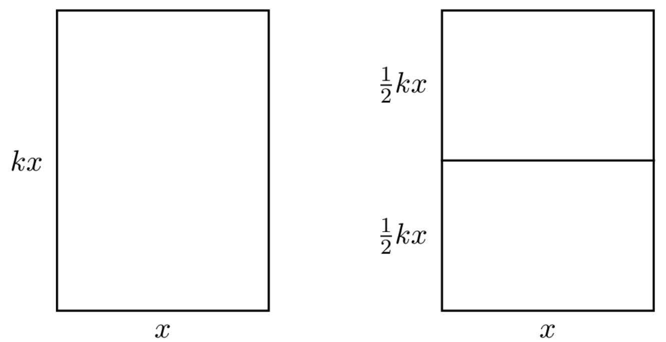
A0 കടലാസിന്റെ പകുതിയാണ് A1 കടലാസ്, അതിന്റെ പകുതി A2 എന്നിങ്ങനെയാണ് വലുപ്പം കുറയുന്നത്;



അതായത് ഈ ചതുരങ്ങളിലെല്ലാം വലിയ വശം, ചെറിയ വശത്തിന്റെ ഒരേ മടങ്ങായിരിക്കണം.

അതെങ്ങനെ സാധിക്കുമെന്നു നോക്കാം. അതിന് ഇക്കൂട്ടത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു കടലാസ്, ഉദാഹരണമായി A1, എടുക്കാം. ഇതിലെ ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം അതിന്റെ k

മടങ്ങെന്നും എടുക്കാം. അപ്പോൾ, പകുതിയായി മുറിച്ചതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?



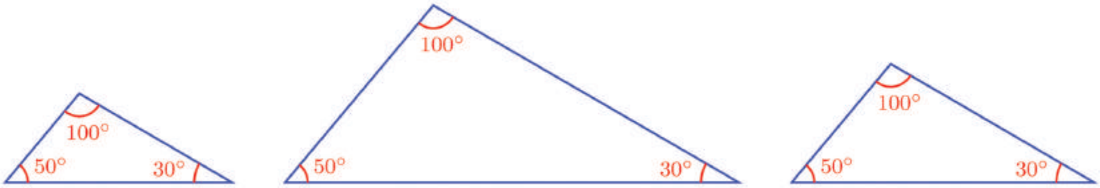
നേരത്തെ പറഞ്ഞ കണക്കനുസരിച്ച്, പകുതിയായി മുറിച്ച ചതുരത്തിലും വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ k മടങ്ങുതന്നെ ആകണമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$x = k \times \frac{1}{2}\ kx = \frac{1}{2}k^2x$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽനിന്ന് $\frac{1}{2}k^2 = 1$ എന്നും, തുടർന്ന് $k = \sqrt{2}$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

അതായത്, A0, A1, A2 . . . എന്നീ കടലാസുകളിലെല്ലാം വലിയ വശം, ചെറിയ വശത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണ്.

രണ്ടിൽക്കൂടുതൽ അളവുകളിലും ആനുപാതികത പറയാം. ഈ ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കൂ.



ഒരേ കോണുകളായതിനാൽ, ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്. അതായത്, ഇവയിലെ ഏതു ജോടി ത്രികോണങ്ങളെടുത്താലും, അവയിലൊന്നിലെ വശങ്ങളുടെ നീളത്തെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് മറ്റൊന്നിലെ വശങ്ങളുടെ നീളം (**സദൃശത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഇവയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം തന്നെയാണ് മറ്റെല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടേയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം. പുതിയ ശൈലിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ്.

മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിലും ഇത്തരം ആനുപാതിക ബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. രസതന്ത്രത്തിലെ നിശ്ചിതാനുപാതതത്വമനുസരിച്ച്, ഏതു സംയുക്തത്തിലെയും മൂലകങ്ങളുടെ ഭാരം ആനുപാതികമാണ്. ഉദാഹരണമായി വെള്ളത്തിലെ ഓക്സിജന്റെയും ഹൈഡ്രജന്റെയും ഭാരം ഏകദേശം 8 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. കൂറെക്കൂടി കൃത്യമായിപ്പറഞ്ഞാൽ 100 ഗ്രാം വെള്ളത്തിൽ, ഏകദേശം 88.8 ഗ്രാം ഓക്സിജനും, 11.2 ഗ്രാം ഹൈഡ്രജനുമാണ്. (ഒരു കിലോഗ്രാം വെള്ളത്തിലോ?)

(1) ഒരാൾ 10000 രൂപയും 15000 രൂപയും രണ്ടു പദ്ധതികളിലായി നിക്ഷേപിച്ചു. ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ, ആദ്യത്തെ തുകയ്ക്ക് 900 രൂപയും, രണ്ടാമത്തെ തുകയ്ക്ക് 1200 രൂപയും പലിശ കിട്ടി.

i) നിക്ഷേപിച്ച തുകകൾക്ക് ആനുപാതികമായാണോ പലിശ കിട്ടിയത്?

ii) ആദ്യത്തെ പദ്ധതിയിൽ തുകയും പലിശയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധമെന്താണ്? രണ്ടാമത്തെ പദ്ധതിയിലോ?

iii) ആദ്യത്തെ പദ്ധതിയിൽ പലിശനിരക്ക് എത്ര ശതമാനമാണ്? രണ്ടാമത്തെ പദ്ധതിയിലോ?

(2) A0 കടലാസിന്റെ പരപ്പളവ് ഒരു ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. A4 കടലാസിന്റെ നീളവും വീതിയും മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കുക.

(3) കാൽസ്യം കാർബണേറ്റിൽ കാൽസ്യം, കാർബൺ, ഓക്സിജൻ ഇവയുടെ ഭാരം 10 : 3 : 12 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഒരു സംയുക്തത്തിന്റെ 150 ഗ്രാം പരിശോധിച്ച്, അതിൽ 60 ഗ്രാം കാൽസ്യവും, 20 ഗ്രാം കാർബണും, 70 ഗ്രാം ഓക്സിജനുമാണെന്നു കണക്കാക്കി. ഇത് കാൽസ്യം കാർബണേറ്റ് ആണോ?

ആനുപാതികസ്ഥിരത

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം രണ്ടു മടങ്ങാക്കി വലുതാക്കിയാൽ, ചുറ്റളവ് എത്ര മടങ്ങാകും?

ആദ്യം വശങ്ങളെല്ലാം 1 സെന്റിമീറ്ററായിരുന്നെങ്കിൽ, ഇപ്പോൾ അവയെല്ലാം 2 സെന്റിമീറ്ററായി. ചുറ്റളവ് ആദ്യം 4 സെന്റിമീറ്ററായിരുന്നത്, ഇപ്പോൾ 8 സെന്റിമീറ്ററായി. ചുറ്റളവും രണ്ടു മടങ്ങായി.

ഏതു സമചതുരത്തിനും ഇതു ശരിയാണോ?

പൊതുവായൊരു സംഖ്യാബന്ധം ശരിയാണോ എന്നു നോക്കാൻ, ബീജഗണിതമാണല്ലോ നല്ലൊരു മാർഗം. ആദ്യം വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ചുറ്റളവ് $4x$ സെന്റിമീറ്റർ; വശങ്ങളെല്ലാം രണ്ടു മടങ്ങായപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് $4 \times 2x = 8x$ സെന്റിമീറ്റർ, അതായത് ചുറ്റളവും രണ്ടു മടങ്ങായി. വശങ്ങളെല്ലാം പകുതിയാക്കിയാലോ? ഒന്നര മടങ്ങാക്കിയാലോ?

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളവും, ചുറ്റളവും ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്, മറ്റൊരുരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, സമചതുരമെത്ര മാറ്റിയാലും വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല.

ഇവിടെ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന് ആനുപാതികമായാണ് ചുറ്റളവ് മാറുന്നതെന്നും പറയാം. അപ്പോൾ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പലതരത്തിൽ പറയാം.

- ഏതു സമചതുരത്തിലും, വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ 4 മടങ്ങാണ് ചുറ്റളവ്.
- ഏതു സമചതുരത്തിലും വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ളള അംശബന്ധം 1 : 4 ആണ്.
- സമചതുരത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്.
- സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന് ആനുപാതികമായാണ് ചുറ്റളവ് മാറുന്നത്.

ഏതു സമചതുരത്തിന്റെയും വികർണത്തിന്റെ നീളം, വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണെന്ന്, **പുതിയ സംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇത് മേലെഴുതിയതുപോലെ എങ്ങനെയെല്ലാം പറയാം?

ഇനി സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവുകൾക്കു പകരം പരപ്പളവുകളെടുത്താലോ? വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 1 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, വശങ്ങളുടെ നീളം രണ്ടു മടങ്ങാക്കിയാൽ, പരപ്പളവ് 4 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ വശത്തിന്റെ നീളവും, പരപ്പളവും ഒരേ തോതിലല്ല മാറുന്നത്, അഥവാ അവ ആനുപാതികമല്ല.

Dilate from Point ഉപയോഗിച്ച് സദൃശരൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നത് **സദൃശത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ സദൃശരൂപം വരയ്ക്കുക. ഇവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം, ചുറ്റളവ്, പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡർ നീക്കി, താഴെ പറയുന്ന ഓരോ ജോടി അളവുകളിലും ആദ്യത്തേതിന് അനുപാതികമായാണോ രണ്ടാമത്തേത് മാറുന്നതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും
ii) വശത്തിന്റെ നീളവും പരപ്പളവും
iii) ചുറ്റളവും പരപ്പളവും

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽനിന്നൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം; ഒരു വരയിലൂടെ 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന ഒരേ വേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്ന വസ്തു, 1 സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്ററും, 2 സെക്കന്റിൽ 20 മീറ്ററും, $\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ 5 മീറ്ററും സഞ്ചരിക്കുന്നു.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, x സെക്കന്റിൽ $10x$ മീറ്ററാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നത്. അതായത്, സമയത്തിന്റെ 10 മടങ്ങ് എന്ന തോതിലാണ് ദൂരമെപ്പോഴും മാറുന്നത്; അഥവാ, സമയവും ദൂരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 10 തന്നെയാണ്. ദൂരം സമയത്തിന് ആനുപാതികമാണ്.

ഇനി വേഗം എപ്പോഴും മാറുന്നുവെങ്കിലോ? ഉദാഹരണമായി, മുകളിൽനിന്ന് ഭൂമിയിലേക്കു വീഴുന്ന വസ്തുവിന്റെ വേഗം ഓരോ ക്ഷണവും മാറുന്നുണ്ട്; x സെക്കന്റിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നത് $4.9x^2$ മീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ ഒരു സെക്കന്റിൽ 4.9 മീറ്ററും, രണ്ടു സെക്കന്റിൽ 19.6 മീറ്ററുമാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നത്. അതായത്, ഈ സഞ്ചാരത്തിൽ, സമയവും ദൂരവും ഒരേ തോതിലല്ല മാറുന്നത്; അവയുടെ അംശബന്ധം ഓരോ സമയത്തും മാറുന്നു. അവ ആനുപാതികമല്ല.

ഈ സഞ്ചാരത്തിൽത്തന്നെ, x സെക്കന്റിലെ വേഗം y മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നെടുത്താൽ, സമയ-വേഗ സമവാക്യം $y = 9.8\,x$ എന്നാകും. സമയത്തിന് ആനുപാതികമായാണോ വേഗം മാറുന്നത്?

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളെല്ലാം ഒരുമിച്ചു നോക്കാം.

സന്ദർഭം	അളവുകൾ		സമവാക്യം	ആനുപാതികം
	x	y		
സമചതുരം	വശം	ചുറ്റളവ്	$y = 4x$	അതെ
	വശം	വികർണം	$y = \sqrt{2}x$	അതെ
	വശം	പരപ്പളവ്	$y = x^2$	അല്ല
സഞ്ചാരം ഒരേ വേഗം	സമയം	ദൂരം	$y = 10x$	അതെ
സഞ്ചാരം മാറുന്ന വേഗം	സമയം സമയം	ദൂരം വേഗം	$y = 4.9\,x^2$ $y = 9.8x$	അല്ല അതെ

ഇതിലെല്ലാം കാണുന്നതെന്താണ്? ഒരളവ് മാറുമ്പോൾ, അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട അളവുകളെല്ലാം അതിനനുസരിച്ചു മാറുന്നു, സ്വതന്ത്രമായി മാറുന്ന അളവിന്റെ നിശ്ചിത മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആയിട്ടാണ് ബന്ധപ്പെട്ട ഒരളവ് മാറുന്നതെങ്കിൽ, ഈ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല; അതായത്, മാറ്റം അനുപാതികമാണ്.

ഇത് ബീജഗണിതത്തിൽ പറഞ്ഞുനോക്കാം: സ്വതന്ത്രമായി മാറുന്ന അളവിനെ x എന്നും, അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഒരളവിനെ y എന്നുമെടുക്കാം. ഏതു സന്ദർഭത്തിലും x എന്ന അളവിനെ k എന്ന നിശ്ചിതസംഖ്യ (x മാറുമ്പോഴും മാറാത്ത സംഖ്യ) കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് y എങ്കിൽ, ഈ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

$$y = kx$$

എന്നെഴുതാം. ഈ സമവാക്യംതന്നെ

$$\frac{y}{x} = k$$

ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു Angle slider α നിർമിക്കുക. ഒരു വര AB വരച്ച് അതുമായി α കോണളവിൽ ചരിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന മറ്റൊരു വര AB′ വരയ്ക്കുക. ഈ വരയിൽ ഒരു ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തി അതിൽനിന്നു AB യ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. ലംബവും AB യും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇനി ലംബം മറച്ച് വയ്ക്കാം. CA, CD എന്നീ വരകൾ വരച്ച് നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. C യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. CA, CD എന്നീനീളങ്ങൾ ആനുപാതികമായാണോ മാറുന്നത്? 30°, 45°, 60° എന്നിങ്ങനെയുള്ള കോണുകളിൽ ആനുപാതികസ്ഥിരം കണക്കാക്കുക.

എന്നുമെഴുതാം, അപ്പോൾ ഈ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $1 : k$ ആയിത്തന്നെ മാറാതെ നിൽക്കുന്നുവെന്നു കാണാം. അതായത്, x ന് ആനുപാതികമായാണ് y മാറുന്നത്.

ആനുപാതികമാറ്റത്തിന്റെ സമവാക്യത്തിലെ നിശ്ചിതസംഖ്യയെ ആനുപാതികസ്ഥിരം (proportionality constant) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി ഭൂമിയിലേക്ക് വീഴുന്ന വസ്തുവിന്റെ സമയ-വേഗ സമവാക്യത്തിൽ 9.8 ആണ് ആനുപാതികസ്ഥിരം; ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വാകർഷണം മൂലമുള്ള ത്വരണം (accelaration due to gravity) എന്നാണ് ഈ സംഖ്യയുടെ ഭൗതികവ്യാഖ്യാനം.

ഇതുപോലെ ഒരേ പദാർത്ഥം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വസ്തുക്കളുടെയെല്ലാം ദ്രവ്യമാനം (mass), വ്യാപ്തത്തിന് ആനുപാതികമാണ്. ഇതിലെ ആനുപാതികസ്ഥിരത്തെയാണ് പദാർത്ഥത്തിന്റെ സാന്ദ്രത (density) എന്നു പറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, ഇരുമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത 7.87; ചെമ്പിന്റെ സാന്ദ്രത 8.96. അതായത്, ഇരുമ്പുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനം, വ്യാപ്തത്തിന്റെ 7.87 മടങ്ങും, ചെമ്പുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനം, വ്യാപ്തത്തിന്റെ 8.96 മടങ്ങുമാണ്.

(1) ചുവടെ പറയുന്ന ഓരോ ജോടി അളവുകളിലും, ആദ്യത്തേതിന് ആനുപാതികമായാണോ രണ്ടാമത്തേത് മാറുന്നതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക; ആനുപാതികമായവയിൽ, ആനുപാതികസ്ഥിരം കണക്കാക്കുക.

i) വൃത്തങ്ങളുടെ ആരവും ചുറ്റളവും.

ii) വൃത്തങ്ങളുടെ ആരവും പരപ്പളവും.

iii) ഒരു വരയിലുരുളുന്ന ഒരു വളയത്തിന്റെ കറക്കങ്ങളുടെ എണ്ണവും, നേരേ സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും.

iv) വാർഷികമായി പലിശ കണക്കാക്കുന്ന പദ്ധതിയിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്ന തുകയും, ഒരു വർഷത്തെ പലിശയും.

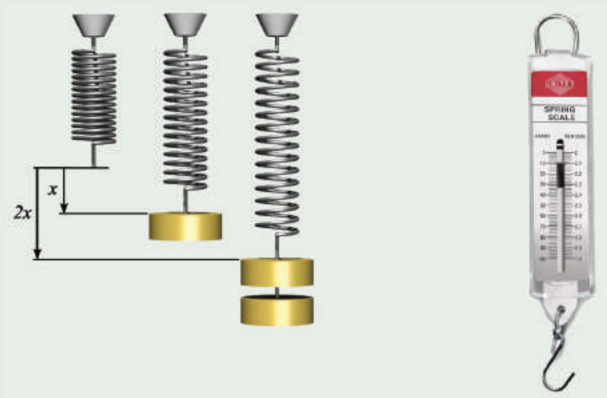
v) സ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിലൊഴിക്കുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തവും, പാത്രത്തിലെ വെള്ളത്തിന്റെ ഉയരവും.

(2) മഴപെയ്യുമ്പോൾ ഓരോ ചതുരശ്രമീറ്ററിലും വീഴുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, തുല്യമാണെന്നെടുക്കാം. ഇതനുസരിച്ച്.

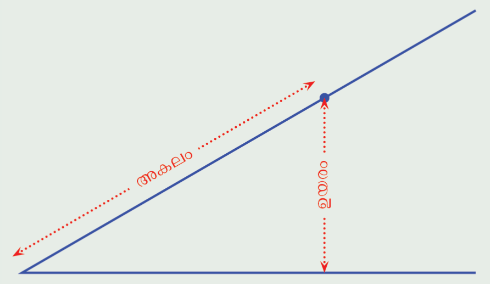
i) ഒരു സ്ഥലത്തു വീഴുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവിന് ആനുപാതികമാണെന്നു സമർഥിക്കുക.

ii) അടുത്തടുത്തു വയ്ക്കുന്ന സ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള പാത്രങ്ങളിലെല്ലാം ഒരേ ഉയരത്തിൽ മഴവെള്ളം നിറയുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

(3) ഒരു സ്പ്രിങ്ങിൽ ഭാരം തൂക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ നീളത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം, ഭാരത്തിന് ആനുപാതികമാണ്. സ്പ്രിങ്ങ്ത്രാസിൽ ഭാരങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താൻ ഇതെങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കാമെന്നു വിശദീകരിക്കുക.



(4) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന കോണിൽ, ചരിഞ്ഞ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളെല്ലാമെടുത്താൽ, കോണിന്റെ മൂലയിൽനിന്നുള്ള അകലം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച്, താഴത്തെ വരയിൽനിന്നുള്ള ഉയരവും മാറും.



i) ഉയരം മാറുന്നത്, അകലത്തിന് ആനുപാതികമായിട്ടാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ii) 30°, 45°, 60° കോണുകളിൽ ഈ ആനുപാതികസ്ഥിരം കണക്കാക്കുക.

പലതരം അനുപാതം

ഒരു ബഹുഭുജത്തിലെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണവും, അതിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. ഈ ബന്ധം ആനുപാതികമാണോ?

ത്രികോണത്തിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുക 180°; ഷഡ്ഭുജത്തിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുക 720°. വശങ്ങളുടെ എണ്ണം രണ്ടുമടങ്ങായപ്പോൾ, കോണുകളുടെ തുക രണ്ടു മടങ്ങിനേക്കാൾ കൂടുതലായി. അപ്പോൾ ഈ ബന്ധം ആനുപാതികമല്ല.

വശങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽനിന്ന് 2 കുറച്ച സംഖ്യകൊണ്ട് 180° നെ ഗുണിച്ചതാണ്, അകക്കോണുകളുടെ തുകയെന്നറിയാം, അതായത്, വശങ്ങളുടെ എണ്ണം n എന്നും കോണുകളുടെ തുക s° എന്നുമെടുത്താൽ

$$s = 180\ (n - 2)$$

ഇതിലെ $n - 2$ എന്ന സംഖ്യയെ m എന്നെഴുതിയാലോ?

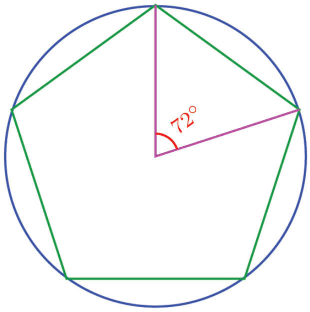
സമവാക്യം

$$s = 180\ m$$

എന്നാകും; അപ്പോൾ s എന്ന അളവ്, m എന്ന അളവിന് ആനുപാതികമാണ്. സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ബഹുഭുജങ്ങളിലെല്ലാം, അകക്കോണുകളുടെ തുക, വശങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽനിന്ന് രണ്ടു കുറച്ചതിന് ആനുപാതികമാണ്.

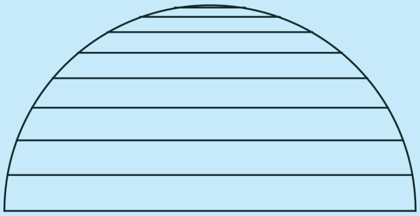
ഇങ്ങനെ ഒരളവിനോട് മറ്റൊരളവ് ആനുപാതികമല്ലെങ്കിലും, ആദ്യത്തെ അളവിനെ അൽപമൊന്നു മാറ്റിയതിനോട് ആനുപാതികമാകുന്ന പല സന്ദർഭങ്ങളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ നിശ്ചിത (π കൊണ്ടുള്ള) ഗുണിതമായതിനാൽ പരപ്പളവ്, ആരത്തിന് ആനുപാതികമല്ല; എന്നാൽ, ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനോട് ആനുപാതികമാണ്. ഇതുപോലെ ഉയരത്തിൽനിന്ന് ഭൂമിയിലേക്കു വീഴുന്ന വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം, സമയത്തിന് ആനുപാതികല്ലെങ്കിലും, സമയത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണ്.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: ഏതു സമബഹുഭുജത്തിലും എല്ലാ മൂലകളിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ. അടുത്തടുത്ത മൂലകൾ ഈ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ കണക്കെന്താണ്?



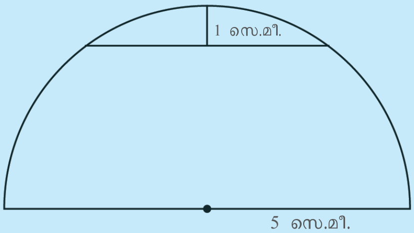
അനുപാതപ്രശ്നം

ചിത്രത്തിൽ ഒരു അർധവൃത്തത്തിൽ കുറേ ഞാണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



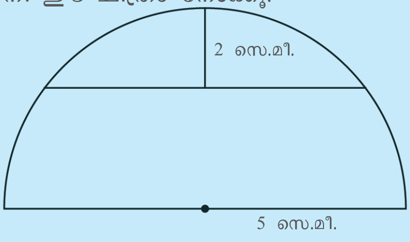
മുകളിൽ നിന്നുള്ള അകലം കൂടുന്തോറും ഞാണിന്റെ നീളവും കൂടുന്നുണ്ടല്ലോ. ഈ മാറ്റം ആനുപാതികമാണോ?

ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കാം.



മുകളിലെ ചിത്രത്തിലെ ഞാണിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. (ചെയ്തു നോക്കൂ!)

ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

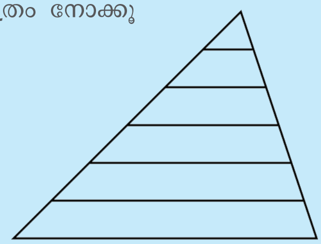


ഇപ്പോൾ ഞാണിന്റെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആയി.

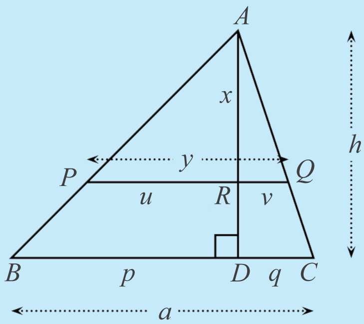
മുകളിൽനിന്നുള്ള അകലം ഇരട്ടിച്ചപ്പോൾ ഞാണിന്റെ നീളം ഇരട്ടി ആകുകയല്ലല്ലോ ചെയ്തത്. അപ്പോൾ ഈ മാറ്റം ആനുപാതികമല്ല.

ഉയരവും വീതിയും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ



ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി കുറേ വരകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. മുകളിലത്തെ ശീർഷത്തിൽനിന്നുള്ള അകലം കൂടുന്തോറും ഈ സമാന്തരവരകളുടെ നീളം കൂടുന്നുണ്ടല്ലോ. ഇത് ആനുപാതികമാണോ?



$\Delta APR, \Delta ABD$ ഇവ സദൃശമായതിനാൽ

$$\frac{u}{p} = \frac{x}{h}$$

$\Delta AQR, \Delta ACD$ ഇവ സദൃശമായതിനാൽ

$$\frac{v}{q} = \frac{x}{h}$$

ഇവയിൽ നിന്ന്

$$\frac{u}{x} = \frac{p}{h}, \quad \frac{v}{x} = \frac{q}{h}$$

അപ്പോൾ

$$\frac{y}{x} = \frac{u+v}{x} = \frac{p+q}{h} = \frac{a}{h}$$

വിവിധ സമാന്തരവരകൾക്ക് x, y ഇവ മാറും; a, h ഇവ മാറില്ലല്ലോ. അതായത്, x, y ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല.

5C71IN

x വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജത്തിൽ ഈ കേന്ദ്രകോൺ y^{o} എന്നെടുത്താൽ, ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$y = \frac{360}{x} \qquad y = 360 \times \frac{1}{x}$$

അതായത്, ഇവിടെ x ന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന് ആനുപാതികമായാണ് y മാറുന്നത്. ഇങ്ങനെ ഒരളവിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന് ആനുപാതികമായി മറ്റൊരളവ് മാറുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾ ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലുമുണ്ട്. ഇത്തരം മാറ്റങ്ങളെ വിപരീതാനുപാതം (inverse proportion) എന്നു പറയുന്നു. അതായത് x എന്ന അളവ് മാറുന്നതനുസരിച്ച് y എന്ന അളവ് മാറുന്നതിന്റെ സമവാക്യം $y = \frac{k}{x}$ എന്ന രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ, x നു വിപരീതാനുപാതത്തിൽ y മാറുന്നു എന്നു പറയുന്നു (ഇവിടെയും x മാറുന്നതനുസരിച്ച് മാറാത്ത സംഖ്യയാണ് k).

ഇത്തരം മാറ്റവുമായി വേർതിരിച്ചു പറയുന്നതിനുള്ള സൗകര്യത്തിനുവേണ്ടി, $y = kx$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള മാറ്റത്തെ നേരനുപാതം (direct proportion) എന്നും പറയാറുണ്ട്.

വിപരീതാനുപാതത്തിലുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് 100 മീറ്റർ അകലെയുള്ള മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്ക് നേർവരയിലൂടെ ഒരേ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു സങ്കൽപിക്കുക. സഞ്ചരിക്കുന്ന വേഗം 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആണെങ്കിൽ, രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലെത്താൻ 10 സെക്കന്റ് വേണം; വേഗം കൂട്ടി 25 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആക്കിയാൽ, 4 സെക്കന്റ് മതി. പൊതുവെ, വേഗം x മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നും, ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്തെത്താൻ എടുക്കുന്ന സമയം y സെക്കന്റ് എന്നും എഴുതിയാൽ, ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെയാകും.

$$y = \frac{100}{x}$$

അതായത്, x നു വിപരീതാനുപാതത്തിലാണ് y മാറുന്നത്.

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ പല അറിവുകളും അനുപാതത്തിന്റെ ഭാഷയിലാണ്

പറയുന്നത്. അവയിൽ വളരെ പ്രധാനമായതാണ് ന്യൂട്ടന്റെ വിശ്വാകർഷണ നിയമം (law of universal gravitation)

പ്രപഞ്ചത്തിലെ ഏതു രണ്ടു വസ്തുക്കളും പരസ്പരം ആകർഷിക്കുന്നു. ഈ ആകർഷണ ബലം, അവയുടെ ദ്രവ്യമാനങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന് നേരനുപാതത്തിലും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെ വർഗത്തിന് വിപരീതാനുപാതത്തിലുമാണ്.

രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ ദ്രവ്യമാനം m_1, m_2 എന്നും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം r എന്നുമെടുത്താൽ, ഈ നിയമത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(1) i) സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ്?

ii) സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണോ? ആണെങ്കിൽ, ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ്?

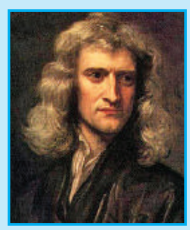
(2) പരപ്പളവ് ഒരു ചതുരശ്രമീറ്ററായ ചതുരങ്ങളിൽ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളവും മാറണം. ഈ ബന്ധം ബീജഗണിതസമവാക്യമായി എഴുതുക. അനുപാതത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ ഈ ബന്ധം എങ്ങനെ പറയാം?

(3) ഒരേ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന്റെ നീളവും, എതിർമൂലയിൽനിന്നുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം അനുപാതമായി എങ്ങനെ പറയാം? ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിനു പകരം, ഏറ്റവും ചെറിയ വശമെടുത്താലോ?

(4) സമബഹുഭുജങ്ങളിൽ, വശങ്ങളുടെ എണ്ണവും, ഒരു പുറംകോണിന്റെ അളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ സമവാക്യമെന്താണ്? ഈ ബന്ധം അനുപാതമായി പറയാൻ കഴിയുമോ?

ന്യൂട്ടൺ

പ്രകൃതിനിയമങ്ങൾ വ്യാഖ്യാനിക്കേണ്ടത് ഗണിതത്തിലൂടെയാണെന്ന ചിന്ത ആദ്യം അവതരിപ്പിച്ചത്, പതിനാറാംനൂറ്റാണ്ടിൽ ഗലിലെയോ ആണ്. ഈ ചിന്തയുടെ ഏറ്റവും മികച്ച പ്രകാശനമാണ് പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ന്യൂട്ടൺ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച പ്രകൃതിതത്വങ്ങളുടെ ഗണിതനിയമങ്ങൾ (Philosophia Naturalis Principia Mathematica) എന്ന ഗ്രന്ഥം. ചലനത്തിന്റെ ഗണിതനിയമങ്ങളും, വിശ്വാകർഷണ നിയമവും ഇതിലാണ് ന്യൂട്ടൻ അവതരിപ്പിച്ചത്. ഇതിനായി പുതിയ ചില ഗണിതരീതികൾതന്നെ അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചു. ഈ രീതികൾ പിന്നീട് കലനം (calculus) എന്നൊരു ഗണിതശാഖയായി വളർന്നു.



(5) ചതുരസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ജലസംഭരണിയിൽ, ഓരോ സെക്കന്റിലും ഒരു നിശ്ചിത വ്യാപ്തം വെള്ളം ഒരു കുഴലിലൂടെ ഒഴിക്കണം. വ്യത്യസ്ത കുഴലുകൾ ഉപയോഗിച്ച് വെള്ളമൊഴുകുന്നതിന്റെ നിരക്ക് മാറ്റാം. ചുവടെപ്പറയുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, ബീജഗണിതസമവാക്യമായും, അനുപാതമായും എഴുതുക.

i) വെള്ളം ഒഴുകുന്നതിന്റെ നിരക്കും, സംഭരണിയിലെ വെള്ളത്തിന്റെ ഉയരവും

ii) വെള്ളം ഒഴുകുന്നതിന്റെ നിരക്കും, സംഭരണി നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയവും.

13

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്

ശരാശരി

ആറാംക്ലാസിൽ ശരാശരിയെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചത് ഓർമയുണ്ടോ? ഒരു ശരാശരിക്കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു തൊഴിൽശാലയിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന അഞ്ചു കൂട്ടുകാരുടെ ദിവസവരുമാനം ഇതൊക്കെയാണ്:

350 രൂപ, 400 രൂപ, 350 രൂപ, 450 രൂപ, 450 രൂപ,

ഇവരിൽ ഒരാളുടെ ശരാശരി ദിവസവരുമാനം എത്ര രൂപയാണ്?

അഞ്ചുപേരുടെയും ഒരു ദിവസത്തെ ആകെ വരുമാനത്തെ അഞ്ചുകൊണ്ടു ഹരിക്കണം. അതിൽ 350, 450 എന്നീ സംഖ്യകൾ രണ്ടു തവണയുണ്ടെന്നു കണ്ടാൽ, കൂട്ടുന്നത് അൽപം എളുപ്പമാക്കാം:

$$(2 \times 350) + (2 \times 450) + 400 = 2000$$

ശരാശരി 400 രൂപ.

ഓരോരുത്തരുടെയും വരുമാനം വെവ്വേറെ പറയാതെ, ശരാശരി ദിവസവരുമാനം 400 രൂപ എന്നു മാത്രം പറഞ്ഞാൽ, ഈ അഞ്ചുപേരുടെ സാമ്പത്തിക സ്ഥിതിയെക്കുറിച്ച് ഒരേകദേശ ധാരണയുണ്ടാകുമല്ലോ.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു തൊഴിൽശാലയിൽ പലതരം ജോലി ചെയ്യുന്നവരുടെ എണ്ണവും ദിവസക്കൂലിയും പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
300	2
350	4
400	6
450	4
500	4

ശരാശരി ദിവസക്കൂലി എത്ര രൂപയാണ്?

ആകെ 20 ജോലിക്കാരുണ്ട്; ഇവരുടെ ആകെ കൂലി കണക്കാക്കണം. ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ ആവർത്തിച്ചുള്ള കൂട്ടലുകൾ ഗുണനമായി എഴുതാമല്ലോ.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	ആകെ കൂലി (രൂപ)
300	2	600
350	4	1400
400	6	2400
450	4	1800
500	4	2000
ആകെ	20	8200

ശരാശരി ദിവസക്കൂലി $8200 \div 20 = 410$ രൂപ എന്നു കണക്കാക്കാം.

ഈ കണക്കിൽ എല്ലാവരുടെയും കൂലി, 300 രൂപയ്ക്കും, 500 രൂപയ്ക്കുമിട യിലാണ്. ശരാശരി കൂലിയായ 410 രൂപയും അതുപോലെ തന്നെ. ഇതെ പ്പോഴും ശരിയാണോ?

ഉദാഹരണമായി, 100 നും 200 നും ഇടയ്ക്കുള്ള 8 സംഖ്യകളെടുത്തു വെന്നു കരുതുക. എല്ലാ സംഖ്യകളും 100 നു തുല്യമോ അതിൽക്കൂടുതലോ ആയതിനാൽ, ഈ 8 സംഖ്യകളുടെ തുക 800 നു തുല്യമോ, അതിൽക്കൂ ടുതലോ ആണ്; ഈ തുകയെ 8 കൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന ശരാശരിയും 100 നു തുല്യമോ അതിൽക്കൂടുതലോ ആണ്.

ഇതുപോലെ, എല്ലാ സംഖ്യകളും 200 നു തുല്യമോ, അതിൽക്കുറവോ ആയതിനാൽ, ശരാശരിയും അതുപോലെയാണ് എന്നു കാണാം.

100, 200, 8 എന്നതിനു പകരം മറ്റു സംഖ്യകളെടുത്താലും ഇതേ രീതിയിൽ ചിന്തിക്കാം. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

രണ്ടു നിശ്ചിതസംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള എത്ര സംഖ്യകളെടുത്താലും, അവയുടെ ശരാശരിയും ഈ നിശ്ചിത സംഖ്യകൾക്കിടയിലായിരിക്കും.

?

(1) ഒരു വോളിബോൾ ടീമിലെ 6 കളിക്കാർക്കും ഒരേ ഭാരമല്ല; ശരാശരി ഭാരം 60 കിലോഗ്രാമാണ്.

i) 60 കിലോഗ്രാമിനേക്കാൾ ഭാരം കൂടുതലുള്ള ഒരു കളിക്കാരനെങ്കിലുമുണ്ടെന്ന് സമർഥിക്കുക.

ii) 60 കിലോഗ്രാമിനേക്കാൾ ഭാരം കുറവായ ഒരു കളിക്കാരനെങ്കിലുമുണ്ടെന്ന് സമർഥിക്കുക.

(2) ശരാശരി 60 ആയ 6 സംഖ്യകൾ, ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ രീതിയിലും കണ്ടുപിടിക്കുക

i) 4 എണ്ണം 60 നേക്കാൾ ചെറുത്, 2 എണ്ണം 60 നേക്കാൾ വലുത്

ii) 4 എണ്ണം 60 നേക്കാൾ വലുത്, 2 എണ്ണം 60 നേക്കാൾ ചെറുത്

(3) ക്ലാസിൽ ഒരു കണക്കു പരീക്ഷ നടത്തി, മാർക്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ കുട്ടികളെ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്;

മാർക്ക്	കുട്ടികൾ
2	1
3	2
4	5
5	4
6	6
7	11
8	10
9	4
10	2

ക്ലാസിലെ ശരാശരി മാർക്ക് കണക്കാക്കുക

(4) ഒരു പ്രദേശത്തു ലഭിച്ച മഴയുടെ അളവനുസരിച്ച് ഒരു മാസത്തിലെ ദിവസങ്ങളെ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണിത്:

മഴ (മി.മീ)	ദിവസങ്ങൾ
54	3
56	5
58	6
55	3
50	2
47	4
44	5
41	2

ആ മാസം അവിടെ ഒരു ദിവസം പെയ്ത മഴയുടെ ശരാശരി അളവെന്താണ്?

(5) ഒരു കർഷകന് ഒരു മാസം കിട്ടിയ റബ്ബർഷീറ്റിന്റെ വിവരങ്ങൾ ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിലുണ്ട്.

റബ്ബർ (കിഗ്രാം)	ദിവസങ്ങൾ
9	3
10	4
11	3
12	3
13	5
14	6
16	6

i) ഈ മാസത്തിൽ ഒരു ദിവസം ശരാശരി എത്ര കിലോഗ്രാം റബ്ബർഷീറ്റ് കിട്ടി?

ii) റബ്ബറിന്റെ വില കിലോഗ്രാമിന് 120 രൂപയാണ്. ഈ മാസത്തിൽ ഒരു ദിവസം റബ്ബറിൽ നിന്നു കിട്ടിയ ശരാശരി വരുമാനം എത്ര രൂപയാണ്?

വിഭാഗപ്പട്ടികകൾ

വിവരങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോഴും മറ്റും, വിഭാഗങ്ങളായി തിരിച്ച് പട്ടികയാക്കുന്ന രീതി എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. അത്തരത്തിലൊരു കണക്കു നോക്കാം.

ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ ദിവസവേതനക്കാരുടെ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണിത്.

ദിവസവേതനം (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
250 - 300	8
300 - 350	4
350 - 400	16
400 - 450	7
450 - 500	5

ഈ ഫാക്ടറിയിലെ ശരാശരി ദിവസവേതനം എത്രയാണ്?

ഇവിടെ ആകെ കൊടുക്കുന്ന ദിവസവേതനം കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ? പട്ടികയിലെ ആദ്യത്തെ വരിയിൽ, 8 ജോലിക്കാർക്ക് 250 രൂപയ്ക്കും 300 രൂപയ്ക്കും ഇടയ്ക്കുള്ള വേതനം കൊടുക്കുന്നുവെന്നല്ലാതെ കൃത്യമായി ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര കൊടുക്കുന്നുവെന്ന് പറഞ്ഞിട്ടില്ലല്ലോ. ഇവർക്ക് കൊടുക്കുന്ന ആകെ വേതനം കണക്കാക്കാൻ ഈ വിവരം മാത്രം പോരാ.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ഇല്ലാത്ത വിവരങ്ങളെക്കുറിച്ച് ചില സങ്കൽപങ്ങൾ വേണ്ടി വരും. പട്ടികയിലെ ആദ്യവരിയിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള എട്ടുപേരുടെ

വേതനം വെവ്വേറെ അറിയില്ലെങ്കിലും, അവയെല്ലാം 250 രൂപയ്ക്കും, 300 രൂപയ്ക്കും ഇടയിലാണെന്നറിയാം. അപ്പോൾ ഈ എട്ടുപേരുടെ ശരാശരി വേതനവും 250 രൂപയ്ക്കും, 300 രൂപയ്ക്കും ഇടയിലാണ്. മാത്രവുമല്ല, സാധാരണഗതിയിൽ ഈ ശരാശരി 250 ന്റെയും 300 ന്റെയും ഏതാണ്ട് നടുക്കായിരിക്കുകയും ചെയ്യും.

അതിനാൽ ഓരോ വിഭാഗത്തിലുമുള്ളവരുടെ ശരാശരി വേതനം, ആ വിഭാഗത്തിന്റെ കൃത്യം നടുക്കുവരുന്ന സംഖ്യ എന്ന സങ്കൽപമനുസരിച്ചാണ് ഇത്തരം പട്ടികകളിൽ നിന്ന് ശരാശരി കണക്കാക്കുന്നത്.

ഇതനുസരിച്ച്, ഈ കണക്കിലെ പട്ടിക ഇങ്ങനെ വലുതാക്കാം:

ദിവസവേതനം (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	വിഭാഗ മധ്യം	ആകെ വേതനം
250 - 300	8	275	2200
300 - 350	4	325	1300
350 - 400	16	375	6000
400 - 450	7	425	2975
450 - 500	5	475	2375
ആകെ	**40**		**14850**

ഇനി ശരാശരി ദിവസവേതനം കണക്കാക്കാമല്ലോ:

കേരളത്തിലെ മൊത്തം സ്കൂൾ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഉയരവും ഭാരവും, കേരളത്തിലെ മൊത്തം ജനങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം എന്നിങ്ങനെയുള്ള വലിയ സംഖ്യാശേഖരങ്ങളിൽ നിന്ന്, അവയുടെ ഏകദേശസ്വഭാവത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചുരുക്കം ചില സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുന്ന പല രീതികളുണ്ട്. ആകെ

തൂകയെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിക്കുക എന്നത് അവയിലൊന്നു മാത്രമാണ്. ഇത്തരത്തിൽ കണക്കാക്കുന്ന സംഖ്യകളെയെല്ലാം പൊതുവായി ശരാശരി (average), അല്ലെങ്കിൽ മധ്യപ്രവണത (central tendency) എന്നാണ്, ഇവയുടെ ഗണിതപഠനത്തിൽ പറയുന്നത്. സാധാരണ ശരാശരിയെന്നു വിളിക്കുന്ന, തുകയെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന, സംഖ്യയെ മാധ്യം (arithmetic mean or mean) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കിൽ ഫാക്ടറിയിലെ മാധ്യ ദിവസവേതനം 371.25 രൂപയാണ്.

(1) ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ സംഖ്യയും മാധ്യമായി വരുന്ന 6 വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകൾ 10 നും 30 നും ഇടയിലായി കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) 20 ii) 15 iii) 25

(2) ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ ഉയരത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണുന്നത്.

ഉയരം (സെമീ)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
148 - 152	8
152 - 156	10
156 - 160	15
160 - 164	10
164 - 168	7

ഈ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ മാധ്യ ഉയരം എത്രയാണ്?

(3) ഒരു സർവകലാശാലയിലെ അധ്യാപകരുടെ എണ്ണം പ്രായമനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ചെഴുതിയ പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

പ്രായം	ആളുകളുടെ എണ്ണം
25 - 30	6
30 - 35	14
35 - 40	16
40 - 45	22
45 - 50	5
50 - 55	4
55 - 60	3

അധ്യാപകരുടെ മാധ്യ പ്രായം കണക്കാക്കുക.

(4) ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ ഭാരമനുസരിച്ചു തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണിത്.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	21 - 23	23 - 25	25 - 27	27 - 29	29 - 31	31 - 33
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	4		7	6	3	1

മാധ്യഭാരം 26 കിലോഗ്രാം എന്നു കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. 23 കിലോഗ്രാമിനും 25 കിലോഗ്രാമിനും ഇടയിൽ ഭാരമുള്ള എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

കുറിപ്പുകൾ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

സൈബർ സുരക്ഷയെക്കുറിച്ച് അറിയൂ...

ഇന്റർനെറ്റിന്റെയും സോഷ്യൽ നെറ്റ്‌വർക്കിംഗ് സൈറ്റുകളുടെയും ഉപയോഗത്തെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് അറിയാം. ആശയവിനിമയത്തിനും വിനോദത്തിനും അറിവു നേടുന്നതിലുമെല്ലാം ഇവയുടെ അനന്തസാധ്യത നാം നേരിട്ടറിഞ്ഞിട്ടുള്ളതാണല്ലോ.

എന്നാൽ കുറച്ചു കാലമായി വിദ്യാർഥികളും കൗമാരക്കാരുമായ ചിലരെങ്കിലും സോഷ്യൽ മീഡിയയുടെ ചൂഷിതവലയത്തിൽപ്പെടുന്നതായി നാം കാണുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ ഇരകളാകുന്നതിൽ നിന്നും സ്വയം രക്ഷനേടുന്നതിനും സംരക്ഷിതരാകുന്നതിനും ഓരോരുത്തർക്കും കഴിയേണ്ടതുണ്ട്. ഇതിനായി ഓൺലൈൻ പ്രവർത്തനങ്ങളിൽ ഏർപ്പെടുമ്പോൾ ചില സുരക്ഷാമാർഗ്ഗങ്ങൾ നാം സ്വീകരിക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്.

⏩ സോഷ്യൽ നെറ്റ്‌വർക്കിംഗ് സൈറ്റുകൾ അപകടകാരികളാകുന്നതെപ്പോൾ?

- *ഒരാളുടെ സ്വകാര്യവിവരങ്ങളെല്ലാം പോസ്റ്റ് ചെയ്യുകയോ ഷെയർ ചെയ്യുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ; പ്രത്യേകിച്ച് ഫോൺ നമ്പർ, അഡ്രസ്, സ്ഥലം, ഫോട്ടോകൾ തുടങ്ങിയവ.*
- *ഒരാളുടെ പ്രൊഫൈൽ കണ്ട് അയാളെ വിശ്വസിക്കുമ്പോൾ; മിക്കപ്പോഴും നൽകിയിട്ടുള്ള പ്രൊഫൈൽ വ്യാജവും അസത്യവുമായിരിക്കും.*
- *ചാറ്റിന്റെ സ്നാപ്ഷോട്ടുകൾ, ഫോട്ടോകൾ, വീഡിയോകൾ എന്നിവ സേവ് ചെയ്യുന്നതും ഭാവിയിൽ അത് ബ്ലാക്ക്മെയിലിംഗിനും ഭീഷണിക്കും ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ.*
- *ഒരാളുടെ വ്യക്തിത്വം കളങ്കപ്പെടുത്താനുദ്ദേശിച്ച് തെറ്റായ വിവരങ്ങൾ, കമന്റുകൾ, പോസ്റ്റുകൾ, ഫോട്ടോകൾ എന്നിവയിലൂടെ സൈബർഭീഷണി ഉയർത്തുമ്പോൾ.*
- *കുട്ടികളെ വലയിലാക്കി ഇരകളാക്കുന്നതിന് മുതിർന്നവരും കഴുകൻകണ്ണുള്ളവരുമായ നിരവധി പേർ സമൂഹത്തിലുണ്ട്.*

⏩ സുരക്ഷിതമായ സോഷ്യൽ നെറ്റ്‌വർക്കിംഗിനുള്ള നിർദേശങ്ങൾ

- *നിങ്ങളുടെ വ്യക്തിപരമായ വിവരങ്ങൾ വ്യക്തിപരമായി സൂക്ഷിക്കുക.*
- *നിങ്ങളുടെ* Private Settings, Customize *ചെയ്യുക. മറ്റുള്ളവർക്ക് നിങ്ങളുടെ* Basic Info *മാത്രം കാണാൻ അവസരം നൽകുക.*
- *നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തുക്കളെ അറിയുക എന്നതിൽ മാത്രം ചുരുക്കുക. ഓൺലൈൻ സുഹൃത്തുക്കളെ വിശ്വസിക്കരുത്. സന്ദർശനം മാത്രമായി ചുരുക്കുക.*
- *നിങ്ങൾക്ക് ഇഷ്ടമില്ലാത്ത പോസ്റ്റുകൾ കണ്ടാൽ അത്തരം പോസ്റ്റുകൾ ലഭിക്കുന്നതിലുള്ള അതൃപ്തി നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തിനോട് തുറന്നു പറയുക.*
- *നിങ്ങളെ തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്ന തരത്തിലുള്ള സ്വകാര്യവിവരങ്ങൾ പോസ്റ്റ് ചെയ്യാതിരിക്കുക.*
- *ശക്തിയുള്ള പാസ്‌വേർഡുകൾ ഉപയോഗിക്കുക. അവ നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തുക്കൾക്ക് ഷെയർ ചെയ്യാതിരിക്കുക.*
- *നിങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ, ഇ-മെയിൽ വിവരങ്ങൾ മുതലായവ മറ്റുള്ളവർക്ക് ഷെയർ ചെയ്യാതിരിക്കുക.*
- *നിങ്ങളുടെ സ്വകാര്യ സന്ദേശങ്ങൾ സ്വകാര്യമായി വയ്ക്കുക. ഒരിക്കൽ പോസ്റ്റ് ചെയ്താൽ അത് പ്രസിദ്ധമാകും.*

സൈബർസുരക്ഷയ്ക്കുള്ള ചില പ്രധാന ഫോൺ നമ്പരുകൾ

ക്രൈം സ്റ്റോപ്പർ - 1090

സൈബർ സെൽ - 9497975998

ചൈൽഡ് ഹെൽപ്പ്‌ലൈൻ - 1098/1517

കൺട്രോൾ റൂം - 100