H$ZmQ>H$ gaH$ma

J{UV

Mathematics

qhXr _mÜ`_

(Revised)

8

AmR>dt H$jm

Eighth Standard

^mJ - 1

Karnataka Textbook Society (R)
No. 4100 Feet Ring Road, Banashankari
3rd Stage, Bengaluru - 560 085

PREFACE

The Textbook Society, Karnataka has been engaged in producing new textbooks according to the new syllabi prepared, which in turn are designed based on NCF – 2005 since June 2010. Textbooks are prepared in 11 languages; seven of them serve as the media of instruction. From standard 1 to 4 there is the EVS and 5th to 10th there are three core subjects namely mathematics, science and social science.

NCF – 2005 has a number of special features and they are:

- Connecting knowledge to life activities
- Learning to shift from rote methods
- Enriching the curriculum beyond textbooks
- Learning experiences for the construction of knowledge
- Making examinations flexible and integrating them with classroom experiences
- Caring concerns within the democratic policy of the country
- Make education relevant to the present and future needs.
- Softening the subject boundaries, integrated knowledge and the joy of learning.
- The child is the constructor of knowledge

The new books are produced based on three fundamental approaches namely :

1. Constructive approach,
2. Spiral Approach and Integrated approach

The learner is encouraged to think, engage in activities, master skills and competencies. The materials presented in these books are integrated with values. The new books are not examination oriented in their nature. On the other hand they help the learner in the total development of his/her personality, thus help him/her become a healthy member of a healthy society and a productive citizen of this great country, India.

In Social science especially in standard 5, the first chapter deals with the historical, geographical, cultural and local study of the division in which learners live. A lot of additional information is given through box items. Learners are encouraged to work towards construction of knowledge through assignments and projects. Learning load of memorizing dates has been reduced to the minimum. Life values have been integrated with content of each chapter.

We live in an age of science and technology. During the past five decades man has achieved great things and realized his dreams and reached pinnacle of glory. He has produced everything to make life comfortable. In the same way he has given himself to pleasures and reached the stage in which he seems to have forgotten basic sciences. We hope that at least a good number of young learners take to science in higher studies and become leading scientists and contribute their share to the existing stock of knowledge in order to make life prosperous. Ample opportunity has been given to learners to think, read, discuss and learn on their own with very little help from teachers. Learning is expected to be activity centered with the learners doing experiments, assignments and projects.

Mathematics is essential in the study of various subjects and in real life. NCF 2005 proposes moving away from complete calculations, construction of a framework of concepts, relate mathematics to real life experiences and cooperative learning. Many students have a maths phobia and in order to help them overcome this phobia, jokes, puzzles, riddles, stories and games have been included in textbooks. Each concept is introduced through an activity or an interesting story at the primary level. The contributions of great Indian mathematicians are mentioned at appropriate places.

The Textbook Society expresses grateful thanks to the chairpersons, writers, scrutinisers, artists, staff of DIETs and CTEs and the members of the Editorial Board and printers in helping the Textbook Society in producing these textbooks.

G . S Mudambadithaya
Coordinator, Curriculum Revision
and Textbook Preparation
Karnataka Textbook Society
Bengaluru, Karnataka

Nagendrakumar
Managing Director
Karnataka Textbook Society
Bengaluru, Karnataka

FOREWORD

The Government of India through NCERT have brought out NCF 2005 to revise the curriculum of schools and suggested all the states to introduce revised textbooks in the schools based on the new curriculum. Accordingly State Governments took up the work and requested respective DSERTs to start introducing new curriculum and texts. Karnataka Government has suggested to its DSERT to take up the challenge to fulfil the vision of NCF-2005. DSERT, Karnataka started the process: constituted committees to revise the syllabi, identified the writers and requested these people to write textbooks based on the new syllabi incorporating the expectations of NCF-2005. Karnataka Text Book Society took the initiative and coordinated the whole programme of writing these textbooks.

The current work, a textbook in mathematics for 8th standard, is a step taken in this direction. An effort has been made here to look at the mathematics needed at 8th standard through a different lens. At first glance, this may look a totally unconventional approach. Some may feel that it is hard on the part of 8th standard students. On the other hand that is the correct age for the students to learn new concepts and ideas. Students are receptive to new intellectual challenges. It is the onus of the teachers to teach new things to the students and prepare them to the challenges of the ever changing world. This textbook is also an effort to integrate our students with the national mainstream where CBSE has surged forward and parents think that their wards will be better off by learning CBSE texts.

We have tried here to tell something new about numbers and number system. Similarly, some thing new about graphs, postulates of geometry and congruency of triangles are also introduced with more expectations. Quadrilaterals have been introduced now itself. There are optional problems at the end to challenge the students. It is my earnest request to all my teacher friends to take up the new challenge. Let the parents of our students not feel that their wards are always in the back seats.

B.J. Venkatachala
Homi Bhabha Centre for
Science Education, TIFR, Mumbai

TEXTBOOK COMMITTEE

Chairman

Dr. B.J.Venkatachala, Professor, H.B.C.S.E(T.I.F.R, Mumbai, Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bengaluru.

Members

1. **Dr. G.Sheela,** Asst. Professor, Department of Education, Manasagangotri, Mysuru University, Mysuru.
2. **Sri T.K. Raghavendra,** Lecturer, D.I.E.T., Chickballapur.
3. **Sri A.Ramaswamy,** Asst. Master, Govt. Empress High School, Tumkuru.
4. **Sri Vinay A Joseph,** Asst. Master and P.R.O., St. Xavier's High School, Shivajinagar, Bengaluru.
5. **Sri Vasanti Rao,** Retired Teacher, Rajajinagar, Bengaluru.
6. **Sri G.M.Jangi,** Artist, D.S.E.R.T, Bengaluru.

Translation Committee (Hindi)

1. **Shri Vilas G. Pudale.** Shri Shanthinath, Hindi High School, Ghantikeri, Hubballi.

Scrutinisers

1. **Dr. Ashok M. Limkar,** Subject Inspector of Mathematics, D.D.P.I.,Office, Vijayapura.
2. **Sri A.S.Hanuman,** Subject Inspector of Mathematics, D.D.P.I., Office, Shivamogga.

Editorial Committee Members

1. **Dr. Sameera Simha,** Joint Secretary, Vijaya Educational Institutions, Jayanagar, Bengaluru.
2. **Dr. S Shiva kumar,** Professor, R V Engineering College, Bengaluru.

Translation Committee (Hindi)

1. **Shri Vilas G. Pudale.** Shri Shanthinath, Hindi High School, Ghantikeri, Hubballi.

Chief advisors

1. **Sri Nagendrakumar,** Managing Director, Karnataka Textbook Society, Bengaluru.
2. **Smt Nagamani C,** Deputy Director, Karnataka Textbook Society, Bengaluru.

Chief Co-ordinator

Prof. G. S. Mudambadithaya, Curriculum review and Textbook preparation, Kanataka Textbook Society, Bengaluru.

Programme Co-ordinators

Smt Jayalakshmi C.D, Assistant Director, Karnataka Textbook Society(R), Bengaluru.

¥ÀjµÀÌgÀuÉ PÀÄjvÀÄ

MAzjAz ºv£Ã vgUwAiÀ ¥oÀ¥Ä¸PU¼ §UÉ ¥Àæ UÆAq ¸ÁªðdPÀ C©¥ÁæAiÀÄU¼£ÀÄß UªÀÄ¤¹ ªiÁ£À ªÀÄÄRå ªÀÄAwæUÀ ªgÆ CxÐ¸aªgÆ DVgÀª ²æÃ¹zÀgÁªÀÄAiÀÄ£ªgÀ vªÀÄ 2014-15 g §emï£° vdg ¸«ÄwAiÀÄ£ÀÄß gaÀ¸Àª WÆÃµu ªiÁrzgÀ. vdgÀ C£Ä¸j¸¨ÃPÁz ªÀÄÆ® D±AiÀÄªÀ£ÀÄß »ÃU ºÃ½zgÀ: "¥oÀ¥Ä¸PU¼£ÀÄß ¸ÁªiÁfP ¸ÁªÀÄg¸Àå, £ÊwPªiË®åU¼À, ªÀåQv«P¸£, ªÉeÁ¤P ªÀvÀ ªÉZÁjP ªÀÄ£ÆÃ¨Áª, eÁvÀwÃvv ªÀvÀ gÁ¶ÃAiÀ §zÀvU½U C£ÀªÁUÀªAv vdg ¸«ÄwAiÀÄ£ÀÄß ¥ÀÄ£gï ga¸¯ÁUÀªÀzÀ" - EzÀ §emï ¨Áµtzº ¸Ázg¥r¹z D±AiÀÄ.

D£Avg ²Pt E¯ÁSAiÀÄ MAzjAz ºv£Ã vgUwAiÀªgV£ ¥oÀ¥Ä¸PU¼ ¥jµÀgÀuUÁV 27 ¸«ÄwU¼£ÀÄß ga¹ ¢£ÁAP: 24.11.2014 gAzÀ DzÃ±ºÆgr¹vÀ. F ¸«ÄwU¼À «µAiÀªÁgÀ ªÀvÀ vgUwªÁgÀ ªiÁ£zAqPÀ£ÀUÀt ªÁV gavªÁzªÀ. ««z ¥oÀ«µAiÀÄU½U ¸A§A¢¹z vdgÀ, CzÀ¥PgÀ F ¸«ÄwU¼°zÁg. FUÁU¯Ã ºTvªÁV §A¢gÀª C£ÃP DPÃ¥U¼À ªÀvÀ «±ÃµuU¼£ÀÄß ¥j²Ã°¹, v¥À M¥ÀÄU¼ §UÉ ¤tð»¹ ¥oÀ¥Ä¸PU¼£ÀÄß ¥jµÀj¸Àª ºÆuºÆv F ¸«ÄwU½U `CUv«zº ¥oÀª¸Àª£ÀÄß ¥jµÀj¹ £Avg ¥oÀ¥Ä¸PU¼£ÀÄß ¥jµÀj¸Àª' ¸ÁvAvæ£ÀÄß 24.11.2014g DzÃ±z¯Ã ¤Ãq¯ÁVvÀ. D£Avg 19.09.2015 gAzÀ ºÆ¸ DzÃ± ºÆgr¹ `CUv«zº ¥Ä£gï ga¸Àª' ¸ÁvAvæ£ÀÄß ¤Ãq¯Á¬ÄvÀ. »ÃU ¸ªÀUæ¥jµÀguUÆAq ¥oÀ¥Ä¸PU¼£ÀÄß 2016-17 g §z®À 2017-18£Ã ±ÊPtP ªµðz° eÁjUÆ½¸¯ÁUÀªÀzAzÀ EzÃ DzÃ±zº w½¸¯Á¬ÄvÀ.

C£ÃP ªÀQU¼Æ ¸AWI£U¼Æ ¸AiÀÄA¥Àæ®vgÁV ¥oÀ¥Ä¸PU¼ ªiÁ»wzÆÃµ, D±AiÀÄzÆÃµU¼£ÀÄß ¥nªiÁr ²Pt ¸aªjU, ¥oÀ¥Ä¸P ¸AWP P¼À»¹zgÀ. CªÀU¼ ¥j²Ã®£ªiÁrz®z, ¸«ÄwU¼ÁZU C£ÃP ¸AªÁzU¼£ÀÄß K¥ðr¹ «ZÁg «¤ªÀÄAiÀÄ ªiÁrPÆArzÃª. ¥Áæ«ÄP ªÀvÀ ¥ËæqÀ±Á¯Á CzÀ¥Pg ¸AWU¼ eÆv ZaðÀ¹z®z ¥æ±ÁÀª½ ¹z¥r¹ CzÀ¥PjU P½¹ C©¥ÁæAiÀÄU¼£ÀÄß ¸AUæ¸¯ÁVz. CzÀ¥PgÀ, «µAiÀ¥j«ÃPPgÀ ªÀvÀ qAiÀÄmï ¥Áæ±Á¥Á®g ¥æÃP ¸¨ÃU¼£ÀÄß £q¹ «±ÃµuÁvP C©ªÀvU¼£ÀÄß ¥qAiÀįÁVz. «eÁ£, ¸ªiÁd«eÁ£, Utv, ¨Áµ ¸Á»vU½U ¸A§A¢¹z vdjU ªÆz¯Ã ¥oÀ¥Ä¸PU¼£ÀÄß P¼À»¹ D£Avg ¸¨ £q¹ Zað¸¯ÁVz. ªÀÄ»¼Á ¸AWI£ ºÁUÆ «eÁ£ ¸A§A¢ ¸A¸ÜU¼£ÀÄß DºÁ¤¹ aAv£ £q¸¯ÁVz. »ÃU J¯Á ªÀÄÆ®U½Az ¥qz Cj«£ DzÁgz ªÀÄÃ¯ ¥oÀ¥Ä¸PU¼£ÀÄß CUv«zÀPq ¥jµÀj¸¯ÁVz.

§ºÄªÄÄRÌªÁz E£ÆÌAzÄ ¸AUwAiÀ£ÀÄß Eº ºÃ¼¨ÃPÀ. PÃAiÀðPÀæªÀÄ ±Á¯Á (N.C.E.R.T) ¥oÀ¥Ä¸PÀ¼ eÆv gÁdåz ¥oÀ¥Ä¸PÀ¼£ÀÄß vË®¤PªÁV CzÀAiÀÄ£ ªiÁr ¸®ºU¼£ÀÄß ¤Ãq®Ä «eÁ£, Utv ªÄvÀÄ ¸ªiÁd«eÁ£P ¸A§AzsÀ¹zAv vdg ªÄÆgÀÄ ¸«ÄwU¼£ÀÄß ga¸¯Á¬ÄvÀ. F ¸«ÄwU¼Ä ¤Ãrz vË®¤P «±Ãµu ªÄvÀÄ ¸®ºU¼£ÀÄß Dzj¹ gÁdå ¥oÀ¥Ä¸PÀ¼ UÀt ªÀÄlÖªÀ£ÀÄß ºa¸¯ÁVz. PÃAiÀðPÀæªÀÄ ±Á¯Á ¥oÀ¥Ä¸PÀ½VAv £ªÀÄä gÁdåz ¥oÀ¥Ä¸PÀ¼ UÀt ªÀÄl PrªÀÄAiÁUzAv PÁAiÀÄÄPÆ¼¯ÁVz. eÆvU DAzæ v«ÄÀ¼ÀÄ£ÁqÀ, ªÀÄºÁgÁµÖ gÁdåU¼ ¥oÀ¥Ä¸PÀ¼ eÆv £ªÀÄä ¥oÀ¥Ä¸PÀ¼£ÀÄß ¥j²Ãº¸¯ÁVz.

E£ÆÌAzÀÄ ¸µ£AiÀÄ£ÀÄß ¤Ãq®Ä §AiÀÄ¸ÀvÃ£. £ªÀÄä ¸«ÄwU¼Ä ªiÁrgÀÄªÀzÀÄ ¥jµÌguAiÀÄÃ ºÆgvÀÄ ¥oÀ¥Ä¸PÀ¼ ¸ªÀÄUæZ£AiÀÄ®. Dz jAz FUÁU¯Ã gavªÁVgÀÄª ¥oÀ¥Ä¸PÀ¼ ¸gÆ¥P J°AiÀÄÆ zPÀAiÀÄÄAlÀªiÁr®. °AUv ¸ªiÁ£v, ¥ÁæzÃ²P ¥ÁæªÀzå, gÁ¶ÃAiÀÄ ¸ªÀÄUæ ¸ªiÁ£v, ¸ÁªiÁfP ¸ÁªÀÄg¸åU¼ »£¯AiÀÄ° P®ªÀ ¥jµÌgu U¼Ä £q¢ª. »ÃU ¥jµÌj¸ÀªÁU gÁ¶ÃAiÀÄ ¥oÀPæªÀÄ ZËPlÄ ªÄvÀÄ gÁdå ¥oÀPæªÀÄ ZËPlÄU¼£ÀÄß «ÄÃj®ªAzÀÄ w½¸§AiÀÄ¸ÀvÃª: eÆvU £ªÀÄä ¸A«zÁ£z D±AiÀÄU¼£ÀÄß C£Ä¸j¸¯ÁVz. ¸«ÄwU¼Ä ªiÁrz ¥jµÌguAiÀÄ£ÀÄß ªÄvÆªÀÄä ¥j²Ãº¸®Ä «µAiÀÄªÁgÀÄ G£v ¥j²Ã®£ ¸«ÄwU¼£ÀÄß ga¹ C©¥ÁæAiÀÄ¥qzÀÄ C¼ªr¸¯ÁVz.

»ÃU PæÀ§zÀªÁV £qz P®¸P vªÀÄ£ÀÄß vÁªÀÄ ¸A¥Æt𠠀vÆqV¹PÆAq 27 ¸«ÄwU¼ CzÀPgÀÄ ªÄvÀÄ ¸z¸ågÉ£ÀÄß ºÁUÆ G£v ¥j²Ã®£Á ¸«ÄwAiÀÄ ¸ªÀÄ¸gÉ£ÀÄß PÈvdv¬ÄAz ££AiÀÄÄvÃª. CAvAiÀÄÃ ¸«ÄwU¼ P®¸ ¸ÄUªÀÄªÁV £qAiÀÄÄªAv ªÀºÀ¸ªiÁq®Ä PÁAiÀÄðPæÀÄ C¢PÁjU¼ÁV ¤µ¬ÄAz zÀÄrz ¥oÀ¥Ä¸P ¸AWz J¯Á C¢PÁjU¼£ÆÀ££AiÀÄÄvÃª. ¸ºPj¹z ¹§¢UÆ £ªÀÄä ªAz£U¼Ä. C©¥ÁæAiÀÄ ¤Ãr ¸ºPj¹z ¸ªð ¸AWlU¼Ä ªÄvÀÄ vdjU zÀ£ªÁzU¼Ä.

£g¹AºAiÀÄå
ªÀå¸ÁÀ¥P ¤zðÃ±PgÀÄ
PÀ£ÁðlP ¥oÀ¥Ä¸P ¸AW (j)
¨AU¼ÆgÀÄ-85

¥Æææ§gUÆgÀÄ gÁªÀÄZAzæ
¸ªÁðzÀPgÀÄ
¥oÀ¥Ä¸P ¥jµÀgt ¸«Äw
PÀ£ÁðlP ¥oÀ¥Ä¸P ¸AW (j)
¨AU¼ÆgÀÄ-85

Text Book Revision Committee

Chief Chairperson :

Dr. Baraguru Ramachandrappa - Chief Chairperson state Text Book Revision Committee Bengaluru - 85

Chief Advisors :

Sri. Narasimhaiah, Managing Director, KTBS, Bengaluru.

Smt. C. Nagamani, Deputy Director, KTBS, Bengaluru.

Chairperson :

Dr. Vijayalaxmi Shigehalli - Professor, Rani Chennamma University, Belagavi.

Members :

Prof. K.V. Prasad - Professor, Sri Krishna Devaraya University, Bellary.

G.V. Nirmala - Retd. NAL Scientist, Gavipuram, Bengaluru.

Dr. Sharad Sure - Associate Professor, Ajim Premji Foundation Hosur Road, Bengaluru.

Mr. Ramachandra - Lecturer, Sri Gangadhareshwara Composite Pre-university College, Adichunchanagiri, Nagamangala (T), Mandya.

Mr. Gopalakrishna S - Assistant Teacher, St Aloysius Highschool, Kodialbail, Mangaluru.

Mr. Sridhar C K - Assistant Teacher, D.V.S Composite Pre-university College, Shivamogga.

Ms. Sharada H S - Assistant Teacher, Government High School,

Kukkarahalli, Mysuru.

Mr. Anil Kumar C N - Assistant Teacher, Government High School, Aralalusandra, Hosur Post, Bidadi hobli, Ramanagara (T) & (D).

Translator

Smt R. Shanwaz Begum, Assistant Teacher, Sri VSKHS, #50, Srinivas nagar, Bengaluru - 50

Programme Co-ordinator

Smt. Jayalakshmi C.D, Asst. Director, Karnataka Text Book Society, Bengaluru-85.

अनुक्रमणिका

भारतीय गणित – एक संक्षिप्त परिचय

भारतीय गणित वैदिक काल से प्रारंभ हुआ। वैदिक काल के पुस्तकों के बहुत महत्त्वपूर्ण बातें हैं शुल्व सूत्र। इनमें यज्ञ कुण्ड की रचनाओं का विस्तार वर्णन समाविष्ट है। इन प्राचीन पुस्तकों में $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ आदि करणियों का परिचय मिलता है। वास्तव में प्राचीन गणित का विकास, यज्ञ और याग तथा ज्योतिष शास्त्र में अभिरुचि के कारण हुआ)। बोधायन सूत्र और अपास्थंभ सूत्र $\sqrt{2}$ का अत्यन्त सही अनुमान मूल्य $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 3 \times 4}$ के रूप में दिया गया है जो 5 दशमलव स्थानों तक सही है।

ग्रीक लोगों के पूर्व ही पुरातन पैथागोरस प्रमेय उपरोक्त सूत्रों द्वारा सिद्ध किया था। एक और समस्या जिसका हल प्राप्त नहीं हुआ है जिसे वृत्तों का वर्ग कहते है, इन शुल्व सूत्रों में इसका हल मिलता है।

इसमें एक व्यक्ति को मापनी और त्रिज्या के उपयोग से वर्ग की रचना करना है जिसका क्षेत्रफल दत्त वृत्त के क्षेत्रफल के समान है। शुल्व सूत्रों में ऐसे वर्गों की रचना का विधान मिलता है। इस समस्या को 2000 वर्षों तक कोई हल प्राप्त नहीं था यह सिध्द हुआ की इसका निर्णयात्मन हल देना असंभव हैं । केवल 18वीं शताब्दी में मात्र एक निर्णयात्मक हल देना संभव हुआ है।

सर्वप्रथम 'π' का अनुमान मूल्य देने का श्रेय भारतीय गणितज्ञों को प्राप्त है। आर्यभट्ट –1 (ईसापूर्व 476) 'π' का अनुमान मूल्य 3.1416 निर्धारित किया; वे बताते हैं कि 20000 इकाई के व्यास के वृत्त की परिधि करीबन 62832 इकाई के समान है। यह बात बहुत रोचक है कि आर्यभट्ट – 1 पाँचवी शताब्दी में ही बताया था कि 'π' अपरिमेय संख्या है और उसके अनुमान मूल्य में उपयोग कर चुके थे। 1761 में लांबर्ट ने सिद्ध किया कि 'π' एक अपरिमेय संख्या है और 1882 में लिण्डेमन ने सिद्ध किया कि 'π' वास्तव में एक अनुभवातीत संख्या (**transcendental number**)

'शून्य और अनंतता' का परिचय दे कर, दशमलव प्रणाली आविष्कार करने के उल्लेखनीय

योगदान पर संपूर्ण विश्व भारत को सलाम करता है। दशमलव प्रणाली का उपयोग इतना सरल है कि छोटे बच्चे भी इसे समझते है और गणनाकार्य में इसे उपयोग कर सकते हैं। दशमलव प्रणाली की सरलता यदि आप सचमुच में समझना चाहते हैं तो पहले आपको प्रचलित रोमन प्रणाली का अध्ययन करना होगा। सुप्रसिद्ध इतिहासकार फ्लोरियन कजोरी के अनुसार सभी गणितीय शोधों में से बुद्धिमत्ता की प्रगति में 'शून्य' का योगदान अपार है। दशमाधार के उपयोग करने से भारतीयों को बड़ी से बड़ी संख्या समझने मे आसानी हुई हैं । (अध्याय 2, घटक 4, घातांक देखकर अधिक जानकारी लीजिए)

भारतीय गणित के इतिहास में प्राचीन जैन लोगों का एक महत्वपूर्ण योगदान रहा है। उनके योगदान प्रसिद्ध जैन ग्रन्थों में लिखे गये हैं। पुनः यहाँ आप देख सकते हैं कि 'π' का मूल्य $\sqrt{10}$ के बराबर दिया गया जो कि 13 दशमलव स्थानों तक सही रहा है।

'**व्यक्त गणित**' नामक अंक गणित के विधान के क्षेत्र में प्राचीन भारत ने अत्यधिक योगदान दिया है। बीजगणित के विधान को **अव्यक्त** गणित कहते हैं। प्राचीन भारतीय गणितज्ञों ने जोड़, गुणा, व्यवकलन और भाग चारों प्रक्रियाओं का परिचय दिया था। वे भिन्नों का उपयोग करना जानते थे तथा सरल समीकरण हल कर सकते थे। वे वर्ग, वर्गमूल, घन और घनमूल ज्ञात करना जानते थे। उन्हें क्रमचय और संचय का ज्ञान था।

कर्नाटक के महान जैन गणितज्ञ महावीर (इ.पू. 9 वीं शताब्दी) प्रथमतः विख्यात सूत्र

$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

अपनी पुस्तक 'गणित सार संग्रह' में प्रस्तावित किया। आर्यभट्ट – 1 विश्व के अत्यन्त महान गणितज्ञ और खगोलशास्त्रज्ञ रहें हैं। उन्होंने ही गणित को व्यवस्थित रूप से विकास किया, अतः उन्हें **बीजगणित के जनक** कहना न्यायोचित है। उन्होंने त्रिकोणमितिय (trigonometric) अनुपात साइन (sine) की तालिका की रचना की। संस्कृत में इसे ज्या कहते है। उन्होंने 0 से 90 अंश के कोणों को 3¾ अंश के अंतराल में साइन अनुपात ज्ञात किया। वे पहले व्यक्ति थे जिन्होंने

पृथ्वी को गोल घोषित किया और कहा कि नक्षत्र और पृथ्वी एक स्थान पर स्थिर व्यक्ति को पूर्व से पश्चिम दिशा में गोचर होते दिखाई देते हैं।

आर्यभट्ट-1 के बाद भास्कर-1 (छठी शताब्दी) आये। उन्होंने बीज गणित के अनेक सूत्रों के लिए रेखागणितीय उपयोग बतायें। और साइन θ ($\sin\theta$) के अनुमान मूल्य बताये । उन्होंने θ के बड़े कोणों के लिये भी साईन अनुपात बताये। ब्रह्मगुप्त (628 इ.पू) ने वृत्तीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, ढूँढ़ निकाला, जहाँ a,b,c,d चतुर्भुज की भुजायें हैं और s उसका अर्ध-परिमाप है। परिमेय भुजाओं से युक्त वृत्तीय चतुर्भुज प्रस्तुत करनेवाले वे पहले गणितज्ञ थे।

प्राचीन गणितज्ञों ने ax+by=c और $x^2 - Ny^2 = 1$ जैसे समीकरणों को हल करने का योगदान दिया। (जहाँ a, b, c, N दत्त पूर्णांक है और N वर्ग रहित घनात्मक पूर्णांक है)।

ऐसे समीकरणों को आधुनिक शब्दावली में डयोफन्टाइन (Diophantine) समीकरण कहते हैं। यूलर ने गलती से $x^2 - Ny^2 = 1$ जैसे समीकरणों को पेल्स् (Pells) समीकरण कहा और यही नाम जारी है।

आजकल $x^2 - Ny^2 = 1$ जैसे समीकरणों को ब्रह्मगुप्त-पेल समीकरण कहते है। आर्यभट्ट-1 ने $ax + by + c$ जैसे समीकरणों की चर्चा की जबकि ब्रह्मगुप्त ने $x^2 - Ny^2 = 1$ जैसे समीकरणों का समझाया। तत्पश्चात् भास्कर - 2 (भास्कराचार्य के नाम से प्रसिद्ध) पूर्णांकों पर $x^2 - Ny^2 = 1$ समीकरण हल करने 'चक्रवल' नामक विधान का विकास किया । $x^2 - Ny^2 = 1$ समीकरण हल करने **'चक्रवाल'** नामक विधान (**Chakravala method**) का विकास किया। $x^2 - Ny^2 = 1$ समीकरण के बारें में एक रोचक बात कही जाती है। 1657 में फरमट (संख्या प्रणाली के योगदान से प्रसिद्ध) यूरोपीयन गणितज्ञों के सामने $x^2 - 61y^2 = 1$ हल करने का प्रस्ताव रखा। 1732 में यूलर ने इस समीकरण को हल किया। परन्तु संयोग से भास्कर-2 (1150 ई.पू) ने इस समीकरण का हल अपने चक्रवाल विधान से अपनी पुस्तक बीजगणितम में 5 शताब्दी पूर्व ही लिखा था। भास्कर-2 ने जो हल ढूँढ निकाला वह है $x = 226153980$ और $y = 1766319049$ भास्कर-2 ने केलक्यूलस (calculus) का भी

परिचय दिया, जो कि एकव्युत्पन्न करने की कला है। वे $d(\sin x) = \cos x\ dx-$ का समतुल्य प्रस्तुत करते हैं।

भास्कर–2 और महावीर के कार्यों में बहुत सुन्दर, काव्यात्मक कल्पनाओं को पढ़ सकते हैं। संयोगवश, भास्कर –2 का जन्म **कर्नाटक** के **बिजापुर** जिले में हुआ और वे वर्तमान महाराष्ट्र राज्य की ओर अग्रसर हुए। यहाँ दो समस्याओं को दिया हैं। जो मूलतः काव्य रूप में लिखित है। उनका भाषांतर निम्नरूप से है।

1. (भास्कराचार्य के लीलावती से)

   एक सुन्दर महिला ने मुझे पूछा ऐसी संख्या बताईए जिसे 3 से गुणा कर उसमें गुणनफल का तीन–चौथाई जोड़कर, 7 से भाग देकर, भागफल का एक तिहाई घटाकर, स्वयं से गुणा करके 52 घटाकर वर्गमूल ज्ञात कर उसमें 8 जोड़कर 10 से भाग देने पर 2 प्राप्त होता है।

2. (महावीर के गणित सार संग्रह से)

   तीन व्यापारियों को रास्ते पर एक बटुआ मिलता है। पहले व्यापारी ने कहा ''यदि मैं बटुआ रखूँ तो तुम्हारे दोनों के पास के जोड़ का दुगुना मेरे पास होगा। दूसरे व्यापारी ने कहा 'बटुआ मुझे दो, मेरे पास तिगुने के बराबर होगा। तीसरे व्यापारी ने कहा यदि बटुआ मैं रखूँ तो मैं काफी अमीर हो जाऊँगा मेरे पास तुम्हारे दोनों के जोड़ का पाँच गुना होगा। तो बताइए बटुवे में कितना पैसा था? प्रत्येक व्यापारी के पास कितना पैसा था?

वास्तव में भारतीय गणितज्ञों की उपलब्धियाँ बहुत महत्वपूर्ण है विशेषतः अंक गणित, समीकरण सिद्धांत, गोलीय त्रिकोणमिति और खगोलशास्त्र, बीजीय समीकरण को रेखागणित द्वारा हल करना सरल त्रिकोणमिति और भाषागणित आदि क्षेत्रों में। दुर्भाग्य से, भास्कर–2 के बाद बाहरी आक्रमण से, भारतीय गणित सुप्तावस्था में चला गया।

नीलकण्ठ और माधव के केरल के स्कूलों ने टयान (tan) फलन के अनुमान मूल्य ज्ञात करने

में कुछ महत्वपूर्ण योगदान दिया। केवल 19 वी- शताब्दी के अंत में रामानुजन ने भारतीय गणित का वैभव वापिस मूल स्थान पर लाये। सचमुच रामानुजन बहुत महान गणितज्ञ थे। 32 वर्ष के अपने जीवनकाल में उन्होंने संख्या प्रणाली, उच्च गुणोत्तर श्रेणी अपसारी श्रेणी, दीर्घवृत्तीय फलन और पूर्ण संख्याये और मौक-थीव फलन के क्षेत्र में अद्‍भुत योगदान दिया है।

आज भी विश्व के गणितज्ञ उनके गणित की गहराई को समझने का प्रयत्न कर रहें हैं और उनके अनुमानों सिद्ध करने की कोशिश कर रहे हैं। यह जानना बहुत महत्वपूर्ण है कि 19 वीं शताब्दी के अंत में उड़ीसा के चंद्रशेखर सामंत ने खगोल शास्त्र में अमूल्य योगदान दिया है।

(अधिक जानकारी के लिए भारतीय गणित और खगोल शास्त्र के भूचिन्ह नामक पुस्तक डा. एस बालचंद्र राव व्दारा लिखित पढ़िये)।

◈◈◈◈

घटक – 1
संख्याओं का खेल

इस घटक के अध्ययन के बाद आप

- दिये गये स्वाभाविक संख्या को उसके सामान्य रूप (दशमाधार) में कैसे लिखना हैं जान लेंगे।
- संख्याओं से जुड़े कुछ खेल और पहेलियों की रचना करना सीखोगे
- दिये हुए दो पूर्णांकों में, एक को दूसरे से कैसे भाग लगाना, और भागफल तथा शेष ज्ञात करना सीखोगे ।
- 4, 3, 9, 5, 11 के भाज्य परीक्षण ज्ञात करना हैं ।
- 3×3 जादुई वर्गों की रचना करना सीखेंगे
- संख्याओं से जुड़े कुछ नहीं हल हुए समस्याओं को हल करना

प्रस्तावना

मनुष्य के बौद्धिक विकास में संख्याओं का बड़ा महत्वपूर्ण योगदान रहा है। यह बच्चों के कार्यकलापों के खेल का मैदान है। कोई भी व्यक्ति बुद्धि परीक्षण करनेवाले सरल पहेलियों को तैयार कर सकता है। इन्हें बच्चे बौद्धिक खेल खेलने में उपयोग करते हैं। हम संख्याओं के सुन्दर गुणधर्म ढूँढ निकालेंगे जो बच्चों को पहेली सुलझाने में व्यस्त रखते हैं और बच्चों की जिज्ञासा बढाते है। इसके विपरीत, संख्याएँ कुछ सिद्ध नहीं किये गये तत्वों को योग्य स्थान दे सकते हैं। और शायद इन से बच्चों को संख्याओं की अद्भुत दुनिया समझने में मदद मिलेगी।

आप 76 और 315 लिखकर इन्हें स्वाभाविक संख्या कहते हैं। उदाहरण के लिए आप कहेंगे 76 के इकाई स्थान में 6 है और दहाई के स्थान पर 7 है। । उसी तरह 315 देखकर कहेंगे 5 इकाई स्थान पर है, 1 दहाई स्थान पर और 3 सैकड़े के स्थान पर है। एक दत्त संख्या के प्रत्येक अंक का स्थान मूल्य समझ सकते है। इन परिकल्पनाओं के बारे में थोड़ा और जान लेते हैं ताकि हम इनके उपयोग से कुछ पहेलियों की रचना कर सकेंगे।

2, 24, 46, 88 अथवा 122 देखते ही आप तुरन्त कहेंगे कि ये सभी सम संख्या है और सभी 2 से भाज्य है। क्या किसी संख्या को देखते ही आप कह सकेंगे कि वह संख्या 3 से भाज्य है?

क्या किसी संख्या को देखकर बता सकेंगे कि वह 4,5,9 अथवा 11 से भाज्य है?

क्या आप ऐसे सरल नियम बना पाओगे ताकि आप बिना भाग लगाये 3,4,5,9,11 की भाज्यता का परीक्षण हो सकें?

संख्याओं का सामान्य रूप

45 पर विचार कीजिए। इसे हम इस तरह लिखते है :

$$45 = 40 + 5 = (4 \times 10) + (5 \times 1)$$

इसी तरह : $34 = 30 + 4 = (3 \times 10) + (4 \times 1)$

तो फिर 354 को कैसे लिखें ?

ध्यान दीजिए : $354 = 300 + 50 + 4 = (3 \times 100) + (5 \times 10) + (4 \times 1)$

कार्यकलाप 1 : निम्नलिखित संख्याओं को उपरोक्त रूप में लिखिए : 75, 88, 121, 361, 1024, 2011, 4444, 2345

क्या आप ध्यान देतें कि किसी भी स्वाभाविक संख्या को हम उपरोक्त रूप में व्यक्त कर सकते हैं? भले हमें संख्या कितने भी अंक हो। मान लीजिए कोई संख्या 123456789 में 9 अंक है तो आप उसे इस तरह लिख सकते हो ।

$$\begin{aligned}123456789 &= 100000000 + 20000000 + 3000000 + 400000 + 50000 + 6000 + 700 + 80 + 9 \\ &= (1 \times 100000000) + (2 \times 10000000) + (3 \times 1000000) + (4 \times 100000) + (5 \times 10000) + (6 \times 1000) + (7 \times 100) + (8 \times 10) + (9 \times 1)\end{aligned}$$

आगे इसे संक्षिप्त रूप में लिखना सीखेंगे।

$$123456789 = (1 \times 10^8) + (2 \times 10^7) + (3 \times 10^6) + (4 \times 10^5) + (5 \times 10^4) + (6 \times 10^3) + (7 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (9 \times 10^0)$$

इसे स्वाभाविक संख्याओं का दशमाधार निरूपण कहते हैं। अथवा संख्या का **सामान्य (मानक) रूप** कहते हैं।

संख्याओं के इस दशमाधार पद्धति में लिखने की प्रणाली को भारतीय गणितज्ञों ने आविष्कार किया।

एक उदाहरण लीजिए : 136

इसे सामान्य रूप में इस तरह लिखते हैं

$$136 = (1 \times 100) + (3 \times 10) + (6 \times 1)$$

आप देखते हैं कि 6, 1 से जुड़ा है, 3, 10 से जुड़ा है, और 1, 100 से जुड़ा है।

इसलिए यह कहा जाता है कि 6 इकाई स्थान पर, 3 दहाई और 1 सैकडे के स्थान पर है।

मान लीजिए abcd एक संख्या है जिसमें d, c, b, a क्रमशः इकाई, दहाई, सैकडे और हजार के स्थान पर है। तो इसका सामान्य रूप है

$$abcd = (a \times 1000) + (b \times 100) + (c \times 10) + (d \times 1)$$

इस व्याकुलता को हटाने के लिए कि abcd को a,b,c,d का गुणनफल है उसे $\overrightarrow{abcd}$ रूप में व्यक्त करते है। इस तरह $\overline{abcd} = (a \times 1000) + (b \times 100) + (c \times 10) + (d \times 1)$

भारतीय गणित का समय भारत उपखंड में इ.पू. 1200 के अन्त में शुरू हुआ और 18 वें शताब्दी के अंत तक रहा और उसके पश्चात आधुनिक युग प्रारंभ हुआ। भारतीय गणित की अत्युत्तम अवधि (400 इ.पू से 100 इ.पू) में आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त और भास्कर-2 जैसे विद्वानों ने प्रमुख योगदान दिया। दशमाधार प्रणाली और द्विमान पद्धति पहले पहल भारतीय गणितज्ञों ने उपयोग करना शुरू किया। भारतीय गणितज्ञों ने संख्या के रूप में शून्य की परिकल्पना, ऋणात्मक संख्याएं, अंक गणित और बीज गणित के बारे में सब से पहले योगदान दिया। इन गणितीय परिकल्पनाओं को मध्य एशिया, चीन, यूरोप ने ले लिया और आगे इसका विकास हुआ । परिणामस्वरूप गणित के अनेक नये क्षेत्रों की स्थापना हुई।

सभी गणित कार्यों का प्रसारण इ.पू. 500 तक मौखिक ही होता था और उसके बाद मौखिक तथा लिखित दोनों रूपों में प्रसारण होने लगा। भारत उपखंड में उत्पन्न सबसे पुरातन दस्तावेज भोजपत्र 'बकाशाली हस्तलिखित पत्र' माना जाता है। जिसे की 1881 में पेशावर (आधुनिक पाकिस्तान) के बकाशाली गांव में खोज हुई।

दशमाधार निरूपण सब से सुविधाजनक विधान है। हम संख्याओं को निरूपण (व्यक्त) करने केलिए भिन्न-भिन्न आधार उपयोग कर सकते हैं। उदाहरण द्विमान (द्विमान संकेत) तथा आधार सोलह विधान कंप्यूटरों में उपयोग करते हैं। फिर भी, दैनिक जीवन में दशमाधार प्रणाली (आधार दस निरुपण) अत्यंत उपयोगी है और भारतीय योगदान को हमेशा याद रखा जायेगा।

अभ्यास 1.1

1. निम्नलिखित संख्याओं को सामान्य रूप में लिखिए।

   39, 52, 106, 359, 628, 3458, 9502, 7000.

2. निम्नों को वास्तविक रूप में लिखिए।

   (i) $(5 \times 10) + (6 \times 1)$

   (ii) $(7 \times 100) + (5 \times 10) + (8 \times 1)$

   (iii) $(6 \times 1000) + (5 \times 10) + (8 \times 1)$

   (iv) $(7 \times 1000) + (6 \times 1)$

   (v) $(1 \times 1000) + (1 \times 10)$

अंकों से जुड़े कुछ खेल और पहेलियाँ

यहाँ संख्याओं के कुछ गुणधर्म दिये गए है उनके उपयोग से एक खेल तैयार कर अपने मित्रों को चकित कर सकते हैं।

खेल नं 1 :

आप अपने मित्र के साथ एक चाल चल सकते हो। इसे आप अनेक चरणों में कर सकते हैं।

चरण 1 : अपने मित्र को 2 अंकों की संख्या मन में रखने के लिए कहिए।

चरण 2 : मन में रखी संख्या के अंकों के स्थान पर एक नई संख्या बनाने कहिए

चरण 3 : दोनों संख्याओं को जोड़कर योगफल, को 11 से भाग लगाने कहिये ।

चरण 4 : शेष '0' बताकर उसे चकित कीजिए।

उदाहरण के लिए आपके मित्र ने मन में '41' चुना। अंकों के स्थान के बदलकर प्राप्त होनेवाली संख्या '14' होती है। उनका योगफल 55 है। '55' को 11 से भाग देने पर शेष रहता है '0'।

क्या आपको यह कैसे कार्य करता है जानने की जिज्ञासा नहीं हैं?

किसी भी संदर्भ में उसे कहिए कि वह संख्या अंकों को विपरीत संख्या (reversal) अथवा योगफल न बातें। फिर भी आप योगफल को 11 से भाग लगाने पर शेष 'शून्य' दृढतापूर्वक कह सकते हैं।

उदाहरण : मान लीजिए दो अंकों की संख्या $\overline{ab}$ है आप जानते हैं

$$\overline{ab} = (a \times 10) + (b \times 1)$$

इसकी विपरीत संख्या है

$$\overline{ba} = (b \times 10) + (a \times 1)$$

इस तरह संख्या तथा उसके विपरीत संख्या का जोड़ होगा।

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (a \times 10) + (b \times 1) + (b \times 10) + (a \times 1) = 11(a+b)$$

अभी आपको मालूम होगा कि 11 से भाग देने पर शून्य क्यों रहता है?

कार्यकलाप 2 : आप अपना स्वयं का एक खेल बना सकते हो। दो अंकों की संख्या और विपरीत संख्या का जोड़ लेने के बदले अंतर लीजिए। अनेक उदाहरण लीजिए जैसे 21, 34, 86, 79, 95. कौन सा भाजक इन अंतर के लिए सामान्य है? 21–12, 43–34, 86–68, 97–79, 95–59 कौन सा खेल आप रच सकते हो?

खेल नं. 2 :

इस समय, आप अपने मित्र को 3 अंकों की संख्या मन में रखने कहिए। अंकों के स्थान बदल कर उसकी विपरीत संख्या लेना कहिए। अब मूल संख्या और उसके विपरीत संख्या का अंतर ज्ञात करने कहिए। इस अंतर को 99 से भाग देने कहिए। आप उसे चकित कर सकते है जब आप कहें कि शेष 'O' रहता है; यद्यपि आपको उनसे चुनी संख्या मालूम नहीं है। उदाहरण मान लीजिए आपके मित्र ने 891 चुना उसके विपरीत संख्या 198 है और उनका अंतर 891– 198 = 693 = 99 × 7. अतः 99 से भाग लगाने पर शेष शून्य रहता है।

कार्यकलाप 3 : तीन अंकों की अनेक संख्यायें लीजिए। मान लीजिए 263, 394, 512, 765, 681, 898, 926 अंकों के स्थान बदलकर प्राप्त संख्या और मूल संख्या का अंतर लेने कहिए। इस अंतर को 99 से भाग लगाने कहिए।

सामान्यतः यह कैसे होता है?

यदि $\overline{abc}$ एक संख्या चुनते हो, तो विपरीत संख्या $\overline{cba}$ इस तरह

$$\overline{abc} - \overline{cba} = (a \times 100) + (b \times 10) + (c \times 1) - (c \times 100) - (b \times 10) - (a \times 1)$$

$$= (99 \times a) - (99 \times c)$$

$$= 99(a - c)$$

अतः अन्तर हमेशा 99 से भाज्य है।

खेल नं 3.

एक तीन अंकों की संख्या लीजिए, मान लीजिए 132, आप अंकों के स्थानांतरण करने से (चक्रीय रूप में) दो और संख्याएं मिलती है, वे हैं 213 और 321 ।

इन सब को जोड़िए

$$132 + 213 + 321 = 666 = 18 \times 37$$

इन संख्याओं को लेकर दोहराइए: 196, 225, 308, 446, 589, 678, 846. आपको ज्ञात होगा कि योगफल 37 से भाज्य है। क्या आप इस गुण का उपयोग कर खेल की रचना कर सकते हो?

कथन 1 : एक तीन अंकों की संख्या $\overline{abc}$ लीजिए चक्रीय रूप से क्रमचय से $\overline{bca}$ और $\overline{cab}$ प्राप्त कीजिए। तो $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ का जोड़ '37' से भाज्य है।

इसकी उपपत्ति कठिन नहीं है। सामान्य रूप उपयोग करने पर

$$132 = (1 \times 100) + (3 \times 10) + (2 \times 1)$$
$$213 = (2 \times 100) + (1 \times 10) + (3 \times 1)$$
$$321 = (3 \times 100) + (2 \times 10) + (1 \times 1)$$

इस तरह हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} 132 + 213 + 321 &= 1 \times (100 + 10 + 1) + 3 \times (10 + 1 + 100) \\ &\quad + 2 \times (1 + 100 + 10) \\ &= (1 + 3 + 2) \times 111 = 6 \times 3 \times 37 \end{aligned}$$

$$\overline{abc} = (a \times 100) + (b \times 10) + (c \times 1)$$
$$\overline{bca} = (b \times 100) + (c \times 10) + (a \times 1)$$
$$\overline{cab} = (c \times 100) + (a \times 10) + (b \times 1)$$

अतः

$$\begin{aligned} \overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab} &= (a \times 100) + (b \times 10) + (c \times 1) \\ &\quad + (b \times 100) + (c \times 10) + (a \times 1) \\ &\quad + (c \times 100) + (a \times 10) + (b \times 1) \\ &= 111(a+b+c) \end{aligned}$$

किन्तु 111 = 37 × 3 अतः दाहिने पक्ष की संख्या 37 से भाज्य है।

अतः आप निर्णय ले सकते हैं कि $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ 37 से भाज्य है।

अल्फा संख्यांक और पहेलियाँ

आप संख्या तथा अक्षरों से जुड़े पहेलियाँ उत्पन्न कर सकते हैं। निम्न उदाहरण देखिए।

उदाहरण 1 : निम्न योगफल में 'P' और 'Q' से सूचित संख्या ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & P \\ Q & 1 & 5 \\ \hline 5 & 2 & 6 \end{array}$$

आप को ज्ञात होता है कि एक अंक होने से वह 9 से अधिक नहीं हो सकता। 5 से 6 प्राप्त करना हो तो 1 जोड़ना एक मात्र तरीका है। अतः P = 1 इसी तरह Q = 1 हमें प्राप्त होता है। आप परीक्षण कर सकते हैं 411 + 115 = 526

उदाहरण 2 : निम्न गुणनफल में A और C से सूचित अंक ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{ccc} & 3 & A \\ \times & 1 & 2 \\ \hline C & 8 & 4 \\ \hline \end{array}$$

यहाँ $2 \times A$ में अंतिम अंक 4 है। अतः A = 2 अथवा A = 7 हो सकता है। किसका चयन करें?

मान लीजिए A = 2 हो तो 32 × 12 का गुणनफल 384 होता है। अर्थात् C = 3 है। इसके विपरीत यदि A = 7 हो तो 37 × 12 = 444 गुणनफल के दहाई स्थान का गुणनफल 8 होना है बल्कि 4 नहीं। इसलिए A = 7 हो नहीं सकता। अतः निर्णय है A = 2 और C = 3.

उदाहरण 3 : निम्न योगफल में A,B और C अलग अलग अंक सूचित करते हैं। उन्हें ज्ञात कीजिए और योगफल भी पत्ता लगाइए।

हल :

$$\begin{array}{ccc} & A & A \\ + & B & B \\ + & C & C \\ \hline B & A & C \\ \hline \end{array}$$

यहाँ आप देखते हैं कि अन्तिम अंकों का जोड़ $A+B+C$ में 'C' है अतः ''$A+B=10$, ($A+B=0$ संभव नहीं क्यों?)

क्योंकि $C \le 9$ इकाई से दहाई स्थान का हासिल 1 है । क्योंकि हम केवल 3 अंकों को जोड़ रहें हैं तो दहाई स्थान का हासिल 2 से अधिक नहीं हो सकता। इसलिए B का मूल्य 2 से अधिक नहीं हो सकता है। आप यह देख सकते हैं कि B = 1 अथवा 2, यह दहाई के अंकों को जोड़ (हासिल 1 के साथ) A + B + C + 1= 10 + C + 1 और इसे 10 से भाग देने पर शेष A रहना चाहिए। यदि B = 1 तो A = 9 और C + 1 = 9 अर्थात् C = 8 हमें प्राप्त होता है।

99 + 11 + 88 = 198 जो सही होता है। यदि B = 2 तो A = 8 और C + 1 = 8 अर्थात् C = 7 लेकिन 88 + 22 + 77 = 187 जो सही नहीं है क्योंकि जोड़ के स्थान पर 1 है बल्कि 2 नहीं। तो सही उत्तर 99 + 11 + 88 = 198 है।

अभ्यास 1.2

1. निम्नों में अक्षरों से सूचित अंक ज्ञात कीजिए।

(i)
$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ B \\ \hline 7 \\ \hline \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} 16 \\ +\ 2A \\ \hline B1 \\ \hline \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{r} 2A \\ \times\ A \\ \hline 12A \\ \hline \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{rrrr} & 1 & A & A \\ + & 1 & A & A \\ \hline & 2 & A & A \\ \hline \end{array}$$

(v)
$$\begin{array}{rrr} & 1 & A \\ \times & 1 & A \\ \hline 1 & B & A \\ \hline \end{array}$$

(vi)
$$\begin{array}{rrr} & 3 & A \\ \times & & A \\ \hline 2 & B & A \\ \hline \end{array}$$

2. पार्श्व के गणित में A, B, C क्रमागत अंक है। तीसरी पंक्ति में A, B, C किसी क्रम में आते हैं। A, B, C ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{rrrr} & A & B & C \\ + & C & B & A \\ + & - & - & - \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

भाज्यता और शेष (Divisibility and remainders)

भाज्यता, पूर्णांकों से संबंधित एक महत्वपूर्ण गुण है। अपने पूर्व की कक्षाओं में आपने एक संख्या को दूसरे से भाग लगाकर **भागफल** और **शेष** जानना सीखा है। यदि 91 को 13 से भाग लगाये, तो आपको ज्ञात होता है कि 91, 13 से पूर्ण रूप से भाग जाता है और शेष कुछ रहता नहीं है। एक दूसरे उदाहरण में यदि 85 को 15 से भाग लगाये तो आप देखेंगे कि 15 × 5 = 75 और 15 × 6 = 90 अतः 85 को 15 से पूर्णतः भाग नहीं लगा सकते।

वास्तविक रूप से भाग लगाने पर 5 भागफल और 10 शेष रह जाता है।

13)91(7
91
___
00
___

15)85(5
75
___
10 ← शेष
___

मान लीजिए 304 को हम 12 से भाग देते हैं, तो भागफल 25 और शेष 4 रहता है। यदि 887 को 17 से भाग दें तो भागफल 52 और शेष 3 रहता है।

12)304(25
24
___
64
60
___
04
___

17)887(52
85
___
37
34
___
03
___

इस भाग को निम्न रूप में व्यक्त करते हैं।

$$91 = (13 \times 7) + 0,$$
$$85 = (15 \times 5) + 10,$$
$$304 = (12 \times 25) + 4,$$
$$887 = (17 \times 52) + 3.$$

क्या आप देखते हैं कि $0 < 13$, $10 < 15$, $4 < 12$, $3 < 17$ है। क्या आप निर्णय ले सकते हैं कि शेष, भाजक से अधिक नहीं होता है?

कार्यकलाप 4 : इन प्रत्येक संदर्भ में भागफल और शेष ज्ञात कीजिए।

1) 100 को 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29 और 31 से भाग देने पर

2) 300 को 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67

अपने निरीक्षण को निम्न रूप से लिख सकते हैं :

> **यदि a और b दो ऋणात्मक रहित पूर्णांक है जहाँ $b > 0$ तो अवश्य है q और r पूर्णांक उपस्थित है ताकि $a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$ तो हम कहते हैं कि 'b' 'a' को पूर्णतः भाग देता है यदि शेष शून्य हो अर्थात् $r = 0$.**

इसी तरह एक कथन लिख सकते हैं जब एक संख्या को शून्यरहित संख्या से भाग देते हैं। इन विषयों को हम अगली कक्षाओं में अधिक अध्ययन करेंगे। तो भी हम इस कथन को एक सुन्दर खेल खेलने आधार बना सकते हैं ।

खेल नं 4 :

अपने मित्र को मन में 1000 से छोटी संख्या रखने कहिए। उसे इस संख्या को क्रमशः 7, 11, 13 से भाग लगाने कहिए और प्राप्त शेष मालूम कर लीजिए।

इन शेष के उपयोग से आपके मित्र की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

मान लीजिए आपके मित्र ने 128 चुना है। उसे 7 से भाग देने पर शेष 2 रहता है। 11 से भाग देने पर 7 शेष रहता है और 13 से भाग देने पर शेष 11 रहता है।

अब योगफल ज्ञात कीजिए ।

$$(2 \times 715) + (7 \times 364) + (11 \times 924)$$

यदि आप इसे सरल करते है, आपको 14142 प्राप्त होता है। इसे 1001 से भाग दीजिए। आपको ज्ञात होगा कि $14142 = (1001 \times 14) + 128$

ताकि शेष 128 है। आपके मित्र ने यही संख्या चुनी थी। क्या आप इसे उत्तेजित नहीं हुए।

इस खेल के चरण रहें

चरण 1. आपके मित्र को 1000 से छोटी संख्या लेने कहिए।

चरण 2. उसे उस संख्या को 7,11,13 से भाग लगाने कहिए और प्राप्त 3 शेष जान लीजिए।

चरण 3. उससे प्राप्त शेष द्वारा निम्न रूप से मानी हुई संख्या ज्ञात कीजिए। मान लीजिए प्राप्त शेष r_1 (7 से भाग देने पर प्राप्त शेष) r_2 (11 से भाग देने पर), r_3 (13 से भाग देने पर); r_1 को 715 से गुणा कीजिए, r_2 को 364 से, r_3 को 924 से; ध्यान दे कि आप गुणा बराबर करते हैं। प्राप्त सभी गुणनलब्ध जोडिये और प्राप्त योगफल को 1001 से भाग दीजिए। शेष जो कहता है, आपके मित्र से चुनी संख्या है।

एक और उदाहरण लेंगे। मान लीजिए 212.

ध्यान दीजिए $212 = (7 \times 30) + 2$

$212 = (11 \times 19) + 3$ और

$212 = (13 \times 16) + 4$

अतः $r_1 = 2,\ r_2 = 3,\ r_3 = 4$

हम प्राप्त होता : $(r_1 \times 715) + (r_2 \times 364) + (r_3 \times 924)$

$(2 \times 715) + (3 \times 364) + (4 \times 924)$

$= 6218$

लेकिन $6218 = (1001 \times 6) + 212$

तो शेष रहा 212, वह संख्या जहाँ से आपने प्रारंभ किया था।

आप सोच रहे होंगे कि यह खेल कैसे कार्य करता है। मान लीजिए आप एक अक्षरीय संख्या से प्रारंभ करते हैं $a < 1000$, मान लीजिए a को 7,11,13 से भाग देने पर क्रमशः r_1, r_2 और r_3 शेष रह जाते हैं। तो यूं लिख सकते हैं

$$a = 7q_1 + r_1 \qquad a = 11q_2 + r_2 \qquad a = 13q_3 + r_3$$

पूर्णांक q_1, q_2 और q_3 के लिए इस से मालूम होता है कि

$$r_1 = a - 7q_1; \qquad r_2 = a - 11q_2; \qquad r_3 = a - 13q_3$$

अतः

$$715r_1 + 364r_2 + 924r_3 = 715(a - 7q_1) + 364(a - 11q_2) + 924(a - 13q_3).$$

$$= a(715 + 364 + 924) - (7 \times 715)q_1 - (11 \times 364)q_2 - (13 \times 924)q_3$$

फिर भी आप देखेंगे कि

$$7 \times 715 = 7 \times 11 \times 13 \times 5$$
$$11 \times 364 = 11 \times 7 \times 13 \times 4$$
$$13 \times 924 = 13 \times 7 \times 11 \times 12$$

और $1001 = 7 \times 11 \times 13$

क्या आपको ध्यान में आया कि क्यों हमने 7, 11 और 13 से भाग देने शेषों पर विचार किया?

अतः

$$715r_1 + 364r_2 + 924r_3 = a \times 2003 - 1001(5q_1 + 4q_2 + 12q_3)$$

आप यह ध्यान दे सकते है कि $a \times 2003 = (a \times 1001 \times 2) + a$

जब आप $715r_1 + 364r_2 + 924r_3$ को 1001 से भाग देते हैं, तो केवल 'a' शेष रहता है क्योंकि अन्य सभी पद 1001 से भाज्य है। क्योंकि $a < 1000$, a सचमुच शेषफल है। परन्तु इसी संख्या से आपने प्रारंभ किया था।

कार्यकलाप 5 : खेल नं 4 को 804, 515, 676, 938, 97, 181 लेकर जाँच कीजिए।

अभ्यास 1.3

1. निम्नलिखित संख्याओं को 13 से भाग देने पर प्राप्त भागफल और शेषफल ज्ञात कीजिए।
   8, 31, 44, 85, 1220, 2011,
2. निम्नलिखित संख्याओं को 304 भाग दीजिए और भागफल और शेष मालूम कीजिए।
   128, 636, 785, 1038, 2236, 8858, 13765, 58876, 123456, 7654231

3. 100 से बड़ी ऐसी लघुतम स्वाभाविक संख्या मालूम कीजिए जिसे 19 से भाग देने पर 12 शेष रहता है।
4. 1024 को कौन-सी लघुतम संख्या जोड़ने पर वह 181 का गुणज बनता है?

भाज्यता के परीक्षण

यदि एक संख्या के अंत में 0, 2, 4, 6 अथवा 8 हो तो आप तुरन्त कहते है कि संख्या 2 से भाज्य है। इसका कारण क्या है? आप ऐसी संख्या a को $a = 10k + r$ लिखते हैं जहाँ r, 10 से भाग देने पर प्राप्त शेष है। अतः r इन 0, 2, 4, 6, 8 में से एक संख्या है। आप देखते है कि 10, 2 से भाज्य है और r भी 2 से भाज्य है। अतः निर्णय है कि a, 2 से भाज्य है। यह सोचना स्वाभाविक है कि क्या ऐसे सरल नियम है जिन से अन्य संख्याओं के भाज्यता का परीक्षण हो सकें। आईए, हम ऐसे नियमों पता लगाये ।

1) 4 का भाज्य परीक्षण नियम

यदि एक संख्या 4 से भाज्य है तो वह 2 से भी भाज्य होती है (क्यों ?) इसलिए इकाई स्थान का अंक 0, 2, 4, 6, 8 में से एक होना चाहिए।

लेकिन इन संख्याओं की ओर ध्यान दीजिए 10, 22, 34, 46, 58 आप देखेंगे प्रत्येक के इकाई स्थान पर नियम अनुसार अंक है परन्तु कोई भी संख्या 4 से भाज्य नहीं है। अतः केवल इकाई स्थान की संख्या देखकर हम 4 की भाज्यता का परीक्षण नहीं कर सकते। फिर अंतिम दो अंक काम आ सकते हैं।

यदि एक संख्या में दो अंक है तो भाज्यता का परीक्षण सीधे 4 से भाग लगाकर देख सकते हैं बस आपको 4 का पहाड़ा याद रखना होगा। मान लीजिए संख्या बड़ी है उसमें 2 से अधिक अंक है। उदाहरण 112 और 122 पर विचार कीजिए आप देखेंगे 112 = 100 + 12 दोनों 4 से भाज्य है। अतः 112, 4 से भाज्य है। लेकिन 122 = 100 + 22 यहाँ 100, 4 से भाज्य है परन्तु 22, 4 से भाज्य नहीं है। अतः 122, 4 से भाज्य नहीं है।

कथन 1 यदि a और b पूर्णांक है जो पूर्णांक $m \neq 0$ से भाज्य है तो m, $(a + b)$, $(a - b)$ और ab को भाग लगाता है।

यह नियम बड़ी संख्या के 4 के भाज्यता का परीक्षण करने में कैसे सहायक है?

मान लीजिए एक संख्या a में 2 से अधिक अंक है। इसे 100 से भाग दीजिए ताकि भागफल q रहे और शेष r हो, तो $a = 100q + r$ जहाँ $0 \leq r < 100$ क्योंकि 100, 4 से भाज्य है तो a, 4 से भाज्य है या नहीं तुरन्त बता सकते है यदि r, 4 से भाज्य हो। लेकिन r तो

a के अंतिम दो अंकों से बना होता है। अतः आप निम्न परीक्षण नियम बनाते हैं।

कथन 2
एक संख्या a (जिसमें एक से अधिक अंक है) 4 से केवल तभी भाज्य होती है यदि a के अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 4 से भाज्य होती है।

उदाहरण 4 : जाँच कीजिए क्या 12456, 4 से भाज्य है या नहीं ।

हल : यहाँ अंतिम दो अंकों से बनी संख्या होती है 56. यह तो 4 से भाज्य है। अतः 12456 भी 4 से भाज्य है।

उदाहरण 5 : क्या 12345678 को 4 से भाग लगा सकते है?

हल : अंतिम दो अंकों से बनी संख्या होती 78 जो 4 से भाज्य नहीं है। अतः दी गई संख्या 4 से भाज्य नहीं है।

कार्यकलाप 8 : आप अपने मित्र को 4, 5 और 6 अंकों की संख्याओं को देने बताईए। दत्त संख्याएं 4 से भाज्य है या नहीं परीक्षण कीजिए।

कार्यकलाप 9 :अनेक 4 और 5 अंकों की संख्याओं को 8 से भाग लगाकर, 8 का परीक्षण नियम बनाईए।

2) 3 और 9 का भाज्यता परीक्षण नियम

2, 23, 234, 2345, 23456, 234567 इन संख्याओं पर विचार कीजिए। आप देखते हैं कि इन 6 संख्याओं में केवल 234 और 234567, 3 से भाज्य है। यहाँ 2 अंकों से बनी संख्या अथवा 3 अंकों से बनी संख्या के बारे में विचार नहीं कर सकते। ध्यान दीजिए 234 को 3 से भाग लगा सकते हैं लेकिन 34 को 3 से भाग नहीं लगा सकते। इसी तरह 456, 3 से भाज्य है परन्तु 23456 को 3 से भाग नहीं लगा सकते है।

कार्यकलाप 10 : 1, 11, 21, 31, 41, ... 141, 151 (एक से 151 तक सभी संख्याएं जिनके अंत में 1 है) लिखिए प्रत्येक संख्या के अंकों का योगफल ज्ञात कर एक तालिका बनाईए। कौन सी संख्याएं 3 से भाज्य ज्ञात कीजिए और यह पत्ता लगाईए क्या अंकों का जोड़ 3 से भाज्य है? आपका निष्कर्ष क्या है?

234 और 234567 संख्याओं पर विचार कीजिए पहली संख्या के अंकों का जोड़ 9 है और दूसरे संख्या के अंकों का जोड़ 27 है। आप देखते हैं कि दोनों 9 और 27 दोनों 3 से भाज्य है (वास्तव में 9 से भाज्य है) । आईए, इसे 2 अंकों की 3 अंकों की और 4 अंकों की संख्याओं के संदर्भ पर सामान्यतः क्या नियम हो सकता है। यदि $n = \overline{ab}$ जो दो अंकों की संख्या, तो

$$n = \overline{ab} = (10 \times a) + b = 9a + (a + b)$$

इससे मालूम होता है कि n, 3 से भाज्य होता जब $(a + b)$, 3 से भाज्य होता है।इसी तरह

$m = \overline{pqr}$ रहे तो,

$$m = \overline{pqr} = 100p + 10q + r$$
$$= (99p + 9q) + (p + q + r)$$

तो $(p+q+r)$, 3 से भाज्य हो तो m से भाज्य होता।

क्या आप ध्यान देते हैं कि हम 9 का भाज्यता परीक्षण नियम बना सकते हैं।

m को 9 से भाग लगा सकते हैं केवल जब $p+q+r$ 9 से भाज्य हो। इसी तरह '4' अंकों की संख्या अथवा अधिक अंकों की संख्या का नियम बना सकते हैं। ध्यान दीजिए 234567 के अंकों का जोड़ 27 है। आप जाँच कर सकते हैं क्या 234567, 9 से भाज्य है या नहीं।

कथन 3 एक पूर्णांक 'a', '3' से भाज्य है यदि उसके अंकों का जोड़ 3 से भाज्य है। एक पूर्णांक 'b' '9' से भाज्य होता है यदि अंकों का जोड़ 9 से भाज्य है।

उदाहरण 6 : ज्ञात कीजिए क्या 12345321, 3 से भाज्य है या नहीं? क्या वह 9 से भाज्य है?

हल : अंकों का जोड़ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 3 + 2 + 1 = 21 है अतः यह संख्या 3 से भाज्य है बल्कि 9 से नहीं । वास्तव में 12345321 = (9 × 1371702) + 3.

उदाहरण 7 : क्या 444445 को '3' से भाग लगा सकते हैं?

हल : अंकों का जोड़ 25 है जो 3 से भाज्य नहीं है। अतः 444445, 3 से भाज्य नहीं है। यहाँ शेषफल '1' है।

3) 5 और 10 का भाज्यता परीक्षण नियम

कार्यकलाप 11 : 51 से 100 तक 5 के गुणज लिखिए । प्रत्येक 5 के गुणज के इकाई स्थान की संख्या तालिका में लिखिए।

क्या आप देखते हैं कि 5 के गुणज के इकाई स्थान पर '0' अथवा '5' उपस्थित है। क्या आप इस निरीक्षण से 5 और 10 का भाज्यता परीक्षण नियम बना सकते हैं?

कथन 4

एक पूर्णांक 'a', '5' से तभी भाज्य होता है जब उसके इकाई स्थान में '0' अथवा '5' हो। एक संख्या 10 से भाज्य होती है जब उसके इकाई स्थान पर '0' हो।

उदाहरण 8 : 101 और 200 के बीच कितनी संख्याएं '5' से भाज्य है?

हल : 101 और 200 के बीच सभी संख्याओं को लिखिए जिनके इकाई स्थान पर '0' अथवा '5' है : 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200 यहाँ 20 संख्याऐं है।

उदाहरण 9 : क्या संख्या 12345 को 15 से भाग लगा सकते हैं?

हल : ध्यान दीजिए $15 = 3 \times 5$, अर्थात् दत्त संख्या 3 और 5 दोनों से भाज्य है । दत्त संख्या 15 से भाज्य है सिद्ध करने के लिए इतना पर्याप्त है) फिर भी एक सामान्य नियम गलत सिद्ध होता है। उदाहरण 4, 12 को भाग लगाता और 6, 12 को भाग लगाता है परन्तु उनका गुणनफल 24, 12 को भाग नहीं लगाता है। क्या आप कोई नियम बना सकते हो? इकाई स्थान पर '5' होने से '5' से भाज्य है। अंकों का जोड़ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ यह '3' से भाज्य है।

$\therefore$ अतः 3, 12345 को भाग लगाता है। अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि 12345 को 15 से भाग लगा सकते है।

उदाहरण 10 : 201 से 250 के बीच कितनी संख्याऐं 5 से भाज्य है बल्कि 3 से नहीं?

हल : यहाँ '5' भाज्य संख्याऐं है । 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250 । इन संख्याओं के अंकों का जोड़ 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10, 6, 11, 7 है। इन में '3' से भाज्य संख्याऐं 3, 6, 9 इस तरह '5' से भाज्य 10 संख्याओं में से केवल तीन संख्याऐं मात्र 3 से भाज्य है। बाकी '7' संख्याऐं '3' से भाज्य नहीं है।

4) 11 का भाज्यता परीक्षण नियम

4587 संख्या पर विचार कीजिए। आप जाँच कर सकते हैं कि यह 11 से भाज्य है। (वास्तव में $4587=11 \times 417$) हम ऐसे भी लिख सकते है:

$4587 = (4 \times 1000) + (5 \times 100) + (8 \times 10) + 7 = (4 \times 1001) + (5 \times 99) + (8 \times 11) + (-4 + 5 - 8 + 7) = (11 \times 91 \times 4) + (11 \times 9 \times 5) + (11 \times 8) - (4 - 5 + 8 - 7)$

इन संख्याओं में से पहले तीन कोष्ठकों की संख्याएं 11 से भाज्य है। अतः 4587 का 11 भाज्यता परीक्षण $4 - 5 + 8 - 7$ पर निर्भर करता है। जिन में केवल दत्त संख्या के

अंक समाविष्ट है। यहाँ ध्यान दीजिए कि चिन्ह + और - एक के बाद एक दोहराते है। ध्यान दीजिए 4 - 5 + 8 - 7 = 0 जो 11 से भाज्य है।

अभी एक 3 अंकों की संख्या 429 पर विचार कीजिए। आप आसानी से जाँच कर सकते हैं 429, 11 से भाज्य है।

429 = 11 × 39 है।

इसके विपरीत

429 = (4 × 100) + (2 × 10) + 9 = (4 × 99) + (2 × 11) + (4 - 2 + 9)

क्योंकि 4 - 2 + 9 = 11 जो कि 11 से भाज्य है। आप निष्कर्ष पर आ सकते है कि 429, 11 से भाज्य है।

एक तीन अंकों की संख्या अथवा 4 अंकों की संख्या की जाँच कैसे कर सकते है?

मान लीजिए $n = \overline{abc}$ एक तीन अंकों की संख्या है ।

तो, $n = 100a + 10b + c = 99a + 11b + (a - b + c)$

इस तरह 'n' को 11 से तभी भाग लगा सकते हैं यदि $a - b + c$ मात्र 11 से भाज्य है। यदि

$m = \overline{pqrs}$ एक 4 अंकों की संख्या है तो

$$n = 1000p + 100q + 10r + s = 1001p + 99q + 11r - (p - q + r - s)$$

अतः n,11 से तभी भाज्य होता है जब $(p - q + r - s)$ 11 से भाज्य होता है।

यह नियम सभी संख्याओं को लागू क र सकते हैं भले उसमें कितने भी अंक हो।

कथन 5

एक संख्या '**n**' दशमाधार में दिये जाने पर, अंकों में बीच - और + चिन्ह लगाईए और योगफल ज्ञात कीजिए। दी गई 11 से भाज्य होती जब योगफल 11 से भाज्य है। इसलिए एक संख्या के विषम स्थान के अंकों का जोड़ तथा सम स्थान के अंकों को जोड़, के बीच का अंतर 11 से भाज्य है।

उदाहरण 11 : क्या 23456, 11 से भाज्य है?

हल : ध्यान दीजिए 2 - 3 +4 - 5 + 6 = 4 और इसलिए 11 से भाज्य नहीं है।

वास्तव में 23456 = (11 × 2123) + 4

पेलिंनड्रोम एक संख्या जिसे बायी ओर से दाहिनी ओर अथवा दाहिनी ओर से बायीं ओर पढ़ने पर वही संख्या रहती है। इस तरह पेलिन्ड्रोम एक संख्या 'n' है ताकि उसके अंकों को विपरीत करने पर फिर वही संख्या 'n' आती है।

उदाहरण : 232 एक तीन अंकोंवाली पेलिन्ड्रोम संख्या है। 5445 एक 4 अंकोंवाली पेलिंन्ड्रोम संख्या है।

उदाहरण 12 : 11 से भाज्य सभी अंकोंवाले पेलिन्ड्रोमस् ज्ञात कीजिए।

हल : तीन अंकोंवाला पेलिन्ड्रोम $\overline{aba}$ रूप की होनी चाहिए, जहाँ $a \neq 0$ और b अंक है। यह 11 से भाज्य यदि $2a-11$ b से भाज्य हो । यह तभी संभव है जब $2a-b=0$ अथवा $2a-b=11$ अथवा $2a-b=-11$ क्योंकि $a \geq 1$ और $b \leq 9$ है। हमें ज्ञात होता है कि $2a-b \geq 2-9=-7>-11$ अतः $2a-b=-11$ संभव नहीं है। मान लीजिए $2a-b=0$ तो $2a=b$; इस तरह $a=1, b=2, a=2, b=4, a=3, b=6$ और $a=4,\ b=8$ संभव है। हमें 121, 242, 363, 484 संख्याऐं प्राप्त होते हैं। $a=6,\ b=1$ के लिए हमें ज्ञात होता है कि $2a-b=12-1=11$ अतः 11 से भाज्य है। इसी तरह $a=7, b=3;\ a=8, b=5;\ a=9, b=7$ ऐसे युग्म है जहाँ $2a-b, 11$ से भाज्य होता है। हमें चार अधिक संख्याऐं प्राप्त होते है 616, 737, 858 और 979.

अतः अपेक्षित संख्याऐं है 121, 242, 363, 484, 616, 737, 858, 979

उदाहरण 13 : सिद्ध कीजिए 12456, 36 से भाज्य है ध्यान रहे, आप वास्तव में बिना भाग लगाये, पत्ता लगाइए।

हल : पहले ध्यान दीजिए कि $36 = 4 \times 9$ । इसलिए यह काफी होगा कि दी गई संख्या 4 और 9 दोनों से भाज्य है। (बाद में वह ला.सा. अ 36 से भाज्य होगी) अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 56 पर विचार कीजिए। यह 4 से भाज्य है। जो 12456 को 4 से भाग लगा सकते हैं। इसके विपरीत, अंकों का जोड़ 18 है और 9 से भाज्य है। इसलिए 12456, 9 से भी भाज्य है। एक साथ लेने दी संख्या 36 से भाज्य है।

अभ्यास 1.4

1. विभजन किये बिना, निम्नलिखित 3, 4, 5, 11संख्या संख्या का भाज्य 803, 875, 474, 583, 1067, 350, 657, 684, 2187, 4334, 1905, 2548 का वर्गीकरण
2. 1001 से 2000 के बीच कितनी संख्याएं 4 से भाज्य है।

3. मान लीजिए एक तीन अंकोंवाली संख्या $\overline{abc}$ से भाज्य है। सिद्ध कीजिए $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ 9 से भाज्य है।

4. यदि $\overline{4a3b}$, 11 से भाज्य है तो $a+b$ के संभवनीय मूल्य ज्ञात कीजिए।

5. सिद्ध कीजिए कि 4 अंकों की पेलिन्ड्रोम संख्या हमेशा 11 से भाज्य है।

जादुई वर्ग

क्या आप 1 से 9 तक संख्याओं को 3 पंक्तियों में तथा 3 स्तंभों में व्यवस्थित कर सकते हैं ताकि प्रत्येक पंक्ति, स्तंभ तथा विकर्ण का योगफल समान रहे ? निम्नलिखित व्यवस्था की ओर ध्यान दीजिए । (चित्र 1)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

चित्र 1

6	1	8
7	5	3
2	9	4

चित्र 2

आपको ध्यान में आयेगा कि प्रत्येक पंक्ति का योग 15 है, प्रत्येक स्तंभ का जोड़ 15 और प्रत्येक विकर्ण का जोड़ 15 है। आप चित्र 2 में दर्शाये जैसे भी व्यवस्था कर सकते है। दोनों जादुई वर्ग कुछ साम्य देखते हैं ? दोनों वर्गों में मध्य का स्तंभ (1,5,9) है। सबसे दाहिना स्तंभ (8,3,4) जो चित्र 2 में है वह चित्र 1 सबसे बायां स्तंभ से समान है। इसी तरह चित्र 1 में सबसे दाहिना स्तंभ (6,7,2) चित्र 2 के सबसे बायें स्तंभ से समान है। दूसरा जादुई वर्ग प्राप्त करने के बायां स्तंभ, दाहिने में लाना है। इस योगफल 15 को **जादुई योगफल (magic sum)** कहते हैं।

क्या ऐसे जादुई वर्ग की रचना करने का विधान है?

सबसे ऊपरी पंक्ति के बीच के खाने से प्रारंभ कर वहाँ 1 लिखिए। अब निम्न नियमों को पालन कीजिए।

	1	

नियम 1 : बायें से दाहिनी ओर विकर्ण के संग यदि वर्ण खाली हो तो वहाँ अगली संख्या लिखिए।

4		

→

	5	
4		

यहाँ विकर्ण के संग एक वर्ग खाली है तो वहाँ 5 लिखते है।

नियम 2 : विकर्ण के संग यदि खाली खाना न हो, और आगे स्तंभ है, अगले स्तंभ के सबसे निचले खाने पर अगली संख्या लिखिए। नियम 1 अनुसरण कीजिए।

यहाँ विकर्ण के संग एक वर्ग खाली है तो वहाँ 5 लिखते हैं।

यहाँ 1 के बाद विकर्ण के बाद कोई वर्ग खाली नहीं है। तो अगले स्तंभ के सबसे निचले वर्ग में 2 लिखते हैं।

	1	

→

	1	
		2

नियम 3 : यदि कोई खाना, विकर्ण के संग खाली न हो और आगे कोई स्तंभ नहीं है तो जहाँ पहुँचे हो वहाँ से ऊपर के पंक्ति जाईए और सबसे बायें खाने में अगली संख्या भरिए और नियम 1 के अनुसरण कीजिए।

(यहाँ कोई खाना, विकर्ण के संग खाली नहीं ताकि आप 2 से आगे चले और हम अभी अंतिम स्तंभ में है। अतः हम ऊपर की पंक्ति में जाते हैं और सबसे बायें खाने में 3 भरते हैं।)

	1	
		2

→

	1	
3		
		2

नियम 4 : मान लीजिए आप ऐसे खाने पर पहुँचते हो जो पहले से भरा है तो उसके निचले खाने पर जाईए और नियम 1 अनुसरण कीजिए।

(यहाँ आप विकर्ण संग 3 से अगले खाने में नहीं जा सकते हैं क्योंकि पहले से

वहाँ 1 है। अतः हम 3 के निचले खाने में जाते हैं और वहाँ 4 भरते हैं।

	1	
3		

→

	1	6
3	5	
4		

नियम 5 **:** यदि आप मुख्य विकर्ण के अंत में पहुँचते हो तो विकर्ण के संग नीचले खाने में अगली संख्या भरिए और योग्य नियम अनुसरण कीजिए।

(यहाँ मुख्य विकर्ण के अंत में 6 है। इसलिए, हम उसके निचले खाने में जाकर वहाँ 7 भरते हैं।)

	1	6
3	5	
4		

→

	1	6
3	5	7
4		

आइए देखें कि 3 × 3 जादुई वर्ग कैसे पूर्ण होता है। पहले पंक्ति के मध्य खाने से प्रारंभ करते है और वहाँ 1 लिखते है। अब नियम 2 लागू कीजिए, क्योंकि विकर्ण के संग जा नहीं सकते। हम अगले स्तंभ के नीचले खाने में 2 से भरिए पुनः हम विकर्ण के संग जा नहीं सकते और आगे कोई स्तंभ नहीं है। हम नियम 3 लागू कर ऊपर के पंक्ति जाते है और सबसे बायें खाने में 3 भरिए। अब हम विकर्ण के संग जा नहीं सकते क्योंकि वहाँ का खाना पहले से भरा है। अतः नियम 4 लागू कीजिए और जिस खाने पर अब हो उसके नीचले खाने में जाईए। यहाँ 4 भरते हैं और विकर्ण के संग जाकर 5 और 6 भरते है। पुनः हम आगे बढ़ नहीं क्योंकि वह मूल विकर्ण है। हम नियम 5 उपयोग करते है और अंतिम खाने के नीचले खाने में 7 भरिए। अब नियम 3 उपयोग कर पंक्ति के बायें खाने में 8 लिखते है। अब नियम 2 उपयोग, अगले स्तंभ के निचले खाने में 9 भरते है। और जादुई वर्ग तैयार है।

प्रक्रिया का अनुक्रम नीचे दिया है।

	1	

→ नियम 2 →

	1	
		2

→ नियम 3 →

	1	
3		
		2

→ नियम 4 →

	1	
3		
4		2

→ नियम 1 →

	1	
3	5	
4		2

→ नियम 1 →

	1	6
3	5	
4		2

→ नियम 5 →

	1	6
3	5	7
4		2

→ नियम 3 →

8	1	6
3	5	7
4	2	

→ नियम 2 →

8	1	6
3	5	7
4	9	2

कार्यकलाप 6 : 1 से 9 संख्याओं का उपयोग कर पहले स्तंभ के मध्य से प्रारंभ करते हुए 3×3 जादुई वर्ग बनाइए। चित्र 1 के जादुई वर्ग कैसे तुलनात्मक ढंग से देखोगे? जादुई जोड़ और जादुई वर्ग के मध्य खाने की संख्या कैसे संबंधित है? 3 से 11 तक संख्याओं के उपयोग के जादुई वर्ग की रचना कीजिए।

हल : हम प्रक्रिया का वही अनुक्रम उपयोग करते जो पहले उपयोग किया था परन्तु 1 के बदले हम 3 से प्रारंभ करते हैं।

	3	

→ नियम 2 →

	3	
		4

→ नियम 3 →

	3	
5		
		4

→ नियम 4

→

	3	
5		
6		4

→ नियम 1 →

	3	
5	7	
6		4

→ नियम 1 →

	3	8
5	7	
6		4

→ नियम 5 →

	3	8
5	7	9
6		4

→ नियम 3 →

10	3	8
5	7	9
6		4

→ नियम 2 →

10	3	8
5	7	9
6	11	4

→ नियम 4 →

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

यहाँ जादुई योग 21 है।

कार्यकलाप 7 : 1 से 25 तक संख्याओं का उपयोग करते 5×5 जादुई वर्ग पूर्ण कीजिए। 1 जादुई जोड़ और जादुई वर्ग के मध्य वर्ग की संख्या में क्या संबंध है?

अभ्यास 1.5

1. 5 से 13 तक संख्याओं का उपयोग करते हुए 3×3 का जादुई वर्ग बनाइए। यहाँ जादुई जोड़ क्या है? जादुई जोड़ और बीच के खाने की संख्या से संबंध क्या है?
2. 9 से 17 संख्याओं का उपयोग कर 3×3 का जादुई वर्ग की रचना कीजिए। यहाँ जादुई जोड़ क्या है? जादुई जोड़ और मध्य वर्ग की संख्या में क्या संबंध है?
3. नीचले पंक्ति के मध्य के खाने से प्रारंभ करते हुए 1 से 9 संख्याओं का उपयोग कर 3×3 का जादुई वर्ग बनाईए।
4. 1 से 17 तक के विषम संख्याओं का उपयोग करते हुए 3×3 का जादुई वर्ग बनाईए।
5. 1 से 50 तक सम संख्याओं का उपयोग कर 5×5 का जादुई वर्ग की रचना कीजिए।

आप ने पहले कुछ अभाज्य संख्याओं को जानते हैं 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73.
ऐसे अनेक अभाज्य संख्याऐं हैं ।
उनमें से इन जोड़ियों पर ध्यान दीजिए
(3, 5); (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71,73)
इन अभाज्य संख्याओं में 2 का अंतर है। ऐसे अभाज्य संख्याओं को 'जुड़े अभाज्य' कहते हैं। एक समस्या का हल ही नहीं (twin primes) क्या ऐसे जुड़े अभाज्य असंख्य है?

संख्याओं के संदर्भ में गोल्ड बेक समस्या हल किये बिना रह गई है। यह 1742 वर्ष पुरानी है। 2 से बड़ी सम संख्या लीजिए। ध्यान दीजिए $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11$, $16 = 5 + 11$ इत्यादि। जर्मन के गणितज्ञ गोल्ड वेक ने ढूँढ निकाला की 2 से बड़ी सम संख्या दो अभाज्य संख्याओं का जोड़ है। कंप्यूटरों की सहायता से बड़े पैमाने पर सत्यापन किया गया है और माना जाता है कि यह सच है। लेकिन इसकी कोई गणितीय उपपत्ति नहीं है।

एक स्वाभाविक संख्या n अपने सभी घनात्मक भाजकों का जोड़ हो तो उसे संपूर्ण संख्या कहते हैं। (अर्थात् स्वयं को छोड़कर बाकी भाजकों का जोड़) प्रथम संपूर्ण संख्या 6 है। इसके तीन घनात्मक भाजक है, 1, 2, 3, और 1 + 2 + 3 = 6, इसी तरह 28 के भाजक है 1, 2, 4,7, 14 और 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 अगली संपूर्ण संख्याएं है 496 और 8128. इन बातों को यूक्लिड ने खोज निकाला। यूक्लिड ने सिद्ध किया $2^{p=1}\left(2^p-1\right)$ जहाँ p एक अभाज्य संख्या है, तो वह संपूर्ण संख्या होती है। जहाँ 2^p-1 एक अभाज्य संख्या है।

2^p-1 रूप के अभाज्य संख्याओं को मरसेने (Mersenne) अभाज्य कहते हैं (गणितज्ञ मेरिन मरसेने)

2^n-1 एक अभाज्य संख्या है जब n अभाज्य हो। लेकिन सभी 2^n-1 रूप के संख्याएं है अभाज्य नहीं होती । उदाहरण $2^{11}-1=2047=23\times 89$ जो अभाज्य नहीं है।

कंप्यूटर की सहायता से अनेक संपूर्ण संख्याएं ज्ञात कर सकते हैं। संख्याएं $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ से बनी जहाँ $p=$ 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281; कुछ संपूर्ण संख्याएं है। संपूर्ण संख्याओं से संबंधित अनेक समस्याएं हल किये बिना रह गई है।

1. क्या संपूर्ण संख्याऐं असंख्या है? (क्या मरसेने अभाज्य भी असंख्य है?)
2. अब तक प्राप्त संपूर्ण संख्या सम संख्या है क्या विषम संपूर्ण संख्या भी उपलब्ध है?

शब्दावली :

भाज्यता	:	एक पूर्णांक 'a', शून्य रहित पूर्णांक 'b' से भाज्य कहलायेगा यदि $a=qb$ जहाँ q एक पूर्णांक है।
भागफल	:	यदि $a=qb$, सभी $a,b\neq 0$ पूर्णांकों के लिए, a को b से भाग लगाने पर q शेषफल प्राप्त होगा।
शेषफल	:	यदि $a=bq+r$ जहाँ $0\le r<b$ किसी पूर्णांक a और स्वाभाविक संख्या b, के लिए, a को b से भाग देने पर r शेष रहता है।
पेलिन्ड्रोम	:	एक संख्या जिसे बायीं ओर से अथवा दाहिनी ओर से पढ़ने पर वही संख्या रहती है।
पहेली	:	मतिष्यक झंझोडनेवाली गणित

अल्फा अंक	:	एक समीकरण में उपस्थित अक्षर जो कोई मूल्य धारण कर सकते हैं।
प्रमाण रहित कथन	:	एक कथन जो सही है परन्तु उसका सही गणितीय प्रमाण नहीं।
जादुई वर्ग (अंक-यंत्र)	:	संख्याओं से व्यवस्थित वर्ग जिन में स्तंभों, पंक्तियों तथा विकर्णों का जोड़ समान होता है।
संपूर्ण संख्या	:	एक स्वाभाविक संख्या जो अपने से छोटे सभी भाजकों का जोड़ है।
द्वियुग्म अभाज्य	:	अभाज्य संख्याओं की जोड़ी जिन में '2' का अंतर है।
मरसेने अभाज्य	:	2^{p-1} रूप में व्यक्त अभाज्य (यदि $2p-1$ एक अभाज्य है तो निश्चित रूप में p भी अभाज्य होगा।

याद रखिए

- एक स्वाभाविक संख्या को दशमाधार प्रणाली उपयोग कर सामान्य रूप में लिख सकते हैं।
- दो पूर्णांक $a, b > 0$ दिये जाने पर ऐसे विशिष्ट पूर्णांक q और r उपलब्ध है ताकि $a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$ ।
- एक संख्या के अंतिक दो अंकों से जुड़कर बनी संख्या यदि 4 से भाज्य तो दी गई संख्या 4 से भाज्य होती है।
- एक संख्या के अंकों का जोड़ 3 अथवा 9 से भाज्य हो तो दी गई संख्या 3 अथवा 9 से भाज्य होती है।
- संख्या के अंत में यदि 0 अथवा 5 हो तो दी गई संख्या 5 से भाज्य होती है।
- एक संख्या के विषम स्थानों के अंकों का जोड़ तथा सम स्थानों के अंकों का जोड़ का अंतर 11 से भाज्य हो तो दी गई संख्या 11 से भाज्य होती है।

उत्तर

अभ्यास 1.1

1. (i) $(3 \times 10) + (9 \times 1)$ (ii) $(5 \times 10) + (2 \times 1)$
(iii) $(1 \times 100) + (16 \times 1)$ (iv) $(3 \times 100) + (5 \times 10) + (9 \times 1)$
(v) $(6 \times 100) + (2 \times 10) + (8 \times 1)$

(vi) $(3 \times 1000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + (8 \times 1)$

(vii) $(9 \times 1000) + (5 \times 100) + (2 \times 1)$ (viii) (7×1000)

2. (i) 56 (ii) 758 (iii) 6058 (iv) 7006 (v) 1010

अभ्यास 1.2

1. (i) B = 4 (ii) A = 5, B = 4 (iii) A = 5 (iv) A = 0

   (v) दो उत्तर है A = 0, B = 0 और A = 1, B = 2

   (vi) A = 6, B = 1

2. A = 3, B = 4, C = 5

अभ्यास 1.3

1. यदि $S \rightarrow (q, r)$ सूचित करता है कि जब S को 13 से भाग लेने से q भागफल और शेष r है।

   तब $8 \rightarrow (0, 8)$; $31 \rightarrow (2, 5)$; $44 \rightarrow (3,5)$; $85 \rightarrow (6, 7)$;

   $1220 \rightarrow (93, 11)$;

2. यदि $S \rightarrow (q, r)$ सूचित करता है कि जब S को 304 से भाग लगाने पर तो q भागफल और शेष r है।

   तो $128 \rightarrow (0,128)$; $636 \rightarrow (2,28)$; $785 \rightarrow (2, 177)$; $1038 \rightarrow (3,126)$

   $2236 \rightarrow (7,108)$; $8858 \rightarrow (29,42)$; $13765 \rightarrow (45, 85)$; $58876 \rightarrow (304,204)$;

   $123456 \rightarrow (406,32)$; $7654231 \rightarrow (25178, 119)$

8		
3	7	

3. 107 4. 62

अभ्यास 1.4

2. 250 संख्यायें

4. अपेक्षित रूप में आवश्यक संख्यायें और 11 से भाज्य है: 4939, 4037, 4136, 4235, 4334, 4433, 4532, 4631, 4730. अतः $a + b = 18$ (4939 के संदर्भ में) अथवा $a + b = 7$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

अभ्यास 1.5

1.

12	5	10
7	9	11
8	13	6

जादूई संख्या 27, मध्य संख्या 9 है, हमें प्राप्त है 27 = 3 × 9

2.

16	9	14
11	13	15
12	17	10

यहाँ जादुई जोड़ 39 है। मध्य की संख्या 13 है। 39 = 3 × 13

3.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

यह एक जादू का वर्ग है। आप ऐसे विभिन्न जादू के वर्ग बना सकते हो जिन में 1 स्थान अलग हो।

4.

15	1	11
5	9	13
7	17	3

5.

34	48	2	16	30
46	10	14	28	32
8	12	26	40	44
20	24	38	42	6
22	36	50	4	18

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

घटक – 2
बीजीय व्यंजक

इस अध्याय को अध्ययन करने के बाद, आप सीखेंगे

- बहुपदीयों के अर्थ और उनके प्रकार ।
- बहुपदीयों को जोड़ने और घटाना ।
- बीजीय व्यंजकों का गुणनफल; एक पदी को एक पदी से, द्विपदी को एक पदी से, द्विपदी को द्विपदी से; $(x + a)$ $(x + b)$; $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ और $(a + b)$ $(a - b)$ आदि के विस्तार करना

प्रस्तावना

आईये पूर्व अध्ययन की हुई कुछ बातों का स्मरण करें;

एक संकेत जिस का कोई निश्चित मूल्य होता है उसे **स्थिरांक** कहते हैं

उदाहरण : $5,\ -7,\ 2\frac{3}{5},\ \sqrt{5},\ 2+\sqrt{3}$ आदि

एक संकेत जिसका कोई निश्चित मूल्य नही होता; परंतु उसे आवश्यकता अनुसार मूल्य दिया जा सकता है उसे चरांक अथवा अक्षरीय पद कहते है।

उदाहरण : $p,\ q,\ x,\ y,\ z$ आदि

सूचना :

1. एक स्थिरांक और एक चरांक का संयोग चरांक होता है।

   उदा : $3x,\ (4 + p),\ \frac{6}{x}, \frac{x}{7},\ x - 4,\ 9x$ आदि.

2. दो या दो से अधिक चरांक का संयोग या तो एक चरांक है अथवा एक स्थिरांक है।

   उदा : $xy,\ \frac{x}{y},\ (x - y),\ (y - x),\ -x,\ (x + y),\ xyz,\ \frac{xy}{z}$

   $13 + x - y,\ 14x - y,\ \ 10 - xy,\ \ 7\frac{x}{y},\ \frac{8}{xy}$ आदि ।

   ध्यान दीजिए $(4 + x) + (4 - x) = 8$ जो एक स्थिरांक है।

एक पद, एक संख्या है (स्थिरांक), एक चरांक ; अथवा संख्या और चरांकों का संयोग है; (गुणनफल अथवा भागफल)

उदाहरण : 9, x, $3x$, $4xy$, $\frac{7x}{15y}$, $\frac{21}{xy}$, $\frac{yz}{x}$ इत्यादि

एक पद अथवा योगफल से जुडे एक या अधिक पदों का संयोग (जोड और व्यवकलन) और गुणनफलीय संकेत (गुणनफल और भागफल) **बीजीय व्यंजक** बनाते है।

उदाहरण : $7 - y$, $3x^2 - 4y$, $6xy$, $6 + x^2 - 3x$, $\left(\frac{7x}{x}\right) + 4y - 6z$ आदि

सूचना : गुणनफल और भागफल के संकेत पदों को अलग-अलग नही करते; उदाहरणार्थ;

$9x^2 4y$ or $\frac{4x^2}{7y}$ यह एक पद है।

एक बीजय व्यंजक जिस के प्रत्येक पद में केवल ऋणात्मक रहीत संख्यात्मक घातांक के चरांक होते है; उसे बहु पदी व्यंजक (Polynomial) कहते है।

उदाहरण : $x^2 - 4x$, $x - 4xy + y$, $6 - 5y + xy + xy$, 4

एक बीजीय व्यंजक जिस में केवल एक पद मात्र होता है; उसे **एकपदीय व्यंजक** कहते है;

उदाहरण : 4, $\frac{5}{11}$, x, $6x$, $8xy$, $7x^2y$, yzx, $5x^2yz$ आदि

बीजीय व्यंजक जिस में दो पद समाविष्ट हो; उसे द्विपदीय (Binomial) कहते है।

उदाहरण : $7 + x$, $xy - 7$, $5xy$, $3x^2 - 6xy$, $yz^2 + 2z$.

बीजीय व्यंजक, जिस में तीन पद है : उसे त्रिपदीय (trinomial) व्यंजक कहते हैं।

उदाहरण : $4 + x + y$, $6x + 15 - y^2$, $ax^2 + bx + c$, $ax + by + 2$

सूचना : $\frac{x}{y} + 2$ यह एक **बहुपदी व्यंजक** नही है; यह केवल बीजय व्यंजक है।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

अभ्यास 2.1

1. निम्नों को स्थिरांक और चरांक अलग-अलग लीजिए।

$12 + z,\ 15,\ \frac{-x}{5},\ \frac{-3}{7},\ x,\ 3,\ \frac{(2x)}{(8yz)}\ \frac{xy}{2}$, 7, 7-x, 6x+4y,-7z,

$\frac{8xy}{3x}$, y+4, $\frac{y}{4}$ और $\frac{(2x)}{(8yz)}$.

2. निम्नों को एक पदीय; द्विपदीय और त्रीपदीययों को में वर्गीकृत कीजिए।

$7xyz,\ 9 - 4y,\ 4y^2 - xz,\ x - 2y + 3z,\ 7x + z^2$, 8xy, $\frac{8}{5}x^2y^2$, $4 + 5y - 6z$.

बीजीय व्यंजक

$9x$ पर विचार कीजिए। इसमें दो अपवर्तन है; 9 और x । हम 9 को **संख्यायत्मक सहगुणांक** कहते है । (अथवा **स्थिरांक** अथवा **अंक गणतीय सहगुणांक**); x एक **चरांक** है (अथवा **अक्षरीय अपवर्तन** अथवा **अक्षरीय सहगुणांक** है) अथवा $9xy$ पर विचार कीजिए यहाँ x और y दो चरांक है; हम $9x$ को y का सहगुणांक कहते है और '$9y$' को x का सह गुणांक कहते है। निम्न लिखित तालीका का निरीक्षण कीजिए।

गुणलब्ध	सह गुणांक	संख्यात्मक सह गुणांक स्थिरांक	अक्षंरीय सह गुणांक (चरांक)
$-8xy$	y का सह गुणांक $-8x$ है	-8	x
	x का सह गुणाक $-8y$ है	-8	y
	-8 का सह गुणांक xy है	--	xy
	xy, का सह गुणांक -8 है	-8	--

सूचना :

1.यदि अक्षरीय अपवर्तन (चरांक) का कोई चिन्ह न हो उसे धनात्मक माना जाता है।
2.यदि चरांक का घातांक न हो; तो 1 मानते है।
3.यदि चरांक का संख्यात्मक का सहगुणांक न हो तो 1 मानते है। उदा : x का अर्थ है $+1x$.
4.एक ही चरांक के बहु पदीय में चरांक का अत्याधिक घातांक ही बहुपदी का घातांक मानते हैं।

सजाती और विजाती पद

एक ही घातांक के समान चरांक युक्त पदों को **सजाती पद** कहते है।

उदाहरण : $5x,\ 2x,\ 7x - 9x,\ \frac{1}{3}x$ आदि;

$x^2,\ 2x^2,\ 6x^2,\ 9x^2,\ \frac{1}{7}x^2$ आदि;

$x^3,\ 3x^3,\ 7x^3,\ -9x^3,\ \frac{1}{9}x^3$ आदि;

भिन्न – भिन्न घातांक के समान चरांक अथवा एक ही अथवा भिन्न घातांक अथवा भिन्न-भिन्न चरांक युक्त पद **विजाती पद** कहलाते हैं।

उदाहरण : $x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$ आदि, $x,\ m,\ n,\ p$ आदि, $-x,\ xy,\ xy^2$ आदि

बहु पदीयों का योगफल तथा व्यवकलन

आइए पहले हम पूर्णांक के समुच्चय के योगफल तथा व्यवकलन गुण-धर्मों का स्मरण कर लें ।

1. दो घनात्मक पूर्णांकों का जोड घनात्मक पूर्णांक होता है।

   $(+7) + (+5) = +7 + 5 = +12$

2. दो ऋणात्मक पूर्णांक को का जोड ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

   $(-7) + (-5) = -7 - 5 = -12$

3. एक घनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का जोड घनात्मक होता है। यदि ऋणात्मक पूर्णांक का परम मूल्य घनात्मक मूल्य से कम होता है।

   $(+7) + (-5) = +7 - 5 = +2$

4. एक घनात्मक पूर्णांक और ऋणात्मक पूर्णांक का जोड ऋणात्मक होता है। यदि ऋणात्मक पूर्णांक का परम मूल्य घनात्मक पूर्णांक से अधिक हो

   उदा : $(-7) + (5) = -7 + 5 = -2$

5. दो घनात्मक पूर्णांक का गुणनफल घनात्मक पूर्णांक होता है।

   उदा : $(+7) \times (+5) = +35$

6. दो ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल घनात्मक होता है।

   उदा : $(-7) \times (-5) = +35$

7. एक घनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल ऋणात्मक होता है।

   उदा : $(+7) \times (-5) = -35$

8. एक ऋणात्मक और एक घनात्मक पूर्णांक का गुणनफल ऋणात्मक होता है।

उदा : $(-7) \times (+5) = -35$

दो बहुपदीयों को जोडने और घटाने के निम्न नियम बनाते है।

1. सजाती पदों को जोड़ भी सकते है या घटा भी सकते है।
2. विजाती पदों को ना जोड सकते है या ना घटा सकते है।
3. सजाती पदों को जोडते या घटाते समय; उनके संख्यात्मक सहगुणांक जोडे या घटाये जाते है।

उदाहरण 1 : जोडिये $5x^2y - 7x^2y$ और $9x^2y$

हल : पहला नियम स्मरण कीजिये।

$$(5x^2y) + (-7x^2y) + (9x^2y) = (5 + (-7) + 9)\ x^2y$$
$$= (5 - 7 + 9)\ x^2y = 7x^2y$$

यह **क्षैतिज जोड़** है। इसे **स्तंभाकार** में भी जोड सकते है।

$$\begin{array}{r} +5x^2y \\ -7x^2y \\ \underline{+9x^2y} \\ \underline{7x^2y} \end{array}$$

हमे ज्ञात होता है; कि हम सह गुणाकों को जोड कर चरांक ज्यों का त्यों रख सकते हैं ।

उदाहरण 2 : जोडिये : $7x^2 - 4x + 5$ और $9x - 10$.

हल : यहाँ विजाती पद है। हम केवल सजाती पद जोड़ सकते है; जोड ने में सरल होने के लिए सजाती पदों को एक दूसरे के नीचे लिखते हैं।

$$\begin{array}{r} 7x^2 - 4x + 5 \\ + 9x - 10 \\ \hline 7x^2 + 5x - 5 \\ \hline \end{array}$$

उदाहरण 3 : जोडिये $8xy + 4yz - 7zx$, $6yz + 11zx - 6y$ और $-5xz + 6x - 2yx$

$$
\begin{array}{rrrrr}
+8xy & +4yz & -7zx & & \\
 & +6yz & +11zx & & -6y \\
-2xy & & -5xz & +6x & \\
\hline
+6xy & +10yz & -xz & +6x & -6y \\
\hline
\end{array}
$$

हल : यहाँ फिर विजाती पद अनेक है। हम सजाती पदों को एक के नीचे एक रखकर सरल जोडे; हम यहाँ क्रमविनिमय गुण नियम भी उपयोग करते हैं । $xy = yx$ और $xz = zx$.

उदाहरण 4 : $x^3 + 5x^2 - 4x + 6$ में स $2x^3 - x^2 + 4x - 6$ घटाईए।

हल : यहाँ सरलता से घटाने के लिए हम सजाती पदों को एक दूसरे की नीचे लिखते हैं। ध्यान दीजिए कि हम संबंधित सहगुणांकों को घटाते हैं। ऋणात्मक संख्या घटाने का अर्थ है उस संख्या को ऋणात्मक संख्या जोड़ना है। इसलिए हमने घटाने के पदों के चिन्ह बदले हैं और सहगुणांक जोड़ दिया है।

$$
\begin{array}{l}
+\ 1x^3 \ + 5x^2 - 4x + 6 \\
2x^3 \ - x^2 + 4x - 6 \\
(-2)\ (+1)\ (-4)\ (+6) \\
\hline
-1x^3 + 6x^2 - 8x + 12 \\
\hline
\end{array}
$$

एक बार घटाने का अर्थ समझने के बाद, आप निम्न रूप से त्वरित गति से घटा सकेंगे।

$(x^3 + 5x^2 - 4x + 6) - (2x^3 - x^2 + 4x - 6)$

$= x^3 + 5x^2 - 4x + 6 - 2x^3 + x^2 - 4x + 6$

$= (1 - 2)x^3 + (5 + 1)x^2 + (-4 - 4)x + (6 + 6)$

$= -1x^3 + 6x^2 - 8x + 12$

$= -x^3 + 6x^2 - 8x + 12$

अभ्यास 2.2

1. सजाती पदों को वर्गीकरण कीजिए।

$4x^2, \frac{1}{3}x, -8x^3, xy, 6x^3, 4y, -74\ x^3, 8xy, 7xyz, 3x^2$

2. सरल करें

(i) $7x - 9y + 3 - 3x - 5y + 8$ (ii) $3x^2 + 5xy - 4y^2 + x^2 - 8xy - 5y^2$

3. जोडिये

(i) $5a + 3b,\ a - 2b,\ 3a + 5b$

(ii) $x^3 - x^2y + 5xy^2 + y^3,\ -x^3 - 9xy^2 + y^3,\ 3x^2y + 9xy^2$

4. घटाईये

(i) $8x^2y$ में से $-2xy + 3xy^2$

(ii) $4a + 6b - 2c$ में से $a - b - 2c$.

बहुपदीयों का गुणनफल

निम्न गुणलब्ध पर ध्यान दीजिए ।

(i) $5x \times 6x^2 = (5 \times 6) \times (x \times x^2) = 30x^3$

(ii) $2x \times 6y \times 8z = (2x \times 6y) \times (8z) = [(2 \times 6) \times (x \times y)] \times (8z) = (12xy) \times (8z)$

$= (12 \times 8) \times (xy \times z) = 96xyz$

इसे हम एक ही चरण में लिख सकते है :

$2x \times 6y \times 8z = (2 \times 6 \times 8) \times (x \times y \times z)] = 96xyz$

सूचना :

सहगुणांकों का गुणालब्ध = व्यंजको के सहगुणाकों का गुणनफल

गुणलब्ध का बीजीय गुणनखण्ड = सभी बीजीय गुणनखण्ड़ों का गुणनफल

उदाहरण 5 : $6x$ और $-7x^2y$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $(6x) \times (-7x^2y) = [6 \times (-7)] \times (x \times x^2y) = (-42)x^3y$

ध्यान दीजिये

यहाँ हम $x \times x^2y = (x \times x^2)y = x^3y$ का उपयोग करते है। अन्य शब्दों में हम एक जैसे चरांक को गुणा करते है। और घातांक के नियम उपयोग कर व्यंजको को सरल करते है $x^m + x^n = x^{m+n}$ सभी m और n पूणांक को के लिये; जिसे आप अध्ययन करेंगे।

एक पदी को एक पदी से गुणा करना

उदाहरण 6 : $4x \times 5y \times 7z$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए

हल : $4x \times 5y \times 7z = (4 \times 5 \times 7)\ (x \times y \times z) = 140\ xyz$

उदाहरण 7 : $2l^2m \times 3lm^2$ का गुणनफल क्या है?

हल : $2l^2m \times 3lm^2 = (2 \times 3) \times (l^2 \times l) \times (m \times m^2) = 6l^3m^3$

यहाँ हम घातांक के नियम उपयोग करते है।

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

एक पदी को द्विपदी से गुणा करना

$9 \times 103 = 927$ गुणनफल पर विचार लीजिए। इसे इस तरह भी लिख सकते है।

$9 \times 103 = 9(100 + 3) = (9 \times 100 + 9 \times 3) = 900 + 27 = 927$

क्या आप को मालूम होता है कि यहाँ हम योगफल पर गुणा का वितरण नियम उपयोग किया है। जब एक द्विपदी शामिल हो हम इसी विधान उपयोग करते है। इस तरह

$2x(3x + 5xy) = [(2x) \times (3x) + (2x)\ (5xy)] = [6x^2 + 10x^2y]$

उदाहरण 8 : $(8y + 3) \times 4x$ का गुणलब्ध निर्धारित कीजिए।

हल : हम जानते हैं

$(8y + 3) \times (4x) = \ (4x) \times (8y + 3) =(4x \times 8y) + (4x) \times 3 \ = 32xy + 12x$
$= 32xy + 12x$

यहाँ हम ने गुणा का क्रम विनिमय नियम और दक्षिणहस्त वितरण नियम भी उपयोग किया है। और वाम हस्त वितरण नियम भी उपयोग कर प्राप्त कर सकते हैं।

$(8y + 3) \times (4x) = (\ (8y) \times (4x)\ ) + (3 \times (4x)\ ) = 32yx + 12x = 32xy + 12x$

क्योंकि $xy = yx$ गुणा का क्रमविनिमय नियम है।

प्रमुख बातें :

हम संख्याओं के सभी गुणधर्म बीजीय चरांकों के लिए उपयोग करते है : साहचर्य; क्रम विनिमय; घातांक के नियम; वितरण नियम, क्योंकि यहाँ लिखिता है। जब हम इन चरांकों के लिए मूल्य प्रतिस्थापित करते है, यह सही होते हैं।

द्विपदी को द्विपदी से गुणा करा

यदि $(4a + 6b)$ और $(5a + 7b)$ इन द्विपदीयों के गुणनफल पर विचार लीजिए।

$$(4a + 6b)\ (5a + 7b) = 4a\ (5a + 7b) + 6b(5a + 7b)$$
$$= [(4a)\ (5a) + (4a)\ (7b)] + [(6b)\ (5a) + (6b)\ (7b)]$$
$$= 20a^2 + 28ab + 30ab + 42b^2$$
$$= 20a^2 + 42b^2 + 58ab$$

अभ्यास 2.3

1. निम्नलिखित दो एक पदीय व्यंजकों के गुणनफल की तालिका पूर्ण कीजिए।

प्रथम → द्वितीय ↓	$3x$	$-6y$	$4x^2$	$-8xy$	$9x^2y$	$-11x^3y^2$
$3x$						
$-6y$						
$4x^2$						
$-8xy$						
$9x^2y$						
$-11x^3y^2$						

2. इन के गुणनफल ज्ञात कीजिए

(i) $(5x + 8)3x$, (ii) $(-3pq)\ (-15p^3q^3 - q^3)$,

(iii) $\frac{2x}{5}(3a^3\text{-}3b^3)$; (iv) $-x^2\ (x - 15)$

3.निम्नों को सरल कीजिए

(i) $(2xy - xy)\ (3xy - 5)$, (ii) $(3xy^2 + 1)\ (4xy - 6xy^2)$;

(iii) $(3x^2 + 2x)\ (2x^2 + 3)$ (iv) $(2m^3 + 3m)\ (5m - 1)$

विशिष्ट गुणनलब्ध (Special Product)

अब, हम, एक विशिष्ट गुणलब्ध, दो द्विपदियों का गुणलब्ध निम्न गुणलब्ध का अध्ययन करते हैं। पर विचार कीजिए।

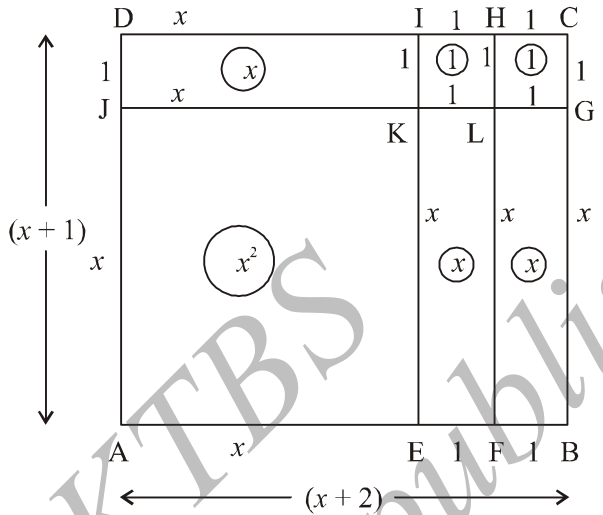
$$(x + a)\ (x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$
$$= x^2 + xb + ax + ab$$
$$= x^2 + ax + bx + ab$$
$$= x^2 + (a + b)\ x + ab$$

यहाँ हम ने क्रम विनिमय और वितरण गुणधर्म उपयोग किया है। $xb = bx$, $(ax + bx) = (a + b)x$.

हम $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ को एक **सर्वसमिका** कहते है।

इस तरह $(x + 2)(x + 1) = x^2 + (2 + 1)x + (2 \times 1) = x^2 + 3x + 2.$

सर्वसमिका $(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$ को चित्र द्वारा भी निरूपित कर सकते है।



आप देखते है कि आयत का क्षेत्रफल $(x + 2)(x + 1)$ है। आयत के दो छोटे वर्गे में और आयतों में बाँटते है। AEKJ, KLHI और LGCH वर्गो का क्षेत्रफल क्रमानुसार : x^2, 1,1 है। EFLK, FBGL, JKID आयतों का क्षेत्रफल क्रमानुसार x, x, x है। इस तरह ABCD का क्षेत्रफल $x^2 + 1 + 1 + x + x + x = x^2 + 3x + 2$ है। इस तरह हमे प्राप्त होता है। $(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$

$(x + a)(x + b)$ का मूल्य क्या है? यदि हम x, a और b के स्थान बदल दे तो सर्वसमिका क्या बनती है;
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ क्या आप जानते हैं;
हम पुन : एक सर्वसमिका प्राप्त करते है?

उदाहरण 9 **:** $(x + 6)(x + 7)$ का गुणनफल ज्ञात लीजिए?

हल : $(x + 6)(x + 7) = x^2 + (6 + 7)x + (6 \times 7) = x^2 + 13x + 42$

उदाहरण 10 : $(x + 8)(x - 4)$ का गुणनलब्ध क्या है?

हल : सर्वसमिका का उपयोग $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x+ab$

$(x + 8)(x - 4) = x^2 + (8 - 4)x + 8 \times (-4) = x^2 + 4x - 32$ हमे प्राप्त होता है।

उदाहरण 11 : $(2x + 5)(2x + 3)$ का गुणा कीजिए।

हल : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ हमें मालूम है

$$(2x + 5)(2x + 3) = (2x)^2 + 2x(5 + 3) + (5 \times 3)$$
$$= 4x^2 + 16x + 15$$

उदाहरण 12 : 103×98 का गुणनफल ज्ञात कीजिए; सर्वसमिका का उपयोग करें।

हल : $103 \times 98 = (100 + 3)(100 - 2)$

$$= (100)^2 + ((3) + (-2))\,100 + (3) \times (-2))$$
$$= 10000 + (1 \times 100) + (-6)$$
$$= 10094$$

हम यहाँ $x = 100$, $a = 3$ और $b = -2$ रखकर $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का विस्तार किया है।

उदाहरण 13 : $(P^2 - 5)(P^2 - 3)$ का गुणनफल ज्ञात करें।

हल : $(P^2 - 5)(P^2 - 3) = P^4 + [(-5) + (-3)](P)^2 + (-5) \times (-3)$

$$= P^4 - 8P^2 + 15$$

सर्वसमिकायें

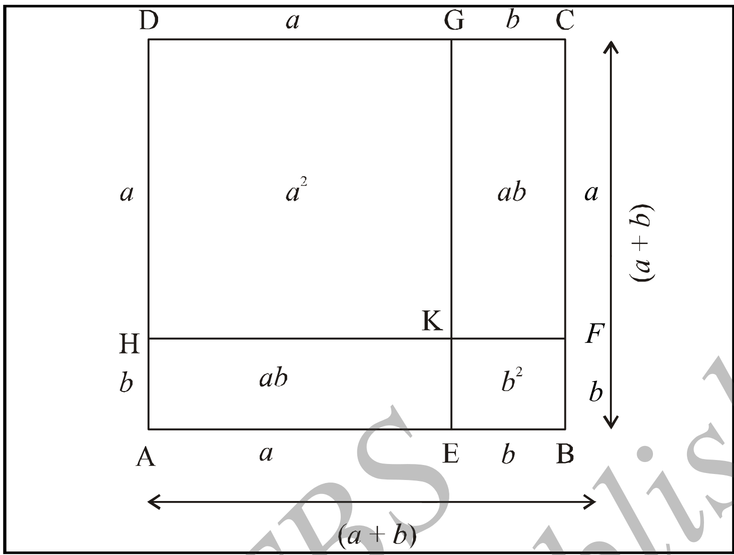
सर्वसमिका एक समानता है; जो उसे में उपस्थित चरांक के सभी मूल्य पर सत्य है।

उदाहरण $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$ एक सर्वसमिका है। चरांक x के लिए कोई भी मूल्य देने पर उसका बाया पक्ष और दाहिना पक्ष समान होता है। कुछ विशिष्ट सर्व समिका है जो गणित करने में सहायक है।

मान लीजिए $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b)$

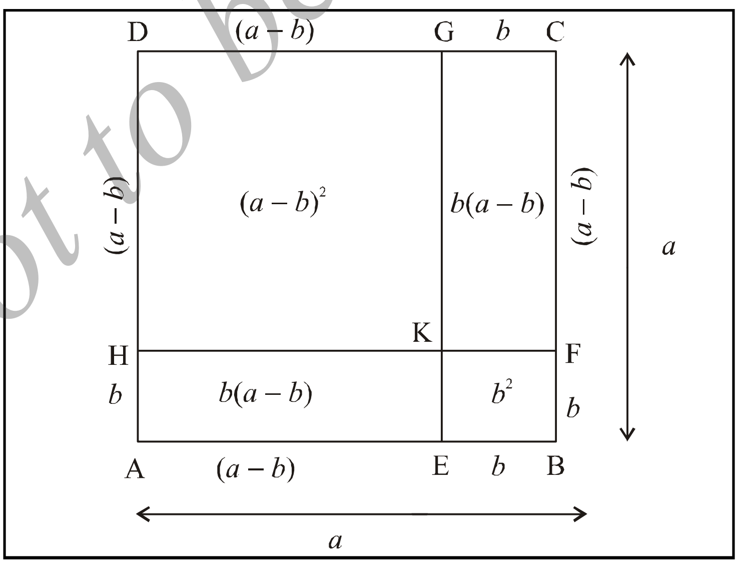
$$= a^2 + ba + ba + b^2$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

आप देखेगें हम यहाँ क्रम विनिमय नियम उपयोग लिया है $ab = ba$ ज्यामिती वर्गो का उपयोग कर इस सर्वसमिका को चित्र द्वारा सिद्ध कर सकते है।



मान लीजिये ABCD वर्ग का क्षेत्रफल $(a + b)^2$ के समान है क्यों कि इसकी भुजा की लम्बाई $(a + b)$ हैं। अब हम इस वर्ग में दो छोटे वर्ग और दो आयत बनाते है। HKGD वर्ग का क्षेत्रफल a^2 है और EBFK वर्ग का क्षेत्रपल b^2 है। KFCG आयत का क्षेत्रफल ab और AEKH आयत का क्षेत्रफल ab. इसतरह ABCD का क्षेत्रफल $a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$ है।

इसी तरह हम प्राप्त करते है। $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ प्राप्त करते है। और इस का सचित्र प्रमाण निम्न है।



मान लीजिये ABCD एक वर्ग है जिस के प्रत्येक भुजा को लम्बाई a है ताकि उसका क्षेत्रफल a^2 है। अब इस वर्ग से दो छोटे वर्ग और दो आयत बनाते है। HKGD का क्षेत्रफल $(a-b)^2$. EBFK वर्ग का क्षेत्रफल b^2 है; KFCG आयत का क्षेत्रफल $b(a-b)$ है और AEKH का क्षेत्रफल $b(a-b)$ है। (हम मानते है; कि b से a बडा है) HKGD का क्षेत्रफल, EBKF, KFCG और AEKH का क्षेत्रफल ABCD मे से घटाने पर प्राप्त होता है; अतः हम प्राप्त करते है।

$$(a-b)^2 = a^2 - b^2 - b(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^2 - b^2 - ba + b^2 - ba + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

इसी तरह $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

इन्हें **विशिष्ट** सर्वसमीका कहते है।

उदाहरण 14 : $(2x+3y)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सर्व समीका उपयोग करते है। $a = 2x$ और $b = 3y$ प्रतिस्थापित करने पर हमे प्राप्त होता है

$$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

उदाहरण 15 : $(4p-3q)^2$ का विस्तार कीजिए।

हल : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ यहाँ इस का उपयोग हो

$a = 4p$ और $b = 3q$ प्रतिस्थापित करने से

$$(4p - 3q)^2 = (4p)^2 - 2(4p)(3q) + (3q)^2$$
$$= 16p^2 - 24pq + 9q^2$$

उदाहरण 16 : $(4.9)^2$ का विस्तार करें ।

हल : हम सर्वसमिका को इस समस्या में उपयोग कर सकते है; ध्यान दीजिये।

$$(4.9)^2 = (5-0.1)^2 = (5)^2 - 2(5)(0.1) + (0.1)^2$$
$$= 25 - 1 + 0.01$$
$$= 24.01$$

इस का सत्यापन सीधे $(4.9)^2$ विस्तार करके पता लगा सकते हैं।

उदाहरण 17 : 54×46 का विस्तार करें ।

हल : फिर यहाँ सर्वसमिका उपयोग कर सकते हैं।

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ का उपयोग करें, जब $a = 50$ और $b = 4$ हम ज्ञात होता है $54 \times 46 = (50+4)(50-4)$

$$= (50)^2 - (4)^2 = 2500 - 16$$
$$= 2484$$

कार्यकलाप 1:

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ सर्वसमिका ये चित्र द्वारा निरूपित कीजिए ।

अभ्यास 2.4

1. निम्नों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) $(a+3)(a+5)$ (ii) $(3t+1)(3t+4)$
   (iii) $(a-8)(a+2)$ (iv) $(a-6)(a-2)$
2. निम्नों के मूल्य ज्ञात कीजिए।
   (i) 53×55 (ii) 102×106 (iii) 34×36 (iv) 103×96
3. $(x+a)(x+b)(x+c) = x^2 + (a+b)x + ab$ इस सर्वसमिका का उपयोग कर $(x+a)(x+b)\ x^2 + (a+b)\ x + ab$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए?
4. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग से निम्नों को सरल कीजिए।
   (i) $(a+6)^2$ (ii) $(3x+2y)^2$ (iii) $(2p+3q)^2$ (iv) $(x^2+5)^2$
5. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सर्वसमिका उपयोग कर मूल्य ज्ञात कीजिए।
   (i) $(34)^2$ (ii) $(10.2)^2$ (iii) $(53)^2$ (iv) $(41)^2$
6. यदि $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ सर्वसमिका के उपयोग से निम्नों का हल करें।
   (i) $(x-6)^2$ (ii) $(3x-5y)^2$ (iii) $(5a-4b)^2$ (iv) $(p^2+q^2)^2$
7. सर्वसमिका $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ के उपयोग से निम्नों का विस्तार कीजिए।
   (i) $(49)^2$ (ii) $(9.8)^2$ (iii) $(59)^2$ (iv) $(198)^2$
8. यदि $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ का उपयोग से निम्नों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) $(x+6)(x-6)$ (ii) $(3x+5)(3x-5)$
   (iii) $(2a+4b)(2a-4b)$ (iv) $\left(\frac{2x}{3}+1\right)\left(\frac{2x}{3}-1\right)$.
9. सर्वसमिका के उपयोग से मूल्य निधारित कीजिए।
   (i) 55×45 (ii) 33×27 (iii) 8.5×9.5 (iv) 102×98

10. निम्नों के गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$ (ii) $(2a+3)(2a-3)(4a^2+9)$

(iii) $(p+2)(p-2)(p^2+4)$ (iv) $\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{9}\right)$

(v) $(2x-y)(2x+y)(4x^2+y^2)$ (vi) $(2x-3y)(2x+3y)(4x^2+9y^2)$

शब्दावली :

स्थिरांक : कोई भी संकेत जिसका निश्चित मूल्य होता है।

चरांक : संकेत जिसे हम अपने अनुसार कोई मूल्य दे सकते हैं।

बीजीय व्यंजक : बीजीय प्रक्रिया प्रयुक्त, स्थिरांक तथा चरांक का संयोग।

बहुपदी : एक बीजीय व्यंजक जिस में चरांकों के घातांक ऋणात्मक रहित होते है।

पद : बीजीय व्यंजक का भाग जो जोड तथा व्यवकलन रहित हो किंन्तु गुणनफल तथा भाग फल से जुडा है।

सहगुणांक : चरांक से जुडा पद।

एक पदी : केवल एक पद युक्त बीजीय व्यंजक।

द्वि–पदी : दो पद युक्त बीजीय व्यजंक।

त्रि–पदी : तीन पद युक्त बीजीय व्यंजक।

घात : बहुपदी में चरांक का अत्यधिक घातांक। (यदि बहुपदी में अधिक चरांक हो तो, प्रत्येक पद के चरांक के घात जोडकर, अत्यधिक घातांक मे लेना चाहियें)

समानता : दो बीजीय व्यंजकों का समानता जो उस में उपस्थित चरांक के सभी मूल्यों के लिए सत्य है।

याद रखिए :

- एक व्यंजक जिसके चरांक और स्थिरांक, जोड गुणफल, व्यवकलन, और भाग जैसी बीजीय प्रक्रियाओं से जुडे हो उसे **बीजीय व्यंजक** कहते है।
- हम सजातीय पदों को मात्र जोड सकते हैं।
- दो व्यंजकों को गुणा करते समय, हम एक - एक पद को गुणा करते हैं और घातांक के नियम उपयोग कर सरल करते हैं।
- एक बहुपदी में चरांक के घात ऋणात्मक रहित पूर्णांक होते हैं।
- दो बीजीय व्यंजक एक समानता है, जो उसमें उपस्थित चरांक के सभी मूल्यों के लिए सत्य होता है उसे सर्वसमिका कहते हैं।

उत्तर

अभ्यास 2.1

1. स्थिरांक : 15, $\frac{-3}{7}$, $\sqrt{3}$, 7

   चरांक : $12 + z$, $\frac{-x}{5}$, $\sqrt{x}$, $\frac{2}{3}xy$; $\frac{5xy}{2}$, $7 - x$

   $6x + 4y$, $-7z$, $\frac{8yz}{4x}$, $y + 4$, $\frac{y}{4}$, $\frac{2x}{8yz}$

2. एक पदीय : $7xyz$, $\frac{8x}{y}$, $\frac{8}{5}x^2y^2$

   द्विपदीय : $9 - 4y$, $4y^2 - xz$, $7x + z^2$

   त्रिपदीय : $x - zy + 3z$, $4 + 5y - 6z$

अभ्यास 2.2

1. $\{4x^2, 4x^2\}$, $\{xy, 8xy\}$, $\{-8x^3, 6x^3, -74x^3\}$, $\left\{\frac{1}{3}x\right\}$, $\{7xyz\}$

2. (i) $4x - 14y + 11$ (ii) $4x^2 - 3xy - 9y^2$

3. (i) $9a + 6b$ (ii) $2x^2y + 5xy^2 + 2y^3$

4. (i) $10x^2y - 3xy^2$ (ii) $3a + 7b$

अभ्यास 2.3

1.

प्रथम द्वितिय	$3x$	$-6y$	$4x^2$	$-8xy$	$9x^2y$	$-11x^3y^2$
$3x$	$9x^2$	$-18xy$	$12x^3$	$-24x^2y$	$27x^3y$	$-33x^4y^2$
$-6y$	$-18xy$	$36y^2$	$-24x^2y$	$48xy^2$	$-54x^2y^2$	$66x^3y^3$
$4x^2$	$12x^3$	$-24x^2y$	$16x^4$	$-32x^3y$	$36x^4y$	$-44x^5y^2$
$-8xy$	$-24x^2y$	$48xy^2$	$-32x^3y$	$64x^2y^2$	$-72x^3y^2$	$88x^4y^3$
$9x^2y$	$27x^3y$	$-54x^2y^2$	$36x^4y$	$-72x^3y^2$	$81x^4y^2$	$-99x^5y^3$
$-11x^3y^2$	$-33x^4y^2$	$66x^3y^3$	$-44x^5y^2$	$88x^4y^3$	$-99x^5y^3$	$121\ x^6y^4$

2. (i) $15x^2 + 24x$ (ii) $45p^4q^3 + 3pq^4$

(iii) $\frac{6}{5}a^3x - \frac{6}{5}b^3x$ (iv) $-x^3 + 15x$

3. (i) $6x^3y^2 - 10x^2y - 3x^2y^2 + 5xy$;
(ii) $12x^3y^2 - 18x^3y^4 + 4xy - 6xy^2$
(iii) $6x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 6x$
(iv) $10m^3 + 12m^3 - 3m$

अभ्यास 2.4

1. (i) $a^2 + 8a + 15$ (ii) $9t^2 + 15t + 4$

(iii) $a^2 - 6a - 16$ (iv) $a^2 - 8a + 12$

2. (i) 2915 (ii) 10812 (iii) 1224 (iv) 9888

3. (i) $x^2 + (a + b + c)\ x^2 + (ab + bc + ca)\ x + abc$

4. (i) $a^2 + 12a + 36$ (ii) $9x^2 + 12xy + 4y^2$

(iii) $4p^2 + 12pq + 9q^2$ (iv) $x^4 + 10x^2 + 25$

5. (i) 1156 (ii) 104.04 (iii) 2809 (iv) 1681

6. (i) $x^2 - 12x + 36$ (ii) $9x^2 - 30xy + 25y^2$

(iii) $25a^2 - 40ab + 16b^2$ (iv) $p^4 - 2p^2q^2 + q^4$

7. (i) 2401 (ii) 96.04 (iii) 3481 (iv) 39204

8. (i) $x^2 - 36$ (ii) $9x^2 - 25$ (iii) $4a^2 - 16b^2$ (iv) $\left(\frac{4x^2}{9} - 1\right)$

9. (i) 2475 (ii) 851 (iii) 80.75 (iv) 9996

10. (i) $x^4 - 81$ (ii) $16a^4 - 81$ (iii) $p^4 - 16$

(iv) $\left(\frac{1}{16}m^4 - \frac{1}{81}\right)$ (v) $16x^4 - 81y^4$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

घटक – 3
अभिधारणा, अभिगृहित और प्रमेय

इस घटक के अध्ययन करने के बाद आप सीखेंगे :

- अपरिभाषित वस्तुओं का अर्थ, अभिधारणाऐं, अभिगृहीत और पूर्व सिद्धांत (कथन)
- कि युक्लिडीयन ज्यामिति में रेखा, बिन्दु, समतल, अवकाश अपरिभाषित वस्तुऐं हैं।
- विभिन्न प्रकार के कोण और इन कोणों में आपसी संबंध
- समांतर रेखाओं के गुणधर्म तथा युक्लिड की पाँचवी अभिगृहित

प्रस्तावना

पूर्व की कक्षाओं में आप ने अनेक ज्यामितीय वस्तुऐं जैसे सरल रेखाऐं, त्रिभुज, चतुर्भुज और वृत्त के बारे में अध्ययन किया है। आपने इन ज्यामितीय वस्तुओं के कुछ गुणधर्म भी अध्ययन किया है : कोण और उनके विभिन्न प्रकार त्रिभुज असमानता (त्रिभुज की दो भुजाओं का जोड़ तीसरे भुजा से अधिक होता है।) मध्यिका, ऊँचाई, त्रिभुज का क्षेत्रफल और वृत्त। इनमें से अधिकतर को निरीक्षण द्वारा सीखाया गया। आपको यह जानकर आश्चर्य होगा इन सबका 2000 वर्षों पूर्व ही हमारे पूर्वजों ने स्पष्टीकरण दिया था।

वास्तव में, ज्यामिति की परिकल्पना बहुत पुरानी है। इजिप्शीयन संस्कृति ने पुरातन ज्यामितीय विधान और मापों का विकास किया।

वास्तव में, ज्यामिति (Geometry) ग्रीक के दो शब्द Geo अर्थात् भूमि और metron अर्थात् मापना से बना है। जब नील (Nile) नदी पर बाढ आता था उत्पादित भूमि पानी में डूब जाती थी जिससे खींची सीमा पूर्ण रूप से मिठ जाती थी। इसलिए ईजिप्त के लोगों ने इन सीमाओं को अंकित करने कुछ ज्यामितीय विधानों का विकास किया। उन्होंने समतल आकृतियों के क्षेत्रफल और कुछ तीनमित्तीय वस्तुओं के आयतन (धनफल) का भी परिचय कराया, जिन्हें वे धान्याग्र (granaries) के रूप में उपयोग करते थे। शायद 'पिरामिड' आज भी विश्व के सात आश्चर्यों में ऐ एक है, जिस की रचना मानव की एक उपलब्धि रही है, जिस से यह कल्पना मिलती है कि इजिप्त के लोग ज्यामिति के उपयोग में कितने प्रगति पर थे।

इस तरह पुरातन ज्यामिति भूमि के प्रायोगिक भूमापन द्वारा विकसित हुई। तो भी, ज्यामिति का व्यवस्थित उपयोग 2500 वर्ष पूर्व शुरू हुआ।

उन्होंने प्रथमतः यह अनुभव किया कि ज्यामितीय विचारों की परिकल्पना देना अवश्य समझा। बिना अर्थ जाने प्रायोगिक रेखागणित में बिन्दु, रेखा और समतल का सीधा सीधा उपयोग किया। लेकिन, ग्रीक तत्वज्ञानी और गणितज्ञ कथनों को **तार्किक निगमनात्मक** विधान पर सिद्ध करना चाहते थे।

कदाचित थेल्स थे (ई.पू. 640-ई.पू 546) जिन्होंने प्रथमतः उपपत्ति की परिकल्पना प्रस्तुत की। उन्होंने समझा कि एक कथन को तार्किक विधान से सिद्ध करना अत्यन्त आवश्यक है। अनेक ग्रीक गणितज्ञ जैसे अपोलोनियस, प्लाटो, पैथागोरस, डीवोफान्टस्, प्लोमी, ने रेखागणित एवं गणित के अन्य क्षेत्र के व्यवस्थित विकास में विपुल योगदान दिया है तथा गणित को तार्किक विवेचनात्मक विज्ञान बनाने में दृढ़ नींव रखी।

युक्लिड ने इन योगदानों को रेखागणित और गणित के अन्य शाखाओं में **मूलतत्व** (**The elements**) नामक पुस्तक के **तेरह खण्डों में,** अपने स्वयं के मूल विचारों के साथ संग्रह किया।


युक्लिड

युक्लिड (ई.पू 300 के आसपास) एक ग्रीक गणितज्ञ थे। उन्हें **ज्यामिति** (रेखा गणित) **के जनक** माना जाता है। वे प्राचीन गणित के प्रसिद्ध गीक्र गणितज्ञ ''प्लोमी'' के समकालीन थे।

युक्लिड की कृति **''मूलतत्व''** **(Elements)** गणित के संपूर्ण इतिहास की अत्यन्त प्रभावशाली कृति है जिससे गणित का स्वरूप ही बदल गया और भविष्य के विकास की नींव रखी गई।

युक्लिड ने अनेक **अभिधारणा एवं ज्यामितीय अभिगृहीत** जैसे छोटे-छोटे तत्वों के आधार पर अपने परिणाम निकाले जिन्हें आज **'युक्लिडीयन रेखागणित'** से जाना जाता है। युक्लिड ने गणित के अन्य शाखाओं में भी अपना योगदान दिया है।

उनका यह प्रमाण कि असंख्य अभाज्य संख्याऐं है निगमनात्मक तर्क करने का आदर्श उदाहरण रहा है, जिसे युक्लिड ने अपने कृतियों में अपनाया है। युक्लिड के जीवन की अधिक जानकारी नहीं है। उनके जन्म दिनांक और जन्म स्थान मालूम नहीं है। जो कुछ भी मालूम है वह केवल दूसरों के कृतियों में प्राप्त किया गया है। युक्लिड का जो चित्र आज उपलब्ध वह केवल एक कलाकार की कल्पना है।

प्राचीन भारत में सुलभ सूत्र शायद गणित ज्ञान के प्रथम लिखित प्रमाण हैं, विशेषतः ज्यामिति से संबंधित (ई.पू 600 से ई. पू. 300)। वैदिक अवधि और तत्पश्चात् समय में विकसित गणितीय **'तत्वों'** के लिखित प्रमाण हैं। शुल्व सूत्र में अनेक ज्यामितिय तत्व समाविष्ट हैं।

भगवान को शांत करने **यज्ञकुण्डों** के निर्माण की धार्मिक आपूर्ति तथा **ग्रहणों** के अध्ययन के लिए भारतीय ज्यामिति का विकास हुआ।

शुल्व सूत्रों में से, **बौधायन सूत्र** सबसे प्राचीन सूत्र है, यह कहता है कि आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित होते है।

इसमें प्रसिद्ध **पैथागोरस प्रमेय** का विचार भी समाविष्ट था परन्तु दुर्भाग्य से कोई प्रमाण नहीं दिया गया।

शुल्व सूत्रों में ऐसे विधान दिये है जिनसे वृत्त के सम क्षेत्रफल के वर्ग की रचना कर सकते हैं। रचना में 'π' का मूल्य का अनुमान लगाना पड़ा और उसे 3.088 अनुमान कर उपयोग किया था जो वर्तमान π के अनुमान मूल्य से अत्यन्त करीब है।

समय के अंतराल में आर्यभट्ट, भास्कर - I, वराहमिहिर, ब्रह्मगुप्त, महावीराचार्य, भास्कराचार्य II, माधव, नीलकण्ठ, सोमयाजी और अन्य कई लोगों ने गणित के विकास में असंख्या योगदान दिया है।

अभिधारणा एवं अभिगृहित (Axioms and Postulates)

आपने देखा है कि 180 डिग्री माप के कोण को सरल कोण कहते हैं। एक कोण मापने आप कोणमापक (Protractor) उपयोग करते है। फिर भी कोणमापक का अंशांकन ऐसा होता है कि जब आप उसे सरल रेखा पर रखते हैं तो 180 डिग्री पढ़ते हैं। क्या आप देखते हैं कि आप को कोणमापक के इधर-से-उधर जाना पड़ता है?

ज्यामिति को शुद्ध निगमनात्मक विज्ञान के रूप मे विकास करते समय ग्रीक गणितज्ञों को इसी समस्या का सामना करना पड़ा। उन्हें बिन्दू, सरल रेखा और समतल तथा अवकाश जैसे मूल धारणाओं पर निर्भर करना पड़ा। परन्तु सभी परिणाम प्राप्त करने इतना काफी नहीं था। उन्हें कुछ कथनों को निर्धारित करना था जिनकी मान्यता अविवाध हो, और ज्यामिति के लिए मात्र प्रयोज्य हो। उन्हें ऐसे भी कई कथनों पर निर्भर करना पडा जो आमतौर पर सभी गणित और विज्ञान और विशेषतः ज्यामिति के लिए प्रयोज्य हो।

सामान्य कथन जो अविवाध रूप से स्वीकारे जाते हैं और विज्ञान की सभी शाखाओं के लिए प्रयोज्य है उन्हें **अभिधारणा** कहते हैं। कथन जो ज्यामिति से संबंधित है और अविवाध रूप से स्वीकारे जाते हैं उन्हें **ज्यामितिय अभिगृहित** (geometrical postulates) कहते हैं

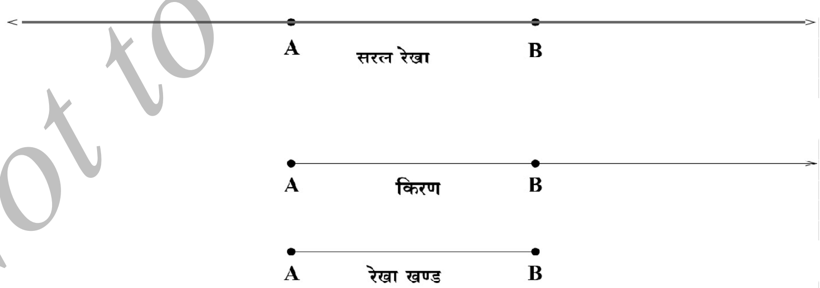
कोई भी परिणाम आप सिद्ध करते हैं तो इन अभिधारणा और अभिगृहितों पर निर्भर करना पडता है। निगमनात्मक विधान में कुछ ज्यामितीय पदों की परिभाषा देना ही एक समस्या है।

उदाहरण के लिए बिन्दु क्या है इसके बारे में आपको बुद्धि (अंतःप्रज्ञा) है। परन्तु क्या आप एक बिन्दु की परिभाषा दे सकते है? जब आप किसी की परिभाषा देते हैं तो आपको पूर्व ज्ञात ज्ञान का उपयोग करना होगा। अतः आपको कुछ अपरिभाषित पदों पर निर्भर करना होगा।

युक्लिड ज्यामिति में अपरिभाषित पद बिन्दु, रेखा, समतल है। वे कुछ अमूर्त (abstract) विचार है। इस तरह आप एक बिन्दु को देख नहीं सकते है। यदि आप एक तेज पेंसिल लेकर कागज पर अंकित करते हैं तो वह एक बिन्दु के सदृश्य हैं।

इसी तरह आप एक सरल को देख नहीं सकते। जब एक बिन्दु दो दिशाओं में गतिशील है तो एक सरल रेखा उत्पन्न होती है। एक सरल रेखा अन्तहीन होती है।

यदि A और B एक रेखा की बिन्दुऐं हैं हम सरल रेखा को $\overleftrightarrow{AB}$ से सूचित करते हैं। सरल रेखा के यदि दो भाग बनाते हैं। प्रत्येक भाग एक किरण है। इस तरह एक किरण की एक अन्तिम बिन्दु होती है और एक दिशा में अनन्त तक फैलती है। यदि A किरण की एक अंतिम बिन्दु है और B उसपर एक अन्य बिन्दु है, तो हम एक किरण को $\overrightarrow{AB}$ से सूचित करते हैं। एक सरल रेखा लीजिए और उसपर A और B दो बिन्दु अंकित कीजिए। A और B के बीच के भाग को रेखाखण्ड कहते हैं और उसे $\overrightarrow{AB}$ से सूचित करते हैं।



इसी तरह, आप एक समतल की परिभाषा दे नहीं सकते। अन्तःप्रज्ञा से, समतल एक चपटा अनंत तक फैला, पृष्ठ है जिसकी कोई मोटाई नहीं होती है। एक श्यामपट अथवा एक बड़े टंकी के निश्चल पानी का सतह, एक समतल के निश्चित भाग से सदृश है।

इस तरह युक्लिड ज्यामिति में अपरिभाषित पद हैं।

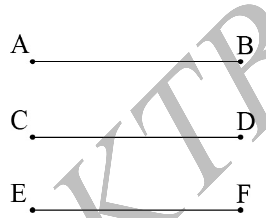
योग्य अभिधारणा और ज्यामितीय अभिगृहित के उपयोग से युक्लिड आप को बताती है कि हम, कैसी इमारत खड़ी करने वाले हैं। आईए, हम इन अभिधारणा एवं अभिगृहित का अध्ययन कर लें।

I अभिधारणा (Axioms)

कुछ मौलिक कथन है, जो स्वयं प्रमाणित है और जिन्हें अविवाध रूप से स्वीकारे गये हैं। इन्हें **अभिधारणा** कहते हैं। इन कथनों को गणित और विज्ञान के अन्य क्षेत्रों में भी उपयोग करते हैं। युक्लिड निम्न कथनों को **सामान्य धारणायें** मानकर इन का उपयोग किया।

अभिधारणा 1

एक ही वस्तु से समान रहेनवाली दो वस्तुऐं, आपस में समान होती हैं।



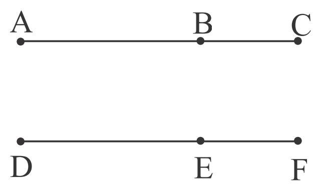
AB = CD, EF = CD
implies (⇒) AB = EF

मान लीजिए आपके पास तीन A, B और C टोकरियाँ हैं। जिनमें आम, संतरे और केले हैं। मान लीजिए A, B में समान संख्या के फल हैं और B, C में समान संख्या में फल हैं क्या आप निष्कर्ष ले सकते हैं कि A और C में भी समान संख्या में फल होते हैं?

क्या आप निष्कर्ष ले सकते हैं कि A और C में भी समान संख्या में फल होते हैं।

अभिधारणा 2

यदि समान राशियों को समान राशी जोड़ते हैं तो उनके योगफल भी समान होते हैं।



AB=DE और BC=EF ⇒ AC=DF

मान लीजिए आपके पास दो समान, लंबाई के रेखाखण्ड $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{DE}$ हैं। AB को BC जोड़िए और $\overrightarrow{DE}$ को $\overrightarrow{EF}$ जोड़िए। यदि BC = EF हो तो AC = DF.

एक टोकरी A में 10 आम लीजिए और टोकरी B में 10 संतरे लीजिए। 5 सेब दोनों टोकरियों को जोड़िए। क्या आप देखते हैं कि दोनों टोकरियों में फलों की संख्या समान हैं? (15 के समान)

अभिधारणा 3

यदि समान राशियों में से समान राशी घटाते हैं तो अविशिष्ट भी समान होते है।

मान लीजिए $\overrightarrow{AC}$ और $\overrightarrow{DF}$ समान लंबाई के दो रेखाखण्ड है। $\overrightarrow{AC}$ में से BC और $\overrightarrow{EF}$ को DF में से क्रमशः निकालिए।

यदि $AB = DF$ तो $BC = EF \Rightarrow AB = DF.$

$AC = DF$ और $BC = EF$ यह सूचित करता हैं कि $AB = DE.$

10 आम की टोकरी A और 10 संतरे की टोकरी B लीजिए। प्रत्येक टोकरी में से दो फल निकालिए। तो फिर A और B टोकरी में समान संख्या के फल रहते हैं।

अभिधारणा 4

वस्तुऐं जो एक दूसरे से सम्मिलित होती है वे परस्पर समान होना चाहिए।

इसका अर्थ यह कि यदि दो ज्यामितिय आकृतियां एक दूसरे में सम्मिलित हो, तो अवश्य वे समरूप होना चाहिए।

अभिधारणा 5

संपूर्ण, अपने भाग से बड़ा होता है।

पानी का पात्र लीजिए। उसमें से थोड़ा पानी निकालिए। क्या अवशिष्ट पानी का आयतन पूर्व (मूलतः) लिये पानी के आयतन के समान है?

युक्लिड की पाँच सामान्य धारणाएँ हैं। पहले तीन 'समान' अथवा समान वस्तुओं से संबंधित है चौथा इस तरह उल्लेख किया है कि यदि तो आकृतियाँ जैसे अंतराल, कोण, त्रिभुज अथवा वृत्त ऐसे हैं कि उनको सरकाने पर वे एक दूसरे सम्मिलित होते हैं। तो वे आकृतियाँ समान होती है। आधुनिक भाषा में उन्हें सर्वांगसम कहते हैं। निम्न सामान्य धारणाओं में दो बातें स्पष्ट होता हैं।

(1) कि ज्यामितिय आकृतियों को मात्राओं के रूपमें मान सकते हैं।

(2) कि एक आकृति दूसरे के एक भाग के रूप में दिखाई देते हैं (शायद, एक गति के बाद) तो उस भाग की मात्रा संपूर्ण की मात्रा से कम होती है।

जोड़ने और तुलना करने, हमारे पास एक ही प्रकार की मात्राऐं होना चाहिए। उदाहरण के लिए आप क्षेत्रफल को लंबाई जोड़ नहीं सकते हैं। अथवा एक त्रिभुज को बिन्दु के साथ तुलना नहीं कर सकते हैं। अभिधारणा 5 को 'से अधिक' की परिभाषा देने उपयोग कर सकते हैं।

यदि b, a का एक भाग है तो a, b से बड़ा है। पुनः यहाँ दो एक जैसी मात्राओं की तुलना है। (उदाहरण के लिए, आप एक रेखा में एक बिन्दु निकाल नहीं सकते और कहें एक रेखा, बिन्दू से बड़ी है, जो स्पष्ट रूप से अर्थहीन है)

क्योंकि बिन्दु की किसी प्रकार की मात्रा नहीं होती है, हम दो बिन्दुओं की तुलना नहीं कर सकते हैं। लेकिन हम कह सकते हैं कि एक रेखाखण्ड दूसरे से बड़ा है क्योंकि हम उनकी लंबाइयों की तुलना कर सकते हैं।

II ज्यामितिय अभिगृहित

सामान्य धारणाओं के अलावा युक्लिड ने निम्नलिखित **ज्यामितीय अभिगृहितों को** प्रस्तुत किया ताकि हम नये **सिद्धांत** निगमन कर सकते है।

अभिगृहित 1 : कोई दो बिन्दुओं को जोड़कर एक सरल रेखाखण्ड खींच सकते हैं।

अभिगृहित 2 : कोई सरल रेखाखण्ड को सरल रेखा में अनन्त तक बढ़ा सकते हैं।

अभिगृहित 3 : एक सरल रेखाखण्ड दिये जाने पर, एक अंतिम बिन्दु को केन्द्र मानकर रेखाखण्ड के माप की त्रिज्या से वृत्त खींच सकते हैं।

अभिगृहित 4 : सभी लंबकोण सर्वांगसम होते हैं।

अभिगृहित 5 : यदि एक सरल रेखा दो अन्य रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती है ताकि उसके एक पार्श्व में बनें दो अन्तःकोण का जोड़ दो लंबकोण से कम है, तो दूसरी रेखा को आगे बढ़ाने पर उस पार्श्व में प्रतिच्छेदित करेगी जिस पर, कोण, दो लंबकोण से कम है।

अभिगृहित 5 युक्लिड की प्रास्द्धि समान्तर अभिगृहित है। यह इस बात पर बल देता है कि एक समतल की दो रेखाऐं समांतर होती अथवा एक बिन्दु पर मिलती हैं।

इस अभिगृहित को प्रमेय के रूप में सिद्ध नहीं कर सकते हालाँकि अनेक लोगों ने इसे प्रथत्न किया था।

युक्लिड ने मूलतुत्व के प्रथम 28 सिद्धंत (कथन) के लिए केवल 4 अभिगृहित उपयोग परन्तु 29 वें के लिए उन्हें समान्तर अभिगृहित का उपयोग करना पडा। 1823 में जनूस बॉइलाइ और निकोलाइ लोबाके विस्की (Janos Bolyai and Nicolai Lobachevsky)

स्वतंत्ररूप से अनुभव किया कि संपूर्ण स्वसंगत ''युक्लिडीयन रहित ज्यामिति की रचना समांतर अभिगृहित के बिना कर सकते हैं। समांतर अभिगृहित का समतुल्य है:

एक समतल में, दो सरल रेखाऐं या तो बिलकुल नहीं मिलती अथवा एक बिन्दु पर मिलती हैं। यदि आप एक गोले की सतह लेते हैं, तो, गोले के बडे वृत्त सरल रेखाओं से अनुरूप होती है और कोई दो बडे वृत्त दो बिन्दुओं में मिलती हैं।

सिद्धांतों को सिद्ध करते समय, युक्लिड ने अनेक उपलक्षित पूर्वानुमान लगाये। उदाहरण के लिए, अभिगृहित 1 कहता है कि दत्त तो बिन्दुओं से, एक सरल रेखा पारित हो सकती है। परन्तु युक्लिड के मन में शायद यूँ था : एक समतल में दो बिन्दु दिये जाने पर, इनके द्वारा एक मात्र सरल रेखा जा सकती है। दूसरी ओर, एक समतल में, दत्त बिन्दु द्वारा असंख्य सरल रेखा खींच सकते है। अभिगृहित 2 कहता है, समतल में एक रेखाखण्ड दिये जाने पर, इसे आप एक मात्र सरल रेखा में विस्तार कर सकते हैं। अभिगृहित 4 दो लंबकोणों से संबंधित है। परन्तु युक्लिड ने कहीं पर भी इसकी परिभाषा नहीं दी। उनका विचार होगा कि सरल रेखा से बना कोण दो लंबकोण से बना है।

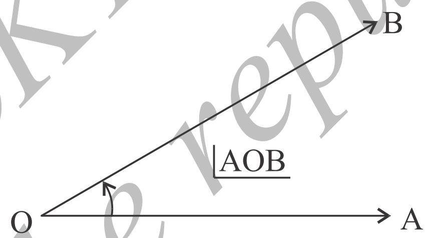
वर्तमान मानदण्डों पर युक्लिड मूलतत्वों अनेक असंगत बातें दिखाई देती हैं। फिर भी, यह, निश्चित रूप से, परिशुद्ध गणितीय सिद्धांतों पर आधारित **पहली पुस्तक** है। हाल के वर्षों में, नये अपरिभाषित वस्तु, अभिधारणा और अभिगृहित का समुच्चय प्रस्तुत करने का प्रयास किया गया है ताकि यहाँ अपरिभाषित पदों को, नये वस्तु, अभिधारणाऐं और अभिगृहित के आधार पर परिभाषित हो सकें ।

समुच्चय सिद्धांत और संख्या प्रणाली की अभिधारणाओं की तरक्की होने से बिन्दु, सरल रेखा, अथवा एक समतल की परिभाषा निर्देशांक प्रणाली के आधार पर दे सकते हैं।

अभ्यास 3.1

1. युक्लिड ज्यामिति में अपरिभाषित वस्तुऐं कौन-कौन सी हैं?
2. अभिधारणा तथा अभिगृहित में क्या अंतर है?
3. निम्नलिखित अभिधारणाओं के लिए अपने स्वयं के अनुभव के एक-एक उदाहरण दीजिए।
   (a) यदि समान राशियों को समान राशी जोड़ते हैं तो उनके योगफल भी समान होते हैं।
   (b) संपूर्ण, अपने भाग से बड़ा होता है।
4. अभिधारणाओं को प्रस्तावित करने की आवश्यकता क्या है?
5. आपने देखा है कि सभी स्वाभाविक संख्याओं के समुच्चय पर जोड़ का आवरण नियम लागू होता है। क्या यह एक अभिधारणा है अथवा कुछ ऐसा जो आप सिद्ध कर सकते हैं?

रेखाएं तथा कोण (Lines and Angles)



मान लीजिए $\overrightarrow{OA}$ प्रारंभिक बिन्दु O से एक समतल पर बनी किरण है। उसी समतल और उसी प्रारंभिक बिन्दु O से निकली और एक किरण $\overrightarrow{OB}$ पर विचार कीजिए । आपको ज्ञात होता है कि किरण $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ से O बिन्दु के कुछ निश्चिंत घुमाव के बाद प्राप्त होती है। हम कह सकते हैं $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ से साथ एक कोण बनाता है। घुमाव की मात्रा इस कोण का **माप** है।

कोण मापने के लिए हम संख्यात्मक **'डीग्री'** नामक माप उपयोग करते है। डीग्री को $a°$ से सूचित करते हैं। $\overrightarrow{OA}$ किरण और $\overrightarrow{OB}$ किरण को कोण की **भुजाएँ** कहते हैं। तथा O को **शीर्ष बिन्दु** (vertex) कहते हैं। किरण $\overrightarrow{OA}$ और किरण $\overrightarrow{OB}$ से बने कोण को $\angle AOB$ अथवा $A\hat{O}B$ से सूचित करते हैं।

सूचना : किरण $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ पर विचार कीजिए।

यदि X, $\overrightarrow{OA}$ पर कोई बिन्दू है तो $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OX}$ दोनों समान है। उसी तरह Y, $\overrightarrow{OB}$ पर कोई बिन्दू है तो $\overrightarrow{OY}$ और $\overrightarrow{OB}$ दोनों एक ही है। इस तरह $\angle AOB = \angle XOY$

कार्यकलाप 1.

कोणमापक की सहायता 40 डिग्री का कोण बनाईए ।

कार्यकलाप 2.

$\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ दो किरणें खींचकर उनके बीच बना कोण, कोणमापक की सहायता मापकर लिखिए ।

सावधान : सबसे अच्छे कोणमापक, स्केल और पेंसिल से भी बराबर 40 का कोण नहीं बना सकते। तुम्हारी आँख प्रमुख भूमिका निभाते हैं क्यों कि आँखों की ऋटि इसके लिए कारण बन सकती है। फिर भी आपकी रचना प्रायोगिक उद्देश्यों के लिए पर्याप्त है।

विभिन्न प्रकार के कोण जो आपने सीखा है उन्हें स्मरण कीजिए जैसे सरल कोण, लंबकोण, **लघुकोण, अधिक कोण, बृहतकोण, पूर्णकोण, संलग्न कोण, कोटिपूरक और संपूरक कोण।**

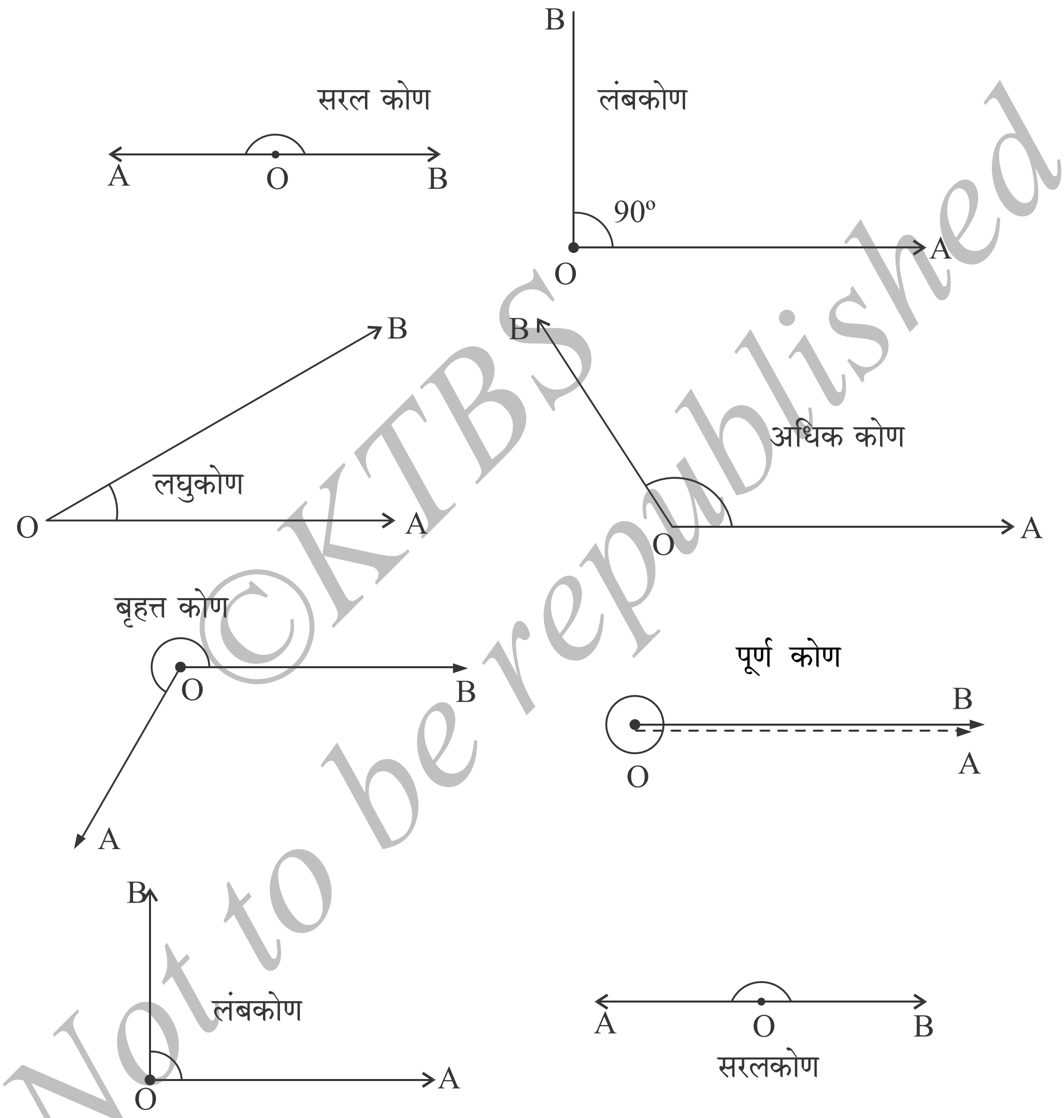
एक सरल रेखा पर 'O' बिन्दू लीजिए। मान लीजिए O सरल रेखा को दो किरणों में विभाजित करती है। यदि O सरल रेखा पर B, O के बायीं ओर है और A, O के दाहिनी ओर है तो $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ दो किरण बनते हैं. इन दो किरणों के बीच बना कोण **सरल कोण** कहलाता है। यदि आप कोणमापक को एसे व्यवस्थित करते हैं ताकि उसकी मध्याबिन्दु O से समिलित हों, तो आप देखते हैं कि $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ के नीच कोण 180° का है। फिर भी आप का कोणमापक ऐसे अंक्ति है ताकि वह किसी भी सरल रेखा को 180° पढ सकें।

इसतरह "**सरल कोण**" को मापने के उपकरण से परिभाषित कर सकते हैं

आप देखते हैं कि यूक्लिड ज्यामिति में इसे एक अभिगृहित माना गया है। लेकिन एक बार आप सरल कोण जान लेते हैं, आप अन्य सभी प्रकार के कोणों की परिभाषा दे सकते हैं।

उदाहरण के लिए, **लंबकोण** वह कोण है जिसका माप 90° के बराबर है अथवा आपको कोणमापक का आधा भाग चाहिए। इसी तरह 90° से कम माप का कोण **लघुकोण** होता है और जो कोण 90° से अधिक लेकिन सरल कोण से छोटा होता है, **अधिक कोण** कहलाता है। जिस कोण का माप 180° से अधिक परन्तु 360° से कम है, **बृहत्त कोण** कहलाता है।

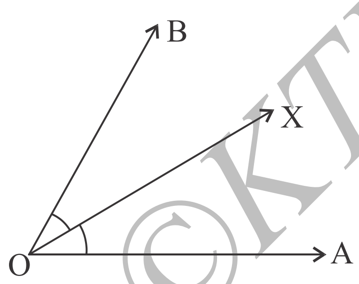
अन्ततः 360° के माप के कोण को **पूर्ण कोण** कहते हैं। यह O बिन्दु से किरण $\overrightarrow{OA}$ द्वारा लिये पूर्ण परिक्रमा के अनुरूप है।



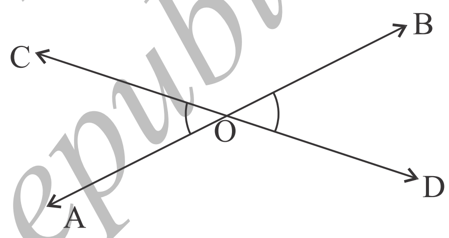
दो किरण परस्पर **लंब** कहलाते हैं यदि उनके बीच 90° का बनता है और उसे हम $\overrightarrow{OA} \perp r \ \overrightarrow{OB}$ से व्यक्त करते हैं। हम $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ किरणों को **संपूरक किरणें** कहते हैं यदि उनके बीच 180° का कोण बनता है। ध्यान दीजिए उस संदर्भ में $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ किरणें **विरुद्ध दिशा** में होती है।

दोनों कोणों को **संपूरक** कोण कहते हैं यदि उनका योगफल 180° है। इसी तरह दो कोण **कोटिपूरक** कोण कहलाते हैं यदि उनका योगफल 90° है। दो कोण **संलग्न** कोण कहलाते हैं यदि दोनों कोण के बीच एक सामान्य शीर्ष बिन्दु (प्रारंभिक बिन्दु) (vertex) और एक सामान्य भुजा होती है। यदि दो सरल रेखाऐं 'O' में प्रतिच्छेदित होती हैं तो चार कोण बनते है : यदि पहली रेखा को 'O' बिन्दु $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ दो किरणों में विभाजित करती है और दूसरी रेखा $\overrightarrow{OC}$ और $\overrightarrow{OD}$ नामक किरणों से विभाजित करती है, तो हमें $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$ और $\angle DOA$ चार कोण प्राप्त होते हैं।

$\angle AOC$ और $\angle BOD$ कोणों के युग्म (जोडी) को **शीर्षाभिमुख कोण** (vertically opposite angles) कहते हैं। ध्यान दीजिए $\angle COB$ और $\angle DOA$ भी शीर्षाभिमुख कोण हैं।



संलग्न कोण



शीर्षाभिमुख कोण

रेखाखण्डों की लंबाई और कोण मापते समय आपको निम्न नियम ध्यान में आये होंगे। यूक्लिड ने इन्हें अलग रूप से कथित नहीं किया, बल्कि नये कथनों के उत्पत्ति में निहित रूप से सत्य मान लिया। इन्हें हम अतिरिक्त अभिगृहित मानते हैं।

नियम 1 : प्रत्येक रेखाखण्ड की घनात्मक लंबाई होती है (रेखाखण्ड $\overrightarrow{AB}$ की लंबाई AB अथवा |AB| से सूचित करते हैं ।))।

नियम 2 : यदि C रेखाखण्ड $\overrightarrow{AB}$ पर कोई बिन्दु हो तो, $\overrightarrow{AB}$ की लंबाई $\overrightarrow{AC}$ और $\overrightarrow{CB}$ की लंबाई का योग है अर्थात् AB = AC + CB

नियम 3 : प्रत्येक कोण का निश्चित माप होता है। एक सरल कोण का माप 180° होता है।

नियम 4 : यदि $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ ऐसे हो ताकि $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ के बीच हो तो $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

नियम 5 : यदि दो किरणों के बीच का कोण शून्य हो तो वे सम्नम्मिल होते हैं, इसके विपरीत, यदि दो किरण सममिल्ति हो, तो उनके बीच के कोण का माप शून्य अथवा 360° का संख्यात्मक गुणज होता है।

सूचना : कोण मापते समय हम निम्न विधान उपयोग करते हैं : यदि कोण को घडी के विरुद्ध दिशा में मापते हैं तो वह घनात्मक है। यदि उसे घडी की दिशा में मापते हैं तो वह ऋणात्मक है।

सूचना : स्वनिष्ठ रेखागणित के विकास में कम से कम कितने अभिधारणाऐं आवश्यक है, यह गणित सिद्धांत का प्रश्न रहा है। तो भी, यहाँ हम कनिष्ठ संख्या से चिंतित नहीं है, ना यूक्लिड द्वारा बनाये मूल अभिधारणा एवं अभिगृहित को बनाये रखना चाहते हैं। वास्तव में, यूक्लिड द्वारा उपयुक्त अभिधारणाओं में अनेक अंतर थे और तत्पश्चात् के गणितज्ञों ने कुछ और अभिधारणाएँ जोड़े हैं।

कार्यकलाप 3 : कागज पर सरल रेखा $\overrightarrow{AB}$ खींचिए। उस पर कोई O बिन्दु अंकित कीजिए। उसपर एक किरण $\overrightarrow{OC}$ खींचिए। $\angle BOC$ और $\angle COA$ कोणों को कोण मापक की सहायता से मापिये।

$\angle BOC + \angle COA$ का योगफल क्या है? इसे $\overrightarrow{OC}$ के स्थान बदलकर दोहराईए। आपको क्या पता चलता है?

आपको ज्ञात होगा कि इन दो कोणों का योग हमेशा 180° है। क्या आप इस अभिधारणा और अभिगृहित को सिद्ध कर सकते हो?

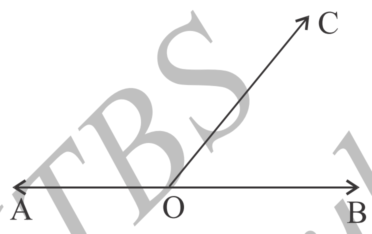
सूचना : शायद आपको अनुभव हुआ होगा कि यहाँ तार्किक उपपत्ति की आवश्यकता है। भले आप सरल रेखा और उसपर खड़ी किरण को किसी भी स्वरूप में लें। आप देखेंगे कि संलग्न दो कोणों का योगफल हमेशा 180° होता है। फिर भी, इस बात का इन्कार नहीं कर सकते की, ऐसा संदर्भ होता है ताकि संलग्न दो कोणों का योगफल 180° से भिन्न है। यह तो संरचना से ज्ञात होता है कि एक सरल और उसपर एक किरण की अनेक सारी संभावनाऐं हैं और आप उन सभी घर अपनी ज्ञात बातों का सत्यापन नहीं कर सकते। इसीलिए गणितज्ञ अभिधारणा तथा अभिगृहित पर आधारित तार्किक उपपत्तियों को ढूँढते हैं।

आईए, ज्ञात करते हैं कि हमें कौन-सा कथन सिद्ध करना है। हमें नामांक्ति सरल रेखा और उसपर खड़ी किरण लेना होगा तो, वहाँ दो संलग्न होते हैं । हमें सिद्ध करना है इन संलग्न कोणोंण का योग 180° है। हम इसे सिद्धांत के रूप में लिखते हैं।

एक सिद्धांत (proposition) एक कथन है जिसे अभिधारणा एवं अभिधारणा एवं अभिगृहितों के आधार पर सिद्ध करते हैं। यह कुछ पूर्व मान्यताओं पर निर्भर करता है जिन्हें हम कथन सिद्ध करते समय उपयोग करते हैं।

सिद्धांत (कथन) 1:

मान लीजिए $\overrightarrow{AB}$ एक सरल रेखा है, और $\overrightarrow{OC}$ उसपर खड़ी एक किरण है। तो $\angle BOC + \angle COA = 180°$ उपपत्ति लिखने के पूर्व आईए हम देखते हैं कि हमें दिया गया है और हमें क्या सिद्ध करना है।



चित्र 1

दत्त अथवा मान्यताऐं

एक किरण $\overrightarrow{OC}$, सरल रेखा $\overrightarrow{AB}$ पर खड़ी है जिससे दो संलग्न कोण $\angle BOC$ और $\angle COA$ बनें है।

साध्य : $\angle BOC + \angle COA = 180°$

उपपति : नियम 4 से ज्ञात होता कि

$\angle BOC + \angle COA = \angle BOA$

परन्तु $\angle BOA$ सरल रेखा $\overrightarrow{AB}$ से निर्धारित सरल कोण है।

नियम 3 से $\angle BOA = 180°$

अब हम अभिधारणा 1 का उपयोग कर सकते हैं; $\angle BOC + \angle COA$ और 180° दोनों एक ही बात $\angle BOA$ से समान है।

तो हम निष्कर्ष लेते हैं कि $\angle BOC + \angle COA = 180°$

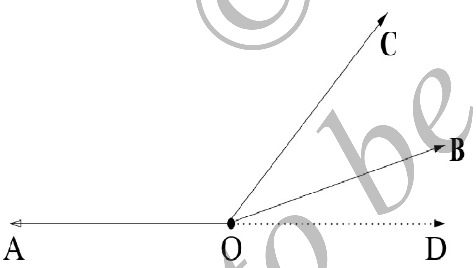
पुनः एक बार इस सिद्धांत पर ध्यान दीजिए। यह कहता है कि यदि एक किरण एक सरल रेखा पर खड़ी हो तो बनें संलग्न कोणों का योगफल 180° है। अर्थात्, दो संलग्न कोण संपूरक होते हैं ।

नये सभी सिद्धांत के लिए स्वाभाविक होता कि यदि कोई कथन S सत्य है तो फिर अन्य कोई कथन R भी सत्य हो सकता है। हम S को **दत्त मान्यता** कहेंगे और R को **निष्कर्ष।** (यहाँ, एक किरण सरल रेखा पर खड़ी है यह कथन S है जो कि मान्यता है और संलग्न कोणों का योगफल 180° कथन R है जो निष्कर्ष है)

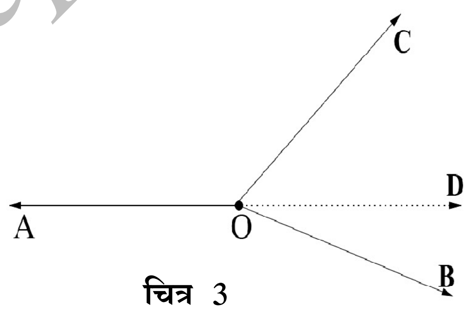
एक सिद्धांत का विलोम क्या है? ''स्वाभाविक रूप से मान्यताऐं और निष्कर्ष अपने स्थान बदलते हैं। यदि मूल सिद्धांत (कथन) में S मान्यताऐं और R निष्कर्ष है तो विलोम में R मान्यतायें और R निष्कर्ष बनते है। वर्तमान संदर्भ में विलोम है : यदि $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ तीन किरण ऐसे है ताकि $\angle BOC$ और $\angle COA$ संलग्न कोण (अर्थात् $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ के बीच में है) और यदि $\angle BOC + \angle COA = 180°$ तो A, O, B सभी एक ही सरल रेखा पर स्थित होते हैं।

यदि A, O, B एक ही सरल रेखा पर स्थित है तो उन्हें हम **'समरेख'** (collinear) कहते हैं। इसे हम दूसरे सिद्धांत के रूप में व्यक्त करते हैं।

सिद्धांत 2 : मान लीजिए $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ तीन किरण है ऐसे हैं ताकि $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ के बीच में हैं। मान लीजिए $\angle BOC + \angle COA = 180°$ है। तो A, O, B समरेख होते हैं, अर्थात् वे एक ही सरल रेखा पर स्थित होते हैं।



चित्र 2



चित्र 3

मान्यता : तीन किरण $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ ऐसे ताकि $\angle BOC$ और $\angle COA$ संलग्न कोण जिनका जोड़ 180°

निष्कर्ष : A, O, B एक ही सरल रेखा पर स्थित होते हैं।

उपपत्ति : यहाँ हम कुछ रचना करते हैं। $\overrightarrow{AO}$ को D तक बढाईए। ताकि A, O, D सभी एक रेखा AD पर स्थित होते हैं।

पहले सिद्धांत उपयोग करने $\angle DOC + \angle COA = 180°$ परन्तु दिया हुआ कि

$\angle BOC + \angle COA = 180°$

अभिधारणा 1 उपयोग करने पर, निष्कर्ष निकलता है

$\angle DOC + \angle COA = \angle BOC + \angle COA$

अब अभिधारणा 3 उपयोग करने पर $\angle DOC = \angle BOC$ दो संभावनाऐं हैं। $\overrightarrow{OC}$ और $\overrightarrow{OC}$ के बीच में हैं। (आकृति 2 में देखिए) अथवा $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ के बीच में है (आकृति 3 में देखिए)

पहले संदर्भ में, नियम 4 से हमें प्राप्त होता है :

$\angle BOC = \angle DOC = \angle DOB + \angle BOC$

और अभिधारणा 3 सूचित करता है कि $\angle DOB = 0$ है । दूसरे संदर्भ में, नियम 4 से प्राप्त होता है कि

$\angle DOC = \angle BOC = \angle BOD + \angle DOC$

और अभिधारणा 3 सूचित करता है $\angle BOD = 0$ इस तरह, $\overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OD}$ किरणों के बीच का कोण शून्य है।

नियम 5 उपयोग करने से, हम निष्कर्ष ले सकते हैं कि $\overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OD}$ सम्मिलित होते हैं। अर्थात B और O, सरल रेखा $\overrightarrow{AD}$ पर स्थित है।

इस तरह A, O, B समरेख हैं।

सूचना : सिद्धांत 1 और सिद्धांत 2 ऐसे दो ज्यामितीय कथन है जो परस्पर एक दूसरे के विलोम हैं। ज्यामिति में, यदि कोई कथन सत्य है तो कई बार उसका विलोम भी सत्य है। फिर भी, यह सामान्य रूप से मान्य नहीं है। ऐसे कथन हो सकते हैं जो सत्य हैं परन्तु उनके विलोम सत्य नहीं हो सकते हैं। आगे आप देखते हैं कि एक समबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु होता है लेकिन एक समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु नहीं होता है।

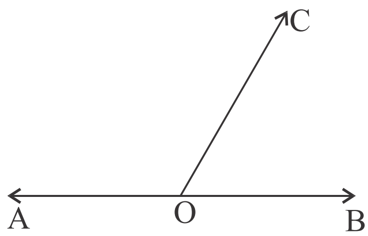
उदाहरण 1 : पार्श्व आकृति में यदि $\angle COA - \angle BOC = 50°$ इन कोणों को पता लगाईए।

हल : सिद्धांत 1 से हम जानते हैं कि

$\angle BOC + \angle COA = 180°$

और दत्त है $\angle COA - \angle BOC = 50°$

इन दो संबंधों को जोड़ने पर $2\angle COA = 230°$

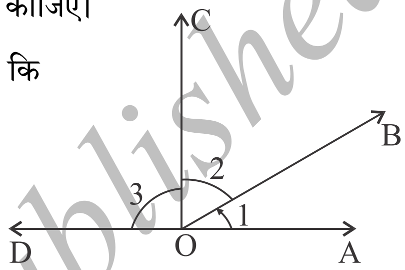


चित्र 4

(कौन सी अभिधारणा उपयोग किया है) यह सूचित करता है कि $\angle COA = 115°$ (कौन सी अभिधारणा यहाँ आवश्यक है) अब

$$\angle BOC = 180° - \angle COA$$
$$= 180° - 115°$$
$$= 65°$$

उदाहरण 2 : पार्श्व आकृति में, यदि $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD$ 1 : 2 : 3 अनुपात में है और $\overrightarrow{AD}$ एक सरल रेखा है, सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए।



चित्र 5

हल : सिद्धांत 1 का उपयोग करने से हमें ज्ञात होता है कि

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 180°$

लेकिन दिया है : $\angle BOC = 2\angle AOB$

और $\angle COD = 3\angle AOB$

इस तरह हमें ज्ञात होता है $6\angle AOB = 180°$

अर्थात् $\angle AOB = 30°$

यह इससे प्राप्त होगा कि

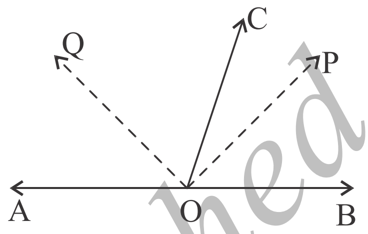
$\angle BOC = 2 \times 30° = 60$ $\quad\therefore\ \angle COD = 3 \times 30 = 90°$

परिभाषा : मान लीजिए दो किरण $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ से कोण $\angle AOB$ बना है। यदि $\overrightarrow{OP}$ एक और किरण जो $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ के बीच में ताकि $\angle AOP = \angle POB$, हम कहते हैं $\overrightarrow{OP}$, $\angle AOB$ को द्विभाजित करता है। अथवा $\overrightarrow{OP}$, $\angle AOB$ का **कोण द्विभाजक** है।

इस संदर्भ में $\angle AOP = \angle POB = \frac{1}{2}\angle AOB$

कार्यकलाप 4 : एक सरल रेखा $\overrightarrow{AB}$, और एक किरण $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$ पर खींचिए। $\angle BOC$ और $\angle COA$ मापिए। किरण $\overrightarrow{OP}$ खींचिए ताकि वह $\angle BOC$ का समद्विभाजन करें। इसी तरह, किरण $\overrightarrow{OQ}$ की रचना कीजिए ताकि वह $\angle COA$ का समद्विभाजन करें। $\angle POQ$ का माप ज्ञात कीजिए। क्या आपको ज्ञात होता है कि $\angle POQ = 90°$? इसी क्रिया को $\overrightarrow{OC}$ के अन्य किरण $\overrightarrow{AB}$ पर खींचकर दोहराइए। क्या हमेशा आपको $\angle POQ = 90°$ प्राप्त होता है? क्या आप इसे कथन के रूप में लिख सकते हैं?

सिद्धांत (कथन) 3 : मान लीजिए $\overrightarrow{AB}$ एक सरल रेखा है और **$\overrightarrow{OC}$ एक किरण उसपर खड़ी है। मान लीजिए** $\overrightarrow{OP}$, $\angle BOC$ का समद्विभाजक है, और $\overrightarrow{OQ}$, $\angle COA$ का समद्विभाजक है। तो $\angle POQ = 90°$.



चित्र 6

दत्त : $\overrightarrow{OP}$, $\angle BOC$ को समद्विभाजित करता है और $\overrightarrow{OQ}$, $\angle COA$ को समद्विभाजित करता है

साध्य : $\angle POQ = 90°$

क्योंकि $\overrightarrow{OP}$, $\angle BOC$ को समद्विभाजित करता है।

हमें ज्ञात होता है $\angle POC = \frac{1}{2}\angle BOC \ldots(1)$

क्योंकि $\overrightarrow{OQ}$, $\angle COA$ को समद्विभाजित करता है हमें ज्ञात होता है $\angle COQ = \frac{1}{2}\angle COA$ (2)

इन दोनों को जोड़ने से और नियम 4 उपयोग करने से

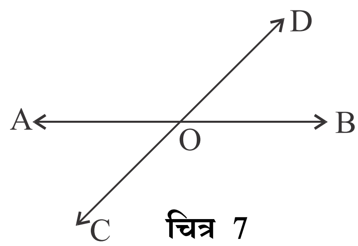
$\angle POQ = \frac{1}{2}(\angle BOC + \angle COA)$

सिद्धांत (कथन) 1 से, $\angle BOC + \angle COA = 180°$

इस तरह हमें प्राप्त होता है $\angle POQ = \frac{1}{2} \times 180 = 90°$

कार्यकलाप 5 : दो सरल रेखाऐं $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$, O में प्रतिच्छदित करते लीजिए। $\angle BOD, \angle DOA, \angle AOC, \angle COB$ मापिए। $\angle BOD$ और $\angle AOC$ की तुलना कीजिए। इसी तरह $\angle DOA$ और $\angle COB$ की तुलना कीजिए। क्या आपको बात दोहराती देखते हो? $\overrightarrow{AB}$ के सापेक्ष में $\overrightarrow{CD}$ के भिन्न भिन्न स्थितियों में इसे दोहराइए। क्या आप इसे कोई ज्यामितीय सिद्धांत के रूप में व्यक्त कर सकते हैं?

सिद्धांत (कथन 4) यदि दो सरल रेखाऐं एक बिन्दु में प्रतिच्छेदित होते हैं तो शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं।



चित्र 7

उपपत्ति :

हमें दिया हुआ है कि $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$ दो सरल रेखाऐं O बिन्दु में प्रतिच्छेदित होते हैं।

हमें सिद्ध करना है : $\angle BOD = \angle AOC$ और

$\angle DOA = \angle COB$.

मान लीजिए $\overrightarrow{AB}$ एक सरल रेखा है और एक किरण $\overrightarrow{OD}$ उसपर खड़ी है। तो

$\angle BOD + \angle DOA = 180°$ ....(1)

इसी तरह, सरल रेखा $\overrightarrow{CD}$ और $\overrightarrow{OA}$ पर विचार कीजिए, हमें मालूम है कि $\angle DOA$ और $\angle AOC$ संलग्न कोण है। इस तरह सिद्धांत 1 से प्राप्त होता है ।

$\angle DOA + \angle AOC = 180°$ ....(2)

अभिधारणा 1 उपयोग करने पर, हम (1) और (2) को तुलना कर प्राप्त करते हैं

$\angle BOD + \angle DOA = \angle DOA + \angle AOC$ ....(3)

क्योंकि हम अभिधारणा 3 से $\angle DOA$ निकाल सकते हैं, हम प्राप्त करते हैं

$\angle BOD = \angle AOC$

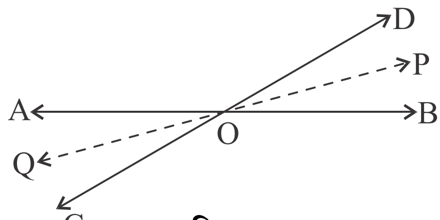
ऐसे ही तर्क से हम प्राप्त करते हैं :

$\angle DOA = \angle COB$

उदाहरण 3: मान लीजिए सरल रेखा $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$, O बिन्दु में प्रतिच्छेदित होते हैं। मान लीजिए $\overrightarrow{OP}$, $\angle BOD$ का समद्विभाजक है और $\overrightarrow{OQ}$, $\angle AOC$ का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि Q, O, P समरेख हैं।

उपपत्ति : हमें सिद्ध करना है कि $\angle POQ = 180°$ क्योंकि $\overrightarrow{OP}$, $\angle BOD$ का समद्विभाजक है हमें प्राप्त होता

$\angle POD = \frac{1}{2}\angle BOD$ ....(1)



चित्र 8

इसी तरह, दत्त का उपयोग करते हुए कि $\overrightarrow{OQ}$, $\angle AOD$ का समद्विभाजक है हमें प्राप्त होता है।

$\angle AOQ = \frac{1}{2}\angle AOC$ ....(2)

तो, हमें प्राप्त होता है,

$\angle POQ = \angle POD + \angle DOA + \angle AOQ$ (नियम 4 उपयोग करने पर)

$= \angle DOA + \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$ (1) और (2) से

$= \angle DOA + \frac{1}{2} \times 2\angle AOC....$ ($\angle BOD$ और $\angle AOC$ शीर्षाभिमुख कोण हैं)

$= \angle DOA + \angle AOC$

$180°$ (सिद्धांत 1 उपयोग करने पर)

इस से निष्कर्ष निकलता है कि P, O, Q समरेख हैं।

अभ्यास 3.2

1. निम्नलिखित संदर्भों को निरूपित करने चित्र खींचिए।

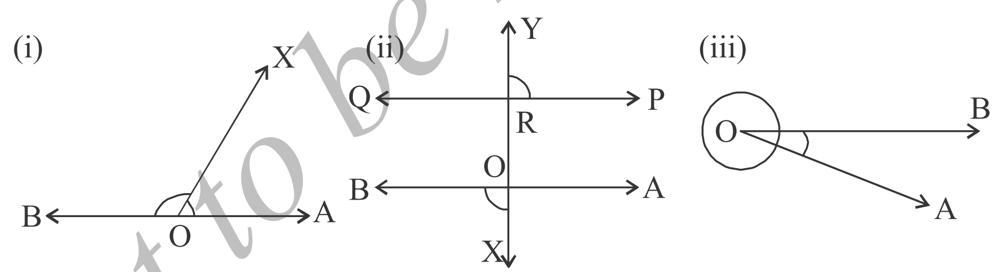
(a) तीन सरल रेखाऐं जो एक निश्चित बिन्दु से पारित नहीं होते हैं।

(b) एक बिन्दु तथा उस बिंदु से किरणें इस तरह निकलती है ताकि कोई भी दो संलग्न कोणों के बीच बना कोण लघु कोण होता है।

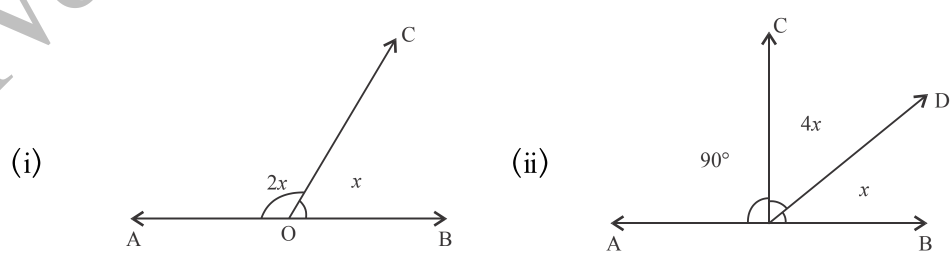
(c) दो कोण संलग्न नहीं है फिर भी वे संपूरक है।

(d) एक समतल के तीन बिन्दु जो आपस में एक दूसरे से समान दूरी पर है।

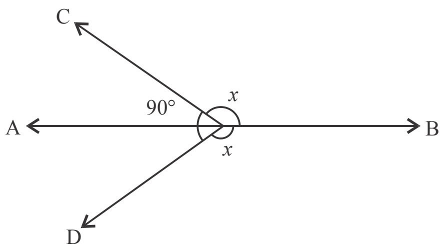
2. निम्नलिखित आकृतियों में विभिन्न प्रकार के कोणों को पहचानिए:



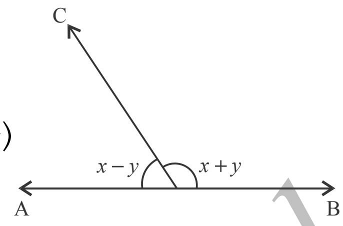
3. निम्न प्रत्येक चित्र में 'x' का मूल्य ज्ञात कीजिए ।



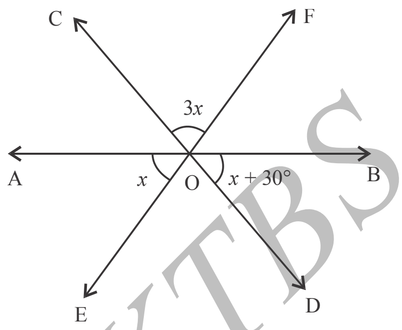
(iii)



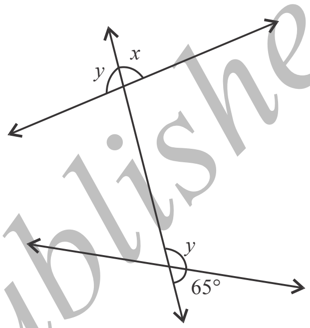
(iv)



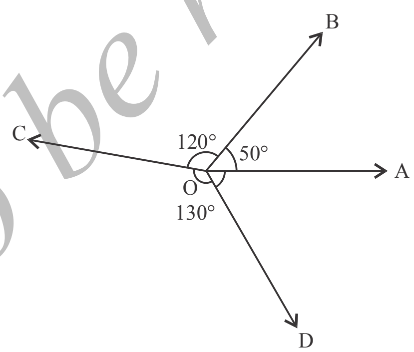
(v)



(vi)



4. कौन से कोणों की जोड़ी संपूरक है? क्या वे संपूरक किरणे हैं।
निम्न आकृति मे कौन से कोणें की जोडी संपूरक



5. मान लीजिए दो संलग्न कोण संपूरक है। सिद्ध कीजिए उनमें से एक अधिक कोण हो तो दूसरा न्यून कोण होता है।

समांतर रेखाऐं और युक्लिड का पाँचवा अभिगृहित

कोई दो भिन्न-भिन्न $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ सरल रेखाऐं लीजिए।

पहले हम दर्शाते है कि उनमें एक बिन्दु सामान्य है। इसके विपरीत मानकर, कल्पना कीजिए कि P और Q दो भिन्न-भिन्न बिन्दु जो दोनों रेखाओं पर स्थित हैं। लेकिन अभिगृहित 1 से हम जानते हैं कि एक विशिष्ट रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ हैं जो P और Q से पारित होते हैं। क्योंकि P और Q, $\overleftrightarrow{AB}$ पर हैं तो प्राप्त करते हैं $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{PQ}$ । ऐसे ही तर्क से दर्शा सकते हैं कि $\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{PQ}$ । अभिधारणा 1 उपयोग करने से हमें प्राप्त है $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$, जो हमारी मान्यता से बिल्कुल विपरीत है कि $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ भिन्न-भिन्न है। इस तरह, दो भिन्न-भिन्न रेखाएं दिये जाने पर या तो उन में कोई बिन्दु सामान्य नहीं है अथवा उनके बीच कोई बिन्दु सामान्य होती है । दूसरे संदर्भ में, दो सरल रेखाऐं एक सामान्य बिन्दु में **प्रतिच्छेदित** करती हैं।

दो सरल रेखाऐं परस्पर **समान्तर** होती है, यदि या वे सदृश्य होते हैं अथवा वे प्रतिच्छेदित नहीं करती। इस तरह दो भिन्न-भिन्न रेखाऐं $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ समांतर होती है यदि उनके बीच में कोई सामान्य बिन्दु नहीं होती।

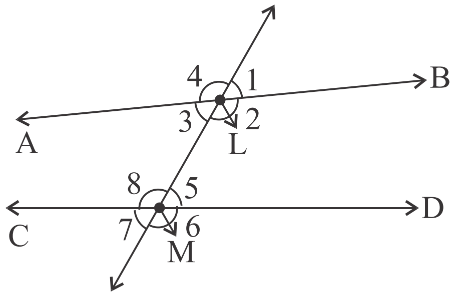
आईए, युक्लिड के पाँचवे अभिगृहित पर विचार करते हैं।

अभिगृहित 5 : यदि एक सरल रेखा दो अन्य रेखाओं को मिलती ताकि उसके एक पार्श्व के अन्तस्थ दो कोणों का योग दो लंबकोणों से कम हो, दूसरी सरल रेखा बढाने पर उस और मिलती है जिसपर कोण दो लंबकोणों से कम है।

यह युक्लिड का अत्यन्त जटिल अभिगृहित है। उसके बाद के वर्षों में, युक्लिड के पाँचवें अभिगृहित के सरल भाषांतर प्रस्तुत करने के अनेक प्रयत्न किये गये।

मान लीजिए $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो सरल रेखाऐं हैं और $\overleftrightarrow{PQ}$ एक रेखा है जो $\overleftrightarrow{AB}$ को L में और $\overleftrightarrow{CD}$ को M बिन्दु में मिलती हैं। (आकृति 8 में देखिए)। यदि एक रेखा दो अथवा अधिक रेखाओं को मिलती हैं, उसे उन रेखाओं के लिए तिर्यक रेखा कहलाती है। यहाँ $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ के लिए तिर्यक है। आकृति में दिखाये जैसे आठ कोण है $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ बनते हैं। इन में $\angle 1, \angle 4, \angle 7, \angle 6$ को **बाह्य कोण** कहलाते हैं और $\angle 3, \angle 2, \angle 5, \angle 8$ को **अन्तस्थ** कोण कहलाते है। $\angle 3, \angle 5,$ कोणों को एकांतर कोणों की जोड़ी कहलाते हैं। ध्यान दीजिए $\angle 2$ और $\angle 8$ भी एकांतर कोणों की जोड़ी है। इसी तरह $\angle 1$ और $\angle 7$ और $\angle 4$ और $\angle 6$ बाह्य एकांतर कोण कहलाते हैं । कोण $\angle 1$ और $\angle 5$ **अनुरूप कोण** कहलाते हैं ।

इसके अलावा $\angle 2$, $\angle 6$, $\angle 3$, $\angle 7$ और $\angle 4$, $\angle 8$ तीन और अनुरूप कोणों की जोडियां है।



चित्र 9

$\angle 3$ और $\angle 8$ की ध्यान दीजिए। ये $\overleftrightarrow{PQ}$ रेखा के एक ही पक्ष के अन्तस्थ कोण है। अभिगृहित 5 के अनुसार यदि $\angle 3+\angle 8<180°$ तब $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ के बायीं ओर मिलती हैं। (यदि ऐसा हुआ कि $\angle 2+\angle 5<180°$ तो वे $\overleftrightarrow{PQ}$ के दाहिने पक्ष में मिलना चाहिए) आईए, शर्त $\angle 3+\angle 8\neq 180°$ पर परीक्षण करते हैं। तो निम्न सिद्धांत (कथन) प्राप्त होता है।

सिद्धांत 5 : यदि दो समांतर रेखाओं को एक तीर्यक रेखा प्रतिच्छेदित करती है तो तिर्यक रेखा के पक्ष में बनें अन्तस्थ कोणों का योगफल 180° के समान होता है।

उपपत्ति : यदि $\angle 3+\angle 8\neq 180°$ तो $\angle 3+\angle 8<180°$ होना चाहिए नहीं तो $\angle 3+\angle 8>180°$ (आकृति में देखिए) । पहले संदर्भ में $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ के बायीं ओर मिलते है। यदि $\angle 3+\angle 8>180°$ हम देखते है कि,

$$\begin{aligned}\angle 3+\angle 8+\angle 2+\angle 5 &= (\angle 3+\angle 2)+(\angle 8+\angle 5)\\ &= \angle ALB+\angle CMD\\ &= 180°+180°\\ &= 360°\end{aligned}$$

इस तरह

$\angle 2+\angle 5=360°-(\angle 3+\angle 8)<360°-180°=180° \Rightarrow \angle 2+\angle 5 < 180°.$

अतः यदि R सत्य नहीं है तो S सत्य नहीं हो सकता। सामान्यतः हम कहते हैं ''S सूचित करता है R (S implies R) यह ''न R सूचित करता है न S'' (not R implies not S) से समतुल्य है।

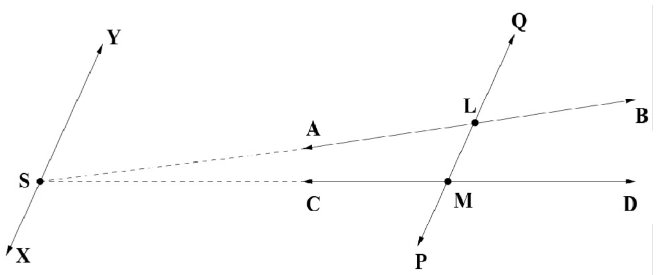
इस विधान को युक्लिड और आने अन्य गणितज्ञ उपयोग करते थे ताकि वे नये सिद्धांत सिद्ध कर सके। यदि आप को ''S सूचित करता है R'' सिद्ध करना है तो यह काफी है कि आप ''न R सूचित करता न S'' सिद्ध करें। इस विधान को ''Reductio ad absurdum '' अर्थात् तर्कविसंगत निष्कर्ष पर आना। यह लाटिन शब्द है जिसका अर्थ तर्कविंगता पर आना है।

अतः अभिगृहित 5 कहता है कि $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ के दाहीनी ओर मिलते हैं।
हम निष्कर्ष लेते हैं कि : यदि $\overleftrightarrow{PQ}$ के एक पक्ष के अन्तस्थ कोणों का योग 180° के समान नहीं है, तो $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ किसी बिन्दु पर मिलते हैं।

($\overleftrightarrow{PQ}$ के बायीं ओर अथवा दाहिनी ओर)

इस तरह, यदि $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ समांतर है, तो कोई तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ के एक ही पक्ष के अन्तस्थ कोणों का योग 180° के समान होता है। यह इस कथन की उपपत्ति है।
इस तरह अभिगृहित 5 सूचित करता है कि एक समांतर रेखाओं की जोड़ी और एक तिर्यक रेखा दिये जाने पर, तिर्यक रेखा के एक ही पक्ष के अन्तस्थ कोणों का योगफल 180° के समान होता है।
क्या इसका विलोम सत्य है? दो सरल रेखाऐं और एक तिर्यक रेखा ऐसे दिये जाने पर ताकि तिर्यक रेखा के एक ही पक्ष के कोणों का योगफल 180° तो क्या यह अर्थ होता है कि दोनों रेखाऐं समांतर है? यहाँ हम युक्लिड का **'समांन्तर अभिगृहित'** का समतुल्य भाषांतर उपयोग करते है। इसे सबसे प्रथम स्कॉटिश गणितज्ञ ''प्लेफेर'' ने प्रस्तुत किया।
प्लेफेर अभिगृहित : समतल में एक सरल रेखा और सरल रेखा के बाहर एक बिन्दु उसी समतल में दिये जाने पर, उस दत्त बिन्दु से एक मात्र ही सरल रेखा उस बिन्दु से पारित होती और दत्त रेखा को समान्तर होती है।
हमें निम्न कथन प्राप्त होता है।
सिद्धांत (कथन)6 : यदि एक तिर्यक रेखा दो प्रत्येक सरल रेखाओं इस तरह प्रतिच्छेदित करती ताकि तिर्यक के एक पक्ष के अन्तस्थ कोणों का योगफल 180̊, तो दोनों रेखाऐं परस्पर समान्तर होती हैं।

उपपत्ति : मान लीजिए $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो सरल रेखाऐं हैं और $\overleftrightarrow{PQ}$ तिर्यक रेखा क्रमशः $\overleftrightarrow{AB}$ को L में और $\overleftrightarrow{CD}$ को M में प्रतिच्छेदित करती हैं। मान लीजिए $\angle ALM + \angle LMC = 180°$ है। कहिए $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ समान्तर नहीं है। तो वे किसी बिन्दु S पर मिलना चाहिए (आकृति 9 देखिए) प्लेफेर अभिगृहित के अनुसार एक प्रत्येक $\overleftrightarrow{XY}$ रेखा होती है जो S से पारित होती है और $\overleftrightarrow{PQ}$ की समांतर होती है।



चित्र 10

क्योंकि $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, हमें प्राप्त है $\angle QLS + \angle LSY = 180^\circ$

(वे समान्तर रेखा $\overleftrightarrow{XY}$ और $\overleftrightarrow{PQ}$ की तीर्यक रेखा $\overleftrightarrow{SR}$ के एक ही पक्ष में बनें अन्तस्थ कोण)

परन्तु $\angle QLS + \angle ALM = 180^\circ$ (वे $\overleftrightarrow{PQ}$ रेखा पर खड़ी किरण $\overrightarrow{LA}$ से बनें संलग्न कोण।)

अर्थात् $\angle LSY = \angle ALM$ (कौन से अभिधारणा आवश्यक है?)

परन्तु $\angle ALM + \angle LMC = 180^\circ$ (दत्त)

हमें यह ज्ञात है कि $\angle LMC + \angle MSY = 180^\circ$ (क्योंकि ये $\overleftrightarrow{XY}$ और $\overleftrightarrow{PQ}$ समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेदित करनेवाले तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{SD}$ के एक ही पक्ष में बनें अन्तस्थ कोणों का योगफल है)

इस तरह हमें प्राप्त होता है $\angle ALM = \angle MSY$

इससे अर्थ नहीं होता कि $\angle LSY = \angle MSY$

परन्तु $\angle MSY = \angle MSL + \angle LSY$

तो $\angle MSL = 0$

अतः $\overleftrightarrow{SB}$ और $\overleftrightarrow{SD}$ सम्मिलित हैं।

तो इस बात की पुष्टि होती है कि $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ वही हैं और इस बात विपरीत अर्थ होता की वे भिन्न-भिन्न रेखाऐं है।

तो निष्कर्ष निकलता है कि $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ फ

कार्यकलाप 6 : दो समांतर रेखाऐं खींचिए। एक तिर्यक खींचकर उनके प्रतिच्छेदन से बने कोणों का माप ज्ञात कीजिए। आपको ज्ञात होगा कि

1. एकान्तर कोण की कोई जोडी समान होते हैं।

2. अनुरूप कोण की कोई जोडी समान होते है।

प्रमेय का सत्य है जो कथनों से सिद्ध किया है।

तिर्यक रेखा के विभिन्न स्थानों पर इसी प्रक्रिया को दोहराईए। आप यही परिणाम प्राप्त करेंगे। इसे हम एक प्रमेय के रूप में व्यक्त कर सकते है।

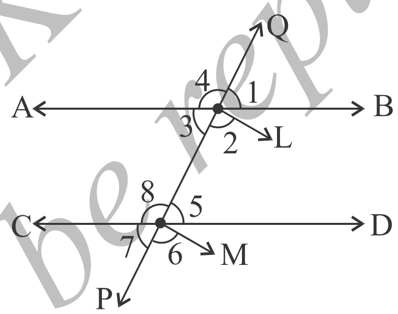
प्रमेय 1 : यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छदित करती है तो

i. एकांतर कोणों की प्रत्येक जोड़ी समान होती है।

ii. अनुरूप कोणों की प्रत्येक जोड़ी समान होती।

दत्त : $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो प्रत्येक समान्तर रेखाऐं है। और $\overleftrightarrow{PQ}$ एक तिर्यक रेखा है जो $\overleftrightarrow{AB}$ को L में और $\overleftrightarrow{CD}$ को M में प्रतिच्छेदित करती है। (आकृति 10 देखिए)

साध्य : $\angle 3 = \angle 5$ और $\angle 1 = \angle 5$



चित्र 11

उपपत्ति : क्योंकि $\angle 3$ और $\angle 8$ समांतर रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को प्रतिच्छेदित करनेवाले तिर्यक रेखा PQ के एक पक्ष में बने अन्तस्थ कोण है हम जानते हैं कि

$\angle 3 + \angle 8 = 180°$

परन्तु $\angle 8$ और $\angle 5$ सरल रेखा $\overleftrightarrow{CD}$ पर खड़े किरण $\overrightarrow{MP}$ से बने संलग्न कोण हैं।

इसलिए, हम जानते हैं

$\angle 8 + \angle 5 = 180°$

तुलना करने पर हमें ज्ञात है $\angle 3 = \angle 5$ पुनः ध्यान दीजिए $\angle 2 + \angle 3 = 180° = \angle 8 + \angle 5$

यहाँ $\angle 3 = \angle 5$ उपयोग करने पर $\angle 2 = \angle 8$ प्राप्त करते हैं।

हम यह जानते हैं $\angle 1 = \angle 3$ क्योंकि वे शीर्षाभिमुख कोण है। इसे $\angle 3 = \angle 5$ उपयोग करने पर हमें ज्ञात होता $\angle 1 = \angle 5$

इस तरह अनुरूप कोणों की जोड़ी $\angle 1, \angle 5$ समान इसी प्रकार है। और $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$ तथा $\angle 3 = \angle 7$ सिद्ध करना सकता है ।

सोचिए :

समांतर रेखा और तिर्यक रेखा से संबंधित दो कथन है।

(i) यदि एक तिर्यक रेखा दो प्रत्येक समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती है तो बनें, एकांतर कोण समान होते हैं।

(ii) यदि एक तिर्यक रेखा दो प्रत्येक समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती है तो बनें अनुरूप कोण समान होते हैं। परन्तु ये दोनों स्वतंत्र कथन नहीं है। किसी एक को मानकर दूसरे को आसानी से कथन 1 और 4 उपयोगकर सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 1 का विलोम क्या है? यदि दो प्रत्येक सरल रेखाऐं हैं और एक तिर्यक है ताकि हर एक एकांतर कोणों की जोड़ी समान है, क्या हम सिद्ध कर सकते हैं कि दोनों रेखाऐं समांतर है? ध्यान दीजिए कि यदि हम इसे सिद्ध कर सकते हैं, आप यह भी सिद्ध कर सकते है कि दत्त तो सरल रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेदित करती है ताकि हर एक अनुरूप कोणों की जोड़ी समान है, तो दत्त रेखाऐं समांतर होती है। (पूर्व निरीक्षण उपयोग कीजिए)

इस तरह हमें निम्न प्रमेय प्राप्त कर सकते हैं।

प्रेमय 2 : मान लीजिए एक तिर्यक रेखा दो प्रत्येक सरल रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती है ताकि एक एकांतर कोणों की जोड़ी समान है, तो दोनों रेखाऐं परस्पर समांतर होती है।

दत्त : $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो सरल रेखाऐं हैं और $\overleftrightarrow{PQ}$ एक तिर्यक रेखा है। (आकृति 11 देखिए)

और $\angle 3 = \angle 5$.

साध्य: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

हम जानते हैं कि $\angle 8 + \angle 5 = 180°$ (क्योंकि वे संपूरक कोण है) लेकिन पूर्वसिद्धांत के अनुसार $\angle 3 = \angle 5$ इस तरह हम प्राप्त होता है। $\angle 3 + \angle 8 = 180°$ ऐसे तो $\angle 3$ और $\angle 8$ $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ के तिर्यक रेखा के एक ही पक्ष में बनें अन्तस्थ कोण है।

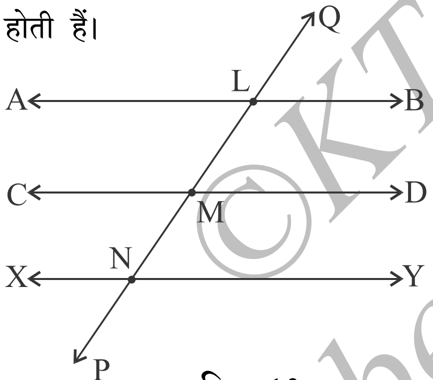
सिद्धांत 6 , से निष्कर्ष निकलता है कि $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

उपप्रमेय : यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती है ताकि एक अनुरूप कोणों की जोड़ी समान है, तो दोनों सरल रेखाऐं समांतर होती है।

उपपत्ति : आकृति 11 के अनुसार , हमें दिया हुआ है, $\angle 1 = \angle 5$ परन्तु $\angle 1 = \angle 3$ क्योंकि ये शीर्षाभिमुख कोण हमें प्राप्त होता है। $\angle 3 = \angle 5$ अतः प्रमेय 2 से $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

कार्यकलाप 7 **:** दो समांतर रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ खींचिए ।$\overleftrightarrow{XY}$ सरल रेखा $\overleftrightarrow{CD}$ के समांतर खींचिए । एक तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ खींचिए। मान लीजिए वह $\overleftrightarrow{AB}$ को L में काटता है और $\overleftrightarrow{CD}$ को M में काटता है तथा $\overleftrightarrow{XY}$ को N में प्रतिच्छेदित करती है। $\angle BNQ$ और $\angle YNQ$ मापिए। क्या आप देखते हैं कि उनका माप समान है। $\overleftrightarrow{PQ}$ के विभिन्न स्थानों पर इसे दोहराईए।

उदाहरण 4 : दो सरल रेखाऐं जो एक सामान्य रेखा को समांतर है तो वे परस्पर समांतर होती हैं।



चित्र 12

हल : मान लीजिए $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{XY}$ दो रेखाऐं है जो एक सामान्य रेखा $\overleftrightarrow{CD}$ को समांतर है। हम सिद्ध करते है $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{XY}$ एक तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ खींचिए ताकि वह क्रमशः $\overleftrightarrow{AB}$ को L में और $\overleftrightarrow{CD}$ को M में तथा $\overleftrightarrow{XY}$ को N में प्रतिच्छेदित करती है।

हमें ज्ञात होता है कि $\angle BLP = \angle DMP$

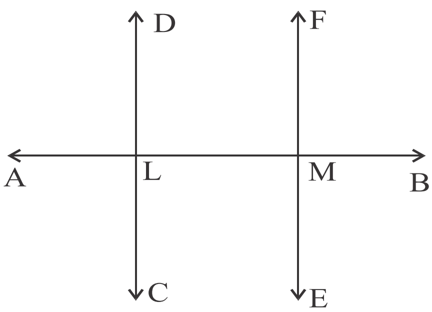
क्योंकि वे समांतर रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को प्रतिच्छेदित करनेवाले तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ से बने अनुरूप कोण है।

इसी तरह , $\angle DMP = \angle YNP$ (क्यों?)

अभिधारणा 1 उपयोग से $\angle BLP = \angle YNP$

अब हम प्रमेय 2 का उपप्रमेय उपयोग करने से और निर्णय ले सकते हैं $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{XY}$.

उदाहरण 5 **:** मान लीजिए $\overleftrightarrow{AB}$ एक सरल रेखा है। कल्पना कीजिए $\overleftrightarrow{CD}$ और $\overleftrightarrow{EF}$ दो सरल रेखाऐं हैं ताकि वे प्रत्येक $\overleftrightarrow{AB}$ से लंब है। सिद्ध कीजिए $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$



चित्र 13

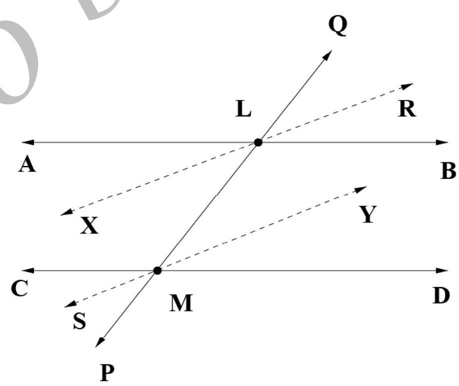
हल : मान लीजिए $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ और $\overleftrightarrow{EF}$ को क्रमशः L और M में प्रतिच्छेदित करती है।

क्योंकि $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, हमें प्राप्त होता है $\angle DLA = 90°$ $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AB}$ उपयोग करने से $\angle FMA = 90°$

$\therefore$ $\angle DLA = \angle FMA$ परन्तु $\overleftrightarrow{CD}$ तथा $\overleftrightarrow{EF}$ रेखा और तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ से बनें अनुरूप कोण है। अतः प्रमेय 2 के उपप्रमेय से निष्कर्ष लेते हैं कि $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

उदाहरण 6 : सिद्ध कीजिए कि दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेदित करनेवाले तिर्यक रेखा से बने एकांतर कोणों के समद्विभाजक परस्पर समांतर होते हैं।

हल : हमें दो समांतर रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ तथा तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ दिये गये हैं। एकांतर कोण $\angle ALM$ और $\angle LMD$ की जोड़ी पर विचार कीजिए। मान लीजिए $\overrightarrow{LX}$, $\angle ALM$ का समद्विभाजक है, $\overrightarrow{LY}$, $\angle LMD$ का समद्विभाजक है। $\overrightarrow{LX}$ को सरल रेखा $\overleftrightarrow{XR}$ और किरण $\overrightarrow{MY}$ को सरल रेखा $\overleftrightarrow{SY}$ तक बढाईए जैसे आकृति में दिखाया गया है। (आकृति 13 में देखिए) । हमें $\overleftrightarrow{XR} \parallel \overleftrightarrow{SY}$ दर्शाना है।



चित्र 14

तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$, को सरल रेखा $\overleftrightarrow{XR}$ और $\overleftrightarrow{SY}$ के साथ विचार कीजिए।

हमें प्राप्त होता,

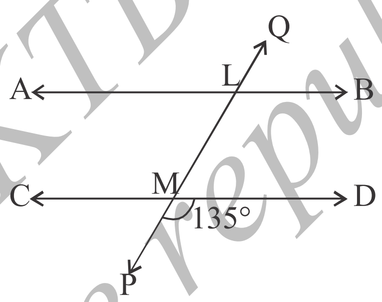
$$\underline{|XLM} = \frac{1}{2}\underline{|ALM}, \underline{|LMY} = \frac{1}{2}\underline{|LMD}$$

ऐसे भी $\underline{|ALM} = \underline{|LMD}$ (क्यों?) अतः हमें प्राप्त होता, $\underline{|XLM} = \underline{|LMY}$ परन्तु $\underline{|XLM}$ और $\underline{|LMY}$ तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$, तथा सरल रेखा $\overleftrightarrow{XR}$ और $\overleftrightarrow{SY}$ के बीच बनें एकांतर कोण है।

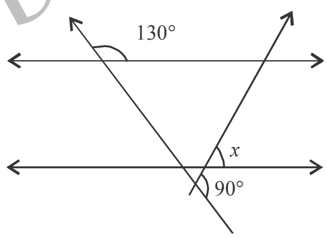
अतः प्रेमेय 2 से सिद्ध होता है कि $\overleftrightarrow{XR} \parallel \overleftrightarrow{SY}$

अभ्यास 3.3

1. निम्नलिखित आकृति में सभी कोणों को ज्ञात कीजिए।



2. निम्नलिखित चित्र में x का मूल्य ज्ञात कीजिए ।



3. सिद्ध कीजिए कि यदि एक सरल रेखा एक अथवा अधिक समांतर रेखाओं को लंब है तो वह अन्य रेखाओं को भी लंब है।
4. मान लीजिए $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो समांतर रेखाऐं है और $\overleftrightarrow{PQ}$ एक तिर्यक रेखा है। दर्शाइए, कि तिर्यक रेखा के एक पक्ष के अन्तस्थ कोणों की जोड़ी के समद्विभाजक परस्पर लंब होते है।

शब्दावली

अपरिभाषित वस्तुऐं : पूर्व ज्ञात पदों के आधार पर जिन वस्तुओं की हम गणित में परिभाषा नहीं दे सकते हैं।

अभिधारणा (Axiom)**:** कुछ कथन जिन्हें गणित के सभी शाखाऐं मानते हैं, जिनकी मान्यता गणितीय प्रमाणों पर स्वीकारी जातीं है।

अभिगृहित (Postulates)**:** कुछ कथन जिन्हें गणित के विशिष्ट शाखा में माना जाता है।

पूर्वसिद्धांत (Hypothesis)**:** एक सिद्धांत (कथन) सिद्ध करने कल्पित कुछ शर्तें ।

संलग्न कोण (Adjacent angles)**:** एक सरल रेखा पर खड़ी एक किरण से बनें कोण।

कोटिपूरक कोण (complementary angles)**:** दो कोण जिनका जोड़ 90° है।

संपूरक कोण (supplementary angles)**:** दो कोण जिनका जोड़ 180° है।

सरल कोण: एक सरल रेखा से बना कोण, 180° से समान।

संपूर्ण कोण : 360° के समान कोण।

बृहत्त कोण (Reflex angle)**:** जो कोण जिसका माप 180° से अधिक और 360 से कम है।

रैखिक कोणों की जोड़ी(Linear pair)**:** कोणों की जोड़ी जिनसे एक सरल रेखा बनती है।

शीर्षाभिमुख कोण (vertically opposite angles)**:** जब दो सरल रेखाऐं प्रतिच्छेदित करती है, कोणों की जोड़ी जिनसे सरल रेखा नहीं बनती।

समरेख (collinear)**:** एक ही रेखा पर उपस्थित बिन्दुऐं।

समांतर रेखाऐं (parallel lines)**:** सरल रेखाओं का समूह जो दो-दो में प्रतिच्छेदित नहीं करते।

एकांतर कोण (alternate angles)**:** जब एक तिर्यक रेखा रेखाओं की जोड़ी को प्रतिच्छेदित करती है, तिर्यक रेखा से बनें कोण जो रैखिक नहीं है और तिर्यक रेखा के दोनों पक्षों में उपस्थित है।

अनुरूप कोण(corresponding angles)**:** जब तक तिर्यक रेखा रेखाओं की जोड़ी को प्रतिच्छेदित करती है, तिर्यक रेखा से बनें कोण जो तिर्यक रेखा के एक ही पक्ष में उपस्थित है और दोनों रेखाओं के तदनूरूपी पक्ष में होते हैं।

याद रखिए :

- त्रिभुजों को उनके भुजाओं के और कोणों के आधार पर वर्गीकृत करते है।
- त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योगफल 180° होता है।
- एक त्रिभुज का बाह्य कोण उसके अन्तस्थ अभिमुख कोणों के योगफल 180° होता है।

उत्तर

अभ्यास 3.1

1. (i) →(A) (ii) →(D) (iii) →(A) (iv) →(B)
2. (i) विषमबाहू (ii) विषमबाहू (iii) विषमबाहू (iv) समद्विबाहू
   (v) विषमबाहू (vi) विषमबाहू (vii) विषमबाहू (viii) समबाहू
   (ix) समद्विबाहू (x) समद्विबाहू

अभ्यास 3.2

(1) 85° (2) 55° (3) हर एक 65° (4) 30°, 60° और 90°

(5) (6) 50°, 60° और 70°.

अभ्यास 3.3

(1) यदि बाह्य $\angle B = 136°$ और बाह्य $\angle C = 104°$ तो $\angle A = 60°$, $\angle B = 44°$ और $\angle C = 76°$.

(3) (i) 130° (ii) 56° (iii) 35° (iv) 52° (v) 40°.

(4) $\angle TRS = 50°$, $\angle PSQ = 80°$.

(5) अन्य अभिमुख अंतस्थ विपरीत काण 90° और तीसरा कोण 60°.

घटक – 4

गुणन खण्डन (Factorisation)

उस घटक का अध्ययन के पश्चात, आप सीखेंगें

- बीजीय व्यंजको में से सामान्य पद निकाल कर कैसे गुणन खण्डन करना ।
- समुचित पदों को समूहों में लेकर व्यंजक को सरल करना ।
- एक व्यंजक का गुणनखण्डन करना, जो दो व्यंजकों का अन्तर है।
- त्रिपदी व्यंजकों को कैसे गुणनखण्डन करना ।
- ज्ञात सर्वसमिकाओं के उपयोग से वर्ग त्रिपदी का गुणनखण्डन करना ।

प्रस्तावना :

दत्त व्यंजक को दो या अधिक व्यंजकों के गुणनफल के रूप में लिखने की प्रक्रिया को **गुणनखण्डन कहते** (Factorisation) है। गुणलब्ध का प्रत्येक व्यंजक दत्त बीजीय व्यंजक का गुणनखण्ड कहलाता है।

उदाहरण के लिए: (i) $7xy$ पर विचार कीजिए इस के गुणनखण्ड $7, x, y, 7x$, 7y

(ii) $(x + 3)$ और $(x + 2)$, $x^2 + 5x + 6$ के गुणनखण्ड है।

एक संख्या का गुणनखण्डन करने की प्रक्रिया स्मरण कीजिए। एक पूर्णांक दिये जाने पर उसे हम अन्य पूर्णांकों के गुणलब्ध में व्यक्त करते हैं। अन्त में इससे संख्या का अभाज्य गुणनखण्डन हो जाता है। बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्डन में ऐसा ही विधान अपनाते है। एक व्यंजक दिये जाने पर, उसे आप, उसके गुणनखण्डों के गुणलब्ध के रूप में व्यक्त करते हैं।

सूचना: (1) गुणनखण्डन तथ गुणन क्रिया परस्पर विपरीत प्रक्रियाएँ हैं। गुणन क्रिया में, हम विभिन्न व्यंजकों को गुणा करके एक नया व्यंजक प्राप्त करते हैं। गुणनखण्डन में, हम दत्त व्यंजक को सरलतर व्यंजकों में विघटित करते हैं, जिनका गुणनफल पुनः दत्त व्यंजक बन जाता है।

(2) आप 1 को हमेशा गुणनखण्ड के रूप में उपयोग कर सकते हैं। $(x + 5) = 1 \times (x + 5)$ परन्तु इससे कोई नया गुणलब्ध प्राप्त नहीं होता। इसे साधारण गुणनखण्डन कहते हैं कई बार हम ऐसे गुणनखण्डन उपयोग करते हैं।

गुणनखण्डन करने के अलग–अलग विधान :

एक दत्त व्यंजक का गुणनखण्डन करने के अनेक विधान है। यहाँ हम उन्हें सीखेंगें।

1. सामान्य पद लेकर गुणनखण्डन करना :

निम्न उदाहरणों पर विचार कीजिए

उदाः (1) $5x^2 - 10x$

यहाँ आप देखेते हैं कि $5x$ यह $5x^2$ और $10x$ का म.सा.अ. है। अब हम दोनों में से उसे निकालेगें। इसतरह प्राप्त करते हैं।

$5x^2 - 10x = (5x)\ (x) - (5x)\ (2) = (5x)\ (x - 2)$

उदाहरण : (2) $4a + 12b = 4\ (a + 3b)$

उदाहरण : (3) $3x^2y - 6xy^2 + 9xy = 3xy\ (x - 2y + 3)$

उदाहरण : (4) $a^3 - a^2 + a = a\ (a^2 - a + 1)$

आप देखते हैं कि हम सभी पदों का म.सा.अ. लेते है तथा म.सा.अ निकालकर गुणनखण्डन करते है।

2. समूह बनाकर गुणनखण्डन करना

इस प्रक्रिया में हम अनेक चरणों का अनुसरण करते है।

चरण 1 : दत्त व्यंजक के पदों को समूहों में व्यवस्थित कीजिए ताकि प्रत्येक समूह में एक सामान्य पद हो

चरण 2 : प्रत्येक समूह का गुणनखण्डन कीजिए.

चरण 3 : प्रत्येक समूह में से सामान्य गुणनखण्ड निकालिए

उदा 5 : गुणनखण्डन किजिए $ax - bx + ay - by$

हल : हम उनके समूह इस तरह बनाते हैं।

$$(ax - bx) + (ay - by) = (a - b)x + (a - b)y$$
$$= (a - b)\ (x + y)$$

क्या आपको ज्ञात होता है कि वितरण नियम का विपरीत रुप उपयोग किया है? हम इसे इस तरह भी कर सकते है।

$$ax - bx + ay - by = (ax + ay) - (bx + by)$$
$$= a(x + y) - b\ (x + y)$$
$$= (a - b)\ (x + y)$$

उदा 6 : गुणनखण्ड प्राप्त कीजिए $y^3 - 3y^2 + 2y - 6 - xy - 3x$

हल : यहाँ भी हम व्यंजक के पदों को समूहों कें व्यवस्थित कर गुणनखण्डन करते हैं।

$= (y^3 - 3y^2) + (2y - 6) - (xy - 3x)$

$= y^2(y - 3) + 2(y - 3) - x(y - 3)$

$= (y^2 + 2 - x)\ (y - 3)$

3. दो वर्गों के अन्तर का गुणनखणुन

पिछले घटक से हम जानते है कि सभी a, b के लिए $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$ जब दिये हुए व्यंजक को दो वर्गों के अंतर में लिखने से हम सरलता से गुणनखण्डन कर सकते हैं।

उदाहरण 7 : गुणनखण्डन कीजिये $36a^2 - 49b^2$

हल : ध्यान दिजिए $36a^2 = (6a)^2$ और $49b^2 = (7b)^2$

उसे सरल करने पर हमें प्राप्त है

$$36a^2 - 49b^2 = (6a)^2 - (7b)^2 = (6a + 7b)\ (6a - 7b)$$

उदाहरण 8 : गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए $\frac{x^2}{y^2} - \frac{9}{16}$

हल : यहाँ पुनः हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{9}{16} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{x}{y} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{3}{4}\right)$$

उदाहरण 9 : मूल्य ज्ञात कीजिए $(4.5)^2 - (1.5)^2$

हम : हमे मालूम है

$$(4.5)^2 - (1.5)^2 = (4.5 + 1.5) - (4.5 - 1.5) = 6 \times 3 = 18$$

अभ्यास 4.1

1. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिये :

(i) $x^2 + xy$ (ii) $3x^2 - 6x$

(iii) $(1.6)a^2 - (0.8)a$ (iv) $5 - 10m - 20n$

2. गुणनखण्डन कीजिए

(i) $a^2 + ax + ab + bx$ (ii) $3ac + 7bc - 3ad - 7bd$

(iii) $3xy - 6zy - 3xt + 6zt$ (iv) $y^3 - 3y^2 + 2y - 6 - xy + 3x.$

3. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

(i) $4a^2 - 25$ (ii) $x^2 - \frac{9}{16}$

(iii) $x^4 - y^4$ (iv) $\left(7\frac{3}{10}\right)^2 - \left(2\frac{1}{10}\right)^2$ (iv) $(5a - 2b)^2 - (2a - b)^2$

(v) $(0.7)^2 - (0.3)^2$

त्रिपदियों का गुणनखण्डन करना (Factorisation of trinomials)

इसके पूर्व हमने $(x + a)$ ओर $(x + b)$ जैसे द्विपदियों को गुणा करना सीखा है

$(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

हम विपरीत दिशा में भी आगे बढ सकते हैं। $x^2 + (a + b)x + ab$ स्वरूप के त्रिपदी को गुणनखण्डन कर सकते है ताकि हमें प्राप्त हो: $x^2 + (a + b)\ x + ab = (x + a)\ (x + b)$ परन्तु सामान्यतः त्रिपदी इस रूप में दिये नहीं देते।

आपको $x^2 + mx + n$ के रूप में दे सकते हैं, जहाँ m, n कुछ संख्याऐं है।

हमें $m = (a + b)$ और $n = a \times b$ व्यक्त करने आना चाहिए ताकि दत्त त्रिपदी का गुणनखण्डन हो सके।

इसे हमें संख्याओं के कुछ गुणधर्म उपयोग करना होगा। उन्हें हम यहाँ अध्ययन करते हैं।

दो संख्याओं का योगफल और गुणनफल तभी मात्र धनात्मक हो सकता जब दोनों घनात्मक होते है।

इसका अर्थ यह कि यदि $a + b$ और ab धनात्मक है तो फिर a और b भी है। इसका विलोम भी सत्य है। इस तरह 6 और 5 धनात्मक है, $5 = 3 + 2$ और $6 = 3 \times 2$; दोनों 3 और 2 धनात्मक है।

दो संख्याओं का योगफल ऋणात्मक और उनका गुणनफल धनात्मक तभी मात्र हो सकता जब दोनों संख्या ऋणात्मक होते हैं।

इसतरह $a + b$ ऋणात्मक और ab धनात्मक तभी मात्र हो सकता है जब a और b ऋणात्मक होते हैं। यदि हमें 21 और –10 संख्याऐं दी गई हैं, तो हम जानते है $-10 = (-7) + (-3)$ और $21 = (-7)\ (-3)$.

हम 7 को हम दोनों 7 और –7 का **परममूल्य** कहते हैं। इस तरह, एक पूर्णांक a दिये जाने पर हम उसके परममूल्य को $|a| = a$ से परिभााषित करते हैं यदि $a > 0$; $|a| = -a$ यदि $a < 0$; और $|a| = 0$ यदि $a = 0$ हो।

ध्यान दीजिए : $-8 < -6$ परन्तु $|-8| = 8 > 6 = |-6|$

दो संख्याओं का योगफल धनात्मक और उनका गुणनफल ऋणात्मक तभी मात्र होता है। यदि संख्याओं में एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक है, और धनात्मक का परममूल्य संख्या ऋणात्मक संख्या के परम मूल्य से अधिक है।

इसका अर्थ होता कि $a + b$ धनात्मक और ab ऋणात्मक तभी मात्र होता यदि a, b, में से एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक होता है; यदि a धनात्मक और b ऋणात्मक है तब $|a| > |b|$ यदि a ऋणात्मक है और b धनात्मक है तब $|a| < |b|$

उदाहरण : यदि a + b = 7 और $ab = -18$ तो $a = 9$ और $b = -2$ अथवा $a = -2$ और $b = 9$.

दो संख्यओं का जोड ऋणात्मक और उनका गुणनफल ऋणात्मक तभी मात्र होता यदि संख्यओं में एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक हो, और धनात्मक संख्या का परम मूल्य ऋणात्मक संख्या में कम है।

इस तरह $a + b$ ऋणात्मक है और ab ऋणात्मक तभी मात्र होता यवि a, b में एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक है; यदि a धनात्मक है और b ऋणान्मक है, तब $|a| < |b|$; यदि a ऋणात्मक और b धनात्मक होता है यदि $|a| > |b|$ उदाहरण के लिए $a + b = -12$ और $ab = -28$ हम लिख सकते है $a = 2$ और $b = -14$ अथवा $a = -14$ और $b = 2$.

यहाँ हम ने संख्याओं के स्वभाव कुछ भी उल्लेख नहीं किया है। संख्या पूर्णांक, परिमेय संख्या अथवा **वास्तविक संख्या** हो सकते है, जिसके बारे में हम अगली कक्षा में अध्ययन कर सकते हैं।

उदाहरण 10 : गुणनखण्डन कीजिये $6x^2 + 11x + 3$.

हल : हम यहाँ विघटन करने का और समूह में व्यवस्थित करने का मानक रुप उपयोग करते हैं।

$$6x^2 + 11x + 3 = 6x^2 + 9x + 2x + 3 = (6x^2 + 9x) + (2x + 3)$$
$$= 3x(2x + 3) + 1(2x + 3)$$
$$= (3x + 1)(2x + 3)$$

इस विघटन तक पहुँचने की समस्या वास्तविक है। मान लीजिए हम $6x^2 + 11x + 3 = (ax + b)(cx + d)$ का गुणनखण्डन के तलाश में है। विस्तार करने पर हमें प्राप्त है।

$6x^2 + 11x + 3 = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

विभिन्न घातांक के पदों की तुलना करने पर

$ac = 6,\ ad + bc = 11,\ bd = 3$

इसतरह acbd = 18 अथवा (ad)(bc) = 18 और $ad + bc = 11$ दो संख्याऐं ऐसी है जिनका गुणनफल 18 है और योगफल 11 है। आप तुरन्त निर्णय लेते हैं कि $ad = 9$, $bc = 2$ अथवा $ad = 2$, $bc = 9$ इसतरह हम लिखते है।

$6x^2 + 11x + 3 = acx^2 + (ad + bc)x + bd = 6x^2 + 9x + 2x + 3$

जो हम ने विघटन का उपयोग किया है।

ध्यान दीजिए (ab, bc) के लिए हम अन्य मूल्यों की जोडी उपयोग कर सकते हैं $ad = 2$, $bc = 9$ हमें प्राप्त होता है।

$6x^2 + 11x + 3 = (6x^2 + 2x) + (9x + 3) = 2x(3x + 1) + 3(3x + 1)$

$= (2x + 3)(3x + 1)$

नियम : यदि आप $x^2 + px + q$ जैसे त्रिपदी का गुणनखण्डन करना चाहते है, आपको a और b ऐसे संख्याओं ज्ञात करना होगा ताकि $a \cdot b = q$ और $a + b = p$ तो $x^2 + px + q = (x + a)(a + b)$

आप ने ध्यान दिया होगा कि गुणनखण्डन करते समय हम घात 2 के बहुपदी को प्रत्येक घात एक के दो बहुपदी के गुणनफल के रुप में व्यक्त करते हैं। यह घात 2 के बहुपदी समझ ने में सहायक है। यदि आप बहुपदी को विघटन कर सकते हैं तो आगे आप देखेंगे कि यह बहुपदी समीकरण हल करने का आसान विधान बनता है।

उदाहरण 11 : गुणनखण्डन कीजिये $x^2 - 9x + 20$

हल : हमें दो संख्या a और b ज्ञात करना ताकि $a \times b = 1 \times 20$ (x^2 पद का सहगुणांक और स्थिरांक) और $a + b = -9$ यहाँ गुणनफल घनात्मक है और जोड ऋणात्मक है।

अतः दोनों ऋणात्मक होना चाहिए।

इसे हम $a = -5$ और $b = -4$ लेने से प्राप्त कर सकते हैं इस तरह

$x^2 - 9x + 20 = (x^2 - 5x) + (-4x + 20) = x(x - 5) - 4(x - 5)$

$= (x - 4)(x - 5)$

एक वर्ग त्रिपदी का गुणनखण्डन

एक बीजीय व्यंजक जिसे $a^2 + 2ab + b^2$ अथवा $a^2 - 2ab + b^2$ के रुप लिख सकते हैं उसे **वर्ग त्रिपदी** कहते हैं।

उदाहरण : $x^2 + 2x + 1$. एक वर्ग त्रिपदी है। ऐसे त्रिपदी का गुणनखण्डन करने $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$ अथवा $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b)$ का उपयोग कर सकते है।

उदाहरण 12 : गुणनखण्डन कीजिए $4x^2 + 12xy + 9y^2$

हल : हम देखते है कि

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$$

इसतरह इसके दो समान गुणनखण्ड $(2x + 3y)$ और $(2x + 3y)$

उदाहरण 13 : $x^2 - 6xy + 36y^2$ क्या यह वर्ग त्रिपदी है।

हल : हमें मालूम है कि

$$x^2 - 6xy + 36y^2 = (x)^2 - (x)(6y) + (6y)^2$$

यह मानक रुप में नहीं है। इस तरह यह $x^2 - 6xy + 36y^2$ वर्ग त्रिपदी नहीं है।

सोचिये – क्या $x^2 + 1$ का गुणनखण्डन करना संभव है? विकल्प रूप से, क्या दो संख्याऐं ज्ञात कर सकते हैं जिनका योग शून्य है और जिसका गुणनफल 1 है?

अभ्यास 4.2

1. निम्नों में pq और $p + q$ को दिया गया है। p तथा q को ज्ञात कीजिऐं।

   (i) $pq = 18$ और $p + q = 11$ (ii) $pq = 32$ और $p + q = -12$

   (iii) $pq = -24$ और $p + q = 2$ (iv) $pq = -12$ और $p + q = -11$

   (v) $pq = -6$ और $p + q = -5$ (vi) $pq = -44$ और $p + q = -7$.

2. गुणनखण्ड लिखिए–

   (i) $x^2 + 6x + 8$ (ii) $x^2 + 4x + 3$

   (iii) $a^2 + 5a + 6$ (iv) $a^2 - 5a + 6$ (v) $a^2 - 3a - 40$

   (vi) $x^2 - x - 72$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

3. गुणनखण्डन कीजिये

(i) $x^2 + 14x + 49$ (ii) $4x^2 + 4x + 1$ (iii) $a^2 - 10a + 25$

(iv) $2x^2 - 24x + 72$ (v) $p^2 - 24p + 144$ (v) $x^3 - 12x^2 + 36x$

शब्दावली :

सामान्य गुणनखण्ड : दो अथवा अधिक व्यंजक दिये जाने पर, प्रत्येक व्यंजक का गुणनखण्ड जो सभी व्यंजकों को सामान्य है।

गुणनखण्डन : एक बीजीय व्यंजक को एक से अधिक व्यंजकों के गुणनफल के रूप में लिखने की प्रक्रिया

ध्यान रखें –

- गुणनखण्डन प्रक्रिया गुणलब्ध प्राप्त करने की प्राक्रिया की उल्टी है।
- समुचित रूप से समूह कें व्यवस्थित करके और उसके पदों में विघटन से हम व्यंजकों का गुणनखण्डन कर सकते है।

उत्तर

अभ्यास 4.1

1. (i)$x\ (x + y)$ (ii) $3x\ (x - 2)$ (iii) $(0.8)\ a\ (2a - 1)$ (iv) $5(1 - 2m - 4n)$

2. (i) $(a+x)\ (a+b)$, (ii) $(3a+7b)\ (c-d)$, (iii) $(x-2z)\ (3y-3t)$, (iv) $(y-3)\ (y^2+2-x)$

3. (i) $(2a + 5)\ (2a - 5)$ (ii) $\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)$

(iii) $(x^2 + y^2)\ (x + y)\ (x - y)$ (iv) $\frac{1222}{25}$

(v) 0.4 (vi) $(7a - 3b)\ (3a - b)$

अभ्यास 4.2

1. (i) $p = 9,\ q = 2$ (ii) $p = -8,\ q = -4$ (iii) $p = 6,\ q = -4$

(iv) $p = 12,\ q = -1$ (v) $p = -6,\ q = 1$ (vi) $p = -11,\ q = 4$

2. (i) $(x + 4)\ (x + 2)$ (ii)$(x + 3)\ (x + 1)$ (iii)$(a + 3)\ (a + 2)$

(iv) $(a - 3)\ (a - 2)$ (v)$(a - 8)\ (a + 5)$ (vi)$(x - 9)\ (x + 8)$

3. (i) $(x + 7)\ (x + 7)$ (ii)$(2x + 1)\ (2x + 1)$ (iii)$(a - 5)\ (a - 5)$

(vi) $2(x - 6)\ (x - 6)$ (v)$(p - 12)\ (p - 12)$ (vi)$x\ (x - 6)\ (x - 6)$

घटक – 5
वर्ग, वर्गमूल, घन और घनमूल

इस घटक के अध्ययन बाद के आप सीखेंगे

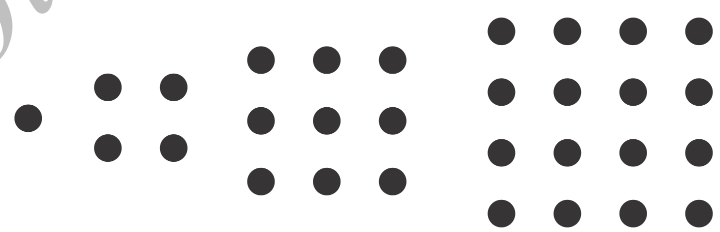
- संपूर्ण वर्ग और संपूर्ण वर्गों के वर्गमूल के बारे में
- संपूर्ण वर्ग के इकाई स्थान में कौन-कौन से अंक आते है ।
- संपूर्ण वर्ग को 3 और 4 से भाग देने पर प्राप्त अवशेष कौन से है?
- विभिन्न संदर्भ जहाँ पूर्ण वर्ग प्राप्त होते हैं ।
- पूर्ण वर्ग तथा पूर्ण वर्गों के वर्गमूल ज्ञात करने के विधान
- पूर्ण घन और पूर्ण घन के घनमूल

प्रस्तावना

1, 4, 9, 16, 25 इत्यादि संख्याओं का निरीक्षण कीजिए। क्या आप इन्हें पहचानते हैं? उदाहरण $4 = 2 \times 2$, $25 = 5 \times 5$ आप देखते हैं प्रत्येक संख्या दो समान संख्याओं का गुणनफल है। इसी तरह आप देखते हैं $8 = 2 \times 2 \times 2$, $64 = 4 \times 4 \times 4$ प्रत्येक संख्या तीन समान संख्याओं का गुणनफल है। इन संख्याओं के विशिष्ट नाम है। इस अध्याय में हम ऐसी संख्याओं के कुछ गुणधर्म अध्ययन करेंगे। हम इनकी विपरीत प्रक्रिया भी अध्ययन करेंगे, जब एक संख्या दो या तीन समान संख्याओं का गुणनफल है तो क्या हम इन संख्याओं को ज्ञात कर सकते हैं?

संपूर्ण वर्ग (perfect square)

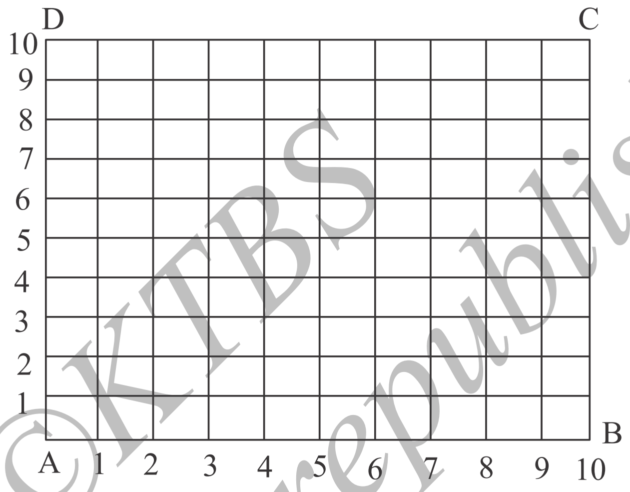
इन चित्रों को देखिए :



प्रत्येक चित्र में कितनी बिंदियाँ हैं?

आप उन्हें 1,4,9,16 पहचानेंगे।

मान लीजिए ABCD 10 इकाई लंबाई युक्त का वर्ग है। इस वर्ग को समान्तर रेखाऐं खींचकर छोटे इकाई के वर्गों में विभाजित कीजिए। (पार्श्व चित्र जैसे दर्शाया है) क्या आप इन्हें 100 वर्ग इकाई में गिन सकते हो?



कार्यकलाप 1 : 8, 12, 15 इकाई के लंबाई युक्त वर्ग बनाकर इसी कार्यकलाप को दोहराई और आपके परिणाम तालिका में लिखिए।

ध्यान दीजिए $1 = 1 \times 1$, $4 = 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $16 = 4 \times 4$, $100 = 10 \times 10$.

यदि **a** एक पूर्णांक है और $\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{a}$ हो **b** को संपूर्ण वर्ग कहते हैं।

अतः 1, 4, 9, 16, 100 सभी संपूर्ण वर्ग है। $0 = 0 \times 0$ होने से '0' को भी संपूर्ण वर्ग मानते है। यदि a एक पूर्णांक है, हम $a \times a$ को a^2 से सूचित करते है (इसे a का **वर्ग** है, अथवा a **वर्ग** पढ़ते है) इस तरह $36 = 6^2$, $81 = 9^2$.

अतः एक संपूर्णवर्ग m^2 के रूप में होता है, जहाँ m एक पूर्णांक है।

यहाँ एक और बात पर ध्यान दे सकते हैं। उदाहरण $4 = 2 \times 2$ और $4 = (-2) \times (-2)$ है। यहाँ पर दो समान पूर्णांक है परन्तु ये ऋणात्मक है। यह कोई आश्चर्य की बात नहीं है। यह गुण तो संख्या प्रणाली से प्राप्त है कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल घनात्मक होता है। अतः किसी भी स्वाभाविक संख्या m के लिए $m^2 = m \times m = (-m) \times (-m)$

इससे संपूर्ण वर्ग का गुण मालूम होता है। यदि m स्वाभाविक संख्या होती है तो $m^2 = m \times m$ भी एक स्वाभाविक संख्या होती है (आवरण नियम)। अतः m^2 घनात्मक है। यदि $m = 0$ हो तो $m^2 = 0 \times 0 = 0$ यदि m ऋणात्मक संख्या हो तो $m^2 = -n$ कोई स्वाभाविक संख्या n के लिए इसलिए $m^2 = (-n) \times (-n) = n^2$ जो पुनः एक घनात्मक है।

अतः संपूर्ण वर्ग या तो 0 होता है अथवा घनात्मक पूर्णांक होना चाहिए। यह ऋणात्मक कभी नहीं हो सकता।

हमने देखा कि $1 = 1^2$ और $4 = 2^2$ संपूर्ण वर्ग है। क्या 2 और 3 को भी दो समान पूर्णांकों के गुणनफल के रूप में लिख सकते हैं?

आप की बुद्धि कहती है कि यह संभव नहीं है। क्या हम इसे गणित की दृष्टि से सोच सकते है? मान लीजिए m और n दो स्वाभाविक संख्यायें है ताकि $m < n$ है। तो यह आसानी से स्पष्ट होता है कि $m^2 < n^2$ (क्यों?)

यदि कभी 2 एक संपूर्ण वर्ग है तो, $2 = n^2$. किसी स्वाभाविक संख्या के लिए सत्य होना चाहिए।

तो $1 < 2 < 4$ से प्राप्त होता कि $1 = 1^2 < n^2 < 2^2 = 4$ इससे ज्ञात होता है कि $1 < n < 2$ (क्यों?)

इस तरह 'n' यह 1 और 2 के बीच की स्वभाविक संख्या है। परंतु हम जानते हैं कि दत्त 'k' एक स्वभाविक संख्या है तो k और उसके अग्रज $k+1$ के बीच कोई स्वभाविक संख्या नहीं है।

अतः 1 और 2 के बीच में कोई स्वाभाविक संख्या नहीं है। अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि 2 संपूर्ण वर्ग नहीं है। इसी तरह आप 3 के लिए कारण दे सकते है । इसे कोई भी स्वाभाविक संख्या n ने लिए सिद्ध कर सकते हैं ताकि $m^2 < n < (m+1)^2$ संपूर्ण वर्ग नहीं हो सकता। इस तालिका पर ध्यान दीजिए।

a	1	2	3	8	−7	−12	20	−15
a^2	1	4	9	64	49	144	400	225

क्या आप ध्यान देते हैं कि 2, 8, -12, 20 के वर्ग सम संख्या है और 1,3,-7, -15 के वर्ग विषम संख्या हैं। इससे क्या निष्कर्ष निकलता है?

कथन 1 : सम पूर्णांक का वर्ग सम संख्या है और विषम संख्या का वर्ग विषम होता है।

यदि m सम संख्या है, तो $m = 2n$ किसी पूर्णांक n के लिए और $m^2 = (2n) \times (2n) = 4n^2$ जो सम पूर्णांक है। यदि m विषम है तो $m = 2k + 1$ किसी पूर्णांक k के लिए, ताकि

$$m^2 = (2k+1)(2k+1)$$

$$= [(2k+1) \times 2k] + (2k+1) \times 1$$

$$= (2k) \times (2k) + (1 \times 2k) + (2k \times 1) + (1 \times 1)$$

$$= 4k2 + 2k + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1$$

जो कि विषम पूर्णांक है।

तालिका से प्रथम दस संपूर्ण वर्गों पर ध्यान दीजिए।

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

कथन 2 : एक संपूर्ण वर्ग के इकाई स्थान पर 0,1,4,5,6, 9 मात्र होते हैं। यदि किसी संख्या के इकाई स्थान पर 2,3,7,8 हो तो वह संपूर्ण वर्ग नहीं होता।

सोचिये : किसी संख्या के इकाई स्थान पर 0,1,4,5,6 अथवा 9 हो तो वह संपूर्ण वर्ग होना अवश्य नहीं है।

गणितीय भाषा के अनुसार, दत्त संख्या संपूर्ण वर्ग होने के लिए अवश्य ही उसके इकाई स्थान पर 0,1,4,5,6 अथवा 9 होना जरूरी है। परन्तु यही एक शर्त दत्त संख्या, संपूर्ण वर्ग होने का निर्धारित नहीं कर सकती है। यह संपूर्ण वर्ग पहचानने में सहायक है।

अभ्यास 5.1

1. निम्न कथनों को गणितीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 4 का वर्ग 16 है (ii) 8 का वर्ग 64 है।

(iii) 15 का वर्ग 225 है।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. निम्न संख्याओं में संपूर्ण वर्ग पहचानिए।

   1, 2, 3, 8, 36, 49, 65, 67, 71, 81, 169, 125, 900, 100, 1000, 100000

3. 1 और 500 के बीच के सभी संपूर्ण वर्ग लिखिए।
4. तीन अंकोंवाले संख्याओं को लिखिए जिनके इकाई स्थान पर 0, 1,4,5,6,9 में से कोई एक अंक हो, परन्तु उनमें कोई संपूर्ण वर्ग न हो।
5. 100 से 400 के बीच के संपूर्ण वर्ग लिखिए जिनके इकाई स्थान पर 0, 1,4,5,6 अथवा 9 में कोई अंक हो।

संपूर्ण वर्ग से संबंधित कुछ तथ्य

संपूर्ण वर्गों के कुछ सुन्दर गुणधर्म है। उन्हें हम यहाँ अध्ययन करेंगे।

(a) निम्न तालिका देखिए।

a	4	10	20	25	100	300	1000
a^2	16	100	400	625	10000	90000	1000000
a^2 के अंत में आये शून्य	0	2	2	0	4	4	6

आप यहाँ क्या निरीक्षण करते हैं? वर्ग के अंत में आनेवाले शून्य की संख्या हमेशा सम संख्या होती है। (0 रहने पर भी वह सम है) वर्ग में आनेवाले शून्य दत्त संख्या में आये शून्य के दुगुने होते है। क्या आप इसे कथन के रूप में लिख सकेंगे?

कथन 3 : यदि एक संख्या के अंत में k शून्य है तो उसके वर्ग में 2k शून्य होंगे।

यदि एक संख्या में विषम शून्य है तो वह वर्ग नहीं बन सकता। यह संपूर्ण वर्गों के पहचानने में सहायक होता है।

(b) पार्श्व तालिका पर ध्यान दीजिए ।

a	a^2	a^2 को 3 से भाग देने पर प्राप्त शेष	a^2 को 4 से भाग देने पर प्राप्त शेष
1	1	1	1
2	4	1	0
3	9	0	1
5	25	1	1
8	64	1	0
11	121	1	1
-6	36	0	0

क्या आप ध्यान देते हैं कि संपूर्ण वर्ग को 3 से भाग देने पर शेष या '0' अथवा '1' होता है। इसी तरह एक संपूर्ण वर्ग को 4 से भाग देने पर शेष 0 अथवा 1 रहता है। किसी भी संख्या को 3 से भाग देने पर शेष 0,1 और 2 रहता है परन्तु एक वर्ग को 3 से भाग देने पर 0 अथवा 1 रहता है। परन्तु 2 नहीं रहता है। इसी तरह एक संख्या को 4 से भाग देने पर शेष 0,1,2 अथवा 3 रहता है। और एक संपूर्ण वर्ग को 4 से भाग देने पर शेष 0 अथवा 1 होता है कभी 2 और 3 नहीं।

कथन 4 : संपूर्ण वर्ग को 3 से भाग देने पर शेष 0 या 1 बचता है कभी 2 नहीं। संपूर्ण वर्ग 4 से भाग देने पर शेष 0 अथवा 1 बचता है कभी 2 अथवा 3 नहीं

इस पर सोचिये ! एक संपूर्ण वर्ग को 8 से भाग देने पर 0, 1 और 4 बचता कभी 2, 3, 5, 6, 7 नहीं।

कार्यकलाप 2 : चार क्रमागत स्वाभाविक संख्या लीजिए और उनका गुणनफल ज्ञात कीजिए। इस गुणनफल को 1 से जोड़िए। ज्ञात कीजिए क्या वह संपूर्ण वर्ग है। इसी तरह चार क्रमागत ऋणात्मक पूर्णांक लेकर उपरोक्त क्रम दोहराइए।

इन चार क्रमागत संख्याओं में 0 भी शामिल हो तो आपका निरीक्षण क्या होगा?

उदाहरण

$(1 \times 2 \times 3 \times 4) + 1 = 24 + 1 = 25 = 5^2$

$(8 \times 9 \times 10 \times 11) + 1 = 7920 + 1 = 7921 = 89^2$

कथन 5 : चार क्रमागत पूर्णांकों के गुणनफल को 1 जोड़ने से प्राप्त परिणाम एक संपूर्ण वर्ग होगा।

(c) निम्न लिखित सरणी पढ़िए :

$$1 = 1 = 1^2,$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2,$$

पिछले जोड़ का अगली विषम संख्या जोड़कर इस प्रक्रम आगे बढाइए। आपको संपूर्ण वर्ग प्राप्त होते जायेंगे। ध्यानपूर्वक निरीक्षण करने से कुछ और बातें ज्ञात होती है। प्रथम चार विषम संख्याओं का जोड़ 4^2 है। प्रथम 5 विषम संख्याओं का जोड़ 5^2 है। ऐसे प्रथम 8 और 12 संख्याओं के जोड़ तक जारी रखिए।

क्या, हम इसे नये कथन के रूप में व्यक्त कर सकेंगे?

कथन 6 : प्रथम 'n' विषम संख्याओं का जोड n^2 होगा जहाँ n स्वाभाविक संख्या है।

कार्यकलाप 3 :

11, 101, 1001, 10001 संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए। ऐसे ही शून्य शामिल करते आगे बढ़िये। क्या आप कोई नमूना देखेंगे हैं।

उदाहरण के लिए : $11^2 = 121,$

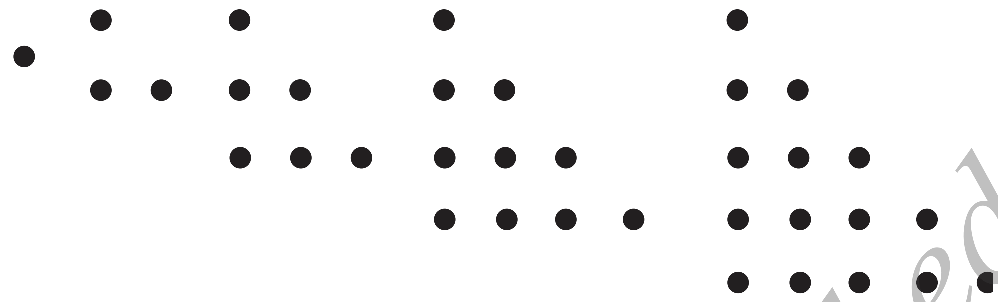
$101^2 = 10201,$

$1001^2 = 1002001,$

इत्यादि । आप देखेंगे प्रत्येक वर्ग की बीच संख्या 2 है और 2 के पूर्व अथवा अग्र संख्या के बीच शून्य नजर आते है और अंत की संख्या 1 है। '2' के दोनों पक्षों के शून्य दत्त संख्या में उपस्थित शून्य के बराबर है। अतः इस कथन को ऐसे लिखते हैं।

कथन 7 : मान लीजिए N = 1000...01, संख्या है जिसमें 'k' शून्य है। (उदाहरण k = 6 है तो आपको N= 10000001 है अर्थात् बीच में 6 शून्य है। तो N^2 = 1000...02000...01 जहाँ 2 के दोनों पक्षों में k शून्य होते है।

(**d**) निम्न नमूने देखिए:



इस प्रकार के नमूने तैयार करने के पहले पंक्ति में बिंदी लगाईए, दूसरे में 2, तीसरे में 3 इत्यादि चित्र जैसे रखते जाईए। इस प्रकार व्यवस्थित बिन्दियां एक त्रिभुज के आकार में व्यवस्थित होते हैं। प्रत्येक त्रिभुज के बिन्दियों को गिनते जाईये। (एक बिन्दी को उत्पन्न त्रिभुज है) वे हैं 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 इत्यादि क्या आप इसका कारण जानते हैं? इन संख्याओं को **"त्रिकोणीय संख्या"** कहते है। इस प्रकार के त्रिकोणीय संख्या की रचना देखिए। n वे त्रिकोणीय संख्या में n पंक्तियां और n स्तंभ है। इस तरह 8 वे त्रिकोणीय संख्या में $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$

इस तरह कुछ त्रिकोणीय संख्यायें है

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91. .. क्रमागत दो त्रिकोणीय संख्या लीजिए और उनका योगफल मालूम कीजिए।

उदाहरण

$$10 + 15 = 25 = 5^2$$
$$28 + 36 = 64 = 8^2$$
$$55 + 66 = 121 = 11^2$$
$$36 + 45 = 81 = 9^2$$

दो क्रमागत त्रिकोणीय संख्याओं को जोड़ एक संपूर्ण वर्ग है। यहाँ और एक बात नजर आती है। ध्यान कीजिए 28 यह सातवीं त्रिकोणीय संख्या है। 36 यह आठवीं त्रिकोणीय संख्या है उनका जोड़ 8^2 है उसी तरह 66 यह ग्यारहवी त्रिकोणीय संख्या है और 78 यह बारहवीं है तो उनका जोड़ $144 = 12^2$ है। कुछ और युग्मों पर इस गुण का सत्यापन कीजिए।

कथन 8 : n वें तथा $(n + 1)$ वें त्रिकोणीय संख्याओं का जोड़ $(n + 1)^2$ होता है।

अभ्यास 5.2

1. बिना वास्तव में जोड़े 1 + 3 + 5 + ... +51 (1 से 51 विषम संख्याओं को जोड़) ज्ञात कीजिए।
2. 144 को 12 विषम संख्याओं के जोड़ के रूप में व्यक्त कीजिए।
3. 14 वें और 15 वें त्रिकोणीय संख्याओं जानकर उनका जोड़ ज्ञात कीजिए। उपरोक्त 8 वें कथन का सत्यापन कीजिए।
4. संपूर्ण वर्गों को 5 से भाग देने पर प्राप्त शेष क्या होते हैं?

संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने के विधान

कई बार, वास्तविक गुणा किये बिना हम आसानी से एक संख्या का वर्ग ज्ञात कर सकते हैं।

हम इसे ऐसे लिखते है $42^2 = (40 + 2)^2$

अतः $(42)^2 = (40 + 2)(40 + 2) = (40)^2 + (40 \times 2) + (2 \times 40) + (2)^2$

$$= 40^2 + (2 \times 40 \times 2) + 2^2$$

यहाँ हमने वितरण गुण उपयोग किया है। अब आसानी से ज्ञात करते हैं।

$40^2 = 1600$, $2 \times 40 \times 2 = 160$; और $2^2 = 4$ अतः $42^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$

(आप मन में ही 40^2, $2 \times 40 \times 2$ और 2^2 ज्ञात कर और जोड़ सकते हैं)

सूचना : इस विधान का आधार है सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **है जिसे आप आगे अध्ययन करेंगे।**

कार्यकलाप 4 : उपरोक्त विधान उपयोग कर 89^2, 68^2, 96^2 ज्ञात करें।

जिन संख्याओं के अंत में 5 है, ऐसे संख्याओं का वर्ग ज्ञात करना का आसान विधान है। मान लीजिए 35^2 ज्ञात करना है। पहले इकाई स्थान के 5 का वर्ग ज्ञात कीजिए। उसे 25 $(=5^2)$ पहले लिखिए। इकाई स्थान छोड़कर दत्त संख्या में बची संख्या 3 लीजिए। 3 और उसकी अगली संख्या 4 का गुणा लीजिए $3 \times 4 = 12$. 12 को 25 के पूर्व रखिए तो 1225 प्राप्त है। जाँच कीजिए $35^2=1225$.

एक और उदाहरण 105 लीजिए। यहाँ इकाई के 5 निकालने पर बची संख्या है 10 और उसकी अगली संख्या 11 है। उनका गुणनफल है $10 \times 11 = 110$ । आप देखते है $105^2 = 11025$ है।

इसे आप कथन के रूप में लिख सकते हैं।

कथन 9 : यदि $n = \overline{a_1a_2 \cdots a_k5}$ (दशमाधार में व्यक्त) तो n^2 में 25, $\overline{(a_1a_2 \cdots a_k)} \times \overline{(a_1a_2 \cdots a_k+1)}$ के गुणनफल का प्रत्यय होगा।

अभ्यास 5.3

1. वर्ग ज्ञात कीजिए।

   (i) 31 (ii)72 (iii) 37 (iv) 166

2. वर्ग ज्ञात कीजिए (i) 85 (ii)115 (iii) 165

3. 1468 का वर्ग 1465 + 3 रूप में लिखकर ज्ञात कीजिए।

वर्गमूल

जैसे आपको ज्ञात है, यदि ABCD वर्ग की भुजा की लंबाई l हो तो उसका क्षेत्रफल l^2 होता है। क्या आप इस प्रक्रिया को उल्टा कर सकते हैं?

एक वर्ग का क्षेत्रफल दिये जाने पर क्या हम उसके भुजा की लंबाई ज्ञात कर सकते हैं?

मान लीजिए एक वर्ग का क्षेत्रफल 16 वर्ग सेमी है। उसके भुजा की लंबाई ज्ञात करने के लिए हम लिखत हैं । $l^2 = 16 = 4^2$ और निर्णय लेते हैं $l = 4$ से.मी. यहाँ एक संख्या का वर्ग दिया है और हमें उस संख्या को ज्ञात करना है। क्या हम विपरीत दिशा में जा रहे हैं?

निम्न संपूर्ण वर्गों पर विचार कीजिए।

$1 = 1^2,\ 4 = 2^2,\ 9 = 3^2\ ,\ 16 = 4^2,\ 49 = 7^2,\ 81 = 9^2,\ 196 = 14^2$

प्रत्येक संदर्भ में, दो समान संख्याओं को गुणा करने पर दत्त संख्या प्राप्त होती है। यहाँ 1 का वर्गमूल 1 है; 4 का वर्गमूल 2 है, 49 का वर्गमूल 7 है इत्यादि ।

मान लीजिए N एक स्वाभाविक संख्या है $N = M^2$ तो M को N का वर्गमूल कहते है।

इसके पूर्व हम ने देखा है $m^2 = m \times m = (-m) \times (-m) = (-m)^2$, इस तरह m^2 के दो वर्गमूल होते हैं : m और $-m$ । इसमें कौन सा लेना चाहिए?

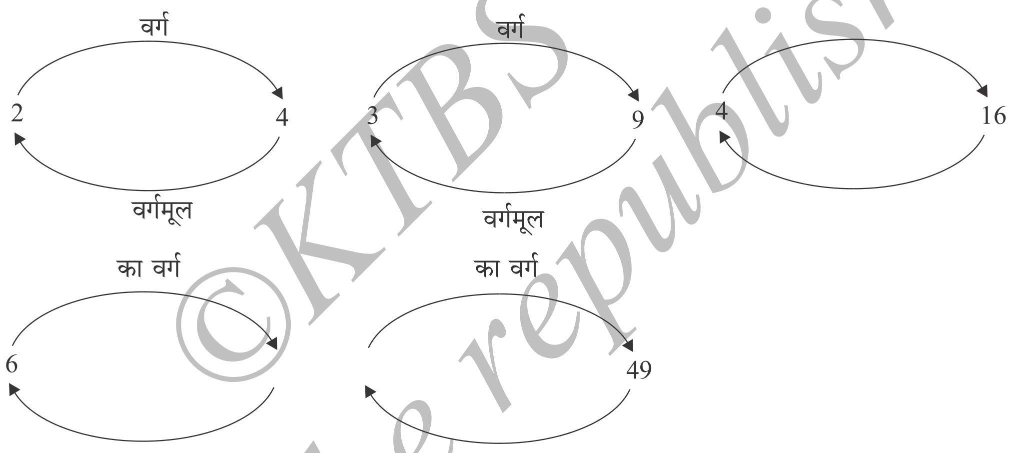
उदाहरण 16 = 4^2 = $(-4)^2$ अतः 4 और −4 दोनों 16 के वर्गमूल है। यह स्पष्ट नहीं है कि इनमें कौन सा लेना चाहिए। कई बार भौतिकता ही इसे स्पष्ट करती है। जैसे उपरोक्त उदाहरण में, यदि वर्ग का क्षेत्रफल 16 इकाइयाँ है, तो उसके भुजा की लंबाई अवश्य ही 4 इकाई होना चाहिए। (−4 उपयुक्त नहीं है क्योंकि वह लंबाई नहीं हो सकती) फिर भी, गणित में 4 और−4 दोनों 16 के वर्गमूल माने जाते है। अतः हम निम्न सामान्य कथन याद रखते हैं।

जब भी वर्गमूल शब्द उपयोग करते हैं, इसका अर्थ केवल घनात्मक वर्गमूल से हैं। N के वर्गमूल को $\sqrt{N}$ के रूप में लिखते हैं।

कार्यकलाप 5 : कथनों को समरूपता के अनुसार रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$$1^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1;$$
$$2^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2;$$
$$5^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{25} = ...;$$
$$11^2 = 121 \Rightarrow ...... = 11;$$
$$.... = 225 \Rightarrow ...... = 15;$$

कार्यकलाप 6 : कथनों की समरूपता अनुसार रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



इसके पूर्व हमने देखा है कि शून्यरहित पूर्णांक का वर्ग हमेशा घनात्मक पूर्णांक होता है। अतः केवल घनात्मक पूर्णांकों का वर्गमूल अर्थपूर्ण है अथवा संभवतः 0 (जिसका वर्गमूल 0 है)।

गुणनखण्डन द्वारा संपूर्ण वर्ग का वर्गमूल ज्ञात करना

हम जानते हैं कि $3 = \sqrt{9}$ और $4 = \sqrt{16}$ फिर भी $9 = 3 \times 3$ और $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 4$. इस तरह दत्त संपूर्ण वर्ग को उसके अभाज्य गुणनखण्डों में विभाजित कर, इन गुणखण्डों को ऐसे संयोग करना ताकि वे दो समान पूर्णांकों का गुणनफल बनें। इससे हम संपूर्ण वर्ग का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 1 . 5929 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए

हल : इसे हम अनेक चरणों में करते हैं।

चरण 1 : 5929 को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हैं

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5959 \\ \hline 7 & 847 \\ \hline 11 & 121 \\ \hline & 11 \end{array}$$

इस तरह 5929 = 7 × 7 × 11 × 11

चरण 2 : 5929 के गुणनखण्डों को योग्य रीति से व्यवस्थित कीजिए

5929 = (7 × 11) × (7 × 11) = 77 × 77

चरण 3 : क्योंकि 5929 = 77 × 77, यह दो समान पूर्णांक का गुणलब्ध है।

अतः $\sqrt{5929}$ = 77

उदाहरण 2 : 6724 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि 6724 सम संख्या है

तो 2 उसका अभाज्य गुणनखण्ड है।

इस तरह 6724 = 2 × 3362 पुनः 3362 समसंख्या है तो 3362 = 2 × 1681

अतः 6724 = 2 × 2 × 1681

अभी 1681 के गुणनखण्ड ज्ञात करने का कोई सरल विधान नहीं है। 3 से शुरु करते हुए आरोहण क्रम से जांच करते जाना है कि 1681 के अभाज्य गुणनखण्ड कौन से है। हमें ज्ञात होता है 1681 यह 3,5,7,11,13,17,19, 23, 29, 31, 37 से भाज्य नहीं है। लेकिन यह 41 से भाज्य है। और 1681 = 41 41 अतः हमें ज्ञात होता है

6724 = 2 × 2 × 41 × 41 = (2 × 41) × (2 × 41) = 82 × 82

निष्कर्ष $\sqrt{6724}$ = 82

दत्त संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करने का कोई सरल विधान नहीं है। बड़ी संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड कम्प्यूटर पर अल्गोरितम द्वारा ज्ञात करते है। फिर भी अल्गोरितम से भी बहुत समय चला जाता है। बैंकों में तथा अन्य आर्थिक संस्थाओं में उपयुक्त आधुनिक सुरक्षा प्रणाली का कारण यही है कि बड़ी संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करना का कोई आसान विधान नहीं हैं।

कुछ संख्यायें संपूर्ण वर्ग क्यों नहीं है?

एक संपूर्ण वर्ग का वर्गमूल, अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा ज्ञात करते समय, ज्ञात होता है कि प्रत्येक अभाज्य गुणणखण्ड सम संख्या बार दोहराता है। उदाहरण 1296 का गुणनखण्डन करने

पर $1296 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ इसके दो विशिष्ट अभाज्य गुणनखण्ड है 2 और 3 । 2 चार बार दोहराता है और 3 चार बार दोहराता है। इससे हम लिखते हैं $1296 = (2 \times 2 \times 3 \times 3)\ (2 \times 2 \times 3 \times 3) = 36 \times 36$ दो समान पूर्णांकों का गुणलब्ध है। अतः $\sqrt{1296} = 36$. इस विधान की सफलता तभी होगी जब हम गुणनखण्डों को सही रूप से युग्म बना कर दो पूर्णांकों के गुणलब्ध के रूप में व्यक्त कर सकते है। यह संभव इसलिए है क्योंकि प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड सम संख्या में दोहराता है।

कार्यकलाप 7 : 1000 और 1500 के बीच सभी संपूर्ण वर्ग लिखिए। प्रत्येक को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए। जांच कीजिए प्रत्येक गुणनखण्ड सम संख्या में दोहराता है।

अब आपको मालूम होता है क्यों एक संख्या संपूर्ण वर्ग नहीं होती। उसके अभाज्य गुणनखण्डन में कुछ अभाज्य सम संख्या में दोहराते नहीं होंगे। तो गुणनखण्डों के युग्म बनाकर दो समान पूर्णांकों के गुणलब्ध में व्यक्त नहीं कर सकते। फिर भी उसे योग्य गुणनखण्ड से गुणा करने अथवा किसी गुणनखण्ड से भाग लगाने से उसे संपूर्ण वर्ग बना सकते हैं।

माना लीजिए एक संख्या संपूर्ण वर्ग नहीं है। उदाहरण के लिए 48 लीजिए। हम देखते हैं कि $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ यहाँ 2 चार बार दोहराया गया हैं जबकि 3 एक बार दोहराया गया हैं । अतः हम अभाज्य गुणनखण्डों के युग्म नहीं बना सकते।

यदि 48 को 3 से गुणा करें तो हमें प्राप्त होता है ।

$48 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 2 \times 3)\ (2 \times 2 \times 3) = 12 \times 12$

जिससे संपूर्ण वर्ग प्राप्त होता है। हम 48 को $3 \times 2 \times 2$ से भी गुणा कर सकते है।

$48 \times 12 = (2 \times 2 \times 3 \times 2) \times (2 \times 2 \times 3 \times 2) = 24 \times 24$

जिससे संपूर्ण वर्ग प्राप्त होता है। वास्तव में 48 को $3k^2$ जहाँ k कोई घनात्मक पूर्णांक है और पूर्व की तरह प्राप्त कर सकते हैं। $48 \times 3k^2 = (12k) \times (12k)$ जो एक संपूर्ण वर्ग है। फिर भी 3 यह लघुत्तम संख्या है जिसे 48 से गुणा करने पर संपूर्ण वर्ग प्राप्त होता है।

उदाहरण 3 : लघुतम घनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिसे 9408 से गुणा करने गुणनलब्ध संपूर्ण वर्ग बनता है।

हल : 9408 को 2 से भाग लगाते चलिए जब तक आप को एक विषम संख्या प्राप्त हो।

$9408 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 147$ अब $147 = 3 \times 49 = 3 \times 7 \times 7$

अत : 9408 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 7 × 7

यहाँ 2 और 7 सम संख्या में दोहराते हैं जबकि 3 एक ही बार आता है।

अतः 9408 को 3 से गुणा करने पर एक संपूर्ण वर्ग प्राप्त होता है। ($9408 \times 3 = (168)^2$)

आइए 48 के उदाहरण पर पुनः पर विचार करें। 48 = 2 × 2 × 2 × 3

इसे 3 से गुणा करने के स्थान पर हम 3 से भाग भी लगा सकते हैं।

$$\frac{48}{3} = \frac{2\times2\times2\times2\times3}{3} = 4\times4$$

फिर भी एक संपूर्ण वर्ग प्राप्त होता है।

यहाँ आप 3 × 2 × 2 से भी भाग लगा सकते हैं।

$$\frac{48}{3\times2\times2} = \frac{2\times2\times2\times2\times3}{3\times2\times2} = 2\times2 \text{ संपूर्ण वर्ग है।}$$

अतः 3 यह लघुत्तम संख्या है जिससे 48 को भाग देने पर संपूर्ण वर्ग प्राप्त होता है।

उदाहरण 4 : 336 को कौन सी लघुत्तम घनात्मक पूर्णांक से भाग देने पर एक संपूर्ण वर्ग प्राप्त होता है।

हल : हम निरीक्षण करते हैं कि, 336 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 7 यहाँ 3 और 7 दोनों एक बार दोहराते हैं। अतः उन्हें हटाने से हम संपूर्ण वर्ग प्राप्त होता है तो हम 336 को 3 × 7 = 21 से भाग लगाते हैं।

$$\frac{336}{21} = 16 = 4^2$$

अपेक्षित लघुत्तम संख्या 21 है।

अभ्यास 5.4

1. गुणनखण्डन विधान से निम्नों के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) 196 (ii)256 (iii) 10404 (iv) 1156 (v) 13225

2. सरल कीजिए

   (i) $\sqrt{100}+\sqrt{36}$ (ii) $\sqrt{1360+9}$

   (iii) $\sqrt{2704}+\sqrt{144}+\sqrt{289}$ (iv) $\sqrt{225}-\sqrt{25}$

   (v) $\sqrt{1764}-\sqrt{1444}$ (vi) $\sqrt{169}\times\sqrt{361}$

3. एक वर्गाकार आंगन का क्षेत्रफल 1764 मी^{2} है। इसमें से 784 मी^{2} का वर्गाकार भाग उपयोग के लिए रखा है। अवशिष्ट भाग से 5 समान वर्गाकार भाग बनाये गये है। बताईए इन भागों में से प्रत्येक का परिमाप क्या होगा?
4. निम्न संख्याओं को कौन से लघुत्तम पूर्णांक से गुणा करने से संपूर्ण वर्ग प्राप्त होता है।
   (i) 847 (ii) 450
   (iii) 1445 (iv) 1352
5. निम्न संख्याओं का महत्तम संपूर्ण वर्ग गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) 48 (ii) 11280
   (iii) 729 (iv) 1352

दत्त संख्या के सन्निकट के संपूर्ण वर्ग

आइए हम एक अपूर्ण वर्ग 72 से प्रारंभ करते हैं। ध्यान दीजिए, $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ जहाँ 2 विषम संख्या में दोहराता है। 72 को 2 से गुणा कर सकते है। $72 \times 2 = 144 = 12^2$ अथवा 72 को 2 से भाग लगा सकते हैं $\frac{72}{2} = 36 = 6^2$ लेकिन 6^2 और 12^2 के बीच अनेक संपूर्ण वर्ग है जैसे $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2=100$ और $11^2 = 121$ इन में से 72 समीप का संपूर्ण वर्ग कौन सा है? आप जानते है $8^2 = 64 < 72 < 81 = 9^2$ और $72 - 64 = 8 < 9 = 81 - 72$. अतः 81 की तुलना में 72 से अधिक समीप है।

वास्तव में दत्त संपूर्ण वर्ग के सन्निकट निश्चित एक संपूर्ण वर्ग होता है। मान लीजिए N एक अपूर्ण वर्ग है। आप इसे दो क्रमागत वर्गों के बीच रख सकते हैं। एक विशिष्ट संख्या N होती है ताकि $n^2 < N < (n+1)^2$ (क्यों?) क्योंकि n और (n + 1) क्रमागत संख्या होने से एक संख्या होती और दूसरी विषम। अतः N, n^2 और $(n + 1)^2$ के बराबर बीच में नहीं होता। यदि $N - n^2 = (n + 1)^2 - N$ तो $2N = n^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1$ जो असंभव है क्योंकि 2N सम संख्या है और $2n^2 + 2n + 1$ एक विषम संख्या है। **अतः** n^2 एक संपूर्ण वर्ग N के सन्निकट है अथवा $(n + 1)^2$ समीप संपूर्ण वर्ग है। यदि n^2, N के समीप का संपूर्ण वर्ग है तो हम कहते है n करीबन $\sqrt{N}$ है यदि $(n + 1)^2$, N के अधिक समीप वर्ग है तो कह सकते हैं $n + 1$, $\sqrt{N}$ के करीबन है। अतः यद्यपि N एक संपूर्ण वर्ग न होने पर (ताकि $\sqrt{N}$ एक पूर्णांक न हो) हम $\sqrt{N}$ के समीप पूर्णांक ज्ञात कर सकते हैं

और ऐसा पूर्णांक जो $\sqrt{N}$ के बराबर हो।

उदाहरण 5 : एक वर्ग का क्षेत्र 90 वर्ग से. मी. है उसके भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए जिसका मूल्य एक पूर्णांक के करीब हो।

हल : क्योंकि $A = l^2$

$$\therefore \ l^2 = 90$$

लेकिन 81 < 90 < 100. अतः 90 के करीब 100 की तुलना में 81 अधिक करीब है।

अतः $\sqrt{90}$ के अत्यन्त समीप पूर्णांक $\sqrt{81} = 9$

उदाहरण 6 : एक जमीन का क्षेत्रफल 112 मीटर है। इसके परिमाप के अत्यन्त करीब पूर्णांक कौन सा है?

हल : यदि वर्ग की भुजा की लंबाई 'l' हो तो उसका परिमाप $4l$ है। हम जानते है

$l^2 = 112$

अतः $$(4l)^2 = 16l^2 = 16 \times 112 = 1792$$

लेकिन 42^2 = 1764 < 1792 < 1849 = 43^2

अतः 1849 की तुलना में 1764 अधिक समीप है। अतः $\sqrt{1792}$ के करीब का पूर्णांक 42 है। अतः परिमाप का अत्यन्त सन्निकट मूल्य 42 सें मी. है।

सावधान !

यदि $\sqrt{112}$ के अत्यन्त समीप का पूर्णांक लेते हो तो वह 11 है और हो सकता है आप परिमाप हैं 44 (= 4 × 11) से.मी. ले सकते हो। $\sqrt{112}$ के स्थान पर 11 लेने से आपने गलती की है और उसे 4 से गुणा करने से, गलती 4 गुना बढ़ जाती है। अतः हमने 112 को 16 से गुणा कर बाद में वर्गमूल लिया है जो करीबन पूर्णांक है। इसमें अजिब कुछ भी नहीं है। $r = \frac{1}{4}$ के करीब का पूर्णांक 0 है। लेकिन $3r = \frac{3}{4}$ के करीब का पूर्णांक 1 है परन्तु 3 × 0 = 0 नहीं।

अब हम पूर्णांक की कमियां देख सकते हैं। यदि आप $\sqrt{90}$ ज्ञात करना चाहते हो तो तुम्हें 9 लेना चाहिए यदि $\sqrt{94}$ ज्ञात करना तो 10 लेना है। लेकिन दोनों में से एक भी अपूर्ण वर्ग को वर्गमूल का मूल्य दे सकता है। यह कमी इसलिए है क्योंकि n और (n + 1)

के बीच कोई पूर्णांक नहीं है। यह गुण परिमेय संख्या के समुच्चय में लुप्त होता है। इससे हम एक अपूर्ण वर्ग का वर्गमूल के करीब के मूल्य जान सकते है। इस के बारे में और उच्च कक्षाओं में अध्ययन करेंगे।

अभ्यास 5.5

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल के अत्यन्त समीप पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

   (i) 232 (ii)600 (iii) 728 (iv) 824 (v) 1729

2. एक जमीन का टुकडा वर्गाकार है और उसका क्षेत्रफल 1000 मी^{2}। तार उपयोग कर आवरण लगाना है। तार पूर्णांक लंबाई में उपलब्ध है। पता लगाईए इस कार्य के लिए कितने न्यूनतम लंबाई का तार अवश्य है?

3. एक विद्यार्थी को $\sqrt{961}$ ज्ञात करने कहा गया। उसने गलती से $\sqrt{691}$ अत्यंत समीप पूर्णांक ज्ञात किया। उससे ज्ञात संख्या से उसका सही उत्तर कितना छोटा है?

संपूर्ण घन

निम्न तालिका पढ़िये

$$1 = 1 \times 1 \times 1$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$27 = 3 \times 3 \times 3$$
$$125 = 5 \times 5 \times 5$$

आप देखते है कि प्रत्येक संख्या तीन समान पूर्णांकों का गुणलब्ध है।

यदि N तीन समान पूर्णांकों का गुणनफल है तो पूर्णांक N को संपूर्ण घन कहते है।

यदि N = $m \times m \times m$ हो तो N, m का घन है और उसे N = m^3 लिखते (m का घन अथवा m क्यूब पढिए)

कुछ और उदाहरणों पर विचार कीजिए

$$(-4) \times (-4) \times (-4) = -64 = (-4)^3$$
$$(-5) \times (-5) \times (-5) = -125 = (-5)^3$$
$$(-8) \times (-8) \times (-8) = -512 = (-8)^3$$

क्या आप देखते हैं कि ऋणात्मक संख्याऐं भी संपूर्ण घन है? इसकी तुलना संपूर्ण वर्गों से कीजिए। एक शून्यरहित संपूर्ण वर्ग अवश्य ही घनात्मक पूर्णांक है। फिर भी संपूर्ण घन ऋणात्मक भी हो सकता है।

उदाहरण 7 : '6' का घन ज्ञात कीजिए।

हल : $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 36 \times 6 = 216.$

उदाहरण 8 : 20 का घन क्या है?

हल : फिर से $(20)^3 = 20 \times 20 \times 20 = 400 \times 20 = 8000$

एक ठोस घन के बारे में आपने अध्ययन किया है। इस ठोस की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान होती है। यदि घन की लंबाई 'l' तो उसका आयतन $V = l^3$ घन इकाईयाँ ।

उदाहरण 9 : एक घन की भुजा लंबाई 10 से. मी है। उसका आयतन क्या है?

हल : $V = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ घन से. मी.

उदाहरण 10 : 1 से बड़ा पूर्णांक ज्ञात कीजिए जो सम्पूर्ण वर्ग और संपूर्ण घन है।

हल : किसी संख्या 'n' से प्रारंभ कीजिए और उसे स्वयं से 6 बार गुणा कीजिए ताकि आपको N संख्या प्राप्त हो।

आपको ज्ञात होगा कि

$$\begin{aligned} N &= n \times n \times n \times n \times n \times n \\ &= (n \times n) \times (n \times n) \times (n \times n) \\ &= (n^2) \times (n^2) \times (n^2) \\ &= (n^3)^2 \end{aligned}$$

इस तरह N, n^2 का घन है।

इसके विपरीत आप देखेंगे कि

$$\begin{aligned} N &= n \times n \times n \times n \times n \times n = (n \times n \times n) \times (n \times n \times n) \\ &= (n^3) \times (n^3) = (n^3)^2 \end{aligned}$$

अतः N, n^2 का वर्ग भी है।

इस तरह N एक वर्ग भी और एक घन भी है।

$n = 2$ लेने से हमें लघुतम संख्या प्राप्त होती है।

$N = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

आप सत्यापन कर सकते हैं $64 = 4^3$ और $64 = 8^2$

उदाहरण 11 : दर्शाइए कि 6 एक संपूर्ण घन नहीं है।

हल : हम देखते हैं कि $1 < 6 < 8$ ताकि $1^3 < 6 < 2^3$ क्योंकि 1 और 2 के मध्य कोई पूर्णांक नहीं है, 6 को तीन पूर्णांकों के गुणलब्ध के रूप में व्यक्त नहीं कर सकते।

अभ्यास 5.6

1. निम्न नमूने को देखकर, रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

2	3	4	–5	–	8	–
$2^3 = 8$	$3^3 = ...$	$.... = 64$	$.... = ...$	$6^3 = ...$	$..... = ...$	$...... = 729$

2. प्रथम पाँच विषम स्वाभाविक संख्याओं के घन और प्रथम पाँच सम संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए। विषम घन और सम घन के बारे में क्या कहना है।
3. 1 और 100 के मध्य कितने संपूर्ण घन ज्ञात कर सकते हैं? और – 100 और 100 कितने घन ज्ञात कर सकते हैं।
4. 1 और 500 के बीच कितने संपूर्ण घन ज्ञात कर सकते है। इन घन संख्याओं में संपूर्ण वर्ग कितने हैं?
5. 10, 30, 100, 1000 के घन ज्ञात कीजिए। संख्याओं के अंत में आनेवाले शून्य के बारे में आप क्या कहेंगे?
6. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 के घन की इकाई स्थान के अंक कौन-कौन से है? क्या वर्गों की तरह इकाई स्थान के अंक देखकर हम दत्त संख्या घन है या नहीं निर्धारित कर सकते है?

श्रीनिवास रामानुजन (1887–1920) निःसंदेह सबसे महान भारतीय गणितज्ञ है। वे स्वज्ञानी थे और उनके पास चमत्कारी गणितीय नैपुण्यता थी।

भारत में स्कूल की परीक्षाओं में उत्तीर्ण नहीं हो सके और मद्रास के पोर्ट ट्रस्ट की मुनिम की नौकरी में तृप्त होना पड़ा। फिर भी वे अपने गणित सृजन करते रहे। और अज्ञात चमत्कारी परिणाम प्राप्त किया। इन परिणामों को उन्होंने जी.एच. हार्डी के पास भेज दिया, जिन्होंने रामानुजन की निजी गणितीय योग्यता पहचानी । और उन्हें कामब्रिज (Cambridge) जाने के लिए व्यवस्था की । प्रशिक्षण की कमी के कारण वे औपचारिक प्रमाण और वास्तविक सत्य के बीच अंतर नहीं कर पायें। उनकी तर्करहित समझ और गणितीय योग्यता के कारण वे अत्यन्त मौलिक एवं असामान्य परिणाम प्राप्त कर सके। उन्हें संख्याओं का बहुत अच्छा ज्ञान था और संख्या प्रणाली में निपुण थे। जे लिटलवुड (जी.एच. हार्डी के सहकर्मी) ने उद्गार किया कि हर एक संख्या रामानुजन का मित्र है। संख्या का उनका ज्ञान निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट कर सकते हैं।

एक बार रामानुजन इंग्लैण्ड में बीमार पड़े और वे अस्पताल में दाखिल थे हार्डी उन्हें मिलने गये। जब हार्डी ने कहा कि उनके टैक्सी का नंबर 1729 है, जो कि अत्यन्त निरस संख्या । रामानुजन ने तुरन्त प्रतिक्रिया दी और कहा कि वह अत्यन्त महत्वपूर्ण संख्या है। वह सबसे छोटी संख्या थे जिसे दो संख्याओं के घन के योगफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ **(हार्डी–रामानुजन संख्या)**

दुर्भाग्यवश इंग्लैण्ड में उनकी तबीयत बिगड़ने लगी। शायद, मौसम और आहार उनके शरीर के लिए योग्य नहीं रहे और विदेशी संस्कृति में बिल्कुल अकेले महसूस करने के कारण और 1919 उन्हें स्वास्थ्य सुधारने घर भेजा गया परन्तु दूसरे ही वर्ष 32 वर्ष की आयु में वे चल बसे।

कार्यकलाप 7: (हार्डी–रामानुजन संख्या पर और जानकारी) 4104 और 13832 को भिन्न विधान में दो संपूर्ण घन के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए। ऐसे और कुछ संख्याओं को ज्ञात कीजिए जिन्हें दो भिन्न विधानों में दो–दो वर्गों के योगफल के रूप में व्यक्त कर सकते है। इस विषय अधिक जानकारी प्राप्त कीजिए।

घनमूल

आप दत्त लंबाई की भुजा के घन का आयतन ज्ञात करना जानते हैं। क्या आप इसकी विपरीत प्रक्रिया जानते हो? दत्त घन का आयतन देने पर क्या आप भुजा की लंबाई जान सकते है? मान लीजिए एक घन का आयतन 125 घन से.मी है। यदि भुजा की लंबाई l हो तो $l^3 = 125$ और निर्णय लो $l = 5$ से.मी. होगी। हम 5 को 125 का घनमूल कहते है। और लिखते $5 = \sqrt[3]{125}$

यदि N और m दो संख्याऐं है ताकि $N = m^3$ तो हम m को N का घनमूल कहते हैं और उसे m $= \sqrt[3]{N}$ सूचित करते हैं।

ध्यान दीजिए : वर्गमूल और घनमूल का अर्थ अपूर्णांक से भी जुड़ा है (वर्गमूल के लिए वह ऋणात्मक रहित होना चाहिए) इस समय हम अपनी परिभाषा पूर्णांकों को सीमित रखते हैं। घनमूल और वर्गमूल की परिभाषाओं में तुलना कीजिए। एक संपूर्ण वर्ग दिये जाने पर उसके दो वर्गमूल ज्ञात कर सकते है: एक घनात्मक और एक ऋणात्मक क्योंकि शून्यरहित पूर्णांक का वर्गमूल हमेशा घनात्मक होता है और किसी n पूर्णांक के लिए $(-n)^2 = n^2$ घन के संदर्भ में ऐसा नहीं होता।

यदि n घनात्मक है तो n^3 घनात्मक होता है और n ऋणात्मक हो तो n^3 भी ऋणात्मक अतः एक संपूर्ण घन का घनमूल घनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है।

अतः एक संपूर्ण घन के घनमूल के बारे में स्पष्ट रूप से कह नहीं सकते हैं। वर्गमूलों की तरह हमें कोई संकेत की आवश्यकता नहीं होती।

वर्गमूलों की तरह, हम एक संपूर्ण घन का घनमूल अभाज्य गुणनखण्डन द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 12 : गुणनखण्डन विधान से 216 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए

$$216 = 2 \times (108) = 2 \times 2 \times (54) = 2 \times 2 \times 2 \times 27$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$
$$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 6 \times 6 \times 6$$
$$\therefore \sqrt[3]{216} = 6$$

उदाहरण 13 : −17576 का घनमूल गुणनखण्डन विधान से ज्ञात कीजिए।

हल : आईए पहले हम 17576 का घनमूल ज्ञात करते हैं।

पिछले उदाहरण जैसे, $17576 = 2\ (8788) = 2 \times 2 \times (4394)$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times (2197)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 13 \times (169)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 13 \times 13 \times 13$$
$$= (2 \times 13) \times (2 \times 13) \times (2 \times 13)$$
$$= 26 \times 26 \times 26$$

इस से स्पष्ट होता है कि $-17576 = (-26) \times (-26) \times (-26)$

$$\therefore \sqrt[3]{-17576} = -26$$

उदाहरण 14 : कौन से लघुतम पूर्णांक से गुणा करने पर 243 संपूर्ण घन बनता है?

हल : आईए 243 के गुणनखण्ड ज्ञात करें हम पत्ता चलता है कि

$243 = 3 \times 81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ यदि हम 243 को 3 से गुणा करने पर

$243 \times 3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 9 \times 9$

हमें एक संपूर्ण घन प्राप्त होता है। अतः हमें 3 से गुणा करना है।

एक संपूर्ण घन के अभाज्य गुणनखण्ड 3 के गुणज में दोहराते है । (जैसे कि वर्ग में 2 के गुणज में) अतः एक संपूर्ण घन बनने अवश्य गुणनखण्ड ज्ञात करने हमें देखना होता कितने गुणनखण्डों की कमी है।

कई बार घनमूल ज्ञात करने में बहुत समय लगता है। हमें कोई आसान विधान ढूँढना होगा। हमें घन के इकाई स्थान की संख्या देखकर घनमूल निश्चित करना होगा।

घन के इकाई स्थान 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 देखकर विशिष्ट रूप घनमूल ज्ञात कर सकते है। निम्न तालिका ध्यान दीजिए।

n के इकाई स्थान	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n^3 के इकाई स्थान	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0

हम प्रथम नौ संख्याओं के घन की तालिका बना सकते है।

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729

आईए हम देखे कैसे सहायक है।

उदाहरण 15 : 103823 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ 103823 के इकाई स्थान पर 3 है। यदि $n^3 = 103823$ हो तो n के इकाई स्थान में 7 होना चाहिए। आईए 103823 को 103 और 283 में विभाजित करते है। हमें ज्ञात है कि

$$4^3 = 64 < 103 < 125 = 5^3$$

अतः $40^3 = 64000 < 103283 < 125000 = 50^3$ इसलिए n यह 40 और 50 के बीच की संख्या होनी चाहिए क्योंकि n इकाई स्थान पर 7 है तो n का मूल्य 47 ही होना चाहिए। आप जाँच कर सकते है $47^3 = 103283$

सूचना : केवल संपूर्ण घन रहें तो मात्र यह विधान उपयोगी हैं

फिर भी, यह अपूर्ण घन का घनमूल अंदाजा करने में सहायक है। हम दत्त संख्या को दो संपूर्ण घन में बीच रखकर अत्यन्त समीप घनमूल ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 16 : 12345 के घनमूल के अत्यन्त समीप पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि, $20^3 = 8000 < 12345 < 27000 = 30^3$

अतः $\sqrt[3]{12345}$, 20 और 30 के बीच होना चाहिए। हम नहीं जानते कि 12345 एक संपूर्ण

घन है या नहीं। फिर भी अधिक से अधिक समीप के मूल्य जान सकते है।

$23^3 = 12167$ और $24^3 = 13824$

अतः $\sqrt[3]{12345}$, 23 और 24 के बीच होना चाहिए। और से और 13824 की अपेक्षा 12167, 12345 के अधिक समीप है। अतः $\sqrt[3]{12345}$ के घनमूल के अत्यन्त समीप पूर्णांक 23 है।

अभ्यास 5.7

1. अभाज्य गुणनखण्डन द्वारा घनमूल ज्ञात कीजिए

   (i) 1728 (ii) 3375 (iii) 10648 (iv) 46656 (v) 15625

2. निम्नों के घनमूल इकाई स्थान के अंक देखकर तथा अंदाजन विधान से ज्ञात कीजिए।

   (i) 91125 (ii) 166375 (iii) 704969

3. निम्नलिखित प्रत्येक के घनमूल के समीप पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

   (i) 331776 (ii) 46656 (iii) 373248

शब्दावली

संपूर्ण वर्ग : एक पूर्णांक जो दो समान पूर्णांकों का गुणनफल है।

त्रिकोणीय संख्याऐं : n स्वाभाविक संख्याओं के योगफल को n वी त्रिकोणीय संख्या कहते है।

वर्गमूल : एक संख्या 'a', यह 'b' का वर्गमूल कहलाता है यदि $b = a^2$

संपूर्ण घन : तीन समान पूर्णांकों का गुणनफल घन कहलाता है।

घनमूल : एक 'c' जिसका घन 'd' हो तो उसे 'd' को c घनमूल कहते है।

अभाज्य गुणनखंड : एक अभाज्य संख्या जो पूर्णांक 'a' को भाग लगाता है तो उसे 'a' का अभाज्य गुणनखंड कहते हैं।

अपरिमेय संख्या : एक वास्तविक संख्या जो परिमेय संख्या नहीं है।

याद रखिए

- दो समान पूर्णांकों का गुणनफल संपूर्ण वर्ग है और तीन समान पूर्णांकों का गुणनफल घन है।
- एक संपूर्ण वर्ग हमेशा ऋणात्मक रहित होता है (0 भी वर्ग है)
  एक संपूर्ण घन ऋणात्मक हो सकता है, शून्य से समान अथवा घनात्मक हो सकता है।
- एक घनात्मक संख्या दिये जाने पर उसके दो वर्गमूल होते है – घनात्मक और ऋणात्मक परन्तु एक संख्या का एक ही घनमूल होता है।
- एक संख्या जो वर्ग नहीं है उसे दो अपूर्ण वर्गों के बीच रखकर तुलना कर सकते हैं।
- एक घनात्मक पूर्णांक जो कि वर्ग नहीं है, उसे हम दो क्रमागत वर्गों के बीच रख सकते हैं।

उत्तर

अभ्यास 5.1

1. (i) $4^2 = 16$ (ii) $8^2=64$ (iii) $15^2 = 225$
2. 1, $36 = 6^2$, $49 = 7^2$, $81 = 9^2$, $169 = 13^2$, $625 = 25^2$, $900=30^2$, $100=10^2$
3. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484.
4. आप 200, 201, 204, 205, 206, 209 ले सकते हैं। इन में से कोई भी वर्ग नहीं है क्योंकि वे $196 = 14^2$ और $225 = 15^2$ के बीच स्थित है।
5. 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400.

अभ्यास 5.2

1. $1 + 3 + 5 + \ldots + 51 = 26^2 = 676$
2. $144 = 12^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 23$
3. 105 और 120 उनका योगफल $225 = 15^2$
4. 0, 1 अथवा 4.

अभ्यास 5.3

1. (i) 961 (ii) 5184 (iii) 1369 (iv) 27556
2. (i) 7225 (ii) 13225 (iii) 27225 3. 2155024

अभ्यास 5.4

1. (i) 14 (ii) 16 (iii) 102 (iv) 34 (v) 115
2. (i) 16 (ii) 37 (iii) 81 (iv) 10 (v) 4 (vi) 247
3. 56 से.मी
4. (i) 7 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 2
5. (i) 16 (ii) 16 (iii) 729 (iv) 676

अभ्यास 5.5

1. (i) 15 (ii) 24 (iii) 27 (iv) 29 (v) 42
2. 127 मीटर 3. 5

अभ्यास 5.6

1.

2	3	4	–5	6	8	–9
$2^3=8$	$3^3=27$	$4^3=64$	$(-5)^3=125$	$6^3=216$	$8^3=512$	$(-9)^3=-729$

2.

1^3	2^3	5^3	7^3	9^3	2^3	4^3	6^3	8^3	10^3
1	27	125	343	729	8	64	216	512	1000

विषम संख्या का घन विषम और सम संख्या का घन सम है।

3. 1 से 100 के बीच संपूर्ण घन है। –100 से 100 के बीच 9 संपूर्ण घन है। (याद रखिए 0 भी संपूर्ण घन है).
4. 1 और 500 के बीच 7 संपूर्ण घन है इन में से 64 मात्र संपूर्ण घन है $64 = 4^3 = 8^2$
5. घन में संख्या के अंत में आनेवाले शून्य हमेशा 3 के गुणज है।
6. प्रत्येक अंक किसी न किसी के अंत पाया जाता है।
   अतः कोई भी यह निष्कर्ष ले नहीं सकता कि दत्त संख्या घन है (अंतिम अंक देखकर)

अभ्यास 5.7

1. (i) 12 (ii) 15 (iii) 22 (iv) 36 (v) 25
2. (i) 45 (ii) 55 (iii) 89
3. (i) 69 (ii) 36 (iii) 72

घटक – 6
त्रिभुजों पर प्रमेय

इस घटक के अध्ययन के बाद आप सीखेंगे

- आकृतियों के संग्रह में एक त्रिभुज को पहचानना।
- भुजा एवं कोणों के आधार पर विभिन्न त्रिभुज के प्रकारों में वर्गीकृत करना।
- त्रिभुज का कोण योगफल गुण के बारे में पहचानना।
- त्रिभुज के बाह्य तथा अन्तः कोण पहचानना।
- बाह्य कोण तथा अभिमुख अंतःकोणों के बीच संबंध स्थापित करना
- त्रिभुज का कोण योगफल गुण को तार्किक रूप से सिद्ध करना
- त्रिभुज के कोणों के आधारित गणित कैसे हल् करना

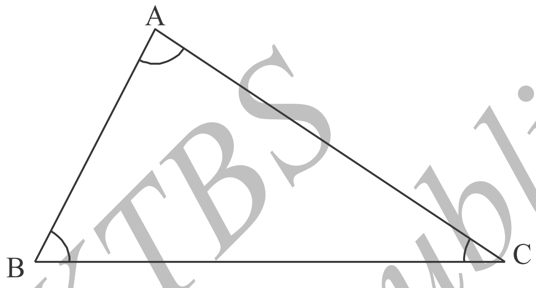
प्रस्तावना

पिछले अध्याय में आपने सरल रेखा तथा कोणों के बारे में अध्ययन किया है। आप ने देखा है युक्लिडीयन ज्यामिति के अभिधारणा के आधार पर कोणों एवं रेखाओं के बीच सुन्दर संबंध स्थापित कर सकते हैं। इस अध्याय में आप तीन असमांतर रेखाओं से बनी बन्द समतलीय आकृति **त्रिभुज** के बारे में अध्ययन करेंगे।

तीन असंगामी रेखाखण्डों से समतल में परिबद्ध समतलीय आकृति को त्रिभुज कहते हैं यहाँ विवरण देने की आवश्यकता है। जब हम समतलीय आकृति कहते हैं हमारा अर्थ होता रैखिक आकृति, बल्कि दो मितिय आकृति नहीं। मान लीजिए A, B, C तीन ऐसे बिन्दु जो एक ही सरल रेखा पर नहीं है; A, B, C को हम असमरेख (non-collinear) बिन्दु कहते हैं। AB, BC और CA मिलाईए । हमें एक रैखिक आकृति प्राप्त होती है जिसमें तीन रेखाखण्ड है जो उनकी अंतिम बिन्दु पर मात्र मिलते हैं। ऐसे रैखिक आकृति को त्रिभुज कहते हैं । A, B और C को त्रिभुज ABC के **शीर्ष** (vertices) कहते हैं। रेखाखण्ड $\overline{AB}, \overline{BC}$ और $\overline{CA}$ को त्रिभुज की **भुजाएँ** कहते हैं और कोण $\underline{|BAC}$, $\underline{|ABC}$ और $\underline{|ACB}$ त्रिभुज ABC के कोण कहते हैं । (ABC के अन्तःकोण)

एक त्रिभुज में 9 अंश होते हैं।

शीर्ष	भुजायें	कोण
A	AB	$\angle BAC$ या $\angle A$
B	BC	$\angle ABC$ या $\angle B$
C	CA	$\angle ACB$ या $\angle C$



सूचना : जहाँ कोई उलझन नहीं है, त्रिभुज ABC की भुजाओं को AB, BC और AC पढ़ते हैं। इन संकेतों को तद्नरूपी लंबाई सूचित करने उपयोग करते है। संदर्भ आपको भुजा अथवा लंबाई लेना बताता है।

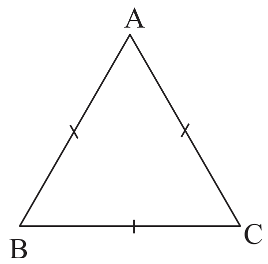
सोचने की बातें :

1. समतल कागज़ कटा त्रिभुज, एक त्रिभुजाकार कागज बल्कि त्रिभुज नहीं हैं। केवल रेखाखण्डों से एक त्रिभुज बनता है।
2. त्रिभुजाकार कागज के समतलीय आकृति का क्षेत्रफल होता है बल्कि मोठाई नहीं होती ।

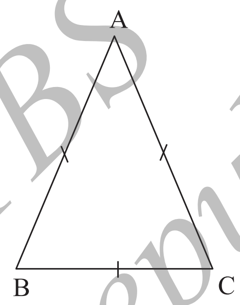
त्रिभुजों को भुजाओं के तथा कोणों के आधार पर वर्गीकरण करते हैं

भुजाओं के आधार पर वर्गीकरण (i) समबाहु त्रिभुज (ii) समद्विबाहु त्रिभुज (iii) विषमबाहु त्रिभुज ।

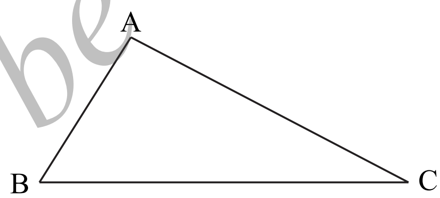
समबाहु त्रिभुज : एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाऐं लंबाई में समान होती हैं उसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं । त्रिभुज ABC में AB = BC = CA



समद्विबाहु त्रिभुज : एक त्रिभुज जिसमें कोई दो भुजाऐं लंबाई में समान होती है उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते है। पार्श्व त्रिभुज ABC में AB = BC



विषमबाहु त्रिभुज : एक त्रिभुज जिसमें सभी भुजाऐं लंबाई भिन्न हों उसे विषम बाहु त्रिभुज कहते हैं। पार्श्व त्रिभुज में ABC में AB ≠ BC ≠ CA ≠ AB

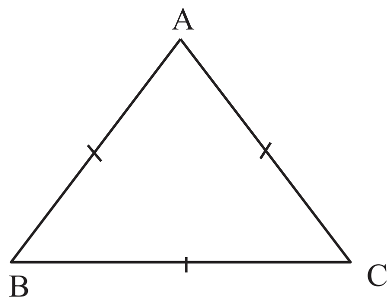


क्या आप देखते हैं एक समबाहु त्रिभुज, एक समद्विबाहु त्रिभुज होता परन्तु एक समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु नहीं ेता।

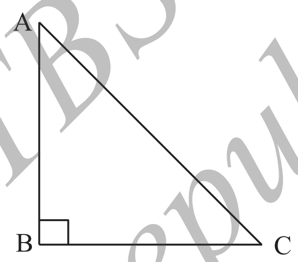
कोणों के आधार पर वर्गीकरण

(i) लघुकोण त्रिभुज (न्यूनकोण त्रिभुज) (ii) लंबकोण त्रिभुज (iii) अधिककोण त्रिभुज.

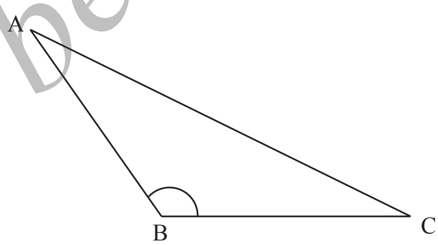
लघुकोण त्रिभुज : एक त्रिभुज जिसमें सभी कोण 90° से कम है, उसे लघुकोण त्रिभुज कहते हैं। पार्श्व त्रिभुज ABC में $\angle ABC < 90^\circ$, $\angle BCA < 90^\circ$, $\angle CAB < 90^\circ$



लंबकोण त्रिभुज : एक त्रिभुज जिसमें एक कोण 90° के बराबर है उसे लंब कोण त्रिभुज कहते हैं। पार्श्व त्रिभुज ABC में $\angle ABC = 90^\circ$

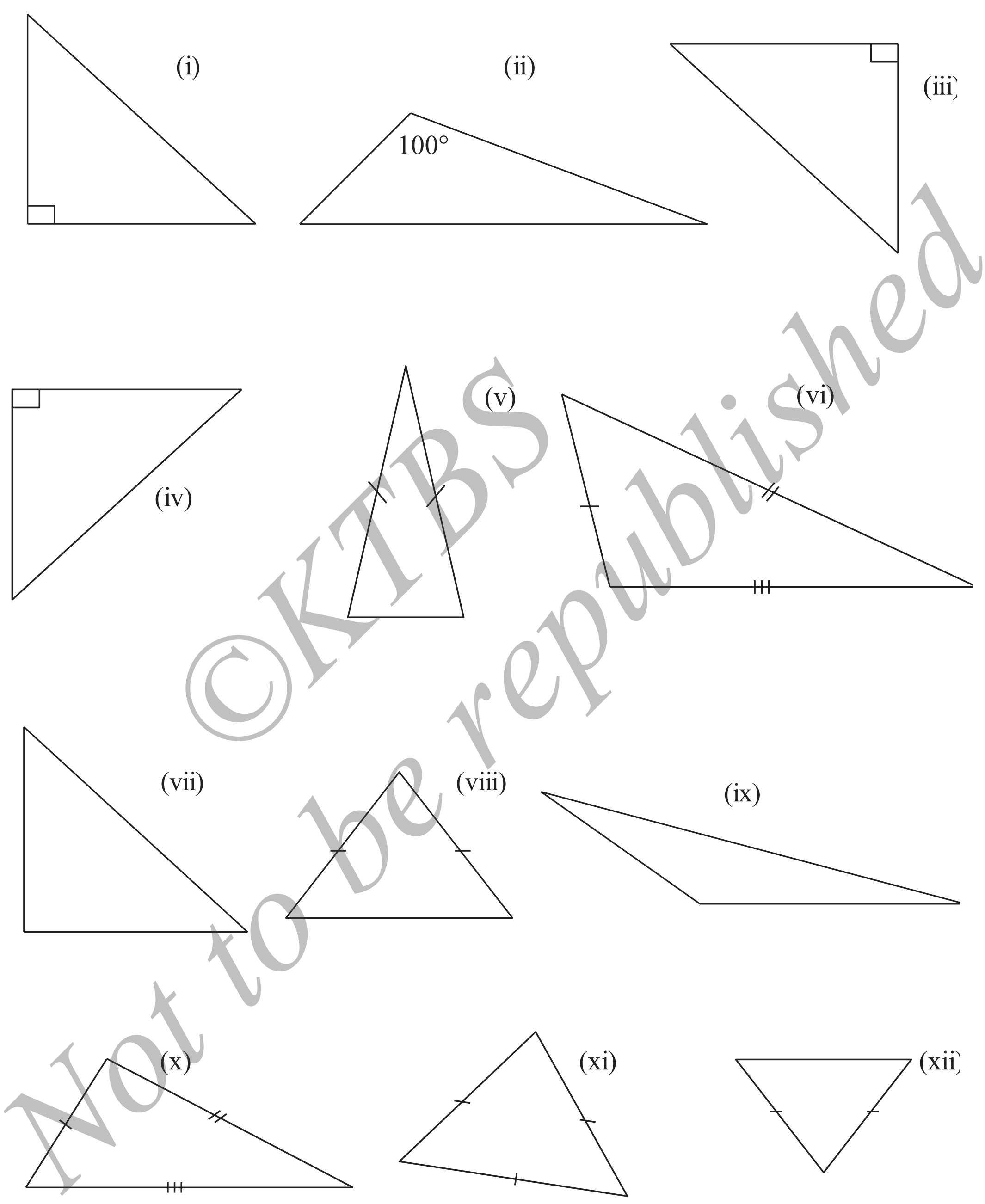


अधिक कोण त्रिभुज : यदि एक त्रिभुज में एक कोण 90° से अधिक है, उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं। पार्श्व त्रिभुज में $\angle ABC > 90^\circ$



कार्यकलाप 1

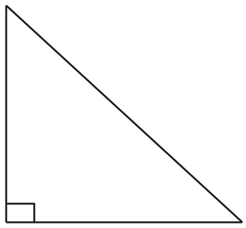
निम्नलिखित त्रिभुजों के नाम लिखिए ।


(i)
(ii)
100°
(iii)
(iv)
(v)
(vi)
(vii)
(viii)
(ix)
(x)
(xi)
(xii)

अभ्यास 6.1

1. जोड़कर लिखिए :

(i)

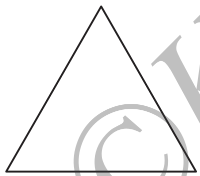


(A) समबाहु त्रिभुज

(ii)

(B) लघुकोण त्रिभुज

(iii)

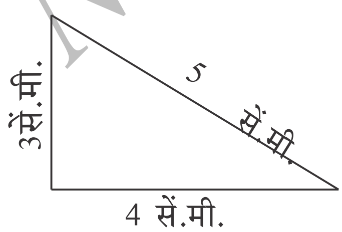


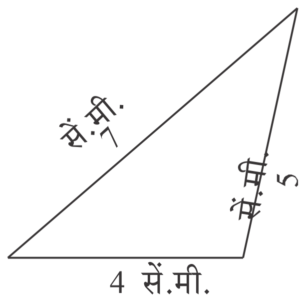
(C) लंबकोण त्रिभुज

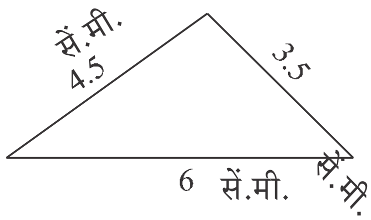
(iv)

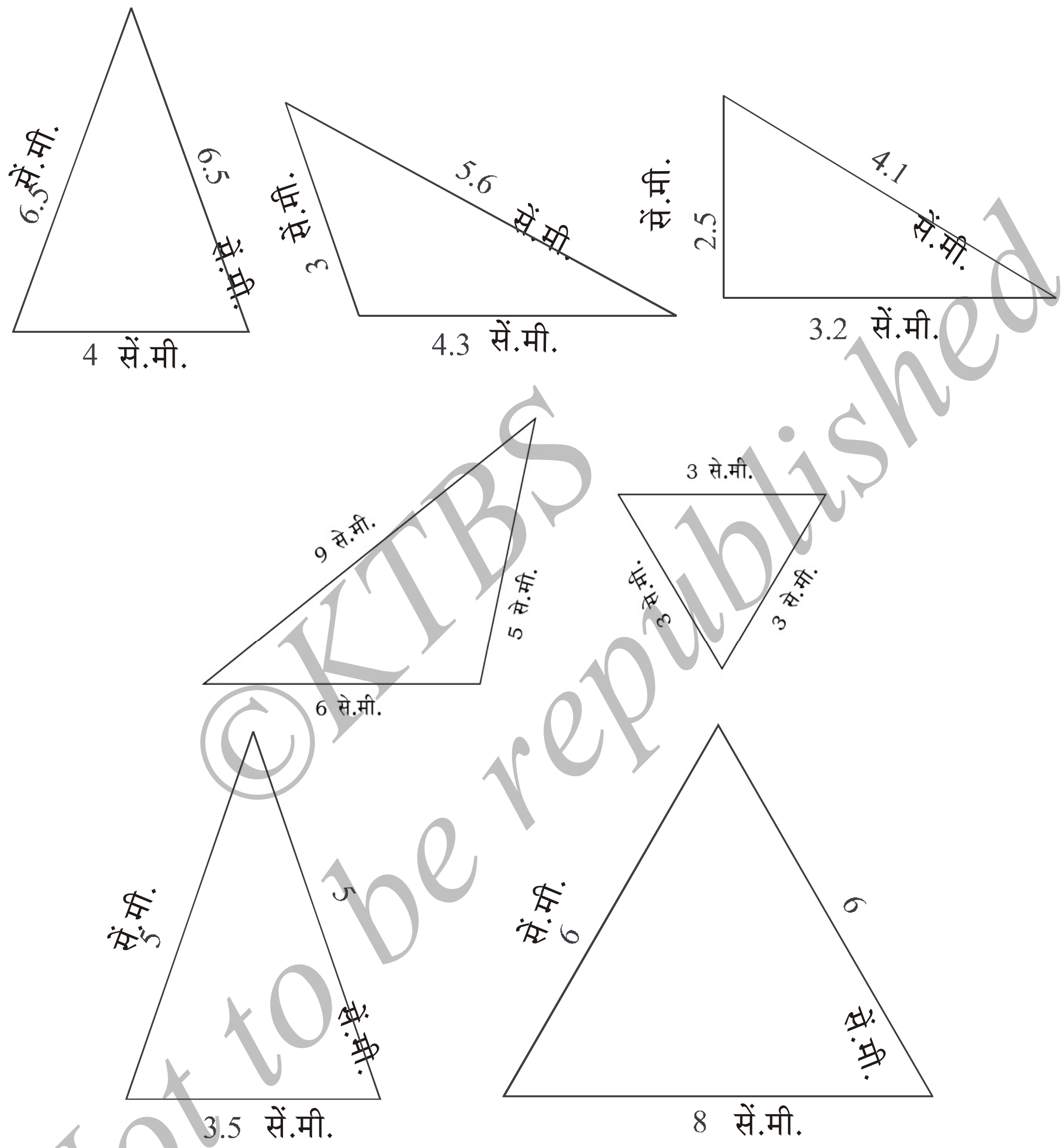
(D) अधिककोण त्रिभुज

2. भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण कीजिए (आकृतियों पैमाने के अनुसार नहीं खींचा गया):









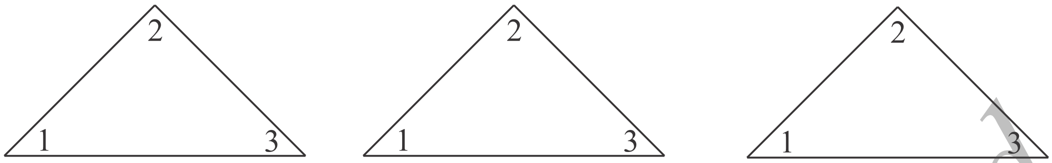
अन्तः कोणों का योगफल

एक ज्यामितिय परिणाम प्राप्त करने आईए हम एक क्रिया पूर्ण कर लेते हैं।

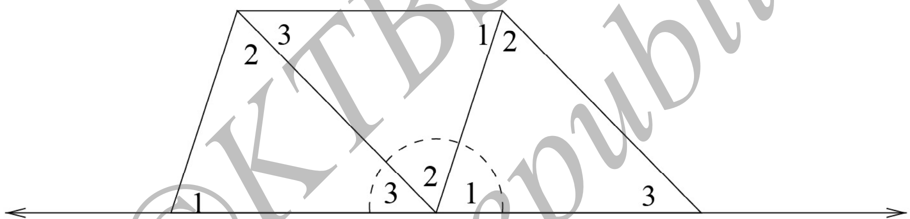
कार्यकलाप 2 :

एक कागज लेकर उसे चार बार मोडिये। एक भाग पर मापनी और पेन्सिल से त्रिभुज खींचिए कैंची की सहायता से त्रिभुज काट लीजिए। अब आपके पास चार समरूपी त्रिभुजाकार कागज

हैं। इन में से कोई तीन त्रिभुज लीजिए और समरूपी कोणों को कागज पर 1, 2, 3 अंकित कीजिए जैसे नीचे आकृति में दिखाया गया है।



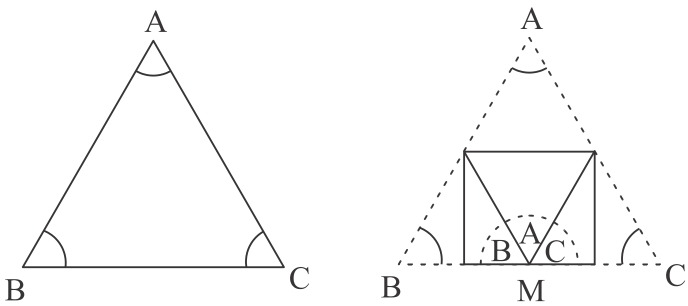
नोटबुक के कागज पर एक सरल रेखा खींचिए। आकृति में दिखाये जैसे, त्रिभुजों के कोणों को व्यवस्थित कीजिए ताकि पहले त्रिभुज का पहला कोण को 1, दूसरे को कोण 2 और तीसरे को कोण 3, एक दूसरे के पार्श्व में आये हैं।



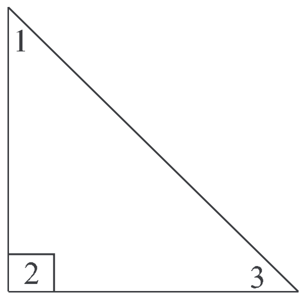
आप देखेंगे कि तीनों कोण मिलाकर एक सरल कोण बनता है। लेकिन आप देखते हैं कि तीनों त्रिभुज के कोण है। इस तरह, आप अनुमान लगा सकते हैं कि **त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल 180° है।**

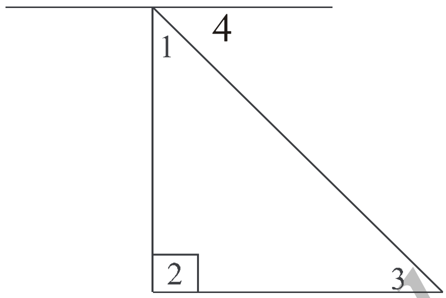
कार्यकलाप 3 :

आकृति में दिखाये जैसे एक कागज पर एक त्रिभुज ABC खींचिए। कागज का अन्य भाग काट दीजिए। त्रिभुजाकार कागज को ऐसे मोडिए ताकि शीर्ष A कागज के आधार रेखा M पर मिलें। अब शीर्ष B और C को भी मोडिए ताकि वे M पर मिलें। आप देखेंगे कि वे एक सरल कोण बनाते हैं। (आकृति देखिए)।



लंबकोण त्रिभुज खींचिए ताकि $\angle 2 = 90°$ (आकृति देखिए)





हमें तीनों कोणों का योगफल ज्ञात $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ त्रिभुज के उपरी शीर्ष से होते हुए आधार के लिए एक समांतर रेखा खींचिए।

अब आप को और एक कोण $\angle 3$ के समान $\angle 4$ प्राप्त होता है क्योंकि वे दो समांतर रेखाओं के बीच बनें एकांतर कोण है।

अतः $\angle 1 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4 = 90°$

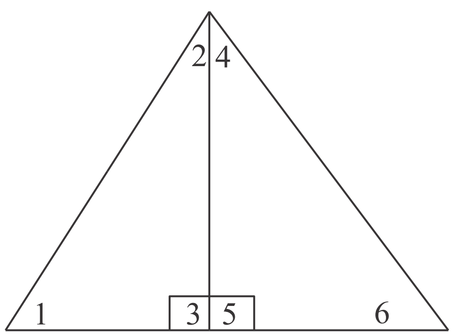
यह सूचित करता है

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 2 + (\angle 1 + \angle 3) = 90° + 90° = 180°$$

लंबकोण के अंतःकोणों का योगफल $180°$ है।

इसे हम, त्रिभुज के अंतःकोण का योगफल $180°$ होता है सिद्ध करने उपयोग करेंगे।

एक त्रिभुज लीजिए



आधार को लंब खींचकर इसे दो लंबकोण त्रिभुजों में विभाजित कर सकते हैं; हम जानते हैं कि

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ, \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360^\circ$

लेकिन कोण $\angle 3$ और $\angle 5$ संपूरक कोण है और वे एक सरल रेखा बनाते हैं।

अतः

$\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$

इस तरह

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 4 + \angle 6 = 360^\circ - (\angle 3 + \angle 5) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

लेकिन क्या मालूम है कि $\angle 2 + \angle 4$ त्रिभुज के एक शीर्ष पर बना कोण है?

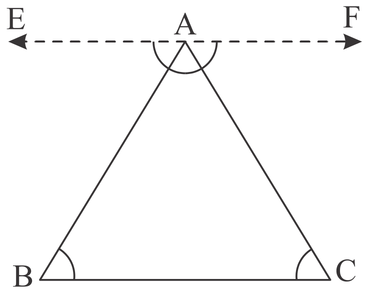
अतः त्रिभुज के तीन कोणों का योगफल 180° है।

उपरोक्त उपपत्ति में दो भाग है। पहले भाग में, एक रचना द्वारा जहाँ पर आप त्रिभुज के उपरी शीर्ष से आधार को समान्तर रेखा खींचकर, त्रिभुज के तीन कोणों का योगफल 180° होता है, सिद्ध करते हैं।

एक सामान्य त्रिभुज को दो लंबकोण त्रिभुजों में विभाजित करते हैं और लंबकोण त्रिभुज पर परिणाम सामान्य त्रिभुज के लिए उपयोग करते हैं।

क्या हम एक सामान्य त्रिभुज के उपरी शीर्ष द्वारा आधार के लिए समांतर रेखा खींचकर उपपत्ति लिख नहीं सकते ? आईए, यह विधान अपनाते हैं।

प्रमेय १: किसी भी त्रिभुज में, अन्त:कोणों का योगफल 180° होता है। (अन्तस्थ कोण प्रमेय)



दत्त : मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है।

साध्य : $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$

रचना :

उपपत्ति A द्वारा EF ∥ BC खींचिए ।.

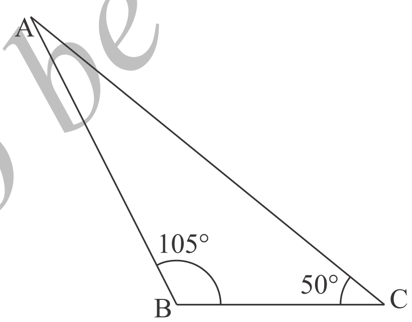
नीचे हम अनेक कथन और उनके सत्यापन के लिए कारण दिये हैं। अंत में अपेक्षित निष्कर्ष प्राप्त करते हैं।

कथन	कारण
$\angle ABC = \angle EAB$	समान्तर रेखा BC और EF तथा तिर्यक रेखा AB से बनें एकांतर कोण।
$\angle BCA = \angle FAC$	समांतर रेखा तथा तिर्यक रेखा AC से बने एकांतर कोण।
$\angle EAB + \angle BAC + \angle FAC = 180°$	शीर्ष A पर रैखिक कोणों।
$\angle EAB = \angle ABC$ और $\angle BCA = \angle FAC$	प्रतिस्थापित करने पर अन्त में हमें प्राप्त है

$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180°$

इस तरह, उपपत्ति पूर्ण होती है।

उदाहरण 1 : त्रिभुज ABC में दिया है $\angle B = 105°$ और $\angle C = 50°$ कोण $\angle A$ ज्ञात कीजिए।



हल : (प्रमेय 1 से)

त्रिभुज ABC, हमें ज्ञात है कि

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\Rightarrow \angle A + 105° + 50° = 180°$

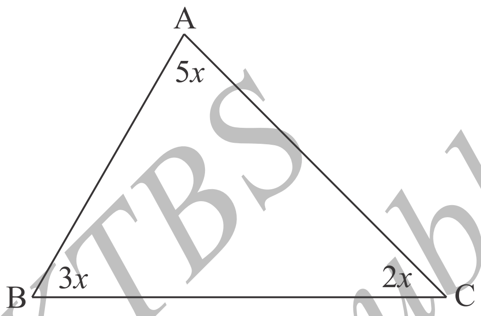
$\Rightarrow \angle A + 155° = 180°$

$\Rightarrow \angle A = 180° - 155° = 25°$

$\Rightarrow \angle A = 25°$.

इस तरह $\angle A = 25°$

उदाहरण 2 : दत्त आकृति में, सभी कोणों को ज्ञात कीजिए।



हल : त्रिभुज ABC में प्रमेय 1 का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता :

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

इसलिए $5x + 3x + 2x = 180°$

$10x = 180°$

$$x = \frac{180°}{10} = 18°$$

$x = 18°$

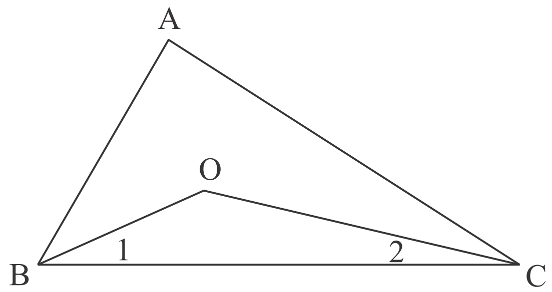
अतः

$\angle A = 5x = 90°$ $\quad \angle B = 3x = 54°$ $\quad \angle C = 2x = 36°$

उदाहरण 3 : त्रिभुज ABC में यदि $\angle ABC$ और $\angle ACB$ के समद्विभाजक 'O' बिन्दु में मिलते हैं। सिद्ध कीजिए $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$

हल

दत्त : त्रिभुज ABC और $\angle ABC$ तथा $\angle ACB$ के समद्विभाजक 'O' में मिलते हैं।



साध्य : $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

उपपत्ति : त्रिभुज BOC में

हमें मालूम है

$\angle 1 + \angle 2 + \angle BOC = 180^\circ$ …………(1)

त्रिभुज ABC में

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

BO और CO; $\angle ABC$ और $\angle ACB$ के समद्विभाजक होने से हमें प्राप्त हैं:

$\angle B = 2(\angle 1)$ और $\angle C = 2(\angle 2)$

इसलिए

$\angle A + 2(\angle 1) + 2(\angle 2) = 180^\circ$

तो $\frac{\angle A}{2} + \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

2 से भाग लगाने से हमें प्राप्त है

$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ ……………(2)

(1) और (2) से हमें प्राप्त है

$90^\circ - \frac{\angle A}{2} + \angle BOC = 180^\circ$

अतः $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

अभ्यास 6.2

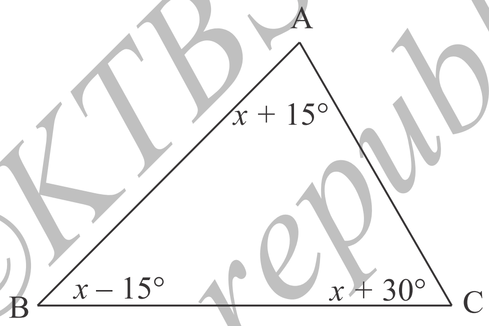
(1) त्रिभुज ABC में यदि $\angle A = 55^\circ$ और $\angle B = 40^\circ$ हो तो $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

(2) एक लंबकोण त्रिभुज मेम अन्य दो कोणों में से एक 35° हो अन्य कोण ज्ञात कीजिए।

(3) एक समद्विबाहु त्रिभुज में का शीर्षकोण 50° हो अन्य कोण ज्ञात कीजिए।

(4) एक त्रिभुज के कोण 1:2:3 में है। अन्य कोणों को निर्धारित कीजिए।

(5) संलग्न त्रिभुज ABC में 'x' का मूल्य ज्ञात कीजिए तथा त्रिभुज के कोणों को पत्ता लगाईए।



(6) एक त्रिभुज के कोणों को उनके मापों के अनुसार आरोहरण क्रम में व्यवस्थित किये गया है। यदि क्रमागत दो कोणों का अंतर 10° हो, तो तीनों कोणों ज्ञात कीजिए।

3.2.3 बाह्य कोण (Exterior angles)

त्रिभुज ΔABC पर विचार कीजिए। यदि BC को बाह्य रूप से बढायें तो किरण $\overrightarrow{BD}$ बनती है, तो $\angle ACD$ को C बना त्रिभुज ABC का बाह्य कोण कहते है तो उसे बाह्य $\angle C$

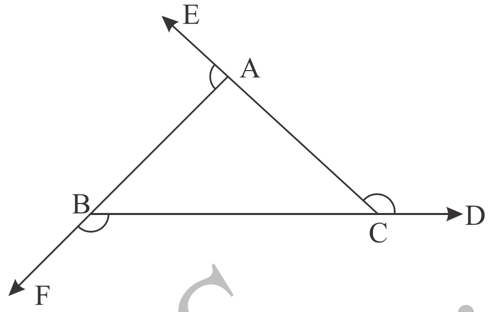
सूचना :

यदि आप AC को E तक बढायें (BC के बदले), तो तुम्हें $\angle BCE$ प्राप्त होती है।

लेकिन $\angle ACD = \angle BCE$ क्योंकि वे शीर्षाभिमुख कोण है।

इस तरह बाह्य $\angle C$ वही होता है भले आप BC अथवा AC का उपयोग करें। वह त्रिभुज ABC के $\angle C$ पर निर्भर करता है।

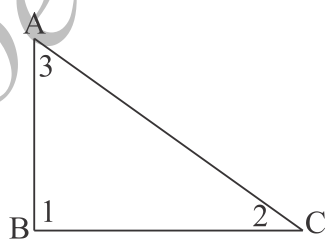
त्रिभुज ABC के बाह्य $\angle C$ के संदर्भ में $\angle A$ और $\angle B$ को **अन्तस्त अभिमुख कोण कहते है।**



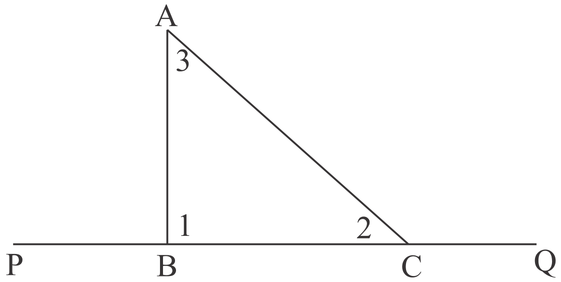
अब त्रिभुज ABC में भुजा CA, BC और AB बढाने पर किरण $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BD}$ और $\overrightarrow{AF}$ बनते हैं । तो $\angle BAE$, $\angle ACD$ और $\angle CBF$ ΔABC के बाह्य कोण कहते हैं।

कार्यकलाप 4 :

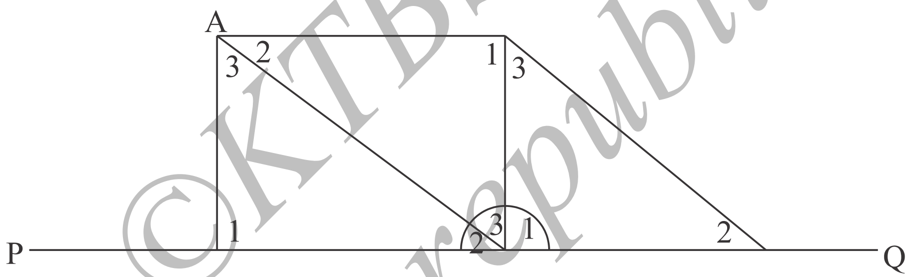
8 × 10 से.मी माप के तीन कागज लीजिए। तीनों को एक दूसरे पर रखिए और तीन लंबकोण त्रिभुज ऐसे काट लीजिए ताकि कागज का एक कोना त्रिभुज का लंबकोण बनें। अब आपके पास तीन एक जैसे त्रिभुज प्राप्त होते हैं। आकृति में दिखाये जैसे कोनों को 1, 2, 3 बनाईए।



एक दूसरे कागज पर एक PQ सरल रेखा खींचिए और एक त्रिभुज को आकृति में दर्शाये जैसे सरल रेखा पर रखिए ताकि $\angle ACQ$, त्रिभुज ABC का बाह्यकोण बनें।

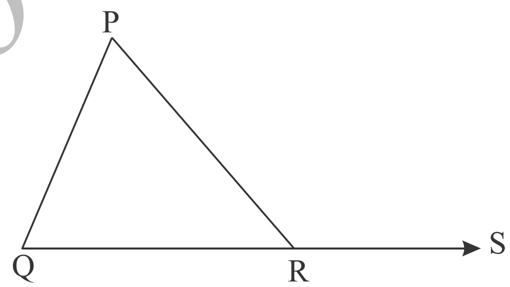


अब आकृति में दिखाये जैसे कोण $\angle 3$ और $\angle 1$ के साथ अन्य दो त्रिभुजों को रखिए। क्या आप देखते कि $\angle ACQ = \angle 3 + \angle 1$? इस तरह त्रिभुज का बाह्यकोण अन्तस्थ अभिमुख कोणों के जोड़ के बराबर है।



प्रमेय 2 :

त्रिभुज की एक भुजा बढाने पर, बना बाह्यकोण अन्तस्थ अभिमुख कोणों के योगफल के बराबर होता है। (बाह्य कोण प्रमेय)



दत्त : त्रिभुज PQR में QR भुजा को S तक बढाईए। तो $\angle PRS$ एक बाह्य कोण है और $\angle PQR$ और $\angle QPR$ अनुरूप अन्तस्थ अभिमुख कोण है।

साध्य: $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$

उपपत्ति:

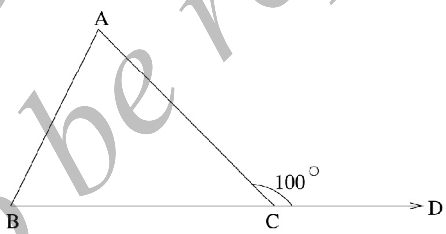
कथन	**कारण**
$\angle QPR + \angle PQR + \angle PRQ = 180°$;	अन्तस्थ कोण प्रमेय
$\angle PRQ + \angle PRS = 180°$;	रैखिक कोणों की जोड़ी
$\angle QPR + \angle PQR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$	अभिधारणा 1 (अध्याय 3, घटक 1)
$\angle QPR + \angle PQR + \angle PRS$	अभिधारणा 3 (अध्याय 3, घटक 1)

इस तरह उपपत्ति पूर्ण होती है।

उदाहरण 4 :

एक त्रिभुज का बाह्य कोण $100°$ है और एक अन्तस्थ अभिमुख $45°$ है। त्रिभुज के अन्य दो कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए त्रिभुज ABC की भुजा BC बढाने पर $\angle ACD$ बाह्य कोण बनता है ताकि बाह्य कोण $\angle C = 100°$ मान लीजिए $\angle B = 45°$



बाह्य कोण प्रमेय के अनुसार हमें प्राप्त होता है:

$\angle ACD = \angle B + \angle A$

$\Rightarrow 100° = 45° + \angle A$ $\quad \therefore$ अतः $\angle A = 55°$

$\Rightarrow \angle A = 100° - 45°$

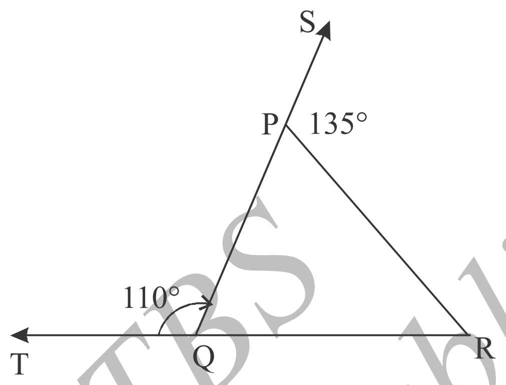
इस तरह हम प्राप्त करते हैं ।

अतः $\angle A = 55°$

इस तरह $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (55° + 45°) = 180° - 100° = 80°.$

उदाहरण 5 :

दत्त आकृति में QP और RQ त्रिभुज PQR की भुजाऐं क्रमशः S और T तक बढ़ाये गए हैं। यदि $\angle SPR = 135°$ और $\angle PQT = 110°$ तो $\angle PRQ$



हल : क्योंकि Q, P और S एक ही रेखा पर स्थित हैं

$\angle QPR + \angle SPR = 180°$

अतः $\angle QPR + 135° = 180°$

अथवा $\angle QPR = 180° - 135° = 45°$

त्रिभुज का बाह्य कोण प्रमेय उपयोग करने पर

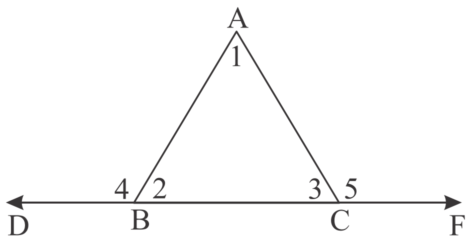
$\angle PQT = \angle QPR + \angle PRQ$ इससे $110° = 45° + \angle PRQ$

$\angle PRQ$ के लिए हल करने पर $\angle PRQ = 110° - 45° = 65°$

उदाहरण 6 :

त्रिभुज ABC की BC को दोनों दिशाओं में बढाया गया है। सिद्ध कीजिए इस तरह बनें बाह्यकोणों का जोड़ $\angle A$ से भी दो लंबकोण अधिक है।

हल :



त्रिभुज ABC खींचकर BC भुजा को दो दिशाओं में D और F तक बढाईए।

आकृति में दिखाये जैसे कोणों को सूचित कीजिए

हमें सिद्ध करना है ,

$\angle 4 + \angle 5 = \angle 1 + 180^\circ$

बाह्य कोण प्रमेय के अनुसार

$\angle 4 = \angle 1 + \angle 3$ और $\angle 5 = \angle 1 + \angle 2$

इन्हें जोड़ने पर

$\angle 4 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = \angle 1 + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = \angle 1 + 180^\circ$

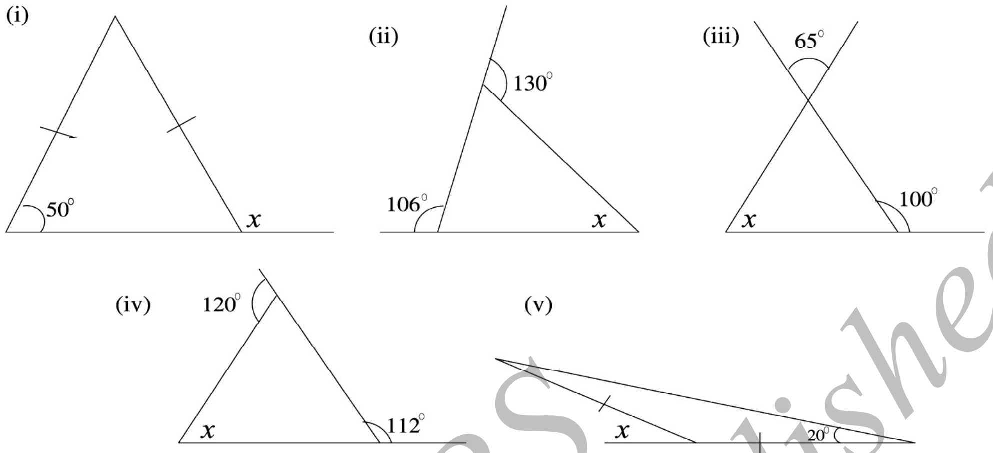
क्योंकि त्रिभुज के अन्तस्थ कोणों का योगफल 180° होता है।

अभ्यास 6.3

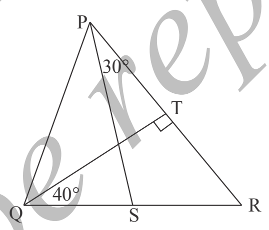
1) एक त्रिभुज की आधार भुजा को दोनों दिशाओं में बढाने पर प्राप्त कोण 104° और 136° है। त्रिभुज के कोणों को ज्ञात कीजिए।

2) त्रिभुज ABC की भुजाऐं BC, CA और AB को बढाने पर बाह्यकोण $\angle ACD$, $\angle BAE$ और $\angle CBF$ प्राप्त होते हैं। सिद्ध कीजिए $\angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 360^\circ$

3) निम्नलिखित आकृतियों में 'x' का मूल्य परिकलन कीजिए।



4) आकृति में $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40^\circ$ और $\angle SPR = 30^\circ$ हो तो $\angle TRS$ और $\angle PSQ$ ज्ञात कीजिए।



5) एक त्रिभुज का बाह्य कोण 120° है और अन्तस्थ अभिमुख कोणों में से एक कोण 30° । त्रिभुज के अन्य कोणों को ज्ञात कीजिए।

शब्दावली :

बाह्य कोण: त्रिभुज की एक भुजा बढाने पर बना कोण अन्तस्थ अभिमुख कोण : बाह्य कोण को संपूरक कोण के अभिमुख अन्तस्थ कोण।

याद रखिए :

- त्रिभुजों को उनके भुजाओं के और कोणों के आधार पर वर्गीकृत करते है।
- त्रिभुज के तीनों अन्त:कोणों का योगफल 180° होता है।
- एक त्रिभुज का बाह्य कोण उसके अन्तस्थ अभिमुख कोणों के योगफल 180° होता है।

उत्तर

अभ्यास 6.1

1. (i) $\rightarrow$(A) (ii) $\rightarrow$(D) (iii) $\rightarrow$(A) (iv) $\rightarrow$(B)
2. (i) विषमबाहू (ii) विषमबाहू (iii) विषमबाहू (iv) समद्विबाहू
   (v) विषमबाहू (vi) विषमबाहू (vii) विषमबाहू (viii) समबाहू
   (ix) समद्विबाहू (x) समद्विबाहू

अभ्यास 6.2

(1) 85° (2) 55° (3) हर एक 65° (4) 30°, 60° और 90°

(5) (6) 50°, 60° और 70°.

अभ्यास 6.3

(1) यदि बाह्य $\angle B = 136^\circ$ और बाह्य $\angle C = 104^\circ$ तो $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 44^\circ$ और $\angle C = 76^\circ$.

3. (i) 130° (ii) 56° (iii) 35° (iv) 52° (v) 40°.
4. $\angle TRS = 50^\circ$, $\angle PSQ = 80^\circ$.
5. अन्य अभिमुख अंतस्थ विपरीत काण 90° और तीसरा कोण 60°.

घटक – 7
परिमेय संख्या

इस घटक के अध्ययन करने के बाद आप निम्नों को जान लेंगे:

- भिन्न और परिमेय संख्या की परिकल्पना।
- परिमेय संख्याओं को कैसे जोड़ना और गुणा करना ।
- योग और गुणा के संदर्भ में प०रमेय संख्याओं के गुणधर्म जैसे साहचर्य, क्रमविनिमय, वितरण, तत्समक अवयव और प्रतिलोम।
- संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं को निरूपित करना और परिमेय संख्याओं की सांद्रता नियम जान लेना।
- पूर्णांकों से परिमेय संख्याओं की ओर गमन करते समय होनेवाले लाभ और हानि जान लेना ।

प्रस्तावना

इसके पूर्व आपने स्वभाविक संख्या और उनके कुछ गुणधर्मों का अध्ययन किया है, संख्याऐं {1, 2, 3....} इसे स्वाभाविक संख्याओं का समुच्चय कहते है और उसे N से सूचित करते है । आपने जाना है कि दो स्वाभाविक संख्याओं को जोड अथवा गुणनफल स्वाभाविक संख्या होती है। उदा : 5 + 13 = 18, 12 × 15 = 180 । कहा जाता है कि स्वाभाविक संख्याओं के समुच्चय पर योग और गुणा के संबंध में आवृत है(स्वाभाविक संख्याओं के समुच्चय पर आवरण नियम लागू होता है।) आपने ध्यान दिया होगा कि

$$8+12=12+8;\ 13+(9+21)=(13+9)+21;\ 15\times7=7\times15; 3\times(5\times6)=(3\times5)\times6$$

यहाँ आप कोई भी स्वभाविक संख्या ले सकते हैं । कोई m, n, p स्वाभाविक संख्याओं पर निम्न नियम लागू होते हैं।

$m+n=m+n$ (जोड़ का क्रमविनिमय नियम)

$m+(n+p)=(m+n)+p$ (जोड़ का साहचर्य नियम)

$m.n=n.m$ (गुणनफलीय क्रमविनिमय)

$m.(n.p)=(m.n).p$ (गुणनफलीय साहचर्य नियम)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

आपने देखा है कि जोड़ और गुणा के संयोग से एक नया और नियम प्राप्त होता है जिसे वितरण नियम कहते है। उदाहरण

$$5 \times (7 + 8) = 5 \times 15 = 75 = 35 + 40 = (5 \times 7) + (5 \times 8)$$

$$m.(n+p) = m.n + m.p$$

इससे हम प्राप्त करते है

$$(n+p).m = n.m + p.m$$

जहाँ हमने जोड़ और गुणा का क्रमविनिमय नियम उपयोग किया है। आपने देखा है '1' स्वभाविक संख्याओं पर $1 \times 8 = 8 \times 1 = 8$ का नियम पालन करता है। यहाँ '8' असंबद्ध है और $1.m = m.1 = m$, सभी स्वभाविक संख्याओं के लिए सत्य है।

आप सोचते होंगे ऐसी स्वाभाविक संख्या जोड़ के लिए क्यों उपलब्ध नहीं है : कोई संख्या 'u' हो ताकि $m + u = u + m = m$ सभी स्वभाविक संख्या के लिए अतः आपने '0' संख्या स्वाभाविक संख्याओं के समुच्चय को जोड़कर कर **पूर्ण संख्याओं** का समुच्चय W. प्राप्त किया है। इस तरह W = {0, 1,2,3......} संख्या 0 निम्न नियम पूर्ण करता है। $8 + 0 = 0 + 8 = 8$ और $9 \times 0 = 0 \times 9 = 0$

नई संख्या 'O' कुछ नियमों का पालन करती है।

$m + 0 = 0 + m = m$ सभी स्वाभाविक संख्या 'm' के लिए

$m.0. = 0.m = 0$ सभी स्वाभाविक संख्या 'm' के लिए

$0 + 0 = 0$

$0.0 = 0$

W में दो शून्यरहित संख्याओं का गुणा करने से हमें पुनः एक शून्यरहित संख्या प्राप्त होती है। उदाहरण $14 \times 6 \neq 0$

समुच्चय W पर हम देखते हैं कि $m.n = 0$ संभव है यदि $m = 0$ अथवा $n = 0$ (अथवा दोनों)। हम जानते है कि स्वभाविक संख्याओं के समुच्चय पर हम दो संख्याओं की तुलना कर सकते हैं। यदि हमें 12 और 81 की तुलना करने पर हम कहेंगे कि 12, 81 से छोटी है अथवा 81,12 से बड़ी है। $12 < 81$ अथवा $81 > 12$ अतः m और n दो स्वाभाविक संख्या हो तो $m < n$, $m = n$ अथवा $m > n$ होगी। प्रत्येक बार इन में से एक नियम सत्य होगा। इसे स्वाभाविक संख्याओं के समुच्चय पर क्रमबद्धता (ordering) लाना कहते हैं। इसे हम $1 < 2 < 3 < 4 < ....$ अब हम '0' को 1 के पूर्व रखते है और हम

पूर्णसंख्याओं के समुच्चय W पर क्रमबद्धता ला सकते हैं। $0<1<2<3<4<.....$ इस क्रमबद्धता में एक सत्यांश है।

उदाहरण, यदि हम समुच्चय E = {3, 6, 9...} पर विचार करें यह '3' के गुणज का समुच्चय है। आप मालूम होता है कि 3 सबसे छोटा अवयव है। पर इसमें सबसे बड़ी संख्या नहीं है। मान लीजिए आपके कक्षा के विद्यार्थियों के अंक लेते हैं। यदि आप अंकों को आरोहण क्रम में लिखते हैं तो उनमें कोई न कोई अंक निम्न होता है। N का कोई उपसमुच्चय जिसमें कम से कम N का एक अवयव हो उसे N का अरिक्त उपसमुच्चय कहते हैं। उदाहरण सभी सम संख्याओं का समुच्चय N का एक अरिक्त उपसमुच्चय है। स्वाभाविक संख्याओं का समुच्चय जिसमें दोनों सम और विषम है N का रिक्त समुच्चय है क्योंकि उसमें कोई पद नहीं है।

स्वाभाविक संख्याओं के प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय (N) अथवा (पूर्ण संख्याओं 'W') में सबसे छोटी संख्या होती है।

इसे स्वाभाविक संख्याओं का उत्तम क्रमबद्धता कहते हैं।

कार्यकलाप 1 : N समुच्चय के पांच अरिक्त सांत (परिमित) समुच्चय लिखकर उन में सबसे छोटी संख्या मालूम कीजिए। W समुच्चय के दो अनंत समुच्चय लिखकर उनमें सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।

N अथवा W समुच्चय से जुड़ी एक विशिष्ट कमी है।

$x+5=3$ समीकरण पर विचार कीजिए। आप देखते है कि ऐसी कोई स्वाभाविक संख्या 'm' नहीं है ताकि $m+5=3$ हो। वास्तव में किसी भी स्वाभाविक संख्या के लिए आप जानते है कि $m+5>5>3$ होता है। यह समस्या पूर्णांकों के समुच्चय Z में नहीं है।

आप जानते है कि पूर्ण संख्याओं के समुच्चय के साथ **ऋणात्मक संख्याओं** का समूह जोड़ सकते हैं।

प्रत्येक 'm' स्वाभाविक संख्या के साथ हम $-m$ लिख सकते हैं जिसे m का ऋणात्मक कहते हैं। (अथवा m की प्रतिलोम) ।

अतः Z में तीन भाग समाविष्ट है : स्वाभाविक संख्याओं का समुच्चय, 0 और ऋणात्मक संख्याओं का समुच्चय एक ही पैरा हैं ।

$$Z=\{.....,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5.....\}$$

यहाँ 'Z' जर्मन शब्द से जहलेन ($Zahlen$) से लिया गया है। (जिसका अर्थ है संख्या)। आप देखते हैं कि Z पर हमें जोड़ना और गुणा करना संभव है। यदि 'm' और 'n' दो स्वाभाविक संख्याऐं हैं, तो

(i) $(-m)+(-n)=-(m+n)$

(ii) $(-m)+0=-m=0+(-m)$

(iii) $(-m)+n=\begin{cases}-(m-n) \text{ यदि } m>n \text{ हो} \\ n-m, \text{ यदि } m<n \text{ हो} \\ 0, \text{ यदि } m=n \text{ हो}\end{cases}$

(iv) $(-m).n = m-(-n)=-(m\,n)$

(v) $(-m).(-n)= m.n$

(vi) $(-m).0=0.(-m)=0$

निःसंदेह यदि 'm' और 'n' दो पूर्ण संख्या हो, हम वही पूर्व का जोड़ना और गुणा करना जारी रखते हैं। योगफल और गुणफल के विस्तृत परिभाषा से Z पर अनेक नये गुणधर्म सिद्ध कर सकते हैं।

1. **आवरण गुणधर्म :** सभी पूर्णांक a,b के लिए दोनों $a+b$ और $a.b$ भी पूर्णांक होते है।
2. **क्रमविनिमय गुणधर्म :** सभी पूर्णांक a और b पर

   $a+b=b+a$ और $a.b=b.a$
3. **साहचर्य गुणधर्म :** सभी पूर्णांक a,b और c के लिए

   $a+(b+c)=(a+b)+c$ और $a.(b.c)=(a.b).c$
4. **वितरण गुणधर्म :** सभी पूर्णांक a, b, c के लिए

   $a.(b+c)=a.b+a.c$
5. **निस्कासन नियम** (cancellation law): यदि a,b और c पूर्णांक हों जहाँ $c\neq 0$ और ac = bc हो तो a = b होता है। (परिणामतः दोनों पक्षों से c निस्कासित (cancel) कर सकते है।

ध्यान दीजिए कि निस्कासन नियम केवल $c\neq 0$ न हो तो सत्य होता है। उदाहरण के लिए आप लिख सकते हैं 3.0 = 0 = 5.0 और 0 दोनों पक्षों में से निस्कासित कर के एक अर्थहीन परिणाम 3 = 5 प्राप्त कर सकते हैं। अनेक बार अर्थहीन परिणाम केवल हमारे गलतियों

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

से प्राप्त होते हैं।

N से Z की ओर जाने से क्या लाभ है? आप देखते है कि 0 का विशेष स्थान है, सभी पूर्णांकों के लिए $a + 0 = 0 + a = a$.

हम 0 को Z का योगफलीय तत्समक अवयव कहते है (योग के संदर्भ पर 0 तत्समक है)

प्रत्येक पूर्णांक a के लिए और पूर्णांक $-a$ प्राप्त है ताकि $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

यदि $a = m$ एक स्वाभाविक संख्या हो, $-a$ ऋणात्मक पूर्णांक $-m$ है।

यदि $a = 0$ हो तो $-a = 0$

यदि a ऋणात्मक पूर्णांक हो तो $a = -n$ जहाँ a एक स्वाभाविक संख्या है और $-a = n$ लेते हैं ताकि

$$a + (-a) = (-m) + m = 0$$

इस तरह हम ऋणात्मक संख्या परिभाषित करते है।

$-a$ को हम a की **योगफलीय प्रतिलोम** संख्या कहते है। प्रत्येक पूर्णांक की योगफलीय प्रतिलोम संख्या होती है। अब हम पूर्णांकों पर एक समीकरण हल कर सकते हैं।

$x + a = b$ जहाँ a और b पूर्णांक है।

इसे हम लिख सकते है $x = b + (-a)$ तो

$$x + a = (b + (-a)) + a = b + (-a) = b + 0 = b$$

यहाँ पर हमने योगफलीय साहचर्य नियम उपयोग किया है। $-a$, a की योगफलीय प्रतिलोम संख्या है और 0 योगफलीय तत्समक अवयव है।

हम Z के अवयवों को भी क्रम से लिख सकते हैं।

कोई भी स्वाभाविक संख्या n के लिए हम $-n < 0$ लिखते है। यदि m और n दो स्वाभाविक संख्या हो ताकि $m < n$, हम $-n < -m$ लिखते है।

अब हम देखते है कि Z के सभी अवयवों की तुलना कर सकते है। प्रत्येक स्वाभाविक संख्या एक पूर्णांक है और हम सभी स्वाभाविक संख्याओं को **'घनात्मक पूर्णांक'** कहते है।

यहाँ आप व्यवकलन के बारे में सोचते होंगे। इसे मौलिक प्रक्रिया के रूप में लिया गया है। इसके पूर्व आपने सीखा है कि $12 - 7 = 5$ है।

और आपने सीखा है कि 7 की योगफलीय प्रतिलोम संख्या -7 है। इस तरह आप विचार

कर सकते हैं कि $12 - 7 = 12 + (-7)$, याने 12 और -7 जोड़ने पर।

ऋणात्मक पूर्णांक समान करने के लिए हमने जोड़ की विस्तृत प्रक्रिया को व्यवकलन नाम दिया है। इससे दो पूर्णांक ऋणात्मक होने पर भी अर्थपूर्ण होता है। मान लीजिए हमें $-8 - 13$ का जोड़ ज्ञात करना है। इसे हम ऐसे लिखते है $(-8) + (-13) = -(8 + 13) = -21$.

इस तरह हमने जो ऋणात्मक पूर्णांकों का योगफल परिभाषित किया है। अब $15 - 21$ क्या होता है? स्पष्ट है कि हमें 15 और (-21) जोडना है।

परिभाषा के अनुसार $15 + (-21) = -(21 - 15) = -6$, 'm' की योगफलीय प्रतिलोम संख्या क्या है? क्योंकि $m + (-m) = 0$ हम m को $-m$ की योगफलीय प्रतिलोम संख्या मानते है। इस तरह हमें $-(-m) = m$ प्राप्त होता है।

यहाँ यह महत्वपूर्ण है कि – संकेत योगफलीय प्रतिलोम सूचित करता है।

''कुछ प्राप्त करने के लिए हमें कुछ खोना पड़ता है'' यह सार्वत्रिक नियम है। यह स्पष्ट है कि Z पर हम $x + a = b$ समीकरण हल कर सकते है जहाँ a और b दो पूर्णांक है।

N पर हम ऐसे समीकरण हल नहीं कर सकते जब तक $b > a$ न हो और a, b स्वभाविक संख्यायें है। इसके विपरीत, आप देखते हैं कि सभी पूर्णांकों के समुच्चय पर, प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय में कनिष्ठतम संख्या होना अवश्य नहीं है।

यदि हम सभी ऋणात्मक संख्याओं का समुच्चय $\{..... -5, -4, -3, -2, -1\}$ पर विचार करें इसमें कोई कनिष्ठतम संख्या नहीं है (क्यों?) परन्तु यहाँ जितना प्राप्त हुआ है वह नष्ट से अधिक है।

पुनः एक बार Z समुच्चय पर विचार कीजिए। यहाँ हम $ax = b$ जहाँ $a \neq 0$ हो, रूप के समीकरण हल नहीं कर सकते। (यदि a, b को भाग देता हो तो इसे हल कर सकते है)। अतः Z भी इस कार्य में अपर्याप्त है। हम एक नये संख्या प्रणाली की अपेक्षा करते जिसमें Z से भी अधिक प्रक्रियायें कर सकें। हमें यह ध्यान देना होगा कि Z के गुणधर्म के साथ अन्य भी उपयोग में आयें। लेकिन याद रहें कि कुछ खोना होगा। आइये देखें कि क्या खोना है या प्राप्त करना है?

अभ्यास 7.1

1. **इन कथनों में उपयुक्त नियम पहचानिये।**

(i) $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

(ii) $2.8 = 8.2$

(iii) $8\ (6 + 5) = (8.6) + (8.5)$

2. **निम्न पूर्णांकों के योगफलीय प्रतिलोम ज्ञात कीजिए ।**

$6,\ 9,\ 123,\ -76,\ -85,\ 1000$

3. निम्नों में m पूर्णांक का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

(i) $m + 6 = 8$

(ii) $m + 25 = 15$

(iii) $m - 40 = -26$

(iv) $m + 28 = -49$

4. **निम्नों को आरोहण क्रम में लिखिए।**

$21,\ -8,\ -26,\ 85,\ 33,\ -333,\ -210,\ 0,\ 2011$

5. **निम्नों को अवरोहण क्रम में लिखिए।**

$85,\ 210,\ -58,\ 2011,\ -1024,\ 528,\ 364,\ -10000,\ 12$

परिमेय संख्याएँ

आप पूर्व की कक्षाओं में भिन्नों के बारे में सीखा है जो $\frac{p}{q}$ के रूप की संख्याएँ है जहाँ p और q स्वाभाविक संख्याएँ हैं।

उदाहरण : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{3}$ आदि संख्याऐं

आपने ऐसी संख्याओं को जोड़ना और गुणा करना भी सीखा है।

उदाहरण 1 : $\frac{1}{3}$ और $\frac{8}{5}$ जोडिये और गुणा कीजिए।

हल : $\frac{1}{3}+\frac{8}{5}=\frac{(1\times5)+(8\times3)}{3\times5}=\frac{5+24}{15}=\frac{29}{15}$

उनका गुणा है $\frac{1}{3}\times\frac{8}{5}=\frac{1\times8}{3\times5}=\frac{8}{15}$

यदि $\frac{10}{4}$ दिये जाने पर हम उसे निम्न रूप में लिखते है $\frac{10}{4}=\frac{5\times2}{2\times2}=\frac{5}{2}$

अंश में से 2 और हर में 2 को निष्कासित करते हैं ।

अन्य शब्दों में अंश और हर में समान गुणनखण्ड होने पर हम अपनी सुविधा के लिए भाग देते है। इस तरह $\frac{10}{4}$ और $\frac{5}{2}$ में अंतर नहीं है।

यदि हमें $\frac{1}{3}$ को $\frac{8}{5}$ से भाग देना है तो परिणाम है : $\frac{1}{3} \div \frac{8}{5} = \frac{1 \times 5}{3 \times 8} = \frac{5}{24}$
आपने भिन्नों को पर्याप्त अभ्यास किया है।

क्या इन बातों एक मानक रूप में लिख सकते हैं? ऋणात्मक पूर्णांकों की तरह क्या ऋणात्मक भिन्नों को समाविष्ट कर सकते हैं?

$\frac{p}{q}$ में व्यक्त संख्या को हम **परिमेय संख्या** कहते हैं, जहाँ p एक पूर्णांक है और q स्वाभाविक संख्या है।

$q > 0$ है।

परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ में p को **अंश** और q को **हर** कहते हैं।

अतः परिमेय संख्या का हर हमेशा घनात्मक पूर्णांक, जहाँ अंश घनात्मक, ऋणात्मक अथवा संभवतः '0' होता है ।

दो परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ समतुल्य कहलाते है। यदि $a \times d = c \times b$ हो।

यह गुण अर्थपूर्ण है क्योंकि a, b, c, d पूर्णांक है। इस तरह $\frac{10}{4}$ और $\frac{5}{2}$ समतुल्य है क्योंकि $10 \times 2 = 5 \times 4$ होता है। परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ सबसे सरलतम रूप होगा यदि a और b के 1 के अलावा अन्य कोई गुणनखन्ड न हों। अतः $\frac{5}{2}$ सरलतम रूप में है बल्कि $\frac{10}{4}$ नहीं।

कार्यकलाप 2 : $\frac{3}{4}$ के दस समतुल्य परिमेय संख्याऐं लिखिए। ऐसे कितने परिमेय संख्यायें है जो $\frac{3}{4}$ के समतुल्य हैं?

इस तरह $\frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{6}{7}, \frac{7}{10}, \frac{-5}{8}, \frac{-6}{11}$ सभी परिमेय संख्यायें हैं। हमें ज्ञात होता है

कि प्रत्येक पूर्णांक परिमेय संख्या है। पूर्णांक a को $\frac{a}{1}$ के रूप में व्यक्त करते है। अतः 7 और $\frac{7}{1}$ में कोई अंतर नहीं है। मान लीजिए एक भिन्न $\frac{3}{4}$ दिया गया है। जैसे हम ने स्वाभाविक संख्याओं के उपयोग से ऋणात्मक पूर्णांकों (अथवा घनात्मक पूर्णांकों को) की परिभाषा दी है उसी तरह $\frac{3}{4}$ का ऋणात्मक परिभाषित कर सकते हैं।

इसे परिमेय संख्या $-\frac{3}{4}$ परिभाषित करते हैं। इसे $-\frac{3}{4}$ से सूचित करते हैं।

हम परिमेय संख्याओं के समुच्चय को Q से सूचित करते है। अतः

$Q = \left\{ \frac{p}{q} \right.$ जहाँ p, q पूर्णांक है और $q > 0$, (p, q) का म.सा.अ = 1 $\}$

यहाँ म.सा.अ का अर्थ महत्तम सामान्य अपवर्तन है।

यहाँ आप सोचते होंगे हम हर में ऋणात्मक पूर्णांक क्यों नहीं लेते?

मान लीजिए हम $\frac{p}{-q}$ जैसी संख्या लेते हैं, जहाँ $q > 0$ एक पूर्णांक है। आप देखेंगे कि यह परिमेय संख्या $\frac{-p}{q}$ के समतुल्य है, क्योंकि $p \times q = (-p) \times (-q)$

अतः हर में केवल घनात्मक पूर्णांक ही सीमित रखने से परिमेय संख्याओं की हानि नहीं है।

अंग्रेजी में Rational number, शब्द Ratio (अनुपात) से लिया गया है।

परिमेय संख्या दो पूर्णांकों का अनुपात है जहाँ हर शून्य के बराबर नहीं है।

अभ्यास 7.2

1. $\frac{5}{7}$ के दस समतुल्य परिमेय संख्या लिखिए और हर 80 तक सीमित रखिए।

2. $\frac{11}{5}$ के 15 समतुल्य परिमेय संख्या लिखिए और अंश 180 तक सीमित हो।

3. दस घनात्मक परिमये संख्या लिखिए ताकि अंश और हर का जोड़ 11 है। उन्हें अवरोहरण क्रम में लिखिए ।

4. दश घनात्मक परिमेय संख्या लिखिए ताकि प्रत्येक अंश - हर - 2 हो। उन्हें आरोहण क्रम में लिखिए ।

5. क्या $\frac{3}{-2}$ एक परिमेय संख्या है ? यदि ऐसा हो तो, उसे परिभाषा के अनुसार कैसे निरूपित करेंगे? (अर्थात् हर घनात्मक पूर्णांक है)
6. पूर्व की कक्षाओं में आपने 0.9, 0.8 दशमलवों का अध्ययन किया है। क्या आप इन्हें परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कर सकते हैं?

परिमेय संख्याओं के गुणधर्म

आवरण गुणधर्म जैसा हमने स्वाभाविक संख्या और पूर्णांक के संदर्भ में योगफल और गुणनफल से संबंधित आवरण नियम, क्रम विनिमय नियम, साहचर्य नियम तथा वितरण नियम की परिभाषा दी है क्या उसी प्रकार परिमेय संख्याओं के योगफल और गुणनफल से संबंधित सभी नियम परिभाषित कर सकते हैं?

सबसे पहले हमें भिन्नों के योगफल और गुणनफल से शुरू करना है, जिसे हमने प्राथमिक कक्षाओं में सीखा है।

उदा : (1) आईए $\frac{5}{6}$ और $\frac{11}{13}$ का योगफल ज्ञात करें ।

$$\frac{5}{6}+\frac{11}{13}=\frac{5\times13+11\times6}{6\times13}$$

$$=\frac{65+66}{78}=\frac{131}{78}$$

इसी तरह $\frac{4}{7}$ और $\frac{-3}{5}$ का जोड़ है।

$$\frac{4}{7}+\frac{-3}{5}=\frac{(4\times5)+((-3)\times7)}{7\times5}$$

$$=\frac{20+(-21)}{35}=\frac{-1}{35}$$

$\frac{-7}{4}$ और $\frac{-3}{7}$ का जोड़ है।

$$\frac{-7}{4} + \frac{-3}{7} = \frac{(-7)\times 7 + (-3)\times 4}{4\times 7}$$

$$= \frac{(-49)+(-12)}{28}$$

$$= \frac{-61}{28}$$

उदाहरण 2: $\frac{2}{11}$ और $\frac{8}{7}$ का गुणनफल है

$$\frac{2}{11}\times\frac{8}{7}=\frac{2\times 8}{11\times 7}=\frac{16}{77}$$

इसी तरह $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-7}{2}$ का गुणनफल है

$$-\frac{3}{5}\times-\frac{7}{2}=\frac{(-3)\times(-7)}{5\times 2}=\frac{21}{10}$$

इन विचारों के आधार पर हम दो परिमेय संख्याओं का योगफल और गुणनफल परिभाषित करते हैं।

दत्त दो परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ का जोड़ और गुणनफल हम इस तरह परिभाषित करते हैं।

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd} \quad \text{और} \quad \frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

क्योंकि $b>0$ और $d>0$ आप देखते हैं कि bd एक स्वाभाविक संख्या है। तथापि $ad+cd$ और ac पूर्णांक है। अतः निर्णय ले सकते हैं कि $\frac{ad+cb}{bd}$ और $\frac{ac}{bd}$ परिमेय संख्याऐं हैं। इस तरह दो परिमेय संख्याओं की योग पुनः एक परिमेय संख्या है।

परिमेय संख्याओं के समुच्चय पर जोड़ और गुणा का आवरण नियम सत्य है।

कार्यकलाप 3 **:** दस परिमेय संख्या युग्म लीजिए प्रत्येक युग्मों का योगफल ज्ञात कीजिए। आप देखेंगे कि उनका योग परिमेय संख्या ही है। इस तरह जान लीजिए कि योगफल पर आवरण नियम सत्य है। इसी तरह दो संख्याओं को गुणा कीजिए और जान लीजिए गुणनफल पर भी आवरण नियम सत्य है।

साहचर्य गुण

पूर्णांकों के संदर्भ में आपने यह गुण जाना है कि $p+(q+r)=(p+q)+r$ और $p,(q.r)=(p.q).r$

उदाहरण : $3 + (5 + 8) = (3 + 5) + 8$ और

$3 \times (5 \times 8) = (3 \times 5) \times 8$

क्या ऐसे गुण परिमेय संख्याओं पर सत्य है?

उदाहरण 3.

$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{-6}{7}$ तीन परिमेय संख्याओं पर विचार कीजिए। आपे देखते हैं कि –

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{5}+\frac{-6}{7}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{7\times 4+(-6)\times 5}{5\times 7}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{28-30}{35}\right)$$

वाम पक्ष

$$=\frac{1}{2}+\frac{-2}{35}$$

$$=\frac{35\times 1+(-2)\times 2}{70}$$

$$=\frac{31}{70}.$$

दूसरे पक्ष में आप देखते हैं

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\right)+\frac{-6}{7}=\left(\frac{5+8}{10}\right)+\frac{-6}{7}$$

$$=\frac{13}{10}+\frac{-6}{7} \quad =\frac{91-60}{70}$$

$$=\frac{31}{70}$$

क्या आप निर्णय ले सकते हैं कि

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{5}+\frac{-6}{7}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\right)+\frac{-6}{7}\ ?$$

यह कोई भी तीन परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ पर सत्य होता है।

आप देखते हैं कि दोनों $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$ और $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$

आप प्राप्त करते हैं

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}+\frac{cf+ed}{df}=\frac{adf+(cf+de)b}{bdf}$$

$$=\frac{adf+cfb+deb}{bdf}$$

इसी तरह

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+cb}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf}$$

अब क्या आप देखते हैं कि

$adf+cfb+deb=adf+cbf+ebd$

यह पूर्णांकों का कौन सा गुणधर्म उपयोग किया है? इसी तरह दोनों योगफल समान है।

इसी तरह गुणा करने पर हम प्राप्त हैं $\frac{2}{3},\frac{7}{8},\frac{11}{13}$ पर विचार कीजिए ।

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{11}{13}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{77}{104}=\frac{154}{312};$$

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}\right)\times\frac{11}{13}=\frac{14}{24}\times\frac{11}{13}=\frac{154}{312};$$

क्या आप निर्णय ले सकते हैं कि

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{11}{13}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}\right)\times\frac{11}{13}.$$

हम निर्णय लेते हैं कि कोई परिमेय संख्या $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ हमें प्राप्त होता है।

$$\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}.\frac{ce}{df} = \frac{ace}{bdf}$$

$$\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f} = \frac{ac}{bd}.\frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$$

ताकि :

$$\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f}$$

परिमेय संख्याओं के संदर्भ में योगफल और गुणफल पर साहचर्य गुण सत्य है।

क्रमविनिमय गुण : पूर्णांकों के योगफल और गुणा के संबंध में क्रमविनिमय नियम सत्य है। m और n दो पूर्णांक दी जाने पर हम जानते है, $m+n=n+m$

और $m.n = n.m$

उदा : 3 + 5 = 5 + 3 और 3 × 5 = 5 × 3

क्या यह बातें परिमेय संख्याओं पर सत्य हैं?

उदाहरण 4 :

आईये दो परिमेय संख्याओं के निर्दिष्ट संदर्भ पर विचार करें

मान लीजिए $\frac{8}{11}$ और $\frac{-16}{19}$ दो परिमेय संख्याऐं हैं।

$$\frac{8}{11} + \frac{-16}{9} = \frac{8 \times 9 + (-16) \times 11}{11 \times 9}$$

$$= \frac{72 - 176}{99} = \frac{-104}{99}.$$

इसी तरह,

$$\frac{-16}{9} + \frac{8}{11} = \frac{(-16)\times 11 + 8\times 9}{9\times 11}$$

$$= \frac{-176+72}{99} = \frac{-104}{99}$$

अतः हमें प्राप्त है $\frac{8}{11}+\frac{-16}{9}=\frac{-16}{9}+\frac{8}{11}$

उदाहरण 5. इसी तरह आप सत्यापन कर सकते हैं

$$\frac{8}{11}.\frac{-16}{9}=\frac{-16}{9}.\frac{8}{11}$$

क्या आप इसे सामान्य रूप दे सकते हैं?

$\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्या लीजिए । ध्यान दीजिए।

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd} \text{ और } \frac{c}{d}+\frac{a}{b}=\frac{cb+ad}{db}$$

परन्तु हम जानते हैं कि

$ad+cb=cb+ad$

और $bd=db$ (पूर्णांकों का कौन सा नियम उपयोग हुआ है?)

अतः यह निष्कर्ष ले सकते हैं कि

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

जो योगफलीय क्रमविनिमय गुण है ।

ऐसा ही निरीक्षण गुणा पर देख सकते हैं

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}.\frac{a}{b}$$

जो गुणनफलीय क्रमविनिमय गुण प्राप्त होता है।

परिमेय संख्याओं के समुच्चय पर जोड़ और गुणा का क्रमविनिमय सत्य होता है।

वितरण नियम

परिमेय संख्या $\frac{2}{3},\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{9}$ पर विचार कीजिए।

हमें ज्ञात होता है कि $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{3}.\frac{11}{18}=\frac{22}{54}=\frac{11}{27}$

इसी तरह $\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2}{3}.\frac{1}{9}=\frac{2}{6}+\frac{2}{27}=\frac{66}{162}=\frac{11}{27}$

ध्यान दीजिए हमने समतुल्य भिन्न का उपयोग किया है । हम निर्णय ले सकते हैं।

$$\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2}{3}.\frac{1}{9}$$

कार्यकलाप 4 : तीन-तीन परिमेय संख्याथें लीजिए और वितरण नियम का सत्यापन कीजिए। और इसे सामान्य कथन के रूप में सिद्ध कीजिए।

यदि $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ और $\frac{u}{v}$ परिमेय संख्याऐं है तो

$\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{r}{s}+\frac{u}{v}\right)=\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}+\frac{p}{q}\cdot\frac{u}{v}$, जहाँ पर आप परिमेय संख्याओं के योगफल और गुणा की परिभाषा और पूर्णांकों के गुणधर्म उपयोग करेंगे।

परिमेय संख्याओं पर गुणनफल, जोड़ पर वितरित होता है।

सोचिये :

दत्त परिमेय संख्या $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}$ पर क्या हम निम्न को प्राप्त कर सकते हैं।

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right).\left(\frac{a}{b}+\frac{e}{f}\right)\ ?$$

अन्य शब्दों में जोड़, गुणनफल वितरित होता है? (अर्थात् उपरोक्त नियम में क्या जोड़ और गुणा के स्थानों में अदल-बदल कर सकते हैं?)

योगफलीय तत्समक अवयव :

परिमेय संख्या $\frac{0}{1}$ पर विचार कीजिए। देखिए $\frac{7}{8}+\frac{0}{1}=\frac{7\times1+0\times8}{8\times1}=\frac{7}{8}$

इसी तरह आप सत्यापन कर सकते हैं $\frac{0}{1}+\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$

किसी भी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ पर आप देखेंगे कि $\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a\times1+0\times b}{b\times1}=\frac{a}{b}$

इसी तरह आप आसानी से सत्यापन कर सकते हैं कि $\frac{0}{1}+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$

इस तरह $\frac{0}{1}$ योगफलीय तत्समक अवयव के रूप में काम करता है। इसे हम केवल 0 से सूचित करते हैं।

परिमेय संख्याओं में '0' योगफलीय तत्समक अवयव है; $r+0=0+r=0$ **सभी परिमेय संख्या 'r' के लिये।**

गुणनफलीय तत्समक अवयव

पुनः परिमेय संख्या $\frac{1}{1}$ पर विचार कीजिए।

उदाहरण : $\frac{11}{12}\times\frac{1}{1}=-\frac{11}{12}$

किसी भी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के लिए, हम देखते है कि

$$\frac{a}{b}.\frac{1}{1}=\frac{a}{b}=\frac{1}{1}.\frac{a}{b}$$

इस तरह परिमेय संख्या $\frac{1}{1}$ (जिसे '1' से सूचित करते है) गुणनफलीय तत्समक अवयव है।

सभी परिमेय संख्या 'r' के लिए परिमेय संख्याओं के समुच्चय में '1' गुणनफलीय तत्समक अवयव है 1; $r.1=r=1.r$, सभी परिमेय संख्या 'r' के लिए

योगफलीय प्रतिलोम

$\frac{8}{13}$ और $\frac{-8}{13}$ लीजिए यदि हम इन्हें जोड़ते हैं तो

$$\frac{8}{13}+\frac{-8}{13}=\frac{8\times 13+(-8\times 13)}{169}=\frac{0}{169}=0.$$

यह किसी भी परिमेय संख्या के लिए यह सत्य है।

प्रत्येक परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के लिए, परिमेय संख्या $\frac{-a}{b}$ पर विचार कीजिए। आईए इसका योगफल ज्ञात करें।

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab+(-a)b}{b^2}=\frac{0}{b^2}$$

परन्तु परिमेय संख्या $\frac{0}{b^2}$ यह $\frac{0}{1}$ समान है

क्योंकि ये समतुल्य भिन्न है।

इसतरह $\frac{-a}{b}$ यह $\frac{a}{b}$ योगफलीय प्रतिलोम (संख्या) है।

प्रत्येक परिमेय संख्या 'r' के लिए, एक ऐसी परिमेय संख्या विद्यमान है, जिसे $-r$ से सूचित करते हैं ताकि $r+(-r)=0=(-r)+r$.

गुणनफलनीय प्रतिलोम (multiplication inverse)

आपने देखा है एक पूर्णांक का गुणनफलीय प्रतिलोम नहीं हो सकता। उदाहरण 8 का गुणनफलीय à{Vb ng Zht h& $8 \times a = 1$ = 'a' पूर्णांक के लिए संभव नहीं है। परन्तु परिमेय संख्या $\frac{7}{5}$ पर विचार कीजिए : हमें ज्ञात होता है कि $\frac{7}{5}\times\frac{5}{7}=\frac{35}{35}=1$ यह सभी शून्यरहित सभी परिमेय संख्या के लिए सत्य है।

एक शून्य रहित परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ लीजिए। फिर $a \neq 0$ है अतः $\frac{b}{a}$ भी एक परिमेय संख्या है। ध्यान दीजिए

$$\frac{a}{b}.\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=\frac{1}{1}$$

जो गुणनफलीय तत्समक अवयव है। हमने $\frac{1}{1}$ और $\frac{ab}{ba}$ समतुल्य भिन्न हैं।

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक शून्य रहित परिमेय संख्या का गुणनफलीय प्रतिलोम होता है।

प्रत्येक परिमेय संख्या $r \neq 0$ **के लिए एक परिमेय संख्या उपस्थित जिसे** r^{-1} **(अथवा** $\frac{1}{r}$**) से सूचित करते हैं ताकि** $r.r^{-1}=1=r^{-1}.r$.

पूर्णांकों में, आपने **'निस्कासन'** नामक एक महत्वपूर्ण नियम का अध्ययन किया है।

उदाहरण : यदि $8 \times a = 48$

$$8 \times a = 8 \times 6$$

दोनों तरफ से 8 निकासित करने पर हम $a = 6$ होता है। इस तरह यदि a, b, c पूर्णांक ताकि $a \neq 0$ और $ab = ac$ तो $b = c$ परिणामतः समानता के दोनों पक्षों से शून्यरहित पूर्णांक निकासित कर सकते है। यह $\mathbb{Q}$ पर सत्य है। उदाहरण $\frac{4}{4}=\frac{2}{2}$, क्योंकि ये समतुल्य भिन्न है

$$\text{परन्तु } \frac{4}{4}=2\times\frac{2}{4} \text{ और } \frac{2}{2}=2\times\frac{1}{2}$$

इस तरह आप प्राप्त करते हैं

$$2\times\frac{2}{4}=2\times\frac{1}{2}$$

दोनों पक्षों में से 2 निस्कासित करने से आप प्राप्त करते हैं $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ जो सत्य है क्योंकि ये समतुल्य भिन्न है।

मान लीजिए $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}$ तीन परिमेय संख्यायें हैं ताकि $\frac{a}{b}\neq 0$ है । आप देखेंगे कि $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$

क्योंकि $\frac{a}{b}\neq 0$ का गुणनफलीय प्रतिलोम $\frac{b}{a}$ है।

दोनों पक्षों में $\frac{b}{a}$ से गुणा कीजिए।

$$\frac{b}{a}.\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right)=\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}.\frac{e}{f}\right)$$

साहचर्य नियम उपयोग करने पर

$$\left(\frac{b}{a}.\frac{a}{b}\right).\frac{c}{d}=\left(\frac{b}{a}.\frac{a}{b}\right).\frac{e}{f}$$

इससे प्राप्त होता :

$$\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

अतः हम दोनों पक्षों में $\frac{a}{b}$ निस्कासित किया है।

अब हम $\mathbb{Q}$ समुच्चय पर **व्यवकलन** और **भाग** दो प्रक्रियाओं की परिभाषा देते हैं। $\frac{4}{13}$ और $\frac{12}{7}$ दो परिमेय संख्याओं पर विचार कीजिए। हमें का अर्थ समझना है।

आप जानते हैं कि $\frac{12}{7}$ का योगफलीय प्रतिलोम $\frac{-12}{7}$ है।

$$\frac{4}{13}-\frac{12}{7}=\frac{4}{13}+\frac{-12}{7}$$

योगफल की परिभाषा पर हम इसे सरल कर सकते हैं।

व्यवकलन का अर्थ योगफलीय प्रतिलोम जोड़ना है.।

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याऐं है, तो

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

इसी तरह, यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याऐं है, और $\frac{c}{d}$ शून्य के बराबर नहीं है, तो $\frac{a}{b}$ का $\frac{c}{d}$ से भाग लेने का अर्थ है।

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

ध्यान दीजिए हम $\frac{a}{b}$ के साथ $\frac{c}{d}$ के गुणनफलीय प्रतिलोम से गुणा करते हैं, जो शून्यरहित परिमेय संख्या है।

यदि आप $\frac{8}{15}$ को $\frac{-7}{11}$ से भाग लगाना है तो हम केवल

$$\frac{8}{15}\div\frac{-7}{11} = \frac{8}{15}\times-\frac{-11}{7}=-\frac{-88}{105}$$

मूल प्रक्रियाऐं केवल जोड़ और गुणा है। व्यवकलन और भाग; जोड़ और गुणा के पदों में परिभाषित करते हैं।

आईए, हम संख्या प्रणाली को Z से Q तक विस्तार करने का लाभ देखें। यदि $a \neq 0$ एक पूर्णांक है, ऐसा कोई पूर्णांक b नहीं है ताकि $a.b = b.a = 1$ जब तक $a = 1$ अथवा $a = -1$ हों। अतः 1 से 1 और -1 के अलावा किसी पूर्णांक का गुणनफलीय प्रतिलोम नहीं है। अर्थात्, Q में प्रत्येक शून्यरहित परिमेय संख्या का गुणनफलीय प्रतिलोम होता है।

इससे हम $rx = s,$, जहाँ $r \neq 0$ है और 's' परिमेय संख्यायें हैं। मान लीजिए हमें $\frac{3}{8}x = \frac{5}{9}$ समीकरण हल करना है। x के लिए हल करने हमें दोनों तरफ $\frac{8}{3}$ से गुना करना होगा।

इस तरह $$\frac{8}{3} \times \frac{3}{8} \times = \frac{8}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{40}{27}$$

$\therefore x = \frac{40}{27}$ इस तरह कोई भी समीकरण हल कर सकते हैं।

मान लीजिए $r = \frac{a}{b}$ और $s = \frac{u}{v}$ हो जहाँ a, u पूर्णांक है और b, v स्वाभाविक संख्या है। क्योंकि $r \neq 0$, $a \neq 0$ और क्योंकि 'r' का गुणनफलीय प्रतिलोम $\frac{b}{a}$ है। दोनों पक्षों इससे गुणा करने पर, हम प्राप्त करते है,

$$\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a}{b} . x \right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{u}{v}$$

जिससे हमें प्राप्त होता है, $x = \frac{bu}{a.v}$

अभ्यास 7.3

1. निम्नों में सूचित गुण पहचानिये

(i) $315 + 115 = 430$

(ii) $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{5} = \frac{27}{20}$

(iii) $5+0=0+5=5$

(iv) $\frac{8}{9}\times 1=\frac{8}{9}$

(v) $\frac{8}{17}+\frac{-8}{17}=0$

(vi) $\frac{22}{23}.\frac{23}{22}=1$

2. निम्न जोड़ियों से क्रमविनिमय गुण जाँच कीजिए :

(i) $\frac{102}{201},\frac{3}{4}$

(ii) $\frac{-8}{13},\frac{23}{27}$

(iii) $\frac{-7}{9},\frac{-18}{19}$

3. निम्न परिमेय संख्या के जोड़ियों पर गुणनफलीय क्रमविनिमय नियम जाँच कीजिए

(i) $\frac{22}{45},\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-7}{13},\frac{25}{27}$ (iii) $\frac{-8}{9},\frac{-17}{19}$

4. निम्न परिमेय संख्याओं के त्रयी पर वितरण नियम का सत्यापन कीजिए।

(i) $\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10}$

(ii) $\frac{-4}{9},\frac{6}{5},\frac{11}{10}$

(iii) $\frac{3}{8},0,\frac{13}{7}$

5. निम्नों के योगफलीय प्रतिलोम संख्या ज्ञात कीजिए।

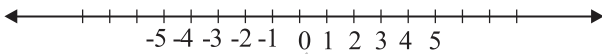
$\frac{8}{6},\frac{6}{10},\frac{-3}{8},\frac{-16}{3},\frac{-4}{1}$

6. निम्न के योगफलीय प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

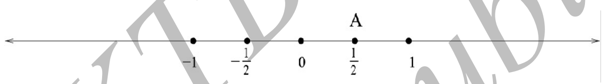
$2,\frac{6}{11},\frac{-8}{15},\frac{19}{18},\frac{1}{1000}$

संख्यारेखा पर परिमेय संख्याओं का निरूपण

इसके पूर्व आपने संख्यारेखा पर पूर्णांकों को निरूपित करना सीखा है। एक अनंत सरल रेखा लीजिए, उसपर कोई बिन्दु अंकित कीजिए। इसे '0' से सूचित कीजिए। एक लंबाई की इकाई निश्चित कर, '0' के दोनों पक्षों में समान दूरी अंकित कीजिए , इकाई दूरी पर '1' प्राप्त होता है। एक और इकाई की दूरी आगे बढ़ने 2 प्राप्त होता है आदि। यदि बायें पक्ष एक इकाई की दूरी – 1 प्राप्त होता है और एक और इकाई दूरी बढ़े तो –2 प्राप्त होता है आदि। इस तरह संख्यारेखा सभी पूर्णांक निरूपित हो जाते हैं।

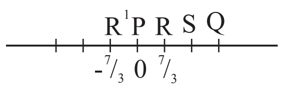


हम इसी संख्यारेखा पर परिमेय संख्या अंकित कर सकते हैं। उदाहरण $\frac{1}{2}$ हम '0' और '1' के मध्यदूरी पर अंकित कर सकते हैं।



'0' और '1' के बीच के रेखाखण्ड समद्विभाजन करने पर 'A' बिन्दु प्राप्त होता है। इसी तरह –1 और '0' के बीच के रेखाखण्ड समद्विभाजन करने – ½ प्राप्त होता है। हम $\frac{7}{3}$ कैसे प्राप्त कर सकते हैं?

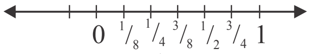
'0' से '7' के बीच के रेखाखंड PQ पर खींचिए। हम PQ के तीन समान भाग बनाते है। $PR = RS = SQ$ (हमें यहाँ कुछ ज्यामितीय रचनाओं की आवश्यक है जिसे आगे सीखेंगे) तो $PR = \frac{7}{3}$ 'R' बिन्दु परिमेय संख्या $\frac{7}{3}$ निरूपित करता है। 'R' के बायें पक्ष में 'P'' अंकित करते है ताकि $R'P = PR$ ।



कार्यकलाप 5 : एक संख्यारेखा खींचकर $\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{8}$ अंकित कीजिए।

इस तरह संख्यारेखा पर प्रत्येक परिमेय संख्या को एक निश्चित बिन्दू से सूचित कर सकते हैं। आप देखते हैं कि $\frac{2}{4}$ और $\frac{1}{2}$ दोनों एक ही बिन्दु सूचित करते है। (क्यों?)

परिमेय संख्याओं के समतुल्य और दत्त परिमेय संख्या, संख्या रेखा पर एक ही बिन्दु से सूचित किये जाते हैं।



संख्यारेखा पर परिमेय संख्याओं को निरूपित करते समय क्या आप होने वाले प्रक्रिया का निरीक्षण कर सकते हैं? '0' और '1' के बीच $\frac{1}{2}$ निरूपित करने आप 0 और 1 के बीच का रेखाखण्ड का समद्विभाजन करते हैं। यदि 0 और $\frac{1}{2}$ की मध्यबिन्दु को $\frac{1}{4}$ से सूचित करते हैं और $\frac{1}{2}$ और 1 की मध्यबिन्दु को $\frac{3}{4}$ से सूचित करते हैं।

$\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ की मध्यबिन्दु $\frac{3}{8}$ से सूचित करते हैं। आप देखते है कि दो परिमेय संख्याओं को सूचित करनेवाले दो बिन्दुओं के बीच की बिन्दु भी एक परिमेय संख्या। आप देखते हैं कि Z पर की क्रमबद्धता का उपयोग कर परिमेय संख्याओं को भी क्रम से लिख सकते हैं। मान लीजिए $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याऐं है। $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ कहते हैं यदि $ad < bc$ हो। इस तरह $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$ क्योंकि $48 < 49$ है। इसके विपरीत $-\frac{7}{8} < -\frac{6}{7}$ क्योंकि $-49 < -48$ है।

मान लीजिए $\frac{2}{7}$ और $\frac{5}{8}$ दो परिमेय संख्या है। तो $\frac{2}{7} < \frac{5}{8}$

इनका औसत है $\dfrac{\frac{2}{7} + \frac{5}{8}}{2} = \dfrac{51}{112}$

अब $\frac{51}{112}, \frac{2}{7}$ और $\frac{5}{8}$ के बीच है। वास्तव में $\frac{2}{7} < \frac{51}{112} < \frac{5}{8}$ जिसे हम आसानी से सत्यापन कर सकते हैं।

यदि हम दो परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ से प्रारंभ करते हैं ताकि $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ तो . $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ सूचित करनेवाले बिन्दुओं की मध्यबिन्दु से

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} = \frac{ad+bc}{2bd} \text{ संख्या}$$

निरूपित होती है। जो पुनः एक परिमेय संख्या है। आप ध्यान दे सकते हैं कि

$$\frac{a}{b} < \frac{ab+bc}{2bd} < \frac{c}{d}$$

वास्तव में, $\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd} \Leftrightarrow a \times (2bd) < b(ad+bc)$

$\Leftrightarrow 2ad < ad+bc$ (b निस्कसित करने पर)

$\Leftrightarrow \quad ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

जो दिया गया है। इसी तरह अन्य असमानता $\frac{ad+bc}{2bd} < \frac{c}{d}$ भी सिद्ध कर सकते हैं। अतः परिमेय संख्या $\frac{ad+bc}{2d}$ निश्चित रूप से $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के बीच में है।

दो निश्चित परिमेय संख्याओं के बीच एक और परिमेय संख्या होती है।

इसे पूर्णांकों के गुण के साथ तुलना कीजिए। एक पूर्णांक m दिये जाने पर और उसके **अगले पूर्णांक** $m+1$ के बीच कोई पूर्णांक नहीं होता। हम अगले पूर्णांक के बारे में कह सकते है परन्तु अगले परिमेय संख्या नहीं कह सकते हैं। निश्चित रूप से पूर्णांक से परिमेय संख्या की ओर बढते यह कमी रह जाती है।

अतः लाभ रहा है कि हम एक परिमेय संख्या को दूसरे शून्यरहित परिमेय संख्या से भाग लगा सकते है जो हमें $rx = s$ समीकरण हल करने में सहायक है; जहाँ $r \neq 0$ और s परिमेय संख्यायें है। कमी यह रही है कि परिमेय संख्यों में पूर्णांकों की तरह अगली परिमेय संख्या नहीं है।

अभ्यास 7.4

1. निम्न परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

$\frac{-8}{5}, \frac{3}{8}, \frac{2}{7}, \frac{12}{5}, \frac{45}{13}$

2. निम्न परिमेय संख्याओं को आरोहण क्रम में लिखिए।

$\frac{3}{4}, \frac{7}{12}, \frac{15}{11}, \frac{22}{19}, \frac{101}{100}, \frac{-4}{5}, \frac{-102}{81}, \frac{-13}{7}$

3. $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच 5 परिमेय संख्या लिखिए जिनके 'हर' समान है।

4. '1' से कम रहनेवाले कितने घनात्मक परिमेय संख्यायें है ताकि अंश और हर का जोड़ 10 से अधिक नहीं है।

5. मान लीजिए $\frac{m}{n}$ और $\frac{p}{q}$ दो घनात्मक परिमेय संख्यायें है। बताइए $\frac{m}{n}$ और $\frac{p}{q}$ के संदर्भ में $\frac{m+p}{n+q}$ कहाँ स्थित होगा?

6. 0 और 1 के बीच में कितने परिमेय संख्याऐं हैं ताकि परिमेय संख्या का हर 80 है?

7. 0 और 1 के बीच में कितने परिमेय संख्याऐं इस गुण के कि अंश और हर का योग 70 है।

अपरिमेय संख्याओं का परिचय

आप जानते है कि ऐसा कोई पूर्णांक नहीं है जिसका वर्ग 2 हो। हमारा तर्क था कि $1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$ और 1 और 2 के बीच कोई पूर्णांक नहीं है। और आप ने देखा कि 1 और 2 के बीच अनेक परिमेय संख्याऐं है। वास्तव में 1 और 2 के बीच में अनगिनत परिमेय संख्याऐं है।

अतः 1 और 2 के बीच कोई परिमेय संख्या ढूंढना स्वाभाविक है ताकि उसका वर्ग 2 हो। परन्तु ऐसा संभव नहीं है। ऐसी कोई परिमेय संख्या r नहीं है ताकि $r^2 = 2$ है।

इसका कारण भी सरल है। मान लीजिए, यदि संभव हो, ऐसी परिमेय संख्या है ताकि $r^2 = 2$ उसके संक्षिप्त रूप में लिखने पर है ताकि (p, q) का म.सा.आ = 1 तो यह संबंध प्राप्त होता है। $P^2 = 2q^2$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

इससे मालूम होता है p^2 सम संख्या है और अतः p स्वयं सम संख्या है, क्योंकि यदि p विषम है तो p^2 भी विषम होता है। अतः हम लिख सकते है $p = 2a$ जहाँ a एक पूर्णांक है। प्रतिस्थापित करने पर $4a^2 = 2q^2$ अथवा $q = 2a^2$ तो फिर q भी सम संख्या है।

इस तरह p और q दोनों सम और उनका सामान्य गुणनखण्ड 2 है।

यह तो बिल्कुल विपरीत है क्योंकि $\frac{p}{q}$ संक्षिप्त रूप में है। अतः निष्कर्ष निकलता है कि ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 2 हो।

क्या आपको लगता है कि सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय भी अपर्याप्त है? Q में आप $x^2 = 2$ जैसे समीकरण हल नहीं कर सकते। अतः परिमेय संख्याओं के समुच्चय का विस्तार हुआ।

हम जानते हैं किसी स्वाभाविक संख्या n के लिए जो संपूर्ण वर्ग नहीं है, ऐसी परिमेय संख्या नहीं है ताकि $r^2 = n$ हो। इस तरह $\sqrt{n}$ की परिभाषा देनी होगी, जहाँ n एक अपूर्ण वर्ग है। ऐसा वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में हो सकता है । $\sqrt{2}$ और ऐसी संख्याऐं जो परिमेय नहीं है, अपरिमेय संख्याऐं कहलाती है। हम सिद्ध कर सकते हैं कि ऐसी कोई ऐसी परिमेय संख्या नहीं है जिसका घन 2 के बराबर हो। जिसे $\sqrt[3]{2}$ द्वारा सूचित करते है। जो 2 का घनमूल कहते है। यह पुनः एक अपरिमेय संख्या है।

$\mathbb{Q}$ से प्रारंभ होकर, **वास्तविक संख्या प्रणाली** (real number system)की रचना हुई, परन्तु $\mathbb{Q}$ की संरचना समझनी होगी।

वास्तविक संख्याओं में दो भाग समाविष्ट है **परिमेय संख्या** और **अपरिमेय संख्या**। दोनों भी अनंत है। अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय, परिमेय संख्याओं के समुच्चय से बड़ा है। इस तरह अनंत संख्याओं के बीच अलग अलग अनंत ज्ञान करते है। इस तरह आप अनंत के विस्मयी दुनिया में प्रवेश करते हैं।

शब्दावली

- क्रमबद्धता : संख्याओं की तुलना
- उत्तम क्रमबद्धता गुण : प्रत्येक उपसमुच्चय में कनिष्ठतम अवयव होता है।
- घनात्मक पूर्णांक : पूर्णांक जो स्वाभाविक संख्या के रुप में पहचाने जाते है।

- ऋणात्मक पूर्णांक : पूर्णांक जो घनात्मक पूर्णांक के योगफलीय प्रतिलोम है।
- निश्कासन नियम : नियम जिसके आधार पर समानता के दोनों पक्षों से समान शून्य रहित राशियों को निस्कासित कर सकते हैं।
- परिमेय संख्या : संख्याऐं जो $\frac{p}{q}$ के रूप में है जहाँ p पूर्णांक है और q एक स्वाभाविक संख्या है।
- परिमेय संख्या का सामान्य संक्षिप्त रूप : $\frac{p}{q}$ परिमेय संख्या का वह रूप जिसमें p. और q के गुणनखण्ड नहीं होते।
- योगफलीय तत्समक : संख्या जिसे दत्त संख्या को जोड़ने पर दत्त संख्या में कोई परिवर्तन नहीं होता।
- योगफलीय प्रतिलोम : संख्या जिसे दत्त संख्या को जोड़ने से योगफलीय तत्समक प्राप्त होता है।
- गुणनफलीय तत्समक : संख्या जिसे दत्त संख्या के साथ गुणा करने दत्त संख्या में कोई परिवर्तम नहीं होता है।
- गुणनफलीय प्रतिलोम : संख्या जिसे दत्त संख्या से गुणा करने पर गुणनफलीय तत्समक प्राप्त होता है।
- सांद्रता गुण : संख्याओं को अलग अलग न करने का गुण उदाहरण संख्या रेखा पर परिमेय संख्या बहुत जुड़े रहते हैं।
- अग्र संख्या : अगली संख्या; पूर्णांकों में गुण पाया जाता है परिमेय संख्याओं में नहीं।

याद रखिए

- परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप व्यक्त अनुपात है जहाँ p एक पूर्णांक है और q स्वाभाविक संख्या।
- परिमेय संख्याओं का योगफल तथा गुणनफल परिमेय संख्याओं के समुच्चय में आवृत है।
- परिमेय संख्याओं का योगफल और गुणनफल पर साहचर्य और क्रमविनिमय लागू होता है तथा गुणा, जोड़ पर वितरित होता है।
- परिमेय संख्या '0' योगफलीय तत्समक है और '1' गुणनफलीय तत्समक है।
- प्रत्येक परिमेय संख्या का योगफलीय प्रतिलोम है, प्रत्येक शून्यरहित परिमेय संख्या का गुणनफलीय प्रतिलोम होता है।
- कोई दो परिमेय संख्याओं के बीच, असंख्य परिमेय संख्याऐं होते है।
- प्रत्येक पूर्णांक की अगली संख्या होती है परन्तु दत्त परिमेय संख्या की अगली संख्या नहीं

होती।

उत्तर

अभ्यास 7.1

1.(i) Z पर साहचर्य गुण (ii) गुणनफलीय क्रम विनिमय गुण

(iii) Z में, जोड़ पर गुणनफल का वितरण नियम

2. -6, -9, -123, 76, 85, - 1000

3. (i) m = 2 (ii) m = – 10 (iii) m = 14, m = – 77

4. –333, – 210, – 26, – 8, 0, 21, 33, 85, 2011

5. 2011, 528, 364, 210, 85, 12, –58, –1024, –10000

अभ्यास 7.2

1. आप $\frac{10}{14},\frac{15}{21},\frac{20}{28},\frac{25}{35},\frac{30}{42},\frac{35}{49},\frac{40}{56},\frac{45}{63},\frac{50}{70},\frac{55}{77}$ ले सकते हैं।

2. आप $\frac{22}{10},\frac{33}{15},\frac{44}{20},\frac{55}{25},\frac{66}{30},\frac{77}{35},\frac{88}{40},\frac{99}{45},\frac{110}{50},\frac{121}{55},\frac{132}{60},\frac{143}{65},\frac{154}{70},\frac{165}{75},\frac{176}{80}$ लीजिए।

3. $\frac{10}{1},\frac{9}{2},\frac{8}{3},\frac{7}{4},\frac{6}{5},\frac{5}{6},\frac{4}{7},\frac{3}{8},\frac{2}{9},\frac{1}{10}$

4. $\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7},\frac{6}{8},\frac{7}{9},\frac{8}{10},\frac{9}{11},\frac{10}{12}$

5. संख्या $\frac{3}{-2}$ और $\frac{-3}{2}$ दोनों एक ही है। क्योंकि ये समतुल्य भिन्न है; स्मरण कीजिए कि हर घनात्मक लेना एक रूढी है।

6. $0.9 = \frac{9}{10}$, $0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

अभ्यास 7.3

1. (i)योगफलीय आवरण गुण (ii) गुणनफलीय आवरण गुण

(iii)'0' योगफलीय तत्समक अवयव है (iv) 1 गुणनफलीय तत्समक अवयव ह

5. $\frac{-8}{5}, \frac{-6}{10}\left(=-\frac{3}{5}\right), \frac{3}{8}, \frac{16}{3}, \frac{4}{1}$

6. $\frac{1}{2}, \frac{11}{6}, \frac{-15}{8}, \frac{18}{19}, 1000$

अभ्यास 7.4

संख्यारेखा पर 0 से 8 एक रेखाखण्ड लीजिए उसे PQ नाम दीजिए। PQ में 5 समान भाग बनाईये (यहाँ ज्यामितिय रचना) इन्हें PA, AB, BC, CD, DQ नाम दीजिए। तो PA = 8/5

'P' के बायीं ओर A अंकित कीजिए ताकि PA' = PA

तो A' संख्या रेखा पर $\frac{-8}{5}$ सूचित करता है।

2. $\frac{-13}{7} < \frac{-102}{81} < \frac{-4}{5} < \frac{7}{12} < \frac{3}{4} < \frac{101}{100} < \frac{22}{19} < \frac{15}{11}$

3. $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच $\frac{13}{30}, \frac{14}{30}, \frac{15}{30}, \frac{16}{30}, \frac{17}{30}$ समतुल्य भिन्न के गुण उपयोग करते यदि अंश और हर को बढाते जायेंगे तो चाहे जितने ऐसे समुच्चय प्राप्त कर सकते हैं।

4. ऐसे 15 परिमेय संख्याऐं हैं : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{5}$

5. यदि $\frac{m}{n}$ और $\frac{p}{q}$ निश्चित है तो $\frac{m+p}{n+q}$, $\frac{m}{n}$ और $\frac{p}{q}$ के बीच उपस्थित होगा यदि

$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ तो $\frac{m+p}{n+q} = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

6. 79. 7. 69

* * * *

घटक – 8
एक चरांक युक्त रैखिक समीकरण

इस घटक के अध्ययन करने के बाद, आप सीखेंगें :

- एक चरांक युक्त रैखिक समीकरण का अर्थ
- एक चरांक युक्त रैखिक समीकरण कैसे हल करना
- कथनात्मक समस्याओं के रैखिक समीकरण कैसे बनाना
- प्राप्त परिणाम कैसे सत्यापन करना

प्रस्तावना :

इस अध्याय में, परिमेय सहगुणांक वाले एक चरांक युक्त रैखिक समीकरण का अध्ययन करेंगें और उन्हें परिमेय संख्या प्रणाली में हल करेंगें।

एक **समीकरण** का **मानक रुप** एक कथन है जिसमें एक स्थिरांक रहित बीजिय व्यंजक शून्य के बराबर है। यह आवश्यक नहीं कि एक कथन चरांक के किसी भी मूल्य के लिए सत्य हो अथवा उसमें उपस्थित चरांक के कुछ ही मूल्य के लिए सत्य हो। उदाहरण के लिए $3x - 5 = 0$ यदि आप ऐसे पूर्णांक x ज्ञात कर रहे हो ताकि यह कथन सत्य हो, तो कोई भी पूर्णांक नहीं है जो इसे सत्यापित करें। इसके विपरीत, यदि आप परिमेय संख्या ज्ञात करते हैं तो $x = \frac{5}{3}$, के लिए $3x - 5 = 0$ सत्य होता है। चरांक के जिस मूल्य के लिए कथन सत्य होता है उसे समीकरण का **हल** कहते हैं (solution).

कभी-कभी $2x - 5 = x + 6$ जैसे कथन आते हैं यह भी एक समीकरण है परन्तु यह **मानक रूप** नहीं है। फिर भी, इसे मानक रुप $x - 11 = 0$ के रुप में ला सकते हैं।

जैसे आपने पूर्व देखा है, कि दिये हुए एक समीकरण के लिए एक प्रणाली में हल नहीं हो सकता, परन्तु किसी और प्रणाली में अवश्य हल हो सकता है। समीकरण $x^2 - 2 = 0$ के लिए परिमेय संख्याओं के प्रणाली में हल नहीं है, परन्तु इसे वास्ताविक संख्याओं समुच्चय में हल कर सकते हैं। वास्तव में, संख्या प्रणाली ऐसे समीकरण हल करने के लिए ही प्रस्तुत किये हैं। आगे आप सीखेंगें कि $x^2 + 1 = 0$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर हल नहीं कर सकते, परन्तु इसे काल्पनिक (complex) संख्याओं के समुच्चय पर हल कर सकते है। इसतरह यह जानना अवश्य है कि हमें हल कहाँ ज्ञात करना है।

एक चरांक युक्त समीकरण एक कथन है कि एक चरांक युक्त बीजीय व्यंजक शून्य के बराबर है। यदि व्यंजक का घात भी एक है तो वह समीकरण **रैखिक समीकरण** है। एक चरांक युक्त रैखिक समीकरण का मानक रुप $ax + b = 0$ जहाँ $a \neq 0$ है। यहाँ x एक चरांक है और a, b (कुछ संख्या) स्थिरांक है।

उदाहरण के लिए $x - 9 = 0,\ 5x - 30 = 0,\ \frac{3}{5}x + \frac{1}{3} = 0$

समीकरण हल करने का क्या अर्थ है?

एक कथन जिसमें कोई व्यंजक शून्य से समान है उसमें उपस्थित चरांक के प्रत्येक मूल्य के लिए सत्य न हो। फिर भी, चरांक के कुछ मूल्य कथन को सत्य सिध्द कर सकते हैं। इस संदर्भ में, चरांक के जिस मूल्य के लिए कथन सत्य होता है वह दत्त समीकरण का **हल** (Solution) कहलाता है। दत्त समीकरण के हल ज्ञात करने की प्रक्रिया को **समीकरण हल करना** कहते हैं।

जैसे आप ध्यान दिया है, दत्त रैखिक समीकरण $ax + b = 0$, इसका हल का अस्तित्व हम जिस संख्या प्रणाली में हल ज्ञात करना चाहते है उस बात पर निर्भर करता है। यदि a और b पूर्णांक है, ऐसा कोई पूर्णांक हल के रुप में नहीं हो सकता जहाँ तक a, b को भाग लगाता हो। तो भी, यदि आप परिमेय संख्या के प्रणाली में हल ढूँढते हो, तो अवश्य एक परिमेय संख्या समीकरण का हल होता है। जिसे हम ज्ञात कर सकते है। इस ज्ञान के आधार पर हम यह कथन लिख सकते है।

एक रैखिक समीकरण $ax + b = 0$ जिसमें सहगुणांक परिमेय संख्या है और $a \neq 0$ है तो परिमेय संख्या के प्रणाली में एक निश्चित हल होता है।

वास्तव में, हल को इसतरह लिख सकते हैं : $x = -ba^{-1}$ जहाँ a^{-1}, a का गुणनफलीय विलोम है। इसके पूर्व, आपने अध्ययन किया है कि प्रत्येक शून्यरहित परिमेय संख्या, के लिए परिमेय संख्या प्रणाली में उसका विलोम होता है।

आगे आप सीखेंगें कि यही कथन वास्ताविक संख्या के प्रणाली में सत्य होता है, यदि आप वास्तविक संख्या प्रणाली में हल ढूंढ रहें हैं।

(वास्तव में यह किसी भी संख्या प्रणाली के लिए सत्य होता यदि प्रत्येक शून्य रहित संख्या का गुणनफलीय विलोम होता है)

एक चरांक युक्त रैखिक समीकरण हल करना

$5x - 15 = 0$ समीकरण पर विचार कीजिए। हमें x का मूल्य ज्ञात करना है। जिसके लिए $5x - 15 = 0$ सत्य हो। यहाँ हम महत्वपूर्ण अभिधारणाओं का उपयोग करते हैं। इन्हें पुनः आप ज्यामिति में अध्ययन करेंगें।

1. यदि समान को समान को जोडते है तो उनका योगफल भी समान होता है।

यदि हम जानते हैं $a = b$ तो किसी c के लिए हमें प्राप्त करते है $a + c = b + c$ उदाहरण के लिए $x - 5 = 0$ दिया है। हम 5 को दोनों तरफ जोडते है। आभिधारणा कहता है कि योगफल में परिवर्तन नहीं होता। इसतरह $(x - 5) + 5 = 0 + 5$ जो $x = 5$ के समान है। यहाँ महत्वपूर्ण बात यह कि a, b, c बीजीय व्यंजक भी हो सकते है।

इसतरह $3x + 2 = 5 - x$ सूचित करता है

$(3x + 2) + (x - 5) = (5 - x) + x + 5 = 0$ अथवा $4x - 3 = 0$

यह अभिधारणा और अन्य बीजीय व्यंजकों को सरल करने में सहायक है।

2. समान को समान में से घटाने पर हमें पुनः समान ही प्राप्त करते है।

इसतरह $a = b$ सूचित करता है कि $a - c = b - c$ दत्त $x + 5 = 2x - 6$ हम $x - 6$ दोनों पक्षों में से घटा सकते है और प्राप्त कर सकते है:

$(x + 5) - (x - 6) = (2x - 6)$ $(x - 6)$ अथवा $11 = x$.

आप देख सकते है कि अभिधारणा 1 और 2 में अधिक अंतर नहीं है। जब आप घटाने को योगफलीय विलोम जोडने के बराबर मानते है। जैसे आपने संख्याओं के योगफलीय विलोम परिभाषित किया है उसी तरह हम बहुपदीयों के लिए परिभाषित कर सकते है और जो गुणधर्म पूर्णांको के लिए सत्य है बहुपदीयों के लिए भी सत्य है।

उदाहरण 1 : $x - 15 = 0$ समीकरण को हल कीजिए।

हल : समीकरण (1) के उपयोग से 15 को दोनों पक्षों में जोडने से

$(x - 15) + 15 = 0 + 15 = 15$ यह सरल करने पर $x = 15$.

उदाहरण 2 : $x + 9 = 20$ समीकरण को हल कीजिए।

हल : आप देख रहे है कि यह मानक रुप में नहीं है, इसलिए मानक रुप देने 20 को दोनों पक्षों से घटाना चाहिए। इस तरह उदा (2) बनता है $(x + 9) - 20 = 20 - 20 = 0$ अथवा $x - 11 = 0$ अब यह मानक रुप में है। 11 को दोनो पक्षों में जोडने पर $x - 11 + 11 = 0 + 11$ चरणों को कम करने 9 को दोनों पक्षों से घटाने से इसतरह $(x + 9) - 9 = 20 - 9$ अथवा $x = 11$.

उदाहरण 3 : हल कीजिए $2x - 3 = x + 8$

हल : इसमें तुम देखते हैं कि दोनों पक्ष बीजीय व्यंजकयुक्त है। यदि आप $x - 3$ को दोनों पक्षों से घटाने पर हमें प्राप्त $(2x - 3) - (x - 3) = (x + 8) - (x - 3)$ अथवा $x = 11$.

3. समान राशियों को समान से गुणा करने पर हमें समान प्राप्त होता है।

इस तरह यदि $a = b$ तो $ac = bc$, प्रत्येक c के लिए उदाहरण के लिए दत्त $\frac{x}{2} = 1$

दोनों पक्षों में 2 से गुणा करने पर $\frac{x}{2} \times 2 = 1 \times 2$ अथवा $x = 2$.

4. यदि समान राशियों को शून्य रहित समान राशियों से भाग लगाते हैं तो समान राशियां प्राप्त होती हैं।

इसका अर्थ है यदि $a = b$ और $c \neq 0$ हो तो $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ होगा.

यह भी 3 से नियम के समान ही क्यों कि भाग लगाने का अर्थ है गुणनफलीय प्रतिलोम से गुणा करना.

उदाहरण 4 : हल कीजिए : $\frac{x}{3} = 9$

हल : दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर तो $\frac{x}{3} \times 3 = 9 \times 3 = 27$ प्राप्त होता है।

इसतहर $x = 27$.

उदाहरण 5 : हल कीजिए $\frac{2x}{9} = 5$

हल : दोनों पक्षों को $\frac{9}{2}$ से गुणा करते हैं, सूचना - यह 9 से पहले गुणा और 2 से भाग देने के बराबर है तब हमें प्राप्त होता है।

$$\frac{2x}{9} \times \frac{9}{2} = 5 \times \frac{9}{2} = \frac{45}{2}$$

हमें प्राप्त होता है। $x = \frac{45}{2}$

उदाहरण 6 : हल कीजिए $15x = 120$

हल : हम दोनों पक्षों को 15 से भाग देने पर,

$\frac{15x}{15} = \frac{120}{15} = 8$ इससे $x = 8$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 7 : हल कीजिए $13y = 100$

हल : हम दोनों पक्षों को 13 से भाग देने से प्राप्त होता है।

$$\frac{137y}{13} = \frac{100}{13} \text{ तब } y = \frac{100}{13} \text{ ज्ञात होता है।}$$

समीकरण हल करने का और घटक है परिणाम का **सत्यापन** करना है। हमें यह परीक्षण करना होता है कि प्राप्त परिणाम दत्त कथन को सत्यापित करता है या नहीं। इसे हम प्राप्त चरांक के मूल्य को दत्त समीकरण में प्रतिस्थापित कर और कथन का सत्यापन का परीक्षण करते हैं।

उदाहरण 8 : क्या 2 समीकरण $3x - 5 = 19$ का हल है?

हल : हमें दत्त संबंध में $x = 2$ प्रतिस्थापित करते हैं। हम प्राप्त करते हैं : $3x - 5 = 3(2) - 5 = 6 - 5 = 1$

जो वाम पक्ष (LHS) है। परन्तु दक्षिण पक्ष (RHS) 19 हैं।

इसलिए $1 \neq 19$ है, हमें ज्ञात होता है कि $x = 2$ के लिए वाम पक्ष और दक्षिण पक्ष समान नहीं है। इसलिए $x = 2$ समीकरण का हल नहीं है।

उदाहरण 9 : क्या 7, $2x - 4 = 10$ का हल है?

हल : दत्त संबध में $x = 7$ प्रतिस्थापित कीजिए। हम प्राप्त करते है: वाम पक्ष $= 2x - 4 = (2 \times 7) - 4 = 14 - 4 = 10$. और दक्षिण पक्ष $= 10$ है। इसलिए वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष इसलिए $x = 7$, $2x - 4 = 10$ का हल है।

उदाहरण 10 : समीकरण $2x - 3 = 7$ हल कीजिए

हल : दोनों पक्षों में 3 जोडने पर, इससे प्राप्त होता है : $2x - 3 + 3 = 7 + 3$. इससे प्राप्त होता है $2x = 10$ अब दोनों पक्षों 2 से भाग देने पर हमे प्राप्त है: $\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$

अत: $x = 5$

आईए उस परिणाम का सत्यापन करते हैं।

$x = 5$ प्रतिस्थापित करने पर

$2x - 3 = 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7$ इसतरह समीकरण **का समाधान होता** है।

हम, समीकरण हल करने के चरणों को कम कर सकते हैं। $2x - 3 = 7$ समीकरण पर विचार कीजिए। हम इसे $2x = 7 + 3$ लिख सकते हैं। वास्तव में, हम 3 को दोनों पक्षों में जोड रहे हैं। परन्तु आप उसे मन में करके लिख सकते है $2x - 3 + 3 = 2x$. इसे हम -3 को **दूसरे पक्ष** में **पक्षांतर** किया है कहते हैं। वास्तव में तेजी से परिकलन करना सरल विधान है। पुनः आप मन में ही दोनों पक्षों में 2 से भाग लगाकर लिख सकते $x = 5$.

इसीतरह हम बीजीय व्यंजकों को पक्षांतर कर सकते है। उदाहरण के लिए, दत्त $4x - 3 = 3x + 2$ हम $3x$ का बायें पक्ष में और -3 दाहिने पक्ष में पक्षांतर करने प्राप्त करते है: $(4x - 3x) = 3 + 2$ अर्थात $x = 5$

उदाहरण 11 : $5x - 12 = 10 - 6x$ हल लिखिये।

हल : $-6x$ को दाहिने पक्ष में तथा -12 को बायें पक्ष के पक्षांतर करने पर प्राप्त करने $5x + 6x = 10 + 12$ इसतरह $11x = 22$ अथवा $x = 2$.

पक्षांतर करने के नियम : जब हम एक व्यंजक को समानता के एक पक्ष से दूसरे पक्ष में पक्षांतर करते हैं, हम जिस व्यंजक को पक्षांतर करना उसके चिन्ह बदलते हैं।

इसतरह पूर्व उदाहरण में $-6x$ को दाहिने पक्षा से बायें पक्ष में पक्षांतर करने पर $+ 6x$ बनता है।

उदाहरण 12 : हल कीजिए $8x - 3 = 9 - 2x$

हल : चरांक को एक पक्ष में और स्थिरांक को दूसरे पक्ष में पक्षांतर करते हैं और हमें प्राप्त होता है $8x + 2x = 9 + 3$ इस तरह $10x = 12$ अतवा $x = {}^{12}\!/_{10}$ सरल करने पर $x = {}^{6}\!/_{5}$.

उदाहरण 13 : हल कीजिए $8x + 9 = 3(x - 1) + 7$

हल : समीकरण $8x + 9 = 3x - 3 + 7 = 3x + 4$ पक्षांतर से हमें प्राप्त है $8x - 3x = 4 - 9$ अथवा $5x = -5$ इस तरह हमें $x = -1$ प्राप्त होता है। हम इसका सत्यापन इस तरह से करते हैं।

$8x + 9 = 8(-1) + 9 = 1$ और $3(x - 1) + 7$

$= 3(-1-1) + 7 = 3(-2) + 7 = -6 + 7 = 1$

इस तरह $8x + 9 = 3(x - 1) + 7$ के लिए $x = -1$ सत्य है। इस सत्यापन से सिध्द होता है कि $x = -1$ समाधान है।

उदाहरण 14 : हल कीजिए $\frac{2}{3}x = \frac{3}{8}x + \frac{7}{12}$

हल : यहाँ हम, हर के ल.सा.अ से गुणा करते हैं। 3, 8, 12 का ल.सा.अ 24 है। (हमने कौन सी अभिधारणा उपयोग किया है?)

इस तरह $\left(\frac{2}{3}x\right)24 = \left(\frac{3}{8}x + \frac{7}{12}\right)24$ और इसे

सरल करने पर $16x = 9x + 14$ इस तरह $7x = 14$ अथवा $x = 2$. परीक्षण कीजिए क्या $x = 2$ वास्तव में हल है।

हर के ल.स.अ से दोनों पक्षों में गुणा करने का क्या लाभ है जान लिया है? नया व्यंजक पूर्णांक सहगुणांक युक्त समीकरण बनता है। इस समीकरण को आसानी से हल करते हैं। अतः आभिधारण 3 परिमेय संख्या युक्त समीकरण, पूर्णांक युक्त समीकरण में परिवर्तन करने में सहायक है।

उदाहरण 15 : समीकरण हल किजिए $\frac{2x+7}{5} - \frac{3x+11}{2} = \frac{2x+8}{3} - 5$

हल : विभिन्न भिन्नों के हर में 2, 3, 5 है।

उनका ल.सा.अ 30 है। पूरे समीकरण को 30 से गुणाकरने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\left(\frac{2x+7}{5}\right)\times 30 - \left(\frac{3x+11}{2}\right)\times 30 = \left(\frac{2x+8}{3}\right)\times 30 - (5\times 30)$$

सरल करने पर,

$\Rightarrow 6(2x + 7) - 15(3x + 1) = 10(2x + 8) - 150$

$\Rightarrow 12x + 42 - 45x - 165 = 20x + 80 - 150$

$12x - 45x - 20x = -42 + 165 + 80 - 150$

$-53x = 53.$

समुचित पदों को पक्षांतर करने पर हमें प्राप्त है :

$\Rightarrow 12x - 45x - 20x = -42 + 165 + 80 - 150 \Rightarrow -53x = 53$

अतः $x = -1$ समीकरण का हल है।

इसे आप समीकरण में प्रतिस्थापित कर जाँच कर सकते हैं कि क्या वाम पक्ष और दाक्षिण पक्ष समान है या नहीं।

उदाहरण 16 : हल कीजिए : $(x + 4)^2 - (x - 5)^2 = 9$

हल : सहज रुप से यह समीकरण की तरह दिखाई देता है जो कि रैखिक नहीं है। सर्व समिका के उपयोग विस्तार करने पर, हमें प्राप्त होता है।

$x^2 + 8x + 16 - x^2 + 10x - 25 = 9$

सरल करने पर हम प्राप्त करते है : $18x - 9 = 9$ पक्षांतर करने पर $18x = 18$

अतः $x = 1$. यह सत्यापन करना आसान है कि $x = 1$ समीकरण का हल है।

सोचिए !

1. $ax + b = 0$ जहाँ $a \neq 0$ स्वरुप के समीकरण हल करना आप ने सीखा है। आपको $x = \frac{-b}{a}$ प्राप्त होता जो कि एक अद्वितीय हल है। मान लीजिए x और y दो चरांक है कहो, समीकरण $ax + by + c = 0$ जहाँ $a \neq 0$ और $b \neq 0$ यह पुनः एक रैखिक समीकरण है परन्तु चरांकों की संख्या 2 है। क्या हम ऐसा समीकरण हल कर सकते है? एसे समीकरण के कितने हल (x, y) होते हैं? यदि a, b और c पूर्णांक है, कया हमेशा पूर्णांक x और y ज्ञात कर सकते हैं जो समीकरण का समाधान कर सकते हैं।

2. कया आप $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ हल कर सकते हो?

अभ्यास 8.1

1. निम्नों को हल किजिए –

(i) $x + 3 = 11$ (ii) $y - 9 = 21$ (iii) $10 = z + 3$

(iv) $\frac{3}{11} + x = \frac{9}{11}$ (v) $10x = 30$ (vi) $\frac{S}{7} = 4$

(vii) $\frac{3x}{6} = 10$ (viii) $1.6 = \frac{x}{1.5}$ (ix) $8x - 8 = 48$

(x) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{7}{15}$ (xi) $\frac{x}{5} = 12$ (xii) $\frac{3x}{5} = 15$

(xiii) $3(x + 6) = 24$ (xiv) $\frac{x}{4} - 8 = 1$ (x) $3(x + 2) - 2(x - 1) = 7$

2. समीकरणों को हल किजिए –

(i) $5x = 3x + 24$ (ii) $8t + 5 = 2t - 31$ (iii) $7x - 10 = 4x + 11$

(iv) $4z + 3 = 6 + 2z$ (v) $2x - 1 = 14 - x$ (vi) $6x + 1 = 3(x - 1) + 7$

(vii) $\frac{2x}{5} - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} + 1$ (viii) $\frac{x-3}{5} - 2 = \frac{2x}{5}$

(ix) $3(x+1) = 12+4(x-1)$

(x) $2x - 5 = 3(x - 5)$ (xi) $6(1 - 4x) + 7(2 + 5x) = 53$

(xii) $3(x + 6) + 2(x + 3) = 64$ (xiii) $\frac{2m}{3} + 8 = \frac{m}{2} - 1$

(xiv) $\frac{3}{4}(x-1) = x - 3$

2.3.3. रैखिक समीकरणों का अनुप्रयोग :

हम, एक चरांक युक्त रैखिक समीकरण से संबंधित कुछ उदाहरण पर विचार करेंगें

उदाहरण 17 : एक संख्या के सातगुना को 11 से बढाने पर 81 प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : इसे हम अनेक चरणों पूर्ण करेंगें

चरण 1 : पहले हम दत्तांश को समुचित समीकरण में लिखते है। मान लीजिए वह संख्या x है। निगमनिक, हम नहीं जानते कि वह संख्या क्या है। दिये गये दत्तांश का उपयोगकर चरांक x से युक्त एक समीकरण बनाते है। अब उस संख्या का 7 गुना होता है $7x$ इसे 11 से बढाने पर प्राप्त होता है $7x + 11$ गणित के अनुसार $7x + 11 = 81$.

क्या आप ध्यान देते हैं कि हमें चरांक x से युक्त एक रैखिक समीकरण प्राप्त है?

चरण 2 : अब हम $7x + 11 = 81$ समीकरण हल करना है। हमने समीकरण हल करने के विधान जान लिया है। 11 को दूसरे पक्ष में पक्षांतर करने पर हमें प्राप्त होता है:

$7x = 81 - 11 = 70$

7 से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं $x = 10$

चरण 3 : हमें परीक्षण करना कया 10 हमारे गणित के कथन का समाधान करता है या नहीं।

अब संख्या का 7 गुना $7 \times 10 = 70$.

इसमें 11 जोडने से प्राप्त करते हैं 81 जो कि दत्तांश भी कहना है।

इसतरह $x = 10$ समीकरण का हल है।

उदाहरण 18 : सिरी के माता की वर्तमान आयु शिरी के वर्तमान आयु की तिगुनी है। 5 वर्ष के बार उनके आयु का योगफल 66 वर्ष है। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : हम अनेक चरणों में इस समस्या को हल कर सकते है। मान लो शिरी कि वर्तमान आयु x है। तब उसके माता की आयु $3x$ के बराबर 5 वर्ष के बाद दोनों की आयु क्रमशः को $x + 5$ और $3x + 5$ वर्ष होती है। समस्या के दतांश से उनका योग 66 के बराबर होता है। उस प्राप्त समीकरण है।

$(x + 5) + (3x + 5) = 66$

अब x का मूल्य सरलता से प्राप्त कर सकते है। समीकरण का सरल रूप $4x + 10 = 66$ बनता है। 10 को पक्षांतर से हमें प्राप्त होता है।

$4x = -10 + 66$ अथवा $4x = 56$ अर्थात $x = 14$

इसका अर्थ यह कि शिरी की वर्तमान आयु 14 और उनके माता की आयु $14 \times 3 = 42$ वर्ष हैं।

आईए अब हम जाँच करें कि यह संख्या समस्या का समाधान करता है? या नहीं। 5 वर्ष बाद सिरी की आयु 14 + 5 = 19 उसके माता की आयु 42 + 5 = 47 वर्ष। उन दोनों का योगफल 19 + 47 = 66 वर्ष जो दत्त कथन का समाधान करता है। अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि सिरी की वर्तमान आयु 14 वर्ष है और उसकी माँ की आयु 42 वर्ष हैं।

उदाहरण 19 : तीन क्रमागत सम संख्याओं का योगफल 252 है उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : तीन क्रमागत सम संख्याओं में अत्यंत लघुतम संख्या x है। तब शेष संख्या $x + 2$ और $x + 4$ होते है। क्योंकि क्रमागत दो सम संख्या का अतंर 2 होता है, दत्त समस्या के शर्तानुसार

$x + (x + 2) + (x + 4) = 252$

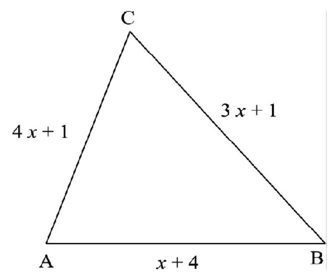
इस तरह हमे प्राप्त समीकरण $3x + 6 = 252$ होता है। सरलीकरण से $3x = 246$ हल करने पर $x = 82$ होता है।

इस तरह वह तीन क्रमागत सम संख्यायें 82, 82 + 2, 82 + 4

अर्थात् 82, 84, 86 है जाँच ने से 82 + 84 + 86 = 252

इस तरह हल का समाधान होता है।

उदाहरण 20 : एक त्रिभुज का परिमाप 14 सें मी है और उसकी भुजाऐं $x + 4$, $3x + 1$ और $4x + 1$ है तो x ज्ञात कीजिए।



हल : हमें मालूम है कि त्रिभुज का परिमाप, त्रिभुज कि तीनों भुजाओं का योगफल है। क्योंकि के माप दिया है $x + 4$, $3x + 1$, और $4x + 1$, परिमाप यह $(x + 4) + (3x + 1) + (4x + 1) = 8x + 6$ है। समस्या के कथन शर्तानुसार यह $8x + 6 = 14$ है। हल करने पर हमें प्राप्त होगा $x = 1$ इस तरह भुजाओं के माप $1 + 4 = 5$; $(3 \times 1) + 1 = 4$ और $(4 \times 1) + 1 = 5$ सें.मी. हमें प्राप्त त्रिभुज कि भुजाओं के माप 5,4,5 से मी हैं।

हमें यह बात मन में रखना है कि एक समस्या को गणितीय रुप देना हमेशा संभव नहीं होता। मान लीजिए हमें त्रिभुज की भुजाऐं ज्ञात करना कहा है जिसकी भुजाऐं x, $x + 1$ और $x + 3$ है और परिभाप 10 इकाई है। आप लिखेंगे $x + (x + 1) + (x + 3) = 10$ और इसे हल करने पर $x = 2$ प्राप्त होता है। आप निर्णय ले सकतें हैं कि भुजाऐं 2, $2 + 1 = 3$, $2 + 3 = 5$ है। परन्तु ऐसा त्रिभुज नहीं होता जिसकी भुजाऐं 2, 3, 5 है। क्योंकि त्रिभुज की भुजाओं को त्रिभुज असमानता समाधान करना होता है।

अर्थात, दो भुजाओं का जोड, तीसरी भुजा से अधिक होता है अतः हमें परीक्षण है क्या प्राप्त हल में यह वास्तविकता है या नहीं। दिये हुए समस्या का यह महत्वपूर्ण भाग है। इस में कोई अजीब बात नहीं है। गणित एक खेल जिसे कुछ नियमों के आधार पर खेलते है। जब तक आप नियमानुसार खेलते हैं आप अंतिम परिणाम प्राप्त करते हैं। वह परिणाम, सही है या गलत कोई गणितीय नियम भी नहीं कह सकता है। आपको उसकी भौतिकता पर विचार कर परीक्षण करना होगा कि वह भौतिक रूप से सही है।

उदाहरण 21 : मान लीजिए AB सरल रेखा पर P कोई बिन्दु है ताकि P यह A और B के बीच में स्थित है, और AP = 3PB है। दिया है कि AB = 10 से.मी. तो AP की लंबाई ज्ञात कीजिए

हल : P, A और B के बीच में स्थित होने से

AB = AP + AB प्राप्त है। इसतरह $10 = 3PB + PB = 4PB$ हम PB के लिए हल कर सकते है और हमे प्राप्त होता है $\therefore PB = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

अत : $AP = 3PB = 3 \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$ से.मी.

यहाँ हम $PB = x$ न लेकर x में समीकरण बनाते है। हम सीधे PB को चरांक लेकर PB युक्त समीकरण प्राप्त करते हैं।

कार्यकलाप 1 : पिछले **प्रश्न** में आपने P को A और B के बीच में लिया है। हो सकता है, AB सरल रेखा पर P यह A के बायीं और अथवा B के दाहिनी ओर हो सकता है। दोनों संदर्भों के समुचित समीकरण बनाकर उन्हें हल कीजिए। एक संदर्भ में आपको ऋणात्मक संख्या प्राप्त होती है। यह प्रायोगिक रुप से असंभव है। क्योंकि लंबाई ऋणरहित संख्या है।

उदाहरण 22 : दो अंको की संख्या के अंको का जोड 12 है अंकों का स्थान परिवर्तन करने प्राप्त संख्या मूल संख्या 54 अधिक है। उस मूल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए इकाई स्थान अंक x है और दहाई स्थान का अंक y है। इसतरह वह संख्या है $10y + x$ हम जानते है कि $x + y = 12$ अंकों के स्थान बदलने पर प्राप्त संख्या है $10x + y$ दूसरे शर्तानुसार

$$10x + y = 10y + x + 54$$

सरल करने पर $9(x - y) = 54$

अथवा $x - y = 6$

ध्यान दीजिए, यहाँ हमें दो समीकरण प्राप्त हैं:

$x + y = 12$ और $x - y = 6$ इन्हें जोडने पर आप प्राप्त करते $(x + y) + (x - y) = 12 + 6 = 18$

इस तरह $2x = 18$ अथवा $x = 9$

$y = 12 - x$ होने से आप $y = 12 - 9 = 3$

इससे मालूम होता है मूल संख्या 39 है।

आईए इसका सत्यापन करें।

अंको के स्थान बदलने पर प्राप्त संख्या 93 होती है। जाँच करने पर $93 = 39 + 54$.

पर्यायी हल : मान लीजिए इकाई का 'x' है और दहाई का 'y' है । इस तरह वह संख्या बनती है $10y + x$ हम जानते है कि, $x + y = 12$

अंकों का स्थान बदलने पर प्राप्त संख्या होगी $10x + y$. दूसरे शर्त के अनुसार $10x + y = 10y + x + 54$

सरल करने पर $9(x - y) = 54$ अथवा $x - y = 6$

इन दो समीकरणों पर ध्यान देने से $x + y = 12$ और $x - y = 6$ और इन्हें जोड़ने पर आपको प्राप्त होता है, $x + y + (x - y) = 12 + 6 = 18$

इस तरह $2x = 18$ अथवा $x = 9$, $y = 12 - x$ होने से $y = 12 - 9 = 3$

इसे मालूम होता है कि मूल्य संख्या 39 है ।

इसे सत्यापन करने पर और अंकों के स्थान बदलने पर प्राप्त संख्या है 93 ।

आसानी से सत्यापन कर सकते है, 93 = 39 + 54.

उदाहरण 23 : दो संख्याओं का अनुपात 3 : 2 तथा उनका योगफल 75 है। उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

हल : माना 3 : 2 अनुपात में रहनेवाली संख्या $3x$ और $2x$ है। दिया गया है कि $3x + 2x = 75$

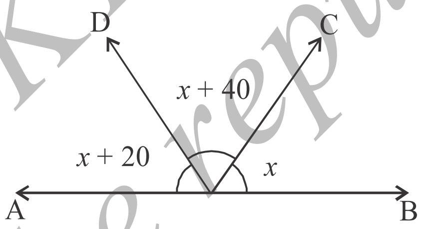
इसतरह : $5x = 75$.

x के लिए हल करने पर, हमें $x = 15$ प्राप्त होता है। इसलिए संख्याऐं हैं : $3x = 45$ और $2x = 30$ जाँच करने पर $\frac{45}{30} = \frac{3}{2}$ और 45 + 30 = 75.

अभ्यास 8.2

1. एक संख्या को 4 जोडने पर और योगफल को 3 से गुणा करने पर 30 प्राप्त होता है। उस संख्या को ज्ञात कीजिए।
2. क्रमागत तीन विषम संख्याओं को ज्ञात कीजिए जिनका जोड 219 है।
3. एक संख्या में से 30 घटाने पर उस संख्या के तीन गुना में से 14 घटाने के बराबर होता है। वह संख्या मालूम कीजिए।
4. एक संख्या के तिगुने में 5 घटाने पर 16 प्राप्त होता है। वह संख्या मालूम कीजिए।
5. दो संख्याओं को ज्ञात कीजिए जिनमें एक संख्या दूसरे से 9 आधिक है और उनका योगफल 81 है।
6. प्रकृति की आयु साहिल की आयु के 6 गुना बराबर है। 15 वर्ष बाद, प्रकृति, साहिल की आयु के 3 गुना बराबर होगी उनकी आयु ज्ञात कीजिए।
7. अहमद के पिताजी की आयु अहमद की आयु के तिगुने के बराबर है। 12 वर्ष के बाद, उनकी आयु उनके बेटे की आयु की दुगुनी के बराबर होगी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
8. संजु की आयु उसके भाई निशू की आयु से 6 वर्ष अधिक है। यदि उनके आयु का योगफल 28 वर्ष है, उनकी वर्तमान आयु क्या है?
9. विजी की आयु, दीपू की आयु की दुगुनी है। यदि उनके आयु का अन्तर 11 वर्ष है। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

10. श्रीमती जोसेफ की आयु अपनी पुत्री बिन्दु की आयु से 27 वर्ष अधिक है। 8 वर्ष बाद उसकी आयु बिन्दु की आयु की दुगुनी के बराबर हो जायेगी। उनकी वर्तमान आयु मालूम कीजिए।
11. 16 वर्ष बाद, लीना अपने वर्तमान आयु की तिगुनी हो जायेगी। उनकी वर्तमान आयु मालूम कीजिए।
12. एक आयत की लंबाई उसके चौडाई के दुगने से 5 से.मी कम है। लंबाई को 5 से.मी. कम करने पर और चौडाई को 2 से.मी से बढाने पर, प्राप्त परिमाप 74 से.मी होगा। मूल आयत की लंबाई और चौडाई ज्ञात कीजिए।
13. आयताकार खेत की लंबाई उसके चौडाई की दुगुनी है। यदि खेत की परिमिति 288 मीटर है; खेत के आयाम ज्ञात कीजिए।
14. सृष्टि की आमदनी अजहर की आमदनी के 4 गुना के बराबर है। यदि दोनों मिलकर एक महीने के 3,750 कमाते हैं, उनकी व्यक्तिगत आमदनी ज्ञात कीजिए।
15. आकृति में AB एक सरल रेखा है। x का मूल्य ज्ञात कीजीए।



शब्दावली :

समीकरण : एक कथन जो एक स्थिरांक रहित व्यंजक 0 के बराबर है।

हल : एक समीकरण दिये जाने पर, चरांक के जिस मूल्य पर कथन सत्य होता है।

रैखिक समीकरण : एक घात का समीकरण।

पक्षांतर (Transposition) व्यंजक का भाग को समानता के दूसरे पक्ष में स्थानांतरण करना; पक्षांतर करते समय पक्षांतर होनेवाले पद के चिन्ह बदलते है।

सत्यापन : प्राप्त हल से समीकरण का समाधान होता है या नहीं जाँच करना.

याद रखिए :

- एक समीकरण उसमें उपस्थित चरांक के कुछ मूल्यों के लिए सत्य होता है; एक सर्वसामिका उसकें उपस्थित चरांक के सभी मूल्यों के लिए सत्य होता है।
- एक समस्या दिये जाने पर, दिये दत्तांश के अनुसार समीकरण बनाना, समीकरण हल करने का महत्वपूर्ण चरण है।

- एक गणितीय हल हमेशा भौतिक रुप से सच होना अवश्य नहीं है। हमें प्राप्त गणितीय हल दत्त भौतिक संदर्भ के लिए सत्य है या नहीं जांचना चाहिए।

उत्तर

अभ्यास 8.1

1. (i) $x = 8$ (ii) $y = 30$ (iii) $z = 7$ (iv) $x = \frac{6}{11}$
(v) $x = 3$ (vi) $s = 28$ (vii) $x = 20$ (viii) $x = 2.4$
(ix) $x = 7$ (x) $x = \frac{-8}{5}$ (xi) $x = 60$ (xii) $x = 25$
(xiii) $x = 2$ (xiv) $x = 36$ (xv) $x = -1$

2. (i) $x = 12$ (ii) $t = -6$ (iii) $x = 7$ (iv) $z = \frac{3}{2}$
(v) $x = 1$ (vii) $x = -25$ (viii) $x = -13$ (ix) $x = -5$
(x) $x = 10$ (xi) $x = 3$ (xii) $x = 8$ (xiii) $x = -54$
(xiv) $x = 9$

अभ्यास 8.2

1. 6
2. 71, 73, 75
3. 25 से.मी.और 15 से.मी
4. 11
5. ₹ 3,000 और ₹ 750
6. 60 और 10
7. $x = 40$
8. 7
9. 45 और 36
10. 96 मी और 48 मी
11. अहमद की आयु 12 और उसके पिताजी की आयु 36 वर्ष
12. नीशु की आयु 11 और संजु की आयु 17 वर्ष
13. दीपु की आयु 11 और वीजी की आयु 22 वर्ष
14. बींदु की आयु 19 और श्रीमति जेसेफ की आयु 46 वर्ष
15. 8 वर्ष

ADDITIONAL PROBLEMS

अतिरिक्त प्रश्न

1. संख्याओं का खेल

1. सही उत्तर का चयन कीजिए।

(a) 456 का सामान्य रूप है

A. $(4 \times 100) + (5 \times 10) + (6 \times 1)$

B. $(4 \times 100) + (6 \times 10) + (5 \times 1)$

C. $(5 \times 100) + (4 \times 10) + (6 \times 1)$

D. $(6 \times 100) + (5 \times 10) + (4 \times 1)$

(b) कंप्यूटर में निम्न प्रणाली उपयोग करते हैं

A. दशमाधार प्रणाली   B. द्विमान प्रणाली

C. पंचमाधार प्रणाली   D. षष्टमान प्रणाली

(c) यदि $\overline{abc}$ एक तीन अंकों की संख्या है तो वह संख्या

$n = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$

हमेशा .... भाज्य है ।

A) 8   B) 7   C) 6   D) 5

(d) यदि $\overline{abc}$ एक 3 अंकों की संख्या है तो

$n = \overline{abc} - \overline{acb} + \overline{bac} - \overline{bca} + \overline{cab} - \overline{cba}$

हमेशा .... से भाज्य है।

A) 12   B) 15   C) 18   D) 21

(e) यदि $1k \times k1 = k2k$ 'k' अक्षर कौन से अंक को सूचित करती है।

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4

(f) 34511 यह संख्या ... से भाज्य है ।

A) 15   B) 12   C) 9   D) 3

(g) 3AB4 रूप की संख्या में अंकों की संख्या जहाँ A,B अंकों को सूचित करते हैं, जो 11 से भाज्य है।

A) 0 B) 4 C) 7 D) 9

2. 11 से भाज्य सबसे लघुतम 5 अंकों की संख्या कौन सी है जिसमें निम्न प्रत्येक अंक उपस्थित है?

3. 2, 3, 4, 5, 6 से बनी 11 से भाज्य कितने 5 अंकों की संख्या बनती है?

4. यदि 49A और A49, जहाँ $A > 0$ में एक सामान्य गुणनखण्ड है, तो 'A' संभवनीय मूल्य ज्ञात कीजिए।

5. 3 और 5 को कम से कम एक बार उपयोग कर 1 से 10 तक संख्याओं को लिखिए, जहाँ जोड़ने और घटाने की प्रक्रिया उपयोग करते हैं। (उदा. $7 = 5 + 5 - 3$)

6. सभी 2 अंकों की संख्याओं को ज्ञात कीजिए जो उसके अंकों के योग से भाज्य है।

7. एक पुस्तक के पन्नों की संख्या पंक्ति में लिखने पर 216 अंकों की संख्या बनती है। पुस्तक में कितने पन्ने हैं?

8. निम्न नमूने को देखिए :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

● ● ● ● ● ●

● ● ● ● ● ● ●

इसे पास्कल त्रिभुज कहते हैं। 9 वें पंक्ति में मध्य की संख्या क्या है?

9. पार्श्व जादुई वर्ग पूर्ण कीजिए।

(सुझाव : 3×3 जादुई वर्ग में, जादुई योगफल मध्य की संख्या का तीन गुना है)

10. सभी 3 अंकों के स्वाभाविक संख्याओं ज्ञात कीजिए जो अपने अंकों के जोड़ से 12 गुना है।

11. $\overline{34x5y}$ के x और y अंक ज्ञात कीजिए ताकि वह 36 भाज्य है।

12. क्या आप 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 को दो समूहों में विभाजित कर सकते हैं ताकि एक समूह के अंकों का गुणनफल दूसरे समूह के अंकों के गुणनफल से भाग लगता है और भागफल लघुतम है।

13. 273A49B5 सभी 8 अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए जो 11 से और 25 से भाज्य है।

14. मान लीजिए a,b पूर्णांक है ताकि 2 + a और 35 – b 11 से भाज्य है। सिद्ध कीजिए a + b, 11 से भाज्य है।

15. गुणनफल A8 × 3B = 2730, A और B निश्चित अंकों को सूचित करते है जो 0 से भिन्न है। A + B ज्ञात कीजिए।

17. वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 6 और 8 से भाग देने पर क्रमशः 7 और 9 शेष रहता है।

18. सिद्ध कीजिए तीन क्रमागत स्वाभाविक संख्याओं के घन का योगफल हमेशा 3 से भाज्य है।

19. 100000 को कौन-सी लघुतम संख्या जोड़ने पर वह 1234 का गुणज प्राप्त होता है।

उत्तर

1. (a) A; (b) B; (c)C; (d) C; (e) A; (f) D; (g) D; 2. 24365.

3. 12 **4.** 2,5,7,8 **5.** 1 = 3 + 3 – 5, 2 = 5 – 3, 3 = 5 + 5 + 5 – 3 – 3 –3 – 3 – 3 + 3, 4 = 3 + 3 + 3 –5,

5 = 5 + 5 + 5 + 5 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3, 6 = 5 + 5 + 5 + 3 + 3 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3, 7 = 5 + 5 – 3, 8 = 5 + 3, 9 = 5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3, 10 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3

6. 12, 18, 21, 24, 27, 36, 42, 45, 54, 63, 72, 81, 84, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

7. 108 पन्ने **8.** 70 **9.**

8	9	4
3	7	11
10	5	6

10. ऐसी संख्या केवल 108 है।

11. $x = 4, y = 2$ या $x = 0, y = 6$ या $x = 9, y = 6$

12. (1,2,3,5,8,7) एक समूह लीजिए और दूसरा (4, 6, 10) लीजिए । तो $\frac{1\times2\times3\times5\times8\times7}{4\times6\times10} = 7$ और यही कनिष्ट शेष है ।

13. 27314925 और 27364975 **15.** 8066

16. 12 **17.** 62

* * * *

2. बीजीय व्यंजक

1. सही उत्तर का चयन कीजिए :

(a) समान घातांक युक्त एक ही अक्षरीय पद

A. घातांक B. सजाति पद

C. गुणनखण्ड D. विजाति पद

(b) $2ab$ में ab का सहगुणांक है

A. ab B. 2 C. $2a$ D. $2b$

(c) $a \times a \times a$ का घातांक रूप

A. $3a$ B. $3 + a$ C. a^3 D. $3 - a$

(d) दो ऋणात्मक पूर्णांक का योग

A. ऋणात्मक B. घनात्मक C. शून्य D. अंनत

(e) $a^2 + 2ab$ को क्या जोडने से वह सम्पूर्ण वर्ग बनता है?

A. b^2 B. $2ab$ C. ab D. $2a$

(f) $(x + 2)(x - 3)$ का गुणनफल क्या है?

A. $2x - 6$ B. $3x - 2$ C. $x^2 - x - 6$ D. $x^2 - 6x$

(g) $(7.2)^2$ का मूल्य है (सर्वसमिका के उपयोग से विस्तार कीजिए)

A. 49.4 B. 14.4 C. 51.84 D. 49.04

(h) $(2x - 3y)^2$ का विस्तार है

A. $2x^2 + 3y^2 + 6xy$ B. $4x^2 + 9y^2 - 12xy$

C. $2x^2 + 3y^2 - 6xy$ D. $4x^2 + 9y^2 + 12xy$

(i) 58×62 का गुणनफल (सर्वसमिका का उपयोग करें) है

A. 4596 B. 2596 C. 3596 D. 6596

2. $8x + 7y - 8p + 10q$ को $10x + 10y - 7p + 9q$ में से घटाइए।

3. विस्तार कीजिए ।

(i) $(4x + 3)^2$ (ii) $(x + 2y)^2$ (iii) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ (iv) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

4. विस्तार कीजिए ।

(i) $(2t + 5)(2t - 5)$ (ii) $(xy + 8)(xy - 8)$

(iii) $(2x + 3y)(2x - 3y)$

5. विस्तार कीजिए ।

(i) $(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$ (ii) $(n - \frac{1}{n})(n + \frac{1}{n})(n^2 + \frac{1}{n^2})$

(iii) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$ (iv) $(2x - y)(2x + y)(4x^2 + y^2)$

6. सही सूत्र के उपयोग से मूल्य ज्ञात कीजिए।

(i) $(103)^2$ (ii) $(96)^2$ (iii) 107×93 (iv) 1008×992

(v) $185^2 - 115^2$

7. यदि $x + y = 7$ और $xy = 12$ हो तो $x^2 + y^2$ ज्ञात कीजिए ।

8. यदि $x + y = 12$ और $xy = 32$ हो तो $x^2 + y^2$ ज्ञात कीजिए ।

9. यदि $4x^2 + y^2 = 40$ और $xy = 6$ हो तो $2x + y$ ज्ञात कीजिए ।

10. यदि $x - y = 3$ और $xy = 10$ हा`तो $x^2 + y^2$ ज्ञात कीजिए ।

11. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3$ हो तो $x^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)$ और $x^3 + \left(\frac{1}{x^3}\right)$ ज्ञात कीजिए ।

12. यदि $x + \left(\frac{1}{x}\right) = 6$ हो तो $x^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)$ और $x^4 + \left(\frac{1}{x^4}\right)$ ज्ञात कीजिए ।

13. सरल कीजिए (i) $(x + y)^2 + (x - y)^2$ (ii) $(x + y)^2 \times (x - y)^2$

14. निम्नों को दो वर्गों के अंतर के रूप में व्यक्त कीजिए ।

(i) $(x + 2z)(2x + z)$; (ii) $4(x + 2y)(2x + y)$

(iii) $(x + 98)(x + 102)$

(iv) 505×495 (सुझाव $(4a) = (a + b)^2 - (a - b)^2$)

15. यदि $a = 3x - 5y$, $b = 6x + 3y$ और $C = 2y - 4x$ हो तो

(i) $a + b - c$ (ii) $2a - 3b + 4c$ ज्ञात कीजिए।

16. एक की परिमिती $15x^2 - 23x + 9$ है और उसकी दो भुजाऐं $5x^2 + 8x - 1$ और $6x^2 - 9x + 4$ हो तो तीसरी भुजा को ज्ञात कीजिए।

17. एक आयत दो संलगन भुजायें $2x^2 - 5xy + 3z^2$ और $4xy - x^2 - z^2$ है तो आयत कि परीमिति ज्ञात कीजिए।

18. एक त्रिभुज का आधार और ऊँचाई क्रमशः $(3x - 4y)$ और $(6x + 5y)$ है। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

19. एक आयत की भुजाऐं $2x + 3y$ और $3x + 2y$ है। इसमें $x + y$ भुजा का वर्ग घटाया गया है, बाकी जगह का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए.

20. यदि $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$, सिद्ध कीजिए कि $a = b = c$

उत्तर

1. (a) B (b) B (c) C (d) A
   (e) A (f) C (g) C (h) B
   (i) C

2. $2x + 17y + p - q$

3. (i) $16x^2 + 24x + 9$ (ii) $x^2 + 4xy + 4y^2$
   (iii) $x^2 + (1/x^2) + 2$ (iv) $x^2 + (1/x^2) - 2$

4. (i) $4t^2 - 25$ (ii) $x^2y^2 - 25$ (iii) $4x^2 - 9y^2$

5. (i) $n^4 - 1$ (ii) $n^4 - (1/n^4)$ (iii) $x^8 - 1$ (iv) $16x^4 - y^4$

6. (i) 10609 (ii) 9216 (iii) 9951 (iv) 999936
   (v) 21000

7. 25

8. 80

9. ± 8

10. 29

11. 7 और 18

12. 34 और 1154

13. (i) $2(x^2 + y^2)$ (ii) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

14. (i) $\left(\frac{3(x+z)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(z-x)}{2}\right)^2$ (ii) $(x + 2y)^2 - (2x + y)^2$

(iii) $(x + 100)^2 - 1^2$ (iv) $500^2 - 5^2$

15. (i) $13x - 4y$ (ii) $-28x - 11y$

16. $4x^2 - 22x + 6$ 17. $2x^2 - 2xy + 4z^2$

18. $(18x^2 - 9xy - 20y^2) / 2$ 19. $5x^2 + 11xy + 5y^2$

* * * *

3. अभिधारणा, अभिगृहित और प्रमेय

I. सही पर्याय का चयन कीजिए।

1. यदि $a = 60$ और $b = a$ तो $b = 60$ यह नियम से सही होता है।

A. अभिधारणा 1 B. अभिधारणा 2

C. अभिधारणा 3 D. अभिधारणा 4

II. समतल पर एक बिन्दु दिये जाने पर, हम

A. एक B. दो

C. निश्चित संख्या D. असंख्या सरल रेखाऐं खींच सकते है।

III. समतल में दो बिन्दु दिये जाने पर, इन बिन्दुओं से होकर जानेवाली रेखाओं की संख्या

A. शून्य B. केवल एक

C. अधिक से अधिक एक D. एक से अधिक

IV. दो कोण संपूरक होते है यदि

A. उनका योग 90° है B.उनका योग 180° है

C. उनका योग 270° हैD.उनका योग 360° है।

V. उस कोण माप जो अपने संपूरक कोण का 5 गुना है।

A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

2. संपूरक कोणों की जोड़ी और कोटिपूरक कोणों की जोड़ी का अंतर क्या है?

3. एक समतल निर्धारित करने कनिष्ठ कितने असमरेख बिन्दुओं की आवश्यकता होती है?

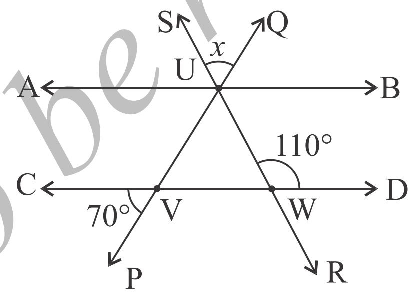
4.दो कोण संलग्न कब कहलाते हैं?

5. मान लीजिए $\overline{AB}$ एक रेखाखण्ड है जिसपर C और D बीच में उपस्थित है ताकि रेखाखण्ड पर की बिन्दुओं का क्रम A, B, C, D है। मान लीजिए AD = BC सिद्ध कीजिए AC = DB.

6. मान लीजिए $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ सरल रेखाऐं O प्रतिच्छेदित करती हैं। मान लीजिए, $\overrightarrow{OX}$ $\angle BOD$ का समद्विभाजक है। $\overrightarrow{OD}$ और $\overrightarrow{OA}$ के बीच $\overrightarrow{OY}$ खींचिए ताकि $\overrightarrow{OY} \perp^{r} \overrightarrow{OX}$. सिद्ध कीजिए $\overrightarrow{OY}$, $\angle DOA$ को समद्विभाजित करता है।

7. मान लीजिए $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को समांतर रेखाऐं हैं और $\overleftrightarrow{PQ}$ एक तिर्यक रेखा है। मान लीजिए $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{AB}$ को L में प्रतिच्छेदित करता है। मान लीजिए $\angle ALP$ का समद्विभाजक $\overleftrightarrow{CD}$ को R में प्रतिच्छेदित करता है और $\angle PLB$ का समद्विभाजक $\overleftrightarrow{CD}$ को S में प्रतिच्छेदित करता है। सिद्ध कीजिए $\angle LRS + \angle RSL = 90°$

8. पार्श्व चित्र में $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो समान्तर रेखाऐं हैं। तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$, $\overleftrightarrow{AB}$ सरल रेखा को U में प्रतिच्छेदित करते हैं। दिया गया है कि $\angle DWU = 110°$ और $\angle CVP = 70°$ है। $\angle QUS$ का माप ज्ञात कीजिए।



9. घडी के घंटे की सुई और मिनट की सुई के बीच निम्न समय पर बने कोण निर्धारित कीजिए (i) 1 :40 घण्टे (ii) 2.15 घण्टे (1° = 60 मिनिट है ।)

10. जब घड़ी में शाम के 4.24 (p.m.) घण्टे की सुई अपनी स्थान दोपहर 12 से कितना आगे बढ़ी होगी?

11. मान लीजिए $\overline{AB}$ एक सरल रेखा है और C, $\overline{AB}$ की मध्यबिन्दु है। $\overline{AB}$ को D तक आगे बढाइए ताकि B, A और D के बीच में रहें। सिद्ध कीजिए AD + BD = 2CD

12.मान लीजिए दो सरल रेखाऐं $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ है जो O में प्रतिच्छेद करती हैं। मान लीजिए $\overrightarrow{OX}$ किरण $\underline{|BOD}$ का समद्विभाजन करती है। सिद्ध कीजिए $\overrightarrow{OX}$ के बायीं ओर आगे बढाने पर वह $\underline{|AOC}$ का समद्विभाजन करती है।

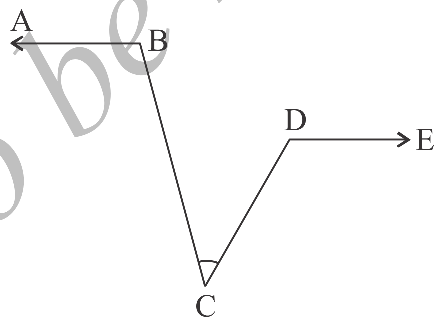
13. मान लीजिए $\overrightarrow{OX}$ एक किरण है और $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{OX}$ के एक पक्ष की अन्य दो किरणें है। ताकि $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OX}$ और $\overrightarrow{OB}$ के बीच में है। मान लीजिए मान लीजिए $\overrightarrow{OC}$, $\underline{|AOB}$ का समद्विभाजक है। तो सिद्ध कीजिए $\underline{|XOA}+\underline{|XOB}=2\underline{|XOC}$

14. मान लीजिए $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ दो किरण है और $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ के बीच में ताकि $\underline{|AOX}>\underline{|XOB}$ मान लीजिए $\overrightarrow{OC}$, $\underline{|AOB}$ का समद्विभाजक है। तो सिद्ध कीजिए $\underline{|AOX}-\underline{|XOB}=2\underline{|COX}$

15. मान लीजिए $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ तीन किरणें ऐसे हैं ताकि $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$, और $\overrightarrow{OB}$ के बीच में है। कल्पना कीजिए $\underline{|AOC}$ और $\underline{|COB}$ के समद्विभाजक परस्पर लंब है। सिद्ध कीजिए B,O,A समरेख है।

16. पार्श्व आकृति में $\overleftrightarrow{AB}\parallel\overleftrightarrow{DE}$ है। सिद्ध कीजिए कि

$\angle ABC - \angle DCB + \angle CDE = 180°$



17.दो समांतर रेखा और एक तीर्यक रेखा है। बनें कोणों में कितने प्रत्येक (distinct)संख्याऐं है?

उत्तर

1. (i) A (ii) D (iii) B (iv) B (v) D

3. 3 **8.** 40

9. (i) 190°; (ii) 22° 30' **10.** 144°

* * * *

4. गुणन खण्डन

1. सही उत्तर को चुनियें

(a) $4a + 12b$ यह इन से समान हैं

A. $4a$ B. $12b$ C. $4(a + 3b)$ D. $3a$

(b) दो संख्या ओं का गुणनफल घनात्मक तथा उनका योगफल ऋणात्मक होता है, जब

A. दोनों घनात्मक B. दोनों ऋणात्मक

C. एक घनात्मक और दुसरा ऋणात्मक D. दोनों में एक शून्य के बराबर

(c) $x^2 + 6x + 8$ का गुणनखण्डन करने पर, प्राप्त

A. $(x + 1)(x + 8)$ B. $(x + 6)(x + 2)$

C. $(x + 10)(x - 2)$ D. $(x + 4)(x + 2)$

(d) बीजीय व्यंजक का हर पर निम्नों से नहीं होना चाहिए।

A. 1 B. 0 C. 4 D. 7

(e) दो पूर्णांकों का योगफल -2 और उनका गुणनफल -24 है तो वे संख्या ये।

A. 6 और 4 B. -6 और 4

C. -6 और -4 D. 6 और -4

(f) $(0.7)^2 - (0.3)^2$ के अन्तंर को सरल करने पर प्राप्त होता है।

A. 0.4 B. 0.04 C. 0.49 D. 0.56

2. निम्नो का गुणनखण्डन कीजिए।

(i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $1 - 8x + 16x^2$

(iii) $4x^2 - 81y^2$ (iv) $4a^2 + 4ab + b^2$

(v) $a^2b^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2$

3. निम्नों का गुणनखण्डन कीजिये

(i) $x^2 + 7x + 12$ (ii) $x^2 + x - 12$

(iii) $x^2 - 3x - 18$ (iv) $x^2 + 4x - 21$

(v) $x^2 - 4x - 192$ (vi) $x^4 - 5x^2 + 4$

(vi) $x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4$

4.निम्नों का गुणनखण्डन कीजिये :

(i) $2x^2 + 7x + 6$ (ii) $3x^2 - 17x + 20$

(iii) $6x^2 - 5x - 14$ (iv) $4x^2 + 12xy + 15y^2$

(v) $4x^4 - 5x^2 + 1$

5. निम्नों का गुणनखण्डन कीजिये :

(i) $x^8 - y^8$ (ii) $a^{12}x^4 - a^4x^{12}$

(iii) $x^4 + x^2 + 1$ (iv) $x^4 + 5x^2 + 9$

6.$x^4 + 4y^4$ का गुणनखण्डन कीजिए। इसके उपयोग से सिध्द कीजिए $2011^4 + 64$ एक संयुक्त संख्या है।

उत्तर

1. (a) C (b) B (c) D (d) D

   (e) A

2. (i) $(x + 3)^2$ (ii) $(1 - 4x^2)$ (iii) $(2x + 9y)(2x - 9y)$

   (iv) $(2a + b)^2$ (v)$(a^2 - d^2)(b^2 - c^2)$

3. (i) $(x + 3)(x + 4)$ (ii) $(x + 4)(x - 3)$

   (iii) $(x - 6)(x + 3)$ (iv) $(x + 7)(x - 3)$

   (v) $(x - 16)(x + 12)$ (vi) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

   (vii)$(x - 2y)(x + 2y)(x - 3y)(x + 3y)$

4. (i) $(2x - 3)(x + 2)$ (ii) $(x - 4)(3x - 5)$

   (iii) $(x - 2)(6x + 7)$ (iv) $(2x + y)(2x + 5y)$

   (v) $(2x - 1)(2x + 1)(x - 1)(x + 1)$

5. (i)$(x - 4)(x + 4)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$

   (ii) $a^4x^4(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)(a^4 + x^4)$

   (iii) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ (iv) $(x^2 + x + 3)(x^2 - x + 3)$

6. $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$

* * * *

5. वर्ग, वर्गमूल, घन और घनमूल

1.स्तंभ A के संख्याओं को, B में दिये वर्गों के साथ जोडिए :

A		B		उत्तर	
1)	5	a)	25	1)	....
2)	8	b)	144	2)	....
3)	2	c)	36	3)	....
4)	– 6	d)	484	4)	....
5)	–22	e)	64	5)	....
6)	12	f)	4	6)	....
		g)	121		

2. सही उत्तर का चयन कीजिए।

(a) 1 और 500 के बीच के पूर्ण वर्गों की संख्या है :

A) 1 B) 16 C) 22 D) 25

(b) यह एक संपूर्ण वर्ग का अंतिम अंक कभी नहीं होता।

A) 1 B) 3 C) 5 D) 9

(c) यदि एक संख्या के अंत '5' शून्य है तो उसके वर्ग के अंत में होंगे

A) 5 शून्य B) 8 शून्य C) 10 शून्य D) 12 शून्य

(d) एक संपूर्ण वर्ग को 8 से भाग देने पर इन में कौन सा शेष हो सकता है ।

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7

(e) छटी त्रिकोणीय संख्या है

A) 6 B) 10 C) 21 D) 28

3. –10 से 5 तक सभी पूर्णांक लेकर उनके प्रत्येक के वर्ग ज्ञात कीजिए। कितने विशिष्ट संख्या प्राप्त होते हैं?

4. निम्न संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने पर उनके इकाई स्थान पर आनेवाली संख्या लिखिए ।

4, 5, 9, 24, 17, 76, 36, 52, 33, 2319, 18, 3458, 3453.

5. 400 से 425 के सभी संख्याओं को लिखिए जिनके अंत में 2,3,7 अथवा 8 हैं। पत्ता लगाइए क्या इन में कोई संपूर्ण वर्ग है।
6. $(111111111)^2$ के अंकों का जोड़ ज्ञात कीजिए।
7. मान लीजिए $x^2 + y^2 = z^2$ है
   (i) यदि $x = 4$ और $y = 3$ हो z ज्ञात कीजिए।
   (ii) यदि $x = 5$ और $z = 13$ हो तो y ज्ञात कीजिए ।
   (iii) यदि $y = 15$ और $z = 17$ हो तो x ज्ञात कीजिए ।
8. ₹ 2304 को समान रूप से अनेक लोगों में वितरित किया गया। प्रत्येक को व्यक्तियों की संख्या के समान रूपये मिलते हैं। प्रत्येक को कितने रूपये मिलते हैं?
9. $m*n = m^2 + n^2$ के आधार सभी स्वभाविक संख्याओं के समुच्चय पर एक नया योगफल परिभाषित कीजिए ।
   (i) क्या $*$ N पर आवृत है?
   (ii) क्या $*$ N पर क्रम विनिमय नियम लागू होता है?
   (iii) क्या $*$ N पर साहचर्य नियम लागू होता है?
   (iv) क्या $*$ को ध्यान में रखकर N में कोई तत्समक अवयव है?
10. ज्ञात कीजिए 1 से 500 सभी संपूर्ण वर्ग ज्ञात कीजिए जो दो संपूर्ण वर्गों के योगफल है।
11. एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 7396 m^2 है। तो उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।
12. क्या हम 1010 को दो संपूर्ण वर्गों के अन्तर में लिख सकते हैं। (सूचना : 2 को 1010 के गुणनखंड के रूप में दोहराना ।)
13. एक संपूर्ण घन को 7 से भाग देने पर कौन-कौन से शेष रहते हैं।
14. कौन से लघुतम संपूर्ण वर्ग को 7 और 11 से भाग देने पर शेष 1 रहता है?
15. दो लघुतम संपूर्ण वर्ग ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल एक संपूर्ण घन है।
16. 48 के कौन से घनात्मक गुणनखण्ड और गुणज को जोड़ने से संपूर्ण वर्ग बनता है। क्या आप सिद्ध कर सकते हैं कि ऐसे अनंत युग्म होते है।

उत्तर

1. (a) C (b) B; (c) C; (d) A; (e) C;

3. 11 **4.** 6, 5, 1, 6, 9, 6, 6, 4, 9, 1, 4, 4, 9.

5. इनमें कोई भी संपूर्ण वर्ग नहीं है।

6. 81

7. (i) : $z = \pm 5$: (ii) $y = \pm 12$: (iii) $x = \pm 8$,

8. ₹ 48 **9.**(i) आवरण नियम लागू होता है। (ii) क्रम विनिमय नियम (iii)साहचर्य नियम (iv) नहीं, क्योंकि $m^2 + k^2 = m^2$ सूचित करता है $k = 0$ और N में 0 समाविष्ट नहीं है।

11. 344 m **12.** यदि $1010 = a^2 - b^2$, कोई पूर्णांक a और b, अथवा दोनों a और b विषम संख्या अथवा दोनों सम संख्या होते हैं। अतः $a^2 - b^2$, 4 से भाज्य है. परन्तु 1010, 4 से भाज्य नहीं है। अतः 1010 संपूर्ण वर्गों का अंतर नहीं है।

13. 0,1,6 **14.** $1156 = 34^2$ **15.** 4 और 16.

16. आप 16 को 48 का गुणनखण्ड ले सकते हैं और 240 को 48 का गुणज ले सकते हैं

$16 + 240 = 256 = 16^2$

आप अनेक सारे बना सकते है जब $l = m(3m+2)$ लेते है जहाँ $m = 1, 2, 3 ...... 16$

16, 48 का गुणनखण्ड है, $48l$ को 48 का गुणज ले सकते हैं।

ध्यान दीजिए : $16 + 48l = 16 + 48m(3m+2)$

$$= 16 + 96m + 144m^2 = (4 + 12m)^2$$

* * * *

6 त्रिभुजों पर प्रमेय

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ताकि कथन सत्य हो ।

(a) त्रिभुज के कोणों का योगफल .... होता है।

(b) त्रिभुज का बाह्य कोण .... अभिमुख कोणों के योगफल के समान है।

(c) एक त्रिभुज का बाह्यकोण हमेशा किसी अन्तस्थ अभिमुख कोण से .... होता है।

(d) एक त्रिभुज में .... से अधिक लंबकोण नहीं हो सकते।

(e) एक त्रिभुज में .... से अधिक विशाल कोण नहीं हो सकते।

2. निम्न विकल्पों में सही उत्तर का चयन कीजिए।

(a) त्रिभुज ABC में यदि $\angle A = 80°$ और AB = AC हो तो $\angle B$ का माप

(1) 50° (2) 60° (3) 40° (4) 70°

(b) एक लंबकोण त्रिभुज में, $\angle A$ लंबकोण है और $\angle B = 35°$ तो $\angle C$

(1) 65° (2) 55° (3) 75° (4) 45°

(c) त्रिभुज ABC में $\angle B = \angle C = 45°$ तो त्रिभुज है :

(1) लंबकोण त्रिभुज (2) लघुकोण त्रिभुज

(3) अधिक कोण त्रिभुज (4) समबाहु

(d) यदि ABC समबाहु त्रिभुज, तो प्रत्येक अधिक कोण का माप :

(1) 60° (2) 90° (3) 120° (4) 150°

(e) एक त्रिभुज के तीनों बाह्यकोणों का योगफल है।

(1) दो लंबकोण (2) तीन लंबकोण

(3) एक लंबकोण (4) चार लंबकोण

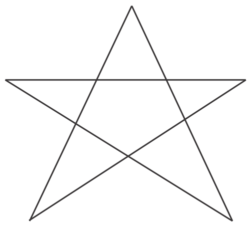
3. एक त्रिभुज ABC में $\angle B = 70°$ तो $\angle A + \angle C$ ज्ञात कीजिए।

4. त्रिभुज ABC में $\angle A = 110°$ और AB = AC तो $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

5. एक त्रिभुज के तीन कोण 2 : 3 : 5 में है। तीनों कोण निर्धारित कीजिए।

6. त्रिभुज के कोण उनके माप के आरोहण क्रम में व्यवस्थित किया गया। यदि तो क्रमागत कोणों का अंतर 15° हो तो तीनों कोणों को ज्ञात कीजिए।

7. एक त्रिभुज के दो कोणों का योगफल तीसरे कोण से समान है। तो तीसरे कोण निर्धारित कीजिए।
8. त्रिभुज ABC में, यदि $2\angle A = 3\angle B = 6\angle C$ तो $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।
9. त्रिभुज के कोण $(x-40)^\circ$, $(x-20)^\circ$ और $\frac{1}{2}x+15^\circ$ हो तो, x का मूल्य ज्ञात कीजिए।
10. त्रिभुज ABC के कोण A, B और C है। तो यदि $\angle A - \angle B = 15^\circ$ और $\angle B - \angle C = 30^\circ$ तो $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ज्ञात कीजिए।
11. एक त्रिभुज के दो कोणों का योग 80° है और उनमें अन्तर 20° है। त्रिभुज के कोणों ज्ञात कीजिए।
12. त्रिभुज ABC में, $\angle B = 60^\circ$ और $\angle C = 80^\circ$ है। मान लीजिए $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक I में मिलते हैं। $\angle BIC$ ज्ञात कीजिए।
13. एक त्रिभुज में, छोटे कोणों में प्रत्येक सबसे बड़े कोण का आधा। उन कोणों को ज्ञात कीजिए।
14. एक त्रिभुज में, बड़े कोणों में प्रत्येक तीसरे कोण का दुगुना है। कोणों को ज्ञात कीजिए।
15. एक त्रिभुज ABC में $\angle B = 50^\circ$ और $\angle A = 60^\circ$ हैं। मान लीजिए BC को D तक बढाया गया है। $\angle ACD$ ज्ञात कीजिए।
16. समद्विबाहु त्रिभुज में, शीर्ष कोण आधार कोणों के जोड़ का दुगुना है। त्रिभुज की कोणों को पत्ता लगाईए।
17. पार्श्व आकृति में दिखाये नक्षत्र के पाँचों शीर्षों के कोणों का योगफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर

1. (a) 180°,	(b) अन्तस्थ	(c) बडा	(d) एक	(e) एक
2. (a) A	(b) B	(c) A	(d) C	(e) D

3. 110°
4. प्रत्येक 35°
5. 36°, 54°, 90°
6. 45°, 60°, 75°,
7. 90°
8. $\underline{|C} = 30°$, $\underline{|B} = 60°$, $\underline{|A} = 90°$
9. x = 90°
10. $\underline{|A}$ = 80°, $\underline{|B}$ = 65°, $\underline{|C}$ = 35°
11. 30°, 50°, 100°,
12. 110°
13. 45°, 45°, 90°
14. 36°, 72°, 72°,
15. 110°
16. 30°, 30°, 120°
17. 180°

* * * *

7. परिमेय संख्या

1. **रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :**
   a) '0' यह संख्या .... समुच्चय में उपस्थित नहीं है।
   b) सभी पूर्णांकों के समुच्चय में सबसे लघुतम संख्या .... है।
   c) सभी सम संख्याओं के समुच्चय सब से छोटी संख्या .... है।
   d) स्वाभाविक संख्याओं के समुच्चय में 8 की अगली संख्या .... है।
   e) दो विषम पूर्णांकों का योगफल .... है।
   f) दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल .... है।
2. **निम्नों में सही या गलत बताईए**
   a) सम स्वाभाविक संख्याओं का समुच्चय सांत समुच्चय है।
   b) Z के प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय में एक लघुतम संख्या होती है।
   c) प्रत्येक पूर्णांक को एक परिमेय संख्या के रुप में व्यक्त कर सकते हैं।
   d) प्रत्येक परिमेय संख्या के लिए, उसकी अगली परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।
   e) सबसे बड़ी परिमेय संख्या होती है।
   f) प्रत्येक पूर्णांक सम या विषम होती है।
   g) दो परिमेय संख्याओं के बीच एक पूर्णांक होता है।

3. **सरल कीजिए :**

i) 100(100 – 3) – (100 × 100 – 3)

ii) {20 – (2011 – 201)} + {2011 – (201 – 20)}

4. मान लीजिए m एक पूर्णांक है ताकि $m \neq -1, m \neq -2$ है $\frac{m}{m+1}$ और $\frac{m+1}{m+2}$ में कौन सा बड़ा है? कारण दीजिए।

5. सभी परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q पर एक प्रक्रिया $*$ परिभाषित कीजिए, ताकि, $r * s = r + s - (r \times s)$

जहाँ r,s कोई दो परिमेय संख्या है। कारण सहित निम्न के उत्तर लिखिए।

(i) क्या यह $*$ प्रक्रिया Q पर आवृत है?

(ii) क्या Q पर $*$ प्रक्रिया पर साहचर्य नियम सत्य है?

(iii) क्या Q पर $*$ प्रक्रिया पर क्रमविनिमय नियम सत्य है?

(iv) Q में किसी a के लिए $a * 1$ क्या है ?

(v) दो पूर्णांक ज्ञात कीजिए ताकि $a * b = 0$ जहाँ $a \neq 0$ और $b \neq 0$ हो।

6. निम्न परिमेय संख्याओं के गुणनफलीय प्रतिलोम संख्या लिखिए :

$\frac{8}{13}, \frac{12}{17}, \frac{26}{23}, \frac{-13}{11}, \frac{-101}{100}$

7. निम्नों को आरोहण क्रम में लिखिए ।

$\frac{10}{13}, \frac{20}{23}, \frac{5}{6}, \frac{40}{43}, \frac{25}{28}, \frac{10}{11}$

8. निम्नों को अवरोहण क्रम में लिखिए ।

$\frac{21}{17}, \frac{31}{27}, \frac{13}{11}, \frac{41}{37}, \frac{51}{47}, \frac{9}{8}$

9. (a) '0' को योगफलीय प्रतिलोम क्या है?

(b) 1 का गुणनफलीय प्रतिलोम क्या है?

(c) कौन से पूर्णांकों के गुणनफलीय प्रतिलोम होते हैं?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

10.परिमेय संख्याओं के समुच्चय में '5' उदाहरण दीजिए जो निम्न गुणधर्म निरूपित करते हैं :

(i) साहचर्यता

(ii) क्रमविनिमयता

(iii) गुणनफल, जोड़ पर वितरण होना है।

11. वितरण नियम उपयोग कर सरल कीजिए :

(i) $\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{5}\right)$ (ii) $\frac{5}{12}\times\left(\frac{25}{9}+\frac{32}{5}\right)$

(iii) $\frac{8}{9}\times\left(\frac{11}{2}+\frac{2}{9}\right)$

12. सरल कीजिए ।

(i) $\left(\frac{25}{9}+\frac{12}{3}\right)+\frac{3}{5}$ (ii) $\left(\frac{22}{7}+\frac{36}{5}\right)\times\frac{6}{7}$

(iii) $\left(\frac{51}{2}+\frac{7}{6}\right)\div\frac{3}{5}$ (iv) $\left(\frac{16}{7}+\frac{21}{8}\right)\times\left(\frac{15}{3}-\frac{2}{9}\right)$

13. परिमेय संख्याओं में कौन-सा गुणधर्म है जो पूर्णांकों को समुच्चय पर सत्य नहीं हैं?

14. मूल्य ज्ञात कीजिए : $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}$

15. मूल्य ज्ञात कीजिए : $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

16. सभी परिमेय संख्याओं को लिखिए जो अपने प्रतिलोम के समान है।

17. एक बस दो पडोसी नगरों के बीच प्रति 2 घण्टों में आती-जाती है। वह सुबह 8 बजे शुरू करती है और अंतिम फेरी शाम 6 बजे है। एक दिन वाहन चालक निरीक्षण करता है प्रथम फेरी में 30 यात्री है और प्रत्येक क्रमागत फेरी में पिछले फेरी में एक यात्री कम था। उस दिन कितने यात्रियों ने यात्रा की है?

18. 0 और 1 के बीच कितने $\frac{p}{q}$ परिमये संख्याऐं है जहाँ $q<p$?

19. उन सभी पूर्णांक ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{3n+4}{n+2}$ भी एक पूर्णांक है।

20. कोष्ठकों के उपयोग करने से $2\times3+4\times5$ के अनेक मूल्य प्राप्त कर सकते हैं । (उदाहरण $((2\times3)\times4)\times5$ एक विधान है जहाँ कोष्ठक लगाये हैं । ऐसे कितने मूल्य हैं?

21. मान लीजिए $\frac{p}{q}$ सबसे सरल रूप में हैं । सिद्ध कीजिए $\frac{1}{q}+\frac{1}{p+q}$ भी सबसे सरल रूप में है।

22. दर्शाईए प्रत्येक स्वाभाविक संख्या 'n' पर भिन्न $\frac{14n+3}{21n+4}$ भी सरल रूप में है।

23. उन सभी पूर्णांकों 'n' ज्ञात कीजिए जिनके लिए संख्या $(n+3)(n-1)$ भी एक पूर्णांक होगी।

उत्तर

1. (a)स्वभाविक संख्यायें (b)0 (c)2 (d)9 (e)समसंख्या (f)विषम संख्या
2. (a)गलत (b)गलत (c)सही (d)गलत (e)गलत (f)सही (g)गलत
3. (i)297 (ii) 39
4. $\frac{m}{(m+1)}<\frac{(m+1)}{(m+2)}$, $m<-2$ और $m>-1$ इन दो संदर्भों को मत भूलिए।
5. (i)सही (ii) सही (iii)सही (iv) $a*1=1$ (v) $a=2, b=2$
6. $\frac{13}{8},\frac{17}{12},\frac{23}{26},\frac{-11}{13},\frac{-100}{101}$
7. $\frac{10}{13}<\frac{5}{6}<\frac{20}{23}<\frac{25}{28}<\frac{10}{11}<\frac{40}{43}$
8. $\frac{21}{17}>\frac{13}{11}>\frac{31}{27}>\frac{9}{8}>\frac{41}{37}>\frac{51}{47}$
9. (a)0 (b)1 (c)1, -1

11. (i) $\frac{46}{225}$ (ii) $\frac{413}{108}$ (iii) $\frac{225}{6}$ (iv) $\frac{11825}{504}$

13. प्रत्येक शून्यरहित परिमेय संख्या का विलोम ले सकते हैं, परन्तु केवल ± 1 विलोम रहित पूर्णांक है।

14. $\frac{5}{3}$ 15. $\frac{1}{2}$ 16. ± 1 17. 140

18. 0 और 1 के बीच में कोई $\frac{p}{q}$ परिमेय संख्या नहीं है जहाँ $q < p$

19. $n = 0, -1, -3, -4$

20. चार मूल्य है; 26, 46, 50, 70

23. $n = 2, 3, 5, 0, -1, -3$

* * * *

8. एक चरांक युक्त रैखिक समीकरण

1. सही उत्तर चुनकर लिखिए –

(a) $5x - 35 = 0$ समीकरण में x का मूल्य है

(A) 2 (B) 7 (C) 8 (D) 11

(b) एक संख्या के पाँचवें भाग से 14 घटाने पर हमें 20 प्राप्त होता है। इस कथन का समीकरण;

(A) $(x/5) - 14 = 20$ (B) $x - (14/5) = (20/5)$

(C) $x - 14 = (20/5)$ (D) $x + (14/5) = 20$

(c) किसी संख्या के 5 गुना को 8 से बढाने पर 53 प्राप्त होता है तो वह संख्या है

(A) 12 (B) 9 (C) 11 (D) 2

(d) $5(x - 2) = 3(x - 3)$ समीकरण में x कामूल्य

(A) 2 (B) 1/2 (C) 3/4 (D) 0

(e) दो संख्याओं का योगफल 84 और उनका अतंर 30 है; तो वे संख्याऐं हैं:

(A) –57 और 27 (B) 57 और 27 (C) 57 और –27 (D) –57 और –27

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(f) एक आयत का क्षेत्रफल 800 वर्ग मी. है जिस की लंबाई, चौडाई से दुगुनी है तो लंबाई और चौडाई है:

(A) 60 मी और 20 मी (B) 40 मी और 20 मी

(C) 80 मी और 10 मी (D) 100 मी और 8 मी

(g) तीन क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल 249 तो वह संख्याऐं है

(A) 81, 83, 85 (B) 79, 81, 83 (C) 103, 105, 107 (D) 95, 97, 99

(h) यदि $(x + 0.7x) / 2 = 0.85$ है तो x का मूल्य

(A) 2 (B) 1 (C) –1 (D) 0

(i) यदि $2x - (3x - 4) = 3x - 5$ हो तो x का मूल्य

(A) 4/9 (B) 9/4 (C) 3/2 (D) 2/3

2. हल किजिए (i) $(3x + 24) / (2x + 7) = 2$

(ii) $(1 - 9y) / (11 - 3y) = (5/8)$

3. दो संख्याओं का योगफल 45 और उनका अनुपात 7 : 8 है तो वह संख्याओं को ज्ञात किजिए।

4. शोना की माता की आयु शोना की आयु चार गुना है। पाँच वर्ष बाद उसके माता कि आयु शोना (उस समय) की आयु की तीन गुना होती है। उनकी वर्तमान आयु कया है?

5. तीन क्रमागत सम संख्याओं का योगफल 336 है तो संख्याओं को ज्ञात किजिए।

6. दो मित्र A और B रु. 60,000/– पूँजी लगाकर संयुक्त रुप से व्यापार करते है। यदि A का अंश B का दुगंना हो तो, बताइए प्रत्येक ने कितनी कि पूँजी लगाई?

7. वह संख्या कौनसी है जिस में से 40 को घटाने पर मूल संख्या का वह एक तिहाई है तो उस संख्या को ज्ञात किजिए।

8. एक संख्या जीसका 6 वाँ भाग उस के 8 वें भाग से 3 अधिक है तो वह संख्या ज्ञात किजिए।

9. एक घर तथा बगोचे को मिलाकर मूल्य ₹ 8,40,000/– है। बगीचे का मूल्य, घर के मूल्य का $^{5}/_{12}$ है। घर तथा बगीचे का मूल्य ज्ञात किजिए।

10. दो किसान A और B संयुक्त रुप से एक धान्य भडांर के मालिक है। वे उसके मूल्य को आपस में बाँट लेने मान जाते है। किसान A, 72 बोरी लेता है और किसान B, 92 बोरी लेता है और ₹ 8000/- किसान A को देता है। प्रत्येक बोरी का मूल्य ज्ञात कीजिए।
11. एक पिता की आयु उसके बेटेसे चार गुना है। 5 वर्ष के बाद पुत्र से तिगुनी होती है। कितमे वर्ष के बाद पीता की आयु, उसके पुत्र से दुगुनी होगी?
12. उस संख्या को ज्ञात कीजिए जिसे 7 से गुणा करने पर वह अपने मूल संख्या से 132 से अधिक होती है।
13. एक व्यक्ति ₹ 250 में सममूल्य के 25 पेन खरीदा। वह अपने लिए 5 पेन रख लेना चाहता है और बाकी पेन बेचना चाहता है ताकि उसे अपने पैसे वापिस मिलें। प्रत्येंक पेन का मूल्य क्या होना चाहिए?
14. दो अंकों की संख्या के अंकों का योगफल 12 है। संख्या के अंकों के स्थान बदलने पर, प्राप्त संख्या मूल संख्या 18 से अधिक है। मूल ज्ञात कीजिए और अपने हल की जांच कीजिए।
15. दो स्टेशनों के बीच की दूरी 340 कि.मी। दो रेलगाडियाँ एक ही समय इन स्टेशनों से निकलती हैं और एक दूसरे से होकर निकलते है।

    उनमें एक रेल गाडी का वेग दूसरे से 5 कि.मी/ घंटे से अधिक है। निकलने के दो घण्टे के बाद यदि दो रेलगाडियों के बीच के 30 कि.मी कों अंतर हो तो प्रत्येक रेलगाडी का वेग ज्ञात कीजिए।
16. एक जहाज प्रवाह के साथ जाकर दो बंदरगाह के बीच की दूरी को 4 घण्टों में तय करता है जब कि उसी दूरी प्रवाह के विरूद्ध जाकर 5 घंटों के तय करता है। यदि नदी के विरुद्ध दिशा में जहाज का वेग 2 कि.मी/ घंटा है। निश्चल जल में जहाज का वेग क्या होगा?
17. एक परिमेय संख्या का अंश, उसके हर से 3 कम है। यदि अंश तिगुना होता है और हर को 20 जोडते है, प्राप्त नई संख्या $\frac{1}{8}$ बनती है। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।
18. दो अंकोवाली संख्या के दहाई स्थान का अंक, उसके इकाई स्थान के अंक का तीन गुना है। यदि इस संख्या और अंकों के स्थान बदलकर बने संख्या का योगफल 88 है तो उस संख्या को ज्ञात कीजिए।
19. एक त्रिभुज की ऊँचाई उसके आधार की लंबाई पाँच - तिहाई है। यदि ऊचाँई को 4

से.मी से बढाया गया और आधार को 2 से.मी कम किया गया तो भी त्रिभुज का क्षेत्रफल उतना ही रह जाता है। त्रिभुज का आधार और ऊँचाई ज्ञात कीकिए।

20. एक त्रिभुज का एक कोण अन्य दो कोणों के योगफल के बराबर है। यदि त्रिभुज के अन्य दो कोणों का अनुपात 4 : 5 है, तो त्रिभुज के कोणों को ज्ञात कीजिए।

उत्तर

1. (a) B (b) A (c) B (d) B
   (e) B (f) B (g) A (h) B

2. (i) 10 (ii) $\frac{-47}{57}$

3. 21 और 24 4. 10 और 40 5. 110, 112, 114

6. A का हिस्सा ₹ 40, 000 और B का हिस्सा ₹ 20,000

7. 60 8. 72 9. उपवन ₹ 35,000 और घर ₹ 49,000

10. ₹ 800 11. 15 वर्ष 12. 33 13. ₹ 12.50

14. 57 15. 90 कि.मी और 95 कि.मी 16.2.25 कि.मी

17. 1/4 18. 62 19.ऊँचाई 20 से.मी और आधार 12 से.मी 20.40°, 50° और 90°

* * * *