ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರ

ಗಣಿತ

10

ಹತ್ತನೆಯ ತರಗತಿ

ಭಾಗ – ೨

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಂಸ್ಥೆ
ಶ್ರೀ ಅರಬಿಂದೋ ಮಾರ್ಗ ನವದೆಹಲಿ 110016

ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
100 ಅಡಿ ವರ್ತುಲ ರಸ್ತೆ, ಬನಶಂಕರಿ 3ನೆಯ ಹಂತ,
ಬೆಂಗಳೂರು – 560085

ಪರಿವಿಡಿ

ಭಾಗ – ೨

ಕ್ರ.ಸಂ	ಘಟಕದ ಹೆಸರು	ಪುಟ ಸಂಖ್ಯೆ
9	ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು	1 – 20
10	ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು	21 – 47
11	ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ	48 – 70
12	ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳು	71 – 82
13	ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	83 – 119
14	ಸಂಭವನೀಯತೆ	120 – 140
15	ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು	141 – 162
A1	ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಸಾಧನೆಗಳು	163 – 187
A2	ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ	188 – 200
	ಉತ್ತರಗಳು	201 – 210

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು 9

9.1 ಪೀಠಿಕೆ

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನೀವು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. $p(x)$ ಎಂಬುದು x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾದರೆ, $p(x)$ ದಲ್ಲಿನ x ದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ದ **ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $4x + 2$ ಎಂಬುದು x ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 1 ಆಗಿದೆ. $2y^2 - 3y + 4$ ಎಂಬುದು y ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿದೆ. $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ ಎಂಬುದು x ಚರಾಕ್ಷರುವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿದೆ. $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ ಎಂಬುದು u ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 6 ಆಗಿದೆ. $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ ಮುಂತಾದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿಲ್ಲ.

ಡಿಗ್ರಿ 1 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ **ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$ ಮುಂತಾದವುಗಳೆಲ್ಲ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿವೆ. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾದ $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$ ಮುಂತಾದವುಗಳು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿಲ್ಲ.

ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ – quadratic polynomial** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. 'quadratic' ಎಂಬ ಪದವು 'quadrate' ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿದೆ, 'quadrate' ಎಂದರೆ square (ವರ್ಗ) ಎಂದರ್ಥ. $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ ಇವು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ (ಇವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ). ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $a \neq 0$ ಆಗಿದೆ.

ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ $2 - x^3, x^3, \sqrt{2}\,x^3, 3 - x^2 + x^3, 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ ಇತ್ಯಾದಿ. ಒಂದು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಆಗಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ a, b, c, d ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ $p(x) = x^2 - 3x - 4$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $x = 2$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $p(2) = (2)^2 - 3(2) - 4 = -6$. $x^2 - 3x - 4$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ x ಗೆ 2ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ದೊರೆತ ಬೆಲೆ '–6' ಇದು $x = 2$ ಆದಾಗ $x^2 - 3x - 4$ ರ ಬೆಲೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ, ಅಂತೆಯೇ $p(0)$ ಅಂತೆಯೇ ಇದು $x = 0$ ಆದಾಗ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆಯಾಗಿದ್ದು, ಅದು -4 ಆಗಿದೆ.

$p(x)$ ಎಂಬುದು x ನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು k ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, $p(x)$ ನಲ್ಲಿ x ಗೆ k ಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು $x = k$ ಆದಾಗ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು $p(k)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$x = -1$ ಆದಾಗ $p(x) = x^2 - 3x - 4$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

$$p(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 0$$

ಹಾಗೆಯೇ, $p(4) = (4)^2 - 3(4) - 4 = 0$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$p(-1) = 0$ ಮತ್ತು $p(4) = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, -1 ಮತ್ತು 4ನ್ನು $x^2 - 3x - 4$ ಎಂಬ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ k ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, $p(k) = 0$ ಆದರೆ k ಯನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, k ಎಂಬುದು $p(x) = 2x-3$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಯಾದರೆ, ಆಗ $p(k) = 0$

$$\therefore\ 2k + 3 = 0$$

ಅಂದರೆ $k = -\dfrac{3}{2}$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, k ಎಂಬುದು $p(x) = ax+b$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಯಾದರೆ, ಆಗ $p(k) = ak + b = 0$ ಅಂದರೆ $k = -\dfrac{b}{a}$ ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax+b$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಯು $\dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ})}{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಹೀಗೆ, ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯು ಅದರ ಸಹಗುಣಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಬೇರೆ ನಮೂನೆಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದೇ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳೂ ಸಹ ಅದರ ಸಹಗುಣಕಗಳೊಡನೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆಯೇ?

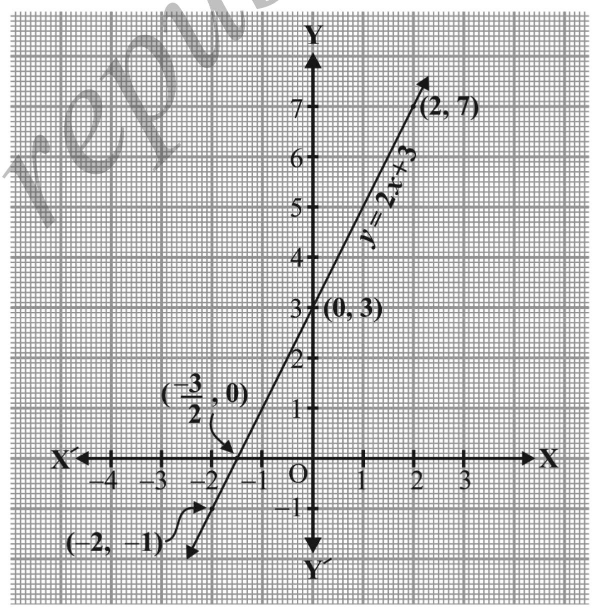
ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇವೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಸಹ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ.

9.2 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಅರ್ಥ:

k ಎಂಬುದು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $p(x)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆದಾಗ $p(k) = 0$ ಆದರೆ k ಯನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಬಹಳಷ್ಟು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿವೆ. ಏಕೆ? ಇದನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು, ಮೊದಲು ನಾವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಹಾಗೂ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನು ಹಾಗೂ ಇದರ ಮೂಲಕ ಅವುಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಮೊದಲು, ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax + b(a \neq 0)$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $y = ax + b$ ಯ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y = 2x + 3$ರ ನಕ್ಷೆಯು $(-2, -1)$ ಮತ್ತು $(2, 7)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7



ಚಿತ್ರ 9.1

$y = 2x + 3$ ರ ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು $x = -1$ ಮತ್ತು $x = -2$ ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ, ಅಂದರೆ $(-\frac{3}{2}, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದನ್ನು ಚಿತ್ರ 9.1ರಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು. $-\frac{3}{2}$ ಇದು $2x + 3$ರ ಶೂನ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಹೀಗೆ, $2x + 3$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯು $y = 2x + 3$ ರ ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax + b$ $(a \neq 0)$ ಗೆ $y = ax + b$ ಯ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದು, ಅದು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ $(-\frac{b}{a}, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax + b$ $(a \neq 0)$ ಎಂಬುದು ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇದು $y = ax + b$ ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ x ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

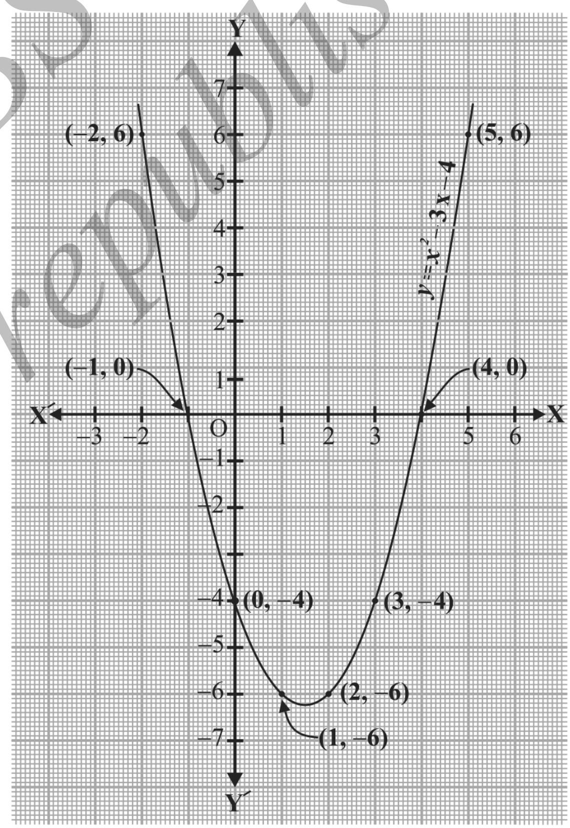
ಈಗ, ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾದ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೋಡೋಣ. $x^2 - 3x - 4$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $y = x^2 - 3x - 4$ ರ *ನಕ್ಷೆಯು ಹೇಗೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಈಗ x ನ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $y = x^2 - 3x - 4$ ರ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 9.1 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

ಕೋಷ್ಟಕ 9.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ನಕ್ಷಾ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ, ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು ಚಿತ್ರ 9.2ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಸಮೀಕರಣ $y = ax^2 + bx + c$ ಯ ನಕ್ಷೆಯು $\cup$ ಈ ರೀತಿ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಅಥವಾ $\cap$ ಈ ರೀತಿ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದು $a > 0$ ಅಥವಾ $a < 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. (ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪರವಲಯಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.)

ಕೋಷ್ಟಕ 9.1ರಿಂದ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು –1 ಮತ್ತು –4 ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 9.2ರಿಂದ $y = x^2 - 3x - 4$ ರ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ x ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು –1 ಮತ್ತು 4 ಆಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಹೀಗೆ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 - 3x - 4$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $y = x^2 - 3x - 4$ ರ ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 9.2

ಈ ಸಂಗತಿಯು ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೂ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ನಿಖರವಾಗಿಯೂ

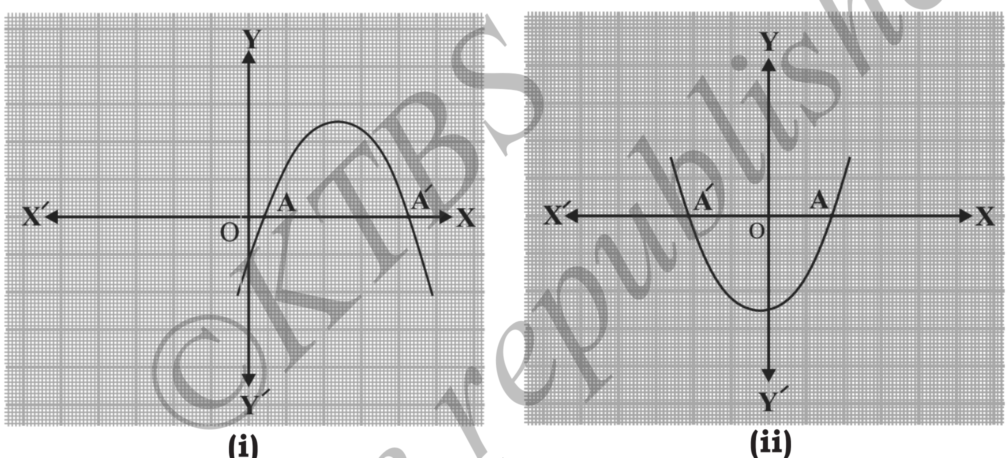
* ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಳೆಯಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಅದು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನಕ್ಕೆ ಒಳಪಟ್ಟಿರುವುದಿಲ್ಲ.

$y = ax^2 + bx + c$ ಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಪರವಲಯವು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$y = ax^2 + bx + c$ ಯ ನಕ್ಷೆಯ ಆಕಾರದ ಬಗ್ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಮ್ಮ ಈ ಹಿಂದಿನ ವೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಪ್ರಕರಣಗಳ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

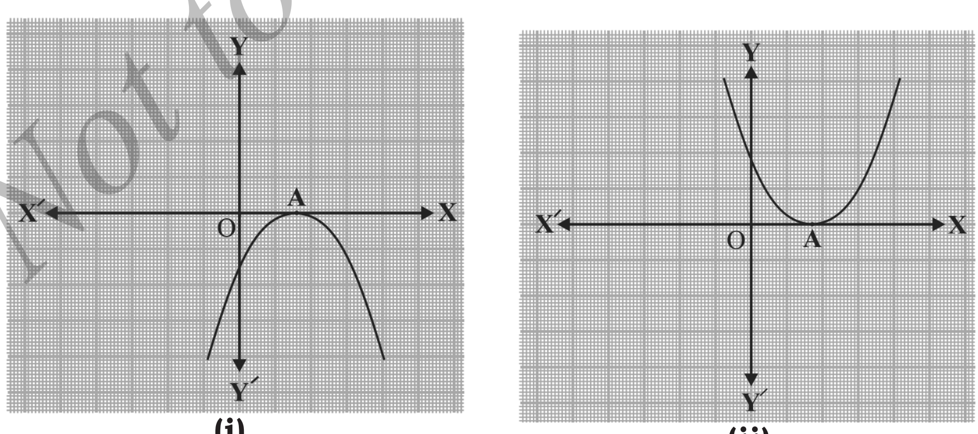
ಪ್ರಕರಣ (i): ಇಲ್ಲಿ, ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುಗಳಾದ A ಮತ್ತು A′ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು A′ ಗಳ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$ ಯ **ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ** (ಚಿತ್ರ 9.3ನ್ನು ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 9.3

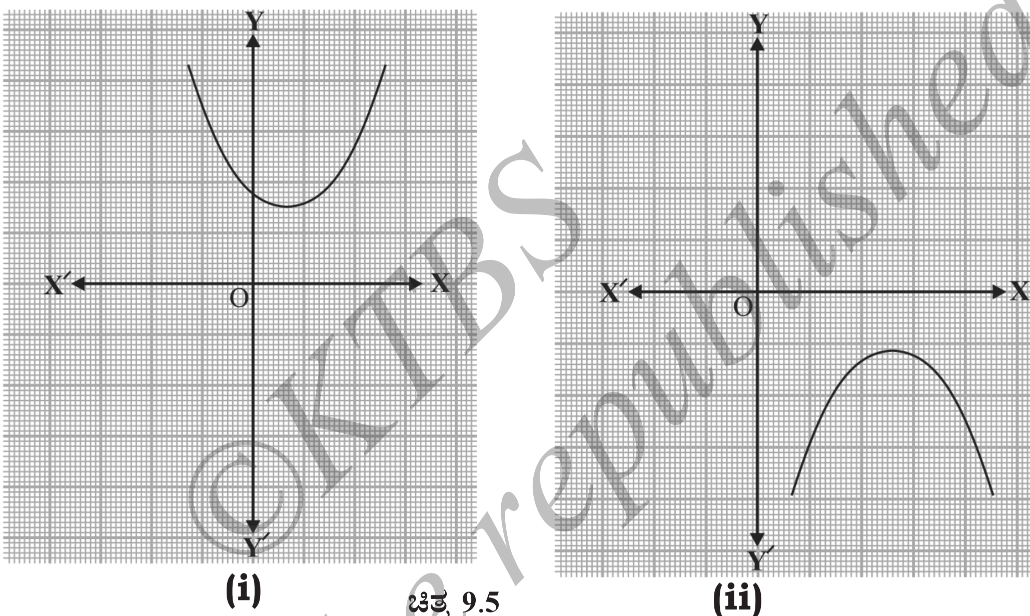
ಪ್ರಕರಣ (ii) : ಇಲ್ಲಿ, ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಕರಣ (i)ರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾದ A ಮತ್ತು A′ಗಳು ಇಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದು A ಆಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 9.4 ನ್ನು ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 9.4

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ A ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$ ಯ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಕರಣ (iii): ಇಲ್ಲಿ ನಕ್ಷೆಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ x - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ x - ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅದು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ (ಚಿತ್ರ 9.5ನ್ನು ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 9.5

ಅದ್ದರಿಂದ, ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$ ಯು **ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ**.

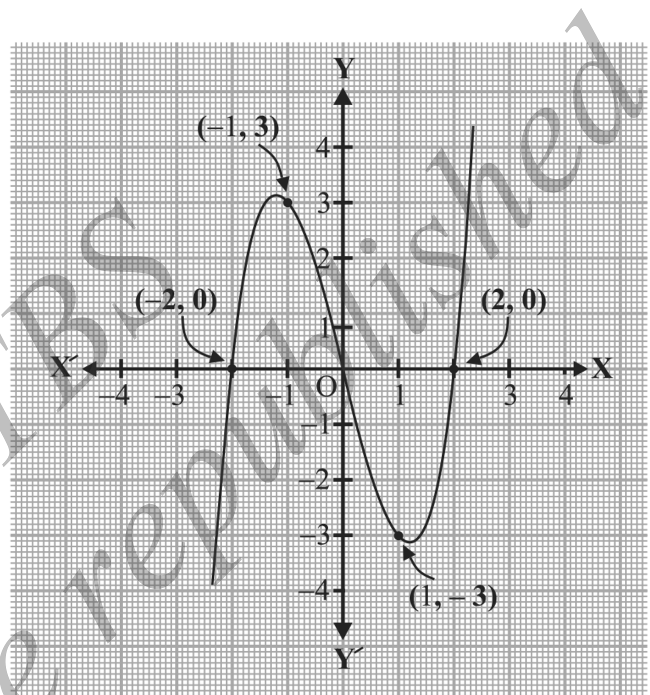
ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಎರಡು ಸಮನಾದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು (ಅಂದರೆ ಒಂದೇ ಶೂನ್ಯತೆ) ಹೊಂದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದೇ ಇರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 2 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಈಗ, ಒಂದು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾದ ಅರ್ಥದ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವಿರಿ? ಈಗ ಅದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^3 - 4x$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. $y = x^3 - 4x$ ದ ನಕ್ಷೆಯು ಹೇಗಿರುತ್ತದೆಂದು ನೋಡಲು ಈಗ ಕೋಷ್ಟಕ 9.2 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ x ದ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ y ದ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

ಕೋಷ್ಟಕ 9.2

x	-2	-1	0	1	2
$y= x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

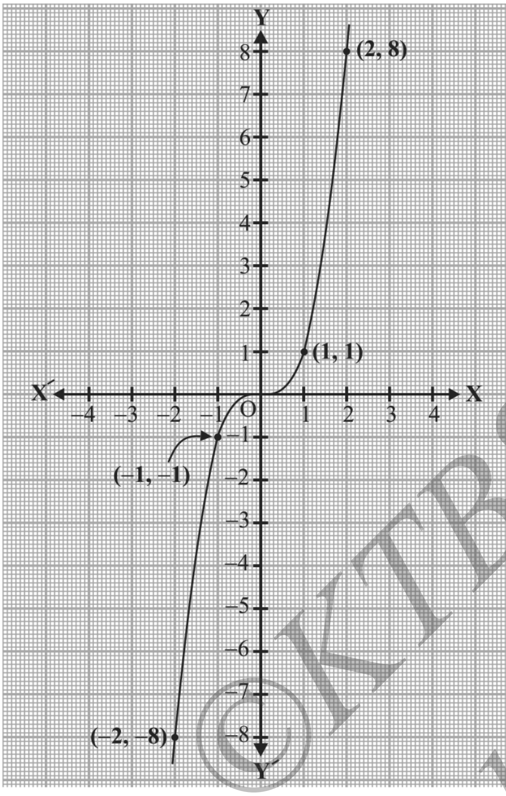
ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷಾ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ, ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದಾಗ, $y=x^3 - 4x$ದ ನಕ್ಷೆಯು ಚಿತ್ರ 9.6ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.



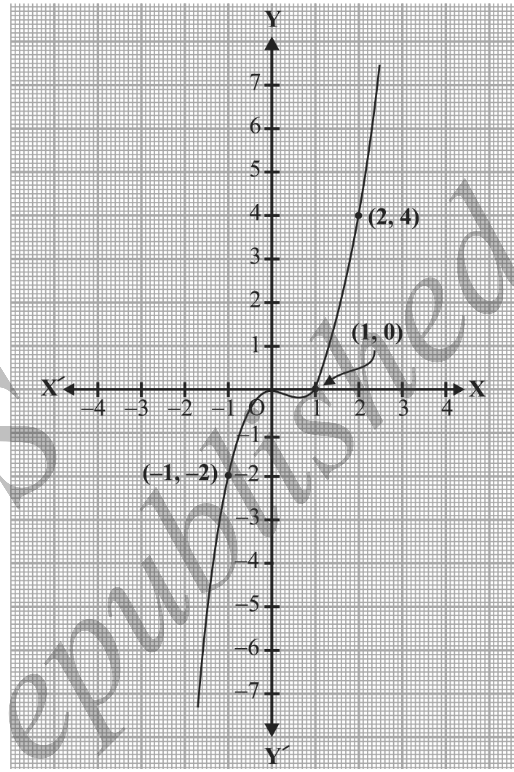
ಚಿತ್ರ 9.6

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ –2, 0 ಮತ್ತು 2 ಇವು ಘನಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^3 - 4x$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. –2, 0 ಮತ್ತು 2 ಇವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ $y=x^3-4x$ ದ ನಕ್ಷೆಯು x -ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ವಕ್ರರೇಖೆಯು x- ಅಕ್ಷವನ್ನು ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಮಾತ್ರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾದ x^3 ಮತ್ತು $x^3 - x^2$ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. $y = x^3$ ಮತ್ತು $y = x^3 - x^2$ ಇವುಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಚಿತ್ರ 9.7 ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 9.8 ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಳೆದಿದ್ದೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 9.7



ಚಿತ್ರ 9.8

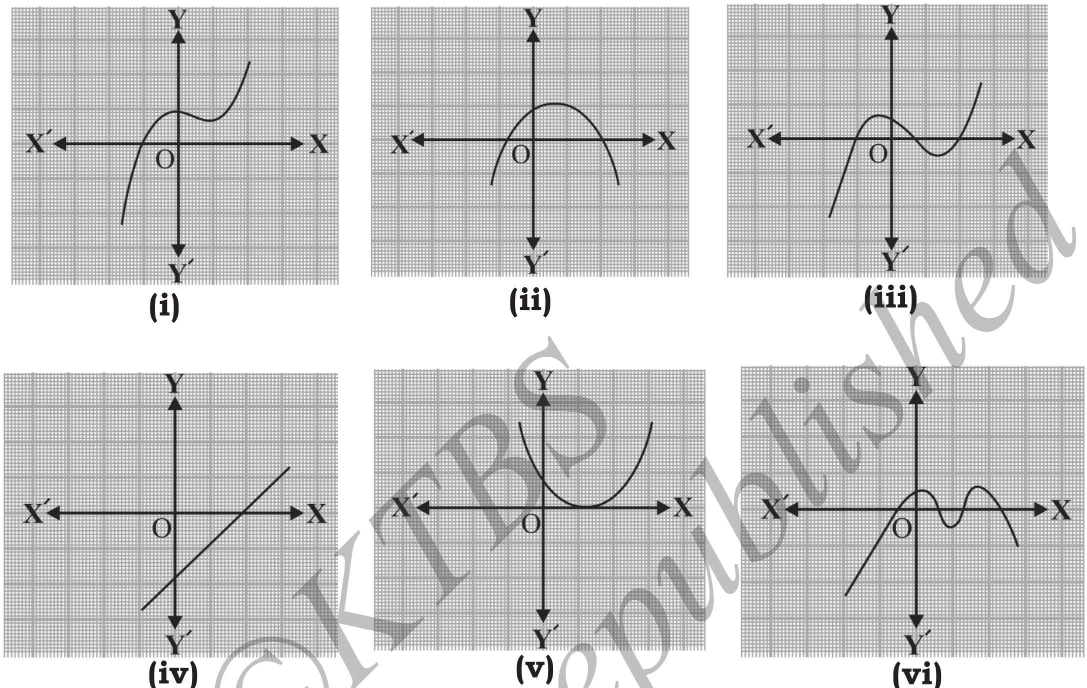
ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ x^3 ನ ಏಕೈಕ ಶೂನ್ಯತೆಯು 0 ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ $y = x^3$ ನ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಏಕೈಕ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ಸಹ 0 ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಚಿತ್ರ 9.7ರಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು. ಅದೇ ರೀತಿ, $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು 0 ಮತ್ತು 1 ಮಾತ್ರ ಆಗಿವೆ. ಹಾಗೂ ಈ ಬೆಲೆಗಳು $y = x^3 - x^2$ ದ ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಸಹ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಚಿತ್ರ 9.8ರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠ 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, n ಡಿಗ್ರಿಯುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ, $y = p(x)$ ದ ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ n ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ n ಡಿಗ್ರಿಯುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ n ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರ 9.9ರಲ್ಲಿನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸಹ $y = p(x)$ ದ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ $p(x)$ ಎಂಬುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಕ್ಷೆಗೂ

$p(x)$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 9.9

ಪರಿಹಾರ:

(i) ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ ಅದು ಕೇವಲ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದೆ.

(ii) ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ

(iii) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಆಗಿದೆ. (ಏಕೆ?)

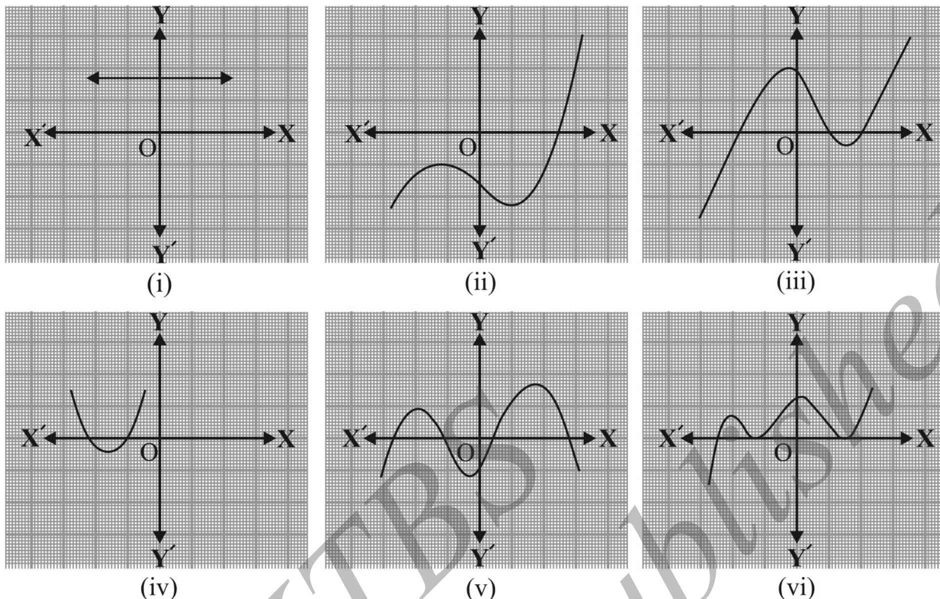
(iv) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆಗಿದೆ. (ಏಕೆ?)

(v) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆಗಿದೆ. (ಏಕೆ?)

(vi) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಆಗಿದೆ. (ಏಕೆ?)

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. $y = p(x)$ ದ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಚಿತ್ರ 9.10ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ $p(x)$ ಎಂಬುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ $p(x)$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 9.10

9.3. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಹಾಗೂ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax + b$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಯು $-\frac{b}{a}$ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಈಗ ನಾವು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಹಾಗೂ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ವಿಭಾಗ 9.1ರಲ್ಲಿ ಉದ್ಭವಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ಎಂಬ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮಧ್ಯಪದ ವಿಭಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಹೇಗೆ ಅಪವರ್ತಿಸುವುದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಗುಣಲಬ್ಧವು $6 \times 2x^2 = 12x^2$ ಆಗುವಂತೆ ಮಧ್ಯಪದವಾದ '$-8x$' ನ್ನು ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬೇಕು.

$$\therefore 2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6$$
$$= 2x\,(x - 3) - 2\,(x - 3)$$
$$= (2x - 2)\,(x - 3)$$
$$= 2\,(x - 1)\,(x - 3)$$

$\therefore x - 1 = 0$ ಅಥವಾ $x - 3 = 0$ ಆದಾಗ

ಅಂದರೆ $x = 1$ ಅಥವಾ $x = 3$ ಆದಾಗ $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ರ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, 1 ಮತ್ತು 3 ಇವು $2x^2 - 8x + 6$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಈಗ, ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 \\ &= 3x(x+2) - 1(x+2) \\ &= (3x-1)(x+2) \end{aligned}$$

$3x - 1 = 0$ ಅಥವಾ $x + 2 = 0$ ಆದಾಗ, ಅಂದರೆ $x = \frac{1}{3}$ ಅಥವಾ $x = -2$ ಆದಾಗ $3x^2 + 5x - 2$ ರ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು -2 ಇವು $3x^2 + 5x - 2$ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, α* ಮತ್ತು β* ಗಳು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(x - \alpha)$ ಮತ್ತು $(x - \beta)$ ಗಳು $p(x)$ದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

$\therefore ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$ ಇಲ್ಲಿ k ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದೆ.

$$\begin{aligned} &= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] \\ &= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta \end{aligned}$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿನ x^2, x ದ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$a = k$ $\quad b = -k(\alpha + \beta)$ ಮತ್ತು $c = k\alpha\beta$

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$

ಅಂದರೆ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$.

* α, β ಗಳು ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರಗಳಾಗಿದ್ದು, ಅವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ 'ಅಲ್ಫಾ' (Alpha) ಮತ್ತು 'ಬೀಟಾ' (Beta) ಎಂದು ಉಚ್ಚರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದೆ ನಾವು 'ಗಾಮಾ' (gamma) ಎಂದು ಉಚ್ಚರಿಸಲ್ಪಡುವ ಮತ್ತೊಂದು ಅಕ್ಷರ γವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: $x^2 + 7x + 10$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: $x^2 + 7x + 10 \quad = x^2 + 5x + 2x + 10$

$$= x(x+5) + 2(x+5)$$

$$= (x+2)(x+5)$$

$\therefore\ x + 2 = 0$ ಅಥವಾ $x + 5 = 0$ ಆದಾಗ, ಅಂದರೆ $x = -2$ ಅಥವಾ $x = -5$ ಆದಾಗ $x^2 + 7x + 10$ ರ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, -2 ಮತ್ತು -5 ಇವು $x^2 + 7x + 10$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= (-2) + (-5) = -7 = \dfrac{-(7)}{1} = \dfrac{-(x \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (-2) \times (-5) = 10 = \dfrac{10}{1} = \dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಉದಾಹರಣೆ 3: $x^2 - 3$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ಎಂಬ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

$$\therefore\ x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \sqrt{3}$ ಅಥವಾ $x = -\sqrt{3}$ ಆದಾಗ $x^2 - 3$ ರ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{3}$ ಇವು $x^2 - 3$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \dfrac{-(x \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ -3 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $ax^2 + bx + c$ ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ α ಮತ್ತು β ಗಳು ಅದರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore \alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

ಮತ್ತು $$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

$a = 1$ ಆದರೆ, ಆಗ $b = 3$ ಮತ್ತು $c = 2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $x^2 + 3x + 2$ ಆಗಿದೆ. ಈ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸುವ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $k(x^2 + 3x + 2)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಈಗ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವೆ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧವಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ಯೋಚಿಸುವಿರಾ?

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ ಎಂಬ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

$x = 4, -2, \frac{1}{2}$ ಆದಾಗ $p(x) = 0$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. $p(x)$ ಎಂಬುದು ಗರಿಷ್ಠ 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ, ಇವು $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ. ಈಗ,

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-(\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ})}{x^2 \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಆದಾಗ್ಯೂ, ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಎರಡೆರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಆಗ,

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\} = -8 - 1 + 2$$
$$= -7$$
$$= \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ ದ ಸಹಗುಣಕ}}{x^3 \text{ ರ ಸಹಗುಣಕ}}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, α, β, γ ಗಳು $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಎಂಬ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$
$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

ಈಗ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 5*: 3, –1 ಮತ್ತು $-\frac{1}{3}$ ಇವು $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ಎಂಬ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆಯೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ : ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು $ax^3 + bx^2 + cx + d$ಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $a = 3,\ b = -5,\ c = -11,\ d = -3.$

$$\therefore p(x) = 3(3)^3 - 5(3)^2 - 11(3) - 3$$

$$= 81 - 45 - 33 - 3$$

$$= 0$$

$$p(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 - 11(-1) - 3$$

$$= -3 - 5 + 11 - 3$$

$$= 0$$

$$p\left(\frac{-1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\left(-\frac{1}{3}\right) - 3$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= 0$$

$\therefore$ 3, –1 ಮತ್ತು $-\frac{1}{3}$ ಇವು $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ, ಆದ್ದರಿಂದ, ಈಗ $\alpha = 3,\ \beta = 1$ ಮತ್ತು $\gamma = -\frac{1}{3}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (3)(-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)(3) = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = (3) \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

*ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s - 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   (iv) $4u^2 - 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

9.4 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ

ಒಂದು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ ಮೂರು ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ನಿಮಗೆ ಕೇವಲ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ನೀಡಿದರೆ, ನೀವು ಉಳಿದೆರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಇದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, ಈಗ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ಎಂಬ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಅದರ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯು 1 ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಿದರೆ, ಆಗ $(x-1)$ ಎಂಬುದು $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ರ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತ ಹಾಗೆ, $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ನ್ನು $x-1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ $x^2 - 2x - 3$ ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ನಂತರ ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ x^2-2x-3ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾದ $(x+1)(x-3)$ನ್ನು ನೀವು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$\therefore\ x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x+1)\ (x^2 - 2x - 3)$$

$$= (x-1)\ (x+1)\ (x-3)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು 1, -1 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಈಗ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

ಈಗ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಇದರ ಹಂತಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಮೊದಲು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: $2x^2 + 3x + 1$ ನ್ನು $x+2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ಅಥವಾ ಶೇಷದ ಡಿಗ್ರಿಯು ಭಾಜಕದ ಡಿಗ್ರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆದಾಗ ನಾವು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $(2x - 1)$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 3 ಆಗಿದೆ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 1 \\
\hline
x + 2 & 2x^2 + 3x + 1 \\
 & \underset{-}{2x^2} \underset{-}{+} 4x \\
\hline
 & -x + 1 \\
 & \underset{+}{-x} \underset{+}{-} 2 \\
\hline
 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore (2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2 + 3$

$= 2x^2 + 3x + 1$

ಅಂದರೆ $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

$\therefore$ ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ

ಈಗ, ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲು ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 7: $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ನ್ನು $1 + 2x + x^2$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಮೊದಲು ನಾವು ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕದ ಪದಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿಯ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪದಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಬರೆಯುವುದನ್ನು, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಭಾಜ್ಯವು ಈಗಾಗಲೇ ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು ಭಾಜಕದ ಆದರ್ಶ ರೂಪವು $x^2 + 2x + 1$ ಆಗಿದೆ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x - 5 \\
\hline
x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\
 & \underset{-}{3x^3} \underset{-}{+} 6x^2 \underset{-}{+} 3x \\
\hline
 & -5x^2 - x + 5 \\
 & \underset{+}{-5x^2} \underset{+}{-} 10x \underset{+}{-} 5 \\
\hline
 & 9x + 10 \\
\hline
\end{array}
$$

ಹಂತ 1: ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಭಾಜ್ಯದ ಗರಿಷ್ಠ ಡಿಗ್ರಿಯ ಪದ (ಅಂದರೆ $3x^3$)ನ್ನು ಭಾಜಕದ ಗರಿಷ್ಠ ಡಿಗ್ರಿಯ ಪದ (ಅಂದರೆ x^2) ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ. ಆಗ $3x$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ನಂತರ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ. ಆಗ $-5x^2 - x + 5$ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2: ಈಗ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಎರಡನೇ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯದ ಗರಿಷ್ಠ ಡಿಗ್ರಿಯ ಪದ (ಅಂದರೆ $-5x^2$)ನ್ನು ಭಾಜಕದ ಗರಿಷ್ಠ ಡಿಗ್ರಿಯ ಪದ (ಅಂದರೆ x^2)ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ. ಆಗ -5 ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಪುನಃ $-5x^2 - x + 5$ ಇದರೊಂದಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ.

ಹಂತ 3: ಆಗ $9x + 10$ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಈಗ $9x + 10$ರ ಡಿಗ್ರಿಯ ಭಾಜಕ $x^2 + 2x + 1$ರ ಡಿಗ್ರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇನ್ನೂ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಗಲಬ್ಧವು $3x - 5$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು $9x + 10$ ಆಗಿದೆ ಹಾಗೂ

$(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10$

$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$

ಇಲ್ಲಿ ಪುನಃ,

ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 8ರಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯಂತೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ ನಾವು ಒಂದು ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಕ್ರಮವಿಧಿಯು ಈ ರೀತಿ ಹೇಳುತ್ತದೆ.

$p(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿದ್ದು, $g(x) \neq 0$ ಆದಾಗ

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

ಆಗುವಂತೆ $q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ $r(x) = 0$ ಅಥವಾ $r(x)$ ದ ಡಿಗ್ರಿ < $g(x)$ ದ ಡಿಗ್ರಿ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ **ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದರ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ನಿದರ್ಶಿಸಲು ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ನ್ನು $x - 1 - x^2$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲು, ಮೊದಲು ನಾವು ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕಗಳೆರಡನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿಯ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಜ್ಯ = $-x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ ಮತ್ತು ಭಾಜಕ = $-x^2 + x - 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\ \hline
-x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\
 & -x^3 + x^2 - x \\
 & \underline{+ \quad - \quad +} \\
 & 2x^2 - 2x + 5 \\
 & 2x^2 - 2x + 2 \\
 & \underline{- \quad + \quad -} \\
 & 3
\end{array}$$

ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಶೇಷ (3)ರ ಡಿಗ್ರಿ=0 < 2=ಭಾಜಕ $(-x^2 + x - 1)$ರ ಡಿಗ್ರಿ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು ಇಲ್ಲಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\therefore$ ಭಾಗಲಬ್ಧ = $x - 2$, ಶೇಷ = 3.

ಈಗ,

ಭಾಜಕ × ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ

$$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$$

$$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

= ಭಾಜ್ಯ

ಈ ರೀತಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{2}$ ಇವು $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ರ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{2}$ ಇವು ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2 - 2$ ಇದು ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಈಗ ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು $x^2 - 2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\hline
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & \underline{\overset{-}{2x^4} \qquad\quad \overset{+}{-} 4x^2} \\
 & \qquad -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & \qquad \underline{\overset{+}{-3x^3} \qquad \overset{-}{+} 6x} \\
 & \qquad\qquad x^2 \qquad - 2 \\
 & \qquad\qquad \underline{\overset{-}{x^2} \qquad \overset{+}{-} 2} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೊದಲ ಪದವು $\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಎರಡನೇ ಪದವು $\dfrac{-3x^3}{x^2} = -3x$

ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೂರನೇ ಪದವು $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

ಈಗ, ಮಧ್ಯಪದವಾದ '$-3x$'ನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ, $2x^2-3x+1$ನ್ನು $(2x-1)(x-1)$ ಎಂದು ಅಪವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $x = 1$ ಇವು ಅದರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು 1 ಇವು ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $g(x)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ $\quad g(x) = x^2 - 2$

   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ $\quad g(x) = x^2 + 1 - x$

   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$ $\quad g(x) = 2 - x^2$

2. ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಹಾಗೂ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

   (i) $t^2 - 3$ $\quad 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

   (ii) $x^2 + 3x + 1$ $\quad 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

   (iii) $x^3 - 3x + 1$ $\quad x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ಇವು $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ರ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ನ್ನು $g(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x - 2$ ಮತ್ತು $-2x + 4$ ಆದರೆ $g(x)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.

(i) $p(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = $q(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ

(ii) $g(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = $r(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ

(iii) $r(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = 0

ಅಭ್ಯಾಸ 9.4 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅವುಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಹಾಗೂ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2$; $\frac{1}{2}$, 1, -2

(ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$; 2, 1, 1

2. ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ 2, ಎರಡೆರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ -7 ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ -14 ಆಗಿರುವಂತಹ ಒಂದು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $a - b$, a, $a+b$ ಗಳು $x^3 - 3x^2 + x + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ a ಮತ್ತು b ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $2 \pm \sqrt{3}$ ಇವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ರ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಉಳಿದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು $x^2 - 2x + k$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವು $x + a$ ಆದರೆ k ಮತ್ತು a ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

* ಈ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲ್ಲ

9.5 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. ಡಿಗ್ರಿ 1, 2 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ, ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

2. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ, x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $a \neq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ನಿಖರವಾಗಿ $y = p(x)$ದ ನಕ್ಷೆಯು $x-$ ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ $x-$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

4. ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 2 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

5. α ಮತ್ತು β ಗಳು $ax^2 + bx + c$ ಎಂಬ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ

   $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

6. α, β ಮತ್ತು γ ಗಳು $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಎಂಬ ಒಂದು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ

   $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$,

   $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$,

   ಮತ್ತು $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

7. ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯ ಹೇಳಿಕೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

   ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ಹಾಗೂ ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $g(x)$ ಗಳಿಗೆ

   $$p(x) = g(x) . q(x) + r(x)$$

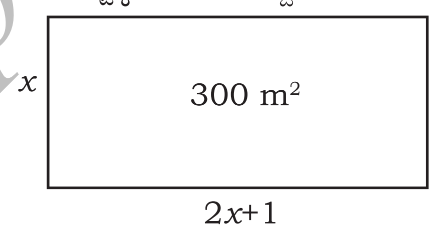
   ಆಗುವಂತೆ $q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ $r(x) = 0$ ಅಥವಾ $r(x)$ ದ ಡಿಗ್ರಿ < $g(x)$ ದ ಡಿಗ್ರಿ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

❀ ❀ ❀

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು 10

10.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಅಧ್ಯಾಯ 9ರಲ್ಲಿ ನೀವು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ax^2+bx+c, $a\neq0$ ಈ ರೂಪದ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದು ವಿಧವಾಗಿತ್ತು. ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ನೈಜ ಬದುಕಿನ ಹಲವಾರು ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಧರ್ಮದರ್ಶಿಯೊಬ್ಬರು ಒಂದು ಪ್ರಾರ್ಥನಾ ಮಂದಿರವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ ಹಾಗೂ ಇದರ ಒಳಾಂಗಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $300 m^2$ ಆಗಿದ್ದು, ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 1m ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆ ಮಂದಿರದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು? ಆ ಮಂದಿರದ ಅಗಲವು x ಮೀಟರ್ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಅದರ ಉದ್ದವು $(2x+1)$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 10.1ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 10.1

ಈಗ, ಮಂದಿರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= (2x+1)x \text{ m}^2$

$= (2x^2+x) \text{ m}^2$

$\therefore\ 2x^2+x = 300$ (ದತ್ತ)

$\therefore\ 2x^2+x-300= 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಂದಿರದ ಅಗಲವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾದ $2x^2+x-300=0$ ಇದನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವಂತಿರಬೇಕು.

ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯನ್ನರು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆಂದು ನಂಬಲಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಅವರು ತಿಳಿದಿದ್ದರು ಮತ್ತು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯು $x^2-px+q=0$ ರೂಪದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರವರು ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದ್ದರು. ಇದು ನಮ್ಮ ಈಗಿನ ಪರಿಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಕೀರ್ತಿಯು ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಗಣಿತಜ್ಞರಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತರು (ಕ್ರಿ.ಶ. 598–665) $ax^2+bx+c=0$ ರೂಪದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀಡಿದರು. ನಂತರ ಶ್ರೀಧರಾಚಾರ್ಯರು (ಕ್ರಿ.ಶ. 1025) ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ 'ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರ' (ಭಾಸ್ಕರ II ಇವರು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದಂತೆ) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಸಿದರು. ಅರಬ್ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಅಲ್–ಖ್ವಾರಿಜ್ಮಿಯವರು (Al-Khwarizmi, ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಶ. 800) ಸಹ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದರು. ಅಬ್ರಹಾಂ ಬಾರ್ ಹಿಯ್ಯ ಹ–ನಸಿಯವರು (Abraham bar Hiyya Ha-Nasi) ಕ್ರಿ.ಶ. 1145ರಲ್ಲಿ ಯೂರೋಪಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾದ ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕ 'ಲಿಬರ್ ಎಂಬಾಡೋರಮ್' (Liber embadorum)ದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಂಪೂರ್ಣ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿವಿಧ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಿರಿ. ನಿತ್ಯ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳನ್ನೂ ಸಹ ನೀವು ಇಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಿರಿ.

10.2 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು

x ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2+bx+c=0$ ರೂಪದ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ a,b,c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a\neq0$. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $2x^2 + x - 300 =0$ ಇದೊಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಅಂತೆಯೇ $2x^2-3x+1=0$, $4x-3x^2+2=0$ ಮತ್ತು $1-x^2+300=0$ ಇವೂ ಸಹ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿವೆ.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, $p(x)$ ಎಂಬುದು ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿದ್ದರೆ, $p(x)=0$ ರೂಪದ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ $p(x)$ ದ ಪದಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿಯ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ, ನಾವು ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq0$ ಇದನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲಿನ ಪ್ರಪಂಚದ ಹಲವಾರು ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಗಣಿತದ ವಿವಿಧ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅನ್ವಯಗಳಿವೆ. ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಗಣತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(i) ಜಾನ್ ಮತ್ತು ಜೀವಂತಿ ಇವರಿಬ್ಬರ ಬಳಿ ಇರುವ ಒಟ್ಟು ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 45 ಆಗಿದೆ. ಇವರಿಬ್ಬರೂ ತಲಾ 5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡರೆ ಇವರ ಬಳಿ ಇರುವ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ

ಗುಣಲಬ್ಧ 124 ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಅವರ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಒಂದು ಗುಡಿ ಕೈಗಾರಿಕೆಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆಟಿಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಆಟಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು, (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) 55ರಿಂದ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ, ಆಟಿಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಒತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು ₹ 750 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ದಿನ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ಪರಿಹಾರ :

(i) ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು x ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ ಜೀವಂತಿಯ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $45-x$ (ಏಕೆ?)

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಉಳಿದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $x-5$

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಜೀವಂತಿಯ ಬಳಿ ಉಳಿದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $45-x-5$

= $40-x$

∴ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $(x-5)(40-x)$

$= 40x-x^2-200+5x$

$= -x^2+45x-200$

ಹೀಗೆ, $-x^2+45x-200 = 124$

ಅಂದರೆ, $-x^2+45x-324 = 0$

ಅಂದರೆ, $x^2-45x+324 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $x^2-45x+324=0$ ಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗಣಿತೀಯ ರೂಪವಾಗಿದೆ.

(ii) ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ದಿನದ ಪ್ರತಿ ಆಟಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) = $55-x$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ದಿನದ ಒಟ್ಟು ಆಟಿಕೆಗಳ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) = $x(55-x)$

∴ $x(55-x) = 750$

$55x-x^2 = 750$

$$-x^2 + 55x - 750 = 0$$

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $x^2 - 55x - 750 = 0$ಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗಣಿತೀಯ ರೂಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3) = x^2 + 1$ (iv) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

ಪರಿಹಾರ :

(i) ಎಡಭಾಗ $= (x-2)^2 + 1$

$= x^2 - 4x + 4 + 1$

$= x^2 - 4x + 5$

$\therefore (x-2)^2 + 1 = 2x - 3$

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$

ಅಂದರೆ $x^2 - 6x + 8 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(ii) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$

$x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

ಅಂದರೆ $x + 12 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.
ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(iii) ಇಲ್ಲಿ, $x(2x+3) = 2x^2 + 3x$

$\therefore$ $x(2x+3) = x^2 + 1$ ಇದನ್ನು

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\therefore\ 2x^2 + 3x = x^2 + 1$

$x^2 + 3x - 1 = 0.$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(iv) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$

ಅಂದರೆ $6x^2 + 12x + 12 = 0$

ಅಥವಾ $x^2 + 2x + 2 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ : ಜಾಗ್ರತೆ! ಮೇಲಿನ (ii) ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

ಮೇಲಿನ (iv) ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ ತೋರದೇ ಘನ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ (ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣ) ತೋರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಆಗಿದೆ. ನೀವು ನೋಡಿದಂತೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವೇ ಅಥವಾ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವ ಮೊದಲು ನಾವು ಯಾವಾಗಲೂ ಅದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಬೇಕು.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$

(iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

(i) ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ನಿವೇಶನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 528 m^2 ಆಗಿದೆ. ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದವು (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) ಅದರ ಅಗಲದ ಎರಡಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆ ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

(ii) ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 306 ಆಗಿದೆ. ನಾವು ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

(iii) ರೋಹನನ ತಾಯಿಯು ಅವನಿಗಿಂತ 26 ವರ್ಷ ದೊಡ್ಡವಳಾಗಿದ್ದಾಳೆ. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಗುಣಲಬ್ಧವು 360 ಆಗುತ್ತದೆ. ನಾವು ರೋಹನನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

(iv) ಒಂದು ರೈಲು ಏಕರೂಪದ ಜವದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿ, 480km ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಜವವು 8km/h ಕಡಿಮೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅಷ್ಟೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ರೈಲು 3 ಘಂಟೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು. ನಾವು ರೈಲಿನ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

10.3 ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

$2x^2-3x+1=0$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು xಗೆ 1ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಆಗ $2(1)^2-3(1)+1=2-3+1=0=$ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ. $2x^2-3x+1=0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು 1 ಆಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಂದರೆ, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $2x^2-3x+1$ರ ಶೂನ್ಯತೆಯೂ 1 ಎಂದು ಅರ್ಥೈಸಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $ax^2+bx+c=0$, $a\neq0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ α ಗೆ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, ಆದರೆ, ಆಗ **'α'ವನ್ನು ಆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. $x=\alpha$ ಎಂಬುದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ ಅಥವಾ α ಇದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ax^2+bx+c ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು $ax^2+bx+c=0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ** ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಗರಿಷ್ಠ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಾಯ 2ರಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ಗರಿಷ್ಠ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಹೇಗೆ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಈ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ನಾವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ $2x^2-5x+3=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಮೊದಲು ಮಧ್ಯಪದ $-5x$ ನ್ನು $-2x-3x$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವಿಭಜಿಸೋಣ.

[ಏಕೆಂದರೆ $(-2x) \times -(3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$]

$\therefore\ 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3$

$= 2x(x-1) - 3(x-1)$

$= (2x-3)(x-1)$

ಈಗ, $2x^2-5x+3=0$ ಯನ್ನು $(2x-3)(x-1)=0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ, $2x^2-5x+3=0$ ಇದರ 'x'ನ ಬೆಲೆಗಳು ಮತ್ತು $(2x-3)(x-1)=0$ ಇದರ 'x'ನ ಬೆಲೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

ಅಂದರೆ $2x-3=0$ ಅಥವಾ $x-1=0$

$x=\frac{3}{2}$ ಅಥವಾ $x=1$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $x=1$ ಇವು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿವೆ. ಅಥವಾ 1 ಮತ್ತು $\frac{3}{2}$ ಇವು $2x^2-5x+3=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

ಇವು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು **ತಾಳೆ ನೋಡಿ.**

$2x^2-5x+3$ನ್ನು ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ನಾವು $2x^2-5x+3=0$ ಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: $6x^2-x-2=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $6x^2-x-2 = 6x^2+3x-4x-2$

$= 3x(2x+1) - 2(2x+1)$

$= (3x-2)(2x+1)$

$(3x-2)(2x+1)=0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ 'x' ದ ಬೆಲೆಗಳು $6x^2-x-2=0$ ಇದರ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

$\therefore\ 3x-2=0$ ಅಥವಾ $2x+1=0$

$x=\frac{2}{3}$ ಅಥವಾ $x=\frac{-1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $6x^2-x-2=0$ ಇದರ ಮೂಲಗಳು $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{-1}{2}$

$\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{-1}{2}$ ಇವು $6x^2-x-2=0$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ನಾವು ತಾಳೆ ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5 : $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$

$$= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$ ಇದರ xನ ಬೆಲೆಗಳು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ, $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$

$\therefore x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ ಅಪವರ್ತನವು ಎರಡು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ ಇವು $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ ಇದರ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ವಿಭಾಗ 10.1 ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ ಪ್ರಾರ್ಥನಾ ಮಂದಿರದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ವಿಭಾಗ 10.1 ರಲ್ಲಿ ಮಂದಿರದ ಅಗಲವು x m ಆಗಿದ್ದರೆ, x ಇದು $2x^2 + x - 300 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

$$(x - 12)(2x + 25) = 0$$

$\therefore x - 12 = 0$ ಅಥವಾ $2x + 25 = 0$

$x = 12$ ಅಥವಾ $x = \frac{-25}{2} = -12.5$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 12$ ಅಥವಾ $x = -12.5$ ಇವು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ. x ಇದು ಮಂದಿರದ ಅಗಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಬೆಲೆ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹೀಗೆ, ಕೊಠಡಿಯ ಅಗಲವು $12m$ ಆಗಿದೆ.

ಅದರ ಉದ್ದ $= 2x + 1 = 2(12) + 1 = 25m$ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^2-3x-10=0$ (ii) $2x^2+x-6=0$

(iii) $\sqrt{2}\,x^2+7x+5\sqrt{2}=0$ (iv) $2x^2-x+\frac{1}{8}=0$

(v) $100x^2-20x+1=0$

2. ಉದಾಹರಣೆ 1ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.
3. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 27 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 182 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 365 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕಿಂತ 7*cm* ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಅದರ ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು 13*cm* ಆದರೆ ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಗುಡಿ ಕೈಗಾರಿಕೆಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಡಿಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಮಡಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ), ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 3 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಲಾಯಿತು. ಆ ದಿನದ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು ₹ 90 ಆದರೆ ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿ ಮಡಿಕೆಯ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10.4 ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೀವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ಸುನೀತಾಳ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಅವಳ ವಯಸ್ಸು ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅವಳ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸಿನ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಅವಳ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

ಇದನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು, ಅವಳ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಅವಳ ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ವಯಸ್ಸು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ವಯಸ್ಸು ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $(x-2)(x+4)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore (x-2)(x+4) = 2x+1$

ಅಂದರೆ, $x^2+2x-8 = 2x+1$

$x^2-9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

ವಯಸ್ಸು ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, x=3 ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸುನೀತಾಳ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು 3 ವರ್ಷ.

ಈಗ $(x+2)^2-9=0$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore (x+2)^2=9$

$x+2 = \pm\sqrt{9}$

$x+2 = \pm 3$

$x+2 = +3$ ಅಥವಾ $x+2 = -3$

$x=1$ ಅಥವಾ $x = -5$

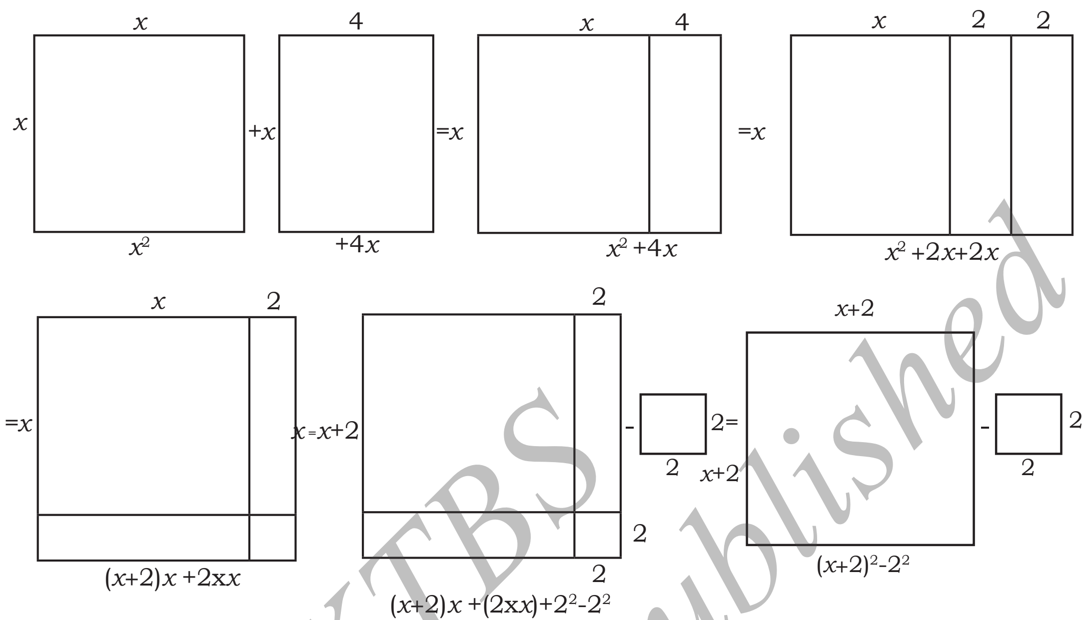
ಆದ್ದರಿಂದ $(x+2)^2-9=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು 1 ಮತ್ತು –5 ಆಗಿವೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, xನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಪದವು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ನಾವು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ, $x^2+4x-5=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಹೇಳಿದರೆ ಹೇಗೆ ಮಾಡುವಿರಿ? $x^2+4x-5= (x+2)^2-9$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುವವರೆಗೆ ಬಹುಶಃ ನಾವು ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $x^2+4x-5=0$ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು $(x+2)^2-9=0$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು $(x+a)^2-b^2=0$ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನಾವು ನೋಡೋಣ. ಚಿತ್ರ 10.2ನ್ನು ನೋಡಿ.

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ x^2+4x ಇದು $(x+2)^2-4$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಹೇಗೆ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 10.2

ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

$$x^2+4x = \left(x^2+\frac{4}{2}x\right)+\frac{4}{2}x$$

$$= x^2+2x+2x$$

$$= (x+2)x+2\times x$$

$$= (x+2)x+2\times x+2\times 2-2\times 2$$

$$= (x+2)x+(x+2)2-2\times 2$$

$$= (x+2)(x+2)-2^2$$

$$= (x+2)^2-4$$

ಹೀಗೆ, $x^2+4x-5 = (x+2)^2-4-5$

$$= (x+2)^2-9$$

ಹೀಗೆ, ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ $x^2+4x-5=0$ ಯನ್ನು $(x+2)^2-9=0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು **ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಇದನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$x^2+4x = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$= \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

$$\therefore x^2+4x-5 = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4-5$$

$$= \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 9$$

ಆದ್ದರಿಂದ $x^2+4x-5=0$ ಇದನ್ನು $(x+2)^2-9=0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈಗ $3x^2-5x+2=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ x^2ದ ಸಹಗುಣಕವು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಆಗಿಲ್ಲದಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$9x^2-15x + 6 = 0$$

ಈಗ, $9x^2-15x+6 = (3x)^2-2 \times 3x \times \frac{5}{2}+6$

$$= (3x)^2-2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2+6$$

$$= \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6$$

$$= \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$\therefore$ $9x^2-15x+6=0$ ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$$

$$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$3x-\frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ ಅಥವಾ $3x-\frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

$3x = \frac{5}{2}+\frac{1}{2}$ ಅಥವಾ $3x = \frac{5}{2}-\frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{5}{6}+\frac{1}{6}$ ಅಥವಾ $x = \frac{5}{6}-\frac{1}{6}$

$x = 1$ $\qquad$ $x = \frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ, 1 ಮತ್ತು $\frac{2}{3}$ ಇವು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

ಗಮನಿಸಿ : ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

$3x^2-5x+2=0$

$\therefore x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$

ಈಗ, $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$

$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$

$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}$

$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$

$\therefore 3x^2 - 5x + 2 = 0$ ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$

$\therefore x - \frac{5}{6} = \pm \frac{1}{6}$

$x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ ಅಥವಾ $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

$x = 1$ ಅಥವಾ $x = \frac{2}{3}$

ಈಗ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಿದರ್ಶಿಸಲು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 7 : ಉದಾಹರಣೆ 3ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $2x^2-5x+3=0$

$\therefore x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

ಈಗ, $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}$

$= \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$

$\therefore 2x^2-5x+3 = 0$ ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$

$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$$x - \frac{5}{4} = \pm \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{6}{4} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x = \frac{4}{4}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $x = 1$ ಇವು ದತ್ತ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

ನಮ್ಮ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು **ತಾಳೆ** ನೋಡೋಣ.

$2x^2-5x+3 = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x = \frac{3}{2}$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 2\left(\frac{9}{4}\right) - \left(\frac{15}{2}\right) + 3$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{15}{2} + 3$$

$$= 0$$

ಇದೇ ರೀತಿ $x = 1$ ಇದೂ ಸಹ ದತ್ತ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 7ರಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವನ್ನಾಗಿಸಲು ನಾವು $2x^2-5x+3=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ನಂತರ ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಮೊದಲ ಪದ $4x^2 = (2x)^2$ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ನಂತರ ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಿದರ್ಶಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8 : $5x^2-6x-2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 5 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$25x^2-30x-10 = 0$$

$$(5x)^2 - 2 \times (5x) \times 3 + 3^2 - 3^2 - 10 = 0$$

$$(5x - 3)^2 - 9 - 10 = 0$$

$$(5x - 3)^2 - 19 = 0$$

$$(5x - 3)^2 = 19$$

$$5x - 3 = \pm \sqrt{19}$$

$$5x = 3 \pm \sqrt{19}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{3 + \sqrt{19}}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{3 - \sqrt{19}}{5}$ ಇವು ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

$\frac{3 + \sqrt{19}}{5}$ ಮತ್ತು $\frac{3 - \sqrt{19}}{5}$ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: $4x^2+3x+5 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $4x^2+3x+5 = 0$

$$(2x)^2 - 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$$

$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

$$\left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{-71}{16} = 0$$

$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-71}{16} < 0$$

ಆದರೆ, x ನ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗೆ $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$ ಎಂಬುದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (ಏಕೆ?) ಹೀಗೆ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವಂತಹ x ನ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

ಈಗ ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದಿರಿ. ಈಗ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸೋಣ.

ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು:

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$ ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು a ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad (1)$$

$b^2 - 4ac \geq 0$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $b^2 - 4ac \geq 0$ ಆದಾಗ, $ax^2+bx+c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ಮತ್ತು $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ಹಾಗೂ $b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ (ಏಕೆ?)

ಹೀಗೆ, $b^2 - 4ac \geq 0$ ಆದರೆ, $ax^2+bx+c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು **ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಈಗ, ಈ ಸೂತ್ರದ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನಿದರ್ಶಿಸಲು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: ಅಭ್ಯಾಸ 10.1 ರ ಪ್ರಶ್ನೆ 2(i)ನ್ನು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಆ ನಿವೇಶನದ ಅಗಲ x m ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಅದರ ಉದ್ದವು $(2x + 1)$ m ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆಗ, $x(2x + 1) = 528$

ಅಂದರೆ, $2x^2 + x - 528 = 0$

ಇದು $ax^2+bx+c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ $a = 2$, $b = 1$, $c = -528$ ಆಗಿದೆ

ಆದ್ದರಿಂದ, ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-528)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4224}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$x = \frac{-1+65}{4}$ ಅಥವಾ $x = \frac{-1-65}{4}$

$x = \frac{64}{4}$ ಅಥವಾ $x = \frac{-66}{4}$

$x = 16$ ಅಥವಾ $x = \frac{-33}{2}$

ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಒಂದು ಆಯಾಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಬೆಲೆಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ನಿವೇಶನದ ಅಗಲ $= x = 16$ m

ಆ ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದ $= 2x + 1$

$= 2\ (16) + 1$

$= 33$ m

ಈ ಬೆಲೆಗಳು ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸುತ್ತವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 11: ಎರಡು ಕ್ರಮಾಗತ ಬೆಸ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 290 ಆದರೆ ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಎರಡು ಕ್ರಮಾಗತ ಬೆಸ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು x ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವು $x + 2$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$2x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$2x^2 + 4x - 286 = 0$$

$$x^2 + 2x - 143 = 0$$

ಇದು x ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $a = 1$, $b = 2$, ಮತ್ತು $c = -143$

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರದಂತೆ,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-143)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$x = \frac{-2 + 24}{2}$ ಅಥವಾ $x = \frac{-2 - 24}{2}$

$$x = \frac{22}{2} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{-26}{2}$$

$$x = 11 \text{ ಅಥವಾ } x = -13$$

ಆದರೆ, ಇಲ್ಲಿ x ಒಂದು ಬೆಸ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಕವಾಗಿದೆ. $\therefore x \neq -13$, $x = 11$
ಹೀಗೆ ಎರಡು ಕ್ರಮಾಗತ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು x ಮತ್ತು $x + 2$,
= 11 ಮತ್ತು 11 +2,
= 11 ಮತ್ತು 13

ಪರಿಶೀಲಿಸಿ: $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಅಗಲವು ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ 3m ಕಡಿಮೆ ಇರುವಂತಹ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದರ ಅಗಲವು ಈಗಾಗಲೇ ನಿರ್ಮಿತವಾಗಿರುವ, 12m ಎತ್ತರದ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಪಾದವಾಗಬೇಕಿದೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕಿಂತ 4 m^2 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕಿದೆ (ಚಿತ್ರ 10.3 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಈ ರೀತಿ ನಿರ್ಮಿಸುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಗಲ x m ಆಗಿರಲಿ ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಉದ್ದ=$(x+3)$ m

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= x(x+3)\text{m}^2 = (x^2 + 3x)\text{m}^2$.

ಈಗ, ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ $= x$ m

ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x\ \text{m}^2$

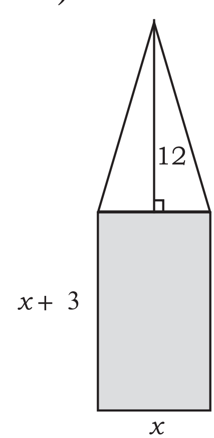
ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

$$\therefore \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

ಇಲ್ಲಿ $a = 1$, $b = -3$ ಮತ್ತು $c = -4$

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರದಂತೆ



ಚಿತ್ರ 10.3

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3+5}{2} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{3-5}{2}$$

$$x = 4 \text{ ಅಥವಾ } x = -1$$

ಆದರೆ $x \neq -1$(ಏಕೆ?). ಆದ್ದರಿಂದ $x = 4$

$\therefore$ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಗಲ = x = 4m ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದ = $x + 3 = 4 + 3 = 7$m.

ತಾಳೆ: ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 28 m^2

ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 24 m^2 = (28 – 4) m^2

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

ಪರಿಹಾರ:

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ಇಲ್ಲಿ $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$

ಆದ್ದರಿಂದ, $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(2)$

$= 25 - 24$

$= 1 > 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(3)}$

$= \frac{5 \pm 1}{6}$

$$x = \frac{5+1}{6} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{5-1}{6}$$

$$x = 1 \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{2}{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ 1 ಮತ್ತು $\frac{2}{3}$ ಇವು ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ ಇಲ್ಲಿ $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ, $b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(5) = 16 - 20, = -4 < 0$

ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{b^2 - 4ac}$ಯ ಬೆಲೆಯು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ ಇಲ್ಲಿ $a = 2$, $b = -2\sqrt{2}$, $c = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, $b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4(2)(1) = 8 - 8 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ,
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-2\sqrt{2}) \pm \sqrt{0}}{2(2)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ ಇವು ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 14: ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ,

(i) $x + \frac{1}{x} = 3,\ x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ \ x \neq 0,\ 2$

ಪರಿಹಾರ:

(i) $x + \frac{1}{x} = 3$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,
$$x^2 + 1 = 3x$$

ಅಂದರೆ $x^2 - 3x + 1 = 0$

ಇಲ್ಲಿ, $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(1)$
$$= 9 - 4 = 5 > 0$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (ಏಕೆ?)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ಇವು ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ \ x \neq 0,\ 2$

$x \neq 0,\ 2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x(x - 2)$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,
$$(x - 2) - x = 3x\,(x - 2)$$
$$= 3x^2 - 6x$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು $3x^2 - 6x + 2 = 0$ ಇದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದು, ಇದೊಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, $a = 3$, $b = -6$, $c = 2$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(3)(2)$$

$$= 36 - 24 = 12 > 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{12}}{2(3)}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ ಇವು ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 15: ಒಂದು ಮೋಟಾರು ದೋಣಿಯ ಜವವು ನಿಶ್ಚಲ ನೀರಿನಲ್ಲಿ 18km/h ಆಗಿದೆ. ಆ ದೋಣಿಯು ಪ್ರವಾಹಕ್ಕೆ ಎದುರಾಗಿ 24 km ದೂರ ಚಲಿಸಲು, ಅದು ಪ್ರವಾಹದೊಡನೆ ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿರುಗಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಘಂಟೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರವಾಹದ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಪ್ರವಾಹದ ಜವವು x km/h ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯ ಜವ = $(18 - x)$km/h

ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯ ಜವ = $(18 + x)$km/h

ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ = $\frac{\text{ದೂರ}}{\text{ವೇಗ}} = \frac{24}{18 - x}$ ಘಂಟೆ.

ಅಂತೆಯೇ, ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ = $\frac{24}{18 + x}$ ಘಂಟೆ

ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$\frac{24}{18 - x} - \frac{24}{18 + x} = 1$$

$$24(18 + x) - 24(18 - x) = (18 - x)(18 + x)$$

$x^2 + 48x - 324 = 0$ ಇಲ್ಲಿ $a = 1$, $b = 48$ ಮತ್ತು $c = -324$

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರದಂತೆ,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-48 \pm \sqrt{(-48)^2 - 4(1)(-324)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2}$$

$$x = \frac{-48 + 60}{2} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{-48 - 60}{2}$$

$$x = 6 \text{ ಅಥವಾ } x = -54$$

x ಇದು ಪ್ರವಾಹದ ಜವವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು $x = -54$ ಎಂಬ ಮೂಲವನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗವು 6 km/h ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.3

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

   (iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

2. ಪ್ರಶ್ನೆ 1ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $x - \frac{1}{x} = 3, \; x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, \quad x \neq 4, 7$

4. ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ರೆಹಮಾನನ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಅವನ ವಯಸ್ಸು ಇವುಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{1}{3}$ ಆದರೆ ಅವನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ಕಿರು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಶಿಫಾಲಿಯು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 30 ಆಗಿದೆ. ಅವಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ 2 ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ 3 ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಆ ಅಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 210 ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅವಳು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಹೊಲದ ಕರ್ಣವು ಅದರ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ 60 m ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಅದರ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವು ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ 30 m ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಹೊಲದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 180 ಆಗಿದೆ. ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಂಟರಷ್ಟಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ರೈಲು 360 km ದೂರವನ್ನು ಏಕರೂಪ ಜವದೊಂದಿಗೆ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಜವವು 5 km/h ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಷ್ಟೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಅದು 1 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು. ರೈಲಿನ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಎರಡು ನಲ್ಲಿಗಳು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಒಂದು ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು $9\frac{3}{8}$ ಘಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸುತ್ತವೆ. ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ನಲ್ಲಿಯು ಕಡಿಮೆ ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ನಲ್ಲಿಗಿಂತ 10 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಪ್ರತಿ ನಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲು ಮೈಸೂರು ಮತ್ತು ಬೆಂಗಳೂರಿನ ನಡುವಿನ 132 km ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿಗಿಂತ 1 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಸಮಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ (ಮಧ್ಯಂತರ ನಿಲ್ದಾಣಗಳಲ್ಲಿ ರೈಲು ನಿಲ್ಲುವ ಸಮಯವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಲ್ಲ). ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ಜವವು ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ಜವಕ್ಕಿಂತ 11 km/h ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡೂ ರೈಲುಗಳ ಸರಾಸರಿ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10.5 ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ

$ax^2+bx+c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಆಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ.

$b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ, ನಾವು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನವಾದ $\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಮತ್ತು $\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಎಂಬ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ, ಆಗ $x = \frac{-b}{2a} \pm 0$ ಅಂದರೆ $x = \frac{-b}{2a}$ ಅಥವಾ $\frac{-b}{2a}$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $ax^2+bx+c = 0$ ಯು ಎರಡು ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ, ಆಗ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು $b^2 - 4ac$ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

$b^2 - 4ac$ ಯ ಬೆಲೆಯು, $ax^2+bx+c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದರಿಂದ $b^2 - 4ac$ ಯನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ **ಶೋಧಕ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಹೀಗೆ, $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

i) $b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಭಿನ್ನವಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ii) $b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಸಮನಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

iii) $b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 16: $2x^2 - 4x + 3 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ.

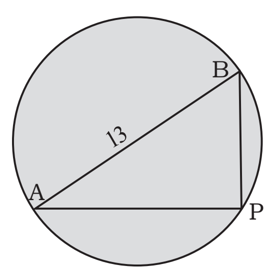
ಪರಿಹಾರ: ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು, $a = 2$, $b = -4$ ಮತ್ತು $c = 3$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶೋಧಕ

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-4)^2 - 4(2)(3) \\ &= 16 - 24 \\ &= -8 < 0 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 17: 13m ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಂಚಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲೋಹದ ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದರ ಒಂದು ವ್ಯಾಸ AB ಯ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಾದ A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ದ್ವಾರಗಳಿವೆ. ಈ ದ್ವಾರಗಳಿಂದ ಆ ಲೋಹದ ಕಂಬಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 7m ಆಗಿರುವಂತೆ ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಕಂಬವು ಆ ಎರಡು ದ್ವಾರಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದೆ?

ಪರಿಹಾರ: ಮೊದಲು ನಾವು ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 10.4 ನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 10.4

ಈಗ P ಎಂಬುದು ಕಂಬದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸ್ಥಾನವಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ ದ್ವಾರ B ಯಿಂದ ಕಂಬಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರವು x m ಆಗಿರಲಿ ಅಂದರೆ BP $= x$ m ಈಗ ಎರಡು ದ್ವಾರಗಳಿಂದ ಕಂಬಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = AP – BP (ಅಥವಾ BP – AP) = 7m ಆದ್ದರಿಂದ, AP = $(x + 7)$m

ಈಗ, AB = 13m. AB ಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle APB = 90^\circ$ (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ, $AP^2 + PB^2 = AB^2$ ($\because$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ)

$$(x+7)^2 + x^2 = 13^2$$

$$x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$$

$$2x^2 + 14x - 120 = 0$$

$$\therefore \quad 2(x^2 + 7x - 60) = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + 7x - 60 = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ದ್ವಾರ B ಯಿಂದ ಕಂಬಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರ x ಇದು $x^2 + 7x - 60 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಆ ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಇದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಅದರ ಶೋಧಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\text{ಶೋಧಕ} = b^2 - 4ac$$

$$= 7^2 - 4(1)(-60)$$

$$= 49 + 240$$

$$= 289 > 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಂಚಿನ ಮೇಲೆ ಲೋಹದ ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ $x^2 + 7x - 60 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2(1)}$$

$$= \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$$x = \frac{-7+17}{2} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x = \frac{-7-17}{2}$$

$$x = 5 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x = -12$$

ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ದ್ವಾರ B ಯಿಂದ ಕಂಬಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $x = -12$ನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 5$ ಹೀಗೆ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಂಚಿನ ಮೇಲೆ ಕಂಬವು, ದ್ವಾರ B ಯಿಂದ 5m ಮತ್ತು ದ್ವಾರ A ಯಿಂದ 12m ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 18: $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ. ಅವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ $a = 3$, $b = -2$ ಮತ್ತು $c = \frac{1}{3}$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಶೋಧಕ

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(\frac{1}{3})$$
$$= 4 - 4$$
$$= 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಎರಡು ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಗಳು $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ ಅಂದರೆ $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ ಅಂದರೆ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ ಆಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.4

1. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ. ಅವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮನಾದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ kಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(k - 2) + 6 = 0$

3. 800m^2 ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಮಾವಿನ ತೋಪನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತಹ ಸನ್ನಿವೇಶವಿರಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ. ಇಬ್ಬರು ಸ್ನೇಹಿತರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮೊತ್ತವು 20 ವರ್ಷಗಳಾಗಿವೆ. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ, ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 48 ವರ್ಷಗಳಾಗಿತ್ತು.

5. ಸುತ್ತಳತೆ 80m ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 400m^2 ಇರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10.6 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. x ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು. $a \neq 0$

2. $ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ α ಗೆ $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ಆದರೆ, ಆಗ α ವನ್ನು ಆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. $ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

3. $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಇದನ್ನು ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

4. ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದಲೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

5. ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರ: $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. ಇಲ್ಲಿ $b^2 - 4ac \geq 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

6. $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

   (i) $b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಭಿನ್ನವಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

   (ii) $b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಸಮನಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

   (iii) $b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಓದುಗರಿಗೆ ಸೂಚನೆ

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಆಧಾರಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ಮೂಲ ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿಬಂಧನೆಯೊಂದಿಗೆ ತಾಳೆ ನೋಡಬೇಕೇ ಹೊರತು ರಚಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಅಲ್ಲ (3ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದ 11, 13, 19ನೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ 10ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದ 10, 11, 12ನೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ).

❀ ❀ ❀

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ 11

There is perhaps nothing which so occupies
the middle position of mathematics as trigonometry

- J.F. Herbart (1890)

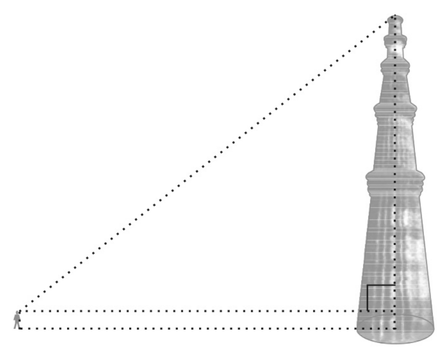
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಧ್ಯದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು
ಆಕ್ರಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಬಹುಶಃ ಬೇರಾವ ವಿಷಯವೂ ಇಲ್ಲ.

– ಜೆ.ಎಫ್. ಹರ್ಬಾರ್ಟ್ (1890)

11.1 ಪೀಠಿಕೆ

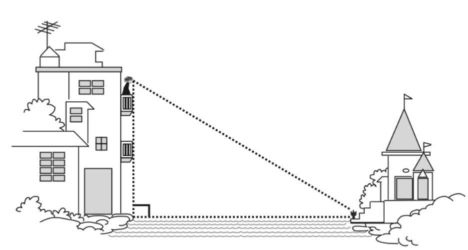
ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ, ಈಗಾಗಲೇ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ನಮ್ಮ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ:

1. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಖುತುಬ್ ಮಿನಾರ್ ಅನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಲು ಹೋಗಿದ್ದಾರೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದೀಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಮಿನಾರ್‌ನ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಚಿತ್ರ 11.1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ನೈಜವಾಗಿ ಮಿನಾರ್ ಅನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ, ಅದರ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?



ಚಿತ್ರ 11.1

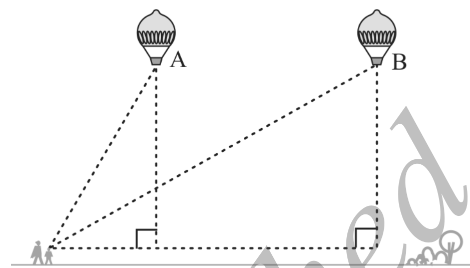
2. ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು ನದಿಯ ದಂಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ತನ್ನ ಮನೆಯ ಉಪ್ಪರಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾಳೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆಕೆ ನದಿಯ ಮತ್ತೊಂದು ದಂಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ದೇವಸ್ಥಾನದ ಮೆಟ್ಟಿಲು ಮೇಲಿರುವ ಹೂ ಕುಂಡವನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ಚಿತ್ರ 11.2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಒಂದು



ಚಿತ್ರ 11.2

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ. ನಿಮಗೆ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಕುಳಿತ್ತಿದ್ದಾರೆಂದು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

3. ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಸಿಗಾಳಿಯ ಬಲೂನ್ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ತನ್ನ ತಾಯಿಗೆ ಅದರ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸಲು ಓಡಿ ಹೋಗುತ್ತಾಳೆ. ತಾಯಿಯು ಅದನ್ನು ನೋಡಲು ಮನೆಯಿಂದ ಹೊರಗೆ ಓಡಿ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಈ ಮುಂಚೆ ಆ ಬಲೂನ್ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದಂತೆ ಗುರುತಿಸಿರುತ್ತಾಳೆ. ಆದರೆ ಈಗ ಆಕೆ ಮತ್ತು ಅವಳ ತಾಯಿ ಹೊರ ಬಂದು ನೋಡುವಷ್ಟರಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್ B ಬಿಂದುವಿಗೆ ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ. ನೆಲದಿಂದ 'B' ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಎತ್ತರವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?



ಚಿತ್ರ 11.3

ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಗಣಿತದ ಒಂದು ಶಾಖೆಯಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಗಣಿತದ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ದೂರ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು Trigonometry ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. Trigonometry ಎಂಬ ಪದವು ಗ್ರೀಕ್ ಪದಗಳಾದ 'Tri' (ಅಂದರೆ ಮೂರು), 'gon' (ಅಂದರೆ ಬಾಹುಗಳು) ಮತ್ತು 'metron' (ಅಂದರೆ ಅಳತೆ) ಪದಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಎಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಈಜಿಪ್ಟ್ ಮತ್ತು ಬ್ಯಾಬಿಲೋನ್‌ದಲ್ಲಿ ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಬಳಕೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಉಲ್ಲೇಖವಾಗಿದೆ. ಪುರಾತನ ಗ್ರೀಕ್ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು, ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರನ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಿರುತ್ತಾರೆ. ಇಂದಿಗೂ ಸಹ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಹಲವಾರು ಉನ್ನತ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನವನ್ನು ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಮತ್ತು ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

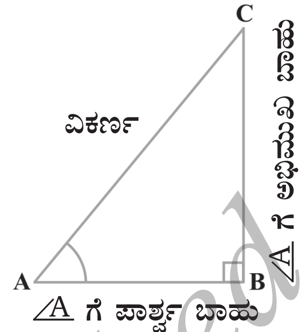
ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಲಘು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೇವೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ನಾವು ನಮ್ಮ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಲಘುಕೋನಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸೋಣ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಈ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಇನ್ನಿತರ ಕೋನಗಳಿಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. 0° ಮತ್ತು 90° ಯ ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳಿಗೂ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಈ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೆಲವು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸೋಣ. ಇವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳೆನ್ನುವರು.

11.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

ವಿಭಾಗ 11.1 ರಲ್ಲಿ, ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ.

ಚಿತ್ರ 11.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

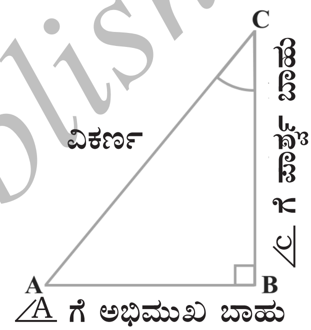
ಇಲ್ಲಿ, $\angle CAB$(ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ $\angle A$) ಯು ಲಘುಕೋನ. ಕೋನ A ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಬಾಹು BC ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಅದು $\angle A$ ಎದುರಿಗಿದೆ. ಅದನ್ನು A ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾದ ಬಾಹು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. AC ಯು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು AB ಯು $\angle A$ ದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದನ್ನು $\angle A$ ದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 11.4

A ಬದಲಿಗೆ ಕೋನ C ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ ಬಾಹುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 11.5 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಈಗ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 11.5

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC (ಚಿತ್ರ 11.4 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಯಲ್ಲಿ, ಕೋನಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\angle A$ ದ ಜ್ಯಾ (sine of $\angle A$) $= \dfrac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}} = \dfrac{BC}{AC}$

$\angle A$ ದ ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾ (cosine of $\angle A$) $= \dfrac{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}} = \dfrac{AB}{AC}$

$\angle A$ ದ ಸ್ಪರ್ಶಕ (tangent of $\angle A$) $= \dfrac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}} = \dfrac{BC}{AB}$

$\angle A$ ದ ಕೋಟಿ ಛೇದಕ (cosecant of $\angle A$) $= \dfrac{1}{\text{sine of } \angle A} = \dfrac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\angle A \text{ ನ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}} = \dfrac{AC}{BC}$

$\angle A$ ದ ಛೇದಕ (secant of $\angle A$) $= \dfrac{1}{\text{cosine of } \angle A} = \dfrac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}} = \dfrac{AC}{AB}$

$\angle A$ ದ ಕೋಟಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ (co tangent of $\angle A$) $= \dfrac{1}{\text{tangent of } \angle A} = \dfrac{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}} = \dfrac{AB}{BC}$

ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A ಮತ್ತು cot A ಎಂದು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. cosec A, sec A ಮತ್ತು cot A ಈ ಅನುಪಾತಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ sin A, cos A ಮತ್ತು tan A ಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಹಾಗೆಯೇ $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ ಮತ್ತು $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅದ್ದರಿಂದ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ಲಘುಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು ಕೋನ ಮತ್ತು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಕೋನ C ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ನೀವೇಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬಾರದು? (ಚಿತ್ರ 11.5 ನ್ನು ನೋಡಿ)

'ಜ್ಯಾ' ಪದದ ಮೊದಲ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಆರ್ಯಭಟ (ಕ್ರಿ.ಪೂ 500) ರಚಿಸಿದ 'ಆರ್ಯಭಟಿಯಮ್' ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಆರ್ಯಭಟ ಬಳಸಿದ ಅರ್ಧ ಜ್ಯಾ (half - chord) ಪದವು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಂಡು "ಜ್ಯಾ" ಅಥವಾ "ಜೀವ" ಪದವನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ನಂತರದ ಭಾಷಾಂತರದಲ್ಲಿ "sinus" ಆಗಿ ಬದಲಾವಣೆ ಕಂಡಿತು. "sinus" ಅಂದರೆ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ "ವಕ್ರರೇಖೆ" ಎಂದರ್ಥ. ನಂತರ "sinus" ಪದವು "sine" ಆಗಿ ಬದಲಾಯಿತು. ಆಂಗ್ಲ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಎಡ್ಮಂಡ್ ಗುಂಟರ್ (1581 – 1626) ರವರು ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ "sine" ಪದವನ್ನು "sin" ಎಂದು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬಳಸಿದರು. ಆನಂತರದ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ cosine ಮತ್ತು tangent ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬಳಕೆ ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು. cosine ಅನುಪಾತವು "sine" ಅನುಪಾತದ ಪೂರಕ ಕೋನಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಅನುಪಾತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಯಿತು.

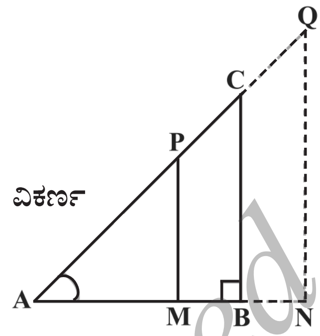
ಆರ್ಯಭಟ

ಕ್ರಿ.ಪೂ **476 – 550**

ಆರ್ಯಭಟ ಇದನ್ನು ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ "ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾ" ಎಂದು ನಮೂದಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. cosine ಪದವನ್ನು 'ಎಡ್ಮಂಡ್ ಗುಂಟರ್' ರವರು ಬಳಕೆಗೆ ತಂದರು. 1674 ರಲ್ಲಿ ಬ್ರಿಟಿಷ್ ಗಣಿತಜ್ಞ 'ಸರ್ ಜೀನರ್ ಮೂರ್' ರವರು ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ "cos" ಎಂದು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬಳಕೆ ಮಾಡಿದರು.

ಗಮನಿಸಿ : ಸಂಕೇತ sin A ಎಂಬುದು, A ಕೋನದ ಜ್ಯಾ (sine of angle of A) ದ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. sin A ಎಂಬುದು sin ಮತ್ತು A ಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವಲ್ಲ. A ಯಿಂದ ಬೇರ್ಪಟ್ಟ sin ಗೆ ಯಾವುದೇ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ cos A ಎಂಬುದು cos ಮತ್ತು A ಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವಲ್ಲ. ಇನ್ನುಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಿಗೂ ಈ ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ನಾವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ದ ವಿಕರ್ಣ AC ಯ ಮೇಲೆ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅಥವಾ ವೃದ್ಧಿಸಿದ AC ಯ ಮೇಲೆ Q ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. $PM \perp AB$ ಮತ್ತು QN ಅನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದು $\Delta PAB, \Delta CAB, \Delta QAN$ ಗಳಲ್ಲಿ $\angle A$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ಹೇಗೆ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.6

ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರಿಸಲು ಮೊದಲು ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನೋಡಿ. ΔPAM ಮತ್ತು ΔCAB ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆಯೇ? 2ನೇ ಘಟಕದಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಕೋನ – ಕೋನ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸಿ ΔPAM ಮತ್ತು ΔCAB ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ, ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC} =$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ, $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A$,

$\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$, ಇತ್ಯಾದಿ

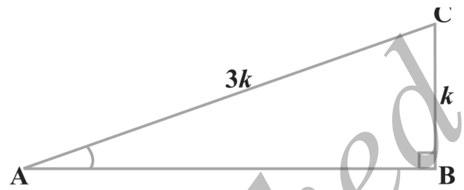
ಇದರಿಂದ ΔPAM ಯಲ್ಲಿನ ಕೋನ A ದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ಹಾಗೂ ΔCAB ಯಲ್ಲಿನ ಕೋನ A ದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಿಗೂ ಯಾವುದೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, ನೀವು ΔQAN ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ sin A ದ ಬೆಲೆ (ಇನ್ನುಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು) ಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ನಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುವ ಅಂಶವೇನೆಂದರೆ, ಒಂದು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯೊಂದಿಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಗಮನಿಸಿ: ನಮ್ಮ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ, $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ ಇತ್ಯಾದಿ ಇವುಗಳ ಬದಲಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ $\operatorname{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$(ಇದನ್ನು sinA ದ ವಿಲೋಮ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ) $\sin^{-1} A$ ದ ಅರ್ಥವು ಬೇರೆಯಾಗಿದೆ, ಇದನ್ನು ನೀವು ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೀರಿ. ಇನ್ನುಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ಬಾರಿ ಕೋನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ θ (ತೀಟಾ) ಬಳಕೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಲಘುಕೋನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ನಾವು ಆರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅನುಪಾತ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಉಳಿದ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದೇ? ಈಗ ನೋಡೋಣ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, $\sin A = \frac{1}{3}$ ಆದರೆ, ಇದರ ಅರ್ಥ $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ ಅಂದರೆ, ΔABC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ BC ಮತ್ತು AC ಗಳ ಅಳತೆಗಳು 1 : 3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 11.7 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಆದ್ದರಿಂದ BC ಯು k ಗೆ ಸಮನಾದರೆ, AC ಯು 3k ಗೆ ಸಮ. ಇಲ್ಲಿ k ಯು ಯಾವುದೇ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಕೋನ A ದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ΔABC ಯ ಮೂರನೇ ಬಾಹು AB ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನಿಮಗೆ ಪೈಥ-ಾಗೊರಾಸ್ ಪ್ರಮೇಯ ನೆನಪಿದೆಯೇ? ಅದನ್ನು ಬಳಸಿ ಬೇಕಾಗಿರುವ AB ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.



ಚಿತ್ರ 11.7

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - k^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}k)^2$$

$\therefore$ $\quad AB = \pm 2\sqrt{2}k$

$AB = 2\sqrt{2}k$ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. (AB ಯು $-2\sqrt{2}$ ಗೆ ಸಮವಲ್ಲ ಏಕೆ?)

ಈಗ, $\quad \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

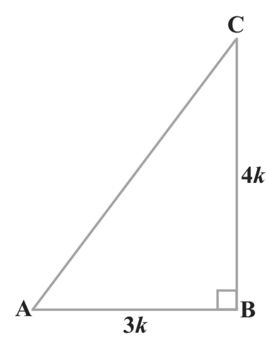
ಹಾಗೆಯೇ ಕೋನ A ದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಗಮನಿಸಿ: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣವು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, sin A ಮತ್ತು cos A ಗಳ ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಅಥವಾ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ 1ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುತ್ತದೆ).

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: $\tan A = \frac{4}{3}$ ಆದರೆ ಕೋನ A ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಮೊದಲು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 11.8 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 11.8

ಈಗ, $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

BC = 4k ಆದರೆ AB = 3k ಮತ್ತು k ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ

ಈಗ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\quad AC = 5k$

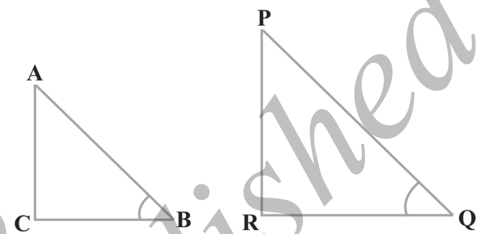
ಈಗ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಿಂದ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

$\therefore\ \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$; $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$ ಮತ್ತು $\sec A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}$

ಉದಾಹರಣೆ 2: $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle Q$ ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದು $\sin B = \sin Q$ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $\angle B = \angle Q$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.9

ಪರಿಹಾರ: $\triangle ABC$ ಮತ್ತು $\triangle PQR$ ಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $\sin B = \sin Q$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.9 ನೋಡಿ)

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

ಮತ್ತು $\sin Q = \frac{PR}{PQ}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆಗ $$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$$

$\therefore$ $$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k \text{ ಆಗಿರಲಿ} \qquad (1)$$

ಈಗ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

ಮತ್ತು $$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k$ .....(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

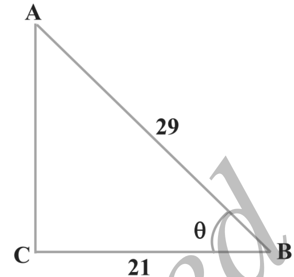
$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

ಆಗ, ಪ್ರಮೇಯ 2.4 ರಿಂದ $\Delta ACB \sim \Delta PQR$ ಮತ್ತು $\angle B = \angle Q$

ಉದಾಹರಣೆ 3: ΔACB ಯಲ್ಲಿ, AB = 29 ಮಾನಗಳು, BC = 21 ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು $\angle ABC = \theta$ (ಚಿತ್ರ 11.10 ನೋಡಿ) ಆದರೆ, ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$



ಚಿತ್ರ 11.10

ಪರಿಹಾರ: $\triangle ACB$ ಯಲ್ಲಿ,

$$AC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

$$= \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

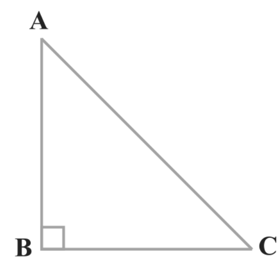
$$= \sqrt{(29-21)-(29+21)} = \sqrt{(8)\,(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ ಮಾನಗಳು}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$, $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$

ಈಗ, i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2+21^2}{29^2} = \frac{400+441}{841} = \frac{841}{841} = 1$

ಮತ್ತು, ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(20+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, B ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. tan A = 1 ಆದರೆ, 2sin A cos A = 1 ಆಗಿದೆಯೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 11.11

ಪರಿಹಾರ: $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (ಚಿತ್ರ 11.11 ನೋಡಿ)

ಅಂದರೆ, BC = AB

AB = BC = k ಆದರೆ, k ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ.

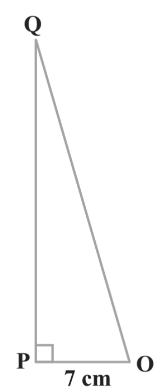
ಈಗ, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ಮತ್ತು $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $2\sin A\cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$, ಬೇಕಾದ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ

ಉದಾಹರಣೆ 5: $\triangle OPQ$ ಯಲ್ಲಿ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. OP = 7cm ಮತ್ತು OQ - PQ = 1cm (ಚಿತ್ರ 11.12ನೋಡಿ) sin Q ಮತ್ತು cos Q ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.12

ಪರಿಹಾರ: ΔOPQ ನಲ್ಲಿ,

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

ಅಂದರೆ, $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (ಏಕೆ?)

ಅಂದರೆ, $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

ಅಂದರೆ, $1 + 2PQ = 7^2$ (ಏಕೆ?)

ಅಂದರೆ, $PQ = 24$ cm ಮತ್ತು $OQ = 1 + PQ = 25$cm

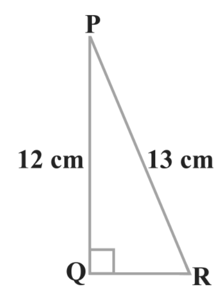
ಆದ್ದರಿಂದ, $\sin Q = \frac{7}{25}$ ಮತ್ತು $\cos Q = \frac{24}{25}$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, B ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. $AB = 24$cm, $BC = 7$cm ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) sin A, cos A

   ii) sin C, cos C



ಚಿತ್ರ 11.13

2. ಚಿತ್ರ 11.13 ರಲ್ಲಿ tan P - cot R ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $\sin A = \frac{3}{4}$ ಆದರೆ, cos A ಮತ್ತು tan A ಬೆಲೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಿ.
4. 15 cot A = 8 ಆದರೆ, sin A ಮತ್ತು sec A ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $\sec\theta = \frac{13}{12}$ ಆದರೆ, ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದು cos A = cos B ಆಗಿದೆ. $\angle A = \angle B$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ ಆದರೆ, i) $\frac{(1+\sin\theta)\ (1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)\ (1-\cos\theta)}$ ii) $\cot^2\theta$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 3 cot A = 4 ಆದರೆ, $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ ಆಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.
9. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^\circ$, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆದರೆ

   i) sin A cos C + cos A sin C

   ii) cos A cos C - sin A sin C ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ΔPQR ನಲ್ಲಿ $\angle Q = 90^\circ$, $PR + QR = 25$cm ಮತ್ತು $PQ = 5$ ಆಗಿದೆ sin P, cos P ಮತ್ತು tan P ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ ತಿಳಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) tan A ಬೆಲೆಯು ಯಾವಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ii) ಕೋನ A ದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ sec A = $\frac{12}{5}$ ಆಗಿದೆ

iii) ಕೋನ A ದ cosecant A ಅನ್ನು cos A ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

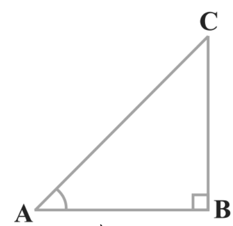
iv) cot A ಎಂಬುದು cot ಮತ್ತು A ಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣಲಬ್ಧ

v) θ ದ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ $\sin\theta = \frac{4}{3}$ ಆಗಿದೆ

11.3 ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ರೇಖಾಗಣಿತದಿಂದ, ನಿಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ 30°, 45°, 60° ಮತ್ತು 90° ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನ ಪರಿಚಯವಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು 0° ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಂತೆ, ಈ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

45^0 ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು



ಚಿತ್ರ 11.14

ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^0$, ಒಂದು ಕೋನವು 45^0 ಆದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ಕೋನವು 45^0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\angle A = \angle C = 45^0$ (ಚಿತ್ರ 11.14 ನೋಡಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ $BC = AB$ (ಏಕೆ?)

ಈಗ, $BC = AB = a$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಆಗ, ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

ಮತ್ತು, ಆದ್ದರಿಂದ $AC = a\sqrt{2}$

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$\sin 45^0 = \frac{45^0 \text{ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^0 = \frac{45^0 \text{ ಕೋನಕ್ಕೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

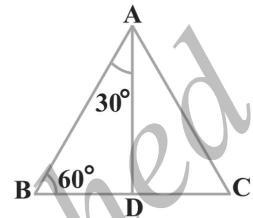
$$\tan 45^0 = \frac{45^0 \text{ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{45^0 \text{ ಕೋನಕ್ಕೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

ಹಾಗೆಯೇ,

$$\text{cosec } 45^0 = \frac{1}{\sin 45^0} = \sqrt{2}, \sec 45^0 = \frac{1}{\cos 45^0} = \sqrt{2}, \ \cot 45^0 = \frac{1}{\tan 45^0} = 1$$

30^o ಮತ್ತು 60^o ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ಇದೀಗ ನಾವು 30^0 ಮತ್ತು 60^0 ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸೋಣ. ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು 60^0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$. ಬಾಹು BC ಗೆ A ಯಿಂದ AD ಲಂಬ ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 11.15 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 11.15

ಈಗ, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ, $BD = DC$

ಮತ್ತು $\angle BAD = \angle CAD$ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಇದೀಗ ಗಮನಿಸಿ, ΔABD ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ, $\angle D = 90^0$ ಮತ್ತು $\angle BAD = 30^0$ ಹಾಗೂ $\angle ABD = 60^0$ ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 11.15 ನೋಡಿ)

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯು ತಿಳಿದಿರಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು $AB = 2a$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಆಗ, $BD = \frac{1}{2} BC = a$

ಮತ್ತು $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2,$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AD = a\sqrt{3}$

ಈಗ,

$$\sin 30^0 = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^0 = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ಹಾಗೂ,

$$\text{cosec } 30^0 = \frac{1}{\sin 30^0} = 2; \ \sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \ \cot 30^0 = \frac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3}$$

ಹಾಗೆಯೇ,

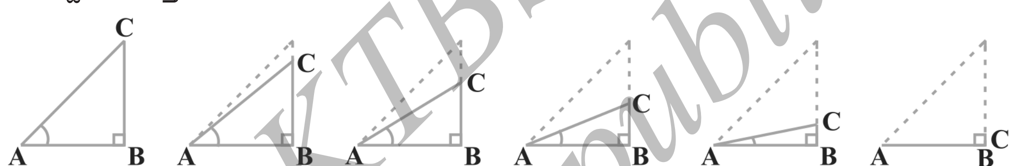
$$\sin 60^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos 60^0 = \frac{1}{2}, \ \tan 60^0 = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \ \sec 60^0 = 2 \text{ ಮತ್ತು } \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

0^0 ಮತ್ತು 90^0 ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ΔABC ಯಲ್ಲಿ ಕೋನ A ದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುತ್ತಾ, ಮಾಡುತ್ತಾ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವಂತೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಅದರ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನೋಡೋಣ. (ಚಿತ್ರ 11.16 ನೋಡಿ) ಕೋನ A ಕಡಿಮೆ ಆದಂತೆಲ್ಲ ಬಾಹು BC ಯ ಉದ್ದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. C ಬಿಂದುವು B ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\angle A = 0^0$ ಗೆ ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ AC ಯು ಸರಿಸುಮಾರು AB ಯಷ್ಟೇ ಆಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 11.17 ನೋಡಿ)

ಚಿತ್ರ 11.16



ಚಿತ್ರ 11.17

$\angle A$ ಯು 0^0 ಗೆ ಸಮೀಪವಾದಂತೆ, BC ಯು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\sin A = \frac{BC}{AC}$ ಯ ಬೆಲೆಯೂ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ $\angle A$ ಯು 0^0 ಗೆ ಸಮೀಪವಾದಂತೆ AC ಯು ಸಹ AB ಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ $\cos A = \frac{AB}{AC}$ ಯ ಬೆಲೆಯೂ 1 ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದು, ನಮಗೆ $A = 0^0$ ಆದಾಗ sin A ಮತ್ತು cos A ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಹೇಗೆ ಸಹಾಯವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$\sin 0^0 = 0$ ಮತ್ತು $\cos 0^0 = 1$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

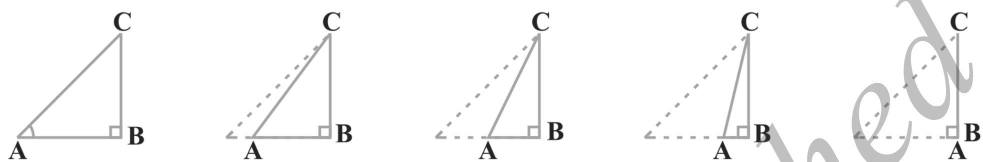
ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ,

$$\tan 0^0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = 0, \ \cot 0^0 = \frac{1}{\tan 0^0} = \text{ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ (ಏಕೆ?)}$$

$$\sec 0^0 = \frac{1}{\cos 0^0} = 1 \text{ ಮತ್ತು } \operatorname{cosec} 0^0 = \frac{1}{\sin 0^0} = \text{ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ (ಏಕೆ?)}$$

ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle A$ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಇನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಹೋದಾಗ $\angle A$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನೋಡೋಣ. $\angle A$

ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತ ಹೊಂದತೆಲ್ಲ $\angle C$ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕರಣದಂತೆ, ಬಾಹು AB ಯ ಉದ್ದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. A ಬಿಂದುವು B ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತದೆ. ಕೊನೆಗೆ $\angle A$ ಯು 90^0 ಗೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿದ್ದಂತೆ $\angle C$ ಯು 0^0 ಗೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಬಾಹು AC ಯು ಬಾಹು BC ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 11.18 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 11.18

$\angle C$ ಯು 0^0ಗೆ ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ, $\angle A$ ಯು 90^0ಗೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಬಾಹು AC ಯ ಉದ್ದವು ಬಾಹು BC ಗೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು sin A ಯು 1 ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ $\angle A$ ಯು 90^0 ಗೆ ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ, $\angle C$ ಯು 0^0ಗೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಬಾಹು AB ಯ ಅಳತೆ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ cos A ಯು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\sin 90^0 = 1$ ಮತ್ತು $\cos 90^0 = 0$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, ನೀವೇಕೆ 90^0ಯ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಾರದು?

ಪರಾಮರ್ಶೆಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ, 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 ಮತ್ತು 90^0 ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 11.1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 11.1

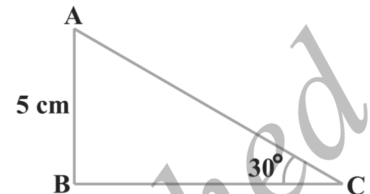
$\angle A$	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N.D
cosec A	N.D	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	N.D
cot A	N.D	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

* N.D → Not Defined (ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ)

ಗಮನಿಸಿ: ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ, $\angle A$ ಅಳತೆಯು 0^0 ಯಿಂದ 90^0 ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲ sin A ಬೆಲೆಯು 0 ಯಿಂದ 1 ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು cos A ಬೆಲೆಯು 1 ರಿಂದ 0 ಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: ΔABC ಯಲ್ಲಿ, B ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. AB = 5cm ಮತ್ತು $\angle ACB = 30^0$ (ಚಿತ್ರ 11.19 ನೋಡಿ) BC ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.19

ಪರಿಹಾರ: BC ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ನಾವು BC ಮತ್ತು ದತ್ತ AB ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. $\angle C$ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು BC ಮತ್ತು $\angle C$ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು AB ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

ಅಂದರೆ, $$\frac{5}{BC} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $$BC = 5\sqrt{3}$$

ಈಗ, AC ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\sin 30^0 = \frac{AB}{AC} \text{ (ಏಕೆ?)}$$

ಅಂದರೆ, $$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

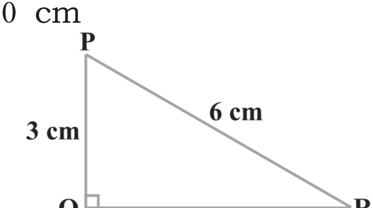
ಅಂದರೆ, $$AC = 10\,cm$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಅಂದರೆ,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}\,cm = 10\ cm$$

ಉದಾಹರಣೆ 7: ΔPQR ನಲ್ಲಿ, $\angle Q = 90^0$, PQ = 3cm, ಮತ್ತು PR = 6cm. $\angle QPR$ ಮತ್ತು $\angle PRQ$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.20

ಪರಿಹಾರ: ದತ್ತ: PQ = 3cm, ಮತ್ತು PR = 6cm

$\therefore$ $$\frac{PQ}{PR} = \sin R$$

ಅಥವಾ $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle PRQ = 30^0$ ಮತ್ತು $\angle QPR = 60^0$ (ಏಕೆ?)

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭಾಗ (ಲಘು ಕೋನ ಅಥವಾ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಾಹು) ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಉಳಿದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 8: $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, $0^0 < A + B \le 90^0$, $A > B$ ಆಗಿದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು B ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$ ಆದ್ದರಿಂದ, $A - B = 30^0$ (ಏಕೆ?) (1)

ಹಾಗೆಯೇ $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ ಆದ್ದರಿಂದ, $A + B = 60^0$ (ಏಕೆ?) (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದಾಗ,

$A = 45^0$ ಮತ್ತು $B = 15^0$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

iii) $\frac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \text{cosec } 30^0}$ iv) $\frac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \text{cosec } 45^0}{\sec 30^0 + \cos 60^0 + \cot 45^0}$

v) $\frac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

2. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $\frac{2\tan 30^0}{1 + \tan^2 30^0} =$

A) $\sin 60^0$ B) $\cos 60^0$ C) $\tan 60^0$ D) $\sin 30^0$

ii) $\frac{1 - \tan^2 45^0}{1 + \tan^2 45^0} =$

A) $\tan 90^0$ B) 1 C) $\sin 45^0$ D) 0

iii) $\sin 2A = 2\sin A$ ಎಂಬುದು A ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

A) 0^0 B) 30^0 C) 45^0 D) 60^0

iv) $\dfrac{2\tan 30^0}{1 - \tan^2 30^0} =$

A) $\cos 60^0$ B) $\sin 60^0$ C) $\tan 60^0$ D) $\sin 30^0$

3. $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\tan(A - B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $0^0 < A + B \leq 90^0$; $A > B$ ಆದರೆ, A ಮತ್ತು B ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ತಿಳಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$

ii) θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ $\sin\theta$ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

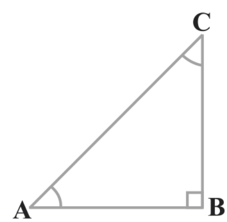
iii) θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ $\cos\theta$ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

iv) θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $\sin\theta = \cos\theta$ ಆಗಿದೆ

v) $A = 0^0$ ಗೆ $\cot A$ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ

11.4 ಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 90^0 ಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^0$ ಆಗಿದೆ. ನೀವು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? (ಚಿತ್ರ 11.21 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 11.21

$\angle A + \angle C = 90^0$ ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಅಂತಹ ಒಂದು ಜೋಡಿಯಾಗಿವೆ.

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ,

$$\left.\begin{array}{lll} \sin A = \dfrac{BC}{AC}, & \cos A = \dfrac{AB}{AC}, & \tan A = \dfrac{BC}{AB} \\ \text{cosec}\, A = \dfrac{AC}{BC}, & \sec A = \dfrac{AC}{AB}, & \cot A = \dfrac{AB}{BC} \end{array}\right\} \quad (1)$$

ಈಗ $\angle C = 90^0 - \angle A$ ದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

ನಮ್ಮ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ, $90^0 - \angle A$ ಅನ್ನು $90^0 - A$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ.

$90^0 - A$ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುಗಳು ಯಾವುದಾಗಿರಬಹುದು?

ಕೋನ $90^0 - A$ ಗೆ, AB ಯು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಮತ್ತು BC ಯು ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\left.\begin{array}{l} \sin(90^0 - A) = \frac{AB}{AC}, \cos(90^0 - A) = \frac{BC}{AC}, \tan(90^0 - A) = \frac{AB}{BC} \\ \\ \operatorname{cosec}(90^0 - A) = \frac{AC}{AB}, \sec(90^0 - A) = \frac{AC}{BC}, \cot(90^0 - A) = \frac{BC}{AB} \end{array}\right\} \quad (2)$$

ಈಗ (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿನ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, ನಾವು ಈ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$$\sin(90^0 - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A, \text{ ಮತ್ತು } \cos(90^0 - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

ಹಾಗೆಯೇ $\tan(90^0 - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A$, ಮತ್ತು $\cot(90^0 - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$

$$\sec(90^0 - A) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A, \text{ ಮತ್ತು } \operatorname{cosec}(90^0 - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$$

ಆದ್ದರಿಂದ 0^0 ಮತ್ತು 90^0 ನಡುವಿನ ಕೋನ A ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ,

$\sin(90^0 - A) = \cos A$, $\cos(90^0 - A) = \sin A$

$\tan(90^0 - A) = \cot A$, $\cot(90^0 - A) = \tan A$

$\sec(90^0 - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90^0 - A) = \sec A$

$A = 0^0$ ಮತ್ತು $A = 90^0$ಗೆ ಸರಿ ಹೊಂದುತ್ತದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಗಮನಿಸಿ: $\tan 0^0 = 0 = \cot 90^0$, $\sec 0^0 = 1 = \operatorname{cosec} 90^0$ ಮತ್ತು $\sec 90^0$, $\operatorname{cosec} 0^0$, $\tan 90^0$ ಮತ್ತು $\cot 0^0$ ಇವುಗಳು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ.

ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ :– $\frac{\tan 65^0}{\cot 25^0}$

ಪರಿಹಾರ: ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ,

$\cot A = \tan(90^0 - A)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cot A = \tan(90^0 - 25^0) = \tan 65^0$

ಅಂದರೆ, $\frac{\tan 65^0}{\cot 25^0} = \frac{\tan 65^0}{\tan 65^0} = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 10: $\sin 3A = \cos(A - 26^0)$, 3A ಲಘು ಕೋನವಾದರೆ, A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ದತ್ತದ ಪ್ರಕಾರ $\sin 3A = \cos(A - 26^0)$ (1)

$\sin 3A = \cos(90^0 - 3A)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ (1) ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\cos(90^0 - 3A) = \cos(A - 26^0)$$

$90^0 - 3A$ ಮತ್ತು $A - 26^0$ ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$90^0 - 3A = A - 26^0$$

$$\therefore A = 29^0$$

ಉದಾಹರಣೆ 11: $\cot 85^0 + \cos 75^0$ನ್ನು, 0^0 ಮತ್ತು 45^0 ನಡುವಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\cot 85^0 + \cos 75^0 = \cot(90^0 - 5^0) + \cos(90^0 - 15^0)$

$$= \tan 5^0 + \tan 15^0$$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

1. ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ:–

   i) $\dfrac{\sin 18^0}{\cos 72^0}$ ii) $\dfrac{\tan 26^0}{\cot 64^0}$ iii) $\cos 48^0 - \sin 42^0$

   iv) $\operatorname{cosec} 31^0 - \sec 59^0$

2. i) $\tan 48^0 \tan 23^0 \tan 42^0 \tan 67^0 = 1$

   ii) $\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38^0 \sin 52^0 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $\tan 2A = \cot(A - 18^0)$ ಮತ್ತು $2A$ ಲಘು ಕೋನವಾಗಿದೆ. A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. If $\tan A = \cot B$, $A + B = 90^0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

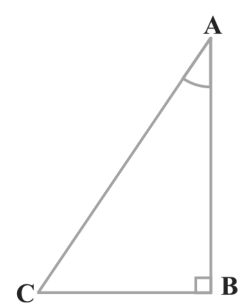
5. $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^0)$ ಮತ್ತು $4A$ ಒಂದು ಲಘುಕೋನ ಆದರೆ A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ΔABC ಯ ಒಳಕೋನಗಳಾದರೆ, $\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \cos\dfrac{A}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $\sin 67^0 + \cos 75^0$ ನ್ನು 0^0 ಮತ್ತು 45^0 ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

11.5 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು

ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವು ಸತ್ಯವಾದರೆ ಅದನ್ನು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 11.22

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. ಮುಂದಿನ ಇನ್ನುಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಬಳಸೋಣ.

ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^0$ (ಚಿತ್ರ 11.22 ನೋಡಿ)

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$$

(1) ರ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು AC^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

ಅಂದರೆ $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

ಅಂದರೆ $$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1 \qquad (2)$$

ಅಂದರೆ, $$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

ಇದು $0^0 \leq A = 90^0$ ಆಗುವಂತೆ A ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ. ಈಗ ನಾವು (1) ನ್ನು AB^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

ಅಥವಾ $$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

ಅಂದರೆ $$1 + \tan^2 A = \sec^2 A \qquad (3)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು $A = 0^0$ ಗೆ ನಿಜವೇ? ಹೌದು, ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $A = 90^0$ ಏನು? ಆಗಲಿ, tan A ಮತ್ತು sec A, $A = 90^0$ ಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $0^0 \leq A = 90^0$ ಆಗುವಂತೆ A ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಈಗ ನಾವು (1) ನ್ನು BC^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿಸೋಣ.

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

ಅಂದರೆ $$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ಅಂದರೆ $$\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A \qquad (4)$$

$A = 0^0$ ಗೆ cosec A ಮತ್ತು cot A ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $0^0 < A \leq 90^0$ ಆಗುವಂತೆ ಕೋನ A ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ (4) ನಿಜವಾಗಿದೆ.

ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅನುಪಾತ ತಿಳಿದಿದ್ದರೇ,

ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಈಗ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವುದೆಂದು ನೋಡೋಣ.

$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ

ಆಗ $\cot A = \sqrt{3}$

$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ಮತ್ತು $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ಮತ್ತು $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\operatorname{cosec} A = 2$

ಉದಾಹರಣೆ 12: $\cos A$, $\tan A$ ಮತ್ತು $\sec A$ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು $\sin A$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ ಅಂದರೆ, $\cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$

$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

ಮತ್ತು $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

ಉದಾಹರಣೆ 13: $\sec A (1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

ಪರಿಹಾರ:

ಎಡಭಾಗ $= \sec A (1 - \sin A)(\sec A + \tan A)$

$= \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$

$= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 =$ ಬಲಭಾಗ

ಉದಾಹರಣೆ 14: $\dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

ಪರಿಹಾರ:

ಎಡಭಾಗ $= \dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\dfrac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$= \frac{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\operatorname{cosec}A - 1}{\operatorname{cosec}A + 1}$$ = ಬಲಭಾಗ

ಉದಾಹರಣೆ 15: $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಬಳಸಿ,

$\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\sec\theta$ ಮತ್ತು $\tan\theta$ ಇರುವಂತಹ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ, ಎಡಭಾಗದ (ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ) ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡನ್ನು $\cos\theta$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು $\sec\theta$ ಮತ್ತು $\tan\theta$ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸೋಣ.

ಎಡಭಾಗ $= \dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$ = ಬಲಭಾಗ

ಅಭ್ಯಾಸ 11.4

1. sin A, sec A ಮತ್ತು tan A ಈ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು cot A ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.
2. $\angle A$ ದ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು sec A ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ

3. ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ:

i) $\dfrac{\sin^2 63^0 + \sin 27^0}{\cos^2 17^0 + \cos^2 73^0}$

ii) $\sin 25^0 \cos 65^0 + \cos 25^0 \sin 65^0$

4. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$

A) 1 B) 9 C) 8 D) 0

ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \csc\theta) =$

A) 0 B) 1 C) 2 D) -1

iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} =$

A) $\sec^2 A$ B) -1 C) $\cot^2 A$ D) $\tan^2 A$

5. ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$

ii) $\dfrac{\cos A}{1 + \sin A} + \dfrac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

iii) $\dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} = 1 + \sec\theta . \cos\theta$

[**ಸುಳುಹು:** $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\cos\theta$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಿ]

iv) $\dfrac{1 + \sec A}{\sec A} + \dfrac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$ [**ಸುಳುಹು:** ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

v) $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ,
$\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec}\, A + \cot A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

vi) $\sqrt{\dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$

vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[**ಸುಳುಹು:** ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

x) $\left(\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

11.6 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ.

1. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^0$

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$$

2. $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$; $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

3. ಲಘುಕೋನದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಆ ಕೋನದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

4. 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 ಮತ್ತು 90^0 ಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತದ ಬೆಲೆಗಳು

5. sin A ಅಥವಾ cos A ಬೆಲೆಯು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ, sec A ಅಥವಾ cosec A ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6. $\sin (90^0 - A) = \cos A$, $\cos (90^0 - A) = \sin A$

   $\tan (90^0 - A) = \cot A$, $\cot (90^0 - A) = \tan A$

   $\sec (90^0 - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec} (90^0 - A) = \sec A$

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1, 0^0 \leq A < 90^0$

   $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, 0^0 \leq A < 90^0$

❀ ❀ ❀

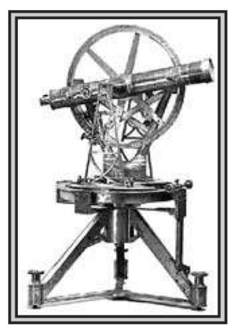
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳು

12

12.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲಿನ ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಹೇಗೆ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದೆವೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೀರಿ. ಜಗತ್ತಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪಂಡಿತರು ಅಭ್ಯಾಸಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಒಂದು ಪುರಾತನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯೂ ಒಂದು. 11ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಇದರ ಅನ್ವೇಷಣೆಯಾಯಿತು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು, ಭೂಮಿಯಿಂದ ಗ್ರಹಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷತ್ರಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಭೂಗೋಳ ಮತ್ತು ಸಮುದ್ರಯಾನದಲ್ಲಿ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ನಕ್ಷೆಗಳ ರಚನೆ, ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ದ್ವೀಪಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಸರ್ವೆಯರ್‌ಗಳು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಶತಮಾನಗಳಿಂದಲೇ ಬಳಕೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದುದು ಕಂಡು ಬಂದಿದೆ. ಬ್ರಿಟಿಷ್ ಭಾರತದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು 19ನೇ ಶತಮಾನದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಮೀಕ್ಷಾ ಯೋಜನೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಎರಡು ಬೃಹತ್ ಥಿಯೋಡಲೈಟ್‌ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿತ್ತು. 1852 ರಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಸಮೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಪಂಚದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು. ಸುಮಾರು 160 km ದೂರದಿಂದ, 6 ವಿವಿಧ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿತ್ತು. ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಥಿಯೋಡಲೈಟ್ಸ್‌ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಸರ್ ಜಾರ್ಜ್ ಎವರೆಸ್ಟ್ ರವರ ಹೆಸರಲ್ಲಿ ಈ ಪರ್ವತವನ್ನು ಮೌಂಟ್ ಎವರೆಸ್ಟ್ ಪರ್ವತ ಎಂದು 1856 ರಲ್ಲಿ ಕರೆಯಲಾಯಿತು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಿದ ಥಿಯೋಡಲೈಟ್ಸ್‌ಗಳನ್ನು ಈಗಲೂ ಸಹ ಡೆಹರಾಡೂನ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಸರ್ವೆ ಆಫ್ ಇಂಡಿಯಾದ ವಸ್ತು ಸಂಗ್ರಹಾಲಯದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದೆ.



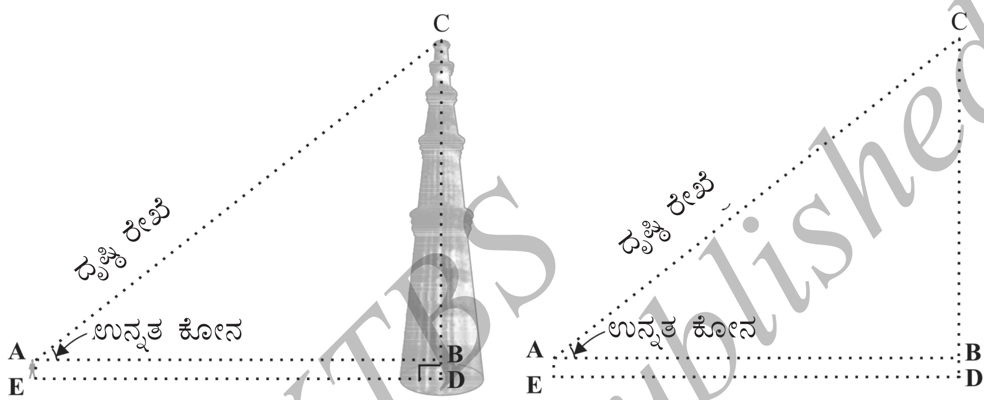
ಥಿಯೋಡಲೈಟ್

[ಸಮೀಕ್ಷಾ ಸಾಧನ, ಇದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ತತ್ವಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಭ್ರಮಿಸುವ ಟೆಲಿಸ್ಕೋಪ್(ದೂರದರ್ಶಕ) ದೊಂದಿಗೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.]

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರವನ್ನು ನೈಜವಾಗಿ ಅಳೆಯದೇ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯು ಹೇಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

12.2 ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ

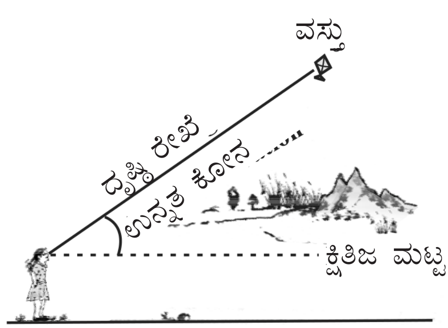
ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿನ ಚಿತ್ರ 11.1 ನ್ನು, ಇಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರ 12.1 ರಲ್ಲಿ ಪುನರ್ ಚಿತ್ರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.1

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಮಿನಾರ್‌ನ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆ AC ಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಮಿನಾರ್‌ನ ಮೇಲ್ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯೊಡನೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನ BAC ಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಮಿನಾರ್‌ನ ತುದಿಗೆ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

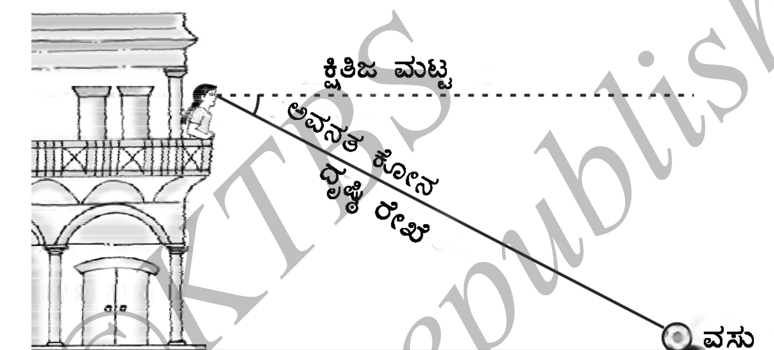
ಆದ್ದರಿಂದ, ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಯು ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ, ವೀಕ್ಷಕನು ಗಮನಿಸುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಮೇಲೆತ್ತಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 12.2 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 12.2

ಈಗ, 11.2 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಉಪ್ಪರಿಗೆ ಮೇಲೆ ಕುಳಿತಿರುವ ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು, ಕೆಳಗೆ ನೋಡುತ್ತಾ ದೇವಾಲಯದ ಮೆಟ್ಟಿಲ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಹೂ ಕುಂಡವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಯು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಕೆಳಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆಯೊಡನೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನವನ್ನು ಅವನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಕೆಳಗಿದ್ದರೆ ಅಂದರೆ, ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿಳಿಸಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆ ನಡುವೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಅವನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 12.3 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 12.3

ಈಗ, ನೀವು ಚಿತ್ರ 11.3 ರಲ್ಲಿನ ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಅವು ಉನ್ನತ ಕೋನ ಅಥವಾ ಅವನತ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆಯೇ?

ಈಗ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಚಿತ್ರ 12.1 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ನೈಜವಾಗಿ ಅಳೆಯದೇ, ಮಿನಾರ್‌ನ ಎತ್ತರ CD ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ ನಿಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಮಾಹಿತಿ ಏನು? ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಮಾಹಿತಿಗಳು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರಬೇಕು.

i) ಮಿನಾರ್‌ನ ಪಾದದಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ನಿಂತಿರುವ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ DE

ii) ಮಿನಾರ್‌ನ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನ $\angle BAC$

iii) ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಎತ್ತರ AE

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ನಿಬಂಧನೆಗಳು ತಿಳಿದಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಮಿನಾರ್ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ?

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $CD = CB + BD$ ಇಲ್ಲಿ $BD = AE$, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ. BC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, $\angle BAC$ ಅಥವಾ $\angle A$ ದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಬಳಸೋಣ.

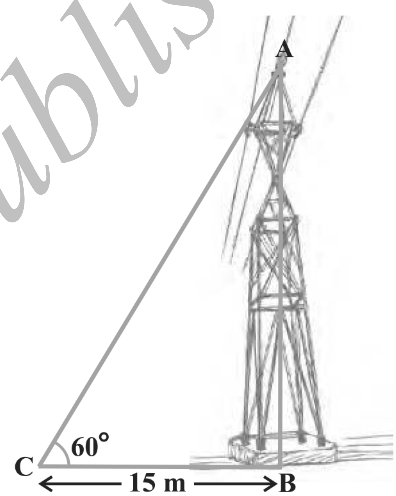
ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle A$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, BC ಯು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಾಗಿದೆ. ಈಗ, ನಾವು ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು? ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಮತ್ತು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ? ನಮ್ಮ ಹುಡುಕಾಟ ಕೊನೆಗೆ tan A ಅಥವಾ cot A ಗೆ ಬಂದು ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಅನುಪಾತಗಳು AB ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\tan A = \frac{BC}{AB}$ ಅಥವಾ $\cot A = \frac{AB}{BC}$, ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ BC ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

AE ಮತ್ತು BCಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ನಾವು ಮಿನಾರ್‌ನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಈಗ, ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿದಂತೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ಗೋಪುರವು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 15m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12.4

ಪರಿಹಾರ: ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, ಸರಳ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 12.4 ನೋಡಿ). ಇಲ್ಲಿ AB ಯು ಗೋಪುರವನ್ನು, CB ಯು ಗೋಪುರದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ ಮತ್ತು $\angle ACB$ ಯು ಉನ್ನತ ಕೋನ. ನಾವು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಅಂದರೆ, AB. ಹಾಗೂ ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^\circ$. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, ನಾವು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತ $\tan 60^\circ$ (ಅಥವಾ $\cot 60^\circ$) ಅನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡೋಣ, ಏಕೆಂದರೆ ಇದು AB ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಈಗ, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

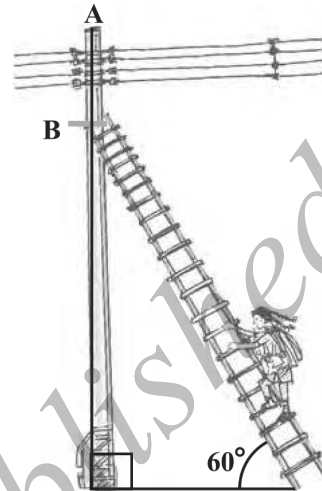
ಅಂದರೆ, $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

ಅಂದರೆ, $AB = 15\sqrt{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು $15\sqrt{3}$ m ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ವಿದ್ಯುಚ್ಛಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೊಬ್ಬರು 5m ಎತ್ತರದ ಕಂಬದ ಮೇಲೆ ವಿದ್ಯುತ್ ದೋಷವನ್ನು ದುರಸ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಕಂಬದ ಮೇಲ್ತುದಿಯಿಂದ 1.3m ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪಿ, ಅವರು

ದುರಸ್ತಿ ಕಾರ್ಯ ಮಾಡಬೇಕಿದೆ (ಚಿತ್ರ 12.5 ನೋಡಿ). ಕ್ಷಿತಿಜಕ್ಕೆ 60° ಕೋನ ಏರ್ಪಡುವಂತೆ ಓರೆಯಾಗಿ ಏಣಿಯನಿಟ್ಟು ಅವರು ತಲುಪಬೇಕಾದ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಲು ಬೇಕಾದ ಏಣಿಯ ಉದ್ದವೇನು? ಹಾಗೆಯೇ ಕಂಬದ ಪಾದದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಏಣಿಯ ಪಾದವಿರಬೇಕು? (ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ $\sqrt{3} = 1.73$ ಎಂದು ಬಳಸಬಹುದು)



ಚಿತ್ರ 12.5

ಪರಿಹಾರ : ಚಿತ್ರ 12.5 ರಲ್ಲಿ, ಕಂಬ AD ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು B ಗೆ ವಿದ್ಯುಚ್ಛಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ತಲುಪಬೇಕಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $BD = AD - AB = (5 - 1.3)\ m = 3.7\ m$

ಇಲ್ಲಿ, BC ಯು ಏಣಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ನಾವು ಇದರ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ BDC ಯ ವಿಕರ್ಣ

ಈಗ ನಾವು ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಯೋಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಅದು $\sin 60^\circ$ ಆಗಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{BD}{BC} = \sin 60^\circ$ ಅಥವಾ $\dfrac{3.7}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $BC = \dfrac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28\ m$ (ಅಂದಾಜಿಸಿದೆ)

ಅಂದರೆ, ಏಣಿಯ ಉದ್ದವು 4.28 m ಆಗಿರಬೇಕು

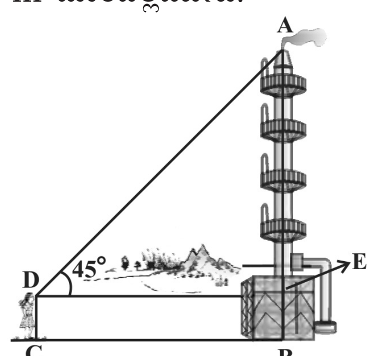
ಈಗ, $\dfrac{DC}{BD} = \cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ಅಂದರೆ, $DC = \dfrac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14\ m$ (ಅಂದಾಜಿಸಿದೆ)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆಕೆಯು ಏಣಿಯ ಪಾದವನ್ನು ಕಂಬದ ಪಾದದಿಂದ 2.14 m ದೂರದಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 3: 1.5m ಎತ್ತರವಿರುವ ವೀಕ್ಷಕರೊಬ್ಬರು ಚಿಮಣಿಯಿಂದ 28.5m ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ. ಚಿಮಣಿಯ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಅವರ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45° ಆಗಿದೆ. ಚಿಮಣಿಯ ಎತ್ತರವೇನು?

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ, AB ಯು ಚಿಮಣಿ, CD ವೀಕ್ಷಕ ಮತ್ತು $\angle ADE$ ಉನ್ನತ ಕೋನ (ಚಿತ್ರ 12.6 ನೋಡಿ) ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, ADE ಯು ತ್ರಿಭುಜ, $\angle E = 90^\circ$ ಮತ್ತು ನಾವೀಗ ಚಿಮಣಿಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.6

ಈಗ, $AB = AE + BE = AE + 1.5$

ಮತ್ತು $DE = CB = 28.5m$

AE ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, AE ಮತ್ತು DE ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಉನ್ನತ ಕೋನದ ಸ್ಪರ್ಶಕ (tangent) ವನ್ನು ಆರಿಸೋಣ.

ಈಗ, $\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$

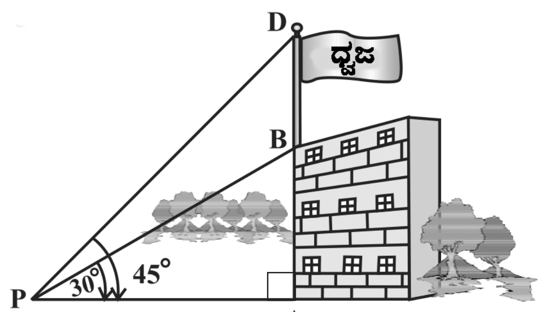
ಅಂದರೆ, $1 = \frac{AE}{28.5}$

$\therefore AE = 28.5$

ಆದ್ದರಿಂದ ಚಿಮಣಿಯ ಎತ್ತರ (AB) = $(28.5 + 1.5)m = 30m$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು P ನಿಂದ 10m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30°. ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲೆ ಧ್ವಜವನ್ನು ಹಾರಿಸಿದೆ ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಈ ಧ್ವಜ ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45°. ಹಾಗಾದರೆ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದವನ್ನು ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕಟ್ಟಡಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ)

ಪರಿಹಾರ: ಚಿತ್ರ 12.7 ರಲ್ಲಿ, AB ಯು ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು, BD ಯು ಧ್ವಜಸ್ತಂಭ ಮತ್ತು P ದತ್ತ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ΔPAB ಮತ್ತು ΔPAD. ನಾವು ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಂದರೆ DB ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕಟ್ಟಡಕ್ಕಿರುವ ದೂರ ಅಂದರೆ PA ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.7

ನಮಗೆ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ AB ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಮೊದಲು $\triangle PAB$ ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಈಗ, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AP}$

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

$\therefore AP = 10\sqrt{3}$

ಅಂದರೆ, ಬಿಂದು P ಯಿಂದ ಕಟ್ಟಡಕ್ಕಿರುವ ದೂರ $10\sqrt{3} = 17.32$ ಮುಂದೆ, ನಾವು $DB = x$ m ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಆಗ, $AD = (10 + x)$ m

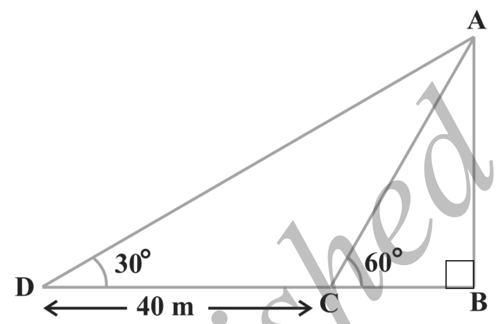
ಈಗ $\triangle PAD$ ಯಲ್ಲಿ $\tan 45^\circ = \frac{AD}{AP} = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

$\therefore 1 = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

ಅಂದರೆ, $x = 10(\sqrt{3} - 1) = 7.32$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದವು 7.32m

ಉದಾಹರಣೆ 5: ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತ ಸ್ತಂಭವೊಂದರ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು, ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗಿನ ಕೋನವು 60° ಇದ್ದಾಗ ಉಂಟಾದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ, 30° ಇದ್ದಾಗ ಉಂಟಾದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು 40m ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12.8

ಪರಿಹಾರ: ಚಿತ್ರ 12.8ರಲ್ಲಿ, AB ಯು ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ, BC ಯು ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗಿನ ಕೋನವು 60° ಇದ್ದಾಗ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ ಅಂದರೆ, ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ನೆರಳಿನ ತುದಿಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತಕೋನ 60° ಮತ್ತು DB ಯು ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗಿನ ಕೋನವು 30° ಇದ್ದಾಗ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, AB = 'h' m ಮತ್ತು BC = 'x' m ಆಗಿರಲಿ

ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಕಾರ, DB ಯು BC ಗಿಂತ 40m ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $DB = (40 + x)$m

ಈಗ, ನಮ್ಮ ಬಳಿ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿವೆ, $\triangle ABC$ ಮತ್ತು $\triangle ABD$.

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

ಅಥವಾ, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ (1)

$\triangle ABD$ ಯಲ್ಲಿ $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 40}$ (2)

(1) ರಿಂದ, $h = x\sqrt{3}$

ಇದನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40$

ಅಂದರೆ, $3x = x + 40$

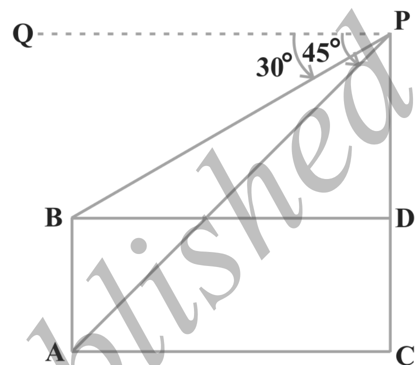
ಅಂದರೆ, $x = 20$

ಆದ್ದರಿಂದ, $h = 20\sqrt{3}$ [(1) ರಿಂದ]

$\therefore$ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವು $20\sqrt{3}$ m ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಒಂದು ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲಿನಿಂದ 8m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲ್ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 45° ಆಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಆ ಎರಡೂ ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಚಿತ್ರ 12.9 ರಲ್ಲಿ PC ಯು ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡವನ್ನು, AB ಯು 8m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ನಮಗೆ ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಅಂದರೆ, PC ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಅಂದರೆ, AC ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ಆಸಕ್ತಿ ಇದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.9

ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಗಮನಿಸಿ. PQ ಮತ್ತು BD ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ PB ಛೇದಕವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳಾದ $\angle QPB$ ಮತ್ತು $\angle PBD$ ಸಮವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\angle PBD = 30^\circ$

ಹಾಗೆಯೇ, $\angle PAC = 45^\circ$ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ PBD ಯಲ್ಲಿ,

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ಅಥವಾ } BD = PD = \sqrt{3}$$

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ PAC ಯಲ್ಲಿ

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45^\circ = 1$$

ಅಂದರೆ, $PC = AC$

ಹಾಗೂ $PC = PD + DC$, ಆದ್ದರಿಂದ $PD + DC = AC$

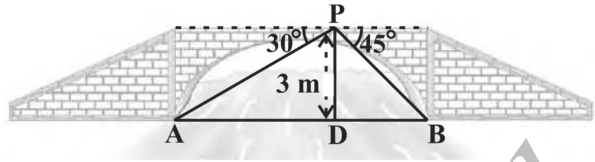
$AC = BD$ ಮತ್ತು $DC = AB = 8m$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $PD + 8 = BD = BD\sqrt{3}$ (ಏಕೆ?)

ಇದರಿಂದ, $PD = \dfrac{8}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1)m$

$\therefore$ ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡ ಎತ್ತರವು $\{4(\sqrt{3}+1)+8\}m = 4(3+\sqrt{3})$ m ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವು $4(3+\sqrt{3})$ m ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7: ನದಿಗೆ ಕಟ್ಟಲಾದ ಸೇತುವೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ನದಿಯ ಎರಡೂ ಪಾರ್ಶ್ವದ ದಡಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 45° ಆಗಿವೆ. ಸೇತುವೆಯು ದಡದ ಮೇಲಿನಿಂದ 3 m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಚಿತ್ರ 12.10 ರಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ನದಿಯ ಎರಡೂ ಪಾರ್ಶ್ವದ ದಡಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ AB ಯು ನದಿಯ ಅಗಲವಾಗಿದೆ. ನದಿಯ ಮೇಲಿನಿಂದ 3m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಸೇತುವೆ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು P ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ DP = 3m ನಾವು ΔAPB ಯ ಬಾಹು AB, ಅಂದರೆ ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.10

ಈಗ, $AB = AD + DB$

$\triangle APD$, ಯಲ್ಲಿ $\angle A = 90^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\tan 30^\circ = \dfrac{PD}{AD}$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{AD}$ ಅಥವಾ $AD = 3\sqrt{3}$ m

ಹಾಗೂ $\triangle PBD$ ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 45^\circ$

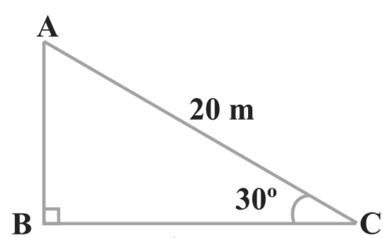
ಆದ್ದರಿಂದ, $BD = PD = 3$ m

ಈಗ, $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3})$ m

$\therefore$ ನದಿಯ ಅಗಲವು $3(\sqrt{3} + 1)$ m ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. ಒಬ್ಬ ಸರ್ಕಸಿನ ಕಲಾವಿದನು, ನೇರ ಸ್ತಂಭದಿಂದ ಹಿಗ್ಗಿಸಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿರುವ 20 m ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದ ಮೇಲೆ ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಹಗ್ಗದ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 30° ಆದರೆ, ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 12.11 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 12.11

2. ಬಿರುಗಾಳಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿ ಒಂದು ಮರವು ಮುರಿದು, ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದಾಗ ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 30° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಮರದ ತುದಿಯು ಮರದ ಬುಡದಿಂದ 8 m ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮುರಿದು ಬೀಳುವ ಮುನ್ನ ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಗುತ್ತಿಗೆದಾರರೊಬ್ಬರು ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಗಾಗಿ ಎರಡು ಜಾರುಬಂಡೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಯೋಜಿಸುತ್ತಾರೆ. 5 ವರ್ಷದ ಕೆಳಗಿನ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಇಳಿಜಾರು ಸುಮಾರು 1.5m ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ನೆಲಕ್ಕೆ 30° ಓರೆ ಕೋನ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಹಿರಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಜಾರುಬಂಡೆ ಸುಮಾರು

3m ಎತ್ತರ ಹಾಗೂ ನೆಲಕ್ಕೆ 60° ಓರೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಇಷ್ಟಪಡುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಜಾರುಬಂಡೆಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

4. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 30m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30° ಆದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಗಾಳಿಪಟವೊಂದು ನೆಲದ ಮೇಲಿನಿಂದ 60m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಲಾದ ದಾರವನ್ನು ತಾತ್ಕಲಿಕವಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದೆ. ದಾರವು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 60° ಯ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ದಾರವು ಸಡಿಲವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, ದಾರದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. 1.5m ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗನೊಬ್ಬ 30m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಕಟ್ಟಡದ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ನೆಡೆದು ಹೋಗುವಾಗ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30° ಯಿಂದ 60° ಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ಎಷ್ಟು ದೂರ ನೆಡೆದು ಬಂದಿದ್ದಾನೆ?

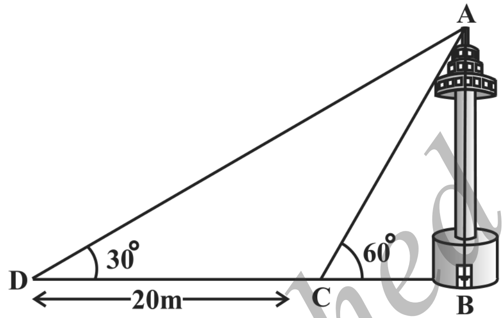
7. 20m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ಗೋಪುರವೊಂದರ (transmission tower) ಮೇಲ್ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 45° ಇದೆ. ಪ್ರಸರಣೆಯ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. 1.6m ಎತ್ತರದ ಪ್ರತಿಮೆಯೊಂದನ್ನು ಒಂದು ಪೀಠದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿಮೆಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60° ಮತ್ತು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪೀಠದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45° ಆಗಿದೆ. ಪೀಠದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲ್ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30° ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದ ಪಾದದಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60° ಇದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ 50m ಇದ್ದರೆ, ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. 80 ಅಡಿ ಅಗಲವುಳ್ಳ ರಸ್ತೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಎತ್ತರವಿರುವ 2 ಕಂಬಗಳು ಅಭಿಮುಖವಾಗಿ ನಿಂತಿವೆ. ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಕಂಬದ ಮೇಲ್ತುದಿಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 30° ಆಗಿದೆ. ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಬಗಳಿಂದ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಒಂದು ಕಾಲುವೆಯ ದಡದ ಮೇಲೆ ದೂರದರ್ಶನದ ಗೋಪುರವೊಂದು ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಗೋಪುರಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ದಡದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಪಾದವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ 20m ದೂರದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30° ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 12.12 ನೋಡಿ). ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಾಲುವೆಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

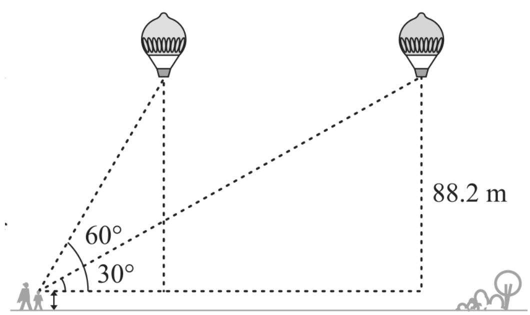


ಚಿತ್ರ 12.12

12. 7m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60° ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅವನತ ಕೋನವು 45° ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ 75m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ದೀಪಸ್ತಂಭವೊಂದರ ಮೇಲಿನಿಂದ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 45° ಆಗಿದೆ. ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಡಗಿನ ಹಿಂದೆ ಮತ್ತೊಂದಿದ್ದರೆ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. 1.2m ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗಿಯು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 88.2m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್‌ಗಳೆರಡು ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿ ತೇಲುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಒಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹುಡುಗಿಯ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಬಲೂನ್‌ಗೆ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60° ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯದ ನಂತರ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30° ಆಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 12.13 ನೋಡಿ). ಈ ಸಮಯದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್ ಚಲಿಸಿದ ದೂರವೆಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 12.13

15. ಒಂದು ನೇರ ಹೆದ್ದಾರಿಯೂ ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ದಾರಿಯಾಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತ ವ್ಯಕ್ತಿಯೊಬ್ಬರು ಏಕರೂಪ ಜವದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಿರುವ ಕಾರೊಂದನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾರೆ. ಕಾರಿನ ಅವನತ ಕೋನವು 30° ಆಗಿದೆ. 6 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ ಕಾರಿನ ಅವನತ ಕೋನವು 60° ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಬರಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವೆಷ್ಟು?

16. ಗೋಪುರವೊಂದರ ಪಾದದಿಂದ 4m ಮತ್ತು 6m ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕಗಳಾಗಿವೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು 6m ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12.3 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ.

1. (i) ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಯು ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ, ವೀಕ್ಷಕನು ಗಮನಿಸುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

   (ii) ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಮೇಲೆತ್ತಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

   (iii) ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಕೆಳಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿಳಿಸಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಅವನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

2. ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಥವಾ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

❀ ❀ ❀

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ 13

13.1 ಪೀಠಿಕೆ:

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಮತ್ತು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುವುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುತ್ತೀರಿ. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ, ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ (ವಿಭಿನ್ನ ಅಗಲವುಳ್ಳದ್ದೂ ಒಳಗೊಂಡಂತೆ) ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳೇ ಮುಂತಾದ ವಿವಿಧ ನಕ್ಷೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನೂ ಕಲಿತಿರುತ್ತೀರಿ. ಇದಲ್ಲದೇ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ, ಅಂದರೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳಾದ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಇವೇ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೂ ಮುಂದುವರೆಸಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಬೇಕಿದೆ.

ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ, ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ಮತ್ತು ಓಜೀವ್ (Ogive) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸುವುದು ಇವುಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಸಹ ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

13.2 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿ

ನಾವು ತಿಳಿದಂತೆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು, ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುತ್ತದೆ. $f_1, f_2, ... f_n$ ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x_1, x_2, ... x_n$ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳಾಗಿವೆ ಅಂದರೆ, x_1 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು f_1 ಸಲ, x_2 ವು f_2 ಸಲ ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಆವರ್ತವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಈಗ, ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $= f_1x_1 + f_2x_2 + ...+ f_nx_n$ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $= f_1 + f_2 + ...+ f_n$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಸರಾಸರಿಯು,

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ...+ f_nx_n}{f_1 + f_2 + ...+ f_n}$$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ನಾವು ಮೊತ್ತ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುವ ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ $\sum$ (ಸಿಗ್ಮಾ) ದಿಂದ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಅಂದರೆ, $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ಇನ್ನೂ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ i ಎಂಬುದು 1 ರಿಂದ n ವರೆಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದರ್ಥ.

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10ನೇ ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 100 ಅಂಕಗಳ ಗಣಿತ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

ಪರಿಹಾರ : ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪ್ರತಿ x_i ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿ f_i ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ ಎಂದು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 13.1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.1

ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು (x_i)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
ಒಟ್ಟು	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

ಈಗ, $$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು = 59.3

ನಮ್ಮ ಅನೇಕ ನೈಜ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಹಳ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ ಕಲಿಕೆಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಾಗಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನೀಡಿದ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಾಗಿ ಬದಲಿಸುವ ಅಗತ್ಯವು ನಮಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೆಲವು ವಿಧಾನವನ್ನು ರೂಪಿಸಬೇಕಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಪ್ತಿ 15 ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಾಗಿ ಬದಲಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಹಂಚುವಾಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳು ಯಾವುದೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 40 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು 40 – 55 ರಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕೇ ವಿನಹ ವರ್ಗಾಂತರ 25 – 40 ರಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲ. ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟು ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ (ಕೋಷ್ಟಕ 13.2 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಕೋಷ್ಟಕ 13.2

ವರ್ಗಾಂತರ	10 – 25	25 – 40	40 – 55	55 – 70	70 – 85	85 – 100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	7	6	6	6

ಈಗ, ಇಡೀ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಗತ್ಯ ನಮಗಿದೆ. *ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ.* ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಮಿತಿಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಅಂದರೆ,

$$\textbf{ಮಧ್ಯಬಿಂದು} = \frac{\textbf{ಮೇಲ್ಮಿತಿ} + \textbf{ಕೆಳಮಿತಿ}}{\mathbf{2}}$$

ಕೋಷ್ಟಕ 13.2 ರಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ವರ್ಗಾಂತರ 10 – 25 ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು $\frac{10 + 25}{2}$, ಅಂದರೆ, 17.5. ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು x_iಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಈಗ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ i ನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು f_i ಆಗಿದ್ದು ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು x_i ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಂತೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ನಾವು ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.3

ವರ್ಗಾಂತರ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	ಮಧ್ಯಬಿಂದು (x_i)	$f_i x_i$
10 – 25	2	17.5	35.0
25 – 40	3	32.5	97.5
40 – 55	7	47.5	332.5
55 – 70	6	62.5	375.0
70 – 85	6	77.5	465.0
85 – 100	6	92.5	555.0
ಒಟ್ಟು	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

ಕೊನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತವು ನಮಗೆ $\sum f_i x_i$ ನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯು,

$$\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಈ ಹೊಸ ವಿಧಾನವನ್ನು **"ನೇರ ವಿಧಾನ"** ಎನ್ನುವರು.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.1 ಮತ್ತು 13.3 ರಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಒಂದೇ ದತ್ತಾಂಶ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡರೂ ಪಡೆದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಏಕೆ ಹೀಗಾಗಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ಯೋಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ! ಮತ್ತು ಯಾವುದು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿದೆ? ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನೇ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವೆಂದು ಊಹಿಸಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಆ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. $\therefore$ 59.3 ಎಂಬುದು ನಿಖರ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದ್ದು, 62 ಎಂಬುದು ಸಮೀಪದ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ x_i ಮತ್ತು f_i ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ದೊಡ್ಡದಿದ್ದಾಗ x_i ಮತ್ತು f_i ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಮಯವು ಬೇಕಾಗಿದ್ದು ಇದು ತ್ರಾಸದಾಯಕವಾಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಚಾರಗಳನ್ನು ಕೆಲವೇ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನದ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚಿಸೋಣ.

ನಾವು f_i ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ ನಾವು ಪ್ರತಿ x_i ನ್ನು ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿಕೊಂಡರೆ ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದು? ಪ್ರತಿ x_i ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಮೊದಲ ಹಂತದಲ್ಲಿ x_i ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ಆರಿಸಿ, ಇದನ್ನು 'a' ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭಗೊಳಿಸಲು x_1, x_2, ... x_n ಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ x_i ನ್ನು 'a' ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು a = 47.5 ಅಥವಾ a = 62.5 ನ್ನು ಆರಿಸಬಹುದು. ನಾವು a = 47.5 ನ್ನು ಆರಿಸೋಣ.

ಮುಂದಿನ ಹಂತವು a ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು x_i ಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d_i ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿ x_i ಗಳಿಂದ a ಯ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಅಂದರೆ, $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

ಮೂರನೇ ಹಂತವು d_i ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ f_i ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ $f_i d_i$ ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಾಗಿದೆ. ಲೆಕ್ಕಚಾರಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 13.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.4

ವರ್ಗಾಂತರ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	ಮಧ್ಯಬಿಂದು (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 – 25	2	17.5	–30	–60
25 – 40	3	32.5	–15	–45
40 – 55	7	47.5	0	0
55 – 70	6	62.5	15	90
70 – 85	6	77.5	30	182
85 – 100	6	92.5	45	270
ಒಟ್ಟು	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋಷ್ಟಕ 13.4 ರಿಂದ, ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯು, $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ಈಗ, $\bar{d}$ ಮತ್ತು $\bar{x}$ ಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. d_i ನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಪ್ರತಿ x_i ಗಳಿಂದ a ನ್ನು ಕಳೆದಿದ್ದೆವು, ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಾಸರಿ $\bar{x}$ ನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು $\bar{d}$ ಗೆ 'a' ನ್ನು ಕೂಡುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಇದನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಈ ರೀತಿ ವಿವರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯು, $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$$\therefore \bar{d} = \frac{\sum f_i(x_i - a)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

$$\therefore \bar{x} = a + \bar{d}$$

ಅಂದರೆ, $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ಕೋಷ್ಟಕ 13.4 ರಿಂದ a, $\sum f_i d_i$ ಮತ್ತು $\sum f_i$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30}$$
$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 62 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು **'ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ'** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1: ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಿಂದ ಪ್ರತಿ x_i (ಅಂದರೆ, 17.5, 32.5, ... ಇತ್ಯಾದಿ)ನ್ನು a ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಪ್ರತಿ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯು ಒಂದೇ ಅಂದರೆ, 62 ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ (ಏಕೆ?). ನಾವು ವರ್ಗಾಂತರದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ 'a' ಯ ಬೆಲೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಸರಾಸರಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಆಗಲಾರದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪಡೆಯುವ ಸರಾಸರಿಯ ಬೆಲೆಯು 'a' ಯ ಆಯ್ಕೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.4 ನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ 4ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳು 15 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಕಂಬಸಾಲು – 4 ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 15 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, f_i ನೊಂದಿಗೆ ಗುಣಿಸಲು ನಾವು ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ (ಇಲ್ಲಿ 15 ಎಂಬುದು ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವಾಗಿದೆ.)

$\therefore \; u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ, a ಯು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು h ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ u_i ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಮೇಲಿನಂತೆ ಮುಂದುವರೆಯುವುದು (ಅಂದರೆ, $f_i u_i$ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರ $\sum f_i u_i$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು) $h = 15$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೋಷ್ಟಕ 13.5 ನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.5

ವರ್ಗಾಂತರ	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10 – 25	2	17.5	–30	–2	–4
25 – 40	3	32.5	–15	–1	–3
40 – 55	7	47.5	0	0	0
55 – 70	6	62.5	15	1	6
70 – 85	6	77.5	30	2	12
85 – 100	6	92.5	45	3	18
ಒಟ್ಟು	$\sum f_i = 30$				$\sum f_i u_i = 29$

$\bar{u} = \dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ ಆಗಿರಲಿ

ಇಲ್ಲಿ, ಪುನಃ $\overline{u}$ ಮತ್ತು $\overline{x}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} \text{ ಆಗಿದೆ.}$$

$$\therefore \quad \overline{u} = \frac{\sum f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_i x_i - a\sum f_i}{\sum f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}[\overline{x} - a]$$

$$\therefore \quad h\overline{u} = \overline{x} - a$$

ಅಂದರೆ, $\overline{x} = a + h\overline{u}$

$$\therefore \quad \overline{x} = a + h\left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right)$$

ಈಗ ಕೋಷ್ಟಕ 13.5 ರಿಂದ a, h, $\sum f_i u_i$ ಮತ್ತು $\sum f_i$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\overline{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು 62 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು **'ಹಂತ ವಿಚಲನಾ'** ವಿಧಾನ ಎನ್ನುವರು.

ನಾವು ಗಮನಿಸಿರುವುದೇನೆಂದರೆ:

- ಎಲ್ಲಾ d_i ಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಿದ್ದರೆ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನವು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.
- ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿಯು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.
- ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನಗಳು ನೇರ ವಿಧಾನದ ಸರಳೀಕೃತ ರೂಪಗಳಾಗಿವೆ.
- a ಮತ್ತು h ಗಳು ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಂತೆ ಇರದೇ $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ಆಗುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ ಸಹ $\overline{x} = a + h\overline{u}$ ಸೂತ್ರವು ಸೂಕ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಇದೇ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು, ಭಾರತದ ವಿವಿಧ ರಾಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳ ಗ್ರಾಮೀಣ ಭಾಗದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡಾವಾರು ಹಂಚಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರೂ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಸರಾಸರಿ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡವಾರು	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55	55 – 65	65 – 75	75 – 85
ರಾಜ್ಯಗಳು / ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	7	4	4	2	1

ಮೂಲ: *ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ನಡೆಸಿದ ಏಳನೆಯ ಸಮಗ್ರ ಭಾರತ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಮೀಕ್ಷೆ*

ಪರಿಹಾರ: ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು x_i ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ (ಕೋಷ್ಟಕ 13.6 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಕೋಷ್ಟಕ 13.6

ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡವಾರು	ರಾಜ್ಯಗಳು/ಕೇಂ.ಪ್ರ. ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	x_i
15 – 25	6	20
25 – 35	11	30
35 – 45	7	40
45 – 55	4	50
55 – 65	4	60
65 – 75	2	70
75 – 85	1	80

ಇಲ್ಲಿ $a = 50$, $h = 10$ ಆಗಿರಲಿ

ಈಗ $d_i = x_i - 50$ ಮತ್ತು $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

d_i ಮತ್ತು u_i ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಕೋಷ್ಟಕ 13.7 ರಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.7

ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡವಾರು	ರಾಜ್ಯಗಳು/ ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 – 25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25 – 35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35 – 45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45 – 55	4	50	0	0	200	0	0
55 – 65	4	60	10	1	240	40	4
65 – 75	2	70	20	2	140	40	4
75 – 85	1	80	30	3	80	30	3
ಒಟ್ಟು	$\sum f_i = 35$				1390	–360	–36

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 35$, $\sum f_i x_i = 1390$

$\sum f_i d_i = -360$, $\sum f_i u_i = -36$ ಎಂದು ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ.

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ, $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \left(\frac{-360}{35}\right) = 39.71$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ, $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$$= 50 + \left(\frac{-360}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಗ್ರಾಮೀಣ ಭಾಗದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಸರಾಸರಿ ಶೇಕಡಾ 39.71 ಆಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಎಲ್ಲಾ ಮೂರೂ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪಡೆದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಧಾನದ ಆಯ್ಕೆಯು x_i ಮತ್ತು f_i ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. x_i ಮತ್ತು f_i ಗಳು ಸಾಕಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದ್ದರೆ ನೇರ ವಿಧಾನವು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ. x_i ಮತ್ತು f_i ಗಳು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ ನಾವು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಅಥವಾ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರಗಳು ಅಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು x_i ಗಳು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ನಾವು d_i ಎಲ್ಲ ಗಳ ಸೂಕ್ತ ಭಾಜಕ h ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಏಕದಿನ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯು ಏನನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ?

ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	20 – 60	60 – 100	100 – 150	150 – 250	250 – 350	350 – 450
ಬೌಲರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	5	16	12	2	3

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು x_i ನ ಬೆಲೆಗಳು ದೊಡ್ಡದಾಗಿವೆ. ಆದರೂ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ. $a = 200$ ಮತ್ತು $h = 20$ ಆಗಿರಲಿ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಕೋಷ್ಟಕ 13.8 ರಂತೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.8

ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಬೌಲರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 – 60	7	40	–160	–8	–56
60 – 100	5	80	–120	–6	–30
100 – 150	16	125	–75	–3.75	–60
150 – 250	12	200	0	0	0
250 – 350	2	300	100	5	10
350 – 450	3	400	200	10	30
ಒಟ್ಟು	$\sum f_i = 45$				$\sum f_i u_i = -106$

ಈಗ $\bar{u} = \frac{-106}{45}$ $\therefore$ $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$

ಏಕದಿನ ಕ್ರಿಕೆಟ್‌ನಲ್ಲಿ 45 ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 152.89 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತೀರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 2: ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಮಾಡಲು ತಿಳಿಸಿ.

1. ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ನಡೆಸಿದ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ತರಗತಿಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು

ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ.

2. ನಿಮ್ಮ ನಗರದಲ್ಲಿ 30 ದಿನಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ಪ್ರತಿದಿನದ ಗರಿಷ್ಠ ತಾಪಮಾನವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

3. ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ (cm ಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ.

ಎಲ್ಲ ಗುಂಪಿನವರು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿದ ನಂತರ ಅವರಿಗೆ ಸೂಕ್ತವೆನಿಸಿದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

1. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ತಂಡವು ತಮ್ಮ 'ಪರಿಸರ ಅರಿವು ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ'ದ ಭಾಗವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ 20 ಮನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿತು. ಪ್ರತಿ ಮನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12	12 – 14
ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	2	1	5	6	2	3

ನೀವು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೀರಿ ಮತ್ತು ಏಕೆ?

2. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ನೌಕರರ ದಿನಗೂಲಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

ದಿನಗೂಲಿ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	100 – 120	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200
ನೌಕರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10

ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ನೌಕರರ ಸರಾಸರಿ ದಿನಗೂಲಿಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಮಕ್ಕಳ ದಿನನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವನ್ನು (Pocket allowance) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸರಾಸರಿ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವು ₹ 18 ಆದರೆ ಬಿಟ್ಟು ಹೋಗಿರುವ ಆವೃತ್ತಿ fನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಿನನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	6	9	13	f	5	4

4. ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವೈದ್ಯರ ಬಳಿ 30 ಮಹಿಳೆಯರು ತಪಾಸಣೆಗೊಳಗಾದರು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಅವರ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಲಾಯಿತು. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಈ ಮಹಿಳೆಯರ ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷದ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	65–68	68–71	71–74	74–77	77–80	80–83	83–86
ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆ	2	4	3	8	7	4	2

5. ಒಂದು ಚಿಲ್ಲರೆ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣು ಮಾರಾಟಗಾರರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದವು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ವಿತರಣೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	50 – 52	53 – 55	56 – 58	59 – 61	62 – 64
ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	15	110	135	115	25

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನೀವು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ?

6. ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 25 ಕುಟುಂಬಗಳ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ವೆಚ್ಚ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	100 – 150	150 – 200	200 – 250	250 – 300	300 – 350
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	5	12	2	2

ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO_2 ನ ಸಾರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು (ಮಿಲಿಯನ್‌ಗಳ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ppm ಗಳಲ್ಲಿ) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಗರದ 30 ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದೆ.

SO_2 ನ ಸಾರತೆ	ಆವೃತ್ತಿ
0.00 – 0.04	4
0.04 – 0.08	9
0.08 – 0.12	9
0.12 – 0.16	2
0.16 – 0.20	4
0.20 – 0.24	2

ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO_2 ನ ಸಾರತೆಯ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಬ್ಬ ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ವಾರ್ಷಿಕ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಾಖಲೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಿನಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0–6	6–10	10–14	14–20	20–28	28–38	38–40
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	11	10	7	4	4	3	1

9. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 35 ನಗರಗಳ ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು (ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ) ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣ (%)	45 – 55	55 – 65	65 – 75	75 – 85	85 – 95
ನಗರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	10	11	8	3

13.3 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕ (ರೂಢಿಬೆಲೆ)

ಬಹುಲಕ ಅಥವಾ ರೂಢಿಬೆಲೆಯು ದತ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಇರುವ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಅಂದರೆ, ಬಹುಲಕವು ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ ನಾವು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೆವು. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಒಂದೇ ಸಮನಾದ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಹು ಬಹುಲಕವುಳ್ಳ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಬಹು ಬಹುಲಕವುಳ್ಳದ್ದಾಗಿದ್ದರೂ ನಾವು ಏಕ ಬಹುಲಕದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳ್ಳೋಣ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಮೊದಲು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: 10 ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಬೌಲರನು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ಪರಿಹಾರ: ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0	1	2	3	4	5	6
ಪಂದ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	1	3	2	1	1	1

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬೌಲರನು ಗರಿಷ್ಠ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ 3) ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 2

ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಬಹುಲಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು **ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ** ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲು ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಬಹುಲಕವು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

$$\text{ಬಹುಲಕ} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

ಇಲ್ಲಿ l = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ.

h = ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ (ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವು ಸಮವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು)

f_1 = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

f_0 = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ, ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

f_2 = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ, ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ನಿದರ್ಶಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತಂಡವು ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶದ 20 ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಮೀಕ್ಷೆ ನಡೆಸಿತು. ಇದರಂತೆ ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿರುವ ಸದಸ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಕುಟುಂಬದ ಗಾತ್ರ	1 – 3	3 – 5	5 – 7	7 – 9	9 – 11
ಕುಟುಂಬದ ಸಂಖ್ಯೆ	7	8	2	2	1

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಟ ಆವೃತ್ತಿಯು 8 ಆಗಿದ್ದು ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವರ್ಗಾಂತರವು 3 – 5 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವು 3 – 5 ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ = 3 – 5,

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ $l = 3$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ $h = 2$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 8$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 7$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 2$

ಈಗ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ:

$$\text{ಬಹುಲಕ} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

$$= 3 + \left[\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right] \times 2$$

$$= 3 + \frac{2}{7}$$

$$= 3.286$$

$\therefore$ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 3.286 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಲ್ಲಿ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕ ಹಂಚಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದಲ್ಲದೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ

ಪರಿಹಾರ: ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ನ್ನು ನೋಡಿ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗರಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯು (ಅಂದರೆ, 7) ವರ್ಗಾಂತರ 40 – 45 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 40$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 15$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 7$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 3$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 6$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$$\text{ಬಹುಲಕ} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

$$= 40 + \left[\frac{7 - 3}{14 - 3 - 6}\right] \times 15 = 52 \text{ ಆಗುತ್ತದೆ.}$$

$\therefore$ ಅಂಕಗಳ ಬಹುಲಕವು 52

ಈಗ ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಿಂದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 62 ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

$\therefore$ ಗರಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು 52 ಆಗಿದ್ದು ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು 62 ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆಗಳು:

1. ಉದಾಹರಣೆ 6 ರಲ್ಲಿ ಬಹುಲಕವು ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದೆ ಆದರೆ ಇತರ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಇದು ಸರಾಸರಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಹ ಆಗಿರಬಹುದು.
2. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ಈ ಎರಡೂ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ನಮ್ಮ ಅವಶ್ಯಕತೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮೊದಲ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಬಹುಲಕವು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 3: ಚಟುವಟಿಕೆ 2 ರಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ತಂಡಗಳನ್ನೇ ಮುಂದುವರೆಸಿ ಅಲ್ಲಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ತಂಡಗಳಿಗೆ ವಹಿಸುವುದು ಪ್ರತಿ ತಂಡಕ್ಕೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತಿಳಿಸಿ ಅವರು ಇದನ್ನು ಸರಾಸರಿಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ಎರಡರ ಅರ್ಥವನ್ನು ವಿವರಿಸಲಿ.

ಸೂಚನೆ: ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರಗಳು ಅಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗಲೂ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	5 – 15	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55	55 – 65
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	21	23	14	5

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಈ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

2. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು 225 ವಿದ್ಯುತ್ ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಬಾಳಿಕೆ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80–100	100–120
ಆವೃತ್ತಿ	10	35	52	61	38	29

ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 200 ಕುಟುಂಬಗಳ ಒಟ್ಟು ಮಾಸಿಕ ಗೃಹೋಪಯೋಗಿ ವೆಚ್ಚದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಕುಟುಂಬಗಳ ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೆಚ್ಚ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1000 – 1500	24
1500 – 2000	40
2000 – 2500	33
2500 – 3000	28
3000 – 3500	30
3500 – 4000	22
4000 – 4500	16
4500 – 5000	7

4. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಭಾರತದ ರಾಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕ – ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಎರಡೂ ಅಳತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

ಪ್ರತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ರಾಜ್ಯಗಳು/ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
15 – 20	3
20 – 25	8
25 – 30	9
30 – 35	10
35 – 40	3
40 – 45	0
45 – 50	0
50 – 55	2

5. ದತ್ತ ವಿತರಣೆಯು ಏಕದಿನ ಅಂತರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವದ ಕೆಲವು ಉತ್ತಮ ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್‌ಗಳು ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳು	ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
3000 – 4000	4
4000 – 5000	18
5000 – 6000	9
6000 – 7000	7
7000 – 8000	6
8000 – 9000	3
9000 – 10000	1
10000 – 11,000	1

ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪ್ರತಿ 3 ನಿಮಿಷದ 100 ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋದ ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದ್ದಾನೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
ಆವೃತ್ತಿ	7	14	13	12	20	11	15	8

13.4 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ (ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ)

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತಿರುವಂತೆ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಒಂದು ಅಳತೆಯಾಗಿದ್ದು, ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಮೊದಲಾಗಿ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಈಗ 'n' ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು 'n' ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು $(\frac{n}{2})$ ನೇ ಮತ್ತು $(\frac{n}{2}+1)$ ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಾವು, ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 100 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 50 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು	20	29	28	33	42	38	43	25
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	28	24	15	2	4	1	20

ಮೊದಲಾಗಿ, ಅಂಕಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಒಂದು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.9

ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ್ತಿ)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
ಒಟ್ಟು	100

ಇಲ್ಲಿ $n = 100$, ಇದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಮಧ್ಯಾಂಕವು $(\frac{n}{2})$ ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಮತ್ತು $(\frac{n}{2}+1)$ ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, 50ನೇ ಮತ್ತು 51 ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.10

ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
20	6
25 ರ ವರೆಗೆ	6 + 20 = 26
28 ರ ವರೆಗೆ	26 + 24 = 50
29 ರ ವರೆಗೆ	50 + 28 = 78
33 ರ ವರೆಗೆ	78 + 15 = 93
38 ರ ವರೆಗೆ	93 + 4 = 97
42 ರ ವರೆಗೆ	97 + 2 = 99
43 ರ ವರೆಗೆ	99 + 1 = 100

ಈಗ ನಾವು ಈ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಂಬಿಸಲು ಇನ್ನೊಂದು ಕಂಬಸಾಲನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು *'ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಕಂಬಸಾಲು'* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.11

ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ,

50ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 28 (ಏಕೆ?)

51ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 29

$$\therefore \text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = \frac{28 + 29}{2} = 28.5$$

ಸೂಚನೆ: ಕಂಬಸಾಲು 1 ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲು 3 ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಕೋಷ್ಟಕ 13.11 ರ ಭಾಗವನ್ನು *ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕ* ಎನ್ನುವರು. 50% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 28.5 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು 50% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 28.5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಈ ಅಂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ 28.5 ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶದ ಮೂಲಕ ನೋಡೋಣ.

ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 53 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 100 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.12

ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
0 – 10	5
10 – 20	3
20 – 30	4
30 – 40	3
40 – 50	3
50 – 60	4
60 – 70	7
70 – 80	9
80 – 90	7
90 – 100	8

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ?

ಉತ್ತರವು 5 ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ?

20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅಂದರೆ, 0 – 10 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೊಂದಿಗೆ, 10 – 20 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಹ ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, 20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯು 5 + 3, ಅಂದರೆ, 8 ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ 10 – 20 ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯು 8 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು, ಅಂದರೆ, 30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, 40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, ..., 100 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು. ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 13.13 ರಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ್ದೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.13

ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ)
10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	5
20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	5 + 3 = 8
30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	8 + 4 = 12
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	12 + 3 = 15
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	15 + 3 = 18
60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	18 + 4 = 22
70 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	22 + 7 = 29
80 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	29 + 9 = 38
90 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	38 + 7 = 45
100 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	45 + 8 = 53

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು *"ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ"* ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ 10, 20, 30 .....100 ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲ್ಮಿತಿಗಳಾಗಿವೆ.

ನಾವು ಇದೇ ರೀತಿ, 0 ಅಥವಾ '0' ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ, 10 ಅಥವಾ 10 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ, 20 ಅಥವಾ 20 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಇತ್ಯಾದಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಂದು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಕೋಷ್ಟಕ 13.12 ರಿಂದ ಎಲ್ಲ 53 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 0 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 0 – 10 ರ ನಡುವಿನಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ ಅಂದರೆ, 53 – 5 = 48 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 1 ಅಥವಾ 10 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆಸಿ, 20 ಅಥವಾ 20 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕ ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 48 – 3 = 45, 30 ಅಥವಾ 30 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕ ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 45 – 4 = 41, ಇತ್ಯಾದಿ ಎಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 13.14 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.14

ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ)
0 ಅಥವಾ 0 ಗಿಂತ ಅಧಿಕ	53
10 ಅಥವಾ 10 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	53 – 5 = 48
20 ಅಥವಾ 20 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	48 – 3 = 45
30 ಅಥವಾ 30 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	45 – 4 = 41
40 ಅಥವಾ 40 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	41 – 3 = 38
50 ಅಥವಾ 50 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	38 – 3 = 35
60 ಅಥವಾ 60 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	35 – 4 = 31
70 ಅಥವಾ 70 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	31 – 7 = 24
80 ಅಥವಾ 80 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	24 – 9 = 15
90 ಅಥವಾ 90 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	15 – 7 = 8

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು *‘ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ’* ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ 0, 10, 20 .....90. ಇವು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಕೆಳಮಿತಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ, ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಯಾವುದೇ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.12 ಮತ್ತು 13.13 ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಪಡೆದ ಕೋಷ್ಟಕ 13.15ನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.15

ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f)	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ (c f)
0 – 10	5	5
10 – 20	3	8
20 – 30	4	12
30 – 40	3	15
40 – 50	3	18
50 – 60	4	22
60 – 70	7	29
70 – 80	9	38
80 – 90	7	45
90 – 100	8	53

ಈಗ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಮಧ್ಯದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಮೌಲ್ಯವಾಗಿರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಒಂದು ಇಡೀ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಆದರೆ ಇದು ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ?

ಈ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ನಾವು ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು $\frac{n}{2}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ನಾವು $\frac{n}{2}$ ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ (ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾದ) ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು *"ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ"* ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ, $n = 53$, ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{n}{2} = 26.5$. ಈಗ 60 – 70 ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯು 29, ಇದು $\frac{n}{2}$, ಅಂದರೆ 26.5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ (ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗಿದೆ) ಆದ್ದರಿಂದ 60 – 70 ಎಂಬುದು **ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ**ವಾಗಿದೆ.

ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಂತರ, ನಾವು ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

ಇಲ್ಲಿ, l = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ.

n = ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

cf = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

f = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

h = ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವು ಸಮವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು

$\frac{n}{2} = 26.5$, $l = 60$, $cf = 22$, $f = 7$, $h = 10$ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಮಧ್ಯಾಂಕ

$$= 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{7}\right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 66.4 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 66.4 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10ನೇ ತರಗತಿಯ 51 ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳಿಗೆ (cm ಗಳಲ್ಲಿ) ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲಾಯಿತು ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಯಿತು.

ಎತ್ತರ (**cm** ಗಳಲ್ಲಿ)	**ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ**
140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4
145 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	11
150 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	29
155 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	40
160 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	46
165 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	51

ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿತರಣೆಯು *ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ವಿತರಣೆ*ಯಾಗಿದ್ದು, 140, 145, 150, ..., 165. ಇವು ಅನುರೂಪ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲ್ಮಿತಿಗಳಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, 140 – 145, 145 – 150, ..., 160 – 165 ಇವು ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ದತ್ತ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ 4 ಬಾಲಕಿಯರು 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅಂದರೆ, 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು 4 ಆಗಿದೆ. ಈಗ 145 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ 11 ಬಾಲಕಿಯರು ಮತ್ತು 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ 4 ಬಾಲಕಿಯರು ಇದ್ದಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 140 – 145, ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 – 4 = 7 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, 145 – 150 ರ ಈ ಆವೃತ್ತಿಯು 29 – 11 = 18, 150 – 155 ರ ಆವೃತ್ತಿಯು 49 – 29 = 11 ಇತ್ಯಾದಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದ ನಮ್ಮ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯು ಈ ರೀತಿ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.16

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4	4
140 – 145	7	11
145 – 150	18	29
150 – 155	11	40
155 – 160	6	46
160 – 165	5	51

ಈಗ n = 51, $\therefore \frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 145 – 150 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 145 .

c f (145 – 150ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 11

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 145 – 150 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 18

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 5

ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$$= 145 + \left[\frac{25.5 - 11}{18}\right] \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 149.03 ಆಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ 50% ದಷ್ಟು ಬಾಲಕಿಯರು ಈ ಎತ್ತರಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ 50% ರಷ್ಟು ಬಾಲಕಿಯರು ಈ ಎತ್ತರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 525. ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಯು 100 ಆಗಿದ್ದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ
0 – 100	2
100 – 200	5
200 – 300	x
300 – 400	12
400 – 500	17
500 – 600	20
600 – 700	y
700 – 800	9
800 – 900	7
900 – 1000	4

ಪರಿಹಾರ :

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
0 – 100	2	2
100 – 200	5	7
200 – 300	x	$7 + x$
300 – 400	12	$19 + x$
400 – 500	17	$36 + x$
500 – 600	20	$56 + x$
600 – 700	y	$56 + x + y$
700 – 800	9	$65 + x + y$
800 – 900	7	$72 + x + y$
900 – 1000	4	$76 + x + y$

ಇಲ್ಲಿ, n = 100

$\therefore 76 + x + y = 100$ ಅಂದರೆ, $x + y = 24$ .... (1)

ಮಧ್ಯಾಂಕವು 525, ಇದು 500 – 600 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ

$\therefore l = 500,\ f = 20,\ cf = 36 + x,\ h = 100$

ಸೂತ್ರದಿಂದ, ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$$525 = 500 + \left[\frac{50 - 36 - x}{20}\right] \times 100$$

$$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

$$25 = 70 - 5x$$

$$5x = 70 - 25$$

$$5x = 45$$

$$\therefore \quad x = 9$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ $9 + y = 24$

$$y = 15$$

ಈಗ ನೀವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಮೂರೂ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದಿರಿ. ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಯಾವ ಅಳತೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ತ ಎಂಬುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಸರಾಸರಿಯು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ, ಇದು ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಅಂತ್ಯಗಳ, ಅಂದರೆ ದೊಡ್ಡ ಮತ್ತು ಚಿಕ್ಕ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಇದು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ಅನುವು ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಶಾಲೆಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಯಾವ ಶಾಲೆಯು ಉತ್ತಮ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಆದಾಗ್ಯೂ ದತ್ತಾಂಶದ ಅಂತ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಸರಾಸರಿಯ ಮೇಲೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಸರಾಸರಿಯು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಉತ್ತಮ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ ಎನಿಸುತ್ತದೆ ಆದರೆ, ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರ ಆವೃತ್ತಿಯು ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2 ಆಗಿದ್ದು ಉಳಿದ ಇದು ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 20, 25, 20, 21, 18 ಈ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾಗ, ಸರಾಸರಿಯು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ವರ್ತನೆಯನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ, ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಉತ್ತಮ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ ಆಗಲಾರದು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಎಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಲ್ಲವೋ ಅಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಅದನ್ನು 'ವಿಶಿಷ್ಟ' ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇಚ್ಛಿಸಿದಾಗ ಮಧ್ಯಾಂಕವು ಅತ್ಯಂತ ಸೂಕ್ತವೆನಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆಲಸಗಾರರ ವಿಶಿಷ್ಟ ಉತ್ಪಾದನಾ ದರ, ಒಂದು ದೇಶದ ಸರಾಸರಿ ವೇತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಇದ್ದರೂ, ಸರಾಸರಿಯ ಬದಲಾಗಿ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಉತ್ತಮ ಅಳತೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಆವರ್ತವಾಗುವ ಮೌಲ್ಯ ಅಥವಾ ಅತಿ ಜನಪ್ರಿಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಲಕವು ಉತ್ತಮ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವೀಕ್ಷಿಸುವ ಅತಿ ಜನಪ್ರಿಯ ಟಿ.ವಿ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ, ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೇಡಿಕೆಯ ಗ್ರಾಹಕ ವಸ್ತು, ಹೆಚ್ಚು ಜನರು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಾಹನದ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ.

ಗಮನಿಸಿ:

1. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಗಳ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳ ನಡುವೆ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಬಂಧವಿದೆ

3 ಮಧ್ಯಾಂಕ = ಬಹುಲಕ + 2 ಸರಾಸರಿ

2. ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರಗಳು ಅಸಮವಿದ್ದಾಗ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಆದಾಗ್ಯೂ ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಇದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 68 ಗ್ರಾಹಕರ ಮಾಸಿಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ
65 – 85	4
85 – 105	5
105 – 125	13
125 – 145	20
145 – 165	14
165 – 185	8
185 – 205	4

2. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 28.5 ಆಗಿದ್ದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ
0 – 10	5
10 – 20	x
20 – 30	20
30 – 40	15
40 – 50	y
50 – 60	5
ಒಟ್ಟು	60

3. ಒಬ್ಬ ಜೀವ ವಿಮಾ ಏಜೆಂಟನು ಪಡೆದ 100 ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ವಿತರಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ. ಪಾಲಿಸಿಗಳನ್ನು 18 ವರ್ಷ ದಾಟಿದ ಮತ್ತು 60 ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ವಯಸ್ಸಿರುವ ಜನರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ನೀಡಿದ್ದರೆ, ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	2
25 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	6
30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	24
35 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	45
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	78
45 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	89
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	92
55 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	98
60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	100

4. ಒಂದು ಗಿಡದ 40 ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸಮೀಪದ ಮಿಲಿಮೀಟರ್‌ಗೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ.

ಉದ್ದ (mm ಗಳಲ್ಲಿ)	ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
118 – 126	3
127 – 135	5
136 – 144	9
145 – 153	12
154 – 162	5
163 – 171	4
172 – 180	2

ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[**ಸುಳುಹು:** ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಸೂತ್ರವು ನಿರಂತರ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ

ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 117.5 – 126.5, 126.5 – 135.5, ..., 171.5 – 180.5 ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ.]

5. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 400 ನಿಯಾನ್ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ಬಾಳಿಕೆ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1500 – 2000	14
2000 – 2500	56
2500 – 3000	60
3000 – 3500	86
3500 – 4000	74
4000 – 4500	62
4500 – 5000	48

ಬಲ್ಬ್‌ನ ಬಾಳಿಕೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಸ್ಥಳೀಯ ದೂರವಾಣಿ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಿ (Telephone directory) ಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ 100 ಉಪನಾಮಗಳನ್ನು (surname) ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಆಂಗ್ಲಭಾಷಾ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1 – 4	4 – 7	7 – 10	10 – 13	13 – 16	16 – 19
ಉಪನಾಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	30	40	16	4	4

ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ. ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಅಲ್ಲದೆ, ಉಪನಾಮಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

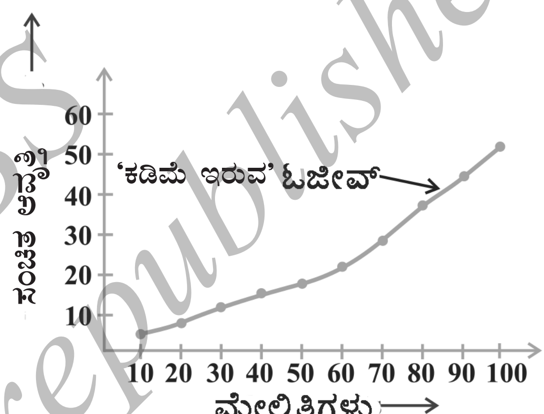
ತೂಕ (**kg** ಗಳಲ್ಲಿ)	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	8	6	6	3	2

13.5 ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು

ನಾವೆಲ್ಲರೂ ತಿಳಿದಂತೆ ಪದಗಳಿಗಿಂತ ಚಿತ್ರಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿವೆ. ಒಂದು ನೋಟದಲ್ಲೇ ನೀಡಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ನಕ್ಷಾ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯು ನಮಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು, ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ, ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ (ಆಯತ ಚಿತ್ರ) ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಒಂದು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೋಷ್ಟಕ 13.13 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

10, 20, 30, ..., 100, ಈ ಬೆಲೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲ್ಮಿತಿಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.



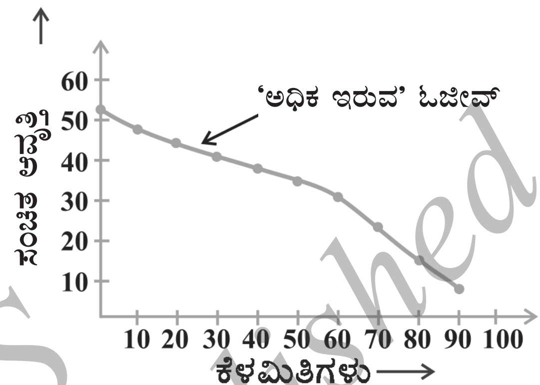
ಚಿತ್ರ 13.1

ಕೋಷ್ಟಕದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ನಾವು ಅನುಕೂಲ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಕ್ಷಿತಿಜ ಅಕ್ಷ (x – ಅಕ್ಷ)ದ ಮೇಲೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲ್ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಲಂಬ ಅಕ್ಷ (y – ಅಕ್ಷ) ದ ಮೇಲೆ ಅನುರೂಪ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಈಗ (ಮೇಲ್ಮಿತಿ, ಅನುರೂಪ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) ಯಂತೆ ಅನುರೂಪ ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳು ಅಂದರೆ, (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷಾ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧನಗಳ ನೆರವಿಲ್ಲದೆ ಸೇರಿಸೋಣ. ಈಗ ನಾವು ಪಡೆದ ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು **ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖೆ** ಅಥವಾ **ಓಜೀವ್** (ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 13.1 ನ್ನು ನೋಡಿ)

> ಓಜೀವ್ ಎಂಬುದು ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ 'Ogive' ಆದರೂ 'Ojeev' (ಓಜೀವ್) ಎಂದು ಉಚ್ಚರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪದವು "Ogee" (ಓಗೀ) ಪದದಿಂದ ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ. Ogee (ಓಗೀ) ಎಂಬುದು ಒಂದು ನಿಮ್ನ ಕಂಸವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಆಕಾರವಾಗಿದ್ದು ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತಾ ಪೀನ ಕಂಸವಾಗುತ್ತದೆ, ಇದರಿಂದ S ಆಕಾರದ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಲಂಬ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತುಶಿಲ್ಪದ ಪ್ರಕಾರ Ogee ಯ ಆಕಾರವು 14 ಮತ್ತು 15 ನೇ ಶತಮಾನಗಳ ಗೋಥಿಕ್ ಶೈಲಿಯ ಲಕ್ಷಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ.

ನಂತರ ಪುನಃ ನಾವು ಕೋಷ್ಟಕ 13.14 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಇದರ 'ಓಜೀವ್'ನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ (ಅಧಿಕ ವಿಧಾನದ).

ಇಲ್ಲಿ, 0, 10, 20, ... 90 ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 0 – 10, 10 – 20.... 90 –100. ಈ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಕೆಳಮಿತಿಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. 'ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನ' ದ ಓಜೀವ್‌ನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ನಾವು ಕೆಳಮಿತಿಗಳನ್ನು x – ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು y – ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಬೇಕಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ (ಕೆಳಮಿತಿ, ಅನುರೂಪ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) ಯಂತೆ ಅಂದರೆ, (0, 53), (10, 48), (20, 45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷಾ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧನಗಳ ನೆರವಿಲ್ಲದೆ ಸೇರಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ಪಡೆದ ರೇಖೆಯೇ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖೆ ಅಥವಾ ಓಜೀವ್ (ಅಧಿಕ ವಿಧಾನದ) (ಚಿತ್ರ 13.2 ನ್ನು ನೋಡಿ)

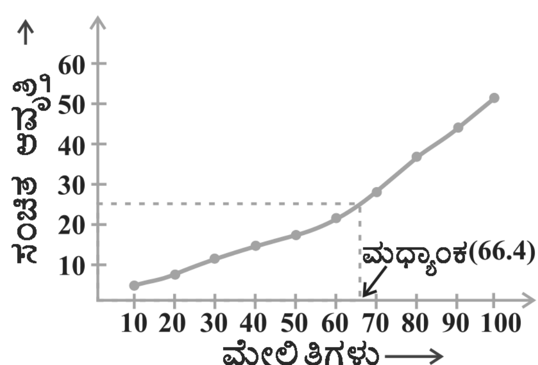


ಚಿತ್ರ 13.2

ಗಮನಿಸಿ: ಚಿತ್ರ 13.1 ಮತ್ತು 13.2 ರಲ್ಲಿರುವ ಎರಡೂ ಓಜೀವ್‌ಗಳು ಕೋಷ್ಟಕ 13.12ರ ಒಂದೇ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಈಗ ಓಜೀವ್‌ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿವೆಯೇ? ಕೋಷ್ಟಕ 13.12 ರ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವ ಈ ಎರಡು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಈಗ ಅದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

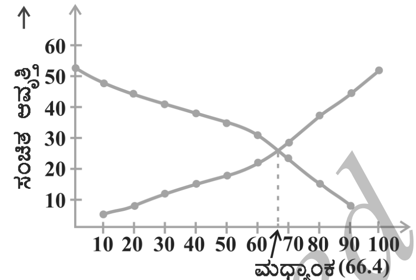
ಒಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ, $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ ನ್ನು y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 13.3 ನ್ನು ನೋಡಿ), ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವಂತೆ x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನಂತರ ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆ ಲಂಬವು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 13.3 ನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 13.3

ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಒಂದೇ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಎರಡೂ ಓಜೀವ್‌ಗಳನ್ನು (ಅಂದರೆ, ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ) ರಚಿಸಿ. ಎರಡೂ ಓಜೀವ್‌ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವು ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 13.4 ನ್ನು ನೋಡಿ)



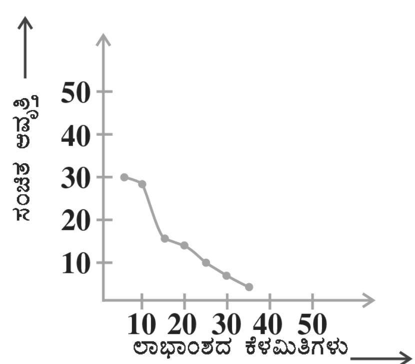
ಚಿತ್ರ 13.4

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ವ್ಯಾಪಾರ ಮಳಿಗೆಯ 30 ಅಂಗಡಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ವಾರ್ಷಿಕ ಲಾಭದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

ಲಾಭ (ಲಕ್ಷ ₹. ಗಳಲ್ಲಿ)	ಅಂಗಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ್ತಿ)
5 ಅಥವಾ 5 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	30
10 ಅಥವಾ 10 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	28
15 ಅಥವಾ 15 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	16
20 ಅಥವಾ 20 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	14
25 ಅಥವಾ 25 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	10
30 ಅಥವಾ 30 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	7
35 ಅಥವಾ 35 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	3

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಎರಡೂ ಓಜೀವ್‌ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅದರಿಂದ ಲಾಭಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ನಾವು ಮೊದಲು, x – ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಲಾಭಾಂಶದ ಕೆಳಮಿತಿಗಳು ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಇರುವಂತೆ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ ನಂತರ (5, 30), (10, 28), (15, 16, (20, 14), (25, 10), (30, 7) ಮತ್ತು (35, 3) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧನಗಳ ನೆರವಿಲ್ಲದೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ "ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ಓಜೀವ್‌ನ್ನು ಚಿತ್ರ 13.5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು, ಅವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.



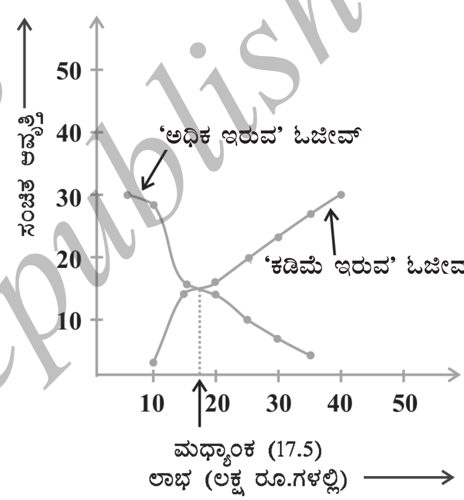
ಚಿತ್ರ 13.5

ಕೋಷ್ಟಕ 13.17

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
ಅಂಗಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	12	2	4	3	4	3
ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	2	14	16	20	23	27	30

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚಿತ್ರ 13.5 ರಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲೇ (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಚಿತ್ರ 13.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ 'ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ' ಓಜೀವ್ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ಓಜೀವ್‌ಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ (ಕ್ಷಿತಿಜ ಭುಜ)ವು 17.5 ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿದೆ. ಇದು ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದಲೂ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಲಾಭದ ಮಧ್ಯಾಂಕವು ರೂ 17.5 (ಲಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 13.6

ಗಮನಿಸಿ: ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿದ್ದವು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಓಜೀವ್‌ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು (9ನೇ ತರಗತಿಯ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ / ಆಯತ ಚಿತ್ರಗಳ ರಚನೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ)

ಅಭ್ಯಾಸ 13.4

1. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ಕೆಲಸಗಾರರ ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	100 – 120	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10

ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಯನ್ನು "ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ.

2. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 35 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳು, ಅವರ ವೈದ್ಯಕೀಯ ತಪಾಸಣೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದಾಖಲಾದವು.

ತೂಕಗಳು (kg ಗಳಲ್ಲಿ)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
38 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	0
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	3
42 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	5
44 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	9
46 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	14
48 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	28
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	32
52 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	35

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ "ಕಡಿಮೆ ವಿಧಾನ" ದ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ.

3. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 100 ಹೊಲಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗೆ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಗೋಧಿಯ ಇಳುವರಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ಉತ್ಪಾದನಾ ಇಳುವರಿ (**kg/ ha** ಗಳಲ್ಲಿ)	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80
ಹೊಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	8	12	24	38	16

ಈ ವಿತರಣೆಯನ್ನು "ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ, ಇದರ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ.

13.6 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ

1. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನೇರ ವಿಧಾನ: $$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ: $$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ: $$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಿಕೃತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ.

2. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\text{ಬಹುಲಕ} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತಗಳು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ

3. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

4. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತಗಳು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

5. ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯಾಗಿ ಅಥವಾ ಓಜೀವ್ ಆಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

6. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಎರಡೂ ಓಜೀವ್‌ಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವೇ ಆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಇದನ್ನು ನಾವು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಓದುಗರಿಗೆ ಸೂಚನೆ

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವ ಮೊದಲು ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಖಚಿತ ಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇದೇ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಓಜೀವ್ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯಿಸಬೇಕು. ಓಜೀವ್‌ಗಳ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

❀ ❀ ❀

ಸಂಭವನೀಯತೆ 14

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and great practical importance.

- R.S. Woodward.

ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ದೋಷಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಒಟ್ಟಾಗಿ ವಿಶೇಷ ಗಣಿತೀಯ ಆಸಕ್ತಿ ಮತ್ತು ವಿಶೇಷ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ವ್ಯಾಪಿಸಿದೆ.

ಆರ್. ಎಸ್. ವುಡ್‌ವರ್ಡ್.

14.1 ಪೀಠಿಕೆ

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ನೈಜ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಘಟನೆಗಳ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ (ಅಥವಾ ಅನುಭವವೇದ್ಯ) ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 1000 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೆವು ಅಲ್ಲಿ ಫಲಿತಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದ್ದವು.

ಶಿರ : 455 ಪುಚ್ಛ : 545

ಈ ಪ್ರಯೋಗದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ, ಶಿರ ಪಡೆಯುವ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{455}{1000}$, ಅಂದರೆ, 0.455 ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.545 (9ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಅಧ್ಯಾಯ 15ರ ಉದಾಹರಣೆ 1ನ್ನು ಸಹ ನೋಡಿ). ಈ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 1000 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದ ನೈಜ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು *ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಥವಾ ಅನುಭವ ವೇದ್ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು* ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ನೈಜ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಘಟನೆಗಳು ಸಂಭವಿಸುತ್ತಿರುವ ಸಾಕಷ್ಟು ದಾಖಲೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲಿವೆ.

ಇದಲ್ಲದೆ, ಇವು ಕೇವಲ 'ಅಂದಾಜು' ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳಾಗಿವೆ. ನಾವು ಇದೇ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು

ಪುನಃ 1000 ಸಲ ನಿರ್ವಹಿಸಿದರೆ ನಾವು ಭಿನ್ನವಾದ ಅಂದಾಜು ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಭಿನ್ನವಾದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನೀವು ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಅನೇಕ ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿಸಿ, ಶಿರಗಳು (ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛಗಳು) ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. (ಅಧ್ಯಾಯ 15ರ ಚಟುವಟಿಕೆ 1 ಮತ್ತು 2ನ್ನು ನೋಡಿ) ಇದಲ್ಲದೇ ನೀವು ನಾಣ್ಯದ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆ, ಒಂದು ಶಿರ (ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛ) ಪಡೆಯುವುದರ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{2}$ ಕ್ಕೆ ಅತೀ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. ನೀವು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೇ ವಿಶ್ವದ ವಿವಿಧ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿನ ಅನೇಕ ಜನರು ಇದೇ ರೀತಿಯ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದು, ಶಿರ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 18ನೇ ಶತಮಾನದ ಫ್ರೆಂಚ್ ನಿಸರ್ಗವಾದಿ ಕೋಮ್ಟೆ ಡಿ ಬಫೋನ್ [Comte de Buffon] ರವರು 4040 ಸಲ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿ 2048 ಸಲ ಶಿರಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಪಡೆದಿದ್ದರು. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಶಿರ ಪಡೆಯುವ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{2048}{4040}$ ಅಂದರೆ 0.507 ಆಗಿತ್ತು. ಬ್ರಿಟನ್ನಿನ J.E ಕೆರ್ರಿಚ್ [J.E. Kerrich] ರವರು 10000 ಸಲ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿ 5067 ಸಲ ಶಿರಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಪಡೆದಿದ್ದರು. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು, $\frac{5067}{10000}=0.5067$ ಆಗಿತ್ತು.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್‌ಸನ್ [Karl Pearson] ರವರು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಮಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 24000 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದ್ದರು. ಅವರು 12012 ಸಲ ಶಿರಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಪಡೆದಿದ್ದು, ಶಿರ ಪಡೆದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.5005 ಆಗಿತ್ತು.

ಈಗ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು, 1 ಮಿಲಿಯನ್ ಸಲ ಅಥವಾ 10 ಮಿಲಿಯನ್ ಸಲ ಅಥವಾ ಹೀಗೇ ಮುಂದುವರೆಸಿದರೆ ಶಿರ ಪಡೆಯುವ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ಪ್ರಶ್ನಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ.

ನಾಣ್ಯದ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆ, ಶಿರ ಪಡೆಯುವ (ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛ ಪಡೆಯುವ) ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.5 ಅಂದರೆ $\frac{1}{2}$ ವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೀವು ಸಹಜವಾಗಿ ಭಾವಿಸುವಿರಿ. ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಶಿರ ಪಡೆಯುವ (ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛ ಪಡೆಯುವ) *ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ* ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಲಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ (ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವ) ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಿದ್ದೇವೆ ಮತ್ತು ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

14.2 ಸಂಭವನೀಯತೆ : ಒಂದು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ವಿಧಾನ

ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು *ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ* ಚಿಮ್ಮಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ನಾವು ನಾಣ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ಹೇಳುವಾಗ ಇದು ಕುಂದಿಲ್ಲದ (fair) ನಾಣ್ಯವೆಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿ ಅದು ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬಂದಾಗ ಒಂದೇ ಬದಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಬೀಳಲು ಯಾವುದೇ ಕಾರಣ ಇರದಂತೆ ಅದು ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ನಾಣ್ಯದ ಈ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತ (unbiased) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 'ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆ' ಈ ಪದವನ್ನು, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಪಕ್ಷಪಾತ (bias) ಅಥವಾ ಹಸ್ತಕ್ಷೇಪ (interference) ಇಲ್ಲದೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಬೀಳಲು ಬಿಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಅರ್ಥೈಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ನಾವು ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ನಾಣ್ಯವು ನೆಲಕ್ಕೆ ಬೀಳುವ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಿರ ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛ ಮಾತ್ರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು. (ನಾಣ್ಯವು ಅದರ ಅಂಚಿನ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ನಾವು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಇದು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಇದು ಮರಳಿನ ಮೇಲೆ ಬಿದ್ದಾಗ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಫಲಿತದಲ್ಲಿ ಶಿರವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸಲ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆಯೋ, ಅಷ್ಟೇ ಸಲ ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಸಕಾರಣವಾಗಿ ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ಫಲಿತಗಳಾದ, ಶಿರ ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛಗಳು *'ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆ'* ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುವಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಅದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ನಮಗೆ ಒಂದು ದಾಳ ಎಂದರೆ ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಕುಂದಿಲ್ಲದ ದಾಳ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು ಯಾವುವು ? ಅವು 1,2,3,4,5,6 ಆಗಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳು 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6 ಆಗಿವೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳೇ ? ನೋಡೋಣ.

ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 4 ಕೆಂಪು ಮತ್ತು 1 ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ ಹಾಗೂ ಚೀಲದ ಒಳಗಡೆ ನೋಡದೆಯೇ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ನೀವು ಹೊರ ತೆಗೆದಿರುವುದಾಗಿ ಭಾವಿಸಿ. ಈ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಗಳು ಯಾವುವು?

ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಬರುವ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳೇ? ಅಲ್ಲಿ 4 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಮಾತ್ರ ಇರುವುದರಿಂದ, ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ಒಪ್ಪಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಫಲಿತಗಳು (ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು ಅಥವಾ ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು) ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಯಾವುದೇ ಬಣ್ಣದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಚೀಲದಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯುವುದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲೇಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

ಆದಾಗ್ಯೂ ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ **ಎಲ್ಲ ಪ್ರಯೋಗಗಳು, "ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳನ್ನು" ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ.**

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಘಟನೆ 'E' ಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಥವಾ ಅನುಭವವೇದ್ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ P(E) ಯನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದೆವು.

$$P(E)=\frac{\text{ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿದ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಯತ್ನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಅನೇಕ ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗಬಹುದಾದ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಯಾವುದೇ ಘಟನೆಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅರ್ಥ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವ ಅಗತ್ಯತೆಯು ಕೆಲವು ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ, ಅವೆಂದರೆ ಇದು ಅತಿ ದುಬಾರಿಯಾಗಿರುವುದು ಅಥವಾ ಕ್ಯಾರಗತಗೊಳಿಸಲಾಗದ ಅನೇಕ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳು ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಇದು, ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸುವುದು ಅಥವಾ ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆಯುವುದು ಈ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ. ಉಪಗ್ರಹ ಉಡಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ವೈಫಲ್ಯದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಉಡಾವಣೆಯ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಭೂಕಂಪದಲ್ಲಿ ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡಗಳು ಹಾನಿಯಾದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಭೂಕಂಪದ ವಿದ್ಯಮಾನವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

ಇಂತಹ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ, ಊಹೆಗಳು ನಿಖರ (ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ) ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಯೋಗದ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯನ್ನು ತಪ್ಪಿಸಲು ನಾವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಊಹೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಿದ್ಧರಾದೆವು. ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳ ಊಹೆಯು (ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದು ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಂತೆ ಅನೇಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿದೆ) ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತಹ ಒಂದು ಊಹೆಯಾಗಿದ್ದು. ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಮಗೆ ನೀಡಲು ಕಾರಣವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ (ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ), E ಯನ್ನು P(E) ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಈ ರೀತಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\textbf{ಘಟನೆ 'E' ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\textbf{ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯದ್ದಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಂದು ಉಲ್ಲೇಖಿಸೋಣ. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು 1975 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರೈರೀ ಸೈಮನ್ ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್ (Pierre simon Laplace) ರವರು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೂಲವು 16 ನೇ ಶತಮಾನವಾಗಿದೆ. ಇಟಲಿಯ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಜೆ. ಕಾರ್ಡನ್ (J.Cardan) ರವರ 'The book on Games of Chance' ಎಂಬುದು ಈ ವಿಷಯದ ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲನೆ ಪ್ರಸಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದರ ನಂತರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಅಧ್ಯಯನವು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಗಮನವನ್ನು ಆಕರ್ಷಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು. ಈ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಗಮನಾರ್ಹ ಕೊಡುಗೆ ಕೊಟ್ಟವರಲ್ಲಿ ಜೇಮ್ಸ್ ಬರ್ನೌಲ್ಲಿ (James Bernoulli, 1654 - 1705), ಎ.ಡಿ ಮ್ಯೊವ್ರೆ (A.de. Moivre, 1668 - 1754) ಮತ್ತು ಪ್ರೈರೀ ಸೈಮನ್ ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್ (Pierre simon laplace) ಪ್ರಮುಖರಾಗಿದ್ದಾರೆ. 1812 ರಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್ ರವರ "Theorie Analytique des Probabilités" ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯುಳ್ಳ ಪುಸ್ತಕವು ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ವ್ಯಕ್ತಿಯೊಬ್ಬರಿಂದ ದೊರೆಯಬಹುದಾದ ಮಹಾನ್ ಕೊಡುಗೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇತ್ತೀಚಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ, ತಳಿಶಾಸ್ತ್ರ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರ ಇತ್ಯಾದಿ ಹಲವು ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರೈರೀ ಸೈಮನ್ ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್
(Pierre simon Laplace)
(1749 – 1827)

ಈಗ, ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಊಹೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಭವನೀತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ, ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮುವ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ, ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು – ಶಿರ (H) ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛ (T). 'ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆ' E ಆಗಿರಲಿ. 'E' ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು) 1 ಆಗಿದೆ.

$$\text{P(E)} = \text{P(ಶಿರ)} = \frac{\text{E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} = \frac{1}{2}$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆ 'F' ಆದಾಗ

$$\text{P(E)} = \text{P(ಪುಚ್ಛ)} = \frac{1}{2} \text{ (ಏಕೆ?)}$$

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದ ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು, ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಒಂದು ಹಳದಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಕೃತಿಕಾಳು ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆಯೇ, ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ ಅವಳು ತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ಒಂದು (i) ಹಳದಿ ಚೆಂಡು (ii) ಕೆಂಪುಚೆಂಡು (iii) ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡಿಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಕೃತಿಕಾಳು ಚೀಲವನ್ನು ನೋಡದೆಯೇ ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ ಅವಳು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿದೆ.

ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ಹಳದಿಯಾಗಿರುವ ಘಟನೆಯು Y ಆಗಿರಲಿ, ಹೊರ ತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ನೀಲಿಯಾಗಿರುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ಕೆಂಪು ಆಗಿರುವ ಘಟನೆಯು R ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3

(i) ಘಟನೆ y ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1

$\therefore \quad P(y) = \frac{1}{3}$

ಇದೇ ರೀತಿ, (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ ಮತ್ತು (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$

ಗಮನಿಸಿ:

1. ಪ್ರಯೋಗದ ಒಂದು ಫಲಿತವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಲ್ಲಿ, E ಮತ್ತು F ಘಟನೆಗಳೆರಡೂ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ ಇದೇ ರೀತಿ, ಉದಾಹರಣೆ 2 ರಲ್ಲಿ Y, B ಮತ್ತು R ಎಂಬ ಮೂರೂ ಘಟನೆಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

2. ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಲ್ಲಿ $P(E) + P(F) = 1$ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಉದಾಹರಣೆ 2 ರಲ್ಲಿ $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಹೀಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ **ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ** ಎಂಬುದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ನಾವು ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. (i) 4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? (ii) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: (i) ಇಲ್ಲಿ, 4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು E ಆಗಿರಲಿ. ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 : 1, 2, 3, 4, 5 ಮತ್ತು 6, ಮತ್ತು E ಘಟನೆಯನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ 5 ಮತ್ತು 6 ಆದ್ದರಿಂದ, E ಘಟನೆಯನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2. ಹೀಗೆ,

P(E) = P (4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆ) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು F ಆಗಿರಲಿ.

ಸಾಧ್ಯಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 6

F ಘಟನೆಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳು = 1, 2, 3, 4

ಆದ್ದರಿಂದ, F ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4

ಹೀಗೆ, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ E ಮತ್ತು F ಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳೇ? ಅಲ್ಲ ಘಟನೆ E ಗೆ 2 ಫಲಿತಗಳು ಮತ್ತು ಘಟನೆ F ಗೆ 4 ಫಲಿತಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ ಇವು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳಲ್ಲ.

ಗಮನಿಸಿ: ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1 ರಿಂದ ನಾವು ಗಮನಿಸುವುದೇನೆಂದರೆ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

ಇಲ್ಲಿ ‘E’ ಯು ‘ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಮತ್ತು ಒಂದು ‘F’, ಒಂದು ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 ರ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

ಇಲ್ಲಿ ‘E’ ಯು 4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು F, 4ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.

4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಎಂಬುದು 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಅದೇ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಮೇಲಿನ (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ ‘F’ಎಂಬುದು ‘E ಅಲ್ಲದ್ದು’ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆಯೇ? ಹೌದು ಸಮನಾಗಿದೆ. ನಾವು ‘E ಅಲ್ಲದ್ದು’ ಘಟನೆಯನ್ನು $\overline{E}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

∴ P(E) + P(E ಅಲ್ಲದ್ದು) = 1

ಅಂದರೆ, $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಘಟನೆ E ಗೆ,

$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ ಎಂಬುದು ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

‘E ಅಲ್ಲದ್ದು’ ಎಂಬುದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಘಟನೆ $\overline{E}$ ನ್ನು ‘E’ ಘಟನೆಯ ಪೂರಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ನಾವು E ಮತ್ತು $\overline{E}$ ಗಳನ್ನು *ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳು* ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದುವರಿಯುವ ಮೊದಲು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

(i) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(i) ನ್ನು ಉತ್ತರಿಸೋಣ:

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ 6 ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು ಮಾತ್ರ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಫಲಿತಗಳೆಂದರೆ, 1, 2, 3, 4, 5 ಮತ್ತು 6. ದಾಳದ ಯಾವುದೇ ಮುಖವು 8 ರಿಂದ ಗುರುತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲ, ಆದುದರಿಂದ 8ನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, ಇಂತಹ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ 8 ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು *ಅಸಂಭವವಾಗಿದೆ* ಎನ್ನಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, P(8 ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು) $= \frac{0}{6} = 0$

ಅಂದರೆ, ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯು ಸಂಭವನೀಯತೆಯು '0'. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ***ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

(ii) ನ್ನು ಉತ್ತರಿಸೋಣ:

ಒಂದು ದಾಳದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮುಖವು 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ, ಅದನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ ಖಚಿತವಾಗಿ ನಾವು 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟೇ ಆಗುದ್ದು, ಅದು 6 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, $P(E) = P$(7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು) $= \frac{6}{6} = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ ಖಚಿತವಾಗಿ (ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ) ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ***ಖಚಿತ ಘಟನೆ*** ಅಥವಾ ***ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ*** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ: ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(E)$ ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ, ಅಂಶವು (ಘಟನೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳು) ಯಾವಾಗಲೂ ಛೇದ (ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ) ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

ಈಗ, ಆಟದ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಟದ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಕಟ್ಟನ್ನು (deck/pack) ನೋಡಿದ್ದೀರಾ? ಇದು 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ 13 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಂತೆ 4 ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ (suits) ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. ಸ್ಪೇಡ್ (♠), ಹಾರ್ಟ್ (♥), ಡೈಮಂಡ್ (♦) ಮತ್ತು ಕ್ಲಬ್ (♣). ಕ್ಲಬ್ಸ್ ಮತ್ತು ಸ್ಪೇಡ್ಸ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದವುಗಳಾಗಿದ್ದು ಹಾರ್ಟ್ಸ್ ಮತ್ತು ಡೈಮಂಡ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ್ದಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳೆಂದರೆ, ಏಸ್, ರಾಜ, ರಾಣಿ, ಜ್ಯಾಕ್, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 ಮತ್ತು 2. ರಾಜ, ರಾಣಿ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಕ್ ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು (ಗೌರವಾನ್ವಿತ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆ ಕಾರ್ಡ್

(i) ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿರುವ,

(ii) ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿಲ್ಲದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ ಅಂದರೆ, ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳು ಎಂದು ಖಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

(i) ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ 4 ಏಸ್‌ಗಳಿರುತ್ತವೆ. "ತೆಗೆಯುವ ಕಾರ್ಡ್ ಒಂದು ಏಸ್" ಆಗಿರುವ ಘಟನೆ 'E' ಆಗಿರಲಿ.

E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4

ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 52 (ಏಕೆ?)

$$\therefore \qquad P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ii) ಒಂದು ಏಸ್ ಅಲ್ಲದ ಕಾರ್ಡ್ ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆ 'F' ಆಗಿರಲಿ ಘಟನೆ F ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 52 – 4 = 48 (ಏಕೆ?)

ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ = 52

$$\therefore \qquad P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

ಗಮನಿಸಿ: ಇಲ್ಲಿ F ಅಂದರೆ $\overline{E}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು P(F) ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು.

$$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಸಂಗೀತಾ ಮತ್ತು ರೇಶ್ಮಾ ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ಆಟಗಾರ್ತಿಯರು ಒಂದು ಟೆನ್ನಿಸ್ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಆಡುತ್ತಾರೆ. ಸಂಗೀತಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.62 ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ರೇಶ್ಮಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: ಸಂಗೀತಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಮತ್ತು ರೇಶ್ಮಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ S ಮತ್ತು R ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಸಂಗೀತಾಳು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = P(S) = 0.62 (ದತ್ತ)

ರೇಶ್ಮಾಳು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = P(R) = 1 – P(S) ($\because$ R ಮತ್ತು S ಗಳು ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ)

= 1 – 0.62 = 0.38

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಸವಿತಾ ಮತ್ತು ಹಮೀದಾ ಗೆಳತಿಯರು ಇವರಿಬ್ಬರ ಜನ್ಮದಿನವು (i) ಪ್ರತ್ಯೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿರುವ (ii) ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? (ಅಧಿಕ ವರ್ಷವನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಿ)

ಪರಿಹಾರ: ಇಬ್ಬರು ಗೆಳತಿಯರಲ್ಲಿ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸವಿತಾಳ ಜನ್ಮದಿನವು ವರ್ಷದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ದಿನವಾಗಿರಬಹುದು. ಈಗ, ಹಮೀದಾಳ ಜನ್ಮದಿನವೂ ಸಹ ವರ್ಷದ 365 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ದಿನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ 365 ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

(i) ಹಮೀದಾಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಸವಿತಾಳ ಜನ್ಮದಿನಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವಳ ಜನ್ಮದಿನವನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 365 – 1 = 364

$\therefore$ P (ಹಮೀದಾಳ ಜನ್ಮದಿನವು, ಸವಿತಾಳ ಜನ್ಮದಿನಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿರುವುದು) = $\frac{364}{365}$

(ii) P (ಸವಿತಾ ಮತ್ತು ಹಮೀದಾ ಇಬ್ಬರೂ ಒಂದೇ ಜನ್ಮದಿನ ಹೊಂದಿರುವುದು)

= 1 – P (ಇಬ್ಬರು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಜನ್ಮದಿನ ಹೊಂದಿರುವುದು)

$= 1 - \frac{364}{365}$ $[\because P(\overline{E}) = 1 - P(E)]$

$= \frac{1}{365}$

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10 ನೇ ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 25 ಬಾಲಕಿಯರು ಮತ್ತು 15 ಬಾಲಕರಿದ್ದಾರೆ. ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ತರಗತಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಯಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಹೆಸರನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಕಲಕುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಅವರು ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಚೀಲದಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಹೆಸರು (i) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕಿಯ (ii) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕನದ್ದಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

(i) ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 40

ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕಿಯ ಹೆಸರಿರುವ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 25 (ಏಕೆ?)

ಆದುದರಿಂದ, P (ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕಿಯ ಹೆಸರಿರುವ ಕಾರ್ಡ್) = P (ಬಾಲಕಿ) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕನ ಹೆಸರಿರುವ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 15 (ಏಕೆ?)

ಆದುದರಿಂದ, P (ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕನ ಹೆಸರಿರುವ ಕಾರ್ಡ್) = P (ಬಾಲಕ) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

ಸೂಚನೆ: P (ಬಾಲಕ), ಇದನ್ನು ನಾವು ಈ ರೀತಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

P (ಬಾಲಕ) = 1 – (ಬಾಲಕ ನಲ್ಲದ)

= 1 – P (ಬಾಲಕಿ)

$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 3 ನೀಲಿ, 2 ಬಿಳಿ ಮತ್ತು 4 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದು

(i) ಬಿಳಿ (ii) ನೀಲಿ (iii) ಕೆಂಪು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ : ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು ಅಂದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ ಎಂದರ್ಥ.

$\therefore$ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3+2+4 = 9 (ಏಕೆ?)

'ಗೋಲಿಯು ಬಿಳಿಯಾಗಿರುವುದು' ಈ ಘಟನೆಯನ್ನು W ನಿಂದ, ಗೋಲಿಯು ನೀಲಿಯಾಗಿರುವ ಘಟನೆಯನ್ನು B ನಿಂದ ಮತ್ತು ಗೋಲಿಯು ಕೆಂಪಾಗಿರುವ ಘಟನೆಯನ್ನು R ನಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ.

(i) ಘಟನೆ W ನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 2

$\therefore$ $P(W) = \frac{2}{9}$

ಇದೇ ರೀತಿ, $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $P(R) = \frac{4}{9}$

$P(W) + P(B) + P(R) = 1$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಹರ್ಪ್ರೀತಳು ಎರಡು ಭಿನ್ನ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸುತ್ತಾಳೆ. (₹ 1 ರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಮತ್ತು ₹ 2 ರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ) ಅವಳು ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: ನಾವು ಶಿರಕ್ಕೆ 'H' ಎಂದು ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛಕ್ಕೆ 'T' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು, (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) ಆಗಿದ್ದು ಇವು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ (H, H) ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ 'ಶಿರ' ವು ಮೇಲಕ್ಕೆ (₹ 1 ರ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ 'ಶಿರ' ವು ಮೇಲಕ್ಕೆ (₹ 2 ರ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ) ಬಂದಿದೆ ಎಂದರ್ಥ. ಇದೇ ರೀತಿ (H, T) ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಶಿರ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ 'ಪುಚ್ಛ' ಮೇಲೆ ಬಂದಿದೆ ಎಂದರ್ಥ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

'ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಶಿರ' ಅಂದರೆ ಘಟನೆ 'E' ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳು (H, H), (H, T) ಮತ್ತು (T, H) (ಏಕೆ?)

ಹೀಗೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3

$\therefore$ $P(E) = \frac{3}{4}$

ಅಂದರೆ, ಹರ್ಪ್ರೀತಳು ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{3}{4}$ ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ: ನೀವು P(E) ಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$P(E) = 1 - P(\overline{E})$$

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ [ಏಕೆಂದರೆ } P(\overline{E}) = P\text{ (ಶಿರವಲ್ಲ) } = \frac{1}{4}\text{]}$$

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪರಿಮಿತವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಅಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಅನೇಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತವು, ದತ್ತ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಫಲಿತವು, ಒಂದು ವೃತ್ತ ಅಥವಾ ಆಯತ ಮುಂತಾದವುಗಳ

ಒಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ನೀವು ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಣಿಸಬಹುದೇ? ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಅಥವಾ ಒಂದು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಬಿಂದುಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಂಭವನೀಯತೆ (ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ) ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು, ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಕಲಿತಂತೆ, ಪ್ರಸ್ತುತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಇದಕ್ಕಿರುವ ದಾರಿ ಯಾವುದು? ಇದನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 10*: ಒಂದು 'ಸಂಗೀತ ಕುರ್ಚಿ' ಆಟದಲ್ಲಿ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಹಾಕುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ, ಸಂಗೀತ ಆರಂಭವಾದ 2 ನಿಮಿಷಗಳ ಒಳಗಿನ ಯಾವುದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸುವ ಸಲಹೆಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿತ್ತು. ಸಂಗೀತ ಆರಂಭವಾದ ನಂತರ ಮೊದಲ ಅರ್ಧ ನಿಮಿಷದ ಯಾವುದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಂಗೀತ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು 0 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವಿನ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. ಇದು 0 ಯಿಂದ 2 ರ ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 14.1 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಚಿತ್ರ 14.1

ಮೊದಲ ಅರ್ಧ ನಿಮಿಷದ ಒಳಗಡೆ ಸಂಗೀತ ನಿಲ್ಲುವ ಘಟನೆಯು E ಆಗಿರಲಿ

E ಯನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 0 ಯಿಂದ $\frac{1}{2}$ ದ ವರೆಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. '0' ಯಿಂದ 2 ರವರೆಗಿನ ಅಂತರವು 2, ಹಾಗೆಯೇ 0 ಯಿಂದ $\frac{1}{2}$ ದ ವರೆಗಿನ ಅಂತರವು $\frac{1}{2}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

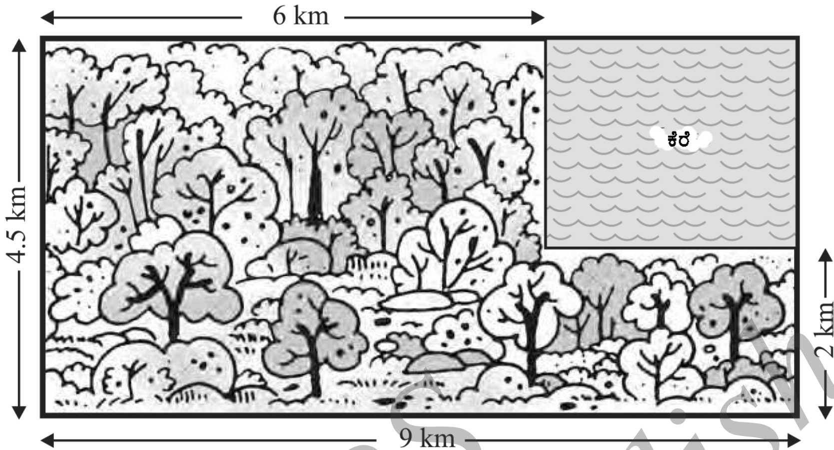
ಎಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಒಟ್ಟು ದೂರ 2 ರಲ್ಲಿ ಘಟನೆ E ಯನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಅಂತರವು $\frac{1}{2}$ ಆಗಿದೆ.

$$\therefore \qquad P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಅಂತರ}}{\text{ಫಲಿತವು ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಒಟ್ಟು ಅಂತರ}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

ಈಗ ನಾವು ಉದಾಹರಣೆಗೆ 10 ರ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು, ಅನುಕೂಲಿಸುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅನುಪಾತದಂತೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವಿಸ್ತರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಉದಾಹರಣೆ 11*: ಒಂದು ಕಾಣೆಯಾದ ಹೆಲಿಕಾಪ್ಟರ್ ಚಿತ್ರ 14.2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಆಯತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಒಂದು ಕಡೆ ಅಪ್ಪಳಿಸಿದೆ ಎಂದು ವರದಿಯಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅದು ಕೆರೆಯೊಳಕ್ಕೆ ಅಪ್ಪಳಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

* ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲ್ಲ



ಚಿತ್ರ 14.2

ಪರಿಹಾರ: ಹೆಲಿಕಾಪ್ಟರ್ ಈ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಒಂದು ಕಡೆ ಅಪ್ಪಳಿಸುವ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ.

ಹೆಲಿಕಾಪ್ಟರ್ ಅಪ್ಪಳಿಸುವ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಪ್ರದೇಶದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= (4.5\times9)\text{km}^2 = 40.5 \text{ km}^2$$

ಕೆರೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= (2.5\times3)\text{km}^2 = 7.5 \text{ km}^2$

ಆದ್ದರಿಂದ P (ಹೆಲಿಕಾಪ್ಟರ್ ಕೆರೆಯೊಳಕ್ಕೆ ಅಪ್ಪಳಿಸುವುದು) $= \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 100 ಶರ್ಟ್‌ಗಳಿವೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 88 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. 8 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಅಲ್ಪದೋಷಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ ಮತ್ತು 4 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಹೆಚ್ಚು ದೋಷಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ. ಜಿಮ್ಮಿ ಎಂಬ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಉತ್ತಮ ಶರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಸುಜಾತ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಹೆಚ್ಚು ದೋಷವಿರುವ ಶರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಿರಸ್ಕರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಶರ್ಟ್‌ನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ

(i) ಇದನ್ನು ಜಿಮ್ಮಿಯು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ

(ii) ಇದನ್ನು ಸುಜಾತಳು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: ರಟ್ಟಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ 100 ಶರ್ಟ್‌ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಶರ್ಟ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ 100 ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳಿವೆ.

(i) ಜಿಮ್ಮಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ (ಆತ ಸ್ವೀಕರಿಸುವ) ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88 (ಏಕೆ?)

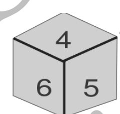
$\therefore$ P (ಜಿಮ್ಮಿಯು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಶರ್ಟ್) $= \frac{88}{100} = 0.88$

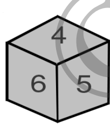
(ii) ಸುಜಾತಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88 + 8 = 96 (ಏಕೆ?)

$\therefore$ P (ಸುಜಾತಳು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಶರ್ಟ್) $= \frac{96}{100} = 0.96$

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಒಂದು ನೀಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬೂದು ಬಣ್ಣದ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆದಿದೆ. ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ದಾಳಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ (i) 8 (ii) 13 (iii) 12 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 12 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: ನೀಲಿ ದಾಳವು 1 ನ್ನು ತೋರಿಸಿದಾಗ, ಬೂದು ದಾಳವು 1, 2, 3, 4 ಮತ್ತು 5 ಮತ್ತು 6 ಈ ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು. ನೀಲಿ ದಾಳವು 2, 3, 4, 5 ಅಥವಾ 6 ನ್ನು ತೋರಿಸಿದಾಗಲೂ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಯೋಗದ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವ ಮೊದಲ ಅಂಕಿಯು ನೀಲಿ ದಾಳದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಂಕಿಯು ಬೂದು ದಾಳದಲ್ಲಿ ಬರುವುದಾಗಿದೆ.





	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ಚಿತ್ರ 14.3

(1, 4) ಎಂಬುದು (4, 1) ಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಏಕೆ?) ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಧ್ಯಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 6 \times 6 = 36$

(i) 'ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8' ಈ ಘಟನೆಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳನ್ನು E ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದ್ದು ಅವು (2, 6) (3, 5) (4, 4) (5, 3) (6, 2) ಆಗಿವೆ. (ಚಿತ್ರ 14.3 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಅಂದರೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 5

$$\therefore \quad P(E) = \frac{5}{36}$$

(ii) ಚಿತ್ರ 14.3 ನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 13 ಆಗುವಂತಹ F ಘಟನೆಯನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳಿಲ್ಲ.

$$\therefore \qquad P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

(iii) ಚಿತ್ರ 14.3 ನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ, ಮೊತ್ತ ≤ 12 ಆಗಿರುವ 'G' ಘಟನೆಗೆ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಗಳು ಅನುಕೂಲಿಸುತ್ತವೆ.

$$\therefore \qquad P(G) = \frac{36}{36} = 1$$

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ.

(i) ಒಂದು ಘಟನೆ E ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ + ' E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ = __________.

(ii) ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು __________ ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು __________ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(iii) ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು __________ ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು __________ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(iv) ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು __________

(v) ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು __________ ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಅಥವಾ ಸಮ ಮತ್ತು __________ ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಮಾನ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ? ವಿವರಿಸಿ.

(i) ಒಬ್ಬ ಚಾಲಕನು ಕಾರನ್ನು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕಾರು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗುವುದು ಅಥವಾ ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗದಿರುವುದು.

(ii) ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರ ಬಾಸ್ಕೆಟ್‌ಬಾಲ್‌ನ್ನು ಗುರಿಯತ್ತ ಎಸೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ ಅವನ/ಅವಳ ಗುರಿ ಮುಟ್ಟುವುದು ಅಥವಾ ಗುರಿಮುಟ್ಟದೇ ಇರುವುದು.

(iii) ಸರಿ – ತಪ್ಪು ಉತ್ತರವಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ ಉತ್ತರವು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ಆಗಿರುವುದು.

(iv) ಒಂದು ಮಗುವು ಜನಿಸಿದೆ ಇದು ಒಂದು ಗಂಡು ಅಥವಾ ಒಂದು ಹೆಣ್ಣು ಆಗಿರುವುದು.

3. ಒಂದು ಫುಟ್‌ಬಾಲ್ ಆಟದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ, ಯಾವ ತಂಡವು ಮೊದಲು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು ಒಂದು ಉತ್ತಮ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಏಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ?

4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

   A) $\frac{2}{3}$ B) -1.5 C) 15% D) 0.7

5. $P(E) = 0.05$ ಆದರೆ, ‘ E ಅಲ್ಲದ’ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

6. ಒಂದು ಚೀಲವು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಮಾಲಿನಿಯು ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆ ಒಂದು ಕ್ಯಾಂಡಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಕ್ಯಾಂಡಿಯು

   (i) ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

   (ii) ಒಂದು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

7. 3 ಮಕ್ಕಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ, 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.992 ಎಂದು ನೀಡಿದೆ. 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

8. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಚೀಲದಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಕೆಂಪು ಅಲ್ಲದ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

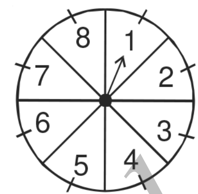
9. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳು, 8 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳು ಮತ್ತು 4 ಹಸುರು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಗೋಲಿಯು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಬಿಳಿ (iii) ಹಸುರು ಅಲ್ಲದ ಗೋಲಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

10. ಒಂದು ಗೋಲಕವು (ಹಣದ ಹುಂಡಿ) 50 ಪೈಸೆಯ 100 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ₹ 1 ರ 50 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ₹ 2 ಯ 20 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ₹ 5 ರ 10 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಅದನ್ನು ಬೋರಲು ಹಾಕಿದಾಗ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಹೊರ ಬೀಳುವ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳವೆ. ಆ ನಾಣ್ಯವು (i) ಒಂದು 50 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರುವ (ii) ಒಂದು ₹ 5 ರ ನಾಣ್ಯ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

11. ಗೋಪಿಯು ತನ್ನ ಅಕ್ವೇರಿಯಂ ಗೆ ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯಿಂದ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿರುವ 5 ಗಂಡು ಮೀನುಗಳು ಮತ್ತು 8 ಹೆಣ್ಣು ಮೀನುಗಳಿಂದ (ಚಿತ್ರ 14.4 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾನೆ. ಹೊರ ತೆಗೆಯುವ ಮೀನು ಗಂಡು ಮೀನು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಚಿತ್ರ 14.4

12. ಒಂದು ಅವಕಾಶದ ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸೂಚಕವು (ಬಾಣವು) ಚಕ್ರಾಕಾರವಾಗಿ ತಿರುಗಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ಈ ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ನಿಶ್ಚಲವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ (ಚಿತ್ರ 14.5 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಸೂಚಕವು (i) 8 (ii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ (iii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (iv) 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 14.5

13. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.

(i) ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) 2 ಮತ್ತು 6 ರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ

(iii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ.

(i) ಒಂದು ಕೆಂಪು ರಾಜ (ii) ಒಂದು ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್

(iii) ಒಂದು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್ (iv) ಹಾರ್ಟ್‌ನ ಜ್ಯಾಕ್

(v) ಒಂದು ಸ್ಪೇಡ್ (vi) ಡೈಮಂಡ್‌ನ ರಾಣಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಡೈಮಂಡ್‌ನ 5 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಾದ, 10, ಜ್ಯಾಕ್, ರಾಣಿ, ರಾಜ ಮತ್ತು ಏಸ್‌ಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಮುಖ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಇರುವಂತೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಲಾಗಿದೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(i) ಆ ಕಾರ್ಡ್ ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ರಾಣಿ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರಿಸಿ, ಎರಡನೇ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದು a) ಒಂದು ಏಸ್ b) ಒಂದು ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

16. 12 ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್‌ಗಳು ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ 132 ಉತ್ತಮ ಪೆನ್‌ಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಕೊಂಡಿವೆ. ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಅದು ದೋಷಪೂರಿತವೇ? ಅಲ್ಲವೇ? ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ಗುಂಪಿನಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಪೆನ್ ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. (i) 20 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 4 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ. ಗುಂಪಿನಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಬಲ್ಬನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) (i) ರಲ್ಲಿ ಹೊರ ತೆಗೆದ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ ಸಹ ಅದನ್ನು ಬಲ್ಬ್ ಗಳ

ಗುಂಪಿನಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದೆ. ಈಗ ಉಳಿದ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಲ್ಬ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಹೊರ ತೆಗೆದರೆ ಈ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

18. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 90 ರರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮೂದಾಗಿರುವ 90 ಬಿಲ್ಲೆಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದರೆ ಅದು

(i) 2 ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (ii) ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ

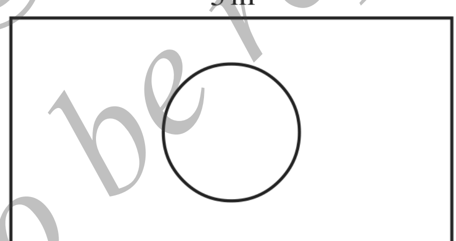
(iii) 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಬವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. ಒಂದು ಮಗುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಾಳವಿದೆ. ಅದರ ಮುಖಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತಿವೆ.

A	B	C	D	E	A

ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದೆ. i) A ii) D ಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

20*. ಚಿತ್ರ 14.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನೀವು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಬೀಳಿಸಿದ್ದೀರಿ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು 1 m ವ್ಯಾಸದ ವೃತ್ತಾಕಾರದೊಳಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 14.6

21. ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ 144 ಬಾಲ್‌ಪೆನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 20 ಪೆನ್ನುಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದವು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. ನೂರಿಯು ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ, ಆದರೆ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಕೆಗೆ ನೀಡುತ್ತಾನೆ.

(i) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸುವ (ii) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

* ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲ್ಲ

22. ಉದಾಹರಣೆ 13 ನ್ನು ನೋಡಿ (i) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

ಘಟನೆ 2 ದಾಳಗಳಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ಸಂಭವನೀಯತೆ	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 'ಇಲ್ಲಿ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ಮತ್ತು 12 ಎಂಬ 11 ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{11}$ ಎಂದು ವಾದಿಸುತ್ತಾನೆ. ನೀವು ಈ ವಾದವನ್ನು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

23. ಒಂದು ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಯ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಸಲದ ಫಲಿತವನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹನೀಫನು, ಪ್ರತಿ ಸಲವೂ ಒಂದೇ ಫಲಿತಾಂಶ ಅಂದರೆ, 3 ಶಿರಗಳು ಅಥವಾ 3 ಪುಚ್ಛಗಳು ಬಂದರೆ, ಆಟದಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲುತ್ತಾನೆ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಸೋಲುತ್ತಾನೆ. ಹನೀಫನು ಆಟದಲ್ಲಿ ಸೋಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

24. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು 2 ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.

(i) ಎರಡೂ ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರದಿರುವ (ii) ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

[**ಸುಳುಹು:** ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಸೆಯುವುದು ಮತ್ತು ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆಯುವುದು, ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು]

25. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಾದಗಳು ಸರಿಯಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ತಪ್ಪಾಗಿವೆ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ.

(i) ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ. ಮೂರು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಇರುತ್ತವೆ – ಎರಡು ಶಿರಗಳು, ಎರಡು ಪುಚ್ಛಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{3}$

(ii) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ, ಎರಡು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು ಇರುತ್ತವೆ – ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{2}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 14.2(ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. ಶ್ಯಾಮ್ ಮತ್ತು ಏಕ್ತಾ ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ಗ್ರಾಹಕರು ಒಂದೇ ವಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಂಗಡಿಗೆ ಭೇಟಿ ನೀಡುತ್ತಾರೆ (ಮಂಗಳವಾರದಿಂದ ಶನಿವಾರದವರೆಗೆ). ಅವರು ಭೇಟಿ ನೀಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಿನಕ್ಕೂ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ. ಇಬ್ಬರೂ ಅಂಗಡಿಗೆ (i) ಒಂದೇ ದಿನ (ii) ಅನುಕ್ರಮ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ

(iii) ಪ್ರತ್ಯೇಕ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಭೇಟಿ ನೀಡುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

2. ಒಂದು ದಾಳದ ಮುಖಗಳು 1, 2, 2, 3, 3, 6. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವಂತೆ ಇವೆ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಎಸೆತಗಳ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿದೆ ಎರಡೂ ಎಸೆತಗಳ ಕೆಲವು ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿರುವ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.

ಮೊದಲ ಎಸೆತದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

ಎರಡನೇ ಎಸೆತದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

+	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2					5	
3						
3			5			9
6	7	8	8	9	9	12

ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು (i) ಸಮಸಂಖ್ಯೆ (ii) 6 (iii) ಕನಿಷ್ಠ 6 ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

3. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ 5 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು, ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ ಆ ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ 12 ಚೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ, x ಚೆಂಡುಗಳು ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದ್ದಾಗಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆದರೆ, ಅದು ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದ್ದಾಗಿರುವುದರ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? ಇನ್ನೂ 6 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಮೊದಲಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿ 24 ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹಸಿರು ಮತ್ತು ಉಳಿದವು ನೀಲಿಯಾಗಿವೆ. ಪಾತ್ರೆಯಿಂದ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಹೊರತೆಗೆದರೆ, ಅದು ಹಸಿರಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{2}{3}$. ಆದರೆ ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ನೀಲಿ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14.3 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮತ್ತು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

2. ಒಂದು ಘಟನೆ 'E' ಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ (ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ) ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

* ಈ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲ್ಲ

$$P(E) = \frac{\text{E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಗಳ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯದಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

3. ಖಚಿತ ಘಟನೆ (ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ) ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿದೆ.
4. ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0 ಆಗಿದೆ.
5. ಒಂದು ಘಟನೆ 'E' ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ P(E) ಯು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $0 \leq P(E) \leq 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
6. ಒಂದು ಘಟನೆಗೆ ಕೇವಲ ಒಂದು ಫಲಿತವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
7. ಯಾವುದೇ ಘಟನೆ 'E' ಗೆ $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $\overline{E}$ ಅಂದರೆ 'E ಅಲ್ಲದ್ದು' ಎಂಬುದಾಗಿದೆ. E ಮತ್ತು $\overline{E}$ ಗಳನ್ನು ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಓದುಗರಿಗೆ ಸೂಚನೆ

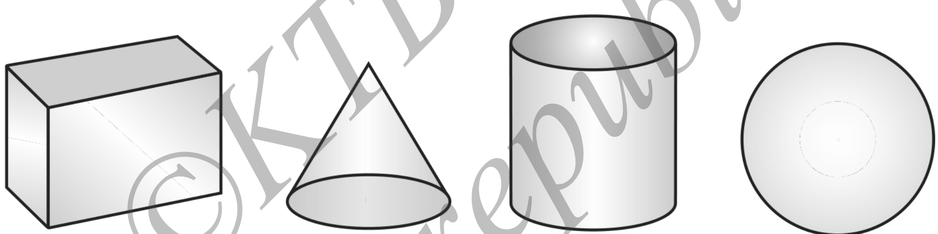
ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಥವಾ ಅನುಭವ ವೇದ್ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಏನು ಸಂಭವಿಸಿದೆಯೋ, ಅದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು, ಕೆಲವು ಕಲ್ಪನೆಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಏನು ಸಂಭವಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಊಹಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಮತ್ತು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಸರಿ ಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದೇ ಎಂದು ನಾವು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

❀ ❀ ❀

ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು 15

15.1 ಪೀಠಿಕೆ

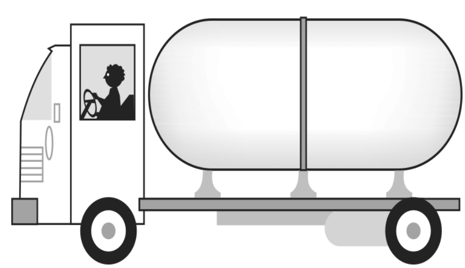
9 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನೀವು ಆಯತ ಘನ, ಶಂಕು, ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಗೋಳದ ಬಗ್ಗೆ ಚಿರಪರಿಚಿತರಾಗಿದ್ದೀರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಅವುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.



ಚಿತ್ರ 15.1

ನಾವು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಮಾಡಿದ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ.

ನೀರು ಅಥವಾ ತೈಲವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೋಗುವ ಲಾರಿಯ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿನ ಸಂಗ್ರಹಕವನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ. (ಚಿತ್ರ 15.2 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 15.2

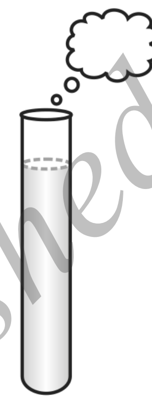
ಇದು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಹೋಲುತ್ತದೆ? ಅದು ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್, ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರವನ್ನು ಅದರ ಎರಡು ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಬಹುದು.

ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಚಿತ್ರ 15.3 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ವಸ್ತುವನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ. ಅದನ್ನು ಹೆಸರಿಸುವಿರಾ?

ಅದು ಒಂದು ಪ್ರಣಾಳಿಕೆ. ಹೌದು! ನೀವು ಇದನ್ನು ನಿಮ್ಮ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಯೋಗಾಲಯದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯು ಸಹ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, ನೀವು ಪ್ರವಾಸ ಮಾಡುವಾಗ ದೊಡ್ಡದಾದ ಮತ್ತು ಸುಂದರ ಕಟ್ಟಡಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಸ್ಮಾರಕಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಘನಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದ ಮಾಡಿರುವುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೀರಿ.

ಕೆಲವು ಕಾರಣಗಳಿಂದಾಗಿ ನೀವು ಈ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಅಥವಾ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಇದನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ? ಇವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಅಧ್ಯಾಯನ ಮಾಡಿದ ಘನಾಕೃತಿಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ.

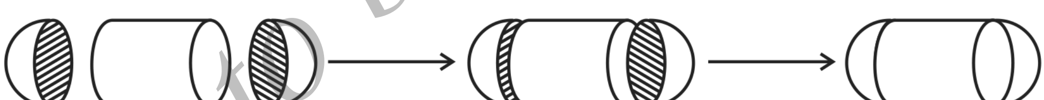
ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ನೀವು ಇಂತಹ ಘನಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.



ಚಿತ್ರ 15.3

15.2 ಜೋಡಿಸಿದ ಘನಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಚಿತ್ರ 15.2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಸಂಗ್ರಹಕವನ್ನು ನಾವು ಪುನಃ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಂತಹ ಘನವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು? ಒಂದು ಹೊಸ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಯಾವಾಗಲಾದರೂ ನಮಗೆ ಎದುರಾದಾಗ ಅದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಬಿಡಿಸಿದ ಚಿಕ್ಕ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ಮೂರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದ ನಂತರ ಚಿತ್ರ 15.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 15.4

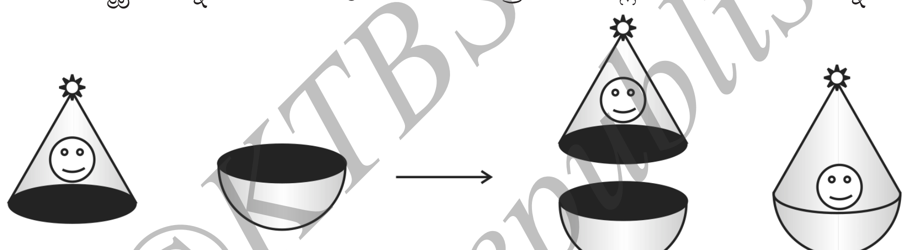
ಹೊಸದಾಗಿ ರೂಪಗೊಂಡ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ನಾವು ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕಾಣಬಹುದು.

ಹೀಗಾಗಿ ಹೊಸದಾದ ಉಂಟಾದ ಘನವಸ್ತುವಿನ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪ್ರತಿ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ಹೊಸ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) = (ಮೊದಲ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) + (ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) + (ಎರಡನೆಯ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ)

ಈಗ ನಾವು ಮತ್ತೊಂದು ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ನಾವು ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳ ಮತ್ತು ಶಂಕುವನ್ನು ಒಂದುಗೂಡಿಸಿ ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಲು ಇರುವ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ ಒಂದು ಶಂಕು ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಮತಟ್ಟಾದ ಮುಖಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸೋಣ. ಖಂಡಿತವಾಗಿಯು, ಇಲ್ಲಿ ನೀವು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆಗ ಆಟಿಕೆಯು ನಯವಾದ, ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು. ಹೀಗೆ ಚಿತ್ರ 15.5 ರಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 15.5

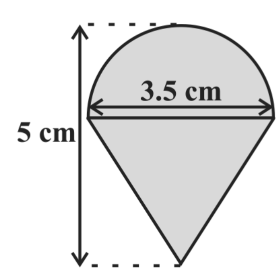
ಈ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ ನಯವಾದ ಗೋಲಾಕಾರದ ತಳವುಳ್ಳ ಆಟಿಕೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಾವು ಈ ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ನಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಬಣ್ಣ ಬೇಕಾಗಬಹುದು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ, ಈಗ ನಾವು ಯಾವ ಅಂಶವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು? ಈಗ ನಾವು ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ ಈ ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ ನಾವು ಏನನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು ಎಂದರೆ,

ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ರಶೀದನು ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದ ಉಡುಗೊರೆಯಾಗಿ ಒಂದು ಬುಗರಿಯನ್ನು ಪಡೆದನು. ಬಗುರಿಯ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಇರಲಿಲ್ಲ. ಅವನ ಬಳಿ ಇರುವ ಬಣ್ಣದ ಕಡ್ಡಿ (crayons) ಗಳಿಂದ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಬಯಸಿದ್ದಾನೆ. ಬಗುರಿಯು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಇರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.6 ನೋಡಿ). ಬಗುರಿಯ ಸಂಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 5 cm ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 3.5 cm ಇದ್ದರೆ, ಅವನು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



ಚಿತ್ರ 15.6

ಪರಿಹಾರ: ಚಿತ್ರ 15.5 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಈ ಬಗುರಿಯಲ್ಲಿಯು ಸಹ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ನಾವು ಅಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಪಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಬಳಸೋಣ.

ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಈಗ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{22}{7}\ (4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2$$

ಹಾಗೆಯೇ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ = ಬಗುರಿಯ ಎತ್ತರ – ಅರ್ಧಗೋಳದ ಎತ್ತರ (ತ್ರಿಜ್ಯ)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) = 3.25 \text{ cm}$$

ಹೀಗೆ, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ $(l) = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} = 3.7$ cm

$= 3.7$ cm (ಸರಿಸುಮಾರು)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{cm}^2$

ಇದರಿಂದ ಪಡೆಯುವುದೇನೆಂದರೆ,

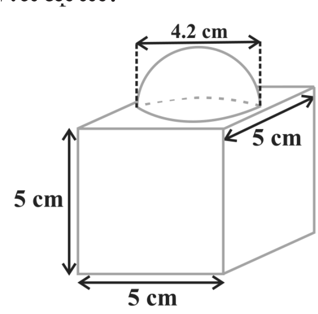
ಬಗುರಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{cm}^2$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2}\ (3.5 + 3.7)\ \text{cm}^2 = \frac{11}{7}\ (3.5 + 3.7)\ \text{cm}^2$$

$= 39.6$ cm^2 (ಸರಿಸುಮಾರು)

ಬಗುರಿಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಲ್ಲ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಚಿತ್ರ 15.7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಅಲಂಕಾರಿಕ ವಸ್ತುವು ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳ ಈ ಎರಡು ಘನಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಪಾದವು 5 cm ಬಾಹುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ 4.2 cm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಇರಿಸಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



ಚಿತ್ರ 15.7

ಪರಿಹಾರ: ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 6 \times (\text{ಬಾಹು})^2$

$= 6 \times 5 \times 5 = 150\ \text{cm}^2$

ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವರ್ಗ ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಬಾರದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಹೀಗಾಗಿ, ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

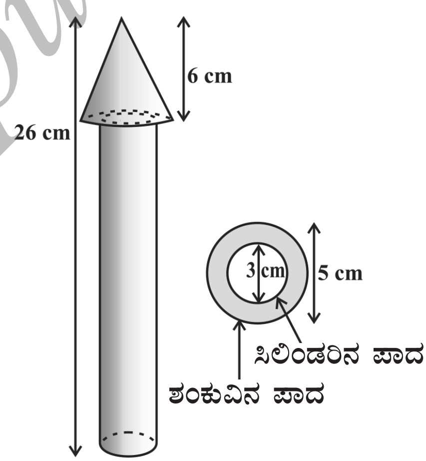
$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2$

$= (150 + \pi r^2)\ \text{cm}^2$

$= 150\ \text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right) \text{cm}^2$

$= (150 + 13.86)\ \text{cm}^2 = 163.86\ \text{cm}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 3: . ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವನ್ನು ಇರಿಸಿ, ಒಂದು ಮರದ ಆಟಿಕೆಯ ರಾಕೆಟ್‌ಅನ್ನು ಚಿತ್ರ 15.8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಾಡಿದೆ. ರಾಕೆಟ್‌ನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 26 cm ಹಾಗೆಯೇ, ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗದ ಎತ್ತರವು 6 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 5 cm. ಹಾಗೆಯೇ, ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 3 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣ ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು ಹಳದಿ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ರಾಕೆಟ್‌ನ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಎಂದು ಬಳಸಿ).



ಚಿತ್ರ 15.8

ಪರಿಹಾರ: ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು r ಎಂದು, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ l ಎಂದು, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ h ಎಂದು, ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ r' ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ h' ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಆಗ $r = 2.5$ cm, $h = 6$ cm, $r' = 1.5$ cm, $h' = 26 - 6 = 20$ cm ಮತ್ತು

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} = 6.5cm$$

ಇಲ್ಲಿ, ಶಂಕುವಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಆದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಒಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ (ಉಂಗುರ) ಮಾತ್ರ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ, ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚ ಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \pi r l + \pi r^2 - \pi (r')^2$

$= \pi [(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2] \text{ cm}^2$

$= \pi [20.25] \text{ cm}^2 = 3.14 \times 20.25 \text{ cm}^2$

$= 63.585 \text{ cm}^2$

ಈಗ, ಹಳದಿ ಬಣ್ಣ ಬಳೆಯಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಂದು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

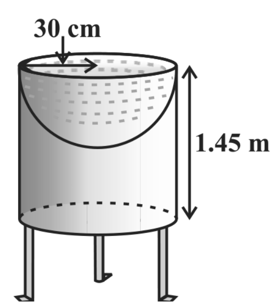
$= 2\pi r'h' + \pi (r')^2$

$= \pi r'(2h' + r')$

$= (3.14 \times 1.5) (2 \times 20 + 1.5) \text{ cm}^2$

$= 4.71 \times 41.5 \text{ cm}^2 = 195.465 \text{ cm}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಮಯಾಂಕನು ಅವನ ಕೈ ತೋಟದಲ್ಲಿ ಪಕ್ಷಿಗಳು ಸ್ನಾನ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ, ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದಲ್ಲಿ ತಗ್ಗಾಗುವಂತೆ, ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಚಿತ್ರ 15.9 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಿರ್ಮಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 1.45 m ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 30 cm ಇದೆ. ಈ ಸಾಧನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



ಚಿತ್ರ 15.9

ಪರಿಹಾರ: ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 'h' ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದ್ದು, ಅದು 'r'ಎಂದಿರಲಿ. ನಂತರ, ಈ ಸಾಧನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \; (45 + 30) \text{ cm}^2$

$= 33000 \text{ cm}^2 = 3.3 \text{ cm}^2$

ಅಭ್ಯಾಸ 15.1

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \dfrac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. $64\ cm^3$ ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 2 ವರ್ಗ ಘನಗಳ ಮುಖಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿ ಮಾಡಿದೆ. ಈ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

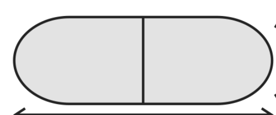
2. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ಆಕಾರವು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಂದು ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಟೊಳ್ಳಾದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು 14 cm ಮತ್ತು ಪಾತ್ರೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 13 cm ಇದೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಅದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಅವೇರಡರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 3.5 cm ಆಗಿದೆ. ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 15.5 cm ಆದರೆ ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಪ್ರತಿ ಅಂಚು 7 cm ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧಗೋಳವು ಇರಿಸಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಗರಿಷ್ಠ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಈ ಪೂರ್ಣ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮರದ ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದು ಮುಖದ ಒಳಭಾಗವು ತಗ್ಗಾಗುವಂತೆ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಕೊರೆಯಲಾಗಿದೆ. ವರ್ಗ ಘನದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ l ಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ನೂತನವಾಗಿ ಉಂಟಾದ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಔಷದದ ಕ್ಯಾಪ್ಸುಲ್‌ನ ಆಕಾರವು ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪ್ರತಿ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಅಂಟಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.10 ನೋಡಿ). ಕ್ಯಾಪ್ಸುಲ್‌ನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಉದ್ದವು 14 mm ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯಾಸವು 5 mm ಇದೆ. ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

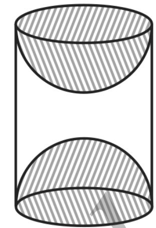


ಚಿತ್ರ 15.10

7. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವನ್ನು ಶಂಕುವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಡೇರೆಯು ಇದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 2.1 m ಮತ್ತು 4 m ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇದೆ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ 2.8 m ಆದರೆ, ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಳಸಿದ ತಾಡಪತ್ರಿ (canvas) ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ, ತಾಡಪತ್ರಿಯ ದರವು ₹ 500 ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ಆದರೆ, ತಾಡಪತ್ರಿಯನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬೇಕಾಗುವ ಹಣವೆಷ್ಟು? (ಡೇರೆಯ ಪಾದವನ್ನು ತಾಡಪತ್ರಿಯಿಂದ ಹಾಸಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).

8. ಒಂದು ಘನ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 2.4 m ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ 1.4 m ಇದೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದೇ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಹಳ್ಳವನ್ನು ಕೊರೆದು ಟೊಳ್ಳಗಿಸಿದೆ. ನೂತನ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಬೆಲೆಗೆ cm^2 ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಮರದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತಕಾರದ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಚಿತ್ರ 15.11 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕೊರೆದು ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 10 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 cm ಆದರೆ, ವಸ್ತುವಿನ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

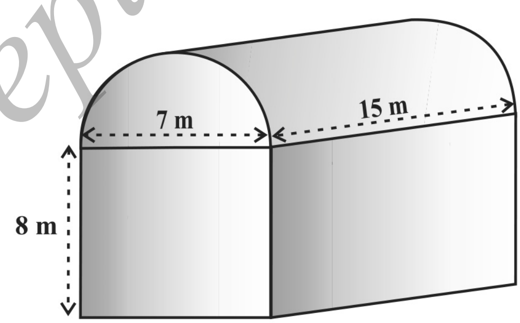


ಚಿತ್ರ 15.11

15.3 ಜೋಡಿಸಿದ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲ

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಎರಡು ಜೋಡಿಸಿದ ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂದು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ, ನಾವು ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವಾಗ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದೇನೆಂದರೆ, ನಾವು ಎರಡು ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡಲಿಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಾದ ಕೆಲವು ಭಾಗಗಳು ಕಾಣದಾದವು. ಆದಾಗ್ಯೂ ನಾವು ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವಾಗ ಹೀಗೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಎರಡು ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಉಂಟಾದ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಆ ಎರಡು ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಶಾಂತ ಅವರು ಜೋಪಡಿ (shed)ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೈಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ನೆಡೆಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಜೋಪಡಿಯ ಆಕಾರವು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಮೇಲ್ಹಾವಣಿಯು ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.12 ನೋಡಿ). ಜೋಪಾಡಿಯ ಪಾದದ ಅಳತೆಯು $7\ \text{m} \times 15\ \text{m}$ ಮತ್ತು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ 8 m ಆದರೆ ಜೋಪಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮುಂದುವರೆದು, ಜೋಪಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಯಂತ್ರಗಳ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲವು 300 m^3 ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿನ 20 ಕೆಲಸಗಾರರು, ಪ್ರತಿ ಕೆಲಸಗಾರರು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ 0.08 m^3 ಅವಕಾಶವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ನಂತರ ಜೋಪಡಿಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಗಾಳಿ ಎಷ್ಟು? ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



ಚಿತ್ರ 15.12

ಪರಿಹಾರ: ಜೋಪಡಿನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲವು (ಜೋಪಡಿಯಲ್ಲಿನ ಯಂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲಸಗಾರರು ಇರದೇ ಇದ್ದಾಗ) ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಳಭಾಗದ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 15 m, 7 m ಮತ್ತು 8 m ಆಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವ್ಯಾಸವು 7 m ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರ 15 m ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಆಪೇಕ್ಷಿತ ಘನಫಲ = ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ+ $\frac{1}{2}$ × ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] m^3 = 1128.75 \ m^3$$

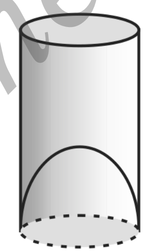
ನಂತರ, ಯಂತ್ರಗಳಿಂದ ಆವರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲ = 300 m^3

ಕೆಲಸಗಾರರಿಂದ ಆವರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಅವಕಾಶ = $20 \times 0.08 \ m^3 = 1.6 \ m^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲಸಗಾರರು ಇದ್ದಾಗ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ

$$= 1128.86 - (300.00 + 1.60) = 827.15 \ m^3$$

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಚಿತ್ರ 15.13 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಹಣ್ಣಿನ ರಸದ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣಿನ ರಸವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಒಳ ವ್ಯಾಸವು 5 cm ಇದೆ. ಆದರೆ ಲೋಟದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳದಷ್ಟು ಎತ್ತರಿಸಿದ ಭಾಗವು ಇದ್ದು, ಇದು ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಎತ್ತರವು 10 cm ಆದರೆ ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಮತ್ತು ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)



ಚಿತ್ರ 15.13

ಪರಿಹಾರ : ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಒಳ ವ್ಯಾಸ = 5 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ = 10 cm

ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \ cm^3$$

$$= 196.25 \ cm^3$$

ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು ಲೋಟದ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲದಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

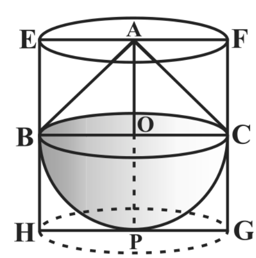
ಅಂದರೆ, ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಗಾತ್ರ = $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$

$$= 32.71 \ cm^3$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ = ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ − ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ

$$= (196.25 - 32.71) \ cm^3 = 163.54 \ cm^3$$

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಂದು ಘನ ಆಟಿಕೆಯು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ನೇರ ಪಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಇರಿಸಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 2 cm ಮತ್ತು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 4 cm ಇದೆ. ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಆವೃತಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಘನಫಲದ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



ಚಿತ್ರ 15.14

ಪರಿಹಾರ : BPC ಯು ಅರ್ಧಗೋಳ ಮತ್ತು ABC ಶಂಕು ಆಗಿರಲಿ. ಶಂಕುವು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.14 ನೋಡಿ). ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು BO ಆಗಿದ್ದು (ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ) = $\frac{1}{2} \times 4$ cm = 2 cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲ = $\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times 2^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times 2^2 \times 2\right] \text{cm}^3$$

$$= 25.12 \text{ cm}^3$$

EFGH ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಗಿದ್ದು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣ ಆವೃತವಾಗಿದೆ. ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ = HP = BO = 2 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರವು

$$EH = AO + OP = (2 + 2) \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಘನಫಲ = ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ – ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲ

$$= (3.14 \times 2^2 \times 4) - 25.12 \text{ cm}^3$$

$$= 25.12 \text{ cm}^3$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಘನಫಲದಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = 25.12 cm^3

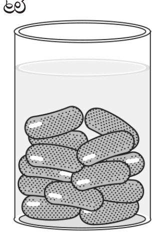
ಅಭ್ಯಾಸ 15.2

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. ಒಂದು ಘನದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ ಶಂಕುವು ನಿಂತಿದೆ. ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 1 cm ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಈ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು π ಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.

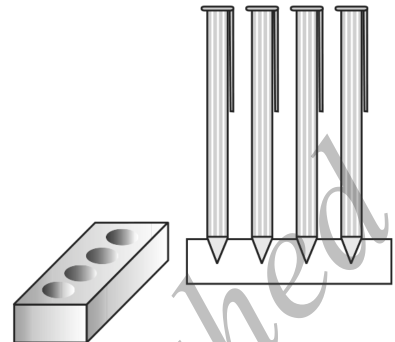
2. ರೇಚಲ್ ಒಬ್ಬ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿ. ಅವರು ತೆಳುವಾದ ಅಲ್ಯುಮಿನಿಯಂ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾದರಿಯ ವ್ಯಾಸವು 3 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಒಟ್ಟಾರೆ ಉದ್ದವು 12 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು 2 cm ಆದರೆ ರೆಚೇಲ್ ಮಾಡಿದ ಈ ಮಾದರಿಯೊಳಗಿನ ಗಾಳಿಯ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಮಾದರಿಯ ಹೊರ ಹಾಗೂ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ಅಳತೆಗಳು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)

3. ಒಂದು ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮೂನ್‌ನಲ್ಲಿ ಅದರ ಘನಫಲದ ಶೇ 30 ರಷ್ಟು ಸಕ್ಕರೆಯ ಪಾಕವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು, ಅದರ ಎರಡು ಅಂತ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳಗಳಿವೆ. ಗುಲಾಬ್ ಜಾಮುನಿನ ಒಟ್ಟಾರೆ ಉದ್ದ 5 cm ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 2.8 cm ಆದರೆ, 45 ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನ್‌ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಕ್ಕರೆ ಪಾಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 15.15 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 15.15

4. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದ ಮರದ ಲೇಖನಿಧಾರಕ (Pen stand)ದಲ್ಲಿ ಲೇಖನಿಗಳನ್ನು ಇಡಲು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕು ತಗ್ಗುಗಳನ್ನು ಕೊರೆದಿದೆ. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಅಳತೆಯು 15 cm × 10 cm × 3.5 cm ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಹಳ್ಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 0.5cm ಮತ್ತು ಆಳವು 1.4 cm ಇದೆ. ಲೇಖನಿಧಾರಕದಲ್ಲಿನ ಮರದ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 15.16 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 15.16

5. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ತಲೆಕೆಳಗಾದ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಎತ್ತರ 8 cm ಮತ್ತು ತೆರೆದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 5 cm ಇದೆ. ಅದರ ಅಂಚಿನವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ 0.5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಸೀಸದ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟು ನೀರು ಹೊರ ಚಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದ ಸೀಸದ ಗೋಳಗಳೆಷ್ಟು?

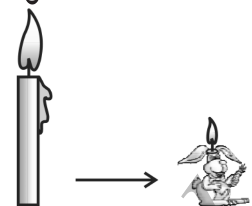
6. ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವು 220 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 24 cm ಆಗಿರುವ ಘನ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಇದರ ಮೇಲೆ 60 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 8 cm ಇರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. 1 cm^3 ಕಬ್ಬಿಣದ ಸರಿಸುಮಾರು ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು 8 g ಆದರೆ ಕಂಬದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

7. 60 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ 120 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 60 cm ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿದ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ತಳವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ ನೇರವಾಗಿ ಈ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮುಳುಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು 60 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 180 cm ಆದರೆ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. 8.5 cm ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಗಾಜಿನ ಪಾತ್ರೆಯು 8 cm ಉದ್ದ ಮತ್ತು 2 cm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದ ಕೊರಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಒಂದು ಮಗುವು ಅದರಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಅದರ ಘನಫಲವು 345 cm^3 ಇದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾಳೆ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳು ಅದರ ಒಳಭಾಗದ ಅಳತೆಗಳು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಅವಳ ಉತ್ತರವು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

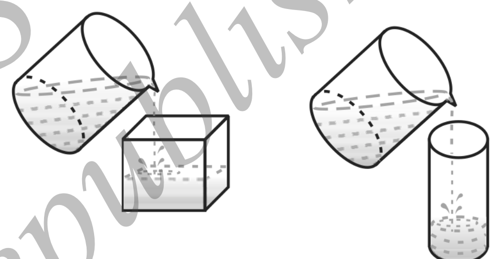
15.4 ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಒಂದು ಆಕಾರದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಆಕಾರಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು.

ನೀವೆಲ್ಲರೂ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಯನ್ನು ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅವುಗಳು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ನೀವು ಕೆಲವು ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಗಳು ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇರುವುದನ್ನು ಸಹ ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ. (ಚಿತ್ರ 15.17 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 15.17

ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತಯಾರು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ? ನೀವು ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಯನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಶೇಷ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ರೂಪಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಮೊದಲು ಮೇಣವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಕರಗಿಸಬೇಕು. ನಂತರ ನಿಮಗೆ ಬೇಕಾದ ವಿಶೇಷ ಆಕಾರ ಇರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಸುರಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಯನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಮತ್ತು ದ್ರಾವಿಕೃತ ಮೇಣವನ್ನು ಮೊಲದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಪಾತ್ರೆಗೆ ಸುರಿಯಿರಿ. ಅದನ್ನು ತಂಪಾಗಿಸಿದ ನಂತರದಲ್ಲಿ, ನೀವು ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಯನ್ನು ಮೊಲದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯುವಿರಿ. ನೂತನವಾಗಿ ಪಡೆದ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಯ ಘನಫಲವು ಈ ಮೊದಲಿದ್ದ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಯ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಅದರ ಆಕಾರವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಘನಫಲದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.



ಚಿತ್ರ 15.18

ನಾವು ಇದುವರೆಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 24 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 cm ಇದೆ. ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದ ಜೇಡಿ ಮಣ್ಣಿನಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಒಂದು ಮಗುವು ಇದನ್ನು ಗೋಲಾಕೃತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ, ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24 \text{ cm}^3$

ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 'r' ಎಂದಾದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವು $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಜೇಡಿ ಮಣ್ಣಿನಿಂದ ಮಾಡಿದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಗೋಲದ ಘನಫಲವು ಸಮನಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$$

$$r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$$

ಹಾಗಾಗಿ, $r = 3 \times 2 = 6 \text{ cm}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 cm.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಸೆಲ್ವಿಯ ಮನೆಯ ಮೇಲಿನ ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಂಪ್ (ನೆಲದ ಕೆಳಗಿನ ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿ)ನಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಸಂಪ್‌ನ ಅಳತೆಯು 1.57 m $\times$ 1.44 m $\times$ 95 m ಇದೆ. ಮನೆಯ ಮೇಲಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 60 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 95 cm ಇದೆ. ಸಂಪ್ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರಿನಿಂದ ಭರ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಈಗ ಈ ನೀರನ್ನು ಮನೆಯ ಮೇಲಿನ ತೊಟ್ಟಿಗೆ ಕಳುಹಿಸಿ, ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಿದೆ. ಸಂಪ್‌ನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ತೊಟ್ಟಿಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಮತ್ತು ಸಂಪ್‌ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಮನೆ ಮೇಲಿನ ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ ಘನಫಲವು ಸಂಪ್‌ನಿಂದ ಹೊರತೆಗೆದ ನೀರಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಮನೆ ಮೇಲಿನ ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ ಘನಫಲ (ಸಿಲಿಂಡರ್) = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \text{ m}^3$$

ನೀರು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿದಾಗ ಸಂಪ್‌ನಲ್ಲಿನ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = $l \times b \times h$

$$= 1.57 \times 1.44 \times 0.95 \text{ m}^3$$

ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿ ತುಂಬಿದ ನಂತರ ಸಂಪ್‌ನಲ್ಲಿನ ನೀರಿನ ಘನಫಲ

$$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)] \text{ m}^3$$

$$= (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2) \text{ m}^3$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಂಪ್‌ನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ = $\dfrac{\text{ಸಂಪ್‌ನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ}}{l \times b}$

$$= \frac{1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2}{1.57 \times 1.44} \text{ m}$$

$$= 0.475 \text{ m} = 47.5 \text{ m}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{\text{ತೊಟ್ಟಿಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ}}{\text{ಸಂಪ್‌ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ}} = \dfrac{3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95}{1.57 \times 1.44 \times 0.95} = \dfrac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ತೊಟ್ಟಿಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು ಸಂಪ್‌ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: ಒಂದು ತಾಮ್ರದ ಸರಳಿನ ವ್ಯಾಸ 1 cm ಮತ್ತು ಉದ್ದ 8 cm ಇದೆ. ಇದನ್ನು ಒಂದೇ ದಪ್ಪ ಹೊಂದಿರುವ 1 m ಉದ್ದದ ತಂತಿಯಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ತಂತಿಯ ದಪ್ಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಸರಳಿನ ಘನಫಲ $= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8 \text{ cm}^3 = 2\pi \text{ cm}^3$

ಅದೇ ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ $= 18 \text{ m} = 1800 \text{ cm}$

ತಂತಿಯ ಅಡ್ಡ ಸೀಳಿಕೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ 'r' ಎಂದಿರಲಿ, ಅದರ ಘನಫಲ $= \pi r^2 \times 1800 \text{ cm}^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\pi r^2 \times 1800 = 2\pi$

$$r^2 = \frac{1}{900}$$

$$r = \frac{1}{30}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ತಂತಿಯ ಅಡ್ಡ ಸೀಳಿಕೆಯ ವ್ಯಾಸ ಅಂದರೆ ತಂತಿಯ ದಪ್ಪವು $\frac{1}{15}$ cm ಅಂದರೆ 0.67 mm (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

ಉದಾಹರಣೆ 11: ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ನೀರನ್ನು ಒಂದು ಕೊಳವೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗೆ $3\frac{4}{7}$ ಲೀಟರ್‌ನಂತೆ ಖಾಲಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ತೊಟ್ಟಿಯ ವ್ಯಾಸ 3 m ಆದರೆ ಅರ್ಧ ತೊಟ್ಟಿಯಷ್ಟು ನೀರನ್ನು ಖಾಲಿ ಮಾಡಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ ಎಷ್ಟು? ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ: ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{3}{2}$ m

ತೊಟ್ಟಿಯ ಘನಫಲ $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ m}^3$

$= \frac{99}{14} \text{ m}^3$

ಹಾಗೆಯೇ ಖಾಲಿ ಮಾಡಬೇಕಾದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{2} \times \frac{99}{14} \text{ m}^3$

$= \frac{99}{28} \times 1000$ ಲೀಟರ್‌ಗಳು

$= \frac{99000}{28}$ ಲೀಟರ್‌ಗಳು

ಹಾಗಾಗಿ $\frac{25}{7}$ ಲೀಟರ್ ನೀರು 1 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಖಾಲಿಯಾದರೆ,

$\frac{99000}{28}$ ಲೀಟರ್ ನೀರು ಖಾಲಿಯಾಗಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $= \frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳು

$= 16.5$ ನಿಮಿಷ.

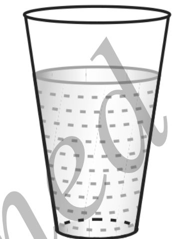
ಅಭ್ಯಾಸ 15.3

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. 4.2 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಲೋಹದ ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಅದನ್ನು 6 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಮರುರೂಪ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. 6 cm, 8 cm ಮತ್ತು 10 cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಲೋಹದ ಮೂರು ಗೋಳಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಒಂದು ಲೋಟದ ಗೋಳವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಹೀಗೆ ಉಂಟಾದ ನವೀನ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. 20 m ಆಳ ಮತ್ತು 7 m ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಬಾವಿಯನ್ನು ತೋಡಿದೆ ಮತ್ತು ಭೂಮಿಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಮಣ್ಣನ್ನು ಸಮವಾಗಿ ಹರಡಿ 22 m × 14 m ವೇದಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ವೇದಿಕೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಬಾವಿಯ ವ್ಯಾಸ 3 m ಮತ್ತು ಆಳ 14 m ಇರುವಂತೆ ತೋಡಿದೆ. ಭೂಮಿಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಮಣ್ಣನ್ನು ಬಾವಿಯ ಸುತ್ತಲು ಸಮವಾಗಿ ಹರಡಿ 4 m ಅಗಲವಿರುವ ವೃತ್ತಕಾರದ ಕಟ್ಟೆಯನ್ನು ಕಟ್ಟಿದೆ. ಕಟ್ಟೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ವ್ಯಾಸ 12 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 15 cm ಇದ್ದು, ಅದರ ತುಂಬ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್ ಇದೆ. ಈ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮನ್ನು 12 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 6 cm ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿ, ಅದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳವಿರುವಂತೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮನ್ನು ಎಷ್ಟು ಶಂಕುಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು?
6. 1.75 cm ವ್ಯಾಸ ಹಾಗೂ 2 mm ದಪ್ಪ ಇರುವ ಬೆಳ್ಳಿ ನಾಣ್ಯಗಳಿವೆ. ಈ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 5.5 cm × 10 cm × 3.5 cm ಅಳತೆಯ ಒಂದು ಆಯತ ಘನವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಬೆಳ್ಳಿಯ ನಾಣ್ಯಗಳು ಬೇಕು?
7. 32 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 18 cm ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಬಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮರಳನ್ನು ತುಂಬಿದೆ. ಬಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಮರಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಸುರಿದಾಗ ಅದು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಮರಳಿನ ರಾಶಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ರಾಶಿಯ ಎತ್ತರವು 24 cm ಆದರೆ, ಮರಳಿನ ರಾಶಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 6 m ಅಗಲ ಮತ್ತು 1.5 m ಆಳ ಇರುವ ಕಾಲುವೆಯಲ್ಲಿ ನೀರು 10 km/h ಜವದಲ್ಲಿ ಹರಿಯುತ್ತಿದೆ. 8 cm ನೀರು ನಿಲ್ಲುವ ಹಾಗೆ, 30 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಹರಿಯುವ ನೀರಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೀರಾವರಿ ಮಾಡಬಹುದು?
9. 20 cm ಒಳ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕಾಲುವೆಯಿಂದ ತನ್ನ ಹೊಲದಲ್ಲಿರುವ 10 m ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 2 m ಆಳ ಇರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಗೆ ಒಬ್ಬ ರೈತ ನೀರನ್ನು ಹರಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ ನೀರು 3 km/h ದರದಲ್ಲಿ ಹರಿದರೆ, ತೊಟ್ಟಿ ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಅವಧಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15.5 ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕ

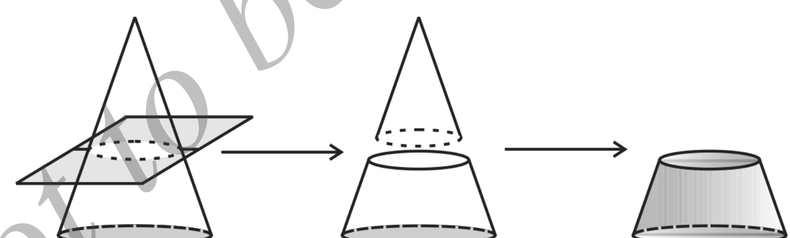
15.2 ರ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಎರಡು ಮೂಲ ಘನವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಹೊಸ ಘನವಸ್ತುವನ್ನು ಮಾಡಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಏನಾದರೂ ಭಿನ್ನವಾಗಿ ಯೋಚಿಸೋಣ. ನಾವು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕೋಣ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದರೆ ನಾವು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಅದು ಯಾವುದೆಂದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಯಾವುದಾರೊಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ, ಒಂದು ಚಿಕ್ಕದಾದ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸುವಂತಹ ಪ್ರಕರಣ ಮಾತ್ರ. ನಾವು ನೀರನ್ನು ಕುಡಿಯಲು ಬಳಸುವ ಲೋಟಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುತ್ತೀರಿ. (ಚಿತ್ರ 15.19 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 15.19

ಚಟುವಟಿಕೆ 1: ಜೇಡಿ ಮಣ್ಣು ಅಥವಾ ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಸಿನ್(plasticine) ಮುಂತಾದವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಚಾಕುವಿನಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ಉಂಟಾದ ಚಿಕ್ಕ ಶಂಕುವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿದ ನಂತರ ಏನು ಉಳಿಯಿತು?

ಉಳಿದ ಈ ಘನವನ್ನು "ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಭಿನ್ನಕದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದಗಳನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೀರಿ. ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ (ಚಿತ್ರ 15.20 ನೋಡಿ) ಮತ್ತು ಸಮತಲದ ಒಂದು ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ, ಸಮತಲದ ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಘನವನ್ನು **ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕ** (Frustum* of cone) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

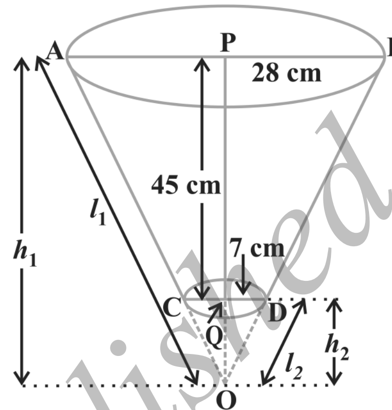


ಚಿತ್ರ 15.20

ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು? ಇದನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗಿದೆ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

*'**Frustum**' ಇದು ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಶಬ್ಧ ಇದರ ಅರ್ಥ ಕತ್ತರಿಸಿದ ತುಂಡು ಅಥವಾ ಭಾಗ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಇದರ ಬಹುವಚನ "**frusta**"

ಉದಾಹರಣೆ 12: 45 cm ಎತ್ತರ ಇರುವ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾದಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 28 cm ಮತ್ತು 7 cm ಗಳಾಗಿವೆ. (ಚಿತ್ರ 15.21 ನೋಡಿರಿ). ಇದರ ಘನಫಲ, ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



ಚಿತ್ರ 15.21

ಪರಿಹಾರ: ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕವನ್ನು ಎರಡು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುಗಳಾದ OAB ಮತ್ತು OCD ಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕ ಎಂದು ಚಿತ್ರ 15.21 ರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಶಂಕು OAB ಯ ಎತ್ತರವು h_1 ಮತ್ತು ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರ l_1, ಅಂದರೆ $OP = h_1$ ಮತ್ತು $OA = OB = l_1$ ಎಂದಿರಲಿ. ಶಂಕು OCD ಯ ಎತ್ತರ h_2 ಮತ್ತು ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರ l_2 ಎಂದಿರಲಿ. $r_1 = 28$ cm, $r_2 = 7$ cm ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಎತ್ತರ $h = 45$ cm. ಹಾಗೆಯೇ

$$h_1 = 45 + h_2 \qquad (1)$$

ಮೊದಲು ನಾವು OAB ಮತ್ತು OCD ಶಂಕುಗಳ ಎತ್ತರಗಳಾದ h_1 ಮತ್ತು h_2 ಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$\Delta OPB \sim \Delta OQD \text{ (ಏಕೆ?)}$$

ಇದರಿಂದ,
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1} \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವುದೇನೆಂದರೆ $h_2 = 15$ cm ಮತ್ತು $h_1 = 60$ cm

ಈಗ, ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ = ಶಂಕು OAB ಯ ಘನಫಲ – ಶಂಕು OCD ಯ ಘನಫಲ

$$= \left[\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (28)^2 \times 60 - \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^2 \times 15\right] \text{cm}^3$$

$$= 48510 \text{ cm}^3$$

ಶಂಕು OCD ಮತ್ತು OAB ಯ ಓರೆ ಎತ್ತರ l_2 ಮತ್ತು l_1 ಕ್ರಮವಾಗಿ ಈ ಮುಂದಿನಂತಿದೆ.

$$l_2 = \sqrt{7^2 + 15^2} = 16.55 \text{ cm (ಸರಿಸುಮಾರು)}$$

$$l_1 = \sqrt{28^2 + 60^2} = 4\sqrt{7^2 + 15^2} = 4 \times 16.55 = 66.20 \text{ cm}$$

ಹೀಗೆ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$$= \frac{22}{7}(28)(66.20) - \frac{22}{7}(7)(16.55)$$

$$= 5461.5 \text{ cm}^2$$

ಈಗ ಭಿನ್ನಕದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + $\pi r_1^2 - \pi r_2^2$

$$= 5461.5 \text{ cm}^2 + \frac{22}{7}(28)^2 \text{ cm}^2 + \frac{22}{7}(7)^2 \text{ cm}^2$$

$$= 5461.5 \text{ cm}^2 + 2464 \text{ cm}^2 + 154 \text{ cm}^2$$

$$= 8079.5 \text{ cm}^2$$

ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಎತ್ತರ h, ಓರೆ ಎತ್ತರ l ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ವೃತ್ತ ಪಾದಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು r_1 ಮತ್ತು r_2 $(r_1 > r_2)$ಎಂದು ಆಗಿರಲಿ. ನಂತರದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೇರವಾದ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ, ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

i) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

ii) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi(r_1 + r_2)l$.

ಇಲ್ಲಿ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

iii) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

ಇಲ್ಲಿ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ಸಮರೂಪತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಸುತ್ತಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 12 ಅನ್ನು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಡಿಸೋಣ.

i) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 45\,[(28)^2 + 7^2 + (28) \times (7)] \text{ cm}^3$$

$$= 48510 \text{ cm}^3$$

ii) $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{45^2 + (28 - 7)^2}$ cm

$$= 3\sqrt{15^2 + 7^2} = 49.65 \text{ cm}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \pi(r_1 + r_2)l = \frac{22}{7}(28 + 7)(49.65) = 5461.5 \text{ cm}^2$$

iii) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

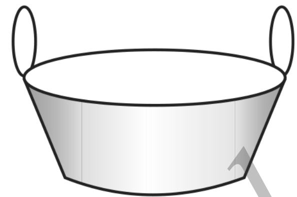
$$= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$= \left[5461.5 + \frac{22}{7}(28)^2 + \frac{22}{7}(7)^2\right] \text{ cm}^2$$

$$= 8079.5 \text{ cm}^2$$

ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಹನುಮಂತಪ್ಪ ಮತ್ತು ಅವರ ಪತ್ನಿ ಗಂಗಮ್ಮ ಇವರು ಕಬ್ಬಿನ ರಸದಿಂದ ಬೆಲ್ಲವನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅವರು ಕಬ್ಬಿನ ರಸವನ್ನು ಸಂಸ್ಕರಿಸಿ ಕಾಕಂಬಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ, ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಅಚ್ಚಿಗೆ ಸುರಿಯಲಾಗಿದೆ. ಅಚ್ಚಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಎರಡು ಪಾದಗಳ ವ್ಯಾಸವು 30 cm ಮತ್ತು 35 cm ಮತ್ತು ಅದರ ನೇರ ಎತ್ತರವು 14 cm ಇದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.22 ನೋಡಿರಿ). ಕಾಕಂಬಿಯ ಪ್ರತಿ 1 cm^3 ಗಳದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು 1.2 g ಆದರೆ, ಅಚ್ಚಿನ ಪಾತ್ರೆಗೆ ಸುರಿದ ಕಾಕಂಬಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



ಚಿತ್ರ 15.22

ಪರಿಹಾರ: ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಅಚ್ಚು ಇರುವುದರಿಂದ ಅದರಲ್ಲಿ ಕಾಕಂಬಿಯನ್ನು ಸುರಿದ ಪ್ರಮಾಣ (ಘನಫಲ) $= \frac{1}{3}h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$

ಇಲ್ಲಿ 'r_1' ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು 'r_2' ಚಿಕ್ಕ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^{22} + \left(\frac{35}{2}\right)^2 \times \left(\frac{30}{2}\right)^2\right] cm^3$$

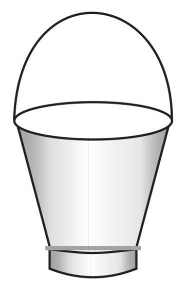
$$= 11641.7\ cm^3$$

ಕಾಕಂಬಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು 1.2 g ಎಂದು ನೀಡಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿ ಹಾಕಬಹುದಾದ ಕಾಕಂಬಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ $= (11641.7 \times 1.2)g$

$= 13970.04\ g = 13.97\ kg$

$= 14\ kg$ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

ಉದಾಹರಣೆ 14: ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ತೆರೆದ ಲೋಹದ ಬಕೇಟ್ ಇದೆ. ಇದೇ ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಬಕೇಟನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.23 ನೋಡಿರಿ). ಅದರ ಎರಡು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 45 cm ಮತ್ತು 25 cm, ಬಕೇಟ್‌ನ ಒಟ್ಟು ನೇರ ಎತ್ತರವು 40 cm ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಪಾದದ ಎತ್ತರವು 6 cm ಆಗಿದೆ. ಈ ಬಕೇಟ್‌ನ್ನು ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಬಕೇಟ್‌ನ ಹಿಡಿಕೆಯನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ ಬಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯಬಹುದಾದ ಒಟ್ಟು ನೀರಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಬಳಸಿ).



ಚಿತ್ರ 15.23

ಪರಿಹಾರ: ಬಕೇಟ್‌ನ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ = 40 cm, ಇದರಲ್ಲಿ ಪಾದದ ಎತ್ತರವು ಸಹ ಸೇರಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಎತ್ತರ $= h = (40 - 6)\ cm = 34\ cm$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಓರೆ ಎತ್ತರ = $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

ಇಲ್ಲಿ $r_1 = 22.5$ cm, $r_2 = 12.5$ cm ಮತ್ತು $h = 34$ cm

$$l = \sqrt{34^2 + (22.5 - 12.5)^2} \text{ cm}$$

$$= \sqrt{34^2 + 10^2} = 35.44 \text{ cm}$$

ಬಳಸಿದ ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= [\pi \times 35.44\ (22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2\pi \times 12.5 \times 6] \text{ cm}^2$$

$$= \frac{22}{7}\ (1240.4 + 156.25 + 150) \text{ cm}^2$$

$$= 4860.9 \text{ cm}^2$$

ಈಗ ಬಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ (ಇದನ್ನು ಬಕೇಟ್‌ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ)

$$= \frac{\pi \times h}{3} \times (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5] \text{ cm}^3$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times 943.75 = 33615.48 \text{ cm}^3$$

= 33.62 ಲೀಟರ್‌ಗಳು (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

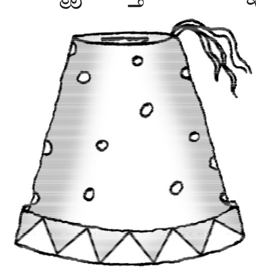
ಅಭ್ಯಾಸ 15.4

[π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ]

1. 14 cm ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಕುಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾಜಿನ ಲೋಟವು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಎರಡು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳು 4 cm ಮತ್ತು 2 cm ಗಳಾಗಿವೆ. ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 4 cm ಮತ್ತು ಅದರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ (ಪರಿಧಿ)ಗಳು 18 cm ಮತ್ತು 6 cm ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಟರ್ಕಿ ದೇಶದ ಪ್ರಜೆಗಳು ಧರಿಸುವ ಟೋಪಿಗೆ 'ಫೆಜ್' ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.24 ನೋಡಿರಿ). ಅದರ ತೆರೆದ ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 10 cm ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 4 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 15 cm ಆದರೆ ಅದನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಸ್ತುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 15.24

4. ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ತೆರೆದಿರುವ ಮತ್ತು ಒಂದು ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕರ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಎತ್ತರ 16 cm, ಅದರ ಕೆಳಭಾಗದ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 8 cm ಮತ್ತು 20 cm ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇದೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ಹಾಲಿನಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. 1 ಲೀಟರ್ ಹಾಲಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 20 ರಂತೆ ಹಾಲನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಎಷ್ಟು ಹಣಬೇಕು? ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ದರ ₹ 8 ಪ್ರತಿ 100 cm^2 ಆದರೆ, ಇಡೀ ಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಹಣ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ? ($\pi = 3.14$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

5. ಒಂದು ಲೋಹದಿಂದ ಮಾಡಿದ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 20 cm ಮತ್ತು ಶೃಂಗ ಕೋನವು 60°. ಈ ಶಂಕುವನ್ನು ಅದರ ಎತ್ತರದ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪಡೆದ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕವನ್ನು ತಂತಿಯ ವ್ಯಾಸ $\frac{1}{16}$ cm ಇರುವಂತೆ ತಂತಿಯಾಗಿ ಎಳೆದರೆ ತಂತಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 15.5 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. 12 cm ಉದ್ದ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ 10 cm ವ್ಯಾಸ ಇರುವ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಇದೆ. ಇದರ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖವನ್ನು ಒಂದು ತಾಮ್ರದ ತಂತಿಯಿಂದ ಸುತ್ತಿ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಚ್ಚಲಾಗಿದೆ. ತಾಮ್ರದ ತಂತಿಯ ವ್ಯಾಸ 3 mm ಮತ್ತು ಸಾಂದ್ರತೆಯು 8.88 g/cm^3 ಆದರೆ, ತಂತಿಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

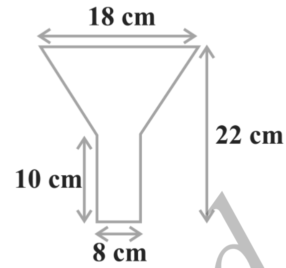
2. ಒಂದು ನೇರಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣದ ಬಾಹುವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಬಾಹುಗಳು 3 cm ಮತ್ತು 4 cm ಇದೆ. ಈ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಕರ್ಣದ ಮೂಲಕ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಶಂಕುಗಳ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [π ಗೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಿ.]

3. ಒಂದು ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ ಒಳಭಾಗದ ಅಳತೆಯು 150 cm $\times$ 120 cm $\times$ 110 cm ಇದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ 129600 cm^3 ನಷ್ಟು ನೀರು ಇದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿನ ಅಂಚಿನವರೆಗೂ ನೀರು ಬರುವ ಹಾಗೆ ರಂಧ್ರವಿರುವ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಇಟ್ಟಿಗೆಯು ಅದರ ಏಳನೇಯ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟು ನೀರನ್ನು ಹೀರಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಇಟ್ಟಿಗೆಯ ಅಳತೆಯು 22.5 cm $\times$ 7.5 cm $\times$ 6.5 cm ಇದ್ದರೆ, ನೀರು ತುಂಬಿ ಹೊರಚಲ್ಲದಂತೆ ಎಷ್ಟು ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು?

4. ತಿಂಗಳಿನ ಒಂದು ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, ನದಿಯ ಕಣಿವೆಯ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ 10 cm ನಷ್ಟು ಮಳೆ ಆಗಿದೆ. ಆ ಕಣಿವೆಯ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 7280 km^2 ಆಗಿದೆ. ಈ ಕಣಿವೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಒಂದೇ ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ಅಳವಿರುವ ನದಿಗಳಿವೆ. ಆ ನದಿಗಳ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಅಳಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1072 km, 75 m ಮತ್ತು 3 m ಆಗಿವೆ. ಮಳೆಯಿಂದ ಮೂರು ನದಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾದ ಒಟ್ಟಾರೆ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವು ಇಡೀ ಕಣಿವೆಯ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಬಂದ ಮಳೆಯ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

*ಈ ಅಭ್ಯಾಸವು ಪರೀಕ್ಷೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಲ್ಲ

5. ಒಂದು ತೈಲದ ಆಲಿಕೆಯನ್ನು ತಗಡು (Tin) ಹಾಳೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದೆ. ಅದರ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 22 cm ಆಗಿದೆ. ಆಲಿಕೆಯ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಉದ್ದವು 10 cm ಆಗಿದ್ದು, ಅದರ ವ್ಯಾಸವು 8 cm ಆಗಿದೆ. ಆಲಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವ್ಯಾಸವು 18 cm ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಆಲಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ತಗಡಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 15.25

6. ವಿಭಾಗ 15.5 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿದ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಸಿರಿ.
7. ವಿಭಾಗ 15.5 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ವಿವರಿಸಿದ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಸಿರಿ.

15.6 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತ್ತಿದ್ದೀರಿ.

1. ಆಯತ ಘನ, ಶಂಕು, ಸಿಲಿಂಡರ್, ಗೋಳ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳ ಈ ಎರಡು ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ರೂಪಗೊಂಡ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು.
2. ಆಯತ ಘನ, ಶಂಕು, ಸಿಲಿಂಡರ್, ಗೋಳ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳ ಈ ಎರಡು ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ರೂಪಗೊಂಡ ವಸ್ತುಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
3. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮತಲದಿಂದ ಛೇದಿಸಿ ಉಂಟಾದ ಚಿಕ್ಕ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರವನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಉಳಿದ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
4. ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದಲ್ಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳು

   i) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

   ii) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi l\,(r_1 + r_2)$ ಇಲ್ಲಿ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

   iii) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi l(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$ ಇಲ್ಲಿ h = ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ನೇರ ಎತ್ತರ, l = ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಓರೆ ಎತ್ತರ, r_1 ಮತ್ತು r_2 ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು.

❀ ❀ ❀

ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಸಾಧನೆಗಳು A1

A1.1 ಪೀಠಿಕೆ

ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ, ಕಾರಣೀಕರಿಸುವ ಮತ್ತು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಯೋಜನವಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಬ್ಬ ರಾಜಕಾರಣಿಯು "ನಿಮಗೆ ಸ್ವಚ್ಛ ಸರ್ಕಾರ ಬೇಕೆಂದರೆ ನನಗೆ ಮತ ನೀಡಿ" ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಭಾವಿಸೋಣ. ಅವರು ನಿಜವಾಗಿ ನಿಮ್ಮ ನಂಬಿಕೆ ಏನಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತಾರೆಂದರೆ, "ನೀವು ಅವರಿಗೆ ಮತ ಹಾಕದಿದ್ದರೆ ನಿಮಗೆ ಸ್ವಚ್ಛ ಸರ್ಕಾರ ಸಿಗದೇ ಇರಬಹುದು". ಹಾಗೆಯೇ, ಒಂದು ಜಾಹೀರಾತಿನಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. "ಬುದ್ಧಿವಂತರಾದವರು xyz ಪಾದರಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಧರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ಸಂಸ್ಥೆಯು ನಿಮ್ಮ ತೀರ್ಮಾನವು ಹೀಗಿರಬೇಕೆಂದು ಬಯಸುತ್ತದೆ, "ನೀವು xyz ಪಾದರಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಧರಿಸದೇ ಇದ್ದರೆ ಬುದ್ಧಿವಂತರಲ್ಲ. ಈ ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಜನರನ್ನು ತಪ್ಪಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಲು ಎಡೆಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕಾರಣೀಕರಿಸುವ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡರೆ, ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದೇ ಇಂತಹ ಬಲೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾರಣೀಕರಿಸುವ ಸರಿಯಾದ ಬಳಕೆಯು ಗಣಿತದ ಮೂಲವಾಗಿದೆ. ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ಅದರ ಬಳಕೆ ಇದೆ. ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಸಾಧನೆಗಳ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಯಿತು ಮತ್ತು ನೀವು ಅನೇಕ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ಸಾಧನೆಯು ಹಲವಾರು ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಇವು ಈ ಹಿಂದೆ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಯಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಅಥವಾ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಅಥವಾ ಊಹೆಗಳಿಂದ ಪಡೆದವುಗಳಾಗಿವೆ. ಸಾಧನೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ನಾವು ಬಳಸುವ ಮುಖ್ಯ ಸಾಧನ, ನಿಗಮನ ತಾರ್ಕಿಕ ವಿಧಾನ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಹೇಳಿಕೆ ಎಂದರೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಮರ್ಶಿಸುತ್ತ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ನಿಗಮನ ತಾರ್ಕಿಕ ಕೌಶಲ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರೆಡೆಗೆ ಸಾಗೋಣ. ನಕಾರೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಮತ್ತು ದತ್ತ ಹೇಳಿಕೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿಯ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ. ತದನಂತರ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಎಂದರೆ ಏನೆಂದು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಹಲವಾರು ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತ 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸಿಸಿದ ಸಾಧನೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ವಿಮರ್ಶಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ, 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಈ ಪುಸ್ತಕದ ವಿವಿಧ ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆ, ಈ ಕಲ್ಪನೆಯ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

A1.2 ಗಣಿತ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಮರುಪರಿಶೀಲನೆ:

ಆದೇಶವಲ್ಲದ, ಆಶ್ಚರ್ಯ ಸೂಚಕ ಅಥವಾ ಪ್ರಶ್ನಾರ್ಥಕವಲ್ಲದ ಒಂದು ಅರ್ಥ ಪೂರ್ಣ ವಾಕ್ಯವೇ 'ಹೇಳಿಕೆ' ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಯಾವ ಎರಡು ತಂಡಗಳು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ವಿಶ್ವಕಪ್‌ನ ಅಂತಿಮ ಪಂದ್ಯದಲ್ಲಿ ಆಡಲಿದ್ದಾರೆ? ಇದು ಪ್ರಶ್ನೆಯೇ ಹೊರತು ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲ. 'ಹೋಗಿ ನಿನ್ನ ಮನೆಗೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸು' ಇದು ಆದೇಶವೇ ಹೊರತು ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲ. ಎಂತಹ ಅದ್ಭುತ ಗುರಿ! ಇದು ಆಶ್ಚರ್ಯ ಸೂಚಕ ವಾಕ್ಯವೇ ಹೊರತು ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲ.

ನೆನಪಿಡಿ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಆಗಿರಬಹುದು.

- ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯ
- ಯಾವಾಗಲೂ ಮಿಥ್ಯ
- ಸಂದಿಗ್ಧ (ಗೊಂದಲ)

ಈಗಾಗಲೇ 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು, ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಮಿಥ್ಯವಾಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂದಿಗ್ಧ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ನಮ್ಮ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವಿಕೆಯನ್ನು ವಿಮರ್ಶಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಯಾವಗಲೂ ಸತ್ಯ, ಯಾವಗಲೂ ಮಿಥ್ಯ ಅಥವಾ ಸಂದಿಗ್ಧವಾಗಿವೆಯೇ ತಿಳಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರ ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) ಸೂರ್ಯನು ಭೂಮಿಯ ಸುತ್ತ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಾನೆ

ii) ವಾಹನಗಳಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಚಕ್ರಗಳಿವೆ

iii) ಬೆಳಕಿನ ಜವ ಸರಿಸುಮಾರು 3×10^5 km/s

iv) ಕೊಲ್ಕತ್ತಾಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ದಾರಿಯನ್ನು ನವೆಂಬರ್‌ನಿಂದ ಮಾರ್ಚ್‌ವರೆಗೆ ಮುಚ್ಚಲಾಗುತ್ತದೆ.

v) ಮನುಷ್ಯರೆಲ್ಲರೂ ಸಾಯುತ್ತಾರೆ.

ಪರಿಹಾರ:

i) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಯಾವಾಗಲೂ ಮಿಥ್ಯ ಏಕೆಂದರೆ, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಈಗಾಗಲೇ ಭೂಮಿಯು ಸೂರ್ಯನ ಸುತ್ತ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ii) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸಂದಿಗ್ಧ ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಹೇಳಕೆಯೂ ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಯಾವಾಗಲೂ ಮಿಥ್ಯ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ವಾಹನಗಳು 2,3,4,5,6,10 ಇತ್ಯಾದಿ ಚಕ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು – ಇದು ವಾಹನದ ವಿಧವನ್ನು ಅವಲಂಭಿಸಿದೆ.

iii) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯ, ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದಾರೆ.

iv) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸಂದಿಗ್ಧ ಏಕೆಂದರೆ, ಯಾವ ದಾರಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟತೆ ಇಲ್ಲ.

v) ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯ ಏಕೆಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ದಿನ ಸಾಯುತ್ತಾನೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪಾಗಿದೆಯೇ ತಿಳಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರ ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) ಎಲ್ಲಾ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿವೆ.

ii) ಕೆಲವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿವೆ.

iii) ಎಲ್ಲಾ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿವೆ.

iv) ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

v) ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲ

vi) ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ

vii) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಬೇರಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಪರಿಹಾರ:

i) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸರಿ ಏಕೆಂದರೆ, ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಾಹುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮ ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ii) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸರಿ ಏಕೆಂದರೆ, ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಪಾದ ಕೋನಗಳು 60^{O} ಆದರೆ ಅದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

iii) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ತಪ್ಪು. ಇದಕ್ಕೊಂದು ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.

iv) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸರಿ ಏಕೆಂದರೆ, $\frac{p}{q}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ‘p’ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು $q = 1$ ಆದಾಗ ಅವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು (ಉದಾಹರಣೆ, $3 = \frac{3}{1}$)

v) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸರಿ ಏಕೆಂದರೆ, $\frac{p}{q}$ ರೂಪದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, p, q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದು ‘q’ ಯು p ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸದಿದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ (ಉದಾಹರಣೆ $\frac{3}{1}$)

vi) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ‘ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿದೆ’ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯಂತೆಯೇ ಇದೆ. ಆದರೆ ಇದು ತಪ್ಪು ಏಕೆಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿವೆ.

vii) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ತಪ್ಪು. ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು r ಮತ್ತು s ಗಳ ನಡುವೆ $\frac{r+s}{2}$ ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: $x < 4$ ಆದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $2x > 8$ ii) $2x < 6$ iii) $2x < 8$

ಪರಿಹಾರ:

i) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ತಪ್ಪು. ಏಕೆಂದರೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x = 3 < 4$ ಆದರೆ ಇದು $2x > 8$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸರಿ ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ.

ii) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ತಪ್ಪು. ಏಕೆಂದರೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x = 3.5 < 4$ ಆದರೆ ಇದು $2x < 6$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ.

iii) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸರಿ. ಏಕೆಂದರೆ, ಇದು $x < 4$ ಎಂಬುದರಂತೆಯೇ ಇದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯಾಗಲು ಸೂಕ್ತ ನಿಬಂಧನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಪುನರ್ ನಿರೂಪಿಸಿ.

i) ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅದು ಆಯತ.

ii) ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

iii) ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 'p' ಗೆ $\sqrt{P}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

iv) ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿವೆ.

ಪರಿಹಾರ:

i) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಆಗ ಅದು ಆಯತವಾಗುತ್ತದೆ.

ii) ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

iii) ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ 'p' ಗಳಿಗೆ, $\sqrt{P}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

iv) ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು ಗರಿಷ್ಟ ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ (iii) ನೇ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು, "ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲದ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 'p' ಗೆ $\sqrt{P}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ".

ಅಭ್ಯಾಸ A1.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯ, ಯಾವಾಗಲೂ ಮಿಥ್ಯ, ಅಥವಾ ಸಂದಿಗ್ಧವೇ ನಿರೂಪಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.
   i) ಎಲ್ಲಾ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
   ii) ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಸೂರ್ಯನಿಗಿರುವ ಸರಿಸುಮಾರು ದೂರ 1.5×10^8 km
   iii) ಮನುಷ್ಯರೆಲ್ಲರಿಗೂ ವಯಸ್ಸಾಗುತ್ತದೆ.
   iv) ಉತ್ತರಕಾಶಿಯಿಂದ ಹರ್ಸಿಲ್‌ಗೆ ಪ್ರಯಾಣ ದಣಿವಾಗಿಸುತ್ತದೆ.
   v) ಮಹಿಳೆಯೊಬ್ಬರು ದ್ವಿನೇತ್ರಿಯಿಂದ ಆನೆಯೊಂದನ್ನು ನೋಡಿದರು.
2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪಾಗಿದೆಯೇ ತಿಳಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ
   i) ಎಲ್ಲಾ ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು.
   ii) ಕೆಲವು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿಗಳು.
   iii) ಎಲ್ಲಾ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ.
   iv) ಕೆಲವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.
   v) ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ.
3. a ಮತ್ತು b ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು $ab \neq 0$ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.
   i) a ಮತ್ತು b ಗಳೆರಡೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಬೇಕು.
   ii) a ಮತ್ತು b ಗಳೆರಡೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಬಾರದು.
   iii) a ಅಥವಾ b ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು.
4. ಸೂಕ್ತ ನಿಬಂಧನೆಗಳೊಂದಿಗೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಪುನರ್ ನಿರೂಪಿಸಿ.
   i) $a^2 > b^2$ ಆದರೆ $a > b$
   ii) $x^2 > y^2$ ಆದರೆ $x > y$
   iii) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ಆದರೆ $x = 0$
   iv) ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.

A1.3 ನಿಗಮನ ತರ್ಕ

ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ನಿಗಮನ ತರ್ಕ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನಾವು ಊಹಿಸಿದ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯ ಎಂದು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು ನಿಗಮನ ತರ್ಕ ಹೇಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ದೃಷ್ಟೀಕರಿಸೋಣ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಊಹೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಆರಂಭಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ವಿಜಯಪುರ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ನೀಡಿದೆ ಮತ್ತು ಶಬಾನಾ ವಿಜಯಪುರದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಶಬಾನಾ ಯಾವ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುತ್ತಾರೆ?

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಎರಡು ಊಹೆಗಳಿವೆ.

i) ಬಿಜಾಪುರ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿದೆ.

ii) ಶಬಾನಾ ಬಿಜಾಪುರದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಈ ಎರಡೂ ಊಹೆಗಳಿಂದ ನಾವು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಹೀಗೆ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಶಬಾನಾ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ವಾಸವಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಎಲ್ಲಾ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು ನೀವು ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವೊಂದನ್ನು ಓದುತ್ತಿದ್ದೀರೆಂದು ಭಾವಿಸಿ. ನೀವು ಓದುತ್ತಿರುವ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಬಗ್ಗೆ ಏನೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು?

ಪರಿಹಾರ: ಎರಡೂ ಊಹೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ನೀವು ಓದುತ್ತಿರುವುದು ಒಂದು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಪುಸ್ತಕ ಎಂದು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 7: $y = -6x + 5$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು $x = 3$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. y ಬೆಲೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ: ಎರಡೂ ಊಹೆಗಳಿಂದ,

$y = -6\ (3) + 5 = -13$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ A1.2

ಉದಾಹರಣೆ 8: ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ AD = 5cm, AB = 7m ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ (ಚಿತ್ರ A1.1 ನೋಡಿ) ಬಾಹು DC ಮತ್ತು BC ಗಳ ಅಳತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು?

ಪರಿಹಾರ: ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ನೀಡಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಗಳು ABCD ಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ "ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ" ಎಂಬ ಗುಣವು ಇಲ್ಲಿ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ AD = 5cm ಆದರೆ BC = 5cm ಎಂದು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ DC = 7cm ಎಂದು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಗಮನಿಸಿ: ಊಹೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿರುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅರಿತು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಬೇಕೆಂದು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ 'P' ಗಳಿಗೆ, $\sqrt{P}$ ಯು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು 19423 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, $\sqrt{19423}$ ರ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮ್ಮ ತೀರ್ಮಾನವೇನು?

ಪರಿಹಾರ: $\sqrt{19423}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ಊಹೆಗಳು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯದಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ನಾವು ಊಹೆಗಳನ್ನು ಸರಿ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ನಂತರ ನಿಗಮನ ತರ್ಕ ವಿಧಾನ ಅನುಸರಿಸಿತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆ 9 ರಲ್ಲಿ ನಾವು 19423 ಅವಿಭಾಜ್ಯವೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸದೇ ನಮ್ಮ ವಾದದ ಸಲುವಾಗಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ. ದತ್ತ ಹೇಳಿಕೆಯ ಬಗೆಗಿನ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಲು ನಿಗಮನ ತರ್ಕ ವಿಧಾನವು ಹೇಗೆ ಬಳಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾಗಿ ವಿವರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಮುಖ್ಯವಾದದು ಏನೆಂದರೆ ಕಾರಣೀಕರಿಸುವ ಸರಿಯಾದ ಕ್ರಿಯೆ ಮತ್ತು ಕಾರಣೀಕರಿಸುವ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ಒಂದು ಊಹೆಯ ಸತ್ಯತೆ ಅಥವಾ ಮಿಥ್ಯತೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅದಾಗ್ಯೂ, ನಾವು ತಪ್ಪು ಊಹೆಯೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರೆ ತಪ್ಪು ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

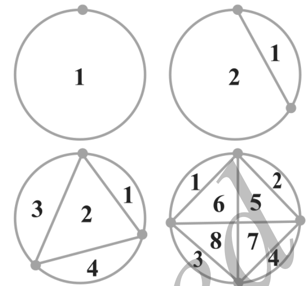
ಅಭ್ಯಾಸ A1.2

1. ಎಲ್ಲಾ ಮಹಿಳೆಯರು ಸಾಯುತ್ತಾರೆ ಎಂದಾದರೆ ಮತ್ತು A ಒಬ್ಬ ಮಹಿಳೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದೆ. A ಯ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಏನೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.
2. ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು a ಮತ್ತು b ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ab ಯ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮ್ಮ ತೀರ್ಮಾನರ್ವೇನು?
3. ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತವಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು $\sqrt{17}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧವಾದರೆ, $\sqrt{17}$ ರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮ್ಮ ತೀರ್ಮಾನವೇನು?
4. $y = x^2 + 6$ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು $x = -1$ ಆದರೆ y ಬೆಲೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರುವಿರೀ?
5. ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ನೀಡಿದೆ ಮತ್ತು $\angle B = 80^{O}$ ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಉಳಿದ ಕೋನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮ್ಮ ತೀರ್ಮಾನವೇನು?
6. PQRS ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ. ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ?
7. ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ 'P' ಗಳಿಗೆ $\sqrt{P}$ ಯು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು 3721 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದೆ. ನೀವು $\sqrt{3721}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದೇ? ನಿಮ್ಮ ತೀರ್ಮಾನ ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ? ಏಕೆ ಅಥವಾ ಏತಕ್ಕೆ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

A1.4 ಊಹೆಗಳು, ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಸಾಧನೆಗಳು ಮತ್ತು ಗಣಿತೀಯ ಕಾರಣೀಕರಣ:

ಚಿತ್ರ A1.2 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಮೊದಲನೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇದೆ, ಎರಡನೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು. ಮೂರನೇಯದರ ಮೇಲೆ ಮೂರು ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರೆದಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ.

ಈ ರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವ್ಯರ್ಜ ವಲಯಗಳಾಗಿ (ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಗ ಹೊಂದಿರದಂತೆ) ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಿ, ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ A1.2

ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ವಲಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

ಈಗ, ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊಟ್ಟಾಗ, ವಲಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಲು ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಕೆಲವರು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಯೋಚಿಸಿರಬಹುದು. 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಜಾಣ್ಮೆಯ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಊಹೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆದಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

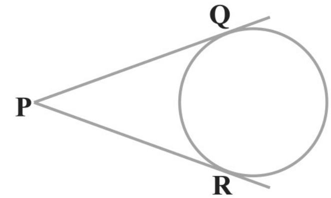
ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ n ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾಗ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಪರಸ್ಪರ ವ್ಯರ್ಜ ವಲಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2^{n-1} ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿದ್ದೀರೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಇದು ಅತ್ಯಂತ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾದ ಊಹೆ ಎಂದು ತೋರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $n = 5$ ಆದಾಗ 16 ಭಾಗಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. 5 ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ, n ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ 2^{n-1} ವಲಯ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು ನಿಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಮಂಜಸ? ಹಾಗಾದರೆ ಯಾರಾದರು ನಿಮಗೆ $n = 25$ ಕ್ಕೆ ಆದಾಗ ವಲಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಎಂದು ಕೇಳಿದರೆ ಇದಕ್ಕೆ ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಿಸುತ್ತೀರಿ? ಈ ರೀತಿಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗಾಗಿ ಉತ್ತರಿಸಲು ಎಲ್ಲಾ ಅನುಮಾನಗಳಿಗೂ ಮೀರಿ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸತ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಸಾಧನೆಯು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ n ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸರಿ ಹೊಂದದಂತಹ ಸುಳ್ಳಾಗಿರುವಂತಹ ಒಂದು ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆ ನೀಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನೈಜವಾಗಿ, ನೀವು ತಾಳ್ಮೆಯಿಂದ $n = 6$ ಕ್ಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೇ 31 ವಲಯಗಳು

ಮತ್ತು $n = 7$ ಆದರೆ 57 ವಲಯಗಳಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $n = 6$ ಎಂಬುದು ಮೇಲಿನ ಊಹೆಗೆ ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆ ಆಗಿದೆ. ಇದು ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆಗಿರುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಿರಾಕರಿಸಲು, ಒಂದು ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆ ಬಂದರೂ ಸಾಕೆಂದು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

$n = 1, 2, 3, 4$ ಮತ್ತು 5 ಗಳಿಗೆ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ಬದಲಾಗಿ ದೊರೆಯುವ ವಲಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಾಧನೆಯೂ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕ ಎಂದು ಹೇಳಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಈಗ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ನೀವಿಗಾಗಲೇ ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ಬಗ್ಗೆ ಪರಿಚಿತರಿದ್ದೀರಿ (ಘಟಕ 1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ). $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, ಇದರ ಸಿಂಧುತ್ವವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು $n = 1, 2, 3$ ..... ಹೀಗೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಸಾಲದು, ಏಕೆಂದರೆ n ನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬೆಲೆಗೆ ಫಲಿತಾಂಶವು ತಪ್ಪಾಗಿರಬಹುದು (ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ $n = 6$ ಬೆಲೆಗೆ ಫಲಿತಾಂಶವು ತಪ್ಪಾಗಿದೆ) ನಮಗೆ ಅನುಮಾನಗಳನ್ನು ಮೀರಿದ ಸತ್ಯವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವ ಸಾಧನೆ ಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಿಮ್ಮ ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೀರಿ.

ಈಗ ಚಿತ್ರ A1.3 ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ PQ ಮತ್ತು PR ಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. PQ = PR ಎಂದು ನೀವು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೀರಿ (ಪ್ರಮೇಯ 10.2) ಇಂತಹ ಹಲವಾರು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆದು, ನಿಮ್ಮೊಳಗೆ ನೀವೆ ಆ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪ್ರತಿ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೂ ನಿಮಗೆ ತೃಪ್ತಿಕರವಾಗಿರಲಿಲ್ಲ. ಸಾಧನೆಯು ಏನನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ನೆನಪಿದೆಯೆ?



ಚಿತ್ರ A1.3

ಸಾಧನೆಯು ಹಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ಕೂಡಿರುತ್ತದೆ. ಸಾಧನೆಯ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಹೇಳಿಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಕ್ರಮಾನುಗತವಾಗಿ ಮತ್ತು ತಾರ್ಕಿಕ ನೆಲಗಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಸಂಯೋಜಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಈಗಾಗಲೇ ಸಾಧಿಸಿದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು (ಈಗ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದ್ದನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) ಅಥವಾ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಿಕೊಂಡ ಊಹೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಧನೆಗಳು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತ ನಮ್ಮ ಅರ್ಥೈಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸೋಣ.

ಈಗ ನಾವು ನೇರ ಅಥವಾ ತಾರ್ಕಿಕ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಾಧನೆ ರಚಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಹಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೇಳಿಕೆಯು ಹಿಂದಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಹೇಳಿಕೆಯು ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿ ಸರಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸರಿಯಾದ ತೀರ್ಮಾನ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಪರಿಹಾರ:

ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ	ಹೇಳಿಕೆಗಳು	ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ
1	x ಮತ್ತು y ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾಗಳಾಗಿರಲಿ	ಫಲಿತಾಂಶವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ x ಮತ್ತು y ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ
2	$x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$ ಮತ್ತು $y = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ m, n, p ಮತ್ತು q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.	ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ.
3	ಆದ್ದರಿಂದ, $x+y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ $= \frac{mq + np}{nq}$	ಫಲಿತಾಂಶವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು $x+y$ ಗಮನಿಸೋಣ.
4	ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣದಿಂದ $mq + np$ ಮತ್ತು nq ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.	ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ
5	$n \neq 0$, $q \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $nq \neq 0$	ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ
6	ಆದ್ದರಿಂದ, $x+y = \frac{mq + np}{nq}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ	ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

ಗಮನಿಸಿ: ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಹೇಳಿಕೆಯು ಈ ಹಿಂದೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಿಲಾದ ಸತ್ಯ ಸಂಗತಿ ಅಥವಾ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11: 3 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಪ್ರತಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು $6k + 1$ ಅಥವಾ $6k + 5$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

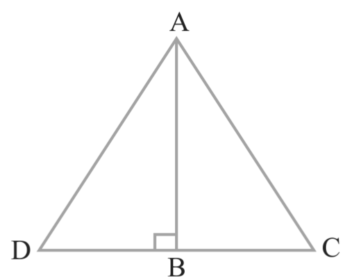
ಪರಿಹಾರ:

ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ	ಹೇಳಿಕೆಗಳು	ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ
1	p ಯು 3 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ.	ಫಲಿತಾಂಶವು 3 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲೆ ಆಧರಿಸಿರುವುದರಿಂದ, ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.
2	p ಯನ್ನು 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, p ಯು $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ ಅಥವಾ $6k + 5$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಮತ್ತು k ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ.	ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯದಿಂದ
3	ಆದರೆ $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$ ಮತ್ತು $6k + 3 = 3(2k + 1)$ ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲ.	ದತ್ತ p ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಲು ಶೇಷಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸೋಣ
4	ಆದ್ದರಿಂದ p ಯು $6k + 1$ ಅಥವಾ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಮಾಡಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ	ಬೇರೆ ಆಯ್ಕೆಗಳನ್ನು ತೊಡೆದು ಹಾಕಿ ಈ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬಂದಿರುತ್ತೇವೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಆಯ್ಕೆಗಳನ್ನು ತೊಡೆದು ಹಾಕಿ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬಂದಿರುತ್ತೇವೆ. ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು **ಶೂನ್ಯೀಕರಣ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಾಧನೆ** ಎಂದು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ A1.1 (ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ)

ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರಲ್ಲಿ ಬಾಹುವೊಂದರ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ, ಮೊದಲ ಬಾಹುವಿನ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ A1.4

ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ	ಹೇಳಿಕೆಗಳು	ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ
1	ΔABC ಯಲ್ಲಿ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ಊಹೆಯನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ	ನಾವು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ
2	$BD = BC$ ಆಗುವಂತೆ AB ಗೆ ಲಂಬರೇಖೆ BD ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು A ಯನ್ನು D ಗೆ ಸೇರಿಸಿ.	ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ತರ್ಕಿಸದೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಹಂತವಾಗಿದೆ.
3	ರಚನೆಯಿಂದ, ΔABD ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $AD^2 = AB^2 + BD^2$ ಆಗಿದೆ.	ಈಗಾಗಲೇ ಸಾಧಿಸಿರುವ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.
4	ರಚನೆಯಿಂದ, $BD = BC$ ಆದ್ದರಿಂದ $AD^2 = AB^2 + BD^2$	ತಾರ್ಕಿಕ ತೀರ್ಮಾನ
5	ಆದ್ದರಿಂದ, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	ಊಹೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿನ ಹೇಳಿಕೆಯಿಂದ
6	AC ಮತ್ತು AD ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $AC = AD$ ಆಗಿದೆ.	ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣದಿಂದ
7	ಈಗಷ್ಟೇ $AC = AD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದೆ. ಹಾಗೂ $BC = BD$ ರಚನೆಯಿಂದ ಮತ್ತು AB ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಾಬಾಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	ತಿಳಿದಿರುವ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ
8	$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle ABC = \angle ABD$ ಇದು ಲಂಬಕೋನ	ತಾರ್ಕಿಕ ತೀರ್ಮಾನ – ಈ ಹಿಂದೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಯ ಆಧಾರ

ಗಮನಿಸಿ: ಈ ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು, ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಜೋಡಿಸಿದಂತಿರುವ ಸರಣೀಕೃತ ಹಂತಗಳಿಂದ ಸಾಧಿಸಿದೆ. ಈ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕ್ರಮ ಬಹಳ ಮುಖ್ಯ. ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಹಂತವು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಹಂತಗಳು ಮತ್ತು ಈ ಹಿಂದೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು (ಪ್ರಮೇಯ 2.9 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A1.3

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಕೇಳಿದ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿ, ಪ್ರತೀ ಹಂತಕ್ಕೂ ಕಾರಣ ನೀಡಿ.

1. ಎರಡೂ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
2. ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಫಲಿತಕ್ಕೆ 6 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಈಗ ದೊರೆತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 8 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
3. $p \geq 5$ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ, $p^2 + 2$ ಇದು 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ಸುಳುಹು: ಉದಾಹರಣೆ 11ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)
4. x ಮತ್ತು y ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. xy ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
5. a ಮತ್ತು b ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ, $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, q ಒಂದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ಮ.ಸಾ.ಅ. (a, b) = ಮ.ಸಾ.ಅ. (b,r) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

   [ಸುಳುಹು: ಮ.ಸಾ.ಅ.(b,r) = h ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $b = k_1h$ ಮತ್ತು $r = k_2h$, ಇಲ್ಲಿ k_1 ಮತ್ತು k_2 ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು]
6. ΔABC ಯಲ್ಲಿ BC ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯು AB ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದೆ. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

A1.5 ಹೇಳಿಕೆಯೊಂದರ ನಕಾರೋಕ್ತಿ

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಕಾರೋಕ್ತಿಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದೆಂದರೇನು ಎಂದು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಕೆಲವು ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು, ಈ ವಿಭಾಗ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ ಮುನ್ನ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಡಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಒಂದು ಘಟಕವಾಗಿ ನೋಡೋಣ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಹೆಸರಿಸೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2005 ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ 1 ರಂದು ದೆಹಲಿಯಲ್ಲಿ ಮಳೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು p ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಹೀಗೂ ಬರೆಯಬಹುದು,

p : 2005 ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ 1 ರಂದು ದೆಹಲಿಯಲ್ಲಿ ಮಳೆಯಾಗಿದೆ.

ಇದರಂತೆ, ಇವುಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

q : ಎಲ್ಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರು ಮಹಿಳೆಯರು

r : ಮೈಕ್‌ನ ನಾಯಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಬಾಲ ಇದೆ.

s : 2 + 2 = 4

t : ABC ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ

ಈ ಸಂಕೇತ ವಿಧಾನವು ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಗ್ಗೂಡಿಸಲು ಹೇಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸರಳ ಹೇಳಿಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತೇವೆ, ನಂತರ ನಾವು ಸಂಯುಕ್ತ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಕಡೆ ಹೋಗೋಣ. ದತ್ತ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ಹೊಸ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಈ ಕೋಷ್ಟಕ ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಮೂಲ ಹೇಳಿಕೆ	ಹೊಸ ಹೇಳಿಕೆ
p : 2005 ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ 1 ರಂದು ದೆಹಲಿಯಲ್ಲಿ ಮಳೆಯಾಗಿದೆ.	~ p : 2005 ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ 1 ರಂದು ದೆಹಲಿಯಲ್ಲಿ ಮಳೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಸುಳ್ಳು
q : ಎಲ್ಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರು ಮಹಿಳೆಯರು	~ q : ಎಲ್ಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರು ಮಹಿಳೆಯರು ಎಂಬುದು ಸುಳ್ಳು
r : ಮೈಕ್ಸ್ ನ ನಾಯಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಬಾಲ ಇದೆ	~ r : ಮೈಕ್ಸ್‌ನ ನಾಯಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಬಾಲ ಇದೆ ಎಂಬುದು ಸುಳ್ಳು
r : 2 + 2 = 4	~ s : 2 + 2 = 4 ಇದು ಸುಳ್ಳು
t : ABC ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ	~ t : ABC ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂಬುದು ಸುಳ್ಳು

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಹೊಸ ಹೇಳಿಕೆಯು ಅನುರೂಪವಾದ ಮೂಲ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ನಕಾರೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ~ p, ~ q, ~ r, ~ s ಮತ್ತು ~ t ಇವು ಕ್ರಮವಾಗಿ p, q, r, s ಮತ್ತು t ಗಳ ನಕಾರೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ ~ p ಯನ್ನು p ಅಲ್ಲದ್ದು ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. ~ p ಹೇಳಿಕೆಯು, ಹೇಳಿಕೆ p ಯ ಸಮರ್ಥನೆಯನ್ನು ನಿರಾಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾವು ಮಾತನಾಡುವಾಗ ~ p ಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, "2005 ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ 1 ರಂದು ದೆಹಲಿಯಲ್ಲಿ ಮಳೆಯಾಗಲಿಲ್ಲ". ಅದಾಗ್ಯೂ ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ನಾವು ಎಚ್ಚರದಿಂದರಬೇಕು. ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ವಾಕ್ಯವೊಂದರಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'ಇಲ್ಲ' ಎಂಬ ಪದ ಬಳಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದೆಂದು ನೀವು ಯೋಚಿಸಿರಬಹುದು. ಇದು p ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಇದು ಕಷ್ಟವೆನಿಸುವುದು 'ಎಲ್ಲಾ' ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಆರಂಭವಾಗುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಹೇಳಿಕೆ q : ಎಲ್ಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರು ಮಹಿಳೆಯರು ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಇದರ ನಕಾರೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಿದೆ ~ q : "ಎಲ್ಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರು ಮಹಿಳೆಯರು ಎಂಬುದು ಸುಳ್ಳು". ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು, "ಶಿಕ್ಷಕರಲ್ಲಿ ಕೆಲವರು ಪುರುಷರು ಇದ್ದಾರೆ". ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯಂತೆಯೇ ಇದೆ. ಈಗ ನಾವು ಇಲ್ಲ ಎಂಬ ಪದವನ್ನು 'q' ನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ ಹೊಸ ಹೇಳಿಕೆ ಪಡೆಯೋಣ: "ಎಲ್ಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರು ಮಹಿಳೆಯರಲ್ಲ". ಮೊದಲ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಜನರಲ್ಲಿ ಗೊಂದಲವುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರು ಪುರುಷರು! ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ (ಎಲ್ಲಾ ಎಂಬ ಪದಕ್ಕೆ ಒತ್ತು ನೀಡಿದಾಗ). ಇದು q ನ ನಕಾರೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ. ಅದಾಗ್ಯೂ ಎರಡನೇ ಹೇಳಿಕೆಯು ~ q ನ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಟ ಒಬ್ಬರಾದರೂ ಮಹಿಳೆ ಅಲ್ಲದ ಶಿಕ್ಷಕರಿದ್ದಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹೇಳಿಕೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಎಚ್ಚರದಿಂದಿರಿ!

ಹಾಗಾದರೆ, ಸರಿಯಾದ ನಕಾರೋಕ್ತಿ ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆಂದು ನಾವು ಹೇಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು? ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

p ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ~ p ಯು ಅದರ ನಕಾರೋಕ್ತಿ ಆಗ p ಯು ಸತ್ಯವಾದಗಳೆಲ್ಲ ~ p ಮಿಥ್ಯ ಮತ್ತು p ಯು ಮಿಥ್ಯವಾದಗಳೆಲ್ಲ ~ p ಯು ಸತ್ಯ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಮ್ಯಾಕ್ಸ್‌ನ ನಾಯಿ ಕಪ್ಪು ಬಾಲ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದು ನಿಜವಾದರೆ, ಆಗ ಮ್ಯಾಕ್ಸ್ ನಾಯಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಬಾಲವಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸುಳ್ಳಾಗಿದೆ. ಮ್ಯಾಕ್ಸ್‌ನ ನಾಯಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಬಾಲ ಇದೆ ಎಂಬುದು ಸುಳ್ಳಾದರೆ ಮ್ಯಾಕ್ಸ್‌ನ ನಾಯಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಬಾಲವಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ನಿಜ.

ಇದರಂತೆ, s ಮತ್ತು t ಹೇಳಿಕೆಗಳ ನಕಾರೋಕ್ತಿಗಳು

s: $2 + 2 = 4$; ನಕಾರೋಕ್ತಿ ~ s: $2 + 2 \neq 4$

t : ABC ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ, ನಕಾರೋಕ್ತಿ ~ t: ABC ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಲ್ಲ. ಈಗ ~(~ s) ಎಂದರೇನು? ಅದು $2 + 2 = 4$ ಆಗಿರಬಹುದು. ಅಂದರೆ s ಮತ್ತು ~(~ t) ಎಂದರೇನು? ಇದು ABC ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ನೈಜವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಹೇಳಿಕೆ p ಗೆ ~(~ p) ಯು p ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ನಕಾರೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

i) ಮ್ಯಾಕ್ಸ್‌ನ ನಾಯಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಬಾಲವಿಲ್ಲ

ii) ಎಲ್ಲಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

iii) $\sqrt{2}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

iv) ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

v) ಶಿಕ್ಷಕರೆಲ್ಲರೂ ಪುರುಷರಲ್ಲ

vi) ಕೆಲವು ಕುದುರೆಗಳು ಕಂದು ಬಣ್ಣವಲ್ಲ

vii) $x^2 = -1$ ಆಗುವಂತೆ x ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ.

ಪರಿಹಾರ:

i) ಮ್ಯಾಕ್ಸ್‌ನ ನಾಯಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಬಾಲ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದು ತಪ್ಪು ಅಂದರೆ ಮ್ಯಾಕ್ಸ್‌ನ ನಾಯಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಬಾಲ ಇದೆ.

ii) ಎಲ್ಲಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬುದು ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಅಂದರೆ ಕೆಲವು (ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ ಇದನ್ನು ಹೀಗೂ ಬರೆಯಬಹುದು ''ಎಲ್ಲಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ''.

iii) $\sqrt{2}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದು ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಅಂದರೆ $\sqrt{2}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

iv) ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಎಂಬುದು ತಪ್ಪು ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ.

v) ಶಿಕ್ಷಕರೆಲ್ಲರೂ ಪುರುಷರಲ್ಲ ಎಂಬುದು ತಪ್ಪು ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರು ಪುರುಷರು.

vi) ಕೆಲವು ಕುದುರೆಗಳು ಕಂದು ಬಣ್ಣವಲ್ಲ ಎಂಬುದು ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಅಂದರೆ ಕೆಲವು ಕುದುರೆಗಳು ಕಂದು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿವೆ.

vii) $x^2 = -1$ ಆಗುವಂತೆ x ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದು ತಪ್ಪು ಅಂದರೆ $x^2 = -1$ ಆಗುವಂತೆ ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದಾದರೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ನಾವು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಕಾರ್ಯನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು.

i) ಮೊದಲು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು 'ಇಲ್ಲ' ಎಂಬುದರೊಂದಿಗೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ii) ವಿಶೇಷವಾಗಿ 'ಎಲ್ಲಾ' ಮತ್ತು 'ಕೆಲವು' ಪದಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅನುಮಾನಗಳಿದ್ದರೆ ಸೂಕ್ತ ಮಾರ್ಪಾಡುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ A1.4

I) ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ನಕಾರೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

i) ಮನುಷ್ಯರೆಲ್ಲರೂ ಮರಣ ಹೊಂದುತ್ತಾರೆ.

ii) ರೇಖೆ l ಇದು ರೇಖೆ m ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ.

iii) ಈ ಅಧ್ಯಾಯವು ಹಲವು ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

iv) ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

v) ಕೆಲವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

vi) ಯಾವುದೇ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಸೋಮಾರಿಯಲ್ಲ

vii) ಕೆಲವು ಬೆಕ್ಕುಗಳು ಕಪ್ಪಾಗಿಲ್ಲ

viii) $\sqrt{x} = -1$ ಆಗಿರುವಂತೆ x ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ

ix) 2 ಎಂಬ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

x) a ಮತ್ತು b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳಿವೆ. ಎರಡನೆಯ ಹೇಳಿಕೆಯು ಮೊದಲನೇ ಹೇಳಿಕೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿ ಆಗಿದೆಯೇ ತಿಳಿಸಿ.

i) ಮುಮ್ತಾಜ್‌ಗೆ ಹಸಿವಾಗಿದೆ
ಮುಮ್ತಾಜ್‌ಗೆ ಹಸಿವಾಗಿಲ್ಲ.

ii) ಕೆಲವು ಬೆಕ್ಕುಗಳು ಕಪ್ಪಾಗಿವೆ.
ಕೆಲವು ಬೆಕ್ಕುಗಳು ಕಂದು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿವೆ.

iii) ಎಲ್ಲಾ ಆನೆಗಳು ದೊಡ್ಡ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿವೆ.
ಒಂದು ಆನೆಯು ದೊಡ್ಡ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿವೆ.

iv) ಎಲ್ಲಾ ಅಗ್ನಿ ಶಾಮಕ ವಾಹನಗಳು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿವೆ.
ಎಲ್ಲಾ ಅಗ್ನಿ ಶಾಮಕ ವಾಹನಗಳು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

v) ಯಾವುದೇ ಮನುಷ್ಯ ಹಸುವಲ್ಲ.
ಕೆಲವು ಮನುಷ್ಯರು ಹಸುಗಳು.

A1.6 ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮ

ಈಗ ನಾವು ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮದ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷೆ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಮಗೆ ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಹೇಳಿಕೆಯ ಕಲ್ಪನೆ ಇರಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಹೇಳಿಕೆಯು ಒಂದು ಅಥವಾ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು 'ಸರಳ' ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿರಬೇಕು. ಸಂಯುಕ್ತ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಹಲವಾರು ವಿಧಗಳಿವೆ ಆದರೆ ನಾವು ಈಗ 'ಹೀಗಿದ್ದರೆ' ಮತ್ತು 'ಆಗ' ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬಳಕೆಯಿಂದ ಸರಳ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಸಂಯುಕ್ತ ಹೇಳಿಕೆ ಪಡೆಯಲು ಗಮನಿಸೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 'ಮಳೆಯಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಆಗ ಬೈಸಿಕಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವುದು ಕಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ'. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

p : ಮಳೆಯಾಗುತ್ತಿದೆ.

q : ಬೈಸಿಕಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವುದು ಕಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಹಿಂದೆ ಬಳಸಿದ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು. p ಇದ್ದರೆ, ಆಗ q ನಾವು p ಯು q ಅನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಅಂತಲೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಂಕೇತವಾಗಿ $p \Rightarrow q$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ "ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿ ಕಪ್ಪಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಕುಡಿಯುವ ನೀರನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ" ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಇದು $p \Rightarrow q$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಊಹೆ p (ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿ ಕಪ್ಪಾಗಿದೆ) ಮತ್ತು ತೀರ್ಮಾನ q (ಈ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕುಡಿಯುವ ನೀರಿದೆ). ಈಗ ಊಹೆ ಮತ್ತು ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಏನು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ? $q \Rightarrow p$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕುಡಿಯುವ ನೀರಿದ್ದರೆ, ಆಗ ತೊಟ್ಟಿಯು ಕಪ್ಪಗಿರಬೇಕು. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು $p \Rightarrow q$ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $p \Rightarrow q$ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವು $q \Rightarrow p$ ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಹೇಳಿಕೆಗಳು $p \Rightarrow q$ ಮತ್ತು $q \Rightarrow p$ ಗಳೆರಡೂ ಪರಸ್ಪರ ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

i) ಜಮೀಲಾ ಬೈಸಿಕಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದರೆ ಆಗ ಆಗಸ್ಟ್ 17 ಭಾನುವಾರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ii) ಆಗಸ್ಟ್ 17 ಭಾನುವಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಜಮೀಲಾ ಬೈಸಿಕಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

iii) ಪೌಲಿನ್‌ರಿಗೆ ಕೋಪ ಬಂದರೆ, ಆಗ ಅವರ ಮುಖ ಕೆಂಪಾಗುತ್ತದೆ.

iv) ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಪದವಿ ಪಡೆದಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅವರಿಗೆ ಬೋಧನೆ ಮಾಡಲು ಅನುಮತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

v) ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ವೈರಾಣು ಸೋಂಕು ತಗುಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅವರ ದೇಹದ ತಾಪ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.

vi) ಅಹ್ಮದ್ ಮುಂಬಾಯಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅವರು ಭಾರತದಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ.

vii) ABC ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಒಳ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

viii) x ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಆಗ, x ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತವಾಗದ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ix) $(x - a)$ ಯು $p(x)$ನ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ, ಆಗ $p(a) = 0$

ಪರಿಹಾರ : ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೇಳಿಕೆಯು $p \Rightarrow q$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ವಿಲೋಮ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲು p ಮತ್ತು q ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರ $q \Rightarrow p$ ಬರೆಯಿರಿ.

i) p : ಜಮೀಲಾ ಬೈಸಿಕಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು

q : ಆಗಸ್ಟ್ 17 ಭಾನುವಾರ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದರ ವಿಲೋಮವು: ಆಗಸ್ಟ್ 17 ಭಾನುವಾರವಾದರೆ ಆಗ ಜಮೀಲಾ ಬೈಸಿಕಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

ii) ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು (i) ರ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವು (i) ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ.

iii) ಪೌಲಿನ್‌ರ ಮುಖ ಕೆಂಪಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅವರು ಕುಪಿತರಾಗುತ್ತಾರೆ.

iv) ವ್ಯಕ್ತಿಯೊಬ್ಬರನ್ನು ಬೋಧನೆ ಮಾಡಲು ಅನುಮತಿಸಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅವರು ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಪದವಿ ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ.

v) ವ್ಯಕ್ತಿಯೊಬ್ಬರ ದೇಹದ ತಾಪ ಹೆಚ್ಚಿದೆ ಅಂದರೆ ಆಗ, ಅವರಿಗೆ ವೈರಾಣು ಸೋಂಕು ತಗಲಿದೆ.

vi) ಅಹ್ಮದ್‌ರು ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ ಅವರು ಮುಂಬಾಯಿಯಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ.

vii) ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ

viii) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತವು ಆಗದ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಆಗ x ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

ix) $p(a) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $(x - a)$ ಯು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸದೇ, ಹಾಗೆಯೇ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ: ಅಹ್ಮದ್ ಮುಂಬಾಯಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅವರು ಭಾರತದಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ನಿಜ. ಈಗ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಅಹ್ಮದ್ ಭಾರತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅವರು ಮುಂಬಾಯಿಯಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ. ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಜವಾಗಿರಬೇಕಿಲ್ಲ ಅವರು ಭಾರತದ ಯಾವುದೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿರಬಹುದು.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ವಿಶೇಷವಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ, $p \Rightarrow q$ ಸತ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಲೋಮ ಅಂದರೆ, $q \Rightarrow p$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 14: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ವಿಲೋಮವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಅದು ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಮಿಥ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

i) 'n' ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, $2n + 1$ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ii) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

iii) ಛೇದಕವೊಂದು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದರೆ ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಸಮ.

iv) ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

v) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

ಪರಿಹಾರ:

i) ವಿಲೋಮವು "$2n + 1$ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ n ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕ" ಇದು ತಪ್ಪಾದ ಹೇಳಿಕೆ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $15 = 2(7) + 1$, ಮತ್ತು 7 ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ)

ii) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಇದು ವಿಲೋಮ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಮತ್ತು ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

iii) ವಿಲೋಮವು "ಛೇದಕವೊಂದು, ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ". 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ 3.4 ರಿಂದ, ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸರಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದೆ.

iv) 'ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾವಾಗಿರುತ್ತವೆ'. ಎಂಬುದು ವಿಲೋಮ ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. (ಪ್ರಮೇಯ 7.1, ತರಗತಿ 9)

v) 'ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅವು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ'. ಇದು ವಿಲೋಮ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ತಪ್ಪು ಸೂಕ್ತ ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಯತ್ನಕ್ಕೆ ಬಿಟ್ಟಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A 1.5

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗೆ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

i) ಟೋಕಿಯಾದಲ್ಲಿ ತಾಪ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಶರಣ್ ಹೆಚ್ಚು ಬೆವರುತ್ತಾರೆ.

ii) ಶಾಲಿನಿಯವರಿಗೆ ಹಸಿವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅವರ ಹೊಟ್ಟೆ ಚುರುಗುಟ್ಟುತ್ತದೆ.

iii) ಜಸ್ವಂತ್‌ಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿವೇತನ ಸಿಕ್ಕಿದ್ದರೆ ಆಗ ಪದವಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

iv) ಒಂದು ಗಿಡವು ಹೂಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅದು ಜೀವಂತವಾಗಿದೆ.

v) ಒಂದು ಪ್ರಾಣಿಯು ಬೆಕ್ಕು ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅದಕ್ಕೆ ಬಾಲವಿರುತ್ತದೆ.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ವಿಲೋಮವು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

i) ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಪಾದಕೋನಗಳು ಸಮ

ii) ಪೂರ್ಣಾಂಕವೊಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಅದರ ವರ್ಗವು ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

iii) $x^2 = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ $x = 1$ ಆಗಿದೆ.

iv) ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದ್ದರೆ, AC ಮತ್ತು BD ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

v) a, b ಮತ್ತು c ಗಳು ಪೂರ್ಣಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ, $a + (b+c) = (a+b)+c$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

vi) x ಮತ್ತು y ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $x+y$ ಒಂದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ

vii) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ಅದು ಆಯತವಾಗಿತ್ತದೆ.

A1.7 ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆ:

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ನೇರವಾದಗಳೊಂದಿಗೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಪರೋಕ್ಷವಾದಗಳಿಂದ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಗಣಿತದ ಒಂದು ಸಮರ್ಥ ಸಾಧನವಾದ ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಅನ್ವೇಷಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಈಗಾಗಲೇ ನಾವು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 8 ರಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಭಾಗಲಬ್ಧತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಇತರೆ ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಇಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಕರಿಸೋಣ.

ಮುಂದುವರೆಯುವ ಮುನ್ನ ವೈರುದ್ಯವೆಂದರೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸೋಣ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಹೇಳಿಕೆ p ಯು ನಿಜವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ನಕಾರೋಕ್ತಿ ~ p ಯೂ ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವೈರುಧ್ಯ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

p : $x = \frac{a}{b}$, ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು.

q : a ಮತ್ತು b ಗಳೆರಡು 2 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

p ಯು ನಿಜ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, q ಯು ನಿಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ನಾವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೇ, ನಾವು ವೈರುಧ್ಯಕ್ಕೆ ಬಂದಿದ್ದೇವೆ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ ಏಕೆಂದರೆ q ಯು ~ p ಯು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದೆ. ನಿಮಗೆ ನೆನಪಿದ್ದರೆ, ನಿಖರವಾಗಿ ಇದು ನಾವು $\sqrt{2}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದಾಗ ಸಂಭವಿಸಿದಂತೆ ಘಟನೆಯಂತೆಯೇ ಇದೆ (ಅಧ್ಯಾಯ 8ನ್ನು ನೋಡಿ)

ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆ ಈ ವಿಧಾನ ಹೇಗೆ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ? ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ಇದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ.

ಎಲ್ಲಾ ಮಹಿಳೆಯರು ಸಾಯುತ್ತಾರೆ. A ಯು ಮಹಿಳೆ. A ಯು ಸಾಯುತ್ತಾಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಇದು ಬಹಳ ಸರಳವಾದ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆ ಕಂಡರೂ, ನಾವು ಇದನ್ನು ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

- ಹೇಳಿಕೆ p ಯ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. (ಇಲ್ಲಿ p : A ಯು ಸಾಯುತ್ತಾಳೆ ಎಂಬುದು ನಿಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಿದೆ)
- ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸತ್ಯವಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿಯು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಅಂದರೆ A ಯು ಸಾಯುವುದಿಲ್ಲ)
- ನಂತರ p ಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿಯ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಅವಲಂಭಿಸಿದ, ಸರಣೀಕೃತ ನಿಗಮನ ತರ್ಕಕಗಳಿಂದ ನಾವು ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತೇವೆ. (A ಯು ಸಾಯುವುದಿಲ್ಲವಾದುದರಿಂದ, ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿರೋಧ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗುವ ಹೇಳಿಕೆ 'ಎಲ್ಲಾ ಮಹಿಳೆಯರು ಸಾಯುತ್ತಾರೆ' ಎಂದಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಮಹಿಳೆಯರು ಸಾಯುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದು ಸುಳ್ಳಾಗಿದೆ.
- ಇದು ವೈರುಧ್ಯಕ್ಕೆ ಎಡೆಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈ ವೈರುಧ್ಯಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಗಿದ್ದು ನಮ್ಮ ತಪ್ಪಾದ ಊಹೆ p ಯು ಸತ್ಯವಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದು (ಎಲ್ಲಾ ಮಹಿಳೆಯರು ಸಾಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಇದರ ನಕಾರೋಕ್ತಿ ಮಹಿಳೆಯರೆಲ್ಲರೂ ಸಾಯುವುದಿಲ್ಲ ಈ ಎರಡೂ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ವೈರುಧ್ಯ ಉಂಟಾಗಿದೆ. A ಯು ಸಾಯುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬ ನಮ್ಮ ಊಹೆಯಿಂದ ಈ ವೈರುಧ್ಯ ಉಂಟಾಗಿದೆ.)
- ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು ಅಂದರೆ p ಯು ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು (ಆದ್ದರಿಂದ A ಯು ಸಾಯುತ್ತಾರೆ)

ಈಗ ಗಣಿತದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 15: ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ.

ಪರಿಹಾರ:

ಹೇಳಿಕೆಗಳು	ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ
ನಾವು ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆ ವಿಧಾನ ಬಳಸೋಣ. r ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು x ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. $r = \frac{m}{n}$ ಆಗಿರಲಿ, ಇಲ್ಲಿ m, n ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $m \neq 0$, $n \neq 0$. rx ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಿದೆ.	
rx ಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ	ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಹೇಳಿಕೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಊಹಿಸಿದ್ದೇವೆ.
ಆಗ $rx : \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು	ಇದು ಹಿಂದಿನ ಹೇಳಿಕೆಯಿಂದ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಿಂದ ಪಡೆದಿದೆ.
ಸಮೀಕರಣ $rx : \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ವನ್ನು ಪುನರ್ ಜೋಡಿಸಿ ಮತ್ತು $r : \frac{m}{n}$ ನೈಜಾಂಶವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ $x : \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.	
np ಮತ್ತು mq ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $mq \neq 0$, x ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.	ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಗಳು ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದೆ.
ಇದು ವೈರುಧ್ಯ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಾವು x ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ ಆದರೆ ನಮ್ಮ ಊಹೆಯಿಂದ x ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ	ನಾವು ಹುಡುಕುತ್ತಿದುದ್ದು ಇದೆ ವೈರುಧ್ಯ
rx ಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂಬ ತಪ್ಪಾದ ಊಹೆಯಿಂದ ಈ ವೈರುಧ್ಯ ಎದ್ದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ rx ಅಭಾಗಲಬ್ಧ.	ನಿಗಮನ ತರ್ಕದಿಂದ.

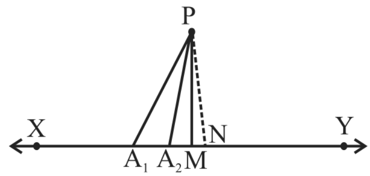
ಇದೀಗ ಉದಾಹರಣೆ 11 ನ್ನು, ಈ ಬಾರಿ ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆ ವಿಧಾನ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸೋಣ. ಸಾಧನೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.

ಹೇಳಿಕೆಗಳು	ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ
ಹೇಳಿಕೆಯು ಸತ್ಯವಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ	ಈ ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದಂತೆ, ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿನ ವಾದಗಳಿಗೆ ಇದು ಪ್ರಾರಂಭದ ಹಂತವಾಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ $p>3$ ಆಗಿರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಅದು $6n + 1$ ಅಥವಾ $6n + 5$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ n ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ	ಇದು ಫಲಿತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ..
6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗಿನ ಮೇಲೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಿ ಮತ್ತು p ಯು, $6n + 1$ ಅಥವಾ $6n + 5$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ, $p = 6n$ ಅಥವಾ $6n + 2$ ಅಥವಾ $6n + 3$ ಅಥವಾ $6n + 4$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.	ಈಗಾಗಲೇ ಸಾಧಿಸಿದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದೆ
ಆದ್ದರಿಂದ, p ಯು 2 ಅಥವಾ 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.	ನಿಗಮನ ತರ್ಕದಿಂದ
ಆದ್ದರಿಂದ p ಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯವಲ್ಲ	ನಿಗಮನ ತರ್ಕದಿಂದ
ಇದು ವೈರುಧ್ಯವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದೆ. ನಮ್ಮ ಊಹೆಯಿಂದ p ಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ	ನಿಖರವಾಗಿ ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಬಯಸಿದ್ದು!
ಇಲ್ಲಿ ವೈರುಧ್ಯ ಉಂಟಾಗಿದೆ, ಏಕೆಂದರೆ $p>3$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು $6n + 1$ ಅಥವಾ $6n + 5$ ರೂಪದಲ್ಲಿರದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿದ್ದೇವು.	
ಆದ್ದರಿಂದ 3 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಪ್ರತಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು $6n + 1$ ಅಥವಾ $6n + 5$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.	ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬಂದಿದ್ದೇವೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯು ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಹಲವಾರು ವಿಧಾನಗಳಿರುವುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ A 1.2: ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ, ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ರೇಖಾಖಂಡವು ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ:



ಚಿತ್ರ A1.5

ಹೇಳಿಕೆಗಳು	ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ
XY ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ p ಯು XY ಮೇಲೆ ಇರದ ಬಿಂದು ಮತ್ತು PM, PA_1, PA_2 .... ಇತ್ಯಾದಿ, ಇವು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ PM ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದು (ಚಿತ್ರ A1.5 ನೋಡಿ)	ನಾವು PM, PA_1, PA_2 .... ಇತ್ಯಾದಿ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದದ್ದು ರೇಖೆಗೆ XY ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.
PM ರೇಖಾಖಂಡವು XY ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಲ್ಲದಿರಲಿ	ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಹೇಳಿಕೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿ ಇದಾಗಿದೆ.
XY ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ PN ರಚಿಸಿ ಚಿತ್ರ A1.5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ.	ನಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಕೆಲವು ರಚನೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.
PN ಇದು PM, PA_1, PA_2 .... ಇತ್ಯಾದಿ, ಈ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಗಿಂತ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದೆ ಎಂದು. ಅಂದರೆ $PN < PM$	ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ವಿಕರ್ಣಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಗಳಿಂದ
ಇದು ನಮ್ಮ ಊಹೆ PM ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ರೇಖಾಖಂಡ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ವೈರುಧ್ಯವಾಗಿದೆ.	ನಿಖರವಾಗಿ ನಾವು ಬಯಸಿದ್ದು!
ಆದ್ದರಿಂದ, ರೇಖಾಖಂಡ PM, ಇದು XY ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.	ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬಂದಿದ್ದೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A1.6

1. $a + b = c + d$ ಮತ್ತು $a < c$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆ ಬಳಸಿ $b > d$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
2. r ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು x ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆ ವಿಧಾನ ಬಳಸಿ $r + x$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
3. ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಗೆ a^2 ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ a ಯು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ.

   [**ಸುಳುಹು:** a ಯು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಅಂದರೆ ಇದು $2n + 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ, ಇಲ್ಲಿ n ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂದು ಮುಂದುವರೆಯಿರಿ.]
4. ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಗೆ a^2 ಇದು 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಆಗ a ಯು 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ.
5. 6^n ದ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ 'n' ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಅಂತ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ.
6. ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ.

A1.8 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಿಸಿದ್ದೀರಿ.

1. ಸಾಧನೆಯ ವಿವಿಧ ಅಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಇತರೆ 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಕೆಲವು ಪೂರಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು
2. ಹೇಳಿಕೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿ
3. ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮ
4. ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆ.

❀ ❀ ❀

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ A2

A2.1 ಪೀಠಿಕೆ

- ಒಬ್ಬ ವಯಸ್ಕ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಶರೀರವು ಸುಮಾರು 1,50,000 km ನಷ್ಟು ರಕ್ತವಾಹಕ ಅಪಧಮನಿಗಳು ಮತ್ತು ರಕ್ತನಾಳಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
- ಮಾನವ ಹೃದಯವು ಪ್ರತಿ 60 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಿಗೆ 5 ರಿಂದ 6 ಲೀಟರ್‌ಗಳಷ್ಟು ರಕ್ತವನ್ನು ದೇಹದಲ್ಲಿ ಪಂಪ್ ಮಾಡುತ್ತದೆ.
- ಸೂರ್ಯನ ಮೇಲ್ಮೈ ತಾಪವು ಸುಮಾರು 6000^0c ಗಳಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ನಮ್ಮ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಮತ್ತು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು ಎಂದು ನೀವು ಎಂದಾದರೂ ಆಶ್ಚರ್ಯಪಟ್ಟಿದ್ದೀರಾ? ಅವರು ವಯಸ್ಕ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಮೃತ ಶರೀರಗಳಿಂದ ರಕ್ತನಾಳಗಳು ಮತ್ತು ಅಭಿಧಮನಿಗಳನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆದು ಅಳೆದರೆ? ಈ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಲು ಅವರು ರಕ್ತವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹರಿದು ಹೋಗುವಂತೆ ಮಾಡಿದರೆ? ಸೂರ್ಯನ ತಾಪವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಅವರು ಒಂದು ತಾಪಮಾಪಕದೊಂದಿಗೆ ಸೂರ್ಯನ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸಿದರೆ? ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಇಲ್ಲ ಹಾಗಾದರೆ, ಈ ಅಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವರು ಹೇಗೆ ಪಡೆದರು?

ನಾವು ನಿಮಗೆ IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಿದ, **ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ** ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಇವುಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಉತ್ತರ ಅಡಗಿದೆ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ ಎಂದರೆ, ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಗಣಿತದ ಸಹಾಯದಿಂದ ವಿವರಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವೆಂದರೆ, ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಗಣಿತದ ಮಾದರಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನವಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಮೂಲಕ ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದಲ್ಲಿ, ನಾವು ವಾಸ್ತವ ಜಗತ್ತಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಸಮಾನವಾದ ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಅದನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆ ಬಳಿಕ ನಾವು ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ, ಅದರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಜಗತ್ತಿನ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತ ಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಬಳಿಕ, ಸಿಂಧುಗೊಳಿಸುವ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ ದೊರೆತಂತಹ ಪರಿಹಾರವು ಅರ್ಥಗರ್ಭಿತವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡುವುದು ಕೂಡಾ ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿರುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ,

i) ತಲುಪಲಸಾಧ್ಯವಾದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನದಿಯ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಆಳಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ii) ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಇತರ ಗ್ರಹಗಳ ರಾಶಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.

iii) ಭೂಮಿಯಿಂದ ಇತರ ಗ್ರಹಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.

iv) ಒಂದು ದೇಶದಲ್ಲಿ ಮುಂಗಾರಿನ ಆಗಮನವನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು.

v) ಷೇರು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯ ಗತಿಯನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು.

vi) ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ದೇಹದೊಳಗಿನ ರಕ್ತದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.

vii) ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ 10 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆಗಬಹುದಾದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು.

viii) ಒಂದು ಮರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.

ix) ಒಂದು ನಗರದ ವಾತಾವರಣದಲ್ಲಿರುವ ವಿವಿಧ ಮಾಲಿನ್ಯಕಾರಿಗಳ ppm ನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.

x) ಪರಿಸರದ ಮೇಲೆ ಮಾಲಿನ್ಯಕಾರಿಗಳ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.

xi) ಸೂರ್ಯನ ಮೇಲ್ಮೈಯ ತಾಪವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಸಂದರ್ಶಿಸುವ ಮೂಲಕ ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲಿನ ಜಗತ್ತಿನಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ನಿದರ್ಶನಾತ್ಮಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡೋಣ. ವಿಭಾಗ A2.2ರಲ್ಲಿ ಮಾದರಿ ನಿರ್ಮಾಣದ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಾವು ನಿಮಗೆ ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿಭಾಗ A2.3ರಲ್ಲಿ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿಭಾಗ A2.4ರಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ವಿಶೇಷತೆಗಳಿಗೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಒಂದು ಸಂಗತಿ ಎಂದರೆ, ವಾಸ್ತವ ಜಗತ್ತಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಗಣಿತವು ಒಂದು ಪ್ರಮುಖವಾದ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಜಾಗೃತಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುವುದು ನಮ್ಮ ಗುರಿಯಾಗಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಸಾಮಾರ್ಥ್ಯವನ್ನು ನೀವು ನಿಜವಾಗಿ ಪ್ರಶಂಸಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಗಣಿತವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನಿಮ್ಮ ಉನ್ನತ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕಂಪನ್ನು ಸೂಸುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ.

A2.2 ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಹಂತಗಳು:

ಮಾದರೀಕರಣದ ಉಪಯೋಗದ ಬಗ್ಗೆ IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದೆವು. ಅವುಗಳಿಂದ, ಮಾದರೀಕರಣ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿರುವ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮಗೇನಾದರೂ ಒಳನೋಟ ದೊರೆಯಿತೆ? ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಪ್ರಮುಖ ಹಂತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ತ್ವರಿತವಾಗಿ ಒಮ್ಮೆ ಪುನರ್ ಸಂದರ್ಶಿಸೋಣ.

ಹಂತ 1: (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು): ನೈಜ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. ಒಂದು ತಂಡದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುವುದಾದರೆ, ನೀವು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಬಯಸುವ ವಿಷಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ. ಕೆಲವು ಊಹೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು ಎಂದಾದರೆ, ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಡೆಗಣಿಸಿ, ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಒಂದು ಕೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು ಎಂದಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೀನನ್ನೂ ಹಿಡಿದು, ಎಣಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ನಾವು ಕೆಲವು ಮೀನುಗಳನ್ನು ಮಾದರಿಯಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಈ ಮೂಲಕ ಕೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೆ, ಅದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು.

ಹಂತ 2 : (ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ರೂಪಿಸುವುದು): ಗಣಿತದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ, ಸಮಸ್ಯೆಯ ವಿವಿಧ ಅಂಶಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ವಿವರಿಸುವ ಕೆಲವು ಮಾರ್ಗಗಳೆಂದರೆ,

- ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.
- ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಅಸಮತೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.
- ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.
- ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಹಂತ 1ರಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದರೆ, ಇದರಿಂದ ಪೂರ್ತಿ ಸಮುದಾಯವನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಅಂದಾಜಿಸುವುದು? ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು, ಮಾದರಿಯಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮೀನುಗಳ ಮೇಲೆ ಗುರುತು ಹಾಕಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಉಳಿದ ಮೀನುಗಳೊಂದಿಗೆ ಬೆರೆಯಲು ಬಿಟ್ಟು, ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಕೆರೆಯಿಂದ ಮೀನುಗಳ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಹೊಸ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಬಾರಿ ಗುರುತು ಹಾಕಿದ ಎಷ್ಟು ಮೀನುಗಳಿವೆ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕು. ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಸಮಾನುಪಾತವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಒಟ್ಟು ಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಒಂದು ಅಂದಾಜಿಗೆ ಬರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆರೆಯಿಂದ 20 ಮೀನುಗಳ ಒಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡೋಣ. ನಂತರ ಅವುಗಳನ್ನು ಇತರ ಮೀನುಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಬೆರೆಯಲು ಅದೇ ಕೆರೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಡೋಣ. ಬಳಿಕ ನಾವು ಇನ್ನೊಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು (50 ಎಂದಿರಲಿ) ಮಿಶ್ರಿತ ಸಮುದಾಯದಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಗುರುತು ಮಾಡಿದವುಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕು. ನಾವು ಹೀಗೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಬೇಕು.

ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಊಹೆ ಎಂದರೆ, ಗುರುತು ಮಾಡಿದಂತಹ ಮೀನುಗಳು ಉಳಿದ ಮೀನುಗಳೊಂದಿಗೆ ಏಕ ಪ್ರಕಾರವಾಗಿ ಬೆರೆತುಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಂತಹ ಮಾದರಿಯು ಪೂರ್ಣ ಸಮುದಾಯವನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 3 : (ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು) : ಹಂತ 2ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು, ಬಳಿಕ ಗಣಿತದ ವಿವಿಧ ತಂತ್ರಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಡಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಹಂತ 2ರಲ್ಲಿ, ಎರಡನೇ ಸಲ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ 5 ಮೀನುಗಳು ಗುರುತು ಮಾಡಿದವುಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ, ಒಟ್ಟು ಸಮುದಾಯದಲ್ಲಿ $\frac{5}{50}$ ಅಂದರೆ $\frac{1}{10}$ ಕ್ಕೆ ಗುರುತು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಇದು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿ ಪೂರ್ಣ ಸಮುದಾಯಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ಆಗ,

ಸಮುದಾಯದ $\frac{1}{10}$ ಭಾಗ $= 20$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪೂರ್ಣ ಸಮುದಾಯ $= 20 \times 10 = 200$

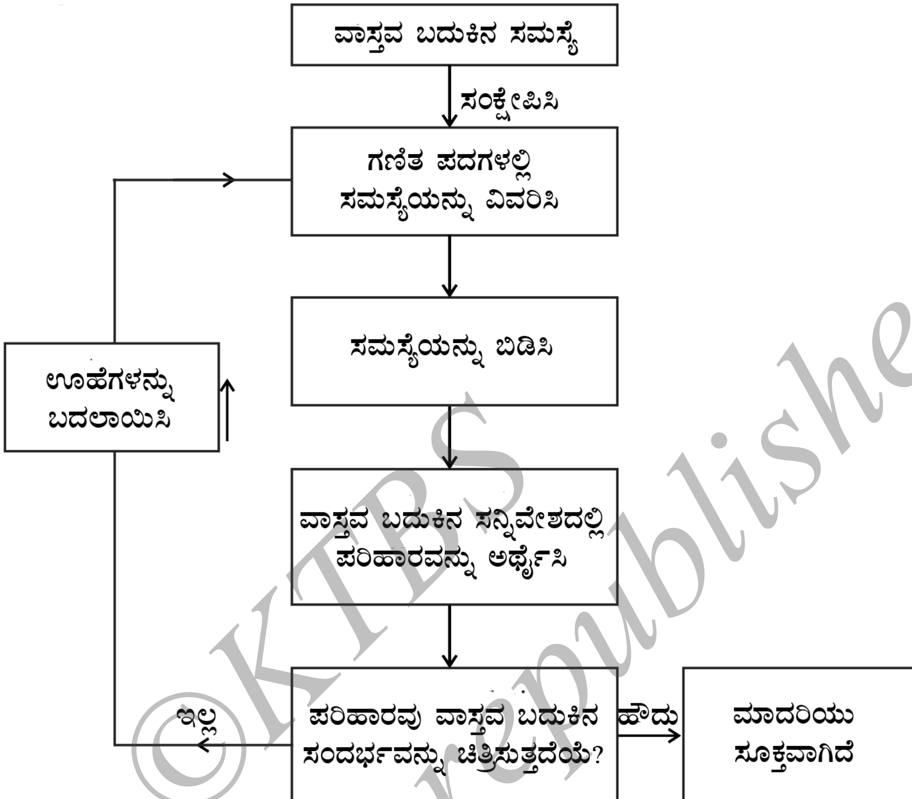
ಹಂತ 4: (ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು) : ಈ ಹಿಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪಡೆದಂತಹ ಪರಿಹಾರವನ್ನು, ಹಂತ 1 ರ ನೈಜ ಬದುಕಿನ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಈಗ ನೋಡಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಹಂತ 3 ರಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ಪರಿಹಾರವು ಸಮುದಾಯದಲ್ಲಿರುವ ಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 200 ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 5: (ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಿಂಧುಗೊಳಿಸುವುದು) : ನಾವು ಮೊದಲನೆ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಹಿಂತಿರುಗೋಣ ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಕಾರ್ಯದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಹೊಸ ಮಾಹಿತಿಗಳು ದೊರೆಯುವ ತನಕ ಅಥವಾ ಊಹೆಗಳು ಬದಲಾಗುವ ತನಕ ನಾವು ಈ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ, ನಾವು ಊಹೆಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವುದರಿಂದ ನೈಜ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅವಶ್ಯಕ ಅಂಶವನ್ನೇ ಮರೆತು, ನಾವದಕ್ಕೆ ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ, ಪರಿಹಾರವು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಸತ್ಯದೂರವಾಗಿದ್ದು, ನೈಜ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಥಹೀನವೆನಿಸಬಹುದು. ಹೀಗಾದಾಗ ಹಂತ 1 ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಮಾಡಿದ ಊಹೆಯನ್ನು ಮರುಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಹಿಂದೆ ಪರಿಗಣಿಸದಿದ್ದ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, ಅದು ನೈಜ ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಪರಿಷ್ಕರಣೆ ಮಾಡಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಹಂತ 3 ರಲ್ಲಿ, ಮೀನುಗಳ ಪೂರ್ಣ ಸಮುದಾಯದ ಒಂದು ಅಂದಾಜು ಸಿಕ್ಕಿತ್ತು. ಅದು ಕೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೀನುಗಳ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರದೇ ಇರಬಹುದು. ಇದು ಸಮುದಾಯದ ಸರಿಯಾದ ಅಂದಾಜು ಹೌದೇ ಎಂದು ನೋಡಲು 2 ಮತ್ತು 3ನೇ ಹಂತಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ, ದೊರೆತಂತಹ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಮೀನಿನ ಸಮುದಾಯದ ನಿಕಟ ಅಂದಾಜನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು. **ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವನ್ನು** ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು **ವಿಧಾನವನ್ನು** ಚಿತ್ರ A2.1 ರಲ್ಲಿ ನಿಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ **A2.1**

ಮಾದರಿಕಾರರು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವಿಕೆ ಮತ್ತು ನಿಖರತೆಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸಮತೋಲನವನ್ನು ಕಾಯ್ದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ (ಸುಲಭ ಪರಿಹಾರಕ್ಕಾಗಿ). ಅವರು ವಾಸ್ತವಕ್ಕೆ ತುಂಬಾ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿ ಪ್ರಗತಿ ಸಾಧಿಸುವ ಭರವಸೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತಾರೆ. ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಫಲಿತಾಂಶವೆಂದರೆ ಮುಂದೆ ಏನಾಗಬಹುದೆಂದು ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು ಅಥವಾ ಸಮಂಜಸವಾದ ನಿಖರತೆಯೊಂದಿಗೆ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸುವುದು. ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲು ನಾವು ಮಾಡುವ ವಿಭಿನ್ನ ಊಹೆಗಳು, ವಿಭಿನ್ನ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಪರಿಪೂರ್ಣ ಮಾದರಿಗಳೆಂದಿಲ್ಲ. ಉತ್ತಮವಾದವುಗಳು, ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮವಾದವುಗಳಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A2.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. 13 ನೇ ಶತಮಾನದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾದ ಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆ, ಲೆನಾರ್ಡ್ ಫಿಬೊನಾಚಿ ಕೇಳುತ್ತಾರೆ, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಎರಡು ಮೊಲಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ವಂಶೋತ್ಪತ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಎಷ್ಟು ಮೊಲಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ? ಒಂದು ಜೋಡಿ ಮೊಲಗಳು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಒಂದು ಜೋಡಿ ಸಂತತಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಮೊಲಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯೂ 2ನೇ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಪ್ರಥಮ ಸಂತತಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ

ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. 0 ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ತಿಂಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, ಆ ಬಳಿಕ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಮೊಲಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಮೊಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ತಿಂಗಳು	ಮೊಲಗಳ ಜೋಡಿಗಳು
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

ಕೇವಲ 16 ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ, ಸುಮಾರು 1600 ಜೋಡಿ ಮೊಲಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ! ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಸ್ತುತ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

A2.3 ಕೆಲವು ನಿದರ್ಶನಗಳು

ನಾವೀಗ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: (ಒಂದು ಜೊತೆ ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದು) : ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕಿಯು ಮುಂದೆ ಹೇಳುವ, ಊಹಿಸುವ ಆಟದ ಸವಾಲನ್ನು ನಿಮಗೆ ನೀಡುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಅವರು ಒಂದು ಜೊತೆ ದಾಳಗಳನ್ನು ಎಸೆಯುತ್ತಾರೆ. ಅದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು, ದಾಳಗಳ ಮೇಲ್ಮುಖದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೀವು ಊಹಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಿಯುತ್ತರಕ್ಕೂ ನಿಮಗೆ ಎರಡು ಅಂಕಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಪ್ಪು ಊಹೆಗೂ ನೀವು ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉತ್ತಮ ಊಹೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು?

ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ 1: (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು) : ಮೇಲ್ಮುಖದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಹಂತ 2: (ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ): ಗಣಿತದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ದಾಳದ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಮೊತ್ತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ದಾಳಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉರುಳುವಿಕೆಯೂ ಕೆಳಗಿನ 36 ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತುತ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನಾವು ಸರಳವಾಗಿ ಮಾದರೀಕರಿಸಬಹುದು.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೊದಲನೇ ದಾಳದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡನೇ ದಾಳದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 3: (ಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು): ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವುದೆಂದರೆ, ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಮೊತ್ತಗಳು 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ಮತ್ತು 12. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯ ಸಂಭವಿಸುವಿಕೆಯು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು, ನಾವು ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಾವಿದನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಮೊತ್ತ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ಸಂಭವನೀಯತೆ	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ಮೊತ್ತವು 7 ದೊರೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು $\frac{1}{6}$ ಮತ್ತು ಇದು ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಿಂತ ಅಧಿಕ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಹಂತ 4: (ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು) : ಮೊತ್ತವು 7 ದೊರೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಏಳು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಬರುವುದೆಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಬಹುದು.

ಹಂತ 5: (ಮಾದರಿಯ ಸಿಂಧುತ್ವ) : ಒಂದು ಜೊತೆ ದಾಳಗಳನ್ನು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿ, ಒಂದು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಅನುರೂಪ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳೊಂದಿಗೆ

ಹೋಲಿಸಿ. ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ಬಹಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದ್ದರೆ, ದಾಳಗಳು ವಿರೂಪಗೊಂಡಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆಗ ನಾವು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆದು, ದಾಳವು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಡೆಗೆ ಒಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಬೇಕು.

ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹೋಗುವ ಮೊದಲು ನಿಮಗೆ ಕೆಲವು ಹಿಮ್ಮಾಹಿತಿ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಣದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದ್ದಾಗ ಬೇಕಾಗುವಷ್ಟು ಹಣ ಇರದೇ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಭವ ಹೆಚ್ಚಿನವರಿಗೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬೇಕಾದ ಹಣವಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಅನುಕೂಲಕರ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕಾಗಿರಬಹುದು, ಹಣವು ನಮಗೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಸೀಮಿತ ಹಣದಲ್ಲಿ ಸ್ಕೂಟರ್ ಫ್ರಿಜ್, ಟಿ.ವಿ, ಕಾರು ಇತ್ಯಾದಿಗಳಂತಹ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಹಕರು ಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡಲು ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳು 'ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆ' ಎಂಬ ಒಂದು ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ತಂತ್ರವಾಗಿ ಪರಿಚಯಿಸಿ, ಗ್ರಾಹಕರು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸುವಂತೆ ಪ್ರೇರೇಪಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸುವಾಗ ಹಣವನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸಂದಾಯ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಗ್ರಾಹಕರು ಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಪಾವತಿಸಿ, ಉಳಿದ ಹಣವನ್ನು, ಮಾಸಿಕ, ತ್ರೈಮಾಸಿಕ, ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕ ಅಥವಾ ವಾರ್ಷಿಕ ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಪಾವತಿಸಬಹುದು.

ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಖರೀದಿಸುವವನು ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ದಿನಗಳ ಬಳಿಕ ಹಣ ಸಂದಾಯ ಮಾಡುವುದರಿಂದಾಗಿ, ಮಾರಾಟಗಾರನು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸುತ್ತಾನೆ. (ಮುಂದೂಡಿದ ಪಾವತಿ ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ)

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದಕ್ಕೂ ಮೊದಲು ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ನಗದು ಬೆಲೆ ಎಂದರೆ, ವಸ್ತುವನ್ನು ಖರೀದಿಸುವಾಗ ಗ್ರಾಹಕರು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸಂದಾಯ ಮಾಡಬೇಕಾದ ಹಣ. ನೇರ ನಗದು ಪಾವತಿ ಎಂದರೆ, ವಸ್ತುವನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಪಾವತಿಸುವ ಅದರ ಬೆಲೆಯ ಒಂದು ಭಾಗ.

ಗಮನಿಸಿ: ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದ ಒಂದು ವರ್ಷದೊಳಗೆ ಬಾಕಿ ಹಣವನ್ನು ಪಾವತಿಸುವುದಾದರೆ, ಮುಂದೂಡಿದ ಪಾವತಿಯ ಮೇಲೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ, ಬೇರೊಬ್ಬರಿಗೆ ಸಾಲವಾಗಿ ನೀಡಿದ ಹಣದ ಮೇಲೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸುವುದು ಪಾಪವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿತ್ತು. ಬಹಳ ಹಿಂದೆ ಇದು ನಿಷೇಧಕ್ಕೂ ಒಳಗಾಗಿತ್ತು. ಬಡ್ಡಿ ಪಡೆಯಬಾರದೆಂಬ ಕಟ್ಟಳೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಜನರು ಕಂಡುಕೊಂಡ ಹೊಸ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ, ಸಾಲವಾಗಿ ಪಡೆದ ಹಣಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಆ ಬೆಲೆಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಕೊಡುವುದು. ಈ ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರದಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯು ಮರೆಮಾಚಲ್ಪಡುತ್ತಿತ್ತು.

ನಾವೀಗ ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಮರಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಜೂಹಿ ಒಂದು ಬೈಸಿಕಲ್ ಖರೀದಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಗೆ ಹೋದಾಗ, ಅವಳು ಇಷ್ಟಪಡುವ ಬೈಸಿಕಲ್ ₹ 1800 ಕ್ಕೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿತು. ಜೂಹಿಯ ಬಳಿ ₹ 600 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವಳು ಅಂಗಡಿ ಮಾಲೀಕನಲ್ಲಿ ತನಗೆ ಅದನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾಳೆ. ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಬಳಿಕ, ಅಂಗಡಿ ಮಾಲೀಕನು ಅವಳ ಮುಂದೆ ಮುಂದೆ ಒಂದು ಪ್ರಸ್ತಾವನೆಯನ್ನಿಡುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ಜೂಹಿಗೆ ಹೀಗೆಂದು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ. ಅವಳು ₹ 600 ನೇರ ನಗದು ಪಾವತಿ ಮಾಡಿ ಸೈಕಲನ್ನು ಕೊಂಡೊಯ್ಯಬಹುದು. ಬಾಕಿ ಹಣವನ್ನು ತಲಾ ₹ 610 ರ ಎರಡು ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ತೀರಿಸಬೇಕು. ಜೂಹಿಯ ಮುಂದೆ ಎರಡು ಆಯ್ಕೆಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವುದು ಅಥವಾ ವಾರ್ಷಿಕ 10% ರ ದರದ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಸಾಲವನ್ನು ಪಡೆದು ನಗದು ಪಾವತಿ ಮಾಡುವುದು. ಅವಳಿಗೆ ಯಾವ ಆಯ್ಕೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭದಾಯಕ?

ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ 1: (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು): ಜೂಹಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾದುದು ಏನೆಂದರೆ, ಅಂಗಡಿ ಮಾಲೀಕನು ಮಾಡಿದಂತಹ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೇ ಬೇಡವೇ ಎಂಬುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅವಳು ಎರಡು ಆಯ್ಕೆಗಳ ಬಡ್ಡಿ ದರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು – ಒಂದು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಧಿಸಲಾಗಿರುವುದು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಬ್ಯಾಂಕ್ ವಿಧಿಸಿರುವುದು (ಅಂದರೆ 10%).

ಹಂತ 2: (ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ): ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲು ಅಥವಾ ತಿರಸ್ಕರಿಸಲು ಅಂಗಡಿ ಮಾಲೀಕನು ವಿಧಿಸುವ ಬಡ್ಡಿ ದರವನ್ನು ಅವಳು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಪೂರ್ಣ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಷದೊಳಗೆ ಸಂದಾಯ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಂತೆ ಬೈಸಿಕಲ್‌ನ ನಗದು ಬೆಲೆ = ₹ 1800

ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ನೇರ ನಗದು ನೀಡಿಕೆ = ₹ 600

ಆದ್ದರಿಂದ ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ

ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಉಳಿಕೆ ಹಣ = (1800 – 600) = ₹ 1200

ಅಂಗಡಿಯವನು ವಿಧಿಸುವ ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿ ದರ r% ಆಗಿರಲಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಂತಿನ ಹಣ = ₹ 610

ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಪಾವತಿಸಿದ ಹಣ = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಬಡ್ಡಿ = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

ಜೂಹಿಯು ₹ 1200 ನ್ನು ಒಂದು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಇರಿಸಿರುವುದರಿಂದ,

ಮೊದಲ ತಿಂಗಳ ಅಸಲು = ₹ 1200

ಎರಡನೇ ತಿಂಗಳ ಅಸಲು = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

ಎರಡನೇ ಅಸಲಿನ ಬಾಕಿ ₹ 590 + ವಿಧಿಸಿದ ಬಡ್ಡಿ (₹ 20)

= ಮಾಸಿಕ ಕಂತು = (₹ 610) = 2ನೇ ಕಂತು

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಅಸಲು = ₹ 1200 + ₹ 590

= ₹ 1790

ಈಗ, ಬಡ್ಡಿ $= ₹ \dfrac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$ (2)

ಹಂತ 3: (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು): (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

ಅಥವಾ $r = \dfrac{20 \times 1200}{1790} = 13.14$ (ಅಂದಾಜು)

ಹಂತ 4: (ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು): ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಧಿಸಿದ ಬಡ್ಡಿಯ ದರ = 13.14%

ಬ್ಯಾಂಕು ವಿಧಿಸಿದ ಬಡ್ಡಿಯ ದರ = 10%

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೈಸಿಕಲ್‌ನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಹಣ ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಅವಳು ಆದ್ಯತೆಯನ್ನು ನೀಡಿದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭದಾಯಕ.

ಹಂತ 5: (ಮಾದರಿಯ ಸಿಂಧುತ್ವ): ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, ಈ ಹಂತವು ಅಷ್ಟೊಂದು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ, ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಸಾಲ ಪಡೆಯಲು ಛಾಪಾ ಕಾಗದ ಖರೀದಿ ಇತ್ಯಾದಿ ವಿಧಿವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದರಿಂದ ಅವಳು ತನ್ನ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಲೂಬಹುದು.

ಗಮನಿಸಿ: ಬಡ್ಡಿಯ ದರದ ಮಾದರೀಕರಣವು ಅದರ ಆರಂಭಿಕ ಹಂತದಲ್ಲೇ ಇದೆ ಮತ್ತು ಸಿಂಧುತ್ವವು ಇನ್ನೂ ಕೂಡಾ ಆರ್ಥಿಕ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಕಂತನ್ನು ನಿಗದಿಪಡಿಸುವಾಗ, ವಿಭಿನ್ನ ಬಡ್ಡಿಯ ದರಗಳನ್ನು ಕಾನೂನುಬದ್ಧಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಸಿಂಧುತ್ವವು ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A2.2

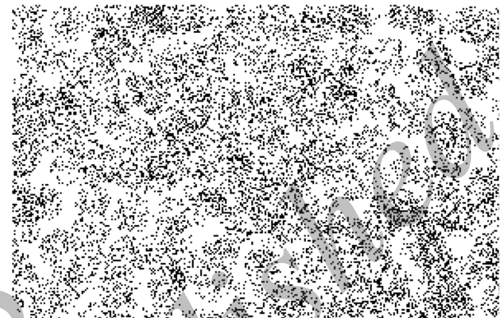
ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

1. ಒಬ್ಬ ಪಕ್ಷಿತಜ್ಞೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಗಿಳಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ. ಕೆಲವನ್ನು ಹಿಡಿಯಲು ಅವರು ಒಂದು ಬಲೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ ಹಾಗೂ 32 ಗಿಳಿಗಳನ್ನು ಹಿಡಿದು ಅವುಗಳಿಗೆ ಬಳೆಯನ್ನು ತೊಡಿಸಿ, ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡುತ್ತಾರೆ. ಮುಂದಿನ ವಾರ ಇದೇ ರೀತಿ ಅವರು

40 ಗಿಳಿಗಳನ್ನು ಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 8 ಗಿಳಿಗಳು ಬಳೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

i) ಅವರು ಎರಡನೇ ಸಲ ಹಿಡಿದ ಗಿಳಿಗಳ ಎಷ್ಟನೇ ಒಂದು ಅಂಶವು ಬಳೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿತ್ತು?

ii) ಆ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿದ್ದ ಒಟ್ಟು ಗಿಳಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿರಿ.



2. ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕಾಣುತ್ತಿರುವುದು ಕಾಡಿನ ಒಂದು ವಿಹಂಗಮ ಛಾಯಚಿತ್ರ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚುಕ್ಕೆಯೂ ಒಂದು ಮರವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಪರಿಸರದ ಗಣತಿಯ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿ, ನೀವು ಮಾಡಬೇಕಾದುದೆಂದರೆ ಈ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

3. ಒಂದು ಟಿ.ವಿಯನ್ನು ₹ 24000 ನಗದು ಬೆಲೆಗೆ ಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಅಥವಾ ₹ 8000 ನೇರ ನಗದು ಪಾವತಿ ಮಾಡಿ ತಲಾ ₹ 2800 ರ ಆರು ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಲಿಯವರು ₹ 8000 ದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಟಿ.ವಿ ಯನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಗೆ ತೆರಳಿದರು. ಅವರಿಗೆ ಈಗ ಎರಡು ಆಯ್ಕೆಗಳಿವೆ. ಒಂದನೆಯದು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಡಿಯಲ್ಲಿ ಟಿ.ವಿ ಯನ್ನು ಖರೀದಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಯಾವುದಾದರೂ ಆರ್ಥಿಕ ಸಹಕಾರ ಸಂಘದಿಂದ ಸಾಲ ಪಡೆದು ನಗದು ಪಾವತಿಯನ್ನು ಮಾಡುವುದು. ಸಹಕಾರ ಸಂಘವು ವಾರ್ಷಿಕ 18% ರ ದರದಲ್ಲಿ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆಲಿಯವರಿಗೆ ಯಾವ ಆಯ್ಕೆಯು ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ?

A2.4 ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವು ಏಕೆ ಪ್ರಮುಖವಾಗಿದೆ?

ವಿವಿಧ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡಿರುವಂತೆ, ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವು ಒಂದು ಅಂತರ್‌ಜ್ಞಾನ ಶಿಸ್ತೀಯ ವಿಷಯವಾಗಿದೆ. ಗಣಿತಜ್ಞರು ಮತ್ತು ಇತರ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ಪರಿಣಿತರು, ಪ್ರಸ್ತುತ ಇರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಮಟ್ಟ ಹೆಚ್ಚಿಸಲು, ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮವಾದವುಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲು ಅಥವಾ ಕೆಲವೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಊಹಿಸಲು ತಮ್ಮ ಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ನೈಪುಣ್ಯವನ್ನು ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ.

ಮಾದರೀಕರಣದ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನೇಕ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕಾರಣಗಳಿರುವುದು ನಿಜವಾದರೂ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನವುಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕಾರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧಿಸಿವೆ.

- *ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು:* ವಾಸ್ತವ ಜಗತ್ತಿನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಅವಶ್ಯಕ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುವ ಒಂದು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯು ನಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ಮಾದರಿಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಮೂಲಕ ನಾವು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇದಲ್ಲದೆ, ಮಾದರಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಘಟಕಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಪಡೆದಿವೆ ಹಾಗೂ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ ವಿಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

- *ಊಹಿಸಲು, ಅಥವಾ ಮುನ್ಸೂಚಿಸಲು ಅಥವಾ ಅನುಕರಿಸಲು:* ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು

ವಾಸ್ತವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಏನು ಮಾಡಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯಲು, ಎಷ್ಟೋ ಸಲ ನಾವು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಅದು ದುಬಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ, ವ್ಯಾವಹಾರಿಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೊಂದಿಗೆ ನೇರವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಗ ಮಾಡುವುದು ಅಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ, ಹವಾಮಾನ ಮುನ್ಸೂಚನೆ, ಮಾನವನಲ್ಲಿ ಔಷಧದ ಪರಿಣಾಮಗಳ ಅಧ್ಯಯನ, ಪರಮಾಣು ಕ್ರಿಯಾಕಾರಿಯ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ.

ವಿವಿಧ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯ. ಏಕೆಂದರೆ, ತೀರ್ಮಾನ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿಧಾನವು, ಭವಿಷ್ಯದ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಊಹಿಸುವುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬೇಡಿಕೆಯ ಕುರಿತಾದ ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯು ಮಾರಾಟ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಯೋಜಿಸಲು ಸಹಕರಿಸುತ್ತದೆ

ಒಂದು ಶಾಲಾ ಮಂಡಳಿಗೆ ಎಲ್ಲಿ, ಯಾವಾಗ ಹೊಸ ಶಾಲೆಗಳನ್ನು ಆರಂಭಿಸಬೇಕೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ವಿವಿಧ ಜಿಲ್ಲೆಗಳಿಗೆ ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುವ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಏರಿಕೆಯನ್ನು ಮುನ್ಸೂಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರಬೇಕು.

ಮುನ್ಸೂಚಕರು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ, ಹಿಂದಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಭವಿಷ್ಯವನ್ನು ಊಹಿಸುತ್ತಾರೆ. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಬಲ್ಲ ಒಂದು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಅವರು ಮೊದಲು ಅವುಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತಾರೆ. ಬಳಿಕ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ದತ್ತಾಂಶ ಮತ್ತು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಭವಿಷ್ಯವನ್ನು ಊಹಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅನೇಕ ಮುನ್ಸೂಚನಾ ತಂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಮೂಲಭೂತ ಉಪಾಯವು ಬಳಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು ಹಿಂದೆ ಗುರುತಿಸಿದಂತಹ ವಿನ್ಯಾಸವು ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲೂ ಮುಂದುವರೆಯಬಹುದು ಎಂಬ ಊಹೆಯ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿತವಾಗಿದೆ.

- *ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು:* ಬಹಳಷ್ಟು ಬಾರಿ ನಾವು ದೊಡ್ಡ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕಾಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಮರಗಳು, ಕೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೀನುಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಎಂದರೆ, ಚುನಾವಣಾ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ, ಸ್ಪರ್ಧಿಸುವಂತಹ ಪಕ್ಷಗಳು, ತಮ್ಮ ಪಕ್ಷವು ಚುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತವೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅವರ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಅವರ ಪಕ್ಷಕ್ಕೆ ಮತ ಹಾಕಬಹುದೆಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ. ಅವರ ಊಹೆಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಚಾರದ ತಂತ್ರಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲೂ ಅವರು ಬಯಸಬಹುದು. ಒಂದು ಪಕ್ಷವು ಚುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಸ್ಥಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಲು, ಚುನಾವಣಾ ಪೂರ್ವ ಸಮೀಕ್ಷೆಗಳು ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A2.3

1. ಕಳೆದ ಐದು ವರ್ಷಗಳ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯು ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ 10ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಬ್ಲಿಕ್ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಸರಾಸರಿ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಮುನ್ಸೂಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

A2.5 ಸಾರಾಂಶ:

ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. ಒಂದು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ ಎಂದರೆ ನೈಜ ಬದುಕಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಗಣಿತದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವುದು. ಗಣತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವೆಂದರೆ, ಗಣತೀಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ, ನೈಜ ಬದುಕಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇದರ ಮೂಲಕ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ವಿಧಾನ.
2. ಮಾದರೀಕರಣವು ಒಳಗೊಳ್ಳುವ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳೆಂದರೆ – ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು, ಗಣತೀಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು, ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು, ನೈಜ ಬದುಕಿನ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲದಕ್ಕಿಂತ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಿಂಧುಗೊಳಿಸುವುದು.
3. ಕೆಲವು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದೆವು.
4. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ.

❀ ❀ ❀

ಉತ್ತರಗಳು

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. (i) ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಲ್ಲ (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

1. (i) $-2,\ 4$ (ii) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3},\ \frac{3}{2}$

   (iv) $-2,\ 0$ (v) $-\sqrt{15},\ \sqrt{15}$ (vi) $-1,\ \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

   (iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

1. (i) ಭಾಗಲಬ್ಧ $= x - 3$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $= 7x - 9$
   (ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ $= x^2 + x - 3$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $= 8$
   (iii) ಭಾಗಲಬ್ಧ $= -x^2 - 2$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $= -5x + 10$
2. (i) ಹೌದು (ii) ಹೌದು (iii) ಅಲ್ಲ
3. $-1,\ -1$
4. $g(x) = x^2 - x + 1$
5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14,\ g(x) = 2,\ q(x) = x^2 - x + 7,\ r(x) = 0$
   (ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\ g(x) = x^2 - 1,\ q(x) = x + 1,\ r(x) = 2x + 2$
   (iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2,\ g(x) = x^2 - 1,\ q(x) = x + 2,\ r(x) = 4$
   (i), (ii) ಮತ್ತು (iii) ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿರಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.4 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

2. $x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ 3. $a = 1,\ b = \pm\sqrt{2}$

4. $-5,\ 7$ 5. $k = 5$ ಮತ್ತು $a = -5$

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. (i) ಹೌದು (ii) ಹೌದು (iii) ಅಲ್ಲ (iv) ಹೌದು
   (v) ಹೌದು vi) ಅಲ್ಲ (v) ಅಲ್ಲ (vi) ಹೌದು

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ನಿವೇಶನದ ಅಗಲವಾಗಿದೆ.(ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)
   (ii) $x^2 + x - 306 = 0$, ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಚಿಕ್ಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.
   (iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ರೋಹನನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)
   (iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ರೈಲಿನ ಜವವಾಗಿದೆ (km / h ಗಳಲ್ಲಿ)

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. (i) $-2,\ 5$ (ii) $-2,\ \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}},\ -\sqrt{2}$ (iv) $\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10},\ \frac{1}{10}$
2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30
3. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 13 ಮತ್ತು 14. 4. ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು 13 ಮತ್ತು 14
5. 5 cm ಮತ್ತು 12 cm 6. ಆ ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 6, ಪ್ರತಿ ಮಡಿಕೆಯ ಬೆಲೆ = ₹ 15

ಅಭ್ಯಾಸ 10.3

1. (i) $\frac{1}{2},\ 3$ (ii) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
   (iv) ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ
2. (1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ. (3) (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2},\ \frac{3+\sqrt{33}}{2}$ (ii) 1, 2 (4)7 ವರ್ಷಗಳು
5. ಗಣಿತದ ಅಂಕಗಳು = 12, ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನ ಅಂಕಗಳು = 18 ಅಥವಾ
   ಗಣಿತದ ಅಂಕಗಳು = 13, ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನ ಅಂಕಗಳು = 17
6. 120m, 90m. 7. 18, 12 ಅಥವಾ 18, –12
8. 40km/h 9. 15 ಘಂಟೆ, 25 ಘಂಟೆ
10. ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿನ ಜವ = 33km/h, ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲಿನ ಜವ = 44 km/h
11. 18m, 12m

ಅಭ್ಯಾಸ 10.4

1. (i) ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ. (ii) ಸಮಾನಾದ ಮೂಲಗಳು; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

   (iii) ವಿಭಿನ್ನ ಮೂಲಗಳು : $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. ಹೌದು. 40m, 20m 4. ಇಲ್ಲ 5. ಹೌದು. 20m. 20m

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. i) $\sin A = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{24}{25}$ ii) $\sin C = \frac{24}{25}$, $\cos C = \frac{7}{25}$

2. 0 3. $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$ 4. $\sin A = \frac{15}{17}$, $\sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$, $\cot\theta = \frac{12}{5}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

7. i) $\frac{49}{64}$ ii) $\frac{49}{64}$ 8. ಹೌದು

9. i) 1 ii) 0 10. $\sin P = \frac{12}{13}$, $\cos P = \frac{5}{13}$, $\tan P = \frac{12}{5}$

11. i) ತಪ್ಪು ii) ಸರಿ iii) ತಪ್ಪು iv) ತಪ್ಪು v) ತಪ್ಪು

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. i) 1 ii) 2 iii) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$ iv) $\frac{43 - 24\sqrt{3}}{8}$ v) $\frac{67}{12}$

2. i) A ii) D iii) A iv) A iv) C 3. $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 15^\circ$

4. i) ತಪ್ಪು ii) ಸರಿ iii) ತಪ್ಪು iv) ತಪ್ಪು v) ಸರಿ

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

1. i) 1 ii) 1 iii) 0 iv) 0

3. $\angle A = 36^\circ$ 5. $\angle A = 22^\circ$ 7. $\cos 23^\circ + \sin 15^\circ$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.4

1. $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\sec A = \dfrac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \dfrac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

   $\cot A = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$, $\operatorname{cosec} A = \dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. i) 1 ii) 1 4. i) B ii) C iii) D iv) D

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. 10 m 2. $8\sqrt{3}$ m 3. 3m, $2\sqrt{3}$ m

4. $10\sqrt{3}$ m 5. $40\sqrt{3}$ m 6. $19\sqrt{3}$ m

7. $20(\sqrt{3} - 1)$m 8. $0.8(\sqrt{3} + 1)$ m 9. $16\frac{2}{3}$ m

10. $20\sqrt{3}$ m, 20 m, 60 m 10. $10\sqrt{3}$ m, 10 m

12. $7(\sqrt{3} + 1)$m 13. $75(\sqrt{3} - 1)$m 14. $58\sqrt{3}$ m

15. 3 ಸೆಕೆಂಡುಗಳು.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

1. 8.1 ಗಿಡಗಳು, ನಾವು ನೇರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ ಏಕೆಂದರೆ x_i ಮತ್ತು f_i ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿವೆ.

2. 145.20 3. f = 20 4. 75.9 5. 57.19

6. ₹ 211 7. 0.099ppm 8. 12.38 ದಿನಗಳು 9. 69.43%

ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. ಬಹುಲಕ = 36.8 ವರ್ಷಗಳು, ಸರಾಸರಿ = 35.37 ವರ್ಷಗಳು. 36.8 ವರ್ಷ (ಸರಿಸುಮಾರು) ವಯಸ್ಸಿನ ಗರಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರೋಗಿಗಳು ಆಸ್ಪತ್ರೆಗೆ ದಾಖಲಾಗಿದ್ದರು. ಹಾಗೆಯೇ ಆಸ್ಪತ್ರೆಗೆ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 35.37 ವರ್ಷಗಳು.

2. 65.625 ಗಂಟೆಗಳು

3. ಮಾಸಿಕ ಖರ್ಚಿನ ಬಹುಲಕ = ₹ 1847.83. ಮಾಸಿಕ ಖರ್ಚಿನ ಸರಾಸರಿ = ₹ 2662.5

4. ಬಹುಲಕ = 30.6, ಸರಾಸರಿ = 29.2 ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರಾಜ್ಯಗಳು / ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳು 30.6 ರಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಶಿಕ್ಷಕ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಮತ್ತು ಈ ಅನುಪಾತದ ಸರಾಸರಿಯು 29.2 ಆಗಿದೆ.

5. ಬಹುಲಕ = 4608.7 ರನ್‌ಗಳು

6. ಬಹುಲಕ = 44.7 ಕಾರುಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

1. ಮಧ್ಯಾಂಕ = 137 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು, ಸರಾಸರಿ = 137.05 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು, ಬಹುಲಕ = 135.76 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

2. $x = 8$, $y = 7$

3. ವರ್ಷದ ಮಧ್ಯಾಂಕ = 35.76 ವರ್ಷಗಳು

4. ಉದ್ದದ ಮಧ್ಯಾಂಕ = 146.75mm

5. ಬಾಳಿಕೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕ = 3406.98 ಗಂಟೆಗಳು

6. ಮಧ್ಯಾಂಕ = 8.05, ಸರಾಸರಿ = 8.32, ಬಹುಲಕ = 7.88

7. ತೂಕದ ಮಧ್ಯಾಂಕ = 56.67 kg

ಅಭ್ಯಾಸ 13.4

ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
120 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	12
140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	26
160 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	34
180 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	40
200 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	50

(120,12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) ಮತ್ತು (200, 50) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಓಜೀವ್‌ನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

2. (38, 0), (40, 3), (42. 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) ಮತ್ತು (52, 35) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಓಜೀವ್ ರಚಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $\frac{n}{2} = 17.5$ ಓಜೀವ್‌ನ ಮೇಲೆ y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 17.5 ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಈ ಬಿಂದುವಿನ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3.

ಉತ್ಪಾದನಾ ಇಳುವರಿ (**kg/ha** ಗಳಲ್ಲಿ)	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
50 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	100
55 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	98
60 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	90
65 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	78
70 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	54
75 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	16

ಈಗ, (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) ಮತ್ತು (75, 16) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಓಜೀವ್ ರಚಿಸುವುದು.

ಸಂಭವನೀಯತೆ

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. i) 1 ii) 0, ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ (ಅಸಾಧ್ಯ ಘಟನೆ)
   iii) 1, ಖಚಿತ ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ iv) 1 v) 0, 1
2. (iii) ಮತ್ತು (iv) ಈ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.
3. ನಾವು ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಶಿರವನ್ನು ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯದಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ನಾಣ್ಯದ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಊಹಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದುದಾಗಿದೆ.

4. B 5. 0.95 6. i) 0 ii) 1

7. 0.008 8. i) $\frac{3}{8}$ ii) $\frac{5}{8}$

9. i) $\frac{5}{17}$ ii) $\frac{8}{17}$ iii) $\frac{13}{17}$ 10. i) $\frac{5}{9}$ ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$ 12. i) $\frac{1}{8}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{3}{4}$ iv) 1

13. i) $\frac{1}{2}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{1}{2}$

14. i) $\frac{1}{26}$ ii) $\frac{3}{13}$ iii) $\frac{3}{26}$ iv) $\frac{1}{52}$ v) $\frac{1}{4}$ vi) $\frac{1}{52}$

15. i) $\frac{1}{5}$ ii) a) $\frac{1}{4}$ b) 0 16. $\frac{11}{12}$

17. i) $\frac{1}{5}$ ii) $\frac{15}{19}$ 18. i) $\frac{9}{10}$ ii) $\frac{1}{10}$ iii) $\frac{1}{5}$

19. i) $\frac{1}{3}$ ii) $\frac{1}{6}$ 20. $\frac{\pi}{24}$ 21. i) $\frac{31}{36}$ ii) $\frac{5}{36}$

22. i)

2 ದಾಳಗಳಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ಸಂಭವನೀಯತೆ	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ii) ಇಲ್ಲ. 11 ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯವುಗಳಲ್ಲ.

23. $\frac{3}{4}$; ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು: HHH, TTT, HHT, HTH, HTT THH THT, TTH ಇಲ್ಲಿ, THH ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪುಚ್ಛ, 2ನೇ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಶಿರ ಮತ್ತು 3 ನೇ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಶಿರ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

24. i) $\frac{25}{36}$ ii) $\frac{11}{36}$

25. i) ತಪ್ಪಾಗಿದೆ. ನಾವು ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಆದರೆ ಅವು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳಲ್ಲ. ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಎಂಬುದು 2 ರೀತಿಯ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನೀಡಬಹುದು – ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಶಿರ ಮತ್ತು 2ನೇ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಪುಚ್ಛ ಅಥವಾ ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಪುಚ್ಛ ಮತ್ತು 2ನೇ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಶಿರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು. ಇದರಿಂದ ಎರಡು ಶಿರಗಳು (ಅಥವಾ ಎರಡು ಪುಚ್ಛಗಳು) ಎಂದು ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

ii) ಸರಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದ ಎರಡು ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯದ್ದಾಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 14.2 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. i) $\frac{1}{5}$ ii) $\frac{8}{25}$ iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

i) $\frac{1}{2}$ ii) $\frac{1}{9}$ iii) $\frac{5}{12}$

3. 10 4. $\frac{x}{12}$, $x = 3$ 5. 8

ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 15.1

1. 160 cm^2 2. 572 cm^2 3. 214.5 cm^2
4. ಗರಿಷ್ಠ ವ್ಯಾಸ = 7cm, ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 332.5 cm^2 5. $\frac{1}{4} l^2 (\pi + 24)$
6. 220 m^2 7. 44 m^2, ₹ 22,000 8. 18cm^2 9. 374 cm^2

ಅಭ್ಯಾಸ 15.2

1. π cm^3
2. ಮಾದರಿ ಒಳಗಡೆ ಇರುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ = (ಶಂಕು + ಸಿಲಿಂಡರ + ಶಂಕು) ಇವುಗಳ ಒಳಗಿನ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ = $[\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1]$

   ಇಲ್ಲಿ r = ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು h_1= ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು h_2= ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ

   ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + 3h_2 + h_1)$
3. 338 cm^3 4. 523.53 cm^3 5. 100 6. 892.26 kg
7. 1.131 m^3 (ಸರಿಸುಮಾರು) 8. ಸರಿ ಅಲ್ಲ. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವು 346.51 cm^3

ಅಭ್ಯಾಸ 15.3

1. 2.74 cm 2. 12 cm 3. 2.5 m
4. 1.125 m 5. 10 6. 400 7. 36 cm ; $12\sqrt{13}$ cm
8. 562500 m^2 ಅಥವಾ 56.25 ಹೆಕ್ಟೆರ್ 9. 100 ನಿಮಿಷಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 15.4

1. $102\frac{2}{3}$ cm^3 2. 48 cm^2 3. $710\frac{2}{7}$ cm^2
4. ಹಾಲಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 209 ಮತ್ತು ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ನೆಲೆಯು ₹ 156.75
5. 7964.4 m

ಅಭ್ಯಾಸ 15.5 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. 1256 cm ; 788 g (ಸರಿಸುಮಾರು) 2. 30.14 cm^3 ; 52.75 cm^2

3. 1792 5. $782\frac{4}{7}$ cm^2

ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಸಾಧನೆಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ A1.1

1. i) ಸಂದಿಗ್ಧ ii) ಸತ್ಯ iii) ಸತ್ಯ iv) ಸಂದಿಗ್ಧ v) ಸಂದಿಗ್ಧ
2. i) ಸತ್ಯ ii) ಸತ್ಯ iii) ಮಿಥ್ಯ iv) ಸತ್ಯ v) ಸತ್ಯ
3. ii) ಮಾತ್ರ ಸತ್ಯ
4. i) $a > 0$ ಮತ್ತು $a^2 > b^2$ ಆದರೆ, $a > b$

   ii) $xy \geq 0$ ಮತ್ತು $x^2 = y^2$ ಆದರೆ, $x = y$

   iii) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ಮತ್ತು $y \neq 0$ ಆದರೆ, $x = 0$

   iv) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A1.2

1. A ಯು ಸಾಯುತ್ತಾರೆ 2. ab ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ
3. $\sqrt{17}$ ರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.
4. $y = 7$ 5. $\angle A = 100°$, $\angle C = 100°$, $\angle D = 100°$
6. PQRS ಆಯತ
7. ನಮ್ಮ ಊಹೆಯಿಂದ ಇದು ಸರಿ. ಇಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ, $\sqrt{3721} = 61$ ಇದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧವಲ್ಲ. ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪಾಗಿರುವುದರಿಂದ ತೀರ್ಮಾನವು ತಪ್ಪಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A1.3

1. $2n + 1$ ಮತ್ತು $2n + 3$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಇಲ್ಲಿ 'n' ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

ಅಭ್ಯಾಸ A1.4

1. i) ಮನುಷ್ಯರು ಸಾಯುವುದಿಲ್ಲ. ii) ರೇಖೆ l ಇದು ರೇಖೆ p ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿಲ್ಲ.

   iii) ಈ ಅಧ್ಯಾಯವು ಹಲವು ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

   iv) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

   v) ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ.

   vi) ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸೋಮಾರಿಗಳು. vii) ಎಲ್ಲಾ ಬೆಕ್ಕುಗಳು ಕಪ್ಪಾಗಿವೆ.

   viii) $\sqrt{x} = -1$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದಾದರೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಇದೆ.

ix) 2 ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 'a' ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

x) a ಮತ್ತು b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಹಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲ.

2. i) ಹೌದು ii) ಇಲ್ಲ iii) ಇಲ್ಲ iv) ಇಲ್ಲ v) ಹೌದು

ಅಭ್ಯಾಸ A1.5

1. i) ಶರಣ್ ಹೆಚ್ಚು ಬೆವರಿದರೆ ಆಗ ಟೋಕಿಯೋದಲ್ಲಿ ತಾಪಮಾನ ಹೆಚ್ಚಿದೆ

ii) ಶಾಲಿನಿಯ ಹೊಟ್ಟೆ ಚುರುಗುಟ್ಟಿದರೆ, ಆಗ ಅವಳಿಗೆ ಹಸಿವಾಗಿದೆ.

iii) ಜಸ್ವಂತ್ ಪದವಿ ಪಡೆಯಬಹುದಾದರೆ, ಆಕೆಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ವೇತನ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

iv) ಸಸ್ಯಕ್ಕೆ ಜೀವವಿದ್ದರೆ, ಅದರಲ್ಲಿ ಹೂಗಳಿರುತ್ತವೆ.

v) ಪ್ರಾಣಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಬಾಲವಿದ್ದರೆ ಅದು ಬೆಕ್ಕು.

2. i) ΔABC ಯ ಪಾದಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಸರಿ.

ii) ಪೂರ್ಣಾಂಕವೊಂದರ ವರ್ಗವು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಬೆಸ. ಸರಿ

iii) $x = 1$ ಆದರೆ $x^2 = 1$ ಸರಿ.

iv) AC ಮತ್ತು BD ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. ಸರಿ.

v) a + (b+c) = (a+b)+c ಆದರೆ, a, b ಮತ್ತು c ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ತಪ್ಪು

vi) $x+y$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, x ಮತ್ತು y ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ತಪ್ಪು

vii) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಯತವಾದರೆ ಅದರ ಶೃಂಗಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಸರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ A1.6

1. b ≤ d ಎಂಬ ವೈರುಧ್ಯವನ್ನು ಭಾವಿಸಿ. 2. ಅಧ್ಯಾಯ 8 ರ ಉದಾಹರಣೆ 10 ನೋಡಿ.

3. 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮೇಯ 2.1 ನ್ನು ನೋಡಿ.

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣ

ಅಭ್ಯಾಸ A2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160

2. 1cm^2 ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಚುಕ್ಕೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಿರಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ (cm^2ಗಳಲ್ಲಿ) ಗುಣಲಬ್ಧವೇ ಮರಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು 17.74%, ಇದು 18% ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ A2.3

1. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮದೇ ಆದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ.