कर्नाटक सरकार

गणित

MATHEMATICS

हिन्दी माध्यम

Hindi Medium

10

Tenth Standard

दसवी कक्षा

भाग – 1

Karnataka Text book Society (R.)
100 Feet Ring Road,
Banashankari 3rd Stage, Bengaluru - 85

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Preface

The Textbook Society, Karnataka has been engaged in producing new textbooks according to the new syllabi which in turn are designed on NCF – 2005 since June 2010. Textbooks are prepared in 12 languages; seven of them serve as the media of instruction. From standard 1 to 4 there is the EVS, mathematics and 5th to 10th there are three core subjects namely mathematics, science and social science.

NCF – 2005 has a number of special features and they are:

- connecting knowledge to life activities
- learning to shift from rote methods
- enriching the curriculum beyond textbooks
- learning experiences for the construction of knowledge
- making examinations flexible and integrating them with classroom experiences
- caring concerns within the democratic policy of the country
- make education relevant to the present and future needs.
- softening the subject boundaries- integrated knowledge and the joy of learning.
- the child is the constructor of knowledge

The new books are produced based on three fundamental approaches namely.

Constructive approach, Spiral Approach and Integrated approach

The learner is encouraged to think, engage in activities, master skills and competencies. The materials presented in these books are integrated with values. The new books are not examination oriented in their nature. On the other hand they help the learner in the total development of his/her personality, thus help him/her become a healthy member of a healthy society and a productive citizen of this great country, India.

Mathematics is essential in the study of various subjects and in real life. NCF 2005 proposes moving away from complete calculations, construction of a framework of concepts, relate mathematics to real life experiences and cooperative learning.

Many students have a maths phobia and in order to help them overcome this phobia, jokes, puzzles, riddles, stories and games have been included in textbooks. Each concept is introduced through an activity or an interesting story at the primary level. The contributions of great Indian mathematicians are mentioned at appropriate places. Textbooks for students X have a special significance. As any other new textbook they help learners' master skills and competencies and at the same time there is going to be a public examination based on them.

The Textbook Society expresses grateful thanks to the chairpersons, writers, scrutinisers, artists, staff of DIETs and CTEs and the members of the Editorial Board and printers in helping the Text Book Society in producing these textbooks.

Prof G.S. Mudambadithaya
Coordinator
Curriculum Revision and Textbook Preparation
Karnataka Textbook Society®
Bengaluru

Narasimhaiah
Managing Director
Karnataka Textbook Society®
Bengaluru

Chairperson's note

This tenth standard mathematics textbook is prepared for the revised syllabus of Karnataka State based on the recommendations made by NCF 2005. It is designed to support the two major suggestions made by NCF 2005.

- *The higher aim of mathematics education should be to develop the inner resources in children. That is, development of mental abilities such as logical and abstract thinking, reasoning, analysing, problem solving etc.*
- *The mode of transaction should be based on contructivism, which facilitate the learners to construct their own knowledge.*

Conceptual understanding of basic ideas and problem solving are the two main components of mathematics learning. Hence, this textbook is prepared in such a way to facilitate mathematics learning by doing mathematics and well balanced text and exercises.

The salient features of this text book are

- *Each unit begins with real life situations or activities that engage students in learning tasks.*
- *Each concept in each unit is provided with suitable exploring activities and illustrations.*
- *The text is presented in simple language and logical manner with suitable hands on and minds on activities.*
- *The units where theorems are included, both practical activity for stating the theorem and logical proof for proving the theorem are discussed.*
- *Each theorem is followed by numerical problems and riders. Equal weightage is given to problems and riders on theorems, its converse and corollories.*

- *Questions are raised wherever possible to promote thinking and do analysis.*
- *Additional information is provided in boxes with the heading "know this". This is to motivate students and create interest in the subject.*
- *Questions and statements with headings* ***"Try" and "Discuss"*** *are given for promoting inquiry and co-operative learning strategies.*
- *Each unit ends with a flow chart where all the ideas learnt in the unit are provided through concept mapping. Students with the guidance of teachers can generate better concept maps.*

This text book is made to be both learner friendly and teacher friendly. We, the Tenth standard mathematics text book committee members hope that the text book will pave a suitable path for making mathematics learning joyful and meaningful.

We would be greatful for constructive suggestions and comments from experts, teachers, students and parents for further improvement of this book.

Dr. G. Vijayakumari
Chairperson

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Text Book Committee

Chairperson :

Dr. Vijaya Kumari G. - Associate Professor, Vijaya Teachers College (CTE), 4th block, Jayanagar, Bengaluru - 11.

Members :

Dr. Y.B. Venkatesh - Lecturer, Govt. P.U. College, Bidadi, Ramanagara District.

Sri V. Ravikumar - Senior Lecturer, DIET, Ilakal, Bagalkot District.

Sri Narasappa - Head Master, Sri Saraswati Vidyaniketana, Dommasandra, Bengaluru.

Sri T.K. Prasanna Murthy - Asst. teacher, Vijaya High School, Jayanagar, Bengaluru.

Smt. M. N. Deepa Rao - Asst. Teacher, Sri. N.K.S.E.H.S, D.V.V. Gujarati Shala, Majestic Circle, Bengaluru.

Sri Tharakesh (Artist) Drawing Teacher, Government High School, Bannitalapura, Gundlupet Taluk, Charamarajanagar Dt.

Scrutinizers :

Dr. B.J. Venkatachala, Prof. H.B.C.S.E (T.I.F.R) Mathematics Dept. IISC, Bengaluru.

Sri K. Krishna Iyengar, Retired B.E.O., Bengaluru.

Editorial Committee Members:

Dr. R. Raveendra - N.C.E.R.T Director (Retd.), Banashankari III stage, Bengaluru.

Dr. B.S. Upadhyaya - Professor, Extension & Education Division, R.I.E., Mysuru.

Dr. V.S. Prasad - Professor, Mathematics Department, R.I.E., Mysuru.

Dr. Sharath Sure - Asst. Professor, Azim Premji University, P.E.S. School of Engineering Campus, Electronics City, Bengaluru.

Chief Advisor :

Sri. Narasimhaiah, Managing Director, KTBS, Bengaluru.

Smt. C. Nagamani, Deputy Director, KTBS, Bengaluru.

Chief Co-ordinator :

Prof. G.S. Mudambaditaya, Co-ordinator, Curriculum revision and textbook preparation, KTBS, Bengaluru.

Programme Co-ordinator :

Smt. Jayalakshmi C.D, A.D.P.I, Karnataka Text Book Society, Bengaluru -85.

विषय सूची

भाग – 1

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

1

समुच्चय
Sets

* समुच्चयों के संयोजन और प्रतिच्छेदन के क्रमविनिमय और साहचर्य गुण।
* समुच्चयों के संयोजन और प्रतिच्छेदन के क्रम विनिमय और साहचर्य गुण का सत्यापन।
* समुच्चयों का वितरण गुण।
* डी. मॉर्गन नियम।
* $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

ऑगस्टस डि मॉर्गन (1806-1871)

आपका जन्म भारत के मदुराई तमिलनाडू में हुआ था। जब वे 7 वर्ष के थे उनका परिवार इंग्लैण्ड चला गया। उन्होंने इंग्लैण्ड के कैमब्रिज के ट्रिनिटि कालेज मे शिक्षा प्राप्त की। डी मॉर्गन के नियम संयोजन प्रतिच्छेदन और पूरक के मौलिक समुच्चयों की प्रक्रियाओं से, संबंधित है।

यह घटक निम्नों को सरल करने में सहायता करता है।

* समुच्चयों के संयोजन और प्रतिच्छेदन के क्रमविनिमय और साहचर्य नियम बताने में।
* समुच्चयों के संयोजन और प्रतिच्छेदन के क्रमविनिमय और साहचर्य नियम सत्यापन करने में।
* समुच्चयों का वितरण नियम लिखने और सत्यापन करने में।
* डी मॉर्गन नियम के कथन लिखने में।
* डी मॉर्गन नियम सत्यापन करने में।
* संबंध स्पष्ट करना।
  $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$
* इस संबंध का उपयोग कर गणित हल करने में।
* वेन आकृति खींचन में।

भगवान ने अनंत की सृष्टि की, और मनुष्य अनंत समझ नही पाया उसने सात समुच्चयों की सृष्टि की है।

Anonymous

संख्याओं पर लागू प्रक्रियाऐं और उनसे प्रदार्शित गुण हमें ज्ञात हैं। इन को बीजगणित के मौलिक नियम में व्यक्त होते हैं।

गुणधर्म	प्रक्रिया	
	जोड	गुणा
1. क्रमविनियम नियम	$a + b = b + a$	$a . b = b . a$
2. साहचर्य नियम	[(a + b) + c] = [a + (b + c)]	a.(b.c) = (a.b).c
3. वितरण नियम	a(b + c) = (ab + ac)	

क्या समुच्चयों की प्रक्रियाओं पर ये नियम सत्य है? आईए, इनका परिक्षण कर ले।

(i) समुच्चयों के संयोजन पर क्रम विनिमय नियम मान लीजिए समुच्चय (Commutatine Property of union and interscetion Sets)

आईए, इन गुणधमों को सामान्यीकृत करने कुछ उदाहरदों पर विचार करतें हैं।

निम्न तालिक का अध्ययन कीजिए:

	समुच्चयों का संयोजन		समुच्चयों का प्रतिच्छेदन	
सट Sets	**A ∪ B**	**B ∪ A**	**A ∩ B**	**B ∩ A**
A = {6, 7, 8} B = {4, 8, 12}	{4, 6, 7, 8, 12}	{4, 6, 7, 8, 12}	{8}	{8}
A = {x : x < 5, $x \in$ N} A = {1, 2, 3, 4} B = {x : x एक सम संख्या है। $x \in$ N, x < 5} B = {2, 4}	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4}	{2, 4}	{2, 4}
A = {x : x का गुणज है 2, x < 10} A = {2, 4, 6, 8} B = {x : x यह 3, का गुणज है x < 10} B = {3, 6, 9}	{2, 3, 4, 6, 8, 9}	{2, 3, 4, 6, 8, 9}	{6}	{6}

इस तालिका से यह निष्कर्ष निकलता है कि

$\therefore$ **A ∪ B = B ∪ A और A ∩ B = B ∩ A**

समुच्चयों के संयोजन और प्रतिच्छेदन पर क्रमविनिमय नियम सत्य है।

सूचना : एक समय पर दो समुच्चयों को लेकर अनेक समच्चयों का संयाजन अथवा प्रतिच्छेदन् ज्ञात कर सकते है। समुच्चयों के संयाजन और प्रतिच्छेदन पर क्रमविनिमय हमेशा सत्य होते है।

(ii) दो समुच्चयों के संयोजन पर साहचर्य नियम (Associatine property of union of two sets)

A, B और C समुच्चयों के संयोजन पर विचार कीजिए।

A = $\{a, b, c, d\}$, B = $\{b, c, e, f\}$, C = $\{c, e, f, g\}$

A और B समुच्चयों के संयोजन पर विचार कीजिए

$A \cup B = \{a, b, c, d\} \cup \{b, c, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$

अब, इस परिणामी समुच्चय और समुच्चय C का संयोजन लीजिए

$(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, e, f\} \cup \{c, e, f, g\}$

$(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ .....(i)

हाँ हमने पहले (A ∪ B) ज्ञात किया और बाद में (A ∪ B) तथा C का संयोजन लिया।

यदि हम पहले B और C का संयोजन लेकर बाद में उसका संयोजन समुच्चय A के साथ करें तो परिणाम क्या होगा?

B ∪ C ज्ञात करे:

$B \cup C = \{b, c, e, f\} \cup \{c, e, f, g\} = \{b, c, e, f, g\}$

अब A और (B ∪ C) का संयोजन लें

$A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d\} \cup \{b, c, e, f, g\}$

$\therefore A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ......(ii)

(i) और (ii) की तुलना करने पर हम ज्ञात होता है कि दोनों समान है।

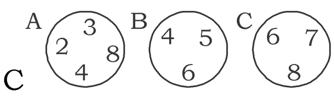
$\therefore$ यह निष्कर्ष ले सकते है कि

$\therefore (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

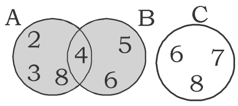
समुच्चयों के संयोजन पर साहचर्य नियम सत्य होता है।

समुच्चयों के संयोजन का साहचार्य नियम का सत्यापन वेन आकृतियों खींचकार भी किया जा सकता है।

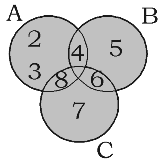
चरण 1: A, B और C. समुच्चय



चरण 2: $A \cup B$

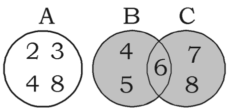


चरण 3: $(A \cup B) \cup$

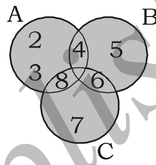


......(i)

चरण 1: $B \cup C$



चरण 2: $A \cup (B \cup C)$



.......(ii)

(i) और (ii) वेन आकृतियों के छायांक्ति भागों को तुलना करने पर हम यह निर्णय ले सकते है, कि $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(iii) समुच्चयों के प्रतिच्छेदन का साहचर्य गुणधर्म (Associtive property of Intersection of Sets)

समुचय A, B और C पर विचार कीजिए।

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{6, 7\}$

A और B समुच्चयों के प्रतिच्छेदन पर विचार कीजिए।

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4\}$

अब, इस $(A \cap B)$ फल निष्कर्ष समुच्चय C का प्रतिच्छेदन लीजिए।

$(A \cap B) \cap C = \{3, 4\} \cap \{6, 7\} = \{\ \} = \phi$ .....(i)

यहाँ हमने पहले $(A \cap B)$ ज्ञात किया और बाद में $A \cap B)$ उसका प्रतिच्छेदन समुच्चय C के साथ करें तो परिणाम होगा? यदि हम पहले B और C का संयोजन लेकर, बाद में उसका संयोजन समुच्चय A के साथ करें तो परिणाम होगा?

* $B \cap C$ ज्ञात करें:

  $B \cap C = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{6, 7\} = \{6\}$

* अब A और $(B \cap C)$ का प्रतिच्छेदन ज्ञात करें:

  $\therefore A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{6\}$

  $= \{\ \} = \phi$ .....(ii)

(i) और (ii) से हमें ज्ञात होता है कि वे दानों समान है।

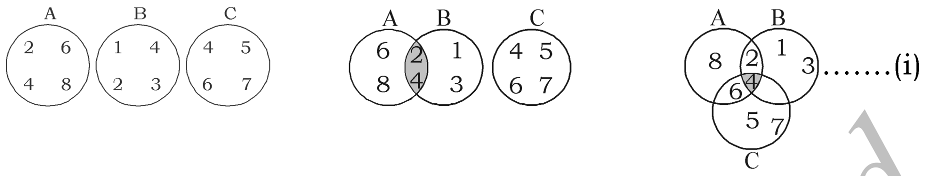
हम इस निष्कर्ष पर आते है कि

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$\therefore$ समुच्चयों के प्रतिच्छेदन पर साहचर्य गुण सत्य होता है।

आईए, हम समुच्चयों के प्रतिच्छेदन का साहचार्य नियम का सत्यापन वेन आकृतियों को खीचकर कर लें

चरण 1: A, B और C. तीन समुच्चय है। **चरण 2:** $A \cap B$ **चरण 3:** $(A \cap B) \cap C$



चरण 1: $B \cap C$ **चरण 2:** $A \cap (B \cap C)$

(i) और (ii) वेन आकृतियों के छायांकित भागों को तुलना करने पर यह निर्णय ले सकते हैं कि $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iv) समुच्चयों का वितरण नियम (Distributive property of Sets)

हमने समुच्चयों के संयोजन और प्रतिच्छेदन जैसी प्रक्रियाओं पर क्रमविनिमय और साहचर्य नियम सत्य सिध्द करना सीखा है। ध्यान दीजिए इन गुणों को व्यक्त करते समय एक ही प्रकार समुच्चयों की प्रक्रिया अर्थात संयोजन अथवा प्रतिच्छेदन उपयोग करते है।

क्या तीन समुच्चयों पर दोनों संयोजन तथा प्रतिच्छेदन प्रक्रियाओ का उपयोग कर सकते है?

यदि ऐसा है, तो वह कौनसी प्रक्रिया है?

आईए इसका अध्ययन करते है।

समुच्चयों के प्रतिच्छेदन पर संयोजन का वितरण नियम

तीन समुच्चय

$K = \{3, 5, 7, 9\}$, $L = \{5, 8, 9\}$, $M = \{1, 2, 3, 9\}$ मान लीजिए और

$K \cup (L \cap M)$ ज्ञात कीजिए

L और M का प्रतिच्छेदन ज्ञात कर कीजिए

$L \cap M = \{5, 8, 9\} \cap \{1, 2, 3, 9\} = \{9\}$

अभी K और $(L \cap M)$ का संयोजन ज्ञात कर लीजिए

$K \cup (L \cap M) = \{3, 5, 7, 9\} \cup \{9\}$

$\therefore K \cup (L \cap M) = \{3, 5, 7, 9\}$ .....(i)

अब K और L तथा K और M का संयोजन ज्ञात कर लीजिए

$K \cup L = \{3, 5, 7, 9\} \cup \{5, 8, 9\} = \{3, 5, 7, 8, 9\}$

$K \cup M = \{3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 3, 9\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

अब $(K \cup L)$ तथा $(K \cup M)$ का प्रतिच्छेदन मालूम कर लीजिए

$(K \cup L) \cap (K \cup M) = \{3, 5, 7, 8, 9\} \cap \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} = \{3, 5, 7, 9\}$ .....(ii)

(i) और (ii) से ज्ञात होता है कि दोंनों समान है।

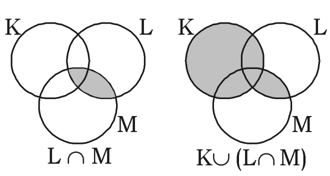
$\therefore$ हम इस निष्कर्ष पर आते है की, $K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap (K \cap M)$

$\therefore$ प्रतिच्छेदन पर संयोजन का वितरण नियम सिध्द होता है।

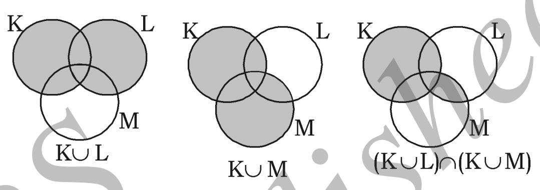
आईए, इस गुणधर्म को वेन आकृति खींचकार सत्यपित करते है।

i.e. $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$

बाय पक्ष = $K \cup (L \cap M)$ दहीना पक्ष = $(K \cup L) \cap (K \cup M)$



.....(i)



....(i)

(i) और (ii) आकृतियों छायांकित भागों की तुलना करने पर निष्कर्ष निकलता है कि

$K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap (K \cup M)$

समुच्चयों के प्रतिच्छेदन पर, समुच्चयों का संयोजन वितरित होता है।

समुच्चयों के संयोजन पर, प्रतिच्छेदन का वितरण गुण

मान लीजिए: K, L और M ज्ञात कीजिए।

$K = \{x, y, z, t\}$; $L = \{y, z\}$; $M = \{r, s, t\}$

पहले $K \cap (L \cup M)$ ज्ञात करते है

इसके लिए L और M का प्रतिच्छेदन ज्ञात कीजिए।

$L \cup M = \{y, z\} \cup \{r, s, t\} = \{r, s, t, y, z\}$

अब $(L \cup M)$ K का प्रतिच्छेदन ज्ञात कीजिए।

$K \cap (L \cup M) = \{x, y, z, t\} \cap \{r, s, t, y, z\} = \{t, y, z\}$ ....(i)

अब समुच्चय K और L तथा K और M का संयोजन ज्ञात कीजिए और बाद में इन दोनों का संयोजन ज्ञात कीजिए।

$\therefore \quad K \cap L = \{x, y, z, t\} \cap \{y, z\} = \{y, z\}$

$K \cap M = \{x, y, z, t\} \cap \{r, s, t\} = \{ t \}$

आता, $K \cap L$ आणि $K \cap M$ समुच्चयों का संयोजन ज्ञात करते हैं

$(K \cap L) \cup (K \cap M) = \{y, z\} \cup \{t\}$

$\therefore \quad (K \cap L) \cup (K \cap M) = \{t, y, z\}$ ....(ii)

(i) आणि (ii) से ज्ञात होता है कि दोनो समुच्चय समान है।

इससे निष्कर्ष ले सकते हैं कि, $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$

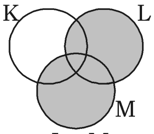
$\therefore$ समुच्चयों पर वितरण नियम लागू होता है।

समुच्चयों के संयोजन पर प्रतिच्छेदन वितरित होता है।

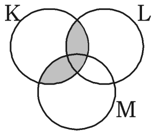
अब हम वेन आकृति खींचकर समुच्चयों के संयोजन पर प्रतिच्छेदन वितरित लेता इंसका सत्यापन करते हैं।

i.e. $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$

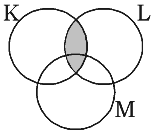
बायां पक्ष = $K \cup (L \cap M)$ दाहीना पक्ष = $(K \cup L) \cap (K \cup M)$



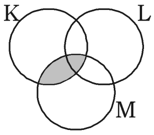
$L \cup M$



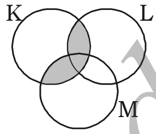
$K \cap (L \cup M)$



$K \cap L$



$K \cap M$



$(K \cap L) \cup (K \cap M)$

(i) और (ii) के छायांकित भागों की तुलना करने पर यह निष्कर्ष निकलता है कि

$K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$

संमुच्चयों का प्रतिच्छेदन समुच्चयों के संमोजन पर वितरित होता है।

डी–मॉर्गन का नियम (De Morgan's Law)

अब तक हमने समुच्चय प्रक्रियाओं पर सत्य क्रमविनिमय नियम, साहचर्य नियम और वितरण नियम के बारे में अध्ययन किया है। आपको यह याद होगा कि हमने दत्त समुच्चय का पूरक समुच्चय ज्ञात करना भी सीखा है।

क्या दो समुच्चयों के पूरक समुच्चयों के बीच कोई संबंध होता है? आईए, इसका अध्ययन कर लें।

निम्न लिखित तालिका का अध्ययन कीजिए। प्रत्येक उदाहरण में दो समुच्चय दिये गए है। उनके पूरक समुच्चयों को ज्ञात कीजिए और प्रत्येक स्तंभ में दिये गए प्रक्रियाओं को पूर्ण कीजिए।

पहला उदाहरण आपके लिए पूर्ण किया गया है। इस दत्तांश के आधार पर क्या आप कोई निष्कर्ष निकाल सकते है ?

समूहों में इसकी चर्चा कीजिए।

समूच्चय U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, के A और B उपसमुच्चय है।

	A	B	A'	B'	A∪B	(A∪B)'	A'∩B'
1.	{2,4,6,9}	{3,5,7,9}	{1,3,5,7,8}	{1,2,4,6,8}	{2,3,4,5,6, 7,9}	{1,8}	{1,8}
2.	{1,3,7,9}	{3,6,9}					
3.	{x : x, 3≤x≤7}	{5,7}					

इस तालिका के अंतिम दो स्तंभों के परिणामों पर आप क्या निर्णय ले सकते है ?

हम निर्णय ले सकते हैं कि प्रत्येक उदाहरण मैं $(A \cup B)' = A' \cap B'$) इस संबंध को सर्वप्रथम आगस्तस डी मार्गन (Augustus De Morgan) ने प्रस्तावित किया। इसे डी मॉर्गन का प्रथम नियम कहते है।

अब हम दो उदाहरणों पर विचार करते हैं जहॉ समुच्चयों के प्रतिच्छेदन लिया गया है।

इस संदर्भ मे डी मॉर्गन के नियम कसे व्यक्त करते है?

अब हम $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

अब हम $A \cap B$ और उसके पूरक ज्ञात करते है i.e. $(A \cap B)'$

$A \cap B = \{2, 4\} \cap \{3, 4, 5\} = \{4\}$

$A \cap B$ का पूरक है: $(A \cap B)' = U/(A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5\}/\{4\}$

$\therefore (A \cap B)' = \{1, 2, 3, 5\}$ .....(i)

आईए हम A' और B' ज्ञात करते है।

$A = \{2, 4\}$ $A' = \{1, 3, 5\}$

$B = \{3, 4, 5\}$ $B' = \{1, 2\}$

अब हम $A' \cup B'$ ज्ञात कीजिए।

$A' \cup B' = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2\}$

$\therefore A' \cup B' = \{1, 2, 3, 5\}$.....(ii)

(i) और (ii) से यह निर्णय ले सकते है कि

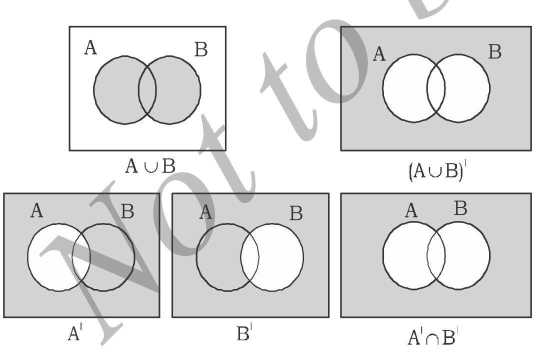
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

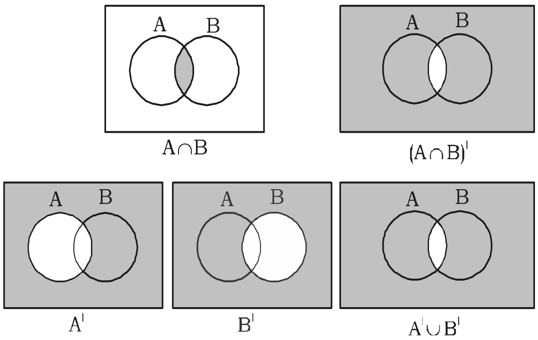
इसे डि-मॉगन का दूसरा नियम कहते है।

डी. मॉर्गन के नियमों को हम वेन आकृतियों द्वारा भी सत्यापित कर सकते है।

इन वेन आकृतियों का अध्ययन कीजिए।

(i) डि-मॉर्गन नियम (i) : $(A \cup B)' = A' \cap B'$ डि-मॉर्गन नियम (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$





$\therefore$ डि-मॉर्गन नियम

* $(A \cup B)' = A' \cap B'$
* $(A \cap B)' = A' \cup B'$

अभ्यास 1.1

1. निम्नों पर समुच्चयों के संयोजन और प्रतिच्छेदन क्रमविनिमय नियम का सत्यापन कीजिए

   $A = \{l, m, n, o, p, q\}$ $B = \{m, n, o, r, s, t\}$

2. $P = \{a, b, c, d, e\}$, $Q = \{a, e, i, o, u\}$ और $R = \{a, c, e, g\}$, पर समुच्चयों के संयोजन और प्रतिच्छेदन के साहचर्य नियम का सत्यापन कीजिए।

3. यदि $A = \{-3, -1, 0, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{-1, -2, 3, 4, 5, 6\}$, और $C = \{-6, -4, -2, 2, 4, 6\}$ हो तो दर्शाईए कि $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. यदि $U = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $A = \{8, 16, 24\}$, $B = \{4, 16, 20, 28\}$.

   हो सत्यापित कीजिए कि i) $(A \cup B)^I = A^I \cap B^I$ और (ii) $(A \cap B)^I = A^I \cup B^I$

5. यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 5, 6\}$ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ के उपसुच्चयहो तो सिध्द कीजिए $(A \cup B)^I = A^I \cap B^I$ और $(A \cap B)^I = A^I \cup B^I$

6. यदि $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $B = \{5, 7, 9, 11, 15\}$ हे $U = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ के उपसमुच्चयहै तो डी मॉर्गन नियमो को सत्यापन कीजिए।

7. निम्नों को निरूपित करने वेन आकृतियों को खींचिए।

   (i) $(A \cup B)$ (ii) $(A \cup B)^I$ (iii) $A^I \cap B$ (iv) $A \cap B^I$

   (v) $A \setminus B$ (vi) $A \cap (B \setminus C)$ (vii) $A \cup (B \cap C)$ (viii) $C \cap (B \cup A)$

   (ix) $C \cap (B \setminus A)$ (x) $A \setminus (B \cap C)$ (xi) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

   (xii) $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$

समुच्चयों की गणन संख्या (Cardinality of Sets) दैनिक जीवन के अनेक समस्याओं को हम गणित की परिकल्पनाओं और समुच्चय के ज्ञान से हल करते है।

"एक गॉव के 520 निवासियों में से, 320 पशुपालन, 280 मूर्गीपालन और 180 दोनों में व्यस्त है।

मान लीजिए हमें, किसी भी कार्यं में व्यस्त नहीं रहनेवालों की संख्या जाननी है तो कैसे ज्ञात करेंगे?

ऐसी समस्याओं को समुच्चयों के संबंधो के उपयोगकर हल करते हैं।

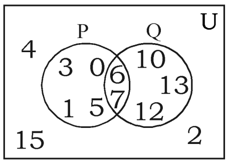
आईये पहले इसका अध्ययन करते हैं और बाद में उसे हल करते हैं।

स्मरण कीजिए एक समुच्चय (Cardinal Number) की गणन संख्या उसमें उपस्थित अवयवों की संख्या है। उसे उस समुच्चय के 'n' से सूचित करते हैं।

उदाहरण 1: यदि $A = \{a, b, c, d\}$ $n(A) = 4$

यदि $n(A) = 0$, हो तो A रिक्त समुच्चय है।

उदाहरण 2:



P = {0, 1, 3, 5, 6, 7}, $\therefore$ n(P) = 6

Q = {6, 7, 10, 12, 13}, $\therefore$ n(Q)= 5

दोनों समुच्चयों की संख्याओं के बीच के संबंधों को एक कार्यकलाप द्वारा ज्ञात करते है।

कार्यकलाप : निम्न समुच्चयों के युग्मों पर विचार कीजिए

1. A = {1, 2, 5, 9} B = {2, 4, 6, 8, 10}
2. A = {11, 15, 17, 19} B = {15, 20, 25}
3. A = {x : x हा सम आहे $x \in$ N} B = {x : x ही सम अविभाज्य आहे $x \in$ N}
4. A = {1, 2, 4, 5} B = { }

उपरोक्त प्रत्येक समुच्चयों के युग्मों के लिए और ज्ञात कीजिए और निम्न तालिका पूर्ण कीजिए। समूहों मे बैठकर चर्चा कीजिए।

पहला उदाहरण आपके लिए पूर्ण किया गया है।

	n(A)	**n(B)**	**n(A$\cup$B)**	**n(A$\cap$B)**
1.	4	5	8	1
2.				
3.				

क्या n(A), n(B), n(A $\cup$ B) और n(A $\cap$ B) में कोई संबंध है? हमें ज्ञात होता है की

n(A) और n(B) का जोड n(A $\cup$ B) और n(A $\cap$ B) को जोड समान है।

म्हणून आपण असे लिहू शकतो की, n(A) + n(B) = n(A $\cup$ B) + n(A $\cap$ B)

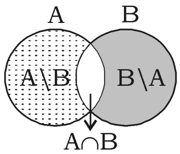
इस संबंध के यदि हम तीन पदों को जानते हैं तो चौथे को पदों को पुनर्व्यवस्थित कर के ज्ञात कर सकते हैं।

* n(A $\cup$ B) = n(A) + n(B) – n(A $\cap$ B)
* n(A $\cap$ B) = n(A) + n(B) – n(A $\cup$ B)
* n(A) = n(A $\cup$ B) + n(A $\cap$ B) – n(B)
* n(B) = n(A $\cup$ B) + n(A $\cap$ B) – n(A)

इस संबंध को हम तार्किक रूप से भी सिध्द कर सकते हैं।

दत्त A और B, दोन समुच्चयों के लिए सिध्द कीजिए $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

समुच्चय A और B के वेन आकृती पर विचार कीजिए।



स्मरण किजिए:
$A \setminus B$ दोन समुच्चयों मे फरक है जहाँ और $x \in A$ $x \in A$

यह स्पष्ट होता है कि, $A \cup B$ यह $A \setminus B$, $B \setminus A$ और $A \cap B$ का संयोजन है।

$\therefore n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A)$

दाहीने पक्ष में $n(A \cap B)$ जोडने और घटाने पर हम प्राप्त करते है।

$\therefore n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A) + n(A \cap B) - n(A \cap B)$

गट करुन

$n(A \cup B) = [n(A \setminus B) + n(A \cap B)] + [n(B \setminus A) + n(A \cap B)] - n(A \cap B)$

हम जानते है कि $n(A \setminus B) + n(A \cap B) = n(A)$ और

$n(B \setminus A) + n(A \cap B) = n(B)$

प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते है।

और ज्ञात कजिए

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

सूचना: यदि A और B बेमेलसमुच्चय है तो $A \cap B = \phi$ और $n(A \cap B) = 0$

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

अब हम यह निर्णय ले सकते है कि

यदि A और B बेमेल समुच्चय हैं तो $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

यदि A और B बेमेल समुच्चय नही हैं तो, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

आईए, इस सूत्र का उपयोग कर गणित हल करते हैं।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : यदि A और B दो समुच्चय है जिसमें $n(A) = 27$, $n(B) = 35$ और n(A B)=50, तो $n(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए:

हल : $n(A) = 27$, $n(B) = 35$, $n(A \cup B) = 50$, $n(A \cap B) = ?$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$50 = 27 + 35 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 62 - 50$

$\therefore n(A \cap B) = 12$

उदाहरण 2 : एक विद्यार्थियों के समूह में, 75 विद्यार्थियों ने कन्नड में, 70 विद्यार्थियों ने समाज विज्ञान में और 45 विद्यार्थियों ने दोनों विषयों में प्राप्त श्रेणी प्राप्त की। उस समूह में उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : कन्नड में प्रथम श्रेणी प्राप्त करनेवालों की संख्या = $n(K) = 75$

समाज विज्ञान में प्रथम श्रेणी प्राप्त करनेवालों संख्या = $n(S) = 70$

दोनों विषयों में प्रथम श्रेणी प्राप्त करनेवालों की संख्या = $n(K \cap S) = 45$

कुल विद्यार्थियों की संख्या = $n(K \cup S) = ?$

संबंध उपयोग करने पर $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

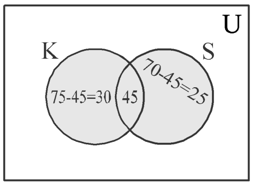
$$n(K \cup S) = n(K) + n(S) - n(K \cap S)$$

$$n(K \cup S) = 75 + 70 - 45 = 145 - 45 = 100$$

उस समूह मे कुल 100 विद्यार्थी है।

उपरोक्त उदाहरण को, वेन आकृति द्वारा भी हल कर सकते है।

निम्न वेन आकृति का अध्ययन कीजिए। उसमें दो वृत्त परस्पर प्रतिच्छेदित करते हैं जहाँ प्रत्येक वृत्त एक विषय निरूपित करता हैं।



प्रत्येक समूह के विद्यार्थियों की संख्या दर्शाये जैसे ज्ञात कर सकते हैं।

परिणाम को इसतरह निरूपित करते है ।

समूह में उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या = 30 + 45 + 25 = 100

उदाहरण 3 : एक गांव में 520 सदस्य हैं, 360 सदस्य पशुपालन में व्यस्त हैं और 280 मूर्गी पालन में व्यस्त हैं तथा 180 दोनों भी कार्य करते है। कितने सदस्य (i) किसी भी कार्य में भी व्यस्त नही है (ii) केवल सदस्य केवल मूर्गी पालन में लगे है ।

हल : पशु पालन $n(A) = 360$ मूर्गी पालने $n(B) = 280$ दोनो $n(A \cap B) = 180$

हम जानते है कि $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 360 + 280 - 180$

$n(A \cup B) = 360 + 100 = 460$

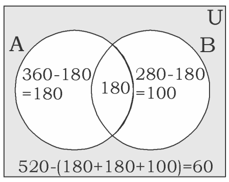
$\therefore$ कार्यों व्यस्त सदस्य 460

(i) $\therefore$ किसि भी कार्य में व्यक्त नही रहनेवाला = 520 – 460 = 60

$\therefore$ गाँव के 60 सदस्य किसी कार्य में भी व्स्त नहीं है।

(ii) केवल मूर्गीपालन में व्यस्त लोगों की संख्या = $n(B) \setminus n(A \cap B) = 280 - 180 = 100$

इसे हम वेने आकृति द्वारा निरूपित कर सकते है।



(iii) किसी भी कार्य में व्यस्त न रहनेवालों की संख्यात

= 520 - (180 + 180 + 100)

= 520 - (460) = 60

अभ्यास 1.2

I. निम्न गणित हल कीजिए और प्रत्येक को वेन आकृति द्वारा सत्यापित कीजिए :

1. यदि A और B दोन समुच्चय हैं ताकि n (A=)37, n (B)=26 और n($A \cup B$)= 51 तो n ($A \cap B$) ज्ञात कीजिए।

2. 50 लोगों के एक समूह में, 30 चाय पसन्द करते है, 25 काफी पसन्द करते है तथा 16 दोनों। कितने लोग

   (i) केवल चाय अथवा कॉफी (ii) केवल कॉफी (iii) केवल चाय पसन्द करते हैं ।

3. एक यात्रियों के समूह में, 100 कन्नड जानते हैं, 50 अंग्रेजी जानते है और 25 दोनों जानते है। 15 यात्री कन्नड अथवा अंग्रेजी जानते हैं। उस समूह मे कुल कितने यात्री हैं ?

4. एक कक्षा में, 50 विद्यार्थी गणित चुनते हैं, 42 जीवशास्त्र और 24 दोनों विषयों को चुनते हैं।

   बताईए कितने विद्यार्थी (i) केवल गणित (ii) केवल जीवशास्त्र चुनते है। तथा कक्षा की कुल विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

5. एक वैद्यकीय परीक्षण में ज्ञात हुआ है कि 150 लोगों में 90 लोगों को आँखों की परेशानी हैं। 50 लोगों को हृदय की परेशानी और 30 लोगों को दोनों की परेशानी है। ज्ञात कीजिए कितने प्रतिशत लोगों में या तो आँखो की अथवा हृदय की परेशानी है ?

II. वेन आकृति खींचकर हल कीजिए :

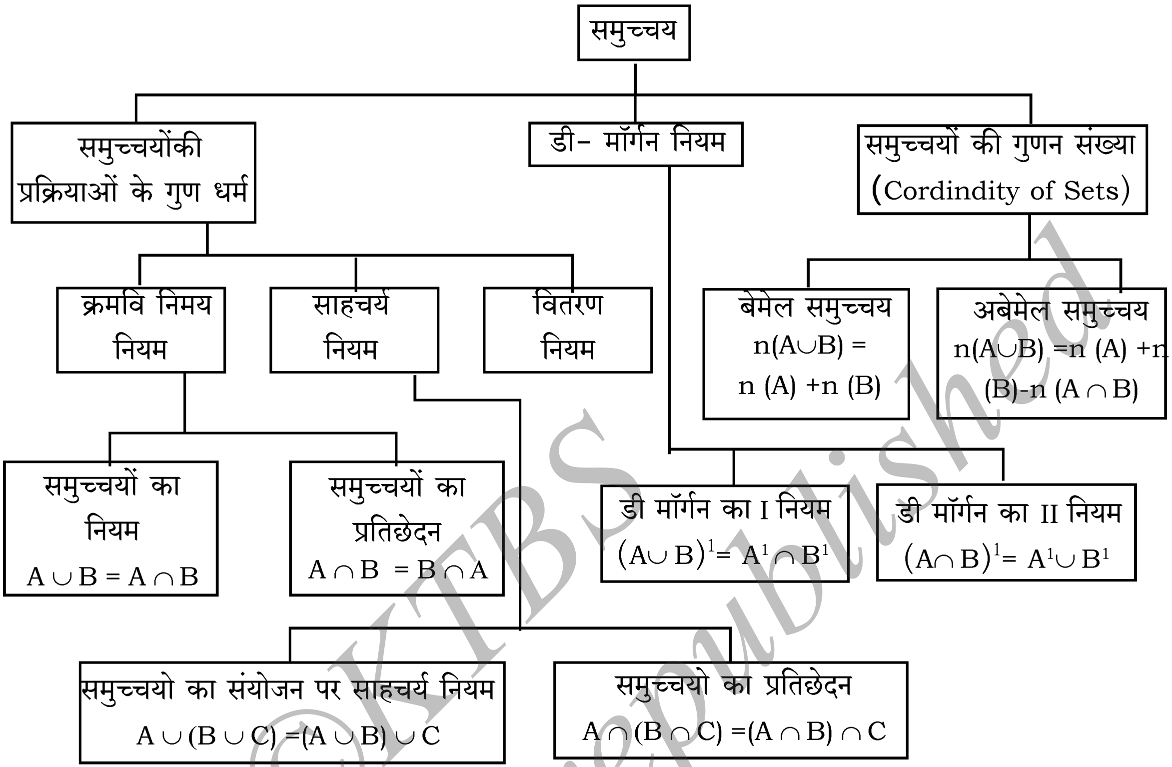
1. एक रेडियो स्टेशन ने 190 श्रोताओं का सर्वेक्षण किया उन्हे पसन्दी संगीत जानने की कोशिश की। सर्वेक्षण से ज्ञात हुआ कि 114 रॉक संगीत पसन्द करते है, 50 लोक संगीत पसंद करते हैं, 41 शास्त्रीय संगीत पसन्द करते हैं और 11 शास्त्रीय और लोक संगीत पसन्द करते है। 5 तीनों संगीत पसन्द करते हैं।

   (i) कितने 3 में से कोई भी संगीत पसन्द नहीं करते?

   (ii) कितने कोई दो प्रकार के संगीत पसन्द करते है?

   (iii) कितने लोक संगीत पसन्द करते हैं परंन्तु रॉक संगीत पसन्द नही करते?

2. एक गाँव के 120 किसानों मे से, 93 किसानों ने तरकारी उगाई है, 63 ने फूल उगाये हैं, 45 ने गन्ना उगाया है, 45 ने तरकारी और फूल, 24 किसानों ने फूल और गन्ना उगाया है, 27 किसानों ने तरनारी और गन्ना उगाया है। ज्ञात कीजिए कितने किसानों ने तरकारी, फूल और गन्ना उगाया है।



उत्तर

अभ्यास 1.2:

I. 1] 12 2] (i) 39 (ii) 11 3] 125 4] (i) 26 (ii) 18 (iii) 68 5] 73.33%

II. 1] (i) 20 (ii) 25 (ii) 36 2] 15

2

अनुक्रम
(Progressions)

* समांतर अनुक्रम
* हरात्मक अनुक्रम
* गुणोत्तर अनुक्रम
* गुणोत्तर क्रम आणि श्रेणी
* गुणोत्तर श्रेणी और अंकगणिती श्रेणी बेरीज
* समांतर, हरात्मक और गुणोत्तर माध्य

लिनार्डो पिसानो बोगोलो

[1170-1250, इटली]

नका उपनाम फिबोनाकी था।

वे फिबोनाकी संख्याओं के अनुक्रम के लिए प्रसिध्द है।

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,...... फबोनाकी अनुक्रम प्रत्येक पद पूर्व दो पदों का जोड होता है।

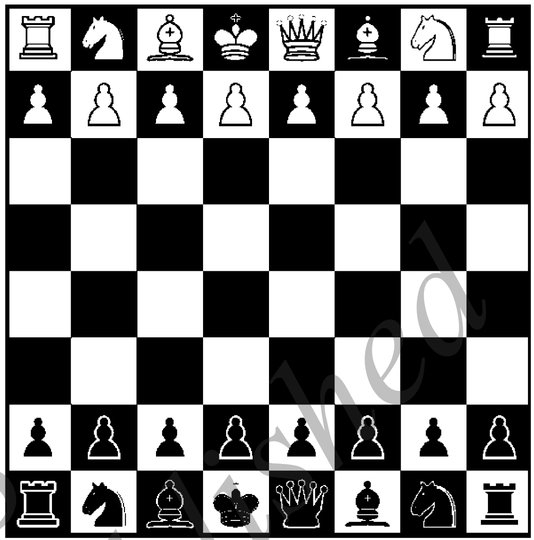
(पहले और दूसरे को छोडकर) रोमन संख्याओं के स्थान पर हिन्दु अरेबी संख्याओं के उपयोग का प्रचार किया।

यह घटक आपको सहायक है :

* समांतर अनुक्रम A.P. की परिभाषा देने में,
* A.P.समांतर अनुक्रम का सामान्य रूप लिखने में,
* समांतर अनुक्रम का सामान्य रूप लिखने मे A.P. के 'a', 'c.d', और 'T_n' ज्ञात करने में,
* सीमित समांतर श्रेणी का योगफल ज्ञात करने का सूत्र बनाने में,
* सीमित समांतर श्रेणी का योगफल ज्ञात करने में,
* एक हरात्मक अनुक्रम (H.P) की परिभाषा देने में,
* H.P. एक हरात्मक अनुक्रम का सामान्य रूप ज्ञात करने में,
* एक गुणोत्तर अनुक्रम का सामान्य रूप लिखने में,
* G.P समांतर अनुक्रम, गुणोत्तर अनुक्रम और हरात्मक अनुक्रम आधारित अनुप्रयोग के गणित हल करने में,
* G.P. समांतर अनुक्रम, गुणोत्तर अनुक्रम और हरात्मक अनुक्रम आधारित अनुप्रयोग के गणित हल करने में,
* सीमित/असीमित गुणीत्तर श्रेणी का योग ज्ञात करने में,
* समांतर, गुणोत्तर तथा हरात्मक माध्य ज्ञात करने में,
* A.P, G.P और H.P. के माध्य ज्ञात करने में,
* अंकगणिती, गुणोत्तर आणि गुणाकार व्यस्त मध्य काढण्यास,
* AM, GM और HM के बीच संबंध स्थापित करने में।

गणितज्ञों ने अभाज्य संख्याओं के अनुक्रम में कोई क्रम पत्ता लगाने कई निष्फल प्रयत्न किये हैं। और यह एक रहस्य है जिसे मनुष्य कभी नहीं समझ सकेगा।

लियोनार्ड यूलर. श



शतरंज खेल के chess बारे में एक रोचक कहानी यहाँ दी गई है। इसे पढिए।

परसिया देश के राजा शतरंज खेल से इतने खुश थे कि उन्होंने खेल के आविष्कार को जो मांगे पुरस्कार देना चाहा। आविष्कार ने कहा शतरंज बोर्ड के पहले वर्ग में एक दाना, दूसरे वर्ग में दो दाने, तीसरे वर्ग में चार दाने इत्यादि रखकर देने कहा।

आविष्कार की मांग बहुत सरल थी। परंतु इसे पूर्ण करने में राजा को बहुत कठिन समस्या हुई। क्यों?

इस समस्या का उत्तर ज्ञात करने, आपको गणित के कुछ विचारों से परिचित होना पडेगा। आईए, इनका अध्ययन करते हैं।

अनुक्रम: (Sequence)

आप संख्याओं के अनेक नमूनों से परिचित हैं।

निम्न संख्याओं के समुच्चय में अगली संख्या ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए:

(i) 1, 5, 9, 13, ... (ii) 1000, 100, 10, 1, ...

(iii) 1, 4, 9, 16, ... (iv) 0, 7, 26, 63, ... (v) 74, 15, 20, 31, 82, ...

आपका निरीक्षण क्या है? पहले के चार संदर्भो में आपने अगली संख्या कैसे पत्ता लगाई? पाँचवें संदर्भ में अगली संख्या आप ज्ञात नहीं कर पाये क्यों?

यह इसलिए है, क्योंकि पहले के चार संदर्भों में संख्याओं को किसी निश्चित नियम के अनुसार व्यवस्थित है।

आईए, इस नियम को समझने की कोशिश करें।

संख्याओं का नमूना नियम

संख्याओं का नमूना		नियम
(i) 1, 5, 9, 13, **17**	1 + 4 = 5, 5 + 4 = 9, 9 + 4 = 13, 13 + 4 = 17	4 मिळविले
(ii) 1000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$	$1000 \times \frac{1}{10} = 100$, $100 \times \frac{1}{10} = 10$, $10 \times \frac{1}{10} = 1$, $1 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$	से गुणले कीजिए
(iii) 1, 4, 9, 16, **25**	$1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$	2 से गुण कीजिए
(iv) 0, 7, 26, 63, **124**	$1^3-1=0$, $2^3-1=7$, $3^3-1=27$, $4^3-1=63$, $5^3-1=124$	स्वाभाविक संख्याका धन 1

किसी नियम के अनुसार क्रम से व्यवस्थित संख्याओं को अनुक्रम कहते है।

अनुक्रम के प्रत्येक संख्या को अनुक्रम का पद (term of the sequence) कहते है।

2, 5, 8, 11, ... अनुक्रम में

पहला पद → 2

दुसरा पद → 5

तिसरा पद → 8

nवाँ पद

⋮

एक अनुक्रम में प्रत्येक पद को एक संकेत से सूचित करते हैं।

पद	पहला	दुसरा	तिसरा	चाथा	....	....	nवाँ....	....	
संकेत	T_1	T_2	T_3	T_4	....	....	T_n	....	....

∴ एक अनुक्रम के पद हैं : T_1, T_2, T_3, T_4, ...T_n..........

यहाँ 'n' अनुक्रम में पद का स्थान सूचित करता है ।

सांत अनुक्रम और अनंत अनुक्रम : [Finite sequence and infinite sequence]

जिस अनुक्रम के पदों को गिन सकते हैं उसे सांत अनुक्रम कहते है।

उदा: 1) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

2) A = {x : x 5 का गुणज है, $1 \leq x \leq 30$}

एक सांत अनुक्रम का सामान्य रूप है : T_1, T_2, T_3, T_4, ... T_n

जिस अनुक्रम के पदों को गिन नहीं सकते उसे अनंत अनुक्रम कहते है।

उदा: 1) 1, 5, 9, 13, 17, ... 2) B = {x : $x < 0$}

एक अनंत अनुक्रम का सामान्य रूप है : T_1, T_2, T_3, T_4, ...

अनुक्रम यह गणितीय परिकलपनाओं में से एक है जिसके दैनिदिन जविन में अनेक अनुप्रयोग है।

1) अमृता ने प्रत्येक महीने में पैसा बचाना प्रारंभ किया। उसने ₹50 पहले महीने में, ₹60, दूसरे महीने में, ₹70 तीसरे महीने में इत्यादि के बचत करती है।
   अत: उसकी बचत को एक अनुक्रम के रूप में व्यक्त कर सकते है :
   50, 60, 70, 80, ...
2) तरूण कार्यालय पहुंचने के लिए एक आटो रिक्शा में सवार होता है। उसने मापक के पाठ्यांक (reading) को और ध्यान दिया। वहे ₹20 था। प्रत्येक 100 मी. च्या प्रवासानंतर 1₹ मी. की यात्रा के बाद किराया रू.1 बढता गया। इसलिए मापक के पाठ्यांक थे,
   20, 21, 22, 23, ...
3) एक प्रयोगशाला में जीवाणु समूह परीक्षा पाया गया की जीवाणु प्रत्येक घंटे में दुगुने होते हैं। यदि प्रारंभ में 50 जीवाणु थे तो उनकी संख्या इसतरह बढती जायेगी :
   50,100, 200,400, ...
4) एक रेडियो धर्मी मूलतत्व का अर्ध जीवन काल 12 घंटे है। यदि रेडियो धर्मी मूलतत्व प्रारंभ में 100 ग्राम था,प्रति 12 घंटों के अवधि वह निम्न रूप से घटता जायेगा :
   100, 50, 25, 12.5, ...

व्याख्यात्मक उदाहरण

1. n वँ पद 2n + 3 उस अनुक्रम के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए ।

हल: यहाँ $T_n = 2n + 3$

T_1 ज्ञात करने $T_n = 2n + 3$ में n=1 प्रतिस्थापित कीजिए।

$\therefore T_1 = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$

T_2 ज्ञात करने n = 2 मध्य $T_n = 2n + 3$ मध्ये n = 1 प्रतिस्थापित कीजिए।

$T_2 = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$

इसीतरह $T_3 = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9$

$\therefore$ प्रथम तीन पद 5, 7, 9 है।

2. एक अनुक्रम में n वँ पद $\frac{n^2}{n+1}$ है तो प्रथम 4 पद ज्ञात कीजिए।

हल: $T_n = \frac{n^2}{n+1}$

$T_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$, $T_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$, $T_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$, $T_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$

$\therefore$ अनुक्रम के चार पद $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}$.

3. एक अनुक्रम का यदि $T_n = 3n - 10$ हो तो उसका 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: $T_n = 3n - 10$

$T_{20} = 3(20) - 10 = 60 - 10$

$\therefore T_{20} = 50$

4. यदि $T_n = 5n + 2$, हो तो T_{n+1} ज्ञात कीजिए।

हल: $T_n = 5n + 2$

$T_{n+1} = 5(n + 1) + 2 = 5n + 5 + 2$

$\therefore T_{n+1} = 5n + 7$

5. यदि $T_n = n^3 - 1$, हो तो 'n' ज्ञात कीजिए $T_n = 26$

हल: $T_n = n^3 - 1$

$26 = n^3 - 1$, $n^3 = 26 + 1 = 27$, $n = \sqrt[3]{27}$

$\therefore n = 3$

अभ्यास 2.1

1. निम्नों में कौन अनुक्रम से है ?

   (i) 4, 11, 18, 25, ... (ii) 43, 32, 21, 10, ...

   (iii) 27, 19, 40, 70, ... (iv) 7, 21, 63, 189, ...

2. नम्न अनुक्रमों के अगले दो पद लिखिए.

   (i) 13, 15, 17, ____, ____ (ii) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, ____, ____

   (iii) 1, 0.1, 0.01, ____, ____ (iv) 6, 12, 24, ____, ____

3. यदि $T_n = 5 - 4n$, प्रथम तीन पदों को लिखिए।

4. यदि $T_n = 2n^2 + 5$, हो तो

   (i) T_3 और (ii) T_{10} ज्ञात कीजिए।

5. यदि $T_n = n^2 - 1$, हो तो

   (i) T_{n-1} और (ii) T_{n+1} ज्ञात कीजिए।

6. यदि $T_n = n^2 + 4$ और $T_n = 200$, हो तो 'n' का मूल्य ज्ञात कीजिए।

समांतर अनुक्रम (Arithmetic progression)

कुछ अनुक्रम नीचे दिये गये हैं। उनको ध्यान से देखिए ।

अनुक्रम	$T_2 - T_1$	$T_3 - T_2$	$T_4 - T_3$
5, 8, 11, 14, ...	3	3	3
3, 13, 23, 33, ...	10	10	10
1, -1, –3, –5,...	–2	–2	–2
1, 1.5, 2, 2.5, ...	0.5	0.5	0.5

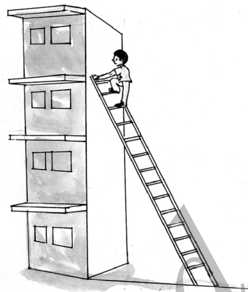
उपरोक्त अनुक्रम दो सामान्य बातें प्रदर्शित करते हैं

1. प्रत्येक अनुक्रम यादृच्छिक रूप से चुने संख्या से प्रारंभ होता है।
2. प्रत्येक आगामी पद को पूर्व पद को एक ही संख्या जोडकर प्राप्त कर सकते है।

   यदि किसी अनुक्रम के पद समान संख्या या तो बढने और घटते हैं तो उसे समांतर अनुक्रम (Arithmetic Progression) कहते हैं।

उसे **A.P.** से सूचित करते है।

समांतर अनुक्रम एक अनुक्रम जिसमें प्रत्येक पद को उसके पूर्व पद को निश्चत संख्या जोडने से प्राप्त होता है।



एक समांतर अनुक्रम में एक पद तथा उसके पूर्व पद का अंतर स्थिरांक होता है। इस अंतर को सामान्य अंतर (Common difference) कहते है। इस संक्षित रूप में 'व' से सूचित करते है। एक समांतर अनुक्रम में घनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकता है।

यदि $T_1, T_2, T_3, T_4,.......$ ही A.P मधील पदे आहेत

$d = T_2 - T_1 = T_3 - T_2 = T_4 - T_3 = ... =$ स्थिर

सूचना: जिस समांतर अनुक्रम का '0' है उसे स्थिर अनुक्रम कहते हैं।

उदा: 11, 11, 11, 11, ... $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},$ ....

निम्न संदर्भ समांतर अनुकम से संबंधित है :

(i) इमारत का उपरी भाग रंग लगाने के लिए राजू जमीन से 12 फूट ऊँचाई पर एक सीढी पर खडा है। काम पूर्ण होने के बाद वह सीढी से नीचे उतरने लगा, सीढी के डंडे द्वारा प्रत्येक बार उसकी दूरी 1.5 फीट कम होती जाती है। इसलिए जमीन से उसकी दूरी होगी :

12 फीट, 10.5 फीट, 9 फीट, 7.5 फीट,.....

इस घटना में तुम तुम देखा है की दो क्रम पदो में फरक 1.5 है। इस लिए ऐ क्रम अ.श्र. है।

(ii) बच्चे झूले पर खेल रहे हैं। खेलते समय अधिकतम पहुँची हुई दूरी प्रारंभिक स्थान से 50 सें.मी. है। अगले प्रत्येक ढोलन में दूरी 2 सें.मी. होती गई। अंत: प्रत्येक ढोलन क्रमित दूरी थी ....

50, 48, 46, 44, ...

यहाँ पर भी, हम ज्ञात होता है कि दो क्रमागत पदों के बीच सामान्य अंतर -2 है।

इसलिए यह क्रम A.P है।

अत: अनुक्रम एक समांतर अनुक्रम है।

इसीतरह पृष्ठ 37 पर भी चर्चित संदर्भ भी समांतर अनुक्रम निरूपित करते है।

अमृता की बचत 50, 60, 70, 80, ... थे।

यहाँ हम देखते है कि सामान्य अंतर 10 है ।

$\therefore$ उपरोक्त उदाहरण समांतर अनुक्रम है ।

तरूण ने जो मापक पाठ्यांक देखे वे है : 20, 21, 22, 23 .... है।

यहाँ सामान्य अंतर 1 है।

$\therefore$ उपरोक्त उदाहरण समांतर अनुक्रम के है।

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि एक समांतर अनुक्रम में एक पद का अगला पद जानने के लिए पिछले पद सामान्य अंतर (c.d) जोडते हैं।

यदि 'a' प्रथम पद है और 'd' सामान्य अंतर है। तो

$T_1 = a$
$T_2 = T_1 + d = a + d$
$T_3 = T_2 + d = a + d + d = a + 2d$
$T_4 = T_3 + d = a + d + d + d = a + 3d$ इत्यादी

$\therefore$ प्रथम पद 'a' साधारण फरक 'd' रहेतो A.P का साधारण नमुने

***a*, *a* + *d*, *a* + 2*d*, *a* + 3*d*, ...**

आंत और अनंत अनुक्रम (Finite and infinite A.P.) एक समांतर अनुक्रम के निश्चित गिनने योग्य पद हो तो उसे सांत अनुक्रम कहते है।

उदा : (1) 6, 12, 18, 24, 30. (2) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

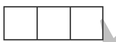
एक समांतर अनुक्रम के पदों की संख्या यदि अनिश्चित अनगिनित हो उसे अनंत अनुक्रम (Infinite arithmetic Progression) कहते है।

उदा : (1) 3, 7, 11, 15, ... (2) 10, 8, 6, 4, 2, 0, –2, ...

A.P का समांतर अनुक्रम (General form of an A.P) का सामान्य रुप स्मिता दिया सलाई की टिकियाँ वर्गाकार बनाने व्यवस्थित करती है। पहले वर्ग बनाने उसे 4 टिकियाँ उपयोग करती हैं। उसे 3 और टिकियाँ जोडकर 2 वर्ग बनाती है, पुन: 3 टिकियाँ जोडकर 3 वर्ग बनाती है, इत्यादि।

निम्न तालिका का निरीभण कीजिए।

प्रत्येक संदर्भ, बने वर्गाकार दर्शाये गए हैं। लगानेवाली टिकियों की संख्या और प्राप्त नमूनों की संख्या तीसरे और चौथे स्तंभ में दी गई है। पाँचवे स्तंभ में बनें वर्गों के नमूनों के अनुसार पुन: लिखा गया है।

वर्गो की संख्या		**टिकियों की संख्या**	**नमूना**	**वर्गो की संख्या के व्यख्या**
1.		4	4	4
2.		7	4 + 3	4 + 3(2 – 1)
3.		10	4 + 3 + 3	4 + 3(3 – 1)
4.		13	4 + 3 + 3 + 3	4 + 3(4 – 1)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n				4 + 3 (n – 1)

उपरोक्त तालिका से निष्कर्ष पर आते हैं कि

(i) 4, 7, 10, 13..... हे A.P है।

(ii) प्रथम पद है अर्थात 4 है i.e., $a = 4$

(iii) सामान्य अंतर 3 है i.e., $d = 3$

(iv) यदि 'n' वर्ग बनें है तो बना नमूना होगा: $\therefore 4 + 3(n - 1)$

(v) यहाँ n वाँ पद, a + d (n – 1) अर्थात $T_n = a + d\ (n - 1)$

A.P का प्रथम पद 'a' और सामान्य अंतर 'd' है तो समांतर n अनुक्रम का 'n' वाँ पद होगा

$\mathbf{T_n = a + (n - 1)d}$

उदाहरण 1: 2, 6, 10, 14, ... पर A.P का वचार कीजिए।

यहाँ $T_1 = a = 2$, $d = T_2 - T_1 = 6 - 2 = 4$

$T_1 = 2$		$= a$	$= a + (1-1)d$
$T_2 = 6$	$= 2 + 4$	$= a + d$	$= a + (2-1)d$
$T_3 = 10$	$= 2 + 4 + 4$	$= a + d + d$	$= a + (3-1)d$
$T_4 = 16$	$= 2 + 4 + 4 + 4$	$= a + d + d + d$	$= a + (4-1)\ d$
⋮			
T_n	$= a + d + d......$	$= a + (n-1)d$	$+ (n-1)$ वेळा

$$\therefore \mathbf{T_n = \boldsymbol{a} + (n - 1)\ \boldsymbol{d}}$$

उपरोक्त उदाहरणों में हम निर्णय ले सकते हैं कि समांतर अनुक्रम (A.P) जिसका प्रथम पद 'a' और सामान्य 'd' है।

यदि समांतर अनुक्रम का प्रथम पद 'a' और सामान्य अंतर 'd' है तो समांतर अनुक्रम का सामान्य रुप

a, a+d, a+2d..... a+(n-1)d...

A.P का सामान्य पद $T_n = a + (n-1)d$

उदाहरण 2: 3, 4, 5, 6, ... अनुक्रमे 1000 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

इस अनुक्रम में पूर्व पद को 1 जोडकर अग्र पद ज्ञात करते हैं।

इस विधान से 1000 वाँ पद जानने के लिए 1000 पद लिखना होगा। यह प्रक्रिया लंबी और थकावटी है।

यदि अनुक्रम का सामान्य पद लिखने पर किसी भी पद आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

इस अनुक्रम में सामान्य अंतर 1 (c.d) है।

पहला पद $\rightarrow T_1 = 3 = 3 + 0(1)$ दूसरा पद $\rightarrow T_2 = 4 = 3 + 1 = 3 + 1(1)$

तीसरा पद $\rightarrow T_3 = 5 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2(1)$

⋮

n वाँ पद $\rightarrow T_n = 3 + 1 + 1 + ...(n-1)$ गुणा $= 3 + (n-1)(1)$

$= 3 + n - 1 = 2 + n$

$$\therefore \mathbf{T_n = 2 + n}$$

$\Rightarrow$ 1000 वाँ पद $= T_{1000} = 2 + 1000 = 1002$

जैसे हमने समांतर अनुक्रम A.P के n पद ज्ञात किया है। उसी तरह हम A.P. जो समांतर अनुक्रम नही है उनके भी n वाँ पद ज्ञात कर सकते है। n वाँ पद ज्ञात कर सकते है।

उदाहरण 3:

1) 2, 4, 6, 8, ... का n वाँ पद ज्ञात कीजिए

find the n^{th} term.

$T_1 = 2 = 2 \times 1$

$T_2 = 4 = 2 \times 2$

$T_3 = 6 = 2 \times 3$

$T_n = \quad 2 \times n$

$\therefore T_n = 2 \times n$

2) का n वाँ पद ज्ञात कीजिए

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...$

$T_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

$T_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$

$T_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$

$\vdots$

$T_n = \frac{n}{n+1} \qquad \therefore T_n = \frac{n}{n+1}$

परंतु सभी अनुक्रमों के लिए सामान्य पद प्राप्त करना संभव नहीं है।

समूहों में बैठकर सोचिए और चर्चा कीजिए :

(i) 5, 17, 29, 31, 100, 450,... आरोहण क्रम व्यवस्थित किया गया है। परंतु इसका सामान्य पद प्राप्त करना असंभव है।

(ii) 2, 3, 5, 7, 11,... अभाज्य संख्याओं का अनुक्रम है। इस अनुक्रम का सामान्य पद प्राप्त करना संभव नहीं है। हम जानते हैं कि A.P में जिसका समांतर 'd' है।

(i) $\mathbf{T_n + d = T_{n+1}}$ **(ii)** $\mathbf{T_n - d = T_{n-1}}$

निम्न तालिका का निरीक्षण कीजिए :

A.P में

$T_2 = T_1 + d$	$T_2 = T_1 + (2-1)d$	$T_2 - T_1 = (2-1)d$	$d = \frac{T_2 - T_1}{2-1}$
$T_3 = T_1 + d + d$	$T_3 = T_1 + (3-1)d$	$T_3 - T_1 = (3-1)d$	$d = \frac{T_3 - T_1}{3-1}$
$T_5 = T_4 + d$	$T_5 = T_4 + (5-4)d$	$T_5 - T_4 = (5-4)d$	$d = \frac{T_5 - T_4}{5-4}$

सामान्य रूप से, $\boxed{\mathbf{d = \frac{T_p - T_q}{p - q}}}$

यदि $T_p = T_n$ और $T_q = T_1$(ie., a) तो उपरोक्त संबंध इसतरह लिख सकते है :

$\therefore \boxed{d = \frac{T_n - a}{n-1}}$ ऐसे लिखते हैं।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: 13, 19, 25, 31,...... एक समांतर अनुक्रम है?

हल: यहाँ, $T_1 = 13$, $T_2 = 19$, $T_3 = 25$, $T_4 = 31$ और इत्यादी

$d = T_2 - T_1 = 19 - 13 = 6$

$d = T_3 - T_2 = 25 - 19 = 6$

$d = T_4 - T_3 = 31 - 25 = 6$

दत्त अनुक्रम में सामान्य अंतर समान है इसलिए यह अनुक्रम समांतर अनुक्रम है।

उदाहरण 2: यदि a = 3 और सामान्य अंतर c.d = 4, रहें तो A.P. ज्ञात कीजिए।

हल: $a = 3$, c.d = 4 और $T_1 = a = 3$ अथवा

$T_1 = a = 3$

$T_2 = a + d = 3 + 4 = 7$

$T_3 = a + 2d = 3 + 2(4) = 3 + 8 = 11$

$T_4 = a + 3d = 3 + 3(4) = 3 + 12 = 15$

$T_2 = T_1 + d = 3 + 4 = 7$

$T_3 = T_2 + d = 7 + 4 = 11$

$T_4 = T_3 + d = 11 + 4 = 15$

$\therefore$ 3, 7, 11, 15, ... ही A.P है। समांतर अनुक्रम है।

उदाहरण 3: एक समांतर अनुक्रम 12, 19, 26,...... में T_n और T_{15} ज्ञात कीजिए।

हल: $a = 12$, $d = 19 - 12 = 7$, $T_n = ?$, $T_{15} = ?$

$T_n = a + (n - 1)d$

$T_n = 12 + (n - 1)7 = 12 + 7n - 7$

$T_n = 5 + 7n$

$T_n = 5 + 7n$ पर वचार कीजिए

$T_{15} = 5 + 7(15) = 5 + 105$

$T_{15} = 110$

उदाहरण 4: समांतर अनुकम 7, 13, 19, ...151 में पदों संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: $a = 7$, $d = T_2 - T_1 = 13 - 7 = 6$, $T_n = 151$, $n = ?$

$T_n = a + (n - 1)d$

$151 = 7 + (n - 1)\,6 = 7 + 6n - 6$

$151 = 1 + 6n$

$151 - 1 = 6n$

$150 = 6n \quad n = \frac{\cancel{150}^{25}}{\cancel{6}} \quad \therefore \quad n = 25$

उदाहरण 5: एक समांतर अनुक्रम का 8 वाँ पद 17 और 19 वाँ पद 39 है। 25 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: $T_8 = 17, T_{19} = 39, T_{25} = ?$

T_{25}, ज्ञात करने पहले हमें 'a' और 'd' ज्ञात करना होगा।

$$d = \frac{T_p - T_q}{p-q}$$

$$d = \frac{T_{19} - T_8}{19-8} = \frac{39-17}{11} = \frac{\cancel{22}^{2}}{\cancel{11}} \therefore \; d = 2$$

$T_8 = 17$ पर विचार कीजिए।

$a + 7d = 17$ $[\because T_n = a + (n-1)d]$

$a + 7(2) = 17$

$a + 14 = 17$

$\therefore a = 3$

T_{25}, $T_n = a + (n-1)d$ ज्ञात कीजिए।

$T_{25} = 3 + (25-1)2 = 3 + (24 \times 2) = 3 + 48$

$\therefore T_{25} = 51$

पर्याय विधान

$T_8 = a + 7^d = 17$

$T_{19} = a + 18d = 39$

$T+18d(a+7d) = 39-17$

$11d = 22$

$d = 2$

$T_8 = a + 7 \times 2 = 17$

$\therefore a + 14 = 17$

$a = 3$

उदाहरण 6: एक समांतर अनुक्रम में 4 वाँ पद 17 है और 10 वाँ पद 7 वें पद से 12 अधिक है तो उस अनुक्रम निर्धारित कीजिए।

हल: $T_4 = 17, T_{10} = T_7 + 12$

$T_{10} = T_7 + 12$ पर विचार कीजिए।

$T_{10} - T_7 = 12 \Rightarrow (a + 9d) - (a + 6d) = 12$

$$\cancel{a} + 9d - \cancel{a} - 6d = 12 \Rightarrow 3d = 12\, d = \cancel{12}^{4}/\cancel{3} \therefore d = 4$$

$T_4 = 17$ पर विचार कीजिए।

$a + 3d = 17$ $a + 3(4) = 17 \Rightarrow a + 12 = 17$

$a = 17 - 12$ $a = 5$

$\therefore$ A.P is 5, 5 + 4, 5 + 2(4), ... क्याँ है 5, 9, 13, ...

उदाहरण 7: एक अनुक्रम में 7 वें पद का 7 गुना और 11 वें पद 11 गुना समान है। उस अनुक्रम का 18 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: $7 \times T_7 = 11 \times T_{11}$

$7(a + 6d) = 11(a + 10d)$

$7a + 42d = 11a + 110d$

$7a - 11a = 110d - 42d$

$$-4a = 68d \Rightarrow a = \frac{68}{-4}d$$

$a = -17d$ $T_{18} = a + 17d$ ज्ञात कीजिए।

$= -17d + 17d \therefore T_{18} = 0$

अभ्यास 2.2

1. निम्न अनुक्रम के अगले चार पद लिखिए।

   (i) 0, –3, –6, –9, ... (ii) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, ... (iii) $a + b,\ a - b,\ a - 3b$, ...

2. अनुक्रम ज्ञात कीजिए यदि

   (i) $T_n = 2n - 1$ (iii) $T_n = 5 - 4n$ (ii) $T_n = 5n + 1$

3. एक अनुक्रम में,

   (i) यदि $a = 5$, d = 3, T_{10} हो तो T_{10} ज्ञात कीजिए ।

   (ii) यदि $a = -7$, d =5, हो तो T_{12} ज्ञात कीजिए ।

   (iii) $a = -1$, d = –3 , तो T_{50} ज्ञात कीजिए.

   (iv) यदि $a = 12$, d = 4, $T_n = 76$, हो तो 'n' ज्ञात कीजिए ।

   (v) यदि $d = -2$, $T_{22} = -39$, हो तो 'a' ज्ञात कीजिए ।

   (vi) यदि $a = 13$, $T_{15} = 55$, हो तो 'd' ज्ञात कीजिए ।

4. समांतर अनुक्रम 100, 96, 92, ..., 12.में कितने पद है ज्ञात कीजिए।

5. एक त्रिभुज के कोण समांतर अनुक्रम में है। यदि सबसे छोटा कोण 50^0 है तो अन्य दो कोण ज्ञात कीजिए।

6. एक अनुक्रम में 50 पद है जिनमें 3रा पद 12 है और अंतिम पद 106, है। 29 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

7. एक समांतर अनुक्रम के चौथे और आठवें पद का जोड 24 है और 6वें और 10 वें पदों का जोड 44 है। प्रथम तीन पदों को ज्ञात कीजिए।

8. एक समांतर अनुक्रम के 7 वें और 3 रे पद का अनुपात 12:5 है। 13वे और 4 थे पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

9. 2001 में एक कंपनी ने 400 लोगों को नौकरी पे लिया। बाद में प्रतिवर्ष 35 लोगों को बढाते गये। बताइए कि कौनसे वर्ष में उस कंपनी के नौकर 785 होंगें?

10. एक समांतर अनुक्रम का p वाँ पद q है, और q वाँ पद p है, सिध्द कीजिए n वाँ पद(p + q – n) है।

11. अनुक्रम के चार संख्याओं को ज्ञात कीजिए ताकी 2रे 3रे पदों का जोड 22 है तथा पहले और चौथे पदों का गुणनफल 85 है।

अनुक्रम के 'n' पदों का जोड:

 इत्यादि

इस नमूने को उसने दस चरणों तक व्यवस्थित किया।

अर्जुन से व्यवस्थित कुल गोलियों की संख्या कितनी है?

इस प्रश्न का उत्तर देने, हमें प्रत्येक समूह की गोलियों को जोडना होगा।

एक अनुक्रम के पदों के योगफल को उस अनुक्रम की श्रेणी (series) कहते हैं।

एक सांत अनुक्रम के पदों के योगफल को सांत अथवा सीमित श्रेणी (finite series)

$T_1, T_2, T_3 \ldots\ldots + T_n$ यह 'n' पदों की सांत श्रेणी है।

सामान्यत : 'n' पदों की सांत श्रेणी को 'S_n' से सूचित करते है।

$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + T_n$

एक अनंत अनुक्रम के पदों के योगफल को अनंत श्रेणी (infinite series) कहते हैं।

$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ यह अनंत श्रेणी है।

सूचना : $S_1 = T_1$ $S_2 = T_1 + T_2$ $S_3 = T_1 + T_2 + T_3$ आदि।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $T_n = 2n - 1$ तो S_3 ज्ञात कीजिए

हल :
$S_3 = T_1 + T_2 + T_3$
$T_n = 2n - 1$
$T_1 = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$
$T_2 = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$
$T_3 = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$
$\therefore S_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 1 + 3 + 5$
$S_3 = 9$

उदाहरण 2. यदि $T_n = n^2 + 1$, तो S_2 ज्ञात कीजिए

हल :
$S_2 = T_1 + T_2$
$T_n = n^2 + 1$
$T_1 = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$
$T_2 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
$\therefore S_2 = T_1 + T_2$
$S_2 = 2 + 5$
$S_2 = 7$

एक 'n' वे पद और 'n' पदों के योगफल के बीच संबंध

मान लीजिए :

$T_n = 5n - 2$

$T_1 = 5(1) - 2 = 5 - 2 = 3$ $S_1 = T_1 = 3$
$T_2 = 5(2) - 2 = 10 - 2 = 8$ $S_2 = T_1 + T_2 = 3 + 8 = 11$
$T_3 = 5(3) - 2 = 15 - 2 = 13$ $S_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 3 + 8 + 13 = 24$
$T_4 = 5(4) - 2 = 20 - 2 = 18$ $S_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 3 + 8 + 13 + 18 = 42$
$T_5 = 5(5) - 2 = 25 - 2 = 23$ $S_5 = T_1+T_2+T_3+T_4+T_5=3+8+13+18+23 = 65$

अब हम योग ज्ञात करेंगे,

ध्यान दीजिए

$S_2 - S_1 = 11 - 3 = 8 = T_2$ $S_2 - S_1 = T_2$
$S_3 - S_2 = 24 - 11 = 13 = T_3$ $S_3 - S_2 = T_3$
$S_4 - S_3 = 42 - 24 = 18 = T_4$ $S_4 - S_3 = T_4$
$S_5 - S_4 = 65 - 42 = 23 = T_5$ $S_5 - S_4 = T_5$

$$\mathbf{S_n - S_{n-1} = T_n}$$

समांतर श्रेणी (Arithmetic series)

एक श्रेणी जिसके पद समांतर अनुक्रम है उसे **समांतर श्रेणी** कहते है।

> **सूचना :** एक अनंत समांतर श्रेणी का योगफल ज्ञात करना असंभव है ।

उदाः 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30

1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 20 = 66

एक समांतर अनुक्रम के 'n' पदों का योगफल [Sum of first 'n' terms of an A.P]

आईए, जोड का एक खेल खेलें। निम्न श्रेणियों का योगफल ज्ञात कीजिए।

1 + 2

2 + 5 + 8

4 + 7 + 10 + 13 + 16_

1 + 3 + 5 + 7 + ... + 101

उपरोक्त कौनसे संदर्भ में आप श्रेणी का योगफल आसानी से ज्ञात कर सकें? क्यों? चर्चा कीजिए। उपरोक्त उदाहरणों सें हम समझ सकते हैं कि, यदि एक अनुक्रम के पदों की संख्या छोटी हो तो, हम आसानी से योगफल ज्ञात कर सकते हैं। यदि संख्या बडी होगई तो योगफल आसानी से मालूम नही कर सकते और अधिक समय लगता है।

योगफल तेजी से ज्ञात करने का क्या कोई सरल विधान है?

गणित के इतिहास की एक लघुकथा कही जाती है। एक दिन, एक शिक्षक ने कक्षा को प्रथम 100 स्वभाविक संख्याओं का योगफल ज्ञात करने को कहा। एक लडके ने तुरंत 5050 जवाब दिया। यह लडका था कार्ल फ्रेड्रिच गॉस (1777-1855) (Carl Friedrich Gauss) आईए, जान लेते है उसने कैसे किया :

उसने, उस गणित इसतरह लिखा :

S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100

S_{100} = 100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1 (विपरीत रूप में लिखने पर)

2S = 101 + 101 + 101 + ... + 101 (बेरीज करुन)

2S = 101 × 100 [∵ 101 हे 100 को 100 बार जोडा गया]

$$S = \frac{101 \times \cancel{100}^{50}}{\cancel{2}}$$

S_{100} = 5050

कार्ल फ्रेड्रिच गॉस : (Carl Friedrich Gauss) (1777-1855) जर्मनी के गणिततज्ञ को गणित के राजकुमार कहा जाता था। 3 वर्ष की आयु में ही अपने परिकलन करने की कौसल्य को दर्शाया था। 24 वर्ष की आयु में, गणित की महान पुस्तक 'डिसक्विसिनस् अर्थमेटिसिया (Disquisitions Arithmeticae) प्रकाशित किया। उन्होंने सर्वप्रथम यूक्लिड के अंक गणित के मूल प्रमेय को पूर्णत: सिध्द किया।

एक समांतर अनुक्रम के 'प' पदों का योगफल भी इसी विधान से ज्ञात कर सकते हैं।

यदि A.P के 'a' यहँ प्रथम पद वाँ 'd' हा अनंत फरक और S_n वह A.P. का 'n' पदों का योगफल भी इसी विधान से ज्ञान कर सकते है।

$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots\dots + T_n$

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots\dots + [a + (n-1)d]$

$S_n = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \dots\dots + a$ (उलटकरुन)

$2S_n = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \dots\dots + [2a + (n-1)d]$ (बेरीज करुन)

$\therefore 2S_n = [2a + (n-1)d] \times n$ $[\because 2a + (n-1)d]$ has been added 'n' times]

$\therefore \boxed{\mathbf{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]}}$

सूचना : यदि 1 + 2 + 3 + 4 + ...+n, वह A.P है प्रथम 'n' (स्वभाविक संख्याओं का जोडें)

यहाँ $a = 1$, $d = T_2 - T_1 = 2 - 1 = 1$, $n = n$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_n = \frac{n}{2}[2.1 + (n-1)1] = \frac{n}{2}[2 + n - 1]$

$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$

'n' स्वभाविक संख्याओं का योगफल $= \frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम 'n' स्वभाविक संख्याओं के योगफल को इसतरह लिखते है : $\mathbf{\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}}$

सूचना : हम जानते हैं कि

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

इसे इसतरह भी लिख सकते हैं : $S_n = \frac{n}{2}[a + \{a + (n-1)d\}]$

$\therefore \boxed{\mathbf{S_n = \frac{n}{2}[a + T_n]}}$ $[\therefore T_n = a + (n-1)d]$

यहा $a \rightarrow$ प्रथम पद $T_n \rightarrow$ नवाँ पद है

$\therefore \frac{a + T_n}{2}$ वह A. P. प्रथम और अंतिम पदों का औसत है।

अर्थात, एक अनुक्रम के प्रथम 'n' पदों का योगफल, अनुक्रम के प्रथम और अंतिम पद के औसत का 'n' गुणा होता है।

यदि उपरोक्त सूत्र को हम, प्रथम 'n' स्वभाविक संख्याओं के योगफल ज्ञात करने उपयोग करते हैं।

1 + 2 + 3 + ...+ n

$a = 1, T_n = n, n = n$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + T_n]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[1+n] = \frac{n(n+1)}{2} = \Sigma n$$

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: यदि $T_n = 5n - 2$, ता S_4 ज्ञात कीजिए,

हल : समझो

$T_n = 5n - 2$

$T_1 = 5(1) - 2 = 5 - 2 = 3$

$T_2 = 5(2) - 2 = 10 - 2 = 8$

$T_3 = 5(3) - 2 = 15 - 2 = 13$

$T_4 = 5(4) - 2 = 20 - 2 = 18$

$S_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

$S_4 = 3 + 8 + 13 + 18$

$\therefore S_4 = 42$

उदाहरण 2: 1 + 2 + 3 + ... श्रेणी के 20 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$\Sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}$ यहाँ, $n = 20$

$S_{20} = \frac{20(20+1)}{2} = \frac{\cancel{20}^{10} \times 21}{\cancel{2}}$

$S_{20} = 210$

प्रयत्न करा,

$= \frac{\cancel{20}^{10} \times 21}{\cancel{2}}$

$S_n = n\ (a + T_n)$

हा संबंध वापरून सोडवा

उदाहरण 3: समांतर अनुक्रम 5, 8, 11, 14, ... के 15 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल : a = 5, n = 15, c.d = 8 – 5 = 3

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}[2(5) + (15-1)3] = \frac{15}{2}[10 + (14)(3)] \quad S_{15} = \frac{15}{\cancel{2}} \times \cancel{52}^{26}$$

$S_{15} = 390$

$S_{15} = 390$

उदाहरण 4: 200 और 300 के बीच के 6 से भाज्य सभी स्वभाविक संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : समांतर अनुक्रम है

204 + 210 + 216 + ... + 294

$\therefore$ a = 204, d = 210 – 204 = 6, T_n = 294, S_n = ?

S_n, ज्ञात करने के लिए हमें पहले 'n' का मूल्य ज्ञात करना है

T_n = 294 'n' वाँ पद ज्ञात करने का पर्याय विधान

a + (n – 1)d = 294 Tn = a + (n-1) d के पदों में व्यक्त करने पर हम प्राप्त करते है।

204 + (n – 1) 6 = 294

204 + 6n – 6 = 294 $n = \frac{Tn - a}{d} + 1$

198 + 6n = 294 $\therefore n = \frac{294 - 204}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1$

6n = 294 – 198 = 96 $\therefore$ n = 15 + 1 = 16

n = $\cancel{96}^{16} / \cancel{6}$

$\therefore$ n = 16

$S_n = \frac{n}{2}[a + T_n]$

$S_{16} = \frac{16}{2}[204 + 294] = \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}} \times 498$

S_{16} = 3984

उदाहरण 5: रमेश एक मोबाइल (Mobile Phone) खरीदना चाहता है। वह उसे ₹15000 नकद देकर अथवा ₹ 1800 पहले महीने में, ₹1750 दूसरे में, ₹1750, तिसऱ्या महिन्यात ₹ 1700 तीसरे महीने आदि 12 महीने के किश्तों खरीद सकता है। यदि वह पैसा किश्तों में देता है। तो

(i) 12 किश्तों में भुगतान किये कुल पैसे

(ii) त्वरित भुगतान के अलावा उसे और कितना धन देना होता हैं ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ समांतर अनुक्रम है

1800 + 1750 + 1700 + ... ही A.P है।

a = 1800, d = $T_2 - T_1$ = 1750 – 1800 = – 50, n = 12, S_{12} = ?

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \Rightarrow = \frac{12}{2}[2(1800) + (12-1)(-50)]$

S_{12} = 6[3600 + 11(–50)] $\Rightarrow$ = 6[3600 – 550] = 6 × 3050

S_{12} = 18,300

उदाहरण 6: एक समांतर अनुक्रम के तीन घनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 24 और गुणनफल 480 हैं।

प्रयत्न कीजिए :

पद ज्ञान कीजिए जब a = 8, d = 2

आपको क्या पत्ता चलता है

हल : मान लीजिए तीन पद a-d, a, a+d है ।

योगफल = 24

a - d + a + a + d = 24

3 a = 24

a - d + a + a + d = 24

3 a = 24

a = 8

गुणानफल = 480

(a-d) a (a+d) = 480

(8-d) 8 (8+d) = 480 ($\because$ a = 8)

(8-d) (8+d) = 480/8 = 60

$64-d^2 = 60 \quad d^2 = 4, \quad d = \sqrt{4} \quad d = \pm 2$

यदि a = 8, d = 2 यदि क्रमातुल पद a - d = 8 - 2 = 6, a = 8, a+ d = 8 + 2 = 10

$\therefore$ तीन पद है 6, 8, 10

उदाहरण 7: केंद्र A और B एकान्तर रूप से निरंतर अर्धवृत्तों से एक कुंडली बनाई गई है, 0.5 सें.मी., 1 सें.मी., 15 सें.मी., 2 सें.मी. की त्रिज्याओं से अ से आकृति में दर्शाये जैसे कुंडली पूर्ण की है। तेरह: निरंतर अर्धवृत्तों बनी कुंडली की कुल लंबाई क्या है? ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या)

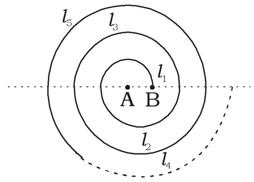
हल : मान लीजिए क्रमशः r_1 = 0.5 cm, r_2 = 1cm, r_3 = 1.5 cm,.......... त्रिज्याओं से बनें अर्धवृत्तों की परिधि l_1, l_2 l_3 हैं। हम जानते हैं कि, वृत्त की परिधि = $2\pi r$

$\therefore$ अधवृत्त परिघ = πr

$$l_1 = \pi r_1 = \pi \times 0.5 = \frac{\pi}{2}$$

$$l_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$l_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \pi \times \frac{3}{2} = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



$$\vdots$$

$$l_{13} = \pi r_{13} = \pi \times \frac{13}{2} = 13\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

कुंडली की कुल लंबाई = $l_1 + l_2 + \dots\dots\dots + l_{13}$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots\dots\dots + 13\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}[1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + 13] = \frac{\pi}{2}\left(\sum_{1}^{13} n\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{13(13+1)}{2}\right] = \frac{\pi}{2} \times \frac{13 \times \cancel{14}^{7}}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{7}} \times 13 \times \cancel{7}$$

= 143 सें.मी.

अभ्यास 2.3

1. यदि $T_n = 2n + 3$, हो तो S_3 ज्ञात कीजिए।
2. योगफल ज्ञात कीजिए :
   (i) 3 + 7 + 11 + ... 25 पदों तक (ii) -3, 1, 5 .... 17 पदों तक
   (iii) 3a, a, -a .... a पदों तक (iv) p, o, -p .... p पदों तक
3. एक समांतर अनुक्रम का 56 वाँ पद $5/37$ है तो उस अनुक्रम के प्रथम 111 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
4. स्वभाविक संख्याओं के अनुक्रम में:
   a) (i) S_{20} (ii) $S_{50} - S_{40}$ (iii) $S_{30} + S_{15}$ ज्ञात कीजिए।
   b) यदि (i) Sn = 55 (ii) Sn = 15 ज्ञात कीजिए।
5. प्रथम 'n' विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।
6. 1 और 201 के बीच के 5 विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।
7. एक श्रेणी के प्रथम चार पदों को ज्ञात कीजिए जिसके 'n' पदों का योगफल $\frac{1}{2}n(7n-1)$ है।
8. समांतर अनुक्रम 1, 4, 7, ... में और कितने पदों की आवश्यकता होती है ताकि उसका योगफल 51 होता है?
9. AP के तीन संख्याओं को ज्ञात कीजिए जिनका योगफल और गुणनफल क्रमश:
   (i) 21 और 231 (ii) 36 और 1620 है।
10. A.P का 6 पद हैं जिनका योगफल 345 हैं। प्रथम और अंतिम पद में अंतर 55 है। सभी पदों को ज्ञात कीजिए।
11. एक AP का प्रथम पद 2 है, प्रथम पाँच पदों का योगफल अगले पाँच पदों के योगफल का एक चौथा भाग है। दर्शाईए कि (1/4) है तथा $T_{20} = -112$ है दाखवा तथा S_{20} ज्ञात कीजिए।
12. एक A.P का तीसरा पद 8 है और नौवाँ पद के तीन गुना से 2 अधिका है। प्रथम 19 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हरात्मक अनुक्रम [HARMONIC PROGRESSION]

निम्न तालिका का निरीक्षण कीजिए

अनुक्रम	विलोम
$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \ldots\ldots$	2, 5, 8, 11,.....
$\frac{1}{30}, \frac{1}{28}, \frac{1}{26}, \frac{1}{24}, \ldots\ldots$	30, 28, 26, 24, ...
$1, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \ldots\ldots$	$1, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\ldots$

हमें ज्ञान होता है कि दिये हुए अनुक्रम के पदों के विलोम एक समांतर श्रेढी बनाते हैं।
अनुक्रम जिसमें पदों के विलोम एक समांतर श्रेढी बनाते है वह हरात्मक श्रेढी कहलात है।
उसे संक्षिप्त रूप में H.P लिखते है।

A.P हरात्मक श्रेढी का सामान्य रुप [General form of H.P.]

यदि A.P एक समांतर श्रेढी का प्रथम पद 'a' और सामान्य अंतर 'd' है तो उसका रूप होगा
$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots\ldots\ldots,\ a + (n - 1)d$
हम जानते हैं की इनके पदों के विलोम हरात्मक श्रेढी बनाते है। H.P होतो

$\therefore$ उसका रूप होगा

$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{a+(n-1)d}$ यह है।

H.P. हरात्मक श्रेढी का सामान्य बद है।

$$\boxed{T_n = \frac{1}{a+(n-1)d}}$$

सूचना: H.P. का हरात्मक श्रेढी 'n' पदों का योगफल ज्ञान करने का कोई सूत्र नहीं है।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1, -1, \ldots\ldots$ **या H.P चे T_{10}** ज्ञान कीजिए।

हल: हरात्मक श्रेढी HP के विलोम समांतर श्रेढी में A.P होते है।

$\therefore$ 5, 3, 1, –1 .... यह A.P समांतर श्रेढी में है।

$a = 5,\ d = T_2 - T_1 = 3 - 5 = -2,\ T_{10} = ?$

$T_n = a + (n - 1)d$

$T_{10} = 5 + (10 - 1)(-2) = 5 + 9(-2) = 5 - 18$

$T_{10} = -13$

$\therefore$ समांतर श्रेढी का T_{10} A.P का –13

$\Rightarrow$ हरात्मक श्रेढी का अनुरूप पद H.P का H.P के T_{10} हे $\frac{-1}{13}$ है।

उदाहरण 2: एक हरात्मक श्रेढी को $T_3 = 1/7$ और $T_7 = 1/5$. तो T_{15} ज्ञान कीजिए।

हल: समांतर श्रेढी AP में संगत T_3 और T_7 है $T_3 = 7$, $T_7 = 5$

$$d = \frac{T_p - T_q}{p - q} = \frac{T_7 - T_3}{7 - 3}$$

$$d = \frac{5 - 7}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore d = \frac{-1}{2}$$

समांतर श्रेढी अनुरूप AP का T_3= 7 पर विचार कीजिए।

$a + 2d = 7 \Rightarrow a + \cancel{2}\left(\frac{-1}{\cancel{2}}\right) = 7$

$a - 1 = 7$

$a = 7 + 1$

$\therefore\ a = 8$

T_{15} ज्ञान करना हैं $T_n = a + (n - 1)d$

$T_{15} = 8 + (15 - 1)\left(\frac{-1}{2}\right)$

$T_{15} = 8 + \cancel{14}^{7}\left(\frac{-1}{\cancel{2}}\right)$

$T_{15} = 8 - 7 = 1$

A.P समांतर श्रेढी में $T_{15} = 1$

$\Rightarrow$ हरात्मक श्रेढी में अनुरूप T_{15} H.P चे $T_{15} = 1$

सूत्र विधान:

$T_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$

$T_3 = \frac{1}{a+2a} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{1}{a+2d}$

तसेच $a + 2d = 7$ .... (1)

$a + 6d = 5$ .... (2)

(–) (–)

$-4d = 2$

$\therefore\ d = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$

से.मी (1) वरून $a + 2d = 7$

$\Rightarrow a + 2\left(\frac{-1}{2}\right) = 7$

$\therefore\ a = 7 + 1 = 8$

अभ्यास 2.4

1. निम्नों में कौन– कौन से हरात्मक अनुक्रम है।

(i) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \ldots$ (ii) $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \ldots$ (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots$

(iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots$ (v) 6, 4, 3, ... (vi) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

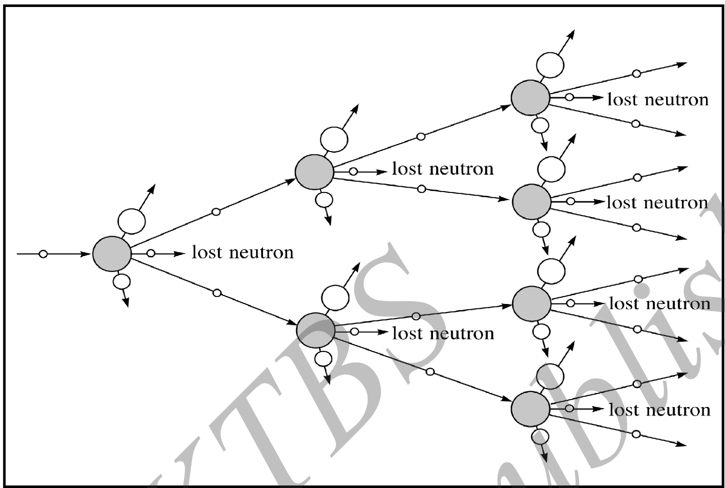
2. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ T_n ज्ञान कीजिए। (ii) $\frac{1}{7}, \frac{1}{4}, 1, \ldots$ क्रम T_{10} ज्ञान कीजिए।

3. H.P एक हरात्मक श्रेढी में $T_5 = \frac{1}{12}$ और $T_{11} = \frac{1}{15}$ तर T_{25} ज्ञान कीजिए।

4. H.P एक हरात्मक श्रेढी में $T_4 = \frac{1}{11}$ और $T_{14} = \frac{3}{23}$, (i) T_7 (ii) T_{19} ज्ञान कीजिए।

गुणोत्तर श्रेढी (Geometric progression)

आप नगभिकीय विखण्डन से परिचित हैं। जब U - 235 पर न्यूट्रान की बंबारी की जाती है तो वह 2 न्यूट्रॉन करता हुआ दो छोटे नाभिकों में विखण्डित अगले स्तर पर 4 न्यूट्रॉन और अगले स्तर 8 न्यूट्रॉन विमुक्त करते है।



प्रत्येक स्तरपर विमुक्त न्यूट्रॉनों की संख्या ध्यान से देखीए

स्तर	I	II	III	IV	V	VI	....
न्यूट्रॉनों की संख्या	1	2	4	8	16	32	....

1, 2, 4, 8, 16, ... प्राप्त अनुक्रम इसतरह

कुछ और उदाहरण ध्यान से देखिए :

अनुक्रम	**नियम**
3, 9, 27, 81, ...	3 गुण कीजिए
1000, 100, 10, 1, ...	$\frac{1}{10}$ गुण कीजिए
5, 25, 125, 625, ...	5 गुण कीजिए

ऐसे अनुक्रमों को गुणोत्तर श्रेढी (Geometric Progression) करते है। उसे संक्षिप्त रूप में G.P. से सूचित करते है।

एक गुणोत्तर श्रेढी वह है जिसमें प्रत्येक अगले पद को उसके पूर्व पद से किसी निश्चित संख्या से गुणा करने से प्राप्त करते हैं।

G.P, एक गुणोत्तर श्रेढी में, एक पद और उसके पूर्व पद का अनुपात एक यून्य रहित स्थिरांक है। यह स्थिरांक को सामान्य अनुपात [c.r] कहते हैं और उसे 'r' से सूचित करते हैं।

उदाहरण: क्रम	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{T_3}{T_2}$	$\frac{T_4}{T_3}$
3, 9, 27, 81,.....	3	3	3
1000, 100, 10, 1, ...	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
5, 25, 125, 625, ...	5	5	5

यदि $T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots\ldots$ यह G.P, एक गुणोत्तर अनुक्रम के पद हैं तो

$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} = \ldots\ldots\ldots =$ एक स्थिरांक है।

क्रमाचा समावेश असलेल्या नित्य जीवनातील कांही घटनांचदी यादी आपण पान नं. 49 वर केलेली आहे 37, पन्ने पर वास्तविक जीवन की ऐसे संदर्भों की सूची बनाई जिनमें अनुक्रम शामिल है।

तीसरे संदर्भ में प्रति घण्टे में जीवाणु की संख्या दुगुनी होती है और इसलिए वह अनुक्रम इसतरह है।

50, 100, 200, 400, ...

यहाँ $r = \frac{100}{50} = \frac{200}{100} = \frac{400}{200} = \ldots\ldots\ldots = 2 =$ एक स्थिरांक है।

इसतरह हमें सामान्य अनुपात एक स्थिरांक प्राप्त होता है। यह अनुक्रम एक एक गुणात्तर G.P. श्रेढी है। चौथे संदर्भ में

रेडियोधर्मी तत्व निम्न रूप से छोटा जाता है :

100, 50, 25, 12.5, ...

यहाँ $r = \frac{50}{100} = \frac{25}{50} = \frac{12.5}{25} = \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2} =$ एक स्थिरांक है।

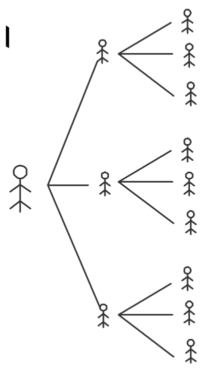
सामान्य अनुपात एक स्थिरांक है, अनुक्रम गुणोत्तर G.P. श्रेढी है।

G.P. गुणोत्तर श्रेढी General form of a G.P का सामान्य रूप

गंगा अपनी सहेलियों को एक संदेश भेजना चाहती है। सहेलियों का समूह बडा होने से वच प्रत्येक को भेज नहीं सकी। इसलिए यह तय हुआ कि वह 3 सहेलियों को संदेश भेजेगी और वे बारी-बारी प्रत्येक 3 सहेलियों को संदेश भेजेंगें और इत्यादि

इस संदर्भ में संख्याओं का अनुक्रम कैसा होगा?

निम्न आकृति को ध्यान से देखिए और सेख्याओं के अनुक्रम का अध्ययन कीजिए।



$T_1 = 1 = 1 \times 3^0 = 1 \times 3^{1-1} = a$

$T_2 = 3 = 1 \times 3 = 1 \times 3^1 = 1 \times 3^{2-1} = ar$

$T_3 = 9 = 1 \times 3 \times 3 = 1 \times 3^2 = 1 \times 3^{3-1} = ar^2$

$T_4 = 27 = 1 \times 3 \times 3 \times 3 = 1 \times 3^3 = 1 \times 3^{4-1} = ar^3$

$\vdots$

$T_n = 1 \times 3 \times 3 \ldots..(n-1)$ बार $= 1 \times 3^{n-1} = a\, r^{n-1}$

$\therefore\ T_n = 1 \times 3^{n-1}$

गुणोत्तर अनुक्रम G.P. का प्रथम 'a' और सामान्य अनुपात 'r' तो गुणोत्तर अनुक्रम का सामान्य रूप G.P.

$a, ar, ar^2, ar^3 \ldots\ldots\ldots\ldots ar^{n-1}$

G.P. का सामान्य रूप $T_n = ar^{n-1}$

सूचना: गुणोत्तर अनुक्रम का सामान्य अनुपार 'r' हा तो G.P.

* अगला पद प्राप्त करने 'r' से गुण कीजिए $T_{n+1} = T_n \times r$
* पिछला पद प्राप्त करने 'r' से भाग लगाईए $T_{n-1} = T_n \div r$

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: यदि a = 4 और r = 2 हो तो G.P के प्रथम 3 पद ज्ञात कीजिए ।

हल: $T_1 = a = 4$

$T_2 = ar = 4 \times 2 = 8$

$T_3 = ar^2 = 4 \times 2^2 = 16$

$\therefore$ G.P के प्रथम तीन पद 4, 8, 16 है।

उदाहरण 2: $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots\ldots$ G.P. के पाँचवा पद ज्ञान कीजिए।

हल: $a = 3/2$, $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{3/4}{3/2} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} = \frac{1}{2}$, $T_5 = ?$

$T_n = ar^{n-1}$

$T_5 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{16} = T_5 = \frac{3}{32}$

उदाहरण 3: $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\ldots$ 32 का G.P. कौनसा पद 32 होगा?

हल: $a = 2$, $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$, $T_n = 32$, $n = ?$

$T_n = ar^{n-1}$ $32 = 2(\sqrt{2})^{n-1}$

$\frac{\cancel{32}^{16}}{\cancel{2}} = (\sqrt{2})^{n-1} \Rightarrow 16 = (\sqrt{2})^{n-1}$

$2^4 = (\sqrt{2})^{n-1} = (2^{1/2})^{n-1}$ $[\because \sqrt{2} = 2^{1/2}]$

$2^4 = 2^{\frac{n-1}{2}}$

$\therefore 4 = \frac{n-1}{2}$

$8 = n - 1 \Rightarrow n = 8 + 1 = 9$

$\therefore$ G.P. चे 9 वे पद 32 आहे

उदाहरण 4: एक G.P. का प्रथम पद 25 है 6 वँ पद 800 हैतो सातवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: $a = 25, T_6 = 800, T_7 = ?$

T_7, पद ज्ञात करने हमें r मालूम करना होगा ।

$T_6 = 800$

$ar^5 = 800$

$25 \times r^5 = 800$

$r^5 = \frac{800}{25} = 32$

$r^5 = 2^5 \therefore\ r = 2$

आम्हाला माहीत आहे की, $T_{n+1} = T_n \times r$

$T_7 = T_6 \times r$

$T_7 = 800 \times 2$

$\therefore T_7 = 1600$

अभ्यास 2.5

1. निम्नलिखित G.P. में सामान्य अनुपात ज्ञात कीजिए

   (i) $-5, 1, \frac{-1}{5}, \ldots\ldots\ldots$ (ii) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots\ldots\ldots$

2. निर्देशानुसार कीजिए

   (i) यदि a = 1 और r = ⅔ हो तो (a) T_n (b) T_4 ज्ञात कीजिए

   (ii) 729, 243, 81,...... में G.P के T_7 ज्ञात कीजिए

3. एक गुणोत्तर अनुक्रम का 5 वाँ पद 64 है, सामान्य अनुपात 2 है तो G.P में 12 वँ पद ज्ञात कीजिए।

4. निम्नों का ज्ञात कीजिए

   i) 3, 6, 12, ... में G.P. के 5 वाँ और 8 वाँ पद

   ii) 256, 128, 64, ... में G.P. के 10 वे 16 वाँ पद वाँ पद

   iii) 81, -27, 9, में G.P. के 8 वे और 12 वाँ पद

   iv) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots$ में G.P. के 14 वाँ और 7 वँ पद ज्ञात कीजिए

   v) 0.008, 0.04, 0.2 ..... में G.P. वाँ 4 थे और 8 वाँ पद

5. निम्न श्रेणी का अंतिम ज्ञात कीजिए।

   i) 2, 4, 8 ..... 9 पदों तक ii) $4, 4^2, 4^3$ ..... 2n पदों तक

   iii) $2, 3, 4\frac{1}{2}$ ..... 6 पदों तक iv) $x, 1, \frac{1}{x}$ ..... 30 पदों तक

6. यदि $T_5 : T_{10} = 32 : 1$ और $T_7 = \frac{1}{32}$ तर G.P ज्ञात कीजिए।

7. किसी रेडियोधर्मी तत्व अर्ध जीवित काल 1 घण्टा है।प्रारंभ में मूलतत्व का भार 500 ग्रॅम होतो 5 वें घण्टे में मूलतत्व का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।
8. 3, 6, 12, ... अनुक्रम का कौनसा पद 1536 होगा?
9. एक के 4 थे और 8 वे पद क्रमशः 24 और 384 है।तो प्रथम ओर सामान्य अनुपात ज्ञात कीजिए।
10. गुणोत्तर अनुक्रम G.P. ज्ञात कीजिए जिसमें
    i) 10 पद 320 और 6 वाँ पद 20 है।
    ii) 5 रे पद $\sqrt{6}$ और 6 वाँ पद $9\sqrt{6}$ आहे

गुणोत्तर श्रेणी (Geometric Series)

एक श्रेणी जिसके पद गुणोत्तर अनुक्रम में है वह गुणोत्तर श्रेणी कहलाता है।

उदाः $1 + 3 + 9 + 27 = 40$ $\qquad 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

एक गुणोत्तर अनुक्रम के 'n' पदों का योगफल

10 मित्र गोलियाँ खेल रहे थे। पहले व्यक्ति के पास 2 गोलियाँ थे। दूसरे व्यक्ति के पास पहले के दुगीने थे। तिसरे व्यक्ती के पास दुसरे व्यक्ति के दुगुने थे और इत्यादि। उनके पास कुल कितनी गोलियाँ हैं? इस श्रेणी को इसतरह लिख सकते है।

$2 + 4 + 8 + \ldots\ldots\ldots\ldots + T_{10}$

$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^{10}$

इन सभी पदों का मूल्य जानकर उनका जोड लेने में काफी समय भी लगेगा और थकावटी होगा।

इसे निम्न रूप से सरल कर सकते है।

$a + ar + ar^2 + \ldots\ldots + ar^{n-1}$ पहले पद 'a' और सामान्य अनुपात 'r' होने वाले 'n' पदों का जोड है मान लीजिए।

$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + ar^{n-1}$

'r' से गुणा कीजिए

$r \times S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^n$

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \ldots\ldots\ldots + \cancel{ar^{n-1}} \\ \underset{(-)}{r \times S_n} = & \quad \underset{(-)}{\cancel{ar}} + \underset{(-)}{\cancel{ar^2}} + \underset{(-)}{\ldots\ldots\ldots} + \underset{(-)}{\cancel{ar^{n-1}}} + \underset{(-)}{ar^n} \\ \hline S_n - r.S_n = & a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - ar^n \\ \hline \end{array}$$

$S_n - r\,S_n = a - ar^n$

$S_n\,(1 - r) = a - ar^n$

इस संबंध को पुनः ऐसे लिख सकते है।

$\therefore \boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$ जब<1 $\qquad \boxed{S_n = \frac{a[r^n-1]}{r-1}}$ जब r>1

अब आपको मालूम हुआ होगा 35 वे पन्ने पर दिये गणित में उस अविस्कारक की मांग पूर्ण करना क्यों कठिन है।

एक शतरंज बोर्ड पर 64 वर्ग होते है।

$\therefore$ गुणोत्तर अनुक्रम में लिखि सकते है।

1, 2, 4, 8, ...2^{63}

$\therefore a = 1, r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{1} = 2, n = 64$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{64} = \frac{1[2^{64} - 1]}{2 - 1} = \frac{1[2^{64} - 1]}{1}$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

$$\boxed{\mathbf{S_{64} = 18,\ 446,\ 744,\ 073,\ 709,\ 551,\ 615}}$$

इतने दानों को गिनने कितना समय लगेगा? क्या आविष्कारक की मांग सरल थी?

अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का जोड ज्ञात करना [जब r < 1]

सांत गुणोत्तर श्रेणी का जोड ज्ञात करना आपने जान लिया है। निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए।

एक गुणोत्तर अनुक्रम $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots S_\infty$ पर विचार कीजिए।

यहाँ $a = 1.\ r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

आईए इस संबंध को प्रारंभ करते हैं।

$$S_n = \frac{a[1 - r^n]}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{1\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$

यहाँ जैसे n बढता है $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ का मूल्य क्या होता ध्यान दीजिए।

$n = 1, \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0.5$ $\quad$ $n = 2, \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25$

$n = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$ $\quad$ $n = 4, \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0.0625$

$\vdots$

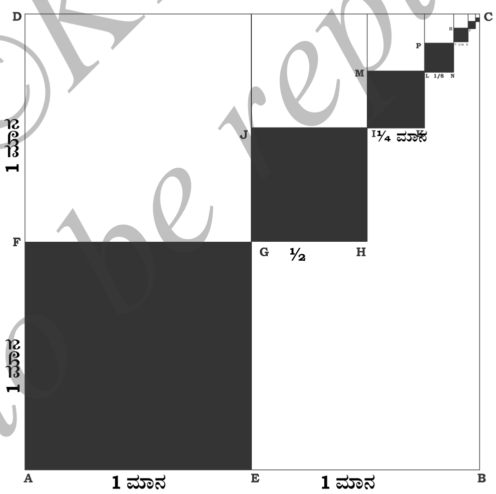
$n = 8, \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} = 0.00391$ $\quad$ $n = 10, \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} = 0.00098$

$\Rightarrow$ n की ∞ और बढता है, ar^n का मूल्य शून्य के करीब बढता है। (उसका मूल्य शुन्य के बराबर कभी नहीं होता) और इसलिए उसका अगण्य है।

$\therefore$ उपरोक्त उदाहरण का S_∞ इसतरह होता है,

$$S_\infty = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^\infty}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \left[\because \left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right] \text{ अगण्य होता है}$$

$\therefore \; S_\infty = 2$



चर्चा कीजिए: गुणोत्तर श्रेणी जिसका $r > 1$ है तो अनन्त तक गुणोत्तर श्रेणी जोड ज्ञात करना असंभव है। समूह में बैठकर इसकी चर्चा कीजिए ।

एक गुणोत्तर अनुक्रम $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$ S_∞ पर विचार कीजिए।

यहाँ $a = 1.\ r = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$

आईए इस संबंध को प्रारंभ करते है।

$$S_n = \frac{a[1-r^n]}{1-r} \quad S_n = \frac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$

यहाँ, जैसे 'n' बढता है $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ का मूल्य क्या होता ध्यान दीजिए

$n = 1, \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0.5$

$n = 2, \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25$

$n = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$

$n = 4, \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0.0625$

$\vdots$

$n = 8, \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} = 0.00391$

$n = 10, \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} = 0.00098$

$\Rightarrow$ n' की ∞ और बढता है, 'ar^n' का मूल्य शून्य के करीब बढता है।
(उसका मूल्य शुन्य के बराबर कभी नहीं होता) और इसलिए उसका अगण्य है।

$\therefore$ उपरोक्त उदाहरण का S_∞ इसतरह होता है,

$$S_\infty = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^\infty}{\frac{1}{2}} = \therefore S_\infty = 2$$

उदाहरण 1: 0.6666...... संख्या को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल: इसे इसतरह लिख सकते है। 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + ... यह एक गुणोत्तर अनुक्रम है, जहाँ

$\therefore$ उपरोक्त उदाहरण का S_∞ इसतरह होता है,

$a = 0.6, r = \frac{0.06}{0.6} = 0.1$ यह G.P है।

$$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{0.6}{1-0.1} = \frac{0.6}{0.9}$$

$$\therefore S_\infty = \frac{2}{3}$$

$\frac{2}{3}$ यह एक परीमंय संख्याहै। जिसे $0.\bar{6}$ के दशमलव रूप में व्यक्त कर सकत

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: 3, 6, 12, ... गुणोत्तर अनुक्रम के G.P प्रथम 6 पदों का जोड ज्ञात कीजिए

हल: येथे, a = 3, $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{6}{3} = 2$, n = 6

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad [\because r > 1]$$

$$S_6 = \frac{3[2^6 - 1]}{2 - 1} = \frac{3[64 - 1]}{1} = 3 \times 63$$

$\therefore$ $S_6 = 189$

उदाहरण 2: 1 + 4 + 16 + ... श्रेणी के कितने पदों का योगफल 1, 365 होगा?

हल: येथे, a = 1, $r = \frac{4}{1} = 4$, $S_n = 1{,}365$, n = ?

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad [\because r > 1]$$

$$1365 = \frac{1[4^n - 1]}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

$1365 \times 3 = 4^n - 1$

$4\,095 = 4^n - 1$

$40\,95 + 1 = 4^n$

$40\,96 = 4^n$

$4^6 = 4^n$

$\therefore$ n = 6

उदाहरण 3: गुणोत्तर अनुक्रम $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots\ldots\ldots$ का G.P योगाफल अनत्न तक ∞ ज्ञात कीजिए ।

हल: यहाँ a = 2, $r = \frac{2/3}{2} = \frac{\cancel{2}}{3} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{3}$, $S_\infty = ?$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

$$S_\infty = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{2/3}$$

$$S_\infty = \cancel{2} \times \frac{3}{\cancel{2}}$$

$\therefore$ $S_\infty = 3$

उदाहरण 4: एक G.P का तिसरा पद 12 है और छठा पद 6 तो पद 96 पदों का 9 योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल: T_3= 12 और T_6 = 96

T_3 = 12 T_6 = 96

$\Rightarrow ar^2 = 12$ ......(1)

$ar^5 = 96$ ......(2)

सूचना : जब P > Q

$\frac{Tp}{Tq} = P^{p-q}$

(2) को (1) से भाग दीजिए $\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{96}{12}$ $r^3 = 8$ $r^3 = 2^3$

$\therefore \boxed{r = 2}$

समजा, $ar^2 = 12$ $a(2)^2 = 12$ $a \times 4 = 12$

$\Rightarrow a = \cancel{12}^3 / \cancel{4}$

$\boxed{a = 3}$

अब, हम S_9 ज्ञात करते है।

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_9 = \frac{3(2^9 - 1)}{2 - 1} = \frac{3(512 - 1)}{1} = 3(511)$$

$\boxed{S_9 = 1533}$

उदाहरण 5: G.P के तीन पदों का जोड 31 है और उनका गुणफल 125 है उन संख्याओं ज्ञात को कीजिए।

हल: मान लीजिए गुणोत्तर अनुक्रम के तीन पद $\frac{a}{r} + a + ar$ है।

तीन पदों का गुणनफल = 125 है।

$\frac{a}{\cancel{r}} \times a \times a\cancel{r} = 125$

$a^3 = 125$

$a = \sqrt[3]{125}$

$\therefore$ a = 5

तीन पदों का योगफल = 31

$\frac{a}{r} + a + ar = 31$

$\frac{5}{r} + 5 + 5r = 31$

$\frac{5}{r} + 5r = 31 - 5 \Rightarrow \frac{5 + 5r^2}{r} = 26$

$5 + 5r^2 = 26r$
$5r^2 - 26r + 5 = 0$
$5r^2 - 25r - r + 5 = 0$
$5r(r - 5) - 1(r - 5 = 0$
$(r - 5)(5r - 1) = 0$
$5r - 1 = 0$ अथवा $r - 5 = 0$

$r = 1/5$ अथवा $r = 5$

अगर $a = 5$ और $r = 1/5$, तर त्याची पदों

$\frac{a}{r} = \frac{5}{1/5} = 5 \times \frac{5}{1} = 25$

$a = 5$

$ar = 5 \times \frac{1}{5} = 1$

यदि $a = 5$ और $r = 5$ तर त्यांची पदे

$\frac{a}{r} = \frac{5}{5} = 1$ $a = 5$ $ar = 5 \times 5 = 25$

∴ गुणोत्तर अनुक्रम के 3 पद 25, 5, 1 है।

स्वाध्याय 2.6

1. निम्न गुणोत्तर श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए

   (i) $1 + 2 + 4 + ...$ 10 पदों तक (ii) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ... \infty$ पदों तक

2. $r = 2$ एक गुणोत्तर और $S_8 = 510$ का G.P. प्रथम ज्ञात कीजिए।

3. G.P का योगफल ज्ञात कीजिए: (i) $1 + 2 + 4 + ... + 512$ (ii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{10}}$

4. $2 + 4 + 8 + ...$ श्रेणी के कितने पदों पदों का योगफल 1022 है?

5. ज्ञात कीजिए (i) $5 + 10 + 20 + ...$श्रेणी में $S_2 : S_4$

   (ii) $4 + 12 + 36 + ...$श्रेणी में $S_4 : S_8$

6. G.P यदि (i) $S_6 : S_3 = 126 : 1$और $T_4 = 125$ तो गुणोत्तर अनुक्रम ज्ञात कीजिए

   (ii) यदि $S_{10} : S_5 = 33 : 32$ और $T_5 = 64$ तो गुणोत्तर अनुक्रम ज्ञात कीजिए

8. अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद पद 6 है और उसका जोड 8 है। G.P. ज्ञात कीजिए

9. G.P केतीन पद ज्ञात कीजिए जिनका योगफल और गुणफल क्रमश:

   (i) 7 और 8 (ii) 21 और 216 (iii) 19 और 216 है।

10. एक व्यक्ती हर वर्ष पिछले वर्ष में किये बचत की आधी धनराशी बचत करना है। यदी 5 वर्षों में कुल बचत ₹ 19,375 है। तो प्रथम वर्ष में कितनी बचत की है ?

समान्तर माध्य [Arithmetic Mean (A.M.)]

निम्न तालिका को ध्यान से देखिए:

समांतर माध्य	मध्य	ध्यान दीजिए
1, 6, 11	$\frac{1+6+11}{3} = \frac{18}{3} = 6$	$\frac{1+11}{2} = \frac{12}{2} = 6$
2, 8, 14	$\frac{2+8+14}{3} = \frac{24}{3} = 8$	$\frac{2+14}{2} = \frac{16}{2} = 8$
7, 12, 17	$\frac{7+12+17}{3} = \frac{36}{3} = 12$	$\frac{7+17}{2} = \frac{24}{2} = 12$

हमें ज्ञात होता है कि यदि 3 पद समान्तर अनुक्रम है तो, मध्य का पद अन्य दो पदों का औसत होता है।

यदि a, A, b एक A.P समांतर अनुक्रम में है। A = $\frac{a+b}{2}$

यदि a, A, b समांतर A.P अनुक्रम में है तो।

यदि A – a = b – A [$\because d = T_1 - T_1 = T_3 - T_2$]

A + A = a + b

2A= a + b

$$\boxed{\mathbf{A = \frac{a+b}{2}}}$$ $\therefore$ दो संख्याओं का समान्तर माध्य उनके योराफल का आधा होता है।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: 7 और 13 चा समांतर माध्य ज्ञात कीजिए

हल: a = 7, b = 13

$$A.M = \frac{a+b}{2} = \frac{7+13}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$\therefore$ AM = 10

उदाहरण 2: यदि (p – q), x, (p + q) A.P. में है तो ज्ञात कीजिए

हल: a = p – q, AM = x, b = p + q

$$A.M = \frac{a+b}{2} x = \frac{p-\cancel{q}+p+\cancel{q}}{2} = \frac{\cancel{2}p}{\cancel{2}}$$

$\therefore x$ = p

हरात्मक मध्य (Harmonic Mean)

यदि तीन पद हरात्मक अनुक्रम में है तो मध्य का पद को अन्य दो पदों का हरात्मक माध्य H.M कहलाता है।

तर $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ हे A.P. मध्ये आहेत

$$\therefore \frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H} \qquad [\because d = T_2 - T_1 = T_3 - T_2]$$

$$\frac{1}{H} + \frac{1}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{2}{H} = \frac{b+a}{ab}$$

$$2ab = H(a + b)$$

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{2ab}{a+b}}$$

दो संख्याओं का हरात्मक माध्य उनके गुणनफल के दुगना को उनके जोड से भाग लगाने पर प्राप्त होता है।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: 1 और 9 के बीच का हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए

हल: $a = 1$ और $b = 9$

$$4M = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \times 1 \times 9}{1+9} = \frac{18}{10}$$

HM = 1.8

गुणोत्तर मध्य (G.M)

यदि तीन पद गुणोत्तर अनुक्रम में है ती मध्यका पद अन्य दो पदों का गुणोत्तर माध्य कहलाता है।

उदा : G.P	माध्य	ध्यान दीजिए
1, 3, 9	3	$\sqrt{1 \times 9} = \sqrt{9} = 3$
4, 8, 16	8	$\sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$
1000, 100, 10	100	$\sqrt{1000 \times 10} = \sqrt{10000} = 100$

यदी a, G, b हे G.P,तो G = $\sqrt{a \times b}$

यदी a, G, b हे G.P, में हो

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \qquad \left[\because \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}\right]$$

$$G^2 = a \times b$$

$$\boxed{\mathbf{G} = \sqrt{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}}$$

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: 4 और 36 का गुणात्तर G.M माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: $a = 4$, b = 36

$$G = \sqrt{a \times b} = \sqrt{4 \times 36} = \sqrt{144}$$

$\therefore$ G = 12

उदाहरण 2: यदि 6, $x + 2$, 54 G.P में होतो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: $a = 6$, $G = x + 2$, $b = 54$

$$G = \sqrt{a \times b}$$

$$x + 2 = \sqrt{6 \times 54} = \sqrt{324} = 18$$

$$x + 2 = 18$$

$$x = 18 - 2 = 16$$

$\therefore$ $x = 16$

A.M, G.M और H.M के बीचमें संबंध

(I) यदि 'a' और 'b' दो धनात्मक संख्याओं A, G, H हे AM, GM और HM तो A, G, H हे G.P. हम जानते है कि 'a' और 'b' दो धनात्मक संख्याऐं होतो

$$A.\ M \Rightarrow A = \frac{a+b}{2} \qquad G.M \Rightarrow G = \sqrt{ab} \qquad H.M \Rightarrow H = \frac{2ab}{a+b}$$

मान लीजिए, $A \times H = \frac{\cancel{a+b}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}ab}{\cancel{a+b}} = ab \quad \sqrt{A \times H} = \sqrt{ab} \quad \sqrt{A \times H} = G$

$\therefore$ G हा A और H का गुणोत्तर बीच में है ।

$\Rightarrow$ A, G, H में G.P बीच में है ।

उदाहरण 1: यदि, a = 2 और b = 32, हो तो A.M., G.M. और H.M. ज्ञात कीजिए।

हल: $AM = \frac{a+b}{2} = \frac{2+32}{2} = \frac{34}{2} = 17$

$$GM = \sqrt{ab} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$HM = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \times 2 \times 32}{2+32} = \frac{128}{34} = \frac{64}{17}$$

सत्यापन: $G = \sqrt{A \times H}$

$$8 = \sqrt{17 \times \frac{64}{17}} = \sqrt{64}$$

$\therefore$ 8 = 8

उदाहरण 2: दत्त a और b केमूल्यों के लिए AM, GM और HM ज्ञात कीजिए।

हल: (i) $a = 4,\ b = 16$

$$AM = \frac{a+b}{2} = \frac{4+16}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$GM = \sqrt{ab} = \sqrt{4\times16} = \sqrt{64} = 8$$

$$HM = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2\times4\times16}{4+16} = \frac{128}{20} = 6.4$$

(ii) $a = 3,\ b = 27$

$$AM = \frac{a+b}{2} = \frac{3+27}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$GM = \sqrt{ab} = \sqrt{3\times27} = \sqrt{81} = 9$$

$$HM = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2\times3\times27}{3+27} = \frac{2\times3\times27}{30} = 5.4$$

(iii) $a = 2,\ b = 50$

$$AM = \frac{a+b}{2} = \frac{2+50}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

$$GM = \sqrt{ab} = \sqrt{2\times50} = \sqrt{100} = 10$$

$$HM = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2\times2\times50}{2+50} = \frac{2\times2\times50}{52} = 3.8$$

a	b	A	G	H
4	16	10	8	6.4
3	27	15	9	5.4
2	50	26	10	3.8

उपरोक्त तालिका से हम निष्कर्ष पर आ सकते है कि दो धनात्मक संख्या a और b, के लिए

A > G > H ..... (1)

ध्यान दीजिए

(i) $a = 3,\ b = 3$

$$AM = \frac{a+b}{2} = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$GM = \sqrt{a\times b} = \sqrt{3\times3} = 3$$

$$HM = \frac{2\times a\times b}{a+b} = \frac{2\times3\times3}{3+3} = \frac{2\times3\times3}{6} = 3$$

(ii) $a = 17, b = 17$

$$AM = \frac{a+b}{2} = \frac{17+17}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

$$GM = \sqrt{a \times b} = \sqrt{17 \times 17} = 17$$

$$HM = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \times 17 \times 17}{17+17} = \frac{2 \times 17 \times 17}{34} = 17$$

उपरोक्त उदाहरणों से हम निर्णय ले सकते हैं कि यदि $a = b$ तो

A.M = G.M = H.M ....(2)

1 आणि 2, च्या परिणामावरुन आपल्याला माहित आहे की, 'a' अणि 'b' या कोणत्याही दोन धन संख्यासाठी

A.M ≥ G.M ≥ H.M

स्वाध्याय 2.7

1. निम्नों का समान्तर माध्य A.M. GM व H.M. ज्ञात कीजिए।

   (i) 12 और 30 (ii) – 8 और – 42 (iii) $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{8}$ (iv) 9 और 18

2. यदि 5, 8, x हरात्मक अनुक्रम में है तो x ज्ञात कीजिए।

3. यदि निम्न समांतर अनुक्रम में है तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

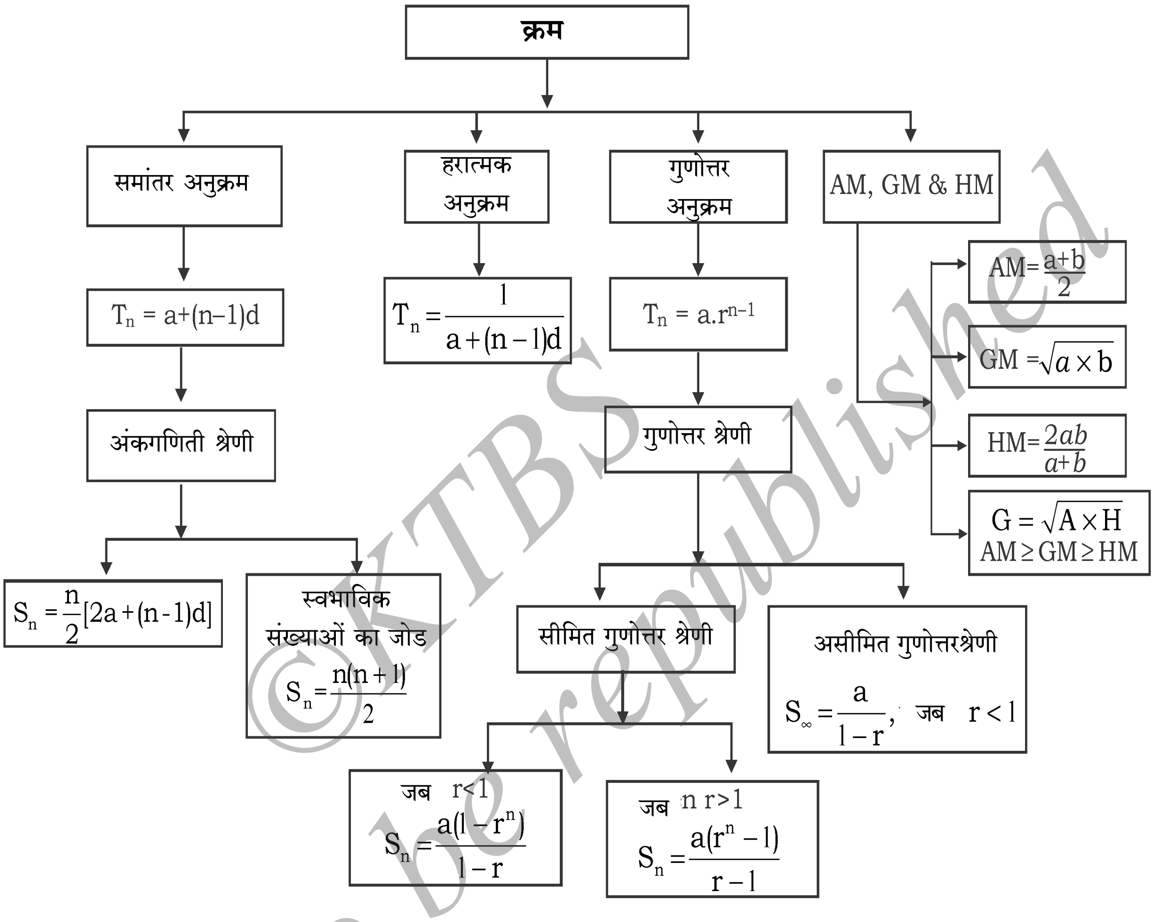
   (i) 5, $(x - 1)$, 0 (ii) $(a + b)^2$, x, $(a - b)^2$

4. दो संख्याओं का गुणनफल 119 है, उनका A.M 12 है तो उन संख्याओं ज्ञात कीजिए।

5. यदि x, $\sqrt{2}$, x, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ G.P में है ता x ज्ञात कीजिए।

6. दो संख्याओं का समांतर माध्य 17 है और गुणोत्तर माध्य 15 है तो उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

7. दो संख्याओं का समांतर माध्य $13/2$ है और गुणोत्तर माध्य 6 है। हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए।


क्रम
समांतर अनुक्रम
हरात्मक अनुक्रम
गुणोत्तर अनुक्रम
AM, GM & HM
$T_n = a+(n-1)d$
$T_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$
$T_n = a.r^{n-1}$
$AM = \frac{a+b}{2}$
$GM = \sqrt{a \times b}$
$HM = \frac{2ab}{a+b}$
$G = \sqrt{A \times H}$
$AM \geq GM \geq HM$
अंकगणिती श्रेणी
गुणोत्तर श्रेणी
$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$
स्वभाविक संख्याओं का जोड
$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
सीमित गुणोत्तर श्रेणी
असीमित गुणोत्तरश्रेणी
$S_\infty = \frac{a}{1-r}$, जब $r<1$
जब $r<1$
$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
जब n $r>1$
$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

उत्तर

अभ्यास 2.1

1] (i), (ii) और (iv) अनुक्रम है   2] (i) 19, 21 (ii) $\frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ (iii) 0.001, 0.0001 (iv) 48, 96

3]1, –3, –7   4](i) $T_3 = 23$, (ii) $T_{10} = 205$ 5] (i) $n^2 - 2n$ (ii) $n^2 + 2n$ 6] n = 14

अभ्यास 2.2

1] (i) –12, – 15, – 18, – 21   (ii) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{6}$ (iii) a – 5b, a – 7b, a – 9b, a – 11b

2] (i) 1, 3, 5, ...   (ii)6, 11, 16 ....   3] (i) 48 (ii)– 148 (iii) 17 (iv) 3 (v) 3 4] 23

5] 60° और 70°.   6] 64   7]– 13, – 8, – 3   8] 10 : 3 9] वर्ष 2012

11] 5, 9, 13, 17 अथवा 17, 13, 9, 5

अभ्यास 2.3

1] 21   2] (i) 1275   (ii) 493(iii) $4a^2 - a^3$ (vi) $\frac{p^2}{2}(3-p)$ 3] 15   4] (a) (i) 210

(ii) 455   (iii) 585   (b) (i) 10   (ii) 5   5] n^2 6] 4100

7] 3, 10, 17, 24   8] 6   9](i) 3, 7, 11 अथवा 11, 7, 3 (ii) 9, 12, 15 अथवा 15, 12, 9

10] 30, 41, 52, 63, 74, 85   11]– 1100   12] 551

अभ्यास 2.4

1] (i), (ii), (iv), (v)   2] (i) $\frac{1}{2n}$ (ii) $\frac{-1}{20}$ 3] $\frac{1}{22}$ 4] (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{6}$

अभ्यास 2.5

1] (i) $\frac{-1}{5}$ (ii) $\sqrt{3}$ 2] (i) (a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (b) $\frac{8}{27}$ (ii) 1   3] 8192

4] (i) $T_{10} = \frac{1}{2}$, $T_{16} = \frac{1}{128}$ (ii) $T_8 = \frac{-1}{27}$, $T_{12} = \frac{-1}{2187}$

(iii) $T_4 = 1$, $T_8 = 625$ 5] (i) 512   (ii) 4^{2n} (iii) $\frac{243}{16}$ (iv) $\frac{1}{x^{28}}$

6] $2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$ 7] 15.625 g   8] 10 पद   9] r = 2, a = 3

10] (i) $\frac{5}{8}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}, \cdots$ (ii) $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}$

अभ्यास 2.6

1] (i) 1023 (ii) $\frac{3}{2}$ 2] 2 3] (i) 1023 (ii) $\frac{1023}{1024}$

4] 9 5] (i) 1 : 5 (ii) 1 : 82 6] (i) 1, 5, 25, ... (ii) 1024, 512, 256 ...

7] 6, $\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, \ldots$ 8] (i) 1, 2, 4 अथवा 4,2,1 (ii) 3, 6, 12 अथवा 12,6,3

(iii) 4, 6, 9 अथवा 9, 6, 4 9] ₹ 10, 000

अभ्यास 2.7

1] (i) AM = 21, GM= $6\sqrt{10}$, HM = $\frac{120}{7}$ (ii) AM = $\frac{5}{16}$, GM = $\frac{1}{4}$, HM = $\frac{1}{5}$

(iii) AM = –25, GM = $4\sqrt{21}$, HM = $\frac{-336}{25}$ (iv) AM = $\frac{27}{2}$, GM = $9\sqrt{2}$, HM = 12

2] 20 3] (i) $\frac{7}{2}$ (ii) $a^2 + b^2$ 4] 7 और 17 5] 1

6] 9 और 25 7] $\frac{72}{13}$

3

वास्तविक संख्याऐं
(Real Numbers)

* यूक्लिड की गृहीति
* अंक गणित का मूलभूत प्रमेय
* उपप्रमेय
* संख्याओं का म.सा.आ.

ईस पूर्व 300 के ऐल्कसेण्ड्रिया के यूक्लिड।

उन्होंने ऐल्कसेण्ड्रिया के विश्वविद्यालय में गणित पाठशाला की स्थापना की। वे पहले व्यक्ति थे जिन्होंने सिध्द किया कि अनगिनित अभाज्य संख्याऐं है। उन्होंनें म.सा.अ. परिकलन करने यूक्लिड कलनविधि बनाई। उन्होंने सिध्द किया कि केवल 5 ''प्लाटानिक ठोस'' होते है। वे, 13 खण्डों के ''ऐलइमेन्टस्'' (The Elements) नामक पुस्तक के लेखक है। उन्हें 'रेखागणित के जनक'' माना जाता है।

यह घटक निम्नों को सरल करने में आपको सहायक है:

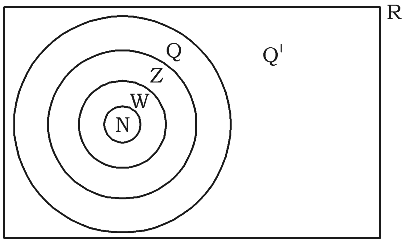
* यूक्लिड की गृहीति स्पष्ट करने में।
* यूक्लिड की विभाजन कलनविधि उपयोगकर दो संख्याओं का म.सा.अ. ज्ञात करने में।
* अंक गणित का मूलभूत प्रमेय व्यक्त करने में।
* उपप्रमेयों को सिध्द करने में।
* $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ यह सिध्द करने में कि अपरिमेय संख्याऐं है।

गणित, विज्ञानों की रानी है और अंक गणित, गणित की रानी है।

– सी. यफ गॉस

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

आप विभिन्न प्रकार के संख्या तथा उनके संबंधों से परिचित है। निम्न आकृति को ध्यान से देखिए।



आपने इन संख्याओं से परिपालित मौलिक प्रक्रियाऐं तथा उनके महत्वपूर्ण गुणोंका अध्ययन किया है। इन गुणों की सहायता से आपने गणित तथा अन्य विषयों की समस्याओं को हल किया। अब, हम इन वास्तविक संख्याओं के बारें में, उनके गुणों तथा उनके अनुप्रयोगों का अधिक अध्ययन करते है।

पहले हम संख्याओं की प्रचलित पहेली पर विचार करते हैं।

एक सायबान में 120 से अधिक भेड (डहशशा) रख नहीं सकते,
यदि दो-दो में गिनते हैं तो एक शेष रहता है,
यदि तीन-तीन में गिनते है तो, दो शेष रहते है,
यदि चार-चार में गिनते है तो, तीन शेष रहते है,
यदि पाँच-पाँच में गिनते है तो, चार शेष रहते है,
यदि छ:-छ: में गिनते है तो, पाँच शेष रहते है,
यदि सात-सात में गिनते है तो कोई भेड शेष नहीं रहता।
उस सायबान में कितने भेड हैं?

क्या आप इस पहेली को हल कर सकते है? इस परिणाम का सत्यापन करने संख्याओं का कौनसा गुण उपयोग कर सकते है?

आईए, इस गुण, सीखते है और बाद में पहेली सुलझाते है।

पूर्णांकों का विभाजन (Divisibility of Integers)

आप, विभाजन के मौलिक प्रक्रिया से परिचित है।

हम कहते हैं एक संख्या a या b को भाग लगाती है यदि **b = Ka k** × कोई स्वभाविक संख्या है।

जब एक भाज्य को किसी भाजक से लगाते है ताकि अनुरूप भगफल और शेष प्राप्त हो। इन चारों का संबंध इस तरह दे सकते है:

भाज्य = (भाजक × भागफल) + शेष

'a' को भाज्य 'b' को भाजक 'q' को भागफल और 'r' शेष मान लीजिए।

तो, इन पदों को निम्न संबंध के रूप में लिख सकते है

a = (b x q) + r

इस परिचित संबंध को रेखा गणित के जनक, महान गणितज्ञ ''यूक्लिड'' के रूप में याद रखते है।

> **गृहीति:** यह एक लघु परिणाम जिसका मुख्य उद्देश प्रमेय सिध्द करना होता है। गृहीति प्रमेय सिध्द करने के विधान का प्रारंबिक चरण है। अंत: गृहिती एक सहायक प्रमेय है।एक गृहीती एक प्रमणित किया हुआ कथन है जो अन्य कथन सिध्द करने में उपयोगी है।

इसे ''यूक्लिड की विभाजन गृहीति''

(EUCLID'S DIVISION LEMMA) कहते है।

यूक्लिड की विभाजन गृहिति निम्न प्रकार से लिखते है।

कलनविधि (अलगोरिदम) एक सुपरिभाषित चरणों की श्रेणी है जो एक समस्या को हल करने का उपक्रम प्रदन करती है।

दत्त घनात्मक पूर्णांक 'a' और 'b' के लिए विशिष्ट पूर्णांक उपस्थित होते है जो सत्यापित करते हैं $a = bq + r$, जहाँ $0 < r < b$ है।

यह अत्यंत प्रचालित परिणाम है, जिसे यूक्लिड के ऐलइमेन्टस् पुस्तक के तखख वें अंक में प्रकाशित है।

सूचना: (a, b) का अर्थ है a और a का म.सा.अ

इस गृहिती के अनेक अनुप्रयोग है। इस गृहीति के उपयोग से दो घनात्मक पूर्णांकों का म.सा.अ. बडी आसानी से ज्ञात कर सकते है।

इस विधान को युक्लिड की विभाजन कलनविधि (अलगोरिदम) (Euclid's Division Algorithm)

स्मरण कर की, मरफ मलफऔर मलफ का म.सा.अ.यह महतम पूर्णांक मलफ है जो दोनों मरफ और मलफ को विभाजित करता है।

40 और 735 निम्न उदाहरणों का अध्ययन कीजिए। ध्यान दीजिए म.सा.अ.को दो विभिन्न विधानों से ज्ञात कर सकते है।

उदाहरण 1: 40 और 735 का म.सा.अ ज्ञात कीजिए।

चरण 1: 40)735(18

-40

335

-320

15

मान लीजिए a =735, b=40

q = 18, r =15

युक्लिड के गृहीति अनुसार

$a = (b \times q) + r$

$735 = (40 \times 18) + 15$

चरण 2: 15)40(2

-30

10

मान लीजिए a=40 और b=15

यहाँ q = 2, r = 10

युक्लिड के गृहीति अनुसार

$a = (b \times q) + r$

$40 = (15 \times 2) + 10$

चरण 3: 10)15(1

-10

5

a =15 और b=10 मान लीजिए

यहाँ q = 1, r = 5

युक्लिड के गृहीति अनुसार

$a = (b \times q) + r$

$15 = (10 \times 1) + 5$

चरण 4: 5)10(2

-10

00

मान लीजिए a =10 और b=5

यहाँ q = 2, r = 0

युक्लिड के गृहीति अनुसार

$a = (b \times q) + r$

$10 = (10 \times 1) + 5$

अब शेष शून्य है, चरण 4 का भाजक ही म.सा.अ. है। अर्थात 735 और 40 का म.सा.अ. '5' है।

प्रयत्न कीजिए: आप इस परिणाम को 735 और 40 के गुणनखण्ड लिखकर सत्यापित कर सकते है।

उदाहरण 2: 513 और 783 का म.सा.अ.ज्ञात कीजिए ।

चरण 1: 513)783(1
-513
270

a = 783 और b = 513 मन लीजिए यहाँ q = 1, r = 270,
युक्लिड के गृहीति अनुसार
a = (b × q) + r
783 = (513×1)+ 270

चरण 2: 270)513(1
-270
243

a = 513 और b=270 मन लीजिए
यहाँ q = 1, r = 243,
युक्लिड के गृहीति अनुसार
a = (b × q) + r
513 = (270×1) + 243

चरण 3: 243)270(1
-243
27

a = 270 और b = 243 मान लीजिए
यहाँ q = 1, r = 27,
युक्लिड के गृहीति अनुसार
a = (b × q) + r
270 = (243×1) + 27

चरण 4: 27)243(9
-243
00

a = 243 और b = 27 मान लीजिए
यहाँ q = 9, r = 0,
शून्यरहित शेष 27 है 783 और 513 का म.सा.अ. 27 है।

सामान्यत: दो घनात्मक पूर्णांक $x > y$ जहाँ x और y या दोन धन पूर्णांकाचा म.सा.वि युक्लिड के विभाजन कलनविधि से ज्ञात करने निम्न चरणों को अनुसरण करते है।

चरण 1 : 'x' और 'y' को युक्लिड गृहिति उपयोग कीजिए

तांकि $x = (y \times q) + r, 0 \leq r < y$

जहाँ q भागफल 'r' शेष है।

सूचन : यदि भाजक, भाज्य का गुणनखण्ड है, अंतिम के पूर्व के शून्य रहित शेष म.सा.अ. होगा।

चरण 2 : यदी $r = 0$, हो y तो x और y का म.सा.अ. है।

यदी $r \neq 0$, हो 'y' और 'r' के लिए उपयोग कीजिए

चरण 3 : इस उपक्रम को शेष शून्य आने तक जारी रखिए इस चरण पर (शून्य रहित शेष) प्राप्त भाजक दत्त घनात्मक पूर्णांकों का म.सा.अ. है।

कोशिश किजिए अब इस घटक के प्रारंभ में दिये हुए भेडों की संख्या की पहेली को हल कीजिए।

सोचिए दोन संख्याओं का म.सा.अ क्या होता है। जब ✻ उनमें एक शून्य है। ✻ दोन्नों शून्य है।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरणे 1: विभाजन कलनविधि उपयोगकर 455 और 42 को भाग लगानेवाली सबसे बडी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल i) पहले बडे पूर्णांक 455 से प्रारंभ कीजिए

42)455(10 $\rightarrow$ भागफल

420 $\rightarrow$ शेष

35 $\quad \therefore 455 = (42 \times 10) + 35$ (यूक्लिड के गृहीति अनुसार)

हल ii) $42 \div 35$ पर विचार कीजिए

35) 42 (1

35

7 $\quad \therefore 42 = (35 \times 1) + 7$

हल ii) $35 \div 7$ पर विचार कीजिए

7) 35 (5

35

00 $\quad \therefore 35 = (7 \times 5) + 0$

$\Rightarrow$ [455,42] क म.सा.अ = [42,35] क म.सा.अ = [35 7] क म.सा.अ = 7

$\therefore$ 455 और 42 को भाग लगानेवाली सबसे बडी संख्या 7 है।

उदाहरणे 2: दर्शाइए कि प्रत्येक घनात्मक सम संख्या 2q के रूप में होती है और प्रत्येक घनात्मक विषम संख्या 2q + 1 के रूप में होती है जहाँ q एक पूर्ण संख्या है।

हल i) एक घनात्मक पूर्णांक है. विभाजन कलनविधि

a और b के लिए उपयोग कीजिए. जहाँ $b=2$ है।

$a = (2 \times q) + r$ जहाँ $0 \leq r < 2$

$a = 2q + r$ जहाँ $r = 0$ अथव $r = 1$

क्योंकि 'a' एक घनात्मक सम संख्या है, 'a' को 2 को विभाजिन करता है।

$\therefore r = 0$

$a = 2q + 0 = 2q$

अत: $a = 2q$ जहाँ 'a' एक घनात्मक विषम संख्या है।

ii) मान लीजिए 'a' एक धनात्मक विषम संख्या है।

विभाजन कलनविधि 'a' और 'b' के लिए उपयोग कीजिए जहाँ $b = 2$ है।

$a = (2 \times q) + r$ जहाँ $0 \leq r < 2$

$a = 2q + r$ जहाँ $r = 0$ किंवा 1

यहाँ $r \neq 0$ ($\therefore a$ ही सम नाही)

$r = 1$

$\therefore a = 2q + 1$

अत: $a = 2q + 1$ जहाँ 'a' एक घनात्मक विषम संख्या है।

उदाहरणे 3: युक्लिड की विभाजन गृहीति उपयोगकर दर्शाइए. एक घनात्मक पूर्णांक का घन या तो 9m, 9m+1 अथवा 9m+8 स्वरूप का होगा जहाँ 'm' कोई पूर्णांक हो।

हल: a और b दो घनात्मक पूर्णांक है और $a > b$

$a = (b \times q) + r$ जहाँ q और r घनात्मक पूर्णांक और $0 \leq r > b$

b = 3 मान लीजिए

$\therefore\ a = 3q + r$ जहाँ $0 \leq r < 3$

(i) यदि $r = 0,\ a = 3q$ (ii) यदि $r = 1,\ a = 3q + 1$ (iii) यदि $r = 2,\ a = 3q + 2$

इनके घन पर विचार कीजिए।

संदर्भ : (i) $a = 3q\ a^3 = (3q)^3 = 27q^3 = 9(3q^3) = 9m$ जहाँ 'm' एक पूर्णांक है और $m = 3q^3$

संदर्भ : (ii) $a = 3q + 1$

$a^3 = (3q + 1)^3$

$[(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2]$

$= 27q^3 + 1 + 27q^2 + 9q = 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1$

$= 9(3q^3 + 3q^2 + q) + 1 = 9m + 1$

जहाँ 'm' जहाँ $m=3q^3 + 3q^2 + q$ एक पूर्णांक है।

संदर्भ : (iii) $a = 3q + 2$

$a^3 = (3q + 2)^3 = 27q^3 + 8 + 54q^2 + 36q$

$= 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8 = 9\ (3q^3 + 6q^2 + 4q) + 8$

$= 9m + 8$

$=9m+8$ जहाँ $m=3q^3+6q^2+4q$ और m पूर्णांक है।

$\therefore$ किसी पूर्णांक का घन $9m,\ 9m + 1$ अथवा $9m + 8$ स्वरूप का होता है जहाँ यह m पूर्णांक ह एक है।

उदाहरणे 4: सिध्द कीजिए कि यदि x और y विषम घनात्मक पूर्णांक संख्या हो तो x^2+y^2 सम संख्या होती है परंतु 4 से भाज्य नहीं होती है।

हल: हम जानते है कि कोई पूर्णांक के लिए एक विषम पूर्णांक 2q+1 के रूप में होता है।

इसलिए, कोई पूर्णांक m और n के लिए मान लीजिए $x = 2m + 1$ और $y = 2n + 1$ है।

हमे ज्ञात है x^2+y^2

$x^2 + y^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2$

$x^2 + y^2 = 4m^2 + 1 + 4m + 4n^2 + 1 + 4n = 4m^2 + 4n^2 + 4m + 4n + 2$

$x^2 + y^2 = 4(m^2 + n^2) + 4(m + n) + 2 = 4\{(m^2 + n^2) + (m + n)\} + 2$

$x^2 + y^2 = 4q + 2$, जहाँ $q = (m^2 + n^2)+(m + n)$

$x^2 + y^2$ ला 4 एक सम संख्या है परंतु 2 शेष राहता है।

$x^2 + y^2$ एक सम संख्या है परंतु 4 से भाज्य नहीं है।

उदाहरणे 5: एक पुस्तक विक्रेता के पास 28 कन्नड और 72 अंग्रेजी की पुस्तकें है। पुस्तकें एक ही गात्र की है। इन पुस्तकों को अलग-अलग बंडलों मे बांध कर रखना है और प्रत्येक बंडल की पुस्तकों की संख्या समान रखना है। बंडलों की न्यूनत्तम संख्या तथा प्रत्येक बंडल में रखी जानेवाली पुस्तकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: कन्नड पुस्तकों की संख्या = 28 अंग्रेजी पुस्तकों की संख्या = 72

हमें युक्लिड की गृहीति से 28 और 72 का म.सा.अ. ज्ञात करना है

$72 = (28 \times 2) + 16$

$28 = (16 \times 1) + 12$

$16 = (12 \times 1) + 04$

$12 = (4 \times 3) + 0$

$\therefore$ 28 और 72 का म.सा.अ.= 4

$\therefore$ प्रत्येक बंडल में 4 पुस्तकें समाविष्ट होंगे।

कन्नड पुस्तकों की बंडलों की संख्या $= \frac{28}{4} = 7$

अंग्रेजी पुस्तकों की बंडलों की संख्या $= \frac{72}{4} = 18$

अभ्यास 3.1

1. युक्लिड की कलनविधि उपयोग करते हुए निम्नों का म.सा.अ. ज्ञात कीजिए :

   (i) 65 और 117 (ii) 237 और 81 (iii) 55 और 210 (iv) 305 और 793

2. सिध्द कीजिए कि एक घतात्मक सम पूर्णांक $4q$ अथवा $4q + 2$ के स्वरुप में होता है। जहाँ q एक पूर्ण संख्या है।

3. युक्लिड की विभाजन गृहीति उपयोग कर दर्शाईए कि एक घनात्मक पूर्णांक का वर्ग 'm' 3m अथवा 3m + 1 के रूप में होता है, कोई पूर्णाक के लिए बल्कि 3m + 2 के लिए नहीं।

4. सिध्द कीजिए क्रमागत तीन घनात्मक पूर्णांकों का गुणात्मक 6 से भाज्य है।

5. 75 गुलाब और 45 लीली फूल उपलब्ध है। इनका उपयोगकर कूलदस्ते तैयार करना है जिसमें दोनों फूल हों। फूल दस्तों में फूलों की संख्या समान रहना है। फूलदस्तों की संख्या जो तैयार किये जा सकते है और उनमें प्रत्येक प्रकार की फूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

6. आयताकार मैदान की लंबाई और चौडाई क्रमश: 110 मीटर और 30 मीटर है। सबसे लंबे दंड की लंबाई ज्ञात कीजिए जो इस मैदान की लंबाई और चौडाई माप सके।

अंक गणित का मूलभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmatic)

हम जानते है कि एक स्वभाविक संख्या को उसके अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिख सकते है।

अभाज्य संख्या : एक घनात्मक पूर्णांक 'p' एक अभाज्य होता है। यदि
i) $P > 1$ और
ii) $P > 1$ और 'p' के गुणनखण्ड केवल 1 और 'p' होता है।

उदाहरणे : $21 = 3 \times 7$
$88 = 2 \times 2 \times 2 \times 11$
$3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$

उपरोक्त कथन का विलोम भी सत्य है। अर्थत.यदि हम घनात्मक अभाज्य संख्याओं को गुणा करते है। हमें एक स्वभाविक संख्या अथवा घनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

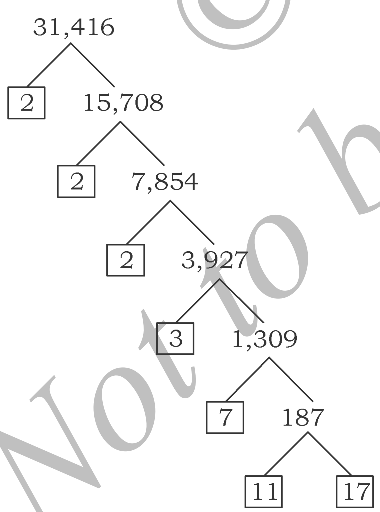
उदाहरणार्थ : $3 \times 11 = 33$ $\quad 11 \times 2 \times 2 = 44$ $\quad 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 189$

इसीतरह, यदि हम संभवनीय अभाज्यों को संग्रह करते हैं. तो हमें एक अनंत संख्याओं का समुच्चय प्राप्त होता है .जिसमें सभी अभाज्य और सभी संभवनीय अभाज्यों के गुणलब्ध उपस्थित होते है।

क्या इस समुच्चय में संयुक्त संख्या भी होगीं? क्या, ऐसे संयुक्त संख्याऐं है जो अभाज्य संख्याओं के गुणलब्ध नही है?

आईए, इस प्रश्न का जवाब ज्ञात करते है।

मान लीजिए एक संख्या है और अपवर्तन वृक्ष द्वारा उसके गुणनखण्ड ज्ञात करते है।



संयुक्त संख्या :
एक संख्या 1 बडी है और अभाज्य नहीं है तो संयुक्त संख्या है।

$31,416 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 17$
$31,416 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 17$

इसे अभाज्य गुणनखण्डन (Prime Factorisation) अथवा Canonical गुणनखण्डन कहते है।

कोई एक संयुक्त संख्या लीजिए उसका अभाज्य गुणनखण्डन प्रयत्न कीजिए। आप को ज्ञात होगा कि प्रत्येक संयुक्त संख्या को उसके अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते है इसे **अंकगणित का मूलभूत प्रमेय** (Fundmental Theorem of arithmetic) कहते है।

अंकगणित के मूलभूत प्रमेय को इसतरह लिखते है ।

प्रत्येक संयुक्त संख्या को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते है और अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त होने के अतिरिक्त यह गुणनखण्डन विशिष्ट होता है।

ध्यान दीजिए, जहाँ तक गुणनखण्ड प्राप्त होने के क्रम को विशेष ध्यान नहीं रखते, एक संयुक्त संख्या को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल लिखने का एक और एक ही विधान होता है।

संख्याओं के गुणनखण्ड की सूची बनाने से संख्याओं का म.सा.अ. और ल.सा.अ. आसानी से ज्ञात कर सकते है।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरणे 1: 18 और 45 का म.सा.अ. और ल.सा.अ.अभाज्य गुणनखण्डन विधान से ज्ञात कीजिए!

हल: 18 और 45 को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

$45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$

$\therefore$ 18 और 45 का म.सा.अ $= 3 \times 3 = 9$

18 और 45 का ल.सा.अ $= 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 90$

स्मरण करें :

2 घनात्मक पूर्णांकों का म.सा.अ. प्रत्येक न्यूनतम घात के सामान्य अभाज्य गुणनखण्डों का गुजनफल है।

2 घनात्मक पूर्णांकों का ल.सा.अ. प्रत्येक उच्चतम घात के गुणनखण्डों का गुणनफल है।

उदाहरणे 2: अभाज्य गुणनखण्डन विधान अर्थात अंकगणित के मूलभूत प्रमेय से 42 और 72 का म.सा.अ.और ल.सा.अ. ज्ञात कीजिए।

हल: $42 = 2 \times 3 \times 7$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

$\therefore$ (42, 72) का म.सा.अ $= 2 \times 3 = 6$

(42, 72) का ल.सा.अ $= 2^3 \times 3^2 \times 7^1 = 504$

ध्यान दीजिए $42 \times 72 = 3{,}024$

(42, 72) का. म.सा.अ. $\times$ (42, 72) का ल.सा.अ $= 6 \times 504 = 3{,}024$

$\therefore$ $42 \times 72 =$ म.सा.अ (42, 72) $\times$ (42, 72) ल.सा.अ

$\therefore$ a और b, दो घनात्मक पूर्णांक के लिए (a, b) का म.सा.अ $\times$ (a, b) का ल.सा.अ $= a \times b$ दो घनात्मक पूर्णांकों का म.सा.अ. ज्ञात हो तो इस संबंध के उपयोग से उनका ल.सा.अ. ज्ञात कर सकते है।

उदाहरणे 3: अभाज्य गुणनखण्डन विधान से 344 और 60 का म.सा.अ. ज्ञात कीजिए। तथापि ल.सा.अ. ज्ञात कीजिए।

हल: $344 = 2 \times 2 \times 2 \times 43 = 2^3 \times 43$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

$\therefore$ (344, 60) म.सा.अ. $= 2^2$

हम जानते है कि (a, b) का ल.सा.अ $\times$ (a, b) का म.सा.अ $= a \times b$

$\therefore$ (a, b) का ल.सा.अ $= \dfrac{a \times b}{HCF(a,b)}$

(344, 60) का ल.सा.अ $= \dfrac{344 \times \cancel{60}^{\cancel{30}^{15}}}{\cancel{2} \times \cancel{2}}$

$\therefore$ (344, 60) का ल.सा.अ = 5160

उदाहरणे 4: उस सबसे बडे घनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए। जिससे 150, 187 और 203 से भाग देने पर क्रमश: 6,7 और 11 शेष रहते है।

हल: यह ज्ञात है कि 150 को अपेक्षित संख्या से भाग देने पर क्रमश: 6,7 और 11 शेष रहते है।

$\therefore$ 150 - 6 = 144

$\therefore$ 144 अपेक्षित संख्या से पूर्णत: भाज्य है।

$\therefore$ अपेक्षित संख्या 144 का गुणनखण्ड है।

इसीतरह अपेक्षित घनात्मक पूर्णांक 187-7=180 और 203-11=192 से भाज्य है।

$\therefore$ अपेक्षित घनात्मक पूर्णांक 144, 180 और 192 का म.सा.अ.है।

अभाज्य गुणनखण्डन से

$144 = 2^4 \times 3^2$ $\quad 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ $\quad 192 = 2^6 \times 3$

$\therefore$ (144, 180, 192) का म.सा.अ $= 2^2 \times 3 = 12$

अत: अपेक्षित घनात्मक पूर्णांक 12 है ।

$\therefore$ 12, वह घनात्मक पूर्णांक है जिससे 150, 187 और 203 से भाग देने पर क्रमश: 6, 7 और 11 शेष रहते है।

उदाहरणे 5: उस न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 35, 56 और 91 से भाग देने पर प्रत्येक संदर्भ में 7 शेष रहता है।

हल: यदि वह संख्या 35, 56 और 91 से भाज्य है अर्थात वह इन संख्याओं का ल.सा.अ. है।

$\therefore$ अभाज्य गुणनखण्डन द्वारा ल.सा.अ. ज्ञात कीजिए

$35 = 5 \times 7$ $\quad 56 = 2^3 \times 7$ $\quad 91 = 7 \times 13$

$\therefore$ 35, 56 और 91 का ल.सा.अ $= 2^3 \times 5 \times 7 \times 13 = 3,640$

$\therefore$ 35, 56 और 91 से भाज्य न्यूनतम संख्या है 3,640 है

क्योंकि शेष 7 रहता है, अपेक्षित संख्या है।

3 ,640 + 7 = 3,647 है।

उदाहरणे 6: एक खेल मैदान के चारों ओर एक वृत्तीय मार्ग है। इस मैदान का एक परिक्रमा पूर्ण करने शीला 36 मिनिट लेती है बल्कि गीता 32 मिनिट में ही यह परिक्रमा पूर्ण करती है। यदि दोनों एक ही स्थान से, एक ही समय पर और उसी दिशा में प्रारंभ करते है, तो कितने मिनिट के बाद वे प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे।

हल: इसे ज्ञात करने, हमें 36 और 32 का ल.सा.अ. ज्ञात करना होगा।

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

$\therefore$ ल.सा.अ. (36, 32) $= 2^5 \times 3^2 = 32 \times 9$

ल.सा.अ. (36, 32) = 288 है।

$\therefore$ शीला और गीता 288 मिनिट के बाद प्रारंभिक संख्या पर मिलेंगे।

उदाहरणे 7: $(7 \times 11 \times 13 + 13)$ एक संयुक्त संख्या है। कथन का समर्थन कीजिए।

हल: $(7 \times 11 \times 13) + 13 = 13\,[(7 \times 11) + 1] = 13[77 + 1] = 13 \times 78$

$\therefore$ यह एक संयुक्त सख्या है।

अभ्यास 3.2

1. प्रत्येक को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणलब्ध के रूप में व्यक्त कीजिए :
   (i) 120 (ii) 3825 (iii) 6762 (iv) 32844
2. यदि $25025 = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \cdot p_4^{x_4}$ तर p_1, p_2, p_3, p_4 तथा x_1, x_2, x_3, x_4 के मूल्य ज्ञात
3. निम्नलिखित पूर्णांकों को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हुए उनका ल.सा.अ. और म.सा.अ. ज्ञात कीजिए.
   (i) 12, 15 और 30 (ii) 18, 81 और 108
4. निम्न पूर्णांक युग्मों के म.सा.अ. और ल.सा.अ. ज्ञात कीजिए. तथा सत्यापन कीजिए कि (a, b) ल.सा.अ. $\times$ (a, b) का म.सा.अ $= a \times b$ है ।
   (i) 16 और 80 (ii) 125 और 55
5. यदि 52 और 182 का म.सा.अ. 26 है तो उनका ल.सा.अ. ज्ञात कीजिए।
6. अभाज्य गुणनखण्डन विधान द्वारा 105 और 1515 का म.सा.अ. ज्ञात कीजिए और ततपश्चात उनका ल.सा.अ. ज्ञात कीजिए।
7. उस सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 17 जोडने से वह दोनों 520 और 468 से पूर्णत: भाज्य है।
8. एक आयताकार कमरे की लंबाई और चौडाई क्रमश: 18 मी. 72 सें.मी. और 13 मी. 20 सें.मी. है। एक की गात्र के वर्गाकार टाइलस् लगाना है। ऐसे टाइलस् की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।
9. एक स्कूल में 8, 9 और 10 कक्षाओं में क्रमश: 48, 42 और 60 है। 8, 9 और 10 वीं के विद्यार्थियों के बीच समान रूप में वितरण करने की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।
10. x, y और z एक से स्थान से, एक ही दिशा में वृत्तीय स्टेडियम के चारों और दौडना प्रारंभ करता है । x ने 126 सेकेण्डों में एक परिक्रमा पूर्ण करता है, y ने 154 सेकेण्डों में पूर्ण करता है और z 231 सेकेण्डो मेंपूर्ण करता है, जबनि वे एक ही स्थान से प्रारंभ करते है। कितने समय के बाद वे प्रारंभिक स्थान पर पुन: एक बार मिलेंगे। इस समय तक x, y और z कितने परिक्रमा पूर्ण करेंगे?

अपरिमेय संख्याऐं [Irrational Numbers]

IX वीं कक्षा में आपको अपरिमेय संख्याओं के बारे में परिचित कराया गया है।

याद कर लें कि यदि किसी संख्या क $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं कर सकते तो उसे अपरिमेय संख्या कहते है, जहा p और q पूर्णांक है और $q \neq 0$ उदा $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ आदि

उदाहरण : $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, π इत्यादी

अब, आईए हम सिध्द करते हैं कि $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ इत्यादि अपरिमेय है।

अर्थात सामान्यत: $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या है जहाँ p एक अभाज्य संख्या है।

इन संख्याओं को अपरिमेय सिध्द करने पूर्व हमें एक प्रमेय सिध्द करना है. जिसकी उपपत्ति अंक गणित के मूलभूत प्रमेय पर आधारित है।

प्रमेय : यदि कोई अभाज्य संख्या 'p',a^2 को भी विभाजित करती है तो, 'a' को 'p' भी विभाजित करता है, जहाँ 'a' एक घनात्मक पूर्णांक है।

उपपत्ति : $a = p_1 \times p_2 \times \ldots\ldots.p_n$ मान लीजिए जहाँ $p_1, p_2\ldots.p_n$ हे 'a' के अभाज्य गुणनखण्ड है। दोनों पक्षों मे वर्ग करने से $a^2 = (p_1 \times p_2 \times \ldots\ldots \times p_n)^2$ परंतु, p ने a^2 को विभाजित करता है।

[$\because$ दत्त] p यह $p_1^2 \times p_2^2 \times \ldots\ldots.p_n^2$ का गुणनखण्ड है।

अंकगणित के मूलभूत प्रमेय के अनुसार $p_1^2 \times p_2^2 \times p_3^2 \times \ldots\ldots\ldots \times p_n^2$ के गुणनखण्डन के अभाज्य एकेक होते है।

$\therefore p_1, p_2 \ldots\ldots.p_n$ यह p में से एक है।

यदि $p = p_k$, k यह 1 से n को विभाजित करता है।

$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots..p_n$ या p_k को विभाजित करता है

$\Rightarrow p_k$ यह a को विभाजित करता है।

$\therefore p$ यह a को विभाजित करता है [$\because p_k = p$]

अब, हम सिध्द करते है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उपपत्ति : मान लीजिए $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है

$\therefore$ ऐसे पूर्णांक p और q हे उपस्थित है ताकि

$\sqrt{2} = p/q$ जहाँ p और q सह - अभाज्य है।

$\sqrt{2} \times q = p$

दानों चक्षों में वर्ग करने से, $2q^2 = p^2$

$\Rightarrow 2$ यह p^2 को विभाजित करता है

$\therefore 2$ या p^2 को विभाजित करता है $\Rightarrow p$ हे सम है।

मन लीजिए $p = 2k$ जहाँ k यह पूर्णांक है।

अब $2q^2 = (2k)^2$

$2q^2 = 4k^2$

$q^2 = 2k^2 \Rightarrow$ q यह सम संख्या है।

$\therefore$ p और q सम संख्या है।

सह - अभाज्य

'a' और *'b'* सह-अभाज्य कहलाते है ।

यदि *'a'* और *'b'* का सामान्य भाजक केवल 1 है।

प्रयत्न कीजिए : सिध्द कीजिए $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

सूचना:

यदि *'x'* और *'y'* यह दो संख्या म.सा.अ *'d'* है तो *'a' 'b'* $\in$ **Z** एस होगा की **ax +by= d**

$\Rightarrow$ p और q का '2' सामान्य गुणखण्ड 'q' है तो यह हमारी मान्यता कि p, q सह-अभाज्य है के विरूध्द है।
$\Rightarrow$ हमारी कल्पना कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है यह गलत है। $\therefore$ $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उपप्रमेय 1: यदि 'a' को bc को विभाजित करता है, (a, b) और म.सा.अ.= 1 तो a को c विभाजित करता है।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: सिध्द कीजिए $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : यदि संभव हो, मान लीजिए $5-\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

$\Rightarrow$ $5-\sqrt{3} = p/q$, जहाँ $p, q \in z, q \neq 0$

$5 - p/q = \sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{5q-p}{q} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। $\because \dfrac{5q-p}{q}$ परंतु $\sqrt{3}$ परिमेय संख्या नहीं है।

यह हमारी कल्पना के विपरीत है।

$\therefore$ हमारी कल्पना कि $5-\sqrt{3}$ परिमेय संख्या है यह गलत है।

$\Rightarrow 5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 2: सिध्द कीजिए $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : यदि संभव हो, मान लीजिए $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$\Rightarrow \sqrt{3}+\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, जेथे p, q, $\in$ z , आणि q $\neq$ 0

$\Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{p}{q} - \sqrt{2}$

दोनों पक्षों में वर्ग लेने से $(\sqrt{3})^2 = \left(\dfrac{p}{q}-\sqrt{2}\right)^2$ $3 = \dfrac{p^2}{q^2} - 2.\sqrt{2}.\dfrac{p}{q} + 2$

$2\sqrt{2}.\dfrac{p}{q} = \dfrac{p^2}{q^2} + 2 - 3 \Rightarrow 2\sqrt{2}.\dfrac{p}{q} = \dfrac{p^2}{q^2} - 1$

$(\sqrt{2})2\dfrac{p}{q} = \dfrac{p^2-1q^2}{q^2}$ $\sqrt{2} = \left(\dfrac{p^2-1q^2}{q}\right)\left(\dfrac{q}{2p}\right)$

$\sqrt{2} = \dfrac{p^2-1q^2}{2pq} \Rightarrow \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या

> **सूचना :** पढिए
> p/ab को; p,ab को विभाजित करता है।
> p/a को, p,a को विभाजित करता है।
> p/b को, p,b को विभाजित करता है।

$\because \dfrac{p^2-q^2}{2pq}$ एक परिमेय है।

परंतु $\sqrt{2}$ यह परिमेय संख्या नहीं है। यह एक विपरीत कथन उत्पन्न करता है।

$\therefore$ हमारी कल्पना कि $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ परिमेय है यह गलत है।

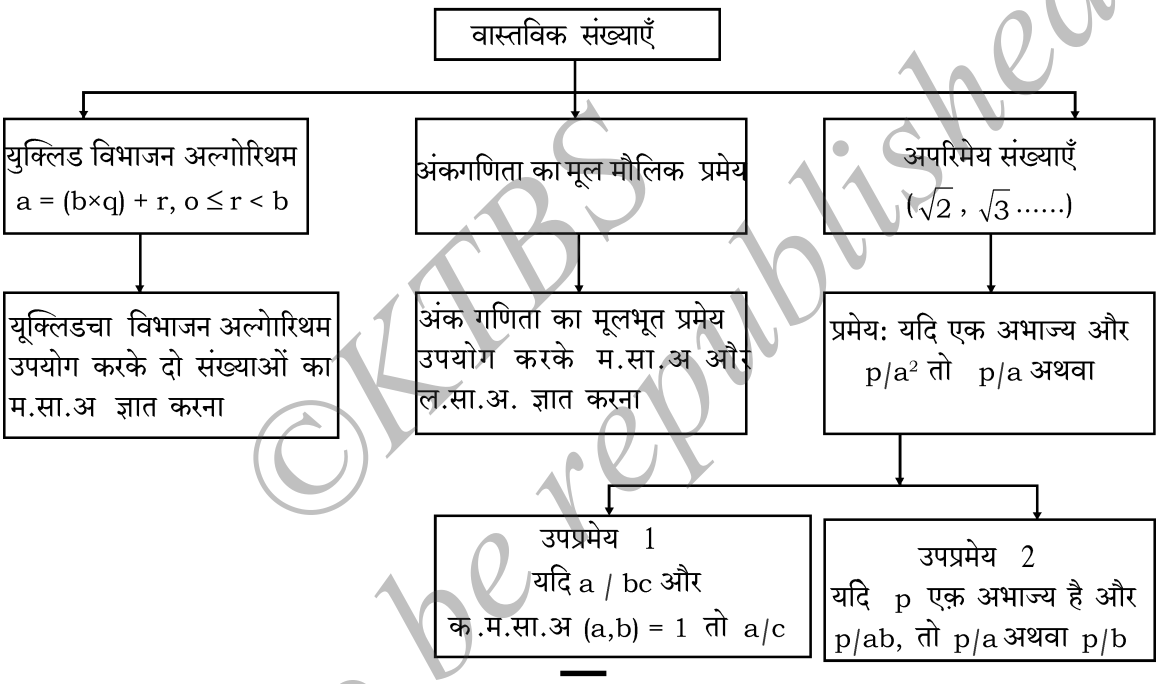
$\Rightarrow \sqrt{3}+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अभ्यास 3.3

1. सिध्द कीजिए $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।
2. सिध्द कीजिए निम्नलिखित अपरिमेय संख्या है

(i) $2\sqrt{3}$ (ii) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (iii) $3+\sqrt{5}$

(iv) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ (v) $2\sqrt{3}-4$



उत्तर

अभ्यास 3.1

1] (i) 13 (ii) 3 (iii) 5 (iv) 61

5] फुलदस्ते= 15, प्रत्येक फूरदस्ते में फुलो की संख्या = (5 + 3) = 8

6] 10 मी

अभ्यास 3.2

1] (i) $2^3 \times 3 \times 5$ (ii) $3^2 \times 5^2 \times 17$ (iii) $2 \times 3 \times 7^2 \times 23$ (iv) $2^2 \times 3 \times 7 \times 17 \times 23$

2] $p_1 = 5$, $p_2 = 7$, $p_3 = 11$, $p_4 = 13$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$

3] (i) म. सा. अ = 3, ल. सा. अ = 60 (ii) म. सा. अ = 9, ल. सा. अ = 324

5] 364 6] 15; 10,605 7] 4,663 8] 4,290 9] 1,680

10] 1,386 सेंकेण्ड के बाद

$x \rightarrow 11$ परिक्रम $y \rightarrow 9$ परिक्रम $z \rightarrow 6$ परिक्रम

4

क्रमचय और संचय

Permutations and Combinations

* गणन का मौलिक सिध्दांत
* क्रमचय
* फैक्टोश्यिल अंकन पध्दति (Factorial notation
* $^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
* संचय
* $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

जेकोब बरनोली

(1654 - 1705 ई. सन)

स्विस गणितज्ञ, जेकाब बरनोली ने अपने आर्स कंजेन्टान्डली नामक पुस्तक में क्रमचय और संचय के बारे में पुर्ण विवेचन दिया है (यह पुस्तक उनकी मृत्य के बाद इ.सन् 1713 मप्रकाशिनक्षुई)

* यह घटक आपको सहायक है :
* गणन का मौलिक सिध्दांत कथित करने में ।
* क्रमचय और संचय परिभाषित करने में।
* फैक्टोरियल संकेत उपयोग करने में।
* क्रमचयों की संख्या का सूत्र ^nP_r निकालने में।
* संचयों की संख्या का सूत्र ^nC_r निकालने में।
* क्रमचय और संचय में अंतर करने में।
* ^nP_r और ^nC_r के उपयोग से गणित हल करने में।

गणित में प्रश्न प्रस्तावित करने की कला को, उसे हल करने के लिए अधिक मूल्य देना है

– जार्ज कान्टर

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

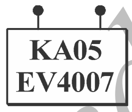
आईए, हम घटक को जीवन की वास्तविक घटनाओं से प्रारंभ करते है। इन्हें समूहों में अध्ययन कीजिए

दृष्टांत 1:

सडक पर हम अनेक प्रकार के वाहनों को आते जाते देखते हैं । प्रत्येक वाहन पर अपने पंजीकृन संख्या के साथ संख्या फलक (number plate) होता है, याद रखिए प्रत्येक संख्या फलक पर निम्न जानकारी होती है।

a) राज्य का नाय (उदा:घअ - कर्नाटक)

b) प्रांतीय वाहतुक कार्यालय कोड नंबर
   (05 - बेंगलूर - जयनगर RTO)



c) अंग्रेजी अक्षर

d) साथ में संख्या (एक अंक से चार अंको तक)

क्या आप जानते हैं एक श्रेणी में कितने वाहनों का पंजीकरण होता है? आपको जानकर आइचर्य होगा 9999 वाहन।

क्या आप जानते हैं इन संख्याओं को आर. ही. ओ व्दारा दिये जाते है? इत गणन में गणित का कौनसा सिध्दांत उपयोग होता है ?

दृष्टांत 2:

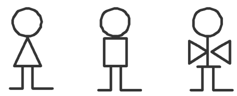
मान लीजिए आपके पास संख्यायुक्त ताला (number lock) का एक सुटकेस है। संख्यायुक्त ताला के तीन पहिये होते हैं और प्रत्येक पहिये पर 0 से 9 अंक्ति होता है। ताला तभी खुलता है जब तीन विशिष्ट अंक किसी निश्चित क्रम में व्यवस्थित होते हैं अथवा बिना अंक दोहराये एक अनुक्रम में आते हैं। मान लीजिए इस अनुक्रम को भूल जाते हैं ताला खोलने तीन अंकों के कितने अनुक्रमों की जांच करनी होगी? इस प्रश्न का उत्तर देने सभी तीन अंकों की संख्याओं की सूची बनाना होगी ? परन्तु इसमे बहुन सारा समय व्यय होगा। क्या कोई गणितीय कलपना से सभी संभावनाओं को जान सकते हैं?

इस घटक में हम मूल गणन के विधानों को सीखेंगें जिससे उपरोकत संदर्भों के हल ज्ञात कर सके। पहले चरण में, हम गणन विधानों को सीखने सब से मौलिक सिध्दांत को ध्यानपूर्वक परीक्षण करना होगा । इस घ़टक का मुख्य विषय है गणन क्रिया। कुछ वस्तुओं को समुच्चय दीये जाने पर कुछ विशिवताओं के आधार पर एक उपसमुच्चय को व्यवस्थित करना होगा अथवा कुछ विशेवताओं के आधार पर एक उपसमुच्चय चुनना है।

गणन करने का मौलिक सिध्दांत

Fundamental Principle of Counting (FPC)

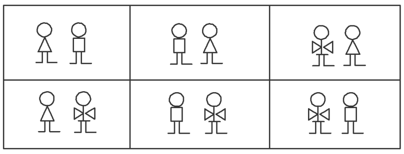
निम्न दृष्टांतों का अध्ययन कीजिए।

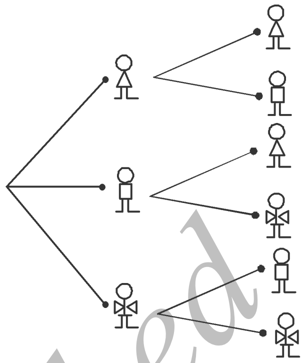


उदाहरण 1: चित्र में दिखाये जैसे तीन गुडे (dolls) हैं।
इन में से दो को खाने में (Shelf) व्यवस्थित करना है।
इनको कितने विधानों में व्यवस्थित कर सकते हैं?

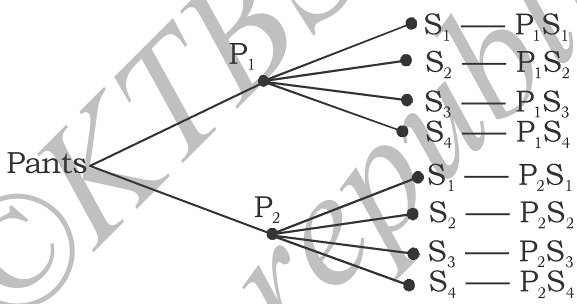
पहले और दूसरे गुडे को व्यवस्थित करने के विधानों से बना वृक्षालेख देखिए। इस आलेख से मालूम होता है कि प्रथम गुडे को तीन विभिन्न विधानों में चुन सकते हैं और इन सभी चयनों में दूसरे गुड्डे को दो विधानों में चुन सकते हैं।

3 में से 2 गुड्डों को व्यवस्थित करने के विधान $3 \times 2 = 6$ विधान होते हैं।
6 विभिन्न विधानों को निम्न रूप से दर्शा सकते हैं





उदाहरण 2: एक लडके के पास 2 पैट और 4 शर्ट है। कितने विधियों से एक पैटं और शर्ट की जोडी में वइ पहन सकताहै? एक पैटं को दो विधानों से चुन सकते है और प्रत्येक पैटं के चयन के साथ एक शर्ट को चार विधानों में चुन सकते है। हम पैटं को P_1 और P_2 से और 4 शर्टों को S_1, S_2, S_3 और S_4 से सूचित करते हैं। एक पैट और एक शर्ट की जोडियों के विधानों को निम्न वृक्षालेख द्वारा दर्शा सकते है।



∴ कुल मिलाकर 8 विधान हैं
अन्य शब्दों में $2 \times 4 = 8$ विधानों से एक पैंट और एक शर्ट की जोडी वना सकते हैं।

उदाहरण 3: संजय नाश्ता करने एक हॉटेल जाता है। मेलू कार्ड में परासी जानेवाली निम्न खाद्य समग्री सूचित की गई है।

नास्ता	**मिठाई**	**गरम पेय**
इडली (T_1)	केसरी बाथ (S_1)	कॉफी (H_1)
दोसा (T_2)	जामून (S_2)	चाय (H_2)
पुरी (T_3)		बदाम दुध (H_3)
खाराबाथ (T_1)		

प्रत्येक प्रकार में से एक पदार्थ को कितनी विधियों से चुन सकते है नाश्ता को 4 विभिन्न प्रकारों से चुन सकते है। नाश्ता के बाद, एक मिठाई को 2 विभिन्न प्रकारों से चुन सकते हैं।

∴ $4 \times 2 = 8$ प्रकार से एक नाश्ता और एक मिठाई चुन सकते हैं।

उपरोक्त 8 विधानों के लिए, गरम पेय 3 विभिन्न प्रकार से चुन सकते हैं

∴ $8 \times 3 = 24$ विधानों से संजय श्वाध पदार्थ चुन सकता है।

∴ कुल विधान $= 4 \times 2 \times 3 = 24$

यदि नाश्ता के पदार्श को T_1, T_2, T_3 और मिठाई को S_1,और S_2,से गरम पेय को H_1, H_2 तथा H_3, असे से सूचित करें तो, संभवनीय 24 विधानों को निम्न नालिका द्वारा निरूपित कर सकते हैं।

$T_1\ S_1\ H_1$	$T_2\ S_1\ H_1$	$T_3\ S_1\ H_1$	$T_4\ S_1\ H_1$
$T_1\ S_2\ H_1$	$T_2\ S_2\ H_1$	$T_3\ S_2\ H_1$	$T_4\ S_2\ H_1$
$T_1\ S_1\ H_2$	$T_2\ S_1\ H_2$	$T_3\ S_1\ H_2$	$T_4\ S_1\ H_2$
$T_1\ S_2\ H_2$	$T_2\ S_2\ H_2$	$T_3\ S_2\ H_2$	$T_4\ S_2\ H_2$
$T_1\ S_1\ H_3$	$T_2\ S_1\ H_3$	$T_3\ S_1\ H_3$	$T_4\ S_1\ H_3$
$T_1\ S_2\ H_3$	$T_2\ S_2\ H_3$	$T_3\ S_2\ H_3$	$T_4\ S_2\ H_3$

उपरोक्त तीन उदाहरणों से प्राप्त दत्तांश का तालिका में लिखा गया । तालिका का अध्ययन कीजिए और समूहों में गणन सिध्दांत की चर्चा कीजिए।

उदाहरण	विधानों के प्रकार			कुल विधानों की संख्या
	कृति 1	**कृति** 2	**कृति** 3	
1	3	2	–	3 × 2 = 6
2	4	2	–	4 × 2 = 8
3	4	2	3	4 × 2 × 3 = 24

हम निर्णय लेते हुए गणन की **मौलिक सिध्दांत अथवा गुणनफल सिध्दांत** इसतरह लिख सकते है।

यदि एक कार्य को 'm' विभिन्न विधानों से कर सकते हैं., इन 'm' विधानों के लिज यदि दूसरे कार्य को 'n' विधानों से कर सकते हैं और इन कार्यों के लिए तीशरे कार्य को 'p' विधानों से कर सकते हैं तो तीनों कार्यों को एक केबाद (m×n×p) विधानोंसे पूर्ण करसकते

अब बिना वास्तव रूप से गिनती के हम, दो कार्यों कुल विधानों को ज्ञात कर सकते है। इस मौलिक गणन सिध्दांत को उदाहरण व्दारा दर्शाते है।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: बिना अंको के पुनरावृति किये 1, 2, 3, 4, 5 में से किनने दो अंको की कितनी संख्याऐं बना सकले हैं?

हल : दिये गए अंक है: {1, 2, 3, 4, 5}

2- अंकों की संख्या बनानी है, इसके लिए 2 पेटियाँ बनाते हैं ।

एक इकाई स्थान के लिए और दूसरा दहाई स्थान के लिए ।

पहले हम इकाई स्थान पूर्ण करणे हैं बाद में दहाई का इकाई स्थान की पेटी को हम 5 विभिन्न विधानों से पूर्ण कर सकते हैं, क्योकि हम अंको को नहीं दोहशना है, दहाई स्थान की पेटी को 4 विभिन्न विधानों से पूर्ण कर सकते हैं। मौलिक गणन सिध्दांत उपयोग करने पर हमें 5×4=20 फबिना अंकों की पुनरावृति किये 1, 2, 3, 4, 5 अंको को उपयोगकर हम 20 विधानों 2- अंको की संख्या बना सकते हैं।

यदि अंकों की पुनरावृति करें तो दहाई स्थान भी 5 विधानों से 1, 2, 3, 4, उपयोग कर भर सकते हैं।

पुनरावृति करने पर, 1, 2, 3, 4, अंकों का उपयोयकर हम कुल 5 × 5 = 25 विधानों से पूर्ण कर सकते हैं।

सूचना : वास्तव में 2- अंको की संख्याओं को लिखकर चर्चा कीजिए और सत्यापन कीजिए।

उदाहरण 2: बिना पुनरावृति किये 5 स्वरों का उपयोयकर कितने 3 अक्षशें के कोड बना सकते हैं?

हल : स्वर हैं - a, e, i, o, u

हमें तीन अक्षरों के कोड बनाना है?

प्रथम अक्षर को 5 विधानों से चुन सकते हैं।

दूसरे अक्षर को 4 विधानों से चुन सकते हैं (पुनरावृति नहीं करना है)

कुल मिलाकर 3 अक्षरों के कोड $= 5 \times 4 \times 3 = 60$ विधानों से बना सकते है।

उदाहरण 3: बिना पुनरावृति किये 0, 1, 2, 3 और 4 अंको के उपयोग से कितने 3-अंको की संख्या बना सकते है?

हल : अंको की संख्या में सैकडा, दहाई इकाई होते हैं।

$\therefore$ चुनने के लिए उपलब्ध अंक {0, 1, 2, 3, 4}

सैकडा का स्थान: सैकडे पर शून्य भर नही सकते है। इसलिए सैकडे के स्थान पर 4 विधानों से भर सकते हैं। अर्थात - 1, 2, 3, 4

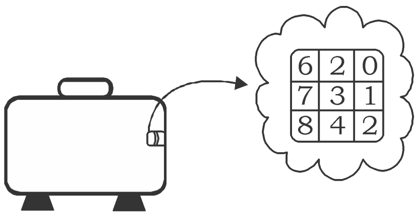
दहाई का स्थान: इस दहाई स्थान को पाँच विधानों से भर सकते है पुनशवृति की अनुमति है और शून्य का भी उपयोग कर सकते है।

इकाई स्थान: इसे 5 विघानों से भर सकते हैं।

$\therefore$ 0, 1, 2, 3, 4 अंको के उपयोग से $4 \times 5 \times 5 = 100$ संख्या बना सकते है।

उदाहरण 4: आईए , हम सूटकेस ताले की समस्या (दृष्टांत 2) को मौलिक गणन सिध्दांत उपयोग करके ज्ञात कर सकते हैं। सूटकेस के ताले में 3 अंक है।

प्रत्येक संख्या 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. से 10 विभिन्न विधानों से भर सकते हैं।



स्पष्ट है कि अंकों की पुनरावृति हो सकती है।

कुल मिलाकर उस ताले के $10 \times 10 \times 10 = 1000$ विधानों से संख्या बन सकते हैं।

इसलिए, सूटकेस को खोलना है तो 1000 विधानों से प्रयत्न करना होगा ?

अभ्यास 4.1

1. बिना अंकों की पुनरावृति किये 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकों की उपयोगकर कितने 3 अंको की संख्या बना सकते है?
2. यदि अंको को दोहराया नहीं गया तो 3, 5, 7, 8, 9, अंको को उपयोगकर कितने 3 अंको की संख्या बना सकते हैं?
3. प्रथम 10 अंग्रेजी अक्षरों को उपयोगकर कितने 3 अक्षरीय कोड बना सकते हैं, यदि कोई अक्षर दोहराया नहीं गया ।
4. 0 से 9 अंको को उपयोयकर कितने 5 अंको के टेलीफोन संख्याऐं बना सकते है जब कि प्रत्येक संख्या 65 से प्रारंभ होती है और कोई अंक एक से अधिक बार नहीं दोहराया जाता?
5. यदि एक निष्पक्ष सिक्के को उच्छालने पर प्राप्त परिणाम कितने होंगें ?
6. 5 भिन्न रंगों के ध्वज दिये गये है, एक के नीचे एक लेते हुए 2 ध्वजों से कितने विभिन्न सिग्नल बना सकते हैं ?

क्रयचय और संचय

गणन की मैलिक सिध्दांत सीखते समय, हम ने ध्यान दिया है कि सभी उदाहरणों कुछ वसतुऐं दी गई हैं और उन में हमें कुछ वस्तुओं चयन करना है। अब हम वस्तुऐं के चुनने और व्यवस्थित करने के बारें में अध्ययन करेंगें ।

तालिका में दिये हुए उदाहरणों का अध्ययन कीजिए

'P' स्तंभ में दिये गए पहले गणित पढिए और बाद में स्तंभ 'C' में दिये पहले गणित को । अब दोनों की तुलना कीजिए। इसीतरह अन्य गणितों के लिए यह प्रक्रिया दोहराईए।

क्र.सं.	स्तंभ 'P'	स्तंभ 'C'
1.	अध्यक्ष और कार्यदर्शी पद के लिए 3 लोय प्रतिस्पर्धी हैं । कितने विधियों से इन्हें चुना जा सकता है?	2 पद के लिए 3 व्यकितयों ने स्पर्धा की है। कितने विधानों इन पदों को भरा जा सकता है?
2.	एक बच्ची के पास 4 फ्राक और जोडी जूते हैं। कितने विधियों से वह उन्हें पहन सकती है?	एक भगीचे में 8 सफेद और 2 लाल गुलाब हैं। कितने विधानों में 4 फुलों को चुन सकते है तीक उसमें 2 लाल हो?
3.	कितनी विधानों में TEACH के सभी अक्षयें को व्यवस्थित कर सकते है ?	कितने विधानों में MEANS के सभी अक्षर चुने जा सकते हैं?

व्यवस्थित कर सकते हैं?

क्या प्रत्येक स्तंभ के गणितों कोई समरूपता दिखाई देती है? 'P' स्तंभ के गणितों को हमें व्यवस्थितओं करने विधानों की सख्या मालूम करनी है। स्तंभ 'C' के गणितों में हमें चयन करने विधानों की संख्या ज्ञात करना है।

उपरोक्त गणितों को हल करने समय हमें पहले यह जानना है क्या वह व्यवस्था है अथवा चयन । उदाहरण के लिए हम उपशेक्त तालिका पहला गणित समझने प्रयत्न करते है।

मान लीजिए A, B और C व्यकित हैं। दो पद है अध्यक्ष और कार्यदर्शी ।इसे हम पेटी में दिखाते है और सभी संभवनाओं को लिखते हैं।

क्र.सं.	अध्यक्ष	कार्यदर्शी
1	A	B
2	A	C
3	B	A
4	B	C
5	C	A
6	C	B

संदर्भ 1: यदि 'A' अध्यक्ष बनें तो 'B' कार्यदर्शी बनता है अथवा 'C' कार्यदर्शी बनता है।
संदर्भ 2: यदि 'B' अध्यक्ष बनें तो 'A' अथवा 'C' कार्यदर्शी बनता है।
संदर्भ 3: यदि 'A' अध्यक्ष बनें ता 'B' अथवा कार्यदर्शी बनता है। इसतरह कुल मिलाकर चुनने को 6 संभवनीय विधान हैं।

मान लीजिए A, B और C व्यकित है । केवल दो ही पद है । हम पेटी में निरूपित करते है और सभी संभवानओं को लिखते हैं।

क्र.सं.	विधान
1	A, B
2	A, C
3	B, C

संदर्भ 1: यदि 'A' एक पद के लिए चुना जाता है तो दूसरा पद 'B' अथवा 'C' दिया जा सकता है।
संदर्भ 2: यदि 'B' एक पद के चुना जाता है तो दूसरा पद 'C' दिया जा सकता है। परन्तु 'A' को नहीं । क्योंकि AB और BA दोनों एक प्रकार के चयन हैं। अत:पद भरे जाने के केवल 3 विधान है।

उपरोकत उदाहरणों से स्पष्ट है कि P स्तंभ के उदाहरणों में चीजों को अथवा वस्तुओं अथवा व्यकितयों को किसी क्रम के अनुसार व्यवस्थित अर्थवा चयन है। C स्तंभ में चीजों को, अथवा वस्तुओं अथवा व्यकितयों को बिना किसी क्रम के अनुसार चयन किये गए हैं।

क्रम को ध्यान में रखकर किये हुए ऐसी व्यवस्थाओं को क्रमचय (permutation) कहते है तथा क्रम को बिना ध्यान में रखकर किये चयन को संचय (combinations) कहते है।

क्रमचय (Permutation): किसी क्रम के अनुसार व्यवस्थित वस्तुओं के समुच्चय को क्रमचय कहते हैं। यह क्रम से किया हुआ वस्तुओं को व्यवस्था है।

***r* वस्तुओं को एक साथ लेकर *n* वस्तुओं का क्रमचय क्रमको ध्यान में रखते दुए *n* वस्तुओं में से *r* वस्तुओं का एक उपसमुच्चय है।**

'n' विभिन्न वस्तुओं में से 'r' वस्तुओं के साथ लेकर बनाये क्रमचय को ^nP_r से सूचित करते हैं,जहाँ $r \leq n$ हैं।

संचय (Combination) : बिना किसी क्रम से बनायें, वस्तुओं के चयन के समुच्चय को संचय कहते हैं। 'r' **वस्तुओं को एक साथ लेकर** 'n' वस्तुओं का संचय, बिना क्रम से 'n' वस्तुओं में से 'r' वस्तुओं का उपसमुच्चय है। ध्यान दीजिए समुच्चय के पदों को लिखते समय कोई क्रम नहीं होता। उदा $\{1,3,2\}$ $\{2,1,3\}$ 'n' वस्तुओं में 'r' वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाये संचय कों ^nC_r से सुचित करते हैं जहाँ $r \le n$ हैं।

अभ्यास 4.2

I. नीचे व्यवस्थाओं के और चयन के कुछ उदाहरण दिये गए हैं। उन्हें क्रमचय और संचय में वर्गीकृत कीजिए।

1. 12 व्यकितयों में सें 5 व्यकितयों की समिति का चयन करना ।
2. एक शेल्फ (Shelf) पर 5 विभिन्न पुस्तकों को व्यवस्थिा करना
3. 8 व्यक्तियों के लिए 8 कुर्सियाँ बैठने के लिए हैं ।
4. 7 व्यकितयों में से एक अध्यक्ष, एक कार्यदर्शी और एक कोषाध्यक्ष चुनना है।
5. बच्चों के कपडों के दुकानदार के पास फ्रॉक के 10 नमूने हैं और वह खिडकी पर उनमें से 3 को प्रदर्शित करना चाहता है।
6. 'ARITHMETIC' शब्द के अक्षरों में 3 अक्षरों के शब्द के शब्द बनना है।
7. एक प्रश्न पत्र में 12 प्रश्न हैं, विधार्थियों को 2 प्रथम दो प्रश्नों को उत्तर देना ही है और अवशिष्ठ प्रश्नों में से 8 प्रश्नों को चुनना है।
8. एक पेटी में से 5 काले और 7 सफेद गेंदें है। 3 गेंदों को इसतरद चुनना है ताकि 2 काले और 1सफेद हैं।
9. बिना अंकों की पुनरावृति किये 1, 3, 5, 7, 9 में से 3 अंकों की संख्याओं को बना सकते हैं।
10. एक वृत्तीय कुंजी वलय में 5 कुंजियों को व्यवस्थित करना।
11. एक समतल में 7 बिन्द हैं और कोई 3 बिन्दऐं समरेख नहीं हैं। तीन असमरेख बिन्दुओं में त्रिभुज बनाना हैं।
12. 10 खिलोंनों के संग्रह को 2 बच्चों में समान रूप वितरित करना है। उपशेक्त प्रत्येक उदाहरण में बताइए कि वह क्रमचय अथवा संचय क्यों हैं।

'r' वें पेटी भरने के विधानों की संख्या ज्ञात करने का सामान्य सूत्र ज्ञात करना:

$^5P_5 = 5\times4\times3\times2\times\boxed{1}$

$^5P_4 = 5\times4\times3\times\boxed{2}$

$^5P_3 = 5\times4\times\boxed{3}$

$^5P_2 = 5\times\boxed{4}$

$^5P_1 = \boxed{5}$

गणन के मौलिक सिध्दांत प्रत्येक क्रमचय का विस्तार निम्न रूप से लिख सकते हैं। प्रत्येक क्रमचय में, अंतिन पेटी भरने के विधानों को ध्यान से देखिए ।

सभी क्रमचय में एक सामान्य नमुना होता है।

n, के मूल्य r और अंतिम पेटी भरने विधानों की संख्या में संबंध होता है। यह संबंध इसतरह हैं।

'r' वें पेटी भरने के विधानों की संख्या ज्ञात करने 'n' में. से r घटाकर 1 जोडिए ।

अर्थात :

निम्नलिखित उदाहरणों का अध्ययन कीजिए :

1) **पर विचार कीजिए –** हम जानते हैं कि अंतिम पेटी अर्थात वें पेटी को भरने का 1 मात्र विधान है। इसे हम, 5 में 5 घटाकर एक 1 जोड प्राप्त कर सकते हैं।

   अर्थात: $(5 - 5 + 1) = 0 + 1 = 1$ विधान

2) **$^5P_4$ पर विचार कीजिए –** यहाँ भी हम जानते है कि 4थी पेटी भरने के 2 विधान है। इसे हम 5 में 4 को घटाकर 1 जोडने पर प्राप्त कर सकते हैं।

   अर्थात: $(5 - 4 + 1) = 1 + 1 = 2$ विधान

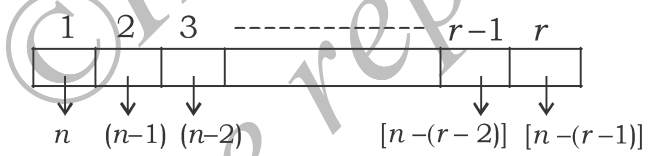
3) **$^5P_3$ पर विचार कीजिए –** यहाँ पर भी हमें ज्ञात होता है कि अंतिम पेटी को 3 विधानों से भर सकते हैं। इसे हम (5 में. से 3) घटाकर और उसे 1 जोडनो पर प्राप्त कर सकते हैं।

   अर्थात: $(5 - 3 + 1) = 2 + 1 = 3$ विधान

अत: यह निर्णय लसकते हैं कि ^nP_r में r^{th} वी पेटी को $(n - r + 1)$ विधानों से भर सकत हैं।

'n' वस्तुओं में से 'r' को एक साथ लेकर क्रमचयों संख्या, 'r' खाली पेटियों को 'n' वस्तुओं से भरने के समान हैं।

मान लीजिए 'n' विभिन्न वस्तुओं को 'r' पेटियाँ निम्न रूप से दिये गए हैं।



पहले पेटी में 'n' विभिन्न दत्त वस्तुओं को 'n' विभिन्न विधानों में भर सकते हैं।

इसतरह, प्रथम पेटी को 'n' विभिन्न विधानों से भर सकते

पहली पेटी को भरने के बाद हमारे पास $(n - 1)$ वस्तुऐं बाकी रह जाती है।

इसलिए, दुसरे पेटी को $(n - 1)$ विधानों सें भर सकते हैं।

इसतरह प्रथम दो, पेदियों को $n(n - 1)$विधानों से भर सकते हैं।

अब प्रथम दो पेटियाँ भरने के बाद, हमारे पास $(n - 2)$ वस्तेुएँ बाकी रहती हैं ।

इसतरह 3 रे पेटी को $(n - 2)$ विधानों से भर सकते हैं

पुन: गणन के मैलिक सिध्दांत के अनुसार $n(n - 1)\ (n - 2)$ विधानों से भर सकते हैं।

ध्यान दीजिए, नये पटी में एक नई वस्तु भरी जाती है, और, किसी भी समय पर, वस्तुओं की संख्या, पेटियों की संख्या से समान हैं।

अत: गणन के मालिक सिध्दांत के अनुसार क्रम से 'r' पेटियों को भरने के विधान इसतरह हैं।

$n(n - 1)\ (n - 2)$............................ $[n - (r - 1)]$

इसतरह, 'n' वस्तुओं में से 'r' वस्तुओं के क्रमचय को ^nP_r से सूचित करते हैं।

$\therefore\ ^nP_r = n\cdot (n - 1)\cdot (n - 2)\cdot$ .... $\cdot[n - (r - 1)]$

उपप्रमेय : 'n' वस्तुओं में से सभी को एक साथ हेकर बनने वाले क्रमचय है :

$^nP_n = n \cdot (dn - 1) \cdot (n - 2) \cdot$ .... $\cdot [n - (n - 1)]$

$^nP_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot$ .... $\cdot 1$

$^nP_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot$ .... $\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ('n' गुणनखण्ड)

फेक्टोरियल निरूपण Factorial notation :

उपरोक्त व्यंजक के दाहिने पक्ष में ध्यान दीजिए कि वह पस्वभाविक संख्याओं का गुणनफल हैं। n ! संकेत से सूचित करते हैं जिसे फेक्टोरियल संकेत कहते हैं। n ! को फेक्टोरियल पढते हैं।

$\therefore\ n\ (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot$ .... $3 \cdot 2 \cdot 1 = n\,!$

$\therefore\ n\,!$ प्रथम स्वभाविक संख्याओं का गुणनफल सूचित करता हैं। .

इसतरह $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ अथवा $4 \times 3 \times 2 \times 1$

$3! = 1 \times 2 \times 3$ अथवा $3 \times 2 \times 1$

$2! = 1 \times 2$ अथवा 2×1

$n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$ अथवा $n \times (n - 1)\,(n - 2) \times \ldots\ 3 \times 2 \times 1$

परिभाषा से 0! को 1 लेते हैं।

सूचना : यदि n ऋणात्यक अथवा दशमलव है, n ! परिभाषित नहीं हैं।

याद रखिए: $n!$ यह 'n' स्वभाविक संख्याओ का गुणनफल हैं।

$n! = n\,(n - 1)\,(n - 2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

Sn यह प्रथम स्वभाविक संख्याओ का योगफल

$Sn = 1+2+3+\ldots\ldots.+ n$

निम्न फेक्टोरियल संकेत के विस्तारों का अध्ययन कीजिए।

$n! = n\,(n - 1)\,(n - 2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$(n - r)! = (n - r)\,(n - r - 1)\,(n - r - 2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$(n - r + 1)! = (n - r + 1)\,(n - r)\,(n - r - 1) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$(n - r - 1)! = (n - r - 1)\,(n - r - 2)\,(n - r - 3) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$(r - 1)! = (r - 1)\,(r - 2)\,(r - 3) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

सामान्यत: $n! = n\,(n - 1)\,(n - 2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$n! = n\,[(n - 1)\,(n - 2) \times \ldots\ldots. \times 3 \times 2 \times 1]$

$n! = n\,(n - 1)!$

$n! = n\,(n - 1)\,(n - 2)!$

$n! = n\,(n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3)!$ इन्यादि ।

उदाहरण: 5! पर विचार कीजिए

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$5! = 5 \times 4!$

$5! = 5 \times 4 \times 3\,!$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2!$

अभ्यास 4.3

1. निम्न गुणनफलों को फेक्टोरियल में पखिर्तित कीजिए :

   (i) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$ (ii) $18 \times 17 \times .... \times 3 \times 2 \times 1$

   (iii) $6 \times 7 \times 8 \times 9$ (iv) $2 \times 4 \times 6 \times 8$

2. मूल्य ज्ञात कीजिए :

   (i) 6! (ii) 9! (iii) 8! – 5! (iv) $\frac{7!}{5!}$ (v) $\frac{12!}{(9!)(3!)}$ (vi) $\frac{30!}{28!}$

3. मूल्य ज्ञात कीजिए :

   (i) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (ii) $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ जब n = 15 और r = 12

4. 4!, 5!, 6! का ल. सा. अ. ज्ञात कीजिए :

5. यदि (n + 1) ! = 12 (n – 1) ! 'n' का मूल्य ज्ञात कीजिए :

^nP_r फेक्टोरियल के लिए सूत्र ज्ञात करना

गणन के मौलिक सिध्दांत के अनुसार

$^nP_r = n(n-1)(n-2) \times .... \times (n-r+1)$

समीकरण के दाहिने पक्ष पर विचार कीजिए

$\Rightarrow n(n-1)(n-2) .... (n-r+1)$

दाहिने पक्ष का पहला गुणनखण्ड n है।

अंतिम गुणनखण्ड $(n-r+1)$

दाहिना पक्ष से प्रारंभ करते हुए अवरोहण क्रम में $(n-r+1)$ तक के स्वभाविक संख्याओं का गुणनफल है। यदि गुणनकल 1 तक जारी रखने पर क्या प्राप्त होगा? हमें 'n' प्राप्त होता प्राप्त करने के लिए और कौनसा गुणनखण्ड लिखना होगा?

$(n-r)(n-r+1) .... 3 \times 2 \times 1$ जो $(n-r)!$ है।

$^nP_r = n(n-1)(n-2) .... (n-r+1)$

$^nP_r (n-r)! = n(n-1)(n-2) ..... (n-r+1)(n-r)(n-r+1) ...... 3 \times 2 \times 1$

$(n-r)(n-r+1) .... 3 \times 2 \times 1$

यदि $r \geq o$ $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $o \leq r \leq n$

n वस्तुओं में से वस्तुओं को लेकर बनें क्रमचयों की संख्य $^nP_0 = \frac{n!}{(n-r)!}$ $o \leq r \leq n$

उपरोक्त ^nP_r का सूत्र केवल पुनरावृत्ति नहीं होती तो सत्य साबित होता है n विभिन्न वस्तुओं में r वस्तुओं एक साथ लेकर बनें क्रमचयों की संख्या n^r होता है ।

संदर्भ 1 : $r = o$ हो तो क्या होता है? इसे देखते हैं।

यदि $r = o$ हो तो n वस्तुओं में से o वस्तुओं को कितने विधियों में व्यवस्थित कर सकते हैं?

कोई भी वस्तु व्यवस्थित न करने, वस्तुओं को जैसे के तैसे रखने के समान है, और ऐसा करने का एक ही विधान है।

इसतरह, $\therefore 0! = \frac{n!}{^nP_n}$ $\quad\quad \therefore o! = \frac{n!}{n!} = {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

इसलिए $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ होते पर सत्य सिध्द होता है। जहॉं $o \leq \rho \leq \nu$

संदर्भ 2 : मान लीजिए $r = n$

$^nP_n = n\ (n-1)\ (n-2) \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times (n-n+1)$
$^nP_n = n\ (n-1)\ (n-2) \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times 1$
$^nP_n = n\ (n-1)\ (n-2) \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$
$\therefore\ ^nP_n = n!$

और, $^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ स्मरण करें $0! = 1$

उदाहरण : $\therefore {}^{1009}P_{1009} = 1009!,\ {}^{10}P_{10} = 10!,\ {}^{1400}P_{1400} = 1400!$

संदर्भ 3 : $r = 1$ $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$\therefore\ ^nP_1 = \frac{n!}{(n-1)!}$ $\quad ^nP_1 = \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}$ $\quad \therefore\ ^nP_1 = n$

$\therefore {}^{100}P_1 = 100,\ {}^{457}P_1 = 457$

चर्चा कीजिए : $^5P_6$ अर्थहीन है क्यों ?

याद रखिए : $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

यदि $r = 0$, $^nP_0 = 1$ यदि $r = n$ $^nP_n = n!$ यदि $r = 1$ $^nP_1 = n$

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: मूल्य ज्ञात कीजिए : (i) $^7P_3$ (ii) $^8P_5$

हल: (i) $^7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7\times6\times5 = 210$

(ii) $^8P_5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 8\times7\times6\times5\times4 = 6720$

उदाहरण 2: 'r', ज्ञात कीजिए यदि $5\ {}^4P_r = 6\ {}^5P_{r-1}$

हल: $5 \times \dfrac{4!}{(4-r)!} = 6 \times \dfrac{5!}{[5-(r-1)]!}$

$$\frac{\cancel{5!}}{(4-r)!} = \frac{6\times\cancel{5!}}{(6-r)!} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{(4-r)!}} = \frac{6}{(6-r)(5-r)\cancel{(4-r)!}}$$

$(6 - r)(5 - r) = 6 \Rightarrow r^2 - 11r + 24 = 0 \Rightarrow (r - 8)(r - 3) = 0$

$\therefore r = 8$ अथवा $r = 3$

उदाहरण 3: सिध्द कीजिए $n! + (n + 1)! = n!\,(n + 2)$

हल: बायां पक्ष $n! + (n + 1)! = n! + (n + 1)\, n! = n!\,(1 + n + 1)$

$= n!\,(n + 2) =$ दाहिना पक्ष

उदाहरण 4: 'n' ज्ञान कीजिए यदि $\dfrac{{}^nP_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3}$

हल: $\text{RHS} = \dfrac{n\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}}{n\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}(n-4)} = \dfrac{n}{(n-4)} = \dfrac{5}{3}$

$5(n - 4) = 3n \Rightarrow 5n - 20 = 3n \Rightarrow 2n = 20$

$\therefore n = 10$

उदाहरण 5: यदि ${}^{2n+1}P_{n-1} : {}^{2n+1}P_n = 3 : 5$ हो तो n ज्ञात कीजिए

हल: $\dfrac{{}^{2n+1}P_{n-1}}{{}^{2n+1}P_n} = \dfrac{3}{5}$

i.e., $5 \times {}^{2n+1}P_{n-1} = 3 \times {}^{2n-1}P_n$

$$\frac{5.(2n+1)!}{[2n+1-(n-1)]!} = \frac{3.(2n-1)!}{(2n-1-n)!}$$

$$\frac{5(2n+1)2n(2n-1)!}{(n+2)!} = \frac{3(2n-1)!}{(n-1)!}$$

$$\frac{10n(2n+1)}{(n+2)(n+1)n(n-1)!} = \frac{3}{(n-1)!}$$

$\therefore 10(2n + 1) = 3(n + 2)(n + 1)$

$3n^2 - 11n - 4 = 0 \Rightarrow (3n + 1)(n - 4) = 0$

$\therefore n = -\dfrac{1}{3}$ or $n = 4$.

उदाहरण 6: यदि $^{n}P_{n}$ = 5040, हो तो 'n' ज्ञात कीजिए।

7	5040
6	720
5	120
4	24
3	6
2	2
	1

हल: $^{n}P_{n} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

$n! = 7! \Rightarrow n = 7$

(ii) यदि $^{n}P_{2} = 90$ ज्ञात कीजिए 'n'

हल: $^{n}P_{2} = 90$

$n(n - 1) = 10 \times 9 \therefore n = 10$

(ii) यदि $^{11}P_{r} = 990$ 'r'

हल: $^{11}P_{r} = 990 \Rightarrow {}^{11}P_{r} = 11 \times 10 \times 9 \therefore r = 3$

अभ्यास 4.4

1. मूल्य ज्ञात कीजिए :

i) $^{12}P_{4}$ ii) $^{75}P_{2}$ iii) $^{8}P_{8}$ iv) $^{15}P_{1}$ v) $^{38}P_{0}$

2. (1) यदि $^{n}P_{4} = 20\ {}^{n}P_{2}$ हो तो 'n' ज्ञात कीजिए

(2) यदि $^{5}P_{r} = 2\ {}^{6}P_{r}$ हो तो 'r' ज्ञात कीजिए

3. (1) यदि $^{n}P_{4} : {}^{n}P_{5} = 1 : 2$ हो तो 'n' ज्ञात कीजिए

4. (1) यदि $^{9}P_{5} + 5\ {}^{9}P_{4} = {}^{10}P_{r}$, हो तो '$r$' ज्ञात कीजिए

क्रमचय पर प्रायोशिक गणित

उदाहरण 1: कितने विधानों में 7 विभिन्न पुस्तकों एक ताक पर व्यवस्थित कर सकते हैं ? तीन विशिष्ट पुस्तकों एक साथ रखे तो कितने विधानों में व्यवस्थित कर सकते हैं।

हल: 7 पुस्तकों की व्यवस्था हो सकती है $^{7}P_{7}$ विधानों

$^{7}P_{7} = 7!$

$= 7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ विधानों में ।

कयों कि तीन विशिष्ट पुस्तक एक सार्थ रखना है, मान लीजिए हम तीन पुस्तकों को बांधते हैं और उन्हें एक पुस्तक (अथवा1 इकाई) मानते हैं।

अब हमारे पास 7 पुस्तकें : (3 विशिष्ट पुस्तकों की एक इकाई) = 4 पुस्तकें

और 7 पुस्तकें + (3 विशिष्ट पुस्तकों की एक इकाई) = 5 पुस्तकों

5 पुस्तकों को $^{5}P_{5}$ विधानों में व्यवस्थित कर सकते हैं

$^{5}P_{5} = 5!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ विधानों में ।

इन 120 विधानों में 3पुस्तको को 3 विधानों में व्यवस्थित कर सकते हैं। 3! = 3 × 2 × 1 = 6 विधानों में (B_1 B_2 B_3)(B_1 B_3 B_2), (B_2 B_1 B_3), (B_2 B_3 B_1), (B_3 B_1 B_2)(B_3 B_2 B_1),}

गणन का मौलिक सिध्दांत के अनुसार $^5P_5$ = 3! = 120 × 6 = 720 विधानों में अत: 7 पुस्तकों को व्यवस्थित करने के विधान ताकि 3 विशिष्ट पुस्तकें एक साथ रहें = 5040 – 720 = 4320

उदाहरण 2: कितने पाच अंकों की संख्याऐं बना सकते है जो 30,000 और 90,000 के बीच हैं। (2,3,5,7,9) अंको में से प्रत्येक अंक को केवल एक बार उपयोग कर,

हल:

दस हजार स्थान	हजार का स्थान	सौकड का स्थान	दहाई का स्थान	इकाई का स्थान
अविधान 3,5 और 7	4 विधान	3 विधान	2 विधान	1 विधान

हमें 30,000 से अधिक और 90,000 से कम संख्याऐं चाहिए। दस हजार के स्थान को केवल 3,5 अथवा 7 से भर सकते हैं। इसलिए, दस हजार का स्थान केवल 3 विधानों से भर सकते हैं। बाकी चार स्थानों कों बाकी अंकों से भर सकते हैं इसे 4 विधानों से भर सकते हैं। इसलिए 30,000 और 90,000 के बीच रहनेवाली संख्या 3 × 4! गणन का मौलिक सिध्दात = 3 × 4 × 3 × 2 × 1 = 72.

उदाहरण 2: एक DNA अणु के आधार कें नैट्रोजन होगा जिसमें विभिन्न आधार A, G, T, और C विभिन्न उससे जुडे होते है। तीन प्रत्याम्लों को कितने विधानों में व्यवस्थित कर सकते हैं, पिना कोई पुनरावृति किये?

हल : यहाँ $n = 4$ और $r = 3$

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow {}^4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{1} = 24 \text{ ways}$$

अभ्यास 4.5

1. JOULE के सभी अक्षरा उपयोय करके कितने शब्दा अर्थसहित और अर्थरहित बना सकते है जबकि प्रत्येक अक्षर एक बार मात्र उपयुक्त हो?
2. 5 पुरूष और 4 महिलाओं को एक पंकित में इसतरह बैठाना है ताकि महिलाऐं सम स्थान ग्रहण करें। ऐसी कितनी व्यवस्थाऐं संभव है?
3. कितने विधानों में 6 महिलाऐं 6 कुँओं में से पानी निकाल सकते हैं ताकि कोई कुँआ उपयोग किये बिना ऐसी रह जाय?
4. एक स्पर्धा में 8 विधार्थी भाग लेते हैं। कितने विधानों प्रथम तीन पुरस्कार जीते जा सकते हैं?
5. दो अंको की कुल कितनी संख्याऐं बनती है ज्ञात कीजिए।
6. बिना अंको की पुनरावृति किये 1, 2, 3, 7, 8, 9 में से कितनी 4 अंकों की संख्याऐं बनती है ?
   (a) इनमें कितने 6000 से छोटी है?
   (b) कितने सम संख्याऐं है ?
   (c) इनमें कितनी संख्याओं के अंत में 7 होता है ?

7. दो नगरों के बीच में 15 बस चल रही है। कितने विधानों में एक व्यक्ति एक बस से दूसरे नगर जाकर वापिस अन्य किसी दूसरे बस से लौटे ?

'n' विशिष्ट वस्तुओं में से 'r' वस्तुओं को एक साथ लेकर संचयों की संख्या ज्ञात करना, जहाँ $0 \le r \le n$ हो

अक्षरों को व्यवस्थित करना और चयन करने के उदाहरण पर विचार कीजिए ।

संचय	**क्रमचय**
$n = 4,\ r = 1$	$n = 4,\ r = 1$
$\mathbf{r = 1},\ a,\ b,\ c,\ d$	$a,\ b,\ c,\ d$
${}^4C_1 = 4$	${}^4P_1 = 4$

प्रत्येक ${}^4C_1$ के संचय से 1! क्रमचय तैयार होते है।

$\mathbf{r = 2}$ ab, ac, ad, bc, bd, cd	ab, ac, ad, ba, bc, bd
	ca,cb,cd,da,db,dc
	${}^4C_2 = 6 \therefore {}^4P_2 = 12$

प्रत्येक ${}^4C_2$ के संचय से 2! क्रमचय तैयार होते है।

$\mathbf{r = 3}$ abc, abd, acd, bcd	$abc\ abd\ bcd\ acd$
$\therefore {}^4C_2 = 6$	$acb\ adb\ bdc\ adc$
	$bac\ bad\ cbd\ cad$
	$bca\ bda\ cdb\ cda$
	$cab\ dab\ dbc\ dac$
	$coa\ dba\ dcb\ dca$
	$\therefore {}^4P_3 = 24$ विधान

प्रत्येक ${}^4C_3$ के संचय से 3! क्रमचय तैयार होते है।

abcd	abcd bacd cabd dabc
${}^4C_4 = 1$	abdc badc cadb dacb
	acbd bcad cdba dbac
	adcb bdac cdab dcab
	abdc bdca cbda dcba
	$\therefore\ {}^4P_4 : 24$

प्रत्येक ${}^4C_4$ संचय से 4! क्रमचय तैयार होते है। सामान्यत :

प्रत्येक ${}^nC_r$ संचय से $r!$ क्रमचय तैयार होते है।

कुल मिलाकर कितने क्रमचय बनते है

कुल क्रमचयों की संख्या $= r! \times {}^nC_r \Rightarrow \qquad {}^nP_r = r! \times {}^nC_r \therefore {}^nC_r = \dfrac{{}^nP_r}{r!}$

इसलिए 'n' विशिष्ट वस्तुओं में से 'r' वस्तुओं को एकसाथ लेकर बनने वाले सभी संचयों की संख्या को इस सूत्र व्दारा ज्ञात कर सकते है ।

$$\boxed{{}^nC_r = \frac{n!}{(r!) \times (n-r)!}}$$

सूचना : ${}^nP_r$ और ${}^nC_r$ के बीज का संबंध ${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$

${}^nC_r$: का सूत्र ज्ञात करना

${}^nC_n$ के विभिन्न विस्तारों का अध्ययन कीजिए :

1. $^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$

2. $^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

3. $^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\times \ldots\ldots\ldots\ldots \times 3\times 2\times 1}{r!(n-r)!}$

4. $^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\times \ldots\ldots\ldots\ldots (n-r+1)}{r!(n-r)!}$

अब हम ${}^nC_r$ के कुछ विशिष्ट संदर्भ पर विचार करते हैं

संदर्भ (i) : $r = 0$

यदि $r = 0$ तो ${}^nC_0 = \frac{n!}{0!(n-0)} = \frac{n!}{1\times n!} = 1 \quad \therefore {}^nC_O = 1$

$\therefore {}^{100}C_0 = 1,\ {}^{500}C_0 = 1,\ {}^{1000}C_0 = 1$

संदर्भ (ii) : $r = 1$

यदि $r = 1$ तो, ${}^nC_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = {}^nC_1 = \frac{n\cancel{(n-1)}!}{1\times \cancel{(n-1)}!}$

$\therefore {}^nC_1 = n$

$\therefore {}^{100}C_1 = 100,\ {}^{200}C_1 = 200,\ {}^{357}C_1 = 35$

संदर्भ (iii) : $r = n$

यदि $r = n$ तो , ${}^nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!}$

$\frac{n!}{n!\times 1} = 1 \quad \therefore {}^nC_n = 1$

${}^{100}C_{100} = 1,\ {}^{789}C_{789} = 1,\ {}^{1497}C_{1497} = 1$

> याद रखिए : ${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
>
> यदि $r = 0, {}^nC_0 = 1$, यदि $r = 1, {}^nC_1 = n,$

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: यदि $^6P_r = 360$ हो तो $^6C_r = 15$, ज्ञात कीजिए *'r'*.

हल: $^6P_r = {}^nC_r \times r!$

$^6P_r = 15 \times r! \Rightarrow 360 = 15 \times r!$

$\therefore\ r! = \dfrac{360}{15} = 24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$

$\therefore$ r = 4

उदाहरण 2: सिध्द कीजिए $^nC_r = {}^nC_{n-r}$

हल: सम जानते हैं कि $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ………(i)

समीकरण r में $(n - r)$ के स्थान पर (i) प्रतिस्थानन करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}$$

$$^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(\cancel{n}-\cancel{n}+r)!}$$

$$^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \text{………(ii)}$$

(i) और (ii) की तुलना करने पर हम कह सकते हैं कि

$^nC_r = {}^nC_{n-r}$

उदाहरण 3: यदि $^nC_8 = {}^nC_{12}$ *'n'* ज्ञात कीजिए

हल: $^nC_8 = {}^nC_{12}$ $^nC_8 = {}^nC_{n-12}$

$8 = n - 12 \therefore n = 12+8 = 20$

अभ्यास 4.6

1. मूल्य ज्ञात कीजिए (i) $^{10}C_3$ (ii) $^{60}C_{60}$ (iii) $^{100}C_{97}$
2. (i) यदि $^nC_4 = {}^nC_7$ हो तो n ज्ञात कीजिए
   (ii) यदि $^nP_r = 840$, $^nC_r = 35$, हो तो n ज्ञात कीजिए
3. $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11:1$, हो तो n ज्ञात कीजिए
4. सत्यापन कीजिए $^8C_4 + {}^8C_5 = {}^9C_4$
5. सिध्द कीजिए $\dfrac{^nC_r}{^{n-1}C_{r-1}} = \dfrac{n}{r}$ जहाँ $1 \le r \le n$.

उदाहरण 1: एक व्यक्ति के 6 मित्र हैं। वह भोज के लिए एक अथवा अधिक लोगों कितने विधियों से आमतंत्रण कर सकता है?

हल : मित्रों को आमत्रंण विभिन्न विधान ताकि केवल 1 केवल 2........ केवल 6 एक अथवा अधिक आमंत्रित करने के कुल विधान है।

$^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_2 + {}^6C_1 + + {}^6C_0$

6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 विधान

उदाहरण 2: 5 सही अथवा गलत प्रश्नों के लिए किसी ने भी सभी सही उत्तर नहीं लिखो हैं और कोई दो विधार्थियों नें एक क्रमागत उत्तर लिखा हैं यह संभव होने के लिए कक्षा में कितने गरिष्ठ विधार्थी हो सकते हैं ?

हल: प्रत्येक प्रस्न को सही (T) अथवा गलत (F) को 2 विधानों में उत्तर नहीं दे सकते हैं।

5 प्रश्नों को कुल मिलाकर उत्तर देने के विधान

विधानों की कुल संख्या = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 32

इन 32 विधानों में से 1 विधान सही होगा। क्योंकि किसी विधार्थी ने भी सही उत्तर नहीं लिखा है गरिष्ट विधार्थियों की संख्या = 32 – 1 = 31

उदाहरण 3: 4 मित्र परस्पर हाथ मिलाते हैं। ज्ञात कीजिए कितने प्रकार से हाथ मिला सकते हैं ?

हल: मान लीजिए A, B, C और D चार मित्र हैं। एक बार हाथ मिलातो के लिए दो व्यक्ति शमिल होते हैं। मान लीजिए शुरूवात में A मित्र B से हाथ मिलाता है। यह 'B' मित्र A के साथ हाथ मिलाने के बराबर है अर्थात AB और BA एक ही है।

इस हाथ मिलाने की संभव ज्ञात करने क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। $^nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

इस गणित में $n = 4$ है।

हाथ मिलाने की संख्या = $^4C_2$ $\;{}^4C_2 = \dfrac{4!}{(4-2)!2!} = \dfrac{{}^2\cancel{4} \times 3 \times \cancel{2 \times 1}}{\cancel{2 \times 1} \times \cancel{2} \times 1} = 6$

उदाहरण 4: एक कार्यक्रम में, प्रत्येक व्यक्ति, दूसरे, प्रत्येक व्यक्ति से हाथ मिलाता है। यदि कुल हाथ मिलाने की संख्या 45 हैं। उस कार्यक्रम में कितने लोग थे ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए कार्यक्रय में n व्यक्ति थे।

तो $^nC_2 = 45$

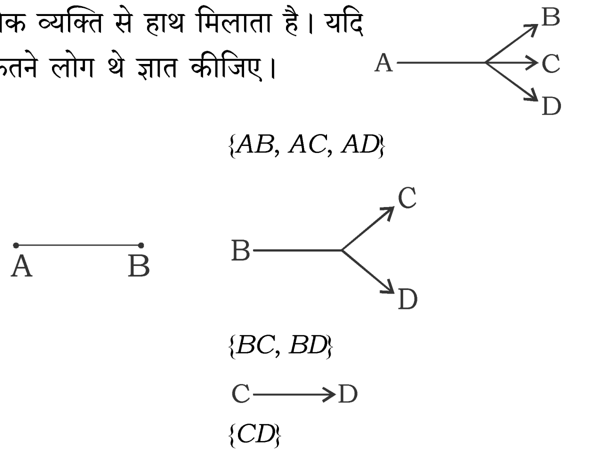
$$\frac{n!}{(n-2)!2!} = 45$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45$$

$n(n - 1) = 90$ $n(n - 1) = 10 \times 9$

$n(n - 1) = 10(10 - 1) \Rightarrow n = 10$

कार्यक्रम में कुल 10 व्यक्ति थे



उदाहरण 5: 12 व्यक्तियों में से एक अध्यक्ष दिये जाने पर 5 व्यक्तियों की कितने समितियाँ बनाई जा सकती हैं?

अध्यक्ष को 12 विधानों से चुना जा सकता हैं और अन्य 4 व्यक्ति समिति के लिए ${}^{11}C_4$ विधानों चुना जा सकता हैं

$\therefore$ संभवनीय ऐसी समितियाँ = $12 \times {}^{11}C_4 = 12 \times 330 = 3960$

उदाहरण 6: 8 बिन्दुएँ है जिन कोई भी 3 समरेख हैं। इन बिन्दुओं को जोडकर कितनी सरल रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

हल: दो बिन्दुओं को जोडकर एक सरल रेखा खींच सकते हैं। मान लीजिए A और B दो बिन्दुऐं हैं।

A और B अथवा A और B जोडकर एक सरल रेखा खींच सकते हैं।

$\therefore$ AB और AB दोन समान है। यह संचय का एक गणित है।

'n' असमरेख बिन्दूओं से कुल मिलाकर ${}^{n}C_2$ सरलरेखाऐं खींच सकते हैं।

सत्यापन:

हम जानते हैं। ${}^{n}C_2 = \dfrac{n(n-1)}{2\times 1}$

यहाँ $n = 8,\ r = 2$

$\therefore \dfrac{8\times 7}{2\times 1} = 28$

$${}^{n}C_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$${}^{8}C_2 = \frac{8!}{(8-2)!2!}$$

$$= \frac{{}^{4}\cancel{8}\times 7\times \cancel{6!}}{\cancel{6!}\times 2}$$

$$= {}^{8}C_2 = 28$$

$\therefore$ 8 असमरेख बिदुओं से 28 सरल रेखाऐं खींच सकते हैं।

उदाहरण 7: 10 बिन्दुएँ हैं जिन में कोई 3 असमरेख हैं। इन बिन्दुओं को जोडकर कितने त्रिभुज बना सकते हैं।

हल: 3 असमरेख बिन्दुओं से एक त्रिभुज बना सकते हैं।

इन बिन्दुओं को किस क्रम में जोडने पर यह महत्वपूर्ण नहीं हैं।

$\therefore$ 'n' असमरेख बिन्दुओं में से कुल मिलाकर ${}^{n}C_3$ त्रिभुज बना सकते हैं।

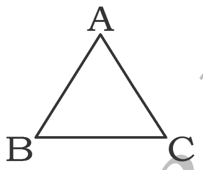
यहाँ $n = 10,\ r = 3,\ {}^{n}C_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

$${}^{10}C_3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!\times 3!} = \frac{10\times \cancel{9}^{3}\times \cancel{8}^{4}\times \cancel{7!}}{\cancel{7!}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times 1} = 120$$

$\therefore$ 10 असमरेख बिन्दुओं में से 3बिन्दुओं को जाडेकर 120 त्रिभुज बना सकते हैं।

पर्याय विधान:

$$^nC_3 = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}\times 3\times 2\times 1}$$



$$\therefore {}^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ यदि } n = 10$$

$$^nC_3 = \frac{10(10-1)(10-2)}{6} = \frac{10\times {}^3\cancel{9}\times \cancel{8}^4}{\cancel{6}_{\cancel{3}}} = 120$$

उदाहरण 8: एक षष्टभुज में कितने विकर्ण खींच सकते है?

हल: एक षष्टभुज में C शीर्ष होत हैं। n = 6 अभिमुख दो शीर्षों की जोडी से एक विकर्ण जोड सकते हैं।

कुल भुजा तथा विकर्णों की संख्या = $^6C_2$

$$^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow {}^6C_2 = \frac{6(6-1)}{2} = 15$$

15 रेखाओं में 6 भुजाऐं है। विकर्णों की संख्या = 15 – 6 = 9

पर्याय विधान:

विकर्णों की संख्या = कुल सरल रेखाओं की संख्या (बहुभुज की भुजाओं की संख्या)

$$= {}^nC_2 - = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

$\therefore$ भुजाओं के बहुभुज में विकर्णों की संख्या $= \dfrac{n(n-3)}{2}$ एक षष्टभुज, n = 6

$$\therefore \text{ विकर्णों की संख्या} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{6(6-3)}{2} = 9$$

उदाहरण 9: एक बहुभुज में गरिष्ट 14 विकर्ण खींच सकते है। उस बहुभुज की भुजाऐं कितनी है?

हल: हम जानते है कि एक बहुभुज के विकर्णों की संख्या

एक बहुभुज की विकर्णों की संख्या $= \dfrac{n(n-3)}{2}$

$$\frac{14}{1} = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n(n-3) = 14\times 2 \Rightarrow n(n-3) = 7\times 4$$

$$\Rightarrow n(n-3) = 7(7-4) \therefore n = 7$$

पर्याय विधान : $\frac{14}{1} = \frac{n(n-3)}{2}$

$n(n-3) = 14 \times 2$ Þ $n^2 - 3n - 28 = 0 \Rightarrow n^2 - 7n + 4n - 28 = 0$

$n(n-7) + 4(n-7) = 0 \Rightarrow (n-7)(n+4) = 0$

$\Rightarrow n - 7 = 0 \quad n + 4 = 0$

$n = 7$ अथवा $n = -4$

'n' ऋणात्मक संख्या नहीं हो सकती है।

अत: $n = 7$ (सप्तभुज)

याद रखिए:

एक समतल में 'n' असमरेख बिन्दुऐं दिये जाने

- ✻ सरल रेखाओं की संख्या $= {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$
- ✻ त्रिभुजों की संख्या $= {}^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
- ✻ एक बहुभुज में विकर्णों की संख्या $= {}^nC_2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$

पास्कल त्रिभुज (Psacal Triangle)

पास्कल ब्लेजे (162 - 1662) फ्रेंच के महान गणितज्ञ, प्रयिकता संचय और तत्वज्ञानी थे, पास्कल से बनाया गया त्रिभुज नमुना देखिए ।

दारिने पक्ष में पास्कल त्रिभुज दिया गया हैं।

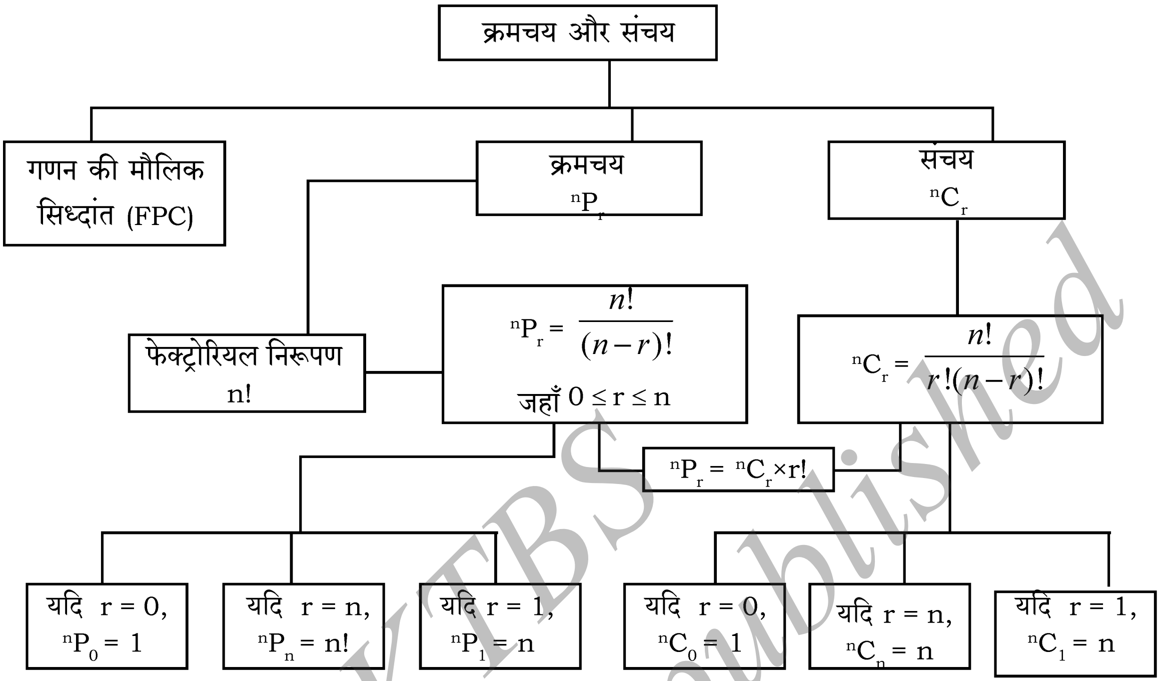
${}^1C_0$	1
${}^1C_0 \quad {}^1C_1$	1 1
${}^2C_0 \quad {}^2C_1 \quad {}^2C_2$	1 2 1
${}^3C_0 \quad {}^3C_1 \quad {}^3C_2 \quad {}^3C_3$	1 3 3 1
${}^4C_0 \quad {}^4C_1 \quad {}^4C_2 \quad {}^4C_3 \quad {}^4C_4$	1 4 6 4 1
${}^5C_0 \quad {}^5C_1 \quad {}^5C_2 \quad {}^5C_3 \quad {}^5C_4 \quad {}^5C_5$	1 5 10 10 5 1
${}^6C_0 \quad {}^6C_1 \quad {}^6C_2 \quad {}^6C_3 \quad {}^6C_4 \quad {}^6C_5 \quad {}^6C_6$	1 6 15 20 15 6 1

अभ्यास 4.7

1. 7 व्यंजन और 4 स्वरों में से 3 व्यंजन और 2 स्वरों लेकर कितने शब्द बना सकते है?
2. 10 लोगों के समूह में से 5 खिलाडीयों को कितने विधानों में चुन सकते हैं?
3. 17 खिलाडियों में से कितने प्रकार से क्रिकेट टीम चुन सकते हैं जिनमें 5 गेंदबाज हो? प्रन्येक क्रिकेट टीम में 2 गेंदबाज हो?
4. एक वृत्त पर 8 बिन्दु दिये गए हैं। इन्हें जोडकर कितने (i) सरल रेखाऐं (ii) त्रिभुज बना सकने हैं?
5. (i) दशभुज और (ii) विंशभुज में कितने विष्कर्ष खींच सकते हैं?
6. एक बहुभुज में 44 विकर्ण ख़ींचे गए हैं। उस बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. स्कूल के कार्य के प्रत्येक में 6 अवधियाँ होती हैं, कितने विधियों से एक व्यक्ति 5 विषयों को व्यवस्थिन कर सकता हैं ताकि प्रत्येक विषय के लिए कम से कम एक अवधि मिलें?
8. 6 पुरूष और 4 महिलाओं में से 5 लोगों की समिति बनानी है। कितने विधानों में इसे चुन सकते हैं जब

   (1) कम से कम दो महिलाऐं हो?

   (2) अत्याधिक दो माहिलाऐं हो?
9. 11 खिलाडियों की एक टीम बनानी है ताकि X कक्षा से 5 और IX से कम से कम 5 चुने हो । इन प्रत्येक कक्षा में यदि 8 विधार्थी हो, तो कितने प्रकारों से टीम बनाई जा सकती है?
10. 12 विधार्थियों में से 8 को एक प्रवास के लिए चुतना है। 3 विध्यार्थी है जिन्होंने तय किया है कि तीनों में प्रत्येक शामिल हो जाऐगा अथवा बिलकुल किसमें भी शामिल नहीं होगा। बताईए, कितने प्रकाशें से 8 विध्यार्थीयों को चुन सनते हैं?



उत्तर

अभ्यास 4.1

1] 120 2] 12 3] 720 4] 336 5] 8 6] 20

अभ्यास 4.3

1] (i) 7! (ii) 18! (iii) $\frac{9!}{5!}$ (iv) 16 × 4! 2] (i) 720 (ii) 3,62,880 (iii) 40,200

(iv) 42 (v) 220 (vi) 870 3] (i) 210 (ii) 105 4] 720 5] 3

अभ्यास 4.4

1] (i) 11,880 (ii) 5,550 (iii) 40,320 (iv) 15 (v) 1

2] (1) 7 (2) 3 3] 6 4] 5

अभ्यास 4.5

1] 120 2] 2,880 3] 720 4] 336 5] 90

6] (a) 180 (b) 120 (c) 60 7] 210

अभ्यास 4.6

1] (i) 120 (ii) 1 (iii) 1,61,700 2] (i) 11 (ii) 7 3] 6

अभ्यास 4.7

1] 25,200 2] 252 3] 2,200 4] (i) 28 (ii) 56 5] (i) 35 (ii) 170

6] 11 7] 3,600 8] (i) 186 (ii) 186 9] 3,136 10] 117

5

प्रायिकता
(Probability)

* यादृच्छिक प्रयोग
* कुल संभाव्य परिणाम
* सम संभवनीय घटनाएँ
* घटनाओं के प्रकार
* प्रायिकता का अर्थ
* पूरक घटनाओं की प्रायकता
* परस्पर अनन्य घटनाएँ

पैरी डी लाप्लासे
(Pierre de Laplace)
(1749-1827, फ्रांस)

1812 में लाप्लासे ने सांख्याकी में अनेक मोलिक परिणाम स्थापित किये थे। उन्होंने प्रयिकता के आधार पर आगमनात्मक गणित की तर्क प्रणाली पुस्तक की । उन्होंने प्रायकता के अनेक सिद्धांत प्रस्तावित किये। जैसे, प्रायिकता अनुकूल तथा कुल संभवनीय घटनाओं का अनुपात है।

इस घटक के अध्ययन की सहायता से आप

* यादृच्छिक प्रयोग का अर्थ समझ सकेंगें
* कुल परिणाम और घटना की परिभाषा दे सकेंगें
* सम संभवनीय घटनाओं का अर्थ समझ सकेंगें
* एक दत्त घटना की प्रारंभिक घटना तथा कुल परिणाम ज्ञात कर सकेंगे
* विभिन्न प्रकार की घटनाओं का अर्थ समझा सकेंगें
* एक घटना की प्रायकता परिभाषित कर सकेंगें
* $P(E) = 1 - P(E)^1$ इस कथन को स्थापित कर सकेंगें
* प्रायिकता का योग नियम का कथन लिख सकेंगें $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
* दत्त घटनाओं की प्रयिकता ज्ञात कर पाओगे।

प्रायिकता सिद्धांत सामान्य ज्ञान से प्राप्त परिकलन है पैरी डी लाप्लासे

अपनी पिछली कक्षाओं, हम अध्ययन कर चुके हैं कि दैनिक जीवन में जो कुछ भी हम देखते है अथवा करते है एक संयोग (Chance) है। कुछ ऐसे संदर्भ है, जो समरूपी शर्तों पर, यथार्थता और पूर्वकथन के साथ घटती है। आइए, ऐसे कुछ संदर्भों पर विचार करते है।

निम्नलिखित कथनों का अध्ययन कीजिए।

1. 273k पर पारे का घनत्व 13,590 gm/c.c है।
2. उध्वार्धर रूप से फेंकी हुई गेंद उपर जाने और नीचे आने केलिए समान समय लेती है।
3. समुद्र तल पर पानी का कवथनांक 100°C है।
4. भारतीय क्रिकेट टीम को विश्व कप जीतने के अच्छे अवसर (chances) है।
5. इस बार सूर्यग्रहण के सुन्दर दृश्य हमें दिखाई दे सकते हैं।
6. मैसूर के लिए मुझे आरक्षण मिलने के लक्षण नहीं दिखाई देते।
7. संभवत : आज वर्षा होगी।

पहले तीन कथन, अन्तिम चार कथनों कैसे भिन्न हैं ?

पहले तीन स्पष्ट और निश्चित है,जबकि अंतिम चार संदेहपूर्ण है।

कथन 1, 2, 3 निश्थय पूर्ण है बल्कि 4, 5, 6 और 7 की भविष्यवाणी नहीं कर सकते।

पहले कथन में दिये गए प्रयोग को चाहे जितनी बार हम दोहराये उसका एक ही परिणामनिकलता है अथवा निश्चित रूप से इसकी हम भविष्यवाणी कर सकते हैं। यही तर्क कथन 2 और 1 के लिए सत्य है।

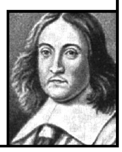
1 इसके विपरीत, सूर्य ग्रहण का दृश्य दिखाई देने की संभावना हो भी सकती अथवा नहीं। क्रिकेट खेल की भविष्यवाणी नहीं कर सकते। सर्वोत्तम खिलाडी पहले ही बॉल पर आऊट हो सकता है अथवा सर्वोत्तम गेंदबाज को एक विकेट मिल नहीं सकता। इसलिए टीम जीत भी सकती है अथवा नहीं । ऐसा ही तर्क कथन 6 और 7 के लिए सत्य है।

संयोग, शायद, प्रायः, संभावतः आदि शब्द एक विशिष्ट घटना के होने पर अनिश्चितता प्रकट करते हैं। इन अनिश्चितताओं का सही-सही मापन नहीं हो सकता है। परन्तु गणित में कुछ विधान हैं, जिन के द्वारा **घटनाओं की निश्चितता का मापन, संख्यात्मक मूल्यों में कुछ शर्तों पर कर सकते** हैं। **गणित की एक शाखा,जिसे प्रायिकता का सिद्धांत (Theory of Probability) कहते है, अनिश्चितता के मापन का प्रावधान है।** सांख्याकी में और भौतिक विज्ञान, अभियांत्रिकी जैविक विज्ञान, वैध्यकीय विज्ञान,वाणिज्य, मौसमी पूर्वानुमान आदि क्षेत्रों में प्रायिकता के सिध्दांत के विस्तृत एवं महत्वपूर्ण अनुप्रयोग है।

इसे जान लीजिए

प्रायिकता का इतिहास : प्रायिकता की परिकल्पना बडे आश्चर्यजनक रीति से विकसित हुई।

1654 में, एक जुआरी चेवालियर डे मेरे (Chevalier de Mere)17 शताब्दी के तत्वज्ञानी तथा गणितज्ञ **ब्लेज** पास्कल के पास कुछ पासों से संबंधित समस्याओं को लेकर पहुँचा। पास्कल इन समस्याओं को लेकर **पियरे डी फरमंट,** फ्रेंच गणितज्ञ के साथ चर्चा की। और उन्होंने पासों से संबंधित समस्याओं को हल निकाला। यह कार्य **प्रायिकता सिद्धांत** का शुरुवात बन गया। यद्यपि प्रायिकता जुआ खेल से प्रारंभ हुआ, परंतु, आज यह सभी विज्ञानों में एवं दैनिक जीवन को परिस्थितियों में प्रयुक्त गणित की शाखा के रूप में सामने आया।



इस विषय पर प्रथम पुस्तक इटली के गणितज्ञ जे.कार्डन (J.Cardan)(1501-1576) ने **संयोग के खेलों पर पुस्तक** (Book on Games of Chance) नामक शीर्षक से लिखा। प्रायिकता के सिद्धांत के विकास में जे.बर्नूली (J.Bernoulli), पी लाप्लासे (P.Laplace) ए.ए मार्कोव, और ए.एन. कॉममोगोरोव आदि ने उल्लेखनीय योगदान किया। कॉलमोगोरोव ने समुच्चयों का सिद्धांत के उपयोग से आधुनिक प्रायिकता का प्रस्ताव रखा। अब हम, प्रायिकता सिद्धांत के बारे में, अधिक अध्ययन करेंगें।

एक घटना के घटित होने के संयोग को, प्रमाणात्मक रूप में व्यक्त करना प्रायिकता है। यह परिकल्पना, एक घटना की अनिश्चितता को प्रमाणात्मक रूप में मापन करती है और घटना की निश्चितता का होना व्यक्त करती है।

प्रायिकता के दो प्रस्ताव है।

प्रायिकता

प्रायोगात्मक प्रायिकता	सैद्धान्तिक प्रायिकता
अथवा	अथवा
अनुभाविक प्रायिकता जो वास्तविक अनुभवों पर आधारित है।	पारम्पारिक प्रायिकता जो कुछ वैज्ञानिक विचारों पर आधारित है।

9 वीं कक्षा में आपने यह जान लिया है कि प्रायोगिक, अनुभाविक प्रायिकता है।

$$P(E) = \frac{\text{एक घटना घटित होने के परीक्षणों की संख्या}}{\text{कुल परीक्षणों की संख्या}}$$

सैद्धान्तिक प्रायिकता का प्रस्ताव (Theorehical approach to probability) सैद्धान्तिक प्रायिकता में, वास्तविक रूप से प्रयोग किये बिना हम क्या होगा इसका पूर्वानुमान करते हैं। यह देखा गया है कि एक घटना की प्रयोगात्मक प्रायिकता सैद्धान्तिक प्रायिकता के निकट आती है यदि प्रयोगों के परीक्षणों की संख्या बडी होती है। दोनों संदर्भों में, हम उन घटनाओं के साथ कार्य करते है जो प्रयोग के परिणाम हैं। प्रयोग शब्द का अर्थ है, एक प्रक्रिया जो सुपरिभाषित परिणाम उत्पन्न करती है। हम प्रयोगों को दो प्रकारों में वर्गीकृत कर सकते हैं।

प्रयोग

निर्धारात्मक प्रयोग Deterministic experiments अथवा पूर्वानुमेय प्रयोग Predictable experiment	याद्दच्छिक प्रयोग Random experiments अथवा संभावनीय प्रयोग Probabitistic experiments
ये ऐसे प्रयोग है जिन्हें समान परिस्थितियों में दोहराने पर एक ही परिणाम उत्पन्न करते हैं।	ये ऐसे प्रयोग है जिन्हें समान परिस्थितियों में दोहराने पर एक जैसे परिणाम उत्पन्न नहीं करते।
उदाहरण	उदाहरण
एक सिक्के का व्यास मापना पानी का कवथनांक निर्धारित करना एक परिपर्थ में बहलाने विधुत्त का मापना करना	एक सिक्के को उच्छालना एक पासे का फेंकना अच्छी प्रकार से फेंटी गई पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता खीचना

विज्ञान और अभियांत्रिकता में जब प्रयोग समान परिस्थितियों में दोहराये जाते हैं, हमें हमेशा एक जैसे परिणाम प्राप्त होते हैं। वे निर्धारात्मक प्रयोग होते हैं। जणित में हम यादृच्छिक प्रयोगों के साथ कार्य करते हैं।

यादृच्छिक प्रयोग : यादृच्छिक प्रयोग वह होता जिसके यथार्थ परिणाम पूर्वानुमानित कर नहीं सकते हैं। फिर भी, एक व्यक्ति सभी संभावनीय परिणामों की सूची बना सकता है।

यह एक ऐसा प्रयोग होता है, जिसे समान परिस्थितियों में दोहराने पर हमेशा एक प्रतिफल अथवा परिणाम उत्पन्न नहीं करता। परन्तु एक परीक्षण का परिणाम, ऐसे सभी संभवनीय परिणामों में से एक है। इसलिए, एक प्रयोग यादृच्छिक होता है यदि वह निम्न दो शर्तों का पालन करता है :

* उसके एक से अधिक संभवनीय परिणाम होते हैं।
* उसके परिणामों की भविष्यवाणी पूर्व ही नहीं कर सकते है।

संपूर्ण घटक में यादृच्छिक प्रयोगों के बारे में चर्चा करते रहेंगें इसलिए प्रयोग का अर्थ हमेशा यादृच्छिक प्रयोग माना जायेगा।

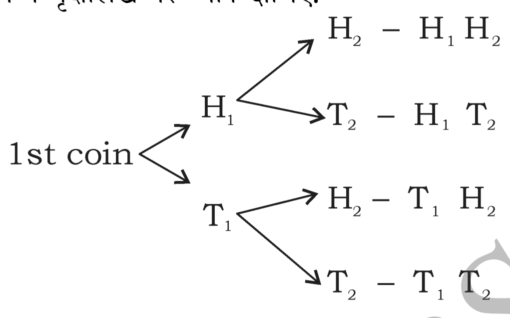
यादृच्छिक प्रयोग से संबंधित प्रायकता की परिकल्पना समझना सरल होगा।

आईए, यादृच्छिक प्रयोग से संबंधित पदों को जान लेते है।

पद	अर्थ	उदाहरण
परीक्षण **(trial)**	एक यादृच्छिक प्रयोग करना, एक परीक्षण है।	एक सिक्के का उच्छालना एक पासे का फेंकना
परिणाम **(Outcome)**	एक परीक्षण में जो कुछ भी निकलता है वह प्रतिफल अथवा परिणाम है। एक यादृच्छिक प्रयोग का परिणाम ही प्रतिफल सै।	(i) चित (H), पट (T) (ii) 1, 2, 3, 4, 5, 6
कुल परिणाम (संभाव्य कुल परिणाम) **(Sample space)**	एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी परिणमों के समुच्चय को कुल परिणाम (संभाव्य परिणाम) कहते है। इसे **S** से सूचित करते है।	(i) S = {H, T} (ii) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
संभाव्य बिन्दु **(Sample point)**	संभाव्य परिणाम के प्रत्येक पद अथवा सदस्य को संभाव्य बिन्दु कहते हैं।	(i) H और T संभाव्य बिंदू हैं। (ii) 1, 2, 3, 4, 5 , 6 संभाव्य बिन्दुएँ
Event	एक यादृच्छिक प्रयोग का कोई संभावनीय घटना परिणाम अथवा परिणामों के संयोग को एक घटना कहते हैं। अर्थात संभाव्य कुल परिणाम के प्रत्येक **उपसमुच्चय** को एक घटना कहते हैं। घटनाओं को A, B, C, D से सूचित करते हैं।	(i) एक चित प्राप्त करना A = {H} एक पट प्राप्त करना B = { T } 4 प्राप्त करना A = { 4 } (ii) एक सम संख्या प्राप्त करना B = { 2,4, 6 } एक अभाज्य संख्या प्राप्त करना C = { 2, 3, 5 }

हमने यह जान लिया है कि घटना, संभाव्य परिणाम का उपसमुच्चय है जो कुछ शर्तों का पालन करता है। उदाहरण के लिए, एक साथ दो निष्पक्ष सिक्कों के उच्छालने पर विचार कीजिए। इस यादृच्छिक प्रयोग के संभाव्य कुल परिणामों को एक **वृक्षालेख (tree diagram)** खींचकर आसानी से लिख सकते हैं।

निम्न वृक्षालेख पर ध्यान दीजिए:



$\therefore$ $S = \{ H_1H_2, H_1T_2, T_1H_2, T_1T_2 \}$
$S = \{ HH, HT, TH, TT \}$

आईए, इस यादृच्छिक प्रयोग में आनेवाले भी **घटनाओं** को लिखते हैं।

* दोनों सिक्कों पर चित प्राप्त करना $E_1 = \{ HH \}$
* दोनों सिक्कों पर पट प्राप्त करना $E_2 = \{ TT \}$
* पहले सिक्के पर चित और दूसरे पर पट प्राप्त करना $E_3 = \{ HT \}$
* पहला सिक्के पर पट और दूसरे पर चित प्राप्त करना $E_4 = \{ TH \}$

उपरोक्त उदाहरण में, दो सिक्कों को एक साथ उच्छालना यादृच्छिक प्रयोग है। संभाव्य (कुल परिणाम), $S = \{ HH, HT, TH, TT \}$

यादृच्छिक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम को एक प्रारंभिक घटना को **elementary event** कहते है।

HH, HT, TH और TT दो सिक्कों को एक साथ उच्छालने के यादृच्छिक प्रयोग के प्रारंभिक घटनाऐं हैं। दो सिक्कों को एक साथ उच्छालने के यादृच्छिक प्रयोग के प्रारंभिक घटनाओं के अलावा हम और भी अधिक घटनाओं को होने की अपेक्षा कर सकते हैं।

निम्न घटनाओं की ओर ध्यान दीजिए:

* केवल एक चित प्राप्त करना $E_5 = \{HT, TH\}$
* कम से कम एक चित प्राप्त करना : $E_6 = \{HH, HT, TH\}$
* अत्यधिक दो चित प्राप्त करना : $E_7 = \{HT, TH, TT\}$

यहाँ, यादृच्छिक प्रयोग से संबंधित, दो अथवा अधिक प्रारंभिक घटनाओं के संयोग से घटनाओं को प्राप्त किया गया है। ऐसे घटनाओं को संयुक्त घटनाएँ **compound events** कहते हैं। एक यादृच्छिक प्रयोग से संबंधित एक घटना को **संयुक्त घटना** तभी कहते हैं जब उसे, उस यादृच्छिक प्रयोग के दो अथवा अधिक प्रारंभिक घटनाओं के संयोग से प्राप्त करते हैं। एक घटना पर घटित हुई है ऐसा कब कहते हैं?एक निष्पक्ष पासे के उच्छालने के यादृच्छिक घटना पर विचार कीजिए। संभाव्य कुल परिणाम $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

मान लीजिए E यह सम संख्या प्राप्त करने की घटना सूचित करता है ।

इस घटना से संबंधित सभी प्रारंभिक घटनाएँ 2, 4, 6 है ।

मान लीजिए, एक परीक्षण में परिणाम 4, प्राप्त होता है, हम कहते हैं कि घटना E घटित हुई है। उस परीक्षण में, यदि परिणाम 3, प्राप्त होता, तो हम कहते घटना E घटित नहीं हुइ है ।

इस उदाहरण से, एक घटना, घटित होने के बारे में निम्न निष्कर्ष लेते हैं :

एक यादृच्छिक प्रयोग से संबधित एक घटना E घटित हुई है तभी कहते हैं, यदि उस घटना से संबंधित प्रारंभिक घटनाओं में E एक कोई परिणाम बनाता है।

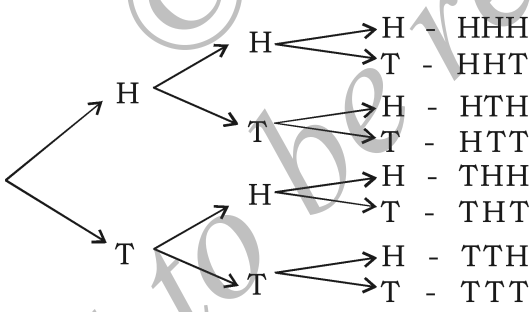
उपरोक्त उदाहरण में, प्रारंभिक घटना {2}, {4} और {6} को संयुक्त घटना E, के अनुकूल घटनाएँ कहते हैं;क्योंकि इनमें से प्रत्येक प्रारंभिक घटना संयुक्त घटना की परिभाषा का पालन करती है।

इसलिए, अनकुल प्रारंभिक घटनाओं के बारें में निम्न निष्कर्ष लेते हैं :

एक प्रारंभिक घटना को, संयुक्त घटना का **अनुकूल प्रारंभिक घटना** कहते हैं यदि वह संयुक्त घटना की परिभाषा का पालन करता है। दूसरे शब्दों में, एक प्रारंभिक घटना E एक सम संख्या प्राप्त करना है और 2,4,6 सम संख्याएँ जो परिभाषा का पालन करते है।

यादृच्छिक प्रयोग से संबंधित सभी पदों को समझने लिए, एक और उदाहरण पर विचार करते हैं।

* यादृच्छिक प्रयोग **(Random experiment) :** तीन सिक्के एक साथ उच्छालना
* संभाव्य कुल परिणाम **(Sample space) :** संभाव्य कुल परिणाम लिखने के लिए आईए, वृक्षालेख खींचते है।



$\therefore$ S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

* प्रारंभिक घटनाएँ **:** संबाव्य कुल परिणाम में से प्रत्येक परिणाम प्रारंभिक घटना हे।

E_1 = {HHH} E_2 = {HHT} E_3 = (HTH} E_4 = {HTT}

E_5 = {THH} E_6 = {THT} E_7 = {TTH} E_8 = {TTT}

* **संयुक्त घटनाएँ (Compound events)**

(i) तीनों चित प्राप्त करना	A = { HHH }
(ii) कम से कम एक चित प्राप्त करना	B = { HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH }
(iii) कम से कम दो पट प्राप्त करना	C = { HTT, THT, TTH, TTT }
(iv) कोई चित प्राप्त न हो	D = { TTT }

*** अनुकूल प्रारंभिक घटना Favourable elementary event**

(i) घटना A प्राप्त करने के लिए, केवल एक प्रारंभिक घटना है

अर्थात, E_1 = HHH अनुकूल

$\therefore$ यदी E_1 घटित होता है तो घटना A घटित होती है।

(ii) घटना, B घटने केलिए, सात प्रारंभिक घटनाएँ : E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 और E_7 अनुकूल घटनाएँ है।

$\therefore$ यदी इन अनुकूल घटनाओं में से एक कोई घटित होता है तो, घटना B घटित होती है।

(iii) घटना D का होना संभव, यदि एकमेव अनुकूल घटना E_8 घटती है।

चर्चा के इस मोड पर, यह जान लेना रोचक होगा कि जब कभी एक याद्दच्छिक प्रयोग किया जाता है। उससे संबंधित घटनाओं के लिए, घटित होने समान संयोग मिल भी सकते है अथवा नहीं।

उदाहरण :

(i) एक **सिक्का उच्छालने** पर, एक चित और एक पट प्राप्त करने में दोनों को समान संयोग होते हैं।

(ii) एक **पासे को उच्छालने** पर, 1, 2, 3, 4, 5 अथवा 6 को समान संयोग होते हैं।

(iii) 4 लाल और 1 नीले गेंद के थैली में से **एक गेंद उठाने** पर, रंगीन गेंद प्राप्त करने के समान संयोग होते है। परन्तु एक नीले गेंद से भी लाल गेंद प्राप्त अधिक संवनीय है।

उदाहरण i और ii प्रत्येक प्रयोग के लिए समान संभवनीय समान परिणाम होते है माना जाता है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक प्रारोभक घटना एक संभावनीय घटना होती है।

उदाहरण iii में, रंगीन गेंद प्राप्त करने में, समान संभवनीय परिणाम होते हैं; जब कि एक लाल गेंद अथवा एक नीले गेंद प्राप्त करने में समान संभवनीय परिणाम नहीं होते है। इसलिए, सभी याद्दच्छिक प्रयोगों के समान संभवनीय परिणाम होना आवश्यक नहीं है। अब हम समान संभवनीय घटना की परिभाषा देते हैं ।

एक याद्दच्छिक प्रयोग के दो अथवा अधिक घटनाओं को समान संभवनीय घटना कहते हैं यदि इनमें से प्रत्येक को घटित होने के समान संयोग होते हैं।

सूचना : इस घटक में, हम यह मानते हैं कि सभी प्रयोगों कै समान संभवनीय घटनाएँ अथवा परिणाम होते हैं। अब तक हमने, एक याद्दच्छिक प्रयोग से संबंधित पदों में जान लिया है। अब हम एक घटना की प्रायिकता की परिभाषा देते हैं।

एक घटना की प्रायिकता Probability of an event

हमने यह चर्चा की है कि, एक घटना की प्रायिकता, वह घटना घटित होने के संयोग की मात्रा है। अब हम कुछ घटनाओं के बारे में विचार करेंगें और उन घटनाओं के घटित होने के संयोग अथवा उन घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करेंगें। एक सिक्के के उच्छालने और एक पासे के फेंकने के जैसे याद्दच्छिक प्रयोगों से परिचित हैं। निम्नलिखित याद्दच्छिक प्रयोगों का अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 1:

* **एक चक्र पर तीर का घुमाना**

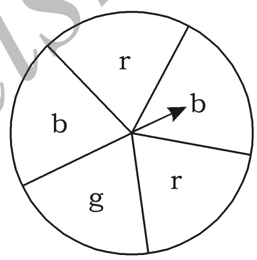
मान लीजिए एक चक्र में 5 भाग बनायें गये हैं, जिसमें 2 भाग लाल में, 2 नीले में और 1 हरे रंग में रंगाये गए हैं।

चक्र पर लगाये गए एक तीर को जब घुमातें है तो वह घुमकर, पाँच में से किसी एक भाग पर आकर रुकता है। प्रत्येक घुमाव में हम तीर के स्थान की भविष्यवाणी नहीं कर सकते हैं। इसलिए, चक्र पर एक तीर का घूमना एक यादृच्छिक प्रयोग है।

S = {r, r, b, b, g}

∴ संभाव्य कुल परिणामों की संख्या 5 है ।

इसे n(S) = 5 से सूचित करते हैं।



कुछ घटनाएँ इस प्रकार हैं :

* लाल रंग से रंगाने भाग पर तीर का रुकना E_1 = {r, r}
* हरे रंग से रंगाने भाग पर तीर का रुकना E_2 = {g}
* नीले रंग से रंगाये भाग पर तीर का रुकना E_3 = {b, b}
* नीले रंग से रंगाये भाग पर तीर का न रुकना E_4 = {r, r, g}

उदाहरण 2:

* एक साथ दो निष्पक्ष पासों का फेंकना

जब दो पासे फेंके जाते हैं, तो संबाव्य कुल परिणाम हैं

S = {	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6) }

∴ n (S) = 6 × 6 = 36

कुछ घटनाएँ इस प्रकार हैं :

* एक द्विन्व (– –) प्राप्त करने की घटना A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}
* संख्याओं का योग 5 प्राप्त करने की घटना B = P(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}
* 3 से कम यगफल प्राप्त करने की घटना C = {(1, 1)}

आईए, इनमें से कुछ यादृच्छिक प्रयोग और घटनाओं के बारे में विचार करते हैं। संभाव्य कुल परिणाम घटना के अनुकूल परिणाम और घटित होने का संयोय तालिका में लिखित है। प्रत्येक उदाहरण का अध्ययन कीजिए :

उदा स.	यादृच्छिक प्रयोग	संभाव्य परिणाम	घटना A	घटना A के अनुकूल परिणाम	घटना घटित होने का संयोग	
1.	एक सिक्के का उच्छालना	S = {H, T} n(S) = 2	चित प्राप्त करना	A = {H}, n(A) = 1	2 में से 1	$\frac{1}{2}$
2.	एक पासे का उच्छालना	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6	सम संख्या प्राप्त करना	A = {2, 4, 6} n(A) = 3	6 में से 3	$\frac{3}{6}$
			5 से बड़ी संख्या प्राप्त करना	A = {6} n(A) = 1	6 में से 1	$\frac{1}{6}$
3.	चक्र पर तीर का घुमना	S = {r, r, b, b, g} n(S) = 5	लाल रंग पर तीर का सामना	A = {r, r} n(A) = 2	5 में से 2	$\frac{2}{5}$
4.	दो पासों का एक साथ उच्छालना	n(S) = 6 (पूर्व के पृष्ठ में देखिए)	एक द्विन्व प्राप्त होना	A = {b, b, g} n(A) = 3	5 में से 3	$\frac{3}{5}$
			3 से कम जोड प्राप्त करना	A = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4) (5,5) (6,6)} n(A) = 6	6 में से 36	$\frac{6}{36}$
			3 में से कम जोड	A = {(1,1)}	1 में से 36	$\frac{1}{36}$

तालिका का अंतिम स्तंभ देखिए, यह एक घटना घटित होने के संयोग अथवा घटने की प्रायिकता दर्शाता है। यह मूल्य किस रूप में व्यक्त हुआ है? हमें ज्ञात होता है कि **यह भिन्न** में व्यक्त है, जहाँ अंश, एक घटना की अनुकूल परिणामों और हर कुल संभाव्य परिणामों को व्यक्त करता है।

सामान्यतः यदि E एक घटना है,

घटना E के अनुकूल प्रारंभिक घटनाओं संख्या = n (E),

कुल संभाव्य परिणामों (S) में प्रारंभिक घटनाएँ की संख्या = n (S),

घटना E की प्रायिकता = P (E), हम प्राप्त करते हैं,

$$\text{एक घटना की प्रायिकता} = \frac{\text{एक घटना की अनुकूल घटनाओं की संख्या}}{\text{कुल संभाव्य परिणामों की संख्या}}$$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

एक भिन्न को अनुपात के रूप में भी व्यक्त कर सकते है, इसलिए प्रायिकता को निम्न रूप से भी परिभाषित कर सकते हैं :

एक घटना की प्रायिकता, एक घटना के अनुकूल प्रारंभिक परिणामों की संख्या और कुल संभाव्य परिणामों के प्रारंभिक परिणामों की संख्या का अनुपात है।

दूसरे शब्दों में, एक याद्दच्छिक प्रयोग के कुल संभाव्य परिणामों की संख्या यदि 'n' हो और घटना E के अनुकूल परिणाम 'm' हो तो घटना E की प्रायिकता को 'm' और 'n' का अनुपात में परिभाषित करते हैं।

$$\therefore \text{ P(E)} = \text{m : n} = \frac{m}{n} = \frac{n(\text{E})}{n(\text{S})}$$

सूचना : उपरोक्त प्रायिकता की मानक परिभाषा उपयोगी है यदि संभवनीय परिणाम सीमित है और परिणाम सम संभवनीय है।

अब तक हमने चर्चा है कि एक घटना की प्रायिकता भिन्न के रूप में एक संख्यात्मक मूल्य है। क्या यह सभी घटनाओं केलिए सत्य है? क्या कोई घटनाएँ हैं, जिनकी प्रायिकता भिन्न में नहीं होती कुछ उदहारणों पर विचार करते हैं।

मान लीजिए हम एक पासे को उच्छालते हैं:

(i) एक स्वाभाविक संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\quad\therefore$ n(S) = 6

E = {एक स्वाभाविक संख्या प्राप्त करना}

$\Rightarrow$ E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\quad\therefore$ n(E) = 6

$$\therefore P(E) = \frac{n(\text{E})}{n(\text{S})} = \frac{6}{6} = 1$$

(ii) 7 से छोटी संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

n (S) = 6

E = {7 से छोटी संख्या प्राप्त करना}

$\Rightarrow$ E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\quad\therefore$ n(E) = 6

$$\therefore P(E) = \frac{n(\text{E})}{n(\text{S})} = \frac{6}{6} = 1$$

उपरोक्त दो उदाहरणों में, हम देखते हैं कि E = S और n(E) = n(S) और P(E) = 1 अर्थात घटना E की प्रायिकता 1 है जो एक पूर्ण संख्या है। ऐसी घटनाओं को **निश्चित घटनाएँ (sure events)** कहते हैं, जहाँ कुल संभाव्य परिणाम के घटक, घटना के अनुकूल परिणाम है।

एक याद्दच्छिक प्रयोग के कुल संभाव्य परिणाम परिणाम को निश्चित घटना कहते है यदि प्रयोग के किसी परीक्षण में उसके घटकों में से कोई एक निश्चित रूप से घटित होता है।

$\therefore$ निश्चित घटना की प्रायिकता 1 होती है।

सोचिए !
" एक सिक्का उच्छालते है चित मैं जीता हूँ और पट तुम हारते हो"
यह किस प्रकार की घटना है? उसकी प्रायिकता क्या है?

(iii) 7 से बडी संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

n (S) = 6

A = {7 से बडी संख्या प्राप्त करना}

$\Rightarrow$ A = { } $\therefore$ n(A) = 0

$\therefore$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$

(iv) 1 से छोटी संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

n(s) = 6

A = {1 से छोटी संख्या}

$\Rightarrow$ A = { } $\therefore$ n (A) = 0

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$

इन दो संदर्भों में, हम ज्ञात होता है, कि A = ϕ और n(A) = 0, P(A) = 0,

एक घटना A की प्रायिकता 0 है, जो एक पूर्ण संख्या है। ऐसी घटनाओं की **असंभव घटनाएँ** कहते हैं।

प्रयोग के किसी परीक्षण में यदि कोई घटना कभी घटती नहीं है तो उसे असंभव घटना कहते है।

उपरोक्त चर्चा के अनुसार, एक घटना की प्रायिकता के बारे में हम यह तथ्य कह सकते हैं।

* यदि A = ϕ, तो n(A) = 0

  $\therefore$ P(असंभव घटना) = 0

* यदि A = S, तो n(A) = n(S)

  $\therefore$ P (निश्चित घटना) = 1

* असंभव घटना और निश्चित घटना के अलावा अन्य किसी घटना के लिए

  n(A) > 0 और n(A) < n(S)

  $\Rightarrow$ P(A) > 0 और P(A) < 1

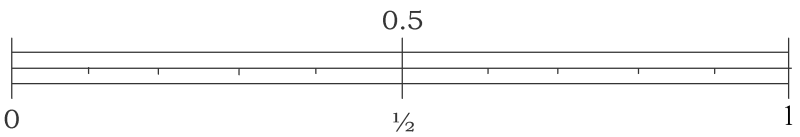
  0 < P(A) < 1

सभी असंभव और निश्चित घटनामों A के लिए **$0 \leq P(A) \leq 1$**

एक घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच की कोई संख्या है और 0 और 1, उसमें समाविष्ट है, केवल जब वह क्रमशः एक असंभव घटना और निश्चित घटना है। अब, हम यह कह सकते हैं कि, एक घटना की प्रायिकता

* दो पूर्ण संख्या 0 और 1 के बीच में होती है
* एक भिन्न है, जो एक से कम और 0 से अधिक है।
* एक घटना की प्रायिकता 0 अथवा 1 अथवा 0 और 1 के बीच का भिन्न हो सकती है।

उपरोक्त विचार को **प्रायिकता माप (Probability Scale)** पर निम्न रूप से व्यक्त कर सकते हैं।



असंभव घटना
P(A) = 0

निश्चित घटना
P(A) = 1

व्याख्यात्मक उदाहरण

एक घटना की प्रयिकता ज्ञात करने के कुछ व्याख्यात्मक उदाहरण नीचे दिये गए हैं। उनका अध्ययन कीजिए:

उदाहरण 1: यदि एक पासे को लुढकाते हैं तो निम्नों की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) 5 प्राप्त करने की **(ii) एक विषम संख्या प्राप्त करने की**

(iii) 2 से बडी संख्या प्राप्त करना **(iv) 6 के अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त करना**

हल : एक पासे लुढकाने पर, कुल संभाव्य परिणाम S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\therefore$ n(S) = 6

(i) मान लीजिए 5 प्राप्त करने की घटना A है

A = { 5 } $\Rightarrow$ n(A) = 1

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

(ii) एक विषम संख्या प्राप्त करने की घटना B है

B = {1, 3, 5} $\Rightarrow$ n(B) = 3

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(iii) 2 से बडी संख्या प्राप्त करना की घटना C है,

C = {3, 4, 5, 6} $\Rightarrow$ n(C) = 4

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(iv) 6 का अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त करने की घटना D है

D = {2, 3} $\Rightarrow$ n(D) = 2

$$\therefore P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 2: एक निष्पक्ष सिक्का दो बार उच्छाला गया है, निम्नों को प्रायिकता ज्ञात कीजिए

(i) दो चित प्राप्त करना (ii) कम से कम एक चित प्राप्त करना

(iii) कोई चित प्राप्त न होना (iv) बराबर से एक ही पट प्राप्त होना

हल : जब एक निष्पक्ष सिक्के को दो बार उच्छालते हैं, कुल संभाव्य परिणाम

$S = \{HH, TT, HT, TH\} \therefore n(S) = 4$

(i) दो चित प्राप्त करने घटना A मान लीजिए

$A = \{HH) \therefore n(A) = 1$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

(ii) कम से कम एक चित प्राप्त करने की घटना B है

$B = \{HH, HT, TH) \Rightarrow n(B) = 3$

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

(iii) कोई चित प्राप्त न करने की घटना C है

$C = \{TT) \Rightarrow n(C) = 1$

$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

(vi) बराबर से एक पट प्राप्त करने की घटना D

$D = \{ HT, TH) \therefore n(D) = 2$

$\therefore P_{(D)} = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{2}{4}$

उदाहरण 3 : तीन निष्पक्ष सिक्के एक साथ उच्छालने पर निम्नों की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब

(i) सभी पट प्राप्त हो

(ii) कम से कम एक पट प्राप्त हो

(iii) अत्यधिक एक पट प्राप्त हो

(iv) अत्याधिक दो चित प्राप्त हो

हल: तीन निष्पक्ष सिक्के एक साथ उच्छालने पर संभाव्य परिणाम

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\} \therefore n(S) = 8$

(i) मान लीजिए सभी चित प्राप्त करने की घटना A है

$A = \{ TTT \} \therefore n(A) = 1$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

(ii) कम से कम एक पट प्राप्त करने की घटना B है,

$B = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$\therefore n(B) = 7$

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

(iii) अत्यधिक एक पट प्राप्त करने घटना C है

$\therefore$ C = {HHH, HHT, HTH, THH}

$\therefore$ n (C) = 4

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{8}$$

(iv) अत्याधिक ही चित प्राप्त करने की घटना D है

D = {HHT, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

$\therefore$ n (D) = 7

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

उदाहरण 4 : दो निष्पक्ष पासों को एक बार लुढकाया गया है । निम्नों की प्रयिकता ज्ञात कीजिए जब

(i) एक द्विन्व प्राप्त हो (ii) जोड 7 (iii) 10 से कम जोड प्राप्त हो।

हल: जब दो निष्पक्ष पासे लुढकाते है कुल संभाव्य परिणाम होते हैं 6 × 6 = 36

$\therefore$ n(S) = 36

(i) मान लीजिए एक द्वित्व प्राप्त करने की घटना A है।

A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

$\therefore$ n(A) = 6

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

(ii) जोड 7 प्राप्त करने की घटना B है

B = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}

$\therefore$ n(B) = 6

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

(iii) मान लीजिए 10 से कम जोड प्राप्त करने की घटना C है।

C = {(1, 6), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (2,4), (2,5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3)}

$\therefore$ n(C) = 30

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{30}{36}$$

उदाहरण 5 : एक कक्षा में 30 बालिका और 25 बालक है। यादृच्छिक रूप से एक विद्यार्थी चुना जाता है। निम्नों की प्रायिकता क्या है यदि चुना हुआ एक **(i)** बालक है **(ii)** बालिका है।

हल : कुल विद्यार्थियों की संख्या = 30 + 25 = 55

$\therefore$ n(S) = 55

(i) मान लीजिए एक बालक चुने जाने की घटना A है

$\therefore$ n(A) = 30

$\therefore$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{55}$

(ii) एक बालिका चुने जाने की घटना B है

$\therefore$ n(B) = 2

$\therefore$ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{25}{55}$

उदाहरण 6 : एक चुने हुए आधिवर्ष में **53** रविवार होने की प्रायिकता क्या है?

हल : एक आधिवर्ष में दिनों की संख्या = 366

366 दिन = 52 सप्ताह और 2 दिन

बाकी 2 दिन हो सकते हैं

(i) रविवार और सोमवार (ii) सोमवार और मंगलवार (iii) मंगलवार और बुधवार

(iv) बुधवार और गुरुवार (v) गुरुवार और शुक्रवार (vi) शुक्रवार और शनिवार

(vii) शनिवार और रविवार

अधिवर्ष में 53 रविवार होने केलिए अन्तिम दो दिन या तो रविवार और सोमवार अथवा शनिवार और रविवार होना चाहिए :

अनुकुल परिणामों की संख्या = n(A) = 2

कुल संभाव्य परिणाम = n(S) = 7 $\therefore$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$P_{(\text{अधिवर्ष में 53 रविवार होना})} = \frac{2}{7}$

उदाहरण 7 : एक थैली में **6** लाल गेंद और कुछ नीले गेंद है। यदि एक नीला गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता, एक लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता की अपेक्षा दुगुनी है, थैली में कितने नीले गेंद है ज्ञात कीजिए ।

हल : मान लीजिए नीले गेंदों की संख्या = x है

$\therefore$ कुल गेंदों की संख्या = $(6 + x)$

$$P_{(\text{लाल गेंद प्राप्त करना})} = \frac{6}{6+x}$$

$$P_{(\text{नीला गेंद प्राप्त करना})} = \frac{x}{6+x} \Rightarrow \frac{x}{6+x} = 2\left(\frac{6}{6+x}\right) \Rightarrow \frac{6}{6+x} = \frac{12}{6+x}$$

$\Rightarrow$ $12(6 + x) = x(6 + x) \Rightarrow 72 + 12x = 6x + x^2$

$x^2 - 6x - 72 = 0 \Rightarrow (x - 12)(x + 6) = 0$

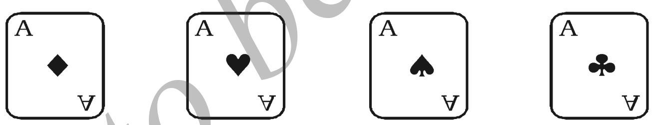
$x - 12 = 0$ or $x + 6 = 0 \Rightarrow x = 12$ or $x = -6$

$\therefore$ नीले गेंदों की संख्या = 12

उदाहरण 8 : अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता याद्दच्छिक रूप निकाला गया है। निम्नों की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब

(i) एक बेगम **(a queen) (ii)** एक लाल बादशाह **(a red king) (iii)** ईंट **10 (a diamond 10) (iv)** एक पान **(heart)**

ईंट (Diamond) पान(hearts) हुकुम(spades) चिडी(clavors)



हल: हुकुम और चिडी के पत्ते काले रंग के होते हैं। पान और ईंट के पत्ते लाल रंग के होते हैं। 13 पत्तों के प्रत्येक समूह बादशाह (K), बेगम (Q) और जैक अथवा गुलाम के तीन तस्वीरी नाश होते है(J).

अच्छी प्रकार से फेंटने से समसंभवनीय परिणाम प्राप्त होने का सुनिश्चित होता है। 52 ताश के पत्तों इस प्रकार से वर्गीकृत कर सकते है।

पान	♠	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
हुकुम	♥	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
चिडी	♣	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
ईंट	♦	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K

अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की गड्डी से पत्ता निकालने को प्रकार से चुने सकते हैं।

1. बेंगम प्राप्त करणे की प्रायिकता
2. लाल यादशाह प्राप्त की प्रायिकता
3. ईंट प्राप्त करने की प्रायिकता
4. पान प्राप्त करने की प्रायिकता

उदाहरण 9 : दो यदृच्छिक प्रयोगों के बारे में विचार कीजिए :

(i) एक निष्पक्ष सिक्का एक बार उच्छालना

(ii) एक निष्पक्ष पासे एक बार उच्छालना

हर संदर्भ में, प्रत्येक प्रारंभिक घटना की प्रायिकता ज्ञात कर उसे जोडिए। तुम क्या निर्णय ले सकते हो?

हल: (i) एक सिक्का का उच्छालना

$S = \{H, T\} \qquad \therefore n(S) = 2$

प्रारंभिक घटना हैं $E_1 = \{ H \}$ $E_2 = \{ T \} \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{2}$ $P(E_2) =$ 1

$P(E_1)$ और $P(E_2)$, जोडने पर हम प्राप्त करते हैं

$$P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(ii) एक पासे का उच्छालना

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus n(S) = 6$

प्रारंभिक घटनाएँ है :

$E_1 = \{ 1 \}, E_2 = \{ 2 \}, E_3 = \{ 3 \}, E_4 = \{ 4 \}, E_5 = \{ 5 \}, E_6 = \{ 6 \}$

$$\Rightarrow P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = P(E_5) = P(E_6) = \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

उपरोक्त उदाहरणों में, हम देखते हैं कि एक प्रयोग के सभी प्रारंभिक घटनाओं के प्रायिकताओं का जोड 1 है। यह सामान्यतः हमेशा सत्य है।

अभ्यास 5.1

1. एक पासा लुढकाया गया है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब
   (i) संख्या 4 प्राप्त होता है
   (ii) एक वर्ग संख्या प्राप्त होता है
   (iii) एक धन संख्या प्राप्त होती है
   (iv) 1 से बडी कोई संख्या प्राप्त होती है।
2. दो सिक्कों को एक साथ उच्छाला गया है
   (i) कोई पट प्राप्त न होने की
   (ii) अत्यधिक दो पट प्राप्त होने की
   (iii) बराबर से एक चित प्राप्त होने की
   (iv) कम से कम एक पट प्राप्त होने की

   प्रायिकता क्या होती ज्ञात कीजिए
3. तीन सिक्कों की एक साथ उच्छाला गया है।

   प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब हमें
   (i) कम से कम एक चित प्राप्त हो
   (ii) अत्याधिक दो चित प्राप्त हो
   (iii) कोई चित प्राप्त न हो
   (iv) सभी चित प्राप्त हो
4. दो पासों एक साथ उच्छाला गया है।

   प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब हमें
   (i) योग 8 प्राप्त होता है
   (ii) 12 से कम जोड प्राप्त होता है
   (iii) 4 से भाज्य प्राप्त जोड होता है
   (iv) गुणनफल 12 प्राप्त होता है
   (v) 20 से कम गुणनफल प्राप्त हो
   (vi) गुणनफल 5 से भाज्य हो
   (vii) मुख पर आनेवाले दो अंकों से बनी दो अंकों की संख्या 3 से भाज्य हो
5. 1 से 50 में एक संख्या याद्दच्छिकता चुनी जाती है। प्राप्त संख्या
   (i) एक अभाज्य संख्या होने की
   (ii) संपूर्ण घन न होने की
   (iii) एक संपूर्ण वर्ग प्राप्त करने की
   (iv) एक त्रिभुजीय संख्या प्राप्त होने की
   (v) 6 का गुणज प्राप्तहोने की
   (vi) 2 का गुणज प्राप्त न होने की

   प्रायिकता क्या होती ज्ञात कीजिए
6. अच्छी प्रकार से फेंटी हुई ताश की गड्डी के 52 पत्तों में एक पत्ता याद्दच्छिकता से निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब निकाला हुआ पत्ता
   (i) हुकुम
   (ii) लाल रंग का पत्ता
   (iii) काले रंग का पत्ता नहीं हो
   (iv) एक बेगम हो

(v) एक ईंट न हो (vi) एक इक्का हो

(vii) एक इक्का न हो (viii) काला बादशाह

(ix) काला गुलाम (x) 10 से कम एक पान

7. बिना अंकों की पुनावृति किये 2, 5 और 7 अंकों से बनी दो अंकों की संख्या बनी है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब बनीं संख्या

(i) एक वर्ग संख्या है (ii) 3 से भाज्य है

(iii) 52 से बडी है (iv) 57 से छोटी है

(v) 25 से छोटी है (vi) एक पूर्ण संख्या है।

8. 30 अच्छे आमों के साथ 9 सडे आम मिल गए हैं। यादृच्छिकता से एक आम लेने पर

(i) अच्छा आम (ii) सडा आम प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

9. होली त्योहार में, सोनाली ने 7 बोतलों में विभिन्न लाल, नीला, हरा, गुलाबी, पीला, बैंजनी और नारंगी रंग के पानी से भरा।

यादृच्छिकता एक बोतल लिया गया है।

(i) नारंगी रंग (ii) पीला रंग छोडकर

(iii) लाल अथवा हरा (iv) पीला अथवा गुलाबी न होकर

v) भूरे रंग की बोतल चुनने की प्रायिकता क्या है?

10. एक बक्से में 144 पेन है जिन में 20 दोषपूरित है और अन्य अच्छे हैं। एक व्यक्ति पेन खरीदता है जब वह अच्छा है और दोषपूरित होने पर खरीदता नहीं। दुकानदार यादृच्छिकता से एक पेन बक्से से निकालकर, उस व्यक्ति को देता है। प्रायिकता क्या होगी जब वह व्यक्ति

(i) खरीदता है (ii) खरीदता नहीं?

घटना (Events)

अब तक हम ने घटनाओं के बारे में सीखा है जिनको घटकों के आधार वर्गीकृत कर सकते हैं।

अब हम, कुछ और घटनाओं के प्रकार को सीखेंगें जो सरल घटना अथवा संयुक्त घटनाएँ है।

घटनाएँ

- निश्चित घटना और असंभव घटनाएँ
- सरल घटनाएँ अथवा प्रारंभिक घटनाएँ
- संयुक्त घटनाएँ

पूरक घटनाएँ Complementary events

मान लीजिए, हम एक पासे को एक बार उच्छालते हैं। दो प्रकार की घटनाओं पर विचार कीजिए

(i) सम संख्या प्राप्त होने की घटना - E_1

(ii) एक विषम संख्या प्राप्त होने की घटना - E_2

$\therefore E_1 = \{2, 4, 6\}$ और $E_2 = \{1, 3, 5\}$

अब और एक घटना सम संख्या न प्राप्त होने की घटना पर भी विचार करते है = $\{1, 3, 5\}$

इन घटनाओं की तुलना कीजिए

एक विषम संख्या प्राप्त करना और सम संख्या प्राप्त न करना

दोनों $\{1, 3, 5\}$ से समान है।

E_2 और E_1 दोनों एक ही है, हमें ज्ञात होता है E_2 न घटने पर E_1 घटित होता है और दोनों विपरीत भी सत्य है।

इन दोनों घटनाओं E_1 और E_2 को **पूरक** घटनाएँ कहते हैं।

अर्थात, E' घटना, E घटना नहीं तथा E घटना नहीं यह E घटना की पूरक है।

E घटना के पूरक को $\bar{\mathbf{E}}$ से सूचित करते हैं E घटना के पूरक को E नहीं घटना भी कहते है। एक घटना के पूरक को एक घटना का निषेध भी कहते है। अब हम, एक घटना तथा उसके $\bar{\mathbf{E}}$ पूरक के बीच के संबंध ज्ञात करते हैं। निम्नलिखित तालिका का अध्ययन कीजिए। कुछ घटना. उसके पूरक और उनकी प्रायिकता दी गई है।

P(E) और $P(\bar{E})$ के बारे में आपको क्या ध्यान में आता हैं?

यादृच्छिक प्रयोग	घटना E	पूरक घटना E नही	P(E)	$P(\bar{E})$	$P(E) + P(\bar{E})$
एक सिक्का का उच्छाला S {H, T}	एक चित प्राप्त करना E = {H}	एक पट प्राप्त करना अथवा चित नहीं प्राप्त करना $\bar{E} = \{T\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
2 एक पासे को फेंकना S={1,2,3,4,5,6} n(S) = 6	3 से बडी संख्या प्राप्त करना E = {4, 5, 6}	3 से बडी संख्या नहीं प्राप्त करना E = {1, 2, 3}	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=1$
	3 का गुणज प्राप्त करना	3 का गुणज नहीं प्राप्त करना	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}+\frac{4}{6}=1$

उपरोक्त तालिका हमें ध्यान में आते हैं कि

$P(E) + P(\bar{E}) = 1$

$\Rightarrow P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

अन्य शब्दों में, P(E) + P(E नहीं) = 1

P(E नहीं) = 1 – P(E)

P(E) = 1 – P(E नहीं)

सोचिए !

एक यादृच्छिक प्रयोग, क्या एक निश्चित घटना असंभव घटना की पूरक घटना होती है?

कया उपरोक्त संबंध इन घटनाओं के लिए सत्य है? समूहों में चर्चा कीजिए।

समुच्चय की भाषा उपयोग कर, उपरोक्त संबंध को हम सिद्ध कर सकते हैं।

हम जानते हैं कि, $E \cup \bar{E} = S$ और $E \cap \bar{E} = \phi$

$\therefore\ n(E) + n(\bar{E}) = n(S)$

दोनों पक्षों में n(S) से भाग लगाने पर

$$\frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(\bar{E})}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow P(E) + P(\bar{E}) = 1 \Rightarrow P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

सूचना : यदि एक घटना A, 'm' प्रकारों में घटित होती है और 'n' प्रकारों में घटित नहीं होती, सम संभवनीय घटित होने पर, तो

* घटना घटित होने की प्रायिकता = $\frac{m}{m+n}$
* एक घटना घटित न होने की प्रायिकता = $\frac{n}{m+n}$

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: एक खेल जीतने की प्रायिकता **0.3,** है, तो खेल हारने की प्रायिकता क्या है?

हल : मान लीजिए A यह एक खेल जीतने की घटना है

तो $\bar{A}$ खेल हारने की घटना होगी

दिया हुआ है कि, P(A) = 0.3.

हम जानते है कि, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0.3 = 0.7$

$\therefore$ खेल हारने की प्रायिकता 0.7 है।

उदाहरण 2: यदि **A** यह एक यादृच्छिक प्रयोग की घटना है ताकि **P(A) : P($\bar{A}$) = 5:11,** तो **(i) P(A)** और **P($\bar{A}$),**ज्ञात कीजिए और **(ii)** सत्यापन कीजिए **P(A) + P($\bar{A}$) = 1**

हल : (i) $P(A) : P(\bar{A}) = 5:11$

$$\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{5}{11} \therefore 11\,P(A) = 5\,P(\bar{A})$$

$$11\,P(A) = 5\,[1-P(A)] \quad (\because P(A) + P(\bar{A}) = 1)$$

$$11\,P(A) = 5 - 5\,P(A),\ 11\,P(A) + 5\,P(A) = 5,\ 16\,P(A) = 5$$

$$\therefore P(A) = \frac{5}{16} \therefore \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{16} \therefore \quad P(\bar{A}) = \frac{11}{16}$$

(ii) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$$LHS = P(A) + P(\bar{A}) = \frac{5}{16} + \frac{11}{16} = \frac{16}{16} = 1 = RHS$$

परस्पर अनन्य घटनाएँ (Mutually exclusive events)

एक पासे को उच्छालने के प्रयोग पर विचार कीजिए

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

मान लीजिए

E_1 = 3 से छोटी संख्या प्राप्त करने की घटना है

E_3 = 4 से बडी संख्या प्राप्त करने की घटना है

$\therefore E_1 = \{1, 2\} \qquad E_2 = \{5, 6\}$

E_1 और पूरक घटनाएँ नहीं है।

$\therefore E_1 \cup E_2 \neq S$

तो, किस प्रकार की घटनाएँ हैं ये?

ध्यान दीजिए E_1 और E_2 एक साथ घटित नहीं होती एक ही समय पर घटती।

E_1 केवल तभी घटती है जब E_2 नहीं घटती और विपरीत भी सत्य है।

हम कहते हैं, E_1 और E_2 दोनों परस्पर अनन्य है अर्थात एक घटना, दूसरी घटना की घटित होने से रोकती है अथवा एक घटना को दुसरी घटना को वर्जित करती है।

> दो अधिक घटनाओं को परस्पर अनन्य कहते हैं यदि एक घटना, दूसरी घटना घटित होने से रोकती है अथवा एक घटना को वर्जित करती है।

इस तरह E_1 और E_2 दो परस्पर अनन्य घटनाएँ होती है तो

$E_1 \cap E_2 = \phi$.

समुच्चय सिद्धांत के अनुसार E_1 और E_2 बेमेल समुच्चय है।

$\therefore$ उन में कोई सामान्य परिणाम और प्रारंभिक घटना नहीं होती।

$\Rightarrow n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2)$

दोनों पक्षों में $n(S)$ से भाग लगाने पर हमें प्राप्त होता है,

$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} \quad \therefore P(E_1 \cup E_2)$

$= P(E_1) + P(E_2)$

इस परिणाम को **प्रायिकता का जोड का नियम है।**

सूचना :

- इस नियम को दो परस्पर भिन्न घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए उपयोग करते है।
- इस नियम को दो से अधिक परस्पर अनन्य घटनाओं केलिए विस्तार कर सकते है।

  यदी E_1, E_2, E_3 ....E_n परस्पर अनन्य घटनाएँ हैं तो

  $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \text{ ....} E_n) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) \text{ ....} P(E_n)$

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : दो सिक्कों को एक साथ उच्छालते है। यातो दो चित अथवा कम से कम एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

हल :$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\therefore n(S) = 4$

मान लीजिए A दो चित प्राप्त करने की घटना है

तो $A = \{HH\}$ और $n(A) = 1$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

मान लीजिए, B यह कम से कम एक पट प्राप्त करने की घटना है,

तो $B = \{HT, TH, TT\}$ और $n(B) = 3$

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

अब A और B दोनों परस्पर अनन्य घटनाएँ है।

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ($\because$ प्रायिकता का जोड नियम)

$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$\therefore$ दो चित अथवा कम से कम एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता 1 है

उदाहरण 2 : दो पासों को एक साथ उच्छाला गया है।

10 से अधिक योगफल अथवा योगफल **5** से कम प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

हल : हम जानते हैं कि, जब दो पासे एक साथ उच्छाले जाते हैं

n(S) = 36.

मान लीजिए योगफल 10 से अधिक प्राप्त करने की घटना A है

तो A = {(5,6), (6,5), (6,6)}

n(A) = 3

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

मान लीजिए योगफल 5 से कम प्राप्त करने की घटना B है।

तो, B = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)}

n (B) = 6

$$\therefore\ P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

अब A और B घटनाएँ परस्पर अनन्य है।

$\therefore$ P(A∪B) = P(A) + P(B) (प्रायिकता का जोड का नियम)

$$P(A\cup B) = \frac{3}{36}+\frac{6}{36} \Rightarrow P(A\cup B) = \frac{13}{36}$$

$\therefore$ योगफल 10 से अधिक अथवा 5 से कम प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{13}{36}$

उदाहरण 3 : अच्छी तरह फेंटी हुई ताश का गड्डी में **52** कार्ड हैं। एक लाल कार्ड अथवा एक काले बादशाह और समसंख्या युक्त एक चिडी प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

हल : मान लीजिए A यह लाल काई प्राप्त करने की घटना है।

n(A) = 12 ईंट+ 13 पान= 26

मान लीजिए B, यह काला बादशाह प्राप्त करने की घटना है।

n(B) = 1 हुकुम बादशाह + 1 चिडी युक्त बादशाह = 2

मान लिजिए C यह, सम संयुक्त ईंट प्राप्त करने की घटना है।

n(c) = 2, 4, 6, 8, 10 के ईंट के 5 कार्ड हैं।

$$P(A) = \frac{26}{52} \qquad P(B) = \frac{2}{52} \qquad P(C) = \frac{5}{52}$$

अब, A, B और C परस्पर अनन्य घटनाएँ है।

$\therefore$ P(A∪B∪C) = P(A) + P(B) + P(C)

$$P(A\cup B\cup C) = \frac{26}{52} + \frac{2}{52} + \frac{5}{52} \Rightarrow P(A\cup B\cup C) = \frac{26+2+5}{52} = \frac{33}{52}$$

$\therefore$ एक लाल पत्ता और काला बादशाह अथवा समसंख्या युक्त ईंट $\frac{33}{52}$ है

उदाहरण 4 : MATHEMATICIAN शब्द में से याद्दच्छिकता से एक अक्षर चुना गया है। चुना हुआ अक्षर **M** अथवा **A** होने की प्रायिकता क्या है?

हल : MATHEMATICIAN शब्द 13 अक्षर है।

n (S) = 13

मान लीजिए E यह M अक्षर प्राप्त करने की घटना है

$\therefore$ n(E) = 2

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{13}$

मान लीजिए F यह A अक्षर प्राप्त करने की घटना है।

$\therefore$ n(F) = 3

$P(F) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{13}$

अब E और F दोनों परस्पर अनन्य घटनाएँ है।

$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

$P(E \cup F) = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} = \frac{5}{13}$

उदाहरण 5 : एक कक्षा में, **40%** विद्यार्थि ईको क्लब के सदस्य है और **25%** गणित क्लब के सदस्य है। यदि एक विद्यार्थिको याद्दच्छिकता से चुना जाता है, वह विद्यार्थी दोनों क्लब का सदस्य न होने की प्रायिकता क्या है?

हल : मान लीजिए, A यह ईको क्लब के सदस्य को चुनने की घटना है।

$P(A) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

मान लीजिए, B यह गणित क्लब के सदस्य चुने जाने की घटना है।

$P(B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

क्योंकि A और B परस्पर अनन्य घटनाएँ है।

हमें प्राप्त है $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$

$\therefore$ एक ईको क्लब अथवा गणित क्लब के सदस्य चुने जाने की प्रायिकता $= \frac{13}{20}$

अब C यह एक विद्यार्थी दोनों क्लब का सदस्य न होने की घटना है, यह $(A \cup B)$ की पूरक घटना है।

इस तरह,

$P(A \cup B) + P(C) = 1$

$P(C) = 1 - P(A \cup B)$

$P(C) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$

$\therefore$ एक विद्यार्थी जो दोनों क्लब का सदस्य नहीं होने की प्रायिकता $\frac{7}{20}$।

उदाहरण 6 : A, B और **C** में एक याद्दच्छिक प्रयोग के केवल तीन परस्पर भिन्न घटनाओं की जोडियाँ है।

यदि **P(A)** = $\frac{3}{2}$, **P(B)** और **P(C)** = $\frac{1}{2}$ **P(A),** तो **P(B)** ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $P(B) = a$

अब, $P(A) = \frac{3}{2}P(B) = \frac{3}{2}a$

और, $P(C) = \frac{1}{2}P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a$

यह दिया गया है कि A, B और C परस्पर अनन्य घटनाएँ है।

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

क्योंकि $P(S) = 1$

हमें प्राप्त है $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$\Rightarrow \frac{3}{2}a + a + \frac{3}{4}a = 1 \Rightarrow \frac{6a + 4a + 3a}{4} = 1 \quad \therefore 13a = 4$

$a = \frac{4}{13} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{13}$

अभ्यास 5.2

1. किसी निश्चित दिन पर वर्षा होने की प्रायिकता 0.64 है। उस दिन वर्षा न होने की प्रायिकता क्या है?
2. एक किसी सेंपल में से दोषरहित वस्तु चुनने की प्रायिकता 7/12 है। दोषपूरित वस्तु चुनने की प्रायिकता क्या है?
3. यदि A यह याददृचिच्छक प्रयोग कोई घटना ताकि
   $P(A) : P(\overline{A}) = 6:15$, तो o i) P(A) ii) $P(\overline{A})$ ज्ञात कीजिए।
4. यदि A और B परस्पर भिन्न घटनाएँ ताकि $P(A) = \frac{3}{5}$ और $P(B) = \frac{2}{7}$, तो P(AUB) ज्ञात कीजिए
5. दो सिक्कों को एक साथ उच्छाले गये हैं। या तो दोनों चित अथवा दोनों पट प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. जब एक पासा उच्छालते हैं, या तो विषम संख्या अथवा एक वर्ग प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
7. 1 से 25 के संख्या के कार्ड में से एक कार्ड को याद्दच्छिकता से चुनते है। प्राप्त कार्ड 3 और 11 से भाज्य होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
8. दो पासों को एक साथ उच्छालते है। मुख पर प्राप्त संख्या को जोड ना 4 से ना 5 से भाज्य होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

क्रमचय और संचय के परिकलन से समाविष्ट समस्याओं की प्रायिकता

हम जानते हैं कि एक घटना की प्रायिकता तीन चरणों के अनुसरण से करते है।

(i) n (S) ज्ञात करना

(ii) n (A) ज्ञात करना

(iii) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ सूत्र उपयोगकर P (A) ज्ञात करना

अब तक चर्चित सभी व्याख्यात्मक गणितों हम ने n(A) और n(S) प्रारंभिक घटनाओं की सूची बनाकर, वृक्षालेख खींचकर अथवा एक तालिका बनाकर ज्ञात किया है। परन्तु कुछ समस्या है, जहाँ पर n(A) और n(S) क्रमचय और संचय की संख्या ज्ञात करना पडता है। इन उदादाहरणों का अध्ययन कीजिए।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1: पत्तों पर 1 से 25 तक लिखा हुआ है। दो पत्तों को एक निकाला जाता है। एक पत्ते पर प्राप्त संख्या 7 की गुणज और दूसरे पर प्राप्त संख्या 11 की गुणज है।

हल: 7 के गुणज से अंक्ति पत्ते हैं {7, 14, 21} और 11 के गुणज से अंक्ति पत्ते हैं {11, 22}

$\therefore$ $n(s) = {}^{25}C_2$ $n(A) = {}^{3}C_1 \times {}^{2}C_1$

$\therefore$ अपेक्षित प्रायिकता $= \frac{{}^{3}C_1 \times {}^{2}C_1}{{}^{25}C_2} = \frac{3 \times 2}{300} = \frac{6}{300} = \frac{1}{50}$

$\therefore$ एक पत्ते पर 7 का गुणज और दूसरे 11 का गुणज प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{1}{50}$ है।

उदाहरण 2: अच्छी तरह फेंटी हुई 52 ताश के पत्तों की गडडी में चार पत्ते निकाले गए है।

i) सभी ईंट की प्रायिकता

ii) दो हुकुम और दो पान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

हल : $n(A) = {}^{13}C_4$ $n(S) = {}^{52}C_4$

$P(A) = \frac{{}^{13}C_4}{{}^{25}C_2} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = \frac{11}{4165}$ (i) $n(A) = {}^{13}C_4$ $n(S) = {}^{52}C_2$

$P(A) = \frac{{}^{13}C_4}{{}^{25}C_2} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = \frac{11}{4165} \Rightarrow P(A) = \frac{268}{20825}$

(i) $n(B) = {}^{13}C_2 \times {}^{13}C_2$ $n(S) = {}^{52}C_4$

$$P(B) = \frac{{}^{13}C_2 \times {}^{13}C_2}{{}^{52}C_4} = \left[\frac{\frac{13 \times 12 \times 13 \times 12}{2 \times 2}}{\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{4 \times 3 \times 2 \times 1}}\right] = \frac{468}{20828}$$

$\therefore$ दो हुकुम और दो पान निकालने की प्रायिकता $\frac{268}{20825}$ है।

$\therefore$ P (2 ईक्के प्राप्त करने की) $= \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{1326} = \frac{1}{221}$

$\therefore$ दोनों पत्ते ईक्के निकलने की प्रायिकता $\frac{1}{221}$ है।

n(B) = 13C2 13C2 n(s) = 52C4 P(B) = 13C2 13C2 = 52C4

उदाहरण 3 : एक पात्र में **4** लाल और **3** काले गोलियाँ हैं। यादृच्छिकता से चार गोलियों को चुनते हैं। प्रायिकता क्या है जब

(a) A = दो गोलियाँ लाल है (b) B = सभी गोलियाँ लाल है (c) C = सभी गोलियाँ काली हैं।

हल : यहाँ 7 गोलियाँ हैं और इनमें 4 गोलियाँ $^7C_4$ को प्रकार से चुन सकते हैं।

$^7C_4$ = 35 विधानों में निकाले जाते है।

$\therefore$ n(S) = 35

(a) चार लाल गोलियों में से 2 गोलियों को $^4C_2 = 6$ विधानों में चुन सकते हैं।

बाकी 2 गोलियाँ काली होनी चाहिए और उनको $^3C_2 = 3$ विधानों में चुन सकते है

$\therefore n(A) = {}^4C_2 \times {}^3C_2 = 6 \times 3 = 18$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{35}$

(b) 4 गोलियों में से 4 लाल गोलियों को $^4C_4 = 1$ विधान में ही चुन सकते हैं

$\therefore n(B) = 1 \;\therefore P(B) = \frac{1}{35}$

(c) C एक असंभव घटना

$\therefore$ 3 काली रंग की गोलियों में से 4 गोलियाँ चुनना असंभव है।

$\therefore P(C) = 0$

उदाहरण 4 : 6 लाल, **7** सफेद और **7** काले गेंद है। दो गेंदों को याद्दच्छिकता से चुनते हैं। प्रायिकता क्या है जब गेंद लाल अथवा दोनों काले होते है?

हल :20 गेंदों में से 2 गेंद चुनने के विधान $20C_2 = \frac{20 \times 19}{1 \times 2}$ = 190 विधान

$\therefore$ n(S) = 190

6 लाल में 2 लाल गेंद चुनने के विधान $6C_2$ = 15 विधान

$\therefore$ n(A) = 15 $\Rightarrow$ P(2 लाल) = $\frac{15}{190}$

7 काले गेंदों में से 2 काले गेंद $7C_2$ = 21 विधानों में चुन सकते हैं

n(B) = 21

$\therefore$ P(काले) = $\frac{21}{190}$

दो घटनाएँ परस्पर भिन्न है

$\therefore$ P(लाल अथवा काले) = $\frac{15}{190} + \frac{21}{190} = \frac{36}{190} = \frac{18}{95}$

$\therefore$ दो काले अथवा लाल गेंद चुनने की प्रायिकता = $\frac{18}{95}$.

उदाहरण 5 : भारत, नेपाल, पाकिस्तान और श्रीलंका एक वॉली बॉल के प्रतियोगिता में भाग लेते है। विजेता दक्षता के अनुसार **I, II** अथवा **III** पुरस्कार प्राप्त करते हैं। भारत इनमें से कोई एक पुरस्कार प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

हल : जब भारत को **I** पुरस्कार प्राप्त होता है तो बाकी 2 पुरस्कारा| $4P_2$ विधान में व्यवस्थित कर सकते हैं।

इसलिए, भारत प्रथम पुरस्कार प्राप्त करने के क्रमचय = ${}^4P_2$

$\therefore$ भारत एक विजेता होने की व्यवस्थाओं की संख्या = $3 \times {}^4P_2$

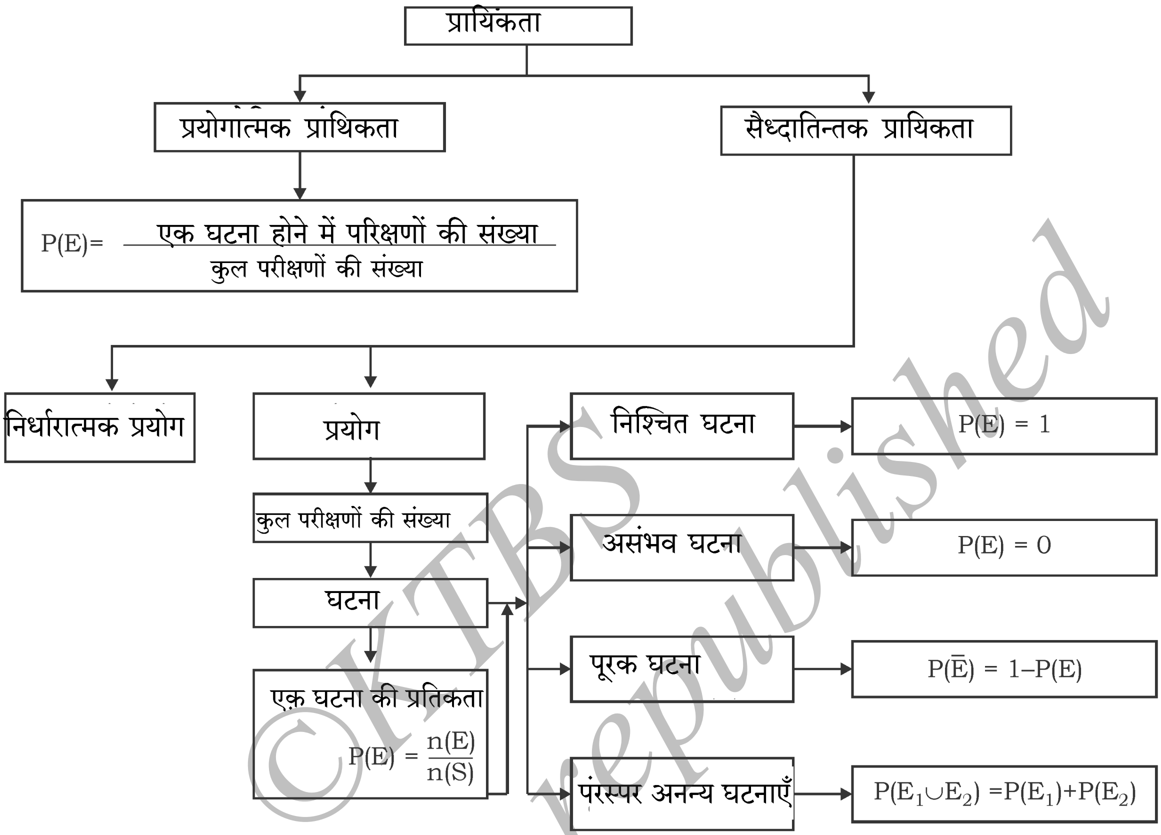
परन्तु n (S) = ${}^5P_3$

$\therefore$ भारत एक पुरस्कार प्राप्त करने की प्रायिकता s = $\frac{3 \times {}^4P_2}{{}^5P_3} = \frac{3 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3} = \frac{3}{5}$

अभ्यास 5.3

1. एक टोकरी में 2 लाल और 2 पीले रंग के फूल हैं। एक लडका याद्दच्छिकता 3 फूल लेता है। दोनों पीले फूल चुनने की प्रायिकता क्या है?
2. शेखर 5 व्यक्तियों में से एक है। यदि इन 5 व्यक्तियों को चुनना है, शेखर समिति का सदस्य बनने की प्रायिकता क्या है?
3. 52 पत्तों के गडडी में से तीन पत्तों को याद्दच्छिकता चुनना है। तीनों पत्ते बादशाह निकलने की प्रायिकता क्या है?
4. 4 पुरूष और 3 महिलाओं में से 5 व्यक्तियों की समिति बनानी है। प्रायिकता क्या जब समिति में

   (i) एक पुरुष (ii) दो पुरुष (iii) दो महिलाएँ (iv) कम से कम दो पुरुष हो।



उत्तर

अभ्यास 5.1

1] (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{6}$ (iii) $\frac{1}{6}$ (iv) $\frac{5}{6}$ 2] (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{4}{4}$ (iii) $\frac{2}{4}$ (iv) $\frac{3}{4}$

3] (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{1}{8}$ (iv) $\frac{1}{8}$ 4] (i) $\frac{5}{36}$ (ii) $\frac{35}{36}$ (iii) $\frac{9}{36}$ (iv) $\frac{4}{36}$

(v) $\frac{28}{36}$ (vi) $\frac{11}{36}$ 5] (i) $\frac{15}{50}$ (ii) $\frac{47}{50}$ (iii) $\frac{7}{50}$ (iv) $\frac{9}{50}$ (v) $\frac{8}{50}$ (vi) $\frac{25}{50}$

6] (i) $\frac{26}{52}$ (ii) $\frac{26}{52}$ (iii) $\frac{39}{52}$ (iv) $\frac{48}{52}$ (v) $\frac{2}{52}$ (vi) $\frac{8}{52}$

7] (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{4}{6}$ (iii) $\frac{3}{6}$ (iv) $\frac{3}{6}$ (v) 0 (vi) 1 8] (i) $\frac{30}{39}$ (ii) $\frac{9}{39}$

9] (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{1}{7}$ (iv) $\frac{2}{7}$ (v) $\frac{5}{7}$ 10] (i) $\frac{124}{144}$ (ii) $\frac{20}{144}$

अभ्यास 5.2

1] 0.36 2] $\frac{5}{12}$ 3] (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{5}{7}$ 4] $\frac{31}{35}$ 5] $\frac{1}{2}$ 6] $\frac{4}{6}$ 7] $\frac{10}{25}$ 8] $\frac{20}{36}$

अभ्यास 5.3

1] $\frac{2}{4}$ 2] $\frac{6}{10}$ 3] $\frac{1}{5525}$ 4] (i) 0 (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{4}{7}$ (iv) 1

6

सांख्यिकी
(Statistics)

* मानक विचलन का अर्थ ।
* मानक विचलन को ज्ञात करने का सूत्र।
* अवर्गीकृत और वर्गीकृत दत्तांश का मानक विचलन
* सरल विधि
* वास्तविक माध्य विधि
* कल्पित माध्य विधि
* चरण विचलन विधि द्वारा ज्ञात करना
* परिवर्तनशीलता गुणांक

Karl pearson

(1857-1936, England)

Karl Pearson, British statistician, is a leading founder of modern field of statistics. He established the discipline of mathematical statistics. The term 'standard deviation' was first used by karl pearson in 1894 as a replacement of the term 'mean error' used by Carl Guass.

इस अध्याय के अध्ययन के बाद आप निम्नों में समर्थ होंगे :

* मानक विचलन का अर्थ समझाना ।
* मानक विचलन के सूत्र को प्राप्त करना ।
* अवर्गीकृत दत्तांश के मानक विचलन और परिवर्तनशीलता को सरल, वास्तविक माध्य, कल्पित माध्य और चरण विचलन विधि द्वारा प्राप्त करना ।
* परिवर्तनशीलता गुणांक का अर्थ समझाना और उसका अयोग करना ।
* परिवर्तनशीलता गुणांक का गणन और प्राप्त परिणामों की व्याख्या करना ।
* पै चार्टो की रचना करना ।
* पै- चार्टों का विश्लेषण करना ।

स्टेटिस्टिकल थिंकिंग विल वन डे बी अॅज नेसेसरी फॉर एफिसियन्ट सिटिजनशिप, एँज द अॅबिलिटी टु रिड अँड राइट.

– एच्.जी.वेल्स

अपने पिछली कक्षाओं में आपने यह सीखा है कि मापों के वितरण (दत्तांश) में माप वितरण के मध्य भाग में एकत्रित होने की प्रवृत्ति रखते हैं। माध्य, मध्यिका और बहुलक केन्द्रीय प्रवृत्ति माप कहलाते हैं। आपने यह भी जान लिया केन्द्रीय प्रवृत्ति मापों से वितरण की संपूर्ण जानकारी नहीं मिलती।

उदाहरण के लिए : एक श्रेणी में दो खिलाडियों से बनाये गए रन इस तरह :

A $\rightarrow$ 59, 65, 73, 61, 67

B $\rightarrow$ 83, 120, 40, 22, 60

दोनों मापों के समुच्चय का माध्य 65 है । 22 र्थात् $\overline{X} = 65$

समुच्चय अमें, सभी माप 65 के आसपास है जबकि समुच्चय 13 में, माप 65 से दूर तक बिखरे हुए हैं।

इस तरह केन्द्रीय प्रवृत्ति मूल्य वितरण का सही सही चित्रण नहीं दे सकते हैं ।

इसलिए ऐसे कोई माप की आवश्यकता जो यह बतायें कि माप माध्य की चारों ओर किस तरह वितरित हुए हैं ।

वितरण के दत्तांश का विसराव का विचार देनेवाला मूल्य है 'विक्षेपण' । यह वितरण में मापों का विचलन और उनका मापदंड दर्शाता है। विचलन के चार मापों में से हमने परास, चतुर्थक विचलन और माध्य विचलन तथा उनकी सीमाओं के बारे में सीखा है।

यह ज्ञात है कि परास केवल अन्तिम दो मापों पर निर्भर करता है और चतुर्धक विचलन के 50% मापों के बारे बताता है। परास और चतुर्थक विचलन से भी माध्य विचलन अधिक बेहत्तर माप माना जाता है। माध्य विचलन में हमने निरीक्षण किया है कि माध्य से मापों का विचलन घनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है। सही चित्रण ज्ञात करने हम ऋणात्मक चिन्ह छोड़कर केवल विचलनों के परम मूल्य को लेते हैं। कया, माध्य से होनेवाले विचलनों का केवल घनात्मक मूल्य लेने का गणितीय विधान है?

उपरोक्त उदाहरण पर विचार कीजिए ।

माप (x)	59	65	73	61	67
विचलन $(d = x - \overline{X})$	-6	0	-8	-4	2

विचलन व ... के परममूल्य d = –6 को $|6| = +6$ लेने से व = –4 का $|d| = +4$ से भी उनके वर्ग लेने से घनात्मक मूल्य प्राप्त कर सकते हैं ।

अर्थात् $d^2 = (-6)^2 = +36$

$d^2 = (-4)^2 = +16$

आइये और एक संदर्भ पर विचार करें जिसमें विचलनों के वर्ग विचलन मापना सहायक है ।

समवितरण के दत्तांश पर विचार कीजिए ।

x	12	13	14	15	16
d	-2	-1	0	+1	+2

उपरोक्त दोनों संदर्भ में विचलनों का औसत शून्य होता है। इसलिए विक्षेपण का मूल्य भी शून्य होगा। क्या इसका अर्थ है कि माध्य से कोई भी माप विचलित हुआ है ? यह सत्य नहीं है। अतः मापों के ऋण चिन्हों को छोड़ने की आवश्यकता नहीं है। इसके लिए विचलनों का वर्ग लेते हैं।

यह विक्षेपण मापने का योग्य विधान है। यहाँ औसत ज्ञात करने के पूर्व प्रत्येक माप और माध्य के अन्तर का वर्ग लेते हैं ।

विक्षेपण के इस माप को 'परिवर्तनशीलता' कहते हैं । परिवर्तनशीलता हमेशा घनात्मक होता है। यदि हम परिवर्तनशीलता के घनात्मक वर्गमूल लेते हैं तो घनात्मक और ऋणात्मक मूल्य प्राप्त होते हैं ।

परिवर्तनशीलता का घनात्मक वर्गमूल को 'मानक विचलन' कहते हैं। इसलिए, मानक विचलन को निम्न तरह से परिभाषित करते हैं ।

समान्तर माध्य से प्राप्त विचलनों के वर्गों के औसत के घनात्मक वर्गमूल को मानक विचलन कहते हैं । अथवा विचलनों के वर्गों के औसत का वर्गमूल (ठचड) है ।

मानक विचलन को 's' से सूचित करते हैं। इसे सिग्मा पढ़ते हैं । यह एक ग्रीक संकेत है । यह एक वितरण के माध्य की चारों और उपस्थित मापों का अध्ययन है। इसे दत्तांश के इकाइयों में ही व्यक्त करते हैं। एक निम्न मानक विचलन यह सूचित करता है कि माप माध्य से कितने करीब है। जबकि अधिक मानक विचलन यह संकेत करता है दत्तांश के माध्य से बहुत दूर-दूर वितरित है।

आईए, हम विक्षेपण के माप को ज्ञात करने का विधान जान लेते हैं अर्थात् मानक विचलन ।

मानक विचलन ज्ञात करने का विधान

हम जानते हैं कि दत्तांश का वितरण समान रूप से हो सकता अथवा नहीं । माप पूर्ण संख्या, पूर्णांक अथवा अपूर्णांक हो सकते हैं और माध्य पूर्ण संख्या अथवा दशमलन संख्या हो सकती है।

पहले हम अवर्गीकृत दत्तांश को लेंगे, विभिन्न विधान समझने के बाद उन्हीं विधानों को वर्गीकृत दत्तांश के लिए विस्तार करते हैं ।

अवर्गीकृत दत्तांश का मानक विचलन आईए, हम प्रत्येक विधान को सीखते हैं और मानक विचलन को सीखते हैं और मानक विचलन ज्ञात करने की प्रक्रिया समझ लेते हैं। ये विधान दोनों वर्गीकृत और अवर्गीकृत दत्तांश के लिए उपयोगी है। पहले हम अवर्गीकृत दत्तांश लेते हैं, विभिन्न विधान समझते और उन्हीं को वर्गीकृत दत्तांश के लिए विस्तृत करते हैं ।

अवर्गीकृत दत्तांश का परिवर्तनशीलता और मानक विचलन निम्न विधानों से ज्ञात करते हैं :

(i) विधान (ii) वास्तविक माध्य विधान (iii) कल्पित माध्य विधान (iv) विचलन चरण विधान

(i) विधान द्वारा प्रत्यक्ष विधान द्वारा मानक विचलन ज्ञात करने का सूत्र ज्ञात करते हैं ।

परिभाषा के अनुसार मानक विचलन माध्य से प्राप्त विचलनों के वर्गों के औसत का घनात्मक मूल है ।

मान लीजिए x_1, x_2, x_3 दत्त माप हैं और $\bar{x}$ उनका माध्य है।

माध्य से विचलन हैं $(x_1 - \bar{x})(x_2 - \bar{x})..........(x_n - \bar{x})$

विचलनों का योगफल $= \dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$

माध्य से प्राप्त विचलनों का वर्ग है

$(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, (x_3 - \bar{x})^2, ...(x_n - \bar{x})^2$

विचलनों के वर्गों का औसत $= \dfrac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{n}$

$\therefore$ परिवर्तनशीलता अथवा ... $\dfrac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{n}$

(फ विचलनों के वर्गों का औसत = परिवर्तनशीलता और उसे s^2 द्वारा सूचित करते हैं ।)

मानक विचलन $= \sqrt{\dfrac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{n}}$ (परिभाषा अनुसार)

$= \sqrt{\dfrac{\Sigma (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}}$ (By the identify $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$)

$= \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - \dfrac{\Sigma 2.x.\bar{x}}{n} + \dfrac{\Sigma \bar{x}^2}{n}}$

$= \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - 2.\bar{x}.\bar{x} + \dfrac{\Sigma \bar{x}^2}{n}}$ $\left(\therefore \dfrac{\Sigma x}{n} = \bar{x}\right)$

$= \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \dfrac{n\bar{x}^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$

$= \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x}{n}\right)^2}$ $\left(\because \bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}\right)$ $\boxed{\therefore \text{S.D or } \sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x}{n}\right)^2}}$

यह प्रत्यक्ष विधि द्वारा नामक विचलन का प्राप्त किया गया सूत्र है । हमें पता है कि मानक विचलन, परिवर्तनशीलता का घनात्मक वर्गमूल है और परिवर्तनशीलता, मानक विचलन का वर्ग है अर्थात परिवर्तनशीलता $= (\sigma)^2$

मानक विचलन का सूत्र लिखने पर,

$$= \left\{\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}\right\}^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$$

परिवर्तनशीलता $= \dfrac{\Sigma x^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x}{n}\right)^2$ है ।

मानक विचलन और परिवर्तनशीलता, दोनों के सूत्र में 'x' माप और 'n' मापों की संख्या का द्योतक है । इसका यह निष्कर्श है कि σ या परिवर्तनशीलता की गणना हेतु माध्य से प्रत्येक माप के विचलन की आवश्यकता नही है।

प्रत्यक्ष विधि द्वारा मानक विचलन की गणना के नियम :-

1. x^2 ज्ञात करें ।
2. Σx और Σx^2 ज्ञात करें ।
3. दिये गए सूत्र में, Σx, Σx^2 और n के मूल्य का स्थानापन्न करें ।

$$\text{परिशीलनता} = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 \quad \text{अथवा} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

सरल प्रत्यक्ष विधि का उपयोग तब किया जाता है, जब मापों का वर्ग आसानी से प्राप्त हो ।

उदाहरण 1 : एक वर्ष के अन्तराल में 8 विद्यार्थियों द्वार रोपे गए पौंधों की संख्या इस प्रकार है 2, 6, 12, 5, 9, 10, 7, 4. मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

हल : दिये गये मापों को हम छोटे से बडे काम में पुनः लिखेंगे और उनका वर्ग ज्ञात करेंगे ।

सूचना : इस विधि में मापों को क्रम अनुसार लिखना जरूरी नही है । किन्तु सांख्यिकी के अनुसार किसी भी गणना के पूर्व, मापों को क्रम अनुसार लिखा जाता है ।

x	2	4	5	6	7	9	10	12	$\Sigma x = 55$
x^2	4	16	25	36	49	81	100	144	$\Sigma x^2 = 455$

यहाँ $n = 8$, $\Sigma x = 55$ और Σx^2 455 है ।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{455}{8} - \left(\frac{55}{8}\right)^2}$$

$$= \sqrt{56.88 - (6.88)^2} = \sqrt{56.88 - 47.33} = \sqrt{9.55} = 3.09$$

$$\begin{array}{r|l} & 3.09 \\ \hline 3 & 9.55 \\ +3 & 9 \\ \hline 609 & 5500 \\ & 5481 \\ \hline & 19 \end{array}$$

$\therefore$ औसतन प्रत्येक माप का माध्य का विचलन 3.09 है ।

सरल प्रत्यक्ष विधि की सीमाएं :

इस विधि में मानक विचलन या परिवर्तनशीलता की गणना हेतु x, x^2 और n के मूल्य को ज्ञात करना आवश्यक है । तत् पश्चात् हम Σx और Σx^2 को ज्ञात करते है और उनके मूल्य को सूत्र में उपस्थापन करते हुए परिवर्तनशीलता का गुणन करते है । इस विधि में प्रथम महत्वपूर्ण गणना – मापों का वर्ग प्राप्त करना है ।

$\therefore$ यह विधि तभी तक उपयुक्त है जब तक मापों की संख्या कम हो और माप छोटे पूर्णांक हों ।

क्या अपूर्णांक को वर्ग प्राप्त करना आसान है ?

जब, * दात्तांश बडा हो ।

 * माप अपूर्णांक हो ।

तब यह विधि उपयुक्त नही है ।

अतः हमें मानक विचलन प्राप्त करने की अन्य विधियों की आवश्यकता है ।

ध्यान दीजिए कि इस प्रणाली (विधि) में, मानक विचलन की गणना हेतु हम मापों के विचलन का उपयोग नही करते हैं ।

क्या ऐसी कोई प्रणाली (विधि) हैं जहाँ कि माध्य से मापों के विचलन का उपयोग करके मानक विचलन प्राप्त कर सकें ।

आओ, कुछ अन्य प्रणालियों का अध्ययन करें ।

(i) वास्तविक माध्य विधि/विधान

इस प्रणाली में मानक विचलन ज्ञात करने हेतु हम

* दात्तांश का वास्तविक माध्य,
* प्रत्येक माप का वास्तविक माध्य से विचलन,
* विचलनों का वर्ग,
* विचलनों के वर्गों का औसत,
* विचलनों के वर्गों के औसत का वर्गमूल, को प्राप्त करते है ।

उदाहरण 2 : एक ही महीने के दौरान, 10 विभिन्न अस्पतालों में जन्में बच्चों की संख्या

9 12 15 18 20 22 23 24 26 31

मनक विचलित ज्ञान कीजिए ।

हल : आओ, वास्तविक माध्य, विचलन और विचलनों का वर्ग ज्ञात है ।

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
9	–11	121
12	–8	64
15	–5	25
18	–2	4
20	0	0
22	2	4
23	3	9
24	4	16
26	6	36
31	11	121
$\Sigma x = 200$		$\Sigma d^2 = 400$

औसत $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{200}{10} = 20$

हमें ज्ञात हैं कि मानक विचलन = विचलनों के वर्गों के औसत का वर्गमूल है ।

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} \quad (\because d = x - \bar{x}) \quad \sigma = \sqrt{\frac{400}{10}} = \sqrt{40} = 6.32$$

उदाहरण 2, में क्या सरल है?

* मापों का वर्ग प्राप्त करना ($\sum x$)
* विचलनों का वर्ग प्राप्त करना $(\sum d)^2$

वास्तविक माध्य विधि, सरल विधि से अधिक उपयुक्त क्यों है? विवेचन करें?

वास्तविक माध्य विधि द्वारा σ को प्राप्त करने के चरण :

1. वास्तविक माध्य ज्ञात कीजिए ($\bar{x}$)
2. प्रत्येक माप x का वास्तविक माध्य $\bar{x}$ से विचलन प्राप्त कीजिए। ($d = x - \bar{x}$)
3. विचलनों का वर्ग ज्ञात कीजिए। ($d^2 = x - \bar{x})^2$

तब, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

जहां, कल्पित माध्य से विचलन d है।

उदाहरण 3: एक सप्ताह के दौरान, अस्पताल में प्रतिदिन चिकित्सा का नाम उठाने वाले बाहरी रोगियों की संख्या इस प्रकार है :-

50 56 59 60 63 67 68

मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए मापों के लिए, A = 60 जहां A कल्पित माध्य है।

इस कल्पित माध्य से हम प्रत्येक माप का विचलन ज्ञात करते हैं। $d = x - A$

इस उदाहरण में,

x	$d = x - A$	d^2
50	−10	100
56	−4	16
59	−1	1
60	0	0
63	+3	9+
67	+7	49
68	+8	64
$n = 7$	$\Sigma d = +3$	$\Sigma d^2 = 239$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{239}{7} - \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \sqrt{34.14 - (0.18)} \quad \sqrt{33.96} \quad \therefore \sigma = 5.83$$

इस उदाहरण में,

* यदि आपको **सरल विधि** का अनुसरण करना हो, तब आपको किन कठिनाइयों का सामना करना पडा?
* यदि आपको **वास्तविक माध्य विधि** का अनुसरण करना हो तब वास्तविक माध्य 60.42 है । यह पूर्णांक नही है और सारे विचलन भी दशमलव होंगे । इन दोनों विधियों का उपयोग करते हुए मानक विचलन ज्ञात कीजिए । इन विधियों द्वारा प्राप्त हल का विवेचन कीजिए । इन दोनों विधियों की तुलना कल्पित माध्य विधि से कीजिए । $\bar{x}$

  वास्तविक माध्य विधि और सरल विधि से कल्पित माध्य विधि इतनी सरल क्यों है? $d = x - \bar{x}$

  कल्पित माध्य विधि कब उपयुक्त है? विवेचन कीजिए? $d^2 = (x - \bar{x})^2$

x	$d = x - A$	Step deviation	d^2
		$d = \frac{x-A}{c}$	
20	–70	–7	49
30	–60	–6	36
40	–50	–5	25
60	–30	–3	9
80	–10	–1	1
90	0	0	0
110	20	2	4
120	30	3	9
130	40	4	16
140	50	5	25
n = 10		$\Sigma d = -8$	$\Sigma d^2 = 174$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}\ C = \sqrt{\frac{174}{10} - \left(\frac{-8}{10}\right)^2}\ 10 = \sqrt{17.4 - 6.4} \times 10 = \sqrt{11} \times 10 = 33.1$$

$\therefore \sigma = 33.1$

उदाहरण 4 में, क्या आसान है?

* C का सामान्य गुणनखण्ड जाने बिना 'd' का वर्ग ज्ञात करना ।
* C का सामान्य गुणनखण्ड जानकर 'd' का वर्ग ज्ञात करना ।

  मानक विचलन को, विचलनों के सामान्य गुणनखण्ड ज्ञात किए बिना ज्ञात करना क्या आसान है?

कल्पित माध्य विधि :

1. किसी एक माप को कल्पित माध्य 'A' मान लीजिए ।
2. कल्पित माध्य से प्रत्येक माप का विचलन ज्ञात कीजिए ।
3. विचलनों का वर्ग ज्ञात कीजिए । d^2 or $(x - A)^2$
4. विचलनों के वर्ग का योगफल ज्ञात कीजिए । Σd^2
5. विचलनों का योगफल ज्ञात कीजिए । Σd
6. सूत्र का उपयोग कीजिए । $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2} \times C$
7. Σd^2 और Σd में/के मूल्य का उपस्थापन कीजिए ।
8. मानक विचलन 'σ' ज्ञात कीजिए ।

उदाहरण 4: माह के पहले दस दिनों में पाठशाला के पुस्तकालय द्वारा विज्ञप्त हुई पुस्तकों की संख्या इस प्रकार है।

20, 30, 40, 60, 80, 90, 110, 120, 130, 140

हल: दिए गए मापों के लिए कल्पित माध्य A = 90 लीजिए ।

मापों पर ध्यान दीजिए, इनमें क्या विशेषता है?

इन सारे मापों का **सामान्य गुणन खन्ड 10** है । यह सारे 10 के समापवर्त्य हैं । गुणना को सरल करते हेतु सामान्य गुणनखण्ड को निकाल देते हैं ।

अतः माप और कल्पित माध्य के अंतर को सामान्य गुणनखण्ड, 10 से भाग कीजिए । इस तरह विचलन ज्ञात होगा ।

$\therefore\ d = \frac{x - A}{c}$, इस विचलन को चरण चिलम कहते हैं ।

उर्पयुक्त उदाहरण से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि –

जब दातांश बहुत बडा हो और उसका सामान्य गुणनखण्ड हो, तब हम कल्पित माध्य A का चयन करते हैं । और $d = \frac{x - A}{C}$ सूत्र का उपयोग कर, विचलन 'd' ज्ञात करते हैं ।

यहाँ 'C' मापों का सामान्य गुणनखण्ड है ।

सूत्र $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2} \times C$ का उपयोग करके

मानक विचलन ज्ञात करते हैं ।

इस विधि को चरण-विचलन विधि कहते हैं ।

चरण–विचलन विधि

1. किसी एक माप को कल्पित माध्य (A) मान लीजिए । A
2. कल्पित माध्य और प्रत्येक माप के अन्तर को ज्ञात कीजिए । $d = x - A$
3. मापों के सामान्य गुणन–खण्ड को पहचानिए । C
4. प्राप्त अन्तर को सामान्य गुणन–खण्ड से भाग कीजिए । $d = \frac{x-A}{C}$
5. विचलनों का वर्ग ज्ञात कीजिए । d^2
6. विचलनों के वर्ग का योगफल ज्ञात कीजिए । Σd^2
7. सूत्र का उपयोग करते हुए मानक विचलन को ज्ञात कीजिए । $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2} \times C$

हम यह जान चुके हैं कि परिवर्तनशीलता और मानक विचलन को इन चारों विधियों में से किसी एक विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है ।

विधि चाहे जो भी हो, σ का उत्तर समान होना चाहिए । (समान ऑकडों के लिए) अतः ऑकडों के अनुसार हम किसी भी विधि का उपयोग कर सकते हैं जो कि उपयुक्तहो ।

आओ, चारों विधियों के विवरण को तालिका के रूप में संघटित करें ।

σ के गुणन की विधि	कब उपयोग करें	सूत्र
सरल विधि	जब माप/अंक की संख्या कम हो और उनका वर्ग प्राप्त करने मे आसानी हो ।	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$
वास्तविक माध्य विधि	जब माध्य एक पूर्णांक हो न कि अंश ।	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$
कल्पित माध्य विधि	जब दिए गए ऑकडों का माध्य पूर्णांक न हो ।	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$
चरण विचलन विधि	जब माप/अंक की संख्या अधिक हो और उनका सामान्य गुणन–खण्ड हो ।	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2} \times C$

सूचना : कल्पित माध्य विधि और चरण विचलन विधि, सरल विधि के सरलीकृत रूप है ।

चलिए, माप/अंक का एक समूह लेते है और चारों विधियों का उपयोग करते हुए हम परिवर्तनशीलता और मानक विचलन ज्ञात करते है ।

उदाहरण 5: पहले आँठ सम स्वाभाविक अंकों की परिवर्तनशीलता और मानक विचलन ज्ञात करें ।

हल: पहले आँठ सम अंक इस प्रकार है ।

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

(i) सरल विधि द्वारा :

x	2	4	6	8	10	12	14	16	$\Sigma x = 72$
x^2	4	16	36	64	100	144	196	256	$\Sigma x^2 = 816$

परिवर्तनशीलता $= \dfrac{\Sigma x^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \dfrac{816}{8} - \dfrac{72}{8} = 102 - 81$

$\therefore$ परिवर्तनशीलता $= 21$

$\sigma = \sqrt{\text{Variance}} = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x}{n}\right)^2} = \sqrt{21} = 4.58$

```
       4.58
  4 | 21.00,00
 +4 | 16
 ---+-------
  5 |  500
 +5 |  425
 ---+-------
908 |   7500
    |   7264
    |   ----
    |    236
```

(ii) माध्य विधि द्वारा :

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
2	–7	49
4	–5	25
6	–3	9
8	–1	1
10	1	1
12	3	9
14	5	25
16	7	49
$\Sigma x = 72$	$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 168$

(–7, –5, –3, –1 : – 16; 1, 3, 5, 7 : + 16)

परिवर्तनशीलता $\dfrac{\Sigma d^2}{n} = \dfrac{168}{8}$

$= 21$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{21}$

$= 4.58$

माध्य $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$

$= \dfrac{72}{8} = 9$

$\therefore \bar{x} = 9$

(iii) कल्पित माध्य विधि द्वारा :

x	$d = x - A$	d^2
2	–6	36
4	–4	16
6	–2	4
8	0	0
10	2	4
12	4	16
14	6	36
16	8	64
$n = 8$	$\Sigma d = +8$	$\Sigma d^2 = 176$

(–6, –4, –2 : – 12; 2, 4, 6, 8 : + 20)

कल्पित माध्य को 8 लीजिए ।

$\therefore A = 8$

परिवर्तनशीलता $= \dfrac{\Sigma d^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma d}{n}\right)^2$

$= \dfrac{176}{8} - \left(\dfrac{8}{8}\right)^2$

$= 22 - 1$

$\therefore$ परिवर्तनशीलता $= 21$

$\sigma = \sqrt{\text{परिवर्तनशीलता}} = \sqrt{21} = 4.58 \quad \therefore \sigma = 4.58$

(iv) चरण विचलन विधि द्वारा :

x	चरण विचलन $d = \dfrac{x-A}{C}$	d^2
2	−3	9
4	−2	4
6	−1 } − 6	1
8	0	0
10	1	1
12	2	4
14	3 } + 10	9
16	4	16
	$\Sigma d = +4$	$\Sigma d^2 = 44$

कल्पित माध्य को 8 लीजिए ।

$\therefore$ A = 8

माप/अंक का सामान्य गुणनखण्ड 'C' = 2

$$\text{परिवर्तनशीलता} = \frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2 \text{ x } C^2$$

$$= \left\{\frac{44}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^2\right\} \times 2^2$$

$= (15.5 - 0.25) \times 4$

$\therefore$ परिवर्तनशीलता = 21

$\sigma = \sqrt{\text{परिवर्तनशीलता}} = \sqrt{21} = 4.58$ $\quad\therefore\ \sigma = 4.58$

उदाहरण 6 : एक पाठशाला में 6 अलग अलग वर्षों के दौरान पारितोषिक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या इस प्रकार है :

62, 58, 53, 50, 52, 55

परिवर्तनशीलता और मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

हल : इस प्रश्न के उत्तर को चलो हम चारों विधियों द्वारा प्राप्त करते हैं ।

(i) विधि द्वारा :

x	50	52	53	55	58	62	$\Sigma x = 330$
x^2	2500	2704	2809	3025	3364	3844	$\Sigma x^2 = 18246$

यहाँ n = 6,

$$\text{परिवर्तनशीलता} = \frac{\Sigma x^2}{n} = \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \frac{18246}{6} - \left(\frac{330}{6}\right)^2 = 3041 - 3025 = 16$$

$\therefore$ परिवर्तनशीलता = 16 $\qquad \therefore$ मानक विचलन (σ) = 16 = 4

(ii) वास्तविक माध्य विधि द्वारा :

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
50	−5	25
52	−3 } −10	9
53	−2	4
55	0	0
58	3 } −10	9
62	7	49
$\Sigma x = 330$	$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 96$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{330}{6} = 55$$

$$\text{परिवर्तनशीलता} = \frac{\Sigma d^2}{n} = \frac{96}{6} = 16$$

$\therefore$ परिवर्तनशीलता = 16

$\sigma = \sqrt{\text{परिवर्तनशीलता}}\ \sqrt{16} = 4$

$\therefore\ \sigma = 4$

(iii) कल्पित माध्य विधि द्वारा :

x	$d = x - A$	d^2
50	−3 } −4	9
52	−1	1
53	0	0
55	2 } +16	4
58	5	25
62	9	81
	Σd = +12	Σd^2 = 120

कल्पित माध्य को 53 लीजिए । $\therefore$ A = 53.

$$\text{परिवर्तनशीलता} = \frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2$$

$$= \frac{120}{6} - \left(\frac{12}{6}\right)^2 = 20 - 4 = 16$$

$\therefore$ परिवर्तनशीलता = 16

$\sigma = \sqrt{\text{परिवर्तनशीलता}}\ \sqrt{16}$ $\qquad \therefore \sigma = 4$

(iv) चरण विचलन विधि :

माप/अंकों को ध्यान से देखिए । उनका कोई सामान्य गुणनखण्ड नही है । अतः मानक विचलन ज्ञात करने हेतु चरण विचलन विधि का उपयोग नहीं कर सकते हैं ।

उदाहरण 6 में मानक विचलन ज्ञात करने हेतु उपयोग किए गए प्रत्येक विधि के चरणों पर गौर कीजिए । कौन सी विधि सबसे सरल है। विवेचन कीजिए ।

सूचना : मानक विचलन ज्ञात करते समय, यदि किसी प्रथक विधि का उल्लेख न हो, तब आप किसी भी उपयुक्त विधि का उपयोग कर सकते हैं ।

अब तक आप अवर्गीकृत दत्तांश के आधार पर मानक विचलन ज्ञात करना सीख चुकें हैं । क्या इन्ही विधियों का उपयोग वर्गीकृत दत्तांश के लिए उपयोग कर सकते हैं ।

क्या सूत्र में कुछ परिवर्तन होगा? आओ सीखते हैं ।

वर्गीकृत दत्तांश का मानक विचलन

हम यह जानते हैं कि वर्गीकृत दत्तांश को व्यक्तिगत माप/अंक या वर्गान्तर के आधार पर क्रम में जमा सकते हैं । प्रत्येक व्यक्तिगत माप/अंक या वर्गान्तर की आवृत्ति(f) होती है । माध्य के गणन के दौरान, माप/अंक का योग प्राप्त करते हेतु, हम माप/अंक या वर्गन्तर के मध्य बिन्दु को आवृत्ति से गुणा करते हैं । i.e., fx

उसी तरह, वर्गीकृत दत्तांश का मानक विचलन ज्ञात करते समय, विचलनों का योग प्राप्त करते हेतु, हम प्रत्येक माप/अंक के विचलन या वर्गान्तर के मध्य बिन्दु के विचलन को आवृत्ति से गुणा करते हैं । i.e., fd

$\therefore$ इस तरह Σfd और Σfd^2 का गणन करते हैं । वर्गीकृत दत्तांश के मानक विचलन को ज्ञात करने के विभिन्न सूत्र निचे तालिका में दी गई है ।

σ के गणन की विधि	सरल विधि	वास्तविक माध्य विधि	कल्पित माध्य विधि	चरण विचलन विधि
सूत्र	$\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n}-\left(\frac{\Sigma fx}{n}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}}$	$\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}-\left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}-\left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}\times C$

दिए गए उदाहरणों पर गौर कीजिए ।

उदाहरण 7 : 5 जिलों के विभिन्न प्रान्तों में, 6 दिनों के दौरान हुई वर्षा का सौरा निम्न तालिका में दिया गया है।

वर्षा mm में	35	40	45	50	55
प्रान्तों की संख्या	6	8	12	5	9

मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

हलः इस उदाहरण में वर्षा (mm) माप/अंक (x) है और प्रान्तों की संख्या-आवृत्ति (f) है ।

(i) सरल विधि द्वारा :

चरण 1 : माप/अंकों और आवृत्तियों को वितरण तालिका में क्रम में रखिये ।

चरण 2 : $n = \Sigma f = 40$ ज्ञात कीजिए ।

चरण 3 : Σfx और Σfx ज्ञात कीजिए । $\Sigma fx = 1815$

चरण 4 : x^2 और Σfx^2 ज्ञात कीजिए । $\Sigma fx^2 = 84175$

चरण 5 : σ को ज्ञात करने के लिए सूत्र का उपयोग कीजिए और मूल्यों का स्थातापन्न कीजिए ।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n}-\left(\frac{\Sigma fx}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{84175}{40}-\left(\frac{1815}{40}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2104.38-2059.12} = \sqrt{45.26} = 6.7$$

$\therefore \sigma = 6.7$

x	f	fx	x^2	fx^2
35	6	210	1225	7350
40	8	320	1600	12800
45	12	540	2025	24300
50	5	250	2500	12500
55	9	495	3025	27225
	$\Sigma = 40$	$\Sigma fx = 1815$		$\Sigma fx^2 = 84175$

(ii) वास्तविक माध्य विधि :

चरण 1: माप/अंक और आवृत्तियों को क्रम से वितरण तालिका में रखिए ।

चरण 2: $n = \Sigma f = 40$ ज्ञात कीजिए ।

चरण 3: fx और Σfx, $\Sigma fx = 1815$ ज्ञात कीजिए ।

चरण 4: माध्य $\bar{x}$ ज्ञात करें ।

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{1815}{40} = 45.38 = 45.4$$

चरण 5: विचलन $d = x - \bar{x}$ ज्ञात करें ।

चरण 6: d^2, fd^2 और Σfd^2 ज्ञात करें ।

चरण 7: सूत्र का उपयोग करते हुए मानक विचलन प्राप्त कीजिए ।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}} \quad \therefore \quad \sigma = \sqrt{\frac{1837.8}{40}} = \sqrt{45.95} = 6.7$$

x	f	fx	$d = x - \bar{x}$	d^2	fd^2
35	6	210	−10.4	108.2	649.2
40	8	320	−5.4	29.2	233.6
45	12	540	−0.4	1.6	19.2
50	5	250	4.6	21.2	106.0
55	9	495	9.6	92.2	829.8
	n = 40	Σfx = 1815			Σfd^2 = 1837.8

टिप्पणी : सरल विधि और वास्तविक माध्य विधि, दोनों ही विधियाँ परिश्रम-साध्य हैं । यह तो हम सीख चुके हैं कि यदि माप/अंकों की संख्या अधिक हो और माध्य पूर्णांक न हो तो, कल्पित माध्य विधि को अपनाना आसान होता है । आओ, इस विधि से σ को ज्ञात करें ।

(iii) कल्पित माध्य विधि द्वारा :

चरण 1: माप/अंकों और आवृत्तियों को क्रम अनुसार तालिका में जमाए ।

चरण 2: $n = \Sigma f = 40$ ज्ञात करें ।

चरण 3: कल्पित माध्य की निर्धारित कीजिए । A = 45

चरण 4: विचलन ज्ञात कीजिए $d = x - A$

चरण 5: fd और Σfd ज्ञात कीजिए ।

चरण 6: d^2, fd^2 और Σfd^2 ज्ञात कीजिए ।

चरण 7: निम्न सूत्र का उपयोग करते हुए मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \quad \therefore \quad \sigma = \sqrt{\frac{1825}{40} - \left(\frac{15}{40}\right)^2} = \sqrt{45.46} = 6.7$$

x	f	$d = x - A$	fd	d^2	fd^2
35	6	−10	−60 } −100	100	600
40	8	−5	−40	25	200
45	12	0	0	0	0
50	5	0	+25 } +115	25	125
55	9	+10	+90	100	900
	n = 40		Σfd = +15		Σfd^2 = 1825

टिप्पणी : हम यह देख सकते है कि कल्पित माध्य विधि द्वारा मानर विचलन ज्ञात करना सरल विधि और वास्तविक माध्य विधि से आसान है ।

माप/अंक 35, 40, 45, 50, 55 पर गौर फरमाइये ।

इन सभी का सामान्य गुणनखण्ड '5' है ।

हम यह भी सीख चुकें हैं कि यदि माप/अंकों का सामान्य गुणनखण्ड हो तब, चरण विचलन विधि द्वारा मानक विचलन ज्ञात करना अधिक आसान होता है ।

अब इस विधि द्वारा σ को ज्ञात करते हैं ।

(iv) चरण विचलन विधि :

चरण 1: माप/अंक और आवृत्तियों को क्रम से वितरण तालिका में जमाये ।

चरण 2: $n = \Sigma f = 40$ ज्ञात करें ।

चरण 3: कल्पित माध्य को निर्धारित करें A = 45.

चरण 4: माप/अंकोंका सामान्य गुणन खण्ड ज्ञात करें, C = 5

चरण 5: विचलन ज्ञात करें $d = \frac{x-A}{C} = \frac{x-A}{5}$

चरण 6: fd और Σfd ज्ञात कीजिए ।

चरण 7: d^2, fd^2 और Σfd^2 ज्ञात करें ।

चरण 8: सूत्र का उपयोग करते हुए, मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{d} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times C \qquad \sigma = \sqrt{\frac{73}{40} - \left(\frac{3}{40}\right)^2} \times 5 = \sqrt{1.82} \times 5 = 6.7$$

x	f	चरण विचलन $d = \frac{x-A}{C}$	fd	d^2	fd^2
35	6	−2	−12 } −20	4	24
40	8	−1	−8	1	8
45	12	0	0	0	0
50	5	+1	+5 } +23	1	5
55	9	+2	+18	4	36
	n=40		Σfd = +3		Σfd^2 = 73

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{d} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times C \qquad \sigma = \sqrt{\frac{73}{40} - \left(\frac{3}{40}\right)^2} \times 5 = \sqrt{1.82} \times 5 = 6.7$$

टिप्पणी : कल्पित माध्य विधान (assumed mean method) और चरण विचरण विधान (step mean method) से कि गई गणना की तुलना कीजिए ।

दोनों में से कौनसा सरल विधान है?

चरण विचलन विधान में सामान्य अपवर्तन घटक को कम करने से (निकालने से) गणना कम होती है और समय की बचत होती है । मानक विचलन ज्ञात करने का यह सबसे सरल और छोटा सा विधान है । आप निरीक्षण कर सकते हैं कि 'd' का मूल्य और अति छोटी सी संख्या में परिवर्तित हो जाने के कारण, गणना को सरल से कर सकते है और अतः fd, d^2 और fd^2 को मौखिक ज्ञात कर सकते हैं ।

उपरोक्त विधान उदाहरण और चर्चा जो हर विधान के बाद कि गई है, उनसे हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि

* कल्पित माध्य विधान से मानक विचलन S.D ज्ञात करना बहुत आसान है ।
* यदि स्कोर (score-समंक) में सामान्य घटक होतो मानक विचलन को चरण विचलन विधान से मालूम कीजिए ।

अब हम समूहीत दत्तांश का एक उदाहरण लेंगे, जिसमें स्कोर को वर्गांतर में वर्गीकृत किये गये हैं ।

उदाहरण 8: निम्नलिखित तालिका में एक विद्यार्थीयों के समूह द्वारा गणित की एक समस्या को हल करने के लिए लिया गया समय (सेकेंड में) दिया गया हैं ।

दत्त अंशों का मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

वर्गांतर C-I	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति f	7	10	15	8	10

हल : कल्पित माध्य विधान से मानक विचलन को ज्ञात करेंगे । इस उदाहरण में स्कोर को वर्गांतरों में समूहीत बनाया गया हैं । ऐसे संदर्भों में हमें पहले वर्गांतर का मध्य बिन्दु ज्ञात करना चाहिए । और उनमें से किसी एक को कल्पित माध्य मानना चाहिए । (सामान्यतः अत्यधिक आवृत्ति रहनेवाले वर्गांतर के मध्य बिन्दु को प्राथमिकता दी जाती हैं ।) कल्पित माध्य विधान से मानक विचलन ज्ञात करने के लिए निम्न विधान चरणों का पालन किया जाता है ।

चरण 1: वर्गांतर और आवृत्ति को (उर्ध्वाधर स्तंभ में व्यवसथित कीजिए ।

चरण 2: वर्गांतर का मध्यबिन्दु (x) को ज्ञात कीजिए ।

चरण 3: सबसे अधिक आवृत्तिवाले वर्गांतर से मध्यबिंदु को कल्पित माध्य (A) मानकर लीजिए । यहाँ A = 25 है ।

चरण 4: विचलन 'd' ज्ञात कीजिए । $d = x - A = x - 25$

चरण 5: fd, Σfd, d^2, fd^2 और Σfd^2 ज्ञात कीजिए ।

चरण 6: सूत्र का उपयोग करके मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

वर्गांतर CI	आवृत्ति f	मध्यबिन्दु Midpoint x	विचलन $d = x - A$ $= x - 25$	d^2	fd		fd^2
0–10	7	5	–20	400	–140	–240	2800
10–20	10	15	–10	100	–100		1000
20–30	15	25	0	0	0		0
30–40	8	35	+10	100	+80	–280	800
40–50	10	45	+20	400	+200		4000
	n=50				Σfd=+40		Σfd^2 = 8600

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{8600}{50} - \left(\frac{40}{50}\right)^2} = \sqrt{172 - 0.64} = \sqrt{171.36}$ $\sigma = 13.1$

वास्तविक माध्य से हर एक विद्यार्थी से लिया गया समय औसतन 13 सेकेंड विचलित होता है।

आप निरीक्षण कर सकते है कि वर्गांतर का मध्यबिन्दु में सामान्य अपवर्तन (गुणनखंड) 5 है । अतः चरण विचलन विधान अत्यंत सुविधाजनक विधान है । अब उससे प्रयत्न करेंगे ।

यहाँ हम विचलन को इस प्रकार ज्ञात करेंगे । $d = \frac{x-A}{C} = \frac{x-25}{5}$.

बाकि के चरण उसी तरह ज्ञात किये जाते हैं ।

वर्गांतर x	आवृत्ति f	मध्बिंदु x	चरण विचलन $d = \frac{x-A}{C}$	d^2	fd		fd^2
0–10	7	5	–4	16	–28	–48	112
10–20	10	15	–2	4	–20		40
20–30	15	25	0	0	0		0
30–40	8	35	+2	4	+16	+56	32
40–50	10	45	+4	16	+40		160
	n=50				Σfd = +8		Σfd^2 = 344

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times C = \sqrt{\frac{344}{50} - \left(\frac{8}{50}\right)^2} \times 5$

$= \sqrt{6.88 - 0.03} \times 5 = \sqrt{6.85} \times 5 = 13.1$ $\sigma = 13.1$

यह जानकर आपको आश्चर्य होगा की, थोडे से अलग मार्ग से चरण विचलन विधान का अनुसरण कर सकते है, और अधिक जल्दी से ज्ञात कर सकते हैं, जब वर्गांतर में दिये गये समूहित दत्तांशों को चढते अथवा उतरते क्रम में व्यवस्थित करते है ।

इस प्रकरण (उदाहरण) में हम कल्पित माध्य के सामने (विरूद्ध) 'd' स्तंभ 'O' को लिखिए और 'O' के ऊपर के वर्गांतर के सामने –1, –2 और 'O' के नीचे के वर्गांतर के सामने +1, +2 लिखना चाहिए ।

आप जाँच कर सकते है कि ये मूल्य और कुछ भी नही, बल्कि $d = \frac{x - A}{i}$ जहाँ i= वर्गांतर का आमाप है।

~Mchp MaUrh |d^2, fd, fd^2, Σfd और Σfd^2 को ज्ञात करने के लिए हमेशा की तरह करना चाहिए । और मानक विचलन को उसी सूत्र से ज्ञात करना चाहिए, जिसमें थोडासा परिवर्तन है ।

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times i$.

अब हम मानक विचलन σ को इस विधान से ज्ञात करेंगे ।

वर्गांतर x	आवृत्ति f	मध्यबिन्दु x	विचलन $d = \frac{x-A}{i}$	d^2	fd	fd^2
0–10	7	5	–2	4	–14 } –24	28
10–20	10	15	–1	1	–10	10
20–30	15	25	0	0	0	0
30–40	8	35	+1	1	+8 } +28	8
40–50	10	45	+2	4	+20	40
	n=50				Σfd = +4	Σfd^2 = 86

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times i = \sqrt{\frac{86}{50} - \frac{4}{50}} \times 10 = \sqrt{1.72 - (0.08)^2} \times 10 \quad \sigma = 13.1$

अब तक हम समूहित और असमूहित दत्तांशों के प्रसरण (variance) और मानक विचलन की गणना को विभिन्न विधानों से किये है, जिनमें है – सीधा विधान, वास्तविक माध्य विधान, कल्पित माध्य विधान और चरण विचलन विधान ।

अब कुछ विवरणात्मक उदाहरणों को लेंगे ।

उदाहरण 9 : एक क्वीज् स्पर्धा में कुल 25 अंको में से 10 विद्यार्थीयों द्वारा प्राप्त किये अंक निम्न तालिका में दिये गये है । उनका माध्य, प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए । प्राप्त परिणाम का विश्लेषण कीजिए ।   14, 16, 21, 9, 16, 17, 14, 12, 11 और 20

हल	अंक	विचलन $d = x - \bar{x}$	d^2
	14	−1	1
	16	+1	1
	21	+6	36
	9	−6	36
	16	+1	1
	17	+2	4
	14	−1	1
	12	−3	9
	11	−4	16
	20	+5	25
	$\Sigma x = 150$		$\Sigma d^2 = 130$

कुल अंक (विद्यार्थी) n = 10

(i) माध्य = $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{150}{10} = 15$ $\therefore$ माध्य = $\bar{x} = 15$

(ii) प्रसरण (परिवर्तन) = $\frac{\Sigma d^2}{n} = \frac{130}{10} = 13$ $\therefore$ प्रसरण = 13

(iii) मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}}$ $\therefore \sigma = \sqrt{13} = 3.6$

$\therefore$ अंकोंका मानक विचलन = 3.6

इसका अर्थ है कि औसतन हर एक अंक (विद्यार्थी) माध्य से 3.6 विचलित है ।

उदाहरण 10 : एक शहर में एक वर्ष के 12 महिनो में जो अपघात हुए, उनकी संख्या इस प्रकार है : 43, 41, 58, 55, 57, 42, 50, 47, 48, 58, 50 और 58 : इसका माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : * दत्तांशों को एक क्रम में लिखिये । * दत्त कुछ दत्तांश n = 12

दत्तांश x	विचलन $d = x - A$		d^2
41	−9	−31	81
42	−8		64
43	−7		49
47	−3		9
48	−2		4
48	−2		4
50	0		0
50	0		0
55	+5	+28	25
57	+7		49
58	+8		64
58	+8		64
$\Sigma x = 597$	$\Sigma d = -3$		$\Sigma d^2 = 413$

(i) माध्य = $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{597}{12} = 49.8$ $\therefore\ \bar{x} = 49.8$

(ii) माध्य एक पूर्णांक न होने के कारण, हमे मानक विचलन को कल्पित माध्य विधान से ज्ञात करना पडेगा।

समझो कल्पित माध्य A = 50

$$\therefore\ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{413}{12} - \left(\frac{-3}{12}\right)^2}$$

$$= \sqrt{68.8 - 0.06} \qquad = \sqrt{68.74} \qquad \sigma = 8.3$$

$\therefore$ इस तरह औसतन हर एक दत्तांश माध्य 49.8 से 8.3 जितना विचलित है ।

उदाहरण 11 : निम्न दत्तांशों का प्रसरण (परिवर्तनशीलता) और मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

हल : दत्तांश 68, 72, 80, 84, 92, 100 इनका निरीक्षण करने पर पता लगता है कि 4 एक सामान्य गुणक (अपवर्तन) है ।

84 को कल्पित माध्य समझे । A = 84

$$\therefore\ \text{माध्य} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{496}{6} = 82.6$$

लेकिन दत्तांशो में एक सामान्य गुणक है और माध्य 82.6 एक पूर्णांक नही है । अतः चरण विचलन विधान से प्रसरण (σ^2) और मानक विचलन (σ)को ज्ञात करेंगे ।

$\therefore\quad d = \dfrac{x-A}{C} = \dfrac{x-84}{4}$ अर्थात $\dfrac{68-84}{4} = \dfrac{-16}{4} = -4$ बाकि इसी तरह

दत्तांश x	विचलन $d = \dfrac{x-84}{4}$	d^2
68	–4 } –8	16
72	–3	9
80	–1	1
84	0	0
92	+2 } +6	4
100	+4	16
	$\Sigma d = -2$	$\Sigma d^2 = 46$

(i) प्रसरण $= \dfrac{\Sigma d^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma d}{n}\right)^2 = \dfrac{46}{6} - \left(\dfrac{-2}{6}\right)^2 = 7.7 - 0.1$ $\sigma^2 = 7.6$

(ii) $\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}} = \sqrt{7.6} = 2.76$

उदाहरण 12 : निम्न आवृत्ति वितरण का माध्य और मानक विचलन को मालूम कीजिए ।

वर्गांतर (C-I)	1–5	6–10	11–15	16–20
आवृत्ति (f)	2	3	4	1

हल : पहले हर वर्गांतर का मध्य बिन्दु (x) मालूम करके, बाद में fx और Σfx मालूम करेंगे ।

वर्गांतर CI	आवृत्ति f	मध्यबिन्दु x	fx	माध्य से विचलन $d = x - \bar{x}$	d^2	fd^2
1–5	2	3	6	–7	49	98
6–10	3	8	24	–2	4	12
11–15	4	13	52	+3	9	36
16–20	1	18	18	+8	64	64
	n=10		Σfx = 100			Σfd^2 = 210

* माध्य $= \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{100}{10} = 10$ $\quad \therefore \bar{x} = 10$

* माध्य से विचलन मालूम कीजिए $d = x - \bar{x}$

* विचलन का वर्ग करके Σfd^2 ज्ञात कीजिए ।

* मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}} = \sqrt{\frac{210}{10}} = \sqrt{21}$ $\quad \therefore \sigma = 4.6$

उदाहरण 13 : एक कक्षा के 60 विद्यार्थीयों द्वारा एक लघु परीक्षा में लिये गये अंक निम्न प्रकार है ।

प्राप्त अंक	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
विद्यार्थीयों की संख्या	8	12	20	10	7	3

इस आवृत्ति–वितरण तालिका के लिए माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए । परिणाम का विश्लेषण कीजिए ।

हल : वर्गांतर का मध्य बिन्दुओं में 10 एक सामान्य अपवर्तन है और माध्य एक पूर्णांक नही है ।

वर्ग व्याप्ति C-I	आवृत्ति f	मध्यबिन्दु x	गुणनफल fx	चरण विचलन $d = \frac{x-A}{C}$	d^2	fd	fd^2
5-15	8	10	80	–2	4	–16 } –28	32
15-25	12	20	240	–1	1	–12	12
25-35	20	30	600	0	0	0	0
35-45	10	40	400	+1	1	+10 } +33	10
45-55	7	50	350	+2	4	+14	28
55-65	3	60	180	+3	9	+9	27
	n = 60		Σfx = 1850			Σfd = +5	Σfd^2 = 109

(i) माध्य = $\frac{\Sigma fx}{n} = \frac{1850}{60} = 30.8$

(ii) मानक विचलन = $\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} \times C = \sqrt{\frac{109}{60} - \left(\frac{5}{60}\right)^2} \times 10$

= $\sqrt{1.81} \times 10 = 1.34 \times 10$ σ = 13.4

हर एक विद्यार्थी का स्कोर माध्य (30.8) से औसतन 13.4 से विचलित है ।

उदाहरण 14 : 30 दत्तांशों का माध्य (औसत) 18 है । उनका मानक विचलन 3 है । सभी दत्तांशों का योग ज्ञात कीजिए और सभी दत्तांशों के वर्गों का योग ज्ञात कीजिए ।

हल : कुल दत्तांश = n = 30

दत्तांशों का माध्य = $\bar{x}$ = 18

हमें मालूम है कि दत्तांशों का योग = Σx = 18 × 30 = 540

$\left(\because \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}\right)$ अर्थात $\therefore \Sigma x = \bar{x}.n$

$\therefore$ सभी दत्तांशों का योग = 540

अब 20 दत्तांशों का मानव विचलन = σ = 3

$\therefore \sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$ $\Rightarrow \frac{\Sigma x^2}{30} - 18^2 = 9$

$\Rightarrow \frac{\Sigma x^2}{30} - 324 = 9$ $\Rightarrow \Sigma x^2 - (324 \times 30) = 9 \times 30$

$\Rightarrow \Sigma x^2 - 9720 = 270$ $\Sigma x^2 = 270 + 9720 = 9990$

$\therefore$ सभी सत्तांशों के वर्गो का योग = 9990

उदाहरण 15 : प्रथम n स्वाभाविक संख्याओं का मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ होता है । सिद्ध कीजिए।

हल : प्रथम n वास्तविक संख्यायें 1, 2, 3, ...n. $\Rightarrow \Sigma x = 1 + 2 + 3 + ...+n$

इनका माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+2+3+......+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$ $\therefore$ $\bar{x} = \frac{n+1}{2}$

$\therefore$ सभी प्रथम n स्वाभाविक संख्याओं के वर्गो का योगफल

$1^2 + 2^2 + 3^2$ ....$+n^2$

$\Sigma x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$ ....$+n^2$

$$\Sigma x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\therefore$ मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right]} = \sqrt{\frac{(n+1)}{2}\left(\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{6n}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)}{2}\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)} = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

$\therefore$ प्रथम n स्वाभाविक संख्याओं का मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

उदाहरण 16 : प्रथम 12 स्वाभाविक संख्याओं का मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रथम n स्वाभाविक संख्याओ का मानक विचलन $= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

$\therefore$ प्रथम 12 स्वाभाविक संख्याओं का मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{12^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{144-1}{12}} = \sqrt{\frac{143}{12}} = 3.45$$

$\therefore$ प्रथम 12 स्वाभाविक संख्याओं का मानक विचलन 3.45 है ।

इन्हे जानिए !

* एक समांतर अनुक्रम के क्रमगत संख्याओं (पदों का) मानक विचलन, जिनका सामान्य अंतर d होतो $\sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

* n क्रमगत सम संख्याओं का मानक विचलन $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n \in N$

* n क्रमगत विषम संख्याओं का मानक विचलन $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n \in N$

अभ्यास 6.1

1. निम्नलिखित दत्तांशों का मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

x	3	8	13	18	23
f	7	10	15	10	8

2. एक पहाडी ठंडे प्रदेश का दैनंदिन तापमान (फेरेनहिट F^0) एक हप्ते तक इस प्रकार था ।

सोमवार	मगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
4.1	3.2	2.1	1.8	1.6	2.2	1.4

प्रसारण (परीवर्तनशीलता) और मानक विचलन ज्ञात कीजिए । प्राप्त परिणाम का विश्लेषण कीजिए ।

4. एक विज्ञान की लघु परीक्षा में 60 विद्यार्थीयों द्वारा प्राप्त अंक इस प्रकार है ।

प्राप्त अंक (x)	10	20	30	40	50	60
विद्यार्थीयों की संख्या (f)	8	12	20	10	7	3

5. निम्न तालिका में एक कारखाने में काम करने वाले 40 मजदूरों के दैनिक मजूरी दि गई है ।

मजूरी (₹.में)	30-34	34-38	38-42	42-46	46-50	50-54
मजदूरो की संख्या	4	7	9	11	6	3

6. निम्न लिखित आवृत्ति वितरण तालिका के लिये समांतर माध्य($\bar{x}$) और मानक विचलन σ ज्ञात कीजिए।

वर्गव्याप्ति C.I	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
आवृत्ति f	8	3	15	12	8	4

7. निम्नलिखित वितरण के लिए प्रसारण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

C.I	3.5-4.5	4.5-5.5	5.5-6.5	6.5-7.5	7.5-8.5
f	9	14	22	11	17

8. 100 वस्तुओं का माध्य 48 और उनका मानक विचलन 10 है । उन सभी वस्तुओं का योगफल और उनके वर्गों का योगफल ज्ञात कीजिए ।

9. प्रथम 15 स्वाभाविक संख्याओं का मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

10. प्रथम 10 सम स्वाभाविक संख्याओं का मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

11. एक गाँव में मधुमेह रोगीयों के अध्ययन से निम्न तथ्य सामने आये है ।

आयु (वर्षों में)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
रोगीयों की संख्या	2	5	12	19	9	4

इनका माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए । प्राप्त परिणाम को परिभाषित कीजिए ।

12. स्थानिय वातावरण के लिए 45 मकान मालिकों के एक समूह से हर महिना दि गई देणगी इस प्रकार है ।

रक्कम (₹में)	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
मकान मालिकों की संख्या	2	7	12	19	5

इस वितरण का प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए । परिणाम का विश्लेषण कीजिए ।

प्रसरण गुणांक (विचलन गुणांक) (Coefficient of variation)

दो A और B फैक्टरीयाँ तैयार शर्टो का उत्पादन करती है । एक हप्ते के छः क्रमगत दिनों में दोन्हो फैक्टरीयाँ तैयार किये गये शर्टो की संख्या नीचे तालिका में दि गई है ।

A	85	102	37	60	72	106
B	44	60	55	70	63	56

औसतन कौनसी फैक्टरी अधिक शर्ट तैयार करती है?

अब हम फैक्टरी द्वारा उत्पादित शर्टो का औसत (माध्य) ज्ञात करेंगे ।

फैक्टरी A - का औसत (माध्य) = $\frac{\Sigma x}{n} = \frac{462}{6} = 77$

फैक्टरी B - का औसत (माध्य = $\frac{\Sigma x}{n} = \frac{348}{6} = 58$

हमें पता लगता है कि औसतन फैक्टरी-A द्वारा तैयार किये जानेवाले शर्टो की संख्या B-फैक्टरी से अधिक है ।

समझो एक ठोक (होलसेल) व्यापारी दैनंदिन तैयार शर्टो के लिए आर्डर देना चाहता है । वह हर रोज शर्टो की सप्लाई मे स्थिरता रखनेवाली फैक्टरी को आर्डर देना चाहता है, अर्थात हररोज के शर्टो की सप्लाई की संख्या में ज्यादा विचलन नही होना चाहिए ।

फैक्टरी A और B में से ठोक व्यापारी कौनसी फैक्टरी को आर्डर देगा अथवा चुनेगा?

यह सब को मालूम है सिर्फ उच्च औसत मूल्य के अपेक्षा उत्पादन और संभरण (सप्लाई) में स्थिरता रखनेवाला अच्छा रहता है ।

हमारे दैनंदिन जीवन में, हमें अनेक ऐसे प्रसंग आते है, जहाँ अधिक संख्याके अपेक्षा निष्पादन (performance -उपलब्धता) और उत्पादन में स्थिरता (दृढता-consistency) रखता है ।

उदाहरण के लिये -

* एक क्रिकेट मैच के लिये बल्लेबाज अथवा गेंदबाज को चुनते समय
* राष्ट्रीय स्तर की क्वीज् प्रतियोगिता के लिए विद्यार्थी को चुनते समय
* ओलम्पीड (olympics) के लिये खिलाडी को चुनते समय
* साग-सबजी और फूल बेचनेवाले को चुनते समय इसलिये स्थिरता (दृढता) अथवा विचलनता को कैसे मालूम किया जाता है । अथवा गणना कि जाती है ।

संख्याशास्त्र में इस उद्देश के लिये **विचलन गुणांक (coefficient of variation (C.V)** की गणना की जाती है । विचलन (**प्रकिर्णन-dispersion**) का सापेक्ष माप **(relative measure)** को विचलन गुणांक कहते है ।

यह दत्त आवृत्ती वितरण के समांतर माध्य और मानक विचलन पर आधारित है । इसे सापेक्ष मानक विचलन (relative standard deviation) भी कहते है ।

अतः विचलन गुणांक को इस तरह परिभाषित करते है –

विचलन गुणांक C.V = $\frac{\text{मानक विचलन (S.D.)}}{\text{समांतर माध्य (A.M)}} \times 100$ $\qquad \therefore$ C.V = $\frac{\sigma}{x} \times 100$

विचलन गुणांक का विश्लेषण करने पर पता लगता है कि –

* इस प्रतिशत में व्यक्त किया गया है ।
* यह इकाईयों से मुक्त है ।
* इसे माध्य $(\bar{x})$ और मानक विचलन (σ) से मालूम किया जाता है ।

लेकिन स्थिरता और विचलनता को विवरण गुणांक का उपयोग करके कैसे मालूम किया जाता है ?

विचरण गुणांक की गणना कैसे करना?

अब हम वापस फैक्टरी A और B का उदाहरण लेंगे ।

हम उन दोनों फैक्टरी का औसत (माध्य- $\bar{x}$) का मूल्य जानते है । अब हम पहले मानक विचलन (σ) ज्ञात करके, फिर विचलन गुणांक (C.V) ज्ञात करेंगे ।

फैक्टरी A

स्कोर x	$d = x - A$	d^2
37	–48	2305
60	–25 $\}-86$	625
72	–13	169
85	0	0
102	+17 $\}+38$	289
106	+21	441
n=6	$\Sigma d = 48$	Σd^2=3829

समझो A = 85

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3829}{6} - \left(\frac{-48}{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{638.17 - 64}$$

$$= \sqrt{574.17} \quad \therefore \sigma = 23.96$$

विचलन गुणांक (C.V)

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{23.96}{77} \times 100$$

C.V = 31.12

∴ फैक्टरी-A से बने शर्टों के लिये विचलन गुणांक (C.V.) 31.12 है ।.....(1)

फैक्टरी B

स्कोर x	$d = x - A$	d^2
44	–16	256
55	–5 $\}-25$	25
56	–4	16
60	0	0
63	+3 $\}+13$	9
70	+10	100
n=6	$\Sigma d = -12$	Σd^2=406

समझो A = 60

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{406}{6} - \left(\frac{-12}{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{67.67 - 4}$$

$$= \sqrt{63.67} \quad \therefore \sigma = 7.98$$

विचलन गुणांक (C.V)

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{7.98}{58} \times 100$$

C.V = 13.76

∴ फैक्टरी-B से बने शर्टों के लिये विचलन गुणांक (C.V.) 13.76 है ।.....(2)

उपरोक्त (1) और (2) की तुलना करने पर हम देखते है कि फैक्टरी-बी का विचलन गुणांक फैक्टरी-ए के विचलन गुणांक से कम है ।

अतः हम हकते है फैक्टरी 'बी' यह फैक्टरी 'ए' के अपेक्षा शर्टो को बनाने में विश्वसनीय और स्थिर है।

उपरोक्त चर्चा से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि दो अथवा दो से अधिक संग्रहित दत्तांशों की तुलना करने में विचलन गुणांक (सी.व्ही) सहायता करता है ।

जब विचलन गुणांक → अधिक है → तब दत्त अंश (तथ्य) कम स्थिर है।

जब विचलन गुणांक → कम है → तब दत्त अंश (तथ्य अधिक स्थिर है ।

उदाहरण

उदाहरण 1: दो क्रिकेट खिलाडी अरूण और भारत द्वारा 15 मैचों में क्रमशः 1050 और 900 रन बनाये और उनका मानक विचलन 4.2 और 3.0 है । कौन रन बनाने में श्रेष्ठ है? कौनसा खिलाडी अधिक स्थिर है ।

hb ...खेले गये मैच n = 15

अरूण का रन बनाने का माध्य $\bar{x} = \frac{1050}{15} = 70$

भरत के रन बनाने का माध्य $\bar{x} = \frac{900}{15} = 60$

अब माध्य $\bar{x}$ और मानक विचलन (σ) का उपयोग करके विचलन गुणांक ज्ञात करेंगे ।

खिलाडी	**माध्य** $\bar{x}$	**मानक विचलन** (σ)	C.V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$
अरूण	70	4.2	$= \frac{4.2}{70} \times 100 = 6.0$
भरत	60	.0	$= \frac{3.0}{60} \times 100 = 5.0$

(i) भरत के अपेक्षा अरूण का माध्य अधिक होने के कारण, अरूण अधिक रन बनानेवाला खिलाडी है

(ii) अरूण के अपेक्षा भरक का विचलन गुणांक कम होने के कारण, भरत अधिक स्थिर एवम् विश्वसनीय खिलाडी है ।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित वितरण के लिए मानक विचलन (σ) और विचलन गुणांक (सी.वी.) ज्ञात कीजिए ।

प्राप्त अंक (x)	10	20	30	40	50
विद्यार्थीयों की संख्या (f)	4	3	6	5	2

हल :

प्राप्तांक x	आवृत्ति f	गुणनफल fx	माध्यसे विचलन $d=(x-\bar{x})$	d^2	fd^2
10	4	40	−19	361	1444
20	3	60	−9	81	243
30	6	180	+1	1	6
40	5	200	+11	121	605
50	2	100	+21	441	882
	n = 20	Σfx = 580			Σfd^2 = 3180

(i) माध्य = $\bar{x}=\frac{\Sigma fx}{n}=\frac{580}{20}=29$ $\therefore$ Mean = $\bar{x}=29$

(ii) मानक विचलन $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}}=\sqrt{\frac{3180}{20}}=\sqrt{159}=12.61$ $\therefore$ σ = 12.61

(iii) विचलन गुणांक C.V = $\frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100=\frac{12.61}{29}\times 100=\frac{1261}{29}=43.48$ $\therefore$ C.V = 43.48

अभ्यास 6.2

1. निम्नलिखित दत्तांशों का विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए : 40, 36, 64, 48, 52.

2. एक संग्रहित दत्तांश का विचलन गुणांक 45 और उसका मानक विचलन 2.5 है । उनका माध्य ज्ञात कीजिए।

3. एक सैनिक भर्ती के लिए शारिरीक परीक्षण के लिये हाजिर हुअे 100 स्पर्धालुओं का औसत ऊँचाई 163.8 से भी है । जिनका विचलन गुणांक 3.2 है । उनकी ऊँचाई का मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

4. यदि n = 10, $\bar{x}=12$ और Σx^2 = 1530 होतो विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए ।

पैचार्ट (Piechart)

हम जानते हैं कि संख्यात्मक दत्तांश को चित्रों द्वारा अथवा ग्राफ द्वारा निरूपित कर सकते हैं। स्मरण कीजिए सांख्यकीय दत्तांश को चित्रों द्वारा, रैखिक आलेख, स्तंभालेख, आयत चित्र और पै चार्ट द्वारा निरूपित कर सकते हैं ।

पै चार्ट में दत्तांश को वृत्त में वितरित करते हैं। इसलिए पै चार्ट को वृत्तीय आलेख भी कहते हैं। पै चार्ट दर्शाता है कि कैसे एक दत्तांश को वितरित अथवा बाँटा जाता है।

पै चार्ट में, यदि वृत्त किसी दत्तांश को पूर्णतः निरूपित करता है तो प्रत्येक दत्तांश वृत्त के केन्द्र में निश्चित कोण बनाता है। इसलिए, दत्तांश का प्रत्येक भाग को केन्द्रीय कोण खींचने से बने वृत्तखंडों से निरूपित करते हैं। अतः पैचार्ट को वृत्तखण्डालेख (sector graph) भी कहते हैं ।

पै चार्ट धन, चुनावी जानकारी, बजट, मौसम, जनसंख्या आदि को विश्लेषण करने में उपयोगी है।

निम्न उदाहरणों का अध्ययन कीजिए :

उदाहरण 1: एक कक्षा में 36 विद्यार्थी है। निम्न दत्तांश दर्शाता है कि स्कूल पहुँचते है।

पैदल	साइकिल	बस	कार	स्कूल वाहन
12	8	3	4	9

आईए, इस दत्तांश को पै चार्ट द्वारा निरूपित करते हैं ।

36 विद्यार्थियों के संपूर्ण समूह को वृत्त में निरूपित करते हैं।

हम जानते हैं कि वृत्त केन्द्र पर 360 का कोण बनता है।

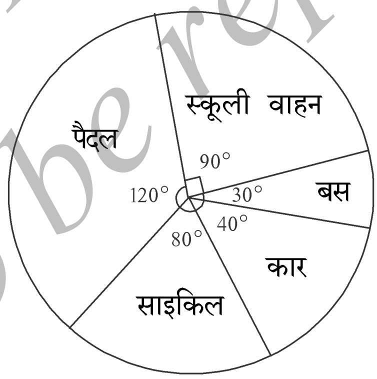
विद्यार्थियों का प्रत्येक भाग उनसे बनें केन्द्रीय कोण के अनुपात से होता है।

यदि 36 विद्यार्थियों का संपूर्ण समूह 360^0 के अनुरूप है तो प्रत्येक विद्यार्थी $\frac{360}{36}=10^0$ के अनुरूप होता है ।

$\therefore$ 12 विद्यार्थी जो पैदल जाते हैं वे $12\times10=120^0$ के अनुरूप होगा । इसका अर्थ है, 12 विद्यार्थी को केन्द्र पर 120^0 के कोण से निरूपित करते हैं ।

इसी तरह विभिन्न विधानों से स्कूल पहुँचने वाले विद्यार्थियों को और उनसे केन्द्र पर बनें कोणों निम्न तालिका द्वारा निरूपित करते हैं ।

विद्यार्थी जो निम्न विधान से पहुँचते हैं	विद्यार्थियों की संख्या	केन्द्रीय कोण
पैदल	12	$\frac{12}{36} \times 360^0 = 120^0$
साइकिल	8	$\frac{8}{36} \times 360^0 = 80^0$
बस	3	$\frac{3}{36} \times 360^0 = 30^0$
कार	4	$\frac{4}{36} \times 360^0 = 40^0$
स्कूली वाहन	9	$\frac{9}{36} \times 360^0 = 90^0$
	36	360^0



उपरोक्त परिकलित केन्द्रीय कोणों वृत्त में की रचना कर हम दत्तांश को पै चार्ट में निरूपित कर सकते हैं।

पै चार्ट रचना करने का क्रम निम्न है :

चरण 1: कुल घटकों की संख्या लेना

चरण 2: प्रत्येक घटक का केन्द्रीय कोण ज्ञात करना

चरण 3: योग्य त्रिज्या से वृत्त खींचना

चरण 4: कोण मापक की सहायता से वृत्त खींचना

चरण 5: कोणों अंकित कर प्रत्येक वृत्ताखण्ड प्रत्येक घटक लिखना

उदाहरण 2: वनक्षेत्र के एक वर्ग किलोमीटर क्षेत्र में पाये गए चार प्रमुख प्रकार के पेड़ निम्न तालिका में दिये हैं। पै चार्ट बनाइए ।

सागवान	रोसवुड	देवदारु	निलगीरी
360	300	285	135

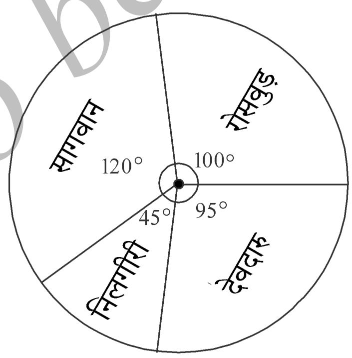
हल: पै चार्ट रचना करने के क्रम का अनुसरण करते हैं ।

चरण 1: पेड़ों की कुल संख्या ज्ञात करते हैं ।

$360 + 300 + 285 + 135 = 1080$

चरण 2: प्रत्येक प्रकार के पेड़ से बना केन्द्रीय कोण ज्ञात करते हैं ।

पेड़	**पेड़ों की संख्या**	**केन्द्रीय कोण**
सागवान	360	$\frac{360}{1080} \times 360 = 120$
रोसवुड़	360	$\frac{300}{1080} \times 360 = 100$
देवदारु	285	$\frac{285}{1080} \times 360 = 95$
निलगीरी	135	$\frac{135}{1080} \times 360 = 45^0$
	1080	360^0



चरण 3: सुक्त त्रिज्या का वृत्त खींचिए ।

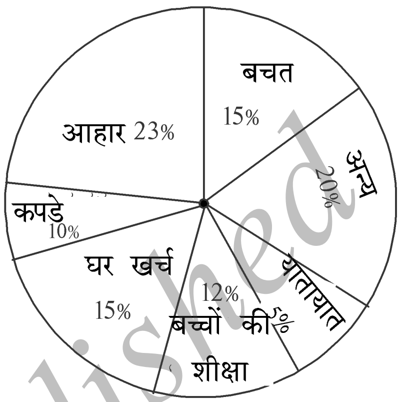
चरण 4: पेड़ों उपरोक्त तालिका दिए गए कोणों की रचना कीजिए ।

चरण 5: पेड़ों कोणों को अंकित कर प्रत्येक वृत्तखण्ड में पेड़ों के नाम लिखिए ।

अब तक हमने पै चार्ट की रचना करना और संख्यात्मक दत्तांश निरूपित करना सीखा है। अब एक पै चार्ट पढ़ने और उसमें निरूपित दत्तांश का विश्लेषण करना सीखेंगे ।

उदाहरण 3: निम्न पै चार्ट, एक परिवार से विभिन्न विषयों पर किया खर्च और बचत (वर्षांत तक) दर्शाता है ।

पै चार्ट का अध्ययन करके निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।



(i) यदि परिवार की संपूर्ण आय ₹ 75,000 है तो बच्चों के शिक्षा किया गया खर्च कितना है?

(ii) कपड़ों पर कितना खर्चा हुआ ?

(iii) वार्षिक बचत कितनी है ?

(iv) घर से भी आहार पर कितना खर्चा हुआ ?

(v) घर और यातायात पर किए गए खर्चों में कितना अंतर है ?

हल: (i) दिया गया है कि बच्चों के शिक्षा पर आय की 12% धनराशि खर्च हुई है।

परिवार की संपूर्ण आय: ₹ 75,000

बच्चों के शिक्षा पर किया गया खर्चा $= \frac{12}{100} \times 75000 =$ ₹ 9,000

$\therefore$ ₹ 75,000 की आय में बच्चों की शिक्षा पर ₹ 9,000 खर्च हुआ ।

(ii) 15% की धनराशी की बचत हुई है :

$\therefore$ बचत: $= \frac{15}{100} \times 75{,}000 =$ ₹ 11,200

$\therefore$ ₹ 75,000 की आय में ₹ 11,200 की बचत है ।

(iii) दिया गया है कि आहार पर 23% और घर पर 15%का खर्चा हुआ है :

$\therefore$ आहार पर किया गया खर्चा : $\frac{23}{100} \times 75000 =$ ₹ 17,250

$\therefore$ घर पर किया गया खर्चा : $\frac{15}{100} \times 75000 =$ ₹ 11,250

$\therefore$ आहार पर किया खर्चा-घर पर किया गया खर्चा = ₹ 17,250 = ₹ 11,250 = ₹ 6000

(iv) घर पर किया गया खर्चा = ₹ 11,250 (परिकलित)

$\therefore$ यातायात का खर्चा : $\frac{15}{100} \times 75000 =$ ₹ 3,750

$\therefore$ घर और यातायात के खर्चों में अंतर = ₹ 11,250 = ₹ 3,750 = ₹ 7,500

उदाहरण 4: चार शहरों की जनसंख्या निम्न पै चार्ट में दर्शायी गयी है। पै चार्ट का अध्ययन करके 5 शहर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए ।

हल: मान लीजिए 5 शहर निरूपित वृत्तखंड से बना केन्द्रीय कोण x^0 है तो

$120^0 + 96^0 + 60^0 + x^0 = 360^0$

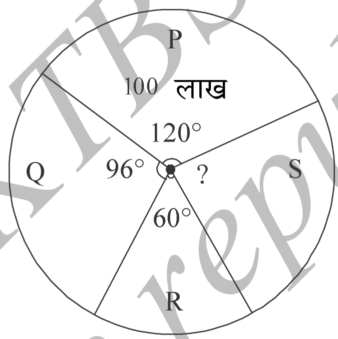
$\Rightarrow 276^0 + x^0 = 360^0$

$\Rightarrow 360^0 - 276^0 = 84^0$

120^0 के कोण से बना वृत्तखण्ड द्वारा निरूपित जनसंख्या = 100 लाख

$\therefore$ जनसंख्या की तुलना में 84^0 के कोण बना वृत्त खण्ड $= 84 \times \frac{5}{6}$ लाख = 70 लाख

$\therefore$ 5 शहर की जनसंख्या = 70 लाख



प्रयत्न कीजिए: Q शहर और R शहर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए ।

I. निम्न दत्तांश निरूपित करने एक पै-चार्ट की रचना कीजिए :

1. अपने प्रिय खेल में भाग लेने उत्सुक छात्रों की संख्या इस तरह है :

खेल का नाम	फुटबॉल	टेनिस	वॉलीबॉल	हाकी	बास	अन्य
छात्रों की संख्या	35	14	10	6	5	2

2. एक कक्षा में किये गए सर्वेक्षण में ज्ञात हुआ है पर्यटन के लिए निम्नप्रकार से अपनी पसंद दिखाई है।

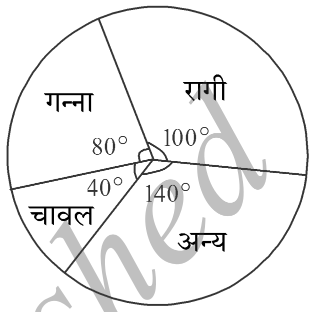
स्थान	मैसूर	विजापूर	गोकर्ण	चित्रदुर्ग
विद्यार्थियों की संख्या	14	6	2	18

3. एक गाँव के लोगों से उपयोग किये जानेवटाले साबुन पर के सर्वेक्षण से पता उनकी पसन्द इस तरह है ।

साबुन	A	B	C	अन्य
गाँव की संख्या	50%	30%	15%	5%

II. निम्न पै चार्टों का अध्ययन करके प्रत्येक संदर्भ में प्रश्न के उत्तर लिखिए :

1. एक स्थान के वार्षिक खेती उत्पादन निम्न पै चार्ट में निरूपित है। यदि कुल खेती उत्पादन 8100 टन है तो निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए।



(i) चावल, रागी, गन्ना और अन्य फसल टन में क्या है ?

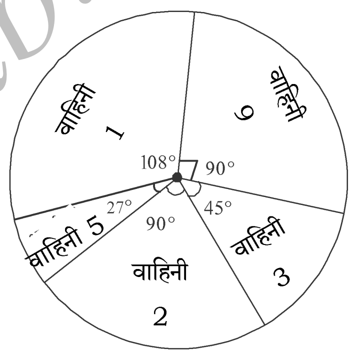
(ii) चावल से रागी का उत्पादन कितना अधिक है ?

(iii) किसी वर्ष में गन्ने का उत्पादन 2400 टन था, चावल का उत्पादन कितना है ?

2. लोगों के एक समूह से पता चला कि उनकी टी वी वाहिनियों की पसन्द इस तरह है :

इसे पै चार्ट में निरूपित किया गया है ।

III. निम्न प्रश्नों के जवाब लिखिए :



(i) समूह के कितना भाग निम्न वाहिनियों को देखता है ?

(a) वाहीनी 3

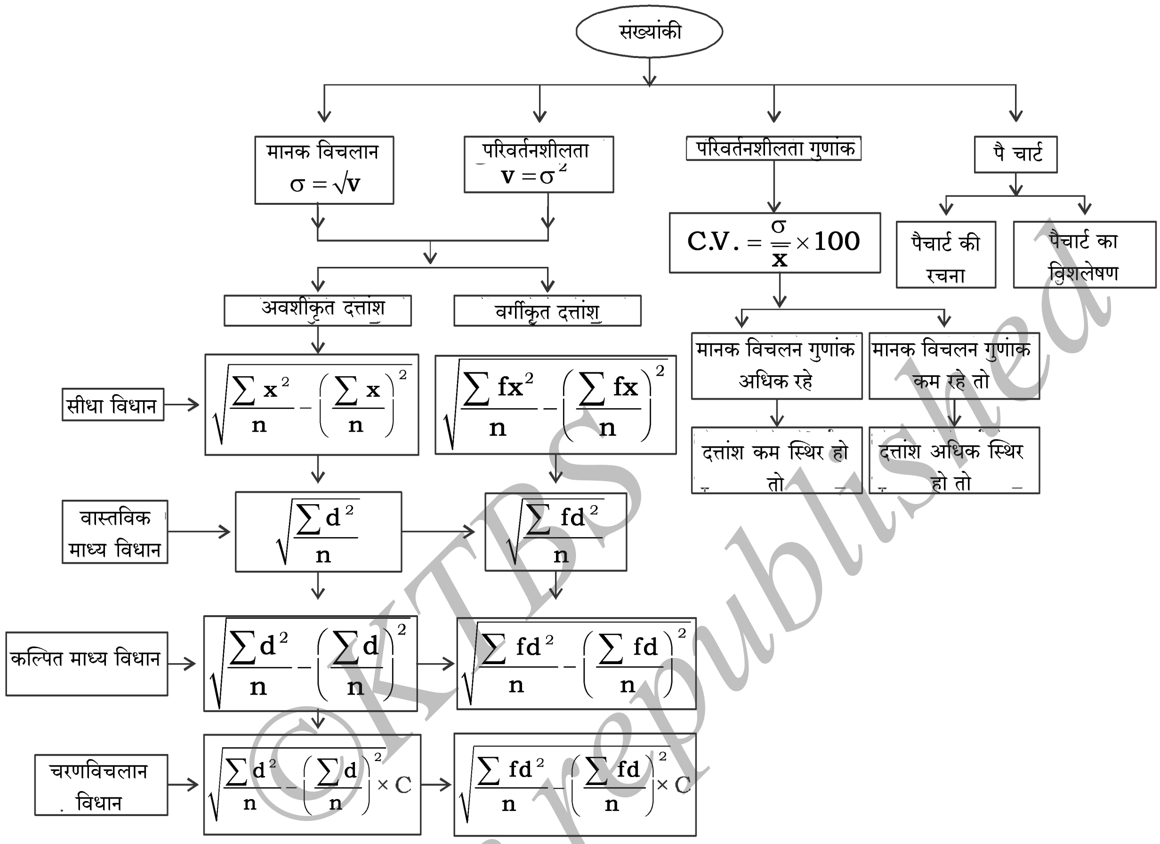
(b) वाहीनी 5

(c) वाहीनी 9

(d) वाहीनी 1

(e) वाहीनी 2

(ii) यदि उस समूह में 200 लोग थे, कितने लोगों ने इन वाहिनियों को देखते हैं :



उत्तर

अभ्यास 6.1

1] 6.32   2] v = 1.23, σ = 1.107   3] v = 0.179.56, σ = 13.4

4] माध्य = 41.7, v = 1.94 σ = 5.58   5] $\Sigma x = 4800$, $\Sigma x^2 = 2,40,400$

6] माध्य = 42.84, σ = 11.93

अभ्यास6.2

1] मानक विचलन = 20.41   2] $\bar{x}$ = 5.55   3] σ = 5.2

4] मानक विचलन = 25   5] 36.55 और 74.64   6] A = 28.125,   B = 20.93

7] A = 0.18, B = 0.16; A

अभ्यास 6.3

II 1] (i) रागी = 2,250 टन्, गन्ना= 1,800 टन्, चावल = 900 टन्, अन्य = 3,150 टन्
(ii) 16.66%   (iii) 1,200

2] (i) (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{3}{40}$ (c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{1}{4}$ (e) $\frac{1}{4}$

(ii) (a) 25 (b) 15 (c) 60 (d) 50 (e) 50

7

करणी (Surds)

* करणी के प्रकार – सजाति और विजाति करणियाँ ।
* करणियों का योग, व्यवकलन और गुणनफल ।
* द्विपदीय करणियाँ ।
* द्विपदीय करणियों का गुणनफल
* करणियों का परिमेयीकरण ।
* हर का परिमेयीकरण ।
* अंश का परिमेयीकरण ।

आल–कौवारिज्मी

आल–कौवारिज्मी परिमेय संख्याओं को श्रव्य और अपरिमेय को अश्रव्य कहा और आगे चलकर यही सर्ड (करणी) शब्द बना। (अर्थात बहरा, ध्वनि रहित)। फिबोनाकी ने यही शब्द मूल रहित संख्याओं के लिए उपयोग किया।

यह घटक आपको निम्नों सहायक है :

* सजाति और विजाति करणी को पहचानना ।
* द्विपदी करणी की परिभाषा देना ।
* सजाति करणियों का योग और व्यवकलन ।
* दिए गए करणियों का गुणनफल जानना ।
* करणियों के योग, व्यवकलन और गुणन पर आधारित समस्याओं को हल करना ।
* द्विपदीय करणी को परिभाषित करना ।
* द्विपदीय करणियों का गुणनफल प्राप्त करना ।
* करणियों के परिमेयकरण की विधि को समझाना ।
* करणियों का परिमेयकरण करना ।
* हर का परिमेयकरण करते हुए करणियों को सरल करना ।

गणित संबंधों को बनाने तथा उनमें तुलना करने से संबंधित है।

– कार्ल फेडरिक गॉस.

सजाति और विजातिय करणियां :-

आपने पूर्व कक्षा में करणियों के बारे में पढा है । निम्न तालिका में दिए गए करणी, उनमे क्रम और करणीय का वीक्षण कीजिए-

क्र.नं.	करणी	सरलतम रूप	क्रम	करणीय
1.	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	3
2.	$\sqrt{12}$	$2\sqrt{3}$	2	3
3.	$\sqrt{75}$	$5\sqrt{3}$	2	3
4.	$3\sqrt{27}$	$9\sqrt{3}$	2	3
5.	$2\sqrt{3x^2}$	$2x\sqrt{3}$	2	3

उपरोक्त करणियों में क्रम समान है, करणीय समान है, करणियाँ अपने सरलतम रूप में भी समान है । इन करणियों को सजाति करणी करहते है ।

करणियों का एक समूह जिसके क्रम और करणियाँ समान होती है, वे करणियाँ सजाति करणी कहलाती है ।

निम्नलिखित करणियों के समूह का वीक्षण कीजिए और तालिका को पूर्ण करें ।

समूह	करणी	सरलतम रूप	क्रम		करणीय	
			समान	भिन्न	समान	भिन्न
1.	$\sqrt{8}, \sqrt{12}, \sqrt{20}, \sqrt{54}$					
2.	$\sqrt{50}, \sqrt[3]{54}, \sqrt[4]{32}$					
3.	$\sqrt{18}, \sqrt[3]{24}, \sqrt[4]{64}, \sqrt[5]{192}$					

उपरोक्त तालिका में, हम यह वीक्षण करते हैं कि,

समूह 1 में : क्रम समान है और करणीय भिन्न है ।

समूह 2 में : क्रम भिन्न है और करणीय समान है ।

समूह 3 में : क्रम भिन्न है और करणीय भिन्न है ।

यह करणियाँ **विजाति करणियाँ कहलाती** है ।

करणियों का वह समूह जिनके सरलतम रूप में उनके क्रम भिन्न हो या करणीय भिन्न हो अथवा दोनों भिन्न हो, ऐसी करणियाँ विजाति करणी कहलाती है ।

द्विपदी करणी :

निम्न करणियों का अध्ययन कीजिए :

1. दो करणियों का योग $\sqrt{3}+\sqrt{5}$
2. दो करणियों का अंतर $\sqrt{7}-\sqrt{3}$
3. एक करणी और एक परिमेय संख्या का जोड $6\sqrt{3}+5$
4. दो करणियों का अंतर $6\sqrt{x}-5\sqrt{y}$

ध्यान दीजिए : प्रत्येक उदाहरण **दो करणियों का जोड अथवा अंतर अथवा करणी और एक परिमेय संख्या है । ऐसे करणियों को द्विपदी करणी कहते हैं ।**

करणियों का जोड और व्यवकलन

करणियों का सजाति और विजाति करणी में वर्गीकृत किया जाता है । क्या इन दो प्रकार की करणियों को जोडा या घटाया जा सकता है?

इस प्रश्न का उत्तर देने हेतु, हमें बीजगणित के सजाति और विजाति पदों का जोडना और व्यवकलन स्मरण करना होगा ।

हमें ज्ञात है कि केवल सजाति को जोडा या घटाया जा सकता है । उसी प्रकार केवल सजाति करणियों जोडा या घटाया जा सकता है । अर्थात समान क्रम और समान करणीय के सरलतम रूप के करणियों को जोड सकते हैं अथवा घटा सकते हैं । अतः करणियों को जोडने अथवा घटाने के लिए हम निम्न चरण अनुसरण करते हैं । पहले उन्हें सरलतम रूप में लाना और बाद उनके सहगुणांकों को वितरण नियम उपयोग जोडना चाहिए ।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : $\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ का योग प्राप्त कीजिए ।

हल : $\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ (ये करणियाँ सरलतम रूप में है । ये सजाति करणियाँ है ।)

$= (1+3+5)\sqrt{2}$ (सहगुणांकों को जोडना)

$= 9\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

उदाहरण 2 : सरल कीजिए $4\sqrt{63}+5\sqrt{7}-8\sqrt{28}$ और उनके सरलतम रूप प्राप्त कीजिए ।

हल : $4\sqrt{63}+5\sqrt{7}-8\sqrt{28}$

$= 4\sqrt{9\times 7}+5\sqrt{7}-8\sqrt{4\times 7} = 12\sqrt{7}+5\sqrt{7}-16\sqrt{7}$

$= (12+5-16)\ \sqrt{7} = \sqrt{7}$ (सहगुणांकों को जोडना)

$= 4\sqrt{63}+5\sqrt{7}-8\sqrt{28} = \sqrt{7}$

उदाहरण 3 : सरल कीजिए $2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{192}$

हल : उनके सरलतम रूप में लिखिए :

$2\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{8\times 2} = 2\times 2\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27\times 3} = 3\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64\times 2} = 4\sqrt[3]{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64\times 3} = 4\sqrt[3]{3}$

$\therefore\ 2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{192} = 4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{3}$

$= \cancel{4\sqrt[3]{2}}-\cancel{4\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{3}$

$= (3+4)\sqrt[3]{3} = 7\sqrt[3]{3}$ (सजाति पदों को पुनरव्यवस्थित करने से)

$\therefore\ 2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{192} = 7\sqrt[3]{3}$

उदाहरण 4 : $\left(4\sqrt{x}+6\sqrt{y}\right)$ और $3\left(4\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)$ का योग प्राप्त कीजिए ।

हल : $\left(4\sqrt{x}+6\sqrt{y}\right)+3\left(4\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)$

$= 4\sqrt{x}+6\sqrt{y}+12\sqrt{x}-9\sqrt{y}$ (कोष्टक को हटाने पर)

$= 4\sqrt{x}+12\sqrt{x}+6\sqrt{y}-9\sqrt{y}$ (सजाति करणी को पुनः व्यवस्थित करने पर)

$= (4+12)\sqrt{x}+(6-9)\sqrt{y}$ (सजाति करणियों को जोडने और घटाने करने पर)

$= 16\sqrt{x}-3\sqrt{y}$

$\therefore\ (4\sqrt{x}+6\sqrt{5})3(4\sqrt{x}+3\sqrt{y}) = 16\sqrt{x}-3\sqrt{y}$

अभ्यास 7.1

I. निम्न करणियों को सरल कीजिए :–

1. $\sqrt{75}+\sqrt{108}-\sqrt{192}$
2. $4\sqrt{12}-\sqrt{50}-7\sqrt{48}$
3. $\sqrt{45}-3\sqrt{20}+3\sqrt{5}$
4. $2\sqrt{2a}+3\sqrt{8a}-\sqrt{2a}$
5. $3x\sqrt{x}+3\sqrt{x^3}-2\sqrt{9x^3}$
6. $\sqrt{12}+\sqrt{50}+5\sqrt{3}-\sqrt{147}-\sqrt{32}$
7. $4\sqrt{7}-3\sqrt{252}+5\sqrt{343}$
8. $\frac{1}{8}\sqrt{50}+\frac{1}{6}\sqrt{75}-\frac{1}{8}\sqrt{18}-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

II. निम्न करणियों का योग प्राप्त कीजिए :–

1. $(x\sqrt{y}, 2x\sqrt{y}, 4x\sqrt{y})$
2. $5\sqrt[3]{p},\ 3\sqrt[3]{p},\ 2\sqrt[3]{p}$
3. $x\sqrt{x},\ y\sqrt{y},\ 3\sqrt{x^3},\ 4\sqrt{y^3}$
4. $(\sqrt{12}+\sqrt{20}),\ (3\sqrt{3}+2\sqrt{5}),\ (\sqrt{45}-\sqrt{90})$
5. $(\sqrt{3}+\sqrt{2}),\ (2\sqrt{2}+3\sqrt{3}),\ (4\sqrt{2}-3\sqrt{3})$
6. $(\sqrt{x}+2\sqrt{y}),\ (2\sqrt{x}-3\sqrt{y}),\ (3\sqrt{x}+\sqrt{y})$

III. 1. $5\sqrt{x}$ को $9\sqrt{x}$ में से घटाइये और परिणाम को घातांक में व्यक्त कीजिए ।

2. $3\sqrt{p}$ को $10\sqrt{p}$ में से घटाइए ।

3. $3\sqrt{a}$ को $4\sqrt{a}$ और $2\sqrt{a}$ के योग में से घटाइए ।

4. $2\sqrt{x}+3\sqrt{y}$ को $5\sqrt{x}-\sqrt{y}$ में से घटाइए ।

करणियों का गुणानफल

करणियों का योग और व्यवकलन हम सीख चुकें है । करणियों के योग या अंतर प्राप्त करने के लिए जरूरी शर्त इस प्रकार है । करणियाँ उनके शरलतम रूप में, उनके क्रम और करणीय समान होना चाहिए । करणियों के गुणनफल के लिए भी क्या यही शर्त लागू होता है?

हमें पता है कि करणियों को घातांक रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है । घातांक के पहले नियम $a^m \times a^n = a^{m+n}$ का उपयोग करते हुए, दो घातांक रूप के गुणनफल की प्रक्रिया का स्मरण करें । इस नियम की प्रामाणिकता, आधार के समान होने तक ही सीमित है । यदि आधार समान न हो तब गुणनफल किस तरह प्राप्त कियाजाता है?

उदाहरण, $a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = ?$

इन्हें पुनः करणी के रूप में इस तरह लिखा जा सकता है – $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{ab}$

हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि करणियों के गुणनफल के लिए क्रम का समान होना आवश्यक है । करणीय समान अथवा भिन्न हो सकती है ।

अब, करणियों के गुणनफल के कुछ सन्दर्भ का अध्ययन करें ।

संदर्भ 1 :

समान क्रम के करणियों का गुणनफल –

निम्न उदाहरणों का वीक्षण कीजिए ।

उदाहरण 1 : सरल कीजिए $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$

हल : $\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{15}$

उदाहरण 2 : गुणा कीजिए $\sqrt{7}$ को $\sqrt{5}$ से

हल : $\sqrt{7} \times \sqrt{5} = \sqrt{7 \times 5} = \sqrt{35}$

उदाहरण 3 : सरल कीजिए $\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{6})$

हल : $\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{6}) = \sqrt{3} \times \sqrt{5} + \sqrt{3} \times \sqrt{6}$ वितरण नियम उपयोग करके

$= \sqrt{3 \times 5} + \sqrt{3 \times 6}$ (by using $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$)

$= \sqrt{15} + \sqrt{18} = \sqrt{15} + \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{15} + 3\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{6}) = \sqrt{15} + 3\sqrt{2}$

उदाहरण 4 : $2\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt[3]{4}\times 4\sqrt[3]{2}$ का मूल्य प्राप्त कीजिए ।

हल : $2\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt[3]{4}\times 4\sqrt[3]{2}$ (समान क्रम)

$= 2\times 3\times 4\times \sqrt[3]{3\times 4\times 2}$ $(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc})$

$= 24\sqrt[3]{24} = 24\sqrt[3]{3\times 2^3} = 24\times\sqrt[3]{3} = 24\sqrt[3]{3}$

$\therefore 2\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt[3]{4}\times 4\sqrt[3]{2} = 24\sqrt[3]{3}$

निरीक्षण कीजिए, उपरोक्त उदाहरणों में करणियों के क्रम समान है ।

संदर्भ 2 : भिन्न क्रम के करणियों का गुणनफल :–

यदि करणियों का क्रम समान न हो तब, हम उनका गुणन सीधा सीधा नही कर सकते ।

एसी परिस्थिति में भिन्न क्रम के करणियों का गुणा कैसे किया जा सकता है?

कुछ उदाहरणों का निरीक्षण करें ।

उदाहरण 1 : गुणन कीजिए $\sqrt{5}$ और $\sqrt[3]{2}$

हल : करणियों के गुणन हेतु यह आवश्यक है कि उनका क्रम समान हो । अतः सारे करणियों को समान क्रम में परिवर्तित करना होगा ।

करणियों के क्रम कैसे समान करें

चरण 1 : दिए गए करणियों को घातांक रूप में लिखे :– $\sqrt{5}\times\sqrt[3]{2} = 5^{1/2}\times 2^{1/3}$

निरीक्षण कि घातांक रूप में लिखे करणियों के घातांक (exponents) परिमेय रूप में है । ध्यान रखें कि इन घातांकों में हर करणी के क्रम का प्रतिनिधित्व करता है । यदि हमें करणियों को समान क्रम में परिवर्तित करना हो तन, परिमेय रूप को सामान्य भाजक में परिवर्तित करना होगा ।

सामान्य हर में कैसे परिवर्तित करें?

सामान्य हर में परिवर्तित करने हेतु हम ल.सा.अ. ज्ञात करते है ।

करणियों को उसी क्रम में बदलने हेतु हम उनके मूलांक (क्रम) का ल.सा.अ. प्राप्त करते है ।

चरण 2 : 2 और 3 को ल.सा.अं. प्राप्त करें $\Rightarrow$ 2 और 3 का ल.सा.अ. 6 है ।

चरण 3 : $\Rightarrow 5^{\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{6}^{3}}{6}}\times 2^{\frac{1}{3}\times\frac{\cancel{6}^{2}}{6}}$

$\Rightarrow 5^{3\times\frac{1}{6}}\times 2^{2\times\frac{1}{6}}$

चरण 4 : करणी के रूप में लिखे $\Rightarrow \sqrt[6]{5^3}\times\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{125}\times\sqrt[6]{4}$

चरण 5 : $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $\Rightarrow \sqrt[6]{125\times 4} = \sqrt[6]{500}$

$\therefore \sqrt{5}\times\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{500}$

भिन्न क्रमों की करणियों को उसी क्रम में बदलने का नियम विधान :

1. दी गई करणियों के मूलांकों (क्रम) का ल.सा.अ. ज्ञात कीजिए ।
2. प्रत्येक करणी को सजाति करणी में बदलिए ।
3. नियम $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ का उपयोग कर करणियों को गुणा कीजिए ।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : $\sqrt[3]{2}$ और $\sqrt[4]{3}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

करणी $\sqrt[3]{2}$ का मूलांक (क्रम) 3 है ।

करणी $\sqrt[4]{3}$ का मूलांक (क्रम) 4 है ।

3 और 4 का ल.सा.अ = 12 है ।

$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{3} = 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}}$ (घातांक रूप में लिखिए)

$= 2^{\frac{1}{3} \times \frac{12^4}{12}} \times 3^{\frac{1}{4} \times \frac{12^3}{12}}$ (प्रत्येक घातांक को ल.सा.अ. से गुणा और भाग कीजिए।)

$= 2^{\frac{4}{12}} \times 3^{\frac{3}{12}} = 2^{4 \times \frac{1}{12}} \times 3^{3 \times \frac{1}{12}}$

$= \sqrt[12]{2^4} \times \sqrt[12]{3^3}$ (घातांक को करणी रूप में लिखिए)

$= \sqrt[12]{2^4 \times 3^3} = \sqrt[12]{16 \times 27}$ (नियम $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$)

$= \sqrt[12]{432}$

$\therefore \sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{432}$

उपर्युक्त दो उदाहरणें से हम यह निष्कर्श निकाल सक्ते है कि जब भिन्न क्रम की दो करणियों को समान क्रम में बदलते हैं तब, उनका क्रम, करणियों के भिन्न क्रमों के ल.सा.अ. के बराबर होता है ।

उदाहरण 2 : $\sqrt{3}$ और $\sqrt[3]{5}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : विकल्प विधि

करणियों का ल.सा.अ. = 6

$\therefore$ $\sqrt{3}$ और $\sqrt[3]{5}$ के क्रम को, क्रम 6 में परिवर्तित कीजिए ।

$\therefore$ अतः हमें $\sqrt{3}$ के क्रम को 3 से गुणा करना होगा ।

$$\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt[2\times3]{3} = \sqrt[6]{3} \text{ किन्तु } \sqrt{3} \neq \sqrt[6]{3}$$

एसा करने पर, हम पाते है कि करणी का मूल्य बदल जाता है। मूल्य को समान रखने के लिए क्या करना होगा? ध्यान दीजिए –

$$\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt[2\times3]{3^3} = 3^{\cancel{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cancel{3}}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

इस विधान में करणी का मूल्य नहीं बदलता है ।

अर्थात, मूल मूल्य को बनाये रखने, करणी को क्रम बदलते समय, करणीय को समान घातांक पर लाने क्यों कि दत्त करणी के मूल क्रम को गुणाकर रहें है ।

उसी प्रकार, $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\times2]{5^2} = 5^{\cancel{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{\cancel{2}}} = 5^{1/3} \times \sqrt[3]{5}$

$\therefore$ $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[2\times3]{3^3} \times \sqrt[3\times2]{5^2}$

$= \sqrt[6]{27} \times \sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{27 \times 25} = \sqrt[6]{675} = \sqrt[6]{675}$

$\therefore$ $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{675}$

संदर्भ 3 : द्विपदी करणियों का गुणनफल :

उदाहरण 1 : $(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ को $(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ को गुणा कीजिए :

हल : $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\ (\sqrt{6} + \sqrt{2})$

$= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$ यह $(a + b)^2$ के रूप में हैं :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= (\sqrt{6})^2 + 2.\sqrt{6} \text{ x } \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$

$= 6 + 2\sqrt{12} + 2$

$= 8 + 2\sqrt{12}$

उदाहरण 2 : $(x + 2\sqrt{3})$ और $(x + 3\sqrt{3})$

हल : $(x + 2\sqrt{3})\ (x + 3\sqrt{3})$ यह $(x + a)\ (x + b)$ के रूप में है ।

$= x^2 + (2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) + 2.\sqrt{3} \text{ x } 3.\sqrt{3}$ $\quad \therefore (x + a)\ (x + b) = n^2 + (a+b)\ n + ab$

$= x^2 + 5\sqrt{3} + 18$

उदाहरण 3 : गुणनफल ज्ञात कीजिए : $(3\sqrt{18} + 2\sqrt{12})\ \ (\sqrt{50} - 2\sqrt{57})$

हल : $(3\sqrt{18} + 2\sqrt{12})\ (\sqrt{50} - 2\sqrt{57})$

$= (9\sqrt{2} + 4\sqrt{3})\ (5\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$ प्रत्येक करणी को सरल किया है ।

$= (9\sqrt{2}\ (5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) + 4\sqrt{3}\ (5\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$

$= 45 \text{ x } 2 - 27\sqrt{6} + 20\sqrt{6} - 2 \text{ x } 3$

$= 90 - 7\sqrt{6} - 36$

$= 54 - 7\sqrt{6}$

अभ्यास 7.2

I. सरल कीजिए :

1. $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$
2. $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{5}$
3. $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{6}$
4. $\sqrt[5]{10} \times \sqrt[5]{11}$
5. $\sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{5}$
6. $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$
7. $2\sqrt[3]{7} \times 3\sqrt[3]{4}$
8. $\sqrt{18} \times \sqrt{27} \times \sqrt{128}$

II. निम्न करणियों का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

1. $\sqrt{2}$ और $\sqrt[3]{4}$
2. $\sqrt[3]{3}$ और $\sqrt[4]{2}$
3. $\sqrt[3]{2}$ और $\sqrt[4]{3}$
4. $\sqrt{3}$ और $\sqrt[4]{5}$
5. $\sqrt{5}$ और $\sqrt[3]{3}$
6. $\sqrt[3]{4}$ और $\sqrt[5]{2}$
7. $\sqrt[3]{5}$ और $\sqrt[4]{4}$
8. $\sqrt[3]{2}$ और $\sqrt[6]{5}$

II सरल कीजिए :

1. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})\ (2\sqrt{3} - 4\sqrt{2})$
2. $(\sqrt{75} - \sqrt{45})\ (\sqrt{20} + \sqrt{12})$
3. $(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})\ (3\sqrt{y} - 2\sqrt{x})$
4. $(6\sqrt{a} - 5\sqrt{b})\ (6\sqrt{a} + 5\sqrt{b})$
5. $(6\sqrt{2} - 7\sqrt{3})\ (6\sqrt{2} - 7\sqrt{3})$
6. $(3\sqrt{27} + 5)\ (9\sqrt{3} + 7)$

करणियों का परिमेयीकरण और परिमेयीकरण अपवर्तन

दी गई तालिका में, करणी, उनका गुणनफल और उनके परिणाम दिये गई है । अध्ययन कीजिए ।

क्र.सं.	करणी	गुणनफल	परिणाम
1.	$\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$	$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$	परिमेय संख्या
2.	$5\sqrt{x}$, $\sqrt{x}$	$5\sqrt{x} \times \sqrt{x} = 5x$	परिमेय संख्या
3.	$\sqrt{x+y}$, $\sqrt{x+y}$	$\sqrt{x+y} \times \sqrt{x+y} = x+y$	परिमेय संख्या
4.	$\sqrt{ab}$, $\sqrt{ab}$	$\sqrt{ab} \times \sqrt{ab} = ab$	परिमेय संख्या
5.	$(6\sqrt{3} + 5)(6\sqrt{3} - 5)$	$(6\sqrt{3})^2 - 5^2 = 105 - 25 = 83$	परिमेय संख्या
6.	$(8\sqrt{x} + \sqrt{y})(8\sqrt{x} - \sqrt{y})$	$(8\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = 64x - y$	परिमेय संख्या

उर्पयुक्त उदाहरणों में, दो करणियों का गुणनफल एक परिणेय संख्या है ।

अतः $\sqrt{7}$ का परिमेय अपवर्तन $\sqrt{7}$ है ।

$\sqrt{x+y}$ का परिमेय अपवर्तन $\sqrt{x+y}$ है ।

$\sqrt{ab}$ का परिमेय अपवर्तन $\sqrt{ab}$ है ।

$(6\sqrt{3}+5)$ का परिमेय अपवर्तन $(6\sqrt{3}-5)$ है ।

जब दो करणियों का गुणनफल परिमेय है, तब प्रत्येक करणी दूसरे का **परिमेयकरण अपवर्तन है ।**

परिमेय संख्या प्राप्त करने के लिए एक करणी से दूसरी करणी को गुणा करने के विधान को परिमेयकरण कहा जाता है ।

द्विपदीय करणी के परिमेयकरण संख्या को अनुबन्ध करणी भी कहते है ।

यदि दो द्विपतीय करणियों का गुणनफल एक परिमेय संख्या है, तब, प्रत्येक करणी दुसरी करणी का अनुबन्ध है ।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ का अनुबन्ध प्राप्त कीजिए ।

हल : $\sqrt{3}+\sqrt{2} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$ [नियम $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ का उपयोग करते हुए]

$\therefore$ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ की अनुबन्ध करणी $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ है ।

उदाहरण 2 : $(5\sqrt{x}-3\sqrt{y})$ का परिमेयकरण कीजिए ।

हल : $(5\sqrt{x}-3\sqrt{y}) = (5\sqrt{x}-3\sqrt{y})(5\sqrt{x}+3\sqrt{y})$

$= (5\sqrt{x})^2 - (3\sqrt{y})^2$

$= 25x - 9y$ $\quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ का उपयोग करते हुए)

$\therefore (5\sqrt{x} - 3\sqrt{y})$ परिमेयकृत उसके अनुबंध करणी से करते है $(5\sqrt{x}-3\sqrt{y})$.

उदाहरण 3 : परीक्षण कीजिए क्या $3-\sqrt{5+x}$ और $3+\sqrt{5+x}$ अनुबन्ध करणी है या नहीं?

हल : यदि $(3-\sqrt{5+x})$ का अनुबन्ध $(3+\sqrt{5+x})$ है, तब उनका गुणनफल एक परिमेय संख्या है ।

$(3-\sqrt{5}+x)(3+\sqrt{5}+x) = 3^2 - (\sqrt{5+x})^2 = 9 - (5 + x) = 9 - 5 - x = 4 - x$

$(4 - x)$ एक परिमेय संख्या है ।

$\therefore$ $(3+\sqrt{5+x})$ की अनुबन्ध करणी $(3-\sqrt{5+x})$ है ।

उदाहरण 4 : $3^{1/3} - 3^{-1/3}$ का परिमेय अपवर्तन ज्ञात कीजिए ।

यदि : $a = 3^{1/3}$ और $b = 3^{-1/3}$

तब, $a^3 = (3^{1/3})^3 = 3$ और $b^3 = (3^{-1/3})^3 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad a^3 + b^3 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{9-1}{3} = \frac{8}{3}$

तब $\quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\therefore \quad \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)\left[\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}} + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2\right] = \frac{8}{3}$$

$$\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{8}{3}$$

$$\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}} + 1\right) = \frac{8}{3}$$

$\frac{8}{3}$ एक परिमेय संख्या है । $\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$ का परिमेयीकरण अपवर्तन $\left(3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 1\right)$ है ।

अभ्यास 7.3

1. निम्न करणियों का परिमेय अपवर्तन लिखिए ।

(a) $\sqrt{a}$ (b) $2\sqrt{x}$ (c) $7\sqrt{y}$ (d) $\sqrt{xy}$

(e) $4\sqrt{p+q}$ (f) $8\sqrt{x-y}$ (g) $\frac{1}{2}\sqrt{p}$ (h) $a\sqrt{ab}$

(i) $x\sqrt{mn}$ (j) $5p\sqrt{a+b}$

2. निम्न द्विपदीय करणियों का अनुबद्ध लिखिए ।

(a) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (b) $\sqrt{x}-2\sqrt{y}$ (c) $3\sqrt{p}-2\sqrt{q}$ (d) $x+3\sqrt{y}$

(e) $10\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ (f) $5+\sqrt{3}$ (g) $\sqrt{8}-5$ (h) $3\sqrt{7}+7\sqrt{3}$

(i) $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ (j) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{y}$ (k) $x\sqrt{a}+y\sqrt{b}$ (l) $xy\sqrt{z}+yz\sqrt{x}$

3. निम्न द्विपदीय करणियों का परिमेय अपवर्तन ज्ञात कीजिए ।

(a) $2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$ (b) $5^{\frac{1}{3}}+5^{-\frac{1}{3}}$ (c) $\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}$

हर के परिमेयकरण द्वारा करणियों को सरल करना ।

हर का परिमेयीकरण करते समय अंश और हर दोनों को हर के परिमेयकरण अपवर्तन से गुण करना चाहिए ।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : हर का परिमेयीकरण कर सरल कीजिए : $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

हल : $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $\sqrt{5}$ का अपवर्तन $\sqrt{5}$ है)

$$\therefore \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3\times 5}{5\times 5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

उदाहरण 2 : हर का परिमेयीकरण कर सरल कीजिए : $\frac{6}{\sqrt{8}}$.

हल : $\frac{6}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{6\sqrt{8}}{8} = \frac{6\sqrt{4\times 2}}{8} = \frac{\cancel{12}^{3}\sqrt{2}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \quad \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

उदाहरण 3 : हर का परिमेयीकरण कर सरल कीजिए : $\sqrt{\frac{bc}{a}}$

हल : $\sqrt{\frac{bc}{a}} = \sqrt{\frac{bc}{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ ($\because$ $\sqrt{a}$ का परिमेय अपवर्तन $\sqrt{a}$ है)

$= \frac{\sqrt{bc}\times\sqrt{a}}{a} = \frac{\sqrt{abc}}{a}$

$\therefore \sqrt{\frac{bc}{a}} = \frac{\sqrt{abc}}{a}$

उदाहरण 4 : हर का परिमेयीकरण कर सरल कीजिए : $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

हल : $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ ($\sqrt{5}-\sqrt{3}$ हर है ।)

$\sqrt{5}-\sqrt{3}$ का परिमेय अपवर्तन $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ है ।

$\therefore \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (हर के परिमेय अपवर्तन $\sqrt{5}$ से अंश और हर को गुणा कीजिए)

$= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$

$\therefore \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$

उदाहरण 5 : हर का परिमेयीकरण कर सरल कीजिए : $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

हल : $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ ($\sqrt{6}-\sqrt{3}$ का परिमेय अपवर्तन $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ है)

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

$$= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2}$$ ($(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ नियम का उपयोग)

$$= \frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{6-3}$$ ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग)

$$= \frac{6+3+2\sqrt{18}}{3} = \frac{9+6\sqrt{2}}{3} = \frac{\cancel{3}(3+2\sqrt{2})}{\cancel{3}} = 3+2\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = 3+2\sqrt{2}$$

उदाहरण 6 : सरल कीजिए : $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$

(हर के परिमेय अपवर्तन $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ से अंश और हर को गुणा कीजिए)

हल : $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$

($\sqrt{5}+2$ का परिमेय अपवर्तन $\sqrt{5}-2$ है, और $\sqrt{5}-2$ का परिमेय अपवर्तन $\sqrt{5}+2$ है)

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}\times\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}\times\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5})^2-2^2} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5})^2-2^2}$$

(हर के परिमेय अपवर्तन $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ से अंश और हर का गुणा कीजिए)

$$= \frac{5-2\sqrt{5}}{5-4} - \frac{(\sqrt{15}+2\sqrt{3})}{5-4}$$

$$= 5-2\sqrt{5}-\sqrt{15}-2\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} = 5-2\sqrt{5}-\sqrt{15}-2\sqrt{3}$$

उदाहरण 7 : सरल कीजिए $4\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{48}$

हल : $4\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{48} = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{48}}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{2}$

($\sqrt{3}$ का परिमेय अपवर्तन $\sqrt{3}$ है)

$$\therefore \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}+12\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{20}^{10}\sqrt{3}}{\cancel{6}_3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore 4\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{48} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

अभ्यास 7.4

I. Rationalise the denominator and simplify.

A. (1) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{3}{2\sqrt{x}}$ (3) $\sqrt{\frac{5}{2y}}$ (4) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{5}}$ (5) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

B. (1) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (2) $\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ (3) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (4) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ (5) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

C. (1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (2) $\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ (3) $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (4) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+6}$

II. Simplify each of the following:

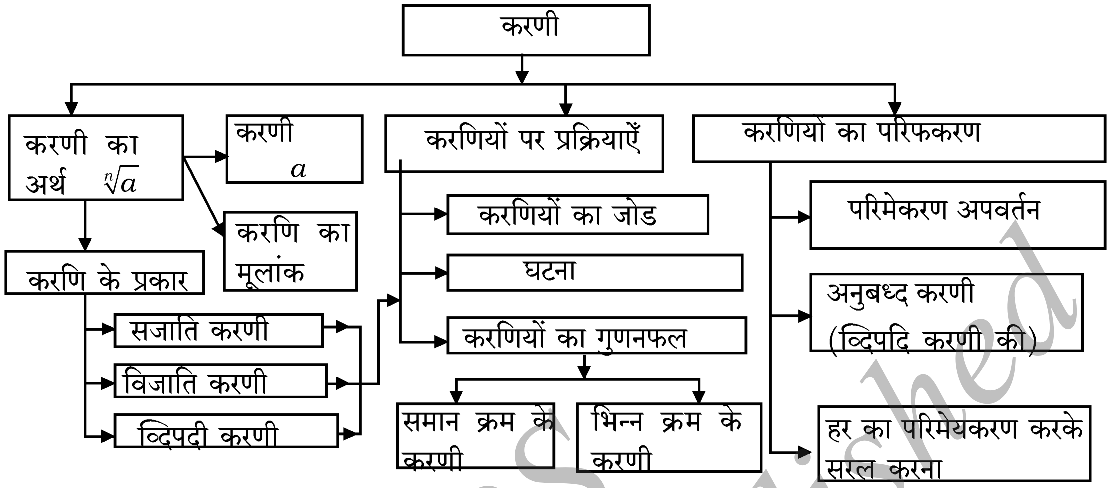
(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (4) $\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}$

(5) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{21}+\sqrt{5}}$ (6) If $x = 2\sqrt{6}+5$ find $x+\frac{1}{x}$

III. 'x' के हल कीजिए

(1) $\frac{3x-4}{\sqrt{3x}+2}=2+\frac{\sqrt{3x}-2}{2}$ (2) $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$



उत्तर

अभ्यास 7.1

I. 1] $3\sqrt{3}$ 2] $-5\left(\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)$ 3] 0 4] $7\sqrt{2a}$ 5] 0 6] $\sqrt{2}$ 7] $21\sqrt{7}$

8] $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

II. 1] $7x\sqrt{y}$ 2] $10\sqrt[3]{p}$ 3] $4x\sqrt{x}+5y\sqrt{y}$ 4] $5\sqrt{3}+7\sqrt{5}-3\sqrt{10}$

5] $\sqrt{3}+7\sqrt{2}$ 6] $6\sqrt{x}$

III. 1] $4(x)^{\frac{1}{2}}$ 2] $7\sqrt{p}$ 3] $3\sqrt{a}$ 4] $3\sqrt{x}-4\sqrt{y}$

अभ्यास 7.2

I. 1] $\sqrt{21}$ 2] $\sqrt[3]{20}$ 3] $\sqrt[4]{24}$ 4] $\sqrt[5]{110}$

5] $\sqrt[6]{10}$ 6] $\sqrt[n]{xy}$ 7] $6\sqrt[3]{28}$ 8] $144\sqrt{3}$

II. 1] $\sqrt[6]{128}$ 2] $\sqrt[12]{648}$ 3] $\sqrt[6]{200}$ 4] $\sqrt[4]{45}$

5] $\sqrt[6]{1125}$ 6] $\sqrt[15]{8192}$ 7] $\sqrt[12]{40000}$ 8] $\sqrt[6]{20}$

III. 1] $-2\left(\sqrt{6}+6\right)$ 2] $4\sqrt{15}$ 3] $5\sqrt{xy}-6x+6y$ 4] $36a-25b$

5] $219-84\sqrt{6}$ 6] $278+108\sqrt{3}$

अभ्यास 7.3

A. (1) $\sqrt{a}$ (2) $\sqrt{x}$ (3) $\sqrt{y}$ (4) $\sqrt{xy}$ (5) $\sqrt{p+q}$

(6) $\sqrt{x-y}$ (7) $\sqrt{p}$ (8) $\sqrt{ab}$ (9) $\sqrt{mn}$ (10) $\sqrt{a+b}$

B. (1) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (2) $\sqrt{x}+2\sqrt{y}$ (3) $3\sqrt{p}+2\sqrt{q}$ (4) $x-3\sqrt{y}$ (5) $10\sqrt{2}-3\sqrt{5}$

(6) $5-\sqrt{3}$ (7) $\sqrt{8}+5$ (8) $3\sqrt{7}-7\sqrt{3}$ (9) $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$ (10) $\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{y}$

(11) $x\sqrt{a}-y\sqrt{b}$ (12) $xy\sqrt{z}-yz\sqrt{x}$

C. (1) $\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{-2}{3}}-1\right)$ (2) $\left(5^{\frac{2}{3}}-1+5^{\frac{-2}{3}}\right)$ (3) $\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}$

अभ्यास 7.4

I. A. 1] $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 2] $\frac{3\sqrt{x}}{2x}$ 3] $\frac{\sqrt{10y}}{2y}$ 4] $\frac{\sqrt{10a}}{10}$ 5] $\frac{\sqrt{30}}{2}$

B. 1] $2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ 2] $\frac{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{(x-y)}$ 3] $\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{30}}{2}$ 4] $\sqrt{5}\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)$

5] $\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$

C. 1] $5+2\sqrt{6}$ 2] $\frac{30+5\sqrt{10}-3\sqrt{6}-\sqrt{15}}{13}$ 3] $10-3\sqrt{6}$ 4] $\frac{-\left(\sqrt{3}-6+\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)}{11}$

II. 1] $2+\sqrt{6}+\sqrt{15}-\sqrt{10}$ 2] 4 3] $\frac{3\sqrt{30}+10\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{15}$ 4] $\frac{21\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{10}}{3}$

5] $\frac{14\sqrt{3}-6\sqrt{7}+\sqrt{105}-5}{8}$ 6] 10

III. 1] 12 2] 81

8

* बहुपदियों का घातांक
* बहुपदि का शुन्य
* बहुपदियों के लिये विभाजन की कलन विधि
* शेष प्रमेय
* गुणनखंड प्रमेय
* संश्लिष्ट विभाजन

पाओलो रफिन

(1765-1822, इटली)

एक रेखीय बहुपद द्वारा एक बहुपद विभाजित करने का एक शानदार तरीका पाओलो रफिन ने 1809 में शुरू किया था । उनकी विधि को कृत्रिम विभाजन के रूप में जाना जाता है । इस विधि में शामिल गुणांक कि मदद से एक रेखीय बहुपद या द्विपद जिसका रूप $(x-a)$ हो, उसके द्वारा एक बहुपद के विभाजन की सुविधा है ।

बहुपदियाँ
(Polynomials)

इस अध्याय के अध्ययन करने के बाद आप जानेंगे –

* एक बहुपद के घातांक की पहचान ।
* बहुपद के शुन्य को ज्ञात करना ।
* बहुपदियों के लिए विभाजन की कलन विधि का वर्णन करना ।
* विभाजन की कलन विधि का उपयोग करते हुए भाज्य, भागफल, भाजक और शेष को ज्ञात करना ।
* शेष प्रमेय का परिभाषिक करना ।
* गुणनखण्ड प्रमेय का परिभाषित करना ।
* विभाजन किए बिना और शेष प्रमेय का उपयोग करते हुए, शेष ज्ञात कीजिए ।
* गुणनखण्ड प्रमेय का उपयोग करते हुए जाँच कीजिए कि, क्या दिए गए बहुपद दूसरा बहुपद का गुणनखण्ड है ।
* संश्लिष्ट (synthetic) विभाजन का उपयोग करते हुए भागफल और शेष ज्ञात कीजिए ।

बीज गणित एक बौद्धिक साधन है, जिसे दुनिया का परिणाम संबंध दृष्टिकोण देने के लिये उत्पन्न किया गया है ।

– अल्फ्रेड नार्थ वैटहैड

आपने पूर्व कक्षाओं मे बहुपदियों और उनपर कि गई क्रियाओं (performed on them) का अध्ययन किया है । आइए उसका स्मरण और परिष्करण करे ।

मान लीजिए कि 'x', एक चरांक, 'n' एक धनात्मक पूर्णांक और $a_1, a_2, a_3 .....a_n$ स्थिरांक (वास्तविक संख्या) है ।

इस तरह बीजीय व्यंजक का रूप $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ है, जिसमें शामिल रहनेवाला चरांक सिर्फ ऋणोत्तर पूर्ण संख्या घातांक है । जिसे x का बहुपदी कहते है ।

ध्यान दीजिए, इस बहुपदी $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...a_nx^n$ में

* $a_n \neq 0$
* $a_0, a_1x^1, a_2x^2, a_3x^3......a_nx^n$ को बहुपदी के पद कहते है ।
* $a_0, a_1, a_2 ....a_{n-1}, a_n$ को क्रमशः **of $x^0, x^1, x^2,......x^{n-1}, x^n$** सह गुणांक कहते है ।

उदाहरण के लिये

$p(x) = 4x - 3$, यह x का बहुपदी है

$g(y) = 2y^2 + 3y - 10$ यह y का बहुपदी है

$f(u) = \frac{1}{4}u^3 + 6u^2 + u + 8$ यह u का बहुपदी है

चर्चा कीजिए : इन बीजीय व्यंजकों का निरीक्षता कीजिए ।

* $3x^2 - \frac{2}{x} + 5$ * $x^3 - 2x^2 + 3\sqrt{x} + 10$ * $\frac{1}{x^2 - 4x + 6}$

क्या यह बहुपदियाँ है? समूहों में चर्चा कीजिए और कारण बताइए ।

बहुपदी का घातांक : नीचे दिए गए बहुपदियों, उनके चरांक और घातांक को ध्यान से देखिए ।

बहुपदी	चरांक	सर्वोच्च घातांक
$5x + 4$	x	1
$3y^2 + 4y + 1$	y	2
$\frac{1}{3}m^3 + m^2 + 5m - 6$	m	3
$2u^4 + u^3 - 2u + 8$	u	4

एक बहुपदी में चरांक का **सर्वोच्च घातांक** ही बहुपद का **घातांक** कहलाता है ।

$\therefore$ बहुपदी $5x + 4$ का घातांक 1 है ।

बहुपदी $3y^2 + 4y + 1$ का घातांक 2 है ।

बहुपदी $\frac{1}{3}m^3 + m^2 + 5m - 6$ का घातांक 3 है ।

बहुपदी $2u^4 + u^3 - 2u + 8$ का घातांक 4 है ।

उदाहरण :

$p(y) = 3y^2 + y - 6$, यह y का बहुपदी है जिसका घातांक 2 है ।

$p(x) = 7x^2 + x - 6$, यह x का बहुपदी है जिसका घातांक 2 है ।

स्थिरांक बहुपदियाँ

ध्यान से नीचे दिए गए बहुपदियों को देखिए ।

$f(x) = 10$ $\qquad p(x) = -2$

$g(x) = \frac{1}{7}$ $\qquad h(y) = \frac{3}{4}$

इन्हे **स्थिरांक बहुपदियाँ** कहते है ।

एक स्थिरांक बहुपदी 0 या $f(x) = 0$ को **शून्य बहुपदी कहते है ।**

सोचिए ।
शून्य बहुपदी के घातांक को परिभाषित नही किया गया है । क्यों?

बहुपदियों के प्रकार

अब हम बहुपदियों के विभिन्न घातांक और उनके नाम के बारे में विचार करेंगे ।

निम्न तालिका का अध्ययन कीजिए ।

बहुपदी	घातांक	सामान्य रूप	उदाहरण
रेखिक बहुपदीय	1	$ax + b$ जहाँ $a \neq 0$	$4x + 5$ $3y + ½$
द्विघात बहुपदीय	2	$ax^2 + bx + c$ जहाँ $a \neq 0$	$2x^2 - 6x + 5$ $\sqrt{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 4$
घन बहुपदीय	3	$ax^3 + bx^2 + cx + d$ जहाँ $a \neq 0$	$x^3 + 2x^2 - 4x + 7$ $2x^3 + \frac{1}{3}x - 8$

यहाँ a, b, c, d, e.... वास्तविक संख्या या वास्तविक गुणांक कहलाते है ।

बहुपदीयों का मूल्य

उदाहरण 1 : एक रैखिक बहुपद f(x) = 4x + 5 पर विचार कीजिए । यदि x = 1, तो बहुपद f(x) का मूल्य प्राप्त कीजिए।

दिए गए व्यंजक में x का मूल्य स्थानापन्न कीजिए ।

$f(x) = 4(x) + 5$

$f(1) = 4(1) + 5 = 4 + 5 = 9$

$\therefore$ यदि $x = 1$ तो $f(x) = 9$

$\therefore$ जब $x = 1$ होतो $f(x)$ का मूल्य $= 4(x) + 5 = 9$ है ।

उदाहरण 2 : एक द्विघात बहुपद $g(y) = y^2 + 3y + 5$ पर विचार कीजिए । यदि $y = 2$ तो $g(y)$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

$g(y) = y^2 + 3y + 5$

$g(2) = (2)^2 + 3(2) + 5$

$= 4 + 6 + 5 = 15$

$\therefore$ $y=2$, तो $g(y) = y^2 + 3y + 5$ का मूल्य 15 है ।

ऊपर दिए गए उदाहरणों से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि,

यदि x का बहुपद $f(x)$ है और 'k' एक सामान्य संख्या है तो $f(x)$ में 'x' की जगह 'k' का स्थानापन करने से प्राप्त सामान्य संख्या को $f(x)$ का मूल्य कहा जाता है । जहाँ $x = k$ और यह $f(k)$ द्वारा सूचित किया जाता है।

यदि $x = 1$ और $x = -1$ है, तो दिए गए घन बहुपद के मूल्य ज्ञात कीजिए ।

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$

$f(1) = 1^3 + 2(1)^2 - 3(1) + 4 = 1 + 2 - 3 + 4 = 4$

$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(-1) + 4 = -1 + 2 + 3 + 4 = 8$

बहुपदी का शुन्य

आइए कुछ बहुपदियाँ लेते है और दिए गए बिन्दुओं पर उनका मूल्य ज्ञात करे ।

उदाहरण 1 : $f(x) = x^2 - x - 2$ यदि $x = 2$, तो

$f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 4 - 4 = 0 \quad \therefore f(2) = 0$

उदाहरण 2 : $p(x) = x^2 - 3x - 4$ यदि $x = -1$, तो

$p(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 4$

$= 1 + 3 - 4 = 0 \quad \therefore p(-1) = 0$

ऊपर दिए गए उदाहरणों में, चरांक के दिए गए मूल्यों के लिए, बहुपदियों का मूल्य शून्य है । इन चराकों के मूल्यों को **बहुपदियों का शून्य कहते है ।**

$\therefore$ 2 को बहुपद $f(x) = x^2 - x - 2$ का शून्य कहते है ।

-1 को बहुपद $p(x) = x^2 - 3x - 4$ का शून्य कहते है ।

उपरोक्त चर्चा से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि, **यदि** $p(x)$ **एक बहुपद है और** k **वास्तविक संख्या है, ताकि** $p(k) = 0$ **होतो,** k **को बहुपद** $p(x)$ **का शून्य (zero) कहते है ।**

उदाहरण :

बहुपद $f(x) = x^2 - 5x + 6$ के शून्य 2 और 3 है,

क्योंकि $f(2) = 0$ और $f(3) = 0$.

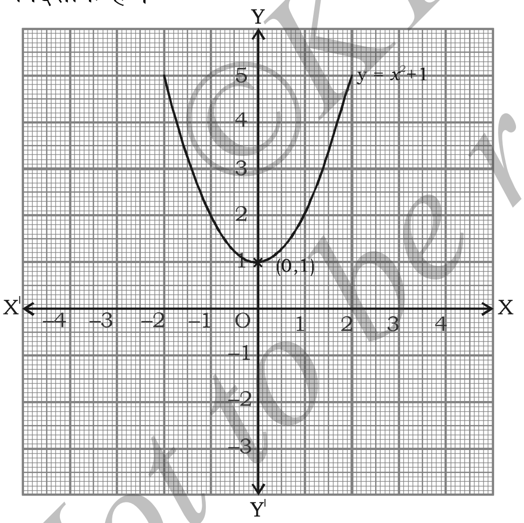
कार्यकलाप : आइए रैखिक, द्विघात और घन बहुपदियों के कुछ उदाहरण पर विचार करें । इन बहुपदियों के शून्य ज्ञात कीजिए । निम्नलिखित विवरण की पुष्टि कीजिए ।

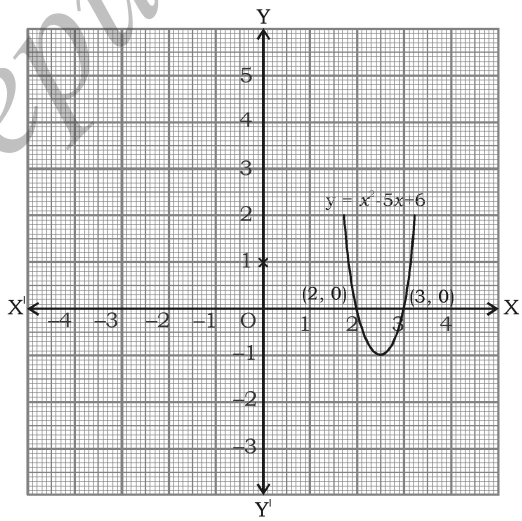
1. एक रेखीय बहुपद मे अधिकतम एक शून्य होता है ।
2. एक द्विघात बहुपद मे अधिकतम दो शून्य होते है ।
3. एक घन बहुपद में अधिकतम तीन शून्य होते है ।

∴ सामान्य रूप में, एक बहुपद जिसका घातांक 'n' है, उसके शून्य 'n' है ।

ध्यान दीजिए !

रेखागणित के अनुसार बहुपद का शून्य कुछ और सिर्फ बहुपद के ग्राफ और x अक्ष के प्रतिच्छेद बिन्दु का x – निर्देशांक है ।





सोचिए !

एक बहुपदी में जरूरी नही कि उसके शून्य वास्तविक संख्या हो सकते है ।

उदाहरण, एक बहुपदी $p(x) = x^2 + 1$ के शून्य वास्तविक संख्या नही है । अर्थात कोई भी वास्तविक k नही है ताकि $p(k) = 0$ क्यों ?

निदर्शी उदाहरण

1. द्विघात बहुपदी $x^2 + 14x + 48$ के शून्य ज्ञात कीजिए । उन्हें सत्यापित कीजिए ।

समाधान : दिया गया बहुपदी $x^2 + 14x + 48$ है ।

द्विघात बहुपदी का गुणनफल करने के पश्चात,

हमें $x^2 + 14x + 48 = (x + 8)\ (x + 6)$ प्राप्त होगा

$x^2 + 14x + 48$ का मूल्य 0 है ।

यदि $x + 8 = 0$ या $x + 6 = 0$.

तो $x = -8$ या $x = -6$

बहुपद $x^2 + 14x + 48$ के शून्य - 8 और - 6 है ।

आइए, हम मूल्य प्रतिस्थापन द्वारा परिणामों कि पुष्टि करते है ।

$$p(x) = x^2 + 14x + 48$$
$$p(x) = (-8)^2 + 14(-8) + 48 = 64 - 112 + 48$$
$$\therefore p(-8) = 0$$
$$p(-6) = (-6)^2 + 14(-6) + 48 = 36 - 84 + 48$$
$$\therefore p(-6) = 0$$

2. बहुपद $x^2 - 3$ के शून्य ज्ञात कीजिए और उन्हें सत्यापित कीजिए ।

समाधान : $p(x) = x^2 - 3$

गुणनखण्ड कीजिए $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})\ (x - \sqrt{3})$

इस तरह जब $x = \sqrt{3}$ या $x = -\sqrt{3}$ तो $(x^2 - 3)$ का मूल्य 0 होगा ।

$\therefore$ $(x^2 - 3)$ के शून्य $\sqrt{3}$ और $(-\sqrt{3})$ है ।

सत्यापन :

$(x^2 - 3)$ शून्य $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ है

$p(x) = x^2 - 3$

$p(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 3 = 3 - 3 = 0$

$p(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 - 3 = 3 - 3 = 0$

अभ्यास 8.1

1. निम्न बहुपदियों के घातांक ज्ञात कीजिए ।
   (i) $x^2 - 9x + 20$ (ii) $2x + 4 + 6x^2$
   (iii) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ (iv) $x^3 + 17x - 21 - x^2$ (v) $\sqrt{3}\, x^3 + 19x + 14$

2. यदि $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x + 6$ तो ज्ञात कीजिए ।
   (i) $f(0)$ (ii) $f(1)$ (iii) $f(-1)$ (iv) $f(2)$ (v) $f(-3)$

3. निम्न बहुपदियों के मूल्य ज्ञात कीजिए ।
   (i) $g(x) = 7x^2 + 2x + 14$, जब $x = 1$
   (ii) $p(x) = -x^3 + x^2 - 6x + 5$, जब $x = 2$
   (iii) $p(x) = 2x^2 + \frac{1}{4}x + 13$, जब $x = -1$
   (iv) $px) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, जब $x = -2$

4. सत्यापित कीजिए कि निम्न हर एक संदर्भ में दी गई संख्या बहुपदियों के शून्य है ।

(i) $f(x) = 3x + 1,\ x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = x^2 - 4,\ x = 2,\ x = -2$

(iii) $g(x) = 5x - 8,\ x = \frac{4}{5}$ (iv) $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3,\ x = 3,\ x = -1$ और $x = -\frac{1}{3}$

5. निम्न द्विघात बहुपदियों के शून्य ज्ञात कीजिए और सत्यापन करें ।

(i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $x^2 - 2x - 15$ (iii) $4a^2 - 49$ (iv) $2a^2 - 2\sqrt{2}\,a + 1$

6. यदि $x = 1$, यह बहुपद $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + k$, का शून्य है तो k का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

7. यदि -4, यह बहुपद $x^2 - x - (2k + 2)$ का शून्य है तो K का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

बहुपदियों के लिए विभाजन की कलन विधि :

आपने पूर्व कक्षाओं में सीखा है कि एक बहुपद का दूसरे बहुपद से लंबी विभाजन पद्धति से विभाजन कैसे करते है । आइए इस प्रक्रिया को दोहरांए ।

उदाहरण 1 : $(5x + x^2 + 14 + 2x^3)$ को $(x + 2)$ से विभजित करे ।

इस उदाहरण में,

भाज्य $p(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 14$

भाजक $g(x) = x + 2$

भागफल $q(x) = 2x^2 - 3x + 11$

शेष $r(x) = -8$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 11 \\
\hline
x + 2 & 2x^3 + x^2 + 5x + 14 \\
 & \underset{(-)}{2x^3} + \underset{(-)}{4x^2} \\
\hline
 & -3x^2 + 5x \\
 & \underset{(+)}{-3x^2} \underset{(+)}{- 6x} \\
\hline
 & +11x + 14 \\
 & \underset{(-)}{+11x} \underset{(-)}{+ 22} \\
\hline
 & -8
\end{array}
$$

ऊपर दिए हुए उदाहरणों में, यदि एक बहुपद $p(x)$ को दूसरे बहुपद $g(x)$ से विभाजन करते है तो हमें भागफल $q(x)$ और शेष $r(x)$ प्राप्त होता है । नीचे दिए गए तालिका में इसका विवरण किया गया है ।

नं.	भाज्य $p(x)$	भाजक $g(x)$	भागफल $q(x)$	शेष $r(x)$
1.	$2x^3 + x^2 + 5x + 14$	$x + 2$	$2x^2 - 3x + 11$	-8
2.	$9x^4 - 4x^2 + 4$	$3x^2 + x - 1$	$3x^2 - x$	$-x + 4$
3.	$3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$	$x^2 + 3x + 1$	$3x^2 - 4x + 2$	0

हमने पहले से ही सीखा है कि भाज्य, भाजक, भागफल और शेष में एक निश्चित संबंध है । यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका के अनुसार ।

भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

i.e., यदि a और b दो पूर्णांक हो तो,

तो $a = bq + r$,   जहाँ $0 \leq r \leq b$.

यह संबंध बहुपदियों के विभाजन के लिए भी लागू होता है ।

i.e. यदि एक बहुपद $p(x)$ को दूसरे बहुपद $g(x)$ से विभाजन किया जाए तो उसका भागफल $q(x)$ और शेष $r(x)$ है ।

इस तरह $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$, यहाँ $g(x)$ शून्य के बराबर नही है और $r(x)$ या तो शून्य के बराबर है या तो $r(x)$ का घातांक $g(x)$ के घातांक के कम है ।

यह एक कलन विधि है जो पूर्णांक के यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका के समान है और इसे **बहुपदियों के लिए विभाजन की कलन विधि** कहा जाता है ।

बहुपदियों के लिए विभाजन कि कलन विधि के अनुसार,

यदि $p(x)$ और $g(x)$ दो बहुपदियाँ है जहाँ $g(x) \neq 0$, तो हम बहुपदियाँ $q(x)$ और $r(x)$ ज्ञात कर सकते है । जिसके अनुसार $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$, $r(x) = 0$ या $r(x)$ का घातांक $< g(x)$ के घातांक से ।

इसको हम **बहुपदियों के लिए यूक्लिड प्रमेयिका** भी कह सकते है ।

आइए हम ऊपर दिए गए तीन उदाहरणों का बहुपदियों के लिए विभाजन की कलन विधि द्वारा सत्यापन करें।

उदाहरण 1 : $(5x + x^2 + 14 + 2x^3)$ को $x + 2$ से विभाजन कीजिए ।

लंबी विभाजन पद्धति के बाद हमे प्राप्त होता है

भागफल $q(x) = 2x^2 - 3x + 11$ और

शेष $r(x) = -8$

हमे ज्ञात है, $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ (बहुपदियों के लिए विभाजन की कलन विधि

दाहिना पक्ष (RHS) लेते हुए

$\Rightarrow g(x) \times q(x) + r(x)$

$\Rightarrow$भाजक × भागफल + शेष

$\Rightarrow (x + 2)(2x^2 - 3x + 11) + (-8)$

$\Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 11x + 4x^2 - 6x + 22 - 8$

$\Rightarrow 2x^3 + x^2 + 5x + 14$

$\Rightarrow$भाज्य

$\therefore$ विभाजन की कलन विधि द्वारा सत्यापन हुआ है ।

उदाहरण 2 : $9x^4 - 4x^2 + 4$ को $3x^2 + x - 1$ से विभाजन कीजिए ।

इस उदाहरण में,

भाज्य	$p(x) = 9x^4 - 4x^2 + 4$
भाजक	$g(x) = 3x^2 - x + 1$
भागफल	$q(x) = 3x^2 - x$
शेष	$r(x) = -x + 4$

हमें ज्ञात है ।

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ [बहुपदियों के लिए विभाजन की कलन विधि]

दाहिना पक्ष (RHS) लेते हुए,

$= g(x) \times q(x) + r(x)$

$= (3x^2 + x - 1)(3x^2 - x) + (-x + 4)$

$= 9x^4 + \cancel{3x^3} - 3x^2 - \cancel{3x^3} - x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} + 4$

$= 9x^4 - 4x^2 + 4$

= भाज्य

विभाजन की कलन विधि द्वारा सत्यापन हुआ है ।

सूचना : उसी प्रकार उदाहरण 3 का विभाजन की कलन विधि द्वारा सत्यापन करें ।

आप परिचित हैं बहुपदियों के विभाजन से, और दिए गए दो बहुपदियाँ यदि भाज्य और भाजक है तो आप लंबी विभाजन पद्धति द्वारा भागफल और शेष ज्ञात कर सकते है । आपने यह भी सीखा है कि विभाजन की कलन विधि से सत्यापन कैसे करते है । अब महत्वपूर्ण सवाल यह उठता है कि,

यदि भागफल और शेष दिया गया है तो क्या हम भाज्य और भाजक ज्ञात कर सकते है?

हाँ, हम विभाजन की कलन विधि द्वारा यह ज्ञात कर सकते है ।

आइए, कुछ उदाहरणों द्वारा इसका वर्णन करें ।

(i) विभाजन की कलन विधि द्वारा भाज्य और भाजक ज्ञात करें ।

उदाहरण 1 : $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ को बहुपद $g(x)$ से विभाजन करने पर हमें भागफल $(3x - 5)$ और शेष $(9x + 10)$ प्राप्त होता है । $g(x)$ को ज्ञात कीजिए ।

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ [बहुपदियों के लिए विभाजन की कलन विधि]

हमें $g(x)$ ज्ञात करना है । आइए समीकरण को फिर से लिखें ।

$$g(x) \times q(x) + r(x) = p(x)$$

$$g(x) \times q(x) = p(x) - r(x)$$

$$g(x) = \frac{p(x) - r(x)}{q(x)} = \frac{(3x^3 + x^2 + 2x + 5) - (9x + 10)}{3x - 5}$$

$$= \frac{3x^3 + x^2 + 2x + 5 - 9x - 10}{3x - 5}$$

$$g(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 7x - 5}{3x - 5}$$

अब $g(x)$ को लंबी प्रभाग विभाजन द्वारा ज्ञात कीजिए ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
3x^2 - 5 & \cancel{3x^3} + x^2 - 7x - 5 \\
 & \cancel{3x^3} + 5x^2 \\
 & {\scriptstyle (-)} \quad {\scriptstyle (+)} \\
\hline
 & \quad \cancel{6x^2} - 7 \\
 & \quad \cancel{6x^2} - 10x \\
 & \quad {\scriptstyle (-)} \quad {\scriptstyle (+)} \\
\hline
 & \qquad \cancel{3x} - 5 \\
 & \qquad \cancel{3x} - 5 \\
 & \qquad {\scriptstyle (-)} \quad {\scriptstyle (+)} \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$g(x) = x^2 + 2x + 1$$

$\therefore$ भाजक $x^2 + 2x + 1$

उदाहरण 2 : एक बहुपद $p(x)$ को $(2x - 1)$ से विभाजन करने पर हमें भागफल $(7x^2 + x + 5)$ और 4 प्राप्त होता है । $p(x)$ को ज्ञात कीजिए ।

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ [बहुपदियों के लिए भागफल]

$p(x) = (2x - 1)(7x^2 + x + 5) + 4$

$p(x) = 14x^3 + 2x^2 + 10x - 7x^2 - x - 5 + 4$

$p(x) = 14x^3 - 5x^2 - 9x - 1$

$\therefore$ भाज्य $p(x) = 14x^3 - 5x^2 - 9x - 1$

(ii) वास्तविक विभाजन किए बिना भागफल और शेष विभाजन की कलन विधि द्वारा ज्ञात करना ।

उदाहरण 3 : $p(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 8$ को $g(x) = x - 2$ से विभाजन करने पर भागफल और शेष ज्ञात कीजिए ।

$p(x) = x^3 - 6x^2 + 15 - 8$ $\qquad \therefore$ $p(x)$ का घातांक 3 है ।

$g(x) = x - 2$ $\qquad \therefore$ $g(x)$ का घातांक 1 है ।

$\therefore$ भागफल $q(x)$ का घातांक $= 3 - 1 = 2$

शेष $r(x)$ का घातांक $= 0$

मान लीजिए $q(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ (बहुपद का घातांक 2)

$r(x) = k$ $\qquad$ (स्थिर बहुपद)

विभाजन की कलन विधि का उपयोग करते हुए,

$p(x) = [g(x) \times q(x)] + r(x)$

$\Rightarrow \quad \therefore \; x^3 - 6x^2 + 15x - 8 = (x - 2)(ax^2 + bx + c) + k$

$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c + k$

$x^3 - 6x^2 + 15x - 8 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)\,x - 2c + k$

हमारे पास घन बहुपदियाँ, समीकरण के दोनो तरफ है ।

$\therefore$ आइए हम x^3, x^2, x और k के गुणांकों कि तुलना करें, ताकि a, b, c के मूल्य प्राप्त हुअे ।

$1 = a$	x^3 के दोनों पक्षों के गुणांक
$-6 = b - 2a$	x^2 के दोनों पक्षों के गुणांक
$15 = c - 2b$	x के दोनों पक्षों के गुणांक
$-8 = -2c + k$	दोनों पक्षों के स्थिर पद

आइए, इन समीकरणों को हल करते हुए b, c और k के मूल्य ज्ञात करें ।

$b - 2a = -6;$ $\quad b = -6 + 2a = -6 + 2(1) = -4$

$c - 2b = 15;$ $\quad c = 15 + 2b = 15 + 2(-4) = 7$

$-2c + k = -8;$ $\quad k = -8 + 2c = -8 + 2(7) = 6$

$q(x) = ax^2 + bx + c = (1)x^2 + (-4)x + 7 = x^2 - 4x + 7$

$r(x) = k = 6$

$\therefore$ भागफल $x^2 - 4x + 7$ और शेष $= 6$

विभाजन की कलन विधि के कुछ और अनुप्रयोग इस प्रकार है ।

उदाहरण 4 : $6x^4+13x^3+30x+20$ में से क्या घटा सकते है ताकि परिणाम स्वरूप जो बहुपद मिले वह पूरी तरह से $3x^2+2x+5$ से विभाज्य हो ।

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

$\therefore \; = p(x) - r(x) = g(x) \times q(x)$

यह स्पष्ट है, कि ऊपर समीकरण का दाहिने पक्ष (RHS) $g(x)$ [भाज्य] से विभाजित है ।

$\therefore$ बाया पक्ष भी (LHS) $g(x)$ से विभाजित है ।

इस तरह यदि हम शेष $r(x)$ को भाज्य $p(x)$ से घटाए, तो प्राप्त हुआ बहुपद भाजक $g(x)$ से पूरी तरह से विभाजित होगा ।

आइए $6x^4 + 13x^3 + 13x^2 + 30x + 20$ को $3x^2 + 2x+5$ से विभाजित करें ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x - 1 \\ \hline
3x^2 + 2x + 5 & \cancel{6x^4} + 13x^3 + 13x^2 + 30x + 20 \\
 & \underset{(-)}{\cancel{6x^4}} \underset{(-)}{+ 4x^3} \underset{(-)}{+ 10x^2} \\ \hline
 & \quad \cancel{9x^3} + 3x^2 + 30x \\
 & \quad \underset{(-)}{\cancel{9x^3}} \underset{(-)}{+ 6x^2} \underset{(-)}{+ 15x} \\ \hline
 & \qquad -\cancel{3x^2} + 15x + 20 \\
 & \qquad \underset{(+)}{-\cancel{3x^2}} \underset{(+)}{- 2x} \underset{(+)}{- 5} \\ \hline
 & \qquad\qquad 17x + 25
\end{array}
$$

भागफल $\quad q(x) = 2x^2 + 3x - 1$

शेष $\quad r(x) = 17x + 25$

$\therefore$ यदि हम $\quad 17x + 25$ को $6x^4 + 13x^3 + 13x^2 + 30x + 20$ से घटाए तो प्राप्त हुए बहुपद को $(3x^2 + 2x + 5)$ से पूरी तरह से विभाजित कर सकते है ।

[**ध्यान दे :** परिणाम का सत्यापन करने के लिए, $17x + 25$ को $p(x)$ से घटाते हुए और फिर प्राप्त हुए बहुपद को $3x^2 + 2x + 5$ से विभाजन करते है ।]

उदाहरण 5 : बहुपद $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ में क्या जोडा जाए ताकि परिणाम स्वरूप बहुपद पूरी तरह से $x^2 + 2x - 3$ से विभाजित हो ?

विभाजन की कलन विधि के अनुसार

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

$\therefore \; p(x) - r(x) = g(x) \times q(x)$

$\therefore \; p(x) + \{-r(x)\} = g(x) \times q(x)$

यह स्पष्ट है, कि दाहिना (RHS) पक्ष को $g(x)$ से विभाजित किया जा सकता है ।

$\therefore$ बाया पक्ष (LHS) भी $g(x)$ से विभाजित किया जा सकता है ।

इस तरह, यदि हम $-r(x)$ को $p(x)$ से जोडे तो परिणाम स्वरूप बहुपद को $g(x)$ से विभाजित कर सकते है ।

आइए हम $p(x)$ को $g(x)$ से विभाजन कीजिए ताकि शेष $r(x)$ ज्ञात हो ।

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \cancel{x^4} + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 \\ & \underset{(-)}{\cancel{x^4}} \underset{(-)}{+2x^3} \underset{(+)}{-3x^2} \\ \hline & \cancel{x^2} + x - 1 \\ & \underset{(-)}{\cancel{x^2}} \underset{(-)}{+2x} \underset{(+)}{-3} \\ \hline & -x + 2 \end{array}$$

इस तरह हम $(x - 2)$ को $p(x)$ से जोडेंगे ताकि परिणाम स्वरूप बहुपद पूरी तरह से $g(x)$ विभाजित हो ।

अभ्यास 8.2

1. नीचे दिए गए $p(x)$ को $g(x)$ से विभाजन कीजिए और विभाजन की कलन विधि से सत्यापन कीजिए ।

(i) $p(x) = x^2 + 4x + 4$; $g(x) = x + 2$ (ii) $p(x) = 2x^2 - 9x + 9$; $g(x) = x - 3$

(iii) $p(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 6$; $g(x) = x + 1$ (iv) $p(x) = x^4 - 3x^2 - 4$; $g(x) = x + 2$

(v) $p(x) = x^3 - 1$; $g(x) = x - 1$ (vi) $p(x) = x^4 - 4x^2 + 12x + 9$; $g(x) = x^2 + 2x - 3$

2. यदि बहुपद $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - 10x + 2$ से विभाजित किया जाए तो भागफल $2x^2 + 4x + 1$ और शेष 5 प्राप्त होता है । भाजक $g(x)$ को ज्ञात कीजिए ।

3. $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ को बहुपद $g(x)$ से विभाजित करने से भागफल $(x - 2)$ और शेष $(-2x + 4)$ प्राप्त होता है । $g(x)$ को ज्ञात कीजिए ।

4. बहुपद $p(x)$ को $g(x)$ से विभाजित करने पर भागफल $q(x)$ और शेष $r(x)$ नीचे तालिका में दिया गया है । प्रत्येक का $p(x)$ ज्ञात कीजिए ।

अ.नं.	$p(x)$	$g(x)$	$q(x)$	$r(x)$
i	?	$x-2$	$x^2 - x + 1$	4
ii	?	$x+3$	$2x^2 + x + 5$	$3x+1$
iii	?	$2x+1$	$x^3 + 3x^2 - x + 1$	0
iv	?	$x-1$	$x^3 - x^2 - x - 1$	$2x-4$
v	?	$x^2 + 2x + 1$	$x^4 - 2x^2 + 5x - 7$	$4x+12$

5. $p(x)$ को $g(x)$ से वास्तविक विभाजन किए बिना भागफल और शेष ज्ञात कीजिए ।

(i) $p(x) = x^2 + 7x + 10;$ $g(x) = x - 2$ (ii) $p(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 2;$ $g(x) = x - 3$

6. $(x^3 + 5x^2 + 5x + 8)$ से क्या घटाए जाएँ ताकि परिणाम स्वरूप बहुपद पूरी तरह से $(x^2 + 3x - 2)$ से विभाजित हो ।

7. $(x^4 - 1)$ में क्या जोडा जाए ताकि वह $(x^2 + 2x + 1)$ से पूरी तरह से विभाजित हो?

शेष प्रमेय

आपने पहले ही सीखा है कि एक बहुपद को दूसरे बहुपद से लंबी विभाजन पद्धति से विभाजन करना और बहुपदो के लिए विभाजन की कलन विधि का उपयोग कैसे किया जाता है ।

आइए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करे, जहाँ एक बहुपद $p(x)$ को दूसरे बहुपद $g(x)$ से विभाजित करें । यह बहुपद, रैखिक बहुपद है जो कि $(x - a)$ के रूप में है ।

नीचे तालिका में विस्तार से लिखा गया है । उसका अध्ययन कीजिए :

नं.	भाज्य $p(x)$	भाजक $g(x) = x - a$	भागफल $q(x)$	शेष $r(x)$
1.	$4x^2 - 7x + 9$	$x-2$	$4x+1$	$+11$
2	$8x^3 - 18x^2 + 23x + 12$	$x-3$	$8x^2 + 6x + 41$	$+135$
3.	$x^5 + a^5$	$x-a$	$x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$	$+2a^5$

ध्यान दीजिए, कि शेष एक स्थिर है ।

यदि $g(x) = x - a$ एक रैखिक बहुपद है तो उसका घातांक 1 है ।

हमे ज्ञात है, $r(x)$ का घातांक $<$ $g(x)$ के घातांक ।

$\therefore$ $r(x)$ का घातांक शून्य है और वह हमेशा स्थिर रहेगा ।

$\therefore r(x) = -x + 2$

$- \{r(x)\} = x - 2$

आइए एक और उदाहरण पर विचार करें ।

$x^6 + 4x^5 - 9x^2 + 15$ को $x - 2$ से विभाजित करने पर हमें क्या शेष प्राप्त होगा?

हमें **लंबी विभाजन पद्धति** का उपयोग करते हुए शेष प्राप्त होगा । यह विधि बहुत लंबी और समय लेने वाली है। क्या शेष को प्राप्त करने की कोई छोटी और सरल विधि है?

आइए पहले से ही चर्चित उदाहरणों पर विचार करें जहाँ लंबी विभाजन पद्धति से शेष ज्ञात किया गया है ।

उदाहरण 1 : $(4x^2 - 7x + 9) \div (x - 2)$

भाज्य $p(x) = 4x^2 - 7x + 9$

भाजक $g(x) = x - a = x - 2$

यदि $x - 2 = 0$, तो $x = 2$

p(x) का मूल्य ज्ञात करे यदि $x = 2$

$\therefore\ p(x) = 4(2)^2 - 7(2) + 9 \ = 4 \times 4 - 14 + 9 = 16 - 14 + 9$

$\therefore\ p(x) = +\ 11.$

ध्यान दीजिए, लंबी विभाजन पद्धति द्वारा पाया गया शेष ऊपर प्राप्त हुए p(2) के मूल्य के बराबर है ।

उदाहरण 2 : $8x^3 - 18x^2 + 23x + 12 \div x - 3$

भाज्य $p(x) = 8x^3 - 18x^2 + 23x + 12$

भाजक $g(x) = x - 3$

यदि $x - 3 = 0$ तो $x = 3$

और यदि $x = 3$ तो $p(x)$ का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

$$\begin{aligned} p(3) &= 8 \times (3)^3 - 18(3)^2 + 23x + 12 \\ &= 216 - 162 + 69 + 12 = 135 \\ p(3) &= 135 \end{aligned}$$

लंबी विभाजन पद्धति द्वारा प्राप्त शेष के साथ इस की तुलना करें ।

उदाहरण 3 : $x^5 + a^5 \div x - a$

भाज्य $p(x) = x^5 + a^5$

भाजक $g(x) = x - a$ यदि $x - a = 0$ तो $x = a$

और यदि $x = a$ तो $p(x)$ का मूल्य ज्ञात कीजिए

$p(a) = a^5 + a^5 = 2a^5$

लंबी प्रमाण पद्धति द्वारा प्राप्त शेष के साथ इस की तुलना करे ।

आइए, प्रत्येक उदाहरण का विवरण एक तालिका में लिखे, और पिछले दो स्तंभो की तुलना करें ।

नं.	भाज्य $p(x)$	भाजक $g(x) = x - a$	$p(a)$ का मूल्य	लंबी प्रमाण पद्धति से प्राप्त शेष
1.	$4x^2 - 7x + 9$	$x - 2$	$p(2) = +11$	+11
2	$8x^3 - 18x^2 + 23x + 12$	$x - 3$	$p(3) = +135$	+135
3.	$x^5 + a^5$	$x - a$	$p(a) = +2a^5$	$+2a^5$

उपरोक्त तालिका से स्पष्ट है कि p(a) का मूल्य और शेष समान है ।

$\therefore$ इसका निष्कर्ष यह है कि,

यदि एक बहुपद $p(x)$ को एक रैखिक $(x - a)$ से विभाजित किया जाए तो उसका शेष $p(a)$ है ।

इसे **शेष प्रमेय** कहते है ।

आइए $(x^6 + 4x^5 - 9x^2 + 15)$ को रैखिक द्विपद $(x - 2)$ से विभजित करने के बाद, शेष ज्ञात करें ।

$p(x) = x^6 + 4x^5 - 9x^2 + 15$

$g(x) = x - 2$

$\therefore \quad p(2) = 2^6 + 4.2^5 - 9.2^2 + 15 = 64 + 128 - 36 + 15$

$p(2) = 171$

बहुपद $(x^6 + 4x^5 - 9x^2 + 15)$ को $(x - 2)$ से वास्तविक विभाजन किए बिना ही हमने शेष प्राप्त किया है ।

(ध्यान दे : लंबी विभाजन पद्धति द्वारा आप इसका सत्यापन कर सकते है ।)

यहाँ एक महत्त्वपूर्ण बात का निरीक्षण कीजिए कि शेष प्रमय का उपयोग सिर्फ तब ही हो सकता है जब भाजक द्विपद और रैखिक रूप $(x - a)$ में होता है ।

आइए हम शेष प्रमेय का विवरण सिद्ध करें ।

शेष प्रमेय : यदि एक बहुपद $p(x)$ को $(x - a)$ से विभाजित करते है, तो उसका शेष $p(a)$ होता है ।

सत्यापन : यदि एक बहुपद p(x) को $(x - a)$ से विभाजित करते है तो भागफल की कलन विधि से हमें भागफल $q(x)$ और स्थिर शेष r प्राप्त होता है ताकि

$p(x) = (x - a).\ q(x) + r$

$\therefore \quad p(a) = (a - a).\ q(a) + r = 0.q(a) + r$

$p(a) = r \qquad \therefore$ शेष $p(a)$ है ।

आइए, हम शेष प्रमेय सत्यापन करे जब भाजक $(x + a)$ और $(ax + b)$ है ।

थान दें : यदि $p(x)$ को $(x + a)$ से विभाजित करने पर $P(-a)$ रोष रहता है। यहि, $P(n)$ को $(an+b)$ से विभाजित करने पर रोष रहता है। $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ रहता है ।

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1 : यदि बहुपद $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ को $(x-1)$ से विभाजित किया जाए तो शेष ज्ञात कीजिए।

हल : शेष प्रमेय के अनुसार, आवश्यक शेष = p(1)

$p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

$\therefore \quad p(1) = 1^3 - 4(1)^2 + 3(1) + 1 = 1 - 4 + 3 + 1 = 1$

$\therefore$ आवश्यक शेष = p(1) = 1

उदाहरण 2 : यदि $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 4$ को $g(x) = 3x - 1$ से विभाजित किया जाए तो शेष ज्ञात कीजिए ।

हल : यहाँ $g(x) = 3x - 1$ शेष प्रमेय का प्रयोग करने के लिए $(3x-1)$ को $(x - a)$ में परिवर्तित करना पडेगा ।

$\Rightarrow 3x - 1 \Rightarrow \frac{1}{3}(3x - 1) \Rightarrow x - \frac{1}{3}$

$\therefore g(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$

शेष प्रमेय के अनुसार $r(x) = p(a) = p\left(\frac{1}{3}\right)$

अब, $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 4$

$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) - 4 = \frac{1}{27} - \frac{6}{9} + \frac{2}{3} - 4$$

$$= \frac{1-18+18-108}{27} = \frac{-107}{27}$$

$\therefore$ शेष $p\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{107}{27}$

उदाहरण 3 : बहुपद $(ax^3 + 3x^2 - 13)$ और $(2x^3 - 4x + a)$ को $(x-3)$ से विभाजित करने पर यदि शेष समान है, तो a का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

हल : मान लीजिए ।

$p(x) = ax^3 + 3x^2 - 13$

$g(x) = 2x^3 - 4x + a$

शेष प्रमेय के अनुसार, p(3) और g(3) दो शेष है ।

दिए गए शर्त के अनुसार $p(3) = g(3)$

$\Rightarrow p(3) = a.\ 3^3 + 3.3^2 - 13 = 27a + 27 - 13 = 27a + 14$

$g(3) = 2.3^3 - 4.3 + a = 54 - 12 + a = 42 + a$

$p(3) = g(3)$

$27a + 14 = 42 + a$

$26a = 28$

$\therefore a = \frac{28}{26} = \frac{14}{13}$

उदाहरण 4 : दो बहुपदियाँ $(2x^3 + x^2 - 6ax + 7)$ और $(x^3 + 2ax^2 - 12x + 4)$ को क्रमानुसार $(x+1)$ और $(x-1)$ से विभाजित करने पर R_1 और R_2 शेष प्राप्त होता है और $2R_1 + 3R_2 = 27$, होतो 'a' का मूल्य प्राप्त कीजिए ।

हल : मान लीजिए $p(x) = 2x^3 + x^2 - 6ax + 7$

$f(x) = x^3 + 2ax^2 - 12x + 4$

यदि $P(x)$ को $(x+1)$ से विभाजित करते है तो शेष R_1 है ।

$\Rightarrow R_1 = p(-1)$

$\Rightarrow R_1 = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 6a(-1) + 7 = -2 + 1 + 6a + 7$

$R_1 = 6a + 6$

यदि $f(x)$ को $(x\text{-}1)$ से विभाजित करते है तो शेष R_2 है ।

$\Rightarrow R_2 = p(1)$

$\Rightarrow R_2 = 1^3 + 2a(1)^2 - 12(1) + 4 \quad = 1 + 2a - 12 + 4$

$R_2 = 2a - 7$

R_1 और R_2 का मूल्य $2R_1 + 3R_2 = 27$ मे प्रतिस्थापन कीजिए ।

$2\,(6a + 6) + 3(2a - 7) = 27$

$12a + 12 + 6a - 21 = 27$

$18a - 9 = 27 \;\Rightarrow\; 18a = 27 + 9 = 36 \;\Rightarrow a = \dfrac{36}{18} \qquad \therefore\ a = 2$

अभ्यास 8.3

1. शेष प्रमेय का उपयोग करते हुए करते हुए $p(x)$ को $g(x)$ से विभाजित कीजिए और शेष ज्ञात कीजिए । परणिाम को वास्तविक विभाजन से सत्यापन कीजिए ।

(i) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 8 \quad g(x) = x - 3$ (ii) $p(x) = 4x^3 - 10x^2 + 12x - 3 \quad g(x) = x + 1$

(iii) $p(x) = 2x^4 - 5x^2 + 15x - 6 \quad g(x) = x - 2$ (iv) $p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 14x - 3 \quad g(x) = 2x - 1$

(v) $p(x) = 7x^3 - x^2 + 2x - 1 \quad g(x) = 1 - 2x$

2. यदि बहुपद $(2x^3 + ax^2 + 3x - 5)$ और $(x^3 + x^2 - 4x - a)$ को $(x\text{-}1)$ से विभाजित करते है तो दोनों में शेष समान प्राप्त होता है, a का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

3. बहुपदियाँ $(2x^3 - 5x^2 + x + a)$ और $(ax^3 + 2x^2 - 3)$ को $(x\text{–}2)$ से विभाजित करने पर क्रमानुसार R_1 और R_2 शेष प्राप्त होता है । 'a' का मूल्य ज्ञात कीजिए यदि

(i) $R_1 = R_2$ (ii) $2R_1 + R_2 = 0$ (iii) $R_1 + R_2 = 0$ (iv) $R_1 - 2R_2 = 0$

गुणक प्रमेय (अपवर्तन प्रमेय – Factor Theorem) :

हमने सीखा है कि यदि एक बहुपद $p(x)$ को एक द्विपद जिसका रूप $(x - a)$ है, से विभाजित करते है तो उसका शेष p(a) होगा ।

हमने यह भी देखा है कि p(a) के मूल्य के दो संभावनाएँ है । i.e., $p(a) = 0$ or $p(a) \neq 0$

क्या यह p(a) का मूल्य, भाज्य और भाजक के किसी गुण (property) को निर्धारित करता है? क्या कोई विशेषता है जब $p(a) = 0$?

शेष प्रमेय का विस्तार करने से हमें बहुपद का एक दिलचस्प गुण प्राप्त होता है । आइए इसका स्मरण करे । पहले हम इस गुण का अध्ययन अंकगणित के कुछ उदाहरणों से करेंगे ।

उदाहरण 1

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2\overline{)6} \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

यहाँ 6 को 2 पूरी तरह से विभाजित करता है और शेष = 0

$2 \times 3 = 6$

is

factor of

∴ भाजक 2 और भागफल 3, 6 के गुणक है ।

उदाहरण 2 : $\begin{array}{r} 2 \\ 6\overline{)14} \\ \underline{12} \\ 2 \end{array}$ यहाँ 14 को 6 पूरी तरह से विभाजित नही कर सकता है और शेष शून्य के बराबर नही है ।

$\therefore$ 14 का गुणांक 6 नही है ।

ऊपर दिए गए दो उदाहरणों से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि

यदि शेष शून्य के बराबर है तो

भाज्य का गुणक भाजक है ।

यदि शेष शून्य के बराबर नही है तो

भाज्य का गुणक भाजक नही है ।

यदि भाज्य का गुणक भाजक है तो

भाज्य का गुणक भागफल भी है ।

इस तरह,

यदि शेष शून्य के बराबर है तो भाजक और भागफल दोनो भाज्य के गुणक है ।

और, यदि शेष शून्य के बराबर नही है,

तो भाजक का गुणक भाजक नही है और गुणनफल उसका गुणक हो सकता है या नही भी हो सकता है ।

यह गुण बहुपद पे भी लागू होता है । यदि एक बहुपद $p(x)$ को दूसरे बहुपद $g(x)$ से विभाजित करने पर शेष शून्य प्राप्त होता है तो भाजक $g(x)$, $p(x)$ का गुणक है ।

आइए शेष प्रमेय लागू करे इस गुणक का वर्णन करने के लिए ।

इसका निष्कर्ष यह है कि,

* **यदि $p(a) = 0$, तो $p(x)$ का गुणक $(x - a)$ है ।**
* **जब $p(x)$ का गुणक $(x - a)$ है तो $p(a) = 0$**

इसे बहुपद की **गुणक प्रमेय** कहा जाता है ।

शेष प्रमेय का दूसरा अनुप्रयोग गुणक प्रमेय है ।

एक महत्त्वपूर्ण बात ध्यान रखिए कि गुणन प्रमेय का तब ही प्रयोग होगा जब एक बहुपद $p(x)$ को रैखिक बहुपद $(x - a)$ से विभाजित करते है ।

अगर रैखिक बहुपद $(x - a)$ रूप मे नही होगा तो उसे सामान्य (standard) रूप मे लिखकर गुणक प्रमेय का अनुप्रयोग कर सकते है ।

इन तथ्यों के अध्ययन के लिये इनका निरीक्षण कीजिए :

* जब $p(a) = 0$ होतो मात्र, बहुपद $p(x)$ का गुणक $(x - a)$ है ।
* जब $p(-a) = 0$ होतो मात्र, बहुपद $p(x)$ का गुणक $(x + a)$ है ।
* जब $p\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ होतो मात्र, बहुपद $p(x)$ का गुणक $(ax - b)$ है ।
* जब $p\left(\frac{-b}{a}\right) = 0$ होतो मात्र, बहुपद $p(x)$ का गुणक $(ax - b)$ है ।
* बहुपद $p(x)$ का गुणक $(x - a)$ $(x - b)$ है, जब $p(a) = 0$ और $p(b) = 0$ होतो मात्र, बहुपद $p(x)$ का गुणक $(x - a)$ $(x - b)$ है ।

गुणक प्रमेय का उपयोग करते हुए कुछ समस्यायें हल करे ।

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1 : सिद्ध कीजिए कि बहुपद $(x^3 - 4x^2 + 2x + 20)$ का गुणक $(x + 2)$ है ।

हल : मान लीजिए $p(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$

गुणक प्रमेय से, $(x + 2)$ एक गुणक है $p(x)$ का जब $p(-2) = 0$.

$\therefore$ यह दिखाना पर्याप्त है कि $p(x)$ का गुणक $(x + 2)$ है

अब, $p(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$

$\Rightarrow p(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 - 2(-2) + 20$

$= -8 -16 + 4 + 20 = 0$

$\therefore p(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ का गुणक $(x + 2)$

उदाहरण 2 : ज्ञात कीजिए कि $(x^n - 1)$ का गुणक $(x - 1)$ है ।

हल : मान लीजिए $p(x) = x^n - 1$

$(x^n - 1)$ का गुणक $(x - 1)$ ज्ञात करने के लिए हमे दिखाना पडेगा कि $p(1) = 0$.

$p(x) = x^n - 1$

$\Rightarrow p(1) = 1^n - 1 = 1 - 1 = 0$

$\therefore (x^n-1)$ का गुणक $(x + 1)$ है ।

उदाहरण 3 : यदि $(x^3 - a^2x + x + 2)$ का गुणक $(x - a)$ है तो a का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

हल : मान लीजिए $p(x) = (x^3 - a^2x + x + 2)$

गुणक प्रमेय के अनुसार $p(x)$ का गुणक $(x - a)$ हो सकता है

यदि $p(a) = 0$.

$\therefore \quad p(a) = a^3 - a^2 \times a + a + 2 = 0$

$\therefore \quad a^3 - a^3 + a + 2 = 0$

$\therefore \quad a + 2 = 0$

$\therefore \quad a = -2$

उदाहरण 4 : वास्तविक विभाजन किए बिना, ज्ञात कीजिए कि $(x^2 + 2x - 3)$ पूरी तरह से $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9)$ को विभाजित करता है ।

हल : मान लीजिए $p(x) = x^4 - 4x^2 + 12x - 9$

$g(x) = x^2 + 2x - 3$

$\therefore \quad g(x) = (x + 3)(x - 1)$

इस तरह $(x + 3)$ और $(x - 1)$, यह $g(x)$ के गुणक है ।

यह सिद्ध करने के लिए कि $p(x)$ को $g(x)$ पूरी तरह से विभाजित करता है, यह पर्याप्त होगा कि हम सिद्ध करे कि $p(x)$ को $(x + 3)$ और $(x - 1)$ पूरी तरह से विभाजित करते है ।

$\therefore$ आइए हम दिखाए कि $p(x)$ के गुणक $(x + 3)$ और $(x - 1)$ है ।

अब $p(x) = x^4 - 4x^2 + 12x - 9$

$p(-3) = (3)4 - 4(-3)2 + 12(-3) - 9$

$= 81 - 36 - 36 - 9 = 81 - 81 = 0$

$p(-3) = 0$

$p(1) = (1)^4 - 4(1)^2 + 12(1) - 9$

$= 1 - 4 + 12 - 9 = 13 - 13 = 0$

$p(1) = 0$

$\therefore$ $p(x)$ के गुणक $(x + 3)$ और $(x - 1)$ है ।

$\Rightarrow g(x) = (x + 3)(x - 1)$ भी $p(x)$ का गुणक है ।

इस तरह $p(x)$ को $g(x)$ पूरी तरह से विभाजित करता है ।

i.e., $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9)$ को $(x^2 + 2x - 3)$ पूरी तरह से विभाजित करता है ।

अभ्यास 8.4

1. प्रत्येक प्रश्न मे गुणक प्रमेय का उपयोग करते हुए यह ज्ञात कीजिए कि क्या बहुपद $P(x)$ का गुणक $g(x)$ है या नही?

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 20$ $g(x) = x - 2$ (ii) $p(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 7$ $g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = 3x^4 + 3x^2 - 4x - 11$ $g(x) = x - \frac{1}{2}$ (iv) $p(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12$ $g(x) = 3x - 2$

(v) $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 12$ $g(x) = x^2 - 3$

2. यदि $(x^3 - 3x^2 + ax - 10)$का गुणक $(x - 5)$ है तो a का मूल्य प्राप्त कीजिए ।

3. यदि $(x^3 + ax^2 - bx + 10)$ को $(x^2 - 3x + 2)$ विभाजित करता है तो a और b का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

4. यदि $(ax^2 + 5x + b)$ के गुणक दोनो $(x - 2)$ और $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ है तो $a = b$ ज्ञात कीजिए ।

संश्लिष्ट विभाजन (Synthetic Division) :

पिछले भागों में हमने शेष प्रमेय के अनुप्रयोग सीखें है । आइए शेष प्रमेय का दूसरा महत्त्वपूर्ण प्रयोग सीखें जहाँ इसका उपयोग भागफल और शेष को सरल तरीके से प्राप्त करने मे किया जा सकता है ।

हमे ज्ञात है लंबी विभाजन पद्धति से हम भागफल और शेष कैसे प्राप्त करते है । यह बहुत लंबी प्रक्रिया है ।

हमने यह भी सीखा कि शेष प्रमेय का उपयोग शेष ज्ञात करने में, बिना विभाजन किए, कर सकते है । इसमें कोई शक नही है कि शेष प्रमेय एक सरल और तेज शैली है । जिससे शेष का मूल्यांकन कर सकते है ।

एक और सरल और तुरंत विधान है, जिससे हम सिर्फ शेष नही, बल्की भागफल भी मालूम कर सकते है ।

इस सरल शैली, जहाँ शेष प्रमेय का उपयोग होता है, उसे **संश्लिष्ट विभाजन** कहते है ।

आइए हम संश्लिष्ट विभाजन के द्वारा भागफल और शेष ज्ञात करने की प्रक्रिया सीखें, जब एक बहुपद को द्विपद $(x - a)$ से विभाजन करे जहाँ a एक स्थिर है ।

नीचे दिए गए उदाहरणों को ध्यान से देखें ।

उदाहरण 1 : एक बहुपद $p(x) = x^4 - 3x + 5$ **को लीजिए ।**

मान लीजिए कि $p(x)$ को एक रैखिक बहुपद (द्विपद) जो $(x - a)$ रूप मे है, विभाजित करता है ।

i.e., $x^4 - 3x + 5$ को $x - 4$ से विभाजित करें.

ध्यान से **संश्लिष्ट विभाजन** के चरण देखिए ।

चरण 1 : संश्लिष्ट विभाजन को व्यवस्थित करना :

दिए गए बहुपद को उसी तरह से लिखिए जैसे लंबी विभाजन पद्धति मे लिखते है ।

लंबी विभाजन पद्धति मे भाज्य को चौखटे के अन्दर और भाजक को चौखट के बाहर लिखते है ।

भाज्य को लिखते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि भाज्य के घातांक को अवरोही क्रम में लिखिए । **यदि पदों में कुछ घातांक अनुपस्थित है तो उन पदो को लिखते हुए उनका गुणांक शून्य लिखिए ।**

दिया गया भाज्य = $x^4 - 3x + 5$.

इसे हम इस प्रकार लिख सकते है । $x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 - 3x + 5$.

लंबी विभाजन पद्धति इस प्रकार दिखता है ।

$$x - 4\overline{\big)x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 - 3x + 5}$$

ध्यान से भाज्य कें पदों के गुणांक देखिए ।

वह है 1, 0, 0, –3, 5.

a के मूल्य को भाजक x - 4 में a का मूल्य का निरीक्षण कीजिए । यहाँ का गुणक ~~(multiline)~~ अथवा (operator) संकारक कहते है ।

आइए अब संश्लिष्ट विभाजन शुरू करें ।

भाज्य के गुणांक,

भाजक का 'a' है (x - 4) $\quad \leftarrow 4\Big|\underline{\;1 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad 5\;}$

आइए, लंबी विभाजन पद्धति और संश्लिष्ट विभाजन की तुलना करें ।

लंबी विभाजन पद्धति	**संश्लिष्ट विभाजन**
$x - 4\overline{\big)x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 - 3x + 5}$	$4\Big|\underline{\;1 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad 5\;}$

ध्यान दे, भाज्य के पदों के गुणांको को अवरोही क्रम मे पहली पंक्ति में लिखिए ।

भाज्य $x - 4$ (i.e., 4) में a का मूल्य चौखट के बाहर लिखते है ।

जब संश्लिष्ट विभाजन का ढाँचा तैयार है तो हम इस प्रक्रिया के साथ आगे बढ़ेंगे ।

प्रथम पंक्ति →	4	1	0	0	–3	5
द्वितिय पंक्ति →						
तृतिय पंक्ति →						

चरण 2 : प्रथम गुणांक को नीचे लाए ।

* संश्लिष्ट विभाजन के चौखटे मे दो और पंक्तियाँ बनाइए ।

* पहली पंक्ति के पहले पद को तीसरी पंक्ति के पहले पद में लिखिए ।

प्रथम पंक्ति →	4	1	0	0	–3	5
द्वितिय पंक्ति →						
तृतिय पंक्ति →		1				

चरण 3 : तीसरी पंक्ति मे लिखे मूल्य को गुणक से गुणा करे ।

प्रथम पंक्ति →	4	1	0	0	–3	5
द्वितिय पंक्ति →			4			
तृतिय पंक्ति →		1				

* गुणक 4 को तीसरे पंक्ति में लिखे प्रथम पद से गुणा कीजिए ।

* गुणनफल को भाज्य के अगले गुणांक के नीचे लिखिये अर्थात द्वितिय पंक्ति मे प्रथम पद की तरह लीखिये ।

चरण 4 : दूसरे गुणांक और गुणनफल को जोडिए ।

प्रथम पंक्ति →	4	1	0	0	–3	5
द्वितिय पंक्ति →			4			
तृतिय पंक्ति →		1	4			

* पहली पंक्ति के दूसरे पद को दूसरी पंक्ति के पहले पद से जोडिए ।

  अर्थात 0 + 4 = 4

* योगफल 4 को तीसरी पंक्ति में लिखिए ।

चरण 5 : प्राप्त हुए योगफल को भाजक से गुणा करें ।

प्रथम पंक्ति →	4	1	0	0	–3	5
द्वितिय पंक्ति →			4	16		
तृतिय पंक्ति →		1	4			

* तीसरी पंक्ति में लिखे दूसरे पद को गुणक से गुणा करें

  अर्थात 4 × 4 = 16

* गुणनफल 16 को पहली पंक्ति के तीसरे पद के नीचे लिखें ।

चरण 6 : तीसरे गुणांक और नए गुणनफल को जोडे (अथवा योग करें ।)

प्रथम पंक्ति →	4	1	0	0	–3	5
द्वितिय पंक्ति →			4	16		
तृतिय पंक्ति →		1	4	16		

* पहली पंक्ति के तीसरे पद को दूसरी पंक्ति के दूसरे पद से जोडे ।

  0+16=16

* योगफल को तीसरी पंक्ति के तीसरे पद के रूप में लिखें.

चरण 7 :

प्रथम पंक्ति →	4	1	0	0	–3	5
द्वितिय पंक्ति →			4	16	64	244
तृतिय पंक्ति →		1	4	16	61	249

* चरण 3 और 4 में की गई प्रक्रिया को दोहराइए

जब तक पूर्ण हो ।

चरण 8 : उत्तर लिखिए ।

अंतिम पंक्ति (तीसरी पंक्ति) में लिखि संख्यायें, भागफल के गुणांक और शेष बनते है ।

बहुपद p(x) का घातांक 4 है और भाजक एक रैखिक बहुपद है जिसका घातांक 1 है ।

∴ भागफल का घातांक, भाज्य के घातांक से एक कम होगा ।

यहाँ भागफल का घातांक 3 होगा । आइए तीसरी पंक्ति की संख्या देखें ।

1ली संख्या (1), x^3 का गुणांक है ।

2री संख्या (4), x^2 का गुणांक है ।

3री संख्या (16), x का गुणांक है ।

4थी संख्या (61) स्थिर है ।

5वी संख्या (249) शेष है ।

∴ भागफल = $x^3 + 4x^2 + 16x + 61$ और शेष 249 है ।

आइए लंबी विभाजन पद्धति और संश्लिष्ट विभाजन की तुलना करें । आइए दोनो की समानता देखें ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 4x^2 + 16x + 61 \\
\hline
x-4 & x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 - 3x + 5 \\
 & \underset{-}{x^4} \underset{+}{-} 4x^3 x^4 - \boxed{4}x^3 \\
\hline
 & \quad + 4x^3 + 0.x^2 \\
 & \quad \underset{-}{+} \cancel{4x^3} \underset{+}{-} 16x^2 \\
\hline
 & \qquad + 16x^2 - 3x \\
 & \qquad \underset{-}{+} \cancel{16x^2} \underset{+}{-} 64x \\
\hline
 & \qquad\quad + 64x + 5 \\
 & \qquad\quad \underset{-}{+} 64x \underset{+}{-} \boxed{244} \\
\hline
 & \qquad\qquad 249 \\
\hline
\end{array}
$$

4	1	0	0	-3	5
		4	16	64	244
	1	4	16	61	249

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1 : $3x^3 + 11x^2 + 34x + 106$ को $x - 3$ से विभाजन करें ।

हल : कृत्रिम विभाजन का चौखटा बना कर प्रक्रिया का पालन करें ।

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 3 & 11 & 34 & 106 \\ & & 9 & 60 & 282 \\ \hline & 3 & 20 & 94 & 388 \end{array}$$

($\therefore$ भागफल = $3x^2 + 20x + 94$ और शेष = 388)

[सूचना : भागफल और शेष को लिखते समय तीसरी पंक्ति में दाई तरफ से भी संख्याओं को ले सकते है ।]

प्रथम संख्या (388) शेष है ।

द्वितिय संख्या (94) भागफल का स्थिरांक है ।

तृतिय संख्या (20) यह x का गुणांक है ।

चतुर्थ संख्या (3) यह x^2 का गुणांक है ।

भागफल = $3x^2 + 20x + 94$

उदाहरण 2 : $x^6 - 2x^5 - x + 2$ को $x - 2$ से विभाजन करे ।

हल : भाज्य को पुनः ऐसे लिखते है ।

$(x^6 - 2x^5 + 0 \,.\, x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 - x + 2) \quad (x - 2)$

संश्लिष्ट विभाजन के अनुसार

$$\begin{array}{c|cccccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$\therefore$ भागफल = $x^5 - 1$ और शेष = 0

हमने बहुपदियों का विभाजन तीन अलग अलग तरीकों से सीखा है । नीचे दी गई तालिका में एक ही समस्या को तीन तरीको से हल किया गया है । उनकी तुलना कीजिए ।

$(2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x + 2)$ को $(2x + 1)$ से विभाजन कीजिए ।

अभ्यास 8.5

1. संश्लिष्ट विभाजन का उपयोग करते हुए भागफल और शेष ज्ञात कीजिए ।

(i) $(x^3 + x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$ (ii) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x + 3)$

(iii) $(4x^3 - 16x^2 - 9x - 36) \div (x + 2)$ (iv) $(6x^4 - 29x^3 + 40x^2 - 12) \div (x - 3)$

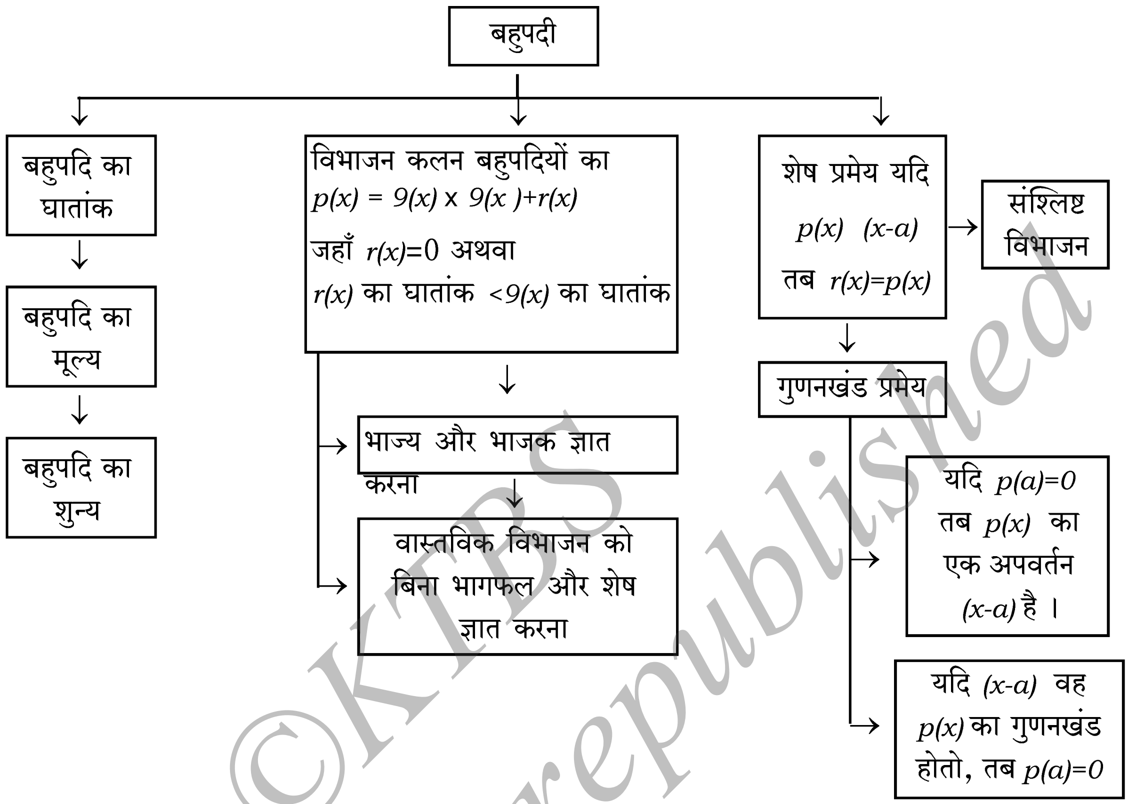
(v) $(8x^4 - 27x^2 + 6x + 9) \div (x + 1)$ (vi) $(3x^3 - 4x^2 - 10x + 6) \div (3x - 2)$

(vii) $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 5) \div (4x + 1)$ (viii) $(2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 48) \div (2x - 1)$

2. यदि $(x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29)$ को $(x + 4)$ से विभाजित करने पर भागफल $(x^3 - ax^2 + bx + 6)$ प्राप्त होता है, तो a, b का मूल्य और शेष ज्ञात कीजिए ।

3. यदि $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 7)$ को $(2x + 1)$ से विभाजित करने पर भागफल $(4x^3 + px^2 - qx + 3$ प्राप्त होता है, तो p, q का मूल्य और शेष ज्ञात कीजिए ।

लंबी विभाजन पद्धति	शेष प्रमेय	संश्लिष्ट विभाजन
$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{9}{4}$ $2x+1 \overline{)\, 2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x + 2}$ $\cancel{2x^5} - x^4$ $(-) \quad (-)$ $- \cancel{4x^4} + 8x^3$ $- \cancel{4x^4} - 2x^3$ $(+) \quad (+)$ $10\cancel{x^3} - 2x^2$ $+ \cancel{10x^3} + 5x^2$ $(-) \quad (-)$ $- \cancel{7x^2} + x$ $- \cancel{7x^2} - \frac{7}{2}x$ $(+) \quad (+)$ $+ \frac{9}{2}\cancel{x} + 2$ $+ \frac{9}{2}\cancel{x} + \frac{9}{4}$ $(-) \quad (-)$ $-\frac{1}{4}$ शेष $\downarrow$	$p(x) = 2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x - 2$ $g(x) = (2x-1)$ $= 2\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right) = x + \frac{1}{2}$ यदि $x - \left(\frac{-1}{2}\right) = 0$ अर्थात $x + \frac{1}{2} = 0$ $x = \left(\frac{-1}{2}\right)$ $\therefore p(x) = 2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x + 2$ $\therefore p\left(\frac{-1}{2}\right) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^5 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^4 + 8\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{-1}{2}\right)^2 \frac{-1}{2} + 2$ $= 2\left(\frac{-1}{32}\right) + 8\left(\frac{-1}{8}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} + 2$ $= \frac{-1}{16} - \frac{3}{16} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2$ $= \frac{-1-3-16-8-8+32}{16}$ $= \frac{-36+32}{16}$ $= \frac{-\cancel{4}^1}{\cancel{16}_4} = \frac{-1}{4} \downarrow$ शेष	$-\frac{1}{2} \mid \; 2 \quad -3 \quad 8 \quad -2 \quad 1 \quad 2$ $-1 \quad 2 \quad -5 \quad \frac{7}{2} \quad \frac{-9}{4}$ $2 \quad -4 \quad 10 \quad -7 \quad \frac{9}{2} \quad \frac{-1}{4}$ $\downarrow$ शेष $\frac{1}{2}\left[2 \quad -4 \quad 10 \quad -7 \quad \frac{9}{2}\right]$ $= 1 \quad -2 \quad 5 \quad \frac{-7}{2} \quad \frac{9}{4}$



उत्तर

अभ्यास 8.1

1] (i) 2 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 3 (v) 3 2] (i) 6 (ii) 0 (iii) 18 (iv) 12 (v) 12

3] (i) 23 (ii) –11 (iii) $\frac{59}{4}$ (iv) 30 4] (i) $f(-\frac{1}{3}) = 0$ हाँ (ii) $p(\pm 2) = 0$, हाँ

(iii) $g\left(\frac{4}{5}\right) = -4$ नहीं (iv) $p(3) = 0$, हाँ; $p(-1) = 0$, हाँ ; $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ हाँ

5] (i) $x = -2$ (ii) $x = -3$ अथवा $x = 5$ (iii) $a = \frac{-7}{2}$ अथवा $a = \frac{7}{2}$

(iv) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 6] $k = -3$ 7] $k = 9$

अभ्यास 8.2

1] (i) $q(x) = x + 2$, $r(x) = 0$ (ii) $q(x) = 2x - 3$, $r(x) = 0$

(iii) $q(x) = x^2 + 3x - 8$, $r(x) = 14$ (iv) $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, $r(x) = 0$

(v) $q(x) = x^2 + x + 1$, $r(x) = 0$

2] $g(x) = 2x - 3$ 3] $g(x) = x^2 - x + 1$ 4] (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

(ii) $p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 11x + 16$ (iii) $p(x) = 2x^4 + 7x^3 + x^2 + x + 1$

(iv) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ (v) $p(x) = x^6 + 2x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 5$

5] (i) $q(x) = x + 9$, $r(x) = 28$ (ii) $q(x) = x^2 + 7x + 15$, $r(x) = 47$

6] $x + 12$ 7] $4x + 4$

अभ्यास 8.3

1] (i) $r(x) = 47$ (ii) $r(x) = -29$ (iii) $r(x) = 36$ (iv) $r(x) = \frac{3}{2}$ (v) $r(x) = \frac{5}{8}$

2] $a = -1$ 3] (i) $a = -1$ (ii) $a = \frac{-1}{10}$ (iii) $a = \frac{-4}{5}$

अभ्यास 8.4

2] $a = -8$ 3] $a = 2$, $b = 13$

अभ्यास 8.5

1] (i) $q(x) = x^2 + 2x - 1$, $r(x) = 4$ (ii) $q(x) = 3x^2 - 11x + 40$, $r(x) = -125$

(iii) $q(x) = 4x^2 - 24x + 39$, $r(x) = -114$

(iv) $q(x) = 6x^3 - 11x^2 + 7x + 21$, $r(x) = 51$

(v) $q(x) = 8x^3 - 8x^2 - 19x + 25$, $r(x) = -16$ (vi) $q(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{34}{9}$, $r(x) = \frac{-14}{9}$

(vii) $q(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{51}{32}$ $r(x) = \frac{-211}{32}$

(viii) $q(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + \frac{55}{2}$ $r(x) = \frac{-41}{2}$

2] $a = -6$, $b = 11$, $r(x) = 5$ 3] $p = -2$, $q = 0$, $r(x) = -10$

9

द्विघात समीकरण
(Quadratic Equations)

* द्विघात व्यंजक और द्विघात समीकरण (वर्ग समीकरण) ।
* शुद्ध एवम् मिश्र द्विघात समीकरण ।
* द्विघात समीकरण का हल
* अपवर्तन (गुणनखंड) द्वारा
* वर्ग पूर्ण करने की विधि
* सूत्र द्वारा
* आलेख द्वारा
* मूल और सहगुणांकों का संबंध
* द्विघात समीकरण की रचना

ब्रह्मगुप्त

(ई.598-665, भारत)

सामान्य रूप में द्विघात समीकरणों के हल अक्सर प्राचीन भारतीय गणितज्ञों के लिए श्रेय दिया जाता है । ब्रह्मगुप्त ने द्विघात समीकरण जो $ax^2 + bx = c$ के रूप में हैं, को हल करने के लिए एक स्पष्ट सूत्र दिया है । श्रीधराचार्य (ई.1025) ने वर्ग को पूरा करने की विधि द्वारा एक द्विघात समीकरण का हल ज्ञात किया है । इसे द्विघात सूत्र के नाम से जाना जाता है ।

इस अध्याय के अध्ययन करने के बाद आप सीखेंगे :

* द्विघात समीकरण, शुद्ध एवं मिश्र द्विघात समीकरण को परिभाषित करना ।
* शुद्ध द्विघात समीकरण को हल करना ।
* मिश्र द्विघात समीकरणों को गुणनखण्ड द्वारा हल करना ।
* द्विघात समीकरण को वर्ग पूर्ण करने विधि द्वारा हल करना ।
* द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने के लिये सूत्र प्राप्त करना ।
* सूत्र द्वारा द्विघात समीकरण को हल करना ।
* द्विघात समीकरण के आलेख खींचना ।
* आलेख द्वारा द्विघात समीकरण को हल करना ।
* द्विघात समीकरण के मूल और सहगुणांक में संबंध स्थापित करना ।
* द्विघात समीकरण की रचना करना ।
* विवेचक का मूल्य ज्ञात करना और मूलों के स्वभाव जानना ।

एक समीकरण मेरे लिये कुछ भी नही है, जब तक वह भगवान के विचार व्यक्त नही करता है ।

– श्रीनिवास रामानुजम्

हम संख्या खेल से परिचित है । आइए, ऐसे दो उदाहरणों पर विचार करें ।

उदाहरण 1	**उदाहरण 2**
* एक शून्य रहित पूर्ण संख्या लीजिए । * उसमें 7 जोड दीजिए । * इसे 12 से समानता कीजिए । * अब संख्या क्या है?	* एक अ शून्य पूर्ण संख्या लीजिए । * उसमें 7 जोड दीजिए । * योगफल को समान संख्या से गुणा कीजिए * इसे 12 से समानता कीजिए । * अब संख्या क्या है?

अब संख्या को कैसे ज्ञात करें । आइए 'x' को अ संख्या मान लें ।

यदि हम चरणों का पालन करें तो

पहले उदाहरण में, $x \to x + 7 \to x + 7 = 12$..................... (i) ....(i)

दूसरे उदाहरण में, $x \to x + 7 \to x(x + 7) = 12$ ....(ii) ....(ii)

पहले समीकरण (i) में x एक चरांक है जिसका घातांक 1 है ।

यह एक रैखिक समीकरण है जिसका एक ही मूल होगा ।

i.e., $x + 7 = 12 \Rightarrow x = 12 - 7 \Rightarrow x = 5$

दूसरे समीकरण (ii) में, $x(x + 7) = 12 \Rightarrow x^2 + 7x = 12$

यहाँ x एक चरांक है जिसका घातांक 2 है । इसें **द्विघात समीकरण** (वर्ग समीकरण) कहते है ।

इसको कैसे हल करें? एक द्विघात समीकरण के कितने मूल है?

यह जानना बहुत आवश्यक है, क्योंकि द्विघात समीकरणों के गणित की अन्य शाखाओं में, अन्य विषयों में और वास्तविक की परिस्थितियों मे बहुत उपयोग है ।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि एक वृद्धाश्रम ट्रस्ट एक प्रार्थना हॉल का निर्माण करना चाहता है, जिसका फर्शक्षेत्र 300 वर्ग.मी. है और उसकी लंबाई उसकी चौडाई के दुगुने से 1 मी. से ज्यादा है । इस हॉल की लंबाई और चौडाई कितनी होगी?

मान लीजिए कि हॉल की चौडाई x मी. है ।

तो उसकी लंबाई $(2x + 1)$ मी. है ।

$\therefore$ उसका क्षेत्र $= x(2x + 1)$ व.मी. है ।

$\Rightarrow x(2x + 1) = 300$ ($\because$ दत्त)

इस जानकारी को हम चित्र द्वारा इस प्रकार वर्णन करते है ।

x मी. $\boxed{x(2x+1) = 300 \text{ वर्ग मी.}}$

$(2x + 1)$ मी.

क्षेत्र $= x(2x + 1) = (2x^2 + x)$ वर्ग मी.

$\therefore$ $2x^2 + x = 300$. यह एक **द्विघात समीकरण** (वर्ग समीकरण) है ।

नीचे मौखिक कथन के रूप में कुछ उदाहरण दिए गए है, जिन्हे जब समीकरण रूप मे लिखते है, हमें द्विघात समीकरण प्राप्त होता है ।

आइए कथन का अध्ययन करें । प्रत्येक कथन को समीकरण के रूप में लिखिए ।

1. एक एक्सप्रेस रेलगाडी जो बेंगलोर और मैसूर के बीच यात्रा करती है, एक घंटा यात्री रेलगाडी (पॅसेंजर रेलगाडी) से कम लेती है । यदि एक्सप्रेस रेलगाडी की औसत गति 11 कि.मी./घंटे, यात्रा रेलगाडी से अधिक है तो दोनो रेलगाडियों की औसत गति ज्ञात कीजिए ।
2. एक कुटीर उद्योग लकडी के खिलौनों का उत्पादन करती है । प्रत्येक खिलौनें के उत्पादन की लागत, एक दिन में उत्पादित खिलौने की संख्या से 55 कम पाई गई । एक विशेष दिन पर उत्पादन की लागत रू. 750 था । उस दिन उत्पादित खिलौनें की संख्या क्या है?
3. एक मोटर बोट जिसकी गीत स्थिर पानी में 18 कि.मी./घं है । अनुप्रवाह से, जब वह 24 कि.मी. धारा के प्रतिकूल जाती है, तब 1 घंटा समय अधिक लेती है । धारा की गति ज्ञात कीजिए ?
4. दो पानी के नल एक साथ एक टैंक को $9\frac{3}{8}$ घंटे में भर सकते हैं । बडे व्यास का नल छोटे व्यास के नल से इस टैंकी को अकेले से भरने के लिए 10 घंटा कम लेता है । हर एक नल अलग-अलग से कितने घंटो में टंकी भरता है ।

इन समस्याओं को कैसे हल किया जा सकता है?

इसे जानिए :

यह माना जाता है कि द्विघात समीकरणों का समाधान बेबोलियन् (Babylonians) ने निकाला था । यूनानी गणितज्ञ युक्लिड ने ज्यामतीय दृष्टिकोण का विकास किया जो लंबाई प्राप्त करने के लिए किया, कि कुछ और नही द्विघात समीकरणों का हल था ।

सामान्य द्विघात समीकरणों के समाधान का श्रेय प्राचीन भारतीय गणितज्ञों जैसे ब्रह्मगुप्त (A.D. 598-665) और श्रीधराचार्य (A.D. 1025) को दिया जाता है । एक अरब गणितज्ञ अल ख्वरिजनी (A.D. 800) ने भी कई प्रकार के द्विघात समीकरणों का अध्ययन किया था ।

अब्राहम बार हिय्या हा नासी (Abraham bar Hiyya Ha-Nasi) ने अपनी पुस्तक लैबर एम्बारडोरम् (Liber embardorum) जो यूरोप में A.D. 1145 में प्रकाशित हुई, भिन्न भिन्न द्विघात समीकरणों के सम्पूर्ण हल दिए है ।

इस घटक में हम द्विघात समीकरण, उनके मूल प्राप्त करने के विभिन्न विधियों और उनके उपयोगों का अध्ययन करेंगे ।

द्विघात समीकरण (वर्ग समीकरण)

हमने द्विघात बहुपदियों का अध्ययन घटक 7 में किया है ।

एक बहुपद जो $ax^2 + bx + c$ के रूप में है, जहाँ $a \neq 0$ द्विघात बहुपद है जिसके चरांक x का घातांक 2 है।

यदि द्विघात व्यंजक $ax^2 + bx + c$ शून्य के बराबर है, वह द्विघात समीकरण बनता है ।

नीचे कुछ मौखिक कथन दिए गए है जिनको द्विघात व्यंजक में परिवर्तित करते हुए, शुन्य के बराबर करते है ताकि वह द्विघात समीकरण बने । उदाहरणों का अध्ययन करें ।

क्र. सं.	मौखिक कथन	द्विघात व्यंजक	द्विघात समीकरण
1.	एक नंबर और पांच बार उसके वर्गों का योग ।	$5x^2 + x$	$5x^2 + x = 0$
2.	एक तार जिसकी लंबाई 12 सें.मी. है, उसको मोड के एक समकोण (लंबकोण) त्रिभुज बनाते है । अगर उसकी एक भुजा दूसरी भुजा से 2 सें.मी. अधिक है तो उसका क्षेत्र ज्ञात कीजिए ।	$\frac{1}{2}x(x+2)$ $\Rightarrow \frac{1}{2}(x^2+2x)$	$\frac{1}{2}(x^2+2x)=0$ $\Rightarrow x^2+2x=0$
3.	एक क्रिकेट टीम ने जो रन बनाए, पहले बल्लेबाज के रन और उसके द्वारा रन के वर्ग के अन्तर से 6 कम है ।	$x^2 - x - 6$	$x^2 - x - 6 = 0$

इसलिए यह कहा जा सकता है कि यदि P(x) एक द्विघात कोई समीकरण जो P(x) = 0 के रूप मे है, जहाँ P(x) एक बहुपद है जिसका घातांक 2 है तो वह एक द्विघात समीकरण है जिसका रूप $ax^2 + bx + c = 0$ है $a \neq 0$.

$\therefore$ एक द्विघात समीकरण (वर्ग समीकरण) जिसका चरांक x है, एक समीकरण है जिसका रूप $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a, b, c वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$.

द्विघात समीकरण के लक्षण इस प्रकार है,

- यह समीकरण है जिसमें एक ही चरांक है ।
- यह समीकरण है जिसके चरांक का घातांक 2 है ।
- द्विघात समीकरण का मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ है ।

  यहाँ, x^2 का सहगुणांक a है,
  x का सहगुणांक b है,
  और c एक स्थिरांक है,
  a, b, c वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$.
- पद, चरांक के घातांक को अवरोही क्रम मे लिखते है ।

द्विघात समीकरण मे $a \neq 0$ क्यों होता है ।

यदि $a = 0$ तो द्विघात समीकरण का क्या होता है?

कक्षा में चर्चा करें ।

हमने चर्चा की है कि द्विघात समीकरण में $a \neq 0$ ।

b या c, या b और c दोनो जब शून्य के बराबर है तो द्विघात समीकरण के मानक रूप का क्या होगा?

ध्यान दे !
द्विघात शब्द को लैटिन शब्द क्वाड्राटुम् "**quadratum**" से प्राप्त किया गया है । जिसका मतलब है **''एक वर्ग आकृति''.**

नीचे दी गई तालिका का निरीक्षण कीजिए ।

नं.	b का मूल्य	c का मूल्य	परिणाम
1.	$b = 0$	$c \neq 0$	$ax^2 + c = 0$
2.	$b \neq 0$	$c = 0$	$ax^2 + bx = 0$
3	$b = 0$	$c = 0$	$ax^2 = 0$
4.	$b \neq 0$	$c \neq 0$	$ax^2 + bx + c = 0$

उपरोक्त सभी मामलों में समीकरण एक द्विघात समीकरण बना हुआ है ।

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1 : क्या निम्न समीकरण, द्विघात समीकरण है, ज्ञात कीजिए :

(i) $2x + x^2 + 1 = 0$ **(ii) $6x^3 + x^2 = x$**

(iii) $\left(x+\frac{3}{4}x\right)(x-8)+10=0$ **(iv) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$**

हल : (i) $2x + x^2 + 1 = 0$

पदो को चरांक के घातांक के अवरोही क्रम मे लिखिए $\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

यह मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ में है ।

$\therefore$ दिया गया समीकरण, द्विघात समीकरण है ।

(ii) $6x^3 + x^2 = x$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने से हमें $6x^3 + x^2 - x = 0$ प्राप्त होता है ।

चरांक का सबसे बडा घातांक 3 है ।

$\therefore$ दिया गया समीकरण, द्विघात समीकरण नही है ।

(iii) $\left(x+\frac{3}{4}x\right)(x-8)+10=0$

समीकरण को सरल करने से, प्राप्त होता है ।

$$x^2 - 8x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{24}{4}x + 10 = 0$$

$4x^2 - 32x + 3x^2 - 24x + 40 = 0$

$x^2 - 56x + 40 = 0$. इस समीकरण का रूप $ax^2 + bx + c = 0$ जैसा है ।

$\therefore$ दिया गया समीकरण, द्विघात समीकरण है ।

(iv) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

समीकरण को सरल करने से, प्राप्त होता है ।

$$x^2 + x + 8 = x^2 - 4 \Rightarrow \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + x + 8 + 4 = 0 \Rightarrow x + 12 = 0$$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में नही है और चरांक का घातांक 1 है ।

$\therefore$ दिया गया समीकरण, द्विघात समीकरण नही है ।

अभ्यास 9.1

1. क्या निम्नलिखित समीकरण, द्विघात समीकरण है या नही?

(i) $x^2 - x = 0$ (ii) $x^2 = 8$ (iii) $x^2 + \frac{1}{2}x = 0$ (iv) $3x - 10 = 0$

(v) $x^2 - \frac{29}{4}x + 5 = 0$ (vi) $5 - 6x = \frac{2}{5}x^2$ (vii) $\sqrt{2}x^2 + 3x = 0$ (viii) $\sqrt{3}x = \frac{22}{13}$

(ix) $x^3 - 10x + 74 = 0$ (x) $x^2 - y^2 = 0$

2. **निम्न समीकरणों को सरल करते हुए ज्ञात कीजिए कि क्या वह द्विघात समीकरण है?**

(i) $x(x + 6) = 0$ (ii) $(x - 4)(2x - 3) = 0$

(iii) $(x + 2)(x - 7) = 5$ (iv) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$ (vi) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

3. **निम्न कथन को द्विघात समीकरण के रूप में लिखिए ।**

(i) क्रमगत दो पूर्णांको का गुणनफल 306 है ।

(iii) एक आयताकार पार्क की लंबाई (मीटर मे) 1 ज्यादा है उसकी दुगनी चौडाई से और उसका क्षेत्र $528m^2$ है ।

(iv) एक रेलगाडी समरूप गति से 480 km की दूरी तय करती है । यदि इसकी गति 8 km/hr कम है तो इस दूरी को पूरा करने के लिए रेलगाडी को तीन घंटे ज्यादा लगेंगे ।

द्विघात समीकरण के प्रकार

कुछ उदाहरणों का निरीक्षण कीजिए ।

A	B
$x^2 = 144$	$x^2 - 7x + 10 = 0$
$x^2 - 81 = 0$	$17y - y^2 + 30 = 0$
$2y^2 = 0$	$p^2 - 20 = -8p$

A और B में लिखे समीकरणों की तुलना कीजिए ।

हम देख सकते है कि,

- A और B के सभी समीकरण, द्विघात समीकरण है ।
- स्तंभ-A के सभी द्विघात समीकरण के चरांक का घातांक सिर्फ 2 है । इन्हे **शुद्ध द्विघात समीकरण** कहते है ।
- स्तंभ-B के सभी द्विघात समीकरण के चरांक का घातांक 2 और 1 है । इन्हे **मिश्र द्विघात समीकरण** कहते है ।

द्विघात समीकरण का हल :

एक शुद्ध द्विघात समीकरण ले लीजिए $x^2 - 25 = 0$.

'x' के वास्तविक मूल्य लेते हुए उन्हे समीकरण में स्थानापन्न करेंगे ।

मान लीजिए $x = 1$

LHS= $x^2 - 25 = 1^2 - 25 = -24$

$\therefore$ LHS $\neq$ RHS

मान लीजिए $x = 5$

LHS = $x^2 - 25 = 5^2 - 25 = 0$

$\therefore$ LHS = RHS

मान लीजिए $x = -2$

LHS = $x^2 - 25 = (-2)^2 - 25 = -21$

$\therefore$ LHS $\neq$ RHS

मान लीजिए $x = -5$

LHS = $x^2 - 25 = (-5)^2 - 25 = 0$

$\therefore$ LHS = RHS

x के विभिन्न मूल्यों के लिए कोशिश कीजिए ।

अनुसरण कीजिए कि LHS = RHS सिर्फ x के दो मूल्यों लिए ही है । $x = 5$ और $x = -5$

हम कह सकते है कि +5 और –5 ही समीकरण $x^2 - 25 = 0$ को संतुष्ट कर सकता है ।

इस तरह +5 और –5 **द्विघात समीकरण के मूल है ।**

+5 और –5 को द्विघात बहुपद $x^2 - 25$ के **शुन्य (zeros)** कह सकते है ।

द्विघात समीकरण के मूल समीकरण को संतुष्ट करते है जिसका मतलब LHS = RHS.

ऊपर की गई चर्चा मिश्र द्विघात समीकरण के लिए भी लागू है ।

आइए एक मिश्र द्विघात समीकरण $x^2 - 3x - 10 = 0$ लेते है ।

मान लीजिए $x = 1$

LHS= $x^2 - 3x - 10 = 1^2 - 3(1) - 10$
$= -12$

$\therefore$ LHS $\neq$ RHS

मान लीजिए $x = -3$

LHS = $x^2 - 3x - 10 = (-3)^2 - 3(-3) - 10$
$= 8$

$\therefore$ LHS $\neq$ RHS

मान लीजिए $x = 5$

LHS= $x^2 - 3x - 10 = 5^2 - 3(5) - 10$
$= 0$

$\therefore$ LHS = RHS

मान लीजिए $x = -2$

LHS = $x^2 - 3x - 10 = (-2)^2 - 3(-2) - 10$
$= 0$

$\therefore$ LHS = RHS

निरीक्षण कीजिए कि द्विघात समीकरण $x^2 - 3x - 10 = 0$ को सिर्फ $x = 5$ और $x = -2$ संतुष्ट करता है ।

$\therefore$ 5 और –2, द्विघात समीकरण $x^2 - 3x - 10$ के मूल है ।

द्विघात बहुपद $x^2 - 3x - 10$ के शून्य 5 और –2 है ।

सामान्य रूप में, वास्तविक संख्या 'k' को द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ का मूल कहा जा सकता है यदि $ak^2 + bk + c = 0$ ।

हम यह भी कह सकते है कि $x = k$ द्विघात समीकरण का हल है या k द्विघात समीकरण को संतुष्ट करता है ।

ध्यान दीजिए, द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्य और द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c$ के मूल समान है । हम जानते है कि द्विघात बहुपद के दो शून्य होते है । द्विघात समीकरण का मतलब है उसके मूल ज्ञात करना है । मूलों का सत्यापन करने के लिए मूल्यों को द्विघात समीकरण में स्थानापन करें और जाँचे कि क्या वह समीकरण को संतुष्ट करता है । मूलों को द्विघात समीकरण का **समाधान समूह (Solution Set)** कहा जाता है ।

शुद्ध द्विघात समीकरण को हल करना ।

निम्न उदाहरण का अध्ययन कीजिए :

1. $x^2 - 225 = 0$ को हल कीजिए ।

हल : $x^2 - 225 = 0 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow \therefore x = \sqrt{225}$

$x = \pm 15 \Rightarrow \therefore x = +15$ या $x = -15$

2. $143 = t^2 - 1$ हल कीजिए ।

समीकरण को मानक रूप में लिखिए ।

हल : $143 = t^2 - 1$

$t^2 = 143 + 1 \Rightarrow t^2 = 144 \Rightarrow \therefore t = \pm\sqrt{144} \Rightarrow t = \pm 12$

$\therefore t = +12$ or $t = -12$

3. यदि $V = \pi r^2 h$ तो 'r' के लिए हल कीजिए और यदि $V = 176$ और $h = 14$ तो 'r' का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

हल : $V = \pi r^2 h$

$\pi r^2 h = V \Rightarrow r^2 = \frac{V}{\pi r} \quad \therefore \quad r = \pm\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

यदि $V = 176$ और $h = 14$, तो

$r = \pm\sqrt{\frac{176}{\pi \times 14}} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{176 \times 7}{22 \times 14}} = \sqrt{\frac{\cancel{176}^{\cancel{8}^{4}} \times \cancel{7}}{\cancel{22} \times \cancel{14}^{2}}} = \sqrt{4} = \pm 2 \quad \therefore r = +2$ or $r = -2$

4. श्वेता वर्ग आकार में एक 625 वर्ग मी. जमीन की मालकिन है । वह काटेदार तार के साथ जमीन को घेरना चाहती है । 4 चक्कर के लिए आवश्यक तार की लंबाई की गणना कीजिए ।

हल : मान लीजिए वर्ग जमीन की लंबाई x m है, $\therefore$ वर्ग जमीन का क्षेत्रफल = x^2

$x^2 = 625 \Rightarrow x = \sqrt{625} = \pm 25$

$\therefore x = +25$ or $x = -25$

क्योंकि लंबाई नकारात्मक नही हो सकती है, इसलिए हम $x = +25$ ले सकते है ।

$\therefore$ वर्ग जमीन की एक भुजा की लंबाई है, इसलिए हम $x = +25$ ले सकते है ।

वर्ग की परिधि = $4x$ मी

$\therefore$ चार चक्कर की तार की लंबाई = $4 \times 4x = 16x$ मी

$\therefore$ काटेंदार तार की लंबाई = $16 \times 25 = 400$ मी

अभ्यास 9.2

1. निम्न समीकरणों को शुद्ध और मिश्र द्विघात समीकरणों में वर्गीकरण कीजिए ।

(i) $x^2 = 100$ (ii) $x^2 + 6 = 6$ (iii) $p(p - 3) = 1$ (iv) $x^2 + 3 = 2x$

(v) $(x + 9)(x - 9) = 0$ (vi) $2x^2 = 72$ (vii) $x^2 - x = 0$ (viii) $7x = \frac{35}{x}$

(ix) $x + \frac{1}{x} = 5$ (x) $4x = \frac{81}{x}$ (xi) $(2x - 5)^2 = 81$ (xii) $\frac{(x-4)^2}{18} = \frac{2}{9}$

2. निम्न द्विघात समीकरण को हल कीजिए ।

(i) $x^2 - 196 = 0$ (ii) $5x^2 = 625$ (iii) $x^2 + 1 = 101$ (iv) $7x = \frac{64}{7x}$

(v) $(x + 8)^2 - 5 = 31$ (vi) $\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4} = 7\frac{1}{4}$ (vii) $-4x^2 + 324 = 0$ (viii) $-37.5x^2 = -37.5$

3. निम्न में से प्रत्येक में, निर्धारित कीजिए कि क्या दत्त 'x' के मूल्य द्विघात समीकरण का हल है या नही।

(i) $x^2 + 14x + 13 = 0$; $x = -1$, $x = -13$ (ii) $7x^2 - 12x = 0$; $x = \frac{1}{3}$

(iii) $2m^2 - 6m + 3 = 0$; $m = \frac{1}{2}$ (iv) $y^2 + \sqrt{2}y - 4 = 0$; $y = 2\sqrt{2}$

(v) $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$; $x = 2$ और $x = 1$ (vi) $6x^2 - x - 2 = 0$; $x = -\frac{1}{2}$ और $x = \frac{2}{3}$

4. (i) यदि $A = \pi r^2$, तो r के लिए हल कीजिए । यदि $A = 77$ और $\pi = \frac{22}{7}$ तो r का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $r^2 = l^2 + d^2$ तो d के लिए हल कीजिए । यदि $r = 5$ और $l = 4$ तो d का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(iii) यदि $c^2 = a^2 + b^2$ तो b के लिए हल कीजिए । यदि $a = 8$ और $c = 17$ तो b का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(iv) यदि $A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ तो a के लिए हल कीजिए और यदि $A = 16\sqrt{3}$ तो a का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

(v) यदि $k = \frac{1}{2}mv^2$ तो 'v' के लिए हल कीजिए और यदि $k = 100$ और $m = 2$ तो v का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(vi) यदि $v^2 = u^2 + 2as$ तो 'v' के लिए हल कीजिए और यदि $u = 0$, $a = 2$, $s = 100$ तो v का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

मिश्र द्विघात समीकरण के हल करना :

हमें ज्ञात है कि मिश्र द्विघात समीकरण का सामान्य रूप $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ है । यह समीकरण विभिन्न रूपों में पाया जाता है जैसे $ax^2 + b = 0$, $ax^2 + c = 0$, और $ax^2 = 0$.

$ax^2 = 0$ और $ax^2 + c = 0$ शुद्ध द्विघात समीकरण है । हमनें पिछले भाग में उन्हें हल करने की विधि सीखा है ।

मिश्र द्विघात समीकरण को कैसे हल किया जा सकता है ? एक मिश्र द्विघात समीकरण का हल इतना सरल नही है जितना कि शुद्ध द्विघात समीकरण का हल है ।

एक मिश्र द्विघात समीकरण को हल करने की कई विधियाँ है जो कि उसके रूप पर निर्भर करती है ।

अर्थात $ax^2 + bx + c = 0$ or $ax^2 + b = 0$.

आइए उसका अध्ययन करें ।

(A) गुणनखंड (अपवर्तन) विधि से द्विघात समीकरण को हल करना :

हमने सीखा है कि द्विघात बहुपद का गुणनखंड मध्य पद को विभाजित कैसे किया जाता है । हम द्विघात समीकरण का मूल ज्ञात करने के लिए इस ज्ञान का उपयोग करेंगे ।

जब द्विघात समीकरण को दो रैखिक गुणक मे गुणनखंड करना हो तो गुणनखंड विधि का उपयोक करते है । गुणनखंडन करने के पश्चात, द्विघात समीकरण को दो रैखिक गुणक के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते है और इसे शून्य के बराबर समीकृत करते है ।

i.e. $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x \pm m)(x \pm n) = 0$

फिर हम शून्य गुणनफल नियम को लागू करते है और प्रत्येक गुणक को शून्य के बराबर समीकृत करते है।

i.e., $x \pm m = 0 \Rightarrow x = \pm m$

$x \pm n = 0 \Rightarrow x = \pm n$

इस तरह द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\pm m$ और $\pm n$ है ।

शून्य गुणनफल नियम :
मान लीजिए a और b दो वास्तविक संख्या या गुणक है, यदि $a \times b = 0$ तो $a = 0$ अथवा $b = 0$ अथवा दोनो $a = 0$ और $b = 0$

एक द्विघात समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ पर विचार कीजिए ।

$5x$ इसका मध्यपद है और 5 उसका गुणांक

आइए 5 को विभाजित करते है ताकि $m + n = 5$ और $mn = 6$

$x^2 + 3x + 2x + 6 = 0 \Rightarrow x(x + 3) + 2(x + 3) = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$

अब $x^2 + 5x + 6 = 0$ को दो रैखिक गुणक $(x + 3)$ और $(x + 2)$ मे विभाजित किया है ।

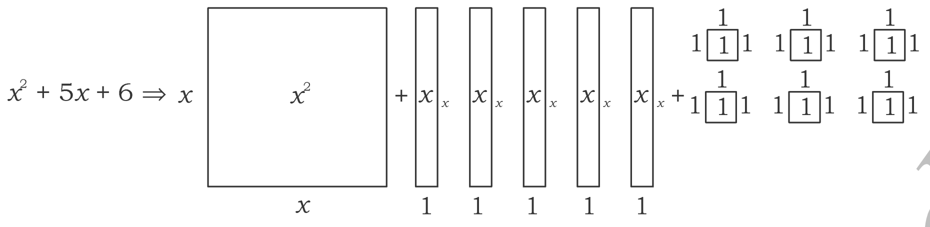
शून्य गुणनफल नियम का उपयोग करते हुए $(x + 3)(x + 2) = 0$

$x + 3 = 0$ या $x + 2 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0$ या $x = -3 \Rightarrow x + 2 = 0$ या $x = -2$

$\therefore \{-3, -2\}$ समाधान समूह है ।

इस तरह द्विघात समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ के दो मूल –3 और –2 है ।

इसे हम चित्र द्वारा बीजीय टाईल्स (algebraic tiles) का उपयोग करते हुए भी दर्शा सकते है ।



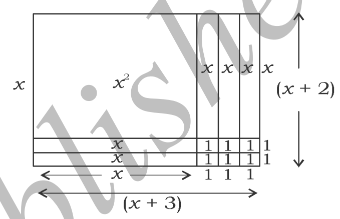
सभी टाइलों को दुबारा व्यवस्थित करने से हमे नीचे दिया गया चित्र प्राप्त होगा ।

ध्यान से देखिए लंबाई = $x + 3$

चौडाई = $x + 2$ और कुल क्षेत्रफल = $x^2 + 5x + 6$

$\therefore$ आयत का क्षेत्रफल = A = $l \times b$

$\therefore$ $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$



इससे हमे यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि,

यदि किसी वर्ग या आयत के क्षेत्रफल का प्रतिनिधित्व द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ करता है तो उसी लंबाई और चौडाई उसके दो गुणक है ।

गुणनखंड (अपवर्तन) विधि से द्विघात समीकरण को हल करने पर उदाहरणों का अध्ययन करें ।

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1: $x^2 - 3x + 2 = 0$ को हल कीजिए ।

हल : $x^2 - 3x + 2 = 0$ दिया गया है ।

$x^2 - 2x - 1x + 2 = 0$ (विभक्त कीजिए)

$x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$ (सामान्य गुणक लीजिए)

$(x - 2)(x - 1) = 0$ (सामान्य गुणक लीजिए)

$\therefore$ $x - 2 = 0$ या $x - 1 = 0$ (प्रत्येक गुणक को शून्य के बराबर कीजिए)

$\therefore$ $x = +2$ या $x = 1$

$\therefore$ $x^2 - 3x + 2$ के मूल $x = +2$ और $x = 1$ है ।

उदाहरण 2: $6x^2 - x - 2 = 0$ को हल कीजिए ।

हल : $6x^2 - x - 2 = 0$ दिया गया है ।

$\Rightarrow 6x^2 + 3x - 4x - 2 = 0 \Rightarrow 3x(2x + 1) - 2(2x + 1) = 0 \Rightarrow (2x + 1)(3x - 2) = 0$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0$ or $3x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = -1$ or $3x = 2 \Rightarrow \therefore x = -\frac{1}{2}$ or $x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ $6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल $x = -\frac{1}{2}$ और $x = \frac{2}{3}$ है ।

उदाहरण 3: द्विघात समीकरण $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए ।

हल : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0 \quad \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$

$\therefore \sqrt{3}x = \sqrt{2} \quad \sqrt{3}x = \sqrt{2}$

$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\therefore 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ के दो समान मूल $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ है ।

उदाहरण 3: $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$ को हल कीजिए ।

हल : $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$ दोनों पक्षों का वर्ग कीजिए ।

$\Rightarrow (\sqrt{24 - 10x})^2 = (3 - 4x)^2 \Rightarrow 24 - 10x = 9 - 24x + 16x^2$

$\Rightarrow 16x^2 - 24x + 10x + 9 - 24 = 0$

$\Rightarrow 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0 \Rightarrow 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0$

$\Rightarrow 8x(2x - 3) + 5(2x - 3) = 0$

$\Rightarrow (2x - 3)(8x + 5) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0$ or $8x + 5 = 0$

$\therefore 2x = 3 \quad 8x = -5 \quad x = \frac{3}{2} \quad x = \frac{-5}{8}$

$\therefore \sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$ के मूल $\frac{3}{2}$ और $\frac{-5}{8}$ है ।

गुणनखंड विधि से द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने के चरण ।

1. दिए गए समीकरण को द्विघात समीकरण के सामान्य रूप में लिखिए $ax^2 + bx + c = 0$ ।
2. बांए हाथ पर (LHS) लिखें द्विघात व्यंजक को हल कीजिए, उसके मध्यम पद को विभाजन करते हुए ।
3. उसके सामान्य गुणक लेते हुए हमें दो रैखिक गुणक प्राप्त होंगें ।
4. प्रत्येक गुणक को शून्य के बराबर कीजिए ।
5. रैखिक समीकरण को सरल करते हुए अज्ञात का मूल्य प्राप्त कीजिए ।

अभ्यास 9.3

A) गुणनखंड विधि से द्विघात समीकरण को हल कीजिए ।

1. $x^2 + 15x + 50 = 0$ 2. $6 - p^2 = p$ 3. $100x^2 - 20x + 1 = 0$

4. $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ 5. $x^2 + 4kx + 4k^2 = 0$ 6. $m - \frac{7}{m} = 6$

7. $0.2t^2 - 0.4t = 0.03$ 8. $\sqrt{5}x^2 + 2x = 3\sqrt{5}$ 9. $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{34}{15}$

10. $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-3}{x-4} = 3\frac{1}{3}$ 11. $a^2b^2x^2 - (a^2+b^2)x + 1 = 0$

12. $(2x - 3) = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$

B) वर्ग पूर्ण करके द्विघात समीकरण को हल करना ।

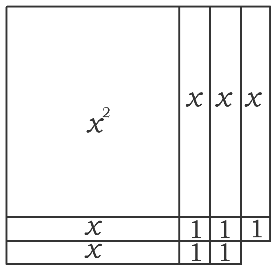
एक द्विघात समीकरण $x^2 + 5x + 5 = 0$ लीजिए ।

यहाँ मध्य पद $5x$ को विभाजित नही कर सकते क्यों कि $m + n = 5x$ और $mn = 5$ । इसका अर्थ यह है कि हम इस समीकरण को दो गुणक के गुणनफल के रूप में हल नही कर सकते और इसे गुणनखंड विधि से हल नही कर सकते । गुणनखण्ड विधि की यह सीमा है कि यदि मध्य पद को विभाजित नही कर सकते तो द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात नही कर सकते ।

ऐसे द्विघात समीकरण, जहाँ द्विघात बहुपद को गुणनखण्ड नही किया जा सकता, को कैसे हल किया जाए ?

हम दिए गए द्विघात समीकरण $x^2 + 5x + 5 = 0$ को चित्र द्वारा भी वर्णन कर सकते है । यह समझने के लिए कि इसे गुणक द्वारा हल किया जा सकता है कि नही ।

$x^2 + 5x + 5 \rightarrow$



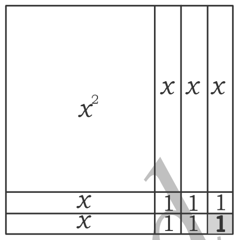
दिए गए चित्र को ध्यान से देखिए ।

दिया गया चित्र $x^2 + 5x + 5$ का वर्णन करता है जो कि न ही पूरा वर्ग या आयत है । इसका अर्थ यह है कि यदि इस चित्र को पूरा वर्ग अथवा आयत किया जाए तो हम इस समीकरण का हल ज्ञात कर सकते है ।

> इस तरह के अपूर्ण वर्ग अथवा आयत में कुछ राशि मिलाकर उसे पूर्ण वर्ग अथवा आयत में परिवर्तन कर सकते है । यह विधि जिसमे कुछ राशि को मिलाकर उसे पूर्ण वर्ग/आयत बनाने को वर्ग पूर्ण करने के विधि कहते हैं ।

उपर दिए गए समीकरण $x^2 + 5x + 5$ पर विचार करे । हम चित्र से यह देख सकते है कि $x^2 + 5x + 5$ एक पूरा वर्ग या आयत बनने के लिए 1^2 या 1 से कम है ।

दूसरे शब्दों में, $\{(x^2 + 5x + 5) + 1\}$ एक पूर्ण वर्ग बन सकता है और इसे गुणनखण्ड भी किया जा सकता है।



i.e., $x^2 + 5x + 5 + 1 = 0$

$\Rightarrow \therefore\ x^2 + 5x + 6 = 0$

$\Rightarrow\ (x + 3)(x + 2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ x = -2$

अब $x^2 + 5x + 5 = 0$ को हल पर विचार करें ।

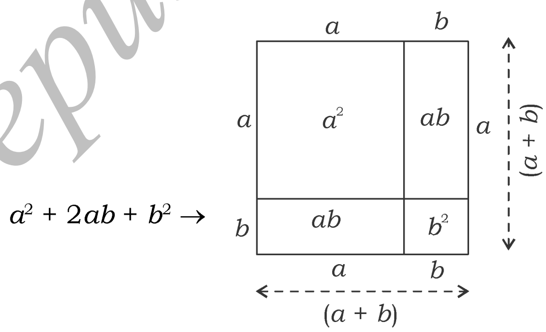
इसमें मध्य पद $4x$ है और इसे विभाजित नही किया जा सकता ताकि पदों का योग 4 है और उनका गुणनफल -5 है ।

इस तरह $n^2 + 5x + 5$ एक पूरा वर्ग नही है । दिए गए समीकरण में क्या जोडना अथवा घटाना चाहिए ताकि वह पूरा वर्ग बने ?

सर्वसमीका जो पूरा वर्ग है, उसका स्मरण करें

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$

यह दर्शाता है कि यदि द्विघात बहुपद $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में है तो उसे रैखिक गुणक के रूप मे हल कर सकते है ।



$a^2 + 2ab + b^2$ में, माध्य पद $2ab$ है

जहाँ 2 एक स्थिरांक है ।

a पहले पद का वर्गमूल है ।

b आखिरी पद का वर्गमूल है ।

अब, $x^2 + 5x - 5 = 0$ पर विचार कीजिए, यहाँ मध्य पद $5x$ है । $5x$ और $2ab$ की तुलना कीजिए ।

$2ab = 5x \quad \Rightarrow \quad 2 \times x \times b = 5x$

$\therefore b = \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$

ध्यान दीजिए, b जो **x के गुणांक का आधा है ।**

b का वर्ग कीजिए $b^2 = \frac{5}{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$x^2 + 5x = -5$ के बायें पक्ष को संपूर्ण वर्ग में परिवर्तित करने बायें पक्ष में $\frac{25}{4}$ में जोडना होगा। यदि बायें पक्ष में $\frac{25}{4}$ में जोडने से समीकरण का मूल्य बदलता है। मूल मूल्य बनाये रखने बाये पक्ष और दाहिने पक्ष में $\frac{25}{4}$ जोडना होगा।

अथवा बायें पक्ष में जोडना और घटाना होगा।

$x^2 + 5x + 5 = 0$ लीजिए

$\therefore x^2 + 5x = -5$

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 5 \qquad \therefore \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \qquad x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x + \frac{5}{2} = +\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{और} \quad x + \frac{5}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} \qquad\qquad x = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{\left(\sqrt{5} - 5\right)}{2} \qquad \text{और} \quad x = \frac{-\left(\sqrt{5} + 5\right)}{2}$$

$\therefore$ समीकरण $x^2 + 5x + 5 = 0$ के मूल है।

इस तरह हमन $x^2 + 5x + 5 = 0$ समीकरण को वर्ग पूर्ति करने से हल किया है। इसे वर्ग पूर्ण करने की विधिा कहते है।

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1: द्विघात समीकरण $x^2 + 6x - 7 = 0$ को वर्ग को पूर्ण करने की विधि से हल करे ।

हल :

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 - 7 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 2x + 9 = +16$

$\Rightarrow x(x + 3) + 3(x + 3) = 16$

$\Rightarrow (x + 3)(x + 3) = 16$

$\Rightarrow (x + 3)^2 = 4^2$

$\therefore x + 3 = \pm 4$

$2 \times a \times b = 6x$

$2 \times x \times b = 6x$

$b = \frac{6x}{2x}$

$b = 3$

$b^2 = 9$

दोनो पक्षों का वर्गमूल लीजिए,

(x का आधा गुणांक $= \frac{6}{2} = 3$)

यदि $x + 3 = 4$	$x + 3 = -4$
$x = 4 - 3$	$x = -4 - 3$
$x = 1$	$x = -7$

$\therefore x^2 + 6x - 7 = 0$ के मूल 1 और -7 है ।

उदाहरण 2: $3x^2 - 5x + 2 = 0$ को वर्ग को पूर्ण करने की विधि से हल करें ।

हल : $3x^2 - 5x + 2 = 0$

यहाँ x^2 का गुणांक 3 है जो कि शुद्ध वर्ग नही है ।

ऐसे द्विघात समीकरणों को दो प्रकार से हल कर सकते है ।

(i) समीकरण को 3 से गुणा करें ।

$\Rightarrow (3x^2 - 5x + 2 = 0) \times 3 \Rightarrow 9x^2 - 15x + 6 = 0$

x के गुणांक का आधा $\frac{5}{2}$ है ।

$\therefore\ b = \frac{5}{2}$ और $b^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

इस तरह $9x^2 - 15x + \left|\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = 0\right.$

$\Rightarrow (3x)^2 - 15x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6$

$\Rightarrow \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4} \Rightarrow 3x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore\ 3x - \frac{5}{2} = +\frac{1}{2}\ 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

$3x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\ 3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$

$3x = \frac{6}{2} = 3\ 3x = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore\ x = 1\ x = \frac{2}{3}$

(ii) समीकरण को 3 से विभाजित करें ।

$\Rightarrow (3x^2 - 5x + 2 = 0) \div 3 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$

पहले की तरह आगे बढे $\left\{\because b = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow b^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}$

$\therefore\ x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}$

$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} - \frac{2}{3} = \frac{1}{36}$

दोनो पक्षों का वर्गमूल लीजिए ।

$$x-\frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$$

$$\therefore x-\frac{5}{6} = +\frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{6}+\frac{1}{6} = \frac{6}{6}=1 \Rightarrow \therefore x = 1$$

$$x-\frac{5}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \Rightarrow \therefore x = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ द्विघात समीकरण $3x^2 - 5x + 2 = 0$ के मूल 1 और $\frac{2}{3}$ है ।

ऊपर दिए गए उदाहरणों से हम द्विघात समीकरण के मूल, वर्ग को पूर्ण करने की विधि से ज्ञात करने के चरण प्राप्त कर सकते है ।

चरण 1: समीकरण को मानक रूप में लिखिए ।

चरण 2: यदि x^2 का गुणांक 1 है तो चरण 3 शुरू कीजिए । यदि गुणांक 1 नही है तो समीकरण के दोनों पक्षों को x^2 के गुणांक से गुणा या विभाजन करें ।

चरण 3: x के गुणांक का आधा लेकर उसका वर्ग करें । इस संख्या को दोनो पक्षों में गुणा करे या समीकरण के बाएं पक्ष मे उसे जोडे और घटाए ।

चरण 4: वर्गमूल गुण द्वारा समीकरण को हल कीजिए ।
i.e., $x^2 = p \Rightarrow x = +\sqrt{p}$ या $x = -\sqrt{p}$ यहाँ P अ-ऋणात्मक संख्या है ।

अभ्यास 9.4

द्विघात समीकरण को वर्ग से पूर्ण करने की विधि से हल कीजिए ।

(i) $4x^2 - 20x + 9 = 0$ (ii) $4x^2 + x - 5 = 0$ (iii) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

(iv) $x^2 + 16x - 9 = 0$ (v) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (vi) $t^2 + 3t = 7$

हमें ज्ञात है कि गणित की गणना मे और समस्याओं को सुलझाने मे सूत्र का उपयोग, उन्हे आसान बना देता है । उसी तरह द्विघात समीकरण को भी सूत्र के द्वारा आसानी से हल किया जा सकता है । **द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने के लिए द्विघात सूत्र जो बहुत उपयोगि है, उसे वर्ग पूर्ण करने के विधि से ज्ञात कर सकते हैं ।** हम द्विघात सूत्र को प्राप्त करें और सीखें कि इसे द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने के लिए कैसे उपयोग करें ।

C) द्विघात समीकरण को सूत्र द्वारा हल करना :

एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ लीजिए ।

x^2 के गुणांक से समीकरण को विभाजित कीजिए । $\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0$

x के गुणांक का आधा ज्ञात कीजिए और उसका वर्ग लीजिए । $\Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{b}{a} = \frac{b}{2a} \quad \therefore \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

स्थिर $\frac{c}{a}$ को दाऐं पक्ष में स्थानान्तर कीजिए $\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

समीकरण के दोनों पक्षों में $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ को गुणा करें । $\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$

बाऐं पक्ष का गुणनफल कीजिए और दाऐं पक्ष को सरल कीजिए । $\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

समीकरण के दोनों पक्षों का वर्गमूल लीजिए ।

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\therefore$ द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ है । $\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{20}$ **को द्विघात सूत्र कहते है ।**

जान लीजिए

ऊपर व्युत्पत्ति में, हमने x^2 के गुणांक को निकाल दिया है (समीकरण को a से विभाजित करते हुए) जो कि परिपूर्ण वर्ग नही है । समीकरण को 4a से गुणा करके इसे हल कर सकते हैं । इस विधि को **श्रीधराचार्य विधि** (Sridharacharya's method) कहते है । श्रीधराचार्य (1025 A.D) को वर्ग पूर्ण करके द्विघात समीकरण हल करने के सूत्र प्राप्त करने का श्रेय दिया जाता है । प्राचीन भारतीय गणितज्ञ, श्रीधराचार्य द्वारा विकसित द्विघात सूत्र की व्युत्पत्ति का अध्ययन करें ।

द्विघात समीकरण का मानक रूप लीजिए ।

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ $a \neq 0$

दोनों पक्षों को $4a$ से गुणा कीजिए ।

$\Rightarrow \{(ax^2 + bx + c) = 0\} \times 4a$

$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

दोनों तरफ b^2 को जोडने पर

$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow (2ax)^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

दोनो तरफ वर्गमूल लेने पर

$\Rightarrow (2ax + b) = \pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\Rightarrow 2ax = -b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\Rightarrow x = -b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\therefore x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ अथवा $x=\frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

द्विघात सूत्र का उपयोग द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने में कर सकते है ।

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1: $x^2 - 7x + 12 = 0$ को सूत्र द्वारा हल करें ।

हल : $x^2 - 7x + 12 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है ।

यहाँ, $a = 1$, $b = -7$ और $c = 12$

द्विघात सूत्र, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

मूल्य प्रतिस्थापन करने के बाद,

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{7 \pm 1}{2}$$

यदि $x = \dfrac{7+1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$, $x = \dfrac{7-1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

$\therefore x^2 - 7x + 12 = 0$ के मूल्य 4 और 3 है ।

उदाहरण 2: $m^2 = 2 + 2m$ को हल कीजिए ।

हल : $m^2 = 2 + 2m$

समीकरण को मान्य रूप में लिखिए । i.e., $m^2 - 2m - 2 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ रूप मे है ।

यहाँ $a = 2$, $b = -2$, $c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (द्विघात सूत्र)} \Rightarrow x = \frac{-2(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$\therefore x = 1 + \sqrt{3}$ और $1 - \sqrt{3}$ समीकरण $m^2 = 2 + 2m$ के मूल है ।

उदाहरण 3: $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{4}{x+4}$ हो हल कीजिए ।

हल : $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{4}{x+4}$ समीकरण को सरल कीजिए ।

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{4}{x+4} - \frac{2}{x+2} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2(x+2) - 1(x+4)}{(x+4)(x+2)}\right] \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2x+4-x-4}{(x+4)(x+2)}\right]$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x}{(x+4)(x+2)} \Rightarrow (x + 4)(x + 2) = 2x(x + 1)$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 2x^2 + 2x$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$ यह एक द्विघात समीकरण है ।

यहाँ $a = 1,\ b = -4,\ c = -8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (1)(-8)}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = \frac{4(1 \pm \sqrt{3})}{2} = 2(1 \pm \sqrt{3}) \therefore\ x = 2(1+\sqrt{3}) \text{ और } x = 2(1-\sqrt{3})$$

$\therefore\ 2(1+\sqrt{3})$ और $2(1-\sqrt{3})$ द्विघात समीकरण के मूल है ।

उदाहरण 4: द्विघात सूत्र के द्वारा $x^2 + x - (a + 2)(a + 1) = 0$ हल कीजिए ।

हल : $x^2 + x - (a + 2)(a + 1) = 0$

यहाँ $a = 1,\ b = 1,\ c = -(a + 2)(a + 1)$ है ।

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\{(a+2)(a+1)\}}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\{-(a^2+3a+2)\}}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^2 + 12a + 8}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a^2 + 12a + 9}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a+3)^2}}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{-1 \pm 2a + 3}{2}$$

$$x = \frac{-1 + 2a + 3}{2} \qquad x = \frac{-1 + 2a - 3}{2}$$

$$x = \frac{2a + 2}{2} \qquad x = \frac{-2a - 4}{2}$$

$$x = a + 2 \qquad x = -(a + 2)$$

$\therefore\ x^2 + x - (a + 2)(a + 1) = 0$ मूल $(a + 2)$ और $-(a + 2)$ है ।

द्विघात समीकरण को हल द्विघात सूत्र के द्वारा करने के चरण इस प्रकार है ।

चरण 1: समीकरण को मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ मे लिखिए या समीकरण को मानक रूप मे ले आइए।
चरण 2: दिए गए समीकरण को सामान्य या मानक रूप से तुलना कीजिए और a, b, c के मूल्य पहचानिए ।
चरण 3: द्विघात सूत्र $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ लिखिए ।
चरण 4: a, b के मूल्य, सूत्र मे स्थानापन्न कीजिए ।
चरण 5: सरल कीजिए और मूल ज्ञात कीजिए ।

अभ्यास 9.5

द्विघात समीकरण को सूत्र द्वारा हल कीजिए ।

1. $x^2 - 4x + 2 = 0$
2. $x^2 - 2x + 4 = 0$
3. $2y^2 + 6y = 3$
4. $15m^2 - 11m + 2 = 0$
5. $8r^2 = r + 2$
6. $(2x + 3)(3x - 2) + 2 = 0$
7. $a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1)$
8. $x^2 + 8x + 6 = 0$

अब तक हमने सीखा है कि कैसे द्विघात समीकरण के मूल कई तरह की विधियों से ज्ञात कर सकते है । सभी मूल वास्तविक संख्या है । इन मूलों का क्या स्वभाव है? मूलों के स्वभाव को क्या निर्धारित करता है ।

वास्तव मे मूलो को ज्ञात किए बिना, मूलो का स्वभाव निर्धारित किया जा सकता है? कक्षा में चर्चा कीजिए और इन प्रश्नों के उत्तर ज्ञात कीजिए ।

द्विघात समीकरण के मूलों का स्वभाव

नीचे दिए हुए उदाहरणों का अध्ययन कीजिए ।

1. मान लीजिए एक समीकरण $x^2 - 2x + 1 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है ।

दोनों की तुलना कीजिए $a = 1,\ b = -2,\ c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) + \sqrt{(2)^2 - 4.1 \times 1}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Rightarrow x = \frac{2+0}{2}$$

$$x = \frac{2+0}{2} \text{ या } x = \frac{2-0}{2}$$

$\therefore$ **$x = 1$ या $x = 1$ $\rightarrow$ दोनो मूल बराबर है।**

2. समीकरण $x^2 - 2x - 3 = 0$ ले लीजिए ।

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है ।

$a = 1,\ b = -2,\ c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{+2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = \frac{2+4}{2} \text{ या}$$

$$x = \frac{2-4}{2}\quad x = \frac{6}{2} \text{ या } x = \frac{-2}{2}$$

$\therefore$ **$x = 3$ या $x = -1$ $\rightarrow$ दोनो मूल भिन्न है।**

3. समीकरण $x^2 - 2x + 3 = 0$ ले लीजिए ।

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप मे है ।

$a = 1,\ b = -2,\ c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2)^2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(3)}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{-2}}{2} \Rightarrow x = \frac{2(1 \pm \sqrt{-2})}{2} = 1 \pm \sqrt{-2}$$

$\boxed{x = 1 + \sqrt{-2}}$ या $\boxed{1 - \sqrt{-2}}$ $\rightarrow$ **मूल काल्पनिक है ।**

ऊपर दिए गए उदाहरणों से यह संक्षप्त होता है कि द्विघात समीकरण के मूल, वास्तविक और समान, वास्तविक और भिन्न अथवा काल्पनिक होते है ।

ध्यान रखिए कि, मूल का स्वभाव $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ का मूल्य निर्धारित करता है । हम कह सकते है कि $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ के मूल्य पर, मूल का स्वभाव निर्भर है ।

व्यंजक $b^2 - 4ac$ के मूल्य, $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल के स्वभाव से पहचान कराता है । इसे द्विघात समीकरण का **विवेचक** (discriminant) कहा जाता है । इसका संकेत Δ है और इसे पढा जाता है 'डेल्टा' ।

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल है ।

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- यदि $b^2 - 4ac = 0$

  तो समीकरण के दो समान मूल है जो कि वास्तविक है । इस तरह $x = \frac{-b}{2a}$

- यदि $b^2 - 4ac > 0$

  तो समीकरण के दो भिन्न मूल है जो कि वास्तविक है ।

  इस तरह $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- यदि $b^2 - 4ac < 0$

  तो समीकरण के वास्तविक मूल नही है ।

  क्योंकि $\sqrt{-(b^2 - 4ac)}$ को ज्ञात नही किया जा सकता । इसलिए हम कह सकते है कि यह काल्पनिक है।

  ऊपर पाए गए परिणाम नीचे तालिका मे लिखे है ।

विवेचक	**मूल का स्वभाव**
$\Delta = 0$	वास्तविक और समान
$\Delta > 0$	वास्तविक और भिन्न
$\Delta < 0$	काल्पनिक

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1: समीकरण $2x^2 - 5x - 1 = 0$ के मूलों का स्वभाव ज्ञात कीजिए ।

हल : यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है ।

गुणांक इस प्रकार है $a = 2,\ b = -5,\ c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(2)\ (-1) \Rightarrow \Delta = 25 + 8 \Rightarrow \Delta = 33$

$\therefore\ \Delta > 0$ इस तरह मूल वास्तविक और भिन्न है ।

उदाहरण 2: समीकरण $4x^2 - 4x + 1 = 0$ के मूलों का स्वभाव ज्ञात कीजिए ।

हल : $4x^2 - 4x + 1 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है ।

गुणांक $a = 4,\ b = -4,\ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(4)\ (1) \Rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0$

$\therefore\ \Delta = 0$ इस तरह मूल वास्तविक और समान है ।

उदाहरण 3: 'm' के कौन से मूल्यों के लिए समीकरण $x^2 + mx + 4 = 0$ के मूल (i) समान (ii) भिन्न है ।

हल : समीकरण $x^2 + mx + 4 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप मे है ।

गुणांक $a = 1,\ b = m,\ c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = m^2 - 4(1)(4) \Rightarrow \Delta = m^2 - 16$

(i) यदि मूल समान है, $\Delta = 0$

$\therefore\ m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \sqrt{16}$

$\therefore\ m = \pm 4$

(ii) यदि मूल भिन्न है तो $\Delta > 0$

$\therefore\ m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m^2 > 16 \Rightarrow m > \pm\sqrt{16}$

$\therefore\ m > 4$

अभ्यास 9.6

A. निम्न समीकरणों के मूलो के स्वभाव पर चर्चा कीजिए ।

i) $y^2 - 7y + 2 = 0$	ii) $x^2 - 2x + 3 = 0$	iii) $2n^2 + 5n - 1 = 0$
iv) $a^2 + 4a + 4 = 0$	v) $x^2 + 3x - 4 = 0$	vi) $3d^2 - 2d + 1 = 0$

B. **'m' के कौन से सकारात्मक मूल्यों के लिए निम्न समीकरणों के मूल**

1) **समान** 2) **भिन्न** 3) **काल्पनिक है ।**

i) a^2-ma+1=0 ii) x^2-mx+9=0

iii) r^2-(m+1) r+4=0 iv) mk^2-3k+1=0

C. **'P' का मूल्य ज्ञात कीजिए, जिसके लिए द्विघात समीकरण के समान मूल हो ।**

i) x^2-px+9=0 ii) $2a^2$+3a+p=0 iii) pk^2-12k+9=0

iv) $2y^2$-py+1=0 v) (p+1) n^2+2 (p+3)n+(p+8)=0

vi) (3p+1)c^2+2(p+1)c+p=0

द्विघात समीकरण के पदों के मूलों और गुणांको के बीच संबंध

यदि 'm' यदि 'n' द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल है तो

$$m = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad n = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$m+n = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$m+n = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$m+n = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \qquad \therefore \boxed{m+n = \frac{b}{a}}$$

$$mn = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

यदि m और n द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल है तो

मूलों का योग = (m+n) = $\frac{-b}{a}$

मूलों का गुणनफल = mn = $\frac{+c}{a}$

$$mn = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$mn = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$mn = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \qquad mn = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \boxed{mn = \frac{c}{a}}$$

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1: समीकरण $x^2 + 2x + 1 = 0$ के मूलों का योग और गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है

गुणांक a = 1, b = 2, c = 1

मान लीजिए m और n मूल है ।

i) मूलों का योग $m+n = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1}$ $\quad \therefore m+n = -2$

ii) मूलों का गुणनफल $mn = \frac{c}{a} = \frac{1}{1}$ $\quad \therefore mn = 1$

उदाहरण 2: समीकरण $3x^2 + 5 = 0$ के मूलों का योग और गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है ।

गुणांक a = 3, b = 0, c = 5

मान लीजिए p और q मूल है ।

i) मूलों का योग $p+q = \frac{-b}{a} = \frac{0}{3}$ $\quad \therefore p+q = 0$

ii) मूलों का गुणनफल $pq = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ $\quad \therefore pq = \frac{5}{3}$

उदाहरण 3: समीकरण $x^2 - (p + q)x + pq = 0$ के मूलों का योग और गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : गुणांक $a = 1$, $b = -(p + q)$, $c = pq$ है ।

i) मूलों का योग $m + n = \frac{-b}{a} \Rightarrow m + n = \frac{-[-(p+q)]}{1}$ $\therefore m+n = (p+q)$

ii) मूलों का गुणनफल $mn = \frac{c}{a} = \frac{pq}{1}$ $\quad \therefore mn = pq$

अभ्यास 9.7

द्विघात समीकरण के मूलों का योग और गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

1. $x^2 - 5x + 8 = 0$
2. $3a^2 - 10a - 5 = 0$
3. $8m^2 - m = 2$
4. $6k^2 - 3 = 0$
5. $pr^2 = r - 5$
6. $x^2 + (ab)\, x + (a + b) = 0$

द्विघात समीकरण की रचना करना :

हमें ज्ञात है कि, द्विघात समीकरण के मूल और उनके योग और गुणनफल को कैसे प्राप्त कर सकते है । क्या हम किसी द्विघात समीकरण की रचना कर सकते है । यदि उसके मूलों के योग और गुणनफल दिए गए हो?

यदि 'm' और 'n' मूल हो तो समीकरण का मानक रूप है :

x^2 – (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल = 0 $\therefore$ $x^2 - (m + n)x + mn = 0$.

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1: द्विघात समीकरण की रचना कीजिए, जिसके मूल 2 और 3 है ।

हल : मान लीजिए 'm' और 'n' मूल है ।

$\therefore$ $m = 2, n = 3$

मूलों का योग= $m + n = 2 + 3$ $\quad\therefore m + n = 5$

मूलों का गुणनफल = $mn = (2)(3)$ $\quad\therefore mn = 6$

मानक रूप $x^2 - (m + n)x + mn = 0$ है ।

$\Rightarrow x^2 - (5)x + (6) = 0$ $\quad\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

उदाहरण 2: द्विघात समीकरण की रचना कीजिए, जिसके मूल $3 + 2\sqrt{5}$ और $3 - 2\sqrt{5}$ है ।

हल : मान लीजिए कि 'm' और 'n' मूल है । $\quad\therefore m = 3 + 2\sqrt{5}$ और $n = 3 - 2\sqrt{5}$

मूलों का योग = $m + n = 3 + 2\sqrt{5} + 3 - 2\sqrt{5}$ $\quad\therefore m + n = 6$

मूलों का गुणनफल = $mn = (3 + 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5}) = (3)^2 - (2\sqrt{5})^2 = 9 - 20$ $\therefore mn = -11$

$x^2 - (m + n)x + mn = 0$ $\quad\therefore x^2 - 6x - 11 = 0$

उदाहरण 3: यदि समीकरण $x^2 - 3x + 1 = 0$ के मूल 'm' और 'n' है तो ज्ञात कीजिए ।

(i) $m^2n + mn^2$ $\quad$ **(ii) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ का मूल्य क्या होगा ।**

हल : समीकरण $x^2 - 3x + 1 = 0$ है ।

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है ।

इसके गुणांक $a = 1, b = -3, c = 1$ है ।

मान लीजिए 'm' और 'n' इसके मूल है ।

(i) मूलों का योग $m + n = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3$ $\quad\therefore m + n = 3$

(ii) मूलों का गुणनफल $mn = \frac{c}{a} = \frac{1}{1}$ $\quad\therefore mn = 1$

इस तरह,

(i) $m^2n + mn^2 = mn(m + n) = 1 \times 3 = 3$

(ii) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{n+m}{mn} = \frac{m+n}{mn} = \frac{3}{1} = 3$ $\quad\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 3$

उदाहरण 4: यदि समीकरण $x^2 - 3x + 4 = 0$ के मूल 'm' और 'n' है तो समीकरण की रचना कीजिए, जिसके मूल m^2 और n^2 है ।

हल : समीकरण $x^2 - 3x + 4 = 0$ है ।

इसके गुणांक $a = 1$, $b = -3$, $c = 4$ है ।

'm' और 'n' इसके मूल है ।

(i) मूलों का योग = $m + n = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1}$ $\quad \therefore m + n = 3$

(ii) मूलों का योगफल = $mn = \frac{c}{a} = \frac{4}{1}$ $\quad \therefore mn = 4$

यदि m^2 और n^2 मूल है, मूलो का योग

$m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = (3)^2 - 2(4) = 9 - 8$ $\quad \therefore m^2 + n^2 = 1$

मूलों का गुणनफल

$m^2n^2 = (mn)^2 = 4^2$ $\quad \therefore m^2n^2 = 16$

$x^2 - (m^2 + n^2)x + m^2n^2 = 0$

$x^2 - (1)x + (16) = 0$ $\quad \therefore x^2 - x + 16 = 0$

उदाहरण 5: यदि समीकरण $x^2 - 6x + q = 0$ का एक मूल दूसरे मूल से दुगना है तो 'q' का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

हल : समीकरण $x^2 - 6x + q = 0$ है ।

मान लीजिए 'm' और 'n' उसके मूल है ।

(i) मूलों का योग $m + n = \frac{-b}{a} = \frac{-(-6)}{1}$ $\quad \therefore m + n = 6$

(ii) मूलों का गुणनफल $mn = \frac{c}{a} = \frac{q}{1}$ $\quad \therefore mn = q$

यदि एक मूल m है तो दूसरा मूल $2m$ है ।

$\therefore$ $m = m$ और $n = 2m$

$m + n = 6 \Rightarrow m + 2m = 6 \Rightarrow 3m = 6$ $\quad \therefore m = \frac{6}{3} = 2$

हमे ज्ञात है $q = mn \Rightarrow q = m(2m) \Rightarrow 2m^2 = 2(2)^2 = 8$ $\quad \therefore q = 8$

उदाहरण 6: k का मूल्य ज्ञात कीजिए ताकि समीकरण $x^2 - 2x + (k + 3) = 0$ का मूल शून्य के बराबर हो।

हल : समीकरण $x^2 - 2x + (k + 3) = 0$ है ।

उसके गुणांक $a = 1$, $b = -2$, $c = k + 3$

मान लीजिए 'm' और 'n' मूल है ।

मूलों का गुणनफल = mn

$mn = \frac{c}{a} \Rightarrow mn = \frac{k+3}{1}$ $\therefore mn = k + 3$

क्योंकि 'm' और 'n' इसके मूल है और एक मूल शून्य के बराबर है तो

$m = m$ और $n = 0$, $mn = k + 3$

$\therefore m(0) = k + 3 \Rightarrow 0 = k + 3$ $\therefore k = -3$

अभ्यास 9.8

A. समीकरण की रचना कीजिए जिसके मूल है ।

i) 3 और 5 ii) 6 और –5 iii) –3 और $\frac{3}{2}$ iv) $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{2}$

v) $(2+\sqrt{3})$ और $(2-\sqrt{3})$ vi) $(-3+2\sqrt{5})$ और $(-3-2\sqrt{5})$

B. 1.यदि 'm' और 'n' समीकरण $x^2 - 6x + 2 = 0$ के मूल है, तो

(i) $(m + n)$ mn (ii) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ के मूल्य ज्ञात कीजिए ।

(iii) $m^2 n^2 + n^2m^2$ (iv) $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$

2. यदि समीकरण $3m^2 = 6m + 5$ के मूल 'a' और 'b' है तो

(i) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ (ii)$(a + 2b)$ $(2a + b)$ का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

3. यदि समीकरण $2a^2 - 4a + 1 = 0$ के मूल 'p' और 'q' है तो
(i)$(p + q)^2 + 4pq$ (ii)$p^3 + q^3$ के मूल्य ज्ञात कीजिए ।

4. एक द्विघात समीकरण की रचना कीजिए जिसके मूल $\frac{p}{q}$ और $\frac{q}{p}$ है ।

5. 'k' का मूल्य ज्ञात कीजिए ताकि समीकरण $x^2 + 4x + (k + 2) = 0$ का एक मूल्य शून्य के बराबर है ।

6. 'q' का मूल्य ज्ञात कीजिए ताकि समीकरण $2x^2 - 3qx + 5q = 0$ का एक मूल दूसरे से दुगना है ।

7. 'p' का मूल्य ज्ञात कीजिए ताकि समीकरण $4x^2 - 8px + 9 = 0$ के मूलों का अंतर 4 है ।

8. यदि समीकरण $x^2 + px + q = 0$ का एक मूल, दूसरे मूल से 3 गुणा होतो तो सिद्ध करे कि $3p^2 = 16q$.

D. द्विघात समीकरण को आलेख विधान से हल करना :

रैखिक समीकरण का आलेख खींचना और युगपत समीकरणों को आलेख द्वारा हल करना । आप जानते हैं।

अब द्विघात व्यक्तव्य का आलेख खींचना और द्विघात समीकरण को आलेख द्वारा हल करना सीखेंगे ।

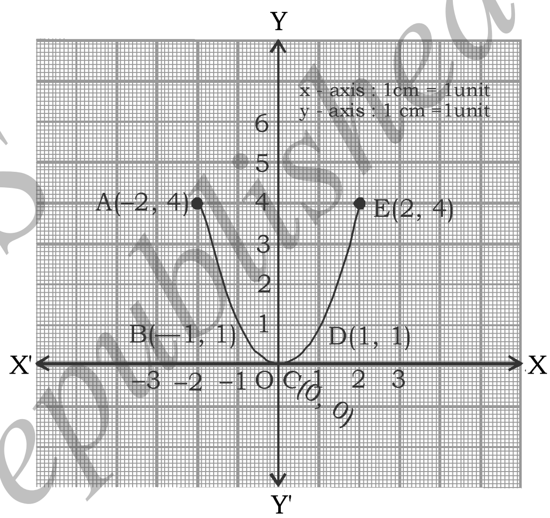
उदाहरण 1: $x^2 = 0$ वर्ग समीकरण को लीजिए । हमें आलेख निकालने के लिये बिन्दुओं निर्देशांक चाहिए । समझो $y = x^2$, इस समीकरण के लिये 'x' और 'y' की तालिका बनाईएँ ।

x	–2	–1	0	+1	+2
y	4	1	0	1	4

बिन्दु A(–2, 4), B(–1, 1), C(0, 0), D(1, 1) और E(2, 4) को आलेख पर स्थापित कीजिए ।

बिन्दुओं को जोडिए और एक वक्र रेखा बनाए ।

$y = x^2$ का आलेख एक वक्र रेखा (curved line) है।

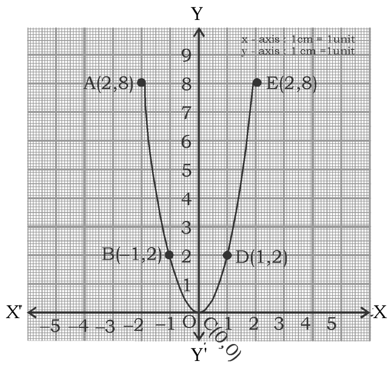


दो ओर द्विघात समीकरणों के आलेख का निरीक्षता कीजिए ।

उदाहरण 2: $2x^2 = 0$

समझो $y = \frac{1}{2}x^2$

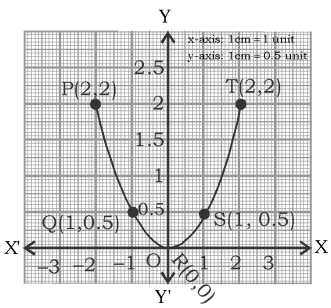
x	–2	–1	0	+1	+2
y	8	2	0	2	8



उदाहरण 3: $\frac{1}{2}x^2 = 0$

समझो $y = \frac{1}{2}x^2$

x	–2	–1	0	+1	+2
y	2	½	0	½	2



निरीक्षण कीजिए कि द्विघात समीकरणों $x^2=0$, $2x^2=0$ और $\frac{1}{2}x^2=0$ का आलेख वक्र रेखाँए है ।

यह वक्र रेखा जो द्विघात समीकरण का प्रतिनिधित्व करती है, उसे परवलय (Parabola) कहते है ।

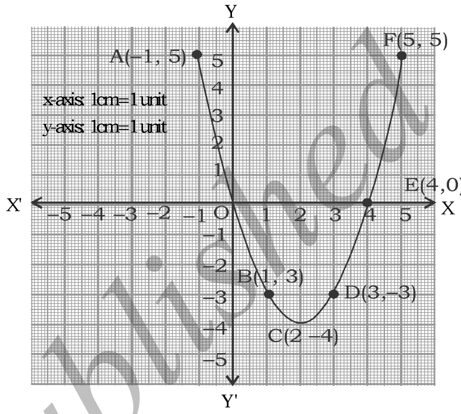
इन द्विघात समीकरणों के आलेख से हम यह निरीक्षण कर सकते है कि,

- आलेख का परवलय y-अक्ष से सममित है ।
- जिस बिन्दु पर वक्रता सबसे अधिक होती है उसे शीर्ष कहते है ।

  परवलय इस बिंदु पर एक मोड लेता है ।

  अब परवलय के बारे में कुछ ओर अधिक सीखेंगे ।

  दो व्यंजक $(x^2 - 4x)$ और $(-x^2 + 2x + 5)$ लीजिए ।



1. $x^2 - 4x$

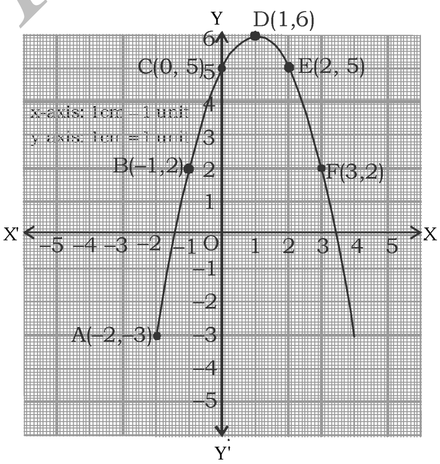
यहाँ a > 0

मान लीजिए $y = x^2 - 4x$

- मूल्यों का तालिका बनाइए ।

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	–3	–4	–3	0	5

- प्रत्येक जोडी (x, y) को ग्राफ मे दिखाइए ।
- बिन्दु के माध्यम से एक वक्र रेखा बनाइए ।



2. $-x^2 + 2x + 5$

यहाँ a < 0

मान लीजिए $y = -x^2 + 2x + 5$ है ।

- मूल्यों का तालिका बनाइए ।

x	–2	–1	0	1	2	3
y	–3	2	5	6	5	2

- प्रत्येक जोडी (x, y) को ग्राफ मे दिखाइए ।
- बिन्दु के माध्यम से एक वक्र रेखा बनाइए ।

ऊपर दो आलेख से हम यह निरीक्षण करते है कि,

$x^2 - 4x$	**$-x^2 + 2x + 5$**
• परिवलय ऊपर की तरफ खुलता है । • जब x की वृद्धि होती है तो y घटता है जबतक कि वह न्यूनतम मूल्य पर पहुँच जाता है । • y का सबसे न्यूनतम मूल्य –4 है ।	• परिवलय नीचे की तरफ खुलता है । • जब x की वृद्धि होती है तो y की वृद्धि भी होती है जब तक कि वह न्यूनतम अंक पर पहुँच जाता है । • y का सबसे उच्चतम मूल्य 6 है ।

अभ्यास 9.9

I. निम्न द्विघात समीकरणों का ग्राफ बनाइए ।

i) $y = -x^2$ ii) $y = 3x^2$ iii) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ iv) $y = x^2 - 2x$

v) $y = x^2 - 8x + 7$ vi) $y = (x + 2)(2 - x)$ vii) $y = x^2 + x - 6$ viii) $y = x^2 - 2x + 5$

द्विघात समीकरण के ग्राफ द्वारा (आलेख द्वारा) हल करना :

इस खंड में हमें द्विघात समीकरण को हल करने के आलेख विधि का अध्ययन करेंगे ।

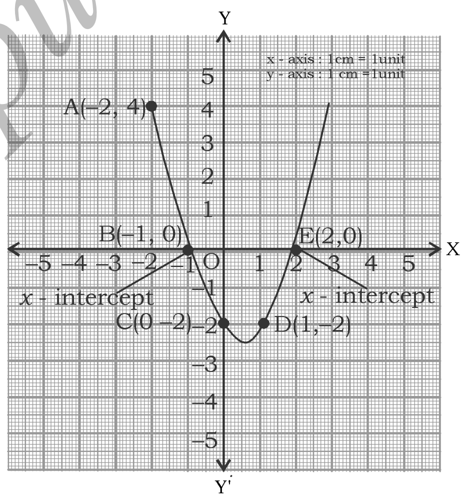
निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1: एक समीकरण $y = x^2 - x - 2$ लीजिए ।

हल : अब इस समीकरण का ग्राफ बनायेंगे और आलेख द्वारा मूल ज्ञात करेंगे ।

चरण 1: $y = x^2 - x - 2$ के मूल्य एक तालिका में लिखे ।

x	-2	-1	0	1	2
y	4	0	-2	-2	0



चरण 2: ग्राफ पर सभी बिंदुओं को दिखाइए ।

चरण 3: बिन्दुओ के द्वारा एक वक्र रेखा बनाइए ।

चरण 4: x अक्ष और वक्र रेखा के प्रतिच्छेदित बिन्दु पर निशान लगाइए ।

चरण 5: परिवलय, जहाँ x अक्ष को प्रतिच्छेद करता है वही समीकरण का मूल है ।

इसके निर्देशांक B(–1, 0) और D(2, 0) है ।

चरण 6: समीकरण के मूल $x = -1$ और $x = 2$

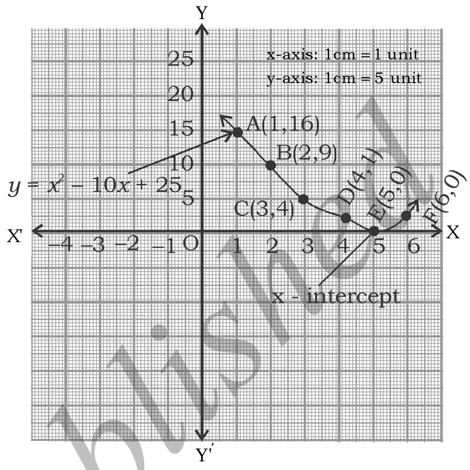
सत्यापन गुणनखंड विधि से

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x^2 + 1x - 2x - 2 = 0$$
$$x(x + 1) - 2(x + 1) = 0$$
$$(x + 2)(x - 2) = 0$$
$$\Rightarrow x + 1 - 0 \text{ या } x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow x = -1 \text{ or } x = 2$$

उदाहरण 2: द्विघात समीकरण $x^2 - 10x + 25 = 0$ को ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।

चरण 1: समीकरण $y = x^2 - 10x + 25$ के मूल्य एक तालिका में लिखिए ।

x	1	2	3	4	5	6
y	16	9	4	1	0	1



चरण 2: ग्राफ पर सभी बिंदुओं को दिखाइए । बिंदुओं को जोडते हुए वक्र रेखा बनाइए ।

चरण 3: x अक्ष और वक्र रेखा के प्रतिच्छेदित अंक पर निशान लगाइए ।

चरण 4: वक्ररेखा x अक्ष को एक बिन्दु (5, 0) पर प्रतिच्छेद करता है ।

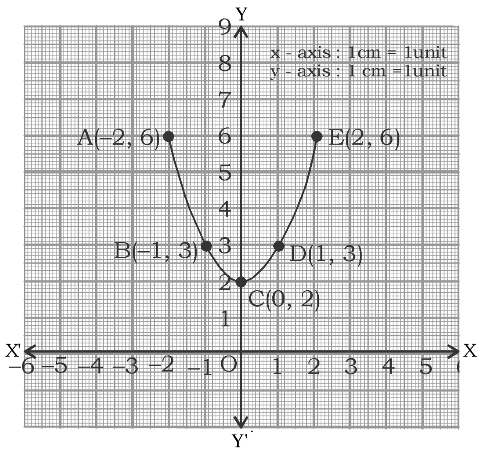
$\therefore$ समीकरण के मूल 5 और 5 है ।

उदाहरण 3: समीकरण $y = x^2 + 2$ का ग्राफ बनाइए और इसके मूल ज्ञात कीजिए ।

चरण 1: समीकरण $y = x^2 + 2$ के मूल्यों को तालिका मे लिखिए ।

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6

चरण 2: ग्राफ पर सभी बिंदुओं को दिखाइए । बिंदुओं को जोडते हुए एक वक्र रेखा बनाइए ।



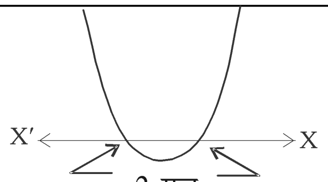
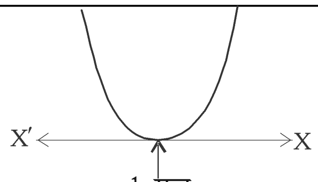
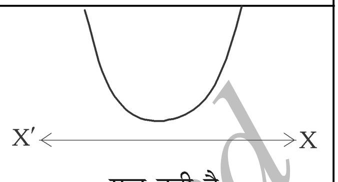
चरण 3: x अक्ष और वक्र रेखा के प्रतिच्छेदित अंक पर निशान लगाइए ।

वक्र रेखा, x अक्ष को प्रतिच्छेदित नही कर सकता ।

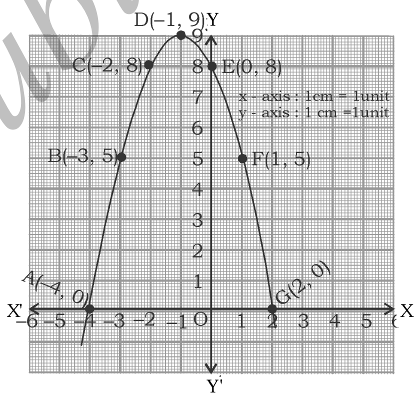
$\therefore x^2 + 2x = 0$ में x के वास्तविक मूल्य नही है ।

इस तरह इसके वास्तविक मूल नही है ।

आइए अब हम तालिका मे ऊपर दिए गए तीन उदाहरणों का विवरण रिकॉर्ड करते है ।

$x^2 - x - 2$	$x^2 - 10x + 25$	$x^2 + 2$
यह दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित होता है ।	यह एक बिंदु पर प्रतिच्छेदित होता है ।	यह किसी भी बिंदु पर प्रतिच्छेदित नही होता है।
 2 मूल	 1 मूल	 मूल नही है
$ax^2 + bx + c = 0$ के दो वास्तविक और असमान मूल है ।	$ax^2 + bx + c = 0$ के दो वास्तविक और दोहराते हुए मूल है ।	$ax^2 + bx + c = 0$ के वास्तविक मूल नही है ।
$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$

उदाहरण 4: द्विघात समीकरण $y = (2 - x)(4 + x)$ को ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।



चरण 1: दिया गया समीकरण $y = (2 - x)(4 + x)$ है ।

दाहिने पक्ष को सरल कीजिए और मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ मे लिखिए ।

$y = (2 - x)(4 + x)$

$y = -x^2 - 2x + 8$

चरण 2: समीकरण $y = -x^2 - 2x + 8$ के मूल्य तालिका में लिखिए ।

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2
y	0	5	8	9	8	5	0

चरण 3: x अक्ष का पैमाना 1 cm = 1 unit और y अक्ष का पैमाना 1 cm = 1 unit लीजिए ।

चरण 4: ग्राफ पर सभी बिन्दुओं को दिखाइए ।

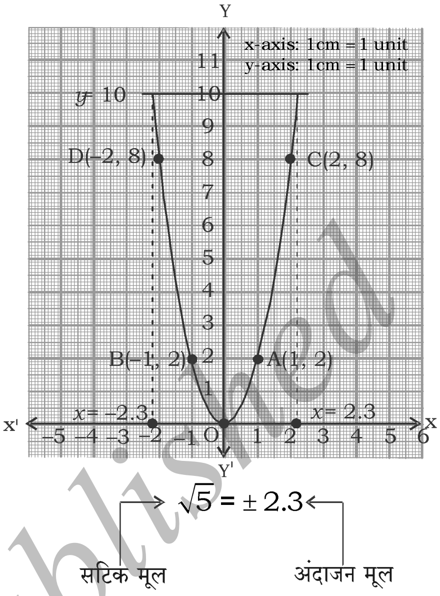
चरण 5: बिन्दुओं को जोडते हुए एक वक्र बनाइए ।

चरण 6: x अक्ष और वक्र के प्रतिच्छेदित बिन्दु पर निशान लगाइए ।

चरण 7: समीकरण के मूल, वक्र रेखा और x अक्ष के प्रतिच्छेदित बिन्दु है ।

इस तरह इसके मूल (2 और –4) है ।

उदाहरण 5: $y = 2x^2$ का ग्राफ बनाइए और $\sqrt{5}$ का मूल्य ग्राफ के द्वारा ज्ञात कीजिए ।



चरण 1: x और y के मूल्य जो $y = 2x^2$ को संतुष्ट करते है तालिका मे लिखिए ।

चरण 2: सारे बिन्दुओं को ग्राफ पर दिखाइए और परिवलय बनाइए ।

चरण 3: जब $x = \sqrt{5}$ है, तब $y = 10$ है । एक सीधी रेखा $y = 10$, x अक्ष के समांतर बनाइए ।

चरण 4: सीधी रेखा और परिवलय के प्रतिच्छेदित बिन्दुओं से x अक्ष पर लंबरेखा खींचिए ।

चरण 5: लंबरेखा, x अक्ष पर जिस बिन्दु पर मिलता है वह $\sqrt{5}$ का मूल्य है ।

$\sqrt{5} = \pm 2.3$ $\therefore x = \pm 2.3$

अभ्यास 9.10

I. निम्न द्विघात समीकरणों का ग्राफ बनाइए ।

i) $x^2 - 4x = 0$ ii) $x^2 + x - 12 = 0$

iii) $x^2 - x - 2 = 0$ iv) $x^2 - 5x + 6 = 0$

II. 1. $y = 2x^2$ का ग्राफ बनाइए और $\sqrt{7}$ का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

2. $y = \frac{1}{2}x^2$ का ग्राफ बनाइए और $\sqrt{10}$ का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

द्विघात समीकरणों के आधार पर समस्याओं को हल करना :

हमारे दैनिक जीवन में कई ऐसी स्थितियाँ आती है जिन्हें हम द्विघात समीकरणों के विधियों का उपयोग करते हुए हल कर सकते है । अब हम कुछ उदाहरण लेंगे ।

निदर्शी उदाहरण

उदाहरण 1: क्रमगत दो घनात्मक विषम संख्या का गुणनफल 195 है । संख्या का पता लगाए ।

हल: **चरण 1:** मान लीजिए कि एक घनात्मक विषम संख्या x है और दूसरी क्रमगत घनात्मक विषम संख्या $(x+2)$ है।

इनका गुणनफल $x(x + 2) = 195$

चरण 2: अब समीकरण को हल करे ।

$x^2 + 2x - 195 = 0$

$x^2 + 15x - 13x - 195 = 0$

$\therefore\ (x + 15)(x - 13) = 0$

$x + 15 = 0$ और $x - 13 = 0$

$\therefore\ x = -15$ और $x = 13$

चरण 3: संख्या घनात्मक होना चाहिए । इस तरह हम $x = -15$ नही ले सकते है ।

$\therefore\ x = 13$ और $x + 2 = 13 + 2 = 15$

$\therefore$ दो क्रमगत घनात्मक विषम संख्या 13 और 15 है ।

उदाहरण 2: अनिरूद्ध ने कुछ पुस्तकें ₹ 60 में खरीदी । उसे प्रत्येक पुस्तक 1 रूपये कम में मिलती अगर उसने 5 पुस्तकें अधिक उसी राशी में खरीदी होती । अनिरूद्ध ने कितनी पुस्तकें खरीदी और प्रत्येक पुस्तक की कीमत कितनी होती ।

हल: **चरण 1:** (समीकरण निर्धारण) मान लीजिए कि किताबों की संख्या = x

पुस्तकों की कुल कीमत = ₹ 60

$\therefore$ एक पुस्तक की कीमत = ₹ $\frac{60}{x}$

यदि पुस्तकों की संख्या $x + 5$ है तो प्रत्येक पुस्तक की कीमत = ₹ $\frac{60}{x+5}$

कीमत में अंतर ₹ 1 है	प्रत्येक पुस्तक की कीमत जब पुस्तकों की संख्या x है ।	प्रत्येक पुस्तक की कीमत जब पुस्तकों की संख्या $x + 5$ है ।

चरण 2: (समीकरण का समाधान)

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+5} = 1, \qquad \frac{60(x+5)-60x}{x(x+5)} = 1$$

$$\frac{60x+300-60x}{x^2+5x} = 1, \quad \frac{300}{x^2+5x} = \frac{1}{1}$$

$x^2 + 5x = 300, \quad x^2 + 5x - 300 = 0$

$x^2 + 20x - 15x - 300 = 0$

$x(x + 20) - 15(x + 20) = 0$

$(x + 20)(x - 15) = 0$

$\therefore x + 20 = 0$ या $x - 15 = 0$

$\therefore x = -20$ या $x = 15$

$\therefore$ पुस्तकों की संख्या $x = 15$

पुस्तक की कीमत नकारात्मक नही होती है । इस तरह -15 समाधान नही है ।

प्रत्येक पुस्तक की कीमत $= \frac{60}{x} = \frac{60}{15} =$ ₹ 4

अभ्यास 9.11

1. यदि दो लगातार सकारात्मक विषम संख्या के वर्गों का योग 130 है तो उन संख्याओं का पता लगाइए ।
2. यदि एक संख्या के चार गुना को उसके तीन गुना वर्ग से घटाए तो हमे 15 प्राप्त होता है । इस संख्या को ज्ञात कीजिए ।
3. दो वास्तविक संख्याओं का योग 8 है । यदि उनके विलोम का योग $\frac{8}{15}$ है तो संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4. एक दो अंकों की संख्या है । दोनो अंको का गुणनफल 12 है । जब इस संख्या में 36 का योग करते है तो उसके अंक अदल-बदल होते है । संख्या को ज्ञात कीजिए ।

5. तीन क्रमगत घनात्मक पूर्णांक ऐसे है कि पहले के वर्ग और अन्य दो के गुणनफल का योगफल 154 है । पूर्णांक ज्ञात कीजिए ।

6. काव्य और कार्तिक की उम्र 11 और 14 साल है । कितने साल के समय मे उनकी उम्र का गुणनफल 304 हो जाएगा ।

7. एक आदमी की उम्र उनके बेटे की उम्र के वर्ग का दुगुणा । आठ साल बाद, आदमी की उम्र 4 साल अपने बेटे के तीन बार उम्र से 4 वर्ष अधिक होगी । उनकी वर्तमान उम्र ज्ञात कीजिए ।

8. एक आयत का क्षेत्रफल 56 वर्ग सें.मी. । यदि उसके आधार का माप $(x + 5)$ है और उसकी ऊँचाई का माप $(x - 5)$ है तो आयत की लंबाई और ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

9. एक त्रिकोण की ऊँचाई उसके आधार से 6 सें.मी. अधिक है । यदि उसका क्षेत्रफल 108 सें.मी.^{2} तो उसका आधार ज्ञात कीजिए ।

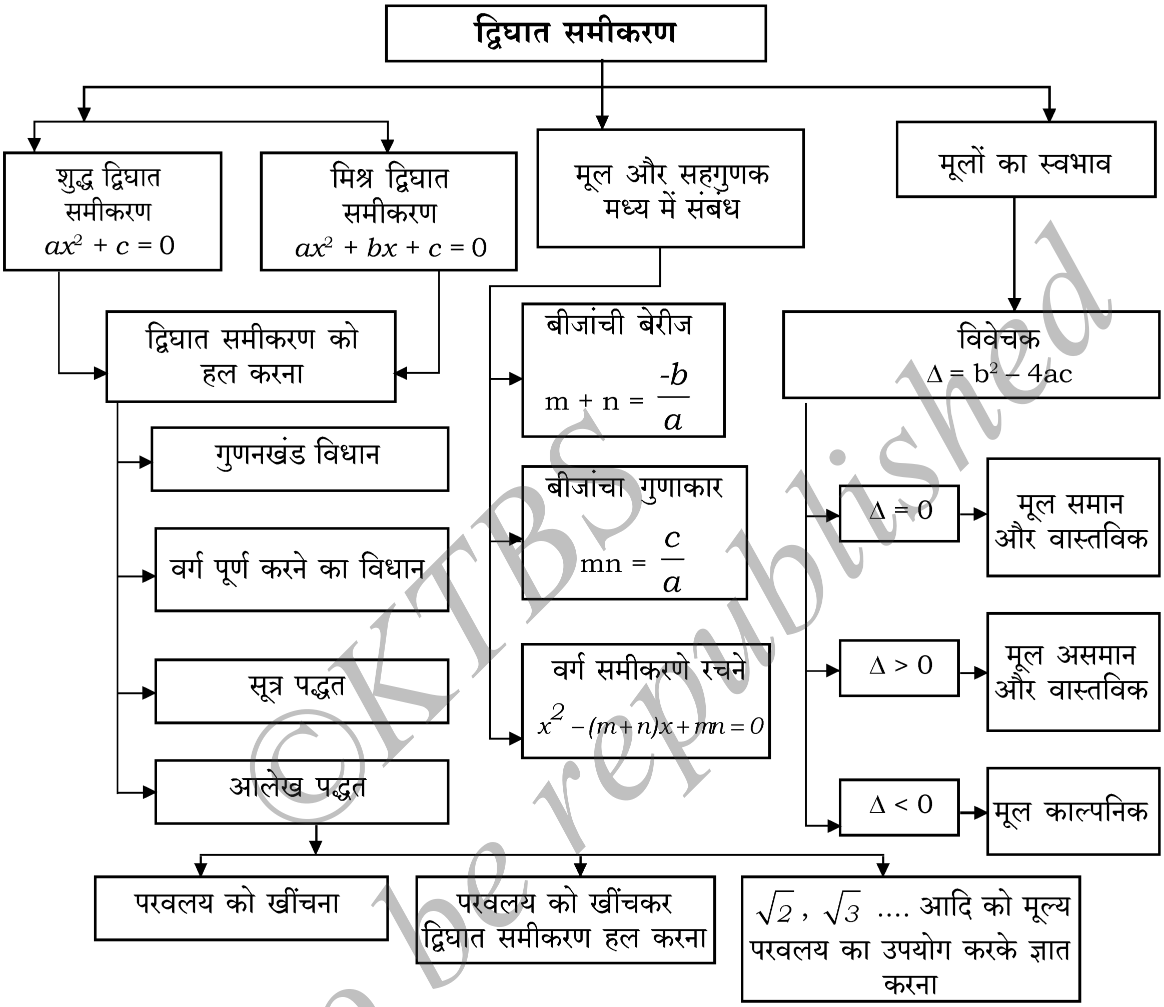
10. एक समचतुर्भुज ABCD में, विकर्ण $\overline{AC}$ and $\overline{BC}$ यह E पर प्रतिच्छेदित है । यदि $AE = x$, $BE = x + 7$ और $AB = x + 8$, तो विकर्ण $\overline{AC}$ and $\overline{BC}$ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

11. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ और $\overline{BD}$ ऊँचाई है उसके आधार $\overline{AC}$ से । यदि $DC = x$, $BD = 2x - 1$ और $BC = 2x + 1$, तो त्रिभुज के भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

12. एक मोटर बोट जिसकी गति स्थिर पानी में 15km/hr. है, अनुप्रवाह 30 कि.मी. जाने के बाद वापस 4 घंटे 30 मिनट मे आती है । धारा की गति ज्ञात कीजिए ।

13. एक व्यापारी, एक वस्तु रू.24 मे बेचता है । उसे उतना प्रतिशत लाभ होता है । जितनी कि उस वस्तु का लागत मूल्य (cost price) है । वस्तु का लागत मूल्य ज्ञात कीजिए ।

14. नंदन एक काम को करने में, से 6 दिन कम लेती है । यदि दोनों इकट्ठे मिलकर इस काम को करेंगे तो वह 4 दिन मे इस काम को कर सकते है । यदि अंकिता अकेले ही इस काम को करेगी तो वह कितने दिन लेगी?



उत्तर

अभ्यास 9.2

2. (i) ± 14 (ii) ± 5 (iii) ± 10 (iv) $\pm\frac{8}{7}$ (v) –2 or –14 (vi) ± 4 (vii) ± 9 (viii) ± 1

4. (i) $r = \pm\frac{7}{2}$ (ii) $l = \pm 4$ (iii) b = ± 15 (iv) $a = \pm 8$ (v) v = ± 10 (vi) v = ± 20

अभ्यास 9.3

1. $-10, -5$
2. $-2, 5$
3. $-3, 2$
4. $\frac{3}{2}, -4,$
5. $\frac{2}{3}, 1$
6. $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$
7. $-\sqrt{2}, \frac{5}{\sqrt{2}}$
8. $-2k, -2k$
9. $7, -1$
10. $\frac{5}{2}, 2$
11. $-\frac{1}{21}, 3$
12. $\frac{-3}{10}, \frac{1}{2}$
13. $-4, -4$
14. $\frac{3}{\sqrt{5}}, -\sqrt{5}$
15. $-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$
16. $\frac{5}{2}, 5$
17. $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$
18. $-\frac{5}{2}, 3$
19. $13, -5$
20. $6, -1$

अभ्यास 9.4

(i) $\frac{9}{2}, \frac{1}{2}$ (ii) $1, \frac{-5}{4}$ (iii) $-3, \frac{1}{2}$ (iv) $-8 \pm \sqrt{73}$ (v) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

(vi) $\frac{-3 \pm \sqrt{37}}{2}$ (vii) $29, 0$ (viii) $3, -1$ (ix) $\frac{2b}{a}, \frac{b}{a}$ (x) $\frac{-b \pm a}{2}$

अभ्यास 9.5

1. $4, 3$
2. $2 \pm \sqrt{2}$
3. $1 \pm \sqrt{-3}$
4. $\frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$
5. $\frac{2}{5}, \frac{2}{6}$
6. $\frac{1 \pm \sqrt{65}}{16}$
7. $\frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$
8. $\frac{1}{2}, \frac{-4}{3}$
9. $\frac{a \pm b}{2}$
10. $20, 8$
11. $a, \frac{1}{a}$
12. $\frac{a \pm b}{6}$
13. $\frac{9 \pm \sqrt{3}}{3}$
14. $\frac{58}{13}, 2$

अभ्यास 9.6

C. (i) ± 6 (ii) $\frac{9}{8}$ (iii) 4 (iv) $\pm 2\sqrt{2}$ (v) $\frac{1}{3}$ (vi) $1, -\frac{1}{2}$

अभ्यास 9.7

1. $5, 8$
2. $\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}$
3. $\frac{1}{8}, \frac{-1}{4}$
4. $0, \frac{-1}{2}$
5. $\frac{1}{p}, \frac{5}{p}$
6. $-ab, (a+b)$

अभ्यास 9.8

B 1. (i) 12 (ii) 3 (iii) 24

2. (i) $\frac{-22}{5}$ (ii) $\frac{19}{3}$ 3. (i) 6 (ii) 5 5. –2 6. 5 7. $\pm\frac{5}{2}$

अभ्यास 9.11

1. 7, 9
2. 3
3. 3, 5 अथवा 5, 3
4. 26
5. 8, 9, 10
6. 5
7. 32, 4
8. 14 सें.मी., 4 सें.मी.
9. 12 सें.मी., 18 सें.मी.
10. 10 सें.मी., 24 सें.मी.
11. 5 सें.मी., 8 सें.मी.
12. 17 सें.मी., 17 सें.मी., 16 सें.मी.
13. 5 कि.मी./घंटा
14. ₹20
15. 12 दिवस

* * * *