కర్నాటక ప్రభుత్వం

# గణితం

# Mathematics

తెలుగు మాధ్యమం

**Telugu Medium**



# 9

తొమ్మిదవ తరగతి

## భాగం – 1

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

**National Council For Education and Research**
Sri Arbindo Marg New Delhi - 110016

**Karnataka Textbook Society (R.)**
100 Feet Ring Road, Banashankari 3rd Stage,
Bengaluru - 560 085

# THE CONSTITUTION OF INDIA

## PREAMBLE

**WE, THE PEOPLE OF INDIA,** having solemnly resolved to constitute India into a [1]**[SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC]** and to secure to all its citizens :

**JUSTICE,** social, economic and political;

**LIBERTY** of thought, expression, belief, faith and worship;

**EQUALITY** of status and of opportunity and to promote among them all;

**FRATERNITY** assuring the dignity of the individual and the [2][unity and integrity of the Nation];

**IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY** this twenty-sixth day of November, 1949 do **HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.**

1. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Sovereign Democratic Republic" (w.e.f. 3.1.1977)
2. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Unity of the Nation" (w.e.f. 3.1.1977)

## FOREWORD

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

*Director*
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
*20 December 2005*

# Textbook Development Committee

**Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics**

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

**Chief Advisor**

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

**Chief Coordinator**

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

**Members**

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

**Member-Coordinator**

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

## ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT,* A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

## ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ 9ನೆಯ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ತೆಲುಗು ಭಾಷೆಗೆ ಅನುವಾದ ಮಾಡಿ 2017–18ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಟ್ಟು 7 ಮಾಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರತರಲಾಗಿದೆ. NCF–2005ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

**2005ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.**

- ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವುದು.
- ಕಂಠಪಾಠ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹೊರತಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಜ್ಞಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಕಲಿಕಾ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.
- ಭಾರತದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ನೀತಿಯನ್ವಯ ಮಕ್ಕಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಸ್ಪಂದಿಸುವುದು.
- ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಇಂದಿನ ಹಾಗೂ ಭವಿಷ್ಯದ ಜೀವನಾವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.
- ವಿಷಯಗಳ ಮೇರೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಗ್ರ ದೃಷ್ಟಿಯ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ಬದುಕಿಗೆ ಜ್ಞಾನ ಸಂಯೋಜನೆ.
- ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೇ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವುದು.

9ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಯೋಚನೆ ಮಾಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ನೂತನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ತನ್ಮೂಲಕ ಅವರನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಭಾರತದ ಸ್ವಸ್ಥಸಮಾಜದ ಉತ್ತಮ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ.

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಯಶಸ್ಸಿಗೆ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೂ ಪೂರಕವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆಯೇ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ/ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆ ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ತಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುವುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸ್ನೇಹಿ ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕ ಸ್ನೇಹಿಯಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ ಸಂತೋಷದಾಯಕ ಹಾಗೂ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ಸೂಕ್ತವಾದ ದಾರಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ತಗತಿಯಲ್ಲಿ ಬೋಧನೆ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಭಾಗ – 1 ಮತ್ತು ಭಾಗ – 2ರಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ವೈಜ್ಞಾನಿಕವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಅನುಮತಿ, ಸಹಕಾರ ಹಾಗೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವನ್ನು ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ನವದೆಹಲಿ ಹಾಗೂ ಆ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

**ನರಸಿಂಹಯ್ಯ**
**ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು**
**ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ**
**ಬೆಂಗಳೂರು – 85**

## Telugu Translation Committee

**Sri. G. Ravindra Reddy** Assistant Teacher, Government Telugu and Kannada Higher Primary School, OPH Road, Shivajinagar, Bengaluru - 01.

**Smt. R.S UshaRani,** Head Mistress, Government Telugu and Kannada Higher Primary School, Shivajinagar, Bengaluru - 01.

**Smt. B. Sharmila Reddy,** Assistant Teacher, Government Telugu Higher Primary School, Vivekanagar, Bengaluru - 047.

**Smt. Jyothirmayi,** Assistant Teacher, Government Telugu Higher Primary School, Yelahanka, Bengaluru - 064

**Smt. Subhashini,** Assistant Teacher, Government Telugu High School, Shivajinagar, Bengaluru.



## Advice and Guidance

**Sri. Narasimhaiah,** Managing Director, Karnataka Textbook Society Bengaluru - 85

**Smt C. Nagamani,** Deputy Direcor, Karnataka Text Book Society, Bengaluru-85

## Program Co-ordinators

**Smt. Jayalakshmi Chikkanakote,** Assistant director, Karnataka Text Book Society, Bengaluru - 560 085

# విషయ సూచిక

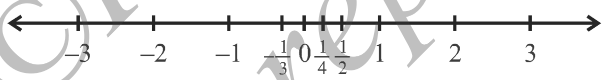
## భాగం – I

## అధ్యాయం – 1

# సంఖ్యా వ్యవస్థ

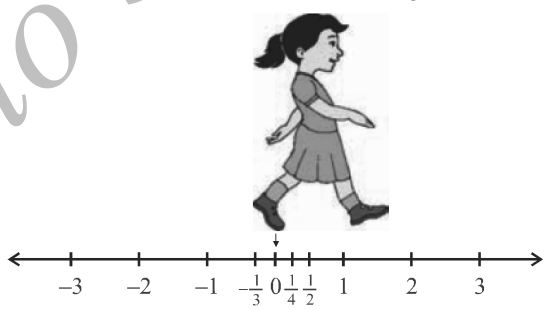
### 1.1 పరిచయం

వెనుకటితరగతులలోసంఖ్యా రేఖ గురించి మరియు సంఖ్యలను ఎలా రాసి ఉంటారో నేర్చుకున్నారు కదా! కావాలంటే, అవి ఎలా అమరి ఉంటాయో (పటం 1.1 ను చూద్దాం) నేర్చుకున్నారు.



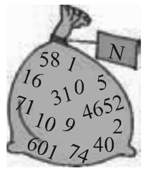

చిత్రం 1.1 : సంఖ్యారేఖ

మీరు ఒక సారి ఊహించండి. సున్నా దగ్గర నుండి నడక మొదలుపెట్టి సంఖ్యారేఖపై ధన సంఖ్యల దిశవైపు ప్రయాణం చేస్తూ వెళితే మీరు అనేకమైన ధన సంఖ్యలను చూస్తారు కదా!

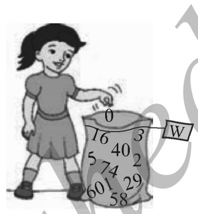



చిత్రం 1.2

ఒక వేళ మీరు సంఖ్యారేఖపై నడుస్తూ కొన్ని సంఖ్యలను సేకరించి, ఒక సంచిలో దింపాలి అనుకోండి!

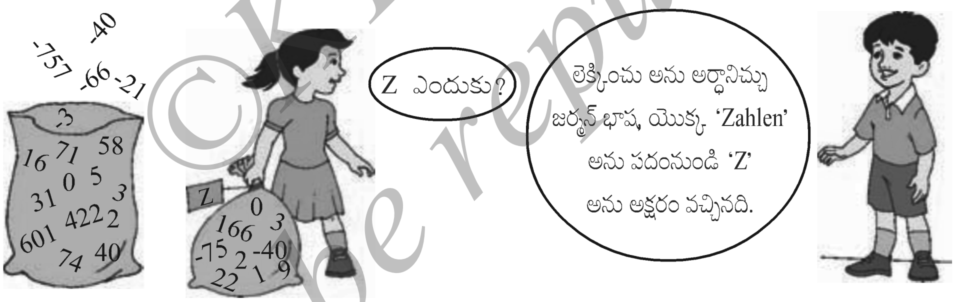



మీరు ఇప్పుడు కేవలం సహజ సంఖ్యలను మాత్రం సేకరించండి ఉదా:- 1,2,3 మరియు ఇలా చేస్తూ వెళితే అనంత సంఖ్యలో ఉంటాయి (ఇది ఎందుకు నిజం) కాబట్టి గుర్తు చెసుకోండి ఒకసారి. సహజసంఖ్యలను 'N' అనే ఆంగ్ల అక్షరంతో సూచిస్తాం




ఇప్పుడు వెనుకకు తిరిగి నడవండి. సున్నను ఇప్పుడు ఆ సంఖ్యవున్న సంఖ్యలను అన్నింటిని కలిపి పూర్ణంకాలు (whole numbers) అంటారు దానిని 'W' అనే ఆంగ్ల అక్షరంతో చూపిస్తారు

అలాగే ముందుకు నడుస్తూ చూస్తే మనకు చాలా ఋణ సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి వాటిని సేకరించి, సంచిలో వేయండి ఇప్పుడు మీరు సేకరించిన కొత్త సంఖ్యలను ఏమంటారు? ఒకసారి గుర్తుకు చేసుకోండి. వాటిని పూర్ణసంఖ్యలు (Integers) అంటారు. మరియు వాటిని ఆంగ్ల అక్షరం లోని 'Z' తో చూచిస్తారు.



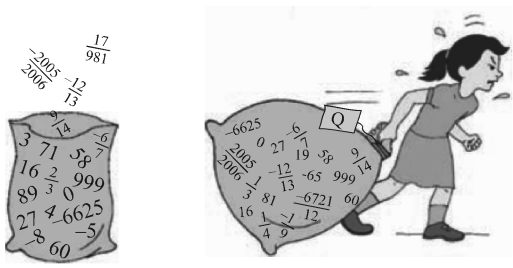

ఇంకా కొన్ని సంఖ్యలను మనం సంఖ్యారేఖపై వదిలేసి ఉండటం గమనించవచ్చు ? ఒక వేళ! అవి $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ లేదా $-\frac{2005}{2006}$ ఒక వేళ మనం వీటిని కూడా సంచిలో దింపాలి అనుకోండి. అప్పుడు

అ సంఖ్యా సమితిని కరణీయ సంఖ్యా సమితి అని అంటారు (Rational numbers)

మరియు ఆ సమితిని 'Q' అనే అక్షరంతో చూచిస్తారు ఒక్కసారి కరణీయ సంఖ్యలు అనే నిర్వచనాన్ని గుర్తు చేసుకోండి.

ఏదైనా సంఖ్య $r$ కరణీయ సంఖ్య అయితే, వాటి రూపం $\frac{p}{q}$ ఇక్కడ $p$ మరియు $q$ లు పూర్ణాంకాలు అయితే మరియు $q \neq 0$ ($q \neq 0$ ఎందుకు?) అవుతుంది.

ఒక్కసారి గమనించండి సంచిలో ఉన్న అన్ని సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్రాయగలమా. ఇక్కడ $p, q$ లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$



ఉదాహరణకు – 25 ను $-\frac{25}{1}$ గా రాస్తే ఇక్కడ $p=-25$ మరియు $q=1$.

(కాబట్టి కరణీయ సంఖ్యలు కూడా సహసంఖ్యా సమితిలో ఉంటాయి మరియు పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యలు కూడా ఉంటాయి.

మీకు ఇప్పటికే అర్థమై ఉంటుంది. కరణీయ సంఖ్యలు అంటే అవి $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉంటాయి అవి ఇక్కడ $p$ మరియు $q$ లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$

ఉదాహరణకు $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{10}{20}=\frac{25}{50}=\frac{47}{94}$ సరి అయిన కరణీయ సంఖ్యలు ఎలాగైనా. $\frac{p}{q}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అయితే లేదా $\frac{p}{q}$ సంఖ్యారేఖపై సంఖ్యఅయితే $q \neq 0$ మరియు $p$ మరియు q లకు సమాన్య కారణాంకాలు లేకపోతే 1 తప్పా వేరె సామాన్యకారణాంకాలు లేకపోతే. (అంటే $p$ మరియు $q$ లు సహపూర్ణాంకాలు) అప్పుడు

సంఖ్యారేఖపై అనంతమైన భిన్నాలు సంఖ్యా రేఖమీద చూపునప్పుడు $\frac{1}{2}$ ఎంచుకోబడుతాయి.

ఇప్పుడు మీరు వెనుకటి తరగతులలో ఏం చదువుకున్నారో కొన్ని ఉదాహరణలను సాధిద్దాం

**ఉదాహరణ 1 :** కింది వాక్యాలు సత్యమా, అసత్యమా? సరైన సమాధానం రాయండి?

(i) ప్రతి పూర్ణసంఖ్య ఒక సహజ సంఖ్య.

(ii) ప్రతి పూర్ణాంకం ఒక కరణీయ సంఖ్య.

(iii) ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య కూడా ఒక పూర్ణాంకం

**సాధన:–** (i) అసత్యం ఎందుకంటే సున్న అనేది పూర్ణసంఖ్య కాని సంఖ్యకాదు.

(ii) సత్యం ఎందుకంటే ప్రతి పూర్ణాంకం $m$' అయితే $\frac{m}{1}$ రూపంలో రాయవచ్చు మరియు ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య

(iii) అసత్యం ఎందుకంటే $\frac{3}{5}$ అనేది పూర్ణాంకం కాదు.

**ఉదాహరణ 2 :** 1 మరియు 2 ల మధ్యగల కరణీయ సంఖ్యలను కనుక్కోండి కనీసం రెండు పద్ధతుల ద్వారా ఈ ప్రశ్నకు సమాధానం రాయండి.

**సాధన :** $r$ మరియు $s$ ల మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలను ఎలా గుర్తిస్తారు ఒకసారి జ్ఞాపకం తెచ్చుకోండి $r$ మరియు $s$ ల ను కూడి వాటి మొత్తాన్ని 2తో భాగించాలి అంటే $\frac{r+s}{2}$ ఇది $r$ మరియు $s$ ల మధ్య ఉంది కాబట్టి $\frac{3}{2}$ అనేది ఒక సంఖ్య ఇది 1 మరియు 2 ల మధ్య ఉంటుంది.

ఈ పద్ధతిని అనుసరించి మీరు 1 మరియు 2 ల మధ్య అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చు వాటిలో ఈ నాలుగు సంఖ్యలు $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ మరియు $\frac{7}{4}$.

**సాధన 2 :** వేరొక పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక్క సారిగా అన్ని ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చు మనకు కావలసిన ఐదు సంఖ్యలను, 1 మరియు 2 లు అకరణీయ సంఖ్యలుగా హారం 5 + 1, అయితే $1=\frac{6}{6}$

మరియు $2=\frac{12}{6}$. ఇప్పుడు పరీక్షించండి $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ మరియు $\frac{11}{6}$ అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు ఇవి కేవలం 1 మరియు 2ల మధ్య గలవు

కావున ఆ ఐదు సంఖ్యలు కూడా $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ మరియు $\frac{11}{6}$.

**గమనించండి :-** ఉదాహరణ 2 ను గమనించండి. 1 మరియు 2ల మధ్య ఉన్న అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి. కాని 1 మరియు 2 ల మధ్య అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నాయి సాధారణంగా ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనైనా అనంతమైన సంఖ్యలో అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవస్థితమవుతాయి అని చెప్పవచ్చు.

మళ్ళీ ఒకసారి సంఖ్యారేఖను పరిశీలిస్తే, సంఖ్యా రేఖపై ఉన్న అన్ని అంకెలను మనం తీసి సంచిలో వేశామా? లేదు. ఇక్కడ నిజం ఏమిటంటే అనంత సంఖ్యలో సంఖ్యారేఖపై ఉన్న సంఖ్యలను వదిలేశాం కదా! రెండు సంఖ్యల మధ్యగల ఖాళీలలో ఉన్న చాలా సంఖ్యలను తీసుకునే ప్రయత్నం చేయండి. కేవలం 1 లేదా 2 కాదు అనంత సంఖ్యలో ఉన్నవి ఆశ్చర్యకర విషయం ఏమిటంటే ఏరెండు సంఖ్యల మధ్య ఉన్న సంఖ్యలను చూసినా, అవి అనంత సంఖ్యలో సంఖ్యలను కలిగి వున్నాయి. కాబట్టి క్రింద ప్రశ్నలను మనం వదిలేశాం :

1. సంఖ్యారేఖపై మనం వదిలేసిన సంఖ్యలు ఏవి, వాటిని ఏమని పిలుస్తాం?

2. వాటిని గుర్తించడం ఎలా? అవి అకరణీయ సంఖ్యలా అని ఎలా విభజించి చెప్పగలం?

ఈ ప్రశ్నలన్నింటికి సమాధానాలను తరువాతి అధ్యాయం లో తెలుసుకుంటారు.

**అభ్యాసం 1.1**

**1.** సున్న అనునది అకరణీయ సంఖ్యనా? $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలమా, ఇక్కడ ($p$ మరియు $q$ లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$ ?

**2.** 3 మరియు 4 మధ్యగల ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి.

**3.** $\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{4}{5}$ ల మధ్యగల ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి.

**4.** అయితే క్రింది వాక్యాలు సత్యమా లేదా అసత్యమా మీ మాటలో సమాధానాలు మరియు కారణాలు చెప్పండి?.

(i) ప్రతి సహజసంఖ్య కూడా ఒక పూర్ణసంఖ్య.

(ii) ప్రతి పూర్ణాంకం సంఖ్య ఒక పూర్ణసంఖ్య.

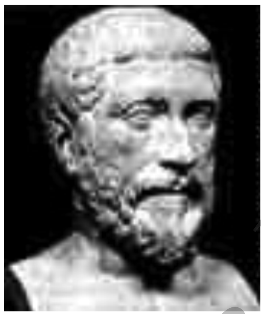
(iii) ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక పూర్ణసంఖ్య.

## 1.2 కరణీయ సంఖ్యలు

మరోసారి సంఖ్యారేఖను గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. సంఖ్యారేఖపై చూచించబడని సంఖ్యలు ఇంకా చాలా ఉన్నాయి. ఇప్పుడు ఆ సంఖ్యలు ఏవో ఈ భాగంలో మనం చూద్దాం. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాసిన ఇక్కడ ($p$, మరియు $q$ లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$ కావున ఏ సంఖ్య లైతే మనం ఈ రూపం రాయలేమో? ఆ సంఖ్యలను సాధారణంగా కరణీయ సంఖ్యలు అని వ్యవహరిస్తాం వాటిని $\frac{p}{q}$ రాయలేము ఇక్కడ. $p$ మరియు లు పూర్ణాంకాలు మరియు మనకు ముందే తెలుసు కదా. ఇక్కడ అనంత సంఖ్యల అకరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయని వాటిని బయటికి తీసి రాసిన అనంతసంఖ్యలో కరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయి. ఉదాహరణకు

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110.......$$

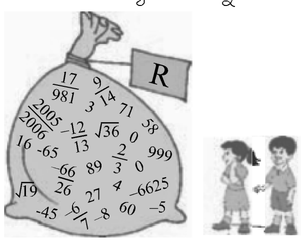
గ్రీసు దేశంలోని పైథాగొరియన్‌లు చాలామంది గొప్ప గణితశాస్త్రవేత్త మరియు తత్వవేత్త అయినటువంటి పైథాగరస్‌కు అనుచరులు ఉన్నారు ఈయన క్రీ. పూ. 400 లలో అన్ని సంఖ్యలను కనుగొని, వాటిని అవి అకరణీయసంఖ్యలు కావు అని మాత్రం చెప్పారు. తర్వాత కాలంలో ఈ సంఖ్యలనే కరణీయసంఖ్యలు అని పిలుస్తున్నాం. కాని వాటిని కరణీయ సంఖ్యలరూపం, భిన్న రూపంలో రాయడం వారికి తెలియదు. పైథాగొరియన్‌లలో చాలామంది ఈ కరణీయసంఖ్యను ఒక కల్పిత సంఖ్యగా, పైథాగరియస్‌లలో ఒకరైన హిప్పోస్ కనుగొన్నారు అన్ని కల్పిత సంఖ్యలపై హిప్పొక్రొటస్ సరైన ముగింపును ఇవ్వలేదు. $\sqrt{2}$ అనేది కనుగొని కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పారు లేదా $\sqrt{2}$ ను తర్వాతికాలంలో వీరు కరణీయసంఖ్యల గుట్టును కనుగొనడం జరిగింది.



పైథాగరస్
(క్రి.పూ 569 క్రి.పూ 479)
చిత్రం 1.3

**గమనించండి :** ఒకసారి గుర్తుచేసుకోండి . $\sqrt{\ }$ ఈ గుర్తును ఎప్పుడు వాడతాం, ఒకవేళ ఇది ఒక ధన సంఖ్యయొక్క వర్గమూలం అనుకుంటే. అయితే $\sqrt{4}=2$ అయినట్లైతే 2 మరియు 2 లుకూడా 4 యొక్క వర్గమూలాలు.

$\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని పైథాగొరియన్‌లు నిరూపించారు తర్వాత సిరీస్‌కు చెందిన థియోడరస్ క్రీ .శ. 425 లో $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{10},\sqrt{11},\sqrt{12},\sqrt{13},\sqrt{14},\sqrt{15}$ మరియు $\sqrt{17}$ లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలు అని నిరూపించాడు $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$........ మొదలైన కరణీయసంఖ్యల యొక్క నిరూపణలు గురించి మీరు 10వ తరగతిలో చదువు కుంటారు అలాగే. $\pi$ గురించి చాలా వేల సంవత్సరాల నుంచి ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించారు లాంబర్ట్ మరియు లెజెండ్రె 17 వశతాబ్దంలో కరణీయ సంఖ్యలు సాధించారు. తర్వాత మనం 0.10110111011110....... మరియు $\pi$ గురించి చర్చించాలి. మళ్ళీ మనకు కొన్ని ప్రశ్నలు ఉత్పన్నం అవుతున్నాయి. కావున వెనుకటి అధ్యాయంలోకి వెళ్దాం అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్న సంచిని ఒకసారి గుర్తుకుతెచ్చుకోండి ఒకవేళ ఆసంచిలో ఉన్న కరణీయసంఖ్యలను ఉంచాం అనుకోండి. సంఖ్యారేఖపై ఇంకా ఏదైనా సంఖ్య మిగిలిపోయి ఉంటుందా? లేదు! కాబట్టి ఆ సంచిలో ఉన్న లేదా సేకరించిన అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు కరణీయ సంఖ్యలను కలిపి వాస్తవ సంఖ్యలు (Real numbers)



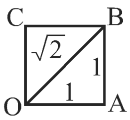
అంటారు దానిని R తో సూచిస్తాం, కాబట్టి వాస్తవసంఖ్య అనేది అకరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చు లేదా కరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చు. కావున ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యను మనం ఖచ్చితంగా ఒక బిందువు దగ్గర సంఖ్యారేఖపై గుర్తించవచ్చును. మరి ఎందుకు సంఖ్యారేఖ అని పిలుస్తున్నాం? వాస్తవ సంఖ్యారేఖ అని పిలవవచ్చుకదా!

| | | |
|---|---|---|
| <br>**ఆర్. డెడెకైండ్**<br>**(1831-1916)**<br>**చిత్రం: 1.4** | 1870 సం॥ లో ఇద్దరు జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్తలు. కాంటర్ మరియు డెడెకైండ్ సంఖ్యారేఖపైన ఉండే ప్రతి బిందువు ఏకైక వాస్తవసంఖ్యను సూచిస్తుంది ఆదేవిధంగా సంఖ్యారేఖపై ఏ వాస్తవసంఖ్యలోనైనా సూచించే బిందువు ఏకైకంగా ఉంటుంది అని వీరు చూపించారు. | <br>**జి. కాంటర్**<br>**(1845-1918)**<br>**చిత్రం : 1.5** |

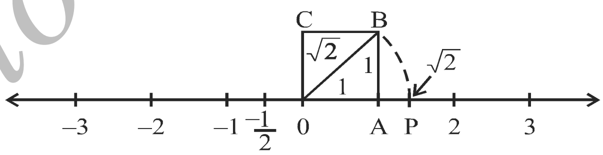
ఇప్పుడు మనం కొన్ని కరణీయ సంఖ్యలు సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడ ఉన్నాయో చూద్దాం:

**ఉదాహరణ 3 :** $\sqrt{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

**సాధన** : ఒక యూనిట్ భుజముగాగల చతురస్రం OABC ని సంఖ్యారేఖపై 'O' వద్ద గీయండి. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం, ప్రకారం OB = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడ సూచించాలి? (చిత్రం 1.6 ను నుండి) OB = $\sqrt{2}$ అని మనకు తెలుసు ఒక వృత్తలేఖిని ఉపయోగించండి. (చిత్రం 1.7ను గమనించండి)




**చిత్రం 1.6**



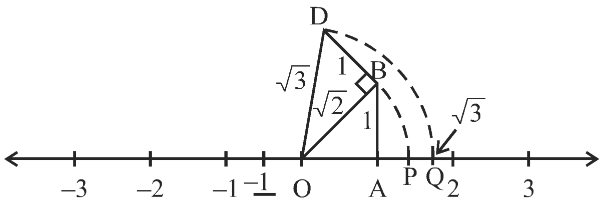

**చిత్రం 1.7**

OB = $\sqrt{2}$ అని ఇదివరకే తెలుసుకున్నాం.

'O' కేంద్రంగా OB వ్యాసార్థంలో సంఖ్యారేఖపై కుడివైపున 'P' వద్ద ఖండించునట్లుగా ఒక చాపాన్ని గీయండి. 'P' అనునది సంఖ్యారేఖపై $\sqrt{2}$ ను సూచిస్తుంది.

**ఉదాహరణ 4 :** $\sqrt{3}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి

**సాధన :** చిత్రం 1.7 ను పరిశీలించండి.




చిత్రం 1.8

చిత్రం 1.8 లో చూపిన విధంగా 1 యూనిట్ ప్రమాణంలో BD ని OB కి లంబంగా ఉండేవిధంగా గీయండి O,D లను కలపండి.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం OD = $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}$ , ఒక వృత్తలేఖినిని ఉపయోగించి 'O' కేంద్రంగా OD వ్యాసార్ధంలో సంఖ్యా రేఖపై Q' కు కుడివైపున Q' వద్ద ఖండించునట్లు ఒక చాపాన్ని గీయండి అది సంఖ్యారేఖపై $\sqrt{3}$ ను సూచిస్తుంది.

ఇదే విధంగా ఏదైనా ధన పూర్ణసంఖ్య ను n కు $\sqrt{n-1}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించిన తరువాత $\sqrt{n}$ ను సూచించవచ్చు.

## అభ్యాసం 1.2

1. **ఈ క్రింద వాక్యాలను పరిశీలించి సత్యమా లేదా అసత్యమా చెప్పండి సరైన సమాధానం రాయండి.**

   (i) ప్రతి కరణీయ సంఖ్య ఒక వాస్తవసంఖ్య అవుతుంది.

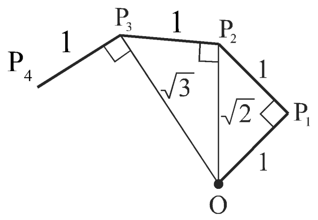
   (ii) సంఖ్యారేఖపై ప్రతి బిందువు వద్ద వున్న సంఖ్యా రూపం $\sqrt{m}$ ఇక్కడ 'm' ఒక వాస్తవసంఖ్య

   (iii) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

2. అన్ని ధన అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలాలు కరణీయసంఖ్యలా? ఒకవేళ అలా కాకపోతే ఒక ఉదాహరణలో ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం అకరణీయ సంఖ్య అని చూపండి.

3. $\sqrt{5}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎలా గుర్తిస్తారు?.

4. తరగతిలో చేయాల్సిన కృత్యం ('వర్గమూల సర్పలం' నిర్మించుట.) వర్గమూల సర్పలాన్ని నిర్మించుటకు పెద్దసైజు కాగితాన్నితీసుకొని కింద సూచించిన సోపానాలు అనుసరించండి.




చిత్రం 1.9

**వర్గమూల సర్పలం నిర్మాణం**

'O' బిందువు నుంచి ప్రారంభించి 1 సెం. మీ. పొడవుగల రేఖాఖండం OP మని గీయండి. OP కి లాబంగా 1 సెం.మీ. పొడవులో $PP_1$ నుగీయండి (ఇక్కడ $OP=PP_1=1$ 1 సెం మీ) O,P లను కలపండి ($OP_1=P_1P_2=1$ సేం. మీ) పొడవులో $OP_1$కు లంబంగా రేఖాఖంఢాన్ని గీయండి. $O_1P_2$ లను కలపండి. సెం. మీ పొడవు కు లంబంగా $P_2P_3$ రేఖాఖండాన్ని గీయండి. ఇదే పద్ధతిలో మరికొన్ని విధానలు కొనసాగించండి అప్పుడు $P_{n-1}P_n$ రేఖాఖండాలు $OP_{n-1}$ యూనిట్ లో వున్న లంబాలు ఏర్పడును ఇదే విధంగా కొనసాగిస్తే $P_2P_3$..... $P_n$ బిందువు ల వద్ద ఒక అందమైన సర్పలాకారం ఏర్పడుటను చూడవచ్చు ఇక్కడ $\overline{OP}, \overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}$..... లు వరుసగా $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5})$ .......... సూచిస్తాయి.

## 1.3 వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ విస్తరణ

ఈ భాగంలో, మనం వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు కరణీయ సంఖ్యల వివిధ రూపాలు గమనిస్తాం. వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క వివిధ దశాంశరూపాల విస్తరణ గురించి చూస్తాం మరియు వాస్తవసంఖ్యల మరియు కరణీయ సంఖ్యల మధ్య ఉన్న ఈ విస్తరణారూపాల మధ్య తేడాలు గమనిస్తాం అంతేకాకుండా మనం వాస్తవసంఖ్యల దశాంశరూపాలను సంఖ్యారేఖపై ఎలా గుర్తిస్తాం అనేదికూడా గమనిద్దాం. భిన్నాలు మన నిత్య జీవితానికి దగ్గరగా ఉంటాయి ఈ క్రింద 3 ఉదాహరణల ద్వారా వాటిని గమద్దాం $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$

జాగ్రత్తగా పై భాగహారాలలో శేషాలను గమనించండి.

**ఉదాహరణ 5 :** $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$ మరియు $\frac{1}{7}$ ల యొక్క దశాంశ విస్తరణలను రాయండి.

**సాధన :**

```
   3.333...           0.875          0.142857...
3 | 10            8 | 7.0        7 | 1.0
     9                64               7
    ---              ---              ---
    10                 60              30
     9                 56              28
    ---               ---             ---
    10                  40              20
     9                  40              14
    ---                ---             ---
    10                   0               60
     9                                   56
    ---                                 ---
     1                                   40
                                         35
                                        ---
                                          50
                                          49
                                         ---
                                           1
```

శేషాలు 1, 1, 1, 1, 1.... శేషాలు: 6, 4, 0 శేషాలు 3, 2, 6, 4, 5,1,3, 2, 6, 4, 5, 1..........

విభాజకం : 3 విభాజకం : 8 విభాజకం : 7

ఏమి గమనించారు? మీరు ఇక్కడ కనీసం మూడు విషయాలు గమనించి, ఉండాలి:

(i) ఒకానొక దశలో శేషాలు '0' అయివుంటాయి. లేదా తిరిగి అదేశేషం పునరావర్తనం కావడం ప్రారంభమవుతుంది.

(ii) అనేక సార్లు పునరావృతమైన శేషాలు విభాజకం విలువకంటే తక్కువగా ఉన్నాయి. ($\frac{1}{3}$ ఒకటి అనే అంకె అనేక సార్లు పునరావృతం కాగా, అందులో విభాజకం 3, $\frac{1}{7}$ లో ఆరు సార్లు శేషాలు 326451 లు పునావృత అవుతాయి కాని ఇందులో భాజకం 7

(iii) శేషం ఒకవేళ పునరావృతం అయితే, భాగఫలంలో మనకు ఒకే అంకె పునరావృత్తం వస్తుంది. ($\frac{1}{3}$ 3 లో లెక్కించి చూడండి మరియు $\frac{1}{7}$ లో 142857 అనేవి భాగఫలంలో పునరావృతంగా వస్తాయి.

పైన గమనించిన ఉదాహరణలన్నీ కూడా $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ రూపం లో ఉన్న అకరణీయ సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు. $\frac{p}{q}$ భాగహారంలో రెండు ముఖ్య మైన విషయాలను గమనించుకోవాలి శేషం

గనుక సున్న అవుతుంది. సున్న కాకపోతే. మనకు వివిధరకాల పునరావృతం అయ్యేశేషాలు వస్తాయి ప్రతి సందర్భాన్ని ఇప్పుడు గమనిద్దాం.

**సందర్భం (i) : శేషం సున్న అయి వుంటుంది.**

ఉదాహరణకు $\frac{7}{8}$ లో మనకు శేషం సున్నరావడం మనం గమనించాం కొన్ని దశల తర్వాత మరియు దశాంశ విస్తరణలో $\frac{7}{8} = 0.875$ మరికొన్ని ఉదాహరణలో $\frac{1}{2} = 0.5; \frac{639}{250} = 2.556$ ఈ అన్ని సందర్భాలలో దశాంశం తర్వాత ఉన్న విలువను వదిలివేస్తాం. లేదా అనంత సంకెలతో ఆ దశాంశంలో రాస్తాం. అందుకోసం మనం దశాంశ విస్తరణలో దశాంశం తర్వాత ఉన్న అంకెలను తొలగించి రాస్తాం.

**సందర్భం (ii) : శేషం సున్న అయివుండదు.**

ఉదాహరణలు $\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{1}{7}$ లో శేషాలు అనేవి పునరావృతంగా రావడం మరియు ఒకదశలో దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రావడం గమనించాం మరోలా చెప్పాలంటే విభాజకంలో కొన్ని అంకెల శ్రేణులు పునరావృతం అవుతాయి. దశాంశం తర్వాత. ఈ విధమైన దశాంశ శ్రేణిని ఆంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశశ్రేణి అని అంటాం ఉదాహరణకు $\frac{1}{3} = 0.3333.......$ మరియు $\frac{1}{7} =$ 0.142857142857142857......

సాధారణంగా మనం మూడు సార్లు ఒకే అంకె విభాజకలో పునరావృతం అయితే, దానిని $\frac{1}{3}$ యొక్క విభాజకాలను $0.\bar{3}$ అని రాస్తాం

అదేవిధంగా భాగఫలంలో కొన్ని అంకెల గుంపు పునరావృతం అయితే, $\frac{1}{7}$ లో భాజకం విలువ 142857 ను $\frac{1}{7}$ కు $0.\overline{142857}$ అని రాస్తాం, బార్ (–) కింద దన్ని అంకెల సమూహం అని బార్ సూచిస్తుంది అలాగే 3.57272........ రు $3.5\overline{72}$ గా రాస్తాం. ఈ ఉదాహరణలన్నీ కూడా

అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంత సంఖ్యలకు ఉదహరణగా చెప్పవచ్చు. కాబట్టి దశాంశ విస్తరణలో వాస్తవసంఖ్యలకు ముఖ్యంగా రెండురకాల రూపాలు ఉంటాయి. అవి ఒకటి అంతమయ్యే దశాంశం లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం.

ఇప్పుడు ఒకవేళ సంఖ్యారేఖపై మరొక చేతి వైపు నడుచుకుంటూ వెళితే. 3.142678 అనేది దశాంశ విస్తరణలో ఇది అంతం అయ్యే దశాంశమా లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశమా: అయితే ఇది అకరణీయ సంఖ్యానా? సమాధానం అవును!

దీనిని మనం నిరూపించం కాని కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా వివరిస్తాం అంతమయ్యే దశాంశం చాలా సులభం.

**ఉదాహరణ 6 :** 3.142678 అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని చూపండి? లేదా 3.142678 ని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాసి $p$ మరియు $q$ లు పూర్ణాంకాలు అయిన $q \neq 0$ అని చూపండి.

**సాధన :** $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$. మరియు ఇది అకరణీయ సంఖ్య

ఇప్పుడు సందర్భం (ii) లో చెప్పిన విధంగా అంతంకాని ఆవర్తితం.

**ఉదాహరణ 7:** $0.3333..... = 0.\bar{3}$ అని చూపండి $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచుతుంది ఇక్కడ $p$ మరియు $q$ లు అకరణీయసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

**సాధన:** $0.\bar{3}$ ని $x$ అని అనుకుంటే.

$$x = 0.3333....$$

$$10 \; = 10 \times (0.333...) = 3.333.....$$

ఇప్పుడు $3.3333..... = 3 + x$ ($\because x = 0.3333.........$నుండి

కాబట్టి $\therefore 10x = 3 + x$ సాధించిన $x$ విలువ వస్తుంది

$$9x = 3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

**ఉదాహరణ 8 :** 1.272727........ = $1.\overline{27}$ ; అని చూపండి దీనిని $\frac{p}{q}$ రూపం లో వ్యక్తపరచిన

ఇక్కడ $p$ మరియు $q$ లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$

**సాధన :** $x = 1.272727......$ అనుకొనిన, దీనినుండి రెండు స్థానాలు పునరావృతం అవుతున్నాయి. కావున $x$ ను 100 లో గుణించాలి.

$$100 \times x = 100 \times (1.272727.........)$$
$$100\,x = 127.2727......$$
$$100\,x = 126 + 1.2727........$$

కావున $100\,x = 126 + x\ (\because x = 1.272727\ .......)$

$\therefore\ 100\,x - x = 126$

కాబట్టి $99\,x = 126$

$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

భాగహారంచేయగా $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

**ఉదాహరణ 9 :** 0.2353535 = $0.2\overline{35}$ అని చూపండి దానిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్త పరచిన ఇక్కడ $p$ మరియు $q$ లు పూర్ణాంకాలు $q \neq 0$ అగును.

**సాధన :** $x = 0.2\overline{35}$ కావున 2 ఇక్కడ పునరావృతం కాలేదు కావున గమనించండి కాని బార్ లో 35 లు పునరావృతం. అయ్యాయి. రెండు స్థానాలు పునరావృతం అయ్యాయి.

కావున $x$ ని 100 లో గుణకారం చెయ్యాలి

$$100\,x = 23.53535.....$$
$$100\,x = 23.3 + 0.23535.......... = 23.3 + x$$
$$\therefore\ 99\,x = 23.3$$
$$99\,x = \frac{233}{10}$$
$$x = \frac{233}{990}$$

సరిచూడగా $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

కావున ప్రతి సంఖ్య కూడా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాన్ని చూపిస్తుంది. $\frac{p}{q}$ రూపంలో $q \neq 0$ ఇక్కడ $p$ మరియు $q$ లు అకరణీయ సంఖ్యలు మన సమాధానాలను క్రింది రూపంలో సేకరించారు దశాంశ విస్తరణ రూపంలో అకరణీయ సంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశాలూ అవుతాయి అంతేకాకుండా ఏ సంఖ్య అయితే దశాంశరూపంలో అంతం లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం అవుతుందో అది అకరణీయ సంఖ్య.

కావున ఇప్పుడు మనకు అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశరూపంతెలుసు. మరి కరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపం ఏంటి?

అంతం మరియు అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశ మాన ప్రధానం ఇది అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపం విస్తరణను పరిశీలించాం, అలాగే కరణీయ సంఖ్యలకుకూడా అకరణీయ సంఖ్యల ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి

కరణీయ సంఖ్యలు దశాంశ విస్తరణరూపంలో కరణీయసంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశం లేదా అంతంకాని ఆవర్థిత దశాంశం అవుతాయో ఏ సంఖ్య అయితే అంతం అయ్యే దశాంశ మానం లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం అవుతుందో అది కరణీయ సంఖ్య గుర్తుచేసుకోండి $S = 0.10110111011110$........... ముందుభాగంలో రాశాం. ఇది అంతం అయ్యే సంఖ్య నా. అంతం కాని ఆవర్తిత సంఖ్యనా. పైలక్షణాలను బట్టి ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య అనంతసంఖ్యలో కరణీయ సంఖ్యలు S కు ఉద్భవిస్తున్నాయి.

కావున $\sqrt{2}$ మరియు $\pi$ కు కరణీయ సంఖ్యల రాయండి? ఇక్కడ దశాంశ విస్తరణ రూపం ఒక దశవరకు మాత్రమే గుర్తిస్తాం.

$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420 96$.........

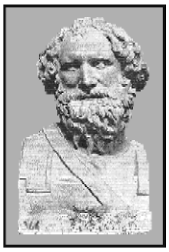
$\pi = 3.14159265358979323846264338327950$............

(**గమనిక :** $\frac{22}{7}$ యొక్క విలువ దాదాపుగా $\pi$ విలువకు సమానం కాని $\pi \neq \frac{22}{7}$) తరువాత

కాలంలో గణిత శాస్త్రంలో కరణీయ సంఖ్యలపైన వివిధరకాలైన టెక్నిక్‌ల ద్వారా దశాంశ రూపంలో విస్తరించి రాయడం మొదలు పెట్టారు. ఉదాహరణకు $\sqrt{2}$ భాగహారపద్ధతిని ఉపయోగించి, దశాంశ రూపంలో రాయడం. ఆసక్తికర విషయం ఏమిటంటే సులభసూత్రాలు గణిత వేదిక్ శాస్త్రంలో (క్రీ.పూ.800 – క్రీ.పూ 500) ను $\sqrt{2}$ విలువను ఈ క్రింది విధంగా సూచించారు.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే పైవాటిలో ఏవైనా మొదటి 5 దశాంశ స్థానాలు ఒక్కటే చరిత్రలో $\pi$ విలువను కనుగొనడానికి వేసిన ప్రయోగాలు చాలా ఆసక్తి కలిగివున్నవి.

| | |
|---|---|
| $\pi$ విలువను గుణించటంలో మేధావి గ్రీక్కు చెందిన ఆర్కిమిడీస్. దీనివిలువ సుమారుగా 3.140845 మరియు 3.142857 ల మధ్య ఉంటుంది ($3.140845 < \pi < 3.142857$) అని అతడు నిరూపించాడు $\pi$ విలువను నాలుగవ దశాంశ స్థానం వరకు కనుగొన్న భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్త ఆర్యభట్టు(476 – 550 (క్రీ.శ.) ప్రస్తుతం అత్యంత వేగంగా పనిచేసే కంప్యూటర్లను ఉపయోగించి $\pi$ విలువను 1.24 ట్రిలియన్ దశాంశ స్థానాల వరకు కనుగొన్నారు. (1 ట్రిలియన్ = 1000000000000) |  ఆర్కిమిడీస్ క్రీ.పూ 287 క్రీ.పూ. 212 చిత్రం 1.10 |

ఇప్పుడు కరణీయ సంఖ్యలను పొందడం ఎలాగో చూద్దాం.

**ఉదాహరణ** 10 : $\frac{1}{7}$ మరియు $\frac{2}{7}$ ల మధ్యగల కరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

**సాధన:** $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అంటాం కావున $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ అని సులభంగా లెక్కించవచ్చు. $\frac{1}{7}$ మరియు $\frac{2}{7}$ ల మధ్యగల కరణీయసంఖ్యలను గుర్తించగా, అంతమయ్యే మరియు అంతంకాని ఆవర్తిత కరణీయ సంఖ్యలో అనంత సంఖ్యలో ఉంటాయి. ఉదాహరణకు 0.150150015000150000................

## అభ్యాసం 1.3

**1.** క్రింది వాటిని దశాంశ రూపంలో రాయండి మరి అవి ఏ రకమైన దశాంశ రూపాలో తెలియచేయండి.

(i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

**2.** $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అయిన $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ల దశాంశ రూపాలు రాయండి. భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించకుండా చేయండి? అది ఎలా? (సూచన: $\frac{1}{7}$ లో శేషాలను జాగ్రత్తగా గమనించండి)

**3.** ఈ క్రిందివాటిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి. ఇక్కడ $p$ మరియు $q$ లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$.

(i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999...... $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి. జవాబును చూసి, మీరు ఆశ్చర్యపోయారా? మీ తరగతి ఉపాధ్యాయునితోనూ మి స్నేహితులతోనూ దీని గురించి చర్చించి, చూడండి.

5. $\frac{1}{17}$ ను దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా, ఎన్ని స్థానాలు పునరావృతం అవుతాయి? గమనించి సమాధానం రాయండి.

6. అకరణీయ సంఖ్యలలో చాలా ఉదాహరణలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాసిన $(q \neq 0)$, ఇక్కడ $p$ మరియు $-q$' లు పూర్ణాంకాలు ఆయిన వాటికి 1తప్ప మీరే ఇతర ఉమ్మడి కారణాంకాలు లేకపోతే అటువంటివాటికి అంతం ఇక్కడ $q$ విలువ ఏది ఆయితే ఇది సత్యం అవుతుంది చూడండి?

7. ఏ మూడు సంఖ్యలు దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా అంతంకాని ఆవర్తితం కాని దశాంశం అగునో, వాటిని రాయండి?

8. $\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{9}{11}$ మరియు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల 3 వేర్వేరు కరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

9. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు అకరణీయసంఖ్యలు లేదా కరణీయ సంఖ్యలు అగునో చెప్పండి.

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

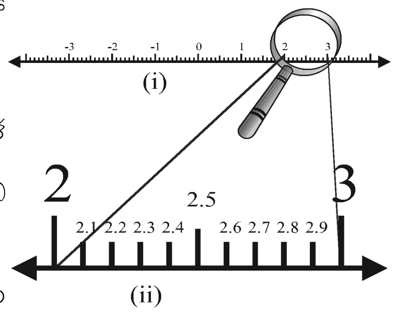
(iv) 7.478478..... (v) 1.101001000100001....

## 1.4 వాస్తవసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై క్రమాను గత వర్ధనం ద్వారా చూపించండం.

ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యను దశాంశ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చని మనం గతంలో తెలుసుకున్నాం.

ఇప్పుడు మనం సంఖ్యారేఖపై అంతమయ్యే దశాంశ క్రమానుగత వర్ధన పద్ధతిలో ఎలా చూపించవచ్చో తెలుసుకుందాం.

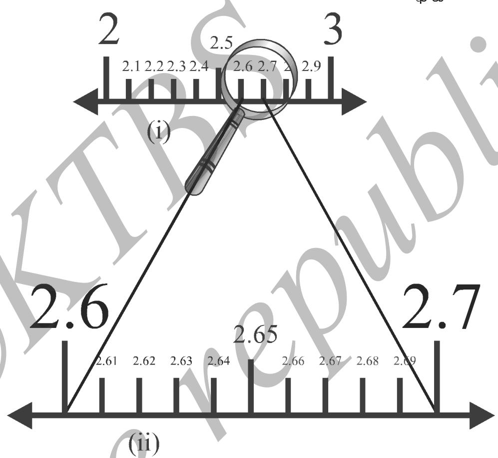
ఉదాహరణకు 2.665 ను సంఖ్యారేఖపై సూచిద్దాం ఈ దశాంశ 2,3 ల మధ్య ఉంటుంది. మరియు ఇది అంతమయ్యే దశాంశము మనకు తెలుసు.




చిత్రం 1.11

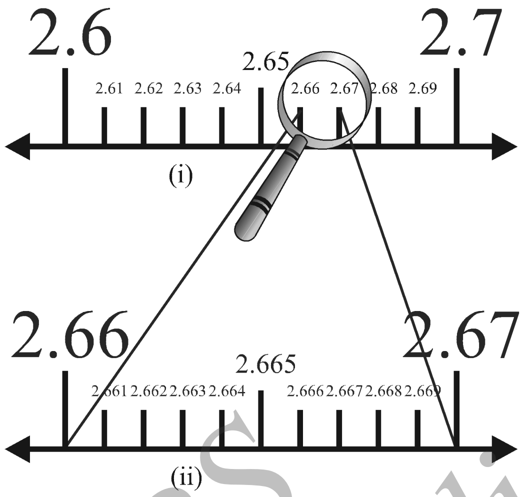
మన చేతిలో భూతద్దం ఉంది అనుకోండి. భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి సంఖ్యారేఖపై 2 మరియు 3 ల మధ్య ప్రాంతంలోని సంఖ్యలను గమనించండి. సంఖ్యారేఖపై 2 మరియు 3 ల మధ్య పది సమాన భాగాలు, వాటిలో 1. 11 లో (i) చూపిన విధంగా ఊహించండి. అది వరుసగా 2.1, 2.2, 2.3 ......... 2.9 పటం 1.11 (i) లో మనం వేటిని స్పష్టంగా చూడవచ్చు.

2.776 అనునది 2.7 మరియు 2.8ల మధ్యన ఉంటుంది అని గమనించండి. కాబట్టి మీ చేతిలోని భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి 2.7 మరియు 2.8 ని పటం 1.12 (i) ల మధ్య గల ప్రాంతం పై దృష్టిసారించండి. ఈ ప్రాంతాన్ని తిరిగి పది సమాన భాగాలుగా విభజించినట్లుగా ఊహించండి అది వరుసగా 2.61, 2.62 ....... చిత్రం 1.12 (ii) లో మనం వాటిని స్పష్టంగా చూడవచ్చు.




చిత్రం 1.12

ఇప్పుడు 2.665 అనునది 2.66 మరియు 2.67 ల మధ్యన ఉంటుంది అని గమనించండి. కాబట్టి మీ చేతిలోని భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి 2.66 మరియు 2.67 ల ను చి త్రం 1.13 ల మధ్యగల ప్రాంతంపై దృష్టిసారించండి ఈ ప్రాంతాన్ని తిరిగి పది సమానభాగాలుగా విభజించినట్లుగా ఊహించచడి చిత్రం 1.13 లో సూచించిన విధంగా సంఖ్యలను పెద్దవి చేసి చూడండి.




చిత్రం 1.13

మొదటి బిందువు 2.661 ను, రెండవ బిందువు 2.662 ను......... ఇలా సూచిస్తాయి. 6 వ బిందువు 2.665 ను సూచిస్తుంది.

సంఖ్యారేఖపై సంఖ్యలను ఈ విధంగా భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి, పెద్దదిగా చేస్తూ బిందువుల ద్వారా చూపించే విధానాన్ని "క్రమానుగత వర్ధనం" అని అంటాం.

ఇప్పుడు మనం క్రమానుగత వర్ధనం పద్ధతిని ఉపయోగించి, సంఖ్యారేఖపై ఒక అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాన్ని చూపిద్దాం.

**ఉదాహరణ 11 :** $5.3\overline{7}$ ను 5 దశాంశ స్థానం వరకు క్రమానుగాత వర్ధన పద్ధతిలో సంఖ్యారేఖపై చూపించండి.

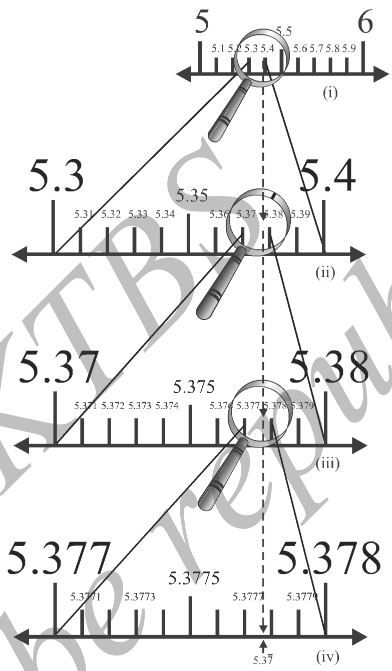
**సాధన :** సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగత వర్ధన పద్ధతిలో $5.3\overline{7}$ ను గుర్తించేవరకు క్రమానుగతంగా భూతద్దంలో పరిశీలిస్తూ వెళ్ళండి.

మనం $5.3\overline{7}$ ను 5 మరియు 6 ల మధ్యన గుర్తిస్తాం తర్వాత దశలో $5.3\overline{7}$ 5.3 మరియు 5.4 ల మధ్యన గుర్తిస్తాం. దానిని సంఖ్యారేఖపై చాలా చిన్న భాగంలో గుర్తిస్తాం తిరిగి వీటి మధ్యన 10 సమాన భాగాలు గుర్తిస్తే క్రమానుగత వర్ధన పద్ధతి అవుతుంది.

సంఖ్యారేఖపై $5.3\overline{7}$ ను 5.37 మరియు 5.38 ల మధ్య గుర్తిస్తాం $5.3\overline{7}$ ను మధ్యలో ఖశ్చితమైన సమాన భాగాలు 5.37 మరియు 5.38 ల మధ్యన క్రమానుగతవర్ధన పద్ధతిలో గుర్తించడం జరుగుతుంది.

భూతద్దాన్ని ఉపయోగించి చూసిన $5.3\overline{7}$ సంఖ్యారేఖపై 5.377 మరియు 5.378 ల మధ్యగుర్తించవచ్చును ఇప్పుడు $5.3\overline{7}$ ను అత్యంత ఖశ్చితంగా గుర్తించవచ్చు.

5.377 మరియు 5.378 ల మధ్య ప్రాంతాన్ని తిరిగి 10 సమాన భాగాలు చేస్తే భూతద్దంలో అవి $5.3\overline{7}$ ను పటం 1.14 ( iv)) లో చూపిన విధంగా స్పష్టంగా చూపిస్తాయి $5.3\overline{7}$ అనేది 5.3777 నుండి 5.3778 ల మధ్య చిత్రం 1.14 ( iv) లో చూపినవిధంగా ఉంటుంది.




చిత్రం 1.14

**గమనిక :–** ఈ విధంగా చేస్తూ వెలితే. అనంత సంఖ్యలో అవి వస్తూనే ఉంటాయి. కాబట్టి అత్యంత ఖశ్చితంగా $5.3\overline{7}$ ను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించడానికి భూతద్దంలో క్రమానుగతవర్ధనం పద్దతిలో అత్యంత దగ్గరగా ఉన్న విలువను గుర్తించాలి. దృష్టిదోషాలు లేకుండా చూడటంద్వారా దానిని ఖశ్చితంగా చేయవచ్చు.

ఈ పద్దతిలో చేయడం ద్వారా కొంత వరకు ఈ సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగత వర్ధనం ద్వారా అంతం కాని దశాంశ సంఖ్యలను ఎలా గుర్తిస్తాం. అవగాహన చేసుకొని వుంటారు.

ఈ చర్చద్వారా మీరు తిరిగి చెప్పవచ్చును ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య అనేది సంఖ్యారేఖపై నిర్దిష్ట బిందువు వద్ద గుర్తించబడి ఉంటుంది లేదా సంఖ్యారేఖపై ప్రతి బిందువు వద్ద ఒక వాస్తవ సంఖ్య ఉంటుంది.

## అభ్యాసం 1.4

1. 3.765 ను సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగతవర్ధన పద్ధతిద్వారా చూపించండి.

2. $4.\overline{26}$ ను సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగతవర్ధన పద్ధతిలో 4 దశాంశ స్థానాల వరకు చూపించండి.

### 1.5 వాస్తవ సంఖ్యలపై పరిక్రమలు

మనం వెనుకటి తరగతుల్లో అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనం మరియు గుణకారం దృష్ట్యా స్థిత్యంతర

ధర్మము, సహచరధర్మం మరియు విభాగన్యాయాలు పాటిస్తాయని తెలుసుకున్నాం. అదేవిధంగా సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం దృష్ట్యా కరణీయ సంఖ్యలు కూడా సంవృతా ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని నీవు చెప్పగలవా?

ఉదాహరణకు $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}\right)$ మరియు $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ లు అకరణీయ సంఖ్యలు.

ఒక కరణీయ మరియు గుణకారం చేసిన ఏమి జరుగునో పరిశీలిద్దాం

ఉదాహరణకు $\sqrt{3}$ అనేది కరణీయం అయితే. $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ ఏమవుతాయి? $\sqrt{3}$ అనేది అంతంకాని మరియు ఆవర్తితంకాని దశాంశం, $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ ల విషయంలో కూడా ఇది సత్యం. $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలే.

**ఉదాహరణ 12:** $7\sqrt{5},\frac{7}{\sqrt{5}},\sqrt{2}+21,\pi-2$ లు కరణీయ సంఖ్యలు అవునో, కాదో చూడండి.

**సాధన:** $\sqrt{5}=2.236....,\sqrt{2}=1.4142....,$

$\pi=3.1415....$

$$\therefore \quad 7\sqrt{5}=7\times 2.236.........=15.652.............,$$

$$\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}=3.1304...........$$

$$\sqrt{2}+21=22.4142............,\pi-2=1.1415........$$

అన్నికూడా అంతంకాని మరియు అంతంకాని ఆవర్ధితంకాని దశాంశాలు. కావున ఇవి అన్నీ కరణీయసంఖ్యలే.

ఇప్పుడు సాధారణంగా కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగహారాలు వర్గమూలాలపై మరియు '$n$' వ వర్గమూలంలో చేస్తే కరణులు అగునా ఇక్కడ '$n$' ఒక సహజసంఖ్య. కొన్ని ఉదాహరణాలు చూడండి.

**ఉదాహరణ 13:** $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ లను కూడండి.

**సాధన:-** $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

**ఉదాహరణ 14:** $6\sqrt{5}$ **ను** $2\sqrt{5}$ **లో గుణించండి.**

**సాధన:-** $6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5} = 6\times 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 12\times 5 = 60$

**ఉదాహరణ 15:** $8\sqrt{15}$ ను $2\sqrt{3}$ లో భాగహారం చేయండి

**సాధన:-** $8\sqrt{15}\div 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

కింది ఉదాహరణలను చదివి ఏవి సత్యమో తెలియచేయండి.

(i) సంకలనం మరియు వ్యవకలనం దృష్ట్యా అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యలలో ఏర్పడేవి కరణీయ సంఖ్యలు

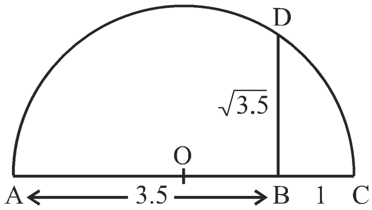
(ii) గుణకార దృష్ట్యా లేదా అకరణీయ సంఖ్యకు 2 సున్న కాని కారణాంకాలు వుంటే అది ఆకరణీయ సంఖ్యల దృష్ట్యా, కరణీయ సంఖ్య.

(iii) ఒకవేళకూడికలదృష్ట్యా,వ్యవకలనం,గుణకారం,మరియుభాగహారందృష్ట్యా,రెండుకరణీయ సంఖ్యల మధ్య వచ్చు ఫలితం అకరణీయ లేదా కరణీయ సంఖ్య అగును.

వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలాలగురించి. చర్చిద్దాం ఒకసారి గుర్తుచేసుకోండి '$a$' ఒక సహజ సంఖ్య అయితే $\sqrt{a}=b$ అంటె $b^2=a$ మరియు $b>0$ అదే నిర్వచనం ధన వాస్తవ సంఖ్యలకు కూడా వర్థించును.

$a>0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయితే $\sqrt{a}=b$ అంటే $b^2=a$ మరియు $b>0$

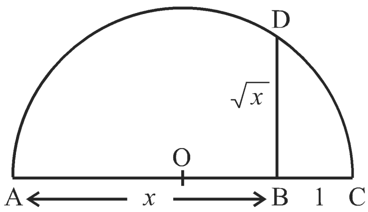
'$n$' ఏదైనా ధన పూర్ణాంకమైనప్పుడు, $\sqrt{n}$ ను సంఖ్యా రేఖమీద ఎలా గుర్తించాలో విభాగం 1.2లో చూశాం. ఇప్పుడు మనం ఏదైనా దత్త ధనవాస్తవ సంఖ్య '$x$' కు $\sqrt{x}$ ను రేఖాగణితంగా ఎలా కనుగొనాలో చూద్దాం ఉదాహరణకు, $\sqrt{3.5}$ ను రేఖా గణిత పరంగా కనుగొందాం.




చిత్రం **1.15**

దత్త రేఖ మీదగల స్థిర (నిర్దిష్ట) బిందువు 'A' నుండి 3.5 మూలమానాల దూరంలో AB = 3.5 మూలమానాలు (ప్రమాణాలు) అగునట్లు 'B' బిందువును గుర్తించండి. (చిత్రం 1.15ను గమనించండి) B బిందువు నుండి ఏకమాన దూరంలో 'C' బిందువును గుర్తించండి. AC మధ్య బిందువును గుర్తించండి. 'O' గా పేర్కొనండి. 'O' బిందువును కేంద్రంగా పెట్టుకొని OC వ్యాసార్ధంగా ఉండునట్లు ఒక అర్ధ వృత్తాన్ని గీయండి. 'B' ద్వారా సాగిపోవునట్లుమరియు అర్ధవృత్తాన్ని 'D' బిందువులో ఖండించు నట్లు AC కి ఒక లంబరేఖ గీయండి. అప్పుడు BD = $\sqrt{3.5}$

సాధారణంగా, ఏదైనా ధనవాస్తవ సంఖ్య '$x$' కు $\sqrt{x}$ ను కనుగొనండిదేనికి, AB = $x$ మూలమానం అగునట్లు 'B' ని గుర్తించండి. మరియు చిత్రం 1.16లో ఉన్నట్లు BC = 1 మూలమానం అగునట్లు 'C' బిందువును గుర్తించండి. తరువాత $x = 3.5$ ప్రకరణంలో చేసినట్లుగా, BD = $\sqrt{x}$ అయివుండుటను మనం చూస్తాం. (చిత్రం 1.16ను గమనించండి). మనం ఈ ఫలితాన్ని పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ఉపయోగించి సాధించవచ్చు. చిత్రం 1.16లో $\Delta$ OBD లంబకోణ త్రిభుజం అయివుండుటను గమనించండి. వృత్త వ్యాసార్ధం $\frac{x+1}{2}$ మూలమానాలు.




చిత్రం **1.16**

అందువలన, $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ మూలమానాలు.

ఇప్పుడు $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

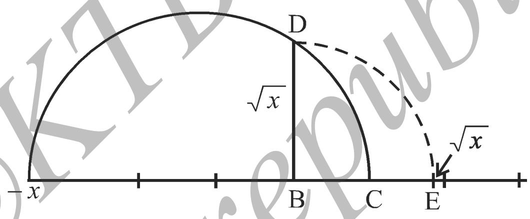
అందువలన పైథాగరస్ సిద్ధాంతంనుండి,

$$BD^2 = OD^2 - OB^2$$

$$BD^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

అది $BD = \sqrt{x}$ అని చూపుతుంది.

సున్నాకంటే పెద్దదైన ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య '$x$'$(x > 0)$ కు $\sqrt{x}$ రూపంలో సంఖ్యను రేఖాగణిత పరంగా చూపించవచ్చని ఈ రచన వలన తెలుపు సంఖ్యారేఖ మీద $\sqrt{x}$ స్థానాన్ని మీరు తెలుసుకోవడానికి కోరుకున్నచో 'B'సున్నాను మరియు 'C' 1 ని సూచించునట్లు BC ని సంఖ్యా రేఖగా పరిగణించండి.B' బిందువును కేంద్రంగా పెట్టుకొని, BD వాస్తవంగ ఉండునట్లు మరియు సంఖ్యారేఖను E' బిందువులో ఖండించునట్లు ఒక బావం గీయండి (చిత్రం 1.17 ను గమనించండి). అప్పుడు E' $\sqrt{x}$ ను చూపుతుంది




చిత్రం 1.17

వర్గమూలం, కనుగొను ఈ విధానాన్ని ఘనమూలం, నాల్గవమూలం మరియు సాధారణం గా $n$'వ మూలలకు ($n$'ధన పూర్ణాంకం) విస్తరించవచ్చు. వెనుకటి తరగతిలోని వర్గమూలం మరియు ఘనమూలాల అర్థాన్ని జ్ఞాపకం తెచ్చుకోండి. $\sqrt[3]{8}$ అనగానేమి? అది దేని ఘనం 8 అవుతుందో, అలాంటి ఒక ధనసంఖ్యగా మనం తెలుసుకున్నాం $\sqrt[3]{8} = 2$ అని మీరు ఊహించుకోవచ్చు. ఇప్పుడు $\sqrt[5]{243}$ ను ప్రయత్నిద్దాం. $b^5 = 243$ అగునటువంటి ఏదైనా సంఖ్య $b$'ని మీరు తెలుసు కున్నారా? దానికి జవాబు 3 అందువలన ఉదాహరణలనుండి '$a$' సున్నాకంటే పెద్దదైన వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు మరియు $n$ ఒక ధనసంఖ్య అయినప్పుడు మీరు $\sqrt[n]{a}$ ని వ్యాఖ్యానించగలరా? ఇప్పుడు, $a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయివుండనీయండి మరియు $n$ ఒక ధన పూర్ణాంకం అయివుండనీయండి. $b^n = a$ మరియు $b > 0$ అయినప్పుడు $\sqrt[n]{a} = b$.

$\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ ముందుగా వాటిలో ఉపయోగించిన '$\sqrt{\ }$' సంకేతాన్ని కరణీయ చిహ్నం అంటారు అని గమనించండి.

వర్గమూలాలకు సంబంధించిన చాలాచోట్ల ఉపయోగించు కొన్ని నిత్య సమీకరణాలను మనం ఇప్పుడు పట్టీ చేద్దాం వాటిలో కొన్నింటిని వెనుకటి తరగతిలో మీరు ఇదివరకే తెలుసుకున్నారు. వాస్తవ సంఖ్యల సంకలనం మీదగల గుణాకార విభాజక నియమం నుండి మరియు $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ $(x, y \in R)$ అను నిత్య సమీకరణం నుండి మిగిలిన వాటిని పొందవచ్చు.

అభ్యాసం- 1.2 లో $\sqrt{n}$ అదే ఒక ధన కరణీయ సంఖ్య అయితే సంఖ్యారేఖపై $n$' ఉంటుంది.

(i) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో వీటిని గుర్తిస్తాం.

**ఉదాహరణ 16 :** ఈ క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

**సాధన :** (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

**గమనించండి :** పై ఉదాహరణలను సాధించడానికి కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను కూడడం జరిగింది. తర్వాత ఏర్పడిన సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చు కరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చును. ఈ క్రింది సమస్యను సాధించడం ద్వారా భాగాన్ని పూర్తిచేద్దాం $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడ గుర్తిస్తారు. ఇది కరణీయ సంఖ్యనా చెప్పండి హారంలో ఉన్న సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య కావున $\frac{1}{\sqrt{2}}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్య.

**ఉదాహరణ 17 :** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ హారాన్ని అకరణీయం చేయండి

**సాధన :** ఇప్పుడు $\frac{1}{\sqrt{2}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయ రూపంలోకి మార్చడానికి ప్రయత్నిద్దాం $\frac{1}{\sqrt{2}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయం చేయుటకు దాని లవహారాలను గుణిద్దాం.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ చేస్తే $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ కావున

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ అని రాయవచ్చు.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ రూపంలో ఉంటే సంఖ్యారేఖపై గుర్తించటం చాలా సులభం ఇది 0 కు $\sqrt{2}$ సరిగ్గా మధ్యలో ఉంటుంది.

**ఉదాహరణ 18:** $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

**సాధన:** (iv)సూత్రం నుండి గుణకారం మరియు భాగహారం $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ను $2-\sqrt{3}$ లో హారాన్ని గుణించాలి.

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

**ఉదాహరణ 19 :** $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

**సాధన :** (iii) సూత్రం నుండి.

$$\therefore \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

**ఉదాహరణ 20 :** $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ను హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

**సాధన :** $\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}} = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$

కావున హారంలో ఒక వర్గమూలం ఉంటే దాన్ని గుర్తును మార్చి తిరిగి లవంగానూ, హారంగానూ రాస్తే ఎర్పడేదే హరాన్ని అకరణీయం చేయడం.

### అభ్యాసం 1.5

1. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి అకరణీయ సంఖ్యలు లేదా కరణీయ సంఖ్యలు

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (v) $2\pi$

2. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. ఒక వృత్త పరిధికి మరియు దాని వ్యాసానికి గల నిష్పత్తిని $\pi$ అని నిర్వచిస్తే (c) దాని వృత్తం మరియు వ్యాసం (d) అయిన $\pi = \dfrac{c}{d}$. అయిన $\pi$ కరణీయ సంఖ్య అగునా? దానిని ఎలా సాధిస్తాం.

4. $\sqrt{9.3}$ ని సంఖ్యారేఖపై చూపండి.

5. ఈ క్రింది వాటి హారాలను అకరణీయం చేయండి.

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

(iii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2}$

## 1.6 వాస్తవ సంఖ్యలకు ఘాతాంక నియమాలు.

ఈ క్రింది వాటిని ఎలా సాధిస్తారో ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకోండి

(i) $17^2 . 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 . 9^3 =$

మీకు సమాధానాలు యు లభించాయా? అవి కింది విధంగా ఉంటాయి.

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

ఈ సమాధానాలు వెనుకటి తరగతులలో నేర్చుకున్న ఘాతాంక నియయాలు ఉపయోగించి సాధించాం, (ఇక్కడ $a$, $n$ మరియు $m$ లు సహజ సంఖ్యలు గుర్తుంచుకోండి $a$ ఆధారం లేదా భూమి అంటాం $m$ మరియు $n$ లను ఘాతాలు అంటాం)

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\,(m>n)$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

అయితే $(a)^0$ ఎంత? అవును దీని విలువ 1 $(a)^0 = 1$ అని నేర్చుకున్నాం ఘాతాంక నియమం (iii) నుండి $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ ఘాతాంక నియమాలలో ఋణ ఘాత సంఖ్యలను ఎలా విస్తరించి రాయాలో తెలుసుకోండి.

**ఉదాహరణలు:**

(i) $17^2.17^{-5} = 17^{-3} = \dfrac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\dfrac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3}.(9)^{-3} = (63)^{-3}$

ఒక వేళ ఈ క్రింది వాటిని ఎలా సాధించాలి?

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

పై వాటిని ఎలా సాధించాలి? వాటిని సాధించాలంటే ముందుగా ఘాతాంక నియమాలను మరింతగా విస్తరించి రాయాలి. అది వెనుకటి తరగతుల్లో నేర్చుకున్నా, ఆధారం అనేది ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య. అయితే వాటి ఘాతాలు అకరణీయ సంఖ్యలు (తర్వాత పాఠాలలో మీరు ఈ ఘాతాంకాలలో ఉన్న ఘాత సంఖ్యలను గురించే వాస్తవ సంఖ్యసమితిలో నేర్చుకుంటారు) ఈ ఘాతాంక నియమాల ద్వారా ఉదాహరణకు $4^{\frac{3}{2}}$ ను అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం. ఇందుకు మనం కొద్దిగా ఇక్కడ పనిచేయాలి:

అధ్యాయం 1.48 $\sqrt[n]{a}$ ను ఒక వాస్తవసంఖ్య అయితే $a > 0$ అగును అను నిర్వచించాం. కావున $a > 0$ అయితే వాస్తవ సంఖ్యలలో మరియు '$n$' అనేది ధనకరణీయ సంఖ్య అగును. అప్పుడు $\sqrt[n]{a} = b$ ఎందుకంటే $b^n = a$ మరియు $b > 0$ ఘాతాంక రూపంలో చెప్పాలంటే $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ అని నిర్వచిస్తాం ఈవిధంగా. ఇక్కడ $4^{3/2}$ ను రెండు విధాలుగా చెయవచ్చు.

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

పై నిర్వచనాన్ని ఉపయోగించి $a > 0$ మరియు $a$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య కావున $m$ మరియు $n$ లు కరణీయ సంఖ్యలు అవుతూ వాటికి 1 తప్ప మరే ఇతర ఉమ్మడి కారణాంకం లేదు అంటే $n > 0$

కాబట్టి $$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

ఈ క్రింది ఘాతాంక నియమాలను పరిశీలించండి $a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య $p$ మరియు $q$ లు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన

(i) $a^{p}.\, a^{q} = q^{p+q}$ (ii) $(a^{p})^{q} = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^{p}}{a^{q}} = a^{p-q}$ (iv) $a^{p}b^{p} = (ab)^{p}$

ఈ సూత్రాలను ఉపయోగించి, పైన అడిగిన ప్రశ్నల ను సాధించండి

**ఉదాహరణ 21: సాధించండి:**

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{4}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

**సాధన**

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^{1} = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{4} = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = (221)^{\frac{1}{5}}$

**అభ్యాసం1.6**

1. **సాధించండి:** (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$
2. **సాధించండి:** (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$
3. **సక్ష్మీకరించండి:** (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^{3}}\right)^{7}$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

## 1.7 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో ఈ క్రింద అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

1. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయసంఖ్యలు అంటాం ఇక్కడ $p$ మరియు $q$ లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$
2. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేని సంఖ్యలను కరణీయసంఖ్యలు అంటాం ఇక్కడ $p$, $q$ పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$
3. అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా అవి అంతం అయ్యే దశాంశ అంతంకాని ఆవర్థితంకాని దశాంశం అగును లేదా ఒక దశాంశ విస్తరణరూపంలో అంతం అయ్యే దశాంశ రూపం లేదా అంతంకాని, ఆవర్థిత దశాంశం అయిన అది అకరణీయం.
4. కరణీయ సంఖ్యల దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా అవి అంతంకాని దశాంశం అంతం కాని ఆవర్థితంకాని దశాంశంలో ఉంటాయి అలాగే. ఒక సంఖ్యయొక్క దశాంశ విస్తరణ రూపం అంతంకాని ఆవర్థితంకాని దశాంశం అయితే అది కరణీయ సంఖ్య
5. కరణీయ సంఖ్యలను మరియు అకరణీయ సంఖ్యల సముదాయాన్ని వాస్తవసంఖ్యలు అని అంటాం.
6. సంఖ్యారేఖపై ప్రతి బిందువుకు సదృశ్యంగా ఏకైక వాస్తవసంఖ్య ఉంటుంది అదేవిధంగా ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యకు సదృశ్యంగా సంఖ్యారేఖపై ఏకైక బిందువు ఉంటుంది.
7. $r$ ఒక అకరణీయసంఖ్య మరియు $s$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అయితే $r+s$ మరియు $r-s$ కరణీయ సంఖ్యలు, మరియు $rs$ మరియు $\frac{r}{s}$ లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలే $r \neq 0$.
8. $a$ మరియు $b$ ఏవైనా రెండు ధన వాస్తవ సంఖ్యలు అయి నప్పుడు, ఈ కింది నిత్యసమీకరణాలూ సరిపోతాయి.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+b}$ చిన్నహారాన్ని అకరణీయం చేయడానికి దీనినిలను $\dfrac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ చే గుణించాలి ఇక్కడ $a$, $b$ లు పూర్ణసంఖ్యలు ($a, b \in z$).

10. $a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు $p$ మరియు $q$లు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే అప్పుడు.

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$

(ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

(iv) $a^p b^p = (ab)^p$

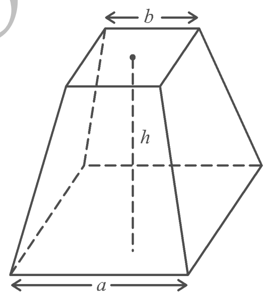
# అధ్యాయం - 2

## యూక్లిడ్ రేఖాగణిత పరిచయం



### 2.1 పరిచయం

జామెట్రి అను పదం 'భూమి' ఆర్థము నిచ్చు 'జియో' మరియు కొలుచుట అను ఆర్థము నిచ్చు 'మెట్రీన్' అను రెండు గ్రీకు పదాల నుండి వచ్చినది. భూమిని కొలుచు అవసరం ఏర్పడినవుడు జామెట్రీ ఆవిర్భవించినట్లు అనిపిస్తుంది ఈజిప్టు, బాబిలోనియా, చైనా, భారతదేశం, గ్రీసు, ఇంకా మొదలగు ప్రతి పురాతన నాగరికతలోను వివిధ రూపాలలో ఈ గణిత విభాగాన్ని చదివారు. ఈ నాగరికతల ప్రజలు అనేక ప్రాయోగిక సమస్యలను ఎదుర్కొన్నారు. అందువలన జామెట్రీని అనేక విధాలుగా అభివృద్ధి చేయవలసి వచ్చింది.




చిత్రం **2.1**
శిఖరం కోసివేయబడిన పిరమిడ్

ఉదాహరణకు, ఎప్పుడు నైలు నది ఉప్పొంగినా, అనేక భూస్వాముల ప్రక్క- ప్రక్క పొలాల మధ్య సరిహద్దులను తుడిచి పెట్టేది.అటువంటి ఉప్పెన వచ్చిన తర్వాత, ఈ సరిహద్దులను మరల గీయవలసి వచ్చేది. అందువలన ఈజిప్టువారు చిన్న చిన్న వైశాల్యాలు లెక్కించటానికి మరియు చిన్న చిన్న నిర్మాణాలు చేయటానికి అనేక రేఖాగణిత సంకేతాలను మరియు నియమాలను అభివృద్ధి పరిచారు. ధాన్యాగారాల ఘనపరిమాణాలు లెక్కించటానికి మరియు కాలువలు, పిరమిడ్లు నిర్మించటానికి వారు రేఖాగణిత పరిజ్ఞానాన్ని ఉపయోగించారు. శిఖరం కోసివేయబడిన పిరమిడ్ ఘనపరిమాణం కనుగొను సూత్రం కూడ వారికి తెలిసియుండెను. (చిత్రం 2.1)

పిరమిడ్ ఒక ఘనాకృతి అనియు, దాని పాదం త్రిభుజం లేక చతురస్రం లేక ఏదైనా బహుభుజాకృతి అనియు దాని ప్రక్కతలాలు త్రిభుజాకారంలో ఉండి, పైన ఒక బిందువు వద్ద కేంద్రీకరించబడుననియు మీకు తెలుసు.

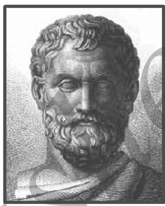
భారత ఉపఖండంలో సింధు నాగరికత (సుమారు క్రీ.పూ 3000) రేఖాగణితాన్ని విరివిగా ఉపయోగించుకొన్నట్లు హరప్ప మరియు మొహెంజొదారో త్రవ్వకాల వలన తెలుస్తున్నది. అది బాగా క్రమబద్ధీకరించబడిన సమాజము. నగరాలు ప్రణాళికా బద్ధంగా ఉండి, బాగా అభివృద్ధి చెందాయి. ఉదాహరణకు రహదారులు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉండి, భూగర్భ నీటి పారుదల వ్యవస్థ ఉంది. ఇళ్ళల్లో వివిధ రకాల గదులు చాలా ఉండేవి. పట్టణవాసుల క్షేత్రగణితం, ప్రాయోగిక అంకగణితాలలో ఆరితేరి ఉండేవారు. నిర్మాణాలకు ఉపయోగించే ఇటుకలు బట్టీలలో కాల్చబడి, పొడవు: వెడల్పు: మందం నిష్పత్తి 4: 2: 1 ఉండేదని తెలిసింది.

పురాతన కాలంలో జ్యామితీయ నిర్మాణాలకు సులభ సూత్రాలు (క్రీ.పూ 800 నుండి 500 క్రీ.పూ) కృత్రిమంగా తయారుచేయబడినవి. దైవ పీఠాలు మరియు వేదకర్మలు నిర్వహించటానికి హోమపీఠాలు నిర్మాణాలతో వేదకాల రేఖాగణితం ఆవిర్భవించింది. ఆ పరికరాలు పనికి రావాలంటే వాటి ఆకారాలు మరియు వైశాల్యాల గురించి ఇవ్వబడిన సూచనల కనుగుణంగా పవిత్రమైన మంటల స్థానం ఉండాలి. ఇళ్ళల్లో కర్మకాండలకు చతురస్రాకార మరియు వృత్తాకార దైవ పీఠాలు ఉపయోగించేవారు. ప్రజలు పూజలు చేసుకోవడానికి దీర్ఘచతురస్రాలు, త్రిభుజాలు మరియు ట్రెపీజియాల సమ్మేళనాల ఆకారాలుగల దైవపీఠాలు అవసరమయ్యేవి. (అధర్వణ వేదంలో ఇవ్వబడిన) శ్రీయంత్రంలో తొమ్మిది కలిసి పోయిన సమద్విబాహు త్రిభుజాలు ఉన్నాయి ఈ త్రిభుజాలను 43 సహకార త్రిభుజాలు ఏర్పడేటట్లు అమర్చారు. దైవ పీఠాలు నిర్మించటానికి ఖచ్చితమైన రేఖాగణిత పద్ధతులను ఉపయోగించినప్పటికీ, వాటివెనుక ఉన్న ముఖ్య సూత్రాలను చర్చించలేదు.

ఈ ఉదాహరణలను బట్టి ప్రపంచమంతటా రేఖాగణితం అభివృద్ధి చెంది, ఉపయోగించబడింది అని తెలుస్తుంది. కాని ఇదంతా ఒక క్రమపద్ధతిలో జరుగలేదు. పురాతన ప్రపంచంలో రేఖాగణిత అభివృద్ధికి సంబంధించిన ఉత్సాహకరమైన విషయమేమంటే అవి ఒక తరం నుండి మరొకతరానికి మౌఖికంగా గాని, తాటాకు సందేశాల ద్వారా గాని ఇతర పద్ధతుల ద్వారా గాని పంపబడేవి. భారతదేశం మరియు రోమ్ దేశాలలో మాదిరిగా బాబిలోనియావంటి కొన్ని నాగరికతలలో కూడా రేఖాగణితం ప్రయోగాత్మక అంశంగా మిగిలి పోయింది. ఈజిప్టు వారు రూపొందించిన రేఖాగణితంలో కొన్ని ఫలితాల ప్రవచనాలుండేవి. వారి విధానానికి సాధారణ నియమాలేమి లేవు. నిజానికి బాబిలోనియా

మరియు ఈజిప్టు వారు రేఖాగణితాన్ని ప్రయోగ పూర్వక అవసరాలకే ఉపయోగించారు. వారు రేఖాగణితాన్ని క్రమానుగత విజ్ఞానంగా అభివృద్ధి చేయటానికి కొంత మాత్రమే కృషి చేశారు. కాని గ్రీసు వంటి కొన్ని నాగరికతలలో, కొన్ని నిర్మాణాలు ఎలా పని చేస్తాయనే దానికి కారణాలివ్వటంలోప్రాముఖ్యత ఇవ్వబడింది. సాధనా పద్ధతిలో వారు కనుగొన్న ప్రచనాలు నిజమని నిరూపించుటలో గ్రీసు దేశస్థులు ఉత్సాహం చూపారు. (అనుబంధం – 1 చూడండి).

గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన థేల్స్‌కిమొదటిసారిగా ఒక వ్యాఖ్యానానికి నిరూపణ ఇచ్చినఘనత లభించింది. ఆ నిరూపణ ఏమంటే ఒక వృత్తమును దాని వ్యాసం సమద్విఖండన చేస్తుంది (అంటే రెండు సమాన భాగాలుగా ఖండిస్తుంది) థేల్స్ యొక్క ప్రసిద్ధ చెందిన విద్యార్థులలో మీకు తెలిసిన పైథాగరస్ (572క్రీ.పూ) ఒకడు. పైథాగరస్ మరియు అతని గుంపులోనివారు అనేక రేఖాగణిత ధర్మాలను కనుగొని అధిక స్థాయిలో రేఖాగణిత సిద్ధాంతాల అభివృద్ధికి దోహదపడ్డారు. ఈవిధానం 300 క్రీ.పూ వరకు అనుసరించబడింది. ఆ కాలంలో ఈజిప్టులోని అలెగ్జాండ్రియాలో ఉపాధ్యాయుడైన యూక్లిడ్ తనకు తెలిసిన విషయాలన్నింటినీ సేకరించి, తన యొక్క మూలకాలు అను ప్రసిద్ధ గ్రంథములో అమర్చాడు. అతడు తన "మూలకాలు" గ్రంథమును పదమూడు అధ్యాయాలుగా విభజించాడు. ఒక్కొక్క అధ్యాయమును పుస్తకం అన్నారు. తువాత తరాలలో ప్రపంచం మొత్తం రేఖాగణితమును అర్థం చేసుకోవటానికి ఈ పుస్తకాలు దోహద పడ్డాయి.



థేల్స్ (Thales)
(640 BCE – 546 BCE)
చిత్రం 2.2

యూక్లిడ్ (Euclid)
క్రీ.పూ 352 – క్రీ.పూ 265
చిత్రం 2.3

ఈ అధ్యాయంలో మనం యూక్లిడ్ విధానంలో రేఖాగణితాన్ని చర్చించి, ప్రస్తుత రేఖాగణితం లో దానిని పోల్చడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

## 2.2 యూక్లిడ్ నిర్వచనాలు, స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు.

యూక్లిడ్ కాలం నాటి గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్తలు రేఖాగణితాన్ని వారు జీవించిన ప్రపంచం యొక్క ప్రత్యేకమైన మాదిరిగా భావించారు. వారి చుట్టూ చూసే వాటి నుండి బిందువు, రేఖ, తలము మొదలగువాటి భావాలను రూపొందించారు. ఒక స్థలము మరియు ఆ స్థలములో వారి చుట్టూ ఉండే ఘనాకృతుల అధ్యయనం నుండి ఒక ఘనాకృతి యొక్క ప్రత్యేకమైన భావనను రూపొందించారు. ఒక ఘనాకృతికి ఆకారము, పరిమాణం, స్థానం ఉండి, ఒక ప్రదేశం

నుండి మరొక ప్రదేశానికి కదిలించటానికి వీలుగా ఉంటుంది. దాని యొక్క సరిహద్దులను ఉపరితలాలు అంటారు. అవి ఒక స్థలము యొక్క రెండు భాగాలను వేరు పరచును. వాటికి మందము ఉండదు. ఉపరితలాలు సరిహద్దులు వక్రరేఖలు లేక సరళరేఖలు అవుతాయి. ఈ రేఖలు బిందువుల వద్ద అంతమగును.

ఘనాకృతుల నుండి బిందువుల వరకు గల మూడు సోపానాలను (ఘనాకృతులు – ఉపరితలాలు – రేఖలు – బిందువులు) గమనిస్తే, ప్రతి సోపానంలో ఒక పరిమాణం తగ్గుతుంది. కాబట్టి ఒక ఘనాకృతికి మూడు పరిమాణాలు, ఉపరితలానికి రెండు పరిమాణాలు ఒక రేఖకు రెండు పరిమాణాలు ఉంటాయి. ఒక బిందువుకు ఏ పరిమాణం ఉండదు. యూక్లిడ్ ఈ వ్యాఖ్యలను నిర్వచనాలుగా సంగ్రహించారు. మూలకాలు గ్రంధములోని పుస్తకం 1లో 23 నిర్వచనాలను పట్టీ చేయుట ద్వారా అతని వ్యాఖ్యానాలను ప్రారంభించాడు. వాటిలో కొన్ని క్రింద ఇవ్వబడినవి:

1. భాగాలేమీ లేనిది **బిందువు**
2. వెడల్పు లేని పొడవు **రేఖ**
3. ఒక రేఖ యొక్క చివరలు బిందువులు
4. ఒక రేఖ మీద బిందువులు సమానంగా ఒకేస్థాయిలో ఉంటే అది **సరళ రేఖ**
5. పొడవు మరియు వెడల్పు మాత్రమే గలది **ఉపరితలం**
6. ఒక ఉపరితలం యొక్క అంచులు రేఖలు.
7. ఒక ఉపరితలం మీద సరళరేఖలు సమానంగా ఒకస్థాయిలో ఉంటే ఆ ఉపరితలం **సమతలం** అవుతుంది.

ఈ నిర్వచనాలను జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే మనము చూసిన భాగము, వెడల్పు, పొడవు, సమంగా వంటి కొన్ని పదాలను ఇంకా స్పష్టంగా వివరించవలసి ఉన్నది. ఉదాహరణకు అతని యొక్క బిందువు నిర్వచనం తీసుకుందాం. ఈ నిర్వచనం లో 'భాగము' అను పదమును నిర్వచించ వలసి ఉంది. మనము భాగము అను పదమును కొంత వైశాల్యమును (స్థలమును) ఆక్రమించునదిగా నిర్వచిస్తే, మనము మరల వైశాల్యము అను పదమును నిర్వచించవలసి వస్తుంది. కాబట్టి ఒక పదాన్ని నిర్వచించాలంటే, మనము అనేక ఇతర పదాలను నిర్వచించవలసి వస్తుంది. అంతము లేకుండా పొడవైన నిర్వచనాల గొలుసు తయారవుతుంది. అందువలన గణితశాస్త్రవేత్తలు, కొన్ని రేఖాగణిత పదాలను అనిర్వచిత పదాలుగా వదలి వేయుటకు ఒప్పుకున్నారు. ఏది ఏమైనా పైన ఇవ్వబడిన నిర్వచనం కంటే, ఒక బిందువు యొక్క రేఖా గణిత పరికల్పన గురించి మనకు సహజ

జ్ఞానము వలన ఒక భావం కలుగుతుంది. కాబట్టి ఒక చుక్కకి కొంత పరిమాణం ఉన్నప్పటికీ మనము ఒక బిందువును ఒక చుక్కతో సూచిస్తాము.

పైన ఇవ్వబడిన రెండవ నిర్వచనంలో కూడా ఇదేరకమైన సమస్య ఉద్భవిస్తుంది. ఎందుకంటే అందులో పొడవు, వెడల్పులు ఇవ్వ బడ్డాయి. వాటిలో ఏదీ నిర్వచించబడలేదు. ఈ కారణంగా ఏదైనా ఒక అధ్యాయమును విశదీకరించునప్పుడు కొన్ని పదాలు అనిర్వచితంగా ఉంచబడ్డాయి. కాబట్టి రేఖాగణితంలో బిందువు, రేఖ, తలము (యూక్లిడ్ పదాలలో సమతలం) పదాలను అనిర్వచిత పదాలుగా తీసుకున్నాము. ఒకే ఒక విషయమేమంటే మనము వాటిని సహజ జ్ఞానంతో సూచిస్తాము. లేక భౌతిక నమూనాల సహాయంతో వాటిని వివరిస్తాము.

నిర్వచనాలతో మొదలుపెట్టి యూక్లిడ్ కొన్ని ధర్మాలను నిరూపించనవసరం లేకుండా ఊహించుకున్నాడు. నిజానికి ఇలా ఊహించినవన్నీ సర్వ సామాన్యమైన స్పష్టమైన నిజాలు. వాటిని అతడు రెండు రకాలుగా విభజించాడు. స్వయం సిద్ధాలు మరియు స్వీకృత సిద్ధాంతాలు. రేఖాగణితానికి పరిమితమైన ఉపకల్పనలకు అతడు 'స్వీకృత సిద్ధాంతాలు' అను పదమును ఉపయోగించాడు. సాధారణమైన అభిప్రాయాలు, స్వయంసిద్ధాలుగా పిలవబడునవి మరొకరకంగా చెప్పాలంటే రేఖా గణితానికి మాత్రమే కాకుండా గణితం మొత్తానికి ఉపయోగించబడే ఉపకల్పనలు. స్వయం సిద్ధాలు స్వీకృత సిద్ధాంతాల గురించిన వివరాల కోసం (అనుబంధం – 1 చూడండి). యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధాంతాలలో కొన్ని అతని క్రమంలో లేనివి, క్రింద ఇవ్వబడినవి.

1. ఒకే అంశానికి సమానమైన అంశాలు ఒకదానికొకటి సమానం.
2. సమాన అంశాలకు సమాన అంశాలు కూడినప్పుడు వాటి మొత్తాలు సమానం
3. సమాన అంశాల నుండి సమాన అంశాలు తీసివేసినప్పుడు వాటి శేషములు సమానం.
4. ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించు అంశాలు ఒక దానికొకటి సమానం.
5. పూర్ణవస్తువు దాని భాగం కంటే పెద్దది.
6. సమాన అంశాల యొక్క రెట్టింపులు ఒకదాని కొకటి సమానం
7. సమాన అంశాల యొక్క అర్ధాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

ఈ సాధారణమైన అభిప్రాయాలు ఒక రకమైన పరిమాణాలను సూచిస్తాయి. మొదటి సాధారణ అభిప్రాయంను సమతల చిత్రాలకు అన్వయించవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం, ఒక దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యానికి సమానమై, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, చతురస్ర వైశాల్యానికి సమానమైతే త్రిభుజవైశాల్యం చతురస్ర వైశాల్యానికి కూడా సమానమవుతుంది.

ఒకే రకమైన అంశాల పరిమాణాలను పోల్చవచ్చు మరియు కూడవచ్చు కాని వేర్వేరు రకాల అంశాల పరిమాణాలను పోల్చలేము. ఉదాహరణకు ఒక రేఖను ఒక దీర్ఘచతురస్రానికి కూడలేము మరియు ఒక కోణమును ఒక పంచభుజితో పోల్చలేము.

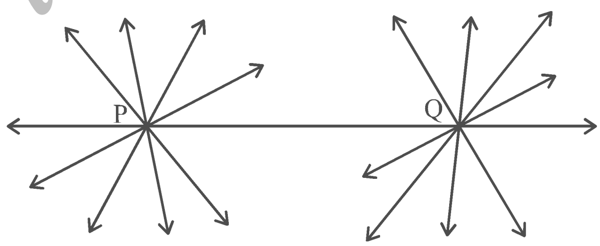
పైన ఇవ్వబడిన 4వ స్వయం సిద్ధం ప్రకారం రెండు వస్తువులు ఒకే రకంగా ఉంటే (అంటే అవి ఒకటే అయితే) అవి ఒకదానికొకటి సమానంగా ఉంటాయి. మరొక రకంగా చెప్పాలంటే ప్రతివస్తువు దానికదే సమానం. ఇది అధ్యారోపణ సూత్రానికి నిరూపణ అవుతుంది. 5వ స్వయం సిద్ధం, దానికంటే పెద్దది అనే పదానికి నిర్వచనాన్ని ఇస్తుంది. ఉదాహరణకు A అనేరాశిలో B రాశి ఒక భాగమైతే A ని B మరియు మరొక మూడవ రాశి C ల మొత్తంగా రాయవచ్చు. సాంకేతికంగా $A > B$ అంటే $A = B + C$ అగునట్లు మరొకరాశి C ఉంటుంది. ఇప్పుడు యూక్లిడ్ అయిదు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను చర్చిద్దాం. అవి:

**స్వీకృత సిద్ధాంతం 1 : ఏ బిందువు నుండైనా మరొక బిందువుకు సరళరేఖను గీయవచ్చు.**

ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతం వలన రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా కనీసం ఒక సరళరేఖను గీయవచ్చని గమనించవచ్చు. కాని అటువంటి సరళరేఖలు ఒకటికంటే ఎక్కువ గీయలేమని ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతం చెప్పదు. ఏది ఏమైనా రెండు విభిన్న బిందువులను కలుపుతూ, ఒకే ఒక సరళ రేఖను గీయవచ్చని యూక్లిడ్ తన పుస్తకాలలో ఉపయోగించాడు. ఈ ఫలితాన్ని మనం స్వయం సిద్ధం రూపంలో క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

**స్వయం సిద్ధం 2.1 :** రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా ఒకే ఒక రేఖను గీయవచ్చు.

P గుండా పోవు రేఖలలో ఎన్ని రేఖలు Q గుండా కూడా పోతాయి? (చిత్రం 2.4 చూడండి). PQ రేఖ ఒక్కటే పైన ఇవ్వబడిన వాక్యము దాని కదే సాక్ష్యమైనది. కాబట్టి దానిని స్వయం సిద్ధంగా తీసుకున్నారు.




చిత్రం **2.4**

**స్వీకృత సిద్ధాంతం 2 : ఒక అంతము చెందు రేఖను అనంతముగా పొడిగించవచ్చు.**

మనము ఈ కాలంలో ఉపయోగించే రేఖాఖండం అనే పదానికి యూక్లిడ్ అంతము చెందు రేఖ అని ఉపయోగించారు. కాబట్టి ఈ కాలములోని పదాలకనుగుణంగా రెండవ స్వీకృత సిద్ధాంతమును ఈ క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

ఒక రేఖాఖండము నుండి సరళరేఖను పొందాలంటే, దానిని ఇరువైపుల పొడిగించవచ్చు.

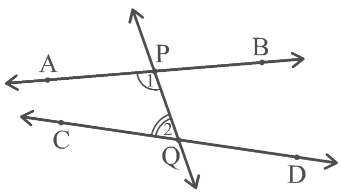

చిత్రం **2.5**

**స్వీకృత సిద్ధాంతం 3 : ఏదైనా కేంద్రము మరియు ఏదైనా వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తమును గీయవచ్చు.**

**స్వీకృత సిద్ధాంతం 4 : అన్ని లంబకోణాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.**

**స్వీకృత సిద్ధాంతం 5:** రెండు సరళ రేఖల మీద పడు ఒక సరళరేఖ, దానికి ఒక వైపున గల అంతరకోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాల కంటే తక్కువ ఉండునట్లు ఉంటే, ఆ రెండు సరళరేఖలను అనంతంగా పొడిగిస్తే అవి అదే ప్రక్కన కలుసుకుంటాయి.

ఉదాహరణకు చిత్రం 2.6 లో PQ రేఖ AB మరియు CD రేఖల మీద పడి PQ కు ఎడమ వైపున గల అంతరకోణాలు 1 మరియు 2 ల మొత్తం 180° కంటే తక్కువ చేస్తుంది. కాబట్టి AB మరియు CD రేఖలు PQ కి ఎడమవైపున ఏదో ఒక బిందువు వద్ద ఖండించు కుంటాయి.




చిత్రం **2.6**

ఐదు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను క్లుప్తంగా చూస్తే, 5వ స్వీకృత సిద్ధాంతం మిగిలిన అన్ని స్వీకృత సిద్ధాంతాల కంటే క్లిష్టంగా అనిపిస్తుంది. మరొక రకంగా చూస్తే, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు 1 నుండి 4 వరకు సరళంగా ఉండి స్వయం సాక్ష్యాధారిత నిజాలుగా తీసుకొనబడినవి. ఏది ఏమైనా వాటిని నిరూపించుట సాధ్యం కాదు. అందు వలన ఈ వ్యాఖ్యలు ఏ నిరూపణ లేకుండా గ్రహించబడినవి (అనుబంధం – 1 చూడండి) 5వ స్వీకృత సిద్ధాంతం క్లిష్టంగా ఉడటం తర్వాత విభాగంలోపల దాని మీద ఎక్కువ దృష్టి పెడతాము.

ఈ రోజులలో స్వయం సిద్ధాలు మరియు స్వీకృత సిద్ధాంతాలు అను పదాలను ఒకే అర్థంతో పరస్పరం మార్చుకొను విధంగా ఉపయోగిస్తున్నారు. స్వీకృత సిద్ధాంతం అనేది నిజానికి

ఒక క్రియాపదం. స్వీకృతం చేద్దాం అని మనం అంటే, దాని అర్థం 'విశ్వం లో మనకు గోచరించిన వాటిని పరిశీలించిన వాటి ఆధారంగా ఒక వ్యాఖ్యను రూపొందిద్దాం'. దానియొక్క వాస్తవికతను తర్వాత పరిశీలిస్తారు. అది నిజమైతే దానిని స్వీకృత సిద్ధాంతంగా తీసుకుంటారు.

ఒక స్వయం సిద్ధానికి గాని ముందే నిరూపించబడిన ఒక వ్యాఖ్యకు గాని వ్యతిరేఖంగా ఒక వ్యాఖ్యను ఈ స్వయం సిద్ధాల నుండి ఊహించుట అసాధ్యమైతే ఆ స్వయం సిద్ధాల సరళి పొందికగాఉంది అంటారు (అనుబంధం – 1 చూడండి) ఎప్పుడైనా ఒక స్వయం సిద్ధాల సరళి ఇవ్వబడినప్పుడు, అది పొందికగా ఉందని నిశ్చయించు కోవాలి.

యూక్లిడ్ తన స్వయం సిద్ధాలు మరియు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను వివరించిన తర్వాత, ఇతర ఫలితాలను నిరూపించటానికి అతడు వాటిని ఉపయోగించాడు. ఈ ఫలితాలనుపయోగించి నిగమన పద్ధతిలో మరికొన్ని ఫలితాలను నిరూపించాడు. ఈవిధంగా నిరూపించబడిన ప్రవచనాలను ప్రతిపాదనలు లేక సిద్ధాంతాలు అంటారు. యూక్లిడ్ తన స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు, నిర్వచనాలు మరియు దీనికి ముందుగా నిరూపించబడిన సిద్ధాంతాల నుపయోగించి 465 ప్రతిపాదనలను రూపొందించాడు. రేఖాగణితంలో రాబోవు కొన్ని అధ్యాయాలలో కొన్ని సిద్ధాంతాలను నిరూపించడానికి ఈ స్వయం సిద్ధాలను ఉపయోగిస్తారు.

క్రింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలలో కొన్ని ఫలితాలను నిరూపించటానికి యూక్లిడ్ తన స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలను ఏ విధంగా ఉపయోగించాడో చూద్దాం.

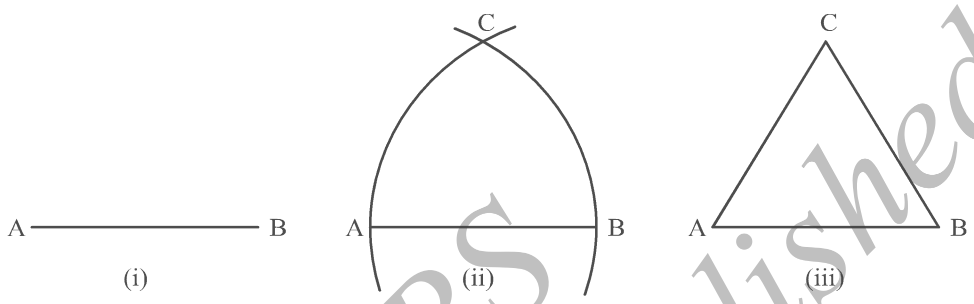
**ఉదాహరణ 1 :** A, B మరియు C లు ఒక రేఖ మీద మూడు బిందువులు మరియు B బిందువు A మరియు C ల మధ్యవుంటే (చిత్రం 2.7చూడండి), AB + BC = AC అని నిరూపించండి.


చిత్రం **2.7**

**సాధన :** పైన ఇవ్వబడిన చిత్రంలో AB + BC తోAC ఏకీభవించును. అంతేకాక యూక్లిడ్ 4 వ స్వయం సిద్ధం ప్రకారం ఒకదానితో ఒకటి ఏకభవించు అంశాలు ఒకదానికొకటి సమానం కాబట్టి AB + BC = AC ని ఊహించవచ్చు. ఈ సాధనలో రెండు బిందువుల గుండా ఒకే ఒక సరళ రేఖ పోతుందని ఊహించబడినదని గమనించండి.

**ఉదాహరణ 2 :** ఏదైనా ఒక రేఖాఖండము మీద ఒక సమబాహు త్రిభుజమును నిర్మించవచ్చని నిరూపించండి

**సాధన :** పైన ఇవ్వబడిన వ్యాఖ్యలో కొంత పొడవుగల ఒక రేఖాఖండము ఇవ్వబడినది. అది AB అనుకోండి (చిత్రం 2.8(i)చూడండి)




చిత్రం **2.8**

ఇక్కడ మీరు ఒక నిర్మాణం చేయవలసి ఉంది. యూక్లిడ్ 3వ స్వీకృత సిద్ధాంతము ఉపయోగించి A బిందువు కేంద్రంగా మరియు AB వ్యాసార్ధంగా ఒక వృత్తమును గీయవచ్చు (చిత్రం 2.8 (ii) చూడండి) అదే విధంగా B బిందువు కేంద్రంగా మరియు BA వ్యాసార్ధంగా మరొక వృత్తమును గీయండి. ఈ రెండు వృత్తాలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి అనుకోండి. అవి C అనుకోండి ఇప్పుడు $\Delta ABC$ ఏర్పడటానికి AC మరియు BC రేఖాఖండాలను గీయండి (చిత్రం 2.8 (iii)చూడండి).

ఇప్పుడు నీవు ఈ త్రిభుజం సమబాహుత్రిభుజమని నిరూపించాలి అంటే $AB = AC = BC$ అని చూపాలి. ఇప్పుడు $AB = AC$ (అవి ఒకే వృత్త వ్యాసార్ధాలు కాబట్టి) అదేవిధంగా $AB = BC$ (ఒకే వృత్త వ్యాసార్ధాలు) ఈ రెండు కారణాలు మరియు ఒక అంశానికి సమానమైన అంశాలు ఒక దానికొకటి సమానమను యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధం నుండి $AB = BC = AC$ అని నిర్ధారించవచ్చు.

కావున $\Delta ABC$ ఒక సమబాహు త్రిభుజమవుతుంది ఎక్కడా ప్రస్తావించకుండానే యూక్లిడ్ A మరియు B లు కేంద్రాలుగా గీయబడిన రెండు వృత్తాలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించునవి ఊహించినట్లు గమనించండి. అనేక ఫలితాలలో మనము ఎక్కువగా ఉపయోగించే సిద్ధాంతమును ఇప్పుడు నిరూపిద్దాం.

**సిద్ధాంతం 2.1 :** రెండు విభిన్న రేఖలు ఒకదాని కంటే ఎక్కువ సామాన్య బిందువును కలిగి ఉండవు.

**సాధన :** ఇక్కడ $l$ మరియు $m$ రెండు రేఖలున్నాయి వాటికి ఒకే ఒక సామాన్య బిందువు ఉందని మనం నిరూపించాలి.

ఇప్పుడు రెండు రేఖలు రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించునని అనుకుందాం. అవి P మరియు Q అనుకోండి. రెండు విభిన్న బిందువులు P మరియు Q గుండా పోవు రెండు రేఖలున్నాయి. కాని రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా ఒకే ఒక రేఖ పోతుందన్న స్వయం సిద్ధానికి ఇది విరుద్ధంగా ఉంది. కాబట్టి రెండు రేఖలు రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించునని మనము అనుకున్న ఉప కల్పన తప్పు.

దాని నుండి మనం ఏమి నిర్ధారించవచ్చు?

రెండు విభిన్న రేఖలు ఒకదానికంటే ఎక్కువ సామాన్య బిందువును కలిగి ఉండవని నిర్ధారణ అయినది.

**అభ్యాసం 2.1**

1. క్రింది వాటిలో ఏది సరి? ఏది తప్పు? కారణాలివ్వండి

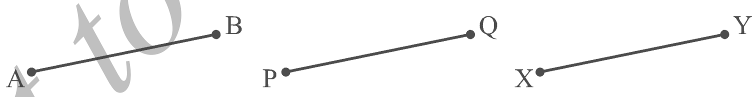
   (i) ఒక బిందువు ద్వారా ఒక సరళరేఖ మాత్రమే పోతుంది.

   (ii) రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా అనంతమైన సరళ రేఖలు పోతాయి.

   (iii) ఒక అంతము చెందు రేఖను ఇరువైపుల అనంతంగా పొడిగించవచ్చు.

   (iv) రెండు వృత్తాలు సమానమైతే, వాటి వ్యాసార్థాలు సమానంగా ఉంటాయి.

   (v) చిత్రం 2.9లో AB = PQ మరియుPQ = XY అయినAB = XY అవుతుంది.




చిత్రం **2.9**

2. క్రింద ఇవ్వబడిన పదాలలో ప్రతి దానికి నిర్వచనము ఇవ్వండి. దానికంటే ముందుగా నిర్వచించవలసిన వేరే పదాలు ఉన్నాయా? అవి ఏవి? వాటిని ఏవిధంగా నిర్వచిస్తావు?

   (i) సమాంతర రేఖలు

   (ii) లంబరేఖలు

   (iii) రేఖాఖండం

   (iv) వృత్త వ్యాసార్థం

   (v) చతురస్రం

3. క్రింద ఇవ్వ బడిన రెండు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను తీసుకోండి

   (i) A మరియు B లు రెండు విభిన్న బిందువు లైన A మరియు B ల మధ్య మూడవ బిందువు C ఉంటుంది.

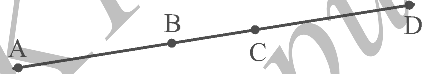
   (ii) ఒకే సరళరేఖ మీద కనీసం మూడు బిందువులుంటాయి .

ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతాలలో ఏవైనా అనిర్వచిత పదాలు ఉన్నాయా? ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతాలు పొందికగా ఉన్నాయా? అని యూక్లిడ్ స్వీకృత సిద్ధాంతాల నుండి వచ్చాయా? వివరించండి.

4. C అను బిందువు A మరియు B అను రెండు బిందువుల మధ్య AC = BC అగునట్లు ఉంటే $AC = \frac{1}{2}AB$ అని నిరూపించండి. చిత్రం గీచి వివరించండి.

5. 4వ ప్రశ్నలో C బిందువుని AB రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు అంటారు. ప్రతి రేఖాఖండము ఒకే ఒక మధ్య బిందువుని కలిగి ఉంటుందని నిరూపించండి.

6. చిత్రం 2.10 లో AC = BD అయితే AB = CD అని నిరూపించండి.




చిత్రం **2.10**

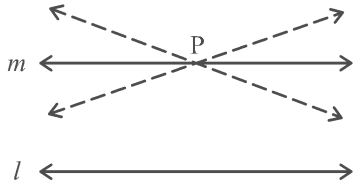
7. యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధాలలో 5వ దానిని సర్వసామాన్యమైన నిజంగా ఎందుకు పరిగణించారు? (ఈ ప్రశ్న 5 వ స్వీకృత సిద్ధాంతానికి సంబంధించినది కాదని గమనించండి.)

## 5.3. యూక్లిడ్ ఐదవ స్వీకృత సిద్ధాంతం యొక్క సమానమైన రూపాలు

గణిత చరిత్రలో యూక్లిడ్ ఐదవ స్వీకృత సిద్ధాంతం చాలా అర్థవంతమైనది 2.2 విభాగము నుండి దానిని మరల గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. దాని గూడార్థము రెండు రేఖల మీద ఒక రేఖ పడినప్పుడు, ఆ రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాల మొత్తం ఖచ్చితంగా 180° ఉంటే, ఆ రెండు రేఖలు ఖండించుకోవు. ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతానికి అనేక సమానమైన రూపాలు ఉన్నాయి. వాటిలో ఒకటైన ప్లేఫెయిర్ స్వయం సిద్ధం క్రింద ఇవ్వ బడినది (1729 లో స్కాటిష్ గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన జాన్ ప్లేఫెయిర్ చే ఇవ్వ బడినది.)

"ప్రతి రేఖ $l$ కి మరియు $l$ మీద లేని ప్రతి బిందువు P కి $l$కి సమాంతరంగా P గుండా పోవు ఒకే ఒక రేఖ $m$ ఉంటుంది."

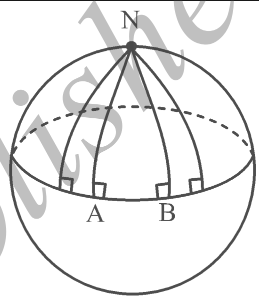
చిత్రం 2.11నుండి P గుండా పోవు అన్ని రేఖలలో $m$ రేఖ మాత్రమే $l$కి సమాంతరంగా ఉందని చూడవచ్చు.




చిత్రం **2.11**

ఈ ఫలితాన్ని క్రింది విధంగా కూడా చెప్పవచ్చు:

**రెండు ఖండించు రేఖలు ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉండవు.**




చిత్రం **2.12**

యూక్లిడ్ కి తన మొదటి 28 సిద్ధాంతాలను నిరూపించుటకు 5 వ స్వీకృత సిద్ధాంతం అవసరం రాలేదు. నిజానికి 5 వ స్వీకృత సిద్ధాంతం కేవలం మొదటి నాలుగు స్వీకృత సిద్ధాంతాలు మరియు ఇతర స్వయం సిద్ధాలను మాత్రమే ఉపయోగించుకొని, నిరూపించగల సిద్ధాంతమని యూక్లిడ్ మరియు అనేక గణిత శాస్త్రవేత్తలు ఒప్పుకున్నారు. ఏది ఏమైనా ఐదవ స్వీకృత సిద్ధాంతమును ఒక సిద్ధాంతముగా నిరూపించుటకు చేసిన ప్రయత్నాలన్నీ విఫలమైనాయి. కాని ఈ ప్రయత్నాలు అనేక ఇతర రేఖాగణితాలను సృష్టించుటకు దోహదపడ్డాయి. ఇది ఒక గొప్ప సాధన. ఈ రేఖాగణితాలు యూక్లిడ్ రేఖాగణితానికి పూర్తిగా భిన్నంగా ఉంటాయి. (వాటిని యూక్లిడ్ తన రేఖాగణితాలని పిలిచారు) వారిసృష్టిని ఆలోచన యొక్క చరిత్రలో ఒక ప్రత్యేకమైన చిహ్నంగా పరిగణించారు. ఎందుకంటే అప్పటివరకు ప్రతి ఒక్కరు యూక్లిడ్ రేఖాగణితమును మాత్రమే రేఖా గణితం గాను, ప్రపంచమే యూక్లిడ్‌గా నమ్మారు. ఇప్పుడు మనం నివసించే విశ్వంలోని రేఖాగణితాన్ని యూక్లిడేతర రేఖాగణితంగా చూపారు. నిజానికి దానిని గోళీయ రేఖాగణితం అంటారు. గోళీయ రేఖాగణితంలో రేఖలు సరళరేఖలు కావు. అవి పెద్ద వృత్తాల భాగాలు (అంటే వృత్తాలు, ఒక గోళమును దాని కేంద్రము గుండాపోవు సమతలాలు ఖండించినప్పుడు ఏర్పడతాయి).

చిత్రం 2.12 లో AN మరియు BN రేఖలు (ఒక గోళం యొక్క పెద్ద వృత్తాల భాగాలు) ఒకే రేఖ ABకి లంబంగా ఉన్నాయి. AB రేఖకు ఒకేవైపున గల కోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాలకు తక్కువ లేనప్పటికీ అవి కలుసుకుంటున్నాయి. (నిజానికి అది $90° + 90° = 180°$.) NAB త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం 180° కంటే ఎక్కువని కూడా గమనించండి. ఎందుకంటే $\angle A + \angle B = 180°$.కాబట్టి యూక్లిడ్ రేఖాగణితం సమతలంలోని చిత్రాలకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది. వక్రతలాల మీద అది విఫలమవుతుంది.

ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణ చూద్దాం,

**ఉదాహరణ 3 :** క్రింది వ్యాఖ్యను తీసుకోండి. ప్రతిచోట ఒకదాని నుండి మరొకటి సమాన దూరంలోగల ఒక జత సరళరేఖలు ఉంటాయి. ఈ వ్యాఖ్య యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతం యొక్క తిన్నని పర్యవసానం అవుతుందా? వివరించండి.

**సాధన :** ఒక సరళ రేఖ $l$ ,$l$ మీద లేని ఒక బిందువు P ని తీసుకోండి. . ప్లేఫెయిర్ స్వయం సిద్ధం (అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతానికి సమానమైన) ప్రకారం P గుండా $l$ కి సమాంతరంగా ఒకే ఒక రేఖ $m$ ఉంటుంది.

ఒక రేఖ నుండి ఒక బిందువు యొక్క దూరం ఆ బిందువు నుండి ఆ రేఖకు గీయబడిన లంబరేఖ పొడవు అవుతుంది. $l$ నుండి $m$ మీద ఏదైనా బిందువు కి గల దూరం, $m$ నుండి $l$ మీద ఏదైనా బిందువు కు గల దూరం సమానమవుతాయి. కాబట్టి ఈ రెండు రేఖలు ప్రతి చోట ఒక దాని నుండి మరొకటి సమానదూరంలో ఉంటాయి.

**గమనిక :** తర్వాతి కొన్ని అధ్యాయాలలో మీరు చదవబోయే రేఖాగణితం యూక్లిడ్ రేఖాగణితం. ఏది ఏమైనా మనం ఉపయోగించే స్వయం సిద్ధాలు మరియు సిద్ధాంతాలు యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధాలు, సిద్ధాంతాలకు భిన్నంగా ఉండవచ్చు.

**అభ్యాసం 2.2**

1. యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతమును అర్థం చేసుకోవడానికి సులభంగా ఉండునట్లు ఏ విధంగా తిరిగి రాస్తావు?
2. యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతం సమాంతర రేఖల ఉనికిని తెలియ చేస్తుందా? వివరించండి.

## 2.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో క్రింది అంశాలను నీవు అధ్యయనం చేశావు:

1. యూక్లిడ్ ఒక బిందువు, రేఖ మరియు ఒక తలములను నిర్వచించినప్పటికీ, ఆ నిర్వచనాలను గణిత శాస్త్ర వేత్తలు అంగీకరించలేదు. కాబట్టి ఆ పదాలను ఇప్పుడు అనిర్వచితాలుగా తీసుకొన్నారు.
2. స్వయం సిద్ధాలు లేక స్వీకృత సిద్ధాంతాలు సర్వ సామాన్యమైన స్పష్టమైన నిజాలుగా ఊహించబడినవి అవి నిరూపించ బడలేదు.

3. సిద్ధాంతాలు అనేవి నిర్వచనాలు, స్వయం సిద్ధాలు, ముందుగా నిరూపించబడిన వ్యాఖ్యలు, నిగమన పద్ధతులను ఉపయోగించుకొని నిరూపించబడిన వ్యాఖ్యలు.

4. కొన్ని యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధాలు:

   (i) ఒకే అంశానికి సమానమైన అంశాలు ఒకదానికొకటి సమానం

   (ii) సమాన అంశాలకు సమాన అంశాలను కూడినపుడు వాటి మొత్తాలు సమానం

   (iii) సమాన అంశాల నుండి సమాన అంశాలను తీసివేసినప్పుడు శేషములు సమానం

   (iv) ఒక దానితో ఒకటి ఏకీభవించు అంశాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

   (v) పూర్ణరాశి దాని భాగం కంటే పెద్దది.

   (vi) సమాన అంశాల రెట్టింపులు ఒకదానికొకటి సమానం.

   (vii) సమాన అంశాల అర్ధాలు ఒకదానికొకటి సమానం.

5. యూక్లిడ్ స్వీకృత సిద్ధాంతాలు:

   **స్వీకృత సిద్ధాంతం 1 :** ఒక బిందువు నుండి మరి ఏ ఇతర బిందువుకైనా ఒక సరళ రేఖను గీయవచ్చు.

   **స్వీకృత సిద్ధాంతం 2 :** ఒక అంతంచెందు రేఖను అనంతంగా పొడిగించవచ్చు.

   **స్వీకృత సిద్ధాంతం 3 :** ఏ కేంద్రతోనైనా ఏ వ్యాసార్ధంతోనైనా ఒక వృత్తమును గీయవచ్చు.

   **స్వీకృత సిద్ధాంతం 4 :** అన్ని లంబకోణాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

   **స్వీకృత సిద్ధాంతం 5 :** రెండు సరళ రేఖల మీద పడు ఒక సరళరేఖ, దానికి ఒకే వైపున గల అంతరకోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాల కంటే తక్కువ ఉండునట్లు ఉంటే, ఆ రెండు రేఖలను అనంతంగా పొడిగిస్తే, అవి అదే వైపున కలుసుకుంటాయి.

6. యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతం యొక్క రెండు రూపాలు.

   (i) ప్రతి రేఖ $l$ కి మరియు $l$ మీద లేని ప్రతి బిందువు P కి $l$ కి సమాంతరంగా P గుండా పోవు ఒకే ఒక రేఖ $m$ ఉంటుంది.

   (ii) రెండు ఖండించు రేఖలు ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉండవు.

7. మొదటి 4 స్వీకృత సిద్ధాంతాలను ఉపయోగించుకొని, యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృత సిద్ధాంతమును నిరూపించుటకు చేసిన ప్రయత్నాలు విఫలమైనాయి కాని అని అనేక ఇతర రేఖాగణితాలను కనుగొనుటకు దోహదపడ్డాయి. వాటిని యూక్లిడేతర రేఖాగణితాలు అంటారు.

## అధ్యాయం – 3

# రేఖలు మరియు కోణాలు



## 3.1 పరిచయం

అధ్యాయం2లో మీరు ఒక రేఖ గీయడానికి కనీసం రెండు బిందువులు అవసరమని చదివారు. ఆంతేగాక కొన్ని స్వయం సిద్ధాలు చదివారు. వాటి సహాయంతో మరి కొన్ని వ్యాఖ్యలను నిరూపించారు. ఈ అధ్యాయంలో రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల ధర్మాలు మరియు ఒక సరళరేఖ రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ సమాంతర రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల ధర్మాల గురించి నేర్చుకుంటారు. అంతేకాక నిగమన పద్ధతిలో కొన్ని వ్యాఖ్యలను నిరూపించడానికి ఈ ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు (అనుబంధం – 1 చూడండి) క్రిందటి తరగతులలో కొన్ని కార్యాచరణాల ద్వారా ఈ వ్యాఖ్యలను నిరూపించారు .

నిత్య జీవితంలో సమతలాల అంచుల మధ్య ఏర్పడే వివిధ రకాల కోణాలను చూస్తారు. సమతలాల నుపయోగించి అదేవిధమైన నమూనాను తయారు చేయాలంటే, మీకు కోణాల యొక్క పూర్తి జ్ఞానం ఉండాలి. ఇప్పుడు నీవు మీ పాఠశాల వస్తుప్రదర్శనశాలలో ఉంచడానికి వెదురు పుల్లలతో ఒక గుడిసె యొక్క నమూనాను తయారు చేయాలనుకున్నావు. నీవు దానిని ఎలా తయారు చేయాలో ఊహించు. నీవు కొన్ని పుల్లలను ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంచి, కొన్ని పుల్లలను ఏటవాలుగా ఉంచాలి. ఒక వాస్తు శిల్పి బహు అంతస్థుల కట్టడానికి నమూనా గీయటానికి ఖండించు రేఖలు మరియు విభిన్న కోణాల వద్ద సమాంతర రేఖలను గీయవలసి వస్తుంది. రేఖలు మరియు కోణాల ధర్మాల జ్ఞానం లేకపోతే ఆ వాస్తుశిల్పి, కట్టడం నమూనా గీయగలరా?

విజ్ఞానంలో కాంతిధర్మాలను మీరు కిరణ చిత్రాలను గీచి నేర్చుకుంటారు. ఉదాహరణకు కాంతి ఒక యానకం నుండి మరొక యానకం లోనికి ప్రసరించునపుడు దాని వక్రీభవన ధర్మమునకు అధ్యయనం చేయడానికి మీరు ఖండించు రేఖలు మరియు సమాంతర రేఖల ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు. ఒక వస్తువు మీద రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బలాలు పని చేయునప్పుడు, ఫలిత బలాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి నీవు బలాలను రేఖాఖండాలలో సూచించి, చిత్రం గీస్తావు. ఆ సమయంలో కిరణాలు (రేఖా ఖండాలు) సమాంతరంగా లేక పరస్పరం ఖండించునప్పుడు కోణాల మధ్య సంబంధమును నీవు తెలుసుకోవాలి. ఒక గోపురం ఎత్తు కనుగొనటానికి లేదా లైట్ హౌస్ నుండి ఓడ యొక్క దూరం కనుగొనడానికి, ఎవరైనా క్షితిజ రేఖ మరియు దృష్టిరేఖల మధ్య ఏర్పడే కోణం గురించి తెలుసుకోవాలి. రేఖలు మరియు కోణాల నుపయోగించి అనేక ఉదాహరణలు ఇవ్వవచ్చు. రేఖాగణితంలోని రాబోవు అధ్యాయాలలో అనేక ముఖ్యమైన ధర్మాలను ఊహించుటకు రేఖలు మరియు కోణాల ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు. ముందుగా క్రిందటి తరగతులలో నేర్చుకున్న రేఖలు మరియు కోణాలకు సంబంధించిన పదాలు మరియు నిర్వచనాలను పునర్విమర్శ చేద్దాం.

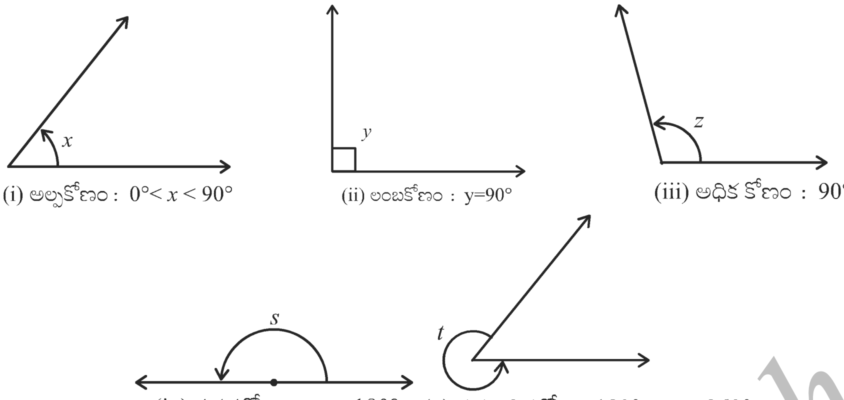
## 3.2 మూల పదాలు మరియు నిర్వచనాలు.

రెండు చివరి బిందువులు గల ఒక రేఖ యొక్క కొంత భాగమును రేఖాఖండము అనియు ఒక చివరి బిందువు గల రేఖ యొక్క కొంత భాగమును కిరణము అంటారని గుర్తు తెచ్చుకోండి. AB రేఖా ఖండమును $\overline{AB}$ లో సూచిస్తాము మరియు దాని పొడవును AB లో కిరణమును $\overrightarrow{AB}$ లోను. రేఖను $\overleftrightarrow{AB}$ లోను సూచిస్తాము. ఏది ఏమైనా మనము. ఈ సంకేతాలను ఉపయోగించము. AB రేఖాఖండము, AB కిరణము, AB పొడవు మరియు AB రేఖ అన్నింటికీ AB గుర్తునే ఉపయోగిస్తాము. సందర్భానుసారంగా అర్థం తెలుస్తుంది. కొన్నిసార్లు రేఖలను సూచించటానికి చిన్న అక్షరాలు l,m,n మొదలగు వాటిని ఉపయోగిస్తారు.

మూడు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బిందువులు ఒకే రేఖ మీద ఉంటే వాటిని ఏకరేఖా స్థితములు అంటారు.

ఆవిధంగా లేకపోతే వాటిని ఏకరేఖా స్థితములు కాని బిందువులు అంటారు.

రెండు రేఖలు ఒకే చివరి బిందువు నుండి ఆరంభమైనప్పుడు కోణం ఏర్పడుతుందని గుర్తు తెచ్చుకోండి. ఒక కోణమును ఏర్పరచు కిరణాలను ఆ కోణము యొక్క భుజాలు అనియు చివరిబిందువుని ఆ కోణము యొక్క శీర్షము అనియు అంటారు. క్రిందటి తరగతులలో మీరు అల్పకోణము, లంబకోణము, అధిక కోణము, సరళకోణం మరియు సరళాధిక కోణం వంటి వివిధ రకాల కోణాల గురించి అధ్యయనం చేశారు. (చిత్రం 3.1చూడండి).




(i) అల్పకోణం : $0° < x < 90°$

(ii) లంబకోణం : $y = 90°$

(iii) అధిక కోణం : $90° < z < 180°$

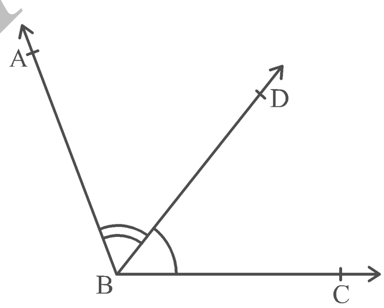
(iv) సరళ కోణం : $s = 180°$

(v) సరళాధిక కోణం: $180° < t < 360°$

**చిత్రం : 3.1 కోణాల రకాలు.**

ఒక అల్ప కోణం కొలత 0° మరియు 90° మధ్య ఉంటుంది. లంబకోణం ఖచ్చితంగా 90°కి సమానం. 90° కంటే ఎక్కువ మరియు 180° కంటే తక్కువ ఉన్న కోణమును అధిక కోణం అంటారు. ఒక సరళకోణం 180° కి సమానం. 180° కంటే ఎక్కువ మరియు 360° కంటే తక్కువ ఉన్న కోణమును సరళాధిక కోణం అంటారు. రెండు కోణాల మొత్తం 90° అయితే, వాటిని పూరకకోణాలు అంటారు. రెండు కోణాల మొత్తం 180° అయితే వాటిని పరిపూరక కోణాలు అంటారు.

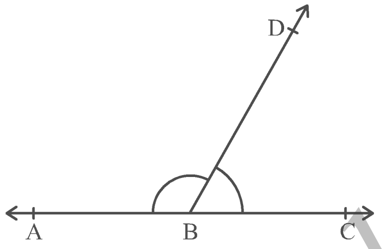
క్రిందటి తరగతులలో మీరు ఆసన్న కోణాల గురించి అధ్యయనం చేశారు (చిత్రం 3.2 చూడండి). రెండు కోణాలు సామాన్యశీర్షము, ఒక సామాన్య భుజము, సామాన్య భుజాలు కాని భుజాలు సామాన్య భుజానికి ఇరువైపుల ఉంటే వాటిని ఆసన్నకోణాలు అంటారు. చిత్రం 3.2లో $\angle ABD$ మరియు $\angle DBC$ లు ఆసన్నకోణాలు. BD కిరణం వాటి సామాన్య భుజం మరియు B బిందువు వాటి సామాన్య శీర్షము. BA మరియు BC కిరణాలు సామాన్యం కాని భుజాలు. అంతేకాక రెండు కోణాలు ఆసన్నకోణాలైతే వాటి మొత్తం, సామాన్యం కాని భుజాలతో ఏర్పడిన కోణానికి సమానం. అందువలన $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ అని రాయవచ్చు.




చిత్రం **3.2 :** ఆసన్నకోణాలు

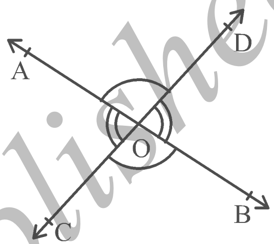
$\angle ABC$ మరియు $\angle ABD$ లు ఆసన్న కోణాలు కాదని గమనించండి. ఎందుకు? ఎందుకంటే సామాన్యం కాని భుజాలు BD మరియు BC లు సామాన్య భుజం BA కి ఒకే వైపున ఉన్నాయి.

చిత్రం 3.2 లో సామాన్యం కాని భుజాలు BA మరియు BC లు ఒక సరళరేఖను ఏర్పరచిన, అప్పుడు అది చిత్రం 3.3 మాదిరిగా ఉంటుంది ఈ సందర్భంలో ∠ABD మరియు ∠DBC లను సరళయుగ్మం అంటారు.



చిత్రం 3.3 : సరళ యుగ్మాలు

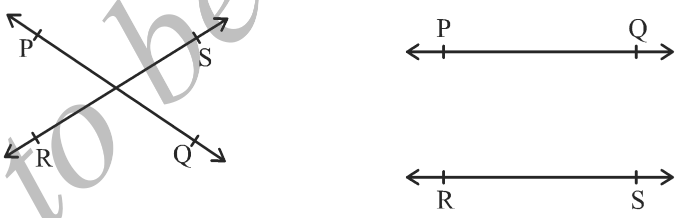
రెండు రేఖలు AB మరియు CD లు పరస్పరం 'O' బిందువు వద్ద ఖండించినప్పుడు ఏర్పడు శీర్షాభిముఖ కోణాలను గుర్తు తెచ్చుకోండి. (చిత్రం 3.4 చూడండి) ఇక్కడ రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలుంటాయి. ఒక జత ∠AOD మరియు ∠BOC. మరొక జతని నీవు కనుగొనగలవా?



చిత్రం 3.4 శీర్షాభిముఖ కోణాలు

## 3.3 ఖండించు రేఖలు మరియు ఖండించుకోని రేఖలు

ఒక కాగితం మీద PQ మరియు RS అను రెండు విభిన్న రేఖలను గీయండి. చిత్రం 3.5 (i) మరియు చిత్రం, 3.5 (ii) లలో చూపబడిన విధంగా వాటిని రెండు వేర్వేరు విధాలుగా గీయవచ్చునని తెలుసుకుంటారు.



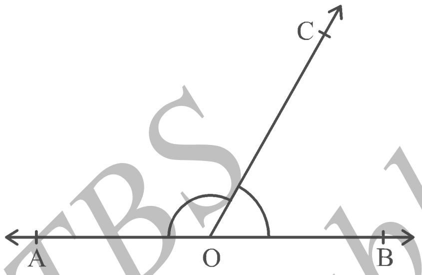
(i) ఖండిచు రేఖలు (ii) ఖండించుకోని (సమాంతర) రేఖలు

**చిత్రం 3.5 : రెండు రేఖలను వేర్వేరు విధాలుగా గీయడం**

ఒక సరళరేఖను ఇరువైపులా అనంతంగా పొడిగించవచ్చని గుర్తు చేసుకోండి. చిత్రం 3.5 (i) లో PQ మరియు RS లు ఖండించు రేఖలు మరియు చిత్రం 3.5 (ii) లో సమాంతర రేఖలు. ఈ సమాంతర రేఖల మీద విభిన్న బిందువుల వద్ద సామాన్య లంబరేఖల పొడవులు సమానమని గమనించండి ఈ సమాన పొడవును రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యదూరమని అంటారు.

## 3.4. కోణాల జతలు

3.2 విభాగంలో పూరకకోణాలు, పరిపూరక కోణాలు, ఆసన్నకోణాలు, సరళ యుగ్మం వంటి కొన్ని కోణాల జతల నిర్వచనాలు నేర్చుకున్నారు. ఈ కోణాల మధ్య సంబంధమును గమనించారా? ఇప్పుడు ఒక కిరణము, ఒక సరళరేఖ మీద నిలబడినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల మధ్య సంబంధమును కనుగొందాం. చిత్రం 3.6 లో చూపిన విధంగా ఒక కిరణం, ఒక రేఖ మీద నిలబడినట్లు చిత్రం గీయండి. సరళరేఖను AB అని, కిరణమును OC అని పేర్కొనండి.



చిత్రం **3.6** సరళయుగ్మాలు

O బిందువు వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు ఏవి? అవి $\angle AOC$, $\angle BOC$ మరియు $\angle AOB$ మనము $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ .......... (1) అని రాయవచ్చా? అవును! (ఎందుకు? 3.2 విభాగం లోని ఆసన్నకోణాల ను చూడండి) $\angle AOB$ కొలత ఎంత? అది $180^\circ$ (2) ఉంటుంది. (ఎందుకు)?

పై చర్చ నుండి మనము క్రింది స్వయం సిద్ధమును చెప్పవచ్చు.

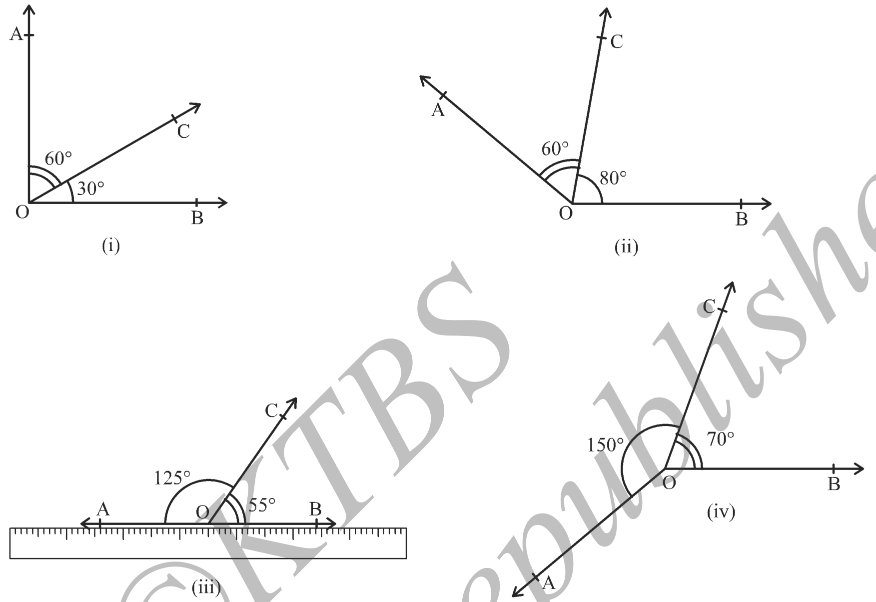
**స్వయం సిద్ధం 3.1:** ఒక సరళ రేఖ మీద ఒక కిరణం నిలబడితే ఏర్పడిన ఆసన్న కోణాల మొత్తం $180^\circ$.

రెండు ఆసన్నకోణాల మొత్తం $180^\circ$ అయితే, వాటిని సరళ యుగ్మం అంటారని గుర్తు తెచ్చుకోండి. స్వయం సిద్ధ. 3.1 లో ఒక సరళరేఖ మీద ఒక కిరణం నిలబడుతుందని ఇవ్వబడింది. దీని నుండి ఏర్పడిన రెండు ఆసన్నకోణాల మొత్తం $180^\circ$ అని మనము నిర్ధారించాము. స్వయం సిద్ధం 3.1 ని మనం ఇంకొక రకంగా రాయవచ్చా? అంటే స్వయం సిద్ధం 3.1 యొక్క "నిర్ధారణ"ని "ఇవ్వబడినది" గాను "ఇవ్వబడిన" దానిని "నిర్ధారణ"గాను తీసుకుంటే అది క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

(A)రెండు ఆసన్నకోణాల మొత్తం $180^\circ$ అయితే ఒక కిరణం ఒక సరళరేఖ మీద నిలబడుతుంది. (అంటే సామాన్యం కాని భుజాలు సరళరేఖను ఏర్పరచును)

ఇప్పుడు స్వయం సిద్ధం 3.1 మరియు వ్యాఖ్య (A)లు పరస్పరం విలోమంగా కనిపిస్తున్నాయి. మనము వాటిని ఒకదానికొకటి విపర్యము అంటాము. వ్యాఖ్య (A) సరినా, కాదా అనేది పరీక్షిద్దాం

చిత్రం 3.7లో చూపబడిన విధంగా విభిన్న కొలతలతో ఆసన్న కోణాలను గీయండి. ప్రతి సందర్భంలో స్కేలును సామాన్యం కాని భుజాలలో ఒకదాని వెంబడి ఉంచండి. మరొక సామాన్యం కాని భుజం స్కేలు వెంబడి ఉంటుందా?




**చిత్రం : 3.7** విభిన్న కొలతలుగల ఆసన్నకోణాలు.

చిత్రం: 3.7(iii) లో మాత్రమే సామాన్యంకాని భుజాలు రెండూ స్కేలు వెంబడి ఉన్నాయని తెలుస్తుంది. అంటే A, O మరియు B బిందువులు ఒకే రేఖ మీద ఉండి OC కిరణం దాని మీద నిలబడింది. అంతేకాక $\angle AOC + \angle COB = 125° + 55° = 180°$ అవుతుంది. దీనినుండి వ్యాఖ్య (A) సరియైనదని నిర్ధారించవచ్చు. కాబట్టి దానిని ఒక స్వయం సిద్ధం రూపంలో క్రిందివిధంగా చెప్పవచ్చు.

**స్వయం సిద్ధం 3.2 : రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180° అయిన వాటి సామాన్యం కాని భుజాలు సరళరేఖను ఏర్పరచును.**

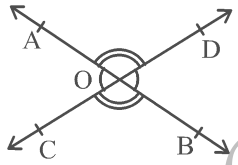
స్పష్టమైన కారణాల వలన పైన ఇవ్వబడిన రెండు స్వయం సిద్ధాలను కలిపి సరళ స్వయం సిద్ధయుగ్మం అంటారు.

రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించునపుడు ఇది ఏవిధంగా ఉంటుందో పరీక్షిద్దాం.

క్రిందటి తరగతులలో నేర్చుకున్నదాని ప్రకారం రెండు సరళరేఖలు ఖండించినపుడు శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానమని గుర్తుతెచ్చుకోండి. ఈ ఫలితాన్ని మనం ఇపుడు నిరూపిద్దాం.

సాధనకు కావలసిన అంశాలను అనుబంధం – 1 లో చూచి, క్రింద ఇవ్వబడిన సాధనను అధ్యయనం చేసేటపుడు వాటిని మనసులో ఉంచుకోండి.

**సిద్ధాంతం 3.1 : రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించుకొంటే శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం**




చిత్రం **3.8** శీర్షాభిముఖ కోణాలు

**సాధన :** పై వ్యాఖ్యలో రెండు సరళ రేఖలు పరస్పరం ఖండిచుకొనునని ఇవ్వబడినది. కాబట్టి చిత్రం 3.8 లో చూపబడిన విధంగా AB మరియు CD రేఖలు 'O' వద్ద ఖండించు చున్నని అనుకొనుము. అవి రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలను ఏర్పరచును. అని (i)$\angle AOC$ మరియు$\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ మరియు $\angle BOC$. మనము $\angle AOC = \angle BOD$ మరియు $\angle AOD = \angle BOC$ అని నిరూపించాలి.

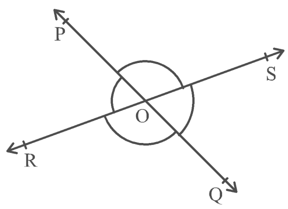
ఇప్పుడు OA కిరణం CD రేఖ మీద నిలబడింది కాబట్టి

$\angle AOC + \angle AOD = 180°$ (సరళ స్వయం సిద్ధయుగ్మం) ............ (1)

$\angle AOD + \angle BOD = 180°$ అని రాయవచ్చా? అవును! (ఎందుకు?) ............ (2)

(1) మరియు (2)ల నుండి $\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ అని రాయవచ్చు దాని నుండి $\angle AOC = \angle BOD$ (విభాగం 2.2 స్వయం సిద్ధం 3 చూడండి)

ఇదే విధంగా $\angle AOD = \angle BOC$ అని నిరూపించవచ్చు. ఇప్పుడు సరళ స్వయం సిద్ధ యుగ్మం మరియు సిద్ధాంతం 3.1 ఆధారంగా కొన్ని ఉదాహరణలు చేద్దాం




చిత్రం : **3.9**

**ఉదాహరణ 1 :** చిత్రం **3.9** లో PQ మరియు RS రేఖలు పరస్పరం 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుచున్నాయి.

$\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ అయిన అన్ని కోణాలను కనుగొనండి

**సాధన :** $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (సరళ యుగ్మం)

కాని $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (ఇవ్వబడినది)

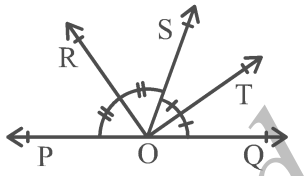
కాబట్టి $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

అదేవిధంగా $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

ఇప్పుడు $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

మరియు $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

**ఉదాహరణ 2 :** చిత్రం 3.10 లో OS కిరణం, POQ రేఖ మీద నిలబడింది. OR కిరణం మరియు OT కిరణాలు క్రమంగా $\angle POS$ మరియు $\angle SOQ$ ల కోణసమద్విఖండన రేఖలు $\angle POS = x$ అయిన $\angle ROT$ ని కనుగొనండి.



చిత్రం : **3.10**

**సాధన :** OS కిరణం, POQ రేఖ మీద నిలబడింది

కాబట్టి $\angle POS + \angle SOQ = 180°$

కాని $\angle POS = x$ కావున

$x + \angle SOQ = 180°$

$\angle SOQ = 180° - x$

OR కిరణం $\angle POS$ ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

కాబట్టి $\angle ROS = \frac{1}{2} \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x$

$= \frac{x}{2}$

అదేవిధంగా $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$

$= 90° - \frac{x}{2}$

ఇప్పుడు $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

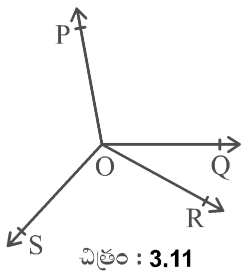
$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$

$= 90°$

**ఉదాహరణ 3 :** చిత్రం 3.11 లో OP, OQ, OR మరియు OS లు నాలుగు కిరణాలు.

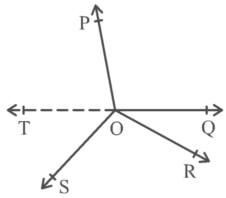
$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$

అని నిరూపించండి.



చిత్రం : **3.11**

**సాధన :** చిత్రం 3.11 లో OP, OQ, OR,లేక OS కిరణాలలో ఒకదానిని ఏదైనా ఒక బిందువు వరకు వెనుకకు పొడిగించాలి. OQ కిరణాన్ని T వరకు వెనుకకు పొడిగిద్దాం అప్పుడు TOQ ఒక రేఖ అవుతుంది (చిత్రం 3.12 చూడండి)



చిత్రం : **3.12**

ఇప్పుడు OP కిరణం TOQ రేఖ మీద నిలబడింది. కాబట్టి

కాబట్టి $\angle TOP + \angle POQ = 180^\circ$ (1) (సరళ స్వయం సిద్ధయుగ్మం)

ఇదేవిధంగా OS కిరణంTOQ రేఖ మీద నిలబడుతుంది.

కాబట్టి $\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ (2)

కాని $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

(2) నుండి $\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^\circ$ (3)

(1) మరియు (3) లను కూడగా

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ$ (4)

కాని $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

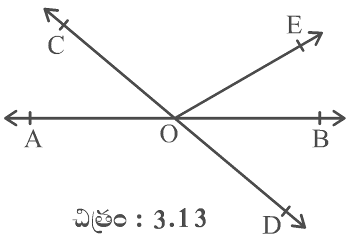
కాబట్టి (4) నుండి

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$



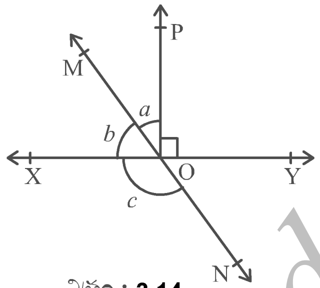
## అభ్యాసం 3.1

(1) చిత్రం 3.13 లో AB మరియు CD రేఖలు O వద్ద ఖండించి నవి. $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ మరియు $\angle BOD = 40^\circ$ అయిన $\angle BOE$ మరియు సరళాధిక $\angle COE$ లను కనుగొనండి.



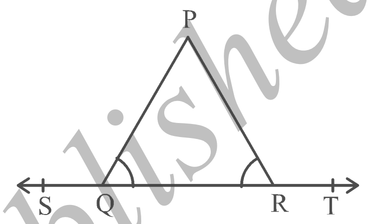
చిత్రం : 3.13

(2) చిత్రం 3.14లో XY మరియు MN రేఖలు O వద్ద ఖండించినవి. $\angle POY = 90^\circ$ మరియు $a : b = 2 : 3$ అయిన $\angle C$ ని కనుగొనండి.



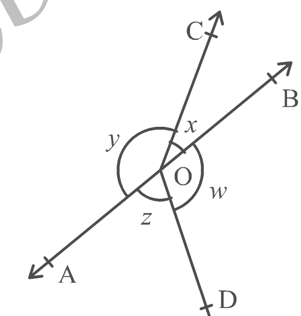
చిత్రం : **3.14**

(3) చిత్రం 3.15 లో $\angle PQR = \angle PRQ$ అయిన $\angle PQS = \angle PRT$ అని నిరూపించండి.



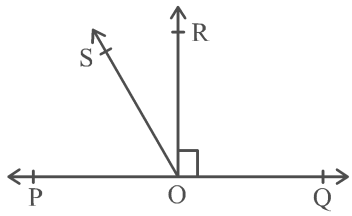
చిత్రం : **3.15**

(4) చిత్రం 3.16 లో $x + y = w + z$ అయిన AOB ఒక సరళరేఖ అని నిరూపించండి.



చిత్రం : **3.16**

(5) చిత్రం 3.17 లో POQ ఒక సరళ రేఖ OR కిరణం PQ రేఖకు లంబంగా ఉంది OP మరియు OR కిరణాల మధ్య మరొక కిరణం OS కింది $\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$ అని నిరూపించండి.

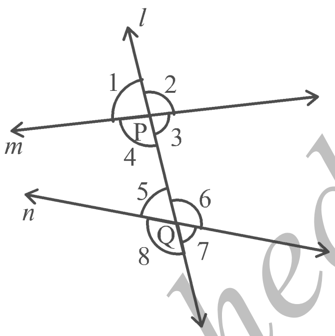


చిత్రం : **3.17**

(6) $\angle XYZ = 64^\circ$ మరియు XY రేఖ P బిందువు వరకు పొడిగించబడినది ఈ సమాచారానికి ఒక చిత్రం గీయండి YQ కిరణం. $\angle ZYP$ ని సమద్విఖండన చేస్తే $\angle XYQ$ మరియు సరళాధిక $\angle QYP$ లను కనుగొనండి.

## 3.5 సమాంతర రేఖలు మరియు తిర్యగ్రేఖ

రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించే రేఖను తిర్యగ్రేఖ అంటారని గుర్తుతెచ్చుకోండి.(చిత్రం 3.18 చూడండి). $l$ అను రేఖ, $m$ మరియు $n$ రేఖలను క్రమంగా P మరియు Q బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. కాబట్టి $l$ రేఖ $m$ మరియు $n$ రేఖలకు తిర్యగ్రేఖ అవుతుంది.




చిత్రం : 3.18

P మరియు Q బిందువుల వద్ద నాలుగు కోణాలేర్పడినవని గమనించండి.

ఈ కోణాలను చిత్రం 3.18 లో చూపిన విధంగా $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ ..... $\angle 8$ అనుకుందాం.

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ $\angle 8$ లను బాహ్యకోణాలు అనియు $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ మరియు$\angle 6$ లను అంతరకోణాలు అనియు అంటారు.

క్రిందటి తరగతులలో రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కొన్ని కోణాల జతలకు మీరు కొన్ని పేర్లు పెట్టినట్లు గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. అవి క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

**(a) సదృశ కోణాలు:**

(i) $\angle 1$ మరియు $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ మరియు $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ మరియు $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ మరియు $\angle 7$

**(b) పర్యాయ అంతరకోణాలు :**

(i) $\angle 4$ మరియు $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ మరియు $\angle 5$

**(c) పర్యాయ బాహ్యకోణాలు:**

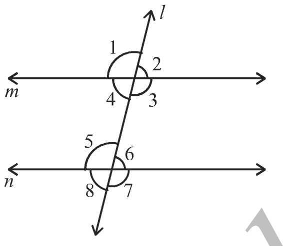
(i) $\angle 1$ మరియు $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ మరియు $\angle 8$

**(d) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు:**

(i) $\angle 4$ మరియు $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ మరియు $\angle 6$

తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలను క్రమ అంతర కోణాలు లేక సహ అంతర కోణాలు అంటారు. కాని ఎక్కువగా పర్యాయ అంతరకోణాలకు బదులుగా పర్యాయ కోణాలు అను పదాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

ఇప్పుడు $m$ రేఖ $n$ రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే, ఈ కోణాల జతల మధ్య సంబంధమును కనుగొందాం. మీ నోటు పుస్తకంలో నియమిత రేఖలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయని మీకు తెలుసు. వాటిలో ఏవైనా రెండు రేఖల వెంబడి స్కేలు మరియు పెన్సిలు సహాయంతో రెండు సమాంతర రేఖలను మరియు వాటిని ఖండిస్తూ చిత్రం 3.19 లో చూపినట్లు ఒక తిర్యగ్రేఖను గీయండి.




చిత్రం 3.19

ఇపుడు ఏవైనా ఒక జత సదృశ కోణాలను కొలచి వాటి మధ్య సంబంధమును కనుగొనండి

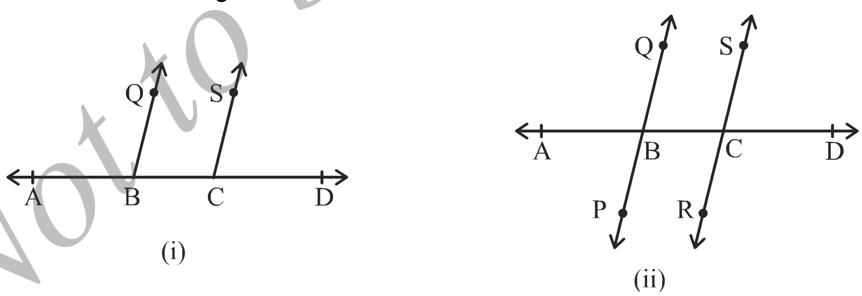
$\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$ మరియు $\angle 3 = \angle 7$ అని కనుగొంటారు దాని నుండి క్రింది స్వయం సిద్ధమును నిర్ధారించవచ్చు.

**స్వయం సిద్ధం 3.3 :** రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు, ప్రతి సదృశ కోణాల జత సమానం.

స్వయం సిద్ధం 3.3 ని సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం అని కూడ అంటారు. ఇపుడు ఈ స్వయం సిద్ధం యొక్క విపర్యాన్ని క్రింది విధంగా చర్చిద్దాం. ఒక తిర్యగ్రేఖ, రెండు రేఖలను ఖండించినపుడు ఏర్పడే ఒక జత సదృశ కోణాలు సమానమైతే ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

ఈ వ్యాఖ్య నిజమేనా? దీనిని క్రింది విధంగా పరిశీలించవచ్చు.

AD రేఖను గీచి దాని మీద B మరియు C బిందువులను గుర్తించండి. B మరియు C ల వద్ద చిత్రం 3.20 (i) లో చూపిన విధంగా ఒకదానికొకటి సమానంగా ఉండునట్లు రెండు కోణాలు $\angle ABQ$ మరియు $\angle BCS$ లను నిర్మించండి.

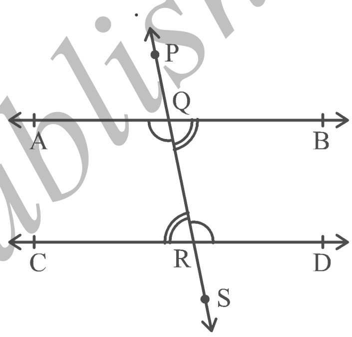



చిత్రం 3.20

QB మరియు SC అను AD కి మరొకవైపు PQ మరియు SR రేఖలు ఏర్పడునట్లు పొడిగించండి (చిత్రం 3.20(ii) చూడండి). రెండు రేఖలు పరస్పరం ఖండించుకోవని గమనించవచ్చు PQ మరియు RS రెండు రేఖలకు విభిన్న బిందువుల వద్ద సామాన్య లంబరేఖలు గీచి, వాటి పొడవులు కొలవండి. అది అన్నిచోట్ల సమానంగా ఉందని గమనిస్తారు. దానిని బట్టి ఈ రేఖలు, సమాంతరంగా ఉన్నాయని నిర్ధారించవచ్చు). కాబట్టి సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం యొక్క విపర్యం కూడ నిజమవుతుంది కాబట్టి క్రింది స్వయం సిద్ధమును రాయవచ్చు.

**స్వయం సిద్ధం 3.4 :** ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు రేఖలను ఖండించినప్పుడు ఏర్పడిన ఒక జత సదృశ కోణాలు సమానమైతే, ఆ రెండు రేఖలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయి.

రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే పర్యాయ అంతర కోణాల మధ్య సంబంధమును కనుగొనుటకు సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధమును ఉపయోగించవచ్చా? చిత్రం 3.21లో PS తిర్యగ్రేఖ AB మరియు CD సమాంతర రేఖలను క్రమంగా Q మరియు R ల వద్ద ఖండించుచున్నది.




చిత్రం : **3.21**

$\angle$ BQR $=\angle$ QRC మరియు $\angle$ AQR $=\angle$ QRD అగునా?

మీకు తెలుసు $\angle$ PQA $=\angle$ QRC ..............(1)

(సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం)

$\angle$ PQA $=\angle$ BQR అగునా? అవును! (ఎందుకు?) ..............(2)

(1), (2) ల నుండి $\angle$ BQR $=\angle$ QRC అని నిర్ధారించవచ్చు

ఇదే విధంగా $\angle$ AQR $=\angle$ QRD

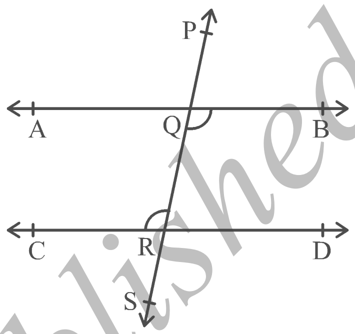
ఈ ఫలితాన్ని క్రింద ఇవ్వబడిన సిద్ధాంతంగా చెప్పవచ్చు

**సిద్ధాంతం 3.2 :** రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడే ప్రతి పర్యాయ అంతర కోణాల జత సమానంగా ఉంటాయి.

సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం విపర్యమునుపయోగించుకొని, ఒక జత పర్యాయ అంతర కోణాలు సమానమైతే రెండు రేఖలు సమాంతరమని చూపగలమా? చిత్రం 3.22 లో PS తిర్యగ్రేఖ, AB మరియు CD రేఖలను Q మరియు R బిందువుల వద్ద $\angle$ BQR = $\angle$QRC అగునట్లు ఖండిస్తుంది AB || CD అగునా?

$\angle$ BQR =$\angle$ PQA (ఎందుకు?) (1)

కాని $\angle$ BQR =$\angle$ QRC (ఇవ్వబడినది) (2)



చిత్రం : 3.22

(1) మరియు (2) ల నుండి $\angle$ PQA =$\angle$ QRC అని నిర్ధారించవచ్చు.

కాని అవి సదృశ కోణాలు

కాబట్టి AB || CD (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం విపర్యం)

ఈ ఫలితాలను సిద్ధాంతంగా క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు

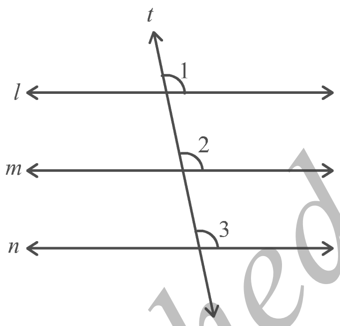
**సిద్ధాంతం 3.3 :** రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు, ఒక జత పర్యాయ అంతర కోణాలు సమానమైతే, ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. అదేవిధంగా తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలకు సంబంధించి, క్రింద ఇవ్వబడిన సిద్ధాంతాలను పొందవచ్చు.

**సిద్ధాంతం 3.4 :** రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు, తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునగల అంతర కోణాల జత పరిపూరకాలు.

**సిద్ధాంతం 3.5 :** రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు, తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల ఒక జత అంతర కోణాలు పరిపూరకాలైతే, ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

క్రిందటి తరగతులలో మీరు కార్యాచరణాల ద్వారా పైన ఇవ్వబడిన స్వయం సిద్ధాలు మరియు సిద్ధాంతాలను నిరూపించారు. ఆ కార్యాచరణాలను మీరు మరల చేయవచ్చు.

## 3.6 ఒకే రేఖకు సమాంతరంగావున్న రేఖలు



చిత్రం : 3.23

రెండు రేఖలు ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే అవి ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయా? దానిని పరిశీలిద్దాం చిత్రం 3.23చూడండి. చిత్రంలో రేఖ $m \parallel$ రేఖ $l$ మరియు రేఖ $n \parallel$ రేఖ $l$

$l$, $m$ మరియు $n$ రేఖలకు తిర్యగ్రేఖ $t$ ని గీద్దాం. రేఖ $m \parallel$ రేఖ $l$ మరియు రేఖ $n \parallel$ రేఖ $l$ అని ఇవ్వబడినది

అందువలన $\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 1 = \angle 3$ (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం) అపుడు $\angle 2 = \angle 3$ (ఎందుకు?)

కాని $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ సదృశ కోణాలు మరియు అవి సమానం.

కాబట్టి రేఖ $m \parallel$ రేఖ $n$ అని చెప్పవచ్చు

(సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం యొక్క విపర్యం)

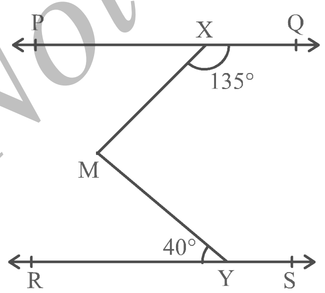
ఈ ఫలితాన్ని క్రింది సిద్ధాంతం రూపంలో చెప్పవచ్చు

**సిద్ధాంతం 3.6 :** ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉండేరేఖలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి

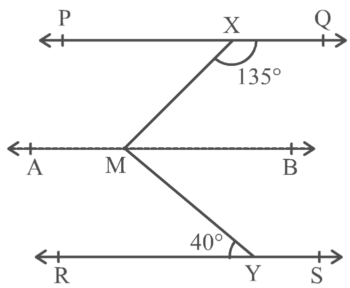
**గమనిక :** పైన చెప్పబడిన ధర్మం రెండు కంటే ఎక్కువ రేఖలకు కూడా అన్వయించవచ్చు

ఇపుడు సమాంతర రేఖలకు సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలను సాధిద్దాం

**ఉదాహరణ 4 :** చిత్రం 3.24 లో $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 135°$, $\angle MYR = 40°$ అయితే $\angle XMY$ ను కనుగొనండి.



చిత్రం : **3.24**



చిత్రం : **3.25**

**సాధన :** చిత్రం 3.25 లో చూపిన విధంగా M గుండా PQ కి సమాంతరంగా AB రేఖనుగీయండి. ఇప్పుడు AB || PQ మరియు PQ || RS

కాబట్టి AB || RS (ఎందుకు?)

ఇపుడు $\angle QXM + \angle XMB = 180°$

(AB || PQ , XM తిర్యగ్రేఖకి ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలు)

కాని $\angle QXM = 135°$

కావున $135° + \angle XMB = 180°$

$\angle XMB = 45°$ ............... (1)

ఇపుడు $\angle BMY = \angle MYR$ (AB || RS, పర్యాయకోణాలు)

కాబట్టి $\angle BMY = 40°$ ............... (2)

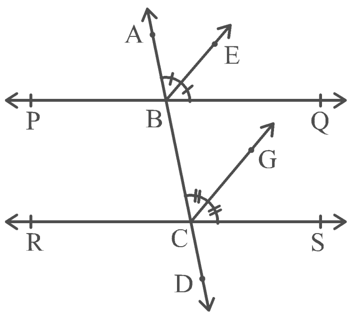
(1) మరియు (2) లను కూడగా

$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$

$\angle XMY = 85°$



**ఉదాహరణ 5:** రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు సదృశ కోణాల సమద్విఖండన రేఖలు సమాంతరం గా ఉంటే, ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయని నిరూపించండి.




చిత్రం : **3.26**

**సాధన :** చిత్రం 3.26 లో AD తిర్యగ్రేఖ PQ మరియు RS అను రెండు రేఖలను క్రమంగా B మరియు C బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. BE రేఖ $\angle ABQ$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ మరియు CG రేఖ $\angle BCS$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ మరియు BE || CG.

మనము PQ || RS అని నిరూపించాలి.

BE కిరణం $\angle ABQ$ యొక్క సమద్విఖండనరేఖ అని ఇవ్వబడినది.

కాబట్టి $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

ఇదేవిధంగా CG కిరణం, $\angle BCS$ యొక్క సమద్విఖండనరేఖ.

కాబట్టి $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

కాని $BE \| CG$ మరియు AD తిర్యగ్రేఖ

కాబట్టి $\angle ABE = \angle BCG$ (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం) (3)

(1) మరియు (2) లను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా

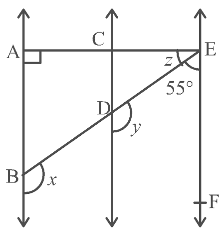
$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

అంటే $\angle ABQ = \angle BCS$

కాని అవి AD తిర్యగ్రేఖ, PQ మరియు RS రేఖలతో ఏర్పడిన సదృశ కోణాలు మరియు అవి సమానం కాబట్టి $PQ \| RS$ (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం) విపర్యం

**ఉదాహరణ 6 :** చిత్రం 3.27 లో, $AB \| CD$ మరియు $CD \| EF$ అంతేకాక $EA \perp AB$.

$\angle BEF = 55^\circ$ అయిన $x, y$ మరియు $z$ విలువలు కనుగొనండి.




చిత్రం : **3.27**

**సాధన:** $y + 55^\circ = 180^\circ$ (ED తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు)

కాబట్టి $y = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

మరల $x = y$ ($AB \| CD$ సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం)

కాబట్టి $x = 125^\circ$

ఇప్పుడు $AB \| CD$ మరియు $CD \| EF$ . కాబట్టి $AB \| EF$

కాబట్టి $\angle EAB + \angle FEA = 180^\circ$

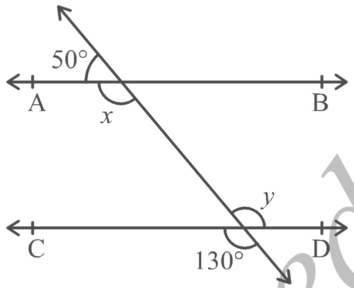
(EA తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలు)

$$90^\circ + Z + 55^\circ = 180^\circ$$

$$Z = 35^\circ$$

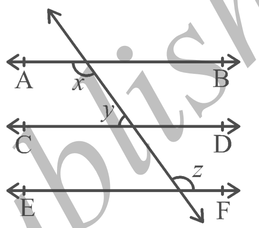
## అభ్యాసం 3.2

(1) చిత్రం 3.28లో $x$ మరియు $y$ విలువలను కనుగొని AB || CD అని చూపండి.



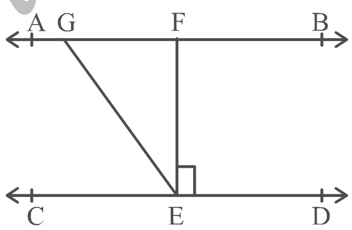

చిత్రం : 3.28

(2) చిత్రం 3.29 లో AB || CD, CD || EF మరియు $y : z = 3:7$ అయిన $x$ ను కనుగొనండి.



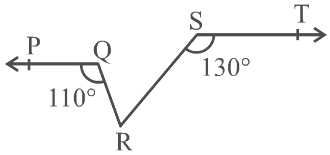

చిత్రం : 3.29

(3) చిత్రం 3.30 లో AB || CD, EF ⊥ CD మరియు $\angle GED = 126°$ అయిన $\angle AGE$, $\angle GEF$ మరియు $\angle FGE$ లను కనుగొనండి.



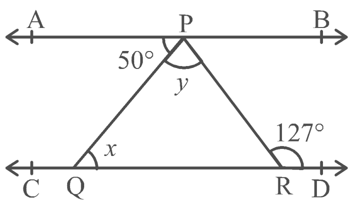

చిత్రం : 3.30

(4) చిత్రం 3.31 లో PQ || ST, $\angle PQR = 110°$ మరియు $\angle RST = 130°$ అయిన $\angle QRS$ ని కనుగొనండి (సూచన: ST కి సమాంతరంగా R బిందువు గుండా ఒక రేఖను గీయండి)



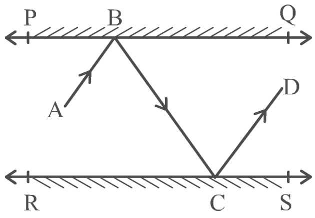

చిత్రం : 3.31

(5) చిత్రం 3.32 లో AB || CD, $\angle APQ = 50°$ మరియు $\angle PRD = 127°$ అయిన $x$ మరియు $y$ లను కనుగొనండి.




చిత్రం : 3.32

(6) చిత్రం 3.33 లో PQ మరియు RS అను రెండు దర్పణాలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉన్నాయి. ఒక పతన కిరణం AB , PQ దర్పణమును B వద్ద తాకితే, దాని పరావర్తన కిరణం BC మార్గంలో ప్రయాణించి RS దర్పణమును C వద్ద తాకి మరల CD మార్గం లో వెనుకకు పరావర్తనం చెందుతుంది: AB || CD అని నిరూపించండి.



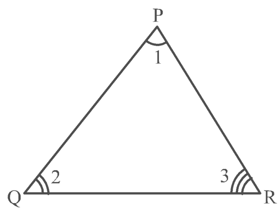
చిత్రం : 3.33

## 3.7: త్రిభుజము యొక్క కోణాల మొత్తం ధర్మం

క్రిందటి తరగతులలో త్రిభుజం యొక్క అన్నికోణాల మొత్తం $180^o$ అని కార్యాచరణాల ద్వారా అధ్యయనం చేశారు. మనము సమాంతర రేఖలకు సంబంధించిన స్వయం సిద్ధాలు మరియు సిద్ధాంతాలనుపయోగించి ఈ వ్యాఖ్యను నిరూపించవచ్చు.

**సిద్ధాంతం 3.7:** ఒక త్రిభుజం యొక్క కోణాలమొత్తం $180^0$

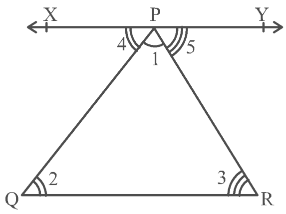
**ఉపపత్తి :** ప్రశ్న ఇవ్వబడిన వ్యాఖ్యలో ఏమి ఇవ్వబడినది, అంటే దత్తాంశం మరియు నిరూపించవలసిన వాటిని గురించి పరిశీలిద్దాం. మనకు PQR త్రిభుజము ఇవ్వబడినది. $\angle 1$, $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ లు త్రిభుజము PQR యొక్క కోణాలు (చిత్రం 3.34 చూడండి.)



చిత్రం : 3.34

మనము $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$ అని నిరూపించాలి

చిత్రం 3.35 లో చూపిన విధంగా QR కి సమాంతరంగా, దాని ఎదుటి శీర్షంను P గుండా ఒక రేఖXPY ని గీద్దాం. ఇపుడు మనము సమాంతర రేఖల ధర్మాలను ఉపయోగించవచ్చు.



చిత్రం : 3.35

XPY ఒక సరళరేఖ

అందువలన $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$ (1)

కాని XPY || QR మరియు PQ, PR లు తిర్యగ్రేఖలు

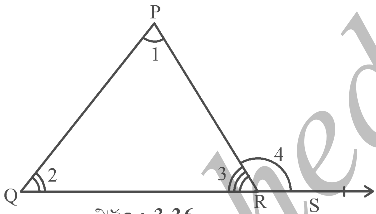
కాబట్టి $\angle 4 = \angle 2$ మరియు $\angle 5 = \angle 3$ (పర్యాయకోణాల జతలు)

$\angle 4$ మరియు $\angle 5$ లను (1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$$

అంటే $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

క్రిందటి తరగతులలో మీరు త్రిభుజము యొక్క బాహ్యకోణమును నిర్మించడం గురించి అధ్యయనం చేశారు. (చిత్రం 3.36 చూడండి). QR భుజం, S వరకు పొడిగించ బడింది. $\angle PRS$ ను త్రిభుజము PQR యొక్క బాహ్యకోణం అంటారు.



చిత్రం : 3.36

$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ అవుతుందా? (ఎందుకు?) (1)

అంతేకాక $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (ఎందుకు?) (2)

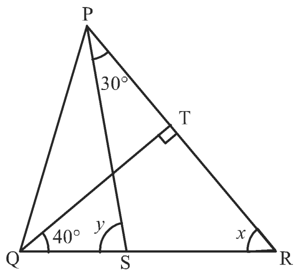
(1) మరియు (2) ల నుండి $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ అవుతుంది.

ఈ ఫలితాన్ని క్రింది విధంగా ఒక సిద్ధాంతం రూపంలో చెప్పవచ్చు.

**సిద్ధాంతం 3.8:** ఒక త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజమును పొడిగించగా ఏర్పడు బాహ్యకోణం దాని యొక్క రెండు అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము. పై సిద్ధాంతము నుండి, ఒక త్రిభుజము యొక్క బాహ్యకోణము, దాని ప్రతి అంతరాభిముఖ కోణం కంటే పెద్దదని స్పష్టమవుతుంది,

పైన నేర్చుకున్న సిద్ధాంతాల ఆధారంగా కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

**ఉదాహరణ 7:** చిత్రం 3.37 లో $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40^\circ$ మరియు $\angle SPR = 30^\circ$ అయిన $x$ మరియు $y$ లను కనుగొనండి.



చిత్రం : 3.37

**సాధన :** $\Delta TQR$ లో $90° + 40° + x = 180°$ (త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం ధర్మం)

కావున $x = 50°$

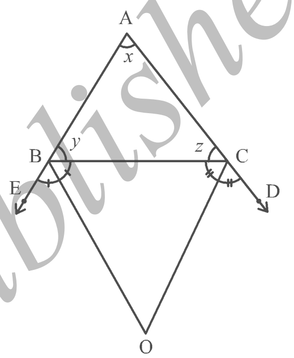
ఇపుడు $y = \angle SPR + x$ (సిద్ధాంతం 3.8)

అందువలన $y = 30° + 50°$

$y = 80°$

**ఉదాహరణం 8:** చిత్రం 3.38 లో $\Delta ABC$ యొక్క భుజాలు AB మరియు AC లు క్రమంగా E మరియు D బిందువుల వరకు పొడిగించ బడినవి. $\angle CBE$ మరియు $\angle BCD$ ల సమద్విఖండన రేఖలు క్రమంగా BO మరియు CO లు O బిందువు వద్ద ఖండించినవి.

$\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$ అని నిరూపించండి.




చిత్రం : 3.38

**సాధన:** BO కిరణం $\angle CBE$ యొక్క సమద్విఖండనరేఖ

కావున $\angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE$

$= \frac{1}{2}(180° - y)$

$= 90° - \frac{y}{2}$ ..............(1)

ఇదేవిధంగా CO కిరణం $\angle BCD$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ. కాబట్టి

$\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$

$= \frac{1}{2}(180° - z)$

$= 90 - \frac{z}{2}$ ..............(2)

$\Delta BOC$ లో $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180°$ ..............(3)

(1) మరియు (2) లను (3) లో సూక్ష్మీకరించగా

$\angle BOC + 90° - \frac{z}{2} + 90° - \frac{y}{2} = 180°$

కాబట్టి $\angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$

లేదా $\angle BOC = \frac{1}{2}(y + z)$ ..............(4)

కాని $x + y + z = 180°$ (త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం ధర్మం)

అందువలన, $y + z = 180° - x$ కాబట్టి (4) నుండి.

$\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - x)$

$= 90° - \frac{x}{2}$

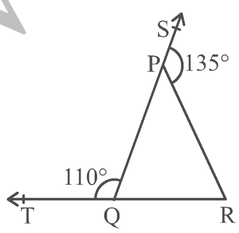
$= 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$

### అభ్యాసం 3.3

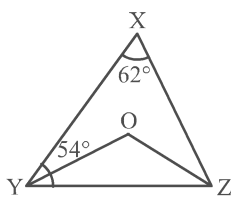
(1) చిత్రం 3.39 లో $\Delta PQR$ యొక్క QP మరియు RQ భుజాలు క్రమంగా S మరియు T బిందువుల వరకు పొడిగించబడినవి $\angle SPR = 135°$ మరియు $\angle PQT = 110°$ అయిన $\angle PRQ$ ని కనుగొనండి.

(2) చిత్రం 3.40 లో $\angle X = 62°$, $\angle XYZ = 54°$. $\Delta XYZ$ యొక్క కోణాలు $\angle XYZ$ మరియు $\angle XZY$ల సమద్విఖండన రేఖలు క్రమంగా YO మరియు ZO అయిన $\angle OZY$ మరియు $\angle YOZ$ లను కనుగొనండి

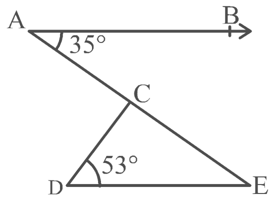
(3) చిత్రం 3.41 లో AB || DE, $\angle BAC = 35°$ మరియు $\angle CDE = 53°$ అయిన $\angle DCE$ నికనుగొనండి.



చిత్రం : 3.39



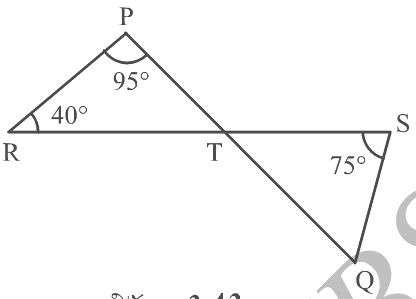
చిత్రం : 3.40



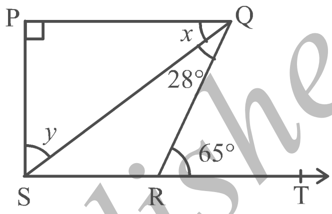
చిత్రం : 3.41

(4) చిత్రం 3.42 లో PQ మరియు RS రేఖలు T బిందువు వద్ద ఖండించినప్పుడు $\angle PRT = 40°$, $\angle RPT = 95°$ మరియు $\angle TSQ = 75°$ అయిన $\angle SQT$ ని కనుగొనండి.

(5) చిత్రం 3.43 లో $PQ \perp PS$, $PQ \parallel SR$, $\angle SQR = 28°$ మరియు $\angle QRT = 65°$ అయిన $x$ మరియు $y$ విలువలను కనుగొనండి.

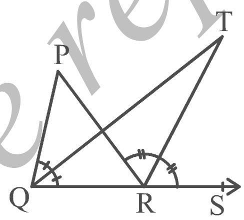



చిత్రం : 3.42




చిత్రం : 3.43

(6) చిత్రం 3.44 లో $\Delta PQR$ యొక్క భుజం QR , S బిందువు వరకు పొడిగించబడినది. $\angle PQR$ మరియు $\angle PRS$ ల సమద్విఖండన రేఖలు T బిందువు వద్ద కలిసిన $\angle QTR = \frac{1}{2}\angle QPR$ అని నిరూపించండి.




చిత్రం : 3.44

## 3.8 సారాంశం:

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

1. ఒక కిరణం, ఒక రేఖ మీద నిలబడితే ఏర్పడిన రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180° ఉంటుంది మరియు దీనికి విపర్యంగా కూడా అవుతుంది ఈ ధర్మమును సరళయుగ్మ స్వయం సిద్ధం అంటారు.

2. రెండు రేఖలు పరస్పరం ఖండించినప్పుడు, శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం.

3. ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు సమాంతర రేఖలను ఖండించినప్పుడు.

   (i) సదృశ కోణాల జతలు సమానంగా ఉంటాయి

   (ii) పర్యాయ అంతర కోణాల జతలు సమానంగా ఉంటాయి.

   (iii) తిర్యగ్రేఖకి ఒకే వైపున గల అంతరకోణాల జతలు పరిపూరకాలు.

4. రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు

   (i) ఏదైనా ఒక జత సదృశకోణాలు సమానము, లేక

   (ii) ఏదైనా ఒక జత పర్యాయ అంతర కోణాలు సమానం లేక

   (iii) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల ఏదైనా ఒక జత అంతరకోణాలు పరిపూరకాలయితే ఆ రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

5. ఇచ్చిన రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న రేఖలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయి.

6. ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాల మొత్తం 180º ఉంటుంది.

7. ఒక త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజమును పొడిగించగా ఏర్పడు బాహ్యకోణం, దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

# అధ్యాయం – 4

## బహుపదులు

### 4.1 పరిచయం

మీరు బీజోక్తులు వాటి సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం మరియు భాగహారాల గురించి వెనుకటి తరగతులలో నేర్చుకొన్నారు. మీరు కొన్ని బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన ఎలా చేయాలో కూడా నేర్చుకున్నారు. మీరు ఈ క్రింద బీజీయ సరళ సమీకరణాలను జ్ఞాపకం చేసుకోండి.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
మరియు $$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

మరియు కారణాంక విభజనలో వాటి ఉపయోగాన్ని జ్ఞాపకం చేసుకోండి. ఈ అధ్యాయంలో మీరు బహుపదోక్తి అనబడే ఒక నిర్దిష్ట బీజీయ పదాలలో మరియు దానికి సంబంధించిన పదాలను మన అభ్యాసాన్ని ప్రారంభిద్దాం. ఇప్పుడు బహుపదుల యొక్క వివిధ రూపాలను నేర్చుకోవడం. ఇదేవిధంగా శేష సిద్ధాంతం మరియు కారణాంక సిద్ధాంతాల ఆధారంగా బహుపదులను కారణాంక విభజన చేయడం తెలుసుకొందాం.

### 4.2. ఏక చరరాశిలో బహుపదులు

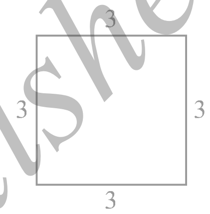
ప్రతి చరరాశిని సూచించడానికి ఒక గుర్తు (అక్షరం) వాడతామని, చరరాశి ఏ వాస్తవ విలువనైనా తీసుకుంటుందని మనకు తెలుసు.

మనం సాధారణంగా చరరాశులను సూచించడానికి $x, y, z...$ మొదలగు అక్షరాలు వాడతాం. అందుచేత $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ వంటి వాటిని చరరాశి $x$ లో గల బీజీయ సమాసాలు అంటాం.

ఈ సమాసాలన్నీ ఒక స్థిరరాశి × రూపంలో ఉంటాయి. ఇప్పుడు మనం ఒక బీజీయ సమాసాన్ని (ఒక స్థిరరాశి) × (ఘాతరూపంలో గల ఒక చరరాశి) రూపంలో రాయాలనుకుంటే మరియు స్థిరాంకం ఏదేని తెలియకుంటే స్థిరాంకాలను $a, b, c...$ మొదలైన అక్షరాలలో రాస్తాం. కావున బీజీయ సమాసాలను సాధారణంగా $ax$, $by$, $cz$ ....... మొదలగు విధంగా రాస్తాం.

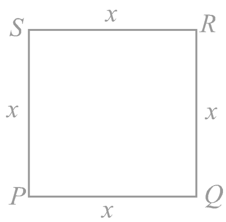
అలాగే ఒక స్థిరాంకాన్ని సూచించే అక్షరం మరియు ఒక చరరాశి సూచించే అక్షరాల మధ్య వ్యత్యాసం కలదు. స్థిరాంకాల విలువ ఒక నిర్దిష్ట సందర్భాలకు ఒక విధంగా ఉంటుంది. అంటే ఇచ్చినటువంటి సమస్యలో స్థిరాంకాల విలువ మారదు అయితే చరరాశి విలువ మారవచ్చు.

ఇప్పుడు చతురస్ర భుజం కొలత '3' యూనిట్లు అనుకొందాం (చిత్రం 4.1) చూడండి. దాని చుట్టుకొలత ఎంత? ఒక చతురస్రపు చుట్టుకొలత దాని నాలుగు భుజాల పొడవుల మొత్తం అని మీకు తెలుసు. ప్రతి ఒక భుజం మూడు యూనిట్లు కలదు కావున దాని చుట్టుకొలత $4 \times 3 = 12$ యూనిట్లు చతురస్రపు ప్రతి భుజం కొలత 10 యూనిట్లు అయితే దాని చుట్టుకొలత ఎంత? చుట్టుకొలత $4 \times 10 = 40$ యూనిట్లు.



చిత్రం 4.1

ఒక చతురస్రపు త్రిభుజం పొడవు '$x$' యూనిట్లు (చిత్రం 4.2 చూడండి) చుట్టుకొలత $4x$ యూనిట్లు అవుతుంది. ఇలా భుజాల పొడవులు మారుతున్న కొద్దీ చుట్టుకొలత కూడా మారుతుంది. PQRS చతురస్రపు వైశాల్యాన్ని మీరు కనుగొనగలరా? అది $x \times x = x^2$ చ॥యూ॥ $x^2$ క బీజీయ సమాసం. మీరు ఇదేవిధంగా $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ఇలాంటి బీజీయ సమాసాల గురించి తెలుసుకొని ఉన్నారు. ఇంతవరకు మీరు తీసుకొన్న బీజీయ సమాసాలలో చరరాశుల ఘాతసూచ్యాంకాలన్నీ పూర్ణసంఖ్యలని గమనించండి. ఈ రూపంలో బీజీయ సమాసంకు ఒక చరరాశి గల బహుపదులు అంటారు. పై ఉదాహరణంలో '$x$' చరరాశి ఉదాహణరకు $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ఇది $x$ చరరాశి గల బహుపది. అదేవిధంగా, $3y^2 + 5y$ ఇది $y$ చరారాశి గల బహుపది $t^2 + 4$ ఇది $t$ చరరాశి గల బహుపది.



చిత్రం 4.2

$x^2 + 2x$ ఈ బహుపదిలో బీజీయపదాలైన $x^2$ మరియు $2x$ వాటిని బహుపదిలోని పదాలు అంటారు. ఇదేవిధంగా $3y^2 + 5y + 7$ ఈ బహుపది $3y^2$, $5y$ మరియు 7 ఈ మూడు పదాలను కలిగి ఉన్నది. $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ఈ బహుపదిలోని పదాలను మీరు రాయగలరా? ఈ బహుపదిలోని పదాలు $-x^3$, $4x^2$, $7x$ మరియు 2.

ఒక బహుపదిలోని ప్రతి పదం సహగుణకాలను కలిగి ఉన్నది. కావున $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ఇందులో $x^3$ యొక్క సహగుణకం $-1$, $x^2$ యొక్క 4, $x$ యొక్క సహగుణకం 7 మరియు $-2$ $x^0$ యొక్క సహగుణకం దీనిలో $(x^0 = 1)$ అని గుర్తుంచుకోండి $x^2 - x + 7$ లో $x$ యొక్క సహగుణకం తెలుసా? అది $-1$.

2 కూడా ఒక బహుపది నిజానికి 2, – 5, 7 మొదలైనవి స్థిర బహుపదులకు ఉదాహరణలు స్థిరబహుపదిని '0' శూన్యబహుపది అంటారు. ఇది అన్ని బహుపదులలో ప్రముఖ పాత్ర వహిస్తుం దని పై తరగతులలో తెలుసుకొంటారు.

ఇప్పుడు, $x+\frac{1}{x}, \sqrt{x}+3$ మరియు $3\sqrt{y}+y^2$ ఈ విధమైన బీజీయ సమాసాలను తీసుకోండి. $x+\frac{1}{x} = x + x^{-1}$ అని రాయవచ్చు అని మీకు తెలుసా? ఇక్కడ రెండవ పదం $x^{-1}$ యొక్క ఘాత సూచి $-1$ అది పూర్ణసంఖ్య కాదు. కావున ఈ బీజీయ సమాసం బహుపదికాదు. మరల $\sqrt{x}+3$ ని $x^{\frac{1}{2}}+3$ అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ $x$ యొక్క ఘాతసూచి $\frac{1}{2}$ ఇది పూర్ణ సంఖ్యకాదు. కావును $\sqrt{x}+3$ ఒక బహుపదా? బహుపదికాదు. (ఎందుకు)

ఒక బహుపదిలో చరరాశి '$x$' అయితే మనం ఆ బహుపదిని $p(x)$ లేదా $q(x)$ లేదా $r(x)$ మొదట వాటిలో సూచించవచ్చు. ఉదాహరణకు మనం క్రింది విధముగా రాయవచ్చు.

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

ఒక బహుపది ఎన్ని పదాలైనా (పరిమిత) కలిగి ఉండవచ్చు. ఉదా॥ $x^{150} + x^{149} + ..... + x^2 + x + 1$ ఇది 151 పదాలు గల బహుపది.

$2x, 2, 5x^3, -5x^2, y$ మరియు $u^4$ ఈ బహుపదులను తీసుకోండి. ఈ బహుపదులన్నీ కేవలం ఒక బహుపదాన్నేకలిగిఉన్నాయనిచూశారు?కేవలంఒకేపదంమాత్రమేకలిగిఉన్నబహుపదులనుఏకపది అంటాం (ఏక అంటే ఒకటి) ఇప్పుడు క్రింది బహుపదు లన్నింటిని గమనించండి.

$p(x) = x + 1$ $\quad q(x) = x^2 - x$ $\quad r(y) = y^{30} + 1$ $\quad t(u) = u^{43} - u^2$

పై బహుపదులలో ఎన్ని పదాలు ఉన్నాయి. ఈ ప్రతి బహుపదలలో కేవలం రెండు పదాలను కలిగి ఉన్నాయి. కేవలం రెండు పదాలను మాత్రమే కలిగి ఉన్న బహుపదులను ద్విపదులు అంటారు. (ద్వి అంటే '2') ఉదా॥ $q(x) = x^2 - x$

అదేవిధంగా మూడు పదాలను కలిగిన బహుపదులను త్రిపదులు అంటారు (త్రి అంటే '3')

ఉదా॥ $p(x) = x + x^2 + \pi$ $q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$ $r(u) = u + u^2 - 2$ $t(y) = y^4 + y + 5$

ఇప్పుడు $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ఈ బహుపదిని చూడండి. గరిష్ఠ ఘాతసూచిని కలిగిన పదం ఏదో అంటే $3x^7$ ఈ పదంలో $x$ యొక్క ఘాతసూచి '7' $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$, ఈ బహుపదిలో $y$ యొక్క గరిష్ఠ ఘాత సూచిక కలిగిన పదం $5y^6$ మరియు ఈ పదంలో $y$ యొక్క '6' మనం ఒక బహుపదిలో చరరాశి యొక్క గరిష్ఠ ఘాతసూచిని ఆ బహుపది యొక్క "బహుపది పరిమాణం" అంటాం.

కావున $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ఈ బహుపదుల పరిమాణం (డిగ్రి) '7' మరియు $5y^6 - 4y^2 - 6$ ఈ బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) '6' శూన్యంకాని ఒక స్థిరబహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) '0' అవుతుంది.

**ఉదా 1 :** క్రింది బహుపదుల పరిమాణం(డిగ్రి)ను కనుగొనండి.

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

**సాధన :** (i) చరరాశి గరిష్ఠ ఘాత సూచి '5' కావున ఈ బహుపది పరిమాణం '5'

$x^5 - x^4 + 3$

(ii) చరరాశి గరిష్ఠ ఘాతసూచి '8' కావున ఈ బహుపది పరిమాణం '8'

$2 - 4^2 - 4^3 + 2y^8$

(iii) 2 ఇక్కడ ఒకే ఒక పదం '2' దీనిని $2x^\circ$ అని రాయవచ్చు. కావున $x$ యొక్క ఘాతసూచి '0' కావున ఈ బహుపది పరిమాణం '0'.

ఇప్పుడు $p(x) = 4x + 5$ $q(y) = 2y$ $r(t) = t + \sqrt{2}$ మరియు $s(u) = 3u$

ఈ బహుపదులను గమనించండి. మీరు వీటిలో ఏదైనా సామాన్య అంశాన్ని గమనించారా? ప్రతి బహుపదిలో బహుపది పరిమాణం ఒకటి అయింది. బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి)1 అయిన బహుపదులను 'రేఖీయ బహుపదులు' అంటారు. ఒక చరరాశిగల మరికొన్ని బహుపదులు అంటే $2x-1$, $\sqrt{2}y+1$, $2-u$. ఇప్పుడు మూడు పదాలు గల 'x' చరరాశులను కలిగిన రేఖీయ బహుపదులను రాయడానికి ప్రయత్నించండి. మీరు వాటిని రాయడానికి సాధ్యంకాదు. ఎందుకంటే ఒకచరరాశితో కూడిన రేఖీయ బహుపది ఒక ఏకపది అయినను ఒక ద్విపది కలిగి

ఉండడానికి సాధ్యం కావున '$x$' చరరాశి ఏక రేఖీయ బహుపది యొక్క $ax + b$ రూపంలో ఉంటుంది (ఇక్కడ, $a$ మరియు $b$ లు స్థిరాంకాలు మరియు $a \neq 0$ (ఎందుకు) అలాగే $ay + b$ ఇది '$y$' చరరాశి గల ఒక రేఖీయ బహుపది.

ఇప్పుడు $2x^2 + 5$, $5x^2 + 3x + \pi$, $x^2$ మరియు $x^2 + \frac{2}{5}x$ ఈ బహుపదులను తీసుకోండి.

వాటి బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) '2' అని మీరు ఒప్పుకుంటారా? బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) 2 అయిన ఒక బహుపదికి వర్గబహుపది అంటారు. వర్గ బహుపదికి కొన్ని ఉదాహరణలు అంటే $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ మరియు $6 - y - y^2$. ఒక చరరాశిగల నాలుగు వేర్వేరు పదాలను కలిగిన ఒక వర్గ బహుపదిని మీరు రాయగలరా? ఒక చరరాశి గల ఒక వర్గ బహుపది గరిష్ఠం మూడు పదాలను కలిగి ఉండడాన్నే మీరు చూస్తారు. మీరు మరికొన్ని వర్గబహుపదులను పట్టీచేస్తే $x$ చరరాశి గల వర్గబహుపదులు $ax^2 + bx + c$ రూపంలో ఉంటాయి. (ఇక్కడ $a, b, c$ లు స్థిరాంకాలు) అలాగే $a \neq 0$ అనుటను తెలుసుకోండి. ఇదేవిధంగా $y$ చరరాశిగల వర్గ బహుపది $ay^2 + by + c$ రూపంలో ఉంటుంది. (ఇక్కడ $a, b, c$ లు స్థిరాంకాలు) అలాగే $a \neq 0$.

డిగ్రి 3 అయిన ఒక బహుపదిని మనం ఒక ఘన బహుపది అంటాం.'$x$' చరరాశిగల ఘనబహుపదికి కొన్ని ఉదాహరణలు :

$4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$. ఒక చరరాశి గల ఘన బహుపదిలో ఎన్ని పదాలు ఉండవచ్చు అని మీరు అనుకొంటున్నారు? అవి గరిష్ఠంగా నాలుగు పదాలను కలిగి ఉండవచ్చు. దీనిని $ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d$ లు స్థిరాంకాలు మరియు $a \neq 0)$ రూపంలో రాయవచ్చు. ఒకటవ పరిమాణం, రెండవ పరిమాణం, మూడవ పరిమాణం గల బహుపదులు ఎలా ఉంటాయని మీరు చూశారు. ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య '$n$' అయినపుడు '$n$' వ పరిమాణం (డిగ్రి) కలిగిన ఒక చరరాశి గల బహుపదిని రాయగలరా? ఒక చరరాశిగల '$n$' వ పరిమాణం (డిగ్రి) కలిగిన ఒక బహుపది సమాసాన్ని రాయవచ్చు.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .... + a_1 x + a_0$$

ఇందులో $a_0, a_1, a_2 .... a_n$ లు స్థిరరాశులు మరియు $a_n \neq 0$ రూపంలో రాయవచ్చు.

ప్రత్యేక సందర్భంలో, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 .... = a_n = 0$ (అంటే అన్ని గుణకాలు సున్నాలు) అయితే మనకి 'శూన్య బహుపది' వస్తుంది. దీనిని '0' గా సూచిస్తారు.

'సున్న' యొక్క పరిమాణాన్ని చెప్పగలరా? దీనిని నిర్వచించలేము. ఎందుకనగా సున్నను చరరాశి యొక్క ఏ ఘాతాంకానికి హెచ్చించి లబ్ధంగా రాయలేము.

ఇంతవరకు మనం ఒక చరరాశి కలిగిన బహుపదుల గురించి వివరించాము. అంతకంటే $x^2 + y^2 + xyz$ $(x,y,z$ లు చరరాశులు$)$ ఉండి మూడు చరరాశులు గల బహుపది. అదేవిధంగా $p^2 + q^{10} + r$ $(p, q$ మరియు $r$ లు చరరాశులు$)$, $u^3 + v^2$ $(u$ మరియు $v$ లు చరరాశులు$)$ ఇది క్రమంగా మూడు మరియు రెండు చరరాశులగల బహుపదులు. మీరు అలాంటి బహుపదులను వివరంగా తెలుసుకుంటారు.

### అభ్యాసం 4.1

**1.** ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి ఏక చరరాశిగల బహుపదులు మరియు ఏవి కాదు. మీ జవాబుకు కారణాలను తెలపండి.

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \dfrac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

**2.** ఈ కింది వాటిలో $x^2$ యొక్క సహగుణకాలను రాయండి.

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\dfrac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

**3.** 35వ పరిమాణం (డిగ్రి) కరిగిన ఒక ద్విపది మరియు 100వ పరిమాణం (డిగ్రి) కలిగిన ఒక ఏక పదులకు ఒక్కొక్క ఉదాహరణ రాయండి.

**4.** క్రింది బహుపదులకు పరిమాణం (డిగ్రి) రాయండి.

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

**5.** క్రింది వాటిని రేఖీయ, వర్గమరియు ఘన బహుపదులుగా వర్గీకరించండి.

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) $r^2$ (vii) $7x^3$

## 4.3 బహుపది శూన్య విలువలు.

$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ అను బహుపదిని తీసుకొందాం

$p(x)$ లో అన్ని చోట్ల '$x$' కు '1' ని సూక్ష్మీకరించినచో,

$$\begin{aligned} p(1) &= 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2 \\ &= 5 - 2 + 3 - 2 \\ p &= 8 - 4 = 4 \\ &\boxed{p = 4} \end{aligned}$$

కావున $x = 1$ అయినప్పుడు $p(x)$ విలువ 4 అని చెబుతాము అలాగే,

$$p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$$
$$= -2$$

$p(-1)$ ను మీరు కనుగొనగలరా?

**ఉదాహరణ 2:** చరరాశులకు ఇచ్చిన విలువలలో ఈ క్రింది బహుపదుల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$, $x = 1$ అయినపుడు

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$, $y = 2$ అయినపుడు

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$, $t = a$ అయినపుడు

**సాధన :** (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ అయినపుడు బహుపది $p(x)$ విలువ

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$
$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ అయినపుడు బహుపది $q(y)$ విలువ

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ అయిన బహుపది $p(t)$విలువ

$$p(a) = 4a^2 + 5a^3 - a^2 + 6$$

ఇప్పుడు $p(x) = x - 1$ అని బహుపదిని తీసుకోండి.

$p(1)$ విలువ ఎంత? $p(1) = 1 - 1 = 0$ గమనించండి

$p(1) = 0$ అయినందువలన '1'ని మనం $p(x)$ కు శూన్యవిలువ అంటాము

అదేవిధంగా $q(x) = x - 2$ అయినప్పుడు '2' ను $q(x)$ కు శూన్యవిలువ అంటారా? పరిశీలించండి. సామాన్యంగా $p(c) = 0$ అయితే బహుపది $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువ '$c$' అవుతుంది.

బహుపది $x - 1$ యొక్క శూన్యవిలువ దీనిని సున్నకు సమానం చేయుట ద్వారా వచ్చిందని పరిశీలించి ఉంటారు. అంటే $x - 1 = 0$, $x = 1$ కావున $p(x) = 0$ అనేది $x$ చరరాశిలో గల బహుపది

అయితే $f(x) = 0$ ను $x$ లో బహుపది సమీకరణం అంటారు. పై ఉదాహరణలో $f(x) = 0$ అయిన సందర్భంలో '1' బహుపది $(x - 1)$ యొక్క మూలం అంటాము.

ఇప్పుడు ఒక స్థిర బహుపది 5ను పరిశీలిద్దాం. దీని యొక్క శూన్యవిలువ చెప్పగలరా? దీనికి శూన్యవిలువ లేదు. ఎందుకంటే $3 = 3x^0$ కావున $x$ యొక్క ఏ వాస్తవ విలువకు సున్న $3x^0$ కానేకాదు. అందుచే స్థిరబహుపదికి శూన్య విలువలు ఉండవు.

**ఉదాహరణ 3 :** $x + 2$ బహుపదికి $-2$ మరియు 2లు శూన్యవిలువలా? పరిశీలించండి.

**సాధన :** $p(x) = x + 2$ అనుకొంటే.

$p(2) = 2 + 2 = 4$ $\quad$ $p(-2) = -2 + 2 = 0$

కావున $-2$, $x + 2$ బహుపదికి శూన్యవిలువ అవుతుంది $+2$, శూన్యవిలువ కాదు.

**ఉదాహరణ 4 :** $p(x) = 2x + 1$ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనండి.

**సాధన :** $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనడం అంటే బహుపది సమీకరణం $p(x) = 0$ ను సాధన చేయడమే

అనగా, $2x + 1 = 0$

$$\therefore \; x = \frac{-1}{2}$$

కావున $2x + 1$ బహుపది శూన్యవిలువ $-\frac{1}{2}$ అయినది ఇప్పుడు $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$ ఒక రేఖీయ బహుపది. అయితే దీని యొక్క శూన్యవిలువను ఎలా కనుగొంటారు.

ఉదాహరణ 4 మీకు కొన్ని సూచనలు ఇచ్చి ఉండవచ్చు బహుపది $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువలను కనుగొనాలంటే, $p(x) = 0$ బహుపది సమీకరణాన్ని సాధించాలి అంటే

$$ax + b = 0, \; a \neq 0$$

కావున $ax = -b$

అనగా $x = \dfrac{-b}{a}$

అందుచే $x = \dfrac{-b}{a}$ అనేది $p(x) = ax + b$ యొక్క ఒకేఒక శూన్యవిలువ అయినది. "ఏక చరరాశిలో గల రేఖీయ బహుపదికి ఒకేఒక శూన్యవిలువ ఉంటుంది".

ఇప్పుడు మనం '1' ని $x - 1$ యొక్క శూన్యవిలువ మరియు '–2', $x + 2$ యొక్క శూన్య విలువ అని చెప్పవచ్చు.

**ఉదాహరణ 5:** $x^2 - 2x$ అనే బహుపదికి '2' మరియు '0' విలువలు శూన్యాలు అవుతాయో లేదో సరిచూడండి.

**సాధన :** $p(x) = x^2 - 2x$ అనుకొనుము

అప్పుడు $p(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$ అవుతుంది

మరియు $p(0) = 0^2 - 2(0) = 0 - 0 = 0$

కావుని '2' మరియు '0' అనేవి రెండుకూడా $x^2 - 2x$ యొక్క శూన్య విలువలు అయినాయి. మనం ఇపుడు మన పరిశీలనలను పట్టీ చేద్దాం

(i) ఒక బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ సున్నా (0) కానవసరం లేదు.

(ii) సున్నా (0) ఒక బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ అయి ఉండవచ్చు.

(iii) ప్రతి రేఖీయ బహుపది కేవలం ఒకేఒక శూన్య విలువను కలిగి ఉంటుంది.

(iv) ఒక బహుపది ఒకటి కంటే ఎక్కువ శూన్యవిలువలు కలిగి ఉండటానికి సాధ్యం అవుతుంది.

## అభ్యాసం 4.2

1. $5x + 4x^2 + 3$ అనేది బహుపది విలువలను $x$ విలువల వద్ద కనుగొనండి.

   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. క్రింది బహుపదులలో $p(0), p(1)$ మరియు $p(2)$విలువలను కనుగొనండి.

   (i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

   (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపదులలో $x$ యొక్క ఏ విలువలకు బహుపది శూన్యం అగునో, లేదో పరిశీలించండి.

   (i) $p(x) = 3x + 1 ;\ x = -\dfrac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi ;\ x = \dfrac{4}{5}$

   (iii) $p(x) = x^2 - 1 ;\ x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2) ;\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2 ; x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m ; x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1 ; x = \frac{1}{2}$

4. క్రింది బహుపదులకు శూన్యవిలువలు కనుగొనండి.

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax, a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d, c \neq 0, c, d$ లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

## 4.4 శేష సిద్ధాంతం

15 మరియు 6 అనే రెండు సంఖ్యలను తీసుకోండి. 15ను 6చేత భాగించినపుడు మనకు భాగలబ్ధం '2' శేషం '3' లభిస్తాయి అని మీకు తెలుసు. దీనిని ఎలా వ్యక్తపరుస్తామో అని జ్ఞాపకం ఉన్నదా ! మనం 15 ను ఈ విధంగా రాస్తాము.

$$15 = (2 \times 6) + 3$$

శేషం '3' భాజకం '6' కంటే తక్కువ అని మనం గమనించాము అలాగే '12'ను '6' చే భాగిస్తే $12 = (2 \times 6) + 0$ అవుతుంది. ఇక్కడ శేషం ఎంత? ఇక్కడ శేషం '0' అవుతుంది. మరియు '6' అనేది '12' కు కారణాంకం అవుతుంది. లేదా '12' అనేది '6' కు గుణిజం అవుతుంది. ఇపుడు ప్రశ్న ఏమిటంటే సంఖ్యలను భాగించినట్లుగానే బహుపదులను కూడా వేరొక బహుపదులలో భాగించగలమా చూద్దాం.

విభాజకము ఏకపది అయినపుడు ప్రయత్నిద్దాం కావున బహుపదోక్తి $2x^3 + x^2 + x$ ను ఏకపది '$x$' తో భాగిద్దాం

$$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$
$$= 2x^2 + x + 1$$

'$x$' అనేది ఇచ్చిన బహుపది $2x^3 + x^2 + x$ యొక్క అన్నిపదాలకు ఉమ్మడి కారణాంకం కావున మనం $2x^3 + x^2 + x$ ను $x(2x^2 + x + 1)$ అని రాయవచ్చు. $x$, $2x^2 + x + 1$ లు $2x^3 + x^2 + x$ యొక్క కారణాంకాలని చెబుతాము మరొక ఉదాహరణ $3x^2 + x + 1$ మరియు $x$ అనే బహుపదులను తీసుకోండి.

$(3x^2 + x + 1) \div x = \frac{3x^3}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 3x + 1 + \frac{1}{x}$ ఇది బహుపది అవుతుందా? ఈ సమాసంలో ఒక పదం $\frac{1}{x}$ అనేది ఋణేతర పూర్ణసంఖ్య ఘాతాంకం కాని చరరాశిని కలిగి ఉన్నది. (అనగా $\frac{1}{x} = x^{-1}$).

$3x + 1 + \frac{1}{x}$ అనేది బహుపదికాదు. అయితే ఈ భాగహారాన్ని నియమం ప్రకారం

$(3x^2 + x + 1) = \{(3x + 1)(x)\} + 1$ అని రాయవచ్చు. ఇందులో '1'ని మినహాయిస్తే మిగిలిన బహుపదిని రెండు బహుపదుల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. ఇచ్చట మనం $(2x + 1)$ ని భాగఫలం, $x$ ను విభాజకం మరియు '1'ని శేషం అంటాము. అందుచేత భాగహారంలో శేషం 'సున్న' కానందున $x$ను $3x^2 + x + 1$ అనే బహుపదికి కారణాంకం కాదని మనం గుర్తుంచుకోవాలి. ఇపుడు ఒక బహుపదిని శూన్యవిలువ కాని బహుపదిలో ఎలా భాగించాలో ఈ ఉదాహరణతో తెలుసుకుందాము.

**ఉదాహరణ 6:** $p(x) = x + 3x^2 - 1$ మరియు $g(x) = 1 + x$ అయినప్పుడు $p(x)$ ను $g(x)$ లో భాగించండి?

**సాధన :** క్రింది దశల ద్వారా మనం భాగహార క్రియను చేద్దాం.

**దశ 1:** మనం భాజ్యం $x + 3x^2 - 1$ ను మరియు భాజకం $1 + x$ ను ప్రామాణిక రూపంలో రాస్తాము అంటే పదాలను వాటి (డిగ్రి) పరిమాణం యొక్క అవరోహణ క్రమంలో రాస్తాము. అందువల్ల విభాజ్యం $3x^2 + x - 1$ మరియు విభాజకం $x + 1$ అవుతుంది.

**దశ 2:** మనం విభాజ్యం యొక్క మొదటి పదాన్ని విభాజకం యొక్క మొదటి పదంతో భాగిస్తాము. అంటే మనం $3x^2$ ను $x$ లో భాగిస్తాము మరియు $3x$ ను పొందుతాము. ఇది భాగలబ్ధపు మొదటి పదం అవుతుంది.

$\frac{3x^2}{x} = 3x$ = భాగలబ్ధపు మొదటి పదం

**దశ 3:** మనం భాజకాన్ని భాగలబ్ధం మొదటి పదంలో గుణిస్తాము మరియు ఈ గుణలబ్ధాన్ని భాజ్యం నుండి తీసివేస్తాము. అంటే $(x + 1)$ ను $3x$ చే గుణిస్తాము మరియు గుణలబ్ధం $3x^2 + 3x$ ను భాజ్యం $3x^2 + x - 1$ నుండి తీసివేస్తాము అపుడు శేషం $-2x - 1$ లభిస్తుంది.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x \\
\hline
x+1 & 3x^2 + x - 1 \\
 & 3x^2 + 3x \\
 & - \quad - \\
\hline
 & -2x - 1
\end{array}
$$

**దశ 4 :** శేషం $-2x-1$ ను మనం కొత్త భాజ్యంగా పరిగణిస్తాము. విభాజకము అలాగే ఉంటుంది. భాగలబ్ధపు తరువాతి పదాన్ని

$\frac{-2x}{x}=-2$

= భాగలబ్ధపు రెండవపదం

కొత్త భాగలబ్ధం

$= 3x-2$

పొందడానికి రెండవ దశనే పునరావృతం చేయాలి. అంటే మనం కొత్త విభాజ్యం మొదటి పదాన్నే విభాజకం మొదటి పదం $x$ లో భాగిస్తే $-2$ వస్తుంది. ఇది భాగలబ్ధంలో రెండవ పదం అవుతుంది.

**దశ 5 :** మనం విభాజకాన్ని విభాగలబ్ధం యొక్క రెండవ పదంలో గుణిస్తాము. మరియు గుణలబ్ధాన్ని విభాజ్యం నుండి తీసివేస్తాము. అంటే $(x+1)-2$ చే గుణిస్తాము మరియు గుణలబ్ధం $-2x-2$ ను విభాజ్యం $-2x-1$ నుండి తీసివేస్తాము. అపుడు శేషం '1' వస్తుంది.

$$
\begin{array}{r|l}
(x+1)(-2) & -2x-1 \\
=-2x-2 & -2x-2 \\
 & +\quad + \\
\hline
 & \quad +1
\end{array}
$$

కొత్త విభాజ్యపు (డిగ్రి) పరిమాణం విభాజకపు (డిగ్రి) పరిమాణం కంటే తక్కువ అయ్యేవరకు ఈ క్రియ కొనసాగుతుంది. ఈ దశలో కొత్త విభాజ్యం శేషం అవుతుంది మరియు భాగలబ్ధాల మొత్తం పూర్ణభాగలబ్ధాన్ని ఇస్తుంది.

**దశ 6:** ఇలా పూర్ణభాగలబ్ధం $(3x-2)$ మరియు శేషం '1' అవుతుంది. ఇప్పుడు పై క్రియలో మనం చేసిన దానిని సంపూర్ణంగా చూద్దాం.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x-2 \\
\hline
x+1 & 3x^2+x-1 \\
 & 3x^2+3x \\
 & -\quad - \\
\hline
 & \quad -2x-1 \\
 & \quad -2x-2 \\
 & \quad +\quad + \\
\hline
 & \qquad 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$3x^2+x-1=(x+1)(3x-2)+1$ అయినది గమనించండి

అంటే **విభాజ్యం = (విభాజకం × భాగఫలం) + సామాన్యంగా**

$p(x)$ యొక్క పరిమాణం $\geq g(x)$ యొక్క పరిమాణం (డిగ్రి) $g(x)\neq 0$ అగునట్లు $p(x)$ మరియు $g(x)$ లు రెండు బహుపదులైతే అప్పుడు మనం

$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$ అగునట్లు $q(x)$ మరియు $r(x)$ బహుపదులను పొందుతాము.

ఇక్కడ $r(x) = 0$ లేదా $r(x)$ యొక్క పరిమాణం $g(x)$ యొక్క పరిమాణం (డిగ్రి) కన్నాతక్కువ ఇక్కడ $p(x)$ ను $g(x)$ తో భాగించినప్పుడు భాగలబ్ధం $q(x)$ మరియు $r(x)$ లు లభిస్తాయని చెబుతాము. ఈ పై ఉదాహరణలో విభాజకము రేఖీయ బహుపది అయినది అలాంటి సందర్భంలో శేషము మరియు విభాజ్యము యొక్క విలువల మధ్య ఏదైనా సంబంధం వుందా అని చూద్దాము. సూక్ష్మీకరించినప్పుడు.

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ లో '$x$' లో '$-1$' ని ప్రతిక్షేపించినప్పుడు.

$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1 = 1$ లభిస్తుంది.

కావున $p(x) = 3x^2 + x - 1$ ను $x + 1$ నుండి భాగించినపుడు లభించిన శేషం, బహుపది $x + 1$ యొక్క శూన్య విలువలో అంటే $-1$ లో బహుపది $p(x)$ విలువకు సమానం ఇపుడు ఇంకొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

**ఉదాహరణ 7 :** $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ అనే బహుపదిని $x - 1$ చే భాగించి శేషాన్ని విభాజకం యొక్క శూన్యవిలువలో సరి చూడండి.

**సాధన : ధీర్ఘ భాగాహార పద్ధతిలో :–**

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\
\hline
x - 1 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
 & 3x^4 - 3x^3 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & \quad -x^3 \quad - 3x - 1 \\
 & \quad -x^3 + x^2 \\
 & \quad + \quad - \\
\hline
 & \qquad -x^2 - 3x - 1 \\
 & \qquad -x^2 + x \\
 & \qquad + \quad - \\
\hline
 & \qquad\quad -4x - 1 \\
 & \qquad\quad -4x + 4 \\
 & \qquad\quad + \quad - \\
\hline
 & \qquad\qquad -5
\end{array}
$$

ఇక్కడ శేషం $-5$ అయినది ఇప్పుడు $x - 1$ యొక్క శూన్యవిలువ '1' కావున $x = 1$ ని $p(x)$ లో సూక్ష్మీకరించినచో.

$p(x) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$

$= 3 - 4 - 3 - 1$

$= -5$ ఇది శేషం.

**ఉదాహరణ 8 :** $p(x) = x^3 + 1$, $x + 1$ చే భాగించినప్పుడు లభించుశేషాన్ని కనుగొనండి.

**సాధన :** దీర్ఘ భాగాహార పద్ధతిలో :–

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
x + 1 & x^3 + 1 \\
 & x^3 + x^2 \\
 & - \quad - \\ \hline
 & -x^2 \quad + 1 \\
 & -x^2 - x \\
 & + \quad + \\ \hline
 & x + 1 \\
 & x + 1 \\
 & - \quad - \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

కావున శేషం '0' అయిందని మనకు తెలుసు.

ఇక్కడ $p(x) = x^3 + 1$ మరియు $x + 1 = 0$ దీని మూలము $x = -1$

$p(-1) = (-1)^3 + 1$

$= -1 + 1$

$= 0$

ఇది దీర్ఘ భాగహార పద్ధతిలో లభించిన శేషమునకు సమానం ఒక బహుపదిని రేఖీయ బహుపదిలో భాగించినప్పుడు లభించు శేషమును కనుగొనుటకు ఇది సరల మార్గమే కదా? మనం ఇప్పుడు ఈ విషయాన్ని క్రింది సిద్ధాంతం రూపంలో సామాన్నీకరిస్తాం. ఈ సిద్ధాంతాన్ని సాధించడం వల్ల ఈ ప్రమేయము సరి అని చూపిస్తాము.

**శేష సిద్ధాంతం :**

***p*(*x*) అనేది ఒక ఏక పరిమాణ లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ గరిష్ఠ పరిమాణం గల బహుపది మరియు '*a*' అనేది వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు *p*(*x*)ను రేఖీయ బహుపది $x - a$ చే భాగిస్తే వచ్చు శేషం *p*(*a*) అగును.**

**సాధన :**

ఏక పరిమాణ (డిగ్రి) లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ గరిష్ఠ పరిమాణం (డిగ్రి)గల బహుపది $p(x)$ ను తీసుకుందాం $p(x)$ ను రేఖీయ బహుపది $g(x) = (x - a)$ చే భాగించినప్పుడు భాగఫలం $q(x)$ మరియు శేషం $r(x)$ అనుకుందాం అంటే $p(x)$ మరియు $g(x)$ అనేవి రెండు బహుపదులు అయిన సందర్భంలో $p(x)$ యొక్క పరిమాణం >, $g(x)$ యొక్క పరిమాణం (డిగ్రీ) మరియు $g(x) \neq 0$ అయితే మనకు $q(x)$ మరియు $r(x)$ అనే మరొక రెండు బహుపదులు వస్తాయి. ఇందులో $r(x) = 0$ లేదా $r(x)$ పరిమాణం (డిగ్రీ) ఎప్పుడూ $g(x)$ పరిమాణం (డిగ్రీ)కన్నా తక్కువగా ఉంటుంది.

భాగహార నియమం ప్రకారం

$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$ గా రాయవచ్చు

$\therefore\ p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x) \qquad \because\ p(x) = (x - a)$

$(x - a)$ పరిమాణం 1 మరియు $r(x)$ పరిమాణం $(x - a)$ పరిమాణం కన్నా తక్కువకనుక.

$\therefore$ $r(x)$ పరిమాణం = 0, అంటే $r(x)$ ఒక స్థిరరాశి దీనిని '$k$' అనుకుంటే ప్రతి వాస్తవ విలువ $x$ కు $r(x) = k$ కావున.

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - a)\, q(x) + k \\ x &= a\, p(a) = (a - a)\, q(a) + k \\ &= 0 + k \\ &= k \end{aligned}$$

కావున సిద్ధాంతం నిరూపించబడినది.

ఇప్పుడు మనం ఒక బహుపదిని మరొక రేఖీయ బహుపదిచేత భాగించునప్పుడు వచ్చే శేషాలను భాగహారంచేయకుండానే సిద్ధాంతం ఆధారంగా ఎలా కనుక్కొంటారో ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలిద్దాం.

**ఉదాహరణ 9 :** $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ను $x - 1$ లో భాగిస్తే వచ్చే శేషం కనుగొనండి.

**సాధన :** ఇచ్చట $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ మరియు రేఖీయ బహుపది $x - 1$ శూన్యవిలువ 1.

కావున $p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$
$= 2$

$\therefore$ శేష సిద్ధాంతం ప్రకారం, $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ను $x - 1$ లో భాగించగా శేషం '2' వచ్చింది.

**ఉదాహరణ 10 :** బహుపది $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ ఇది $(2t + 1)$ యొక్క కారణాంకమా? పరీక్షించండి?

**సాధన :** ఇచ్చిన బహుపదికి $2t + 1$ కారాణాంకం అవునో, కాదో తెలుసుకోవాలంటే $2t + 1$, $q(t)$ ని శేషం '0' అగునట్లు భాగిస్తే మాత్రమే $q(t)$, $2t + 1$ కు కారణాంకం అవుతుంది. ఇప్పుడు $2t + 1 = 0$ అని తీసుకుంటే $t = -\frac{1}{2}$ అవుతుంది.

$$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

కావున $q(t)$ ని $2t + 1$ చే భాగించినప్పుడు లభించుశేషం '0' అవుతుంది కావున $2t + 1$ ఇది దత్త బహుపది q(t) యొక్క కారణాంకము, అంటే $q(t)$, $2t + 1$ యొక్క కారణాంకం అవుతుంది.

**అభ్యాసం 4.3**

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ను కింది రేఖీయ బహుపదులతో భాగించునప్పుడు వచ్చే శేషాలు కనుగొనండి.

   (i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) $x$ (iv) $x + \pi$ (v) $5 + 2x$

2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ ను $x - a$ లో భాగిస్తే వచ్చే శేషం ఎంత?

3. $7 + 3x$ ఇది $3x^3 + 7x$ యొక్క కారణాంకమా పరిశీలించండి?

## 4.5 బహుపది యొక్క కారణాంక విభజన

ఇపుడు పై ఉదాహరణ 10 సందర్భాన్ని సూక్ష్మంగా గమనించండి. దానివల్ల శేషం $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ అయినందువల్ల, $(2t + 1)$, $q(t)$ యొక్క కారణాంకమైనది అని తెలుస్తున్నది. అంటే ఏదేని బహుపది $g(t)$ కి $q(t) = (2t + 1)\, g(t)$. ఇది కింది సిద్ధాంతానికి ప్రత్యేక ప్రకరణం అవుతుంది.

**కారణాంక సిద్ధాంతము :** బహుపది పరిమాణం $(n \geq 1)$ గాగల బహుపది $p(x)$ మరియు '$a$' ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు.

(i) $p(a) = 0$ అయిన $x - a$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అగును మరియు

(ii) $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అగును.

**సాధన :** శేష సిద్ధాంతం ప్రకారం, $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$

(i) $p(a) = 0$ అయిన సందర్భంలో $p(x) = (x - a)\ q(x) + 0$ అగును $(x - a)\ q(x)$ దీనిని బట్టి $p(x)$ కు $(x - a)$ కారణాంకమని చెప్పవచ్చు.

(ii) ఇదే విధంగా $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం కావున $p(x) = (x - a)\ q(x)$ సత్యమవుతుంది. $q(x)$ అనేది మరొక బహుపది.

$\therefore\ p(a) = (a - a)\ q(a) = 0$

$\therefore\ (x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అయినది.

ఈ విధంగా సిద్ధాంతం నిరూపించబడినది.

**ఉదాహరణ 11:** $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ మరియు $2x + 4$ ల కారణాంకం $x + 2$ అవుతుందా పరీక్షించండి.

**సాధన :** $x + 2$ యొక్క శూన్యవిలువ $-2$.

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ మరియు $s(x) = 2x + 4$ అనుకొనుము.

అప్పుడు, $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$= -8 + 12 - 10 + 6$

$= 0$

$x + 2$ ఇది $x^3 + 3x^2 + 5x - 6$ యొక్క కారణాంకం అవుతుంది.

పునః $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

కావున $x + 2$ ఇది $2x+4$ యొక్క కారణాంకం అవుతుంది నిజంగా, $2x + 4 = 2(x + 2)$ అయినందువల్ల కారణాంక సిద్ధాంతం అన్వయించిందా లేదా పరిశీలించవచ్చు.

**ఉదాహరణ 12 :** $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ అను బహుపది సమాసానికి $x - 1$ కారణాంకమైతే $k$ విలువను కనుగొనండి.

**సాధన :** $x - 1$ అనేది $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ బహుపదికి కారణాంకం అయినందున $p(1) = 0$

ఇప్పుడు, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

కావున, $4 + 3 - 4 + k = 0$

అంటే $k = -3$

మనం ఇప్పుడు రెండవ పరిమాణం (డిగ్రీ) మరియు 3వ పరిమాణం (డిగ్రీ) అయినకొన్ని బహుపదులను కారణాంకాలుగా విభజించడానికి కారణాంక సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగిస్తాము. మీరు ఇదివరకే $x^2 + lx + m$. ఈ విధమైన వర్గబహుపదిని కారణాంకాలుగా విభజన గురించి తెలుసుకున్నారు. మీరు మధ్యపదము '$lx$' ను $ax + bx$ ($ab = m$ అగునట్లు) అని విభజించుట ద్వారా కారణాంక విభజన చేశాము. అప్పుడు $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ ఇప్పుడు మనం $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, $a, b, c$ లు స్థిరాంకాలు) రూపంలో గల వర్గ బహుపదులను కారణాంక విభజన చేయడానికి ప్రయత్నిద్దాం మధ్యపదాన్ని విభజించుట ద్వారా బహుపది $ax^2 + bx + c$ ని కారణాంక విభజన ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది.

ఇప్పుడు దాని కారణాంకాలు $(px + q)$ మరియు $(rx + s)$ అనుకుందాం.

$$\therefore\ ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\, x^2 + (ps + qr)\, x + qs$$

$x^2$ యొక్క సహగుణకాలను పోలిస్తే, $a = pr$.

అలాగే, $x$ యొక్క సహగుణాలు పోలిస్తే, $b = ps + qr$ మరియు

స్థిరాంకాలను పోలిస్తే, $c = qs$.

దాని నుండి మనకు '$x$' గుణకం 'b' అనేది $ps$ మరియు $qr$ ల మొత్తమని తెలుస్తున్నది. వీటి లబ్ధం $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ అని రాయవచ్చు.

దీనిని బట్టి, $ax^2 + bx + c$ వర్గబహుపది కారణాంక విభజనలో $b$ అనేది రెండు సంఖ్యల మొత్తం అని, వాటి లబ్ధం '$ac$' అని తెలుస్తున్నది. ఇది ఉదా 13నుండి స్పష్టమవుతుంది.

**ఉదాహరణ 13 :** $6x^2 + 17x + 5$ దీనిని మధ్యపదాన్ని విభజించుట ద్వారా మరియు కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి విభజించండి.

**సాధన :** (మధ్యపదాన్ని విభజించే విధానం ద్వారా) : $p + q = 17$ మరియు $pq = 6 \times 5 = 30$ అగునట్లు $p$ మరియు $q$ అనే రెండు సంఖ్యలు మనకు లభిస్తే అప్పుడు మనం కారణాంకాలు పొందవచ్చు. కావున ఇప్పుడు 31 కారణాంకాల జతలను చూద్దాం. 1 మరియు 30, 2 మరియు 15, 3 మరియు 10, 5 మరియు 6. వీటిలో 2 మరియు 15ను తీసుకున్నప్పుడు $p + q = 17$.

కావున, $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)\, x + 5$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

**ఉదాహరణ 14 :** కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి $y^2 - 5y + 6$ ను విభజించండి.

**సాధన :** ఇప్పుడు $p(y) = y^2 - 5y + 6$ అయివుండనీయండి. ఇప్పుడు, $p(y) = (y - a)(y - b)$ అయితే, స్థిరాంకం $ab$ అయివుండుటనం మీరు తెలుసుకున్నారు. ఇదేవిధంగా $ab = 6$. అందువలన $p(y)$ కారణాంకాలు తెలుసుకోవడానికి మనం 6 యొక్క కారణాంకాలు చూస్తాం.

6 యొక్క కారణాంకాలు 1, 2, మరియు 3

ఇప్పుడు, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

$\therefore$ $p(y)$ మరియు ఒక కారణాంకం $y - 2$ అవుతుంది.

$p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

$y^2 - 5y + 6 = 0$ యొక్క కారణాంకం $(y - 3)$ కూడా అవుతుంది.

కావున, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$.

$y^2 - 5y + 6$ ను మధ్యపదం $-5y$ ను విడదీయుట కారణాంకా విభజన చేయవచ్చు అని గమనించండి. ఇప్పుడు గణ బహుపదుల కారణాంక విభజనను తీసుకుందాం. ఇక్కడ విభజించే విధానం లో ప్రారంభించడం సరికాదు. మీరు ఈ క్రింది ఉదాహరణలో చూపినట్లు మొదట కనీసం ఒక కారణాంకాన్ని కనుగొనవలసింది.

**ఉదాహరణ 15 :** $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

**సాధన :** $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ అనుకొనండి

వీటిలో ప్రయత్నిస్తే మనకు $p(x) = 0$ అవుతుంది (సరిచూడండి). కావున $p(x)$ కు $(x - 1)$ కారణాంకం అవుతుంది. తర్వాత $p(x)$ ను $(x - 1)$ చే భాగిస్తే మనకు $x^2 - 22x + 120$ వస్తుంది. దీని కారణాంక విభజన మరొక విధంగా చేసి చూద్దాం

$$
\begin{aligned}
x^3 - 23x^2 + 142x - 120 &= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120 \\
&= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad \text{(ఎలా?)} \\
&= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)(x - 1)
\end{aligned}
$$

ఇప్పుడు $x^2 - 22x + 120$ వర్గబహుపది కావున, మధ్యపదంను విడదీసి కారణాంకాలు కనుగొందాం.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\
&= x(x - 12) - 10(x - 12) \\
&= (x - 12)(x - 10)
\end{aligned}
$$

కావున, $x^3 - 12x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

### అభ్యాసం 4.4

1. కింది బహుపదులకు $(x+1)$కారణాంక మగునో; లేదో నిర్ధారించండి.
   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
   (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2+\sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి, కింది బహుపదులలో ప్రతి సందర్భంలోనూ $p(x)$ కు $g(x)$ కారణాంకమగునా ? నిర్ధారించండి.
   (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1,\ g(x) = x + 1$
   (ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 2$
   (iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 3$

3. క్రింది వాటిలో బహుపది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం $(x - 1)$ అయితే $k$ విలువను కనుగొనండి.
   (i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$
   (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. కారణాంకాలుగా విభజించండి.
   (i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$
   (iii) $6x^2 + 5x + 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. కారణాంకాలుగా విభజించండి:
   (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$
   (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$(iv)$2y^3 + y^2 - 2y - 1$

### 4.6 బీజగణిత సర్వసమీకరణాలు :

ఒక బీజగణిత సమీకరణంలోగల చరరాశులకు ఏ విలువలు సూక్ష్మీకరించనమా, ఎల్లావేళలా సత్యమయ్యేదానిని సర్వసమీకరణమంటారని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. మీరు వనకటి. తరగతులలో కింది బీజగణిత సర్వసమీకరణాలను నేర్చుకున్నారు.

**సర్వసమీకరణం I** : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

**సర్వసమీకరణం II** : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

**సర్వసమీకరణం III** : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

**సర్వసమీకరణం IV** : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన చేయుటలో సర్వసమీకరణాలు ఉపయోగపడతాయి. ఇటువంటి ఉదాహరణలు కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాం.

**ఉదాహరణ 16:** సరైన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి క్రిందివాటి గుణలబ్ధాలను కనుగొనండి.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

**సాధన :** (i) ఇచ్చట మనము మొదటి సర్వసమీకరణం $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ను ఉపయోగించవచ్చు. ఇందులో $y = 3$ ను సూక్ష్మీకరించినప్పుడు.

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) IV సర్వసమీకరణం ఉపయోగించినప్పుడు.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

దీనినుండి $(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(+5)$
$$= x^2 + 2x - 15$$

**ఉదాహరణ 17 :** $105 \times 106$ ను సర్వసమీకరణము ఉపయోగించి, గుణించండి.

**సాధన :** $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$ [IV సర్వసమీకరణం ప్రకారం]

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

ఇచ్చినటువంటి కొన్ని బీజీయ సమాసాల గుణలబ్ధాన్ని కనుగొనుటలో పైన పట్టీ చేసిన సర్వసమీకరణాల కొన్ని ఉపయోగాలను మీరు చూశారు. ఈ క్రింది ఉదాహరణలలో చూపినట్లు బీజీయ సమాసాల కారణాంక విభజనలో కూడా ఈ సర్వసమీకరణాలు ఉపయుక్తమవుతాయి.

**ఉదాహరణ 18 :** కారణాంకాలుగా విభజించండి :

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

**సాధన :** (i) ఇచ్చట $49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$,

$70ab + 2(7a)(5b)$ అయివుండుటను మీరు చూడవచ్చు. ఇచ్చిన బీజీయ సమాసాన్ని $x^2 + 2xy + y^2$ లో పోల్చినప్పుడు, $x = 7a$, $y = 5b$ అవుతుంది అని మనం గమనించవచ్చు.

I సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించినప్పుడు.

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) $$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

ఇప్పుడు, దీనిని IIIవ సర్వసమీకరణంతో పోల్చినప్పుడు.

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

ఇదివరకు మనం అన్ని సర్వసమీకరణాలు ద్విపదుల గుణలబ్ధాలతో కూడివున్నవి. ఇప్పుడు మొదటి సర్వసమీకరణాన్ని త్రిపది $x + y + z$ విస్తరిద్దాం $(x + y + z)^2$ ను I వ సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి లెక్కిస్తాం.

$x + y = t$ అయిన

$\therefore \ (x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + z^2$ [I సర్వసమీకరణం ఆధారంగా]

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ [$t$ విలువను సూక్ష్మీకరించగా]

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2zx + 2yz + z^2$

పదాలను క్రమం మార్చిరాయగా $= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ అయినది. కావున, సర్వసమీకరణం ను మనం ఇలా రాయవచ్చు.

**సర్వసమీకరణం V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$**

**గమనించండి :** కుడివైపు బీజీయ సమాసాన్ని ఎడమవైపు బీజీయ సమాసపు విస్తరణ రూపం అని మనం పిలుస్తాము. $(x + y + z)^2$ యొక్క విస్తరణ మూడు వర్గపదాలను మరియు మూడు గుణలబ్ధపదాలను కలిగివున్నదని గమనించండి.

**ఉదాహరణ 19 :** $(3a + 4b + 5c)^2$ ను సర్వసమీకరణం ద్వారా విస్తరించండి.

**సాధన :** ఇచ్చిన సమాసంను $(x + y + z)^2$ లో పోల్చగా, మనకు $x = 3a$, $y = 4b$ మరియు $z = 5c$ వస్తాయి. అందువలన సర్వసమీకరణం V, ద్వారామనం

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$

$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ca$$

**ఉదాహరణ 20 :** $(4a - 2b - 3c)^2$ ను విస్తరించండి.

**సాధన :** V వ సర్వసమీకరణం ఉపయోగించగా,

$$
\begin{aligned}
(4a-2b-3c)^2 &= [4a+(-2b)+(-3c)]^2 \\
&= (4a)^2+(-2b)^2+(-3c)^2+2(4a)(-2b)+2(-2b)(-3c)+2(-3c)(4a) \\
&= 16a^2+4b^2+9c^2-16ab+12bc-24ac
\end{aligned}
$$

**ఉదాహరణ 21 :** $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

**సాధన :** మనకు $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$

$= (2x)^2+(-y)^2+z^2+2(2x)(-y)+2(-y)(z)+2\,(2x)(z)$

$= [2x+(-y)+z]^2$ [సర్వసమీకరణం V నుండి.]

$= (2x-y+z)^2 = (2x-y+z)\,(2x-y+z)$

ఇంతవరకు రెండవ పరిమాణ పదాలను కలిగిన సర్వసమీకరణాల గురించి మనం చర్చించాం ఇప్పుడు మనం సర్వసమీకరణం (i) ని వినియోగించి $(x+y)^3$ విస్తరణ చేద్దాం.

మనకు

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)\,(x+y)^2 \\
&= (x+y)\,(x^2+2xy+y^2) \\
&= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2) \\
&= x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^3 &= x^3+y^3+3xy(x+y)
\end{aligned}
$$

కనుక మనం మరొక సర్వసమీకరణంను ఇలా రాయవచ్చు.

**సర్వసమీకరణం VI : $(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$**

సర్వసమీకరణం VI లో '$y$' ని '$-y$' గా మార్చి రాసినప్పుడు

**సర్వసమీకరణ VII : $(x-y)^3 = x^3-y^3-3xy(x-y)$**

**$= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$**

**ఉదాహరణ 22 :** ఈ క్రింది ఘనాలను విస్తృత రూపంలో రాయండి.

(i) $(3a+4b)^3$ (ii) $(5p-3q)^3$

**సాధన :** (i) ఇచ్చిన సమాసాన్ని $(x+y)^3$ లో పోల్చగా, మనకు, $x = 3a$ మరియు $y = 4b$ అగును.

కావున సర్వసమీకరణం VI వాటితో,

$$(3a+4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a+4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) ఇచ్చిన సమాసాన్ని $(x-y)^3$ లో పోల్చగా, మనకు $x = 5p$ మరియు $y = 3q$ అగును

కావున సర్వసమీకరణం VII వాటితో

$$(5p-3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p-3q)$$
$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

**ఉదాహరణ 23 :** కింది వానిని తగిన సర్వసమీకరణాలనుయోగించి గుణించండి.

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

**సాధన :** $(104)^3 = (100+4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4)$ [సర్వసమీకరణం VI నుండి]

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$

(ii) $(999)^3 = (1000-1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$ [సర్వసమీకరణం VII నుండి]

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999$

**ఉదాహరణ 24 :** $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ కారణాంకాలుగా విభజించండి.

**సాధన :** ఇచ్చిన సమాసాన్ని మనం దిగువ విధంగా రాస్తే.

$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x+3y)^3$ [సర్వసమీకరణ VI నుండి.]

$= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$

ఇప్పుడు $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ ను తీసుకుందాం.

విస్తరించినప్పుడు ఈ కింది గుణలబ్ధాన్ని పొందుతాము.

$x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=x^3+xy^2+xz^2-x^2y-xyz-zx^2+x^2y+y^3+yz^2-xy^2-y^2z-xyz+x^2z+y^2z+z^3-xyz-yz^2-xz^2$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$ (సూక్ష్మీకరించినప్పుడు)

ఇలా మనం క్రింది సర్వసమీకరణాలను పొందుతాము.

**సర్వసమీకరణం VIII :** $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

**ఉదాహరణ 25 :** $8x^3+y^3+27z^3-18xyz$

$=(2x)^3+y^3+(3z)^3-3(2x)(y)(3z)$

$=(2x+y+3z)[(2x)^2+y^2+(3z)^2-(2x)(y)-(y)(3z)-(2x)(3z)]$

$=(2x+y+3z)(4x^2+y^2+9z^2-2xy-3yz-6xz)$

## అభ్యాసం 4.5

**1.** తగిన సమీకరణాలను ఉపయోగించి కింది లబ్ధాలు కనుగొనండి.

(i) $(x+4)(x+10)$ (ii) $(x+8)(x-10)$

(iii) $(3x+4)(3x-5)$ (iv) $\left(y^2+\frac{3}{2}\right)\left(y^2-\frac{3}{2}\right)$

(v) $(3-2x)(3+2x)$

**2.** గుణకారం చేయకుండానే నేరుగా కింది లబ్ధాలను గుణించండి.

(i) $103 \times 107$ (ii) $95 \times 96$ (iii) $104 \times 96$

**3.** కింది బహుపదులను తగిన సర్వసమీకరణములను ఉపయోగించి కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $9x^2+6xy+y^2$ (ii) $4y^2-4y+1$ (iii) $x^2-\frac{y^2}{100}$

**4.** కింది వాటిని తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి, విస్తరించండి.

(i) $(x+2y+4z)^2$ (ii) $(2x-y+z)^2$

(iii) $(-2x+3y+2z)^2$ (iv) $(3a-7b-c)^2$

(v) $(-2x+5y-3z)^2$ (vi) $\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right)^2$

**5.** కారణాంకాలుగా విభజించండి:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

**6.** క్రింది ఘనాలను విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

**7.** తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి విలువలు కనుగొనండి.

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

**8.** కింది వాటిని కారణాంకాలుగా విభజించండి:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

**9.** కింది వాటిని సరిచూడండి:

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

**10.** క్రింది వాటిని కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[సూచన : ప్రశ్న 9ని చూడండి.]

**11.** $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

**12.** $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$ ని సరిచూడండి.

**13.** $x + y + z = 0$ అయితే $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ అని చూపండి.

**14.** కింది సమాసాలను ఘనాలను గుణించకుండానే ఫలితాలను కనుగొనండి.

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

**15.** కింది దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాలకు ఇవ్వబడిన సమాసాలను బట్టి. పొడవు, వెడల్పులకు తగిన అనుకూల కొలతలు తెలుపండి.

| వైశాల్యం : $27a^2 - 35a + 12$ | వైశాల్యం : $35y^2 + 13y - 12$ |
|---|---|
| (i) | (ii) |

**16.** కింది దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణాలకు ఇవ్వబడిన సమాసాలను బట్టి దీర్ఘఘనం యొక్క అనుకూల కొలతలు తెలపండి.

| వైశాల్యం : $3x^2 - 12x$ | వైశాల్యం : $12ky^2 + 8ky - 20k$ |
|---|---|
| (i) | (ii) |

## 4.7 సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో మీరు కింది విషయాలను నేర్చుకున్నారు.

1. ఏక చరరాశి '$x$' లో $n$ వ పరిమాణం (డిగ్రీ) బహుపద సమాసం $p(x)$ ను $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \text{----} + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ అని చూపుతాం ఇందులో $a_0, a_1, a_2$ ------ $a_n$ లను $x^0, x^1, x^2$ ----$x^n$ ల యొక్క సహగుణకాలంటాం సమాసంలో $a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$,--- $a_0$ $(a_n \neq 0)$ పదాలు అంటాం.
2. ఒక పదం కలిగిన బహుపదిని ఏక పది అంటారు.
3. రెండు పదాల కలిగిన బహుపదిని ద్విపది అంటారు.
4. మూడు పదాలు కలిగిన బహుపదిని త్రిపది అంటారు.
5. గరిష్ఠ ఘాతం '1' అయిన బహుపదిని రేఖీయ బహుపది అంటారు.
6. గరిష్ఠ ఘాతం 2 గా గల బహుపదిని వర్గ బహుపది అంటారు.
7. గరిష్ఠ ఘాతం 3 గా గల బహుపదిని ఘన బహుపది అంటారు.
8. $p(x)$ అనే బహుపదిలో ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య '$a$' కు $p(x) = 0$ అయితే '$a$' ను బహుపది శూన్య విలువ అంటారు. ఈ సందర్భంలో '$a$' ను బహుపది సమీకరణం $p(x) = 0$ కు మూలం అనికూడా అంటారు.

**9.** ఏక చరరాశి కలిగిన ప్రతి రేఖీయ బహుపదికి శూన్య విలువ ఏకైకంగా ఉంటుంది. శూన్యేతర స్థిరరాశికి బహుపది శూన్య విలువ నిర్వచించ బడదు మరియు ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య కూడా శూన్య బహుపది యొక్క శూన్య విలువ అవుతుంది.

**10.** శేషసిద్ధాంతం: $p(x)$ అనేది ఏక పరిమాణ లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ గరిష్ఠ పరిమాణం (డిగ్రి) గల బహుపది మరియు '$a$' అనేది వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు $p(x)$ ను రేఖీయ బహుపది $(x-a)$ చే బాగిస్తే వచ్చు శేషం $p(a)$ అగును.

**11.** కారణాంకం : బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) $n \geq 1$ గాగల బహుపది (i) $p(a) = 0$ అయిన $(x-a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అగును మరియు (ii) $(x-a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అగును..

**12.** $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

**13.** $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$

**14.** $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy\,(x - y)$

**15.** $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

## అధ్యాయం – 5

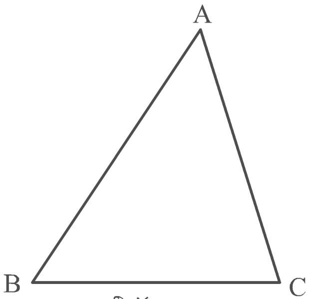
# త్రిభుజాలు

## 5.1 పరిచయం

త్రిభుజాలు వాటి లక్షణాల గురించి కింది తరగతులలో మీరు నేర్చుకున్నారు. మూడు ఖండించు రేఖలతో ఏర్పడు సంవృత ఆకృతిని త్రిభుజం అంటాము అని మీకు తెలుసు (త్రి అంటే మూడు) ఒక త్రిభుజం మూడు భుజాలు, మూడు కోణాలు. మూడు శీర్షాలు కలిగి వుంటుంది. త్రిభుజం ABC ని $\Delta ABC$ అని సూచిస్తాము.

ఉదాహరణకు $\Delta ABC$ లో (చిత్రం 5.1) మూడు భుజాలు AB, BC, CA; మూడు కోణాలు $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ మరియు A, B, C లు మూడు శీర్షాలున్నాయి.

అధ్యాయం 6 లో త్రిభుజాలకు సంబంధించిన కొన్ని లక్షణాలను కూడా నీవు నేర్చుకొన్నావు. ఈ అధ్యాయంలో త్రిభుజాల సర్వసమానతను. సర్వసమానత్వ నియమాలను విపులంగా మీరు నేర్చుకుంటారు. వీటిలోని అనేక లక్షణాలు వెనుకటి తరగతిలో ఇదివరకే పరీక్షించారు ఇప్పుడు కొన్నింటిని ఈ అధ్యాయంలో సాధిద్దాం.



చిత్రం 5.1



## 5.2 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం

ఒకే కొలతలున్న నీ భావచిత్రాలు రెండు కాపీలు ఒకే రకంగా వుండడాన్ని మీరు గమనించివుంటారు. అదేవిధంగా ఒకే కొలత గల రెండు గాజులు, ఒకే బ్యాంకు ఇచ్చిన రెండు ATM

కార్డులు ఒకే రకంగా ఉంటాయి. ఒకే సంవత్సరంలో ముద్రించిన రెండు ఒకరూపాయి నాణ్యాలు ఒకదాని పై ఒకటి ఉంచిన రెండూ పరస్పరం ఏకీభవించడాన్ని గుర్తుచేసుకోండి.

ఈ విధమైన ఆకృతులను ఏమంటారు అని గుర్తుచేసుకొన్నచో వాటిని సర్వసమాన ఆకృతులు అని అంటాము. (సర్వసమానం అంటే అన్ని రకాల సమానంగా వుండడం లెదా అకారం మరియు పరిమాణం రెండింటాలోనూ సమానం అని అర్థం).

ఇప్పుడు ఒకే వ్యాసార్థగల రెండు వృత్తాలను గీసి ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచండి. మీరు ఏమిగమనించారు? అవి పరస్పరం ఒకదాని తో ఒకటి ఏకభవిస్తాయి అలా ఐతే వాటిని మనం సర్వసమాన వృత్తాలంటాము.

భుజం పొడవు ఒకటే వున్న రెండు చతురస్రాలను (చిత్రం 5.2). లేదా సమబాహులున్న రెండు సమబాహుత్రిభుజాలను ఒక దానిపై ఒకట వుంచండి. చతురస్రాలు పరస్పరం సర్వమాన అదేవిధంగా సమబాహుత్రిభుజాలు పరస్పరం సర్వసమాన మైనదానిని గమనిస్తారు.

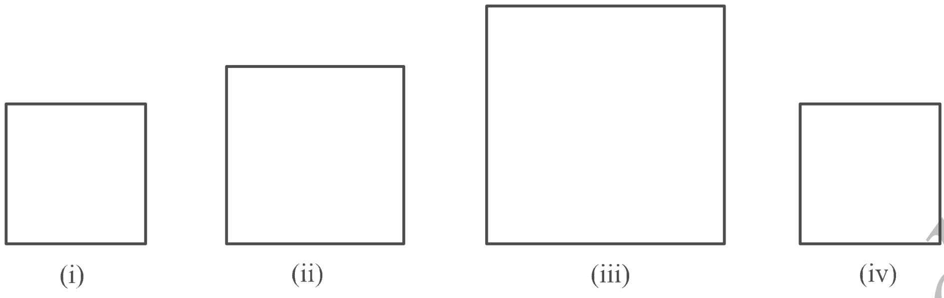
చిత్రం **5.2**

సర్వసమానతను ఎందుకు చదవాలి. అని మీకు అనిపించిఉండవచ్చు. రిఫ్రిజిరేటర్‌లో ఐస్ క్యూబ్ లను వుంచడానికి ట్రేలను మీరు చూసి వుండవచ్చు, దానిలో వున్న అచ్చులు కూడా సర్వసమానమను మరియు ఆట్రేలోని గుంతలుకూడ సర్వసమానం ((దీర్ఘ చతురస్రాకార లేదా వృత్తాకారం లేదా త్రిభుజాకారంలో వుండవచ్చు) అందువల్ల ఒకే రూపం గల ఆకారాలను తయారు చేయడానికి సర్వసమానత్వ పరికల్పనలను ఉపయోగిస్తారు..

మీరు ఉపయోగించే పెన్నులలో పాత రీఫిల్ (ట్యూబ్) తీసి కొత్త రీఫిల్ వేయాలంటే అది పాత రీఫిల్ పరిమాణం లో లేకపోతే మార్చడానికి కష్టపడాల్సివస్తుంది రెండూ రీఫిల్‌లు ఒకేరకంగా సర్వసమానమైతే కొత్తది పెన్నుకు సరిపోతుంది .

నిత్యజీవితంలొ సర్వసమానత్వాన్ని అన్వయించు ఆకృతులకు అనేక ఉదాహరణలు మీరు చూడవచ్చు.

సర్వసమాన ఆకృతలకు ఇంకా ఎక్కువ ఉదాహరణలను ఆలోచించే ఈ కింది చిత్రాలలో 5.3(i) లోని చతురస్రానికి సర్వసమానం.

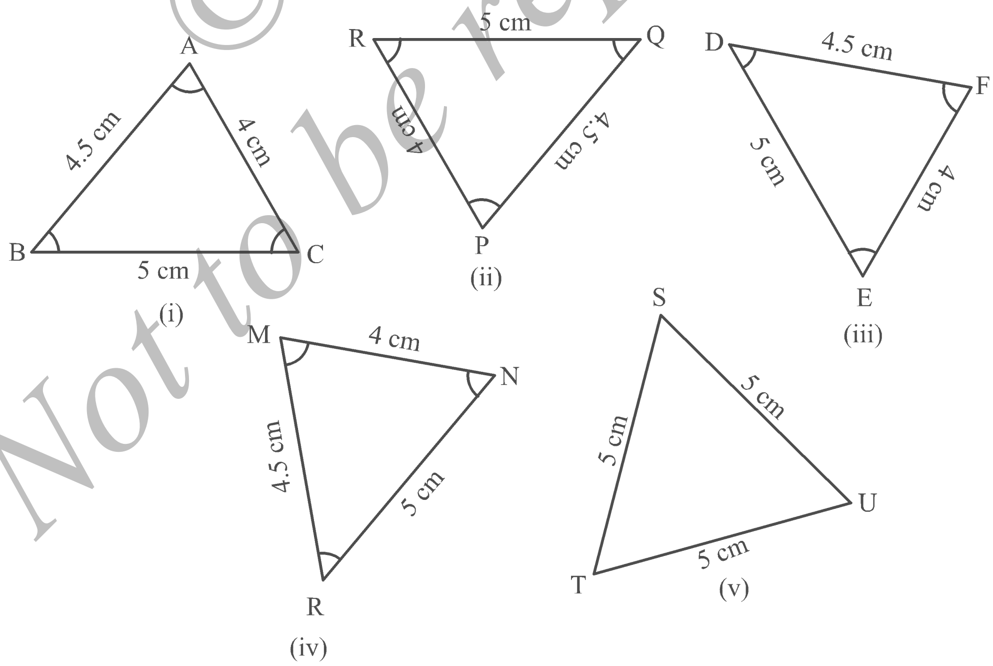



చిత్రం **5.3**

చిత్రం 5.3 (ii) మరియు (iii) లో పెద్ద చతురస్రాలు, చిత్రం 5.3 (i) లో ఉన్న చతురస్రానికి సర్వసమానం కాదని స్పష్టంగా తెలుస్తుంది అయితే 5.3 (iv) లోవున్న చతురస్రం చిత్రం 5.3 (i) లో నున్న చతురస్రానకిసర్వ సమానం.

ఇప్పుడు త్రిభుజాల సర్వసమానత గురించి చర్చిద్దాం! ఒక త్రిభుజపు అన్ని భుజాలు మరియు కోణాల కొలతలు మరొక త్రిభుజానికి అనురూప భుజాలు మరియుకోణాలు సమాన మైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమాన మవుతాయి. అని ఇదివరకే మీకు తెలుసు

ఇప్పుడు కింది త్రిభుజాలలో ఏ త్రిభుజం చిత్రం 5.4 (i) లోని ΔABC కి సర్వసమానం?




చిత్రం **5.4**

చిత్రం 5.4 లో వున్న (ii) నుండి (v) వరకు వున్న త్రిభుజాలను కత్తిరించండి. ఆత్రిభుజాలను త్రిప్పి $\Delta ABC$ పై ఏకీభవించేట్లు ప్రయత్నించండి చిత్రం 5.4 లో (ii), (iii) (iv) త్రిభుజాలు $\Delta ABC$ కి సర్వసమానమవుతాయి. అయితే, 5.4 (v) $\Delta TSU$, $\Delta ABC$ సర్వసమానంకాదు.

$\Delta PQR$, $\Delta ABC$ కి సర్వమానమైతే $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అని రాస్తాము.

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అయిన $\Delta PQR$ యుక్క భుజాలు మరియు కోణాలు $\Delta ABC$ సమాన అనురూప భుజాలు మరియు కోణాలతో ఏకీభవిస్తాయి అనేదాన్ని గమనించండి.

అంటే PQ తో AB, QR తో BC మరియు CA తో RP ; $\angle P$ తో $\angle A$, $\angle Q$ తో $\angle B$ మరియు $\angle R$ తో $\angle C$ ఏకభవిస్తాయి దానిని ఈ విధంగా రాస్తాము. $P \leftrightarrow A$, $Q \leftrightarrow B$, $R \leftrightarrow C$

ఈ విధమైన అనురూపతలో $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అవుతుంది అయితే $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ అని రాయడం తప్పు అవుతుంది అదే విధంగా చిత్రం 5.4 (iii) లో వున్న త్రిభుజానికి

$FD \leftrightarrow AB$, $DE \leftrightarrow BC$, మరియు $EF \leftrightarrow CA$

అలానే $F \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$, మరియు $E \leftrightarrow C$

అంటే $\Delta FDE \cong \Delta ABC$. అయితే $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ అని రానినచో తప్పు అవుతుంది అదే విధంగా చిత్రం 5.4 (iii) లొని త్రిభుజానికి $FD \leftrightarrow AB$, $DE \leftrightarrow BC$, మరియు $EF \leftrightarrow CA$

మరియు $F \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$, మరియు $E \leftrightarrow C$

అయినందున $\Delta FDE \cong \Delta ABC$. అయితే $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ అని రాస్తే తప్పు అవుతుంది.

$\Delta ABC$ మరియు చిత్రం 5.4 (iv) లొని త్రిభుజానికి గల అనురూపతను చూద్దాం

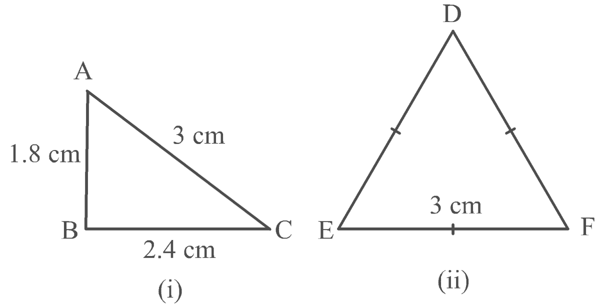
**గమనించండి :** సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సమాన భాగాలు.

సంక్షిప్తంగా **'స.త్రి అభా'** అని రాస్తాము అంటే సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూపభుజాలు అని అర్థం.

## 5.3 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి నిబంధనలు :

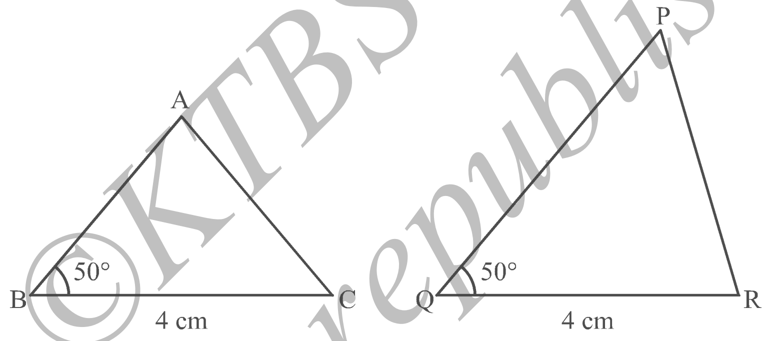
త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి నాలుగు నియమాలను కింది తరగతులలో నేర్చుకున్నారు వాటిని గుర్తుచేసుకుందాము.

ఒక భుజం పొడవు 3cm వుండేటట్లు రెండు త్రిభుజాలనుగీసి, ఈ త్రిభుజాలు సర్వసమానమా? అని సర్వసమానంకాదు అనేదాన్ని గమనించండి (చిత్రం 5.5).




చిత్రం 5.5

ఇప్పుడు ఒక భుజం పొడవు 4cm మరియు ఒక కోణం 50° వుండేటట్లు రెండు త్రిభుజాలను గీయండి. (చిత్రం 5.6). అవి సర్వసమానమా?




చిత్రం 5.6

ఇవికూడా సర్వసమానం కాదు.

ఇంకా ఎక్కువ త్రిభుజాలు జతలను తీసుకొని, ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి.

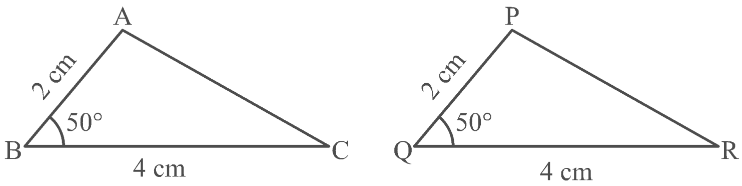
అందువల్ల త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి ఒక జత భుజాలు సమానం లేదా ఒక జత భుజాలు మరియు ఒక జత కోణాలు సమానమైతే మాత్రం సరిపోదు.

సమకోణాలను కలిగిన మరొక జత భుజాలు కూడా సమానమైనచో ఏమవుతుంది?

చిత్రం 5.7 లో BC = QR, ∠B = ∠R మరియు AB = PQ ఇప్పుడు ΔABC మరియు ΔPQR ల సర్వసమానత గురించినీ సమాధానమేమి?

క్రింది తరగతిలో నేర్చుకున్నదాన్ని గుర్తు చెసుకోండి. ఈవిషయంలో త్రిభుజాలు సర్వసమానమవుతాయి. చిత్రం 5.7 లో ΔABC మరియు ΔPQR లకు ఇవి పరీక్షించండి.

వేరొక త్రిభుజాల జతను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి. రెండు భుజాల సమానము మరియు వాటితో ఏర్పడే కోణము సమంగా వుండడం, త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి సరిపోవునా? అవును ఇది చాలు.




చిత్రం 5.7

ఇదే త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మొదటి నియమము

స్వీకృతం 5.1: భుజము –కోణము– భుజము (భు. కో. భు) సర్వసమానత్వ నియమము:

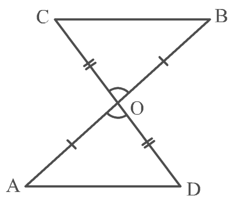
ఒకత్రిభుజపురెండుభుజాలుమరియువాటిమధ్యకోణమువరుసగావేరొకత్రిభుజంలోరెండు భుజాలువాటిమధ్యకోణమునకుసమానమైతేఆరెండుభుజాలువాటిమధ్యకోణమునకుసమానమైతే ఆరెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానత్రిభుజాలు.

మొదటి తెలిసి ఫలితాలను సాధించడానికి కాదు అందువల్ల ఇది సరి అనే సీకృతం ప్రకారం నిరూపించబడినది.(అనుబంధం 1).

ఇప్పుడు కొనని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణం1: చిత్రం 5.8 లో OA = OB మరియు OD = OC.

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ మరియు (ii) AD || BC అని నిరూపించండి.




చిత్రం 5.8

**సాధన : (1)** $\Delta AOD$, $\Delta BOC$ లలో

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OD = OC \end{array}\right\} \quad \text{(దత్తాంశం)}$$

$\angle AOD$, $\angle BOC$ ఒక జత శీర్షాభిముఖ కోణములను ఏర్పరచును అందువలన $\angle AOD = \angle BOC$

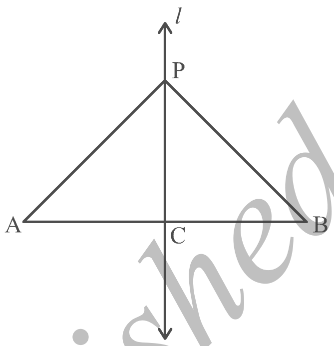
కావున $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (భు. కో. భు సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం)

(ii) $\Delta AOD$, $\Delta BOC$ సర్వసమానత్వ త్రిభుజాలలో సదృశ భాగాలు సమానం

**కావున** $\angle OAD = \angle OBC$. మరియు ఇవి AD, BC రేఖాఖండములకు ఒక జత ఏకాంతరకోణాలను ఏర్పరచును AD || BC

**ఉదాహరణం 2**

AB ఒకే సరళ రేఖ $l$ దీనికి లంబసమద్విఖండనరేఖ. ఈ రేఖ పై. P ఒక బిందువు అయిన ఈ $p$ బిందువు P A, B బిందువునుండి సమాన దూరం లో వుంటుందని చూపండి




చిత్రం 5.9

సాధన : $l \perp$ AB మరియు ఈ రేఖ ఖండము AB మధ్య బిందువు C గుండాపోవును (చిత్రం 5.9). PA = PB అని చూపాలి $\Delta PCA$ మరియు $\Delta PCB$ లను పరిగణించండి.

AC = BC (AB కి C మధ్యబిందువు)

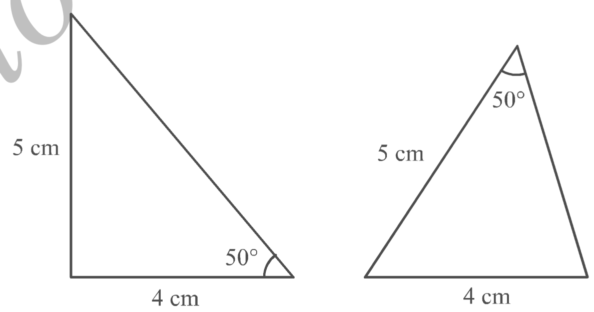
$\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$ (దత్తాంశం)

PC = PC (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta PCA \cong \Delta PCB$భి (భు.కో.భు నియమం)

అదేవిధంగా PA = PB, సర్వసమానం. త్రిభుజాలను సదృశ భుజాలు.

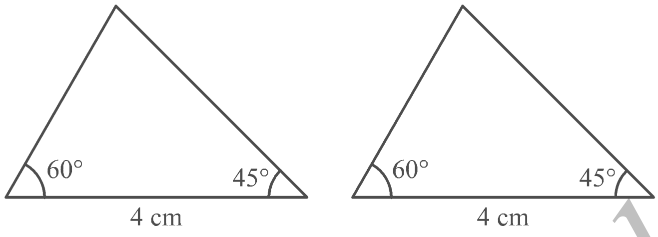
భుజాల పొడవు 4cm, 5cm మరియు కోణాలలో ఒకటి 50° వుండేటట్లు రెండు త్రిభుజాలను గీద్దాం. త్రిభుజాలను గీసేటప్పుడు 50° కోణము సమభుజాల మధ్య వుండకుండా గీయడం. (చిత్రం 5.10). రెండు త్రిభుజాలు స్వసమానమా?




చిత్రం 5.10

రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం కాదు అనేదానిని గమనించండి. ఇంకా మరికొన్ని త్రిభుజాల జతలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి.

త్రిభుజం సర్వసమానం కావాలంటే ముఖ్యంగా సమకోణాలు సమాన భుజాల మధ్య వుండాలి అనేదాన్ని మీరు గమనించండి. అందువల్ల భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమము సరిపోతుందేకాని కో. భు.భు. లేదా భు. భు. కో నియమంకాదు .




చిత్రం **5.11**

ఈ త్రిభుజాలను కత్తిరించి ఒక దానిపై మరొకటి వుంచండి. ఏమిగమనించారు? రెండు త్రిభుజాలు పరస్పరం ఏకీభవిస్తాయి అంటే రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం.

ఇంకా మరికొన్ని త్రిభుజాల జతలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావర్తనం చేయండి. త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావాలంటే రెండు సమకోణాలు మరియు **వాటి సామాన్య భుజాలు.** సమానంగా వుంటే చాలు అనేదాన్ని గమనించండి.

ఈ ఫలితము త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి కోణము. భుజము. కోణము నియము దీనిని కో.భ. కో నియమం అనిరాస్తాము. ఈ నియమము కింది తరగతులలో పరిక్షించారు అయితే ఇప్పుడు దీన్ని నిరూపిద్దాం.

**సిద్ధాంతం 5.1:** (కో. భు.కో సర్వసమానత్వ నియమము)

ఒక త్రిభుజం లోని రెండు కోణాలు. వాటి మధ్యభుజము వరుసగా వేరొక త్రిభుజంలోని రెండు కోణములు. వాటి మధ్యభుజానికి సమానమైన ఆరెండు భుజాలు సర్వసమానములు.

**దత్తాంశం:** $\Delta$ ABC, $\Delta$ DEF అను రెండు త్రిభుజాలను ఇవ్వబడినది

వాటిలో $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

మరియు BC = EF

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అని నిరూపిద్దాము.

ఈ సర్వసమానత్వాన్ని నిరూపించడానికి మూడు సందర్భాలున్నాయి.

**సందర్భం (i):** $\overline{AB} = \overline{DE}$ అయిన (చిత్రం 5.12)

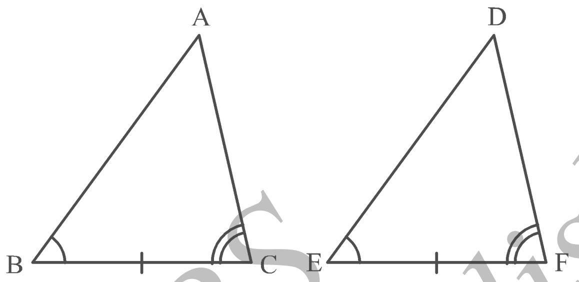
మనం ఏమి గమనించవచ్చు? మీరు కింది అంశాలను గమనించవచ్చు.

AB = DE (ఊహించినది)

$\angle$ B = $\angle$ E (దత్తాంశము)

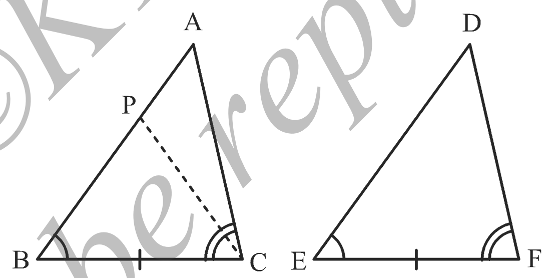
BC = EF (దత్తాంశము)

కావున Δ ABC ≅ Δ DEF (భు.కో.భు. సర్వసమాన స్వీకృతం నుండి)




చిత్రం 5.12

**సందర్భం** (ii): రెండవ సందర్భం AB > DE అనుకోండి PB = DE అగునట్లు AB పై 'P' బిందువును తీసుకొండి ఇప్పుడు Δ PBC , Δ DEF లలో (చిత్రం 5.13).




చిత్రం 5.13

Δ PBC మరియు Δ DEF లలో కింది వాటిని గమనిమచండి.

PB = DE (నిర్మాణం ప్రకారం)

$\angle$ B = $\angle$ E (దత్తాంశం)

BC = EF (దత్తాంశం)

కావున Δ PBC ≅ Δ DEF అని నిరూపించాము భు. కో.భు. సర్వసమానత్వ సిద్ధాంతంలో త్రిభుజాల సర్వసమాన కావడంవల్ల వాటి సదృశ భాగాలు సమానం

కావున $\angle$ PCB = $\angle$ DFE

అయిన $\angle$ ACB = $\angle$ DFE (దత్తాంశం)

అందువల్ల $\angle$ ACB = $\angle$ PCB

కావున ఇది సాధ్యమా ?

ఇది సాధ్యం కావాలంటే P బిందువు A లో ఏకీభవించాలి లేదా

BA = ED

అప్పుడు $\Delta$ ABC $\cong$ $\Delta$ DEF (భు.కో. భు. సిద్ధాంతం)

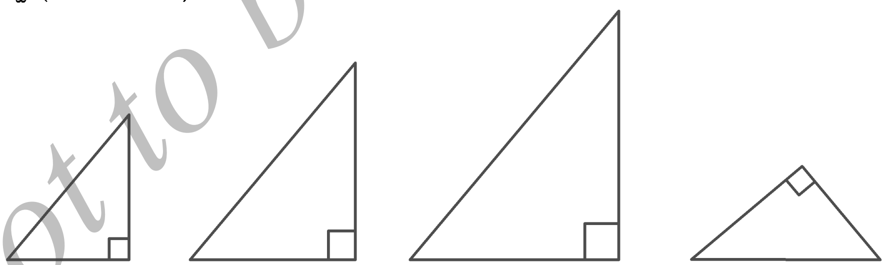
**సందర్భం (iii) :** మూడవ సందర్భం AB < DE అయిన ME = AB అయ్యేట్లు ΔDEF. లో M తీసుకొని సందర్భం (ii) లో చెప్పినట్లుకొనసాగించిన AB = DE అని చెప్పవచ్చు అప్పుడు ΔABC $\cong$ ΔDEF.

రెండు త్రిభుజాలలో రెండు జతల కోణాలు, ఒక జత భుజములు సమానము.ఇక్కడ ఆ భుజము సమానముగానున్న సదృశ కోణాల జతల మధ్య భుజము కాదు. అయిననూ భుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయా? అవి రెండూ సర్వసమానంగా ఉంటాయని మీరుగమనించవచ్చు ఎందుకోమీరు కారణం చెప్పగలరా?

ఒక త్రిభుజంలోని కోణాలమొత్తం 180° రెండు జత కోణాలు సమానమైతే మూడవ జత కోణాలు కూడా సమానమవుతాయి (180° సమాన కోణాల మొత్తము)

రెండు త్రిభుజాలలో రెండు జతల కోణాలు మరియు ఒకజత సదృశ భుజాలు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమాన త్రిభుజాలు. దీనిని మనం కో. కో.భు సర్వసమాన నియమం అంటాము. ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

కోణాలు 40°, 50° మరియు 90° వుండేటట్లు త్రిభుజాలను గీయండి. ఈ విధంగా ఎన్ని త్రిభుజాలను గీయగలవు? భుజాలు పొడవు వేరువేరుగా వుండేటట్లు అనేక త్రిభుజాలను గీయవచ్చు (చిత్రం 5.14).



చిత్రం 5.14

త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావచ్చు లేదా కాక పోవచ్చు అనేదాన్ని గమనించండి.

కావున త్రిభుజా సర్వసమానత్వానికి ముడు కోణాలు సమానమైతే సరిపోదు. అందువల్ల త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మూడు సమాన భాగాలలో ఒకటి భుజం అయివుండాలి.

ఇంకా కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకొందాం

**ఉదాహరణం 3 :** AB రేఖాఖండం CD రేఖాఖండానికి సమాంతరంగా వుంటుంది AD మధ్యబిందువు O (చిత్రం 5.15).

(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) BC కి కూడా మధ్యబింధువు 'O' అయిన నిరూపించండి.

**సాధన :-**

(i) $\Delta AOB$ మరియు $\Delta DOC$ లలో

$\angle ABO = \angle DCO$ (AB || CD : BC తిర్యగ్రేఖ ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle AOB = \angle DOC$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

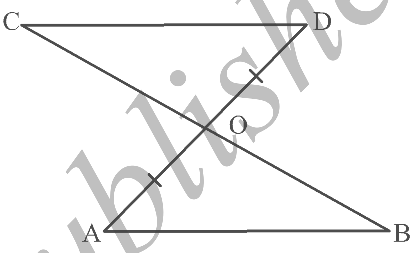
$OA = OD$ (దత్తాంశము)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta DOC$

(కో.కో.భు నియమంప్రకారం)

(ii) OB = OC (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు సమానం)

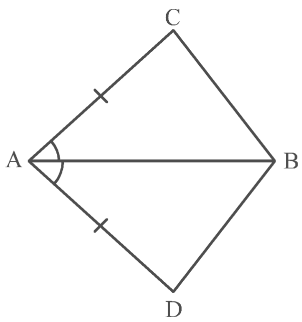
కావున BC మధ్యబిందువు 'O'



చిత్రం 5.15

**అభ్యాసం 5.1**

(1) చతుర్భుజం ACBD లో AC = AD మరియు $\angle A$ కు AB కోణా సమద్విఖండన రేఖ అయిన $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ BC మరియు BD ల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? (చిత్రం 5.16).



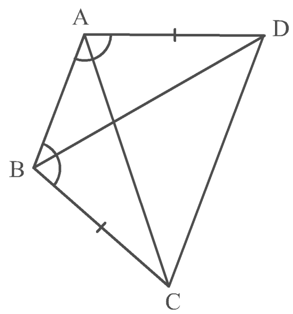
చిత్రం 5.16

(2) ABCD చతుర్భుజంలో AD = BC మరియు $\angle DAB = \angle CBA$ అయిన(చిత్రం 5.17).

(1) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

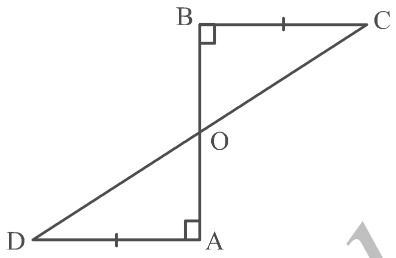
(2) BD = AC

(3) $\angle ABD = \angle BAC$ అని నిరూపించండి



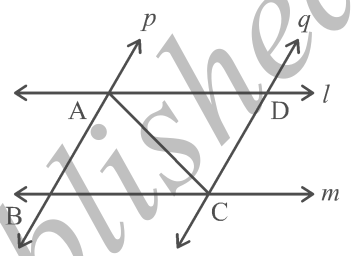
చిత్రం 5.17

(3) AD, BC సమానము మరియు రేఖా ఖండము AB కి లంబములు అయిన CD రేఖాఖండము AB ని సమద్విఖండన చేయునని చూపుము. (చిత్రం 5.18).




చిత్రం 5.18

(4) $l$,m అనే ఒక జత సమాంతర రేఖలు $p$ మరియు $q$ అనే వేరొక జత సమాంతర రేఖలే ఖండించబడినవి $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ అని నిరూపించుము (చిత్రం 5.19).

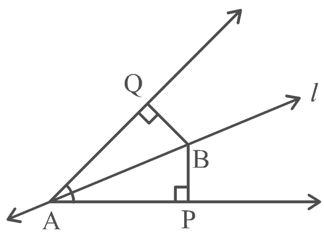



చిత్రం 5.19

(5) $\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ $l$ అయిన $l$ పై B ఏదో ఒక బిందువు BP మరియు PQ లు B నుండి $\angle A$ యొక్క భుజాలకు గీచిన లంబాలు. (చిత్రం 5.20).

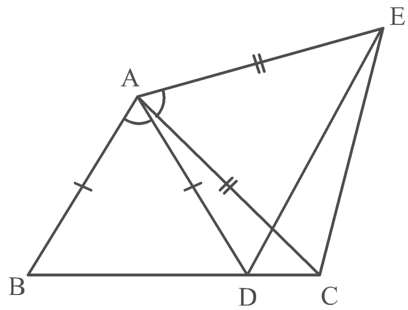
(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) $BP = BQ$ లేదా B $\angle A$ భుజాలనుండి సమానదూరంలో వున్నదని చూపండి.




చిత్రం 5.20

(6) చిత్రం 5.21 లో $AC = AE$, $AB = AD$ మరియు $\angle BAD = \angle EAC$ అయిన $BC = DE$ అని నిరూపించుము.

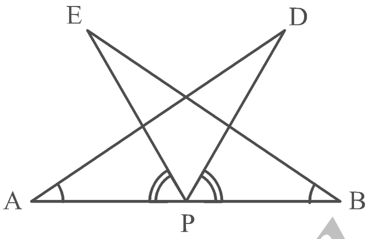



చిత్రం 5.21

(7) AB ఒక రేఖాఖండము మరియు P దాని మధ్యబిందువు $\angle BAD = \angle ABE$ మరియు $\angle EPA = \angle DPB$ అయ్యేటట్లు D మరియు E బిందువులు AB కి ఒకే వైపు వున్నవి (చిత్రం 5.22).

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) AD = BE అని చూపండి.



చిత్రం 5.22

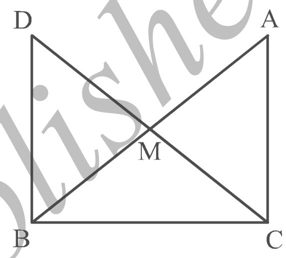
(8) లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో లంబకోణము $\angle C$ వద్ద వున్నది, కర్ణము AB యొక్క మధ్యబిందువు M, C బిందువు M కు కలిపి DM = CM అయ్యేటట్లు D బిందువు వద్దకు పొడిగించినారు చిత్రంలో చూసినట్లు D బిందువును B బిందువుకు కలిపారు (చిత్రం 5.23).

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ ఒక లంబకోణము

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2}$ AB అని చూపండి

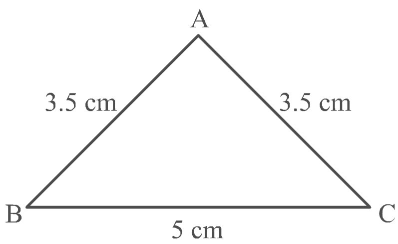


చిత్రం 5.23

## 5.4 త్రిభుజము యొక్క కొన్ని ధర్మములు

పైన ఇంతవరకూ మనం త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం యొక్క రెండు నియమాల గురించి నేర్చుకున్నాము. ఈ ఫలితాలను రెండు భుజాలు సమానంగా గల త్రిభుజ ధర్మాల అధ్యయనానికి ఉపయోగిద్దాము

కింద ఇచ్చిన కృత్యాన్ని చేయండి రెండు సమాన భుజాల పొడవు 3.5cm మరొక భుజం పొడవు 5cm మరొక భుజం వుండేటట్లు ఒక త్రిభుజాన్ని గీయండి (చిత్రం 5.24).



చిత్రం 5.24

ఈ విధమైన నిర్మాణాలు మీరు కింది తరగతులలో చేశారు ఇలాంటి త్రిభుజాలను ఏమని పిలుస్తారో గుర్తుచేసుకోండి.

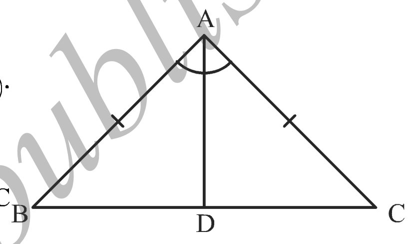
ఒక త్రిభుజం లో ఏవైనా రెండు భుజాలు సమాన మైన దానిని సమద్విబాహు త్రిభుజము అని అంటారు. చిత్రం 5.24 లో $\Delta ABC$ సమబాహు త్రిభుజము $AB = AC$ అవుతుంది.

$\angle B$ మరియు $\angle C$ లను కొలవండి ఏమి గమనించారు?

వివిధ భుజాల కొలతలున్న సమద్విబాహు త్రిభుజాలను తీసుకొని, ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి.

అటువంటి ప్రతి త్రిభుజములో, సమానభుజాలకు ఎదురుగావున్న కోణాలు సమానంగా వుండడాన్ని మీరు గమనిస్తారు. ఇది చాలా ముఖ్యమైన ఫలితము మరియు ప్రతి సమద్విబాహు త్రిభుజానికి ఇది సత్యము. దీనిని కింది విధంగా నిరూపించవచ్చు.

**సిద్ధాంతం 5.2 : ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజములో సమాన భుజాలకు ఎదురుగానున్న కోణాలుసమానము**



చిత్రం 5.25

దానిని అనేక పద్ధతులలో రుజువు చేయవచ్చు. ఇక్కడ ఆ నిరూపణలలో ఒకటి ఇవ్వబడినది.

**సాధన :** ABC సమద్విబాహు త్రిభుజంలో $AB = AC$ అయిన $\angle B = \angle C$ అని నిరూపించాలి.

$\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ గీస్తాము ఇది భుజము BC ని D బిందువు వద్ద ఖండించును అనుకోండి. (చిత్రం 5.25).

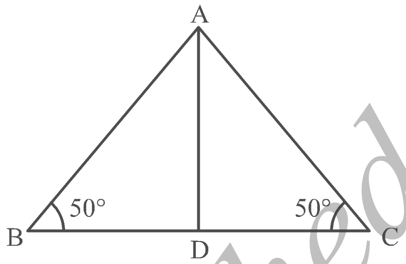
$\Delta BAD$ మరియు $\Delta CAD$ లలో

| | |
|---|---|
| $AB = AC$ | (దత్తాంశం) |
| $\angle BAD = \angle CAD$ | (నిర్మాణంప్రకారం) |
| $AD = AD$ | (ఉమ్మడి భుజం) |
| కావున $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ | (భు.కో.భు సర్వసమాన స్వీకృతం ) |
| అందువలన $\angle ABD = \angle ACD$ | (సర్వసమాన త్రిభుజ సదృశ భుజాలుసమానం) |
| అనగా $\angle B = \angle C$ | (సమానకోణాలు) |

దీని విలోమం కూడా సరినా? అంటే "ఏదైనా త్రిభుజములో రెండు కోణాలు సమానమైన వాటి ఎదురుగా వుండే భుజాలు కూడా సమానము" అని మీరు చెప్పగలరా?

ఈ కృత్యాన్ని చేయండి.

BC ఏదైనా కొలత వుండి $\angle B = \angle C = 50^\circ$ వుండేటట్లు త్రిభుజం ABC గీయండి. $\angle A$ కి కోణసమద్విఖండన రేఖనుగీసి అది BC ని D వద్ద ఖండిస్తుంది (చిత్రం 5.26). $\Delta ABC$ ని కాగితంపై కత్తరించి శీర్షం A ని శీర్షం B తో ఏకీభవించేటట్లు AD గీతమీద మడిచండి.



చిత్రం **5.26**

AC మరియు AB భుజాల గురించి ఏమిగమనించావు AC,AB తో ఏకీభవిస్తాయని గమనించివుంటారు కావున AC = AB

మరికొన్ని త్రిభుజాలను తీసికొని కృత్యాన్ని పునరావర్తనం చేయాలి. ప్రతిసారి సమానకోణాల అభిముఖ భుజాలు సమానవుతాయి అనేదాన్ని గమనించండి కావున ఈ కింది అంశం కనిపిస్తుంది.

**సిద్ధాంతం 5.3: ఒక త్రిభుజంలో సమాన కోణాలకు ఎదురుగా వుండే భుజాలు సమానము.**

ఇది సిద్ధాంతం 5.2 కు విలోమం

ఈ సిద్ధాంతం కో.భు.కో సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి సాధించవచ్చు. ఈ ఫలితాన్ని అన్వయించడానికి మనం కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకొందాం.

**ఉదాహరణం 4:** $\Delta ABC$ లో $\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండనరేఖ AD, BC భుజానికి లంబంగానున్నది అయిన AB = AC అని $\Delta ABC$ సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి (చిత్రం 5.27)

**సాధన :** $\Delta ABD$ మరియు $\Delta ACD$ లలో

$\angle BAD = \angle CAD$ (దత్తాంశం)

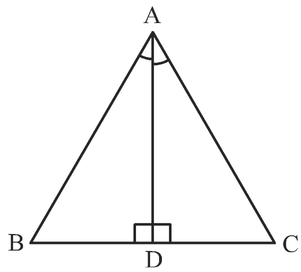
$AD = AD$ (ఉమ్మడి భుజం)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ (దత్తాంశం)

కావున $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (కో. భు.కో నియమం)

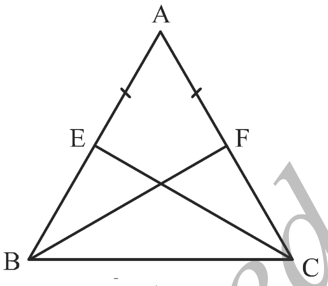
దానివల్ల $AB = AC$ (సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)

లేదా $\Delta ABC$ సమద్విబాహుత్రిభుజము.



చిత్రం 5.27

**ఉదాహరణం 5 :** $\Delta ABC$ లో సమాన భుజాలు AB, AC ల మధ్య బిందువుల వరుసగా E మరియు F (చిత్రం 5.28). BF = CE అని చూపండి



చిత్రం 5.28

**సాధన :** $\Delta ABF$ మరియు $\Delta ACE$ లలో

AB = AC (దత్తాంశము)

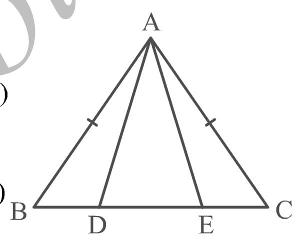
$\angle A = \angle A$ (ఉమ్మడి కోణము)

AF = AE (సమానభుజాలలో సగాలు)

కావున $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (భు.కో.భు. నియమం)

$\therefore$ BF = CE (సర్వసమాన త్రిభుజాలలోని సదృశ భుజాలు సమానం)

**ఉదాహరణం 6 :** ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము ABC లో D మరియు E బిందువులు AB=AC. BC పై BE = CD అయ్యేటట్లు బిందువులు(చిత్రం 5.29). అయిన AD = AE అనిచూపండి.



చిత్రం **5.29**

**సాధన :** $\Delta ABD$ మరియు $\Delta ACE$ లలో

AB = AC (దత్తాంశం) ......... (1)

$\angle B = \angle C$

(సమాన భుజాలకు ఎదురుగావున్న సమానకోణాలు) ......... (2)

ఇంకా BE – DE = CD – DE

అనగా BD = CE ......... (3)

కావున $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

((1), (2), (3) ల నుండి మరియు భు.కో.భు. నియమం)

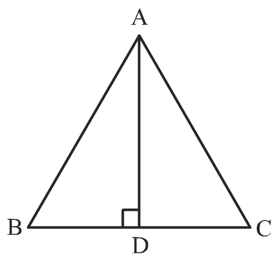
దానినుండి AD = AE (సర్వసమానత్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)

### అభ్యాసం 5.2

(1) $\Delta ABC$ సమద్విబాహుత్రిభుజంలో AB = AC;. $\angle B$ , $\angle C$ లకోణ సమద్విఖండనరేఖలు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయి. A మరియు O బిందువులను కలపండి

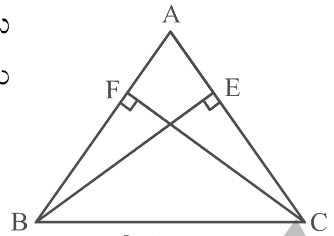
(i) OB = OC

(ii) $\angle A$ కు కోణసమద్విఖండనరేఖ AO



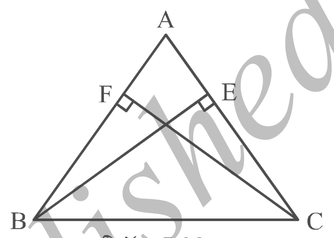
చిత్రం 5.30

(2) $\Delta ABC$ లో AD అనునది BC భుజానికిగల లంబ సమద్విఖండనరేఖ (చిత్రం 5.30). AB = AC అయ్యేటటు సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి.



చిత్రం 5.31

(3) $\Delta ABC$ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము సమాన భుజాలు AC, AB లకు గీసిన లంబాలు వరుసగా BE మరియు CF (చిత్రం 5.31). లంబాలు సమానమని చూపండి.

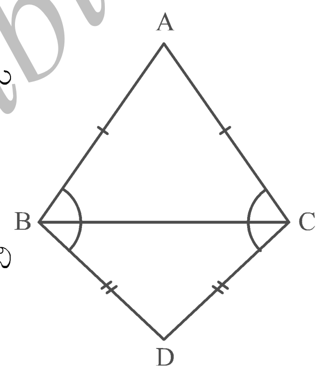


చిత్రం 5.32

(4) $\Delta ABC$ లో AC, AB భుజాలకు గీసిన లంబాలు BE మరియు BF లు సమానమయిన(చిత్రం 5.32).

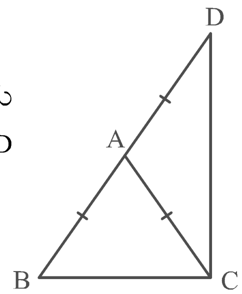
(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

(ii) AB = AC అంటే $\Delta ABC$ సమబాహు త్రిభుజం అని చూపండి.



చిత్రం 5.33

(5) $\Delta ABC$, DBC లు ఒకే భుజము BCపై నున్న రెండు సమద్విబాహుత్రిభుజాలు (పటం 5.33). అయిన $\angle ABD = \angle ACD$ అనిచూపండి.



చిత్రం 5.34

(6) $\Delta ABC$ ఒక సమబాహు త్రిభుజం AB = AC అయిన AD = AB అయ్యేట్లు BA ని D వరకు పొడిగించిన $\angle BCD$ ఒక లంబకోణం అని చూపండి (చిత్రం 5.34).

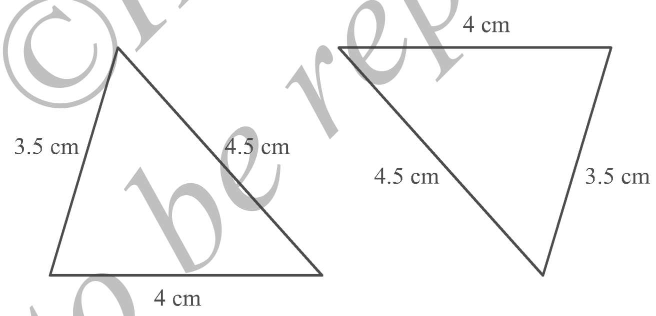
(7) ABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజం $\angle A = 90^\circ$ మరియు $AB = AC$. $\angle B$ మరియు $\angle C$ లను కనుగొనండి.

(8) ఒక సమబాహుత్రిభుజం యొక్క ప్రతి కోణము $60^\circ$ వుంటుందని చూపండి.

## 5.5 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మరికొన్ని నియమాలు

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడుకోణాలు మరొక త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాలు సమానమైతే సరిపోదు అనే దాన్ని పైన తెలుసుకున్నారు. త్రిభుజాలసర్వసమానత్వానికి ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలు. మరొకత్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలకు సమానమైతే సరి అని అంటే మీకు ఆశ్చర్యం అవుతుంది, ఇప్పటికే కిందితరగతులలో దీనిని పరీక్షించారు ఇది సత్యం.

దీనిని పరీక్షించడానికి భుజాలకొలత 4cm, 3.5cm మరియు 4.5cm వున్న రెండు త్రిభుజాలను గీసి వాటిని కత్తరించి, ఒకదాని పైఒకటి వుంచండి ఏమి గమనించారు? రెండు త్రిభుజాలు సంపూర్ణంగా ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించేటట్లు సమాన భుజాలు ఏకీభవించేటట్లు అమర్చాలి. ఆందువల్ల త్రిభుజాలు సర్వసమానం.




చిత్రం 5.35

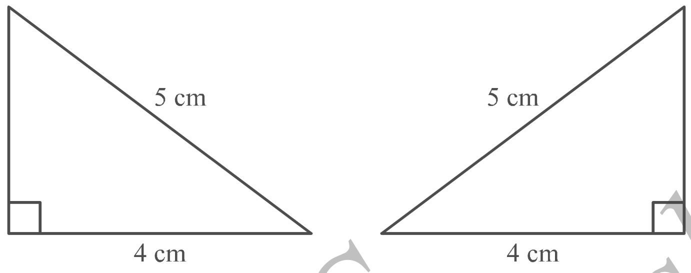
మరికొన్ని త్రిభుజాలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయాలి. దీనితో త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమునకు మరొక నియమం లభిస్తుంది.

**సిద్ధాంతం : 5.4 : భుజము. భుజము.భుజము (భు. భు. భు) సర్వసమానత్వ నియమము.**

ఈ సిద్ధాంతాన్ని ఒక సరైన నిర్మాణాలను ఉపయోగించి సాధించవచ్చు భు.కో.భు సర్వసమాన త్వ నియమంలో సమాన కోణాలను సదృశ సమాన భుజాల జతల మధ్య వుంటే మాత్రమే త్రిభుజాలు సర్వసమానత్వాన్ని కలిగివుంటాయి లేకపోతే డవు అనేదాన్ని మీరు ఇంతకుముందే తెలుసుకొన్నారు.

**ఈ కృత్యాన్ని చేయండి:**

కర్ణం పొడవు 5cm మరియు మిగిలిన రెండు భుజాలలో ఒకదాని పొడవు 4cm వుండేటట్లు రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలను గీయండి (చిత్రం 5.36).




చిత్రం **5.36**

త్రిభుజాలను కత్తరించి సమాన భుజాలు ఏకీభవించేటట్లు ఒకదానిపై మరొకటి వుంచండి అవసర మైనచో త్రిభుజాలను త్రిప్పండి మీరు ఏమి గమనించారు?

రెండు త్రిభుజాలు పరస్పరం ఏకీభవిస్తాయి. అందువల్ల ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానం వేరొక జత లంబకోణత్రిభుజాలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి మీరు ఏమి గమనిస్తారు.

రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావాలంటే, ఒక జత భుజాలు మరియు కర్ణాలు సమానంగా వుండాలి అనే దాన్ని మీరు కనుక్కోగలరు దీనిని క్రింది తరగతులలో పరీక్షించారు. ఈ విషయంలో లంబకోణము సమాన భుజాలమధ్య కోణంకాదు అనేదాన్ని గమనించండి.

అందువల్ల ఈ కింది సర్వసమానత్వ నియమాన్ని చూడండి

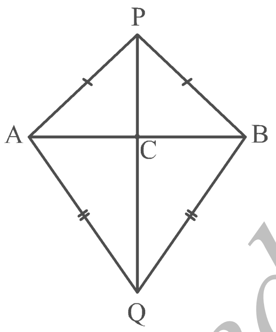
**సిద్ధాంతం : 5.5 రెండు లంబకోణత్రిభుజాలలో ఒకత్రిభుజములోని కర్ణము, భుజములు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని కర్ణము, భుజాలకు సమానమైన ఆరెండు త్రిభుజాలు సర్వసమాన త్రిభుజాలు.**

**గమనించండి:** లం.క.భు అనగా లంబ కోణము– కర్ణము– భుజము అని అర్థం

కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

**ఉదాహరణ 7:** AB ఒక రేఖా ఖండము. P మరియు Q అనే బింధువులు AB కి రెండు వైపులలో A, B లకు సమాన దూరంలో ఉన్నాయి. (చిత్రం 5.37) అయిన . PQ రేఖ AB లంబసమద్వి ఖండన రేఖ అని చూపండి.

**సాధన :** PA = PB మరియు QA = QB అని ఇవ్వ బడినది. మీరు PQ⊥AB కి లంబమని మరియు దానిని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపాలి PQ, AB ని C బిందువు వద్ద ఖండించును ఈ చిత్రంలో సర్వసమాన త్రిభుజాలగురించి ఆలోచించగలరా?



చిత్రం **5.37**

$\Delta PAQ$ మరియు $\Delta PBQ$ తీసుకోండి

$AP = BP$ (దత్తాంశం)

$AQ = BQ$

$PQ = PQ$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (భు. భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమము)

$\therefore \angle APQ = \angle BPQ$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు)

$\Delta PAC$ మరియు $\Delta PBC$ లలో

$AP = BP$ (దత్తాంశం)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ పైన నిరూపించబడినది)

$PC = PC$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (భు.కో.భు నియమం)

$AC = BC$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు) ..............(1)

మరియు $\angle ACP = \angle BCP$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు)

ఇంకా $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (సరళయుగ్మాలు)

కావున $2\angle ACP = 180°$

లేదా $\angle ACP = 90°$ ..............(2)

(1), (2) ల నుండి PQ, AB కి లంబ సమద్విఖండన రేఖ అని చెప్పవచ్చు గమనించవలసిన విషయమేమింటే $\Delta PAQ$, $\Delta PBQ$ ల సర్వసమానత్వం రుజువు చేయకుండా $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ అని నిరూపించలేము.

$AP = BP$ (దత్తాంశం)

$PC = PC$ (ఉమ్మడి భుజము)

మరియు $\angle PAC = \angle PBC$ ($\Delta APB$ లో సమాన భుజాలకు ఎదురుగా నున్న సమాన కోణాలు)

దీనినుండి ఇది రెండూ సర్వసమానం కాదు ఎందుకంటే ఈ ఫలితం భు. భు. లో నియమాన్ని ఇస్తుంది కాని త్రిభుజాల సమానత్వానికి ఈ నియమం ఎల్లప్పుడూ నిజంకాదు ఇంకా కోణ జత సమాన భుజాల జతల మధ్య కోణము కాదు ఇప్పుడు కింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

**ఉదాహరణ 8:** $l$,m రేఖలు A బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి P బిందువు ఈ రేఖలకు సమాన దూరంలో ఉంది (చిత్రం 5.38). AP రేఖ $l$,m ల మధ్య ఏర్పడిన కోణాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి.

**సాధన :** $l$ ,$m$ రేఖలు A బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి $PB \perp l$, మరియు $PC \perp m$.

$PB = PC$ (అని ఇవ్వబడినది)

$\angle PAB = \angle PAC$ అని చూపాలి.

$\Delta PAB$, $\Delta PAC$ లలో

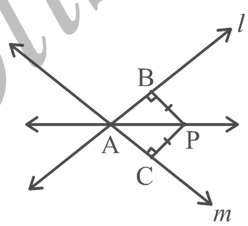
$PB = PC$ (దత్తాంశం)

$\angle PBA = \angle PCA = 90°$ (దత్తాంశం)

$PA = PA$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (లం. క. భు. నియమం)

కావున $\angle PAB = \angle PAC$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు)

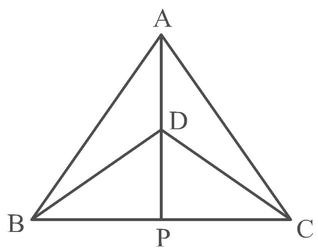



చిత్రం **5.38**

ఈ ఫలితము అభ్యాసం 5.1 ప్రశ్న 5 యొక్క ఫలితం విలోమము అనేదాన్ని గమనించండి.

## అభ్యాసం 5.3

1. ఒకే భుజం BC పై $\Delta ABC$ మరియు $\Delta DBC$ సమద్విబాహుత్రిభుజాలు ఏర్పడినవి A మరియు D శీర్షాలు BC కి ఒకే వైపు వున్నవి (చిత్రం 5.39). AD ని పొడిగించిన BC ని P బిందువువద్ద ఖండిస్తుంటే.
   (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$
   (ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$
   (iii) $\angle A$ మరియు $\angle D$ ని AP సమద్విఖండనచేస్తుంది
   (iv) BC కి లంబం AP అని చూపండి.



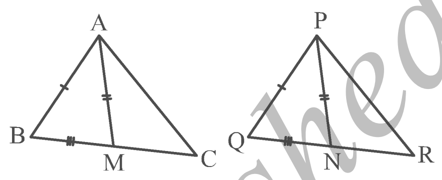

చిత్రం **5.39**

2. ఒక సమద్విబాహుత్రిభుజముABC లో AB = AC,AD అనేది A నుండి BC కి గీసిన లంబము అయిన.

   (i) BC భుజాన్ని AD సమద్విఖండన చేయునని

   (ii) $\angle A$ ని AD కోణ సమద్విఖండన చేయునని చూపండి.

3. $\Delta ABC$లో రెండు భుజములు AB,BC మరియు మధ్యగతము AM వరుసగా $\Delta PQR$ లో రెండు భుజాలు PQ, QR లు మరియు మధ్యగతము PN కు సమానము (చిత్రం 5.40) అయిన.



చిత్రం **5.40**

   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

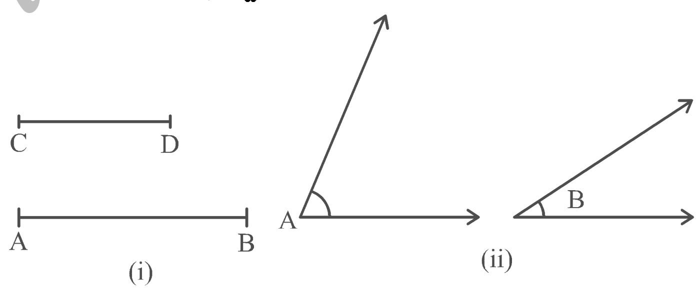
   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని చూపండి.

4. $\Delta ABC$ లో BE, CF లు రెండు సమాన లంబములు, లం.క.భు సర్వసమానత్వ నియమాన్ని ఉపయోగించి $\Delta ABC$ సమద్విబాహుత్రిభుజమని చూపండి.

5. సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో AB = AC. అయిన $\angle B = \angle C$ అని నిరూపించండి $AP \perp BC$ అయ్యేటట్లు AP ని గీయండి.

## 5.6 త్రిభుజాలలోని అసమానత్వములు

ఇప్పటి దాకా మనం త్రిభుజము లేదా త్రిభుజాల భుజాలు మరియు కోణాల సమానత్వం గురించి నేర్చుకున్నాం, కొన్ని సార్లు అసమానమైన చిత్రాలు వచ్చినప్పుడు వాటిని పోల్చవలసి వస్తుంది ఉదాహరణకు చిత్రం 5.41 (i) లో రేఖాఖండం AB పొడవు, రేఖాఖండం CD పొడవుకన్నా ఎక్కువ చిత్రం 5.41 (ii) లో , $\angle A$,$\angle B$ కన్నా పెద్దది.

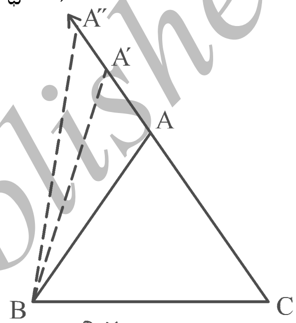


చిత్రం **5.41**

ఇప్పుడు మనం ఒక త్రిభుజంలో అసమానంగా నున్న భుజాలు లేదా అసమానంగా నున్న కోణాల మధ్య ఏదైనా సంబంధం ఉందా? పరిక్షిద్దాం. దాని కొరకు కృత్యాన్ని చేద్దాం.

**కృత్యం :** ఒక డ్రాయింగ్ పేపరు పై B మరియు C అని రెండు గుండు సూదులను గుచ్చండి. ఆరెండింటిని ఒక దారంలో కట్టి అది త్రిభుజం యొక్క భుజం BC అయితే ఇంకొక దారంతో ఒక కొన C కీ కట్టి ఇంకొక కొనకు ఒక పెన్సిల్ ని కట్టండి. పెన్సిల్ ఉపయోగించి బిందువు A అని గుర్తించిన ΔABC ని గీయండి(చిత్రం 5.42). CAపై మరొక బిందువు A' ను పెన్సిల్‌తో గుర్తించండి ఈ బిందువు A బిందువు కు బయట పైపు వుండాలి (అది కొత్త స్థానం).

కావున A'C > AC (పొడవులను పోల్చిన)



చిత్రం **5.42**

A', B లను కలిపి త్రిభుజం A'BC ని ఏర్పరచండి ఇప్పుడు మీరు. ∠A'BC మరియు ∠ABC గురించి ఏమి చెప్పగలరు?

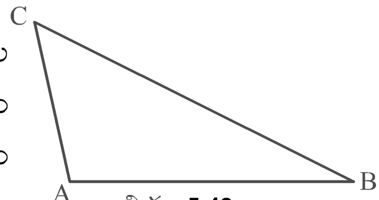
రెండు కోణాలను పోల్చండి మీరు ఏమి గమనించారు?

స్పష్టంగా ∠A'BC >∠ABC

ఇదేవిధంగా CA ను పొడిగించి దానిపై అనేక బిందువులను గుర్తించండి BC భుజంగా గుర్తించిన బిందువులను కలుపుతు త్రిభుజాలను గియండి. భుజం AC పొడవు పెరుగుతున్నప్పుడు (బిందువు A కు వివిధ స్థానాలు తీసుకుంటున్నప్పుడు) దానికి ఎదురుగానున్న కోణం అనగా ∠B కూడా పెరుగుతుంది.

ఇప్పుడు మనం ఇంకొక కృత్యం చేద్దాం

**కృత్యం :** ఒక విషమ బాహుత్రిభుజాన్ని నిర్మించాము (ఒకత్రిభుజంలో మూడుభుజాల పొడవులు వేర్వేరుగా వుంటాయి భుజాలుమాడువులను కొలవండి. కోణాలను కొలవండి మీరు ఏమి గమనించారు?).



చిత్రం **5.43**

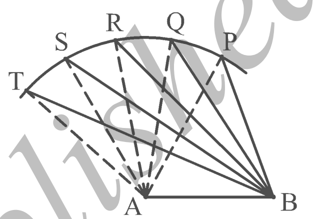
చిత్రం 5.43 ΔABC పటంలో BC యుక్క పొడవుగల భుజం మరియు. AC తక్కువ పొడవుగల భుజం అదేవిధంగా ∠A పెద్దకోణం మరియు ∠B చిన్నకోణం మరికొన్ని త్రిభుజాలను తీసుకోని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి.

**సిద్ధాంతం 5.6 :** ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాలు అసమానంగానున్న పెద్ద భుజానికి ఎదురుగానున్న కోణం పెద్దది.

చిత్రం 5.44 లో చూపినట్లు CA = CP అయ్యే విధంగా BC పై P' బిందువును తీసుకొని సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించవచ్చు.

**కృత్యం :** AB రేఖా ఖండ మును గీయండి A కేంద్రంగా కొంతవ్యాసార్థంలో చాపమును గీయండి. దానిపై వేరు వేరు బిందువులు P, Q, R, S, T లను గుర్తించుండి.

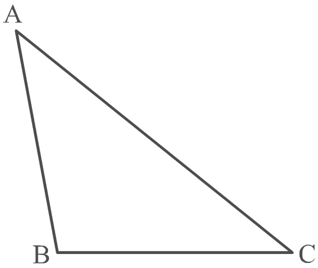
ఈ బిందువులను A మరియు Bలలో కలపండి. (చిత్రం 5.44). మనం P బిందువునుండి T బిందువు వైపు కదులుతున్నప్పుడు $\angle A$ క్రమంగా పెద్దదవుతుంది. దానికి ఎదురుగా వుండే భుజం కొలతకూడా పెరుగుతూ ఉండడాన్ని గమనించవచ్చు. అనగా $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ మరియు TB > SB > RB > QB > PB.




చిత్రం 5.44

ఇప్పుడు వేరు వేరు కోణముల కొలతలు గల త్రిభుజమును గీయుము భుజాలపొడవులను కొలుచుము.(చిత్రం 5.45 ).

పెద్ద కోణానికి ఎదురుగావున్న భుజము పొడవుగా ఉండడాన్ని గమనించవచ్చును. చిత్రం 5.45 లో పెద్ద కోణం $\angle B$ మరియు దాని ఎదురుగానున్న పొడవైన భుజం. AC




చిత్రం 5.45

ఈ కృత్యాన్ని వివిధ త్రిభుజాల తో చేసి పై సిద్ధాంతము విపర్యయం సత్యమని గ్రహిస్తాము. అందువల్ల ఈ సిద్ధాంతం చూడండి

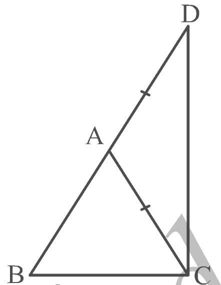
**సిద్ధాంతం 5.7 :** ఒక త్రిభుజంలో పెద్దకోణానికి ఎదురుగానున్న భుజము పొడవైనది.

ఈ సిద్ధాంతం మనం వ్యతితీక పద్దతి ద్వారా నిరూపించవచ్చును ఇప్పుడు

త్రిభుజం ABC గీసి వాటి భుజాల పొడవులు కొలవండి. దానిలో AB + BC, BC + AC మరియు AC + AB లను కనుగొని వాటినిమూడు భుజాలతో పోల్చండి మీరు ఏమిగమనిస్తారు??

AB + BC > AC, BC + AC > AB మరియు AC + AB > BC అఅని గమనిస్తారు ఈకృత్యం వివిధ త్రిభుజాలను తీసుకొని చేయడంద్వారా ఈ కింది సిద్ధాంతాన్ని రాబట్టవచ్చు

**సిద్ధాంతం 5.8 :** ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము మూడవ భుజము పొడవుకన్నా ఎక్కువ.



చిత్రం **5.46**

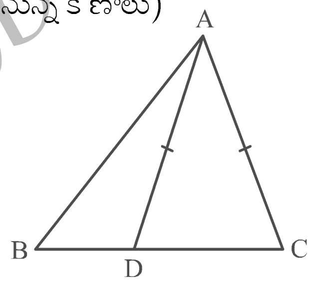
చిత్రం 5.46 లో $\Delta ABC$ లో $AD=AC$ అయ్యేట్లు భుజం BA బిందువు D వద్దకు పొడిగింపబడినది $\angle BCD > \angle BDC$ అని $BA + AC > BC$ అని నిరూపించగలరా? పై సిద్ధాంతం నిరూపణ రాబట్టగలరా?

ఈ ఫలితాలపై ఆధారపడి ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం .

**ఉదాహరణ 9:** $\Delta ABC$ లో $AD = AC$ అగునట్లు భుజం BC పై D ఒక బిందువు (చిత్రం 5.47). అయిన $AB > AD$ అని చూపండి.

**సాధన :** $\Delta DAC$ లో

| | | |
|---|---|---|
| | $AD= AC$ | (దత్తాంశం) |
| కాని | $\angle ADC= \angle ACD$ | (సమాన భుజాలకు ఎదురుగానున్న కోణాలు) |
| ఇప్పుడు, | $\angle ADC$, $\Delta ABD$ కి బాహ్య కోణం. | |
| కావున | $\angle ADC > \angle ABD$ | |
| లేదా | $\angle ACD > \angle ABD$ | |
| ఇట్టిభీ | $\angle ACB > \angle ABC$ | |
| అప్పుడు | $AB > AC$ | ($\Delta ABC$ లో పెద్దకోణానికి ఎదుట భుజం |
| లేదా | $AB > AD$ ($AD = AC$ కావున) | |

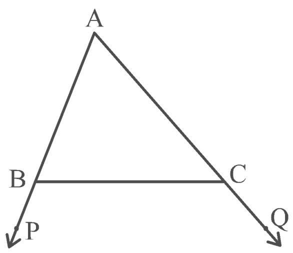


చిత్రం **5.47**

**అభ్యాసం 5.4**

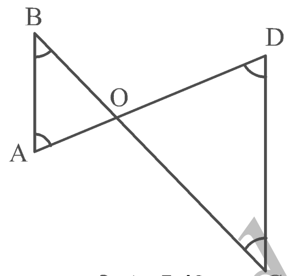
(1) ఒక లంబకోన త్రిభుజములో కర్ణము అతి పొడవైన భుజమని నిరూపించండి

(2) పక్క పటం 5.48 లో $\Delta ABC$ లో భుజాలు AB,AC లు వరుసగా P, Q బిందువులకు పొడిగించబడినని ఇంకా $\angle PBC < \angle QCB$ అయిన $AC > AB$ అని చూపండి.



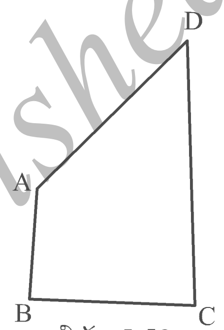
చిత్రం **5.48**

(3) చిత్రం 5.49 లో $\angle B < \angle A$ మరియు $\angle C < \angle D$ అయిన $AD < BC$ అని చూపండి.



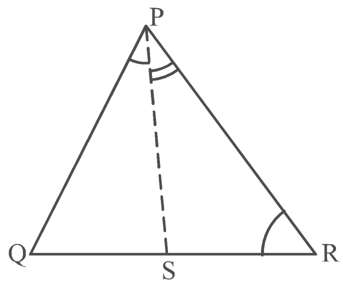

చిత్రం **5.49**

(4) చతుర్భుజం ABCD లో AB అతిచిన్న భుజం మరియు CD అతి పొడవైన భుజం (చిత్రం 5.50).




చిత్రం 5.50

(5) చిత్రం 5.51 లో $PR > PQ$ మరియు $\angle QPR$ ను PS అయిన $\angle PSR > \angle PSQ$ అని చూపండి.




చిత్రం 5.51

(6) ఇచ్చిన సరళ రేఖకు ఒక బయటి బిందువునుండి గీసిన రేఖాఖం డంలో లంబరేఖాఖండమే అతి చిన్నది అని చూపండి.

**అభ్యాసం 5.5 (ఐచ్ఛికం)**

(1) ఒక $\Delta ABC$ లోనీ అన్ని శీర్షాలకు సమాన దూరంలో వుండేటట్లు లోపలవైపు ఒక బిందువును గుర్తించండి.

(2) ఒక త్రిభుజపు అన్ని భుజాలనుండి సమానదూరంలో వుండేటట్లు లోపలవైపు ఒక బిందువును గుర్తించండి

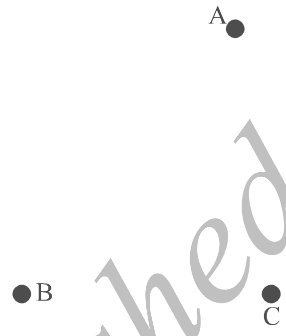
(3) ఒక పార్కులో జన సమూహం మూడు బిందువుల వద్ద కేంద్రీకరింపబడ్డారు (చిత్రం 5.52).

A: పిల్లల కోసం జారేబండ, ఉయ్యాలవున్నది

B: మానవ నిర్మిత కొలనుగలవైపు

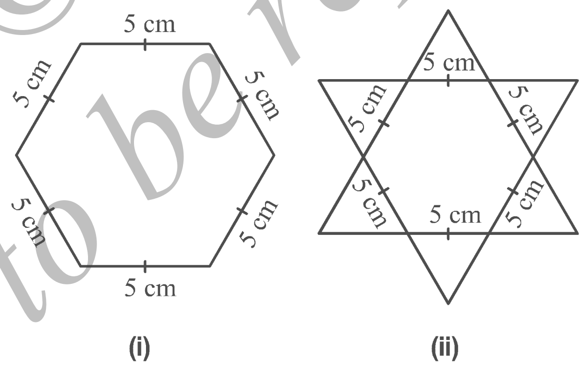
C: వాహనాలు నిలబడేది, బయటకి పోవుప్రదేశంలో ఎక్కువ జనసమూహం కేంద్రీకృతం కావడానికి ఒక ఐస్‌క్రీం అంగడిని స్థాపించాలి.

(గమనిక : ఐస్‌క్రీం అంగడి A, B మరియు C లకు సమానదూరం లోవుండాలి)




చిత్రం 5.52

(4) షడ్భుజ ఆకృతి మరియు నక్షత్రాకారంలో నున్న ముగ్గులను (చిత్రం 5.53) (i) మరియు (ii) మీకు సాధ్యమైనన్ని ) 1 cm భుజము పొడవుగల సమబాహు త్రిభుజాలలో నింపండి ప్రతిదానిలో త్రిభుజాల సంఖ్య భుజాలసంఖ్య లెక్కించండి. దీనిలో ఎక్కువ త్రిభుజాలున్నాయి.




చిత్రం 5.53



## 5.7 సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో కింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

(1) సమరూప అకృతులు అనగా ఒకే ఆకారం మరియు పరిమాణము.

(2) ఒకే వ్యాసార్థం కలిగిన రెండు వృత్తాలు సర్వసమానము.

(3) భుజము కొలత ఒకటే అయిన రెండు చతురస్రాలు సర్వసమానము.

(4) $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ మరియు $C \leftrightarrow R$ సదృశంగావున్న త్రిభుజం ABC మరియుత్రిభుజం PQR లు సర్వసమానమైతే సాంకేతికంగా $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అనిచూపిస్తాము.

(5) ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యకోణము మరొక త్రిభుజంలోని సదృశ భుజాలు, వాటిమధ్య కోణానికి సమానమైన ఆరెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు (భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమము.)

(6) ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు, వాటి మధ్య భుజం వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని సదృశ కోణాలు. వాటిమధ్య భుజానికి సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు. (కో.భు.కో సర్వసమానత్వ నియమము)

(7) ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలు, ఒక భుజము మరొక త్రిభుజంలో రెండు కోణాలు, ఒక భుజము సదృశంగా సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము (కో.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం)

(8) ఒక త్రిభుజంలో సమాన కోణాలకు ఎదురుగా వున్న కోణాలు సమానం.

(9) ఒక త్రిభుజంలో సమాన కోణాలకు ఎదురుగా వున్న భుజాలు సమానం

(10) సమబాహుత్రిభుజంలో ప్రతి కోణం $60^\circ$.

(11) ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు వేరొక త్రిభుజంలోని సదృశ భుజాలకు సమాన మైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము. (భు.భు.భు సర్వసమాన నియమము.)

(12) రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒకదాని కర్ణము. భుజము వరుసగా వేరొక త్రిభుజంలోని కర్ణము సదృశ భుజాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు. (లం. క. భు సర్వసమానత్వ నియమము).

(13) ఒక త్రిభుజంలో పెద్ద భుజానికి ఎదురుగావుండే కోణం పెద్దది.

(14) ఒక త్రిభుజంలో పెద్ద కోణానికి ఎదురుగావుండే భుజం పొడవైనది.

(15) త్రిభుజంలో ఏవైనారెండు భుజాలపొడవుల మొత్తం మూడవ భుజం పొడవు కన్నా ఎక్కువ.

## అధ్యాయం - 6

# నిర్మాణాలు

### 6.1 పరిచయం:

వెనుకటి అధ్యాయంలో రేఖాకృతితో సిద్ధాంతాలు సాధనలు లేదా అభ్యాసంలోని సమస్యలు సాధించడానికి సరైన కొలతలతో చిత్రాలను గీయవలసిన అవసరం లేదు. వాటిని మీ సందర్భాన్ని తెలుసుకోవడానికి మరియు సరైన కారణాలను ఇవ్వడానికి అనుకూలంగా ఇవ్వబడినవి. ఒక్కోసారి మనకు సరైన కొలతలున్న చిత్రాలను గీయాల్సిరావచ్చు. ఉదాహరణకు ఇల్లుకట్టడానికి బ్లూప్రింట్ (నీలినకాశ) ఉపకరణలు మరియు యంత్రంలోని వివిధ భాగాలను చూపించడానికి రోడ్డు విన్యాసాన్ని చూపడానికి సరైనవి అవసరమవుతాయి. ఈ చిత్రాలను గీయడానికి జామితీయ పరికరాలను అవసరం, మీ వద్ద వున్న జామితీయ పరికరాల పెట్టెలో ఈ కింది పరికరాలుండాలి.

**(i)** **స్కేలు (కొలబద్ద):** దీనికి ఒకవైపు మిల్లీ మీటర్లు, సెంటీమీటర్లలో గుర్తించబడి మరియు దానిరెండోవైపు అంగుళాలలో (ఇంచులలో) మరియు అంగుళాల విభాగాలలో గుర్తించబడివుండాలి.

**(ii)** **ఒక జత మూలమట్టాలలో** : ఒకటి $90^\circ$, $60^\circ$ మరియు $30^\circ$ కోణాలు మరియు మరొకదానిలో $90^\circ$, $45^\circ$ మరియు $45^\circ$ కోణాలు గల స్కేలు వుంటుంది.

**(iii)** **విభాగిని** : దీనికి కొలవడానికి సరిపడేటట్లు తీయగలగాలి

**(iv)** **వృత్తలేఖని** : దీనికి ఒక వైపు పెన్సిల్ బిగించగలిగేట్లుండాలి

**(v)** **కోణమానిని**

సాధారణంగా ఈ పరికరాలన్నీ జామితీయ నిర్మాణాలైన త్రిభుజం, వృత్తం, చతుర్భుజం, బహుభుజాకృతులు మొదలైనవి గీయడానికి అవసరమవుతాయి. అయితే జామితీయ పట నిర్మాణానికి ప్రధానంగా మనం రెండు పరికరాలను ఉపయోగించి, గీయవచ్చు. అవి కొలతలు లేని కొలబద్ద **(సరళరేఖా పట్టి)** మరియు వృత్తలేఖిని కొన్ని నిర్మాణాలను కొలవడానికి అవసరమైన కొలతలున్న కొలబద్ద మరియు కోణమానిని ఉపయోగించుకుంటాం. ఈ పాఠంలో కొన్ని అత్యవసర నిర్మాణాలుగా గుర్తించినవి వాటిని కొన్ని త్రిభుజ నిర్మాణంలో ఉపయోగించవల్సివుంటుంది.

## 6.2 మౌళిక నిర్మాణాలు (Basic Constructions)

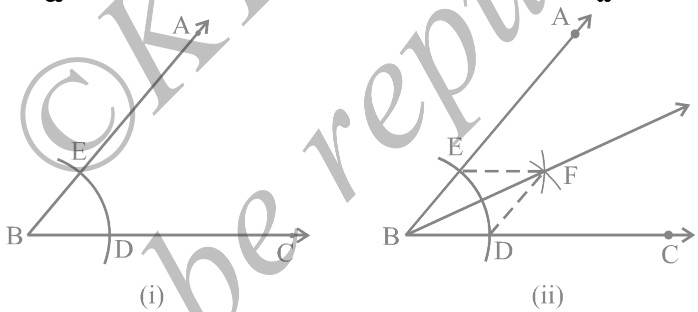
ఆరవ తరగతిలో మీరు వృత్తం, రేఖాఖండం, లంబసమద్విఖండన రేఖ 30°, 45°, 60°, 90° మరియు 120° కోణాలు మరియు ఇచ్చిన కోణానికి కోణ సమద్విఖండన రేఖ, వీటిని సహేతుకమైన కారణాలు లేనిదే నిర్మించడం నేర్చుకున్నారు. ఈ అధ్యాయంలో కొన్ని నిర్మాణాలను విశ్లేషించి, నిర్మించి తగిన ఉపపత్తిద్వారా నిరూపిస్తారు.

**నిర్మాణం 6.1 : ఇచ్చిన కోణానికి కోణ సమద్వి ఖండన రేఖను నిర్మించుట**

ఇచ్చిన కోణం ABC కి కోణసమద్విఖండన రేఖ గీయండి.

**నిర్మాణ సోపానాలు :**

1. B కేంద్రంగా కొంత వ్యాసార్ధంతో BA, BC కిరణాలను D మరియు E బిందువుల వద్ద ఖండించేటట్లు చిత్రం [(6.1 (i) లో చూపినట్లు చాపంగీయండి].
2. DE పొడవులో సగంకంటే ఎక్కువ వ్యాసార్ధంతో, D మరియు E బిందువులు కేంద్రంగా ఒకే వ్యాసార్ధంతో చాపరేఖలు ఒక దానిని ఒకటి ఖండించే విధంగా గీసి, ఖండన బిందువు F గా గుర్తించండి.
3. BF కిరణాన్ని గీయండి (చిత్రం 6.1 (ii)] ∠ABC కోణసమద్విఖండన రేఖ అగును.




చిత్రం 6.1

ఈ నిర్మాణం తార్కికంగా నిరూపించిన విధానం పరిశీలిద్దాం.

DF మరియు EF లను కలపండి.

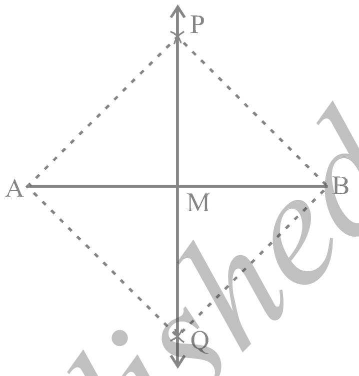
త్రిభుజం BEF మరియు BDF లలో

| | |
|---|---|
| BE = BD | [గీచిన చాపాల వ్యాసార్థాలు సమానం] |
| EF = DF | [సమాన వ్యాసార్థాలు] |
| BF = BF | [ఉమ్మడి భుజం] |
| $\therefore \Delta BEF \cong \Delta BDF$ | [భు.భు.భు. నియమం] |
| కావున, $\angle EBF = \angle DBF$ | [సదృశ కోణాలు] |

**నిర్మాణం 6.2 : ఇచ్చిన రేఖా ఖండానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయుట.**

AB అనే రేఖాఖండం ఇవ్వబడినది. దీనికి లంబసమద్వి ఖండనరేఖను నిర్మించాలి.

**నిర్మాణ సోపానాలు :**




చిత్రం 6.2

1. AB రేఖా ఖండంలో సగం కన్నా ఎక్కువ వ్యాసార్ధం తీసుకొని A మరియు B లు కేంద్రంగా రేఖా ఖండానికి ఇరువైపులా చాపములు ఒకదానికొకటి ఖండించుకొనేటట్లు గీయాలి.
2. ఈ చాపరేఖలు P మరియు Q బిందువులవద్ద పరస్పరం ఖండించేటట్లు PQ ను కలపండి. చిత్రం 6.2]
3. PQ రేఖ, AB రేఖాఖండాన్ని M బిందువు వద్ద ఖండించాలి PMQ రేఖా AB రేఖా ఖండాన్ని ఖండించే లంబ సమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది.

నిర్మాణ విధానములో AB రేఖకు లంబ సమద్విఖండన రేఖ ఎలా వస్తుంది? అని చూద్దాం. A మరియు B బిందువులను P మరియు Q బిందువులతో AP, AQ, BP మరియు BQ వచ్చేటట్లు కలపండి.

$\Delta$ PAQ మరియు PBQ లలో,

AP = BP [సమాన వ్యాసార్ధాలు]

AQ = BQ [సమాన వ్యాసార్ధాలు]

PQ = PQ [ఉమ్మడి భుజం]

$\therefore$ $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ [భు.భు.భు. నియమం]

కావున, $\angle APM = \angle BPM$ [సర్వసమాన త్రిభుజముల అనురూప భాగములు]

$\Delta$ PMA మరియు PMB లలో

AP = BP [ముందు తీసుకున్నట్లు సమాన వ్యసార్ధాలు]

PM = PM [ఉమ్మడి భుజం]

$\angle APM = \angle BPM$ [నిరూపించబడినది]

$\therefore \Delta PMA \cong \Delta PMB$ [భు.భు.భు. నియమం]

కావున, AM = BM మరియు $\angle PMA = \angle PMB$

$\angle PMA + \angle PMB = 180°$ అయినది [రేఖీయద్వయం]

$\angle PMA = \angle PMB = 90°$

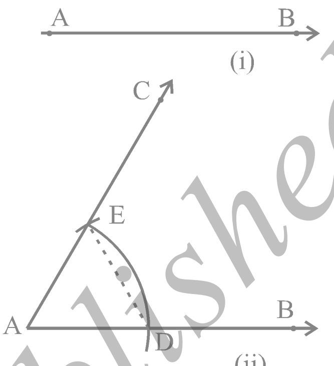
కావున, PM అంటే PMQ రేఖ AB రేఖా ఖండానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖ అయినది.

**నిర్మాణం 6.3: ఇచ్చిన కిరణం యొక్క తొలి బిందువు వద్ద 60° కోణాన్ని నిర్మించుట.**

తొలి బిందువు A నుండి B కిరణాన్ని తీసుకుందాం [చిత్రం 6.3 (i) ]. AC కిరణం $\angle CAB = 60°$ ఉండేటట్లు AC కిరణాన్ని గీయడానికి కింది విధానాన్ని అనుసరిద్దాం.

**నిర్మాణ సోపానాలు :**

1. A బిందువు కేంద్రంగా సరైన వ్యాసార్థంతో ఒక చాపరేఖ AB కిరణం పై D బిందువు వద్ద ఖండించేటట్లు గీయండి.
2. D బిందువు కేంద్రంగా అదే వ్యాసార్థంతో మొదట చాపాన్ని E బిందువు వద్ద ఖండించేటట్లు మరొక చాపాన్ని గీయండి.
3. AC కిరణము E గుడా పోయేటట్లు గీస్తే మనకు కావలసిన కోణం $\angle CAB = 60°$ వస్తుంది (చిత్రం 6.3(ii)



చిత్రం 6.3

మనకు కావల్సిన నిర్మాణంను నిరూపించాలంటే చిత్రంలో DE ని కలపాలి. నిరూపన కింది విధంగా చేయవచ్చు.

తరువాత, AE = AD = DE [నిర్మాణం ప్రకారం]

$\Delta$ EAD ఒక సమబాహు త్రిభుజం మరియు $\angle EAD$ మరియు $\angle CAB$ లు రెండూ 60° కోణానికి సమానం.

**అభ్యాసం 6.1**

1. ఇచ్చిన కిరణానికి తొలిబిందువు వద్ద 90° కోణాన్ని నిర్మించి దాని నిర్మాణాన్ని నిరూపించండి.
2. ఇచ్చిన కిరణానికి తొలి బిందువు వద్ద 45° కోణాన్ని నిర్మించి మరియు దాని నిర్మాణాన్ని నిరూపించండి.
3. కింది కొలతలు గల కోణాలను నిర్మించండి.

   (i) 30° (ii) $22\frac{1}{2}°$ (iii) 15°
4. కింది కోణాలను నిర్మించి, వాటిని కోణమానితో కొలిచి పరిశీలించండి.

   (i) 75° (ii) 105° (iii) 135°
5. భుజం పొడవు ఇచ్చిన ఒక సమ బాహు త్రిభుజాన్ని గీసి దాని నిర్మాణాన్ని నిరూపించండి.

## 6.3 కొన్ని త్రిభుజాల నిర్మాణాలు

మనం ఇప్పటివరకు కొన్ని మౌళిక నిర్మాణాలను చేసి, వాటిని నిరూపించి, నిర్మాణాలను సమర్థించాం. ఇదివరకే క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్న త్రిభుజ నిర్మాణాలు చేద్దాం. అధ్యాయం 5లో నేర్చుకున్న రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాల నియమాలైన భు.కో.భు, భు.భు.భు, కో.భు.కో మరియు లం.క,భు నియమాలను గుర్తు తెచ్చుకోండి.

ఒక త్రిభుజము,

(i) మూడు భుజాలను ఇచ్చినప్పుడు.

(ii) రెండు భుజాలు వాటి మధ్య కోణం ఇచ్చినప్పుడు

(iii) రెండుకోణాలు వాటి మధఆయ భుజం ఇచ్చినప్పుడు

(iv) లంబకోణము కర్ణము, మరొక భుజం ఇచ్చినప్పుడు.

త్రిభుజాల నిర్మాణం మీరు ఇంతకు ముందే 7వ తరగతిలో నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు మరికొన్ని త్రిభుజ నిర్మాణాలను తీసుకుందాం.

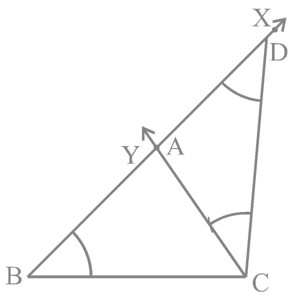
త్రిభుజ నిర్మాణానికి కనీసం మూడు కొలతలు అవసరమని మనకు తెలుసు అయితే ఏ మూడు కొలతలు అన్ని సందర్భాలలో త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచ లేవు ఉదాహరణకు రెండు భుజాలు మరియు ఒక కోణం (ఉమ్మడి కోణం కానిది) ఇస్తే మనం త్రిభుజాన్ని ఏకైకంగా నిర్మంచలేము.

**నిర్మాణం 6.4 : భూమి, భూకోణము మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల మొత్తం ఇచ్చిన త్రిభుజం నిర్మించుట.**

**దత్తాంశం :** భూమి BC, భూకోణము $\angle B$ మరియు $AB + AC$ $\Delta$ ABC లో మిగిలిన రెండు భుజాల మొత్తం. ఇచ్చినప్పుడు $\Delta$ ABC ని నిర్మించడానికి.

**నిర్మాణ సోపానాలు :**

1. భూమి BC ని గీయండి మరియు B బిందువు నుండి భూకోణం $\angle XBC$ని నిర్మిచండి.
2. AB + AC కి BD రేఖా ఖండము సమానంగా వుండేటట్లు BX రేఖను ఖండించును.
3. DC ని కలిపి $\angle BDC$ కి సమానంగా వుండేటట్లు $\angle DCY$ గీయండి.
4. CY రేఖ BX ను A బిందువు వద్ద ఖండించేటట్లు చిత్రం 6.4 తరువాత ABC కావాల్సిన త్రిభుజము.



చిత్రం 6.4

మనకు కావాల్సిన త్రిభుజం ఎలా వస్తుందో చూద్దాం. భూమి BC మరియు $\angle B$ ని ఇచ్చినట్లు గీయండి

త్రిభుజం ACD లో

$\angle ACD = \angle ADC$ (గీయడంద్వారా)

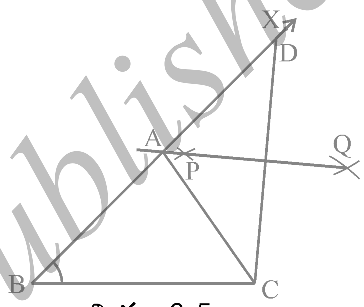
$\therefore$ $AC = AD$ మరియు

ఇప్పుడు, $AB = BD - AD = BD - AC$

$\therefore$ $AB + AC = BD.$

**పర్యాయ పద్ధతి :**

పైన ఇచ్చిన రెండు సోపానాలు గీసి తరువాత CD రేఖకు PQ లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయండి. PQ లంబ సమసద్విఖండన రేఖ BD ని A బిందువు వద్ద ఖండించాలి, (చిత్రం 6.5) AC ని కలపండి కావాల్సిన త్రిభుజం వస్తుంది. A బిందువు CD భుజం పై గీసిన లంబ సమద్వి ఖండన రేఖ పై వుంది అనేదాన్ని గమనించండి. అందువల్ల AD=AC



చిత్రం 6.5

**గమనించండి** : $AB + AC \leq BC$ కాబట్టి త్రిభుజాన్ని గీయడానికి సాధ్యంకాదు.

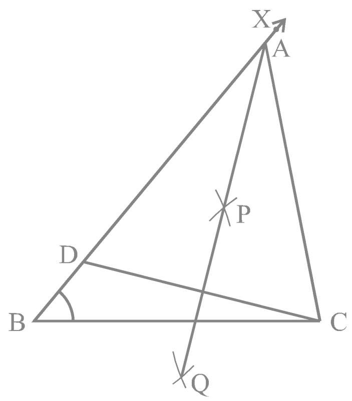
**నిర్మాణం 6.5 : భూమి, భూకోణము మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల బేధం ఇచ్చిన త్రిభుజం నిర్మించుట.**

$\Delta$ ABC లో BC, భూమిగా ఇచ్చి భూకోణం $\angle B$ మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల బేధం $AB - AC$ లేదా $AC - AB$ వీటిని ఇచ్చినప్పుడు $\Delta$ ABC ని గీయాలి.

**సందర్భం** (i) : $AB > AC$ అయిన $AB - AC$ ఇచ్చినచో

**నిర్మాణ సోపానాలు :**

1. భూమి BC ని గీయండి B బిందువు $\angle XBC$ ని ఇచ్చిన కోణానికి సమానంగా గీయండి.
2. BX రేఖా ఖండము $AB - AC$ కి సమానంగా BD రేఖ పై గీయండి/
3. DC ని కిలి DC రేఖకు PQ లంబ సమద్విఖండ రేఖను గీయండి.
4. PQ లంబ సమద్వి ఖండన రేఖకు BX రేఖపై A బిందువు వద్ద ఖండించును. AC కలిపిన (చిత్రం6.6]



చిత్రం 6.6

ABC కావాల్సిన త్రిభుజమైనది. ఈ నిర్మాణము సందర్భం (i) లో వున్నట్లు నిరూపించబడినది.

పాదకోణాలు BC మరియు ∠B ఇచ్చినట్లే గీయడమైనది.

A బిందువు DC లంబార్ధక రేఖ పై ఉన్నది.

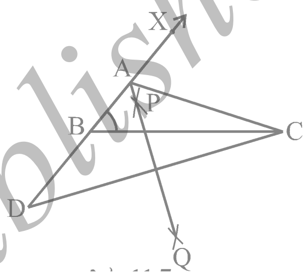
$\therefore \quad AD = AC$

కావున, $\quad BD = AB - AD = AB - AC$

**సందర్భం (ii) :** AB < AC అయిన AC – AB ఇచ్చిన చో

**నిర్మాణ సోపానాలు :**

1. సందర్భం (i) లో వున్నట్లు నిరూపించండి.
2. XB రేఖా ఖండము AC – AB కి సమానంగా BD రేఖ పై గీయండి.
3. DC ని కలి DC రేఖకు PQ లంబ సమద్విఖండ రేఖను గీయండి.
4. PQ లంబ సమద్వి ఖండన రేఖకు BX రేఖపై AC కలిపిన (చిత్రం 6.7]



చిత్రం 6.7

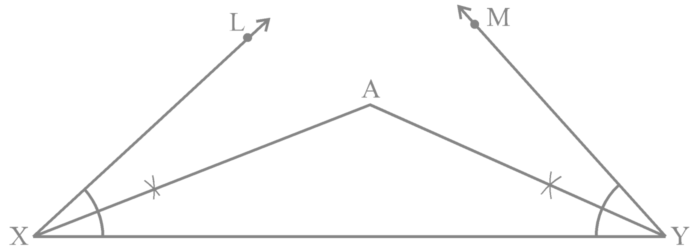
ABC కావాల్సిన త్రిభుజమైనది. ఈ నిర్మాణము సందర్భం (i) లో వున్నట్లు నిరూపించబడినది

**నిర్మాణం 6.6 : త్రిభుజ చుట్టుకొలత మరియు రెండు భూ కోణాలు ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజం నిర్మించడం.**

పాదకోణాలు ∠B మరియు ∠C AB + BC + CA ఇచ్చినచో ABC త్రిభుజాని నిర్మించాలి.

**నిర్మాణ సోపానాలు :**

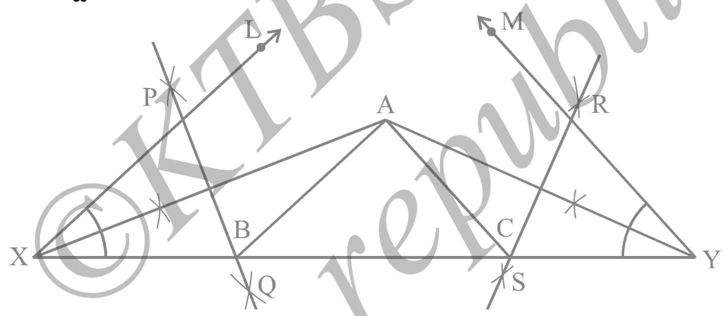
1. XY రేఖా ఖండాన్ని AB + BC + CA పొడవుకు సమానంగా వుండేటట్లు గీయండి.
2. LXY కోణము ∠B కి సమానంగా వుండేటట్లు MYX కోణము ∠C కి సమానంగా గీయండి.
3. ∠LXY మరియు ∠MYX కోణాలను విభజించి రెండు కోణ సమద్వి ఖండాలుగా A బిందువు వద్ద ఖండించును (చిత్రం 6.8 (i) ].



చిత్రం 6.8(i)

4. AX భుజానికి PQ లంబ సమద్వి ఖండన రేఖను మరియు AY భుజానికి RS లంబ సమద్విఖండాన్ని గీయండి.

5. PQ భుజం XY భుజానికి B బిందువు వద్ద మరియు RS భుజానికి XY భుజాన్ని C బిందువు వద్ద ఖండించని. AB మరియు AC ని కలిపిన [చిత్రం 6.8 (ii) ].



చిత్రం 6.8(ii)

త్రిభుజం ABC కావాల్సిన త్రిభుజం.

ఈ నిర్మాణం నిరూపించడానికి మీరు B బిందువు AX భుజానికి PQ లంబ సమద్వి ఖండన రేఖ పై వుందని కగమనించండి. కావున.

$\therefore$ XB = AB

అదే విధంగా CY = AC అని చూపవచ్చు.

కావున BC + CA + AB = BC + XB + CY = XY

$\angle$BAX = $\angle$AXB [$\Delta$ AXB లో AB = XB]

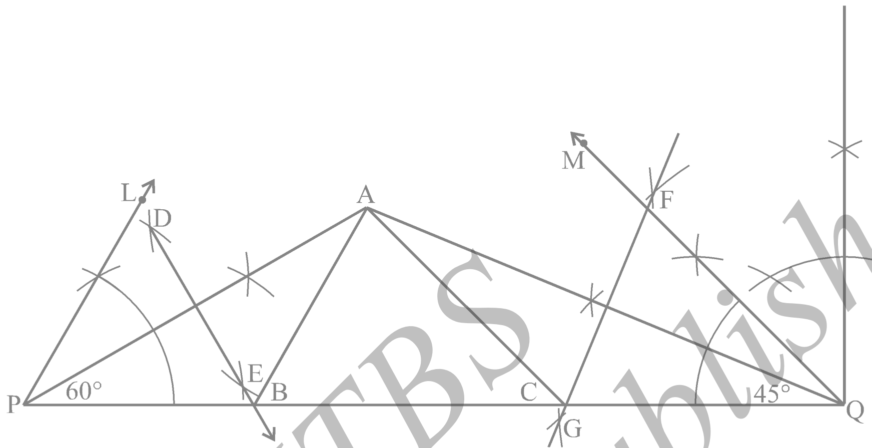
మరియు $\angle$ABC = $\angle$BAX + $\angle$AXB = 2 $\angle$AXB = $\angle$LXY

అదే విధంగా $\angle$ACB = $\angle$MYX కావాలి

**ఉదాహరణ 1 :** $\angle$B = 60°, $\angle$C = 45° మరియు AB + BC + CA = 11 cm వుండేటట్లు ABC ని గీయండి.

**నిర్మాణ సోపానాలు :**

1. రేఖా ఖండం PQ = 11 cm (= AB + BC + CA) రేఖా ఖండం
2. P బిందువు వద్ద 60° కోణం మరియు Q బిందువు వద్ద 45° కోణం గీయండి.




చిత్రం 6.9

3. 60° మరియు 45° కోణాలను ఖండించి, కోణ సమద్విఖండన రేఖలు A బిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి
4. AP భుజానికి DE లంబ సమద్విఖండన రేఖ PQ భుజము B వద్ద మరియు AQ భుజము GF లంబ సమద్విఖండన రేఖ PQ భుజాన్ని C వద్ద ఖండిస్తాయి.
5. AB మరియు AC ని కలిపిన (చిత్రం 6.9) ABC కావాల్సిన త్రిభుజం].

## అభ్యాసం 6.2

1. BC = 7 cm, $\angle$B = 75° మరియు AB + AC = 13 cm ఉండేటట్లు $\Delta$ ABC ని నిర్మించండి.
2. BC = 8 cm, $\angle$B = 45° మరియు AB – AC = 3.5 cm ఉండేటట్లు $\Delta$ ABC ని నిర్మించండి.
3. QR = 6 cm, $\angle$Q = 60° మరియు PR – PQ = 2 cm ఉండేటట్లు $\Delta$ PQR నిర్మించండి.
4. $\angle$Y = 30°, $\angle$Z = 90° మరియు XY + YZ + ZX = 11 cm ఉండేటట్లు XYZ త్రిభుజాన్ని గీయండి.
5. ఒక లంబకోణ త్రిభుజ పాదం 12 cm పొడవు దానికర్ణం మరియు మణక భుజం మొత్తం 18 cm అయిన త్రిభుజాన్ని గీయండి.

## 6.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు, కలబద్ద మరియు కాంపాస్‌ను ఉపయోగించి, ఈ క్రింది నిర్మాణాలు చేశారు.

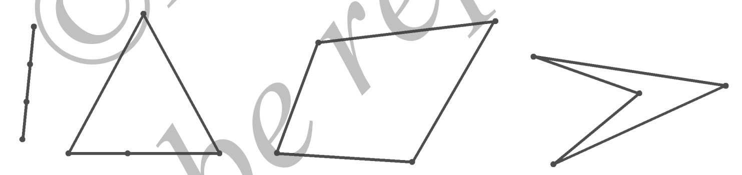
1. ఇచ్చిన కోణం గీయడం.
2. ఇచ్చిన రేఖా ఖండానికి లంబార్ధక రేఖ గీయడం.
3. 60° మొదలగు కోణం గీయడం.
4. త్రిభుజ పాదం, ఒక పాదకోణం మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల మొత్తం ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజాన్ని గీయడం.
5. త్రిభుజపాదం, ఒక పాదకోణం మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల వ్యత్యాసాలను ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజం గీయడం.
6. త్రిభుజం చుట్టుకొలత మరియు దాని రెండు పాదకోణాలను ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజం గీయడం.

## అధ్యాయం - 7

# చతుర్భుజాలు

## 7.1 పరిచయం

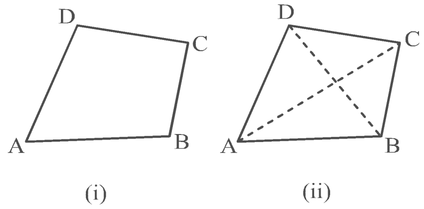
మీరు త్రిభుజ ధర్మాలగురించి 3 మరియు 5 వ అధ్యాయాలలో నేర్చుకున్నారు ఏవైనా మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువులను జతలుగా కలిపితే ఏర్పడేదే త్రిభుజమని తెలుసు. నాలుగు బిందువులను వివిధ పద్ధతులలో గుర్తించి, అని ఏమవుతాయో చూద్దాం:




చిత్రం 7.1

అన్ని బిందువులు సరేఖీయాలైతే అది రేఖాఖండం (చిత్రం 7.1 (i)) అనేదాన్ని గమనించండి. నాలుగు బిందువులలో మూడు సరేఖీయాలైతే త్రిభుజం అవుతుంది (చిత్రం 7.1 (ii)). నాలుగు బిందువులలో రెండు బిందువులకన్నా ఎక్కువ సరేఖీయాలు కానిచో, మనకు వచ్చేది నాలుగు భుజాలు గల ఆకారాలు. వీటినే చతుర్భుజాలు(చిత్రం 7.1 (iii)) మరియు 7.1 (iv)). పాఠ్యపుస్తకం లో 7.1 (iii) లో చతుర్భుజ పద్ధతి అని పరిగణిస్తాము. అయితే చిత్రం 7.1 (iv) పద్ధతికాదు.

ఒక చతుర్భుజంలో నాలుగు భుజాలు, నాలుగు కోణాలు, మరియు నాలుగు శీర్షాలు కలవు. (చిత్రం 7.2).




చిత్రం 7.2

సమతలంలో నాలుగు రేఖలతో ఏర్పడే సరళ సంవృత పటంను చతుర్భుజం అంటాము

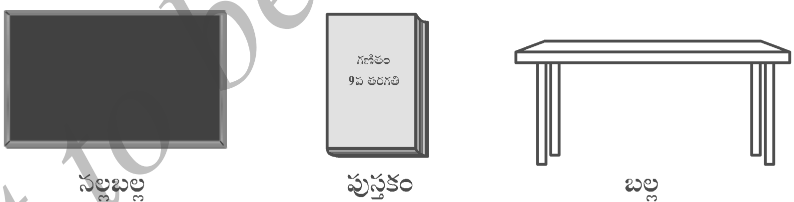
చతుర్భుజం ABCD లో నాలుగు భుజాలు AB, BC, CD మరియు DA A,B,C,D నాలుగు శీర్షాలు $\angle$ A, $\angle$B, $\angle$C మరియు $\angle$D లు శీర్షాల వద్ద ఏర్పడిన నాలుగు కోణాలు.

ఎదుటి శీర్షాల జతలను కలిపితే వచ్చేవి A మరియు C ని కలపండి B మరియు D ని కలపండి

AC మరియు BD లను ABCD చతుర్భుజం యొక్క రెండు కర్ణాలు అంటాము.

ఈ అధ్యాయంలో చతుర్భుజాల రకాలు, వాటి లక్షణాలు మరియు ముఖ్యంగా సమాంతర చతుర్భుజాల గురించి ఎక్కువగా తెలుసుకుంటారు.

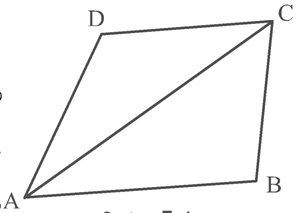
చతుర్భుజాల గురించి (లేదా సమాంతర చతుర్భుజాల గురించి) మనం ఎందుకు చదవాలి అని ఆలోచించవచ్చు మీ చుట్టు ఒక్కసారి చూస్తే చాలా వస్తువులు చతుర్భుజాకారంలో వుండడాన్ని గమనిస్తారు. ఉదాహరణకు నేల, గోడలు, పైకప్పు, తరగతి గదులు. కిటికీలు, చదవడానికి ఉపయోగించే బల్ల ముదలైనవి వాటిలో కొన్ని కింద ఇవ్వబడినవి (చిత్రం 7.3)




చిత్రం 7.3

మన చుట్టూ కనిపించే అనేక వస్తువుల విశేషమైన చతుర్భుజం అంటే దీర్ఘ చతురస్రం మనం సమాంతర చతుర్భుజం గురించి ఎక్కువ నేర్చుకుంటాం. ఎందుకంటే దీర్ఘ చతురస్రంకూడా ఒక సమాంతర చతుర్భుజమే మరియు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అన్ని లక్షణాలు దీర్ఘ చతుస్రానికి సరిపోతాయి.

## 7.2 చతుర్భుజ కోణాల మొత్తం లక్షణాలు




చిత్రం 7.4

చతుర్భుజ కోణాల మొత్తం యొక్క లక్షణాలను గుర్తుచేసుకుందాం ఒక చతుర్భుజంలోని అన్ని కోణాల మొత్తం 360°. ఒక చతుర్భుజలో ఒక కర్ణం గీస్తే రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించి, పదాన్ని పరీక్షిస్తాం.

ABCD చతుర్భుజంలో AC కర్ణం (చిత్రం 7.4 గమనించండి).

$\Delta$ ABC లోని మూడు కోణాల మొత్తం

$\angle CAB + \angle B + \angle BAC = 180^\circ$ (త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం) ....... (1)

ఇదే విధంగా $\Delta$ ABC లో

$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^\circ$ ....... (2)

(i) మరియు (ii) లను కూడగా

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

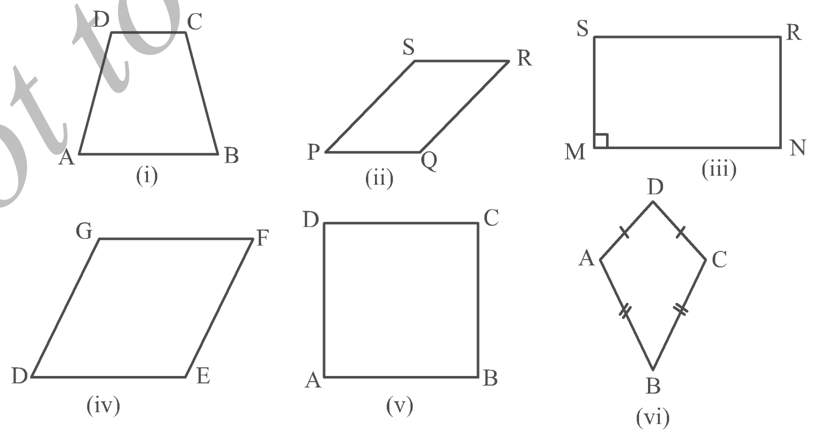
కాని $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$ మరియు $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$

కావున $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360^\circ$ అయినది

అంటే చతుర్భుజంలోని అన్ని కోణాల మొత్తం 360° లేదా 4 లంబకోణాలు

## 7.3 చతుర్భుజాల – రకాలు

కింది ఇవ్వబడిన చతుర్భుజాలను పరిశీలించండి




చిత్రం 7.5

**గమనించండి :**

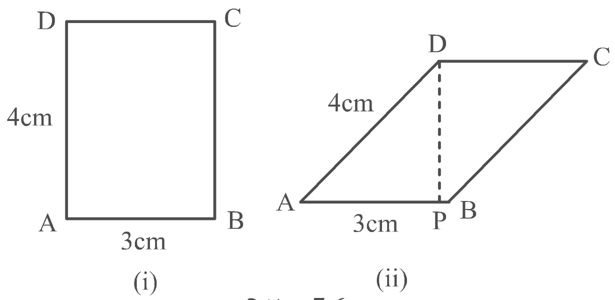
- చిత్రం 7.5 (i) లో ABCD ఒక చతుర్భుజం మరియు ఒక జత ఎదుటి భుజాలు AB మరియు CD సమాంతరంగా ఉన్నాయి అలాంటి చతుర్భుజాలను ట్రెపీజియం (సమాంతర చతుర్భుజం) అంటాము.
- చిత్రం 7.5 (ii), (iii), (iv) మరియు (v) లలో చతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలుగా ఉన్నాయి ఇటువంటి చతుర్భుజాలను సమాంతర చతుర్భుజాలు అంటాము. అని గుర్తు చేసుకోండి. అందు వల్ల చిత్రం 7.5 (ii) PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.
- చిత్రం 7.5 (iii) లో సమాంతర చతుర్భుజం MNRS యొక్క కోణాలలో ఒక కోణము $\angle$ M లంబ కోణమైనది. ఈ విశేషమైన సమాంతర చతుర్భుజాన్ని ఏమని పిలుస్తారు. గుర్తుచేసుకోవడానికి ప్రయత్నించండి. దానిని దీర్ఘ చతురస్రం అని అంటారు.
- చిత్రం7.5(iv)సమాంతరచతుర్భుజంలోఅన్నిభుజాలుసమానమైనచోవజ్రాకృతిఅని(రాంబస్) అంటారు అని మనకు తెలుసు.
- చిత్రం 7.5 (v) సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో $\angle A = 90°$ మరియు అన్ని భుజాలు సమానమైన దానిని చతురస్రం అంటారు.
- చిత్రం 7.5 (vi) ABCD చతుర్భుజంలో రెండు జతల భుజాలు సమానం AD = CD మరియు AB = CB అయినవి అంటే దీనిని గాలిపటం అంటాము.

  చతురస్రము, దీర్ఘ చతురస్రము మరియు వజ్రాకృతి అన్ని కూడా సమాంతర చతుర్భుజాలు అనేదాన్ని గమనించండి.
- ఒక చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం మరియు వజ్రాకృతి అవుతుంది
- ఒక సమాంతర చతుర్భుజము ట్రెపీజయం అవుతుంది.
- ఒక గాలిపటం సమాంతర చతుర్భుజం కాదు.
- ఒక ట్రెపీజియం సమాంతర చతుర్భుజం కాదు.

  (ట్రెపీజయం లో ఒక జత ఎదుటి భుజాలు మాత్రం సమాంతరంగా వుంటాయి సమాంతర చతుర్భుజం కావాలంటే రెండు జతల భుజాలు సమాంతరంగావుండాలి)

  ఒక దీర్ఘచతురస్రం లేదా వజ్రాకృతి చతురస్రంకాదు.

చిత్రం 7.6 చూసిన దీర్ఘ చతురస్రము మరియు సమాంతర చతుర్భుజానికి ఒకే చుట్టుకొలత 14cm అయినవి.

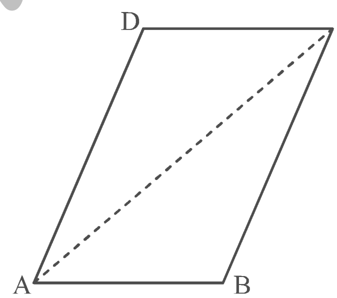



చిత్రం 7.6

ఇక్కడ సమాంతర చతుర్భుజవైశాల్యం DP × AB మరియు దీర్ఘ చతురస్రవైశాల్యం AB × AD కంటే తక్కువ వుంటుంది. కారణం DP < AD. సామాన్యంగా స్వీట్స్ అమ్మే వ్యాపారులు బర్ఫీలను సమాంతర చతుర్భుజాకారంలో కత్తిరిస్తారు ఎందుకంటే ఒకే తట్టలో (లేదా డబ్బాలో) ఎక్కువ బర్ఫీలను నింపవచ్చు (బర్ఫీ చతుర్భుజం గురించి నేర్చుకున్న లక్షణాలను ఇప్పుడు గుర్తు చేసుకుందాం)

## 7.4. సమాంతర చతుర్భుజం లక్షణాలు

ఒక కృత్యం చేద్దాం. ఒక సమాంతర చతుర్భుజాకారంలో ఒక కాగితాన్నికత్తిరించండి(చిత్రం7.7).రెండు త్రిభుజాలు వస్తాయి ఈ రెండు త్రిభుజాలగురించి ఏమిచెబుతారు?



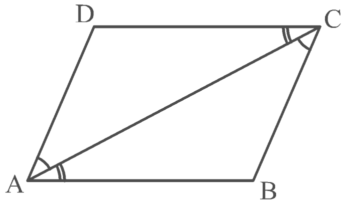

చిత్రం 7.7

ఒక త్రిభుజంపైన మరొక త్రిభుజాన్ని ఉంచండి ఆవసరమైతే తిప్పండి. మీరు ఏమి గమనించారు? రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమైనదాన్ని గమనించండి.

మరికొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలను తీసుకొని ఈ ఫలితాన్ని పరిశీలించండి దీనికొరకు ప్రతిసారి ఒక కర్ణము సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండుసర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది అనేదాన్ని మీరు గమనించండి.

**సిద్ధాంతం 7.1 :** సమాంతర చతుర్భుజమును కర్ణము రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది

**సాధన :** ABCD సమాంతర చతుర్భుజం AC దాని కర్ణం అవుతుంది




చిత్రం 7.8

(చిత్రం 7.8). సమాంతర చతుర్భుజం ABCD ని కర్ణం AC రెండు త్రిభుజాలు $\Delta$ ABC మరియు $\Delta$CDA లుగా విభజిస్తుంది ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమని నిరూపించాలి.

$\Delta$ ABC మరియు $\Delta$ CDA లలో

BC || AD మరియు AC తిర్యగ్రేఖ కావున

$\angle$ BCA = $\angle$ DAC (ఏకాంతర కోణాలు)

ఐతే AB || DC మరియు AC తిర్యగ్రేఖ కావున.

$\angle$ BAC = $\angle$ DCA (ఏకాంతరకోణాలు)

మరియు AC = CA (ఉమ్మడి భుజం)

అందువల్ల $\Delta$ ABC $\cong$ $\Delta$ CDA (కో.భు.కొ నియమం)

లేదా కర్ణం AC సమాంతర చతుర్భుజం ABCD ని $\Delta$ ABC మరియు $\Delta$ CAD అనే రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

ఇప్పుడు ABCD సమాంతర చతుర్భుజం లోని ఎదుటి భుజాలు సమానమని కొలిచిన మీరు ఏమి గమనించారు.

AB = DC మరియు AD = BC అని కనుక్కోగలరు

ఇది సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క మరొక లక్షణం దీనిని ఈ కింది విధంగా నిరూపించవచ్చు.

**సిద్ధాంతం 7.2 :** ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదుటి భుజాలు సమానము.

సమాంతర చతుర్భుజపు ఒకకర్ణము సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమానత్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని ఇంతకు ముందే చూశారు ఆ త్రిభుజాలు సదృశ భుజాల గురించి మీరేమి చెప్పగలరు? అవిసమానం.

అందువల్ల AB = DC మరియు AD = BC ఇప్పుడు ఈ ఫలితాంశపు విలోమము ఏమి? సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం ను సాధిస్తాం దాని విలోమం ఏమని మీకు ముందే తెలుసు అందువల్ల సిద్ధాంతం 7.2 ను ఈ కిందివిధంగా నిరూపిద్దాం.

ఒక చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజమయితే దాని ప్రతి ఒక్క జత ఎదుట భుజాలు సమానమవుతాయి అందువల్ల దీనివిలోమము.

**సిద్ధాంతం 7.3 :** ఒక చతుర్భుజంలోని ప్రతిజత ఎదుటి భుజాల సమానమైతే అది సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది ఎలా అని కారణం చెప్పగలరా?

చతుర్భుజం ABCD లో AB = CD మరియు

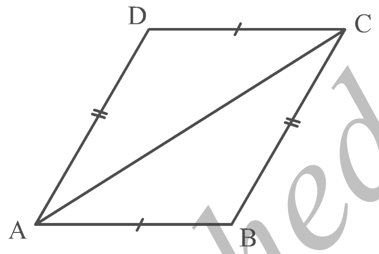
AD = BC అని (చిత్రం 7.9).

కర్ణం AC ని గీయండి.

స్పష్టంగా $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ఎలా)

$\angle BAC = \angle DCA$

మరియు $\angle BCA = \angle DAC$ (ఎలా?)



చిత్రం **7.9**

ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని మీరు చెప్పవచ్చా ఎలా?

సమాంతర చతతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుట భుజాలు సమానమని విపర్యయం చతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానం అయితే, అది సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది. ఇదే ఫలితాన్ని

ఎదుటి కోణాలను జతలకు అన్వయించవచ్చా?

ఒక సమాంతర చతుర్భుజాన్ని, గీసి దాని కోణాలను కొలిచి, ఏమి గమనిస్తావు? ప్రతి ఒక్క జత ఎదుటికోణాలు సమానం

ఇంకా కొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని చేయండి ఈ కింది చూపిన ఫలితాన్ని సాంధించగలము.

**సిద్ధాంతం 7.4 :** ఒక సమాంతర చతుర్భుజలో అభిముఖ కోణాలు సమానం. దీని విలోమం కూడా సరియైనదా? అవును ఒక చతుర్భుజములో ని కోణాల మొత్తం లక్షణాలు మరియు తిర్యగ్రేఖ సమాంతర రేఖలను ఖండించినప్పుడు వచ్చే ఫలితమును ఉపయోగించి, దీని విలోమము కూడా సరైనదే అని మనకు కనిపిస్తుంది. అందువల్ల మనకు ఈ కింది సిద్ధాంతం వస్తుంది.

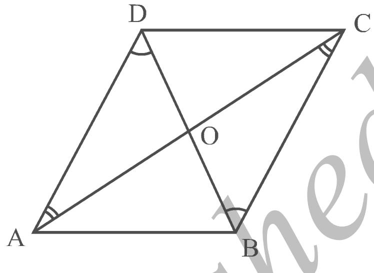
**సిద్ధాంతం 7.5 :** ఒక చతుర్భుజంలో ప్రతిఒక్క జత ఎదుటి కోణాలు సమానంగావుంటే అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క మరొక లక్షణం ఇప్పుడు నేర్చుకుందాం. ABCD సమాంతర చతుర్భుజం గీయాలి రెండు కర్ణాలు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించేట్లు గీయాలి (చిత్రం 7.10).

OA, OB, OC మరియు OD ని కొలచిన మీరు ఏమిగమనించారు.

OA = OC మరియు OB = OD అయినదాన్ని గమనించండి లేదా రెండు కర్ణాలు

'O' మధ్యబిందువు అయినది అందువల్ల మనకు ఈ కింది ప్రమేయం వుంది.



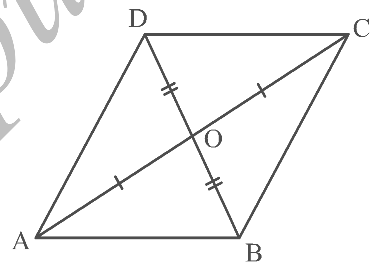
చిత్రం 7.10

**సిద్ధాంతం 7.6 :** సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి

ఒక చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు పరస్పరం ఖండించుకుంటే ఏమవుతుంది? అది సమాంతర చతుర్భుజమవుతుందా? నిజానికి ఇది సత్యం

ఈ ఫలితము సిద్ధాంతం 7.6 కి విలోమం అది కిందివిధంగావుంది

**సిద్ధాంతం 7.7 :** ఒక చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటే అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.



చిత్రం 7.11

ఈ ఫలితానికి కింది కారణాలు ఇవ్వవచ్చు.

చిత్రం 7.11 లో OA = OC మరియు OB = OD

అయినదాన్ని గమనించండి

అందువల్ల $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ఎలా)

$\angle ABO = \angle CDO$ (ఎలా)

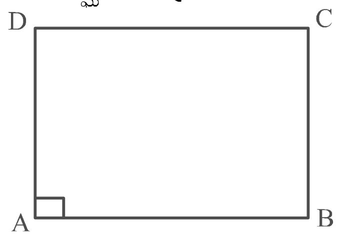
దీనితో $AB \parallel CD$ అని లభిస్తుంది

అదేవిధంగా $BC \parallel AD$

అందు వల్ల ABCD క సమాంతర చతుర్భుజం ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

**ఉదాహరణం 1:** దీర్ఘ చతురస్రంలోని ప్రతికోణము ఒక లంబకోణమని నిరూపించండి.

**సాధన :** దీర్ఘచతురస్రం అంటే ఏమి అనేదాన్ని గుర్తుతెచ్చుకుందాం దీర్ఘచతురస్రం ఒక కోణం లంబకోణము అయివుండి ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.



చిత్రం 7.12

ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం అయితే $\angle A = 90°$ అయిన.

$\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$ అని మనం చూపాలి.

$AD \parallel BC$ మరియు AB తిర్యగ్రేఖ

కావున $\angle A + \angle B = 180°$

(తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపునగల అంతర కోణాలమొత్తం)

కాని $\angle A = 90°$

అందువల్ల $\angle B = 180^0 - \angle A = 180^0 - 90^0 = 90^0$

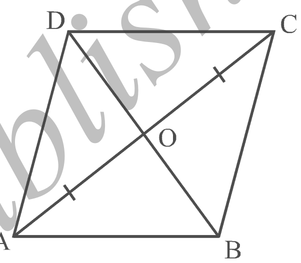
ఇప్పుడు $\angle C = \angle A$ మరియు $\angle D = \angle B$ (సమాంతర చతుర్భుజపు ఎదుటికోణాలు)

కావున $\angle C = 90^0$ మరియు $\angle D = 90^0$

అందుచేత దీర్ఘ చతురస్రంలో ప్రతికోణము లంబకోణము.

**ఉదాహరణం : 2:** రాంబస్ లోని కర్ణాలు పరస్పరం లంబం గావుంటాయిని చూపండి

ABCD ఒక రాంబస్ అనుకుంటే (చిత్రం 7.13).



చిత్రం 7.13

AB = BC = CD = DA అని మీకు తెలుసు (ఎలా?)

$\Delta$ AOD మరియు $\Delta$ COD లలో

OA = OC (సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు సమద్విఖండనచేసుకుంటాయి.)

OD = OD (ఉమ్మడిభుజం)

AD = CD

కావున $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (భు.భు.భు. సర్వసమాన నియమము)

$\angle AOD = \angle COD$ (స.త్రి.అ.భు)

అయితే $\angle AOD + \angle COD = 180°$ (రేఖ ద్వయం)

కావున $2\angle AOD = 180^0$

$\angle AOD = 90°$

అందువల్ల రాంబస్ కర్ణాలు పరస్పరం లంబాలు.

**ఉదాహరణం 3 :** ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో AB = AC అయినది బాహ్యకోణం PAC ని AD సమద్విఖండించును మరియు CD || AB (చిత్రం 7.14). (i) $\angle DAC = \angle BCA$ మరియు (ii) ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అనిచూపండి.

**సాధన :** $\Delta$ ABC సమద్విబాహుత్రిభుజం

AB = AC (దత్తాంశం)

కావున $\angle ABC = \angle ACB$ (సమానభుజాలకు ఎదురుగావున్న కోణాలుసమానం)

$\angle$ PAC = $\angle$ ABC + $\angle$ ACB (త్రిభుజబాహ్యకోణం)

లేదా $\angle$ PAC = 2 $\angle$ ACB ............ (1)

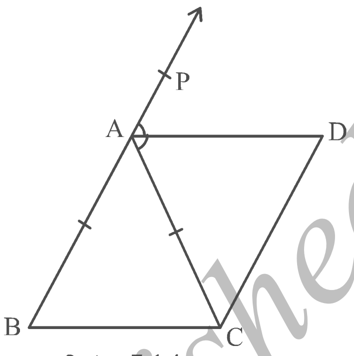
$\angle$ PAC ని AD సమద్విఖండించును.

కావున $\angle$ PAC = 2 $\angle$ DAC ............ (2)

కావున 2 $\angle$ DAC= 2 $\angle$ ACB

(లేదా $\angle$ DAC =$\angle$ ACB

(ii) ఇప్పుడు ఈ సమానకోణాల జత ఒక జత ఎదుటికోణాలవుతాయి ఇక్కడ BC మరియు AD సమాంతరరేఖలను తిర్యగ్రేఖ AC ఖండిస్తుంది.



చిత్రం 7.14

కావున BC || AD

అలానే BA || CD (దత్తాంశం)

ఇప్పుడు ABCD చతుర్భుజపు రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమాంతరంగావున్నాయి

అందువల్ల ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

**ఉదాహరణం : 4** *l* మరియు *m* లు సమాంతరరేఖలను తిర్యగ్రేఖ *p* ఖండిస్తుంది (చిత్రం 7.15).

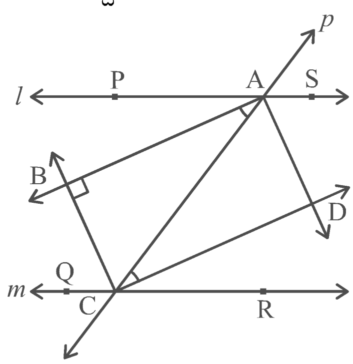
అంతరకోణాల కోణసమద్వి ఖండనలతో చతుర్భుజం ఏర్పడును. దానిని ఒక దీర్ఘ చతురస్రమని చూపండి.

**సాధన :** PS || QR తిర్యగ్రేఖ *p* సమాంతర రేఖలను క్రమంగా A మరియు B ఖండిస్తుంది

$\angle$ PAC మరియు $\angle$ ACQ లు కోణసమద్విఖండరేఖలు B వద్ద ఖండించును $\angle$ ACR మరియు $\angle$ SAC లు కోణ సమద్విఖండనరేఖలు D వద్ద ఖండించును.

ABCD చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘచతురస్రం అని చూపాలి

$\angle$PAC = $\angle$ACR (ఏకాంతర కోణాలు *l* || *m* మరియు *p* తిర్యగ్రేఖ)



చిత్రం 7.15

కావున $\frac{1}{2}\angle$ PAC = $\frac{1}{2}\angle$ ACR

అయితే$\angle$ BAC = $\angle$ ACD

ఇవి ఒక జత పర్యాయకోణాలు AB మరియు DC రేఖల తిర్యగ్రేఖ AC మరియు ఈ రెండు కోణాలు సమానంగావున్నాయి.

కావున AB || DC

అలాగే BC || AD ($\angle$ ACB మరియు $\angle$ CAD లను తీసుకున్నప్పుడు)

అందువల్ల ABCD చతుర్భుజం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

కావున $\angle PAC + \angle CAS = 180^0$ (రేఖాయుగ్మాలు)

$\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2} \times 180^0 = 90^0$

$\angle BAC + \angle CAD = 90^0$

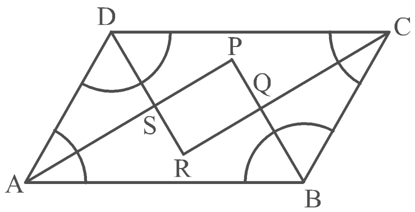
లేదా $\angle BAD = 90^0$

కావున ABCD లో ఒక్క కోణం $90^0$ వుండే ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

కావున, ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం.

**ఉదాహరణ : 5** ఒక సమాంతర చతుర్భుజము కోణసమద్విఖండనరేఖలు దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయిని చూపండి.

**సాధన :** ABCD సమాంతర చతుర్భుజం $\angle A$ $\angle B$, $\angle C$ మరియు $\angle C$, $\angle D$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖలు P, Q, R, S బిందువుల వద్ద ఖండించుకొని చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి (చిత్రం 7.16).



చిత్రం 7.16

$\Delta$ ASD లో మీరు ఏమి గమనించారు?

$\angle D$ ని DS సమద్విఖండిస్తుంది మరియు $\angle A$ ను AS సమద్విఖండిస్తుంది.

కావున $\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$

$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$ ($\angle$ A మరియు $\angle$ D లు తిర్యగ్రేఖ ఒకే వైపునవున్న అంతర కోణాలు)

$= 90^\circ$

అలాగే $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^0$ (త్రిభుజకోణాల మొత్తం)

లేదా $90^0 + \angle DSA = 180^0$

లేదా $\angle DSA = 90^0$ ($\angle DSA$ మరియు $\angle PSR$ శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$\angle PSR = 90^0$

అదేవిధంగా $\angle APB = 90^0$ లేదా $\angle SPQ = 90^0$ అని చూపవచ్చు

($\angle DAS$ లో చూపిన విధంగా)

$\angle PQR = 90^0$ మరియు $\angle SRQ = 90^0$

అందువల్ల PQRS ఒక చతుర్భుజం దీనిలో అన్ని కోణాలు లంబకోణాలు దీనిని దీర్ఘ చతురస్రం అని చెప్పవచ్చా? దానిని పరీక్షిద్దాం.

$\angle PSR = \angle PQR = 90^0$ మరియు $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^0$ అని చూపించాం. అందువల్ల రెండు జతల ఎదుట కోణాలు సమానం.

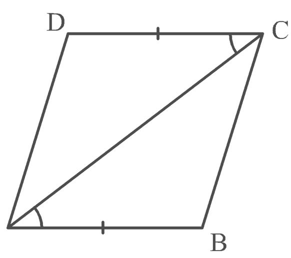
కావున PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం దీనిలో ఒక కోణం (అన్నికోణాలు) $90^0$ అయినవి. కావున PQRS ఒక దీర్ఘచతురస్రం.

## 7.5 ఒక చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజం కావడానికి మరొక నియమము

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క లక్షణాలను మీరు ఈ అధ్యాయంలో నేర్చుకున్నారు. ఒక చతుర్భుజంలో ఏదైనా ఒక లక్షణము సరిపోయినచో, అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది అనేదాన్ని కూడా మీరు పరీక్షించారు.

ఒక చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజం కావాలంటే కావలసిన మరొక కనిష్ఠ నియమము ఇప్పుడు నేర్చుకుందాం దీనిని ఒక సిద్ధాంతంగా నిరూపిద్దాం. అది ఈ కిందివిధంగావుంది.

**సిద్ధాంతం 7.8 : చతుర్భుజం ఒక జత ఎదుటభుజాలు సమానమైన, మరియు సమాంతరమైన అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.**




చిత్రం 7.17

చిత్రం 7.17 లో. $AB = CD$ మరియు $AB \parallel CD$ అయినది AC ని గీస్తాం భు.కో.భు సర్వసమానత్వనియమం ప్రకారం $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ అని మీరు చూపవచ్చు.

కావున $BC \parallel AD$ (ఎందుకు?)

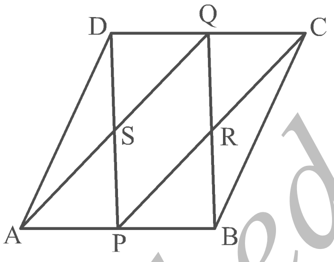
సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఈ లక్షణాలను అన్వయించడానికి ఒక ఉదాహరణను తీసుకుందాం.

**ఉదాహరణ 6 :** ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం AB మరియు CD ఎదుట భుజాల మధ్య బిందువులు క్రమంగా P Q అయినవి(చిత్రం 7.18). AQ DP ని S బిందువు వద్ద BQ CP ని R బిందువు వద్ద ఖండించిన

(i) APCQ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

(ii) DPBQ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

(iii) PSQR ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి.




చిత్రం 7.18

**సాధన :** చతుర్భుజం APCQ లో

AP || QC (AB || CD అయిన) ......... (1)

$AP=\frac{1}{2}AB,\ CQ=\frac{1}{2}CD$ (దత్తాంశం)

AB = CD (ఎలా)

కావున AP = QC .......... (2)

అందుచే APCQ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

((1) మరియు (2) నుండి మరియు సిద్ధాంతం 7.8 నుండి)

(ii) అదే విధంగా DPBQ చతుర్భుజం

ఎందుకంటే DQ || PB మరియు DQ = PB

(iii) చతుర్భుజం PSQR లో

SP || QR (DP యొక్క ఒక భాగం మరియు SP మరియు QB యొక్క ఒక భాగం QR అయినది)

అదేవిధంగా SQ || PR

కావున PSQR ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

## అభ్యాసం 7.1

1. ఒక చతుర్భుజంలోని కోణాల నిష్పత్తి 3 : 5 : 9 : 13 అయిన ఆ అన్ని కోణాలను కనుక్కోండి.

2. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కర్ణాలుసమానమ్మైన అది దీర్ఘచతురస్రం అవుతుంది. అని చూపండి.

3. ఒక చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొన్నచో అది రాంబస్ అని చూపండి.

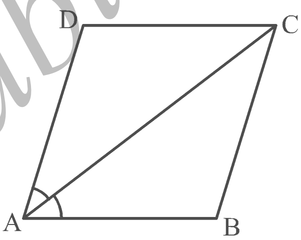
4. ఒక చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటే పొడవుసమా నమవుతాయని చూపండి.

5. ఒక చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు సమానం మరియు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేస్తున్నచో, దానిని చతురస్రం అని చూపండి.

6. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD యొక్క కర్ణం AC, $\angle$ A ని సమద్విఖండన చేస్తుంది. (చిత్రం 7.19).

   (i) అది $\angle$ C కూడాసమద్విఖండన చేయును

   (ii) ABCD ఒక వజ్రాకృతి అని చూపండి.



చిత్రం 7.19

7. ABCD ఒక రాంబస్ AC కర్ణము $\angle$A మరియు $\angle$C సమద్విఖండనచేయును మరియు BD కర్ణం $\angle$B, $\angle$D సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి.

8. ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం,. AC కర్ణము $\angle$ A మరియు $\angle$ C ని సమద్విఖండన చేసినచో

   (i) ABCD ఒక చతురస్రం

   (ii) BD కర్ణము $\angle$ B మరియు $\angle$ D ని సమద్విఖండన చేయునని చూపండి.

9. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో DP = BQ అయ్యేటట్లు కర్ణం BD పై P మరియు Q రెండు బిందువులను తీసుకొని ( చిత్రం 7.20).

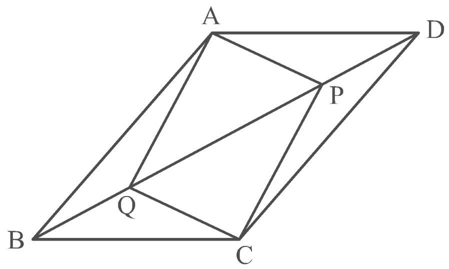
   (i) $\Delta$ APD $\cong$ $\Delta$ CQB

   (ii) AP = CQ

   (iii) $\Delta$ AQB $\cong$ $\Delta$ CPD

   (iv) AQ = CP

   (v) APCQ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి.

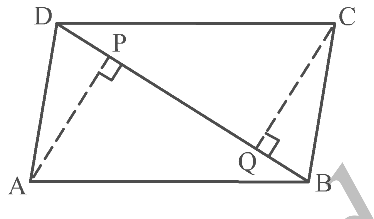


చిత్రం 7.20

10. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం AP మరియు CQ లు శీర్షాలు A మరియు C నుండి కర్ణం BD పై గీచి లంబాలు (చిత్రం 7.21) అయిన.

(i) $\Delta\, APB \cong \Delta\, CQD$

(ii) AP = CQ అనిచూపండి.




చిత్రం 7.21

11. $\Delta$ ABC మరియు $\Delta$ DEF లలో AB = DE, AB || DE, BC = EF మరియు BC || EF శీర్షాలు A, B మరియు C లు వరుసగా D, E మరియు F లకుకలుపబడినవి (చిత్రం 7.22) అయిన.

(i) ABED ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

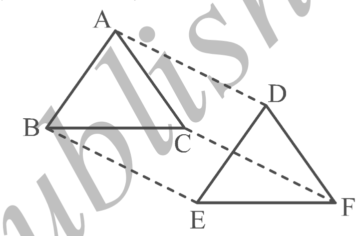
(ii) BEFC ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

(iii) AD || CF మరియు AD = CF

(iv) ACFD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

(v) AC = DF

(vi) $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$ అని చూపండి.




చిత్రం 7.22

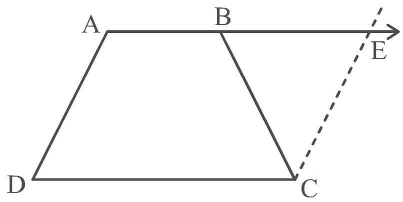
12. ABCD ఒక ట్రెపీజియం లో AB||CD మరియు AD = BC అయిన (చిత్రం 7.23).

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta\, ABC \cong \Delta\, BAD$

(iv) కర్ణం AC = కర్ణం BD అని చూపండి.



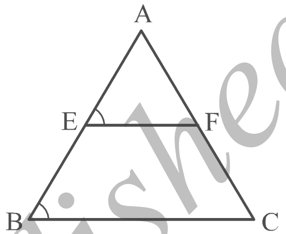

చిత్రం 7.23

[గమనిక : AB ని పొడిగించిన. C ద్వారా DA కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయండి ఇది AB ని పొడిగించిన రేఖను E వద్ద ఖండించును.

## 7.6 మధ్య బిందువుల సిద్ధాంతం

త్రిభుజాలు మరియు చతుర్భుజాల ధర్మాలను తెలుసుకున్నాం త్రిభుజ భుజాల మధ్య బిందువుల అధారంగా, మనం మరికొన్ని నూతన సంబంధాలను రాబడదాం. ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాం.

ABC త్రిభుజం గీయండి. AB మరియు AC మధ్యబిందువుగా E మరియు F లు గుర్తించండి.



చిత్రం 7.24

EF మరియు BC ని కొలవండి $\angle$ AEF మరియు $\angle$ ABC ని కూడా కొలవండి.

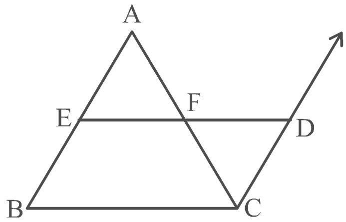
మీరు ఏమి గమనించారు?

$EF = \frac{1}{2}BC$ మరియు $\angle AEF = \angle ABC$ అయినదాన్ని గమనించి EF || BC

మరికొన్ని త్రిభుజాలను తీసికొని ఈ కృత్యాన్ని చేయండి దీనివల్ల ఈ కింది సిద్ధాంతం ప్రకారం నిరూపించవచ్చు.

**సిద్ధాంతం 7.9 :** ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరంగాను మరియు దానిలో సగము ఉంటుంది.

కింది ఇచ్చిన సాధన ప్రకారం ఈ సిద్ధాంతాన్ని సాధించవచ్చు.



చిత్రం 7.25

చిత్రం 7.25 లో. AB మరియు AC ల మధ్య బిందువు క్రమంగా E మరియు F అయిన CD || BA

Δ AEF ≅ Δ CDF (కో. భు. కో. నియమం)

కావున EF = DF మరియు BE = AE = DC (ఎలా)

BCDE ఒక సమాంతర చతుర్భుజం (ఎలా)

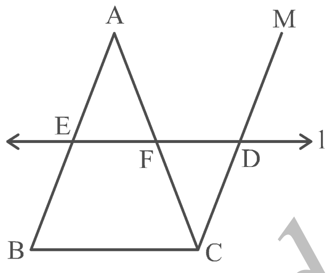
EF || BC

ఈ విషయంలో $EF = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BC$. అని గమనించండి.

సిద్ధాంతం 7.9 యొక్క విలోమము నిరూపిస్తారా? విలోమము సరినా?

ఈ పైప్రమేయం విలోమము కూడా సరి దీనిని ఈ విధంగా నిరూపించవచ్చు.

**సిద్ధాంతం 7.10 :** ఒక త్రిభుజానికి ఒక భుజము మధ్య బిందువు గుండా గీసిన రేఖ మరొక భుజానికి సమాంతరం గావుండి రెండవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.



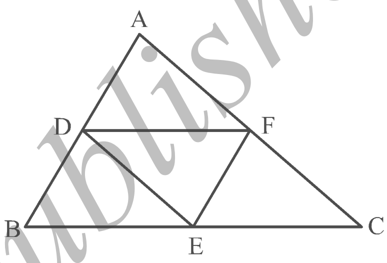
చిత్రం 7.26

చిత్రం 7.26 AB మధ్యబిందువు E మరియు $l$ రేఖ E బిందువుద్వారా పోతూ BC కి సమాంతరంగావుంది

CM || BA $\Delta$AEF మరియు $\Delta$CDF లు సర్వసమానత్వాన్ని ఉపయోగించి AF = CF అని చూపండి.

**ఉదాహరణ : 7**

$\Delta$ ABC లో D, E మరియు F లు వరుసగా AB, BC మరియు CA భుజాల మధ్యబిందువులు. వీటిని ఒకదానితో మరొకటి కలుపగా ఏర్పడిన నాలుగు త్రిభుజాలు సర్వసమానమని చూపండి (చిత్రం 7.27).



చిత్రం 7.27

**నిరూపణ :** $\Delta$ ABC లో D,E లు వరుసగా AB మరియు BC ల మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం ప్రకారం (7.9) DE || AC

అదేవిధంగా DF || BC మరియు EF || AB.

అగును అందువల్ల ADEF, BDFE మరియు DFCE లు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజం

యొక్క కర్ణం BDFE అయి న DE అయినది

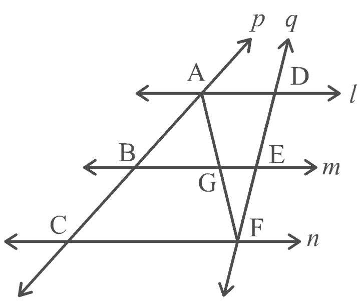
అందువల్ల $\Delta$ BDE $\cong$ $\Delta$ FED

కావున $\Delta$ DAF $\cong$ $\Delta$ FED

మరియు $\Delta$ EFC $\cong$ $\Delta$ FED

అందువల్ల అన్ని నాలుగు త్రిభుజాలు సర్వసమానము

**ఉదాహరణ : 8** : $l$, $m$ మరియు $n$ అనేమూడు సమాంతర రేఖలను $p$ మరియు అనేరెండు తిర్యగ్రేఖలు $p$ పై $l$, $m$ మరియు $n$ లు AB మరియు BC సమానంగా అంతర ఖండాలను ఏర్పరచినవి (చిత్రం 7.28).



చిత్రం 7.28

*l*, m మరియు *n* లు పై కూడా సమాన అంతర ఖండాలను ఏర్పరుస్తాయి అని చూపండి.

**సాధన :** AB = BC ఇచ్చినది DE = EF అని చూపాలి

A మరియు F రేఖను గీయగా ఇది *m* రేఖను G వద్ద ఖండించదనుకోండి $\Delta$ ACF మరియు $\Delta$ AFD అను రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది

$\Delta$ ACF లో AC మధ్యబిందువు B అవుతుంది (AB = BC) మరియు BG || CF (m || n అయినందున.)

కావున AF మధ్యబిందువు G అయినది (సిద్ధాంతం 7.10 ఉపయోగించి)

$\Delta$ AFD లో AF మధ్యబిందువు G అని అదేవిధంగా చూపించాలి. GE||AD మరియు సిద్ధాంతం 7.10 నుండి DF యొక్క మధ్యబిందువు E అయినది.

అంటే DE = EF

మరొక పద్ధతిలో చెప్పాలంటే *l*, *m* మరియు *n* రేఖలు *q* రేఖపై కూడా సమాంతర ఖండాలు ఎర్పరుస్తుంది.

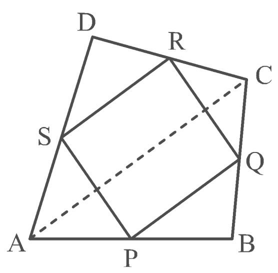
## అభ్యాసం 7.2

1. ABCD ఒక చతుర్భుజం. AB, BC, CD మరియు DA భుజాల మధ్యబిందువులు క్రమంగా P, Q, R మరియు S అయినవి (చిత్రం 7.29). AC కర్ణం అయితే

   (i) SR || AC మరియు SR = $\frac{1}{2}$AC

   (ii) PQ = SR

   (iii) PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి

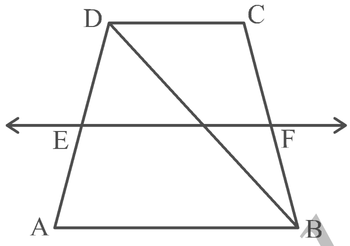



చిత్రం 7.29

2. ABCD ఒక రాంబస్ AB, BC, CD మరియు DA భుజాలు మధ్యబిందువులు క్రమంగా P, Q, R అయినవి PQRS ఒక దీర్ఘచతుస్రమని చూపండి.

3. ABCD ఒక దీర్ఘ చతురస్రం. AB, BC, CD మరియు DA భుజాల మధ్య బిందువులు క్రమంగా P, Q, మరియు S అయినవి. PQRS ఒక రాంబస్ అని చూపండి

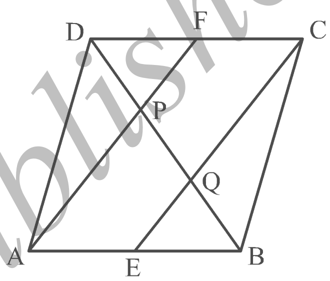
4. ABCD ఒక ట్రెపీజియం AB || DC, BD కర్ణం మరియు AD మధ్య బిందువు E అయిన. E ద్వారా AB కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయండి BC ని F బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది (చిత్రం 7.30). BC కి మధ్యబిందువు F అని చూపండి.



చిత్రం 7.30

5. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో AB మరియు CD ల మధ్యబిందువులు వరుసగా E F అయిన AF మరియు EC రేఖాఖండాలు కర్ణము BD ని త్రిభాగిస్తాయని చూపండి.

6. ఒక చతుర్భుజంలో ఎదుటి భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండాలు సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని చూపండి.



చిత్రం 7.31



7. ABC ఒక లంబకోణత్రిభుజంలో. $\angle C$ లంబకోణము అయిన కర్ణం AB మధ్య బిందువు M గుండా BC కి సమాంతరంగా గీచినరేఖ AC ని D వద్ద ఖండిస్తే.

(i) AC మధ్య బిందువు D

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

## 7.7. సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో ఈ కింది అంశాలను మీరు నేర్చుకున్నారు.

1. ఒక చతుర్భుజంలో అన్ని కోణాల మొత్తం 360°
2. సమాంతర చతుర్భుజం లో ఒక కర్ణం రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.
3. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం లో

(i) ఎదుట భుజాలు సమానం

(ii) ఎదుటి కోణాలు సమానం

(iii) కర్ణాలు పరస్పర సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

4. ఒక చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజం కావాలంటే

   (i) ఎదుట భుజాలు సమానం లేదా

   (ii) ఎదుట కోణాలు సమానం లేదా

   (iii) కర్ణాలు పరస్పరం సముద్విఖండన చేసుకుంటాయి. లేదా

   (iv) ఒక జత ఎదుటి భుజాలు సమానం మరియు సమాంతరం అయి వుండాలి.

5. దీర్ఘ చతురస్రంలోని కర్ణాలు సమానమై సమద్విఖండన చేస్తుంటాయి మరియు దీని విలోమము కూడా సరైనది.

6. రాంబస్ కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన చేసుకుంటాయి మరియు దీని విలోమము కూడా సరైనది.

7. చతురస్రంలోని కర్ణాలు పరస్పరం సమానము, లంబసమద్విఖండన చేసుకుంటాయి దీని విలోమం కూడా సరైనది.

8. త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల మధ్యబిందువులను కలిపే రేఖా ఖండం మూడవ భుజానికి సమాంతరంగాను మరియు దానిలో సగము వుంటుంది.

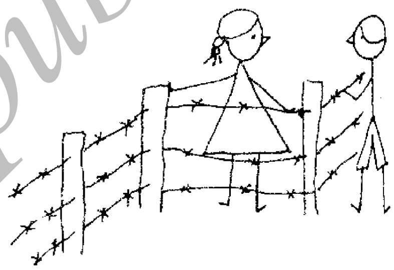
9. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి మధ్యబిందువు గుండా గీయబడిన రేఖ మరొక భుజానికి సమాంతరంగా మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేయును.

10. ఒక చతుర్భుజంలోని భుజాల మధ్యబిందువులను క్రమంగా కలిపిన సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది.

# అనుబంధం - 1

## గణితంలో నిరూపణలు

### A 1.1 పరిచయం



మీ స్వంత భూమికి కంచె లేదని అనుకుందాం. మీ ప్రక్కింటివారు ఉన్నట్టుండి ఒక రోజు వారి భూమికి కంచె వేసేస్తారు. వారు మీ భూమి సరిహద్దును దాటి (బౌండరీని) ఆక్రమించుకున్నారని మీకు అనిపిస్తుంది. దీనిని నిరూపించడానికి మీరు ఏం చేస్తారు? బహుశ ఇలా చేయవచ్చు. ఊరి పెద్దలకు మీ ఫిర్యాదు చెప్పి వారివల్ల పరిష్కారం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిస్తారు. అయితే ఊరి పెద్దలలో భిన్నాభిప్రాయాలతో కొందరు మీ పరంగా మరికొందరు మీ ప్రక్కింటివారి పరంగా సమర్థిస్తే మీరేం చేస్తారు.

అందరూ ఒప్పుకొనేటటువంటి సరైన ఆధారాన్ని (ఋజువులు) చూపాలి కదా? దానికోసం ప్రభుత్వం నుండి అధికారికంగా ప్రకటించబడిన సర్వేనక్షను చూపవచ్చు లేదా దానిని న్యాయాలయంలో సమర్పించి వ్యాజ్యంను సెటిల్మెంట్ చేసుకొనవచ్చు.

**మరొక విషయం:** మీ ఇంటి ఆగస్ట్ 2016 నెల విద్యుత్ బిల్లును మీ అమ్మగారు విద్యుత్ శాఖలో బిల్లు కట్టారు. అయితే వారు సెప్టెంబర్ 2016 బిల్లులో ఆగస్ట్ 2016 నెల బాకి ఉందని చేర్చారు. మీరేం చేస్తారు? ఆగస్ట్ 2016 కు కట్టిన రసీదును చూపించి. బిల్ సరి చేసుకుంటారు కదా? ఇలా కొన్ని విషయాలలో సాధించడానికి సమర్థించడానికి ఇష్టపడకుండా ఊరికే ఉండడం కూడా ఒక్కొక్క సారి జీవితంలో జరుగుతుంది. [దారి ప్రక్కన వస్తువులను కొన్నప్పుడు, అవి బాగా లేకపోవడం మొదలగు వాటిని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.]

వీటిని సాధించడానికి ఇబ్బందులు వద్దనిపిస్తుంది. అయితే, గణిత శాస్త్రంలో ఏదైనా ప్రకటన/ ఉక్తి, సత్యము లేదా అసత్యము అని అలాగే ఒప్పుకోలేము. వాటికి

(Mathematical logic) గణిత తర్కంనకు ఆధారం (ఋజువులు) కావాలి. గణిత తర్కం ఆధారంపై ప్రకటనలను సమర్థించడం లేదా నిరాకరించడం గణితంలో ముఖ్యం. వాస్తవానికి శతాబ్దాలనుండి గణిత తార్కిక సాధనలు ఉనికిలో ఉన్నాయి. అలాగే, గణితంలోని అన్ని శాఖలకు ఇవి ఆధారస్థంభాలు అయినాయి.

మెసపటోమియా, ఈజిప్ట్, చైనా భారతదేశాల ప్రాచీన నాగరికత అభివృద్ధికి గణితమే ఆధార స్థంభం అయిననూ, ఆకాలం వారు, ఇప్పుడు మనం ఉపయోగిస్తున్న విధానంలోనే నిరూపణలను ఉపయోగించే వారనుటకు ఖచ్ఛితమైన ఋజువులు లేవు. గణిత శాస్త్రంలో మొదటి 'గణన సాధన' ను ఇచ్చినవారు 'థేల్స్' (THALES) అని నమ్మడమేనది. థేల్స్‌గారు గ్రీక్ దేశపు వేదాంతి మరియు గణిత శాస్త్రవేత్త.

ఈ అధ్యాయంలో మనము గణిత ప్రవచనం అంటే ఏమి? వాటిని నిరూపించడానికి తర్కం ఏ విధంగా ఉంటుంది? గణిత సాధనలు ఏమేమి కలిగివుంటాయి అని గమనిస్తాము.

### A 1.2. గణిత ప్రవచనములు (Mathematicaly Acceptable Statements)

ఈ అధ్యాయంలో గణితీయంగా స్వీకార్య ప్రవచనం అంటే ఏమిటి? అని వివరించడానికి ప్రయత్నిస్తుంది. ఒక ప్రవచనం అంటే అది ఆ దేశం కాదు, ఆశ్చర్య సూచకవాక్యము కాదు, లేదా ప్రశ్న కూడా కాదు.

ఉదాహరణకు.

(a) మీ వెంట్రుకల రంగు ఏమి? ఒక ప్రశ్నార్థక వాక్యం కాదు?

(b) దయచేసి, నాకు త్రాగడానికి ఒక గ్లాసు నీరు ఇవ్వండి. ఈ వాక్యం వేడుకోవడం లేదా ఆదేశించడమే కాని ప్రవచనం కాదు. అయితే మీ తల వెంట్రుకలు నల్లగా ఉన్నాయి. అనేది ప్రకటన. ఏదైనా ప్రవచనం సామాన్యంగా

- ఎప్పుడూ సత్యమై ఉంటుంది. (సత్యం / అసత్యం
- ఎప్పుడూ అసత్యమై ఉంటుంది (అసత్యం / తప్పు)
- అస్పష్టంగా లేదా సందిగ్ధంగా ఉంటుంది

**అస్పష్టం/సందిగ్ధం** : అనుటకు కొంచెం ఎక్కువ వివరణ అవసరం. ఒక ప్రవచనం అస్పష్ట/సందిగ్ధం అనిపించడానికి రెండు సన్నివేశాలు కారణమవుతాయి. మొదటి సన్నివేశం ప్రవచనం ఎల్లపుడూ సత్యమో లేక అసత్యమో మనకు నిర్ధారించడం కానప్పుడు, ఉదాహరణకు రేపు గురువారం ఒక సందిగ్ధ ప్రవచనం ఎందుకంటే ఈ ప్రవచనం సత్యమో అసత్యమో అని కావలసినంత సమాచారం లేదు.

**రెండవ సన్నివేశం:** ఒక ప్రవచనం అస్పష్ట/ సందిగ్ధం చేయడం వ్యక్తి కేంద్రిత అభిప్రాయం / అంశాలతో కూడి ఉంటుంది. ఉదా: "కుక్క బుద్ధివంత జంతువు" ఈ ప్రవచనం కొందరు ఒప్పుకోవచ్చు, కొందరు ఒప్పుకోక పోవచ్చు.

**ఉదాహరణ 1 :** క్రింది ప్రవచనాలను ఎల్లప్పుడూ సత్యం, ఎల్లప్పుడూ అసత్యం లేదా అస్పష్టం అని తెలిపి మీ జవాబును సమర్థించుకోండి.

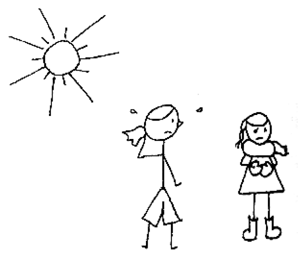
(i) ఒక వారానికి 8 రోజులు.
(ii) ఇప్పుడు ఇక్కడ వర్షం వస్తూవుంది.
(iii) సూర్యుడు తూర్పున ఉదయించి, పశ్చిమాన అస్తమిస్తాడు.
(iv) గౌరి కరుణామయి
(v) రెండు బేసి పూర్ణాంకాల గుణలబ్దం సరి పూర్ణాంకము అవుతుంది.
(vi) రెండు సరిసంఖ్యల గుణలబ్దం సరిసంఖ్య అవుతుంది.

**సాధన :**

(i) ఈ ప్రవచనలు ఎల్లప్పుడూ అసత్యం. ఎందుకంటే వారంలో 7 రోజులు ఉంటాయి.
(ii) ఈ ప్రవచన సందిగ్ధం ఎందుకంటే ఇక్కడ అనునది ఎక్కడ అని నిర్ధారితం కాలేదు.
(iii) ఏ ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ సత్యం, ఎందుకంటే దిశలను నిశ్చయించిన తర్వాత మనం ప్రపంచంలో ఎక్కడ ఉన్ననూ, సూర్యుడు తూర్పున ఉదయించి, పశ్చిమాన అస్తమిస్తాడు.
(iv) ఈ ప్రవచనం సందిగ్ధం. ఈ అభిప్రాయం వ్యక్తిగతం. గౌరి కొంతమందికి కరుణామయి. కొంతమందికి కాక పోవచ్చు.
(v) ఈ ప్రవచనం అసత్యం. ఎందుకంటే రెండు బేసి సంఖ్యల గుణలబ్దం సరిసంఖ్యనే అవుతుంది.
(vi) ఈ ప్రవచనం ఎల్లపుడూ సత్యం, ఎందుకంటే సరిసంఖ్యల గుణలబ్దం సరిసంఖ్యనే అవుతుంది.

అయితే ఈ ప్రవచనం సమర్థించడం సదాకాలం సత్యమని నిర్ధారించుటకు కొంచెం పనిచేయవలసి ఉంటుంది. దానిని విభాగం A1.4 లో సమర్థించబడింది. ప్రారంభంలో ప్రస్తావించినట్లు, నిత్య జీవితంలో ప్రవచనాల చెల్లుబాటు (Validity)గురించి మనం ఎక్కువ జాగ్రత్తతో ప్రవర్తించలేము. దానికి కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం. మనం మాట్లాడేటపుడు ఒకరికొక్కరు ఎలా చెబుతాం. అబ్బా! "ఈ రోజు చాలా ఉక్క పెడుతోంది. చాలా ఎండగా ఉంది"

ఈ ప్రవచనం సందిగ్ధం / అస్పష్టం అని మనకు అనిపించిననూ, సందర్భానుసారంగా దాని గురించి మనం వాదించం. అలాగే ఒప్పుకొనేస్తాం. మన దేశంలోని వేర్వేరు ప్రదేశాలలో నివసించువారికి ఒక నిర్దిష్ట ప్రదేశంలోని వేడి ఎక్కువ అనిపించవచ్చు. లేక అనిపించకపోవచ్చు. కుమావన్ లాంటి చలి ప్రదేశం వారికి అతి వేడి అనిపిస్తే చెన్నైలో నివసించే వారికి అలా అనిపించకుండా వుండవచ్చు. ఎందుకంటే ఇద్దరి వైయక్తిక అనుభవమే ముఖ్యం కదా?



అయితే గణిత నిరూపణలు అస్పష్టం / సందిగ్ధంగా ఉండుటకు అవకాశం లేదు. గణితంలో ఒక ప్రవచనం ఒప్పుకో తగినది. లేదా చెల్లుబాటు అగునది. అది సత్యం అయి ఉండవచ్చు. లేదా అసత్యమై ఉండవచ్చు. కాని సందిగ్ధం కానే కూడదు. ఒక ప్రవచనం సత్యం అని పిలవాలంటే అది ఎల్లప్పుడూ (సర్వకాలిక) సత్యమే అయి ఉండాలి. అలా కాకపోతే దానిని అసత్య ప్రవచనం అని అంటాం.

ఉదాహరణకు, $5 + 2 = 7$ అనునది ఎల్లప్పుడూ సత్యం అయితే $5 + 3 = 7$ అనునది అసత్య ప్రవచనం.

**ఉదాహరణ 2:** ఈ క్రింది ప్రవచనలు సత్యమో లేక అసత్యమో తెలపండి.

(i) త్రిభుజపు అంతరకోణాల మొత్తం $180°$.

(ii) 1' కంటె పెద్దవైన అన్ని బేసి సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలు.

(iii) ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య (real number) $x$ కు, $4x + x = 5x$.

(iv) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య $x$ కు, $2x > x$.

(v) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య $x$ కు; $x^2 \geq x$.

(vi) ఒక చతుర్భుజపు అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉంటే అది ఒక చతుర్భుజం.

**సాధన :**

(i) ఇది సత్యప్రవచనం, 6వ అధ్యాయంలో దీనిని సాధించారు.

(ii) ఇది అసత్య ప్రవచనం ఎందుకంటే 9 ప్రధాన సంఖ్యకాదు.

(iii) ఇది సత్య ప్రవచనం.

(iv) ఇది అసత్య ప్రవచనం. ఉదాహరణకు $x = -1$ ఐన $2 \times (-1) = -2$ అలాగే $-2 \not> -1$.

(v) ఇది అసత్య ప్రవచనం ఉదాహరణకు $x = \frac{1}{2}$ ఐతే $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ అలాగే $\frac{1}{4} \not> \frac{1}{2}$.

(vi) ఇది అసత్య ప్రవచనం ఎందుకంటే వజ్రాకృతిలో కూడా అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి

ఈ ఉదాహరణల నుండి మీకు అర్థమై ఉండవచ్చు. ఒక ప్రవచనాన్ని గణితంలో అసత్య ప్రవచనం అని చూపడానికి ఒకే ఒక సన్నివేశం / ప్రకరణలో అ ప్రవచనం సత్యమైతే చాలు. పై ఉదాహరణ(2)లో 9 ఒక ప్రధాన సంఖ్య కాదు కాబట్టి 1 కంటె పెద్దవైన అన్ని బేసి సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలు అనే ప్రవచనం సత్యం కాదని చూపబడింది.

ఒక ప్రవచనాన్ని తిరస్కరించడానికి ఉపయోగపడు ఉదాహరణను ప్రత్యుదాహరణ (Counter-Example) విభాగం A1-5 లో ప్రత్యుదాహరణ గురించి వివరంగా చర్చిద్దాం. ప్రవచనాలు 4, 5, 6 ఇవి అసత్య ప్రవచనాలు, కొన్ని నిభందనలు ఉపయోగించి ఈ ప్రవచనాలను సత్య ప్రవచనాలు చేయవచ్చు.

**ఉదాహరణ 3:** క్రింది ప్రవచనాలు సత్య ప్రవచనములు అగునట్లు తగు నియమములు వినియోగించి, తిరిగి రాయండి.

(i) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య $x$ కు, $2x > x$.

(ii) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య $x$ కు, $x^2 \geq x$.

(iii) ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్య చేత భాగిస్తే భాగలబ్ధం '1' అవుతుంది.

(iv) ఒక వృత్తములో ఒక జ్యా వృత్తముపై ఏదైన ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణం $90°$

(v) ఒక చతుర్భుజంలో అన్ని భుజాలు సమానమైన అది ఒక చతురస్రం.

**సాధన :**

(i) $x > 0$ అయినప్పుడు $2x > x$.

(ii) $x \leq 0$ లేదా $x \geq 1$ అయినప్పుడు $x^2 \geq x$.

(iii) 0 (సున్న) తప్ప మిగిలిన సంఖ్యలను అదేసంఖ్యలతో భాగించినప్పుడు లభించు భాగలబ్ధం '1'.

(iv) ఒక వృత్తములో ఒక వృత్త వ్యాసం, వృత్తము పై ఏదైన ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణం $90°$

(v) ఒక చతుర్భుజంలో అన్ని భుజాలు, కోణములు సమానమైన అది ఒక చతురస్రం.

## అభ్యాసం A 1.1

1. క్రింది వాక్యములు సత్యమో లేక అసత్యమో లేక సందిగ్ధ వాక్యమో తెలియజేస్తూ వివరించండి.

   (i) ఒక సంవత్సరానికి 13 నెలలు

   (ii) దీపావళి పండుగ శుక్రవారం వస్తుంది.

   (iii) మాగడిలో ఉష్ణోగ్రత $26°C$.

   (iv) భూమికి గల ఒక ఉపగ్రహం చంద్రుడు.

   (v) కుక్కలు ఎగుర గలవు.

   (vi) ఫిబ్రవరిలో 28 రోజులు మాత్రమే ఉంటాయి.

2. క్రింది ప్రవచనములు సత్య ప్రవచనములు అగునట్లు తగు నియమములు వినియోగించి, తిరిగి రాయండి.

   (i) చతుర్భుజంలో అంతరకోణాల మొత్తం $350°$.

   (ii) ఏదైనా ఒక వాస్తవ సంఖ్య $x$ కు $x^2 \geq 0$.

   (iii) రాంబస్ (వజ్రాకృతి) ఒక సమాంతర చతురస్రం.

   (iv) రెండు సరిసంఖ్యల మొత్తం ఒక సరిసంఖ్య

   (v) రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం ఒక బేసి సంఖ్య.

3. క్రింది ప్రవచనములు సత్య ప్రవచనములు అగునట్లు తగు నియమములు వినియోగించి, తిరిగి రాయండి.
   (i) అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు బేసి సంఖ్యలు.
   (ii) ఒక వాస్తవ సంఖ్యయొక్క రెండు రెట్లు ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య
   (iii) ఏదైనా $x$ కు, $3x + 1 > 4$.
   (iv) ఏదైనా $x$ కు $x^3 \geq 0$.
   (v) ప్రతి త్రిభుజంలోను మధ్యగతము కోణ సమద్వి ఖండన రేఖ అగును.

### A 1.3. నిగమన నిరూపణ విధానము (Deductive Reasoning)

**సందిగ్ధం** కానటువంటి ప్రవచనములు, సత్యవిలువలు తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగించు తార్కిక విధానమే నిగమన పద్ధతి. నిగమన పద్ధతి అర్థం చేసుకోవడానికి క్రింది పజల్‌ను పరిశీలించండి. మీకు నాలుగు కార్డులు ఇవ్వబడినవి. దానిపై ఒక వైపు ఆంగ్ల అక్షరాలు, రెండవ వైపు అంకెలు కలవు.

| A | V | 6 | 5 |
|---|---|---|---|

ఈ కార్డు రచనలో ఒక వైపు సరిసంఖ్య ఉన్న, రెండవ వైపు అచ్చు కలదు. అనే నియమం అలవడించబడినది అనుకొందాం. దీనిని దృఢీకరించడానికి మీరు కనిష్ఠ ఎన్ని కార్డులు తిప్పివెనుక వైపు చూడాలి. మీరు అని కార్డులను మడచి చూడాలనేం లేదు. ఇది మీ ఇష్టం. అయితే, అతి తక్కువ కార్డుల వెనుకవైపు గమనించి తీర్మానించడం మీకు సాధ్యమా?

పై ప్రవచనంలో ఒక వైపు సరిసంఖ్య ఉన్న కార్డు, మరొక వైపు అచ్చు (vowel) ఉంది అనుకోండి. ఐతే కార్డు ఒక వైపు అచ్చు (vowel) , మరొక వైపు సరిసంఖ్య ఉండాలని ప్రవచనంలో లేదు. అందువల్ల అచ్చుగల కార్డు వెనుక వైపు సరిసంఖ్య అయి ఉండవచ్చు కాకపోయి ఉండవచ్చు. కార్డు ఒక వైపు బేసిసంఖ్య ఉంటే మరొక వైపు హల్లు ఉండాలని ప్రవచనములో లేదుకదా.

$\boxed{A}$, $\boxed{V}$, $\boxed{6}$, $\boxed{5}$ కనబడునట్లు ఉండే ఈ నాలుగు కార్డులో A గల కార్డు త్రిప్పి చూడాలా? ఖచ్చితంగా లేదు. ఈ కార్డు వెనుక వైపు సరి/బేసి ఏదేని సంఖ్య ఉండవచ్చు.5 ఉన్న కార్డును త్రిప్పి చూడాలా? అవసరం లేదు. ఎందుకంటే ఈ కార్డు వెనుక వైపు ఏదేని అచ్చు హల్లు ఉండవచ్చు.

మీరు $\boxed{V}$ మరియు $\boxed{6}$ ఈ కార్డుల వెనుక తప్పకుండా చూడాలి. $\boxed{V}$ వెనుక సరిసంఖ్య ఉన్నచో ప్రవచన నియమం పాటించలేదా? అదే విధంగా $\boxed{6}$ వెనుక హల్లు ఉన్ననూ నియమం పాటించబడినట్టే.

ఈ రకమైన తార్కిక ఆలోచనల ద్వారా సమస్యను సాధించుటను **నిగమపద్ధతి** అంటారు.

ఈ నిగమనం అంటే ముందుగానే ఒప్పుకున్న / నిర్ధారణ చేయబడిన ప్రవచనాన్ని ఆధారం చేసుకొని, ఒక నిర్ధారణకు రావడం నిర్ధారణ/తత్వం ఉదాహరణల పరిశీలన - ఉదాహరణలకు పై కార్యాచరణంలో క్రమబద్ధమైన సిరీస్ నుండి మనం కేవలం V 6 ఈ కార్డుల వెనుక వైపు గమనించడానికి తీర్మానించాము.

నిగమన పద్ధతి కొన్ని ప్రవచనములు నిజమో, కాదో తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడును ఎందువలన అంటే మనము సామాన్య నియమము ప్రత్యేక సందర్భములో కూడ సత్యమే. ఉదాహరణకు రెండు బేసి సంఖ్యల గుణలబ్ధము బేసి సంఖ్యే అవుతుంది. $70001 \times 134563$ ల గుణలబ్ధం బేసి సంఖ్య అని చెప్పినప్పుడు మనము ఆ సంఖ్యలను గుణించకుండానే ఆ వాక్యము నిజమని చెప్పగలము ఎందుకంటే 70001 మరియు 134563 ఈ రెండు బేసి సంఖ్యలు.

నిగమన పద్ధతి అనేక శతాబ్దాలనుండి మానవుని తార్కిక విధానంలో నిగమన పద్ధతి ఒక భాగమైనది. ఉదాహరణకు క్రింది ప్రవచనాలను గమనించండి. "సోలారిస్ విచ్చుకోవాలంటే, విచ్చుకొనే ముందు రోజు ఉష్ణోగ్రత 28°C కంటే ఎక్కువగా ఉండాలి." "2005 సెప్టెంబర్ 15 న కాల్పనిక లోయలో సోలారిస్ పుష్పం విచ్చుకున్నది." ఈ ప్రవచనాలు సత్యమైనవి.

ఇప్పుడు నిగమన పద్ధతిలో కాల్పనికలోయలో 2005 సెప్టెంబర్ 14 నందు ఉష్ణోగ్రత 28°C కంటే ఎక్కువగా ఉన్నదని నిర్ధారించవచ్చు.

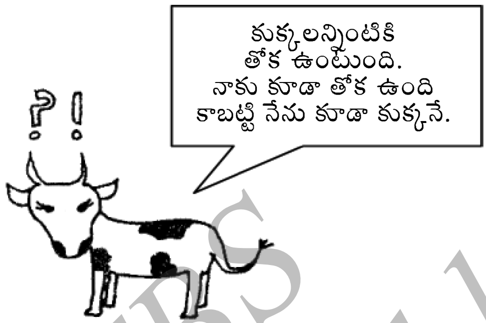
మన జీవితంలో కొన్ని సంఘటనల పై కూడా మనం సాధారణంగా ఎల్లపుడు హేతు బద్ధంగా ఆలోచించము. మన ఆలోచనలు ఒక్కొక్కసారి నిజం కావచ్చు. లేక తప్పు కూడా కావచ్చు నీ ఫ్రెండ్ నీతో ఒక రోజు మాట్లాడక పోతే, తనకు నీ పై కోపం వచ్చి ఉంటుందని భావిస్తావు. కాని ఆమె తన పని ఒత్తిడిలో ఉన్నందున నీతో మాట్లాడలేక పోవచ్చు. కావున రోజువారీ సంఘటనలపై నీవు వచ్చిన నిర్ధారణలు సరికాని కారణాలతో వచ్చినది. ఎందుకు? ఆలోచించు.

### అభ్యాసం A 1.2

1. క్రింది ప్రశ్నలను నిగమాను పద్ధతి ద్వారా ఆలోచించి సాధించండి.
   - (i) మానవులు క్షీరదాలు, క్షీరదాలన్నీ సకశేరుకాలు ఈ రెండు ప్రవచనాల నుండి మానవుల గురించి, ఏం చెప్పగలరు.
   - (ii) ఆంథోని ఒక మంగలి, దినేశ్ క్షవరం చేయించుకున్నాడు. దినేశ్‌కు ఆంథోని క్షవరంచేశాడని మీరు అనుకుంటున్నారా?
   - (iii) అంగారక గ్రహవాసుల నాలుకలు ఎర్రగా ఉంటాయి. గులాగ్ (Gulag) అంగారక గ్రహవాసి. రెండు వాక్యముల నుండి గులాగ్ గురించి ఏమి చెప్పగలవు.

(iv) నాలుగు గంటల కంటే ఎక్కువ సేపు వర్షం పడిన మరుసటి రోజు మురికి కాలువలన్నీ శుభ్రం చేయాలి. ఈ రోజు 6 గంటల కాలం వర్షం కురిసింది. ఈ ప్రవచనాల నుండి మీరు మురికి కాలువల స్తితి గురించి మీరు ఏమంటారు.

(v) క్రింది కార్టూన్ నందు ఇచ్చిన ఆవుయొక్క వివేచన (ఆలోచన)లో గల తప్పును తెల్పండి.




2. మీకు నాలుగు కార్డులు ఇవ్వబడినవి ప్రతి కార్డు పై ఒక వైపు అంకెలు, రెండోవైపు కుక్క ఇంగ్లీషు అక్షరములు ఇవ్వబడినాయి. వీటికి ఒక కార్డుకు ఒకవైపు హల్లు ఉంటే, రెండవ వైపు బేసి సంఖ్య ఉంటుంది. అను నియమం కలదు. ఏ రెండు కార్డులను త్రిప్పిన మనం పై నియమము ఉన్నదో, లేదో సరిచూడగలము.

| B | 3 | U | 8 |
|---|---|---|---|

### A 1.4. సిద్ధాంతాలు, పరికల్పనలు మరియు స్వీకృతములు

ఇంతవరకు మనం ప్రవచనంల సత్యవిలువలు పరిశీలించు విధానంలు తెలుసుకున్నాము. ఇప్పుడు సిద్ధాంతములు, పరికల్పనలు, భావనలు, స్వీకృతముల మధ్యగల బేదములు తెలుసుకుందాం.

ఇంతకు ముందు సిద్ధాంతంల గురించి మనం తెలుసుకుని ఉన్నాం? సిద్ధాంతం అంటే ఏమిటి? నిరూపించబడిన గణిత ప్రవచనమును సిద్ధాంతము అంటారు. విభాగం A1.5 లో మీరు గమనించినట్లు ఈ క్రింది సిద్ధాంతాలు ఉదాహరణలు అవుతాయి.

**సిద్ధాంతము A 1.5** : త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం $180^0$

**సిద్ధాంతము A 1.2:** రెండు సహజ సరి సంఖ్యల గుణలబ్ధము సరిసంఖ్యయే అవుతుంది.

**సిద్ధాంతము A 1.3:** మూడు వరుస సహజ సరి సంఖ్యల లబ్ధము 16 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

పరికల్పనలు అనేవి మనం నిజం అని భావించే వాక్యములు, ఇవి గణిత ప్రవచనములు, అవగాహన, పూర్వానుభవం పై ఆధారపడి ఉన్నాయని చెప్పబడును. ఇవి సత్యాలు కావచ్చు. లేదా అసత్యాలు కావచ్చు. అవి సత్యం అని నిరూపించబడినపుడు వాటిని సిద్ధాంతములు అంటారు. ఇవి గణితంలోగల నమూనాల ద్వారా, ఊహల ద్వారా, భావనలు రూపొందింపబడును. అటువంటి ఉదాహరణలు కొన్ని గమనించండి. ఇపుడు కొన్ని విన్యాసాలను చూద్దాం. అలాగే తెలివైన నిర్ణయాలను తీసుకోవచ్చు అని పరిశీలిద్దాం.

**ఉదాహరణ 4:** ఏవైనా మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల సంకలనం చేద్దాము.

$$2 + 4 + 6 = 12$$
$$4 + 6 + 8 = 18$$
$$6 + 8 + 10 = 24$$
$$8 + 10 + 12 = 30$$
$$20 + 22 + 24 = 66$$

ఈ మాదిరి లెక్కలలో ఏదైనా విన్యాసము కలదా? వీటి గురించి తీసుకోదగిన ప్రతిపాదన ఏమి?

**సాధన :** ప్రతిపాదనలు ఇలా ఉండవచ్చు.

(i) మూడు క్రమానుగత సరి సంఖ్యల మొత్తం సరి శంఖ్య అవుతుంది.

(ii) మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల మొత్తం 6 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడును.

**ఉదాహరణ 5:** పాస్కల్ త్రిభుజం అను పిలువబడు ఈ సంఖ్యల విన్యాసాన్ని తీసుకొందాం.

| వరుస | | సంఖ్యల మొత్తం |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 1 | 2 |
| 3 | 1 2 1 | 4 |
| 4 | 1 3 3 1 | 8 |
| 5 | 1 4 6 4 1 | 16 |
| 6 | 1 5 10 10 5 1 | 32 |
| 7 | : : | : |
| 8 | : : | : |

ఈ విన్యాసాన్ని గమనించి, ఏ ప్రతిపాదనను 7 మరియు 8 వరుసలలో సంఖ్యల మొత్తం గురించి తెలుపుతారు? 21 వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తం ఎంత? '$x$' వ వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తానికి ఒక సరళ సూత్రాన్ని కల్పించగలరా?

**సాధన:**

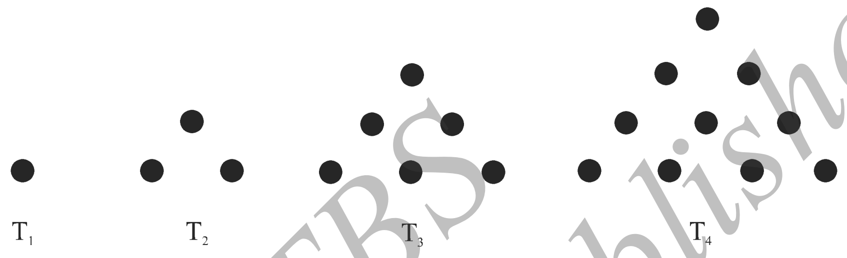
7 వ వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తం $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

8 వ వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తం $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

21 వ వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తం $= 2^{21-1} = 2^{20}$

$n$ వ వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తం $= 2^{x-1}$

**ఉదాహరణ 6:** త్రిభుజ సంఖ్యలు అను పిలువబడు సంఖ్యావిన్యాసంలో $T_n$ ను రాయండి?




**చిత్రం A 1.1**

చుక్కలను చేర్చినపుడు త్రిభుజాకారం లభిస్తుంది.

ఇక్కడ $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10$ ........... ఇలా కొనసాగుతుంది.

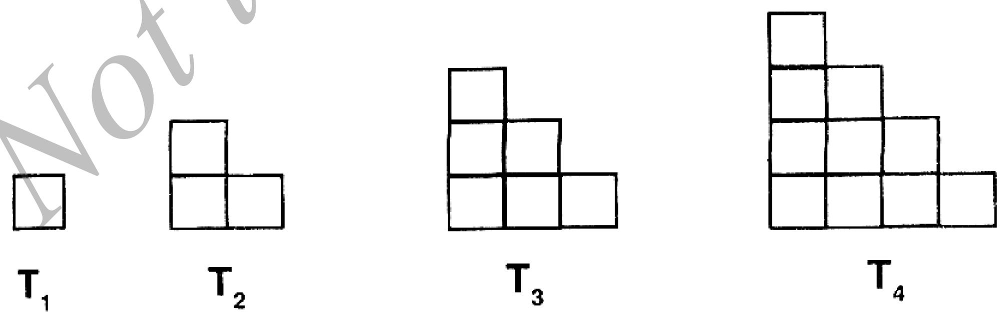
$T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10$ ........... ఇలాగే సాగుతుంది.

$T_5 = ?$ వీటిని మీరు ఊహించగలరా?

$T_6 = ?, T_n = ?$

$T_n$ గురించి ఒక ప్రతిపాదన చేయండి.

సమస్యను క్రింది విధ్యాంలో నిర్మిస్తే మీకు సహాయ పడగలదు.



చిత్రం A 1.2

**సాధన :**

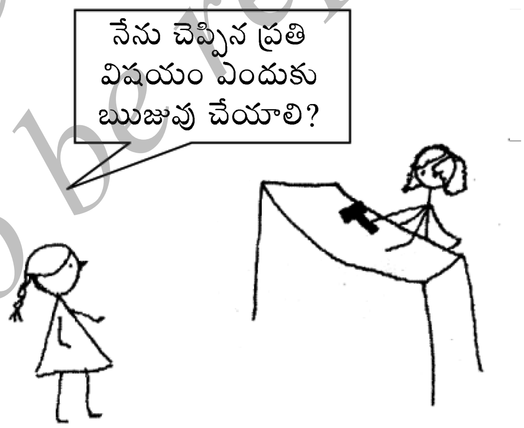
$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

జనప్రియమైన ఒక ప్రతిపాదన ఇప్పటికీ పరిహారం కోసం కాస్తోంది. ఈ ప్రతిపాదన సత్యమా? అసత్యమా? అని పరిపూర్ణంగా ఋజువు కాలేదు. దీనిని క్రిష్టియన్ గోల్డ్ బ్యాచ్ (1690 - 1764) గారు నిరూపించారు. ఈ ప్రతిపాదన ఇలా ఉన్నది. 4 కాని 4 కన్నా పెద్దదైనా ఏదైనా సంపూర్ణాంకము రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మొత్తంగా రాయవచ్చు.

అతని ఈ భావన ఇప్పటివరకు సత్యము, అసత్యము అని ఋజువు కాలేదు. మీరు కనుక సత్యము లేక అసత్యము అని నిరూపించిన అది సిద్ధాంతము అవుతుంది. గణితంలో మనం ప్రతిపాదించే ప్రతిదానిని సాధించాలా? సాధించలేకపోతే ఎందుకు కాలేదు అని మీకు ఆశ్చర్యం కావచ్చు.



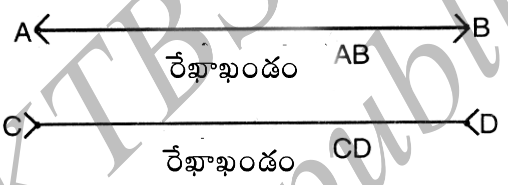

గణితంలో కొన్ని ప్రవచనంలు ఎల్లప్పుడు సత్యంలు అని భావింపబడును, కానీ నిరుపింపబడవు. అవి తమకు తామే సాటి. ఇటువంటి సత్యాలను స్వీకృతములు అంటారు. 5వ అధ్యాయం నందు యూక్లిడ్ స్వీకృతముల గురించి తెలుసుకోని ఉన్నారు.

**యూక్లిడ్ యొక్క మొదటి స్వీకృతము :** "ఒక బిందువు నుండి మరొక బిందువుకు ఒకే ఒక సరళరేఖను గీయగలము."

**మూడవ స్వీకృతము** : "ఒక బిందువు కేంద్రంగా ఏదైనా వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తంను గీయగలము."

ఇవి నిత్య సత్యాలుగా కనిపించుచున్నవి. వీటిని యూక్లిడ్ సత్యాలుగా గ్రహించాడు. ఎందువల్ల మనం ప్రతిదాన్ని నిరూపించలేము కావున కొన్ని స్వీకృతాలను సత్యాలుగా తీసుకొని వాటి ఆధారంగా మిగిలిన సిద్ధాంతములు, భావనలు నిరూపించవచ్చు. అన్ని ప్రవచనాలను సత్యాలుగా ఎందుకు గ్రహించము అని మీరు ఆశ్చర్య పోవచ్చు. కొన్ని భావనలు ఎల్లప్పుడూ నిజాలు కావు. మనం చూచే బొమ్మలు లేక వరుస క్రమం మనల్ని ఒక్కొక్కసారి మోసం చేస్తాయి. అందుకే మనం సత్యంగా భావించే వాటిని నిరూపించాలి.

"రెండు సంఖ్యలను గుణిస్తే వచ్చు సంఖ్య ఆ సంఖ్యలకన్నా పెద్దది" అను భావన ఎల్లప్పుడూ సత్యం కాదు. ఈ ఉదాహరణ చూడండి. $5 \times 0.2 = 1$ ఇది 5 కంటే చిన్న సంఖ్య




**చిత్రం A 1.3**

ఈ రెండు రేఖా ఖండాలలో ఏది పెద్దది.

AB పెద్దదా? అలా కన్పిస్తున్నది కదా అయితే AB, CD లు ఒకే కొలత కలిగినవి. మన దృష్టికి AB పెద్దదిగా కన్పిస్తున్నది. ఈ స్వీకృతాల గురించి మీకు ఇప్పుడు ఆశ్చర్యం కావచ్చు. మన భావనలు చిత్రముల ఆధారంగా కొన్ని మౌళిక సూత్రాలు స్వీకృతాలుగా భావిస్తాము. కానీ అది తప్పు అని కనుక్కొంటే మన స్వీకృతం పనికిరాకుండా పోతుంది మరియు స్వీకృతం తయారు చేయునపుడు తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలు.

(i) స్వీకృతములు చిన్నగా ఉండేటట్లు తీసుకోవలెను యూక్లిడ్ ఐదు స్వీకృతాల నుండి కొన్ని వందల సిద్ధాంతాలు నిరూపించబడినవి.

(ii) స్వీకృతం ఎటువంటి విరుద్ధత లేనిదిగా ఉండాలి. ఒక స్వీకృతము ఉపయోగించి, వేరొక స్వీకృతము అసత్యము అని చెప్పినచో దానినివ్యతిరేకత అంటారు.

**ప్రవచనము 1** : ఏదైనా పూర్ణాంకము దాని తరువాత వచ్చే పూర్ణాంకంనకు సమానము కాదు.

**ప్రవచనము 2** : ఏదైనా పూర్ణాంకము (0) భాగించిన మరలా అదే సంఖ్య వచ్చును. (సున్నాతో భాగహారం సాధ్యం కాదని గుర్తించుకోండి. అది సాధ్యమైన ఏమి జరుగుతుందో గమనిద్దాం.)

ప్రవచనం 2 లో $\frac{1}{0} = a$, అగునట్లు ఏదేని పూర్ణసంఖ్య '$a$' కలదనుకొనిన $1 = 0$ అగును. కానీ ప్రవచనం 1 నుండి ఏ రెండు వరుస పూర్ణాంకములు సమానం కాదు అను ప్రవచనంనకు వ్యతిరికత అవుతుంది. కావున ప్రవచనం 2 తప్పు అగును.

(iii) ఒక అసత్య స్వీకృతం, విరుద్ధమైన భావనకు దారి తీస్తుంది. ఒక ప్రవచనం దాని వ్యతిరేఖ ప్రవచనం రెండు కనుక సత్యములు అయినా అవి విరుద్ధమైన భావన అంటారు.

పై ఉదాహరణలోని రెండు ప్రవచనాలను పరిశీలిద్దాం.

మొదటి ప్రవచనం నుండి మనం $2 \neq 1$ పరీక్షించి చూపవచ్చు. ఇప్పుడు $x^2 - x^2$ పరిశీలిద్దాం. $x^2 - x^2$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి. (రెండు విధాలుగా విభజించవచ్చు)

(i) $x^2 - x^2 = x(x-x)$

(ii) $(x^2 - x^2) = (x+x)(x-x)$ | $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ సూత్రాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి.

(i) మరియు (ii) ల నుండి $x(x - x) = (x+x)(x-x)$

L.H.S , R.H.S లో $(x-x)$ తీసివేసి రాసిన $x = x + x = 2x$ అంటే $1 = 2$ అని సూచిస్తుంది.

$1=2$ మరియు $1 \neq 2$ రెండూ సత్యములు అని చెప్పబడుచున్నవి. కనుక దీనిని ఒక 'విరోధాభాసం' అంటారు. ఈ విరోధాభాసానికి కారణం ఏమి? ప్రవచనం 2లో పూర్ణాంకాన్ని (0) సున్న చే భాగిస్తే పూర్ణాంకమే వస్తుంది అనుట ఒక స్వీకృతమును తయారు చేయుటకు అనేక భావనలు లోతైన సునిశిత దృష్టి అవసరము. అవి మరే ఇతర వ్యతిరేక భావాలకు దారి తీయకుండా జాగ్రత్త పడాలి. కొన్ని సందర్భాలలో ఈ స్వీకృతములు నూతన భావాలను కనుగొనుటకు ఉపయోగపడాలి. అధ్యాయం 5 లో యూక్లిడ్ 5 వ స్వీకృతము ఎలా యూక్లిడ్ కాని (నాన్ యూక్లిడియన్ జ్యామితి) రేఖా గణితము నవీన రేఖా గణిత మూలానికి కారణమైనది.

స్వీకృతము అనగా నిరూపన అవసరం లేని సత్యప్రవచనములు పరికల్పనలు నిరూపన కానటువంటి గణిత ప్రవచనాలను (అవి సత్యం అయినా కావచ్చు, అసత్యం అయినా కావచ్చు.) సిద్ధాంతముల తార్కికంగా నిరూపన అయినటువంటి ప్రవచనములు అని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొందాం. సిద్ధాంతములు (Theorem), పరికల్పన, (Conjuctive) స్వీకృతములు (Axioms) అంటే ఏమిటి అని స్మరిస్తూ ఈ విభాగాన్ని పూర్తి చేద్దాం.

(i) **స్వీకృతము (Axioms)** : నిరూపన లేకుండానే సత్యంలుగా భావించే గణిత ప్రవచనములను స్వీకృతములు అంటారు.

(ii) **పరికల్పన (Conjectures)** : సత్యంలుగా భావిస్తూ ఇంతవరకు నిరూపింపబడని గణిత ప్రవచనములను పరికల్పనలు అంటాము.

(iii) **సిద్ధాంతము (Theorem)** : నిరూపిపంబడిన గణిత ప్రవచనములను సిద్ధాంతము అంటారు.

**అభ్యాసము A 1.3**

1. ఏదేని మూడు క్రమానుగత సరి సంఖ్యల గుణలబ్ధాన్ని కనుగొనండి. ఉదాహరణకు $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ ఈ విధంగా ఈ గుణలబ్ధాల అధారంగా మూడు పరికల్పనలను రాయండి.

2. పాస్కల్ త్రిభుజాన్ని గమనించండి.

   వరుస 1 : 1 = $11^0$

   వరుస 2 : 1 1 = $11^1$

   వరుస 3 : 1 2 1 = $11^2$

   వీటి ఆధారంగా వరుస 4, వరుస 5 కు పరికల్పనలను రాయండి. ఈ పరికల్పనలు సమర్థనీయమా, పరిశీలించండి? అదే విధంగా వరుస 6 కు అన్వయం అవుతుందో లేదో చూడండి.

3. త్రిభుజ సంఖ్యలను గమనించి (చిత్రం A-1.2) ఏవైనా రెండు క్రమానుగత త్రిభుజ సంఖ్యల మొత్తాన్ని రాయండి?

   **ఉదాహరణ**: $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$ అయితే $T_4 + T_5 = ?$, $T_{x-1} + T_n$కు ఒక పరికల్పన రాయండి.

4. ఈ క్రింది విన్యాసాన్ని గమనించండి.

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$ దీని ఆధారంగా

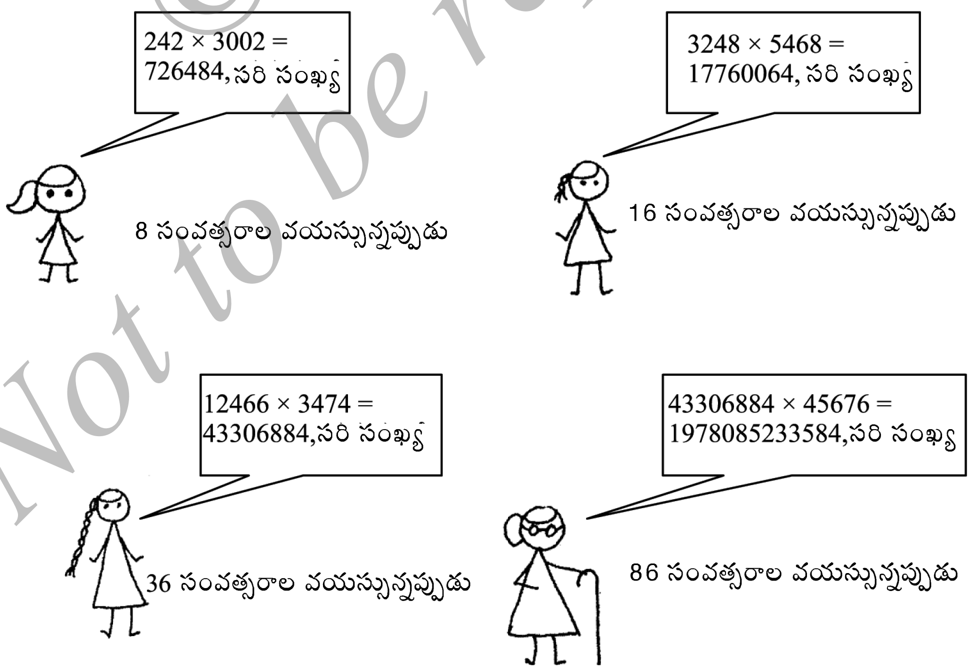
   $\left.\begin{matrix} 111111^2 \ldots\ldots \\ 1111111^2 \ldots\ldots \end{matrix}\right\}$ వీటికి పరికల్పన రచించి సరిచూడండి.

5. ఈ పుస్తకంలో గల ఐదు స్వీకృతాలను పట్టీ చేయండి.

## A1.5 గణిత నిరూపన అనగానేమి?

గణిత నిరూపనలు తెలుసుకునే ముందు గణిత ప్రవచనములు పరిశీలించండి. ఉదాహరణ 1) రెండు సరి సంఖ్యల గుణలబ్ధం సరి సంఖ్య అవుతుంది అని చూపుటకు మీరు ఏమి చేస్తారు. ఏవైనా రెండు సరిసంఖ్యలు తీసుకొని (24 మరియు 2006 లను) గుణిస్తారు. 24 $\times 2006 = 48144$ జవాబు వస్తుంది. ఇది సరి సంఖ్య. ఇలా అనేక ఉదాహరణలలో సరిచూడవచ్చు.

**ఉదాహరణ 2 :** తరగతిలో మీకు వేర్వేరు కొలతలుగల వివిధ త్రిభుజాలను గీచి, వాటి కోణాలను కొలవమని చెప్పవచ్చు. పరికరంలో దోషం ఉన్నట్లయితే సుమారుగా మొత్తం $180^0$ వచ్చును. అయితే త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం $180^\circ$ అని చెప్పుతాము. ఈ పద్ధతిలో గల దోషమేమి? సరిచుచుటలో ఎన్ని సమస్యలు ఉండవచ్చు. ఇవి నీవు సత్యం అనుకొని ప్రవచనం రాయుటకు ఉపయోగపడవచ్చు. నా ప్రవచనము అన్ని సందర్భాలలో సత్యం అని నీవు ఖచ్చితంగా చెప్పగలవా? ఉదాహరణకు కొన్ని జతల సరి సంఖ్యల లబ్ధంను కనుగొని, రెండు సరిసంఖ్యల లబ్ధం సరిసంఖ్య అని ఖచ్చితంగా చెప్పగలమా. సరిసంఖ్యలు అనంతాలు, వాటి నన్నింటిని పరీక్షించుట సాధ్యంకాదు. అదే విధంగా కోణాల మొత్తం $180^0$ కానివి ఉండవచ్చు. అలా ఏమైనా మీరు చేయడానికి ప్రారంభిస్తే ఈ క్రింది వ్యంగ్య చిత్రంలోని అమ్మాయిలా మీరు కాగలరు.

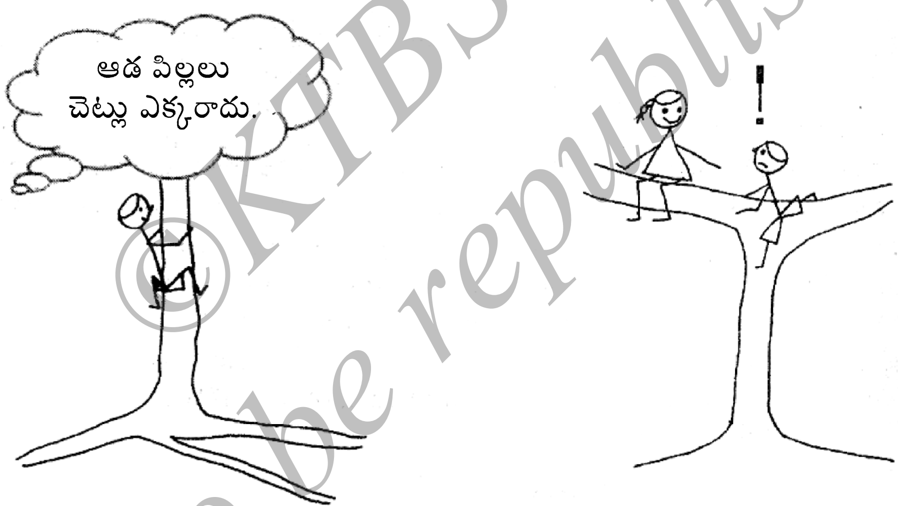


ఒక్కొక్క సారి సరిచూచుటలో తప్పుకావచ్చు.

ఉదాహరణకు పాస్కల్ త్రిభుజంలోని (అభ్యాసం-A1.3 లోని ప్రశ్న 2) సరి చూశారు. అది $11^5 \Rightarrow 15101051$ అయితే $11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 11^5 = 161051$ అవుతుంది.

కావున మరొక మార్గాన్ని అనుసరించవలసి ఉంటుంది. దీనికి గల వేరే విధానమే సిద్ధాంత నిరూపన. తక్కువ విధానంలో ఇచ్చిన అంశముల ఆధారంగా స్వీకృతముల ఆధారంగా నిరూపించు విధానమే గణితంలో నిరూపనలు.

గణిత ప్రవచనము అసత్యము అని చెప్పుటకు ఒక ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా చెప్పవచ్చు. కొన్ని వేల ఉదాహరణలలో సత్యం అని చెప్పుటకు సరిపోవు. కావున ఒక ప్రత్యుదాహరణతో అసత్యం అని చెప్పగలము.




రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం బేసి సంఖ్య అవుతుంది. ఇది అసత్యప్రవచనం అని చూపడానికి $(7 + 5) = 12$ అనే ఒకే ఒక ప్రత్యుదాహరణ చాలు కదా!

ఒక గణిత నిరూపనకు కావలసిన అంశాలను పట్టీ చూద్దాము.

(i) ఒక ప్రవచనాన్ని సాధించడానికి ఎలా ముందుకు పోవాలి అనే స్థిరమైన కార్య విధానపు ఆలోచనను కలిగి వుండాలి.

(ii) ప్రతి సిద్ధాంతములోని ముందే ఇవ్వబడిన సమాచారాన్ని స్పష్టంగా అర్థం చేసుకొని ఉపయోగించాలి. ఉదాహరణకు సిద్ధాంతం A1.2 రెండు సరిసంఖ్యల గుణలబ్ధము సరిసంఖ్యనే అవుతుంది. దీనిని చూపడానికి రెండు సహజ సరిసంఖ్యలను తీసుకున్నాం. కావున మనం సరి సంఖ్యల లక్షణాలు ఉపయోగించుకోవాలి.

అధ్యాయం-2లో (బహుపదుల) కారణాంకాల విభజనను సిద్ధాంతములో $p(x)$ అను బహుపదిని ఇచ్చారు. మరియు $p(a) = 0$ అని తెలిపారు. దీనిని ఉపయోగించి మీరు $(x - a)$, $p(x)$కు ఒక కారణాంకము అని చూపాలి. అలాగే సిద్ధాంతములోని పరికల్పనను ఉపయోగించి. మీరు కొన్ని రచనలను చేయవలసి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం $180°$ అని చూపడానికి ఏదైనా ఒక భుజానికి, దాని ఎదురు శీర్షము ద్వారా వెళ్ళునట్లు ఒక సమాంతర రేఖను గీయాలి. అలాగే సమాంతర రేఖల లక్షణాలను ఉపయోగించుకొనవలెను.

(iii) నిరూపణ అనేది ప్రవచనముల క్రమము, మనము వ్రాయు ప్రతి ప్రవచనము అంతకు ముందు నిరూపించబడిన సిద్ధాంతములు, స్వీకృతములు, పరికల్పనల నుండి తార్కికంగా పొందినది.

(iv) మనం దేనిని నిరూపించాలో లేదా దానికి సంబంధించిన సిద్ధాంతాన్ని సరైన క్రమంలో తగిన పద్ధతిలో నిరూపించాలి. దీనిని అర్థం చేసుకొనుటకు సిద్ధాంతము A 1.1 ను మరియు దాని నిరూపణను విశ్లేషించి నిరూపణ పరిశీలిద్దాం.

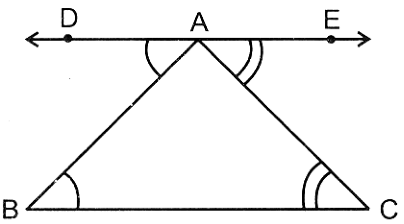
అధ్యాయం 6 లో ఈ సిద్ధాంతాన్ని అధ్యయనం చేశారు. మొదట రేఖా గణిత నిరూపణల గురించి కొన్ని విమర్శలనూ / అభిప్రాయాలను గమనిద్దాం. సిద్ధాంతాలను నిరూపించడానికి మనం చిత్రాలపై అనేక సార్లు ఆధార పడతాము మరియు ఇది చాలా ముఖ్యము అయిననూ కూడా నిరూపణ యొక్క ప్రతి ఒక వాక్యము తర్కబద్ధంగా ఉండాలి. తరుచుగా, విద్యార్థులు ఈ విధంగా నిరూపణ చేస్తారు. ఆ రెండు కోణాలు సమానంగా ఉన్నాయి. ఎందుకంటే అవి (కొలతలో) చిత్రంలో సమానంగా ఉన్నట్లు కనబడుతాయి. లేదా రెండు రేఖలూ లంబంగా ఉన్నట్లు కనబడుటచేత వాటి మధ్య కోణము $90°$ కలదు. చూసినప్పుడు కనబడేది అసత్యం కావచ్చు (జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. చిత్రం A 1.3)

**సిద్ధాంతము A 1.1 ను గమనిద్దాం.**

**సిద్ధాంతము A 1.1:** ఒక త్రిభుజంలోని మూడు అంతరకోణాల మొత్తం $180°$.

**నిరూపణ :** చిత్రం A 1.4 లో ఉన్నట్లు త్రిభుజం ABC ని పరిగణించండి.

మనం $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ అని నిరూపించవలెను ........... (1)



చిత్రం A1.4

A ద్వారా $\overline{BC}$ కి సమాంతరంగా DE రేఖను గీయండి.

DE కి BC సమాంతరంగా ఉన్నది. మరియు

$\overline{AB}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ (Transversal) ............ (2)

కావున $\angle DAB = \angle ABC$ (ఏకాంతర కోణాలు)

కావున సిద్ధాంతం 6.2, అధ్యాయం - 6 ప్రకారం అవి సమానం.

అంటే $\angle DAB = \angle ABC$ ............ (3)

అదే విధంగా $\angle CAE = \angle ACB$ ............ (4)

అందువలన $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ ............ (5)

అయితే $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ ............ (6)

ఎందుకంటే అది ఒక సరళరేఖను కలుగజేస్తాయి.

కావున $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$

పై నిరూపణలోని ప్రతి వివరణవెనుక కారణాలు పరిశీలిద్దాం.

**దశ 1** : పై సిద్ధాంతము త్రిభుజ ధర్మాలపై ఆధారపడి ఉన్నది. కావున త్రిభుజం ABC తో ప్రారంభిద్దాం.

**దశ 2** : సిద్ధాంతములో BC కి సమాంతరంగా DE గీయాలి. నిరూపణకు ఇది చాలా ముఖ్యమైన దశ.

**దశ 3 మరియు 4** : మనకు తెలిసిన పూర్వ సిద్ధాంతాల ఆధారంగా ఏకాంతర కోణాలు సదృశ కోణాల ధర్మాల ఆధారంగా $\angle DAE = \angle ABC$ మరియు $\angle CAE = \angle ACB$ అని చెప్పగలం.

**దశ 5** : ఒక "సమీకరణమునకు రెండువైపులా సమాన అంశములు కలిపిన ఆ సమీకరణములో మార్పు ఉండదు." అను యూక్లిడ్ సామాన్య భావన ఆధారంగా $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ అని రాశాం.

దీనినుండి త్రిభుజము మూడు కోణాల మొత్తము రేఖీయ కోణముల మొత్తమునకు సమానమని చెప్పబడినది.

**దశ 6 :** అధ్యాయం 6లో సరళ జత రేఖల సీకృతం అంటే సరళ రేఖపై ఒక బిందువులో ఏర్పడిన కోణాల మొత్తం 180° అవుతుంది. అన్వయించండి $D\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}E = 180^\circ$ = అని చూపాం.

**దశ 7 :** ఏదైనా ఒకదానికి సమానమైన రెండు అంశాలు పరస్పరం సమానంగా ఉంటాయి. దీనిని అన్వయించండి.

కావున $\underline{|ABC} + \underline{|BAC} + \underline{|ACB} = \underline{|DAB} + \underline{|BAC} + \underline{|CAE} = 180^\circ$ దశ-7 లో సిద్ధాంతములో మనం ఏమి నిరూపించాలని ప్రారంభించామో దానిని నిరూపించాం.

**సిద్ధాంతము : A 1.2**

రెండు సహజ సరి సంఖ్యల మొత్తం సరి సంఖ్యయే అవుతుంది.

**నిరూపణ :** $x$ మరియు $y$ లను రెండు సరిసంఖ్యలు అనుకుందాం.

$xy$ ($x$ మరియు $y$ ల లబ్ధం) సరి సంఖ్యయే అని నిరూపించాలి.

$x$ మరియు $y$ లు సరి సంఖ్యలు కావున అవి 2చే నిశేషంగా భాగించబడతాయి. మరియు వాటి భాగలబ్ధాలు సహజ సంఖ్యలు $m$ మరియు $n$ అనుకుందాం. $\frac{x}{2} = m,\ x = 2m$, హాగూ $y/2 = n,\ y = 2n$ అని చూపాలి. అప్పుడు $xy = 4mn$ ను 2 చే

నిశ్శేషంగా భాగించవచ్చు కావున $xy$ ని 2 చే నిశ్శేషంగా భాగించవచ్చు

$\therefore\ xy$ సరిసంఖ్య.

**సిద్ధాంతం : A 1.3** ఏదేని మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల గుణ లబ్ధం 16 చే నిశ్శేషంగా భాగించ బడుతుంది.

**నిరూపణ:** '$n$' అను సహజ సంఖ్యకు క్రమాను గత సరిసంఖ్యలు .

$2n,\ 2n+2,\ 2n+4$ అనుకుందాం..

ఇప్పుడు $(2n) \times (2n+2) \times (2n+4)$

$= 2n \times 2\,(n+1) \times 2\,(n+2)$

$= 2 \times 2 \times 2n\,(n+1)\,(n+2)$

$8n\,(n+1)\,(n+2)$.

ఇక్కడ రెండు అవకాశాలున్నాయి $n$ -సరిసహజ సంఖ్య లేదా $n$-బేసి సంఖ్య అయి ఉండాలి. మొదట $n$ సరిసంఖ్య అనుకుందాం $m$ సహజ సంఖ్య అయిన $n = 2m$ అనుకుందాం.

(i) లో $n = 2m$ రాద్దాం.

$$2n \times (2n+2)(2n+4) = 8(2m)(2m+1)(2m+2)$$
$$= 16\,m\,(2m+1)(2m+2)$$

$2n\,(2n+2)(2n+4)$ 16 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

ఇప్పుడు $n$ బేసి సంఖ్య అనుకుందాం.

$n$ మరొక సహజ సంఖ్య అనుకుందాం.

$n$ బేసి సంఖ్య

$\therefore$ $n+1$ సరిసంఖ్య $n+1 = 2r$ అనుకోందాం.

అప్పుడు $2n\,(2n+2)(2n+4) = 8n\,(n+1)(n+2)$
$$= 8(2r-1) \times 2r \times (2r+1)$$
$$= 16r\,(2r-1)(2r+1)$$

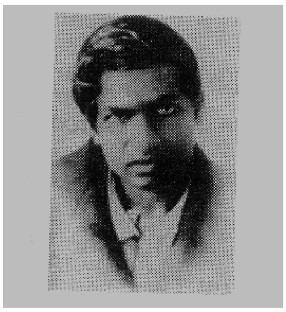
$\therefore$ $2n\,(2n+2)(2n+4)$ 16 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

పై రెండు వివరణల ద్వారా ఏదేని మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల గుణలబ్ధం 16 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది. అని నిరూపించబడినది.

గణిత శాస్త్రజ్ఞులు తమ ఫలితాలను ఎలా కనుగొంటారు మరియు వాటికి ఖచ్చితమైన నిరూపణలు ఎలా రాస్తారు వారికి అంతః జ్ఞానముతో ఊహించుట చాలా ముఖ్యము ఒకే విషయాన్ని పలుమార్గాలలో ఉదాహరణలతో తార్కికంగా ఆలోచించి సరైన నిరూపణకు వస్తారు. వారి సృజనాత్మక ఆలోచనలు అన్ని కలిసి నిరూపణలుగా పరిణమిస్తాయి.

మనము నిగమన పద్ధతి, ఆగమన పద్ధతి పై కూడా కొన్ని ఉదాహరణలతో చర్చించడం జరిగింది.

ఇక్కడ మనం ప్రత్యేకంగా చెప్పుకోవలసినది, భారత దేశ ప్రఖ్యాత గణిత మేధావి శ్రీనివాస రామానుజన్‌కు ఉన్నత శ్రేణి సృజనాత్మకమే అతని అనేక ప్రవచనాలు, ప్రవచిస్తే అందులో చాలా ప్రవచనాలు సత్యాలై, నిరూపించబడి ప్రఖ్యాత సిద్ధాంతాలుగా ప్రాచుర్యం పొందాయి..



శ్రీనివాస రామానుజన్

## అభ్యాసం — A1.4

1. క్రింది ప్రవచనములను ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా అసత్యములని తెల్పండి.
   (i) రెండు త్రిభుజాలలో అనురూపకోణాలు సమానమైన, ఆ త్రిభుజములు సర్వసమానములు
   (ii) ఒక చతుర్భుజంలోని అన్ని భుజాలు సమానములైన అది చతురస్రం.
   (iii) ఒక చతుర్భుజంలోని అన్ని కోణాలు సమానమైతే అది చతురస్రం.
   (iv) $a$ మరియు $b$ పూర్ణాంకాలకు $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$
   (v) అన్ని పూర్ణాంకాలకు $2n^2+11$ ప్రధాన సంఖ్య అవుతుంది.
   (vi) $n$ ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $n^2-n+41$ ఒక ప్రధాన సంఖ్య
2 మీకిష్టమైన సిద్ధాంతాన్ని ఎన్నుకొని, దాని దత్తాంశాన్ని నిరూపణచేసి, ఉపయోగించుకొన్న స్వీకృతము, సిద్ధాంతము మొదలైన అంశాలను ఉల్లేకించి, A 1.5లో దశలు దశలుగా విశ్లేషించినట్లు విశ్లేషించండి
3. రెండు బేసి సంఖ్యల గుణలబ్ధం బేసి సంఖ్యనే అవుతుందని నిరూపించండి.
   (మరపదం : బేసి సంఖ్య $x, x+2$ కానీయండి. ఈ విధంగా)
4. రెండు బేసి సంఖ్యల గుణలబ్ధం బేసి సంఖ్యనే అవుతుందని నిరూపించండి.
5. మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల మొత్తము 6చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుందని నిరూపించండి.
6. $y=2x$ ఒక సరళరేఖా సమీకరణం అయినప్పుయడు ఆ రేఖపై అసంఖ్యాత బిందువులు గుర్తించబడతాయి.
   [సూచన : $n$ ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $(n, 2n)$ బిందువు అనుకొనుము]
7. మీ స్నేహితుడు ఒకడు అతను మీకు మనసులోని ఒక సంఖ్య అనుకోమని చెబుతాడు తర్వాత కూడు, గుణించు, భాగించు, తీసివేయి, గాలుగింతలు, మొదలగు క్రియలను చెబుతాడు. దానిని నీవు అనుసరించాలి. చివరకు నీవు మనసులో అనుకొన్న సంఖ్య చెబుతాడు ఎలా? అలాంటి ఉదాహరణలు ఇక్కడున్నాయి. అవి ఎలా సరి అని పరీక్షించండి..
   (i) ఒక సంఖ్య ఎన్నుకొనండి, దానిని రెండింతలు చేయండి. తర్వాత 9ని కలపండి మీ మొదటి సంఖ్య కలపండి. 3 చే భాగించి దానికి 4ను కలపండి. మీరు ఎన్నుకొన్న సంఖ్యచే దీనిని తీసివేయండి. మీ వద్ద మిగిలినది 7. (మీ జవాబు 7)
   (ii) ఏదైనా మూడంకెల సంఖ్య రాయండి. ఉదాహరణకు 425, దీనినే మరలారాసి 6 అంకెల సంఖ్య చేయండి (425 425) మీ సంఖ్య 7,11,13 ల చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

## A1.6 సారాంశము

ఈ అనుబంధంలో క్రింది వాటిని మీరు నేర్చుకున్నారు.

1. గణితంలో ఒక ప్రవచనము ఒప్పుకోవాలంటే అది అన్ని సమయాలలో సత్యం అయి ఉండాలి. లేదా అసత్యం అయివుండాలి.
2. ఒక అసత్య ప్రవచనమును, కేవలం ఒక ప్రత్యుదాహరణతో అసత్యమని చూపవచ్చు.
3. నిరూపణ లేకుండానే సత్యములుగా భావించే గణిత ప్రవచనములను స్వీకృతములు అంటారు.
4. సత్యములుగా భావిస్తూ, ఇంతవరకు నిరూపింపబడని గణిత ప్రవచనములు పరికల్పనలు (ఊహలు) ప్రతిపాదన)
5. నిరూపింపబడిన గణిత ప్రవచనములను సిద్ధాంతములు అంటారు.
6. గణిత ప్రవచనములను తార్కిక ఆలోచనల ద్వారా నిరూపించుటను నిగమన పద్ధతి అంటారు.
7. నిరూపణ అనేది వరుస క్రమంలో వ్రాయబడిన గణిత ప్రవచనాల సమూహం. ప్రతి గణిత నిరూపణ ఇదివరకే తార్కికంగా నిరూపించబడిన గణిత ప్రవచనం లేదా ఒక సిద్ధాంతం లేదా ఒక స్వీకృతం లేదా ఒక పరికల్పన అయివుంటుంది.

# జవాబులు / సూచనలు

### అభ్యాసం 1.1

1. అవును, $0=\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}$ మొదలగునవి., హారము $q$ లో ఋణసంఖ్యలను తీసుకొనవచ్చు.
2. 3 మరియు 4 ల మధ్యలో అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు కలవు. $3=\frac{21}{6+1}$ అని = $4=\frac{28}{6+1}$ అని తీసుకుంటే 6 అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{22}{7},\frac{23}{7},\frac{24}{7},\frac{25}{7},\frac{26}{7},\frac{27}{7}$ వస్తాలు.
3. $\frac{3}{5}=\frac{30}{50}$, $\frac{4}{5}=\frac{40}{50}$ కావున. 5 అకరణీయ సంఖ్యలు : $\frac{31}{50},\frac{32}{50},\frac{33}{50},\frac{34}{50},\frac{35}{50}$ .
4. (i) అవును (సరి), పూర్ణసంఖ్యలలో అన్ని స్వాభావిక సంఖ్యలు వున్నాయి.
   (ii) తప్పు, ఉదాహరణకు 2 ఒక పూర్ణసంఖ్యకాదు.
   (iii) తప్పు , ఉదాహరణకు $\frac{1}{2}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయితే, పూర్ణసంఖ్యకాదు.

### అభ్యాసం 1.2

1. (i) సరి ఎందుకంటే వాస్తవ సంఖ్యలు, కరణీయ మరియు అకరణీయ సంఖ్యలతో కూడి ఉంటాయి.
   (ii) తప్పు, ఏ సహజ సంఖ్యకు ఋణసంఖ్య వర్గముగావుండదు.
   (iii) తప్పు, ఉదాహరణకు, 2 వాస్తవ సంఖ్య అయితే, కరణీయ సంఖ్యకాదు.
2. కాదు. ఉదాహరణకు, $\sqrt{4}=2$, ఒక అకరణీయ సంఖ్య.
3. చిత్రం 1.8 లో ఇచ్చినట్లు దశలను పునరావర్తనం చేసి. మొదట $\sqrt{4}$, తరువాత $\sqrt{5}$ ల విలువలను కనుగొనండి.

### అభ్యాసం 1.3

1. (i) 0.36 అంత్యమగు దశాంశము
   (ii) $0.\overline{09}$ అంత్యముకాని దశాంశము
   (iii) 4.125 అంత్యమగు దశాంశము
   (iv) $0.\overline{230769}$ అంత్యమగు దశాంశము
   (v) $0.\overline{18}$ అంత్యముకాని దశాంశము
   (vi) 0.8225 అంత్యమగు దశాంశము.

2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{5714258}$,

$\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$, $\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$[$x = 0.666......$ అనుకుంటే $10\,x = 6.666......$ లేదా $10\,x = 6 + x$ లేదా $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]

(ii) $\frac{43}{90}$ (ii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [$x = 0.9999......$ అనుకుంటే $10x + 9.9999........$ లేదా $10\,x = 9 + x$ లేదా $x = \frac{9}{9} = 1$

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. $q$ యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు 2 యొక్క ఘాతాంకాలు లేదా , 5 యొక్క ఘాతాంకాలు లేదా రెండు..

7. 0.0100100010000 ........, 0.202002000200002.........., 0.003000300003........ .

8. 0.7507500750007500075......., 0.767076700767000767......, 0.80800800080008 .........

9. (i) కరణీయ సంఖ్య (ii) అకరణీయ సంఖ్య,
(iii) అకరణీయ సంఖ్య (iv) అకరణీయ సంఖ్య (v) కరణీయ సంఖ్య

**అభ్యాసం 1.4**

1. 1.4 లో ఇచ్చినట్టు 2.665 కూడా కొనసాగించండి.
2. ఉదాహరణ 11 లో ఇచ్చినట్లు కొనసాగించండి.

**అభ్యాసం 1.5**

1. (i) కరణీయ సంఖ్య (ii) అకరణీయ సంఖ్య
(iii) అకరణీయ సంఖ్య (iv) కరణీయ సంఖ్య
(v) కరణీయ సంఖ్య
2. (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6
(iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3
3. వైవిధ్యం కాని మనం కొలతబద్దతో లేదా వేరే పరికరంతో పొడవును కొలిచినపుడు. మనకు సమీప అకరణీయ (బాగలబ్ధ) విలువలను పొందుతామని గమనించండి కావున $c$ కరణీయ సంఖ్యానా లేదా $d$ కరణీయ సంఖ్యానా అని అర్థం కాదు.

4. 1.7 చిత్రాన్ని చూడండి.

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

## అభ్యాసం 1.6

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5

2. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[125^{-\frac{1}{3}} = \left(5^{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) $3^{-21}$ (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

## అభ్యాసం 2.1

1. (i) తప్పు. దీనిని విద్యార్థి చూసి గ్రహించవచ్చు

   (ii) తప్పు 5.1 నిబంధనకు వైరుధ్యం కలిగినది.

   (iii) సరి. (ఆధార ప్రతిజ్ఞ 2)

   (iv) సరి. ఒక వృత్తాన్ని మరొక వృత్తంపై ఉంచినప్పుడు అవి చేరుకుంటాయి అలాగే వాటి కేంద్రం మరియు పరిధి ఒక దానికొకటి చేరుకుంటాయి. కావున వ్యాసార్థం కూడా చేరుకోవాలి.

   (v) సరి యూక్లిడ్ మొదటి స్వీకృత సిద్ధాంతం

3. వీటిలో విద్యార్థులు పట్టీ చేయగల నిర్వచించని పదాలు చాలా ఉన్నాయి వాటిలో ఎక్కువ స్థిరతను కలిగి వున్నాయి ఎందుకంటే అవి రెండు వేర్వేరు సందర్భాలను తెలుపుతాయి.

   (i) A మరియు B రెండూ ఇచ్చిన రేఖపై రెండు బిందువులు C బిందువు కూడా ఆ రేఖపై రెండు బిందువుల మధ్య ఉండాలి.

   (ii) A మరియు B లు ఇచ్చిన రేఖపై రెండు బిందువులు C బిందువు AB ని చేర్చే సరళరేఖ పై లేని బిందువు. ఈ స్వీకృతులు యూక్లిడ్ స్వీకృతులను పాటించవు అయితే అవి స్వయం స్వీకృతాలు 5.1 ని పాటిస్తాయి.

4. AC = BC

   AC + AC = BC + AC (సమాంతర ఉన్నవాటిని కలిపారు)

   2 AC = AB [BC + AC ,AB సరళరేఖ]

   కావున AC = $\frac{1}{2}$ AB

5. AB సరళ రేఖ మధ్యబిందువులు C మరియు D లు అనుకుందాం ఇపుడు మీరు C మరియు D రెండూ వేర్వేరు బిందువులు కాదని చూపవచ్చు.

6. AC = BD (దత్తాంశం) ............. (1)

AC = AB + BC (B బిందువు A మరియు C బిందువుల మధ్య కలదు) ............. (2)

BD = BC + CD (C బిందువు B మరియు D బిందువుల మధ్యకలదు) ............. (3)

(2) మరియు (3) ను (1) ప్రతిక్షేపిస్తే,

AB + BC = BC + CD

AB = CD (సమానాలను రెండు వైపులా తీసివేయగా)

7. ఇది ప్రపంచంలోని ఏ భాగంలో నైనా సరైనది కాబట్టి ఇది విశ్వవ్యాప్తమైన సత్యం

**అభ్యాసం 2.2**

1. విద్యార్థి ఇచ్చే సూత్రీకరణాన్ని తరగతిలో చర్చించండి. దానిని విశ్లేషించాలి.

2. *l* ఒకసరళరేఖ *l* రెండు *m* మరియు *n* 5రేఖలను ఖండిస్తుంది. ఐతే అంతరకోణపుమొత్తము రెండు లంబకోణానికి సమానం యుక్లిడ్ 5 స్వీకృతి నుండి రెండు రేఖలు *l* రేఖ ప్రక్కగా ఒకదానికొకటి కలవవు. కొనసాగించబడినవి.

**అభ్యాసం 3.1**

1. 30°, 250°
2. 126°
4. ఒక బిందువు యొక్క అన్ని కోణాలు = 360°
5. ∠ QOS = ∠ SOR + ∠ ROQ మరియు ∠ POS = ∠ POR – ∠ SOR.
6. 122°, 302°

**అభ్యాసం 3.2**

1. 130°, 130°
2. 126°
3. 126°, 36°, 54°
4. 60°
5. 50°, 77°
6. పతన కోణము పరావర్తన కోణానికి సమానం . B బిందువు వద్ద BE ⊥ PQ ని గీయండి. మరియు C బింధువు వద్ద CF ⊥ RS ను గీయండి

## అభ్యాసం 3.3

1. 65°  2. 32°, 121°
3. 92°  4. 60°
5. 37°, 53°
6. Δ PQR లో అన్నికోణాలమొత్తము = Δ QTR లో అన్ని కోణాల మొత్తము . మరియు $\underline{|PRS} = \underline{|QPR} + \underline{|PQR}$

## అభ్యాసం 4.1

1. (i) మరియు  (ii) ఒక అవ్యక్తపద బహుపది,
   (v) మూడు అవ్యక్తపదాలు బహుపది.
   (iii), (iv) బహుపదులలో ఎందుకంటే అవ్యక్తపదాల ఘాతము పూర్ణ సంఖ్యకాదు.
2. (i) 1  (ii) −1  (iii) $\frac{\pi}{2}$  (iv) 0.
3. $3x^{35} - 4$ ; $\sqrt{2}y^{100}$ (వేర్వేరు సహగుణకాలు గల బహుపదాలను రాయవచ్చు)
4. (i) 3  (ii) 2  (iii) 1  (iv) 0
5. (i) వర్గము  (ii) ఘనం  (iii) వర్గము  (iv) సరళ
   (v) సరళ  (vi) వర్గము  (vii) ఘనం

## అభ్యాసం 4.2

1. (i) 3  (ii) −6  (iii) −3
2. (i) 1, 1, 3  (ii) 2, 4, 4,  (iii) 0, 1, 8  (iv) −1, 0, 3
3. (i) అవును  (ii) కాదు  (iii) అవును  (iv) అవును
   (v) అవును  (vi) అవును
   (vi) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ శూన్యం, కాని $\frac{2}{\sqrt{3}}$ శూన్య బహుపదికాదు.  (viii) కాదు.
4. (i) – 5  (ii) 5  (iii) $\frac{-5}{2}$  (iv) $\frac{2}{3}$
   (v) 0  (vi) 0  (vii) $\frac{-d}{c}$

## అభ్యాసం 4.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1

(iv) $-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$ (v) $-\frac{27}{8}$

2. $5a$

3. కాదు, శేషము సున్నా కాలేదు.

## అభ్యాసం 4.4

1. $(x+1)$ (i) కారణాంకం (ii), (iii) మరియు (iv) ల కారణాంకం కాదు.

2. (i) అవును (ii) కాదు (iii) అవును

3. (i) $-2$ (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x-1)(4x-1)$ (ii) $(x+3)(2x+1)$

(iii) $(2x+3)(3x-2)$ (iv) $(x+1)(3x-4)$

5. (i) $(x-2)(x-1)(x+1)$ (ii) $(x+1)(x+1)(x-5)$

(iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y-1)(y+1)(2y+1)$

## అభ్యాసం 4.5

1. (i) $x^2+14x+40$ (ii) $x^2-2x-80$ (iii) $9x^2-3x-20$

(iv) $y^4-\frac{9}{4}$ (v) $9-4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984.

3. (i) $(3x+y)(3x+y)$ (ii) $(2y-1)(2y-1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$.

4. (i) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8xz$ (ii) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$

(iii) $4x^2+9y^2+4z^2-12yz+12yz-8xz$ (iv) $9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$

(v) $4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12xz$ (vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x+3y-4z)(2x+3y-4z)$ (ii) $\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)$

6. (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $\left(-\sqrt{2x} + y + 2\sqrt{2z}\right)\left(-2\sqrt{2x} + y + 2\sqrt{2z}\right)$

(iii) $\frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$ (iv) $x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a + b)(2a + b)(2a + b)$ (ii) $(2a - b)(2a - b)(2a - b)$

(iii) $(3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$

(iv) $(4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$ (v) $\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y + 52)\left(9y^2 + 25z^2 - 15yz\right)$ (ii) $(4m - 7n)\left(16m^2 + 49m^2 + 28mn\right)$

11. $(3x + y + z)\left(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz\right)$.

12. కుడిభాగాన్ని సూక్ష్మీకరించండి?

13. $x + y + z = 0$ సర్వసమీకరణం VIII లో ప్రతిక్షేపించినప్పుడు.

14. (i) $-1260$. A = – 12, $b = 7$, $c = 5$ అనుకుందాం. ఇక్కడ $a + b + c = 0$ $Q$ 13 లో జవాబును ఉపయోగించండి.

(ii) 16380

15. (i) ఒక సాధ్యమైన జవాబు: పొడవు = $5a - 3$, వెడల్పు = $5a - 4$

(ii) ఒక సాధ్యమైన జవాబు: పొడవు = $7y - 3$, వెడల్పు = $5y + 4$

16. (i) ఒక సాధ్యమగు జవాబు : 3, $x$, మరియు $x - 4$.

(ii) ఒక సాధ్యమగు జవాబు : $4k$, $3y + 5$. మరియు $y - 1$

## అభ్యాసం 5.1

1. అన్ని సమానము

6. $\angle BAC = \angle DAE$

## అభ్యాసం 5.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$

7. ప్రతి యొక్క కోణం 45°

## అభ్యాసం 5.3

3. (ii) నుండి (i), $\angle ABM = \angle PQN$

### అభ్యాసం 5.4

4. BD ను కలిపి మరియు $\angle B > \angle D$. అని చూపండి. AC ను కలిపి మరియు $\angle A > \angle C$ అని చూపండి.

5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$, మొదలగునవి.

### అభ్యాసం 7.1

1. 36°, 60°, 108° మరియు 156°

6. (i) $\Delta$ DAC మరియు $\Delta$ BCA నుండి, $\angle DAC = \angle BCA$ మరియు $\angle ACD = \angle CAB$ మొదలగునవి చూపండి.

   (ii) సిద్ధాంతం 8.4 నుండి $\angle BAC = \angle BCA$ ను చూపండి.

### అభ్యాసం 7.2

2. PQRS ను సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి అలాగే. PQ||AC మరియు PS||BD అని కూడా చూపండి దానినుండి $\angle P = 90°$

5. AECF ఒక సమాంతర చతుర్భుజం దానినుండి. AF||CE మొదలగునవి.

### అభ్యాసం A 1.1

1. (i) తప్పు ఒక సంవత్సరానికి 12 నెలలు

   (ii) సందిగ్ధం (దత్త సంవత్సరంలో దీపావళి శుక్రవారము రోజు రావచ్చు, రాకపోవచ్చు.

   (iii) సందిగ్ధం సం లో ఒక్కోసారి మాగడిలో ఉష్ణోగ్రతా 26°c ఉండవచ్చు.

   (iv) ఎల్లప్పుడూ సత్యం.

   (v) తప్పు కుక్కలు ఎగర లేవు.

   (vi) సందిగ్ధం లేపు సంవత్సరం లో ఫిబ్రవరి 29 రోజులు ఉంటాయి.

2. (i) తప్పు. చతుర్భుజపు ఆంతర్ కోణాల మొత్తం 360.

   (ii) సరి, (iii) సరి (iv) సరి

   (v) తప్పు ఉదాహరణకు 7 + 5 = 12 చేసి సంఖ్యకాదు.

3. (i) 2 కంటే పెద్దవైన ప్రధాన సంఖ్యలన్ని తీసి సంఖ్యతో

(ii) రెండింతల స్వాభావిక సంఖ్య ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది

(iii) ఏ $x > 1$ $3x + 1 > 4$

(iv) ఏ $x \geq 0$ , $x^3 \geq 0$.

(v) సమబాహు త్రిభుజంలో ఒక మధ్యరేక కోణ సమద్విఖండన రేఖ అయి వుంటుంది.

### అభ్యాసం A 1.2

1. (i) మనుషులు సకశేరుకాలు.

(ii) లేదు దినేశ్ వేరే ఎవరి చేతనైననూ క్షౌరం చేయించుకొని ఉండవచ్చు.

(iii) గులాగ్ ఎర్రని నాలుకను కలిగి ఉన్నాడు.

(iv) మురికి కాలువలను రేపు శుభ్రపరచాలని నిర్ణయించుకున్నాము

(v) తోకలు కలిగిన జంతువులు కుక్కలే కానవసరం లేదు ఎనుము , కోతి, పిల్లి, మొదలగునవి. ప్రాణులకు తోక కలదు ఐతే అవన్ని కుక్కలు కాదు.

2. మీరు B మరియు 8 ని త్రిప్పిచూడాలి .'B' వెనుక పరిసంఖ్యవుంటే అప్పుడు నియమ భంగం అవుతుంది అదే విధంగా 8 వెనుక హల్లులు వుంటే అప్పుడు నియమ భంగం అవుతుంది.

### అభ్యాసం A 1.3

3. సాధ్యమయ్యె ముందు అభిప్రాయాలు

(i) ఏ దేని మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల గుణ లబ్ధం సరిసంఖ్యే అవుతుంది.

(ii) ఏదేని మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల గుణలబ్దము ఆరు చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

(iii) ఏదేని మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల గుణలబ్దము ఆరు చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది

2. ఫంక్తి4 : $1331 = 11^3$

ఫంక్తి 5 : $14\,641 = 11^4$

ఫంక్తి 4 మరియు 5 ఫంక్తి కి ప్రదిపాదనలు మ్యాచ్ అవుతాయి.

6 = 15101051

$11^5 \neq 15101051$ ( $11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 1500051$)

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$, $T_{n-1} + T_n = n^2$

4. $111111^2 = 12345654321$

   $1111111^2 = 1234567654321$.

5. విద్యార్థుల చే జవాబులు ఉదాహరణకు యూక్లిడ్ యొక్కస్వీకృతాలు.

**అభ్యాసం A 1.4**

1. (i) సమానం కోణాలు కరిగిన ఏవైనారెండు త్రిభుజాల భుజాల కొలతలు వేర్వేరుగా ఉండవచ్చు.

   (ii) వజ్రాకృతి లోని భుజాల కొలతలు పరస్పరం. సమానంగా ఉంటాయి. అయితే, అది చతురస్రం కాదు.

   (iii) దీర్ఘచతురస్రపు అంతరకోణాలు సమానంగా ఉంటాయి అయితే అది చతురస్రం కాదు.

   (iv) $a = 3$, $b = 4$ అయినప్పుడు ప్రకటన సత్యం కాదు.

   (v) $n = 11$ అయినప్పుడు $2n^2 + 11 = 253$, ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

   (vi) $n = 41$ అయితే $n^2 - n + 41$ ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

2. విద్యార్థుల సొంత జవాబులు

3. $x$ మరియు $y$ లను బేసి సంఖ్యలు అనుకుందాం తరువాత.

   $x = 2m + 1$ కొన్ని స్వాభావిక $m$ కు మరియు $y = 2n + 1$ కొన్ని సహజసంఖ్యలు $n$

   $x + y = 2 ( m + n + 1)$ కావున అందువలన $x + y$ 2 చే విశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది. కావున అది సరిసంఖ్య

4. ప్రశ్న 3. చూడండి. $x = ( 2m + 1)$ $y = (2n + 1)$

   $xy = (2m + 1) (2n +1 ) = 2 ( 2mn + m + n ) + 1$ అందువలన $xy$ 2 చే భాగించబడదు మరియు అది బేసిసంఖ్య

5. $2n$, $2n+2$ మరియు $2n+4$ అను మూడు క్రమానుగత సంఖ్యలు అనుకుందాం వాటి మొత్తము $6(n+1)$ ఇది 6 చే భాగించబడుతుంది.

7. (i) మూల సంఖ్య '$n$' అనుకుందాం ఇప్పుడు క్రింది క్రియలను చేద్దాము.

$$n \to 2n \to 2n+9 \to 2n+9+n = 3n+9$$

$$\to 3n+9 \to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to$$

$$\to n+3+4 = 7 \to n+7-n = 7$$

(ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$ ను గమనించండి మూడంకెల సంఖ్య $a.b.c$ అనుకొండి అప్పుడు $1001 \times abc = abcabc$ అవుతుంది కావున ఆరెంకెల సంఖ్య $abcabc$ 7, 11, 13 చే విశేషంగా భాగించ బడుతుంది.

ఊఊఊ