ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರ

ಗಣಿತ

9

ಒಂಭತ್ತನೆಯ ತರಗತಿ

ಭಾಗ – ೧

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಂಸ್ಥೆ
ಶ್ರೀ ಅರಬಿಂದೋ ಮಾರ್ಗ ನವದೆಹಲಿ 110016

ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
100 ಅಡಿ ವರ್ತುಲ ರಸ್ತೆ, ಬನಶಂಕರಿ 3ನೆಯ ಹಂತ,
ಬೆಂಗಳೂರು – 560 085

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ 9ನೆಯ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಗೆ ಅನುವಾದ ಮಾಡಿ 2017–18ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಟ್ಟು 7 ಮಾಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರತರಲಾಗಿದೆ. NCF–2005ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

2005ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

- ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವುದು.
- ಕಂಠಪಾಠ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹೊರತಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಜ್ಞಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಕಲಿಕಾ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.
- ಭಾರತದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ನೀತಿಯನ್ವಯ ಮಕ್ಕಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಸ್ಪಂದಿಸುವುದು.
- ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಇಂದಿನ ಹಾಗೂ ಭವಿಷ್ಯದ ಜೀವನಾವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.
- ವಿಷಯಗಳ ಮೇರೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಗ್ರ ದೃಷ್ಟಿಯ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ಬದುಕಿಗೆ ಜ್ಞಾನ ಸಂಯೋಜನೆ.
- ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೇ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವುದು.

9ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಯೋಚನೆ ಮಾಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ನೂತನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ತನ್ಮೂಲಕ ಅವರನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಭಾರತದ ಸ್ವಸ್ಥಸಮಾಜದ ಉತ್ತಮ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ.

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಯಶಸ್ಸಿಗೆ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೂ ಪೂರಕವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆಯೇ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ/ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆ ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ತಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುವುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸ್ನೇಹಿ ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕ ಸ್ನೇಹಿಯಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ ಸಂತೋಷದಾಯಕ ಹಾಗೂ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ಸೂಕ್ತವಾದ ದಾರಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ತಗತಿಯಲ್ಲಿ ಬೋಧನೆ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಭಾಗ – 1 ಮತ್ತು ಭಾಗ – 2ರಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ವೈಜ್ಞಾನಿಕವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಅನುಮತಿ, ಸಹಕಾರ ಹಾಗೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವನ್ನು ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ನವದೆಹಲಿ ಹಾಗೂ ಆ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ನರಸಿಂಹಯ್ಯ
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ
ಬೆಂಗಳೂರು – 85

ಕನ್ನಡ ಭಾಷಾಂತರ ಸಮಿತಿ

ಶ್ರೀ ಸದಾಶಿವ ಪೂಜಾರಿ, ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಎಸ್.ಡಿ.ಎಮ್ ಅನುದಾನಿತ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಉಜಿರೆ ಅಂಚೆ, ಬೆಳ್ತಂಗಡಿ ತಾಲ್ಲೂಕು, ದಕ್ಷಿಣ ಕನ್ನಡ ಜಿಲ್ಲೆ.

ಶ್ರೀ ಸದಾನಂದ ಕುಮಾರ್ ಜಿ.ವಿ, ಹೆಣ್ಣುಮಕ್ಕಳ ಸರ್ಕಾರಿ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜು, ಹಂಪಿ ರೋಡ್ ಹೊಸಪೇಟೆ, ಬಳ್ಳಾರಿ ಜಿಲ್ಲೆ

ಶ್ರೀ ಶರತ್ ಕುಮಾರ್ ಎಂ. ತುಳುಪುಳೆ, ಸಹಶಿಕ್ಷಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜು (ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ವಿಭಾಗ), ವೇಣೂರು, ಬೆಳ್ತಂಗಡಿ ತಾಲ್ಲೂಕು, ದಕ್ಷಿಣ ಕನ್ನಡ ಜಿಲ್ಲೆ

ಶ್ರೀ ಪಿ.ಎನ್. ಬಾಲಕೃಷ್ಣರಾವ್, ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ನಂಬಿಹಳ್ಳಿ, ಶ್ರೀನಿವಾಸಪುರ ತಾಲ್ಲೂಕು

ಶ್ರೀಮತಿ ವೀಣಾ ಶ್ಯಾನಭಾಗ್, ಸ.ಶಿ. ಸರ್ಕಾರಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಹಳೇಪೇಟೆ, ಉಜಿರೆ, ಬೆಳ್ತಂಗಡಿ ತಾಲ್ಲೂಕು, ದಕ್ಷಿಣ ಕನ್ನಡ ಜಿಲ್ಲೆ

ಶ್ರೀಮತಿ ವಿನಯ ಕುಮಾರಿ ವೈ, ಭಾರತ್ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಉಳ್ಳಾಲ, ಮಂಗಳೂರು, ದಕ್ಷಿಣ ಕನ್ನಡ

ಶ್ರೀ ಕಾಳೇಶ್ವರ ರಾವ್ ಎನ್, ನಿವೃತ್ತ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕರು ನಂ.3, ಸಂತಸ, 1ನೇ ಕ್ರಾಸ್, 24ನೇ ಮೈನ್, ಜೆ.ಪಿ. ನಗರ, ಬೆಂಗಳೂರು

ಕನ್ನಡ ಭಾಷಾಂತರ ಪರಿಶೀಲನಾ ಸಮಿತಿ

ಶ್ರೀ ಹೆಚ್.ಎಸ್. ಮಲ್ಲಿಕಾರ್ಜುನ ಶಾಸ್ತ್ರಿ – ನಿವೃತ್ತ ಪ್ರಾಂಶುಪಾಲರು, ಓಂ ಕಾರ್ಮಲ್ ಸೋಮಾನಿ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಹಾವಿದ್ಯಾಲಯ, ಸರಸ್ವತಿಪುರಂ, ಗಂಗೋತ್ರಿ ಬಡಾವಣೆ, ಮೈಸೂರು – 9

ಶ್ರೀ ಸಿ.ಬಿ. ಅಹೋಬಲ ರಾವ್ – ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಬಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್. ವಿದ್ಯಾಸಂಸ್ಥೆ, ಸೌತ್‌ಎಂಡ್ ಸರ್ಕಲ್, ಹತ್ತಿರ, ಜಯನಗರ, ಬೆಂಗಳೂರು.

ಶ್ರೀ ಸಿ.ಬಿ. ಅರುಣ್ ಕುಮಾರ್ – ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಕಲ್ಲೂರು ನಾಗನಹಳ್ಳಿ, ಮೈಸೂರು ತಾಲ್ಲೂಕು, ಮೈಸೂರು ಜಿಲ್ಲೆ.

ಸಲಹೆ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ

ಶ್ರೀ ನರಸಿಂಹಯ್ಯ – ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು – 85.

ಶ್ರೀಮತಿ ನಾಗಮಣಿ – ಉಪನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು – 85.

ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜಕರು

ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಲಕ್ಷ್ಮಿ ಚಿಕ್ಕನಕೋಟೆ – ಸಹಾಯಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು – 85

ಪರಿವಿಡಿ

ಭಾಗ – ೧

ಪುಟಸಂಖ್ಯೆ

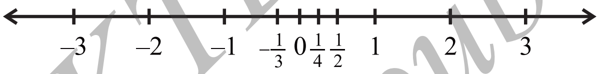
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ಅಧ್ಯಾಯ – 1

ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿ

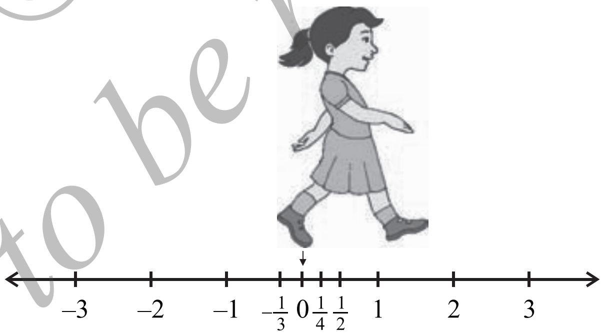
1.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 1.1ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)



ಚಿತ್ರ 1.1 : ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ

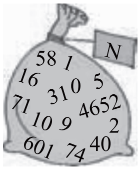
ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ನೀವು ಈ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವುದಾಗಿ ಭಾವಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಕಣ್ಣಿನ ದೃಷ್ಟಿ ಹಾಯ್ದಷ್ಟು ದೂರವೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು !



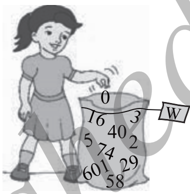
ಚಿತ್ರ 1.2

ಈಗ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ನೀವು ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವುದಾಗಿ ಹಾಗೂ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತಿರುವುದಾಗಿ ಊಹಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸಲು ಒಂದು ಚೀಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

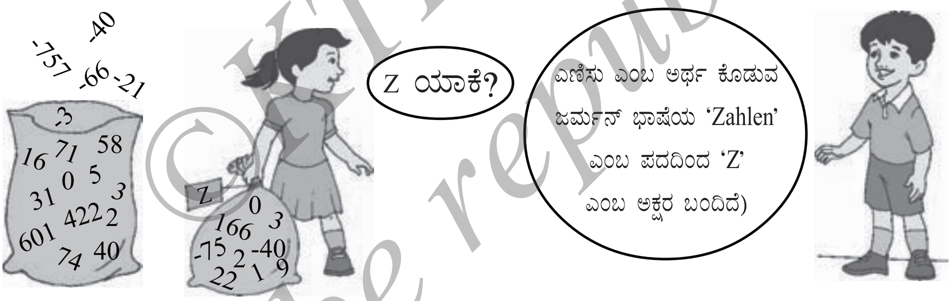
ನೀವು 1,2,3.......... ಈ ರೀತಿಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತಲೇ ಹೋಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. (ಇದು ನಿಜ. ಏಕೆ?) ಹೀಗೆ ಈಗ ನಿಮ್ಮ ಚೀಲವು ಅಪರಿಮಿತ (ಅಸಂಖ್ಯಾತ) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ! ಈ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ನಾವು 'N' ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.



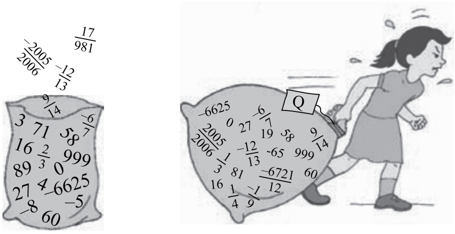
ಈಗ ಬಂದ ದಾರಿಯಲ್ಲೇ ಹಿಂತಿರುಗಿ ಬನ್ನಿ. ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಆಯ್ದು ಚೀಲದೊಳಕ್ಕೆ ತುಂಬಿಸಿ. ಈಗ ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ **ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ** ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 'W' ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.



ಈಗ, ನಿಮ್ಮ ಎದುರು ಅನೇಕಾನೇಕ ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಚಾಚಿಕೊಂಡಿವೆ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಚೀಲದೊಳಕ್ಕೆ ತುಂಬಿಸಿ. ಈಗ ದೊರೆತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹೊಸ ಸಂಗ್ರಹ ಯಾವುದು? ಇದು ಎಲ್ಲಾ **ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ** ಸಂಗ್ರಹ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 'Z' ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.



ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉಳಿದಿವೆಯೇ? ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಇವೆ! ಅಲ್ಲಿ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ಅಲ್ಲದೇ $-\frac{2005}{2006}$ ಈ ರೀತಿಯ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕೂಡ ಉಳಿದಿವೆ. ನೀವು ಇವುಗಳನ್ನು ಸಹ ಚೀಲದೊಳಗೆ ತುಂಬಿಸಿದರೆ ಈಗ ಅದು **'ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ'** ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು 'Q' ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. **'ಭಾಗಲಬ್ಧ'(Rational)** ಎಂಬ ಪದವು **'ಅನುಪಾತ' (Ratio)** ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಬಂದಿದೆ. 'Q' ಎಂಬ ಸಂಕೇತಾಕ್ಷರವು 'ಭಾಗಲಬ್ಧ' (Quotient) ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಬಂದಿದೆ.



ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀವು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ r ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದಾದರೆ (p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, $q \neq 0$) ಅದನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ($q \neq 0$ ಏಕೆ?)

ಚೀಲದೊಳಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ (p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, $q \neq 0$) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, –25ನ್ನು $-\frac{25}{1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು; ಇಲ್ಲಿ $p = -25$ ಮತ್ತು $q = 1$. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಹ ಸೇರಿರುತ್ತವೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ $(p, q \in Z, q \neq 0)$ ಏಕಮಾತ್ರ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನೂ ಸಹ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ ......ಇತ್ಯಾದಿ. **ಇವು ಸಮಾನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು)**. ಆದಾಗ್ಯೂ, $\frac{p}{q}$ ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಹೇಳುವಾಗ ಅಥವಾ $\frac{p}{q}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಾಗ ನಾವು $q \neq 0$ ಹಾಗೂ p ಮತ್ತು q ಗಳಿಗೆ 1 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಅಂದರೆ p ಮತ್ತು q ಗಳು **ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು**) ಹೀಗೆ, $\frac{1}{2}$ ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಅಪರಿಮಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಾಗ ನಾವು $\frac{1}{2}$ ನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ, ಎಂಬುದನ್ನು. ಕಾರಣ ಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿ.

(i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

(iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಪರಿಹಾರ: (i) ತಪ್ಪು ಯಾಕೆಂದರೆ '0' (ಸೊನ್ನೆ) ಒಂದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

(ii) ಸರಿ, ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ 'm'ನ್ನು $\frac{m}{1}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

(iii) ತಪ್ಪು, ಏಕೆಂದರೆ $\frac{3}{5}$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : 1 ಮತ್ತು 2ರ ನಡುವಿನ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದನ್ನು ನಾವು ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಪರಿಹಾರ 1 : r ಮತ್ತು s ಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ನೀವು r ಮತ್ತು s ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ದೊರೆತ ಮೊತ್ತವನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ, ಅಂದರೆ $\frac{r+s}{2}$ ಎಂಬುದು r ಮತ್ತು s ಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ. ಹೀಗೆ $\frac{3}{2}$ ಎಂಬುದು 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ನೀವು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ, 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವಿನ ಉಳಿದ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ ಮತ್ತು $\frac{7}{4}$.

ಪರಿಹಾರ 2 : ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ನಮಗೆ 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು 1 ಮತ್ತು 2ನ್ನು ಛೇದವು 5 + 1 ಆಗಿರುವಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $1=\frac{6}{6}$ ಮತ್ತು $2=\frac{12}{6}$. ಈಗ $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ ಮತ್ತು $\frac{11}{6}$ ಇವೆಲ್ಲವೂ 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ 5 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{11}{6}$.

<u>ಗಮನಿಸಿ</u>: ಉದಾಹರಣೆ 2ರಲ್ಲಿ 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವಿನ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತಿಳಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ ಅಪರಿಮಿತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದು ನಿಮ್ಮ ಅನುಭವಕ್ಕೆ ಬಂದಿರಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, **ಯಾವುದೇ ಎರಡು ದತ್ತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅಪರಿಮಿತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.**

ಈಗ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಗಮನಿಸೋಣ. ನೀವು ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಆಯ್ದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಾ? ಇಲ್ಲ, ಇನ್ನೂ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಬಾಕಿ ಉಳಿದಿವೆ ಎಂಬುದು ಸತ್ಯ. ನೀವು ಆರಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ ನಡುವೆ ಕೇವಲ ಒಂದೆರಡಲ್ಲ ಅಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶಗಳಿವೆ (gaps). ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾದ ಸಂಗತಿ ಏನೆಂದರೆ, ಇಂತಹ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ಥಳಾವಕಾಶಗಳ ನಡುವೆ ಕೂಡಾ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮೊಂದಿಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಉಳಿದಿವೆ.

1. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಉಳಿದ ಬಾಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ?
2. ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ? ಅಂದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಅವುಗಳ ವಿಭಿನ್ನತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ (section) ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. ಸೊನ್ನೆ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ? ನೀವು ಅದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ($p, q \in Z, q \neq 0$.) ಬರೆಯಬಹುದೇ?
2. 3 ಮತ್ತು 4 ರ ನಡುವಿನ ಆರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $\frac{3}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{4}{5}$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾರಣ ಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿ.

   (i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ.

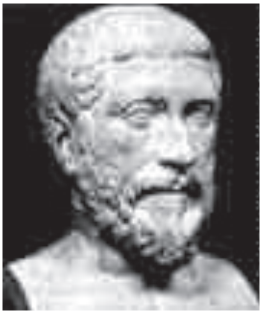
   (ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ.

   (iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ.

1.2 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿದ್ದೇವೆ. ಈವರೆಗೆ ನಿಮಗೆ ಕಂಡುಬಂದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ $\frac{p}{q}$ ($p, q \in Z, q \neq 0$) ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆಯೇ? ಎಂದು ನೀವು ಪ್ರಶ್ನಿಸಬಹುದು. ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

ಗ್ರೀಸ್ ದೇಶದ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮತ್ತು ತತ್ವಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಅನುಯಾಯಿಗಳಾದ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ನರು ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲು ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಪೂ. 400ರಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅನುಪಾತದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಪಂಥಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಕ್ರೋಟಾನ್‌ನ ಹಿಪ್ಪಾಕಸ್‌ರಿಂದ ಸಂಶೋಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತುಂಬಾ ದಂತಕಥೆಗಳಿವೆ. $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಂಶೋಧಿಸಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಅಥವಾ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಪಂಥದವರು ರಹಸ್ಯವಾಗಿ ಉಳಿಸಿಕೊಂಡಂತಹ $\sqrt{2}$ ರ ರಹಸ್ಯವನ್ನು ಹೊರಗಿನ ಜನರಿಗೆ ಬಹಿರಂಗಪಡಿಸಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಹಿಪ್ಪಾಕಸ್‌ನು ದುರಂತ ಅಂತ್ಯವನ್ನು ಕಂಡನು ಎಂಬುದು ಈ ದಂತಕಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ.



ಪೈಥಾಗೊರಸ್
(ಕ್ರಿ.ಪೂ 569 - ಕ್ರಿ.ಪೂ 479)
ಚಿತ್ರ 1.3

ಈಗ ನಾವು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಔಪಚಾರಿಕವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ‘s’ ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ($p, q \in Z, q \neq 0$) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ** ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಅಪರಿಮಿತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಹಾಗೆಯೇ, ಅಪರಿಮಿತ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ. ಕೆಲವು ಉದಾರಣೆಗಳೆಂದರೆ:

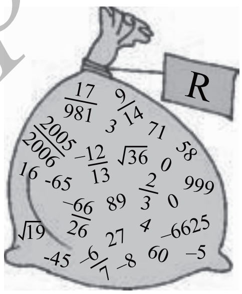
$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110.......$$

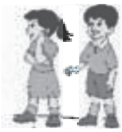
ಗಮನಿಸಿ: $\sqrt{\ }$ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ, ನಾವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಹೀಗೆ 2 ಮತ್ತು –2 ಇವೆರಡೂ 4 ರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳಾದರೂ, $\sqrt{4} = 2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

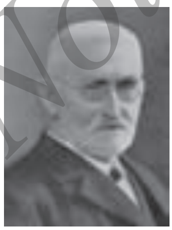
ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದ ಕೆಲವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಿಮಗೆ ಚಿರಪರಿಚಿತವಾಗಿವೆ. ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದ ಹಲವು ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನೂ ಹಾಗೂ ಸಂಖ್ಯೆ π ಯನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ನರು $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರು. ನಂತರ ಕ್ರಿ.ಪೂ. 425 ರ ಸುಮಾರಿಗೆ ಸಿರೀನ್‌ನ ಥಿಯೊಡೊರಸ್‌ನು $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ ಮತ್ತು $\sqrt{17}$ ಇವೂ ಸಹ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟನು. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$........ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸುವುದನ್ನು 10ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೀರಿ. ವಿಭಿನ್ನ ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಜನರಿಗೆ π ಯ ಬೆಲೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಯು ಸಾವಿರಾರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ತಿಳಿದಿದ್ದರೂ, 17ನೇ ಶತಮಾನದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಂಬರ್ಟ್ ಮತ್ತು ಲೆಜೆಂಡ್ರೆ ಎಂಬುವರು ಅದನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರು. 0.10110111011110.......ಮತ್ತು π ಇವು ಏಕೆ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಉದ್ಭವಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಹಿಂದಿರುಗೋಣ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಚೀಲವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ ನಾವು ಎಲ್ಲಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚೀಲದೊಳಗೆ ತುಂಬಿಸಿದರೆ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆಯೇ? ಇಲ್ಲ! ನಾವು ಇಂದು ಕರೆಯುವ **ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ** ಸಂಗ್ರಹವು ಎಲ್ಲ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಟ್ಟು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು R ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ, **ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.** ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ನಾವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು **ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.







ಆರ್. ಡೆಡೆಕೈಂಡ್
(1831-1916)
ಚಿತ್ರ : 1.4

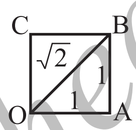
ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ ಅನುರೂಪವಾದ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಜರ್ಮನಿಯ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಕಾಂಟರ್ ಮತ್ತು ಡೆಡೆಕೈಂಡ್ ಎಂಬುವರು ಕ್ರಿ.ಶ. 1870ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟರು.

ಜಿ. ಕಾಂಟರ್
(1845-1918)
ಚಿತ್ರ : 1.5

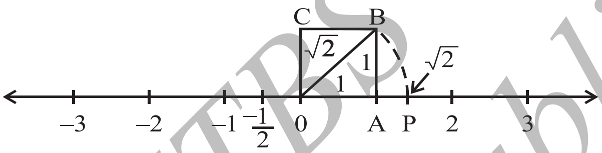
ಕೆಲವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನಾವು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಗ್ರೀಕರು $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು ಎಂಬುದನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಏಕಮಾನವಿರುವ ಒಂದು OABC ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. (ಚಿತ್ರ 1.6 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ OB = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಹೇಗೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು? ಇದು ಸುಲಭ. ಶೃಂಗಬಿಂದು 'O' ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ, ಚಿತ್ರ 1.6ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 1.7ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)



ಚಿತ್ರ 1.6

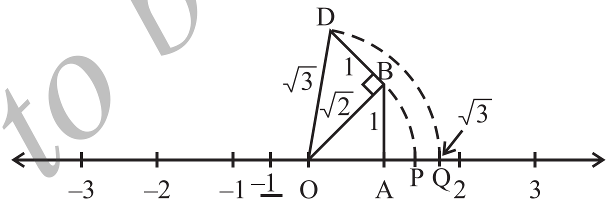


ಚಿತ್ರ 1.7

OB = $\sqrt{2}$ ಎಂದು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. 'O' ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ, OB ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ, ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು 'P' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ 'P' ಬಿಂದುವು $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : $\sqrt{3}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಈಗ ಚಿತ್ರ 1.7 ಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿರುಗೋಣ.



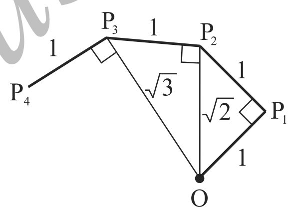
ಚಿತ್ರ 1.8

OB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ BD ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 1.8 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ). ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, OD = $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. 'O' ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ, OD ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ, ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು 'Q' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ 'Q' ಬಿಂದುವು $\sqrt{3}$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, ಯಾವುದೇ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ 'n' ಗೆ, $\sqrt{n-1}$ ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ನಂತರ $\sqrt{n}$ ನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. **ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.**
   (i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.
   (ii) ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ $\sqrt{m}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ, ಇಲ್ಲಿ 'm' ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.
   (iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.
2. ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೇ? ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.
3. $\sqrt{5}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
4. **ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯ ಚಟುವಟಿಕೆ ('ವರ್ಗಮೂಲ ಸುರುಳಿ'ಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದು):** ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 'ವರ್ಗಮೂಲ ಸುರುಳಿ'ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ. 'O' ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಮತ್ತು ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ OP_1 ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. OP_1 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ P_1P_2 ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 1.9ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಈಗ, OP_2 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ P_2P_3 ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನಂತರ OP_3 ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ P_3P_4 ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ OP_{n-1} ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಏಕಮಾನ ಉದ್ದದ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ $P_{n-1}P_n$ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ರೀತಿ, ನೀವು P_2, P_3......P_n......ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$,.......... ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸುಂದರವಾದ ಸುರುಳಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 1.9
ವರ್ಗಮೂಲ ಸುರುಳಿಯ ರಚನೆ

1.3 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೇವೆ ಹಾಗೂ ಈ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮಗೆ ಚಿರಪರಿಚಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳಿಂದಲೇ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಈಗ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ: $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$

ಶೇಷಗಳ ಬಗ್ಗೆ ವಿಶೇಷ ಗಮನ ನೀಡಿ ಮತ್ತು ನೀವು ಯಾವುದಾದರೂ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದೇ ನೋಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 5 : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{7}$ ಇವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

$$\begin{array}{r|l} & 3.333... \\ \hline 3 & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 1 \end{array}$$

ಶೇಷಗಳು : 1, 1, 1, 1, 1....

ಭಾಜಕ : 3

$$\begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.0 \\ & 64 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ಶೇಷಗಳು : 6, 4, 0

ಭಾಜಕ : 8

$$\begin{array}{r|l} & 0.142857... \\ \hline 7 & 1.0 \\ & 7 \\ \hline & 30 \\ & 28 \\ \hline & 20 \\ & 14 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 35 \\ \hline & 50 \\ & 49 \\ \hline & 1 \end{array}$$

ಶೇಷಗಳು; 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1..........

ಭಾಜಕ : 7

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ? ನೀವು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಬೇಕು.

(i) ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತಗಳ ನಂತರ ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಲು ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಶೇಷಗಳ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಭಾಜಕಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ($\frac{1}{3}$ ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಕೆಯು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಭಾಜಕವು 3 ಆಗಿದೆ. $\frac{1}{7}$ ರಲ್ಲಿ ಶೇಷಗಳ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ 6 ಅಂಶಗಳು 326451 ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಭಾಜಕವು 7 ಆಗಿದೆ.)

(iii) ಶೇಷಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾದರೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ($\frac{1}{3}$ ರ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 3 ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\frac{1}{7}$ ರ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 142857 ಅಂಕಿಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗುಂಪು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ).

ಕೇವಲ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ನಾವು ಈ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೂ, ಅದು $\frac{p}{q}$ (q ≠ 0) ರೂಪದ ಎಲ್ಲ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. p ಯನ್ನು q ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಶೇಷವು ಎಂದಿಗೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಶೇಷಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಕರಣಗಳನ್ನು ಈಗ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನೋಡೋಣ.

ಪ್ರಕರಣ (i): ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\frac{7}{8}$ ಎಂಬ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹಂತಗಳ ನಂತರ ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $\frac{7}{8}$ ರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು 0.875 ಆಗಿದೆ. ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ $\frac{1}{2}=0.5; \frac{639}{250}=2.556$. ಈ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತಗಳ ನಂತರ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು **ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಕರಣ (ii): ಶೇಷವು ಎಂದಿಗೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

$\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{7}$ ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತಗಳ ನಂತರ ಶೇಷಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದರಿಂದ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸರಣಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತವಾಗುವ ವಿಸ್ತರಣೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\frac{1}{3}=0.3333.......$ ಮತ್ತು $\frac{1}{7}=0.142857142857142857......$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $\frac{1}{3}$ ರ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 3 ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದನ್ನು $0.\overline{3}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{1}{7}$ ರ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 142857 ಈ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಂಪು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದರಿಂದ ನಾವು $\frac{1}{7}$ ನ್ನು $0.\overline{142857}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅಂಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಅಡ್ಡಗೆರೆಯು (bar) ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ 3.5727272........ ಇದನ್ನು $3.5\overline{72}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಈ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನಮಗೆ **ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತವಾಗುವ (ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ)** ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ.

ಹೀಗೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಕೇವಲ ಎರಡು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿದೆ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ನೀವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ಚಲಿಸುವಾಗ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 3.142678 ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 1.272727......... ಅಂದರೆ $1.\overline{27}$ ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರೆತರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ನೀವು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತೀರಾ? ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಹೌದು.

ನಾವು ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಇದನ್ನು ಸಾದೃಷಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಪ್ರಕರಣಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6 : 3.142678 ಇದೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಅಥವಾ 3.142678 ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ $(p, q \in Z, q \neq 0)$ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಈಗ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 7 : $0.3333..... = 0.\overline{3}$ ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ $(p, q \in Z, q \neq 0)$ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ನಮಗೆ $0.\overline{3}$ ಎಂದರೆ ಏನು ಎಂದು ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, $0.\overline{3}$ನ್ನು x ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

$$x = 0.3333....$$

ಇಲ್ಲಿ ನೋಡಿ. ಈಗೊಂದು ಚಮತ್ಕಾರವಾಗಲಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಕೆ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದರಿಂದ x ನ್ನು 10 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$10x = 10 \times (0.333...) = 3.333.....$$

$$3.3333..... = 3 + x \; (\because \; x = 0.3333.........)$$

$$\therefore 10x = 3 + x$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

ಉದಾಹರಣೆ 8 : $1.272727........ = 1.\overline{27}$ ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ $(p, q \in Z, q \neq 0)$ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $x = 1.272727......$ ಆಗಿರಲಿ.

ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವುದರಿಂದ, x ನ್ನು 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$\begin{aligned} 100 \times x &= 100 \times (1.272727..........) \\ 100\,x &= 127.2727...... \\ 100\,x &= 126 + 1.2727........ \\ 100\,x &= 126 + x \; (\because x = 1.272727\;.......) \\ \therefore \quad 100\,x - x &= 126 \\ 99\,x &= 126 \\ x &= \frac{126}{99} = \frac{14}{11} \end{aligned}$$

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 9: $0.2353535 = 0.2\overline{35}$ ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ $(p, q \in Z, q \neq 0)$ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $x = 0.2\overline{35}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಅಂಕೆ 2 ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ 35ರ ಗುಂಪು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುವುದರಿಂದ, x ನ್ನು 100ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$100x = 23.53535.....$$

$$100x = 23.3 + 0.23535......... = 23.3 + x$$

$$\therefore \quad 99x = 23.3$$

$$99x = \frac{233}{10}$$

$$x = \frac{233}{990}$$

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ, ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ $(p, q \in Z, q \neq 0)$ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಈಗ ನಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳಬಹುದು ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಂಡಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, ನಾವು ಈಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಹೇಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಹೇಗಿರುತ್ತದೆ? ಈ ಮೇಲಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣದಿಂದ ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು **ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ** ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣದಂತೆ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣವು ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದ S = 0.10110111011110........... ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಅದು ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣದಿಂದ ಅದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ, ನೀವು 'S'ನ ಹಾಗೆಯೇ ಇರುವ ಅಪರಿಮಿತ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳಾದ $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು π ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳುವಿರಿ? ಇಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತದವರೆಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096.........$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950.............$$

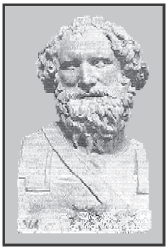
($\frac{22}{7}$ ನ್ನು π ಯ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಯನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ ಆದರೆ $\pi \neq \frac{22}{7}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.)

ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅನೇಕ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಬಹಳ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\sqrt{2}$ ರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಲಿತಿರಬಹುದು. ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾಗಿ, ವೇದಗಳ ಕಾಲದ (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 800 – ಕ್ರಿ.ಪೂ. 500) ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಶುಲ್ಬ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (ಜ್ಯಾದ ನಿಯಮಗಳು) ನೀವು $\sqrt{2}$ ರ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಾಣಬಹುದು.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

ಈ ಬೆಲೆಯು ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ಬೆಲೆಯ ಮೊದಲ ಐದು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. π ಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಇತಿಹಾಸವು ಬಹಳ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾಗಿದೆ.

πಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕ್ ಮೇಧಾವಿ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್‌ನು ಮೊದಲಿಗನಾಗಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು $3.140845 < \pi < 3.142857$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದನು. ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮತ್ತು ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಆರ್ಯಭಟನು (ಕ್ರಿ.ಶ. 476 – ಕ್ರಿ.ಶ. 550) πಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನ(3.1416)ಗಳವರೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದನು. ಶೀಘ್ರಗತಿಯ (High speed) ಗಣಕಯಂತ್ರ ಮತ್ತು ಉನ್ನತೀಕರಿಸಿದ ಅಲ್ಗಾರಿಥಮ್‌ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು 1.24 ಟ್ರಿಲಿಯನ್ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಲಾಗಿದೆ! (1 ಟ್ರಿಲಿಯನ್ = 1000000000000)



ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್
ಕ್ರಿ.ಪೂ.287 - ಕ್ರಿ.ಪೂ. 212
ಚಿತ್ರ 1.10

ಈಗ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 10 : $\frac{1}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{7}$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ ಎಂದು ನೀವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು. $\frac{1}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{7}$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ನೀವು ಇಂತಹ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಎಂದರೆ 0.150150015000150000.................

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಯಾವ ರೀತಿಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. $\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$ ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡದೇ $\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}$ ಇವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ನೀವು ಊಹಿಸಬಹುದೇ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಹೇಗೆ?.(**ಸುಳುಹು :** $\frac{1}{7}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಜಾಗರೂಕತೆಯಿಂದ ಅಭ್ಯಸಿಸಿ.)

3. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ $(p, q \in Z, q \neq 0.)$ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999...... ಇದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರದಿಂದ ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಯಿತೇ? ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕರು ಮತ್ತು ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಇದು ಹೇಗೆ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಚರ್ಚಿಸಿ.

5. $\frac{1}{17}$ ಇದರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಆವರ್ತವಾಗುವ ಅಂಕೆಗಳ ಕೂಟದಲ್ಲಿ(Block) ಗರಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಅಂಕೆಗಳಿರಬಹುದು? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿ.

6. ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ [$q \neq 0, p$ ಮತ್ತು q ಗಳು 1ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು] ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ. 'q' ಇದು ಯಾವ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಬಹುದೇ?

7. ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

8. $\frac{5}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{9}{11}$ ಈ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಮೂರು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ.

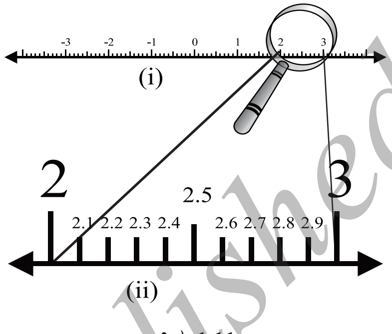
   (i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

   (iv) 7.478478..... (v) 1.101001000100001....

1.4 ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು

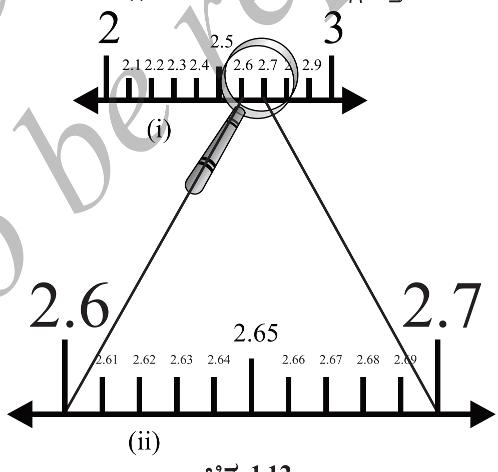
ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಇದು ನಮಗೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

2.665ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಾವು ಗುರುತಿಸಬೇಕೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇದು 2 ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.



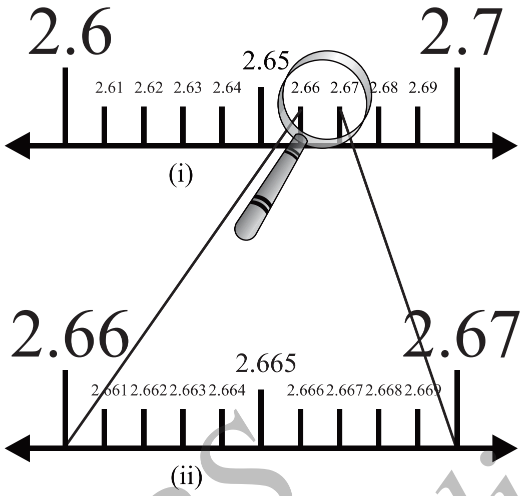
ಚಿತ್ರ 1.11

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಹತ್ತಿರದಿಂದ ನೋಡೋಣ. ಇದನ್ನು ಸಮನಾದ 10 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 1.11 (i) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಈ ವಿಭಾಗಗಳ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿ. ಆಗ 2ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೆಯ ಗುರುತು 2.1ನ್ನೂ, ಎರಡನೆಯ ಗುರುತು 2.2ನ್ನೂ .... ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. 2 ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವಿನ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 1.11(i) ರಲ್ಲಿ ವೀಕ್ಷಿಸಲು ನಿಮಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಕಷ್ಟವಾಗಬಹುದು. ಇದರ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ನೋಡಲು ಒಂದು ಪೀನಮಸೂರ (ಭೂತಕನ್ನಡಿ)ವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಮೂಲಕ 2 ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು ನೋಡಿ. ಆಗ ಅದು ಚಿತ್ರ 1.11(ii) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಈಗ, 2.665 ಇದು 2.6 ಮತ್ತು 2.7ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಈಗ 2.6 ಮತ್ತು 2.7ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದಂತೆ ಊಹಿಸೋಣ. ಮೊದಲನೆಯ ಗುರುತು 2.61ನ್ನೂ, ನಂತರದ ಗುರುತು 2.62ನ್ನೂ .... ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನೋಡಲು ನಾವು ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 1.12(ii) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಹಿಗ್ಗಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 1.12

ಪುನಃ, 2.665 ಇದು 2.66 ಮತ್ತು 2.67ರ ನಡುವೆ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. [ಚಿತ್ರ 1.13(i) ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ] ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದಂತೆ ಊಹಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನೋಡಲು ಚಿತ್ರ 1.13(ii) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಹಿಗ್ಗಿಸಿ. ಮೊದಲನೆಯ ಗುರುತು 2.661ನ್ನೂ ಮುಂದಿನ ಗುರುತು 2.662ನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ 2.665 ಎಂಬುದು ಈ ಉಪವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ 5ನೆಯ ಗುರುತು ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.13

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವುದನ್ನು ಪೀನಮಸೂರದ ಮೂಲಕ ವೀಕ್ಷಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗೆ ನಾವು **ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಧನಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ (process of successive magnification)** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವೀಕ್ಷಿಸಲು (ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು) ಹಲವಾರು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಧನೆಗಳಿಂದ ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

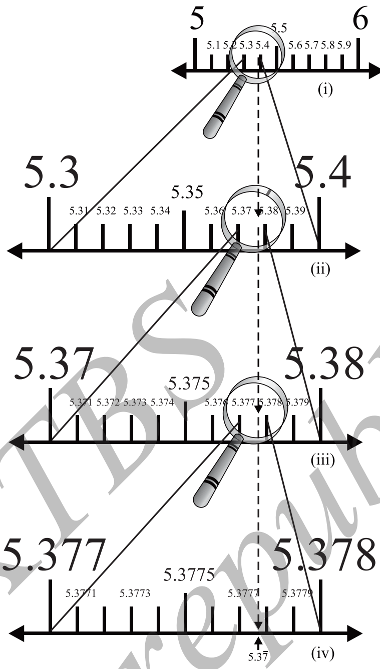
ಈಗ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಮತ್ತು ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವೀಕ್ಷಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ನಾವು ಪೀನಮಸೂರದ ಮೂಲಕ ಸರಿಯಾದ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಧನೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 11 : ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $5.3\overline{7}$ ಇದರ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು 5 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಎಂದರೆ 5.37777ರವರೆಗೆ ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಧನೆಯ ಮೂಲಕ ನಾವು ಮುಂದುವರಿಸಿ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $5.3\overline{7}$ ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಭಾಗದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡೋಣ.

ಆಗ $5.3\overline{7}$ ಸಂಖ್ಯೆಯು 5 ಮತ್ತು 6ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ನಾವು $5.3\overline{7}$ ನ್ನು 5.3 ಮತ್ತು 5.4ರ ನಡುವೆ ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾದ ದೃಶ್ಯೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ನಾವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಈ ಭಾಗವನ್ನು 10 ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $5.3\overline{7}$ ಇದು 5.37 ಮತ್ತು 5.38ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು. ಒಂದು ಪೀನಮಸೂರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. $5.3\overline{7}$ ನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿ ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು, ನಾವು 5.37 ಮತ್ತು 5.38ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಪುನಃ 10 ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $5.3\overline{7}$ ಇದು 5.377 ಮತ್ತು 5.378ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು ಒಂದು ಪೀನಮಸೂರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗ, $5.3\overline{7}$ ನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿ ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು 5.377 ಮತ್ತು 5.378ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು 10

ಸಮನಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 1.14(iv)ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $5.3\overline{7}$ ರ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. $5.3\overline{7}$ ಇದು 5.3777ಕ್ಕಿಂತ 5.3778ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಮೀಪದಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. [ಚಿತ್ರ 1.14 (iv)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ].



ಚಿತ್ರ 1.14

ಗಮನಿಸಿ: ಈ ರೀತಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪೀನಮಸೂರದ ಮೂಲಕ ನೋಡುತ್ತಾ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $5.3\overline{7}$ ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ಭಾಗದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಊಹಿಸುತ್ತಾ ನಿರಂತರವಾಗಿ ನಾವು ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು. ನಾವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗೊಳಿಸಿದ ರೇಖೆಯ ಭಾಗದ ಗಾತ್ರವು, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು ನಾವು ಬಯಸುವ ನಿಖರತೆಯ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಲು ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು ಎಂದು ನೀವು ಈಗ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡಿರಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಚರ್ಚೆಗಳ ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ, **ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೇ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ** ಎಂದು ನಾವು ಪುನಃ ಹೇಳಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಧನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 3.765ನ್ನು ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಿ.

2. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $4.\overline{26}$ನ್ನು 4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸಿ.

1.5 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತನೀಯ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಇಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೇ, ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಕಳೆದರೆ, ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ (ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಹೊರತುಪಡಿಸಿ), ಪುನಃ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಅಂದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಆವೃತವಾಗಿದೆ). ಇದರಿಂದ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಸಹ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತನೀಯ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೇ ಆಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}\right)$ ಮತ್ತು $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ ಇವು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಗುಣಿಸಿದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ. ಹಾಗಾದರೆ $2+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $2\sqrt{3}$ ಇವುಗಳು ಏನು? $\sqrt{3}$ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತವಾಗದ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, $2+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $2\sqrt{3}$ ಇವುಗಳು ಕೂಡಾ ಇದೇ ರೀತಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $2+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $2\sqrt{3}$ ಗಳೂ ಸಹ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 12: $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}+21, \pi-2$ ಇವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ, ಅಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\sqrt{5}=2.236\ldots, \sqrt{2}=1.4142\ldots, \pi=3.1415\ldots$

$$\therefore 7\sqrt{5} = 7\times 2.236\ldots = 15.652\ldots,$$

$$\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304\ldots$$

$$\sqrt{2}+21 = 22.4142\ldots, \pi-2 = 1.1415\ldots$$

ಇವೆಲ್ಲವೂ ಅಂತ್ಯರಹಿತ, ಆವರ್ತರಹಿತ ದಶಮಾಂಶಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವೆಲ್ಲವೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಈ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಕಳೆದಾಗ, ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, nನೇ ಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ (‘n’ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ) ಏನಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 13: $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$$=(2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

ಉದಾಹರಣೆ 14: $6\sqrt{5}$ ನ್ನು $2\sqrt{5}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=6\times 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=12\times 5=60$

ಉದಾಹರಣೆ 15 : $8\sqrt{15}$ ನ್ನು $2\sqrt{3}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $8\sqrt{15}\div 2\sqrt{3}=\dfrac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=4\sqrt{5}$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನಿಮ್ಮನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ **ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವತ್ತ** ಒಯ್ಯಬಹುದು.

(i) ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಎರಡು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಕಳೆದಾಗ, ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಭಾಗಲಬ್ಧವೂ ಆಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧವೂ ಆಗಿರಬಹುದು.

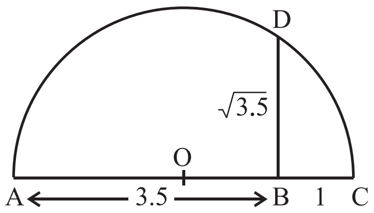
ಈಗ ನಾವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕಡೆಗೆ ನಮ್ಮ ಗಮನವನ್ನು ಹರಿಸೋಣ.

'a' ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\sqrt{a}=b$ ಅಂದರೆ $b^2=a$ ಮತ್ತು $b>0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದೇ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಈಗ $a>0$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $\sqrt{a}=b$ ಎಂದರೆ $b^2=a$ ಮತ್ತು $b>0$.

'n' ಯಾವುದೇ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ, $\sqrt{n}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಭಾಗ 1.2ರಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ 'x'ಗೆ $\sqrt{x}$ ನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

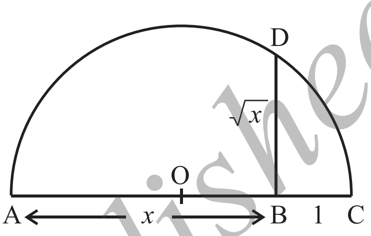
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sqrt{3.5}$ನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.



ಚಿತ್ರ 1.15

ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ (ನಿರ್ದಿಷ್ಟ) ಬಿಂದು 'A'ಯಿಂದ 3.5 ಮೂಲಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ AB = 3.5 ಮೂಲಮಾನವಾಗುವಂತೆ 'B' ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 1.15ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) B ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಏಕಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ 'C' ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ACಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ 'O' ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ. 'O' ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ, OC ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. 'B' ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಮತ್ತು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು 'D' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ AC ಗೆ ಒಂದು ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ BD = $\sqrt{3.5}$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ 'x'ಗೆ $\sqrt{x}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, AB = x ಮೂಲಮಾನ ಆಗುವಂತೆ 'B'ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 1.16 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ BC = 1 ಮೂಲಮಾನ ಆಗುವಂತೆ 'C'ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ನಂತರ x = 3.5ರ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, BD = $\sqrt{x}$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 1.16 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ನಾವು ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 1.16ರಲ್ಲಿ ΔOBD ಯು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $\frac{x+1}{2}$ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 1.16

ಆದ್ದರಿಂದ, $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

ಈಗ $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

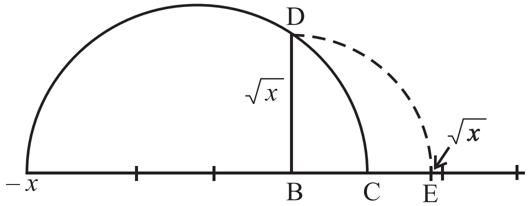
ಆದ್ದರಿಂದ, ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$BD^2 = OD^2 - OB^2$$

$$BD^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

ಇದು BD $= \sqrt{x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ 'x'($x > 0$) ಗೆ $\sqrt{x}$ ರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಈ ರಚನೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\sqrt{x}$ ನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿಯಲು ಬಯಸಿದರೆ, 'B'ಯು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ 'C'ಯು 1 ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ BC ಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ. 'B' ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿ, BD ಯು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು 'E' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 1.17 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಆಗ 'E'ಯು $\sqrt{x}$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.17

ವರ್ಗಮೂಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಘನಮೂಲ, ನಾಲ್ಕನೇ ಮೂಲ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ 'n'ನೇ ಮೂಲಗಳಿಗೂ ('n' ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ) ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿನ ವರ್ಗಮೂಲ ಮತ್ತು ಘನಮೂಲಗಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. $\sqrt[3]{8}$ ಎಂದರೇನು? ಅದು ಯಾವುದರ ಘನವು 8 ಆಗುತ್ತದೆಯೋ ಅಂತಹ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು $\sqrt[3]{8} = 2$ ಎಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಿರಬಹುದು. ಈಗ $\sqrt[5]{243}$ ನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. $b^5 = 243$ ಆಗುವಂತಹ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ 'b'ಯನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಾ? ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ 3. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt[5]{243} = 3$.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, 'a' ಯು ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ ಮತ್ತು n ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ನೀವು $\sqrt[n]{a}$ ಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಈಗ, $a > 0$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು n ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲಿ. $b^n = a$ ಮತ್ತು $b > 0$ ಆದಾಗ $\sqrt[n]{a} = b$.

$\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ '$\sqrt{\ }$' ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ ಕರಣಿ ಚಿಹ್ನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ, ಹಲವಾರು ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕೆಲವು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಈ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನದ ಮೇಲಿನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮದಿಂದ ಹಾಗೂ $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ $(x, y \in \mathbf{R})$ ಎಂಬ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

a ಮತ್ತು b ಗಳು ಧನವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಕರಣಗಳನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 16 : ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ.

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

ಪರಿಹಾರ: (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right) = 5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right) = \left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 11 - 7 = 4$

ಗಮನಿಸಿ : ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 'ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ' ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಎಂದರ್ಥ. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನಾವು ಈ ವಿಭಾಗವನ್ನು ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲಿರುತ್ತದೆಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಹುದೇ? ಅದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧವೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಛೇದವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ ಅದು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಬಹುದು. ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಲು ಅಂದರೆ ಛೇದವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂದು ಈಗ ನಾವು ನೋಡೋಣ. ಹಾಗೆ ಮಾಡಲು ನಮಗೆ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಅದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ

ಉದಾಹರಣೆ 17 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಛೇದವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಂತೆ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಪದವನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ನ್ನು $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ರ ಸಮಾನ ಪದ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈ ರೀತಿ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು 0 ಮತ್ತು $\sqrt{2}$ ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 18: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ಇದರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಈ ಹಿಂದೆ ನೀಡಿದ (iv)ನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ಯನ್ನು $2-\sqrt{3}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

ಉದಾಹರಣೆ 19: $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ಇದರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಈ ಹಿಂದೆ ನೀಡಿದ (iii) ನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore\ \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}=\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ಉದಾಹರಣೆ 20 : $\dfrac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ಇದರ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $\dfrac{1}{7+3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{7+3\sqrt{2}}\times\dfrac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}=\dfrac{7-3\sqrt{2}}{49-18}=\dfrac{7-3\sqrt{2}}{31}$

ಹೀಗೆ ವರ್ಗಮೂಲ ಅಥವಾ ಕರಣಿ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಛೇದವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಪದದ ಛೇದವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವಂತೆ ಸಮಾನ ಪದವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ **ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸುವಿಕೆ (Rationalising the denominator)** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ.

   (i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

   (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ.

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. π ಅಂದರೆ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ(c) ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ(d)ದ ಅನುಪಾತ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಎಂದರೆ $\pi=\dfrac{c}{d}$. ಇದು π ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ವಿರೋಧವಾಗಿರುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ.

   ಈ ವಿರೋಧಾಭಾಸವನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಪರಿಹರಿಸುವಿರಿ?

4. $\sqrt{9.3}$ ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

5. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ.

   (i) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

   (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.6 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವುದು ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ನೆನಪಿದೆಯೇ?

(i) $17^2 . 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 . 9^3 =$

ನಿಮಗೆ ಉತ್ತರಗಳು ದೊರೆಯಿತೇ? ಅವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

ಈ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಬಹುದು. (ಇಲ್ಲಿ a, n ಮತ್ತು m ಗಳು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. 'a' ಯನ್ನು ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದೂ, m ಮತ್ತು n ಗಳನ್ನು ಘಾತಸೂಚಿಗಳು ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.)

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ (m > n)$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ ರ ಬೆಲೆ ಏನು? ಅದರ ಬೆಲೆ 1. ಆದ್ದರಿಂದ ನೀವು $(a)^0 = 1$ ಎಂದು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿಯಮ (iii) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ನಾವು $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ ಎಂದು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಋಣ ಘಾತಸೂಚಿಗಳಿಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ :

(i) $17^2 . 17^{-5} = 17^{-3} = \dfrac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\dfrac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} . (9)^{-3} = (63)^{-3}$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಿಡಿಸಬೇಕೆಂದರೆ,

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದು?

ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಧನವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು ಹಾಗೂ ಘಾತಸೂಚಿಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗಿದ್ದಾಗ ಕೂಡಾ ನಾವು ಹಿಂದೆ ಕಲಿತ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

(ಇನ್ನೂ ಮುಂದುವರೆದು, ಘಾತಸೂಚಿಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗಿರುವಾಗಲೂ ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೀರಿ.) ಆದರೆ, ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಮತ್ತು ಅರ್ಥೈಸುವ ಮೊದಲು ನಾವು ಏನನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕೆಂದು ನೋಡೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $4^{\frac{3}{2}}$ ಎಂದರೇನೆಂದು ನಾವು ತಿಳಿಯಬೇಕಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಮುಂದಿನ ಹಂತದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ವಿಭಾಗ 1.4 ರಲ್ಲಿ 'a' ಯು ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ $\sqrt[n]{a}$ ಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದೇವೆ.

$a > 0$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು 'n' ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $b^n = a$ ಮತ್ತು $b > 0$ ಆದರೆ, ಆಗ $\sqrt[n]{a} = b$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಘಾತಾಂಕಗಳ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ, $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ, $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$. ಈಗ $4^{3/2}$ ನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು.

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$a > 0$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. m ಮತ್ತು n ಗಳು 1ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರದ $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

ಈಗ, ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದಂತೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿದ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

$a > 0$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ ಆಗ.

(i) $a^p . a^q = q^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

ನೀವು ಈಗ ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ಕೇಳಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 21: ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ:

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ಪರಿಹಾರ :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = (221)^{\frac{1}{5}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 1.6

1. ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$
2. ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$
3. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.7 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 'r' ನ್ನು $\dfrac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿದ್ದು $(q \neq 0)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಾದರೆ, ಅದನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
2. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 's' ನ್ನು $\dfrac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ $(p, q \in Z, q \neq 0)$ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
3. ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಸಹಿತ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯರಹಿತ ಆವರ್ತವಾಗಬಹುದು. ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಸಹಿತ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯರಹಿತ ಆವರ್ತವಾದರೆ ಅದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
4. ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವುದೂ ಇಲ್ಲ, ಆವರ್ತವಾಗುವುದೂ ಇಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾಗಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯವೂ ಹೊಂದದೇ, ಆವರ್ತವೂ ಆಗದೇ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
5. ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸೇರಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ.
6. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ, ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ, ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ.
7. r ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು s ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ, $r + s$ ಮತ್ತು $r - s$ ಇವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗೂ rs ಮತ್ತು $\dfrac{r}{s}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ $r \neq 0$.
8. a ಮತ್ತು b ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ.

   (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   (iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

   (v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
9. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+b}$ ಯ ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಣಗೊಳಿಸಲು, ಇದನ್ನು $\dfrac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ ರಿಂದ ನಾವು ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ. $(a, b \in Z)$
10. $a > 0$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ ಆಗ,

    (i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

    (iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

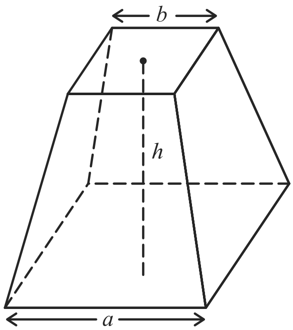
ಅಧ್ಯಾಯ – 2

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

2.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಗ್ರೀಕ್ ಶಬ್ದಗಳಾದ 'ಜಿಯೋ' – ಅಂದರೆ 'ಭೂಮಿ' ಮತ್ತು 'ಮೆಟ್ರಿನ್' – ಅಂದರೆ 'ಅಳತೆ ಮಾಡು' – ಇವುಗಳಿಂದ 'ಜಾಮೆಟ್ರಿ' ಎಂಬ ಶಬ್ದವು ಬಂದಿದೆ. ಭೂಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಂದ ಜಾಮೆಟ್ರಿ ಅಥವಾ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಉಗಮವಾಯಿತು ಎಂದು ತೋರುತ್ತದೆ. ಈಜಿಪ್ಟ್, ಬಬಿಲೋನಿಯಾ, ಚೈನಾ, ಭಾರತ, ಗ್ರೀಕ್, ಇಂಕಾ ಮುಂತಾದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಾಚೀನ ನಾಗರಿಕತೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಗಣಿತದ ಶಾಖೆಯಾದ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನವು ವಿವಿಧ ಆಯಾಮಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆದಿದೆ. ಈ ನಾಗರಿಕ ಜನಾಂಗಗಳು ಎದುರಿಸಿದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಂದಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತದ ವೈವಿಧ್ಯಮಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಉಂಟಾಯಿತು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನೈಲ್ ನದಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವಾಹ ಬಂದಾಗಲೆಲ್ಲಾ, ಅಕ್ಕ-ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹೊಲಗಳಿರುವ ಅನೇಕ ರೈತರ ಜಮೀನುಗಳ ಸೀಮಾರೇಖೆ ಕೊಚ್ಚಿ ಹೋಗುತ್ತಿತ್ತು. ಇಂತಹ ಪ್ರವಾಹದ ನಂತರ ಈ ಗಡಿಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಗುರುತಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಜನರು ಈ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ, ಸರಳವಾಗಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಮತ್ತು ಸರಳವಾದ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಅನೇಕ ತಂತ್ರಗಳು ಹಾಗೂ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದರು. ಕಣಜಗಳ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಹಾಗೂ ಕಾಲುವೆ ಮತ್ತು ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಅವರು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರು. ಒಂದು ಭಿನ್ನಗ್ರ ಪಿರಮಿಡ್(ಚಿತ್ರ 2.1ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)ನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸರಿಯಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಹ ಅವರು ತಿಳಿದಿದ್ದರು. (ಚಿತ್ರ 2.1ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.) ಘನಾಕೃತಿಯ ಪಾದವು ತ್ರಿಭುಜ ಅಥವಾ ಚೌಕ ಅಥವಾ ಇತರ ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು, ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿ, ಏಕಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಸೇರಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಇದರ ಅಗ್ರಭಾಗವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಅದು ಭಿನ್ನಗ್ರ ಪಿರಮಿಡ್.



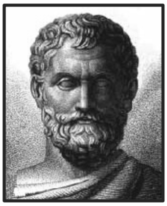
ಚಿತ್ರ 2.1 : ಭಿನ್ನಗ್ರ ಪಿರಮಿಡ್

ಉಪಖಂಡ ಭಾರತದ ಹರಪ್ಪಾ, ಮೊಹೆಂಜೊದಾರೋ ಮುಂತಾದೆಡೆಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಉತ್ಖನನಗಳಿಂದ ಸಿಂಧೂನದಿ ಕಣಿವೆಯ ನಾಗರಿಕತೆಯಲ್ಲಿ (ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಪೂ. 3000) ರೇಖಾಗಣಿತವು ವಿಪುಲವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಾಗಿದ್ದುದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಅದೊಂದು ಸುವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಸಮಾಜವಾಗಿತ್ತು. ನಗರಗಳು ಅತ್ಯಂತ ಯೋಜನಾಬದ್ಧವಾಗಿದ್ದವು ಮತ್ತು ಅತ್ಯುನ್ನತವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದ್ದವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ರಸ್ತೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದವು ಹಾಗೂ ಅಲ್ಲಿ ಒಳಚರಂಡಿಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೂ ಇತ್ತು. ಮನೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಅನೇಕ ಕೊಠಡಿಗಳಿದ್ದವು. ನಗರದ ನಿವಾಸಿಗಳು ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ ಹಾಗೂ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕುಶಲರಾಗಿದ್ದರೆಂದು ಇದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಿರ್ಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದ್ದ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಸುಟ್ಟ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳಾಗಿದ್ದು ಇವುಗಳ ಉದ್ದ : ಅಗಲ : ದಪ್ಪಗಳ ಅನುಪಾತವು 4 : 2 : 1 ಆಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದಲ್ಲಿ **ಶುಲ್ಬ ಸೂತ್ರಗಳು** (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 800 ರಿಂದ ಕ್ರಿ.ಪೂ. 500) ರೇಖಾಗಣಿತದ ರಚನೆಗಳ ಕೈಪಿಡಿಗಳಾಗಿದ್ದುವು. ವೈದಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಹೋಮಕುಂಡಗಳು ಮತ್ತು ಯಜ್ಞವೇದಿಗಳ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕಾಗಿ ವೇದಕಾಲದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಹುಟ್ಟಿಕೊಂಡಿತು. ಪವಿತ್ರವಾದ ಅಗ್ನಿಯಿಂದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಪರಿಣಾಮ ಉಂಟಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಅದರ ಸ್ಥಾನ, ಆಕಾರ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಪಡಿಸಿದ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಗೃಹಸಂಬಂಧಿ ವಿಧಿಗಳಿಗೆ ಚೌಕ ಅಥವಾ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಯಜ್ಞವೇದಿಗಳು ಬಳಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದ್ದವು. ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಪೂಜೆಗಾಗಿ ಆಯತ, ತ್ರಿಭುಜ, ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳ ಸಂಯೋಗದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಯಜ್ಞವೇದಿಗಳು ಅವಶ್ಯವಾಗಿದ್ದವು. **ಶ್ರೀಯಂತ್ರ** ಅಥವಾ ಶ್ರೀ ಚಕ್ರವು (ಅಥರ್ವ ವೇದದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ) ಅನ್ಯೋನ್ಯವಾಗಿ ಹೆಣೆದುಕೊಂಡ. 9 ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿದೆ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಇನ್ನೂ 43 ಪೂರಕ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಂಡಿವೆ. ಯಜ್ಞವೇದಿಗಳ ರಚನೆಗೆ ನಿಖರವಾದ ರೇಖಾ ಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳು ಬಳಕೆಯಾಗುತ್ತಿದ್ದರೂ, ಅದರ ಹಿಂದಿನ ತತ್ವಗಳ ಕುರಿತು ಚರ್ಚೆಯಾಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ.

ರೇಖಾಗಣಿತವು ಜಗತ್ತಿನಾದ್ಯಂತ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು ಮತ್ತು ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತಿತ್ತು ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇದೊಂದು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಪ್ರಾಚೀನ ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಕುರಿತಾದ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ವಿಷಯವೆಂದರೆ ಮೌಖಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ತಾಳೆಗರಿಯ ಸಂದೇಶದ ಮೂಲಕ ಅಥವಾ ಇನ್ನಿತರ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ, ರೇಖಾಗಣಿತವು ಒಂದು ತಲೆಮಾರಿನಿಂದ ಮುಂದಿನದಕ್ಕೆ ಸಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಭಾರತ, ರೋಮ್ ಮತ್ತು ಬೆಬಿಲೋನಿಯಾದಂತಹ ಕೆಲವು ನಾಗರಿಕತೆಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗ ನಿರ್ದೇಶಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯಿತು. ಈಜಿಪ್ಟಿಯನ್ನರಿಂದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಂಡ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿತ್ತು. ಅಲ್ಲಿ ವಿಧಾನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮಗಳಿರಲಿಲ್ಲ. ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ಬೆಬಿಲೋನಿಯನ್ನರು ಮತ್ತು ಈಜಿಪ್ಟಿಯನ್ನರು ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡರೇ ಹೊರತು, ಅದನ್ನೊಂದು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ವಿಜ್ಞಾನವಾಗಿ ಬೆಳೆಸಲು ನೀಡಿದ ಕೊಡುಗೆ ಅತ್ಯಲ್ಪ. ಆದರೆ ಗ್ರೀಕ್‌ನಂತಹ ನಾಗರಿಕತೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವೊಂದು ರಚನೆಗಳು ಹೇಗೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ **ಕಾರಣ ನೀಡುವುದಕ್ಕೆ** ಹೆಚ್ಚು ಆದ್ಯತೆಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿತ್ತು. ನಿಗಮನ ಚಿಂತನೆಯ ಮೂಲಕ ತಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಸತ್ಯವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕರು ಆಸಕ್ತರಾಗಿದ್ದರು. (ಅನುಬಂಧ 1 ನ್ನು ನೋಡಿ.)

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಂತೆ, ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಗಣಿತೋಕ್ತಿಗೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀಡಿದವನೆಂಬ ಹೆಗ್ಗಳಿಕೆ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಥೇಲ್ಸ್‌ನಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಈ ಸಾಧನೆಯು, ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಅದರ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಅರ್ಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ (ಅಂದರೆ ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ) ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿತ್ತು. ಥೇಲ್ಸನ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಸಿದ್ಧರಾದ ಶಿಷ್ಯರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನೆಂದರೆ, ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ಪರಿಚಿತನಾಗಿರುವ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 572). ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಮತ್ತು ಅವನ ತಂಡದವರು ಅನೇಕ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿದರು. ಇದು 300BCE ವರೆಗೂ ಮುಂದುವರೆಯಿತು ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ, ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನ ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡ್ರಿಯಾದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕನಾಗಿದ್ದ ಯೂಕ್ಲಿಡನು ಈ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಕಾರ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ತನ್ನ ಪ್ರಸಿದ್ಧ 'ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್' ಎಂಬ ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿದನು. 'ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್'ನ್ನು ಅವನು 13 ಅಧ್ಯಾಯಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕವೆಂದು ಕರೆದನು. ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಪ್ರಭಾವದಿಂದ, ಇಡೀ ಜಗತ್ತಿನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯು ಮುಂದಿನ ತಲೆಮಾರುಗಳಿಗೆ ಸಿಗುವಂತಾಯಿತು.



ಥೇಲ್ಸ್ (Thales)
(640 BCE – 546 BCE)
ಚಿತ್ರ 2.2

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ (Euclid)
ಕ್ರಿ.ಪೂ 352 – ಕ್ರಿ.ಪೂ 265
ಚಿತ್ರ 2.3

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ, ಪ್ರಸ್ತುತ ರೇಖಾಗಣಿತದೊಂದಿಗೆ ಅದನ್ನು ಬೆಸೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

2.2 ಯೂಕ್ಲಿಡನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು, ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು

ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸಮಕಾಲೀನರಾಗಿದ್ದ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞರು, ರೇಖಾಗಣಿತವೆಂದರೆ ನಾವು ವಾಸಿಸುವ ಈ ಜಗತ್ತಿನ ಅಮೂರ್ತ ರೂಪ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದರು. ಬಿಂದು, ರೇಖೆ, ಸಮತಲ (ಮೇಲ್ಮೈ) ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಕಲ್ಪನೆಗಳು ತಮ್ಮ ಸುತ್ತ ಮುತ್ತಲಿನ ವೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದಲೇ ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿದ್ದವು (ಉಂಟಾಗಿದ್ದವು). ಅವರ ಸುತ್ತಮುತ್ತಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅವಕಾಶ ಮತ್ತು ಘನಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಿಂದ ಒಂದು ಘನ ವಸ್ತುವಿನ ಅಮೂರ್ತ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿದ್ದರು. ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಗೆ ಆಕಾರ, ಗಾತ್ರ, ಸ್ಥಾನಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ. ಅದರ ಸೀಮಾವಲಯಗಳನ್ನು ಮೇಲ್ಮೈಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳು ಅವಕಾಶದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದರಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ದಪ್ಪವಿಲ್ಲವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಮೇಲ್ಮೈಗಳ ಸೀಮಾರೇಖೆಯು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ವಕ್ರರೇಖೆಯಾಗಿರಬಹುದು. ಈ ರೇಖೆಗಳು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

ಘನಗಳಿಂದ ಬಿಂದುಗಳ ತನಕದ 3 ಹಂತಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ (ಘನಗಳು – ಮೇಲ್ಮೈಗಳು – ರೇಖೆಗಳು – ಬಿಂದುಗಳು). ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲಿ 'ಆಯಾಮ' ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಹರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಘನಕ್ಕೆ ಮೂರು, ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಎರಡು, ರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಆಯಾಮಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಬಿಂದುವಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಆಯಾಮವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನು ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು 'ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು' ಎಂದು ಸಾರಾಂಶೀಕರಿಸಿದನು. 23 ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 'ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್' ನ ಪುಸ್ತಕ I ರಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವ ಮೂಲಕ ಅವನು ತನ್ನ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಯನ್ನು ಆರಂಭಿಸಿದನು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ:

1. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಭಾಗವಿಲ್ಲ.
2. ಒಂದು ರೇಖೆ ಎಂದರೆ ಅಗಲರಹಿತ ಉದ್ದ.
3. ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಅಂತ್ಯಗಳು ಬಿಂದುಗಳು.
4. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಒಂದು ರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದು, ತನ್ನ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮನಾಗಿ ಹರಡಿಕೊಂಡಿದೆ.
5. ಒಂದು ಮೇಲ್ಮೈ ಎಂದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತವೆ.
6. ಒಂದು ಮೇಲ್ಮೈಯ ಬದಿಗಳು ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
7. ಒಂದು ಸಮತಲ ಮೇಲ್ಮೈಯು ಒಂದು ಮೇಲ್ಮೈಯಾಗಿದ್ದು, ತನ್ನ ಮೇಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮನಾಗಿ ಹರಡಿಕೊಂಡಿದೆ.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಎಚ್ಚರದಿಂದ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದರೆ, ಭಾಗ, ಅಗಲ, ಉದ್ದ, ಸಮನಾಗಿ ಇತ್ಯಾದಿ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಇನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬೇಕಿತ್ತು ಎಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬಿಂದುವನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ ಅವನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 'ಒಂದು ಭಾಗ'ವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ 'ಭಾಗ'ವನ್ನು ನೀವು 'ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವುದು' ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, ಪುನಃ 'ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ'ವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಅಂಶ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ ಇತರ ಅನೇಕ ಅಂಶಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು ಅವಶ್ಯವೆನಿಸಿ, ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳ ಕೊನೆ ಇಲ್ಲದ ಒಂದು ಸರಪಳಿಯೇ ಉಂಟಾಗಬಹುದು. ಇಂತಹ ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ ಕೆಲವೊಂದು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸದೆ ಬಿಡಲು ಗಣಿತವು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಬಗ್ಗೆ ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ 'ವ್ಯಾಖ್ಯೆ'ಗೆ ಹೊರತಾಗಿ ನಮಗೆ ನಮ್ಮದೇ ಆದ ಒಳನೋಟವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಕೆಲವೊಂದು ಆಯಾಮಗಳಿದ್ದರೂ, ನಾವದನ್ನು ಒಂದು ಚುಕ್ಕೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ 2ನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲೂ ಇಂತಹದೇ ಸಮಸ್ಯೆ ಉದ್ಭವವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳ ಉಲ್ಲೇಖವಿದೆ. ಆದರೆ ಯಾವೊಂದನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು

ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವೊಂದು ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸದೆ ಬಿಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಬಿಂದು, ಒಂದು ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮತಲ (ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ 'ಒಂದು ಸಮತಲ ಮೇಲ್ಮೈ') – ಇವುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸದ ಪದಗಳೆಂದು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಂಗತಿ ಎಂದರೆ, ಒಳನೋಟದ ಭಾವನೆಯಿಂದ ನಾವದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ 'ಭೌತಿಕ ಮಾದರಿ'ಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಅವನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಆರಂಭಗೊಂಡು, ಸಾಧಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲದ ಕೆಲವೊಂದು ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಊಹಿಸಿದನು. ಖಂಡಿತವಾಗಿ, ಈ ಊಹೆಗಳು 'ಸುಸ್ಪಷ್ಟ ವಿಶ್ವಮಾನ್ಯ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗಳು'. ಅವನು ಅವುಗಳನ್ನು 'ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು' ಮತ್ತು 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ'ಗಳು ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಧಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದನು. ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆಂದೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಪಡಿಸಿದ ಊಹೆಗಳಿಗೆ ಅವನು **'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ'ಗಳು** ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಬಳಸಿದನು. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸಂಬಂಧಿಸದೆ, ಗಣಿತದಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಉಪಯೋಗವಾಗುವ ಊಹೆಗಳನ್ನು **ಸಾಮಾನ್ಯ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗಳು** ಎಂದಿದ್ದಾನೆ. ಇವುಗಳನ್ನೇ **ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಕುರಿತು ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಅನುಬಂಧ 1ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅವನದೇ ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, **ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಕೆಲವು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು** ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

1. ಒಂದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.
2. ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಮೊತ್ತ (ಪೂರ್ಣ)ಗಳು ಸಮವಾಗುತ್ತವೆ.
3. ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳಿಂದ, ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಉಳಿದ ಭಾಗಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
4. ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.
5. ಪೂರ್ಣವು ಅದರ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು.
6. ಒಂದೇ ಅಂಶಗಳ ದುಪ್ಪಟ್ಟು ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.
7. ಒಂದೇ ಅಂಶಗಳ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.

ಈ 'ಸಾಮಾನ್ಯ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗಳು' ಒಂದು ರೀತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ ಮತ್ತು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಕೂಡಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಒಂದು ಆಯತಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ 4ನೇ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವು, ಏಕರೂಪವಾಗಿರುವ (ಅಂದರೆ ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುವ) ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳು ಸಮಾನ ಎಂದು ಹೇಳುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುವೂ ತನಗೆ ತಾನು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಉನ್ನತ ಸ್ಥಾನ (super position) ತತ್ವದ ಸಮರ್ಥನೆಯಾಗಿದೆ. 'ಅದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು' ಎಂಬುದರ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು 5ನೇ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ನಮಗೆ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪರಿಮಾಣ A ಯ ಒಂದು ಭಾಗವು ಪರಿಮಾಣ B ಆಗಿದ್ದರೆ, ಪರಿಮಾಣ A ಯನ್ನು ಪರಿಮಾಣ B ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು 3ನೆಯ ಪರಿಮಾಣ C ಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ, $A > B$ ಎಂದರೆ, $A = B + C$ ಆಗುವಂತೆ ಅಲ್ಲೊಂದು C ಇರುತ್ತದೆ.

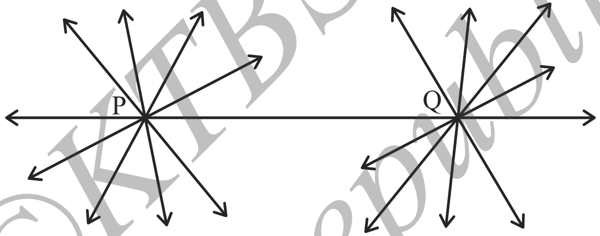
ಈಗ ನಾವು ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5 ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ,

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 1 : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

2 ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾದರೂ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ರೇಖೆಗಳು ಇರಬಾರದು ಎಂದು ಹೇಳುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಹೇಳದಿದ್ದರೂ, ತನ್ನ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಆಗಾಗ್ಗೆ ಊಹಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದ ರೂಪದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ 2.1 : ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ.

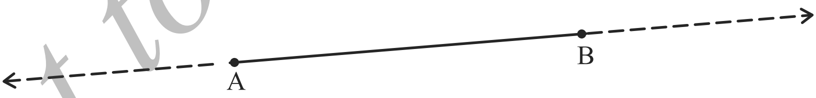
P ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎಷ್ಟು ರೇಖೆಗಳು Q ನ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತವೆ? (ಚಿತ್ರ 2.4 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ಒಂದೇ ಒಂದು. ಅಂದರೆ ಆ ರೇಖೆ PQ. ಅಂತೆಯೇ Q ನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎಷ್ಟು ರೇಖೆಗಳು Pಯ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತವೆ? ಒಂದೇ ಒಂದು. ಅಂದರೆ, ಆ ರೇಖೆ PQ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೇಳಿಕೆಯು ಸ್ವಸಾಕ್ಷ್ಯ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 2.4

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 2 : ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಂಡಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ನಾವಿಂದು ರೇಖಾಖಂಡವೆಂದು ಯಾವುದನ್ನು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆಯೋ, ಅದನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ರೇಖೆ ಎಂದಿದ್ದಾನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದುದರಿಂದ, ಪ್ರಸ್ತುತ ಬಳಕೆಯ ಪದಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ 2ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಹೇಳುವುದೇನೆಂದರೆ – ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವು ರೇಖೆಯಾಗುವಂತೆ, ಅದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲೂ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 2.5ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)



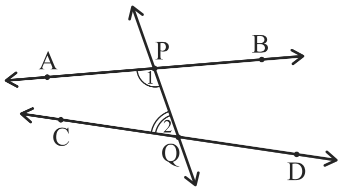
ಚಿತ್ರ 2.5

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3 : ಯಾವುದೇ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 4 : ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನಗಳೂ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 5 : ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂತಃಕೋನಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬಂದರೆ, ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಮೊತ್ತವು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬರುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೇ ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚಿತ್ರ 2.6 ರಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖೆಗಳನ್ನು PQ ರೇಖೆ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆಗ PQ ನ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳಾದ 1 ಮತ್ತು 2ರ ಮೊತ್ತವು 180° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖೆಗಳು PQ ನ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಡೆ ಸಂಧಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 2.6

ಈ ಐದು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಕಣ್ಣು ಹಾಯಿಸಿದಾಗ, 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಉಳಿದೆಲ್ಲಾ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಗಿಂತ ಸಂಕೀರ್ಣವಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದೆಡೆ, 1 ರಿಂದ 4 ರ ತನಕದ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಎಷ್ಟು ಸರಳವಾಗಿವೆ ಎಂದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ವ-ಸಾಕ್ಷಿಯುತ ಸತ್ಯಗಳೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹಾಗೆಂದು ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಸಾಧನೆಗಳಿಲ್ಲದೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. (ಅನುಬಂಧ 1 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.) ಐದನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಸಂಕೀರ್ಣತೆಯಿಂದಾಗಿ, ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅದರತ್ತ ಹೆಚ್ಚು ಗಮನ ಹರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇತ್ತೀಚಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ 'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ' ಮತ್ತು 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ' ಗಳೆಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿ ಮತ್ತು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ' ಎಂಬುದು ನೈಜತೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಯಾ ಪದವಾಗಿದೆ. 'ನಾವು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಮಾಡೋಣ' ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಅದರ ಅರ್ಥ, 'ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅವಲೋಕಿಸಿದ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ' ಎಂದು. ಅದರ ಸತ್ಯಾಸತ್ಯತೆ/ಸಿಂಧುತ್ವವನ್ನು ಆ ಬಳಿಕ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಅದು ಸತ್ಯವೆಂದಾದರೆ, ಅದೊಂದು 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ' ಎಂದು ಸ್ವೀಕಾರಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಈಗಾಗಲೇ ಸ್ವೀಕೃತವಾಗಿರುವ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವನ್ನು ಅಥವಾ ಸಾಧಿತವಾಗಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿರೋಧಿಸುವಂತಹ ಯಾವುದೇ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಸುಸ್ಥಿರ (consistent) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳ ಪ್ರಕ್ರಮ (ಪದ್ಧತಿ) ಯನ್ನು ಕೊಡುವಾಗ, ಅದು ಸುಸ್ಥಿರವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ ಬಳಿಕ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಇತರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಾಧನೆಗಾಗಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡನು. ಆ ಬಳಿಕ ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ನಿಗಮನ ತರ್ಕದ ಮೂಲಕ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದನು. ಹೀಗೆ ಸಾಧಿಸಿದ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ತಾರ್ಕಿತ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ 465 ತಾರ್ಕಿಕ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದನು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅವನು ಇದೇ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಮೊದಲು ಸಾಧಿಸಿದ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು, ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು, ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡನು. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ, ಕೆಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನೀವು ಈ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಿರುವಿರಿ.

ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತನ್ನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಳಸಿಕೊಂಡನು ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ ಮತ್ತು B ಯು A ಮತ್ತು C ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದಾದರೆ (ಚಿತ್ರ 2.7ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ), AB + BC = AC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಚಿತ್ರ 2.7

ಪರಿಹಾರ : ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB + BC ಯಲ್ಲಿ AC ಯು ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

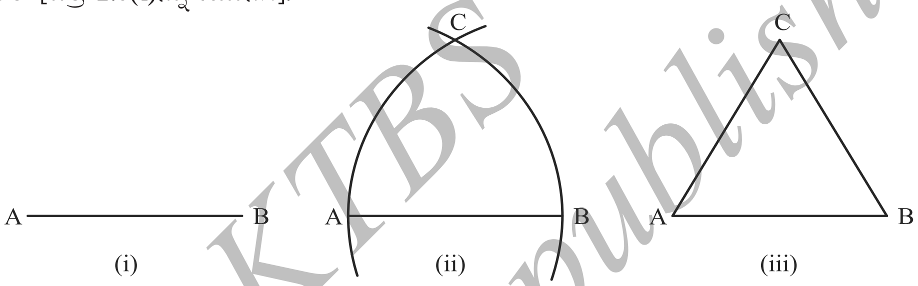
ಅಲ್ಲದೆ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 4ನೆಯ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದ ಪ್ರಕಾರ, ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಹೀಗೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

$$AB + BC = AC$$

ಈ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡದಿಂದ ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ AB ಯು ಯಾವುದೇ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಆಗಿರಲಿ [ಚಿತ್ರ 2.8(i)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ].



ಚಿತ್ರ 2.8

ಇಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಲವು ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 3ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, A ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವೆಂದೂ, AB ಯನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವೆಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೀವು ಬಿಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು [ಚಿತ್ರ 2.8 (ii)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ]. ಅದೇ ರೀತಿ B ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿ, BA ಯನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಸಿ, ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವು C ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ ΔABC ಉಂಟಾಗುವಂತೆ AC ಮತ್ತು BC ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ [ಚಿತ್ರ 2.8 (iii)ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ].

ನೀವೀಗ, ಇದೊಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ, AB = AC = BC.

ಈಗ, AB = AC ಯಾಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು .... (i)

ಅದೇ ರೀತಿ, AB = BC (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು) .... (ii)

ಈ ಎರಡು ನೈಜಾಂಶಗಳಿಂದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾನ ಎಂಬ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದಿಂದ, AB = BC = AC ಎಂದು ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ΔABC ಯು ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗೆಂದು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಹೇಳದಿದ್ದರೂ, A ಮತ್ತು B ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಊಹಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೀವಿಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ.

ನಾವೀಗ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಆಗಾಗ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 2.1 : ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ : ನಮಗಿಲ್ಲಿ l ಮತ್ತು m ಎಂಬ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವೆರಡರಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಇದೆ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಸ್ತುತ, ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ಊಹಿಸೋಣ. ಹಾಗಾದರೆ, P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಈ ಕಲ್ಪನೆಯು, ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಹಾದುಹೋಗಬಹುದು ಎಂದು ನಾವು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಊಹಿಸಿರುವುದು ತಪ್ಪಾಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ ನಾವು ಏನನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು? ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲೇ ಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸತ್ಯ ಮತ್ತು ಯಾವುದು ಸುಳ್ಳು? ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾರಣಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿ.

   (i) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಹಾದು ಹೋಗಬಹುದು.

   (ii) ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಅಪರಿಮಿತ ರೇಖೆಗಳು ಹಾದುಹೋಗುತ್ತವೆ.

   (iii) ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಂಡಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು.

   (iv) ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸಮ ಎಂದಾದರೆ, ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೂ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

   (v) ಚಿತ್ರ 2.9ರಲ್ಲಿ, AB = PQ ಮತ್ತು PQ = XY ಎಂದಾದರೆ, AB = XY ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 2.9

2. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದಕ್ಕೂ ಒಂದೊಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಮೊದಲು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆಯೆ? ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳು ಯಾವುವು? ನೀವು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವಿರಿ?

   (i) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು (ii) ಲಂಬರೇಖೆಗಳು

   (iii) ರೇಖಾಖಂಡ (iv) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ

   (v) ಚೌಕ

3. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಎರಡು 'ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು' ಗಮನಿಸಿ.

   (i) A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ, ಅವುಗಳ ನಡುವೆ C ಎಂಬ 3ನೆಯ ಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ.

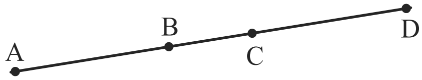
   (ii) ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದಿರುವ ಕನಿಷ್ಠ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾದರೂ ಇರುತ್ತವೆ.

ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸದಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಪದಗಳಿವೆಯೆ? ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಸುಸ್ಥಿರವೆ? ಅವುಗಳು ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆಯೆ? ವಿವರಿಸಿ.

4. AC = BC ಆಗುವಂತೆ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ C ಎಂಬ ಬಿಂದು ಇರುವುದಾದರೆ, $AC = \frac{1}{2}AB$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಿ.

5. 4ನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ C ಬಿಂದುವನ್ನು ರೇಖಾಖಂಡ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೂ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. ಚಿತ್ರ 2.10 ರಲ್ಲಿ, AC = BD ಆದರೆ AB = CD ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.10

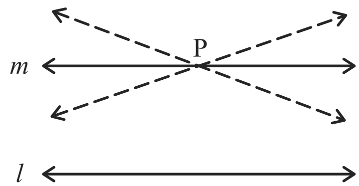
7. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ, 5ನೆಯ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವನ್ನು 'ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸತ್ಯ' ಎಂದು ಏಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ? (ಪ್ರಶ್ನೆಯು 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.)

2.3. ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಸಮಾನ ರೂಪಾಂತರಗಳು

ಗಣಿತದ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಅತ್ಯಂತ ಮಹತ್ತರವಾದುದು. 2.2ನೆಯ ವಿಭಾಗದಿಂದ ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ಅದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಅದನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ 'ಪತನ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಂತಃಕೋನಗಳ ಅಳತೆಯ ಮೊತ್ತವು ಸರಿಯಾಗಿ 180° ಆದರೆ, ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನವು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ' ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗೆ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಆಯಾಮಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳಿಕೆ ಇರುವ, 'ಪ್ಲೇಫೇರ್‌ನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ'. (ಸ್ಕಾಟ್ಲೆಂಡ್‌ನ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಜಾನ್ ಪ್ಲೇಫೇರ್‌ನು 1729 ರಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾನೆ.)

'ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖೆ l ಗೆ ಮತ್ತು l ನ ಮೇಲಿರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು P ಗೆ, l ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ, P ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ m ಎಂಬ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ.'

ಚಿತ್ರ 2.11 ರಿಂದ, P ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ, m ಮಾತ್ರ l ಗೆ ಸಮಾಂತರ ಎಂದು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು.

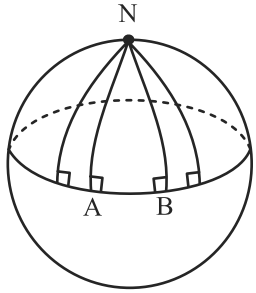


ಚಿತ್ರ 2.11

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಮತ್ತು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ಗೆ ತನ್ನ ಮೊದಲ 28 ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಅವನ ಐದನೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಉಂಟಾಗಲಿಲ್ಲ. 5ನೆಯ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಇತರ 4 ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸಬಹುದಾದ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು, ಅವನನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ, ಅನೇಕ ಗಣಿತಜ್ಞರು ತಿಳಿದಿದ್ದರು. ಹೀಗಿದ್ದರೂ, 5ನೆಯ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಲು ನಡೆದ ಪ್ರಯತ್ನಗಳೆಲ್ಲಾ ವಿಫಲವಾದವು. ಆದರೆ ಈ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಾಧನೆ ಎಂದರೆ ಇತರ ಅನೇಕ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳ ಸೃಜನೆ. ಈ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳು ಯೂಕ್ಲಿಡನ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕಿಂತ ತುಂಬಾ ಭಿನ್ನವಾಗಿದ್ದವು. ಅವುಗಳನ್ನು 'ಯೂಕ್ಲಿಡೇತರ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳು' (non-Euclidean geometries) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳ ಸೃಜನೆಯು ಜ್ಞಾನದ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲೇ ಒಂದು ಮೈಲಿಗಲ್ಲು. ಏಕೆಂದರೆ ಅಲ್ಲಿಯ ತನಕ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ, ರೇಖಾಗಣಿತವೆಂದರೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನದು ಮಾತ್ರ, ಈ ಜಗತ್ತೇ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ಮಯ ಎಂದು ನಂಬಿದ್ದರು. ಈಗ, ನಾವು ವಾಸಿಸುತ್ತಿರುವ ವಿಶ್ವದ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಯೂಕ್ಲಿಡೇತರವಾದುದು ಎಂದು ಕಂಡುಬಂದಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 2.12

ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ಇದನ್ನು "ಗೋಲಾಕಾರದ ರೇಖಾಗಣಿತ" ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಗೋಲಾಕಾರದ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಗಳು ನೇರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅವು ಮಹತ್ತರ ವೃತ್ತಗಳ (ಅಂದರೆ ಗೋಲ ಮತ್ತು ಗೋಲದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ವೃತ್ತಗಳ) ಭಾಗಗಳು.

ಚಿತ್ರ 2.12 ರಲ್ಲಿ AN ಮತ್ತು BN ರೇಖೆಗಳು (ಇವುಗಳು ಗೋಲದ ಮಹತ್ತರ ವೃತ್ತದ ಭಾಗಗಳು) AB ಎಂಬ ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. AB ಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 2 ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, AN ಮತ್ತು BN ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. (ವಾಸ್ತವಾಗಿ ಅದು $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.) ಇದೇ ಅಲ್ಲದೆ, ತ್ರಿಭುಜ NAB ಯ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಯಾಕೆಂದರೆ $\angle A + \angle B = 180^\circ$. ಹೀಗೆ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ರೇಖಾಗಣಿತ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿ ಅದು ವಿಫಲವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ,

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಈ ಮುಂದಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ: ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಪರಿಣಾಮವೇ? ವಿವರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಯಾವುದಾದರೊಂದು ರೇಖೆ l ಮತ್ತು ಆ l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರದ ಒಂದು ಬಿಂದು P ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ, 5ನೆಯ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ, ಪ್ಲೇಫೇರ್‌ನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧದ ಪ್ರಕಾರ, l ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ, P ಯ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ m ಇರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಒಂದು ರೇಖೆಯಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ ಎಂದರೆ, ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ. l ನಿಂದ m ನ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು m ನಿಂದ l ನ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಈ ದೂರವು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಗಮನಿಸಿ : ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿಯುವ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಯೂಕ್ಲಿಡನ ರೇಖಾಗಣಿತ. ಆದರೆ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿರಲೂಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸುಲಭವಾಗುವಂತೆ, ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯುವಿರಿ?
2. ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿರುವುದನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುತ್ತದೆಯೆ? ವಿವರಿಸಿ.

2.4 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ:

1. ಯೂಕ್ಲಿಡನು ಒಂದು ಬಿಂದು, ಒಂದು ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮತಲಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೂ ಕೂಡಾ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪದಗಳನ್ನು ಈಗ 'ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗದ್ದು' ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.
2. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಅಥವಾ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳೆಂಬ ಊಹೆಗಳು, ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸತ್ಯಗಳು. ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಿಲ್ಲ.
3. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು, ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು, ಹಿಂದೆ ಸಾಧಿಸಿದ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ನಿಗಮನ ತರ್ಕ ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸಿದಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
4. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹೀಗಿವೆ:
   (i) ಒಂದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.
   (ii) ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಮೊತ್ತ (ಪೂರ್ಣ)ಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
   (iii) ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಳೆದಾಗ, ಉಳಿದ ಭಾಗಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
   (iv) ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.
   (v) ಪೂರ್ಣವು ಅದರ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು.
   (vi) ಒಂದೇ ಅಂಶಗಳ ದುಪ್ಪಟ್ಟು ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.
   (vii) ಒಂದೇ ಅಂಶಗಳ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ.
5. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳೆಂದರೆ:
   ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 1 : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.
   ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 2 : ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಂಡ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು.
   ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3 : ಯಾವುದೇ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.
   ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 4 : ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನಗಳೂ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 5 : ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಉಂಟಾದರೆ, ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮೊತ್ತವು ಬರುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೇ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

6. ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಎರಡು ಸಮಾನ ರೂಪಗಳು

   (i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖೆ l ಗೆ ಮತ್ತು l ನ ಮೇಲಿರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು P ಗೆ, l ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ, P ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ m ಎಂಬ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ.

   (ii) ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಮತ್ತು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

7. ಮೊದಲ 4 ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಯತ್ನಗಳೂ ವಿಫಲವಾದವು. ಆದರೆ ಇದು ಯೂಕ್ಲಿಡೇತರ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳೆಂಬ ಇತರ ಅನೇಕ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆಗಳಿಗೆ ದಾರಿಯಾಯಿತು.

ಅಧ್ಯಾಯ – 3

ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು

3.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ ಎಂದು ಘಟಕ 2 ರಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಕೆಲವು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕೆಲವು ಬೇರೆ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಎರಡು ಅಥವಾ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವಿರಿ. ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಿಗಮನ ತರ್ಕದಿಂದ ಸಾಧಿಸಲು ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿರಿ (ಅನುಬಂಧ 1ನ್ನು ನೋಡಿ). ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಈ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರಿ.

ನಿಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಸಮತಲಗಳ ಅಂಚುಗಳ ನಡುವೆ ಉಂಟಾಗುವ ವಿವಿಧ ಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡುವಿರಿ. ಸಮತಲಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಅದೇ ರೀತಿಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಕೋನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮಗೆ ಆಳವಾದ ಜ್ಞಾನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಿಮ್ಮ "ಶಾಲಾ ವಸ್ತು ಪ್ರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ" ನೀವು ಬಿದಿರಿನ ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಗುಡಿಸಲಿನ ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವಿರಿ? ಊಹಿಸಿ. ಅದನ್ನು ತಯಾರಿಸುವಾಗ ಕೆಲವು ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಓರೆಯಾಗಿ ಜೋಡಿಸುವಿರಿ. ಒಬ್ಬ ವಾಸ್ತುಶಿಲ್ಪಿಯು ಒಂದು ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡಕ್ಕೆ ನಕಾಶೆ ರಚಿಸುವಾಗ ಅವರು ವಿಭಿನ್ನ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳನ್ನು, ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುತ್ತಾರೆ. ರೇಖೆಗಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಜ್ಞಾನವಿಲ್ಲದೆ, ಅವರು ಮಹಡಿಯ ನಕಾಶೆ ರಚಿಸಬಹುದೇ? ಯೋಚಿಸಿ.

ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಬೆಳಕಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲು ನೀವು ಕೆಲವು ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬೆಳಕು ಒಂದು ಮಾಧ್ಯಮದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಮಾಧ್ಯಮಕ್ಕೆ ಚಲಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ವಕ್ರೀಭವನ ಗುಣವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲು, ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನೀವು ಬಳಸುವಿರಿ. ಒಂದು ಕಾಯದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬಲಗಳು ಪ್ರಯೋಗವಾದಾಗ, ಪರಿಣಾಮಾತ್ಮಕ ಬಲವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಬಲಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸುವ ಚಿತ್ರ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದಾಗ ಅಥವಾ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವು ನಿಮಗೆ ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಅಥವಾ ಲೈಟ್ ಹೌಸ್‌ನಿಂದ ಹಡಗಿಗೆ ಇರುವ ದೂರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಅಡ್ಡರೇಖೆ ಮತ್ತು ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ನಡುವೆ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದಿರಬೇಕು. ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರುವ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮತ್ತು

ಕೋನಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಮತ್ತಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯುಕ್ತ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವಿರಿ.

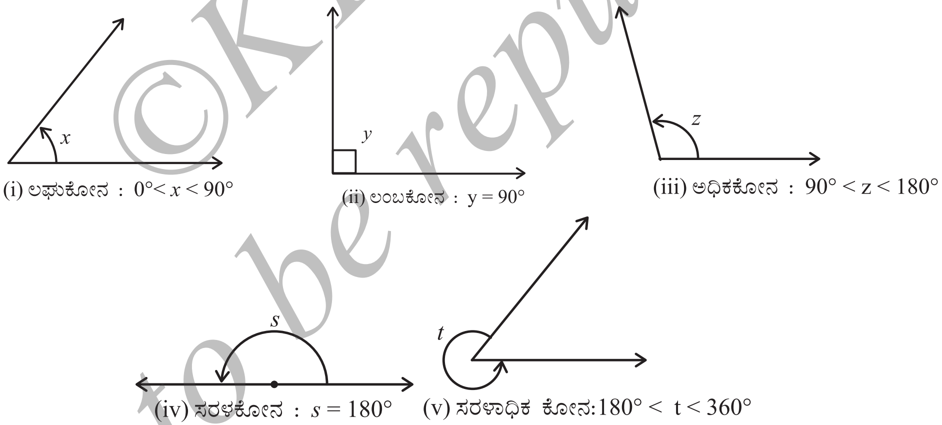
ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಕೆಲವು ಪದಗಳು ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

3.2 ಮೂಲಪದಗಳು ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು

ಎರಡು ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ರೇಖಾಖಂಡ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಕಿರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ರೇಖಾಖಂಡ AB ಯನ್ನು $\overline{AB}$ ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದವನ್ನು AB ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕಿರಣ AB ಯನ್ನು $\overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು $\overleftrightarrow{AB}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗಿದ್ದರೂ ಸಹ ಈ ರೀತಿಯಾದ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ರೇಖಾಖಂಡ AB, ಕಿರಣ AB, ಸರಳರೇಖೆ AB ಮತ್ತು AB ಯ ಉದ್ದ ಇವುಗಳನ್ನು AB ಎಂದೇ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಆಂಗ್ಲಭಾಷೆಯ ಚಿಕ್ಕ ಅಕ್ಷರಗಳಾದ l, m, n ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೂರು ಅಥವಾ ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಏಕರೇಖಾಗತ ಬಿಂದುಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲವಾದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

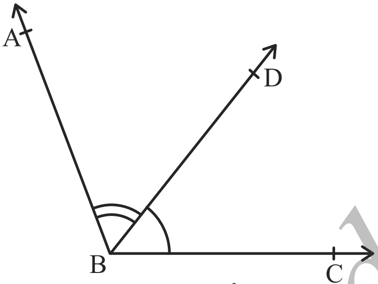
ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಟ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳಿಂದ ಕೋನ ಉಂಟಾಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ .ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕಿರಣಗಳನ್ನು ಕೋನದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕೋನದ ಶೃಂಗ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವಿವಿಧ ಕೋನಗಳಾದ ಲಘುಕೋನ, ಲಂಬಕೋನ, ಅಧಿಕ ಕೋನ, ಸರಳಕೋನ ಮತ್ತು ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ (ಚಿತ್ರ 3.1ನ್ನು ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ : 3.1 ಕೋನದ ವಿಧಗಳು

ಲಘುಕೋನದ ಅಳತೆಯು 0° ಮತ್ತು 90° ಯ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಲಂಬಕೋನದ ಅಳತೆಯು ಸರಿಯಾಗಿ 90°ಗೆ ಸಮವಿರುತ್ತದೆ. 90° ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು 180° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಳತೆಯಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಅಧಿಕಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ 180° ಗೆ ಸಮವಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಸರಳಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 180° ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದರೆ 360° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಳತೆಯಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಸರಳಾಧಿಕ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 90° ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಇದ್ದರೆ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

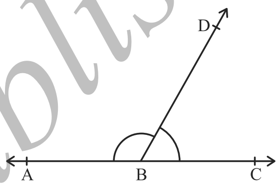
ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಸಹ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ (ಚಿತ್ರ 3.2 ನೋಡಿ). ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಶೃಂಗ, ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯವಲ್ಲದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವಿನ ವಿವಿಧ ಕಡೆ ಇದ್ದಾಗ ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 3.2ರಲ್ಲಿ $\angle ABC$ ಮತ್ತು $\angle ABD$ ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳು. ಕಿರಣ BD ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು, B ಸಾಮಾನ್ಯ ಶೃಂಗ, ಕಿರಣ AB ಮತ್ತು ಕಿರಣ BC ಸಾಮಾನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳಾಗಿವೆ. ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಯಾವಾಗಲೂ ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$.



3.2 ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು

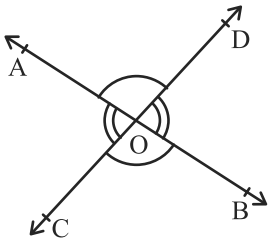
ಗಮನಿಸಿ : $\angle ABC$ ಮತ್ತು $\angle ABD$ ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳಲ್ಲ. ಏಕೆ? ಏಕೆಂದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳಾದ BD ಮತ್ತು BC ಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು BA ನ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿದೆ.

ಚಿತ್ರ 3.2 ರಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳಾದ BA ಮತ್ತು BC ಗಳು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದಾಗ ಚಿತ್ರ 3.3 ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆಗ $\angle ABD$ ಮತ್ತು $\angle DBC$ ಗಳನ್ನು ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 3.3 ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳು

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಚಿತ್ರ 3.4 ರಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಸರಳರೇಖೆಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. ಎರಡು ಜೊತೆ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 3.4 ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು

$\angle AOD$ ಮತ್ತು $\angle BOC$ ಒಂದು ಜೊತೆಯಾದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆಯನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಾ?

3.3 ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಛೇದಿಸದ ರೇಖೆಗಳು

ಒಂದು ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ PQ ಮತ್ತು RS ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಚಿತ್ರ 3.5(i) ಮತ್ತು 3.5 (ii) ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಎರಡೂ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

(i) ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು (ii) ಛೇದಿಸದ (ಸಮಾಂತರ) ರೇಖೆಗಳು

ಚಿತ್ರ 3.5: ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು

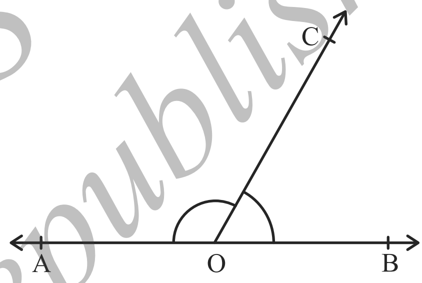
ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ ಅನಂತ ದೂರದವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದ PQ ಮತ್ತು RS ಚಿತ್ರ 3.5(i) ರಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 3.5(ii) ರಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಈ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬದೂರವು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಸಮವಾಗಿರುವ ಲಂಬದೂರವನ್ನು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3.4. ಜೋಡಿ ಕೋನಗಳು

ಪೂರಕ ಕೋನಗಳು, ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳು, ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು, ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳು ಮುಂತಾದುವುಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು 3.2ರಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತಿದ್ದೀರ. ಈ ಕೋನಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೀವು ಯೋಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಿರಣವು ನಿಂತಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಈಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಚಿತ್ರ 3.6 ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಿರಣ ನಿಂತಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಚಿತ್ರ ಬರೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ. 3.6 ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳು

ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು AB ಮತ್ತು ಕಿರಣವನ್ನು OC ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ. O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಯಾವುವು? ಅವು $\angle AOC$, $\angle BOC$ ಮತ್ತು $\angle AOB$.

$\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದೇ? (1)

ಹೌದು! (ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು. ಭಾಗ 3.2 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)

$\angle AOB$ ಯ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು? ಅದು 180°. (ಏಕೆ?) (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ? ಹೌದು! (ಏಕೆ?)

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

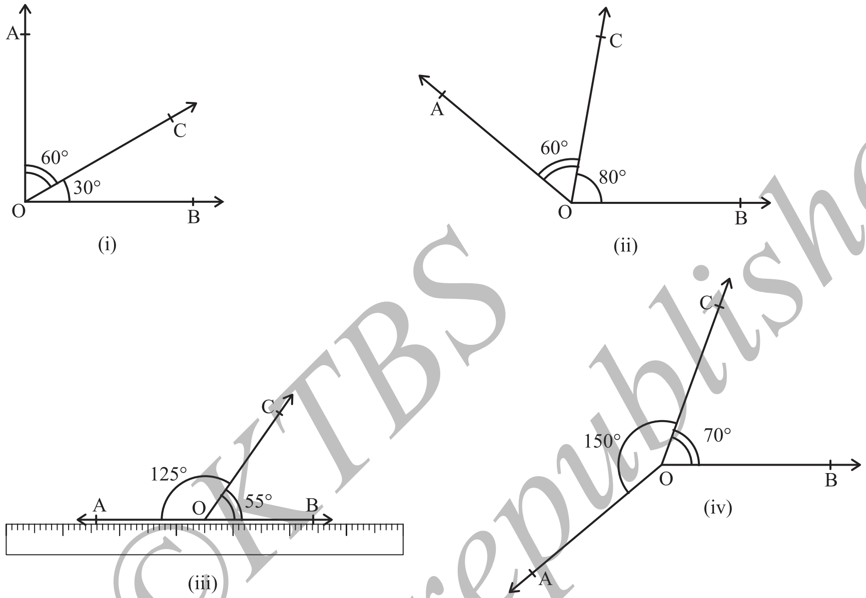
ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3.1: ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಿರಣವು ನಿಂತಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°.

ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆದಾಗ ಅವು **ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳು** ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

'ಒಂದು ಕಿರಣವು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ' ಎಂದು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3.1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಉಂಟಾದ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದೆವು. ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3.1 ನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೇ? ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3.1 ರ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು 'ದತ್ತ' ಎಂದೂ ಮತ್ತು 'ದತ್ತ' ವನ್ನು 'ತೀರ್ಮಾನ' ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಆಗ ಹೇಳಿಕೆಯು ಈ ರೀತಿಯಾಗುತ್ತದೆ:

(A) ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆದಾಗ, ಒಂದು ಕಿರಣವು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುತ್ತದೆ. (ಅಂದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3.1 ಮತ್ತು ಹೇಳಿಕೆ (ಉಕ್ತಿ) (A) ಪರಸ್ಪರ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉಕ್ತಿ(A) ಸರಿಯಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ಚಿತ್ರ 3.7 ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಗಳುಳ್ಳ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ನೇರಕ್ಕೆ ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಇಡಿ. ಇನ್ನೊಂದು ಸಾಮಾನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಾಹುವೂ ಸಹ ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯ ನೇರಕ್ಕೆ ಇರುವುದೇ?



ಚಿತ್ರ : 3.7 ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳುಳ್ಳ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳು

ಚಿತ್ರ : 3.7(III) ರಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸಾಮಾನ್ಯವಲ್ಲದ ಎರಡೂ ಬಾಹುಗಳು ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯ ನೇರಕ್ಕೆ ಇವೆ. ಅಂದರೆ A, O ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇವೆ ಮತ್ತು OC ಕಿರಣವು ಅದರ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ. $\angle AOC + \angle COB = 125° + 55° = 180°$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಸಹ ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಉಕ್ತಿ(A) ಸರಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

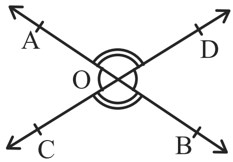
ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3.2 : ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆದರೆ, ಆ ಕೋನಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಈ ಸ್ಪಷ್ಟ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಈ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ "**ಸರಳಯುಗ್ಮ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು**" ಎನ್ನುವರು.

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ. ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸೋಣ. ಸಾಧಿಸಲು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅನುಬಂಧ (1) ರಲ್ಲಿ ನೋಡಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 3.1 : "ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ".

ಸಾಧನೆ : ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ 'ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ' ಎಂದು ನೀಡಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಚಿತ್ರ 3.8 ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ AB ಮತ್ತು CD ಸರಳರೇಖೆಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ ಎಂದಾಗಲಿ. ಇದರಿಂದ ಎರಡು ಜೊತೆ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗಿವೆ. ಅವು (i) $\angle AOC$ ಮತ್ತು $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ ಮತ್ತು $\angle BOC$. $\angle AOC = \angle BOD$ ಮತ್ತು $\angle AOD = \angle BOC$ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.8 ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖಕೋನಗಳು

OA ಕಿರಣವು CD ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ $\angle AOC + \angle AOD = 180^\circ$ (ಸರಳಯುಗ್ಮ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ) (1)

$\angle AOD + \angle BOD = 180^\circ$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದೇ? ಹೌದು ! (ಏಕೆ?) (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು.

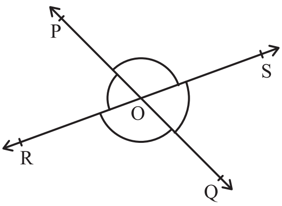
ಆದುದರಿಂದ $\angle AOC = \angle BOD$ (ಭಾಗ 2.2 ರ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಅದೇ ರೀತಿ $\angle AOD = \angle BOC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಈಗ ಸರಳಯುಗ್ಮ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 3.1 ರ ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : PQ ಮತ್ತು RS ಸರಳರೇಖೆಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ.

$\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ ಆದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 3.9

ಪರಿಹಾರ : $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$ (ಸರಳಯುಗ್ಮ ಕೋನಗಳು)

ಆದರೆ $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ (ದತ್ತ)

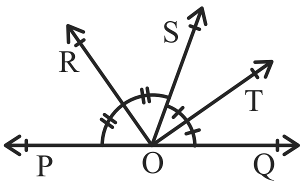
ಆದುದರಿಂದ $\angle POR = \dfrac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ$

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\angle ROQ = \dfrac{7}{12} \times 180^\circ = 105^\circ$

ಈಗ $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಚಿತ್ರ 3.10 ಯಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆ POQ ಮೇಲೆ ಕಿರಣ OS ನಿಂತಿದೆ. ಕಿರಣ OR ಮತ್ತು ಕಿರಣ OT ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle$ POS ಮತ್ತು $\angle$ SOQ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು. $\angle$ POS = x ಆದರೆ $\angle$ ROT ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ : 3.10

ಪರಿಹಾರ: OS ಕಿರಣವು POQ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ

ಆದುದರಿಂದ $\angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$

ಆದರೆ $\angle POS = x$

ಆದುದರಿಂದ $x + \angle SOQ = 180^\circ$

$\angle SOQ = 180^\circ - x$

ಈಗ OR ಕಿರಣ $\angle$ POS ನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ

$$\angle ROS = \frac{1}{2} \angle POS$$
$$= \frac{1}{2} \times x$$
$$= \frac{x}{2}$$

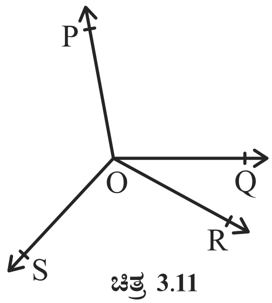
ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - x)$$
$$= 90^\circ - \frac{x}{2}$$

$$\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$$
$$= \frac{x}{2} + 90^\circ - \frac{x}{2}$$
$$= 90^\circ$$

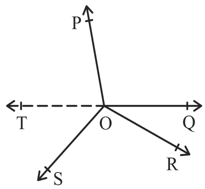
ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಚಿತ್ರ 3.11 ರಲ್ಲಿ OP, OQ, OR, ಮತ್ತು OS ನಾಲ್ಕು ಕಿರಣಗಳಾಗಿವೆ.

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 3.11

ಪರಿಹಾರ : ಚಿತ್ರ 3.11 ರಲ್ಲಿರುವ ಕಿರಣಗಳಾದ OP, OQ, OR, ಅಥವಾ OS ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. OQ ಕಿರಣ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಾಗುವಂತೆ T ವರೆಗೆ ಹಿಂದಿಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಸೋಣ. (ಚಿತ್ರ 3.12 ನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 3.12

ಈಗ ಕಿರಣ OP ಯು ಸರಳರೇಖೆ TOQ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ $\angle TOP + \angle POQ = 180^\circ$ (1) (ಸರಳಯುಗ್ಮ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ)

ಅದೇ ರೀತಿ ಕಿರಣ OS ಸರಳರೇಖೆ TOQ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ $\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ (2)

ಆದರೆ $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^\circ$ (3)

ಈಗ (1) ಮತ್ತು (3) ಕೂಡಿದಾಗ

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ$ (4)

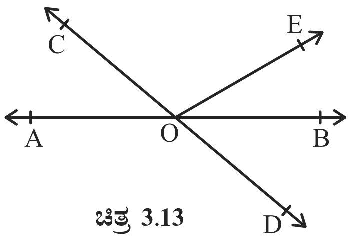
ಆದರೆ $\angle TOP + \angle TOS = \angle POQ$

ಸಮೀಕರಣ (4) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$

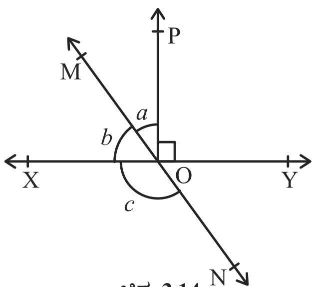
ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1) ಚಿತ್ರ 3.13 ರಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಸರಳರೇಖೆಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ ಮತ್ತು $\angle BOD = 40^\circ$ ಆದರೆ $\angle BOE$ ಮತ್ತು ಸರಳಾಧಿಕ $\angle COE$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



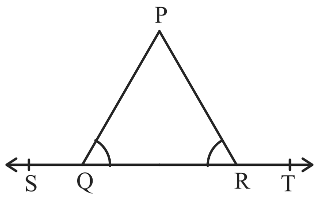
ಚಿತ್ರ 3.13

2) ಚಿತ್ರ 3.14 ರಲ್ಲಿ XY ಮತ್ತು MN ಸರಳರೇಖೆಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. $\angle POY = 90^\circ$ ಮತ್ತು $a : b = 2 : 3$ ಆದರೆ c ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

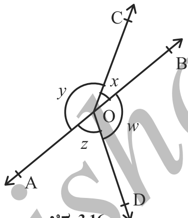


ಚಿತ್ರ 3.14

3) ಚಿತ್ರ 3.15 ರಲ್ಲಿ $\angle PQR = \angle PRQ$ ಆದರೆ $\angle PQS = \angle PRT$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 3.15

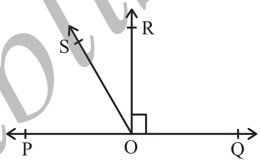


4) ಚಿತ್ರ 3.16 ರಲ್ಲಿ $x + y = w + z$ ಆದರೆ AOB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಚಿತ್ರ 3.16

5) ಚಿತ್ರ 3.17 ರಲ್ಲಿ POQ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ OR ಕಿರಣವು PQ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. OP ಮತ್ತು OR ಕಿರಣಗಳ ನಡುವೆ OS ಕಿರಣ ಇದೆ.

$\angle ROS = \frac{1}{2}$ $(\angle QOS - \angle POS)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



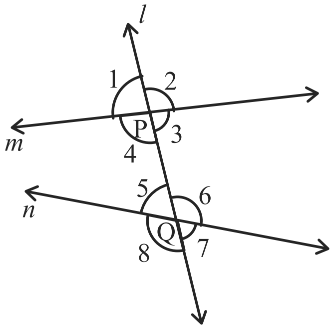
ಚಿತ್ರ 3.17

6) $\angle XYZ = 64^\circ$ ಮತ್ತು XY ಯನ್ನು P ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. ಈ ದತ್ತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ. $\angle ZYP$ ಯನ್ನು ಕಿರಣ YQ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, $\angle XYQ$ ಮತ್ತು ಸರಳಾಧಿಕ $\angle QYP$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.5 ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಛೇದಕ

ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ಛೇದಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ (ಚಿತ್ರ 3.18 ನೋಡಿ). l ರೇಖೆಯು m ಮತ್ತು n ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆದುದರಿಂದ m ಮತ್ತು n ರೇಖೆಗಳ ಛೇದಕ l ಆಗಿದೆ.

P ಮತ್ತು Q ನ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 3.18

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪ್ರತಿ ಕೋನವನ್ನು $\angle 1, \angle 2, ... \angle 8$ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸೋಣ.

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ ಮತ್ತು $\angle 8$ ಇವುಗಳನ್ನು **ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳೆಂದು**, $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ ಮತ್ತು $\angle 6$ ನ್ನು **ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೆಲವು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಸರಿಸಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ ಅವು ಮುಂದಿನಂತಿವೆ.

a) ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು :

(i) $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ ಮತ್ತು $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 7$

b) ಪರ್ಯಾಯ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು :

(i) $\angle 4$ ಮತ್ತು $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 5$

c) ಪರ್ಯಾಯ ಬಹಿರ್ ಕೋನಗಳು :

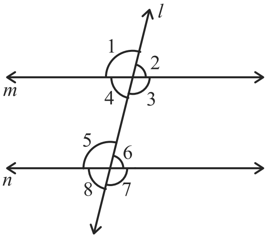
(i) $\angle 1$ ಮತ್ತು $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 8$

d) ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು

(i) $\angle 4$ ಮತ್ತು $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ ಮತ್ತು $\angle 6$

ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳನ್ನು **ಕ್ರಮಾನುಗತ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು** ಅಥವಾ **ಮೈತ್ರಿ ಕೋನಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಬಹಳಷ್ಟು ಬಾರಿ ಪರ್ಯಾಯ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸುವಾಗ, ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳೆಂದೇ ಹೆಸರಿಸುತ್ತೇವೆ.

m ರೇಖೆಯು *n* ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದಾಗ ಈ ಮೇಲಿನ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಬರೆಯುವ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರ. ಚಿತ್ರ 3.19 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಬಳಸಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಒಂದು ಛೇದಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 3.19

ಈಗ, ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

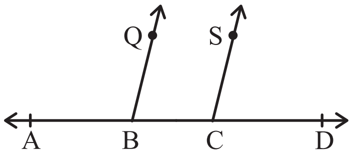
$\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$ ಮತ್ತು $\angle 3 = \angle 7$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3.3 : ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕವು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

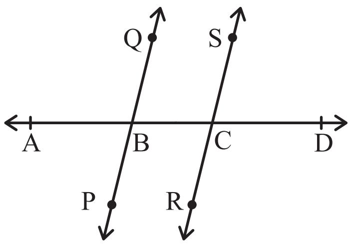
ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3.3 ನ್ನು "**ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ**" ಎಂದೂ ಸಹ ಕರೆಯುವರು. ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಅದು ಮುಂದಿನಂತಿದೆ.

"ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಿದ್ದಾಗ, ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ".

ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸರಿಯೇ? ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. AD ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರ ಮೇಲೆ B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ. ಚಿತ್ರ 3.20 (i) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $\angle ABQ$ ಗೆ $\angle BCS$ ಸಮವಿರುವಂತೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



(i)



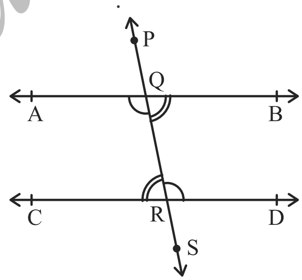
(ii)

ಚಿತ್ರ 3.20

QB ಮತ್ತು SC ಯನ್ನು AD ಯ ಮತ್ತೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಸಿ PQ ಮತ್ತು SR ಪಡೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 3.20(ii) ನೋಡಿ). ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸದಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. PQ ಮತ್ತು RS ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಉದ್ದವು ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವಿರಿ. ಆದುದರಿಂದ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯ. ಆದುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯಿದೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 3.4 : ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಿದ್ದಾಗ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ, ಪರ್ಯಾಯ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅನುರೂಪಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಬಹುದೇ? ಚಿತ್ರ 3.21 ರಲ್ಲಿ PS ಛೇದಕವು AB ಮತ್ತು CD ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.21

$\angle BQR = \angle QRC$ ಮತ್ತು $\angle AQR = \angle QRD$ ಆಗುತ್ತದೆಯೇ?

$\angle PQA = \angle QRC$ (1) ತಿಳಿದಿದೆ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ)

$\angle PQA = \angle BQR$ ಆಗುತ್ತದೆಯೇ? ಹೌದು! (ಏಕೆ?) .... (2)

ಆದುದರಿಂದ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ನೀವು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು

$$\angle BQR = \angle QRC$$

ಅದೇ ರೀತಿ $\angle AQR = \angle QRD$

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಅದು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.

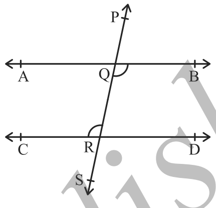
ಪ್ರಮೇಯ 3.2 : ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕವು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಬಳಸಿ, ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತೋರಿಸಬಹುದೇ? ಚಿತ್ರ 3.22 ರಲ್ಲಿ $\angle BQR = \angle QRC$ ಆಗುವಂತೆ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖೆಗಳನ್ನು PS ಛೇದಕವು ಕ್ರಮವಾಗಿ Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ.

AB || CD ಆಗುವುದೇ ?

$\angle BQR = \angle PQA$ (ಏಕೆ ?) (1)

ಆದರೆ $\angle BQR = \angle QRC$ (ದತ್ತ) (2)



ಚಿತ್ರ 3.22

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\angle PQA = \angle QRC$ ಎಂದು ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಆದರೆ ಇವು ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು.

ಆದುದರಿಂದ AB || CD (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ವಿಲೋಮ)

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಅದು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3.3 : ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಸಮವಿದ್ದಾಗ, ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಳಕಂಡ ಎರಡು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವಿರಿ

ಪ್ರಮೇಯ 3.4 : ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ, ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3.5 : ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

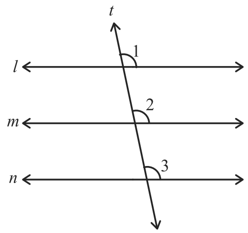
ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಆ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬಹುದು.

3.6 ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳು

ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾರುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆಯೇ? ಅದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ಚಿತ್ರ 3.23ರಲ್ಲಿ $m \parallel l$ ಮತ್ತು $n \parallel l$

l, m ಮತ್ತು n ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಛೇದಕ t ಯನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ $m \parallel l$ ಮತ್ತು $n \parallel l$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\angle 1 = \angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 1 = \angle 3$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ) ಹಾಗಾದರೆ $\angle 2 = \angle 3$ (ಏಕೆ?)



ಚಿತ್ರ 3.23

ಆದರೆ $\angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 3$ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವು ಸಮ.

ಆದುದರಿಂದ $m \parallel n$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

(ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ವಿಲೋಮ)

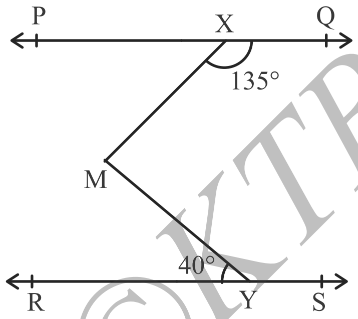
ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು ಅದು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3.6 : ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

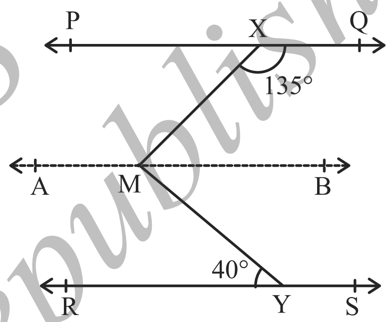
ಗಮನಿಸಿ: ಈ ಮೇಲಿನ ಗುಣವನ್ನು ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಸಹ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು.

ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ: 4 : ಚಿತ್ರ 3.24 ರಲ್ಲಿ $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 135^\circ$ ಮತ್ತು $\angle MYR = 40^\circ$ ಆದರೆ $\angle XMY$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 3.24



ಚಿತ್ರ 3.25

ಪರಿಹಾರ: ಚಿತ್ರ 3.25 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಬಿಂದು M ಮೂಲಕ PQ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈಗ $AB \parallel PQ$ ಮತ್ತು $PQ \parallel RS$

ಆದುದರಿಂದ $AB \parallel RS$ (ಏಕೆ ?)

ಈಗ $\angle QXM + \angle XMB = 180^\circ$

($AB \parallel PQ$, XM ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು)

ಆದರೆ $\angle QXM = 135^\circ$

$135^\circ + \angle XMB = 180^\circ$

ಆದುದರಿಂದ $\angle XMB = 45^\circ$ (1)

ಈಗ $\angle BMY = \angle MYR$ ($AB \parallel RS$, ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

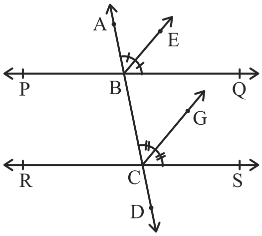
ಆದುದರಿಂದ $\angle BMY = 40^\circ$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$\angle XMB + \angle BMY = 45^\circ + 40^\circ$

$\angle XMY = 85^\circ$

ಉದಾಹರಣೆ: 5: ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪಕೋನಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದಾಗ, ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 3.26

ಚಿತ್ರ 3.26 ರಲ್ಲಿ PQ ಮತ್ತು RS ರೇಖೆಗಳನ್ನು, AD ಛೇದಕವು ಕ್ರಮವಾಗಿ B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ. BE ಕಿರಣವು $\angle$ ABQ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಮತ್ತು CG ಕಿರಣವು $\angle$ BCS ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಮತ್ತು BE || CG.

PQ || RS ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

BE ಕಿರಣವು $\angle$ ABQ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ, $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ (1)

ಅದೇ ರೀತಿ, CG ಕಿರಣವು $\angle$BCS ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ

ಆದುದರಿಂದ, $\angle BCG = \frac{1}{2}\ \angle BCS$ (2)

ಆದರೆ BE||CG ಮತ್ತು AD ಛೇದಕವಾಗಿದೆ

ಆದುದರಿಂದ, $\angle ABE = \angle BCG$ (3) (ಅನುರೂಪಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

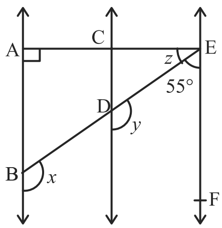
$$\frac{1}{2}\ \angle ABQ = \frac{1}{2}\ \angle BCS$$

ಅಂದರೆ $\angle ABQ = \angle BCS$

ಆದರೆ ಈ ಕೋನಗಳು, PQ ಮತ್ತು RS ರೇಖೆ ಹಾಗೂ ಛೇದಕ AD ಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಅವು ಸಮವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ PQ || RS (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ವಿಲೋಮ)

ಉದಾಹರಣೆ: 6 : ಚಿತ್ರ 3.27 ರಲ್ಲಿ, AB || CD ಮತ್ತು CD || EF ಹಾಗೂ EA $\perp$ AB ಆಗಿದೆ.

$\angle BEF = 55^\circ$ ಆದರೆ x, y ಮತ್ತು z ಕೋನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 3.27

ಪರಿಹಾರ: $y + 55^\circ = 180^\circ$ (ED ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ $y = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

ಆದರೆ $x = y$ (AB || CD ಅನುರೂಪಕೋನಗಳ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ)

ಆದುದರಿಂದ $x = 125^\circ$

ಈಗ AB || CD ಮತ್ತು CD || EF . ಆದುದರಿಂದ AB || EF

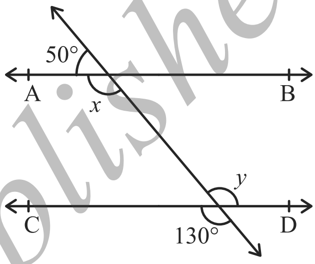
$\angle EAB + \angle FEA = 180^\circ$ (EA ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ $90^\circ + Z + 55^\circ = 180^\circ$

$Z = 35^\circ$

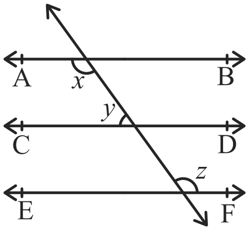
ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1) ಚಿತ್ರ 3.28 ರಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದು AB || CD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



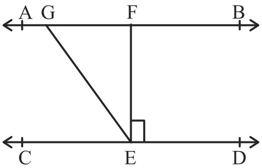
ಚಿತ್ರ 3.28

2) ಚಿತ್ರ 3.29 ರಲ್ಲಿ AB || CD, CD || EF ಮತ್ತು $y : z = 3:7$ ಆದರೆ x ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



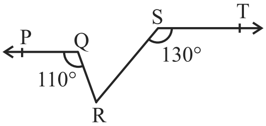
ಚಿತ್ರ 3.29

3) ಚಿತ್ರ 3.30 ಯಲ್ಲಿ AB || CD, EF ⊥ CD ಮತ್ತು $\angle GED = 126^\circ$ ಆದರೆ $\angle AGE$, $\angle GEF$ ಮತ್ತು $\angle FGE$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



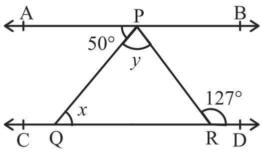
ಚಿತ್ರ 3.30

4) ಚಿತ್ರ 3.31 ರಲ್ಲಿ PQ || ST, $\angle PQR = 110^\circ$ ಮತ್ತು $\angle RST = 130^\circ$ ಆದರೆ $\angle QRS$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಸುಳಿವು: R ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ST ಗೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ).



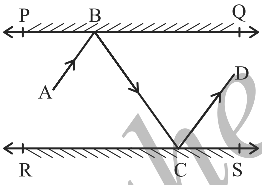
ಚಿತ್ರ 3.31

5) ಚಿತ್ರ 3.32 ರಲ್ಲಿ AB || CD, $\angle APQ = 50^\circ$ ಮತ್ತು $\angle PRD = 127^\circ$ ಆದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 3.32

6) ಚಿತ್ರ 3.33 ರಲ್ಲಿ PQ ಮತ್ತು RS ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ದರ್ಪಣಗಳನ್ನು ಇಡಲಾಗಿದೆ. AB ಪತನ ಕಿರಣವು PQ ದರ್ಪಣವನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತಾಗಿ ಪ್ರತಿಫಲಿತ ಕಿರಣವು BC ಹಾದಿಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿ RS ದರ್ಪಣವನ್ನು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತಾಗಿ ಪುನಃ CD ಹಾದಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಫಲಿತಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. AB || CD ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



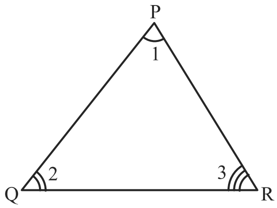
ಚಿತ್ರ 3.33

3.7 ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಎಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳು ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಇದನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 3.7: ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°

ಸಾಧನೆ : ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಏನನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ ಅದು ಪೂರ್ವ ಸಿದ್ಧಾಂತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಾವು ಏನನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ನಮಗೆ ತ್ರಿಭುಜ PQR ಮತ್ತು ಅದರ ಕೋನಗಳಾದ $\angle 1$, $\angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 3$ ನೀಡಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 3.34 ಗಮನಿಸಿ).

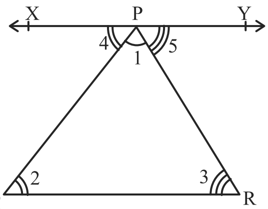


ಚಿತ್ರ 3.34

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಚಿತ್ರ 3.35 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ P ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕ QR ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ XPY ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಬಹುದು.

XPY ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ.



ಚಿತ್ರ 3.35

ಆದುದರಿಂದ $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180^\circ$

ಆದರೆ, XPY || QR ಮತ್ತು PQ, PR ಛೇದಕಗಳು

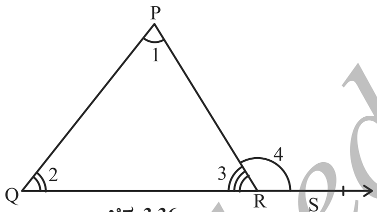
ಆದುದರಿಂದ $\angle 4 = \angle 2$ ಮತ್ತು $\angle 5 = \angle 3$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು)

$\angle 4$ ಮತ್ತು $\angle 5$ ನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180^o$$

ಅಂದರೆ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$

ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಉಂಟಾಗುವುದನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ (ಚಿತ್ರ 3.36 ನೋಡಿ). ಬಾಹು QR ನ್ನು S ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. $\angle PRS$ ನ್ನು ತ್ರಿಭುಜ PQR ನ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.



ಚಿತ್ರ 3.36

$\angle 3 + \angle 4 = 180^o$ ಆಗಬಹುದೇ? (ಏಕೆ?) (1)

ಹಾಗೂ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$ ಆಗಬಹುದೇ? (ಏಕೆ?) (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ ಆಗುವುದು.

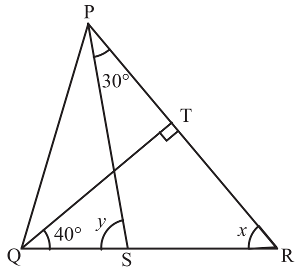
ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಅದು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3.8: ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಬಾಹ್ಯಕೋನವು ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹ್ಯಕೋನವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ : 7: ಚಿತ್ರ 3.37 ರಲ್ಲಿ $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40^o$ ಮತ್ತು $\angle SPR = 30^o$ ಆದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ : 3.37

ಪರಿಹಾರ: ΔTQR ನಲ್ಲಿ $90^o + 40^o + x = 180^o$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ)

ಆದುದರಿಂದ $x = 50^o$

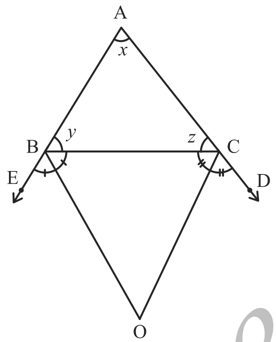
ಈಗ $y = \angle SPR + x$ (ಪ್ರಮೇಯ 3.8)

ಆದುದರಿಂದ $y = 30^o + 50^o$

$y = 80^o$

ಉದಾಹರಣೆ : 8 ಚಿತ್ರ 3.38 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. $\angle CBE$ ಮತ್ತು $\angle BCD$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BO ಮತ್ತು CO ಆಗಿದ್ದು ಅವು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತಿವೆ.

$\angle BOC = 90^o - \frac{1}{2}\angle BAC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 3.38

ಪರಿಹಾರ: $\angle CBE$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕವು ಕಿರಣ BO ಆಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ $\angle CBO = \frac{1}{2}\ \angle CBE$

$= \frac{1}{2}(180^o - y)$

$= 90^o - \frac{y}{2}$ (1)

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\angle BCD$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕವು ಕಿರಣ CO ಆಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$

$= \frac{1}{2}(180^o - z)$

$= 90 - \frac{z}{2}$ (2)

ΔBOC ಯಲ್ಲಿ $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180^o$ (3)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\angle BOC + 90^o - \frac{z}{2} + 90^o - \frac{y}{2} = 180^o$

$\angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$

ಅಥವಾ $\angle BOC = \frac{1}{2}(y + z)$ (4)

ಆದರೆ $x + y + z = 180^o$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ)

ಆದುದರಿಂದ, $y + z = 180^o - x$ ಇದನ್ನು (4) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\angle BOC = \frac{1}{2}(180^o - x)$

$= 90^o - \frac{x}{2}$

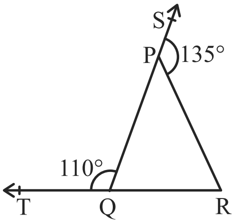
$= 90^o - \frac{1}{2}\angle BAC$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

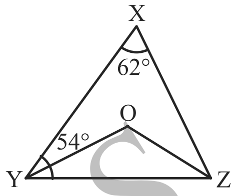
1) ಚಿತ್ರ 3.39 ರಲ್ಲಿ ΔPQR ನ ಬಾಹುಗಳಾದ QP ಮತ್ತು RQ ನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ S ಮತ್ತು T ಬಿಂದುಗಳವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ $\angle SPR = 135^\circ$ ಮತ್ತು $\angle PQT = 110^\circ$ ಆದರೆ $\angle PRQ$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) ಚಿತ್ರ 3.40 ಯಲ್ಲಿ $\angle X = 62^\circ$, $\angle XYZ = 54^\circ$ ΔXYZ ನಲ್ಲಿ YO ಮತ್ತು ZO ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle XYZ$ ಮತ್ತು $\angle XZY$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\angle OZY$ ಮತ್ತು $\angle YOZ$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

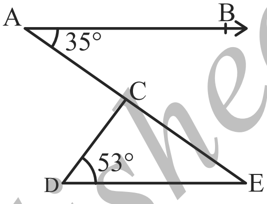
3) ಚಿತ್ರ 3.41 ರಲ್ಲಿ $AB \parallel DE$, $\angle BAC = 35^\circ$ ಮತ್ತು $\angle CDE = 53^\circ$ ಆದರೆ $\angle DCE$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 3.39



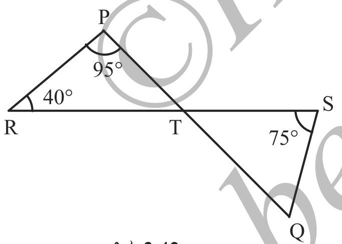
ಚಿತ್ರ 3.40



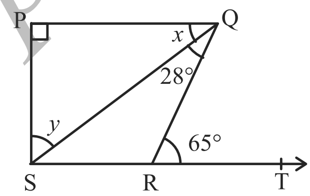
ಚಿತ್ರ 3.41

4) ಚಿತ್ರ 3.42 ರಲ್ಲಿ PQ ಮತ್ತು RS ರೇಖೆಗಳು T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. $\angle PRT = 40^\circ$, $\angle RPT = 95^\circ$ ಮತ್ತು $\angle TSQ = 75^\circ$ ಆದರೆ $\angle SQT$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5) ಚಿತ್ರ 3.43 ರಲ್ಲಿ $PQ \perp PS$, $PQ \parallel SR$, $\angle SQR = 28^\circ$ ಮತ್ತು $\angle QRT = 65^\circ$ ಆದರೆ x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

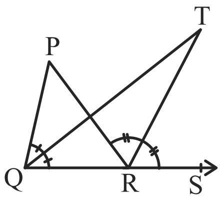


ಚಿತ್ರ 3.42



ಚಿತ್ರ 3.43

6) ಚಿತ್ರ 3.44 ರಲ್ಲಿ ΔPQR ನ ಬಾಹು QR ನ್ನು S ಬಿಂದುವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. $\angle PQR$ ಮತ್ತು $\angle PRS$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತಿವೆ. $\angle QTR = \frac{1}{2} \angle QPR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 3.44

3.8 ಸಾರಾಂಶ :

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಿರಣವು ನಿಂತಾಗ, ಉಂಟಾಗುವ ಪಾರ್ಶ್ವಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°. ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಸರಳಯುಗ್ಮ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.
2. ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
3. ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಕವು ಛೇದಿಸಿದಾಗ,
   (i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ,
   (ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಸಮ,
   (iii) ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
4. ಒಂದು ಛೇದಕವು ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಯಾವುದಾದರೂ
   (i) ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ ಅಥವಾ
   (ii) ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಸಮ ಅಥವಾ
   (iii) ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್‌ಕೋನಗಳು ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ, ಆ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
5. ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
6. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°.
7. ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಬಾಹ್ಯಕೋನವು ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ – 4

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು

4.1 ಪೀಠಿಕೆ

ನೀವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು, ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ನೀವು ಕೆಲವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಬಹುದು.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
ಮತ್ತು $$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು **ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೀತಿಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಹಾಗೂ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪದಗಳಿಂದ ನಮ್ಮ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ನಾವು **ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ** ಮತ್ತು **ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ**ಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗದ ಬಗ್ಗೆ ಕೂಡಾ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ. ಇದರ ಜೊತೆಗೆ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಲ್ಲಿ, ಕೆಲವು ಬೈಜಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉಪಯೋಗದ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ.

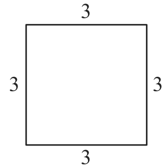
4.2. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು

ಚರಾಕ್ಷರವೆಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಒಂದು ಸಂಕೇತ ಎಂಬುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತ ಪ್ರರಂಭಿಸೋಣ.

ನಾವು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $x, y, z\ldots$ ಇತ್ಯಾದಿ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ ಇವೆಲ್ಲ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳೆಲ್ಲವೂ, (ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ) $\times x$ ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಈಗ, ನಾವು ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು (ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ) $\times$ (ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರ) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬಯಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಯಾವುದೆಂದು ತಿಳಿದಿರದಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು $a, b, c\ldots$ ಇತ್ಯಾದಿ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ax ಆಗಿರಲಿ.

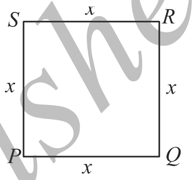
ಆದಾಗ್ಯೂ, ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಕ್ಷರ ಮತ್ತು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಕ್ಷರ ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಯು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂದರ್ಭದುದ್ದಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಂತಹ ಒಂದು ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತಿರಬಹುದು.

ಈಗ, ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 3 ಏಕಮಾನ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. (ಚಿತ್ರ 4.1 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.) ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು? ಒಂದು ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮೊತ್ತವೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 3 ಮೂಲಮಾನ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 4×3 ಅಂದರೆ 12 ಮೂಲಮಾನಗಳು. ಚೌಕದ ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವು 10 ಮೂಲಮಾನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು? ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 4×10 ಅಂದರೆ 40 ಮೂಲಮಾನಗಳು. ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು 'x' ಮಾನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ (ಚಿತ್ರ 4.2 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.) ಸುತ್ತಳತೆಯು $4x$ ಮಾನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು ಬದಲಾದಂತೆ, ಸುತ್ತಳತೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 4.1

PQRS ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ? ಅದು $x \times x = x^2$ ಚದರ ಮಾನಗಳು. x^2 ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ಇವುಗಳಂತಹ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಪರಿಚಯವೂ ನಿಮಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಎಲ್ಲ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಘಾತಸೂಚಿಗಳು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ರೂಪದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು **ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, 'x' ಎಂಬುದು ಚರಾಕ್ಷರವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ಇದು x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ, $3y^2 + 5y$ ಇದು y ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $t^2 + 4$ ಇದು t ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 4.2

$x^2 + 2x$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಜಪದಗಳಾದ x^2 ಮತ್ತು $2x$ ಇವುಗಳಿಗೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ **ಪದಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $3y^2 + 5y + 7$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $3y^2$, $5y$ ಮತ್ತು 7 ಎಂಬ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ನೀವು ಬರೆಯಬಹುದೇ? ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $-x^3$, $4x^2$, $7x$ ಮತ್ತು -2 ಎಂಬ 4 ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವೂ ಒಂದು **ಸಹಗುಣಕ**ವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ಇದರಲ್ಲಿ x^3ನ ಸಹಗುಣಕ -1, x^2ದ ಸಹಗುಣಕ 4, x ನ ಸಹಗುಣಕ 7 ಮತ್ತು -2 ಇದು x^0 ಯ ಸಹಗುಣಕ. ($x^0 = 1$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಡಿ.) $x^2 - x + 7$ರಲ್ಲಿ x ನ ಸಹಗುಣಕ ಏನೆಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಅದು -1 ಆಗಿದೆ.

2 ಎಂಬುದೂ ಸಹ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ನಿಜವಾಗಿ, 2, -5, 7 ಇತ್ಯಾದಿಗಳು **ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ** ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ. ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ 0ಯನ್ನು **ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರ ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯುವಿರಿ.

ಈಗ, $x + \frac{1}{x}, \sqrt{x} + 3$ ಮತ್ತು $\sqrt[3]{y} + y^2$ ಈ ರೀತಿಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಾ? ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಪದದ ಎಂದರೆ x^{-1}ರ ಘಾತಸೂಚಿಯು -1 ಆಗಿದ್ದು, ಅದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ.

ಪುನಃ, $\sqrt{x} + 3$ನ್ನು $x^{\frac{1}{2}} + 3$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ x ನ ಘಾತಸೂಚಿ $\frac{1}{2}$ ಆಗಿದ್ದು, ಅದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{x} + 3$ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯೇ? ಅಲ್ಲ, ಅದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲ. $\sqrt[3]{y} + y^2$ ನ್ನು ಏನೆಂದು ಹೇಳುವಿರಿ? ಅದೂ ಸಹ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ. (ಏಕೆ?)

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರವು 'x' ಆಗಿದ್ದರೆ, ನಾವು ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು $p(x)$ ಅಥವಾ $q(x)$ ಅಥವಾ $r(x)$ ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$q(x) = x^3 - 1$$

$$r(y) = y^3 + y + 1$$

$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎಷ್ಟು ಪರಿಮಿತ ಪದಗಳನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^{150} + x^{149} + ... + x^2 + x + 1$, ಇದು 151 ಪದಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

$2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y ಮತ್ತು u^4 ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಕೇವಲ ಒಂದು ಪದವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದಿರಾ? ಕೇವಲ ಒಂದು ಪದವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ **ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಏಕ ಎಂದರೆ ಒಂದು ಎಂದು ಅರ್ಥ)

ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

$p(x) = x + 1$ $\quad q(x) = x^2 - x$ $\quad r(y) = y^{30} + 1$ $\quad t(u) = u^{43} - u^2$

ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಿವೆ? ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯೂ ಕೇವಲ 2 ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಕೇವಲ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ **ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ದ್ವಿ ಎಂದರೆ ಎರಡು ಎಂದು ಅರ್ಥ)

ಇದೇ ರೀತಿ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ **ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ತ್ರಿ ಎಂದರೆ ಮೂರು ಎಂದು ಅರ್ಥ). ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ,

$p(x) = x + x^2 + \pi$ $\quad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$ $\quad r(u) = u + u^2 - 2$ $\quad t(y) = y^4 + y + 5$

ಈಗ, $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನೋಡಿ. x ನ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪದ ಯಾವುದು? ಅದೆಂದರೆ $3x^7$. ಈ ಪದದಲ್ಲಿ x ನ ಘಾತಸೂಚಿ 7 ಆಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ, $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$, ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ y ನ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪದ $5y^6$ ಮತ್ತು ಈ ಪದದಲ್ಲಿ y ನ ಘಾತಸೂಚಿ 6 ಆಗಿದೆ. ನಾವು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಆ **ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ 7 ಆಗಿದೆ. ಮತ್ತು $5y^6 - 4y^2 - 6$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ 6 ಆಗಿದೆ. **ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.**

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^5 - x^4 + 3$ $\quad$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ $\quad$ (iii) 2

ಪರಿಹಾರ: (i) ಚರಾಕ್ಷರದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿ 5 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ 5 ಆಗಿದೆ.

(ii) ಚರಾಕ್ಷರದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿ 8 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ 8 ಆಗಿದೆ.

(iii) ಇಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಪದ 2 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು $2x^0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಘಾತಸೂಚಿ 0 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ '0' ಆಗಿದೆ.

ಈಗ, $p(x) = 4x + 5$ $\quad q(y) = 2y$ $\quad r(t) = t + \sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\quad s(u) = 3u$

ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ನೀವು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂಶವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಾ? ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ ಒಂದು ಆಗಿದೆ. ಡಿಗ್ರಿ ಒಂದು ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ **ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳೆಂದರೆ $2x-1$, $\sqrt{2}y+1$, $2-u$. ಈಗ 3 ಪದಗಳುಳ್ಳ, 'x' ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ನೀವು ಅದನ್ನು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ 'x' ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ 'x' ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಯಾವುದೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax + b$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. [ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$ (ಏಕೆ?)] ಹಾಗೆಯೇ, $ay + b$ ಯು 'y' ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಈಗ $2x^2 + 5$, $5x^2 + 3x + \pi$, x^2 ಮತ್ತು $x^2 + \frac{2}{5}x$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಅವೆಲ್ಲವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ? ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ **ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ, $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ ಮತ್ತು $6 - y - y^2$. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ನಾಲ್ಕು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನೀವು ಬರೆಯಬಲ್ಲಿರಾ? ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 3 ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುವಿರಿ. ನೀವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದರೆ, x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. (ಇಲ್ಲಿ a,b,c ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು $a \neq 0$) ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿ, y ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ay^2 + by + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ (ಇಲ್ಲಿ a,b,c ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು, $a \neq 0$).

ಡಿಗ್ರಿ 3 ಇರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು **ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 'x' ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಿರಬಹುದೆಂದು ನೀವು ಯೋಚಿಸುತ್ತೀರಿ? ಅದು ಗರಿಷ್ಠ 4 ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಇದನ್ನು $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಡಿಗ್ರಿ 1, ಡಿಗ್ರಿ 2 ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಹೇಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. 'n' ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗುವಂತೆ, ಡಿಗ್ರಿ n ಇರುವ, ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಲ್ಲಿರಾ? ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ, ಡಿಗ್ರಿ n ಇರುವ, ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ಇಲ್ಲಿ $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $a_n \neq 0$

ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 \dots = a_n = 0$ ಆದರೆ (ಎಲ್ಲಾ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳೂ ಸೊನ್ನೆ) ನಾವು **ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ**ಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 0 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ ಎಷ್ಟು ಆಗಿರುತ್ತದೆ? ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು **ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ.**

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮಾತ್ರ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಕೂಡ ಇರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^2 + y^2 + xyz$ (x,y ಮತ್ತು z ಗಳು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು) ಇದೊಂದು ಮೂರು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ $p^2 + q^{10} + r$ (p, q ಮತ್ತು r ಗಳು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು), $u^3 + v^2$ (u ಮತ್ತು v ಗಳು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು) ಇವು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೂರು ಮತ್ತು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು. ನೀವು ಅಂತಹ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಮುಂದೆ ಅಭ್ಯಸಿಸಲಿದ್ದೀರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ಅಲ್ಲ? ಕಾರಣಗಳ ಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿ.

   (i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

   (iv) $y + \frac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ x^2 ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. ಡಿಗ್ರಿ 35 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಹಾಗೂ ಡಿಗ್ರಿ 100 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ, ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಘನಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ.

   (i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

   (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

4.3 ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು

$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$p(x)$ ನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗೂ 'x' ಗೆ '1'ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\begin{aligned} p(1) &= 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2 \\ &= 5 - 2 + 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 1$ ಆದಾಗ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆ 4 ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗೆಯೇ, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$= -2$

$p(-1)$ ನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರಾ?

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$, $x = 1$ ಆದಾಗ

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$, $y = 2$ ಆದಾಗ

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$, $t = a$ ಆದಾಗ

ಪರಿಹಾರ: (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ ಆದಾಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆಯು

$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$

$= 5 - 3 + 7 = 9$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ ಆದಾಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $q(y)$ ನ ಬೆಲೆಯು

$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ ಆದಾಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(t)$ ಯ ಬೆಲೆಯು

$p(a) = 4a^2 + 5a^3 - a^2 + 6$

ಈಗ, $p(x) = x - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$p(1)$ ರ ಬೆಲೆ ಏನು? $p(1) = 1 - 1 = 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$p(1) = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ 1 ನ್ನು ನಾವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ದ **ಶೂನ್ಯತೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ, $q(x) = x - 2$ ಆದಾಗ, 2 ಎಂಬುದು $q(x)$ ದ **ಶೂನ್ಯತೆ** ಆಗಿದೆಯೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $p(c) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ **ಶೂನ್ಯತೆ** c ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x - 1$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಯು ಅದನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ಸಿಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಅಂದರೆ $x - 1 = 0$, ಆಗ $x = 1$ ಆಗುತ್ತದೆ. $p(x) = 0$ ಇದನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಮತ್ತು 1ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಮೀಕರಣವಾದ $p(x) = 0$ ಇದರ ಮೂಲ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 1ನ್ನು $(x - 1)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಎಂದು ಅಥವಾ $x - 1 = 0$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ 5 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರ ಶೂನ್ಯತೆ ಏನೆಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ? ಅದಕ್ಕೆ ಶೂನ್ಯತೆ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $5x^0$ ಯಲ್ಲಿ x ನ್ನು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೂ ಪುನಃ 5 ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಏನೆನ್ನುವಿರಿ? ನಿಜ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ **ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.**

ಉದಾಹರಣೆ 3: $x + 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು -2 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿವೆಯೆ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $p(x) = x + 2$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $p(2) = 2 + 2 = 4$ $\quad p(-2) = -2 + 2 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ -2 ಎಂಬುದು $x + 2$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ 2 ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : $p(x) = 2x + 1$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂದರೆ, $p(x) = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಂತೆ.

ಈಗ, $2x + 1 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-1}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $-\frac{1}{2}$ ಇದು $2x + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾದರೆ, $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆವು? ಉದಾಹರಣೆ 4 ನಿಮಗೆ ಕೆಲವು ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಬಹುದು. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂದರೆ $p(x) = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಎಂದರ್ಥ.

ಈಗ, $p(x) = 0$ ಅಂದರೆ, $ax + b = 0, a \neq 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax = -b$

ಅಂದರೆ, $x = \frac{-b}{a}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{-b}{a}$ ಯು $p(x)$ ನ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಈಗ ನಾವು $x - 1$ರ ಶೂನ್ಯತೆಯು 1 ಮತ್ತು ಇದು $x + 2$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಯು -2 ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 5: 2 ಮತ್ತು 0 ಇವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 - 2x$ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆಯೇ? ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಈಗ $p(x) = x^2 - 2x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

ಮತ್ತು $p(0) = 0^2 - 2(0) = 0 - 0 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, 2 ಮತ್ತು 0 ಇವೆರಡೂ $x^2 - 2x$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ನಾವು ಈಗ ನಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

(i) ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯು '0' ಆಗಿರಲೇಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

(ii) '0' ಯು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

(iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. x ನ ಬೆಲೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದ್ದಾಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $5x - 4x^2 + 3$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೂ $p(0), p(1)$ ಮತ್ತು $p(2)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

   (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

3. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು, ಅವುಗಳೆದುರು ಸೂಚಿಸಿದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

(i) $p(x) = 3x + 1\ ;\ x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi\ ;\ x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1\ ;\ x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2)\ ;\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2\ ;\ x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m\ ;\ x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1\ ;\ x = \frac{1}{2}$

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax,\ a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d,\ c \neq 0,\ c, d$ ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

4.4 ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ

15 ಮತ್ತು 6 ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. 15 ನ್ನು 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ 2 ಮತ್ತು ಶೇಷ 3ನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ನೆನಪಿದೆಯೇ? ನಾವು 15ನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$15 = (2 \times 6) + 3$$

ಶೇಷ 3 ಇದು **ಭಾಜಕ** 6 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ 12 ನ್ನು 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$12 = (2 \times 6) + 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷ ಎಷ್ಟು? ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷವು 0 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು 12 ರ **ಅಪವರ್ತನ** 6 ಅಥವಾ 6 ರ **ಅಪವರ್ತ್ಯ** 12 ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಪ್ರಶ್ನೆ ಏನೆಂದರೆ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದೇ? ಇದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಭಾಜಕವು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಾದಾಗ ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $2x^3 + x^2 + x$ ನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ x ದಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

$$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$
$$= 2x^2 + x + 1$$

ನಿಜವಾಗಿ, $2x^3 + x^2 + x$ ನ ಪ್ರತಿ ಪದದಲ್ಲಿಯೂ 'x' ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $2x^3 + x^2 + x$ ನ್ನು $x(2x^2 + x + 1)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಹೀಗಾಗಿ x ಮತ್ತು $2x^2 + x + 1$ ಗಳು $2x^3 + x^2 + x$ ನ **ಅಪವರ್ತನಗಳು.** $2x^3 + x^2 + x$ ಇದು x ನ **ಅಪವರ್ತ್ಯವೂ** ಹೌದು ಮತ್ತು $2x^3 + x^2 + 1$ ರ **ಅಪವರ್ತ್ಯವೂ** ಹೌದು ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಜೊತೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾದ $3x^2 + x + 1$ ಮತ್ತು x ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $$(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$$

1 ನ್ನು 'x' ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ನಾವು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಾವು ಇಲ್ಲಿಗೆ ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ 1 ಶೇಷವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$3x^2 + x + 1 = [\, x \times (3x + 1)] + 1$$

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, $3x + 1$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು 1 ಶೇಷವಾಗಿದೆ. x ಎಂಬುದು $3x^2 + x + 1$ ರ ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ನೀವು ಯೋಚಿಸುತ್ತೀರಾ? ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು ಅಪವರ್ತನವಲ್ಲ.

ಈಗ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಹೇಗೆ ಭಾಗಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಲು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: $p(x) = x + 3x^2 - 1$ ಮತ್ತು $g(x) = 1 + x$ ಆದಾಗ $p(x)$ ನ್ನು $g(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳ ಮೂಲಕ ನಾವು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 1: ನಾವು ಭಾಜ್ಯ $x + 3x^2 - 1$ ನ್ನು ಮತ್ತು ಭಾಜಕ $1 + x$ ನ್ನು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಪದಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿಯ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಜ್ಯವು $3x^2 + x - 1$ ಮತ್ತು ಭಾಜಕವು $x + 1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2: ನಾವು ಭಾಜ್ಯದ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು ಭಾಜಕದ ಮೊದಲ ಪದದಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಅಂದರೆ ನಾವು $3x^2$ ನ್ನು x ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $3x$ ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೊದಲ ಪದ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\frac{3x^2}{x} = 3x = \text{ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೊದಲ ಪದ}$$

ಹಂತ 3: ನಾವು ಭಾಜಕವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೊದಲ ಪದದಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಭಾಜ್ಯದಿಂದ ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $(x + 1)$ ನ್ನು $3x$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ $3x^2 + 3x$ ನ್ನು ಭಾಜ್ಯ $3x^2 + x - 1$ ರಿಂದ ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. $-2x - 1$ ಎಂಬ ಶೇಷ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & - \quad\; - \\ \hline & -2x - 1 \end{array}$$

ಹಂತ 4 : ಶೇಷ $-2x - 1$ ನ್ನು ನಾವು ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಭಾಜಕವು ಮೊದಲಿನಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮುಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು 2ನೆಯ ಹಂತವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ನಾವು ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯದ ಮೊದಲ ಪದ $-2x$ ನ್ನು ಭಾಜಕದ ಮೊದಲ ಪದ x ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ -2 ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ -2 ಎಂಬುದು ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಪದ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\frac{-2x}{x} = -2$$
$= \text{ಭಾಗಲಬ್ಧದ 2ನೇ ಪದ}$

ಹೊಸ ಭಾಗಲಬ್ಧ
$= 3x - 2$

ಹಂತ 5 :ನಾವು ಭಾಜಕವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಎರಡನೆಯ ಪದದಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಭಾಜ್ಯದಿಂದ ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ನಾವು $(x + 1)$ ನ್ನು -2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ $-2x - 2$ ನ್ನು ಭಾಜ್ಯ $-2x - 1$ ರಿಂದ ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆಗ 1ನ್ನು ಶೇಷವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$
\begin{array}{r|l}
(x+1)(-2) & -2x-1 \\
=-2x-2 & -2x-2 \\
 & +\quad + \\
\hline
 & \qquad +1
\end{array}
$$

ಶೇಷವು '0' ಆಗುವವರೆಗೆ ಅಥವಾ ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯದ ಡಿಗ್ರಿಯು ಭಾಜಕದ ಡಿಗ್ರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವವರೆಗೆ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ಈ ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯವು ಶೇಷವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವು ನಮಗೆ ಪೂರ್ಣ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 6: ಹೀಗೆ, ಪೂರ್ಣ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $3x - 2$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ, ಈ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಮಾಡಿರುವುದನ್ನು ಸಮಗ್ರವಾಗಿ ನೋಡೋಣ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x - 2 \\
\hline
x+1 & 3x^2 + x - 1 \\
 & 3x^2 + 3x \\
 & -\quad - \\
\hline
 & \quad -2x - 1 \\
 & \quad -2x - 2 \\
 & \quad +\quad + \\
\hline
 & \qquad\quad 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅಂದರೆ, **ಭಾಜ್ಯ = (ಭಾಜಕ $\times$ ಭಾಗಲಬ್ಧ) + ಶೇಷ**

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $p(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ $\geq g(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ ಮತ್ತು $g(x) \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ $p(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳು ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾದರೆ, ಆಗ ನಾವು $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$ ಆಗುವಂತೆ $q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ $r(x) = 0$ ಅಥವಾ $r(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ $<$ $g(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ. ಇಲ್ಲಿ, $p(x)$ ನ್ನು $g(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $r(x)$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಭಾಜಕವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿತ್ತು. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಶೇಷ ಮತ್ತು ಭಾಜ್ಯದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧ ಇದೆಯೇ ಎಂದು ನಾವು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ ರಲ್ಲಿ x ಗೆ -1 ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ

$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1 = 1$ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $p(x) = 3x^2 + x - 1$ ನ್ನು $x + 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆತ ಶೇಷವು, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x + 1$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಯಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ -1ರಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

ಈಗ, ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 7 : ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ ನ್ನು $x - 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ,

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\ \hline
x - 1 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
 & 3x^4 - 3x^3 \\
 & - \quad + \\ \hline
 & -x^3 \quad - 3x - 1 \\
 & -x^3 + x^2 \\
 & + \quad - \\ \hline
 & -x^2 - 3x - 1 \\
 & -x^2 + x \\
 & + \quad - \\ \hline
 & -4x - 1 \\
 & -4x + 4 \\
 & + \quad - \\ \hline
 & -5
\end{array}
$$

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷವು –5 ಆಗಿದೆ. ಈಗ $x- 1$ ರ ಶೂನ್ಯತೆ 1 ಆದ್ದರಿಂದ $p(x)$ ನಲ್ಲಿ $x = 1$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1 \\
&= 3 - 4 - 3 - 1 \\
&= -5 \qquad \text{ಇದು ಶೇಷವಾಗಿದೆ.}
\end{aligned}
$$

ಉದಾಹರಣೆ 8 : $p(x) = x^3 + 1$ ನ್ನು $x + 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ಪರಿಹಾರ : ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ,

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\ \hline
x + 1 & x^3 + 1 \\
 & x^3 + x^2 \\
 & - \quad - \\ \hline
 & -x^2 \quad + 1 \\
 & -x^2 - x \\
 & + \quad + \\ \hline
 & x + 1 \\
 & x + 1 \\
 & - \quad - \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಶೇಷ 0 ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ $p(x) = x^3 + 1$ ಮತ್ತು $x + 1 = 0$ ಗಳ ಮೂಲವು $x = -1$

$$p(-1) = (-1)^3 + 1$$
$$= -1 + 1$$
$$= 0$$

ಇದು ನೈಜ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಶೇಷಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ**ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇದು ಸರಳ ಮಾರ್ಗವಲ್ಲವೇ? ನಾವು ಈಗ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸೋಣ. ಈ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ಮೂಲಕ, ಪ್ರಮೇಯವು ಹೇಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನಿಮಗೆ ತೋರಿಸಿ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ :

$p(x)$ ಎಂಬುದು ಡಿಗ್ರಿ 1 ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು a ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. $p(x)$ ನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x - a$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $p(a)$ ಯು ಶೇಷವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ :

$p(x)$ ಎಂಬುದು ಡಿಗ್ರಿ 1 ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರಲಿ. $p(x)$ ನ್ನು $(x - a)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $r(x)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$$

$(x-a)$ ಯ ಡಿಗ್ರಿಯು 1 ಮತ್ತು $r(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿಯು $(x-a)$ ಯ ಡಿಗ್ರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವುದರಿಂದ $r(x)$ನ ಡಿಗ್ರಿ = 0. ಹಾಗೆಂದರೆ $r(x)$ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು r ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ $r(x) = r$.

ಆದ್ದರಿಂದ $p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$

ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ $x = a$ ಆದರೆ, $p(a) = (a - a)\, q(a) + r$

ಹೀಗೆ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 9 : $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ನ್ನು $x - 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ಮತ್ತು $x - 1$ ರ ಶೂನ್ಯತೆ 1.

ಆದ್ದರಿಂದ $p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$

$$= 2$$

$\therefore$ ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ನ್ನು $x - 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ 2.

ಉದಾಹರಣೆ 10 : $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $(2t + 1)$ ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ನೀವು ತಿಳಿದಂತೆ, $2t+1$ ಇದು $q(t)$ ಯನ್ನು ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವಂತೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ $q(t)$ ಯು $2t+1$ ದ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ $2t+1=0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $t=-\frac{1}{2}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ $q(t)$ ಯನ್ನು $2t+1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $2t+1$ ಇದು ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $q(t)$ ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ, ಹೀಗಾಗಿ, $q(t)$ ಯು $2t+1$ ದ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.3

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಂದ $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $x+1$ (ii) $x-\frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x+\pi$ (v) $5+2x$

2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ ಯನ್ನು $x - a$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $7 + 3x$ ಇದು $3x^3 + 7x$ ರ ಅಪವರ್ತನವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

4.5 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

ಈಗ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ 10ರ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಗಮನಿಸೋಣ ಅದರಿಂದ ಶೇಷ, $q\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(2t + 1)$ ಇದು $q(t)$ ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಯಾವುದೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $g(t)$ ಗೆ $q(t) = (2t + 1)\, g(t)$ ಇದು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಕರಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ : $p(x)$ ಎಂಬುದು n ಡಿಗ್ರಿಯ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು $(n \geq 1)$ ಮತ್ತು a ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (i) $p(a) = 0$ ಆದರೆ ಆಗ $x - a$ ಯು $p(x)$ ದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು (ii) $(x - a)$ ಯು $p(x)$ ದ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ ಆಗ $p(a) = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $p(x)= (x - a)\, q(x) + p(a)$

(i) $p(a) = 0$ ಆದರೆ, ಆಗ $p(x) = (x - a)\, q(x)$. ಇದು $(x - a)$ಯು $p(x)$ ದ ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) $(x-a)$ ಯು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $p(x)= (x - a)\, g(x)$. ಇಲ್ಲಿ $p(a) = (a - a)\, g(a) = 0$

ಉದಾಹರಣೆ 11: $x + 2$ ಇದು $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ ರ ಮತ್ತು $2x + 4$ ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $x + 2$ ಇದರ ಶೂನ್ಯತೆ -2 ಆಗಿದೆ.

ಈಗ $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ ಮತ್ತು $s(x) = 2x + 4$ ಆಗಿರಲಿ

ಆಗ, $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$= -8 + 12 - 10 + 6$

$= 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, $x + 2$ ಇದು $x^3 + 3x^2 + 5x - 6$ ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಪುನಃ $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x + 2$ ಇದು $2x+4$ ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ನಿಜವಾಗಿ, $2x + 4 = 2(x + 2)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸದೆಯೂ ನೀವು ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 12 : $x - 1$ ಇದು $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದರೆ, k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $x - 1$ ಇದು $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $p(1) = 0$

ಈಗ, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

ಆದ್ದರಿಂದ, $4 + 3 - 4 + k = 0$

ಅಂದರೆ $k = -3$

ನಾವು ಈಗ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿರುವ ಕೆಲವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಿಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ $x^2 + lx + m$ ನಂತಹ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದರ ಪರಿಚಯವಿದೆ. ನೀವು ಮಧ್ಯಪದವಾದ lx ನ್ನು $ax + bx$ ($ab = m$ ಆಗುವಂತೆ) ಎಂದು ವಿಭಜಿಸುವ ಮೂಲಕ ಅಪವರ್ತಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಆಗ $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಾವು $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, a, b, c ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು) ರೂಪದ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$ ಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವ ವಿಧಾನವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ:

ಈಗ ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳು $(px + q)$ ಮತ್ತು $(rx + s)$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore\ ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$$

x^2 ದ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲಾಗಿ, $a = pr$.

ಹಾಗೆಯೇ, x ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲಾಗಿ, $b = ps + qr$.

ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲಾಗಿ, $c = qs$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದು ನಮಗೆ b ಯು ps ಮತ್ತು qr ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇಲ್ಲಿ $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax^2 + bx + c$ ಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು, ನಾವು b ಯನ್ನು ಗುಣಲಬ್ಧ ac ಆಗಿರುವಂತಹ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಇದು ಉದಾಹರಣೆ 13 ರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 13 : $6x^2 + 17x + 5$ ಇದನ್ನು ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ ಹಾಗೂ ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ 1 : (ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ) : $p + q = 17$ ಮತ್ತು $pq = 6 \times 5 = 30$ ಆಗುವಂತೆ p ಮತ್ತು q ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮಗೆ ದೊರೆತರೆ, ಆಗ ನಾವು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ 30 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ 1 ಮತ್ತು 30, 2 ಮತ್ತು 15, 3 ಮತ್ತು 10, 5 ಮತ್ತು 6. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 15 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $p + q = 17$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,
$$\begin{aligned} 6x^2 + 17x + 5 &= 6x^2 + (2 + 15)\,x + 5 \\ &= 6x^2 + 2x + 15x + 5 \\ &= 2x(3x + 1) + 5\,(3x + 1) \\ &= (3x + 1)\,(2x + 5) \end{aligned}$$

ಪರಿಹಾರ 2 : (ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ)

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x)$, ಆಗಿರಲಿ a ಮತ್ತು b ಗಳು $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)\,(x - b)$. ಹೀಗೆ, $ab = \frac{5}{6}$. ಈಗ, a ಮತ್ತು b ಗಳ ಕೆಲವು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಅವೆಂದರೆ $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$. ಈಗ, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0.$ ಆದರೆ $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ ಇದು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, ಪರೀಕ್ಷಾ ಕ್ರಮದಿಂದ $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ ಇದು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ,
$$\begin{aligned} 6x^2 + 17x + 5 &= 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) \\ &= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right) \\ &= (3x + 1)\,(2x + 5) \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ವಿಧಾನವು ಹೆಚ್ಚು ಉತ್ತಮವಾದುದೆಂದು ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ನಾವು ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 14 : ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $y^2 - 5y + 6$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಈಗ $p(y) = y^2 - 5y + 6$ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ, $p(y) = (y - a)\,(y - b)$ ಆದರೆ, ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ab ಆಗಿರುವುದೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಹೀಗೆ $ab = 6$. ಆದ್ದರಿಂದ $p(y)$ ದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ನಾವು 6ರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

6 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳೆಂದರೆ 1, 2 ಮತ್ತು 3

ಈಗ, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $y-2$ ಇದು $p(y)$ ದ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಮತ್ತು $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(y-3)$ ಇದೂ ಸಹ $y^2 - 5y + 6$ ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3)$.

$y^2 - 5y + 6$ ನ್ನು ಮಧ್ಯಪದವಾದ $-5y$ ನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ ಕೂಡಾ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಈಗ ಘನಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ, ವಿಭಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಆರಂಭಿಸುವುದು ಸೂಕ್ತವಲ್ಲ. ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ, ಮೊದಲು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 15 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಈಗ, $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ ನಾವು -120 ರ ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ನೋಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60$.

ಪರೀಕ್ಷಾ ಕ್ರಮದಿಂದ $p(1) = 0$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

$\therefore$ $(x-1)$ ಇದು $p(x)$ ದ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x-1) - 22x(x-1) + 120(x-1)$ (ಏಕೆ?)

$= (x-1)(x^2 - 22x + 120)$ [$(x-1)$ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ]

$p(x)$ ನ್ನು $(x-1)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದಲೂ ನಾವು ಇದನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಈಗ, $x^2 - 22x + 120$ ನ್ನು ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ ಅಥವಾ ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸಿದಾಗ,

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x-12) - 10(x-12) \\ &= (x-12)(x-10) \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^3 - 12x^2 + 142x - 120 = (x-1)(x-10)(x-12)$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.4

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು $(x+1)$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತನವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ:

   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

   (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ $g(x)$ ಇದು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರ್ಧರಿಸಿ:

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$

3. $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನ $(x - 1)$ ಆಗಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡಿಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i) $12x^2 - 7x + 1$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x + 6$

(iv) $3x^2 - x - 4$

5. ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

4.6 ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು

ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಿಂದ, ಒಂದು ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವು ಅದರಲ್ಲಿನ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗುವ ಬೈಜಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ:

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ III : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ IV : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

ಈ ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ನೀವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಬಹುದು. ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ಅವುಗಳ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 16: ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

ಪರಿಹಾರ : (i) ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಮೊದಲನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವಾದ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಅದರಲ್ಲಿ $y = 3$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) ಮೇಲಿನ IV ನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ, ಅಂದರೆ

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(+5)$

$$= x^2 + 2x - 15$$

ಉದಾಹರಣೆ 17 : ನೇರವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೇ 105×106 ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$ [IV ನೇ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ]

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

ಕೊಟ್ಟಂತಹ ಕೆಲವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ಈ ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಲವು ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದಿರಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಕೂಡಾ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 18 : ಅಪವರ್ತಿಸಿ :

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

ಪರಿಹಾರ : (i) ಇಲ್ಲಿ, $49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$, ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು.

ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $x^2 + 2xy + y^2$ ದ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $x = 7a$ ಮತ್ತು $y = 5b$ ಆಗಿರುವದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

I ನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

ಈಗ, ಇದನ್ನು IIIನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ, ನಮ್ಮ ಎಲ್ಲಾ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದವು. ಈಗ ಮೊದಲನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ $x + y + z$ ಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸೋಣ. ನಾವು $(x + y + z)^2$ ನ್ನು 1ನೆಯ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ $x + y = t$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore (x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + z^2$ [1 ನೆಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ]

$= (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2$ [t ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದೆ]

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2zx + 2yz + z^2$ [1 ನೆಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ]

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ [ಪದಗಳನ್ನು ಪುನರ್‌ಜೋಡಿಸಿದೆ]

ಹೀಗೆ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ V : $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

ಗಮನಿಸಿ : ಬಲಭಾಗದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು, ಎಡಭಾಗದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ **ವಿಸ್ತೃತ ರೂಪ** ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. $(x+y+z)^2$ ದ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಮೂರು ವರ್ಗಪದಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಮೂರು ಗುಣಲಬ್ಧ ಪದಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 19 : $(3a + 4b + 5c)^2$ ನ್ನು ವಿಸ್ತೃತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x + y + z)^2$ ದ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $x = 3a$, $y = 4b$ ಮತ್ತು $z = 5c$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ Vನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$

$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ca$$

ಉದಾಹರಣೆ 20 : $(4a - 2b - 3c)^2$ ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : Vನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$(4a - 2b - 3c)^2 = [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$

$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$

$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

ಉದಾಹರಣೆ 21 : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

$= (2x)^2 + (-y)^2 + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2\,(2x)(z)$

$= [2x + (-y) + z]^2$ [ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ V ರಿಂದ]

$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)\,(2x - y + z)$

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ, ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ, Iನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ $(x + y)^3$ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ವಿಸ್ತರಿಸೋಣ.

$$(x+y)^3 = (x+y)\,(x+y)^2$$

$$= (x+y)\,(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರಲ್ಲಿ y ನ್ನು $-y$ ದಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ,

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VII : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

ಉದಾಹರಣೆ 22 : ಈ ಕೆಳಗಿನ ಘನಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತೃತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

ಪರಿಹಾರ : (i) ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x + y)^3$ ದ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $x = 3a$ ಮತ್ತು $y = 4b$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರಿಂದ,

$$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$$

$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x - y)^3$ ದ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$x = 5p,\ y = 3q$ ಆಗಿದೆ

ಆದ್ದರಿಂದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VII ರಿಂದ

$$(5p - 3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)$$

$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

ಉದಾಹರಣೆ 23 : ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

ಪರಿಹಾರ : $(104)^3 = (100 + 4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4)$ [ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರಿಂದ]

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$

(ii) $(999)^3 = (1000 - 1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$ [ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರಿಂದ]

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999$

ಉದಾಹರಣೆ 24 : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2 (3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x + 3y)^3$ [ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರಿಂದ]

$= (2x + 3y) (2x + 3y) (2x + 3y)$

ಈಗ $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$x (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + z (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ)

ಹೀಗೆ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VIII : $\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}$

ಉದಾಹರಣೆ 25 : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$

$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$

$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$

$= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.5

1. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   (i) $(x + 4) (x + 10)$ (ii) $(x + 8) (x - 10)$

   (iii) $(3x + 4) (3x - 5)$ (iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

   (v) $(3 - 2x) (3 + 2x)$

2. ನೇರವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೆ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   (i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ:

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right)^2$

5. ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

6. ಕೆಳಗಿನ ಘನಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತೃತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. ತಾಳೆ ನೋಡಿ:

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[**ಸುಳುಹು** : ಪ್ರಶ್ನೆ 9 ನ್ನು ನೋಡಿ]

11. ಅಪವರ್ತಿಸಿ : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. ತಾಳೆನೋಡಿ : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

13. $x + y + z = 0$ ಆದರೆ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. ನೇರವಾಗಿ ಘನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸದೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆಯತಗಳ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ : $25a^2 - 35a + 12$	**ವಿಸ್ತೀರ್ಣ :** $35y^2 + 13y - 12$
(i)	(ii)

16. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆಯತ ಘನಗಳ ಆಯಾಮ (ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ) ಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಘನಫಲ : $3x^2 - 12x$	**ಘನಫಲ:** $12ky^2 + 8ky - 20k$
(i)	(ii)

4.7 ಸಾರಾಂಶ :

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. 'x' ಚರಾಕ್ಷರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು a_0, a_1, a_2 ------ a_n ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿರುವ $(a_n \neq 0)$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \text{----} + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ರೂಪದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ **ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** $p(x)$ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. a_0, a_1, a_2 ------ a_n ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ x^0, x^1, x^2 ----x^n ಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು n ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}$,--- $a_0 (a_n \neq 0)$ ಇವುಗಳನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪದಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

2. ಒಂದು ಪದವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

3. ಎರಡು ಪದಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

4. ಮೂರು ಪದಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

5. ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ 1 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

6. ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ 2 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

7. ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ 3 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

8. a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $p(x) = 0$ ಆದರೆ a ಯನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ನ **ಶೂನ್ಯತೆ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ a ಯನ್ನು $p(x) = 0$ ಸಮೀಕರಣದ **ಮೂಲ** ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

9. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಏಕಮಾತ್ರ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಶೂನ್ಯರಹಿತ ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

10. ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ: $p(x)$ ಎಂಬುದು ಡಿಗ್ರಿ 1 ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $p(x)$ ನ್ನು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $(x-a)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಆಗ ಶೇಷವು $p(a)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

11. ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ : $p(a) = 0$ ಆದರೆ $(x-a)$ ಯು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು $(x-a)$ ಯು $p(x)$ ದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $p(a) = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$

14. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy\,(x - y)$

15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

ಅಧ್ಯಾಯ – 5

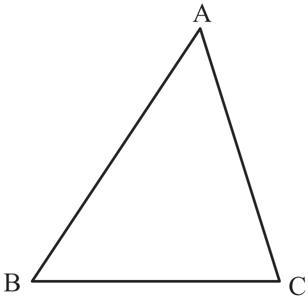
ತ್ರಿಭುಜಗಳು

5.1 ಪೀಠಿಕೆ

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿವಿಧ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಮೂರು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಆವೃತ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ ('ತ್ರಿ' ಎಂದರೆ ಮೂರು). ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು, ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ΔABC ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, Δ ABC ಯಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 5.1 ಗಮನಿಸಿ) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು AB, BC, CA, ಮೂರು ಕೋನಗಳು $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ಮತ್ತು A, B, C ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 6 ರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನೂ ಸಹ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ, ಸರ್ವಸಮತೆಯ ನಿಯಮಗಳು, ತ್ರಿಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಸವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವಿರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿನ ಬಹುತೇಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ. ಈಗ ಕೆಲವನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 5.1

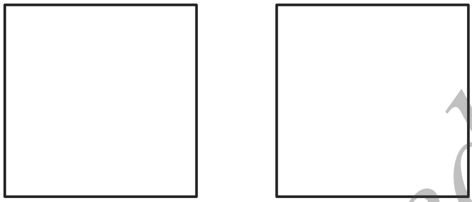
5.2 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ

ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಿರುವ ನಿಮ್ಮ ಭಾವಚಿತ್ರದ ಎರಡು ಪ್ರತಿಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರುವಿರಿ. ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಿರುವ ಎರಡೂ ಬಳೆಗಳು, ಒಂದೇ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ನೀಡಿರುವ ಎರಡು ATM ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದೇ ಇಸವಿಯಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಣವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಒಂದು ರೂ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಟ್ಟಾಗ ಎರಡೂ ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಈ ರೀತಿಯಾದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿರಾ? ಅವುಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಸರ್ವಸಮ ಎಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧದಲ್ಲೂ ಸಮವಾಗಿರುವುದು ಅಥವಾ ಆಕೃತಿ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರ ಎರಡರಲ್ಲೂ ಸಮವಾಗಿರುವುದು ಎಂದರ್ಥ).

ಈಗ ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ? ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ ಅಂತಹ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ನಾವು ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಒಂದೇ ಇರುವ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಇದೇ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 5.2 ಗಮನಿಸಿ). ಅಥವಾ ಸಮಬಾಹುವಿರುವ ಎರಡು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ವರ್ಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮ ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.



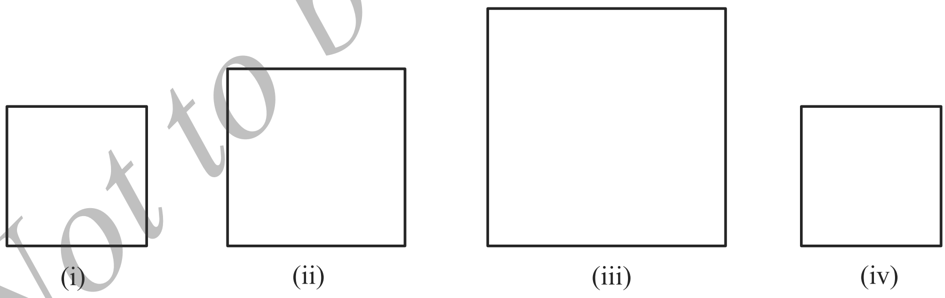
ಚಿತ್ರ 5.2

ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಏಕೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತಿರುವೆವು ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಅನಿಸಬಹುದು. ರೆಫ್ರಿಜರೇಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ಐಸ್‌ಕ್ಯೂಬ್‌ಗಳನ್ನು ಇಡಲು ಬಳಸುವ ತಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ನೀವೆಲ್ಲಾ ನೋಡಿರಬಹುದು. ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಅಚ್ಚುಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ತಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಚ್ಚುಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಾದ ತಗ್ಗುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ (ಆಯತಾಕಾರ ಅಥವಾ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಅಥವಾ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರವಾಗಿರಬಹುದು). ಆದುದರಿಂದ ತದ್ರೂಪಿ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕಾದರೆ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

ನೀವು ಬಳಸುವ ಪೆನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಹಳೆಯ ರೀಫಿಲ್(ಟ್ಯೂಬ್) ತೆಗೆದು ಹೊಸ ರೀಫಿಲ್ ಹಾಕಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಹಳೆಯ ರೀಫಿಲ್‌ನ ಅಳತೆಯಷ್ಟೇ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ನೀವು ಬದಲಾಯಿಸಲು ಕಷ್ಟಪಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ರೀಫಿಲ್‌ಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಮತ್ತು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಹೊಸ ರೀಫಿಲ್ ಪೆನ್‌ಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮತೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದಾದ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಯೋಚಿಸುವಿರಾ? ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರ 5.3(i) ರ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲದ ಆಕೃತಿಗಳು ಯಾವುವು?



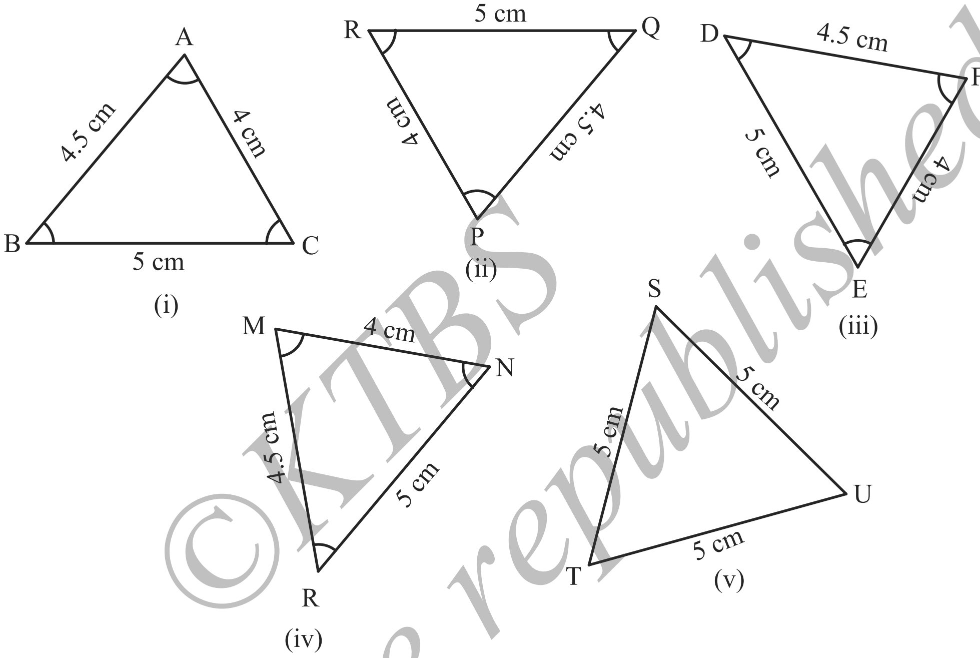
ಚಿತ್ರ 5.3

ಚಿತ್ರ 5.3 (ii) ಮತ್ತು (iii) ರಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ ವರ್ಗಗಳು ಚಿತ್ರ 5.3 (i) ರಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ 5.3 (iv) ರಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗವು ಚಿತ್ರ 5.3 (i) ರಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆ.

ಈಗ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಈಗಾಗಲೇ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಈಗ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ತ್ರಿಭುಜವು ಚಿತ್ರ 5.4 (i) ರಲ್ಲಿರುವ ΔABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆ?



ಚಿತ್ರ 5.4

ಚಿತ್ರ 5.4 ರಲ್ಲಿರುವ (ii) ರಿಂದ (v) ರ ವರೆಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ. ಆ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ΔABC ಮೇಲೆ ಐಕ್ಯವಾಗಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಚಿತ್ರ 5.4 ರ (ii), (iii) ಮತ್ತು (iv) ರ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ΔABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಚಿತ್ರ 5.4 (v) ರ Δ TSU, Δ ABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ.

ΔPQR, ΔABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ನಾವು $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ಆದಾಗ, ΔPQR ನ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು ΔABC ಯ ಸಮವಾದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅಂದರೆ PQ ಜೊತೆ AB, QR ಜೊತೆ BC ಮತ್ತು CA ಜೊತೆ RP ಹಾಗೂ $\angle P$ ಜೊತೆ $\angle A$, $\angle Q$ ಜೊತೆ $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle R$ ಜೊತೆ $\angle C$ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಶೃಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಅನುರೂಪತೆ ಇದೆ. ಅದು P ಯಿಂದ A, Q ಯಿಂದ B, R ಯಿಂದ C ಹಾಗೆಯೇ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$P \leftrightarrow A,\ Q \leftrightarrow B,\ R \leftrightarrow C$$

ಈ ರೀತಿಯ ಅನುರೂಪತೆಯಲ್ಲಿ, $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಆದರೆ $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ.

ಅದೇರೀತಿ ಚಿತ್ರ 5.4 (iii) ರಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ

$FD \leftrightarrow AB$, $DE \leftrightarrow BC$, $EF \leftrightarrow CA$

ಮತ್ತು $F \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$, ಮತ್ತು $E \leftrightarrow C$

ಅಂದರೆ $\Delta FDE \cong \Delta ABC$. ಆದರೆ $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ.

ΔABC ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 5.4 (iv) ರ ತ್ರಿಭುಜದ ನಡುವಿನ ಅನುರೂಪತೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

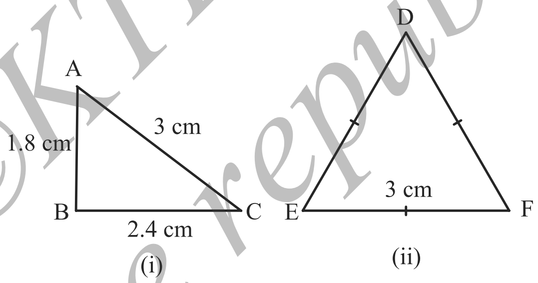
ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಲು ಅನುರೂಪ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಮವಿರುವ ಬಾಗಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ **'ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ'** ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಎಂದು ಅರ್ಥ.

5.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ನಿಬಂಧನೆಗಳು:

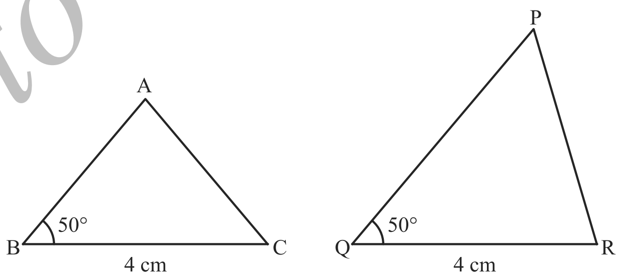
ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ನಾಲ್ಕು ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 3cm ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇ? ಅವು ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 5.5 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 5.5

ಈಗ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 4cm ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ 50° ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 5.6 ನೋಡಿ). ಅವು ಸರ್ವಸಮವೇ?



ಚಿತ್ರ 5.6

ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.

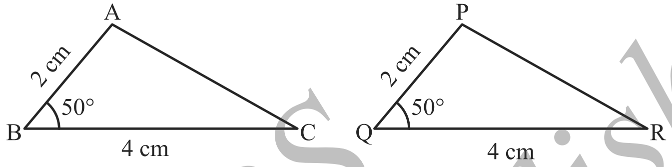
ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಅಥವಾ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಸಮ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಮ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳೂ ಸಹ ಸಮವಾದಾಗ ಏನಾಗಬಹುದು?

ಚಿತ್ರ 5.7 ರಲ್ಲಿ $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ ಹಾಗೂ $AB = PQ$ ಆಗಿದೆ. ಈಗ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನೀವು ಏನು ಹೇಳುವಿರಿ?

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆ. ಚಿತ್ರ 5.7 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗೆ ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಸಮತೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನ ಸಮವಿರುವುದು, ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಸಾಕಾಗುವುದೇ? ಹೌದು, ಇದು ಸಾಕು.



ಚಿತ್ರ 5.7

ಇದೇ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮೊದಲನೇ ನಿಬಂಧನೆಯಾಗಿದೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 5.1 : ಬಾಹು, ಕೋನ, ಬಾಹು(ಬಾ ಕೋ ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ.

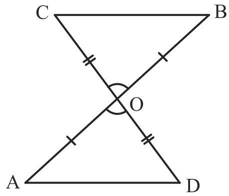
ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯಂತೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. (ಅನುಬಂಧ 1ನ್ನು ನೋಡಿ).

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಚಿತ್ರ 5.8 ರಲ್ಲಿ $OA = OB$ ಮತ್ತು $OD = OC$.

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ ಮತ್ತು (ii) $AD \parallel BC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.8

ಪರಿಹಾರ: (i) ΔAOD ಮತ್ತು ΔBOC ಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OD = OC \end{array}\right\} \quad \text{(ದತ್ತ)}$$

ಹಾಗೆಯೇ $\angle AOD$ ಮತ್ತು $\angle BOC$ ಗಳು ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು.

ಆದುದರಿಂದ $\angle AOD = \angle BOC$

$\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

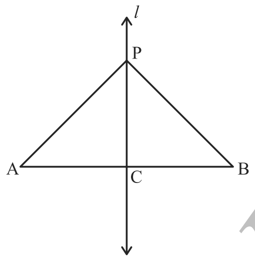
(ii) ΔAOD ಮತ್ತು ΔBOC ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಬೇರೆ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳೂ ಸಹ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle OAD = \angle OBC$. ಇವು AD ಮತ್ತು BC ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $AD \parallel BC$

ಉದಾಹರಣೆ 2 : AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ರೇಖೆ l ಅದರ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ಆಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದು l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಾಗ, P ಬಿಂದುವು A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: l ರೇಖೆಯು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಇದು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು C ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತಿದೆ (ಚಿತ್ರ 5.9 ಗಮನಿಸಿ). PA = PB ಎಂದು ನೀವು ತೋರಿಸಬೇಕು. Δ PCA ಮತ್ತು Δ PCB ಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.9

AC = BC (C ಯು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು)

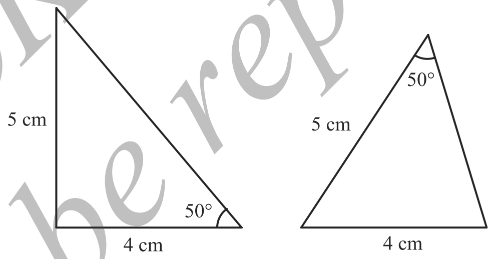
$\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$ (ದತ್ತ)

PC = PC (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

ಹಾಗೇಯೇ PA = PB, ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು.

ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 4cm ಮತ್ತು 5cm ಹಾಗೂ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು 50° ಇರುವಂತೆ ನಾವು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ರಚಿಸುವಾಗ 50° ಕೋನವು ಸಮಬಾಹುಗಳ ನಡುವೆ ಬರದಂತೆ ರಚಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 5.10 ಗಮನಿಸಿ). ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇ?



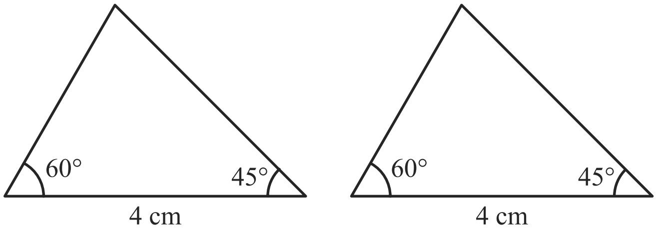
ಚಿತ್ರ 5.10

ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಬಹುಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸಮಕೋನಗಳು ಸಮಬಾಹುಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ನಿಯಮ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆಯೇ ಹೊರತು ಕೋ ಬಾ ಬಾ ಅಥವಾ ಬಾ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮವಲ್ಲ.

ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ 60° ಮತ್ತು 45° ಹಾಗೂ ಈ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 4cm ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 5.11 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 5.11

ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಎರಡು ಸಮ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬಾಹು ಸಮವಿದ್ದರೆ ಸಾಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ **ಕೋನ, ಬಾಹು, ಕೋನ** ನಿಬಂಧನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು **ಕೋ ಬಾ ಕೋ** ನಿಬಂಧನೆ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ ಆದರೆ ನಾವು ಈಗ ಇದನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 5.1: (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ: Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEF ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ

$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

ಮತ್ತು $BC = EF$

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದರೆ ಮೂರು ಪ್ರಕರಣಗಳು ಬರುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಕರಣ (i) $AB = DE$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 5.12 ಗಮನಿಸಿ)

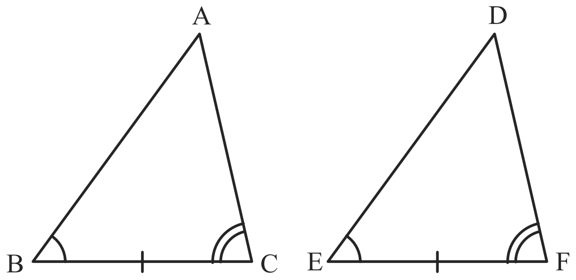
ಈಗ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ? ನೀವು ಈ ಮುಂದಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$AB = DE$ (ಊಹಿಸಿರುವುದು)

$\angle B = \angle E$ (ದತ್ತ)

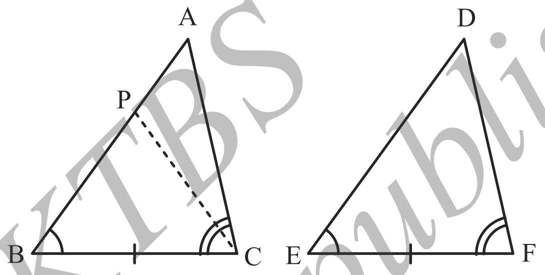
$BC = EF$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ನಿಯಮ)



ಚಿತ್ರ 5.12

ಪ್ರಕರಣ (ii): ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ $AB > DE$ ಆಗಿರಲಿ. ಆದುದರಿಂದ $PB = DE$ ಆಗುವಂತೆ AB ಯ ಮೇಲೆ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ Δ PBC ಮತ್ತು Δ DEF ಗಳಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 5.13 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 5.13

Δ PBC ಮತ್ತು Δ DEF ಗಳಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

$PB = DE$ (ರಚನೆಯಿಂದ)

$\angle B = \angle E$ (ದತ್ತ)

$BC = EF$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta PBC \cong \Delta DEF$ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು, ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ.

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಸಮ.

ಆದುದರಿಂದ $\angle PCB = \angle DFE$

ಆದರೆ $\angle ACB = \angle DFE$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\angle ACB = \angle PCB$

ಇದು ಸಾಧ್ಯವೇ ?

P ಯು A ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಇದು ಸಾಧ್ಯ.

ಅಥವಾ $BA = ED$

ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ)

ಪ್ರಕರಣ (iii): AB < DE ಆದರೆ ME = AB ಆಗುವಂತೆ DE ಯ ಮೇಲೆ M ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರಕರಣ (ii) ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. AB = DE ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

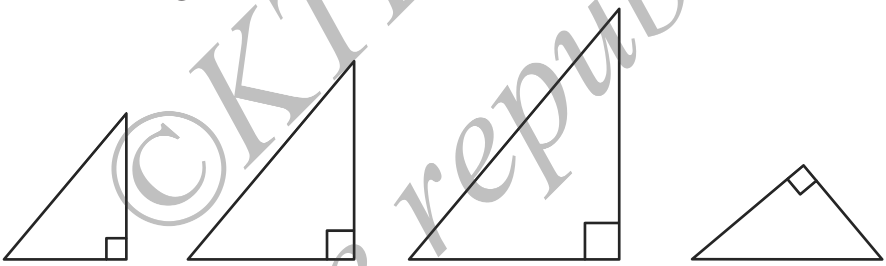
ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ಬಾಹುವು ಅನುರೂಪ ಸಮಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು ಆಗಿರದಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗಲೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇ? ಅವು ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಏಕೆ ಎಂದು ಕಾರಣ ನೀಡುವಿರಾ?

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^{o} ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಜೊತೆ ಕೋನಗಳೂ ಸಹ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (180° – ಸಮಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಕೋನ, ಕೋನ, ಬಾಹು **(ಕೋ ಕೋ ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ** ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಈಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಕೋನಗಳು, 40^{o}, 50^{o} ಮತ್ತು 90^{o} ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನೀವು ರಚಿಸಬಹುದು? ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಇರುವಂತೆ ಬಹಳಷ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನೀವು ರಚಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 5.14 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 5.14

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಆಗದಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದುದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮೂರೂ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹು ಆಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಈಗ ನಾವು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : AB ರೇಖಾಖಂಡವು CD ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. AD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು O ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 5.15 ಗಮನಿಸಿ).

(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವೂ ಸಹ 'O' ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

(i) Δ AOB ಮತ್ತು Δ DOC ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$\angle ABO = \angle DCO$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು, ಕಾರಣ $AB \parallel CD$ ಮತ್ತು BC ಛೇದಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ)

$\angle AOB = \angle DOC$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

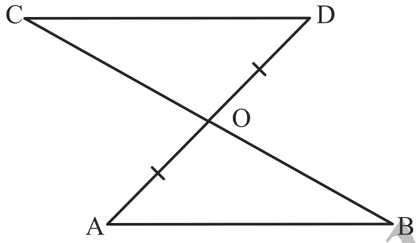
$OA = OD$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta AOB \cong \Delta DOC$

(ಕೋ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

(ii) $OB = OC$ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

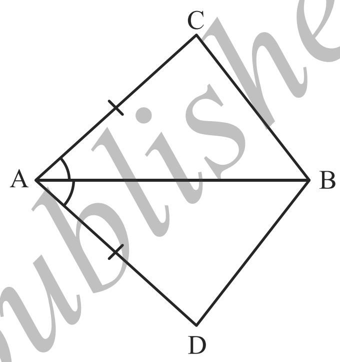
ಆದುದರಿಂದ BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು 'O' ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.15

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

(1) ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ $AC = AD$ ಮತ್ತು AB ಯು $\angle A$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತಿದೆ (ಚಿತ್ರ 5.16 ಗಮನಿಸಿ). $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. BC ಮತ್ತು BD ಗಳಿಗೆ ಸಂಭಂದಿಸಿದಂತೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ?



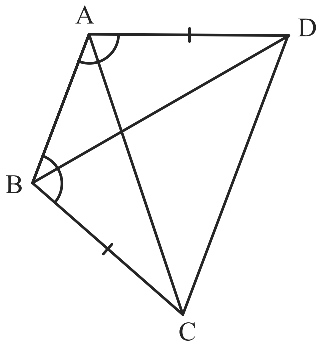
ಚಿತ್ರ 5.16

(2) ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ. $AD = BC$ ಮತ್ತು $\angle DAB=\angle CBA$ ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 5.17 ಗಮನಿಸಿ).

(1) $\Delta\ ABD \cong \Delta\ BAC$

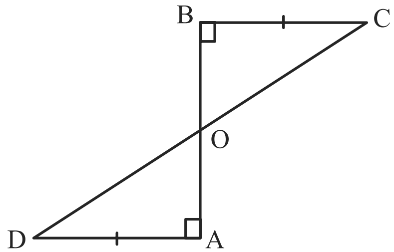
(2) $BD = AC$

(3) $\angle ABD = \angle BAC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



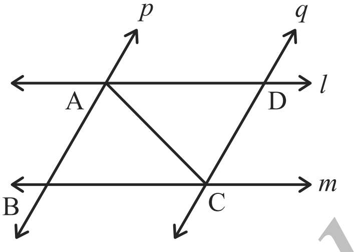
ಚಿತ್ರ 5.17

(3) AD ಮತ್ತು BC ಗಳು AB ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸಮ ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.18 ಗಮನಿಸಿ). CD ಯು AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.18

(4) l ಮತ್ತು m ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು. ಈ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ p ಮತ್ತು q ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.19 ಗಮನಿಸಿ) ಹಾಗಾದರೆ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

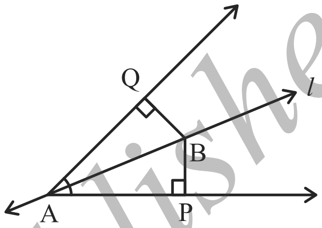


ಚಿತ್ರ 5.19

(5) $\angle A$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆ l ಆಗಿದೆ. B ಯು l ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿದೆ. BP ಮತ್ತು BQ ಗಳು B ಯಿಂದ $\angle A$ ನ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.20 ಗಮನಿಸಿ).

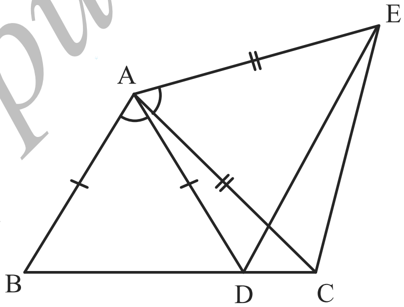
(i) $\Delta\ APB \cong \Delta\ AQB$

(ii) $BP = BQ$ ಅಥವಾ B ಯು $\angle A$ ನ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.20

(6) ಚಿತ್ರ 5.21 ರಲ್ಲಿ $AC = AE$, $AB = AD$ ಮತ್ತು $\angle BAD = \angle EAC$ ಆದರೆ $BC = DE$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

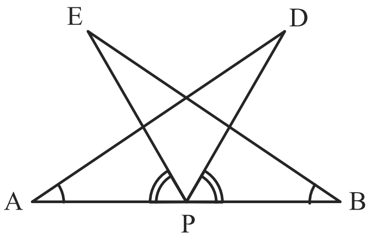


ಚಿತ್ರ 5.21

(7) AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು P ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. $\angle BAD = \angle ABE$ ಮತ್ತು $\angle EPA = \angle DPB$ ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳು AB ಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.22 ಗಮನಿಸಿ).

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) $AD = BE$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.22

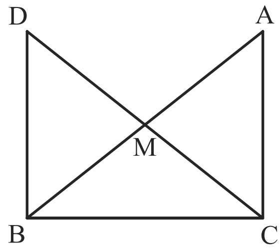
(8) ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $\angle C$ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. ವಿಕರ್ಣ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಆಗಿದೆ. C ನ್ನು M ಗೆ ಸೇರಿಸಿ $DM = CM$ ಆಗುವಂತೆ D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. D ಮತ್ತು B ಸೇರಿಸಿದೆ (ಚಿತ್ರ 5.23 ಗಮನಿಸಿ).

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.23

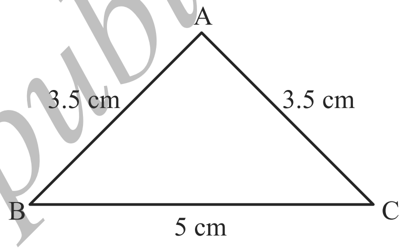
5.4 ತ್ರಿಭುಜದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

ಮೇಲಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಎರಡು ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ.

ಎರಡು ಸಮಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 3.5cm ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 5cm ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 5.24 ಗಮನಿಸಿ). ಈ ರೀತಿಯ ರಚನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

ಇಂತಹ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆಂದು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿರಾ?



ಚಿತ್ರ 5.24

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಆದುದರಿಂದ ಚಿತ್ರ 5.24 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಇಲ್ಲಿ $AB = AC$ ಆಗಿದೆ.

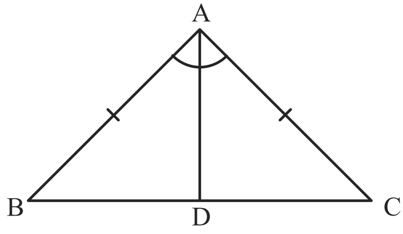
ಈಗ $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಅಳೆಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ?

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಯಿರುವ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.

ಅಂತಹ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಇದು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ಹಾಗೂ ಯಾವುದೇ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 5.2 : ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದನ್ನು ಅನೇಕ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.25

ಸಾಧನೆ : ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

ಇದರಲ್ಲಿ $AB = AC$ ಆಗಿದೆ.

$\angle B = \angle C$ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

$\angle A$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕವನ್ನು ನಾವು ಎಳೆಯೋಣ. ಅದು BC ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಚಿತ್ರ 5.25 ಗಮನಿಸಿ).

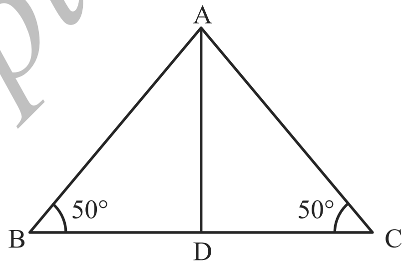
ΔBAD ಮತ್ತು ΔCAD ಗಳಲ್ಲಿ

$AB = AC$	(ದತ್ತ)
$\angle BAD = \angle CAD$	(ರಚನೆಯಿಂದ)
$AD = AD$	(ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)
ಆದುದರಿಂದ $\Delta BAD \cong \Delta CAD$	(ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)
ಹಾಗಾಗಿ $\angle ABD = \angle CAD$	(ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)
ಆದುದರಿಂದ $\angle B = \angle C$	

ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿಯೇ? ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಕೋನಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದೇ?

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ.

BC ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯಿದ್ದು $\angle B = \angle C = 50^\circ$ ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜ ABC ರಚಿಸಿ. $\angle A$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಎಳೆಯಿರಿ ಅದು BC ಯನ್ನು D ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 5.26 ಗಮನಿಸಿ). Δ ABC ಯನ್ನು ಹಾಳೆಯಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಶೃಂಗ C ಯು ಶೃಂಗ B ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ AD ಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಮಡಚಿ.



ಚಿತ್ರ 5.26

AC ಮತ್ತು AB ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ? AC ಯು AB ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಆದುದರಿಂದ $AC = AB$

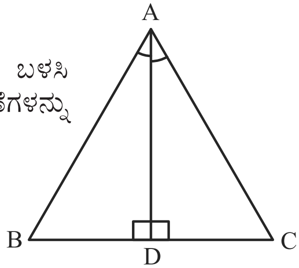
ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಸಮಯದಲ್ಲೂ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶವು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 5.3: ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 5.2 ರ ವಿಲೋಮ

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಕೋ ಬಾ ಕೋ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ΔABC ಯಲ್ಲಿ AD ಯು $\angle A$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಮತ್ತು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 5.27 ಗಮನಿಸಿ). ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು $AB = AC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.27

ಪರಿಹಾರ : Δ ABD ಮತ್ತು Δ ACD ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle BAD = \angle CAD$ (ದತ್ತ)

$AD = AD$ (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

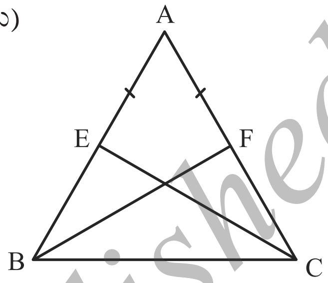
$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ)

$AB = AC$ (ಸ. ತ್ರಿ. ಅ. ಭಾ.)

ಅಥವಾ ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ΔABC ಯಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು AC ಸಮಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಆಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.28 ಗಮನಿಸಿ). $BF = CE$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 5.28

ಪರಿಹಾರ : Δ ABF ಮತ್ತು Δ ACE ಗಳಲ್ಲಿ

$AB = AC$ (ದತ್ತ)

$\angle A = \angle A$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

$AF = AE$ (ಸಮಬಾಹುಗಳ ಅರ್ಧಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

$BF = CE$ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ)

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ $AB = AC$. BC ಯ ಮೇಲೆ $BE = CD$ ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.29 ನೋಡಿ). $AD = AE$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : Δ ABD ಮತ್ತು Δ ACE ಗಳಲ್ಲಿ

$AB = AC$ (ದತ್ತ) .... (1)

$\angle B = \angle C$ (ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು) .... (2)

ಹಾಗೂ $BE = CD$

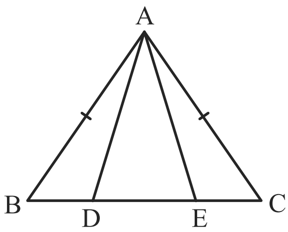
ಆದುದರಿಂದ, $BE - DE = CD - DE$

ಅಂದರೆ $BD = CE$ .... (3)

ಆದುದರಿಂದ, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

((1), (2), (3) ಮತ್ತು ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ ಬಳಸಿ)

$AD = AE$ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ)



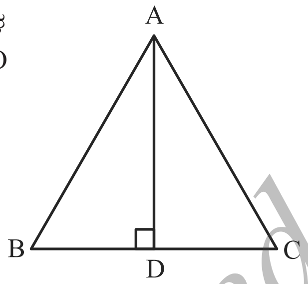
ಚಿತ್ರ 5.29

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

(1) ABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $AB = AC$. $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ 'O' ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. A ಮತ್ತು O ಸೇರಿಸಿ.

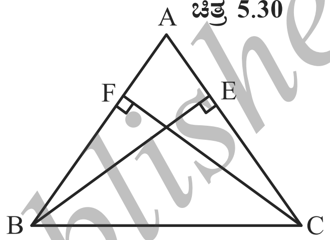
(i) $OB = OC$

(ii) $\angle A$ ನ್ನು AO ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ



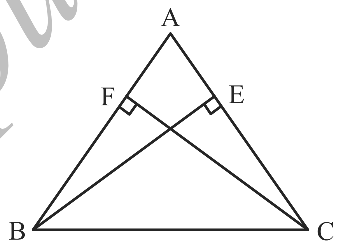
ಚಿತ್ರ 5.30

(2) ΔABC ಯಲ್ಲಿ BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವು AD ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 5.30 ಗಮನಿಸಿ). $AB = AC$ ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.31

(3) ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಸಮಬಾಹುಗಳಾದ AC ಮತ್ತು AB ಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ BE ಮತ್ತು CF ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 5.31 ಗಮನಿಸಿ). ಈ ಎತ್ತರಗಳು ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

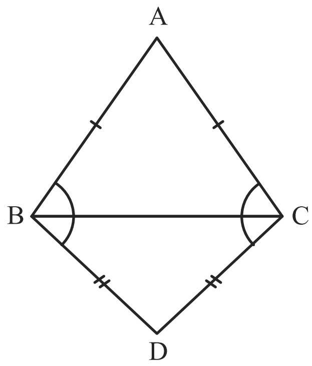


ಚಿತ್ರ 5.32

(4) ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AC ಮತ್ತು AB ಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BE ಮತ್ತು BF ಆಗಿದ್ದು ಅವು ಸಮವಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.32 ಗಮನಿಸಿ).

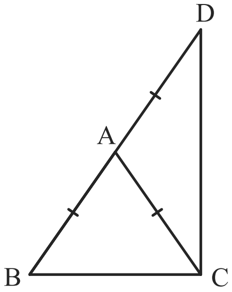
(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

(ii) $AB = AC$ ಅಂದರೆ ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.33

5) ABC ಮತ್ತು DBC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯ ಮೇಲಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 5.33 ಗಮನಿಸಿ) $\angle ABD = \angle ACD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.34

(6) Δ ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. AB = AC ಆಗಿದೆ. AD = AB ಆಗುವಂತೆ BA ಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ (ಚಿತ್ರ 5.34 ಗಮನಿಸಿ). $\angle BCD$ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

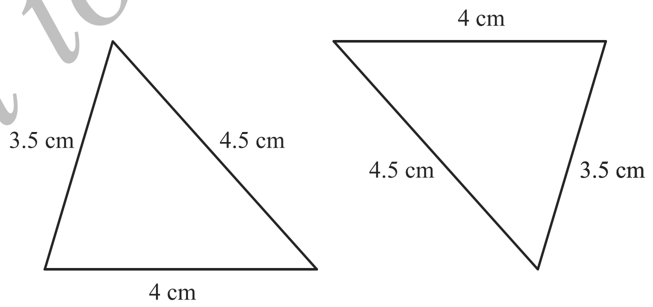
(7) ABC ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ. $\angle A = 90^o$ ಮತ್ತು AB = AC. ಆದರೆ $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(8) ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ 60^o ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5.5 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಬಂಧನೆಗಳು

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರ. ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕು ಎಂದರೆ ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಈಗಾಗಲೇ ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ ಇದು ಸತ್ಯ.

ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆ 4cm, 3.5cm ಮತ್ತು 4.5cm ಇರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 5.35ನ್ನು ನೋಡಿ) ಅವುಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಟ್ಟರೆ, ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ (ಮುಚ್ಚುತ್ತವೆ) ಆದುದರಿಂದ ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 5.35

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ನಮಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ನಿಯಮ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

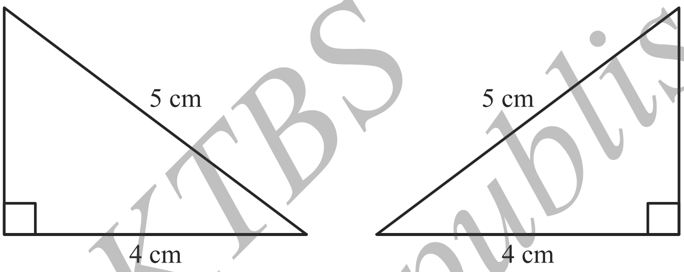
ಪ್ರಮೇಯ 5.4 : ಬಾಹು, ಬಾಹು, ಬಾಹು (ಬಾ ಬಾ ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಒಂದು ಸೂಕ್ತ ರಚನೆ ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮದಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅನುರೂಪ ಸಮಬಾಹುಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಡುವೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆ ಇಲ್ಲವಾದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರ.

ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ :

ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ 5cm ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಉದ್ದ 4cm ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 5.36 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 5.36

ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಸಮಬಾಹುಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ. ಬೇರೆ ಜೊತೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. ಇದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವು ಸಮಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದುದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಬರುವಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 5.5 : ಲಂಬಕೋನ, ವಿಕರ್ಣ, ಬಾಹು (ಲಂ. ವಿ. ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ: ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದರ ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ ಆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಲಂ. ವಿ. ಬಾ ಎಂದರೆ ಲಂಬಕೋನ, ವಿಕರ್ಣ, ಬಾಹು ಎಂದರ್ಥ. ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

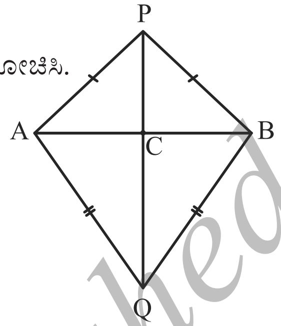
ಉದಾಹರಣೆ 7: AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ. AB ಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು A ಮತ್ತು B ಯಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.37 ಗಮನಿಸಿ). PQ ವು AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : PA = PB ಮತ್ತು QA = QB ಎಂದು ನೀಡಿದೆ.

PQ ⊥ AB ಮತ್ತು PQ ವು AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

PQ ವು AB ಯನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಇರಬಹುದೇ? ಯೋಚಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.37

Δ PAQ ಮತ್ತು Δ PBQ ಗಳಲ್ಲಿ

AP = BP (ದತ್ತ)

AQ = BQ (ದತ್ತ)

PQ = PQ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ, Δ PAQ $\cong \Delta$ PBQ (ಬಾ ಬಾ ಬಾ ನಿಯಮ)

$\angle$APQ = $\angle$BPQ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಈಗ Δ PAC ಮತ್ತು Δ PBC ಗಳಲ್ಲಿ

AP = BP (ದತ್ತ)

$\angle$APC = $\angle$BPC ($\angle$APQ = $\angle$BPQ ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿದೆ)

PC = PC (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ Δ PAC $\cong \Delta$ PBC (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

AC = BC (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ) .... (1)

ಮತ್ತು $\angle$ACP = $\angle$BCP (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಹಾಗೂ $\angle$ACP + $\angle$BCP = 180° (ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ 2$\angle$ACP = 180°

$\angle$ACP = 90° .... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ PQ ಎಂದು ನೀವು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

AP = BP (ದತ್ತ)

PC = PC (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

$\angle$PAC = $\angle$PBC (ΔAPB ಯಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು)

ಹೀಗಿದ್ದರೂ ಸಹ ΔPAQ ಮತ್ತು ΔPBQ ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸದೇ ΔPAC $\cong$ ΔPBC ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಬಾ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದಲ್ಲದೇ ಸಮಬಾಹುಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಡುವೆ ಕೋನವು ಸಹ ಇಲ್ಲ.

ಇನ್ನೂ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ

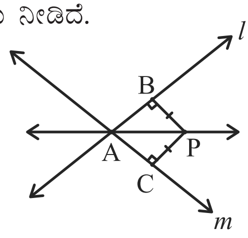
ಉದಾಹರಣೆ 8 : P ಬಿಂದುವು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ l ಮತ್ತು m ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ (ಚಿತ್ರ 5.38 ಗಮನಿಸಿ). AP ಯು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : l ಮತ್ತು m ರೇಖೆಗಳು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ ಎಂದು ನೀಡಿದೆ.

$PB \perp l$, $PC \perp m$ ಆಗಿರಲಿ.

PB = PC (ದತ್ತ)

$\angle PAB = \angle PAC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.38

Δ PAB ಮತ್ತು Δ PAC ಗಳಲ್ಲಿ

PB = PC (ದತ್ತ)

$\angle PBA = \angle PCA = 90^\circ$ (ದತ್ತ)

PA = PA (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

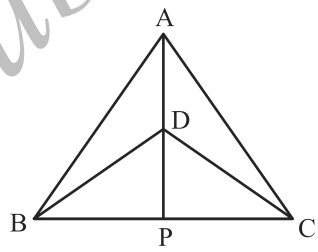
ಆದುದರಿಂದ Δ PAB $\cong$ Δ PAC (ಲಂ.ಕ.ಬಾ ನಿಯಮ)

$\angle PAB = \angle PAC$ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಅಭ್ಯಾಸ 5.1 ಪ್ರಶ್ನೆ 5 ರ ಸಾಧಿಸಿದ ಫಲಿತಾಂಶದ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯ ಮೇಲೆ Δ ABC ಮತ್ತು Δ DBC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ನಿಂತಿವೆ. A ಮತ್ತು D ಶೃಂಗಗಳು BC ಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.39 ಗಮನಿಸಿ). AD ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ. ಅದು BC ಯನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

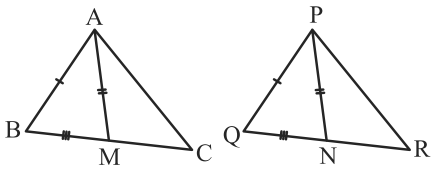


ಚಿತ್ರ 5.39

   (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$
   (ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$
   (iii) $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle D$ ನ್ನು AP ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ
   (iv) BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ AP ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. AB=AC ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AD ಯು ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ.
   (i) BC ಯನ್ನು AD ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ
   (ii) $\angle A$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ AD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. Δ ABC ಯ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು BC ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ AM ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ Δ PQR ನ PQ ಮತ್ತು QR ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ PN ಗೆ ಸಮವಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.40 ಗಮನಿಸಿ).



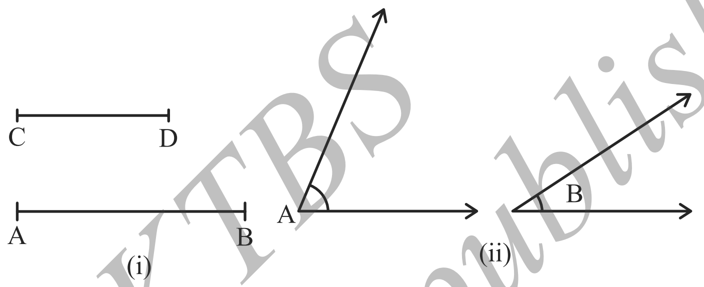
ಚಿತ್ರ 5.40

   (i) Δ ABM $\cong$ Δ PQN
   (ii) Δ ABC $\cong$ Δ PQR ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. BE ಮತ್ತು CF ಗಳು ΔABC ಯ ಸಮ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿವೆ. ಲಂ.ವಿ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ ಬಳಸಿ ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
5. ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ $AB = AC$, $\angle B = \angle C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿಲು $AP \perp BC$ ಎಳೆಯಿರಿ.

5.6 ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅಸಮಾನತೆ

ಈವರೆಗೂ ನೀವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿನ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮತೆ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಿರಿ. ಕೆಲವು ವೇಳೆ ನಾವು ಅಸಮವಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚಿತ್ರ 5.41 (i) ರಲ್ಲಿರುವ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, AB ರೇಖಾಖಂಡವು ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದವಿದೆ. ಇದೇರೀತಿ ಚಿತ್ರ 5.41 (ii) ರಲ್ಲಿ $\angle B$ ಗಿಂತ $\angle A$ ದೊಡ್ಡದು.



ಚಿತ್ರ 5.41

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಸಮಬಾಹುಗಳ ನಡುವೆ ಮತ್ತು ಅಸಮಕೋನಗಳ ನಡುವೆ ಏನದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ: ಒಂದು ಡ್ರಾಯಿಂಗ್ ಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಎರಡು ಗುಂಡುಸೂಜಿಗಳನ್ನು ಸಿಕ್ಕಿಸಿ. ಅವೆರಡನ್ನು ಒಂದು ದಾರದಿಂದ ಕಟ್ಟಿ. ಅದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹು BC ಆಗಿರಲಿ. ಇನ್ನೊಂದು ದಾರದ ಒಂದು ತುದಿಯನ್ನು C ಯಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಗೆ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಕಟ್ಟಿ. ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಬಳಸಿ ಬಿಂದು A ಗುರ್ತಿಸಿ. ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 5.42 ಗಮನಿಸಿ). CA ಮೇಲೆ A ಬಿಂದುವಿನ ಆಚೆಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು A' ನ್ನು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನಿಂದ ಗುರ್ತಿಸಿ. (ಅದರ ಹೊಸ ಸ್ಥಾನ).

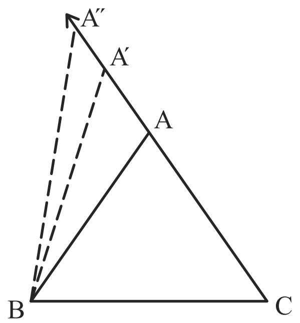
ಆದುದರಿಂದ $A'C > AC$ (ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ)

A' ನ್ನು B ಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ A'BC ಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ. $\angle A'BC$ ಮತ್ತು $\angle ABC$ ಸಂಭಂದಿಸಿದಂತೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ?

ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ $\angle A'BC > \angle ABC$

ಹೀಗೆ CA (ವೃದ್ಧಿಸಿದ) ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗಿ. ಬಾಹು BC ಮತ್ತು ಗುರ್ತಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. AC ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ (A ನ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ) ಅದಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನ ಅಂದರೆ $\angle B$ ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.42

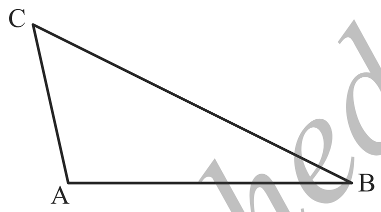
ಈಗ ಮತ್ತೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆ ಮಾಡೋಣ

ಚಟುವಟಿಕೆ : ಒಂದು ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲವೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯುಳ್ಳ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ). ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ.

ಈಗ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಚಿತ್ರ 5.43 ರಲ್ಲಿನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು BC ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹು AC ಆಗಿದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ $\angle A$ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡದು ಮತ್ತು $\angle B$ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.43

ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅಸಮಾನತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

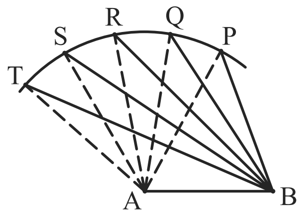
ಪ್ರಮೇಯ 5.6 : ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಅಸಮವಿದ್ದಾಗ, ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಿನ ಎದುರಿನ ಕೋನವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 5.43 ರಲ್ಲಿ $CA = CP$ ಆಗುವಂತೆ BC ಯ ಮೇಲೆ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನೀವು ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಈಗ ಮತ್ತೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ : ರೇಖಾಖಂಡ AB ಎಳೆಯಿರಿ. A ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅನುಕೂಲಕರ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. P, Q, R, S, T ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅದರ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ.

ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಯೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 5.44 ಗಮನಿಸಿ). ನಾವು P ಯಿಂದ T ವರೆಗೆ ಚಲಿಸಿದಲ್ಲಿ, $\angle A$ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಏನಾಗುತ್ತಿದೆ? ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವೂ ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ ಮತ್ತು $TB > SB > RB > QB > PB$.



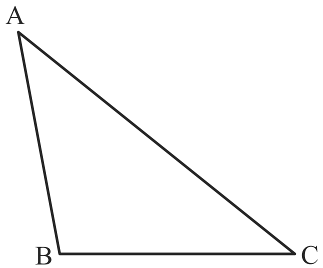
ಚಿತ್ರ 5.44

ಈಗ ಮೂರೂ ಭಿನ್ನ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿಸಿ. ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 5.45 ಗಮನಿಸಿ).

ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಕೋನದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಚಿತ್ರ 5.45 ರಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಕೋನ $\angle B$ ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು AC ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರಮೇಯ 5.6 ರ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುವಿರಿ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ಈ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯವಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.45

ಪ್ರಮೇಯ 5.7 : ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವೈರುಧ್ಯತೆ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ.

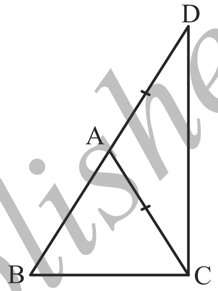
ಈಗ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರಲ್ಲಿ $AB + BC$, $BC + AC$ ಮತ್ತು $AC + AB$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

$AB + BC > AC$, $BC + AC > AB$ ಮತ್ತು $AC + AB > BC$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ನೀವು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 5.8 : ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 5.46 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯ ಬಾಹು BA ವನ್ನು $AD=AC$ ಆಗುವಂತೆ D ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. $\angle BCD > \angle BDC$ ಮತ್ತು $BA + AC > BC$ ಎಂದು ನೀವು ತೋರಿಸಬಲ್ಲಿರಾ ? ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯಡೆಗೆ ನೀವು ಬಂದಿರಾ ?



ಚಿತ್ರ 5.46

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲಿರುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 9 : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $AD = AC$ ಆಗುವಂತೆ BC ಯ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದು ಇದೆ. (ಚಿತ್ರ 5.47 ಗಮನಿಸಿ). $AB > AD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: Δ DAC ಯಲ್ಲಿ

$AD = AC$ (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\angle ADC = \angle ACD$

(ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು)

ಈಗ Δ ABD ಗೆ $\angle ADC$ ಯು ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

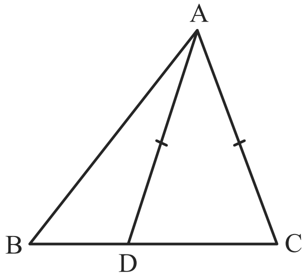
ಆದುದರಿಂದ $\angle ADC > \angle ABD$

ಅಥವಾ $\angle ACD > \angle ABD$

ಅಥವಾ $\angle ACB > \angle ABC$

ಆದುದರಿಂದ $AB > AC$ (Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹು)

ಅಥವಾ $AB > AD$ $(AD = AC)$

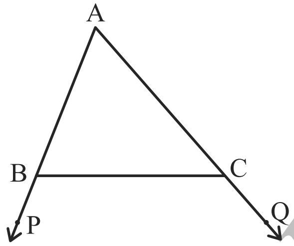


ಚಿತ್ರ 5.47

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

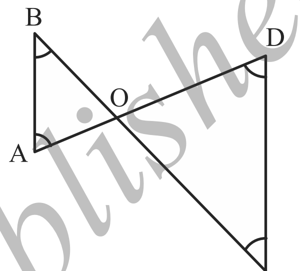
(1) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣವು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(2) ಚಿತ್ರ 5.48 ರಲ್ಲಿ Δ ABC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ $\angle PBC < \angle QCB$ ಆಗಿದೆ. $AC > AB$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



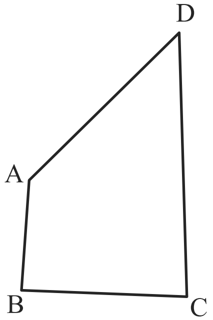
ಚಿತ್ರ 5.48

(3) ಚಿತ್ರ 5.49 ರಲ್ಲಿ $\angle B < \angle A$ ಮತ್ತು $\angle C < \angle D$ ಆದರೆ $AD < BC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



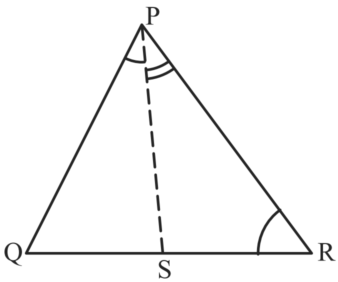
ಚಿತ್ರ 5.49

(4) ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 5.50 ಗಮನಿಸಿ). $\angle A > \angle C$ ಮತ್ತು $\angle B > \angle D$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 5.50

(5) ಚಿತ್ರ 5.51 ರಲ್ಲಿ $PR > PQ$ ಮತ್ತು $\angle QPR$ ನ್ನು PS ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. $\angle PSR > \angle PSQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 5.51

(6) ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಹೊರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡವೇ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5 (ಐಚ್ಛಿಕ)

ಈ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲ್ಲ

(1) ABC ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ. ΔABC ಯ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

(2) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಸಮದೂರವಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಿ.

(3) ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ ಜನರು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತವಾಗಿದ್ದಾರೆ (ಚಿತ್ರ 5.52 ಗಮನಿಸಿ).

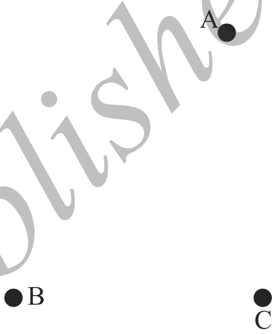
A: ಮಕ್ಕಳಿಗಾಗಿ ಭಿನ್ನ ಇಳಿಜಾರು (ಜಾರುವ ಬಂಡೆ) ಮತ್ತು ಉಯ್ಯಾಲೆ ಇರುವ ಕಡೆ,

B: ಮಾನವ ನಿರ್ಮಿತ ಕೊಳ ಇರುವ ಕಡೆ,

C: ಹೆಚ್ಚು ವಾಹನಗಳನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸುವ ಮತ್ತು ಹೊರಗಡೆ ಹೋಗುವ ಕಡೆ.

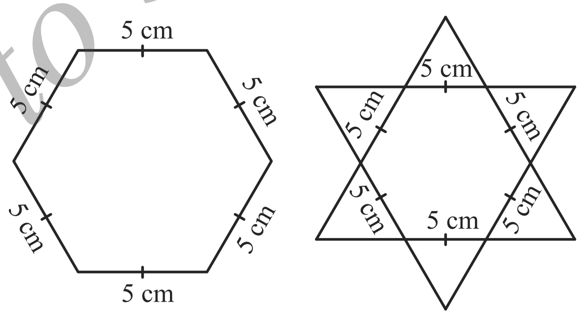
ಹೆಚ್ಚು ಜನ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂ ಅಂಗಡಿಗೆ ಬರಲು ಅದನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ?

(ಸುಳಿವು : ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂ ಅಂಗಡಿಯು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರಬೇಕು)



ಚಿತ್ರ 5.52

(4) ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷತ್ರ ಆಕಾರದ ರಂಗೋಲಿಗಳನ್ನು (ಚಿತ್ರ 5.53 ರ (i) ಮತ್ತು (ii) ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ನಿಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯವೋ ಅಷ್ಟು 1 cm ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವಿರುವ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಂದ ತುಂಬಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಣಿಸಿ. ಯಾವುದರಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿವೆ ?



(i) (ii)

ಚಿತ್ರ 5.53

5.7 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

(1) ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(2) ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(3) ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಒಂದೇ ಇರುವ ವರ್ಗಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(4) $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ ಮತ್ತು $C \leftrightarrow R$ ಅನುರೂಪತೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ PQR ಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಅದನ್ನು $\Delta\ ABC \cong \Delta\ PQR$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

(5) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(6) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಕೋ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(7) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಕೋ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(8) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(9) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(10) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ 60°.

(11) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಬಾ ಬಾ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(12) ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ ಆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಲಂ. ಕ. ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(13) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(14) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(15) ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ – 6

ರಚನೆಗಳು

6.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಈ ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮೇಯ ಅಥವಾ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ರಚಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿರಲಿಲ್ಲ. ಆ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನಿಮಗೆ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸರಿಯಾದ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೀಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಕೆಲವು ಸಲ ನಮಗೆ ಕರಾರುವಕ್ಕಾದ ಅಳತೆಯ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕಟ್ಟಡ ನಿರ್ಮಾಣದ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸಲು, ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಯಂತ್ರದ ವಿವಿಧ ಭಾಗಗಳನ್ನು ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲು, ರಸ್ತೆಯ ನಕ್ಷೆ ಎಳೆಯಲು ಇಂತಹ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಮೂಲ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಉಪಕರಣಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉಪಕರಣಗಳಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಲೇಬೇಕಾಗಿದೆ.

(i) **ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿ (Scale)** : ಇದರ ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ ಮಿಲಿಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಗುರುತುಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಗುಲಗಳಲ್ಲಿ (inches) ಹಾಗೂ ಅಂಗುಲದ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಗುರುತುಗಳಿರುತ್ತವೆ.

(ii) **ಒಂದು ಜೊತೆ ಮೂಲೆ ಮಟ್ಟಗಳು (set-squares) :** ಒಂದರಲ್ಲಿ 90°, 60° ಮತ್ತು 30° ಕೋನಗಳು ಹಾಗೂ ಇನ್ನೊಂದರಲ್ಲಿ 90°, 45° ಮತ್ತು 45° ಕೋನಗಳಿರುತ್ತವೆ.

(iii) **ವಿಭಾಜಕ :** ಇದರಲ್ಲಿ ಅಳತೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿರಬೇಕು.

(iv) **ಕೈವಾರ :** ಇದರ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಅನ್ನು ಬಿಗಿಯಾಗಿ ಹಾಕುವಂತಿರಬೇಕು.

(v) **ಕೋನಮಾಪಕ**

ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳಾದ ತ್ರಿಭುಜ, ವೃತ್ತ, ಚತುರ್ಭುಜ, ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಮಂತಾದವುಗಳನ್ನು ದತ್ತ ಅಳತೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ರಚಿಸಲು ಈ ಎಲ್ಲ ಉಪಕರಣಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. **ಅಳತೆಯ ಗುರುತು ಹೊಂದಿರದ ನೇರ ಪಟ್ಟಿ** ಇದನ್ನು ಸರಳರೇಖಾ ಪಟ್ಟಿ – [Straight edge] ಮತ್ತು **ಕೈವಾರ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎರಡೇ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅನೇಕ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯೇ **ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ರಚನೆ.** ಆದರೆ ಅಳತೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ನಿಮಗೆ ಗುರುತಿರುವ ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಕೋನಮಾಪಕಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವಿಧದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

6.2 ಮೂಲಭೂತ ರಚನೆಗಳು

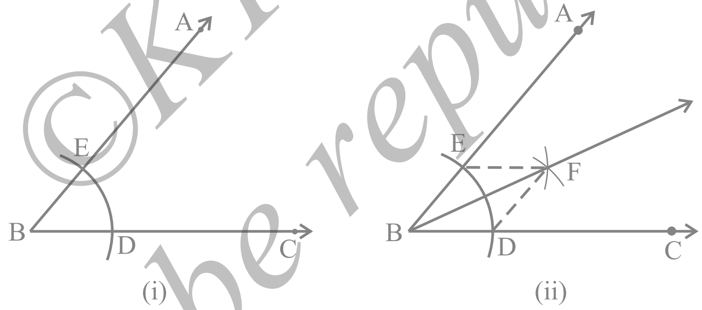
ಆರನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ವೃತ್ತ, ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡದ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆ, 30°, 45°, 60°, 90° ಮತ್ತು 120° ಕೋನಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ದತ್ತ ಕೋನದ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆ, ಇವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬೇಕು ಎಂದು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ, ಆದರೆ ಈ ರಚನೆಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಮರ್ಥನೆಯನ್ನು ನೀಡಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ರಚನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ರಚಿಸುವಿರಿ ಹಾಗೂ ಈ ರಚನೆಗಳು ಏಕೆ ಸಮಂಜಸವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವಿರಿ.

ರಚನೆ 6.1 : ದತ್ತ ಕೋನಕ್ಕೆ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರಚಿಸುವುದು.

ಕೋನ ABC ನೀಡಿದೆ, ಇದಕ್ಕೆ ನಾವು ಕೋನಾರ್ಧಕ ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು :

1. B ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವನ್ನಾಗಿರಿಸಿ, BA ಮತ್ತು BC ಕಿರಣವನ್ನು E ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಸೂಕ್ತ ಅಳತೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. [ಚಿತ್ರ 6.1 (i) ಗಮನಿಸಿ].
2. DE ಉದ್ದದ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಳತೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ಎಳೆದ ಕಂಸಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಕತ್ತರಿಸಲಿ. ಈ ಕತ್ತರಿಸಿದ ಬಿಂದುವನ್ನು F ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.
3. BF ಕಿರಣವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. [ಚಿತ್ರ 6.1 (i) ಗಮನಿಸಿ] BF ಕಿರಣವು ∠ ABC ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.1

ಈ ವಿಧಾನವು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಕೋನಾರ್ಧಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ನೀಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

DF ಮತ್ತು EF ಸೇರಿಸಿ.

ತ್ರಿಭುಜ BEF ಮತ್ತು BDF ಗಳಲ್ಲಿ

BE	= BD	[ಒಂದೇ ಕಂಸದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]
EF	= DF	[ಸಮ ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಕಂಸಗಳು]
BF	= BF	[ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ]

ಆದ್ದರಿಂದ, Δ BEF $\cong$ Δ BDF [ಬಾ ಬಾ ಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ]

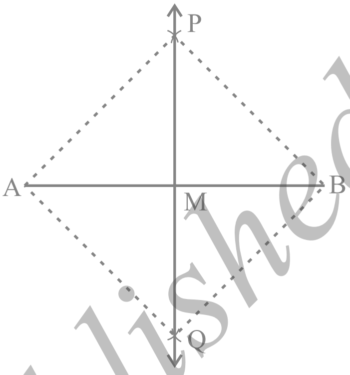
ಇದರಿಂದ, $\angle EBF = \angle DBF$ [ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು]

ರಚನೆ 6.2 : ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ನೀಡಿದೆ, ಇದಕ್ಕೆ ನಾವು ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು :

1. AB ರೇಖಾಖಂಡದ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಳತೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ, ರೇಖಾಖಂಡದ ಎರಡು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಸಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.
2. ಈ ಕಂಸಗಳು P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಲಿ PQ ಸೇರಿಸಿ. [ಚಿತ್ರ 6.2 ಗಮನಿಸಿ]
3. PQ ರೇಖೆಯು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ PMQ ರೇಖೆಯು AB ರೇಖಾಖಂಡದ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ. 6.2

ಈಗ ನಾವು ಈ ವಿಧಾನವು AB ರೇಖೆಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ನೀಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು P ಮತ್ತು Q ಎರಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿಸಿ. AP, AQ, BP ಮತ್ತು BQ ಪಡೆಯಿರಿ.

ತ್ರಿಭುಜ PAQ ಮತ್ತು PBQ ಗಳಲ್ಲಿ,

AP = BP [ಸಮ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಕಂಸಗಳು]

AQ = BQ [ಸಮ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಕಂಸಗಳು]

PQ = PQ [ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ]

ಆದ್ದರಿಂದ, Δ PAQ $\cong$ Δ PBQ [ಬಾಬಾಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ]

ಇದರಿಂದ, $\angle$APM = $\angle$BPM [ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಗಗಳು]

ಈಗ ತ್ರಿಭುಜ PMA ಮತ್ತು PMB ಗಳಲ್ಲಿ

AP = BP [ಹಿಂದಿನಂತೆ]

PM = PM [ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ]

$\angle$APM = $\angle$BPM [ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿದೆ]

ಆದ್ದರಿಂದ, Δ PMA $\cong$ Δ PMB [ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ]

ಇದರಿಂದ, AM = BM ಮತ್ತು $\angle$PMA = $\angle$PMB [ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು]

ಹಾಗೆಯೇ $\angle$PMA + $\angle$PMB = 180° ಆಗಿದೆ [ಸರಳ ಯುಗ್ಮ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ]

$\angle$PMA = $\angle$PMB = 90°

ಆದ್ದರಿಂದ, PM ಅಂದರೆ PMQ ರೇಖೆಯು AB ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

ರಚನೆ 6.3: ದತ್ತ ಕಿರಣದ ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 60° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸವುದು.

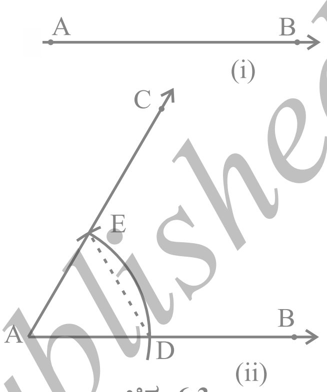
ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದು A ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ AB ಕಿರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. [ಚಿತ್ರ 6.3 (i) ಗಮನಿಸಿ]. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು $\angle CAB = 60°$ ಇರುವಂತೆ AC ಕಿರಣವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದಾದ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು :

1. A ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವನ್ನಾಗಿರಿಸಿ, ಸೂಕ್ತವಾದ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ AB ಕಿರಣವನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
2. ಹಿಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ, D ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿಕೊಂಡು ಈಗಾಗಲೇ ಎಳೆದ ಕಂಸವನ್ನು ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.
3. E ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ AC ಕಿರಣವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ [ಚಿತ್ರ 6.3 ಗಮನಿಸಿ]. ಈಗ $\angle CAB$ ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ 60° ಕೋನವಾಗಿದೆ.

   ಈ ರಚನಾ ವಿಧಾನವು ನಮಗೆ 60° ಕೋನವನ್ನು ಹೇಗೆ ನೀಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

   DE ಸೇರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ. 6.3

ಆಗ, AE = AD = DE [ರಚನೆಯಿಂದ]

ಆದ್ದರಿಂದ, Δ EAD ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $\angle EAD$ ಯು $\angle CAB$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದು 60° ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

1. ಒಂದು ಕಿರಣದ ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 90° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ರಚನೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.
2. ಒಂದು ಕಿರಣದ ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 45° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ರಚನೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.
3. ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

   (i) 30° (ii) $22\frac{1}{2}^{\circ}$ (iii) 15°
4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಕೋನಮಾಪಕದಿಂದ ಅಳೆದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

   (i) 75° (ii) 105° (iii) 135°
5. ದತ್ತ ಬಾಹುವಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ರಚನೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

6.3 ಕೆಲವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳು

ಇದುವರೆಗೆ ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತವಾದ ರಚನೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದೆ. ಮುಂದೆ, ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲು ನೀಡಿದ ಕೆಲವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ಅಧ್ಯಾಯ 5ರಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಾದ ಬಾ ಬಾ ಬಾ, ಬಾ ಕೋ ಬಾ, ಕೋ ಬಾ ಕೋ ಮತ್ತು ಲಂ ವಿ ಬಾ ಗಳನ್ನು ನೆನೆಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

(i) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ,

(ii) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ,

(iii) ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಬಾಹುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಮತ್ತು

(iv) ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು ಅನನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

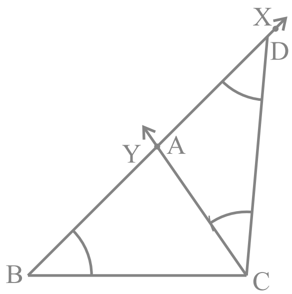
ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತಹ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬೇಕು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಏಳನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಈಗ, ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕನಿಷ್ಠ ಮೂರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಆದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಅಂಶಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಗಳು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎರಡು ಬಾಹು ಹಾಗೂ ಈ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಯಾವುದೇ ಕೋನ ನೀಡಿದರೆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಅನನ್ಯವಾಗಿ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ರಚನೆ 6.4 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ, ಒಂದು ಪಾದ ಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ದತ್ತ : Δ ABCಯ ಪಾದ BC, ಪಾದ ಕೋನ $\angle$B ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ AB + AC ಇವುಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಈಗ ನೀವು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು :

1. ಪಾದ BC ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿ $\angle$XBC ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
2. BX ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ AB + AC ಯು ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ, BD ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ.
3. DC ಸೇರಿಸಿ ಮತ್ತು $\angle$BDC ಗೆ ಸಮವಿರುವಂತೆ $\angle$DCY ಎಳೆಯಿರಿ.
4. CY ರೇಖೆಯು BX ನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ [ಚಿತ್ರ 6.4 ಗಮನಿಸಿ]. Δ ABC ಯು ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ. 6.4

ನಾವು ಈಗ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಪಡೆದ ಬಗೆ ಹೇಗೆ ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

ಪಾದ BC ಮತ್ತು $\angle$B ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ನಂತರ ತ್ರಿಭುಜ ACD ಯಲ್ಲಿ,

$\angle ACD = \angle ADC$ (ರಚನೆಯಿಂದ)

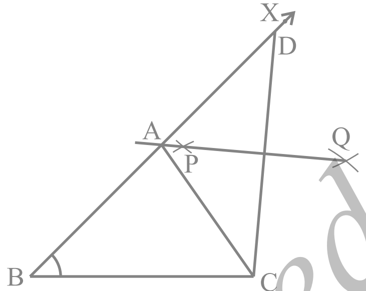
ಆದ್ದರಿಂದ, $AC = AD$ ಮತ್ತು

ಈಗ, $AB = BD - AD = BD - AC$

$\therefore AB + AC = BD.$

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ :

ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಮೊದಲ ಎರಡು ಹಂತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅನಂತರದಲ್ಲಿ CD ರೇಖೆಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆ PQ ವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇದು BD ಯನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸಲಿ [ಚಿತ್ರ 6.5 ಗಮನಿಸಿ]. CA ಸೇರಿಸಿ. ಆಗ ABC ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ. A ಬಿಂದುವು CD ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, $AD = AC$



ಚಿತ್ರ. 6.5

ಷರಾ : ಮೊತ್ತ $AB + AC \leq BC$ ಆದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ರಚನೆಯು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

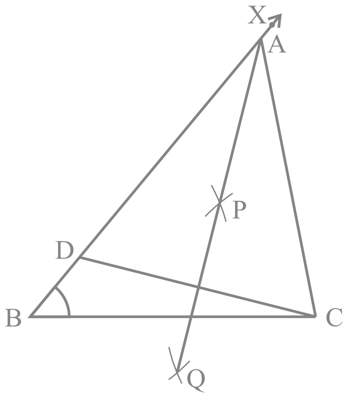
ರಚನೆ 6.5 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ, ಒಂದು ಪಾದಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ದತ್ತ ಪಾದ BC, ಒಂದು ಪಾದ ಕೋನ $\angle B$ ಎಂದಿರಲಿ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $AB - AC$ ಅಥವಾ $AC - AB$ ಆಗಿರಲಿ. ನೀವು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಪ್ರಕರಣಗಳಿವೆ.

ಪ್ರಕರಣ (i) : $AB > AC$ ಆಗಿರಲಿ, ಅಂದರೆ $AB - AC$ ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು :

1. ಪಾದ BC ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿ $\angle XBC$ ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
2. BX ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ $AB - AC$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ, BD ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ.
3. DC ಸೇರಿಸಿ ಮತ್ತು DC ರೇಖೆಗೆ PQ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.
4. PQ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯು BX ರೇಖೆಯನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. AC ಸೇರಿಸಿ [ಚಿತ್ರ 6.6 ಗಮನಿಸಿ]



ಚಿತ್ರ. 6.6

ABC ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ. ಈಗ ನಾವು ನಮಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆದೆವು ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

ಪಾದ BC ಮತ್ತು $\angle B$ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

A ಬಿಂದುವು DC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

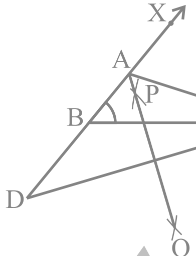
$$\therefore \quad AD = AC$$

ಹಾಗೆಯೇ, $BD = AB - AD = AB - AC$

ಪ್ರಕರಣ (ii) : AB < AC ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ AC – AB ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು :

1. ಪ್ರಕರಣ (i) ರಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ.
2. ರೇಖೆ XB ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ. AC – AB ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ, BD ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ.
3. DC ಸೇರಿಸಿ ಹಾಗೂ DC ಬಾಹುವಿಗೆ PQ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
4. PQ ಯು BX ಅನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. AC ಸೇರಿಸಿ [ಚಿತ್ರ 6.7 ಗಮನಿಸಿ]



ಚಿತ್ರ. 6.7

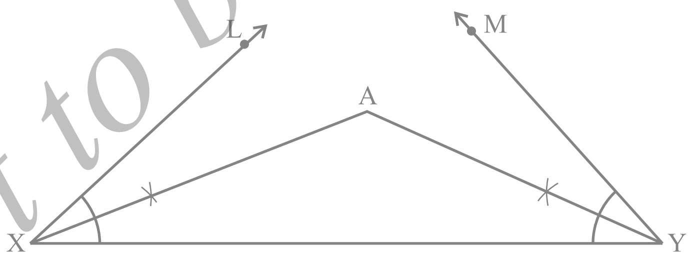
ಈಗ ABC ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ. ಪ್ರಕರಣ (i) ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ನೀವು ಈ ರಚನೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು.

ರಚನೆ 6.6 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಪಾದಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ಪಾದ ಕೋನಗಳಾದ ∠B ಮತ್ತು ∠C ಹಾಗೂ AB + BC + CA ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ನೀವು ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

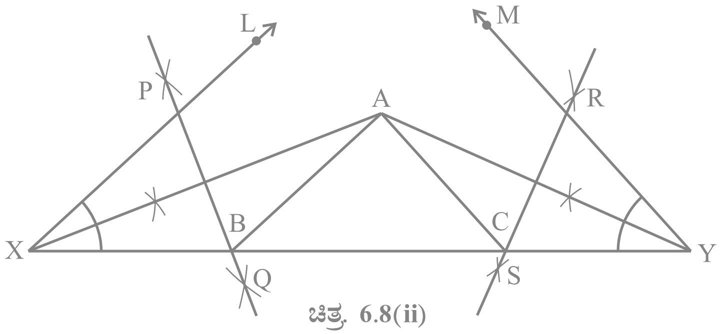
ರಚನಾ ಹಂತಗಳು :

1. XY ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು AB + BC + CA ಯ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.
2. LXY ಕೋನವು ∠B ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ ಹಾಗೂ MYX ಕೋನವು ∠C ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ.
3. ∠LXY ಮತ್ತು ∠MYX ಗಳನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿ. ಈ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. [ಚಿತ್ರ 6.8 (i) ಗಮನಿಸಿ].



ಚಿತ್ರ. 6.8(i)

4. AX ಗೆ PQ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ಮತ್ತು AY ಗೆ RS ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
5. PQ ಬಾಹುವು XY ಬಾಹುವನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು RS ಬಾಹುವು XY ಬಾಹುವನ್ನು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. AB ಮತ್ತು AC ಸೇರಿಸಿ. [ಚಿತ್ರ 6.8 (ii) ಗಮನಿಸಿ].



ಚಿತ್ರ. 6.8(ii)

ಈಗ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಈ ರಚನೆಯ ಸಮರ್ಥನೆಗಾಗಿ, B ಯು AX ನ ಲಂಬಾರ್ಧಕ PQ ನ ಮೇಲೆ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$\therefore$ XB = AB

ಹಾಗೂ ಅದೇ ರೀತಿ CY = AC

ಇದರಿಂದ BC + CA + AB = BC + XB + CY = XY

ಹಾಗೆಯೇ $\angle BAX = \angle AXB$ [Δ AXB ದಲ್ಲಿ AB = XB]

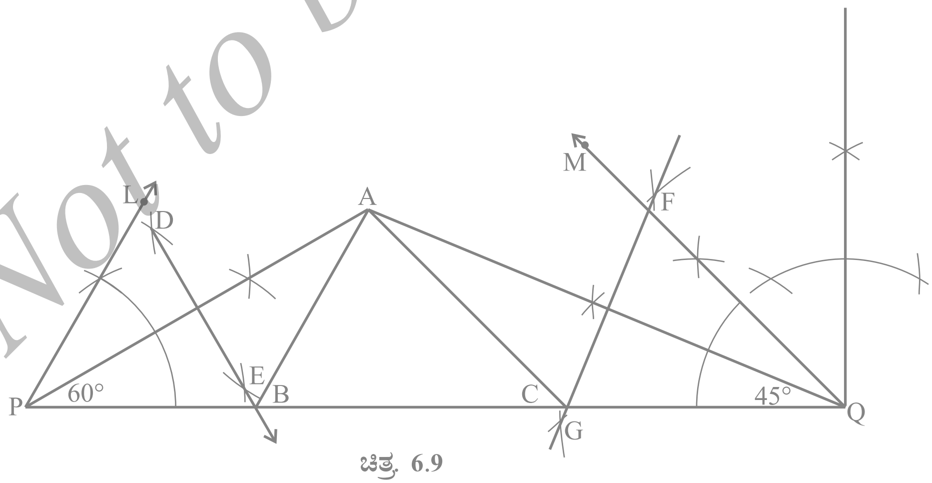
ಮತ್ತು $\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB = 2\angle AXB = \angle LXY$

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\angle ACB = \angle MYX$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$ ಮತ್ತು AB + BC + CA = 11 cm ಇರುವಂತೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು :

1. PQ = 11 cm (= AB + BC + CA) ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
2. P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 60° ಕೋನವನ್ನು ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 45° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ. 6.9

3. 60° ಮತ್ತು 45° ಕೋನಗಳನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿ. ಈ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.
4. AP ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ DE ಯು PQ ವನ್ನು B ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು AQ ನ ಲಂಬಾರ್ಧಕ GF ಯು, PQ ವನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ರಚಿಸಿ.
5. AB ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. [ಚಿತ್ರ 6.9 ಗಮನಿಸಿ].

   ಈಗ ABC ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

1. $BC = 7$ cm, $\angle B = 75^\circ$ ಮತ್ತು $AB + AC = 13$ cm ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.
2. $BC = 8$ cm, $\angle B = 45^\circ$ ಮತ್ತು $AB - AC = 3.5$ cm ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.
3. $QR = 6$ cm, $\angle Q = 60^\circ$ ಮತ್ತು $PR - PQ = 2$ cm ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜ PQR ನ್ನು ರಚಿಸಿ.
4. $\angle Y = 30^\circ$, $\angle Z = 90^\circ$ ಮತ್ತು $XY + YZ + ZX = 11$ cm ಇರುವಂತೆ XYZ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.
5. ಪಾದ 12 cm ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೊತ್ತ 18 cm ಇರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿಸಿ.

6.4 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ನೀವು ಅಳತೆಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಕೈವಾರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

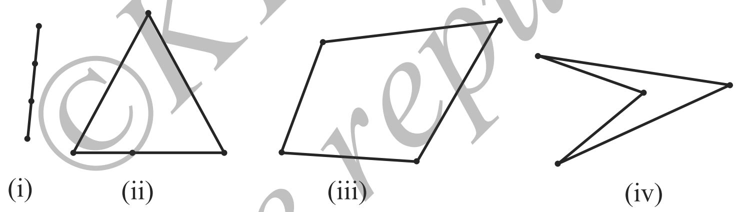
1. ದತ್ತ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದು.
2. ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು.
3. 60° ಮುಂತಾದ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
4. ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ, ಒಂದು ಪಾದಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
5. ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ, ಒಂದು ಪಾದಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
6. ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಪಾದಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ಅಧ್ಯಾಯ – 7

ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

7.1 ಪೀಠಿಕೆ

ನೀವು ಅಧ್ಯಾಯ 3 ಮತ್ತು 5 ರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನೇಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಮೂರು ಏಕರೇಖಾಗತವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಆಕೃತಿಯು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಈಗ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸೋಣ. ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಏನು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

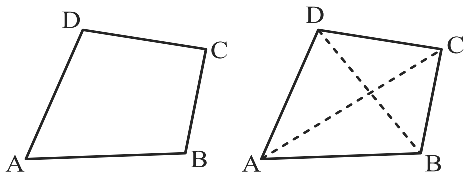


ಚಿತ್ರ 7.1

ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ (ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ) ನಮಗೆ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 7.1 (i)ಗಮನಿಸಿ) ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಏಕರೇಖಾತವಾಗಿದ್ದರೆ ನಮಗೆ ತ್ರಿಭುಜ ಸಿಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 7.1 (ii) ಗಮನಿಸಿ). ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳೂ ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಆವೃತ ಆಕೃತಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 7.1 (iii) ಮತ್ತು (iv) ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).

ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ ಪಡೆಯುವ ಆಕೃತಿಗೆ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರ 7.1 (iii) ರಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಧವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಚಿತ್ರ 7.1 (iv) ರ ವಿಧವನ್ನಲ್ಲ.

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವು ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು, ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 7.2 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).



(i) (ii)

ಚಿತ್ರ 7.2

ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳು AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಆಗಿವೆ. A,B,C ಮತ್ತು D ಗಳು ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ C ಮತ್ತು $\angle$D ಗಳು ಶೃಂಗಗಳ ಬಳಿ ಉಂಟಾಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳು.

ಈಗ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಗಳಾದ A ಮತ್ತು C ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಹಾಗೆಯೇ B ಮತ್ತು D ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.2(ii) ಗಮನಿಸಿ). AC ಮತ್ತು BD ಗಳು ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಧಗಳು, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು, ಹಾಗೂ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ನಾವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು (ಅಥವಾ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು) ನಾವು ಏಕೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂದು ನೀವು ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. ನಿಮ್ಮ ಸುತ್ತಲೂ ಒಮ್ಮೆ ನೋಡಿ. ಬಹಳಷ್ಟು ವಸ್ತುಗಳು ಚತುರ್ಭುಜದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುವಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನೆಲ, ಗೋಡೆಗಳು, ಮೇಲ್ಛಾವಣಿ. ಶಾಲಾ ಕೊಠಡಿಯ ಕಿಟಕಿಗಳು, ಕಪ್ಪು ಹಲಗೆ, ಡಸ್ಟರ್‌ನ ಪ್ರತಿಮುಖ, ನಿಮ್ಮ ಪುಸ್ತಕದ ಪ್ರತಿ ಹಾಳೆ, ನೀವು ಓದಲು ಬಳಸುವ ಮೇಜಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗ ಇತ್ಯಾದಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 7.3 ಗಮನಿಸಿ)

ಕಪ್ಪು ಹಲಗೆ **ಪುಸ್ತಕ** **ಮೇಜು**

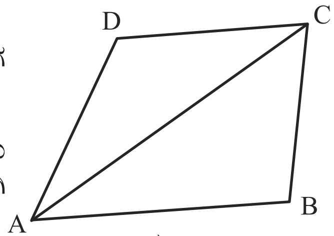
ಚಿತ್ರ 7.3

ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲೂ ಕಾಣುವ ಅನೇಕ ವಸ್ತುಗಳು ವಿಶೇಷವಾದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಅಂದರೆ ಆಯತವಾಗಿವೆ. ಆದರೂ ಸಹ ನಾವು ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಮುಖವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಆಯತವೂ ಸಹ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಆಯತಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ.

7.2 ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360°. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಎಳೆದು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 7.4

ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು AC ಒಂದು ಕರ್ಣವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.4 ಗಮನಿಸಿ).

Δ ADC ಯ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು ?

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180^0$ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ .... (i)

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ

$\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^0$ .... (ii)

(i) ಮತ್ತು (ii) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^0 + 180^0 = 360^0$

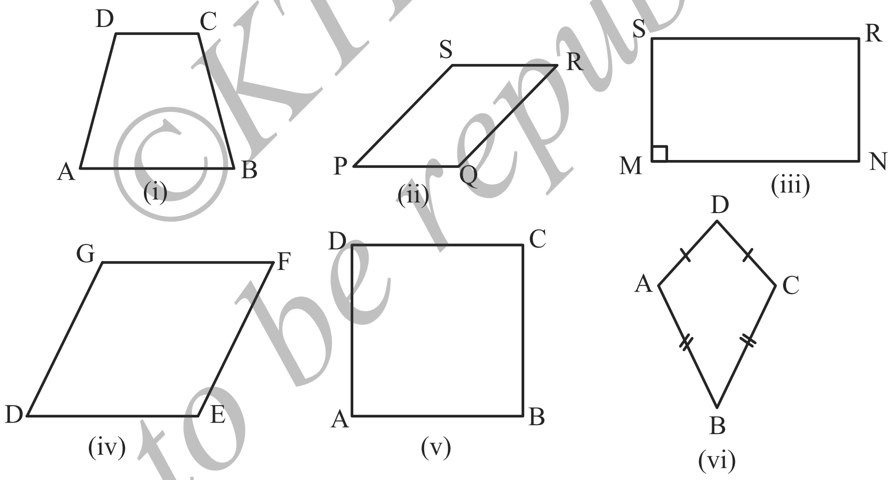
ಹಾಗೂ $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$ ಮತ್ತು $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$

ಆದುದರಿಂದ $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360^0$

ಅಂದರೆ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360^0 ಆಗಿದೆ.

7.3 ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಧಗಳು

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿವಿಧ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.5

ಗಮನಿಸಿ :

- ಚಿತ್ರ 7.5 (i) ರಲ್ಲಿ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು CD ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಅದು ಟ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.
- ಚಿತ್ರ 7.5 (ii), (iii), (iv) ಮತ್ತು (v) ರಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡೂ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಅಂತಹ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಆದುದರಿಂದ ಚಿತ್ರ 7.5 (ii) ರಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜ PQRS ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಅದೇ ರೀತಿ ಚಿತ್ರ 7.5 (iii), (iv) ಮತ್ತು (v) ರಲ್ಲಿನ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು.

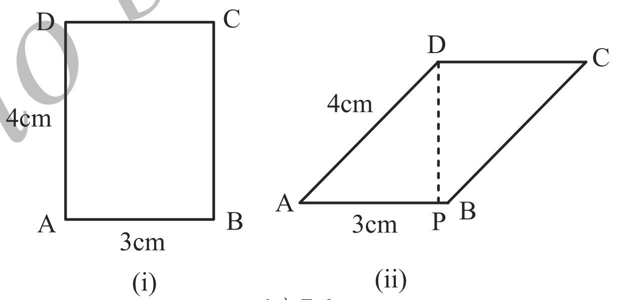
- ಚಿತ್ರ 7.5 (iii) ರ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ MNRS ನ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನ $\lfloor M$ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಶೇಷವಾದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ? ಸ್ಮರಣೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಅದನ್ನು ಆಯತ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- ಚಿತ್ರ 7.5 (iv) ರ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ DEFG ಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಅದನ್ನು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.
- ಚಿತ್ರ 7.5 (v) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ $\angle A = 90^\circ$ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ವರ್ಗ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- ಚಿತ್ರ 7.5 (vi) ರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ $AD = CD$ ಮತ್ತು $AB = CB$ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಎರಡು ಜೊತೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ. ಇದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಪತಂಗ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

  ವರ್ಗ, ಆಯತ ಮತ್ತು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

  - ಒಂದು ವರ್ಗವು ಆಯತ ಮತ್ತು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
  - ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
  - ಒಂದು ಪತಂಗವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಲ್ಲ.
  - ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಲ್ಲ.

  (ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಮಾತ್ರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಎರಡೂ ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಬೇಕು)
- ಒಂದು ಆಯತ ಅಥವಾ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯು ವರ್ಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಚಿತ್ರ 7.6 ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಆಯತ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದು ಅದು 14cm ಇದೆ.



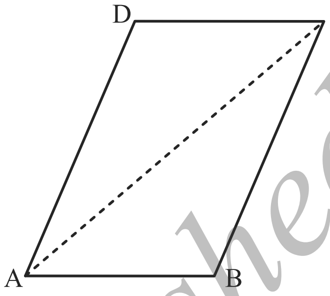
ಚಿತ್ರ 7.6

ಇಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $DP \times AB$ ಮತ್ತು ಇದು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $AB \times AD$ ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಕಾರಣ $DP < AD$. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸಿಹಿ ತಿಂಡಿ ಮಾರುವ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳು ಬರ್ಫಿಗಳನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದೇ ತಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಡಬ್ಬಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಬರ್ಫಿಗಳನ್ನು ತುಂಬುವ ಸಲುವಾಗಿ. (ಮುಂದಿನ ಬಾರಿ ಬರ್ಫಿಯನ್ನು ತಿನ್ನುವ ಮೊದಲು

ಅದರ ಆಕಾರ ನೋಡಿ ನಂತರ ತಿನ್ನಿ!) ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿರುವ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಈಗ ಪುನರಾವರ್ತಿಸೋಣ.

7.4. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ಒಂದು ಹಾಳೆಯಿಂದ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಕತ್ತರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.7 ಗಮನಿಸಿ). ನಿಮಗೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ?



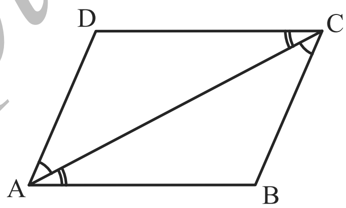
ಚಿತ್ರ 7.7

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ಬೇಕಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಸುತ್ತು ತಿರುಗಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನಾರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರತಿಬಾರಿಯೂ ಒಂದು ಕರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಈಗ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.1 : ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.8

ಸಾಧನೆ : ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು AC ಅದರ ಕರ್ಣವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.8 ಗಮನಿಸಿ). ಕರ್ಣ AC ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯನ್ನು Δ ABC ಮತ್ತು ΔCDAಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

Δ ABC ಮತ್ತು Δ CDAಗಳಲ್ಲಿ BC || AD ಮತ್ತು AC ಛೇದಕ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದುದರಿಂದ, $\angle BCA = \angle DAC$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ)

ಹಾಗೂ AB || DC ಮತ್ತು AC ಛೇದಕ.

ಆದುದರಿಂದ, $\angle BAC = \angle DCA$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ)

ಮತ್ತು AC = CA (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ)

ಅಥವಾ ಕರ್ಣ AC ಯು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯನ್ನು Δ ABC ಮತ್ತು Δ CDA ಎಂಬ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ.

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

AB = DC ಮತ್ತು AD = BC ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ.

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಇನ್ನೊಂದು ಗುಣಲಕ್ಷಣ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 7.2 : ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ.

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಕರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೀರ. ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಅಂದರೆ ಅನುರೂಪಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ? ಅವುಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $AB = DC$ ಮತ್ತು $AD = BC$

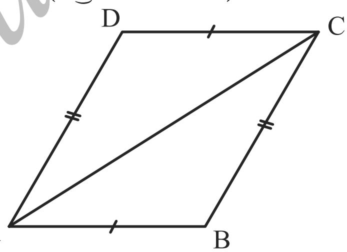
ಈಗ ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ವಿಲೋಮವೇನು? ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಅದರ ವಿಲೋಮದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿರುವುದು ಅದರ ವಿಲೋಮದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಪ್ರಮೇಯ 7.2 ನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾದರೆ, ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಆದುದರಿಂದ ಇದರ ವಿಲೋಮವು:

ಪ್ರಮೇಯ 7.3 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.

ಏಕೆಂದು ನೀವು ಕಾರಣ ನೀಡುವಿರಾ?

ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ $AB = CD$ ಮತ್ತು $AD = BC$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.9 ಗಮನಿಸಿ). ಕರ್ಣ AC ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 7.9

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ಏಕೆ?)

ಆದುದರಿಂದ, $\angle BAC = \angle DCA$

ಮತ್ತು $\angle BCA = \angle DAC$ (ಏಕೆ?)

ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಈಗ ನೀವು ಹೇಳಬಹುದೇ? ಏಕೆ?

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. ಇದೇ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದೇ? ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಿ. ಅದರ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ.

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖಕೋನಗಳು ಸಮ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನಾರಾವರ್ತಿಸಿ. ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಾವು ಫಲಿತಾಂಶ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.4 : ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

ಈಗ ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಸರಿಯೇ? ಹೌದು. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಛೇದಕವು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಸರಿ ಎಂದು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರಮೇಯವಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.5 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮವಿದ್ದಾಗ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಗುಣಲಕ್ಷಣವಿದೆ. ಅದನ್ನೇ ನಾವು ಈಗ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ. ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಿ. ಎರಡೂ ಕರ್ಣಗಳು `O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 7.10 ಗಮನಿಸಿ).

OA, OB, OC ಮತ್ತು OD ಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ.

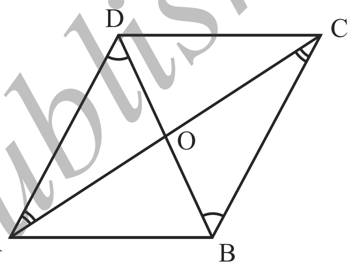
ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

OA = OC ಮತ್ತು OB = OD ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಕರ್ಣಗಳಿಗೆ 'O' ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾರಿಯೂ ಕರ್ಣಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು 'O' ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣುವಿರಿ.

ಆದುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರಮೇಯವಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.10

ಪ್ರಮೇಯ 7.6 : ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

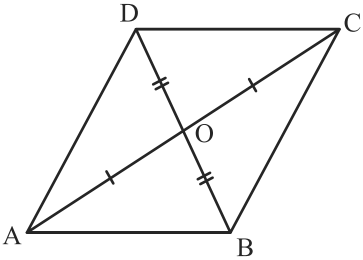
ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಏನಾಗುವುದು? ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುವುದೇ? ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಇದು ಸತ್ಯ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪ್ರಮೇಯ 7.6 ರ ವಿಲೋಮ. ಅದು ಕೆಳಕಂಡತಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.7 : ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ಕೆಳಕಂಡ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೀವು ನೀಡಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ 7.11 ರಲ್ಲಿ OA = OC ಮತ್ತು OB = OD ದತ್ತವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.11

ಆದುದರಿಂದ, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ಏಕೆ?)

$\angle ABO = \angle CDO$ (ಏಕೆ?)

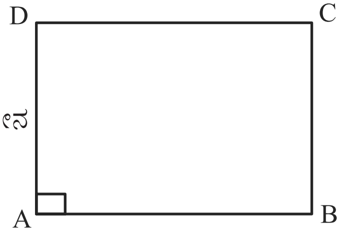
ಇದರಿಂದ $AB \parallel CD$ ಎಂದು ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $BC \parallel AD$

ಆದುದರಿಂದ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಆಯತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವೂ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.12

ಪರಿಹಾರ : ಆಯತ ಎಂದರೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಯತವು, ಒಂದು ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನ ಆಗಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ABCD ಒಂದು ಆಯತವಾಗಿದ್ದು $\angle A = 90^0$ ಆಗಿರಲಿ.

$\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಬೇಕು.

AD || BC ಮತ್ತು AB ಯು ಛೇದಕ (ಚಿತ್ರ 7.12 ಗಮನಿಸಿ)

ಆದುದರಿಂದ $\angle A + \angle B = 180^0$ (ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

ಆದರೆ $\angle A = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ, $\angle B = 180^0 - \angle A = 180^0 - 90^0 = 90^0$

ಈಗ $\angle C = \angle A$ ಮತ್ತು $\angle D = \angle B$ [ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು]

ಆದುದರಿಂದ $\angle C = 90^0$ ಮತ್ತು $\angle D = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ ಆಯತದ ಪ್ರತಿಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ABCD ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.13 ಗಮನಿಸಿ).

AB = BC = CD = DA ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. (ಏಕೆ?)

ಈಗ Δ AOD ಮತ್ತು Δ COD ಗಳಲ್ಲಿ

OA = OC (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.)

OD = OD (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

AD = CD

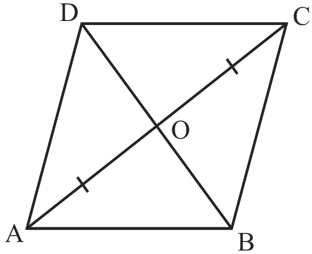
ಆದುದರಿಂದ $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (ಬಾ ಬಾ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

$\angle AOD = \angle COD$ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಆದರೆ $\angle AOD + \angle COD = 180^0$ (ಸರಳಯುಗ್ಮ)

ಆದುದರಿಂದ, $2 \angle AOD = 180^0$

$\angle AOD = 90^0$



ಚಿತ್ರ 7.13

ಆದುದರಿಂದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC ಆಗಿದೆ. ಬಾಹ್ಯಕೋನ PAC ಯನ್ನು AD ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು CD || AB (ಚಿತ್ರ 7.14 ಗಮನಿಸಿ).

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ ಮತ್ತು (ii) ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : Δ ABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

ಆದರಿಂದ, AB = AC (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\angle ABC = \angle ACB$ (ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು)

ಹಾಗೂ $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ)

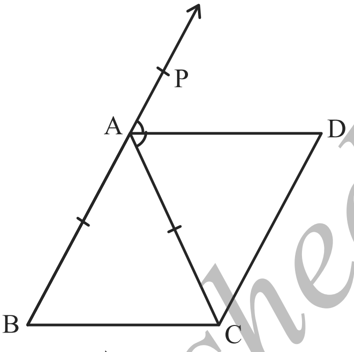
ಅಥವಾ $\angle PAC = 2\angle ACB$ .... (1)

ಈಗ $\angle PAC$ ಯನ್ನು AD ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ $\angle PAC = 2\angle DAC$ .... (2)

ಆಗ $2\angle DAC = 2\angle ACB$ ((1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ)

ಅಥವಾ $\angle DAC = \angle ACB$



ಚಿತ್ರ 7.14

(ii) ಈಗ ಸಮಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯು ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ BC ಮತ್ತು AD ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು AC ಛೇದಕವು ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ BC || AD

ಹಾಗೂ BA || CD (ದತ್ತ)

ಈಗ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡೂ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ.

ಆದುದರಿಂದ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಉದಾಹರಣೆ : 4 ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ l ಮತ್ತು m ನ್ನು ಛೇದಕ p ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 7.15 ಗಮನಿಸಿ).

ಈಗ ಒಳಕೋನಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಆಯತ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : PS || QR ನೀಡಿದೆ ಮತ್ತು ಛೇದಕ p ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ.

$\angle PAC$ ಮತ್ತು $\angle ACQ$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು B ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ.

$\angle ACR$ ಮತ್ತು $\angle SAC$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ.

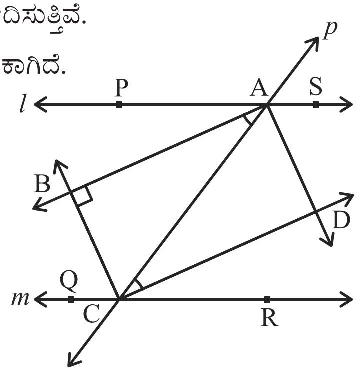
ABCD ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಆಯತ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈಗ $\angle PAC = \angle ACR$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು $l \parallel m$ ಮತ್ತು p ಛೇದಕ)

ಆದುದರಿಂದ $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

ಅಂದರೆ $\angle BAC = \angle ACD$

ಇವು ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು. ಇಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು DC ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು AC ಛೇದಕ. ಹಾಗೂ ಈ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 7.15

ಆದುದರಿಂದ AB || DC

ಅದೇ ರೀತಿ BC || AD (∠ ACB ಮತ್ತು ∠ CAD ಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ)

ಆದುದರಿಂದ ABCD ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಹಾಗೂ $\angle PAC + \angle CAS = 180^0$ (ಸರಳಯುಗ್ಮ)

ಆದುದರಿಂದ, $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2}\times 180^0 = 90^0$

ಅಥವಾ $\angle BAC + \angle CAD = 90^0$

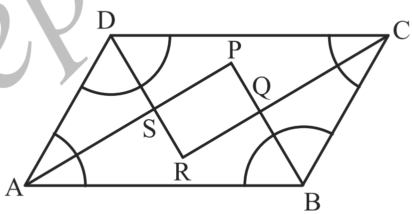
ಅಥವಾ $\angle BAD = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ ABCD ಯು ಒಂದು ಕೋನ 90^0 ಇರುವ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಆದುದರಿಂದ, ABCD ಒಂದು ಆಯತ.

ಉದಾಹರಣೆ : 5 ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ∠A ಮತ್ತು ∠B, ∠B ಮತ್ತು ∠C, ∠C ಮತ್ತು ∠D, ∠D ಮತ್ತು ∠A ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P, Q, R, ಮತ್ತು S ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.16 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.16

Δ ASD ಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

∠D ಯನ್ನು DS ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ∠A ಯನ್ನು AS ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ,

$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$

$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

$= \frac{1}{2}\times 180^0$ (∠A ಮತ್ತು ∠D ಗಳು ಛೇದಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು)

$= 90^0$

ಹಾಗೂ $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^0$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ)

ಅಥವಾ $90^0 + \angle DSA = 180^0$

ಅಥವಾ $\angle DSA = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ $\angle PSR = 90^0$ (∠DSA ಮತ್ತು ∠PSR ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\angle APB = 90^0$ ಅಥವಾ $\angle SPQ = 90^0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. (∠DSA ಗೆ ತೋರಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ)

ಹಾಗೆಯೇ $\angle PQR = 90^0$ ಮತ್ತು $\angle SRQ = 90^0$

ಆದುದರಿಂದ PQRS ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ. ಇದರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಇದನ್ನು ಆಯತ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದೇ? ಅದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. $\angle PSR = \angle PQR = 90^0$ ಮತ್ತು $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^0$ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಎರಡೂ ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

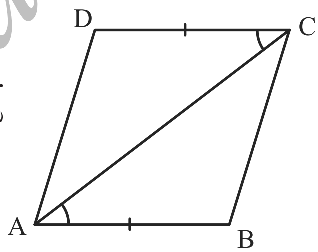
ಆದುದರಿಂದ PQRS ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನ (ಎಲ್ಲಾ ಕೋನವೂ) 90^0 ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ PQRS ಒಂದು ಆಯತ.

7.5 ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಲು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ನಿಬಂಧನೆ

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅನೇಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನೀವು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಗುಣಲಕ್ಷಣವು ಸರಿಹೊಂದಿದಲ್ಲಿ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನೂ ಸಹ ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರಿ.

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಕನಿಷ್ಠ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಈಗ ನಾವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಿದೆ. ಅದು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.8 : ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.17

ಚಿತ್ರ 7.17 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. $AB = CD$ ಮತ್ತು $AB \parallel CD$ ಆಗಿದೆ. ಕರ್ಣ AC ಎಳೆಯೋಣ. ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ ಬಳಸಿ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ಎಂದು ನೀವು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಆದುದರಿಂದ $BC \parallel AD$ (ಏಕೆ?)

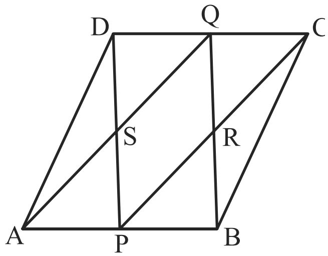
ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. AB ಮತ್ತು CD ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ಆಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.18 ಗಮನಿಸಿ). AQ ವು DP ಯನ್ನು S ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು BQ ವು CP ಯನ್ನು R ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ,

(i) APCQ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

(ii) DPBQ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

(iii) PSQR ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.18

ಪರಿಹಾರ : (i) ಚತುರ್ಭುಜ APCQ ನಲ್ಲಿ

$AP \parallel QC$ ($AB \parallel CD$ ಆದ್ದರಿಂದ) .... (1)

$AP = \frac{1}{2}AB,\ CQ = \frac{1}{2}CD$ (ದತ್ತ)

ಹಾಗೂ AB = CD (ಏಕೆ?)

ಆದುದರಿಂದ AP = QC .... (2)

ಆದುದರಿಂದ APCQ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

((1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ಹಾಗೂ ಪ್ರಮೇಯ 7.8 ರಿಂದ)

(ii) ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ DPBQ ಚತುರ್ಭುಜವೂ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

ಏಕೆಂದರೆ DQ || PB ಮತ್ತು DQ = PB

(iii) ಚತುರ್ಭುಜ PSQR ನಲ್ಲಿ

SP || QR (DP ಯ ಒಂದು ಭಾಗ SP ಮತ್ತು QB ಯ ಒಂದು ಭಾಗ QR ಆಗಿದೆ.)

ಅದೇ ರೀತಿ SQ || PR

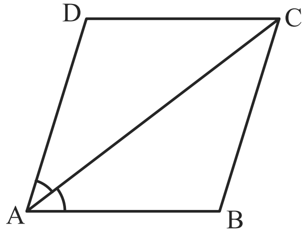
ಆದುದರಿಂದ PSQR ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುಭುಜ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳು 3 : 5 : 9 : 13 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವಿದ್ದಾಗ ಅದು ಆಯತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
3. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ ಅದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
4. ಒಂದು ವರ್ಗದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಮತ್ತು ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
5. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ ಅದು ವರ್ಗವಾಗುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
6. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ಕರ್ಣ AC ಯು $\angle A$ ಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 7.19 ಗಮನಿಸಿ).

   (i) ಅದು $\angle C$ ಯನ್ನೂ ಸಹ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ

   (ii) ABCD ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.19

7. ABCD ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ. AC ಕರ್ಣವು $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು BD ಕರ್ಣವು $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
8. ABCD ಒಂದು ಆಯತ. AC ಕರ್ಣವು $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

   (i) ABCD ಒಂದು ವರ್ಗ.

   (ii) BD ಕರ್ಣವು $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
9. ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ DP = BQ ಆಗುವಂತೆ ಕರ್ಣ BD ಯ ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು Q ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.20 ಗಮನಿಸಿ).

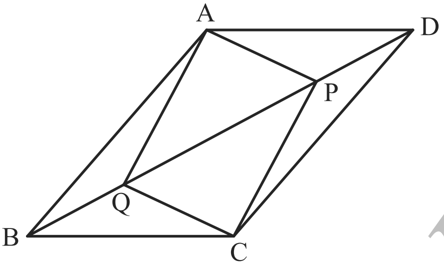
(i) Δ APD ≅ Δ CQB

(ii) AP = CQ

(iii) Δ AQB ≅ Δ CPD

(iv) AQ = CP

(v) APCQ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

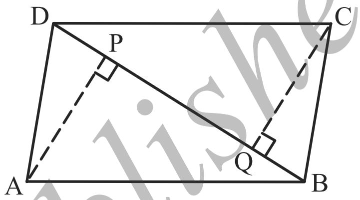


ಚಿತ್ರ 7.20

10. ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. AP ಮತ್ತು CQ ಗಳು A ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಗಳಿಂದ BD ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ.

(i) Δ APB ≅ Δ CQD

(ii) AP = CQ ಒಂದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 7.21

11. Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEF ಗಳಲ್ಲಿ AB = DE, AB || DE, BC = EF ಮತ್ತು BC || EF ಆಗಿದೆ. A, B ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D, E ಮತ್ತು F ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.22 ಗಮನಿಸಿ).

(i) ಚತುರ್ಭುಜ ABED ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

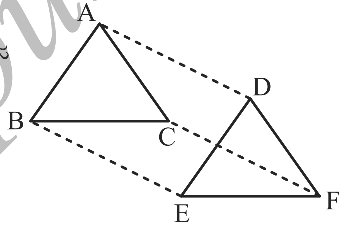
(ii) ಚತುರ್ಭುಜ BEFC ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

(iii) AD || CF ಮತ್ತು AD = CF

(iv) ಚತುರ್ಭುಜ ACFD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

(v) AC = DF

(vi) Δ ABC ≅ Δ DEF ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.22

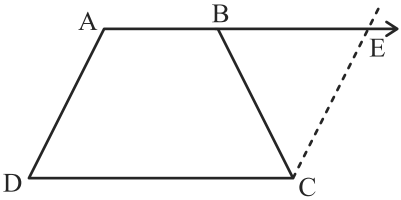
12. ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ AB||CD ಮತ್ತು AD = BC ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.23 ಗಮನಿಸಿ).

(i) ∠A = ∠B

(ii) ∠C = ∠D

(iii) Δ ABC ≅ Δ BAD

(iv) ಕರ್ಣ AC = ಕರ್ಣ BD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



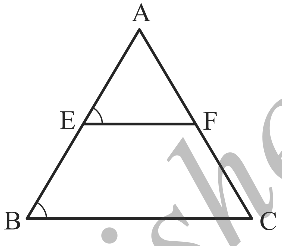
ಚಿತ್ರ 7.23

[**ಸುಳಿವು** : AB ರೇಖೆಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ. C ಮೂಲಕ DA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ರೇಖೆ AB ಯಿಂದ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ರೇಖೆಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ]

7.6 ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯ

ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನೇಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಇರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಈಗ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ.

ABC ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿಸಿ. E ಮತ್ತು F ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ. E ಮತ್ತು F ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.24 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.24

EF ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. $\angle$ AEF ಮತ್ತು $\angle$ ABC ಯನ್ನೂ ಸಹ ಅಳೆಯಿರಿ.

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

$EF = \frac{1}{2}BC$ ಮತ್ತು $\angle AEF = \angle ABC$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

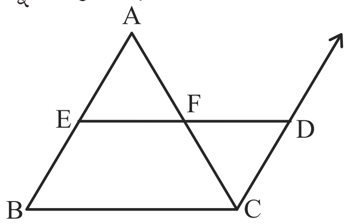
ಆದುದರಿಂದ $EF \parallel BC$

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಹೇಳಿಕೆಯಂತೆ ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.9 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಸುಳಿವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನೀವು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ 7.25 ಗಮನಿಸಿ. AB ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು $CD \parallel BA$



ಚಿತ್ರ 7.25

Δ AEF $\cong \Delta$ CDF (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ)

ಆದುದರಿಂದ, EF = DF ಮತ್ತು BE = AE = DC (ಏಕೆ?)

ಆದುದರಿಂದ, BCDE ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ (ಏಕೆ?)

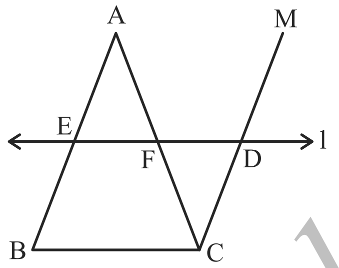
ಇದರಿಂದ $EF \parallel BC$

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ $EF = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BC$. ಎಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.9 ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ನೀವು ನಿರೂಪಿಸುವಿರಾ? ವಿಲೋಮವು ಸರಿಯೇ?

ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಸರಿ. ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 7.10 : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.



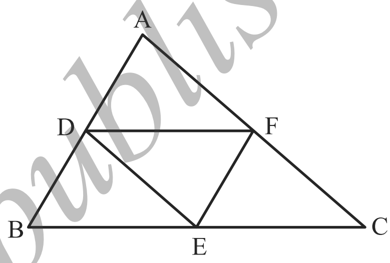
ಚಿತ್ರ 7.26

ಚಿತ್ರ 7.26 ರಲ್ಲಿ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. l ರೇಖೆಯು E ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು CM || BA .

Δ AEF ಮತ್ತು Δ CDF ಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ AF = CF ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ : 7

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ AB, BC ಮತ್ತು CA ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ D, E ಮತ್ತು F ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.27 ಗಮನಿಸಿ). D, E ಮತ್ತು F ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, Δ ABC ಯು ನಾಲ್ಕು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.27

ಪರಿಹಾರ : Δ ABC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು D ಮತ್ತು E ಆಗಿದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 7.9 ರಿಂದ DE || AC

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ DF || BC ಮತ್ತು EF || AB.

ಆದುದರಿಂದ ADEF, BDFE ಮತ್ತು DFCE ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು.

ಈಗ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ BDFE ಯ ಕರ್ಣ DE ಆಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ Δ BDE $\cong$ Δ FED

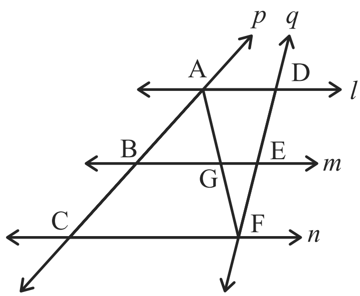
ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ Δ DAF $\cong$ Δ FED

ಮತ್ತು Δ EFC $\cong$ Δ FED

ಆದುದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : 8 : l, m ಮತ್ತು n ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು p ಮತ್ತು q ಛೇದಕಗಳು ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. p ಮೇಲೆ l, m ಮತ್ತು n ಗಳು AB ಮತ್ತು BC ಸಮಛೇದಕಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.28 ನೋಡಿ).

l, m ಮತ್ತು n ಗಳು q ಮೇಲೆಯೂ ಸಹ ಸಮಛೇದಕಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.28

ಪರಿಹಾರ : AB = BC ನೀಡಿದೆ ಮತ್ತು ನಾವು DE = EF ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

m ರೇಖೆಯನ್ನು G ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ A ಮತ್ತು F ನ್ನು ಸೇರಿಸೋಣ. ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ACFD ಯು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ Δ ACF ಮತ್ತು Δ AFD

Δ ACF ನಲ್ಲಿ AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು B ಆಗಿದೆ. (AB = BC)

ಮತ್ತು BG || CF (m || n ಆಗಿರುವುದರಿಂದ)

ಆದುದರಿಂದ, AF ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು G ಆಗಿದೆ. (ಪ್ರಮೇಯ 7.10 ಯನ್ನು ಬಳಸಿದೆ)

ಈಗ Δ AFD ಯಲ್ಲಿ AF ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು G ಎಂದು ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. GE||AD ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 7.10 ಯಿಂದ DF ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಆಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ DE = EF

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ *l*, *m* ಮತ್ತು *n* ರೇಖೆಗಳು *q* ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆಯೂ ಸಹ ಸಮಭೇದಕಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

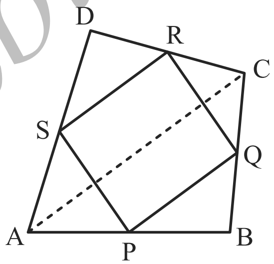
ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1. ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ. AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P, Q, R ಮತ್ತು S ಆಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.29 ಗಮನಿಸಿ). AC ಕರ್ಣ ಆದರೆ,

   (i) SR || AC ಮತ್ತು $SR = \frac{1}{2}AC$

   (ii) PQ = SR

   (iii) PQRS ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

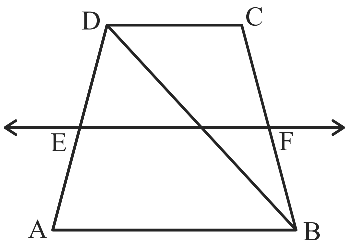


ಚಿತ್ರ 7.29

2. ABCD ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ. AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P, Q, R ಮತ್ತು S ಆಗಿವೆ. PQRS ಒಂದು ಆಯತ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

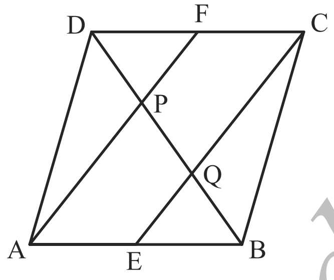
3. ABCD ಒಂದು ಆಯತ. AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ P, Q, R ಮತ್ತು S ಆಗಿವೆ. PQRS ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. ABCD ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ. AB || DC, BD ಕರ್ಣ ಮತ್ತು AD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ಆಗಿದೆ. E ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು BC ಯನ್ನು F ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 7.30 ಗಮನಿಸಿ). BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು F ಎಂದು ತೋರಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 7.30

5. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.31 ಗಮನಿಸಿ). AF ಮತ್ತು EC ರೇಖಾಖಂಡಗಳು BD ಕರ್ಣವನ್ನು ತ್ರಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.31

6. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. ABC ಯು $\angle C$ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ. ವಿಕರ್ಣ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಮೂಲಕ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಒಂದು ರೇಖೆಯು AC ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ.

   (i) AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D

   (ii) $MD \perp AC$

   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

7.7. ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360^0
2. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಕರ್ಣವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.
3. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ,
   (i) ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ.
   (ii) ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ.
   (iii) ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.
4. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಬೇಕಾದರೆ,
   (i) ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಅಥವಾ
   (ii) ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ ಅಥವಾ
   (iii) ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಅಥವಾ
   (iv) ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಆಗಿರಬೇಕು.

5. ಆಯತದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿದ್ದು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಪರ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸತ್ಯ.

6. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಪರ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸತ್ಯ.

7. ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿದ್ದು ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಪರ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸತ್ಯ.

8. ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದು ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವುದು.

9. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

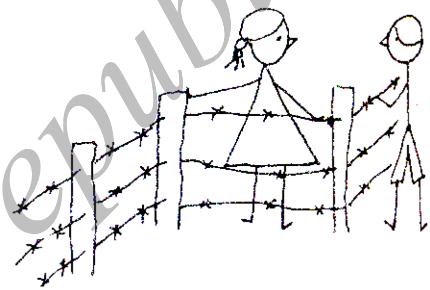
10. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅನುಬಂಧ – 1

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆಗಳು

A 1.1 ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ನೀವು ಮಾಲೀಕರಾಗಿರುವ ಜಮೀನಿಗೆ ಬೇಲಿ ಇಲ್ಲವೆಂಬ ಒಂದು ಪ್ರಸಂಗವನ್ನು ಭಾವಿಸೋಣ. ನಿಮ್ಮ ನೆರೆಯ ಜಮೀನಿನವರು ಇದ್ದಕ್ಕಿದಂತೇ ಒಂದು ದಿನ ಅವರ ಜಮೀನಿಗೆ ಬೇಲಿ ಹಾಕಿಸಿಬಿಡುತ್ತಾರೆ. ನಿಮಗೆ ಅವರು ನಿಮ್ಮ ಜಮೀನಿನ ಸರಹದ್ದು ದಾಟಿ, ಒತ್ತುವರಿ ಮಾಡಿ ಬೇಲಿ ಹಾಕಿದ್ದರೆಂದು ಅನ್ನಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಲು ನೀವೇನು ಮಾಡುತ್ತೀರಿ ? ಬಹುಶಃ ಹೀಗೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಊರಹಿರಿಯರಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ಅಹವಾಲನ್ನು ಹೇಳಿ ಅವರಿಂದ ಇತ್ಯರ್ಥ ಮಾಡಿಸಲು ಯೋಚಿಸುತ್ತೀರಿ. ಹಾಗೆ ಬಂದ ಊರ ಹಿರಿಯರಲ್ಲಿ ಏಕಾಭಿಪ್ರಾಯವಿಲ್ಲದೇ ಕೆಲವರು ನಿಮ್ಮ ಪರವಾಗಿ, ಕೆಲವರು ನಿಮ್ಮ ನೆರೆಯವರ ಪರವಾಗಿ ಸಮರ್ಥನೆ ನೀಡಿದರೆ ನೀವೇನು ಮಾಡುವಿರಿ?



ಎಲ್ಲರೂ ಒಪ್ಪ ತಕ್ಕ ಪುರಾವೆ ಒದಗಿಸಬೇಕಲ್ಲವೇ? ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಸರ್ಕಾರದಿಂದ ಅಧಿಕೃತವಾಗಿ ಪ್ರಕಟವಾಗಿರುವ ಜಮೀನು ಹದ್ದುಬಸ್ತು ನಕ್ಷೆ, [Land survey map], [ಜಮೀನಿನ ಸರ್ವೇ ನಕ್ಷೆ] ಯನ್ನು ನೀವು ಒದಗಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ ಅದನ್ನು ನ್ಯಾಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಸಲ್ಲಿಸಿ ವ್ಯಾಜ್ಯ ಇತ್ಯರ್ಥಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಸಂಗ: ನಿಮ್ಮ ಮನೆಯ ಆಗಸ್ಟ್ 2016 ನೇ ತಿಂಗಳ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಿಲ್ಲನ್ನು ನಿಮ್ಮ ತಾಯಿ ವಿದ್ಯುತ್ ಇಲಾಖೆಗೆ ಪಾವತಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೂ ಇಲಾಖೆಯು ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ 2016 ಬಿಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಆಗಸ್ಟ್ 2016ರ ಬಾಕಿಯಿದೆ ಎಂದು ಸೇರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ನೀವೇನು ಮಾಡುತ್ತೀರಿ? ಆಗಸ್ಟ್ 2016ರ ಪಾವತಿ ರಸೀತಿಯನ್ನು ಇಲಾಖೆಗೆ ತೋರಿಸಿ, ಬಿಲ್ ಅನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿರಿ ತಾನೆ?

ಕೆಲವು ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲು/ಸಮರ್ಥಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸದೆ ಸುಮ್ಮನಾಗುವುದು ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಹೆಣಗಾಡುವುದು ಬೇಡವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು 'ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಹೇಳಿಕೆ/ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ಎಂದು ಸುಮ್ಮನೇ ಒಪ್ಪಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅವುಗಳಿಗೆ ತಾರ್ಕಿಕತೆಯ (Mathematical logic) ಆಧಾರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತದ ತರ್ಕದ ಆಧಾರ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು ಅಥವಾ ನಿರಾಕರಿಸುವುದು ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಮುಖ್ಯವಾದ ಭಾಗ, ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ, ಸಾವಿರಾರು ವರ್ಷಗಳಿಂದಲೂ ಗಣಿತದ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಧನೆಗಳು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿವೆ ಹಾಗೂ ಗಣಿತದ ಯಾವುದೇ ಶಾಖೆಗೂ ಇವು ಆಧಾರಸ್ತಂಭ (ಕೇಂದ್ರೀಯ ಸಂಗತಿ)ವಾಗಿವೆ.

ಮೆಸಪಟೋಮಿಯಾ, ಈಜಿಪ್ಟ್, ಚೀನಾ, ಭಾರತದೇಶಗಳ ಪ್ರಾಚೀನ ನಾಗರೀಕತೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಗಣಿತವೇ ಆಧಾರಸ್ತಂಭ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ ಆ ಕಾಲದವರು ಈಗ ನಾವು ಬಳಸುತ್ತಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಸಮರ್ಥನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರೆಂಬುದಕ್ಕೆ ಖಚಿತವಾದ ಪುರಾವೆಗಳಿಲ್ಲ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಗ್ರೀಕ್ ದೇಶದ ದಾರ್ಶನಿಕ ಹಾಗೂ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ "**ಥೇಲ್ಸ್**" (**THALES**) ನೀಡಿದರೆಂದು ನಂಬಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು 'ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆ ಎಂದರೇನು? ಅವುಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಲು ಬಳಸುವ ತಾರ್ಕಿಕತೆ ಹೇಗಿರುತ್ತದೆ? ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಯು ಏನೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

A 1.2. ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಸ್ವೀಕಾರಾರ್ಹವಾದ ಹೇಳಿಕೆಗಳು/ ಉಕ್ತಿಗಳು (Statement/s)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ 'ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಸ್ವೀಕಾರಾರ್ಹ ಹೇಳಿಕೆ' ಎಂದರೇನು? ಎಂದು ವಿವರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದೆ.

ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ ಅಥವಾ ಉಕ್ತಿ' (Statement) ಎಂದರೆ ಅದು ಆದೇಶವಲ್ಲ, ಆಶ್ಚರ್ಯಸೂಚಕ ವಾಕ್ಯವಲ್ಲ. ಅಥವಾ ಪ್ರಶ್ನೆಯೂ ಅಲ್ಲ!

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ

(a) "ನಿಮ್ಮ ಕೂದಲಿನ ಬಣ್ಣವೇನು?" ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನಾರ್ಥಕ ವಾಕ್ಯ. ಇದು ಹೇಳಿಕೆ/ಉಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ.

(b) "ದಯಮಾಡಿ, ನನಗೆ ಒಂದು ಲೋಟ ನೀರನ್ನು ಕುಡಿಯಲು ತನ್ನಿ". ಈ ವಾಕ್ಯ ಬೇಡಿಕೆ ಅಥವಾ ಆದೇಶವೇ ವಿನಃ 'ಹೇಳಿಕೆ' ಅಲ್ಲ. ಆದರೆ ನಿಮ್ಮ ತಲೆಯ ಕೂದಲು ಕಪ್ಪಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದು ಹೇಳಿಕೆ.

ಯಾವುದೇ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ,

- ಯಾವಾಗಲು ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ನಿಜ/ಸರಿ) – ಸಾರ್ವಕಾಲಿಕ ಸತ್ಯ
- ಯಾವಾಗಲು ಮಿಥ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಸುಳ್ಳು/ತಪ್ಪು) – ಸಾರ್ವಕಾಲಿಕ ಮಿಥ್ಯ
- ಸಂದಿಗ್ಧ (ಅಸ್ಪಷ್ಟ)ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಂದಿಗ್ಧ: ಸಂದಿಗ್ಧ ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಣೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಂದಿಗ್ಧವೆನಿಸಲು ಎರಡು ಸನ್ನಿವೇಶಗಳು ಕಾರಣವಾಗುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯು ಯಾವಾಗಾಲು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಅಥವಾ ಯಾವಾಗಲು ಮಿಥ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಆಗದಿದ್ದಾಗ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 'ನಾಳೆ ಗುರುವಾರ' ಒಂದು ಸಂದಿಗ್ಧ ಹೇಳಿಕೆ ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಸರಿಯೋ–ತಪ್ಪೋ ಎನ್ನಲು ನಮಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಮಾಹಿತಿ ಇಲ್ಲವಾಗಿದೆ.

ಎರಡನೇಯ ಸನ್ನಿವೇಶ: ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಂದಿಗ್ಧವಾಗಿಸುವುದು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಅಭಿಪ್ರಾಯ/ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದಾಗ. ಉದಾ: "ನಾಯಿಯು ಬುದ್ಧಿವಂತ ಪ್ರಾಣಿ" ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಕೆಲವರು ಒಪ್ಪಬಹುದು, ಕೆಲವರು ಒಪ್ಪದಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯ, ಯಾವಾಗಲೂ ಮಿಥ್ಯ ಅಥವಾ ಸಂದಿಗ್ಧ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿ ಹಾಗೂ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

(i) ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಎಂಟು ದಿನಗಳಿವೆ.

(ii) ಇಲ್ಲಿ ಈಗ ಮಳೆಯಾಗುತ್ತಿದೆ.

(iii) ಸೂರ್ಯನು ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ಹುಟ್ಟಿ ಪಶ್ಚಿಮದಲ್ಲಿ ಮುಳುಗುತ್ತಾನೆ.

(iv) ಗೌರಿ ಒಬ್ಬಳು ಕರುಣಾಮಯಿ ಹುಡುಗಿ.

(v) ಎರಡು ಬೆಸಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(vi) ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪರಿಹಾರ :

(i) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಮಿಥ್ಯ (ಸುಳ್ಳು), ಏಕೆಂದರೆ ವಾರದಲ್ಲಿ 'ಏಳುದಿನ'ಗಳಿರುತ್ತವೆ.

(ii) ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಸಂದಿಗ್ಧ. ಏಕೆಂದರೆ 'ಇಲ್ಲಿ' ಎಂಬುದು ಯಾವ ಪ್ರದೇಶ ಎಂದು ನಿರ್ಧಾರಿತವಾಗಿಲ್ಲ.

(iii) ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯ ಏಕೆಂದರೆ ದಿಕ್ಕುಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದ ಮೇಲೆ ನಾವು ಪ್ರಪಂಚದ ಯಾವ ಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಸೂರ್ಯಾಸ್ತ ಪಶ್ಚಿಮದಲ್ಲೇ ಆಗುತ್ತದೆ.

(iv) ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಸಂದಿಗ್ಧ ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ವೈಯಕ್ತಿಕ. ಗೌರಿ ಕೆಲವರಿಗೆ ಕರುಣಾಮಯಿ, ಇನ್ನು ಕೆಲವರಿಗೆ ಹಾಗಿಲ್ಲದಿರಬಹುದು.

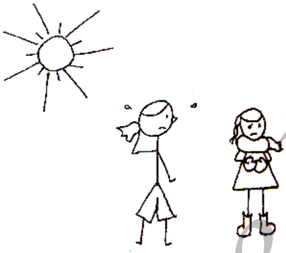
(v) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸಾರ್ವಕಾಲಿಕ (ಯಾವಾಗಲೂ ಸುಳ್ಳು) ಮಿಥ್ಯ ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಯಾವಾಗಲು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುವುದು.

(vi) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸಾರ್ವಕಾಲಿಕ ಸತ್ಯ (ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಜ). ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುವುದು ಆದರೆ ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಸದಾಕಾಲ ಸತ್ಯವೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದಿಷ್ಟು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಅದನ್ನು ವಿಭಾಗ (ಖಂಡ) A 1.4 ರಲ್ಲಿ ಸಮರ್ಥಿಸಿದೆ.

ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದಂತೆ, ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ 'ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಸಿಂಧುತ್ವದ' (Validity) ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಹೆಚ್ಚು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ವರ್ತಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಬ್ಬರು ಕೇರಳ ರಾಜ್ಯದ ಮನಂತವಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಜುಲೈ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯವೂ ಮಳೆ ಸುರಿಯುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಆತ/ಆಕೆಯ ಮಾತನ್ನು ನೀವು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಿ. ಜುಲೈನಲ್ಲಿದ್ದ ಒಂದೆರಡು ದಿನ ಮಳೆ ಬರದಿದ್ದರೂ ನೀವು ಆ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ನೀವೇನಾದರೂ ನ್ಯಾಯವಾದಿ (ಲಾಯರ್) ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ನೀವು ಜುಲೈನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ದಿನವೂ ಮನಂತವಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಮಳೆಯಾಗಿದೆಯೇ ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಪುರಾವೆ ಕೇಳಿ ವಾದಿಸುತ್ತೀರಿ!

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಗಮನಿಸೋಣ.

ನಾವು ಮಾತನಾಡುವಾಗ ಒಬ್ಬರಿಗೊಬ್ಬರು ಹೀಗೆ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. "ಅಬ್ಬಾ! ಈ ದಿನ ಬಹಳ ಸೆಕೆ, ಬಹಳ ಬಿಸಿಲು"



ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಸಂದಿಗ್ಧವೆಂದು ನಮಗೆನಿಸಿದರೂ ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರ ಆ ಬಗ್ಗೆ ವಾದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಸುಮ್ಮನೆ ಒಪ್ಪಿಬಿಡುತ್ತೇವೆ. ನಮ್ಮ ದೇಶದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವವರಿಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ 'ಸೆಕೆ' ಹೆಚ್ಚೆನಿಸಬಹುದು, ಅಥವಾ ಹಾಗೆನ್ನಿಸದಿರಬಹುದು. 'ಕುಮಾವನ್' ನಂತಹ ಚಳಿಪ್ರದೇಶದವನಿಗೆ 'ಅತಿ ಸೆಕೆ' ಎನಿಸಿದರೆ 'ಚೆನ್ನೈ' ನಿಂದ ಬಂದವನಿಗೆ ಹಾಗೆ ಅನ್ನಿಸದಿರಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಇಬ್ಬರ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಅನುಭವಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಲ್ಲವೆ?

ಆದರೆ ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಯು ಅಸ್ಪಷ್ಟ/ಸಂದಿಗ್ಧವಾಗಿರುವಂತಿಲ್ಲ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯು ಸ್ವೀಕಾರಾರ್ಹ (ಒಪ್ಪತಕ್ಕದ್ದು) ಅಥವಾ ಮಾನ್ಯವಾದದ್ದು ಆದರೆ ಅದು ಸತ್ಯವಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಮಿಥ್ಯವಾಗಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ಸಂದಿಗ್ಧವಂತೂ ಆಗಿರಲೇ ಕೂಡದು. ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು 'ಸತ್ಯ' ವೆಂದು ಕರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಸಾರ್ವಕಾಲಿಕ (ಯಾವಾಗಲೂ) ಸತ್ಯವಾಗಿರಲೇ ಬೇಕು. ಹಾಗಿಲ್ಲವಾದರೆ ಅದನ್ನು ಮಿಥ್ಯ (false) ಹೇಳಿಕೆ ಎಂದೇ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $5 + 2 = 7$ ಎನ್ನುವುದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯ ಆದ್ದರಿಂದ $5 + 2 = 7$ ಒಂದು ಸತ್ಯ ಹೇಳಿಕೆ. ಮತ್ತು $5 + 3 = 7$ ಎನ್ನುವುದು ಮಿಥ್ಯ ಹೇಳಿಕೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಮಿಥ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$.

(ii) '1' ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

(iii) ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ (real number) x ಗೆ; $4x + x = 5x$.

(iv) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ x ಗೆ; $2x > x$.

(v) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ x ಗೆ; $x^2 \geq x$.

(vi) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅದೊಂದು ವರ್ಗ.

ಪರಿಹಾರ :

(i) ಇದು ಸತ್ಯವಾದ ಹೇಳಿಕೆ. 6ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೀರಿ.

(ii) ಇದು ಮಿಥ್ಯವಾದ ಹೇಳಿಕೆ. ಏಕೆಂದರೆ 9 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ.

(iii) ಇದು ಸತ್ಯವಾದ ಹೇಳಿಕೆ.

(iv) ಇದು ಮಿಥ್ಯವಾದ ಹೇಳಿಕೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $x=-1$ ಆದಾಗ $2\times(-1)=-2$ ಹಾಗೂ $-2 \not> -1$.

(v) ಇದು ಮಿಥ್ಯವಾದ ಹೇಳಿಕೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $x=\frac{1}{2}$ ಆದಾಗ $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{4} \not> \frac{1}{2}$.

(vi) ಇದು ಮಿಥ್ಯವಾದ ಹೇಳಿಕೆ. ಏಕೆಂದರೆ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲೂ ಸಹ ಎಲ್ಲ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 'ಮಿಥ್ಯವಾದ ಹೇಳಿಕೆ' ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸನ್ನಿವೇಶ/ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಆ ಹೇಳಿಕೆ 'ಸತ್ಯ'ವಾಗದಿದ್ದರೆ ಸಾಕು ಎಂಬುದು ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ನಿಮಗೆ ಮನವರಿಕೆಯಾಗಿರಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ 2 ರಲ್ಲಿ 9 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ 1ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಎಲ್ಲ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆ ಸತ್ಯವಲ್ಲವೆಂದು ಅರಿವಾಯಿತು.

ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಿರಾಕರಿಸಲು ಬಳಕೆಯಾಗುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು (Counter-Example) ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವಿಭಾಗ A1–5 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆಯ ಬಗ್ಗೆ ವಿವರವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಹೇಳಿಕೆ 4, 5, 6 ಇವು ಮಿಥ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳು. ಕೆಲವು ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು 'ಸತ್ಯ ಹೇಳಿಕೆ'ಗಳನ್ನಾಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯಕವಾದ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸತ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

(i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಗೆ, $2x > x$.

(ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಗೆ, $x^2 \geq x$.

(iii) ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ನಿಮಗೆ ದೊರೆಯುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಯಾವಾಗಲು '1' ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿ $90°$ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

(v) ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ವರ್ಗ (ಚೌಕ)ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪರಿಹಾರ :

(i) $x > 0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ $2x > x$.

(ii) $x \leq 0$ ಅಥವಾ $x \geq 1$ ಆಗಿದ್ದಾಗ $x^2 \geq x$.

(iii) 0 (ಸೊನ್ನೆಯ) ವಿನಃ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು '1'.

(iv) ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವು, ವೃತ್ತದ ಪರಧಿಯ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿ $90°$ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

(v) ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲ ಬಾಹುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿದ್ದು ಎಲ್ಲ ಒಳಕೋನಗಳು $90°$ ಇದ್ದಾಗ ಅದು 'ವರ್ಗ'ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A 1.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸಾರ್ವಕಾಲಿಕ ಸತ್ಯ, ಸಾರ್ವಕಾಲಿಕ ಮಿಥ್ಯ ಅಥವಾ ಸಂದಿಗ್ಧ / ಅಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

   (i) ಒಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 13 ತಿಂಗಳುಗಳು.

   (ii) ದೀಪಾವಳಿಯು ಶುಕ್ರವಾರ ಬರುತ್ತದೆ.

   (iii) ಮಾಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಉಷ್ಣಾಂಶ 26°C.

   (iv) ಭೂಮಿಗೆ ಇರುವ ಏಕೈಕ ಉಪಗ್ರಹ ಚಂದ್ರ.

   (v) ನಾಯಿಗಳು ಹಾರಬಲ್ಲವು.

   (vi) ಫೆಬ್ರವರಿಯಲ್ಲಿ 28 ದಿನಗಳಿರುತ್ತವೆ.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯ ಅಥವ ಮಿಥ್ಯವೆಂದು ತಿಳಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.

   (i) ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 350°.

   (ii) ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಗೆ $x^2 \geq 0$.

   (iii) ವಜ್ರಾಕೃತಿಯು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

   (iv) ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

   (v) ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಂದ 'ಸತ್ಯ ಹೇಳಿಕೆ'ಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ.

   (i) ಎಲ್ಲ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

   (ii) ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟು ಯಾವಾಗಲು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

   (iii) ಯಾವುದೇ x ಗೆ, $3x + 1 > 4$.

   (iv) ಯಾವುದೇ x ಗೆ, $x^3 \geq 0$.

   (v) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲೂ, ಮಧ್ಯರೇಖೆ (median) ಯು ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆಯೂ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

A 1.3. ನಿಗಮನ ತಾರ್ಕಿಕ ವಿಧಾನ (Deductive Reasoning)

ಸಂದಿಗ್ಧತೆ ಸ್ಪಷ್ಟತೆ ಇಲ್ಲದಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಯು 'ಸತ್ಯ'ವನ್ನು ಸ್ಥಿರೀಕರಿಸಲು ಬಳಸುವ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಸಾಧನವೆಂದರೆ 'ನಿಗಮನ ತರ್ಕ'. ನಿಗಮನ ತರ್ಕವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಒಂದು ಒಗಟು (ಸಮಸ್ಯೆ–puzzle)ನ್ನು ನೀವು ಪರಿಹರಿಸುವಿರಿ. ನಿಮಗೆ 4 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಕಾರ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಮತ್ತೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ವರ್ಣಮಾಲಾಕ್ಷರವನ್ನು ಮುದ್ರಿಸಿದೆ.

$\boxed{A}$ $\boxed{V}$ $\boxed{6}$ $\boxed{5}$

ಈ ಕಾರ್ಡಿನ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವ ಕಾರ್ಡಿನ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ವರಾಕ್ಷರವಿದೆ ಎಂಬ ನಿಯಮ ಅಳವಡಿಸಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಇದನ್ನು ನೀವು ದೃಢೀಕರಿಸಲು **ಕನಿಷ್ಠ** ಎಷ್ಟು ಕಾರ್ಡುಗಳ ಹಿಂಬದಿಯನ್ನು ನೋಡಬೇಕು ಅಥವಾ ಕಾರ್ಡನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಹಾಕಬೇಕು. ನೀವು ಎಲ್ಲ ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ಮಗುಚಿ ಹಾಕಿ ನೋಡಬಾರದೆಂದೇನಿಲ್ಲ, ಅದು ನಿಮ್ಮ ಇಚ್ಛೆ. ಆದರೆ ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಕಾರ್ಡುಗಳ ಹಿಂಬದಿಯನ್ನು ಮಗುಚಿ ಹಾಕಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು ನಿಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವ ಕಾರ್ಡಿನ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ವರಾಕ್ಷರ (vowel) ಇದೆ ಎಂದಿದೆ. ಆದರೆ ಕಾರ್ಡಿನ ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ವರಾಕ್ಷರ (vowel) ಇದ್ದು ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಇರಬೇಕೆಂಬುದು ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ಸ್ವರಾಕ್ಷರದ ಕಾರ್ಡಿನ ಹಿಂಬದಿಯು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬಹುದು, ಆಗದೆಯೂ ಇರಬಹುದು. ಕಾರ್ಡಿನ ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರವಿರಬೇಕೆಂದು ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವಲ್ಲ.

$\boxed{A}$, $\boxed{V}$, $\boxed{6}$, $\boxed{5}$ ಕಾಣುವಂತೆ ಇರುವ ಈ 4 ಕಾರ್ಡುಗಳಲ್ಲಿ 'A' ಇರುವ ಕಾರ್ಡನ್ನು ನಾವು ಮಗುಚಿ (ಹಿಂಬದಿ) ನೋಡಬೇಕೇ? ಖಂಡಿತಾ ಇಲ್ಲ? ಈ ಕಾರ್ಡಿನ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮ/ಬೆಸ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರಬಹುದು. ಸಂಖ್ಯೆ '5' ಇರುವ ಕಾರ್ಡನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ನೋಡಬೇಕೇ? ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಕಾರ್ಡಿನ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸ್ವರ ಅಥವಾ ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರವಿರಬಹುದು.

ನೀವು $\boxed{V}$ ಮತ್ತು $\boxed{6}$ ಕಾರ್ಡುಗಳ ಹಿಂಬದಿಯನ್ನು ನೋಡಲೇಬೇಕು. $\boxed{V}$ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ಹೇಳಿಕೆಯ ನಿಯಮ ಉಲ್ಲಂಘನೆಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ? ಅದೇ ರೀತಿ $\boxed{V}$ ರ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರವಿದ್ದರೂ ನಿಯಮ ಉಲ್ಲಂಘನೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ 'ಒಗಟ'ನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ನಾವು ಬಳಸಿಕೊಂಡ ತರ್ಕದ (ಆಲೋಚನಾ) ವಿಧಾನವನ್ನು **'ನಿಗಮನ ತರ್ಕ'** ವಿಧಾನವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈ 'ನಿಗಮನ' ಎಂದರೆ ಪೂರ್ವಭಾವಿಯಾಗಿ ಒಪ್ಪಿದ (ನಿರ್ಧರಿಸಿದ) ನಿಯಮ / ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ 'ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ' ಬರುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಸುಸಂಗತವಾದ ತರ್ಕ ಸರಣಿಯಿಂದ ನಾವು ಕೇವಲ $\boxed{V}$ ಮತ್ತು $\boxed{6}$ ಈ ಕಾರ್ಡುಗಳ ಹಿಂಬದಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಲು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದೆವು.

'ನಿಗಮನ ತರ್ಕವು' ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸತ್ಯವೇ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು ನೆರವಾಗುತ್ತದೆ, ಏಕೆಂದರೆ ಇದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸನ್ನಿವೇಶದ ಉದಾಹರಣೆ ಆಗದೇ ನಿರ್ಧಾರಿತ ಅಥವಾ ತೀರ್ಮಾನಿತವಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ (ಸರ್ವಮಾನ್ಯ) ಹೇಳಿಕೆಯ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಪ್ರಕರಣ ಮಾತ್ರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 'ಬೆಸ'ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ನಿಶ್ಚಿತವಾದ ನಂತರ 70001 × 134563ರ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಯಾವುದೇ 'ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ' ಮಾಡದೇ

ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ 70001 ಹಾಗೂ 134563 ಈ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಅನೇಕ ಶತಮಾನಗಳಿಂದಲೂ ನಮ್ಮ ತಾರ್ಕಿಕ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ನಿಗಮನ ತರ್ಕವು ಸೇರ್ಪಡೆಯಾಗಿ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

"ಸೊಲಾರಿಸ್ ಎಂಬ ಪುಷ್ಪವು ಅರಳಬೇಕಾದರೆ, ಅರಳುವ ಹಿಂದಿನ ದಿನದ ತಾಪಮಾನವು 28°C ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕು". "2005 ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ 15ರಂದು ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಕಣಿವೆಯಲ್ಲಿ ಸೊಲಾರಿಸ್ ಪುಷ್ಪವು ಅರಳಿದೆ" – ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳು 'ಸತ್ಯ'ವಾದವು.

ಇದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ನಿಗಮನ ತರ್ಕ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಕಣಿವೆಯಲ್ಲಿ 2005 ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ 14ರಂದು ತಾಪಮಾನವು 28°C ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿತ್ತು ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ತರ್ಕವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸದೇ ಇರುವುದು ವಿಷಾದನೀಯ ಸಂಗತಿ! ದೋಷಯುಕ್ತ ತರ್ಕವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಆಗಾಗ್ಗೆ ನಾವು ಅನೇಕ 'ತೀರ್ಮಾನ'ಕ್ಕೆ ತಲುಪುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಿಮ್ಮ ಆತ್ಮೀಯರು ಒಂದು ದಿನ ನಿಮ್ಮನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ 'ಮುಗುಳ್ನಗೆ' ಬೀರದಿದ್ದರೆ ಅವರು ನಿಮ್ಮೊಂದಿಗೆ ಮುನಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿಬಿಡುತ್ತೀರಿ. 'ಮುಗುಳ್‌ನಗೆ' ಬೀರದಿದ್ದಕ್ಕೆ ಮುನಿಸು ಬಂದಿರುವುದು ಸತ್ಯವಿರಬಹುದು. ಅದೇ ರೀತಿ ಅವರಿಗೆ ತೀವ್ರ ತಲೆಸಿಡಿತ ಅಥವಾ ನೋವು ಆ ದಿನ ಬಂದಿದ್ದರಿಂದ ಮುಗುಳ್ನಗೆ ಬೀರದಿರುವುದು ಸತ್ಯವೇ ಇರಬಹುದು.

ಹಾಗಾಗಿ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನೀವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕೆಲವು ತೀರ್ಮಾನ (ನಿರ್ಧಾರ)ಗಳು ತಾರ್ಕಿಕತೆಯು/ ಸಿಂಧುತ್ವ ಹೊಂದಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ದೋಷಯುಕ್ತವೇ ಎಂದೇಕೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಾರದು.

ಅಭ್ಯಾಸ A1.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿಗಮನ ತರ್ಕ ವಿಧಾನದಿಂದ ಉತ್ತರಿಸಿ.

   (i) ಮಾನವರು ಸಸ್ತನಿಗಳು, ಎಲ್ಲ ಸಸ್ತನಿಗಳು ಕಶೇರುಕಗಳು. ಈ ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ಮಾನವರ ಬಗ್ಗೆ ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ನೀವು ಬರುವಿರಿ?

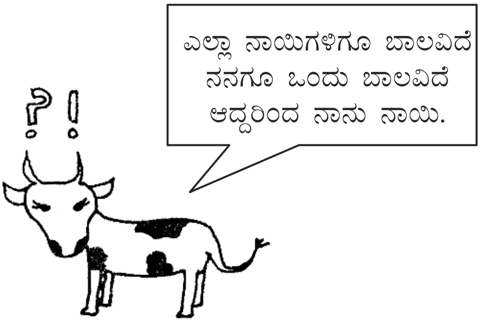
   (ii) ಆಂತೋನಿ ಕ್ಷಾರಿಕ. ದಿನೇಶ್ ಕ್ಷೌರ ಮಾಡಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ದಿನೇಶನಿಗೆ ಆಂತೋನಿ ಕ್ಷೌರ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ ಎಂದು ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದೆ?

   (iii) ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಕಥೆ/ಕಾದಂಬರಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಮಂಗಳ ಗ್ರಹ ವಾಸಿಗಳ ನಾಲಿಗೆ ಕೆಂಪಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಗುಲಾಗ್‌ನು ಮಂಗಳ ಗ್ರಹವಾಸಿ. ಈ ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ಗುಲಾಗ್‌ನ ಬಗ್ಗೆ ಏನು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವಿರಿ?

   (iv) ನಾಲ್ಕೂ ಗಂಟೆಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಮಳೆ ಸುರಿದ ಮಾರನೇ ದಿನ ಚರಂಡಿಗಳನ್ನು ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸಬೇಕು.

   ಈ ದಿನ 6 ಗಂಟೆಗಳ ಮಳೆ ಸುರಿದಿದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ಚರಂಡಿಗಳ ಸ್ಥಿತಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು?

   (v) ಈ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಂಗ್ಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಸುವಿನ ತರ್ಕದಲ್ಲಿನ "ತರ್ಕದೋಷ"ವೇನು?



2. ಈಗ ನಿಮಗೆ $\boxed{B}$ $\boxed{3}$ $\boxed{U}$ $\boxed{8}$ ಈ ನಾಲ್ಕು ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. $\boxed{B}$ $\boxed{U}$. ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ $\boxed{3}$ $\boxed{8}$ ಗಳ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷರವಿದೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಬಂಧನೆ (ನಿಯಮ)ಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲು ನೀವು ಯಾವ ಎರಡು ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ನೋಡಬೇಕು.

"ಕಾರ್ಡಿನ ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರವಿದ್ದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ"

$\boxed{B}$ $\boxed{3}$ $\boxed{U}$ $\boxed{8}$

A 1.4. ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು

ಈವರೆಗೂ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಸಿಂಧುತ್ವದ ಬಗ್ಗೆ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿಧದ ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಗಳಾದ – ಪ್ರಮೇಯ, ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆ ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರ್ತಿಸುವುದು ಎಂದು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ.

ಈಗಾಗಲೇ ನೀವು ಅನೇಕ 'ಪ್ರಮೇಯ'ಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದರೇನು?

ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಯ 'ಸತ್ಯ'ವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದನ್ನು "ಪ್ರಮೇಯ" ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವಿಭಾಗ A1.5 ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಗಮನಿಸಿದಂತೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು "ಪ್ರಮೇಯ"ಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗುವವು.

ಪ್ರಮೇಯ A1.2: ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ A 1.3: ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಮೂರು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 16 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

"ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆಯು" ಹೇಳಿಕೆಯೇ ಆಗಿದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು 'ಸತ್ಯ'ವೆಂದು ನಾವು ನಂಬಿದ್ದೇವೆ, ಈ ನಂಬಿಕೆಯು ನಮ್ಮ ಗಣಿತದ ತಿಳುವಳಿಕೆ ಮತ್ತು ಅನುಭವಗಳಿಂದ, ಅಂದರೆ ಅಂತಃಪ್ರೇರಣೆಯಿಂದ ಒಪ್ಪಿರುವಂತಹದು. ಹಾಗಾಗಿ ನಮ್ಮ ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆಗಳಿಗೆ ಪೂರ್ತಿ ಆಧಾರಗಳಿರಲೇಬೇಕೆಂದೇನಿಲ್ಲ. **ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆಯು** ಸತ್ಯವಾಗಿಯೋ, ಮಿಥ್ಯವಾಗಿಯೋ ಪರಿಣಮಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಅದು 'ಪ್ರಮೇಯ'ವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆಯ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಗಣಿತಜ್ಞರು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ನಿರ್ಣಯಗಳು ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆಯಿಂದ ಕೂಡಿದ ಊಹೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈಗ ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು (Patterns) ನೋಡೋಣ, ಹಾಗೂ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಬೌದ್ಧಿಕ (ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆಯ) ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಯಾವುದಾದರೂ ಕ್ರಮಗತವಾದ ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಮಾಡೋಣ.

ಮಾದರಿ: $2 + 4 + 6 = 12$

$4 + 6 + 8 = 18$

$6 + 8 + 10 = 24$

$8 + 10 + 12 = 30$

$20 + 22 + 24 = 66$

ಈ ಮಾದರಿ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿನ್ಯಾಸವಿದೆಯೇ? ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ಊಹಾನಿರ್ಣಯವೇನು?

ಪರಿಹಾರ :

ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆಗಳು ಹೀಗಿರಬಹುದು

(i) ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 6 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: 'ಪಾಸ್ಕಲ್‌ನ ತ್ರಿಭುಜ'ವೆಂದು ಕರೆಯುವ ಈ ಸಂಖ್ಯಾವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಸಾಲು		ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	:
8	: :	:

ಈ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಯಾವ ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು 7 ಮತ್ತು 8ನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸಬಲ್ಲಿರಿ? 21 ನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ? 'x' ನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸರಳ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಪರಿಹಾರ:

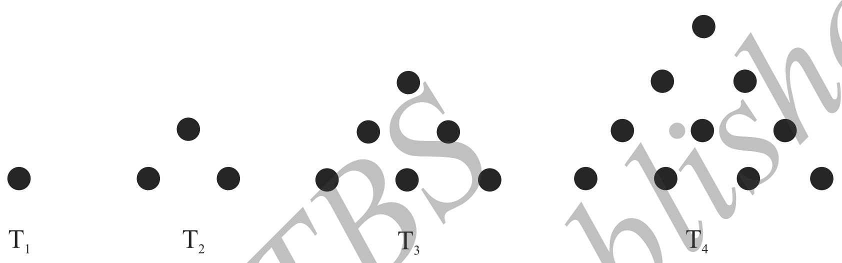
ಏಳನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

ಎಂಟನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

21 ನೆಯ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 2^{21-1} = 2^{20}$

n ನೇ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 2^{x-1}$

ಉದಾಹರಣೆ 6: ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯಾ ವಿನ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ T_5 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ A 1.1

ಚುಕ್ಕೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರವು ದೊರೆಯುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿದೆ.

ಈಗ $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ .... ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತದೆ.

ಚುಕ್ಕೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

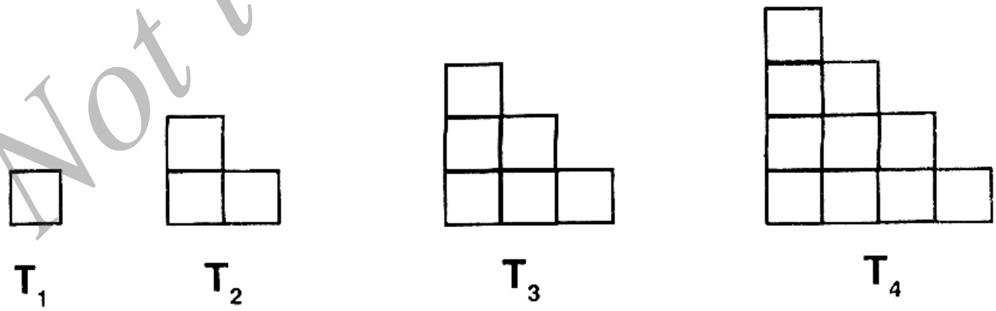
$T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ .... ಹೀಗೆ ಸಾಗುತ್ತದೆ.

$T_5 = ?$ ಎಂದು 'ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆ' ಮಾಡಬಹುದೇ?

$T_6 = ?$, $T_n = ?$

T_n ಬಗ್ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆ (Conjecture) ಮಾಡಿರಿ.

ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದರೆ ನಿಮಗೆ ನೆರವಾಗಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ A 1.2

ಪರಿಹಾರ :

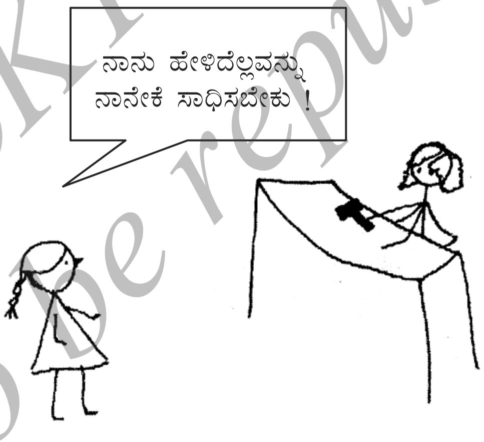
$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

ಜನಪ್ರಿಯವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆಯು ಇಂದಿಗೂ 'ಪರಿಹಾರ'ಕ್ಕೆ ಕಾಯ್ದುಕೊಂಡಿದೆ; ಈ ಊಹಾನಿರ್ಣಯ ಸತ್ಯವೇ, ಮಿಥ್ಯವೇ ಎಂದು ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸಾಬೀತಾಗಿಲ್ಲ. ಇದು 1690 – 1764ರಲ್ಲಿದ್ದ ಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞ ಕ್ರಿಶ್ಚಿಯನ್ ಗೋಲ್ಡ್‌ಬಾಚ್‌ರವರು ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಈ ಊಹಾನಿರ್ಣಯವು ಹೀಗಿದೆ "4ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಯಾವುದೇ ಸಮಪೂರ್ಣಾಂಕ (Even Integers) ವನ್ನು ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಇದು ಸತ್ಯವೇ, ಮಿಥ್ಯವೇ ಎಂದು ದೃಢೀಕರಿಸಿದರೆ ನೀವು ಪ್ರಖ್ಯಾತರಾಗಬಲ್ಲಿರಿ! ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವೆನಿಸಬಹುದು. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರತಿವಾದಿಸುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸ (ಸಾಧಿಸ) ಬೇಕೆ? ಹಾಗಿಲ್ಲವಾದರೆ, ಏಕೆ ಹಾಗಿಲ್ಲ?



ಗಣಿತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ಷೇತ್ರವು ಸತ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ ಅಥವ ಸತ್ಯವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸದ (ಸಾಧಿಸದೆ ಇರುವ) ನೈಜ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದೆ. ಇವು ಯಾವುದೇ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಒಳಪಡದೇ 'ಸ್ವಯಂಸಾಕ್ಷಿ ಸತ್ಯ'ವಾಗಿವೆ ಇವುಗಳು ಸಾಧಿಸದೇ ಸತ್ಯವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿರುವಂತಹವು. ಇಂತಹ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು (Axions) ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 5 ರಲ್ಲಿ ನೀವು ಗಣಿತಜ್ಞ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಹಾಗೂ 'ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆ' (Postulates) ಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಈಚಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಹಾಗೂ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತಿಲ್ಲ.

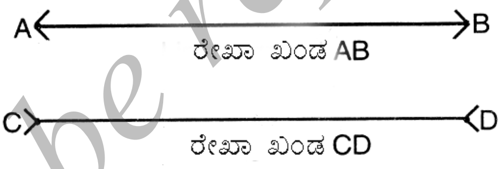
ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರವರ ಮೊದಲನೆ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು – 'ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು' ಎಂದಿದೆ. ಮೂರನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂದಿದೆ.

ಈ ಎರಡೂ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಖಚಿತವಾಗಿ ಸತ್ಯವೆಂದು ತೋರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನು ಅವು ಸತ್ಯವೆಂದು ಗ್ರಹಿಸಿದ್ದನು. ಏಕೆ? ಏಕೆಂದರೆ ನಾವು ಎಲ್ಲವನ್ನು 'ಸಾಧಿಸಿ' ತೋರಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ಯಾವುದೋ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲೇಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ನಮಗೆ ಸತ್ಯವೆಂದು ತೋರುವ ಕೆಲವು 'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ' ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು 'ಸತ್ಯ'ವೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡು, ಅವುಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ತರ್ಕದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನಮ್ಮ 'ಜ್ಞಾನ'ವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಸ್ವಯಂ ಸಾಕ್ಷ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ ತೋರುವ ಎಲ್ಲ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯವೆಂದು ಏಕೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಬಾರದೆಂದು ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಸ್ವೀಕರಿಸದೇ ಇರಲು ಅನೇಕ ಕಾರಣಗಳಿವೆ. ಅನೇಕ ಬಾರಿ ನಮ್ಮ 'ಅಂತಃಸಾಕ್ಷಿ' (ನಮಗೆ ಅನಿಸಿದ್ದು) ತಪ್ಪಾಗಿರಬಹುದು. ಚಿತ್ರಗಳು, ಮಾದರಿಗಳು ಭ್ರಾಮಕವಾಗಿರಬಹುದು! (ಮೋಸಗೊಳಿಸಬಹುದು!) ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತಃಸಾಕ್ಷಿಗಳನ್ನು 'ಸತ್ಯವೆಂದು' ನಿರೂಪಿಸಲು ಇರುವ ಮಾರ್ಗವೆಂದರೆ ಅದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಮೊದಲಿನ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನಂಬುತ್ತೀರಿ ಅಲ್ಲವೆ? ಈ ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡಿ $5 \times 0.2 = 1$ ಇದು 5 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ!

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿ:



ಚಿತ್ರ A 1.3

ಈ ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು;

AB ದೊಡ್ಡದೇ ? ಅಥವಾ CD ದೊಡ್ಡದೇ ?

ಆದರೆ AB, CD ಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯವು. ಆದರೆ ನಮ್ಮ 'ದೃಷ್ಟಿ'ಗೆ AB ಚಿಕ್ಕದೆಂದು ತೋರುತ್ತದೆ.

'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ'ಗಳ ಸಿಂಧುತ್ವದ (ಮಾನ್ಯತೆ/Validity) ಬಗ್ಗೆ ನಿಮಗೆ ಈಗ ವಿಸ್ಮಯವಾಗಬಹುದು. 'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ'ಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಅಂತಃಸಾಕ್ಷಿಯಿಂದ (ಅಂತರ್‌ಪ್ರೇರಣೆ) ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ ಮತ್ತು ಅವು ಸ್ವಯಂಸಾಕ್ಷಿಯಾಗಿ ತೋರುವುದರಿಂದ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು (Axions) 'ಸತ್ಯ'ವಿರಬೇಕೆಂದು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗಿದ್ದಾಗ್ಯೂ, ಯಾವುದಾದರೂ 'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ'ವು 'ಮಿಥ್ಯ'–'ಸತ್ಯವಲ್ಲ' ಎಂದು ಸಂಶೋಧಿಸಿದರೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಕ್ರಮವೇನು? ಈ ತೆರನಾದ ಕಠಿಣ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸುರಕ್ಷಿತರಾಗುವುದು (ಪಾರಾಗುವುದು) ಹೇಗೆ? ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(i) 'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ'ಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಅವಶ್ಯಕವೋ ಅಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ 'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ'ಗಳು ಅತಿಕಡಿಮೆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಎಚ್ಚರಿಕೆವಹಿಸುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಹಾಗೂ ಐದು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಂದ ನಾವು ನೂರಾರು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ.

(ii) ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ನಿರಂತರ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ದೃಢೀಕರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಒಂದಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರಕವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಇದನ್ನು ಮನನ ಮಾಡೋಣ. ಈ ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಅವು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸೋಣ.

ಹೇಳಿಕೆ 1 : ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು (Whole number) ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮವಲ್ಲ.

ಹೇಳಿಕೆ 2 : ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಶೂನ್ಯ (0)ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ (ಭಾಗಲಬ್ಧ).

[ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ : 0 ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ, ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಸದ್ಯಕ್ಕೆ ಅದನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸೋಣ ಅಂದರೆ '0' ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳೋಣ, ಏನಾಗುತ್ತದೆ ನೋಡೋಣ.]

ಎರಡನೆಯ ಹೇಳಿಕೆಯಂತೆ $\frac{1}{0} = a$, ಎಂದಿರಲಿ 'a' ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. ಓರೆಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿ $1 = a \times 0 = 0$, ಅಂದರೆ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮ! ಇದು ಮೊದಲನೆಯ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾದುದು. ಹಾಗಾಗಿ ಹೇಳಿಕೆ 2 ಅಸಂಗತ.

(iii) 'ದೋಷಯುಕ್ತ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವು' ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ಕಾಲಕ್ಕೆ ವಿರೋಧಾಭಾಸವಾಗಿ ಪರಿಣಮಿಸುತ್ತದೆ. ಯಾವುದೇ ಉಕ್ತಿ (ಹೇಳಿಕೆ) ಹಾಗೂ ಅದರ ವಿರೋಧೋಕ್ತಿ (ನಿರಾಕರಣೆ) ಎರಡೂ ಸಹ 'ಸತ್ಯ'ವೆಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಆಗ ವಿರೋಧಾಭಾಸವಿದೆ ಎಂದೇ ನಿರೂಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಎರಡೂ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಮೊದಲನೇ ಹೇಳಿಕೆ / ಉಕ್ತಿಯಿಂದ, ನಾವು $2 \neq 1$ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ತೋರಿಸಬಹುದು, ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸಬಹುದು. ಈಗ $x^2 - x^2$ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ $x^2 - x^2$ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ, ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು.

(i) $x^2 - x^2 = x(x-x)$

(ii) $(x^2 - x^2) = (x+x)(x-x)$ | $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ಸೂತ್ರ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

(i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ $x(x-x) = (x+x)(x-x)$

L.H.S ಮತ್ತು R.H.S ನಲ್ಲಿ $(x-x)$ ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬರೆದರೆ $\Rightarrow x = x + x = 2x$

ಅಂದರೆ $1 = 2$ ಎಂದಾಯಿತು

ಆದ್ದರಿಂದ $1 \neq 2$, $1 = 2$ ಈ ಎರಡೂ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು 'ಸತ್ಯ'ವೆಂದು ತೋರಿಸಿದೆ. ಇದನ್ನೇ 'ವಿರೋಧಾಭಾಸ' ಎನ್ನುವುದು. ಈ ವಿರೋಧಾಭಾಸಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನು? ಹೇಳಿಕೆ 2 ರಲ್ಲಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು 'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ' ಎಂದು ಸ್ವೀಕರಿಸಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಉಕ್ತಿ (ಹೇಳಿಕೆ)ಗಳು ಆಳವಾದ ಆಲೋಚನೆ ಹಾಗೂ ಅಂತರ್‌ದೃಷ್ಟಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ'ವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದ 'ಉಕ್ತಿ'ಗಳು ಅಸ್ಥಿರ ಹಾಗೂ ತಾರ್ಕಿಕ ವಿರೋಧಾಭಾಸಗಳನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನೂ ವಿಶೇಷವೆಂದರೆ, ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳ ಆಯ್ಕೆಯ ರೀತಿಯೇ ಹೊಸ ಶೋಧನೆಗಳಿಗೆ ದಾರಿಯಾಗಬಹುದು. ಅಧ್ಯಾಯ 5 ರಲ್ಲಿನ ಯೂಕ್ಲಿಡೇತರ 5ನೇ ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆಯು ಹೇಗೆ **ಯೂಕ್ಲಿಡೇತರ (Non-Euclidian – ನಾನ್ ಯೂಕ್ಲಿಡಿಯನ್ ಜಾಮಿತ್ರಿ) ರೇಖಾಗಣಿತದ** ಮೂಲಕ ಹೊಸ ರೀತಿಯ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಉಗಮಕ್ಕೆ ಅನುವು ಮಾಡಿರುವುದೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಗಣಿತಜ್ಞರು ಐದನೆಯ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಂದ ಸಾಧಿಸಬಹುದಾದ 'ಪ್ರಮೇಯ'ವೆಂದು ನಂಬಿದ್ದರು ಎಂಬುದನ್ನು 5 ನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಿಂದ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

ಅತ್ಯಾಶ್ಚರ್ಯಕರವಾಗಿ ಈ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು 'ಹೊಸ ರೇಖಾಗಣಿತ'ದ ಉಗಮಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಯಿತು.

ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ, (Axioms) ಪ್ರಮೇಯ, (Theorem) ಆಧಾರ ಊಹಾಪ್ರತಿಜ್ಞೆ, (Conjuctive) ಗಳೆಂದರೇನು ಎಂದು ಸ್ಮರಿಸುತ್ತಾ ಈ ವಿಭಾಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸೋಣ.

(i) **ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ** : ಗಣಿತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಧನೆ ಇಲ್ಲದೇ ಸತ್ಯ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿರುವುದಕ್ಕೆ 'ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ'ಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(ii) **ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆ** : ಯಾವ ಗಣಿತೋಕ್ತಿಯ ಸತ್ಯಾಸತ್ಯತೆಯಲ್ಲಿ ಗೊಂದಲವಿದ್ದು, ಇನ್ನು ಸ್ಥಿರೀಕರಿತವಾಗಿಲ್ಲವೋ ಅದನ್ನು ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(iii) **ಪ್ರಮೇಯ** : ಯಾವುದೇ ಗಣಿತೋಕ್ತಿಯನ್ನು (ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು) ತಾರ್ಕಿಕ ವಿಧಾನದಿಂದ 'ಸತ್ಯ'ವೆಂದು ಸ್ಥಿರೀಕರಿಸುವುದಕ್ಕೆ 'ಪ್ರಮೇಯ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A 1.3

1. ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ ಇತ್ಯಾದಿ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಈ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಮೂರು ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

2. ಪಾಸ್ಕಲ್ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

   ಸಾಲು 1 : 1 = 11^0

   ಸಾಲು 2 : 1 1 = 11^1

   ಸಾಲು 3 : 1 2 1 = 11^2

   ಇದರ ಆಧಾರ ಸಾಲು 4 ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಸಾಲು 5 ಕ್ಕೆ ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆ ರಚಿಸಿ. ಈ ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆಗಳು ಸಮರ್ಥನೀಯವೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಅದೇ ರೀತಿ ಸಾಲು 6 ಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

3. ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ A-1.2) ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   ಉದಾಹರಣೆ: $T_1 + T_2 = 4, T_2 + T_3 = 9, T_3 + T_4 = 16$ ಹಾಗಾದರೆ $T_4 + T_5 = ?, T_{x-1} + T_n$ಗೆ ಒಂದು ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$ ಇದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ

   $\left.\begin{array}{l}111111^2 \ldots\ldots \\ 1111111^2 \ldots\ldots\end{array}\right\}$ ಇವುಗಳ ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆಯು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ

   ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

5. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ 5 (ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ) ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿ.

A1.5 ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆ ಎಂದರೇನು?

ಸಾಧನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿವಿಧ ಆಯಾಮಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಪರಿಶೀಲನೆ (ತಾಳೆನೋಡು) ಹಾಗೂ ಸಾಧನೆಗಳಿಗಿರುವ ಅರ್ಥವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ನೀವು ಅಭ್ಯಾಸಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮುಂಚೆ, ನಿಮಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪರೀಶೀಲಿಸಲು ಮಾತ್ರ ತಿಳಿಸಲಾಗುವುದು.

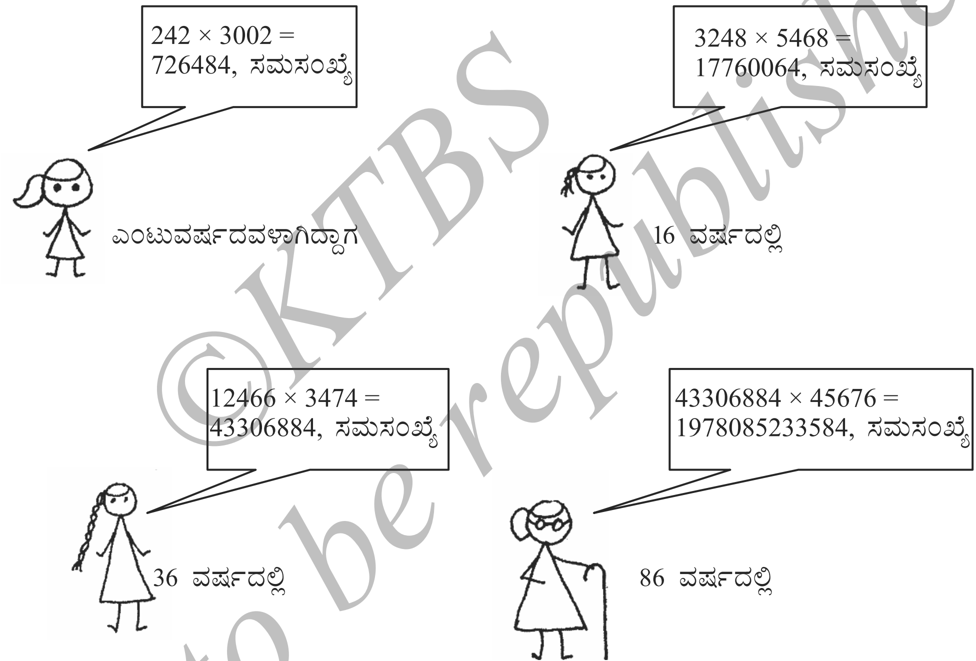
ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ "ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ" ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ (ತಾಳೆನೋಡಿ) ಎಂದು ಕೇಳಿದರೆ ನೀವೇನು ಮಾಡುವಿರಿ. ನಿಮಗೆ ತೋರಿದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸುತ್ತೀರಿ. 24 ಮತ್ತು 2006 ಎಂದಿರಲಿ. 24ನ್ನು 2006 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವಿರಿ. $24 \times 2006 = 48144$ ಹೀಗೆ ಬಂದ ಉತ್ತರವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಇನ್ನಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೂ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ ಹಲವಾರು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ ನೀಡಬಹುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತಿಳಿಸಬಹುದು. ಅಳತೆಯ ದೋಷವನ್ನು (error) ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದಿದ್ದರೆ ಆ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲೂ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೊನಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿನ ದೋಷವೇನು?

ತಾಳೆನೋಡುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ತಾಳೆ ನೋಡುವಿಕೆಯು ನೀವು ಪರಿಗಣಿಸುವ ಹೇಳಿಕೆಯು ಎಲ್ಲ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲೂ 'ಸತ್ಯವೆಂದು' ಖಚಿತಪಡಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು

ಅನೇಕ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಲ್ಲ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ ಈ ರೀತಿ ಎಲ್ಲ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಗುಣಿಸಿನೋಡುವುದು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗೇನಾದರೂ ನೀವು ಮಾಡಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಂಗ್ಯಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಹುಡುಗಿಯಂತೆ ಆಗುವಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಜೀವನಪೂರ್ತಿ ನೀವು ಈ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಲೇ ಇರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ನೀವು ರಚಿಸದೆ ಇರುವ ಇನ್ನು ಹಲವಾರು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿರಬಹುದು. ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$ಆಗದೇ ಇರಬಹುದು. ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ ಅಳೆದು ನೋಡುವುದು ಅಸಾಧ್ಯ.

ವ್ಯಂಗ್ಯ ಚಿತ್ರ



ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಪರಿಶೀಲನೆ ತಪ್ಪುದಾರಿಗೆ ಎಳೆಯಬಹುದು.

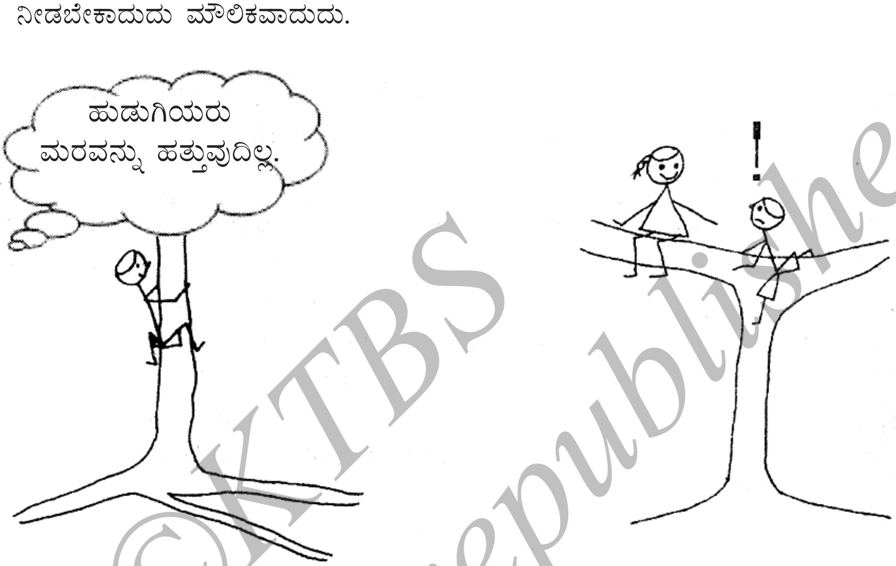
ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪಾಸ್ಕಲ್‌ನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ (Q_2 Ex - A1.3) ತಾಳೆನೋಡುವಿಕೆ ಬಳಸಿದರೆ.

$11^5 \Rightarrow 15101051$ ಆದರೆ $11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 11^5 = 161051$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನವು ಕೆಲವೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತಾಳೆನೋಡುವುದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಿಕೆ 'ಸಾಧನೆ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆ "ಸತ್ಯಾಸತ್ಯತೆ" ಯನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತಾರ್ಕಿಕವಾದಗಳ ತಳಹದಿಯಮೇಲೆ ಸ್ಥಿರೀಕರಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗೆ "ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆ" (Mathamatical proof) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವಿಭಾಗ (A 1.2)ನ ಉದಾಹರಣೆ 2 ರಲ್ಲಿ ನೀವು ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಮಿಥ್ಯವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಲು ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ ಹಾಗಾಗಿ ಸಾವಿರಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ತಾಳೆನೋಡಿ (ಪರಿಶೀಲಿಸಿ) ಹೇಳಿಕೆಯ ಮಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಸತ್ಯವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದಷ್ಟೇ ಸಾಲದು. ಒಂದೇ ಒಂದು ಪ್ರತಿಉದಾಹರಣೆಯು (ವಿರುದ್ಧಫಲದ ಉದಾಹರಣೆ) (counter example) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ವಿರೋದವೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಒತ್ತು ನೀಡಬೇಕಾದುದು ಮೌಲಿಕವಾದುದು.



ಚಿತ್ರ ನೋಡಿ "ಹುಡುಗಿಯರು ಮರ ಏರುವುದಿಲ್ಲ" ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು 'ಅಸತ್ಯ'ವೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಒಂದೇ ಒಂದು ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ? ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಬೆಸವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯು "ಅಸತ್ಯ" ವೆಂದು ತೋರಿಸಲು $(7 + 5) = 12$ ಎನ್ನುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ, ಅಲ್ಲವೆ.?

ಒಂದು' ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗೆ ಬೇಕಾದ ಮೂಲಘಟಕಾಂಶಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೋಡೋಣ;

(i) ಒಂದು 'ಪ್ರಮೇಯ'ವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಹೇಗೆ ಮುಂದುವರೆಯಬೇಕೆಂಬ ಸ್ಥೂಲವಾದ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನದ ಆಲೋಚನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಬೇಕು.

(ii) ಪ್ರಮೇಯದ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿನ ಮಾಹಿತಿ (ಊಹಾನಿರ್ಣಯವನ್ನು Hypothesis) ಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಮತ್ತು ಬಳಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪ್ರಮೇಯ A 1.2ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.ಇದನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದ–ದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಅಧ್ಯಾಯ 2 ರಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ, $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು $p(a)=0$ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿದೆ. ಇದನ್ನು ಬಳಸಿ ನೀವು $(x-a)$ ಯು $p(x)$ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ

ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. ಬಹುಪದಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ಅನುಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿರುವ ಊಹಾನಿರ್ಣಯವನ್ನು ಬಳಸಿ $p(a) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

'ಪ್ರಮೇಯ'ವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಧರ್ಭದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಲವು 'ರಚನೆ'ಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳ ಬೇಕಾಗಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳಮೊತ್ತ 180° ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ, ಅದರ ಎದುರಿನ ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ, ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ರಚಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಹಾಗೂ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

(iii) ಸಾಧನೆಯು ಗಣಿತೀಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಸಾಧನೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೇಳಿಕೆಯು ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಹೇಳಿಕೆಯ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಧನೆಯನ್ನಾಗಲಿ ಅಥವಾ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯನ್ನಾಗಲಿ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವನ್ನಾಗಲಿ ಅಥವಾ ನಮ್ಮ ಊಹ ನಿರ್ಣಯವನ್ನಾಗಲಿ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ನಾವು ಏನನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ ಅಥವಾ ಪ್ರಮೇಯವು ಏನನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಅದರ ಅಂತಿಮ ನಿರ್ಣಯವು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ಗಣಿತೀಯ ತಾರ್ಕಿಕ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ಕೂಡಿರಬೇಕು.

ಈ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರಮೇಯ A 1.1 ನ್ನು ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸೋಣ.

ಅಧ್ಯಾಯ 6 ರಲ್ಲಿ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಿರಿ ಮೊದಲಿಗೆ ರೇಖಾಗಣಿತ ಸಾಧನೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನಾವು ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ಆಗಾಗ್ಗೆ ಶರಣಾಗುತ್ತೇವೆ ಹಾಗೂ ಇದು ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾದುದು. ಹಾಗಿದ್ದರೂ ಸಹ ಸಾಧನೆಯ ಪ್ರತಿಯೆಂದು ವಾಕ್ಯವೂ ಉಕ್ತಿಯೂ ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಅನೇಕ ವೇಳೆ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತಾರೆ "ಆ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತವೆ.

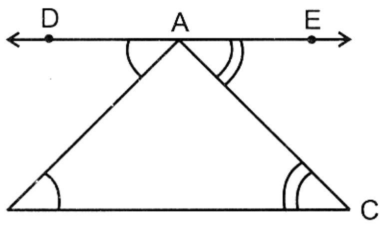
ಅಥವಾ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 90° ಇದೆ. ಈ ಮೇಲ್ನೋಟದ ವೀಕ್ಷಣೆಯು ಸುಳ್ಳಾಗಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ A 1. 3 ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ) ಬರೀ ಮೇಲ್ನೋಟದಿಂದ ನಮ್ಮ ತೀರ್ಮಾನ ತಪ್ಪಾಗಿದ್ದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೆ ?

ಈಗ ಪ್ರಮೇಯ. A 1.1 ನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ A1.1: **ಒಂದು** ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಚಿತ್ರ A 1.4 ನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ

ನಾವು $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ......(1)



ಚಿತ್ರ A1.4

A ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ, $\overline{BC}$ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ DE ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

DE ಯು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ.

ಮತ್ತು $\overline{AB}$ ಯು ಛೇದಕರೇಖೆ (Transversal) ಯಾಗಿದೆ. .... (2)

ಹಾಗಾಗಿ $\angle DAB$ ಮತ್ತು $\angle ABC$ ಗಳು ಪರ್ಯಾಯಕೋನಗಳು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಧ್ಯಾಯ 6, ಪ್ರಮೇಯ 6.2 ರ ಪ್ರಕಾರ ಅವುಗಳು ಸಮ

ಅಂದರೆ $\angle DAB = \angle ABC$ .... (3)

ಅದೇರೀತಿ $\angle CAE = \angle ACB$ .... (4)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ .... (5)

ಆದರೆ $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ .... (6)

ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ

ಇದರ ಫಲವಾಗಿ

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$

ಈಗ 'ಸಾಧನೆ' ಯ ಪ್ರತಿ ಹಂತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಹೆಜ್ಜೆ ಹಂತ 1 : ನಮ್ಮ ಪ್ರಮೇಯವು ತ್ರಿಭುಜದ ಲಕ್ಷಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದು, ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

ಹಂತ 2 : ಇದು ಪ್ರಧಾನವಾದ (ಅತಿಮುಖ್ಯವಾದ) ವಿಚಾರ ಅಂದರೆ ಅಂತದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಹೊರಹೊಮ್ಮಿದ ಅಥವಾ ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧಿಸಲು ಇಡಬೇಕಾದ ಸರಿಯಾದ ಹೆಜ್ಜೆ ಯಾವುದೆಂದು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದ ರಚನಾಕಾರ್ಯ. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ 'ರಚನಾಕಾರ್ಯವು' ಆಗಾಗ್ಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 3 ಮತ್ತು 4 : ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಹಂತ 2 ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ರಚನೆ ಸಮಾಂತರರೇಖೆ, ಹಾಗೂ ಈ ಸಮಾಂತರರೇಖೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಪ್ರಮೇಯ 6.2 ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಛೇದಕ ರೇಖೆಯು ಸಮಾಂತರರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

$\underline{|DAE} = \underline{|ABC}$ ಮತ್ತು $\underline{|CAE} = \underline{|ACB}$ ಇದನ್ನು $DE \parallel BC$ (ರಚನೆಗೆ) ನಿಜಾಂಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಹಂತ 5 : ಐದನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ "ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ"ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮವಾದುವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಮವಾದವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಫಲಿತವು ಸಹ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ನಿಗಮನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\underline{|ABC} + \underline{|BAC} + \underline{|ACB} = \underline{|DAB} + \underline{|BAC} + \underline{|CAE}$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದೆ.

ಅದೆಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದೆ.

ಹಂತ 6 : ಅಧ್ಯಾಯ 6 ರಲ್ಲಿನ "ಜೋಡಿ ರೇಖೆಗಳ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ"ವನ್ನು ಅಂದರೆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ $D\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}E = 180°$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದೆ.

ಹಂತ 7 : ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಅಂಶಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

$$\underline{|ABC} + \underline{|BAC} + \underline{|ACB} = \underline{|DAB} + \underline{|BAC} + \underline{|CAE} = 180°$$

ಗಮನಿಸಿ ಹಂತ 7 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಏನೆಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ್ದೆವೊ ಅದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ ಪ್ರಮೇಯ A 1.2 ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ A 1.3 ಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಇಲ್ಲದೇ ಸಾಧಿಸೋಣ

ಪ್ರಮೇಯ : A 1.2

"ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ".

ಸಾಧನೆ : x ಮತ್ತು y ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. x ಮತ್ತು y ಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. x ಮತ್ತು y ಗಳು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳು 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು m ಮತ್ತು n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ $\frac{x}{2} = m,\ x = 2m,$ ಹಾಗೂ $y/_2 = \mathrm{n},\ y = 2n$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$xy = 4mn$ ನ್ನು 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ xy ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ.

ಪ್ರಮೇಯ : A 1.3 ಯಾವುದೇ ಅನುಕ್ರಮ ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವು 16 ರಿಂದ ನಿಶ್ಯೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: 'n' ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಆ ಮೂರುಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$2n, 2n + 2, 2n + 4$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ $(2n) \times (2n + 2) \times (2n + 4)$

$= 2n \times 2\,(n + 1) \times 2\,(n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n\,(n + 1)\,(n + 2)$

$8n\,(n + 1)\,(n + 2).$

ಈಗ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳವೆ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬಹುದು. ಮೊದಲಿಗೆ n ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ 'm' ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $n = 2m$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ

$$2n \times (2n + 2)\,(2n + 4) = 8(2m)\,(2m + 1)\,(2m + 2)$$
$$= 16\,m\,(2m + 1)\,(2m + 2)$$

$2n\,(2n + 2)\,(2n + 4)$ 16 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ r ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ $\therefore$ $n + 1$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ $n + 1 = 2r$ ಆಗಿರಲಿ

ಆಗ $2n\,(2n + 2)\,(2n + 4) = 8n\,(n + 1)\,(n + 2)$

$$= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$$
$$= 16r\,(2r - 1)\,(2r + 1)$$

$\therefore$ $2n\,(2n + 2)\,(2n + 4)$ ಇದು 16 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ವಿವರಣೆಯಿಂದ ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವನ್ನು 16 ರಿಂದ ನಿಶ್ಯೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಹುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದೆ.

ಗಣಿತಜ್ಞರು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಕೊಂಡರು ಮತ್ತು ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಪರಿಶುದ್ಧವಾದ ಕ್ಲಿಷ್ಟಕರವಾದ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳೊಂದಿಗೆ ಹಾಗೂ ಕೆಲವು ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಈ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ಕೊನೆಗೊಳಿಸೋಣ. ಈಗಾಗಲೇ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಧನೆಯು ಒಂದು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಅಂತದೃಷ್ಟಿ (ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು) ಪ್ರೇರಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತಜ್ಞರ ಆಲೋಚನಾಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅಂತಃಪ್ರೇರಣೆ ಹಾಗೂ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಶೋಧನೆಯು ಪ್ರಧಾನವಾದುದು. ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯು ಗಣಿತಜ್ಞರಿಗೆ ಗೋಜಲಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಗಣಿತಜ್ಞರು ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯ ಆಲೋಚನಾಕ್ರಮ ತರ್ಕ ಹಾಗೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಪರಿಹಾರ ಅಥವಾ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮನಗಾಣುತ್ತಾರೆ.

ಇವೆಲ್ಲಾ ತರ್ಕಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾರೆ ಸೇರಿಸಿ ಸರಿಯಾದ ಸಾಧನೆ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಸೃಜನಶೀಲತೆಯ ಹಂತವು ಉಳಿದ ಹಂತಗಳನ್ನು ಕ್ರಮೇಣ ಶಾಂತಗೊಳಿಸಿದ ನಂತರವೇ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.

Srinivasa Ramanujan
(1887–1920)

ಇಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲೇಬೇಕಾದುದು ಅತಿ ಉತ್ಕೃಷ್ಟವಾದ ವಿಶ್ವದ ಮಹಾನ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಭಾರತದ ಎಸ್.ರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರ ಅನೇಕ ಗಣಿತದ ಪ್ರಯೋಗಗಳು. ಅವರ ವಿಚಾರಗಳು ಉನ್ನತದ ಅಂತಃಪ್ರೇರಣೆಯಿಂದ ಹೊರಹೊಮ್ಮಿದವು ಮತ್ತು ಅಂತಹ ಪ್ರತೀಯಗಳನ್ನು ಅವರು 'ಸತ್ಯ'ವೆಂದು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದೇಶದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಒರೆಹಚ್ಚಿ ನೋಡಿದ್ದಾರೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಪ್ರಮೇಯಗಳು 'ಸತ್ಯ' ವೆಂದು ಒಪ್ಪಲಾಗಿದೆ. (ನಿರಾಕರಿಸಲು ಒಂದಾದರೂ ಪ್ರತಿಪಾದವಿರಬೇಕಲ್ಲ!) ಇಂದಿಗೂ ವಿಶ್ವದ ಅನೇಕ ತಜ್ಞರು ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ (1987–1920) ರವರ ಈ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸತ್ಯ–ಮಿಥ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಶ್ರಮಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ – A1.4

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನಿರಾಕರಿಸಲು ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.
   (i) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
   (ii) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲ ಬಾಹುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಚೌಕ (ವರ್ಗ) ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   (iii) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ವರ್ಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   (iv) a ಮತ್ತು b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ, (integers) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
   (v) ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ $2n^2 + 11$ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   (vi) ಎಲ್ಲಾ n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ, $n^2 - n + 41$ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
2 ನಿಮ್ಮ ಮೆಚ್ಚುಗೆಯ ಯಾವುದಾದರೂ ಪ್ರಮೇಯದ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರ ದತ್ತಾಂಶ, ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು, ಬಳಸಿಕೊಂಡ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ, ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಮುಂತಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿಕೊಂಡು A 1.5ನಲ್ಲಿ ಹಂತಹಂತವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿರುವಂತೆ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ.
3. ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
   (ಸುಳಿವು : ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ x, $x + 2$ ಆಗಿರಲಿ, ಈ ರೀತಿ)
4. ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
5. ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 6 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
6. ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = 2x$ ಆಗಿರುವಾಗ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬಿಂದುಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
   [ಸುಳಿವು : n ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ $(n, 2n)$ ಅನ್ನು ಬಿಂದುವೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.]

7. ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನೊಬ್ಬನಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು ನಿಮಗೆ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ. ಅದಾದ ಮೇಲೆ ಕೂಡು, ಗುಣಿಸು, ಭಾಗಿಸು, ಕಳೆ, 4 ರಷ್ಟು. ಇತ್ಯಾದಿ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ. ಅದನ್ನು ನೀವು ಅನುಸರಿಸಬೇಕು. ಕೊನೆಗೆ ನೀವು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ. ಹೇಗೆ? ಅಂತಹ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆ ಇಲ್ಲಿವೆ. ಅವುಗಳು ಹೇಗೆ ಸರಿ ಉತ್ತರ ಆಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

   (i) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಆರಿಸಿ. ಅದನ್ನು ಎರಡರಷ್ಟು ಮಾಡಿ. ನಂತರ 9 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಮೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ 4 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ನೀವು ಆರಿಸಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇದರಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರ. 7

   (ii) ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉದಾಹರಣೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಇದನ್ನೇ ಪುನಃ ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದು 6 ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾಡಿ (425 425).

   ನಿಮ್ಮ ಸಂಖ್ಯೆಯು 7, 11, 13 ರ ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

A1.6 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಭ್ಯಸಿಸಿರುವುದು:

1. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉಕ್ತಿ/ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಒಪ್ಪುವುದೆಂದರೆ ಅದು ಸರ್ವಕಾಲಿಕ 'ಸತ್ಯ' (ನಿಜ)ವಾಗಿರಬೇಕು ಅಥವಾ 'ಮಿಥ್ಯ' (ಸುಳ್ಳು) ವಾಗಿರಬೇಕು.
2. ಗಣಿತದ ಪ್ರಮೇಯ/ಉಕ್ತಿ/ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು 'ಮಿಥ್ಯ' ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಕೇವಲ ಒಂದು ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆ ಸಾಕು.
3. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಧನೆಯಿಲ್ಲದೆ 'ಸತ್ಯ'ಗಳು ಎಂದು ಪರಿಭಾವಿಸಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳು.
4. ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆ ಎಂದರೆ ನಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ಅಂತಃಪ್ರೇರಣೆಯಿಂದ ಗೋಚರಿಸಿದ 'ಸತ್ಯಗಳು'. ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ.
5. ಯಾವ ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಯ 'ಸತ್ಯ'ವು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆಯೋ ಅದನ್ನು "ಪ್ರಮೇಯ" ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
6. ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಬಳಸುವ ಪ್ರಮುಖ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಧನವೆಂದರೆ ನಿಗಮನ ತರ್ಕ ಕ್ರಮ ಅಥವಾ ವಿಧಾನ.
7. 'ಸಾಧನೆ' ಎನ್ನುವುದು ಕ್ರಮಾಗತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಗಣಿತೀಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ಕೂಡಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೇಳಿಕೆಯು ಪೂರ್ವಜ್ಞಾನವನ್ನು ನಿಗಮನ ಕ್ರಮದಿಂದ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆದುದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ ಈಗಾಗಲೇ ಸಾಧಿಸಿರುವ ಪ್ರಮೇಯ, ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ. ಅಥವಾ ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೊಂಡಿರುತ್ತಾರೆ.

ಉತ್ತರಗಳು / ಸುಳಿವು

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. ಹೌದು, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ ಇತ್ಯಾದಿ ಛೇದ q ದಲ್ಲಿಯೂ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಹ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

2. 3 ಮತ್ತು 4 ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಅನಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. $3 = \frac{21}{6+1}$ & $4 = \frac{28}{6+1}$ ಎಂದು ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ನಂತರದಲ್ಲಿ ಆರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$ ಬರುತ್ತವೆ.

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}$, $\frac{4}{5} = \frac{40}{50}$ ಆದರಿಂದ, ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$.

4. (i) ನಿಜ. ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯ ಗಣದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

   (ii) ತಪ್ಪು, ಉದಾಹರಣೆಗೆ -2 ಒಂದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

   (iii) ತಪ್ಪು, ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{1}{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. (i) ನಿಜ, ಎಕೆಂದರೆ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

   (ii) ತಪ್ಪು, 'm' ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾತ್ರ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧವೂ ಆಗಿರಬಹುದು.

   (iii) ತಪ್ಪು, ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2 ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

2. ಇಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\sqrt{4} = 2$, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

3. ಚಿತ್ರ 1.8 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದಂತೆ ವಿಧಾನವನ್ನು ಹಲವುಬಾರಿ ಪುನಾರಾವರ್ತಿಸಿ. ಮೊದಲು $\sqrt{4}$ ನಂತರದಲ್ಲಿ $\sqrt{5}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. (i) 0.36 ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ

(ii) $0.\overline{09}$ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವ ದಶಮಾಂಶ

(iii) 4.125 ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ

(iv) $0.\overline{230769}$ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವ ದಶಮಾಂಶ

(v) $0.\overline{18}$ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವ ದಶಮಾಂಶ

(vi) 0.8225 ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ

2. $\frac{2}{7} = 2\times\frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3\times\frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 4\times\frac{1}{7} = 0.\overline{5714258}$,
$\frac{5}{7} = 5\times\frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$, $\frac{6}{7} = 6\times\frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$[$x = 0.666......$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ $10\ x = 6.666......$ ಅಥವಾ $10\,x = 6 + x$ ಅಥವಾ $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]

(ii) $\frac{43}{90}$ (ii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [$x = 0.9999......$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ $10x + 9.9999......$ ಅಥವಾ $10\,x = 9 + x$ ಅಥವಾ $x = \frac{9}{9} = 1$

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಕೇವಲ 2 ರ ಘಾತಸಂಖ್ಯೆ, 5 ರ ಘಾತಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಎರಡು ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

7. 0.0100100010000 ...., 0.202002000200002.........., 0.003000300003........ .

8. 0.7507500750007500075......, 0.767076700767000767......, 0.80800800080008 ....

9. (i) ಮತ್ತು (v) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ, (ii), (iii) ಮತ್ತು (iv) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. 1.4 ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದಂತೆ 2.665ಗೂ ಮುಂದುವರೆಸಿರಿ.
2. ಉದಾಹರಣೆ 11 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದಂತೆ ಮುಂದುವರೆಸಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1. (i) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ
(iii) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ (iv) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ
(v) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

2. (i) $6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (ii) 6
(iii) $7+2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. ಇದರಲ್ಲಿ ವೈರುದ್ಯತೆ ಇಲ್ಲ. ನಾವು ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಅಥವಾ ಬೇರೆಯ ಉಪಕರಣದಿಂದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ನಮಗೆ ಸಮೀಪದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆದರಿಂದ c ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ, ಅಥವಾ d ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

4. 1.7 ರ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

ಅಭ್ಯಾಸ 1.6

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5

2. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8

(iv) $\frac{1}{5}\left[125^{-\frac{1}{3}}=\left(5^{3}\right)^{-\frac{1}{3}}=5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. (i) ತಪ್ಪು. ಇದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ನೋಡಿ ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು.
   (ii) ತಪ್ಪು. ಇದು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಾಂತ 2.1 ಕ್ಕೆ ವೈರುಧ್ಯತೆ ಹೊಂದಿದೆ.
   (iii) ಸರಿ. (ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 2)
   (iv) ಸರಿ. ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಆವರಿಸುವ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಅದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಸೀಮಾರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. (ಸೇರಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ). ಆದರಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೂ ಸಹ ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುವವು.
   (v) ಸರಿ. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಮೊದಲನೆಯ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ.

3. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಬಹುದಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡದ ಪದಗಳು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಾ ಇವೆ. ಅವುಗಳು ಸ್ಥಿರತೆ ಹೊಂದಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಹೇಳುತ್ತವೆ.
   (i) A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ C ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ.
   (ii) A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಇವುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರದಂತೆ ನೀವು C ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ.

   ಈ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಅವುಗಳು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ 2.1 ನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.

4. $AC = BC$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AC + AC = BC + AC$ [ಸಮವಾಗಿರುವುದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಸೇರಿಸಿದೆ]

ಅಂದರೆ, $2\,AC = AB$ [BC + AC ಯು AB ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.]

ಆದರಿಂದ $AC = \frac{1}{2}AB$

5. C ಮತ್ತು D ಗಳು AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಎಂಬ ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ಊಹೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ಈಗ ನೀವು C ಮತ್ತು D ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳು ಅಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸುವಿರಿ.

6. AC = BD (ದತ್ತ) .... (1)
   AC = AB + BC (B ಬಿಂದುವು A ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ.)............. (2)
   BD = BC + CD (C ಬಿಂದುವು B ಮತ್ತು D ಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ.) .... (3)
   (2) ಮತ್ತು (3) ನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,
   AB + BC = BC + CD ಎಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ.
   ಆದ್ದರಿಂದ, AB = CD (ಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿದೆ.)

7. ಇದು ಜಗತ್ತಿನ ಯಾವುದೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ವಸ್ತುವಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸತ್ಯ.

ಅಭ್ಯಾಸ.2.2

1. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ನೀಡುವ ಸೂತ್ರೀಕರಣವನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಅದನ್ನು ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಬೇಕು.

2. l ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗುವಂತೆ, m ಮತ್ತು n ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು l ಯ ಮೇಲೆ ಬೀಳುತ್ತವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ, ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೇ ಆಧಾರಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯ ಪ್ರಕಾರ l ನ ಅದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. l ರೇಖೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಹ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಆದರಿಂದ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಸಂಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ m ಮತ್ತು n ರೇಖೆಗಳು ಎಂದಿಗೂ ಸಂಧಿಸದಿರುವುದರಿಂದ ಅವು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1. 30°, 250°　　2. 126°

4. ಬಿಂದುವಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ = 360°

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ ಮತ್ತು $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$.

6. 122°, 302°

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1. 130°, 130°　　2. 126°　　3. 126°, 36°, 54°

4. 60°　　5. 50°, 77°

6. ಪತನ ಕೋನ = ಪ್ರತಿಫಲನ ಕೋನ (ಸಮ). B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, BE ⊥ PQ ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ CF ⊥ RS ಎಳೆಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3.

1. 65°　　2. 32°, 121°　　3. 92°

4. 60°　　5. 37°, 53°

6. Δ PQR ದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ = Δ QTR ದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. (i) ಮತ್ತು (ii) ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು

   (v) ಮೂರು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ.

   (iii), (iv) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಚರಾಕ್ಷರದ ಘಾತವು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಲ್ಲ.

2. (i) 1 (ii) −1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0.

3. $3x^{35}-4$; $\sqrt{2}y^{100}$ (ನೀವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಹಗುಣಕ ಇರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) ವರ್ಗ (ii) ಘನ (iii) ವರ್ಗ (iv) ಸರಳ

   (v) ಸರಳ (vi) ವರ್ಗ (vii) ಘನ

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. (i) 3 (ii) −6 (iii) −3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4, (iii) 0, 1, 8 (iv) −1, 0, 3

3. (i) ಹೌದು (ii) ಇಲ (iii) ಹೌದು (iv) ಹೌದು

   (v) ಹೌದು (vi) ಹೌದು

   (vi) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ಶೂನ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ ಆದರೆ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯಾಗಿಲ್ಲ.

   (viii) ಇಲ್ಲ

4. (i) – 5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

   (v) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-d}{c}$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1

   (iv) $-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$ (v) $-\frac{27}{8}$

2. $5a$

3. ಇಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.4

1. $(x+1)$ (i) ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. (ii), (iii) ಮತ್ತು (iv) ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲ

2. (i) ಹೌದು (ii) ಇಲ್ಲ (iii) ಹೌದು

3. (i) -2 (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$
4. (i) $(3x-1)(4x-1)$ (ii) $(x+3)(2x+1)$
   (iii) $(2x+3)(3x-2)$ (iv) $(x+1)(3x-4)$
5. (i) $(x-2)(x-1)(x+1)$ (ii) $(x+1)(x+1)(x-5)$
   (iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y-1)(y+1)(2y+1)$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.5

1. (i) $x^2+14x+40$ (ii) $x^2-2x-80$ (iii) $9x^2-3x-20$
   (iv) $y^4-\frac{9}{4}$ (v) $9-4x^2$
2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984.
3. (i) $(3x+y)(3x+y)$ (ii) $(2y-1)(2y-1)$
   (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$.
4. (i) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8xz$
   (ii) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$
   (iii) $4x^2+9y^2+4z^2-12yz+12yz-8xz$
   (iv) $9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$
   (v) $4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12xz$
   (vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$
5. (i) $(2x+3y-4z)(2x+3y-4z)$
   (ii) $\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)$
6. (i) $8x^3+12x^2+6x+1$
   (ii) $\left(-\sqrt{2x}+y+2\sqrt{2z}\right)\left(-2\sqrt{2x}+y+2\sqrt{2z}\right)$
   (iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$
   (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4xy^2}{3}$
7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992
8. (i) $(2a+b)(2a+b)(2a+b)$ (ii) $(2a-b)(2a-b)(2a-b)$
   (iii) $(3-5a)(3-5a)(3-5a)$
   (iv) $(4a-3b)(4a-3b)(4a-3b)$ (v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$
10. (i) $(3y+52)\left(9y^2+25z^2-15yz\right)$

(ii) $(4m-7n)(16m^2+49m^2+28mn)$

11. $(3x+y+z)\left(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz\right)$.
12. ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.
13. $x+y+z=0$ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VIII ಆದೇಶಿಸಿ.
14. (i) -1260. $A=-12$, $b=7$, $c=5$ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ $a+b+c=0$ ಪ್ರಶ್ನೆ 13 ರಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.
    (ii) 16380
15. (i) ಒಂದು ಸಾಧ್ಯವಾದ ಉತ್ತರವು : ಉದ್ದ = $5a-3$, ಅಗಲ= $5a-4$
    (ii) ಒಂದು ಸಾಧ್ಯವಾದ ಉತ್ತರವು : ಉದ್ದ = $7y-3$, ಅಗಲ = $5y+4$
16. (i) ಒಂದು ಸಾಧ್ಯವಾದ ಉತ್ತರವು : $3, x,$ ಮತ್ತು $x-4$.
    (ii) ಒಂದು ಸಾಧ್ಯವಾದ ಉತ್ತರವು : $4k, 3y+5$. ಮತ್ತು $y-1$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. ಅವುಗಳು ಸಮ
6. $\angle BAC = \angle DAE$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$
7. ಪ್ರತಿಕೋನವು 45°

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

3. (ii) ರಿಂದ (i), $\angle ABM = \angle PQN$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

4. BD ಸೇರಿಸಿ ಮತ್ತು $\angle B > \angle D$. ಎಂದು ತೋರಿಸಿ AC ಸೇರಿಸಿ ಮತ್ತು $\angle A > \angle C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$, ಮುಂತಾದವು.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. $36^\circ, 60^\circ, 108^\circ$ ಮತ್ತು 156°
6. (i) Δ DAC ಮತ್ತು Δ BCA ದಿಂದ, $\angle DAC = \angle BCA$ ಮತ್ತು $\angle ACD = \angle CAB$ ಮುಂತಾದವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
    (ii) ಪ್ರಮೇಯ 7.4 ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\angle BAC = \angle BCA$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

2. PQRS ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. PQ||AC ಮತ್ತು PS||BD ಎಂದು ಸಹ ತೋರಿಸಿ. ಆದರಿಂದ $\angle P = 90^\circ$
5. AECF ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. ಅದರಿಂದ AF||CE ಮುಂತಾದವುಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ A 1.1

1. (i) ಮಿಥ್ಯ ಹೇಳಿಕೆ, ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 12 ತಿಂಗಳುಗಳಿವೆ.
   (ii) ಸಂಧಿಗ್ಧ ಹೇಳಿಕೆ (ಖಚಿತವಲ್ಲದ್ದು) ದತ್ತ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ದೀಪಾವಳಿಯು ಶುಕ್ರವಾರ ಬರಬಹುದು, ಬರದೇ ಇರಬಹುದು.
   (iii) ಸಂದಿಗ್ಧ ಹೇಳಿಕೆ, ವರ್ಷದ ಕೆಲವೊಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮಾಗಡಿಯಲ್ಲಿ ತಾಪಮಾನ 26°c ಇರಬಹುದು.
   (iv) ಸಾರ್ವಕಾಲಿಕ ಸತ್ಯ.
   (v) ಮಿಥ್ಯ ಹೇಳಿಕೆ, ನಾಯಿಗಳು ಹಾರುವುದಿಲ್ಲ.
   (vi) ಸಂದಿಗ್ಧ ಹೇಳಿಕೆ ಅಧಿಕವರ್ಷ ಫೆಬ್ರವರಿಯಲ್ಲಿ 29 ದಿನಗಳಿರುತ್ತವೆ.
2. (i) ಮಿಥ್ಯ ಹೇಳಿಕೆ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360.
   (ii) ಸತ್ಯ, (iii) ಸತ್ಯ (iv) ಸತ್ಯ
   (v) ಮಿಥ್ಯ, ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $7 + 5 = 12$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.
3. (i) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು
   (ii) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟು ಯಾವಾಗಲು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ
   (iii) ಯಾವುದೇ $x > 1$ ಇರುವ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ $3x + 1 > 4$
   (iv) ಯಾವುದೇ $x \geq 0$, $x^3 \geq 0$.
   (v) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ಕೋನಾರ್ಧಕರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ

ಅಭ್ಯಾಸ A 1.2

1. (i) ಮನುಷ್ಯರು ಕಶೇರುಕಗಳು.
   (ii) ಇಲ್ಲ. ದಿನೇಶನು ಬೇರೆ ಯಾರಿಂದಲಾದರೂ ಕ್ಷೌರ ಮಾಡಿಸಿರಬಹುದು.
   (iii) ಗುಲಾಗ್‌ನು ಕೆನ್ನಾಲಿಗೆ (ಕೆಂಪುನಾಲಿಗೆ) ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ.
   (iv) ಚರಂಡಿಗಳನ್ನು ನಾಳೆ ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸಬೇಕೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.
   (v) ಬಾಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರಾಣಿಗಳೆಲ್ಲವೂ ನಾಯಿಗಳಾಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎಮ್ಮೆ, ಕೋತಿ, ಬೆಕ್ಕು ಮುಂತಾದ ಪ್ರಾಣಿಗಳಿಗೆ ಬಾಲವಿದೆ, ಆದರೆ ಅವು ನಾಯಿಗಳಲ್ಲ.
2. ನೀವು B ಮತ್ತು 8 ನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿನೋಡಬೇಕು.
   'B' ಯ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ ಆಗ ನಿಯಮ ಮುರಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇರೀತಿ 8 ರ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರವಿದ್ದರೆ ನಿಯಮ ಮುರಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A 1.3

3. ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಮೂರು ಊಹಾನಿರ್ಣಯಗಳು ಎಂದರೆ;
   (i) ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   (ii) ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 4 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.
   (iii) ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 6 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ.
2. ಸಾಲು 4 : $1331 = 11^3$

ಸಾಲು 5 : 14 641 = 11^4

ಸಾಲು 4 ಕ್ಕೆ ಮತ್ತು 5 ಕ್ಕೆ ಆಧಾರಕಲ್ಪನೆಯು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಲು 6 = 15101051

ಆದರೆ $11^5 \neq 15101051$ ($11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 1500051$)

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$, $T_{n-1} + T_n = n^2$
4. $111111^2 = 12345654321$

   $1111111^2 = 1234567654321$.
5. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳದ್ದೇ ಸ್ವಂತ ಉತ್ತರ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ A 1.4

1. (i) ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ ಕೊನಗಳುಳ್ಳ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

   (ii) ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಅದು ವರ್ಗವಲ್ಲ.

   (iii) ಆಯತದ ಒಳಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಅದು ವರ್ಗವಲ್ಲ.

   (iv) $a = 3, b = 4$ ಆದಾಗ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸತ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

   (v) $n = 11$ ಆದಾಗ $2n^2 + 11 = 253$, ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ.

   (vi) $n = 41$ ಆದರೆ $n^2 - n + 41$ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.
2. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳದ್ದೇ ಸ್ವಂತ ಉತ್ತರಗಳು.
3. x ಮತ್ತು y ಗಳು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

   ಆಗ ಕೆಲವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m ಗೆ $x = 2m + 1$

   ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ y ಗೆ $y = 2n + 1$; $x + y = 2 (m + n + 1)$

   ಆದ್ದರಿಂದ $x + y$ ಯು ಎರಡರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.
4. ಪ್ರಶ್ನೆ 3. ನೋಡಿ $x = (2m + 1)$ $y = (2n + 1)$

   $xy = (2m + 1) (2n +1) = 2 (2mn + m + n) + 1$ ಯನ್ನು 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ xy ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.
5. ಮೂರು ಕ್ರಮಾಗತ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2n, 2n + 2$ ಮತ್ತು $2n + 4$ ಆಗಿರಲಿ.

   ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ $= 2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 6 (n + 1)$, ಇದು 6 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.
7. (i) ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ 'n' ಆಗಿರಲಿ ಆಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ನಡೆಸುತ್ತೇವೆ.

$$n \to 2n \to 2n+9 \to 2n+9+n = 3n+9$$

$$\to 3n+9 \to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to$$

$$\to n+3+4 = 7 \to n+7-n = 7$$

   (ii) ಗಮನಿಸಿ $7\times11\times13 = 1001$ ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $a.b.c$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $1001\times abc = abcabc$ ಆದ್ದರಿಂದ ಆರು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ $abcabc$ ಯು 7, 11, 13 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.