కర్నాటక ప్రభుత్వం

గణితం

Mathematics

Telugu Medium

9

తొమ్మిదవ తరగతి

భాగం – 2

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

National Council For Education and Research

Sri Arbindo Marg New Delhi - 110016

Karnataka Textbook Society (R.)

100 Feet Ring Road, Banashankari 3rd Stage,
Bengaluru - 560 085

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a [1]**[SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC]** and to secure to all its citizens :

JUSTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity and to promote among them all;

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the [2][unity and integrity of the Nation];

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949 do **HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.**

1. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Sovereign Democratic Republic" (w.e.f. 3.1.1977)
2. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Unity of the Nation" (w.e.f. 3.1.1977)

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book.

We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT,* A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

విషయ సూచిత

భాగం – 2

పుట సంఖ్య

అధ్యాయం - 8

హెరాన్స్ సూత్రం

8.1 పీఠిక

కింది తరగతులలో మీరు వేరు వేరు ఆకృతులైన చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, త్రిభుజం మరియు చతుర్భుజాల గురించి చదివారు. మరియు వాటి చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలను కనుగొన్నారు. ఉదాహరణకి మీతరగతిగది నేల చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలను మీరు కనుక్కోవచ్చు.

మనం తరగతి నేల భుజాల చుట్టూ నడుస్తూ ఒక చుట్టు తిరిగితే మనం నడిచిన దూరం దాని చుట్టుకొలత అవుతుంది. తరగతి నేల కొలతలు / పరిమాణము దాని వైశాల్యం.

ఒకవేళ మీ తరగతి దీర్ఘచతురస్రాకారంలో వుండి పొడవు 10 m మరియు వెడల్పు 8 m అయితే దాని చుట్టుకొలత $2(10\text{ m} + 8\text{ m}) = 36\text{ m}$ మరియు దాని వైశాల్యం $10\text{ m} \times 8\text{ m} = 80\text{ m}^2$ అవుతుంది.

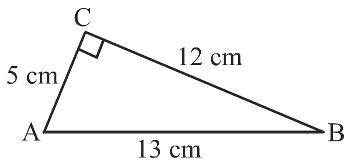
పొడవు మరియు వెడల్పులను కొలవడానికి ఏకమానపద్ధతి మీటర్ (m) లేదా సెంటీమీటర్ (cm) మొదలైనవి తీసుకుంటాము.

వైశాల్యాన్ని కొలవడానికి ఏకమాన (యూనిట్) పద్ధతి చదరపు మీటరు (m^2) లేదా దరపు సెంటీమీటర్ (cm^2) మొదలైనవి తీసుకుంటాము.

ఒకవేళ మీరు త్రిభుజాకార పార్కులోకూర్చొని వున్నారనుకుంటే దాని వైశాల్యం ఎలా కనుక్కుంటారు? వెనుకటి అవధిలో నేర్చుకున్నారనుకుంటే

$$\boxed{\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times \text{భూమి} \times \text{ఎత్తు}} \qquad \text{(I)}$$

లంబకోణ త్రిభుజాన్ని మీరు గమనించినట్లయితే లంబకోణాన్ని ఏర్పరచే రెండు భుజాలలో ఒకటి భూమిగాను మరొకటి ఎత్తుగాను తీసికొని నేరుగా సూత్రాన్ని అన్వయించవచ్చు. ఉదాహరణకు లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో మూడు భుజాలు 5 cm, 12 cm, 13 cm అయితే, 12 cm భుజాన్ని పాదముగా 5 cm భుజాన్ని ఎత్తుగా తీసుకుంటాము . (చిత్రం 8.1 గమనించండి).



చిత్రం 8.1

తరువాతి, Δ ABC వైశాల్యం

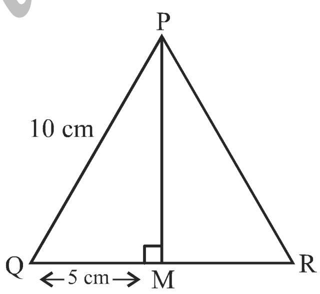
$= \frac{1}{2} \times$ [illegible] $\times$ [illegible]

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \text{ cm}^2$

$= 30 \text{ cm}^2$

5cm భుజాన్ని భూమిగా మరియు 12cm భుజాన్ని ఎత్తుగా కూడాతీసుకోవచ్చు అనేదాన్ని గమనించండి.

మీరు 10 cm భుజంగాగల ఒక సమబాహుత్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవాలని భావిస్తే (చిత్రం8.2 గమనించండి). దాని వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవాలంటే మొదట త్రిభుజం ఎత్తు కనుక్కోవాలి, మీరు ఈ త్రిభుజం ఎత్తును కనుక్కోవచ్చా ?



చిత్రం 8.2

త్రిభుజ భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు ఎలా దాని ఎత్తు కనుక్కోగలము అని గుర్తుచేసుకుందాం. దీనిని ఏదైనా సమబాహుత్రిభుజంలో కనుక్కోవడానికి సాధ్యం అవుతుంది. M బిందువును QR భుజం మధ్య బిందువుగా తీసికొని దాని ఎదుటి శీర్షం P కి కలిపిన PMQ ఒక లంబకోణ త్రిభుజం అవుతుందని మీరు తెలుసుకోండి. అయితే పైథాగరస్ సిద్ధాంతను ఉపయోగించి, PM భుజంపొడవును కింది విధంగా కనుక్కోవచ్చు.

$PQ^2 = PM^2 + QM^2$

$(10)^2 = PM^2 + 5^2 \; (\because QM = MR)$

కావున $PM^2 = 75$

$PM = \sqrt{75}$ cm

$= 5\sqrt{3}$ cm

తరువాత త్రిభుజ వైశాల్యం Δ PQR = $\frac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$= 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

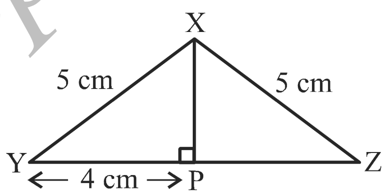
అలాగే సమద్విబాహు త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని ఈ సూత్రం సహాయంతో కనుక్కోవడం మనకు సాధ్యమా? అనేదాన్ని చూద్దాం. ఉదాహరణకు త్రిభుజం XYZ లో XY, XZ లు రెండు సమానమైన భుజాలు, ప్రతి ఒక్కటి 5 cm మరియు మూడవ భుజం YZ = 8 cm అని తీసుకుందాం. [చిత్రం 8.3 గమనించండి].

ఈ విషయంలో కూడా త్రిభుజం ఎత్తు మనం మొదట కనుక్కోవాలి YZ భుజానికి X శీర్షానికి XP లంబ రేఖను గీస్తాం. XP లంబ రేఖ త్రిభుజంభూమి YZ ని రెండు సమభాగాలుగా విభజిస్తుంది. అనేది చూడవచ్చు.

కావున, YP = PZ = $\frac{1}{2}$ YZ = 4 cm

తరువాత పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$XP^2 = XY^2 - YP^2$$
$$= 5^2 - 4^2$$
$$= 25 - 16$$
$$= 9$$



చిత్రం 8.3

$\therefore$ XP = 3 cm

Δ XYZ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × YZ × XP

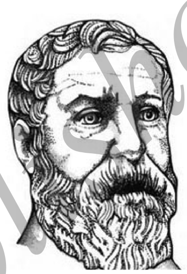
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \text{ cm}^2$$

$$= 12 \text{ cm}^2.$$

ఒక వేళ మనకు విషమ బాహు త్రిభుజము భుజాల కొలతలు తెలిసి దాని ఎత్తు తెలికపోతే ఆ త్రిభుజ వైశాల్యంకనుక్కోవచ్చా? ఉదాహరణకు మీ దగ్గర 40 m, 32 m మరియు 24 m భుజాలుగల త్రిభుజాకార పార్కు వుంది. దాని వైశాల్యం ఎలా లెక్కించగలవు? త్రిభుజ వైశాల్యం సూత్రం అన్వయించాలంటే దాని ఎత్తు మొదట కనుక్కోవాలి. అయితే ఎత్తు కనుక్కోవడం సాధ్యం కానిచో ముందుకు వెళ్ళి ఈవిధంగా గల త్రిభుజాల వైశాల్యం కనుక్కోవచ్చు అని తెలుసుకోండి.

8.2 త్రిభుజ వైశాల్యం - హెరాన్స్ సూత్రం

హెరాన్ సుమారు క్రీ.శ. 10లో ఈజిప్టు దేశంలో అలెక్జాండ్రియాలో జన్మించెను. అతను అన్వయగణిత పై పరిశోధన చేసెను. గణితం మరియు భౌతిక శాస్త్రం విషయాల పై ఎన్నో శోధనలు చేశారు. ఆరోజుల్లో అతను ఆక్షేత్రాలలో ఎన్ సైక్లోపిడియా రాస్తున్నారని తెలిసినది. అతను ఎక్కువగా జామితీయ ఆకారాలక్షేత్రగణితపు సమస్యలపై మూడుపుస్తకాలు రాశారు. మొదటి పుస్తకంలో చతురస్రాలు, దీర్ఘచతురస్రాలు, త్రిభుజాలు, ట్రెపీజియంలు, వివిధ ప్రత్యేక చతుర్భుజాలు, క్రమ బహుభుజాలు, వృత్తాలు, సిలిండరు, శంఖువు, గోళాల ఉపరితలవైశాల్యాలు మొదలైన వాటిని గురించి తెలుపుతుంది. ఈ పుస్తకంలో హెరాన్ ప్రసిద్ధమైన సూత్రం త్రిభుజ వైశాల్యము మూడు భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు కనుగొనడాని ప్రతిపాదించాడు.



హెరాన్
(క్రీపూ. 10-క్రీపూ.75)

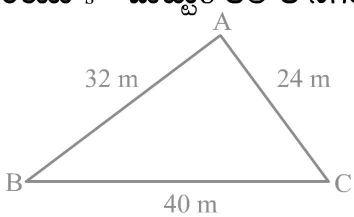
చిత్రం 8.4

త్రిభుజ వైశాల్యం గురించి హెరాన్ ఇచ్చిన సూత్రాన్ని హెరాన్స్ సూత్రం అని అంటారు.

ఆ సిద్ధాంతం ఈ విధంగా ఉంది $\boxed{\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ (II)

ఇక్కడ a, b మరియు c లు త్రిభుజ భుజాల పొడవు మరియు s = చుట్టుకొలత లోసగం

త్రిభుజం చుట్టుకొలతలోసగం $= \dfrac{a+b+c}{2}$. త్రిభుజం ఎత్తును సులభంగా కనుక్కోవడానికి సాధ్యంకాని సందర్భాలలో ఈ సూత్రం సహాయపడుతుంది. దీనిని పైన చెప్పినట్లు త్రిభుజాకార పార్కు వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి అన్వయిస్తాం (చిత్రం 8.5 గమనించండి.)



చిత్రం 8.5

$a = 40$ m, $b = 24$ m, $c = 32$ m అని తీసుకుంటే.

అప్పుడు $s = \dfrac{40+24+32}{2}$ m

$= 48$ m

$(s - a) = (48 - 40) = 8$ m,

$(s - b) = (48 - 24) = 24$ m,

$(s - c) = (48 - 32) = 16$ m

పార్కు ABC వైశాల్యం

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16} \text{ m}^2$$

$$= 384 \text{ m}^2$$

$32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ అనుకుంటే వస్తుంది. కావున పార్కు భుజాలు లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. పెద్ద భుజం పొడవు i.e BC = 40 m త్రిభుజ కర్ణం అవుతుంది మరియు AB మరియు AC ల మధ్య కోణం 90° అవుతుంది. మొదటి సూత్రం ఉపయోగించి, మనం పార్కు వైశాల్యం కనుక్కొని పరిశీలించవచ్చు.

వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times 32 \times 24 \text{ m}^2 = 384 \text{ m}^2$

హెరాన్స్ సూత్రం లో కనుక్కున్న వైశాల్యం మరియు సామాన్య సూత్రం ద్వారా వచ్చిన వైశాల్యం సమానంగా వుండడాన్ని చూడవచ్చు.

ఇప్పుడు మొదటే చర్చించిన త్రిభుజ వైశాల్యాలను కనుగొని సూత్రము సరైనదని నిర్ణయించవచ్చు అంటే,

(i) భుజం పొడవు 10 cm గాగల సమబాహు త్రిభుజము

(ii) రెండు సమాన భుజాల పొడవు 5 cm మరియు మూడవ భుజం పొడవు 8 cm వున్న సమద్విబాహు త్రిభుజం.

మీరు వీటిని గమనించవచ్చు.

(i) మొదటి దానికి $s = \frac{10 + 10 + 10}{2} = 15$ cm

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)} \text{ cm}^2$

$$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5} \text{ cm}^2$$

$$= 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(ii) రెండవది $s = \frac{8 + 5 + 5}{2} = 9$ cm

తిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)} \text{ cm}^2$

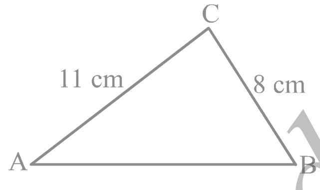
$$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4} \text{ cm}^2$$

$$= 12 \text{ cm}^2$$

ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను సాధిస్తాం

ఉదాహరణం 1: ఒక త్రిభుజ భుజాలు 8 cm మరియు 11 cm అయి దాని చుట్టుకొలత 32 *cm* అయితే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి. [చిత్రం 8.6 గమనించండి]

సాధనం: చుట్టు కొలత = 32 cm, a = 8 cm b = 11 cm



చిత్రం 8.6

మూడవ భుజం c = 32 cm – (8 + 11) cm = 13 cm

$$2s = 32 \text{ cm}, \quad s = \frac{32}{2} = 16 \text{ cm}$$

$(s - a) = (16 - 8)$ cm = 8 cm

$(s - b) = (16 - 11)$ cm = 5 cm

$(s - c) = (16 - 13)$ cm = 3 cm

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}\ \text{cm}^2$

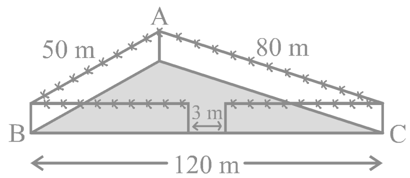
$= 8\sqrt{30}\ \text{cm}^2$

ఉదాహరణ 2: ABC త్రిభుజాకారంలో వున్న పార్కు భుజాలపొడవులు 120 m, 80 m మరియు 50 m అయిన [చిత్రం 8.7 గమనించండి]. పార్కు యజమాని దాని దాని చుట్టూ కంచె వేయడానికి మరియు దానిలో గడ్డి పెంచడానికి నిర్ణయించినారు. తాను గడ్డి పెంచవలసిన వైశాల్యం ఎంత? పార్కు గేటు కోసం ఒకవైపు 3 m వదలి ₹ 20 ప్రకారం కంచె వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు ఎంత?

సాధనం: పార్కు వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి మనవద్ద

$2s$ = 50 m + 80 m + 120 m = 250 m

s = 125 m



చిత్రం 8.7

ఇప్పుడు, $(s - a) = (125 - 120)$ m = 5 m

$(s - b) = (125 - 80)$ m = 45 m

$(s - c) = (125 - 50)$ m = 75 m

పార్కు వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}\ \text{m}^2$

$= 375\sqrt{15}\ \text{m}^2$

పార్కు చుట్టు కొలత = AB + BC + CA = 250 m

పార్కు చుట్టు కంచె వేసే పొడవు $= 250\text{ m} - 3\text{ m}$ (వాకిలి కోసం) $= 247\text{ m}$

కంచె వేయడానికి ఖర్చు $= ₹\ 20 \times 247$

$= ₹\ 4,940$

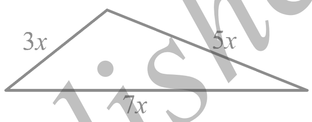
ఉదాహరణం 3: త్రిభుజాకార స్థలం భుజాలు $3 : 5 : 7$ నిష్పత్తిలో వుండి మరియు దాని చుట్టు కొలత 300 m. అయిన దాని వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: త్రిభుజాకార స్థలం భుజం పొడవులు వరుసగా $3x, 5x, 7x$ మీటర్లు [చిత్రం 12.8 గమనించండి].

స్థలం చుట్టు కొలత $= 3x + 5x + 7x = 300$ అని మనకు తెలుసు

కావున, $15x = 300$

$x = 20$



చిత్రం 8.8

కావున త్రిభుజాకార స్థలం భుజాల పొడవులు 3×20 m, 7×20 m, 7×20 m అయితే, 60 m, 100 m, మరియు 140 m.

వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవడానికి హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి కనుక్కోవచ్చు.

$$s = \frac{60 + 100 + 140}{2}\text{ m} = 150\text{ m}$$

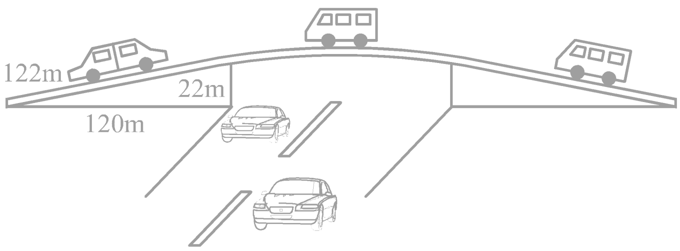
దాని వైశాల్యం $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}\ \text{m}^2$

$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}\ \text{m}^2$

$= 1500\sqrt{3}\ \text{m}^2$

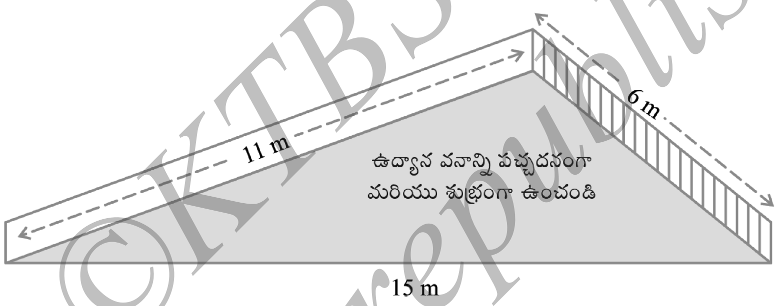
అభ్యాసం 8.1

1. ముందు పాఠశాల వుంది అని చెప్పే సూచనా పలక భుజం పొడవు 'a' వుండేటట్లు ఒక సమబాహు త్రిభుజమైనది. దాని చుట్టు కొలత 180 cm అయిన సూచనాపలక వైశాల్యంను హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి, కనుగొనండి
2. ఒక వంతెన ప్రక్క వైపు గోడలు త్రిభుజాకార గోడలపై ప్రకటనలు వేశారు. ప్రక్క గోడల భుజాలు 122 m, 22 m మరియు 120 m [చిత్రం 8.9 గమనించండి]. ప్రకటనల వల్ల సంవత్సరానికి ₹ 5000 ప్రతి చదరపు మీటరు ప్రకారం అద్దె ఇస్తారు. ఒక సంస్థ ఒక గోడను మూడు నెలలకు అద్దెకు తీసుకున్నది సంస్థ ఇచ్చే అద్దె ఎంత?



చిత్రం 8.9

3. ఒక పార్కులో జారుడు బల్ల వుంది దాని ఒకగోడకు ఏదోరంగుతో ఈ పార్కు పచ్చదనంగా మరియు శుభ్రంగా ఉంచండి. అని [చిత్రం 8.10 గమనించండి]. రాయబడినది. గోడ భుజాలు 15m, 11m మరియు 6m వుంటే రంగువేసిన వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.



చిత్రం 8.10

4. త్రిభుజ రెండు భుజాలు 18cm మరియు 10cm మరియు దాని చుట్టుకొలత 42cm వుంటే ఆత్రిభుజవైశాల్యంకనుక్కోండి.

5. ఒక త్రిభుజ భుజాలు 12 : 17 : 25 నిష్పత్తిలో వుండి, దాని చుట్టుకొలత 540cm అయిన దాని వైశాల్యం కనుక్కోండి.

6. ఒక సమ ద్విబాహు చుట్ట కొలత 30cm మరియు దాని సమాన భుజాల పొడవు 12cm అయిన త్రిభుజవైశాల్యం కనుక్కోండి.

8.3 హెరాన్స్ సూత్రంను ఉపయోగించి చతుర్భుజాల వైశాల్యాలను కనుక్కోవడం

ఒక రైతు ఒక పొలాన్ని సాగుచేయాలనుకున్నాడనుకుందాం. దీనికోతను కొంతమంది కూలీలను నియమిస్తారు వారు తమ కూలిని సాగు చేసిన స్థలంలో ప్రతి చదరపు మీటరుకు లెక్కించబడినది. తను దీనిని ఎలా లెక్కిస్తుంది. చాలాసార్లు పొలాలు చతుర్భుజాకారంలో వుంటాయి. మీరు చతుర్భుజాలను త్రిభుజాకార భాగాలుగా చేసిన తరువాత త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొని దాని ద్వారా సమస్యను పరిష్కరించాలి.

ఉదాహరణం 4: కమల దగ్గర 240m, 200m, 360m భుజాలుగాగల త్రిభుజాకారపు పొలంలో గోధుమను వేసిపెంచారు. ఈ పొలానికి ఆనుకొనివున్న మరొక త్రిభుజాకార పొలం భుజాలు పొడవులు 240m, 320m, 400m వున్నవి. దీనిలో తను బంగాళ దుంపలు మరియు ఉల్లిగడ్డలు పెంచడానికి ఇష్టపడును. [చిత్రం 8.11 గమనించండి]. తను అతిపెద్ద భుజం మధ్య బిందువును దాని ఎదుటి శీర్షాన్ని కలిపి పొలాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజించింది. దానిలోని ఒక భాగంలో బంగాళాదుంపలు మరొక భాగంలో ఉల్లిగడ్డలు పెంచిన వైశాల్యాన్ని హెక్టార్‌లలో కనుక్కోండి. [1 హెక్టారు= 10,000 m^2]

సాధన : ABC త్రిభుజకర పొలంలో గోధుమ పెంచిన ACD పొలాన్ని ADE మధ్య బిందువు C శీర్షానికి కలిపిన రెండు భాగాలు చేసినది ABC త్రిభుజంలో

$a = 200\text{m},\ b = 240\text{m},\ c = 360\text{m}$

మరియు, $s = \dfrac{200+240+360}{2}\ \text{m} = 400\ \text{m}$

గోదమ పెంచిన వైశాల్యం

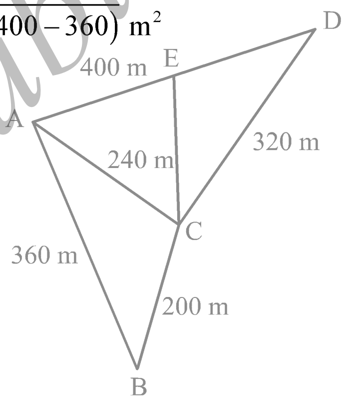
$$= \sqrt{400(400-200)(400-240)(400-360)}\ \text{m}^2$$

$$= \sqrt{400 \times 200 \times 160 \times 40}\ \text{m}^2$$

$$= 16000\sqrt{2}\ \text{m}^2$$

$$= 1.6\sqrt{2}\ \text{హెక్టార్లు}$$

$$= 2.26\ \text{హెక్టార్లు (సుమారు)}$$



చిత్రం 8.11

ACD త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కుందాం.

అయితే, $s = \dfrac{240+320+400}{2}\ \text{m} = 480\ \text{m}$

Δ ACD వైశాల్యం $= \sqrt{480(480-240)(480-320)(480-400)}\ \text{m}^2$

$$= \sqrt{480 \times 240 \times 160 \times 80}\ \text{m}^2$$

$$= 38400\ \text{m}^2$$

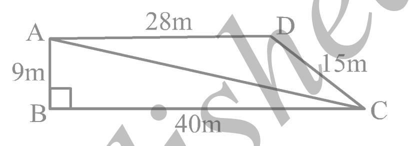
$$= 3.84\ \text{హెక్టార్లు}$$

AD భుజానికి E మధ్య బిందువును C బిందువుకు కలిపిన రేఖా ఖండం ACD త్రిభుజాన్ని రెండు సమభాగాలుగా విభజిస్తుంది. అని మనం గమనించవచ్చు. దీని మీరు కారణం చెప్పవచ్చునా? అవి AE మరియు ED సమానంగావుండే భూమి కలిగి దానిపై ఎత్తు కూడా సమానము.కావున బంగాళాదుంపలను పెందిన వైశాల్యం = ఉల్లిగడ్డలు పెంచిన వైశాల్యం.

$$= (3.84 \div 2) = 1.92\ \text{హెక్టార్లు}$$

ఉదాహరణం 5: ఒక పాఠశాలలో విద్యార్థులు స్వచ్ఛతా ఆందోళన కార్యక్రమం ఏర్పాటు చేశారు. వారు వీధిల్లో రెండు గుంపులుగా నడిచారు. ఒక గుంపు AB, BC మరియు CA వీధులలో మరొక గుంపు AC, CD మరియు DA వీధులలో నడుచుకుంటూ వెళ్ళారు. [చిత్రం 8.12 చూడండి]. తరువాత వారు వీధి నుండి దీర్ఘచతురస్రాకార వైశాల్యాన్ని శుభ్రం చేశారు. AB = 9m, BC = 40m, CD = 15m, DA = 28m మరియు $\angle B = 90°$ అయితే ఏ గుంపు ఎక్కువ వైశాల్యాన్ని శుభ్రం చేసింది. మరియు ఎంత ఎక్కువ? విద్యార్థులు శుభ్రపరచిన మొత్తం వైశాల్యాన్ని రోడ్డు వెడల్పు లెక్కించకుండా కనుక్కోండి

సాధన: AB = 9 m మరియు BC = 40 m, $\angle B = 90°$



చిత్రం 8.12

$$AC = \sqrt{9^2 + 40^2}\ \text{m}$$

$$= \sqrt{81 + 1600}\ \text{m}$$

$$= \sqrt{1681}\ \text{m}$$

$$= 41\ \text{m}$$

మొదటి గుంపు లంబకోణ త్రిభుజం ABC వైశాల్యం శుభ్రంచేయాల్సివుంది.

Δ ABC య వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు $= \frac{1}{2} \times 40 \times 9 = 180\ m^2$

రెండు గుంపు 41m, 15m మరియు 28m కలిగిన విషమ బాహుత్రిభుజం ACD యొక్క వైశాల్యాన్ని శుభ్రం చేయాల్సివుంది .

ఇక్కడ $s = \frac{41 + 15 + 28}{2}\ \text{m} = 42\ \text{m}$

కావున Δ ACD వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{42(42-41)(42-15)(42-28)}\ \text{m}^2$$

$$= \sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14}\ \text{m}^2$$

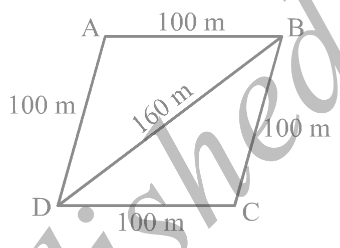
$$= \sqrt{126}\ \text{m}$$

మొదటి గుంపు శుభ్రపరచిన వైశాల్యం 180 m^2.రెండవ గుంపు శుభ్రపరచిన వైశాల్యం కన్నా (180 - 126) $m^2 = 54\ m^2$ ఎక్కువగావుంది.

అందరూ కలిసి శుభ్రపరచిన వైశాల్యం = (180 + 126) $m^2 = 306\ m^2$

ఉదాహరణం 6: సాన్యా వద్దవున్న పొలంలో కొంత భాగం రాంబస్ ఆకారంలోవుంది. [చిత్రం 8.13 గమనించండి]. ఆమె కూతురు మరొక కుమారుడు ఈ పొలంలో పనిచేసి రెండు వేరు వేరు ధాన్యాలను పెంచాలనుకుంది. ఆమె పొలాన్ని రెండు సమభాగాలుగా చేసింది. ఈ పొలం చుట్టుకొలత 400 m మరియు దాని కర్ణం 160 m అయితే వారిద్దరికి పండించే పొలం వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి?

సాధనం : ABCD ఒక రాంబస్ ఆకారంలో వున్న పొలం.



చిత్రం 8.13

దాని చుట్టు కొలత = 400 m

అయితే త్రిభుజం పొడవు = $\dfrac{400}{4}$ m = 100 m

ం.జ, AB = AD = 100 m

దాని కర్ణం పొడవు BD = 160 m

Δ ABD లో సగంచుట్టుకొలత, $s = \dfrac{100+100+160}{2}$ m = 180 m

కావున, Δ ABD వైశాల్యం $= \sqrt{180(180-100)(180-100)180-160}\ \text{m}^2$

$= \sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20}\ \text{m}^2$

$= 4800\ \text{m}^2$

కావున, ప్రతి ఒక్కరు పండించే పొలం వైశాల్యం 4800 m^2 అవుతుంది.

పర్యాయ పద్ధతి:

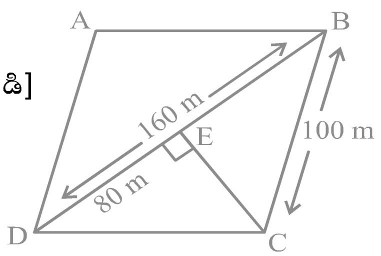
CE $\perp$ BD ని గీయండి [చిత్రం 8.14 గమనించండి]

BD = 160 m

DE = 160 m ÷ 2 = 80 m

మరియు $DE^2 + CE^2 = DC^2$, దీనితో

$CE = \sqrt{DC^2 - DE^2} = \sqrt{100^2 - 80^2}\ \text{m} = 60\ \text{m}$

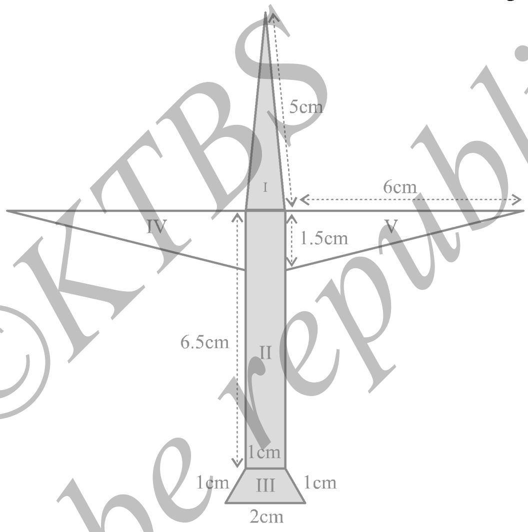


చిత్రం 8.14

కావున Δ BCD వైశాల్యం $= \dfrac{1}{2} \times 160 \times 60\ \text{m}^2 = 4800\ \text{m}^2$

అభ్యాసం 8.2

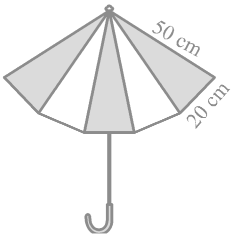
1. ఒక పార్కు ABCD చతుర్భుజాకారంలో వుంది. $\lfloor C = 90°$, AB = 9m, BC = 12 m, CD = 5 m మరియు AD = 8 m. అయిన అది ఆక్రమించే వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.
2. ABCD చతుర్భుజాకారంలోవున్న AB = 3 cm, BC = 4cm, CD = 4 cm, DA = 5 cm మరియు AC = 5 cm వుంది దీని వైశాల్యంకనుక్కోండి.
3. చిత్రం8.15 రాధ ఒక రంగు కాగితంతో విమానం చిత్రాన్ని క్రింద చూపినట్లు (8.15) చేసెను. ఆమె ఉపయోగించిరంగు కాగితం వైశాల్యం కనుక్కోండి.



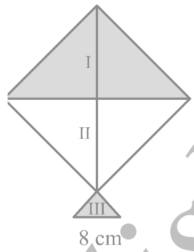
చిత్రం 8.15

4. ఒక త్రిభుజం మరియు ఒక సమాంతర చతుర్భుజం ఒకే పాదంపై ఉన్నవి మరియు సమాన వైశాల్యాలు కలిగివున్నాయి. త్రిభుజ భుజాలు 26 cm, 28 cm మరియు 30 cm మరియు సమాంతర చతుర్భుజం ఎత్తును కనుక్కోండి.
5. ఒక రాంబస్ ఆకారంలో వున్న పొలములో 18 ఆవులను మేపడానికి కావలసిన గడ్డి వుంది. రాంబస్ లోని ప్రతి భుజము పొడవు 30m మరియు దానిలోని పెద్ద కర్ణం 48m అయితే ప్రతి ఒక్క ఆవుకు దొరికే గడ్డి పొలం వైశాల్యం ఎంత?
6. ఒక గొడుగు రెండు వేరు వేరు రంగులున్న పది త్రిభుజాకార గుడ్డతో తయారు చేయబడింది. [చిత్రం 8.16 గమనించండి]. ప్రతి గుడ్డముక్కకొలతలు 20 cm, 50 cm మరియు 48 cm అయిన ఒకగొడుగుకు ప్రతి రంగుగల వైశాల్యమునకు ఉంత గుడ్డ కావాల్సి వస్తుంది?

7. చతురస్రాకార గాలిపటం కర్ణం 32cm మరియు సమద్విబాహు ఆకార పాదం 8 cm అయితే దాని మిగిలిన రెండు భుజాలు 6 cm కలిగిన మూడు వేరు వేరు రంగులున్న కాగితంతో చిత్రం 8.16 చూపినట్లు చేయవల్సింది దానిలో ఉపయోగించిన ప్రతి రంగు కాగితం ఎంత అని కనుక్కోండి?

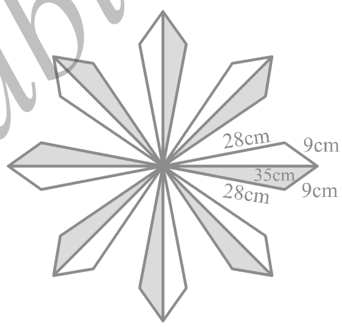


చిత్రం 8.16



చిత్రం 8.17

8. నేలపై వున్న పూల చిత్రము 16 త్రిభుజాకారపెంకుల (Tiles) తో కూడుకొనివుంది. ఈ త్రిభుజ భుజాలు 9cm, 28 cm మరియు 35cm అయిన. [చిత్రం 8.17 గమనించండి]. ఈ పెంకులను 50పై ప్రతి చదరపు సెం.మీ లో నునుపు చేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుక్కోండి



చిత్రం 8.18

9. ఒక పొలం ట్రెపీజియం ఆకారంలో వుంది. దాని సమాంతర భుజాలు 25 m అయిన 10 m సమాంతరం కాని భుజాల పొడవు 14 m మరియు 13 m అయిన పొలం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

8.4 సారాంశం

ఈ పాఠంలో మీరు ఈ కింది అంశాలను చదివారు:

1. a,b మరియు c భుజాలుగల త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి లెక్కించే సూత్ర సిద్ధాంతం.

$$\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$$\text{ఇక్కడ } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ అయివుంటుంది.}$$

2. చతుర్భుజ భుజాలు మరియు ఒక కర్ణాన్ని ఇచ్చినప్పుడు చతుర్భుజాన్ని రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించి మరియు హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి చతుర్భుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

అధ్యాయం – 9

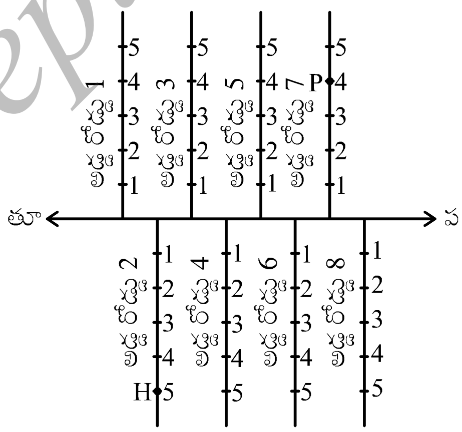
నిరూపక జ్యామితి

What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines?'
So the Bellman would cry; and crew would reply 'They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, ***The Hunting of the Snark***

9.1 పరిచయం

ఒక సంఖ్యారేఖలో ఒక బిందువును ఎలా గుర్తించాలో మీరు ఇదివరకే నేర్చుకున్నారు. రేఖపై ఒక బిందువు స్థానాన్ని ఎలా వివరించాలో తెలుసుకొన్నారు. దీనితోపాటు ఒక బిందువును కనుగొనడానికి దాని స్థానాన్ని ఒకటి కంటే ఎక్కువ రేఖలకు సంబంధించిన సూచనలు కావలసినన్ని సన్నివేశాలు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు క్రింది సందర్భాన్ని గమనించండి.

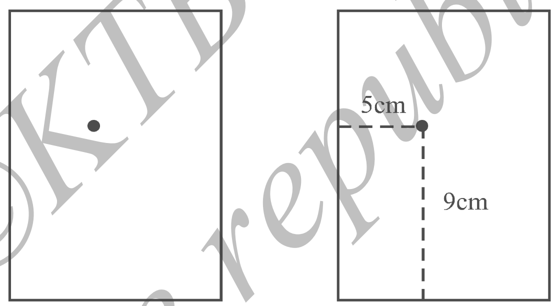


చిత్రం 9.1

I. చిత్రం 9.1లో తూర్పు పడమర దిశలలో వెళ్లిన ఒక రహదారి మరియు పడమర నుండి తూర్పు వైపుకు ఉన్న క్రాస్ రోడ్‌లకు ఒక్కొక్క సంఖ్యను ఇచ్చారు. అంతేకాకుండా ప్రతి క్రాస్ రోడ్డులోను ఇంటింటికి సంఖ్యలను గుర్తించారు. మీ స్నేహితుల ఇంటిని కనుగొనడానికి ఒకే ఒక సూచన ఉంటే సరిపోతుందా? ఉదాహరణకు ఆమె రెండవ వీధిలో నివసిస్తూ ఉంటే ఆమె ఇంటిని సులభంగా కనుగొనవచ్చా? ఇంటి సంఖ్య లేకుండా ఎంత? ఇల్లు ఏ క్రాస్ రోడ్డులో ఉంది ఈ రెండు సమాచారాలు లభ్యమయితే ఇంటిని కనుగొనడం ఇంకా సులభం కదా! రెండవ క్రాస్

రోడ్డులోని ఐదవ నెంబరు ఇంటిని గుర్తిస్తాము. (చిత్రం 9.1)లో ఇంటి స్థానన్ని 'H' సూచిస్తున్నది. అదేవిధంగా 'P' ఏడవ క్రాస్ రోడ్డులో ఇంటి సంఖ్య '4' ను సూచిస్తుంది.

II. ఒక పేపరులో మీరు ఒక బిందువును గుర్తించారు అనుకొందాము. (చిత్రం 9.2(a)) పేపరుపై ఆ బిందువు గల స్థానాన్ని తెలియజేయమని చెబితే, మీరు దానిని ఎలా తెలుపుతారు? బిందువు పేపరుపై అర్థం లో లేదా అవి కాగితపు ఎడమ అంచు పక్కన ఉన్నది. లేదా అది పేపరు ఎడమ వైపు పై కొనకు చాలా సమీపంలో ఉన్నది. ఇలాంటి విధానాలలో బహుశా మీరు ప్రయత్నించవచ్చు. వీటిలో ఏ ఒక ప్రకటనా బిందువు ఖచ్చిత స్థానాన్ని దృఢ పరుస్తున్నదా? లేదు. అయితే బిందువు కాగితపు ఎడమ అంచునుండి సుమారు 5cm దూరంలో ఉన్నది అని మీరు చెబితే బిందువు స్థానం గురించి కొంచెం అందాజు చేయవచ్చు. అయితే ఖచ్చితంగా గుర్తించడానికి సాధ్యం కాదు. మీరు కొంచెం ఆలోచించండి. బిందువు కాగితపు కింది అంచు నుండి 9cm పై భాగంలో ఉన్నది. అనకుండా చెప్పివుంటే, అది ఖచ్చితంగా ఎక్కడ ఉన్నది అనికూడా మనం తెలుసుకొనవచ్చు.



చిత్రం 9.2

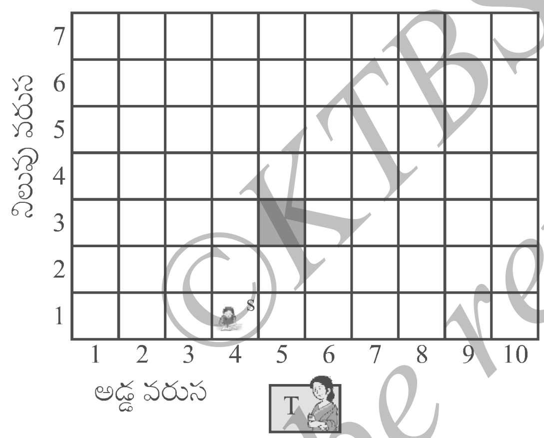
ఈ ఉద్దేశ్యానికి రెండు నిర్దిష్ట రేఖలతో కాగితపు ఎడమ అంచు మరియు కింది అంచులనుండి బిందువు ఖచ్చితంగా ఎంత దూరంలో ఉన్నది అని తెలుసుకొనుట ద్వారా మనం దాని స్థానాన్ని నిర్దిష్టపరుస్తాం (చిత్రం 9.2(b)) మరొక విధంగా చెప్పాలంటే బిందువు స్థానాన్ని కనుగొనడానికి మనకు రెండు స్వతంత్ర సమాచారాల అవసరం ఉంది. ఇపుడు తరగతి గదిలో ఆసనాల వ్యవస్థ అనే కార్యాచరణాన్ని కింద చూపిన విధంగా నిర్వహించండి.

కార్యచరణం 1 (ఆసన వ్యవస్థ) : మీ తరగతిలో గల అన్ని బెంచీలను ప్రక్కప్రక్క చతురస్రాకారంలో జోడించండి. ప్రతి ఒక బెంచ్ చతురస్రంలో ఉపయోగించు విద్యార్థి పేరును రాయండి. రెండు స్వతంత్ర సమాచారాలను ఉపయోగించి, తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థి స్థానాన్ని ఖచ్చితంగా వివరించవచ్చు.

(i) ఆమె/అతడు కూర్చొను నిలువ వరుస సంఖ్య.

(ii) ఆమె/అతడు కూర్చొను అడ్డువరుస సంఖ్య

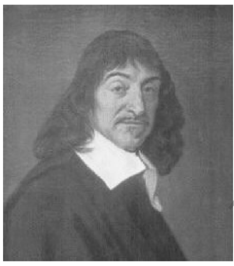
మీరు ఐదవ నిలువ వరుస మరియు మూడవ అడ్డవరుసలోని బెంచ్‌లో కూర్చొన్న వారైతే (చిత్రం 9.3లో రంగువేసిన చతురస్రంలో సూచించునది.) మీస్థానాన్ని (5,3) అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ మొదట నిలువవరుస సంఖ్యను తరువాత అడ్డవరుస సంఖ్యను రాయాలి. (5,3) అనునది (3,5) కు సమానమా? మీ తరగతిలోని ఇతర విద్యార్థుల పేరు మరియు స్థానాన్ని రాయండి. ఉదాహరణకు నాల్గవ నిలువ వరుస మరియు ఒకటవ అడ్డువరుసలో సోనియా కూర్చొని ఉంటే. S(4,1) అని రాయండి. ఉపాధ్యాయులను బెంచ్ ఆసన వ్యవస్థలోని భాగం కాదు. మనం ఉపాధ్యాములను కేవలం ఒక ప్రేక్షకలుగా పరిగనిస్తాము.



T ఉపాధ్యాయుల బెంచ్‌ను సూచిస్తుంది.
S సోనియా బెంచ్‌ను సూచిస్తుంది.

చిత్రం 9.3

ఒక సమతలంలో గల ఏదేని ఒక వస్తువు యొక్క స్థానాన్ని రెండు లంబరేఖల సహాయంతో సూచించవచ్చు అనుటను పై చర్చవల్ల మనం గమనించవచ్చు. బిందువు నిదర్శనంలో మనకు కాగితపు కింది అంచు మరియు ఎడమ అంచుల నుండి బిందువుకు గల దూరం తెలియ వలసి ఉంటుంది. ఆసన వ్యవస్థలో మనకు నిలువ వరుస మరియు అడ్డువరుసల సంఖ్యల అవసరం ఉం టుంది. ఈ సరళ సమాచారాలలో సుదూర పరిణామాలు ఉన్నాయి. అంటే ఇది నిరూపక జ్యామితి అను గణితపు ఒక ప్రముఖ శాఖకు కారణమైనది. ఈ అధ్యాయంలో నిరూపక జ్యామితి యొక్క కొన్న ప్రాథమిక పరికల్పనలను పరిచయం చేయడం ముఖ్య ఉద్దేశం పై తరగతు లలో మీరు వీటిగురించి ఇంకా ఎక్కువ నేర్చుకొంటారు. ఒక తలంలో ఏదైనా బిందువును రెండు నిర్ధేశాల అధారంగా స్థాపించటం అనే భావన గణితంలో **వైశ్లేషిక రేఖాగణితం** అనే కొత్త శాఖను సృష్ఠించింది.

17 వ శతాబ్దంలో ప్రముఖ గణిత శాస్త్రవేత్త **"రెనే డెకార్ట్"** పరుపుపై పడుకొని ఆలోచించడాన్ని ఇష్టపడేవారు. ఒకరోజు పరుపుపై విశ్రాంతి తీసుకొంటున్నాపుడు, ఒక సమతలంలో గల ఒక బిందువు స్థానాన్ని వివరించే సమస్యను అతను పరిహారం కనుగొన్నాడు. అతని విధానం అక్షాంశ-రేఖాంశాల పరికల్పనలో కూడిన పురాతన మాదిరిని నవీకరించిన రూపం. ఒక సమతలంలో ఒక బిందువు స్థానాన్ని వివరించు పద్ధతిని **"డెస్కార్టెస్‌కు"** గౌరవ సూచకంగా **"కార్టీజియన్ వ్యవస్థ"** అని కూడాపిలువ బడినది.	 రెనే డెకార్ట్ **(1596 -1650)** చిత్రం **9.4**

అభ్యాసం 9.1

1. మీ అధ్యయన బల్ల పై గల బల్లదీపం (study lamp) స్థానాన్ని మరొక వ్యక్తికి మీరు ఎలా వివరిస్తారు?

2. **రహదారి ప్రణాళిక :-** ఒక నగరంలో రెండు రహదారులున్నాయి. ఈ రెండు దారులలో ఒకటి ఉత్తర-దక్షిణ దిశలకు మరొకటి తూర్పు-పడమర దిశలకు ఉన్నాయి. ఇవి నగరానికి మధ్యలో ఉన్నాయి. పరస్పరం 200m అంతరంలో గల మిగతా అన్ని వీధులు ఈ రహదారికి సమాంతరంగా ఉన్నాయి. ప్రతిదిశకు 5 దారులు ఉన్నాయి. 200m = 1cm అను ప్రమాణాన్ని ఉపయోగించి, మీ నోటుపుస్తకంలో నగరపు ఒక మాదిరి గ్రాఫ్‌ను నిర్మించండి. రహదారి వీధులను ఏకరేఖలలో సూచించండి.

మీ మాదిరిలో అనేక ఖండించు దారులు ఉన్నాయి. ఇలాంటి ఖండించు ప్రతి దారికి ఒక ఉత్తర-దక్షిణాలలో మరొకటి తూర్పు-పడమర దిశలలో రెండు దారులలో ఏర్పడినాయి. ప్రతి జత ఖండించు దారులను ముందు క్రమంలో సూచించవచ్చు. ఉత్తర – దక్షిణ దిశగా ఉన్న రెండవ వీధి మరియు తూర్పు-పడమరల దిశగా 5వ వీధి ఒకదానికొకటి సాగిపోవునప్పుడు మనం దానిని వీధి ఖండన (2,5) అని పిలుస్తాము.

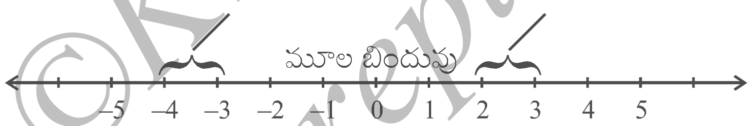
ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి.

(i) (4,3) అను ఎన్ని వీధి ఖండనలను సూచించవచ్చు?

(ii) (3,4) అను ఎన్ని వీధి ఖండనలను సూచించవచ్చు అనుటను కనుగొనండి.

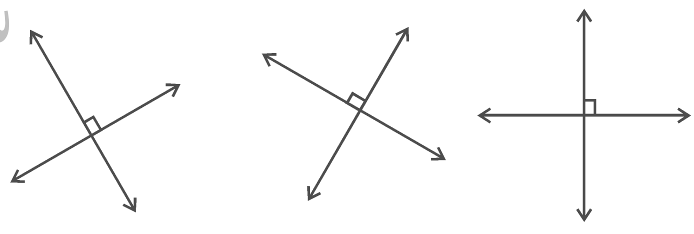
9.2 కార్టీజియన్ వ్యవస్థ :

'సంఖ్యా వ్యవస్థ అను అధ్యాయంలో మీరు సంఖ్యారేఖ గురించి నేర్చుకొన్నారు. సంఖ్యారేఖపై ఒక స్థిరబిందువు '0' (సున్నా)కు ఇరువైపులా సమాన దూరాలలో బిందువులు గుర్తించబడి ఉంటాయి. ఈ స్థిరబిందువు '0' (సున్న)ను మూలబిందువు అంటారు. ధన సంఖ్యలు అన్ని సున్నాకు కుడివైపున మరియు ఋణ సంఖ్యలు అన్ని సున్నాకు ఎడమ వైపున సూచిస్తాము. ఒక సరళ రేఖలో సమాన అంతరంలో బిందువులను గుర్తించడం ద్వారా మనం సంఖ్యారేఖపై సంఖ్యలను సూచిస్తాము. సున్న మూలబిందువు నుండి ఒక యూనిట్ దూరం '1'ని మూడు యూనిట్ల దూరం '3'ను సూచిస్తాయి. మూలబిందువు నుండి ధనాత్మక దిశలో 'r' దూరంలో గల బిందువు 'r' అను సంఖ్యను సూచిస్తాయి. ఋణాత్మక దిశలో మూల బిందువు నుండి 'r' దూరంలో గల బిందువు $-r$ అను బిందువును సూచిస్తాయి. చిత్రం 9.5లో సంఖ్యారేఖపై వివిధ సంఖ్యల స్థానాలను చూపించబడినది.



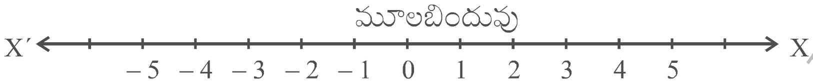
చిత్రం 9.5

డెకార్టె ఒక తలంలో పరస్పరం లంబంగా ఉన్న ఇలాంటి రెండు సంఖ్యారేఖలను తీసుకొన్నాడు. ఈ రేఖల ఆధారం చేసుకోని బిందువులను గుర్తించాలి. చిత్రం 3.6లో సూచించిన విధంగా లంబరేఖలు ఏ దిశలోనైనా ఉండవచ్చు. కానీ ఈ అధ్యాయంలో ఒక సమతలంపైన ఏదేని ఒక బిందువు స్థానాన్ని గుర్తించడానికి ఒక రేఖను క్షితజ–సమాంతరంగాను, మరొక రేఖను క్షితిజ – లంబంగాను ఉండునట్లు ఈ రెండు రేఖలను తీసుకొంటాము.

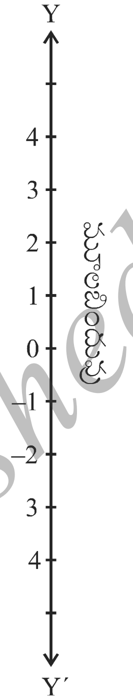


చిత్రం 9.6

వాస్తవానికి ఈ రేఖలు క్రింది విధంగా లభిస్తాయి. రెండు సంఖ్యారేఖలను తీసుకొని క్షితిజ సమాంతర రేఖ X'X ను X – అక్షం అని, క్షితిజ – లంబరేఖ Y'Y ను Y – అక్షం అని పిలవండి. (చిత్రం 9.7(a) చూపినట్లు) సంఖ్యారేఖపై రాసినట్లు దానిపై సంఖ్యలను రాయండి. YY' క్షితిజ – సమాంతరంకాదు క్షితిజ లంబం అనుటను గమనించండి Y'Y పైన కూడా మనం ఇదే విధంగా సంఖ్యలను రాస్తాము.



(a)

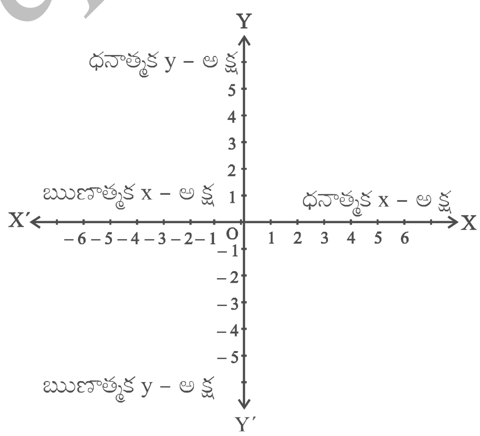


(b)

చిత్రం **9.7**

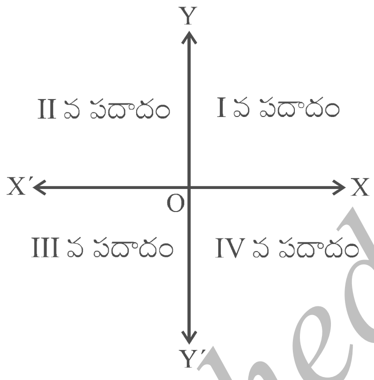
రెండు రేఖలు వాటి మూల బిందువు లేదా సున్నలో ఒకదానికొకటి ఖండించు కొన్నట్లు వాటిని గీయండి. చిత్రం 9.8 క్షితిజ – సమాంతర రేఖ X'X ను x – అక్షం అని, క్షితిజ లంబరేఖ Y'Y ను y – అక్షం అని అంటాము.

X'X మరియు Y'Y లు ఖండించు కొను బిందువును మూలబిందువు అని, దీనిని 'O' చే సూచిస్తారు. $\overrightarrow{OX}$ యొక్క దిశలో ధన సంఖ్యలు ఉంటాయి కాబట్టి $\overrightarrow{OX}$ ను ధన X – అక్షం అని $\overrightarrow{OY}$ దిశలో ధన సంఖ్యలు ఉంటాయి కాబట్టి OY ను ధన y – అక్షం అని అంటారు. $\overrightarrow{OX'}$ దిశలో $\overrightarrow{OY'}$ ల దిశలలో ఋణ సంఖ్యలు ఉంటాయి.



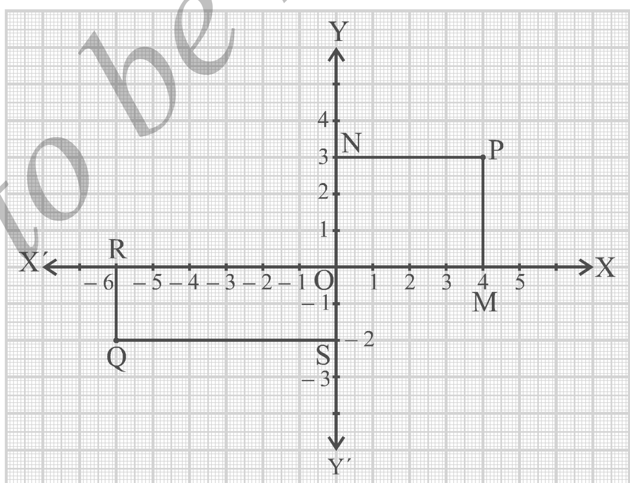
చిత్రం **9.8**

కాబట్టి $\overrightarrow{OX'}$ ను ఋణ X – అక్షంను $\overrightarrow{OY'}$ ను ఋణ y – అక్షం అని అంటాము. అక్షాల సమతలాన్ని నాలుగు భాగాలుగా చేసి ఉండటాన్ని మీరు గమనించవచ్చు. ఈ నాలుగు భాగాలను చతుర్థక పాదాలు అని అంటారు. (4లో ఒక భాగం) వీటిని OX నుండి ప్రారంబించి, అపసవ్యదిశలో I, II, III, IV లలో సూచిస్తాము. చిత్రం 9.9 ఇలా సమతలం అక్షాలను మరియు చతుర్థక పాదాలను కలిగి ఉన్నది. ఈ సమతలాన్ని **"కార్టీజియన్ తలం"** లేదా **"నిరూపక తలం"** లేదా **xy–తలం** అని అంటాము. అలాగే X,Y అక్షాలను నిరూపక అక్షాలు అంటాము.



చిత్రం 9.9

ఇపుడు మనం ఈ వ్యవస్థ గణితానికి ఎందుకు ప్రాథమికమైనది మరియు ఎలా ఉపయోగమైనది అని చూద్దాం. గ్రాఫ్ పేపర్‌పై XY– అక్షాలను గుర్తించిన కింది చిత్రాన్ని గమనించండి. P మరియు Q బిందువులకు q మరియు p బిందువులకు అక్షాల గల దూరాలను చూద్దాం. దీనికోసం x – అక్షం పై PM మరియు y – అక్షం పై PN లంబాలను గీయండి. అదేవిధంగా చిత్రం 9.10 లో చూపినట్లు QS లంబాలను గీయండి.



చిత్రం 9.10

మీరు గమనించవలసిన అంశాలు :

(i) ధన x – అక్షం దిశలో P బిందువు నుంచి y – అక్షానికి గల లంబదూరం PN = OM = 4 యూనిట్లు.

(ii) ధన y – అక్షం దిశలో x – అక్షం నుండి P బిందువుకు గల లంబదూరం PM = ON= 3 యూనిట్లు.

(iii) ఋణ x – అక్షం దిశలో y – అక్షం నుండి Q బిందువుకు గల లంబదూరం OR = SQ = 6 యూనిట్లు.

(iv) ఋణ y – అక్షం దిశలో, x – అక్షం నుండి Q బిందువుకు గల లంబదూరం OS = RQ = 2 యూనిట్లు.

ఇప్పుడు ఈ లంబదూరాలను ఉపయోగించి, ఏ ఖంగారు లేకుండా బిందువులను ఎలా వివరించవచ్చు. ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలను ఈ కింది పద్ధతి ద్వారా రాస్తాము.

(i) ఒక బిందువుయొక్క **x నిరూపకము** y – అక్షం నుండి x – అక్షం వరకు కొలిచిన దాని లంబదూరం (ధన x – అక్షం దిశలో ధన మరియు ఋణ x – అక్షం దిశలో ఋణ). P బిందువుకు అది + 4 మరియు Q కు – 6. x – నిరూపకాన్ని ప్రథమ నిరూపకం అని కూడా పిలుస్తారు.

(ii) ఒక బిందువు యొక్క **y – నిరూపకము** x – అక్షం నుండి y – అక్షం వరకు కొలిచిన దానిలంబదూరం (ధన y – అక్షం దిశలో ధన ఋణ y – అక్షం దిశలో ఋణ). P బిందువుకు అది + 3 మరియు Q కు అది –2. y – నిరూపకాన్ని **ద్వితీయ నిరూపకం** అని కూడా పిలుస్తాము.

(iii) నిరూపకం సమతలంలో గల ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలను చెప్పేటపుడు మొదట x – నిరూపకం ఆ తరువాత y – నిరూపకం వస్తాయి మనం ఆ నిరూపకాలను (ఆవరణం)లో రాస్తాము. కావున 'P' యొక్క నిరూపకంలు (4,3) మరియు 'Q' యొక్క నిరూపకాలు (–6, –2).

నిరూపకాలు సమతలంలో ఏ బిందువు నిరూపకాలైనా ఏకైకంగా ఉంటాయి. (3,4) అనునది (4,3) కు సమానం కాదు.

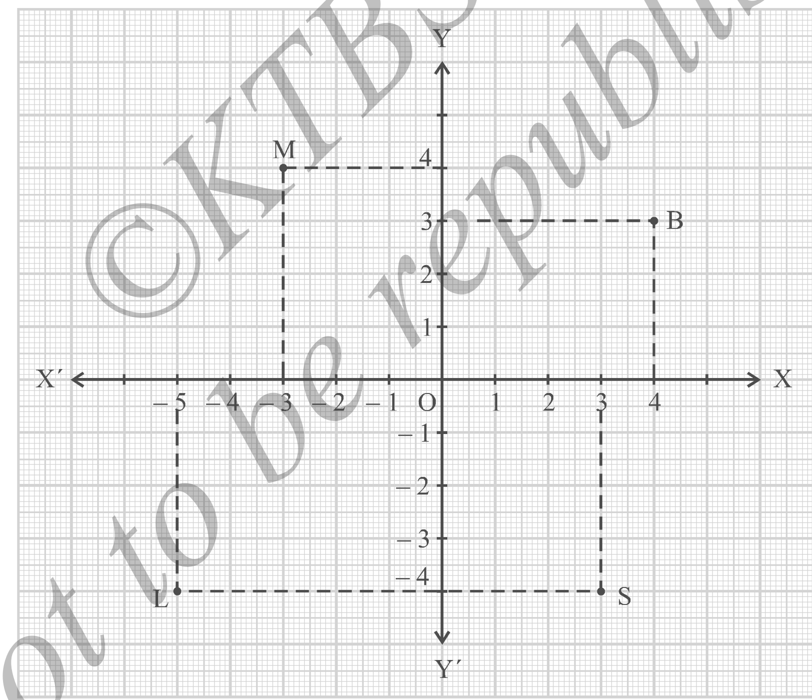
ఉదాహరణ 1 : చిత్రం 9.11 ను చూచి క్రింది వాక్యాలను పూరించండి.

(i) B బిందువు ప్రథమ నిరూపకం మరియు ద్వితీయ నిరూపకాలు క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున B నిరూపకాలు (_______ , _______)

(ii) M బిందువు యొక్క x – నిరూపకం మరియు y – నిరూపకాలు క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున M నిరూపకాలు (_______ , _______).

(iii) L బిందువు యొక్క x – నిరూపకం మరియు y – నిరూపకాలు క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున L నిరూపకాలు (_______ , _______).

(iv) S బిందువు యొక్క x – నిరూపకం మరియు y – నిరూపకం క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున S నిరూపకాలు (_______ , _______).



చిత్రం **9.11**

సాధన : (i) y అక్షం నుండి B బిందువు గల దూరం 4 యూనిట్లు అయినందు వల్ల B బిందువు x – నిరూపకము లేదా ప్రథమ నిరూపకం 4. x అక్షం నుండి B బిందువుకు గల దూరం 3 యూనిట్లు కావున B బిందువు యొక్క y నిరూపకం అంటే ద్వితీయ నిరూపకం 3 కావున B బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (4, 3).

(ii) M బిందువు యొక్క (పై (i)లో ఉన్నట్లు) x– నిరూపకాలు మరియు y– నిరూపకాలు క్రమంగా (–3 మరియు 4) కావున M బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (–3, 4).

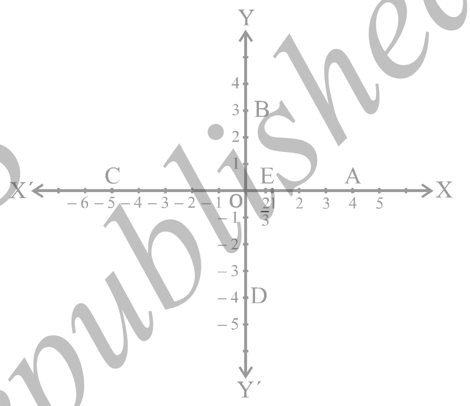
(iii) L బిందువు యొక్క x – నిరూపకాలు మరియు y – నిరూపకాలు క్రమంగా (–5 మరియు – 4) కావున L బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (–5, – 4).

(iv) S బిందువు యొక్క x – నిరూపకాలు మరియు y – నిరూపకాలు క్రమంగా (3 మరియు – 4) కావున S బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (3, – 4).

ఉదాహరణ 2 : చిత్రం 9.12 లో అక్షాలపై గుర్తించిన బిందువుల నిరూపకాలను రాయండి.

సాధన: మీరు చూడవలసిన దేమిటంటే

(i) A బిందువు y – అక్షం నుండి 4 యూనిట్ల దూరంలోను, y – అక్షం నుండి '0'(సున్నా) దూరంలో ఉన్నది. కావున A బిందువు యొక్క x – నిరూపకం 4, y – నిరూపకం '0' (సున్నా) 'A' యొక్క నిరూపకాలు (4,0) ఇలాగా



చిత్రం **9.12**

(ii) B యొక్క నిరూపకాలు (0, 3). ఎందుకు?

(iii) C యొక్క నిరూపకాలు (–5, 0). ఎందుకు?

(iv) D యొక్క నిరూపకాలు (0, –4). ఎందుకు?

(v) E యొక్క నిరూపకాలు $\left(\frac{2}{3},0\right)$. ఎందుకు?

x అక్షంపై ఏదేని బిందువు x – అక్షంనుండి '0' (సున్న) దూరంలో ఉంటే ఆ బిందువు యొక్క y – నిరూపకం 0 (సున్న) అవుతుంది. ఇలాగా x – అక్షం పై ఏదేని బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $(x, 0)$ రూపంలో ఉంటాయి. ఇక్కడ x అంటే y – అక్షం నుండి బిందువుకు గల దూరం. అదేవిధంగా y – అక్షం పై ఏదేని బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $(0, y)$ రూపంలో ఉంటాయి. ఇక్కడ y అంటే x – అక్షం నుండి బిందువుకు గల దూరం. ఎందుకు?

మూల బిందువు '**O**' యొక్క నిరూపకాలు ఏవి? ఇది రెండు అక్షాలనుండి (0)సున్న దూరంలో ఉంది. కావున దాని ప్రథమ నిరూపకం మరియు ద్వితీయ నిరూపకం రెండు (0) సున్నా అయినాయి. కావున మూలబిందువు యొక్క నిరూపకాలు (0,0).

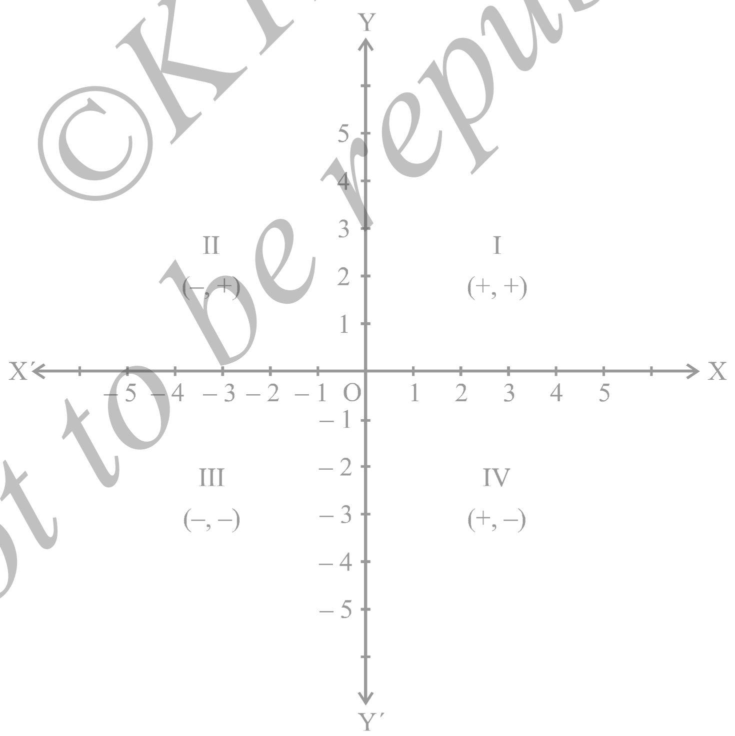
పై ఉదాహరణల నుండి ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాల చిహ్నాలకు ఆ బిందువు ఉండే చతుర్థక పాదానికి గల సంబంధాన్ని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు.

(i) ఒక బిందువు ఒకటవ పాదంలో ఉంటే అది (+, +) రూపంలో ఉంటుంది ఎందుకంటే ఒకటవ పాదం దన x – అక్షం, దన y – అక్షాలలో ఆవృతమై ఉంటుంది.

(ii) ఒక బిందువు రెండవ పాదంలో ఉంటే అది (–, +) రూపంలో ఉంటుంది. ఎందుకంటే రెండవ పాదం ఋణ x – అక్షం, ధన y – అక్షం లో ఆవృతమై ఉంటుంది.

(iii) ఒక బిందువు మూడవ పాదంలో ఉంటే అది (–, –) రూపంలో ఉంటుంది. ఎందుకంటే మూడవపాదం ఋణ x – అక్షం, ఋణ y – అక్షాలలో ఆవృతమై ఉంటుంది.

(iv) ఒక బిందువు నాల్గవ పాదంలో ఉంటే అది (+, –) రూపంలో ఉంటుంది. ఎందుకంటే నాల్గవపాదం ధన x – అక్షం, మరియు ఋణ y – అక్షంలలో ఆవృతమై ఉంటుంది. చిత్రం 9.13ను చూడండి.



చిత్రం **9.13**

గమనించండి : సమతలంలోగల ఒక బిందువును వివరించడానికి మనం పైన చర్చించిన విధానం ప్రపంచ వ్యాప్తంగా అంగీకరించ బడిన ఒక పద్ధతి. ఉదాహరణకు ప్రథమ మరియు ద్వితీయ నిరూపకాలు తర్వాత రావలసిన వ్యవస్థ కూడా ఉండి ఉండవచ్చు. అయితే ఏ గడిబిడి కలుగకూడదు అనే ఉద్దేశ్యంతో మనం మొదట వివరించిన పద్ధతికి మొత్తం ప్రపంచమే ఒప్పుకొన్నది.

అభ్యాసం 9.2

1. కింది ప్రతి ప్రశ్నకు జవాబు రాయండి.

(i) కార్టీజియన్ సమతలంలో ఒక బిందువును గుర్తించడానికి గీచిన క్షితిజ – సమాంతర మరియు క్షితిజ – లంబరేఖల పేర్లేమి?

(ii) ఈ రెండు రేఖల నుండి ఏర్పడిన సమతలం యొక్క భాగాల పేర్లు రాయండి?

(iii) ఈ రెండు రేఖలు ఖండించు బిందువు పేరు రాయండి?

2. చిత్రం 9.14ను చూసి క్రింది వాటిని రాయండి.

(i) B యొక్క నిరూపకాలు

(ii) C యొక్క నిరూపకాలు

(iii) (–3, –5) నిరూపకాలచే గుర్తించబడిన బిందువు

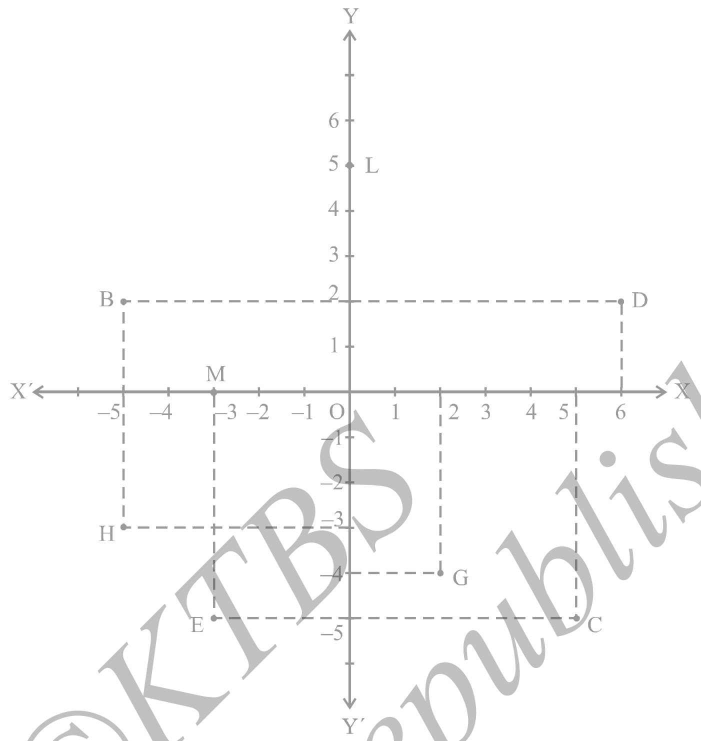
(iv) (2, –4) నిరూపకాలచే గుర్తించబడిన బిందువు

(v) D బిందువు యొక్క ప్రథమ నిరూపకం

(vi) H బిందువు యొక్క ద్వితీయ నిరూపకం

(vii) L బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

(viii) M బిందువు యొక్క నిరూపకాలు



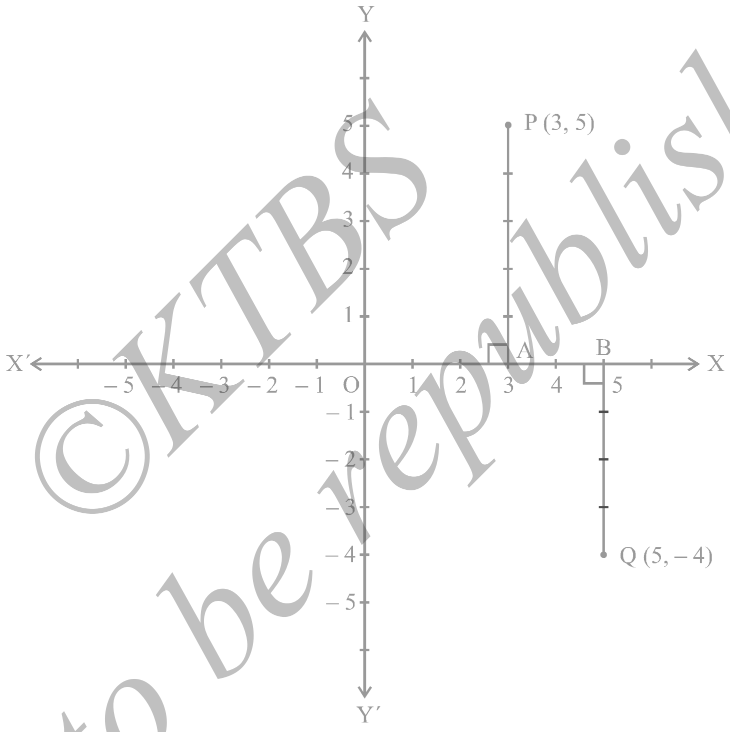
చిత్రం 9.14

9.3 ఒక బిందువు నిరూపకాలను ఇచ్చినప్పుడు సమతలం మీద ఆ బిందువును గుర్తించడం :

ఇంతవరకు మనం బిందువులను రచించి వాటి నిరూపకాలను తెలుపమని మీకు చెప్పి ఉన్నాము. ఇప్పుడు మనం బిందు నిరూపకాలు ఇస్తే వాటిని కార్టీజియన్ తలంలో ఎలా స్థాపించాలో నేర్చుకొందాం. ఈ విధానాన్ని మనం **"బిందువును గుర్తించడం"** అంటాము.

ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (3, 5) అను. ఈ బిందువును నిరూపక తలంలో ఎలా స్థాపించాలో చూద్దాం. రెండు అక్షాలలోను 1 cm = 1 unit ప్రమాణాన్ని ఎంచుకొని మనం నిరూపకాలను అక్షంపై గుర్తించాలి. బిందువు (3,5) మనకు తెలిపేదేమంటే ఈ ధన x – అక్షం దిశలో, y – అక్షం నుండి 3 ప్రమాణాలు దూరంలో ఉంది మరియు ధన y – అక్షం దిశలో x – అక్షం నుండి 5 ప్రమాణాల దూరంలో ఉంది. మరియు బిందువు సున్న(0) నుండి ప్రారంభించి ధన x – అక్షం దిశలో 3 ప్రమాణాలు లెక్కిస్తాము. మరియు అనురూపంగా ఆరంభించి ధన y – అక్షం దిశలో చరించి 5 ప్రమాణాలను 3 లెక్కించండి. అనురూప బిందువు 'P' అని గుర్తించండి. చిత్రం 9.15ను చూడండి.

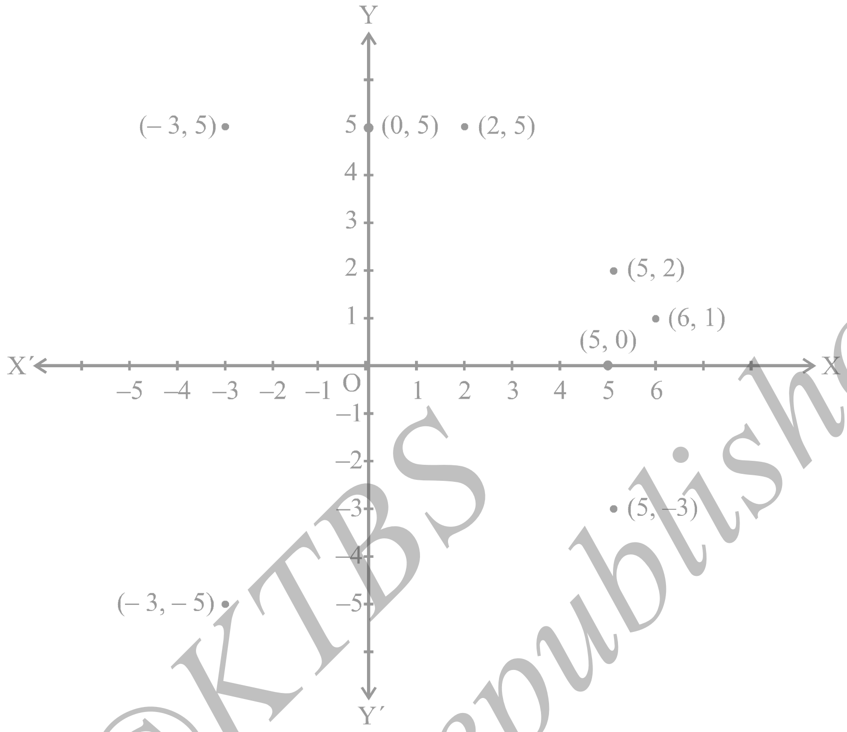
y – అక్షం నుండి ఉన్న దూరం 3 ప్రమాణాలు మరియు x – అక్షం నుండి ఉన్న దూరం 5 ప్రమాణాలు. ఇలా బిందువు యొక్క స్థానం P. 'P' యొక్క రెండు నిరూపకాలు ధన సంఖ్యలు అయినందువల్ల, P ఒకటవ పాదంలో వస్తుందనుటను గమనించండి. ఇదేవిధంగా Q (5, –4) బిందువును నిరూపక తలంలో స్థాపించవచ్చు. ఋణ y – అక్షం దిశలో x – అక్షం నుండి Q బిందువుకు గల దూరం 4 ప్రమాణాలు. కాబట్టి దాని y – నిరూపకం – 4 (చిత్రం 9.15ను చూడండి.) Q బిందువు 4 వ పాదంలో ఉన్నది ఎందుకు ?



చిత్రం **9.15**

ఉదాహరణ 3 : (5, 0), (0, 5), (2, 5), (5, 2), (–3, 5), (–3, –5), (5, –3) మరియు (6, 1) బిందువులను కార్టీజియన్ సమతలం మీద గుర్తించండి.

సాధన : గ్రాఫ్ కాగితంలో x – అక్షం మరియు y – అక్షంను గీయండి. 1cm = 1 యూనిట్ అని తీసుకోండి. చిత్రం 9.16లో బిందువుల స్థానాలను చుక్కలద్వారా చూపబడినది.



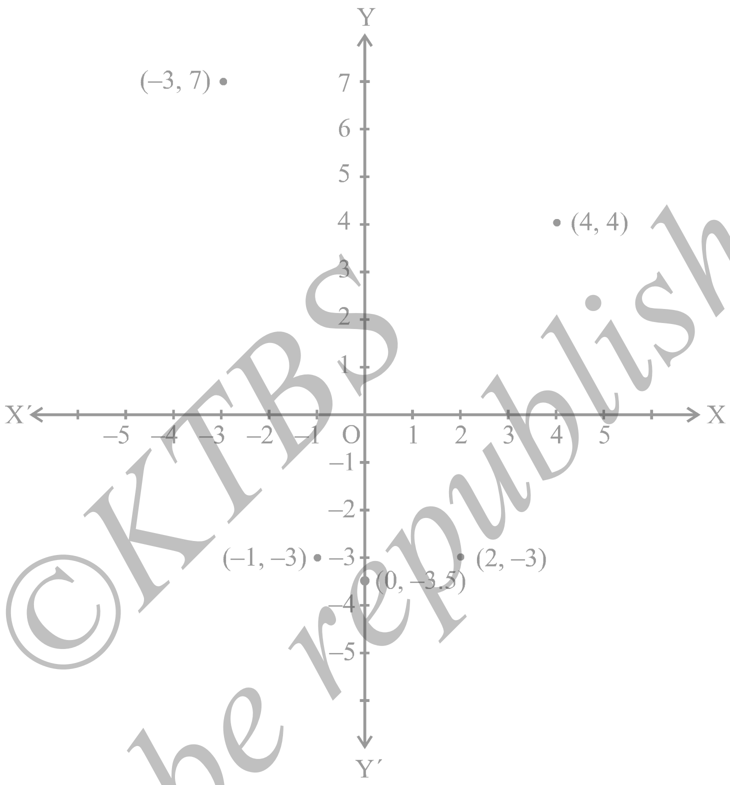
చిత్రం **9.16**

సూచన: పై ఉదాహరణలో (5, 0) మరియు (0, 5) ఒకే స్థానంలో లేవు అని మీరు చూడవచ్చు. అదేవిధంగా (5, 2) మరియు (2, 5)లస్థానాలు కూడా వేర్వేరుగా ఉన్నాయి. (–3, 5) మరియు (5, –3) కూడా వేర్వేరు స్థానాలలో ఉన్నాయి. $x \neq y$ అయితే ఒక కార్టీజియన్ సమతలంలో (x, y) యొక్క స్థానం (y, x)స్థానం కంటే భిన్నంగా ఉంది అని, ఇలాంటి కొన్ని ఉదాహరణలద్వారా మీరు తెలుసుకోన వచ్చు. కావున మనం x మరియు y ల నిరూపకాలను మార్చిన (y, x) స్థానం (x, y) స్థానానికి భిన్నంగా ఉంటుంది. దీని అర్థం ఏమంటే (x, y) లో x మరియు y ల క్రమం ముఖ్యమైనది. కావున (x, y) క్రమయుగ్మం అంటారు. $x \neq y$ అయితే క్రమయుగ్మం $(x, y) \neq$ క్రమయుగ్మం (y, x). కానీ $x = y$ అయితే, $(x, y) = (y, x)$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 4 : కార్టీజియన్ సమతలంలో క్రింది క్రమయుగ్మ సంఖ్యలను బిందువులును గుర్తించండి. 1cm, 1 యూనిట్ ప్రమాణాన్ని ఉపయోగించండి.

x	3	0	1	4	2
y	7	3.5	3	4	3

సాధన : పట్టికలో ఇచ్చిన సంఖ్యల జతలను (–3, 7), (0, –3.5), (–1, –3), (4, 4) (2, –3) అను బిందువుల ద్వారా గుర్తించవచ్చు. బిందువుల స్థానాలను చుక్కల ద్వారా గుర్తించాలి. చిత్రం 9.17లో చూపించినట్లు.



చిత్రం **9.17**

కార్యాచరణం 2 : ఇద్దరు వ్యక్తులకు ఒక ఆట (కావలసిన వస్తువులు : బిళ్ళలు లేదా నాణ్యాలు, గ్రాఫ్ కాగితం, రెండు వేర్వేరు రంగుల పాచికలు, ఎరుపు, ఆకుపచ్చ అని చెప్పండి.)

ప్రతి నాణ్యాన్ని (0, 0) లో ఉంచండి ప్రతి ఆటగాడు రెండు పాచికలను ఒకే సమయం లో వేస్తాడు. మొదటి ఆటగాడు ఇలా చేసినపుడు ఎరుపు పాచిక 3 ను ఆకుపచ్చ పాచిక 1ని చూపిస్తుంది అనుకొందాం. అప్పుడు అతడు నాణ్యాన్ని బిందువు (3, 1) లో ఉంచుతాడు. అదేవిధం గా రెండవ ఆడగాడు ఎరుపురంగు పాచిక 2ను ఆకుపచ్చపాచికలో 4 ను వేస్తే అతడు నాణ్యాన్ని (2, 4) లో ఉంచుతాడు. రెండవ సారి వేసినప్పుడు మొదటి ఆటగాడు ఎరుపు పాచికలో '1' ని ఆకుపచ్చపాచికలో '4' ను వేస్తే అతడు నాణ్యాన్ని (3 + 1, 1 + 4) లో ఉంచుతాడు. అంటే (3, 1) యొక్క x – నిరూపకానికి 1 ని y – నిరూపకానికి 4 ను చేర్చడంద్వారా నాణ్యాన్ని (4, 5)లో ఉంచుతాడు.

ఆట యొక్క గురి ఏమంటే మొదటి (10, 10) ని చేరాలి. అంటే ప్రథమ నిరూపకంకాని, ద్వితీయ నిరూపకం 10 కంటే ఎక్కువ కారాదు. అంతేకాకుండా ఇందివరకే ఒక స్థానంలో ఉన్న నాణ్యంపైన మరొక నాణ్యం ఉంచరాదు. ఉదాహరణ మొదటి ఆటగాడు నాణ్యాన్ని ఇదివరకే రెండవ ఆటగాడు నాణ్యాన్ని ఉంచిన స్థానానికి వెళ్ళాలంటే, రెండవ ఆటగాడి నాణ్యం (0,0) కు వెళ్ళుతుంది. గురి మీరుకుండా చలనం అసాధ్యమైతే ఆటగాడు తన వంతు కోల్పోతాడు చాలా మంది స్నేహితులలో ఆడడానికి సాధ్యమయ్యే విధంగా మీరు ఈ ఆటను విస్తరించవచ్చు.

గమనిక : కార్టీజియన్ సమతలం పై బిందువులను స్థాపించడాన్ని మీరు వెనుకటి తరగతులలో కాలం, దూరం నక్ష భుజాల చుట్టుకొలత నక్ష మొదలైన వేర్వేరు సన్నివేశాలలో గ్రాఫ్ నిర్మించడాన్ని కొంచెం పోల్చవచ్చు. ఇలాంటి సన్నివేశాలలో x మరియు y అక్షాలకు బదులుగా t – అక్షం, d – అక్షం, s – అక్షం, లేదా p – అక్షం మొదలగు అక్షాలను పిలువవచ్చు.

అభ్యాసం 9.3

1. (–2, 4), (3, –1), (–1, 0), (1, 2) మరియు (–3, –5) ఈ బిందువులు ఏ పాదంలో లేదా ఏ అక్షంపై ఉన్నాయి? కార్టీజియన్ సమతలంపై వాటిని స్థాపించడం ద్వారా మీ జవాబును పోల్చండి.
2. అక్షాలపై తగిన ప్రమాణాల దూరాన్ని ఎన్నుకోవడం ద్వారా సమతలంపై క్రింది పట్టికలో ఇచ్చిన (x, y) బిందువులను గుర్తించండి.

x	–2	–1	0	1	3
y	8	7	–1.25	3	–1

9.4. సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను నేర్చుకొన్నారు.

1. ఒక సమతలంలో ఒక వస్తువు లేదా బిందువు స్థానాన్ని గుర్తించడానికి రెండు లంబరేఖలు కావాలి. వాటిలో ఒకటి క్షితిజ – సమాంతరంగా మరొకటి క్షితిజ – లంబదిశలో ఉంటాయి.
2. సమతలాన్ని కార్టీజియన్ లేదా నిరూపకతలం అని పిలుస్తాము మరియు రేఖలను నిరూపక అక్షాలు అని అంటాం.
3. క్షితిజ – సమాంతర రేఖను x – అక్షం అని, క్షితిజ – లంబరేఖను y – అక్షం అని పిలుస్తాము.
4. నిరూపక అక్షాలు సమతలాన్ని నాలుగు పాదాలుగా విభజిస్తాము.

5. అక్షాల ఖండన బిందువును మూల బిందువు అని అంటాము.

6 y – అక్షం నుండి ఒక బిందువుకుగల దూరాన్ని దాని x – నిరూపకం లేదా ప్రథమ నిరూపకం అని పిలుస్తాము మరియు x – అక్షం నుండి ఒక బిందువుకు గల దూరాన్ని దా y – నిరూపకం లేదా ద్వితీయ నిరూపకం అని పిలుస్తాము.

7. ఒక బిందువు యొక్క ప్రథమ నిరూపకం x మరియు ద్వితీయ నిరూపకం y అయితే (x, y) లు ఆ బిందువు యొక్క నిరూపకాలు.

8. x – అక్షంలో గల ఒక బిందువు నిరూపకాలు $(x, 0)$ రూపంలో మరియు y అక్షంపై బిందువు నిరూపకాలు $(0, y)$ రూపంలో ఉంటాయి.

9. మూలబిందువు యొక్క నిరూపకాలు $(0,0)$.

10. ఒక బిందువు నిరూపకాలు I పాదంలో $(+, +)$, II పాదంలో $(–, +)$, III వ పాదంలో $(–, –)$, IV వ పాదంలో $(+, –)$ రూపంలో ఉంటాయి. ఇక్కడ '+' ధన వాస్తవ సంఖ్యను '–' ఋణ వాస్తవ సంఖ్యను కూడా సూచిస్తాయి.

11. $x \neq y$ అయితే, $(x, y) \neq (y, x)$ మరియు $x = y$ అయితే, $(x, y) = (y, x)$.

అధ్యాయం- 10

రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలు

విశ్లేషణ విధానం యొక్క ముఖ్యమైన ఉపయోగమేమంటే గణిత సమస్యలను సమీకరణ రూపంలోకి మార్చి, ఆ సమీకరణాలను వీలైనంత సరళ పదాలలో చూపుట.

– ఎడ్మండ్ హ్యాలి

10.1 పరిచయం

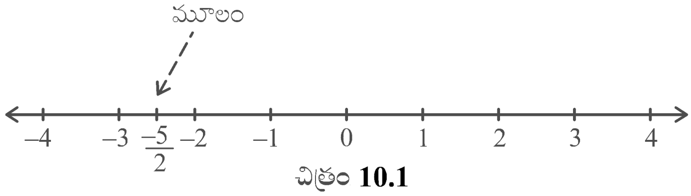
క్రిందటి తరగతులలో మీరు ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణాల గురించి నేర్చుకున్నారు. ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణమును రాయగలవా? నీవు ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణాలకు $x+1=0, x+\sqrt{2}=0$ మరియు $\sqrt{2}y+\sqrt{3}=0$ అను ఉదాహరణలుగా చెప్పవచ్చు. ఇటువంటి సమీకరణాలకు ఒకే ఒక జవాబు ఉంటుందని కూడా మీకు తెలుసు. ఆ జవాబును సంఖ్యారేఖ మీద ఏ విధంగా సూచించవచ్చు అనేది కూడ మీకు గుర్తు ఉండి ఉంటుంది. ఈ అధ్యాయంలో ఒక చలరాశిగల సరళసమీకరణాలను గుర్తుచేసుకొని, దానిని రెండు చలరాశులు గల సరళసమీకరణాలకు పెంచవచ్చు. మీకు ఈ ప్రశ్నలు తలెత్తవచ్చు రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణానికి సమాధానం ఉంటుందా? ఉంటే, అది ఒకే ఒక్కటా? ఆ సమాధానం కార్టీజియన్ సమతలం మీద ఎలా కనిపిస్తుంది? ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానాలు చెప్పాలంటే అధ్యాయం 3లో మీరు చదివిన కొన్ని పరికల్పనలను ఉపయోగించవచ్చు.

10.2 సరళ సమీకరణాలు :

మీరు ఇప్పటి వరకు ఏమి చదివారో ముందు గుర్తు చేసుకుందాం. క్రింది సమీకరణమును చూడండి.

$$2x + 5 = 0$$

దాని సమాధానము, అంటే సమీకరణం యొక్క మూలం $-\frac{5}{2}$ దీనిని సంఖ్యారేఖ మీద క్రింది విధంగా సూచించ వచ్చు.



చిత్రం **10.1**

ఏదైనా సమీకరణాన్ని సాధించేటపుడు, క్రింది అంశాలను మనసులో పెట్టుకోవాలి.

క్రింది చర్యల వలన సరళ సమీకరణం యొక్క సమాధానం మారదు.

(i) సమీకరణానికి రెండువైపుల ఒకే సంఖ్యను కూడినపుడు (లేదా దాని నుండి తీసివేసినప్పుడు)

(ii) సమీకరణాన్ని ఇరువైపుల సున్నకాని ఒకే సంఖ్యతో గుణించినపుడు లేదా భాగించినపుడు

క్రింది సందర్భమును చూద్దాం.

నాగపూర్‌లో ఇండియా, శ్రీలంకల మధ్య జరిగిన ఒకరోజు క్రికెట్ ఆటలో ఇద్దరు భారతీయ బాట్స్‌మెన్‌లు మొత్తం 176 పరుగులు చేశారు. ఈ సమాచారాన్ని సమీకరణ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

ఇక్కడ ఏ ఒక్క ఆటగాడి పరుగులు ఇవ్వలేదు కాబట్టి రెండు అవ్యక్త రాశులు ఉన్నాయి. అవి x మరియు y అనుకుందాం. ఒక ఆటగాడి పరుగులు x మరియు మరొక ఆటగాడి పరుగులు y అవుతాయి.

$x + y = 176$ అని మనకు తెలుసు

అదే మనకు కావలసిన సమీకరణం.

ఇది రెండు చలరాశులు గల సరళసమీకరణానికి ఉదాహరణ అవుతుంది.

ఇటువంటి సమీకరణాలలో x మరియు y లను చలరాశులుగా సూచించుట ఆనవాయితీ అయినది. వేరే అక్షరాలను కూడా ఉపయోగించవచ్చు. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలకు కొన్ని ఉదాహరణలు :

(1) $2s + 3t = 5$ (2) $p + 4q = 7$

(3) $\pi u + 5v = 9$ మరియు (4) $3 = \sqrt{2}x - 7y$

ఈ సమీకరణాలను క్రమంగా

(1) $2s + 3t - 5 = 0$ (2) $p + 4q - 7 = 0$ (3) $\pi u + 5v - 9 = 0$ మరియు

(4) $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$ గా కూడ రాయవచ్చు.

a, b మరియు c లు వాస్తవ సంఖ్యలయి ఉండి, a మరియు b లు సున్న కానిచో $ax + by + c = 0$ రూపంలో ఉన్న ఏ సమీకరణమునైనా రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం అంటారు. ఇటువంటి సమీకరణాలను ఎన్నైనా రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 1 : క్రింది ప్రతి ఒక్క సమీకరణమును $ax + by + c = 0$ రూపంలో రాసి a, b మరియు c విలువలను గుర్తించండి.

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$
(iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$.

సాధన :(i) $2x + 3y = 4.37$ ని $2x + 3y - 4.37 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 2, b = 3, c = -4.37$

(ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$ ని $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = -4$.

(iii) $4 = 5x - 3y$ సమీకరణమును $5x - 3y - 4 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 5, b = -3, c = -4$. ఈ సమీకరణమును $-5x + 3y + 4 = 0$ అని కూడి రాయవచ్చునని నీవు ఒప్పు కుంటావా? ఈ సందర్భంలో $a = -5, b = 3, c = 4$.

(iv) $2x = y$ సమీకరణమును $2x - y + 0 = 0$ అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 2, b = -1, c = 0$

$ax + b = 0$ రూపంలో ఉన్న సమీకరణాలు కూడా రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలకు ఉదాహరణలవుతాయి. ఎందుకనగా వాటిని $ax + 0.y + b = 0$ అని రాయవచ్చు.

ఉదాహరణకు $4 - 3x = 0$ ని $-3x + 0.y + 4 = 0$ గా రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 2: క్రింది ప్రతి ఒక్క సమీకరణమును రెండు చలరాశులు గల సమీకరణంగా రాయండి.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$
(iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

సాధన (i) $x = -5$ ని $1.x + 0.y = -5$ లేక $1.x + 0.y + 5 = 0$ గా రాయవచ్చు.

(ii) $y = 2$ ని $0.x + 1.y = 2$ లేక $0.x + 1.y - 2 = 0$ గా రాయవచ్చు.

(iii) $2x = 3$ ని $2x + 0.y - 3 = 0$ గా రాయవచ్చు.

(iv) $5y = 2$ ని $0.x + 5y - 2 = 0$ గా రాయవచ్చు.

అభ్యాసం 10.1

1. ఒక నోటు పుస్తకము యొక్క వెల ఒక పెన్ను వెలకు రెండు రెట్లున్నది. ఈ వాక్యమును సూచించు రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణమును రాయండి.

   (నోటు పుస్తకం వెల ₹x గాను, పెన్నువెల ₹y గాను తీసుకోండి)

2. క్రింది సరళ సమీకరణాలను $ax + by + c = 0$ రూపంలో చూపి ప్రతి సందర్భంలో a, b మరియు c విలువలను గుర్తించండి.

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - y - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$

   (iv) $x = 3y$ (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$

   (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

10.3 సరళసమీకరణము యొక్క సాధన

ఒక చలరాశి గల ప్రతి సరళ సమీకరణానికి ఒకే ఒక సమాధానం ఉంటుందని మీరు చూశారు. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క జవాబు గురించి మీరేమి చేస్తారు. సమీకరణంలో రెండు చలరాశులు ఉన్నాయి. కాబట్టి జవాబు అంటే ఇచ్చిన సమీకరణమును తృప్తిపరచే రెండు విలువలు, ఒకటి x విలువ, మరొకటి y విలువ. $2x + 3y = 12$ సమీకరణమును తీసుకొందాం. ఇక్కడ $x = 3$, మరియు $y = 2$ అనేది ఒక జవాబు అవుతుంది. ఎందుకంటే మీరు $x = 3$, మరియు $y = 2$ విలువలను సమీకరణంలో సూక్ష్మీకరించినప్పుడు.

$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$ అవుతుంది.

ఈ సమాధానమును ముందుగా x విలువ, తర్వాత y విలువలతో (3, 2) క్రమయుగ్మంగా రాస్తాం. ఇదేవిధంగా, పై సమీకరణానికి (0, 4) కూడా జవాబు అవుతుంది.

మరొక రకంగా చెప్పాలంటే (1,4) అనేది $2x + 3y = 12$ కి జవాబు కాదు. ఎందుకంటే $x = 1$, $y = 4$ విలువలు ఇచ్చినపుడు $2x + 3y = 14$ అవుతుంది కాని 12 కాదు. (0, 4) ఒక జవాబు అవుతుంది కాని (4, 0) కాదు.

$2x + 3y = 12$ సమీకరణానికి కనీసం రెండు జవాబులు మీరు చూశారు. అని (3, 2) మరియు (0, 4). ఇంకేదైనా సమాధానమును కనుగొనగలరా? (6, 0) మరొక సమాధానమని మీరు ఒప్పుకుంటారా? దానిని పరిశీలించండి.

నిజానికి మనము క్రింది విధంగా చేస్తే, అనేక సమాధానాలు పొందవచ్చు. $2x + 3y = 12$ లో మీ ఇష్ట ప్రకారం x కి ఒక విలువ తీసుకోండి. ($x = 2$ అనుకుందాం), అప్పుడు ఈ సమీకరణం ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణం $4 + 3y = 12$ గా అవుతుంది. దీనిని సాధిస్తే $y = \frac{8}{3}$ అవుతుంది. కాబట్టి $2x + 3y = 12$ కి $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ మరొక జవాబు అవుతుంది. ఇదేవిధంగా $x = -5$ అనుకొనిన ఈ సమీకరణం $-10 + 3y = 12$ అవుతుంది. దానినుండి $y = \frac{22}{3}$ అని వస్తుంది. కాబట్టి $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ అనేది $2x + 3y = 12$ కి మరొక సమాధానం అవుతుంది. కాబట్టి రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క వివిధ జవాబులకు అంతం లేదు. అంటే రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణానికి అనంతమైన సమాధానాలు ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 3 : $x + 2y = 6$ సమీకరణానికి నాలుగు విభిన్న సమాధానాలను కనుగొనండి.

సాధన : పరిశీలన ద్వారా $x = 2, y = 2$ ఒక సమాధానం అవుతుంది. ఎందుకంటే $x = 2, y = 2$ విలువలకు, $x + 2y = 2 + 4 = 6$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు $x = 0$ అనుకుందాం. x కి ఈ విలువ ఇస్తే ఇచ్చిన సమీకరణం $2y = 6$ అవుతుంది. అప్పుడుదాని యొక్క ఒకే ఒక జవాబు $y = 3$ కాబట్టి $x = 0, y = 3$ కూడ $x + 2y = 6$ కి ఒక జవాబు అవుతుంది. ఇదే విధంగా $y = 0$ తీసుకుంటే సమీకరణం $x = 6$ అవుతుంది. కాబట్టి $x = 6, y = 0$ కూడా $x + 2y = 6$ కి సమాధానం అవుతుంది. చివరిగా $y = 1$ తీసుకుందాం. ఇచ్చిన సమీకరణం $x + 2 = 6$ అవుతుంది. దాని సమాధానం $x = 4$ కాబట్టి $(4, 1)$ కూడా ఇచ్చిన సమీకరణానికి ఒక సమాధానం అవుతుంది. కాబట్టి ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క అనంతమైన సమాధానాలలో నాలుగు ఏవనగా $(2, 2)$, $(0, 3)$, $(6, 0)$ మరియు $(4, 1)$.

గమనిక : సమీకరణం యొక్క సమాధానమును పొందడానికి సులభమైన మార్గమేమంటే $x = 0$ తీసుకొని y విలువను కనుగొనుట. అదేవిధంగా, $y = 0$ తీసుకొని x విలువను కనుగొనుట.

ఉదాహరణ 4 : క్రింది ప్రతి సమీకరణానికి రెండు సమాధానాలు కనుగొనండి.

(i) $4x + 3y = 12$ (ii) $2x + 5y = 0$ (iii) $3y + 4 = 0$

సాధన :

(i) $x = 0$ తీసుకొంటే, $3y = 12$ వస్తుంది అంటే $y = 4$. కాబట్టి $(0, 4)$. ఇచ్చిన సమీకరణానికి ఒక సమాధానం అవుతుంది. అదేవిధంగా, $y = 0$ తీసుకొంటే $x = 3$ అవుతుంది కాబట్టి $(3, 0)$ ఒక సమాధానం అవుతుంది.

(ii) $x = 0$ తీసుకుంటే, $5y = 0$ వస్తుంది. దాని నుండి $y = 0$ అవుతుంది కాబట్టి ఇచ్చిన సమీకరణానికి, (0, 0) ఒక సమాధానం అవుతుంది. ఇపుడు $y = 0$ తీసుకుంటే మరల (0, 0) సమాధానం వస్తుంది. మరల మొదటి సమాధానమే వచ్చింది. మరొక సమాధానం పొందటానికి $x = 1$ తీసుకుందాం. అపుడు y విలువ $-\frac{2}{5}$ అని పరిశీలించవచ్చు. కాబట్టి $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ మరొక సమాధానం అవుతుంది.

(iii) $3y + 4 = 0$ సమీకరణమును $0\,.\,x + 3y + 4 = 0$ గా రాస్తే x యొక్క అన్ని విలువలకు $y = -\frac{4}{3}$ వస్తుంది. కాబట్టి $\left(0, -\frac{4}{3}\right), \left(1, -\frac{4}{3}\right)$ రెండు సమాధానాలు గా చెప్పవచ్చు.

అభ్యాసం 10.2

1. క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది? ఎందుకు?

   $y = 3x + 5$ సమీకరణానికి

   (i) ఒకే ఒక సమాధానం ఉన్నది (ii) రెండు సమాధానాలు మాత్రమే ఉన్నాయి.

   (iii) అనంతమైన సమాధానాలు ఉన్నాయి.

2. క్రింది ప్రతి సమీకరణానికి నాలుగు సమాధానాలు రాయండి..

   (i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. క్రింది ఇవ్వబడిన వాటిలో $x - 2y = 4$ సమీకరణానికి ఏవి సమాధానాలు అవుతాయి? ఏవి కావు? పరిశీలించండి.

   (i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0) (iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ (v) (1, 1)

4. $2x + 3y = k$ సమీకరణానికి $x = 2, y = 1$ సమాధానమైతే k విలువ కనుగొనండి.

10.4 రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖాపటం (గ్రాఫు)

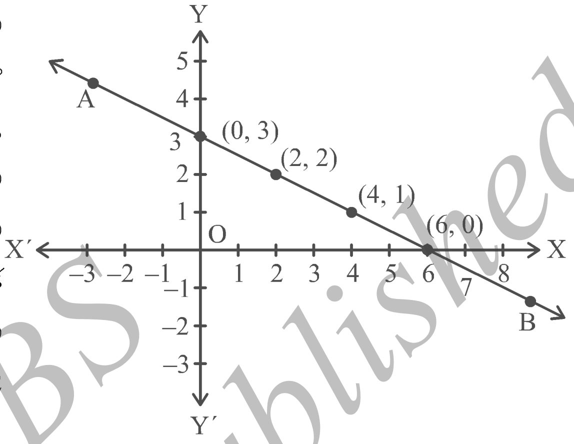
ఇంతవరకు మీరు రెండు చలరాశులు గల సమీకరణం యొక్క సమాధానాలను బీజీయంగా సాధించారు. అటువంటి సమీకరణానికి అనంతమైన సమాధానాలున్నాయని మీకు తెలుసు. వాటిని మనము నిరూపక తలం మీద ఎలా చూపగలం? సమాధానమును రెండు విలువలు గల జతలుగా రాసినట్లు మీరు గుర్తించి ఉంటారు.

ఉదాహరణ 3 లోని $x + 2y = 6$ సరళ సమీకరణం సమాధానాలను క్రింద చూపబడిన విధంగా ముందుగా x విలువలు, వాటికింద అనురూప y విలువలను పట్టికలో రాయవచ్చు.

పట్టిక 1

x	0	2	4	6	...
y	3	2	1	0	...

క్రిందటి అధ్యాయంలో మీరు బిందువులను గ్రాఫు కాగితం మీద ఎలా గుర్తించాలో నేర్చుకున్నారు. (0, 3), (2,2), (4, 1) మరియు (6, 0) బిందువులను గ్రాపుకాగితం మీద గుర్తించుదాం. ఇపుడు ఏవైనా రెండు బిందువులను కలిపి ఒక సరళ రేఖను గీయండి. దీనిని సరళ రేఖ AB అని అనుకుందాం. (చిత్రం 10.2 చూడండి.)



చిత్రం **10.2**

మిగిలిన రెండు బిందువులు కూడా AB సరళ రేఖ మీద ఉన్నాయని గమనించావా? ఇపుడు ఈ రేఖ మీద మరొక బిందువు (8,–1) ని తీసుకోండి. ఇది సరళ రేఖకు జవాబు అవుతుందా ? నిజానికి $8 + 2(-1) = 6$.

కాబట్టి (8, –1) ఒక జవాబు అవుతుంది AB రేఖ మీద ఏదైనా మరొక బిందువును తీసుకొని దాని నిరూపకాలు సమీకరణమును తృప్తిపరుస్తాయో లేదో పరీక్షించండి. ఇప్పుడు, AB మీద లేని ఏదైనా బిందువును తీసుకోండి. అది (2, 0) అనుకోండి. దాని నిరూపకాలు సమీకరణమును తృప్తి పరుస్తాయా? పరిశీలిస్తే కాదని తెలుస్తుంది. మన పరిశీలనలను పట్టీచేద్దాం.

(1) ఏ బిందువు యొక్క నిరూపకాలు సమీకరణం (1) ని తృప్తిపరుస్తాయో, ఆ బిందువు AB రేఖ మీద ఉంటుంది.

(2) AB రేఖ మీద ప్రతి బిందువు (a, b), సమీకరణం (1) కి $x = a, y = b$ సమాధానాన్నిస్తుంది.

(3) AB రేఖ మీద లేని ఏదైనా బిందువు, సమీకరణం (1) కి సమాధానం కాదు.

దీనిని బట్టి మనము ఒక నిర్ధారణకు రావచ్చు. సరళరేఖ మీది ప్రతి బిందువు సమీకరణమును తృప్తిపరుస్తుంది, మరియు సమీకరణము యొక్క ప్రతి సమాధానము, సరళ రేఖ మీద ఒక

బిందువవుతుంది. నిజానికి, రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం జ్యామితీయంగా ఒక సరళ రేఖను సూచిస్తుంది. ఈ సరళ రేఖ మీద బిందువులు, సమీకరణం యొక్క సమాధానాల గుంపు అవుతుంది. దీనినే సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖాపటం అంటారు. కాబట్టి రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖా చిత్రం గీయాలంటే ఆ సరళ రేఖ యొక్క రెండు సమాధానాలకు చెందిన రెండు బిందువులను గుర్తించి, వాటిని ఒక సరళ రేఖ ద్వారా కలిపితే సరిపోతుంది. ఏది ఏమైనా ఇటువంటి బిందువులను రెండు కంటే ఎక్కువ గుర్తించినట్లయితే, రేఖా చిత్రము సరిగ్గా ఉన్నదా, లేదా అని వెంటనే తెలుసుకొనుటకు వీలవుతుంది.

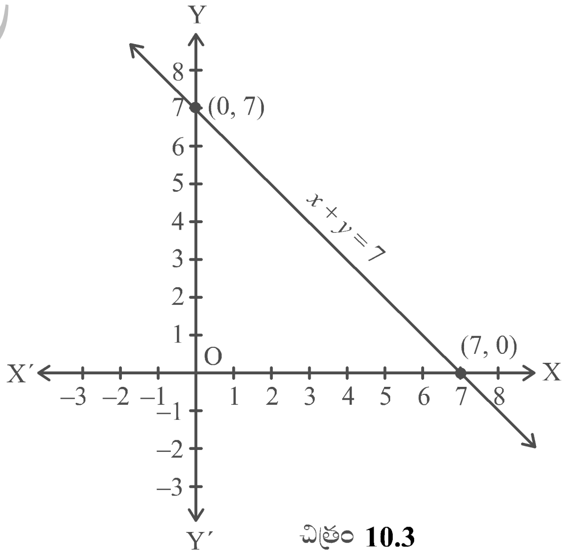
గమనిక : డిగ్రీ ఒకటి గల బహుపది సమీకరణం $ax + by + c = 0$ ని సరళ సమీకరణం అనటానికి కారణం, దాని యొక్క రేఖాచిత్రం సరళ రేఖ కావడమే.

ఉదాహరణ 5 : (1, 2) అను బిందువు కలిగిన సరళ రేఖ సమీకరణమును కనుగొనండి. అటువంటి సమీకరణాలు ఎన్ని ఉన్నాయి?

సాధన : ఇక్కడ మనకు కావలసిన సరళ సమీకరణం యొక్క సమాధానం (1, 2). కాబట్టి నీకు (1, 2) బిందువు గుండా పోయే సరళ రేఖ కావాలి. అటువంటి సరళ సమీకరణానికి ఒక ఉదాహరణ $x + y = 3$. మరికొన్ని ఉదాహరణలు $y - x = 1$, $y = 2x$. ఎందుకంటే ఇవి కూడా (1, 2) బిందువు నిరూపకాలతో తృప్తి చెందుతాయి. నిజానికి (1, 2) బిందువు నిరూపకాలు తృప్తి పరచే సరళ సమీకరణాలు అనంతం ఉన్నాయి. దీనిని చిత్ర రూపంలో చూడగలవా?

ఉదాహరణ 6 : $x + y = 7$ సమీకరణం యొక్క రేఖాపటం గీయండి.

సాధన : రేఖాచిత్రం గీయాలంటే మనకు కనీసం సమీకరణం యొక్క రెండు సమాధానాలు కావాలి $x = 0$, $y = 7$ మరియు $x = 7$, $y = 0$ లు ఇచ్చిన సమీకరణానికి రెండు సమాధానాలను పరీక్షించవచ్చు. కాబట్టి రేఖాచిత్రం గీయటానికి మీరు క్రింది పట్టికను ఉపయోగించవచ్చు.



చిత్రం **10.3**

పట్టిక 2

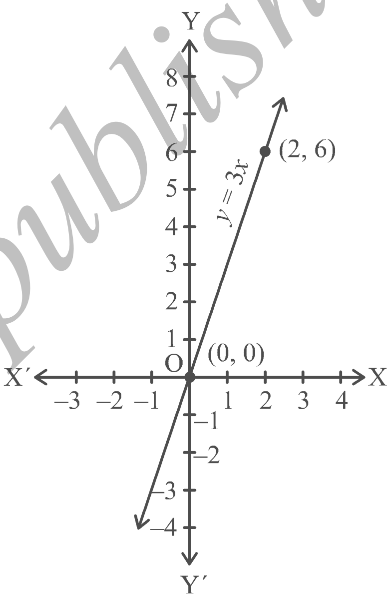
x	0	7
y	7	0

పట్టిక 2 నుండి బిందువులను గ్రాఫుకాగితం మీద గుర్తించి, వాటిని సరళరేఖతో కలిపి రేఖాచిత్రం గీయండి. (చిత్రం 10.3 చూడండి).

ఉదాహరణ 7 : ఒక వస్తువు మీద ఉపయోగించిన బలం ఆ వస్తువులో ఏర్పడిన త్వరణానికి అనులోమాను పాతంలో ఉంటుందని మీకు తెలుసు. ఈ సందర్భానికి తగ్గ సమీకరణం రాసి, దానిని సూచించు రేఖాచిత్రం గీయండి.

సాధన : ఇక్కడ ఉన్న చలరాశులు బలం మరియు త్వరణం. ఉపయోగించిన బలం y ప్రమాణాలు, ఏర్పడిన త్వరణం x ప్రమాణాలు అనుకుందాం. నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం నుండి దీనిని $y = kx$, k స్థిరాంకం గా చూపవచ్చు. (విజ్ఞానం లో k అనేది వస్తువు ద్రవ్యరాశి అని మీకు తెలుసు).

ఇపుడు మనకి k విలువ ఎంతో తెలియదు కాబట్టి $y = kx$ యొక్క ఖచ్చితమైన రేఖా చిత్రమును గీయలేము kకి ఒక విలువ ఇస్తే, మనము రేఖాచిత్రం గీయవచ్చు. $k = 3$ అనుకుందాం $y = 3x$ ని సూచించు రేఖాచిత్రం గీద్దాము. దానికోసం రెండు సమాధానాలు కనుగొందాం. అవి (0, 0) మరియు (2, 6) అనుకోండి. (చిత్రం 10.4 చూడండి).



చిత్రం **10.4**

రేఖాచిత్రం నుండి ఉపయోగించిన బలం 3 ప్రమాణాలు అయితే ఏర్పడిన త్వరణం 1 ప్రమాణం అని తెలుస్తుంది. అంతేకాక (0, 0) బిందువు రేఖాచిత్రం మీద ఉంది. అంటే ఉపయోగించిన బలం '0' ప్రమాణాలు అయితే, ఏర్పడిన త్వరణం '0' ప్రమాణాలు అవుతుంది.

గమనిక : $y = kx$ రూపంలో ఉన్న సమీకరణం రేఖాచిత్రం ఎల్లప్పుడూ మూలబిందువు గుండా పోవు సరళరేఖ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 8 : చిత్రం 10.5లో ఇవ్వబడిన ప్రతిరేఖా చిత్రానికి, క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రత్యామ్నాయాలలో సరియైన సమీకరణాన్ని ఎన్నుకోండి.

(a) చిత్రం 10. 5 (i) కి.

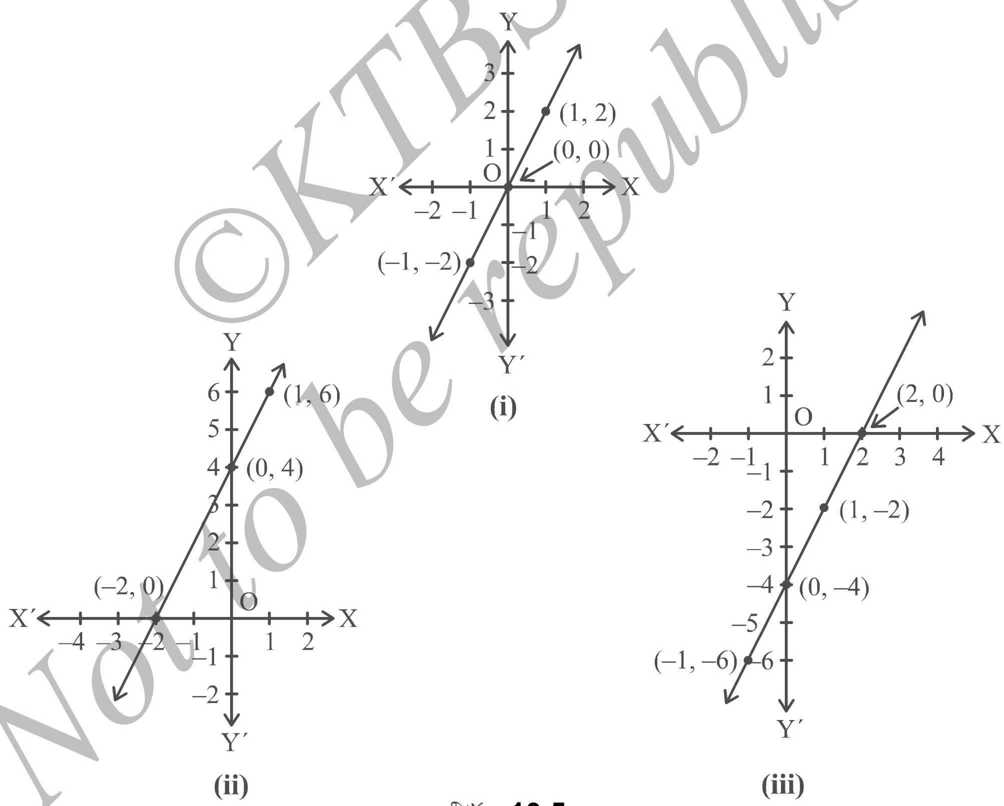
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) చిత్రం 10. 5 (ii) కి,

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

(c) చిత్రం 10. 5 (iii) కి

(i) $x + y - 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$



చిత్రం **10.5**

సాధన : (a) చిత్ర 10. 5 (i) లో సరళరేఖ మీద బిందువులు (–1, –2), (0, 0), (1, 2). పరిశీలన ద్వారా ఈ గ్రాఫుకి చెందిన సమీకరణం $y = 2x$ అవుతుంది. ప్రతి సందర్భంలోను y – నిరూపకం, x – నిరూపకానికి రెట్టింపు ఉందని నీవు గమనించ గలవు.

(b) చిత్రం 10.5 (ii) లో సరళరేఖ మీది బిందువులు (–2, 0), (0, 4), (1, 6). ఈ బిందువుల నిరూపకాలు $y = 2x + 4$ సమీకరణాన్ని తృప్తి పరుస్తాయని మీకు తెలుసు. కాబట్టి చిత్రం 10.5 (ii) లోని రేఖాచిత్రానికి చెందిన సమీకరణం $y = 2x + 4$ అవుతుంది.

(c) చిత్రం 10.5 (iii) లో సరళరేఖ మీది బిందువులు (–1, –6), (0, –4), (1, –2), (2, 0). పరిశీలన ద్వారా ఈ రేఖాచిత్రానికి చెందిన సమీకరణం $y = 2x – 4$ అవుతుంది.

అభ్యాసం 10. 3

1. క్రింద ఇవ్వబడిన రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలలో ప్రతి దానికి రేఖాచిత్రం గీయండి.

   (i) $x + y = 4$ (ii) $x – y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

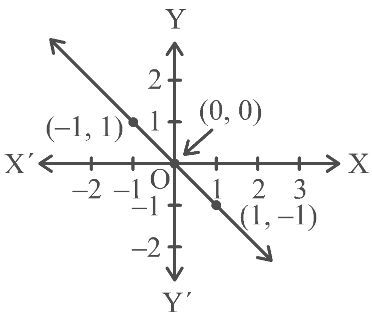
2 (2, 14) బిందువు గుండాపోవు రెండు సరళరేఖలకు సమీకరణాలు రాయండి అటువంటి సరళరేఖలు ఎన్ని ఉంటాయి? ఎందుకు?

3. (3, 4) బిందువు $3y = ax + 7$ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం మీద ఉంటే a విలువ కనుగొనండి.

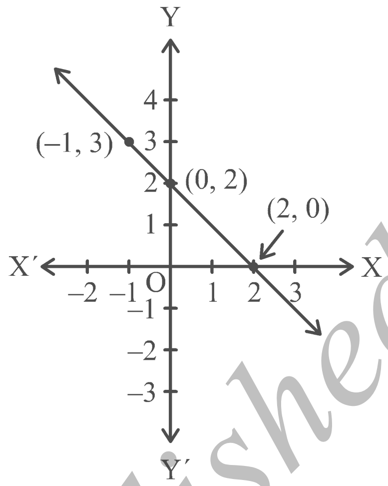
4. ఒక నగరంలో ట్యాక్సీ ఖర్చు క్రింది విధంగా ఉంటుంది : మొదటి కిలోమీటరుకి ఖర్చు ₹ 8 మరియు తర్వాత ప్రతి కిలోమీటరు దూరానికి ₹ 5. ఉంటుంది. ప్రయాణం చేసిన మొత్తం దూరం x కి.మీ మరియు మొత్తం ఖర్చు ₹ y అనుకొని, ఈ సమాచారానికి తగు సరళ సమీకరణం రాసి, దాని రేఖా చిత్రం గీయండి.

5. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రత్యామ్నాయాలలో, చిత్రం 10.6 మరియు చిత్రం 10.7 ల లోని రేఖాచిత్రాలను సూచించు సరళ సమీకరణాలను ఎన్నుకొని రాయండి.

చిత్రం 10.6 కి	**చిత్రం 10.7 కి**
(i) $y = x$	(i) $y = x + 2$
(ii) $x + y = 0$	(ii) $y = x – 2$
(iii) $y = 2x$	(iii) $y = – x + 2$
(iv) $2 + 3y = 7x$	(iv) $x + 2y = 6$



చిత్రం **10.6**



చిత్రం **10.7**

6. ఒక స్థిరమైన బలం ఒక వస్తువు మీద పని చేసినపుడు జరిగినపని ఆ వస్తువు ప్రయాణించిన దూరానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటే, దానిని రెండు చలరాశులు గల సమీకరణ రూపంలో చూపి, ఆ స్థిర బలమును 5 ప్రమాణాలుగా తీసుకొని, సమీకరణానికి రేఖా చిత్రం గీయండి. దాని నుండి, వస్తువు ప్రయాణించిన దూరం

   (i) 2 ప్రమాణాలు (ii) 0 ప్రమాణాలు అయిన జరిగిన పనిని తెల్పండి.

7. భూకంప బాధితులకు సహాయం చేయటానికి ప్రధాన మంత్రి సహాయనిధికి, ఒక పాఠశాలలోని IX వ తరగతి విద్యార్థినులైన యామిని మరియు ఫాతిమా ఇద్దరూ కలిసి ₹100 చందా ఇచ్చారు. ఈ సమాచారమును తృప్తిపరచే ఒక సరళ సమీకరణం రాయండి. (వారి చందాలను ₹x మరియు ₹y గా తీసుకోవచ్చు). దానియొక్క రేఖాచిత్రం గీయండి.

8. అమెరికా మరియు కెనడా వంటి దేశాలలో ఉష్ణోగ్రతను ఫారెన్‌హీట్‌లో కొలుస్తారు. భారతదేశం వంటి దేశాలలో సెల్సియస్‌లో కొలుస్తారు. ఫారెన్‌హీట్‌ను సెల్సియస్‌కి మార్చే సరళ సమీకరణం క్రింద ఇవ్వబడినది.

   $$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

   (i) సెల్సియస్‌ని x – అక్షం మీద, ఫారెన్‌హీట్ ని y — అక్షం మీద తీసుకొని పైన ఇవ్వబడిన సరళ సమీకరణానికి రేఖాచిత్రం గీయండి.

   (ii) 30°C ఉష్ణోగ్రత ఉంటే, ఫారెన్‌హీట్‌లో ఎంత ఉష్ణోగ్రత ఉంటుంది?

(iii) 95°F ఉష్ణోగ్రత ఉంటే సెల్సియస్‌లో ఎంత ఉష్ణోగ్రత ఉంటుంది?

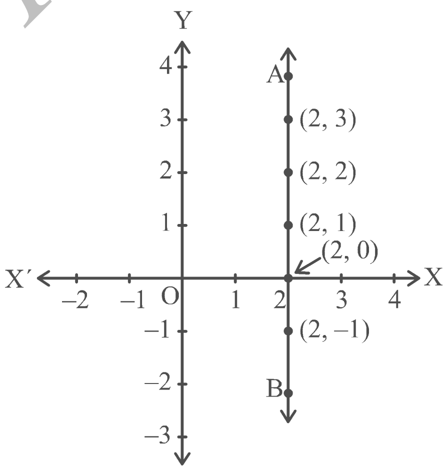
(iv) ఉష్ణోగ్రత 0°C అయితే, ఉష్ణోగ్రత ఫారెన్‌హీట్‌లో ఎంత ఉంటుంది? ఉష్ణోగ్రత 0°F అయితే అది సెల్సియస్‌లో ఎంత ఉంటుంది?

(v) ఫారెన్‌హీట్ మరియు సెల్సియస్ రెండిటిలో సమాన సంఖ్యను కలిగిన ఉష్ణోగ్రత ఉందా? ఉంటే దానిని కనుగొనండి.

10.5 x – అక్షం మరియు y – అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళ రేఖల సమీకరణాలు

కార్టీషియన్ సమతలంలో ఉన్న ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలను ఏ విధంగా రాయాలో మీరు నేర్చుకొన్నారు. (2, 0), (– 3, 0), (4, 0) మరియు n ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు $(n, 0)$ వంటి బిందువులు కార్టీషియన్ తలంలో ఎక్కడ ఉంటాయో మీకు తెలుసా? అన్నీ అన్ని x – అక్షం మీద ఉంటాయి. ఎందుకో తెలుసా? ఎందుకంటే x – అక్షం మీద ప్రతి బిందువు యొక్క y – నిరూపకం '0' అవుతుంది. నిజానికి x – అక్షం మీద ప్రతి బిందువు $(x, 0)$ రూపంలో ఉంటుంది. ఇపుడు నీవు x – అక్షానికి సమీకరణమును ఊహించగలవా? x – అక్షానికి సమీకరణం $y = 0$. $y = 0$ ని $0.x + 1.y = 0$ గా చూపవచ్చునని గమనించండి. ఇదే విధంగా y – అక్షానికి సమీకరణం $x = 0$ అవుతుందని పరిశీలించండి.

ఇపుడు, $x - 2 = 0$ సమీకరణమును తీసుకోండి. దీనిని ఒక చలరాశి x మాత్రమే గల సమీకరణంగా తీసుకుంటే, అపుడు దానికి సంఖ్యారేఖ మీద బిందువైన $x = 2$ ఒకే ఒక సమాధానం అవుతుంది. ఏది ఏమైనా దానిని రెండు చలరాశులు గల సమీకరణంగా తీసుకుంటే, దానిని $x + 0.y - 2 = 0$ గా చూపవచ్చు. దీనికి అనంతమైన సమాధానాలు ఉన్నాయి. నిజానికి అవి అన్నీ r ఏదైనా వాస్తవసంఖ్య అయినపుడు $(2, r)$ రూపం లో ఉంటాయి. అంతేకాని $(2, r)$ రూపంలో ఉన్న ప్రతి బిందువు ఈ సమీకరణానికి సమాధానమవుతుందని గమనించండి. రెండు చలరాశులు గల సమీకరణంగా $x - 2 = 0$ ని చిత్రం 10.8 లో AB సరళ రేఖగా సూచించవచ్చు.



చిత్రం **10.8**

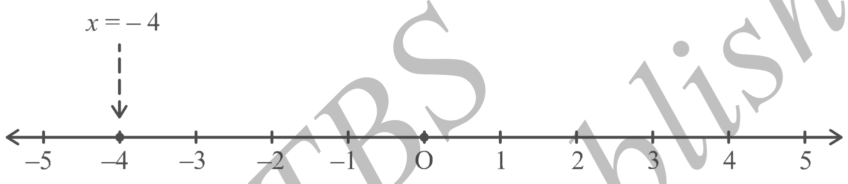
ఉదాహరణ 9 : $2x + 1 = x - 3$ సమీకరణమును సాధించి సమాధానము (ల)ను (i) సంఖ్యారేఖ మీద (ii) కార్టీషియన్ తలం మీద గుర్తించండి.

సాధన : $2x + 1 = x - 3$ సాధించగా

$$2x - x = -3 - 1$$

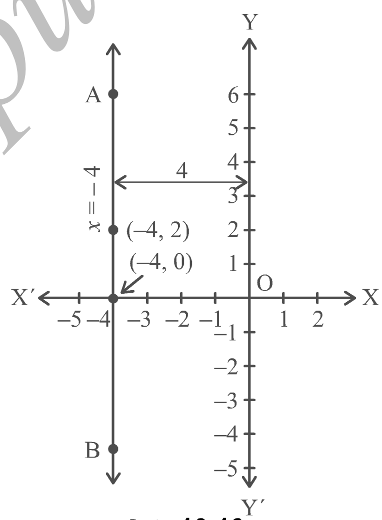
ie $\quad x = -4$

(i) చిత్రం 10.9 లో సంఖ్యారేఖ మీద సమాధానం సూచించబడినది. ఇక్కడ $x = -4$ అనేది ఒక చలరాశి గల సమీకరణంగా తీసుకొనబడినది.



చిత్రం **10.9**

(ii) $x = -4$ ని $x + 0.\,y = -4$ గా కూడా రాయవచ్చునని మనకు తెలుసు. ఇది x మరియు y చలరాశులలో సమీకరణం దీనిని ఒక సరళ రేఖతో సూచించవచ్చు. ఇపుడు $0.\,y$ విలువ 0 కాబట్టి y అన్ని విలువలకు అవకాశముంది. ఏది ఏమైనా $x = -4$ సమీకరణమును x తృప్తిపరచాలి. కాబట్టి ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క రెండు సమాధానాలు $x = -4, y = 0$ మరియు $x = -4, y = 2$ అవుతాయి. AB రేఖా చిత్రం y అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంది మరియు దానికి ఎడమవైపు 4 ప్రమాణాల దూరంలో ఉంది. (చిత్రం 10.10 చూడండి)



చిత్రం **10.10**

ఇదేవిధంగా $y = 3$ లేక $0\,.\,x + 1.\,y = 3$ రకం సమీకరణాలకు సంబంధించి x – అక్షానికి సమాంతరంగా ఒక సరళ రేఖను పొందవచ్చు.

అభ్యాసం 10.4

1. $y = 3$ ని

   (i) ఒక చలరాశి

   (ii) రెండు చలరాశులు గల సమీకరణాలుగా తీసుకొని జ్యామితీయంగా గుర్తించండి.

2. $2x + 9 = 0$ ని

   (i) ఒక చలరాశి

   (ii) రెండు చలరాశులు గల సమీకరణాలుగా తీసుకొని జ్యామితీయంగా గుర్తించండి.

10.6 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు.

1. a, b మరియు c లు వాస్తవ సంఖ్యలయి ఉండి, a మరియు b రెండు కూడా సున్న కానప్పుడు, $ax + by + c = 0$ రూపంలో ఉండే సమీకరణమును రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం అంటారు.
2. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణానికి అనంతమైన సమాధానాలు ఉంటాయి.
3. రెండు చలరాశులు గల ప్రతి సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖా చిత్రం ఒక సరళ రేఖ అవుతుంది.
4. y – అక్షానికి సమీకరణం $x = 0$ మరియు x – అక్షానికి సమీకరణం $y = 0$.
5. $x = a$ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం y – అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళ రేఖ అవుతుంది.
6. $y = a$ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం x – అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళ రేఖ అవుతుంది.
7. $y = mx$ రూపంలో ఉండే సమీకరణం, ఆది బిందువు గుండా పోవు సరళ రేఖను సూచిస్తుంది.
8. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం మీద ప్రతి బిందువు, ఆ సరళ సమీకరణానికి సమాధానం అవుతుంది. అంతేకాక సరళ సమీకరణం యొక్క ప్రతి సమాధానము, ఆ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం మీద బిందువు అవుతుంది.

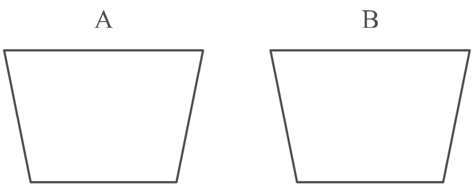
అధ్యాయం – 11

సమాంతర చతుర్భుజాలు మరియు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు

11.1 పరిచయం :

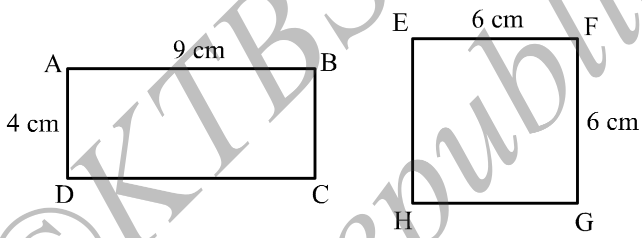
పొలాల పరిమితులను విభజించి పంచుకోవాలంటే కొలవడానికి రేఖాగణిత అధ్యయనం ప్రారంభమైనదని 5వ అధ్యాయంలో నేర్చుకున్నారు. **ఉదా :** బుధియా అనేరైతు ఒక మహిళ వద్దవున్న త్రిభుజాకార పొలమును తన ఇద్దరు ఆడపిల్లలకు మరియు ఒక మగపిల్లవాడికి సమానంగా పంచడానికి నిర్ణయించుకున్నారు. దాని ఖచ్చితమైన వైశాల్యం లెక్కించకుండా ఆమె ఆ త్రిభుజాకార పొలాన్ని ఒకవైపు మూడుసమభాగాలుగా చేసినప్పుడు వచ్చే రెండు బిందువులను దాని ఎదుటి శీర్షానికి కలిపినది. ఈ విధంగా ఆమె పొలాన్ని మూడుభాగాలుగా విభజించిన ఒక్కో భాగాన్ని తన పిల్లలకు ఇచ్చిన మూడుభాగాలు నిజానికి సమానవైశాల్యాన్ని కలిగివున్నాయని మీరు భావిస్తున్నారా? ఈ విధమైన ప్రశ్నలు మరియు దీనికి సంబంధించిన ఇతర సమస్యలను సాధించడం మీరు కింది తరగతులలో నేర్చుకున్నారు. సమతలాకృతుల వైశాల్యాల గురించి గుర్తు తెచ్చుకోవాల్సివుంటుంది.

ఒక సరళ సంవృత పటంలో ఆక్రమించబడిన భాగాన్ని దాని సమతల ప్రదేశం అంటారని జ్ఞప్తికితెచ్చుకోండి. దీని కొలత లేదా పరిమాణాన్ని ఆ సమతల ప్రదేశము యొక్క వైశాల్యం అంటాం. ఈ పరిమాణం లేదా కొలతలను మనం సంఖ్యారూపంలో సూచిస్తాం (కొన్ని మూల ప్రమాణాలతో) **ఉదా :** $5cm^2$, $8m^2$, 3 ఎకరాలు మొదలైనవి. అందుచేత ఒక పటము యొక్క వైశాల్యము (ఏదో ఒక వైశాల్యప్రమాణం) అనేది ఒక సమతల సంవృత భాగంతో ముడిపడివుంటుంది.



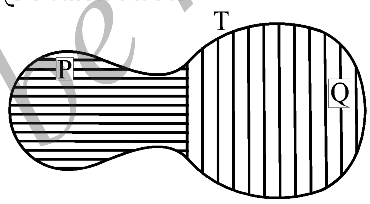
చిత్రం 11.1

అధ్యాయం 5 మరియు కింది తరగతులలో సర్వసమాన ఆకృతుల పరికల్పనలతో పరిచయం వుంది రెండు చిత్రాలు **ఒకే ఆకారం మరియు పరిమాణము వుంటే వాటిని సర్వసమాన పటాలు అంటాము.** (చిత్రం 11.1) మరొక రకంగా చెప్పాలంటే చిత్రం 11.1లో చూసిన ఆకృతి A మరియు B లు సర్వసమానమైతే ఒక ఉల్లి పొరకాగితం (ట్రేసింగ్ పేపరు) (tracing paper) సహాయంతో ఒక ఆకారం మరొక ఆకారంపై ఏకీభవించేటట్లు చిత్రీకరించవచ్చు అందువల్ల **A మరియు B ఆకృతులు సర్వసమానము. వాటి వైశాల్యం సమానమై తీరాలి. ఈ సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయం సరైనదికాదు. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే సమాన వైశాల్యంగలిగిన రెండు ఆకృతులు సర్వసమానం కానవసరం లేదు.** ఉదా : చిత్రం 11.2లో దీర్ఘ చతురస్రం ABCD మరియు చతురస్రం EFGH ఒకే వైశాల్యం ($9 \times 4 cm^2$ మరియు $6 \times 6 cm^2$) అయిననూ అవి రెండూ సర్వసమానం కాదు.



చిత్రం 11.2

ఇప్పుడు ఇచ్చిన 11.3 చిత్రం గమనించండి



చిత్రం 11.3

T ఆకృతి ఆక్రమించిన సమతలాకృతి భాగము ఆకృతి P మరియు Qలతో కూడుకొనివున్న సమతలాకృతులతో ఏర్పడినదని మీరు గమనించవచ్చు.

చిత్రం T వైశాల్యం = P చిత్రం వైశాల్యం + Q చిత్రం వైశాల్యం అని పై చిత్రం ద్వారాసులభంగా గమనించవచ్చు.

ఆకృతి A వైశాల్యంను పై (A) ఆకృతి B వైశాల్యం పై (B) అని ఆకృతి వైశాల్యంను పై (T) అని సూచించవచ్చు ఆకృతి వైశాల్యం. **ఒక సంఖ్య (ఏదైనా ప్రమాణాలు) ఇది ఆకృతిలో ప్రతిభాగానికి చెందుతుంది దీనినుండి కింది రెండుధర్మాలు చెప్పవచ్చు.**

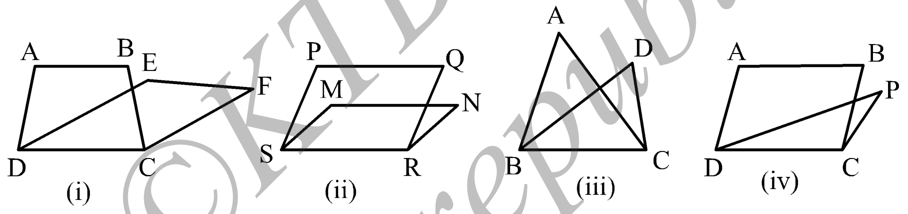
1. A మరియు B లు సర్వసమాన వైశాల్యాలైతే వై (A) = వై(B) మరియు

2. T ఆకృతిలో సమతలాకృతి ప్రదేశం ఒకదానిపై మరొకటి వుండకుండా వుండేటట్లు P ఆకృతి మరియు Q ఆకృతికి సమానాకృతి ప్రదేశంతో కూడివున్నది. వై(T) = వై (P) + వై (Q)

కింది తరగతులలో మీరు దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజం మొదలైన ఆకృతుల వైశాల్యాలను కనుగొను సూత్రాలగురించి తెలుసుకొన్నారు. ప్రస్తుతం ఈ అధ్యాయంలో ఒకే భూమి ఒకే జత సమాంతర రేఖల మధ్యవుండే రెండు జామితీయ ఆకారాల వైశాల్యాల మధ్య సంబంధాన్ని. నేర్చుకోనడంలో ఈ సూత్రాలు జ్ఞానాన్ని పెంచే ప్రయత్నం చేద్దాం. ఈ అధ్యాయం త్రిభుజాల సర్వసమానత్వపు కొన్ని లక్షణాలను అర్థం చేసుకోవడానికి సహకరిస్తుంది.

11.2 : ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల ఆకృతులు

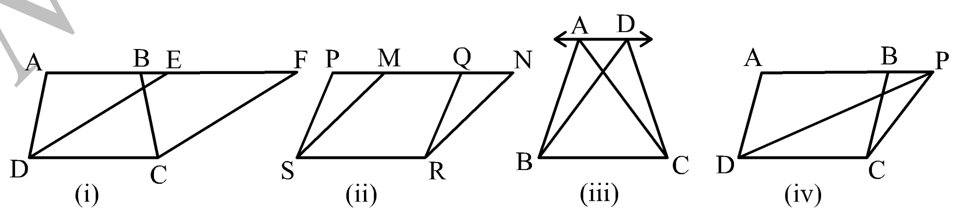
ఈ చిత్రాలను గమనించండి



చిత్రం 11.4

చిత్రం 11.4(i) లో ట్రెపీజియం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజం EFCD రెండింటికి ఉమ్మడి భుజం DC అందుచేత ట్రెపీజియం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజం EFCD అనేవి ఒకే భూమి DC పైవున్నవి ఇదేవిధంగా చిత్రం 11.4(ii) లో సమాంత చతుర్భుజము PQRS మరియు MNRS సమాంతర చతుర్భుజాలలో ఒకేపాదం SR పైవుంది అలాగే 11.4(iii) లో త్రిభుజం ABC మరియు DBC త్రిభుజాలు ఒకే భూమి BC పైకలదు. చిత్రం 11.4(iv) లో ABCD సమాంతర చతుర్భుజం PDC త్రిభుజము ఒకే భూమి DC పై వున్నాయి.

ఈ కింది చిత్రాలను పరిశీలించండి.



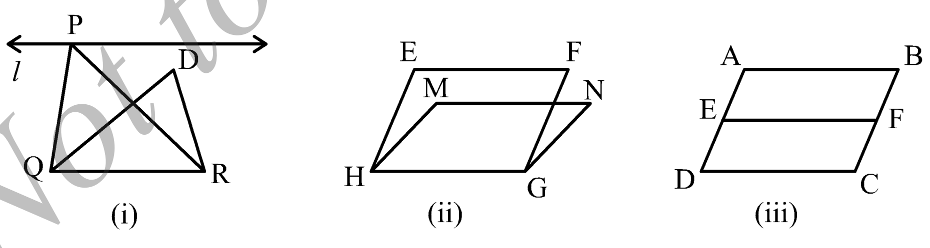
చిత్రం 11.5

చిత్రం 11.5(i) లో ట్రెపీజియం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజం EFCD లు ఒకే భూమి DC పైవు వుండటమే కాక A మరియు B శీర్షాలు (ABCD ట్రెపీజియం) E మరియు F శీర్షాలు (EFCD సమాంతర చతుర్భుజం) DC భూమికి ఎదురుగావుండి AF రేఖ పైవుండి DC భూమికి సమాంతరంగా వున్నాయి.

ట్రెపీజియం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజం EFCD లు ఒకే భూమి DC పై వుండి ఒకే సమాంతర రేఖ AF మరియు DC ల మధ్య వుందని తెలుసుకున్నాము. అదేవిధంగా సమాంతర చతుర్భుజం PQRS మరియు MNRS లు ఒకే భూమి SR పై వుంది ఒకే సమాంతర రేఖ పైన PN మరియు SR ల మధ్యవుంది. చిత్రం 11.5 (ii) PQRS యొక్క P మరియు Q శీర్షాలు MNRS యొక్క M మరియు N శీర్షాలు భూమి SR కి సమాంతరంగావున్న PN రేఖపై వున్నాయి. అదేవిధంగా త్రిభుజం ABC మరియు DBC లు ఒకే భూమి BC పైవున్నవి. ఒక జత సమాంతర రేఖలైన AD మరియు BC ల మధ్యవుంది (చిత్రం 11.5(iii)) మరియు సమాంతర చతుర్భుజం ABCD మరియు త్రిభుజం PCD లు ఒకే భూమి DC పైవున్నాయి. సమాంతర రేఖలు AP మరియు DC ల మధ్యవుంది (చిత్రం 11.5(iv)).

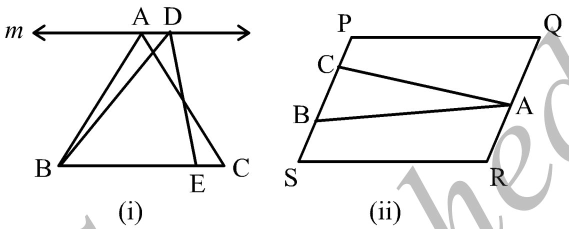
కావున రెండు చిత్రాలు ఒకే భూమి మరియు రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యవున్నాయి అని చెప్పాల్సి వస్తే, అవి ఒకే భూమి మీదవుండి, ఆ భూమికి ఎదురుంగావున్న శీర్షాలు భూమికి సమాంతరంగావున్న రేఖపైవుండాలి.

దీని ప్రకారం ΔPQR మరియు ΔDQR (చిత్రం 11.6(i)) లో ఒకే భూమి రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యవుంది అని చెప్పడం సాధ్యంకాదు.



చిత్రం **11.6**

అలాగే చిత్రం 11.6(ii) లో సమాంతర చతుర్భుజం EFGH మరియు MNGH లో EF||GH రేఖల మధ్యవుందని తీసుకుంటే, చిత్రం 11.6(iii) లో సమాంతర చతుర్భుజం ABCD మరియు EFCD లు AB మరియు DC సమాంతర రేఖల మధ్యవుందని చెప్పడం సరికాదు. అవి ఒకే భూమి DC పైవుండి AD||BC రేఖల మధ్య వున్నాకూడా రెండు సమాంతర రేఖలలో ఒకటి ఉమ్మడి భూమిని కలిగివుండాలి. అనేదాన్ని స్పష్టంగా గమనించాలి. చిత్రం 11.7(i)లో త్రిభుజం ABC మరియు త్రిభుజం DBE లు ఒకే పాదంపై లేవు అని గమనించండి.

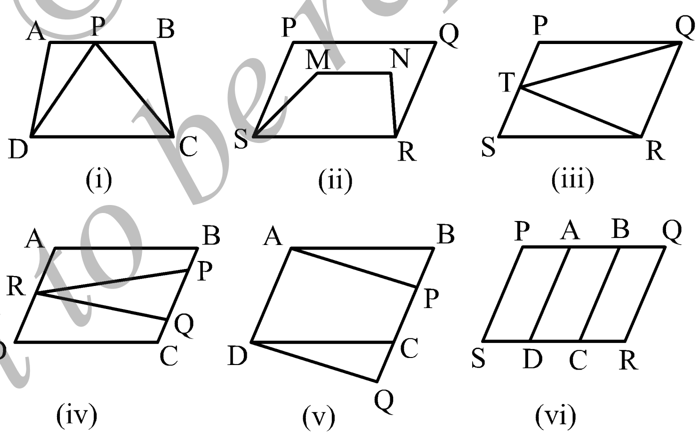


చిత్రం **11.7**

అలాగే చిత్రం 11.7 (ii)లో ABC మరియు సమాంతర చతుర్భుజం PQRS లు ఒకే భూమిపైలేవు.

అభ్యాసం 11.1

1. కింది చిత్రాలు ఏవి ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉన్నాయి. అటువంటి సందర్భం లో భూమి (ఉమ్మడిభుజం)ని, రెండు సమాంతర సరళ రేఖలను పర్కొనండి.

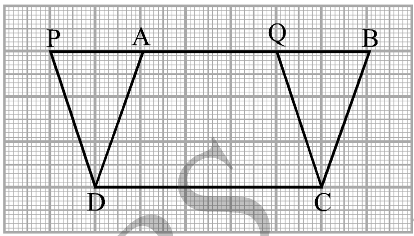


చిత్రం **11.8**

11.3 ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల సమాంతర చతుర్భుజాలు

ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల మధ్యసంబంధం ఉందా? వుంటే దానిని తెలుసుకోవడానికి ముందుగా ఒక కృత్యంచేసి చూద్దాం?

కృత్యం 1 : ఒక గ్రాఫ్ కాగితంపై రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ABCD మరియు PQCD (చిత్రం లో 11.9)లో చూపినట్లు గీయాలి.



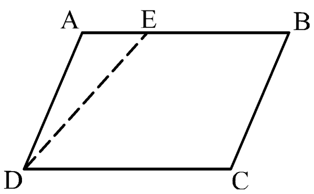
చిత్రం 11.9

ఈ రెండు చతుర్భుజాలు ఒకే భూమి DC పై మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు PB మరియు DC ల మధ్యవున్నాయి. ఏకమాన వైశాల్యంగల చదరాల సంఖ్యను లెక్కించి, సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాన్ని కనుగొను విధానం గుర్తు చేసుకోండి.

ఈ పద్ధతిలో ఏకమాన వైశాల్యంగల పూర్తిచదరాలను లెక్కించేటప్పుడు సగం కన్నా ఎక్కువ వున్న చదరాలను పూర్తిచదరంగా తీసుకొని లెక్కించాలి. అయితే సగంకన్నా తక్కువ భాగంవుండే చదరాలను వదిలివేయాలి. రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు $15cm^2$ (సుమారు) అని మనకు తెలుస్తుంది. ఇంకా కొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలను గ్రాఫ్కాగితంపైగీసి ఈ కృత్యాన్ని చేయవచ్చు.[1]

మీరు ఏమిగమనిస్తారు? రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు పరస్పరం సమానమా? లేదా వేరువేరా? అవి ఖచ్చితంగా సమానము. కావున ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవున్న రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానం అని నిర్ణయించగలరు. అయితే ఇది సరిచూసే విధానం అని గుర్తుంచుకోండి.

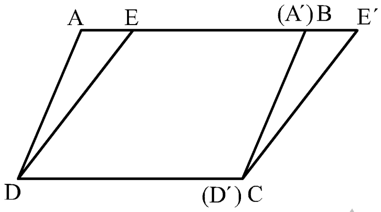
కృత్యం 2 : ఒక అట్ట లేదా మందంగా వున్న పేపరుపై ABCD సమాంతర చతుర్భుజం గీయండి. (చిత్రం 11.10) చిత్రంలో చూపినట్లు DE అనే రేఖా ఖండాన్ని గీయండి.



చిత్రం 11.10

1. ఈ కృత్యాన్ని జియోబోర్డు ఉపయోగించకుండా చేయవచ్చు

ΔADEకిసర్వసమానంగా$\Delta A'D'E'$నుట్రేసింగ్ పేపరు సహాయంతో ప్రత్యేకమైన పేపరుపై కత్తిరించండి మరియు $A'D'$ BC పై ఏకీభవించేటట్లు చిత్రం 11.11 లో చూపినట్లు అమర్చండి ABCD మరియు $EE'CD$ సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే భూమి CD మరియు AE' మరియు DC సమాంతర రేఖలు మధ్య ఉన్నాయిని గమనించండి వీటివైశాల్యాల గురించి ఏమి చెప్పగలరు?



చిత్రం 11.11

$\Delta ADE \cong \Delta A'D'E'$

కావున వై (ADE) = వై $(A'D'E')$ (వై = వైశాల్యాలు)

మరియు వై (ABCD) = వై (ADE) + వై (EBCD)

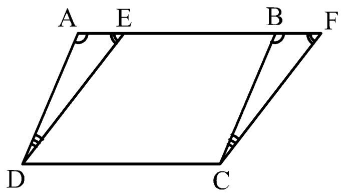
= వై $(A'D'E')$ + వై (EBCD)

= వై $(EE'CD)$.

కావున రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు పరస్పరం సమానం.

ఇలాంటి రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల మధ్య సంబంధాన్ని సాధించడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

సిద్ధాంతము 11.1: ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గల రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానం



చిత్రం 11.12

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజం EFCD లు ఒకే భూమి DC పై ఒకే సమాంతర రేఖలు AF మరియు DC ల మధ్యవున్నాయి. (చిత్రం 11.12) ఇప్పుడు మనం వై (ABCD) = వై (EFCD) అని నిరూపించాలి

Δ ADE మరియు Δ BCF లలో

$\angle DAE = \angle CBF$ (సదృశకోణాలు AD $\|$ BC మరియు AF తిర్యగ్ రేఖ) .... (1)

$\angle AED = \angle BFC$ (సదృశకోణాలు ED $\|$ FC మరియు AF తిర్యగ్ రేఖ) .... (2)

కావున, $\angle ADE = \angle BCF$ (త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం) .... (3)

AD = BC. (ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదుటిభుజాలు) .... (4)

$\therefore$ $\Delta ADE \cong \Delta BCF$(ASA సిద్ధాంతం ప్రకారం (1), (3), మరియు (4))

వై (ADE) = వై (BCF) (సర్వ సమాన ఆకృతుల వైశాల్యం సమానం) .... (5)

వై (ABCD)= వై (ADE) + వై (EDCB)

= వై (BCF) + వై (EDCB)

= వై (EFCD)

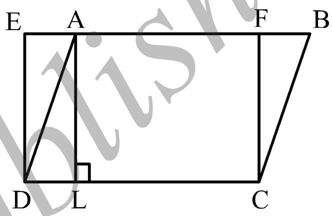
$\therefore$ ABCD మరియు EFCD సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానం

పై సిద్ధాంతం ఆధారంగా నిరూపించే కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : చిత్రం 11.13 లో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం EFCD ఒక దీర్ఘ చతురస్రం $AL \perp DC$

(i) వై (ABCD) = వై (EFCD)

(ii) వై (ABCD) = DC $\times$ AL అని చూపండి.



చిత్రం 11.13

సాధన : (i) దీర్ఘ చతురస్రం కూడా ఒక సమాంతర చతుర్భుజమే

కావున వై (ABCD) = వై (EFCD) (సిద్ధాంతం 11.1)

(ii) పై ఫలితంలో, వై (ABCD) = DC $\times$ FC (దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం = పొడవు $\times$ వెడల్పు) .... (1)

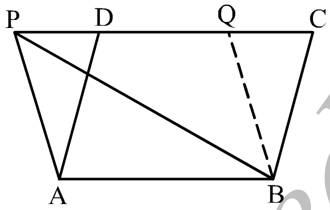
$AL \perp DC$ కావున AFCL కూడా దీర్ఘ చతురస్రమే AL = FC .... (2)

కావున, వై (ABCD) = DC $\times$ AL (1 మరియు 2 ల నుండి)

పై (ii) ఫలితం **సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం దాని భూమి మరియు దాని పైకి గీయబడి లంబాల పొడవుల లబ్దానికి సమానము అని గమనించారా?** సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంకనుగొనే ఈ సూత్రం 7 వ తరగతిలో నేర్చుకున్నారని గుర్తుందా? ఈ సూత్రం ఆధారంగా సిద్ధాంతం 11.1ని ఎలా రాయగలరు. ఒకే భూమి లేదా సమాన భూములుకలిగిన మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవున్న సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యం పరస్పరం సమానం.

ఈ సిద్ధాంత విలోమము మీరు రాయగలరా? అది 'సమాన వైశాల్యాలు కలిగిన మరియు ఒకే భూమి లేదా సమాన భూమిగల రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవుంటాయి అనేది సరియైనదా? సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం సూత్రానికి విలోమాన్ని సాదిద్దాం.

ఉదాహరణ 2: ఒక త్రిభుజము మరియు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే భూమి పై మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవున్నచో త్రిభుజ వైశాల్యం సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంలో సగంవుంటుం దని సాధించండి.



చిత్రం 11.14

సాధన : Δ ABP ఒక త్రిభుజం మరియు ABCD ఒకే భూమి AB పై AB మరియు PC సమాంతర రేఖల మధ్య ఉన్నదనుకుందాం

వై (PAB) = $\frac{1}{2}$ వై (ABCD) అని నిరూపించాలి.

ABQP అనే సమాంతర చతుర్భుజాన్ని తీసుకోవడానికి BQ || AP అనిగీయాలి.

ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజం ABQP మరియు ABCD ఒకే భూమి AB పై వుండి AB మరియు PC సమాంతర రేఖల మధ్యవున్నాయి.

వై (ABQP) = వై (ABCD) (సిద్ధాంతం 11.1 ప్రకారం) .... (1)

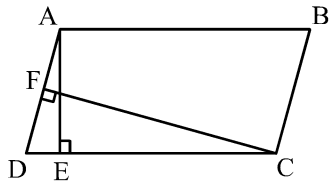
అయితే ΔPAB ≅ Δ BQP (PB కర్ణము ABQP సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది)

వై (PAB) = వై (BQP) .... (2)

కావున వై (PAB) = $\frac{1}{2}$ వై (ABQP) (2)నుండి .... (3)

వై (PAB) = $\frac{1}{2}$ (ABCD) (1 మరియు 3 నుండి)

అభ్యాసం 11.2

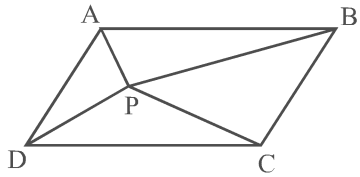


చిత్రం 11.15

1. చిత్రం 11.15లో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం AE ⊥ DC మరియు భుజము పైకి CF ⊥ AD గీయబడిన. AB = 16cmAE = 8cm, CF = 10cm అయిన AD కొలతను కనుగొనండి.

2. E,F,G మరియు H లు వరుసగా ABCD సమాంతర చతుర్భుజ భుజాల మధ్యబిందువులైన వై (EFGH) = $\frac{1}{2}$ వై (ABCD) అని చూపండి.

3. P మరియు Q లు వరుసగా ABCD సమాంతర చతుర్భుజపు DC మరియు AD భుజాలపై ఏవైనా రెండు బిందువులు. వై (APB) = వై (BQC) అని చూపండి.



చిత్రం 11.16

4. చిత్రం 11.16 లో ABCD సమాంతర చతుర్భుజం లోపల P అనేది ఒక బిందువు అయిన కిందివాటిని నిరూపించండి.

   (i) వై (ABP) + వై (PCD) = $\frac{1}{2}$ వై (ABCD)

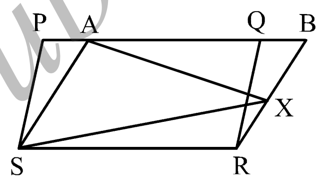
   (ii) వై (APD) + వై (PBC) = వై (APB) + వై (PCD) అని సాధించండి.

   (**సూచన :** AB కి సమాంతరంగా P నుండి ఒక కిరణాన్ని గీయండి.)

5. PQRS మరియు ABRS అనేవి రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు BR భుజముపై × అనేది ఒక బిందువు అయిన (చిత్రం 11.17).

   (i) వై (PQRS) = వై (ABRS)

   (ii) వై (AXS) = $\frac{1}{2}$ వై (PQRS).

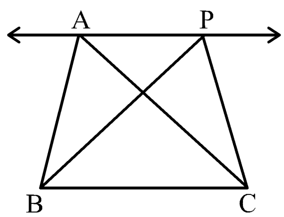


చిత్రం 11.17

6. ఒకరైతు మహిళ చిత్రం 11.18లో చూపిన సమాంతర చతుర్భుజం PQRS ఆకారంలో వుంది. RS భుజం పై మధ్య బిందువునుండి P మరియు Q బిందువులకు కలిపారు. పొలము ఎన్నిభాగాలుగా విభజించబడినది? ఏ ఏ భాగాలు ఏ ఆకారంలో ఉన్నాయి? ఆమె పొలంలో గోధుములు మరియు పప్పులు ప్రత్యేకంగా వేయాలంటే ఏ విధంగా వేయాలి కారణాలు ఇవ్వండి.

11.4 ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల త్రిభుజాలు

చిత్రం 11.18 గమనించిన త్రిభుజాలు ABC మరియు PBC లు ఒకే భూమి BC పైవుండి BC మరియు AP లు సమాంతర రేఖల మధ్య ఉన్నాయి. ఈ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలను గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య అనేక జతల త్రిభుజాలు గీయవచ్చు. చిత్రంలో చూపినట్లు గ్రాఫ్ గీతంపై గీయండి. సమాంతర రేఖల

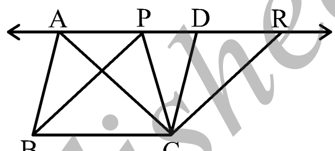


చిత్రం 11.18

మధ్యవుండేటట్లు ఒక గ్రాఫ్‌కాగితం కొన్ని త్రిభుజాలను గీసి, వాటితో వచ్చే చదరాలను లెక్కించి, వైశాల్యం కనుక్కోండి. కృత్యాన్ని చేయండి. ప్రతి ఒక్క సందర్భంలోను రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు పరస్పరం సమానం (సుమారు) అని మీరు గమనించండి. ఈ కృత్యాన్ని జియోబోర్డు ఉపయోగించి కూడా చేయవచ్చు. మళ్ళీ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు పరస్పరం సమానంగావుండే దానిని (సుమారు) మీరు గమనించవచ్చు.

పై ప్రశ్నకు తార్కికంగా జవాబు కావాలంటే, మీరు ఇలా ప్రయత్నించవచ్చు.

చిత్రం 11.18 లో D మరియు R లు AP రేఖ పైవుండేటట్లు CD || BA మరియు CR || BP గీయాలి. (చిత్రం. 11.19)



చిత్రం 11.19

దీనివల్ల వచ్చే సమాంతర చతుర్భుజాలైన PBCR మరియు ABCD లు ఒకే భూమి BC పైవుండే సమాంతర రేఖలైన BC మరియు AR ల మధ్య వుంది.

కావున : వై (ABCD) = వై (PBCR) (ఎలా?)

Δ ABC $\cong$ Δ CDA మరియు Δ PBC $\cong$ Δ CRP (ఎలా?)

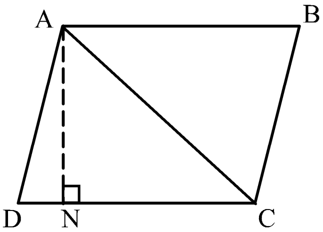
వై (ABC) = $\frac{1}{2}$ వై (ABCD) మరియు వై (PBC) = $\frac{1}{2}$ వై (PBCR) (ఎలా?)

కావున వై (ABC) = వై (PBC)

ఇప్పుడు కింది సిద్ధాంతాన్ని చూస్తారు.

సిద్ధాంతం 11.2 ఒక భూమి (సమాన భూమి)పైవున్న మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవుండే త్రిభుజాల వైశాల్యాలు పరస్పరం సమానం.

(చిత్రం 11.20) లో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అయితే AC దాని ఒక కర్ణం AN $\perp$ DC అయినది.



చిత్రం 11.20

Δ ADC $\cong$ Δ CBA (ఎందుకు?)

వై (ADC) = వై (CBA) (ఎలా?)

వై (ADC) = $\frac{1}{2}$ వై (ABCD)

= $\frac{1}{2}$ (DC $\times$ AN) (ఎలా?)

వై (ADC) = $\frac{1}{2}$ $\times$ భూమి DC $\times$ ఎత్తు AN.

లేదా త్రిభుజ వైశాల్యం దాని భూమి (ఏదైనా ఒక భుజం) మరియు దానికి క్షితిజ లంబపాదపు ఎత్తుల లబ్ధంలో సగం అయివుంటుంది. త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొను ఈ సూత్రాన్ని మీరు 7వ తరగతిలో నేర్చుకున్నారు కదా? గుర్తుందా? ఒకే భూమి లేదా సమానభూములను కలిగిన వైశాల్యాలు సమానమైన రెండు త్రిభుజాల లంబాల ఎత్తులు పరస్పరం సమానమై వుంటాయి అనేదాన్ని ఈ సూత్రం ద్వారా తెలుసుకోవచ్చు.

రెండు త్రిభుజాల ఎత్తులు సమానం కావాలంటే ఆ త్రిభుజాలు ఒకే సమాంత రేఖల మధ్య వుండాలి. దీనివల్ల మీరు సిద్ధాంతం 11.2కి విలోమం రాయవచ్చు.

సిద్ధాంతం 11.3: ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూమి) మరియు ఒకే వైశాల్యాలు కలిగి వుంటే అవి ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవుంటాయి.

పై ఫలితాన్ని సాధించడానికి కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాం.

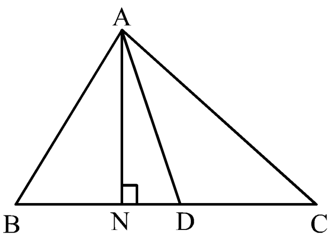
ఉదాహరణ 3: ఒక త్రిభుజాన్ని దాని మధ్యగతము సమానవైశాల్యాలు గల రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని చూపండి (చిత్రం 11.21)

సాధన : ABC ఒక త్రిభుజమైన AD ఏదైనా ఒక మధ్యరేఖ అయితే (చిత్రం 11.12ను గమనించం డి)

మీరు సాధించాల్సినది,

వై (ABD) = వై (ACD)

వైశాల్యం కనుగొను సూత్రం ఎత్తును కలిగివుండడానికి కారణం AN ⊥ BC ని గీస్తాం



చిత్రం 11.21

వై (ABD) = $\frac{1}{2}$ × భూమి × Δ ABD ఎత్తు

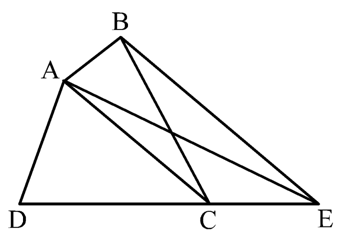
= $\frac{1}{2}$ × BD × AN

= $\frac{1}{2}$ × CD × AN   (BD = CD అవుతుంది)

= $\frac{1}{2}$ × భూమి × Δ ACD ఎత్తు

= వై (ACD)

ఉదాహరణ 4 : చిత్రం 11.22 లో ABCD ఒక చతుర్భుజం BE ∥ AC మరియు DE ; DC ని పొడిగించిన E వద్ద ఖండించును Δ ADE వైశాల్యం ABCD చతుర్భుజ వైశాల్యం సమానమని చూపండి.



చిత్రం 11.22

సాధన : చిత్రాన్ని సరిగ్గా గమనించండి.

Δ ABC మరియు Δ EAC లు ఒకే భూమి AC పై వున్నవి AC మరియు BE అను రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యవుంది.

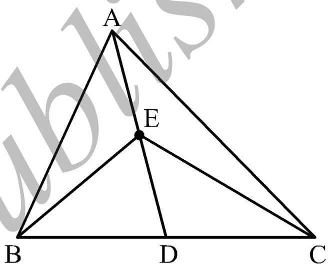
కావున వై (BAC) = వై(EAC) (సిద్ధాంతం 11.2 ప్రకారం))

కావున వై(BAC) + వై (ADC) = వై(EAC) + వై(ADC) (సమాన వైశాల్యాల చిత్రాలను రెండు వైపులా కలుపగా)

లేదా వై (ABCD) = వై (ADE)

అభ్యాసం 11.3

(1) చిత్రం 11.23 లో Δ ABC లో మధ్యగత రేఖ AD యొక్క మధ్య బిందువు E అయిన వై (ABE) = వై (ACE) అని చూపండి.

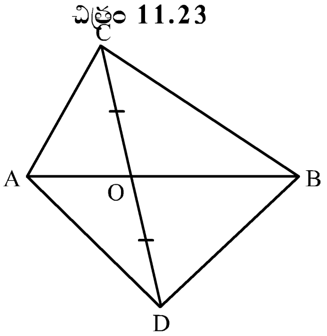


చిత్రం 11.23

(2) Δ ABC లో మధ్యగత రేఖపై బిందువు E అయితే వై (BED) = $\frac{1}{4}$ వై(ABC) అని చూపండి.

(3) సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు, దానిని సమాన వైశాల్యాలుగల నాలుగు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని చూపండి.

(4) చిత్రం 11.24 లో త్రిభుజాలు ΔABC మరియు ΔABD ఒకే భూమి AB పైన వున్నాయి CD రేఖా ఖండం AB ని O వద్ద సమద్విఖండన చేస్తే వై (ABC) = వై (ABD) వై అని చూపండి.



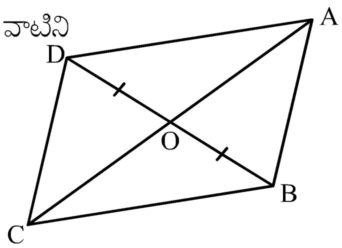
చిత్రం 11.24

(5) Δ ABC లో D,E, F లు వరుసగా భుజాలు BC, CA మరియు AB యొక్క మధ్య బిందువులు అయిన కింది వాటిని నిరూపించండి.

(i) BDEF ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

(ii) వై(DEF) = $\frac{1}{4}$ వై(ABC)

(iii) వై(BDEF) = $\frac{1}{2}$వై(ABC) అనిచూపండి.



చిత్రం 11.25

(6) చిత్రం 11.25 లో ABCD చతుర్భుజ కర్ణాలైన AC మరియు BD లు OB = OD అయ్యేటట్లు O వద్ద పరస్పరం ఖండించుకుంటాయి AB = CD అయితే

(i) వై (DOC) = వై (AOB)

(ii) వై (DCB) = వై (ACB)

(iii) DA || CB లేదా ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి.

(**సూచన :** D మరియు B లతో AC లంబాలను గీయండి)

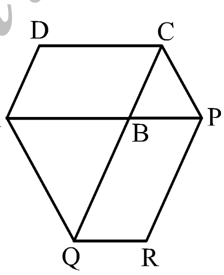
(7) Δ ABC లో D మరియు E బిందువులు వరుసగా AB మరియు AC భుజాల పైగల బిందువులు మరియు (DBC) వై = (EBC) వై అయిన DE || BC అని చూపండి.

(8) ΔABC లో BC భుజానికి సమాంతరంగా ఒక రేఖ అయిన BE || AC మరియు CF || AB లు XY ని క్రమంగా E మరియు F లు ఖండించుకుంటే వై (ABE) = వై (ACF) అని చూపండి.

(9) ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో AB భుజాన్ని ఏదైనా బిందువు P వరకు పొడిగిస్తే A గుండా పోతూ CP కి సమాంతరంగా వుండే సరళ రేఖ CB ను పొడిగించిన రేఖను Q వద్ద ఖండించును. సమాంతర చతుర్భుజం PBQR ను పూర్తి చేసింది. (చిత్రం 11.26)

వై (ABCD) = వై (PBQR) అని చూపండి.

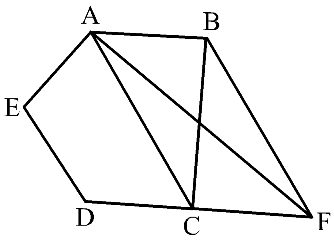
(**సూచన:** AC మరియు PQ లను కలిపిన వై (ACQ) మరియు వై (APQ) లను పోల్చండి.



చిత్రం **11.26**

(10) ABCD ట్రెపీజియంలో AB || DC. AC మరియు BD కర్ణాలు O బిందువువద్ద పరస్పరం ఖండించుకున్న వై(AOD) = వై(BOC) అని చూపండి.

(11) చిత్రం 11.27 లో ABCDE ఒక పంచభుజాకృతి ఉంది B గుండా AC కు సమాంతరంగా గీచిన రేఖ పొడిగించబడిన DC ని F వద్ద ఖండించిన కింది వానిని నిరూపించండి.



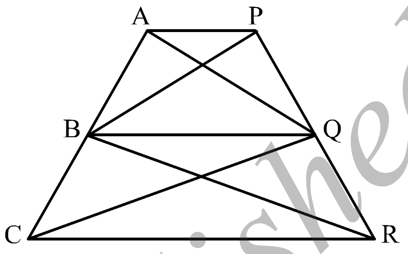
చిత్రం **11.27**

(i) వై (ACB) = వై (ACF)

(ii) వై (AEDF) = వై (ABCDE) అని చూపండి.

(12) ఒక గ్రామంలో ఇత్‌వారి అనే వ్యక్తికి చతుర్భుజాకారంలో ఖాళీ స్థలంకలదు. ఆగ్రామ పంచాయితీలో పాఠశాల నిర్మాణానికి అతని స్థలంలో ఒక మూలలో కొంతభాగం కావాల్సివచ్చింది. ఆయన స్థళాన్ని ఇవ్వడానికి అంగీకరిస్తూ దానికి బదులుగా అంతే వైశాల్యం గల స్థళాన్ని పొందితే, ఏ విధంగా ఆస్థలం వస్తుందో వివరించండి.

(13) ABCD ట్రెపీజియంలో AB || DC ; AC కి సమాంతరంగావుండే రేఖాఖండం AB ని X వద్ద మరియు BC ని Y వద్ద ఖండించును అయితే వై(ADX) = వై(ACY) అని చూపండి.

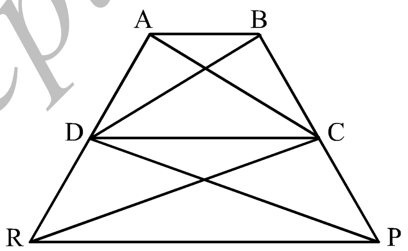


చిత్రం 11.28

(సూచన : CX ను కలపండి)

(14) చిత్రం 11.28 లో AP||BQ||CR అయితే వై (AQC) = వై (PBR) అని చూపండి.

(15) ΔAOD వైశాల్యం ΔBOC వైశాల్యానికి సమానంగావుండేటట్లు ABCD చతుర్భుజ కర్ణాలు O పరస్పరం ఖండించుకొంటాయి. ABCD ఒక ట్రెపీజయం అని చూపండి.



చిత్రం 11.29

(16) చిత్రం 11.29 లో వై(DRC) = వై (DPC) మరియు వై(BDP) = వై(ARC) అయితే ABCD మరియు DCPR చతుర్భుజాలు ట్రెపీజియాలు అనిచూపండి.

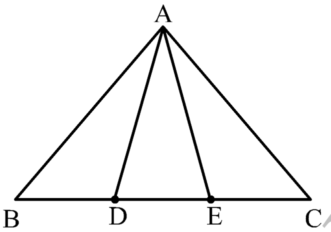
అభ్యాసం 11.4 (ఐచ్ఛికం)[2]

(1) సమాంతర చతుర్భుజం ABCD మరియు ABEF దీర్ఘ చతురస్రం AB భూమి పైవుండి వైశాల్యాలు సమానము. అయితే సమాంతర చతుర్భుజం చుట్టుకొలత దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలతకంటే ఎక్కువ అని చూపండి.

2. పరీక్ష దృష్టిలో ఈ అభ్యాసం లేదు

(2) చిత్రం 11.30 లో BD = DE = EC. అయ్యేటట్లు BC పై D మరియు E బిందువులున్నాయి. వై (ABD) = వై(ADE) = వై(AEC) అనిచూపండి.

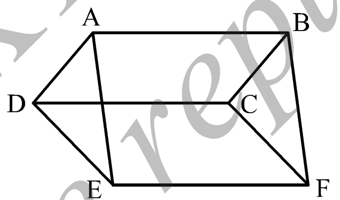
ఈ అధ్యాయం పీఠికలో అడిగిన బుధియా తనపొలాన్ని సమాన వైశాల్యంతో మూడు భాగాలుగా విభజించిందా? అనే ప్రశ్నకు ఇప్పుడు మీరు జవాబు చెప్పగలరా?



చిత్రం 11.30

(గమనిక : BD = DE = EC అని తీసుకోవడంతో Δ ABC సమాన వైశాల్యాలు గల Δ ABD, Δ ADE మరియు ΔAEC లుగా విభజించిన BC ని విభజించే బిందువులకు ఎదురుగావున్న శీర్షానికి కలిపిన Δ ABC సమాన వైశాల్యం కలిగిన *n* త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది)

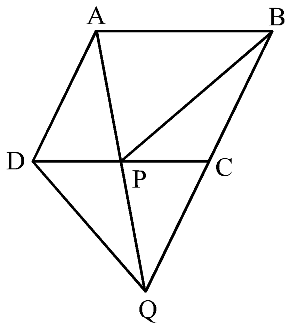
(3) చిత్రం 11.31 లో ABCD, DCFE మరియు ABEF లు సమాంతర చతుర్భుజాలు అయిన వై (ADE) = వై (BCF) అని చూపండి.



చిత్రం 11.31

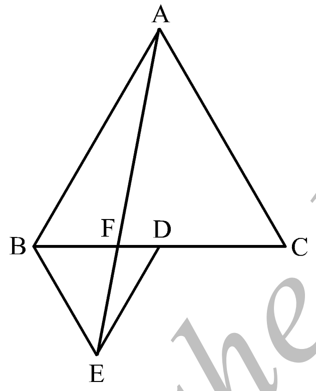
(4) చిత్రం 11.32 లో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం AD = CQ అయ్యేటట్లు BC ని Q వరకు పొడిగించిన AQ రేఖాఖండము DC ని P వద్ద ఖండించిన వై (BPC) = వై (DPQ) అని చూపండి.

(సూచన : AC ని కలపండి)



చిత్రం 11.32

(5) చిత్రం 11.33 లో ABC మరియు BDE లు రెండు సమబాహు త్రిభుజాలు D, BC కి మధ్య బిందువు AE, BC ని F కలపండి,



చిత్రం 11.33

(i) వై (BDE) = $\frac{1}{4}$ వై (ABC)

(ii) వై (BDE) = $\frac{1}{2}$ వై (BAE)

(iii) వై (ABC) = 2 వై (BEC)

(iv) వై (BFE) = వై (AFD)

(v) వై (BFE) = 2 వై (FED)

(vi) వై (FED) = $\frac{1}{8}$ వై(AFC) అని చూపండి

(**సూచన** : EC మరియు AD లు కలిపి BE || AC మరియు DE || AB సాధించండి.)

(6) ABCD చతుర్భుజ కర్ణాలు AC మరియు BD లు పరస్పరం P వద్ద ఖండించుకుంటే.

వై (APB) × వై (CPD) = వై (APD) × వై (BPC) అని చూపండి.

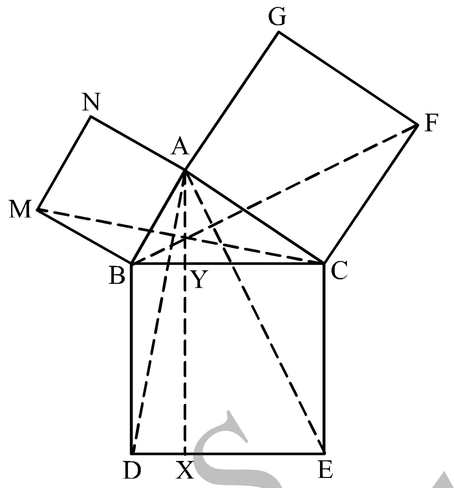
(**సూచన** : A మరియు C లతో BD కి లంబరేఖలను గీయండి).

(7) Δ ABC లో P మరియు Q లు క్రమంగా AB మరియు AC లు మధ్యబిందువులు. R అని AP మధ్యబిందువు అయితే

(i) వై(PRQ) = $\frac{1}{2}$ వై(ARC) (ii) వై(RQC) = $\frac{3}{8}$ వై(ABC)

(iii) వై(PBQ) = వై(ARC) అని చూపండి.

(8) లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో A లంబకోణం BC, CA మరియు AB ల పై వరుసగా BCED, ACFG మరియు ABMN అనే చతురస్రాలు గీయబడినాయి. రేఖా ఖండం AX ⊥ DE, BC ని Y వద్ద DE ని X వద్ద ఖండించింది AD, AE లు కలుపబడినాయి అదేవిధంగా BF, CM లు కలుపబడినాయి అయితే కిందివాటిని నిరూపించండి.



చిత్రం 11.34

(i) Δ MBC $\cong$ Δ ABD (ii) వై(BYXD) = 2 వై(MBC)

(iii) వై(BYXD) = వై (ABMN) (iv) Δ FCB $\cong$ Δ ACE

(v) వై(CYXE) = 2 వై (FCB) (vi) వై (CYXE) = వై (ACFG)

(vii) వై(BCED) = వై (ABMN) + వై (ACFG) అనిచూపండి.

ఫలితం : (vii) ను ప్రఖ్యాత పైథాగరస్ సిద్ధాంతం దీనిని సులభంగా నిరూపించడం 10 వ తరగతిలో నేర్చుకుంటారు.

11.5 సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో కింది విషయాలను నేర్చుకున్నారు.

(1) ఒక చిత్రం యొక్క వైశాల్యం ఏదో ఒక యూనిట్‌లోవున్న వాస్తవ సంఖ్య ఇది ఆ చిత్రాన్ని ఆక్రమించిన ప్రదేశాన్ని తెలుపుతుంది.

(2) రెండు సర్వసమాన చిత్రాలు ఒకే వైశాల్యంకలిగివుంటాయి. దీని విపర్యయం ఎప్పుడూ సత్యం కాదు.

(3) చిత్రం T ఒక సమతలాకార ప్రదేశం ఒకదాని పై ఒకటివుండని చిత్రం P మరియు Q సమతలాకార ప్రదేశాలతో ఏర్పడినచో వై(T) = వై(P) + వై(Q),

వై(X) = X వైశాల్యం

(4) ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల చిత్రాలైతే, వాటికి ఉమ్మడి భుజం (భూమి) మరియు భుజానికి ఎదురుగా గల శీర్షాలన్నీ భూమికి సమాంతరంగా గీచినరేఖపై ఉంటాయి.

(5) ఒకే భూమి లేదా సమాన భూములు, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల రెండు సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యాలు సమానం.

(6) సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము దాని భూమి మరియు భూమి పైకి గీయబడిన లంబాల(ఎత్తు)లబ్ధానికి సమానం.

(7) ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూములు) మరియు సమాన వైశాల్యాలు గల రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉంటాయి.

(8) ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఒక త్రిభుజము, ఒక సమాంతర చతుర్భుజం వుంటే త్రిభుజ వైశాల్యం సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంలో సగం వుంటుంది.

(9) ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూములు) ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల రెండు త్రిభుజ వైశాల్యాలు సమానము.

(10) త్రిభుజ వైశాల్యం దాని భూమి మరియు ఎత్తుల (లంబాల) లబ్ధానికి సమానం.

(11) ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూములు) కలిగిన రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానం అయిన అవి ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉంటాయి.

(12) త్రిభుజ మధ్యగత రేఖ ఆ త్రిభుజాన్ని సమాన వైశాల్యాలుగాగల రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

అధ్యాయం – 12

వృత్తాలు

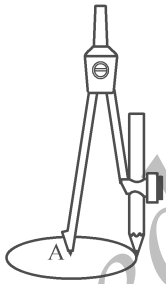
12.1 పరిచయం

మనం మన పరిసరాలలో ఏన్నో వస్తువులను నిత్య జీవితంలో చూసి ఉంటాం. ఈ వస్తువులలో కొన్ని వృత్తాకారంలో ఉంటాయి. వాహనాల చక్రాలు, గాజులు, గడియారాలు, 50 పై సల నాణ్యం, ఒక రూపాయి నాణ్యం, 5రూ నాణ్యం, తాళంచెవి రింగు, చొక్కా గుండీలు ముదలగునవి (12.1 చిత్రాన్ని గమనించండి) గడియారంలో సెకనుల ముల్లును గమనించినట్లైతే అది గుండ్రం గా, వేగంగా వృత్తాకారంలో తిరుగుతూవుంటుంది. ముల్లు మొన తిరిగే దారిని నకలు చేసినట్లైతే అది వృత్తాకారంలో ఉంటుంది. ఈ అధ్యాయంలో మీరు వృత్తాల గురించి వృత్తానికి సంబంధించిన నిబంధనలు మరియు కొన్ని వృత్త లక్షణాల గురించి నేర్చుకుంటారు.

చిత్రం 12.1

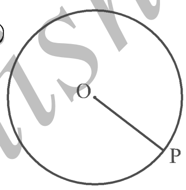
12.2 : వృత్తాలు మరియు వాటికి సంబంధించిన నిబంధనలు: ఒక సమీక్ష

ఒక పెన్సిల్‌ను వృత్త లేఖినికి బిగించండి. వృత్త లేఖిని యొక్క పదునైనకొనను కాగితంపై స్థిరంగా ఉంచండి. మరొక కొనను కొంచెం లాగి పెట్టండి. వృత్తాన్ని గీయుటకు స్థిరంగావుంచి, పెన్సిల్‌తో గుండ్రంగా కాగితంపై గీయండి. కాగితంపై గీచిన ఆవృత చిత్రం ఏది? మీకు తెలిసినట్లు అది ఒక వృత్తం (12.2లో చిత్రం గమనించండి). ఆ వృత్తం ఎలా ఏర్పడింది? మీరు వృత్తలేఖిని ఒక మొనను స్థిరంగా ఉంచారు (12.2లో A) A నుండి సమాన దూరంలో గల అన్ని బిందువులను కలిపారు. దీనిని బట్టి వృత్తం యొక్క నిర్వచనం కింది విధంగా చెప్పవచ్చు.



చిత్రం 12.2

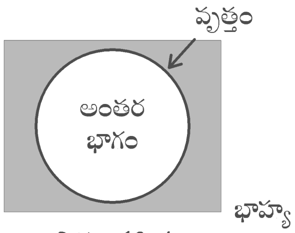
'ఒక తలంలో ఒక స్థిర బిందువునుండి స్థిర దూరంలో గల బిందువుల సముదాయం' వృత్తం.



చిత్రం 12.3

స్థిర బిందువును వృత్త కేంద్రం అంటారు. స్థిర దూరాన్ని వృత్త వ్యాసార్థం అని అంటారు. చిత్రం 12.3లో O వృత్త కేంద్రం OP వృత్త వ్యాసార్థం.

వ్యాఖ్యాలు: వృత్త కేంద్రం నుండి వృత్తం పై ఏదేని బిందువును కలుపు రేఖా ఖండాన్ని వృత్త వ్యాసార్థం అంటారు. వ్యాసార్థంను రేఖాఖండం మరియు వృత్తం పొడవు ఇలా రెండు విధాలుగా ఉపయోగిస్తాం.



చిత్రం 12.4

6వ తరగతిలో మీకు ఈ కింది కొన్ని పరికల్పనల పరిచయంవుంది. వాటిని ఇప్పుడు గుర్తుచేసుకుందాం.

ఒక వృత్తం అది వుండే తలాన్ని మూడు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అవి :-

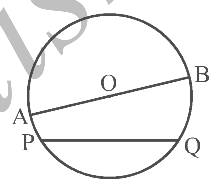
(1) **వృత్తం యొక్క లోపలిభాగం** దీనినే వృత్త అంతరం అని కూడా అంటారు.

(2) **వృత్తం మరియు**

(3) వృత్తం బయటి భాగం లేదా వృత్త బాహ్యం (చిత్రం 12.4 చూడండి). వృత్తము మరియు వృత్త అంతరం కలిసి వృత్తాకార ప్రాంతాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

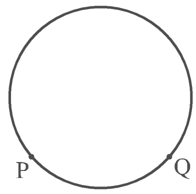
మీరు ఒక వృత్తం పై P, Q అను రెండు బిందువులను తీసుకుంటే, ఆ PQ రేఖాఖండం ఆ వృత్తము యొక్క 'జ్యా' అవుతుంది. అదే జ్యా వృత్తకేంద్రంగుండా వెళితే అది ఆ వృత్తం యొక్క 'వ్యాసం' అంటాం. వ్యాసార్థాన్ని తీసుకుంటే వ్యాసమును రేఖాఖండం మరియు వృత్తం పొడవు రెండు విధాలుగా చెప్పవచ్చు. వ్యాసం కంటే పొడవైన జ్యాను మీరు వృత్తం పై గుర్తించగలరా? గుర్తించలేము. వృత్తం పై అతి పెద్ద జ్యాను 'వ్యాసం' అంటాం. ఈ వ్యాసం వృత్తంలోని వ్యాసార్థానికి రెండు రెట్లు ఉంటుంది. వృత్తంలో AOB అనునది వృత్తం యొక్క వ్యాసం. ఒక వృత్తం ఎన్ని వ్యాసాలను కలిగి వుంటుంది? ఒక వృత్తాన్ని గీచి అందులో ఎన్ని వ్యాసాలను గుర్తించగలరు.

'ఒక వృత్తం పై ఏవేని రెండు బిందువుల మధ్యగల భాగాన్ని 'చాపం' అంటాం.'



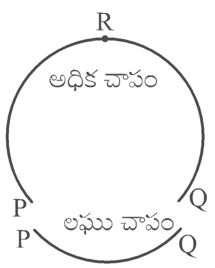
చిత్రం 12.5

చిత్రం 12.6లో వృత్తంపై గుర్తించి P, Q బిందువులును గమనిస్తే వృత్తం పై PQ భాగాన్ని **వృత్తచాపం** అంటాం. చిత్రం 12.7లో చూపినట్టు వృత్తం అర్ధ భాగం కంటే చాపం పొడవు ఎక్కువగా ఉన్నట్లయితో ఆ చాపాన్ని **అధిక చాపం** అంటాం. ఒక చాపం పొడవు అర్ధవృత్తం కన్నా చిన్నదయితే ఆ చాపాన్ని **'లఘు చాపం'** లేదా **'అల్ప చాపం'** అంటారు. అల్పచాపం PQ ను $\overparen{PQ}$ అని సూచిస్తారు. అధిక చాపం PQ ను $\overparen{PRQ}$ అని సూచిస్తారు. ఇక్కడ R అనేది. P మరియు Q బిందువుల మధ్యగల చాపం పై ఒక్క బిందువు. స్పష్టంగా చెప్పాలంటే $\overparen{PQ}$ అల్పచాపాన్ని సూచిస్తుంది. P మరియు Q లు వ్యాసం యొక్క అంత్యబిందువులైతే రెండు చాపాలు సమానమై, ప్రతి దానిని అర్ధవృత్తం అంటారు. రెండు చాపం పొడవులు సమానమైతే వాటిని అర్ధవృత్తాలు అంటాం.)



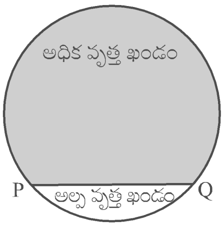
చిత్రం 12.6

"వృత్తం యొక్క మొత్తం పొడవు ఆ **'వృత్త పరిధి'** అంటాం. జ్యా మరియు చాపంల మధ్య ప్రదేశాన్ని వృత్తఖండం అని అంటాం. చాపం చివరి బిందువులను ఒక జ్యాతో కలిపితే ఆ జ్యా వృత్తాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అల్ప చాపానికి మరియు జ్యాకు మధ్యగల ప్రాంతాన్ని **'అల్ప వృత్త ఖండం'** అని మరియు జ్యాకు, అధిక చాపానికి మధ్యగల ప్రాంతాన్ని **'అధిక వృత్త ఖండ'** మని పిలుస్తారు. ఒకవేళ జ్యా కనుక వ్యాసమైతే అపుడు వ్యాసం వృత్తాన్ని రెండు సమాన వృత్త ఖండాలుగా విభజిస్తుంది.

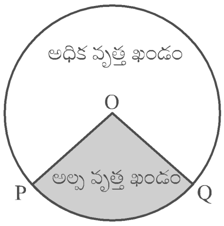


చిత్రం 12.7

ఒక చాపం మరియు దాని చివరి బిందువులను వృత్త కేంద్రంతో కలిపి వ్యాసార్థాల చేత ఆవరింపబడిన ప్రాంతాన్ని **'సెక్టారు'** అంటారు. వృత్తంలో ఒక సెక్టారు, అల్ప సెక్టారు అయిన మిగిలినది **'అధిక సెక్టారు'.** (సెక్టారును త్రిజ్యాంతరము అనికూడా అంటారు).



చిత్రం 12.8



చిత్రం 12.9

అభ్యాసం 12.1

1. ఖాళీలను పూరించండి.

(i) వృత్తకేంద్రం వృత్తానికి _______ లో ఉంటుంది. (అంతర/బాహ్య)

(ii) ఒక బిందువు, వృత్తకేంద్రానికి గల మధ్యదూరం, వ్యాసార్థం కంటే ఎక్కువగా ఉంటే అది వృత్తానికి _________ లో ఉంటుంది. (అంతర/ బాహ్య).

(iii) వృత్తంలోని అతి పెద్ద జ్యాను _______ అంటాం.

(iv) వ్యాసం చివరి బిందువులు,చాపం చివరి బిందువులు కలిస్తే ఏర్పడేది _________ .

(v) వృత్తఖండము, వృత్త చాపం మరియు ________ ల మధ్య ప్రదేశం.

(vi) వృత్తము ఒక తలాన్ని _________ భాగాలుగా విభజిస్తుంది.

2. సరి, తప్పులను గుర్తించి, వాటికి సరైన కారణాలను రాయండి.

1 వృత్తం పై ఏదైనా బిందువు మరియు వృత్త కేంద్రమును కలుపు రేఖా ఖండాన్ని ఆ వృత్త వ్యాసార్థం అంటారు.

2 ఒక వృత్తం పరిమిత సంఖ్యలో, సమాన జ్యాలను కలిగి వుంటుంది.

3 ఒక వృత్తాన్ని మూడు సమాన చాపాలుగా విభజిస్తే, అందులో ప్రతి చాపం అధిక చాపం అవుతుంది.

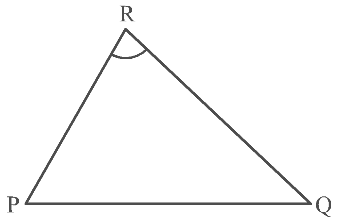
4 ఒక జ్యా వృత్త వ్యసార్థానికి రెండు రెట్లు ఉంటే, దానిని ఆ వృత్త వ్యాసం అంటాం.

5 జ్యా మరియు వృత్త చాపాల మధ్య ప్రదేశాన్ని త్రిజ్యాంతరం (సెక్టారు) అంటారు.

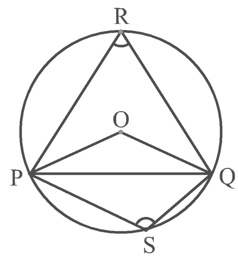
6 వృత్తం ఒక సమతల ఆకృతి.

12.3 వృత్తం మీద ఏదేని బిందువు వద్ద జ్యా చే ఏర్పడినకోణం

$\overline{PQ}$ అను రేఖా ఖండమును తీసుకోండి. PQ రేఖాఖండము పై తీనటువంటి బిందువు R ను గుర్తించండి. PR మరియు QR అను కలపండి చిత్రం 12.10లో చూపినట్లు. ఇపుడు Δ PQR ఏర్పడినది.



చిత్రం 12.10

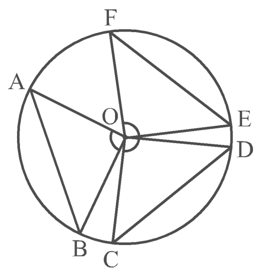


చిత్రం 12.11

చిత్రంలోని కోణాలు $\angle POQ$, $\angle PSQ$ మరియు $\angle PRQ$ అను మీరు ఏమని పిలుస్తారు.

కేంద్రం "O" వద్ద జ్యా PQ ఏర్పరచుకోణం $\angle POQ$. అదే విధంగా జ్యా PQ అల్పవృత్త ఖండం మరియు అధిక వృత్త ఖండాల పై గల బిందువు S మరియు R వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు వరుసగా $\angle PSQ$ మరియు $\angle PRQ$.

అయితే ఈ జ్యాలు కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచుతున్న కోణాలను గురించి నీవు ఏం చెప్పగలవు. కోణాలను పరిశీలించడం ద్వారా జ్యా పొడవు పెరిగిన కొద్దీ అది కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం కొలత పెరుగుటను గమనిస్తాం.



చిత్రం12.12

మరి రెండు సమాన జ్యాలను తీసుకుంటే అవి కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు ఎలా ఉంటాయో ఆలోచించండి. ఇంకొక రెండు సమాన జ్యాలను గీచి, అవి వృత్త కేంద్రం వద్ద చేయు కోణాలను కొలిచి చూడండి.

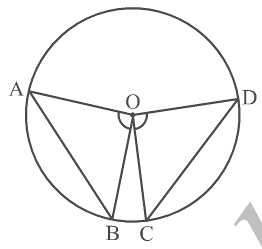
ఆ కోణాలు సమానంగా ఉండుటను మీరు గమనిస్తారు. (చిత్రం 12.12). ఈ సత్యాన్ని నిరూపిస్తాం.

సిద్ధాంతం 12.1: ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానం.

సాధన : 'O' కేంద్రంగా గల వృత్తంలో AB మరియు CD లు రెండు సమాన జ్యాలు. (చిత్రం 12.13)

సారాంశం : $\angle AOB = \angle COD$

నిర్మాణం : వృత్త కేంద్రాన్ని జ్యాల యొక్క అంత్య బిందువులతో కలుపుము అప్పుడు ΔAOB మరియు Δ COD లు ఏర్పడుతాయి.



చిత్రం 12.13

నిరూపణ :

Δ AOB మరియు Δ COD లలో

OA = OC (దత్తాంశం నుండి)

OB = OD (ఒకే వృత్త వ్యాసార్ధాలు)

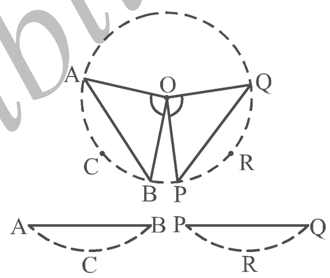
AB = CD (దత్తాంశం)

కావున Δ AOB ≅ Δ COD (భుజం, భుజం, భుజం నియమం)

కావున $\underline{|AOB} = \underline{|COD}$

(సర్వసమాన త్రిభుజపు అనురూపకోణాలు)

గమనించండి : మన అనుకూలం కోసం **సర్వసమాన త్రిభుజపు** అనురూపకోణాలు స.త్రి.అ.కో (CPCT) నిర్మించుకున్నాం. ఇలాంటివి మనం చాలా తక్కువగా చూస్తుంటాం.



చిత్రం 12.14

ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసేకోణాలు సమానమైన. జ్యాల గురించి నీవేమి చెప్పగలవు? ఈ విషయాలన్నీ కింది కృత్యం ద్వారా పరీక్షిద్దాం.

కృత్యం : ఒక ట్రేసింగ్ కాగితాన్ని తీసుకోని, అందులో ఒక వృత్తం గీయండి. వృత్త అంచులు ఏకీభవించునట్లు ఏదైనా ఒక వ్యాసం వెంట మడవండి. దీని కేంద్రం. 'O' A, B లు వృత్తం పై బిందువులను గుర్తించి $\underline{|AOB}$ ని గీయండి. 'O' ని కేంద్రంగా చేసుకొని $\underline{|POQ}$ మరొక కోణాన్ని గుర్తించండి. రెండు కోణాలకు కేంద్ర బిందువు 'O'. పటంలో చూపినట్టు AB మరియు PQ లను కత్తిరించండి. ఇప్పుడు మీకు ACB మరియు PRQ అను వృత్తఖండాలు లభిస్తాయి ఇప్పుడు మీరు వాటిని ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచిన, ఏమి గమనించారు. అవి రెండు సర్వసమానాలు. కాబట్టి AB = PQ ఇదే విషయాన్ని వేర్వేరు కొలతలుగల సమాన కోణాలు తీసుకొని సరిచూసిన జ్యాలు సమానమగును.

సిద్ధాంతం 12.2: ఒక వృత్తంలోని జ్యాలు కేంద్రంవద్ద చేసే కోణాలు సమాన మైన ఆ జ్యాలు సమానం.

ఇది ఇంతకు ముందు చెప్పబడిన సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయం. ఇచ్చిన సిద్ధాంతం 12.1, ప్రకారం చిత్రం 12.13 గమనించండి.

$\underline{|AOB} = \underline{|COD}$ తీసుకున్నచో

అప్పుడు మీరు Δ AOB $\cong \Delta$ COD (ఎందుకు?)

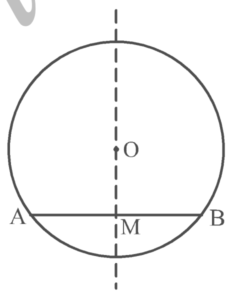
ఇప్పుడు AB = CD (అని గమనించవచ్చు?)

అభ్యాసం 12.2

1. ఒకే వృత్తవ్యాసార్థం కలిగిన, రెండు సర్వసమాన వృత్తాలను తీసుకొని, ఆ వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానం అని నిరూపించండి.
2. ఒక వృత్తంలోని జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు సమానమైన ఆ జ్యాలు సమానమని నిరూపించండి.

12.4 వృత్తకేంద్రం నుండి జ్యాకు గీచిన లంబం :

'O' కేంద్రంగా ఒక వృత్తాన్ని నిర్మించండి. జ్యా AB ని గీయండి మరియు కేంద్రం 'O' నుండి జ్యా AB కి ఒక లంబాన్ని గీయండి. లంబం మరియు జ్యా AB ల ఖండన బిందువు M అనుకోండి. MA మరియు MB అవుతుంది. OM, AB కి లంబరేఖ కావున $\underline{|OMA} = \underline{|OMB} = 90°$ లేక MA $\perp$ MB.



చిత్రం 12.15

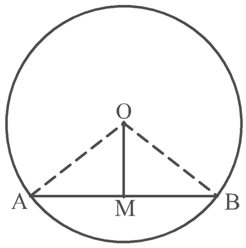
OA మరియు OB లను కలిపిన లంబకోణ Δ OMA మరియు Δ OMB లను సర్వసమానం అని మీరే స్వంతంగా సాధించండి. ఈ ఉదాహరణ ఈ కింద ఫలితానికి నిర్దిష్టమైన నిరూపణ.

సిద్ధాంతం 12.3 : ఒక వృత్త కేంద్రం నుండి ఏదైనా జ్యాకు గీచిన లంబం జ్యా ను సమద్విఖండన చేస్తుంది.

ఈ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం ఏమిటి? వృత్త కేంద్రం నుండి గీచిన లంబరేఖను వృత్త జ్యా కూడా సమద్విఖండన చేస్తుంది. కాబట్టి వృత్తకేంద్రం నుండి జ్యా ను సమద్విఖండన చేసే రేఖ జ్యా కు లంబంగా ఉంటుంది.

సిద్ధాంతం 12.4 : వృత్త కేంద్రం నుండి గీచిన రేఖ వృత్త జ్యా ను సమద్విఖండన చేస్తుంది అది జ్యాకు లంబం.

ఇది నిజమా? కొన్ని సందర్భాలలో ప్రయత్నించి చూడండి. అన్ని సంధర్భాలలో ఇది నిజమని తెలుసుకుంటారు. కింది అభ్యాసం చేయడంద్వారా సాధారణంగా ఇది నిజమని తెలుసుకుంటారు. మీరు దశలను రాయగలరు మరియు కారణాలు కూడా ఇవ్వగలరు.



చిత్రం 12.16

AB ని వృత్తం యొక్క జ్యా అనుగుంటే, కేంద్రబిందువు 'O' మరియు AB ల మధ్యబిందువు M అయిన OM ను కలపండి OM $\perp$ AB అని నిరూపితము. ప్రక్క పటంలో చూపిన విధంగా OA మరియు OB లను కలపండి.

Δ OAM మరియు Δ OBM త్రిభుజాలలో,

OA = OB (ఎందుకు ?)

AM = BM (ఎందుకు?)

OM = OM (సామాన్యభుజం)

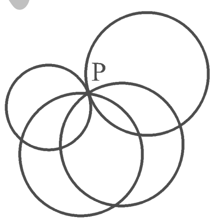
కాబట్టి, Δ OAM $\cong \Delta$ OBM (ఎందుకు?)

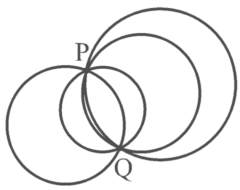
$\underline{|OMA} = \underline{|OMB} = 90°$ (ఎందుకు?)

12.5 : వృత్తాన్ని నిర్ధారించే మూడు బిందువులు :

ఒక సరళ రేఖా ఖండాన్ని గీయడానికి కనీసం రెండు బిందువులు అవసరమని మీరు అధ్యాయం – 6లో నేర్చుకున్నారు. అయితే రెండు బిందువుల గుండా ఒకే రేఖ మాత్రమే గీయగలం. ఒక వృత్తమును నిర్మించాలంటే ఎన్ని బిందువులు అవసరం, అనే ప్రశ్న మీకు ఉత్పన్నమవుతుంది.

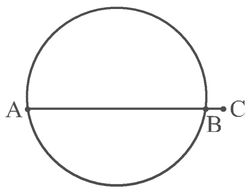
బిందువు P ని తీసుకోండి. ఈ బిందువు గుండా ఎన్ని వృత్తాలను గీయగలం? చిత్రం 12.17 (i)లో చూపిన విధంగా ఒక బిందువుగుండా సాధ్యమైనన్ని వృత్తాలను గీయవచ్చు. క్రింది చిత్రంలో చూపినవిధంగా P, Q అనేరెండు బిందువులను తీసుకొని, ఆరెండు బిందువుల గుండా అనంత సంఖ్యలో వృత్తాలను గీయవచ్చు. ఒకే రేఖపై గల A, B మరియు C బిందువులను కలుపుతూ వృత్తాన్ని గీయగలమా? గీయలేము ఎందుకంటే, అవి ఒకే రేఖపైగల బిందువులు. వృత్తము రెండు బిందువుల గుండా మాత్రమే వెళుతుంది. మూడవ బిందువు వృత్తానికి బాహ్యంగా కాని, అంతరంగా కాని ఉంటుంది.





చిత్రం 12.17

A,B మరియు C బిందువు ఒకే రేఖపై లేకపోతే చిత్రం 12.18లో చూపిన విధంగా తీసుకోండి. AB మరియు BC లను కలపండి. $\overline{AB}$ మరియు $\overline{BC}$ ల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు $\overline{PQ}$ మరియు $\overline{RS}$ లను గీయండి. అవి ఒకే ఒక బిందువు 'O' వద్ద ఖండించుకొంటాయి. (ఎందుకంటే రెండు వేర్వేరు రేఖలు ఒకటికన్నా ఎక్కువ ఉమ్మడి బిందువులను కలిగి వుండవు).



చిత్రం 12.18

కనుక ఇపుడు 'O' బిందువు $\overline{AB}$ లంబ సమద్విఖండన రేఖపై ఉంటుంది. కాబట్టి

OA = OB .... (1)

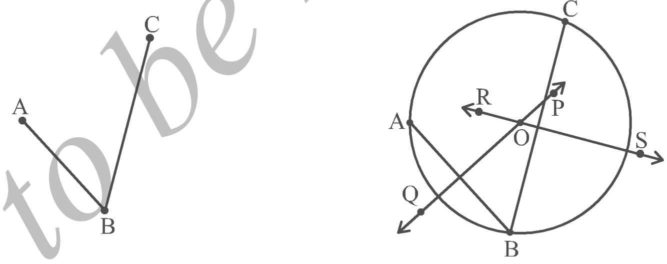
$\overline{PQ}$ పై గల ప్రతి బిందువు A, B లనుండి సమన దూరంలో ఉండుట వలన, అంతేకాక 'O' బిందువు $\overline{BC}$ లంబ సమద్విఖండన రేఖ పై కూడా ఉంటుంది. కాబట్టి

OB = OC .... (2)

(1) & (2) సమీకరణాలనుండి

OA = OB = OC అని చెప్పగలం

కాబట్టి A, B, C ల నుండి సమానదూరంలో (సంక్రమణ ధర్మం) ఉండే ఏకైక బిందువు 'O'. అందుచేత మనం 'O' కేంద్రంగా మరియు OA వ్యాసార్ధంతో గీచిన వృత్తం B మరియు C బిందువుల ద్వారా కూడా పోతుంది కావున A, B మరియు C ల ద్వారా పోయే వృత్తం ఒకే ఒకటి వుంటుంది.



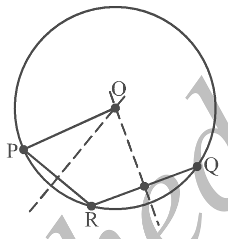
చిత్రం 12.19

సిద్ధాంతం 12.5 : మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువుల ద్వారా పోయే ఏకైక వృత్తం ఉంటుంది. అనే పరికల్పనను చేయవచ్చు.

గమనించండి : Δ ABC ఒక త్రిభుజం అయితే సిద్ధాంతం 12.5 నుండి. ఆ త్రిభుజం అన్ని శీర్షాలు వృత్తముపై ఉండును. ఈ వృత్తాన్ని ఆ త్రిభుజపు **పరివృత్తం** అంటాం మరియు 'O' ను **పరివృత్త కేంద్రం** అంటాం. OA లేదా OB లేదా OC లు పరివృత్తపు వ్యాసార్ధం అగును.

ఉదాహరణ 1 : ఒక వృత్తము మీద చాపరేఖను తీసుకుంటే అది పూర్తి వృత్తాన్ని ఇస్తుంది

సాధన : ఒక వృత్తముపై చాపరేఖ PQ అనుకొంటే, వృత్తమును పూర్తిగా గీయాలి అంటే ఇప్పుడు వృత్త కేంద్రం, వ్యాసార్థం కనుక్కోవాలి. చాపంపై ఒక బిందువు R గా తీసుకుంటే PR అను మరియు RQ అను కలుపవలెను. సిద్ధాంతం 12.5లో నిర్మాణంను ఉపయోగించి వృత్త కేంద్రమును మరియు వృత్త వ్యాసార్థమును కనుగొనవచ్చు.



చిత్రం 12.20

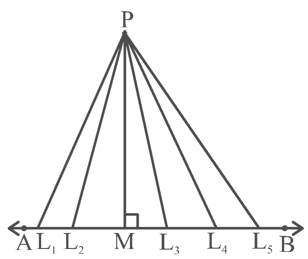
వృత్త కేంద్రమును మరియు వృత్త వ్యాసార్థమును తీసుకొని, ఆ వృత్తాన్ని పూర్తిగా ప్రక్క పటంలో 12.20 చూపిన విధంగా గీయవచ్చు.

అభ్యాసం 12.3

1. వివిధ జతల వృత్తాలను గీయండి. ప్రతి వృత్త జతలు ఎన్ని బిందువులను కలిగి వున్నాయి? ప్రతి వృత్త జత ఎన్ని అత్యధిక ఉమ్మడి బిందువులను కలిగివుంది?
2. ఒక వృత్తాన్ని తీసుకుంటే. ఆ వృత్త కేంద్రాన్ని కనుగొనడానికి నిర్మాణాన్ని గీయండి.
3. ఒక వేళ రెండు వృత్తాలు రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుకుంటే, ఆ వృత్తాల వృత్త కేంద్రం అనేది ఆ వృత్త జ్యాలకు లంబంగా వుంటుంది. అవి నిరూపించండి.

12.6 సమాన జ్యాలు మరియు కేంద్రం నుండి వాటి మధ్యగల దూరాలు.

AB అనే ఒక సరళ రేఖను తీసుకొంటే P అనేది తలంలో ఒక బిందువు అయితే. ఒక సరళ రేఖపై అనతంమైన బిందువులు వుంటాయి. కాబట్టి. ఒక వేళ వాటిని P బిందువుతో కలిపితే, అనంత సంఖ్యలో రేఖా ఖండాలు అనేవి ఏర్పడతాయి. ఉదా : PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4.......వాటి మధ్య దూరం (AB) P ? బాగా ఆలోచించి సమాధానం రాయండి? పై రేఖాఖండాలన్నింటిలోనూ P నుండి AB కి గీచినవి అన్ని లంబంగా ఉన్నాయా? కేవలం PM మాత్రమే AB కి లంబంగా ఉండి అని చిత్రంనుండి అర్థమవుతుంది. (12.21) మరియు అదే అదే అతి తక్కువ పొడవు. గణితపరంగా AB పై P అనే బిందువునుండి గీచిన రేఖాఖండం అతి తక్కువ పొడవును కలిగివుంది అని నిర్వచిస్తాం. కాబట్టి దీనిని క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

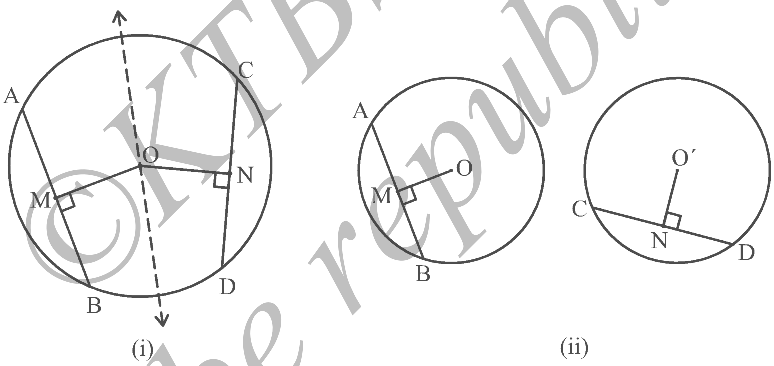


చిత్రం 12.21

సరళ రేఖపై ఒక బిందువు నుండి గీచిన లంబరేఖ పొడవు అనేది. బిందువు నుండి సరళరేఖపై ఒక బిందువుకు గీచిన పొడవుకు సమానం.

గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే, ఒక వేళ ఒక బిందువు సరళరేఖపై బిందువు ఒక్కటే ఆయితే ఆ బిందువుకు సరళరేఖపై బిందువుకు గీచిన మధ్య దూరం శూన్యం లేదా సున్న అవుతుంది.

ఒక వృత్తానికి గల జ్యాలు అపరమితం మనం వృత్తంలో ఒకే పొడవులు గల అనేక జ్యాలను గీస్తే. కేంద్రం నుండి సమాన జ్యాలకు గల దూరం ఎలా ఉంటుంది. కేంద్రానికి దక్కరగా పోయే జ్యా చాలా పెద్దగా వుంటుంది. మిగిలిన జ్యాలతో పోల్చిన, అందులో వ్యాసం యొక్క దూరం ఎంత? వృత్తంలో అతి పెద్ద జ్యా ఏది? కేంద్రం గుండా పోతే వాటి మధ్య దూరం సున్న గమనించండి ఇక్కడ జ్యాల యొక్క పొడవుకు మరియు కేంద్రం యొక్క మధ్య దూరానికి రెండిటి మధ్య అవినాభావ సంబంధం ఉంది. వాటి మధ్య సంబంధం చూద్దాం!



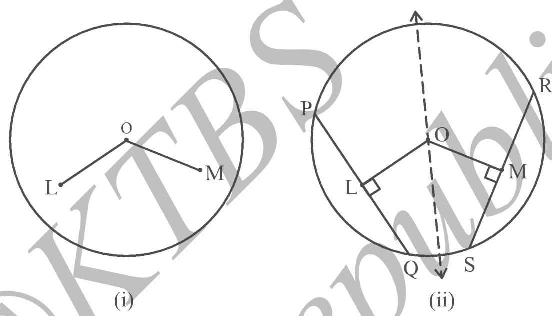
చిత్రం 12.22

కృత్యము : వృత్తాన్ని గీచి దీనిని సగానికి మధ్య మడవండి. అర్ధవృత్తపు చాపపు అంచుదగ్గర నుండి మడత విప్పన మీకు రెండు సర్వసమాన జ్యాల మడతలు వచ్చును. వాటిని AB మరియు CD గా గుర్తించండి. మరియు వృత్త కేంద్రం 'O' నుండి జ్యాలకు గీచిన లంబదూరాలు OM మరియు ON. ఇప్పుడు పేపరును మడిచిన B, D తోనూ A, C తోనూ ఏకీభవిస్తాయి. పై పటం 12.22(i) లో చూపిన విధంగా! M కు N కు మధ్యలో వృత్తకేంద్రం గుండా పోయే జ్యా సరిహద్దుగా ఉంటుంది.

$\therefore$ కాబట్టి OM = ON. కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయగా సర్వసమాన వృత్తాలు గీయగా వాటి వృత్త కేంద్రాలు 'O' మరియు O' అయిత సమాన జ్యాలు AB మరియు CD లను ఒక్కొక్క వృత్తంలో గీస్తే. లంబాలను OM మరియు O'N లను చిత్రం 12.22(ii)లో చూపిన విధంగా గుర్తించాలి. ఒకదాన్ని కత్తరించి రెండవదానిపై AB, CD లను పోలి వుంటుంది. ఇక్కడ వృత్తకేంద్రం O, O' దగ్గరే ఉంటుంది. M ను N గాతీసుకుంటాం. ఈ విధంగా కిందివాటిని సరిచూడండి.

సిద్ధాంతం 12.6 : సమాన పొడవులు గల జ్యాలు కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

తర్వాత ఈ సిద్ధాంత విపర్యయం సత్యమో కాదో గమనిద్దాం. 'O' కేంద్రంగా గల ఒక వృత్తాన్ని నిర్మించండి. 'O' ను కేంద్రంగా చేసుకొని రెండు రేఖా ఖండాలను గీయండి. వాటిని OL మరియు OM గా గుర్తించండి. ఈ వృత్త రేఖా ఖండాల పొడవులు సమానంగా వుండే విధంగా సమాన దూరంలో వృత్తం అంతర భాగంలో ప్రక్క పటం లో(12.23(i)) చూపిన విధంగా గీయండి. ఇప్పుడు PQ మరియు RS ల పొడవును కొలవండి. ఏమైనా వ్యత్యాసం ఉందా? లేదు, రెండూ సమానం ఇదే విధంగా కృత్యాన్ని తిరిగి చేయండి. సమాన రేఖా ఖండాలను గీచి సమాన జ్యాలను గీచి వాటికి లంబంగా వుండే విధంగా చూడండి. ఈ పరిశీలన ద్వారా చేయండి.



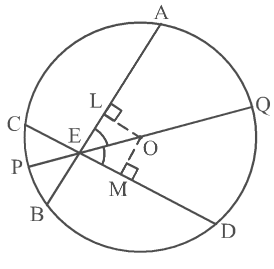
చిత్రం 12.23

సిద్ధాంతం 12.6 యొక్క విపర్యయం సత్యం అని ఋజువయింది.

సిద్ధాంతం 12.7: ఒక వృత్త కేంద్రంనుండి గీచిన సమాన జ్యాలు ఆ వృత్తంలో వాటి పొడవులు సమానం.

పై సిద్ధాంతాన్ని వివరించడానికి ఒక ఉదాహరణ ద్వారా ప్రయత్నిద్దాం!

ఉదాహరణ 2 : ఒక వృత్తానికి పరస్పరం ఖండించుకునే రెండు జ్యాలు వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా పోయే వ్యాసంతో సమానమైన కోణాలను ఏర్పరిస్తే, ఆ జ్యాలు పరస్పరం సమానమవుతాయని చూపండి.



చిత్రం 12.24

సాధన : ఒక వృత్తంలో AB మరియు CD లు ఆ వృత్త జ్యాలుగా తీసుకుంటే, 'O' వృత్త కేంద్రంలో E పరిచ్ఛేదన బిందువు. PQ అనేది E గుండా వ్యాసం అయితే. అప్పుడు $\angle AEQ = \angle DEQ$ (పటం 12.24) నుండి. ఇపుడు AB = CD అని నిరూపిద్దాం 'O' వృత్త కేంద్రంగా OL మరియు OM అనే లంబాలను గీచిన, ఇవి AB మరియు CD లకు లంబంగా వుంటాయి. అదే విధంగా ఇప్పుడు.

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$ (త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ఆధారంగా)

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

Δ OLE మరియు Δ OME నుండి

$\angle LEO = \angle MEO$ (ఎందుకు?)

$\angle LOE = \angle MOE$ (పైనిరూపణ ఆధారంగా)

EO = EO (ఉమ్మడివి)

కాబట్టి $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (ఎందుకు?)

ఇస్తుంది OL = OM (సర్వసమాన త్రిభుజపు అనురూప కోణాలు)

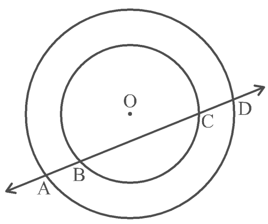
కావున AB = CD (ఎందుకు?)

అభ్యాసం 12.4

1. రెండు వృత్త వ్యాసార్థాలు, వరుసగా 5cm మరియు 3cm లు కేంద్రంనుండి 4cm దూరంలో అవి రెండు బిందువులు ఖండించుకుంటే, ఆ వృత్త ఉమ్మడి జ్యా పొడవు ఎంత?

2 ఒక అంతర వృత్తం లో రెండు సమాన జ్యాలు సమద్వి ఖండన చేసుకుంటే, ఒక జ్యాలో గల ఖండించుకున్న భాగాలు మిగిలిన జ్యాలో గల భాగానికి సమానంగా ఉంటాయి. అని నిరూపించండి.

3 ఒక వృత్తంలో ఖండించుకొనుచున్న రెండు జ్యాలు వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా పోయే వ్యాసంతో సమాన కోణాలు చేస్తే, ఆ జ్యాల పొడవులు సమానమని నిరూపించండి.



చిత్రం 12.25

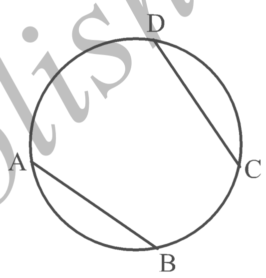
4 రెండు ఏక కేంద్రక వృతాలను ఒక సరళ రేఖ ఖండించిన ఆ వృత్తకేంద్రం. O ఖండన బిందువులు A,B,C మరియు D అయిన (పక్క చిత్రం 12.25) నుండి AB = CD అని నిరూపించండి.

5 ఒక పార్కులో 5m వ్యాసార్థంతో గీచినటువంటి ఒక వృత్తంలో రేష్మా, సల్మా మరియు జ్యోత్స్న అనే ముగ్గురు అమ్మాయిలు ఆడుకుంటున్నారు. రేష్మా బంతిని సల్మాకు విసిరింది. సల్మా

అదే బంతిని జ్యోత్స్నకు విసిరింది. జ్యోత్స్న తిరిగి అదే బంతిని రేష్మాకు విసిరింది. అయితే రేష్మా మరియు సల్మా మరియు సల్మా మరియు జ్యోత్స్నల మధ్య దూరం 6m ప్రతి ఒక్కరికి, అయితే రేష్మా మరియు జ్యోత్స్నల మధ్య దూరం ఎంత?

6 ఒక కాలనీలో 20m వ్యాసార్థం కలిగిన వృత్తాకారపు పార్క్‌ను నిర్మించారు. ఆ పార్కులో అంకుర్, సయ్యద్ మరియు డేవిడ్ అనే ముగ్గురు మిత్రులు బొమ్మ టెలిఫోన్ తీసుకొని ఆ పార్కు (వృత్తపు) అంచులలో కూర్చుని మాట్లాడుకుంటున్నారు. అయితే, ప్రతి ఒక్కరి బొమ్మ టెలిఫోన్‌తీగ యొక్క పొడవును కనుగొనండి.

12.7 వృత్త చాపము ఏర్పరిచే కోణం :



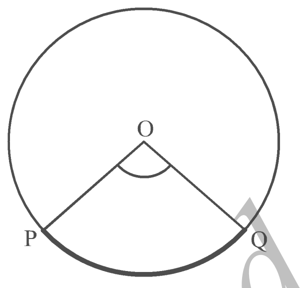
చిత్రం 12.26

ఒక వృత్తంలో ఖండించుకొనుచున్న రెండు జ్యాలు వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా పోయే వ్యాసంతో వృత్తాన్ని రెండు చాపాలుగా విభజిస్తుంది. ఒకటి అధిక మరియు ఇంకొకటి అల్ప చాపం. ఒకవేళ రెండు సమాన జ్యాలు అయితే అప్పుడు చాపంయొక్క పరిమాణం ఎంత? మొదటి చాపాన్ని మొదటి జ్యా రెండవ చాపాన్ని రెండవ జ్యా సమానంగా ఏకీభవించును? పొడవులో దాదాపుగా సమానం. ఒక చాపాన్ని మరోచాపంతో కలిపిన అవి రెండు సర్వ సమానాలు అగును. వాటిని రెండింటిని కదల్చకుండా, ఒక దానిపై మరొకటి తాకే విధంగా వుంచిన అవి రెండు కలిసిపోయి పూర్తిగా కనిపిస్తాయి.

ఒక చాపాన్ని కత్తరించి ఈ నిజాన్ని నిరూపించండి. వృత్తాన్ని దానిలో సగానికి మధ్యలో మడవండి. ఇప్పుడు అర్ధవృత్తం చాపపు అంచు దగ్గర నుంచి మడత విప్పిన మీకు రెండు సర్వసమాన జ్యాల మడతలు వచ్చును. వాటిని AB మరియు CD లుగా గుర్తించండి. అపుడు CD పూర్తిగా ABలో కలిసిపోయి కనిపిస్తుంది. (లేదా సర్వ సమానాలుగా) చిత్రం 12.26లో చూపిన విధంగా ఉంటుంది. దీనిని బట్టి సమాన జ్యాలు సర్వసమాన చాపాలను ఏర్పరుచును మరియు విపర్యయంగా సర్వసమాన చాపాలు వృత్తంలో సమాన జ్యాలను ఏర్పరుచును అని చెప్పవచ్చునని నిరూపించుదాం.

ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానాలు అయితే, అందులో ఏర్పడు చాపాలు సర్వసమానాలు మరియు విపర్యయంగా, ఒకవేళరెండు చాపాలు సర్వసమానాలు అయిన ఆ వృత్తంలో ఏర్పడే జ్యాలు కూడా సమానాలు.

అదే విధంగా వృత్తచాపం ఏర్పరచే కోణం యొక్క మధ్య బిందువు వద్ద రెండు జ్యాలు ఖండించుకొను బిందువు వద్ద ఏర్పడే ప్రాంతం ఆ వృత్తం యొక్క మధ్యబిందువు అగును. అల్పచాపం ఏర్పరచే కోణం మరియు అధిక చాపం ఏర్పరచేకోణం దాని ప్రతిబింబం అగును అందుచేత పటం 12.27 నుండి అల్పచాపం PQ, O వద్ద ఏర్పరిచేకోణం $\angle POQ$ మరియు అధిక కోణ చాపము O వద్ద ఏర్పరిచే చాపం PQ అనేది $\angle POQ$ కోణం యొక్క ప్రతిబింబం.



చిత్రం 12.27

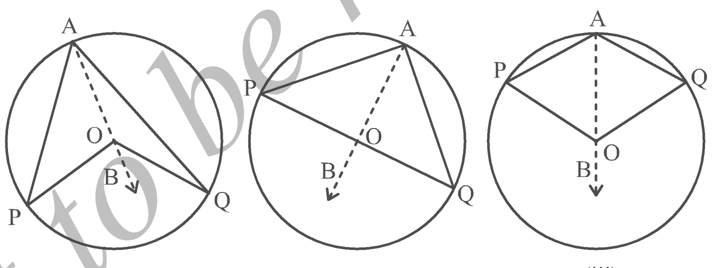
సిద్ధాంతం 12.1 నుండి పైన చెప్పబడిన అంశాలు సత్యము.

ఒక వృత్తములోని సర్వసమాన చాపాలు ఆ వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానాలు.

అందువలన, వృత్తంలో జ్యాల ద్వారా ఏర్పడే కోణం యొక్క మధ్య బిందువు గుండా వెళ్ళే అనురూప జ్యాల యొక్క కోణం సమానం. ఈ సిద్ధాంతం వృత్త కేంద్రంవద్ద వృత్త చాపం ఏర్పరచే కోణం మరియు అది వృత్తంలోని ఒక బిందువు.

సిద్ధాంతం 12.8: ఒక చాపము వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణం, ఆ చాపం మిగిలిన వృత్తం పై ఏదైనా బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది.

సాధన : 'O' అనునది వృత్త కేంద్రం, చాపము PQ కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచుకోణం $\angle POQ$, $\angle PAQ$ అనునది మిగిలిన వృత్తం మీద ఏదేని ఒక బిందువు అయిన $\angle POQ = 2\angle PAQ$ అని నిరూపించాలి.



చిత్రం 12.28

ఇక్కడ (i) PQ ఒక అల్పచాపం, (ii) PQ ఒక అర్ధ వృత్తం మరియు (iii) PQ ఒక అధిక చాపం అయ్యే మూడు సందర్భాలు కలవు.

A బిందువును 'O' కలిపి B బిందువు దాక పొడిగించడం ద్వారా నిరూపణను మొదలు పెడదాం (అన్ని సందర్భాలలోనూ)

$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$

బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

ΔOAQ లో

$OA = OQ$ .... (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు)

అందువలన, $\angle OAQ = \angle OQA$ .... (సిద్ధాంతం 5.5)

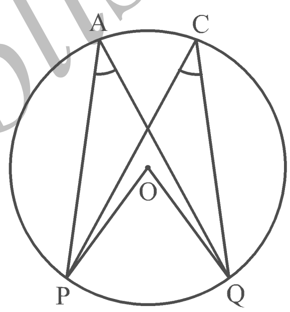
దీని నుండి, $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ .... (1)

అదే విధంగా $\angle BOP = 2\angle OAP$ .... (2)

1 మరియు 2 నుండి $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

ఇదేవిధంగా $\angle POQ = 2\angle PAQ$ .... (3)

సందర్భం (iii) లో PQ అధికచాపం (3) ను ముళ్ళు పెట్టిన ప్రతిబింబ కోణం $\angle POQ = 2\angle PAQ$



చిత్రం 12.29

గమనిక : ఒక వేళ P మరియు Q బిందువులను కలిపిన PQ యొక్క జ్యాలు ప్రక్క చిత్రంలో చూపిన విధంగా ఉంటాయి. $\angle PAQ$ ను PAQP ల కోణఖండన బిందువులు అంటారు.

సిద్ధాంతం 12.8లో A అనేది వృత్తం పై ఏదైనా ఒక బిందువు. C మరొక బిందువు అదే వృత్తంపై అనుకుంటే చిత్రం (12.29)నుండి.

$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$

కావున : $\angle PCQ = \angle PAQ$

అని నిరూపించవచ్చును.

సిద్ధాంతం 12.9 : వృత్తంలోని కోణ సమద్విఖండన రేఖలు సమానం.

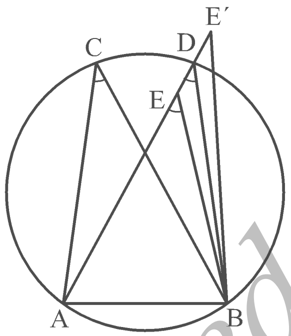
కోణాన్ని ఈ సందర్భం (ii) లో చర్చిద్దాం. సిద్ధాంతం 12.8లో ప్రత్యేకంగా $\angle PAQ$ కోణ సమద్వి ఖం డన చేయగా అది అర్ధవృత్తం అగును.

అందులో $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ అర్ధవృత్తం పై మరో ఏదైనా ఒక బిందువు C అనుకుంటే $\angle PCQ = 90^\circ$ మరలా వచ్చును.

అందుచేత వృత్తంలోని అంశాలను బట్టి.

అర్ధ వృత్తంలోని కోణం ఒక లంబకోణం అని చెప్పవచ్చు.

సిద్ధాంతం 12.10: రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం (ఆ రేఖా ఖండానికి ఒకే వైపుగల) ఏవైనా వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు సమానం అయితే ఆ నాలుగు బిందువులు ఒకే వృత్తంపై ఉంటాయి. (అంటే అవి చక్రీయాలు అవుతాయి).



చిత్రం 12.30

ఈ ఫలితం యొక్క సత్యవిలువను కిందివిధంగా పరిశీలించవచ్చు. చిత్రం 12.30 నుండి. AB ఒక రేఖా ఖండం AB నకు ఒకే వైపుగల బిందువుల C మరియు D ల వద్ద AB చేయు కోణాలు,

$\underline{|ACB} = \underline{|ADB}$

A,B,C మరియు D లు ఒకే వృత్తంపైన బిందువులు అయిన. ఒకవేళ D గుండా వృత్తం వెళ్ళకపోతే. AD ని ఒక చోట ఖండిస్తాయి. (లేదా AD ని పొడిగించగా) దానిని E బిందువుగా గుర్తిద్దాం! (లేదా E').

ఒక వేళ A,C,E మరియు B లు ఒకే వృత్తం పై బిందువులు అయితే

$\underline{|ACB} = \underline{|AEB}$ (ఎందుకు?)

కాని $\underline{|ACB} = \underline{|ADB}$ (అని ఈయబడినది)

కాబట్టి $\underline{|AEB} = \underline{|ADB}$

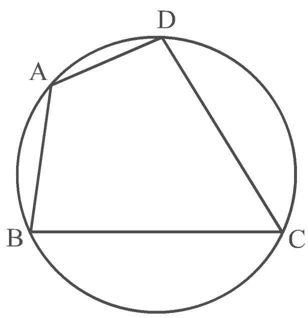
ఇది E మరియు D లు ఏకీభవిస్తే తప్ప సాధ్యం కాదు. (ఎందువలన ?)

కావున E కూడా D తో ఏకీభవిస్తుంది.

అదే విధంగా E' కూడా D తో ఏకీభవిస్తుంది.

12.8 చక్రీయ చతుర్భుజం

చిత్రం 12.31లో చతుర్భుజ శీర్షాలు A,B,C మరియు D లు ఒకే వృత్తం పైగలవు. ఇటువంటి చతుర్భుజంABCD ను చక్రీయ చతుర్భుజం అంటాం. ఇటువంటి చతుర్భుజాలు ABCD లను నాల్గింటిని గీచి, చతుర్భుజ కోణాలను కొలిచి పట్టికను నింపండి.



చిత్రం 12.31

క్రమ సంఖ్య (చక్రీయ చతుర్భుజాలు)	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

ఈ పట్టిక నుండి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

$\angle A + \angle C = 180°$ మరియు $\angle B + \angle D = 180°$ ను సాధించండి. కొలతలలో దోషాలను వదిలివేయగా క్రింది వాటిని సాధించండి.

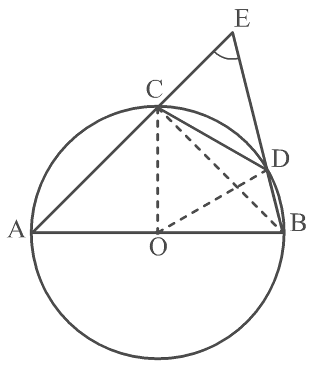
సిద్ధాంతం 12.11 : ఒక చతుర్భుజంలో ఏ రెండు ఎదుటికోణాల మొత్తం అయినా 180° అయితే, అది చక్రీయ చతుర్భుజం.

దీని విపర్యయం కూడా ఎల్లప్పుడూ సత్యమే

సిద్ధాంతం 12.12 : ఒక చతుర్భుజంలో ఏ రెండు ఎదుటి కోణాల మొత్తం 180° అయితే, ఆ చతుర్భుజం ఒక చక్రీయం.

ఈ సిద్ధాంతంను సాధంచడానికి సిద్ధాంతం 12.10లో ఉన్న సాధన ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ 3: చిత్రం 12.32 లో AB వృత్త వ్యాసం. CD ఆ వృత్త జ్యా మరియు వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానం. AC మరియు BD లను పొడిగించిన ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. ఆ బిందువు E. అయితే $\angle AED = 60°$ అని నిరూపించండి.



చిత్రం 12.32

సాధన : OC, OD మరియు BC లను కలుపగా.

ΔODC ఒక సమబాహు త్రిభుజం (ఎందుకు?)

కాబట్టి $\angle COD = 60°$

ఇప్పుడు : $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (సిద్ధాంతం 12.8)

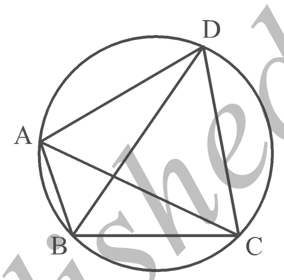
దాని నుండి $\angle CBD = 30^\circ$

అదే విధంగా $\angle ACB = 90^\circ$ (ఎందుకు?)

కావున $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

దీని నుండి $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ కావున $\angle AEB = 60^\circ$

ఉదాహరణ 4: చిత్రం 12.33లో ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం AC మరియు BD లు వాటి కర్ణాలు.అయిన $\angle DBC = 55^\circ$, మరియు $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle BCD$ ఎంత?.



చిత్రం 12.33

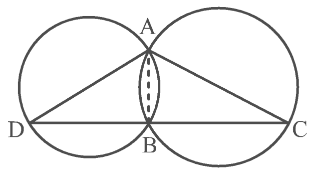
సాధన : $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$ (ఒకే రేఖా ఖండంలోని కోణాలు)

కాబట్టి $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC = 55^\circ + 45^\circ = 100^\circ$

కానీ $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ (చక్రీయ చతుర్భుజంలోని ఎదుటి కోణాలు)

కావున $\angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

ఉదాహరణ 5 : రెండు వృత్తాలు రెండు వేర్వేరు బిందువులు A మరియు B ల వద్ద ఒక దానిని ఒకటి ఖండించుకొనిన. AD మరియు AC లు ఆ రెండు వృత్తాల వ్యాసాలు. (చిత్రం 12.34లో చూడండి). B గుండా గీయబడిన రేఖ DC ని ఖండించును అని ఋజువుచేయండి.



చిత్రం 12.34

సాధన : AB లను కలిపిన

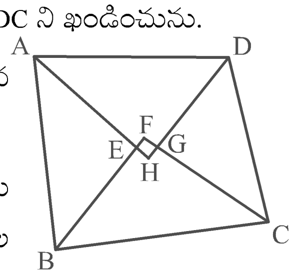
$$\left.\begin{array}{l}\angle ABD = 90^\circ \\ \angle ABC = 90^\circ\end{array}\right\}$$ అర్ధవృత్తంలోని కోణం

కావున $\angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

కాబట్టి DBC ఒక సరళ రేఖ అగును. ఈ B సరళ రేఖ అనునది DC ని ఖండించును.

ఉదాహరణ 6 : ఒక చతుర్భుజంలోని అంతర్గతకోణాలు ఖండించుకొనిన అక్కడ ఏర్పడేది ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం అని నిరూపించండి.

సాధన : పటం 12.35 లో ABCD ఒక చతుర్భుజం మరియు AH, BF, CF మరియు DH లు కోణ సమద్విఖండన బిందువుల అంతర్గతంగా ఖండించుకొనిన $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ లు దానిలోని EFGH చతుర్భుజం అగును.



చిత్రం 12.35

ఇప్పుడు $\angle FEH = \angle AEB = 180° - (\angle EAB - \angle EBA)$ (ఎందుకు?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

మరియు $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (ఎందుకు?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

కాబట్టి,

$$\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$$

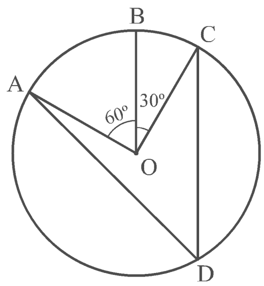
$$= 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

సిద్ధాంతం 12.12 నుండి చతుర్భుజంలో EFGH చక్రీయం.

అభ్యాసం 12.5

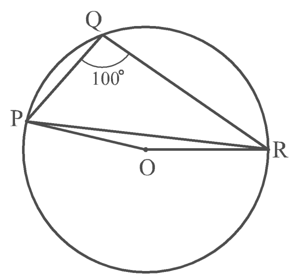
1. చిత్రం 12.36 నుండి A,B మరియు C లు వృత్తం పై ఏవైనా మూడు బిందువులు O వృత్తం కేంద్రం. అయిన $\angle BOC = 30°$ మరియు $\angle AOB = 60°$ మిగిలిన వృత్త చాపం పై ABC కి మరొక వైపున బిందువు D అనుకుంటే $\angle ADC$ ని కనుక్కోండి.



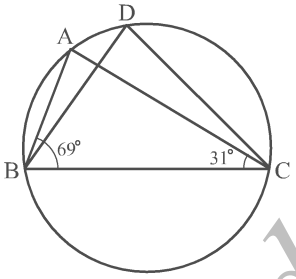
చిత్రం 12.36

2. ఒక వృత్తం యొక్క జ్యా ఆ వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానం. అయిన వృత్తచాపం వద్ద ఈ రెండు ఖండించుకొనిన ఏర్పడుకోణం. అల్పచాపం మరియు ఖండన బిందువుం వద్ద ఏర్పచే చాపం అధికచాపం అని నిరూపించండి.

3. చిత్రం 12.37 నుండి $\angle PQR = 100°$ P,Q మరియు R లు వృత్తం పై ఏదైనా బిందువులు. 'O' వృత్త కేంద్రం అయిన $\angle OPR$ ను కనుగొనండి.

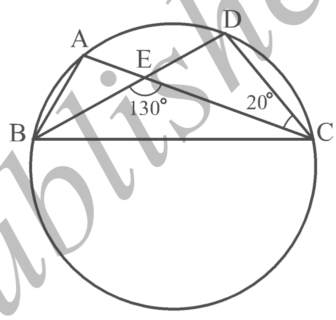


చిత్రం 12.37



చిత్రం 12.38

4. చిత్రం 12.38లో $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$ అయిన $\angle BDC$ ఎంత?



చిత్రం 12.39

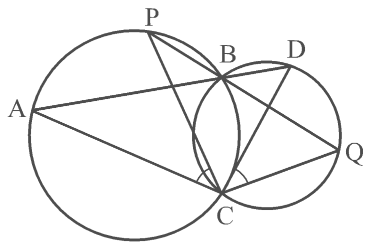
5. చిత్రం12.39 లో A,B,C మరియు D లు వృత్తంపై ఏవేని నాలుగు బిందువులు. AC మరియు BD లను పొడిగించిన ఒక బిందువు వద్ద అది ఖండించుకొనును. ఆ ఖండన బిందువు E అయిన $\angle BEC = 130°$ మరియు $\angle ECD = 20°$ అప్పుడు. $\angle BAC$ ఎంత?

6. ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం అయిన అందులోని కర్ణాలు E బిందువు వద్ద ఖండించుకొనిన, $\angle DBC = 70°$, $\angle BAC = 30°$ అయిన $\angle BCD$ ని కనుక్కోండి. ఒకవేళ AB = BC అయిన $\angle ECD$ ని కనుక్కోండి.

7. చక్రీయ చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు వృత్తం యొక్క వ్యాసాలు ఒకటే అయిన ఆ చతుర్భుజ శీర్షాల ద్వారా ఏర్పడునది ఒక చతురస్రం అని నిరూపించండి.

8. సమాంతర కాని భుజాలతో ఏర్పడిన ఒకే ట్రెపీజియం అది చక్రీయం అని నిరూపించండి.

9. రెండు వేర్వేరు వృత్తాలు రెండు వేర్వేరు బిందువులు B మరియు C ల వద్ద ఖండించుకొనిన B గుండా ఒక రేఖాఖండంను పొడిగించిన ఆ బిందువు A, D అగును. అపుడు ABD మరియు PBQ లు వృత్తంపై A,D,P ల వద్ద ఖండించుకొనిన. Q పరంగా పటంలో 12.40 నుండి $\angle ACP = \angle QCD$ అని నిరూపించండి.



చిత్రం 12.40

10. త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలను వృత్తం యొక్క వ్యాసంగా గీచిన, ఆ మూడవ భుజం వృత్తంలోని మిగిలిన రెండు వ్యాసాలతో ఖండించును అని చూపండి.

11. ΔABC మరియు ΔADC లు రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు అయిన వాటి ఉమ్మడికర్ణాలు AC అయిన $\underline{|CAD} = \underline{|CBD}$ అని నిరూపించండి.

12. సమాంతర చక్రీయ చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘ చతురస్రం అని నిరూపించండి.

అభ్యాసం 12.6 (ఐచ్ఛికం)[1]

1. రెండు వృత్తాలు ఖండించుకొనుచున్న వాటిగుండా ఒక సరళరేఖను గీచిన ఖండించిన బిందువుల వద్ద రెండు వృత్తాలపై చేసే కోణం రెండు బిందువుల వద్ద సమానంగా ఉంటుంది అని నిరూపించండి.

2. వృత్త కేంద్రంనుండి సమాంతరంగా రెండు వైపుల గీయబడిన AB మరియు CD లు జ్యాలు వాటి పొడవులు వరుసగా 5cm మరియు 11cm AB మరియు CD ల మధ్య దూరం 6cm అయిన ఆవృత్త వ్యాసార్ధంను కనుక్కోండి?

3. ఒక వృత్తంలోని రెండు సమాంతర జ్యాల పొడవులు వరుసగా 6cm మరియు 8cm కేంద్రం నుండి ఉపజ్యాకు గలదూరం 4cm అయిన కేంద్రంనుండి రెండవ జ్యాకుగల మధ్యదూరం ఎంత?

4. ఒక వృత్తానికి ABC కోణశీర్షాలు బాహ్యంగావున్నాయి మరియు వృత్తంలోని జ్యాలు AD మరియు CE లు వాటిని ఖండించును. అయితే $\underline{|ABC}$ ల యొక్కకోణం AC మరియు DE లు ఖండించుకొనగా వృత్తంలో ఏర్పడే కోణానికి సగం ఉంటుంది అని నిరూపించండి.

5. ఒక వృత్తాన్ని, రాంబస్ యొక్క ఏదైనా ఒక భుజం పొడవు ఆవృత్త వ్యాసంతో సమానంగా వుండేలా నిర్మించిన వాటిశీర్షాల గుండా ఖండన బిందువు పోవును అని నిరూపించండి.

6. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. ఒక వృత్తం ఈ A,B, మరియు C ల గుండా పోయిన CD వృత్తాన్ని E వద్ద ఖండించును. అయిన AE = AD అని నిరూపించండి.

7. AC మరియు BD లు ఒక వృత్త వ్యాసాలు మరియు ఇవి ఒక దానిని కొకటి ఖండించుకొనునని,

    1. AC మరియు BD లు వ్యాసార్ధాలు.

    2. ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్త్రం అని నిరూపించండి.

1. పరీక్ష దృష్టిలో ఈ అభ్యాసంలేదు

8. Δ ABC యొక్క కోణ సమద్వి ఖండన రేఖలు A, B మరియు C లు అయిన అవి పరివృత్త కేంద్రాలు. వృత్తం పై D,E మరియు F లు అగును Δ DEF లేదా $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$ మరియు $90° - \frac{1}{2}C$ అని నిరూపించండి.

9. రెండు సర్వసమాన వృత్తాలు A మరియు B బిందువుల వద్ద ఒకదనికొకటి ఖండించుకొనిన. A ను పొడిగించిన ఏదేని రేఖాఖండం PAQ ఏర్పడును Q నుండి సరళరేఖను గీచిన 2 రెండు వృత్తాలను ఖండించుకొనునట్లు వెళ్ళును అయిన BP = BQ అని చూపండి.

10. ఏదైనా ఒక Δ ABC లో కోణ సమద్వి ఖండన బిందువు $\angle A$ మరియు BC కి లంబంగా వుండేలాగీచిన ఆ Δ ABC పరివృత్త త్రిభుజం అగును అని చూపండి.

12.9 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మనం కింది అంశాలు నేర్చుకున్నాం

1. వృత్తం అనేది ఒక తలంలోని అనేక బిందువుల సముదాయం ఆ బిందువులు సమాన దూరంలో ఉంటాయి.
2. వృత్తంలోని సమాన జ్యాలు ఖండించుకొనిన కేంద్రం వద్ద ఏర్పడుకోణాలు సమానం.
3. వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు ఖండించుకొనగా, వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు సమానాలు అలాగే వ్యాసాలు సమానాలు.
4. వృత్తంలోని లంబం వృత్త జ్యాలను సమద్విఖండన చేయును.
5. ఒక వృత్త కేంద్రం నుండి గీచిన సరళ రేఖ ఆవృత్త వ్యాసాన్ని సమద్వి ఖంఢన చేయును మరియు వ్యాసానికి లంబంగా వుండును.
6. ఏవైనా 3 సరేఖీయం కాని బిందువుల గుండా కేవలం ఒకే ఒక వృత్తాన్ని గీయగలం.
7. ఒక వృత్తంలోని సమాన జ్యాలు ఆ వృత్త కేంద్రానికి సమాన దూరంలో వుంటాయి.
8. వృత్త కేంద్రంనుండి సమాన దూరంలో గీచిన జ్యాలు సమానాలు.
9. ఒక వృత్తంలోని రెండు చాపాలు సర్వసమానాలు అయిన వాటి వ్యాసాలు కూడా సమానాలు మరియు విపర్యయంగా వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానాలు అయిన వాటి (అల్ప, అధిక) చాపాలు సర్వసమానాలు.

10. ఒక వృత్తంలోని సర్వసమాన చాపాలు ఖండించు కొనిన వృత్త కేంద్రంవద్ద చేసే కోణం సమానం.

11. వృత్తచాపం వద్ద చేసేకోణం వృత్తంలో మిగిలిన చాపం యొక్క కోణం ఏ బిందువువద్ద నైనా చేసే కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది.

12. వృత్తంలోని కోణ సమద్వి ఖండన రేఖలు చేసేకోణాలు సమానం.

13. అర్ధవృత్తంలోని కోణం లంబకోణం.

14. ఒక రేఖా ఖండం రెండు బిందువులను కలిపి ఆ బిందువుల వద్ద చేసే కోణంతో సమాన కోణం గల మరొక రెండు బిందువులను కలుపగా ఏర్పడే రేఖాఖండాలు బిందువులు నాలుగు కూడా వృత్తం పై వుంటాయి.

15. ఒకచక్రీయ చతుర్భుజంలోని ఒక జత అంతరకోణాల మొత్తం లేదా ఎదురెదురుకోణాల మొత్తం కూడా 180°.

16. చతుర్భుజంలోని ఒక జత ఎదురెదురు కోణాల మొత్తం 180° అయిన అది చక్రీయ చతుర్భుజం.

అధ్యాయం-13

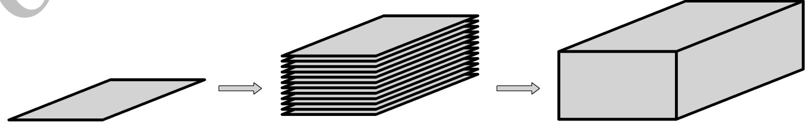
ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు

13.1 పరిచయం

మనం సాధారణంగా ఎక్కడ చూసినా ఘన పదార్థాలు కనబడుతాయి. మనం ఇప్పటి వరకు అన్ని నోటుపుస్తకంలో లేదా నల్లబల్ల మీద సులభంగా గీయగలిగిన చిత్రాల గురించి మాత్రమే చదివాం. వీటిని సమతలాకృతులు అని అంటాం. మనకిదివరకే చతురస్రం, దీర్ఘ చతురస్రం మరియు వృత్తాల గురించి తెలుసు. వీటి చుట్టుకొలతలు మరియు వైశాల్యాల అర్థం మరియు వాటిని మనం కనుగొనాలని మనకు తెలుసు. వీటి గురించి మనం మన వెనుకటి తరగతులలో చదివాం. ఒక వేళ మనం కార్డుబోర్డులో ఒకే ఆకారం మరియు కొలతల చాలాసంఖ్యలో లంబంగా సమతలాకృతులను కత్తరించండి. ఒక దానిపై మరొకటి పేర్చినప్పుడు ఏమి ఏర్పడుతుంది అని కుతూహలం ఏర్పడుతుంది. ఈ విధమైన ప్రక్రియ నుండి మనకు దీర్ఘఘనం, సిలిండర్ మొదలగు ఘనాకృతులను పొందుతాం. మీరు మీ వెనుకటి తరగతులలో దీర్ఘఘనం, ఘనం మరియు సిలిండర్ల ఉపరి వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణాలు ఎలా కనుగొనాలో నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు మీరు దీర్ఘఘనం మరియు సిలిండర్ల ఉపరితల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణాలను ఎలా కనుగొనాలో నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు మీరు దీర్ఘఘనం మరియు సిలిండర్ల ఉపరితల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణాలను కనుగొనడాన్ని వివరంగా నేర్చుకుందాం. వీటిని ఇతర ఘనాకృతులైన శంఖువు మరియు గోళాలకు విస్తరించి చదువుదాం.

13.2 దీర్ఘఘనం మరియు ఘనపు ఉపరితల వైశాల్యం

మీరు చాలా మందపు కాగితాలుగల అట్టను చూశారా? అదెలా కనబడుతుంది. అది చిత్రం 13.1 లో ఉన్నట్లు మీకు చూడడానికి కనిపిస్తోందా?



చిత్రం 13.1

ఇది దీర్ఘ ఘనాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. ఈ దీర్ఘఘనానికి గోధుమరంగు కాగితంతో దీనికి కప్పడానికి ఎన్ని కాగితాలు కావాలి? అని ఇప్పుడు మనం చూద్దాం.

ఇప్పుడు మనకు ముందుగా కాగితపు అట్ట కింది భాగం పూరించడానికి దీర్ఘచతురస్రాకార గోధుమరంగు కాగితం కావాలి దీనిని చిత్రం 13.2 (a) లో చూపడమైంది.

తరువాత మనకు రెండు వైపుల కప్పడానికి రెండు పొడవైన దీర్ఘచతురస్రాకార గోధుమ రంగు కాగితంకావాలి. అది చిత్రం 13.2 (b) లో చూపినట్లు కనబడుతుంది.

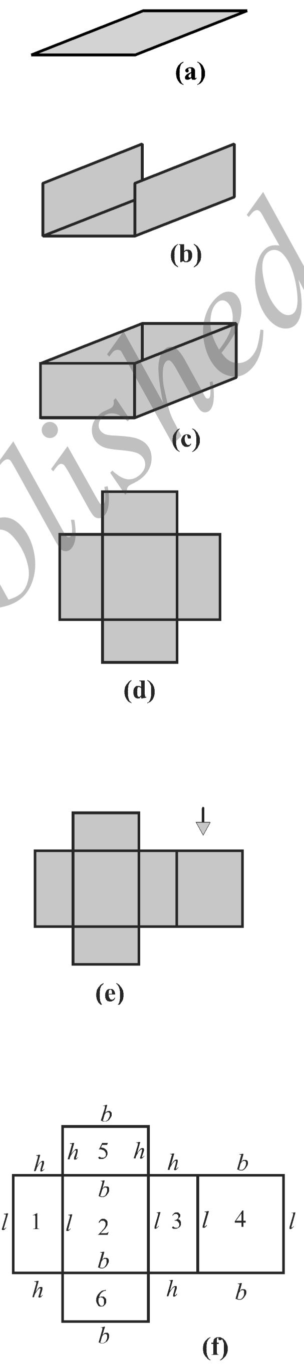
ఇప్పుడు మనకు తరువాతి చుట్టు వెనుక భాగాన్ని కప్పడానికి వేరే కొలతగల ఇంకా రెండు దీర్ఘచతురస్రాకార గోధుమ రంగు కాగితాలు కావాలి. ఇప్పుడు మనకు అది చిత్రం 13.2 (c) లో చూపినట్లు కనబడుతుంది.

ఈ చిత్రాన్ని మనం తుదిని కత్తిరించి వదిలి తెరచినప్పుడు అది చిత్రం 13.2 (d) లో చూపినట్లు కనబడుతుంది.

చివరిగా కాగితపు అట్ట పైభాగాన్ని కప్పడానికి మనకు కిందవేసిన దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితం కొలత కల్గిన మరొక దీర్ఘచతురస్రాకార గోధుమ రంగు కాగితం కావాలి. దానిని మనం కుడిభాగంలో అమర్చినచో, అది చిత్రం 13.2 (e) లో ఉన్నట్లు చూపుతుంది.

మనకు ఇప్పటి వరకు దీర్ఘఘనపు బయటి వైపును కప్పడానికి ఆరు దీర్ఘచతురస్రాకార గోధుమ రంగు కాగితాలు అవసరమయ్యాయి.

ఇది మనకు దీర్ఘ ఘనపు వెలుపలి ఉపరితలం ఆరు దీర్ఘచతురస్రాకారాలలో చేశామని చూపుతుంది. (వాస్తవంగా ఈ దీర్ఘచతురస్రాకార వలయాన్ని / ప్రదేశాలను దీర్ఘఘనపు ముఖాలు అని పిలుస్తారు.) వీటి వైశాల్యాన్ని పొడవు మరియు వెడల్పులను వేర్వేరుగా గుణించి మరియు ఈ ఆరు వైశాల్యాలను కూడడం ద్వారా కనుగొనవచ్చు.



చిత్రం 13.2

మనం ఇప్పుడు దీర్ఘఘనపు పొడవును l అని వెడల్పును 'b' అని, ఎత్తును h అని తీసుకుందాం తరువాత ఈ కొలతలు పొందిన చిత్రం 13.2 (f) లోచూపినట్లుగా చూడటానికి కనిపిస్తుంది.

అందువలన ఆరు దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యం మొత్తం:

దీర్ఘచతురస్రం 1 వైశాల్యం $(= l \times h)$

$+$

దీర్ఘచతురస్రం 2 వైశాల్యం $(= l \times b)$

$+$

దీర్ఘచతురస్రం 3 వైశాల్యం$(= l \times h)$

$+$

దీర్ఘచతురస్రం 4 వైశాల్యం $(= l \times b)$

$+$

దీర్ఘచతురస్రం 5 వైశాల్యర $(= b \times h)$

$+$

దీర్ఘచతురస్రం 6 వైశాల్యం$(= b \times h)$.

$= 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h)$

$= 2\ (lb + bh + hl)$

అది మనకు ఇచ్చేదేమనగా,

దీర్ఘఘనం ఉపరితల వైశాల్యం$= 2\ (\boldsymbol{lb} + \boldsymbol{bh} + \boldsymbol{hl})$

ఇక్కడ l, b మరియు h లు దీర్ఘఘనం అంచులు.

సూచన : వైశాల్యపు ప్రమాణాన్ని ఒక చదరపు మానం అని తీసుకుంటాం. ఎందుకనగా వలయం / ప్రదేశపు పరిమాణాన్ని మీరు ఒక చదరపు ప్రమాణం కల్గియున్న చతురస్రాన్ని నింపడం ద్వారా కొలుస్తాం.

ఉదాహరణకు మన దగ్గరగల ఒక దీర్ఘఘనం పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా 15 cm, 10 cm మరియు 20 cm దాని ఉపరి వైశాల్యం,

$= 2\,[(15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)]\ \text{cm}^2$

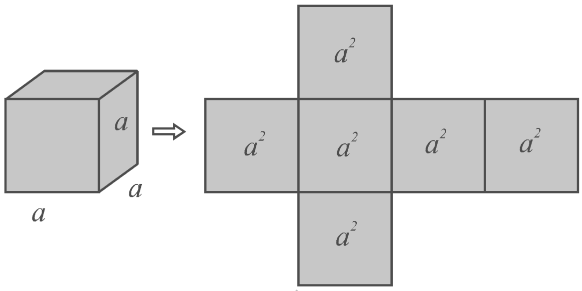
$= 2\,[150 + 200 + 300]\ \text{cm}^2$

$= 2 \times 650\ \text{cm}^2 \quad = 1300\ \text{cm}^2$

ఒక దీర్ఘఘనంలో పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు సమానమైతే దానిని ఘనం అని పిలుస్తాం. ఘనపు ఒక అంచు పొడవు a అయితే , దాని ఉపరితల వైశాల్యం $2[a \times a + a \times a + a \times a] = 6a^2$ [చిత్రం 13.3 చూడండి]. చిత్రం నుండి మనకు తెలియునది,

ఘనం ఉపరితల వైశాల్యం $= 6a^2$

ఇక్కడ a అనునది ఘనపు అంచు.



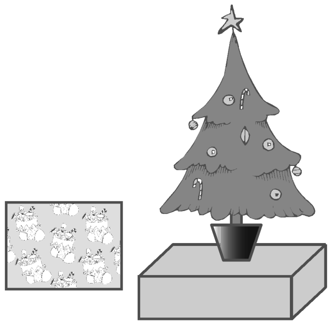
చిత్రం 13.3

ఒకవేళ ధీర్ఘ ఘనపు ఆరు ముఖాలకు బదులుగా పై మరియు కింది భాగాల ముఖాలను వదిలి మనం కేవలం 4 ముఖాల వైశాల్యాన్ని కనుగొందాం. ఇలాంటి ప్రకరణలలో నాలుగు ముఖాల వైశాల్యాన్ని ధీర్ఘఘనపు పార్శ్వ ఇపరితల వైశాల్యం అని పిలుస్తాం. పొడవు l, వెడల్పు b మరియు ఎత్తు h అయిన ధీర్ఘ ఘనపు పార్శ్వ ఉపరితల వైశాల్యం $2lh + 2bh$ లేదా $2(l + b)h$ కు సమానం. అదే విధంగా 'a' భుజం కల్గిన ఘనపు పార్శ్వఉపరితల వైశాల్యం $4a^2$ సమానం.

పై వాటిని దృష్టిలో పెట్టుకుని ధీర్ఘఘనం లేదా ఘనపు ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కొన్ని సార్లు పూర్తి * ఉపరితల వైశాల్యం అని చెప్పబడుతుంది ఇప్పుడు మనం కొన్ని సమస్యలు సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : మేరి క్రిస్మస్ వృక్షాన్ని అలంకరించాలని కోరుకుంది. అమె శాంతాక్లాజ్ చిత్రం ఉన్న రంగు కాగితాన్ని ఒక కొయ్య పెట్టెకు కప్పంది. దానిపైన వృక్షాన్ని పెట్టడానికి ఉంచింది [చిత్రం 13.4 చూడండి].

ఈ ప్రక్రియకొరకు ఆమె కొనవలసిన కప్పే కాగితపు సరైన సంఖ్యను తెలుసుకోవాల్సి ఉంది. పెట్టె పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా. 80 cm, 40 cm మరియు 20 cm అయితే ఆమెకు 40 cm భుజం కల్గిన ఎన్ని చతురస్రాకార కాగితాలు కావాలి?



చిత్రం 13.4

సాధన : మేరి పెట్టె వెలుపలి భాగపు ఉపరితలానికి కాగితం అంటించాల్సి ఉంది. కావలసిన కాగితం పరిమాణం ధీర్ఘఘనాకృతి ఆకారపు పెట్టె ఉపరితల వైశాల్యానికి సమానం ఈ పెట్టె కొలతలు పొడవు = 80 cm, వెడల్పు = 40 cm, ఎత్తు = 20 cm

పెట్టె ఉపరితల వైశాల్యం $= 2[lb + bh + hl]$

$$= 2\,[(80 \times 40) + (40 \times 20) + (20 \times 80)]\ \text{cm}^2$$

$= 2\ [3200 + 800 + 1600]\ cm^2$
$= 2 \times 5600\ cm^2 = 11200\ cm^2$

ప్రతి కాగితం వైశాల్యం $= 40 \times 40\ cm^2$

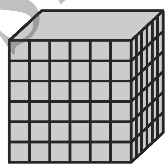
$= 1600\ cm^2$

అందువలన కావలసిన కాగితాలు = $\frac{\text{పెట్టె ఉపరితల వైశాల్యం}}{\text{ప్రతి కాగితం వైశాల్యం}}$

$= \frac{11200}{1600} = 7$

ఆమెకు కావలసిన కాగితాలు= 7

ఉదాహరణ 2 : హమీద్ తన ఇంటికొరకు 1.5 m అంచు కల్గిన ఘనాకృతిగల ఆకారపు నీటి తొట్టిని మూతతో మూసిఉంటాడు. ట్యాంక్ (తొట్టి) అడుగుభాగం వదిలి అతడు 25 cm అంచుకల్గిన చతురస్రాకార టైల్స్ (పలకలు) ట్యాంక్ ఉపరితలం కప్పడానికి తేవాల్సి ఉంది. [చిత్రం 13.5 చూడండి] ఒక డజన్ టైల్స్‌కు ₹ 360 అయితే, అతడు టైల్స్‌కు చేసిన ఖర్చు ఎంత ?



చిత్రం 13.5

సాధన : హమీద్ నీటి ట్యాంకుకు ఐదు ముఖాలకు టైల్స్ వేయడానికి కొనవలసిన టైల్స్ నిర్ణయించడానికి అతడు ట్యాంక్ ఉపరితల వైశాల్యం తెలుసుకోవలిసి ఉంది.

ఘనాకార ట్యాంక్ అంచు పొడవు $= a = 1.5\ m = 150\ cm$

ఉపరితల వైశాల్యం $= 5 \times 150 \times 150\ cm^2$

ప్రతి టైల్ వైశాల్యం = భుజం × భుజం $= 25 \times 25\ cm^2$

అందువలన కావలసిన టైల్స్ = $\frac{\text{ట్యాంక్ ఉపరితల వైశాల్యం}}{\text{ప్రతి టైల్స్ వైశాల్యం}}$

$= \frac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$

ఒక డజను టైల్స్ వెల = ₹ 360

అనగా 12 టైల్స్ వెల = ₹ $\frac{360}{12}$ = ₹ 30

అలాగయితే 180 టైల్స్ వెల = 180 × ₹ 30 = ₹ 5400

అభ్యాసం 13.1

1. 1.5m పొడవు, 1.25m వెడల్పు మరియు 65 cm లోతుగల ఒక ప్లాస్టిక్‌పెట్టె చేయాల్సిఉంది. దాని పైభాగం తెరువబడిఉంది. ప్లాస్టిక్ రేకు (షీటు) మందం గుర్తించండి.

(i) పెట్టె తయారు చేయడానికి కావలసిన ప్లాస్టిక్ షీటు వైశాల్యం.

(ii) 1 m^2 ప్లాస్టిక్ షీటుకు ₹ 20 చొప్పున, షీటుకు ఇవ్వవలసిన డబ్బును కనుగొనండి.

2. ఒక గది పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు వరుసగా 5m, 4m మరియు 3m గది గోడలకు మరియు పైకప్పు (ceiling) లోపలి ఉపరితలానికి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 7.50 చొప్పున సున్నం పూయడానికి అగు ఖర్చు కనుగొనండి.

3 దీర్ఘ చతురస్రాకారంలోగల సభాభవనం నేల చుట్టు కొలత 250m సభాభవనం నాలుగు గోడలను ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 10 చొప్పున రంగులు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు ₹ 15000 అయితే, సభాభవనం ఎత్తు కనుగొనండి.

(**సూచన:** నాలుగు గోడల వైశాల్యం = పార్శ్వ ఉపరితల వైశాల్యం)

4. ఒక డబ్బాలో గల రంగు 9.375 m^2 వైశాల్యానికి రంగు పూయడానికి సరిపోతుంది. ఈ డబ్బులోగల రంగు నుండి 22.5 cm × 10 cm × 7.5 cm కొలతలుగా ఎన్ని ఇటుకలకు రంగు వేయవచ్చు?

5. ఒక ఘనాకృతిగల పెట్టె యొక్క ప్రతి అంచు 10 cm మరియు మరొక దీర్ఘఘనాకృతి పెట్టె 12.5 cm పొడవు, 10 cm వెడల్పు మరియు 8cm ఎత్తు ఉంది.

(i) వాటిలో ఏ పెట్టె ఎక్కువ పార్శ్వ ఉపరితల వైశాల్యం కల్గియుంది. మరియు ఎంత ఎక్కువగా ఉంది?

(ii) వాటిలో ఏ పెట్టె తక్కువ పార్శ్వ ఉపరితల వైశాల్యం కల్గియుంది. అలాగే ఎంత తక్కువ ఉంది?

6. ఒక చిన్న ఇండోర్ సస్యసేకతరణాలయం(మూలికలగది)(herbarium) అడుగుభాగంతో పాటు సంపూర్ణంగా గాజు ఫలకలతో టేపుతో అంటించి చేయబడింది. అది 30 cm పొడవు, 25 cm వెడల్పు మరియు 25 cm ఎత్తు ఉంది

(i) గాజు ఫలకల వైశాల్యం ఎంత?

(ii) అన్ని 12 అంచులకు కావలసిన టేపు ఎంత?

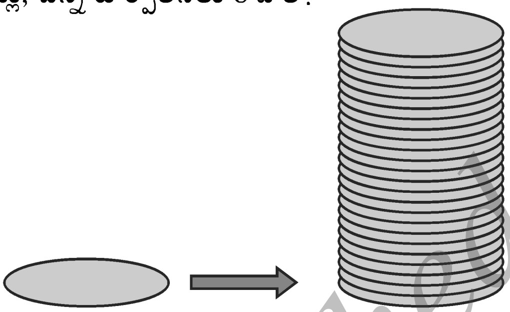
7. శాంతి మిఠాయి దుకాణం వారు తీపు పదార్థాలను కట్టడానికి కార్డ్ బోర్డు డబ్బాను చేయడానికి చెప్పారు. వారికి రెండు కొలతల డబ్బాలు కావాలి. అందులో పెద్ద డబ్బా కొలత 25cm × 20 cm × 5 cm మరియు చిన్న డబ్బా కొలత 15 cm × 12 cm × 5 cm వాటిని మడిచి డబ్బా చేయడానికి డబ్బా పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం 5% ఎక్కువ కార్డ్‌బోర్డ్ అంచులు కావాలి. కార్డ్‌బోర్డ్ వెల ప్రతి 1000 cm^2 కు ₹ 4 అయితే, ప్రతి రకం 250 డబ్బాలను పూర్తిచేయడానికి కావలసిన కార్డ్ బోర్డ్ వెలను కనుగొనండి.

8. పర్వీన్ ఆమె కారు నిలపడానికి ఒక తాత్కాలిక ఆశ్రయం (Shelter) చేయాల్సి ఉంది. ఇది కారు యొక్క నాలుగు భాగాలు మరియు పైభాగాన్ని మూసే రీతిలో టార్పాలిన్ తో పెట్టె ఆకారంలో చేయబడింది. (ముందుభాగాన్ని చుట్టుతూ పైకి ఎత్తునట్లు చేశారు). దాని కుట్టే

అంచు చాలా చిన్నది. అనుకొని దానిని గణనకు తీసుకబడింది. ఆశ్రయం ఎత్తు 2.5 m దాని పొడవు కొలత 4 m × 3 m ఉండునట్లు, ఎన్ని టార్పాలిన్‌లు కావాలి?

13.3 వృత్తాకార సిలిండర్ ఉపరితల వైశాల్యం

కాగితంతో తయారుచేసిన వృత్తాకార కాగితాలను తీసుకుందాం. వాటిని ఒకదానిపై ఒకటి ముందుగా దీర్ఘ చతురస్రాకార కాగితాలను అమర్చినట్లు అమర్చుదాం. మనకు ఏమి లభిస్తుంది? (చిత్రం 13.6 చూడండి)



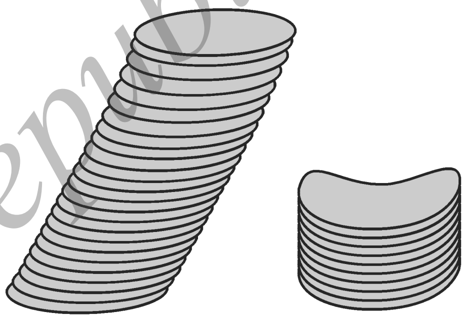
చిత్రం 13.6

ఇక్కడ మనం ఒకదాని మీద మరొకటి లంబంగా పేర్చినచో ఏర్పడు ఆకృతిని నిటారు సిలిండర్ అని పిలుస్తాం. ఎందుకనగా పాదం వృత్తాకారంలో మరియు వాటిని పాదానికి లంబకోణంలో పెట్టిబడినవి.

ఇప్పుడు మనం ఏ రకం సిలిండర్ వృత్త పాదం నేరు(నిటారు) సిలిండర్ కాదని చూద్దాం.

చిత్రం 13.7లో మీరు ఒక విధమైన వృత్తపాదం సిలిండర్ చూస్తున్నారు. అయితే, ఇది పాదానికి లంబకోణంలో లేదు. అందువలన మనం దానిని వృత్తపాద నిటారు(నేరు) సిలిండర్ అని పిలువరాదు.

మీ దగ్గర వృత్తాకారంలోని పాదం కల్గిన సిలిండర్ ఉన్నచో, చిత్రం 13.7(b) లో చూపినట్లుగా ఖచ్చితంగా మీరు దానిని వృత్తాకార నిటారు సిలిండర్ అని పిలువరాదు.

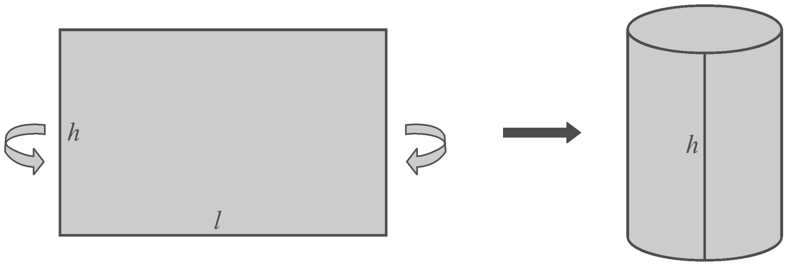


(a) (b)

చిత్రం 13.7

గమనించండి : గమనించండి : ఇక్కడ మనం కేవలం వృత్తపాద నిటారు(నేరు) సిలిండర్ గురించి చర్చిస్తున్నాం. అందువలన చెప్పాలే మినహా సిలిండర్ అని తెలుసుకోవాలి.

ఇప్పుడు సిలిండర్‌ను రంగుకాగితంతో కప్పాల్సి ఉంది. దీనిని మనం తక్కువ వైశాల్యపు కాగితం ఉపయోగించి చేయడం ఎలా? ముందుగా దీర్ఘ చతురస్రాకార కాగితాన్ని తీసుకోండి. దాని పొడవు సిలిండర్ చుట్టడానికి ఒకసారి చుట్టూ వచ్చునట్లు మరియు దాని వెడల్పు సిలిండర్ ఎత్తుకు చిత్రం 13.8 లో చూపినట్లుగా సమానంగా ఉండాలి .



చిత్రం 13.8

కాగితం వైశాల్యం సిలిండర్ యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యాన్ని ఇస్తుంది. కాగితం పొడవు సిలిండర్ యొక్క వృత్తాకార పాదం పరిధికి సమానంగా ఉంటుంది. అది $2\pi r$ కు సమానం.

అందువలన సిలిండర్ యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం =

= పొడవు x వెడల్పు

= సిలిండర్ పాదపు వృత్త పరిధి x h

$= 2\pi r \times h$

అందువలన, **సిలిండర్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం = $2\pi rh$**

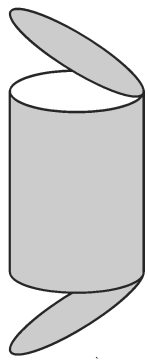
ఇందులో r సిలిండర్ పాదపు వ్యాసార్థం మరియు h సిలిండర్ ఎత్తు.

గమనించండి : సిలిండర్‌కు సంబంధించి వేరే ఏదో చెప్పాడు. తప్పు సిలిండర్ వ్యాసార్థం అనగా సిలిండర్ పాదపు వ్యాసార్థం. అని అర్థం.

సిలిండర్ యొక్క పైభాగం మరియు కిందిభాగాన్ని కూడా పొందవలసివుంది. మనకు r వ్యాసార్థంగల ఇంకా రెండు వృత్తాలు (ఖచ్చితంగా వృత్తాకార ప్రదేశం కావాలి. ప్రతి వృత్త వైశాల్యం πr^2 ఉంటుంది. (చిత్రం 13.9 గమనించండి) దీనివలన మనకు పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$ లభిస్తుంది.

అందువలన, **సిలిండర్ పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం = $2\pi r(r+h)$**

ఇక్కడ r సిలిండర్ యొక్క పాదపు వ్యాసార్థం మరియు h సిలిండర్ ఎత్తు



చిత్రం 13.9

గమనించండి : మీరు మొదటి అధ్యాయం నుండి π ఒక భాగలబ్ధ సంఖ్య అనే దానిని గుర్తించుకోండి అందువలన π విలువ అంత్యం చెందని పునరావర్తనం కాని దశాంశ సంఖ్య

అయితే, మనం మన లెక్కలో దాని విలువన సుమారుగా $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14 గా తీసు కుంటాం.

ఉదాహరణ 3 : సావిత్రి విజ్ఞాన యోజన (Project) కొరకు సిలిండర్ ఆకారపు వివిధ చిత్ర దర్శక (Kaleidoscope) నమూనా చేయవలసి ఉంది. ఆమె చార్టు కాగితాన్ని కెలిడో స్కోప్ వక్ర ఉపరితల

వైశాల్యంగా ఉపయోగిస్తుంది.(చిత్రం 13.10 చూడండి). ఆమె కెలిడొస్కోప్ పొడవు 25 cm మరియు దాని వ్యాసార్థం 3.5 cm ఉండునట్లు చేయడానికి ఆమెకు కావలసిన చార్టు కాగితం వైశాల్యం ఎంత? మీరు $\pi = \frac{22}{7}$ అని తీసుకోండి.

సాధన : సిలిండరాకారపు కెలిడోస్కోప్ పాదపు వ్యాసార్థం r = 3.5 cm

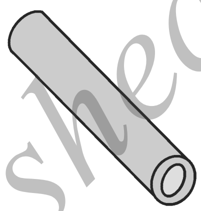
కెలిడోస్కోప్ ఎత్తు (పొడవు) h = 25 cm

కావలసిన చార్టు కాగితం వైశాల్యం = కెలిడోస్కోప్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం

$$= 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25\text{cm}^2$$

$$= 550 \text{ cm}^2$$

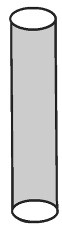


చిత్రం 13.10

అభ్యాసం 13.2

(π కు ఇతర విలువ ఇవ్వనిచో $\pi = \frac{22}{7}$ అని ఊహించుకోండి(భావించుకోండి.)

1. వృత్తపాద లంబ సిలిండర్ ఎత్తు 14 cm మరియు దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం 88 cm^2 సిలిండర్ పాదపు వ్యాసం కనుగొనండి.
2. లోహకు రేకుతో 1m ఎత్తు మరియు 140 cm వ్యాసం ఉండునట్లు ఒక మూసిన సిలిండరాకార నీటి తొట్టిని చేయాల్సి ఉంది. దీనికొరకు కావలసిన లోహపు రేకును చదరపు మీటర్లలో తెల్పండి.
3. లోహపు గొట్టము 77 cm పొడవు ఉంది. దాని లోపలి వ్యాసం 4 cm, బయటి వ్యాసం 4.4 cm అయితే. (చిత్రం 13.11 చూడండి) దాని
   (i) లోపలి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం
   (ii) బయటి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యర
   (iii) పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

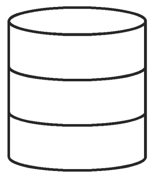


చిత్రం 13.11

4. ఒక రోలర్ వ్యాసం 84 cm మరియు దాని పొడవు 120 cm ఉంది. ఆట మైదానం మీద ఒక సారి చుట్టిన తలం చేయడానికి అది 500 పూర్తి చుట్లు తీసుకుంటుంది. ఆట మైదానం వైశాల్యాన్ని చదరపు మీటర్లలో కనుగొనండి.
5. సిలిండరాకార స్థూపం వ్యాసం 50 cm మరియు దాని ఎత్తు 3.5 m స్థూలం వక్ర ఉపరితల వైశాల్యానికి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 12.50 దర చొప్పున రంగువేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.
6. వృత్తాకార లంబ(నిటారు) సిలిండర్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం 4.4 m^2 సిలిండర్ పాదపు

వ్యాసార్ధం 0.7 m అయితే, దాని ఎత్తును కనుగొనండి.

7. వృత్తాకార బావిలోపలి వ్యాసం 3.5 m దాని లోతు 10 m.
   (i) దాని లోపలి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం
   (ii) దాని లోపలి వక్ర ఉపరితలానికి ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 40 చొప్పున గార (Plastering) వేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.
8. నాటిని వేడిచేయు (కాంచు) ఒక వ్యవస్థలో, 28 m పొడవుగల సిలిండరాకార గొట్టము ఉంది. మరియు దాని వ్యాసం 5 cm ఈ వ్యవస్థలో మొత్తం వికిరణాలు వెలుపలికి వెదజల్లు వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.
9. (i) సిలిండరాకార పెట్రోల్ సేకరించు తొట్టి వ్యాసం 4.2 m మరియు ఎత్తు 4.5 m ఉన్నచో , దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం.
   (ii) ఈ పెట్రోల్ తొట్టిని చేయునప్పుడు $\frac{1}{12}$ అంత ఉపయోగించిన స్టీల్ వ్యర్థమైనచో వాస్తవంగా ఉపయోగించిన స్టీల్ ఎంత?
10. చిత్రం 13.12లో, మీరు దీపపు కాంతిని చీకటి (మబ్బు) చేయు జ్వాల చూసిఉంటారా. దీనిని అలంకార బట్టతో కప్పవలసి ఉంది. ఈ సిలిండరాకార జ్వాల వ్యాసం 20 cm మరియు ఎత్తు 30 cm జ్వాలకు ఉపరితలలో మరియు కిందిభాగంలో రెండు వైపుల బట్టను పడవడానికి వచ్చునట్లు 2.5 cm అంచునూ వ్వబఉనంది దీనికొరకు దీప జ్వాలను కప్పడానికి కావలసిన బట్ట ఎంత?



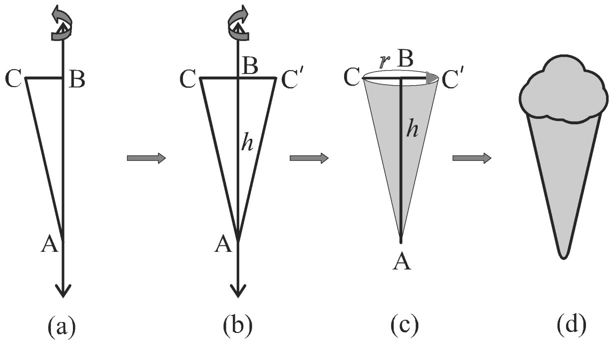
చిత్రం 13.12

11. పాఠశాల విద్యార్థులకు కార్డ్ బోర్డ్ తో చేసిన సిలిండరాకారపు మరియు అడుగుభాగం కలిగిన పెన్ హోల్డర్ (పెన్నులు ఉండే పెట్టె) ను అలంకరించు పోటీలో పాలొనేవారికి పాఠశాల సమకూర్చుతుంది. ప్రతి పెన్‌హోల్డర్ వ్యాసార్ధం 3 cm మరియు ఎత్తు 10.5 cm ఉండాలి. పోటీలో 35 మంది పోటీదారులున్నచో, పోటీకి తేవలసిన కార్డ్ బోర్డ్ వైశాల్యం కనుగొనండి.

13.4 వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యం

మనం ఇది వరకు సర్వసమానమైన ఆకారాలను ఒక దానిపై మరొకటి పెట్టడం ద్వారా ఘనాకృతులను నిర్మించాం. ఈ ఘనాకృతులను 'పట్టకా' (**prisms**)లు అని పిలుస్తాం. ఇప్పుడు మనం మరొక మాదరి, అయితే పట్టకం కాని ఘనాకృతులను చూద్దామా (ఈ మాదరి ఘనాకృతులను గోపురాలు (pyramid) అని పిలుస్తాం. ఇప్పుడు మనం వాటిని ఎలా నిర్మాణం చేయవచ్చో చూద్దాం.

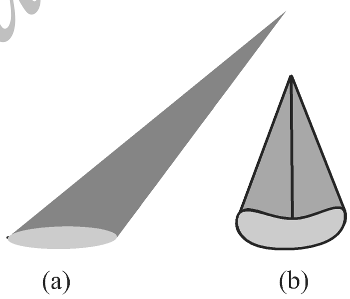
కార్యాచరణం : లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో B కోణం లంబకోణం ఉండునట్లు కత్తరించుకోండి. లంబ కోణం పొందిన ఒక భుజానికి పొడవుగా, మందంగా గల ఒక తంతిని అంటించండి. [చిత్రం 13.13 (*a*) చూడండి]. భుజాన్ని AB అని తెలుసుకోండి. త్రిభుజం రెండు వైపుల చేతిలో తంతిని పట్టుకోండి. తంతిని అక్షంగా చేసుకొని త్రిభుజాన్ని చాలాసార్లు త్రిప్పండి. ఇప్పుడు ఏమవుతుంది? తంతి చుట్టూ త్రిభుజాన్ని త్రిప్పినప్పుడు ఏర్పడు ఆకారాన్ని మీరు గుర్తించగలరా? [చిత్రం 13.3 b చూడండి] ఇలాంటి ఆకారాలలో ఐస్‌క్రీమ్‌ను గోపురం లాగా వేసుకొని, గతంలో తిన్నదాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. [చిత్రం 13.3 (c) మరియు (d) చూడండి].



చిత్రం 13.13

దీనిని వృత్తాకార లంబ(నిటారు) శంఖువు అని పిలుస్తారు. వృత్తాకార శంఖువు యొక్క చిత్రం 13.13 (c)లో A బిందువును శీర్షం, AB ని ఎత్తు, BC ని వ్యాసార్ధం మరియు AC ని శంఖువు మొత్తు ఏటవాలు ఎత్తు అని అంటారు. ఇక్కడ B బిందువు శంఖువు యొక్క వృత్తాకార పాదపు వ్యాసార్ధం. శంఖువు యొక్క ఎత్తు, వ్యాసార్ధం మరియు ఏటవాలు ఎత్తును సాధారణంగా h, r మరియు l తో వరుసగా సూచిస్తారు.

ఇప్పుడు మనం ఏ రకపు శంఖువును వృత్తాకార లంబ శంఖువో అను దానిని చూద్దాం చిత్రం 13.14 చూడండి ఈ చిత్రంలో మీరు చూస్తున్న ఆకృతి వృత్తాకార లంబ శంఖువు కాదు. ఎందుకనగా చిత్రం(a) లో శీర్ష బిందువు మరియు పాద కేంద్రాన్ని కలుపు (ఖండించు) రేఖ పాదంతో లంబకోణంతో ఏర్పడదు. చిత్రం (b) లో పాదం వృత్తాకారంలో లేదు.



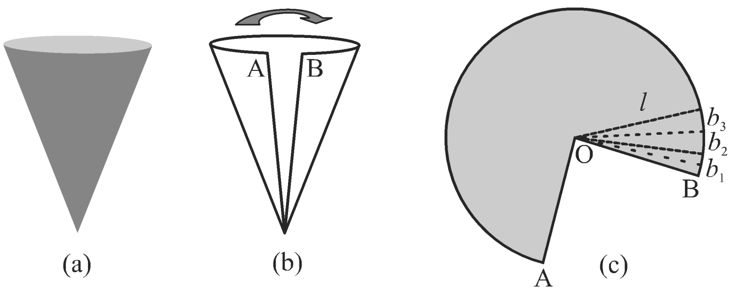
చిత్రం 13.14

సిలిండర్‌లో ఉన్నట్లు, మనం ఇక్కడ కేవలం వృత్తపాద లంబ శంఖువు గురించి మాత్రమే చదివాం. ఈ అధ్యాయంలో శంఖువు అనగా వృత్తాకార లంబ(నిటారు) శంఖువు అని అర్ధం. అను దానిని మీరు జ్ఞాపకముంచుకోండి..

కార్యాచరణం :

(i) కాగితం ఒకదానిపై మరొకటి వ్యాపించినట్లు కాగితంతో సరిగ్గా చేసిన శంఖువును సరళరేఖలో ప్రక్కప్రక్కలో కత్తిరించండి. కాగితాన్ని వదిలి, శంఖువు ఉపరితల ఆకారాన్ని కాగితం మీద చూడండి. (మీరు శంఖువును కత్తరించిన రేఖను శంఖువు వాలుతలం ఎత్తు అవుతుంది. దానిని l తో చూపుతాం). ఇది వృత్తాకారపు కత్తిరించిన కేకు భాగం చూసినట్లు ఉంటుంది.

(ii) చిత్రం 13.15 (c) భుజం తుదిలో గుర్తించిన, A మరియు B భుజాలను మీరు దగ్గరకు తీసుకొని వస్తే, చిత్రం 13.15(c) లోగల వక్ర భాగం శంఖువుయొక్క వృత్తాకార పాదాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. అని మీరు చూసి ఉండవచ్చు.



చిత్రం 13.15

(iii) చిత్రం 13.15 (c) లో ఉన్న ఆకారపు కాగితాన్ని 'O' బిందువు నుండి గీచిన రేఖ పొడవుకు వందలాది చిన్న ముక్కలుగా కత్తరించినచో, ప్రతి మొక్క భాగం చాలా మటుకు చిన్న త్రిభుజంగా ఉంటుంది. దీని ఎత్తు శంఖువుయొక్క వాలుతలం ఎత్తు అవుతుంది. .

(iv) ఇప్పుడు ప్రతి త్రిభుజం వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ త్రిభుజం యొక్క ప్రతిపాదం $\times l$

అందువలన మొత్తం కాగితం వైశాల్యం

= చిన్న త్రిభుజాలన్నింటి వైశాల్యాల మొత్తం

$= \frac{1}{2} b_1 l + \frac{1}{2} b_2 l + \frac{1}{2} b_3 l + \ldots\ldots$

$= \frac{1}{2} l [b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots]$

$= \frac{1}{2} l$ [చిత్రం 13.15 (c) మొత్తం వక్రం సరిహద్దు రేఖ పొడవు]

($b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots$ చిత్రంలోని వక్రభాగ సరిహద్దు రేఖను సూచిస్తుంది).

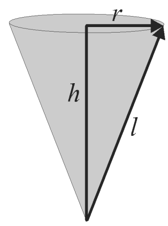
అయితే, చిత్రంలోని వక్రభాగం సరిహద్దు రేఖ శంఖువు యొక్క పాదవు చుట్టుకొలత అవుతుంది. శంఖువు యొక్క పాదవు పరిధి $= 2\pi r$, ఇక్కడ r శంఖువు యొక్క పాదవు వ్యాసార్థం.

అందువలన, **శంఖువుయొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l$**

ఇక్కడ, r దాని పాదవు వ్యాసార్థం మరియు l దాని వాలుతలం ఎత్తు.

గమనించండి : $l^2 = r^2 + h^2$ (చిత్రం 13.16 లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని అన్వయించినప్పుడు దీనిని చూడండి. ఇక్కడ h శంఖువు ఎత్తు అవుతుంది.

అందువలన $l = \sqrt{r^2 + h^2}$



చిత్రం 13.16

ఇప్పుడు శంఖువు పాదం ఆవృతం కావాలంటే వృత్తపు వ్యాసార్థం r గల

వృత్తాకార కాగితం కావాలి. దీని వైశాల్యం πr^2 ఉంటుంది

అందువలన,

శంఖువు పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi rl + \pi r^2$

$= \pi r (l + r)$

ఉదాహరణ 4 : వృత్తాకార లంబ శంఖువు యొక్క వాలుతలం ఎత్తు 10 cm మరియు పాదపు వ్యాసార్థం 7 cm ఉన్నచో శంఖువుయొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \ cm^2$$

$= 220 \text{ cm}^2$

ఉదాహరణ 5 : శంఖువు యొక్క ఎత్తు 16 cm మరియు దాని పాదపు వ్యాసార్థం 12 cm. శంఖువు యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం మరియు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ అని ఉపయోగించండి)

సాధన : ఇక్కడ $h =$ 16 cm మరియు $r = 12$ cm

అందువలన, $l^2 = h^2 + r^2$ నుండి

$l = \sqrt{16^2 + 12^2}$ cm = 20 cm

వక్ర ఉపరితల వైశాల్యర $= \pi rl$

$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{cm}^2$

$= 753.6 \text{ cm}^2$

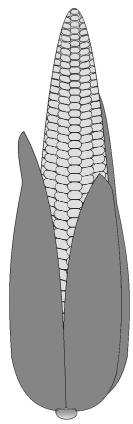
కొనసాగించి సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi rl + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{cm}^2$

$= (753.6 + 452.16) \text{ cm}^2$

$= 1205.76 \text{ cm}^2$

ఉదాహరణ 6 : మొక్కజొన్న కంకి శంఖువు ఆకారంలో ఉంది. దాని వెడల్పాటి భాగపు వ్యాసార్థం 2.1 cm దాని పొడవు (ఎత్తు) 20 cm ఉంది దాని ప్రతి యొక్క 1cm^2 వైశాల్యం సరాసరి 4 మొక్కజొన్న గింజలున్నచో మొక్క జొన్న కంకిలో ఉండు మొత్తం గింజలు కనుగొనండి.



చిత్రం 13.17

సాధన : మొక్కజొన్న కంకిలోని గింజలు దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యంలో మాత్రమే కనబడుతాయి అందులో ఉండవలసిన మొత్తం గింజలను కనుగొనడానికి మనం మొక్క జొన్న కంకి యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనాలి ఈ ప్రశ్నలో మనకు ఎత్తు ఇవ్వబడింది. అయితే, మనం వాలుతల ఎత్తును లెక్కించాలి .

ఇక్కడ $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ cm

$= \sqrt{404.41}$ cm

$= 20.11$ cm

అందువలన కంకి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 \text{cm}^2 = 132.726 \text{ cm}^2$

$= 132.73 \text{ cm}^2$ (సుమారుగా)

1cm^2 ఉపరితలం వైశాల్యంలో ఉండవలసిన గింజల సంఖ్య = 4

అందువలన, కంకి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యంలో ఉండవలసిన గింజల సంఖ్య $= 132.73 \times 4$

$= 530.92$

$= 531$ (సుమారుగా)

మొక్కజొన్న కంకిలో ఉండవలసిన మొక్కజొన్నలు 531.

అభ్యాసం 13.3

(π కి వేరే ఏ విలువ ఇవ్వనిచో $\pi = \frac{22}{7}$ గా పరిగణించండి.)

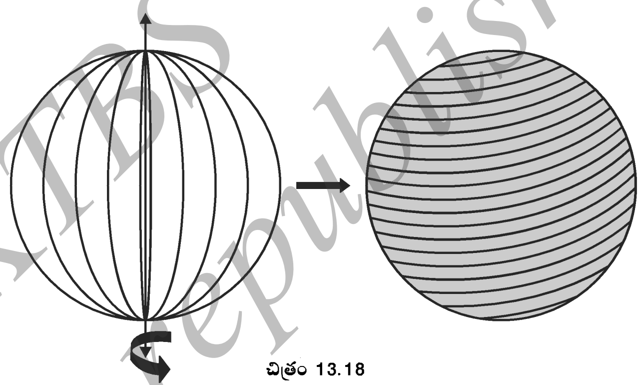
1. ఒక శంఖువు యొక్క పాదపు వ్యాసం 10.5cm మరియు దాని వాలుతలం ఎత్తు 10cm ఉంది. దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.
2. ఒక శంఖువు యొక్క వాలుతలం ఎత్తు 21 m మరియు దాని పాదపు వ్యాసం 24 cm అయితే, శంఖువు యొక్క సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.
3. ఒక శంఖువు యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం 308 cm^2 మరియు దాని వాయుతలం ఎత్తు 14 cm శంఖువు యొక్క
   (i) పాదపు వ్యాసార్థం.
   (ii) సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.
4. ఒక శంఖువాకార డేరా ఎత్తు 10 m మరియు దాని పాదపు వ్యాసార్థం 24 m
   (i) శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు
   (ii) 1 m^2 గుడారం వస్త్రం (canvas) వెల ₹ 70. అయినచో డేరాను గుడారం వస్త్రం (canvas) తో చేయడానికి కావలసిన ఖర్చు కనుగొనండి.
5. శంఖువాకార డేరా ఎత్తు 8 m మరియు దాని పాదపు వ్యాసార్థం 6 m గల డేరాను 3 m వెడల్పుగల టార్పాలిన్‌తో చేయడానికి కావలసిన పడవు ఎంత? డేరాను కుట్టించడానికి కావలసిన ఎక్కువ టార్పాలిన్ అధికపాడవు 20 cm అయువుంటుందని తెలుసుకుందాం.. (π = 3.14 అని ఉపయోగించండి)
6. ఒక శంఖువాకార స్మారకపు వాటి తలం ఎత్తు మరియు పాదపు వ్యాసం 25 m మరియు

14 m వరుసగా ఉంది. దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యాన్ని ప్రతి 100 m^2 చదరపు మీటర్లకు ₹ 210 చొప్పున సున్నం పూయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.

7. ఒక హాస్యకారుని టోపి వృత్తాకార లంబ శంఖువాకారంలో ఉంది. దాని పాదపు వ్యాసార్థం 7 cm మరియు ఎత్తు 24 cm అయితే, అలాంటి 10 టోపీలను తయారు చేయడానికి కావలసిన కాగితం వైశాల్యం కనుగొనండి.

8. పునర్నిర్మాణం చేసిన కార్డ్ బోర్డుతో తయారు చేసిన 50 టొళ్ళుగల (బోలు) శంఖువులతో బస్సు నిలయాన్ని రోడ్డునుండి వేరుగా గుర్తించపానికి పెట్టడమైనది ప్రతి శంఖువు పాదపు వ్యాసం 40 cm మరియు ఎత్తు 1 m ఉంది దాని వెలుపలి భాగాన్ని రంగు వేయాల్సిఉంది. మరియు ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు 1 m^2 ₹ 12 ఖర్చవుతుంది. ఈ శంఖువులన్నింటిని రంగులు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి ($\pi = 3.14$ మరియు $\sqrt{1.04} = 1.02$ అని ఉపయోగించండి.)

13.5 గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం



చిత్రం 13.18

గోళం అనగానేమి? గోళం మరియు వృత్తం రెండు కూడా ఒకటేనా? మీరు కాగితం మీద వృత్తం గీయగలరా? ఔను మీరు గీయవచ్చు. ఎందుకనగా వృత్తం ఒక ఆవృతమైన ఆకృతి. దాని పైనగల బిందువులన్ని నిర్దిష్ట బిందువునుండి స్థిరవైన దూరంలో ఉన్నాయి. ఈ స్థిరదూరాన్ని వ్యాసార్థం మరియు స్థిర బిందువును వృత్తకేంద్రం అని అంటారు. ఇప్పుడు మీరు ఒక తంతిని దాని వ్యాసానికి అంటించండి. వెనుక భాగంలో త్రిభుజాన్ని త్రిప్పినట్లు ఈ వృత్తాన్ని త్రిప్పండి. ఇప్పుడు మీరు క్రొత్త ఘనాకృతిని చూస్తారు. అది ఏ ఘనాకృతిని పోలివుంది? అది బంతి? అవును దీనిని గోళం అని అంటారు.

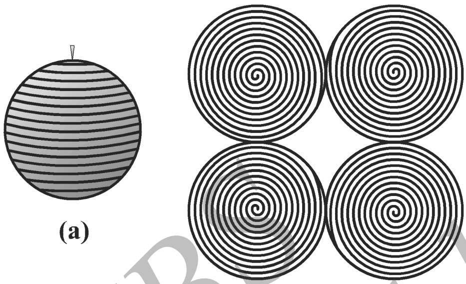
వృత్తాన్ని త్రిప్పడం వలన ఏర్పడిన గోళంలో వృత్తకేంద్రం ఏమవుతుందో మీరు ఊహించగలరా? ఖచ్చితంగా అది గోళపు కేంద్రం అవుతుంది. అందువలన ఒక గోళం **మూడు పరిమాణాత్మక (మితీయ) ఆకృతి (త్రిమితీయ ఆకృతి) దాని బిందువులన్ని అవకాశంలో స్థిర బిందువునుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి. స్థిర బిందువును గోళపుకేంద్రం మరియు స్థిర దూరాన్ని గోళపు వ్యాసార్థం అని అంటారు.**

గమనించండి : గోళం బంతి ఉపరితలంలాగా ఉంటుంది. ఘనగోళం అను పదాన్ని గోళపు ఉపరితలం అని అర్థంలో ఉపయోగించబడుతుంది.

కార్యాచరణం : మీరు ఎప్పుడైనా బొంగరంతో ఆట్లాడారా? లేదా వేరేవారు బొంగరం ఆట ఆట్లాడుచుండుటను మీరు చూశారా? బొంగరానికి తాడు ఎలా చుట్టుతారు అని మీకు తెలిసి ఉండాలి. ఇప్పుడు మీరు ఒక రబ్బరు బంతిని తీసుకోండి. దానికి ఒక చిన్న మేకును భద్రంగా గుచ్చుదాం. మేకును ఆధారంగా పెట్టుకుని బంతి చుట్టూ దారం చుడదాం గుండుపిన్నులు ఉపయోగించి దారం జారకుండా బంతిని సంపూర్ణంగా దారంతో చుట్టండి. (చిత్రం 13.19 (a)

చూడండి.) దారానికి ప్రారంభ మరియు అంతిమ బిందువును గుర్తు పెట్టండి. దారాన్ని నిధానంగా బంతి ఉపరితలం నుండి విప్పండి.

ఇప్పుడు ఉపాధ్యాయుల సహాయంతో మీరు బంతి వ్యాసం కొలవండి. దీనివలన మీరు సులభంగా వ్యాసార్థాన్ని కనుగొనవచ్చు. ఆ తరువాత కాగితంతో బంతి వ్యసార్థానికి సమానమైన వ్యాసార్థం కల్గియున్న నాలుగు వృత్తాలు గీయండి. బంతి చుట్టూ చుట్టిన దారాన్ని ఈ వృత్తాలకు ఒకదాని తరువాత మరొకటి చుట్టండి. [చిత్రం 13.19 (b) చూడండి]



(a) (b)

చిత్రం 13.19

దీనివలన మీరు ఏమేమి చూపినట్లయింది?

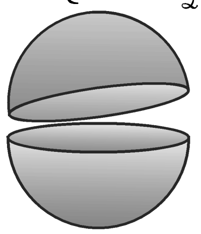
గోళం ఉపరితలం చుట్టూ సంపూర్ణంగా చుట్టిన దారాన్ని గోళపు వ్యాసార్ధానికి సమానంగా ఉన్న నాలుగు వృత్త ప్రదేశాలలో పూర్తిగా దారం వదులు కాకుండా చుట్టబడింది. ఇది ఏమి అర్థాన్నిస్తుంది?

వ్యాసార్థం r గల గోళం ఉపరితల వైశాల్యం = వ్యాసార్థం r గల వృత్తి వైశాల్యానికి 4 రెట్లు = $4 \times (\pi r^2)$

అందువలన, **గోళం ఉపరితల వైశాల్యం = $4\pi r^2$**

ఇక్కడ r గోళపు వ్యాసార్థం.

గోళం ఉపరి తలంలో ఎన్ని ముఖాలున్నాయో మీరు చూశారా? అది వక్రంగా ఉన్న కేవలం ఒక ముఖం ఇప్పుడు మనం ఒక గోళాకృతి తీసుకుని, దానిని దాని కేంద్రం ద్వారా మధ్యలో సాగిపోవునట్లు సరిగ్గా ఒక సమతలం కత్తిరించండి(విభజించండి). ఇప్పుడు గోళం ఏమి అవుతుంది? అవును అది రెండు సమాన భాగాలుగా కనిపిస్తోంది. (చిత్రం 13.20 చూడండి) ఈ ప్రతి అర్థ భాగాన్ని ఏమని అంటారు. వాటిని అర్థగోళం లేదా గోళార్థం (Hemi-sphere) అని అంటారు. (ఎందుకనగా Hemi అనగా అర్థం).



చిత్రం13.20

దాని ఉపరితల వైశాల్యం ఏమయి ఉంటుంది? అది ఎన్ని ముఖాలు కల్గియుంది? రెండు ! అందులో ఒకటి వక్రముఖం, మరొకటి సమతల ముఖం (పాదం)

అర్థగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం దాని గోళపు ఉపరితల వైశాల్యాన్ని అర్ధం మంత

ఉంటుంది.అనగా $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$

అందువలన, $\boxed{\textbf{అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం} = 2\pi r^2}$

ఇక్కడ, r అర్ధగోళం వ్యాసార్థంగల గోళంలోని భాగం.

ఇప్పుడు ఒక అర్ధగోళంలోని రెండు ముఖాలను తీసుకున్నప్పుడు, వాటి వైశాల్యం $2\pi r^2 + \pi r^2$

అందువలన, $\boxed{\textbf{అర్ధగోళపు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం} = 3\pi r^2}$

ఉదాహరణ 7 : వ్యాసార్థం 7 cm ఉన్న ఒక గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : వ్యాసార్థం 7 cm ఉన్న ఒక గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2$

$= 616 \text{ cm}^2$

ఉదాహరణ 8 : 21 cm వ్యాసార్థంగల ఒక అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం (i) వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం (ii) సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : 21 cm వ్యాసార్థంగల ఒక అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

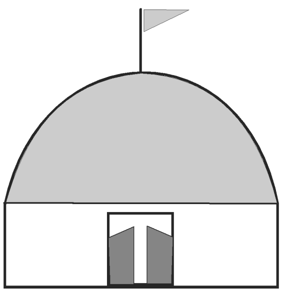
(ii) అర్ధగోళపు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$

ఉదాహరణ 9 : ఒక సర్కస్‌లోని మోటారు ద్విచక్ర వాహన సవారుడు అతని సాహసాలను టొళ్ళుగా (బోలుగా) ఉన్న గోళంలో చేసి చూపుతాడు. గోళపు వ్యాసం 7 m అయితే ద్విచక్ర వాహన సవారుదారునికి సవారికొరకు లభించు వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : గోళపు వ్యాసం = 7 m. అందువలన వ్యాసార్థం 3.5 m. ద్విచక్ర వాహన సవారుదారునికి సవారికొరకు లభించు స్థలం గోళపు ఉపరితల వైశాల్యానికి సమానంగా ఉంటుంది.

అది, $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$

ఉదాహరణ 10: ఒక భవనంలోని అర్ధగోళాకృతి ఉన్న గోపురానికి రంగు వేయవలసి ఉంది. (చిత్రం 13.21 చూడండి). గోపురం పాదం పరిధి 17.6 m ప్రతి 100 m² కు ₹ 5 చొప్పున రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చున కనుగొనండి.



చిత్రం 13.21

సాధన : గోపురం గుండ్రంగా ఉన్న ఉపరితలానికి మాత్రమే రంగు వేయాల్సి ఉన్నందున, మనం అర్ధగోళపు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుగొని, రంగు వేయవలసిన వైశాల్యాన్ని తెలుసుకోవాలి. ఇప్పుడు

గోపురం పరిధి = 17.6 m అందువలన, 17.6 m = $2\pi r$

గోపురం వ్యాసార్థం $= r = 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ m = 2.8 m

గోపురం వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం = $2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$$

$$= 49.28 \text{ m}^2$$

ఇప్పుడు, 100 cm^2 రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 5

1 m^2 రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 500

అందువలన, గోపురం సంపూర్ణంగా రంగు వేయడానికి

అయ్యే ఖర్చు = ₹ 500 × 49.28

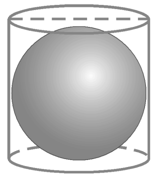
= ₹ 24,640

అభ్యాసం 13.4

(π కి వేరే ఏ విలువ ఇవ్వనిచో $\pi = \frac{22}{7}$ గా పరిగణించండి.)

1. కింది వ్యాసార్థాలుగల గోళం ఉపరితల వైశాల్యాలను కనుగొనండి.
   (i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm
2. కింది వ్యాసం గల గోళం ఉపరివైశాల్యాలను కనుగొనండి.
   (i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m
3. ఒక అర్ధగోళం వ్యాసార్థం 10 cm ఉంది. దాని సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి. (π = 3.14 ఉపయోగించండి)
4. ఒక గోళాకృతి బెలూన్‌కు గాలిని నింపడానికి దాని వ్యాసార్థం 7 cm నుండి 14 cm కు పెరుగుతుంది. ఈ రెండు ప్రకరణలలో బెలూన్ యొక్క ఉపరితల వైశాల్య నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
5. ఇత్తడితో తయారు చేసిన ఒక అర్ధగోళాకృతిగల పాత్ర లోపలి వ్యాసం 10.5 cm అయితే పాత్ర లోపలి భాగంలో కళాయి వేయడానికి ప్రతి 100 cm^2 కు ₹ 16 చొప్పున అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.
6. ఒక గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం 154 cm^2 అయితే, దాని వ్యాసార్థం కనుగొనండి.
7. చంద్రుని వ్యాసం అందాజుగా భూమిలో నాలుగింట ఒక భాగం అయిన, వాటి ఉపరితల వైశాల్యం నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
8. స్టీల్‌తో తయారు చేసిన అర్ధగోళాకారంలో గల పాత్ర మందం 0.25 cm ఉంది. ఆ పాత్ర లోపలి వ్యాసార్థం 5 cm. అయితే, దాని వెలుపలి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.
9. r ఒక వృత్తాకార లంబ(నిటారు) సిలిండర్ వ్యాసార్థం గల ఒక గోళాన్ని సరిగ్గా ఆవరించింది.

[చిత్రం 13.22 చూడండి].
(i) గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం,
(ii) సిలిండర్ యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం,
(iii) (i) & (ii) లోని వైశాల్యాల నిష్పత్తి కనుగొనండి.



చిత్రం 13.22

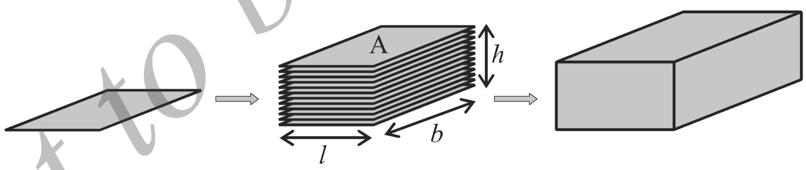
13.6 దీర్ఘ ఘనాకృతుల ఘన పరిమాణాలు

మీరు ఇదివరకే కొన్ని ఘనాకృతుల (వస్తువుల) ఘన పరిమాణాలను కనుగొనడం మీ వెనుకటి తరగతిలో నేర్చుకున్నారు. ఘనాకృతులు స్థళాలను ఆక్రమిస్తాయి. ఈ వస్తువులు ఆక్రమించు పరిమాణపు కొలతను ఆ వస్తువుల యొక్క **ఘనపరిమాణం** అని అంటారు.

గమనించండి : ఒక వస్తువు ఘనాకృతి అయినచో, అ ఆక్రమించు పరిమాణపు కొలతను కొలవబడుతుంది. దీనిని వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణం అని పేర్కొనండి. మరొకరీతిలో వస్తువు బోలుగా ఉన్నచో దాని లోపలి భాగం ఖాళీగా ఉంటుంది. దాని గాలితో లేదా వస్తువు ఆకారం పొంది ద్రవంతో నింపవచ్చు. ఈ ప్రక్రియలో దాని లోపలి భాగంలో నింపదగు వస్తువు యొక్క సామర్థ్యంను వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణం అని పిలుస్తారు. సంక్షిప్తంగా వస్తువు ఘనపరిమాణం. అది ఆక్రమించు పరిమాణపు కొలత, వస్తు సామర్థ్యం దాని లోపలి భాగంలో సేకరించదగు వస్తువు పరిమాణం (ఘనపరిమాణం) అవుతుంది. దీనివలన రెండు విధానాలలో దానిని కొలిచే ప్రమాణం ఘనపరిమాణం అవుతుంది.

అందువలన మనం దీర్ఘఘనపు ఘనపరిమాణం గురించి మాట్లాడినప్పుడు, మనం దీర్ఘఘనం స్థళంలో ఆక్రమించిన పరిమాణపు కొలత అని పరిగణించాలి.

కొనసాగి, వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణం ఒక క్షేత్రపు (ప్రాంతం) పరిమాణ కొలత అవుతుంది. దీనివలన సరిగ్గా చెప్పాలంటే, మనం వృత్తాకారక్షేత్ర వైశాల్యం లేదా దీర్ఘఘనాకృతి క్షేత్ర ఘనపరిమాణం లేదా వృత్తాకార క్షేత్ర ఘనపరిమాణం మొదలగు వాటిని కనుగొంటాం. అయితే, దీని అర్థం కేవలం వాటి సరిహద్దు రేఖలను సూచించునప్పటికీ సంక్షిప్తం కొరకు మీరు వృత్త వైశాల్యం కనుగొనండి. దీర్ఘఘనం లేదా గోళపు ఘనపరిమాణం కనుగొనండి అని చెప్పుతాం.



చిత్రం 13.23

చిత్రం 13.23 గమనించండి. ప్రతి దీర్ఘ చతురస్రాకార వైశాల్యం A అనుకోండి. దీర్ఘచతురస్రాలను ఒకదాని పై మరొకటి ఎత్తు h వరకు అమర్చబడింది. దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణం V అని అనుకోండి. మీరు V, A మరియు h ల మధ్య సంబంధం చెప్పగలరా?

ప్రతి దీర్ఘ చతురస్రం ఆవరించిన సమతల వైశాల్యం × ఎత్తు = దీర్ఘ ఘనాకృతినుండి స్థళాన్ని ఆవరించిన పరిమాణం అందువలన, మనకు $A \times h = V$

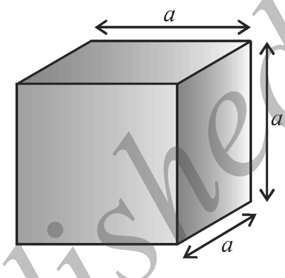
అనగా, **దీర్ఘఘనాకృతి ఘనపరిమాణం = అడుగు భాగం వైశాల్యం × ఎత్తు = పొడవు × వెడల్పు × ఎత్తు** $= l \times b \times h$,

ఇక్కడ l, b మరియు h వరుసగా పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను సూచిస్తున్నాయి..

గమనించండి :మనం స్థలం పరిమాణాన్ని కొలిచినప్పుడు, అనగా, స్థలంలో ఘనాకృతి ఆక్రమించిన కొలత. దీనిని మనం అందులో పొందుకునియున్న ప్రమాణ భుజంగల ఘనములను లెక్కించడం ద్వారా చేస్తాం. అందువలన ఘనపరిమాణాన్ని కొలచే ప్రమాణం ఘనమానం అవుతుంది.

అనగా, $\boxed{\text{ఘనపు ఘనపరిమాణం} = \text{భుజం} \times \text{భుజం} \times \text{భుజం} = a^3}$

ఇక్కడ 'a'అనునది ఘనపు అంచు పొడవు [చిత్రం 13.24 చూడండి]



చిత్రం 13.24

ఒక ఘనపు అంచు పొడవు 12 cm,

ఘనపు ఘనపరిమాణం $= 12 \times 12 \times 12 \text{ cm}^3$

$= 1728 \text{ cm}^3$

ఈ సూత్రాన్ని మీరు వెనుకటి తరగతిలో చదివి ఉండుటను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. ఇప్పుడు మనం కొన్ని ఉదాహరణలతో సూత్రాన్ని ఉపయోగించడం వివరిద్దాం.

ఉదాహరణ 11 : పొడవు 10 m గల ఒక గోడను మైదానంలో కట్టవలసిఉంది.గోడ ఎత్తు 4 m మరియు దాని మందం 24 cm ఉంది. ఈ గోడను 24 cm × 12 cm × 8 cm కొలతల ఇటుకలతో కట్టాల్సి ఉంది. దీనికి కావలసిన ఇటుకలను కనుగొనండి?

సాధన : అన్ని ఇటుకలలో కట్టిన గోడ స్థళాన్ని ఆక్రమిస్తుంది. మనం దీర్ఘ చతురస్రాకార గోడ ఘన పరిమాణాన్ని కనుగొనాల్సి ఉంది.

ఇక్కడ పొడవు $= 10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$

మందం $= 24 \text{ cm}$

ఎత్తు $= 4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$

అందువలన గోడ ఘనపరిమాణం = పొడవు × వెడల్పు× ఎత్తు

$= 1000 \times 24 \times 400 \text{ cm}^3$

ప్రతి ఇటుక కూడా ఒక దీర్ఘ ఘనాకృతి.

దాని పొడవు = 24 cm, వెడల్పు,= 12 cm మరియు ఎత్తు = 8 cm

అందువలన ఇటుక ఘనపరిమాణం = పొడవు × వెడల్పు × ఎత్తు

$= 24 \times 12 \times 8 \text{ cm}^3$

కావలసిన మొత్తం ఇటుకలు $= \dfrac{\text{గోడ ఘనపరిమాణం}}{\text{ప్రతి ఇటుక ఘనపరిమాణం}}$

$= \dfrac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8} = 4166.6$

గోడను కావలసిన మొత్తం ఇటుకలు = 4167

ఉదాహరణ 12 : ఒక బాలిక నిర్మించే (కట్టు) ఘనముల (building blocks) తో ఆడుకుంటోంది. చిత్రం 13.25 లో చూపినట్లుగా ఆకారంలో కడుతోంది. ప్రతి ఘనపు భుజం పొడవు 3 cm ఉంది. బాలిక కట్టిన ఆకారపు ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

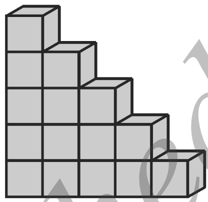
సాధన : ప్రతిఘనపు ఘన పరిమాణం = భుజం × భుజం × భుజం

$= 3 \times 3 \times 3 \text{ cm}^3 = 27 \text{ cm}^3$

ఆకారంలోగల మొత్తం ఘనములు = 15

అందువలన ఆకారంలోని ఘన పరిమాణం = $27 \times 15 \text{ cm}^3$

$= 405 \text{ cm}^3$



చిత్ర 13.25

అభ్యాసం 13.5

1. ఒక అగ్గిపెట్టె కొలత 4 cm × 2.5 cm × 1.5 cm ఇలాంటి 12 అగ్గిపెట్టెలుగల ఒక పొట్లం ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
2. దీర్ఘఘనాకృతి ఆకారంలోని నీటి తొట్టి 6 m పొడవు, 5 m వెడల్పు, 4.5 m లోతు ఉంది. అందులో ఎన్ని లీటర్ల నీరు పడుతుంది? ($1 \text{ m}^3 = 1000\ l$)
3. దీర్ఘ ఘనాకృతి ఆకారంలోని పాత్ర 10 m పొడవు మరియు 8 m వెడల్పు ఉంది. అందులో 380 ఘనమీటర్ల ద్రవం పట్టడానికి ఎంత ఎత్తు ఉండాలి?
4. దీర్ఘ ఘనాకృతి ఆకారపు గొయ్యి 8 m పొడవు, 6 m వెడల్పు మరియు 3 m లోతు ఉంది. దీనిని త్రవ్వడానికి ప్రతి ఘనపుమీటర్‌కు m^3 ₹ 30 చొప్పున గొయ్యి త్రవ్వడానికి అయ్యే ఖర్చు ఎంత?
5. దీర్ఘ ఘనాకృతి ఆకారంలోని నీటి తొట్టి సామర్థ్యం 50,000 లీటర్లు. దాని పొడవు వెడల్పు వరుసగా 10 m మరియు 2.5 m అయితే, దాని వెడల్పు కనుగొనండి.
6. ఒక గ్రామ జనాభా 4000 మంది. ఒకరోజుకు ప్రతి యొక్కరికి 150 లీటర్ల నీరు కావాలి గ్రామంలోగల తొట్టి కొలత 20 m × 15 m × 6 m ఉంది, అలాగయితే తొట్టిలోగల నీరు ఎన్ని రోజులకు సరిపోతుంది?
7. ఒక గోదాము కొలత 40 m × 25 m × 15 m ఉంది. దీనిలో 1.5 m × 1.25 m × 0.5 m కొలతలుగల కొయ్యడబ్బాలు (wooden crates) చాలా ఎక్కువగా ఉంచదగు వాటిని కనుగొనండి.
8. ఒక భుజం 12 cm గల ఘనమును ఎనిమిది సమాన ఘనపరిమాణాలు కలిగియున్న ఘనాలుగా కత్తరించినచో, వచ్చెడి క్రొత్త ఘనపు భుజం పొడవును కనుగొనండి. వాటి మధ్యగల ఉపరితల వైశాల్యపు నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
9. లోతు 3 m మరియు 40 m వెడల్పుగల ఒక నది ప్రతి గంటకు 2 కిలో మీటర్ల / వేగంగా ప్రవహిస్తుంది. సముద్రంలోనికి 1 నిమిషంలో ప్రవహించు నీటిని కనుగొనండి?

13.7 సిలిండర్ ఘనపరిమాణం

దీర్ఘ ఘనాకృతిని ఒకే కొలతగల దీర్ఘచతురస్రాలతో నిర్మించినట్లుగా మనం వృత్తాకారపు లంబ (నిటారు) సిలిండర్ ఒక కొలతలుగల వృత్తాలతో నిర్మించవచ్చు. మీరు దీర్ఘ ఘనాకృతులకు

ఉపయోగించిన చర్చలను సిలిండర్ ఘన పరిమాణం కనుగొనడానికి ఉపయోగించవచ్చు.

ఘనపరిమాణం = పాదపు వైశాల్యం × ఎత్తు

= వృత్తాకార పాదపు వైశాల్యం× ఎత్తు = $\pi r^2 h$

అనగా, **సిలిండర్ ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$**

ఇక్కడ r పాదపు వ్యాసార్ధం మరియు h సిలిండర్ ఎత్తు.

ఉదాహరణ 13 : ఒక గుడి స్తంభాలు సిలిండర్ ఆకారంలో ఉన్నాయి.[చిత్రం 13.26 చూడండి] ప్రతి స్తంభం వృత్తాకార పాదపు వ్యాసార్ధం20 cm మరియు ఎత్తు 10 m ఉన్నచో, ఇలాంటి 14 స్తంభాలను నిర్మించడానికి కావలసిన కాంక్రీట్ మిశ్రమం ఎంత?

సాధన : కాంక్రీట్ మిశ్రమం ఉపయోగించి నిర్మించిన స్తంభాలు, స్తంభంలోని సంపూర్ణ స్థళాన్ని ఆక్రమించు కుంటాయి. మనం ఇక్కడ సిలిండర్ ఘనపరిమాణం కనుగొనవలసి ఉంది.

ఒక సిలిండర్ పాదపు వ్యాసార్ధం = 20 cm

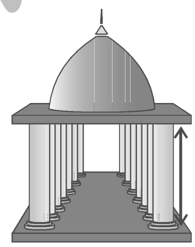
సిలిండర్ ఆకారపు స్తంభం ఎత్తు = 10 m = 1000 cm

ప్రతి సిలిండర్ ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000 \text{ cm}^3$

$= \frac{8800000}{7} \text{ cm}^3$

$= \frac{8.8}{7} \text{ m}^3$ [$\because$ 1000000 cm^3 = 1m^3]



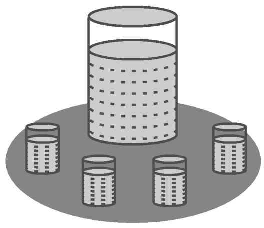
చిత్రం 13.26

అందువలన, 14 స్తంభాల ఘనపరిమాణం = ప్రతి సిలిండర్ ఘన పరిమాణం × 14

$= \frac{8.8}{7} \times 14 \text{ m}^3 = 17.6 \text{ m}^3$

అందువలన, 14 స్తంభాలకు 17.6 m^3 కాంక్రీట్ మిశ్రమం కావాలి.

ఉదాహరణ 14 : రంజాన్ మేళాలూ ఒక ఆహారపు అంగడి వాని దగ్గర 15 cm పాదపు వ్యాసార్ధం కల్గియున్న సిలిండర్ ఆకారపు పాత్రలో 32 cm ఎత్తుకు కమలా పండ్ల రసంనింపాడు చిన్న సిలిండర్ ఆకారపు 3 cm వ్యాసార్ధం మరియు 8 cm ఎత్తుకు పండ్లరసాన్ని నింపి ప్రతిలోటాకు ₹ 3 చొప్పున అమ్ముతున్నాడు. అంగడివాడు పండ్ల రసం సంపూర్ణంగా అమ్మిన తరువాత లభించు డబ్బు ఎంత?



చిత్రం 13.27

సాధన : పాత్రలోని పండ్లరసం ఘనపరిమాణం

= సిలిండర్ ఆకారపాత్ర ఘనపరిమాణం= $\pi R^2 H$

(ఇక్కడ R మరియు H లను పాత్రలోని వ్యాసార్ధంమరియు ఎత్తులు వరుసగా తీసుకోబడినవి.)

$= \pi \times 15 \times 15 \times 32 \text{ cm}^3$

అదేవిధంగా లోటాలో పట్టు పండ్ల రసం ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h$

(ఇక్కడ r మరియు h లను లోటా వ్యాసార్ధం మరియు ఎత్తు వరుసగా తీసుకోబడినవి)

$= \pi \times 3 \times 3 \times 8 \text{ cm}^3$

పండ్ల రసం ఉన్న లోటాలు మొత్తం అమ్మినది $= \dfrac{\text{పాత్ర ఘనపరిమాణం}}{\text{ప్రతి లోటా ఘనపరిమాణం}}$

$= \dfrac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8} = 100$

అందువలన, అంగడివానికి లభించిన డబ్బు $=$ ₹ $3 \times 100 =$ ₹ 300

అభ్యాసం 13.6

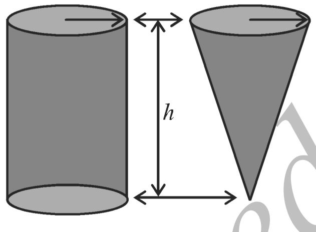
(π కి వేరే ఏ విలువ ఇవ్వనిచో $\pi = \frac{22}{7}$ గా పరిగణించండి.)

1. ఒక సిలిండర్ ఆకారపు పాత్ర పాదపు పరిధి 132cm మరియు ఎత్తు 25cm. దీనిలో పట్టు నీటి ప్రమాణాన్ని లీటర్లలో కనుగొనండి. ($1000 \text{ cm}^3 = 1 l$)
2. సిలిండర్ ఆకారపులోని ఒక కొయ్యగొట్టం లోపలి వ్యాసం 24 cm మరియు వెలుపలి వ్యాసం 28 cm. గొట్టం పొడవు 35 cm , 1 cm^3 కొయ్య 0.6 g ద్రవ్యరాశి కల్గియున్నచో, గొట్టం ద్రవ్యరాశిని కనుగొనండి.
3. శీతల పానీయం రెండు రకాల పొట్టణాలలో దొరుకుతుంది
   (i) దీర్ఘచతురస్రాకార పాదం కల్గిన ఒక టిన్ క్యాన్ పొడవు 5 cm, వెడల్పు 4 cm మరియు ఎత్తు 15 cm.
   (ii) ఒక ప్లాస్టిక్ సిలిండర్ యొక్క వృత్తాకార పాదపు వ్యాసం 7 cm మరియు ఎత్తు 10 cm వీటిలో ఏది ఎక్కువ సామర్థ్యం పొందింది? మరియు ఎంత ఎక్కువ?
4. ఒక సిలిండర్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం 94.2 cm^2 మరియు దాని ఎత్తు 5 cm.
   (i) పాదపు వ్యాసార్థం
   (ii) దాని ఘన పరిమాణం కనుగొనండి. (π = 3.14 ను ఉపయోగించండి)
5. 10 m లోతుగల ఒక సిలిండర్ ఆకార పాత్ర లోపలి ఉపరితలానికి రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు ₹ 2200. దానికి రంగు వేయడానికి ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 20 ఖర్చు అయితే,
   (i) పాత్ర లోపలి ఉపరితల వైశాల్యం (ii) పాదపు వ్యాసార్థం
   (iii) పాత్ర సామర్థ్యం(ఘనపరిమాణం) కనుగొనండి.
6. మూత మూసిన 1 m ఎత్తుగల సిలిండర్ ఆకార పాత్ర సామర్థ్యం 15.4 లీటర్లు. ఈ సిలిండర్‌ను తయారుచేయడానికి కావలసిన లోహపు రేకును చదరపు మీటర్లలో కనుగొనండి.
7. ఒక సీసపు కడ్డి (పెన్సిల్) సిలిండర్ ఆకారంలోని కొయ్యను పొందింది. దాని మధ్యలో లోపలి భాగంలో సిలిండర్ ఆకారపు ఘన గ్రాఫైట్ వ్యాసం 1 mm సీసపు కడ్డి పొడవు 14 cm అయితే, కొయ్య మరియు గ్రాఫైట్ ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
8. ఆసుపత్రిలో ఒక రోగికి ప్రతిరోజు 7 cm వ్యాసం కల్గిన సిలిండర్ ఆకారపు పాత్రలో సూప్

ఇస్తారు. ఈ పాత్రలో సూప్‌ను 4 cm ఎత్తుకు నింపి ఇచ్చినచో ప్రతిరోజు ఆసుపత్రిలోని 250 మంది రోగులకు తయారు చేయవలసిన సూప్‌ను లెక్కించండి .

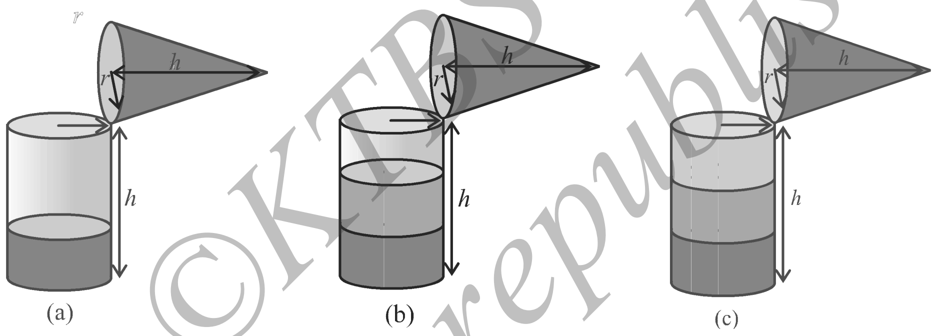
13.8 వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఘనపరిమాణం

చిత్రం 13.28లో వృత్తాకార లంబ సిలిండర్ మరియు వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఒకే పాదపు వ్యాసార్థం మరియు ఒకే ఎత్తు కలిగియుండుటను మీరు చూస్తున్నారు ?



చిత్రం 13.28

కార్యాచరణం : ఒకే పాదపు వ్యాసార్థం ఒకే ఎత్తు కల్గిన బోలుగా ఉన్న సిలిండర్ మరియు బోలుగా ఉన్న శంఖువు తయారు చేయడానికి ప్రయత్నించండి. [చిత్రం 13.28 చూడండి] ఆ తరువాత మనం వృత్తాకార లంబకోణ ఘనపరిమాణాన్ని ప్రయోగాత్మకంగా చూడటానికి ఒక ప్రయోగం చేద్దామా.



చిత్రం 13.29

మనం దానిని ఇలా ప్రారంభిద్దాం.

మనం శంఖువులో దాని తుదివరకు ఇసుకనింపి, దానిని సిలిండర్‌లో ఖాళీ చేయండి. అది సిలిండర్‌లో కేవలం కొద్ది భాగం నిండటం మీరు కనుగొంటారు. (చిత్రం 13.29(a) చూడండి)

మనం తిరిగి శంఖువు తుది వరకు నింపి, దానిని సిలిండర్‌లో ఖాళీ చేయండి. ఇప్పుడు కూడా సిలిండర్ పూర్తిగా నిండకపోవడం చూస్తారు. [చిత్రం 13.29 (b) చూడండి]

శంఖువును మూడవసారి నింపి సిలిండర్‌లో ఖాళీచేసినప్పుడు సిలిండర్ సంపూర్ణంగా తుదివరకు నిండుటను చూస్తాం. [చిత్రం 13.29 (c) చూడండి]

దీనివలన మనం ఎటువంటి అనుమానం లేకుండా శంఖువు ఘనపరిమాణపు మూడురెట్లు సిలిండర్ ఘనపరిమాణానికి సమానంగా ఉంటుంది అని నిర్ధారించవచ్చు. ఇక్కడ శంఖువుయొక్క మరియు సిలిండర్ యొక్క పాదపు వ్యాసార్థం మరియు ఎత్తు సమానంగా ఉండాలి. దీని అర్థం శంఖువు ఘనపరిమాణం సిలిండర్ పరిమాణపు మూడింట ఒక భాగం ఉంటుంది.

అయితే, $\boxed{\text{శంఖువుఘనపరిమాణం} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

ఇక్కడ r పాదపు వ్యాసార్థం మరియు h శంఖువు యొక్క ఎత్తు.

ఉదాహరణ 15 : ఒక శంఖువు ఎత్తు మరియు వాలుతలం వరుసగా 21 cm మరియు 28 cm ఉన్నంచో శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన : $l^2 = r^2 + h^2$ నుండి

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$

$$= \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ cm} = 7\sqrt{7} \text{ cm}$$

శంఖువు ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^3$$

$$= 7546 \text{ cm}^3$$

ఉదాహరణ 16 : మోనికా దగ్గర 551 m^2 వైశాల్యంగల క్యాన్వాస్ బట్ట ఉంది. ఆమె దానిని 7 m పాదపు వ్యాసార్థంగల శంఖువాకార టెంట్ చేయడానికి ఉపయోగించింది. టెంట్ (గుడారం) కుట్టడానికి వదిలే అంచు మరియు కత్తరించడం వలన వ్యర్థమగు బట్ట 1 m^2 అయినచో, టెంట్ ఘన పరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన : క్యాన్వాస్ ఘనపరిమాణం = 551 m^2 మరియు వ్యర్థమైన క్యాన్వాస్ బట్ట వైశాల్యం 1 m^2
అందువలన, టెంట్ చేయడానికి ఉపయోగించిన క్యాన్వాస్ = (551 - 1) m^2

$$= 550 \text{ m}^2$$

ఇప్పుడు టెంట్ ఉపరితల వైశాల్యం = 550 m^2 మరియు టెంట్ పాదపు వ్యాసార్థం = 7 m

టెంట్ కేవలం వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కల్గియుందని గమనించండి. (టెంట్ నేలను క్యాన్వాస్‌తో పోల్చబడదు!!.)

అందువలన, టెంట్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం = 550 m^2

అనగా . $\pi r l = 550$

$$\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550, \quad l = \frac{550}{22} \text{ m} = 25 \text{ m}$$

ఇప్పుడు $l^2 = r^2 + h^2$

అందువలన, $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$$= \sqrt{25^2 - 7^2}\, m = \sqrt{625 - 49}\, m = \sqrt{576}\, m = 24 \text{ m}$$

అందువలన, శంఖువాకార టెంట్ ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3$$

$$= 1232 \text{ m}^3$$

అభ్యాసం 13.7

[π చెప్పింది వదలి $\pi = \frac{22}{7}$ అని భావించుకోండి.]

1. కింది వృత్తాకార లంబ శంఖువు యొక్క ఘన పరిమాణం కనుగొనండి.

   (i) వ్యాసార్థం 6 cm, ఎత్తు 7 cm (ii) వ్యాసార్థం 3.5 cm ఎత్తు12 cm

2. కింది శంఖువాకార పాత్ర సామర్థ్యాన్ని లీటర్లలో కనుగొనండి.

   (i) వ్యాసార్థం 7 cm, వాలుతలం ఎత్తు 25 cm(ii)ఎత్తు 12 cm వాలుతలం ఎత్తు 13 cm

3. ఒక శంఖువు ఎత్తు 15 cm ఘనపరిమాణం 1570 cm^3 ఉన్నచో, దాని పాదపు వ్యాసార్థాన్ని కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ ను ఉపయోగించండి)

4. ఎత్తు 9 గల వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఘన పరిమాణం 48π cm^3 ఉన్నచో, పాదపు వ్యాసం కనుగొనండి.

5. శంఖువాకార ఒక గొయ్యి పై వ్యాసం 3.5 m, లోతు 12 m అయిన దాని సామర్థ్యం కిలో లీటర్లలో కనుగొనండి.

6. ఒక వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఘనపరిమాణం 9856 cm^3 దాని పాదపు వ్యాసం 28 cm అయినచో

   (i) శంఖువు ఎత్తు (ii) శంఖువు వాలుతలం ఎత్తు

   (iii) శంఖువు యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

7. లంబకోణ త్రిభుజం ABC లోని భుజాలు 5 cm, 12 cm మరియు 13 cm దీనిని12 cm భుజం పాడవుకు త్రిప్పినప్పుడు ఏర్పడు ఘన వస్తువుయొక్క ఘన పరిమాణం కనుగొనండి.

8. పై ప్రశ్న 7లోని ABC లను 5 cm భుజపు పాడవుకు త్రిప్పినప్పుడు ఏర్పడు ఘనవస్తువుయొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనండి. ప్రశ్న 7 మరియు ప్రశ్న 8 లోని రెండు ఘనవస్తువుల ఘనపరిమాణాలను నిష్పత్తిలో కనుగొనండి.

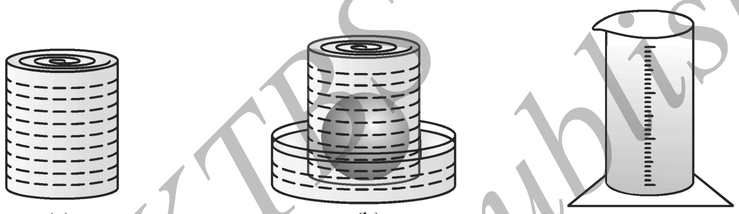
9. గోధుమ రాశి శంఖువాకారంలో ఉంది. దాని వ్యాసం 10.5 m మరియు ఎత్తు 3 m ఉన్నచో, దాని ఘనపరిమాణం కనుగొనండి. దీనిని వర్షంనుండి రక్షించడానికి క్యాన్వాస్ తో తయారుచేసిన బట్టను కప్పవలసిఉంది. దీనికి కావలసిన క్యాన్వాస్ బట్ట వైశాల్యం కనుగొనండి.

13.9 గోళం ఘనపరిమాణం

ఇప్పుడు మనం గోళం ఘనపరిమాణం ఎలా కొలవవచ్చో చూద్దాం. ముందుగా రెండు లేదా

మూడు వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు కలిగిన గోళాలను మరియు ఈ మూడు గోళాలను ఒకే చోట ఉంచదగు ఒకపెద్ద పాత్ర తీసుకోండి. ఈ పాత్రను ఉంచగల (పెట్టగల)పెద్ద తొట్టి తీసుకోండి. తరువాత పాత్రలో అంచువరకు నీటిని నింపండి. (చిత్రం 13.30 (a) చూడండి].

మీరు ఇప్పుడు ఒక గోళాన్ని తొట్టిలో ఉంచిన పాత్రలో జాగ్రత్తగా వేయండి. కొద్దిగా నీరు పాత్రలో నిండి ప్రవహించి తొట్టిలో పడుతుంది. [చిత్రం 13.30 (b) చూడండి]తొట్టిలోని నీటిని కొలిచే సిలిండర్‌లో వేయండి. (అనగా కొలతల గుర్తు పొందిన సిలిండర్ ఆకారంలోని జార్) మరియు ఎక్కువగా ప్రవహించి వచ్చిన నీటి ప్రమాణాన్ని కొలవండి. [చిత్రం 13.30 (c)చూడండి] ఒకవేళ మునిగిన గోళం వ్యాసార్థం r అనుకోండి (మీరు గోళపు వ్యాసాన్ని తెలుసుకోవడం ద్వారా వ్యాసార్థాన్ని కనుగొనవచ్చు). తరువాత $\frac{4}{3}\pi r^3$ విలువను కనుగొనండి. మీరు విలువ ఎక్కువగా ప్రవహించిన నీటి ఘనపరిమాణానికి చాలావరకు సమానంగా ఉండుట కన బడుతున్నదా?



చిత్రం 13.30

ఈ ప్రక్రియను ఇతర వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు కల్గిన గోళాలతో పునరావర్తనం చేయండి. గోళం వ్యాసార్థం R కనుగొని తరువాత $\frac{4}{3}\pi R^3$ విలువ కనుగొనండి. తిరిగి ఈ విలువ గోళం స్థళాంతరం చెందిన (ఎక్కువగా ప్రవహించిన) నీటి ప్రమాణం కొలతకు సమానంగా ఉంటుంది. ఇది మీకు ఏమేమి తెలుపుతున్నది? గోళం ఘన పరిమాణం గోళం నుండి స్థలాంతరం చెందిన నీటి ఘన పరిమాణానికి సమానంగా ఉంటుంది. ఈ ప్రయోగాన్ని పునః పునః వేర్వేరు వ్యాసార్థాలుపొందిన గోళాలతో చేసినప్పుడు వచ్చే, ఫలితం ఒకటే అయి వుంటుంది. అనగా, గోళపు ఘన పరిమాణం వ్యాసార్థ ఘనపు $\frac{4}{3}\pi$ అంతకు సమానంగా ఉంటుంది. దీనివలన మనకు ఈ కింది కల్పన (సూత్రం) నిస్తుంది.

అనగా, $\boxed{\textbf{గోళం ఘన పరిమాణం} = \frac{4}{3}\pi r^3}$

ఇక్కడ r గోళపు వ్యాసార్థం.

దీనిని మీ తరువాతి తరగతులలో సాధించి చూపుతారు. అయితే, ఈ దశలో మీరు దీనిని నిజం అని తీసుకొందాం.

అర్ధగోళం గోళంలోని సగం ఉంటుంది. మీరు అర్ధగోళం ఘన పరిమాణం ఎంత ఉంటుందో తెలుపవచ్చా? అవును అది $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

అనగా, $\boxed{\text{అర్ధగోళం ఘనపరిమాణం} = \frac{2}{3}\pi r^3}$

ఇక్కడ r అర్ధ గోళం వ్యాసార్ధం అవుతుంది.

ఈ సూత్రాలను ఉపయోగించడం గురించి, కొన్ని ఉదాహరణలతో స్పష్టపరుచుదాం..

ఉదాహరణ 17 : 11.2 cm వ్యాసార్ధంగల గోళపు ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

కావలసిన ఘన పరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 11.2\times 11.2\times 11.2 \text{ cm}^3$

$= 5887.32 \text{ cm}^3$

ఉదాహరణ 18 : లోహంలో తయారుచేసిన గోళాకారపు షాట్ పుట్ (గుండు) వ్యాసార్ధం 4.9 cm లోహపు సాంద్రత 7.8 g/cm³ అయితే షాట్‌పుట్ ద్రవ్యరాశిని కనుగొనండి.

సాధన : షాట్‌పుట్ గుండును లోహంతో తయారుచేసిన ఘన గోళం అవుతుంది. దాని ద్రవ్యరాశి ఘనపరిమాణం మరియు సాంద్రతయొక్క గుణలబ్ధానికి సమానం. మీరు ఇప్పుడు గోళపు ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనాల్సి ఉంది.

ఇప్పుడు గోళపు ఘన పరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 4.9\times 4.9\times 4.9 \text{ cm}^3$

$= 493 \text{ cm}^3$ (సుమారుగా)

1 cm^3 పరిమాణపు లోహద్రవ్యరాశి 7.8 g .

అందువలన, షాట్‌పుట్ గుండు ద్రవ్యరాశి $= 7.8 \times 493$ g

$= 3845.44 \text{ g} = 3.85 \text{ kg}$ (సుమారుగా)

ఉదాహరణ 19 : ఒక అర్ధగోళాకృతి పాత్ర వ్యాసార్ధం 3.5 cm. ఈ పాత్రలో పట్టు నీటి పరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన : పాత్రలో పట్టెడి (నింపదగు) నీటి ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5 \text{ cm}^3$

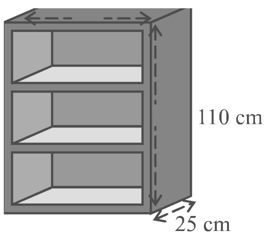
$= 89.8 \text{ cm}^3$

అభ్యాసం 13.8

[π చెప్పింది మినహా $\pi = \frac{22}{7}$ అని భావించికోండి.]

1. కింది వ్యాసార్ధం కల్గియున్న గోళం ఘన పరిమాణం కనుగొనండి
   (i) 7 cm (ii) 0.63 m
2. కింది వ్యాసం కల్గియున్న ఘన గోళాకార బంతి స్థళాంతరం చెందిన నీటి ప్రమాణాన్ని కనుగొనండి.
   (i) 28 cm (ii) 0.21 m
3. ఒక లోహపు బంతి వ్యాసం 4.2 cm లోహపు సాంద్రత 8.9 g/cm^3 అయితే, బంతి ద్రవ్యరాశిని కనుగొనండి.
4. చంద్రుని వ్యాసం సుమారుగా భూమి వ్యాసానికి నాలుగింతలు ఒక భాగానికి సమానం. చంద్రుని ఘనపరిమాణం భూమి ఘన పరిమాణానికి ఎంత భిన్నానికి సమానంగా ఉంటుంది?
5. ఒక అర్ధగోళాకార పాత్ర వ్యాసం 10.5 cm అయితే, అది ఎన్ని లీటర్ల పాలు దానిలో పడుతుంది?
6. ఒక అర్ధగోళాకార తొట్టి 1 cm మందంగల ఇనుప రేకుతో తయారు చేయబడింది. దానిలోపలి వ్యాసార్ధం 1 m అయితే, తొట్టి తయారు చేయడానికి ఉపయోగించిన ఇనుము ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
7. ఒకగోళం ఉపరితల వైశాల్యం 154 cm^2 అయితే, దాని ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
8. ఒక భవన గోపురం అర్ధ గోళాకారంలో ఉంది. దాని లోపలి భాగం సున్నం పూయడానికి అయిన ఖర్చు ₹ 498.96 ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 2.00 చొప్పుననున్నం పూయడానికి ఖర్చు అయినచో,
   (i) గోపురం లోపలి భాగపు ఉపరితల వైశాల్యం
   (ii) గోపురం లోపలి భాగంలోని గాలి ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
9. ఇనుమ వ్యాసార్ధం r మరియు ఉపరితల వైశాల్యం S గల 27 ఇనుప గోళాలను కరిగించి S ఉపరితల వైశాల్యం కల్గిన క్రొత్తి గోళం చేయబడింది.
   (i) క్రొత్త గోళపు వ్యాసార్ధం (r^1),
   (ii) S మరియు S1 యొక్క నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
10. ఒక ఔషద గుళిక గోళాకారంలో 3.5 mm వ్యాసం కల్గి యుంది. గుళికలో నింపదగిన ఔషద ప్రమాణం mm^3 కనుగొనండి.

అభ్యాసం 13.9 (ఐచ్ఛిక)*

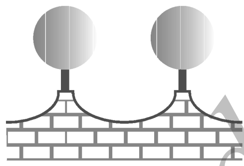


చిత్రం 13.31

1. ఒక కొయ్య పుస్తకాల అర (Wooden bookshelp) వెలుపలి కొలత ఎత్తు = 110 cm, లోతు = 25 cm, వెడల్పు = 85 cm [చిత్రం 13.31 చూడండి]. అన్ని వైపుల కొయ్య పట్టి 5 cm మందం ఉంది. దాని వెలుపలి భాగం మెరుగు పెట్టడానికి మరియు దానిలోపలి భాగం రంగు వేయవలసి ఉంది. మెరుగు

పెట్టడానికి ప్రతి చదరపు సెంటీమీటర్‌కు 20 పైసలు, రంగు వేయడానికి ప్రతి చదరపు సెంటీ మీటర్‌కు 10 పైసలు అయినచో, పుస్తకాల అర ఉపరితలంలో కూడా మెరుగుపెట్టడం మరియు రంగు వేయడానికి అయ్యే మొత్తం ఖర్చు కనుగొనండి.

2. ఇంటి ముందుగల వరాండా గోడను 21 cm వ్యాసం కల్గియున్న కొయ్య గోళంలో అలంకరించబడింది. చిత్రం 13.22 చూపినట్లుగా సన్నటి ఆధారంలో నిలపడమైంది ఇలాంటి ఎనిమిది గోళాలను ఇదే ఉద్దేశానికి ఉపయోగించబడింది. వాటికి వెండి రంగు పూయవలసి ఉంది. ప్రతి ఆధారం ఆకారంలో ఉంది, 1.5cm వ్యాసార్ధం మరియు 7cm ఎత్తు ఉంది. దీనికి నల్లటి రంగును పూయవలసి ఉంది. వెండిరంగు పూయడానికి ప్రతి చదరపు సెంటీ మీటర్‌కు 25 పైసలు మరియు నలుపు రంగు పూయడానికి ప్రతి చదరపు సెంటీమీటర్‌కు 5 పైసలు చొప్పున కావలసిన రంగులను కనుగొనండి.



చిత్రం 13.32

3. గోళం వ్యాసం 25% తక్కువ చేస్తే, దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత శాతం తక్కువ అవుతుంది?

13.10 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు కింది అంశాలు చదివారు.

1. దీర్ఘఘనపు ఉపరితల వైశాల్యం $= 2(lb + bh + hl)$
2. ఘనపు ఉపరితల వైశాల్యం $= 6a^2$
3. సిలిండర్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= 2\pi r h$
4. సిలిండర్ సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= 2\pi r (r + h)$
5. శంఖువు వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi r l$
6. లంబ వృత్తాకార శంఖువు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$
7. r వ్యాసార్ధం కలిగిన గోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= \pi r^2$
8. అర్ధగోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= 2 \pi r^2$
9. అర్ధగోళం సంపూర్ణ ఉపరి తల వైశాల్యం $= 3 \pi r^2$
10. దీర్ఘచతురస్రాకార ఘనపు ఘనపరిమాణం $= l \times b \times h$
11. ఘనపు ఘనపరిమాణం $= a^3$
12. సిలిండర్ ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$
13. శంఖువు ఘన పరిమాణం $= \pi r^2 h$
14. r వ్యాసార్ధంకల్గియున్న గోళపు ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3} \pi r^3$
15. అర్ధగోళపు ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3} \pi r^3$

(ఇక్కడ l, b, h, a, r మొదలగు అక్షరాలను వాటి సందర్భాను సారంగా సాధారణ అర్ధంలో ఉపయోగించబడినవి)

అధ్యాయం - 14

సాంఖ్యక శాస్త్రం

14.1 పరిచయం:

మనం ప్రతిరోజు వార్తాపత్రికలు, దూరదర్శన్ మరియు ఇతర మాధ్యమాలలో వాస్తవాలు, సంఖ్యా గణాంకాలు, పట్టికలు లేదా గ్రాఫ్‌ల రూపంలో అనేక సమాచారాలను చూస్తాం. ఉదాహరణకు క్రికెట్ బ్యాటింగ్ లేదా బౌలింగ్ సరాసరి, ఒక కంఫెనీ యొక్క లాభాంశాలు నగరాల ఉష్ణోగ్రత, ఓటింగ్ ఫలితాంశాలు వివిధ శాఖల పంచవార్షిక ప్రణాళికల వ్యయాలు మొదలైన వాటికి సంబంధిచిన నిర్ధిష్ట సమాచారము లేదా సంఖ్యాత్మక వివరాలను దత్తాంశము అంటారు. దత్తాంశము అనే పదము ఆంగ్ల భాషలో **'Data'** లాటిన్ భాషలో.**'datum'** పదాల బహువచనమైనది. మీకు దత్తాంశము అనే పదము కొత్తదేమి కాదు. దత్తాంశము మరియు దత్తాంశ నిర్వహణ గురించి వెనుకటి తరగతులలో నేర్చుకొన్నారు.

మన విశ్వం మరింత ఎక్కువ సమాచారాల ఆధారిత కేంద్రము దైనందిన జీవనంలో ఏదో ఒక విధంలో దత్తాంశాలను ఉపయోగిస్తాం. అందువలన దత్తాంశాల వల్ల అర్థవంతమైన సమాచారాన్ని పొందుటను తెలుసుకొనుట అనివార్యమైనది. ఈ విధంగా అర్థవంతమైన సమాచారాన్ని తెలుసుకోవడాన్ని అధ్యయనం చేసే గణిత విభాగాన్ని “సాంఖ్యక శాస్త్రం” అంటాము “సేకరించిన సమాచారాన్ని అర్థవంతం చేయు గణిత శాఖను సాంక్యక శాస్త్రం” అంటారు.

సాంఖ్యక శాస్త్రము ఆంగ్లభాషలోని **'STATISTICS'**, లాటిన్ పదము **‘Status’** పదం నుండి వచ్చింది. దీని మూల అర్థం **a (Political) State** అంటే ఒక (రాజకీయ). రాష్టం నిజానికి సాంఖ్యక శాస్త్రం అంటే ఒక రాష్ట్రానికి అనుకూలమైన జన జీవనానికి సంబందించిన వివిధ రీతుల సమాచారపు సరళ సంగ్రహనమైనది. కాలం మారిన కొద్ది సాంఖ్యక శాస్త్రం వ్యాప్తి విస్తృతమైనది. ఇది కేవలం సమాచార సేకరణ ప్రదర్శనగా మిగలలేదు దత్తాంశాల విశ్లేషణ మరియు నిర్ణయాలను తీసుకోవడాన్ని కలిగి ఉన్నది. ఈ విధమైన సాంఖ్యక శాస్త్రం దత్తాంశాల సేకరణ క్రమబద్ధ సమలేఖనం, విశ్లేషణ మరియు నిర్వహణలతో కూడి ఉన్నది.సాంఖ్యక శాస్త్రం పదానికి వేర్వేరు సందర్భాలలో వేర్వేరు అర్థాలు ఉన్నాయి.

క్రింది వాఖ్యలను గమనిద్దాం.

1. ''భారత దేశపు శైక్షణిక సాంఖ్యక శాస్త్రం'' యొక్క తాజా ప్రతిని నాకు ఇవ్వగలరా?
2. దైనందిన జీవితంలో ఉపయోగం ఉన్నందువలన నేను సాంఖ్యక శాస్త్రాన్ని నేర్చుకోవడానికి ఇష్టపడతాను.

మొదటి వాక్యంలో సాంఖ్యక శాస్త్రం సంఖ్యా దత్తాంశం అనే అర్థంలో బహువచన రూపంలో ఉపయోగించబడినది. ఇవి భాత దేశపు వివిధ విద్యా సంస్థల గురించి వివిధ రాష్ట్రాల సాక్షరత ప్రమాణం మొదలైన అంశాలతో కూడి ఉండవచ్చు. రెండవ వాక్యంలో సాంఖ్యక శాస్త్రం అనే పదము ఏకవచన రూపంలో ఉండి, దత్తాంశాల సేకరణ, విశ్లేషణ మరియు అర్థవంతమైన తీర్మానాన్ని తీసుకోవడాన్ని గురించిన విషయం అనే అర్థాన్ని ఇస్తుంది.

ఈ అధ్యాయంలో మనం దత్తాంశానికి సంబంధించిన అన్ని అంశాలను సంక్షిప్తంగా చర్చిద్దాం.

14.2 దత్తాంశ సేకరణ :-

దత్తాంశమును సేకరించుటలో మెలకువలను కింది కృత్యం ద్వారా చర్చిద్దాం సాంఖ్యక శాస్త్రంలో ఒక లక్ష్యంతో దత్తాంశం సేకరించుట మొదటి ప్రధాన సోపానము.

కార్యాచరణం 1 : తరగతిలోని విద్యార్థులు నాలుగు బృందాలుగా విభజించి. ఒక్కొక్క బృందమునకు కింద చూపిన దత్తాంశముల సేకరణకు కేటాయించండి.

(i) మీ తరగతిలోని 20 మంది విద్యార్థుల ఎత్తులు

(ii) ఒక నెలలో ప్రతిరోజు మీ తరగతిలో గైరుహాజరు అయిన విద్యార్థుల సంఖ్య.

(iii) మీ సహ విద్యార్థుల కుటుంబంలోని సభ్యుల సంఖ్య.

(iv) మీ పాఠశాలలోపల / బయట ఉన్న 15 మొక్కల ఎత్తు.

పై దత్తాంశమును సేకరించుటలో విద్యార్థులు ఉపయోగించిన పద్ధతులను చర్చిద్దాం.

(i) వివరాలు సేకరించుట కొరకు ప్రతి విద్యార్థిని ప్రశ్నించి లేదా స్వయంగా వారి ఇళ్ళకు వెళ్ళి వివరాలు రాబట్టారా?

(ii) పాఠశాలలోని రికార్డులు లేక మరి ఏదైనా రికార్డుల నుండి వివరాలుసేకరించారు?

వీటిని పరిశీలిస్తే (i). (ii) మరియు (iv) వ దత్తాంశముల కొరకు ప్రతి విద్యార్థిని నేరుగా సంప్రదించి, వివరాలు సేకరించవలసి ఉంటుంది. ఇట్లు దత్తాంశములోని రాశులను (విలువలను) మూలము నుండి నేరుగా సేకరించినచో దానిని **ప్రాథమిక దత్తాంశము (primary data)** అంటారు. (iii) వ దత్తాంశం కొరకు వివరాలను విద్యార్థుల నుండి కాకుండా అంతకు పూర్వమే రోజువారీ హాజరు వివరాలు రికార్డు చేయబడిన హాజరు పట్టికలనుండి సేకరించవచ్చును. ఈ విధంగా ముందుగానే సేకరింపబడి ఉన్న

దత్తాంశము లేక దత్తాంశంల నుండి సేకరించు దత్తాంశంను **గౌణ దత్తాంశము** (**Secondary Data**) అంటారు.

ఇప్పుడు, దత్తాంశములను ఎలా సేకరించాలి, ప్రాథమిక మరియు గౌణ దత్తాంశములను ఎలా వేరు చేయాలని మీకు అర్థం అవుతుంది.

అభ్యాసం 14.1

1. దైనందిన జీవితంలో మీరు సేకరించగల దత్తాంశాలకు ఐదు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
2. పై ప్రశ్న (1)దత్తాంశాలను ప్రాథమిక మరియు గౌణ దత్తాంశాలుగా వర్గీకరించండి.

14.3 దత్తాంశంను ప్రదర్శించుట :

దత్తాంశమును సేకరించిన అనంతరము విశ్లేషకుడు దత్తాంశంను విశ్లేషించి, దానిని అర్థవంతంగా, సమగ్రంగా ప్రదర్శించుట రెండవ ముఖ్య సోపానము. వివిధ సందర్భాలలో ప్రదర్శించుదగు దత్తాంశమును తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ 1. గణిత పరీక్షలో 10 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు క్రింది విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

55 36 95 73 60 42 25 78 75 62

ఇట్లు రాశులన్నింటిని విడివిడిగా ప్రకటించు దత్తాంశమును "ముడి దత్తాంశము" (**raw data**) అంటారు. ఈ దత్తాంశమునుండి కనిష్ఠ విలువ గరిష్ఠ విలువ గల రాశులను సులభంగా గుర్తించవచ్చా? గరిష్ఠ విలువ మరియు కనిష్ఠ విలువలను గుర్తించడానికి మీకు కొంచెం సమయం పడుతుందా? లేదు. విలువలను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో వ్రాసినపుడు తక్కువ సమయం పడుతుంది. ఇప్పుడు మనం ఈ మార్కులను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసిన

25 36 42 55 60 62 73 75 78 95

ఇప్పుడు మనం గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ మార్కులను స్పష్టంగా చూడవచ్చు. గరిష్ఠ, కనిష్ఠ రాశుల భేదంను ఆ దత్తాంశం యొక్క వ్యాప్తి (**Range**) అంటాము. కాబట్టి, ఈ సందర్భంలో వ్యాప్తి = గరిష్ఠ విలువగల రాశి - కనిష్ఠ విలువగల రాశి 95 - 25 = 70.

దత్తాంశాలను ఆరోషణ, అవరోహణ క్రమంలో ప్రదర్శించడం వలన చాలా తక్కువ సమయం పడుతుంది. ఒక దత్తాంశంలోని రాశులు ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయడం ఎక్కువ సమయం తీసుకొంటుంది. ఈ విశ్లేషణను సులభతరం చేయడానికి దత్తాంశంను మరొక విధంగా ప్రదర్శించవలసి ఉంటుంది. క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 2 : 9వ తరగతిలో 30 మంది విద్యార్థులు 100 మార్కులకు పొందిన మార్కులు ఈ విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40
92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

నిర్దిష్ఠ మార్కులను పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఆ మార్కుల యొక్క పౌనః పుణ్యాన్ని **(frequency)** అవుతుంది అనుటను గమనించండి. ఇక్కడ 70 మార్కులు పొందిన 4 విద్యార్థులు ఉన్నారు. కావున 70 మార్కుల యొక్క పౌనఃపుణ్యం 4 దత్తాంశాలను సులభంగా అర్థం చేసుకోవడానికి మనం కింది విధంగా పట్టికలో రాయవచ్చు.

పట్టిక 14.1

మార్కులు (x)	విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనఃపుణ్యం) (f)
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
మొత్తం	**30**

పట్టిక 14.1 ని అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక లేదా భారత్వ పట్టిక అంటారు. మీరు ఈ పట్టికను తయారు చేయడానికి గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించవచ్చు. తదుపరి ఉదాహరణను గమనించండి.

ఉదాహరణ 3 : 100 పాఠశాలలో ప్రతి ఒక్కరు 100 మొక్కలను వన మహోత్సవంలో నాటినారు. తరువాతి నెలలో ప్రతి పాఠశాలలో బ్రతికి ఉన్న మొక్కల సంఖ్యను నమోదించబడినది.

95	67	28	32	65	65	69	33	98	96
76	42	32	38	42	40	40	69	95	92
75	83	76	83	85	62	37	65	63	42
89	65	73	81	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	59	82	75	82
86	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	23	35	76	83	85	30	68
69	83	86	43	45	39	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	89	93	42
53	69	90	55	66	49	52	83	34	36

దత్తాంశంలోని రాశులను ఒక్కసారిగా ప్రదర్శించుటకు, సమగ్రంగా సులభంగా అర్థం చేసుకొనుటకు అనువుగా రాశులన్నింటిని తరగతులు, 20-29, 30-39,....90-99గా విభజిస్తాము. (ఎందుకంటే మన దత్తాంశాలు 23 నుండి 98 వరకు ఉన్నాయి) చిన్న చిన్న వర్గములు లేక సమూహాలను తరగతులు అంటారు. ఒక్కొక్క తరగతియొక్క పరమాణంను తరగతి పొడవు లేక తరగతి వెడల్పు అంటారు. ఉదాహరణకు 20-29 లో 20 ని దిగువ అవదని 29 ని ఎగువ అవది అంటారు.

పై దత్తాంశాలకు పౌనఃపున్య వితరణా పట్టికను గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించి తయారు చేయడాన్ని జ్ఞాపకం చేసుకోండి.

పట్టిక 14.2

బ్రతికి ఉన్న మొక్కల సంఖ్య (తరగతి అంతరం)(X)	గణన చిహ్నాలు	పాఠశాల సంఖ్య (పౌనః పుణ్యం) (f)
20–29	III	3
30–39	𝍸 𝍸 IIII	14
40–49	𝍸 𝍸 II	12
50–59	𝍸 III	8
60–69	𝍸 𝍸 𝍸 III	18
70–79	𝍸 𝍸	10
80–89	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III	23
90–99	𝍸 𝍸 II	12
మొత్తం		**100**

ఈ విధమైన దత్తాంశంను సమగ్రంగా, సంక్షిప్తంగా ప్రదర్శించడం వల్ల అర్థం చేసుకోవడం ప్రముఖ లక్షణాలను గుర్తించడం సులభం. దత్తాంశంలోని రాశులను చిన్న చిన్న వర్గములుగా విభజించి పౌనః పున్యంలతో సూచించు పట్టికను వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక అంటారు. ఇక్కడ 8 + 18 + 10 + 23 + 12 = 71 పాఠశాలలో 50 శాతం లేక ఎక్కువ మొక్కలు బ్రతికి ఉన్నాయి అని సులభంగా గుర్తించవచ్చు.

పై పట్టికను గమనించినపుడు ఏ తరగతిలోను సంఖ్యలు పునరావృత్తం కాలేదు. ఏ దత్తాంశంలో అయిన ఎక్కువ తరగతి పొడవుతో తక్కువ తరగతులకు లేదా తక్కువ తరగతుల పొడవుతో ఎక్కువ తరగతులను ఏర్పాటు చేసుకోవచ్చును. ఉదా: తరగతి అంతరాన్ని 22-26, 27-31............ ఇలాకూడా తీసుకోవచ్చు. ఇక్కడ ఇలాంటిదే అను నిర్దిష్ఠ విధానం లేదు. అయితే తరగతి సంఖ్యలు పునరావృతం కారాదు అంతే.

ఉదాహరణ 4: ఈ క్రింది తరగతిలో 38 మంది విద్యార్థుల బరువుల పౌనః పుణ్య వితరణా పట్టిక ఇవ్వబడినది. దీనిని గమనించండి.

పట్టిక 14.3

తూకం (kg. లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య పౌనః పుణ్యం (f)
31 - 35	9
36 - 40	5
41 - 45	14
46 - 50	3
51 - 55	1
56 - 60	2
61 - 65	2
66 - 70	1
71 - 75	1
మొత్తం	$\Sigma fi =$ **38**

ఇప్పుడు బరువు 35.5kg మరియు 40.5kg గల ఇద్దరు కొత్త విద్యార్థులు తరగతిలో చేరితే వారిని ఏ తరగతి అంతరంలోకి చేర్చుతారు? వారిని 35 లేదా 40 దత్తాంశంలో చేర్చడానికి వీలులేదు. తరువాతి అంతరంలో చేర్చడానికి వీలులేదు. ఎందుకంటే ఇక్కడ రెండు క్రమ అంతరాలలో ఎగువ అవధి మరియు దిగువ అవధులకు సమానమయ్యేటట్లు వర్గీకరించాలి. దీనికోసం ఒక తరగతి ఎగువ అవధి మరియు దాని తరువాతి తరగతి దిగువ అవధి వ్యత్యాసాన్ని కనుగొనాలి తరువాత ఈ వ్యత్యాసపు అర్థంను ప్రతి తరగతి ఎగువ అవధులకు చేర్చాలి మరియు దిగువ అవధిలో తీసివేయాలి.

ఉదాహరణకు 31-35 మరియు 36-40 తరగతి అంతరాలను పరిగణించండి.

36 - 40 తరగతి అంతరపు దిగువ అవధి = 36

31-35 తరగతి అంతరపు ఎగువ అవధి = 35

వాటి వ్యత్యాసం 36-35=1

కావున వ్యత్యాసపు అర్ధ భాగం = $\frac{1}{2}$ = 0.5

$\therefore$ 31 – 35 తరగతి అంతరం నుండి ఏర్పరచు కొత్త తరగతి అంతరము $(31 - 0.5) - (35 + 0.5)$, అంటే $30.5 - 35.5$ అవుతుంది.

అదేవిధంగా తరగతి అంతరం $36 - 40$ అనునది $(36 - 0.5) - (40 + 0.5) = 35.5 - 40.5$గా మారుతుంది.

ఇదే విధంగా కొనసాగించబడుతూ ఉన్న తరగతి అంతరాలు
30.5 – 35.5, 35.5 – 40.5, 40.5 – 45.5, 45.5 – 50.5, 50.5 – 55.5, 55.5 – 60.5, 60.5 – 65.5, 65.5 – 70.5, 70.5 – 75.5.

ఇప్పుడు మనం కొత్తగా చేరిన విద్యార్థుల బరువులను కొత్త తరగతి అంతరాలలో చేర్చవచ్చు. అయితే మరొక సమస్య 35.5 అనే తరగతి అంతరం 30.5-35.5 మరియు 35.5-40.5 రెండింటిలో కనిపిస్తుంది. అయితే 35.5ను ఏ తరగతి అంతరంలో చేరుస్తారు.

రెండింటిలోను చేరిస్తే దానిని రెండు సార్లు లెక్కించినట్లు అవుతుంది. కావున అనుకూలమయ్యే విధంగా 35.5 ను తరగతి అంతరం 35.5 – 40.5 లో చేర్చాలి. తరగతి అంతరం 35.5 – 35.5 లో చేర్చాలి. 35.5 – 40.5 లో చేర్చకూడదు. కావున క్రొత్త బరువులైన 35.5kg లు 40.5kg లు 35.5 – 40.5 మరియు 40.5 – 45.5 ఈ తరగతి అంతరాలలో క్రమంగా చేర్చుతాం. పై అంశాలనుండి కొత్త పౌనఃపుణ్య వితరణ పట్టిక ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

పట్టిక 14.4

బరువు (kg.లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
60.5 – 65.5	2
65.5 – 70.5	1
70.5 – 75.5	1
మొత్తం	**40**

ఇప్పుడు మీరు కార్యాచరణం- 1 లో సేకరించిన దత్తాంశాన్ని పరిశీలించి వాటినుండి పౌనఃపుణ్య వితరణా పట్టికలను రచించండి.

కార్యాచరణం 2 : ముందు చేసినటువంటి నాలుగు గుంపుల నుండి వారి దత్తాంశాలను పౌనఃపుణ్య వితరణా పట్టికలను మార్చండి. తగిన తరగతులను అనుకూల తరగతి అంతరాలతో, దత్తాంశాల వ్యాప్తి మరియు దత్తాంశాల విధానాన్ని గుర్తించుకోండి.

అభ్యాసం 14.2

1. 8వ తరగతిలోని 30 మంది విద్యార్థుల రక్తం గ్రూపులు ఈ కింది విధంగా ఉన్నాయి.

   A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O,

   A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O.

   ఈ దత్తాంశంలను పౌనఃపున్య విభజన పట్టికనుండి తయారు చేయండి. ఏ రక్తం గ్రూపు విద్యార్థులలో అతి సామాన్యమైన గ్రూపు ఏది? అరుదైన గ్రూపు ఏది?

2. 40 మంది ఇంజనీర్లు ఇంటి నుండి వాళ్ళు పనిచేయు స్థలానికి మధ్య దూరం (kmలలో) ఈ క్రింద ఇవ్వబడినది.

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

ఈ దత్తాంశాలనుండి మొదటి తరగతి అంతరం 0-5 (5చేర్చబడలేదు) ఉండునట్లు పరిమాణం 5 ఉండే ఒక తరగతి పౌనఃపుణ్య వితరణా పట్టికను తయారు చేయండి. ఈ విధంగా తయారు చేసిన పట్టికలో యే ముఖ్య లక్షణాలను గమనిస్తారు.

3. 30 రోజులు గల ఒక నెలలో ఒక నగరపు సాపేక్ష (% లలో) క్రింది విధంగా ఉంది.

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.2	92.1	84.9	90.2	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

   (i) 84-86, 86-88, తరగతి అంతరాలతో వర్గీకృత పౌనఃపుణ్య విభజనంను నిర్మించండి

   (ii) ఈ దత్తాంశాలు ఏ నెల / కాలానికి సంబంధించినది అని అనుకొంటున్నారు.

   (iii) ఈ దత్తాంశాల వ్యాప్తి ఎంత?

4. 50 మంది విద్యార్థుల ఎత్తుల కొలతలను (సమీప సెంటీమీటర్లలో తీసుకోవడమైనది) క్రింద ఇవ్వబడినది.

161	150	154	165	168	161	154	162	150	151
162	164	171	165	158	154	156	172	160	170
153	159	161	170	162	165	166	168	165	164
154	152	153	156	158	162	160	161	173	166
161	159	162	167	168	159	158	153	154	159

(i) 160-165, 165-170, తరగతి అంతరాలను తీసుకొని పై దత్తాంశాలకు పౌనఃపుణ్య వితరణా పట్టికను తయారు చేయండి.

(ii) ఈ పట్టిక నుండి విద్యార్థుల ఎత్తుల గురించి మీరు ఏ తీర్మానాన్ని తీసుకోవడానికి సాధ్యం.

5. గాలిలో గల SO_2 (సల్ఫర్ - డై - ఆక్సైడ్) ప్రమాణాన్ని ppmలలో (ppm = మిలియన్లలో ఒక భాగం) కనుగొనే అధ్యయనం జరపబడినది. 30 రోజులలో లభించిన దత్తాంశాలు ఈ విధంగా ఉన్నాయి.

0.03	0.08	0.08	0.09	0.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) 0.00-0.04, 0.04-0.08 తరగతి అంతరాలను తీసుకొని ఒక పౌనఃపుణ్యవితరణా పట్టికను నిర్మించండి.

(ii) ఎన్ని రోజులలో SO_2 ప్రమాణం 0.11 ppm కంటే ఎక్కువగా ఉన్నది.

6. ఒక్కొక్క సారికి 3 నాణెముల చొప్పున 30 సార్లు ఎగురవేసి ఒక్కొక్క సారికి పడిన బొమ్మలను లెక్కించడం క్రింది విధంగా ఉన్నది.

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

ఈ పై దత్తాంశాలకు ఒక పౌనఃపుణ్య వితరణా పట్టిక తయారు చేయండి.

7. π విలువను 50 దశాంశ స్థానాలకు క్రింద ఇవ్వబడినది.

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) దశాంశ బిందువు తర్వాత 0-9 వరకు గల అంకెలకు ఒక పౌనః పుణ్య పట్టికను తయారు చేయండి.

(ii) ఎక్కువ పౌనఃపుణ్య మరియు తక్కువ పౌనఃపుణ్యం గల అంకె ఏది?

8. మునుపటి వారంలో 30 మంది విద్యార్థులు ఎన్ని గంటలు TV వీక్షణ చేశారు అని ప్రశ్నించడమైనది ఫలితాంశం క్రింది విధంగా ఉన్నది.

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

(i) 5 – 10 తరగతి అంతరం ఉండునట్లు, తరగతి పరిమాణం 5 ఉండునట్లు పై దత్తాంశాలకు ఒక పౌనఃపున్య వితరణా పట్టిక నిర్మించండి.

(ii) ఎంత మంది విద్యార్థులు వారానికి 15 లేదా ఎక్కువ గంటలు TV వీక్షించారు.

9. ఒక సంస్థవారు తయారుచేసిన కారు బ్యాటరీలలో 40 బ్యాటరీల జీవిత కాలం (సంవత్సరాలలో) కింది విధంగా నమోదు చేస్తారు.

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

పై దత్తాంశంలకు తరగతులలో పౌనఃపుణ్య విభజనం తయారు చేయండి తరగతి అంతరం 0.5 గా తీసుకొని $2-2.5$ గతితో ప్రారంభించండి.

14.4 దత్తాంశాలను గ్రాఫ్‌లో ప్రాతినిధ్యం చేయుట

దత్తాంశాలను పట్టికల ద్వారా ప్రాతినిధ్యం చేయుటను ఇదివరకే చర్చించాము. ఇపుడు గ్రాఫ్ ద్వారా దత్తాంశాలను ప్రాతినిధ్యం చేయుట గురించి గమనిద్దాం. వేయి, పదాలకంటే ఒక చిత్రం ఉత్తమం అని మనకు తెలుసు. ప్రతి దత్తాంశాల మధ్య పోలికను గ్రాఫ్ ద్వారా అత్యుత్తమంగా చూపవచ్చు. ఇలాంటి ప్రదర్శన నిజ దత్తాంశాలను అర్థం చేసుకోవడం కంటే సులభం. ఇప్పుడు మనం క్రింది దత్తాంశాలను ప్రాతినిధ్యం చేయు గ్రాఫ్‌ల గురించి అధ్యయనం చేద్దాం.

(A) స్తంభ నక్ష (Bar graphs) దిమ్మ చిత్రాలు

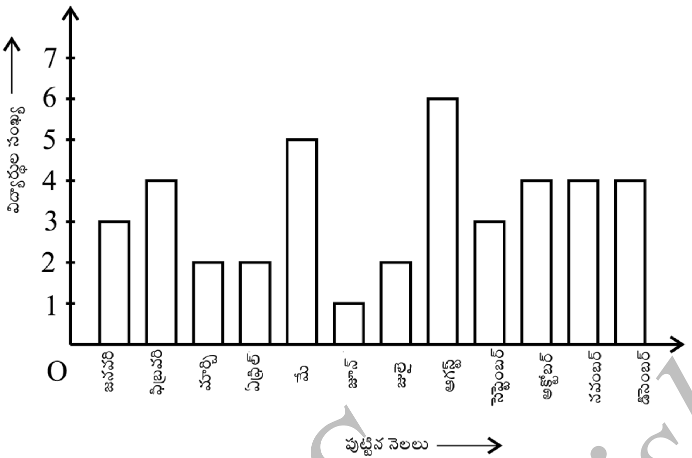
(B) హిస్టోగ్రాం (Histogram) ఒకే వెడల్పు మరియు విభిన్న వెడల్పులు కలిగిన.

(C) (Frequency Polygons) ఆవృత

(A) (Bar graphs) సోపాన రేఖా చిత్రము (దిమ్మ చిత్రము)

మునుపటి తరగతులలో మీరు ఇది వరకే దిమ్మచిత్రాల గురించి అభ్యాసం మరియు నిర్మాణాలు చేశారు. ఇక్కడ వాటి గురించి ఎక్కువ క్రమబద్ధమైన చర్చ చేద్దాం. దిమ్మచిత్రం అంటే దత్తాంశాలను చిత్రాల ద్వారా చూపడం అని జ్ఞాపకం చేసుకోవడం. సామాన్యంగా దిమ్మ చిత్రాలను సమపరిమాణంలో మరియు రెండు స్థంభాల మధ్య సమాన అంతరం ఉండునట్లు ఒక X - అక్షంపై చరరాశులను చిత్రీకరించాలి. చరాంశాల విలువలను మరొక Y - అక్షంపై గుర్తించాలి. గ్రాఫ్ ఎత్తు చరరాశుల విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 5: 9వ తరగతిలో ఒక సెక్షన్ విభాగపు 40 మంది విద్యార్థులు పుట్టిన నెలలను అడిగి తెలుసుకొని దత్తాంశాల నుండి క్రింది గ్రాఫ్‌ను నిర్మించారు.



చిత్రం 14.1

పై దిమ్మ చిత్రాన్ని గమనించి, క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇవ్వండి.

(i) నవంబర్ నెలలో ఎంత మంది విద్యార్థులు పుట్టారు?

(ii) ఏ నెలలో ఎక్కువ సంఖ్యలో విద్యార్థులు పుట్టారు?

సాధన : ఇక్కడ పుట్టిన నెలలు చరరాశులు (variable) మరియు చరరాశి యొక్క విలువ విద్యార్థుల సంఖ్య అని గమనించండి.

(i) నవంబర్ నెలలో 4 విద్యార్థులు పుట్టినారు.

(ii) ఆగస్టు నెలలో ఎక్కువ సంఖ్యలో విదార్థులు పుట్టినారు.

ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా దిమ్మ చిత్ర నిర్మాణాన్ని గుర్తు చేసుకొందాం.

ఉదాహరణ 6 : ఒక కుటుంబం యొక్క నెలసరి ఆదాయం ₹ 20,000 క్రింది విధంగా వివిధ విషయాలకు నెలలో చేయవలసిన ఖర్చులకు ప్రణాళికను తయారు చేశారు.

పట్టిక 14.5

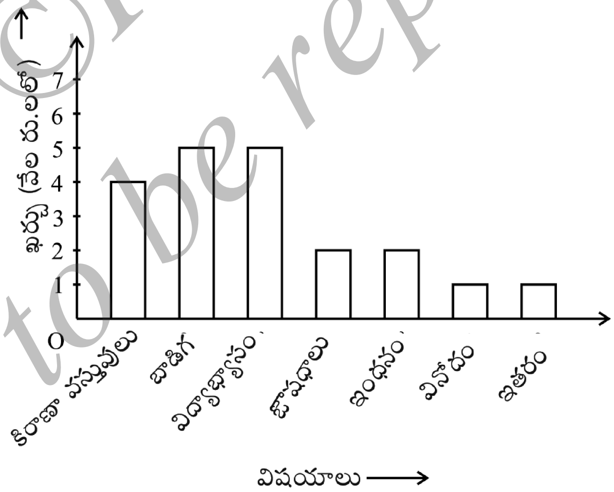
విషయాలు (Heads)	ఖర్చు (వెయ్యి. రూ. లలో)
కిరాణా వస్తువులు	4
బాడుగ	5
పిల్లల విద్యాభ్యాసం	5
ఔషధాలు	2
ఇంధనం	2
వినోదం	1
ఇతర	1

పై దత్తాంశాలకు ఒక దిమ్మ చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

సాధన : ఈ క్రింది దశలనుండి పై దత్తాంశాలకు దిమ్మ చిత్రం నిర్మించవచ్చు. రెండవ వరుసలో మూల ప్రమాణం వెయ్యి రూపాయలలో అనుటను గమనించండి కిరాణా వస్తువుల ముందు 4 అంటే ₹ 4000.

1. విషయాలను (చరరాశులు) x - అక్షంపై (క్షితిజ సమాంతర) సరైన ప్రమాణాన్ని ఎన్నుకొని సూచిస్తాము. ఎందుకంటే ఇక్కడ స్థంభం వెడల్పు ముఖ్యం కాదు. అయితే స్పష్టత కోసం మనము ఒకే వెడల్పు గల అన్ని స్థంభాలను మరియు స్థంభాల మధ్య సమాన అంతరాన్ని తీసుకొంటాము. ప్రతి విషయాన్ని '1' యూనిట్ అని సూచించాలి.
2. ఖర్చును y - అక్షంపై (భూలంభాక్షం) గుర్తించబడుతుంది. గరిష్ట ఖర్చు ₹ 5000 ఉన్నందువల్ల ప్రమాణం 1 యూనిట్ = ₹ 1000 అని తీసుకోబడినది.
3. మొదటి విషయం అంటే కిరాణ వస్తువులు దీని వెడల్పు 1 యూనిట్ ఎత్తు 4 యూనిట్లు ఉండునట్లు స్థంభం ద్వారా ప్రాతినిధ్యం అయినది.
4. ఇదే విధంగా మిగిలిన విషయాలను క్రమంగా స్థంభాల మధ్య 1 - యూనిట్ అంతరం ఉండునట్లు ప్రతినిధించబడినది.

   దిమ్మ చిత్రంను (చిత్రం 14.2) లో నిర్మించబడినది.



చిత్రం 14.2

ఇక్కడ out look నుండి దత్తాంశాల లక్షణాలను సులబంగా పోల్చవచ్చు ఉదా: పిల్లల విద్యాభ్యాసానికి అయిన ఖర్చు, ఔషదాలకు అయిన ఖర్చుకంటే రెండింతలు ఎక్కువ కావున కొన్ని విధానాలలో పట్టిక రూపం కంటే దిమ్మ చిత్రంలో దత్తాంశాలను ప్రతినిదించటం ఉత్తమమనిపిస్తుంది.

కార్యాచరణం 3 : కార్యాచరణం-1లో తీసుకున్న దత్తాంశాలను తగిన దిమ్మ చిత్రంలో ప్రతినిదించమని అదే గుంపు విద్యార్థులకు సూచించాలి.

ఇప్పుడు మీరు నిరంతరం వర్గ వ్యాప్తికలిగిన పౌనః పుణ్య వితరణ పట్టికను గ్రాఫ్‌లో ప్రతినిదించుట గురించి చూద్దాం.

(B) హిస్టోగ్రామ్ (Histo gram)

ఈ విధమయిన ప్రదర్శన దిమ్మ చిత్రం లాగే వున్నను ఇవి నిరంతర తరగతి అంతరాలలో ఉపయోగించబడుతుంది. ఉదాహరణకు 14.6 లో పౌనః పుణ్య వితరణా పట్టికను గమనించండి. తరగతిలోని 36 మంది పిల్లల బరువులను ఇచ్చారు.

పట్టిక 14.6

బరువు (kg. లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
ఒట్టు	**36**

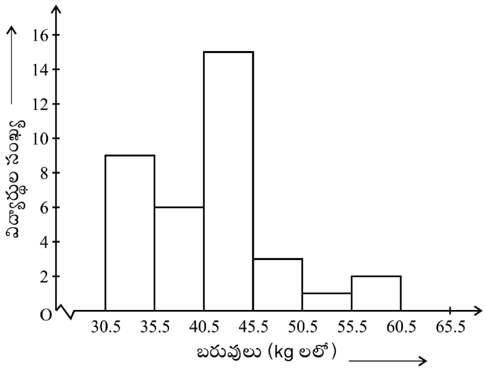
పై దత్తాంశాలను గ్రాఫ్‌లో ఈ విధంగా ప్రతినిదిస్తాం.

(i) సరైన ప్రమాణంలో బరువులను x - అక్షం పై గుర్తిస్తాము. స్కేలు (ప్రమాణం) 1cm = 5kg అని తెలుసుకోవచ్చు. మొదట తరగతి అంతరం 30.5 నుండి ప్రారంభం అవుతుంది. 0 నుండి కాదు. కావున అక్షంలో ఒక చిక్కుముడి లేక విరామం (**kink / break**)ను గుర్తించండి. సరైన యూనిట్‌లతో గ్రాఫ్‌ను రచించండి.

(ii) విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనఃపుణ్యం)ను y - అక్షం పై గుర్తిస్తాము. గరిష్ట పౌనఃపుణ్యము 15 అయినందు వల్ల, ఈ గరిష్ఠ పౌనఃపుణ్యం గుర్తించడానికి సరైన ప్రమాణాన్ని ఎంచుకోవాలి.

(iii) ఇప్పుడు వెడల్పు తరగతి అంతరము మరియు పొడవు తరగతి అంతరపు పౌనఃపుణ్యము ఉండునట్లు దీర్ఘచతురస్రాకారస్థంబాలను రచిస్తాము. ఉదాహరణకు 30.5-35.5 తరగతి అంతరానికి 1cm వెడల్పు మరియు 4.5cm పొడవు గల ధీర్ఘచతురస్రాన్ని రచిస్తాము.

(iv) ఈ విధంగా చిత్రం 14.3లో చూపించినటువంటి గ్రాఫ్ మనకు దొరుకుతుంది.



చిత్రం 14.3

అనుక్రమ దీర్ఘచతుస్రాల మధ్య అంతరం లేనందువలన ఈ గ్రాఫ్ ఒక ఘనాకృతిలాగ కనపడుతుంది. దీనిని హిస్టోగ్రామ్ లేదా కమ్మిరేఖా చిత్రం అంటారు. ఇది నిరంతర తరగతి అంతరాలు గల వర్గీకృత పౌనః పుణ్య వితరణను గ్రాఫ్‌లో గుర్తించడమయినది. ఇక్కడ దీర్ఘ చతురస్రపు వెడల్పు రచనలో ముఖ్యం అవుతుంది. అయితే దిమ్మ చిత్రంలో స్థంబముయొక్క వెడల్పు ముఖ్యం కాదు.

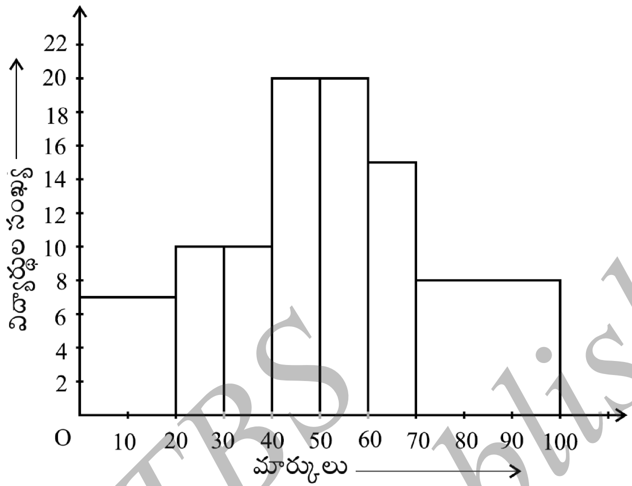
వాస్తవంగా వుంటాయి. అయినను దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పు సమానంగా వున్నందువల్ల వాటి పొడవులు పౌనః పుణ్యాలకు అనుగుణంగా వుంటాయి. అందువలన పొడవులను దశ (iii) లో చెప్పినట్లు నిర్మిస్తాము. ఇప్పుడు పై విధంగా లేని మరొక సంధర్భాన్ని గమనిద్దాం.

ఉదాహరణం 7: ఒక ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతి 2 విభాగాల విద్యార్థులకు గణిత పరీక్షయొక్క నిర్వహణను విశ్లేషించాలనుకున్నారు. విద్యార్థుల నిర్వహణను చూసినప్పుడు కొందరు 20 మార్కులకంటే తక్కువ మరియు 70 మార్కులను లేదా ఎక్కువ మార్కులను పొందారని తెలిసింది. అందువలన వారు వివిధ పరిమాణాల గుంపులుగా 0-20, 20-30, ... 60-70, 70-100 ఈ విధంగా క్రమీకరించాలని నిర్ధారించి ఒక పట్టికను తయారు చేశారు.

పట్టిక 14.7

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0–20	7
20–30	10
30–40	10
40–50	20
50–60	20
60–70	15
70→ ఎక్కువ	8
మొత్తం	**90**

పై వితరణకు ఒక విద్యార్థి హిస్టోగ్రామ్ తయారు చేశాడు. దీనిని చిత్రం 14.4 లో చూపారు.



చిత్రం 14.4

ఇక్కడ గ్రాఫ్‌లో గుర్తించినవాటిని జాగ్రత్తగా పరీక్షించండి. ఇది దత్తాంశము యొక్క సరైన ప్రదర్శనమా? కాదు. ఈ గ్రాఫ్‌లోనున్న నమూనా తప్పు కల్పనను ఇస్తుంది. మనం ఇదివరకే తెలిపినట్లు హిస్టోగ్రామ్‌లో దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యము పౌనః పుణ్యాలకు అనుగుణంగా వుంటుంది. ఈ సమస్య ఇంతకు ముందు లేదు. ఎందుకంటే దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పులు సమానంగా వుండేవి. అయితే ఇక్కడ దీర్ఘ చతురస్రాల వెడల్పులలో వ్యత్యాసం కలదు. కావునపై హిస్టోగ్రామ్ సరైన కల్పన ఇవ్వదు. ఉదాహరణ ఇది. 60-70 తరగతి అంతరంలో పౌనఃపుణ్యం కంటే 70-100 తరగతి అంతరపు పౌనఃపుణ్యాలకు అనుగుణంగా వుండాలి. మనం దీర్ఘచతురస్రాల పొడవులలో నిర్దిష్ట మార్పులను చెయ్యటం అవసరం.

అనుసరించవలసిన దశలను క్రింద ఇవ్వబడినవి.

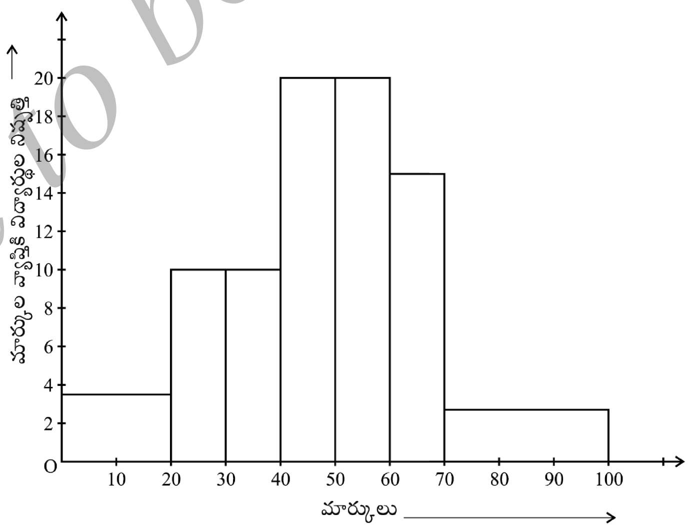
1. కనిష్ట పరిమాణం గల తరగతి అంతరాన్ని ఎంచుకోండి. పై ఉదాహరణలలో తరగతి అంతరపు కనిష్ట పరిమాణము 10.
2. తరగతి పరిమాణం 10కి అనుగుణంగా దీర్ఘచతురస్రాల పొడవును మార్చాలి. పై ఉదాహరణలో తరగతి పరిమాణం 20 అయినప్పుడు దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు 7 అయ్యింది. కావున తరగతి అంతరపు పరిమాణం 10 అయినప్పుడు దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ కావాలి.

ఇదే విధంగా కొనసాగినప్పుడు క్రింది పట్టికను పొందుతాము.

పట్టిక 14.8

మార్కులు	పౌనః పుణ్యం	తరగతి అంతరపు వెడల్పు	దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు
0–20	7	20	$\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$
20–30	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
30–40	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
40–50	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
50–60	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
60–70	15	10	$\frac{15}{10}\times 10 = 15$
70–100	8	30	$\frac{8}{30}\times 10 = 2.67$

మనం పది మార్కుల అంతరంలో పొడవును లెక్కించనందువల్ల ఈ పొడవులను పది మార్కుల అంతరానికి, విద్యార్థుల నిష్పత్తి అనవచ్చు. కావున మారుతున్న వెడల్పు యొక్క సరైన హిస్టోగ్రామ్‌ను చిత్రం 14.5 లో ఇవ్వబడినది.

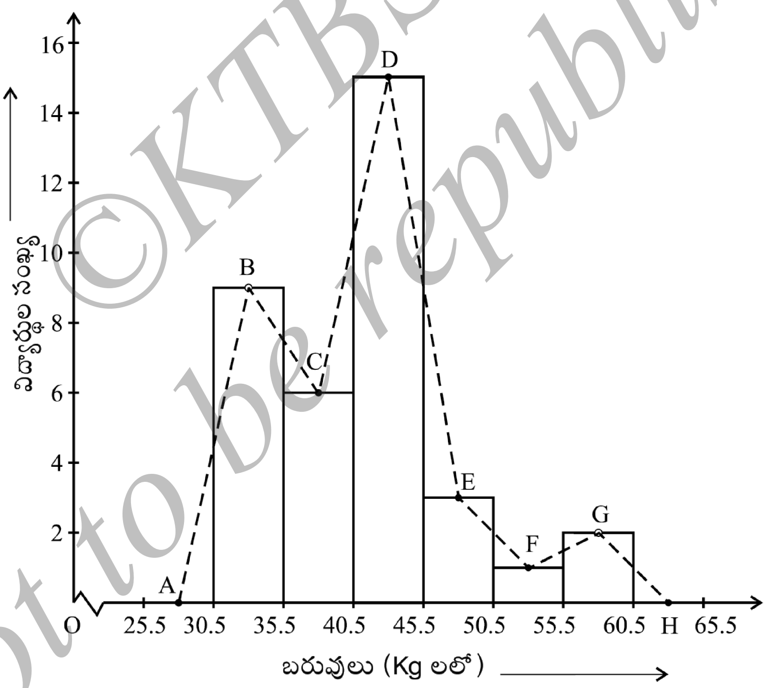


చిత్రం 14.5

(C) పౌనః పుణ్యపు బహుభుజి (Frequency Polygon)

పరిమాణాత్మక దత్తాంశాలను మరియు వాటి పౌనఃపుణ్యాలను మరొక విధంగా గ్రాఫ్ విధానంలో గుర్తించవచ్చు. ఇది ఒక బహుభుజి చిత్రం దీన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి చిత్రం 14.3 యొక్క హిస్టోగ్రామ్‌ను గమనించండి. హిస్టోగ్రామ్ యొక్క దీర్ఘచతురస్రాల పై భాగపు మధ్య బిందువులను క్రమంగా రేఖాఖండాలచే కలుపుదాం. ఈ మధ్య బిందువులను A,B,C,D,E,F మరియు G బిందువులుగా గుర్తించండి. వాటిని రేఖా ఖండాలతో చేర్చినప్పుడు B,C,D,E,F,G, ఆకృతి ఏర్పడుతుంది. (చిత్రం 14.6).

తరగతి అంతరం 35.5-60.5, తరువాత 0 పౌనఃపుణ్యము గల తరగతి అంతరం ఉందని అనుకొని వాటి మధ్య బిందువులను. క్రమంగా A మరియు H అని గుర్తించండి. ఆ బహుభుజాకృతిని పూర్తి చెయ్యండి. చిత్రం 14.3 యొక్క దత్తాంశాలను అనుగుణంగా పౌనఃపుణ్య బహుభుజముల ABCDEFGH అవుతుంది. దీనిని చిత్రం 14.6 లో చూపారు.



చిత్రం 14.6

కనిష్ట తరగతి అంతరము ముందు మరియు గరిష్ట తరగతి అంతరము తరువాత ఏ తరగతి అంతరాలు లేకున్నను మనం సున్న పౌనఃపుణ్యం యొక్క రెండు తరగతి అంతరాలను చేర్చుకుంటాము. దీనివల్ల పౌనఃపుణ్య బహుభుజము వైశాల్యము హిస్టోగ్రాం వైశాల్యమునకు సమానం అవుతుంది. ఇది ఎందుకు? ఎలా? (సూచన : సర్వసమాన త్రిభుజాల లక్షణాలను ఉపయోగించండి).

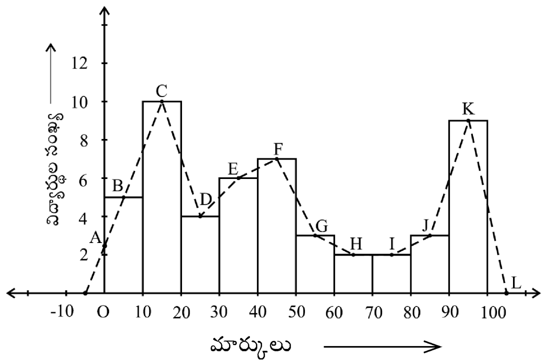
ఉదాహరణ 8: ఒక తరగతిలోని యాభై ఒక్క మంది విద్యార్థులు 100కి పొందిన మార్కులను పట్టిక 14.9లో ఇచ్చినదాన్ని గమనించండి.

పట్టిక 14.9

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0–10	5
10–20	10
20–30	4
30–40	6
40–50	7
50–60	3
60–70	2
70–80	2
80–90	3
90–100	9
మొత్తం	**51**

ఈ పౌనఃపుణ్య వితరణ పట్టికకనుగుణంగా పౌనఃపుణ్య బహుభుజాన్ని రచించండి.

సాధన : మొదట దత్తాంశాలకు హిస్టోగ్రామ్ ను నిర్మించండి. ప్రతి దీర్ఘచతురస్రపు చివర మధ్య బిందువులను క్రమంగా B, C, D, E, F, G, H, I, J, K అను గుర్తించండి. మొదటి తరగతి అంతరం 0-10, కావున x అక్షాన్ని ఋణాత్మక దిశకు పొడిగించండి. కాల్పనిక తరగతి అంతరముల (-10)-0 యొక్క మధ్య బిందువును గుర్తించాలి. ఈ సున్న పౌనఃపుణ్యముయొక్క వర్గాంతర మధ్య బిందువును దీర్ఘచతురస్రాల మొదటి మధ్యబిందువు. అంటే 'B' కి చేర్చాలి. Y అక్షాన్ని ఖండించు బిందువును 'A' అని గుర్తించాలి, దత్తాంశాల చివరి తరగతి అంతరానికి కంటే మొదటి తరగతి అంతరం యొక్క మధ్య బిందువు 'L' కావాలి. తరువాత OABCDEFGHIJKL పౌనః పున్య బహుభుజి అవుతుంది. దీనిని చిత్రం 14.7 లో చూపబడింది.



చిత్రం 14.7

హిస్టోగ్రామ్ నిర్మించకుండానే పౌనఃపుణ్య భుజాకృతిని నేరుగా నిర్మించవచ్చు. దీనికి మనకు దత్తాంశాల తరగతి అంతరపు మధ్య బిందువుల అవసరం వుంది. ఈ తరగతి అంతరాల మధ్య బిందువులను వర్గ - అంక అంటారు.

వర్గ అంకాలను కనుగొనడానికి ఎగువ అవధి మరియు దిగువ అవధుల మొత్తాన్ని రెండు చే భాగించాలి. $= \dfrac{\text{ఎగువ అవది + దిగువ అవధుల}}{2}$

ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 9: ఒక నగరంలో వారానికి ఒకసారి నడిపే పరిశీలనా అధ్యయనంలో లభించిన జీవన వ్యయాల **(cost of living)** సూచ్యాంకం **(Index)** ఈ క్రింది విధంగా వున్నాయి.

పట్టిక 14.10

జీవన వ్యయపు ఇండెక్స్	వారాల సంఖ్య
140–150	5
150–160	10
160–170	20
170–180	9
180–190	6
190–200	2
మొత్తం	**52**

పై దత్తాంశాలకు ఒక పౌనఃపున్య బహుభుజిని (histogram)నిర్మించండి.

సాధన : హిస్టోగ్రాం నిర్మించకుండా పౌనఃపున్య బహుభుజాన్ని నిర్మించవలసినందువలన దత్త తరగతి అంతరాలకు అంటే 140-150, 150-160,............... యొక్క వర్గ అంక (మధ్య బిందువు)లను కనుగొనాలి.

తరగతి అంతరం 140-150 యొక్క ఎగువ అవధి = 150 మరియు దిగువ అవధి = 140.

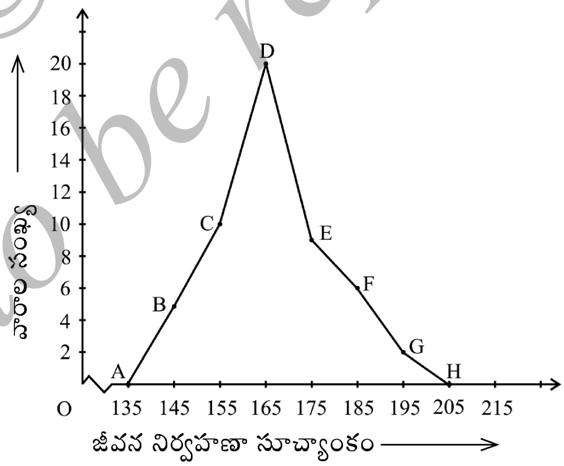
$\therefore$ వర్గ అంక (మధ్య బిందువు) = $\dfrac{150+140}{2} = \dfrac{290}{2} = 145.$

ఇదే విధంగా కొనసాగిస్తూ అన్ని తరగతి అంతరాలకు వర్గ-అంకం(మధ్య బిందువు) లను కనుగొనవచ్చు. దీని నుండి లభించిన కొత్త పట్టికను క్రింద చూపడమయినది.

పట్టిక 14.11

తరగతి అంతరం	వర్గ అంకం (మధ్య బిందువులు)	పౌనః పుణ్యం
140–150	145	5
150–160	155	10
160–170	165	20
170–180	175	9
180–190	185	6
190–200	195	2
మొత్తం		**52**

ఇప్పుడు వర్గ - అంక (మధ్యబిందువులను) x - అక్షరంపై మరియు పౌనః పుణ్యాలను Y- అక్షం పై గుర్తించండి. పౌనఃపున్య బహుభుజమును గీయవచ్చు దీనికోసం B (145, 5), C (155,10), D (165,20), E (175,9), F (185,6) మరియు G (195,2) బిందువులను రేఖా ఖండాలచే చేర్చాలి. తరగతి అంతరం 140-150 మొదటి సున్నా పౌనః పుణ్యపు తరగతి అంతరము 130-140 యొక్క వర్గ అంక (మధ్య బిందువును) కనుకొని గుర్తించడం మరవకూడదు. అది A(135,0) కావాలి. అదేవిధంగా బిందువు H (205,0) ను బిందువు G(195,2) తర్వాత గుర్తించాలి. ఇప్పుడు లభించు పౌనఃపుణ్య బహుభుజము ABCDEFGH అవుతుంది (చిత్రం 14.8 ని చూడండి.)



చిత్రం 14.8

పౌనఃపుణ్య బహుభుజంలో దత్తాంశాలు నిరంతరంగా మరియు ఎక్కువ ప్రమాణంలో ఉపయోగిస్తారు. ఒకే లక్షణం కలిగిన రెండు వేర్వేరు దత్తాంశాల గణనలున్నప్పుడు పోల్చడానికి ఇది సహాయపడుతుంది. ఉదాహరణకు, ఒకే తరగతి రెండు విభాగాల నిర్వహణను పోల్చడం.

అభ్యాసం 14.3

1. ఒక సంస్థ ప్రపంచ వ్యాప్తంగా 15 నుండి 44 సంవత్సరాల వయోమానపు మహిళల అనారోగ్యానికి కారణం మరియు మరణాలకు సంబంధించిన జరిపిన సమీక్షలో కనబడిన గణాంకాల వివరాలు (%లో) క్రిందివిధంగా ఉన్నాయి.

క్ర.సం.	కారణాలు	మహిళల మరణపు ప్రమాణం (%)
1	సంతానోత్పత్తి ఆరోగ్య స్థితి	31.8
2	నరాలు మానసిక స్థితి	25.4
3	గాయాలు	12.4
4	హృదయ సంబంధ రోగాలు	4.3
5	శ్వాసక్రియ స్థితి	4.1
6	ఇతర కారణాలు	22.0

(i) పై సమాచారాలను గ్రాఫ్ ద్వారా గుర్తించండి.

(ii) ప్రపంచవ్యాప్తంగా మహిళలలు మరియు మరణానికి ఏ స్థితి-గతి ముఖ్యకారణం.

(iii) (ii) లో ఇచ్చిన కారణాలు ముఖ్యమనిపించడానికి ఏ రెండు ముఖ్య అంశాలు పాత్ర ముఖ్యమైనదని ఉపాధ్యాయులు సహాయంతో కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.

2. భారతీయ సమాజపు వివిధ విభాగాలలో 1000 మంది అబ్బాయిలకు అనుగుణంగా వున్న అమ్మాయి సంఖ్యను దశాంశను సమీపంగా ఈ క్రింది దత్తాంశాలలో ఇవ్వబడినది.

విభాగం	1000 మంది అబ్బాయిలకు అనుగుణంగా అమ్మాయిల సంఖ్య
షెడ్యుల్డ్ కులాలు (SC)	940
షెడ్యుల్డ్ తెగలు (ST)	970
SC/ST కాకుండా	920
వెనుకబడిన జిల్లాలు	950
వెనుకబడిన జిల్లాలు	920
గ్రామీణ	930
నగరాలు	910

(i) పై సమాచారంను దిమ్మ చిత్రంలో గుర్తించండి.

(ii) ఈ గ్రాఫ్ నుండి ఏ తీర్మానానికి సాధ్యమో తరగతిలో చర్చించండి.

3. ఒక శాసన సభ ఎన్నికల వోటింగ్ ఫలితాలలో రాజకీయ పార్టీలు గెలిచిన స్థానాల సంఖ్యలను కింద ఇవ్వబడినది.

రాజకీయ పార్టీలు	A	B	C	D	E	F
గెలిచిన స్థానాల సంఖ్య	75	55	37	29	10	37

(i) వోటింగ్ ఫలితాంశాలను సూచించే ఒక దిమ్మ చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

(ii) ఏ రాజకీయ పార్టీ ఎక్కువ స్థానాలను గెలిచింది?

4. ఒక మొక్క యొక్క 40 ఆకుల పొడవు 1mm కు సరిగా కొలిచి పొందిన దత్తాంశాలను ఈ క్రింది పట్టికలో గుర్తించారు?

పొడవు (mm లలో)	ఆకుల సంఖ్య
118 -126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) ఇచ్చిన దత్తాంశాలను ఒక హిస్టోగ్రాంలలో గుర్తించండి. (సూచన: తరగతి అంతరాలు నిరంతరంగా ఉండునట్లు రాయండి.)

(ii) ఇవే దత్తాంశాలను గుర్తించే సరైన గ్రాఫ్ వేరేవుందా?

(iii) ఎక్కువ ఆకులు 153mm పొడవు వున్నాయని తీర్మానించవచ్చా? ఎందుకు?

5. క్రింది పట్టిక 400 నియాన్ బల్బుల మన్నిక (life time) ను ఇస్తుంది.

మన్నిక గం.లలో	బల్బుల సంఖ్య
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) హిస్టోగ్రాం సహాయంతో ఇచ్చిన సమాచారాన్ని గుర్తించండి.

(ii) 700 గంటలకంటే ఎక్కువ మన్నిక వచ్చే బల్బులు ఎన్ని?

6. విద్యార్థులు వారు పొందిన మార్కుల ఆధారంతో వారిని రెండు విభాగాలకు పంపిణీ చేసినదాన్ని ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

విభాగం – A		విభాగం – B	
మార్కులు	పౌనఃపుణ్యం	మార్కులు	పౌనఃపుణ్యం
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

రెండు విభాగాల విద్యార్థుల మార్కులు ఒకే గ్రాఫ్‌లో పౌనఃపున్య భుజాలలో గుర్తించండి. రెండు పౌనఃపుణ్య బహుభుజాలనుండి రెండు విభాగాల నిర్వహణను పోల్చండి.

7. ఒక క్రికెట్ మ్యాచ్‌లో మొదటి 60 బంతులలో A మరియు B జట్లు సంపాదించిన పరుగులు కింది పట్టికలో ఇచ్చారు.

బంతుల సంఖ్య	జట్టు A	జట్టు B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

రెండు జట్ల దత్తాంశాలను ఒకే గ్రాఫ్ లో పౌనఃపున్య బహుభుజాల నుండి ప్రతినిధించండి.

(**సూచన** : తరగతి అంతరాలను మొదట నిరంతరగా ఉండాలి)

8. ఒక యాదృచ్ఛిక (random) సర్వేలో పార్కులో ఆడే వివిధ వయస్సు పిల్లల సంఖ్య కింది విధంగా ఉన్నది.

వయస్సు సం. లలో	పిల్లల సంఖ్య
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

పై దత్తాంశాలను గుర్తించు ఒక హిస్టోగ్రాంను నిర్మించండి.

9. ఒక స్థానిక టెలిఫోన్ డైరెక్టరీ (దూరవాణి విళాస దర్శిని) నుండి యాదృచ్ఛికంగా 100 ఇంటిపేర్లను (surname) లను తీశారు. మరియు వాటిలో (surname) లో కనబడిన ఆంగ్లభాష అక్షరాల సంఖ్యల పౌనఃపున్య వితరణ కింద ఇవ్వబడినది.

అక్షరాల సంఖ్య	ఇంటిపేర్ల (surname) ల సంఖ్య
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) ఇచ్చిన సమాచారాన్ని గుర్తించడానికి ఒక హిస్టోగ్రాంను నిర్మించండి.

(ii) ఇంటిపేర్ల సంఖ్య గరిష్ఠ తరగతి అంతరాన్ని రాయండి..

14.5 కేంద్రీయ స్థాన విలువలు:

ఇదే అధ్యాయంలో ఇంతకుమందు మీరు వివిధ విధానాలలో అంటే పౌనః పున్య వితరణా పట్టిక, హిస్టోగ్రామ్ మరియు పౌనఃపుణ్య బహుభుజిల ద్వారా దత్తాంశాలను ప్రతినిధించాము. దత్తాంశాలను అర్థంచేసుకోవడానికి అన్ని ప్రాప్తాంకాలను పరిగణించాలా? లేదా నిర్ధిష్ట ప్రాప్తాంకాలను మాత్రం పరిగణించాలా. దత్తాంశాల కొన్ని ప్రముఖ లక్షణాలను తెలుసుకోవచ్చా అనే ప్రశ్న వస్తుంది. ఇది కేంద్రీయ స్థాన విలువల లేదా సరాసరిల ద్వారా సాధ్యమవుతుంది.

మేరి మరియు హరి అను ఇద్దరు విద్యార్థులు తమ పరీక్ష జవాబు పత్రికలను తీసుకున్న సన్నివేశాన్ని గమనించండి. పరీక్షలో 5 ప్రశ్నలకు 10 మార్కులు కలిగివున్నది. వారి మార్కులు ఇలా వున్నాయి.

ప్రశ్న సంఖ్య	1	2	3	4	5
మేరీ మార్కులు	10	8	9	8	7
హరి మార్కులు	4	7	10	10	10

టెస్ట్ కాపీ తీసుకున్న తరువాత వారి సరాసరి మార్కులు క్రింది విధంగా వున్నట్టు తెలుస్తుంది.

మేరి సరాసరి మార్కులు $= \frac{42}{5} = 8.4$

హరి సరాసరి మార్కులు $= \frac{41}{5} = 8.2$

మేరి సరాసరి హరి కంటే ఎక్కువ కావున మేరి తన నిర్వహణ హరి కన్న ఉత్తమంగా వుందని అంటుంది. హరి ఇందుకు ఒప్పుకోడు. అతడు ఇద్దరి మార్కులను ఆరోహణ క్రమంలో రాస్తాడు. మరియు మధ్యలో మార్కులను క్రింది విధంగా కనుగొంటాడు.

మేరి మార్కులు	7	8	8	9	10
హరి మార్కులు	4	7	10	10	10

హరి తన మధ్య స్కోర్ 10 అయినందువల్ల, అది మేరి మధ్యంకము 8 కంటే ఎక్కువ కావున హరి తన నిర్వహణ ఉత్తమం అంటాడు.

అయితే మేరి దానికి ఒప్పుకొన్నప్పుడు హరి మరొక విధానం ద్వారా ప్రయత్నిస్తాడు. ఇద్దరి మార్కులను పోల్చినప్పుడు హరి 10 ని ఎక్కువ సార్లు (3 సార్లు) తెచ్చుకున్నాడు మేరి ఒక సారి పొందింది. కావున తన నిర్వహణే ఉత్తమం అంటాడు.

ఇప్పుడు హరి మరియు మేరిల మధ్య భిన్నాభిప్రాయాలు పరిష్కరించాలి. దాని కొరకు వారి వాదన సమర్థనకోసం మూడు కొలతలను గమనిద్దాం. మొదటి సందర్భంలో మేరి కనుగొన్న మార్కుల కొలతయే సరాసరి (**mean**). హరి తన వాదన కొరకు ఉపయోగించిన కొలత మధ్య మార్కులనే మధ్యమం (**median**). అలాగే ఎక్కువ సార్లు పునరావర్తనం అయిన మార్కులే బహులకం (**mode**).

ఇప్పుడు మనం సరాసరిని వివరంగా చూద్దాం.

ఒక దత్తాంశంలోని అన్ని రాశుల మొత్తంను ఆ రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా ఫలితమును అంక గణిత మధ్యమము లేక సరాసరి లేక సగటు అంటారు.

అంక గణిత మధ్యమము $\bar{x} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$ లేదా

$$\bar{x} = \frac{\sum x_1}{n}$$

దీన్ని $\bar{x}$ సంకేతంతో సూచిస్తారు. మరియు '**x బార్**' అని చదువుతారు. ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణను గమనిద్దాం.

ఉదాహరణ 10 : ఒక వారంలో సమాజ సేవలకు వినియోగించు సమయం గురించి ఒక సముదాయపు 5 మందిని అడిగినప్పుడు వారు క్రమంగా 10, 7, 13, 20 మరియు 15 గంటలు అన్నారు. ఒక వారంలో వారు సమాజ సేవకు వినియోగించిన సరాసరి సమయాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : మీరు ఇంతకు ముందు మునుపటి తరగతులలో నేర్చుకునట్లు రాశుల సరాసరి $\dfrac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{మొత్తం రాశుల సంఖ్య}}$ అవుతుంది.

సరాసరి కనుగొనుటలో మన పనిని సరళీకరిద్దాం. i వ రాశిని సూచించడానికి చరరాశి x_i ని ఉపయోగిద్దాం. పై ఉదాహరణలు i విలువ 1 నుండి 5 వరకు తీసుకుందాం. అందువలన మన మొదటి రాశి x_1, రెండవది x_2 ఈ విధంగా x_5 వరకు తీసుకుందాం.

$x_1 = 10$, అంటే మొదటి రాశి, ఇదే విధంగా $x_2 = 7$

$x_3 = 13$, $x_4 = 20$ మరియు $x_5 = 15$ అవుతుంది.

$$\therefore \text{ సరాసరి } \bar{x} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{మొత్తం రాశుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10+7+13+20+15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

కాబట్టి '5' మంది సమాజ సేవకు వినియోగించిన వారానికి 13 గంటలు.

ఇదే విధంగా 30 మంది సరాసరి సమయాన్ని కనుగొనడానికి మనం $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ వరకు రాయడం కష్టం. కావున మనం మొత్తాన్ని సూచించడానికి గ్రీక్ సంకేతం Σ (Sigma సిగ్మా) ను ఉపయోగిస్తాము. $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ కు బదులుగా మనం $\sum_{i=1}^{30} x_i$ అని రాస్తాము. దీన్ని i విలువ 1-30 వరకు ఉండునట్లు x_i ను రాశుల మొత్తం అని చదువుతాము.

అందువలన $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$$

ఇదే విధంగా 'n' రాశులకు $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ఉదాహరణ 11: ఒక పాఠశాలలో 9వ తరగతిలో 30 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులను **ఉదా:** 2లో ఇవ్వబడినది. వాటి సరాసరిని కనుగొనండి.

సాధన : ఇప్పుడు $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_{10}}{30}$

$\sum_{i=1}^{30} x_i$ = 10 + 20 + 36 + 92 + 95 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70 + 92 + 88 + 80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 50 + 50 + 56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88 = 1779

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

ఈ విధానంలో సమయం వ్యర్థం అవుతున్నది కదా దీనిని సరళీకరించవచ్చా? ఈ దత్తాంశాలకు పౌనఃపుణ్య వితరణ పట్టికను నిర్మాణాన్ని గమనించండి. (14.1 పట్టిక)

ఈ పట్టిక నుండి 1 విద్యార్థి 10 మార్కులు, ఒకరు 20 మార్కులు ముగ్గురు 36 మార్కులు, నలుగురు 40 మార్కులు, ఇద్దరు 56 మార్కులు, నలుగురు 60 మార్కులు, నలుగురు 70 మార్కులు ఒకడు 72 మార్కులు ఒకరు 80 మార్కులు, ఇద్దరు 88 మార్కులు ముగ్గురు 92 మార్కులు మరియు ఒకరు 95 మార్కులను పొందినట్లు తెలుస్తుంది.

$\therefore$ పొందిన మొత్తం మార్కులు $= (1 \times 10) + (1 \times 20) + (3 \times 36) + (4 \times 40) + (3 \times 50) + (2 \times 56) + (4 \times 60) + (4 \times 70) + (1 \times 72) + (1 \times 80) + (2 \times 88) + (3 \times 92) + (1 \times 95)$

$= f_1 x_1 + . . . + f_{13}\ x_{13}$,

ఇక్కడ f_i అనునది i రాశి యొక్క పౌనః పున్యము 14.1 పట్టిక)

దీనిని మనం సంక్షిప్తంగా $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i$ అని రాస్తాము.

$\therefore$ పొందిన మొత్తం మార్కులు $= \sum_{i=1}^{13} f_i x_i$

$= 10 + 20 + 108 + 160 + 150 + 112 + 240 + 280 + 72 + 80 + 176 + 276 + 95 = 1779$

ఇప్పుడు మొత్తం రాశుల సంఖ్య $= \sum_{i=1}^{13} f_i$

$= f_1 + f_2 + - - - + f_{13}$

$= 1 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1$

$= 30$

కావున సరాసరి $\bar{x} = \dfrac{\text{అన్ని రాశుల మొత్తం}}{\text{మొత్తం రాశుల సంఖ్య}} = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i} \right) = \dfrac{1779}{30} = 59.3$

ఈ విధానాన్ని క్రింది పట్టికలో చూపబడింది. ఇది పట్టిక (14.1) పరిష్కృత రూపం.

పట్టిక 14.12

మార్కులు (x_i)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
	$\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{13} f_i \; x_i = 1779$

ఇలా అవర్గీకృత పౌనః పున్య వితర సందర్భంలో సరాసరిని కనుగొనడానికి మీరు ఈ సుత్రాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

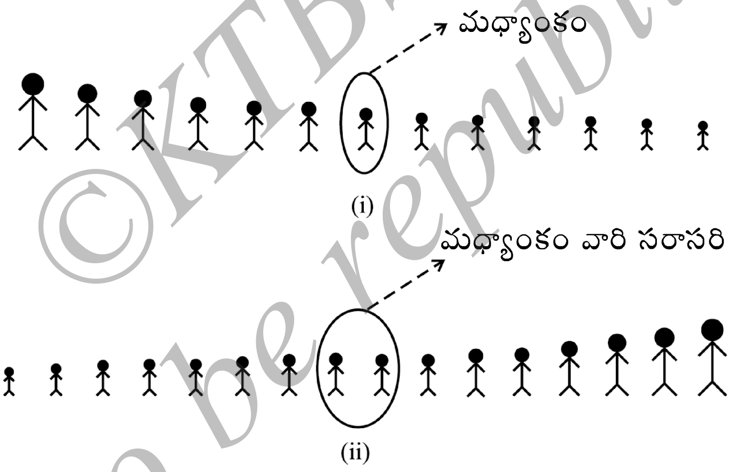
ఇప్పుడు మునుపు చర్చించిన హరి మరియు మేరిల సమస్య వైపుకు వెలదాం. రెండవ విధానంలో మధ్య మార్కులు కనుగొనడానికి తన నిర్వహణ ఉత్తమ అంటాడు. ఇదివరకే, చెప్పినట్టు కేంద్రీయ స్థాన విలువల మధ్య గతం అంటాము.

మధ్య గతం **(median)** విలువ రాశులను రెండు సమభాగాలుగా విభజిస్తుంది. దత్తాంశాలను ఆరోహణ మరియు అవరోహణ క్రమంలో రానీ, అవర్గీకృత దత్తాంశాల మధ్య గతం **(median)** క్రింది విధముగా కనుగొనవచ్చు.

(i) రాశుల మొత్తం సంఖ్య (n) బేసి సంఖ్య అయినప్పుడు మధ్యగతం విలువ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$రాశి అవుతుంది. ఉదా: $n = 13$ అయితే, $\left(\frac{13+1}{2}\right)$వ అంటే 7వ రాశి మధ్యగతం అవుతుంది 14.9 (i) చిత్రంను చూడండి)

(ii) మొత్తం రాశుల సంఖ్య (n) సరి సంఖ్య అయితే మధ్యగతం విలువ $\left(\frac{n}{2}\right)$వ మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$రాశుల సరాసరి అవుతుంది.

ఉదాహరణ, $n = 16$ అయినప్పుడు మధ్యగతము $\left(\frac{16}{2}\right)$వ మరియు $\left(\frac{16}{2}+1\right)$వ రాశుల సరాసరి అంటే 8వ మరియు 9వ రాసుల సరాసరి అవుతుంది. (చిత్రం 14.9 (ii) చూడండి.



చిత్రం 14.9

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణల సహాయంతో దీన్ని అర్థం చేసుకుందాం.

ఉదాహరణ 12 : ఒక తరగతిలో 9 మంది విద్యార్థుల ఎత్తులు (cm) లలో క్రింది విధంగా వున్నాయి?

155 160 145 149 150 147 152 144 148

ఈ దత్తాంశాల మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : జట్టు గడించిన పాయింట్లను ఆరోహణ క్రమంలో రాసినప్పుడు.

144 145 147 148 149 150 152 155 160

ఇక్కడ మొత్తం రాశుల సంఖ్య 9, ఇది ఒక బేసి సంఖ్య కావున $\left(\frac{n+1}{2}\right)=\left(\frac{9+1}{2}\right)$వ = 5వ విద్యార్థి ఎత్తు 149cm మధ్యగతం అవుతుంది. కావున మధ్యగతం 149cm లేదా ఎత్తుల మధ్యమ విలువ 149 cm.

ఉదాహరణ 13 : ఒక కబడ్డీ జట్టు ఒక సీరిస్ లో గడించిన పాయింట్లు క్రింది విధంగా వున్నాయి.

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

జట్టు గడించిన పాయింట్ల మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : జట్టు గడించిన పాయింట్లను ఆరోహణ క్రమంలో రాసినప్పుడు.

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, $\boxed{10, \; 14,}$ 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

మొత్తం 16 రాశులున్నాయి. కావున ఇక్కడ రెండు మధ్య పదాలు ఉన్నాయి. $\left(\frac{16}{2}\right)$వ మరియు $\left(\frac{16}{2}+1\right)$వ రాశులు అంటే 8 వ మరియు 9 వ రాశులు. కావున మధఆయగతము 8 వ మరియు 9 వ పదాల సరాసరి అవుతుంది.

అంటే మధ్యగతము $=\frac{10+14}{2}=12$

కావున కబడ్డీ జట్టు గడించిన పాయింట్‌లు మధ్యగతము = 12

ఇప్పుడు మరల హరి మరియు మేరి వీరిద్దరి పరిహారం కాని వివాదాన్ని గమనిద్దాం. హరి 3వ కొలత కోసం బహుళకాన్ని ఉపయోగించుకున్నాడు. ఒక దత్తాంశములలో మిగిలిన రాశులకన్నా ఎక్కువసార్లు పునరావృతమగు రాశిని అనగా ఎక్కువ పౌనఃపున్యము గల రాశిని ఆ దత్తాంశమునకు బహుళకము అంటారు.

గార్మెంట్స్ మరియు షూ కంపెనీలలో ఈ కేంద్రీయ స్థాన విలువలకు గాను ఎక్కువ ఉపయోగించుకొనే బహుళకముయొక్క ఉపయోగం జ్ఞానంతో కంపెనీలు ఏ కొలత ఉత్పన్నాలను ఎక్కువ సంఖ్యలో తయారు చేయాలో అనుటను నిర్ధారిస్తాయి.

దీనిని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా స్పష్టం చేద్దాం.

ఉదాహరణ 14 : 20 మంది విద్యార్థులు పొందిన క్రింది ఇచ్చిన మార్కులలో (10 లో) బహుళకాన్ని (mode) కనుగొనండి.

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

సాధన : క్రింది విధంగా దత్తాంశాలను జోడిద్దాం.

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10,

ఇక్కడ 9 అనునది ఎక్కువసార్లు అంటే 4 సార్లు పునరావర్తనం అయినది కావున బహుళకం 9 అవుతుంది.

ఉదాహరణ 15 : 5 మంది ఉద్యోగులు గల ఒక ఫ్యాక్టరి ఒక చిన్న ఘటకాన్ని పరగణించండి. అందులో ఒక సూపర్ వైజర్ మరియు నలుగురు కార్మికులు కార్మికులు ప్రతినెల ₹ 5000 తీసుకుంటే సూపర్‌వైసర్ ₹15.000 తీసుకుంటాడు. ఫ్యాక్టరి ఘటకపు వేతనం, సరాసరి, మధ్యగతం, బహుళకాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : సరాసరి $= \dfrac{5000+5000+5000+5000+15000}{5} = \dfrac{35000}{5} = 7000$

∴ వేతనాలు సరాసరి ప్రతినెలకు ₹ 7000

మధ్యగతాన్ని పొందడానికి వేతనాలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయాలి.

5000, 5000, 5000, 5000, 15,000

ఉద్యోగస్తుల సంఖ్య 5, ఇది ఒక బేసి సంఖ్య కావున మధ్యగతము $\left(\dfrac{5+1}{2}\right)$వ $= \left(\dfrac{6}{2}\right)$ = 3వ రాశి

∴ మధ్యగతము ప్రతి నెలకు ₹ 5000 అవుతుంది.

వేతన బహుళకాన్ని కనుగొనడానికి దత్తాంశాలను గమనించినప్పుడు 5000 అను రాశి ఎక్కువ సార్లు పునరావృతమైనది. కావున వేతనాల బహుళకం ప్రతి నెలకు 5000.

వేతనాల సరాసరి అంటే ₹ 7000 ను దత్తాంశాలలో ఏదేని అంశానికి అందాజు విలువను ఇవ్వకూడదు. అంటే వేతనాలు మధ్యగతము మరియు బహుళకాలు అంటే ₹ 5000ను దత్తాంశాలను ఉత్తమంగా ప్రతినిధిస్తాం.

దత్తాంశాల ఆది మరియు అంత్య పదాలు దత్తాంశాల సరాసరి విలువపై పరిణామం చూపిస్తుంది. ఇది సరాసరి పరిమాణము అవుతుంది. కావున దత్తాంశాలలో కొన్ని అంశాలు మిగిలిన ఎక్కువ అంశాల కంటే ఎక్కువ వ్యత్యాసం ఉంటే (**ఉదా**:1, 7, 8, 9, 9) సరాసరి దత్తాంశాల ఉత్తమ ప్రాతినిధ్యం అనిపించదు. మధ్యగతము మరియు బహుళకాల దత్తాంశాల ఆది మరియు అంత్య పదాలను అవి అవలంబించి ఉండవు. అలాంటి సందర్భాలలో ఇవి సరాసరి కంటే ఉత్తమమనిపిస్తాయి.

ఇప్పుడు మనం మరలా హరి మరియు మేరీల సమస్య చూద్దాం. మరియు కేంద్రీయ స్థాన విలువల మూడు కొలతను పోలుద్దాం.

కేంద్రీయ స్థాన విలువలు	హరి	మేరి
సరాసరి	8.2	8.4
మధ్యగతం	10	8
బహుళకం	10	8

ఈ పోలిక నుండి మనకు తెలియున దేమంటే ఏ విద్యార్థి ఉత్తమం అను నిర్ణయానికి రావడానికి కొలతలు చాలవు. దీనికోసం మరికొన్ని సమాచారాల అవసరముంది దీనిని మీరు తర్వాతి తరగతులలో అభ్యసిస్తారు.

అభ్యాయం 14.4

1. ఒక సీరీస్ 10 పంద్యాలలో ఒక జట్టు పొందిన గోల్‌ల సంఖ్య ఇవ్వబడినది.

   2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

   వీటి సరాసరి, మధ్యగతము మరియు బహుళకాలను కనుగొనండి.
2. గణిత పరీక్ష రాసిన 15 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు (100కి) కింద ఇవ్వబడినవి..

   41, 39, 41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

   ఈ దత్తాంశాల సరాసరి, మధ్యగతము మరియు బహుళకాలను కనుగొనండి.
3. ఈ క్రింది రాశులను ఆరోహణ క్రమంలో జోడించారు. వీటి మధ్యగతము 63 అయితే x విలువ కనుగొనండి.

   29, 32, 48, 50, x, $x+2$, 72, 78, 84, 95
4. 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 వీటిబహుళకాన్ని కనుగొనండి.
5. ఒక ఫ్యాక్టరిలో పనిచేసే 60 మంది పనివాళ్ళ వేతనమును క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. వేతనాల సరాసరి కనుగొనండి.

వేతనము (₹ లలో)	పనివాళ్ళ సంఖ్య
3000	16
4000	10
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10.000	1
మొత్తం	**60**

6. క్రింది సన్నివేశాలకు ఉదాహరణ ఇవ్వండి..

(i) సరాసరి కేంద్రీయ స్థాన విలువల ఖచ్చితమైన కొలత కలదు..

(ii) సరాసరి కేంద్రీయ స్థాన విలువల ఖచ్చితమైన కొలతకాదు. ఐతే మధ్యగతము కేంద్రీయ స్థాన విలువల ఖచ్చితమైన కొలత కలదు.

14.6. సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు

1. ఒక ప్రత్యేక ఉపయోగార్థం సేకరించబడిన విషయాలు లేక సంఖ్యాత్మక వివరాలను దత్తాంశం అంటారు.

2. సేకరించిన సమాచారాన్ని అర్థవంతము చేయు గణిత శాఖనే సాంఖ్య శాస్త్రము అంటారు.

3. దత్తాంశాలను గ్రాఫ్ విధానంలో అంటే దిమ్మ చిత్రం (Bar graph) హిస్టోగ్రాం మరియు పౌనః పున్య బహుభుజాలలో ఎలా గుర్తించాలి.

4. అవర్గీకబుుత దత్తాంసాలకు కేంద్రీయ స్థాన విలువలు 3 కొలతలు అంటే

(i) **సరాసరి** : రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా ఫలితమును దత్తాంశము యొక్క అంకగణిత మధ్యమము (సరాసరి) అంటారు.

$\therefore\ \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, వర్గీకృత పౌనః పున్య విభాగజనమునకు అంకగణిత

మధ్యమము, $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

(ii) **మధ్యగతం విలువ** : దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య 'n' బేసి సంఖ్య అయిన $=\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$వ రాశి విలువ మధ్యగతము అవుతుంది.

దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య 'n' $=\left(\dfrac{n}{2}\right)$ మరియు $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$వ రాశుల సరాసరి మధ్యగతం అవుతుంది.

(iii) **బహుళకము** : ఒక దత్తాంశములోని మిగిలిన రాశులకన్నా ఎక్కువ సార్లు పునరావృత్తం అగు రాశిని అనగా ఎక్కువ పౌనఃపున్యం గల రాశిని ఆ దత్తాంశమునకు బహుళకం అంటారు.

అధ్యాయ - 15

సంభావ్యత (PROBABILITY)

"అవకాశపు ఆటలని పరిగణించడం వలన ఆరంభమైన విజ్ఞానము మానవుని విజ్ఞానపు అత్యంత ప్రముఖ విషయమై ఉన్నత స్థానమునకు చేర్చుట ఒక గమనార్హమైన విషయమైనది.

- పియరె సైమన్ ల్యాప్లస్

It is remarkable that a science, which began with the consideration of games of chance, should be elevated to the rank of the most important subject of human knowledge.

- Pierre Simon Laplace

15.1 పరిచయము

నిత్య జీవితంలో మనం కొన్ని మాటలను వినియుండెదము

1. **బహుశ:** ఈ రోజు వర్షం రావచ్చును.
2. అతడు పరీక్షల్లో ఉత్తర్ణుడగట నాకు సందేహంగావుంది.
3. వార్షిక పరీక్షల్లో కవిత ప్రథమ స్థానంలో ఉత్తీర్ణురాలగుటలో ఎక్కువ సాధ్యాలు కలవు.
4. డీజల్ దరలు ఎక్కువగు **అవకాశములు** ఎక్కువగా ఉంది.
5. ఈ రోజు జరగబోయే క్రికెట్ పంద్యములో భారత్ టాస్ గెలిచే **అవకాశములు** 50:50 కలవు.

పై వాక్యాలలో 'బహుశ', 'సందేహం', 'ఎక్కువ సాధ్యత', 'అవకాశములు' ఇలాంటి పదాలు అనిశ్చితిని సూచించును. ఉదా: "మొదటి వాక్యము""బహుశ వర్షం". అనగా ఈ రోజు వర్షం రావచ్చును లేక రాకపోవచ్చును. అనే అర్థమును ఇచ్చును. ఇలాంటి సందర్భములలో వెనుక వర్షం వచ్చిన అనుభవంలోని అధారంతో మనం ఈ రోజు వర్షం రావచ్చునని ఊహించుకొనెదదు. (2) నుండి(5) వరకు గల వాక్యములో ఈ విధముగా ఊహించు కోన్నాము. అనేక సందర్భాలలో "బహుశ" ఇలాంటి పదాల అనిశ్చితిని సంభావ్యత ద్వారా సాంఖ్యకంగా కొలుచుటకు సాధ్యమైయున్నది.

సంభావ్యత జూదం నుండి ప్రారంభమైననూ దీనిని భౌతిక విజ్ఞాన శాస్త్రం, వాణిజ్య శాస్త్రం జీవన విజ్ఞాన శాస్త్రం ఔషద విజ్ఞానము మరియు వాయునియంత్రణ విజ్ఞాన రంగాలలో సంపూర్ణంగా అత్యంత విపులంగా ఉపయోగించబడుతుంది.

15.2 సంభావ్యత - ఒక ప్రాయోగిక పద్ధతి

బ్లేస్ ప్యాస్కల్
(1623-1662)
చిత్రం 15.1

"సంభావ్యత పరికల్పన అత్యంత ఆశ్చర్యకరంగా అభివృద్ధి చెందినది. 1654వ సంవత్సరంలో చెవలీర్ డి మేరి అను జూదగాడు 17వ శతాబ్దంలో ఫ్రెంచ్ తత్వజ్ఞాని మరియు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు అయిన బ్లేస్ ప్యాస్కల్‌ను దాడులకు సంబంధించిన కొన్ని సమస్యలకుగాను సందర్శించెను. ఈ సమస్యలలో ఆసక్తి పొందిన ప్యాస్కల్ వాటిని అభ్యసించి మరియొక ఫ్రెంచి గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు పైరి డి పర్మిట్‌తో చర్చించెను. ప్యాస్కల్ మరియు ఫెర్మాట్ ఇద్దరు సమస్యలకు సరైన పరిహారమును స్వతంత్రంగా కనుగొనిరి. ఈ తత్వం సంభావ్యత తత్వం యొక్క మొదటి దశయైనది.

బ్లేస్ ప్యాస్కల్
(1623-1662)
చిత్రం 15.1

ఇటలీకిలి చెందిన గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన. జె.కార్డన్(1501 నుండి 1576) గారు ఈ విషయపు మొదటి గ్రంథము రచించింది. ఈ గ్రంథం యొక్క ముఖ్యశీర్షిక "Book on Games of chance"(సాధ్యమైన ఆటలపై పుస్తకము) [Liber de Ludo Ale-ar] ఇది 1663 లో ప్రచురించబడినది. గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన జె. బర్నోలి(1654-1705) మరియు పి.ల్యాప్లాస్(1749-1827) ఎ.ఎ.మార్కోవా(1856-1922)మరియు ఎ.ఎన్ కాల్మోగోరవ్(జననం 1903) వారందరూ గణనీయమైన సేవలు అందించిరి.

వెనుకటి తరగతులలో మీరు నాణ్యమును ఎగుర వేయుట, బిళ్ళలను విసురుట మొదలగు ప్రయోగాలను చేయుట ద్వారా సంభావ్యత యొక్క పరిచయంను కలిగే ఉన్నాము. మరియు వాటి ఫలితాలను గమనించియుండెదరు. ఒక ప్రయోగంలో నిర్దిష్టమైన ఫలితాలనిచ్చు సాధ్యతను కొలవడం మీరు ఇప్పుడు నేర్చుకొనెదరు.

కార్యాచరణం 1 : (i) పెద్దైనా నాణ్యమును తీసుకోని 10 సార్లు ఎగురవేసిన బొమ్మ(Head) మరియు బొరుస(Tail) అధోముఖంగా పడు సంఖ్యను ఈ కింది విధంగా నమోదించండి.

పట్టిక 15.1

నాణ్యమును పైకి ఎగురవేసిన సంఖ్య	బొమ్మ అధోముఖాంగా పడిన సంఖ్య	బొరుసు అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య
10	-	-

కింది భిన్నాల విలువలను రాయండి:

$$\frac{\text{ఒకటి బొమ్మ అధోముఖాంగా పడిన సంఖ్యా}}{\text{నాణ్యమును ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

మరియు

$$\frac{\text{ఒకటి బొరుసు అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య}}{\text{నాణ్యమును ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

(ii) ఒక నాణ్యమును 20సార్లు పైకి ఎగురవేసి మీరు చూసిన దానిని వైవిధంగా నమోదు చేయండి. మరల మీరు చూసిన వానిని పై విధంగా భిన్నాల విలువలను కనుగొనండి.

(iii) ఇదే విధంగా నాణ్యమును ఎగురవేయు ప్రయోగాల సంఖ్యను పెంచి ప్రయోగాన్ని పునరావృత్తం చేయండి. బొమ్మ మరియు బొరుసులు అధోముఖంగా పడు సంఖ్యలను నమోదు చేసి దానికి అనుగుణంగా భిన్నాలను కనుగొనండి.

నాణ్యమును ఎగురువేయు ప్రయోగముల సంఖ్య పెంచిన కొలది భిన్నాల విలువలు 0.5కు దగ్గరగాఉండును. అనుటను మీరు చూసెదరు. ఎక్కువసార్లు నాణ్యమును అధోముఖంగా ఎగురవేసినప్పుడు ఫలితం ఏమైనది అని తెలుసుకొనుటకు కింది కార్యాచరణాన్ని కూడా చేయవచ్చును.

కార్యచరణం 2 : తరగతిలోని విద్యార్థులను రెండు తేదా మూడు గుంపులుగా చేయవలెను. ప్రతి గుంపులోని ఒక విద్యార్థి ఒక నాణ్యమును 15 సార్లు ఎగురవేయవలెను. అదే గుంపులోని ఇంకో విద్యార్థి బొమ్మ మరియు బొరుసు అదోముఖంగా పడిన సంఖ్యను నమోదుచేయాలి (ఇందులోని అన్ని గుంపుల సభ్యులు ఒకే రకములోని నాణ్యాలను ఉపయోగించాలి)

ఇపుడు నల్లబల్లపై(Black Board) 15.2 మాదిరిగా పట్టికను చేయవలెను. ముందుగా ఒకటవ గుంపు సభ్యులు తమ వీక్షణను నమోదుచేసి ఫలిత భిన్నాలను లెక్కించవలెను. తరావత 2వ గుంపు సభ్యులు తమ వీక్షణను రాయవలెను. అయితే ఇక్కడ 1వ గుంపు మరియు 2వ గుంపు యొక్క మొత్తం దత్తాంశాలను భిన్నాలను లెక్కించవలెను మరియు ఇదే విధంగా కొనసాగించాలి. (మనం ఈ బిన్నాలను సంచిత భిన్నాలు అనవచ్చును)

ఇక్కడ మనం ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులు ఇచ్చిన ఫలితాలను మొదటి 3 వరుసలలో నమోదు చేయాలి.

పట్టిక 15.2

గుంపు	బొమ్మ అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య	బొరసు అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య	$\frac{\text{బొమ్మ అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య మొత్తం}}{\text{నాణ్యమును ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$	$\frac{\text{బొరసు అధోముఖంగా పడిన సంఖ్యల మొత్తం}}{\text{నాణ్యమును ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15}=\frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15}=\frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30}=\frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30}=\frac{28}{45}$
4	⋮	⋮	⋮	⋮

ఈ పట్టికలో మీరు దీనిని గమనించెదరు? నాణ్యమును ఎగురవేయు సంఖ్య ఎక్కువైన కొలది నిలువరుస(4) మరియు(5) యొక్క భిన్నాల విలువలు 0.5కు దగ్గరగా ఉండుటను మీరు గమనిస్తారు.

కార్యాచరణము-3 : (i) ఒక పాచిక(Die)ను 20సార్లు ఎగురవేసి అంకెలైన 1,2,3,4,5 మరియు 6పైకి వచ్చు సంఖ్యలను రాసి, దానిని పట్టిక 15.3 వలె నమోదు చేయండి.

ఒక పాచిక ఖచ్చితమైన 6 ముఖాల ఘనము, ప్రతి ముఖము 1 నుండి 6 వరకు ఒక అంకె యుండును. ఒక్కోసారి అంకెల బదులు అంతే సంఖ్య బిందువులు వుండును.

పట్టిక 15.3

(పాచిక) బిళ్ళను ఎగుర వేసిన సంఖ్య	ఈ అంకెలు అధోముఖంగా పడిన సంఖ్య					
	1	2	3	4	5	6
20						

ఈ క్రింది భిన్నాల విలువలను కనుక్కోండి

$$\frac{\text{అధో ముఖంగా 1 వచ్చిన సంఖ్య}}{\text{పాచికను ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$\frac{\text{అధోముఖంగా 2వచ్చిన సంఖ్య}}{\text{పాటికను ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\text{అధోముఖంగా 6 వచ్చిన సంఖ్య}}{\text{పాటికను ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

(ii) ఇపుడు పాచికను 40 సార్లు ఎగురవేయండి వీక్షించినదానిని నమోదు చేయండి. (i) లో చేసినట్లు భిన్నాలను లెక్కించండి. పాచికను ఎగురవేసిన సంఖ్య ఎక్కువైన కొద్దీ (i) మరియు (ii)లలో లెక్కించిన ప్రతిభిన్నం విలువ సమీపంగా ఉంటుంది.

దీనిని వీక్షించుటకు కార్యాచరణము 2లో చేసినట్లు గుంపు కార్యాచరణం చేయించవచ్చును. మీ తరగతి విద్యార్థులను చిన్న చిన్న గుంపులుగా విభజించండి. ప్రతి గుంపులోని ఒక విద్యార్థి 10 సార్లు ఒక పాచికను ఎగురవేయాలి. ఎగురవేసిన 10 సార్లు ఒక పాచికను ఎగురవేయాలి. ఎగురవేసిన వీక్షణలను నమోదు చేసి సంచిత భిన్నాలను లెక్కించాలి.

అంకె 1 భిన్నాల విలువలను పట్టిక 15.4 లో నమోదు చేయ ఈ పట్టికను మిగిలిన అంకెల భిన్నాల విలువలను కనుగొనుటకు విస్తరించవచ్చును. లేదా ఇదే విధంగా మరియొక్క పట్టికను గీయవచ్చు.

పట్టిక 15.4

గుంపులు	గుంపులు పాచికను ఎగురవేసిన సంఖ్య	అంకె 1 పడిన సంఖ్యల మొత్తం / పాచికను ఎగురవేసిన సంఖ్య మొత్తం
(1)	(2)	(3)
1	-	-
2	-	-
3	-	-
4	-	-

అన్ని గుంపులు ఉపయోగించిన పాచికను వీక్షించుట ఒకే విధంగా ఉండి ఒకే పారిమాణాన్ని కలిగే ఉండాలి. అప్పుడు మొత్తం పాచికలు ఎగురవేయుటను ఒకే పాచికలో ఎగురవేసినట్లు పరిగణించాలి

మీరు ఈ పట్టికలో దీనిని గమనించెదరు ? పాచిక ఎగురువేసిన మొత్తం సంఖ్య ఎక్కువైన కొలది (3) వ నిలువ వరుసలోని భిన్నాలు 1/6ను సమీపించును.

కార్యాచరణము 4 : (i) 2 నాణ్యములను ఒకే సమయంలో 10 సార్లు ఎగురవేయండి. మరియు మీ ఫలితాలను కింది విధంగా పట్టిక రూపంలో నమోదు చేయండి.

పట్టిక 15.5

2 నాణ్యములు పైయిగుర వేయు సంఖ్య	బొమ్మ పైకిరుని వాటి సంఖ్య	1 బొమ్మ పైకి పడు సంఖ్య	2 బొమ్మలు పైకి పడు సంఖ్య
10	-	-	-

భిన్నాలను రాసుకోండి:

$$A = \frac{\text{బొమ్మలు పైకి పడనివాటి సంఖ్య}}{\text{2 నాణ్యములు పైకి ఎగురవేయు మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$B = \frac{\text{1 బొమ్మలు పైకి పడు సంఖ్య}}{\text{2 నాణ్యములు పైకి ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$C = \frac{\text{2 బొమ్మలు పైకి పడిన సంఖ్య}}{\text{2 నాణ్యములుపైకి ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$$

ఈ భిన్నాలను కనుగొనండి.

ఇపుడు ఎగుర వేయు దాని సంఖ్య పెంచండి. (కార్యాచరణం 2 మాదిరిగా) ఎగుర వేయు సంఖ్యను పెంచిన కొలది A,B మరియు C ల విలువలు క్రమంగా 0.25, 0.5 మరియు 0.25 నకు సమీపించుటను చూడవచ్చును.

కార్యాచరణం : 1లో ప్రతి నాణ్యాన్ని ఎగురవేసిన లేదా పాచికను దొర్లించిన దానిని 'ప్రయత్నం' అంటారు. లేదా దీనిని యాదృశ్చిక ప్రయోగం అని కూడా అంటారు. ఇదే విధంగా కార్యాచరణం 3,4లో ఏకకాలంలో రెండు నాణ్యములను ఎగుర వేయుట కూడా 1 ప్రయత్నమై ఉంటుంది. దానివలన ప్రయత్నం ఒక ప్రక్రియమై ఉంది.

ఇది ఒకటి లేదా ఎక్కువ ఫలితాలను ఇచ్చును. కార్యాచరణం 1లో సాధ్యమైన పర్యవసానాలు బొమ్మమరియు బొరుసుపై యుండును. అలాగే కార్యాచరణం 3 లో సాధ్యమైన పర్యవసానాలు 1,2,3,4,5 మరియు 6 అవుతాయి.

కార్యాచరణం 1లో ప్రతి ప్రత్యేక ప్రయత్నాన్ని లేదా కొన్ని ప్రత్యేక ప్రయత్నాలను కలిపి ఒక ఘటన అందురు. ఇదేవిధంగా బొరుసును పొందిన దానిని బొరుసు పర్యవాసానాన్ని ఘటన అందురు. కార్యాచరణం 2లో 1 నిర్దిష్ఠ సంఖ్యను తీసుకొని ఉదా: 1ని పొందుట పర్యవసానం 1 అహిన ఘటనమై ఉండును.

మన ప్రయోగము నాణ్యమును ఎగురవేసినపుడు సమాన సంఖ్య పొందినది. ఘటన 2,4 మరియు 6 అను మూడు పర్యవసానాలను కలిగి ఉండును. అ ప్రయోగం కొన్ని పర్యవసానాలను పొందియుండెను. 10వ తరగతిలో మీరు ఘటన యొక్క ఖచ్చితవై ంన వ్యాఖ్యానాన్ని అభ్యసించెదరు. అందువలన ఇప్పుడు మీరు కార్యాచరణం-4 లోని ఘటనలను తెలెపెదరు ?

దీని ఆధారంగా ఇపుడు సంభావ్యత అనగానేమె. అనుదానిని చూచెదము. మన ప్రయత్నాల నుండి ఏ పర్యవసారాలను పొందెదమో అనుదాని అధారంగా మనము ప్రయోగాత్మకంగా లేదా అనుభావిక సంభావ్యతను కనుగొనవచ్చును. ఇప్పుడు మొత్తం ప్రయత్నాల సంఖ్య 'n' అనుకొనిన సంభవించుచున్న బిందు ఘటన E యొక్క ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత P(E)

$$P(E) = \frac{\text{ఘటన సంభవించిన ప్రయత్నముల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం ప్రయత్నముల సంఖ్య}}$$

ఈ అధ్యాయంలో ప్రాయోగిక సంభావ్యతను కనుగొనుచున్ననూ, అనుకూలానికి సంభావ్యత అని రాస్తారు కొన్ని ఉదాహరణలు గమనిద్దాం.

వెనుకటి కార్యాచరణము 2 మరియు పట్టిక 15.2 ను పున: పరిశీలంచిన పట్టిక(4)లో నిలువ వరుసలో మనం లెక్కించిన భిన్నాలు ఏవి? ఇదీ బొమ్మ పొండా ప్రాయోగిక సంభావ్యత

అయినది. యత్నాల సంఖ్యా మరియు యత్నాలలో బొమ్మ పొందిన సంఖ్య ఆధారంగా ఈ సంభావ్యత మార్పుచెందును ఇదే విధంగా పట్టిక 15.2 లోని 5 వ నిలువ వరుస బొరుసు పొందుటను ప్రాయోగిక సంభావ్యత అగును. ఇది $\frac{12}{15}$ నుండి ప్రారంభమై తదనంతరం $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{28}{45}$ మరియు ఇదే విధంగా ముందుకు కొనసాగును.

అందువలన ప్రాయోగిక సంభావ్యత తీసుకొన్న ప్రయత్నాల సంఖ్య మరియు ఈ ప్రయత్నాలలో మనకు కావలసిన ఫలితాలు వచ్చు సంఖ్యలను అవలంభించియుంటాయి.

కార్యాచరణం5: ప్రారంభించుటకు మునుపు మీరు కార్యాచరణము 3లో రాసిన పట్టికలను చూడండి. నిర్దిష్ట సంఖ్యాలు ఎన్ని సార్లు పాచికను ఎగురవేసినపుడు అంకె 3ను పొందెడి సంభావ్యతను కనుగొనండి. అలాగే ప్రయత్నాల సంఖ్య పెంచినపుడు సంభ్యావ్యత ఎలా మార్పు చెందుతుండి అనుదానిని చూపించండి.

ఇప్పుడు మరి కొన్ని ఉదాహరణలు పరిగణలోనికి తీసుకొందాం.

ఉదా 1 : ఒక నాణ్యమును క్రిందో పౌనః పుణ్యంలో 1000 సార్లు ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ 455 బొరుసు 545 ప్రతి ఒక ఘటన సంభావ్యతను లెక్కించండి ?

సాధన : నాణ్యమును 1000 సార్లు ఎగురవేయుట వలన మొత్తం ప్రయత్నాల సంఖ్య 1000 బొమ్మ మరియు బొరుసు పొందు పర్యవసానాలు క్రమంగా E మరియు F అని పేర్కొందాము. E సంభవించే సంఖ్య అనగా బొమ్మ పడే సంఖ్య 455.

$$\text{అందువలన 'E'యొక్క సంభావ్యత} = \frac{\text{బొమ్మల సంఖ్య}}{\text{ప్రయత్నాల మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$\text{అనగా, } P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

$$\text{ఇదేవిధంగా బొరుసు పొందు ఘటన సంభావ్యత} = \frac{\text{బొరుసుల సంఖ్య}}{\text{ప్రయత్నాల మొత్తం సంఖ్య}}$$

$$\text{అనగా, } P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545$$

పై ఉదాహరణలలో $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$, మరియు ప్రతి ఒక ప్రయత్నం యొక్క సాధనా పర్యవసానాలు లభించినవి.

ఉదాహరణ 2: రెండు నాణెముల విసినప్పుడు 500 సార్లు ప్రతి ప్రయత్నం యొక్క సాధనా పర్యవసానాలు. ఈ కింది విధంగా లభించినవి.

రెండు బొమ్మలు : 105 సార్లు

ఒక బొమ్మ : 275 సార్లు

బొమ్మ లేనట్లుగా : 120 సార్లు

ప్రతి పర్యవసానచ సంభవించు సంభావ్యత కనుగొనండి.

సాధన : రెండు బొమ్మలు పడు, ఒకే బొమ్మపడు మరియు బొమ్మ పడని పర్యవసానాలు క్రమంగా E1,E2 మరియు E3 అని సూచిద్దాం.

$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$

$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$

$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

ఇందులో $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$ అగుట గమనించండి. E_1, E_2 మరియు E_3 లు ఘటన యొక్క పర్యవసానాలలో కూడి యున్నవి.

ఉదాహరణ 3: ఒక పాచికను1000 సార్లు ఎగురవేసిన పడు 1,2,3,4,5 మరియు 6 ఈ పర్యవసానాల పౌనఃపున్యంను కింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

పట్టిక 15.6

పర్యవసానం	1	2	3	4	5	6
పౌనఃపుణ్యం	179	150	157	149	175	190

ప్రతి పర్యవసానవు సంభావ్యతను కనుగొనండి.

సాధన: పర్యవసానం i పొందే ఘటకను Ei అని సూచించాడు. ఇందులో $i = 1, 2, 3, 4, 5$ మరియు 6.

ఇప్పుడు పర్యవసానం 1 సంభావ్యత = $P(E) \dfrac{\text{1యొక్క పౌనఃపున్యం}}{\text{ఎగురవేసిన మొత్తం సంఖ్య}}$

$$= \frac{179}{1000} = 0.179$$

ఇదే విధంగా, $P(E_2) = \frac{150}{1000} = 0.15$ $\qquad P(E_3) = \frac{157}{1000} = 0.157$

$P(E_4) = \frac{149}{1000} = 0.149$ $\qquad P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$

మరియు $P(E_6) = \frac{190}{1000} = 0.19$

$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$ అని గమనించండి. ఇది కాకుండా ఈ కింది వాటిని గమనించండి:

(i) ప్రతి ఘటనలో సంభావ్యత '0' మరియు '1' మధ్యలో వుండును.

(ii) మొత్తం సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతుంది.

(iii) $E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots, E_6$ లు ఒక ఘటన యొక్క అన్ని సాధ్య పర్యవసానాలతో కూడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 4 : ఒక దూరవాణి మార్గదర్శనం(Telephone Directory) లో ఒక పేజీలో

200 దూరవాణి సంఖ్యలుండును వాటి ఒకట్ల స్థానం చివరి పౌనఃపుణ్య వితరణను [ఉదా: 25828573 ఈ సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె '3'] పట్టికలో ఇవ్వబడినవి .

పట్టిక 15.7

అంకె	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
పౌనఃపుణ్యం	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

కాగితాన్ని చూడకుండా పెన్సిల్‌ను ఒక సంఖ్యపై పెట్టాలి. అనగా ఒక సంఖ్యను యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకొనవలెను. ఈ సంఖ్య ఒకట్ల స్థానలో '6'వుండు సంభావ్యతను కనుగొనండి ?

సాధన : ఒకట్ల స్థానంలో 6 వుండు సంభావ్యత

$$= \frac{\text{6యొక్క పౌనఃపుణ్యం}}{\text{ఎన్నుకోబడిన దూరవాణి సంఖ్యలమొత్తం సంఖ్య}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

ఇదే విధంగా మిగిలిన అంకెల ఒకట్ల స్థానంలోవున్న సంఖ్యల ప్రాయోగిక సంభావ్యతను మనం పొందవచ్చును.

ఉదాహరణ 5: వెనుకటి క్రమంగా వచ్చు 250 రోజుల వాతావరణ సూచనలో 175 సూచనలు సరిగ్గా ఉన్నవని వాతావరణ శాఖ నమూనాలు సూచించుచున్నవి.

(i) సరైన సూచనలను ఇచ్చినటువంటి రోజుల సంభావ్య ఎంత?

(ii) సూచనలు సరిగ్గాలేని రోజుల సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : నమూనాలు దొరికే మొత్తం రోజులు = 250

(i) P (సరైమ సూచనలు గల రోజు)

$$= \frac{\text{సూచనలు సరిగ్గా గల రోజుల సంఖ్యా}}{\text{నమూనాలు దొరికే మొత్తం రోజుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) సూచనలు సరిగ్గా లేని రోజుల సంఖ్య $= 250 - 175 = 75$

అందు వలన (సూచనలు సరిగ్గాలేనిరోజు) $= \frac{75}{250} = 0.3$

గమనించండి : P (సూచనలు సరిగ్గాగల రోజు) +P(సూచనలు సరిగ్గా లేని రోజు)

$= 0.7 + 0.3 = 1$

ఉదాహరణ 6: ఒక టైర్ ఉత్పాదన కర్మాగారము టైర్ మార్పుచేయుటకు ముందు నమూనాలను పెట్టికొన్నది, పట్టిక 1000 చలించిన దూరపు ప్రకరణలు ఫలితాలను చూపించినది.

పట్టిక 15.8

దూరం (km)	4000 కన్నా తక్కువ	4000 నుండి 9000 వరకు	9001 నుండి 14000 వరకు	14000 కన్న ఎక్కువ
పౌనఃపుణ్యం	22	210	325	445

మీరు ఈ కంపెనీ టైర్ కొన్నచో క్రింది సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

(i) 4000 km కన్నా ముందే మార్పుచేయవలసిన అవసరం?

(ii) 9000 km కన్నా ఎక్కువైనప్పుడు టైర్ మార్పు?

(iii) 4000 km నుండి 14000 km వరకు మధ్యలో మార్పు చేయడం?

సాధన : (i) ప్రయత్నాల మొత్తం సంఖ్య = 1000

4000 km ల మొదటి టైర్ మార్పు చేయు పౌనఃపున్యం = 20

అందువలన P (4000 km కన్నా ముందే టైర్ మార్పు చేయుట) $= \frac{20}{1000} = 0.02$

(ii) 9000 km కాన్న దూరం ఎక్కువైన పౌనఃపున్యం $325 + 445 = 770$

అందువలన P (9000 km కన్నా ఎక్కువైన టైర్ మార్పు) $= \frac{770}{1000} = 0.77$

(iii) 4000 km మరియు 14000 km ల మధ్య టైర్ మార్పు చేయు పౌనఃపుణ్యం = $210 + 325 = 535$

అందువలన P (4000 km మరియు 14000 km ల మధ్య టయర్ మార్పుచేయుట) $= \frac{535}{1000} = 0.535$

ఉదాహరణ 7: ప్రతినెల ఘటక పరీక్షలలో ఒక విద్యార్థి పొందిన మార్కుల శాతమును క్రింది విధంగా ఇవ్వబడినది.

పట్టిక 15.9

ఘటక పరీక్ష	I	II	III	IV	V
పొందిన మార్కులశాతం	69	71	73	68	74

ఈ దత్తాంశాల ఆధారంగా ఘటక పరీక్షల్లో విద్యార్థులు 70% కన్ను ఎక్కువ మార్కులు పొందిన సంభావ్యత కనుగొనండి.

సాధన : జరిపిన ఘటక పరీక్షల మొత్తం సంఖ్య '5' విద్యార్థి 70% కన్న ఎక్కువ మార్కులు పొండిన ఘటక పరీక్షల సంఖ్య '3'.

అందువలన P (70% కన్నా ఎక్కువ పొందిన మార్కులు) $= \frac{3}{5} = 0.6$.

ఉదాహరణ 8 : ఒక నగరంలో ఒక భీమా కంపెనీ, వయస్సు మరియు ప్రమాదాల మధ్య సంబంధము కనుగొనుటకు యాదృశ్చికంగా 2000 మంది డ్రైవర్లను ఎన్నుకొనింది. ఒక డ్రైవర్‌కి ఇంకొక డ్రైవర్ నుండి ప్రాధాన్యత దొరకకుండా పొందిన దత్తాంశాలను కింది విధంగా పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

పట్టిక 15.10

డ్రైవర్ల వయస్సు (సం:)	ఒక సంవత్సరంలోని ప్రమాదాలు				
	0	1	2	3	3 కన్నా ఎక్కువ
18–29	440	160	110	61	35
30–50	505	125	60	22	18
50 కన్నా ఎక్కువ	360	45	35	15	9

నగరంలో యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకోబడిన డ్రైవరుకు సంబంధించిన కింది విధంగా ఘటన సంభావ్యత.

(i) ఒక సంవత్సరంలో సరిగ్గా 3 ప్రమాదములు చేసిన 18-29 సం:డ్రైవర్లు.

(ii) ఒక సంవత్సరంలో ఒకటి లేదా ఎక్కువ ప్రమాదాలు చేసిన 30-35 సంవత్సరాల డ్రైవర్ల సంఖ్య.

(iii) ఒక సంవత్సరంలో ప్రమాదాలే చేయని డ్రైవర్లు.

సాధన : మొత్తం డ్రైవర్ల సంఖ్య = 2000

(i) ఒక సంవత్సరంలో 3 ప్రమాదాలను చేసిన 18-29 సంవత్సరంల వయస్సుగల డ్రైవర్ల సంఖ్య = 61

అందువలన P (3) ప్రమాదాలు చేసిన సంవత్సరాల వయస్సు గల డ్రైవర్లు)

$= \frac{61}{2000} = 0.0305 \approx 0.031$

(ii) ఒక సంవత్సరంలో 1 లేదా ఎక్కువ ప్రమాదాలను చేసిన 30-35 సంవత్సరాల వయస్సు గల డ్రైవర్ల సంఖ్య = 125 + 60 + 22 + 18 = 225

అందువలన P (1) లేదా ఎక్కువ ప్రమాదాల చేసిన 30-35 సంవత్సరాల వయస్సుగల (డ్రైవర్లు)

$= \frac{225}{2000} = 0.1125 \approx 0.113.$

(iii) ఒక సం.లో ప్రమాదాలు చేయని డ్రైవర్ల సంఖ్య = 440 + 505 + 360 = 1305

అందువలన P(ప్రమాదాలు చేయని డ్రైవర్లు) $= \frac{1305}{2000} = 0.653$.

ఉదాహరణ 9 : ఒక తరగతిలో 38 మంది విద్యార్థుల బరువులను చూపించు పౌనఃపున్యం

వితరణా పట్టికను పరిగణించి(అధ్యాయం 14లోని ఉదా: 4లోని పట్టిక14.3).

(i) 46-50kg వర్గాంతరంలోని తరగతి విద్యార్థుల బరువు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

(ii) ఇందులోని సంభావ్యత '0' మరియు సంభావ్యత '1' కలిగిన రెండు ఘటలను రాయండి ?

సాధన :(i) విద్యార్థుల మొత్తం సంఖ్య 38 మరియు బరువులు 46-50kg వర్గాంతరములోని విద్యార్థుల సంఖ్య '3'.

అందువలన P (46-50kg వర్గాంతరంలోని విద్యార్థుల బరువు) $= \frac{3}{38} = 0.079$

(ii) ఉదాహరణకు 30kg ల బరువు గల విద్యార్థియొక్క ఘటనను తీసుకోండి. కాని ఈ బరువు విద్యార్థి ఉండడు. కనుక ఈ ఘటన సంభావ్యత '0'(శూన్యం) ఇదే విధంగా 30 kgల కన్నా ఎక్కువ బరువు గల విద్యార్థుల సంభావ్యత $\frac{38}{38} = 1$ అయివుండును.

ఉదాహరణ 10 : విత్తనములు నింపిన 5 సంచుల నుండి ప్రతి సంచిలో 50 విత్తనములు యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకోబడినవి. మరియు వాటిని మొలక వచ్చుటకు వాటికి అనుకూల వైన వాతావరణంలో పెట్టబడినవి. 20 రోజుల తర్వాత మొలకెత్తని ప్రతి సంచిలో విత్తనమూల సంఖ్యను లెక్కించి, క్రిందవిధంగా నమోది చేయండి.

పట్టిక 15.11

సంచి	1	2	3	4	5
మొలకెత్తిన విత్తనముల సంఖ్య	40	48	42	39	41

కింది విధంగా మొలకెత్తిన విత్తనముల సంభావ్యత కనుక్కోండి.

(i) ఒక సంచిలో 40కన్నా ఎక్కువ విత్తనముల.

(ii) ఒక సంచిలో 49 విత్తనములు.

(iii) ఒక సంచిలో 35 కన్నా ఎక్కువ విత్తనములు.

సాధన : మొత్తం సంచుల సంఖ్య 5

(i) 50 సంచులలో 40కన్నా ఎక్కువ మొలకెత్తని విత్తనములు సంచుల సంఖ్య 3

P (1 సంచిలో 40 కన్నా ఎక్కువ విత్తనములు మొలకెత్తెను) $= \frac{3}{5} = 0.6$

(ii) 49 విత్తనములు మొలకెత్తిన సంచులసంఖ్య = 0

P (1 సంచిలో 49 విత్తనములు మొలకెత్తిన సంచుల సంఖ్య) $= \frac{0}{5} = 0$

(iii) 35 కన్నా ఎక్కువ విత్తనములు మొలకెత్తిన సంచులు సంఖ్య = 5

అందువలన కావలసిన సంభావ్యత $= \frac{5}{5} = 1$

షరా (Remark) : పై ఉదాహరణలన్నిటిలో ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత '0' మరియు '1' మధ్య ఏదైనా భిన్నామైయుంటుందని మీరు గమనించవచ్చు.

అభ్యాసము 15.1

1. ఒక క్రికెట్ పందెంలో ఒక బ్యాట్స్ ఉమెన్ (Batswomen) ఆమె ఎదుర్కొన 30 బంతులలో 6 బౌండరలు కొట్టను. ఆమె బౌండరిని కొట్టని సంభావ్యతను కనుగొనండి.
2. ఇద్దరు పిల్లలు గల 1500 కుటుంబలను యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకో బడినది. మరియు కింది దత్తాంశాలను నమోదించడమైనది.

ఒక కుటుంబంలోని బాలికల సంఖ్య	2	1	0
కుటుంబాల సంఖ్య	475	814	211

యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకోబడిన కుటుంబాలలో
(i) ఇద్దరు అమ్మాయిలు గల (ii) ఒక అమ్మాయిగల (iii)అమ్మాయితే లేని కుటుంబంలో సంభావ్యతను కనుగొనండి.

3. అధ్యాయం 14వ ఘటకం 14.4 యొక్క ఉదాహరణ 5 ను చూడండి. తరగతిలో ఆగష్టు నెలలో పుట్టిన విద్యార్థుల సంభావ్యతను కనుగొనండి.
4. మూడు నాణ్యములను ఏక కాలంలో 200 సార్లు ఎగుర వేసినపుడు వివిధ పర్యవసానాల పౌనఃపుణ్యం. ఈ క్రింది విధంగా ఇవ్వడమైనది.

పర్యవసానం	3 బొమ్మలు	2 బొమ్మలు	1 బొమ్మ	బొమ్మలేని
పౌనఃపుణ్యం	23	72	77	28

మూడు నాణ్యములను మరల ఒకే కాలంలో ఎగురచేసినపుడు 2 బొమ్మలు పడు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

5. ఒక సంస్థలో 2400 కుటుంబాలను యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకొని వాటి ఆదాయపుస్థాయి మరియు కుటుంబంలోనివున్న వాహనాల సంఖ్య మధ్య ఉన్న సంభందంను కనుగొనుటను సర్వేచేశారు. సేకరించని వివరాలు కింది పట్టికలో పట్టిచేయబడినవి.

నెలసరి ఆదాయం (రూ/- లలో)	కుటుంబానికి వాహనాలు			
	0	1	2	2 కన్న ఎక్కువ
7000 కన్నా తక్కువ	10	160	25	0
7,000–10,000	0	305	27	2
10,000–13,000	1	535	29	1
13,000–16,000	2	469	59	25
16,000 కన్నా ఎక్కువ	1	579	82	88

ఇపుడు ఒక కుటుంబంను ఎన్నుకొంటే క్రిందివిధంగా కుటుంబంను ఎన్నుకొన్న సంభావ్యతను కనుగొనండి.

(i) నెలసరి ఆదాయం ₹ 10,000 - 13,000 మరియు సరిగ్గా 2 వాహనములను కలిగి ఉండును.

(ii) నెలసరి ఆదాయము ₹ 16,000 లేదా ఎక్కువ మరియు సరిగ్గా 1 వాహనమును కలిగియుండును.

(iii) నెలసరి ఆదాయం ₹ 7,000 కన్నా తక్కువ మరియు వాహనం లేకపోవడం.

(iv) నెలసరి ఆదాయం ₹ 13,000 – 16,000 మరియు 2 కన్నా ఎక్కువ వాహనములను కలిగియుండును.

(v) 1కన్న ఎక్కువ వాహనలు లేకుండుట.

6. అధ్యాయం 14యొక్క 14.7పట్టికను చూడండి.

(i) ఒక విద్యార్థి గణిత పరీక్షలో 20% కన్నా తక్కువ మార్కులు పొందిన సంభావ్యతను కనుగొనండి.

(ii) 60 లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల యొక్క సంభావ్యత కనుక్కోండి.

7. సాంఖ్యక శాస్త్ర విషయం గురించి విద్యార్థుల అభిప్రాయమును తెలుసుకొనడానికి 200 మంది విద్యార్థుల ఒక సమీక్ష జరిపించడం జరిగినది. కింది పట్టికలో దత్తాంశాలను నమోదుచేయడమైనది.

అభిప్రాయము	విద్యార్థుల సంఖ్య
ఇష్టపడేవారు	135
ఇష్టపడనివారు	65

8. అభ్యాసము 14.2లో 2వ ప్రశ్నను గమనించండి. ఈ క్రింది విధంగా ఒక ఇంజనీర్ నివాసముండు ప్రాయోగిక సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

(i) పని చేయు స్థలము నుండి 7km తక్కువ దూరంలో వున్న.

(ii) పని చేయు స్థలము నుండి 7km లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ దూరంలోవున్న.

(iii) పని చేయు స్థలము నుండి $\frac{1}{2}$ km దూరంలో కంటే తక్కువ దురంలో ఉన్న.

9. **కార్యాచరణము :** నిర్ధిష్టమైన సమయంలో మీ పాఠశాల గేటు ఎదురు నుండి పోయే ద్విచక్ర, త్రిచక్ర మరియు నాలుగు చక్రాల వాహనాల సంఖ్యను(పౌనఃపున్యంను).

నమోదు చేయండి. మీరుచూసిన మొత్తం వాహనాలలో ఒక వాహనం ద్విచక్ర వాహన మగు సంభావ్యతను కనుగొనండి.

10. **కార్యాచరణం** : మీ తరగతిలోని విద్యార్థులకు 3 అంకెల ఒక సంఖ్యను రాయమని చెప్పండి. యాదృశ్చికంగా ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకొని అతడు/ ఆమె రాసిన సంఖ్యను 3 చే భాగించబడు సంభావ్యత ఎంత ?3 భాగించబడిన సంఖ్యయొక్క అంకెల మొత్తం 3 చే భాగింపబడుతుందని జ్ఞాపకం తెచ్చుకోండి?

11. 5kg లు అని నమోదు చేసిన 11 సంచుల గోధుమ పిండి కలదు, ఆ సంచులు కింది విధంగా గోధుమ పిండి బరువు పొందియున్నది. (kg లలో)

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

ఒద సంచిని యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకొన్నప్పుడు 5kg కన్నా ఎక్కువ గోధుమ పిండిని కలిగిన సంచిని పొందు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

12. అభ్యాసము 14.2 లోని 5 వ ప్రశ్నలో 30 రోజులలో ఒక నగరంలో గల సల్ఫర్-డై-ఆక్సైడ్ ప్రమాణమును (మిలియన్ భాగాలల్లోని) PPM పౌనఃపున్య వితరణా పట్టికలో తయారు చేయమని అడిగారు. ఈ పట్టికనుండి ఈ ఏదైనా రోజులలో 0.12-0.16 వర్గాంతరంలోని సల్ఫర్-డై-ఆక్సైడ్ యొక్క ప్రమాణపు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

13. అభ్యాసం 14.2యొక్క ప్రశ్న 1లోని తరగతి 30 విద్యార్థుల రక్తపు గుంపుల గురించి పౌనఃపుణ్య వితరణ పట్టికను ఉపయోగించి తరగతిలోని ఒక విధ్యార్థిని యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకోబడిన రక్తపు గుంపు ABలను కలిగియున్న నంభావ్యతను కనుక్కోండి.

15.3 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు.

1. కొన్ని ప్రయోగాలలో పర్యవసానాలన్నీ ఏర్పడుటకు సమాన అవకాశాలు ఉంటాయి.
2. 'E' ఘటనపు ప్రాయోగిక సంభావ్యత P(E)

$$P(E) = \frac{\text{ఘటన E సంభవించు ప్రయత్నాల సంఖ్య}}{\text{ప్రయత్నాల మొత్తం సంఖ్య}}$$

3. ఒక ఘటన సంభావ్యత 0 మరియు 1ల మధ్య వుండును (0 మరియు 1 ను కలిపి).

అనుబంధ – 2

గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం

A 2.1 పరిచయం

మీరు మీ ముందు తరగతులలో మీ చుట్టూ వాస్తవ ప్రపంచానికి సంబంధించిన సమస్యలను పరిష్కరించారు. ఉదాహరణకు సరళవడ్డీ సూత్రం $\left(I = \frac{PnR}{100}\right)$ను ఉపయోగించి కనుగొన్నారు. ఈ సూత్రము వడ్డీ దానికి సంబందించిన మూడు అంశాలైన అసలు, కాలం, వడ్డీ రేటు వీటికి గల సంబందాన్ని తెలుపుతుంది. ఈ సూత్రము గణిత నమూనాకు ఒక ఉదాహరణ. గణిత నమూనాలు అంటే నిజ జీవితంలోని కొన్ని సన్నివేశాలను వివరించే గణిత సంబంధ సూచకం.

నిజజీవితంలో అనేక సమస్యలకు పరిష్కారం చూపడానికి గణిత నమూనాలు ఉపయోగ పడతాయి.

- ఒక ఉపగ్రహాన్ని కక్ష్యలోనికి ప్రవేశపెట్టడం.
- వర్షాకాలం వచ్చే సూచనను అంచనా వేయడం.
- వాహనాల వల్ల కలుగు వాతావరణ కాలుష్యాన్ని నియంత్రించడం.
- నగరాలలో ట్రాఫిక్ రద్దీని తగ్గించడం.

ఈ అధ్యాయంలో గణిత నమూనాను రచించు ప్రక్రియలను మీకు పరిచయం చేస్తూ దానిని "గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ" అని అంటారు. గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణలో ఒక నిజ జీవిత సమస్యను తీసుకొని దానికి సమానమైన గణిత సమస్యగా రాస్తాము. ఈ గణిత నమూనాలోని సమస్యను పరిస్కరించి దాని ఫలితాంశాన్ని నిజ జీవన సమస్య యొక్క భాష్య పదాలలో విశ్లేషిస్తాము. తరువాత ఈ పరిష్కారము నిజ జీవనానికి ఆధారంగా ఎంత వరకు సంబంధం ఉందని గమనిస్తాము. అందుకు గణతీయ ఆకృతీకరణ ఈ దశలలో కూడి ఉంటుంది.

సూత్రకరణం (Formulation)

పరిష్కారం (Solution)

విశ్లేషణ (వ్యాఖ్యానం) (interpretation)

దృవీకరణం (validation)

విభాగం (సెక్షన్) A 2.2 లో మీరు పద సమస్యలను పరిష్కరించడానికి ఈ విధానాన్ని పరిశీలించుట ద్వారా ప్రారంబిద్దాం. మీరు వెనుకటి తరగతులలో పరిష్కరించిన పద సమస్య (Word Problem) లకు పోలిన కొన్ని సమస్యలను ఇపుడు చర్చిద్దాం. తరువాత సమస్యను పరిష్కరించడానికి ఉపయోగించు దశలలో కొన్నింటిని గణిత ఆకృతీకరణలలో ఉపయోగిస్తాం అనుటను చూద్దాం.

విభాగం A2.3 లో కొన్ని సరళ మాదిరిలను ప్రస్తావిద్దాం.

విభాగం A2.4 లో మొత్తం ఆకృతీకరణ ప్రక్రియ మరియు దాని ఉపయోగం మరియు పరిమితుల గురించి ప్రస్తావిద్దాం.

A2.2 పద సమస్యల సమీక్ష

ఈ విభాగంలో వెనుకటి తరగతులలో మీరు పరిష్కరించిన కొన్ని సమస్యలను ప్రస్తావిద్దాం ప్రత్యక్ష వైవిధ్యంలో సమస్యలను ప్రారంబిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : నా కారులో 432 km దూరం ప్రయాణించడానికి 48(Lif)t లో పెట్రోలు ఖర్చు అయ్యిది. ఆ ప్రదేశానికి చేరుకోవడానికి నేను ఇంకా 180 km ప్రయాణించాలి. నాకు ఇంకా ఎంత పెట్రోలు అవసరం.

సాధన : సమస్యను పరిష్కరించడానికి ఏ దశలలో కూడి ఉన్నిదో చూద్దాం.

దశ 1 : సూత్రీకరణ

ఎక్కువ దూరం ప్రయాణించడానికి ఎక్కువ పెట్రోలు అవసరం. అని మీకు తెలుసు అంటే ప్రయాణించిన దూరానికి అనుగునంగా పెట్రోలు ప్రమాణం నేరుగా మారుతుంది.

432 km ప్రయాణించడానికి కావలసిన పెట్రోలు = 48 లీటర్లు

180 km ప్రయాణించడానికి కావలసిన పెట్రోలు = ?

గణిత వివరణ :

x = నేను ప్రయాణించిన దూరం

y = నాకు కావలసిన పెట్రోలు

x తో పాటు నేరుగా y కూడా మారుతుంది.

అందువలన $y = kx$ (ఇక్కడ k ఒక స్థిరాంకం) నేను 432km లను 48 లీటర్ల పెట్రోలుతో ప్రయాణించవచ్చు.

కాబట్టి $y = 48, x = 432$.

అందువలన $K = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$

$y = kx$ కావున $y = \frac{1}{9}\ x$ .... (1)

సూత్రం (1) : కావలసిన పెట్రోలు మరియు ప్రయాణించు దూరాల సంబంధాన్ని వివరిస్తుంది.

దశ 2 : సాధన :

180 km ప్రయాణించడానికి కావలసిన పెట్రోలును మనం లెక్కించాలి.

అంటే $x = 180$ అయినపుడు y ఎంత అవుతుంది అని చూడాలి. $x = 180$ అని (1) లో ప్రతిక్షేపించిన $y = \frac{1}{9}x$, $y = \frac{1}{9} \times 180 = \frac{180}{9} = 20$

$y = 20$.

వ్యాఖ్యానం 3 : $y = 20$, అయినందువల్ల మనం 180 km ప్రయాణించడానికి 20 లీటర్ల పెట్రోలు కావాలి.

ఇపుడు ఒక విషయం ఆలోచించండి. ఇదే సూత్రాన్ని మీరు ప్రయాణించు సందర్భాలకు అన్వయించవచ్చా? అది సాధ్యం కాకపోవచ్చు ! సందర్భం ఇలా ఉంది మీరు ప్రయాణిస్తున్న 432km దారి పర్వతాల మధ్య మరియు మిగిలిన 180 km సమతల ప్రదేశం అయ్యిఉంది. మొదటి ప్రయాణంలో ఎక్కువ పెట్రోలు ఖర్చు అవుతుంది (కొండ, గుట్టలలో ప్రయాణం) అదే రేటులో సమతల ప్రదేశాలలో పెట్రోలు ఖర్చు కాదు. ఇక్కడ తక్కువ ప్రమాణంలో ఖర్చు అవుతుంది. ఈ రెండు విషయాలలో ప్రయాణ పరిస్థితులు ఒకే విధంగా ఉంటే సూత్రం అన్వయించబడుతుంది. అల లేక పోతే అన్వయించదు. లేదా ప్రయాణ పరిస్థితులలో మార్పు ఉన్నందువల్ల ప్రయాణ పరిస్థితికి అనుగుణంగా పెట్రోలు ఖర్చు చాలా తక్కువ కూడా కావచ్చు మనం పెట్రోలు ఖర్చు ప్రయాణించిన ప్రత్యక్ష నిష్పత్తిలో ఉంటుంది. అని చెప్పేటపుడు 'దారి' ప్రయాణం రెండూ కూడా ఒకే విధంగా ఉంటాయి అనే ఊహలో ప్రారంభించాము.

ఉదాహరణ 2 : సుధీర్ 8% వడ్డీరేటులో ₹ 15,000/ లను పెట్టుబడి పెట్టారు. ఈ డబ్బును వెనక్కి తీసుకొని ₹ 19.000/- విలువ గల వాషింగ్ మిషన్ కొనాలనుకున్నాడు వాషింగ్ మిషన్ కొనాలంటే ఈ ₹ 15,000/- ను ఎంత కాలం వరకు పెట్టుబడిగా ఉంచాలి.

సాధన :

దశ **1 :** సూత్రీకరణ

ఈ సన్నివేశంలో మనకు అసలు, వడ్డీరేటు తెలుసు. ఈ ₹ 15,000/లకు వడ్డీడబ్బు చేరిస్తే వాషింగ్ మిషన్ కొనవచ్చు. డబ్బు ఎంత కాలం పెడి తన ఇష్టం నెరవేరుతుంది. అని లెక్కించ వలసి ఉంది.

గణిత వివరణ :

సరళ వడ్డీ సూత్రం = $I = \frac{Pnr}{100}$, P = అసలు, n = కాలం, r = వడ్డీరేటు

I = సరళ వడ్డీ

ఈ సమస్యలో P = 15,000/-, n = ? R = 8%

సుధీర్‌కు కావలసిన డబ్బు = ₹ 19,000/-

అందువలన కావలసిన వడ్డీ = ₹ (19,00015,000) = ₹ 4,000/

₹ 15,000/ లను పెట్టుబడి పెట్టవలసిన కాలం = n

₹ 15,000/ లకు వడ్డీరేటు 8%

సంపాదించు వడ్డీ = I

$$I = \frac{1500 \times n \times 8}{100} = 1200\,n$$

I = 1200 n .... (1)

(1) ₹ 15,000/ లను 8% వడ్డీరేటులో సరళ వడ్డీ మరియు కాలానికి గల సంబంధాన్ని సూచిస్తుంది.

మనకు ₹ 4000/- కావాలి.

4000 = 1200 n .... (2)

$$n = 4000/1200 = \frac{40}{12} = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$$

దశ 3 : వ్యాఖ్యానం : $n=3\frac{1}{3}$, మరియు సంవత్సరంలో $\frac{1}{3}$వ భాగం అంటే 4 నెలలు అందువలన సుధీర్ 3cm 4 నెలల తరువాత వాషింగ్ మెషిన్ కోనవచ్చు. ఇక్కడ రెండు నిబంధనలను "ఊహించాలి. అవి ఏమంటే

(1) ఈ అవధిలో వడ్డీరేటు మారదు.

(2) వాషింగ్ మెషన్ విలువ ఎక్కువకాదు. $I=\frac{Pnr}{100}$ ఈ సూత్రం అన్వయంకాదు.

ఉదాహరణ 3 : నది తీరానికి ఇరువైపులా ఉన్న రెండు ఊర్లు/గ్రామాలకు సంపర్కం కల్పించు మోటారు బోటు (ఓడ) ఒక ఊరి నుండి నది ప్రవాహపు ఎదురు తీరంలోని ఊరికి చేరడానికి 60గం॥ సమయం పడుతుంది. అదే మోటారు బోటు ఆ పై తీరంలోని ఊరినుండి క్రింది తీరం లోని గ్రామాన్ని చేరడానికి 5గం॥ సమయం పడుతుంది. నది నీటి ప్రవాహపు వడి (speed) $2km/h$ ఉంటే స్థిరనీటిపై మోటారు బోటు వేగాన్ని లెక్కించండి.

సాధన :

దశ 1: సూత్రీకరణం : మనకు నది ప్రవహించు నీటి వడి మరియు మోటారు బోటు రెండు ఊర్లను చేరుటకు తీసుకొను సమయం తెలుసు. మనం స్థిర నీటిపై బోటు వేగాన్ని కనుగొనవలసి ఉన్నది.

గణిత వివరణ : బోటువేగం x అనుకొందాం తీసుకొన్న కాలం t చలించిన దూరం y అనుకొం దాం.

దూరం = వేగం × కాలం అని తెలుసు.

అపుడు $y = t\,x$ .... (1)

రెండు ఊర్ల మధ్య దూరం 'd' అనుకోండి నీటి ప్రవాహ నికి వ్యతి రేఖంగా బోటు చలించినపుడు బోటు యొక్క వాస్తవ వేగం = బోటువేగం – నదీప్రవాహ వేగం ఎందుకంటే బోటు నదీప్రవాహనికి వ్యతిరేకంగా పయాణిస్తుంది. అందువలన పై తీరంలోని ఊరికి పోయే బోటు వేగం = $(x-2)\,km/h$

పై తీరంలోని ఊరికి చేరడానికి పట్టిన కాలం = 6 గం॥ అందువలన (1) నుండి

$d = 6\,(x-2)$ అని రాద్ధాం .... (2)

బోటు క్రింది తరంలోని ఊరికి చలించునపుడు బోటువేగం నదీ ప్రవాహపు వేగంలో చేరుతుం దికదా?

ఈ సందర్భంలో బోటువేగం = $(x + 2)$ *km/h*

పై తీరంలోని ఊరినుండి క్రింది తీరంలోని ఊరికి దూరంలో వ్యత్యాసం లేదు.

ఇపుడు తీసుకొన్న కాలం = 5గం॥ అందువలన

అందువలన $d = 5\,(x + 2)$ .... (3)

(2) మరియు (3) లను ఉపయోగిస్తే $5(x + 2) = 6\,(x - 2)$

.... (4)

దశ 2 : పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం

$$5(x + 2) = 6\,(x - 2)$$
$$\therefore 5x + 10 = 6x - 12$$
$$6x - 5x = 10 + 12 \;\therefore\; x = 22.$$

$\therefore$ బోటు వేగం = 22 *km/h*

దశ 3 : వ్యాఖ్యానము

$x = 22$ అయినందువలన స్థిరనీటి పై బోటు వేగాం (వడి) 22 *km/h*

ఇంత వరకు ప్రస్తావించిన పద సమస్యలను పరిష్కరించుటలో మూడు దశలను ఉపయోగించడం జరిగింది అవి

1. సూత్రీకరణం. (Formulation)

మనము సమస్యలను విశ్లేషించి, పరిష్కరించుటలో ప్రధానంగా ప్రభావం చూపే అంశాలను గమనిస్తాము. ఇటి సందర్భోచిత అంశాలు మన మొదటి సమస్యలో సందర్భోచిత అంశాలు అంటే

(i) ప్రయోగించిన దూరం మరియు ఉపయోగించిన పెట్రోలు.

(ii) దారి విధానం (స్థితి) ప్రయాణిస్తున్న వేగం మొదలైన చిన్న చిన్న అంశాలను కూడా గమనించాలి.

అలాకాక పోతే సమస్యను పరిష్కరించడం చాలా (కష్టం) అయ్యేది. మనం పట్టించుకోని కారకాలను అసంబద్ధకారకాలు అంటారు. తర్వాత మనం సమస్యను ఒకటి లేక ఎక్కువ సూత్రాల రూపంలో పరిష్కరిస్తాము.

2. సాధన (Solution) : దశ – 1లో గణిత సమీకరణాలను తగిన విధానాలను సూత్రాలను ఉపయోగించి పరిష్కరిస్తాము.

3. **వ్యాఖ్యానము (Interpretation) :** దశ – 2లో పొందిన పరిహారాన్ని దత్త సమన్వయ సందర్భానికి ఎలా సరిపోతుందా అని చూస్తాము.

మీకు అభ్యాసానికై కొన్ని సమస్యలు ఇవ్వబడినవి. ఈ సమస్యలను ''మూడు దశలను అన్వయించుకొని పరిష్కరించడం ద్వారా మీకు ఎంతవరకు అర్థమయినది అని తెలుసుకోవడాన్ని మీరు ఇష్టపడతారు.

పై ఉదాహరణలలో, నదీప్రవాహ వేగము అన్నిచోట్లా ఒకేలా ఉండదు అని మనకు తెలుసు. బోటు నదీ తీరము నుండి చలించి నది మధ్యకు వస్తుంది. చేర్చ వలసిన తీరానికి దగ్గరగా వచ్చినపుడు చలనవేన్నిగా తగ్గించి చలించి ఆ తీర సమీపానికి చలిస్తుంది. కావున బోటు వేగంలో తీరం మధ్యభాగం నేటలో కొంచెం వ్యత్యాసం ఉంటుంది. తీర సమీపంలో బోటుకొంత సేపు మాత్రమే ఉండడం వలన నదీ ప్రవాహవేగము కొంచెం సేపు మాత్రమే పరిణామం చూపిస్తుంది. కావున మనం ఈ సమయాలలో నది యొక్క వేగపు వ్యత్యాసము పట్టించుకోనవసరం లేదు. అదేవిధంగా బోట్ వేగంలోని వ్యత్యాసం కూడ పట్టించుకోనవసరం లేదు. మరొక అశమేమంటే నదినీటికి మరియు బోటు కింది భాగానికి మధ్యన ఘర్షణ ఉంటుంది. ఇది కొంచెం ప్రమాణంలో ఉంటుంది. అందువల్ల దీని పరిణామాన్ని అత్యంత తక్కువ అని భావిస్తాము.

అందువలన,

1. నది ప్రవాహపు వేగము అలాగే బోటు వేగము అన్ని సమయాలలో స్థిరంగా ఉంటుంది.
2. నీరు మరియు బోటు, అలాగే గాలి ఒత్తిడి నుండి కలుగు ఘర్షణను కూడా పట్టించుకోనవసరం లేదు అని ఊహానిర్ణయం (assume) చేస్తాం.

ఈ రెండు ఊహా నిర్ణయాలను ఆధారం చేసుకొని, మనం బోటు వేగాన్ని లెక్కిస్తాము.

అభ్యాసం A2.1

ఈ క్రింది సమస్యలలో సూత్రీకరణం, సాధన, వ్యాఖ్యానం దశలలోగల సుసంబద్ధ, అసంబద్ధ అంశాలు ఏవి అనుటను స్పష్టంగా తెలపండి.

1. ఒక కంపెనీకి కొంతకాలం మాత్రం కంప్యూటర్ అవసరం ఉందని, అనుకొందాం దానికిగాను కంప్యూటర్ బాడుగకు తీసుకొనవచ్చును లేదా కొనవచ్చును. ప్రతి నెల బాడుగ ₹ 2,000/ దాని విలువ ₹ 25,000/. కంప్యూటర్ ధీర్ఘకాలం నీకు అవసరమైతే, ఇంత ఎక్కువ బాడుగకు తీసుకోవడం కంటే కంప్యూటర్‌ను తీసుకోవడమే చౌక అవుతుంది.

కంప్యూటర్ యొక్క అవసరం ఒక నెల మాత్రమే అనుకుందాం, అపుడు బాడుగకు తీసుకోవడమే మంచిది అవుతుంది. కనీసం ఎంతకాలానికి ఉపయోగించు కంప్యూటర్‌నుకొనడం బాడుగ కంటే చౌక అని లెక్కించండి.

2. ఒక కారు A నుండి 40 km/h వేగం తో ప్రయాణించి B వద్దకు చేరుతుంది. అదేవిధంగా. B నుండి A కి ఒక కారు 30 km/h. వేగంలో ప్రయాణిస్తుంది. A మరియు B ల అంతరం 100 km అనుకుందాం ఎంత సమయం తర్వాత ఈ కార్లు రెండూ కలుస్తాయి లెక్కించండి.

3. భూమి నుండి చంద్రునికి గల దూరము 3,84,000 km భూమి చుట్టూ దాని మార్గం దాదాపు వృత్తాకారంలో ఉంటుంది. భూమిని చంద్రుడు ఒక చుట్టు వేయడానికి 24h కావాలి అని అనుకుందాం. చంద్రుడు ఏ వేగంతో తన కక్ష్యలో భూమిని చుట్టి వస్తుంది. లెక్కించండి

$(\pi = 3.14$ వృత్తపరిధి $= 2\pi r)$

4. ఒక కుటుంబం వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించని నెలలో చెల్లించు విద్యుత్ బిల్ యొక్క సరాసరి

₹ 1,000/అదే విధంగా వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించిన నెలలలో చెల్లించిన విద్యుత్ బిల్ యొక్క సరాసరి ₹ 1,240/-వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించుటకు చెల్లించవలసిన డబ్బు గంటకు ₹ 8/-. ప్రతి రోజు వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించు సరాసరి కాలావధిని కనుగొనండి.

A2.3 కొన్ని గణిత నమూనాలు

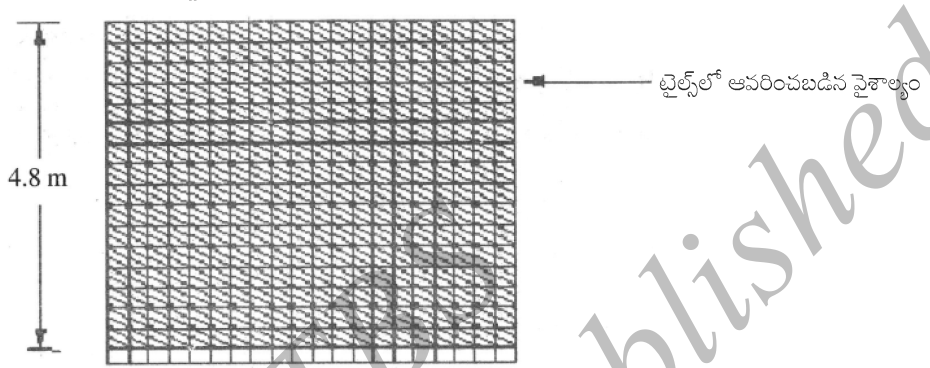
ఇప్పటి వరకు మనం చర్చలలో కొత్తదనం ఏమి లేదు. ఈ విభాగంలో ఇదివరకే ప్రస్తావించిన 3 దశలకు మరొకదశ చేర్చారు. అదే మంటే దృఢీకరణం (Validity) దశ. దృఢీకరణం అనగానేమి? నిజ జీవితంలో మన వాస్తవ జీవనానికి మ్యాచ్ కాని పరిహారాన్ని ఇచ్చు నమూనాను ఒప్పుకోలేము. వాస్తవంగా జవాబును పరీక్షించే ప్రక్రియ, అలాగే అవసరం ఉంటే గణిత వివరణను సరిచేయు కార్యాన్ని ధృఢీకరణం అంటారు. నమూనాలో ఇది ముఖ్యమైన దశ. ఈ విభాగంలో దీనిని పరిచయం చేస్తున్నాము.

ధృఢీకరణ తర్వాత రూపాంతరం చేయదగిన ఒక నమూనాలో ప్రారంభిద్దాం.

ఉదాహరణ 4 : మీరు 6m, పొడవు 5m వెడల్పు గల ఒక గదిని కలిగివున్నారు. అలాగే నేలకు భుజం 30cm గల చదరం గల మొసాయికే టైల్‌లు వేయవలసి ఉంది. ఐతే ఎన్ని చదరాలు అవసరం అవుతాయి. గణిత నమూనాను గీచి ఈ సమస్యను పరిష్కరించండి.

సాధన :

దశ 1: సూత్రీకరణం : మనం గది వైశాల్యము, అలాగే టైల్ వైశాల్యం పరిగణించాలి. ప్రతి టైల్(tile) పొడవు 30cm = 0.3m గది పొడవు 6m. అందువలన గది పొడవుకు వేయు టైల్స్ $\frac{6m}{0.3m}=20$ జోడించవచ్చు. (చిత్రం A2.1)



గదివెడల్పు5m,అందువలన $\frac{5m}{0.3m}=16.67$.అందువలన16టైల్స్‌గదివెడల్పుకుజోడించవచ్చు. అంటే మొత్తం గదికి 16 వరుసల టైల్స్ జోడించవచ్చు. వెడల్పు 16 × 0.3 = 4.8m సు టైల్స్ వేయవచ్చు. అంటే 5 – 4.8 = 0.2m వెడల్పులో టైల్స్ వేయలేదు. 0.2m టైల్స్ ముక్కలతో నింపాలి. టైల్ 0.3 m దీనిని సమభాగాలుగా చేసిన 0.15 m ఇది 0.2m కంటే తక్కువ అందువలన టైల్స్‌ను 2 సమభాగాలు చేస్తే 2 భాగాలను ఉపయోగించలేము.

గణిత వివరణ

మనకు కావలసిన టైల్స్ సంఖ్య

= (పొడవునా కావలసిన టైల్స్ × వెడల్పునా కావలసిన టైల్స్) + నింపకుండా మిగిలిన వైశాల్యం --(1)

సాధన : మనమిదివరకే చూసినట్లు పొడవునా కావలసిన టైల్స్ 20 వెడల్పునా కావలసిన టైల్స్ 16 ఈ విలువలను (1)లో ఆదేశించినపుడు

$(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340.$

వ్యాఖ్యానం : మనకు మొత్తం గదికి వేయవలసిన టైల్స్ 340.

దృవీకరణం : నిజ జీవింలో మీ పనివాళ్ళు (టైల్స్ జోడించువారు) ఇంకొంచెం ఎక్కువ టైల్స్ అందించమని అడగవచ్చు. ఎందుకంటే కత్తరించునపుడు టైల్స్ పగిలిపోవచ్చు. మీ పనివాడు నైపుణ్యం కలవాడైతే టైల్స్ పగిలిపోకుండా పని చేయవచ్చు. నైపుణ్యం లేని పనివాడు ఎక్కువ

టైల్స్‌ను నిరుపయోగం చేయవచ్చు. దీనికోసం మనం సూత్రం (1) మార్చవలసిన అవసరం లేదు. ఈ సూత్రం మీకు కావలసిన టైల్స్ స్థూల పరిమాణాన్ని ఇస్తుంది. ఇంత చాలు. ఇప్పుడు మరొక సన్నివేశాన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 5 :

2000 వ సం॥లో U.N (విశ్వసంస్థ) 191 సభ్యదేశాలు ఒక ప్రకటనకు సమ్మతించి సంతకం చేశారు. ఈ ప్రకటనకు సంతకం చేసిన దేశాలు 2015 సంవత్సరానికి ఖచ్చితమైన కొన్ని అభివృద్ధి లక్ష్యాలను సాధించాలని, దీనిని ''మిలీనియం అభివృద్ధి లక్ష్యాలు'' నిర్ణయించుకున్నారు.

అందులో ఒక లక్ష్యం 'లింగసమానత్యం'. ఈ లక్ష్యాన్ని సాధించామని తెలుసుకొనుటకు ప్రాథమిక, మాధ్యమిక, ఉన్నత పాఠశాల విద్య బాల బాలికల నిష్పత్తి సూచిస్తుంది. భారత దేశం కూడా సంతకం చేసిన సభ్యదేశం, అలాగే ఉన్నది. కింది పట్టికలో ప్రాథమిక పాఠ దాఖలైన విద్యార్థినుల శాతాల ప్రమాణమును చూపిస్తుంది.

పట్టిక **A2.1**

సంవత్సరం	విద్యార్థినుల దాఖలాతి (నమోదు)	
1991 – 92	41.9	
1992 – 93	42.6	
1993 – 94	42.7	
1994 – 95	42.9	
1995 – 96	43.1	
1996 – 97	43.2	
1997 – 98	43.5	
1998 – 99	43.5	
1999 – 2000	43.6 *	} దత్తాంశం తాత్కాలికం
2000 – 2001	43.7 *	} తాత్కాలిక దత్తాంశం
2001 – 2002	44.1 *	} తాత్కాలిక దత్తాంశం

మూలం : భారతద ప్రభుత్వపు విద్యాశిక్షణ సంస్థ (Web page) (Indicates that the data is Provisional)

ఈ దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించుకొని ప్రాథమిక పాఠ శాలలో నమోదైన ఆడపిల్లల నిష్పత్తిని గణితీయంగా వివరించండి. సంవత్సరంలో విధ్యార్థినుల నమోదు నిష్పత్తి 50% అవుతుందా లెక్కించండి.

సాధన : మొదట మనం ఈ సమస్యను గణిత సమస్యగా పరిగణించాలి.

దశ 1 : సూత్రీకరణం :

పట్టిక A2.1 నుండి 1991-92 నుండి ప్రతిసంవత్సరం నమోదు చేయ బడి ఉంది. విద్యార్థులు విద్యాసంవత్సర ప్రారంభంలో నమోదు అయినందు వల్ల మనం 1991-92, 1992-93 అనుటకు బదులు 1991, 1992 ఈ విధంగా నమోదుచేయవచ్చు. విద్యార్థినుల నమోదు పట్టికలోని శాతములా కొనసాగుతుంది అనుకుందాం. కావున రెండు సం॥లు ముఖ్యమే (దీనిని పోలిన ఒక సన్నివేశం ₹ 1500 కు 8% రేటులో 3సం॥లకు వడ్డీని లెక్కించునప్పుడు అది 1999 నుండి 2002, అరాగే 2001 నుండి 2004 వరకు. అయితే ఒక ముఖ్యమైన అంశం. ఈ సం॥ రాలలోని వడ్డీరేటు)

ఇక్కడ కూడ 1991 నుండి నమోదు ఎలా పెరిగిందని 1991 నుండి ప్రారంభమైన సం వత్సరాలను గణనకు తీసుకోవచ్చు. 1991 ని 'O' వ సం॥ అని పరిగణించాలి. 1992కు 1వ సం॥ 1993కు 3వ సం॥ ఇదేవిధంగా బోటు పట్టిక A2.2 లో ఉండునట్లు లభిస్తుంది.

పట్టిక A2.2

సంవత్సరం	(దాఖలాతి) నమోదు %
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

పట్టిక A2.3 లో ప్రతిసంవత్సరం పెరుగుదల చూపుతుంది.

పట్టిక A2.3

సంవత్సరం	(దాఖలాతి) నమోదు %	పెరుగుదల
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 నుండి 1992 సంవత్సరాంతం వరకు 41.9 నుండి 42.6%కు అంటే 0.7% పెరిగింది. రెండవ సంవత్సరం వరకు 42.6% నుండి 42.9 వరకు అంటే 0.1% పెరిగింది. పై పట్టిక నుండి నిర్దిష్టమైన పెరుగుదల సంబంధాన్ని గణనకు కాలావధి మరియు శాత ప్రమాణాన్ని రూపించడం కుదరదు. అయితే పెరుగుదల కొంచెం స్థిరంగానే ఉన్నది కేవలం మొదటి సంవత్సరం మరియు పదవ సంవత్సరంలో మాత్రమే వ్యత్యాసమున్నది. ఈ విలువలు సరాసరి పరిశీలిద్దాం.

$$\text{సరాసరి} = \frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$$

అందువలన సరాసరి పెరుగుదల 0.22 శాతము అని అనుకుందాం.

గణిత వివరణ :

మనం దాఖలాతిని (నమోదు) 0.22% వలే పెరిగినది అని అనుకుందాం అందువలన మొదటి సంవత్సరం

దాఖలాతి పెరుగుదల శాతం (Enrolment percentage) = EP = 41.9 + 0.22.

రెండవ సంవత్సరం EP = 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 × 0.22

3 వ సంవత్సరం EP = 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22

= 41.9 + 3 × 0.22.

అదే విధంగా n వ సంవత్సరం EP = 41.9 + 0.22n ($n \geq 0$ కాదు) ....(1)

సమస్యలో ఉన్నట్లు మనం దాఖలాతి శాతము (EP) = 50 అగుటకు ఎన్ని సంవత్సరములు అవుతుందని కనుగొన వలసి ఉన్నది.

కావున సమీకరణం (1) లో n విలువ కనుగొనాలి

$$50 = 41.9 + 0.22\, n \qquad ....(2)$$

దశ 2 : పరిష్కారం : సమీకరణం (2) ను పరిష్కరించునపుడు

$$0.22\, n = 50 - 41.9 = 8.1$$

$$n = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

దశ 3 : వ్యాఖ్యానం : సంవత్సరాల లెక్కింపు పూర్ణ సంఖ్యలలో ఉండాలి. కావున 36.8 బదులుగా 37 సంవత్సరాలు అనుకుందాం. అందువలన 50 శాతము దాఖలాతి 1991 + 37 = 2028 లో అవుతుంది సమస్య పరిష్కారం ఇక్కడికి ముగిసింది. అయితే నిజజీవితంలో దాని ధృవీకరణ సాధ్యమవుతుందా అని పరిశీలించాలి. గణిత లెక్కింపు నిజ జీవితంలో సన్నివేశాలకు తగినట్లు ధృవీకరణ కావాలి.

దశ 4 : నిజజీవనానికి అనుకూలత ఉందా? అని సమీకరణం (2)ను పరీక్షించాలి. సమీకరణం (2)ను ఉపయోగించుకొని సహజంగా జరిగిన పెరుగుదలకు సరాసరి పెరుగుదలకూ గల వ్యత్యాసాన్ని పట్టీ చేయండి.

పట్టిక A2.4

సంవత్సరం	దాఖలాతి (% లలో)	సమీకరణం (2) కు లభించిన విలువ % లలో	శాతములోని వ్యత్యాసం
0	41.9	41.90	0.00
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	– 0.06
9	43.7	43.88	– 0.18
10	44.1	44.10	0.00

సమీకరణం (2)లోని విలువకు మరియు వాస్తవ విలువల కంటే తక్కువ 0.3% నుండి 0.5% వరకు. తగ్గుతుంది.

ప్రతి సంవత్సరం1% నుండి 2% పెరుగుదల వల్ల 3 నుండి 5సంవత్సరాలలో ఈ విధంగా కావచ్చు. ఇంత ప్రమాణపు వ్యత్యాసాన్ని ఒప్పుకోవలసి ఉంటుంది. ఈ విషయంలో సూత్రం (2) మన గణిత నమూన.

ఒక వేల ఈ ప్రమాణ దోషము ఎక్కువ ప్రమాణ మైనది అనిపించి, మనం మన నమూనాను మెరుగు చేయవచ్చు. అపుడు మరల దశ – 1 కి వెళ్ళి సమీకరణం (2)ను మార్చవచ్చు అలా చేద్దాం.

దశ 1 : పునర్ సూత్రీకరణం (సూత్రీకరణ మెరుగు)

ఇపుడు మనం పెరుగుదల 0.22% స్థిరంగా ఉందని భావిస్తా. అయితే దోషాన్ని తగ్గించడానికి దోషనివారక అంశంను చేరుస్తాం. దానికోసం మనం దోషపు సరాసరిని లెక్కిద్దాం పట్టిక A2.4 ను చూడండి.

$$\text{దోషపు సరాసరి} = \frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

దోషం సరాసరి 0.18ని తీసుకొని, సమీకరణపు విలువను సరి చేద్దాం.

మెరుగుపరిన గణిత వివరణ :

సరాసరి దోషాన్ని సమీకరణ (2)లో మనకు లభించిన శాతాన్ని కలుపుదారి. అందువలన మనకు సరిచేసిన సమీకరణం దొరుకుంది.

n వ సంIIలో దాఖలాతి శాత ప్రమాణం ($n \le 1$ అయిన)

$= 41.9 + 0.22\,n + 0.18 = 42.08 + 0.22\,n$ .... (3)

అందాజుగా సమీకరణం (2)ను సరిచేద్దాం

అందువలన n వ కొత్త సమీకరణం

$50 = 42.08 + 0.22\,n$ .... (4)

దశ 2: **మార్చిన తర్వాత పరిష్కారం :** సమీకరణం (4)ను పరిష్కరిద్దాం.

$0.22\,n = 50 - 42.08 = 7.92$

$$n = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

దశ 3 : **వ్యాఖ్యానం :** $n = 36$ అయినందువల్ల, ప్రాథమిక పాఠశాలా దశలో బాలికల దాఖలాతి ప్రమాణం 50% 1991 + 36 = 2027 లో అవుతుంది.

దశ 4 : మరొక సారి సమీకరణం (4)లో లభించిన నిలువలను వాస్తవ విలువలతో కలుపుదాం. అలాంటి పోలిక పట్టిక A2.5 లో చూపిస్తే.

పట్టిక A2.5

సంవత్సరం	దాఖలాతి %	(2) నుండి వచ్చిన విలువలు	విలువల మధ్య వ్యత్యాసు	(4) నుండి వచ్చిన విలువలు	విలువల మధ్య వ్యత్యాసల
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	−0.12
8	43.6	43.66	−0.06	43.84	−0.24
9	43.7	43.88	−0.18	44.06	−0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	−0.18

ఇపుడు (4)లో విలువ (2) లోని విలువలకంటే వాస్తవ విలువలకు దగ్గరగా ఉన్నాయి. అనుటను గమనించవచ్చు. అంటే 6వ వరుసలోని విలువలను సంకలనం చేస్తే దోషం '0' అని తెలుస్తుంది.

ఈ ప్రక్రియను ఇక్కడికి ముగిస్తాం. అందువలన సమీకరణం (4) మన గణిత వివరణ అవుతుంది మరియు అది దాఖలైన సంవత్సరాల సంఖ్య మరియు దాఖలాతి శాత ప్రమాణానికి గల సంబంధాన్ని తెలుపుతుంది. అందువలన మనం పెరుగదలను వివరించే గణతి నమూనాను రాశాం.

పై సన్ని వేశాలలో మనం ఉపయోగించిన కార్య తంత్రాన్ని "**గణిత ఆకృతీకరణ**" అంటాం.

మన దగ్గర గల గణిత పరికరాల (Tools) లతో గణిత నమూనారచన (ఆకృతీకరణ) తయారు చేయడానికి ప్రయత్నించాము. మన వద్దగల దత్తాంశాలను ఇంకా పరిణామ కారిగా ఉపయోగించి మున్సూచన ఇచ్చే గణిత పరికరాలున్నాయి. అవి మీ తరగతి వ్యాప్తి కంటే ఎక్కువ మా ఉద్వేశ్యం మిమ్మలి 'గణిత ఆకృతీకరణ' పాఠ్యాంశంలో పాల్గొనేలా చేసి ఈ ప్రక్రియ ఎలా సాగుతుంది అని పరిచయం చేసేదేకాని దానివల్లన అందువలన ఖచ్చితమైన ముందుసూచననే తీసుకోవడ కాదు. ఈ దశలో ఇంతచాలు.

ఇంతవరకు మీరు పరిచయం చేసుకొన్న 'గణిత ఆకృతీకరణ' యొక్క దశలు మీరు అర్థం చేసుకున్నారు. దానిని ఇష్టపడతారని భావించాము దానికొరకు నిత్యం కొన్ని సమస్యలను అభ్యాములో ఇవ్వబడినవి ప్రయత్నించి, ఆనందించండి.

అభ్యాసం A2.2

1. ఒలంపిక్ క్రీడలలో 400మీ॥ పరుగు పందెము 1964 నుండి జరుగుతోంది. ఇందులో '(స్వర్ల) పదకం' విజేతలు తీసుకున్న కాల పరిమాణంను పట్టికలో కలదు ఈ క్రీడాకారులు తీసుకున్న కాలం మరియు పందెం జరిగిన సంవత్సరం ఉపయోగించి 'గణిత సమూనా' రచించి దీని ఆధారంలో తదుపరి ఒలంపిక్స్‌లో 'స్వర్ణ పదకం' విజేత తీసుకొని, కాలపరిమాణాన్ని అందాజు వేయండి.

ఒలంపిక్ క్రీలు 4 సం॥లకు ఒకసారి జరుగుతాయి

పట్టిక A2.6

సంవత్సరం	తీసుకున్న కాలపరిమాణం (స్వర్ణపదక విజేతలు) (సెకనులలో)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 గణిత నమూనా తయారి దాని ప్రయోజనాలు మరియు పరిమితులు

గణిత నమూనాలతో కూడిన అంశాలను ఉదాహరణల ద్వారా చర్చించడాన్ని ముగిద్దాం. ఇదివరకు వివిధ ఘటకాల (విభాగాల) నేపథ్యంలో సంక్షిప్తంగా ఈ ప్రక్రియను పర్యావలోకనం మనకు సాధ్యమవుతుంది.

దశ 1 : సూత్రీకరణం : విభాగం A2.2 యొక్క ఉదాహరణ – 1 మరియు విభాగంలోని వ్యత్యాసాన్ని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు. విభాగం A2.2 లో అన్ని సిద్ధంగా ఉన్నాయి. అయితే A2.3 ఉదాహరణలో అలా లేదు. మరియు గణిత సూత్రాన్ని (సమీకరణాన్ని) రూపించడానికి కొంచెం సమయం పట్టేది. సమీకరణం (1)ని రచించి, పరిష్కరించి, పరీక్షించినపుడు అది సమీకరణం (2)కన్నా ఉత్తమంగా లేదు అని తెలుసు. నిజ జీవన సన్నివేశాలలో సమీకరణం (1)ని పరిశీలించినపుడు సూత్రం (1)యొక్క అభివృద్ధి అవసరమనిపిస్తుంది. ఇది అత్యంత సాధారణం. మీరు నిజజీవన సమస్యలు, సన్నివేశాలను నివారించునప్పుడు సూత్రీకరణకు ఎక్కువ సమయం కావలసి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు న్యూటన్ యొక్క మూడు గమన నియమాలను తీసుకుందాం.

ఇవి గమనముయొక్క గణిత నిరూపణలు మరియు నిరూపించడానికి సులభంగా (సరళంగా)వున్నాయి.

ఈ నియమాలను నిరూపించడానికి ముందు న్యూటన్ చాలా ప్రయోగాలను చేసి కనుగొన్న దత్తాంశాలను, అలాగే వారికి ముందు శాస్త్రవేత్తలు చేసిన అధ్యయనంను అభ్యసించారు. సూత్రీకరణనుకింది మూడు దశలతో కూడి ఉంటుంది.

(i) సమస్యను పేర్కొనడం (నిరూపించడం) : అనేక సమయాలలో 'సమస్య' అస్పష్టంగా నిరూపిత మవుతుంది.

ఉదాహరణకు బాల–బాలికల దాఖలాతి సమానంగా వుండడానికి సంబంధించిన విస్తృత లక్ష్యం. దీని అర్థం (తత్వం) పాఠశాలకు వెళ్ళవలసిన వయస్సు కలిగిన పిల్లలు 50% బాలికలు మరియు 50% బాలురు నమోదు కానేకావాలనే అర్థం రావచ్చు. మరొక అర్థం నమోదైన విద్యార్థులలో 50% బాలికళు ఉండాలి అనుట. మనం రెండవ అంశమైన పాఠశాలలో నమోదైన పిల్లలో 50% బాలికలుండాలని పరిగణించాము.

(ii) సుసంబద్ధమైన అంశాలను గుర్తించడం :

మన సమస్యకు ఏవి ముఖ్యమైన సంబంధాలు మరియు పరిమాణాలు అని నిర్ధారించాలి. అలాగే ఏవి ముఖ్యంకాదు, వేటిని నిర్లక్షించాలి అనికూడా నిర్ధారించాలి. ఉదాహరణకు ప్రాధమికపాఠశాల

పిల్లలు నమోదు (దాఖలాతి)కు సంబంధించినటు వంటి మునుపటి సంవత్సరపు దాఖలాతి ప్రమాణం పై ప్రభావం చూపవచ్చు. ఇది ఎందుకంటే ఎక్కువ సంఖ్యలో బాలికలు పాఠశాలకు దఅఖలవుటను చూపిన తల్లిదండ్రులు తమ ఆడపిల్లలను కూడా పాఠశాలకు దాఖలు చేయడానికి ముందుకు వచ్చునట్లు చేయడం అయితే మనం ఈ అంశాన్ని గమనించడం లేదు. ఎందుకంటే శాత ప్రమాణం యొక్క నిర్దిష్టదశను దాటువరకు ఈ విషయం (అంశం) ముఖ్యంకాదు. అదే కాకుండా ఈ అంశాన్ని చేర్చడం ద్వారా మన సమస్య మరింత జటిలమవుతుంది.

(iii) గణిత వివరణ :

మనకు ఈ సమస్య మరియు దాని ఏ అంశాలు ముఖ్యమైనవి అని సుస్పష్టమైనవని అనుకుందాం. సమస్యలోని పరస్పరం సంబంధంగల అంశాల ఆధారంగా మనమిప్పుడు ఒక సమీకరణాన్ని రాయాలి. లేదా ఒక గ్రాఫ్‌ను లేదా ఇంకేదైనా గణిత వివరణ అది సమీకరణం అయితే ఒక చరాంశాన్ని (variable) తప్పకుండా కలిగి వుండాలి. ఇది చాలా ముఖ్యమైన అంశం.

దశ 2 : పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం

గణిత సూత్రీకరణమే పరిష్కారాన్ని ఇవ్వదు. మనం ఈ సమీకరణ గణన అంశాలను పరిష్కరించాలి మీ గణిత జ్ఞానం ఇక్కడ ఉపయోగపడుతుంది.

దశ 3 : పరిష్కారం యొక్క విశ్లేషణ

గణిత పరిహారం అంటే నమూనాలోని చరరాశులకు ఒకటి, అంతకంటే ఎక్కువ విలువలు నిర్ధారిత మగుట. చరరాశుల ఈ విలువలతో మనం తిరిగి నిజ జీవిత సమస్యకు వెళ్ళి ఈ విలువలు ఏ అర్థం ఇస్తాయో చూడాలి.

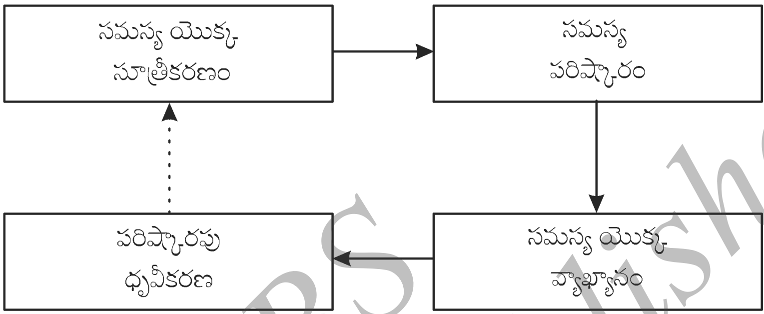
దశ 4 : మౌల్యీకరణం

విభాగం A.2.3 లో మనం గమనించినట్లు పరిష్కారాన్ని కనుగొన్న తర్వాత వాస్తవంగా ఇది ఎంత వరకు ఇది సరిపోతుందో అని చూస్తాము. ఇది సరిపోతే గణిత నమూన అంగీకారానికి అర్థమవుతుంది పరిష్కారం సరిపోకపోతే సమస్యను తిరిగి రచించు ప్రక్రియలో పూనుకుంటాము.

ఈ చివరి దశ పదసమస్యలు (Word Problem)ను పరిష్కరించడానికి గణిత నమూనా పరిష్కారానికి గల అత్యంత ముఖ్యమైన (ప్రధానమైన) వ్యత్యాసం. గణిత నమూన ముఖ్యమైన ఈ దశ పదసమస్యలలో లేనటువంటి అత్యంత ముఖ్యమైన దశ. కొన్ని నిజ జీవిత విషయాలలో సాధ్యమైననూ, మనం అన్ని సమస్యల జవాబులు (పరిష్కారాన్ని) ధృవీకరించం. ఎందుకంటే అలాంటి సమస్యలు సులభంగా మరియు పరిష్కారం సరైన రీతిలో ఉంటుంది.

A2.3 లో మనం తీసుకున్న ఉదాహరణ ఇలాంటిది.

క్రింది చిత్రం A2.2 లో గణిత నమూనా ఎలా సాగుతుంది అను సారాంశాన్ని చిత్రించినది ధృవీకరణ దశనుండి సూత్రీకరణ దశకు 'చుక్కల బాణం' ద్వారా చూపబడింది. ఈ దశను మరలా ప్రారంభించ వలసి రావచ్చు అని తెలపడమే దీని ఉద్దేశ్యం.



మీరు ఇప్పుడు గణిత నమూనాదశలను అభ్యసించారు. ఈ దశల ముఖ్యాంశాలను చర్చించి, పరిశీలిద్దాం.

గణిత నమూనా రచన యొక్క ధ్యేయం ఏమంటే నిత్య జీవిత సమస్యల గురించి, ఉపయుక్త సమాచారాలను సంగ్రహించడానికి ఆ సమస్యలను గణిత సమస్యగా మార్చడం. ఈ విధానం ప్రత్యక్ష పరిశీలన లేదా ప్రయోగాల ద్వారా సమాచారాల లాంటి. అధిక వ్యయ విధానాలకంటే లేదా సమాచార సంగ్రహణం అసాధ్యమనిపించు సందర్భాలలో ఉపయోగ పడుతుంది.

గణిత నమూనాను ఎందుకు రచించాలి అని మీకు ఆశ్చర్యం అనిపించవచ్చు.

గణిత నమూనా రచన యొక్క కొన్ని ప్రయోజనాలను గమనిద్దాం. మధురాలోని శుద్ధీకరణ కార్యాగారాలనుండి వచ్చే విషవాయువుయి తాజ్‌మహల్ యొక్క అమృత శిలను తిని వేయుచున్నవి. ఈ పరిణామాన్ని గురించి అధ్యయనం చేయ వలసి ఉన్నది. మనం నేరుగా తాజ్‌మహల్‌ను ఉపయోగించి ఈ అధ్యయనం చేయడాన్ని అపేక్షించము. ఎందుకంటే అలా చేయడం మంచిది కాదు అలా కావాలంటే దాని చిరు ప్రతిరూప నమూనాను తయారు చేయవచ్చు. అయితే దానికి విశేషమైన సౌకరాలు అవసరమవుతాయి. అధిక వ్యయంతో కూడుకొన్నది. గణిత నమూనా రచన ఇలాంటి విషయాలకు చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది. మరొక విషయం మరో 5 సం॥ తరువాత మనకు ఎన్ని ప్రాథమిక పాఠశాలలు అవసరం అనడం కాని, కావాలనడం కాని దీనిని మనం గణిత నమూనా ఉపయోగించి పరిష్కారం కనుగొనవచ్చు. అదేవిధంగా అనేక సమాజ లేక సామాజిక ఘటన ల/ అద్భుతాలు ఉండుటను. నివారించడానికి శాస్త్రవేత్తలకు ఉపయోగ పడే ఏకైక మార్గం ఏమంటే గణిత నమూనా రచన.

రెండవ విభాగము : A2.3 లో మనం పరిష్కారాన్ని మెరుగు పరచడానికి ఇంకా మంచి విధానాన్ని అమలు చేసి ఉండవచ్చు ఈ దశలో మనకు గణిత పరికరాలు లేనందువల్ల నిలవ వలసి వచ్చింది. నిజ జీవితంలో ఇలానే అవుతుంది. అనేక సమయాలలో మీరు లభ్యమైన ఇంచుమించు జవాబులతో సంతృప్తి పొందవలసివస్తుంది ఎందుకంటే వేరే విధమైన (సాధనాలు)గణిత పరికరాలు. లేనందు వల్ల.

ఉదాహరణకు వాతావరణ సూచనను దృడీకరించు 'వాతావరణగణిత నమూనా' అత్యంత జఠిలమైనది మరియు అత్యంత ఖచ్చితమైన పరిష్కారాన్ని పొందుటకు ఇంకనూ గణిత పరికరాలు లభ్యంకావు.

మన నమూనాను మెరుగు పరచడానికి ఎన్ని ప్రయత్నాలు కావాలి అని ఆశ్చర్యం కలగవచ్చు సాదారణంగా నమూనాను మెరుగు పరచడానికి మనం ఇంకా ఎక్కువ అంశాలు పరిగణన లోకి తీసుకోవలసి వస్తుంది.

ఇలా చేసినపుడు మన గణిత సూత్రాలలో ఎక్కువ సంఖ్యలో చర రాశులను చేర్చవలసి వస్తుంది అప్పుడు మనకు ఉపయోగించడానికి క్లిష్టమగు నమూనా లభిస్తుంది. ఒక ఉత్తమ గణిత నమూనా రెండు అంశాల సంతులనం కలిగి ఉండాలి.

1. ఖచ్చితత్వం (వాస్తవానికి సాధ్యమైనంత దగ్గరగా).
2. వాడుకలో సౌలభ్యం.

ఉదాహరణ న్యూటన్ గమన నియమాల సూత్రాలు చాలా సరళంగా ఉంటాయి అయితే అనేక భౌతిక సన్నివేశాలలో నమూనాలు సమర్థవంతంగా ఉంటాయి. అలా గైతే మన సమస్యలన్నింటికి గణిత నమూనాలే పరిష్కారమా? దాదాపుగా! దాని పరిమితులకు లోబడి ఉంటుంది.

అందువలన మనం గమనించవలసినది ఏమనగా

1. గణిత నమూనా నిత్యజీవితంలో సమస్యల సరళీకరణం.
2. నిత్య జీతంలోని సమస్యలు మరియు నమూనాలు రెండూ ఒకటే కాదు. దీనిని దేశ భూపటంలో ప్రకృతి యొక్క లక్షణాలను చూడటానికి నిజమైన దేశానికి గల వ్యత్యాసం తో పోల్చవచ్చు.

భూపటంలో ఒక ప్రదేశంలోని పర్వతాల ఎత్తును, సముద్ర మట్టాన్ని, తెలుసుకోవచ్చు. కాని, అక్కడి ప్రజల లక్షణాలను తెలుసుకోవడం సాధ్యం కాదు.

కనుక ఈ భూపటం యొక్క నమూనా అది దేని కోసమైతే తయారు చేయబడిందో దానికోసమే ఉపయోగించాలి మరియు నమూనా తయారు చేయునపుడు దేశానికి సంబందించిన అంశాలన్నిము అందులో చేర్చ బడవు అని గమనించాలి.

అనేక అంశాలను నిర్లక్ష్యం చేసి ఉంటామని గమనించాలి మనం నమూనా దానిని అన్వయించడానికి సాధ్యమైన పరిమితి లోనే ఉపయోగించాలి. ఈ అంశాన్ని పైతరగతులలో వివరంగా అభ్యాసిస్తారు.

అభ్యాం A2.3

1. పాఠ్య పుస్తకంలోని పద సమస్యలను పరిష్కరించడం గణిత నమూనా రచనా ప్రక్రియనుండి పరిష్కరించడానికి గల వ్యత్యాసం ఏమిటి?
2. నాలుగు రోడ్ల కూడలిలో వాహనాలు స్తంభించినప్పుడు మనం వేచి ఉండు సమయాన్ని తగ్గించడానికి కింది వాటిలో ముఖ్య మైన కారకాలు ఏవి? కానివి ఏవి?
   (i) పెట్రోలు దర
   (ii) నాలుగుదిక్కుల నుండి వచ్చు వాహనాల ప్రమాణం
   (iii) సైకిలు, రిక్షా, మొదలుగు తక్కువ వేగము వాహనాలు మరియు కారు, మోటారు బైకు వంటి వేగవంతమైన వాహనాల నిష్పత్తి.

A.2.5. సారాంశము

ఈ అనుబంధములో క్రింది అంశాలను అభ్యసించినారు,

1. పద సమస్య పరిష్కాలలో అలవర్చుకొన్న దశలు
2. కొన్ని గణిత నమూనాల నిర్మాణం.
3. గణిత నమూనాలో అలవర్చిన దశలు అవి క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

1. సూత్రీకరణం :

(i) ప్రశ్నను పేర్కొనడం

(ii) సంబంధించిన అంశాలన జాబితా తయారు చేయడం

(iii) గణిత శాస్త్ర వివరణ

2. పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం.

3. పరిష్కారాన్ని నిజ జీవిత సమస్యలతో వ్యాఖ్యానించడం.

4. అభ్యసించడానికి తీసుకొన్న సమస్యకు ఎంతవరకు నమూనా సంబద్ధ మైనది అని ధృవీకరించచడం.

4. గణిత నమూనా ధ్యేయం, ఉపయోగం పరయు పరిమితులు.

జవాబులు / సూచనలు

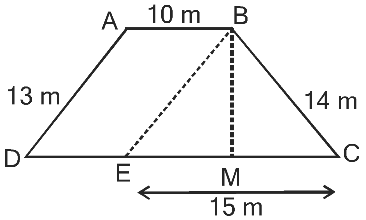
అభ్యాసం 8.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900, 3 cm^2 2. ₹ 1650000 3. $20\sqrt{2}\ m^2$
4. $21\sqrt{11}\ cm^2$ 5. 9000 cm^2 6. $9\sqrt{15}\ cm^2$

అభ్యాసం 8.2

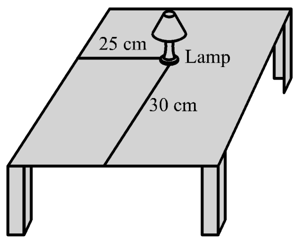
1. 65.5 cm^2 (సుమారుగా) 2. 15.2 cm^2 (సుమారుగా)
3. 19.4 cm^2 (సుమారుగా) 4. 12 cm
5. 48 m^2 6. $1000\sqrt{6}\ cm^2$, $1000\sqrt{6} cm^2$
7. రంగు వేసిన భాగం I యొక్క వైశాల్యము = రంగు భాగం II వైశాల్యము = 256 cm^2 మరియు రంగు భాగం III వై శాల్యము = 17.92 cm^2
8. ₹ 705.60
9. 196 m^2

[చిత్రం చూసి, Δ BEC యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి 84 m^2 ఎత్తు BM కనుగొనండి.]

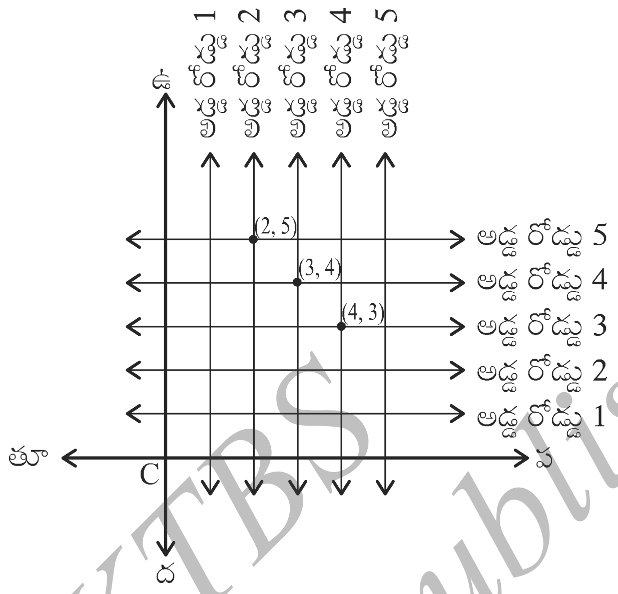


అభ్యాసం 9.1

1. ఒక సమతల బల్లను మరియు ఒక దీపాన్ని తీసుకోండి బల్లపై ఏవైనా రెండు లంభంగావున్న కొనలను ఎన్నుకోండి పొడవైన కొననుండి పొడవును కొలవండి. అది 25 cm వుండాలి చిన్న కొన నుండి దీపం దూరాన్ని కొలవండి అది 30 cm వుండాలి ఇప్పుడు దీపపు నిర్దేశాంకము (25, 30) లేదా (30, 25) అవుతుంది ఇది మీరు ఏ బిందువును మూల బిందువుగా తీసుకుంటారో దానిపై ఆధారపడి వుంటుంది.



2. కింద ఇచ్చిన చిత్రంలో ఒక వీధి ప్రణాళిక (ప్లాన్) ను చూపించారు.



క్రాస్ రోడ్డు మరియు రెండు వీధులను చిత్రంలో గుర్తించారు. రెండు రేఖలను ఆధారంగా చేసుకొని ప్రతి బిందువును ప్రత్యేకంగా గుర్తించడానికి సాధ్యమైనది.

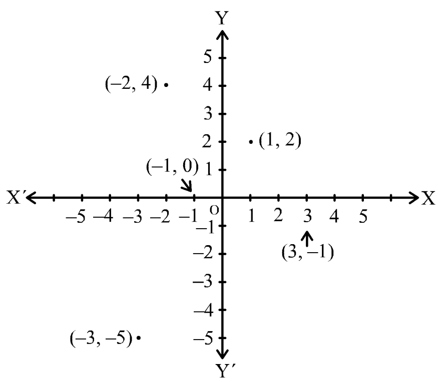
అభ్యాసం 9.2

1. (i) x – అక్షం మరియు y – అక్షం (ii) చతుర్ధాంశాలు
(iii) మూల బిందువు.

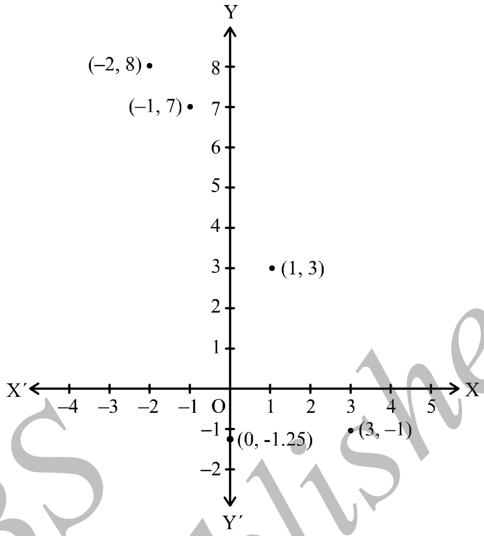
2. (i) (−5, 2) (ii) (5, − 5) (iii) E (iv) G
(v) 6 (vi) −3 (vii) (0, 5) (viii) (−3, 0)

అభ్యాసం 9.3

1. బిందువు (−2, 4) రెండవ పాదంలో వుంది : (3, −1) బిందువు నాల్గవ పాదంలో, (−1, 0) x – అక్షం పై (1, 2) మొదటి పాదంలో (−3, −5) 3 వ పాదంలో వున్నాయి ఈ బిందువుల స్థానాన్ని ప్రక్కన చిత్రంలో చూపించడం అయినది.



2. బిందువుల ద్వారా స్థానాన్ని చుక్కల ద్వారా చిత్రం లో చూపించడమైనది.



అభ్యాసం 10.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x+3y-9.3\overline{5}=0$; $a = 2$, $b = 3$, $c = -9.3\overline{5}$

   (ii) $x-\frac{y}{5}-10=0$; $a = 1$, $b = -\frac{1}{5}$, $c = -10$

   (iii) $-2x + 3y - 6 = 0$; $a = -2$, $b = 3$, $c = -6$

   (iv) $1.x - 3y + 0 = 0$; $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$

   (v) $2x + 5y + 0 = 0$; $a = 2$, $b = 5$, $c = 0$.

   (vi) $3x + 0.y + 2 = 0$; $a = 3$, $b = 0$, $c = 2$

   (vii) $0 . x + 1.y - 2 = 0$; $a = 0$, $b = 1$, $c = -2$

   (viii) $-2x + 0.y + 5 = 0$; $a = -2$, $b = 0$, $c = 5$.

అభ్యాసం 10.2

1. (iii) ఎందుకంటే x యొక్క ఏదైనా విలువకు అనుగుణంగా y విలువ వుంటుంది మరియు ప్రతి క్రమంగా.

2. (i) (0,7), (1,5), (2,3), (4,−1). (ii) $(1, 9 - \pi)$, (0, 9), $(-1, 9 + \pi)$, $\left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

   (iii) (0, 0), (4, 1), (−4, 1), $(2, \frac{1}{2})$

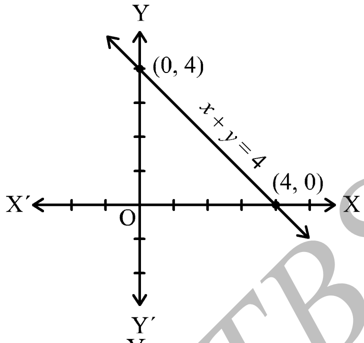
3. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) అవును

(iv) కాదు (v) కాదు.

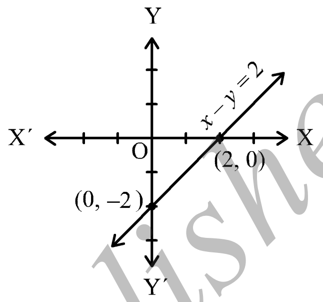
4. 7

అభ్యాసం 10.3

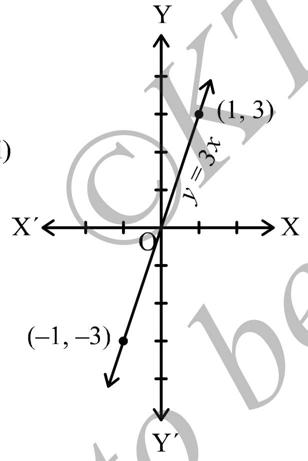
1. (i)



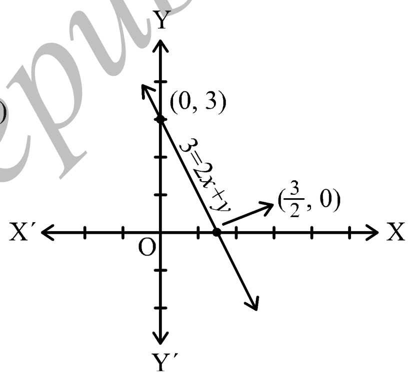
(ii)



(iii)



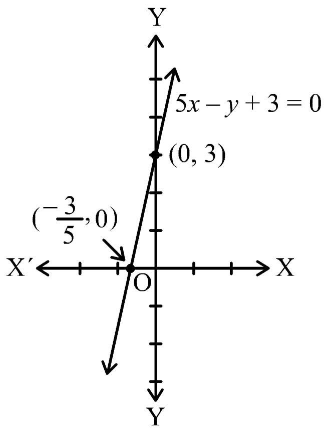
(iv)



2. $7x - y = 0$ మరియు $x + y = 16$; (ఈ బిందువు ద్వారా అనంత సంఖ్య లో రేఖలను గీయవచ్చు)

3. $\frac{5}{3}$

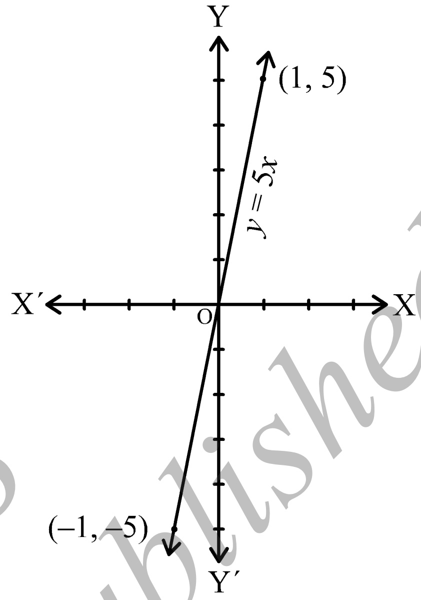
4. $5x - y + 3 = 0$



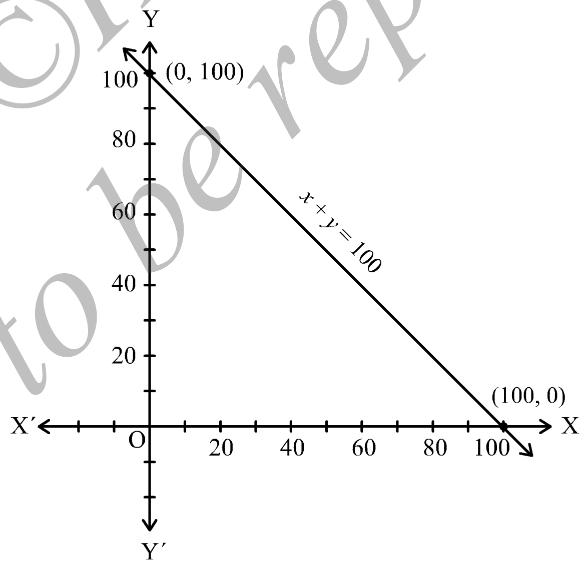
5. చిత్రం 4.6 కు $x + y = 0$ మరియు 4.7 కు $y = -x + 2$

6. x ను దూరంగా మరియు y ను చేసిన పనిగా చూపిన దానినుండి ప్రశ్నప్రకారం సమీకరణం $y = 5x$

(i) 10 యూనిటు (ii) 0 యూనిట్.



7. $x + y = 100$



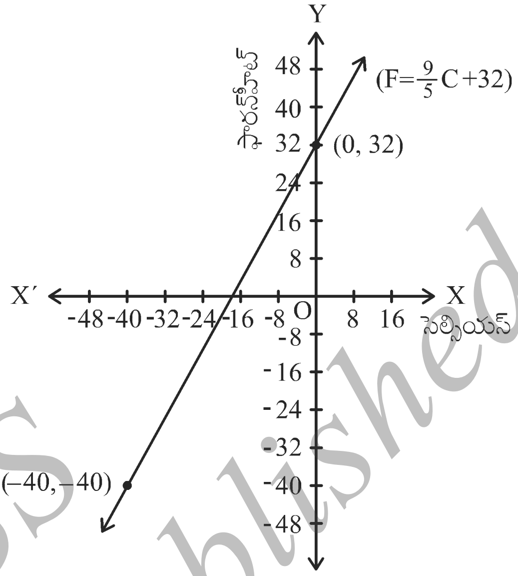
8. (i) ప్రక్క చిత్రం గమనించండి.

(ii) 86° F

(iii) 35° C

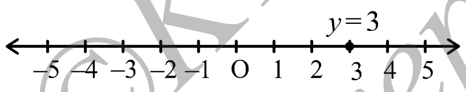
(iv) 32° F, – 17.8° C (సుమారుగా)

(v) అవును, – 40° (F మరియు C రెండింటిలోను)

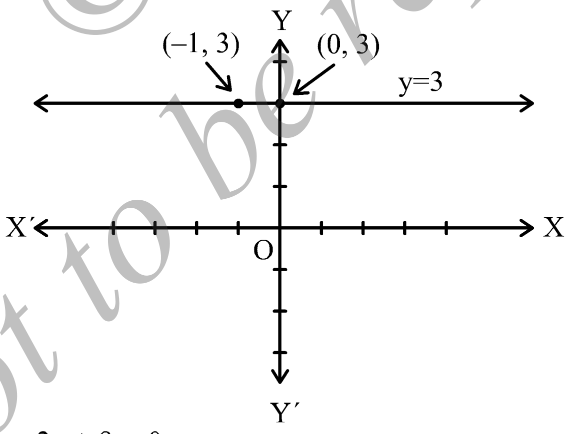


అభ్యాసం 10.4

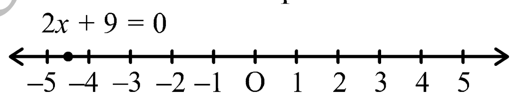
1. (i)



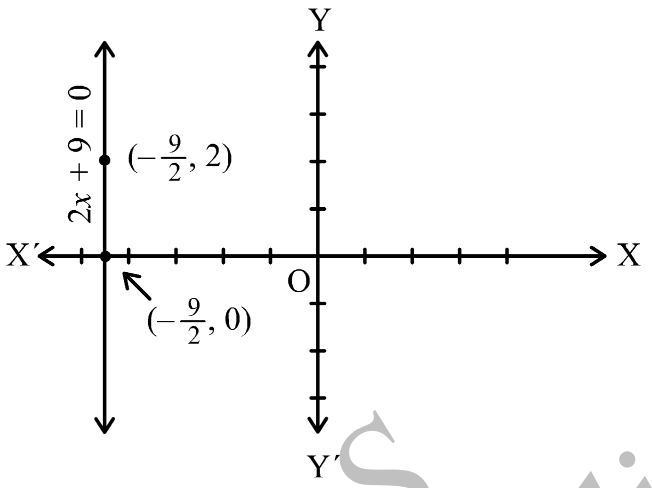
(ii)



2. (i)



(ii)



అభ్యాసం 11.1

1. (i) పాదం DC, సమాంతర DC మరియు AB:

 (iii) పాదం QR, QR మరియు PS సమాంతరాలు :

 (v) పాదం AD, AD మరియు BQ సమాంతరాలు.

అభ్యాసం 11.2

1. 12.8 cm

2. EG ను కల పండి: ఉదాహరణ 2. ఫలితాన్ని ఉపయోగించండి .

6. Δ APQ లో గోదుమలు మరియు మిగిలిన రెండు త్రిభుజాలలో Δ APQ లో పప్పులు లేదా మిగిలిన రెండింటిలో గోదుములు .

అభ్యాసం 11.3

4. CM $\perp$ AB మరియు DN $\perp$ AB లను గీయండి. CM = DN అని చూపండి..

12. ఉదాహరణ 4 ను చూడండి.

అభ్యాసం 11.4 (ఐచ్ఛిక)

7. ఉదాహరణ 3 ఫలితాన్ని ఉపయోగించండి.

అభ్యాసం 12.1

1. (i) అంతర్గత (లోపల) (ii) బయట (iii) వ్యాసము

 (iv) అర్ధవృత్తం (v) జ్యా (vi) మూడు

2. (i) సరి (ii) తప్పు (iii) తప్పు

   (iv) సరి (v) తప్పు (vi) సరి.

అభ్యాసం 12.2

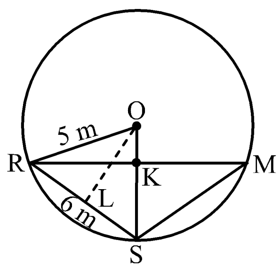
1. జ్యా మరియు అనురూప వృత్తాలను తీసుకొని సిద్ధాంతం 10. 1 లో ఉన్నట్టు సాధించండి.
2. SAS త్రిభుజపు స్వయం స్వీకృతిని ఉపయోగించి రెండు త్రిభుజాలను అనురూప త్రిభుజాలని చూపండి.

అభ్యాసం 12.3

1. 0, 1, 2, రెండు 2. ఉదాహరణ1 లా కొనసాగండి.
3. O, O' వృత్త కేంద్రాన్ని సామాన్య 'జ్యా' AB రేఖ మధ్య బిందువు 'M' కు కలపండి తరువాత $\underline{|OMA} = 90°$ గా చూపండి.

అభ్యాసం 12. 4

1. 6 cm,మొదట వృత్త కేంద్రాలను చేర్చు రేఖల చిన్న వృత్తపు వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉన్నది. మరియు తరువాత సామాన్య జ్యా చిన్న వృత్తపు వ్యాసమని చూపండి.
2. O వృత్త కేంద్రం గల వృత్తపు AB, CD సమాన జ్యాలు E బిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి OM ⊥ AB మరియు ON ⊥ CD ను గీయండి. OE ని కలపండి లంబకోణ త్రిభుజం OME మరియు ONE అనురూప వృత్తాలని చూపండి.
3. ఉదాహరణ 2 లో వున్నట్లు.
4. AD కి OM లంబ రేఖను గీతండి..
5. రేష్మ, సల్మా, మందీప్ లను R,S,M అని క్రమంగా గుర్తించండి. KR = x m వుండాలి (చిత్రం చూడండి).



Δ ORS వైశాల్యము $= \frac{1}{2}x \times 5$

Δ ORS వైశాల్యము $= \frac{1}{2}$ RS $\times$ OL $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4\ x$ ను.
కనుగొనండి మరియు RM ను కూడా.

6. సమబాహు త్రిభుజపు లక్షణాలు మరియు పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించండి.

అభ్యాసం 12.5

1. $45°$ 2. $150°, 30°$ 3. $10°$

4. $80°$ 5. $110°$ 6. $\angle BCD = 80°$ మరియు $\angle ECD = 50°$

8. CD పై AM మరియు BN లంబ రేఖలను గీయండి $(AB \parallel CD$ మరియు $AB < CD)$. Δ AMD $\perp \Delta$ BMC అనిచూపి దీనినుండి $\angle C = \angle D$ మరియు $\angle A + \angle C = 180°$.

అభ్యాసం 12.6 (ఐచ్ఛికం)

2. 'O' ను వృత్త కేంద్రం అనుకుందాం రెండు జ్యాలు లంబ సమద్విఖండన చేస్తూ 'O' గుండావెళ్ళుతాయి r వత్త వ్యాసార్థం తరువాత $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6-x)^2$ 11 cm పొడవు గల జ్యా పై 'O' బిందువు గుండా గీచిన లంబ రేఖ పొడవు ఇది x అప్పుడు. $x = 1$ అప్పుడు $r = \frac{5\sqrt{5}}{2} cm$

3. 3 cm

4. $\angle AOC = x$ మరియు $\angle DOE = y$, ఉందనుకుందాం. $\angle AOD = z$ అయితే

$\angle EOC = z$ మరియు $x + y + 2z = 360°$

$\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90° - \frac{1}{2}z + z = 90 + \frac{1}{2}z,\ \angle OEB = 90° + \frac{1}{2}z$

8. $\angle ABE = \angle ADE, \angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$ దీనినుం $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$ $= \frac{1}{2}(180 - \angle A) = 90 - \frac{1}{2}\angle A$

9. Q,1, ఉదాహరణ 10.2 మరియు సిద్ధాంతం 10.8 ను ఉపయోగించండి.

10. $\angle A$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ Δ ABC యొక్క పరివృత్తం D బిందువు వద్ద ఖండించాలి. DC మరియు DB లను కలపండి. తరువాత $\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ మరియు $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$ కావున $\angle BCD = \angle DBC$ లేదా DB = DC. అలాగే D బిందువు BC లంభ సమద్విఖండన రేఖ పై వుంది.

అభ్యాసం 13.1

1. (i) 5.45 m^2 (ii) ₹ 109

2. ₹ 555 3. 6 m 4. 100 ఇటుకలు

5. (i) ఘనాకారపు పెట్టె వక్రతల వైశాల్యము 40 cm^2 కంటే ఎక్కువ
 (ii) దీర్ఘఘనా అకారపు పెట్టె పూర్ణఉపరితలం 10 cm^2 కంటే ఎక్కువ.

6. (i) = 4250 cm^2 గాజు
 (ii) 320 cm టేపు (అన్ని అంచుల మొత్తమును లెక్కించండి.) (12 అంచులలో 4 పొడవులు, 4 వెడల్పులు మరియు 4 ఎత్తులు)

7. ₹ 2184 8. 47 m^2

అభ్యాసం 13.2

1. 2 cm 2. 7.48 m^2

3. (i) 968 cm^2 (ii) 1064.8 cm^2 (iii)2038.08 cm^2

 పైపు యొక్క పూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యము (అంతర్గత వక్ర ఉపరితల వైశాల్యము + బాహ్యవక్ర ఉపరితల వైశాల్యము + వాటి రెండు పాదాల వైశాల్యము). ఉంగరం ఆకారపు పాదం యొక్క వైశాల్యం $\pi(R^2 - r^2)$ నుండి పొందవచ్చు. ఇక్కడ R = బాహ్యవృత్తవ్యాసార్థం r = అంతర్ వృత్త వ్యాసార్థం.

4. 1584 m^2 5. ₹ 68.75 6. 1 m

7. (i) 110 m^2 (ii) ₹ 4400 8. 4.4 m^2

9. (i) 59.4 m^2 (ii) 95.04 m^2

 (వాస్తవికంగా ఉపయోగించిన ఇనుము వైశాల్యము x m^2 అందులో $\frac{1}{12}$ వ భాగము ఉపయోగించిన ఇనుము వ్యర్థమైతే, తొట్టి లో ఉపయోగించిన ఇనుము వైశాల్యము $\frac{11}{12}x$ దీని అర్థము వాస్తవంగా ఉపయోగించిన ఇనుము వైశాల్యము $= \frac{11}{12} \times 87.12\ m^2$)

10. 2200 cm^2, సిలిండర్ ఎత్తు (30 + 2.5 + 2.5) cm అవుతుంది.

అభ్యాసం 13.3

1. 165 cm^2 2. 1244.57 m^2 3. (i) 7 cm (ii) 462 cm^2

4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280 5. 63 m 6. ₹ 1155

7. 5500 cm^2 8. ₹ 384.34 (సుమారుగా)

అభ్యాసం 13.4

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2

2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5m^2

3. 942 cm^2 4. 1:4 5. ₹ 27.72

6. 3.5 cm   7. 1:16   8. 173.25 cm^2
9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

అభ్యాసం 13.5

1. 180 cm^3 2. 135000 లీటర్లు   3. 4.75 m   4. ₹ 4320
5. 2 m   6. 3 రోజులు   7. 16000   8. 6 cm, 4 : 1
9. 4000 m^3

అభ్యాసం 13.6

1. 34.65 లీటర్లు
2. 3.432 kg పైపు ఘనపరిమాణం = $\pi h[R^2 - r^2]$ ఇక్కడ R బాహ్యవ్యాసార్థం r అంతర్‌వ్యాసార్థము)
3. సిలిండరు సామర్థ్యము 85 cm^2 ఎక్కువైనది
4. (i) 3 cm   (ii) 141.3 cm^3
5. (i) 110 m^2 (ii) 1.75 m   (iii) 96.25 *kl*
6. 0.4708 m^2
7. చెక్క ఘనపరిమాణం = 5.28 cm^3, గ్రాఫైట్ ఘనపరిమాణం = 0.11 cm^3
8. 38500 cm^3 లేదా 38.5 *l* లీ సూపు

అభ్యాసం 13.7

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3
2. (i) 1.232 *l*   (ii) $\frac{11}{35} l$
3. 10 cm
4. 8 cm   5. 38.5 *kl*
6. (i) 48 cm   (ii) 50 cm   (iii) 2200 cm^2
7. 100 π cm^3 8. 240 π cm^3; 5: 12   9. 86.625 m^3, 99.825 m^2

అభ్యాసం 13.8

1. (i) $1437\frac{1}{3} cm^3$ (ii) 1.05 m^3 (సుమారుగా)
2. (i) $11498\frac{2}{3} cm^3$ (ii) 0.004851 m^3
3. 345. 39 g (సుమారుగా)   4. $\frac{1}{64}$
5. 0.303 *l* (సుమారుగా)   6. 0.06348 m^3 (చ)
7. $179\frac{2}{3}$ cm^3 8. (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (సుమారుగా)
9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9
10. 22.46 mm^3 (సుమారుగా)

అభ్యాసం 13.9 (ఐచ్ఛిక)

1. ₹ 6275
2. ₹ 2784.32 (సుమారుగా) వెండి రంగు విలువను లెక్కించునప్పుడు ఆధారంపై నిలిచిన గోళాన్ని తీసివేయడం మరువ కూడదు.
3. 43.75%

అభ్యాసం 14.1

1. మనం మన నిత్య జీవితంలో దత్తాంశాలను సంగ్రహించదగిన ఐదు ఉదాహరణలు.
   (i) మన తరగతిలోని విద్యార్థుల సంఖ్య
   (ii) మన పాఠశాలలోని ఫంకాలసంఖ్య
   (iii) మన ఇంటి గడచిన రెండు సంవత్సరాల విద్యుత్ బిల్లులు
   (iv) టెలివిజన్ లేదా వార్తాపత్రికలనుండి సంగ్రహించిన ఓటింగ్ ఫలితాలు.
   (v) విద్యాసర్వేలో పొందిన అక్షరాస్యతా రేటు చిత్రాలు.

   ఖచ్చితంగా ఇవే కాకుండా వేరే చాలా సమాధానాలు ఉన్నాయని జ్ఞాపకం ఉంచుకోండి .

   ప్రాథమిక దత్తాంశం (i), (ii) మరియు (iii) వ్యవస్థిత దత్తాంశం (iv) మరియు (v)

అభ్యాసం 14.2

రక్తపు గుంపు	విద్యార్థుల సంఖ్య
A	9
B	6
O	12
AB	3
మొత్తం	30

అతిసాధారణ గుంపు – O అరుదైన గుంపు – AB

2.

దూరం కి. మీ. లలో	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం
0 – 5	𝍸	5
5 – 10	𝍸 𝍸 |	11
10 – 15	𝍸 𝍸 |	11

<table>
<tr><td>15 – 20</td><td>卌 ||||</td><td>9</td></tr>
<tr><td>20 – 25</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>25 – 30</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>30 – 35</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>మొత్తం</td><td>40</td></tr>
</table>

3. (i)

సాపేక్ష ఆర్ద్రత (% లో)	పౌనఃపున్యం
84 86	1
86 88	1
88 90	2
90 92	2
92 94	7
94 96	6
96 98	7
98 100	4
మొత్తం	30

(ii) దత్తాంశాన్ని వర్షాకాలంలో తీసుకుంటే అలాగే కనిపిస్తుంది. ఎందుకంటే సాపేక్ష ఆర్ద్రత చాలా ఎక్కువగా ఉంటుంది.

(iii) వ్యాప్తి = 99.2 – 84.9 = 14.3

4. (i)

ఎత్తు (ఛిఝులలో)	పౌనఃపున్యం
150 – 155	12
155 – 160	9
160 – 165	14
165 – 170	10
170 – 175	5
మొత్తం	50

పై పట్టిక నుండి 50% విద్యార్థులు 165 cm కంటే తక్కువ ఎత్తును కలిగి ఉన్నారు అని ఒక నిర్ణయానికి రావచ్చు

5. (i)

సల్ఫర్ డై ఆక్సైడ్ సాంద్రత (ppmలలో)	పౌనఃపున్యం
0.00 – 0.04	4
0.04 – 0.08	9
0.08 –0.12	9
0.12 – 0.16	2
0.16 – 0.20	4
0.20 – 0.24	2
మొత్తం	30

(ii) సల్ఫర్ డై ఆక్సైడ్ సాంద్రత 8 రోజులు 0.11 pm కంటే ఎక్కువైనది.

6.

తలల సంఖ్య	పౌనః పున్యం
0	6
1	10
2	9
3	5
మొత్తం	30

7. (i)

సంఖ్యలు	పౌనః పున్యం
0	2
1	5
2	5
3	8
4	4
5	5
6	4
7	4
8	5
9	8
మొత్తం	50

(ii) ఎక్కువ సార్లు పునరావృతమైన సంఖ్యలు 3 మరియు 9. తక్కువ పునరావృతమైన సంఖ్య '0'

8. (i)

గంటల సంఖ్య	పౌనః పున్యం
0 5	10
5 10	13
10 15	5
15 20	2
మొత్తం	30

(ii) 2 పిల్లల

9.

బ్యాటరి ఉపయోగం(సం లలో)	పౌనః పున్యం
2.02.5	2
2.53.0	6
3.03.5	14
3.54.0	11
4.04.5	4
4.55.0	3
మొత్తం	40

అభ్యాసం 14.3

1. (ii) సంతానోత్పత్తి ఆరోగ్యస్థితి.

3. (ii) గుంపు A

4. (ii) పౌనః పుణ్యం బహుభుజి (iii) లేదు

5. (ii) 184

వయస్సు (సం ల లో)	తరచుదనం	వెడల్పు	దీర్ఘ చతురస్రపు ఎత్తు
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1}\times 1=5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1}\times 1=3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2}\times 1=3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2}\times 1=6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3}\times 1=3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5}\times 1=2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2}\times 1=2$

ఇపుడు మీరు ఈ పొడవులను ఉపయోగించి హిస్టొగ్రాం గీయాలి.

9. (i)

అక్షరాల సంఖ్య	తరచుదనం	వర్గీకృత వ్యాప్తి	దీర్ఘ చతురస్రపు ఎత్తు (పొడవు)
1 4	6	3	$\frac{6}{3}\times 2 = 4$
4 6	30	2	$\frac{30}{2}\times 2 = 30$
6 8	44	2	$\frac{44}{2}\times 2 = 44$
8 12	16	4	$\frac{16}{4}\times 2 = 8$
12 20	4	8	$\frac{4}{8}\times 2 = 1$

ఇపుడు దీర్ఘచతురస్రాన్ని గీయండి

(ii) 68

అభ్యాసం 14.4

1. సరాసరి = 2.8, మధ్యగతం = 3, (బహుళకం) = 3

2. సరాసరి = 54.8, మధ్యగతం = 52, బహుళకం = 52

3. $x = 62$ 4. 14

5. 6 మంది పని వాళ్ళ సరాసరి వేతనం ₹ 5083.33

అభ్యాసం 15.1

1. $\frac{24}{30}$ అనాగా $\frac{4}{5}$

2. (i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$

3. $\frac{3}{20}$ 4. $\frac{9}{25}$

5. (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$

(iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$

6. (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$

7. (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$

8. (i) $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0

11. $\frac{7}{11}$ 12. $\frac{1}{15}$ 13. $\frac{1}{10}$

అభ్యాసం A .2.1

1. **దశ 1. సూత్రీకరణం**

ఒక కంప్యూటర్ ను వివిధ కాలాలో కోవడం జరిగింది మరియు రెండు విలువలు ఇవ్వ బడ్డాయి. కాని ఇక్కడ ముఖ్యంగా గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే కంప్యూటర్ దరలనూ లేదా కానడం లోనూ మార్చు లేదు. కావున వాటికి సంబంధించి జరిగిన మార్పులను గమనించాలి. మనం అన్ని తరాల కంప్యూటర్‌లను మరియు బ్రాండ్స్‌ను ఒకే విధంగా తీసుకోవడం జరిగింది. కాబట్టి ఈ బౌధం అనేది ప్రస్తుతం కంప్యూటర్ ను అద్దెకు తీసుకున్న దర x నెలలకు = $2000x$. దర అనేది కంప్యూటర్ కొనడానికి నిర్ధారింపిన నిజ ధర కంటే కూడ ఎక్కువ , కావున, మనం కంప్యూటర్ ను కొనడమే మంచింది అప్పుడు సమీకరణం $2000x = 25000$……(i)

దశ 2 : సాధన (1) ని సాధించగా, $x = \frac{25,000}{2000} = 12.5$

దశ 3 : విశ్లేషణ : కంప్యూటర్ ను 12 నెలలకు అద్దెకు తీసుకున్న దర కన్నా కంప్యూటర్ నిజ దర చాలా తక్కువ కావున కంప్యూటర్ ను 12 నెలల కు మించి ఉపయోగించాలి అనుకుంటే కంప్యూటర్ ను కొనడమే మంచిది.

2. **దశ 1 : సూత్రీకరణం:**

రెండు కారు స్థిర వేగంలో ప్రయాణం చేస్తుంన్నాయి అనుకుంటే. అ ప్రస్తుతంగా కార్లు వేగం లో ఏమైన మార్పు జరిగింది అనుకుంటే. ఆ కార్లు x గంటల ప్రయాణం చేసిన తర్వాత ఎక్కడ కలుస్తాయి. ఒక కార్టు. A

స్థానంనుండి బయలు దేరి $40x$ km ప్రయాణం చేస్తే మరియు రెండవకారు $30x$km కి .మీ. ప్రయాణంచెసింది. కాబట్టి వా మధ్య దూరం $(100 - 30x)$ km A నుండి

సమీకరణం. $40x = (100 - 30x)$km

కావున $70x = 100$ ……. (i)

దశ 2 : ఫలితము సమీకరణం ను సాదించంగా $x = \frac{100}{70} = \frac{10}{7}$

దశ 3 : విశ్లేషణ $\frac{100}{70}$ = అంటే దాదాపుగా 1.4 గంటలు.

కావున ఆ రెండు కార్లు 1.4 గంటల తర్వాత కలుస్తాయి.

3. **దశ 1 : సూత్రీకరణం** : చంద్రుడు భూమి చుట్టు తిరుగుటకు తీసుకునే వేగం = $\frac{\text{కక్ష్యపొడవు}}{\text{పట్టిన కాలం}} = \frac{C}{t}$

దశ 2 : సాధన: కక్ష్య దాదాపుగా వృత్తాకారంగా ఉంటుంది కావున దాని పొడవు

$= 2 \times \pi \times 38400 km = 2411520\ km$

చంద్రుడు తన కక్ష్యలో ఒక సారి చుట్టి రావడానికి పడే కాలం 24 గంటలు.

కావున వేగం $= \frac{2411520}{24} = 100480\ km / hour$

దశ 3 : విశ్లేషణ : కావున వేగం = 100480 km/h

4. **సూత్రీకరణం:** వాటర్ హీటరను ఉపయోగించెనపుడు వాటి విద్యుత్ చార్జీలలో వచ్చే తేడా అనేది వాటిని ఉపయోగించిన కాలంపై ఆధారపడి ఉంటుంది అని ఊహిస్తే వాటర్ హీటర్ ను ఉపయోగించిన సరాసరి గంటలు = x గా తీసుకుంటే.

ఒక నెలలో ఉపయోగించిన వాటర్ హీటర్ల మధ్య తేడా = (₹ 1240 – 1000) = ₹ 240

ఒక గంట వాటర్ హీటర్ ను వాడుటకు అయిన ఖర్చు = ₹ 8

అయితే ఒక నెలలో 30 రోజులు ఉపయోగించిన వాటర్ హీటర్ యొక్క ఖర్చు $= 8 \times 30 \times x$

అయితే ఒక వేళ 30 వాటర్ హీటర్లు ఉపయోగించిన గంటలో మధ్య తేడాపై బిల్లు ఆధారపడి ఉంటుంది. = ,

కావున $240\,x = 240$

సాధన : ఈ సమీకరణం నుండి $x = 1$

విశ్లేషణ : $x = 1$ నుండి ఒక రోజులో వాటర్ హీటర్ ను ఒక గంట సరాసరిగా వాడారు

అభ్యాసం A 2.2

1. ఇక్కడ మనం ప్రత్యేకించి ఒకే పద్ధతిలో సాధన చేయాలి అని చర్చించ లేదు మీరు కావాలి అనుకుంటే ముందు ఉదాహరణలోని పద్ధతిలోనే సాధన చేయవచ్చు లేదా మరేదైనా సరిపోయే పద్ధతి ఉందా ఆలోచించండి.

అభ్యాసం A 2.3

1. మనం ముందు గానే చెప్పినట్లు సూత్రీకరించిన విధానం పూర్తిగా మన నిజజీవితంలో ఒక సందర్భం. కావున సంఖ్యలలో సమాధానం చెప్పడం సరికాదు ఈ పద సమస్య మాత్రమే సరైన సమాధానం ఇది మన నిజజీవిత సందర్భంలో జరగాలని ఖశ్చితమైన సందర్భంగా చెప్పలేం. (లేదా మన నిజ జీవితం లో జరగాలి అని చెప్పాల్సిన అవసరం లేదు)
2. సమీకరణం (i) మరియు (ii) ముఖ్యమైన అంశాలు ఇక్కడ సమీకరణం (iii) సమస్య పై ప్రభావం చూపెను అది అంత ప్రధానం కాదు కావున సమీకరణం

(i) అనేది ఎన్ని వాహనాలు అమ్ముడు పోయాయి అనే దానిపై ప్రభావం చూపదు.