कर्नाटक सरकार

गणित

Mathematics

हिंदी माध्यम

(Revised)

8

आठवीं कक्षा

Eighth Standard

भाग - 2

Karnataka Textbook Society (R)
No. 4100 Feet Ring Road, Banashankari
3rd Stage, Bengaluru - 560 085

Part -II

घटक – 9
वाणिज्य गणित

इस घटक के अध्ययन के बाद आप से निम्न अपेक्षित हैं ।

- वाणिज्य गणित व्यवहारों में गणित के प्रक्रियाओं को पहचानना ।
- प्रतिशत की परिभाषा देना ।
- प्रतिशत पर आधारित गणित हल करना ।
- वाणिज्य व्यवहारों में लाभ और हानि पहचानना।
- लाभ, हानि, विक्रय मूल्य और अंकित मूल्य से जुड़े गणित करना ।
- छूट, छूट प्रतिशत, छूट दिये जाने पर विक्रय मूल्य परिकलन करना ।
- कमीशन और कमीशन प्रतिशत पर गणित हल करना ।
- सरल ब्याज और सरल ब्याज से जुड़े पदों की परिभाषा देना।
- सरल ब्याज, मूलधन, समय, ब्याज की दर और मिश्रधन ज्ञात करना।

प्रस्तावना

इस घटक में हम वाणिज्य गणित के अनेक रूप अध्ययन करेंगे जो हमारे दैनिक जीवन में उपयोगी है। आप बाजार जाते हैं और कुछ अवश्य वस्तु खरीदते है। आप उसे पैसा देते हैं। लेकिन इस व्यवहार के पीछे अंकगणित की अलग दुनिया विद्यमान है। एक बेचनेवाला कहीं से वस्तुओं को खरीदकर लाता है, बेचने के पूर्व उसे यह निर्धारित करना है कि उसपर लाभ कितना लेना है? बाजार की स्थिति देखकर उसे अपने विक्रय मूल्य निर्धारित करना होता है। कभी कभी जिस मूल्य पर वस्तुओं को प्राप्त किया है उससे भी कम मूल्य पर बेचना पड़ता है। कभी-कभी अधिक ग्राहक प्राप्त करने के लिए उसे आकर्षक प्रलोभन देना पड़ता है। उदाहरण जमीन जायदाद संबंधी व्यवहारों में एजेन्ट से प्राप्त सेवा के लिये उसे कुछ पैसा देना होगा। ये सारे व्यवहार पैसों सेहोते हैं। इसी कारण से मानव के जीवन में पैसा एक महत्वपूर्ण अंग बनता है। वाणिज्य गणित, दिन-नित्य व्यवहारों का परिज्ञान है।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

प्रतिशत (Percentage)

आप प्रतिशत के अर्थ से परिचित है। **प्रतिशत** का अर्थ है **प्रति सौ** के लिए। इस तरह 4 प्रतिशत (अथवा 4%) का अर्थ प्रति सौ के लिए 4 अथवा $\frac{4}{100}$ । प्रतिशत एक भिन्न है जिसके हर में 100 है । भिन्न के अंश को प्रतिशत की दर कहते है। इस तरह 12% अर्थ सौ में 12 अथवा $\frac{12}{100}$ प्रतिशत की परिकल्पना व्यापार के व्यवहारों में, ब्याज ज्ञात करने में, राशियों की तुलना में आदि उपयोग करते हैं । मान लीजिए एक टोकरी में 6 अनानास और 14 संतरे है। तो अनानास और संतरों की तुलना हम $\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$ भिन्न के उपयोग से कर सकते हैं। अनानास की संख्या, संतरों की तुलना में $\frac{3}{7}$ गुना है। इसी तरह, संतरों की संख्या, अनानास की संख्या $\frac{7}{3}$ गुना है। यही तुलना, प्रतिशत के उपयोग से भी कर सकते हैं।

20(6+14) फलों में से 6 अनानास है।	20 फलों में से अनानास 6 है। अतः 100 फलों में अनानास की संख्या
अतः अनानास की प्रतिशत	
$\frac{6}{20}=\frac{30}{100}=30$ %	$\frac{6}{20}\times 100 = 30\%$
(यहाँ हर 100 लिया है)	इसे इकाई विधान कहते हैं।

टोकरी में केवल अनानास और संतरे मात्र है।

अतः अनानास का प्रतिशत + संतरों का प्रतिशत = 100

अथवा 30% + % के संतरे = 100

अथवा संतरों का प्रतिशत = 100 - 30 = 70

इसलिए टोकरी में 30% अनानास और 70% संतरे हैं।

राशियों की तुलना के लिये प्रतिशत उपयुक्त विधान है।

उदाहरण 1 : एक व्यक्ति अपनी मासिक वेतन में से 78% खर्च करता है और ₹ 1,100 की बचत करता है। उसका मासिक वेतन क्या है?

हल : मान लीजिए उसका मासिक वेतन ₹ 100 है। तो उसका खर्चा ₹ 78 है। अतः उसकी बचत है। = ₹ (100 - 78) = ₹ 22

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

आईए उसे विपरीत रूप में लिखते हैं। यदि ₹ 22 की बचत है तो मासिक वेतन ₹ 100 है। तो यदि बचत ₹ 1 हो तो वेतन है ₹$\frac{100}{22}$।

यदि बचत ₹ 1,100 हो तो वेतन है ₹ $\frac{100}{22}\times 1100 = 5000$ अतः मासिक वेतन है ₹ 5000

पर्याय विधान : दत्त खर्चा है 78% अतः बचत है (100 - 78) = 22%

मान लीजिए व्यक्ति का मासिक वेतन ₹ 'x' है तो x का 22% = ₹ 1100

अर्थात् $$\frac{22}{100}\times x = 1100$$

'x' के लिए हल करने पर, $$x = 1100\times\frac{100}{22} = 5000$$

अतः उसका मासिक वेतन ₹ 5000 है।

सत्यापन : ₹ 5000 का 78% = $\frac{78}{100}\times 5000 = 3900$

अतः उसकी बचत है ₹ (5000 - 3900) = ₹ 1,100

उदाहरण 2 : एक खिलाडी अनेक खेलों में से 8 खेलों में जीत हासिल करता है। यदि विजय प्रतिशता 40 है तो कुल कितने खेल थे।

हल : हमें दिया गया है विजय की प्रतिशता 40 है।

तो 100 खेलों में से 40 खेलों में विजयी हुआ ।

तो 8 खेलों में उसने $\frac{100}{40}\times 8 = 20$ खेल

$\therefore$ अतः कुल 20 खेल थे।

अतः कुल 20 खेल थे।

इसे दूसरे विधान से प्रयत्न कीजिए।

उदाहरण 3 : रवि का आमदनी, रघु की आमदनी से 25% अधिक है। रघु की आमदनी रवि की आमदनी से कितनी कम है?

हल : मान लीजिए रघु की आमदनी ₹ 100 है। तो रवि का आमदनी ₹125 इसे विपरीत रूप लिखने से।

यदि रवि की आमदनी ₹ 125 हो तो राजू की आमदनी ₹ 100 है।

यदि रवि की आमदनी ₹ 1 हो तो रघु की आमदनी = ₹ $\frac{100}{125}$ पैमाना 100 को बढ़ाने पर, यदि रवि की आमदनी ₹ 100 हो तो रघु आमदनी ₹ $\frac{100}{125} \times 100$ = ₹ 80

$\therefore$ रघु की आमदनी 100 – 80 = 20% रवि की आमदनी से कम है।

उदाहरण 4 : एक सेवक की आमदनी 15% बढ़ाई गई है। यदि नई आमदनी ₹ 12,650 है तो बढ़ाने के पूर्व उसकी आमदनी कितनी थी?

हल : माना बढाने पूर्व आमदनी ₹100 है। क्योंकि बढ़ोत्तरी 15% है। बढ़ोत्तरी के बाद उसकी आमदनी ₹100 + ₹15 =₹115

यदि इस की विपरीत स्थिति देखिए। यदि नई आमदनी ₹ 15 है तो बढ़ोत्तरी पूर्व आमदनी ₹ 100

यदि नई आमदनी ₹ 12,650 हो बढ़ोत्तरी पूर्व $\frac{100}{115} \times 12650$ = ₹11,000

बढ़ोत्तरी के पूर्व उसकी आमदनी ₹ 11,000

अभ्यास 9.1

1. एक पाठशाला में 30% विद्यार्थी शतरंज खेलते हैं; 60% केरम खेलते हैं, बाकी विद्यार्थी अन्य खेल खेलते है। यदि कुल विद्यार्थी 900 हो तो प्रत्येक खेल में विद्यार्थियों की संख्या क्या है?
2. एक स्कूल के कार्यक्रम में 82% धन खर्च करने के बाद ₹ 360 बचते हैं। शुरूवात में कितना धन था? आपके उत्तर का सत्यापन कीजिए।
3. अक्षय की आमदनी, अजय की आमदनी से 20% कम है। अक्षय की आमदनी, अक्षय की आमदनी से कितनी अधिक है?
4. एक दैनिक वेतन प्राप्त करनेवाला सेवक, अपने सप्ताहिक आमदनी का 84% खर्च करता है। यदि ₹ 384 की बचत होती है तो उसकी सप्ताहिक आमदनी कितनी है?
5. एक कारखाने अपने कार्मिकों को 10% बोनस देने की घोषणा करता है। यदि एक कार्मिक ₹10,780 बोनस प्राप्त करता है तो उसका वास्तविक वेतन कितना है?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

लाभ और हानि (Profit and Loss)

हम दुकानों से वस्तुओं को खरीदते हैं। दुकानदार वस्तुओं को या तो उत्पादक से अथवा थोक व्यापारी से खरीदता है। वस्तुओं खरीदने लगा धन **क्रयमूल्य** (cost price) कहते हैं (संक्षिप्त में क्र.मू.) जिस मूल्य पर दूकानों में वस्तुओं को बेचा जाता उसे **विक्रय मूल्य** (selling price) कहते हैं। (संक्षिप्त में वि.मू), जब एक वस्तु खरीदते है, तो उस पर जहाज भाडा, मजदूरी, परिवहन, निर्वहन खर्च आदि बेचने के पहले जोड़ते हैं। इन खर्चों को अधिकतम खर्च कहते हैं। इन खर्चों को क्रयमूल्य को जोड़ते है। अतः आप निष्कर्ष ले सकते हैं।

वास्तविक क्रयमूल्य = कुल लगाया हुआ धन

= वस्तु का क्रयमूल्य + अधिकतम खर्च

यदि वि.मू. > क्र.मू तो लाभ होता है। यदि वि.मू. < क्र. मू तो हानि होती है।

अतः

लाभ = वि.मू – क्र. मू और **हानि = क्र. मू – वि.मू**

लाभ अथवा हानि यदि 100 पर मूल्यांकन करते हैं तो **प्रतिशत लाभ** अथवा **प्रतिशत हानि** कहते हैं।

सूचना : लाभ अथवा हानि को हमेशा क्रयमूल्य पर परिकलन किया जाता है।

निम्न सूत्र याद रखिए

1. लाभ की प्रतिशत $= \dfrac{\text{लाभ}}{\text{क्र. मू.}} \times 100$
2. हानि की प्रतिशत $= \dfrac{\text{हानि}}{\text{क्र. मू.}} \times 100$
3. विक्रय मूल्य $= \dfrac{100 + \text{लाभ}\%}{100} \times \text{क्र. मू.}$
4. विक्रय मूल्य $= \dfrac{100 - \text{हानि}\%}{100} \times \text{क्र. मू.}$
5. क्रय मूल्य $= \dfrac{100}{(100 + \text{लाभ}\%)} \times \text{वि.मू.}$
6. क्रय मूल्य $= \dfrac{100}{(100 - \text{हानि }\%)} \times \text{वि.मू.}$

उदाहरण 5 : एक कंप्यूटर का क्रयमूल्य ₹ 19,500 है सॉफ्टवेर जोड़ने ₹ 450 का अधिकतम मूल्य जोड़ते है। यदि 12% लाभ में बेचते हैं तो कंप्यूटर का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : कंप्यूटर का क्रयमूल्य है ₹ 19,500 + ₹ 450 (अधिकतम खर्च) = ₹ 19,950

कंप्यूटर 12% लाभ में बेचते हैं।

$$\therefore \text{ विक्रय मूल्य } = \frac{100 + \text{लाभ}\%}{100} \times \text{क्र. मू.}$$

$$= \frac{100 + 12}{100} \times 19,950$$

$$= \frac{112}{10} \times 1995$$

$$= 22,344$$

∴ विक्रय मूल्य = ₹ 22,344

पर्याय विधान

लाभ = 12% अतः विक्रय मूल्य है ₹ 100 + ₹ 12 = ₹ 112

यदि क्रयमूल्य ₹ 100 है तो विक्रय मूल्य ₹ 112 है।

यदि क्र.मूल्य ₹ 19, 950 है तो वि.मू. $= \frac{112}{100} \times 19950 = 22,344$

अतः कंप्यूटर का विक्रय मूल्य = ₹ 22,344

उदाहरण 6 : एक बाइसाइकिल को ₹ 4300 को बेचने से एक व्यापारी को 14% हानि होती है। उसे 14% लाभ प्राप्त करने कौन से मूल्य पर बेचना चाहिए।

हल : बाइसाइकिल का विक्रय मूल्य ₹ 4300 और हानि 14% है।

$$\text{अतः क्रय मूल्य} = \frac{100}{(100 - \text{हानि}\%)} \times \text{वि. मू.}$$

$$= \frac{100}{(100 - 14)} \times 4300.$$

$$= \frac{100}{86} X 4300$$

$$= 5000$$

∴ बाइसाइकिल का क्रय मूल्य ₹ 5000.

पर्याय विधान :

हम जानते हैं कि हानि 14%

अतः विक्रय मूल्य = ₹ 100 – ₹ 14 = ₹ 86

यदि विक्रय मूल्य ₹ 86 हो क्रय मूल्य ₹100

यदि विक्रय मूल्य ₹ 4300 हो तो

क्रय मूल्य = $\frac{100}{86} \times 4300 = 5000$ =5000

अब हम जानते हैं कि बाइसाइकिल का क्रयमूल्य ₹ 5000

आइए हम ज्ञात करें कि क नै से मूल्य पर बेचने पर हमें 14% लाभ प्राप्त हो।

अपेक्षित लाभ = 14%

अतः विक्रय मूल्य = $\frac{100 + \text{लाभ\%}}{100}$ × क्र. मू.

विक्रय मूल्य = $\frac{100 + 14}{100} \times 5000$

$= \frac{114}{100} \times 5000$

= 5700

पर्याय विधान

अपेक्षित लाभ = 14%

∴ विक्रय मूल्य = ₹ 100 + ₹ 14 = ₹ 114.

यदि क्र. मू ₹ 100, ₹ वि.मू. = ₹ 114.

∴ यदि क्र. मू ₹ 5000 .... तो

∴ विक्रय मूल्य $= \frac{114}{100} \times 5000$ = ₹ 5700

अतः बाइसाइकिल पर 14% लाभ प्राप्त करना हो तो विक्रय मूल्य ₹ 5700 होना चाहिए।

उदाहरण 7 : दो गायों को प्रत्येक ₹ 12000 पर बेचा गया, एक पर 20% लाभ हुआ और दूसरे पर 20% हानि हुई। संपूर्ण व्यवहार में लाभ अथवा हानि का परिकलन कीजिए।

हल : पहले हमें प्रत्येक गाय का क्रय मूल्य ज्ञात करना होगा और उन्हें जोड़कर कुल खर्चा ज्ञात करना होगा। हम कुल प्राप्त धन जानते है। तुलना करने पर हमें ज्ञात होता है कि लाभ हुआ अथवा हानि।

प्रथम गाय

विक्रय मूल्य : ₹ 12,000

लाभ = 20%

अतः

क्रय मूल्य = $\frac{100 +}{100 + \text{लाभ}\%} \times$ वि. मू.

$$= \frac{100}{100+20} \times 12000$$

$$= \frac{100}{100+20} \times 12000 = ₹\ 10000$$

दूसरी गाय : विक्रय मूल्य = ₹ 12,000

हानि = 20%

अतः क्रय मूल्य = $\frac{100}{(100 - \text{हानि}\%)} \times$ वि. मू.

$$= \frac{100}{(100-20)} \times 12000$$

$$= \frac{100}{80} \times 12000$$

= ₹ 15000

कार्यकलाप 2

इकाई विधान उपयोग कर दोनों गायों के क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

आईए हम संपूर्ण व्यवहार में क्रयमूल्य और विक्रय मूल्य ज्ञात कर लें

दोनों गायों का क्रयमूल्य = ₹ (10,000 + 15,000) = ₹ 25,000

$\therefore$ दोनों का विक्रय मूल्य = ₹12000 × 2 = ₹ 24,000

हम देखते है कि विक्रय मूल्य < क्रय मूल्य

$\therefore$ अतः नुकसान = ₹ (25,000 – 24,000) = ₹ 1,000

$\therefore$ हानि प्रतिशत = $\frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

$$= \frac{1000}{25,000} \times 100$$

$$= 4\%$$

संपूर्ण व्यवहार में 4% हानि हुई है।

उदाहरण 8 : यदि 21 सेल फोन का क्रय मूल्य ₹ 18 सेलफोन के विक्रय मूल्य के बराबर है। लाभ की प्रतिशतता ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए एक सेल फोन का क्रय मूल्य ₹ 1 है। तो 21 सेल फोन का क्रय मूल्य ₹ 21 है।

दत्तांश से, 18 सेल फोन का वि.मू = 21 सेल फोन का क्र. मू.

$\therefore$ 1 सेलफोन का विक्रय मूल्य = ₹ $\frac{21}{18}$

इससे लाभ = वि.मू – क्र.मू $= \frac{21}{18} - 1$

$$= \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

इस तरह प्रत्येक सेल फोन पर ₹ $\frac{1}{6}$ का लाभ होता है। अब लाभ प्रतिशता ज्ञात कर सकते हैं।

लाभ प्रतिशता = $\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

$$= \frac{1/6}{1} \times 100 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

अतः लाभ की प्रतिशता = $16\frac{2}{3}\%$

संपूर्ण लाभ अथवा हानि ज्ञात करने के लिए हमें एकत्रित क्रयमूल्य और एकत्रित विक्रय मूल्य ज्ञात कर लेना चाहिए।

उदाहरण 9 : एक व्यापारी एक रेडियो को 8% लाभ पर बेचता है। यदि वह उसे 85 कम लेकर बेचता उसे 2% हानि होती। रेडियो का क्रयमूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि रेड़ियो का क्रयमूल्य 'x' है।

आईए 8% लाभ और 2% हानि से विक्रयमूल्य ज्ञात करेंगे।

8% लाभ पर

हमें ज्ञात है कि

विक्रय मूल्य $= \frac{100 + \text{लाभ}\%}{100} \times$ क्र. मू.

$= \frac{100 + 8}{100} \times$ क्र. मू.

$= \frac{54}{50}x$

2% हानि पर

हमें ज्ञात होता है

विक्रय मूल्य $= \frac{100 - \text{हानि}\%}{100} \times$ क्र. मू.

$= \frac{(100-2)}{100} \times$ क्र. मू.

$= \frac{49}{50}x$

कार्यकलाप 3 :

इकाई विधान (unitary method) से दोनों संदर्भ में विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

8% लाभ और 2% हानि पर प्राप्त विक्रय मूल्य का अंतर है

$$\frac{54}{50}x - \frac{49}{50}x = \frac{5}{50}x = \frac{x}{10}$$

लेकिन यह अंतर ₹ 85 के समान है

ताकि $\frac{x}{10} = 85$

अर्थात् $x = 850$

अतः रेड़ियो का क्रयमूल्य ₹ 850 है ।

अभ्यास 9.2

1. सोनू ने एक बाइसाकिल ₹3750 पर खरीदा और उसके मरम्मत पर ₹250 खर्च किया। उसने उसे ₹4,400 पर बेचा। लाभ या हानि की प्रतिशता ज्ञात कीजिए।
2. एक दूकानदार एक वस्तु को ₹3,500 पर खरीदता है और ₹100 उसके परिवहन पर खर्च करता है। उसे बेचने पर 12% की हानि हुई। तो उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
3. एक घडी को ₹ 720 रवि को 10% की हानि होती है। कौन से मूल्य पर बेचने से उसे 15% का लाभ होता है।
4. हरि दो पंखे प्रत्येक को ₹ 2400 देकर खरीदता है। वह एक पंखे को 10% हानि पर और दूसरे को 15% लाभ पर बेचता है।

   प्रत्येक पंखे का विक्रय मूल्य और कुल लाभ अथवा हानि ज्ञात कीजिए।
5. एक भंडारी एक पुस्तक को 15% लाभ पर बेचता है। यदि वह उसे ₹ 18 अधिक लेकर बेचता तो उसे 18% लाभ होता है। पुस्तक का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
6. 12 पेन का क्रय मूल्य 10 पेन के विक्रय मूल्य के समान है। लाभ की प्रतिशता ज्ञात कीजिए।

छूट (Discount)

वस्तुओं के अंकित मूल्य में जो कमी की जाती है उसे **छूट** कहते हैं। सामान्यतः वस्तुऐं खरीदने ग्राहकों को आकर्षित करने के लिए **छूट** दी जाती है। निम्न बातों से आपको छूट के बारे में जानकारी मिलेगी।

- ▲ हमेशा वस्तु के अंकित मूल्य पर छूट देते हैं।
- ▲ छूट = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य
- ▲ अंकित मूल्य को कभी-कभी सूचित मूल्य कहते है।
- ▲ छूट = छूट की दर गुणा अंकित मूल्य
- ▲ अखण्ड (net) मूल्य = अंकित मूल्य – छूट

उदाहरण 10. एक कंप्यूटर का अंकित मूल्य ₹ 18,000 है और ₹ 15, 840 बेचते है। छूट

की दर ज्ञात कीजिए।

हल : अंकित मूल्य ₹ 18,000 और विक्रय मूल्य है ₹ 15,840. अतः छूट = ₹ 18000 – ₹ 15840 = ₹ 2160

₹ 18,000 के लिए ₹ 2,160 की छूट

$\therefore$ ₹ 100 के अंकित मूल्य, छूट = $\frac{2160}{18,000} \times 100$ = 12%

$\therefore$ छूट की प्रतिशता 12% है।

उदाहरण 11 : एक टेप रिकॉर्डर पर 5% छूट देकर ₹ 5,225 पर बेचा गया। उसका अंकित मूल्य क्या है?

हल : छूट 5% है। अर्थात् ₹ 100 पर छूट 5 है।

$\therefore$ विक्रय मूल्य = ₹ 100 – ₹ 5 = ₹ 95

अतः विक्रय मूल्य ₹ 95 रहे तो अंकित मूल्य ₹ 100.

₹ 5,225 के विक्रय मूल्य पर अंकित मूल्य $\frac{100}{95} \times 5225$ = ₹ 5,500

उदाहरण 12 : एक दूकानदार एक वस्तु को ₹ 500 पर खरीदता है। उसपर 20% अधिक अंकित अधिक करता है। यदि वह उसे 12% छूट पर बेचे तो विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : क्रयमूल्य = ₹ 500

लाभ = ₹ 500 का 20%

$\frac{100}{95} \times 5225$ = ₹ 100

अंकित मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ = ₹ 500 + ₹ 100 = ₹ 600

अब दिया है कि छूट 12% है ।

$\therefore$ ₹ 600 पर छूट = $\frac{12}{100} \times 600$ = 72 रुपये

$\therefore$ विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – छूट = ₹ 600 – ₹ 72 = ₹ 528

$\therefore$ उस वस्तु का क्रयमूल्य = ₹ 528

उदाहरण 13 : एक कपड़े के विक्रेता किसी वस्त्र पर क्रयमूल्य 45% अधिक अंकित करता है और 20% की छूट देता है। बताइए वह उस वस्त्र बेचकर कितना लाभ कमाता है?

हल : मान लीजिए उस वस्त्र का क्रयमूल्य ₹ 100 है। क्योंकि विक्रेता उस पर क्रय मूल्य से 45% अधिक अंकित करता है तो अंकित मूल्य = ₹ 100 + ₹ 45 = ₹ 145

अंकित मूल्य पर 20% छूट है = ₹145 का 20% $= \frac{20}{100} \times 145$ = ₹ 29

∴ विक्रय मूल्य = ₹ 145 - ₹ 29 = ₹ 116

लाभ = वि. मूल्य - क्रय मूल्य = ₹ 116 - ₹ 100 = ₹ 16

∴ लाभ की प्रतिशत = $\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

$$= \frac{16}{100} \times 100 = 16$$

इस तरह व्यापारी 16% लाभ कमाता है। (ध्यान दीजिए कि वह $45\% - 20\% = 25\%$ प्रतिशत नहीं है)

अभ्यास 9.3

1. ₹ 800 पर अंकित एक वस्तु को ₹ 704 पर बेचा गया। छूट और छूट प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
2. 12% की छूट देने के बाद एक वस्त्र को ₹ 550 बेचते हैं। अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।
3. एक दूकानदार एक सूट-वस्त्र ₹ 1,400 पर खरीदता है और उसके क्रय मूल्य से 60% अधिक पर अंकित करता है। वह उसपर 15% की छूट देता है। सूट-वस्त्र का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए और दियी गयी छूट भी पता लगाइए।
4. एक व्यापारी अपने वस्तुओं को क्रयमूल्य से 40% अधिक अंकित करता है। और 10% की छूट देता है। लाभ की प्रतिशता ज्ञात कीजिए।
5. एक व्यापारी एक वस्तु को 15% छूट पर बेचता है। तो ज्ञात कीजिए
   (a) यदि अंकित मूल्य 500 हो तो विक्रय मूल्य
   (b) क्रयमूल्य जब वह 25% लाभ प्राप्त करता है।

कमीशन (Commission)

आपने समाचार पत्रों में, घर, जमीन, वाहनों की लभ्यता और उनके बिक्री के विज्ञापन पढा होगा। कई बार, व्यवहार मालिक और खरीददार के अलावा तीसरे व्यक्ति द्वारा होते हैं। एक मध्यस्थ व्यक्ति जो कुछ खरीदने और बेचने में सहायता करता है उसे **कमीशन-एजेन्ट** अथवा **ब्रोकर** कहते हैं।

इस व्यवहार में, एजेन्ट जो धन प्राप्त करता है उसे **ब्रोकरेज** अथवा **कमीशन** कहते हैं। व्यवहार पर प्राप्त कमीशन प्रतिशत में गणना करते हैं। प्रति सौ पर के कमीशन को **कमीशन की दर** कहते हैं।

उदाहरण 14 : एक संपत्ति ऐजेन्ट एक जमीन ₹1,60,000 पर बिक्री कराने 1.5% का कमीशन प्राप्त करता है। कमीशन की धनराशि कितनी ज्ञात कीजिए।

हल : ज़मीन की बिक्री ₹ 1,60,000 पर हुई। और कमीशन दर 1.5% है।

यदि विक्रय मूल्य ₹ 100 हो तो कमीशन = 1.5

यदि कमिशन ₹ 1,60,000, कमीशन $= \frac{1.5}{100} \times 1600000$ = ₹ 2400

∴ कमीशन की धनराशि ₹ 2400

कमीशन की धनराशि सोधे ज्ञात कर सकते है।

कमीशन = कमीशन की दर × विक्रमूल्य

उपरोक्त उदाहरण में

कमीशन = 1.5% × ₹ 1,60,000 $= \frac{1.5}{100} \times 1,60,000 =$ ₹ 2400

उदाहरण 15 : एक लंबे नोट बुक का दाम ₹ 18 है। एक दूकानदार एक महीने में 410 नोट बुक बेचता है और ₹1,033.20 का कमीशन प्राप्त करता है। कमीशन की दर ज्ञात कीजिए।

हल : एक नोटबुक का दाम = ₹18

∴ 410 नोटबुक का दाम = 410 × 18 = ₹ 7,380

इस मूल्य पर उसे ₹ 1,033.20 का कमीशन मिलता है।

अतः ₹ 100 के कमीशन होगा $= \frac{1033.20}{7380} \times 100 = 14\%$

अतः कमीशन की दर 14% है।

उदाहरण 16 : अब्दुल एक ऐजन्ट को ₹ 6,125 ब्रोकरेज देकर अपने घर की बिक्री करवाता है। यदि ब्रोकरेज की प्रतिशत 2.5% हो तो घर का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : ब्रोकरेज ₹ 6,125 है। ब्रोकरेज की दर 2.5% है।

यदि ब्रोकरेज ₹ 2.5 है तो विक्रयमूल्य ₹ 100 होगा

यदि कमीशन ₹ 6125 है विक्रय मूल्य $= \frac{100}{2.5} \times 6125 = 245000$

∴ घर का विक्रय मूल्य ₹ 2,45,000

विक्रय मूल्य सीधे सीधे ज्ञात कर सकते

विकय मूल्य $= \dfrac{100}{\text{कमीशन दर}} \times$ कमीशन

$= \dfrac{100}{2.5} \times 6125$

$=$ ₹ 2,45,000

अभ्यास 9.4

1. सिंधु अपनी स्कूटी ₹ 28,000 को एक ब्रोकर द्वारा बिक्री करवाती है। ब्रोकरेज की दर 2½% है। एजेन्ट को मिला कमीशन और सिंधु से प्राप्त कुल धन ज्ञात कीजिए।
2. एक शेयर एजेन्ट 2000 शेयर प्रत्येक ₹ 45 पर बेचता है और 1.5% की दर पर कमीशन प्राप्त करता है। ऐजेन्ट को प्राप्त धन मालूम कीजिए।
3. एक व्यक्ति बिमा ऐजेन्ट द्वारा ₹ 26000 का बिमा बनवाता है। यदि ऐजन्ट को ₹ 650 का कमीशन प्राप्त है तो कमीशन की दर क्या है?
4. विभिन्न वस्तुओं को बेचनेवाला ऐजन्ट महीने में ₹ 10,200 प्राप्त करता है। इसमें ₹ 6000 वेतन और 6% कमीशन शामिल है।

   पता लगाईए कितने मूल्य की वस्तुएँ उसने बेची?

सरल ब्याज

लोग अपने विभिन्न उद्देश्यों के लिए बैंक, वित्तीय संस्थाओं से अथवा महाजन द्वारा धन उधार लेते हैं। एक समय के अवधि के बाद उनको कुछ अधिक धन लौटाना पडता है। यह अधिक धन जो अवधि के पश्चात उधार लिये धन पर दिया जाता है उसे ब्याज कहते हैं। इस संदर्भ में हम निम्नों परिभाषा जान लेते हैं।

1. मूलधन : उधार लिये हुए धन को मूलधन कहते हैं।
2. ब्याज : मूलधन पर जो अधिक धन अवधि के पश्चात दिया जाता उसे ब्याज कहते हैं।
3. मिश्रधन : कुल दिया हुआ धन । **अर्थात् मिश्रधन = मूलधन + ब्याज**
4. ब्याज की दर : एक वर्ष में ₹100 पर जो ब्याज दिया जाता उसे वार्षिक ब्याज की दर कहते हैं।

5. अवधि : जिस समय तक धन उधार लिया जाता हैं। अवधि को वर्षों में या महीनों में अथवा दिनों में व्यक्त करते हैं।

6. सरल ब्याज : संपूर्ण कर्ज की अवधि तक मूलधन पर जो ब्याज की गणना करते हैं उसे सरल ब्याज कहते हैं।

अन्य शब्दों में, ब्याज को मूलधन मात्र पर दिया जाता है।

वित्तीय दुनिया में (बैंकर्स नियम) अवधि बहुधा दिनों में भी व्यक्त करते हैं।

सरल ब्याज ज्ञात करने का सूत्र

मान लीजिए P = मूलधन, R= वार्षिक ब्याज की दर

T= समय वर्षों, I= सरल ब्याज

इनको सूत्र द्वारा से जोड़ देते हैं

$$I = \frac{P \times T \times R}{100}$$

उपरोक्त सूत्र से निम्न अन्य सूत्रों को प्राप्त कर सकते हैं।

$$P = \frac{100 \times I}{T \times R} \quad T = \frac{100 \times I}{P \times R} \quad R = \frac{100 \times I}{P \times T}$$

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

उदाहरण 17 : ₹ 800 पर 6½% वार्षिक दर से 3½ वर्षों ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $P =$ ₹ 800, $T =$ = 3½ वर्ष = $\frac{7}{2}$ वर्ष

$R = 6½ \% = \frac{13}{2} \%$

हम 'I' का सूत्र उपयोग करते है

$$I = \frac{PTR}{100} = \frac{800 \times \frac{7}{2} \times \frac{13}{2}}{100} = 2 \times 7 \times 13 = ₹\ 182$$

उदाहरण 18 : 4 फरवरी 2010 से 16 जून 2010 अवधि के लिए 3000 पर 16% दर से सरल ब्याज की गणना कीजिए।

हल : यहाँ $P = ₹\ 3000$ और ब्याज की दर $R = 16\%$ प्रति वर्ष। तो भी, समय वर्षों में नही दिया है, अवधि है 4 फरवरी 2010 से 16 जून 2010 हमें इसे वर्षों में बदलना होगा।

फरवरी 5 से 28 तक = 24 दिन (2010 के फरवरी महीने में 29 दिन नहीं है)

मार्च = 31 दिन

अप्रैल = 30 दिन

मई = 31 दिन

जून = 16 दिन

जोड़ने पर कुल समय 132 दिन होते हैं। इसे वर्षों में परिवर्तन करने पर $T = \frac{132}{365}$ वर्ष.

अब हमें सूत्र में आवश्यक सभी दत्तांश प्राप्त है।

$$I = \frac{PTR}{100} = \frac{3000 \times 132 \times 16}{365 \times 100} = 173.58$$

अतः ब्याज करीबन ₹ 174 है।

सूचना

1. ब्याज ज्ञात करते समय, जिस दिन पैसा जमा किया जाता उसे गिना नहीं जाता, जब कि जिस दिन धन निकाला जाता उसे गिना जाता है।
2. जब समय दिनों में अथवा महीनों में देते है उसे वर्षों में परिवर्तन करते हैं।

उदाहरण 19 : कुछ धन 12½% सरल ब्याज 3 वर्षों में ₹ 2502.50 बन जाता है। मिश्रधन और सरल ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : दत्त मिश्रधन = ₹ 2502.50 $R = 12\frac{1}{2}\%, = \frac{25}{2}\%,$

मान लीजिए मिश्रधन 'x' है। सूत्र उपयोग करने पर

$$I = \frac{PTR}{100} = \frac{x \times 3 \times 25}{2 \times 100} = \frac{75x}{200} = \frac{3x}{8}$$

लेकिन हम जानते हैं कि

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{सरल धन} = x + \frac{3x}{8} = \frac{8x + 3x}{8} = \frac{11x}{8}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

यहाँ दिया हुआ मिश्रधन ₹ 2502.50 है।

$$\therefore\ 2502.50 = \frac{11x}{8}$$

$$\therefore\ x = \frac{2502.5 \times 8}{11} = 1820$$ । तो मूलधन ₹ 1,820 है

ब्याज = ₹2502.50 - ₹1820 = ₹ 682.50

उदाहरण 20 : एक निश्चित सरल ब्याज की दर पर ₹800 3 वर्षों में ₹920 बनते है। यदि ब्याज की दर 3% बढाया जाता है, तो मिश्रधन कितना होगा?

हल : स्मरण कीजिए

ब्याज I = मिश्रधन (A) - मूलधन (P)

अतः I = ₹ 920 - ₹ 800 = ₹120

₹ 800 पर यह ब्याज 3 वर्षों में ₹ 920 बनते है। यदि ब्याज की दर 3% बढाया जाता है, तो मिश्रधन कितना होगा?

सूत्र $I = \frac{PRT}{100}$ उपयोग करने पर

$$R = \frac{100 \times I}{P \times T} = \frac{100 \times 120}{800 \times 3} = 5$$

अर्थात् मूलतः ब्याज की दर 5% है।

यदि ब्याज की दर 3% बढ़ाये अर्थात्

नये ब्याज की 5 + 3 = 8%

मूलधन P = ₹ 800, T = 3 वर्ष

$$\therefore I = \frac{PTR}{100} = \frac{800 \times 3 \times 8}{100} = 192$$

अतः नया मिश्रधन = ₹ 800 + ₹ 192 = ₹ 992

अभ्यास 9.5

1. ₹ 2,500 पर 6¼% वार्षिक दर से 4 वर्षों का ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. ₹ 3,500 पर 2½% प्रति वर्ष से 165 दिनों का सरल ब्याज ।
3. कितने वर्षों में ₹ 5200 से ₹ 7384 बन जाता है। जब ब्याज की दर 12% है।

4. रम्यया कंप्यूटर खरीदने एक बैंक से ऋण लेती है। 4 वर्ष के बाद यह धन ₹ 26, 640 बनता है। यदि ब्याज की दर 12% प्रति वर्ष हो तो उसने कितना धन उधार लिया है।

5. कुछ धन 8 वर्षों में तीन गुणा हो जाता है। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

कर (Tax)

कार्य करने सरकार को धन की आवश्यकता होती है। सरकार यह धन आम जनता से कर के रूप में लेती है। एक ऐसा ही विधान है वह बिक्री कर संग्रहित करना।

एक दुकान से वस्तुओं को या अन्य सामान खरीदने पर कर देते हैं वह **बिक्री कर** (sales tax) कहलाता हैं। सरकार प्रत्येक वस्तु के खरीदी पर बिक्री कर लगाती है।

बिक्री कर को परोक्ष कर (indirect tax)

इसे उत्पादक, ठोक व्यापारी और सामान्य व्यापरी जो आगे अपने ग्राहकों से संग्रहीत करते हैं।

कर से जुड़ा मूल्य (Value Added Tax – VAT)

(VAT) बिक्री कर संशोधित रूप है। सामान्यतः एक वस्तु ग्राहक के हाथों पहुँचने तक अनेक चरणों को पारित करती है।

उत्पादक → ठोक व्यापारी → सामान्य दूकानदार → ग्राहक

उत्पादक – एक व्यक्ति / कंपनी / जो / एक वस्तु को उत्पादन करता है **उत्पादक** कहलाता है। एक वस्तु उत्पादन करने लगे खर्च के आधार पर उत्पादक क्रयमूल्य से अधिक मूल्य अंकित करता है। उत्पादक को इस अंकित मूल्य पर कर लगाता है जिसे वह सरकार को देता है।

एक व्यक्ति जो बड़ी मात्रा में वस्तुओं को उत्पादक से खरीदता है वह **ठोक व्यापारी** (wholesaler) कहलाता है। वह उत्पादक से खरीदे मूल्य से अधिक वस्तु पर अंकित करता है (क्योंकि उसे लाभ कमाना है)। उस अंकित मूल्य पर वह कर लगाता है।

जो व्यक्ति ठोक व्यापरी से अल्प मात्रा में खरीदता है वह **अल्प विक्रेता** (retailer) होता है। वह उसके क्रयमूल्य से अधिक मुल्य वस्तु पर अंकित करता है। (पुनः उसे भी लाभ कमाना है) इस अंकित मूल्य पर वह बिक्री कर लगाता है।

सामान्य लोग जो दुकान से वस्तुओं को खरीदते है **ग्राहक** (consumers) कहलाते हैं। अल्प विक्रेता जो अंकित मूल्य पर कर लगाके जो मूल्य अंकित करता वह अब ग्राहक का क्रयमूल्य कहलाता है, इस तरह वितरण होने पूर्व एक वस्तु पर विभिन्न चरणों पर लगाये मूल्य को **व्हाट** (VAT) कर कहते हैं।

याद रखिए

कोई भी दूकानदार वस्तु को हानि पर बेचता नहीं। जितना भी वह छूट दे दें फिर भी वह लाभ कमाता है। यह छूट केवल ग्राहकों को आकर्षित करने होता है और बिक्री बढ़ाने देता है ताकि अपना मूलधन बढा सके।

उदाहरण 21 - अब्दुल ₹ 1, 350 पर अंकित एक जोड़ी वस्त्र खरीदता है। यदि 4% बिक्री कर लगाते हैं तो कपड़ों पर कितना खर्च करता है।

हल : अंकित मूल्य ₹ 1350 है और बिक्री कर 4 % है।

$\therefore$ वस्त्र पर लगा कर = $\frac{4}{100}\times 1350$ = ₹ 54

वस्त्रों का मूल्य = अंकित मूल्य + कर = ₹1350 + ₹54 = ₹1404

अतः वह कपड़ों पर ₹1404 खर्च करता है।

उदाहरण 22 : एक ब्लेझर का दाम ₹ 1600 है और उसकी रसीद ₹1696 बनाई गई है। बिक्री कर ज्ञात कीजिए ।

हल : विक्रय मूल्य ₹ 1696 और अंकित मूल्य = ₹1600

$\therefore$ बिक्री कर है ₹ 96

₹ 1600 पर बिक्री ₹ 96 है।

$\therefore$ बिक्री की प्रतिशता = $\frac{96}{1600}\times 100 = 6$

$\therefore$ बिक्री कर की दर = 6%

अभ्यास 9.6

1. एक व्यक्ति निम्नों को एक मॉल (mall) से खरीदता है जिन पर लगाये गये बिक्री दर दिये।

प्रत्येक वस्तु के रसीद की धनराशि ज्ञात कीजिए।

(a) ₹ 250 की लिखने की सामग्री; इस पर 4% बिक्री है।

(b) इलेक्ट्रोनिक सामग्री ₹ 2,580 की और बिक्री कर 10% की है।

(c) ₹ 1,200 का किराणा जिस पर 3% बिक्री कर लगाया है।

(d) दवाई ₹ 200 की जिस पर 6% बिक्री कर

2. एक व्यक्ति इलेक्ट्रॉनिक ₹ 10,000 सामग्री जिसपर वह 4% विक्रय कर है और अन्य सामग्री जिसका मूल्य ₹ 15,000 जिसपर विक्रय कर 6% है, खरीदता है। वह इनके उपयोग से एक उपकरण तैयार करता है जिसे वह 15% लाभ पर बेचता है। उसका विक्रय मूल्य क्या है?
3. एक व्यापारी 70 कि. ग्रां. की चाय ₹ 200 प्रति कि. ग्रां की दर और 30 कि.ग्रां ₹250 प्रति कि.ग्रां की दर से खरीदता है। इस व्यापार में 4% बिक्री कर देता है। वह दोनों को मिलाकर मिश्रण को ₹ 240 प्रति कि.ग्रां की दर से बेचता है तथा उसपर 4% बिक्री कर लगाता है। उससे प्राप्त लाभ अथवा हानि की प्रतिशता ज्ञात कीजिए।

शब्दावली

प्रतिशत : प्रति सौ के लिए, इस तरह 6% का अर्थ है सौ के लिए 6.

प्रतिशत दर : जब प्रतिशत भिन्न के रूप में व्यक्त करते हैं, जिसमें हर 100 हो तो उसे प्रतिशत दर कहते हैं ।

क्रय मूल्य : वस्तु के खरीदने का मूल्य उसे क्र.मू. से सूचित करते हैं।

अन्य खर्च : यह एक वस्तु पर लगा अधिक धन, जो उसके बेचने के पूर्व लगता जैसे श्रम, परिवहन आदि।

विक्रय मूल्य : जिस मूल्य पर वस्तु बेची जाती है, उसे संक्षेप वि.मू. से सूचित करते हैं।

लाभ : यह व्यापार में हुआ फायदा है। वह वि.मू – क्र.मू से समान है। जब वि.मू > क्र. मू.

हानि : जब क्रममूल्य, विक्रय मूल्य से अधिक हो, वि.मू – क्र.मू हानि है।

छूट : अंकित मूल्य से कम लिया धन है, जो ग्राहकों को आकर्षित करने दिया जाता है।

कमीशन : मध्यस्थ व्यक्ति से लिया हुआ धन जो दो व्यक्तियों को वस्तु बेचने अथवा खरीदने में मदद करता है।

विक्रय क्रय : वस्तुओं के सभी विक्रय पर सरकार से लिया धन है, यह वस्तु के अंकित मूल्य का कुछ प्रतिशत होता है।

कर से जुड़ा मूल्य (VAT) : वस्तु पर अनेक चरणों में लगाया गया विक्रय कर ।

उत्पादक : कंपनी अथवा फैक्टरी जहाँ वस्तु उत्पादन होकर बिक्री प्रारंभ होती है।

ठोक व्यापारी : खरीददार जो वस्तुओं को बड़ी मात्रा में खरीदकर छोटे व्यापारियों के लिए बेचता है ।

सामान्य व्यापारी : दूकानदार जो अल्पमात्रा में खरीदता अथवा बेचता है।

ग्राहक : वस्तुओं को अन्ततः उपयोग करनेवाला

याद रखिए

- एक ही प्रकार की वस्तुओं को तुलना करने का विधान प्रतिशत ।
- यदि वि.मू > क्र. मू तब वि.मू – क्र.मू लाभ होता है ।
  यदि वि.मू < क्र.मू तो क्र.मू – वि.मू हानि होती है।
- लाभ अथवा हानि क्रयमूल्य पर निर्धारित करते हैं।
- छूट : अंकित मूल्य में कम की गई धनराशि है।
- कमीशन : धन जो एजेन्ट (अथवा ब्रोकर) एक व्यवहार पूर्ण कराने में प्राप्त करता है।
- सरल ब्याज तय करते समय, जमा की हुई दिनांक नहीं गिनते है, परन्तु वापसी का दिनांक अवश्य गिना जाता है।
- व्हाट का अर्थ कर से जुड़ा मूल्य

उत्तर

अभ्यास 9.1

1. शतरंज 270, केरम 540, अन्य खेल 90

2. ₹ 2000 3. 25% 4. ₹ 2400 5. ₹ 9800

अभ्यास 9.2

1. 10% लाभ 2. ₹ 3168 3. ₹ 920

4. लाभ ₹ 120 5. ₹ 600 6. 20%

अभ्यास 9.3

1. 12% 2. ₹ 625 3. ₹ 1904 (अंकित मूल्य) और ₹ 336 (छूट)

4. 26% 5. (i) ₹ 425 (ii) ₹ 340

अभ्यास 9.4

1. ₹ 700 (कमीशन) सिंधु ₹ 27, 3000

2. ₹ 1,350   3. 2.5%   4. ₹ 70,000

अभ्यास 9.5

1. ₹ 625   2. ₹ 39.55   3. 3½ वर्ष

4. ₹ 18,000   5. 12.5%

अभ्यास 9.6

1. (i) ₹ 260 (ii) ₹ 2,838 (iii) ₹ 1,236 (iv) ₹ 212

2. ₹ 30,245   3. 7.33% लाभ

घटक – 10
घातांक

इस घटक के अध्ययन करने के बाद, आप सीखेंगें :

- शून्य रहित आधार संख्या के घातांक की परिकल्पना।
- कोई बडी संख्या को घातांक रुप में कैसे लिखना।
- घातांक के विभिन्न नियम तथा जटिल व्यंजकों को उनके उपयोग से सरल करना
- बीजीय चरांक के लिए की घातांक नियम कैसे उपयोगी है।

प्रस्तावना :

मान लीजिए किसी ने आपको पूछा : पृथ्वी से सूर्य कितनी दूरी पर है? आपका उत्तर क्या है? शायद, पुस्तकों में ढूँढने पर आपने पर आपको कुछ कल्पना आयेगी कि सूर्य हम से कितनी दूरी पर है? एक प्रकाश की किरण करीबन 2,99,792 कि.मी प्रति सेकेंड के वेग से गतिशील होती है। सूर्य से निकलकर पृथ्वी तक पहुँचने एक प्रकाश की किरण को करीबन साढे आठ मिनिट लगते है। अतः पृथ्वी से सूर्य तक की दूरी 14,90,00,000 कि.मी. है। इसके अलावा क्या आप जानते हो हमारे लिए सब से नजदीक रहनेवाला नक्षत्र कौनसा है। प्रोकशीमा सेण्टावरी हम से अत्यन्त पास रहनेवाला नक्षत्र है और वह हम से 4.3 **प्रकाश वर्ष** के दूरी पर है, अर्थात 2,99,792 कि.मी प्रति सेकेंड के वेग से चलकर एक प्रकाश किरण इतनी दूरी तय करता है।

यह $4.3 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 299,792$ कि .मी. के बराबर है, जो कि एक बृहत्त संख्या है।

परमाणु का गात्र (size) क्या हो सकता है? आप के अनुमान के अनुसार वह अत्यन्त छोटा होगा?

परमाणु का व्यास लगभग $\frac{1}{100000000000}$ मीटर है। सहपरमाणु (Subatomic) कण इस से छोटे आकार (गात्र) के होते है। अतः अत्यन्त छोटे अथवा अन्यन्त बडी संख्याओं को कनिष्ठ रूप में व्यक्त करना आवशयक है। इस कार्य के लिए **घातांक रूप** बहुत उपयोगी और सरल है। हम देखते हैं कि घातांक के रूप में व्यक्त करने विशिष्ट विधान है। 128 पर विचार कीजिए : इसे $128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ गुणनखण्डों में लिख सकते हैं। इसतरह

2 को स्वयं से 7 बार गुणा करने पर 128 प्राप्त करते हैं। इसे हम 2^7 रूप में लिखते हैं। यहाँ 2 का **आधार** (base) और 7 को **घातांक** (exponent) कहते हैं। हम, इसे 2 घात 7 पढते हैं। 2^7 यह 128 का घातांक रूप है।

इसीतरह : $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$ यहाँ 3 आधार है और 5 घातांक है। हम इसे 3 घात 5 पढते हैं।

इसके विपरीत $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ पर विचार कीजिए । 128 के संदर्भ में, एक ही अभाज्य संख्या थी और हम $128 = 2^7$ लिख सकें। इसीतरह, $343 = 3^5$ क्योंकि 243 की 3 एक ही अभाज्य संख्या 3 है। तो भी 72 के दो अभाज्य संख्याऐं 2 और 3 हैं। हम देखते हैं कि 2 यह 3 बार दोहराता है और 3 यह दो बार। हम $72 = 2^3.3^2$ रूप में लिखते हैं। इसे हम 2 घात 3 गुणा 3 घात 2 पढते हैं।

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ पर विचार कीजिए। हम यह देखते है कि $81 = 9 \times 9 = 9^2$ इसतरह 81 दो तरह से व्यक्त कर सकते हैं $81 = 3^4 = 9^2$ पहले संदर्भ 3 आधार है और 4 घात है। दूसरे निरूपण में 9 आधार है और 2 घात है। इसतरह एक ही संख्या को भिन्न आधार और भिन्न घात में लिख सकते हैं।

ध्यान दीजिए :

$9 = 3 \times 3 = 3^2$ इस तरह $9^2 = (3^2)^2$ इसतरह आप $(3^2)^2 = 9^2 = 81 = 3^4$ प्राप्त करते हैं। क्या आप कुछ पहचान करते हैं?

यह आवश्यक नहीं हैं कि हम केवल संख्याओं का उपयोग करें। उदारहण के लिए, एक चरांक *'a'* है, हम $a \times a \times a \times a = a^4$ लिखते हैं और उसे ***a* घात चार पढते** है।

ab^4 व्यंजक को ***a* गुणा *b* घात चार** पढते हैं।

ध्यान दीजिए –

$ab^4 = a \times b \times b \times b \times b = a(b^4)$ किन्तु $ab \times ab \times ab \times ab$ नहीं। जो वास्तव में a^4b^4 हैं।

एसे उलझनों से दूर रहने के लिए, कोष्ठक उपयोग करना बेहत्तर है।

ab^4 के स्थान पर हम इसे $a.(b^4)$ लिखते हैं। यदि हम $529 = 23 \times 23$ व्यक्त करना चाहें तो उसे $(23)^2$ लिखते हैं। 23^2 कभी कभी मन में उलझन उत्पन्न सकता है कि वह 2×3^2 है जो 18 है। इसलिए योग्य कोष्ठक उपयोग कर 18 को $2(3^2)$ और 529 को $(23)^2$ रूप में व्यक्त कर सकते हैं। आप ध्यान देंगें कि आधार कें कोई भी पूर्णांक आवश्यक नहीं है। वास्तव में आधार कें कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।

$$(0.1)^5 = 0.1 \times 0.1 \times 0.1 \times 0.1 \times 0.1 = 0.00001$$

$$(-1.2)^3 = (-1.2) \times (-1.2) \times (-1.2) = -1.728$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

सोचिए :

क्या घातांक में कोई वास्ताविक संख्या हो सकती है जो पूर्णांक नहीं है?

सामान्य रूप में, एक संख्या a अथवा एक चरांक जिसे हम a द्वारा व्यक्त कर सकते है और एक स्वाभाविक संख्या n देने पर ....

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ....\times a}_{n \text{ बार}}$$ हम परिभाषित करते हैं।

इसे a **घातांक** n अथवा सरलता से a **घात** n पढते हैं। इस तरह हम a को **आधार** और n को **घातांक** कहते है।

ध्यान दीजिए :

$0^n = 0$, कोई भी स्वभाविक संख्या n और $a^1 = a$ किसी संख्या a के लिए तथापि $a^m = a^n$ केवल तभी जब $m = n$ किसी संख्या $a \neq 0$, $a \neq 1$ अथवा $a \neq -1$ हो.

आईए कुछ और उदाहरण देखते है।

संख्या	**विस्तार रूप**	**घातांकरूप**	**आधार और घातांक**
1000	$10 \times 10 \times 10$	10^3	10 आधार है और 3 घातांक
m^6	$m \times m \times m \times m \times m \times m$	m^6	m आधार है और 6 घातांक
$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times$ ....(10 बार)......	$\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{1}{2}$ आधार है और 10 घातांक
625	$5 \times 5 \times 5 \times 5$	5^4	5 आधार है और 4 घातांक
625	$-5 \times -5 \times -5 \times -5$	$(-5)^4$	-5 आधार है और 4 घातांक

अंतिम दो उदाहरण देखिए। 625 को 5^4 के रूप निरुपित है। (जहाँ आधार 5 और घात 4 है) और $(-5)^4$ (जहाँ आधार -5, है और घात 4 है) इसतरह एक ही संख्या को 5 और -5 के आधार के व्यक्त कर सकते हैं।

कोई संख्या $a \neq 0$ और एक स्वभाविक सख्या n के लिए $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ परिभाषित करते है।

इसे ऋणात्मक पूर्णांक घातांक तक विस्तृत कर परिभाषित करते हैं। निम्न कुछ उदाहरण दिये गये हैं।

$$3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)$$ (इसे 3 का घातांक -4 पढिए।)

$$(-0.1)^{-5} = \left(\frac{1}{-0.1}\right)^5 = (-10)^5 = -100000$$; (इसे (0.1) का घातांक -5 पढिए)

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-6} = \left(\frac{5}{4}\right)^6 = \frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4} = \frac{5^6}{4^6}$$

यदि $a = b^n$ किसी पूर्णांक $n \neq 0$, 1 और $b \neq 0$ के लिए हम a **घातांक रूप** में है। यहाँ b **आधार** है और n **घातांक** है। इसके पूर्व आपने देखा है कि $81 = 3^4 = 9^2$ इसतरह एक संख्या भिन्न भिन्न घातांक रूप में हो सकते हैं

सावधान!

जब $b = 0$, और $n = 0$ अथवा $n < 0$ b^n अपरिभाषित नहीं है।

उदाहरण 1 : 1024 और 0.1024 को आधार 10 के रूप में व्यक्त किजिए।

हल : मान लीजिए $1024 = 2^{10}$ यहाँ आधार 2 और घातांक 10 है फिरभी 1024 यह दशमतव स्वरूप में है। यहाँ 4 ईकाई स्थान, 2 दहाई 0 सैकडे और 1 हजार के स्थान में है। इस तरह

$$1024 = (1 \times 1000) + (0 \times 100) + (2 \times 10) + (4 \times 1)$$
$$= (1 \times 10^3) + (2 \times 10^1) + 4$$

मान लीजिए हम $b^0 = 1$ किसी संख्या $b \neq 0$ पर परिभाषित करते हैं। तो हम देखते हैं कि $1024 = 1.10^3 + 2.10^1 + 4.10^0$ आप ध्यान देंगे कि इसे हम संख्याओं का खेल इस घटक में ऐसा व्यक्त किया है। इसी तरह, 0.1024 पर विचार कीजिए।

आप ध्यान देंगे कि

$0.1024 = (0.1) + (0.002) + (0.0004)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{1000} + \frac{4}{10000}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10^3} + \frac{4}{10^4}$$

$$= 1.10^{-1} + 2.10^{-3} + 4.10^{-4}$$

उदाहरण 2 : 1000 को आधार के घातांक में व्यक्त कीजिए।

हल : संख्या 1000 पर विचार कीजिए 1 आधार 2 के घातांक में आप कैसे व्यक्त करेंगें? आप ध्यान देंखेंगें कि $512 = 2^9$, $256 = 2^8$, $128 = 2^7$ और $2^6 = 64$, इसतरह हमें निम्न योगफल प्राप्त होता

$$512 + 256 + 128 + 64 = 960$$

1000 प्राप्त करने 40 कम है।

परन्तु $40 = 32 + 8 = 2^5 + 2^3$

इसतरह हम प्राप्त करते हैं

$1000 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3$

$= 1.2^9 + 1.2^8 + 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0.$

आप ध्यान देंगे कि यह स्पष्टरूप से 1000 का द्विमान पद्धति निरूपण है। इसे हम इसतरह लिखते है : $(1111101000)_2$.

दैनिक जीवन में घातांक के कुछ उपयोग

दैनिक जीवन में, घातांक हम से संबंधित है दर्शानेवाले कुछ उदाहरण : जब हम वर्ग फूट, वर्ग मीटर अथवा ऐसे क्षेत्रफल की इकाईयाँ, अथवा घनफूट, घन मीटर, घन से.मी अथवा एसे आयतन की इकाईयाँ के बारे में हम बात करते है।

वर्ग से.मी इकाई वास्तव में 1 सें.मी $\times$ 1 सें.मी = 1 सें.मी^{2} है इसीतरह 1 घन सें.मी = 1 सें.मी $\times$ 1 सें.मी $\times$ 1 सें.मी = 1 सें.मी^{3} है। एक और परोक्ष उदाहरण है जब हम अत्यन्त सूक्ष्म अथवा अन्यन्त बृहत्त मात्रा व्यक्त करते हैं। उदाहरण नेनोमीटर (Nano meter) पद का अर्थ है 10^{-9} मी है।

प्रत्यय 'नेनो' (Nano) का अर्थ ही 10^{-9} है। जो कि अत्यन्त छोटी संख्या है। अथवा कंप्यूटर दुनिया मे हम मेगा बाइट, गीगाबाइट, टेरावाइट ऐसे शब्द सुनते हैं। **मेगा** अर्थ है 10^6 अथवा एक दशलक्ष **गीगा** अर्थ 10^9 और **टेरा** का अर्थ 10^{12} है।

मान लीजिए हमारे पास 0.000442 ग्राम प्रति लीटर का रासायनिक सांद्रता है अथवा एक नक्षत्र का बृहत्त द्रव्यमान है 8,290,000,000,000,000,000,000 कि.ग्रां है । इन शून्य से अत्याधिक स्थान ग्रहण होता है।

वैज्ञानिक पद्धति से सरल करके केवल अंतिम संख्या लिखते है, उदाहरण, जैसे 829×10^{19} कि.ग्रा. जिसका अर्थ है 829 के आगे 19 शून्य लगते है। दूसरी ओर, रासायनिक सांद्रना ऋणात्मक घातांक में, 4.42×10^{-4} ग्राम प्रति लीटर है।

प्रोटान का द्रव्यमान है 0.000000000000000000000001673 ग्राम है। आप देखते है कि एक छोटी संख्या लिखने कितना स्थान ग्रहण होता है। यदि हम घातांक का उपयोग करते है तो इसे इस रूप में लिख सकते हैं 1.673×10^{-24} ग्राम है।

एक और स्थान है जहाँ घातांक निरूपण परिकलन यंत्र (Calculator) में उपयोग करते है। परिकलन यंत्र में, निश्चित अंको के बाद संख्या को प्रकट करना संभव नहीं है। यह निश्चित अंक भिन्न-भिन्न परिकलन यंत्र में भिन्न है जो कि परिकलन यंत्र की क्षमता पर निर्भर करता है।

वैज्ञानिक परिकलन यंत्रों के जहाँ बृहत अथवा अत्यन्त छोटी संख्या की गणना होती है, वहाँ हम घातांक निरूपण उपयोग करते है। उदाहरण के लिए एक परिकलन यंत्र केवल 8 अंक दर्शा सकता है इसलिए उसके 234587643214879 जैसी संख्या जिसकें 15 अंक है, परिकलन मंत्र 234587640000000 को पूर्ण (round) कर सकता है और परिणाम संख्या को 0.23458764×10^{7} रूप में प्रकट कर सकता है। (अथवा कुछ परिकलन यंत्र $0.23458764 \times 10^{15}$ रूप में प्रकट होता है)

कार्यकलाप : 1

अधिक से अधिक जीवन के संदर्भों की जानकारी संग्रह कीजिए जहाँ घातांक निरूपण उपयोगी है।

बृहत्त संख्याओं के लिए भारतीयों का योगदान

बृहत्त संख्याओं के प्रति भारतीयों का मोह था, जो उनके धार्मिक विचारों से संबंधित है। उदाहरण के लिए, ई.पू. 1200 से ई.पू. 500 के बीच लिखे गए वैदिक साहित्य में, हमें (Trillion) से 10^{62} तक 10 के घात के संस्कृत नाम प्राप्त होते हैं। वैदिक ग्रंथों में से एजुर वेद (ई.पू 1200 – 900) में संख्यात्मक अनन्त (पूर्ण) की चर्चा हुई है, यहाँ कथित हुआ कि पूर्ण में पूर्ण घटाने पर भी शेष में पूर्ण रहता है।

ललिताविस्तार सूत्र (महायण बौद्ध कृति) लिखने की अंकगणित की, कुस्ती और धनुर्विधा की स्पर्धा था जिसमें महान गणितज्ञ अर्जून के और बुद्ध के बीच स्पर्धा रखी।

1. तलालक्षणा, जो 10^{53} के समान है, तक दस घात संख्याओं के नाम बताकर अपनी संख्यात्मक कौशल्य दिखाई। तत्पश्चात वर्णन किया कि गिनती प्रणालियों बताते हुए अन्तिम संख्या 10^{421} तक पहुँचे जिसमें 1 के सामने 421 शून्य लगाये जाते है।

आंशिक संख्याओं के लिए संस्कृत पदों की प्रणाली है जो दोनों अत्यन्त बडी और अत्यन्त छोटा संख्या बताने की क्षमता रखती है।

बौद्ध धर्म में बडी संख्या $10^{7\times2^{132}}$ अथवा $10^{37218383881977644441306597687849648128}$ जो अवतजकश्क सूत्र में बोधीसत्व गणित के रूप में प्रकट होता है।

ई.पू. शताब्दी में भारत में उपयुक्त निम्नलिखित कुछ बडी संख्याऐं दी गई हैं। (जार्ज इराफ : संख्याओं का इतिहास 422 – 423 पन्ने पर देखिए)

कोटि – 10^{7}, अयूत – 10^{9}, नियूत – 10^{11}, कनकर – 10^{13}, पाकोटी – 10^{14}, विवर –10^{15}, क्षोभ्य – 10^{17}, विवाह – 10^{19}, कोटिपपाकोटि – 10^{21}, बहुल – 10^{23}, नागबल – 10^{25} इत्यादि। वे 10^{421} का नाम ध्वंजाग्रण्शीरामणि पढते थे। (विकिपिडिया – संख्याओं का इतिहास)

बृहत्त संख्याओं की दो पौराणिक कहानियाँ

1. भारत के शिराहम राजा अपने वरिष्ठ वजीर (मुख्यमंत्री) शतरंज खेल आविष्कार करने पर बडे प्रसन्न हुए और उसे पुरस्कार देना चाहा। वजीर का निवेदन बहुत सरल था। उसने कहा : जहाँपनाह, शतरंज पटल के पहले वर्ग पर रखने एक गेहुँ का दाना दीजिए, दूसरे वर्ग पर रखने दो दाने, तीसरे वर्ग पर रखने चार दाने और चौथे वर्ग पर रखने आठ इसतरह प्रत्थेक बार दानों की संख्या दुगुना करते हुए मुझे पर्याप्त दाने दीजिए ताकि में सभी 64 वर्गों पर रख सकूँ। राजा ने सोचा कि उसके मंत्री का निवेदन बहुत बहुत सरल है। राजा ने अपने लोगों को आज्ञा दी वे गेहुँ के दाने लाकर वाजिर की इच्छा पूर्ण करें। परन्तु जल्द समझ में आया वह उसकी मूर्खता है। क्या आप जानते है कि संपूर्ण वर्गों पर रखने कितने दानों की आवश्यकता थी। वह है $2^{64} - 1$ इस करीबन 2000 वर्षों के संपूर्ण विश्व के गेहूँ उत्पादन के समान होता है।

अभ्यास 10.1

1. निम्नलिखित संख्याओं को घातांक रूप में लिखिए

   (i) 1728 (ii) $\frac{1}{512}$ (iii) 0.000169

2. निम्न संख्याओं आधार 10 के घात में व्यक्त कीजिए

   (i) 12345 (ii) 1010.0101 (iii) 0.1020304

3. $(-0.2)^{-4}$ का मूल्य निर्धारित कीजिए

घातांक का पहला नियम

(The first law of exponents)

$1024 = 2^{10}$ पर विचार कीजिए

$2^{10} = 1024 = 2 \times 512 = 2^1 \times 2^9 : 1 + 9 = 10$ और $2^{10} = 2^{1+9}$

$2^{10} = 1024 = 4 \times 256 = 2^2 \times 2^8 : 2 + 8 = 10$ और $2^{10} = 2^{2+8}$

$2^{10} = 1024 = 8 \times 128 = 2^3 \times 2^7 : 3 + 7 = 10$ और $2^{10} = 2^{3+7}$

$2^{10} = 1024 = 16 \times 64 = 2^4 \times 2^6 : 4 + 6 = 10$ और $2^{10} = 2^{4+6}$

$2^{10} = 1024 = 32 \times 32 = 2^5 \times 2^5 : 5 + 5 = 10$ और $2^{10} = 2^{5+5}$

आपका निरीक्षण क्या है? कुछ और उदाहरणों पर विचार कीजिए :

$5^4 = 625 = 25 \times 25 = 5^2 \times 5^2 : 2 + 2 = 4$ और $5^4 = 5^{2+2}$

$a^7 = (a \times a \times a \times a) = (a \times a \times a) = a^4 \times a^3 : 4 + 3 = 7$ और $a^7 = a^{4+3}$

इन उदाहरणों को देखकर क्या आप कोई नियम बना सकते हो।

किसी संख्या a और घनात्मक पूर्णांक m, n के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

यह सभी बीजीय चरांक x के लिए भी सत्य है: $x^m.x^n = x^{m+n}$ इसे **घातांक का पहला नियम** कहते हैं। यह बडे व्यंजकों को सरल करने में सहायक है।

उदाहरण :

$2^5 \times 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}$

$3^3 \times 3^6 \times 3^7 = (3^3 \times 3^6) \times 3^7 = 3^{3+6} \times 3^7$

$= 3^{9+7} = 3^{16}$

$2^5 \times 5^2 \times 2^3 \times 5 = (2^5 \times 2^3) \times (5^2 \times 5^1) = 2^8 \times 5^3$

अभ्यास 10.2

1. सरल कीजिए :

(i) $3^1 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times 3^5 \times 3^6$

(ii) $2^2 \times 3^3 \times 2^4 \times 3^5 \times 3^6$

2. $10^4 \times 10^3 \times 10^2 \times 10$ में कितने शून्य लगते हैं?

3. $(5^3 \times 5^4 \times 5^5 \times 5^6)$ और $(5^7 \times 5^8)$ में कौनसा बडा है?

घातांक का दूसरा नियम

निमलिखित उदाहरणों पर ध्यान दीजिए।

$2^9 = 512 = \dfrac{1024}{2} = \dfrac{2^{10}}{2^1}$: $2^9 = 10 - 1$ और $2^9 = 2^{10-1}$

$2^8 = 256 = \dfrac{1024}{4} = \dfrac{2^{10}}{2^2}$: $2^8 = 10 - 2$ और $2^8 = 2^{10-2}$

$2^7 = 128 = \dfrac{1024}{8} = \dfrac{2^{10}}{2^3}$: $2^7 = 10 - 3$ और $2^7 = 2^{10-3}$

$2^8 = 64 = \dfrac{1024}{16} = \dfrac{2^{10}}{2^4}$: $2^6 = 10 - 4$ और $2^6 = 2^{10-4}$

$2^6 = 64 = \dfrac{256}{4} = \dfrac{2^8}{2^2}$: $2^6 = 8 - 2$ और $2^6 = 2^{8-2}$

एक और उदाहरण का अध्ययन कीजिए

$$3^3 = 27 = \frac{243}{9} = \frac{3^8}{3^2} : 3 = 5 - 2 \text{ और } 3^3 = 3^{5-2}$$

क्या आप यहाँ कोई नम्ना देखते हो? क्या यहाँ पर भी कोई नियम हुआ?

किसी संख्या a और **घनात्मक पूर्णांक** m, n **के लिए** जहाँ $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

स्वभाविक प्रश्न है : यदि $m = n$ अथवा $m < n$ हो तो क्या होता है। कुछ और उदाहरण इस संदर्भ को स्पष्ट करेगा

$$\frac{1}{2^5} = \frac{1}{3^2} = \frac{2}{64} = \frac{2^1}{2^6}$$

याद कीजिए : हम ने $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, सभी $a \neq 0$ और n के लिए

इसतरह $2^{-5} = \dfrac{2^1}{2^6}$ (: $-5 = 1 - 6$)

इसीतरह, $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} = \frac{9}{729} = \frac{3^2}{3^6}$; $-4 = 2 - 6$ और $3^{-4} = 3^{2-6}$

$10^{-1} = \frac{1}{10} = \frac{1000}{10000} = \frac{10^3}{10^4}$; $-1 = 3 - 4$ और $10^{-1} = 10^{3-4}$

उपरोक्त निरीक्षणों को निम्नरूप से लिख सकते हैं **कोई संख्या** $a \neq 0$ और **घनात्मक पूर्णांक** m, n के लिए जहाँ $m \neq n$.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

फिर से स्मरण में लाईए : सभी $a \neq 0$ के लिए हमने परिभाषित किया कि $a^0 = 1$.

ध्यान दीजिए : $\frac{2^5}{2^5} = 1 = 2^0$; $5 - 5 = 0$ और $2^{5-5} = 2^0$;

$\frac{3^4}{3^4} = 1 = 3^0$; $4 - 4 = 0$ और $3^{4-4} = 3^0$;

इससे सिद्ध होता है कि $\frac{a^m}{a^n} = 1 = a^0$ सभी $a \neq 0$ अब हम अपने नियम को पुनः लिख सकते हैं।

कोई संख्या $a \neq 0$ और **घनात्मक पूर्णांक** m, n के लिए **निश्चित होना आवश्यक नहीं,**

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

महत्वपूर्ण बात यह है कि m, n से संबंधित केवल शर्त है वे घनात्मक पूर्णांक है। यहाँ $m < n$ अथवा $m = n$ अथवा $m > n$ होना संभव है। इन सभी संदर्भ में यह नियम सत्य सिद्ध होता है।

दूसरे नियम पर हम अलग रूप से भी विचार कर सकते है। मान लीजिए $a \neq 0$ और m, n घनात्मक पूर्णांक है, तो

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n}$$

जहाँ हमने $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ उपयोग किया है।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

इसतरह, हम प्राप्त करते हैं

$a^{m-n} = a^m \times a^{-n}$

ध्यान दीजिए, यह बिलकुल पहले नियम कि तरह है केवल ऋणात्मक पूर्णांक $-n$ है। इस अर्थ में, दूसरा नियम, पहले नियम का विस्तार है।

पुनः ध्यान दीजिए सभी स्वभाविक संख्या m, n के लिए,

$$a^{-(m+n)} = \frac{1}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^m \times a^n} \quad \text{(पहला नियम उपयोग करने पर)}$$

$$= \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n}$$

$$= a^{-m} \times a^{-n}$$

इसतरह हम देखते हैं कि पहला नियम ऋणात्मक पूर्णांक m और n के लिए भी लागू होता है। हम पहले और दूसरे नियम को मिलकर और संयुक्त रूप इसतरह व्यक्त करते है।

यदि $a \neq 0$ और m, n पूर्णांक हो तो $a^m \times a^n = a^{m+n}$

उदाहरण 6 : सरल कीजिए : $\dfrac{3^5 \times 2^2 \times 7^{-3}}{7^{-2} \times 3^{-3} \times 2^4}$

हल : दत्त गणित व्यवस्थित करने पर

$$\Rightarrow \left(\frac{3^5}{3^{-3}}\right) \times \left(\frac{2^2}{3^{-3}}\right) \times \left(\frac{7^{-3}}{7^{-2}}\right) \Rightarrow 3^{5-(-3)} \times 2^{2-4} \times 7^{-3-(-2)}$$

$$\Rightarrow 3^{5+3} \times 2^{-2} \times 7^{-3+2}$$

$$\Rightarrow 3^8 \times 2^{-2} \times 7^{-1} = \frac{3^8}{2^2 \times 7} = \frac{6561}{28}$$

उदाहरण 7 : यदि $3^l \times 3^2 = 3^5$ हो तो l का मूल्य ज्ञात कीजिए :

हल : घातांक का दूसरा नियम उपयोग करने पर हम प्राप्त करते है $3^{l+2} = 3^5$ परन्तु हम जानते हैं कि $a \neq 0, 1, -1$ यदि $a^m = a^n$ तो $m = n$.

अतः $l + 2 = 5$ अथवा $l = 3$.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

अभ्यास 10.3

1. सरल कीजिए :
   (i) $10^{-1} \times 10^{2} \times 10^{-3} \times 10^{4} \times 10^{-5} \times 10^{6}$

   (ii) $\dfrac{2^3 \times 3^2 \times 5^4}{3^3 \times 5^2 \times 2^4}$
2. $(3^4 \times 2^3)$ और $(2^5 \times 3^2)$ में कौनसा बडा है?
3. मान लीजिए m और n निश्चित पूर्णांक हैं।

   क्या $\dfrac{3^m \times 2^n}{2^m \times 3^n}$ एक पूर्णांक हो सकता है? कारण दीजिए।
4. मान लीजिए b एक घनात्मक पूर्णांक ताकि $\dfrac{2^4}{b^2}$ भी एक पूर्णांक है। b के संभवनीय मूल्य क्या है?

घातांक का तीसरा नियम

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए :

$2^{10} = 2^{2+2+2+2+2} = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = (2^2)^5 = 2 \times 5 = 10$

और $(2^2)^5 = 2^{10} = 2^{2 \times 5}$

$2^{10} = 2^{5+5} = 2^5 \times 2^5 = (2^5)^2$: $5 \times 2 = 10$ और $(2^5)^2 = 2^{10} = 2^{5 \times 2}$

$3^{12} = 3^{2+2+2+2+2+2} = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = (3^2)^6$

$2 \times 6 = 12$ और $(3^2)^6 = 3^{12} = 3^{2 \times 6}$

$3^{12} = 3^{3+3+3+3} = 3^3 \times 3^3 \times 3^3 \times 3^3 = (3^3)^4 \quad 3 \times 4 = 12$

और $(3^3)^4 = 3^{12} = 3^{3 \times 4}$

$3^{12} = 3^{6+6} = 3^6 \times 3^6 = (3^6)^2 \quad 6 \times 2 = 12$

और $(3^6)^2 = 3^{12} = 3^{6 \times 2}$

यहाँ आप निरीक्षण करते हैं? क्या आप इन निरीक्षणों को एक नियम के रुप में लिख सकते हैं?

यदि $a \neq 0$ **एक संख्या** है और m, n **घनात्मक पूर्णांक** है तो $(a^m)^n = a^{mn}$.

कुछ और उदाहरणों को अध्ययन कीजिए

$2^{2 \times (-4)} = 2^{-8}$ $\dfrac{1}{2^8} = \dfrac{1}{(2^2)^4}$ $= (2^2)^{-4}$

$3^{(-5) \times 2} = 3^{-10} = \dfrac{1}{3^{10}} = \dfrac{1}{(3^5)^2} = \left(\dfrac{1}{3^5}\right)^2 = (3^{-5})^2$

क्या आपको ध्यान में आता है कि ऋणात्मक घातांकों को भी ऐसा ही नियम अनुसरित होता है? यदि $a \neq 0$ एक संख्या है और m,n घनात्मक पूर्णांक है तो $(a^m)^n = a^{mn}$ घातांक ऋणात्मक पूर्णांक होने के संदर्भ पर आपकी अपेक्षा क्या है?

एक उदाहरण पर विचार कीजिए :

$5^{(-4)(-3)} = 5^{12} = \dfrac{1}{5^{-12}} = \dfrac{1}{(5^{-4})^3} = (5^{-4})^{-3}$

क्या आप मान जाते हो कि ऋणात्मक घातांक भी वही नियम अनुसरण करते हैं $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$ सभी संख्याओं के लिए $a \neq 0$ और m, n घनत्मक पूर्णांक है।

m और n में से एक, शून्य से बराबर हो तो क्या होता है?

आप ध्यान देते है कि $a \neq 0$, $a^0 = 1$ और $(a^0)^n = 1^n = 1 = a^0$ और $0 \times n = 0$ इसतरह हम घातांक का तीसरा नियम इस तरह लिख सकते हैं।

यदि $a \neq 0$ **एक संख्या है और** m, n **पूर्णांक है तो** $(a^m)^n = a^{mn}$.

उदाहरण 8 **:** सरल कीजिए :

$$\frac{(1024)^3 \times (81)^4}{(243)^2 \times (128)^4}$$

हल : ध्यान दीजिए : $1024 = 2^{10}$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$ और $128 = 2^7$ अतः गणित बनता है

$$\frac{(2^{10})^3 \times (3^4)^4}{(3^5)^2 \times (2^7)^4} = \frac{2^{30} \times 3^{16}}{3^{10} \times 2^{28}} = 2^{30-28} \times 3^{16-10} = 2^2 \times 3^6 = 2916.$$

अभ्यास 10.4

1. सरल कीजिए :

(i) $\dfrac{(2^5)^6 \times (3^3)^2}{(2^6)^5 \times (3^2)^3}$; (ii) $\dfrac{(5^{-3})^2 \times 3^4}{(3^{-2})^{-3} \times (5^3)^{-2}}$

2. क्या आप दो पूर्णांक m और n ज्ञात कर सकते हैं ताकि $2^{m+n} = 2^{mn}$?

3. यदि $(2^m)^4 = 4^6$ तो m का मूल्य ज्ञात कीजिए.

घातांक का चौथा नियम :

नियम उदाहरणों का अध्ययन कीजिए

(1) $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$

$= 2^5 \times 5^5$

यहाँ आप ध्यान दे सकते हैं कि $10 = 2 \times 5$

(2) $3^4 \times 2^4 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$

$= 6 \times 6 \times 6 \times 6$

$= 6^4$

यहाँ पुन : $3 \times 2 = 6$

एक और उदाहरण पर विचार कीजिए :

(3) $(-2)^4 \times (4)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

$= (-2 \times 4) \times (-2 \times 4) \times (-2 \times 4) \times (-2 \times 4)$

$= (-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) = (-8)^4$

यहाँ पुन : आप ज्ञात होता है कि $(-2) \times 4 = (-8)$ आईए, देखें कि दोनों संख्या ऋणात्मक हो तो क्या होता है?

(4) $(-3)^3 \times (-5)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$

$= \{(-3) \times (-5)\} \times \{(-3) \times (-5)\} \times \{(-3) \times (-5)\}$

$= 15 \times 15 \times 15$

$= 15^3$

आप देखेंगें नियम सही सिद्ध होता है : $(-3) \times (-5) = 15$. अब आप एक नया नियम बनायेंगें :

यदि a और b **दो शून्य रहित दो संख्याऐं** हैं और m **कोई घनात्मक पूर्णांक** हैतो $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

ध्यान दीजिए यह $m = 0$ होने पर भी सत्य है। क्योंकि $a \neq 0$ और $b \neq 0$, तो निश्चित रूप से $a \times b \neq 0$ होगा। इसतरह $(a \times b)^0 = 1$ परन्तु $a^0 = 1$ और $b^0 = 1$ ताकि $a^0 \times b^0 = 1$ परिणामत : $(a \times b)^0 = a^0 \times b^0$

यदि m ऋणात्मक हो तो क्या होगा?

यदि a और b दो शून्यरहित संख्याऐं है और n एक घनात्मक पूर्णांक है, आप देखेंगे कि

$$(a \times b)^{-n} = \frac{1}{(a \times b)^n} = \frac{1}{a^n \times b^n} = \frac{1}{a^n} \times \frac{1}{b^n} = a^{-n} \times b^{-n}$$

अर्थात ऋणात्मक घातांक के लिए भी वही नियम लागू होता है।

अब हम पुनः नियम बनाते हैं

कोई दो संख्या $a \neq 0$ **और** $b \neq 0$ **और कोई पूर्णांक** m **के लिए** $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.

यहाँ कुछ और उदाहरण हैं :

उदाहरण 9 : सरल कीजिए : $\dfrac{15^4 \times 14^3}{21^3 \times 10^3}$

अंश : $15^4 \times 14^2 = (3 \times 5)^4 \times (2 \times 7)^2 = 3^4 \times 5^4 \times 2^2 \times 7^2$

इसीतरह हर $= 21^3 \times 10^3 = (7 \times 3)^3 \times (5 \times 2)^3$

$= 7^3 \times 3^3 \times 5^3 \times 2^3$

अतः दत्त गणित हैं :

$$\frac{3^4 \times 5^4 \times 2^2 \times 7^2}{7^3 \times 3^3 \times 5^3 \times 2^3} = 3^{4-3} \times 5^{4-3} \times 2^{2-3} \times 7^{2-3} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$$

उदाहरण 10 : कौनसा बडा है $(0.25)^4$ अथवा $(0.35)^3$?

हल : यहाँ हम सरल निरीक्षण उपयोग करते हैं

यदि a और b दो शून्यरहित दो संख्याऐं हैं, तब $a < b$ तो $\frac{a}{b} < 1$ होगा।

$0.25 = \frac{1}{4}$ और $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

हमें $\frac{1}{4^4}$ और $\frac{7^3}{20^3}$ की तुलना करना है।

$$\frac{(0.25)^4}{(0.35)^3} = \frac{4^3 \times 5^3}{4^4 \times 7^3} = \frac{5^3}{4 \times 7^3} < 1$$

क्योंकि $5 < 7$ है। इसतरह $(0.25)^4 < (0.35)^3$.

अभ्यास 10.5

1. सरल कीजिए :

(i) $\frac{6^8 \times 5^3}{10^3 \times 3^4}$ (ii) $\frac{(15)^{-3} \times (12)^4}{5^{-6} \times (36)^2}$ (iii) $\frac{(0.22)^4 \times (0.222)^3}{(0.2)^5 \times (0.2222)^2}$

2. क्या $\frac{(10^4)^3}{5^{13}}$ एक पूर्णांक है? अपने उत्तर का समर्थन कीजिए।

3. $(100)^4$ और $(125)^3$ में कौनसा बडा है?

घातांक का पाँचवा नियम :

निम्न उदाहरण पर ध्यान कीजिए :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{3^5}{4^5}$$

इसीतरह, आप देखेंगें कि

$$\left(\frac{-4}{5}\right)^3 = \left(\frac{-4}{5}\right) \times \left(\frac{-4}{5}\right) \times \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{(-4) \times (-4) \times (-4)}{5 \times 5 \times 5} = \frac{(-4)^3}{5^3}$$

इन दोनों उदाहरणों से क्या निष्कर्ष लेते हो?

क्या आप देखते हो कि एक और घातांक का नियम बनता है?

यदि a, b **दो शून्य रहित संख्याऐं** है और m **एक घनात्मक पूर्णांक** है तो $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

आप ध्यान दे सकते ही कि यह नियम $m = 0$ के लिए सत्य है।

इस संदर्भ पर

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}$$

यदि m ऋणात्मक हो तो क्या होता है?

यदि $m < 0$ तो $n = -m$ एक घनात्मक पूर्णांक है। इसलिए आप घनात्मक पूर्णांक का घातांक नियम उपयोग कर सकते है।

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

फिर भी, हम जानते है कि $a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^m}$

इसीतरह $b^n = \frac{1}{b^{-n}} = \frac{1}{b^m}$ अथवा $\frac{1}{b^n} = b^m$

इसतरह

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \times \frac{1}{b^n} \times \frac{1}{a^m} \times b^m = \frac{b^m}{a^m}$$

लेकिन हम जानते हैं $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{b^m}{a^m}$

यह सूचित करता है $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

हमने ऋणात्मक घातांक के लिए नियम प्राप्त किया है। इसतरह हम घातांक के पाँचवे नियम को इसतरह लिखते है।

यदि $a \neq 0$ और $b \neq 0$ और m एक पूर्णांक है तो $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

उदाहरण 11 : सरल कीजिए $\left(\frac{0.2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{0.5}\right)^{-3}$

हल : आप दोनों भिन्नों को अलग - अलग रुप से सरल कर सकते हो।

इसतरह : $\left(\frac{0.2}{5}\right) = \frac{1}{5^2}$, $\left(\frac{2}{0.5}\right) = 2 \times 2 = 2^2$

इसतरह $\left(\frac{1}{5^2}\right)^4 \times (2^2)^{-3} = \frac{1}{5^8 \times 2^6} = \frac{1}{5^2 \times 10^6} = 0.00000004$

उदाहरण 12 : कौनसा बडा है?

$(2.5)^6$ अथवा $(1.25)^{12}$?

हल : $(2.5)^6 = \left(\frac{5}{2}\right)^6 = \frac{5^6}{2^6}$ लिख सकते हैं?

इसीतरह, आप प्राप्त करते हैं

$$(1.25)^{12} = \left(\frac{5}{4}\right)^{12} = \frac{5^{12}}{4^{12}} = \frac{5^{12}}{24^{24}}$$

इसतरह आपको जाँच करना $\frac{5^6}{2^6}$, $\frac{5^{12}}{2^{24}}$ में कौनस बडा है? समरूप से आप को निर्धारित करना 5^6 और 2^{18} में कौनसा बडा (क्यों?)

फिर भी, $5^2 = 25 < 32 = 2^5$

अतः $5^6 = (5^2)^3 < (2^5)^3 = 2^{15} < 2^{18}$

इसतरह $\frac{5^{12}}{2^{24}} = \frac{5^6}{2^{18}} \times \frac{5^6}{2^6} < \frac{5^6}{2^6}$

अतः $(1.25)^{12} < (2.5)^6$

अभ्यास 10.6

1. सरल कीजिए : (i) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \times \left(\frac{6}{4}\right)^3$ (ii) $(1.8)^6 \times (4.2)^{-8}$, (iii) $\frac{(0.0006)^9}{(0.015)^{-4}}$

2. किसी पूर्णांक $m \neq 0$ के लिए क्या $\left(\frac{4}{25}\right)^m = \left(\frac{2}{5}\right)^{m^2}$ होना संभव है?

3. m, n के घनात्मक मूल्यों को ज्ञात कीजिए ताकि $(3^m)^n = 3^m \times 3^n$?

4. $\frac{(30)^3}{(35)^2}$ n पूर्णांक के लिए कौनसी छोटी धनात्मक पूर्णांक होता है ।

क्या आप ध्यान दे सकते हो कि पाँचवा नियम, चौथे नियम से निगमात्मक विधान से प्राप्त कर सकते हैं?

$\frac{a}{b} = a \times b^{-1}$ लिख सकते हैं।

इसतरह आप प्राप्त करते हैं :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = (a \times b^{-1})^m = a^m \times (b^{-1})^m = a^m \times b^{-m} = \frac{a^m}{b^m}$$

आपने ध्यान दिया होगा कि $(b^{-1})^m = b^{-m}$ जो परिणामतः तीसरा नियम है। इसतरह पाँचवा नियम चौथे और तीसरे नियम का परिणाम है।

अभ्यास 10.7

1. घातांक के नियम उपयोगकर सरल कीजिए.

(i) $\frac{(12)^6}{162}$ (ii) $\frac{3^{-4} \times 10^{-5} \times 625}{5^{-3} \times 6^{-4}}$ (iii) $\frac{2^{3^2}}{(2^3)^2}$

2. $\frac{(10^3)^2 \times 10^{-4}}{10^2}$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

3. सरल कीजिए : $\left(\frac{b^{-3} b^7 . (b^{-1})^2}{(-b)^2 (b^2)^3}\right)^{-2}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4. निम्नलिखित प्रत्येक का मूल्य ज्ञात कीजिए

(a) $(3^2)^2 - ((-2)^3)^2 - (-(5^2))^2$;

(b) $(0.06)^2)^0 - ((4.5)^0)^{-2}$

(c) $(4^{-1})^4 \times 2^5 \times \left(\frac{1}{16}\right)^3 \times (8^{-2})^5 \times (64^2)^3$

महत्वपूर्ण बातें :

ये सारे नियम बीजीय चरांकों के लिए उपयोगी है। अब तक इन नियमों को अंकों के लिए उपयोग किया है। यदि x कोई चरांक हो तो, सभी पूर्णांक m, n के लिए

$x^m.x^n = x^{m+n}$ .... (1)

यहाँ पुनः हम $x^0 = 1$ परिभाषित करते है।

संख्याओं की तरह हमने $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ परिभाषित किया है जहाँ $a \neq 0$ है। हम आसानी से $\frac{1}{x}$ का उपयोग नहीं कर सकते।

अतः हमने x^{-n} की परिभाषा दी है।

कोई स्वभाविक संख्या n के लिए, व्यंजक $x^n.x^{-n} = 1$ सत्य है। हम x^{-n} को $\frac{1}{x}$ के रूप लिखते है। परिणाम्पतः हम $x^n.\frac{1}{x^n} = 1$ प्राप्त करते है। जहाँ n सभी स्वभाविक संख्याऐं है। ध्यान दीजिए $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ सभी स्वभाविक संख्याओं के लिए सत्य है। इस परिकल्पना से नियम (1) सत्य है। इसीतरह, आप नियमों को लिख सकते हैं

$(x^m)^n = x^{mn}$ सभी पूर्णांक m और n के लिए .... (2)

$(x.\ y)^m = x^m.\ y^m$ सभी पूर्णांक m और चरांक x, y के लिए .... (3)

शब्दावली :

प्रकाश वर्ष : यह एक प्रकाश किरण से एक वर्ष में तय की गई दूरी है; यह $4.3 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \times 299792$ कि.सी. के बराबर है।

घातांक निरुपण : $a \times a \times .... \times a$, n बार के गुणनफल को a^n रुप में लिखना.

आधार : संक्षिप्त रूप a^n में a को आधार कहते हैं।

घातांक : संक्षिप्त रूप a^n में n को घातांक कहते है।

घातांक के नियम : $a^m \times n^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^m = a^m \times b^m$ सभी शून्यरहित m और n संख्याओं के लिए सत्य है। (ये नियम बीजीभ चरांको के लिए और वास्तविक संख्या m, n के लिए उपयोगी है।)

याद रखिए :

- $0^n = 0$ सभी $n > 0$ के लिए; सभी $n \leq 0$ के लिए 0^n अपरिभाषित है।
- $a^m = a^n$ केवल तभी मात्र जब $m = n$ सभी $a \neq 0, 1$ अथवा -1 के लिए।
- सभी $a \neq 0$ और स्वभाविक संख्या n के लिए $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$
- सभी $a \neq 0$ और पूर्णांक m, n के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- सभी $a \neq 0$ और पूर्णांक m, n के लिए $(a^m)^n = a^{mn}$
- सभी $a \neq 0, b \neq 0$ और पूर्णांक m के लिए $(ab)^m = a^m \times b^m$

उत्तर

अभ्यास 10.1

1. (i) 12^3 (ii) 2^{-9} (iii) $(0.013)^2$

2. (i) $10^4 + 2.\ 10^3 + 3.\ 10^2 + 4.\ 10 + 5$

   (ii) $10^3 + 10^1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4}$ (iii) $\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^5} + \frac{4}{10^7}$

3. $3.5^4 + 1.5^3 + 2.5$

4. 194 5. 625

अभ्यास 10.2

1. (i) 3^{21} (ii) $2^6.\ 3^{14}$

2. 10 शून्य 3. $5^3 \times 5^4 \times 5^5 \times 5^6 > 5^7 \times 5^8$

अभ्यास 10.3

1. (i) 10^3 (ii) $\frac{25}{6}$

2. $3^4 \times 2^3 > 2^5 \times 3^2$

3. $b = 1, 2$ or 4

अभ्यास 10.4

1. (i) 1 (ii) $\frac{1}{9}$

2. $m = 2, n = 2$ 3. $m = 3$

अभ्यास 10.5

1. (i) 2592 (ii) $\frac{2000}{27}$

2. No अंक

3. $100^4 > 125^3$

अभ्यास 10.6

1. (i) $\frac{32}{243}$ (ii) $\frac{19683}{42875}$ (iii) $\frac{3^{13}}{2^{39} \text{ x } 5^{44}}$

2. $n = 49$

3. $m = 2$ के लिए हो सकता है। 4. $(m, n) = (2, 2)$

अभ्यास 10.7

1. (i) 1152 (ii) $\frac{25}{2}$ (iii) 8

2. 1

3. $b^{\frac{1}{2}}$ 4. (*a*) 642 (*b*) 0 (*c*) 2^{-9}

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

घटक – 11
त्रिभुजों की सर्वांगसमता

इस घटक को अध्ययन करने के बाद, आप सीखेंगें :

- सर्वांगसम आकृतियाँ पहचानना ।
- सर्वांगसम त्रिभुजों को पहचानना ।
- सर्वांगसम त्रिभुजों की अनुरूप भुजाऐं और कोण पहचानना
- त्रिभुजों की कौन से सर्वांगसमता के लिए अभिगृहित निश्चित करना
- यह समझना कि विशिष्ट तीन तत्व त्रिभुजों की सर्वांगसमता निर्धारित करते हैं।
- प्रमेय सिद्ध करने कुछ निगमनात्मक तार्किक विधान ज्ञात करना
- सर्वांगसमता के विभिन्न अभिगृहित पर आधारित गणित करना
- दैनिक समस्याओं को हल करने में त्रिभुजओं की सर्वांगसमता का उपयोग समझना

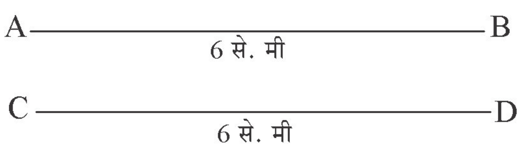
प्रस्तावना :

मान लीजिए आपके पास प्रत्येक 1 से.मी भुजा के दो समबाहु त्रिभुज है। क्या आप एक त्रिभुज को दूसरे पर रख सकते हैं ताकि प्रत्येक भुजा, दूसरे पर सम्मिलित हो? अर्थात् एक त्रिभुज की भुजाऐं दूसरे त्रिभुज की भुजाओं से सम्मिलित होती है दो समबाहु त्रिभुज लीजिए ताकि प्रत्येक भुजा लंबाई 1 से.मी, और दो से.मी है क्या एक त्रिभुज को दूसरे पर ऐसे रख सकते हो ताकि प्रत्येक पूर्णतः मेल खायें। भले आप कैसे भी समायोजित करे, आप एक दूसरे पर रख नहीं सकते है। यहाँ सही ज्याामितीय विचार जो समझने योग्य है, वह है **सर्वांगसमता ।**

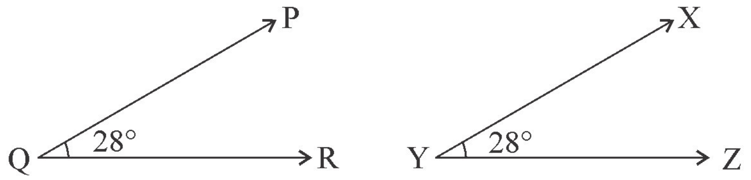
सर्वांगसमता रेखागणित की मौलिक परिकल्पना है। यह परिकल्पना ज्यामितिय आकृतियों को उनके आकार के आधार पर वर्गीकृत करने उपयोग करते हैं। दो ज्यामितिय आकृतियों को **सर्वांगसम** कहते हैं यदि वे आकार और विस्तार में एक हो।

उदाहरण के लिए :

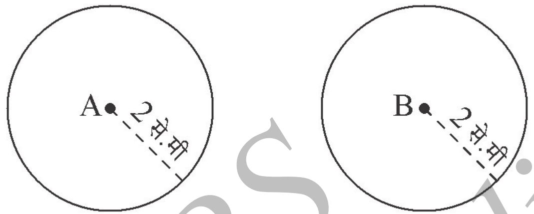
1. दो रेखाखण्ड की लंबाई समान हो, तो वे सर्वांगसम हैं



2. दो कोण सर्वांगसम कहलाते हैं यदि उनका माप समान है।



3. समान त्रिज्या के दो वृत सर्वांगसम होते है

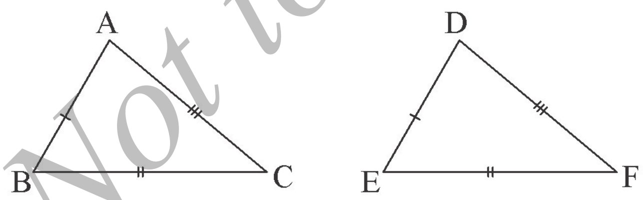


4. समान लंबाई के भुजा के दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।

सूचना :

1. दो सर्वांगसम ज्यामितीय आकृतियाँ एक दूसरे को, एक के ऊपर इसतरह रख सकते हैं कि एक दूसरे से पूरी तरह मेल खायें
2. दो सर्वांगसम ज्यामितीय आकृतियों की सभी मितियाँ समान रहती हैं।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता



दो त्रिभुजों को सर्वांगसम कहते हैं यदि एक त्रिभुज की सभी भुजाऐं और कोण दूसरी त्रिभुज की तद्नरूपी भुजा एवं कोण से समान है।

त्रिभुज ABC और DEF में आपको ज्ञात होता है कि AB = DE, BC = EF और AC = DF $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ हैं इसलिए त्रिभुज ABC और DEF सर्वांगसम है।

इसे इसतरह लिखते हैं $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

इस सिध्दांत्त के बारे में कुछ बातें।

जब हम $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ लिखतें हैं आपको यह ध्यान देना आवश्यक है शीर्ष A, B, C उसी क्रम में D, E, F के अनुरुप है। यदि $\Delta ABC \cong \Delta EFD$ लिखते हैं तो इसका भिन्न अर्थ होता है। इसका अर्थ है $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$ और $\angle C = \angle D$. और AB = EF, BC = FD और CA = DE.

क्या आप इसमें कोई अन्तर देखतें हैं? इसलिए सर्वांगसम का चिन्ह लगते समय हमें शीर्षों को योग्य विधान से क्रम में लिखना है।

स्मरण कीजिए, त्रिभुज से संबंधित छः तत्व है। दो त्रिभुज सर्वांगसम केवल तभी होते जब ये छः तत्व योग्य अर्थ में संबंधित है। यह विचार अनुरुप भुजाएँ और अनुरुप कोण समझने स्पष्ट होगा।

अनुरूप भुजाएँ और कोण

मान लीजिए Δ ABC को त्रिभुज DEF पर रखने से चे एक दूसरे पर बराबर से खाते हैं ताकि

1) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$
2) AB = DE, BC = EF, AC = DF

तो $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

अनुरूप कोण जो अध्यास्थापन से सम्मिलित होते हैं वे अनुरूप कोण कहलाते हैं। भुजायें जो अध्यास्थापन से सम्मिलित होते है वे अनुरूप भुजाऐं कहलाती हैं। सामान्यतः हमेशा एक त्रिभुज को दूसरे पर रखकर अनुरूप कोण और भुजाऐं जानना संभव नहीं है। क्या आप ध्यान देते हैं, कि यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो वहाँ अनुरुप शीर्ष भी होते हैं।

फिर भी, शीर्ष तो केवल बिन्दुऐं है और उनसे जुडी कोई संख्यात्मक मात्राऐं नहीं हैं। इसलिए हम सर्वांगसमता निर्धारित करने भुजा एवं कोणों का उपयोग करते हैं।

ज्यामिति रुप से, दो सर्वांगसम त्रिभुज ABC और DEF में, समान भुजाओं के अभिमुख कोण अनुरूप कोण कहलाते हैं और इसलिए वे समान है। इसलिए, BC = EF सूचित करता है कि BC के अभिमुख कोण, EF के अभिमुख कोण से समान है।

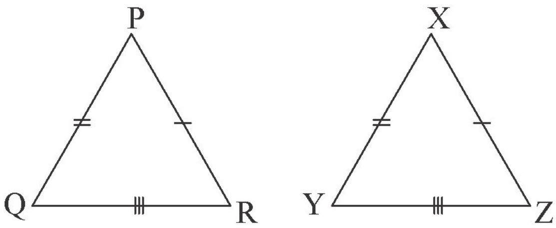
सांकेतिक रुप से, BC = EF $\Rightarrow \angle A = \angle D$

इसीतरह $AC = DF \Rightarrow \angle B = \angle E$ और $AB = DE \Rightarrow \angle C = \angle F$.

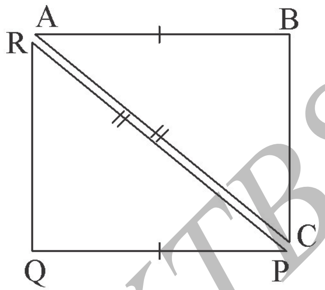
अभ्यास 11.1

1. निम्नलिखित सर्वांगसम त्रिभुजों में अनुरुप भुजा एवं कोणों को पहचानिए

(1)

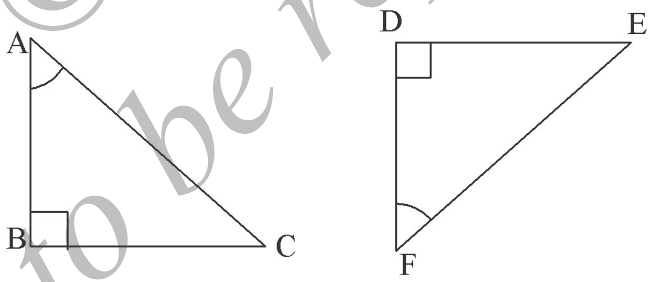


(2)

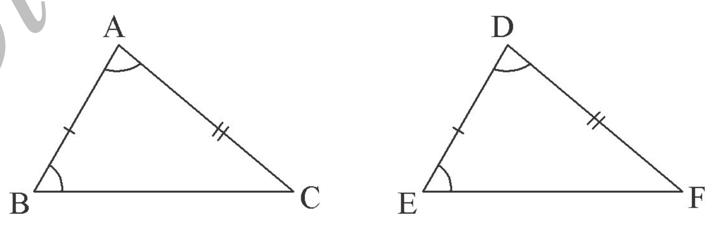


2. सर्वांगसम त्रिभुज एवं उनसे संबंधित कथनों को जोडकर लिखिए। आकृतियों को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(a) पार्श्व आकृति में यदि $\angle C = \angle F$ हो तो AB = ..., और BC = ...

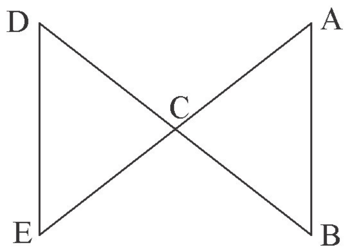


(b) पार्श्व आकृति में यदि BC = EF, तो $\angle C$ = ... और $\angle A$ = ...



(c) पार्श्व आकृति में यदि AC = CE, और $\Delta ABC \cong \Delta DEC$, तो $\angle D$ = ...

और $\angle A$ = ...



त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए SAS अभिगृहित

सर्वांगसमता की न्यूनतम शर्तें :

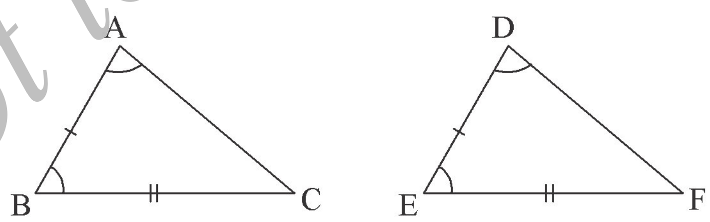
अब जानते हैं कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होते यदि दोनों त्रिभुजों की अनुरुप भुजाऐं और अनुरुप कोण समान हो। (छः तत्व) अर्थात् तीन अनुरुप भुजाऐं और तीन अनुरूप कोण, सामान्यतः यह प्रश्न रहता है कि सर्वांगसमता निर्धारित करने कम से कम कितने शर्ते आवश्यक है? क्या दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता निर्धारित करने सभी छः तत्व समान होना आवश्यक है अथवा कुछ कम शर्तें पर्याप्त हैं? इस में और आनेवाले भागों में हम देखेंगे कि यदि एक त्रिभुज के सही चुने हुए तीन तत्व दूसरे त्रिभुज के तदनूरूपी तत्वों से समान रहें तो अन्य तीन तत्व क्रम से सम्मिलित होते हैं और दो त्रिभुज सर्वांगसम सिद्ध हो जाते हैं।

आईए देखें दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता निर्धारित करने वाले वे कौन से तीन तत्व है। हमें ध्यानपूर्वक तीन शर्तें चुनना होगा।

उदाहरण : तीनों कोण यदि चुने तो सर्वांसमता सिद्ध नहीं कर पायेंगें

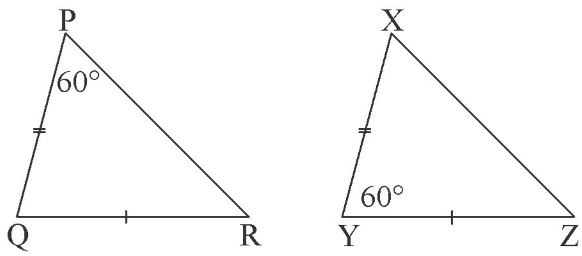
भुजा– कोण – भुजा अभिगृहित (SAS)

यदि एक त्रिभुज की दो भुजा और नीच का कोण दूसरे त्रिभुज के तदन्रुपी भुजा एवं कोण से समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



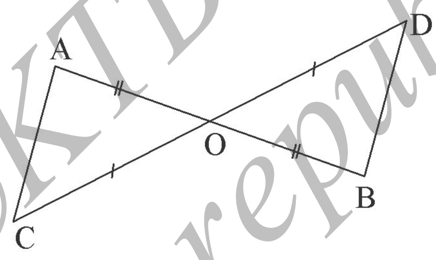
त्रिभुज ABC और त्रिभुज DEF में आप देखते हैं कि AB = DE, AC = DF और $\angle A = \angle D$ है।

इसलिए SAS अभिगृहित के अनुसार $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



निम्न त्रिभुजों की और ध्यान दीजिए, त्रिभुज PQR और त्रिभुज XYZ में आप देखते हैं कि PQ = XY और QR = YZ तथापि $\angle P = 60° = \angle Y$ फिर भी त्रिभुज PQR और XYZ सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है क्योंकि बीच में बना $\angle Q$ कोण $\angle y$ कोण से समान होना आवश्यक नहीं है जो की अनुरुप कोण है।

उदाहरण 1 : आकृति में, 'O' AB और CD की मध्यबिन्दु है सिद्ध कीजिए (i) $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ (ii) AC = BD



हल : त्रिभुज AOC और त्रिभुज BOD में

AO = BO ('O' AB की मध्यबिन्दु है)

$\angle AOC = \angle BOD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

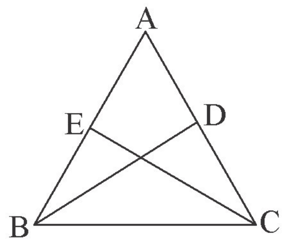
CO = OD, ('O' CD की मध्यबिन्दु है)

इसलिए SAS अभिगृहित से

$\Delta AOC \cong \Delta BOD$

इसलिए AC = BD क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुज के अनुरुप भाग है।

उदाहरण 2 : आकृति में दिया है AE = AD और BD = CE है। सिद्ध त्रिभुज AEB, और त्रिभुज ADC से सर्वांगसम होते है।



हल : हमें ज्ञात है AE = AD और CE = BD जोडने पर

AE + CE = AD + BD $\Rightarrow$ AC = AB

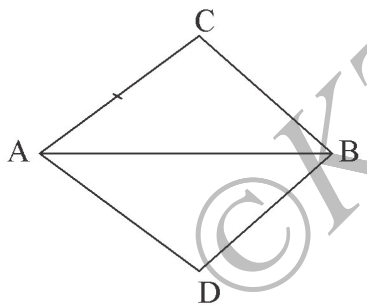
AE = AD (दत्त)

AB = AC (सिद्ध)

$\angle EAB = \angle DAC$ (उभय सामान्य कोण)

अभिगृहित से $\Delta AEB \cong \Delta ADC$

उदाहरण 3 : चतुर्भुज ACBD में AC = AD और AB, $\angle A$ को समद्विभाजन करता है। सिद्ध कीजिए डेल्टा ABC त्रिभुज ABD से सर्वांगसम है।



हल : त्रिभुज ABC और त्रिभुज ABD में हमें ज्ञात है

AC = AD (दत्त)

$\angle CAB = \angle DAB$ (AB, $\angle A$ को समद्विभाजन करता है)

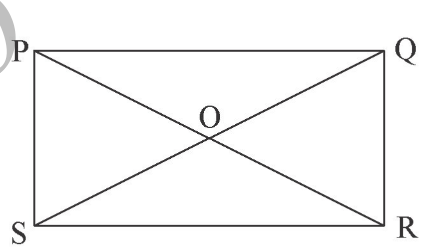
AB = AB (सामान्य भुजा)

अतः $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

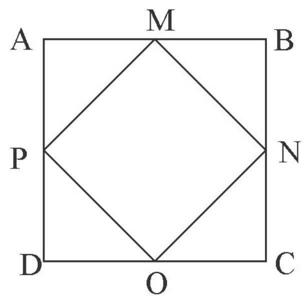
(क्या आप को ज्ञात होता है कि BA, $\angle CBD$ का समद्विभाजित करता है।)

अभ्यास 11.2

1. पार्श्व आकृति में PQRS एक आयत है। विकर्णों से बनें सर्वांगसम त्रिभुज पहचानिए।



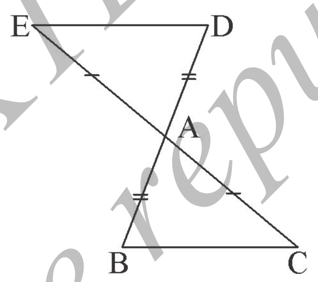
2. आकृति में ABCD एक वर्ग है, M, N, O और P क्रमशः AB, BC, CD और DA के मध्यबिन्दुऐं हैं। सर्वांगसम त्रिभुजों को पहचानिए।



3. त्रिभुज ABC में, AB = AC है। AB पर बिन्दु E और AC पर बिन्दु D ऐसें है ताकि AE = AD.

   सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज BCD और Δ CBE सर्वांगसम है।

4. पार्श्व आकृति में BA और CA भुजाओं का आगे बढाये गए हैं ताकि BA=AD और CA = AE है। सिद्ध कीजिए DE‖BC.

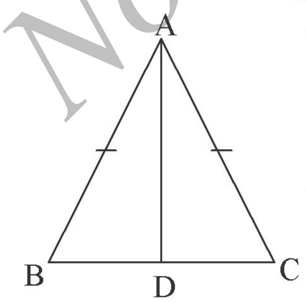


(सुझाव : एकांतर कोणों की कल्पना का उपयोग कीजिए)

SAS अभिगृहित के परिणाम

अभी आपने SAS शर्त का उपयोगकर के त्रिभुजों की तुलना कैसे करना सीखा है। इस तुलना से त्रिभुजों के गुणधर्म के कुछ रोचक परिणाम प्राप्त करते है। उन में से कुछ जान लेते हैं।

प्रमेय 1 : एक त्रिभुज में, समान भुजाओं के अभिमुख कोण समान होते हैं।



दत्त : : मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। जिसमें AB = AC है।

अब, AB के अभिमुख कोण $\angle C$ है और AC के अभिमुख कोण $\angle B$.

है हमें साध्य : $\angle C = \angle B$.

रचना : $\angle A$ का समद्विभाजक खींचिए। मान लीजिए वह BC को D में प्रतिच्छेद करता है। आईए त्रिभुज ABD और त्रिभुज ACD की तुलना करें

उपपत्ति :

कथन	**कारण**
AB = AC	दत्त
AD = AD	यसामान्य भुजा
$\angle BAD = \angle CAD$	रचना द्वारा

SAS अभिगृहित के अनुसार $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ अतः $\angle ABC = \angle ACB$ क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के अनुरुप कोण है। इसतरह प्रमेय सिद्ध होता है।

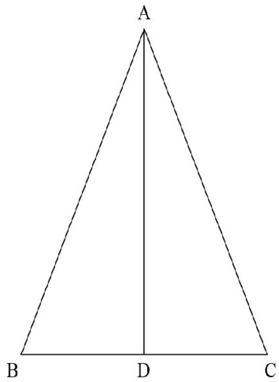
उपप्रमेय 1 : एक समद्विबाहु त्रिभुज में, शीर्षकोण का समद्विभाजक आधार को लंब होता है।

दत्त : ABC एक त्रिभुज है जिसका शीर्ष कोण $\angle A$ है।

रचना : A से BC तक कोण समाद्विभाजक AD खींचिए (पिछले प्रमेय की आकृति देखिए)

साध्य : AD, BC का लंबद्विभाजक है।

उसीतरह हमें सिद्ध करना है BD = DC, और $\angle ADB = \angle ADC = 90°$



$\Delta ADB \cong \Delta ADC$ (प्रमेय 1 से)

DB = DC और $\angle ADB = \angle ADC$

लेकिन $\angle ADB + \angle ADC = 180°$ (रैखिक कोणों की जोडी)

$\Rightarrow \angle ADB + \angle ADB = 180°$

$\Rightarrow 2\angle ADB = 180°$

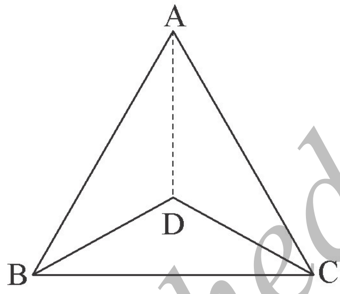
$\Rightarrow \angle ADB = \dfrac{180°}{2} = 90°$

$\Rightarrow \angle ADC = 180° - \angle ADB = 90°$

इसतरह उपपत्ति पूर्ण होती है।

अब आप सोचते होंगे क्या इसका विलोम सत्य है। अर्थात एक त्रिभुज में समान कोणों के अभिमुख भुजाऐं समान होती हैं। यह भी सत्य है परन्तु इसे सर्वांगसमता की अलग शर्ते उपयोग करना है, जिसे हमें आगे अध्ययन करेंगें।

उदाहरण 4 : आकृति में AB = AC और DB = DC, सिद्ध कीजिए $\angle ABD = \angle ACD$



हल : Δ ABC में हमें ज्ञात है AB = AC

$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$

(समान भुजाओं के अभिमुख कोण)

पुन Δ DBC हमें ज्ञात है DB = BC (दत्त)

$\Rightarrow \angle DBC = \angle DCB$

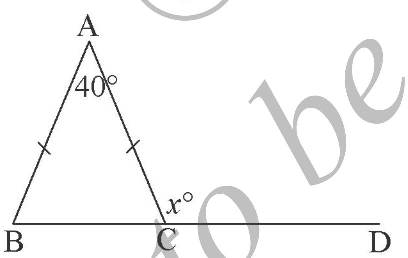
(समान भुजाओं के अभिमुख कोण) हमें प्राप्त हैं

$\angle ABC - \angle DBC = \angle ACB - \angle DCB$

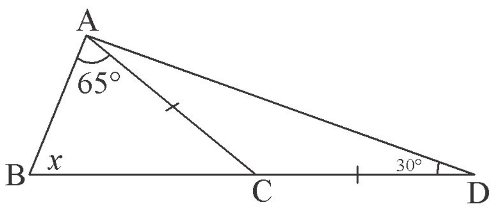
इससे प्राप्त होता : $\angle ABD = \angle ACD$

अभ्यास 11.3

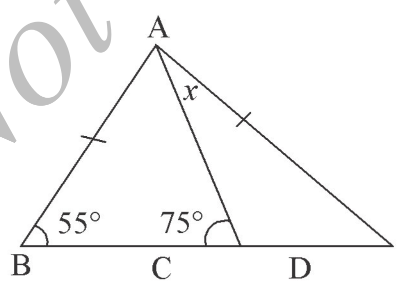
1. ΔABC में AB = AC, और $\angle A = 50°$ हो तो $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए.
2. ΔABC में AB = AC, और $\angle B = 64°$, हो तो $\angle C$ ज्ञात कीजिए.
3. निम्न आकृतियों में 'x' का मूल्य ज्ञात कीजिए.



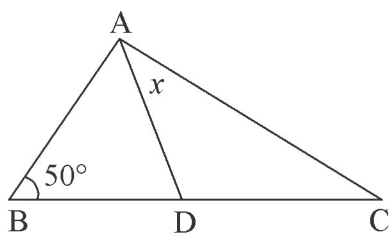
AB = AC



AC = CD



AB = AC

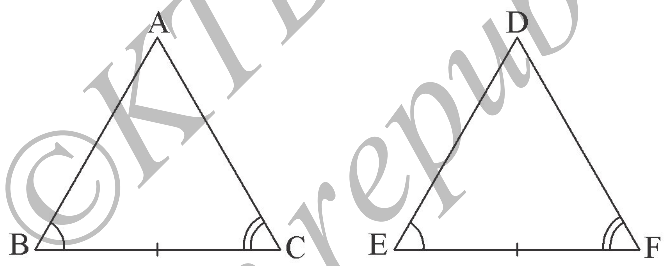


BD = DC = AD

4. मान लीजिए ABC एक समबाहु त्रिभुज है। उसके आधार BC को इसतरह D तक बढाया गया BC = CD (i) $\angle ACD$ और (ii) $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।
5. सिद्ध कीजिए कि समद्विबाहु त्रिभुज के आधार के शीर्षों से अभिमुख भुजाओं तक खींचे लंब समान होते है।
6. सिद्ध कीजिए कि $\triangle$ ABC समद्विबाहु त्रिभुज है यदि A से AD तक खींची ऊँचाई BC को समद्विभाजित करती है।
7. मान लीजिए एक त्रिभुज समबाहु है। सिद्ध कीजिए कि वह समकोणीय है;

सर्वांगसमता की ASA आभिगृहित (कोण – भुजा – कोण अभिगृहित)

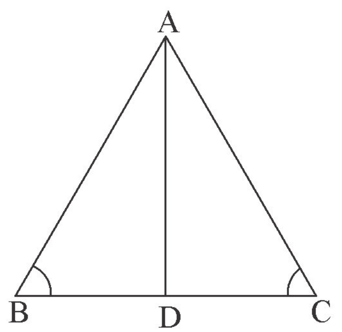
एक त्रिभुज के दो कोण और सामान्य भुजा दूसरे त्रिभुज के तदनूरूपी दो कोण और सामान्य भुजा से समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम कहलते हैं।



दो त्रिभुज ABC और DEF ऐसे दिये गये हैं कि $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ और BC = EF, हो ASA अभिगृहित के अनुसार $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

इसके पूर्व आपने देखा है कि एक त्रिभुज में समान भुजाओं के अभिमुख कोण समान होते हैं। हम इस परिणाम का विलोम सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 2 : एक त्रिभुज में दो कोण समान है, तो उनकी अभिमुख भुजाऐं समान होते हैं। (प्रमेय 1 का विलोम)



दत्त : ABC त्रिभुज में $\angle B = \angle C$

साध्य : AC = AB

रचना : $AD \perp BC$ खींचिए

तो $\angle ADB = \angle ADC = 90°$ हमें दिया हुआ कि

उपपत्ति :

$\angle DBA = \angle DCA$

त्रिभुज ADB और त्रिभुज ADC पर विचार

कीजिए : हमें ज्ञात है कि

$\angle ADB + \angle DBA + \angle BAD = 90°$

$= \angle ADC + \angle DCA + \angle CAD$

अर्थात् $\angle BAD + \angle CAD$ (क्यों)

त्रिभुज ADB और त्रिभुज ADC पर विचार कीजिए हमें ज्ञात है :

$\angle BAD + \angle CAD$ (सिद्ध)

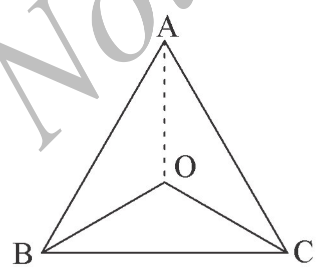
$\angle ADB + \angle ADC$ (दोनों लंब कोण है)

AD = AD

$\Delta ADB \cong \Delta ADC$ शर्त के अनुसार इसतरह प्रमेत 1 के विलोम की उपपत्ति पूर्ण होती है।

उदाहरण 5 : त्रिभुज ABC में AB=AC और कोण B और कोण C के समद्विभाजक 'O' में प्रतिच्छेद करते है। सिद्ध कीजिए BO = CO तथा AO, कोण $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

हल : समान भुजाओं के अभिमुख कोण समान होते हैं



तो AB = AC.

$\angle C = \angle B$

$\frac{\angle B}{2} = \frac{\angle C}{2}$

क्योंकि BO और CO, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक होने से

$$\angle ABO = \frac{\angle B}{2} \text{ और } \angle ACO = \frac{\angle C}{2}$$

अतः $\angle ABO = \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle C}{2} = \angle ACO$

ΔBCO पर विचार कीजिए

$\angle OBC = \angle OCB$ (क्यों)

$\Rightarrow$ BO = CO (प्रमेय 2)

अन्त में, त्रिभुज ABO और त्रिभुज ACO पर विचार कीजिए :

BA = CA (दत्त)

BO = CO (सिद्ध)

$\angle ABO = \angle ACO$ (सिद्ध)

SAS अभिगृहित के अनुसार

$\Delta ABO \cong \Delta ACO$

$\Rightarrow \angle BAO = \angle CAO \Rightarrow$ AO, $\angle A$ का समद्विभाजन करता है।

उदाहरण 6 : ABCD चतुर्भुज का विकर्ण AC कोण $\angle A$ और $\angle C$ समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए AB = AD और CB = CD.

हल : क्योंकि विकर्ण AC, कोण $\angle A$ और $\angle C$ का समद्विभाजन करता है, हमें ज्ञात होता है कि

$\angle BAC = \angle DAC$ (दत्त)

$\angle BCA = \angle DCA$ (दत्त)

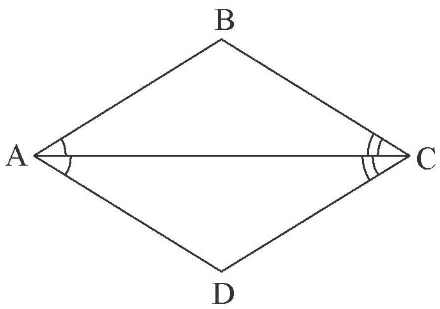
AC = AC (सामान्य भुजा)

इसलिए, ASA अभिगृहित के अनुसार

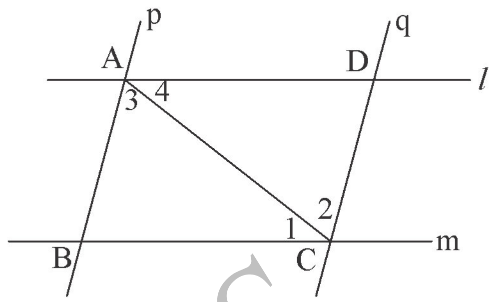
$\Delta BAC \cong \Delta DAC$

BA = AD और CB = CD

सर्वांगसम त्रिभुजों के अनुरुप भाग



उदाहरण 7 : दो समांतर रेखाऐं l और m को और दो समांतर रेखाओं की जोडी P और Q आकृति में दिखाये जैसे प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए त्रिभुज ABC और त्रिभुज CDA सर्वांगसम हैं।



हल : क्योंकि l और m समांतर रेखाऐं हैं और AC एक तिर्यक रेखा है।

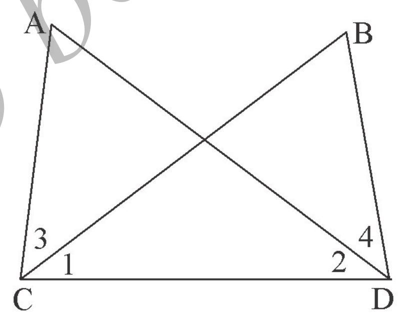
$\lfloor 1 = \lfloor 4$ इसतरह तिर्यक रेखा AC समांतर रेखा p और q को प्रतिच्छेद करती हैं ताकि $\lfloor 2 = \lfloor 3$ त्रिभुज ABC और CDA में हमें ज्ञात है

$\lfloor 1 = \lfloor 4$ (सिद्ध)

$\lfloor 2 = \lfloor 3$ (सिद्ध)

AC = AC (सामान्य भुजा) तो ASA अभिगृहित के अनुसार $\Delta ABC \cong \Delta CAD$

उदाहरण 8 : आकृति में, $\lfloor \underline{BCD} = \lfloor \underline{ADC}$ और $\lfloor \underline{ACD} = \lfloor \underline{BDA}$ सिद्ध कीजिए AD = BC और $\lfloor A = \lfloor B$.



हल : हमें ज्ञात है $\lfloor 1 = \lfloor 2$ और $\lfloor 3 = \lfloor 4$

$\Rightarrow \lfloor 1 + \lfloor 3 = \lfloor 2 + \lfloor 4$

$\Rightarrow \lfloor \underline{ACD} = \lfloor \underline{BDC}$

इसतरह, त्रिभुज ACD और BDC में हमें ज्ञात है

$\underline{|ADC} = \underline{|BCD}$ (दत्त)

CD = CD (सामान्य)

$\underline{|ACD} = \underline{|BDC}$ (सिद्ध)

$\Delta ACD \cong \Delta BDC$

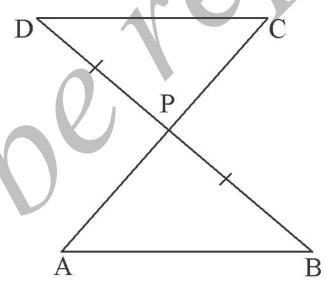
अतः AD = BC और $\underline{|A} = \underline{|B}$

सोचिए!

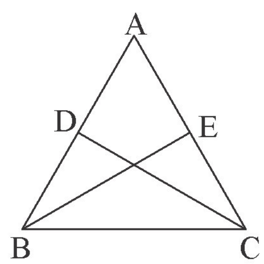
हमने ASA शर्त को एक अभिगृहित के रुप में लिया है। परन्तु हम इसे SAS अभिगृहित के आधार पर प्रमेय के रुप सिद्ध कर सकते हैं। उपपत्ति लिखने का प्रयत्न कीजिए। निगमनात्मक ज्यामिति में हमें केवल कनिष्ठ अभिगृहित उपयोग करना है तथा इन्हीं के आधार पर यथा संभव आधिक की रचना करना चाहिए। हम ASA को एक अभिगृहित मानकर SAS शर्त को प्रमेय के रुप में सिद्ध कर सकते हैं।

अभ्यास 11.4

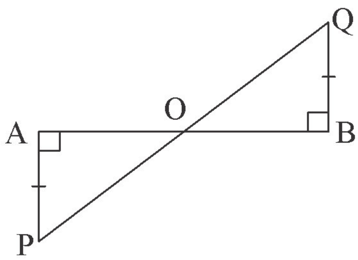
1. दत्त चित्र में, यदि AB || DC और P, BD की मध्यबिन्दु है। सिद्ध कीजिए P, AC की भी मध्यबिन्दु है।



2. पार्श्व आकृति में CD और BE समद्विबाहु त्रिभुज ABC की ऊँचाईयाँ है जिसमें AC = AB सिद्ध कीजिए कि AE = AD.



3. आकृति में AP और BQ रेखाखण्ड AB के लिए लंब है और AP = BQ. सिद्ध कीजिए AB की तथा PQ की मध्यबिन्दु है।



4. मान लीजिए ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC और BD और CE क्रमशः |B और |C के समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए BD = CE.

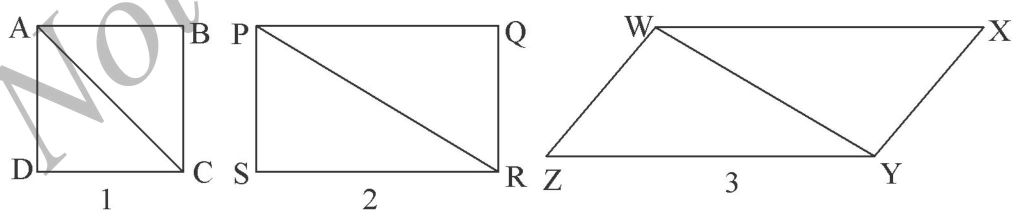
5. मानलीजिए ABC एक समकोणीय त्रिभुज है। सिद्ध कीजिए वह समबाहु त्रिभुज होता है। (इसके पूर्व आपने देखा है कि समबाहु त्रिभुज समकोणीय होता है। इसतरह त्रिभुजों की समकोणीय गुण समबाहु से समतुल्य है।)

सर्वांगसमता की अभिगृहित (भुजा – भुजा – भुजा)

त्रिभुजों की सर्वांगसमता की एक और शर्त का अध्ययन करते हैं। यह केवल भुजाओं पर निर्भर है।

यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाऐं दूसरे त्रिभुज के अनुरुप भुजाओं से समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

कार्यकलाप 1: तीन कागज के पन्ने लीजिए : एक को वर्गाकार, दूसरे को आयताकार और तीसरे को समान्तर चतुर्भुज के आकार में लीजिए। (इसके लिए आपको कागज पर समांतर चतुर्भुज खींचकर उसके परिसीमा पर काट लेना होगा) विकर्णों को, आकृति में दिखाये जैसे जोडकर कागजों को विकर्ण के संग काट लीजिए।



प्रत्येक कागज के पन्नों में दो त्रिभुज प्राप्त होते है। प्रत्येक आकृति में प्राप्त एक त्रिभुज, दूसरे त्रिभुज पर ऐसे रखिए ताकि वह पूर्णतः सम्मिलित हो जायें। आपको ध्यान में आऐगा कि प्रत्येक त्रिभुजों की जोडी दूसरे से सर्वांगसम है और प्रत्येक संदर्भ में, एक त्रिभुज की तीन भुजाऐं दूसरे त्रिभुज के अनुरुप भुजाओं से सर्वांगसम है।

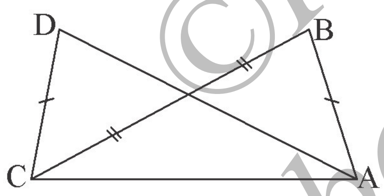
अब, इसके विलोम की और ध्यान कीजिए। यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाऐं, दूसरे त्रिभुज के तीन भुजाओं से समान हो तो, एक त्रिभुज को हम पर ऐसा सकतें ताकि एक, दूसरे से सम्मिलित होता है। सर्वांगसमता की SSS शर्त वास्ताविक है।

सोचिए :

जैसे SSS सर्वांगसमता अभिगृहित है क्या AAA अभिगृहित और SSA अभिगृहित हो सकते हैं।

उदाहरण 9 : आकृति में, दिया है कि AB = CD और AD = BC सिद्ध कीजिए त्रिभुज ADC और त्रिभुज CBA सर्वांगसम हैं।

हल : ADC और CBA त्रिभुजों में हमें ज्ञात है :



AB = CD (दत्त)

AD = BC (दत्त)

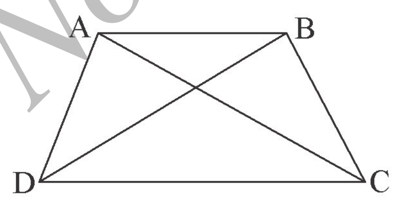
AC = AC (सामान्य भुजा)

$\therefore$ SSS अभिगृहित के अनुसार

$\Delta ADC \cong \Delta CBA$

उदाहरण 10 : आकृति में AD = BC और BD = CA सिद्ध कीजिए $\angle ADB = \angle BCA$ और $\angle DAB = \angle CBA$

हल : ABD और BAC त्रिभुजों में हमें ज्ञात है



AD = BC (दत्त)

AB = AB (सामान्य)

AC = BD (दत्त)

SSS अभिगृहित से

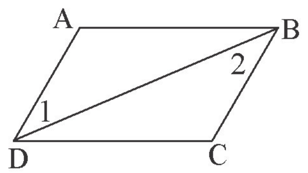
$\Delta ABD \cong \Delta BAC$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है :

$\angle ADB = \angle BCA$ और $\angle DAB = \angle CBA$

उदाहरण 11 : पार्श्व आकृति में AB = CD और AD = BC, सिद्ध कीजिए $\angle 1 = \angle 2$

हल : ABD और CDB त्रिभुजों में



AB = CD (दत्त)

AD = BC (दत्त)

BD = DB (सामान्य भुजा)

इसलिए, $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ ....SSS अभिगृहित से

कोणों की तुलना करने पर $\angle 1 = \angle 2$

(पश्चात में आप देखेंगें कि, दत्त शर्तों में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ताकि $AD \| BC$ और $\angle 1 = \angle 2$ जो तिर्यक रेखा BD से बनें एकांतर कोण है।

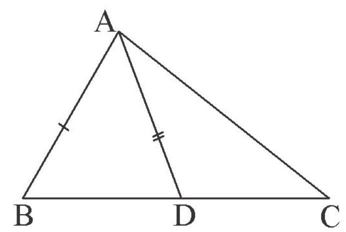
सोचिए : हमने SSS शर्त को एक अभिगृहित माना है। परन्तु यह SAS अभिगृहित का परिणाम है। आप SAS अभिगृहित से SSS प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं।

अभ्यास 11.5

(1) त्रिभुज ABC में, AC = AB और AD ऊचाँई BC को समाद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए $\Delta ADC \cong \Delta ADB$

(2) वर्ग PQRS में विकर्ण 'O' में समद्विभाजित होते हैं। सिद्ध कीजिए $\Delta POQ \cong \Delta QOR \cong \Delta ROS \cong \Delta SOP$

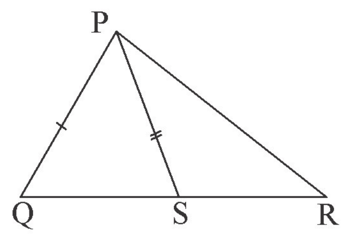
(3) आकृति में त्रिभुज ABC की दो भुजाऐं और माध्यिका AD क्रमशः त्रिभुज PQR की दो भुजा PQ, QR तथा माध्यिका PS से समान है। सिद्ध कीजिए



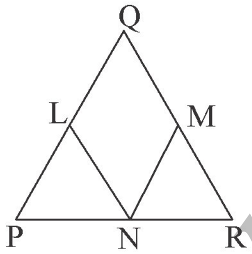
(i) $\Delta ADB \cong \Delta PSQ$

(ii) $\Delta ADC \cong \Delta PSR$

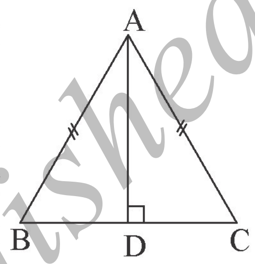
क्या इसका परिणाम यह भी निकलता है कि त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR सर्वांगसम है?



(4) त्रिभुज PQR में, PQ = QR, हैं; L, M, N क्रमशः भुजा PQ, QR और RP के मध्याबिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए LN = MN.

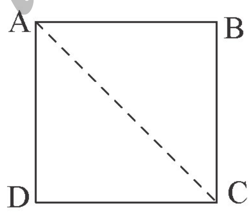


RHS प्रमेय (लंबकोण – विकर्ण – भुजा)

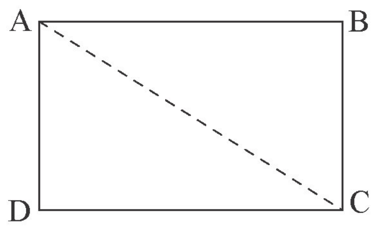


कार्यकलाप 2: कागज पर एक समबाहु त्रिभुज ABC की रचना कीजिए। शीर्ष A से आधार BC तक लंब AD खींचिए।

त्रिभुजा के साथ - साथ कागज काट लीजिए। अभी लंब रेखा के संग मोड लीजिए। आप के ध्यान में आयेगा कि दोनों लंबकोण त्रिभुज एक दूसरे पर बराबर से सम्मिलित होते हैं। इसलिए दो त्रिभुज सर्वांगसम होते है।



कार्यकलाप 3: एक वर्गकार कागज लीजिए। कागज को विकर्ण के साथ-साथ मोडिए। आप देखेंगे कि कागज मोडने पर दो लंबकोण त्रिभुज बनें है और दीनों एक दूसरे पर सम्मिलित होते है।



कार्यकलाप 4: एक आयताकार कागज लीजिए, ताकि एक भुजा की लंबाई पूर्व लिए वर्ग की लंबाई के समान हो और दूसरी भुजा वर्ग की लंबाई से भिन्न हो। एक विकर्ण जोडिए। कागज को विकर्ण के साथ-साथ काट लीजिए ताकि दो लंब कोण त्रिभुज प्राप्त हो।

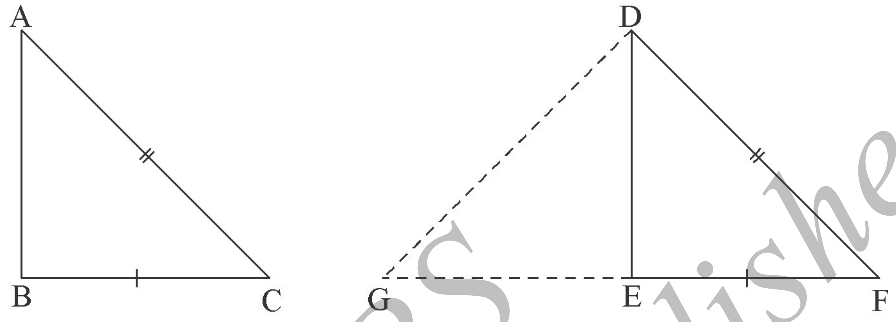
क्या आप देखते है कि यहाँ भी एक त्रिभुज दूसरे पर बराबर से रख सकते है?

अब वर्ग से प्राप्त त्रिभुज को आयताकार कागज से प्राप्त त्रिभुज पर रखिए। आप देखेंगें कि दोनों लंब कोण त्रिभुज होने पर एक अनुरुप भुजाओं की जोडी समान होने पर भी वे एक दूसरे पर रख नहीं सकते।

SAS अभिगृहित के संदर्भ आपने देखा है कि सर्वांगसमता के लिए हमें अनुरुप भुजाऐं तथा बीच के कोण की आवश्यकता होती है। लेकिन लंबकोण त्रिभुज के संदर्भ में थोड़ी सरलता अनुभव करते है जिससे हमें RHS शर्त प्राप्त करते हैं। लंबकोण त्रिभुजों पर निम्न प्रमेय लब्ध हैं।

प्रमेय 3 : दो लंबकोण त्रिभुज सर्वांगसम कहलाते हैं यदि एक त्रिभुज का विकर्ण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के अनुरूप भुजा और विकर्ण समान होते हैं।

(RHS प्रमेय)



दत्त : दो लंबकोण त्रिभुज ABC और DEF एसे हैं

ताकि (i) $\angle B = \angle E = 90°$

(ii) विकर्ण AC = विकर्ण DF और

(iii) AB = DE

साध्थ : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

रचना : FE को G तक बढाईए ताकि

EG = BC और DG जोडिए

Δ ABC और Δ DEG में ध्यान दीजिए

AB = DE (दत्त)

BC = EG (रचना से)

$\angle ABC = \angle DEG$ (प्रत्येक कोण 90° का है)

अत : SAS से $\Delta ABC \cong \Delta DEG$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle DGE$ और AC = DG परन्तु AC = DF (दत्त)

अत : DG = AC = DF

Δ DGF में हमें प्रप्त हुआ DG = DF (सिद्ध)

यह सूचित करता है $\angle G = \angle F$ (समान भुजाऐं के अभिमुख कोण)

त्रिभुज DEF और त्रिभुज DEG में

$\angle G = \angle F$

$\angle DEG = \angle DEF$ (दोनों $90°$ के बराबर है)

इसलिए :

$\angle GDE = 180° - (\angle G + \angle DEG) = 180° - (\angle F + \angle DEF) = \angle FDE$

DEG और DEF त्रिभुजों पर विचार करने पर हमें ज्ञात है:

DG = DF (सिद्ध)

DE = DE (सामान्य)

$\angle GDE = \angle FDE$ (सिद्ध)

अत : SAS अभिगृहित से

$\Delta DEG \cong \Delta DEF$.

लेकिन इसके पूर्व ही हमने सिद्ध किया है

$\Delta ABC \cong \Delta DEG$

अर्थात :

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

सूचना : यहाँ पर हमने एक महत्वपूर्ण परिणाम उपयोग किया है। यदि ABC, DEF और JKL तीन त्रिभुज है ताकि ABC, DEF से सर्वांगसम है DEF, JKL से सर्वांगसम है तो ABC, JKL से सर्वांगसम होगें। यह हुबहु अध्याय 3 के घटक 1 का अभिधारणा 3 है।

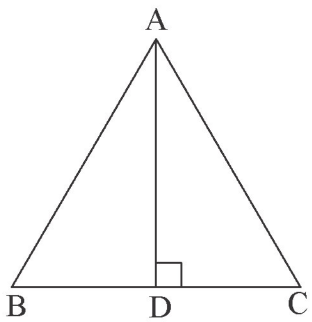
सोचिए!

यदि एक लंबकोण त्रिभुज की भुजाऐं दूसरे त्रिभुज के अनुरुप भुजाओं से समान हो तो क्या हम दो त्रिभुजों को सर्वांगसम सिद्ध कर सकते हैं? (जब कि हमने विकर्ण पर विचार नहीं किया)

उदाहरण 12 : मान लिजिए ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है ताकि AB = AC और AD, 'A' से BC पर खींचा लंबा है। सिद्ध कीजिए

(i) AD, $\angle A$ का समद्विभाजित करता है

(ii) AD, BC का समद्विभाजन करता है।



हल : हमें सिद्ध करना है $\angle BAD = \angle CAD$ और BD = DC

ADB और ADC त्रिभुजों में

AB = AC (दत्त)

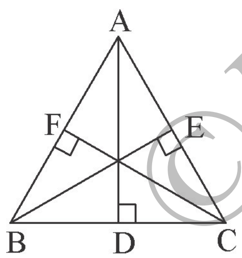
AD = AD (सामान्य भुजा)

इसलिए त्रिभुजों की सर्वांगसमता के RHS से हमें प्राप्त है

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$

अत : $\angle BAD = \angle CAD$ और BD = DC

उदाहरण 13 : मान लीजिए त्रिभुज की AD, BE और CF ऊँचाईयाँ समान है। सिद्ध कीजिए ABC एक समबाहु त्रिभुज है।



हल : BCE और CBF लंबकोण त्रिभुजों में

BC = BC (सामान्य विकर्ण)

BE = CF (दत्त)

अत : BCE और CBF; RHS से सर्वांगसम है

त्रिभुजों की तुलना करने पर $\angle B = \angle C$

यह सूचित करता है AC = AB (समान कोणों के अभिमुख भुजाऐं)

इसीतरह, AD = BE $\Rightarrow$ $\angle B = \angle A$ $\Rightarrow$ AC = BC

मिलाकर, हम कह सकते हैं AB = BC = AC अथवा ABC समबाहु त्रिभुज हैं।

अभ्यास 11.6

(1) मान लीजिए ABCD एक आयत है। RHS प्रमेय उपयोग कर ABC और ADC सर्वांगसम सिद्ध कीजिए।

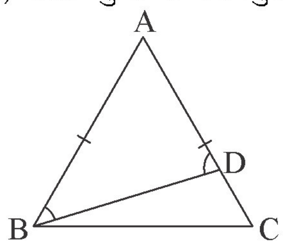
(2) मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है और D, BC की मध्यबिन्दु है। कल्पना कीजिए D से AB और AC तक खींचे लंब समान है। अनुमनित कीजीए सिद्ध कीजिए ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

(3) मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है जिसमें BE और CF क्रमशः AC और AB के लिए लंब है। यदि BE = CF सिद्ध कीजिए ABC त्रिभुज समद्विबाहु है।

कुछ परिणाम :

आपने पूर्व की अवधियों में सीखा है कि समान भुजाओं के अभिमुख कोण समान होते है। और विलोमतः समान कोणों के अभिमुख भुजाऐं भी समान होती हैं। इसलिए यह स्वभाविक प्रश्न है : यदि कोणों के माप असमान है, क्या हम उनके अभिमुख भुजाओं की तुलना कर सकते हैं? क्या हम उन कोणों के बारे में कुछ कह सकते हैं, यदि भुजाऐं असमान हो?

कथन 1 **:** मान लीजिए एक त्रिभुज की भुजायें समान नहीं है। तो लंबी भुजा के अभिमुख कोण, छोटी भुजा के अभिमुख कोण से बडा होता है।



दत्तः ABC एक त्रिभुज है जिसमें $AC > AB$

साध्य : $\angle B > \angle C$

रचना : AC पर एक बिन्दु D लीजिए ताकि $AB = AD$.

(यह $AC > AB$ होने से संभव है)

BD जोडिए $\Delta\, ABD$ में हमें ज्ञात हैं $AB = AD$ (रचना)

$\angle ABD = \angle ADB$ (समान भुजाओं के अभिमुख कोण)

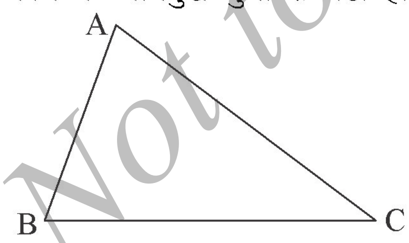
अब, $\angle BDC$, ΔBCD का बाह्यकोण है,

अतः यह अभिमुख अन्तरस्थ कोण $\angle BDC$ से बडा है।

इस तरह हम प्राप्त करते हैं।

$\angle C < \angle BDA = \angle ABD < \angle ABC = \angle B$ इसतरह उपपत्ति पूर्ण होती है।

कथन 2 **:** एक त्रिभुज में, दो कोण असमान हो तो, बडे कोण के अभिमुख भुजा, छोटी कोण के अभिमुख भुजा से बडी होती है।



दत्त : त्रिभुज ABC में $\angle B > \angle C$

साध्य : $AC > AB$

उपपत्ति : ध्यान दीजिए $\angle B > \angle C \Rightarrow AC \neq AB$.

क्योंकि, $AC = AB$ सूचित करता है.

$\angle B = \angle C$ (समान भुजा के अभिमुख कोण समान होते है)

$AC < AB$ अथवा $AC > AB$ यदि $AC < AB$ तो पिछले कथन के अनुसार $\angle B < \angle C$ परन्तु यह दत्त का विपरीत है।

अतः एक ही संभावना है AC > AB

सूचना : यहाँ हम ने टिकॉटमी नियम (law of trichotomy) का उपयोग किया है। a और b दो वास्तविक संख्या दिये जाने पर तो एक ही संभावना हो सकती $a < b$; $a = b$ अथवा $a > b$.

कथन 3 : एक त्रिभुज में, दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा से अधिक होता है।

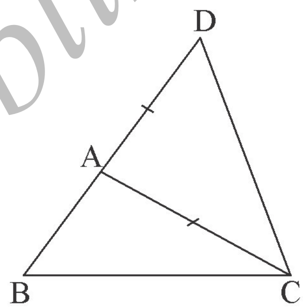
दत्त : त्रिभुज ABC

साध्य : AB + AC > BC

रचना : BA को D तक बढाईए ताकि AD = AC और DC जोडिए

तो,

उपपत्ति :



BD = BA + AD = BA + AC

क्योंकि AD = AC है।

$\angle ADC = \angle ACD$ (समान भुजा के अभिमुख कोण)

इसलिए :

$\angle BCD > \angle ACD = \angle ADC = \angle BDC$

त्रिभुज BCD में हमें प्राप्त है

$\angle BCD > \angle BDC \Rightarrow BD > BC$ (सिद्धांत 2 से)

लेकिन BD = BA + AC

इसतरह, BA + AC > BC इसीतरह हम CA < AB + BC और AB < BC + CA सिद्ध कर सकते हैं।

सूचना : BC < CA + AB, CA < AB + BC और AB < BC + CA असमानताओं को त्रिभुजीय असमानताऐं कहते हैं। AB, BC और CA भुजा के त्रिभुज का अस्तित्व सिद्ध करने के आवश्यक शर्तें हैं।

यह दर्शाता है कि सरल रेखा, दो बिन्दुओं के बीच का सबसे छोटा मार्ग है।

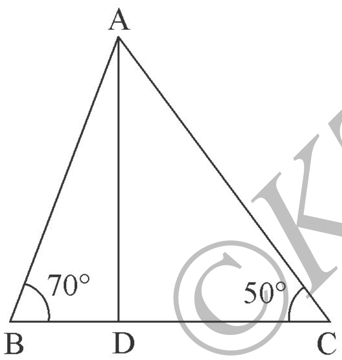
a, b, c संख्याऐं दिये जाने पर, एक त्रिभुज जिसकी भुजाऐं a, b, c हो उस त्रिभुज का अस्तित्व सिद्ध करने आवश्यक शर्ते हैं, $a < b + c$, $b < c + a$ और $c < a + b$ इन्हीं शर्तो के आधार पर त्रिभुजों की रचना कर सकते हैं।

उदाहरण 14 : सिद्ध कीजिए कि, लंबकोण शेष भुजाएँ से विकर्ण ज्यादा है।

हल : मान लीजिए ABC एक लंब कोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 90°$ तो AC विकर्ण है। ध्यान दीजिए $\angle BAC < \angle B$ और $\angle BCA < \angle B$ अभी $\angle BAC$ की अभिमुख भुजा BC है और $\angle BCA$ की अभिमुख भुजा AB है।

अतः कथन 2 से, BC < AC और AB < AC है।

उदाहरण 15 : पार्श्व आकृति में, $\angle B = 70°$, $\angle C = 50°$ और AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए AB > AD > CD.



हल : ध्यान दीजिए :

$$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$$

$$= 180° - (70 + 50) = 180° - 120° = 60°$$

अतः $\angle BAD = \angle DAC = 30°$

त्रिभुज BAD पर विचार कीजिए। हम $\angle ADB$ का माप परिकलन कर सकते हैं

$$\angle ADB = 180° - (70° + 30°) = 80° > \angle ABD$$

अतः AB > AD, कथन 2 के अनुसार त्रिभुज ADC में

$$\angle DAC = 30° < 50° = \angle ACD$$

पुन : कथन 2 से, CD < AD.

अभ्यास 11.7

(1) त्रिभुज ABC में $\angle B = 28°$ आर $\angle C = 56°$ है। सबसे लंबी और सबसे छोटी भुजा ज्ञात कीजिए।

(2) त्रिभुज ABC में, AB = 4 सें.मी, BC = 5.6 सें.मी और CA = 7.6 सें.मी हैं। त्रिभुज के कोणों को आरोहण क्रम में लिखिए।

(3) मान लीजिए ABC त्रिभुज में $\angle B = 70°$ और $\angle C = 40°$ मान लीजिए 'D' BC पर कोई बिन्दु ताकि AB = AD सिद्ध कीजिए : AB > CD.

(4) मान लीजिए ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AD सबसे लंबी भुजा है और BC सबसे छोटी भुजा है। सिद्ध कीजिए $\angle A < \angle C$ (सुझाव AC मिलाईए)

(5) मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है और 'P' उसमें एक अन्तस्थ बिन्दु है। सिद्ध कीजिए: $AB + BC + CA < 2(PA + PB + PC)$

शब्दावली :

सर्वांगसमता : दो ज्यामितीय आकृतियाँ आकार और विस्तार में तद्‌रुप होते है।

एक के ऊपर एक रखना (Super Pose) : एक आकृति पूर्णतः दूसरे पर सम्मिलित हो।

अनुरुप भुजाऐं : दो त्रिभुजों की तुलना करते समय हम त्रिभुज की भुजाओं को क्रम से सूचित करते हैं।

अनुरुप कोण : कोणों को क्रम से सूचित करना

SAS अभिगृहित : भुजा - कोण - भुजा अभिगृहित

ASA अभिगृहित : कोण - भुजा - कोण अभिगृहित

SSS अभिगृहित : भुजा - भुजा - भुजा अभिगृहित

RHS प्रमेय : लंबकोण - बिकर्ण - भुजा प्रमेय

त्रिभुजीय असमानता : त्रिभुज की एक भुजा अन्य दो भुजा के जोड से छोटी होती है।

याद रखिए :

- दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि हम उन्हें एक दूसरे बराबर से रख सकते हैं
- यदि एक त्रिभुज की दो भुजाऐं और बीच का कोण दूसरे त्रिभुज के तदनरूपी भुजा और कोण से समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SAS)
- दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण और सामान्य भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कोण और भुजा से समान हो। (ASA)
- दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के तीन भुजाऐं क्रमशः दूसरे त्रिभुज के भुजाओं से समान हो (SSS)
- दो लंबकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते है यदि उनमें कर्ण समान हो और कर्ण के अलावा एक त्रिभुज की अन्य भुजा दूसरे त्रिभुज के भुजा के समान हो (RHS)
- त्रिभुज की एक भुजा अन्य दो भुजाओं के जोड से छोटी होती है। (त्रिभुजीय असमानता)

उत्तर

अभ्यास 11.3

1. $\underline{|B} = \underline{|C} = 65°$ 2. 58° 3. (i) 110° (ii) 55° (iii) 20° (iv) 40°

4. $\underline{|ACD}$ = 120° $\underline{|ADC} = 30°$

अभ्यास 11.7

1. BC सबसे बडी भुजा और CA सबसे छोटी भुजा है।. 2. $\angle C < \angle A < \angle B$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

घटक – 12
त्रिभुजों की रचना

इस अध्याय के अध्ययन के बाद, आप सीखेंगे कि :

- एक त्रिभुज की रचना कैसे की जाती है :
- जब तीन भुजाएँ दी जाती हैं
- जब दो भुजाएँ तथा उनके बीच का अंतस्थ कोण दिया जाता है,
- जब दो कोण तथा उनके बीच की अंतस्थ भुजा दी जाती है,
- जब दो भुजाएँ तथा तीसरी भुजा पर लम्बोन्नति दी जाती है,
- एक भुजा तथा लम्बकोण त्रिभुज का विकर्ण दिया जाता है,
- एक समद्विबाहु त्रिभुज जिसका आधार और लम्बोन्नति दी जाती है,
- परिमाप और लम्बकोण त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात दिया जाता है,
- जिसका परिमाप तथा आधार कोण दिये जाते हैं।
- जब लम्बकोण त्रिभुज की आधार भुजा, अन्य दो भुजाओं का योगफल और एक आधारकोण दिये जाते हैं।
- जब आधारभुजा, अन्य दो भुजाओं का अंतर और लम्बकोण त्रिभुज का एक आधार कोण दिये जाते हैं।

परिचय

पूर्व कक्षाओं में अपने सीख लिया है कि किसी त्रिभुज की तीन भुजाएँ तथा तीन कोण नामक छः अवयव होते हैं। आप आश्चर्य चकित होंगे, कि प्रायः त्रिभुज की रचना करने के लिए त्रिभुज के सभी अवयव आवश्यक होंगे। अगर सभी अवयव ज्ञात हैं, तो अच्छी बात है। लेकिन अनेक प्रायोगिक स्थितियों में सभी अवयव ज्ञात नहीं भी हो सकते हैं। यदि केवल दो अवयव ज्ञात हैं, तो आप त्रिभुज की रचना करने की आशा कर नहीं सकते हैं। अगर इनमें से तीन अवयव ज्ञात हैं, तब भी आप त्रिभुज की रचना कर नहीं पायेंगे। उदाहरण के लिए एक त्रिभुज की दो भुजाएँ (अंतस्थ कोण नहीं देने पर) दी जाएँ तो इस त्रिभुज की रचना करना साध्य नहीं हो सकता है।

अब हम अनेक संदर्भ लेंगे जब हम त्रिभुज की रचना करने में समर्थ होंगे। बेशक इन मूल छः अवयवों के साथ कई अन्य तत्व जैसे मध्यिका, कोणद्विभाजक ऊंचाइयाँ इत्यादि को भी सम्मिलित कर सकते हैं। इन अतिरिक्त अवयवों तथा त्रिभुज के मूल छः अवयवों के विभिन्न संयोजन से आप त्रिभुज की रचना कर सकते हैं। कम से कम अंशों के उपयोग से त्रिभुज की रचना करना एक अभिरुचि पूर्ण एवम् स्पर्धात्मक कार्य ही है।

जब तीनों भुजाओं का माप दिया जाता है।

उदाहरण 1 : त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेंमी, BC = 4.3 सें.मी और AC = 4 सें.मी.

हल : रचनाकार्य में हम अनेक सोपानों का अनुसरण करते हैं।

(1) पटरी की सहायता से पर्याप्त लम्बा रेखाखण्ड खींचिए।

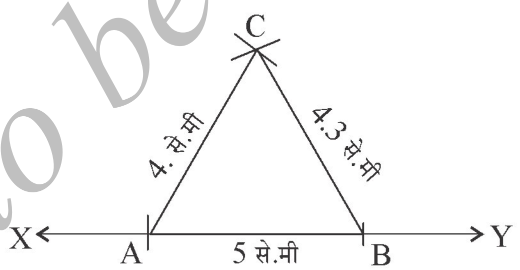
(2) उस पर A और B बिंदुओं को अंकित कीजिए कि AB = 5 सें.मी हो।

(3) A को केंद्र मानकर 4 सें.मी त्रिज्या के प्रकार से एक चाप खींचिए (आकृति देखें)

(4) B को केंद्र मानकर 4.3 सें.मी त्रिज्या के प्रकार से एक और चाप खींचें जो 'C' पर पहलीचाप को प्रतिच्छेदित करे।

(5) AC और BC को मिलाइए।

अब ABC यह इच्छित त्रिभुज है।



सोचिये!

4.3 सें.मी त्रिज्या से B को केंद्र मानकर खींची हुई चाप, यदि 4 सें.मी त्रिज्या से A को केंद्र मानकर खींची हुई चाप C पर प्रतिच्छेदित करती है, जब कि AB = 5 सें.मी हो। इस त्रिभुज का सम्बंध विषमबाहु त्रिभुज से क्या आप मान सकते हैं?

अभ्यास 12.1

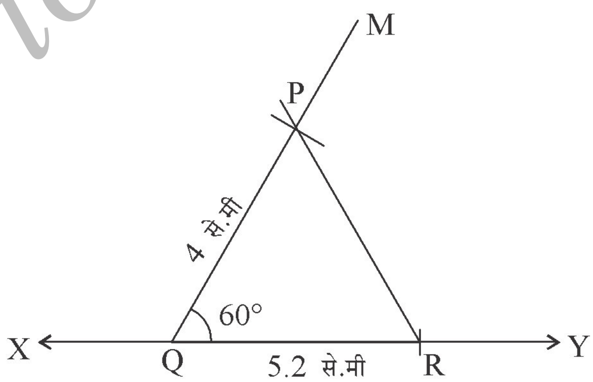
1) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सें.मी, BC = 4.6 सें.मी और AC = 3.7 सें.मी.
2) एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा 4.8 सें.मी है।
3) त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें PQ = 5.6 सें.मी, PR = 7 सें.मी और QR = 4.5 सें.मी.
4) त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए जिसमें XY = 7.8 सें.मी, YZ = 4.5 सें.मी और YZ = 4.5 सें.मी.
5) एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका परिमाप 12 सें.मी हो और भुजाओं का अनुपात 3:4:5 है।

जब दो भुजाओं का माप और उनके बीच का अंतस्थ कोण दिया जाता है।

उदाहरण 2 : त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिस में PQ = 4 सें.मी, QR = 5.2 सें.मी और $\angle Q = 60^\circ$

हल : रचना के सोपान।

1) पटरी की उपयोगिता से पर्याप्त लम्बा रेखाखण्ड खींचिए।
2) उस पर Q और R बिंदुओं को अंकित करें कि QR = 5.2 सें.मी. हो।
3) 'Q' से पर्याप्त लम्बा QM रेखाखण्ड खींचें, कि $\angle MQR = 60^\circ$ (कोणमापी का उपयोग करें)
4) Q को केंद्र मानकर 4 सें.मी त्रिज्या से QM, के P बिंदु पर चाप खींचिए। PR मिलाइए। अब इच्छित PQR त्रिभुज की रचना हो जाती है।



सोचिये!

कोणमापी के उपयोग के बिना क्या आप रेखाखण्ड QM खींच सकेंगे, कि $\angle MQR = 60°$ हो?

अभ्यास 12.2

1) ABC त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें AB = 4.5 सें.मी, AC = 5.5 सें.मी और $\angle BAC = 75°$

2) PQR त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें PQ = 5.4 सें.मी, QR = 5.5 सें.मी, और $\angle PQR = 55°$

3) त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए जिसमें XY = 5 सें.मी, YZ = 5.5 सें.मी और $\angle XYZ = 100°$

4) त्रिभुज LMN की रचना कीजिए जिसमें LM = 7.8 सें.मी, MN = 6.3 सें.मी और $\angle LMN = 45°$

जब दो कोण और उनके बीच की अंतस्थ भुजा का माप दिया जाता है।

उदाहरण 3 : त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए जिसमें XY = 4.5 सें.मी, $\angle X = 100°$ और $\angle Y = 50°$

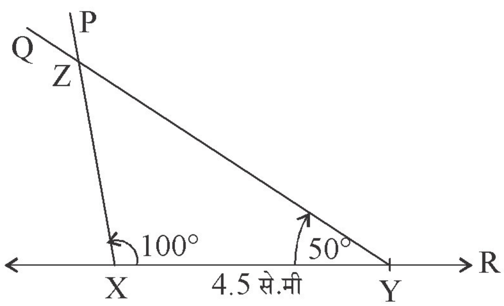
हल : रचना के सोपान।

1) पटरी से पर्याप्त लम्बा रेखाखण्ड खींचिए।

2) उसपर X और Y बिंदुओं को अंकित कीजिए, कि XY = 4.5 सें.मी हो।

3) रेखाखण्ड XP की रचना कीजिए कि $\angle PXY = 100°$ एक और रेखाखण्ड YQ की रचना कीजिए कि $\angle XQY = 50°$

4) XP और YQ को बढाएँ कि वे Z पर प्रतिच्छेदित हों। अब XYZ इच्छित त्रिभुज की रचना हो गई।



सोचिये!

मान लीजिए, दिया है कि XY = 4.5 सें.मी, $\angle x = 100^\circ$ और Y = 80° हो। क्या इस त्रिभुज की रचना आप कर सकेंगे? यह रचना कहाँ पर टूटजाती है, और क्यों?

अभ्यास 12.3

(1) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 6.5 सें.मी, $\angle A = 45^\circ$ और $\angle B = 60^\circ$

(2) त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें QR = 4.8 सें.मी, $\angle Q = 45^\circ$ और $\angle R = 55^\circ$

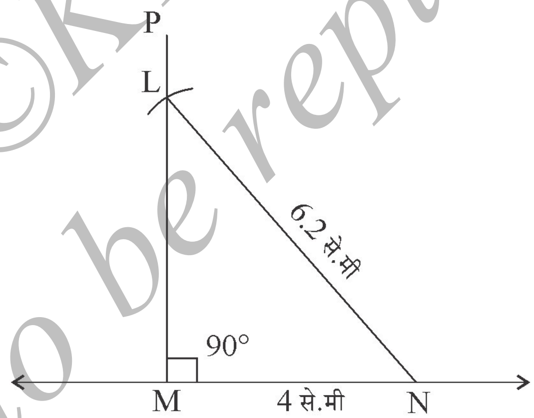
(3) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 5.2 सें.मी, $\angle B = 35^\circ$ और $\angle C = 80^\circ$

(4) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 6 सें.मी, $\angle B = 30^\circ$ और $\angle C = 125^\circ$

लम्बकोण त्रिभुज की रचना करना जिसमें एक भुजा और विकर्ण का माप दिया जाता है।

उदाहरण 4 : LMN त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसमें $\angle M = 90^\circ$, MN = 4 सें.मी और LN = 6.2 सें.मी.

हल : रचना के सोपान।



(1) 4 सें.मी लम्बे MN रेखाखण्ड खींचिये।

(2) पर्याप्त लम्बे MP रेखाखण्ड खींचिये कि $\angle NMP = 90^\circ$ हो।

(3) N को केंद्र मानकर 6.2 सें.मी की त्रिज्या से एक चाप खींचिये कि MP को L पर खंडित करें। NL मिलाइए।

सोचिए!

6.2 सें.मी. की त्रिज्या से N को केंद्र मानकर चाप खींचने पर वह रेखाखण्ड MP को विखण्डित करती है। कथन का कौनसा अंश इसे निश्चित करता है?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

अभ्यास 12.4

(1) लम्बकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle B = 90°$, AB = 5 सें.मी और AC = 7 सें.मी।

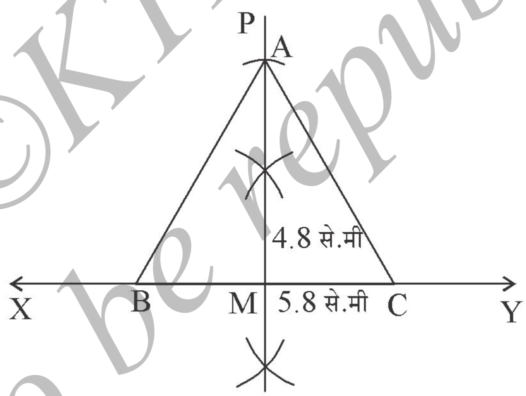
(2) लम्बकोण त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें $\angle R = 90°$, PQ = 4 सें.मी और QR = 3 सें.मी।

(3) लम्बकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $\angle B = 90°$, BC = 4 सें.मी और AC = 5 सें.मी।

समद्विबाहु त्रिभुज की रचना करना जिसका आधार और तत्सम्बंधी लम्बोन्नति दी जाती है।

उदाहरण 5 : ABC समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसमें आधार BC = 5.8 सें.मी, और A से BC पर लम्बोन्नति 4.8 सें.मी हो।

हल : रचना के सोपान।



(1) 5.8 सें.मी लम्बे BC रेखाखण्ड खींचिए।

(2) BC का लम्ब समद्विभाजक MP की रचना कीजिए।

(3) M को केंद्र मानकर 4.8 त्रिज्या से एक चाप खींचिए, जिससे MP, A पर विखंडित हो जाता है। AB और AC मिलाइए।

अब इच्छित त्रिभुज ABC की रचना हो जाती है।

सोचिए!

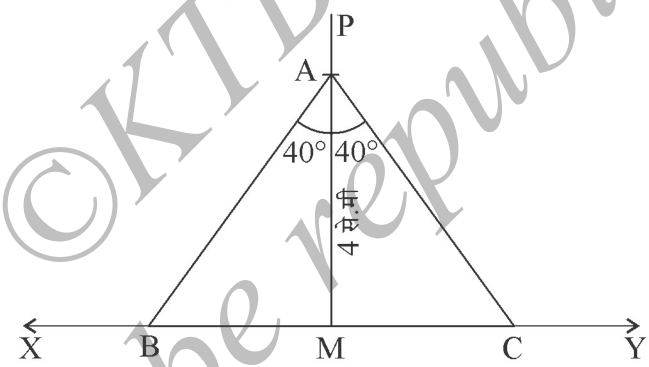
त्रिभुज का कौन सा अंश परिणामी है जो त्रिभुज ABC को इच्छित त्रिभुज के रुप में प्रतिपादित करता है।

अभ्यास 12.5

1) समद्विबाहु त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें आधार BC = 6.5 सें.मी और BC पर A से लम्बोन्नति 4 सें.मी है।
2) समाद्विबाहु त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए, जिसमें आधार YZ = 5.8 सें.मी और YZ पर X से लम्बोन्नति 8 सें.मी है।
3) समद्विबाहु त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें आधार PQ = 7.2 सें.मी और R से PQ पर लम्बोन्नति 5 सें.मी है।

समद्विबाहु त्रिभुज की रचना करना जब उसकी लम्बोन्नति और शीर्षकोण दिया जाता है।

उदाहरण 6 : एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी लम्बोन्नति 4 सें.मी और कोण 80° दिया जाता है।



हल : रचना के सोपान।

(1) XY रेखाखण्ड खींचिए।

(2) XY पर M बिंदु को लेकर $MP \perp XY$ खींचिए।

(3) M को केंद्र मानकर 4 सें.मी की त्रिज्या लेकर MP के A पर चाप खींचिए।

(4) XY पर B और C पाने के लिए $\underline{|MAB} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$ और $\underline{|MAC} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$ की रचना कीजिए अब ABC इच्छित त्रिभुज है।

सोचिए!

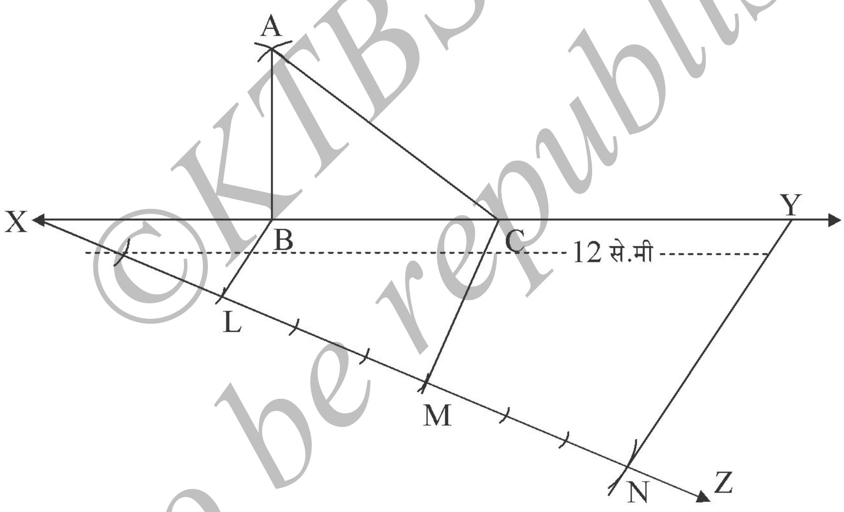
ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज क्यों है? त्रिभुज पर परिणामी अंश कौन सा है, जिससे ABC इच्छित त्रिभुज के रूप में निश्चित होता है?

अभ्यास 12.6

1) एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी लम्बोन्नति 4.5 सें.मी और शीर्षकोण 70° है।
2) एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी लम्बोन्नति 6.6 सें.मी और शीर्षकोण 60° है।
3) एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी लम्बोन्नति 5 सें.मी हो तथा शीर्षकोण 90° हो।

एक त्रिभुज की रचना करना जब उसकी परिमिति और भुजाओं का अनुपात दिया जाता है।

उदाहरण 7 : ABC त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका परिमाप 12 सें.मी और भुजाओं का अनुपात 2 : 3 : 4 है।



हल : रचना के सोपान

(1) XY = 12 सें.मी लम्बा रेखाखण्ड खींचिए।

(2) निम्न भाग में XY के साथ एक लघुकोण बनाने के लिए XZ खींचिए।

(3) X से (2 + 3 + 4) = 9 बिंदुओंको XZ पर समान दूरी रखते हुए अंकित कीजिए।

(4) XY पर L,M, N अंकित कीजिए कि XL = 2 विभग, LM = 3 विभग और MN = 4 विभाग हों।

(5) NY जोडिए। L और M से होते हुए, LB||NY और MC||NY हो कि XY को क्रमशः B और C में विखंडित करें।

(6) B को केंद्र मानकर BX के बराबर और C को केंद्र मानकर CY के बराबर त्रिज्याओं से क्रमशः चापों के द्वारा प्रतिच्छेदक बिंदु A को प्राप्त करें।

(7) AB और AC को मिलाइए।

अब इच्छित त्रिभुज ABC प्राप्त होता है।

सोचिये!

ABC त्रिभुज की भुजाएँ वाँछित अनुपात में कैसे होती हैं? यदि भुजाएँ 2 : 3 : 5 के अनुपात में हो तो क्या त्रिभुज की रचना साध्य होती है?

अभ्यास 12.7

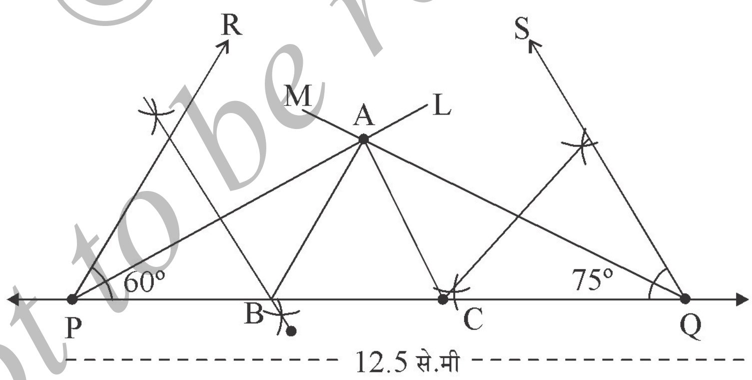
(1) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसका परिमाप 13 सें.मी और भुजाओं का अनुपात 3 : 4 : 5 हो।

(2) त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसका परिमाप 14 सें.मी और भुजाओं का अनुपात 2 : 4 : 5 हो।

(3) त्रिभुज MNP की रचना कीजिए, जिसका परिमाप 15 सें.मी, और भुजाओं का अनुपात 2 : 3 : 4 हो।

त्रिभुज की रचना करना जिसका परिमाप और आधार कोण दिये जाते हैं।

उदाहरण 8 : त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसका परिमाप 12.5 सें.मी और आधार भुजा पर कोण 60° और 75° हों।



हल : रचना के सोपान।

(1) PQ = 12.5 लम्बा रेखाखण्ड खींचिए।

(2) PR और QS किरणों को खींचिये कि $\underline{|QPR} = 60°$ और $\underline{|PQS} = 75°$ हो

(3) $\underline{|PQR}$ और $\underline{|PQS}$ के कोण समद्विभाजक PL और QM खींचिए जो 'A' पर प्रतिच्छेदित होते हैं।

(4) AP और AQ के लम्ब समद्विभाजक PQ को B और C पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

(5) AB और AC को मिलाते हैं।

अब ABC इच्छित त्रिभुज है।

सोचिये!

त्रिभुज के कौन से गुणधर्म प्रमाणित करते है कि हमें वाँछित आधार कोण प्राप्त हैं? और परिमाप भी जैसा कि वाँछित है?

अभ्यास 12.8

(1) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए कि परिमाप 12 सें.मी, और आधार कोण 50° और 80° हैं।

(2) त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए कि परिमाप 15 सें.मी, और आधार कोण 60° एवम् 70° हैं।

(3) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए कि परिमाप 12 सें.मी, एवम् आधार कोण 65° और 85° हैं।

दत्त ऊंचाई के समबाहु त्रिभुज की रचना करना।

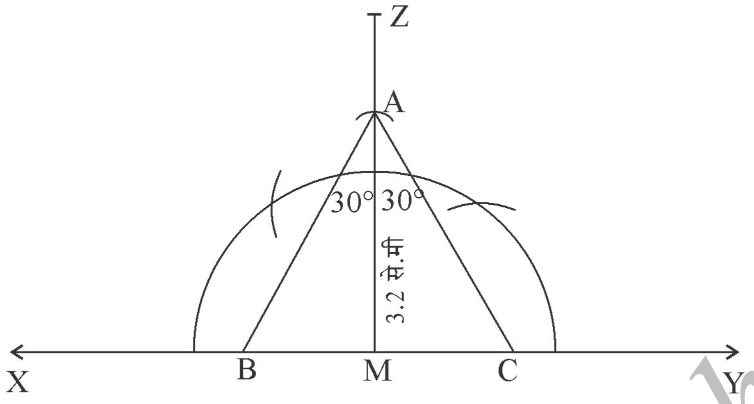
उदाहरण 9 : एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी ऊँचाई 3.2 सें.मी हो।

हल : प्रथमतः देख लें कि समबाहु त्रिभुज में किसी श्रृंग से सम्मुख भुजा पर खींची हुई सभी ऊँचाईयाँ परस्पर समान होती हैं। (इस कथन को सिद्ध करें) अतः हम परिभषित कर सकते हैं कि समबाहु त्रिभुज में ऊँचाई तीनों लम्बोन्नति के संदर्भ में सामान्य है।

रचना के सोपान :

1. XY पर्याप्त लम्बा रेखाखण्ड खींचें।
2. XY पर कोई M बिंदु लेकर $ZM \perp XY$ खींचिए।
3. M को केंद्रमान कर 3.2 त्रिज्या से एक चाप खींचिए ताकि वह MZ को A पर छोदित करे। XY पर B और C बिंदुओं को प्राप्त करने के लिए $\underline{|MAB} = 30^\circ$ और $\underline{|MAC} = 30^\circ$ की रचना करें।

   अब ABC इच्छित त्रिभुज सिद्ध हो जाता है।



सोचिये !

इस तरह रचित ABC समबाहु त्रिभुज क्यों है? एक प्रमाण का विचार क्या आप सोच सकेंगे?

अभ्यास 12.9

1. 4.5 सें.मी ऊँचाई के समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए। उसकी बाहु की अनुमानित लम्बाई को मापिये।
2. 5.2 सें.मी ऊँचाई के समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए। उसकी बाहु की अनुमानित लम्बाई को मापिये।
3. 6 सें.मी ऊँचाई के एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए। उसकी बाहु की अनुमानित लम्बाई को मापिये।

जब दो भुजाएँ और तीसरी भुजा पर लम्बोन्नति दी जाती है।

उदाहरण 10 : त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 4.5 सें.मी, AC = 5 सें.मी और BC पर A से लम्बोन्नति 3.6 सें.मी।

हल : रचना के सोपान।

(1) XY रेखाखण्ड खींचिए।

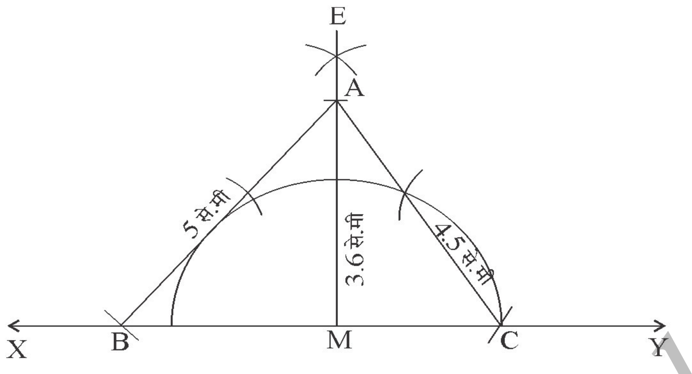
(2) XY पर M बिंदु अंकित कीजिए।

(3) $ZM \perp XY$ खींचिये और MZ की लम्बाई पर्याप्त रहे।

(4) M को केंद्र मानकर 3.6 सें.मी की त्रिज्या लेकर MZ के A पर चाप खींचिये।

(5) A को केंद्र मानकर 4.5 सें.मी और 5 सें.मी की त्रिज्याओं से क्रमशः XY के B और C पर चापें खींचें। AB और AC को मिलाइए।

अब ABC इच्छित त्रिभुज है।



सोचिये !

(1) केंद्र A से 4.5 सें.मी और 5 सें.मी की त्रिज्याओं से खींची हुई चापें XY रेखाखण्ड को क्यों विखण्डित करती हैं? दत्त कौन से अंश से इसका पता लगता है?

(2) दत्त त्रिभुजों के अलावा दो और त्रिभुजों की सम्भावना है। उनकी रचना कीजिए।

अभ्यास 12.10

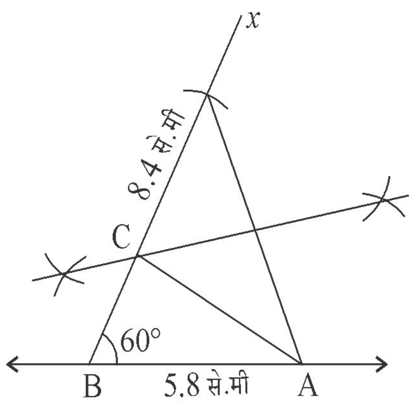
(1) PQR त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें PQ = 5.5 सें.मी, PR = 6.2 सें.मी और P से QR पर लम्बोन्नति 4 सें.मी है।

(2) MNP त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें MN = 4.5 सें.मी, MP = 5.2 सें.मी और M से NP पर लम्बोन्नति 3.8 सें.मी है।

त्रिभुज की रचना करना जब उसकी आधार भुजा, अन्य दो भुजाओं का योगफल और एक आधार कोण दिया जाता है।

उदाहरण 11 : त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5.8 सें.मी, BC + CA = 8.4 सें.मी, और $\angle B = 60^\circ$

हल : रचना के सोपान



(1) AB = 5.8 लम्बा रेखाखण्ड खींचिए।

(2) BX पर्याप्त लम्बा रेखाखण्ड खींचें कि $\angle ABX = 60°$

(3) BX रेखाखण्ड से 8.4 सें.मी लम्बा रेखाखण्ड BD काट लीजिए।

(4) AD मिलाइए।

(5) AD का लम्बसमद्विभाजक खींचिये जो BD को C पर बिखंडित करता हो।

(6) AC मिलाइए

अब त्रिभुज ABC इच्छित रूप में है।

सोचिये!

CA और CB का योगफल दत्त योगफल के बराबर किसतरह प्रमाणित होता है?

अभ्यास 12.11

(1) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 3.6 सें.मी, AB + AC = 4.8 सें.मी एवम् $\angle B = 60°$ है।

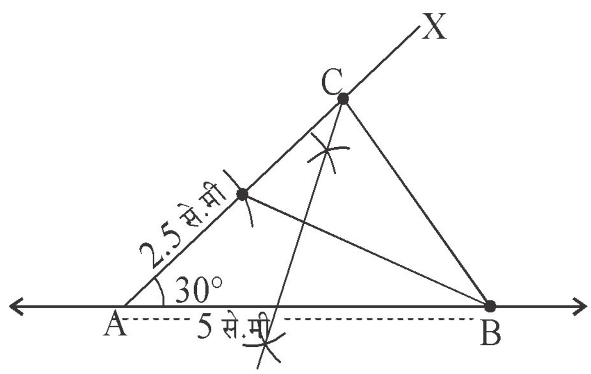
(2) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 4.5 सें.मी, AB + AC = 5.6 सें.मी एवम् $\angle B = 45°$ है।

(3) त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें QR = 5.4 सें.मी, PQ + PR = 6.5 सें.मी एवम् $\angle Q = 40°$ है।

त्रिभुज की रचना करना जब कि उसका आधार, अन्यदो भुजाओं का अंतर और एक आधार कोण दिया जाता है।

उदाहरण 12 : त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सें.मी, $\angle A = 30°$ एवम् AC – BC = 2.5 सें.मी है।

हल : रचना के सोपान।



(1) एक रेखाखण्ड AB खींचिए जिसकी 5 सें.मी लम्बाई हो।

(2) एक और रेखाखण्ड AX खींचिए कि $\angle BAX = 30°$ बने।

(3) AX रेखाखण्ड से AD = 2.5 सें.मी काट लें जो (AC – AB) के बराबर हो।

(4) BD मिलाइए।

(5) BD का लम्ब समद्विभाजक खींचिए ताकि वह AX को C पर काटता हो।

(6) BC मिलाइए।

अब ABC इच्छित त्रिभुज प्राप्त हुआ।

सोचिये !

आपने जान लिया होगा कि AD की लम्बाई अन्य दो भुजाओं के अंतर (AC – BC) के बराबर है। क्या (AC – BC) > AB को लेकर आप त्रिभुज की रचना कर पायेंग

अभ्यास 12.12

(1) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 3.4 सें.मी, AB – AC = 1.5 सें.मी, और $\angle B = 45°$.

(2) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 5 सें.मी, AB – AC = 2.8 सें.मी, और $\angle B = 40°$.

(3) त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 6 सें.मी, AB – AC = 3.1 सें.मी, एवम् $\angle B = 30°$

शब्दावली :

लम्ब समद्विभाजक (Perpendicular bisector) : दत्त रेखाखण्ड को लम्ब बननेवाली रेखा, यदि दत्त रेखाखण्ड को समद्विभाजित भी करती हो, वह लम्बसमद्विभाजक कहलाती है।

कोण समद्विभाजक (Angle bisector) : दत्त कोण को समद्विभाजित करनेवाली रेखा को कोण समद्विभाजक कहा जाता है।

परिमाप (Perimeter) : किसी समतल आकृति की सीमांकित लम्बाई को 'परिमाप' कहते हैं।

लम्बोन्नति (Altitude) : एक बिंदु से एक रेखा पर लम्ब खींचने पर होनेवाली लम्बऊँचाई को 'लम्बोन्नति' कहते हैं।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

चाप (Arc) : वृत्त के खण्ड को 'चाप' कहते हैं।

आधार कोण (Base angle) : त्रिभुज के आधार भुजा से अन्य भुजाओं के साथ बनेहुए कोणों को 'आधार कोण' कहा जाता है।

श्रृंग कोण (Vertex angle) : समद्विबाहु त्रिभुज के सब से ऊपरी कोण को 'श्रृंग कोण' कहते हैं।

याद रखिए :

- त्रिभुज की रचना करने के लिए कम से कम तीन अंशों या अवयवों की आवश्यकता है।
- तीन अवयवों के सभी संयोजनों से त्रिभुज की रचना नहीं भी हो सकती है।

घटक – 13
सांख्यिकी

इस अध्याय को अध्ययन करने बाद कि आप

- दत्तांश, निरीक्षण, परास, आवृत्ति, वर्गांतर, अपवर्जी सारणी समावेशिक सारणी, वर्गांतर का गात्र, वर्गांतर का गात्र, वर्गांतर की मध्यबिन्दु जैसे पदों समझ पाओगे।
- अपवर्जी और समावेशिक वर्गांतरों के लिए आवृत्ति वितरण तालिका की रचना कर पाओगे।
- दत्त आवृति वितरण का आयत चित्र बना सकोगे ।
- समांतर माध्य, मध्यिका और बहुलक की परिभाषा दे सकोगे ।
- वर्गीकृत और अवर्गीकृत दत्तांश का माध्य परिकलन कर पाओगे ।
- वर्गीकृत और अवर्गीकृत दत्तांश का माध्य परिकलन कर पाओगे ।
- वर्गीकृत दत्तांश और अवर्गीकृत दत्तांश की मध्यिका ज्ञात कर पाओगे ।
- वर्गीकृत और अवर्गीकृत दत्तांश का बहुलक पहचान पाओगे ।

प्रस्तावना

सांख्यिकी एक गणितीय विज्ञान है जो दत्तांश का संग्रह, विश्लेषण, व्याख्या और प्रस्तुतीकरण से जुड़ा है।

सांख्यिकी संख्यात्मक दत्तांश के निष्कर्षण लेने सहायक है। यह मौसम की पूर्वसूचना, व्यापार, आयात, निर्यात, शिक्षा की जानकारी प्राप्त करने और सभी अन्वेषण और संशोधन में सांख्यिकी व्याख्या की आवश्यकता होती है।

निश्चित जानकारी के साथ संख्यात्मक बातों के संग्रह को दत्तांश कहते हैं।

8वीं कक्षा के 20 विद्यार्थियों ने अर्धवार्षिक परीक्षा में निम्नलिखित अंक प्राप्त किया है।
56, 31, 44, 78, 67, 74, 38, 60, 56, 59, 87, 73, 38, 77, 84, 80, 49, 60, 60, 71.

उपरोक्त दत्तांश संख्यात्मक प्रविष्टियं का संग्रह है। **इसे निरीक्षण कहते हैं। ऐसे दत्तांश के संग्रह को अपरिष्कृत दत्तांश कहते हैं।**

इस दत्तांश को आरोहण अथवा अवरोहण क्रम में व्यवस्थित कर सकते हैं।

अवरोहण क्रम में व्यवस्थित करने पर 87, 84, 80, 78, 77, 73, 71, 67, 60, 60, 60, 59, 56, 56, 49, 44, 38, 38, 31

इससे ज्ञात होता है कि सर्वोच्च अंक 87 और न्यूनतम 31 है। सर्वोच्च अंक और न्यूनतम अंक के अंतर को **परास** (range) कहते हैं।

उपरोक्त दत्तांश का परास (87-31) = 56

आप देख सकते हैं कि 38 और 60 अंक दोहराते हैं। अंक 38 दो बार और 60 तीन बार दोहराता है। हम कह सकते हैं कि 38 की आवृत्ति 2 है और 60 की आवृत्ति 3 है। अन्य अंकों की आवृत्ति 1 है। **एक अंक (आंकडा) दत्तांश में जितना बार दोहराता है वह उस अंक की आवृति है।** उपरोक्त दत्तांश को तालिका के रूप में निरूपित कर सकते है। इस तालिका निरूपण को आवृत्ति वितरण तालिका कहते हैं। गिनती के लिए टैली चिन्हों का उपयोग करते हैं। से (3) गिनती सूचित करता है।

उदाहरण : 20 विद्यार्थियों ने एक घटक परीक्षा में 25 में निम्नप्रकार से अंक प्राप्त किये हैं। 12, 10, 08, 12, 04, 15, 18, 23, 18, 16, 16, 12, 23, 18, 12, 05, 16, 16, 12, 20 आवृत्ति वितरण तालिका तैयार कीजिए।

अंक	**टैली-चिन्ह**	**विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)**
23	II	2
20	I	1
18	III	3
16	IIII	4
15	I	1
12	~~IIII~~	5
10	I	1
08	I	1
05	I	1
04	I	1
कुल	20	20

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

दत्तांश का वर्गीकरण

दत्तांश को आवृति वितरण तालिका में वर्गीकरण करने को अपरिष्कृत दत्तांश वर्गीकरण कहते है। कभी-कभी विस्तृत दत्तांश पाते हैं।

उदाहरण २ : 8वीं कक्षा के 50 विद्यार्थियों के गणित के नम्बर निम्नलिखित अंकों पर विचार कीजिए.

41, 31, 33, 32, 28, 31, 21, 10, 30, 22, 33, 37, 12, 05, 08, 15
39, 26, 41, 46, 34, 22, 09, 11, 16, 22, 25, 29, 31, 39, 23,
31, 21, 45, 47, 30, 22, 17, 36, 18, 20, 22, 44, 16, 24, 10,
27, 39, 28, 17

इस दत्तांश की आवृति वितरण तालिका तैयार कीजिए

हल : यदि हम प्रत्येक अंक देखकर आवृति वितरण तालिका बनाये तो बहुत समय लगेगा। इसलिए अपनी सुविधा के लिए हम इन आंकड़ों को समूहों में वितरित करते हैं। जैसे 0-9, 10-19 इत्यादि

हम प्रत्येक समूह में आनेवाले आंकड़ोंका आवृति वितरण प्राप्त करते हैं। हम इस तरह उपरोक्त दत्तांश की आवृति वितरण तालिका तैयार करते हैं।

वर्गांतर	टैली-अंक	(आवृत्ति)
0 - 9	III	03
10 - 19	<s>IIII</s> <s>IIII</s>	10
20 - 29	<s>IIII</s> <s>IIII</s> <s>IIII</s> I	16
30 - 39	<s>IIII</s> <s>IIII</s> <s>IIII</s> I	15
40 - 49	<s>IIII</s> I	06
50 - 59		0
कुल	50	50

इस रुप में निरूपित **दत्तांश को वर्गीकृत कहते हैं** और **प्राप्त वितरण को वर्गीकृत आवृति वितरण कहते हैं।** वर्गीकृत आवृति वितरण तालिका हमें अर्थपूर्ण निष्कर्ष प्राप्त करते हैं जैसे

1. अनेक विद्यार्थी 20 और 29 के बीच अंक प्राप्त किये हैं।
2. केवल 3 विद्यार्थी 10 से कम अंक लिये है।
3. कोई भी विद्यार्थी 50 या 50 से अधिक अंक प्राप्त किया है।

उपरोक्त तालिका में अंकों को 0-9, 10-19, आदि में समूहित (वर्गीकृत) किये गये हैं। कोई अंक, दूसरे वर्गों में शामिल नहीं है। अर्थात् एक अंक एक ही वर्ग में उपस्थित है। इन प्रत्येक समूह को **वर्गांतराल** अथवा **वर्ग** कहते है।

इस तरह, दत्तांश के वर्गीकरण को **समावेशिक विधान** (inclusive method) कहते हैं।

वर्गांतर मिति : (class limit) वर्गांतर (10 - 19) में 9.5 को निम्न मिति (lower class limit) और 19.5 को उच्च मिति (upper class limit) कहते हैं।

सूचना

समावेशिक विधान में वर्गांतर मिति जानने के लिए निम्न अंक में से 0.5 घटाकर निम्न मिति प्राप्त करते हैं। गरिष्ठ अंक को 0.5 जोड़कर उच्च मिति प्राप्त करते है।

वर्गांतर गात्र (class size) एक वर्गांतर में उपस्थित अंकों की संख्या मान लीजिए (10 - 19), 10 और 19 को समाविष्ट करके, वर्गांतर का गात्र कहते हैं। इस उदाहरण में वर्गांतर का गात्र 10 है।

वर्गांक (classmark) एक वर्गांतर की मध्यबिन्दु को वर्गांक (classmark) (वर्गांतर की मध्यबिन्दु) इसे वर्गांतर के दोनों मितियों को जोड़कर 2 से विभाजित करते हैं। उदाहरण के लिए

(10 - 19) का वर्गांक $\frac{(10+19)}{2} = 14.5$

(10 - 20) का वर्गांक है = $\frac{(10+20)}{2} = 15$

उदाहरण 2 के दत्तांश को इस तरह भी वर्गीकृत कर सकते है जैसे 0-10, 10-20, 20-30 इत्यादि। तो आवृति वितरण तालिका निम्न रूप से तैयार कर सकते हैं।

समूह	टैली-अंक	(आवृत्ति)
0 - 10	III	03
10 - 20	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
20 - 30	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	18
30 - 40	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
40 - 50	~~IIII~~ I	06
कुल	50	50

यहाँ आपको ज्ञात होता कि 10 दोनों वर्गों में (0 - 10) और (10 - 20) उपस्थित है। परन्तु कोई अंक (मान लीजिए (10) दोनों वर्गांतर (0 - 10) और (10 - 20) में एक साथ उपस्थित नहीं हो सकता है । इस से बचने के लिए, हम सामान्य अंक को उच्च वर्ग उपस्थित मानते हैं, यहाँ 10 को (10-20) में उपस्थित मानते हैं परन्तु (0 - 10) में नहीं। इसी तरह 30 को (30 - 40) में उपस्थित मानते है बल्कि (20-30) में नहीं। **इस विधान को अपवर्जी विधान** (exclusive method).

वर्गमिति (class limit) वर्गांतर (10 - 20) में 10 को निम्न मिति और 20 को उच्च मिति कहते है।'

वर्गांतर गात्र (class size) उच्च मिति और निम्न मिति के अन्तर को **वर्गांतर गात्र** कहते हैं। (10 - 20) का वर्गांतर गाष 20 - 10 = 10 है।

उदाहरण 3 : दसवीं कक्षा के 40 विद्यार्थी एक लघु परीक्षा में उपस्थित होते हैं। उनसे हल किये हुए प्रश्नों की संख्या (60 में से), पैंतालीस मिनट के अवधि में, निम्न प्रकार हैं।

52, 42, 40, 36, 12, 28, 15, 37, 35, 22, 39, 50, 54, 39, 21
34, 46, 31, 10, 09, 13, 24, 29, 31, 49, 58, 40, 44, 37, 28
13, 16, 29, 36, 39, 41, 47, 55, 52, 09.

वर्गांतर का गात्र 10 रखकर आवृति वितरण तालिका तैयार कीजिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

(i) कौन से वर्गांतर में अत्यधिक आवृति है?
(ii) कौन से वर्गांतर में निम्न आवृति है?
(iii) (20 - 29) वर्गांतर की उच्च मिति और निम्न मिति लिखिए।
(iv) कौन से दो वर्गांतरों में समान आवृति है?

हल : आईए इस दत्तांश के आधार पर एक आवृत्ति वितरण तालिका तैयार करें।

वर्गांतर	**टैली-अंक**	**(आवृत्ति)**
0 - 9	II	2
10 - 19	~~IIII~~ I	6
20 - 29	~~IIII~~ II	7
30 - 39	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11
40 - 49	~~IIII~~ III	08
50 - 59	~~IIII~~ I	06
कुल	40	40

तालिका उपयोग करने पर हमें पता चलता है कि

(i) (30-39) में अत्याधिक आवृति है।

(ii) (0-9) में निम्न आवृति है

(iii) उच्च मिति 29.5 और निम्न मिति 19.5

(iv) (10-19) और (50 -59) दोनों में समान आवृत्ति है।

उदाहरण 4 : 25 बच्चों की ऊँचाई सें.मी. में निम्नलिखित है :

174, 168, 110, 142, 156, 119, 110, 101, 190, 102, 190, 111, 172, 140, 136, 174, 128, 124, 136, 147, 168, 192, 101, 129, 114

आवृति वितरण तालिका तैयार कीजिए, वर्गांतर का गात्र 20 रखिए, और निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

(i) कौन से वर्गांतर की अत्यधिक और निम्न आवृति है?

(ii) वर्गांतर (160-180) की आवृति 6 क्या सूचित करती है?

(iii) (140-160) वर्गांतर की मध्यबिन्दु ज्ञात कीजिए

(iv) ऊँचाई का परास क्या है?

हल : दत्तांश की आवृति वितरण तालिका निम्न है :

वर्गांतर	**टैली-अंक**	**(आवृत्ति)**
100 - 120	IIII III	8
120 - 140	~~IIII~~	5
140 - 160	III	3
160 - 180	~~IIII~~ I	6
180 - 200	III	3
	कुल - 25	25

उत्तर :

(i) अत्यधिक आवृति : (100 - 120) निम्न आवृति (140 - 160) और (180 - 200)

(ii) 6 विद्यार्थी हैं जिनकी ऊँचाई का परास 160 सेंमी. से 180 से.मी है।

(iii) मध्यबिन्धु $= \dfrac{140+160}{2} = 150$

(iv) परास = उच्चतम अंक - निम्न अंक = 192 - 101 = 91

अभ्यास 13.1

1. 40 परीक्षार्थी के अंक (100 में से) निम्नलिखित है :

   75, 65, 57, 50, 32, 54, 75, 67, 75, 88, 80, 42, 40, 41

   34, 78, 43, 61, 42, 46, 68, 52, 43, 49, 59, 49, 67, 34

   33, 87, 97, 47, 46, 54, 48, 45, 51, 47, 41, 43

   10 गात्र के वर्गांतर की आवृति वितरण तालिका तैयार कीजिए। वर्गांतर (30 – 39), (40 – 49).. लेकर निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

   (i) कौन से वर्गांतर में अधिकतम और निम्न आवृति है?

   (ii) (30 – 39) वर्गांतर में उच्च मिति और निम्न मिति लिखिए।

   (iii) इस दत्त वितरण का परास क्या है?

2. निम्न आंकड़ों से आवृति वितरण तालिका तैयार कीजिए:

   39, 16, 30, 37, 53, 15, 16, 60, 58, 26, 28, 19, 20, 12, 14

   24, 59, 21, 57, 38, 25, 36, 34, 15, 25, 41, 52, 45, 60, 63

   18, 26, 43, 36, 18, 27, 59, 63, 46, 48, 25, 33, 46, 27

   46, 42, 48, 35, 64, 24 वर्गांतर (10 – 20), (20 – 30).. लीजिए और निम्न उत्तर लिखिए।

   (i) तीसरे वर्गांतर की आवृति क्या बताती है?

   (ii) प्रत्येक वर्गांतर का गात्र क्या है? (30 – 40) वर्गांतर की मध्यबिन्दु क्या है?

   (iii) दत्त अंक के समुच्चय का परास क्या है?

आयत चित्र (Histogram)

आयतों द्वारा निरूपित आवृति वितरण को आयत चित्र कहते हैं। आयतों की चौड़ाई वर्गांतर सूचित करती है और उनके क्षेत्रफल संबंधित आवृति के अनुपात में होते हैं। आयत चित्र, आवृति तथा वर्गांतर के विरुद्ध बनाये चित्र है।

इस तरह आयत दत्तांश का दो मितियों का रेखाचित्रीय निरूपण है।

यदि अभी वर्गांतर की लंबाई समान है तो आवृति, आयत की ऊँचाई के अनुपात में होती है।

आयत चित्र की रचना

कुछ उदाहरण द्वारा आयत चित्र की रचना जान लेते हैं।

उदाहरण 5 : निम्नलिखित आवृति वितरण को आयत चित्र द्वारा निरूपित कीजिए।

वर्गांतर	(आवृत्ति)
0 - 9	5
10 - 19	8
20 - 29	12
30 - 39	18
40 - 49	22
50 - 59	10

हल : दत्त वितरण समावेशिक रूप का है । इसे अपवर्जी रूप में बदलना होगा। ऐसा करने $\frac{d}{2}$ शोधन अंक उपयोग करते है & जहाँ d = (वर्गांतर की निम्न मिति) - (उसके पहलों के वर्गांतर की उच्च मिति) ।

यहाँ वास्तविक उच्च मिति = कथित मिति + $\frac{d}{2}$

d = (वर्गांतर की निम्न मिति) - (उसके पहले के वर्गांतर की उच्च मिति)

वास्तविक निम्न मिति = कथित मिति - $\frac{d}{2}$

उदाहरण के लिए, वर्गांतर 10 - 19 पर विचार कीजिए।

d = वर्गांतर की निम्न मिति - उसके पहले के वर्गांतर की उच्च मिति

= 10 - 9 = 1

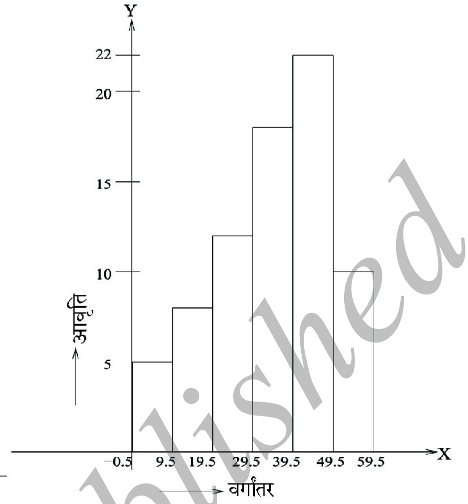
अतः d = 1, $\therefore \frac{d}{2} = 0.5$

अब वास्तविक उच्च मिति = (कथित उच्च स्थिति) + $\frac{d}{2}$ = 19 + 0.5 = 19.5

वास्तविक निम्न मिति = (कथित निम्न मिति) - $\frac{d}{2}$ = 10 - 0.5 = 9.5

अपवर्जी रूप में परिवर्तन करने पर हमें निम्न तालिका प्राप्त होती है।

कथित वर्गांतर	वास्तविक वर्गांतर	आवृत्ति
0 - 9	-0.5 - 9.5	5
10 - 19	9.5 - 19.5	8
20 - 29	19.5 - 29.5	12
30 - 39	29.5 - 39.5	18
40 - 49	39.5 - 49.5	22
50 - 59	49.5 - 59.5	10



आयतचित्र की रचना

1. x – अक्ष और y – अक्ष खींचिए। x – अक्ष और y – अक्ष के लिए योग्य पैमाना चुनिये। x – अक्ष पर 1 से.मी = 10 और y – अक्ष पर 1 से.मी = 5 लीजिए।
2. x – अक्ष पर वर्गांतर अंकित कीजिए। (0.5 – 9.5), (9.5 – 19.5) .. इस तरह
3. पहले वर्गांतर (0.5 – 9.5) पर 5 से.मी ऊँचाई का आयत बनाईए।
4. दूसरे वर्गांतर पर 8 से.मी ऊँचाई का आयत बनाईए। और इसी तरह अन्य वर्गांतर पर अनुरूप आवृति के ऊँचाई के आयत बनाईए।

तब ऊपर दिखाये जैसे आयत चित्र बनता है। उपरोक्त आयत चित्र, आप ध्यान दीजिए कि

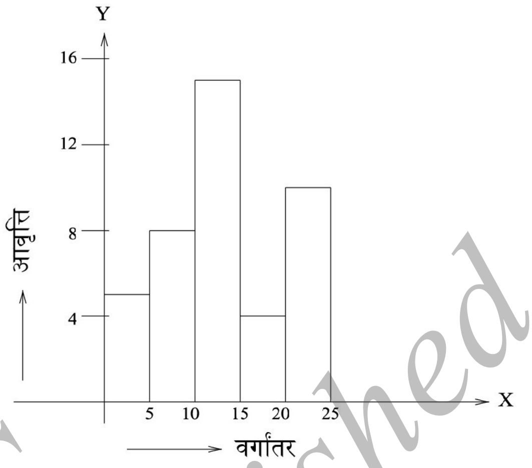
- आयतों के बीच कोई अंतर नहीं है अर्थात् आवृति वितरण निरन्तर
- आयत के ऊँचाई आवृति और आधार वर्गांतर सूचित करते हैं।

याद रखिए

- एक स्तंभालेख, स्तंभ की ऊँचाई दत्तांश सूचित करती है। स्तंभ पास-पास हो सकते हैं अथवा पृथक-पृथक अथवा बंद हो सकते है।
- आयत चित्र में प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल दत्तांश (आवृति) के अनुरूप होते हैं। आयतों के बीच कोई अंतर नहीं होना चाहिए।

उदाहरण 6 : निम्न आवृति वितरण निरूपित करने एक आयतचित्र की रचना कीजिए।

वर्गांतर	आवृत्ति
0 - 5	5
5 - 10	8
10 - 15	15
15 - 20	4
20 - 25	10



हल : दियी हुई आवृति वितरण अपवर्जी रूप का है।

अतः x – अक्ष पर वर्गांतर को (0 – 5), (5 – 10)... इत्यादि लेते हैं और y – अक्ष पर आवृति लेते हैं। योग्य पैमाना लेकर हम पूर्व उदाहरण की तरह आयत चित्र की रचना करते हैं।

सूचना : आयत चित्र अपवर्जी वर्गांतर पर बनाये जाते हैं (निरन्तर) यदि वर्गांतर समावेशिक है तो शोधन अंश जोड़कर उसे अपवर्जी बना लेना चाहिए।

अभ्यास 13.2

1. निम्न आवृति वितरण निरूपित करने आयत चित्र की रचना कीजिए :

वर्गांतर	आवृत्ति
20 – 25	5
25 – 30	10
30 – 35	18
35 – 40	14
40 – 45	12

2. निम्न आवृति वितरण निरूपित करने आयत चित्र की रचना कीजिए :

वर्गांतर	आवृत्ति
10 – 19	7
20 – 29	10
30 – 39	20
40 – 49	5
50 – 59	15

माध्य, मध्यिका और बहुलक (Mean, Median and Mode)

सांख्यिकी दत्तांश से जुड़े तीन महत्वपूर्ण राशियों के बारे में अध्ययन करते हैं। वे एक प्रयोग का स्पष्ट चित्र देते हैं। उनके सामान्यतः उन्हें **केन्द्रीय प्रवृति माप** (measures of central tendency) कहते हैं।

माध्य :

माध्य दत्त सांख्यिकी प्रयोग में प्रयोग का परिणाम कैसा हो रहा जानने एक माप के रूप में उपयोग करते हैं। यह प्रयोग में प्राप्त संख्यात्मक दत्तांश का औसत है।

एक अवर्गीकृत दत्तांश का माध्य

यह सभी निरीक्षणों के मूल्यों के योगफल को निरीक्षणों की संख्या से भाग लगाकर प्राप्त भागफल है।

यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$ N निरीक्षणों के मूल्य हैं तो

$$\text{माध्य} = \frac{\text{निरीक्षणों के मूल्यों का योगफल}}{\text{निरीक्षणों की संख्या}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$$

'x' के N मूल्यों के योगफल को $\sum x$ से सूचित करते हैं।

यहाँ $\sum$ योगफल का संकेत है।

अतः $\overline{X} = \frac{\sum x}{N}$

सूचना : योगफल को $\sum$ से सूचित करते हैं और सिग्मा पढ़ते हैं । माध्य को $\overline{X}$ से सूचित करते हैं । और उसे X–बार पढते हैं।

उदाहरण 7 : प्रथम छः सम स्वाभाविक संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए:

हल : प्रथम छः सम स्वाभाविक संख्यायें 2, 4, 6, 8, 10, 12 है। यहाँ छः गुण है। इसलिए

N = 6 निरीक्षण $x_1 = 2, \; x_2 = 4, \; x_3 = 6, \; x_4 = 8, \; x_5 = 10, \; x_6 = 12$

अतः $\sum x = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$

अतः माध्य $\overline{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{42}{6} = 7$

उदाहरण 8 : 5 लघु परीक्षाओं में हरी द्वारा प्राप्त (25 में से) अंक निम्न प्रकार हैं। 24, 22, 23, 23, 25 उसका औसत माप ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ 5 माप है तो $\sum x = 24+22+23+23+23=117$

इसलिए माध्य $\overline{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{117}{5} = 23.4$

उपरोक्त उदाहरण में मूल्यों (माप) की संख्या बहुत कम है। इसलिए माध्य ज्ञात करना सरल था। जब मापों की संख्या बहुत है तो माध्य ज्ञात करना आसान नहीं है। ऐसे संदर्भ में जब दत्तांश बहुत है तो दत्तांश को समूह में वितरित कर एक आवृति वितरण तालिका तैयार करते हैं। आवृति वितरण तालिका से हम माध्य ज्ञात कर सकते हैं।

वर्गीकृत दत्तांश का माध्य

उदाहरण 9 : एक हॉकी टीम ने निम्न प्रकार से गोल् (goals) किये।

4, 6, 3, 2, 2, 4, 1, 5, 3, 0, 4, 5, 4, 5, 4, 0 4, 3, 6, 4 इन अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए ।

हल : माध्य ज्ञात करने हम आवृति वितरण तालिका तैयार करते हैं। हम देखते हैं कि माप दोहराये हैं इसलिए मापों का योगफल ज्ञात करने हमें प्रत्येक माप को उसके आवृति के गुणा कर जोड़ना होगा।

मापांक	टैली–अंक	आवृत्ति
1	I	1
2	II	2
3	III	3
4	~~IIII~~ II	7
5	III	3
6.	II	2
		N = 20

मापांक(x)	टैली–अंक(f)	fx
0	2	0
1	1	1
2	2	4
3	3	9
4	7	28
5	3	15
6	2	12

N = 20 $\sum fx =$ 69

मापांक को 'x' और आवृति को 'f' से, तो f और x से गुणा करते हैं और गुणनफल fx को जोड़ते हैं।

यहाँ $\sum fx$ सभी गुणनफल fx का जोड़ सूचित करता है ।

अब माध्य = $\overline{X}$ = $\dfrac{\text{मापांक का योगफल}}{\text{मापांकों की संख्या}}$

$$= \frac{\sum fx}{N} = \frac{69}{20}$$

इस तरह $\overline{X}$ = 3.45

उदाहरण 10 : निम्न आवृति तालिका का माध्य ज्ञात कीजिए

वर्गांतर	**आवृत्ति**
0 - 4	3
5 - 9	5
10 - 14	7
15 - 19	4
20 - 24	6
	N = 25

हल : माध्य ज्ञात करने, पहले प्रत्येक वर्गांतर की मध्यबिन्दु जानते हैं। वर्गांतर 0 - 4 की

मध्यबिन्दु = $\dfrac{(0+4)}{2} = 2$

(5 - 9) वर्गांतर की मध्यबिन्दु = $\dfrac{(5+9)}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$

इस तरह वर्गांतर की मध्यबिन्दु को 'x' से सूचित करते है। प्रत्येक वर्गांतर के सामने उनके आवृतियों को लिखिए।

वर्गांतर	**मध्यबिन्दु** 'x'	**आवृत्ति** (f)	fx
0 - 4	2	3	6
5 - 9	7	5	35
10 - 14	12	7	84
15 - 19	17	4	68
20 - 24	22	6	132
		N= 25	Σfx= 325

fx प्राप्तांक करने f और x को गुणा कीजिए सभी fx को जोड़कर Σfx मालूम कीजिए। अब मध्य सूत्र के उपयोग से ज्ञात करते हैं।

$$\overline{X} = \frac{\text{सभी मापांक का जोड़}}{\text{मापांकों की संख्या}} = \frac{fx}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{325}{25} = 13$$

$\therefore$ मध्य = 13

कार्यकलाप 1 : स्कूल की एक दीवार पर से.मी में ऊँचाई अंकित कीजिए। (शिक्षक का सहयोग लीजिए)। अपने 10 मित्रों की ऊँचाई मालूम कर लीजिए। औसत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

माध्यिका (Median)

दत्तांश की मध्यबिंदु **माध्यिका** होती है, जब उसे आरोहण अथवा अवरोहण क्रम व्यस्थित करते हैं। माध्यिका दत्त मापांकों के समुच्चय को समान दो भागों विभाजित करती है। अर्थात् माध्यिका के ऊपर और नीचे समान मापांक होते हैं।

माध्य, मापांक के स्वभाव पर निर्भर करता है। उच्च (अथवा निम्न) मापांक माध्य पर प्रभाव डालते है । उदाहरण के लिए इस दत्तांश पर विचार कीजिए। 5, 8, 6, 9, 12, 110, 130 इनका माध्य 40 है। (जोड़ 280 और 7 मापांक है), लेकिन 5 मापांक 40 से कम है और केवल 2 मापांक 40 से अधिक है। अतः यह केन्द्रीय मापांक नहीं है। बल्कि 9 मध्य में है और यह मध्यिका है। इस तरह उच्च मापांक, जो दत्तांश में है, माध्य पर प्रभाव डालते है और यह प्रयोग का सही प्रतिनिधि नहीं हो सकता। ऐसे संदर्भ में माध्यिका अधिक पसन्द किया जाता है।

अवर्गीकृत दत्तांश की माध्यिका

दिये गये मापों को मूल्यों के आरोहण अथवा अवरोहण क्रम में व्यवस्थित कीजिए। यदि मापों की संख्या विषम हो तो सब से मध्य रहनेवाला माप मध्यिका है। यदि मापों की संख्या सम हो तो मध्य के दो मापों का औसत माध्यिका है।

उदाहरण 11 : निम्न दत्तांश की माध्यिका ज्ञात कीजिए। 26, 31, 33, 37, 43, 8, 26, 33.

हल : मापों को आरोहण क्रम लिखने पर 26, 31, 33, 37, 38 42, 43.

यहाँ मापों की संख्या है मध्य का पद है चौथा और वह है 37. अतः माध्यिका 37 है।

सोचिये ! क्या मापों को अवरोहण क्रम में व्यवस्थित करने से वहीं माध्यिका प्राप्त होती है ?

उदाहरण 12 : 32, 30, 28, 31, 22, 26, 27, 21 की माध्यिका मालूम कीजिए।
हल : दत्तांश को अवरोहण क्रम में व्यवस्थित करने से प्राप्त है।
32, 31, 30, 28, 27, 26, 22, 21

यहाँ 8 पद हैं। अतः माध्यिका मध्य दो पदों का औसत है। अर्थात् 27 और 28 का औसत

$\therefore$ माध्यिका $= \dfrac{(27+28)}{2} = 27.5$

सोचिए : क्या मापों को आरोहण क्रम में व्यवस्थित करने से वही माध्यिका प्राप्त होती है?

सूचना : जब N माप दिये जाते हैं, माध्यिका निम्न रीति से ज्ञात कर सकते हैं – पहले मापों को आरोहण अथवा अवरोहण क्रम में व्यवस्थित करते हैं

(i) यदि N विषम हो तो माध्यिका $= \dfrac{(N+1)^{th}}{2}$ वाँ पद ।

यदि N सम संख्या हो तो माध्यिका $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{N}{2}\text{वाँ पद} + \left(\dfrac{N}{2}+1\right)^{th}\text{वाँ पद}\right)$

वर्गीकृत दत्तांश की माध्यिका

अवर्गीकृत दत्तांश में विषम माप हो तो मध्य का पद मध्यिका होती है (सम हो तो दो मध्य पदों का औसत) वर्गीकृत दत्तांश की माध्यिका अलग विधान से ज्ञात करते हैं। इसे उदाहरण द्वारा समझेंगे।

उदाहरण 13 निम्न वर्गीकृत दत्तांश की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्गांतर	आवृत्ति
1 - 5	4
6 - 10	3
11 - 15	6.
16 - 20	5
21 - 25	2
	N = 20

हल : माध्यिका सबसे बीच की संख्या होती है। यहाँ वास्तविक संख्या नहीं दिये गये। इसलिए भिन्न विधान से माध्यिका ज्ञात करते हैं। यहाँ N = 20 एक समसंख्या अतः दो सबसे मध्य के पद है $\frac{N}{2} = \frac{20}{2}$ = दसवाँ पद और दूसरा होगा 11 वाँ हमें माध्यिका को 10 वें और 11 वें पद के बीच मानना होगा। जब वास्तविक मापांक नहीं दिये हम 10 तथा 11 वें पद की कल्पना होनी चाहिए। इसके लिए संचित आवृति ज्ञात करना होगा। संचित आवृति ज्ञात करने निम्न उदाहरण ध्यान से देखिए ।

वर्गांतर	**आवृत्ति** *(f)*	**संचित आवृत्ति** *(fc)*	
1 - 5	4	4	4
6 - 10	3	7	4 + 3 = 7
11 - 15	6	13	7 + 6 = 13
16 - 20	5	18	13 + 5 = 18
21 - 25	2	20	18 + 2 = 20
	N = 20		

ध्यान दीजिए अंतिम वर्गांतर का संचित आवृति N के समान है।

पहले वर्गांतर से नीचे की ओर गिनते जायेंगे तो 10 वाँ माप (11 - 15) वर्गांतर में उपस्थित है। इस वर्गांतर को **माध्यिका का वर्गांतर** कहते हैं । इस वर्गांतर की आवृति है 6 । इस वर्गांतर की निम्न मिति (LRL) 10.5 है। इसके ऊपर के वर्गांतर की संचित आवृति '7' है। अब हम जानते हैं

(a) निम्न वास्तविक मिति (LRL) = 10.5

(b) माध्यिका वर्गांतर की आवृति (f_m) = 6

(c) माध्यिका वर्गांतर के उपरे वर्गांतर (f_c) और = 7

(d) वर्गांतर का गात्र (l) = 5

माध्यिका निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं

$$\text{माध्यिका} = LRL + \left(\frac{\frac{N}{2} - f_c}{f_m}\right) \times i.$$

प्रतिस्थापित करने पर

माध्यिका $= 10.5 + \left(\frac{\frac{20}{2} - 7}{6}\right) \times 5 = 10.5 + \frac{(10-7)}{6} \times 5$

$= 10.5 + \frac{3}{6} \times 5 = 10.5 + 2.5 = 13$

सूचना : माध्यिका $= LRL + \left(\frac{\frac{N}{2} - f_c}{f_m}\right) \times i.$ **यह सूत्र मौलिक सिद्धांतों से प्राप्त किया गया है।**

उदाहरण 14 : दत्त अपवर्जी (निरन्तर) वितरण की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्गांतर	आवृत्ति
20 - 30	13
30 - 40	13
40 - 50	9
50 - 60	4

वर्गांतर	आवृत्ति *(f)*	संचितआवृत्ति *(fc)*
10 - 20	11	11
20 - 30	13	24
30 - 40	13	37
40 - 50	9	46
50 - 60	4	50

हल : पहले हम संचित आवृति तैयार करते हैं यहाँ हमें ज्ञात होता है कि कुल मापों की संख्या N = 50 अतः (30 - 40) माध्यिका वर्गांतर है। निम्न मिति LRl = 30, $f_c = 24$, $f_m = 13$ और i = 20 – 10 = 10

सूत्र में मूल्यों को प्रतिस्थापित करने पर

माध्यिका $= LRL + \left(\frac{\frac{N}{2} - f_c}{f_m}\right) \times i.$

$= 30 + \frac{25-24}{13} \times 10$

$= 30 + \frac{10}{13} = 30.77$ (करीबन)

बहुलक (mode)

केन्द्रीय प्रवृत्ति मापों में से और एक माप बहुलक है जिसे कभी कभी उपयोग किया जाता है। **बहुलक मापांकों में से अधिक दोहराने वाली संख्या** है। बहुलक के अत्यन्त करीब अन्य माप धने रूप से वितरित होते है।

अवर्गीकृत दत्तांश का बहुलक

उदाहरण 15 : निम्न दत्तांश का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

15, 20, 22, 25, 30, 20, 15, 20, 12, 20

हल : यहाँ 20 अधिक बार दोहराता है।

$\therefore$ बहुलक 20 है।

उदाहरण 16 : 5, 3, 3, 5, 7, 6, 3, 4, 3, 5, 8, 5 इस दत्तांश का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ 3 और 5 चार दोहराये गये हैं। इसलिए 3 और 5 दोनों भी बहुलक है।

सूचना : एक दत्तांश में एक से अधिक बहुलक हो सकते हैं। यदि दत्तांश एक ही बहुलक हो उसे एक-बहुलकीय (unimode), यदि बहुलक हो तो उसे द्वि-बहुलकीय (bimode) और 2 से अधिक बहुलक हो गुणित बहुलकीय (multimode)

वर्गीकृत दत्तांश का बहुलक

वर्गीकृत दत्तांश में जिस माप की आवृति सर्वाधिक होगी वही बहुलक कहलाता है।

उदाहरण 17 : निम्न दत्तांश का बहुलक ज्ञात कीजिए।

संख्या	12	13	14	15	16	17
आवृति	7	9	6	22	20	19

हल : यहाँ सर्वाधिक आवृति 22 है। इसलिए इस आवृति की अनुरूप संख्या 15 है। अतः बहुलक 15 है।

अभ्यास 13.3

1. 10 बल्लेबाज एक दिवसीय मैच बनाये रन् निम्न है। इन रनों का औसत ज्ञात कीजिए।
   23, 54, 08, 94, 60, 18, 29, 44, 05, 86
2. निम्नलिखित तालिका का औसत वजन मालूम कीजिए।

वजन (कि.गां)	29	30	31	32	33
बच्चों की संख्या	02	01	04	03	05

3. निम्न आवृति वितरण का माध्य ज्ञात कीजिए

प्राप्तांक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
आवृति	3	7	10	6	8	2	4

4. निम्न आवृति वितरण का माध्य ज्ञात कीजिए

प्राप्तांक	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44
आवृति	6	5	9	12	6	2

5. निम्न दत्तांश की माध्यिका ज्ञात कीजिए :

15, 22, 9, 20, 6, 18, 11, 25, 14

6. निम्नों माध्यिका क्या है?

22, 28, 34, 49, 44, 57, 18, 10, 33, 41, 66, 59.

7. निम्न आवृति वितरण तालिका की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्गांतर	110-119	120-129	130-139	140-149	150-159	160-169
आवृति	6	8	15	10	6	5

8. निम्न आवृति वितरण तालिका की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्गांतर	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
आवृति	5	3	9	10	8	5

9. निम्न दत्तांश का बहुलक ज्ञात कीजिए :

(i) 4, 3, 1, 5, 3, 7, 9, 6

(ii) 22, 36, 18, 22, 20, 34, 22, 42, 46, 42.

10. निम्न दत्तांश का बहुलक ज्ञात कीजिए :

x	5	10	12	15	20	30	40
f	4	8	11	13	16	12	9

शब्दावली

दत्तांश (Data) : एक प्रयोग के दौरान किसी विशिष्ट जानकारी के साथ एकत्रित संख्यात्मक अंश ।

निरीक्षण (observation) : दत्तांश का संख्यात्मक निरूपण

मापांक (scores) : एक परीक्षण की गई संख्यात्मक प्रविष्टियां

परास (range) : एक परीक्षण के उच्चतम और न्यूनतम मापांक के बीच का अंतर

वर्गीकृत आवृति वितरण (GFD) : अनेक समूहों से दत्तांश एकत्रित करते हैं और प्रत्येक समूह के मापांक की आवृति प्रमाणित करते हैं।

वर्गांतर (class interval) : एक आवृति वितरण में प्रत्येक समूह को वर्गांतर कहते हैं।

संचित आवृति (cumulative frequency) : प्रस्तुत वर्गांतर तक आवृति का योगफल

आवृति वितरण तालिका (FDT) : यह तालिका विभिन्न वर्गांतर के मापांकों की आवृति दर्शाती है।

समावेशिक विधान (inclusive method) : समूह बनाते समय, समूह के अन्तिम बिन्दु एक दूसरे पर नहीं आते।

अपवर्जी विधान (exclusive method) : क्रमागत समूहों के अंतिम बिंदु एक दूसरे से मिलते हैं।

वर्गांतर मिति (class limit) : अपवर्जी विधान में वर्गांतर की अन्तिम बिन्दु; समावेशिक विधान में शोधक अंश जोड़कर अंतिम बिन्दु ।

वर्गांतर गात्र (class size) : वर्गांतर के उच्च मिति और निम्न मिति का अंतर

आयत चित्र (histogram) : आयतों द्वारा वर्गीकृत दत्तांश का रेखाचित्रीय निरूपण जिसमें आयत के क्षेत्रफल, आवृति के अनुपात में होते हैं।

माध्य (mean) : मापांकों का औसत, मापांकों का योगफल को मापांकों की संख्या का भागफल

माध्यिका (median) : सबसे बीच का मापांक

बहुलक (mode) : एक परीक्षण में, मापांक को अधिकतम बार दोहराता है।

माध्यिका वर्गांतर (median class) : एक वर्गीकृत दत्तांश में, मापांकों की माध्यिका कहना मुश्किल है, लेकिन मध्य की संख्या कौन से वर्गांतर में उपस्थित है कह सकते हैं। इसे माध्यिका वर्गांतर कहते है।

याद रखिए

- सांख्यिकी विज्ञान एक शाखा है जिससे दत्तांश को व्यवस्थित रूप से विश्लेषण कर सकते हैं।
- माध्य, माध्यिका और बहुलक तीन विभिन्न माप जो दत्तांश को प्रतिनिधित्व करते हैं। इन्हें केन्द्रीय प्रवृत्ति माप कहते हैं।

*****

उत्तर

अभ्यास 13.1

1)

वर्गांतर	टैली-अंक	आवृति
30 - 39	IIII	4
40 - 49	IIII, IIII, IIII, I	16
50 - 59	IIII , II	7
60 - 69	IIII	5
70 - 79	IIII	4
80 - 89	III	3
90 - 99	I	1

(i) अधिकतम 40 - 49, न्यूनतम - 90 - 99

(ii) 30.5 और 39.5 (iii) 65

2)

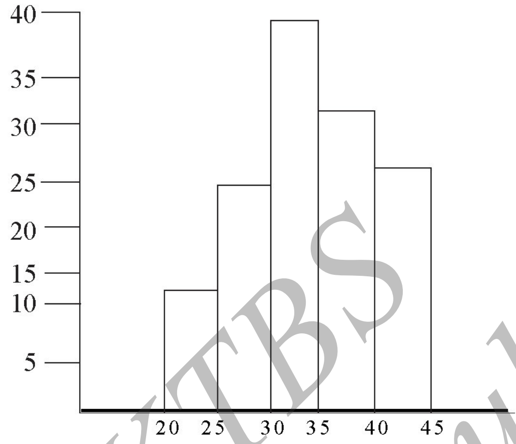
वर्गांतर	टैली-अंक	आवृति
10 - 20	IIII , IIII	9
20 - 30	IIII, IIII, II	12
30 - 40	IIII , IIII	10
40 - 50	IIII , IIII	9
50 - 60	IIII , I	6
60 - 70	IIII	4

(i) 30 और 40 के बीच 10 आंकडे

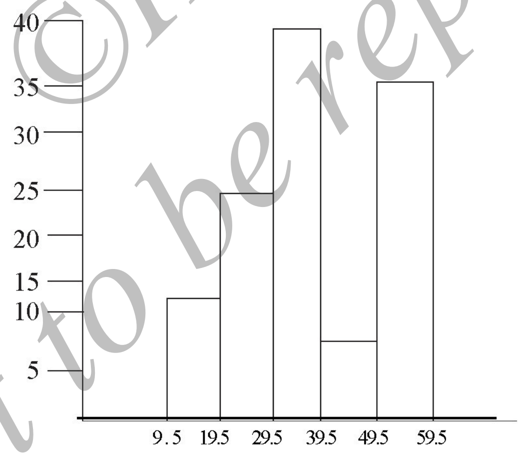
(ii) 10, 35 (iii) 52

अभ्यास 13.2

1.



2.



अभ्यास 13.3

(1) 42.1 (2) 29.73 (3) 42.75 (4) 22.63 (5) 15

(6) 37.5 (7) 136.8 (8) 16.7

(9) (i) 3 (ii) 22 & 42 (द्वि-बहुलक वितरण)

(10) 20

घटक - 14
आलेखों का परिचय

इस घटक के अध्ययन करने का बाद आप सीखेंगे :

- आयातकार निर्देशांक प्रणाली में, एक समतल पर एक बिन्दु निर्धारित करना
- एक निर्देशांक प्रणाली बनाकर और एसे प्रणाली में रैखिक वलय के आलेख बनाना
- दो भिन्न आयताकार निर्दिशांक प्रणाली जिसमें अक्ष परस्पर समांतर है, एक बिन्दु के निर्देशांक कैसे संबंधित है
- एक ग्राफ पेपर पर एक सरल रेखा के आलेख (ग्राफ) देखकर एक सरल रेखा का समीकरण बनाना

प्रस्तावना :

मई महीने में, जब ग्रीष्म ऋतु अपनी परम सीमा पहुँची हो, आप देखेगें कि कुछ दिनों में गर्मी बहुत है तो दूसरे दिनों में उतनी नहीं होती। आप प्रतिदिन गरिष्ठ तापमान माप सकते हैं (चाहे आप फेरांहाइट अथवा सेलसियस प्रणाली उपयोग करो).

आप संपूर्ण महीने का दत्तांश प्राप्त कर सकते है।

आप शायद निम्न लालिका में व्यक्त करेंगें।

दिनांक	1	2	3	4	5	6	7	8	....	30	31
गरिष्ठ तापमान	33°	32°	34°	35°	37°	32°	35°	38°	....	36°	36°

इसीतरह वर्ष के प्रत्येक महीने में होनेवालो वर्षा, इंच अथवा सेण्टीमीटर में माप सकते है तथा एक दत्तांश प्राप्त कर सकते हैं।

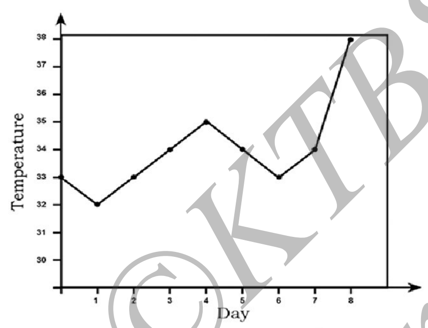
ऐसे दत्तांश लिखकर रखें भविष्य की योजनाओं के लिए बहुत उपयोगी है। उदाहरण के लिए अनेक वर्षों की वर्षा निरीक्षण कर हम खेती के फसल पर योजना बना सकते हैं। इसतरह जीवन के अनेक घटनाओं के महत्वपूर्ण दत्तांश देखते है जिन्हें लिखकर रखना, अपने उज्वल भविष्य के लिए आवश्यक है। तालिका में लिखना एक सरल विधान है। परन्तु यह बहुत लंबी प्रक्रिया है। लोग ऐसे दत्तांश चाहते है जिसे हम योग्य रूप से विश्लेषण कर सके।

आलेखों (ग्राफ) का उपयोग करना एक बहुत प्रभावशाली विधान है।

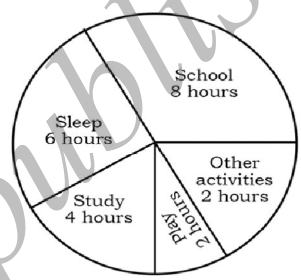
आलेख (गाफ) क्या है? एक प्रयोग द्वारा प्राप्त **संख्यात्मक दत्तांश के दृश्य निरुपण** को आलेख कहते हैं।

आलेख को देखकर कोई भी व्यक्ति दत्तांश समझ सकता है। तथापि आलेख, दत्तांश का विश्लेषण करने में सहायक है। आलेखों के अनेक प्रकार हैं : स्तंभालेख, पै ग्राफ (पै चार्ट), आयतचित्र, कार्टेशियन ग्राफ।

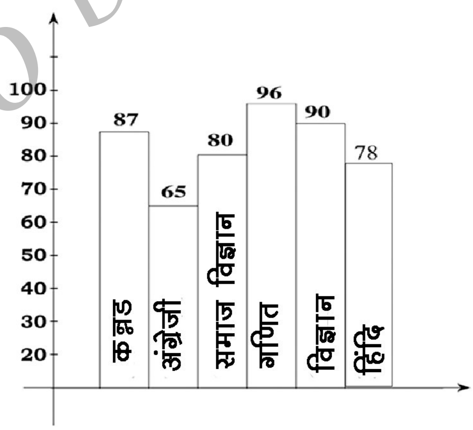
इनमें से प्रत्येक, एक विशिष्ट दत्तांश की व्याख्या देने में सहायक है। संग्रहित दत्तांश को सरल एवं समझने जैसे हश्य रुप में निरुपण करना ही इन सभी आलेखों का मुख्य उद्देश्य होता है।



आट दिन का हवामान रेखा आलेख में निरूपित



विध्यार्थि का प्रतिदिन का कार्यकलाप पै ग्राफ में निरूपित



विध्यार्थि का चे विषय का प्राप्तांक स्थंभलेख में निरूपित

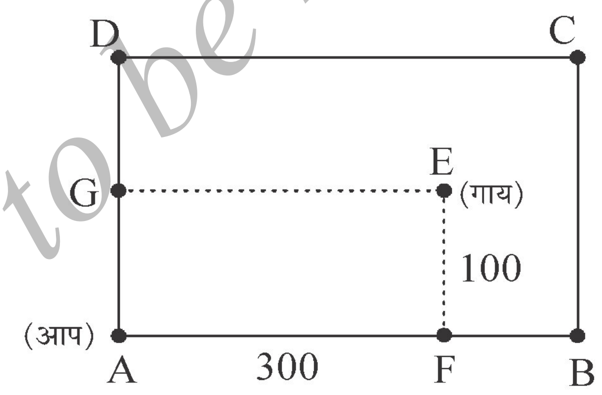
निर्देशांक प्रणाली (Coordinate system)

दत्तांश को निरुपित करने का एक और महत्वपूर्ण एवं उपयोगी विधान है **कार्टेशियन** ग्राफ का उपयोग करना है। इन्हें **निर्देशांक ग्राफ** भी कहते हैं क्योंकि इसका मूल तत्व **निर्देशांक प्रणाली** पर निर्भर है। एक निर्देशांक प्रणाली समतल पर बिन्दुओं को अंकित करने का साधन है। यदि आप एक सरलरेखा लेते हो, तो रेखा पर स्थित सभी बिन्दु वास्तविक संख्याओं को सूचित करती हैं। समतल के निर्देशांक प्रणाली में, दो परस्पर दो लंब रेखाओं का उपयोग करते हैं। इससे समतल पर बिन्दुओं को निश्चित रुप पहचानने में सहायता मिलती है।

एक निर्देशांक प्रणाली कैसे कार्य करती है जानने, मान लीजिए आप एक आयताकार चरगाह के, एक कोने में कहीं खडे हो। एक गाय, चरगाह में किसी बिन्दु में घास चर रही है। संख्यात्मक दत्तांश द्वारा आपको उसके स्थान को पहचानना है। आप कैसे करेंगें?

एक सरल तरीका है जहाँ आप खडे हो वहाँ से गाय की दिशा में जाकर दूरी को नापना। उसे आप किसी सुविधाजनक माप लेकर नापना।

लेकिन जब आप किसी को स्थान बतायेंगें तो आप को जिस दिशा में आप गये और आपने कितनी दूरी तक चले बताना होगा। दिशा बताना इतना सरल नहीं है। इसलिए कोई दूसरा विधान उपयोग करना होगा।



सर्वोत्तम तरीका है चरगाह की सीमाओं का उपयोग करना। मान लो आप A बिन्दु पर हैं और गाय E बिन्दु पर हैं (संलग्न आकृति में देखिए)। आप F बिन्दु तक AB सीमा पर चल सकते हैं जहाँ EF, AD से समान्तर है। गाय की दिशा में जाने के लिए आपको $90°$ का मोड घडी की विरुद्ध दिशा में लेना होगा; याद रखिए AD, EF से समांतर है। यदि AF =

300 मीटर और FE = 100 मीटर हो, तो आप गाय का स्थान, 300 मीटर AB की दिशा में और 100 मीटर AD की दिशा में है ऐसा बोल सकते है। संक्षेप में हम कह सकते हैं (AB , AD) प्रणाली में रखते हुए, E के निर्देशांक (300, 100) है । ध्यान दीजिए 300 यह AB की दिशा की दूरी है और 100 AD की दिशा है।

पहले आप AD संग G बिन्दु तक चल सकते है जहाँ AG = 100 मीटर और फिर GE (जो AB के समांतर है)के संग चलकर E बिन्दु पहुँच सकते हैं जहाँ GE = 300 मीटर है। इसतरह यदि आप A बिन्दु और प्रणाली (AD, AB) उपयोग करते हैं तो E के निर्देशांक (100, 300) है।

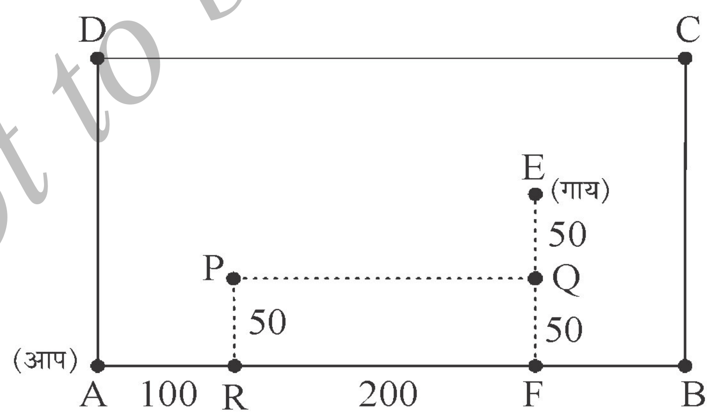
ध्यान दीजिए :

A बिन्दु तथा प्रणाली (AB, AD) को ध्यान में रखते हुए E बिन्दु को (300, 100) क्रमित युग्म से वर्णन करते हैं। उसी बिन्दु E को A बिन्दु तथा प्रणाली (AD, AB) को ध्यान में रखते हुए (100, 300) क्रमित युग्म से वर्णन करते है। इसतरह एक ही बिन्दु E के अलग अलग प्रणाली में भिन्न भिन्न निर्देशांक हो सकते है।

सावधान!

बिन्दु A तथा प्रणाली (AB, AD) बिन्दुऐं (300, 100) और (100, 300) बिलकुल अलग अलग है।

बिन्दु A के बदले, मान लीजिए आप बिन्दु P पर हैं (आकृति देखिए) अब गाय के स्थान को नये स्थान को नये स्थान को ध्यान में रखते हुए कैसे वर्णन करोगे?



पुन : आप PQ के संग जाकर Q बिन्दु तक चल सकते हैं जहाँ PQ, AB से समांतर है और QE, AD से समांतर है। तो QE के संग चलकर E पहुँच सकते है।

अब आप बिन्दु E को, बिन्दु P तथा प्रणाली (AB, AD) को ध्यान में रखते हुए वर्णन कर सकते हैं।

ध्यान दीजिए PQ यह AB से समांतर है और QE यह AD से समांतर है हम वही प्रणाली (AB, AD) परन्तु एक अलग प्रारंभिक बिन्दु P उपयोग करते हैं। यदि आप PQ और QE जानते हैं तो आप बडे आसानी से E का वर्णन कर सकते हो। AB के किसी बिन्दु R से PR को AD के समांतर खींचिए।

मान लीजिए AR = 100 मीटर है। तो PQ = RF = 200 मीटर है। इसीतरह यदि RP = 50 मी, तो QE = FE – FQ = FE – RP = 100 – 50 मीटर है। इसलिए बिन्दु P तथा प्रणाली (AB, AD) को ध्यान में रखते हुए E के निर्देशांक (200, 50) है।

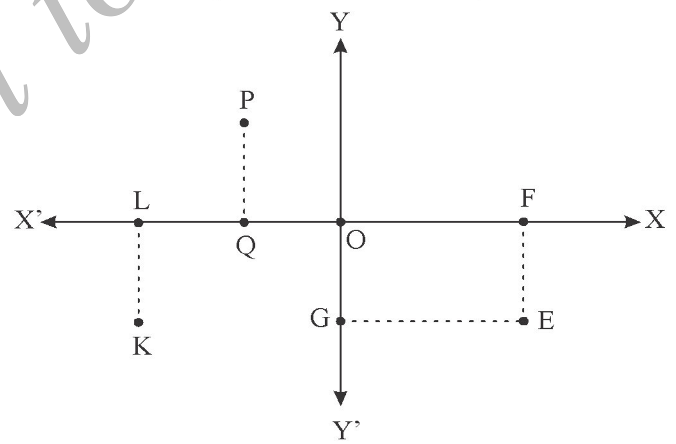
ध्यान दीजिए!

बिन्दु P को, बिन्दु A तथा प्रणाली (AB, AD) को ध्यान में रखते हुए (100, 50) से वर्णित कर सकते हैं, क्यों कि AR = 100 और RP = 50 इकाई है। बिन्दु P और प्रणाली (AB, AD) को ध्यान में रखते हुए E को (200, 50) से वर्णन कर सकते है। परन्तु E को, बिन्दु A और प्रणाली (AB, AD) को ध्यान में रखते हुए (300, 100) से वर्णन कर सकते है। क्या आप ध्यान देते हो कि 300 = 100 + 200 और 100 = 50 + 50? आप का निष्कर्ष क्या है?

अब आप एक ऐसे संदर्भ की कल्पना कर सकते हो जहाँ एक बृहत चरगाह है जिस की कोई सीमाऐं नहीं है। पुनः एक गाय चरगाह के किसी बिन्दु पर चर रही है और आप किसी अन्य बिन्दु पर खडे हो।

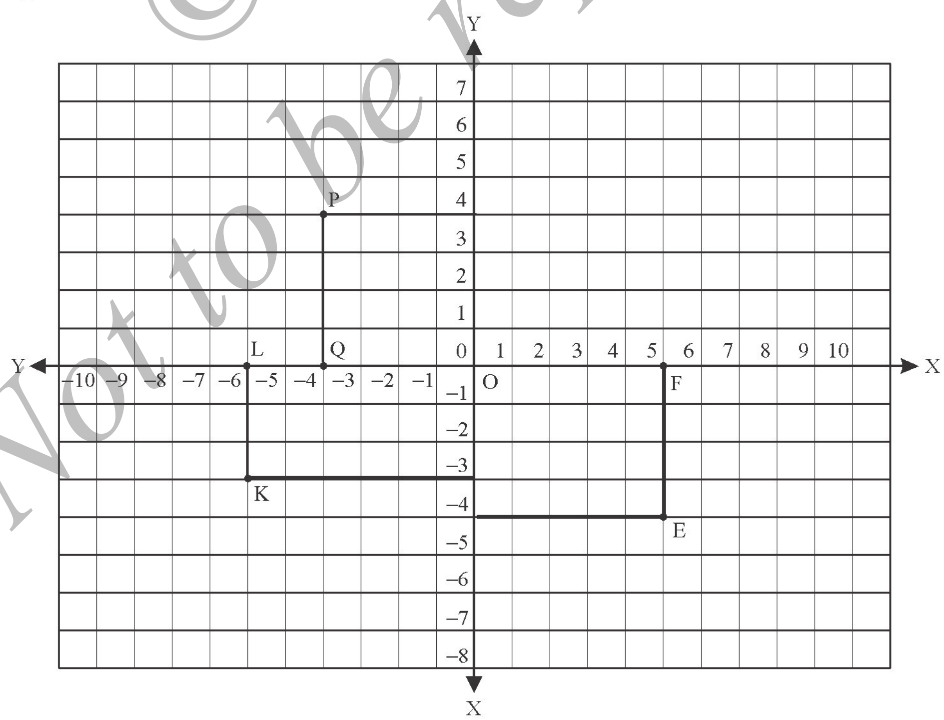
गाय के स्थान को कैसे वर्णन करोगे?

इस के पूर्व आयताकार आंगन था और उसके सीमाओं से बना आयताकार **चौखट** (frame) था। अब आप बिलकुल स्वतंत्र है और ऐसा कोई चौखट नहीं है। आप जहाँ खडे हो उस बिन्दु पर दो परस्पर लंब बिन्दु से पारित होते हुए कल्पना कर सकते है। मान लीजिए Am O बिन्दु पर खडे हैं और X'O X, Y'OY दो परस्पर लंब रेखाऐं O बिन्दु से पारित होते हैं। मान लीजिए गाय E बिन्दु पर चर रही है (आकृति में देखिए).



पुन : आप $\overrightarrow{OX}$ के संग F तक जा सकते है, जहाँ EF यह Y^1OY से समांतर है। तत्पश्चात आप FE के संग F से E जा सकते है। बिन्दु O और प्रणाली (X^1OX, Y^1OY) को ध्यान में रखते हुए, आप बिन्दु E को OF और FE = OG लंबाईयों (यहाँ G, Y'OY रेखा पर स्थित है ताकि GE ; X'OX से समांतर है) के उपयोग से वर्णन कर सकते हो। परन्तु एक कठिनाई है। आकृति में दिखाये जैसे, यदि बिन्दु E, X'OX रेखा के नीचे है, तो आपको किरण $\overrightarrow{OX}$ के संग चलकर बिन्दु F पहुँचना होगा, और किरण OY' की दिशा में F बिन्दु से E तक चलना होगा। यदि दूसरी कोई गाय K बिन्दु पर स्थित है तो आप को किरण $\overrightarrow{OX^1}$ की दिशा में O से L तक चलना है और फिर आपको किरण $\overrightarrow{OY^1}$ की दिशा में L से K तक चलना होगा। इसीतरह, $\overrightarrow{OX^1}$ के संग आप बिन्दु P से O तक और फिर $\overrightarrow{OY^1}$ दिशा में Q चलना होगा।

अब आपके ध्यान में आता है कि O, से $\overrightarrow{OX}$,$\overrightarrow{OX'}$,$\overrightarrow{OY}$ और $\overrightarrow{OY'}$ से चार दिशायें हैं। आप X^1OX रेखा वास्ताविक संख्या रेखा मान सकते हो और O तत्संबधी शून्य है। इसतरह, O के बायीं ओर सभी बिन्दुऐं ($\overrightarrow{OX^1}$ के संग) ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं को सूचित करते हैं और O के दाहिनी ओर की बिन्दुऐं ($\overrightarrow{OX}$ के संग) घनात्मक संख्याओं को सूचित करते है। इसीतरह हम देखते हैं कि YOY^1 भी वास्तविक संख्या रेखा है और O तत्संबंधी शून्य है। O के ऊपर के सभी बिन्दु तत्संबंधी घनात्मक संख्याओं को सूचित है और O के नीच की सभी बिन्दु तत्संबंधी ऋणात्मक संख्याओं सूचित करती हैं। ध्यान दीजिए O दोनों रेखाओं के लिए O (शून्य) का स्थान सूचित करता है। O के निर्देशांक (0, 0) है।

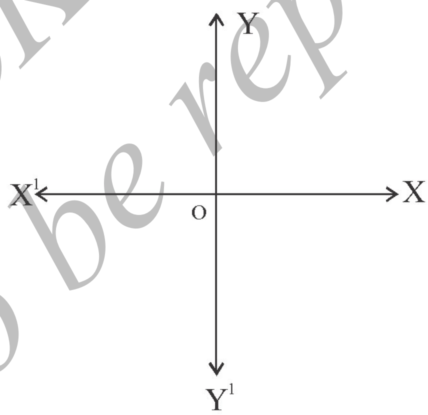


E बिन्दु पहुँचने आपको $\overrightarrow{OX}$ दिशा में F तक 5 इकाई और $\overrightarrow{OY'}$ दिशा में 4 इकाई F से E तक जाना होगा। क्योंकि $\overrightarrow{OY'}$ वास्तविक संख्या रेखा का ऋणात्मक भाग है, हम E को (5, –4) से वर्णन करते है।

हम कहते हैं **आयताकार निर्देशांक प्रणाली** X^1OX, Y^1OY को ध्यान में रखते हुए, E के **निर्देशांक** (5, –4) है।

यहाँ X^1OX रेखा को x **अक्ष** कहते हैं और Y^1OY को y– **अक्ष** कहते है। O बिन्दु को निर्देशांक प्रणाली की **मूल** (origin) बिन्दु कहते है।

$\overrightarrow{OX}$ किरण घनात्मक x **अक्ष** और $\overrightarrow{OX^1}$ को **ऋणात्मक** x अक्ष कहते है। इसीतरह $\overrightarrow{OY}$ घनात्मक Y अक्ष और $\overrightarrow{OY^1}$ को ऋणात्मक Y– अक्ष कहते है। इस प्रणाली में E के निर्देशांक (5, –4) है। हम 5 को E का x **निर्देशांक** और –4 को y– **निर्देशांक** कहते हैं। ध्यान दीजिए, पहली संख्या **क्षैतिक अक्ष** और दूसरी संख्या हमेशा **उध्वार्धर अक्ष** सूचित करती हैं। इसीतरह K बिन्दु के निर्देशांक में –6 x निर्देशांक और –3, Y निर्देशांक है। इस प्रणाली में (–6, –4) को K के निर्देशांक कहते हैं। इसीतरह P के निर्देशांक (–4, 4).



X^1OX और Y^1OY रेखाऐं **समतल** को 4 भागों में विभाजित करते हैं। $\overrightarrow{OX}$ और $\overrightarrow{OY}$ से घेरा हुआ क्षेत्र को प्रथम चतुर्थांश कहते हैं। इसीतरह, **द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ, चतुर्थांश** है। यदि आप प्रथम चतुर्थांश में कोई बिन्दु अंक्ति करना चाहते हो तो आप $\overrightarrow{OX}$ और $\overrightarrow{OY}$ जाकर उस बिन्दु पहुँचना पडेगा। इसतरह आप घनात्मक x अक्षों को उपयोग करते हैं। प्रथम चतुर्थांश में सभी बिन्दु के x निर्देशांक और y निर्देशांक दोनों ऋणात्मक रहित हैं।

ये $\overrightarrow{OX}$ किरण पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का Y निर्देशांक O हैं और $\overrightarrow{OY}$ किरण पर स्थित प्रत्थेक बिन्दु का x निर्देशांक 'O' होता है। द्वितीय चतुर्थांश में हमें $\overrightarrow{OX'}$ और $\overrightarrow{OY}$ किरणों

का उपयोग करते है। इसलिए, दूसरे चतुर्थांश के प्रत्येक बिन्दु का x निर्देशांक धनात्मक रहित और y निर्देशांक ऋणात्मक रहित होता है।

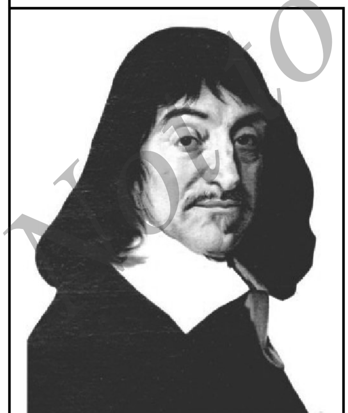
इसीतरह, तृतीय चतुर्थांश के बिन्दु जिनके निर्देशांक (x, y) से सूचित है जहाँ $x \le 0$ और $y \le 0$ है। चतुर्थ चतुर्थांश का प्रत्येक बिन्दु को क्रमित युग्म (x, y) से सूचित है जहाँ $x \ge 0$ और $y \le 0$ है।

एक बिन्दु के x निर्देशांक को **अब्सिस्सा** (abscissa) करते है और उस बिन्दु के Y निर्देशांक को **ऑरडिनेट** (Ordinate) कहते हैं।

ध्यान दीजिए X^1OX और Y^1OY आप स्वतंत्र रूप चयन कर सकते हो। केवल एक ही शर्त याद रखना है कि दो परस्पर लंब होना चाहिए ताकि आप एक आयताकार निर्देशांक प्रणाली प्राप्त कर सकें

इस अध्याय में हम केवल आयताकार निर्देशांक प्रणाली उपयोग करते हैं। फिर भी एक ऐसी प्रणाली प्राप्त कर सकते है जहाँ दोनों अक्षा परस्पर लंब न हो। ऐसे निर्देशांक प्रणाली जिसे तिश्च्छी निर्देशांक प्रणाली कहते है प्रायोगिक समस्याओं को हल करने में सहायक है।

समतल में बिन्दुओं को अंक्ति करने की परिकल्पना फ्रेंच के गणितज्ञ एवं तत्वज्ञानी रेने डिसकार्टेस ने प्रस्तावित की। इससे एक प्रकार की क्रांति हुई क्योंकि इससे ज्याएितिय समस्याओं को बीजीय समस्याओं में बदलने में सहायता मिली। उनके इस योगदान की स्मृति में हम जो प्रणाली उपयोग कर रहें है उसे **कार्टेशियन निर्देशांक प्रणाली** कहते हैं। इससे गणित की एक नया शाखा ''विश्लेषणात्मक'' ज्यामिति (Analytic geometry) का विकास करना संभव हुआ।

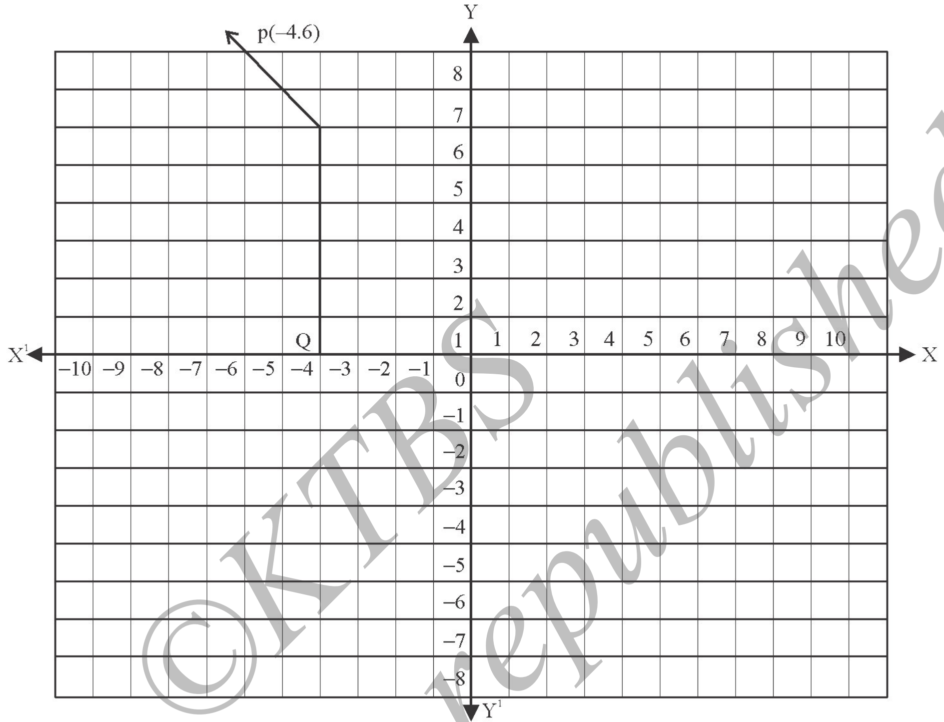


रेणे डिसकार्टेस

रेणे डिसकार्टेस का जन्म 31 मार्च 1596 को दक्षिण फ्रांस के ला हुए नामक नगर में हुआ। 1606 में, अपने 8 वर्ष की आयु में रेणे डिसकार्टेस साहित्य, व्याकरण, विज्ञान और गणित का अध्ययन करना शुरु किया । 1616 में, उन्होंने कानून के सम्मानित और अनुज्ञाप्राप्त उपाधियाँ प्राप्त की। कानून की उपाधियों के साथ-साथ डिसकार्टेस ने तत्वज्ञान, धर्मशास्त्र और वैद्यशास्त्र के अध्ययन में समय बिताया ।

सेना में थोडे समय रहने के बाद, डिसकार्टेस ने शान्तमय जीवन बिताया, उन्होंने अपनी बौधिक लक्ष्य की पीछा करते हुए दार्शनिक प्रबन्ध लिखते और विज्ञान तथा गणित की दुनिया का अन्वेषन करते समय बिताया।

1637 में, ''रेखागणित'' का प्रकाशन किया जिसमें बीज गणित और रेखागणित को जोडकर एक विश्लेषणात्मक ज्यामिति को जन्म दिया, जो कि कार्टेशियन ज्यामिति से प्रसिद्ध है।



कार्यकलाप 1:

ग्राफ पेपर पर दत्त बिन्दु का स्थान निर्धारित करना मान लीजिए आपको एक ग्राफ पेपर दिया गया है। आप ग्राप पेपर X'OX और Y'OY दो परस्पर लंब रेखाऐं खींचकर, एक निर्देशांक प्रणाली बना लेते हो। आप (–4, 6) निर्देशांक के P बिन्दु को कैसे अंकित करोगे?

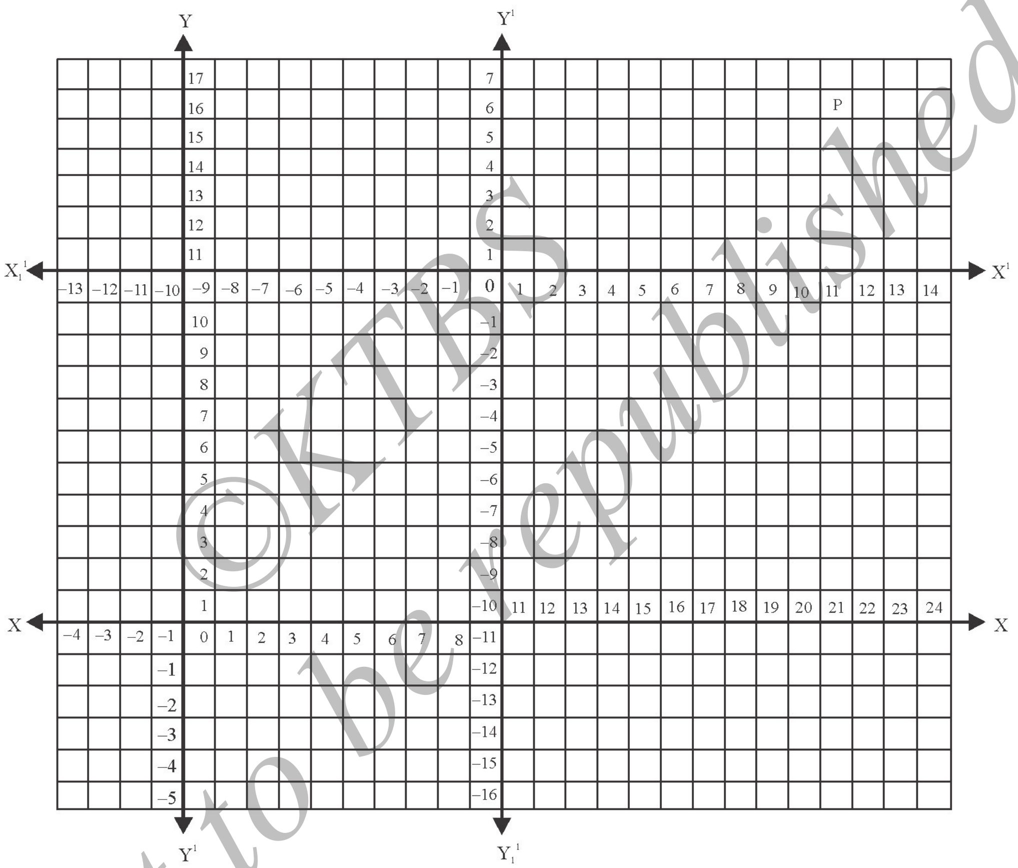
मूलबिन्दु O से शुरु होते हुए $\overrightarrow{OX'}$ किरण की दिशा 4 इकाई आगे बढिये। क्योंकि $\overrightarrow{OX'}$ ऋणात्मक X अक्ष सूचित करता है –4 x निर्देशांक है। आप $\overrightarrow{OX'}$ के Q बिन्दुपर आते हो। अब $\overrightarrow{OY}$ के समांतर 6 इकाईयाँ ऊपर जाईए।

याद रखिए $\overrightarrow{OY}$ धनात्मक Y अक्ष सूचित करता है। इसलिए संख्या 6 (घनात्मक संकेत के साथ) बनाता है कि आपको $\overrightarrow{OY}$ के समांतर 6 इकाईयां ऊपर जाना है। आप P बिन्दु पहुँचते हो जिसके निर्देशांक (–4, 6) है।

कार्यकलाप 2 :

एक ग्राफ पेपर लीजिए। दो आयताकार निर्देशांक अक्ष $X^1OX - Y^1OY$ और $X_1OX_1 \Leftrightarrow Y_1{}^1OY_1$ खींचिए जहाँ $X^1OX \parallel X_1{}^1OX_1$ है। $X_1{}^1OX_1 - Y_1{}^1O_1Y_1$ को ध्यान में रखते हुए

P का स्थान निर्धारित कीजिए जिसके निर्देशांक (10, 5) है। $X^1OX - Y^1OY$ को ध्यान में रखते हुए P के निर्देशांक क्या है? $X^1OX - Y^1OY$ को ध्यान में रखते हुए O बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। क्या आप $X^1OX - Y^1OY$ प्रणाली के P के निर्देशांक, $X^1OX - Y^1OY$ के O_1 के निर्देशांक और $X_1{}^1OX_1 - Y_1{}^1O_1Y_1$ प्रणाली के निर्देशांक के बीच संबंध ज्ञात कर सकते हो?



उपरोक्त चित्र में, आप देखते हो कि $X^1OX - Y^1OY$ प्रणाली में O_1 के निर्देशांक (11, 11) है। $X^1OX \leftrightarrow Y^1OY$ प्रणाली में P के निर्देशांक (21, 16) है और $X_1{}^1O_1X_1 - Y_1{}^1O_1Y_1$ प्रणाली में (10, 5) है।

ध्यान दीजिए :

$21 = 11 + 10,\ 16 = 11 + 5$

हम इसतरह लिखते है (21, 16) = (11, 11) + (10, 5) P के विभिन्न स्थानों पर तथा अलग प्रणाली $X^1OX \leftrightarrow Y^1OY$, $X_1{}^1OX_1 \leftrightarrow Y_1{}^1O_1Y_1$ में निर्देशांक ज्ञात कीजिए। इन कार्यकलापों आप क्या निर्णय ले सकते है।

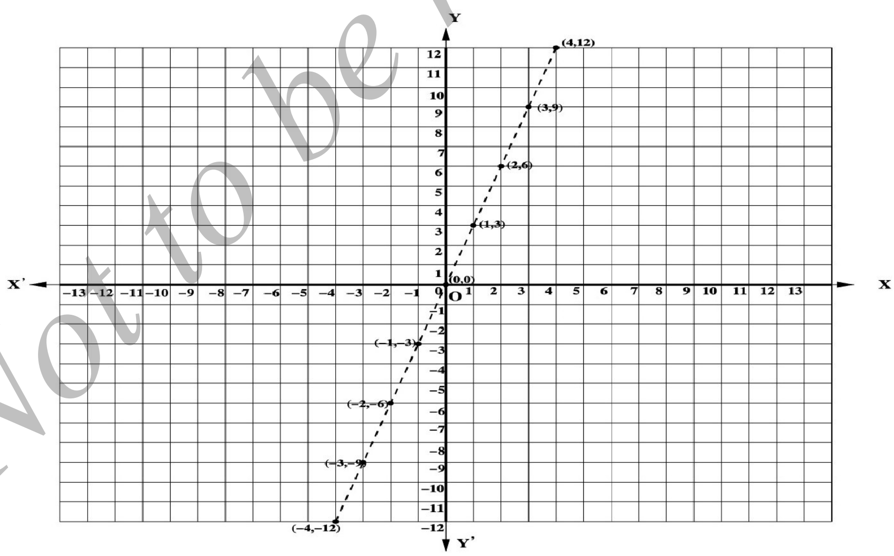
ध्यान दीजिए : मान लीजिए $X^1OX \leftrightarrow Y^1OY$ और $X_1{}^1OX_1 \Leftrightarrow Y_1{}^1O_1Y_1$ **दो निर्देशांक प्रणालियाँ** है ताकि $X^1OX \parallel X_1{}^1O_1X_1$ है। **मान लीजिए** $X_1{}^1OX - Y^1OY$ **प्रणाली में** P **के निर्देशांक** (x, y) है **और दूसरे प्रणाली** $X_1{}^1OX_1 - Y_1{}^1OY_1$ में (x', y') है **यदि** $X^1OX \leftrightarrow YOY^1$ **प्रणाली** को ध्यान रखते हुए O_1 के निर्देशांक (a, b) है तो $x = a + x^1$ और $y = b + y^1$.

कार्यकलाप 3 : एक ग्राफ पेपर लेकर निर्देशांक प्रणाली $X^1OX - Y^1OY$ अंक्ति कीजिए। बिन्दु P का स्थान निर्धारित कीजिए जिसके निर्देशांक (–5, 8) है। उस बिन्दु को ज्ञात कीजिए जिसेक निर्देशांक (8, –5) है। क्या आप वही बिन्दु P प्राप्त करते हैं?

उदाहरण 1 :

संख्या 3 पर विचार कीजिए 1. आईए, 3 के गुणज की तालिका बना ले, जिसमें कुछ धनात्मक और कुछ ऋणात्मक हो।

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
	3 × (−3)	3 × (−2)	3 × (−1)	3 × 0	3 × 1	3 × 2	3 × 3
y	−9	−6	−3	0	3	6	9
(x, y)	(−3,−9)	(−2,−6)	(−1,−3)	(0, 0)	(1, 3)	(2, 6)	(3, 9)

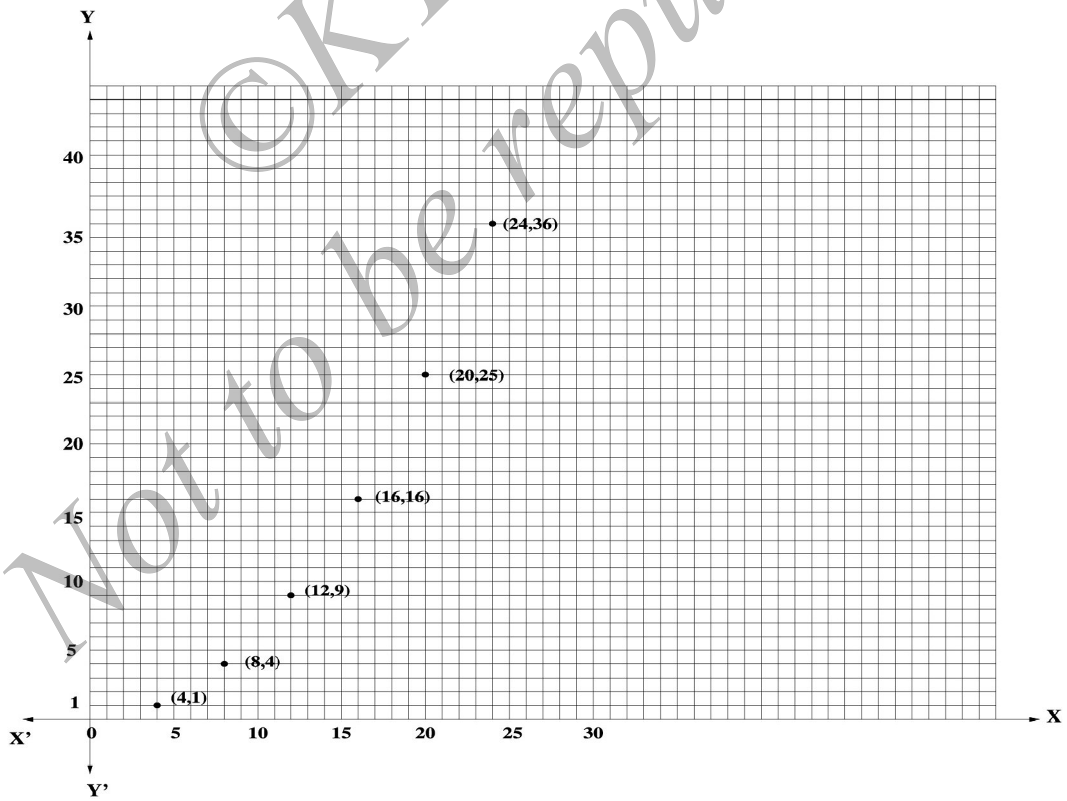


एक ग्राफ पेपर लीजिए और $X^1OX \parallel Y^1OY$ स्वयं की निर्देशांक प्रणाली बना लीजिए। तालिका के अन्तिम पंक्ति में प्राप्त बिन्दुओं (x, y) का स्थान निर्धारित कीजिए। क्या आप ध्यान देते हो कि सभी बिन्दु एक ही सरल रेखा पर स्थित है?

उदाहरण 2 : (क्षेत्रफल के प्रति वर्ग की परिमिति)

1 इकाई लंबाई के वर्ग पर विचार कीजिए। उसका क्षेत्रफल क्या है? आप जानते है कि वर्ग का क्षेत्रफल l^2 है जहाँ l वर्ग की लंबाई है। उसका परिमाप $l + l + l + l = 4l$ है। अतः 1 इकाई लंबाई के वर्ग का क्षेत्रफल एक वर्ग इकाई है और परिमिति 4 इकाई है। तो 2 इकाई के लंबाई के वर्ग का क्षेत्रफल और परिमिति कैसे भिन्न है? वे क्रमशः 4 वर्ग इकाई और 8 इकाई है। आईए, विभिन्न लंबाई के भुजा के वर्गों के परिमिति और क्षेत्रफल की तालिका बनाये।

l	1	2	3	4	5	6
$x = 4l$	4	8	12	16	20	24
$y = l^2$	1	4	9	16	25	36
(x, y)	(4,1)	(8,4)	(12,9)	(16,16)	(20,25)	(24,36)

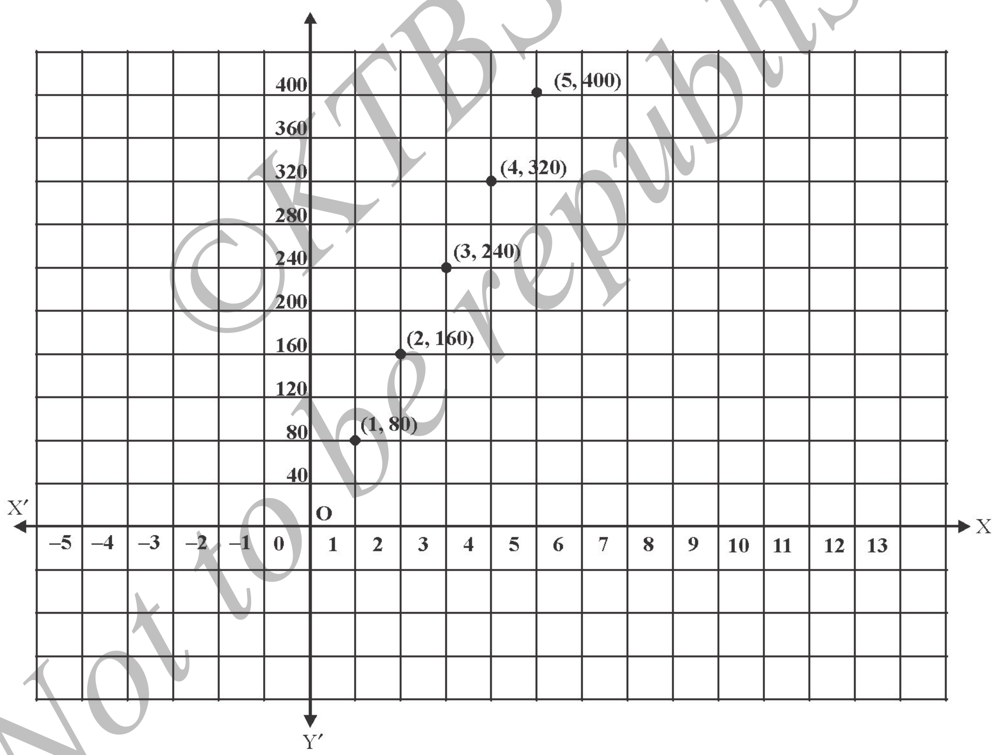


पुन : अपनी स्वयं का निर्देशांक प्रणाली बना लीजिए और इन (x, y) बिन्दुओं को ग्राफ पर अंकित कीजिए क्या ये सभी बिन्दु एक सरल रेखा पर स्थित है।

उदाहरण 3 : (सरल ब्याज प्रति वर्षों की संख्या)

मान लीजिए शिवा ₹ 1,000 को बैंक में 5 वर्षों के लिए निक्षेप के रुप में 8% प्रति वर्ष की दर से रखता है। आप आसानी से इन वर्षों के प्राप्त ब्याज ज्ञात कर एक तालिका बना सकते हो.

वर्ष = x	1	2	3	4	5
ब्याज = y	80	160	240	320	400
(x, y)	$(1, 80)$	$(2, 160)$	$(3, 240)$	$(4, 320)$	$(5, 400)$



पुन : आपको इन बिन्दुओं को एक ग्राफ कागज पर अंकित करना है। यहाँ पर एक प्रायोगिक समस्या सामने आती है। शिवा से प्राप्त ब्याज की धनराशी बडी है और इन संख्याओं जैसे 240, 320, 400 ग्राफ पेपर पर अंक्ति करना कठिन है जबतक हम ग्राफ का पेपर बडा न लें।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

तो भी यह समस्या भिन्न इकाई लेने पर हल हो जाती है। उदाहरण यदि आप y-अक्ष पर 1 इकाई = 40 लेते हो। पुनः आप देखेंगें कि सभी बिन्दु एक सरल रेखा पर स्थित है।

कार्यकलाप 4 :

मान लीजिए एक कार 40 कि.मी प्रति घंटा के समवेग से चलती है। 1 ले, 2 रे, 3 रे, 4 थे, 5 वे, 6 वे ,7 वे, 8 वे घण्टे के अंत के कार से तय की दूरी की तालिका बनाईए। इन बिन्दुओं को कागज पर अंक्ति कीजिए जहाँ x -अक्ष समय और y -अक्ष कार से तथ की गई दूरी दर्शाते है।

अभ्यास 14.1

1. अपनी स्वयं की निर्देशांक प्रणाली बनाकर ग्राफ पर निम्नलिखित बिन्दुओं को अंकित कीजिए

   (i) P(–3, 5) (ii) Q(0, –8) (iii) R(4, 0) (iv) S(–4, –9)

2. मान लीजिए आपको एक निर्देशांक प्रणाली दी गई है। निम्न बिन्दु कौन से चतुर्थांश में आते हैं निर्धारित कीजिए :

   (i) A(4, 5) (ii) B(–4, –5) (iii) C(4, –5)

3. मान लीजिए निर्देशांक प्रणाली $X^1OX - Y^1OY$ को ध्यान के रखते हुए P के निर्देशांक (–8, 3) है। मान लीजिए $X_1{}^1O_1X_1 - Y_1{}^1O_1Y_1$ एक और प्रणाली है जहाँ $X^1OX \parallel X_1{}^1O_1Y_1$ है और मान लीजिए O_1 के निर्देशांक $X^1OX - Y^1OY$ के आधार पर (9, 5) है। तो P के निर्देशांक $X_1{}^1O_1X_1 - Y_1{}^1O_1Y_1$ क्या होगें?

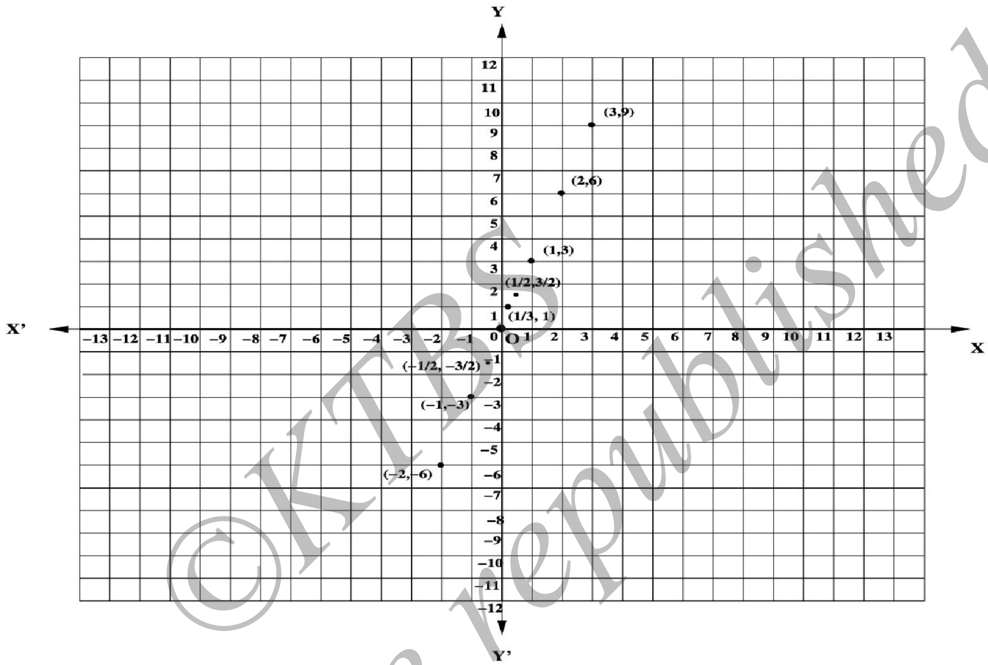
4. मान लीजिए एक निर्देशांक प्रणाली में P के निर्देशांक (10, 2) है और दूसरे निर्देशांक प्रणाली $X_1{}^1O_1X_1 - Y_1{}^1O_1Y_1$ में (–3, –6) है, जहाँ $X^1\ OX \parallel X^1{}_1O_1X_1$ है। O के निर्देशांक $X_1{}^1O_1X_1 \leftrightarrow Y_1{}^1O_1Y_1$ के आधार पर क्या होगें?

रैखिक ग्राफ

आईए पुनः एक बार उदाहरण 1 पर विचार करें, जहाँ हमने 3 के गुणजों को अंकित किया था। 3 के गुणज के बदले, मान लीजिए हम 3 वास्तविक गुणज लेते हैं। प्रत्येक वास्तविक, संख्या x के लिए $y = 3x$ पर सोचिए (x को 3 से गुणा करने पर प्राप्त)

x	0	1	2	3	–1	–2	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{3}$
y	0	3	6	9	–3	–6	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	1

जब आप x के लिए विभिन्न वास्तविक संख्या निर्धारित करते हैं, आपको पुनः $y = 3x$ के वास्तविक संख्या प्राप्त होते है। इसतरह प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए आपको एक बिन्दु प्राप्त जिसके निर्देशांक $(x, 3x)$ है। एक निर्देशांक प्रणाली उपयोगकर ग्राफ पेपर पर अंक्ति कर सकते है।



x के लिए जितने अधिक मूल्य देते हैं उतने अधिक $(x, 3x)$ के मूल्य मिलते है। जैसे जैसे आप ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं को अंकित करते हैं अधिक से अधिक बिन्दुओं के समूह प्राप्त होगें। निःसंदेह आपको अच्छे से अच्छा ग्राफ पेपर लेना होगा ताकि आप इन बिन्दुओं को अंकित कर सके। फिर भी, आप देखेंगें कि सभी बिन्दु एक सरल रेखा पर आते है। यह स्पष्ट होता है कि जैसे-जैसे x को वास्तविक संख्या देते जाते हो (x, y) बिन्दु जहाँ $y = 3x$ से समतल में सरल रेखा प्राप्त होती है। हम कहते हैं $y = 3x$ **निर्देशांक समतल** पर एक सरल रेखा सूचित करता है।

कार्यकलाप 5 **:**

$y = 3x$ अक्ष पर 1 इकाई $= \frac{1}{3}$ लीजिए । $y = 3x$ के अधिक से अधिक मूल्य ज्ञात कीजिए जहाँ x वास्तविक संख्या है और ग्राफ पेपर पर (x, y) बिन्दुओं पैमाने के अनुसर अंकित कीजिए।

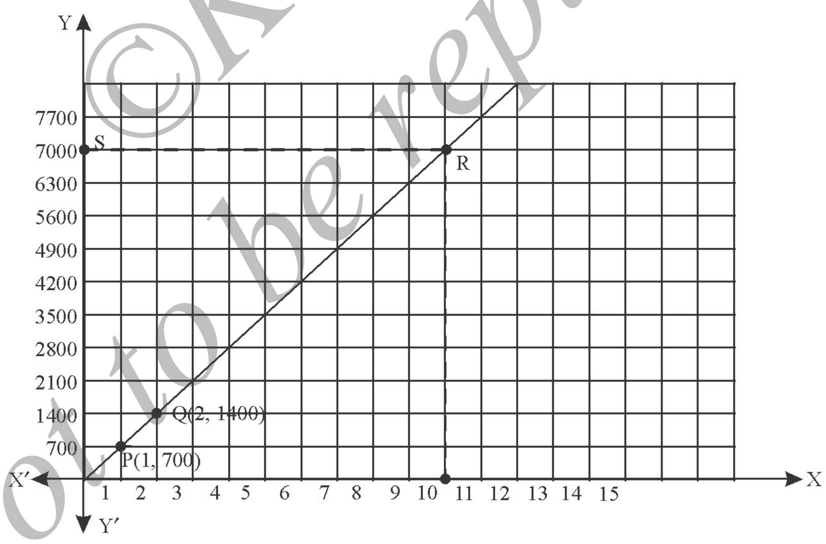
$y = 3x$ यह **घात-एक** का संबंध है। ऐसे संबंध हमेशा एक सरल रेखा सूचित करते है। सरल रेखा के समीकरण का मानक रुप $y = ax + b$ है (यहाँ a और b वास्तविक संख्याऐं है)।

यदि $a = 0$, तो $y = b$ तो प्राप्त सरल रेखा y अक्ष के समान्तर है।

उदाहरण 4 : मान लीजिए एक व्यक्ति ₹ 10000 की धनराशि किसी बैंक में निक्षेप के रूप में सरल ब्याज के लिए 7% प्रति वर्ष के ब्याज की दर से रखता है। वर्षां में प्राप्त ब्याज के लिए एक संबंध निर्धारित कीजिए। इस संबंध को ग्राफ द्वारा निरुपित कीजिए। इसे उपयोगकर 10 वर्ष के प्राप्त होने वाले ब्याज का परिकलन कीजिए।

हल : मान लीजिए x वर्ष y रूपये ब्याज मिलते है। x वर्षो का ब्याज होगा 1 इसतरह $\frac{7}{100} \times 10000 \times x = 700x$ $y = 700x$ अपेक्षित संबंध है। अब पैमाना 1 इकाई = 700 को y अक्ष पर अंकित कीजिए।यदि : $x = 1$ आपको प्राप्त होता $y = 700$: $(x, y) = (1,700)$

$y = 1$ आपको प्राप्त होता $y = 1400$: $(x, y) = (2,1400)$



एक ग्राफ पेपर लेकर $X^1OX - Y^1OY$ निर्देशांक अक्ष अंकित कीजिए। P(1,700) और Q (2,1400) के स्थान निर्धारित कीजिए। याद रखिए आप पैमाना y-अक्ष पर 1 इकाई = 700 उपयोग कर रहें है। यह एक सरल समीकरण है और P, Q इस सरल रेखा को निर्धारित करते हैं।

ध्यान दीजिए :

एक सरल रेखा खींचने उस रेखा के दो बिन्दु जानना पर्याप्त है; एक समतल में कोई दो बिन्दु दिये जाने पर आप मापनी द्वारा इन बिन्दुओं से एक सरल रेखा खींच सकते हैं।

सूक्षम रूप से PQ जोडिए और यथासंभव उसे विस्तार कीजिए। यह सरलरेखा सरल ब्याज प्रति वर्ष का **वलय** निरुपित करता है। अब x-अक्ष पर बिन्दु 10 देखिए, इसे T मान लीजिए। T पर x अक्ष के लिए एक लंब खींचिए ताकि सरल $y = 700x$ को R पर मिले । R से y-अक्ष के लिए लंब खींचिए। उस बिन्दु को अंकित कीजिए जहाँ वह y अक्ष को प्रतिच्छेदित करता है। यह आप को 10 वर्षों के अंत में प्राप्त ब्याज दर्शाता है जो ₹. 7000 है।

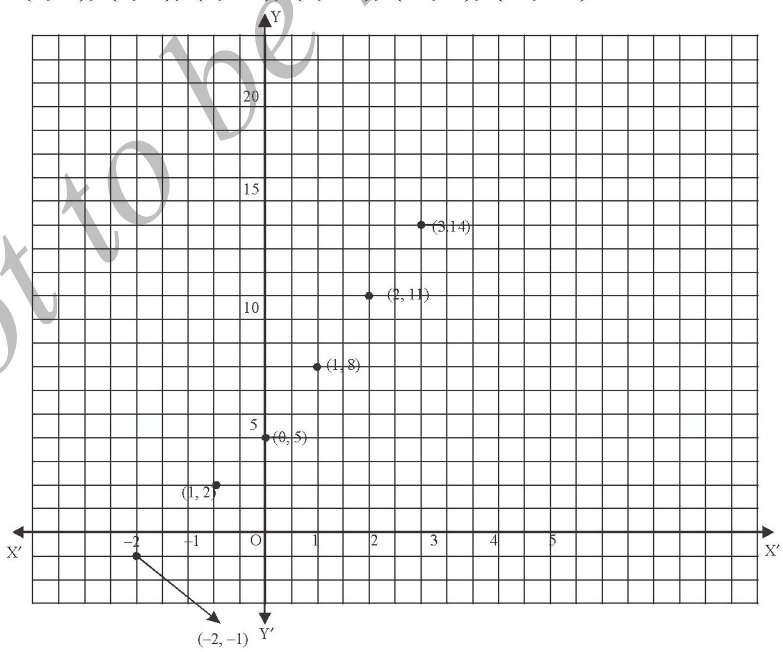
उदाहरण 5 : $y = 3x + 5$ का ग्राफ खींचिए

हल : X को अलग-अलग मूल्य देकर Y के मूल्य ज्ञात कीजिए। उन बिन्दुओं की तालिका बनाईए

x	0	1	2	3	–1	–2
y	5	8	11	14	2	1

एक ग्राफ पेपर पर इन बिन्दुओं को अंकित कीजिए। x और y अक्ष खींचकर बिन्दुओं के स्थान निर्धारित कीजिए।.

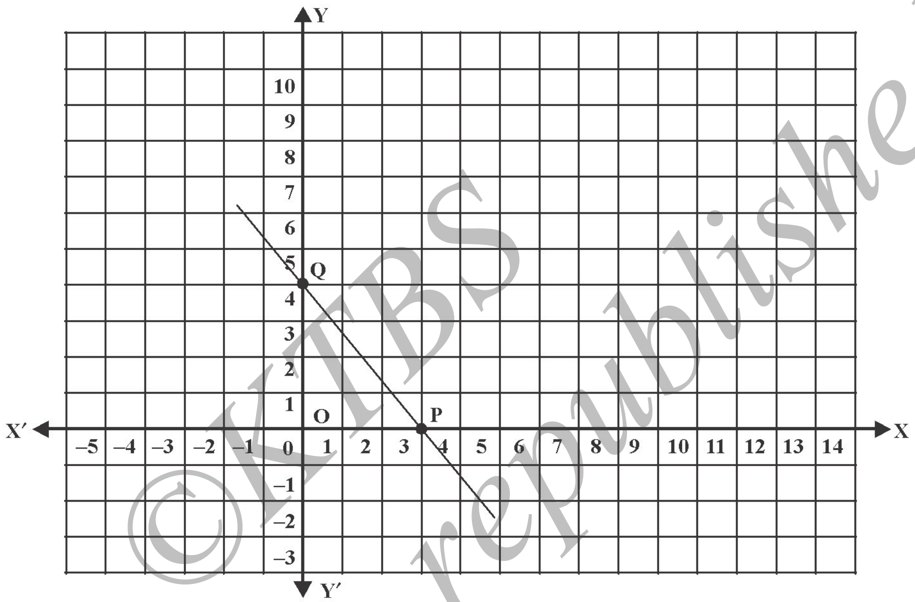
$(x, y) = (0, 5), (1, 8), (2, 11), (3, 14), (-1, 2), (-2, -1)$



क्या आप ध्यान देते हो कि सभी बिन्दु एक सरल रेखा पर स्थित है? एक सूक्ष्म रेखा खींचकर सभी बिन्दुओं को जोडिए।

कार्यकलाप 6 : $y = x + 4$, $y = 2x - 3$, $y = 3$, $x = 2y + 1$, $x = 2$ के ग्राफ बनाईए। क्या आप ध्यान देते हैं कि $y = ax + b$ हमेशा एक सरल रेखा है।

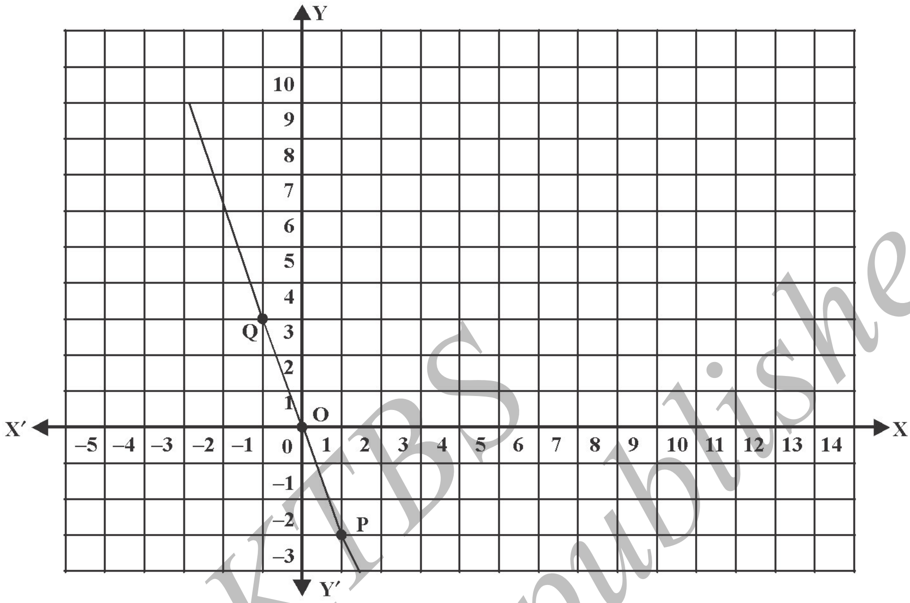
उदाहरण 6 : दत्त ग्राफ में दिये सरल रेखा का समीकरण निर्धारित कीजिए।



हल : सरल रेखा का मानक रुप $y = ax + b$ का स्मरण कीजिए जहाँ, a, b वास्तविक स्थिरांक है। दत्त आलेख दर्शाता है कि $a \neq 0$ (यदि $a = 0$ तो $y = b$ एक सरल रेखा को निरूपित करता है जो y अक्ष को समांतर है यदि $x = 0$ तो $y = b$ इसतरह $(0, b)$ सरल रेखा की एक बिन्दु है। इसीतरह $y = 0$ लेने से आप को $ax + b = 0$ प्राप्त होगा अथवा $x = \frac{-b}{a}$ इसतरह $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ भी सरल रेखा की एक बिन्दु है। ग्राफ देखने पर पत्ता चलता है कि वह y अक्ष को $(0, 4)$ पर और x अक्ष को $(3, 0)$ पर प्रतिच्छेदित करते हैं। इसतरह हम निर्णय ले सकते हैं कि $(0, b) = (0, 4)$, $\left(\frac{-b}{a}, 0\right) = (3, 0)$

इसतरह, $b = 4$ और $-\frac{b}{a} = 3$ जिससे $a = -\frac{4}{3}$ प्राप्त होता है। अतः दत्त ग्राफ का समीकरण $y = -\frac{4}{3}x + 4$ इसे इसतरह भी लिख सकते है $3y + 4x = 12$ (क्यों?)

उदाहरण 7 : दत्त आलेख में दिये सरल रेखा का समीकरण बनाईए.



हल : हम समीकरण को $y = ax + b$ के रूप में ले सकते है।। ध्यान दीजिए कि सरलरेखा (0, 0) से पारित होती है। अर्थात $y = 0$ होता है जब $x = 0$ हो। परन्तु $x = 0$ समीकरण में प्रतिस्थपित करने पर आपको $O = y = b$ प्राप्त होता है। इसतरह $b = 0$ ताकि $y = ax$.

हम यह ध्यान दे सकते है कि रेखा (1, –3) से गुजरती है अर्थात $y = -3$ जब $x = 1$ हो। इस से प्राप्त कर सकते है $-3 = a \times 1$ अथवा $a = -3$.

अतः सरलरेखा का समीकरण है $y = -3x$.

अभ्यास 14.2

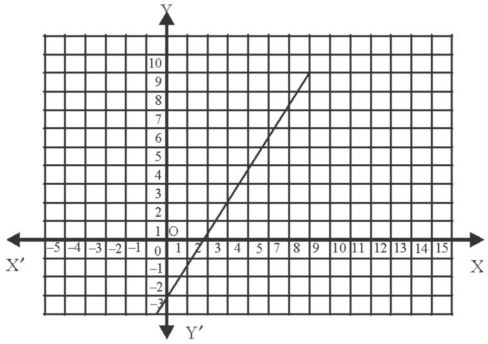
1. निम्नलिखित सरल रेखाओं के आलेख खींचिए

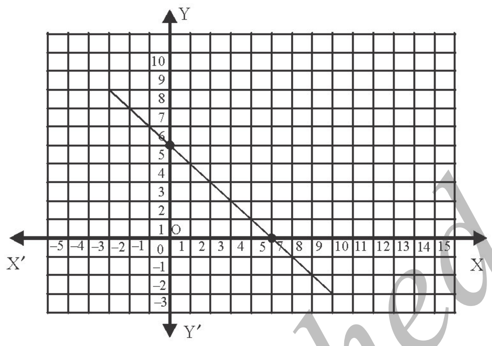
   (i) $y = 3 - x$ (ii) $y = x - 3$ (iii) $y = 3x - 2$ (iv) $y = 5 - 3x$

   (vi) $3y = 4x + 1$ (vii) $x = 4$ (viii) $3y = 1$

2. $\frac{y}{x} = \frac{y+1}{x+2}$ का आलेख खींचिए.

3. निम्नलिखित प्रत्येक आलेख में दिये सरलरेखा के समीकरण निर्धारित कीजिए।





4. एक नाव, नदी में, प्रवाह की दिशा में चल रही है। नदी के प्रवाह का वेग 8 कि.मी प्रति घंटा है। नाव के मोटर का वेग 22 कि.मी प्रति घंटा है। नाव से तय की दूरी के प्रति घंटो का आलेख खींचिए।

5. $3y + 4x = 7$ और $4y + 3x = 7$ सरल रेखाओं के आलेख (ग्राफ) खींचकर उनका प्रतिच्छेदन ज्ञात कीजिए।

शब्दावली :

ग्राफ (आलेख) : संख्यात्मक दत्तांश का दृश्य निरुपण

स्तंभ आलेख : आलेख जिसमें दत्तांश को स्तंभों में निरुपित करते हैं।

पै चार्ट : आलेख जिसमें दत्तांश को वृत्तखण्डों में निरुपित करते हैं।

आयताकार चौकट : एक समतल के लंब रेखाऐं जो समतल बिन्दुओं को निर्धारित करने में सहायक है।

आयताकार निर्देशांक प्रणाली : आयताकार चौकट उपयोग करनेवाली प्रणाली जो वास्तविक संख्या के क्रमित युग्म को निर्धारित करता है।

x – अक्ष : आयताकार निर्देशांक प्रणाली की क्षैतिज रेखा

y – अक्ष : आयताकार निर्देशांक प्रणाली की उर्ध्वाधर रेखा

चतुर्थांश : आयताकार निर्देशांक प्रणाली द्वारा समतल में विभाजित चार भाग

अबसिस्सा (Abscissa) : एक बिन्दु का x निर्देशांक

ऑर्डिनेट (ordunate) : एक बिन्दु का y निर्देशांक

कार्टेशियन निर्देशांक प्रणाली : एक निर्देशांक प्रणाली जिसमें समतल के प्रत्येक बिन्दु वास्तविक संख्याओं के युग्म से निर्धारित होती जिन्हें बिन्दु के निर्देशांक कहते है।

विश्लेषणात्मक ज्यामिति (Analytic Geometry) : ज्यामिति जिसमें सभी ज्यामिति के सभी परिकल्पनाओं को निर्देशांक प्रणाली द्वारा अध्ययन किये जाते हैं।

ध्यान रखने योग्य बातें :

- आप स्वयं की एक निर्देशांक प्रणाली बना सकते हो, कोई विशिष्ट निर्देशांक प्रणाली नहीं है।
- एक बिन्दु के निर्देशांक आप से चयन किये गये निर्देशांक प्रणाली पर निर्भर करते हैं।
- एक आयताकार निर्देशांक प्रणाली केवल एक सुविधाजनक निर्देशांक प्रणाली है, यह आवश्यक नहीं है कि हम हमेशा एक आयताकार प्रणाली उपयोग करें
- ग्राफ (आलेख) संख्यात्मक दत्तांश का हश्य निरुपण है।

उत्तर

14.1

2. (i) प्रथम चतुर्धाश (ii) त्रुतीय चतुर्धाश (iii) चतुर्थ चतुर्धाश

3. (−14,−2)

4. (−13,−8)

14.2

3. (i) $3x - 2y = 6$ (ii) $x + y = 5$

5. (1, 1)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

घटक – 15
चतुर्भुज

इस अध्याय के अध्ययन के बाद, आप सीखेंगे कि

- दत्त आकृतियों की सूची से चतुर्भुजों को पहचानेंगे।
- चतुर्भुजों के सामान्य गुणधर्मों की सूची तैयार करेंगे।
- चतुर्भुजों से सम्बंधित समस्याओं का हल करेंगे।
- विभिन्न चतुर्भुजों को वर्गीकृत करेंगे, और उनके स्पष्ट गुणधर्मों को पहचानेंगे।
- दैनंदिन जीवन से सम्बंधित चतुर्भुजों के माप के अंक-संख्याओं को समस्याओं में परिवर्तित करना एवम् उनको हल करेंगे।
- वर्ग और आयत की रचना

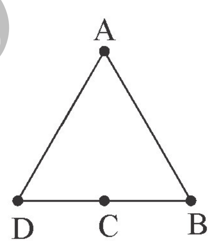
प्रस्तावना

आप ने पूर्ववत् सीख लिया है कि त्रिभुज, तीन भुजाओं से आवृत्त समतलीय आकृति है। i) भुजाओं के मापों के आधार पर और ii) कोणों के मापों के आधार पर त्रिभुज वर्गीकृत किये जाते हैं।

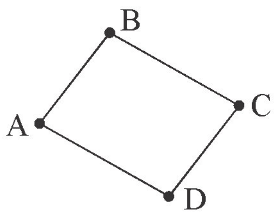
कार्यकलाप : भुजाओं के मापों के आधार पर वर्गीकृत त्रिभुजों का नामोल्लेख कीजिए, और कोणों के मापों के आधार पर वर्गीकृत त्रिभुजों का नामोल्लेख कीजिए।

अब समतल पर चार बिंदुओं को लेकर निश्चित क्रम से जोडी-जोडि में मिलाने से देखेंगे कि हम क्या प्राप्त करेंगे।

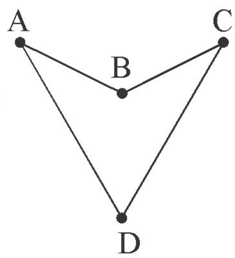
आकृति 1



आकृति 2



आकृति 3

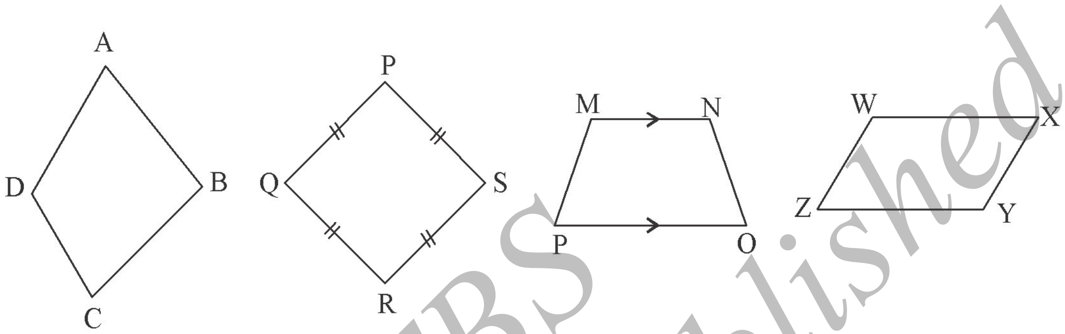


आकृति 4

यदि सभी बिंदु समरेखिक हैं, याने उसी रेखा पर सभी बिंदु आपतित हैं, हम एक रेखाखण्ड ही प्राप्त करते हैं (आकृति 1)। यदि चारों में तीन बिंदु असमरेखिक हैं तो हम एक त्रिभुज प्राप्त करते

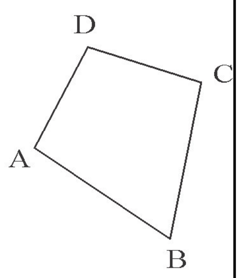
हैं (आकृति 2)। चारों बिंदुओं में तीन बिंदु असमरेखिक हों चार भुजाओं से आवृत्त आकृति प्राप्त होती है (आकृति 3 और 4)। चारों बिंदुओं में तीन बिंदुएँ असमरेखिक हों, चारों भुजाओं को क्रमशः मिलाते हों तो प्राप्त होनेवाली आवृत्त आकृति को चतुर्भुज कहा जाता है।

निम्न आकृतियाँ देख लें।

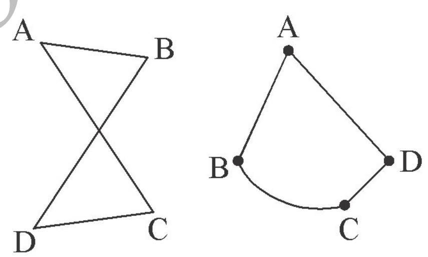


ये सभी आवृत्त आकृतियाँ हैं। इनकी सीमाएँ चार रेखाखण्डों से बँधी हुई हैं। उपरोक्त समतलीय आकृतियों का सामान्य नाम है, कि **चतुर्भुज** ।

विशेषक्रम के अनुसार श्रृंगों के आधार पर चतुर्भुज को नामांकित किया जाता है। पार्श्व आकृति में ABCD अथवा ABCD जैसे नामांकित कर के पढ सकते हैं। ADBC जैसे पढ़ नहीं सकते हैं। आप मन में धारणा कर लें कि रेखाखण्ड के आजू–बाजू के अक्षर क्रम से होने चाहिए। प्रतिच्छेदित रेखाखण्डों के ढंग से पढ़ नहीं सकते हैं। उदाहरण के लिए ADBC नामांकन में AC और BD परस्पर प्रतिच्छेदित नही होते हैं।



निम्न आकृतियों का निरीक्षण करें।



क्या ये दोनों आकृतियाँ चतुर्भुज हैं? नहीं, ये दोनों आकृतियाँ चतुर्भुज नहीं हैं। पहली आकृति में भुजाओं का प्रतिच्छेदन है, तो दूसरी में सभी भुजाएँ रेखाखण्ड के रूप में नहीं हैं। अतः निम्न

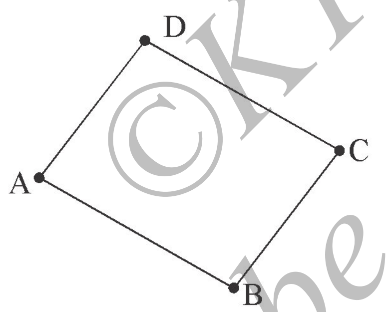
प्रकार चतुर्भुज को पुनः परिभाषित कर सकते हैं। **एक चतुर्भुज, चार रेखाखण्डों के समूह से बना बना है, जिसके समतलीय चार बिंदुओं में तीन असमरेखिक होते हैं और प्रत्येक रेखाखण्ड ठीक तरह अन्य रेखाखण्डों के अंतिम बिंदुओं से मिलता है।**

यहाँ पुनः आवृत्त एवं वक्र अथवा जुड़े हुए चार रेखाखण्डों का समूह तथा समतलीय आकृति जिसकी सीमाएँ चार रेखाखण्डों में बंधी हुई हों जैसा स्पष्टीकरण या अंतरों की अभिव्यक्ति नहीं करेंगे क्यों कि संदर्भ ही उसे सुस्पष्ट करता है कि कौन सा प्रकार चुन लिया गया।

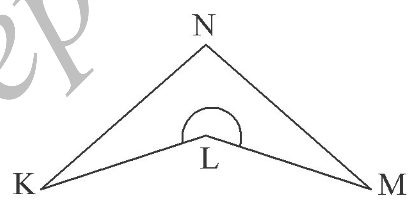
निरीक्षण करें कि एक चतुर्भुज चार भुजाओं तथा चार अंतःकोणों से युक्त होता है। इन अंतकोणों के आधार पर हम चतुर्भुजों को दो प्रकारों में वर्गीकृत कर सकते हैं।

चतुर्भुज **उत्तलीय** प्रकार का होता है यदि प्रत्येक आंतरिक कोण 180 ° से छोटा होता है, अन्यथा चतुर्भुज **अवतलीय** प्रकार का कहलाता है।

उत्तलीय प्रकार का चतुर्भुज



अवतलीय प्रकार का चतुर्भुज



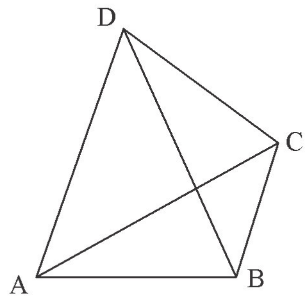
सोचिए !

मान लीजिए कि विभिन्न लम्बाइयों की चार तिलियों को देने पर उन्हें संयोजित करके क्या आप एक चतुर्भुज बना सकेंगे?

चतुर्भुजों के गुणधर्म

मान लें कि ABCD एक चतुर्भुज है।

1. A, B, C और D चतुर्भुज के श्रृंग कहलाते हैं।
2. AB, BC, CD और DA रेखाखण्ड, चतुर्भुज के चार भुजाएँ हैं।
3. ∠DAB, ∠ABC, ∠BCD और ∠CDA चतुर्भुज के चार कोण होते हैं।

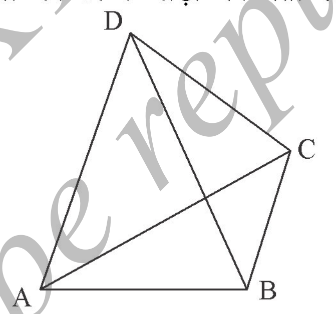


4. AC और BD रेखाखण्ड चतुर्भुज के **विकर्ण** कहलाते हैं।

टिप्पणी : एक चतुर्भुज के चार भुजाएँ, चार कोण और दो विकर्ण, कुल मिलाकर दस अवयव होते हैं।

पार्श्व भुजाएँ और सम्मुख भुजाएँ

1. यदि दो भुजाओं के बीच सामान्य अंतिम बिंदु हो तो उन भुजाओं को **पार्श्व भुजाएँ** अथवा **क्रमिक भुजाएँ** कहा जाता हैं। पार्श्व आकृति में AB और AD पार्श्व भुजाएँ अथवा क्रमिक भुजाएँ हों तो पार्श्व भुजाओं की अन्य जोड़ी का पता लगाइए।



2. यदि दो भुजाओं के बीच सामान्य अंतिम बिंदु नहीं हो तो वे सम्मुख भुजाएँ कहलाती हैं। उपरोक्त आकृति में AB और DC **सम्मुख भुजाएँ** हों तो सम्मुख भुजाओं की अन्य जोड़ी का पता लगाइए।

पार्श्वकोण और सम्मुख कोण

पार्श्व कोण और सम्मुख कोण

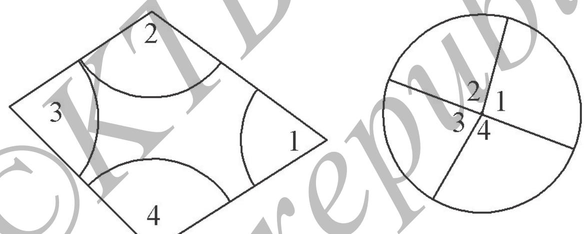
3. यदि चतुर्भुज के दो कोणों के बीच में एक सामान्य भुजा हो तो वे दोनों पार्श्वकोण अथवा क्रमिक कोण कहलाते हैं। इसी तरह $\angle$DAB और $\angle$ABC दोनों पार्श्वकोण अथवा क्रमिक कोण कहलाते हैं। पार्श्वकोणों के अन्य जोड़ी का पता लगाइए।
4. यदि चतुर्भुज के दो कोणों के बीच एक सामान्य भुजा न हो दोनों कोण सम्मुख कोण कहलाते हैं। यहाँ $\angle$DAB और $\angle$BCD सम्मुख कोण हैं तो अन्य जोड़ी सम्मुख कोणों को पहचानिये।

विकर्णीय गुणधर्म

AC विकर्ण, चतुर्भुज को ABC और ADC नामक त्रिभुजों में विभाजित करता है। जब विकर्ण BD खींचा जाए तो बननेवाले त्रिभुजों को नामांकित कीजिए।

कोणयोग गुणधर्म

कार्यकलाप : मोटे कागज या गत्ते पर खींचे हुए चतुर्भुज को काट लीजिए। आकृति में दिखाये अनुसार भुजाओं के साथ बननेवाले कोणों को काट लीजिए। इस तरह प्राप्त चार टुकड़ों को 1,2,3 और 4 से अंकित कीजिए। कटे टुकड़ों को अगली आकृति में दिखाये जैसे व्यवस्थित कीजिए। क्या एक बिंदु में वे सभी संयोजित हो रहे हैं? इन चार कोणों के योग के लिए आप क्या कहेंगे? इन चार कोणों के योग का माप 360° के बराबर होता है।



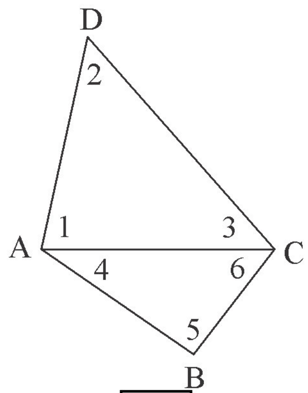
टिप्पणी : स्मरण करें कि किसी बिंदु में कोणों का योगफल 360° होता है।

प्रमेय 1 : चतुर्भुज के कोणों का योगफल 360° होता है।

दत्त : ABCD एक चतुर्भुज है ।

साध्य : $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

रचना : AC विकर्ण खींचिए ।



उपपत्ति :

ADC त्रिभुज में $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (कोण योग गुणधर्म)

ABC त्रिभुज में $(\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 180^\circ$ (पुनः कोणयोग गुणधर्म)

इन्हें जोड़ने पर,

$\angle 1 + \angle 4 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 3 + \angle 6 = 360^\circ$

लेकिन $\angle 1 + \angle 4 = \angle A$ और $\angle 3 + \angle 6 = \angle C$

इस तरह चतुर्भुज के कोणों का योगफल 360° होता है।

उदाहरण 1 : चतुर्भुज के चारों कोणों का अनुपात 2 : 3 : 4: 6 हो तो प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है कि : कोणों का अनुपात है, 2 : 3 : 4 : 6

पाना है कि : प्रत्येक कोण का माप । देख लें कि 2 + 3 + 4 + 6 = 15 (अनुपात के पदों का योग) इस तरह 360° के 1 वें भाग की गणना लें।

अतः 15 वाँ भाग $\rightarrow$ 360 का

2 गुना $\rightarrow \frac{360}{15} \times 2 = 48^\circ$

3 गुना $\rightarrow \frac{360}{15} \times 3 = 72^\circ$

4 गुना $\rightarrow \frac{360}{15} \times 4 = 96^\circ$

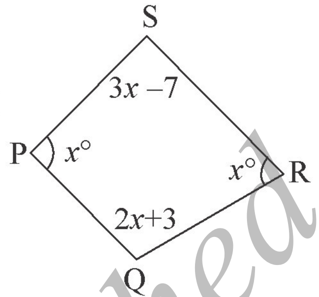
6 गुना $\rightarrow \frac{360}{15} \times 6 = 144^\circ$

इस तरह कोण 48°, 72°, 96° और 144° हैं। क्या आप देख सकते हैं, कि इनका योग 360° है?

उदाहरण 2 : चतुर्भुज ABCD में $\angle A$ और $\angle C$ का माप एक दूसरे को बराबर है। $\angle B, \angle D$ का परिपूरक है, तो $\angle A$ और $\angle C$ का माप ज्ञात करें।

हल : दिया है कि $\angle B + \angle D = 180^\circ$. चतुर्भुज के कोण कोण गुणधर्म से हम प्राप्त करतहैं कि $\angle A + \angle C = 360 - 180 = 180^\circ$ क्यों कि $\angle A$ और $\angle C$ एक दूसरे के समान है हमें

प्राप्त होता है कि $\angle A = \angle C = \frac{180}{2} = 90°$ क्या आप एक चतुर्भुज खींचव सकेंगे, जिसमें $\angle A = \angle C = 90°$ और $\angle B$, $\angle D$ कोटिपूरक हों ?



उदाहरण 3 : निम्न चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S = 360°$ (कोण योग गुणधर्म) अतः

$x + 2x + 3 + x + 3x - 7 = 360°$

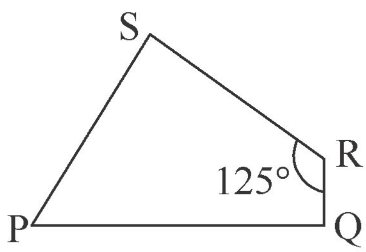
इससे मिलता है कि $7x - 4 = 360°$ अथवा $7x = 364°$ इसलिए $x = \frac{364}{7} = 52°$

हमें मिलता है कि, $\angle P = 52°$, $\angle R = 52°$, $\angle Q = 2x + 3 = 2 \times 52 + 3 = (104 + 3) = 107°$, $\angle S = 3 \times 52° - 7° = 156° - 7° = 149°$ परीक्षण करें कि $\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S = 360°$

अभ्यास 15.1

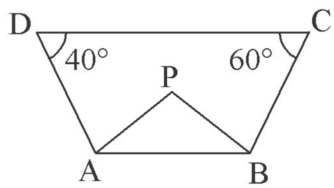
1. एक चतुर्भुज के दो कोण हैं, 70° और 130°, और अन्य दो कोण एक दूसरे के समान हैं। दो कोणों के माप का पता लगाइये ।

2. आकृति में मान लें, $\angle P$ और $\angle Q$ सपूरक कोण हैं, तथा $\angle R = 125°$ हो तो $\angle S$ के माप का पता लगाइए।



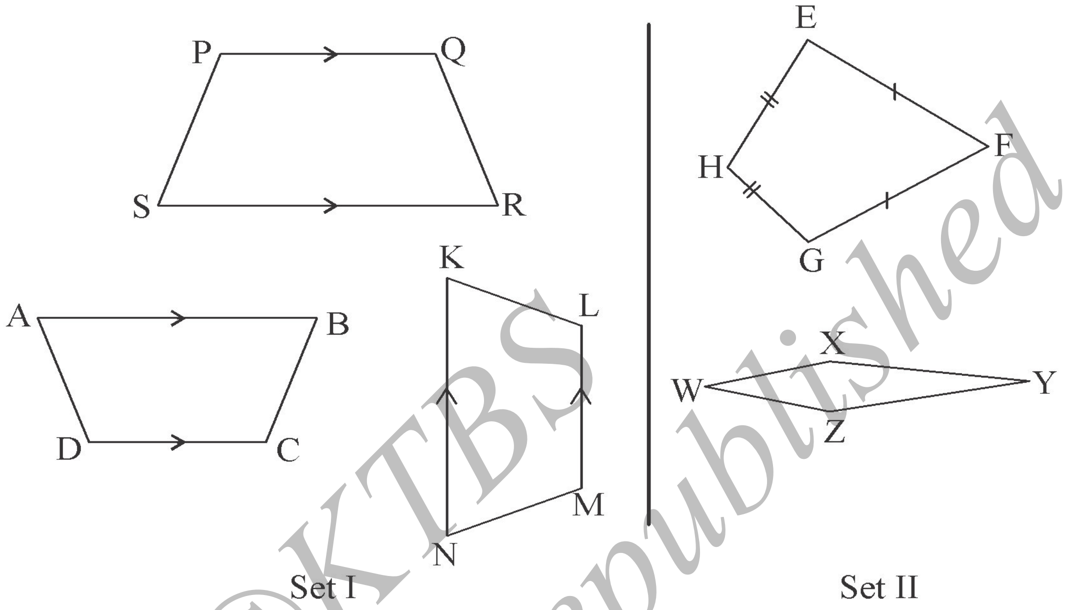
3. चतुर्भुज के कोणों में तीन कोण 2 : 3 : 5 अनुपात में हैं, और चौथा कोण 90° है तो तीन कोणों का माप ज्ञात कीजिए।

4. पार्श्व आकृति में ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें $\angle D + \angle C = 100°$, $\angle A$ तथा $\angle B$ के समद्विभाजक P पर मिलते हैं $\angle APB$ का पता लगाइए ।



त्रापिज्य (Trapezium)

भुजाओं अथवा कोणों के स्वभाव पर चतुर्भुज को विशेष नाम प्राप्त होता है।

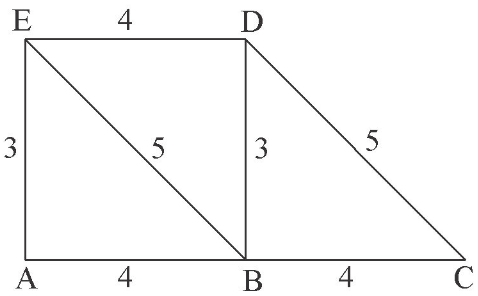


दो समुच्चयों में दी गई आकृतियों का निरीक्षण करें। अपने मित्रों के साथ चर्चा करें कि प्रथम समुच्चय एवं द्वितीय समुच्चय के चतुर्भुजों में आप क्या अंतर निरीक्षण करेंगे? (देखें कि तीर निशान समांतर रेखाओं के सूचक हैं।

प्रथम समुच्चय के चतुर्भुजों में सम्मुख एक जोड़ी भुजाएँ एक दूसरे के समांतर हैं। इस प्रकार के चतुर्भुज त्रापिजय्य (Trapezium) कहलाते हैं। दूसरे समुच्चय के चतुर्भुजों में कोई भी त्रापिज्य नहीं है।

कार्यकलाप

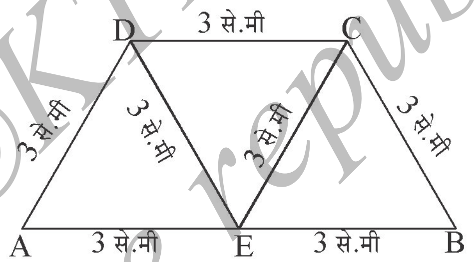
3 सें.मी, 4 सें.मी, 4 सें.मी और 5 सें.मी भुजाओंवाले सर्वांगसम त्रिभुजों को गत्ते से सदृश्य टुकड़ों के रूप में काट लीजिए। उन्हें आकृति में दिखाये अनुसार काट लीजिए। यह किस प्रकार की आकृति है? यह त्रापिज्य है। समांतर भुजाएँ कौन सी हैं? समांतर न होनेवाली भुजाएँ समान हो सके, ऐसा त्रापिज्य क्या आप प्राप्त कर सकते हैं?



कार्यकलाप 3 :

समभुज त्रिभुजों गते से काट लीजिए और उन्हें आकृति में दिखाये जैसे रखिए। AD और BC को मापिये। क्या वे समान हैं? A और B को मापिये। क्या वे समान हैं? कोण D और C को मापिए। क्या वे समान है? AC और BD मापिये । क्या वे समान हैं?

कार्यकलाप 4 :



उपरोक्त त्रापिज्य का विशेष नाम है कि समद्विबाहु त्रापिज्य । आप एक समद्विबाहु त्रापिज्य में निम्न गुणधर्म देखेंगे ।

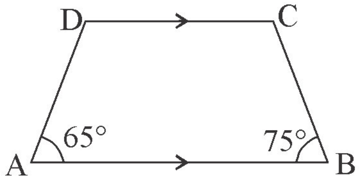
1. असमांतर न होनेाली भुजाएँ समान होती हैं।
2. आधार कोण समान होते हैं।
3. समांतर भुजाओं से सम्बंधित पार्श्व कोण संपूरक होते हैं।
4. विकर्ण समान होते हैं।

सोचिए :

सभी कोण समान हों, ऐसा कोई त्रापिज्य हो सकता है?

उदाहरण 4 : आकृति ABCD में, मान लें $AB \parallel CD$, $\angle A = 65°$ और $\angle B = 75°$ हो तो $\angle D$ और $\angle C$ का माप क्या होगा?

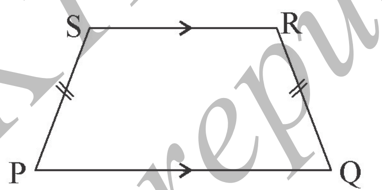
हल :



देख लें कि $\angle A + \angle D = 180°$ (त्रापिज्य के पार्श्व कोण संपूरक होते हैं।) इस तरह $65° + \angle D = 180°$ इससे मिलता है, कि $\angle D = 180° - 65° = 115°$ इसी तरह $\angle B + \angle C = 180°$, जिससे मिलता है कि $75° + \angle C = 180°$ अतः $\angle C = 180° - 75° = 105°$

उदाहरण 5 : समद्विबाहु त्रापिज्य PQRS में $\angle P$ और $\angle S$ 1 : 2 अनुपात में है तो सभी कोणों का माप ज्ञात कीजिए।

हल :

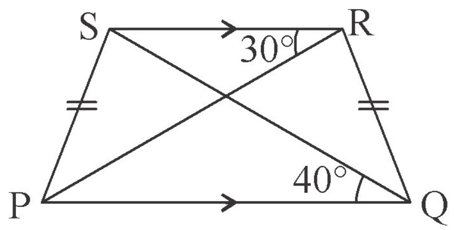


समद्विबाहु त्रापिज्य में आधार कोण समान होते हैं, $\angle P = \angle Q$ यदि $\angle P = x°$ हो तो $\angle S = 2x°$ चूँकि $\angle P + \angle S = 180°$ त्रापिज्य में पार्श्व कोणों की जोड़ी सम्पूरक होते हैं, अतः $x° + 2x° = 180°$ इसलिए $3x = 180°$ अथवा $x = \frac{180}{3} = 60°$ इसलिए $\angle P = 60°$ और $\angle S = 2 \times 60 = 120°$ चूँकि $\angle P = \angle Q$ हमें मिलता है कि $\angle Q = 60°$ लेकिन $\angle Q + \angle R = 180°$ (पार्श्वकोणों की एक जोड़ी सम्पूरक होते हैं) इसलिए हम प्राप्त कर सकते हैं $\angle R = 180° - 60° = 120°$.

अभ्यास 15.2

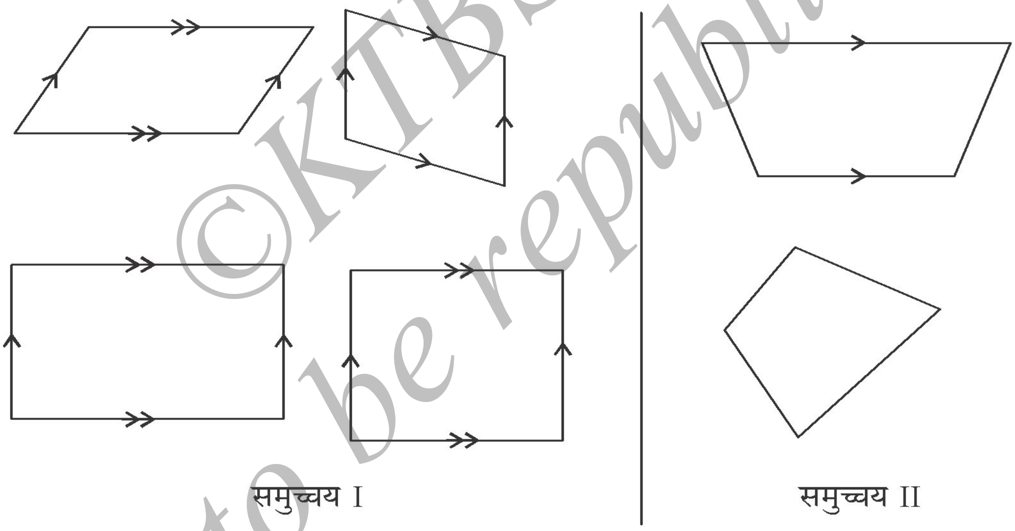
1. त्रापिज्य PQRS में $PQ \parallel RS$ और $\angle P = 70°$ एवम् $\angle Q = 80°$ हो तो $\angle S$ और $\angle R$ के माप की गणना कीजिए।
2. ABCD त्रापिज्य में $AB \parallel CD$ दिया है कि AD, BC को समांतर नहीं है। क्या $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ है? कारण दीजिए।

3. आकृति में PQRS एक समद्विबाहु त्रापिज्य है, जिसमें $\angle SRP = 30°$ और $\angle PQS = 40°$ हो तो $\angle RPQ$ और $\angle RSQ$ की गणना कीजिए।



समांतर चतुर्भुज (Parallelogram)

निम्न चतुर्भुजों के समुच्चयों को देख लें।



समुच्चय I　　　　समुच्चय II

चतुर्भुजों के प्रथम समुच्चय में समांतर भुजाओं की कितनी जोड़ियाँ आप देख सकेंगे? द्वितीय समुच्चय में समांतर भुजाओं की कितनी जोड़ियाँ आप देख सकेंगे? आप का क्या निर्णय है?

एक चतुर्भुज जिसमें दोनों सम्मुख भुजाओं की जोड़ियाँ समांतर हो तो वह **समांतर चतुर्भुज** कहलाता है।

द्वितीय समुच्चय के चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज नहीं हैं। क्या आप देखते हैं, कि समांतर चतुर्भुज एक विशेष प्रकार का त्रापिज्य है? अतः त्रापिज्य के जो भी गुणधर्म हैं, वे समांतर चतुर्भुज के लिए भी खरे हैं। एक और जोड़ी भुजाएँ समांतर होने के कारण अतिरिक्त गुणधर्म भी खरे उतरते हैं।

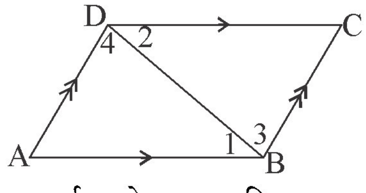
कार्यकलाप 5 :

आयताकार गत्ता ABCD ले लीजिए और AB पर E बिंदु को अंकित कीजिए। (जैसे आकृति में दिखाया हो) टिक टिकी (टूटी-फूटी) रेखा से CE मिलाइए और CE से हो कर गत्ते को काटिये। EBC त्रिभुजाकार टुकडे को आयत की बायीं तरफ, BC और AD मिलाते हुए रखिए ताकि एक चतुर्भुज प्राप्त हो सके। यह किस प्रकार का चतुर्भुज है? यह एक समांतर चतुर्भुज है। अपनी पुस्तक में गत्ते के कटे आकार को उतारिये और सम्मुख भुजाओं को, सम्मुख कोणों को मापिये। दो और समांतर चतुर्भुजों को लेकर कार्यकलाप को दोहराइए और PQRS और KLMN जैसे नाम दीजिए, और परिणामों को निम्नप्रकार तालिकाबद्ध कीजिए।

चतुर्भुज	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)
ABCD	$\angle A =$	$\angle B =$	$\angle C =$	$\angle D =$	AB =	BC =	CD =	DA =
PQRS	$\angle P =$	$\angle Q =$	$\angle R =$	$\angle S =$	PQ =	QR =	RS =	SP =
KLMN	$\angle K =$	$\angle L =$	$\angle M =$	$\angle N =$	KL =	LM =	MN =	NK =

कोणों के बीच का सम्बंध क्या है? भुजाओं के बीच का सम्बंध क्या है? क्या आप देखते हैं कि सम्मुख कोण समान होते हैं, और सम्मुख भुजाएँ भी समान हैं? इन निरीक्षणों को तार्किक ढंग से सिद्ध किया जा सकता है।

कथन 1 समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ और सम्मुख कोण समान होते हैं।



उपपति : ABCD एक समांतर चतुर्भुज हो । BD मिलाइए। तब $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ (क्यों? आकृति देखें) त्रिभुज ABD और CBD में हम देखते हैं कि $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 4 = \angle 3$, BD (सामान्य) अतः $\Delta ABD \cong CBA$ इसलिए $\angle D = \angle B$.

कार्यकलाप 6 :

पहले की तरह गत्ते पर समांतर चतुर्भुज को अंकित कीजिए। विकर्णों को खींचते हुए प्रतिच्छेदक बिंदु को अंकित कीजिए । प्रतिच्छेदक बिंदुओं से उत्पन्न प्रत्येक रेखा खण्ड को मापिये। इस कार्यकलाप से निकला निष्कर्ष क्या है?

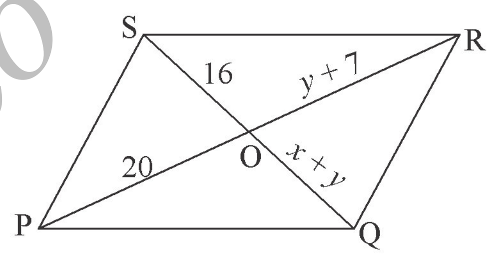
विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। इस तरह आप समांतर चतुर्भुज के गुणधर्मो का निम्न प्रकार वर्णन कर सकते हैं।

1. विरूद भुजाएँ समान और समांतर होती हैं।
2. विरूद कोण समान होते हैं।
3. पार्श्वकोण संपूरक होते हैं।
4. विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
5. प्रत्येक विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में समद्विभाजित करता है।

उदाहरण 6 : समांतर चतुर्भुज की दो भुजाओं का अनुपात 3 : 4 है और उसका परिमाप 42 सें.मी है। समांतर चतुर्भुज की सभी भुजाओं के माप का पता लगाइए।

हल : भुजाएँ, मान लें कि $3x$ और $4x$, तब समांतर चतुर्भुज का परिमाप है कि $2(3x + 4x) = 2 \times 7x = 14x$ दत्तांश के अनुसार $42 = 14x$ अतः $x = \frac{42}{14} = 3$ समांतर चतुर्भुज की भुजाएँ हैं कि $3 \times 3 = 9$ सें.मी और $3 \times 4 = 12$ सें.मी

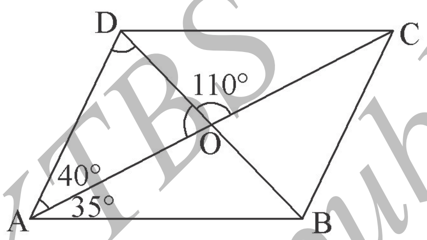
उदाहरण 7 : पार्श्व आकृति PQRS समांतर चतुर्भुज में x और y का सें.मी में पता लगाइए।



हल : समांतर चतुर्भुज में हम जानते हैं कि विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। इसलिए SO=OQ इससे मिलता है कि $16 = x + y$ इसी तरह PO = OR अतः है कि $20 = y + 7$ हमें प्राप्त होता है कि $y = 20 - 7 = 13$ सें.मी प्रथम समीकरण में y का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर, हमें मिलता है कि $16 = x + 13$ इसलिए $x = 3$ सें.मी।

अभ्यास 15.3

1. समांतर चतुर्भुज की पार्श्वभुजाओं का अनुपात 2 : 1 है तो कोणों के माप का पता लगाइए।
2. समांतर चतुर्भुज के आकार में एक खेत है जिसका परिमाप 450 मी है। और उसकी भुजाओं में एक दूसरे से 75 मी बडी है। सभी भुजाओं की लम्बाइयों का पता लगाइए।
3. आकृति में ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। विकर्ण AC और BD, O में प्रतिच्छेदित हैं, और $\angle DAC = 40°$, $\angle CAB = 35°$ और $\angle DOC = 110°$ । $\angle ABO$, $\angle ADC$, $\angle ACB$ और $\angle CBD$ की गणना कीजिए ।



4. समांतर चतुर्भुज ABCD जिसमें बाहु DC को E तक बढायी गई है एवम् $\angle BCE = 105°$ हो तो $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ की गणना कीजिए।
5. KLMN समांतर चतुर्भुज में $\angle K = 60°$ हो तो सभी कोणों के माप का पता लगाइए।

विशिष्ट प्रकार के समांतर चतुर्भुज

विशिष्ट प्रकार के समांतर चतुर्भुज होते हैं, जो विशिष्ट प्रकार के गुणधर्म दिखाते हैं। यहाँ हम उनका अध्ययन करेंगे।

आयत (Rectangles)

क्रियाकलाप 7 : अपने लेखन पुस्तिका से एक कागज का पन्ना लीजिए और उसे एक गते पर चिपकाइए। चिपकाए कागज के आँचलों पर गत्ते को काटिये। उसकी सभी भुजाओं एवं कोणों को मापिये। अपने निरीक्षणों को निम्न दर्शित तालिका में लिख लीजिए। विभिन्न आकार के पन्नों का उपयोग करके कार्यकलाप को दोहराइए।

समांतर चतुर्भुज	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)
ABCD	$\angle A =$	$\angle B =$	$\angle C =$	$\angle D =$	AB =	BC =	CD =	DA =
PQRS	$\angle P =$	$\angle Q =$	$\angle R =$	$\angle S =$	PQ =	QR =	RS =	SP =

ऊपर के क्रियाकलापों से आप निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

- सभी कोण 90° के बराबर होते हैं।
- सम्मुख भुजाएँ समान होते हैं।
- सम्मुख भुजाएँ समांतर होते हैं।

इस प्रकार के समांतर चतुर्भुज को विशेषतः **आयत** नाम से अंकित किया जाता है। आयत एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है कि उसके सभी कोण 90° के होते हैं।

कार्यकलाप 8 :आयताकार कागज के पन्ने को लीजिए। उसको ABCD से नामांकित कीजिए। उसको विकर्णों से होकर मोडिये। प्रतिच्छेदक बिंदु को O से सूचित कीजिए। निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए :

जब किसी विकर्ण से होकर मोड़ लें तो क्या दो सर्वांगसम त्रिभुज उपलब्ध होते हैं? विकर्णों का माप लीजिए, तो क्या वे दोनों समान हैं? OA, OC, OB और OD रेखाखण्डों को मापिये। इन रेखाखण्डों में क्या कोई सम्बन्ध आपको दिखाई देता है?

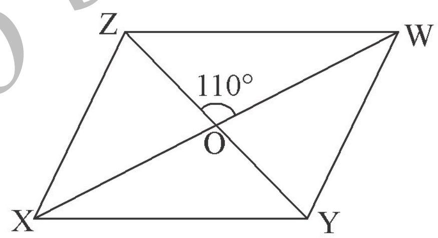
आयत के विकर्णों का गुणधर्म

(i) आयत के विकर्ण समान होते हैं।

(ii) आयत के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

उदाहरण 8 : मान लें कि *xyzw* आयत में O विकर्णों का प्रतिच्छेदक बिंदु है। यदि $\angle ZOW = 110°$ हो तो $\angle OYW$ की गणना कीजिए।

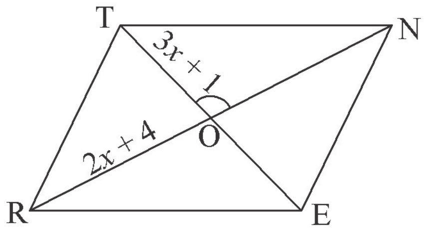
हल : हम जानते हैं कि $\angle ZOW = 110°$ इसलिए $\angle WOY = 180° - 110° = 70°$ (सम्पूरक कोण), अब OYW यह समद्विबाहु त्रिभुज है, चूँकि OY = OW इसलिए



$\angle OYW = \angle OWY \dfrac{(180° - 70°)}{2} = \dfrac{110°}{2} = 55°$ (एक अलग विधान को क्या आप सूचित कर सकते हैं?)

उदाहरण 9 : RENT आयत में विकर्ण O में प्रतिच्छेदित होते हैं। यदि $OR = 2x + 4$ और $OT = 3x + 1$ हो तो x का मूल्य क्या है?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com



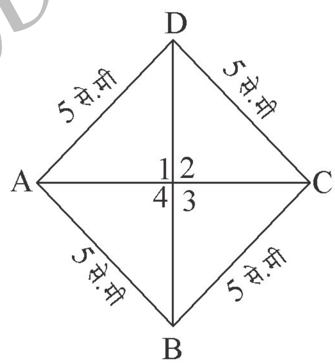
हल : देख लें कि OR = OT (विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, और आयत में वे समान होते हैं।) इसलिए इसका अर्थ यह है कि

$$2x + 4 = 3x + 1$$
$$\Rightarrow \quad 4 - 1 = 3x - 2x$$
$$\Rightarrow \quad 3 = x \quad \text{अतः} \quad x = 3.$$

वज्राकृति (Rhombus)

कार्यकलाप 9 :

3 सें.मी, 4 सें.मी और 5 सें.मी मापोंवाले चार सदृश्य लम्ब कोणें त्रिभुजों को गत्ते की उपयोगिता से तैयार कीजिए। आकृति में दिखाये जैसे एक समतलीय पन्ने पर उन्हें व्यवस्थित कीजिए। आकृति की सीमाओं को अंकित कीजिए। आकृति में दिखाये जैसे एक समतलीय पन्ने पर उन्हें व्यवस्थित कीजिए। आकृति की सीमाओं को अंकित कीजिए। आकृति की भुजाओं तथा कोणों को मापिये तथा उनकी तालिका तैयार कीजिए। विभिन्न परिणामों के लम्बकोण त्रिभुजों के साथ कार्यकलाप को दोहराइये। आप क्या निरीक्षण करेंगे?



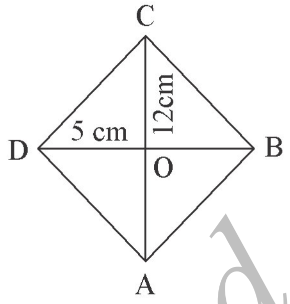
क्या आप इस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे कि $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ LB = $\angle D$, AB = BC = CD = DA? इस प्रकार की आकृति को वज्राकृति कहते है। वज्राकृति एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें सभी भुजाएँ समान होती हैं। वज्राकृति एक समांतर चतुर्भुज होते हुए समांतर चतुर्भुज के सभी गुणधर्म तथा और अधिक गुणधर्म भी वज्राकृति के होते हैं।

(i) वज्राकृति की सभी भुजाएँ समान होती हैं।

(ii) सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।

(iii) विकर्ण एक दूसरे को लम्ब समद्विभाजित करते हैं।

(iv) दोनों विकर्ण वज्राकृति को सर्वांगसम लम्बकोण त्रिभुजों में विभक्त करते हैं।

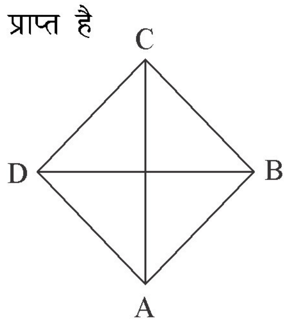


उदाहरण 10 : वज्राकृति के विकर्ण 24 सें.मी और 10 सें.मी हैं। वज्राकृति के क्षेत्रफल की गणना कीजिए।

हल : हमें दिया गया है कि AC = 24 सें.मी, BD = 10 सें.मी हम जानते हैं कि वज्राकृति के विकर्ण एक दूसरे को लम्ब समद्विभाजित करते हैं। इन विकर्णों का प्रतिच्छेदक बिंदु O रहे। तब यह है कि OA = CO = 12 सें.मी और BO = DO = 5 सें.मी हम यह भी जानते हैं कि AOD यह लम्बकोण त्रिभुज है। अतः AOD का क्षेत्रफल है कि $\frac{1}{2} \times OA \times OD = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$ सें.मी जबकि वज्राकृति में चार सर्वांगसम त्रिभुज होते हैं। अतः वज्राकृति का क्षेत्रफल है कि $4 \times 30 = 120$ सें.मी^{2}.

उदाहरण 11 : वज्राकृति BCD में $\angle BAC = 38°$ हो तो (i) $\angle ACD$ (ii) $\angle DAC$ और (iii) $\angle ADC$ पता लगाइये

हल : हम जानते हैं कि $\angle BAC = 38°$ लेकिन ABCD वज्राकृति में चूँकि ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, हम देखते हैं कि $\angle BAC = \angle ACB = 38°$ इसपर $\angle DAC = 38°$, जबकि विकर्ण AC समद्विभाजित करता है। चूँकि AD भी एक समद्विबाहु त्रिभुज है, हमें प्राप्त है



$\angle ACD = \angle DAC = 38°$ अंततः

$\angle ADC = 180° - (\angle DAC + \angle DCA)$

$= 180° - (38° + 38°)$

$= 180° - 76°$

$= 104°$

वर्ग (Square)

एक और प्रकार का समांतर चतुर्भुज है जो एकसाथ आयत भी है, और वज्राकृति भी। उसके सभी कोण समान होते हैं, और उसकी सभी भुजाएँ समान होती हैं। स्मरण करें कि त्रिभुज की जानकारी आपके पास है। त्रिभुज जिसके सभी कोण समान और सभी भुजाएँ भी समान होती हैं। ये समबाहु त्रिभुज होते हैं। इन त्रिभुजों के संदर्भ में आपने देखा है कि जब सभी कोण समान होते हैं,

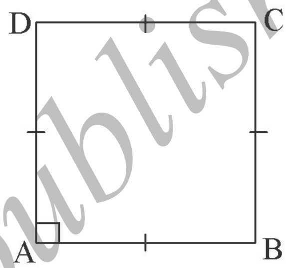
तब सभी भुजाएँ भी समान होती हैं। विलोमतः यदि त्रिभुज की सभी भुजाएँ समान हों तब सभी कोण भी समान होते हैं। लेकिन जब चतुर्भुजों की तरफ विचार करें, ऐसा सुंदर गुणधर्म प्रतीत नहीं होता है। आयत एक चतुर्भुज है, जिसके सभी कोण समान होते हैं लेकिन भुजाएँ समान नहीं भी होती हैं। अन्य पक्ष में वज्राकृति भी एक चतुर्भुज है, जिसमें सभी भुजाएँ समान होती है, लेकिन सभी कोण समान नहीं भी होते हैं। एक चतुर्भुज जिसमें सभी कोण समान होते हैं और सभी भुजाएँ भी समान होती हैं, जिसका विशेष नाम है कि वर्ग। इस तरह **वर्ग,** एक चतुर्भुज है जिसमें सभी सुंदर गुणधर्म मिलकर आते हैं। एक वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें

(i) सभी भुजाएँ समान होती हैं।

(ii) प्रत्येक कोण, एक लम्बकोण है।

(iii) विकर्ण समान होते हैं।

(iv) विकर्ण लम्बकोण के समद्विभाजक होते हैं।



सोचिए !

(i) और (ii) के परिणाम ही (iii) और (iv) हैं। क्या आप इन्हें सिद्ध कर पायेंगे?

एक वर्ग को यों परिभाषित किया जा सकता है कि

(a) एक आयत जिसमें पार्श्व भुजाएँ समान होती हैं।

(b) एक वज्राकृति जिसमें प्रत्येक कोण $90°$ का होता है।

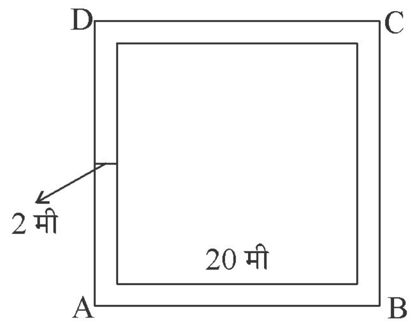
सोचिए !

मान लें कि एक वर्ग और एक वज्राकृति के परिमाण समान हों, क्या उनका क्षेत्रफल समान होगा?

उदाहरण 12 : एक खेत जो वर्गाकार में है, और जिसकी भुजा 20 मी है। उस खेत के चारों तरफ 2 मी चौडा मार्ग आवृत्त है। आवृत्त मार्ग का बाह्य परिमाप की गणना कीजिए।

हल : मार्ग की चौड़ाई 2 मी है। बाह्य वर्ग की भुजा की लम्बाई = $(20 + 2 + 2) = 24$ मी

अतः परिमाप $= 4 \times 24 = 96$ मी.



उदाहरण 13 : वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 196 मी^{2} है। इसके चारों तरफ 3 बार मेंड लगाने के लिए आवश्यक तार लम्बाई की गणना कीजिए।

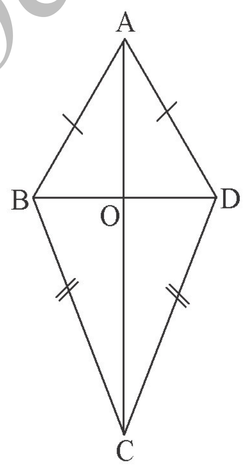
हल : वर्ग की भुजा की लम्बाई S हो। तब उसका क्षेत्र होगा, S^2 वर्ग इकाइयाँ। हमें दिया गया है कि S^2 = 196 मी^{2} इसलिए S = 14 मी.

पारिबाप = 4 × S = 4 × 14 = 56 मी.

तार की लंबाई 56 × 3 = 168 मी.

पतंग (Kite)

आपने देखा है कि वज्राकृति में विकर्ण वज्राकृति को दो सर्वांगसम समद्विबाहु त्रिभुजों में विभक्त करता है। समझ लीजिए कि दो समद्विबाहु त्रिभुजों, जिनके आधारों की लम्बाइयाँ समान हों और उनको एक साथ जोड़कर एक चतुर्भुज प्राप्त करें। आपने एक विशेष प्रकार का चतुर्भुज प्राप्त किया। इस चतुर्भुज को पतंग नाम से जाना जाता है।



पतंग एक चतुर्भुज है जिसमें दो समद्विबाहु त्रिभुज एक सामान्य आधार से जोड़े जाते हैं।
पार्श्व आकृति में AB = AD, BC = CD और BD एक सामान्य आधार है। यह महत्वपूर्ण है कि

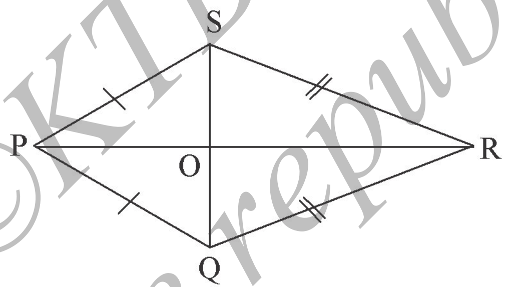
ABC और ADC त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, लेकिन ABD और CBD सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है। क्या आप देख सकते हैं कि यदि ABD और CBD सर्वांगसम हो और ABC और ADC सर्वांगसम है ही, तब ABCD वज्राकृति में परिवर्तित होती है?

पतंग के गुणधर्म

वज्राकृति की तरह पतंग के भी गुणधर्म होते हैं, जो यहाँ उल्लेखित किये जाते हैं।

1. इसमें समान भुजाओं की दो जोड़ियाँ होती हैं, कि आकृति में AB = AD और CB = CD हैं।
2. विकर्ण एक दूसरे को लम्ब समद्विभाजित करते हैं।
3. विकर्ण श्रृंग कोणों को समद्विभाजित करते हैं। विकर्ण AC के द्वारा श्रृंग कोण A और C समद्विभाजित होते हैं।

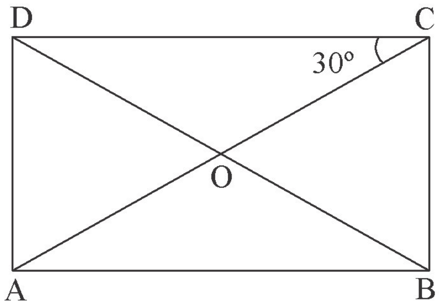
उदाहरण 14 : आकृति में PQRS एक पतंग है, PQ = 3 सें.मी और QR = 6 सें.मी. PQRS का परिमाप ज्ञात कीजिए।



हल : हम जानते हैं कि PQ = PS= 3 सें.मी QR = SR = 6 सें.मी अतः परिमाप = PQ + QR + RS + PS = 3 + 6 + 6 + 3 = 18 सें.मी ।

अभ्यास 15.4

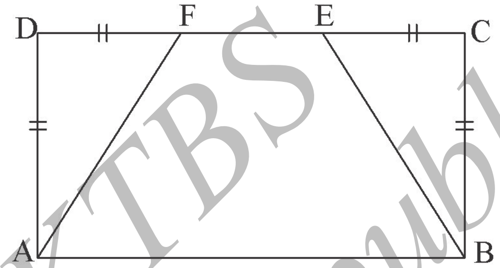
1. आयत की भुजाएँ 2 : 1 अनुपात में हैं। परिमाण 30 सें.मी है। भुजाओं के माप की गणना कीजिए।
2. पार्श्व आयत ABCD में $\angle OCD = 30^\circ$ हो तो $\angle BOC$ की गणना कीजिए। BOC किस प्रकार का त्रिभुज है?



3. सभी आयत, समांतरचतुर्भुज हैं, परंतु सभी समांतर चतुर्भुज आयत नहीं है। इस कथन का समर्थन कीजिए।

4. एक आयतीय मैदान की भुजाएँ का अनुपात 4 : 3 है। उसका क्षेत्रफल 1728 मी^{2} है, साल लगाने के लिये 2.50 प्रती मीटर है, तो उसका दाम कथा है ?

5. आयताकार मैदान में सर्वांगसम समद्विबाहु हैं। लंबकोण त्रिभुजाकार के दो पुष्प बिछौने हैं। मैदान का शेष भाग त्रापिज्याकार है, (आकृति देखें) जिसकी समांतर भुजाएँ 15 मी और 25 मी हैं। पुष्प बिछौने के भागों के क्षेत्र की गणना कीजिए।



6. ABCD वज्राकृति में $\angle C = 70°$ हो तो वज्राकृति के अन्य कोणों का माप ज्ञात कीजिए।

7. PQRS वज्राकृति में यदि $PQ = 3x - 7$ और $QR = x + 3$ हो तो PS की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

8. वज्राकृति एक समांतर चतुर्भुज है, प्रतिपादन कीजिए।

9. दिया है कि ABCD एक वर्ग है। यदि ABD त्रिभुज का क्षेत्रफल 36 सें.मी^{2} हो तो (i) BCD त्रिभुज का क्षेत्रफल, (ii) ABCD वर्ग का क्षेत्रक्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

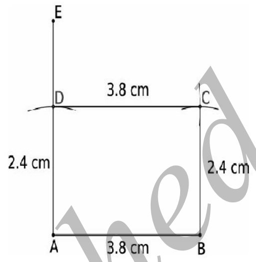
10. ABCD वर्ग की भुजा की लम्बाई 5 सें.मी और दूसरा वर्ग PQRS जिसका परिमाप 40 सें.मी है। ABCD और PQRS वर्गों के परिमापों का अनुपात ज्ञात कीजिए, तथा ABCD और PQRS वर्गों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

11. वर्गाकार खेत की भुजा 20 मी है तो उसके चारों ओर घेरा लगाने के लिए चार गुना तार लपेटना है। अतः आवश्यक तार की लम्बाई का पता लगाइए।

12. वर्ग और वज्राकृति के बीच के अंतरों की सूची तैयार कीजिए।

आयतों की रचना

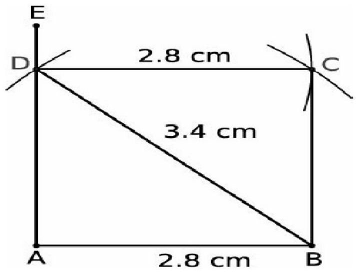
उदाहरण 15 : एक आयत की रचना कीजीए जिसकी पार्श्व भुजा 3.8 सें.मी. और 2.4 सें.मी.। दिये है AB=3.8 सें.मी. और AD =2.4 सें.मी.



चरण

1. AB =3.8 सें.मी. रेखाखण्ड की रचना कीजीए
2. AB पर लम्बद्विभाजक AE बनाइए जिसमें AE 2.4 सें.मी. से ज्यादा है
3. A केन्द्र से 2.4 सें.मी. त्रिज्या से चाप बनाइए पर D बनता है
4. D केन्द्र से त्रिज्या 3.8 सें.मी. से चाप बनाइए
5. B केन्द्र से त्रिज्या 2.4 सें.मी. का चाप बनाइए जिससे C पर मिलता है
6. DC अैर BC जोडीए । ABCD एक आयत है।

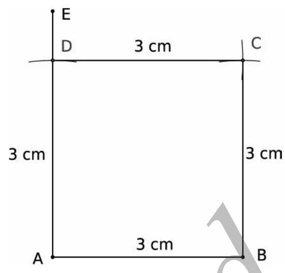
उदाहरण 16 : एक आयत की रचना कीजीए जिसमें विकर्ण 3.4 सें.मी. है और एक भूजा 2.8 सें.मी. दिये है AB = 2.8 सें.मी. और BD = 3.4 सें.मी.



1. AB =2.8 सें.मी. रेखाखण्ड बनाइए
2. AB पर AE लम्बद्विभाजक पर बनाइए
3. B केन्द्र से त्रिज्या 3.4 सें.मी. से चाप AE पर D अंकित कीजिए
4. A केन्द्र से 3.4 सें.मी. केन्द्र से चाप बनाइए
5. D केन्द्र से त्रिज्या 2.8 सें.मी. जिससे चाप C पर मिले
6. DC अैर BC जोडीए । ABCD आयत है।

वर्ग की रचना :

उदाहरण 17 : वर्ग की कीजिए जिसकी भुजा 3 सें.मी.

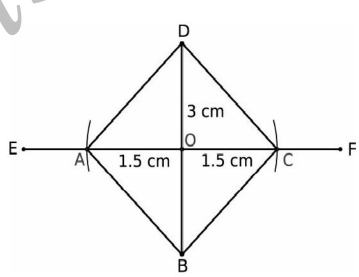


चरण

1. AB =3 सें.मी. रेखाखण्ड बनाइए
2. A पर, AE लम्बद्विभाजक AE 3 सें.मी. से ज्यादा पर बनाइए
3. A केन्द्र पर त्रिज्या उसेंमी चाप काटिए
4. D केन्द्र से उसमी का चाप काटिए
5. B केन्द्र से त्रिज्या 3 सें.मी. बनाइए । जिससे पर मिले
6. BC और DC जोडीए । ABCD एक वर्ग है।

उदाहरण 18 : एक वर्ग की रचना कीजिए जिसके विकर्ण को लम्बाई 3 सें.मी.

चरण



1. BD =3 सें.मी. रेखाखण्ड बनाइए
2. BD का लम्बद्विभाजक EOF 'O' पर है 'B'
3. 'O' केन्द्र से और त्रिज्या 1.5 सें.मी. A पर OE

   चाप बनाइए और A पर OF, C पर मिले
4. AB, AD, CB और CD जोडिए । ABCD वर्ग है।

अभ्यास 15.5

1. निम्नलिखित दत्तांश से आयत की रचना कीजीए

(a) AB = 4 सें.मी   BC = 6 सें.मी   (b) AB = 6 सें.मी   AC = 7.2 सें.मी

2. ABCD वर्ग की रचना कीजिए

(a) जिसकी भुजा की लम्बाई 2 सें.मी   (b) विकर्ण 6 सें.मी.

शब्दावली

चतुर्भुज : चार रेखाखण्डों से युक्त समतलीय रेखाकृति जिसमें रेखाखण्ड क्रमशः होते हैं कि पार्श्व रेखाखण्डों केवल अंतिम बिंदुओं से मिलते हैं।

उत्तलीय चतुर्भुज : एक चतुर्भुज जिसमें प्रत्येक आंतरिक कोण $180°$ से कम होता है।

विकर्ण : चतुर्भुज के सम्मुख शृंगों को जोड़नेवाला रेखाखण्ड विकर्ण कहलाता है।

त्रापिज्य : चतुर्भुज जिसमें एक जोड़ी भुजाएँ समांतर होती हैं।

समांतर चतुर्भुज : चतुर्भुज जिसमें दो जोड़ी भुजाएँ समांतर होती हैं।

वज्राकृति : चतुर्भुज जिसमें सभी भुजाएँ समान होती हैं ।

वर्ग : चतुर्भुज जिसमें सभी भुजाएँ समान होती हैं, तथा सभी कोण $90°$ के बराबर होते हैं।

आयत : एक चतुर्भुज जिसमें सभी कोण 90 के होते हैं।

पतंग : एक जोड़ी समद्विबाहु त्रिभुज एक सामान्य आधार भुजा से जुड़े हुए हो।

स्मरणीय अंश

- चतुर्भुज के सभी कोणों का योगफल 360 होता है।
- चतुर्भुज के संदर्भ में कोण समान हों तो भुजाएँ भी समान होनी चाहिए ऐसा अर्थ नहीं है, जब कि त्रिभुजों में होता है।
- वज्राकृति और पतंगों में विकर्ण लम्ब समद्विभाजित होते हैं।
- कोई चतुर्भुज जिसमें विकर्ण एक दूसरे को द्विभाजित करें तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उत्तर

अभ्यास 15.1

1. प्रत्येक 80° 2. 55° 3. $54^\circ, 81^\circ$ और 108°

4. 50°

अभ्यास 15.2

1. $\angle S = 110^\circ$ और $\angle R = 100^\circ$.

3. $\angle RPQ = 30^\circ$ और $\angle RSQ = 40^\circ$.

अभ्यास 15.3

1. $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ 2. 150 मी. और 75 मी.

3. $\angle ABO = 35^\circ$, $\angle ADC = 105^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$, $\angle CBD = 70^\circ$.

4. $\angle A = \angle C = 75^\circ$, $\angle B = \angle D = 105^\circ$.

6. $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$

अभ्यास 15.4

1. 100 से.मी, 5 से.मी, 10 से.मी, 5 से.मी,

2. $\angle BOC = 60^\circ$ ΔBOC समबाहू त्रिभुज है।

4. ₹ 420 5. $\frac{1}{5}$ 6. $110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$ 7. 8

9. (i) 36 cm^2; (ii) 72 cm^2.

10. (i) 1:2, (ii) 1:4

11. 320m .

घटक – 16
मापन अध्ययन

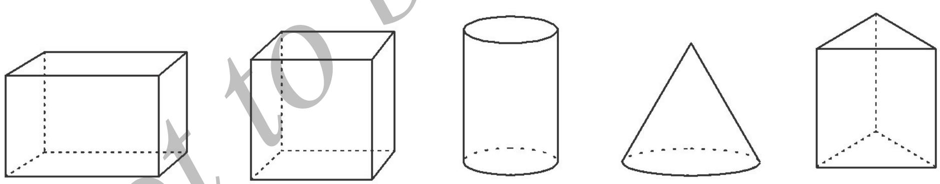
इस अध्याय के अध्ययन बाद आप से अपेक्षित है :

- दैनिक जीवन में आनेवाले घन तथा घनायत रूपी वस्तुओं को पहचानना।
- घन और घनायत के गुणों की सूची बनाना ।
- दत्त गणित को सूत्रों से जोड़ना ।
- दत्त सुत्र में दत्तांश को प्रतिस्थापित करके गणित हल करना ।

प्रस्तावना

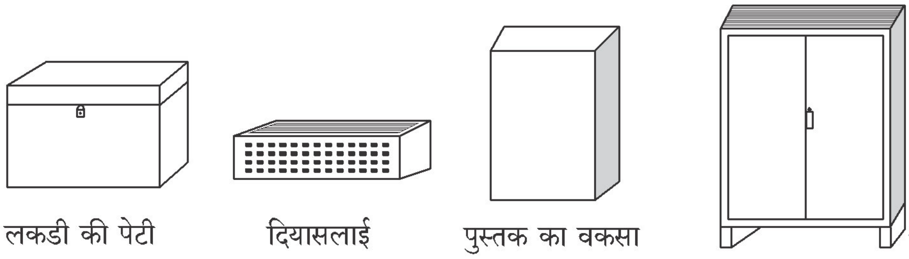
जब हम एक खाली संदूक, खाली कटोरा और एक खाली पात्र देखते हो पत्ता चलता है कि उसमें कुछ अवकाश है और उस अवकाश में वस्तुओं को रख सकते हैं। एक कक्षा में विद्यार्थियों को बैठने अवकाश होता है।

एक ठोस में निश्चित मात्रा में अवकाश होता है। ठोस के अलग अलग रूप में होते हैं। निम्न चित्रों को देखिए। उन ठोस आकारों को (घनायात, घन, बेलन, गोला, शंकु, त्रिभुजाधार प्रिज्म आदि) तीन आयाम के वस्तु कहलाते हैं।



घनायत घन बेलन शंकु त्रिभुजाधार प्रिज्म

आप देखेंगे प्रत्येक ठोस कुछ अवकाश घेरता है। प्रत्येक ठोस का थोड़ा पृष्ठ होता है, इसलिए उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल होता है। क्योंकि प्रत्येक कुछ अवकाश घेर लेता है, उसका आयतन होता है। निम्न आकृतियों को देखिए।

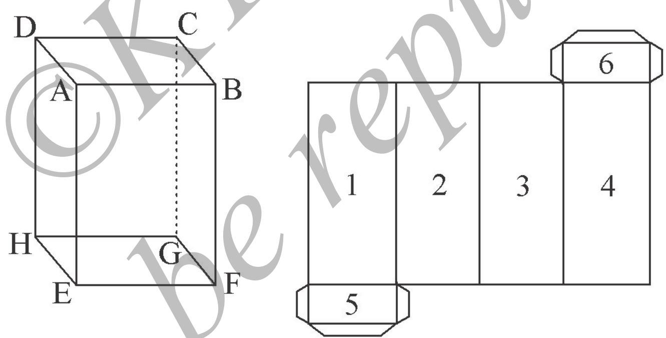


ये सारे घनायत आकार में हैं ।

घनायत का पृष्ठीय क्षेत्रफल (surface area of cuboid)

आईए एक कार्यकलाप द्वारा घनायतों समझ लें

कार्याकलाप 1 **:** घनायत आकार का एक डिब्बा लीजिए। एक किनारे के साथ-साथ काटकर उसे खोलिए, ढक्कनों को खोलिए और उसे एक कागज पर फैलाईए और पिन लगाकर कसकर रखिए। (आकृति देखिए)।



घनायत के कितने फलक होते हैं? किनारों तथा शीर्षों की संख्या ज्ञात कीजिए। एक घनायत के 6 फलक और किनारे तथा 8 शीर्ष होते हैं। क्या आपको ज्ञात होता है कि घनायत के फलक आयत होते हैं?

घनायत के किसी भी फलक को आधार कह सकते हैं ? (कारण दीजिए) चार फलक जो आधार से मिलते हैं घनायत के पार्श्व फलक कहलाते हैं।

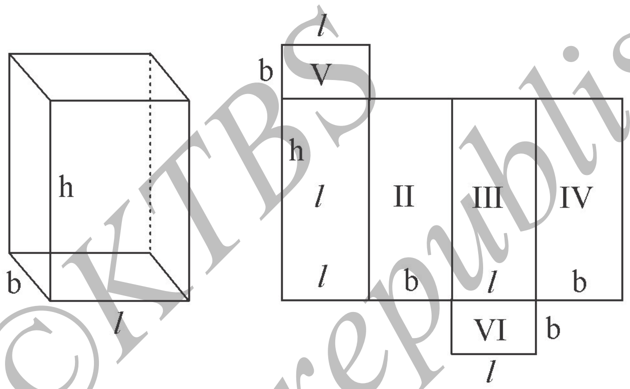
दत्त उपरोक्त घनायत के 6 फलक हैं। वे हैं ABCD, EFGH, EFBA, HGCD, EHDA और FGCB । घनायत के दो संलग्न फलक एक रेखाखण्ड में मिलते हैं जिसे घनायत का किनारा कहते हैं ।

AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, EH, AE, DH, GC और BF घनायत के 12 किनारे हैं। घनायत के तीन किनारों की प्रतिच्छेदन बिन्दु को घनायत के शीर्ष हैं। A, B, C, D, E, F, G और H शीर्ष हैं।

कार्यकलाप : एक घनायताकार डिब्बा लीजिए। आधार निश्चित कीजिए (ध्यान दीजिए किसी भी फलक को आधार बना सकते हैं) उसे ऊर्ध्वाधर (लंब) रूप रखिए और एक जाड़े कागज को लपेटिए ताकि वह उसके पृष्ठ पर उपयुक्त हो। कागज निकालकर उसका क्षेत्रफल माप कीजिए।

यह घनायत का पृष्ठीय क्षेत्रफल है (Lateral Surface Area or L.S.A.) इस क्रिया को विभिन्न घनायत लेकर दोहराईए ।

घनायताकार डिब्बे को काटकर खोलिए और उसे कागज पर फैलाकर रखिए। मान लीजिए आधार का लंबाई 'l' और आधार की चौड़ाई 'b' और आधार की तत् सम्बन्धी ऊँचाई 'h' इकाईयाँ हैं।



2(lh + bh) परिकलन कीजिए और आप से ज्ञात पृष्ठीय क्षेत्रफल से तुलना कीजिए। क्या दोनों मेल खाते हैं? 2(lh + hb + bl) क्या हैं ?

यदि आप आधार बदलते हैं, आप देखेंगे कि l, b, h की इकाईयाँ नहीं बदलती। केवल लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई का निरूपण बदल सकता है। सभी छः फलकों के क्षेत्रफल का योगफल घनायत का **संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल** (Total Surface Area or TSA) है।

आईए घनायत के संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र ज्ञात कर लें।

I का क्षेत्रफल + II का क्षेत्रफल + III का क्षेत्रफल + IV का क्षेत्रफल + V का क्षेत्रफल + VI का क्षेत्रफल

अतः

$A = (l \times h) + (l \times b) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h) + (l \times b)$ वर्ग इकाईयां ।

इस तरह : $A = 2lh + 2lb + 2bh = 2(lh + lb + bh)$ वर्ग इकाईयाँ ।

पृष्ठीय क्षेत्रफल =

I का क्षेत्रफल + II का क्षेत्रफल + III का क्षेत्रफल + IV का क्षेत्रफल

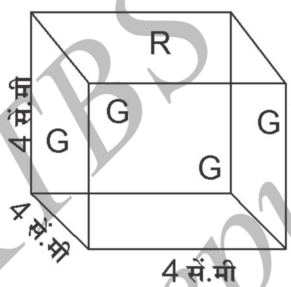
अतः पृष्ठीय क्षेत्रफल (LSA) = $(l \times h) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h)$ = $2h((l \times h)$ वर्ग इकाईयाँ

यहाँ आप ध्यान दे सकते हैं कि घनायत का पृष्ठीय क्षेत्रफल उसके आधार पर निर्भर करता है जिसे आप घनायत का चुनते हो। यदि आप आधार बदलते हो तो पृष्ठीय क्षेत्रफल भी बदलता है। तो भी घनायत का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल बदलता नहीं है।

घन (cube)

घनायत जिसको लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान होती है उसे घन कहते है। बर्फ के घन, शक्कर के घन, पासा (dice), घन के कुछ उदाहरण है।

कार्यकलाप 2 :

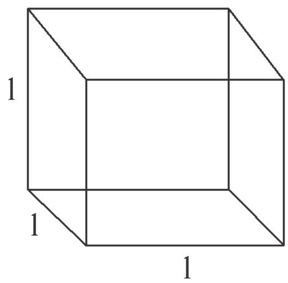


गत्ते के उपयोग से 4 से.मी भुजा का एक घन की रचना कीजिए। दो अभिमुख भुजाओं का लाल रंग और अन्य को हरा रंग दीजिए।

लाल रंग के एक फलक का आधार पर घन का मेज पर रखिए।

लाल रंग के फलकों को परिबन्ध करनेवाले हरे रंग के फलकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हरे रंग के फलकों को घन के पृष्ठीय फलक (lateral faces) कहते हैं। पृष्ठीय फलकों का क्षेत्रफल क्या है? क्या आपको ज्ञात है कि घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $4 \times 16 = 64$ से.मी^{2} है। घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $6 \times 16 = 96$ से.मी^{2}



'l' इकाई के भुजा के घन की पार्श्व आकृति ध्यान से देखिए। उसके छः वर्गाकार फलक हैं। घन के प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल l^2 इकाई है। अतः छः फलकों का क्षेत्रफल $6l^2$ इकाईयाँ है। 4 पार्श्व फलकों का क्षेत्रफल $4l^2$ इकाईयाँ है।

सोचिए : घनाकार कमरे में रखे सीढ़ी की अधिकतम लंबाई क्या होना चाहिए जिसे फर्श के एक कोने में रखा गया ताकि वह छत के अभिमुख कोने तक पहुँचता है?

उदाहरण 1 : उस घनायत का पृष्ठीय क्षेत्रफल और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई 8 मीटर, चौडाई 5 मीटर और ऊँचाई 3.5 मीटर है।

हल : दिया है : l = 8 मी, b = 8 मी, h = 8 मी,

हम जानते हैं कि

पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2h((l + b) = 2 \times 3.5\ (8 + b) = 7 \times 14 = 98$ मी^{2}

इसी तरह = $2(lb + bh + lh) = 2(8 \times 6 + 6 \times 3.5 + 8 \times 3.5)$

$=2(48 + 21 + 28) = 2 \times (97) = 194$ मी^{2}

उदाहरण 2 : 15 मी $\times$ 12 मी आयाम के कमरे के फर्श पर 30 से.मी $\times$ 20 से.मी कितने टाइल लगा सकते है?

हल : हम जानते है कि टाइल से.मी^{2} में है। हमें कमरे के आयाम को से.मी^{2} में बदलना होगा वह होगा 1500 से.मी $\times$ 1200 से.मी ।

इसलिए फर्श का क्षेत्रफल है : $1500 \times 1200 = 1800000$ से.मी^{2}..

प्रत्येक टाइल का क्षेत्रफल = $30 \times 20 = 600$ से.मी^{2}.

अतः टाइलस् की संख्या = $\dfrac{1800000}{600} = 3000$

उदाहरण 3 : घन प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए जिसकी संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 294 वर्ग से.मी है।

हल : घन की सं.पृ क्षे. (T.S.A) 294 से.मी^{2} है। हमें उसकी लंबाई ज्ञात कीजिए।

हम जानते हैं कि सं.पृ क्षेत्र $6l^2$ है।

$6l^2 = 294$

$\therefore\ l^2 = \dfrac{294}{6} = 49$

अतः $l = 7$ से.मी.

उदाहरण 4 : एक घन की संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 600 से.मी^{2}, हमें उसकी पृष्ठीय क्षेत्रफलीय ज्ञात करना (L.S.A.- पृ.क्षे)

हमें घन की सं. पृ.क्षे. 600 से.मी^{2} हमें उसकी पृ.क्षे ज्ञात करना है। परन्तु सं.पृ. क्षेत्र = $6l^2$ जहाँ 'l' घन की लंबाई है।

अतः 600 = $6l^2$

अथवा l^2 = 100 इकाईयाँ

वर्गमूल लेने पर $l = 10$ से.मी.

लेकिन पृ.क्षे = $4l^2$

इसलिए पृ.क्षे = 4 × 10 × 10 = 400 से.मी^{2}

उदाहरण 5 : 2 मी. लंबाई को घन बनाने आवश्यक धात्विक पत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। घन तैयार करने ₹ 8 / मी^{2} की दर से आवश्यक घात्विक पत्र का खर्च ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं $l = 2$ मी. है।

हमें घन की सं.पृ.क्षे ज्ञात करना है।

लेकिन सं. पृ.क्षे = $6l^2$ = 6 × 2 × 2 = 24 मी^{2}

घात्विक पत्र का खर्च = 24 × 8 = 192 रुपये

अभ्यास 16.1

1. घनायत का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें $l = 4$ मी., $b = 3$ मी., $h = 1.5$ मी.
2. एक कमरे के चार दिवारों का क्षेत्रफल जिसकी लंबाई 3.5 मी, चौडाई 2.5 मी. और ऊँचाई = 3 मी.
3. एक कमरे के आयाम $l = 8$ मी. $b = 5$ मी. $h = 4$ मी है ₹ 40/मी^{2} की दर से चारों दिवारों को समारंजन से रंगाने (distempering) का खर्च ज्ञात कीजिए।
4. एक कमरा 4.8 मी. लंबा, 3.6 मी. चौड़ा और 2 मी. ऊँचा है। उसके फर्श और चार दीवारों पर टाईल (tiles) लगवाने का खर्च ज्ञात जबकि टाईल लगाने की दर 100 /मी^{2} है।
5. एक डिब्बा 40 से.मी लंबा, 50 से.मी चौड़ा और 60 से.मी. गहरा है। उसे आच्छादित (covering) करने लगनेवाले पन्नी (foil) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 384 से.मी^{2}. घन की भुजा परिकलन कीजिए।
7. एक घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल 64 से.मी^{2} है। घन की भुजा परिकलन कीजिए।
8. घनाकार कमरे की भुजा 4 मी है। चारों दिवारों का चूना लगाने ₹ 20 /मी^{2} की दर से खर्च ज्ञात कीजिए।

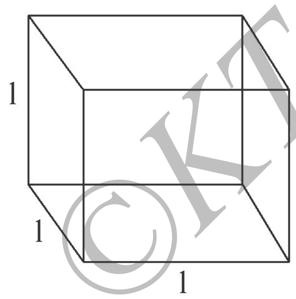
9. एक घनाकार डिब्बे का किनारा 10 से.मी है और एक घनायत डिब्बे 12.5 से.मी लंबा 10 से.मी. चौडा और 8 से.मी. ऊँचा है।

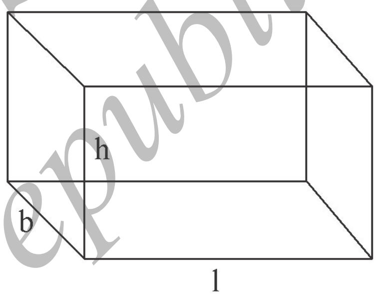
   (i) किसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कम है?

   (ii) यदि एक घन का किनारा दुगुना करने पर उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना बढ़ जायेगा?

घन और घनायत के आयतन (volume of cubes and cuboids)

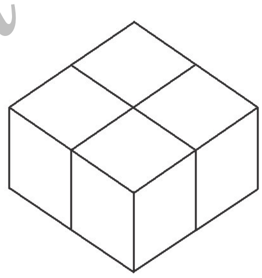
तीन आयाम के वस्तुओं से घेरा हुआ अवकाश को उसका आयतन कहते हैं। एक कमरे का आयतन, एक ईंट अथवा जूते के डिब्बे के आयतन से अधिक होता है। याद रखिए एक जगह अथवा एक पृष्ठ का क्षेत्रफल हम वर्ग इकाईयों में व्यक्त करते हैं। इसी तरह, ठोस वस्तुऐं तीन आयाम के होते है, इसलिए उनका आयतन मापने घन इकाइयों में व्यक्त करते हैं।

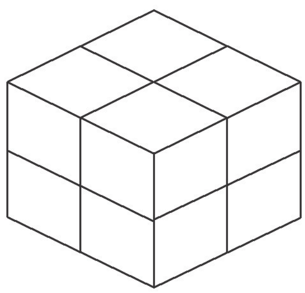




उपरोक्त आकृतियाँ घन और घनायत की हैं जो तीन आयामवाले हैं इसलिए उनका आयतन होता है। हमें उनका आयतन ज्ञात करना है।

कार्यकलाप : प्रत्येक 1 इकाई के लंबाई के 4 घन लेकर आकृति में दर्शाये जैसे व्यवस्थित कीजिए। पुनः उसी माप के 4 और घन लेकर पूर्व रखें घन पर व्यवस्थित कीजिए (आकृति देखकर घन व्यवस्थित कीजिए। क्या आपको एक और घन प्राप्त होता है? हमने 8 घन उपयोग किये हैं अर्थात् बने नये घन का आयतन 8 घन इकाइयाँ हैं।





यहाँ $l = b = h = 2$ इकाइयाँ

इस घन का आयतन = 2 इकाई $\times$ 2 इकाई $\times$ 2 इकाई = 8 इकाईयाँ

सामान्य रूप से एक घन का आयतन = भुजा $\times$ भुजा $\times$ भुजा

इस तरह, $V = l \times l \times l = l^3$ घन इकाईयाँ

आयतन घन इकाईयों में व्यक्त करते हैं ।

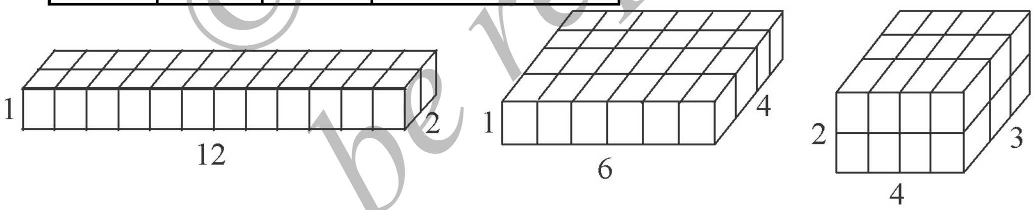
1 से.मी^{3} = 1 से.मी $\times$ 1 से.मी $\times$ 1 से.मी

1 मी^{3} = 1 मी. $\times$ 1 मी. $\times$ 1 मी = 100 से.मी $\times$ 100 से.मी. $\times$ 100 से.मी. = 10^6 से.मी^{3}

घनायत का आयतन (volume of a cuboid)

कार्यकलाप : एक ही माप (size) के 24 घन लीजिए। उन्हें ऐसे व्यवस्थित कीजिए ताकि एक घनायत बनें। आप उन्हें अलग रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं। निम्न तालिका देखिए।

l	b	h	$l \times b \times h$
12	2	1	24 घन इकाईयाँ
6	4	1	24 घन इकाईयाँ
4	3	2	24 घन इकाईयाँ



क्योंकि हमने 24 घन का उपयोग इन घनायत बनाने में, प्रत्येक घनायत का आयतन 24 घन इकाईयाँ हैं। इस तरह हम एक निष्कर्ष पर आते हैं कि घनायत का आयतन लंबाई, चौडाई और ऊँचाई का गुणनफल है = $l \times b \times h$

क्योंकि $l \times b$ = आधार का क्षेत्रफल

हम ऐसे भी लिख सकते हैं

घनायत का आयतन = आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

सोचिए

1. से.मी. लंबाई के भुजा के 36 घन हैं। इन सब का उपयोग विभिन्न आयाम के कितने घनायत तैयार कर सकते हैं।

उदाहरण 6 : एक दियासलाई कि डिबिया के आयाम 4 से.मी., 2.5 से.मी. और 1.5 से.मी.है। '12' ऐसे डिब्बों के पाकेट का आयतन क्या होगा?

हल : प्रत्येक डिबिया का आयतन 4 $\times$ 2.5 $\times$ 1.4 = 15 से.मी.^{3}

12 डिबियों के पाकेट का आयतन = 15 12 = 180 से.मी.^{3}

उदाहरण 7 : 18 मी $\times$ 12 मी $\times$ 9 मी मापों के घनायत में से कितने 3 मीटर भुजायुक्त घन काट सकते हैं?

हल : घनायत का आयतन = 18 $\times$ 12 $\times$ 9 मी^{3}

प्रत्येक घन का आयतन = 3 $\times$ 3 $\times$ 3 मी^{3}

अतः घनायत में से काटे जाने घन की संख्या = $\frac{18\times12\times9}{3\times3\times3} = 72$

अभ्यास 16.2

1. एक घन की भुजा की लंबाई 12 से.मी है उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
2. उस घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 486 से.मी^{2}.
3. एक टंकी घनायतकार की है, उसका आयतन 6.4 मी3 है। आधार की लंबाई और चौडाई क्रमशः 2 मी और 1.6 मी है। टंकी की गहराई ज्ञात कीजिए।
4. 28 मी गहरे तथा 10 मी और 8 मी आधार आयामयुक्त आयताकार कुँअे से कितने मी^{3} मिट्टी उत्खनन कर सकते हैं?
5. उत्कृष्ठ लकडी से बनें एक घनाकार पेटी का मूल्य ₹ 500 मी^{3} से ₹ 256 है। उसका आयतन और प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

शब्दावली :

मापन	: समतलीय वस्तुओं का क्षेत्रफल अथवा तीन आयात वस्तुओं का आयतन ज्ञात करना।
ठोस	: वस्तुऐं जो तीन आयामों में अवकाश घेर लेते हैं।
घन	: घनायत जिसकी लंबाई, चौडाई और ऊँचाई समान होती है।
पार्श्व पृष्ठ (lateral surface)	: घनायत का पृष्ठ जो न आधार ना ऊपर का पृष्ठ

किनारे (edges) : सरल रेखा जहाँ पृष्ठ मिलते हैं।

पृष्ठीय क्षेत्रफल : घनायत के फलकों का क्षेत्रफल

आयतन : एक ठोस से घेरा हुआ अवकाश का मापन

याद रखिए :

- ठोस एक तीन आयामी आकृति है – यह अवकाश घेर लेता हैं (तीन आयामों में)
- ठोस की दो मात्राऐं हैं – पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ।
- क्षेत्रफल को वर्ग इकाइयों में मापते हैं जबकि आयतन का घन इकाईयों में।

उत्तर

अभ्यास 16.1

1. 45 मी^{2} 2. 36 मी^{2} 3. ₹ 4160 4. ₹ 5088

5. 14,800 से.मी^{2} 6. 8 से.मी. 7. 4 से.मी

8. ₹ 1280 9. (i) घन (ii) 4 गुना

अभ्यास 16.2

1. (i) 6 से.मी (ii) 216 से.मी^{2} (iii) 84 से.मी^{2}

2. पृष्ठीय क्षेत्रफल = 512 से.मी^{2} और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 896 से.मी^{2}.

3. आयाम : लंबाई = 12 से.मी. चौडाई 10 से.मी. ऊँचाई = 6 से.मी आयतन = 720 से.मी^{3}

4. 2240 मी^{3} और ₹ 15,120

5. आयतन = 0.512 मी^{3}, भुजा लंबाई = 80 से.मी

9. वाणिज्य गणित

1. निम्नलिखित कथनों के लिए चार-चार विकल्प दिये गये हैं। इन में सही विकल्प का चयन कीजिए।

(a) ₹ 700 का 9% है।

A) ₹ 63 B) ₹ 630 C) ₹ 6.3 D) ₹ 0.63

(b) 50 मीटर का कितना प्रतिशत 12 मीटर है?

A) 20% B) 60% C) 24% D) 32%

(c) संख्या जिसका 8%, 12 है।

A) 120 B) 150 C) 130 D) 140

(d) ₹ 600 क्रयमूल्य के वस्तु को 750 पर बेचा जाता है। लाभ की प्रतिशत है ।

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35

(e) एक नोटबुक को ₹ 22 पर बेचने पर दुकानदार को 10% लाभ होता है। नोटबुक का क्रयमूल्य है ।

A) ₹ 18 B) ₹ 30 C) ₹ 30 D) ₹ 22

(f) ₹ 10,000 की वस्तु ₹ 9,000 पर बेचने से हानि की प्रतिशत है ।

A) ₹ 10 B) ₹ 20 C) ₹ 15 D) ₹ 25

(g) ₹ 1000 पर अंकित रेडियो ₹ 850 बेचा गया। यहाँ छूट है

A) ₹ 50 B) ₹ 100 C) ₹ 150 D) ₹ 200

(h) ₹ 250 पर अंकित एक पुस्तक को ₹ 50 पर छूट दिये जाने पर बेचा गया। छूट की प्रतिशत है ।

A) ₹ 10 B) ₹ 30 C) ₹ 20 D) ₹ 25

(i) एक वस्तु का अंकित मूल्य ₹ 200 है। यदि 15% छूट दी जाती है तो विक्रय मूल्य होगा।

A) ₹ 185 B) ₹ 170 C) ₹ 215 D) ₹ 175

(j) ₹ 200 ब्रोकरेज (कमीशन) देकर एक व्यक्ति अपना द्विचक्रवाहन बेचता है। यदि ब्रोकरेज की दर 2% तो वाहन का विक्रय मूल्य होगा।

A) ₹ 12,000 B) ₹ 10,000 C) ₹ 14,000 D) ₹ 12,500

(k) 2% कमीशन की दर पर ₹ 25,000 के व्यवहार पर प्राप्त कमीशन है

A) ₹ 500 B) ₹ 250 C) ₹ 5,000 D) ₹ 2,500

(*l*) ब्रोकर द्वारा 8% कमीशन पर वस्तु बेचने से प्राप्त कमीशन ₹ 1600 है। वस्तु का विक्रय मूल्य

A) ₹ 500 B) ₹ 250 C) ₹ 5,000 D) ₹ 2,500

(m) ₹ 5,000 पर 2% प्रति माह दर से 3 महीनों का सरल ब्याज होगा।

A) ₹ 18,000 B) ₹ 20,000 C) ₹ 22,000 D) ₹ 24,000

(n) किसी धनराशि पर 10% वार्षिक दर से सरल ब्याज मूलधन से 0.15 गुना बनने के लगनेवाला समय

A) 1.5 वर्ष B) 1 वर्ष C) 2 वर्ष D) 2.5 वर्ष

(o) मूलधन जो 16% वार्षिक दर से 8 महीने ₹ 1280 है

A) ₹ 10,000 B) ₹ 12,000 C) ₹ 12,800 D) ₹ 14,000

2. 3 मिनट 20 सेकेण्ड के समय अन्तराल को गलती से 3 मिनट 25 सेकेण्ड मापा गया। गलती की प्रतिशता क्या है?

3. हरि पुस्तक के 22% पन्ने पहले दिन पढ़ता है, 53% दूसरे दिन में और 15% तीसरे दिन पर। यदि 30 पन्ने बिना पढ़े रहते हैं तो पुस्तक के कुल पन्नों की संख्या ज्ञात कीजिए।

4. स्कूल के 55% विद्यार्थी लडकियाँ है और लड़कों की संख्या 270 है। तो स्कूल में कुछ कितनी लड़कियाँ है?

5. ₹ 920 पर एक वस्तु बेचने से दूकानदार को 15% लाभ होता है। वस्तु का क्रयमूल्य ज्ञात कीजिए।

6. अमीत अपनी घड़ी 20% लाभ पर बेचता है। यदि वह 36 अधिक मूल्य पर बेचता तो उसे 23% लाभ होता था। घड़ी का क्रयमूल्य ज्ञात कीजिए।

7. ₹ 40 प्रति कि.ग्राम की दर से सेब बेचने पर विक्रेता को 10% हानि होती है। यदि उसे कुल ₹ 120 की हानि होती तो कितने कि.ग्राम सेब उसने बेचे?

8. एक व्यापारी वस्तु पर 20% छूट देने पर भी 20% लाभ होता है। वस्तु का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए जिसे ₹ 720 पर खरीदता है?

9. एक दूकानदार एक वस्तु को ₹ 600 को खरीदता है और क्रयमूल्य से 25% अधिक पर अंकित करता है।

   (i) वस्तु का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए यदि वह 10% छूट पर बेचता है।

   (ii) यदि उसे ₹ 690 पर बेचने से छूट की प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

10. एक सामान्य व्यापारी ₹ 33,600 की वस्तुऐं खरीदता है उसे ठोक व्यापारी से 14% छूट प्राप्त करता है। नकद धन देने ठोक व्यापारी उसे 1.5% छूट पहली छूट दिये जाने के बाद, अवशिष्ट धन पर देता है। उसे ठोक व्यापारी को कुल कितना धन देना पड़ा?

11. एक पुरानी कार को एक ब्रोकर द्वारा ₹ 42,000 पर बेचते हैं। यदि ब्रोकरेज 2½% है तो कार मालिक को कितना पैसा मिलता है?

12. एक ग्वाला प्रतिदिन ₹ 22 की दर से 20 लीटर दूध बेचता है। उसे प्रति लीटर पर 4% कमीशन प्राप्त होता है। 30 दिनों उसे कितना कमीशन मिलता है?

13. एक द्विचक्रवाहन को ₹ 48,000 पर बेचा गया। व्यापारी को ₹ 8,640 कमीशन मिलता है तो कमीशन की दर क्या है?

14. 10% वार्षिक दर से कितने वर्षों में एक धनराशी 3 गुना बन जायेगी?

15. 12% वार्षिक दर से, कितने वर्षों में, सरल ब्याज मूलधन का 0.24 गुना बन जायेगा?

16. 12% वार्षिक दर से ₹ 30,000 पर 15 जानेवरी 2010 से 10 अगस्त 2010 तक कितना मिश्रधन प्राप्त होगा?

17. एक व्यक्ति ₹ 2,50,000 की इलेक्टोनिक सामग्री खरीदता है। दुकानदार 12% के बदले 21% कर लगाता है। ग्राहक ध्यान में नहीं आता कि उसने अधिक कर दिया है। लेकिन कुछ समय के बाद वह जान लेता है कि उसने अधिक पैसा दिया है। वह दूकानदार से पैसा लौटाने की माँग करता परन्तु दूकानदार देने से इन्कार करता है। तो ग्राहक न्यायालय (consumer court) में दावा दाखिल करता है। न्यायालय में सुनवाई होने के बाद, दूकानदार को आज्ञा देती है कि वह अधिक दिया गया पैसा लौटाने तथा उसपर 12% प्रति वर्ष की दर से ब्याज भी लौटाये। यदि यहाँ 8 महीने लगे तो ज्ञात कीजिए ग्राहक ने कितना कर दिया और न्यायालय के आज्ञा पर दूकानदार ने ग्राहक को कितना पैसा ओर ब्याज लौटाया?

उत्तर

1. (a) A (b) C (c) B (d) B (e) C (f) A (g) C

   (h) C (i) B (j) B (k) A (l) B (m) C (n) A (o) B

2. $2\frac{1}{2}$ 3. 325 4. 330 5. ₹ 800

6. ₹ 1,200 7. 27 कि.ग्रां. 8. ₹ 1,080

9. (i) ₹ 675 (ii) 8%

10. ₹ 28,462.56 11. ₹ 41,050

12. ₹ 528 13. 18% 14. 20 वर्ष 15. 2 वर्ष

16. ₹ 32, 041.65 17. ₹ 24,300

* * * *

10. घातांक

1. सही उत्तर चुनकर लिखिए

(a) (m, n) जोडी पूर्णांक के लिए $(3^m)^n$ का मूल्य है

A. 3^{m+n} B. 3^{mn} C. 3^{m^n} D. $3^m + 3^n$

(b) यदि $x, y, 2x + \frac{y}{2}$ शून्य रहित वास्तविक संख्याऐं है, तो $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{-1}\left\{(2x)^{-1}+\left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right\}$ मान बराबर

A. 1 B. $x.y^{-1}$ C. $x^{-1}.y$ D. $x^{-1}.y^{-1}$

(c) यदि $2^x - 2^{x-2} = 192$, x का मूल्य है

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

(d) $\left(6^{(6^6)}\right)^{1/6}$ का मूल्य

A. 6^6 B. $6^{6^6} - 1$ C. $6^{(6^5)}$ D. $6^{(5^6)}$

(e) घनात्मक पूर्णांक (m, n) संख्याओं की जोडी ताकि $m^n = 25$ हैं।

A. 0 B. 1 C. 2 D. 2 से. अधिक

2. सूर्य का व्यास 1.4×10^9 मीटर और पृक्ष्वी का करीबन 1.2768×10^7 मीटर है। सूर्य तथा पृथ्वी के व्यास का सन्निकट अनुपात ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित प्रत्येक का मूल्य ज्ञात कीजिए

(a) $(-0.75)^3 + (0.3)^{-3} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$

(b) $\dfrac{\left(8\times(4^2)^4\times3^3\times27^2\right)+\left(9\times6^3\times4^7\times(3^2)^3\right)}{\left(24\times(6^2)4\times(2^4)^2\right)+\left(144\times(2^3)^4\times(9^2)^2\times4^2\right)}$

(c) $\dfrac{(2^{19}\times27^3)+(15\times4^9\times9^4)}{(6^9\times2^{10})+12^{10}}$

4. $2^3 \times 5^4 \times 20^5$ में कितने अंक है?

5. यदि $a^7 = 3$ हो तो $\dfrac{(a^{-2})^{-3}\times(a^3)^4\times(a^{-17})^{-1}}{a^7}$

6. यदि $2^m \times a^2 = 2^8$ जहाँ a, m घनात्मक पूर्णांक है, $a + m$ के सभी संभवनीय मूल्य ज्ञात कीजिए।

7. मानलीजिए $3^k \times b^2 = 6^4$ कुछ घनात्मक पूर्णांक k, b के लिए सत्य है। $k + b$ के सभी संभवनीय ज्ञात कीजिए

8. मूल्य ज्ञात कीजिए : $\dfrac{(625)^{6.25}\times(25)^{2.60}}{(625)^{7.25}\times(5)^{1.20}}$

9. एक व्यक्ति के पास 5 के धात में कुछ रुपये है। उसने उस में से कुछ रुपये अपने मित्र को दिये और वह 5 के घात में थे। उसके पास ₹ 500 बाकी हैं। उसके पास कुल कितने रुपये थे।

उत्तर

1. (i) B (ii) D (iii) D (iv) C (v) B
2. 109.65
3. (a) $\frac{944}{27}$ (b) $\frac{1}{2}$
4. 11
5. 81
6. $a + m = 8$
7. K + 2 = 8 अथवा 14
8. 1
9. 625

* * * *

11. त्रिभुजों की सर्वांगसमता

1. कथनों को सत्य सिद्ध करने रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए
   (a) एक लंबकोण त्रिभुज में कर्ण ही सबसे .... भुजा होती है।
   (b) एक त्रिभुज की तीनों ऊँचाईयों का योगफल उसके परिसीमा से .... होता है।
   (c) एक त्रिभुज को दो भुजाओं का जोड तीसरे भुजा से .... होता है।
   (d) त्रिभुज के दो कोण यदि असमान हो, तो छोटे कोण के अभिमुख .... भुजा होती है।
   (e) एक त्रिभुज के दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा .... होता है।
   (f) एक त्रिभुज की दो भुजाऐं असमान हो तो लंबी भुजा के अभिमुख .... कोण होता है।
2. कारण सहित निम्न कथनों को उचित सिद्ध कीजिए
   (a) एक त्रिभुज के तीन भुजाओं का जोड, उसके ऊँचाईयों के जोड से अधिक होता है।
   (b) एक त्रिभुज के दो भुजाओं का जोड, तीसरो भुजा पर खींचे मध्यिका का दुगुना होता है।
   (c) त्रिभुज के दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से कम होता है।
3. दो त्रिभुज ABC और DBC में BC एक सामान्य भुजा है। मान लीजिए AB = DC और $\underline{|ABC} = \underline{|BCD}$ है तो सिद्ध कीजिए AC = BD.

4. मान लीजिए AB और CD दो रेखाखण्ड है ताकि AD और BC 'O' में प्रतिच्छेद करते हैं। मान लीजिए $AO = OC$ और $BO = OD$ हो तो सिद्ध कीजिए $AB = CD$.
5. मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है। BC पर बाहय रूप से त्रिभुज BDC खींचिए ताकि $AB = BD$ और $AC = CD$ सिद्ध कीजिए $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.
6. मान लीजिए ABCD एक वर्ग है, और मान लीजिए AB पर P बिन्दु और DC पर Q बिन्दु है ताकि $DP = AQ$ है। सिद्ध कीजिए $BP = CQ$.
7. एक त्रिभुज ABC में, $AB = AC$ है। मान लीजिए AB पर कोई 'P' है और AC पर कोई Q बिन्दु है ताकि $AP = AQ$ है। सिद्ध कीजिए $\Delta APC \cong \Delta AQB$.
8. एक समद्विबाहु त्रिभुज में, यदि शीर्ष कोण, आधार कोणों के योगफल से दुगुना है। त्रिभुज के कोणों को ज्ञात कीजिए
9. एक त्रिभुज के शीर्ष कोण समद्विमाजक यदि आधार को समद्विभाजित करता है तो दर्शाईए कि त्रिभुज समद्विबाहु है।
10. मान लीजिए ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ हैं। भुजा BA को D तक बढाये। गया ताकि $BA = AD$ हो। सिद्ध कीजिए $\underline{|BCD}$ एक लंबकोण है।

    मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है और D, BC की मध्यबिन्दु है। D से AB और AC तक खींचे लंब यदि समान है सिद्ध कीजिए त्रिभुज समद्विबाहु है।
11. मान लीजिए AB, CD दो रेखाखण्ड है ताकि $AB \parallel CD$ और $AD \parallel BC$ है। यदि 'E', BC की मध्यबिन्दु है और DE बढाया गया हैं ताकि वह AB को F पर मिलें। सिद्ध कीजिए $AB = BF$

उत्तर

1.	(a) सबसे बड़ी	(b) कम
	(c) अधिक	(d) छोटी
	(e) कम	(f) बडा
	(g). 30, 30, 120°	

* * * *

12. त्रिभुजों की रचना

1. त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सें.मी, BC = 4.7 सें.मी, और AC = 4.3 सें.मी.
2. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सें.मी, BC = 5 सें.मी और AC = 3 सें.मी.
3. PQR त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें PQ = 4 सें.मी, QR = 4.5 सें.मी और $\angle Q = 60°$.
4. PQR त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें PQ = 4 सें.मी, $\angle P = 60°$ और $\angle Q = 60°$.
5. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 3.5 सें.मी, AC = 4 सें.मी, और A से BC पर लम्बोन्नति 3 सें.मी।
6. ABC समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें आधार BC = 4.5 सें.मी, और A से BC पर लम्बोन्नती 3.8 सें.मी।
7. समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी लम्बोन्नति 5 सें.मी और श्रृंग कोण का माप 70° का है।
8. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी लम्बोन्नती 5 सें.मी, और श्रृंगकोण का माप 80° है।
9. समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी ऊँचाई 3.5 सें.मी हो।
10. समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी ऊँचाई 4.3 सें.मी हो।
11. लम्बकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जो LMN से नामांकित है जिसमें $\angle M = 90°$, MN = 4.5 सें.मी, और LN = 5.6 से.मी.
12. PQR लम्बकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें $\angle Q = 90°$, QR = 4.5 सें.मी, और $\angle R = 50°$.
13. PQR त्रिभुज की रचना किजिए जिसका परिमाप 13 सें.मी और जिसकी भुजाएँ 2 : 3 : 4 के अनुपात में हैं।
14. PQR त्रिभुज की रचना किजिए जिसका परिमाप 15 सें.मी और भुजाएँ 3 : 4 : 6 के अनुपात में हैं।
15. ABC त्रिभुज की रचना किजिए जिसका परिमाप 13.5 सें.मी, हो, और जिसके आधार के कोण 60° एवं 75° हैं।

16. ABC त्रिभुज की रचना किजिए जिसका परिमाप 12.5 सें.मी, है और आधर भुजापर 50° और 80° के कोण हैं।

17. XYZ त्रिभुज की रचना कीजिये जिसमें YZ = 4.5 सें.मी $\underline{|Y} = 60^\circ$ एवं अन्य दो भुजाओं का योगफल 7.5 सें.मी है।

18. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसका परिमाप 9 सें.मी है, एवं उसके कोण 3 : 4 : 5 के अनुपात में हैं।

19. ABC त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसमें BC = 4.5 सें.मी, एवम् उसके कोण 2 : 3 : 5 के अनुपात में हैं।

20. ABC त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें BC = 4.5 सें.मी, $\underline{|B} = 35^\circ$ एवम् अन्य दो भुजाओं का अंतर 2.8 सें.मी है।

* * * *

13. सांख्यिकी

1. निम्नलिखित कथनों के लिए चार-चार विकल्प दिये गये हैं। इन में सही विकल्प चुनकर लिखिए।

(a) वर्गांतर (0, -4) का गात्र है

A) 4 B) 5 C) 3 D) 0

(b) वर्गांतर (10, -19) की मध्यबिन्दु है -

A) 10 B) 14 C) 15 D) 14.5

(c) एक वितरण के उच्चतम माप और न्यूनतम माप के अन्तर है

A) वर्गांतर B) वर्गांतर गात्र C) परास D) वर्गांतर मिति

(d) एक दत्तांश में एक अंक (माप) जितने बार दोहराता है वह उसका

A) आवृति B) परास C) वर्गांतर D) वर्गांतर मिति

(e) समावेशिक रूप में, वर्गांतर (0 - 4) के उच्चमिति और निम्न मिति हैं

A) - 0.5, 3.5 B) 0.5 & 4.5

C) -1 & 5 D) 1 & 5

(f) आयत चित्र में आयत की ऊँचाई सूचित करती है

A) वर्गांतर B) मध्यबिन्दु

C) आवृत्ति सांद्रता D) आवृति

(g) एक आयत चित्र में आयत का गात्र सूचित करता है

A) वर्गांतर B) मध्यबिन्दु

C) आवृति सांद्रता D) आवृति

(h) 10, 15, 12, 15, 15 मापों का माध्य है

A) 15 B) 13 C) 13.4 D) 14.3

(i) दत्तांश को वर्गांतर में समूहित करते है जब

A) दत्तांश का परास बहुत कम है B) दत्तांश का परास बहुत अधिक है

C) वर्गांतर बहुत छोटे हैं । D) वर्गांतर बहुत बड़े हैं ।

(j) 6, 4, 7, x और 10 का माध्य 8 है । तो x का मूल्य है

A) 10 B) 12 C) 14 D) 13

(k) यदि $n = 10$, माध्य = 12 है तो Σfx है

A) 120 B) 1200 C) 12 D) 13

(l) 5 के प्रथम तीन गुणज का माध्य है

A) 5 B) 10 C) 15 D) 30

(m) 37, 83, 70, 29, 32, 42, 40 की मध्यिका है

A) 29 B) 30 C) 40 D) 42

(n) समावेशिक वर्गांतर (10 – 14) में निम्नमिति है

A) 9.5 B) 10.5 C) 13.5 D) 14.5

(o) अपसमावेशिक वर्गांतर (10 – 20) में निम्नमिति है

A) 20 B) 10 C) 10.5 D) 20.5

(p) 2,3,3,5,3,5,7,3,5 का बहुलक है

A) 3 B) 5 C) 3 और 5 D) 3, 5, 7

(q) दत्त 'x', 16, 18 के दो माप के आवृति क्रमशः 12 और 20 है तब उनका बहुलक है

A) 16 B) 18 C) 12 D) 20

(r) दत्तांश जिसके 3 बहुलक हैं तो वह

A) एकल बहुलक B) द्वि बहुलक

C) त्रैबहुलक D) अनेक बहुलक युक्त

2. निम्न मापों के लिए एक आवृति-वितरण तालिका तैयार कीजिए ।

42, 22, 55, 18, 50, 10, 33, 29, 17, 29, 29, 27, 34, 15, 40, 42, 40, 41, 35, 27, 44, 31, 38, 19, 54, 55, 38, 19, 20, 30, 42, 59, 15, 19, 27, 23, 40, 32, 28, 51.

वर्गांतर 10 - 20, 20 - 30, 30 - 40, 40 - 50, 50 - 60 लीजिए। आवृति वितरण तालिका से निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(i) वर्गांतर 20 - 30 की आवृत्ति क्या सूचित करती है?

(ii) कौन से वर्गांतर में 10, 20 और 30 समाविष्ट है?

(iii) मापों का परास ज्ञात कीजिए ।

3. एक घटक परीक्षा (25 में से) प्राप्त निम्नलिखित अंक है। इन के लिए आवृति वितरण तालिका तैयार कीजिए। वर्गांतर 0 - 4, 5 - 9, 10 - 14, 15 - 19, 20 - 24 लीजिए।

21, 14, 3, 7, 23, 18, 24, 16, 18, 17, 20, 10, 17, 18, 21, 23, 19, 12, 14, 9, 16, 18, 12, 14, 11

इस तालिका

(i) प्रत्येक वर्गांतर की मध्यबिन्दु ज्ञात कीजिए।

(ii) अत्यधिक आवृति का वर्गांतर लिखिए ।

(iii) मापों का परास पता लगाईए ।

4. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के लिए एक आयत चित्र बनाइए ।

वर्गांतर	**आवृत्ति**
5 - 15	2
15 - 25	8
25 - 35	14
35 - 45	14
45 - 55	12

5. निम्न आवृति वितरण के लिए एक आयत चित्र बनाईए :

वर्गांतर	आवृत्ति
0 - 10	4
11 - 20	18
21 - 30	12
31 - 40	6
41 - 50	20
51 - 60	10

6. एक गणित परीक्षा में प्राप्त 12 विद्यार्थियों के अंक इस प्रकार हैं : 48, 78, 93, 90, 66, 54, 83, 58, 60, 75, 89, 84 तो (i)प्राप्तांक का माध्य (ii) यदि प्रत्येक विद्यार्थी को 4 कृपांक दिये गये तो उनका माध्य

7. 8, 12, 21, 42, x का माध्य 20 है तो 'x' का मूल्य क्या है?

8. निम्न वितरण का माध्य ज्ञात कीजिए :
12, 14, 10, 12, 15, 12, 18, 10, 15, 11, 19, 20, 12, 15, 19, 10, 18, 16, 20, 17.

उत्तर

1. (a) **B.** (b) **D.** (c) **B.** (d) **A.** (e) **A.** (f) **D.** (g) **A.** (h) **C.** (i) **B.** (j) **D.** (k) **A.** (l) **B.** (m) **C.** (n) **A.** (o) **B.** (p) **A.** (q) **D.** (r) **B.**

2)

वर्गांतर	टैली-अंक	आवृति
10 - 20	IIII III	8
20 - 30	IIII IIII	10
30 - 40	IIII III	8
40 - 50	IIII III	8
50 - 60	IIII I	6
कुल	40	40

(i) अत्यधिक माप 20-30 वर्गांतर हैं।

(ii) 10, 20, 30 क्रमशः 10-20, 20-30, 30-40 में समाविष्ट है।

(iii) परास = 59-10 = 49

3)

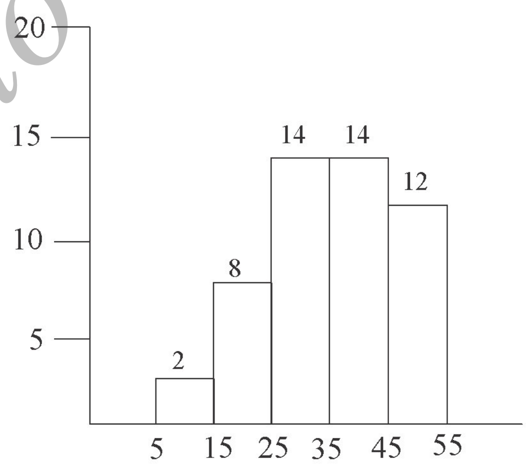
वर्गांतर	टैली	आवृति
0 - 4	I	1
5 - 9	II	2
10 - 14	卌 II	7
15 - 19	卌 IIII	9
20 - 24	卌 I	6
कुल	25	25

(i) वर्गांतर 0-4, 5-9, 10-14, 15-19, 20-24 के मध्यबिन्दु क्रमशः 2,7, 12,17, 22 है।

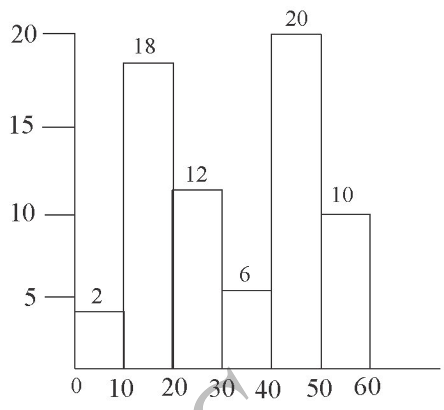
(ii) 15-19 वर्गांतर में अत्यधिक आवृति है।

(iii) मापों का परास = 24 - 3 = 21

4)



5)



6)(i) करीबन 73.17 (ii) करीबन 77.17 7) 17 8) 14.75

* * * *

14. आलेखों के परिचय पर अतिरिक्त प्रश्न

1.सही उत्तर का चयन कीजिए

(a) (4, 0) यह बिन्दु इस रेखा पर स्थित है :

(i) $y - x = 0$ (ii) $y = 0$ (iii) $x = 0$ (iv) $y + x = 0$

(b) (–5, 4) यह बिन्दु निम्न चतुर्थांश में समाविष्ट है

(i) प्रथम चतुर्थांश (ii) द्वितीय चतुर्थांश

(iii) तृतीय चतुर्थांश (iv) चतुर्थ चतुर्थांश

(c) यदि एक सरल रेखा (0, 0) और (1, 5) से गुजरती है तो वह समीकरण है

(i) $y = x$ (ii) $y = 5x$ (iii) $5y = x$ (iv) $y = x + 5$

(d) यदि $X^1OX - Y^1OY$ निर्देशांक प्रणाली में P के निर्देशांक (3, 4) है, $X_1{}^1O_1X_1 - Y_1{}^1O_1Y_1$ निर्देशांक प्रणाली में O के निर्देशांक (4, 3) है जहाँ $X^1OX \parallel X_1{}^1O_1X_1$ तो नये प्रणाली $X_1{}^1O_1X \parallel Y_1{}^1O_1Y_1$ में P के निर्देशांक है.

(i) (3, 4) (ii) (1, –1) (iii) (7, 7) (iv) (–1, 1)

(e) $X^1OX - Y^1OY$ प्रणाली में P बिन्दु के निर्देशांक (5, 8) है। इस बिन्दु के निर्देशांक $Y^1OY - XOX^1$ प्रणाली में हैं

(i) (–8, 5) (ii) (8, 5) (iii) (8, –5) (iv) (–8, –5)

(f) तृतीय चतुर्थांश में स्थित बिन्दु के निर्देशांक के चिन्ह है।

(i) (+, –) (ii) (–, +) (iii) (+, +) (iv) (–, –)

(g) यदि एक व्यक्ति x अक्ष के दिशा में 1 इकाई अथवा y अक्ष के दिशा में 1 इकाई प्रत्येक कदम में बढता है तो मूलबिन्दु (0, 0) से प्रारंभ कर (10, 12) पहुचने वह कितने कदम बढता है?

(i) 10 (ii) 12 (iii) 22 (iv) 120

(h) $y = 3x + 4$ सरल रेखा और $x = 3$ रेखा के प्रति छेदन बिन्दु का y-निर्देशांक है

(i) 4 (ii) 7 (iii) 10 (iv) 13

(i) (0, 0) और (1, 1) से होकर जानेवाली रेखा का समीकरण है

(i) $y = x$ (ii) $y = -x$ (iii) $y = 1$ (iv) $x = 1$

2. निम्नालिखित बिन्दु कौनसे चतुर्थांश के उपस्थित हैं

(i) (5, 10) (ii) (–8, 9)

(iii) (–800, – 3000) (iv) (8, – 100)

3. जोडकर लिखिए

(A) x अक्ष पर	(i) x निर्देशांक ऋणात्मक
(B) द्वितीय चतुर्थांश के	(ii) y अक्ष को (0, 4) में प्रतिच्छोद करता है।
(C) $y = 3x + 4$ रेखा	(iii) निर्देशांक (a, 0) के रूप में होते हैं।

4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

(a) x अक्ष पर स्थित एक बिन्दु का y निर्देशांक .... होता है।

(b) x निर्देशांक को .... कहते हैं।

(c) x अक्ष और y अक्ष .... में प्रतिच्छेदित करते हैं।

(d) यदि तृतीय चतुर्थांश में एक बिन्दु $(x, y) = (0, 0)$ हो तो $x + y$ का चिन्ह .... हैं।

(e) यदि एक बिन्दु (x, y) क्षैतिज अक्ष के ऊपर स्थित हो तो y हमेशा .... होता है।

(f) $x = y$ और $x = -y$ का प्रतिच्छेदन .... हैं

(g) सरल $y = 4x + 5$, y अक्ष को .... बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करता है।

5. सही या गलत बताईए

(a) x अक्ष का समीकरण $x = 0$ हैं

(b) $x = 4$ यह रेखा y अक्ष को समांतर होती है

(c) $y = 8$ यह रेखा x अक्ष को लंब होती हैं

(d) सरल रेखाऐं $x = y$ और $x = - y$ परस्पर लंब होते हैं

(e) सरल रेखाऐं $x = 9$, $y = 9$ परस्पर लंब होते है

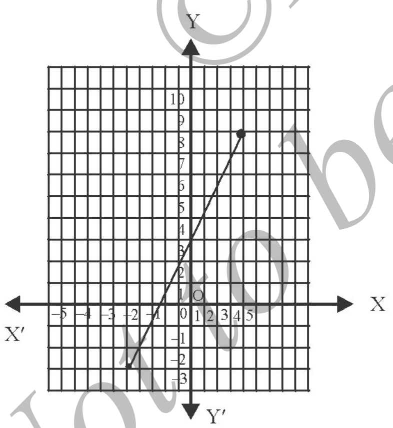
(f) $y = x^2$ का ग्राफ सरल रेखा है

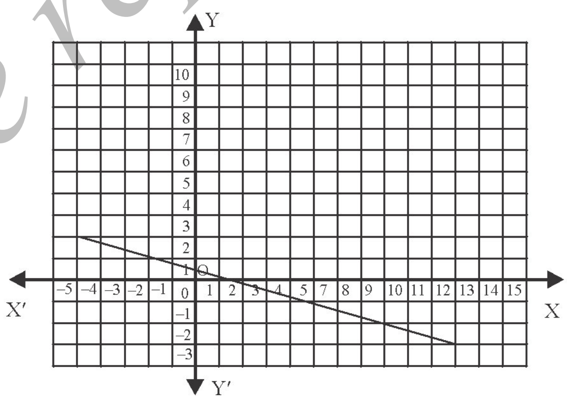
(g) $y = 3x + 4$ सरल रेखा x अक्ष को प्रतिच्छेदित नहीं करती

(h) एक आयताकार निर्देशांक प्रणाली में, निर्देशांक अक्ष ऐसे चुने जाते है ताकि वे दोनों लंब हो

6. एक रेखा निर्धारित कीजिए जो बिन्दु $(0, -8)$ और $(7, 0)$ से गुजरती है।

7. निम्नलिखत प्रत्येक ग्राफ के रेखा का समीकरण निर्धारित कीजिए।





8. $X^1OX - Y^1OY$ निर्देशांक प्रणाली में एक P बिन्दु के निर्देशांक (7, 10) है। यदि $X'_1O_1X_1 - Y'_1O_1Y_1$ निर्देशांक प्रणाली में उसके निर्देशांक (10, 7) है जहाँ $X^1OX \parallel X^1_1O_1X_1$. तो प्रणाली में O_1 के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

9. आप से बनाये गए निर्देशांक प्रणाली में $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 4\}$ का क्षेत्र निर्धारित कीजिए.

10. $3y = 4x - 4$ और $2x = 3y + 4$ रेखाओं के ग्राफ खींचकर उनके प्रतिच्छेदन बिन्दु निर्धारित कीजिए.

11. यदि $a * b = ab + a + b$ हो तो $y = 3 * x + 1 * 2$ का ग्राफ खींचिए।

उत्तर

1. (a) B (b) B (c) C (d) C
   (e) C (f) D (g) C (h) B (i) A
2. (a) प्रथम (b) द्वीतिय (c) तृतीय (d) चतुर्थ
3. (A) → (iii), (B) → (i), (C) → (ii)
4. (a) शून्य (b) X - निर्देशांक (अबसिस्सा) (c) (0, 0) (d) ऋणात्मक
   (e) घनात्मक (f) (0,0) (g) (0, 5)
5. (a) गलत (b) सही (c) गलत (d) सही
   (e) सही (f) गलत (g) गलत (h) सही
6. $7y = 8(x - 7)$, $7y = 8x$
7. (i) $6y = 11x + 15$ (ii) $16y = -5x + 12$ 8. $(-3, 3)$

* * * *

5. (1, 1)

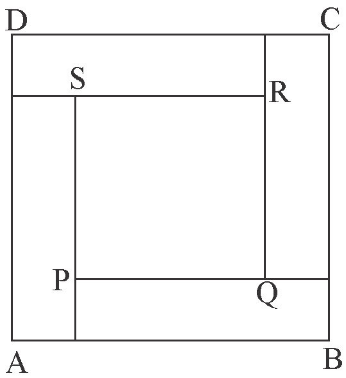
15. चतुर्भुज

1. निम्न की पूर्ति कीजिए ।
   (a) एक चतुर्भुज के .... भुजाएँ होती हैं ।
   (b) एक चतुर्भुज के .... विकर्ण होते हैं।
   (c) एक चतुर्भुज जिसमें एक जोड़ी भुजाएँ एक दूसरे को समांतर हो तो वह .... हैं।
   (d) एक समद्विबाहु त्रापिज्य में आधार भुजा पर कोण .... होते हैं।
   (e) वज्राकृति में विकर्ण एक दूसरे को .... कोणों में समद्विभाजित करते हैं।
   (f) वर्ग में सभी भुजाएँ .... होती है।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. ABCD एक समांतर चतुर्भुज होने पर उसे कौन सा विशेष नाम आप देंगे?
   (a) यदि AB = BC (b) यदि $\angle BAD = 90°$? (c) यदि AB = AD और $\angle BAD = 90°$
3. एक चतुर्भुज के तीन लघुकोण $70°$ के हों तो चौथे कोण का माप क्या होगा?
4. एक समांतर चतुर्भुज को दो पार्श्वकोणों का अंतर $20°$ है। समांतर चतुर्भुज के सभी कोणों का पता लगाइए।
5. चतुर्भुज के कोणों का अनुपात है 1 : 2 : 3 : 4 हो तो उसके सभी कोणों का पता लगाइए।
6. PQRS एक समांतरचतुर्भुज हो जिसमें PQ = 10 सें.मी और QR = 6 सें.मी हो तो अन्य दो भुजाओं तथा PQRS के मापों की गणना कीजिए।
7. एक वर्ग का परिमाप 60 सें.मी हो तो, उस वर्ग की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
8. यदि ABCD एक वर्ग हो जिसमें AC = BD = 10 सें.मी और AC और BD, O में प्रतिच्छेदन करें तो OC और OD की लम्बाई का पता लगाइए।
9. यदि PQRS एक वज्राकृति है जिसमें PR = 15 सें.मी और QS = 8 सें.मी हो तो वज्राकृति के क्षेत्रफल की गणना कीजिए।
10. यदि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, और यदि $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक P में मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle APB = 90°$.
11. यदि ABCD एक वर्ग है, AB, BC, CD, DA भुजाओं पर P, Q, R, S बिंदुओं को अंकित करें कि तत्सम्बन्धी AP = BQ= CR= DS हो। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक वर्ग है।
12. यदि ABCD एक आयत हो, और यदि P, Q, R, S तत्सम्बंधी AB, BC, CD और DA के मध्य बिंदुएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक वज्राकृति है।
13. यदि ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें विकर्ण O में लंम्ब प्रतिच्छेदन करते हैं । सिद्ध कीजिए कि AB + BC + CD + DA > AC + BD
14. ABCD यदि एक चतुर्भुज हो जिसमें AC और BD विकर्ण हैं तो निम्न कथनों को सिद्ध कीजिए।
   (a) AB + BC + CD > AD (b) AB + BC + CD + DA > 2AC
   (c) AB + BC + CD + DA > 2BD (d) AB + BC + CD + DA > AC + BD
   (पहले के उदाहरण से इसकी तुलना कीजिए)
15. यदि PQRS एक पतंग हो जिसमें PQ > PS तब सिद्ध करें कि $\angle PQR > \angle PSR$
   (सलाह QS मिलाइए)

16. यदि ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AB कनिष्ठतम भुजा है और CD गरिष्ठतम भुजा है। सिद्ध करो कि $\angle A > \angle C$ और $\angle B > \angle D$ (सलाह : AC और BD मिलाइए)
17. ABC त्रिभुज में यदि BC का मध्य बिंदु D हो तो सिद्ध करो कि $AB + AC > 2AD$ (चतुर्भुज का कौन सा गुणधर्म यहाँ लागू होता है?)
18. यदि ABCD एक चतुर्भुज हो और यदि AB, BC, CD, DA के तत्सम्बंधी मध्य बिंदुएँ P,Q,R,S हों तो सिद्ध कीजिए कि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है। (कौन सा अतिरिक्त परिणाम आप को सिद्ध करना पड़ेगा?)
19. सिद्ध कीजिए कि समद्विबाहु त्रापिज्य के आधारकोण समान होते हैं।
20. ABCD चतुर्भुज में यदि $AC = BD$ और $AD = BC$ हो तो सिद्ध कीजिए कि ABCD एक त्रापिज्य है।
21. तार्किक विधि से सिद्ध कीजिए कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। विलोमतः दिखाइए कि चतुर्भुज जिसके विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, वह समांतर चतुर्भुज है।
22. तार्किक विधान से सिद्ध कीजिए कि आयत के विकर्ण समान होते हैं।
23. PQRS वज्राकृति में $\angle SRQ = 40°$ और $PQ = 3$ सें.मी । $\angle SPQ$, $\angle QSR$ और वज्राकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए।
24. मान लें ABCD वज्राकृति में $\angle ABC = 124°$ हो तो $\angle A$, $\angle D$ और $\angle C$ की गणना कीजिए।
25. आकृति में दिखाए जैसे चार सर्वांगसम आयतों को संयोजित किया गया है। बाह्य वर्ग का क्षेत्रफल, अंदरूनी वर्ग के क्षेत्रफल का चार गुना है। सर्वांगसम आयतों की लम्बाई और चौड़ाई के अनुपात का पता लगाइए।



चतुर्भुजों पर अतिरिक्त प्रश्न

26. ABCD समांतर चतुर्भुज में $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ हो तो सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

27. ABCD चतुर्भुज में मान लें, AB = CD और AD = BC सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

उत्तर

1. (a) चार (b) दो (c) समलंब चतुर्भुज
   (d) समान (e) लंब (f) समान
2. (a) वज्राकृति (b) आयत (c) वर्ग
3. 150°
4. 80°, 100°, 80°, 100°
5. 36°, 72°, 108°, 144°
6. RS = 10 से.मी; SP = 6 से.मी. परिमाण 32 से.मी.
7. 15 से.मी.
8. OC = OD = 5 से.मी. 9. 120 से.मी^{2}

16. मापन अध्ययन

1. तीन घात्विक घन जिनके किनारे क्रमशः 3 से.मी. 4 से.मी और 5 से.मी हैं, इन्हें पिघलाकर एक घन बनाया गया है। नये घन की (1) भुजा की लंबाई (2) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. प्रत्येक 512 से.मी^{3} आयतन के दो घन एक दूसरे से जोड़े गया । फलस्वरूप बनें घनायत का संपूर्ण पृष्ठीय ज्ञात कीजिए।
3. एक घनायत की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई 6 : 5 : 3 है। यदि संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 504 से.मी^{2} हो तो उसके आयाम ज्ञात कीजिए।
4. एक कमरे की लंबाई, चौडाई और ऊँचाई क्रमशः 8 मी, 5 मी और 3 मी है। उसके चार दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और दीवारों की पुताई करवाने लगनेवाला खर्च मालूम कीजिए जब पुताई की दर ₹ 15/मी^{2} है ।

5. एक कमरा 6 मी लंबा, 4 मी. चौडा और 3 मी ऊँचा है। ₹ 80/ मी^{2} की दर से उसके फर्श और दीवारों पर टाईल लगवाने का खर्च ज्ञात कीजिए।

6. एक घनायत की लंबाई, चौडाई और ऊँचाई 5 : 3 : 2 में है। यदि उसका आयत 35.937 मी^{2} है। उसके आयाम ज्ञात कीजिए। तथा घनायत का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. मान लीजिए एक घन के फलक की परिमिति 24 से.मी है। उसका आयतन क्या है?

8. एक लकड़ी के पेटी के अन्तस्थ आयाम है $l = 6$ मी, $b = 8$ मी और (ऊँचाई) $h = 9$ मी है और उसका समरूप चौडाई 10 से.मी है। उसके बाह्य पृष्ठ को 50 / मी^{2} की दर से रंगाने का खर्चा मालूम कीजिए।

9. घन का प्रत्येक किनारा 20% से बढाया गया है। उसके आयतन में होनेवाले वृद्धि की प्रतिशता ज्ञात कीजिए।

10. मान लीजिए एक घन की लंबाई को 10% से बढाया गया है और चौडाई 10% से घटाया है। क्या बनें नये घनायत का आयतन मूल घन के आयतन से समान रहेगा? उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा? यदि कोई परिवर्तन होता है, तो दोनों परिवर्तन की प्रतिशता क्या होगी है?

उत्तर

1. (i) 6cm (ii) 216cm^2 (iii) 84cm^2.
2. (i) L.S.A = 384cm^2 (ii) T.S.A = 64cm^2.
3. length = 12cm, breadth = 10cm, height = 6cm; volume = 720cm^3.
4. 78 मी^{2} और ₹ 1,170
5. ₹ 6,720
6. 1.65 मी, 0.99 मी. 0.66 मी सं. पृ. क्षे = 6.7918 मी^{2}.
7. 216 से.मी^{3}
8. ₹ 8,931.5
9. 1.728%
10. आयतन 1% से घटता है सं. पृ. क्षे 2% से घटता है।

* * * *

स्वैच्छिक गणित

निम्न प्रश्न चुनौती स्वीकारने तैयार विद्यार्थियों के लिए है। ये ना कक्षा के चर्चा में ना परीक्षा में शामिल होंगे।

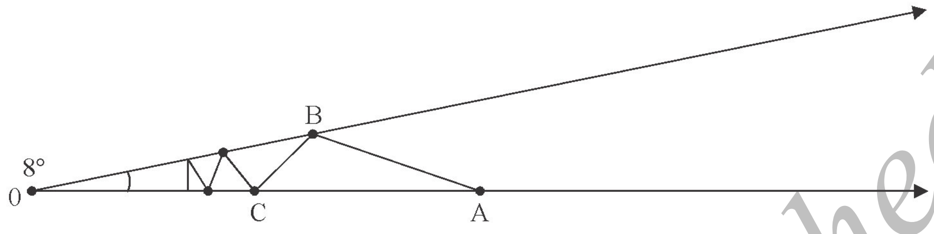
1. $\frac{1}{3}$ से बड़ा सम भिन्न ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है कि अंश को एक घनात्मक पूर्णांक से बढ़ाने पर और हर को उसी संख्या से गुणा करने पर भिन्न कोई परिवर्तन नहीं होता।
2. सभी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{p}{q} = \frac{p^2+30}{q^2+30}$
3. सिद्ध कीजिए कि एक संपूर्ण वर्ग को विषम अभाज्य p से भाग लगाने पर प्राप्त शेष $\frac{(p+1)}{2}$ है।
4. $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 10^2$ के घनात्मक भाजक ज्ञात कीजिए । क्या भाजकों की संख्या विषम है? सिद्ध कीजिए कि संपूर्ण वर्ग के भाजक हमेशा विषम होते हैं।
5. उन सभी विषम स्वभाविक संख्या n ज्ञात कीजिए जिसका एक विशिष्ट संपूर्ण वर्ग n^2 और $2n^2$ के बीच में उपस्थित है।
6. एक व्यक्ति का जन्म 19वीं शताब्दी में हुआ था। x वर्षों के बाद उसकी आयु x^2 थी। यदि वह 1975 में गुजर जाता है तो उसके मृत्यु के समय उसकी आयु क्या थी?
7. एक चार अंकों की संख्या $n = \overline{abcd}$ ताकि n^2 के अन्त में भी $\overline{abcd}$ है उस संख्या को ज्ञात कीजिए।
8. 1 से 16 तक संख्याओं को उपयोग कर 4×4 का जादुई वर्ग पार्श्व में दिया गया है। A और B ज्ञात कीजिए (सुझाव : जादुई वर्ग पूर्ण कीजिए)

14	11	5	A
	8		
12		3	
			B

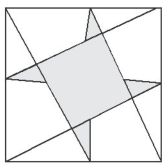
9. सिद्ध कीजिए कि 3×3 जादुई वर्ग का योगफल उसके मध्य संख्य का तीन गुना होता है।
10. तीन स्वभाविक संख्याओं के वर्गों का जोड़ 9 से भाज्य है। सिद्ध कीजिए एक व्यक्ति इन तीन में से 2 को चुन सकता है ताकि उनका अंतर 9 से भाज्य है।
11. मान लीजिए p और p^2+2 अभाज्य संख्याऐं है। सिद्ध कीजिए p^3+2 भी अभाज्य संख्या है।

12. उन सभी संपूर्ण वर्गों को ज्ञात कीजिए जिन्हें 11से भाग लगाने पर भागफल में एक अभाज्य संख्या प्राप्त होती है और शेष 4 रहता है।
13. संख्या 60 श्यामपाठ पर लिखी गई है। दो खिलाड़ी बारी-बारी पर यह खेल खेलते हैं। वे श्यामपठ पर लिखी संख्या के घनात्मक भाजक उसमें से घटा सकते हैं और संख्या के स्थान पर व्यवकलन के परिणाम को लिख सकते हैं। खिलाडी जो शून्य लिखता है वह विजयी होता है। बताईए कौन सा खिलाड़ी पहला या दूसरा विजयी होगा?
14. पत्थरों के तीन ढेर लगे हुए है, एक में 10 पत्थर, दूसरे में 15 पत्थर और तीसरे में 20 पत्थर है। दो खिलाड़ी यह खेल खेलते हैं। एक खिलाड़ी को कोई एक ढेर को चुनना है और उसके दो छोटे ढेर बनाना है। जो खिलाडी ऐसा नहीं कर सकता हार जाता है। बताईए पहला विजयी होता है अथवा दूसरा?
15. श्यामपट पर 1 से 20 तक संख्यायें लिखी हुई है। दो खिलाड़ी बारी-बारी पर + तथा – चिह्न संख्याओं के बीच लगाते जाते हैं। जब सभी चिह्न लगाने पर योगफल ज्ञात करते हैं। जिसकी प्राप्त संख्या सम होगी वह पहला विजेता होगा और यदि विषम आये तो वह दूसरा विजेता होगा। बताईए किसकी जीत हुई?
16. मान लीजिए एक स्वभाविक संख्या m ऐसी है ताकि $m^2 < n < (m+1)^2$, किसी स्वभाविक संख्या m के लिए । यदि $n-l=m^2$ और $n+k=(m+1)^2$ सिद्ध कीजिए $n-kl$ एक संपूर्ण वर्ग है।
17. यदि x, y, z ऐसे पूर्णांक है ताकि $x^2+y^2=z^2$ सिद्ध कीजिए कि x, y में से एक 3 से भाज्य है।
18. यदि x, y, z तीन स्वभाविक संख्याऐं है ताकि उनमें कोई सामान्य गुणनखण्ड नहीं है और $x^2+y^2=z^2$ है। सिद्ध कीजिए x, y 60 से भाज्य है।
19. कोई x के लिए, मान लीजिए $|x|$, x से बड़े पूर्णांक सूचित करता है, उदाहरण के लिए $|2.5|=2$ और $|-1.6|=2$ सभी घनात्मक वास्तविक संख्याओं ज्ञात कीजिए ताकि $a^{|a|}=8\cdot$
20. 1000 से कम रहनेवाले तिकने घनात्मक पूर्णांक है जो उनके अंकों के योगफल से 6 गुना हैं?
21. 1000 और 10,000 के बीच कितने पेलिन्ड्रोमस् है जो 7 से भाज्य है?
22. मान लीजिए दो दर्पणों के बीच में 8° का कोण बना है। एक प्रकाश की किरण बिन्दु A से प्रारंभ होकर B में प्रतिफलित होती है और बाद में C में प्रतिफलित होती है

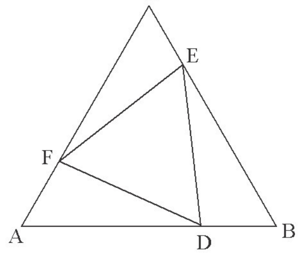
और ऐसे ही n बार क्रमागत रूप से प्रतिफलित होती जाती और अन्त में लंब कोण बनती है और वापिस अपने पथ पर गमन करती है। बताईए n की अत्यन्त बड़ी संख्या क्या हो सकती है? (निम्न आकृति 5 का प्रतिकलन दर्शाती है) ।



23. सिद्ध कीजिए कि एक बिन्दु से एक सरल रेखा तक लंब दूरी ही कनिष्ठ होती है।
24. मान लीजिए P, ΔABC में एक बिन्दु है। सिद्ध कीजिए $\frac{BC+CA+AB}{2} < PA+PB+PC < BC+CA+AB$?
25. मान लीजिए, ΔABC के BC की मध्यबिन्दु D है। सिद्ध कीजिए $AB+AC>2AD$
26. मान लीजिए, AD और BE , शीर्ष बिन्दु A और B से अभिमुख भुजायें तक खींची गई दो मध्यिकाऐं हें यदि $BC>CA$ सिद्ध कीजिए $BE>AD$.
27. मान लीजिए, ABCD एक चतुर्भुज है। AB सबसे छोटी भुजा है और CD सबसे बड़ा है। सिद्ध कीजिए $\angle A>\angle C$ और $\angle B>\angle D$.
28. पार्श्व की आकृति में, छायांकित नक्षत्र का एक कोना एक बड़े वर्ग के मध्यबिन्दु पर है। बताइए वर्ग का कितना अंश (भिन्न में) छायांकित है?



29. पार्श्व चित्र में, बाह्य समबाहु त्रिभुज ABC का चित्रफल एक है और D, E, F बिन्दुऐं ऐसे स्थित है ताकि $DB=EC=FA$ और प्रत्येक त्रिभुज ABC के भुजा का एक चौथाई है। त्रिभुज DEF का क्षेत्रफल क्या है?



30. पार्श्व चतुर्भुज ABCD में $AB = 5, BC = 17, CD = 5, DA = 9$, यह ज्ञात हुआ है कि BD एक पूर्णांक है। BD क्या है?

31. त्रिभुज ABC में $AB = 2AC$ । मान लीजिए D, E क्रमशः रेखाखण्ड AB, BC पर इसतरह स्थित है कि $\angle BAE = \angle ACD$ है। मान लीजिए AE और CD, F बिन्दु में प्रतिच्छेदित करते हैं। मान लीजिए कि CFE एक समबाहु त्रिभुज है। तो $\angle ACB$ क्या है?

32. मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है और AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है, जहाँ D यह BC पर स्थित है। सिद्ध कीजिए $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

33. सिद्ध कीजिए पंचभुजाकृति का अंतस्थ कोणों का योग 540° है। षष्टभुजाकृति में आपका अनुमान क्या है? अष्टभुजाकृति में क्या है? क्या आप n भुजाकृति के लिए एक सामान्य सूत्र लिख सकते हैं? क्या आप अपने अनुमान को सिद्ध कर सकते हैं? इसके लिए आपको कौन से उपकरण चाहिए?

34. मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। समबाहु त्रिभुज CBX और DCY क्रमशः बाह्य रूप से DC और CB भुजाओं पर बनाये गये हैं। सिद्ध कीजिए AXY एक समबाहु त्रिभुज है।

35. घन के एक आयाम को 1 से बढ़ाया गया है, दूसरा 1 कम किया गया है और तीसरे को जैसे को तैसा रखा है। परिणामस्वरूप प्राप्त घनायत का आयतन मूल घन से 5 कम है। मूल घन का आयतन क्या है?

36. एक ठोस घन की भुजा की लंबाई 3 इकाई है। एक 2×2 के वर्ग का छिद्र प्रत्येक पार्श्व पर बनाया गया है। वर्ग का किनारा घन के भुजाओं के लिए समांतर है। और प्रत्येक छिद्र घन द्वारा पारित होता है । परिणामस्वरूप प्राप्त ठोस का आयतन क्या है?

37. मान लीजिए ABCD एक समलंब चतुभुज है जिसमें $AB \parallel CD$ और $AD \perp DC$ है। मान लीजिए $AB > BC$ है और $CM \perp AB$ खींचिए। मान लीजिए $BC = 5$ से.मी, $MB = 3$ से.मी., $DC = 8$ से.मी है। ABCD की परिमिति ज्ञात कीजिए। ABCD का क्षेत्रफल क्या है?

38. समबाहु चतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 24 से.मी और 10 से.मी है। उसकी भुजाओं को पता लगाइए।

* * * *