ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1219/119-125/છ, તા. 16-02-2019–થી મંજૂર

ગણિત

ભાગ I

ધોરણ XII

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

કિંમત : ₹ 104.00

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
ડૉ. વિપુલ શાહ
શ્રી રાજીવ ચોક્સી
શ્રી વિજય વોરા
ડૉ. રવિ બોરાણા
શ્રી મૃગેશ પારેખ

પરામર્શન

ડૉ. એ. કે. દેસાઈ
ડૉ. પી. જે. ભટ્ટ
ડૉ. પરેશ આઈ. અંધારિયા
ડૉ. પ્રકાશ ડાભી
પ્રો. એમ. જે. વચેણા
શ્રી પરિમલ બી. પુરોહિત
શ્રી નવરોજ બી. ગાંગાણી
શ્રી કૃપાલ એસ. પરીખ
શ્રી આર. વી. વૈષ્ણવ
શ્રી આર. ડી. મોઢા
શ્રી પી. પી. પટેલ
શ્રી હેમા એસ. પંડ્યા
શ્રી સચીન એસ. કામદાર
શ્રી ભદ્રેશ જે. ભટ્ટ

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી વિજય ટી. પારેખ

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-સંયોજન

શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા તા. 25/10/2017ના ઠરાવ ક્રમાંક મશભ/1217/1036/છ થી શાળા કક્ષાએ NCERTનાં પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્લી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ XII**ના **ગણિત (ભાગ I)** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક સ્ટેટ લેવલની કમિટીની રચના કરવામાં આવી. આ કમિટીની સાથે NCERTના પ્રતિનિધિ તરીકે RIE, ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે એક દ્વિદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું. જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ, શ્રી રાજીવ ચોક્સી, શ્રી પરિમલ પુરોહિત, શ્રી આર. વી. વૈષ્ણવ, શ્રી પી. પી. પટેલ, શ્રી નિલેશ એમ. કા.પટેલ, ડૉ. અશ્વનીકુમાર ગર્ગ (આર.આઈ.ઈ., ભોપાલ), ડૉ. સુરેશ મકવાણા (આર.આઈ.ઈ., ભોપાલ) ઉપસ્થિત રહી પોતાનાં કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરાં પાડ્યાં છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે, તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્લીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

અવંતિકા સિંઘ (IAS)

નિયામક	કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા. 3-4-2019	ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2019

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી શ્રી અવંતિકા સિંઘ, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P.K. Jain for guiding the work of this committee.

Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

PREFACE

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) had constituted 21 Focus Groups on Teaching of various subjects related to School Education, to review the National Curriculum Framework for School Education - 2000 (NCFSE - 2000) in face of new emerging challenges and transformations occurring in the fields of content and pedagogy under the contexts of National and International spectrum of school education. These Focus Groups made general and specific comments in their respective areas. Consequently, based on these reports of Focus Groups, National Curriculum Framework (NCF)-2005 was developed.

NCERT designed the new syllabi and constituted Textbook Development Teams for Classes XI and XII to prepare textbooks in mathematics under the new guidelines and new syllabi. The textbook for Class XI is already in use, which was brought in 2005.

The first draft of the present book (Class XII) was prepared by the team consisting of NCERT faculty, experts and practicing teachers. The draft was refined by the development team in different meetings. This draft of the book was exposed to a group of practicing teachers teaching mathematics at higher secondary stage in different parts of the country, in a review workshop organised by the NCERT at Delhi. The teachers made useful comments and suggestions which were incorporated in the draft textbook. The draft textbook was finalised by an editorial board constituted out of the development team. Finally, the Advisory Group in Science and Mathematics and the Monitoring Committee constituted by the HRD Ministry, Government of India have approved the draft of the textbook.

In the fitness of things, let us cite some of the essential features dominating the textbook. These characteristics have reflections in almost all the chapters. The existing textbook contain 13 main chapters and two appendices. Each Chapter contain the followings:

- Introduction: Highlighting the importance of the topic; connection with earlier studied topics; brief mention about the new concepts to be discussed in the chapter.
- Organisation of chapter into sections comprising one or more concepts/sub concepts.
- Motivating and introducing the concepts/sub concepts. Illustrations have been provided wherever possible.
- Proofs/problem solving involving deductive or inductive reasoning, multiplicity of approaches wherever possible have been inducted.
- Geometric viewing / visualisation of concepts have been emphasised whenever needed.
- Applications of mathematical concepts have also been integrated with allied subjects like science and social sciences.
- Adequate and variety of examples/exercises have been given in each section.

- For refocusing and strengthening the understanding and skill of problem solving and applicabilities, miscellaneous types of examples/exercises have been provided involving two or more sub concepts at a time at the end of the chapter. The scope of challenging problems to talented minority have been reflected conducive to the recommendation as reflected in NCF-2005.
- For more motivational purpose, brief historical background of topics have been provided at the end of the chapter and at the beginning of each chapter relevant quotation and photograph of eminent mathematician who have contributed significantly in the development of the topic undertaken, are also provided.
- Lastly, for direct recapitulation of main concepts, formulas and results, brief summary of the chapter has also been provided.

I am thankful to Professor Krishan Kumar, Director, NCERT who constituted the team and invited me to join this national endeavor for the improvement of mathematics education. He has provided us with an enlightened perspective and a very conducive environment. This made the task of preparing the book much more enjoyable and rewarding. I express my gratitude to Professor J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics, for his specific suggestions and advice towards the improvement of the book from time to time. I, also, thank Prof. G. Ravindra, Joint Director, NCERT for his help from time to time.

I express my sincere thanks to Professor Hukum Singh, Chief Coordinator and Head DESM, Dr. V. P. Singh, Coordinator and Professor S. K. Singh Gautam who have been helping for the success of this project academically as well as administratively. Also, I would like to place on records my appreciation and thanks to all the members of the team and the teachers who have been associated with this noble cause in one or the other form.

PAWAN K. JAIN
Chief Advisor
Textbook Development Committee

Textbook Development Committee

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

CHIEF ADVISOR

P.K. Jain, Professor, Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, Professor and Head, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBERS

Arun Pal Singh, Sr. Lecturer, Department of Mathematics, Dayal Singh College, University of Delhi, Delhi

A.K. Rajput, Reader, RIE, Bhopal, M.P.

B.S.P. Raju, Professor, RIE Mysore, Karnataka

C.R. Pradeep, Assistant Professor, Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka

D.R. Sharma, P.G.T., JNV-Mungeshpur, Delhi

Ram Avtar, Professor (Retd.) and Consultant, DESM, NCERT, New Delhi

R.P. Maurya, Reader, DESM, NCERT, New Delhi

S.S. Khare, Pro-Vice-Chancellor, NEHU, Tura Campus, Meghalaya

S.K.S. Gautam, Professor, DESM, NCERT, New Delhi

S.K. Kaushik, Reader, Department of Mathematics, Kirori Mal College, University of Delhi, Delhi

Sangeeta Arora, P.G.T., Apeejay School Saket, New Delhi-110017

Shailja Tewari, P.G.T., Kendriya Vidyalaya, Barkakana, Hazaribagh, Jharkhand

Vinayak Bujade, Lecturer, Vidarbha Buniyadi Junior College, Sakkardara Chowk, Nagpur, Maharashtra

Sunil Bajaj, Sr. Specialist, SCERT, Gurgaon, Haryana

MEMBER - COORDINATOR

V.P. Singh, Reader, DESM, NCERT, New Delhi

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a [1]**[SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC]** and to secure to all its citizens :

JUSTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the [2][unity and integrity of the Nation];

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949 do **HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.**

1. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Sovereign Democratic Republic" (w.e.f. 3.1.1977)
2. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Unity of the Nation" (w.e.f. 3.1.1977)

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: Jagdish Saran, Professor, Deptt. of Statistics, University of Delhi; Quddus Khan, Lecturer, Shibli National P.G. College Azamgarh (U.P.); P.K. Tewari, Assistant Commissioner (Retd.), Kendriya Vidyalaya Sangathan; S.B. Tripathi, Lecturer, R.P.V.V. Surajmal Vihar, Delhi; O.N. Singh, Reader, RIE, Bhubaneswar, Orissa; Miss Saroj, Lecturer, Govt. Girls Senior Secondary School No.1, Roop Nagar, Delhi; P. Bhaskar Kumar, PGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Lepakshi, Anantapur, (A.P.); Mrs. S. Kalpagam, PGT, K.V. NAL Campus, Bangalore; Rahul Sofat, Lecturer, Air Force Golden Jubilee Institute, Subroto Park, New Delhi; Vandita Kalra, Lecturer, Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri, District Centre, New Delhi; Janardan Tripathi, Lecturer, Govt. R.H.S.S. Aizawl, Mizoram and Ms. Sushma Jaireth, Reader, DWS, NCERT, New Delhi.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, Incharge, Computer Station, Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar and Nargis Islam, D.T.P. Operators, Monika Saxena,Copy Editor and Abhimanu Mohanty, Proof Reader.

The Contribution of APC-Office, administration of DESM and Publication Department is also duly acknowledged.

ભારતનું બંધારણ

ભાગ IV A (કલમ 51 A)

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજો નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતના સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓનાં ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને તેની સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવાની.

અનુક્રમણિકા

પ્રકરણ **1**

સંબંધ અને વિધેય

❖ *There is no permanent place in the world for ugly mathematics ... . It may be very hard to define mathematical beauty but that is just as true of beauty of any kind, we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognising one when we read it.* — *G. H. HARDY* ❖

1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે ધોરણ XI માં સંબંધો, વિધેયો, તેમના પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તારનો પરિચય મેળવ્યો. આપણે વિશિષ્ટ વાસ્તવિક મૂલ્યોવાળાં વિવિધ પ્રકારનાં વિધેયો અને તેમના આલેખો દ્વારા તેમની જે રજૂઆત કરી હતી તે સંકલ્પના યાદ કરો. જો બે પદાર્થ અથવા રાશિને જોડતી કોઈ કડી કે પરિચિત કરી શકાય તેવી સાંકળ હોય, તો તે બંને વસ્તુ અથવા રાશિ સંબંધિત છે તેમ કહેવાય છે. એ જ પ્રમાણે અંગ્રેજી ભાષાના શબ્દ ***Relation*** પરથી ગણિતમાં પણ સંબંધની સંકલ્પના લેવામાં આવી છે.

Lejeune Dirichlet
(C.E. 1805 - C.E. 1859)

એક શાળાના ધોરણ XII ના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ A લો અને એ જ શાળાના ધોરણ XI ના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ B લો. અહીં A થી B ના સંબંધો માટેનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલાં છે :

(i) $\{(a, b) \in A \times B$: a એ b નો ભાઈ છે$\}$,

(ii) $\{(a, b) \in A \times B$: a એ b ની બહેન છે$\}$,

(iii) $\{(a, b) \in A \times B$: a ની ઉંમર b ની ઉંમર કરતાં વધારે છે$\}$,

(iv) $\{(a, b) \in A \times B$: a એ અંતિમ પરીક્ષામાં પ્રાપ્ત કરેલા કુલ ગુણ એ b એ અંતિમ પરીક્ષામાં પ્રાપ્ત કરેલા કુલ ગુણ કરતાં ઓછા છે$\}$,

(v) $\{(a, b) \in A \times B$: a અને b એક જ વિસ્તારમાં રહે છે$\}$.

આમ છતાં, આપણે આ પરથી અનુરૂપ તારણ મેળવીને A થી B ના સંબંધ R ને ગાણિતિક રીતે $A \times B$ ના સ્વૈર ઉપગણ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

જો $(a, b) \in R$, તો આપણે કહીશું કે a એ b સાથે સંબંધ R દ્વારા સંબંધિત છે. આ તથ્યને આપણે aRb સ્વરૂપે લખીએ છીએ. વ્યાપક રીતે જો $(a, b) \in R$, તો એ જરૂરી નથી કે a અને b વચ્ચે કોઈ પરિચિત સંબંધ કે કડી હોય. આપણે ધોરણ XI માં જોયું છે કે, વિધેય એક ખાસ પ્રકારનો સંબંધ હોય છે.

આ પ્રકરણમાં, આપણે વિભિન્ન પ્રકારનાં સંબંધો અને વિધેયો, વિધેયોનાં સંયોજનો, વ્યસ્તસંપન્ન વિધેયો તથા દ્વિક્રિયાઓ વિશે અભ્યાસ કરીશું.

1.2 સંબંધોના પ્રકાર

આ વિભાગમાં આપણે વિભિન્ન પ્રકારના સંબંધો વિશે અભ્યાસ કરીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે A × A નો કોઈ પણ ઉપગણ એ ગણ A માં સંબંધ હોય છે. ખાલીગણ $\varnothing$ અને A × A એ આત્યંતિક સંબંધો છે. ઉદાહરણ તરીકે ગણ A = {1, 2, 3, 4} પર વ્યાખ્યાયિત એક સંબંધ R = $\{(a, b) : a - b = 10\}$નો વિચાર કરો. આ એક ખાલીગણ છે, કારણ કે શરત $a - b = 10$ નું સમાધાન કરે એવી A × A ની કોઈ પણ ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) ન મળે. આ જ પ્રમાણે R' = $\{(a, b) : |a - b| \geq 0\}$ એ પૂર્ણ ગણ A × A ને સમાન છે, કારણ કે A × A ની તમામ જોડ $(a - b)$, $|a - b| \geq 0$ નું સમાધાન કરે જ છે. આ બંને આત્યંતિક સ્થિતિ રજૂ કરતાં ઉદાહરણો આપણને નીચે આપેલ વ્યાખ્યાઓ માટે પ્રેરિત કરે છે :

વ્યાખ્યા 1 : ***જો ગણ A નો કોઈ પણ ઘટક A ના કોઈ પણ ઘટક સાથે સંબંધ R ધરાવતો ન હોય, તો Rને ગણ A પરનો રિક્ત (Void) સંબંધ કહે છે, એટલે કે R = $\varnothing \subset$ A × A.***

વ્યાખ્યા 2 : ***જો ગણ Aનો પ્રત્યેક ઘટક A ના પ્રત્યેક ઘટક સાથે સંબંધિત હોય, તો A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ Rને સાર્વત્રિક (Universal) સંબંધ કહેવાય છે, એટલે કે R = A × A થાય તો A સાર્વત્રિક સંબંધ છે.***

રિક્ત સંબંધ તથા સાર્વત્રિક સંબંધને ક્યારેક-ક્યારેક ***સહજ (Trivial) સંબંધ*** પણ કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : ધારો કે છોકરાઓની એક શાળાના બધા જ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ A છે. સાબિત કરો કે ગણ A પરનો સંબંધ R = $\{(a, b) : a$ એ b ની બહેન છે$\}$ રિક્ત સંબંધ છે અને

R' = $\{(a, b) : a$ અને b વચ્ચેની ઊંચાઈનો તફાવત 3 મીટર કરતાં ઓછો છે.$\}$ એ સાર્વત્રિક ગણ છે.

ઉકેલ : અહીં, છોકરાઓની શાળા હોવાથી, આ શાળાનો એક પણ વિદ્યાર્થી અન્ય કોઈ પણ વિદ્યાર્થીની બહેન હોઈ શકે નહિ. તેથી, R = ϕ, દર્શાવે છે કે R એ રિક્ત સંબંધ છે. અત્રે એ પણ સ્વયંસ્પષ્ટ છે કે, પ્રાકૃતિક રીતે શાળાના કોઈ પણ બે વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈઓનો તફાવત 3 મીટર કરતાં ઓછો જ હોય. આ સત્ય દર્શાવે છે કે R' = A × A એ સાર્વત્રિક સંબંધ છે.

નોંધ : ધોરણ XI માં સંબંધને દર્શાવવાની બે રીતોનો આપણે અભ્યાસ કર્યો છે : એક ***યાદીની*** અને બીજી ***ગુણધર્મની રીત (ગણ સર્જનની રીત).***

ઘણા લેખકો, ગણ {1, 2, 3, 4} પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R = $\{(a, b) : b = a + 1\}$ને '$b = a + 1$ હોય, તો અને તો જ aRb દ્વારા પણ દર્શાવે છે. જ્યારે પણ અનુકૂળ હોય ત્યારે આપણે આ સંકેતનો પણ ઉપયોગ કરીશું.

જો $(a, b) \in$ R તો આપણે કહીશું કે a, b સાથે R દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે અને આપણે તેને aRb વડે દર્શાવીશું.

જેની ગણિતશાસ્ત્રમાં એક સાર્થક ભૂમિકા છે, તે સામ્ય સંબંધ અત્યંત મહત્ત્વપૂર્ણ સંબંધ છે. સામ્ય સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે આપણે સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત કહેવાતા સંબંધોના ત્રણ પ્રકારોનો અભ્યાસ કરવો જરૂરી છે.

વ્યાખ્યા 3 : ***ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R માટે,***

(i) સ્વવાચકતા : ***જો પ્રત્યેક $a \in$ A માટે $(a, a) \in$ R, તો ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ Rને સ્વવાચક સંબંધ કહેવાય છે.***

(ii) સંમિતતા : ***જો પ્રત્યેક $a_1, a_2 \in$ A માટે $(a_1, a_2) \in$ R $\Rightarrow (a_2, a_1) \in$ R તો ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ Rને સંમિત સંબંધ કહેવાય છે.***

(iii) પરંપરિતતા : ***જો પ્રત્યેક $a_1, a_2, a_3 \in$ A માટે $(a_1, a_2) \in$ R તથા $(a_2, a_3) \in$ R $\Rightarrow (a_1, a_3) \in$ R તો ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ Rને પરંપરિત સંબંધ કહેવાય છે.***

વ્યાખ્યા 4 : ***જો ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R એ સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત સંબંધ હોય, તો સંબંધ Rને સામ્ય સંબંધ કહે છે.***

ઉદાહરણ 2 : જો T એ સમતલમાં આવેલા બધા જ ત્રિકોણોનો ગણ હોય અને R એ T પરનો સંબંધ

R = $\{(T_1, T_2) : T_1$ એ T_2 ને એકરૂપ છે$\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો સાબિત કરો કે R એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : પ્રત્યેક ત્રિકોણ તેને પોતાને એકરૂપ હોય છે. તેથી સંબંધ R એ સ્વવાચક સંબંધ છે.

હવે ધારો કે, $(T_1, T_2) \in R$

$\therefore$ ત્રિકોણ T_1 એ ત્રિકોણ T_2 ને એકરૂપ છે.

$\therefore$ ત્રિકોણ T_2 એ ત્રિકોણ T_1 ને એકરૂપ છે.

$\therefore$ $(T_2, T_1) \in R$

તેથી, R એ સંમિત સંબંધ છે.

હવે, ધારો કે $(T_1, T_2) \in R$, $(T_2, T_3) \in R$

$\therefore$ ત્રિકોણ T_1 એ ત્રિકોણ T_2 ને એકરૂપ છે અને ત્રિકોણ T_2 એ ત્રિકોણ T_3 ને એકરૂપ છે.

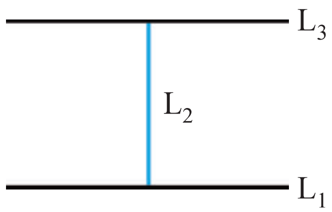
$\therefore$ ત્રિકોણ T_1 એ ત્રિકોણ T_3 ને એકરૂપ છે.

$\therefore$ $(T_1, T_3) \in R$

આમ, R એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 3 : જો L એ સમતલમાં આવેલી બધી જ રેખાઓનો ગણ હોય અને R એ L પરનો સંબંધ, $R = \{(L_1, L_2) : $ રેખા L_1 એ રેખા L_2 ને લંબ છે$\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો સાબિત કરો કે સંબંધ R એ સંમિત સંબંધ છે, પરંતુ સ્વવાચક કે પરંપરિત સંબંધ નથી.

ઉકેલ : સંબંધ R સ્વવાચક નથી, કારણ કે રેખા L_1 પોતાને જ લંબ ન હોઈ શકે, એટલે કે $(L_1, L_1) \notin R$.



આકૃતિ 1.1

ધારો કે $(L_1, L_2) \in R$

$\therefore$ રેખા L_1 એ રેખા L_2 ને લંબ છે.

$\therefore$ રેખા L_2 એ રેખા L_1 ને લંબ છે.

$\therefore$ $(L_2, L_1) \in R$

$\therefore$ R એ સંમિત સંબંધ છે.

R એ પરંપરિત સંબંધ નથી. જો રેખા L_1 અને રેખા L_2 પરસ્પર લંબ હોય તથા રેખા L_2 અને રેખા L_3 પરસ્પર લંબ હોય, તો રેખા L_1 ક્યારેય રેખા L_3 ને લંબ ન થાય. વાસ્તવમાં રેખા L_1 એ રેખા L_3 ને સમાંતર અથવા સંપાતિ છે. એટલે કે $(L_1, L_2) \in R$, $(L_2, L_3) \in R$, પરંતુ $(L_1, L_3) \notin R$. આથી R એ પરંપરિત સંબંધ નથી.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે ગણ $\{1, 2, 3\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ એ સ્વવાચક સંબંધ છે, પરંતુ તે સંમિત કે પરંપરિત સંબંધ નથી.

ઉકેલ : અહીં $(1, 1)$, $(2, 2)$ અને $(3, 3)$, સંબંધ Rમાં આવેલા છે, માટે R એ સ્વવાચક સંબંધ છે. તદુપરાંત $(1, 2) \in R$ છે, પરંતુ $(2, 1) \notin R$ હોવાથી R સંમિત સંબંધ નથી. આ જ પ્રમાણે, $(1, 2) \in R$ અને $(2, 3) \in R$, પરંતુ $(1, 3) \notin R$. તેથી R એ પરંપરિત સંબંધ નથી.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે પૂર્ણાંકોના ગણ Z પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$R = \{(a, b) : 2$ એ $(a - b)$ નો અવયવ છે$\}$ એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : અહીં બધા જ $a \in Z$ માટે, 2 એ $(a - a)$ (એટલે કે 0) નો અવયવ છે. તેથી R એ સ્વવાચક સંબંધ છે. વધુમાં, જો $(a, b) \in R$ તો 2 એ $(a - b)$ નો અવયવ છે. માટે 2 એ $(b - a)$ નો અવયવ પણ છે. તેથી, $(b, a) \in R$. આ દર્શાવે છે કે R એ સંમિત સંબંધ છે.

આ જ રીતે જો $(a, b) \in R$ અને $(b, c) \in R$ તો $a - b$ અને $b - c$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે $a - c = (a - b) + (b - c)$ એ યુગ્મ સંખ્યા છે. **(શા માટે ?)**

તેથી, $(a - c)$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

આ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે, R એ પરંપરિત સંબંધ છે. આમ, R એ Z પર સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 5 માં, નોંધ કરો કે બધા જ યુગ્મ પૂર્ણાંકોને R દ્વારા શૂન્ય સાથે સંબંધ છે, કારણ કે $(0, \pm 2)$, $(0, \pm 4)$,... વગેરે R માં છે અને કોઈ પણ અયુગ્મ પૂર્ણાંક 0 સાથે R દ્વારા સંબંધિત નથી, કારણ કે $(0, \pm 1)$, $(0, \pm 3)$,... વગેરે R માં નથી. આ જ પ્રમાણે બધા જ અયુગ્મ પૂર્ણાંકો 1 સાથે R દ્વારા સંબંધિત છે અને કોઈ પણ યુગ્મ પૂર્ણાંક 1 સાથે R દ્વારા સંબંધિત નથી. તેથી, Z ના ઉપગણો યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગણ E અને અયુગ્મ સંખ્યાઓનો ગણ O નીચેની શરતોનું પાલન કરે છે :

(i) E ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે R દ્વારા સંબંધિત છે અને O ના બધા જ ઘટકો પણ એકબીજા સાથે R દ્વારા સંબંધિત છે.

(ii) E નો કોઈ પણ ઘટક O ના એક પણ ઘટક સાથે R દ્વારા સંબંધિત નથી અને એનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

(iii) E અને O અલગ ગણો છે અને $Z = E \cup O$.

ઉપગણ **E** ને શૂન્યને સમાવતો **સામ્ય** વર્ગ કહે છે અને તેને [0] વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ જ પ્રમાણે, **O** એ 1 ને સમાવતો **સામ્ય** વર્ગ છે. તેને [1] વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

નોંધ કરો કે $[0] \neq [1]$, $[0] = [2r]$ અને $[1] = [2r + 1]$, $r \in Z$. વાસ્તવમાં, આપણે જે ઉપર જોયું તે ગણ X પરના કોઈ પણ સામ્ય સંબંધ માટે સત્ય છે.

આપેલ ગણ X પરનો કોઈ પણ સામ્ય સંબંધ R એ X નું પરસ્પર અલગ ઉપગણો A_i માં વિભાજન કરે છે. તેમને X ના ભાગ અથવા ઉપવિભાગ કહે છે અને તે નીચે આપેલ શરતોનું પાલન કરે છે :

(i) બધા જ i માટે, A_i ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે R દ્વારા સંબંધિત છે.

(ii) જો $i \neq j$ તો A_i નો એક પણ ઘટક, A_j ના કોઈ પણ ઘટક સાથે R દ્વારા સંબંધિત નથી.

(iii) $\cup A_j = X$ અને જો $i \neq j$ તો $A_i \cap A_j = \varnothing$.

ઉપગણો A_i ને સામ્ય વર્ગો કહે છે. આ સ્થિતિનો રસપ્રદ ભાગ એ છે કે, આપણે પાછા પણ ફરી શકીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, Z ને જેમનો યોગગણ Z હોય એવા ત્રણ પરસ્પર અલગ ઉપગણો A_1, A_2 તથા A_3 માં વિભાજન કરતા હોય તેવા સામ્ય ગણો વિશે વિચાર કરીએ.

$A_1 = \{x \in Z : x$ એ 3 નો ગુણક છે.$\}$

$= \{..., -6, -3, 0, 3, 6,...\}$

$A_2 = \{x \in Z : x - 1$ એ 3 નો ગુણક છે.$\}$

$= \{..., -5, -2, 1, 4, 7,...\}$

$A_3 = \{x \in Z : x - 2$ એ 3 નો ગુણક છે.$\}$

$= \{..., -4, -1, 2, 5, 8,...\}$

Z પર સંબંધ $R = \{(a, b) : 3$ એ $a - b$ નો અવયવ છે.$\}$ વ્યાખ્યાયિત કરો.

ઉદાહરણ 5 માં આપેલ તર્કબદ્ધ દલીલો અનુસાર આપણે સાબિત કરી શકીએ કે, R એ સામ્ય સંબંધ છે. વળી, A_1 એ Z માં આવેલા શૂન્ય સાથે સંબંધિત પૂર્ણાંકોનો ગણ દર્શાવે છે. A_2 એ 1 સાથે સંબંધિત પૂર્ણાંકોનો ગણ દર્શાવે છે અને A_3 એ Z માં આવેલા 2 સાથે સંબંધિત પૂર્ણાંકોનો ગણ દર્શાવે છે. આમ, $A_1 = [0]$, $A_2 = [1]$ અને $A_3 = [2]$.

વાસ્તવમાં, પ્રત્યેક $r \in Z$ માટે $A_1 = [3r]$, $A_2 = [3r + 1]$ અને $A_3 = [3r + 2]$.

ઉદાહરણ 6 : સંબંધ R એ ગણ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ પર $R = \{(a, b) : a$ અને b બંને અયુગ્મ અથવા બંને યુગ્મ$\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે R એ સામ્ય સંબંધ છે. એ સાથે જ સાબિત કરો કે $\{1, 3, 5, 7\}$ ના બધા જ ઘટકો R દ્વારા એકબીજા સાથે સંબંધિત છે અને $\{2, 4, 6\}$ ના બધા જ ઘટકો R દ્વારા એકબીજા સાથે સંબંધિત છે, પરંતુ $\{1, 3, 5, 7\}$ નો કોઈ પણ ઘટક ઉપગણ $\{2, 4, 6\}$ ના કોઈ પણ ઘટક સાથે R દ્વારા સંબંધિત નથી.

ઉકેલ : A ના કોઈ પણ ઘટક a માટે, a અને a બંને અયુગ્મ અથવા બંને યુગ્મ જ હોય. તેથી $(a, a) \in R$. તદુપરાંત, $(a, b) \in R \Rightarrow a$ અને b બંને અયુગ્મ અથવા બંને યુગ્મ જ હોય.

$\Rightarrow (b, a) \in R$

આ જ પ્રમાણે, $(a, b) \in R$ અને $(b, c) \in R \Rightarrow$ બધા જ ઘટકો a, b, c એકસાથે યુગ્મ અથવા અયુગ્મ જ હોવા જોઈએ.

$\Rightarrow (a, c) \in R$

તેથી, R સામ્ય સંબંધ છે. વધુમાં, $\{1, 3, 5, 7\}$ ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે સંબંધ R ધરાવે છે, કારણ કે આ ઉપગણના બધા જ ઘટકો અયુગ્મ સંખ્યાઓ છે. આ જ પ્રમાણે $\{2, 4, 6\}$ ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે સંબંધ R ધરાવે છે, કારણ કે બધા જ ઘટકો યુગ્મ સંખ્યાઓ છે. વળી, ઉપગણ $\{1, 3, 5, 7\}$ નો એક પણ ઘટક $\{2, 4, 6\}$ ના કોઈ પણ ઘટક સાથે સંબંધ ધરાવતો નથી, કારણ કે $\{1, 3, 5, 7\}$ના ઘટકો અયુગ્મ છે, જ્યારે $\{2, 4, 6\}$ ના ઘટકો યુગ્મ છે.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. નીચે આપેલ સંબંધો પૈકી પ્રત્યેક માટે તે સ્વવાચક, સંમિત અથવા પરંપરિત સંબંધ છે કે નહિ તે નક્કી કરો :

(i) ગણ $A = \{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$

(ii) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણ N પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$R = \{(x, y) : y = x + 5$ અને $x < 4\}$

(iii) ગણ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$R = \{(x, y) : y$ એ x વડે વિભાજ્ય છે.$\}$

(iv) પૂર્ણાંકોના ગણ Z પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$R = \{(x, y) : x - y$ એ પૂર્ણાંક છે.$\}$

(v) કોઈ ચોક્કસ સમયે કોઈ એક નગરમાં વસતા મનુષ્યોના ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R

(a) $R = \{(x, y) : x$ અને y એક જ સ્થળે કામ કરે છે.$\}$

(b) $R = \{(x, y) : x$ અને y એક જ વિસ્તારમાં રહે છે.$\}$

(c) $R = \{(x, y) : x$ ની ઊંચાઈ y ની ઊંચાઈ કરતાં બરાબર 7 સેમી વધારે છે.$\}$

(d) $R = \{(x, y) : x$ એ y ની પત્ની છે.$\}$

(e) $R = \{(x, y) : x$ એ y નો પિતા છે.$\}$

2. સાબિત કરો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ **R** પર $S = \{(a, b) : a \le b^2\}$ વડે વ્યાખ્યાયિત સંબંધ S સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત સંબંધ પૈકી એક પણ નથી.

3. ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ એ સ્વવાચક, સંમિત કે પરંપરિત સંબંધ છે કે નહિ તે ચકાસો.

4. સાબિત કરો કે **R** પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $S = \{(a, b) : a \le b\}$ એ સ્વવાચક અને પરંપરિત છે, પરંતુ સંમિત સંબંધ નથી.

5. **R** પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $S = \{(a, b) : a \le b^3\}$ એ સ્વવાચક, સંમિત અથવા પરંપરિત સંબંધ છે કે નહિ તે ચકાસો.

6. સાબિત કરો કે ગણ $\{1, 2, 3\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ સંમિત છે પરંતુ સ્વવાચક કે પરંપરિત સંબંધ નથી.

7. સાબિત કરો કે કૉલેજના ગ્રંથાલયનાં બધાં જ પુસ્તકોના ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(x, y) : x$ અને y નાં પૃષ્ઠોની સંખ્યા સમાન છે.$\}$ એ સામ્ય સંબંધ છે.

8. સાબિત કરો કે ગણ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(a, b) : |a - b|$ યુગ્મ છે$\}$ સામ્ય સંબંધ છે. સાબિત કરો કે $\{1, 3, 5\}$ ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે સંબંધ R ધરાવે છે અને $\{2, 4\}$ ના બધા જ ઘટકો એકબીજા સાથે સંબંધ R ધરાવે છે. પરંતુ $\{1, 3, 5\}$ નો એક પણ ઘટક $\{2, 4\}$ ના કોઈ પણ ઘટક સાથે સંબંધ R ધરાવતો નથી.

9. સાબિત કરો કે ગણ $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$ પર વ્યાખ્યાયિત નીચે દર્શાવેલ પ્રત્યેક સંબંધ R, એ સામ્ય સંબંધ છે. પ્રત્યેક વિકલ્પમાં 1 સાથે સંબંધ R ધરાવતા ઘટકોનો ગણ શોધો.

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$ એ 4 નો ગુણિત છે.$\}$

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

10. જે (i) સંમિત હોય પરંતુ સ્વવાચક કે પરંપરિત ના હોય.

(ii) પરંપરિત હોય પરંતુ સ્વવાચક કે સંમિત ના હોય.

(iii) સ્વવાચક અને સંમિત હોય પરંતુ પરંપરિત ના હોય.

(iv) સ્વવાચક અને પરંપરિત હોય પરંતુ સંમિત ના હોય.

(v) સંમિત અને પરંપરિત હોય પરંતુ સ્વવાચક ના હોય, તેવા સંબંધોનાં ઉદાહરણો આપો.

11. સાબિત કરો કે સમતલમાં આવેલાં બિંદુઓના ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(P, Q)$: ઊગમબિંદુથી બિંદુ P નું અંતર એ ઊગમબિંદુથી બિંદુ Q ના અંતર જેટલું જ છે$\}$ હોય, તો R એ સામ્ય સંબંધ છે. સાબિત કરો કે ઊગમબિંદુ સિવાયના બિંદુ P સાથે સંબંધ R ધરાવતા બધાં જ બિંદુઓનો ગણ એ P માંથી પસાર થતું અને ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળું વર્તુળ છે.

12. સાબિત કરો કે બધા જ ત્રિકોણોના ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(T_1, T_2)$: ત્રિકોણ T_1 એ ત્રિકોણ T_2 ને સમરૂપ છે$\}$, એ સામ્ય સંબંધ છે. ત્રણ કાટકોણ ત્રિકોણો, T_1 ની બાજુઓ 3, 4, 5; T_2 ની બાજુઓ 5, 12, 13 અને T_3 ની બાજુઓ 6, 8, 10 છે, તો T_1, T_2 અને T_3 માંથી કયા ત્રિકોણો સંબંધ R દ્વારા સંબંધિત છે ?

13. સાબિત કરો કે તમામ બહુકોણના ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ અને P_2 ની બાજુઓની સંખ્યા સમાન છે.$\}$ એ સામ્ય સંબંધ છે. 3, 4 અને 5 લંબાઈની બાજુઓવાળા કાટકોણ ત્રિકોણ સાથે સંબંધ R ધરાવતા ગણ A ના તમામ ઘટકોનો ગણ શું મળશે ?

14. XY સમતલની બધી જ રેખાઓનો ગણ L લો અને L પર સંબંધ $R = \{(L_1, L_2)$: રેખા L_1 એ રેખા L_2 ને સમાંતર છે$\}$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે R સામ્ય સંબંધ છે. જે રેખાઓ $y = 2x + 4$ સાથે સંબંધ R દ્વારા સંબંધિત હોય તેવી તમામ રેખાઓનો ગણ શોધો.

નોંધ : સ્વીકારી લો કે, પ્રત્યેક રેખા પોતાને સમાંતર છે.

પ્રશ્નો 15 તથા 16 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

15. ગણ $\{1, 2, 3, 4\}$ પર સંબંધ R એ $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ દ્વારા આપેલ છે.

(A) R એ સ્વવાચક અને સંમિત છે, પરંતુ પરંપરિત નથી.

(B) R એ સ્વવાચક અને પરંપરિત છે, પરંતુ સંમિત નથી.

(C) R એ સંમિત અને પરંપરિત છે, પરંતુ સ્વવાચક નથી.

(D) R એ સામ્ય સંબંધ છે.

16. સંબંધ R એ ગણ N પર $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ દ્વારા આપેલ છે.

(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

1.3 વિધેયોના પ્રકાર

આપણે ધોરણ XI માં વિધેયની સંકલ્પના સમજવા કેટલાંક વિશિષ્ટ વિધેયો તદેવ વિધેય, અચળ વિધેય, બહુપદીય વિધેય, સંમેય વિધેય, માનાંક વિધેય, ચિહ્ન વિધેય વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો હતો અને તેમના આલેખ દોર્યા હતા.

આપણે બે વિધેયોનાં સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારનો પણ અભ્યાસ કર્યો છે. ગણિતશાસ્ત્ર અને અધ્યયનની અન્ય શાખાઓમાં વિધેયની સંકલ્પના સર્વાધિક મહત્ત્વપૂર્ણ હોવાથી, આપણે વિધેય વિશેના આપણા અભ્યાસનો જ્યાં અંત કર્યો હતો ત્યાંથી તેને આગળ ધપાવીશું.

નીચે આપેલ આકૃતિઓ દ્વારા દર્શાવવામાં આવેલ વિધેયો f_1, f_2, f_3 અને f_4 નો વિચાર કરો.

આકૃતિ 1.2 માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, વિધેય f_1 ની અંતર્ગત X_1 ના ભિન્ન ઘટકોનાં પ્રતિબિંબ પણ ભિન્ન છે, પરંતુ f_2 ની અંતર્ગત બે ભિન્ન ઘટકો 1 અને 2 નાં પ્રતિબિંબ એક જ છે અને તે b છે. આગળ વધતાં X_2 ના કેટલાક ઘટકો e અને f એવા છે કે જે f_1 ની અંતર્ગત X_1 ના કોઈ પણ ઘટકનાં પ્રતિબિંબ નથી, જ્યારે X_3 ના બધા જ ઘટકો f_3 ને અંતર્ગત, X_1 ના કોઈક ને કોઈક ઘટકનાં પ્રતિબિંબ છે.

ઉપર્યુક્ત નિરીક્ષણ નીચે આપેલ વ્યાખ્યાઓનું સૂચન કરે છે :

વ્યાખ્યા 5 : *જો f ની અંતર્ગત X ના ભિન્ન ઘટકોનાં પ્રતિબિંબો પણ ભિન્ન હોય, તો વિધેય $f : X \to Y$ ને એક-એક (injective અથવા one-one) વિધેય કહે છે.*

એટલે કે *પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in X$ માટે $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ તો f એક-એક વિધેય છે.*

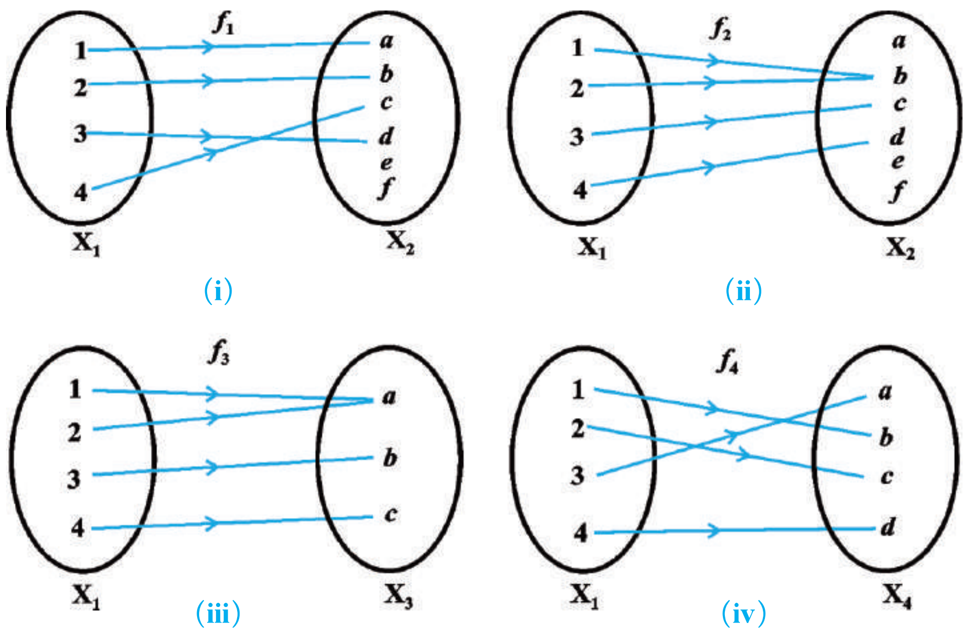
અન્યથા વિધેય f ને અનેક-એક વિધેય કહે છે.

આકૃતિ 1.2 (i) અને (iv) માં વિધેય f_1 અને f_4 એક-એક અને આકૃતિ 1.2 (ii) અને (iii) માં વિધેય f_2 અને f_3 અનેક-એક છે.

વ્યાખ્યા 6 : *જો Y નો પ્રત્યેક ઘટક એ X ના કોઈક ઘટકનું f ની અંતર્ગત પ્રતિબિંબ હોય, તો વિધેય $f : X \to Y$ ને વ્યાપ્ત (surjective અથવા onto) વિધેય કહે છે.*

એટલે કે પ્રત્યેક $y \in Y$ માટે X નો કોઈક ઘટક x મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય તો $f : X \to Y$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

વિધેય f_3 અને f_4 આકૃતિ 1.2 (iii), (iv) વ્યાપ્ત છે અને આકૃતિ 1.2 (i) માં વિધેય f_1 વ્યાપ્ત નથી. કારણ કે ઘટકો $e, f \in X_2$ એ f_1 ને અંતર્ગત X_1 ના કોઈ પણ ઘટકનાં પ્રતિબિંબો નથી.



આકૃતિ 1.2 (i) થી (iv)

નોંધ : જો $f : X \to Y$ વ્યાપ્ત હોય, તો અને તો જ fનો વિસ્તાર Y બને.

વ્યાખ્યા 7 : જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત બંને હોય તો વિધેય $f : X \to Y$ ને એક-એક અને વ્યાપ્ત (bijective અથવા one-one and onto) વિધેય કહે છે.

આકૃતિ 1.2 (iv) માં વિધેય f_4 એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

ઉદાહરણ 7 : એક શાળાના ધોરણ X ના બધા જ 50 વિદ્યાર્થીઓનો ગણ A છે.

વિધેય $f : A \to N$, '$f(x)$ = વિદ્યાર્થી x નો રોલ નંબર' દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે f એક-એક છે, પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

ઉકેલ : વર્ગમાં બે ભિન્ન વિદ્યાર્થીઓના રોલ નંબર સમાન નથી હોતા, એ બાબત જ્ઞાત છે. તેથી, f એક-એક વિધેય જ હોય. આમ, વ્યાપકતા ગુમાવ્યા સિવાય આપણે ધારી શકીએ કે વિદ્યાર્થીઓના રોલ નંબર 1 થી 50 છે. આનો અર્થ એ થયો કે $51 \in N$ એ આપેલ ધોરણના કોઈ પણ વિદ્યાર્થીનો રોલ નંબર નથી, એટલે કે 51 એ fની અંતર્ગત X ના કોઈ પણ ઘટકનું પ્રતિબિંબ ના હોઈ શકે. તેથી, વિધેય f એ વ્યાપ્ત નથી.

નોંધ : f વિધેય છે ? ખાતરી કરો.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે $f : N \to N$, $f(x) = 2x$ વડે વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક છે, પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in N$ માટે $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

તેથી, વિધેય f એક-એક છે.

f વ્યાપ્ત નથી, કારણ કે $1 \in N$ ને સંગત કોઈ પણ $x \in N$ અસ્તિત્વ ધરાવતો નથી કે જેથી $f(x) = 2x = 1$ થાય.

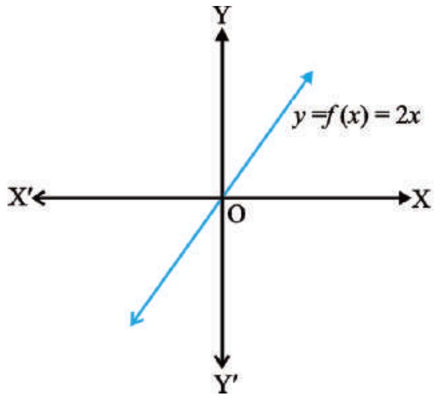
ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે વિધેય $f : R \to R$, $f(x) = 2x$ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in R$ માટે,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

તેથી, f એક-એક છે.

વળી, આપેલ વાસ્તવિક સંખ્યા $y \in R$ ને સંગત સંખ્યા $\frac{y}{2}$ R માં મળે કે જેથી, $f\left(\frac{y}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{y}{2}\right) = y$. આમ, f વ્યાપ્ત છે.



આકૃતિ 1.3

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે વિધેય $f : N \to N$, $f(1) = f(2) = 1$ અને પ્રત્યેક $x > 2$ માટે $f(x) = x - 1$, દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય તો f વ્યાપ્ત છે, પરંતુ એક-એક નથી.

ઉકેલ : અહીં, $f(1) = f(2) = 1$ હોવાથી, f એક-એક નથી. પરંતુ, f વ્યાપ્ત છે, કારણ કે આપેલ $y \in N$, $y \neq 1$ માટે આપણે $x = y + 1$ પસંદ કરી શકીએ, જેથી $f(y + 1) = y + 1 - 1 = y$.

નોંધ : $y \in N$, $y \neq 1 \Rightarrow y > 1 \Rightarrow y + 1 > 2$

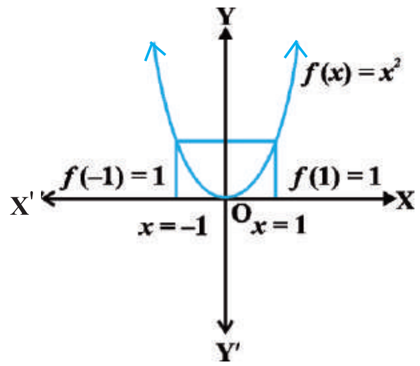
વળી, $1 \in N$ માટે, આપણી પાસે $f(1) = 1$ તો છે જ. આથી, f વ્યાપ્ત છે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી.

ઉકેલ : અહીં, $f(-1) = 1 = f(1)$ હોવાથી, f એક-એક નથી.

વળી, ઘટક $-2 \in R$ (R = સહપ્રદેશ) એ પ્રદેશ R ના કોઈ પણ ઘટક x નું પ્રતિબિંબ નથી (શા માટે ?).

તેથી f વ્યાપ્ત નથી.



f અંતર્ગત –1 તથા 1 નું પ્રતિબિંબ 1 છે.

આકૃતિ 1.4

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \text{ અયુગ્મ}, \\ x - 1, & x \text{ યુગ્મ} \end{cases}$$

એ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$.

આપણે નોંધીએ કે જો x_1 અયુગ્મ અને x_2 યુગ્મ હોય તો આપણને $x_1 + 1 = x_2 - 1$, એટલે કે $x_2 - x_1 = 2$ મળે છે, જે શક્ય નથી. આ જ દલીલનો ઉપયોગ કરીને x_1 યુગ્મ અને x_2 અયુગ્મ શક્યતાને પણ નકારી શકાય. તેથી, x_1 અને x_2 બંને યુગ્મ અથવા બંને અયુગ્મ જ હોવા જોઈએ. ધારો કે, x_1 અને x_2 બંને અયુગ્મ છે. તેથી, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

આ જ પ્રમાણે, જો x_1 અને x_2 બંને યુગ્મ હોય તો પણ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

આમ, f એક-એક વિધેય છે.

વળી, સહપ્રદેશ **N** ની કોઈ પણ અયુગ્મ સંખ્યા $2r - 1$ એ પ્રદેશ **N** ની સંખ્યા $2r$ નું પ્રતિબિંબ છે. ($r = 1, 2, 3,...$) તથા **N** ની કોઈ પણ યુગ્મ સંખ્યા $2r$ છે તે પ્રદેશ **N** ની સંખ્યા $2r - 1$ નું પ્રતિબિંબ છે.

આમ, f વ્યાપ્ત છે.

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે કોઈ પણ વ્યાપ્ત વિધેય $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ એ હંમેશાં એક-એક છે.

ઉકેલ : ધારો કે f એક-એક નથી. જેમનાં પ્રતિબિંબ સહપ્રદેશમાં એના એ જ મળે તેવા 1 અને 2 જેવા બે ઘટકો, પ્રદેશમાં મળે. વળી, f ને અંતર્ગત 3 નું પ્રતિબિંબ એક જ ઘટક હોઈ શકે છે. તેથી, વિસ્તાર ગણમાં વધુમાં વધુ સહપ્રદેશ $\{1, 2, 3\}$ ના બે ઘટકો હોઈ શકે છે. આ દર્શાવે છે કે f એ વ્યાપ્ત નથી. આ વિરોધાભાસી પરિણામ છે. તેથી, f એક-એક જ હોવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે કોઈ પણ એક-એક વિધેય $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ વ્યાપ્ત હોવું જ જોઈએ.

ઉકેલ : અહીં, f એક-એક છે, તેથી f ની અંતર્ગત $\{1, 2, 3\}$ ના ત્રણ ઘટકને સંગત સહપ્રદેશ $\{1, 2, 3\}$ ના ત્રણ ભિન્ન ઘટકો પ્રતિબિંબ તરીકે મળશે જ. તેથી, f વ્યાપ્ત હોય જ.

નોંધ : ઉપરનાં જે પરિણામોનો ઉલ્લેખ ઉદાહરણ 13 અને 14 માં છે તે ગમે તે સાન્ત ગણ X માટે પણ સત્ય છે, એટલે કે એક-એક વિધેય $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ એ આવશ્યક રીતે વ્યાપ્ત છે અને વ્યાપ્ત વિધેય $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ આવશ્યક રીતે એક-એક છે. પ્રત્યેક સાન્ત ગણ X માટે આ પરિણામના વિરોધાભાસમાં, ઉદાહરણ 8 અને 10 દર્શાવે છે કે અનંત ગણ માટે આ નિરીક્ષણ સત્ય ન પણ હોય. વાસ્તવમાં, આ સાન્ત ગણ અને અનંત ગણ વચ્ચેની લાક્ષણિકતાનો તફાવત છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. ધારો કે $\mathbf{R}^*$ તમામ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. સાબિત કરો કે વિધેય $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$ વડે વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. જો પ્રદેશ $\mathbf{R}^*$ ના બદલે **N** લેવામાં આવે અને સહપ્રદેશ $\mathbf{R}^*$ જ રહે તો શું આ પરિણામ સત્ય રહેશે ?
2. નીચે આપેલ વિધેયો એક-એક અથવા વ્યાપ્ત અથવા બંને ગુણધર્મ ધરાવતાં વિધેયો છે કે નહિ તે ચકાસો :
   (i) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = x^2$
   (ii) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x^2$
   (iii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$
   (iv) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = x^3$
   (v) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x^3$

3. સાબિત કરો કે $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = [x]$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત ***મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય (Greatest integer function)*** એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી. અહીં, $[x]$ એ x થી નાના અથવા x ને સમાન તમામ પૂર્ણાંકોમાં મહત્તમ પૂર્ણાંક દર્શાવે છે. બીજા શબ્દોમાં x થી અધિક નહિ તેવા પૂર્ણાંકોમાં સૌથી મોટો પૂર્ણાંક x છે.

4. સાબિત કરો કે માનાંક વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી. જો x ધન અથવા શૂન્ય (અનૃણ) હોય, તો $|x| = x$ અને x ઋણ હોય, તો $|x| = -x$.

5. સાબિત કરો કે ***ચિહ્ન વિધેય (Signum Function)*** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી.

6. A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7} છે અને વિધેય $f : A \to B$, $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે f એક-એક છે.

7. નીચે આપેલ પ્રત્યેક પ્રશ્નમાં આપેલાં વિધેય એક-એક છે કે નહિ, વ્યાપ્ત છે કે નહિ અથવા એક-એક અને વ્યાપ્ત છે કે નહિ તે નક્કી કરો. તમારા જવાબનું સમર્થન કરો :

(i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $f(x) = 3 - 4x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

(ii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $f(x) = 1 + x^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

8. A અને B આપેલ ગણ છે. સાબિત કરો કે $f : A \times B \to B \times A$, $f((a, b)) = (b, a)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

9. ધારો કે, $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & n \text{ અયુગ્મ} \\ \dfrac{n}{2}, & n \text{ યુગ્મ} \end{cases} \quad \forall n \in \mathrm{N}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય આપેલ છે. વિધેય f એક-એક છે કે નહિ તથા વ્યાપ્ત છે કે નહિ તે નિશ્ચિત કરો. તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

10. $A = \mathbf{R} - \{3\}$ અને $B = \mathbf{R} - \{1\}$ છે. $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f : A \to B$ નો વિચાર કરો. શું f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

પ્રશ્નો 11 તથા 12 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

11. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

(A) f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
(B) f અનેક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
(C) f એક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.
(D) f એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી.

12. વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

(A) f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
(B) f અનેક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
(C) f એક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.
(D) f એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી.

1.4 વિધેયોનું સંયોજન અને વ્યસ્તસંપન્ન વિધેય

આ વિભાગમાં આપણે વિધેયોનું સંયોજન તથા એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેયના વ્યસ્ત વિશે અભ્યાસ કરીશું. વર્ષ 2006 માં ધોરણ X ની બોર્ડની પરીક્ષા આપી ચૂકેલા બધા જ વિદ્યાર્થીઓના ગણ A નો વિચાર કરો. બોર્ડની પરીક્ષામાં બેસવાવાળા પ્રત્યેક વિદ્યાર્થીને બોર્ડ દ્વારા એક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક આપવામાં આવે છે. તેને વિદ્યાર્થી પરીક્ષાના

સમયે પોતાની ઉત્તરવહી પર લખે છે. ગોપનીયતા જાળવી રાખવા માટે બોર્ડ વિદ્યાર્થીઓના પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકને ઢાંકીને અથવા ભૂંસી નાખીને પ્રત્યેક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકને નકલી સાંકેતિક ક્રમાંકમાં પરિવર્તિત કરે છે. ધારો કે $B \subset \mathbf{N}$ તમામ પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકોનો ગણ છે તથા $C \subset \mathbf{N}$ નકલી સાંકેતિક ક્રમાંકોનો ગણ છે. હવે, બે વિધેયો પ્રસ્તુત થાય છે,

$f : A \to B$ અને $g : B \to C$

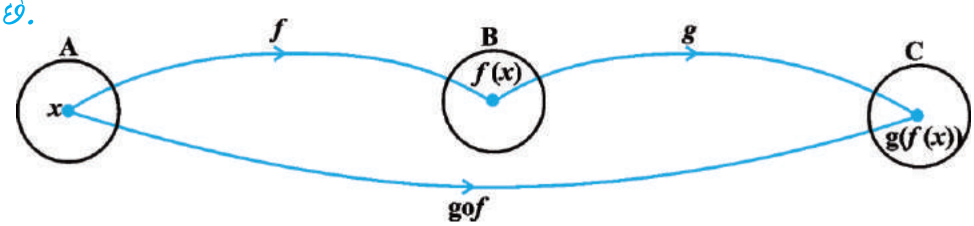
$f(a)$ = વિદ્યાર્થી a ને બોર્ડે આપેલો પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક તથા

$g(b)$ = પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક b ને સંગત આપવામાં આવેલો નકલી સાંકેતિક ક્રમાંક

આ પ્રક્રિયામાં વિધેય f દ્વારા પ્રત્યેક વિદ્યાર્થીને સંગત એક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક નિર્ધારિત થાય છે અને વિધેય g દ્વારા પ્રત્યેક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકને સંગત એક નકલી સાંકેતિક ક્રમાંક નિર્ધારિત થાય છે. આમ, આ બંને વિધેયોના સંયોજનથી પ્રત્યેક વિદ્યાર્થીને અંતે એક નકલી સાંકેતિક ક્રમાંક સાથે સંગત કરવામાં આવે છે.

આ પ્રક્રિયા પરથી નીચે આપેલ વ્યાખ્યા પ્રાપ્ત થાય છે.

વ્યાખ્યા 8 : ધારો કે, $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ બે વિધેયો છે. વિધેયો f અને g ના સંયોજનને gof દ્વારા દર્શાવાય છે, અને તે વિધેય $gof : A \to C$; $(gof)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.



આકૃતિ 1.5

ઉદાહરણ 15 : વિધેયો $f : \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$ અને $g : \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5 = f(5)$ અને $g(3) = g(4) = 7$ અને $g(5) = g(9) = 11$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો gof શોધો.

ઉકેલ : અહીં, આપણી પાસે $(gof)(2) = g(f(2)) = g(3) = 7$, $(gof)(3) = g(f(3)) = g(4) = 7$, $(gof)(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$ અને $(gof)(5) = g(f(5)) = g(5) = 11$.

$gof : \{2, 3, 4, 5\} \to \{7, 11, 15\}$ વિધેય મળે છે.

ઉદાહરણ 16 : જો $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અને $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $f(x) = cos\, x$ અને $g(x) = 3x^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો સાબિત કરો કે $gof \neq fog$.

નોંધ : પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $f(x) = g(x)$ તો $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $g : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ સમાન વિધેય થાય.

ઉકેલ : અહીં આપણી પાસે, $(gof)(x) = g(f(x)) = g(cos\, x) = 3(cos\, x)^2 = 3cos^2x$.

આ જ પ્રમાણે, $(fog)(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = cos(3x^2)$.

નોંધ કરો કે $x = 0$ માટે $3cos^2x \neq cos\, 3x^2$. તેથી, $gof \neq fog$.

ઉદાહરણ 17 : જો વિધેય $f : \mathbf{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$, $f(x) = \frac{3x+4}{5x-7}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય અને વિધેય $g : \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$, $g(x) = \frac{7x+4}{5x-3}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો સાબિત કે $fog = I_A$ અને $gof = I_B$, જ્યાં, $A = \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$, $B = \mathbf{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$;

$I_A(x) = x$, $\forall x \in A$, $I_B(x) = x$, $\forall x \in B$ ને અનુક્રમે ગણ A અને ગણ B પરનાં એકમ (તદેવ) વિધેયો કહે છે.

ઉકેલ : અહીં આપણી પાસે,

$$(gof)(x) = g\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right) = \frac{7\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right)+4}{5\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right)-3} = \frac{21x+28+20x-28}{15x+20-15x+21} = \frac{41x}{41} = x$$

આ જ પ્રમાણે, $(fog)(x) = f\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right)+4}{5\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right)-7} = \frac{21x+12+20x-12}{35x+20-35x+21} = \frac{41x}{41} = x$

આમ, $(gof)(x) = x$, $\forall x \in B$ અને $(fog)(x) = x$, $\forall x \in A$.

આ પરિણામ સૂચવે છે કે $gof = I_B$ અને $fog = I_A$.

ઉદાહરણ 18 : સાબિત કરો કે જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ એક-એક હોય, તો $gof : A \to C$ પણ એક-એક છે.

ઉકેલ : ધારો કે $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$

$\therefore \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\therefore \quad f(x_1) = f(x_2)$ (કારણ કે g એક-એક છે.)

$\therefore \quad x_1 = x_2$ (કારણ કે f એક-એક છે.)

આમ, gof એક-એક છે.

ઉદાહરણ 19 : જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ વ્યાપ્ત હોય, તો સાબિત કરો કે $gof : A \to C$ પણ વ્યાપ્ત છે.

ઉકેલ : g ને અંતર્ગત કોઈ પણ ઘટક $z \in C$ ને સંગત z નું એક પૂર્વ પ્રતિબિંબ $y \in B$ મળે, જેથી $g(y) = z$, કારણ કે g વ્યાપ્ત છે. આ જ પ્રમાણે $y \in B$ ને સંગત A માં એક ઘટક x મળે, જેથી $f(x) = y$, કારણ કે f વ્યાપ્ત છે.

આમ, $(gof)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

આથી પ્રત્યેક, $z \in C$ ને સંગત $x \in A$ મળે જેથી $(gof)(x) = z$.

આ પરથી એ સિદ્ધ થાય છે કે gof વ્યાપ્ત છે.

ઉદાહરણ 20 : એવાં બે વિધેયો f અને g નો વિચાર કરો કે, જેથી gof વ્યાખ્યાયિત હોય અને એક-એક હોય. શું f અને g બંને એક-એક હોય તે જરૂરી છે ?

ઉકેલ : વિધેય $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ એ $f(x) = x$, $\forall x$ અને

$g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ એ $x = 1, 2, 3, 4$ માટે $g(x) = x$ અને $g(5) = g(6) = 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. હવે, $(gof)(x) = x$, $\forall x$. આ બતાવે છે કે gof એક-એક છે. પરંતુ સ્પષ્ટપણે g એક-એક નથી.

ઉદાહરણ 21 : જો gof વ્યાપ્ત હોય તો f અને g બંને વ્યાપ્ત હોય તે જરૂરી છે ?

ઉકેલ : વિધેય $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $g = \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ અને $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = f(4) = 3$, $g(1) = 1$, $g(2) = 2$ અને $g(3) = g(4) = 3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો જોઈ શકાય છે કે gof વ્યાપ્ત છે, પરંતુ f વ્યાપ્ત નથી.

નોંધ : સામાન્ય રીતે ચકાસી શકાય છે કે જો gof એક-એક હોય તો f એક-એક હોય છે. આ જ પ્રમાણે gof વ્યાપ્ત હોય તો g વ્યાપ્ત હોય છે.

હવે આપણે આ વિભાગના પ્રારંભમાં બોર્ડની પરીક્ષાના સંદર્ભમાં વર્ણવેલ વિધેયો f અને g નો વિગતે વિચાર કરીશું. બોર્ડની ધોરણ X ની પરીક્ષા આપનારા પ્રત્યેક વિદ્યાર્થીને વિધેય f ની અંતર્ગત એક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક ફાળવવામાં આવે છે અને વિધેય g ની અંતર્ગત પ્રત્યેક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકને સંગત એક ગુપ્ત સાંકેતિક ક્રમાંક આપવામાં આવે છે. ઉત્તરવહીઓની ચકાસણી પછી પરીક્ષક પ્રત્યેક મૂલ્યાંકન કરેલી ઉત્તરવહી પર ગુપ્ત સાંકેતિક ક્રમાંકની સામે મેળવેલા ગુણ લખીને બોર્ડના કાર્યાલયમાં રજૂ કરે છે. બોર્ડના અધિકારી, g ની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા દ્વારા, પ્રત્યેક ગુપ્ત સાંકેતિક ક્રમાંકને બદલીને ફરીથી સંગત પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક પ્રદાન કરે છે, અને આ પ્રકારે મેળવેલા ગુણ ગુપ્ત સાંકેતિક ક્રમાંકને બદલે સીધા પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંક સાથે જોડાઈ જાય છે. ફરીથી, fની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા દ્વારા પ્રત્યેક પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકને એ જ પરીક્ષાર્થી-ક્રમાંકવાળા વિદ્યાર્થી સાથે પરિવર્તિત કરવામાં આવે છે. આનાથી મેળવેલા ગુણ સીધા જ સંબંધિત વિદ્યાર્થીના નામે સંકળાઈ જાય છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે f તથા g નું સંયોજન gof પ્રાપ્ત કરતી વખતે, પહેલાં f અને પછી g નો ઉપયોગ થાય છે, જ્યારે સંયોજન gof ની વ્યસ્ત પ્રક્રિયામાં, પહેલાં g ની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા કરવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ fની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 22 : $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$, $f(1) = a$, $f(2) = b$ અને $f(3) = c$ દ્વારા એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવેલ છે. સાબિત કરો કે એક વિધેય $g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે કે જેથી $gof = I_X$ અને $fog = I_Y$, જ્યાં $X = \{1, 2, 3\}$ અને $Y = \{a, b, c\}$.

ઉકેલ : ધારો કે વિધેય $g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ એ $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ અને $g(c) = 3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. હવે, એ ચકાસવું ઘણું સરળ છે કે સંયોજિત વિધેય $gof = I_X$ એ X પરનું તદેવ વિધેય છે અને સંયોજિત વિધેય $fog = I_Y$ એ Y પરનું તદેવ વિધેય છે.

નોંધ : એક રસપ્રદ તથ્ય નોંધી શકીએ કે ઉપર આપેલ ઉદાહરણમાં વર્ણવેલ પરિણામ કોઈ પણ સ્વૈર એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય $f : X \to Y$ માટે સત્ય છે.

કેવળ આ જ નહિ, તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે, એટલે કે જો $f : X \to Y$ એવું વિધેય હોય કે જેને સંગત વિધેય $g : Y \to X$ મળે કે જેથી $gof = I_X$ અને $fog = I_Y$, તો f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય છે.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા, ઉદાહરણ 22 તથા નોંધ નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે.

વ્યાખ્યા 9 : *જો એવું વિધેય $g : Y \to X$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $gof = I_X$ અને $fog = I_Y$, તો વિધેય $f : X \to Y$ ને વ્યસ્તસંપન્ન વિધેય કહે છે અને વિધેય g ને વિધેય f નું પ્રતિવિધેય કહે છે અને તેને f^{-1} તરીકે દર્શાવાય છે.*

આમ, જો વિધેય f વ્યસ્તસંપન્ન હોય, તો f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય તથા એથી ઊલટું, જો વિધેય f એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો f વ્યસ્તસંપન્ન પણ હોય. ખાસ કરીને જ્યારે fનું પ્રતિવિધેય શોધવાનું જરૂરી ન હોય ત્યારે આ તથ્ય વિધેય fને એક-એક અને વ્યાપ્ત સાબિત કરીને, તેને વ્યસ્તસંપન્ન પુરવાર કરવામાં મહત્ત્વપૂર્ણ રીતે ઉપયોગી થાય છે.

ઉદાહરણ 23 : ધારો કે, $f : \mathbf{N} \to Y$ એ $f(x) = 4x + 3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે, જ્યાં $Y = \{y \in \mathbf{N} :$ કોઈક $x \in \mathbf{N}$ માટે $y = 4x + 3\}$. સાબિત કરો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે. આ વિધેયનું પ્રતિવિધેય શોધો.

ઉકેલ : Y ના કોઈ યથેચ્છ ઘટક y નો વિચાર કરો. Y ની વ્યાખ્યા અનુસાર, પ્રદેશ $\mathbf{N}$ ના કોઈક x માટે $y = 4x + 3$. આ દર્શાવે છે કે $x = \frac{y-3}{4}$. હવે, $g(y) = \frac{y-3}{4}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $g : Y \to \mathbf{N}$ લો.

તેથી, $(gof)(x) = g(f(x)) = g(4x + 3) = \frac{4x+3-3}{4} = x$

અને $(fog)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = \frac{4(y-3)}{4} + 3 = y - 3 + 3 = y.$

નોંધ : $\frac{y-3}{4} \in \mathrm{N}$ અને $g : \mathrm{N} \to \mathrm{Y}$ વિધેય છે.

આ દર્શાવે છે કે $gof = \mathrm{I_N}$ અને $fog = \mathrm{I_Y}$, આનો અર્થ એ છે કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને g એ f નું પ્રતિવિધેય છે.

ઉદાહરણ 24 : ધારો કે $\mathrm{Y} = \{n^2 : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{N}$. વિધેય $f : \mathbf{N} \to \mathrm{Y}$, $f(n) = n^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે. fનું પ્રતિવિધેય શોધો.

ઉકેલ : Y નો યથેચ્છ ઘટક y એ કોઈક $n \in \mathbf{N}$ માટે n^2 સ્વરૂપનો છે. આનો અર્થ એ છે કે $n = \sqrt{y} \in \mathbf{N}$. વિધેય $g : \mathrm{Y} \to \mathbf{N}$, $g(y) = \sqrt{y}$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત છે.

હવે, $(gof)(n) = g(n^2) = \sqrt{n^2} = n$ અને $(fog)(y) = f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y.$

આ દર્શાવે છે કે $gof = \mathrm{I_N}$ અને $fog = \mathrm{I_Y}$.

તેથી, f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $f^{-1} = g$.

ઉદાહરણ 25 : વિધેય $f : \mathbf{N} \to \mathrm{S}$, $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે $f : \mathbf{N} \to \mathrm{S}$ એ વ્યસ્તસંપન્ન છે, જ્યાં S એ fનો વિસ્તાર છે. fનું પ્રતિવિધેય શોધો.

ઉકેલ : fના વિસ્તારનો કોઈ યથેચ્છ ઘટક y લો. તેથી, કોઈક $x \in \mathbf{N}$ માટે $y = 4x^2 + 12x + 15$. તેથી $y = (2x + 3)^2 + 6$.

તેથી $x = \frac{\sqrt{y-6}-3}{2}$ મળે છે, કારણ કે $y \geq 6$ તથા $x \in \mathbf{N}$.

ચાલો આપણે, વિધેય $g : \mathrm{S} \to \mathbf{N}$ ને $g(y) = \frac{\sqrt{y-6}-3}{2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$
\begin{aligned}
\text{હવે, } (gof)(x) = g(f(x)) &= g(4x^2 + 12x + 15) \\
&= g((2x+3)^2 + 6) \\
&= \frac{\sqrt{(2x+3)^2+6-6}-3}{2} \\
&= \frac{2x+3-3}{2} \\
&= x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{અને } (fog)(y) = f\left(\frac{\sqrt{y-6}-3}{2}\right) &= \left(2\left(\frac{\sqrt{y-6}-3}{2}\right)+3\right)^2 + 6 \\
&= \left(\sqrt{y-6}-3+3\right)^2 + 6 \\
&= \left(\sqrt{y-6}\right)^2 + 6 \\
&= y - 6 + 6 = y
\end{aligned}
$$

તેથી, $gof = \mathrm{I_N}$ અને $fog = \mathrm{I_S}$.

આનો અર્થ એ થયો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $f^{-1} = g$.

ઉદાહરણ 26 : વિધેયો $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ અને $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ એ $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$ અને $h(z) = sin\ z$, $\forall x, y, z \in \mathbf{N}$, દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે $ho(gof) = (hog)of$.

ઉકેલ : અહીં, પ્રત્યેક $x \in \mathbf{N}$ માટે,

$$(ho(gof))(x) = h((gof)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = sin(6x + 4)$$

તથા $$((hog)of)(x) = (hog)(f(x)) = (hog)(2x) = h(g(2x)) = h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = sin(6x + 4)$$

તેથી, $ho(gof) = (hog)of$.

આ પરિણામ વ્યાપક સ્વરૂપમાં પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 1 : ***જો $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ અને $h : Z \to S$ વિધેયો હોય, તો $ho(gof) = (hog)of$.***

સાબિતી : અહીં, આપણી પાસે,

$$(ho(gof))(x) = h((gof)(x)) = h(g(f(x))), \forall x \in X$$

અને $((hog)of)(x) = (hog)(f(x)) = h(g(f(x)))$, $\forall x \in X$

તેથી, $ho(gof) = (hog)of$.

ઉદાહરણ 27 : વિધેયો $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ અને $g : \{a, b, c\} \to$ {સફરજન, દડો, બિલાડી} એ $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $g(a) =$ સફરજન, $g(b) =$ દડો અને $g(c) =$ બિલાડી દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયો છે. સાબિત કરો કે f, g અને gof વ્યસ્તસંપન્ન વિધેયો છે. f^{-1}, g^{-1} અને $(gof)^{-1}$ શોધો અને સાબિત કરો કે $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

ઉકેલ : આપણે અહીં એ નોંધીએ કે વિધેયો f અને g એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેયો છે. વિધેયો $f^{-1} : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ અને g^{-1} : {સફરજન, દડો, બિલાડી} $\to \{a, b, c\}$ એ $f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$ અને $f^{-1}(c) = 3$, g^{-1} (સફરજન) $= a$, g^{-1} (દડો) $= b$ અને g^{-1} (બિલાડી) $= c$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. હવે, એ ચકાસવું સરળ છે કે $f^{-1}of = I_{\{1, 2, 3\}}$ અને $fof^{-1} = I_{\{a, b, c\}}$ અને $g^{-1}og = I_{\{a, b, c\}}$ તથા $gog^{-1} = I_D$, જ્યાં, D = {સફરજન, દડો, બિલાડી}.

હવે, $gof : \{1, 2, 3\} \to$ {સફરજન, દડો, બિલાડી} એ $(gof)(1) =$ સફરજન, $(gof)(2) =$ દડો, $(gof)(3) =$ બિલાડી દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. હવે, આપણે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ કે,

$(gof)^{-1}$: {સફરજન, દડો, બિલાડી} $\to \{1, 2, 3\}$, $(gof)^{-1}$ (સફરજન) $= 1$, $(gof)^{-1}$ (દડો) $= 2$, $(gof)^{-1}$ (બિલાડી) $= 3$. એ જોવું સરળ છે કે $(gof)\,o\,(gof)^{-1} = I_D$ તથા $(gof)^{-1}\,o\,(gof) = I_{\{1, 2, 3\}}$. આમ, આપણે જોયું કે f, g અને gof વ્યસ્તસંપન્ન છે.

હવે, $(f^{-1}og^{-1})$ (સફરજન) $= f^{-1}(g^{-1}$(સફરજન)$) = f^{-1}(a) = 1 = (gof)^{-1}$(સફરજન)

$(f^{-1}og^{-1})$ (દડો) $= f^{-1}(g^{-1}$(દડો)$) = f^{-1}(b) = 2 = (gof)^{-1}$(દડો) અને

$(f^{-1}og^{-1})$ (બિલાડી) $= f^{-1}(g^{-1}$(બિલાડી)$) = f^{-1}(c) = 3 = (gof)^{-1}$(બિલાડી)

આમ, $(gof)^{-1} : D \to \{1, 2, 3\}$, $f^{-1}og^{-1} : D \to \{1, 2, 3\}$ તથા $(gof)^{-1}(x) = (f^{-1}og^{-1})(x)$; $\forall x \in D$

તેથી, $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

ઉપર્યુક્ત પરિણામ વ્યાપક સ્વરૂપે પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 2 : ***ધારો કે વિધેયો $f : X \to Y$ અને $g : Y \to Z$ બે વ્યસ્તસંપન્ન વિધેયો છે, તો વિધેય gof પણ વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.***

સાબિતી : વિધેય gof વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$, સાબિત કરવા માટે $(f^{-1}og^{-1})\ o\ (gof) = I_X$ અને $(gof)\ o\ (f^{-1}og^{-1}) = I_Z$ બતાવવું પર્યાપ્ત છે.

હવે, $(f^{-1}og^{-1})\ o\ (gof) = ((f^{-1}og^{-1})\ og)\ of$ (પ્રમેય 1 પરથી)

$= (f^{-1}o\ (g^{-1}og))\ of$ (પ્રમેય 1 પરથી)

$= (f^{-1}oI_Y)\ of$ (g^{-1} ની વ્યાખ્યા પરથી)

$= I_X$

આ જ પ્રમાણે, $(gof)\ o\ (f^{-1}og^{-1}) = I_Z$ બતાવી શકાય.

ઉદાહરણ 28 : ધારો કે $S = \{1, 2, 3\}$. નીચે આપેલ વિધેય $f : S \to S$ નો વ્યસ્ત મળશે કે નહિ તે નક્કી કરો અને જો f^{-1} નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

નોંધ : અત્રે અને અન્યત્ર અગાઉ પણ આપણે સ્વીકારી લીધું છે કે વિધેયનો વ્યસ્ત અનન્ય છે.

(a) $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ (b) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$ (c) $f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$

ઉકેલ : (a) વિધેય f એ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે તે સ્પષ્ટ છે. તેથી f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $f^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = f$ જ છે.

(b) $f(2) = 1 = f(3)$ હોવાથી f એક-એક નથી. તેથી વિધેય f વ્યસ્તસંપન્ન નથી.

(c) વિધેય f એ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે તે જોવું સરળ છે. તેથી f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $f^{-1} = \{(3, 1), (2, 3), (1, 2)\}$.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. ધારો કે $f = \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$ અને $g = \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$ એ $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ અને $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયો છે. gof શોધો.

2. ધારો કે વિધેયો f, g અને h એ **R** થી **R** આપેલાં છે. સાબિત કરો કે, $(f + g)oh = foh + goh$
$(f \cdot g)oh = (foh) \cdot (goh)$

3. gof અને fog શોધો : (i) $f(x) = |x|$ અને $g(x) = |5x - 2|$
(ii) $f(x) = 8x^3$ અને $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

4. જો $f(x) = \dfrac{4x+3}{6x-4}$, $x \neq \dfrac{2}{3}$ હોય, તો બધા જ $x \neq \dfrac{2}{3}$ માટે સાબિત કરો કે $(fof)(x) = x$. f નું પ્રતિવિધેય શું છે ?

5. નીચે આપેલાં વિધેયોનાં પ્રતિવિધેય મળી શકશે ? કારણ સહિત નિર્ણય કરો.
(i) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{10\}$, $f : \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$
(ii) $g : \{5, 6, 7, 8\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $g : \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$
(iii) $h : \{2, 3, 4, 5\} \to \{7, 9, 11, 13\}$, $h : \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$

6. સાબિત કરો કે $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક છે. વિધેય $f : [-1, 1] \to f$નો વિસ્તાર $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, તો fનું પ્રતિવિધેય શોધો.

સૂચન : f ના વિસ્તારમાં આવેલ y ને સંગત કોઈક $x \in [-1, 1]$ માટે $y = f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ એટલે કે, $x = \dfrac{2y}{1-y}$.

7. ધારો કે વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 4x + 3$. સાબિત કરો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે. વિધેય fનું પ્રતિવિધેય શોધો.

8. વિધેય $f : \mathbf{R}^+ \to [4, \infty), f(x) = x^2 + 4$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને fનું પ્રતિવિધેય f^{-1} એ $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$ દ્વારા દર્શાવાય છે. અત્રે, $\mathbf{R}^+$ એ તમામ અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

9. વિધેય $f : \mathbf{R}^+ \to [-5, \infty), f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે f વ્યસ્તસંપન્ન છે અને $f^{-1}(y) = \left(\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right)$.

10. વિધેય $f : X \to Y$ વ્યસ્તસંપન્ન છે. સાબિત કરો કે fનું પ્રતિવિધેય અનન્ય છે.

(**સૂચન :** ધારો કે g_1 અને g_2 બંને વિધેય fનાં પ્રતિવિધેયો છે. તેથી પ્રત્યેક $y \in Y$ માટે $(fog_1)(y) = I_Y(y) = (fog_2)(y)$. વિધેય f એક-એક છે, તે સત્યનો ઉપયોગ કરો.

11. ધારો કે $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ એ $f(1) = a, f(2) = b$ અને $f(3) = c$ દ્વારા આપેલ છે. f^{-1} શોધો અને સાબિત કરો કે $(f^{-1})^{-1} = f$.

12. વિધેય $f : X \to Y$ એ વ્યસ્તસંપન્ન છે. સાબિત કરો કે f^{-1} નું પ્રતિવિધેય f છે, એટલે કે $(f^{-1})^{-1} = f$.

પ્રશ્નો 13 તથા 14 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

13. જો વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ દ્વારા આપેલ હોય, તો $(fof)(x) = ...$ છે.

(A) $x^{\frac{1}{3}}$ (B) x^3 (C) x (D) $(3 - x^2)$

14. વિધેય $f : R - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to R,\ f(x) = \frac{4x}{3x+4}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. fનું પ્રતિવિધેય,

વિધેય g : fનો વિસ્તાર $\to R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ એ .... દ્વારા મળે છે.

(A) $g(y) = \frac{3y}{3-4y}$ (B) $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$ (C) $g(y) = \frac{4y}{3-4y}$ (D) $g(y) = \frac{3y}{4-3y}$

1.5 દ્વિક્ક્રિયાઓ

શાળાના દિવસોથી જ તમે ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ મુખ્યત્વે સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારથી પરિચિત છો. આ પ્રક્રિયાઓની મુખ્ય વિશેષતા એ છે કે, આપણે આપેલ કોઈ પણ બે સંખ્યાઓ a અને b ને અનન્ય સંખ્યા $a + b$ અથવા $a - b$ અથવા ab અથવા $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ સાથે સંગત કરી શકીએ છીએ. આપણે નોંધીએ કે એક સમયે, માત્ર બે સંખ્યાઓનો જ સરવાળો અથવા ગુણાકાર કરી શકાય છે, જ્યારે ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો કરવાની જરૂરિયાત હોય ત્યારે પહેલા આપણે બે સંખ્યાઓનો સરવાળો કરીએ છીએ અને પછી મળતી સંખ્યામાં ત્રીજી સંખ્યાને ઉમેરીએ છીએ. આમ સરવાળો, ગુણાકાર, બાદબાકી અને ભાગાકાર એ *દ્વિક્ક્રિયા* (***Binary Operations***) નાં ઉદાહરણો છે, કારણ કે 'દ્વિક્'નો અર્થ થાય છે બે. જો આપણે જેમાં આ ચારેય પ્રક્રિયાઓ આવી જતી હોય એવી વ્યાપક વ્યાખ્યાની ઈચ્છા રાખતા હોઈએ, તો સંખ્યાઓના ગણની જગ્યાએ કોઈ યથેચ્છ ગણ X લેવો જોઈએ અને પછી વ્યાપક દ્વિક્ક્રિયા એ બીજું કંઈ જ નથી, પરંતુ X ના બે ઘટકો a અને b ને X ના જ કોઈ નિશ્ચિત ઘટક સાથે સંગત કરવાની ક્રિયા છે. આ પરથી નીચે આપેલ વ્યાપક વ્યાખ્યા મળે છે :

વ્યાખ્યા 10 : ગણ A ઉપર દ્વિક્ક્રિયા * એ વિધેય * : A × A → A છે. આપણે *(a, b) ને a * b વડે દર્શાવીએ છીએ.

ઉદાહરણ 29 : સાબિત કરો કે સરવાળો, બાદબાકી અને ગુણાકાર $\mathbf{R}$ પર દ્વિક્રિયાઓ છે, પરંતુ ભાગાકાર એ $\mathbf{R}$ પર દ્વિક્રિયા નથી. તદુપરાંત, સાબિત કરો કે ભાગાકાર એ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ $\mathbf{R}^*$ પર દ્વિક્રિયા છે.

ઉકેલ : દ્વિક્રિયાઓ $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $(a, b) \to a + b$ દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે.

$- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $(a, b) \to a - b$ સ્વરૂપે આપવામાં આવે છે.

$\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $(a, b) \to ab$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

'+', '–' અને '×' વિધેયો હોવાથી, તે $\mathbf{R}$ પરની દ્વિક્રિયાઓ છે.

પરંતુ $\div : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to \frac{a}{b}$ દ્વારા આપી શકાય નહિ. તે વિધેય નથી અને તેથી તે દ્વિક્રિયા નથી, કારણ કે $b = 0$ માટે $\frac{a}{b}$ વ્યાખ્યાયિત નથી.

તેમ છતાં, $\div : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$, $(a, b) \to \frac{a}{b}$ દ્વારા આપવામાં આવે છે અને તેથી તે $\mathbf{R}^*$ પર દ્વિક્રિયા છે.

ઉદાહરણ 30 : સાબિત કરો કે બાદબાકી અને ભાગાકાર $\mathbf{N}$ પર દ્વિક્રિયાઓ નથી.

ઉકેલ : અહીં, $- : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ એ $(a, b) \to a - b$ દ્વારા આપેલ હોય, તો તે દ્વિક્રિયા નથી કારણ કે '–' હેઠળ $(3, 5)$ નું પ્રતિબિંબ $3 - 5 = -2 \notin \mathbf{N}$. આ જ પ્રમાણે, $\div : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, એ $(a, b) \to a \div b$ એ દ્વિક્રિયા નથી કારણ કે $\div$ હેઠળ $(3, 5)$ નું પ્રતિબિંબ $3 \div 5 = \frac{3}{5} \notin \mathbf{N}$.

ઉદાહરણ 31 : સાબિત કરો કે $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to a + 4b^2$ દ્વારા આપેલ ક્રિયા હોય તો તે દ્વિક્રિયા છે.

ઉકેલ : $*$ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ની પ્રત્યેક જોડ (a, b) ને $\mathbf{R}$ ના અનન્ય ઘટક $a + 4b^2$ સાથે સાંકળે છે. તેથી $*$ એ $\mathbf{R}$ પર દ્વિક્રિયા છે.

ઉદાહરણ 32 : ધારો કે P એ આપેલ ગણ X ના તમામ ઉપગણોનો ગણ છે. સાબિત કરો કે $\cup : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ એ $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ અને $\cap : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ એ $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ દ્વારા આપેલ ક્રિયાઓ ગણ P પર દ્વિક્રિયાઓ છે.

ઉકેલ : યોગ ક્રિયા $\cup$ પ્રત્યેક જોડ $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}$ ને P ના અનન્ય ઘટક $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ સાથે સંગત કરે છે. આથી, $\cup$ એ P માં દ્વિક્રિયા છે. આ જ પ્રમાણે, છેદ ક્રિયા $\cap$ એ $\mathrm{P} \times \mathrm{P}$ ની પ્રત્યેક જોડ (A, B) ને P ના અનન્ય ઘટક $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ સાથે સંગત કરે છે, આથી $\cap$ એ P પર દ્વિક્રિયા છે.

ઉદાહરણ 33 : સાબિત કરો કે $\vee : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $(a, b) \to \max\{a, b\}$ અને $\wedge : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ $(a, b) \to \min\{a, b\}$ દ્વારા આપેલ વિધેયો દ્વિક્રિયાઓ છે.

ઉકેલ : અહીં, વિધેય $\vee$, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ની પ્રત્યેક જોડ (a, b) ને સંગત a અને b પૈકીના મહત્તમ ઘટક તરીકે અનન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા આપે છે. આમ, $\vee$ એ દ્વિક્રિયા છે. આ જ પ્રકારની દલીલોનો ઉપયોગ કરીને, કહી શકાય કે $\wedge$ પણ દ્વિક્રિયા છે. વળી, $\vee(a, a) = \wedge(a, a) = a$

નોંધ : $\vee(4, 7) = 7$, $\vee(4, -7) = 4$, $\wedge(4, 7) = 4$ અને $\wedge(4, -7) = -7$.

જ્યારે કોઈ ગણ A માં ઘટકોની સંખ્યા સાન્ત હોય, ત્યારે આપણે ગણ A પરની દ્વિક્રિયા $*$ ને કોષ્ટક દ્વારા દર્શાવીએ છીએ. તેને $*$ નું દ્વિક્રિયા કોષ્ટક કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ લો. ઉદાહરણ 33 માં ગણ A પર વ્યાખ્યાયિત ક્રિયા $\vee$ ને આગળ આપેલ દ્વિક્રિયા કોષ્ટક (કોષ્ટક 1.1) સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $\vee(1, 3) = 3$, $\vee(2, 3) = 3$, $\vee(1, 2) = 2$ થશે.

કોષ્ટક 1.1

$\vee$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

અહીં દ્વિક્‌ક્રિયા કોષ્ટકમાં 3 હાર અને 3 સ્તંભ છે. તેનામાં (i, j) મો ઘટક ગણ A ની i-મી હાર અને j-મા સ્તંભના ઘટકો પૈકી મહત્તમ ઘટક છે. આનું વ્યાપક સ્વરૂપ કોઈ પણ સામાન્ય દ્વિક્‌ક્રિયા $* : A \times A \to A$ માટે લખી શકાય છે. જો $A = \{a_1, a_2,..., a_n\}$ હોય તો દ્વિક્‌ક્રિયા કોષ્ટક n હાર અને n સ્તંભ ધરાવશે. તેમાં (i, j) મો ઘટક $a_i * a_j$ હશે. એથી ઊલટું, n હાર અને n સ્તંભ ધરાવતું ગમે તે દ્વિક્‌ક્રિયા કોષ્ટક હોય તથા પ્રત્યેક ઘટક એ $A = \{a_1, a_2,..., a_n\}$ પૈકીનો કોઈ ઘટક હોય, તો આપણે દ્વિક્‌ક્રિયા

$* : A \times A \to A$, $a_i * a_j$ = દ્વિક્‌ક્રિયા કોષ્ટકની i મી હાર અને j-મા સ્તંભના ઘટક દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

આપણે એ પણ નોંધ કરીએ કે 3 અને 4 નો કોઈ પણ ક્રમમાં સરવાળો કરીએ તો પરિણામ સમાન જ મળે છે, એટલે કે $3 + 4 = 4 + 3$. પરંતુ 4 અને 3 ની ભિન્ન ક્રમમાં બાદબાકી કરતાં ભિન્ન પરિણામો મળે છે, એટલે કે $3 - 4 \neq 4 - 3$. આ જ પ્રમાણે, 3 અને 4 ના ગુણાકારના કિસ્સામાં, ક્રમનું મહત્ત્વ નથી, પરંતુ 3 અને 4 નો ભાગાકાર ભિન્ન ક્રમમાં ભિન્ન પરિણામ આપે છે. આમ, 3 અને 4 નો 'સરવાળો' અને 'ગુણાકાર' અર્થપૂર્ણ છે, પરંતુ 3 અને 4 ની 'બાદબાકી' અને 'ભાગાકાર' અર્થહીન છે. બાદબાકી અને ભાગાકાર માટે આપણે એમ લખીશું '3 ને 4 માંથી બાદ કરતાં', '4 ને 3 માંથી બાદ કરતાં', '3 નો 4 વડે ભાગાકાર કરો' અથવા '4 નો 3 વડે ભાગાકાર' કરો.

આ હકીકત નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

વ્યાખ્યા 11 : જો પ્રત્યેક $a, b \in X$ માટે $a * b = b * a$ હોય, તો ગણ X પરની દ્વિક્‌ક્રિયા $*$ સમક્રમી કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 34 : સાબિત કરો કે $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અને $\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ સમક્રમી દ્વિક્‌ક્રિયાઓ છે, પરંતુ $- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અને $\div : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$ સમક્રમી નથી.

ઉકેલ : $a + b = b + a$ અને $a \times b = b \times a$; $\forall a, b \in \mathbf{R}$ હોવાથી '+' અને '×' સમક્રમી દ્વિક્‌ક્રિયાઓ છે. પરંતુ '–' સમક્રમી નથી કારણ કે $3 - 4 \neq 4 - 3$. આ જ પ્રમાણે $3 \div 4 \neq 4 \div 3$ બતાવે છે કે '÷' સમક્રમી નથી.

ઉદાહરણ 35 : સાબિત કરો કે $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a * b = a + 2b$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્‌ક્રિયા સમક્રમી નથી.

ઉકેલ : અહીં, $3 * 4 = 3 + 8 = 11$ અને $4 * 3 = 4 + 6 = 10$, પરથી સાબિત થાય છે કે દ્વિક્‌ક્રિયા $*$ સમક્રમી નથી.

જો આપણે ગણ X ના ત્રણ ઘટકોને X પરની કોઈ દ્વિક્‌ક્રિયા દ્વારા સાંકળવાનું ઇચ્છતા હોઈએ તો એક સ્વાભાવિક મુશ્કેલી ઊભી થાય છે. પદ $a * b * c$ નો અર્થ $(a * b) * c$ અથવા $a * (b * c)$ થઈ શકે છે અને આ બંને સમાન હોય તે જરૂરી નથી. ઉદાહરણ તરીકે, $(8 - 5) - 2 \neq 8 - (5 - 2)$. તેથી, ત્રણ સંખ્યાઓ 8, 5 અને 2 ના જૂથમાં દ્વિક્‌ક્રિયા 'બાદબાકી' કરીએ તો એ જ્યાં સુધી કૌંસનો ઉપયોગ ન કરીએ ત્યાં સુધી અર્થહીન છે. પરંતુ સરવાળાની બાબતમાં, $8 + 5 + 2$ નું મૂલ્ય એ જ રહેશે. આપણે તેને $(8 + 5) + 2$ અથવા $8 + (5 + 2)$ તરીકે

દર્શાવીએ તો તે સમાન છે. આમ, 3 અથવા 3 કરતાં વધારે સંખ્યાઓનું જૂથ સરવાળા માટે કૌંસનો ઉપયોગ કર્યા સિવાય પણ અર્થપૂર્ણ છે. આ વિધાન આપણને નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

વ્યાખ્યા 12 : જો $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in \mathbf{A}$ તો દ્વિક્‌ક્રિયા $* : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે તેમ કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 36 : સાબિત કરો કે સરવાળો અને ગુણાકાર **R** પર જૂથના નિયમોનું પાલન કરતી દ્વિક્‌ક્રિયાઓ છે. પરંતુ બાદબાકી **R** પર જૂથના નિયમોનું પાલન કરતી નથી. ભાગાકાર $\mathbf{R}^*$ પર જૂથના નિયમોનું પાલન કરતો નથી.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $a, b, c \in \mathbf{R}$ માટે $(a + b) + c = a + (b + c)$ અને $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ હોવાથી સરવાળો અને ગુણાકાર **R** પર જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે. પરંતુ, બાદબાકી અને ભાગાકાર $\mathbf{R}^*$ પર જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી, કારણ કે $(8 - 5) - 3 \neq 8 - (5 - 3)$ અને $(8 \div 5) \div 3 \neq 8 \div (5 \div 3)$.

ઉદાહરણ 37 : સાબિત કરો કે દ્વિક્‌ક્રિયા $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a * b = a + 2b$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે, તો તે જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી.

ઉકેલ : દ્વિક્‌ક્રિયા * જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી, કારણ કે

$(8 * 5) * 3 = (8 + 10) * 3 = (8 + 10) + 6 = 24$, પરંતુ

$8 * (5 * 3) = 8 * (5 + 6) = 8 * 11 = 8 + 22 = 30$.

નોંધ : દ્વિક્‌ક્રિયાનો જૂથનો ગુણધર્મ એ અર્થમાં ખૂબ જ મહત્ત્વનો છે કે, આ દ્વિક્‌ક્રિયાના ગુણધર્મને આધારે આપણે કહી શકીએ કે $a_1 * a_2 * ... * a_n$ સંદિગ્ધ નથી. પરંતુ આ ગુણધર્મની ગેરહાજરીમાં જ્યાં સુધી કૌંસનો ઉપયોગ ન કરીએ ત્યાં સુધી પદ $n \geq 3$ માટે $a_1 * a_2 * ... * a_n$ અસ્પષ્ટ છે. યાદ કરો, આગળના વર્ગોમાં જ્યારે બાદબાકી અથવા ભાગાકારની ક્રિયાઓ અથવા એક કરતાં વધારે ક્રિયાઓ આવતી હતી ત્યારે કૌંસનો ઉપયોગ કર્યો હતો.

R પર વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્‌ક્રિયા '+' સાથે સંબંધિત શૂન્યનો એક રસપ્રદ ગુણધર્મ એ છે કે, પ્રત્યેક $a \in$ R માટે $a + 0 = a = 0 + a$, એટલે કે કોઈ પણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરવાથી તે સંખ્યા તેની તે જ રહે છે. પરંતુ ગુણાકારની બાબતમાં, સંખ્યા 1 આ ભૂમિકા ભજવે છે, જેમ કે $a \times 1 = a = 1 \times a$, $\forall a \in \mathbf{R}$. આ તથ્ય નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે.

વ્યાખ્યા 13 : જો આપેલ દ્વિક્‌ક્રિયા $* : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ માટે કોઈ ઘટક $e \in \mathbf{A}$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી, $a * e = a = e * a$, $\forall a \in \mathbf{R}$ તો ઘટક e ને દ્વિક્‌ક્રિયા * માટે તટસ્થ ઘટક કહે છે.

ઉદાહરણ 38 : સાબિત કરો કે શૂન્ય એ **R** પર સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક છે અને 1 એ **R** પર ગુણાકાર માટે તટસ્થ ઘટક છે. દ્વિક્‌ક્રિયાઓ $- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અને $\div : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ માટે તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $a \in \mathbf{R}$ માટે $a + 0 = a = 0 + a$ અને $a \times 1 = a = 1 \times a$ દર્શાવે છે કે 0 અને 1 અનુક્રમે ક્રિયાઓ '+' અને '×' માટે તટસ્થ ઘટકો છે. વધુમાં, **R** માં કોઈ પણ ઘટક e નથી કે જેથી $a - e = e - a$, $\forall a \in \mathbf{R}$. આ જ પ્રમાણે, આપણે $\mathbf{R}^*$ માં એવો કોઈ પણ ઘટક e નથી શોધી શકતાં કે જેથી, $a \div e = e \div a$, $\forall a \in \mathbf{R}^*$. તેથી, '–' અને '÷' માટે તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ નથી.

નોંધ : **R** પર સરવાળાની દ્વિક્‌ક્રિયા માટે શૂન્ય તટસ્થ ઘટક છે પરંતુ તે **N** પર સરવાળાની દ્વિક્‌ક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટક નથી, કારણ કે $0 \notin \mathbf{N}$. વાસ્તવમાં **N** પર સરવાળાની દ્વિક્‌ક્રિયાને તટસ્થ ઘટક નથી.

સરવાળાની દ્વિક્‌ક્રિયા $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ માટે વધુ એક નોંધનીય હકીકત એ છે કે આપેલ કોઈ પણ $a \in \mathbf{R}$ ને સંગત $-a \in \mathbf{R}$ મળે કે જેથી $a + (-a) = 0$ ('+' માટે એકમ ઘટક) $= (-a) + a$.

આ જ પ્રમાણે, **R** પર ગુણાકારની દ્વિક્રિયા માટે **R** માં આપેલ કોઈ પણ $a \neq 0$ ને સંગત, **R** માં આપણને $\frac{1}{a}$ મળે કે જેથી $a \times \frac{1}{a} = 1$ ('×' માટે એકમ ઘટક) $= \frac{1}{a} \times a$. આ પરિણામ નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

વ્યાખ્યા 14 : A માં એકમ ઘટક e વાળી દ્વિક્રિયા $*$: A × A → A આપેલ છે. જો A માં એવા ઘટક b નું અસ્તિત્વ હોય કે જેથી $a * b = e = b * a$ થાય તો A ના ઘટક a ને વ્યસ્તસંપન્ન ઘટક કહે છે અને ઘટક b ને a નો વ્યસ્ત કહે છે અને તેને a^{-1} વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 39 : સાબિત કરો કે **R** પર સરવાળાની દ્વિક્રિયા '+' માટે $-a$ એ ઘટક a નો વ્યસ્ત છે તથા ગુણાકારની દ્વિક્રિયા '×' માટે શૂન્યેતર a ને સંગત $\frac{1}{a}$ એ **R** પર ઘટક a નો વ્યસ્ત છે.

ઉકેલ : અહીં, $a + (-a) = a - a = 0$ અને $(-a) + a = 0$, હોવાથી $-a$ એ સરવાળા માટે a નો વ્યસ્ત છે. આ જ પ્રમાણે, $a \neq 0$ માટે, $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$ છે. તેથી, $\frac{1}{a}$ એ ગુણાકાર માટે a નો વ્યસ્ત છે.

ઉદાહરણ 40 : સાબિત કરો કે $-a$ એ **N** પર સરવાળાની દ્વિક્રિયા + માટે $a \in$ **N** નો વ્યસ્ત નથી અને $a \in$ **N**, $a \neq 1$ માટે $\frac{1}{a}$ એ **N** પર ગુણાકારની દ્વિક્રિયા × માટે a નો વ્યસ્ત નથી.

નોંધ : N માં સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક ન હોવાથી કોઈ પણ ઘટકના વ્યસ્ત ઘટકનો પ્રશ્ન જ ઉપસ્થિત નથી થતો. દ્વિક્રિયા $*$: A × A → A માં તટસ્થ ઘટક e નું અસ્તિત્વ હોય, તો જ કોઈ ઘટકના વ્યસ્ત ઘટકની વાત થઈ શકે.

ઉકેલ : $-a \notin$ **N** હોવાથી $-a$ એ **N** પર સરવાળાની ક્રિયા માટે a નો વ્યસ્ત ન હોઈ શકે, ભલે ને $(-a) + a = 0$ નું સમાધાન $-a$ દ્વારા થતું હોય.

આ જ પ્રમાણે, **N** માં $a \neq 1$ માટે $\frac{1}{a} \notin$ **N**, દર્શાવે છે કે **N** પર ગુણાકારની દ્વિક્રિયા માટે 1 સિવાયના કોઈ પણ ઘટકનો વ્યસ્ત અસ્તિત્વ ધરાવતો નથી.

ઉદાહરણ 34, 36, 38 અને 39 માટે સાબિત કરો કે **R** પર સરવાળો સમક્રમી અને જૂથના નિયમનું પાલન કરતી દ્વિક્રિયા છે. 0 એ તટસ્થ ઘટક અને પ્રત્યેક $a \in$ **R** માટે $-a$ એ a નો વ્યસ્ત ઘટક છે.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરેલ પ્રત્યેક ક્રિયા $*$ એ દ્વિક્રિયા છે કે નહિ તે નક્કી કરો. જે પ્રશ્નમાં $*$ દ્વિક્રિયા ન હોય, તેના માટે કારણ આપો :

(i) $*$ Z^+ પર, $a * b = a - b$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

(ii) $*$ Z^+ પર, $a * b = ab$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

(iii) $*$ R પર, $a * b = ab^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

(iv) $*$ Z^+ પર, $a * b = |a - b|$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

(v) $*$ Z^+ પર, $a * b = a$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

2. નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત પ્રત્યેક ક્રિયા $*$ માટે નક્કી કરો કે તે દ્વિક્રિયા છે કે નહિ. જો તે દ્વિક્રિયા હોય, તો એ સમક્રમી છે કે નહિ અથવા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે કે નહિ તે નક્કી કરો :

(i) Z પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = a - b$

(ii) Q પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = ab + 1$

(iii) Q પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = \frac{ab}{2}$

(iv) Z^+ પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = 2^{ab}$

(v) Z^+ પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = a^b$

(vi) **R** $- \{-1\}$ પર વ્યાખ્યાયિત $a * b = \frac{a}{b+1}$

3. ધારો કે ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ પર દ્વિક્રિયા $\wedge$, $a \wedge b = \min \{a, b\}$ (અથવા ન્યૂનતમ $\{a, b\}$) દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. ક્રિયા $\wedge$ માટે દ્વિક્રિયા કોષ્ટક લખો.

4. ધારો કે ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ પર દ્વિક્રિયા $*$, નીચે આપેલા ગુણાકાર કોષ્ટક (કોષ્ટક 1.2) દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે :

(i) $(2 * 3) * 4$ અને $2 * (3 * 4)$ ની ગણતરી કરો.

(ii) $*$ સમક્રમી છે ?

(iii) $(2 * 3) * (4 * 5)$ ની ગણતરી કરો.

(**સૂચન :** નીચે આપેલ કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરો.)

કોષ્ટક 1.2

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

5. ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ પર દ્વિક્રિયા $*'$ એ $a *' b = a$ અને b નો ગુ.સા.અ. દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. ક્રિયા $*'$ એ ઉપરના પ્રશ્ન 4 માં વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા $*$ જેવી જ છે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

6. **N** પર $a * b = a$ અને b નો લ.સા.અ. દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા $*$ આપેલ છે.

(i) $5 * 7$, $20 * 16$ મેળવો.

(ii) $*$ સમક્રમી છે ?

(iii) $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ?

(iv) **N** માં $*$ માટે તટસ્થ ઘટક શોધો.

(v) દ્વિક્રિયા $*$ માટે **N** ના કયા ઘટકો વ્યસ્તસંપન્ન છે ?

7. ગણ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ પર $a * b = a$ અને b નો લ.સા.અ. દ્વારા વ્યાખ્યાયિત $*$ એ દ્વિક્રિયા છે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

8. ગણ **N** પર $a * b = a$ અને b નો ગુ.સા.અ. દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા $*$ સમક્રમી છે ? શું $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? **N** પરની આ દ્વિક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ છે ?

9. સંમેય સંખ્યાઓના ગણ Q પર દ્વિક્રિયા $*$ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

(i) $a * b = a - b$

(ii) $a * b = a^2 + b^2$

(iii) $a * b = a + ab$

(iv) $a * b = (a - b)^2$

(v) $a * b = \frac{ab}{4}$

(vi) $a * b = ab^2$

કઈ દ્વિક્રિયાઓ સમક્રમી છે અને કઈ ક્રિયાઓ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે તે શોધો.

10. ઉપર આપેલ પૈકી કઈ દ્વિક્રિયાઓ માટે તટસ્થ ઘટક પ્રાપ્ય છે ?

11. ધારો કે $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ અને A પર ક્રિયા $*$, $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે $*$ સમક્રમી છે અને જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે. જો $*$ માટે A માં કોઈ એકમ ઘટક હોય, તો તે શોધો.

12. નીચે આપેલાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) ગણ $\mathbf{N}$ પરની કોઈ પણ દ્વિક્રિયા $*$ માટે, $a * a = a$, $\forall a \in \mathbf{N}$.

(ii) જો $*$ $\mathbf{N}$ પર સમક્રમી દ્વિક્રિયા હોય તો $a * (b * c) = (c * b) * a$.

પ્રશ્ન 13 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

13. $a * b = a^3 + b^3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત $\mathbf{N}$ પરની દ્વિક્રિયા $*$ નો વિચાર કરો.

(A) $*$ જૂથના નિયમને અનુસરે છે અને સમક્રમી બંને છે ?

(B) $*$ સમક્રમી છે પરંતુ જૂથના નિયમને અનુસરતી નથી ?

(C) $*$ જૂથના નિયમને અનુસરે છે પરંતુ સમક્રમી નથી ?

(D) $*$ સમક્રમી નથી અને જૂથના નિયમને અનુસરતી નથી ?

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 41 : જો R_1 અને R_2 ગણ A માં સામ્ય સંબંધો હોય, તો સાબિત કરો કે $R_1 \cap R_2$ પણ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : અહીં R_1 અને R_2 સામ્ય સંબંધો છે, તેથી $(a, a) \in R_1$ અને $(a, a) \in R_2$, $\forall a \in A$. આ દર્શાવે છે કે $(a, a) \in R_1 \cap R_2$, $\forall a$, એટલે કે $R_1 \cap R_2$ એ સ્વવાચક છે. વધુમાં,

$(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ અને $(a, b) \in R_2$ (કેમ ?)

$\Rightarrow (b, a) \in R_1$ અને $(b, a) \in R_2$

$\Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$,

તેથી $R_1 \cap R_2$ સંમિત છે.

આ જ પ્રમાણે, $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ અને $(b, c) \in R_1 \cap R_2$

$\Rightarrow (a, b) \in R_1, (b, c) \in R_1, (a, b) \in R_2, (b, c) \in R_2$

$\Rightarrow (a, c) \in R_1$ અને $(a, c) \in R_2$

$\Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$.

આ દર્શાવે છે કે $R_1 \cap R_2$ પરંપરિત છે. આમ, $R_1 \cap R_2$ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 42 : ગણ A એ ધન પૂર્ણાંકોની ક્રમયુક્ત જોડોનો ગણ છે. ગણ A પર R એ જો $xv = yu$ તો અને તો જ $(x, y)\, R\, (u, v)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત સંબંધ છે. સાબિત કરો કે R એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે $(x, y)\, R\, (x, y)$, $\forall (x, y) \in A$, કારણ કે $xy = yx$. આ દર્શાવે છે કે R સ્વવાચક સંબંધ છે. ઉપરાંત $(x, y)\, R\, (u, v) \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx$ અને તેથી $(u, v)\, R\, (x, y)$. આ દર્શાવે છે કે R સંમિત સંબંધ છે.

આ જ પ્રમાણે, $(x, y)\, R\, (u, v)$ અને $(u, v)\, R\, (a, b) \Rightarrow xv = yu$ અને $ub = va$

$$\Rightarrow xv\frac{a}{u} = yu\frac{a}{u}$$

$$\Rightarrow xv\frac{b}{v} = yu\frac{a}{u}$$

$\Rightarrow xb = ya$ અને તેથી $(x, y)\, R\, (a, b)$.

વધુ સારી સાબિતી : $xv = yu \Rightarrow xvb = yub$

$\Rightarrow xvb = yva$

$\Rightarrow xb = ya$

આમ, **R** પરંપરિત સંબંધ છે. આથી, **R** સામ્ય સંબંધ છે.

નોંધ : u, v ધન પૂર્ણાંક છે.

ઉદાહરણ 43 : ધારો કે X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. $\mathbf{R}_1$ એ X પરનો સંબંધ છે અને તે

$\mathbf{R}_1 = \{(x, y) : x - y$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.} દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે અને X પર બીજો એક સંબંધ $\mathbf{R}_2$ એ $\mathbf{R}_2 = \{(x, y) : \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ અથવા $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ અથવા $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\}\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$.

ઉકેલ : અત્રે એ નોંધનીય છે કે ગણ {1, 4, 7}, {2, 5, 8} અને {3, 6, 9}ના કોઈ પણ બે ઘટકો વચ્ચેનો તફાવત 3 નો ગુણક છે.

તેથી $(x, y) \in \mathbf{R}_1 \Rightarrow x - y$ એ 3 નો ગુણક છે.

$\Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ અથવા $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ અથવા $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\}$

$\Rightarrow (x, y) \in \mathbf{R}_2$.

તેથી, $\mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_2$.

આ જ પ્રમાણે $(x, y) \in \mathbf{R}_2$

$\Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ અથવા $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ અથવા $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\}$

$\Rightarrow x - y$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$\Rightarrow (x, y) \in \mathbf{R}_1$. આ દર્શાવે છે કે $\mathbf{R}_2 \subset \mathbf{R}_1$.

તેથી, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$.

ઉદાહરણ 44 : ધારો કે $f : X \to Y$ વિધેય છે. X પર સંબંધ **R** એ $\mathbf{R} = \{(a, b) : f(a) = f(b)\}$ દ્વારા આપેલ છે. **R** એ સામ્ય સંબંધ છે કે નહિ તે ચકાસો.

ઉકેલ : $\forall a \in X$, $f(a) = f(a)$ હોવાથી, પ્રત્યેક $a \in X$ માટે $(a, a) \in \mathbf{R}$. આ દર્શાવે છે કે **R** સ્વવાચક છે. આ જ પ્રમાણે $(a, b) \in \mathbf{R} \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow (b, a) \in \mathbf{R}$. તેથી **R** સંમિત છે. ઉપરાંત, $(a, b) \in \mathbf{R}$ અને $(b, c) \in \mathbf{R} \Rightarrow f(a) = f(b)$ અને $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in \mathbf{R}$, આનો અર્થ એ થાય છે કે **R** પરંપરિત છે. તેથી, **R** સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 45 : ગણ **R** પર નીચે આપેલ દ્વિક્ક્રિયાઓમાંથી કઈ દ્વિક્ક્રિયા જૂથના નિયમને અનુસરે છે અને કઈ દ્વિક્ક્રિયાઓ સમક્રમી છે તે નક્કી કરો :

(a) $a * b = 1, \forall a, b \in \mathbf{R}$ (b) $a * b = \dfrac{(a+b)}{2}, \forall a, b \in \mathbf{R}$

ઉકેલ : (a) વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે $a * b = b * a = 1, \forall a, b \in \mathbf{R}$. વળી,

$(a * b) * c = 1 * c = 1$ અને $a * (b * c) = a * 1 = 1, \forall a, b, c \in \mathbf{R}$. તેથી, **R** એ જૂથના નિયમને અનુસરે છે અને સમક્રમી છે.

(b) $a * b = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b+a}{2} = b * a$. આથી $*$ સમક્રમી છે.

$$\text{ઉપરાંત, } (a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)+c}{2}$$

$$= \frac{a+b+2c}{4}$$

$$\text{પરંતુ, } a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$= \frac{a+\frac{b+c}{2}}{2}$$

$$= \frac{2a+b+c}{4}$$

$$\neq \frac{a+b+2c}{4} \text{ (વ્યાપક રૂપે)}$$

તેથી, $*$ એ જૂથના નિયમને અનુસરતી નથી.

નોંધ : $(1 * 2) * 3 = \frac{9}{4}$ અને $1 * (2 * 3) = \frac{7}{4}$

વળી, $\frac{9}{4} \neq \frac{7}{4}$

આમ, $(1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$

ઉદાહરણ 46 : ગણ A = {1, 2, 3} થી તેના પરના જ તમામ એક-એક વિધેયોની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : {1, 2, 3} થી તેના પરના જ એક-એક વિધેય એ કેવળ સંકેતો 1, 2, 3 પરના ક્રમચય છે. માટે, {1, 2, 3} થી તેના પરના જ એક-એક વિધેયોની કુલ સંખ્યા એ ત્રણ સંકેતો 1, 2, 3 ના કુલ ક્રમચયોની સંખ્યા બરાબર જ છે અને તે 3! = 6 છે.

ઉદાહરણ 47 : ધારો કે A = {1, 2, 3}. સાબિત કરો કે (1, 2) અને (2, 3) ને સમાવતા સ્વવાચક અને પરંપરિત હોય, પરંતુ સંમિત ન હોય તેવા સંબંધોની સંખ્યા ત્રણ છે.

ઉકેલ : (1, 2) અને (2, 3) ને સમાવતો સ્વવાચક અને પરંપરિત, પરંતુ સંમિત ન હોય તેવો સૌથી નાનો સંબંધ R_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)} છે. હવે, જો આપણે ક્રમયુક્ત જોડ (2, 1) ને R_1માં ઉમેરીને R_2 મેળવીએ, તો સંબંધ R_2 સ્વવાચક અને પરંપરિત થશે પરંતુ સંમિત નહિ થાય. આ જ પ્રમાણે, અપેક્ષિત સંબંધ મેળવવા માટે, આપણે R_1 માં (3, 2) ઉમેરીને સંબંધ R_3 મેળવી શકીએ. તેમ છતાં આપણે બે ક્રમયુક્ત જોડ (2, 1), (3, 2) અથવા એક ક્રમયુક્ત જોડ (3, 1) એકસાથે R_1 માં ઉમેરી નથી શકતાં, કારણ કે આમ કરવાથી, પરંપરિતતા જાળવી રાખવા માટે આપણને બાકીની ક્રમયુક્ત જોડ ઉમેરવાની ફરજ પડશે અને આમ કરવાથી સંબંધ સંમિત પણ થશે. તે માગેલ શરતનું ઉલ્લંઘન કરે છે. આમ, અપેક્ષિત સંબંધોની કુલ સંખ્યા 3 છે.

ઉદાહરણ 48 : સાબિત કરો કે ગણ {1, 2, 3} માં (1, 2) અને (2, 1) ને સમાવતા સામ્ય સંબંધની સંખ્યા બે છે.

ઉકેલ : (1, 2) અને (2, 1) ને સમાવતો સૌથી નાનો સામ્ય સંબંધ R_1,

{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)} છે. હવે, આપણી પાસે માત્ર 4 જોડ (2, 3), (3, 2), (1, 3) અને (3, 1) શેષ છે. જો આપણે કોઈ એક જોડ, માનો કે (2, 3) ને R_1 માં ઉમેરીએ, તો સંમિત માટે (3, 2) પણ ઉમેરવી

જ પડે અને હવે પરંપરિતતા માટે આપણને (1, 3) અને (3, 1) ઉમેરવાની ફરજ પડે છે. આમ, R_1 કરતાં મોટો સામ્ય સંબંધ કેવળ સાર્વત્રિક સંબંધ જ છે. આ દર્શાવે છે કે (1, 2) અને (2, 1) ને સમાવતા સામ્ય સંબંધોની કુલ સંખ્યા બે છે.

ઉદાહરણ 49 : સાબિત કરો કે {1, 2} પર જેનો તટસ્થ ઘટક 1 હોય તથા જેના હેઠળ 2 નો વ્યસ્ત 2 હોય એવી દ્વિક્રિયાની સંખ્યા માત્ર એક છે.

ઉકેલ : {1, 2} પર દ્વિક્રિયા * એ {1, 2} × {1, 2} થી {1, 2} નું વિધેય છે. એટલે કે વિધેય {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)} → {1, 2} છે. અપેક્ષિત (ઇચ્છિત) દ્વિક્રિયા * માટે 1 એ તટસ્થ ઘટક હોવાથી, *(1, 1) = 1, *(1, 2) = 2, *(2, 1) = 2 અને ક્રમયુક્ત જોડ (2, 2) માટે જ પસંદગી બાકી રહી છે. 2 નો વ્યસ્ત 2 હોવાથી *(2, 2) બરાબર 1 જ મળશે. આમ, ઇચ્છિત દ્વિક્રિયાની સંખ્યા માત્ર એક જ છે.

ઉદાહરણ 50 : તદેવ વિધેય $I_N : N \to N$, $I_N(x) = x$, $\forall x \in N$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે I_N વ્યાપ્ત હોવા છતાં $I_N + I_N : N \to N$, $(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$ વ્યાપ્ત નથી.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે I_N વ્યાપ્ત છે. પરંતુ $I_N + I_N$ વ્યાપ્ત નથી. સહપ્રદેશ N માં ઘટક 3 એવો મળે છે કે જેથી પ્રદેશ N માં કોઈ પણ ઘટક x નું અસ્તિત્વ ન મળે જેના માટે $(I_N + I_N)(x) = 2x = 3$.

ઉદાહરણ 51 : ધારો કે વિધેય $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$, $f(x) = \sin x$ અને $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$, $g(x) = \cos x$ દ્વારા આપેલ છે. સાબિત કરો કે f અને g એક-એક છે, પરંતુ $f + g$ એક-એક નથી.

ઉકેલ : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ના કોઈ પણ બે ભિન્ન ઘટકો x_1 અને x_2, માટે $\sin x_1 \neq \sin x_2$ અને $\cos x_1 \neq \cos x_2$, બંને f અને g એક-એક છે જ. પરંતુ $(f + g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ અને

$(f + g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$. તેથી, $f + g$ એક-એક નથી.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 1

1. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 10x + 7$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. એવું વિધેય $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ શોધો કે જેથી $gof = fog = I_{\mathbf{R}}$.
2. ધારો કે W એ પૂર્ણ સંખ્યાઓનો ગણ છે. $f : W \to W$, n અયુગ્મ માટે $f(n) = n - 1$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે અને n યુગ્મ માટે $f(n) = n + 1$ વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે f એ વ્યસ્ત સંપન્ન છે. fનો વ્યસ્ત શોધો.
3. જો $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો $f(f(x))$ શોધો.
4. સાબિત કરો કે વિધેય $f : \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$, $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$, એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.
5. સાબિત કરો કે વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ એક-એક છે.
6. બે વિધેયો $f : N \to Z$ અને $g : Z \to Z$ નાં ઉદાહરણ આપો કે જેથી gof એક-એક હોય પરંતુ g એક-એક ન હોય. (**સૂચન :** $f(x) = x$ અને $g(x) = |x|$ નો વિચાર કરો.)
7. બે વિધેયો $f : N \to N$ અને $g : N \to N$ નાં ઉદાહરણ આપો કે જેથી gof વ્યાપ્ત હોય પરંતુ f વ્યાપ્ત ન હોય. (**સૂચન :** $f(x) = x + 1$ અને $g(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ નો વિચાર કરો.)

8. X એ આપેલ અરિક્ત ગણ છે. X ના તમામ ઉપગણોના ગણ P(X) નો વિચાર કરો. P(X) માં સંબંધ R આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

P(X) ના ઉપગણો A અને B માટે, $A \subset B$ તો અને તો જ ARB.

R, P(X) પર સામ્ય સંબંધ છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

9. આપેલ અરિક્ત ગણ X નો ઘાતગણ P(X) છે. દ્વિક્રિયા $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$ એ $A * B = A \cap B$, $\forall A, B \in P(X)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે X એ આ ક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટક છે અને દ્વિક્રિયા * ને સાપેક્ષ P(X) માં કેવળ X જ વ્યસ્તસંપન્ન છે.

10. ગણ $\{1, 2, 3, ..., n\}$ થી $\{1, 2, 3, ..., n\}$ સુધીનાં તમામ વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા શોધો.

11. $S = \{a, b, c\}$ અને $T = \{1, 2, 3\}$ લો. જો અસ્તિત્વ હોય, તો નીચે આપેલાં વિધેયો $F : S \to T$ માટે F^{-1} શોધો.

(i) $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ (ii) $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$

12. $a * b = |a - b|$ અને $a \circ b = a$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયાઓ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અને $\circ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ નો વિચાર કરો. સાબિત કરો કે * સમક્રમી છે પરંતુ જૂથના નિયમને અનુસરતી નથી. o જૂથના નિયમને અનુસરે છે પરંતુ સમક્રમી નથી. વધુમાં, બતાવો કે $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$. [જો આ સત્ય હોય, તો આપણે દ્વિક્રિયા * ને દ્વિક્રિયા o પર વિભાજનીય કહીશું.] શું દ્વિક્રિયા o એ દ્વિક્રિયા * પર વિભાજનીય થશે ? તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

13. X એ આપેલ અરિક્ત ગણ છે, $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$, $A * B = (A - B) \cup (B - A)$, $\forall A, B \in P(X)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા છે. સાબિત કરો કે રિક્ત ગણ ϕ એ દ્વિક્રિયા * માટે તટસ્થ ઘટક છે અને P(X) ના તમામ ઘટક A વ્યસ્ત સંપન્ન છે તથા $A^{-1} = A$.

(**સૂચન :** $(A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A$ અને $(A - A) \cup (A - A) = A * A = \varnothing$).

14. ગણ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ પર દ્વિક્રિયા * નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

$$a * b = \begin{cases} a + b, & a + b < 6 \\ a + b - 6, & a + b \geq 6 \end{cases}$$

સાબિત કરો કે આ ક્રિયા માટે શૂન્ય એ તટસ્થ ઘટક છે અને આ ગણનો પ્રત્યેક શૂન્યેતર ઘટક વ્યસ્ત સંપન્ન છે. અહીં, $6 - a$ એ ઘટક a નો વ્યસ્ત છે.

15. $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ અને વિધેયો $f, g : A \to B$, $f(x) = x^2 - x, x \in A$ અને $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. f અને g સમાન વિધેયો છે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો. (**સૂચન :** યાદ કરો કે વિધેયો $f : A \to B$ અને $g : A \to B$ માટે $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$ હોય, તો f અને g સમાન વિધેયો કહેવાય છે.)

પ્રશ્નો 16 તથા 17 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

16. ગણ $A = \{1, 2, 3\}$ લો. ઘટક (1, 2) અને (1, 3) સમાવતા હોય અને સ્વવાચક અને સંમિત હોય, પરંતુ પરંપરિત ન હોય તેવા સંબંધોની સંખ્યા .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

17. ગણ $A = \{1, 2, 3\}$ લો. (1, 2) ને સમાવતા સામ્ય સંબંધોની સંખ્યા .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

18. f : R → R, ચિહ્ન વિધેય (Signum Function) લો.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

અને g : R → R, **મહત્તમ પૂર્ણાંક** વિધેય $g(x) = [x]$, જ્યાં $[x] = x$ અથવા x થી નાના પૂર્ણાંકો પૈકી મહત્તમ પૂર્ણાંક દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો fog અને gof એ (0, 1] માં એકના એક જ (સમાન) છે ?

(A) હા (B) ના

(C) સંદિગ્ધ (D) સંયોજિત વિધેયનું અસ્તિત્વ નથી.

19. ગણ $\{a, b\}$ પર દ્વિક્‌ક્રિયાઓની સંખ્યા

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, આપણે વિવિધ પ્રકારના સંબંધો અને સામ્ય સંબંધ, વિધેયોનું સંયોજન, વ્યસ્તસંપન્ન વિધેયો અને દ્વિક્‌ક્રિયાઓનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણની મુખ્ય વિષયવસ્તુ નીચે આપેલ છે :

- X માં, R = $\phi \subset (X \times X)$ એ ખાલી અથવા રિક્ત સંબંધ R છે.
- X માં, સાર્વત્રિક સંબંધ R ને R = X × X દ્વારા આપવામાં આવે છે.
- X માં, સ્વવાચક સંબંધ R, $(a, a) \in$ R, $\forall a \in$ X દ્વારા આપવામાં આવે છે.
- જો $(a, b) \in$ R તો $(b, a) \in$ R નું સમાધાન કરે તેવો સંબંધ R સંમિત સંબંધ છે.
- જો $(a, b) \in$ R અને $(b, c) \in$ R હોય, તો $(a, c) \in$ R નું સમાધાન કરતો સંબંધ R એ X માં પરંપરિત છે.
- X માં જે સંબંધ R, સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત સંબંધ હોય તેને સામ્ય સંબંધ R કહે છે.
- X માં, કોઈ સામ્ય સંબંધ R માટે, $a \in$ X ને સંગત સામ્ય વર્ગ $[a]$, X નો એવો ઉપગણ છે જેના તમામ સભ્યો b એ a સાથે સંબંધ ધરાવે છે.
- જો $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in$ X હોય, તો વિધેય f : X → Y એક-એક છે.
- જો આપેલ પ્રત્યેક $y \in$ Y માટે, $x \in$ X મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય તો f : X → Y ને વ્યાપ્ત વિધેય કહે છે.
- જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત બંને હોય, તો f : X → Y એ એક-એક વ્યાપ્ત વિધેય છે તેમ કહેવાય.
- વિધેયો f : A → B અને g : B → C નું સંયોજન એ વિધેય gof : A → C, $(gof)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in$ A દ્વારા આપવામાં આવે છે.
- જો વિધેય g : Y → X નું અસ્તિત્વ હોય કે જેથી $gof = I_X$ અને $fog = I_Y$ મળે તો વિધેય f : X → Y વ્યસ્તસંપન્ન છે.
- જો વિધેય f : X → Y વ્યસ્તસંપન્ન હોય, તો અને તો જ f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.
- આપેલ સાન્ત ગણ X માટે વિધેય f : X → X એક-એક (તદનુસાર વ્યાપ્ત) હોય, તો અને તો જ f વ્યાપ્ત છે (તદનુસાર એક-એક). આ કોઈ પણ સાન્ત ગણનો લાક્ષણિક ગુણધર્મ છે. આ ગુણધર્મ અનંત ગણ માટે સત્ય નથી.

- ગણ A પરની દ્વિક્ક્રિયા $*$ એ $A \times A$ થી A નું વિધેય છે.
- દ્વિક્ક્રિયા $* : X \times X \to X$ માટે જો $a * e = a = e * a$, $\forall a \in X$ તો ઘટક $e \in X$ એ $*$ માટે તટસ્થ ઘટક છે.
- જો $b \in X$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $a * b = e = b * a$. જ્યાં, e એ દ્વિક્ક્રિયા $*$ માટે તટસ્થ ઘટક છે, તો દ્વિક્ક્રિયા $* : X \times X \to X$ માટે ઘટક $a \in X$ વ્યસ્તસંપન્ન છે. ઘટક b ને a નો વ્યસ્ત કહે છે અને તેને a^{-1} વડે દર્શાવાય છે.
- જો $a * b = b * a$, $\forall a, b \in X$ હોય, તો દ્વિક્ક્રિયા $*$ ને X પર સમક્રમી કહે છે.
- જો $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in X$ હોય, તો દ્વિક્ક્રિયા $*$ ને X પર જૂથના નિયમને અનુસરતી દ્વિક્ક્રિયા કહે છે.

Historical Note

The concept of function has evolved over a long period of time starting from ***R. Descartes*** (C.E. 1596 - C.E. 1650), who used the word 'function' in his manuscript "***Geometrie***" in C.E. 1637 to mean some positive integral power x^n of a variable x while studying geometrical curves like hyperbola, parabola and ellipse. ***James Gregory*** (C.E. 1636 - C.E. 1675) in his work "***Vera Circuli*** et ***Hyperbolae Quadratura***" (C.E. 1667) considered function as a quantity obtained from other quantities by successive use of algebraic operations or by any other operations. Later ***G. W. Leibnitz*** (C.E. 1646 - C.E. 1716) in his manuscript "***Methodus tangentium inversa, seu de functionibus***" written in C.E. 1673 used the word '***function***' to mean a quantity varying from point to point on a curve such as the coordinates of a point on the curve, the slope of the curve, the tangent and the normal to the curve at a point. However, in his manuscript "***Historia***" (C.E. 1714), ***Leibnitz*** used the word '***function***' to mean quantities that depend on a variable. He was the first to use the phrase '***function of x***'. ***John Bernoulli*** (C.E. 1667 - C.E. 1748) used the notation ϕx for the first time in C.E. 1718 to indicate a function of x. But the general adoption of symbols like f, F, ϕ, Ψ... to represent functions was made by ***Leonhard Euler*** (C.E. 1707 - C.E. 1783) in C.E. 1734 in the first part of his manuscript "***Analysis Infinitorium***". Later on, ***Joeph Louis Lagrange*** (C.E. 1736 - C.E. 1813) published his manuscripts "***Theorie des functions analytiques***" in C.E. 1793, where he discussed about ***analytic function*** and used the notion $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ etc. for different function of x. Subsequently, ***Lejeunne Dirichlet*** (C.E. 1805 - C.E. 1859) gave the definition of function which was being used till the set theoretic definition of function presently used, was given after set theory was developed by ***Georg Cantor*** (C.E. 1845 - C.E. 1918). The set theoretic definition of function known to us presently is simply an abstraction of the definition given by ***Dirichlet*** in a rigorous manner.

પ્રકરણ **2**

ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો

❖ *Mathematics, in general, is fundamentally the science of self-evident things. — FELIX KLEIN* ❖

2.1 પ્રાસ્તાવિક

ARYABHATTA
(C.E. 476 - C.E. 550)

પ્રકરણ 1માં આપણે શીખી ગયાં કે જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો fનું પ્રતિવિધેય મળે અને તેને f^{-1} વડે દર્શાવાય છે. વ્યાપ્ત, એક-એક કે બંને પૈકી કોઈ પણ ન હોય એવાં ઘણાં વિધેય હોય છે અને આથી આપણે તેમના પ્રતિવિધેયની ચર્ચા ન કરી શકીએ. ધોરણ 11માં આપણે અભ્યાસ કરી ગયાં કે ત્રિકોણમિતીય વિધેયો તેમના પ્રદેશ અને વિસ્તારમાં એક-એક પણ નથી અને વ્યાપ્ત પણ નથી તથા આથી તેમના પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ નથી. આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના પ્રદેશ અને વિસ્તાર પર તેમનાં પ્રતિવિધેયો શક્ય બને તે રીતે અંકુશ મૂકીશું. આલેખ દ્વારા તેમની રજૂઆતથી તેમની વર્તણૂકનું અવલોકન કરીશું. તદુપરાંત તેમના કેટલાંક પ્રાથમિક ગુણધર્મોની પણ ચર્ચા કરીશું.

ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય, કલનશાસ્ત્રમાં અગત્યનો ભાગ ભજવે છે, કારણ કે તેની મદદથી ઘણાબધા સંકલિત વ્યાખ્યાયિત થાય છે. ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયની સંકલ્પનાનો વિજ્ઞાન અને ઈજનેરી શાખામાં પણ ઉપયોગ થાય છે.

2.2 પાયાની સંકલ્પના

ધોરણ 11માં આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનો અભ્યાસ કર્યો :

sine વિધેય અર્થાત્ $sin : R \to [-1, 1]$.

cosine વિધેય અર્થાત્ $cos : R \to [-1, 1]$.

tangent વિધેય અર્થાત્ $tan : R - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\} \to R$.

cotangent વિધેય અર્થાત્ $cot : R - \{x : x = n\pi, n \in Z\} \to R$.

secant વિધેય અર્થાત્ $sec : R - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\} \to R - (-1, 1)$.

cosecant વિધેય અર્થાત્ $cosec : R - \{x : x = n\pi, n \in Z\} \to R - (-1, 1)$.

આપણે પ્રકરણ 1 માં એ પણ શીખી ગયાં કે જો વિધેય $f : X \to Y$ માટે $f(x) = y$ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય, તો એક અને માત્ર એક વિધેય $g : Y \to X$, $g(y) = x$ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. અહીં $x \in X$ અને $y = f(x)$, $y \in Y$. અત્રે g નો પ્રદેશ $= f$નો વિસ્તાર અને g નો વિસ્તાર $= f$નો પ્રદેશ. વિધેય g એ fનું પ્રતિવિધેય કહેવાય અને તેને f^{-1} વડે દર્શાવાય. વળી, g પણ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે અને gનું પ્રતિવિધેય f છે. આમ, $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$.

વળી, $(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$

અને $(fof^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

sin વિધેયનો પ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અને વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે. જો પ્રદેશ પર આપણે મર્યાદા મૂકી મર્યાદિત પ્રદેશ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ લઈએ, તો તે એક-એક અને $[-1, 1]$ માં વ્યાપ્ત બને. ખરેખર તો *sine* વિધેય મર્યાદિત પ્રદેશ $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ વગેરેમાં એક-એક અને $[-1, 1]$ માં વ્યાપ્ત બને. આથી, આપણે આ પ્રત્યેક અંતરાલ માટે *sine* વિધેયની શાખા વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

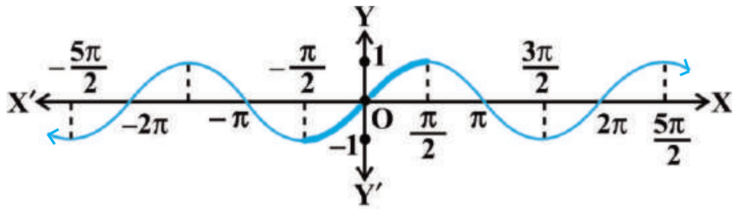
આથી આપણે *sine* વિધેયના પ્રતિવિધેયને sin^{-1} (*arcsine* વિધેય) સંકેત વડે દર્શાવીશું. આમ, sin^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ હોઈ શકે. આ પ્રત્યેક અંતરાલને અનુરૂપ આપણને sin^{-1} વિધેયની એક શાખા મળે છે. તેની $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ વિસ્તારવાળી શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. બાકીના અંતરાલ વિસ્તાર તરીકે લેતાં sin^{-1}ની *ભિન્ન શાખાઓ* મળે છે. આપણે હવે પછીથી જ્યારે sin^{-1} નો ઉલ્લેખ કરીશું, ત્યારે તેનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ લઈશું. આપણે $sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ એમ લખીશું.

પ્રતિવિધેયની વ્યાખ્યા પરથી કહી શકાય કે, $sin\,(sin^{-1}x) = x$, જ્યાં $-1 \le x \le 1$ અને $sin^{-1}(sin\,x) = x$ જ્યાં $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. બીજા શબ્દોમાં, જો $y = sin^{-1}x$ તો $sin y = x$.

નોંધ :

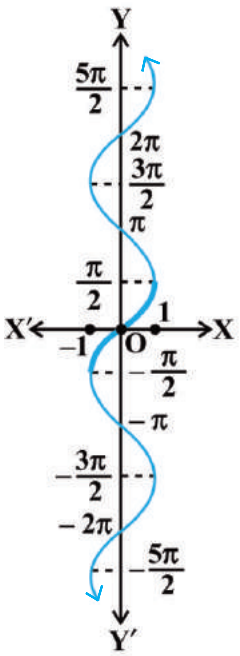
(1) આપણે પ્રકરણ 1 પરથી જાણીએ છીએ કે જો વિધેય $y = f(x)$ નું પ્રતિવિધેય શક્ય હોય તો $x = f^{-1}(y)$. આમ, sin^{-1} વિધેયનો આલેખ મૂળ વિધેયના આલેખમાં x-અક્ષ અને y-અક્ષની અદલ-બદલ કરી દોરી શકાય. અર્થાત્ જો (a, b) એ sin વિધેયના આલેખ પરનું બિંદુ હોય, તો (b, a) તેને અનુરૂપ sin^{-1} વિધેયના આલેખ પરનું બિંદુ બને. આમ, $y = sin^{-1}x$ વિધેયનો આલેખ $y = sinx$ વિધેયના આલેખમાં x-અક્ષ અને y-અક્ષની અદલ-બદલ કરી મેળવી શકાય. $y = sinx$ અને $y = sin^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.1(i), (ii), (iii) માં દર્શાવેલ છે. $y = sin^{-1}x$ આલેખનો ઘેરો ભાગ એ તેની મુખ્ય કિંમત દર્શાવતી શાખા છે.

(2) એવું દર્શાવી શકાય કે કોઈ વિધેયના પ્રતિવિધેયનો આલેખ મુખ્ય વિધેયના આલેખના $y = x$ રેખામાં મળતા ***આરસી પ્રતિબિંબ (mirror image)*** સ્વરૂપે મળે છે. સમાન અક્ષો પર દોરવામાં આવતા $y = sinx$ અને $y = sin^{-1}x$ ના આલેખ પરથી તે જોઈ શકાય છે. (આકૃતિ 2.1(iii))



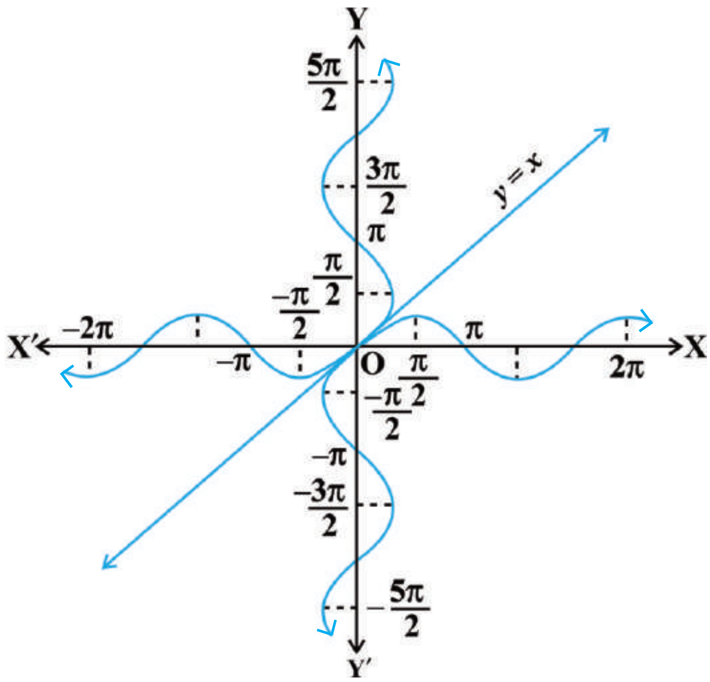
$y = sin\,x$

આકૃતિ 2.1 (i)



$y = sin^{-1}x$

આકૃતિ 2.1 (ii)

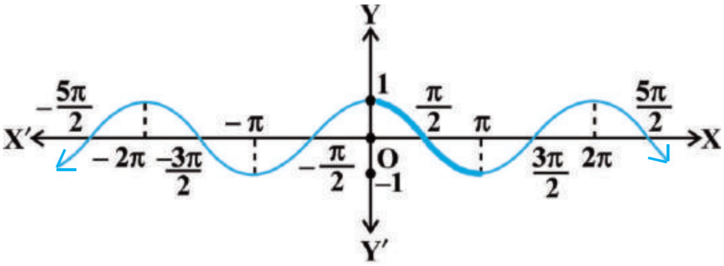


$y = sinx$ અને $y = sin^{-1}x$

આકૃતિ 2.1 (iii)

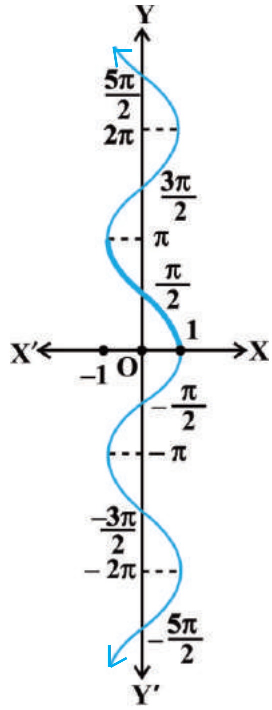
sin વિધેયની જેમ *cosine* વિધેયનો પ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અને વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે. જો *cosine* વિધેયના પ્રદેશને મર્યાદિત બનાવી $[0, \pi]$ ને પ્રદેશ તરીકે લઈએ તો તે એક-એક અને વ્યાપ્ત બને. અહીં વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે. ખરેખર તો મર્યાદિત પ્રદેશ $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ વગેરેમાં *cosine* વિધેય એક-એક અને $[-1, 1]$ માં વ્યાપ્ત બને. આથી, આપણે *cosine* વિધેયનું પ્રતિવિધેય આમાંના કોઈ પણ અંતરાલ પર વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ. *cosine* વિધેયના પ્રતિવિધેયને cos^{-1}(*arc cosine* વિધેય) સંકેત વડે દર્શાવીશું. આમ cos^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ વગેરેમાંનો કોઈ પણ અંતરાલ છે. આ પ્રત્યેક અંતરાલને અનુરૂપ cos^{-1} વિધેયની એક શાખા મળશે. $[0, \pi]$ને અનુરૂપ મળતી cos^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. આપણે $cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ એમ લખીશું.

જે રીતે $y = sin^{-1}x$ ના આલેખની ચર્ચા કરી તે જ રીતે $y = cos^{-1}x$ નો આલેખ પણ દોરી શકાય. આકૃતિ 2.2(i) અને 2.2(ii)માં $y = cosx$ અને $y = cos^{-1}x$ ના આલેખ દર્શાવેલ છે.



$y = cos\,x$

આકૃતિ 2.2 (i)



$y = cos^{-1}x$

આકૃતિ 2.2 (ii)

ચાલો, આપણે નીચે પ્રમાણે $cosec^{-1}x$ અને $sec^{-1}x$ નો વિચાર કરીએ :

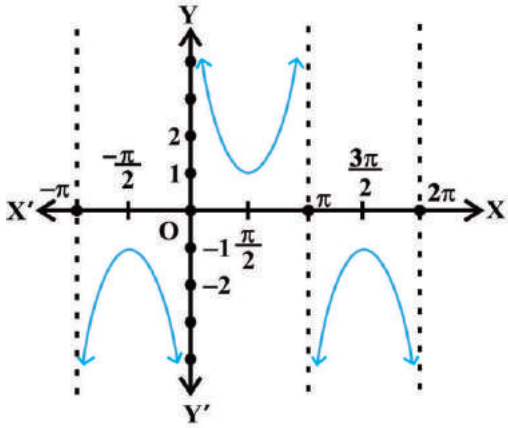
$cosecx = \frac{1}{sin\ x}$ હોવાથી, $cosec$ વિધેયનો પ્રદેશગણ

$\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq n\pi,\ n \in Z\}$ અને વિસ્તારગણ

$\{y : y \in R,\ y \geq 1$ અથવા $y \leq -1\}$ અર્થાત્ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ થાય.

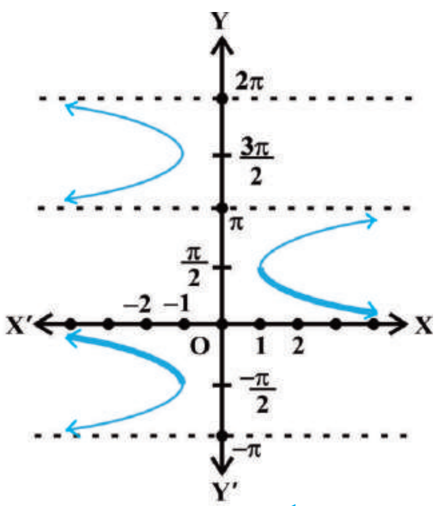
આમ, $y = cosec\,x$, $-1 < y < 1$ હોય તેવી y સિવાયની પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા ધારણ કરશે અને તે π ના પૂર્ણાંક ગુણિતો પર વ્યાખ્યાયિત નહીં થાય. જો $cosec$ વિધેયના પ્રદેશને $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ માં મર્યાદિત કરીએ તો તે વિસ્તાર $\mathbf{R} - (-1, 1)$ માટે એક-એક અને વ્યાપ્ત બને. ખરેખર તો $cosec$ વિધેય, $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ વગેરે મર્યાદિત અંતરાલમાં એક-એક અને વ્યાપ્ત બને. અને તેનો વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ થાય. આમ, $cosec^{-1}$ વિધેયનો પ્રદેશ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ લઈ શકાય. આપણે $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી $cosec^{-1}$ વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. આમ, આપણે મુખ્ય શાખાના સંદર્ભમાં $cosec^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ એમ લખી શકીએ.

આકૃતિ 2.3(i) અને 2.3(ii)માં $y = cosec\ x$ અને $y = cosec^{-1}x$ ના આલેખ બતાવેલ છે.



$y = cosec\,x$

આકૃતિ 2.3 (i)



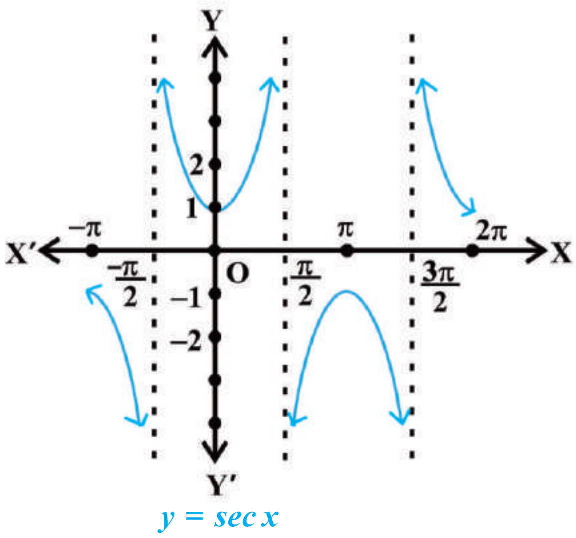
$y = cosec^{-1}x$

આકૃતિ 2.3 (ii)

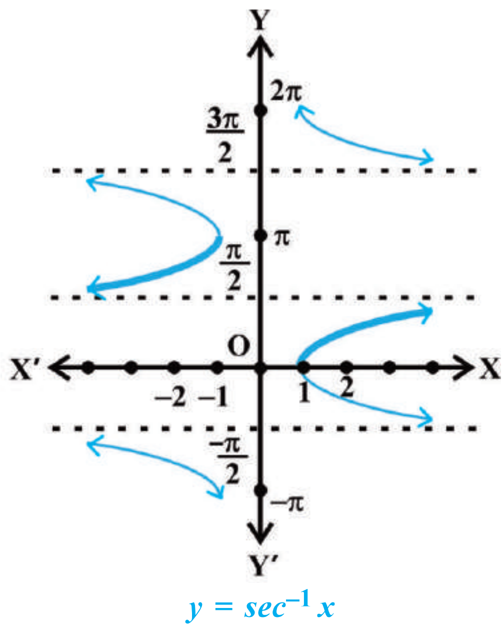
વળી, $secx = \frac{1}{cos\,x}$ હોવાથી $y = sec\ x$ નો પ્રદેશગણ $\mathbf{R} - \{x : x = (2n + 1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z}\}$ અને વિસ્તારગણ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ છે. આનો અર્થ *sec* (*secant*) વિધેય $-1 < y < 1$ સિવાયની y ની પ્રત્યેક કિંમત ધારણ કરશે અને તે $\frac{\pi}{2}$ના અયુગ્મ ગુણકો માટે વ્યાખ્યાયિત નથી. જો *sec* વિધેયના પ્રદેશને $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$માં મર્યાદિત કરીએ, તો તે એક-એક અને $\mathbf{R} - (-1, 1)$ માં વ્યાપ્ત બને. ખરેખર તો *sec* વિધેય $[-\pi, 0] - \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$, $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$, વગેરે મર્યાદિત અંતરાલમાં એક-એક અને $\mathbf{R} - (-1, 1)$ માં વ્યાપ્ત બને. આમ, sec^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ અને વિસ્તાર $[-\pi, 0] - \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$, $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ વગેરે એમ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. પ્રત્યેક અંતરાલને અનુરૂપ sec^{-1} વિધેયની ભિન્ન શાખા મળશે. આપણે $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી sec^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહીશું. આમ,

$$sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \rightarrow [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

આકૃતિ 2.4(i) અને 2.4(ii)માં $y = sec\ x$ અને $y = sec^{-1}x$ ના આલેખ બતાવેલ છે.



આકૃતિ 2.4 (i)



આકૃતિ 2.4 (ii)

અંતમાં આપણે tan^{-1} અને cot^{-1} નો વિચાર કરીશું.

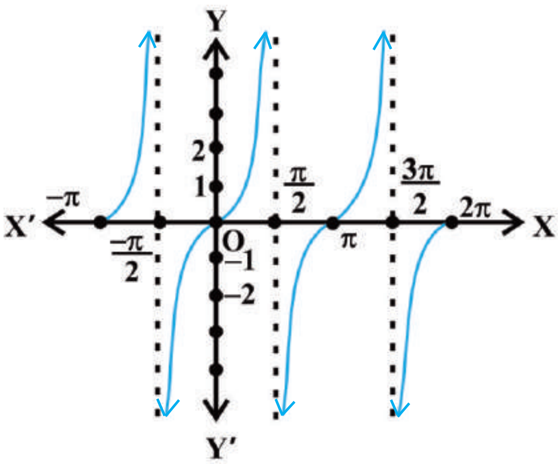
આપણે જાણીએ છીએ કે *tan* વિધેય (*tangent* વિધેય)નો પ્રદેશગણ

$\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z}\}$ અને વિસ્તાર $\mathbf{R}$ છે. અર્થાત્ *tan* વિધેય $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ

ગુણિતો માટે વ્યાખ્યાયિત નથી. જો આપણે *tan* વિધેયના પ્રદેશ પર મર્યાદા મૂકી તેને $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ લઈએ, તો તે એક-એક અને **R** માં વ્યાપ્ત બને છે. ખરેખર તો, *tan* વિધેય $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ વગેરેમાંના કોઈ પણ મર્યાદિત અંતરાલમાં એક-એક અને **R** માં વ્યાપ્ત બને. આમ, tan^{-1} ને જેનો પ્રદેશ R અને વિસ્તાર $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ હોય એવા વિધેય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. આ અંતરાલોને અનુરૂપ tan^{-1} વિધેયની ભિન્ન શાખાઓ મળે. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી tan^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહી શકાય. આમ,

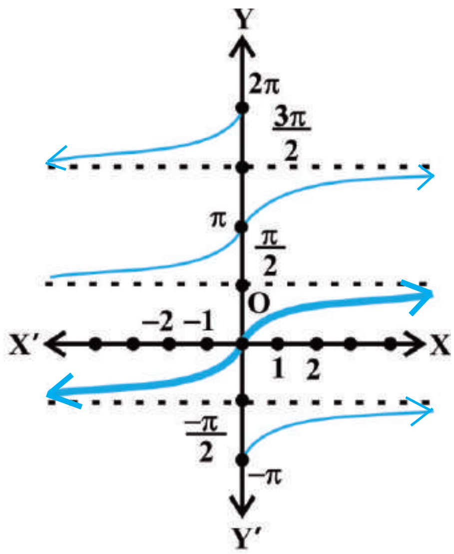
$$tan^{-1} : R \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$y = tan\ x$ અને $y = tan^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.5(i) અને 2.5(ii)માં દર્શાવેલ છે.



$y = tan\, x$

આકૃતિ 2.5 (i)



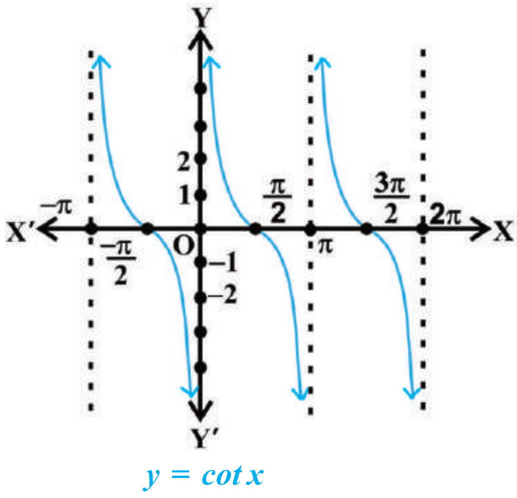
$y = tan^{-1} x$

આકૃતિ 2.5 (ii)

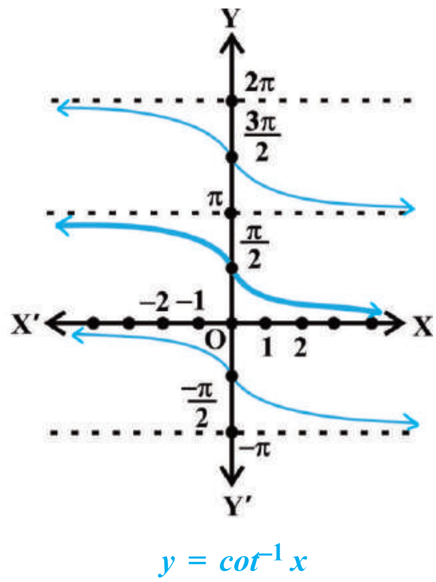
આપણે જાણીએ છીએ કે *cot* વિધેય (*cotangent* વિધેય)નો પ્રદેશ $\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ તથા વિસ્તાર **R** છે. અર્થાત્ *cotangent* વિધેય π ના પૂર્ણાંક ગુણિતો માટે અવ્યાખ્યાયિત છે. જો *cotangent* વિધેયનો મર્યાદિત પ્રદેશ $(0, \pi)$ લઈએ, તો તે એક-એક અને **R** માં વ્યાપ્ત બને છે. ખરેખર *cotangent* વિધેય મર્યાદિત અંતરાલ $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ વગેરેમાં એક-એક અને R માં વ્યાપ્ત બને. આમ, cot^{-1}ને જેનો પ્રદેશ **R** અને વિસ્તાર $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ વગેરે પૈકીનો કોઈ પણ અંતરાલ હોય એવા વિધેય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. $(0, \pi)$ વિસ્તારને અનુરૂપ મળતી cot^{-1} વિધેયની શાખાને *મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા* કહી શકાય. આમ,

$$cot^{-1} : R \rightarrow (0, \pi)$$

$y = cot\ x$ અને $y = cot^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.6(i) અને 2.6(ii)માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 2.6 (i)



આકૃતિ 2.6 (ii)

નીચે આપેલ કોષ્ટક ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોને (મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા) તેમના પ્રદેશ અને વિસ્તાર સાથે દર્શાવેલ છે :

sin^{-1}	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
cos^{-1}	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$[0, \pi]$
$cosec^{-1}$	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
sec^{-1}	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
tan^{-1}	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
cot^{-1}	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$(0, \pi)$

નોંધ :

(1) $sin^{-1}x$ અને $(sin\,x)^{-1}$ સંબંધી ગેરસમજ ના થવી જોઈએ. હકીકતે, $(sin\,x)^{-1} = \frac{1}{sin\ x}$ અને આ તથ્ય બાકીના ત્રિકોણમિતીય વિધેયો માટે પણ સત્ય છે.

(2) જ્યારે પણ ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયની કોઈ શાખાનો ઉલ્લેખ ના કરેલ હોય ત્યારે આપણે તે વિધેયની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા જ સમજીશું.

(3) ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનું મૂલ્ય મુખ્ય કિંમતવાળી શાખાના વિસ્તારમાં હોય, તો તેને આપણે તે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધિયની *મુખ્ય કિંમત* કહીશું.

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણનો વિચાર કરીશું.

ઉદાહરણ 1 : $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$. આથી, $sin\, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. આપણે જાણીએ છીએ કે, sin^{-1} વિધેયની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખાનો વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ છે અને $sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત $\frac{\pi}{4}$ છે.

ઉદાહરણ 2 : $cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$. આથી, $cot\, y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$$= cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

આપણે જાણીએ છીએ કે, cot^{-1} વિધેયની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખાનો વિસ્તાર $(0, \pi)$ છે અને $cot\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

આથી, $cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ની મુખ્ય કિંમત $\frac{2\pi}{3}$ છે.

સ્વાધ્યાય 2.1

નીચેના પ્રતિવિધેય માટે તેની મુખ્ય કિંમત શોધો :

1. $sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **2.** $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3.** $cosec^{-1}(2)$

4. $tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **5.** $cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **6.** $tan^{-1}(-1)$

7. $sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **8.** $cot^{-1}(\sqrt{3})$ **9.** $cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

10. $cosec^{-1}(-\sqrt{2})$

નીચેની અભિવ્યક્તિઓનું મૂલ્ય મેળવો :

11. $tan^{-1}(1) + cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

12. $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

પ્રશ્નો 13 તથા 14 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

13. જો $sin^{-1}x = y$ હોય, તો

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

14. $tan^{-1}\sqrt{3} - sec^{-1}(-2)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના ગુણધર્મો

આ વિભાગમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધિયોના કેટલાક અગત્યના ગુણધર્મો સાબિત કરીશું. અહીં, એક સ્પષ્ટ નોંધ કરીએ કે આ ગુણધર્મો ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો તેમને સંગત મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા પર વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યારે સત્ય છે. કેટલાંક પરિણામો ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના પ્રદેશનાં તમામ મૂલ્યો માટે સત્ય ના પણ હોય. અલબત્ત, x નાં જે મૂલ્યો માટે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય વ્યાખ્યાયિત હોય તેના માટે જ તે સત્ય હશે. આપણે પ્રદેશના x નાં આવાં મૂલ્યોની વિસ્તૃત ચર્ચા નહીં કરીએ, કારણ કે તે આ પુસ્તકની મર્યાદા બહાર છે.

યાદ કરો કે જો $y = sin^{-1}x$ તો, $x = sin\,y$ અને જો $x = sin\,y$ તો $y = sin^{-1}x$. આમ,

$\boldsymbol{sin\,(sin^{-1}x) = x,\ x \in [-1, 1]}$ **અને** $\boldsymbol{sin^{-1}(sin\,x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$**.**

આ જ વાત બાકીનાં પાંચ ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો માટે પણ સત્ય છે. હવે, આપણે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના કેટલાક ગુણધર્મો સાબિત કરીએ :

1. (i) $sin^{-1}\frac{1}{x} = cosec^{-1}x,\ x \geq 1$ **અથવા** $x \leq -1$

(ii) $cos^{-1}\frac{1}{x} = sec^{-1}x,\quad x \geq 1$ **અથવા** $x \leq -1$

(iii) $tan^{-1}\frac{1}{x} = cot^{-1}x,\quad x > 0$

પ્રથમ પરિણામ સાબિત કરવા, આપણે $cosec^{-1}x = y$ અર્થાત્ $cosec\,y = x$ લઈએ.

$\therefore \quad \frac{1}{x} = sin\,y \qquad (x \neq 0)$

આથી, $sin^{-1}\frac{1}{x} = y.$

અથવા $sin^{-1}\frac{1}{x} = cosec^{-1}x.$

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

2. (i) $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x,\quad x \in [-1, 1]$

(ii) $tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x,\quad x \in \mathbf{R}$

(iii) $cosec^{-1}(-x) = -cosec^{-1}x,\quad |x| \geq 1$

ધારો કે $sin^{-1}(-x) = y$ અર્થાત્ $-x = sin\,y$

આથી, $x = -sin\,y$ અર્થાત્ $x = sin\,(-y)$

આથી, $sin^{-1}x = -y = -sin^{-1}(-x)$

આથી, $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x$

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

3. (i) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x, \quad x \in [-1, 1]$

(ii) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x, \quad |x| \geq 1$

(iii) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x, \quad x \in R$

ધારો કે $\cos^{-1}(-x) = y$ અર્થાત્ $-x = \cos y$

આથી, $x = -\cos y = \cos(\pi - y)$

આમ, $\cos^{-1} x = \pi - y = \pi - \cos^{-1}(-x)$

$\therefore \quad \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

4. (i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]$

(ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in R$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \geq 1$

ધારો કે $\sin^{-1} x = y$. આથી, $x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$\therefore \quad \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$

આથી, $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

આ જ પ્રમાણે, બાકીના ભાગ સાબિત કરી શકાય.

5. (i) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}, \quad xy < 1$

(ii) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}, \quad xy > -1$

ધારો કે $\tan^{-1}x = \theta$ અને $\tan^{-1}y = \phi$

આથી, $x = \tan\theta$ અને $y = \tan\phi$

હવે, $\tan(\theta + \phi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta \cdot \tan\phi} = \dfrac{x+y}{1-xy}$

આથી, આપણને $\theta + \phi = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ મળશે.

આથી, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

ઉપરના પરિણામમાં, જો આપણે y ને $-y$ લઈએ તો, બીજું પરિણામ મળે અને y ના બદલે x લઈએ, તો આગળનાં પરિણામો પૈકીનું ત્રીજું પરિણામ મળે.

6. (i) $2tan^{-1}x = sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$, $|x| \le 1$

(ii) $2tan^{-1}x = cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x \ge 0$

(iii) $2tan^{-1}x = tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, $-1 < x < 1$

ધારો કે $tan^{-1}x = y$. આથી, $x = tan\, y$

હવે, $sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = sin^{-1}\frac{2\,tany}{1+tan^2y}$
$= sin^{-1}(sin\, 2y)$
$= 2y$
$= 2tan^{-1}x$

તથા $cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = cos^{-1}\frac{1-tan^2y}{1+tan^2y}$
$= cos^{-1}(cos\, 2y)$
$= 2y$
$= 2tan^{-1}x$

(iii) આ જ રીતે, સાબિત કરી શકાય.

આપણે હવે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે,

(i) $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2sin^{-1}x$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2cos^{-1}x$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$.

ઉકેલ : (i) ધારો કે, $sin^{-1}x = \theta$. આથી $x = sin\theta$

હવે, $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = sin^{-1}(2sin\theta\sqrt{1-sin^2\theta})$
$= sin^{-1}(2sin\theta\, cos\theta)$
$= sin^{-1}(sin\, 2\theta)$
$= 2\theta$
$= 2sin^{-1}x$

(ii) $x = cos\theta$ લો. ઉપર પ્રમાણેની રીતે આગળ વધતાં, આપણને $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2cos^{-1}x$ મળે.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે, $tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{2}{11} = tan^{-1}\frac{3}{4}$.

ઉકેલ : ગુણધર્મ 5(i) પરથી,

ડા.બા. $= tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{2}{11}$

$= tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}} = tan^{-1}\frac{15}{20}$

$= tan^{-1}\frac{3}{4}$

$=$ જ.બા.

ઉદાહરણ 5 : $tan^{-1}\left(\frac{cos\,x}{1-sin\,x}\right)$, $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$નું સાદું રૂપ આપો.

ઉકેલ : અહીં, $tan^{-1}\left(\frac{cos\,x}{1-sin\,x}\right) = tan^{-1}\left[\frac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2} - 2sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}}\right]$

$$= tan^{-1}\left[\frac{\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right)\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)}{\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{1+tan\frac{x}{2}}{1-tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$$

બીજી રીત : $tan^{-1}\left(\frac{cos\,x}{1-sin\,x}\right) = tan^{-1}\left[\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]$

$$= tan^{-1}\left[\frac{sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{2sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= tan^{-1}\left[cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

ઉદાહરણ 6 : $cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x > 1$ ને સાદા સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં, $x = sec\theta$, તો $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{sec^2\theta - 1} = tan\theta$

આથી, $cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = cot^{-1}(cot\,\theta) = \theta = sec^{-1}x$. માંગેલ સાદું સ્વરૂપ છે.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે, $tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ઉકેલ : ધારો કે, $x = tan\theta$. આથી, $\theta = tan^{-1}x$.

હવે, જ.બા. $= tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{3tan\theta - tan^3\theta}{1-3tan^2\theta}\right)$

$= tan^{-1}(tan\,3\theta)$

$= 3\theta$

$= 3tan^{-1}x$

$= tan^{-1}x + 2tan^{-1}x$

$= tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} =$ ડા.બા. (કેમ ?)

ઉદાહરણ 8 : $cos\,(sec^{-1}x + cosec^{-1}x)$, $|x| \geq 1$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $cos\,(sec^{-1}x + cosec^{-1}x) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

સ્વાધ્યાય 2.2

સાબિત કરો :

1. $3sin^{-1}x = sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. $3cos^{-1}x = cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

3. $tan^{-1}\frac{2}{11} + tan^{-1}\frac{7}{24} = tan^{-1}\frac{1}{2}$

4. $2tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{1}{7} = tan^{-1}\frac{31}{17}$

નીચેનાં વિધેયોને સાદા સ્વરૂપમાં લખો :

5. $tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $x \neq 0$

6. $tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

7. $tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}\right)$, $0 < x < \pi$

8. $tan^{-1}\left(\dfrac{cos\,x - sin\,x}{cos\,x + sin\,x}\right)$, $0 < x < \pi$

9. $tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $|x| < a$

10. $tan^{-1}\left(\dfrac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right)$, $a > 0;\ \dfrac{-a}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

કિંમત શોધો :

11. $tan^{-1}\left[2cos\left(2sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

12. $cot\,(tan^{-1}a + cot^{-1}a)$

13. $tan\frac{1}{2}\left[sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} + cos^{-1}\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right]$, $|x| < 1$, $y > 0$ અને $xy < 1$.

14. જો $sin\left(sin^{-1}\frac{1}{5} + cos^{-1}x\right) = 1$, તો x ની કિંમત શોધો.

15. જો $tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2} + tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{\pi}{4}$, તો x ની કિંમત શોધો.

પ્રશ્ન-ક્રમાંક 16 થી 18 ની અભિવ્યક્તિની કિંમત શોધો :

16. $sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{3}\right)$

17. $tan^{-1}\left(tan\frac{3\pi}{4}\right)$

18. $tan\left(sin^{-1}\frac{3}{5} + cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

પ્રશ્નો 19 થી 21 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

19. $cos^{-1}\left(cos\frac{7\pi}{6}\right) = ...$.

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

20. $sin\left(\frac{\pi}{3} - sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = ...$.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

21. $tan^{-1}\sqrt{3} - cot^{-1}(-\sqrt{3}) = ...$.

(A) π (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) $2\sqrt{3}$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 9 : $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right)$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $sin^{-1}(sin\,x) = x$.

આથી, $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}$ થાય તેવી અપેક્ષા રાખી શકાય.

પરંતુ, $sin^{-1}x$ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$માં $\frac{3\pi}{5}$ નથી.

$sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = sin\frac{2\pi}{5}$ અને $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

આથી, $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right) = sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે $sin^{-1}\frac{3}{5} - sin^{-1}\frac{8}{17} = cos^{-1}\frac{84}{85}$.

ઉકેલ : ધારો કે $sin^{-1}\frac{3}{5} = x$ અને $sin^{-1}\frac{8}{17} = y$

આથી, $sin\,x = \frac{3}{5}$ અને $sin\,y = \frac{8}{17}$

હવે, $cos\,x = \sqrt{1 - sin^2x} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

અને $cos\,y = \sqrt{1 - sin^2y} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$.

હવે, $cos(x - y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{15}{17} + \frac{3}{5} \times \frac{8}{17} = \frac{84}{85}$$

$\therefore \quad x - y = cos^{-1}\frac{84}{85}$

આથી, $sin^{-1}\frac{3}{5} - sin^{-1}\frac{8}{17} = cos^{-1}\frac{84}{85}$

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $sin^{-1}\frac{12}{13} + cos^{-1}\frac{4}{5} + tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$.

ઉકેલ : ધારો કે $sin^{-1}\frac{12}{13} = x,\ cos^{-1}\frac{4}{5} = y,\ tan^{-1}\frac{63}{16} = z$

આથી, $sin\,x = \frac{12}{13},\ cos\,y = \frac{4}{5},\ tan\,z = \frac{63}{16}$

$\therefore \quad cos\,x = \frac{5}{13},\ sin\,y = \frac{3}{5},\ tan\,x = \frac{12}{5}$ અને $tan\,y = \frac{3}{4}$

હવે, $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

$= \dfrac{\frac{12}{5} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{12}{5} \times \frac{3}{4}} = -\dfrac{63}{16}$

આથી, $\tan(x+y) = -\tan z$

અર્થાત્ $\tan(x+y) = \tan(-z)$ અથવા

$\tan(x+y) = \tan(\pi - z)$

$\therefore$ $x + y = -z$ અથવા $x + y = \pi - z$

x, y અને z ધન હોવાથી, $x + y \neq -z$

આથી, $x + y + z = \pi$ અથવા

$$\sin^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi.$$

ઉદાહરણ 12 : $\tan^{-1}\left[\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right]$નું સાદું રૂપ આપો, જ્યાં $\dfrac{a}{b}\tan x > -1$.

ઉકેલ : અહીં $\tan^{-1}\left[\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right] = \tan^{-1}\left[\dfrac{\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x}}{\frac{b\cos x + a\sin x}{b\cos x}}\right]$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{a}{b} - \tan x}{1 + \frac{a}{b}\tan x}\right] = \tan^{-1}\frac{a}{b} - \tan^{-1}(\tan x)$$

$$= \tan^{-1}\frac{a}{b} - x$$

ઉદાહરણ 13 : ઉકેલો : $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \dfrac{\pi}{4}$.

ઉકેલ : અહીં, $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x + 3x}{1 - 2x \times 3x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

એટલે કે $\tan^{-1}\left(\dfrac{5x}{1 - 6x^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\dfrac{5x}{1 - 6x^2} = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

$\therefore$ $6x^2 + 5x - 1 = 0$ અર્થાત્ $(6x - 1)(x + 1) = 0$

આથી, $x = \dfrac{1}{6}$ અથવા $x = -1$.

$x = -1$ મૂકતાં, ડા.બા.નું મૂલ્ય ઋણ આવતું હોવાથી તે સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહિ. આથી $x = \frac{1}{6}$ જ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 2

નીચેનાં પ્રતિવિધેયનાં મૂલ્ય શોધો :

1. $cos^{-1}\left(cos\frac{13\pi}{6}\right)$ **2.** $tan^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{6}\right)$

સાબિત કરો :

3. $2sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{24}{7}$

4. $sin^{-1}\frac{8}{17} + sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{77}{36}$

5. $cos^{-1}\frac{4}{5} + cos^{-1}\frac{12}{13} = cos^{-1}\frac{33}{65}$

6. $cos^{-1}\frac{12}{13} + sin^{-1}\frac{3}{5} = sin^{-1}\frac{56}{65}$

7. $tan^{-1}\frac{63}{16} = sin^{-1}\frac{5}{13} + cos^{-1}\frac{3}{5}$

8. $tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{3} + tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

સાબિત કરો :

9. $tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}cos^{-1}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]$, $x \in [0, 1]$

10. $cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+sin\,x}+\sqrt{1-sin\,x}}{\sqrt{1+sin\,x}-\sqrt{1-sin\,x}}\right] = \frac{x}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

11. $tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}x$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ [**સૂચન :** $x = cos2\theta$ લો.]

12. $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}sin^{-1}\frac{1}{3} = \frac{9}{4}sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

નીચેનાં સમીકરણ ઉકેલો :

13. $2tan^{-1}(cos\,x) = tan^{-1}(2cosec\,x)$

14. $tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}tan^{-1}x$ $(x > 0)$

પ્રશ્નો 15 થી 17 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

15. $sin\,(tan^{-1}x)$, $|x| < 1$ = ...

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

16. $sin^{-1}(1 - x) - 2sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, તો x = ...

(A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

17. $tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ = ...

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

સારાંશ

- ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયના પ્રદેશ અને વિસ્તાર (મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

વિધેય	પ્રદેશ	વિસ્તાર (મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા)
$y = sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = cosec^{-1}x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$y = sec^{-1}x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$y = tan^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = cot^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$(0, \pi)$

- $sin^{-1}x$ ને ભૂલથી $(sin\,x)^{-1}$ તરીકે ના લેવાય. ખરેખર $(sin\,x)^{-1} = \frac{1}{sin\,x}$ અને આ જ વાત બાકીનાં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો માટે સત્ય છે.
- ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનું મૂલ્ય મુખ્ય શાખામાં હોય, તો તેને તે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયની *મુખ્ય કિંમત* કહેવાય.
- યોગ્ય પ્રદેશનાં મૂલ્યો માટે,
  - $y = sin^{-1}x \Rightarrow x = sin\,y$
  - $x = sin\,y \Rightarrow y = sin^{-1}x$
  - $sin\,(sin^{-1}x) = x$
  - $sin^{-1}(sin\,x) = x$
  - $sin^{-1}\frac{1}{x} = cosec^{-1}x$
  - $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x$
  - $cos^{-1}\frac{1}{x} = sec^{-1}x$
  - $cot^{-1}(-x) = \pi - cot^{-1}x$
  - $tan^{-1}\frac{1}{x} = cot^{-1}x$
  - $sec^{-1}(-x) = \pi - sec^{-1}x$

- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$
- $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
- $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1} x$
- $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\text{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$
- $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$
- $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$
- $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Historical Note

The study of trigonometry was first started in India. The ancient Indian Mathematicians, ***Aryabhatta*** (C.E. 476), ***Brahmagupta*** (C.E. 598), ***Bhaskara I*** (C.E. 600) and ***Bhaskara II*** (C.E. 1114) got important results of trigonometry. All this knowledge went from India to Arabia and then from there to Europe. The Greeks had also started the study of trigonometry but their approach was so clumsy that when the Indian approach became known, it was immediately adopted throughout the world.

In India, the predecessor of the modern trigonometric functions, known as the sine of an angle, and the introduction of the sine function represents one of the main contribution of the ***siddhantas*** (Sanskrit astronomical works) to mathematics.

Bhaskara I (about C.E. 600) gave formulae to find the values of sine functions for angles more than 90°. A sixteenth century Malayalam work ***Yuktibhasa*** contains a proof for the expansion of sin (A + B). Exact expression for sines or cosines of 18°, 36°, 54°, 72°, etc., were given by ***Bhaskara II***.

The symbols $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, etc., for *arc sin x*, *arc cos x*, etc., were suggested by the astronomer Sir ***John F.W. Hersehel*** (C.E. 1813) The name of ***Thales*** (about B.C.E. 600) is invariably associated with height and distance problems. He is credited with the determination of the height of a great pyramid in Egypt by measuring shadows of the pyramid and an auxiliary staff (or gnomon) of known height, and comparing the ratios :

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (sun's altitude)}$$

Thales is also said to have calculated the distance of a ship at sea through the proportionality of sides of similar triangles. Problems on height and distance using the similarity property are also found in ancient Indian works.

— ❖ —

પ્રકરણ **3**

શ્રેણિક

❖ *The essence of Mathematics lies in its freedom. — CANTOR* ❖

3.1 પ્રાસ્તાવિક

ગણિતની વિવિધ શાખાઓમાં શ્રેણિકનું જ્ઞાન હોવું જરૂરી છે. ગણિતમાં શ્રેણિક ખૂબ જ શક્તિશાળી શસ્ત્ર છે. ગણિતનું આ સાધન બીજી સરળ રીતોની તુલનામાં આપણા કાર્યને અત્યંત સરળ બનાવે છે. સુરેખ સમીકરણની સંહતિના ઉકેલ માટેની સઘન અને સરળ રીતોના પ્રયત્નના ફળ સ્વરૂપે શ્રેણિકની સંકલ્પનાનું સર્જન થયું. સુરેખ સમીકરણની સંહતિના ઉકેલ માટેના સહગુણકોની રજૂઆત પૂરતો જ શ્રેણિકનો ઉપયોગ નથી, પરંતુ શ્રેણિકની સંકલ્પના આ ઉપયોગથી પણ ખૂબ દૂર સુધી જાય છે. શ્રેણિક સંકેત અને પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ અંગત કમ્પ્યૂટર માટે વીજાણુ કાર્યપત્રક કાર્યક્રમમાં થાય છે. તેના પરિપાક રૂપે અંદાજપત્રક, વેચાણની પ્રક્ષેપણ ધારણા, અંદાજિત કિંમત, પ્રયોગોનાં પરિણામોનું વિશ્લેષણ જેવા ઉદ્યોગ અને વિજ્ઞાનનાં વિવિધ ક્ષેત્રોમાં શ્રેણિકનો ઉપયોગ થાય છે. તદુપરાંત સમતલમાં મોટવણી, પરિભ્રમણ અને પરાવર્તન જેવી ભૌતિક પ્રક્રિયાઓનું પણ શ્રેણિકો દ્વારા નિરૂપણ કરી શકાય છે. શ્રેણિકનો ઉપયોગ સંકેતલિપિમાં પણ થાય છે. આ ગાણિતિક સાધનનો ઉપયોગ વિજ્ઞાનની માત્ર નિશ્ચિત શાખાઓમાં જ થાય છે, એટલું જ નહિ, પરંતુ જનીનવિજ્ઞાન, અર્થશાસ્ત્ર, સામાજિક વિજ્ઞાન, આધુનિક મનોવિજ્ઞાન અને ઔદ્યોગિક સંચાલનમાં પણ તેનો ઉપયોગ થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે શ્રેણિકના સિદ્ધાંતો અને શ્રેણિક બીજગણિતને કેવી રીતે રસપ્રદ અને માહિતીપ્રચુર બનાવી શકાય તે જોઈશું.

3.2 શ્રેણિક

ધારો કે આપણે રાધા પાસે 15 નોટબુક છે એવી માહિતી દર્શાવવી છે. [ ] ની અંદરના ભાગમાં રહેલ સંખ્યા એ રાધા પાસેની નોટબુકની સંખ્યા દર્શાવે છે તેવી સમજણ સાથે આપણે આ માહિતી [15] તરીકે દર્શાવીશું. હવે, આપણે રાધા પાસે 15 નોટબુક અને 6 પેન છે તેમ દર્શાવવું છે. આપણે [ ] માં પ્રથમ સંખ્યા રાધા પાસેની નોટબુકની સંખ્યા અને બીજી સંખ્યા એ પેનની સંખ્યા દર્શાવે છે તેવી સમજણ સાથે આપણે તેને [15 6] થી અભિવ્યક્ત કરીશું. ચાલો, આપણે હવે રાધા અને તેના બે મિત્ર ફૌઝિઆ અને સિમરન પાસેની નોટબુક અને પેનની નીચે આપેલી માહિતીને અભિવ્યક્ત કરવા ઇચ્છીએ છીએ.

રાધા પાસે 15 નોટબુક અને 6 પેન

ફૌઝિઆ પાસે 10 નોટબુક અને 2 પેન

અને સિમરન પાસે 13 નોટબુક અને 5 પેન છે.

હવે, આ માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે ગોઠવી શકાય :

	નોટબુક	પેન
રાધા	15	6
ફૌઝિઆ	10	2
સિમરન	13	5

અને તેને

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} &
\begin{array}{l} \leftarrow \text{પ્રથમ હાર (First row)} \\ \leftarrow \text{દ્વિતીય હાર (Second row)} \\ \leftarrow \text{તૃતીય હાર (Third row)} \end{array} \\
\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{પ્રથમ સ્તંભ} & \text{દ્વિતીય સ્તંભ} \\ \text{(First} & \text{(Second} \\ \text{Column)} & \text{Column)} \end{array} &
\end{array}$$

અથવા

	રાધા	ફૌઝિઆ	સિમરન
નોટબુક	15	10	13
પેન	6	2	5

પ્રમાણે અભિવ્યક્ત કરી શકાય.

આ માહિતીને

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} 15 & 10 & 13 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} &
\begin{array}{l} \leftarrow \text{પ્રથમ હાર (First row)} \\ \leftarrow \text{દ્વિતીય હાર (Second row)} \end{array} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{પ્રથમ સ્તંભ} & \text{દ્વિતીય સ્તંભ} & \text{તૃતીય સ્તંભ} \\ \text{(First} & \text{(Second} & \text{(Third} \\ \text{Column)} & \text{Column)} & \text{Column)} \end{array} &
\end{array}$$

પ્રમાણે પણ રજૂ કરી શકાય.

પ્રથમ ગોઠવણીમાં, પ્રથમ સ્તંભના સભ્યો એ અનુક્રમે રાધા, ફૌઝિઆ અને સિમરન પાસેની નોટબુકની સંખ્યા દર્શાવે છે અને બીજા સ્તંભના સભ્યો એ અનુક્રમે રાધા, ફૌઝિઆ અને સિમરન પાસેની પેનની સંખ્યા દર્શાવે છે.

એ જ રીતે, બીજી ગોઠવણીમાં, પ્રથમ હારના સભ્યો એ અનુક્રમે રાધા, ફૌઝિઆ અને સિમરન પાસેની નોટબુકની સંખ્યા દર્શાવે છે. બીજી હારના ઘટકો એ અનુક્રમે રાધા, ફૌઝિઆ અને સિમરન પાસેની પેનની સંખ્યા દર્શાવે છે. ઉપર પ્રમાણેની કરેલી ગોઠવણી અથવા પ્રદર્શનને ***શ્રેણિક (Matrix)*** કહે છે. ઔપચારિક રીતે, આપણે શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આ પ્રમાણે આપીશું :

વ્યાખ્યા 1 : સંખ્યાઓ અથવા વિધેયોની ક્રમમાં લંબચોરસ સારણીને શ્રેણિક (Matrix) કહે છે. સંખ્યાઓ અથવા વિધેયોને શ્રેણિકના સભ્યો અથવા ઘટકો કહે છે.

શ્રેણિકને આપણે કેપિટલ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરથી દર્શાવીશું. શ્રેણિકનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપ્યાં છે :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3.5 & -1 & 2 \\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1+x & x^3 & 3 \\ \cos x & \sin x + 2 & \tan x \end{bmatrix}$$

ઉપરનાં ઉદાહરણોમાં, શ્રેણિકના સમક્ષિતિજ રેખામાં આવેલા ઘટકો શ્રેણિકની હાર અને શિરોલંબ રેખામાં આવેલા ઘટકો સ્તંભની રચના કરે છે તેમ કહીશું. આમ શ્રેણિક A ને 3 હાર અને 2 સ્તંભ, B ને 3 હાર અને 3 સ્તંભ જ્યારે Cને 2 હાર અને 3 સ્તંભ છે.

3.2.1 શ્રેણિકની કક્ષા

જેમાં m હાર અને n સ્તંભ હોય તેવા શ્રેણિકને $m \times n$ કક્ષા (Order) વાળો શ્રેણિક અથવા $m \times n$ શ્રેણિક કહીશું. (m બાય n શ્રેણિક તરીકે વાંચીશું.) આથી શ્રેણિકના ઉપરનાં ઉદાહરણોના સંદર્ભમાં આપણી પાસે A એ 3×2 શ્રેણિક, B એ 3×3 શ્રેણિક અને C એ 2×3 શ્રેણિક છે. આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે, A ને $3 \times 2 = 6$ ઘટકો તથા B અને C ને અનુક્રમે 9 અને 6 ઘટકો છે.

વ્યાપક રીતે, $m \times n$ શ્રેણિકની લંબચોરસ સારણી નીચે પ્રમાણે છે :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

અથવા $A = [a_{ij}]_{m \times n}, \ 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n \quad i, j \in N$

આમ, i મી હાર ઘટકો $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in}$ થી બનેલી છે અને j મો સ્તંભ ઘટકો $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, ..., a_{mj}$ થી બનેલો છે.

વ્યાપક રીતે, i મી હાર અને j મા સ્તંભમાં આવેલો ઘટક a_{ij} છે. આપણે તેને A નો (i, j)મો ઘટક પણ કહી શકીએ. $m \times n$ શ્રેણિકના ઘટકોની સંખ્યા mn થશે.

નોંધ : આ પ્રકરણમાં,

(1) આપણે $m \times n$ કક્ષાવાળા શ્રેણિક Aને દર્શાવવા માટે સંકેત $A = [a_{ij}]_{m \times n}$નો ઉપયોગ કરીશું.

(2) આપણે શ્રેણિકના ઘટક, માત્ર વાસ્તવિક સંખ્યા અથવા વાસ્તવિક મૂલ્યવાળાં વિધેયો હોય તેવા જ શ્રેણિકનો વિચાર કરીશું.

આપણે સમતલના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) ને પણ શ્રેણિક (સ્તંભ અથવા હાર) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (અથવા $[x \ y]$)થી દર્શાવી શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે, બિંદુ P(0, 1)ને શ્રેણિકમાં $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ અથવા $[0 \quad 1]$ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

આપણે નિરીક્ષણ કરી શકીએ કે, આ પ્રમાણે સીધી રેખાઓથી ઘેરાયેલી બંધ આકૃતિનાં શિરોબિંદુઓને પણ શ્રેણિક સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે, ચતુષ્કોણ ABCD નાં શિરોબિંદુઓ A(1, 0), B(3, 2), C(1, 3), D(–1, 2) નો વિચાર કરીએ.

હવે, ચતુષ્કોણ ABCD ને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં,

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \end{array} \text{ અથવા } Y = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \text{ પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.}$$

આમ, સમતલની ભૌમિતિક આકૃતિનાં શિરોબિંદુઓને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં રજૂ કરી શકાય.

હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ વિશે વિચારીએ.

ઉદાહરણ 1 : ત્રણ કારખાનાં I, II અને III નાં પુરુષ અને સ્ત્રી કર્મીઓની સંખ્યાને લગતી માહિતી નીચે પ્રમાણે લઈએ :

	પુરુષ કર્મીઓની સંખ્યા	સ્ત્રી કર્મીઓની સંખ્યા
I	30	25
II	25	31
III	27	26

ઉપરની માહિતીને 3×2 શ્રેણિકમાં રજૂ કરો. ત્રીજી હાર અને બીજા સ્તંભનો ઘટક શું સૂચવે છે ?

ઉકેલ : માહિતીને 3×2 શ્રેણિક સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$$

ત્રીજી હાર અને બીજા સ્તંભનો ઘટક કારખાના III ના સ્ત્રી કર્મીઓની સંખ્યા રજૂ કરે છે.

ઉદાહરણ 2 : જો કોઈ શ્રેણિકમાં બરાબર 8 ઘટકો હોય, તો તેની શક્ય કક્ષાઓ કઈ હશે ?

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, જો શ્રેણિકની કક્ષા $m \times n$ હોય, તો તેને mn ઘટકો હોય. આમ, 8 ઘટકોવાળા શ્રેણિકની શક્ય તેટલી કક્ષા શોધવા આપણે જેનો ગુણાકાર 8 થાય તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની બધી ક્રમયુક્ત જોડ શોધીશું.

આમ, બધી શક્ય ક્રમયુક્ત જોડીઓ (1, 8), (8, 1), (4, 2), (2, 4) થશે.

આથી, માંગેલ શ્રેણિકોની શક્ય કક્ષા 1×8, 8×1, 4×2, 2×4 છે.

ઉદાહરણ 3 : જે શ્રેણિકના ઘટકો $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$ દ્વારા મળે તેવા 3×2 શ્રેણિકની રચના કરો.

ઉકેલ : વ્યાપક રીતે, 3×2 શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ મળે.

હવે, $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$, $i = 1, 2, 3$ અને $j = 1, 2$

તેથી, $a_{11} = \frac{1}{2}|1 - 3 \times 1| = 1$ $\quad a_{12} = \frac{1}{2}|1 - 3 \times 2| = \frac{5}{2}$

$a_{21} = \frac{1}{2}|2 - 3 \times 1| = \frac{1}{2}$ $\quad a_{22} = \frac{1}{2}|2 - 3 \times 2| = 2$

$a_{31} = \frac{1}{2}|3 - 3 \times 1| = 0$ $\quad a_{32} = \frac{1}{2}|3 - 3 \times 2| = \frac{3}{2}$

આથી, માંગેલો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ છે.

3.3 શ્રેણિકના પ્રકારો

આ વિભાગમાં, આપણે શ્રેણિકોના જુદા-જુદા પ્રકારોની ચર્ચા કરીશું.

*(i) **સ્તંભ શ્રેણિક :** જે શ્રેણિકમાં માત્ર એક જ સ્તંભ હોય તે શ્રેણિકને સ્તંભ શ્રેણિક (Column Matrix) કહે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *એ 4×1 કક્ષાવાળો સ્તંભ શ્રેણિક છે.*

વ્યાપક રીતે, $A = [a_{i1}]_{m \times 1}$ એ $m \times 1$ કક્ષાવાળો સ્તંભ શ્રેણિક છે. $i = 1, 2, 3, \ldots, m$

(ii) હાર શ્રેણિક : જે શ્રેણિકમાં માત્ર એક જ હાર હોય તે શ્રેણિકને હાર શ્રેણિક (Row Matrix) કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$ હાર શ્રેણિક છે.

વ્યાપક રીતે, $B = [b_{1j}]_{1 \times n}$ એ $1 \times n$ કક્ષાવાળો હાર શ્રેણિક છે. $j = 1, 2, 3, ..., n$

(iii) ચોરસ શ્રેણિક : જે શ્રેણિકની હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય તેવા શ્રેણિકને ચોરસ શ્રેણિક (Square Matrix) કહે છે. આમ જે $m \times n$ શ્રેણિકમાં $m = n$ હોય, તેવા $n \times n$ શ્રેણિકને ચોરસ શ્રેણિક કહે છે અને તે 'n' કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક તરીકે ઓળખાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ એ 3 કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક છે.

વ્યાપક રીતે, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ એ m કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક છે.

નોંધ : જો $A = [a_{ij}]$ એ n કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો ઘટકો $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ શ્રેણિક A નો વિકર્ણ બનાવે છે તેમ કહેવાય. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો A ના વિકર્ણ ઘટકો 1, 4, 6 છે.

(iv) વિકર્ણ શ્રેણિક : જો કોઈ ચોરસ શ્રેણિક $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ના વિકર્ણ ઘટકો સિવાયના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય, તો B ને વિકર્ણ શ્રેણિક (Diagonal Matrix) કહે છે, એટલે કે જો શ્રેણિક $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ માં $i \neq j$ માટે $b_{ij} = 0$ હોય, તો B ને વિકર્ણ શ્રેણિક કહેવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $A = [4]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ એ વિકર્ણ શ્રેણિક છે. તેમની કક્ષા અનુક્રમે 1, 2, 3 છે.

(v) અદિશ શ્રેણિક : જો કોઈ વિકર્ણ શ્રેણિકના બધા જ વિકર્ણ ઘટકો સમાન હોય, તો તે શ્રેણિકને અદિશ શ્રેણિક (Scalar Matrix) કહે છે, એટલે કે, જો ચોરસ શ્રેણિક $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ માં $i \neq j$ માટે $b_{ij} = 0$ અને $i = j$ માટે કોઈક અચળ k માટે $b_{ij} = k$ હોય, તો Bને અદિશ શ્રેણિક કહેવાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $A = [3]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ એ અનુક્રમે 1, 2, 3 કક્ષાવાળા અદિશ શ્રેણિકો છે.

(vi) એકમ શ્રેણિક : જો કોઈ ચોરસ શ્રેણિકના બધા જ વિકર્ણ ઘટકો 1 અને બાકીના બધા ઘટકો શૂન્ય હોય, તો તે શ્રેણિકને એકમ શ્રેણિક (Identity Matrix) કહે છે. બીજી રીતે કહીએ તો, જો ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ માં $i = j$ માટે $a_{ij} = 1$ અને $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$ હોય, તો Aને એકમ શ્રેણિક કહેવાય. n કક્ષાવાળા એકમ શ્રેણિકને આપણે I_n થી દર્શાવીશું. જો શ્રેણિકના સંદર્ભમાં તેની કક્ષા સ્પષ્ટ હોય, તો આપણે તેને માત્ર I લખીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, $[1]$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ એ અનુક્રમે 1, 2, 3 કક્ષાવાળા એકમ શ્રેણિકો છે.

નિરીક્ષણ કરો કે, જો અદિશ શ્રેણિક B માં $k = 1$ હોય, તો અદિશ શ્રેણિક એ એકમ શ્રેણિક છે. પરંતુ પ્રત્યેક એકમ શ્રેણિક એ સ્પષ્ટપણે અદિશ શ્રેણિક છે.

(vii) *શૂન્ય શ્રેણિક : જો કોઈ શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય, તો તે શ્રેણિકને શૂન્ય શ્રેણિક (Zero Matrix, Null Matrix) કહે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, $[0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[0 \quad 0]$ એ બધા જ શૂન્ય શ્રેણિક છે.

આપણે શૂન્ય શ્રેણિકને O વડે દર્શાવીશું. શ્રેણિકના સંદર્ભમાં તેની કક્ષા સ્પષ્ટ છે.

3.3.1 શ્રેણિકોની સમાનતા

વ્યાખ્યા 2 : બે શ્રેણિક A = $[a_{ij}]$ અને B = $[b_{ij}]$ ના સંદર્ભમાં

જો (i) તેમની કક્ષા સમાન હોય

(ii) A નો દરેક સભ્ય B ના અનુરૂપ સભ્યને સમાન હોય, એટલે કે પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = b_{ij}$ હોય, તો A અને B ને સમાન શ્રેણિક કહેવાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ સમાન શ્રેણિક છે, પરંતુ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ સમાન શ્રેણિક નથી. **જો A અને B સમાન શ્રેણિક હોય, તો સંકેતમાં આપણે A = B લખીશું.**

જો $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો $x = -1.5$, $y = 0$, $z = 2$, $a = \sqrt{6}$, $b = 3$, $c = 2$.

ઉદાહરણ 4 : જો $\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$ તો a, b, c x, y અને z નાં મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપેલા શ્રેણિક સમાન છે. આથી તેમના અનુરૂપ સભ્યો સમાન થશે. અનુરૂપ સભ્યોનાં મૂલ્યો સરખાવતાં, આપણને

$$x + 3 = 0, \qquad z + 4 = 6, \qquad 2y - 7 = 3y - 2$$

$$a - 1 = -3, \qquad 0 = 2c + 2, \qquad b - 3 = 2b + 4 \text{ મળે.}$$

સમીકરણો ઉકેલતાં, આપણને

$$a = -2,\ b = -7,\ c = -1,\ x = -3,\ y = -5,\ z = 2 \text{ મળશે.}$$

ઉદાહરણ 5 : નીચેના સમીકરણમાંથી a, b, c અને d નાં મૂલ્ય શોધો :

$$\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : બે શ્રેણિકની સમાનતાને આધારે, અનુરૂપ સભ્યોનાં મૂલ્યો સરખાવતાં, આપણને

$$2a + b = 4, \qquad 5c - d = 11$$

$$a - 2b = -3, \qquad 4c + 3d = 24 \text{ મળે.}$$

આ સમીકરણો ઉકેલતાં, આપણને

$$a = 1,\ b = 2,\ c = 3 \text{ અને } d = 4 \text{ મળશે.}$$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$ માટે

(i) શ્રેણિકની કક્ષા (ii) ઘટકોની સંખ્યા (iii) ઘટકો a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23} લખો.

2. જો કોઈ શ્રેણિકને 24 ઘટકો હોય, તો તેની શક્ય કક્ષાઓ કઈ હોય ? જો તેને 13 ઘટકો હોય, તો તેની શક્ય કક્ષાઓ શું થશે ?

3. જો કોઈ શ્રેણિકને 18 ઘટકો હોય, તો તેની શક્ય કક્ષાઓ કઈ હોય ? જો તેને 5 ઘટકો હોય, તો તેની શક્ય કક્ષાઓ શું થાય ?

4. જો કોઈ 2×2 શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ ના સભ્યો

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$ થી મળે, તો શ્રેણિક A ની રચના કરો.

5. જો 3×4 શ્રેણિકના સભ્યો

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$ દ્વારા મળે, તો તે શ્રેણિકની રચના કરો.

6. નીચેનાં સમીકરણોમાંથી x, y અને z નાં મૂલ્ય શોધો :

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

7. સમીકરણ $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ માંથી a, b, c અને d નાં મૂલ્ય શોધો.

પ્રશ્નો 8, 9 તથા 10 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

8. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો ....

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ

9. x, y ની જે કિંમતો માટે શ્રેણિક જોડ $\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ સમાન થાય તેવી આપેલી x અને y ની કિંમત ....

(A) $x = -\frac{1}{3}, y = 7$ (B) શોધવું શક્ય નથી.

(C) $y = 7, x = -\frac{2}{3}$ (D) $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}$

10. પ્રત્યેક ઘટક 0 અથવા 1 હોય તેવા 3×3 કક્ષાવાળા શ્રેણિકની સંખ્યા ....

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

3.4 શ્રેણિક પરની પ્રક્રિયાઓ

આ વિભાગમાં, આપણે શ્રેણિકોના સરવાળા, શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર, શ્રેણિકના તફાવત અને ગુણાકાર જેવી પ્રક્રિયાઓનો પરિચય આપીશું.

3.4.1 શ્રેણિકના સરવાળા

ધારો કે A અને B સ્થળે ફાતિમાનાં બે કારખાનાં આવેલાં છે. દરેક કારખાનામાં છોકરાઓ અને છોકરીઓ માટે 1, 2 અને 3 નામપટ્ટી ચોંટાડેલા જુદી-જુદી કિંમતવાળા ત્રણ પ્રકારનાં રમતનાં જૂતાંનું ઉત્પાદન થાય છે. આગળ આપેલા શ્રેણિકમાં દરેક કારખાનામાં ઉત્પાદિત થયેલો જથ્થો રજૂ કર્યો છે :

$$\begin{array}{c} \text{સ્થળ A પરનું કારખાનું} \\ \begin{array}{ccc} & \text{છોકરાઓ} & \text{છોકરીઓ} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{સ્થળ B પરનું કારખાનું} \\ \begin{array}{ccc} & \text{છોકરાઓ} & \text{છોકરીઓ} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 90 & 50 \\ 70 & 55 \\ 75 & 75 \end{bmatrix} \end{array}$$

ધારો કે ફાતિમાને દરેક પ્રકારની કિંમતવાળા રમતનાં જૂતાંનું કુલ ઉત્પાદન જાણવું છે. કુલ ઉત્પાદનમાં,

1 પ્રકારનાં જૂતાંની સંખ્યા : છોકરાઓ માટે (80 + 90), છોકરીઓ માટે (60 + 50)

2 પ્રકારનાં જૂતાંની સંખ્યા : છોકરાઓ માટે (75 + 70), છોકરીઓ માટે (65 + 55)

3 પ્રકારનાં જૂતાંની સંખ્યા : છોકરાઓ માટે (90 + 75), છોકરીઓ માટે (85 + 75)

આ માહિતીને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં $\begin{bmatrix} 80+90 & 60+50 \\ 75+70 & 65+55 \\ 90+75 & 85+75 \end{bmatrix}$ રીતે રજૂ કરી શકાય.

આ નવો શ્રેણિક એ ઉપરના બે શ્રેણિકોનો ‘સરવાળો’ છે. આપણે નિરીક્ષણ કરીશું કે, આપેલા શ્રેણિકના અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળા કરવાથી આપેલ બે શ્રેણિકના સરવાળાનો શ્રેણિક મળે છે. હજુ વધુ જોઈએ, તો બંને શ્રેણિકની કક્ષા સમાન હોવી જોઈએ.

આમ, જો 2 × 3 શ્રેણિક A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ અને બીજો 2 × 3 શ્રેણિક B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ હોય,

તો આપણે A + B = $\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$ થી વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

વ્યાપક રીતે, જો સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા બે શ્રેણિક A = $[a_{ij}]$ અને B = $[b_{ij}]$ આપેલ હોય, તો A અને B ના સરવાળાનો શ્રેણિક પ્રત્યેક શક્ય કિંમતો i અને j માટે $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ દ્વારા શ્રેણિક C = $[c_{ij}]_{m \times n}$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય.

ઉદાહરણ 6 : જો A = $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ અને B = $\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ આપેલા હોય, તો A + B શોધો.

ઉકેલ : A અને B એ બંને સમાન કક્ષા 2 × 3 વાળા શ્રેણિક હોવાથી, A અને B નો સરવાળો

$$A + B = \begin{bmatrix} \sqrt{3}+2 & 1+\sqrt{5} & -1+1 \\ 2-2 & 3+3 & 0+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ થશે.}$$

> **☛ નોંધ :** (1) જો A અને B ની કક્ષા સમાન ન હોય, તો A + B વ્યાખ્યાયિત થશે નહિ.
>
> ઉદાહરણ તરીકે, જો A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ તો A + B વ્યાખ્યાયિત થશે નહિ.
>
> (2) આપણે નિરીક્ષણ કરીશું કે, બે શ્રેણિકોનો સરવાળો એ સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિકના ગણ પરની દ્વિક્રિયાનું એક ઉદાહરણ છે.

3.4.2 શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર

હવે, ધારો કે ફાતિમા કારખાના A નું ઉત્પાદન બધા જ પ્રકારમાં બે ગણું કરે છે. (3.4.1નો સંદર્ભ લો.)

કારખાના A નો પહેલાંનો મૂળ જથ્થો (પ્રમાણભૂત એકમમાં) :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{છોકરાઓ} & \text{છોકરીઓ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array}$$

કારખાના A નો સુધારેલો જથ્થો નીચે આપેલો છે :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{છોકરાઓ} & \text{છોકરીઓ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2\times 80 & 2\times 60 \\ 2\times 75 & 2\times 65 \\ 2\times 90 & 2\times 85 \end{bmatrix} \end{array}$$

તેને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં $\begin{bmatrix} 160 & 120 \\ 150 & 130 \\ 180 & 170 \end{bmatrix}$ દ્વારા દર્શાવી શકાય. આપણે નિરીક્ષણ કરીશું કે, પ્રથમ શ્રેણિકના દરેક ઘટકને 2 વડે ગુણવાથી નવો શ્રેણિક મળે છે.

વ્યાપક રીતે, આપણે ***શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર*** નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીશું :

જો A = $[a_{ij}]_{m \times n}$ શ્રેણિક હોય અને k અદિશ હોય, તો A ના દરેક ઘટકને k વડે ગુણવાથી બીજો શ્રેણિક kA મળે છે.

બીજી રીતે કહીએ તો, $kA = k\,[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$, એટલે કે i અને j ની બધી જ શક્ય કિંમતો માટે ka_{ij} એ શ્રેણિક kA નો (i, j)મો ઘટક છે.

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ તો $3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

વિરોધી શ્રેણિક : A નો વિરોધી શ્રેણિક (–1)A તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે અને તેને –A વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$ લેતાં,

$$-A = (-1)A = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

શ્રેણિકનો તફાવત : જો $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા બે શ્રેણિક હોય, તો તેમનો તફાવત શ્રેણિક $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ લેતાં $D = [d_{ij}]$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય અને તેનો સંકેત A – B છે. બીજા શબ્દોમાં, D = A – B = A + (–1)B, એટલે કે શ્રેણિક A અને શ્રેણિક –B નો સરવાળો છે.

ઉદાહરણ 7 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ તો 2A – B શોધો.

ઉકેલ : આપણને,

$$2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6+0 & 2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

3.4.3 શ્રેણિક સરવાળાના ગુણધર્મો

શ્રેણિક સરવાળો નીચેના ગુણધર્મોનું સમાધાન કરે છે :

(i) ક્રમનો નિયમ : જો $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા શ્રેણિક હોય, તો $A + B = B + A$

હવે, $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ (વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સરવાળા વિશે ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.)

$= [b_{ij}] + [a_{ij}]$

$= B + A$

(ii) જૂથનો નિયમ : સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા ત્રણ શ્રેણિકો $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ માટે, $(A + B) + C = A + (B + C)$

હવે, $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}]$

$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ (શા માટે ?)

$= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})]$

$= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}])$

$= A + (B + C)$

(iii) સરવાળા માટેના તટસ્થ શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ : જો O એ $m \times n$ શૂન્ય શ્રેણિક હોય અને A એ કોઈ પણ $m \times n$ શ્રેણિક હોય, તો $A + O = O + A = A$. બીજા શબ્દોમાં, O એ શ્રેણિક સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક છે.

(iv) વિરોધી શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ કોઈ પણ શ્રેણિક હોય, તો આપણને બીજો શ્રેણિક $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ મળે કે જેથી $A + (-A) = (-A) + A = O$ થાય. આથી $-A$ ને A નો વિરોધી અથવા Aનો ઋણ શ્રેણિક કહે છે.

3.4.4 શ્રેણિકના અદિશ વડે ગુણાકારના ગુણધર્મો

જો સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા બે શ્રેણિકો $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ હોય, અને k અને l અદિશ હોય, તો

(i) $k(A + B) = kA + kB$ (ii) $(k + l)A = kA + lA$

(i) $k(A + B) = k([a_{ij}] + [b_{ij}])$

$= k\ [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [k(a_{ij} + b_{ij})]$

$= [k\,a_{ij} + k\,b_{ij}]$

$= [k\ a_{ij}] + [k\,b_{ij}]$

$= k\,[a_{ij}] + k\,[b_{ij}]$

$= kA + kB$

(ii) $(k + l)\text{A} = (k + l)[a_{ij}]$
$= [(k + l)a_{ij}]$
$= [k\,a_{ij} + l\,a_{ij}]$
$= [k\,a_{ij}] + [l\,a_{ij}]$
$= k[a_{ij}] + l[a_{ij}]$
$= k\text{A} + l\text{A}$

ઉદાહરણ 8 : જો $\text{A} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ અને $\text{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ તો $2\text{A} + 3\text{X} = 5\text{B}$ થાય એવો શ્રેણિક X શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે, $2\text{A} + 3\text{X} = 5\text{B}$ છે.

અથવા $2\text{A} + 3\text{X} - 2\text{A} = 5\text{B} - 2\text{A}$

અથવા $2\text{A} - 2\text{A} + 3\text{X} = 5\text{B} - 2\text{A}$ (શ્રેણિકો સરવાળા વિશે ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.)

અથવા $\text{O} + 3\text{X} = 5\text{B} - 2\text{A}$ (2Aનો વિરોધી –2A છે.)

અથવા $3\text{X} = 5\text{B} - 2\text{A}$ (O એ સરવાળા માટે તટસ્થ એકમ છે.)

અથવા $\text{X} = \frac{1}{3}(5\text{B} - 2\text{A})$

અથવા $\text{X} = \frac{1}{3}\left(5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -8 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}\right)$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10+0 \\ 20-8 & 10+4 \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ \frac{-31}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 9 : જો $\text{X} + \text{Y} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ અને $\text{X} - \text{Y} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ હોય, તો X અને Y શોધો.

ઉકેલ : $(\text{X} + \text{Y}) + (\text{X} - \text{Y}) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

અથવા $(\text{X} + \text{X}) + (\text{Y} - \text{Y}) = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $2\text{X} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

અથવા $\text{X} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$(\text{X} + \text{Y}) - (\text{X} - \text{Y}) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

અથવા $(X - X) + (Y + Y) = \begin{bmatrix} 5-3 & 2-6 \\ 0 & 9+1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $2Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

અથવા $Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 10 : નીચેના સમીકરણમાંથી x અને y નાં મૂલ્ય શોધો :

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : $2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 10 \\ 14 & 2y-6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

અથવા $\begin{bmatrix} 2x+3 & 10-4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

અથવા $\begin{bmatrix} 2x+3 & 6 \\ 15 & 2y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

અથવા $2x + 3 = 7$ અને $2y - 4 = 14$ (શા માટે ?)

અથવા $2x = 7 - 3$ અને $2y = 18$

અથવા $x = \frac{4}{2}$ અને $y = \frac{18}{2}$

અથવા $x = 2$ અને $y = 9$

ઉદાહરણ 11 : બે ખેડૂતો રામકિશન અને ગુરુચરનસિંઘ, બાસમતી, પરમલ અને નૌરા નામના ત્રણ પ્રકારના ચોખાની ખેતી કરે છે. સપ્ટેમ્બર અને ઑક્ટોબર મહિનામાં બંને ખેડૂતોએ કરેલા ત્રણે ય પ્રકારના ચોખાના વેચાણની વિગત (રૂપિયામાં) નીચેના શ્રેણિકો A અને B માં આપી છે :

સપ્ટેમ્બરનું વેચાણ (રૂપિયામાં)

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{ccc} \text{બાસમતી} & \text{પરમલ} & \text{નૌરા} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 10,000 & 20,000 & 30,000 \\ 50,000 & 30,000 & 10,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{array} \end{array}$$

ઑક્ટોબરનું વેચાણ (રૂપિયામાં)

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{ccc} \text{બાસમતી} & \text{પરમલ} & \text{નૌરા} \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 6000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{array} \end{array}$$

(i) સપ્ટેમ્બર અને ઑક્ટોબરમાં પ્રત્યેક ખેડૂતે પ્રત્યેક પ્રકારનું કરેલું એકત્રિત વેચાણ શોધો.

(ii) સપ્ટેમ્બરથી ઑક્ટોબર દરમિયાનનાં વેચાણમાં થયેલો ઘટાડો શોધો.

(iii) જો બંને ખેડૂતને કુલ વેચાણ પર 2 % નફો મળતો હોય, તો ઑક્ટોબરનાં વેચાણમાં પ્રત્યેક ખેડૂતને પ્રત્યેક પ્રકારમાં મળતા નફાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : (i) સપ્ટેમ્બર અને ઑક્ટોબરમાં પ્રત્યેક ખેડૂતે પ્રત્યેક પ્રકારનું કરેલું એકત્રિત વેચાણ નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{ccc} \text{બાસમતી} & \text{પરમલ} & \text{નૌરા} \end{array} \\ A + B = & \begin{bmatrix} 15,000 & 30,000 & 36,000 \\ 70,000 & 40,000 & 20,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{array} \end{array}$$

(ii) સપ્ટેમ્બરથી ઑક્ટોબર સુધીના વેચાણમાં થયેલ ફેરફાર (ઘટાડો) :

$$A - B = \begin{array}{c} \text{બાસમતી} \quad \text{પરમલ} \quad \text{નૌરા} \\ \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{array}$$

(iii) B ના 2 % $= \frac{2}{100} \times B = 0.02 \times B$

$$= 0.02 \begin{array}{c} \text{બાસમતી} \quad \text{પરમલ} \quad \text{નૌરા} \\ \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 6000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \text{બાસમતી} \quad \text{પરમલ} \quad \text{નૌરા} \\ \begin{bmatrix} 100 & 200 & 120 \\ 400 & 200 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{રામકિશન} \\ \text{ગુરુચરનસિંઘ} \end{array}$$

આમ, ઑક્ટોબરમાં રામકિશનને દરેક પ્રકારના ચોખાના વેચાણમાં મળતો નફો અનુક્રમે ₹ 100, ₹ 200 અને ₹ 120 તથા ગુરુચરનસિંઘને દરેક પ્રકારના ચોખાના વેચાણમાં મળતો નફો અનુક્રમે ₹ 400, ₹ 200 અને ₹ 200 થાય.

3.4.5 શ્રેણિકોના ગુણાકાર

ધારો કે મીરા અને નદીમ બે મિત્રો છે. મીરા 2 પેન અને 5 વાર્તાનાં પુસ્તકો ખરીદવા ઈચ્છે છે, જ્યારે નદીમને 8 પેન અને 10 વાર્તાનાં પુસ્તકોની જરૂર છે. તે બંને ભાવની તપાસ કરવા દુકાને જાય છે.

તે નીચે પ્રમાણે લખેલા છે :

પ્રત્યેક પેનની કિંમત ₹ 5 અને પ્રત્યેક વાર્તાના પુસ્તકની કિંમત ₹ 50 છે.

દરેકને ખર્ચ પેટે કેટલી રકમની જરૂર છે ? સ્પષ્ટ છે કે, મીરાંને ₹ (5 × 2 + 50 × 5) એટલે ₹ 260, જ્યારે નદીમને ₹ (8 × 5 + 50 × 10) એટલે કે ₹ 540ની જરૂર પડશે. આપણે ઉપરની માહિતીને શ્રેણિકના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકીએ :

આવશ્યકતા — એક નંગની કિંમત (રૂપિયામાં) — આવશ્યક રકમ (રૂપિયામાં)

$$\begin{array}{l} \\ \text{મીરા} \\ \text{નદીમ} \end{array} \begin{array}{c} \text{પેન} \quad \text{પુસ્તક} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{પેન} \\ \text{પુસ્તક} \end{array} \begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 5 \times 50 \\ 8 \times 5 + 10 \times 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$$

ધારો કે તે બીજી દુકાને ભાવની તપાસ કરે છે. તે નીચે પ્રમાણે દર્શાવેલ છે :

પ્રત્યેક પેનનું મૂલ્ય ₹ 4 અને પ્રત્યેક વાર્તાનું પુસ્તક ₹ 40 ના મૂલ્યનું છે.

હવે, મીરા અને નદીમને સામાનની ખરીદી કરવા અનુક્રમે ₹ (4 × 2 + 40 × 5) = ₹ 208 અને ₹ (8 × 4 + 10 × 40) = ₹ 432 રકમની જરૂરિયાત પડશે.

ફરીથી, ઉપરની માહિતીને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

આવશ્યકતા — એક નંગની કિંમત (રૂપિયામાં) — આવશ્યક રકમ (રૂપિયામાં)

$$\begin{array}{l} \\ \text{મીરા} \\ \text{નદીમ} \end{array} \begin{array}{c} \text{પેન} \quad \text{પુસ્તક} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{પેન} \\ \text{પુસ્તક} \end{array} \begin{bmatrix} 4 \\ 40 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \times 2 + 40 \times 5 \\ 8 \times 4 + 10 \times 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \\ 432 \end{bmatrix}$$

હવે, બંને વિકલ્પોની માહિતીને સંયુક્ત રીતે શ્રેણિક સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

આવશ્યકતા — એક નંગની કિંમત (રૂપિયામાં) — આવશ્યક રકમ (રૂપિયામાં)

$$\begin{array}{l} \\ \text{મીરા} \\ \text{નદીમ} \end{array} \begin{array}{c} \text{પેન} \quad \text{પુસ્તક} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{પેન} \\ \text{પુસ્તક} \end{array} \begin{array}{c} \text{I} \quad \text{II} \\ \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 50 & 40 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 5 \times 2 + 5 \times 50 & 4 \times 2 + 40 \times 5 \\ 8 \times 5 + 10 \times 50 & 8 \times 4 + 10 \times 40 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{I} \quad \text{II} \\ \begin{bmatrix} 260 & 208 \\ 540 & 432 \end{bmatrix} \end{array}$$

ઉપરની માહિતી એ શ્રેણિક ગુણાકારનું એક ઉદાહરણ છે. આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે, શ્રેણિક A અને B ના ગુણાકાર માટે A ના સ્તંભની સંખ્યા અને B ની હારની સંખ્યા સમાન હોવી જોઈએ. હજુ વધુ વિગત માટે આગળ જોઈએ તો, ગુણાકાર શ્રેણિકના ઘટકો મેળવવા, આપણે A ની હાર અને B ના સ્તંભ લઈ, તેમના અનુરૂપ ઘટકોનો ગુણાકાર કરી તે ગુણનફળોનો સરવાળો કરીએ તો ગુણાકાર શ્રેણિકના ઘટકો મળે છે. ઔપચારિક રીતે, આપણે શ્રેણિકના ગુણાકારને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીશું :

જો શ્રેણિક A ના સ્તંભની સંખ્યા અને શ્રેણિક B ની હારની સંખ્યા સમાન હોય, તો A અને B નો ગુણાકાર વ્યાખ્યાયિત છે. ધારો કે $A = [a_{ij}]$ એ $m \times n$ શ્રેણિક અને $B = [b_{jk}]$ એ $n \times p$ શ્રેણિક છે. તો પછી શ્રેણિક A અને B ના ગુણાકાર શ્રેણિક C ની કક્ષા $m \times p$ થશે. શ્રેણિક C નો (i, k)મો ઘટક c_{ik} મેળવવા માટે, આપણે A ની i મી હાર અને B નો k મો સ્તંભ લઈ તેમના અનુરૂપ ઘટકોનો ગુણાકાર કરી આ બધા ગુણનફળનો સરવાળો કરીએ છીએ. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ હોય, તો A ની i મી હાર $[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ અને B ના k મા સ્તંભ $\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$ પરથી, $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$

શ્રેણિક $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ એ શ્રેણિક A અને B નો ગુણાકાર AB છે.

ઉદાહરણ તરીકે, જો $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, તો તેમનો ગુણાકાર

$CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ વ્યાખ્યાયિત થાય.

આ 2×2 શ્રેણિકનો પ્રત્યેક ઘટક એ C ની ચોક્કસ હારના અને D ના ચોક્કસ સ્તંભના અનુરૂપ ઘટકોના ગુણનફળોનો સરવાળો છે. આ ચાર ગણતરી નીચે દર્શાવી છે :

પ્રથમ હાર પ્રથમ સ્તંભનો ઘટક $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2)+(-1)(-1)+(2)(5) & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$

પ્રથમ હાર બીજા સ્તંભનો ઘટક $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & (1)(7)+(-1)(1)+(2)(-4) \\ ? & ? \end{bmatrix}$

બીજી હાર પ્રથમ સ્તંભનો ઘટક $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 0(2)+3(-1)+4(5) & ? \end{bmatrix}$

બીજી હાર બીજા સ્તંભનો ઘટક $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & 0(7)+3(1)+4(-4) \end{bmatrix}$

આમ, $CD = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 12 : જો $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$, તો AB શોધો.

ઉકેલ : શ્રેણિક A ને 2 સ્તંભ છે અને તે સંખ્યા B ની હારની સંખ્યાને સમાન છે.
આથી, AB વ્યાખ્યાયિત થશે. હવે,

$$AB = \begin{bmatrix} 6(2)+9(7) & 6(6)+9(9) & 6(0)+9(8) \\ 2(2)+3(7) & 2(6)+3(9) & 2(0)+3(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+63 & 36+81 & 0+72 \\ 4+21 & 12+27 & 0+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix}$$

નોંધ : જો AB વ્યાખ્યાયિત થાય, તો BA વ્યાખ્યાયિત થાય તે જરૂરી નથી. ઉપરના ઉદાહરણમાં, AB વ્યાખ્યાયિત છે, પરંતુ BA વ્યાખ્યાયિત નથી. કારણ કે B ને 3 સ્તંભ છે અને A ને 2 હાર છે (3 નથી.) જો A અને B અનુક્રમે $m \times n$ અને $k \times l$ શ્રેણિક હોય અને જો $n = k$ તથા $l = m$ હોય, તો અને તો જ AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત થાય. વિશેષ વિકલ્પમાં, જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત છે.

શ્રેણિકોનો ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરતો નથી.

હવે, આપણે એક ઉદાહરણ લઈને જોઈશું કે, AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત હોય, છતાં AB = BA થાય એ આવશ્યક નથી.

ઉદાહરણ 13 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, તો AB તથા BA શોધો. સાબિત કરો કે $AB \neq BA$.

ઉકેલ : A એ 2×3 શ્રેણિક છે અને B એ 3×2 શ્રેણિક છે. આથી AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત છે અને તે અનુક્રમે 2×2 અને 3×3 કક્ષાવાળા શ્રેણિક થશે. (આથી AB = BA હોવાનો પ્રશ્ન જ ઉપસ્થિત થતો નથી.)

નોંધો કે, $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8+6 & 3-10+3 \\ -8+8+10 & -12+10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$

અને $BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-12 & -4+6 & 6+15 \\ 4-20 & -8+10 & 12+25 \\ 2-4 & -4+2 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$

સ્પષ્ટ છે કે $AB \neq BA$.

ઉપરના ઉદાહરણમાં AB અને BA ની કક્ષા ભિન્ન છે અને તેથી $AB \neq BA$. પરંતુ કોઈક એવું પણ વિચારી શકે છે કે કદાચ જો AB અને BA ની કક્ષા સમાન હોય, તો AB અને BA સમાન થાય. પરંતુ આમ નથી. AB અને BA ની કક્ષા સમાન હોય, છતાં ય તેઓ સમાન ન થાય તેવું એક ઉદાહરણ આપણે આપીએ.

ઉદાહરણ 14 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો AB અને BA શોધો તથા બતાવો કે, $AB \neq BA$.

ઉકેલ : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, તો $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. સ્પષ્ટ છે કે $AB \neq BA$.

આમ, શ્રેણિકનો ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરતો નથી.

નોંધ : AB અને BA વ્યાખ્યાયિત હોય, પરંતુ હંમેશાં $AB \neq BA$ થાય તેવું અર્થઘટન પણ શ્રેણિકની પ્રત્યેક જોડ A અને B ના ગુણાકાર માટે કરી શકાય નહિ.

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, તો $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

નિરીક્ષણ કરો કે સમાન કક્ષાના વિકર્ણ શ્રેણિકના ગુણાકાર AB તથા BA માટે AB = BA છે જ.

બે શૂન્યેતર શ્રેણિકના ગુણાકાર તરીકે શૂન્ય શ્રેણિક

આપણે જાણીએ છીએ કે, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે જો $ab = 0$, તો $a = 0$ અથવા $b = 0$. આ પરિણામ શ્રેણિક માટે સત્ય હોય તે આવશ્યક નથી. આપણે ઉદાહરણ મારફતે આ સત્યનું નિરીક્ષણ કરીશું.

ઉદાહરણ 15 : જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, તો AB શોધો.

ઉકેલ : $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

આમ, બે શ્રેણિકનો ગુણાકાર શૂન્ય શ્રેણિક થાય તે માટે કોઈ એક શ્રેણિક શૂન્ય શ્રેણિક હોય તે જરૂરી નથી.

3.4.6 શ્રેણિકોના ગુણાકારના ગુણધર્મો

શ્રેણિકનો ગુણાકાર નીચેના ગુણધર્મો ધરાવે છે તે આપણે સાબિતી સિવાય સ્વીકારીશું.

(1) જૂથનો નિયમ : કોઈ પણ ત્રણ શ્રેણિક A, B અને C માટે જો (AB)C અને A(BC) વ્યાખ્યાયિત હોય, તો (AB)C = A(BC).

(2) વિભાજનનો નિયમ : ત્રણ શ્રેણિકો A, B અને C માટે,

(i) A(B + C) = AB + AC

(ii) (A + B)C = AC + BC.

અહીં સમાનતાની નિશાનીની બંને તરફના શ્રેણિકના ગુણાકાર વ્યાખ્યાયિત છે તેવું સ્વીકારી લીધું છે.

(3) ગુણાકારના એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ : પ્રત્યેક ચોરસ શ્રેણિક A ને સંગત તે જ કક્ષાનો એકમ શ્રેણિક I અસ્તિત્વ ધરાવે છે કે જેથી, IA = AI = A થાય.

હવે, આપણે આ ગુણધર્મો ઉદાહરણ દ્વારા ચકાસીશું.

ઉદાહરણ 16 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, તો A(BC), (AB)C શોધો અને દર્શાવો કે (AB)C = A(BC).

ઉકેલ : આપણને $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 3+2-4 \\ 2+0-3 & 6+0+12 \\ 3+0-2 & 9-2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$ મળે.

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & 4+0 & 6-2 & -8+1 \\ -1+36 & -2+0 & -3-36 & 4+18 \\ 1+30 & 2+0 & 3-30 & -4+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

હવે, $BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+6 & 2+0 & 3-6 & -4+3 \\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2 \\ -1+8 & -2+0 & -3-8 & 4+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

તેથી, $A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7+4-7 & 2+0+2 & -3-4+11 & -1+2-8 \\ 14+0+21 & 4+0-6 & -6+0-33 & -2+0+24 \\ 21-4+14 & 6+0-4 & -9+4-22 & -3-2+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}.$$

સ્પષ્ટ છે કે, $(AB)C = A(BC)$.

ઉદાહરણ 17 : જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો

AC, BC અને $(A + B)C$ની ગણતરી કરો. ચકાસો કે $(A + B)C = AC + BC$.

ઉકેલ : હવે, $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

આથી, $(A + B)C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-14+24 \\ -10+0+30 \\ 16+12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$

હવે, $AC = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-12+21 \\ -12+0+24 \\ 14+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$

અને $BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2+3 \\ 2+0+6 \\ 2-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$

આથી, $AC + BC = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$

સ્પષ્ટ છે કે, $(A + B)C = AC + BC$.

ઉદાહરણ 18 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^3 - 23A - 40\,I = O$

ઉકેલ : આપણને $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$ મળે.

આથી, $A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$

હવે, $A^3 - 23A - 40\,I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - 23 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 40 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

ઉદાહરણ 19 : વિધાનસભાની એક ચૂંટણીમાં, એક રાજકીય પક્ષ પોતાના ઉમેદવારનો પ્રચાર ટેલિફોન, પ્રત્યક્ષ મુલાકાત અને પત્રો લખવા જેવી ત્રણ રીતે કરવા પ્રસાર માધ્યમને ભાડે લે છે. શ્રેણિક A માં સંપર્ક દીઠ ભાવ (પૈસામાં) નીચે પ્રમાણે આપ્યો છે :

સંપર્ક દીઠ ભાવ

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{ટેલિફોન} \\ \text{પ્રત્યક્ષ મુલાકાત} \\ \text{પત્ર} \end{array}$$

બે શહેરો X અને Y માં, દરેક પ્રકારના સંપર્કની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી છે :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{ટેલિફોન} & \text{પ્રત્યક્ષ મુલાકાત} & \text{પત્ર} \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10{,}000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array} \end{array}$$

બે શહેરો X અને Y માં પક્ષ દ્વારા ખર્ચવામાં આવેલ કુલ રકમ શોધો.

ઉકેલ : આપણને $BA = \begin{bmatrix} 40{,}000 + 50{,}000 + 2{,}50{,}000 \\ 1{,}20{,}000 + 1{,}00{,}000 + 5{,}00{,}000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$

$= \begin{bmatrix} 3{,}40{,}000 \\ 7{,}20{,}000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$ મળે.

આથી પક્ષે બંને શહેરમાં અનુક્રમે 3,40,000 પૈસા અને 7,20,000 પૈસા, અર્થાત્ ₹ 3400 અને ₹ 7200 ખર્ચ કર્યો હશે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો નીચેના પૈકી પ્રત્યેક શ્રેણિક શોધો :

(i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $3A - C$

(iv) AB (v) BA

2. નીચેનાની ગણતરી કરો :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} cos^2x & sin^2x \\ sin^2x & cos^2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sin^2x & cos^2x \\ cos^2x & sin^2x \end{bmatrix}$

3. સૂચિત ગુણાકારની ગણતરી કરો :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો (A + B) અને (B – C)ની ગણતરી કરો. વળી, ચકાસો કે A + (B – C) = (A + B) – C.

5. જો $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ હોય, તો 3A – 5Bની ગણતરી કરો.

6. સાદું રૂપ આપો : $cos\theta \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} + sin\theta \begin{bmatrix} sin\theta & -cos\theta \\ cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$

7. જો (i) $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો X અને Y શોધો.

(ii) $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ અને $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ હોય, તો X અને Y શોધો.

8. જો $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ અને $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો X શોધો.

9. જો $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ હોય, તો x અને y શોધો.

10. જો $2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો x, y, z અને t માટે સમીકરણ ઉકેલો.

11. જો $x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ હોય, તો x અને y નાં મૂલ્ય શોધો.

12. જો $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો x, y, z અને w નાં મૂલ્ય શોધો.

13. જો $F(x) = \begin{bmatrix} cos\,x & -sin\,x & 0 \\ sin\,x & cos\,x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો દર્શાવો કે $F(x)\,F(y) = F(x + y)$.

14. સાબિત કરો કે,

(i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

15. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 - 5A + 6I$ શોધો.

16. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = O$.

17. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ અને $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો એવો k શોધો કે જેથી $A^2 = kA - 2I$ થાય.

18. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -tan\frac{\alpha}{2} \\ tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ અને I એ 2 કક્ષાવાળો એકમ શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે

$I + A = (I - A)\begin{bmatrix} cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{bmatrix}$.

19. એક ટ્રસ્ટ પાસે ₹ 30,000નું ભંડોળ છે. ટ્રસ્ટને આ ભંડોળ બે જુદા-જુદા પ્રકારના બૉન્ડમાં રોકવું છે. પ્રથમ બૉન્ડ પ્રતિ વર્ષ 5 % વ્યાજ આપે છે અને બીજા બૉન્ડ પ્રતિ વર્ષ 7 % વ્યાજ આપે છે. જો ટ્રસ્ટને વાર્ષિક વ્યાજ (a) ₹ 1800 (b) ₹ 2000 મેળવવું હોય, તો ટ્રસ્ટે ₹ 30,000 બે બૉન્ડમાં રોકવા માટે મૂડીના કેવા ભાગ કરવા પડશે, તે શ્રેણિક ગુણાકારના ઉપયોગથી નક્કી કરો.

20. એક સવિશેષ શાળાના પુસ્તકભંડારમાં 10 ડઝન રસાયણવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકો, 8 ડઝન ભૌતિકવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકો અને 10 ડઝન અર્થશાસ્ત્રનાં પુસ્તકો છે. તેમની વેચાણકિંમત અનુક્રમે ₹ 80, ₹ 60 અને ₹ 40 છે. પુસ્તકભંડાર બધાં જ પુસ્તકોનું વેચાણ કરી દે, તો શ્રેણિક બીજગણિતની મદદથી ભંડારને કેટલી રકમ મળશે તે શોધો.

ધારો કે X, Y, Z, W અને P અનુક્રમે $2 \times n$, $3 \times k$, $2 \times p$, $n \times 3$ અને $p \times k$ કક્ષાવાળા શ્રેણિક છે. પ્રશ્નો 21 તથા 22 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

21. PY + WY વ્યાખ્યાયિત થાય તે રીતે n, k અને p પર પ્રતિબંધ મૂકવામાં આવે તો :

(A) $k = 3, p = n$ (B) k સ્વૈર, $p = 2$

(C) p સ્વૈર, $k = 3$ (D) $k = 2, p = 3$

22. જો $n = p$ હોય, તો શ્રેણિક 7X – 5Zની કક્ષા :

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$ (C) $n \times 3$ (D) $p \times n$

3.5 પરિવર્ત શ્રેણિક

આ વિભાગમાં, આપણે પરિવર્ત શ્રેણિક અને સંમિત તથા વિસંમિત શ્રેણિક જેવા વિશિષ્ટ પ્રકારના શ્રેણિકનો અભ્યાસ કરીશું.

વ્યાખ્યા 3 : જો $m \times n$ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ ની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં અને બધા જ સ્તંભને તેમની અનુરૂપ હારમાં અદલબદલ કરવામાં આવે તો તેથી મળતા શ્રેણિકને શ્રેણિક A નો પરિવર્ત શ્રેણિક (Transpose of a matrix) કહે છે. $A = [a_{ij}]$ ના પરિવર્ત શ્રેણિકને A' અથવા (A^T) વડે દર્શાવાય છે.

બીજી રીતે કહેતાં, જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ તો $A' = [a_{ji}]_{n \times m}$

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, તો $A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$.

3.5.1 પરિવર્ત શ્રેણિકના ગુણધર્મો

આપણે હવે પરિવર્ત શ્રેણિકના કેટલાક ગુણધર્મોને સાબિતી સિવાય દર્શાવીશું. યોગ્ય ઉદાહરણથી આપણે તેને ચકાસીશું. યોગ્ય કક્ષાના કોઈ પણ શ્રેણિક A અને B માટે,

(i) $(A')' = A$ (ii) કોઈ પણ અચળ k માટે $(kA)' = kA'$.

(iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(AB)' = B'A'$

ઉદાહરણ 20 : જો $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, તો ચકાસો કે

(i) $(A')' = A$ (ii) $(A + B)' = A' + B'$

(iii) કોઈ પણ અચળ k માટે $(kB)' = kB'$.

ઉકેલ : (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. તેથી $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad (A')' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$

આમ, $(A')' = A$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. આથી, $A + B = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

તેથી, $(A + B)' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

હવે, $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

માટે $A' + B' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

આમ, $(A + B)' = A' + B'$

(iii) આપણને $kB = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 2k \\ k & 2k & 4k \end{bmatrix}$ મળે.

તેથી, $(kB)' = \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ મળે.

આમ, $(kB)' = kB'$

ઉદાહરણ 21 : જો $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B = [1 \quad 3 \quad -6]$, તો $(AB)' = B'A'$ ચકાસો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B = [1 \quad 3 \quad -6]$ છે.

આથી, $AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}[1 \quad 3 \quad -6] = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad (AB)' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix}$

હવે, $A' = [-2 \quad 4 \quad 5]$, $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

$B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}[-2 \quad 4 \quad 5] = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix} = (AB)'$

$\therefore \quad (AB)' = B'A'$ સ્પષ્ટ છે.

3.6 સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિક

વ્યાખ્યા 4 : *જો ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ માટે $A' = A$ હોય, તો A ને સંમિત શ્રેણિક કહેવાય છે, એટલે કે i અને j ની પ્રત્યેક શક્ય કિંમત માટે $a_{ij} = a_{ji}$ હોય, તો A સંમિત શ્રેણિક છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ માં $A' = A$ છે. આથી A સંમિત શ્રેણિક છે.

વ્યાખ્યા 5 : *જો ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ માટે $A' = -A$ થાય, તો A ને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય છે, એટલે કે i અને j ની પ્રત્યેક શક્ય કિંમત માટે $a_{ji} = -a_{ij}$ મળે, તો A વિસંમિત શ્રેણિક છે.*

હવે જો આપણે $i = j$ લઈએ તો $a_{ii} = -a_{ii}$.

આથી $2a_{ii} = 0$ અથવા પ્રત્યેક i માટે $a_{ii} = 0$.

આનો અર્થ એ થાય કે, વિસંમિત શ્રેણિકના બધા વિકર્ણ ઘટક શૂન્ય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $B = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ માટે $B' = -B$ છે. આથી B વિસંમિત શ્રેણિક છે.

હવે, આપણે સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિક વિશે કેટલાંક પરિણામ સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 1 : ***જેના ઘટકો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તેવા કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે, A + A' સંમિત શ્રેણિક છે અને A – A' વિસંમિત શ્રેણિક છે.***

સાબિતી : B = A + A' લેતાં,

$B' = (A + A')'$

$= A' + (A')'$ ((A + B)' = A' + B' હોવાથી)

$= A' + A$ ((A')' = A હોવાથી)

$= A + A'$ (A + B = B + A હોવાથી)

$= B$

માટે, B = A + A' સંમિત શ્રેણિક છે.

હવે, C = A – A' લેતાં,

$C' = (A - A')'$

$= A' - (A')'$ (શા માટે ?)

$= A' - A$ (શા માટે ?)

$= -(A - A)'$

$= -C$

માટે, C = A – A' વિસંમિત શ્રેણિક છે.

પ્રમેય 2 : ***કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિકને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકાય છે. (ખરેખર તો અનન્ય રીતે)***

સાબિતી : ચોરસ શ્રેણિક A ને આપણે $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$ તરીકે લખી શકીએ.

પ્રમેય 1 પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે, A + A' સંમિત શ્રેણિક છે અને A – A' વિસંમિત શ્રેણિક છે. કોઈ પણ શ્રેણિક A માટે $(kA)' = kA'$ હોવાથી $\frac{1}{2}(A + A')$ એ સંમિત શ્રેણિક છે અને $\frac{1}{2}(A - A')$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે. આમ, કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિકને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય.

ઉદાહરણ 22 : શ્રેણિક $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા તરીકે વ્યક્ત કરો.

ઉકેલ : અહીં, $B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

ધારો કે, $P = \frac{1}{2}(B + B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$

હવે, $P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$

આમ, $P = \frac{1}{2}(B + B')$ એ સંમિત શ્રેણિક છે.

વળી, ધારો કે $Q = \frac{1}{2}(B - B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$

તો $Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q.$

આમ, $Q = \frac{1}{2}(B - B')$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

હવે, $P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$

નોંધ : $P + Q = \frac{1}{2}(B + B') + \frac{1}{2}(B - B') = B$ જ થાય ને!

આમ, B ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા તરીકે અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક શ્રેણિકનો પરિવર્ત શ્રેણિક મેળવો :

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. જો $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$ ચકાસો.

3. જો $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$ ચકાસો.

4. જો $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો $(A + 2B)'$ શોધો.

5. નીચે આપેલા શ્રેણિક A અને B માટે ચકાસો કે $(AB)' = B'A'$:

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. (i) જો $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ હોય, તો ચકાસો કે, $A'A = I$

(ii) જો $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ હોય, તો ચકાસો કે, $A'A = I$.

7. (i) સાબિત કરો કે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ સંમિત શ્રેણિક છે.

(ii) સાબિત કરો કે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

8. શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ માટે, ચકાસો કે

(i) $(A + A')$ સંમિત શ્રેણિક છે.

(ii) $(A - A')$ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

9. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$, તો $\frac{1}{2}(A + A')$ અને $\frac{1}{2}(A - A')$ શોધો.

10. નીચેના પ્રત્યેક શ્રેણિકને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા તરીકે અભિવ્યક્ત કરો :

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

પ્રશ્નો 11 તથા 12 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

11. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા સંમિત શ્રેણિક હોય, તો $AB - BA$ એ

(A) વિસંમિત શ્રેણિક છે.
(B) સંમિત શ્રેણિક છે.
(C) શૂન્ય શ્રેણિક છે.
(D) એકમ શ્રેણિક છે.

12. જો α નું મૂલ્ય .... હોય, તો $A + A' = I$ થાય, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

(A) $\frac{\pi}{6}$
(B) $\frac{\pi}{3}$
(C) π
(D) $\frac{3\pi}{2}$

3.7 શ્રેણિક પરની પ્રાથમિક પ્રક્રિયા (પરિવર્તન)

શ્રેણિકની હાર ઉપર ત્રણ પ્રકારની અને તેના સ્તંભ ઉપર ત્રણ પ્રકારની એમ છ પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓ (પરિવર્તનો) કરી શકાય છે. આ પ્રક્રિયાઓને પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓ (Elementary Operations) અથવા પરિવર્તનો (Transformations) કહે છે.

(i) કોઈ પણ બે હાર અથવા બે સ્તંભની અદલબદલ : i ***મી અને*** j ***મી હારની અદલબદલને સંકેતમાં*** $R_i \leftrightarrow R_j$ ***અને*** i ***મા તથા*** j ***મા સ્તંભની અદલબદલને*** $C_i \leftrightarrow C_j$ ***વડે દર્શાવાય છે.***

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ પર $R_1 \leftrightarrow R_2$ કરતાં, આપણને $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ મળે.

(ii) કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભના તમામ ઘટકોનો શૂન્યેતર સંખ્યા વડે ગુણાકાર : i ***મી હારના દરેક ઘટકના*** k $(k \neq 0)$ ***વડે ગુણાકારને સંકેતમાં*** $R_i \leftrightarrow kR_i$ ***વડે દર્શાવાય છે. સ્તંભ માટેની આનુષંગિક પ્રક્રિયાને*** $C_i \leftrightarrow kC_i$ ***વડે દર્શાવાય છે.***

ઉદાહરણ તરીકે, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ પર $C_3 \to \frac{1}{7}C_3$ કરતાં, આપણને $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{7} \\ -1 & \sqrt{3} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ મળે.

(iii) કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભના ઘટકોમાં બીજી હાર અથવા સ્તંભના અનુરૂપ ઘટકોને કોઈ પણ શૂન્યેતર સંખ્યા વડે ગુણીને ઉમેરતાં : j ***મી હારના ઘટકોને*** k ***વડે ગુણીને*** i ***મી હારના અનુરૂપ ઘટકોમાં ઉમેરવાના સંકેતને*** $R_i \to R_i + kR_j$ ***વડે દર્શાવાય છે. સ્તંભ માટેની અનુરૂપ પ્રક્રિયાને*** $C_i \to C_i + kC_j$ ***વડે દર્શાવાય છે.***

ઉદાહરણ તરીકે, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ પર $R_2 \to R_2 - 2R_1$ કરતાં, આપણને $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ મળે.

3.8 વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક

જો m ***કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક A ને સંગત બીજો એક*** m ***કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક B મળે કે જેથી*** $AB = BA = I$ ***થાય, તો B ને A નો વ્યસ્ત (inverse) શ્રેણિક કહેવાય અને તેને*** A^{-1} ***વડે દર્શાવાય છે. આ કિસ્સામાં A વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક કહેવાય.***

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ બે શ્રેણિકો છે.

$$\text{હવે, } AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

વળી $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ચકાસી શકાય. આમ, B એ A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ, તો $B = A^{-1}$ અને A પણ B નો વ્યસ્ત છે, અર્થાત્ $A = B^{-1}$.

> **☛ નોંધ :** (1) ગુણાકાર શ્રેણિક AB અને BA વ્યાખ્યાયિત અને સમાન થાય, તે માટે A અને B સમાન કક્ષાના ચોરસ શ્રેણિક હોવા જરૂરી છે. આથી લંબચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.
>
> (2) જો A નો વ્યસ્ત B હોય, તો B નો વ્યસ્ત A પણ છે.

પ્રમેય 3 : ***(વ્યસ્ત શ્રેણિકની અનન્યતા) જો ચોરસ શ્રેણિકનો વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે તો તે અનન્ય છે.***

સાબિતી : ધારો કે $A = [a_{ij}]$ ચોરસ શ્રેણિક છે. ધારો કે જો શક્ય હોય, તો A ને બે વ્યસ્ત શ્રેણિક B અને C છે.

B એ Aનો વ્યસ્ત હોવાથી, $AB = BA = I$ ...(1)

C પણ Aનો વ્યસ્ત હોવાથી, $AC = CA = I$ ...(2)

આમ, $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$

પ્રમેય 4 : ***જો A અને B એ સમાન કક્ષાવાળા વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય, તો*** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

સાબિતી : વ્યસ્ત શ્રેણિકની વ્યાખ્યા પરથી,

$(AB)(AB)^{-1} = I$

અથવા $A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = A^{-1}I$ (બંને તરફ A^{-1} વડે પૂર્વગુણન કરતાં)

અથવા $(A^{-1}A)B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$ ($A^{-1}I = A^{-1}$ હોવાથી)

અથવા $IB\,(AB)^{-1} = A^{-1}$

અથવા $B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$

અથવા $B^{-1}B\,(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

અથવા $I\,(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

તેથી $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3.8.1 પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓથી વ્યસ્ત શ્રેણિક

X = AB થાય તેવા સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિક A અને B આપ્યા છે. X = AB પર પ્રાથમિક હાર પ્રક્રિયાઓની શ્રેણીનો ઉપયોગ કરવા માટે, X પર અને ગુણાકાર ABની ડાબી બાજુના શ્રેણિક A પર તે જ ક્રમમાં આ હાર પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીશું.

આ જ પ્રમાણે શ્રેણિક સમીકરણ X = AB પર પ્રાથમિક સ્તંભ-પ્રક્રિયાઓની શ્રેણીનો ઉપયોગ કરવાનો હોય, તો આ પ્રક્રિયાઓ આ જ ક્રમમાં X પર અને ગુણાકાર શ્રેણિક AB ના જમણી બાજુના શ્રેણિક B પર ઉપયોગ કરીશું.

ઉપરની ચર્ચાનું અવલોકન કરતાં, આપણે એવું તારણ કાઢીશું કે, જો શ્રેણિક A માટે A^{-1}નું અસ્તિત્વ હોય, તો પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી A^{-1} મેળવવા, A = IA લખો અને આપણને I = BA ના મળે ત્યાં સુધી A = IA પર હાર-પ્રક્રિયાઓની શ્રેણીનો ઉપયોગ કરો. શ્રેણિક B એ A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક થશે. આ જ પ્રમાણે જો આપણે સ્તંભ-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી A^{-1} શોધવા ઇચ્છતા હોઈએ, તો A = AI લખો અને I = AB ના મળે ત્યાં સુધી A = AI પર સ્તંભ-પ્રક્રિયાઓની શ્રેણીનો ઉપયોગ કરો.

નોંધ : A = IA (A = AI) પર એક અથવા વધારે પ્રાથમિક હાર (સ્તંભ) પ્રક્રિયાઓ લગાડતાં, જો ડાબી બાજુના શ્રેણિક A ની એક અથવા વધારે હારમાં આપણને બધા ઘટક શૂન્ય મળે, તો A^{-1} નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉદાહરણ 23 : પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$નો વ્યસ્ત શોધો.

ઉકેલ : પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરવા માટે આપણે A = IA લખીશું.

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

આથી, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A$ $(R_2 \to R_2 - 2R_1$ **કરતાં**$)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A$ $(R_2 \to -\frac{1}{5}R_2$ **કરતાં**$)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A$ $(R_1 \to R_1 - 2R_2$ **કરતાં**$)$

આમ, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$

વૈકલ્પિક રીતે, પ્રાથમિક સ્તંભ પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરવા માટે, આપણે A = AI લખીશું. અર્થાત્

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 2C_1$ કરતાં, આપણને

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

હવે, $C_2 \to -\frac{1}{5}C_2$ ના ઉપયોગથી, આપણને

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

છેલ્લે $C_1 \to C_1 - 2C_2$ કરતાં, આપણને

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} \text{ મળે.}$$

આથી, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 24 : પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓની મદદથી નીચેના શ્રેણિકનો વ્યસ્ત મેળવો :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : A = IA લખો. અર્થાત્ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$ $(R_1 \leftrightarrow R_2$ **કરતાં**$)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$ $(R_3 \to R_3 - 3R_1$ કરતાં$)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$ $(R_1 \to R_1 - 2R_2$ કરતાં$)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$ $(R_3 \to R_3 + 5R_2$ કરતાં$)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A$ $(R_3 \to \frac{1}{2}R_3$ કરતાં$)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A$ $(R_1 \to R_1 + R_3$ કરતાં$)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A$ $(R_2 \to R_2 - 2R_3$ કરતાં$)$

આથી, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

વૈકલ્પિક રીતે, A = AI લખો. અર્થાત્

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(C_1 \leftrightarrow C_2)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(C_3 \to C_3 - 2C_1)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(C_3 \to C_3 + C_2)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\left(C_3 \rightarrow \frac{1}{2}C_3\right)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $(C_1 \rightarrow C_1 - 2C_2)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 0 & -1 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $(C_1 \rightarrow C_1 + 5C_3)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $(C_2 \rightarrow C_2 - 3C_3)$

આથી, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 25 : $P = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ આપેલ છે. જો P^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવે, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $P = IP$ અર્થાત્ $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P$ છે.

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P$ $\left(R_1 \rightarrow \frac{1}{10}R_1\right.$ કરતાં$)$

અથવા $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}P$ $(R_2 \rightarrow R_2 + 5R_1$ કરતાં$)$

આપણને ઉપરના સમીકરણની ડાબી બાજુના શ્રેણિકની બીજી હારના બધા ઘટકો શૂન્ય મળે છે. આથી P^{-1}નું અસ્તિત્વ નથી.

સ્વાધ્યાય 3.4

પ્રશ્ન 1થી 17 માં પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરો અને જો વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે, તો મેળવો :

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

18. જો .... તો A અને B એકબીજાના વ્યસ્ત શ્રેણિક છે.

(A) AB = BA (B) AB = BA = O

(C) AB = O, BA = I (D) AB = BA = I

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 26 : જો $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, $n \in N$

ઉકેલ : ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી આપણે આ પરિણામ સાબિત કરીશું.

આપણી પાસેનું વિધાન P(n) : જો $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, તો $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, $n \in N$.

P(1) : જો $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, તો $A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

માટે, પરિણામ $n = 1$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે, પરિણામ $n = k$ માટે સત્ય છે. આથી,

P(k) : જો $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$

હવે, આપણે પરિણામ $n = k + 1$ માટે સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

હવે, $A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta + \sin\theta\cos k\theta \\ -\sin\theta\cos k\theta - \cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta + \cos\theta\cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta + k\theta) & \sin(\theta + k\theta) \\ -\sin(\theta + k\theta) & \cos(\theta + k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

આથી, પરિણામ $n = k + 1$ માટે પણ સત્ય છે. આમ, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી બધી જ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 27 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા સંમિત શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે AB સંમિત હોય તો અને તો જ A અને B ના ગુણાકાર માટે AB = BA થાય.

ઉકેલ : A અને B બંને સંમિત શ્રેણિક હોવાથી, A' = A અને B' = B.

ધારો કે, AB સંમિત છે, તો (AB)' = AB.

પરંતુ (AB)' = B'A' = BA (કેમ ?)

તેથી, BA = AB

આથી ઊલટું, જો AB = BA, તો આપણે દર્શાવીશું કે AB સંમિત છે.

$$\begin{aligned}(AB)' &= B'A' \\ &= BA \quad \text{(A અને B સંમિત હોવાથી)} \\ &= AB\end{aligned}$$

આથી, AB સંમિત છે.

ઉદાહરણ 28 : ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$. CD – AB = O થાય એવો શ્રેણિક D શોધો.

ઉકેલ : A, B, C એ 2 કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોવાથી અને CD – AB વ્યાખ્યાયિત હોવાથી D એ 2 કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક થશે.

ધારો કે $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ તથા CD – AB = O છે.

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = O$$

અથવા $\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

અથવા $\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

બંને શ્રેણિકના અનુરૂપ ઘટકો સરખાવતાં, આપણને

$$2a + 5c - 3 = 0 \quad \text{...(1)}$$

$$3a + 8c - 43 = 0 \quad \text{...(2)}$$

$$2b + 5d = 0 \quad \text{...(3)}$$

અને $3b + 8d - 22 = 0$ મળે. ...(4)

(1) અને (2)ને ઉકેલતાં, આપણને $a = -191$, $c = 77$ મળે. (3) અને (4) ઉકેલતાં, આપણને $b = -110$, $d = 44$ મળે.

માટે $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 3

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ છે. દર્શાવો કે $(aI + bA)^n = a^nI + na^{n-1}bA$. I એ 2 કક્ષાવાળો એકમ શ્રેણિક છે અને $n \in N$.

2. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$, $n \in N$.

3. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$. n એ કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક છે.

4. જો A અને B સંમિત શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે AB – BA વિસંમિત શ્રેણિક છે.

5. જો A સંમિત અથવા વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તદનુસાર સાબિત કરો કે B'AB સંમિત અથવા વિસંમિત શ્રેણિક છે.

6. જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ માટે, $A'A = I$ હોય, તો x, y, z નાં મૂલ્ય શોધો.

7. x ની કઈ કિંમત માટે : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$?

8. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^2 - 5A + 7I = O$.

9. જો $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ હોય, તો x શોધો.

10. એક ઉત્પાદક x, y, z એમ ત્રણ પ્રકારના માલનું ઉત્પાદન કરે છે. તે તેમનું બે બજારમાં વેચાણ કરે છે. વાર્ષિક વેચાણ નીચે દર્શાવેલ છે :

બજાર	ઉત્પાદન		
	x	y	z
I	10,000	2000	18,000
II	6000	20,000	8000

(a) જો x, y, z ની નંગ દીઠ વેચાણકિંમત અનુક્રમે ₹ 2.50, ₹ 1.50 અને ₹ 1.00 હોય, તો શ્રેણિક બીજગણિતની મદદથી પ્રત્યેક બજારમાંથી થતી કુલ આવક શોધો.

(b) જો ઉપરની ત્રણ વસ્તુનો નંગદીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચ અનુક્રમે ₹ 2.00, ₹ 1.00 અને 0.50 પૈસા થતો હોય, તો કુલ નફો શોધો.

11. જો $X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો શ્રેણિક X શોધો.

12. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા એવા ચોરસ શ્રેણિક હોય, કે જેથી AB = BA થાય, તો ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિત કરો કે $AB^n = B^nA$. વધુમાં સાબિત કરો કે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $(AB)^n = A^nB^n$.

પ્રશ્નો 13 થી 15 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

13. જો $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ માટે $A^2 = I$ થાય, તો ....

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

14. જો શ્રેણિક A એ સંમિત અને વિસંમિત બંને હોય, તો

(A) A વિકર્ણ શ્રેણિક છે. (B) A શૂન્ય શ્રેણિક છે.

(C) A ચોરસ શ્રેણિક છે. (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

15. જો A એ $A^2 = A$ થાય તેવો ચોરસ શ્રેણિક A હોય, તો $(I + A)^3 - 7A = $ ....

(A) A (B) I – A (C) I (D) 3A

સારાંશ

- શ્રેણિક એ સંખ્યાઓ અથવા વિધેયોની ક્રમયુક્ત લંબચોરસ સારણી છે.
- m હાર અને n સ્તંભવાળા શ્રેણિકને $m \times n$ કક્ષાવાળો શ્રેણિક કહે છે.
- $[a_{i1}]_{m \times 1}$ એ સ્તંભ શ્રેણિક છે. $i = 1, 2, 3, ..., m$
- $[a_{1j}]_{1 \times n}$ એ હાર શ્રેણિક છે. $j = 1, 2, 3, ..., n$
- જો $m = n$ હોય, તો $m \times n$ શ્રેણિક એ ચોરસ શ્રેણિક છે.
- જો $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$ હોય, તો $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ વિકર્ણ શ્રેણિક છે.
- જો $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$ તથા $i = j$ માટે $a_{ij} = k$ (k કોઈક અચળ છે) હોય, તો $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ અદિશ શ્રેણિક છે.
- જો $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$ તથા $i = j$ માટે $a_{ij} = 1$ હોય, તો $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ એકમ શ્રેણિક છે.
- જો (i) A અને B ની કક્ષા સમાન હોય, (ii) i અને j ની બધી જ શક્ય કિંમતો માટે $a_{ij} = b_{ij}$ થાય, તો $A = [a_{ij}] = [b_{ij}] = B$.
- $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [ka_{ij}]_{m \times n}$
- $-A = (-1)A$
- $A - B = A + (-1)B$
- $A + B = B + A$
- સમાન કક્ષાવાળા A, B અને C માટે, $(A + B) + C = A + (B + C)$

- A અને B ની કક્ષા સમાન હોય, k અચળ હોય, તો $k(A + B) = kA + kB$.
- અચળ k અને l માટે, $(k + l)A = kA + lA$
- જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ તો $AB = C = [c_{ij}]_{m \times p}$, જ્યાં $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

  (i) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ તો $(AB)C = A(BC)$

  (ii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ તો $A(B + C) = AB + AC$

  (iii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ તો $(A + B)C = AC + BC$
- જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ તો A' અથવા $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

  (i) $(A')' = A$, (ii) $(kA)' = kA'$, (iii) $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ તો $(A + B)' = A' + B'$

  (iv) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ તથા $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ તો $(AB)' = B'A'$
- જો $A' = A$ તો A સંમિત શ્રેણિક છે.
- જો $A' = -A$ તો A વિસંમિત શ્રેણિક છે.
- કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિકને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપે (અનન્ય રીતે) રજૂ કરી શકાય.
- શ્રેણિક પરની પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓ નીચે પ્રમાણે છે :

  (i) $R_i \leftrightarrow R_j$ અથવા $C_i \leftrightarrow C_j$

  (ii) $R_i \to kR_i$ અથવા $C_i \to kC_i$

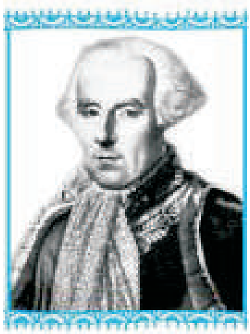
  (iii) $R_i \to R_i + kR_j$ અથવા $C_i \to C_i + kC_j$
- જો ચોરસ શ્રેણિક A અને B માટે $AB = BA = I$ હોય, તો Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક B છે અને તેને A^{-1} વડે દર્શાવાય છે અને B નો વ્યસ્ત A છે.
- જો ચોરસ શ્રેણિકનો વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે, તો તે અનન્ય છે.

પ્રકરણ **4**

નિશ્ચાયક

❖ *All Mathematical truths are relative and conditional. — C.P. STEINMETZ* ❖

4.1 પ્રાસ્તાવિક



P.S. Laplace
(C.E. 1749-C.E.1827)

અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે શ્રેણિક અને તેના બીજગણિતનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે બૈજિક સમીકરણોની સંહતિને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં કેવી રીતે દર્શાવી શકાય અને ઉકેલી શકાય તેનો અભ્યાસ કરીશું. આનો અર્થ કે,

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

જેવી સુરેખ સમીકરણોની સંહતિને $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ તરીકે રજૂ કરી શકાય. હવે, આ સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ અનન્ય છે કે નહિ તે $a_1b_2 - a_2b_1$ ના મૂલ્યથી નક્કી કરી શકાય. (યાદ કરીએ કે, જો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ અથવા $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, તો સુરેખ સમીકરણોની સંહતિને અનન્ય ઉકેલ મળે). સંખ્યા $a_1b_2 - a_2b_1$ એ સમીકરણના ઉકેલની અનન્યતા સ્થાપિત કરે છે અને તે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ સાથે સંબંધિત છે. તેને A નો નિશ્ચાયક અથવા *det* A કહે છે. ઈજનેરી શાખા, વિજ્ઞાન, અર્થશાસ્ત્ર, સામાજિક વિજ્ઞાન વગેરેમાં નિશ્ચાયકનો વિશાળ ઉપયોગ છે.

આ પ્રકરણમાં, આપણે માત્ર વાસ્તવિક ઘટકોવાળા ત્રણ કક્ષા સુધીના નિશ્ચાયકનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે નિશ્ચાયકના વિવિધ ગુણધર્મોનો અભ્યાસ, ઉપનિશ્ચાયક, સહઅવયવ અને ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે નિશ્ચાયકના ઉપયોગનો અભ્યાસ, ચોરસ શ્રેણિકનો સહઅવયવજ શ્રેણિક અને વ્યસ્ત શ્રેણિક, સુરેખ સમીકરણોની સંહતિની સુસંગતતા અને અસંગતતા તથા વ્યસ્ત શ્રેણિકના ઉપયોગથી બે અથવા ત્રણ ચલવાળા સુરેખ સમીકરણના ઉકેલનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

4.2 નિશ્ચાયક

પ્રત્યેક n કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ ને આપણે એક (વાસ્તવિક અથવા સંકર) સંખ્યા સાથે સાંકળી શકીએ. તે સંખ્યાને ચોરસ શ્રેણિક A નો નિશ્ચાયક કહે છે. a_{ij} એ શ્રેણિક A નો (i, j) સ્થાનમાં આવેલ

ઘટક છે. આ પરિણામને આપણે, પ્રત્યેક ચોરસ શ્રેણિકને અનન્ય (વાસ્તવિક અથવા સંકર) સંખ્યા સાથે સાંકળતા વિધેય તરીકે વિચારી શકીએ. જો M એ ચોરસ શ્રેણિકનો ગણ અને K એ (વાસ્તવિક અથવા સંકર) સંખ્યાઓનો ગણ હોય તથા એક વિધેય, $A \in M$ અને $k \in K$ માટે $f : M \to K$ ને $f(A) = k$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરીએ, તો $f(A)$ ને શ્રેણિક A નો નિશ્ચાયક કહેવાય. તેને $|A|$ અથવા *det* A અથવા Δ વડે પણ દર્શાવાય છે.

જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, તો A ના નિશ્ચાયકને $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = det\ (A)$ લખી શકાય.

નોંધ : (i) A ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો શ્રેણિક $|A|$ ને A ના નિશ્ચાયક તરીકે વાંચીશું અને A ના માનાંક તરીકે નહિ.

(ii) માત્ર ચોરસ શ્રેણિકને જ નિશ્ચાયક હોય છે.

4.2.1 એક કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

એક કક્ષાવાળો શ્રેણિક $A = [a]$ લઈએ, તો A નો નિશ્ચાયક a છે તેમ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

4.2.2 બે કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

બે કક્ષાવાળો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ લઈએ, તો A નો નિશ્ચાયક

$$det\ (A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$ થી વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

ઉદાહરણ 1 : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણને $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(-1) = 4 + 4 = 8$ મળે.

ઉદાહરણ 2 : $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપણને $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x(x) - (x + 1)(x - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$ મળે.

4.2.3 ત્રણ કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

બે કક્ષાવાળા નિશ્ચાયકમાં અભિવ્યક્તિ કરીને ત્રણ કક્ષાવાળા શ્રેણિકના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય નિશ્ચિત કરી શકાય. આ પદ્ધતિને હાર (અથવા સ્તંભ)થી નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કહે છે. 3 કક્ષાવાળા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ ત્રણ હારમાંથી પ્રત્યેક હાર (R_1, R_2 અને R_3) અને ત્રણ સ્તંભમાંના પ્રત્યેક સ્તંભ (C_1, C_2 અને C_3) દ્વારા એમ છ રીતે કરી શકાય. તે આગળ બતાવ્યા પ્રમાણે સમાન મૂલ્ય આપે છે :

ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ નો વિચાર કરીએ.

અર્થાત્ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

પ્રથમ હાર (R_1) દ્વારા વિસ્તરણ :

પગલું 1 : R_1ના પ્રથમ ઘટક a_{11} ને $(-1)^{1+1}$ $[(-1)^{a_{11}}$ માં આવતા અનુગ 1 તથા 1 નો સરવાળો$]$ સાથે અને a_{11} એ પ્રથમ હાર R_1 અને પ્રથમ સ્તંભ C_1 માં આવેલો હોવાથી $|A|$ ની પ્રથમ હાર અને પ્રથમ સ્તંભના ઘટકોને દૂર કરી બાકીના ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી મળતા દ્વિહાર નિશ્ચાયક સાથે ગુણો.

એટલે કે, $(-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

પગલું 2 : R_1ના બીજા ઘટક a_{12} ને $(-1)^{1+2}$ $[(-1)^{a_{12}}$ માં આવતા અનુગ 1 તથા 2 નો સરવાળો$]$ અને a_{12} એ R_1 તથા C_2 માં આવેલો હોવાથી, $|A|$ ની પ્રથમ હાર R_1 અને બીજા સ્તંભ C_2 ના ઘટકોને દૂર કરી બાકીના ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી મળતા દ્વિહાર નિશ્ચાયક સાથે ગુણો.

અર્થાત્ $(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

પગલું 3 : R_1ના ત્રીજા ઘટક a_{13} ને $(-1)^{1+3}$ $[(-1)^{a_{13}}$ માં આવતા અનુગ 1 તથા 3 નો સરવાળો$]$ અને a_{13} એ R_1 તથા C_3 માં આવેલો હોવાથી, $|A|$ ની પ્રથમ હાર R_1 અને ત્રીજા સ્તંભ C_3 ના ઘટકોને દૂર કરી બાકીના ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી મળતા દ્વિહાર નિશ્ચાયક સાથે ગુણો.

અર્થાત્ $(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

પગલું 4 : હવે નિશ્ચાયક A નું વિસ્તરણ, ઉપરનાં પગલાં 1, 2 અને 3 માં મેળવેલાં ત્રણ પદોના સરવાળા તરીકે લખી શકાય અને તે

$$det\ A = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

અથવા $|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad ...(1)$$

☛ નોંધ : આપણે ચારેય પદો સાથે પ્રયોજી શકીએ.

બીજી હાર (R_2) દ્વારા વિસ્તરણ :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

R_2 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$|A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$

$$|A| = -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad ...(2)$$

પ્રથમ સ્તંભ (C_1) દ્વારા વિસ્તરણ :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$\therefore \quad |A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \qquad ...(3)$$

સ્પષ્ટ છે કે, (1), (2) અને (3) માં મળતાં $|A|$ નાં મૂલ્ય સમાન છે. $|A|$ નું R_3, C_2 અને C_3 દ્વારા વિસ્તરણ કરી, મૂલ્ય મેળવીને તેનું મૂલ્ય (1), (2) અને (3)માં મેળવેલા $|A|$ ના મૂલ્યને સમાન છે તેમ સ્વાધ્યાય સ્વરૂપે ચકાસવાનું વાચક પર છોડવામાં આવે છે.

આથી, કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભ દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ સમાન મૂલ્ય આપે છે.

નોંધ :

(1) ગણતરી સરળ કરવા, આપણે નિશ્ચાયકની જે હાર અથવા સ્તંભ વધારે સંખ્યામાં શૂન્ય ધરાવે, તેના દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કરીશું.

(2) વિસ્તરણ કરતી વખતે, $(-1)^{i+j}$થી ગુણવાને બદલે, આપણે $(i + j)$ યુગ્મ છે કે અયુગ્મ તે પ્રમાણે અનુક્રમે $+1$ કે -1 વડે આપણે ગુણીશું.

(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ લઈએ, તો એ ચકાસવું સરળ છે કે $A = 2B$. વળી $|A| = 0 - 8 = -8$ અને $|B| = 0 - 2 = -2$. નિરીક્ષણ કરો કે, $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ અથવા $|A| = 2^n|B|$, જ્યાં n એ ચોરસ શ્રેણિક A અને B ની કક્ષા છે.

વ્યાપક રીતે, n કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક A અને B માટે, જો $A = kB$, તો $n = 1, 2, 3$ માટે $|A| = k^n|B|$.

ઉદાહરણ 3 : નિશ્ચાયક $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : નોંધીશું કે, ત્રીજા સ્તંભના બે ઘટકો શૂન્ય છે. આથી ત્રીજા સ્તંભ (C_3) દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1 - 12) - 0 + 0 = -52$$

ઉદાહરણ 4 : $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : R_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને,

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

ઉદાહરણ 5 : જો $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ હોય, તો x નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે, $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ છે.

અર્થાત્ $3 - x^2 = 3 - 8$

અર્થાત્ $x^2 = 8$

આથી, $x = \pm 2\sqrt{2}$

સ્વાધ્યાય 4.1

પ્રશ્ન 1 અને 2 માં આપેલા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શોધો.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

3. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $|2A| = 4|A|$.

4. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $|3A| = 27|A|$.

5. નીચે આપેલા નિશ્ચાયકનાં મૂલ્યો શોધો :

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

6. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ હોય, તો $|A|$ શોધો.

7. x નું મૂલ્ય શોધો :

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

પ્રશ્ન 8 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

8. જો $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ હોય, તો $x =$ ....

(A) 6 (B) ± 6 (C) -6 (D) 0

4.3 નિશ્ચાયકના ગુણધર્મો

આગળના વિભાગમાં, આપણે નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કેવી રીતે કરવું તે શીખ્યાં. આ વિભાગમાં, આપણે જેમના ઉપયોગથી હાર અથવા સ્તંભમાં વધુમાં વધુ શૂન્ય ઘટકો તરીકે મળે તેવા નિશ્ચાયકના કેટલાક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું. તેથી નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મેળવવું સરળ બનશે. કોઈ પણ કક્ષાના નિશ્ચાયક માટે આ ગુણધર્મો સત્ય છે. તેમ છતાં, આપણે આ ચર્ચા 3 કક્ષાવાળા નિશ્ચાયક પૂરતી મર્યાદિત રાખીશું.

ગુણધર્મ 1 : નિશ્ચાયકની બધી જ હાર અને બધા સ્તંભની અદલબદલ કરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

ચકાસણી : ધારો કે $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

પ્રથમ હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Δ ની હાર અને સ્તંભની અદલબદલ કરતાં, આપણને નિશ્ચાયક

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

પ્રથમ સ્તંભ દ્વારા Δ_1નું વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\Delta_1 = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \text{ મળે.}$$

આથી, $\Delta = \Delta_1$

જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય અને A' એ Aનો પરિવર્ત શ્રેણિક હોય, તો *det* (A') = det A. ઉપરના ગુણધર્મની નીપજ છે.

> **નોંધ :** જો R_i = i મી હાર અને C_i = i મો સ્તંભ હોય, તો આપણે હાર અને સ્તંભની અદલબદલને સંકેતમાં $R_i \leftrightarrow C_i$ દ્વારા દર્શાવીશું.
>
> ચાલો, ઉપરના ગુણધર્મને આપણે એક ઉદાહરણ દ્વારા ચકાસીએ.

ઉદાહરણ 6 : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ માટે ગુણધર્મ 1 ચકાસો.

ઉકેલ : પ્રથમ હાર દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= 2(0 - 20) + 3(-42 - 4) + 5(30 - 0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

હાર અને સ્તંભની અદલબદલ કરતાં, આપણને

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$ (પ્રથમ સ્તંભ દ્વારા વિસ્તરણ)

$$= 2(0 - 20) + 3(-42 - 4) + 5(30 - 0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

સ્પષ્ટ છે કે, $\Delta = \Delta_1$

આથી, ગુણધર્મ 1 ની ચકાસણી થઈ.

ગુણધર્મ 2 : જો નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (અથવા સ્તંભ) ની અદલબદલ કરવામાં આવે, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય ચિહ્નમાં બદલાય છે.

ચકાસણી : ધારો કે $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

પ્રથમ હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta = a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1)$$

પ્રથમ અને તૃતીય હારની અદલબદલ કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

ત્રીજી હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta_1 = a_1 (c_2b_3 - b_2c_3) - a_2 (c_1b_3 - c_3b_1) + a_3 (b_2c_1 - b_1c_2)$$

$$= -[a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1)]$$

સ્પષ્ટ છે કે, $\Delta_1 = -\Delta$

એ જ પ્રકારે, કોઈ પણ બે સ્તંભની અદલબદલ કરીને આપણે પરિણામની ચકાસણી કરી શકીએ.

> ☛ **નોંધ :** હારની અદલબદલને આપણે $R_i \leftrightarrow R_j$ દ્વારા અને સ્તંભની અદલબદલને $C_i \leftrightarrow C_j$ દ્વારા દર્શાવીએ છીએ.

ઉદાહરણ 7 : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ માટે ગુણધર્મ 2 ની ચકાસણી કરો.

ઉકેલ : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -28$ (જુઓ ઉદાહરણ 6.)

હાર R_2 અને R_3 ની અદલબદલ કરતાં, અર્થાત્ $R_2 \leftrightarrow R_3$ કરતાં, આપણને

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

નિશ્ચાયક Δ_1 નું પ્રથમ હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(20 - 0) + 3(4 + 42) + 5(0 - 30)$$

$$= 40 + 138 - 150 = 28 \text{ મળે.}$$

સ્પષ્ટ છે કે $\Delta_1 = -\Delta$

આથી, ગુણધર્મ 2 ની ચકાસણી થઈ.

ગુણધર્મ 3 : જો નિશ્ચાયકની બે હાર (અથવા બે સ્તંભ) સમાન (બધા અનુરૂપ ઘટકો સમાન) હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય છે.

સાબિતી : જો આપણે નિશ્ચાયક Δ ની સમાન હાર (અથવા સ્તંભ)ની અદલબદલ કરીએ તો નિશ્ચાયક બદલાશે નહિ, તેમ છતાં, ગુણધર્મ 2 અનુસાર Δ નું ચિહ્ન બદલાશે.

આથી, $\Delta = -\Delta$

અથવા $\Delta = 0$

ચાલો, આપણે ઉપરનો ગુણધર્મ ઉદાહરણ દ્વારા ચકાસીએ.

ઉદાહરણ 8 : $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો. ($R_1 = R_3$ છે.)

ઉકેલ : પ્રથમ હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\Delta = 3(6 - 6) - 2(6 - 9) + 3(4 - 6)$$

$$= 0 - 2(-3) + 3(-2) = 6 - 6 = 0$$

અહીં R_1 અને R_3 સમાન છે.

ગુણધર્મ 4 : જો નિશ્ચાયકની કોઈ એક હાર (અથવા સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને અચળ k વડે ગુણવામાં આવે, તો તેનું મૂલ્ય k વડે ગુણાશે.

ચકાસણી : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ લો.

અને Δ ની પ્રથમ હારના ઘટકોને k વડે ગુણવાથી નિશ્ચાયક Δ_1 મળે છે.

આથી, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

પ્રથમ હાર દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= ka_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - kb_1 (a_2c_3 - c_2a_3) + kc_1 (a_2b_3 - b_2a_3)\\ &= k [a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - c_2a_3) + c_1 (a_2b_3 - b_2a_3)]\\ &= k\Delta\end{aligned}$$

આથી $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

☛ નોંધ :

(1) આ ગુણધર્મને આધારે, આપણે આપેલા નિશ્ચાયકની કોઈ પણ એક હાર અથવા કોઈ પણ એક સ્તંભમાંથી શૂન્યેતર સામાન્ય અવયવને બહાર લઈ જઈ શકીશું.

(2) જો નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (અથવા સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકો સમપ્રમાણ (સમાન ગુણોત્તર)માં હોય, તો તેનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \end{vmatrix} = 0$ (હાર R_1 અને R_2 સમપ્રમાણમાં છે.)

ઉદાહરણ 9 : $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(17) & 6(3) & 6(6) \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 17 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

(ગુણધર્મો 3 અને 4 નો ઉપયોગ કરતાં)

ગુણધર્મ 5 : જો નિશ્ચાયકની કોઈ હાર (અથવા સ્તંભ)ના કેટલાક અથવા બધા જ ઘટકોને બે (અથવા વધારે) પદોના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય, તો નિશ્ચાયકને બે (અથવા વધારે) નિશ્ચાયકના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ચકાસણી : ડા.બા. $= \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

પ્રથમ હાર દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\begin{aligned}\Delta &= (a_1 + \lambda_1)(b_2c_3 - b_3c_2) - (a_2 + \lambda_2)(b_1c_3 - b_3c_1) + (a_3 + \lambda_3)(b_1c_2 - b_2c_1)\\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1)\\ &\qquad + \lambda_1(b_2c_3 - b_3c_2) - \lambda_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + \lambda_3 (b_1c_2 - b_2c_1)\end{aligned}$$

(પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{જ.બા. મળે.}$$

એ જ પ્રકારે, આપણે ગુણધર્મ 5 ને બીજી કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભ માટે ચકાસી શકીએ.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} \qquad \text{(ગુણધર્મ 5 દ્વારા)}$$

$= 0 + 0 = 0$ મળે. (ગુણધર્મ 3 અને 4 નો ઉપયોગ કરતાં)

ગુણધર્મ 6 : જો નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભના પ્રત્યેક ઘટકમાં અન્ય હાર (અથવા સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોના સમાન ગુણિત ઉમેરવામાં આવે, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય સમાન રહે છે. એટલે કે, જો આપણે $R_i \to R_i + kR_j$ અથવા $C_i \to C_i + kC_j$ પ્રક્રિયાનું પ્રયોજન કરીએ, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય એનું એ જ રહે છે. $(i \neq j)$

ચકાસણી : ધારો કે $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ અને $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1+kc_1 & a_2+kc_2 & a_3+kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Δ પર $R_1 \to R_1 + kR_3$ પ્રક્રિયા કરવાથી Δ_1 મળે છે.

અહીં, આપણે ત્રીજી હાર R_3 ના ઘટકોને અચળ k વડે ગુણીને પ્રથમ હાર R_1 ના અનુરૂપ ઘટકોમાં ઉમેર્યા છે.

સાંકેતિક રીતે, આપણે આ પ્રક્રિયાને $R_1 \to R_1 + kR_3$ પ્રમાણે લખીશું.

હવે,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & kc_2 & kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(5 મા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)}$$

$= \Delta + 0$ (R_1 અને R_3 સમપ્રમાણમાં હોવાથી)

આથી, $\Delta = \Delta_1$

☛ નોંધ :

(1) જો Δ પર $R_i \to kR_i$ અથવા $C_i \to kC_i$ ના પ્રયોજનથી Δ_1 મેળવીએ, તો $\Delta_1 = k\Delta$ થાય.

(2) જો $R_i \to R_i + kR_j$ જેવી એકથી વધારે પ્રક્રિયા એક જ પગલામાં કરીએ, તો એક પ્રક્રિયાથી જે હારને અસર થઈ હોય તેનો ઉપયોગ બીજી પ્રક્રિયામાં થાય નહિ તેની કાળજી લેવી જોઈએ. આ જ પ્રકારની નોંધ સ્તંભ-પ્રક્રિયા માટે સમજવી.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$

ઉકેલ : આપેલા નિશ્ચાયક Δ પર, $R_2 \to R_2 - 2R_1$ અને $R_3 \to R_3 - 3R_1$ પ્રક્રિયાઓ કરતાં, આપણને

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$ મળે.

હવે, $R_3 \to R_3 - 3R_2$ કરતાં, આપણને

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$ મળે.

C_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= a\,(a^2 - 0) = a(a^2) = a^3$$

ઉદાહરણ 12 : વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ઉકેલ : Δ પર, $R_1 \to R_1 + R_2$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 અને R_3 સમપ્રમાણમાં હોવાથી, $\Delta = 0$.

ઉદાહરણ 13 : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $R_2 \to R_2 - R_1$ અને $R_3 \to R_3 - R_1$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

R_2 અને R_3માંથી અનુક્રમે $(b - a)$ અને $(c - a)$ અવયવો સામાન્ય લેતાં,

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

$\therefore \quad \Delta = (b - a)(c - a)[(-b + c)]$ (પ્રથમ સ્તંભ દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં)

$$= (a - b)(b - c)(c - a)$$

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

ઉકેલ : $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$ લેતાં,

Δ પર $R_1 \rightarrow R_1 - R_2 - R_3$ પ્રયોજતાં, આપણને

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

R_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\Delta = 0 \begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c) \begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-2b) \begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \Delta &= 2c\,(ab + b^2 - bc) - 2b\,(bc - c^2 - ac) \\ &= 2abc + 2cb^2 - 2bc^2 - 2b^2c + 2bc^2 + 2abc \\ &= 4abc \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 15 : જો x, y, z ભિન્ન હોય અને $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે $1 + xyz = 0$.

ઉકેલ : અહીં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$ (5 મા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ (પ્રથમ નિશ્ચાયકમાં $C_3 \rightarrow C_2$ અને પછી $C_1 \rightarrow C_2$ નો ઉપયોગ કરતાં અને બીજા નિશ્ચાયકમાંથી xyz સામાન્ય લેતાં.)

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} (1 + xyz)$$

$$= (1 + xyz) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$ ($R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ અને $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$નો ઉપયોગ કરતાં)

R_2 માંથી $(y - x)$ અને R_3 માંથી $(z - x)$ સામાન્ય અવયવ બહાર કાઢતાં, આપણને

$$\Delta = (1 + xyz)(y - x)(z - x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix}$$ મળે.

$$= (1 + xyz)(y - x)(z - x)(z - y)$$ (C_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં)

$\Delta = 0$ અને x, y, z ભિન્ન હોવાથી, અર્થાત્ $x - y \neq 0$, $y - z \neq 0$, $z - x \neq 0$ હોવાથી, આપણને $1 + xyz = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = abc + bc + ca + ab$

ઉકેલ : અનુક્રમે R_1, R_2 અને R_3 માંથી અવયવો a, b, c સામાન્ય લેતાં,

$$\text{ડા.બા.} = abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ કરતાં,

$$\Delta = abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

હવે $C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$ કરતાં,

$$\Delta = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)[1(1 - 0)]$$

$$= abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = abc + bc + ca + ab = \text{જ.બા.}$$

નોંધ : વૈકલ્પિક રીતે, $C_1 \to C_1 - C_2$ અને $C_3 \to C_3 - C_2$ કરી, પછી $C_1 \to C_1 - aC_3$ કરો.

સ્વાધ્યાય 4.2

પ્રશ્ન 1 થી 5 માં નિશ્ચાયકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી અને વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો :

1. $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

5. $\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

પ્રશ્ન 6 થી 14 માં નિશ્ચાયકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો :

6. $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

8. (i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

9. $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

10. (i) $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

(ii) $\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

11. (i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

(ii) $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$

12. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

13. $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

14. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$

પ્રશ્નો 15 તથા 16 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

15. A એ 3×3 કક્ષાનો ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $|kA| =$ ....

(A) $k|A|$ (B) $k^2|A|$ (C) $k^3|A|$ (D) $3k|A|$

16. નીચે આપેલામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ?

(A) નિશ્ચાયક એ ચોરસ શ્રેણિક છે.

(B) નિશ્ચાયક એ શ્રેણિક સાથે સંકળાયેલ એક સંખ્યા છે.

(C) નિશ્ચાયક એ ચોરસ શ્રેણિક સાથે સંકળાયેલ એક સંખ્યા છે.

(D) આમાંથી કોઈ નહિ.

4.4 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

આપણે આગળનાં ધોરણોમાં શીખી ગયાં છીએ કે, જેનાં શિરોબિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) હોય તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અભિવ્યક્તિ $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)]$ ના નિરપેક્ષ મૂલ્ય દ્વારા મળે છે. હવે આ અભિવ્યક્તિને નિશ્ચાયક સ્વરૂપમાં

$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ પ્રમાણે લખી શકાય. ...(1)

નોંધ : (1) ક્ષેત્રફળ ધન સંખ્યા હોવાથી, આપણે હંમેશા (1)ના નિશ્ચાયકનું નિરપેક્ષ મૂલ્ય લઈશું.

(2) જો ક્ષેત્રફળ આપ્યું હોય, તો ગણતરી કરવા માટે નિશ્ચાયકના ધન અને ઋણ બંને મૂલ્યનો ઉપયોગ કરો.

(3) જો ક્ષેત્રફળની અભિવ્યક્તિ ધરાવતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય હોય, તો (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) સમરેખ હોય.

ઉદાહરણ 17 : (3, 8), (–4, 2) અને (5, 1) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)]$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 72 - 14) = \frac{61}{2} \text{ મળે.}$$

ઉદાહરણ 18 : નિશ્ચાયકનો ઉપયોગ કરી A(1, 3) અને B(0, 0) ને જોડતી રેખાનું સમીકરણ શોધો અને જો ત્રિકોણ ABD નું ક્ષેત્રફળ 3 ચોરસ એકમ થાય તેવું બિંદુ D(k, 0) હોય, તો k શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે P(x, y) એ AB પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. ત્રિકોણ ABPનું ક્ષેત્રફળ શૂન્ય થશે. (શા માટે ?)

આથી, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \quad \frac{1}{2}(y - 3x) = 0$ અથવા $y = 3x$

આ માંગેલ રેખા AB નું સમીકરણ છે.

વળી, ત્રિકોણ ABD નું ક્ષેત્રફળ 3 ચોરસ એકમ હોવાથી, આપણને

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3 \text{ મળે.}$$

$\therefore \quad \frac{3k}{2} = \pm 3$ અર્થાત્ $k = \pm 2$

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચે આપેલાં શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (–2, –3), (3, 2), (–1, –8)

2. સાબિત કરો કે બિંદુઓ

A(a, $b + c$), B(b, $c + a$), C(c, $a + b$) સમરેખ છે

3. જો (i) (k, 0), (4, 0), (0, 2) (ii) (–2, 0), (0, 4), (0, k)

શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 4 ચોરસ એકમ હોય, તો k નું મૂલ્ય શોધો.

4. (i) નિશ્ચાયકનો ઉપયોગ કરી (1, 2) અને (3, 6) ને જોડતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

(ii) નિશ્ચાયકનો ઉપયોગ કરી (3, 1) અને (9, 3) ને જોડતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

પ્રશ્ન 5 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

5. જો (2, –6), (5, 4) અને (k, 4) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 35 ચોરસ એકમ હોય, તો k નું મૂલ્ય ....

(A) 12 (B) –2 (C) –12, –2 (D) 12, –2

4.5 ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ

આ વિભાગમાં આપણે ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવનો ઉપયોગ કરી નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં લખવાનું શીખીશું.

વ્યાખ્યા 1 : ***નિશ્ચાયકનો ઘટક a_{ij} એ i મી હાર અને j મા સ્તંભમાં આવેલો છે. આ હાર અને સ્તંભને દૂર કરી બાકીના ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી મળતા નિશ્ચાયકને ઘટક a_{ij} નો ઉપનિશ્ચાયક કહે છે. ઘટક a_{ij} ના ઉપનિશ્ચાયકને M_{ij} વડે દર્શાવાય છે.***

નોંધ : $n\,(n \geq 2)$ કક્ષાવાળા નિશ્ચાયકના કોઈ પણ ઘટકનો ઉપનિશ્ચાયક એ $n - 1$ કક્ષાવાળો નિશ્ચાયક છે.

ઉદાહરણ 19 : નિશ્ચાયક $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ના ઘટક 6 નો ઉપનિશ્ચાયક શોધો.

ઉકેલ : ઘટક 6 એ બીજી હાર અને ત્રીજા સ્તંભમાં આવેલો હોવાથી, તેનો ઉપનિશ્ચાયક

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$ મળે. (Δ ની R_2 અને C_3 ને દૂર કરતાં તે મળ્યો.)

વ્યાખ્યા 2 : ***a_{ij} ના ઉપનિશ્ચાયક M_{ij} ને $(-1)^{i+j}$ વડે ગુણીને a_{ij} નો સહઅવયવ મેળવવામાં આવે છે અને તેને સંકેત A_{ij} વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.***

ઉદાહરણ 20 : નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ ના બધા જ ઘટકના ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ શોધો.

ઉકેલ : ઘટક a_{ij} નો ઉપનિશ્ચાયક M_{ij} છે.

અહીં $a_{11} = 1$. આથી, $M_{11} = a_{11}$ નો ઉપનિશ્ચાયક $= 3$

M_{12} = ઘટક a_{12} નો ઉપનિશ્ચાયક $= 4$

M_{21} = ઘટક a_{21} નો ઉપનિશ્ચાયક $= -2$

M_{22} = ઘટક a_{22} નો ઉપનિશ્ચાયક $= 1$

હવે, a_{ij} નો સહઅવયવ A_{ij} છે, આથી

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (4) = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$

ઉદાહરણ 21 : આપેલ નિશ્ચાયકના ઘટકો a_{11}, a_{21} ના ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ શોધો.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ઉકેલ : ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવની વ્યાખ્યા પરથી, આપણને

a_{11} નો ઉપનિશ્ચાયક $= M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

a_{11} નો સહઅવયવ $= A_{11} = (-1)^{1+1} \; M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

a_{21} નો ઉપનિશ્ચાયક $= M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$

a_{21} નો સહઅવયવ $= A_{21} = (-1)^{2+1} \; M_{21} = (-1)(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) = -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32}$

નોંધ : ઉદાહરણ 21 ના નિશ્ચાયક Δ નું R_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં, આપણને

$$\Delta = (-1)^{1+1} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ મળે.

$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, જ્યાં A_{ij} એ a_{ij} નો સહઅવયવ છે.

$= R_1$ ના ઘટકોના તેમના અનુરૂપ સહઅવયવો સાથેના ગુણનફળનો સરવાળો.

આ જ પ્રમાણે, Δ ની ગણતરી R_2, R_3, C_1, C_2 અને C_3 ની સાથેના વિસ્તરણથી બીજી પાંચ રીતે કરી શકાય.

આથી Δ = કોઈ પણ હાર (અથવા સ્તંભ)ના ઘટકોના અનુરૂપ સહઅવયવો સાથેના ગુણનફળનો સરવાળો.

નોંધ : જો એક હાર (અથવા સ્તંભ) ના ઘટકોને અન્ય કોઈ હાર (અથવા સ્તંભ) ના સહઅવયવો સાથે ગુણીએ, તો તેમનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે,

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$$

$$= a_{11}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$ (R_1 અને R_2 સમાન હોવાથી)

આ જ પ્રમાણે આપણે અન્ય હાર અને સ્તંભ માટે પ્રયત્ન કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 22 : નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ના ઘટકોના ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ શોધો તથા ચકાસો કે $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$.

ઉકેલ : $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20;$ $\quad A_{11} = (-1)^{1+1}(-20) = -20$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -42 - 4 = -46;$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}(-46) = 46$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 0 = 30;$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3}(30) = 30$

$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4;$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19;$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}(-19) = -19$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13;$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}(13) = -13$

$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12;$ $\quad A_{31} = (-1)^{3+1}(-12) = -12$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22;$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}(-22) = 22$

અને $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18;$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}(18) = 18$

હવે, $a_{11} = 2$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = 5$; $A_{31} = -12$, $A_{32} = 22$, $A_{33} = 18$

તેથી, $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}$

$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$

સ્વાધ્યાય 4.4

નીચે આપેલા નિશ્ચાયકના પ્રત્યેક ઘટકના ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ લખો :

1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. બીજી હારના ઘટકોના સહઅવયવના ઉપયોગથી $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

4. ત્રીજા સ્તંભના ઘટકોના સહઅવયવના ઉપયોગથી $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

પ્રશ્ન 5 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

5. જો $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ અને a_{ij} નો સહઅવયવ A_{ij} હોય, તો Δ નું મૂલ્ય ....

(A) $a_{11}\,A_{31} + a_{12}\,A_{32} + a_{13}\,A_{33}$ (B) $a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{21} + a_{13}\,A_{31}$

(C) $a_{21}\,A_{11} + a_{22}\,A_{12} + a_{23}\,A_{13}$ (D) $a_{11}\,A_{11} + a_{21}\,A_{21} + a_{31}\,A_{31}$

4.6 સહઅવયવજ અને વ્યસ્ત શ્રેણિક

આગળના પ્રકરણમાં, આપણે શ્રેણિકના વ્યસ્ત વિશે અભ્યાસ કર્યો. આ વિભાગમાં, આપણે વ્યસ્ત શ્રેણિકના અસ્તિત્વ માટેની શરતની ચર્ચા કરીશું.

શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક, અર્થાત્ A^{-1} શોધવા, આપણે સૌપ્રથમ સહઅવયવજ શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપીશું.

4.6.1 સહઅવયવજ શ્રેણિક

વ્યાખ્યા 3 : $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ચોરસ શ્રેણિક છે. ઘટક a_{ij} ના સહઅવયવ A_{ij} માટે શ્રેણિક $[A_{ij}]_{n \times n}$ ના પરિવર્ત શ્રેણિકને A નો સહઅવયવજ શ્રેણિક (Adjoint matrix) કહે છે. શ્રેણિક A ના સહઅવયવજ શ્રેણિકને adjA દ્વારા દર્શાવાય છે.

ધારો કે, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

તો $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ નો પરિવર્ત શ્રેણિક $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

ઉદાહરણ 23 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો $adjA$ શોધો.

ઉકેલ : આપણને $A_{11} = 4$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 2$ મળશે.

આથી, $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

નોંધ : 2 કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ માટે, a_{11} અને a_{22} ની અદલબદલ કરી તથા a_{12} અને a_{21} ના ચિહ્ન બદલીને પણ $adjA$ મેળવી શકાય. અર્થાત્

$$adjA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ચિહ્ન બદલો   અદલબદલ કરો

આપણે નીચેનું પ્રમેય સાબિતી વગર સ્વીકારીશું :

પ્રમેય 1 : ***n* કક્ષાવાળા કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે,**

$$A(adjA) = (adjA)A = |A|\, I$$

અહીં, I એ n કક્ષાવાળો એકમ શ્રેણિક છે.

સાબિતી : જો $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ હોય, તો $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

હાર (અથવા સ્તંભ)ના ઘટકોને તેમના અનુરૂપ સહઅવયવ વડે ગુણીને સરવાળો કરતાં સરવાળાનું મૂલ્ય $|A|$ જેટલું મળે અને અન્યથા સરવાળો શૂન્ય થતો હોવાથી, આપણને

$$A(adjA) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\, I \text{ મળે.}$$

એ જ રીતે, આપણે $(adjA)\, A = |A|\, I$ મેળવી શકીએ.

આથી, $A(adjA) = (adjA)\, A = |A|\, I$

વ્યાખ્યા 4 : જો $|A| = 0$, તો ચોરસ શ્રેણિક A ને અસામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$નો નિશ્ચાયક શૂન્ય છે. આથી A અસામાન્ય શ્રેણિક છે.

વ્યાખ્યા 5 : જો $|A| \neq 0$ હોય, તો ચોરસ શ્રેણિક A ને સામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ લેતાં, } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \text{ થાય.}$$

આથી, A સામાન્ય શ્રેણિક છે.

આપણે સાબિતી આપ્યા સિવાય નીચેના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

પ્રમેય 2 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો AB અને BA પણ તે જ સમાન કક્ષાવાળા સામાન્ય શ્રેણિક છે.

પ્રમેય 3 : બે શ્રેણિકના ગુણાકારનો નિશ્ચાયક એ તેમના અનુરૂપ નિશ્ચાયકના ગુણાકારની બરાબર છે. અર્થાત્ જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $|AB| = |A|\,|B|$.

નોંધ : આપણે જાણીએ છીએ કે $(adjA)\, A = |A|\, I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}, |A| \neq 0$

બંને તરફ શ્રેણિકના નિશ્ચાયક લેતાં, આપણને

$$|(adjA)\, A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} \text{ મળે.}$$

અર્થાત્ $|(adjA)|\,|A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (શા માટે ?)

અર્થાત્ $|(adjA)||A| = |A|^3$ (1)

અર્થાત્ $|(adjA)| = |A|^2$ (A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો)

વ્યાપક રીતે, જો A એ n કક્ષાવાળો સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો $|(adjA)| = |A|^{n-1}$

પ્રમેય 4 : *જો ચોરસ શ્રેણિક A ને વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય, તો અને તો જ A સામાન્ય શ્રેણિક છે.*

સાબિતી : ધારો કે n કક્ષાવાળા શ્રેણિક A ના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ છે અને I એ n કક્ષાવાળો એકમ શ્રેણિક છે.

તો, AB = BA = I થાય તેવા n કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક B નું અસ્તિત્વ છે.

હવે AB = I.

તેથી $|AB| = |I|$ અથવા $|A||B| = 1$ ($|I| = 1$, $|AB| = |A||B|$)

તે પરથી $|A| \neq 0$ મળે.

આથી A સામાન્ય છે.

તેનાથી ઊલટું, ધારો કે A સામાન્ય છે. આથી, $|A| \neq 0$

હવે, $A(adjA) = (adjA)A = |A|\, I$ (પ્રમેય 1)

અથવા $A\left(\frac{1}{|A|}adjA\right) = \left(\frac{1}{|A|}adjA\right)A = I$

અથવા $B = \frac{1}{|A|}\ adjA$ માટે AB = BA = I

આમ, A ને વ્યસ્ત છે અને $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adjA$

ઉદાહરણ 24 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, તો $A\ adjA = |A|\ I$ ની ચકાસણી કરો. A^{-1} પણ શોધો.

ઉકેલ : આપણને $|A| = 1(16 - 9) - 3(4 - 3) + 3(3 - 4) = 1 \neq 0$ મળે છે.

હવે, $A_{11} = 7$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 0$, $A_{31} = -3$, $A_{32} = 0$, , $A_{33} = 1$

માટે $adjA = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

હવે $A\,(adjA) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A|\, I$$

વળી, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adjA = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 25 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, તો $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ની ચકાસણી કરો.

ઉકેલ : આપણને $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}$ મળે.

$|AB| = -11 \neq 0$ હોવાથી, $(AB)^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે અને

$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\, adj\,(AB) = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ મળે છે.

વળી, $|A| = -11 \neq 0$ અને $|B| = 1 \neq 0$. આથી A^{-1} અને B^{-1} બંનેનું અસ્તિત્વ છે.

અને $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

માટે $B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

તેથી $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ઉદાહરણ 26 : સાબિત કરો કે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ એ શ્રેણિક સમીકરણ $A^2 - 4A + I = O$ નું સમાધાન કરે છે, જ્યાં I એ 2×2 એકમ શ્રેણિક છે અને O એ 2×2 શૂન્ય શ્રેણિક છે. આ શ્રેણિક સમીકરણના ઉપયોગથી A^{-1} શોધો.

ઉકેલ : આપણને $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ મળે.

આથી, $A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

હવે, $A^2 - 4A + I = O$

માટે $AA - 4A = -I$

અથવા $AA(A^{-1}) - 4AA^{-1} = -IA^{-1}$ **($|A| \neq 0$ હોવાથી A^{-1} વડે ઉત્તર ગુણાકાર કરતાં)**

અથવા $A(AA^{-1}) - 4I = -A^{-1}$

અથવા $AI - 4I = -A^{-1}$

અથવા $A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ તેથી $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

સ્વાધ્યાય 4.5

પ્રશ્ન 1 અને 2 પૈકીના પ્રત્યેક શ્રેણિકના સહઅવયવજ શ્રેણિક શોધો.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 3 અને 4 પૈકી પ્રત્યેકમાં ચકાસો કે $A\,(adjA) = (adjA)\,A = |A|\,I$.

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 5 થી 11 ના પ્રત્યેક શ્રેણિકના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે શોધો.

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

12. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ હોય, તો ચકાસો કે $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

13. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^2 - 5A + 7I = O$. તે પરથી A^{-1} શોધો.

14. શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ માટે સંખ્યાઓ a અને b શોધો કે જેથી, $A^2 + aA + bI = O$.

15. શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ માટે સાબિત કરો કે $A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I = O$

અને તે પરથી A^{-1} શોધો.

16. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A^3 - 6A^2 + 9A - 4\,I = O$

અને તે પરથી A^{-1} શોધો.

પ્રશ્નો 17 તથા 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

17. જો A એ 3×3 કક્ષાવાળો સામાન્ય ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $|adj A| =$ ....

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

18. જો A એ 2 કક્ષાવાળો સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો A^{-1} નો નિશ્ચાયક .... છે.

(A) $det(A)$ (B) $\frac{1}{det(A)}$ (C) 1 (D) 0

4.7 નિશ્ચાયક અને શ્રેણિકના ઉપયોગો

આ વિભાગમાં, આપણે બે અથવા ત્રણ ચલની સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ મેળવવા તથા સુરેખ સમીકરણોની સંહતિની સુસંગતતા તપાસવા માટે નિશ્ચાયક અને શ્રેણિકના ઉપયોગની ચર્ચા કરીશું.

સુસંગત સંહતિ : જો સુરેખ સમીકરણોની સંહતિના એક અથવા એકથી વધારે ઉકેલનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે સંહતિ સુસંગત (consistent) છે એમ કહેવાય.

અસંગત સંહતિ : જો સમીકરણોની સંહતિના ઉકેલનું અસ્તિત્વ ન હોય, તો સંહતિ સુસંગત નથી (inconsistent) એટલે કે અસંગત છે એમ કહેવાય.

> **નોંધ :** આ પ્રકરણમાં, આપણી ચર્ચા માત્ર અનન્ય ઉકેલ હોય તેવી સમીકરણોની સંહતિ પૂરતી જ મર્યાદિત રાખીશું.

4.7.1 શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકના ઉપયોગથી સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ

આપણે સુરેખ સમીકરણોની સંહતિને શ્રેણિક સમીકરણમાં દર્શાવીશું અને વ્યસ્ત શ્રેણિકના ઉપયોગથી ઉકેલ મેળવીશું.

સમીકરણ સંહતિ $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ નો વિચાર કરીએ.

ધારો કે $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

સમીકરણોની સંહતિને $AX = B$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

અર્થાત્ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

વિકલ્પ 1 : જો A સામાન્ય શ્રેણિક હોય તો તેના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ છે. હવે

$AX = B$

$\therefore A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ (A^{-1} થી પૂર્વગુણન કરતાં)

$\therefore (A^{-1}A)X = A^{-1}B$ (જૂથના ગુણધર્મ પરથી)

$\therefore IX = A^{-1}B$

$\therefore X = A^{-1}B$

શ્રેણિકનો વ્યસ્ત અનન્ય હોવાથી આપેલ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ અનન્ય છે તેમ શ્રેણિક સમીકરણ દ્વારા પ્રાપ્ત થાય છે. સમીકરણોની સંહતિના ઉકેલની આ રીતને ***શ્રેણિક પદ્ધતિ*** કહે છે.

વિકલ્પ 2 : જો A અસામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો $|A| = 0$

આ વિકલ્પમાં, આપણે $(adj A)B$ ની ગણતરી કરીએ.

જો $(adj A)B \neq O$, (O એ શૂન્ય શ્રેણિક છે), તો ઉકેલનું અસ્તિત્વ નથી અને સંહતિ સુસંગત નથી તેમ કહીશું.

જો $(adj A)B = O$, તો સંહતિને અનંત સંખ્યાના ઉકેલ છે અથવા ઉકેલ નથી તદનુસાર સંહતિ સુસંગત છે અથવા સુસંગત નથી.

ઉદાહરણ 27 : સુરેખ સમીકરણોની સંહતિ $\begin{matrix} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = 7 \end{matrix}$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ સુરેખ સમીકરણોની સંહતિને નીચે પ્રમાણે AX = B સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{અને} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

હવે, $|A| = -11 \neq 0$.

આથી, A સામાન્ય શ્રેણિક છે અને તેથી સંહતિને અનન્ય ઉકેલ છે.

નોંધીશું કે, $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad X = A^{-1}B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

અર્થાત્ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

તેથી $x = 3$, $y = -1$

ઉદાહરણ 28 : શ્રેણિક પદ્ધતિથી નીચેનાં સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ મેળવો :

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$

ઉકેલ : આપેલ સુરેખ સમીકરણોની સંહતિને નીચે પ્રમાણે AX = B સ્વરૂપમાં લખી શકાય :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{અને} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

આપણે જોઈએ કે,

$$|A| = 3(2 - 3) + 2(4 + 4) + 3(-6 - 4) = -17 \neq 0$$

આથી, A સામાન્ય છે અને તેથી તેના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ છે. હવે

$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -8, \quad A_{13} = -10$

$A_{21} = -5, \quad A_{22} = -6, \quad A_{23} = 1$

$A_{31} = -1, \quad A_{32} = 9, \quad A_{33} = 7$

$$\therefore \quad A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

આથી, $X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

અર્થાત્ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

આથી, $x = 1$, $y = 2$ અને $z = 3$.

ઉદાહરણ 29 : ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો 6 છે. જો આપણે ત્રીજી સંખ્યાને 3 વડે ગુણીને તેમાં બીજી સંખ્યા ઉમેરીએ, તો આપણને 11 મળે. પ્રથમ અને ત્રીજી સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતાં, આપણને બીજી સંખ્યાના બમણા મળે. આ માહિતીને બૈજિક સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને શ્રેણિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : આપણે પ્રથમ, બીજી અને ત્રીજી સંખ્યાને અનુક્રમે x, y અને z તરીકે દર્શાવીએ. આપેલ શરતો અનુસાર આપણને

$x + y + z = 6$

$y + 3z = 11$

$x + z = 2y$ અથવા $x - 2y + z = 0$ મળે.

આ સંહતિને નીચે પ્રમાણે AX = B સ્વરૂપમાં લખી શકાય :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ અને } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

અહીં, $|A| = 1(1 + 6) - 1(0 - 3) + 1(0 - 1) = 9 \neq 0$. હવે આપણે adjA શોધીશું.

$A_{11} = 1(1 + 6) = 7, \quad A_{12} = -(0 - 3) = 3, \quad A_{13} = -1$

$A_{21} = -(1 + 2) = -3, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = -(-2 - 1) = 3$

$A_{31} = (3 - 1) = 2, \quad A_{32} = -(3 - 0) = -3, \quad A_{33} = (1 - 0) = 1$

આથી, $adj A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

આમ, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj(A) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B$ હોવાથી

$$X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

અથવા $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42-33+0 \\ 18+0+0 \\ -6+33+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

આમ $x = 1, y = 2, z = 3$

સ્વાધ્યાય 4.6

પ્રશ્ન 1 થી 6 માં આપેલાં સમીકરણોની સંહતિની સુસંગતતા ચકાસો :

1. $x + 2y = 2$
$2x + 3y = 3$

2. $2x - y = 5$
$x + y = 4$

3. $x + 3y = 5$
$2x + 6y = 8$

4. $x + y + z = 1$
$2x + 3y + 2z = 2$
$ax + ay + 2az = 4$

5. $3x - y - 2z = 2$
$2y - z = -1$
$3x - 5y = 3$

6. $5x - y + 4z = 5$
$2x + 3y + 5z = 2$
$5x - 2y + 6z = -1$

પ્રશ્ન 7 થી 14 માં આપેલાં સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ શ્રેણિકના ઉપયોગથી મેળવો :

7. $5x + 2y = 4$
$7x + 3y = 5$

8. $2x - y = -2$
$3x + 4y = 3$

9. $4x - 3y = 3$
$3x - 5y = 7$

10. $5x + 2y = 3$
$3x + 2y = 5$

11. $2x + y + z = 1$
$x - 2y - z = \frac{3}{2}$
$3y - 5z = 9$

12. $x - y + z = 4$
$2x + y - 3z = 0$
$x + y + z = 2$

13. $2x + 3y + 3z = 5$
$x - 2y + z = -4$
$3x - y - 2z = 3$

14. $x - y + 2z = 7$
$3x + 4y - 5z = -5$
$2x - y + 3z = 12$

15. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ હોય, તો A^{-1} શોધો. A^{-1}ના ઉપયોગથી નીચેની સમીકરણ સંહતિ ઉકેલો :

$$2x - 3y + 5z = 11$$
$$3x + 2y - 4z = -5$$
$$x + y - 2z = -3$$

16. 4 કિગ્રા ડુંગળી, 3 કિગ્રા ઘઉં અને 2 કિગ્રા ચોખાની કિંમત ₹ 60 છે. 2 કિગ્રા ડુંગળી, 4 કિગ્રા ઘઉં અને 6 કિગ્રા ચોખાની કિંમત ₹ 90 છે. 6 કિગ્રા ડુંગળી, 2 કિગ્રા ઘઉં અને 3 કિગ્રા ચોખાની કિંમત ₹ 70 છે. શ્રેણિકની રીતે દરેક વસ્તુનો પ્રતિકિગ્રા ભાવ શોધો.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 30 : જો a, b, c પૈકી પ્રત્યેક બે અસમાન અને પ્રત્યેક ધન હોય, તો સાબિત કરો કે નિશ્ચાયક $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ઋણ છે.

ઉકેલ : આપેલ નિશ્ચાયક પર $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} \qquad (R_2 \to R_2 - R_1 \text{ અને } R_3 \to R_3 - R_1 \text{ કરતાં})$$

$$= (a+b+c)\,[(c-b)(b-c) - (a-c)(a-b)] \qquad (C_1 \text{ દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં})$$

$$= (a+b+c)\,(-a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca)$$

$$= \frac{-1}{2}(a+b+c)\,(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{-1}{2}(a+b+c)\,[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

આ ઋણ સંખ્યા છે. ($a + b + c > 0$ અને $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$ હોવાથી)

ઉદાહરણ 31 : જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો

$$\begin{vmatrix} 2y+4 & 5y+7 & 8y+a \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix}$$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપેલ નિશ્ચાયકમાં $R_1 \to R_1 + R_3 - 2R_2$ કરતાં, આપણને

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix} = 0$$ મળે. ($2b = a + c$ હોવાથી)

ઉદાહરણ 32 : સાબિત કરો કે,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x+y+z)^3$$

ઉકેલ : Δ માં $R_1 \to xR_1$, $R_2 \to yR_2$, $R_3 \to zR_3$ કરી અને xyz વડે ભાગતાં, આપણને

$$\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x(y+z)^2 & x^2y & x^2z \\ xy^2 & y(x+z)^2 & y^2z \\ xz^2 & yz^2 & z(x+y)^2 \end{vmatrix}$$ મળે.

C_1, C_2 અને C_3, માંથી અનુક્રમે અવયવ x, y, z સામાન્ય લેતાં, આપણને

$$\Delta = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$ મળે.

$C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$ કરતાં, આપણને

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 \\ y^2 & (x+z)^2-y^2 & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)^2-z^2 \end{vmatrix}$$ મળે.

C_2 અને C_3માંથી $(x + y + z)$ અવયવ સામાન્ય લેતાં, આપણને

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x-(y+z) & x-(y+z) \\ y^2 & (x+z)-y & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)-z \end{vmatrix}$$ મળે.

$R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)$ કરતાં, આપણને

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} 2yz & -2z & -2y \\ y^2 & x-y+z & 0 \\ z^2 & 0 & x+y-z \end{vmatrix}$$ મળે.

$C_2 \to (C_2 + \frac{1}{y}C_1)$ અને $C_3 \to \left(C_3 + \frac{1}{z}C_1\right)$ કરતાં, આપણને

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} 2yz & 0 & 0 \\ y^2 & x+z & \frac{y^2}{z} \\ z^2 & \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix}$$ મળે.

અંતે, R_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં,

$$\begin{aligned}\Delta &= (x+y+z)^2(2yz)[(x+z)(x+y)-yz] \\ &= (x+y+z)^2(2yz)(x^2+xy+xz) \\ &= (x+y+z)^3(2xyz)\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 33 : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ના ગુણાકારનો ઉપયોગ સમીકરણ સંહતિ

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2y - 3z &= 1 \\ 3x - 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$ નો ઉકેલ મેળવવા કરો.

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

આથી, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

હવે, આપેલ સમીકરણ સંહતિને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

અથવા $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

તેથી $x = 0$, $y = 5$ અને $z = 3$.

ઉદાહરણ 34 : સાબિત કરો કે $\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$

ઉકેલ : Δ પર $R_1 \to R_1 - xR_2$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(1-x^2) & c(1-x^2) & p(1-x^2) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - xR_1$ કરતાં,

$$\Delta = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 4

1. સાબિત કરો કે નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય θ થી મુક્ત છે.

2. નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

4. જો a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, અને

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0 \text{ હોય,}$$

તો સાબિત કરો કે $a + b + c = 0$ અથવા $a = b = c$.

5. શૂન્યેતર a માટે સમીકરણ $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$ ઉકેલો.

6. સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

7. જો $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ તો $(AB)^{-1}$ શોધો.

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ માટે ચકાસો કે (i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$.

9. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

10. $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

પ્રશ્નો 11 થી 15 માં નિશ્ચાયકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે,

11. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \gamma)$

12. $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1 + pxyz)(x - y)(y - z)(z - x)$

13. $\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1$ **15.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

16. નીચેની સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ મેળવો :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

પ્રશ્નો 17 તથા 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

17. જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો નિશ્ચાયક

$\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix} = \dots\dots\dots\dots$

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) $2x$

18. જો x, y, z શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક ....

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. જો $0 \le \theta \le 2\pi$ માટે $A = \begin{bmatrix} 1 & sin\theta & 1 \\ -sin\theta & 1 & sin\theta \\ -1 & -sin\theta & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(A) det (A) = 0 (B) det (A) $\in (2, \infty)$

(C) det (A) $\in (2, 4)$ (D) det (A) $\in [2, 4]$

સારાંશ

- શ્રેણિક $A = [a_{11}]_{1 \times 1}$ નો નિશ્ચાયક $|a_{11}| = a_{11}$ છે.
- શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ નો નિશ્ચાયક $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ છે.
- શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ નો નિશ્ચાયક (R_1 દ્વારા વિસ્તરણ કરતાં)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \text{ છે.}$$

કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે, |A| નીચેના ગુણધર્મોનું સમાધાન કરે છે :

- $|A'| = |A|$, જ્યાં A' એ A નો પરિવર્ત શ્રેણિક છે.
- જો આપણે નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (અથવા સ્તંભ)ની અદલબદલ કરીએ, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય ચિહ્નમાં બદલાય છે.
- નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (અથવા સ્તંભ) ના અનુરૂપ ઘટકો સમાન અથવા સમપ્રમાણમાં હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.
- જો આપણે નિશ્ચાયકની એક હાર અથવા એક સ્તંભના પ્રત્યેક ઘટકને અચળ k વડે ગુણીએ, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય k વડે ગુણાય છે.
- નિશ્ચાયકને k વડે ગુણવાનો અર્થ માત્ર એક હાર (અથવા એક સ્તંભ) ના ઘટકોને k વડે ગુણવા તેવો થાય છે.
- જો $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, તો $|kA| = k^3|A|$
- જો નિશ્ચાયકની એક હાર (અથવા એક સ્તંભ) ના ઘટકોને બે અથવા વધારે ઘટકોના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય, તો આપેલા નિશ્ચાયકને બે કે વધારે નિશ્ચાયકના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય.
- જો નિશ્ચાયકની એક હાર અથવા એક સ્તંભના પ્રત્યેક ઘટકમાં અન્ય હાર અથવા અન્ય સ્તંભના અનુરૂપ ઘટકોના સમગુણિત ઉમેરવામાં આવે, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય તેનું તે જ રહે છે.
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ ના માનાંક જેટલું થાય છે.
- શ્રેણિક A ના નિશ્ચાયકના ઘટક a_{ij}નો ઉપનિશ્ચાયક એ iમી હાર અને jમા સ્તંભને દૂર કરતાં મળતો નિશ્ચાયક છે અને તેને M_{ij} વડે દર્શાવાય છે.

- a_{ij} નો સહઅવયવ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ થી મળે છે.
- હાર (અથવા સ્તંભ)ના ઘટકોને તેમના અનુરૂપ સહઅવયવો વડે ગુણીને ઉમેરતાં શ્રેણિક A ના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

  $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$
- જો એક હાર (અથવા સ્તંભ) ના ઘટકોને કોઈ બીજી હાર (અથવા સ્તંભ)ના અનુરૂપ સહઅવયવ વડે ગુણી, પછી તેઓનો સરવાળો કરતાં સરવાળો શૂન્ય થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.
- જો $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ તો $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$, જ્યાં A_{ij} એ a_{ij} નો સહઅવયવ છે.
- $A(adjA) = (adjA)\,A = |A|\,I$, જ્યાં A એ n કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક છે.
- જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $|A| = 0$ અથવા $|A| \neq 0$ હોય, તદનુસાર A અસામાન્ય અથવા સામાન્ય શ્રેણિક છે.
- જો B ચોરસ શ્રેણિક હોય અને AB = BA = I, તો B ને A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહે છે. વળી $A^{-1} = B$ અથવા $B^{-1} = A$ અને આથી $(A^{-1})^{-1} = A$.
- ચોરસ શ્રેણિક A ને વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય, તો અને તો જ A સામાન્ય છે.
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj(A)$
- જો $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$,

  તો આ સમીકરણોને AX = B પ્રમાણે લખી શકાય. જ્યાં

  $$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ અને } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$
- જો $|A| \neq 0$ તો, સમીકરણ AX = B નો અનન્ય ઉકેલ $X = A^{-1}B$ થી મળે છે.
- સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ અસ્તિત્વ ધરાવે છે અથવા ઉકેલ નથી તે પ્રમાણે સમીકરણ સંહતિ સુસંગત છે અથવા સુસંગત નથી.
- શ્રેણિક સમીકરણ AX = B ના ચોરસ શ્રેણિક A માટે,

  (i) $|A| \neq 0$ તો ઉકેલ અનન્ય છે.

  (ii) $|A| = 0$ અને $(adjA)B \neq O$, તો ઉકેલનું અસ્તિત્વ નથી.

  (iii) $|A| = 0$ અને $(adjA)B = O$, તો સંહતિ સુસંગત નથી અથવા સુસંગત હોઈ શકે.

Historical Note

The Chinese method of representing the coefficients of the unknowns of several linear equations by using rods on a calculating board naturally led to the discovery of simple method of elimination. The arrangement of rods was precisely that of the numbers in a determinant. The Chinese, therefore, early developed the idea of subtracting columns and rows as in simplification of a determinant 'Mikami, China, pp 30, 93.

Seki Kowa, the greatest of the Japanese Mathematicians of seventeenth century in his work '***Kai Fukudai no Ho***' in C.E. 1683 showed that he had the idea of determinants and of their expansion. But he used this device only in eliminating a quantity from two equations and not directly in the solution of a set of simultaneous linear equations. '***T. Hayashi***, "***The Fakudoi and Determinants in Japanese Mathematics,***" in the proc. of the Tokyo Math. Soc., V.

Vandermonde was the first to recognise determinants as independent functions. He may be called the formal founder. ***Laplace*** (C.E. 1772), gave general method of expanding a determinant in terms of its complementary minors. In C.E. 1773 ***Lagrange*** treated determinants of the second and third orders and used them for purpose other than the solution of equations. In C.E. 1801, ***Gauss*** used determinants in his theory of numbers.

The next great contributor was ***Jacques - Philippe - Marie Binet***, (C.E. 1812) who stated the theorem relating to the product of two matrices of m columns and n rows, which for the special case of $m = n$ reduces to the multiplication theorem.

Also on the same day, ***Cauchy*** (C.E. 1812) presented one on the same subject. He used the word '***determinant***' in its present sense. He gave the proof of multiplication theorem more satisfactory than ***Binet's***.

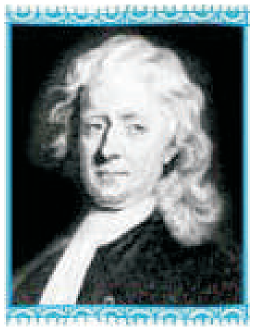
The greatest contributor to the theory was ***Carl Gustav Jacob Jacobi***, after this the word determinant received its final acceptance.

પ્રકરણ **5**

સાતત્ય અને વિકલનીયતા

❖ *The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking.” — ALBERT EINSTEIN* ❖

5.1 પ્રાસ્તાવિક



Sir Issac Newton
(C.E. 1642 - C.E. 1727)

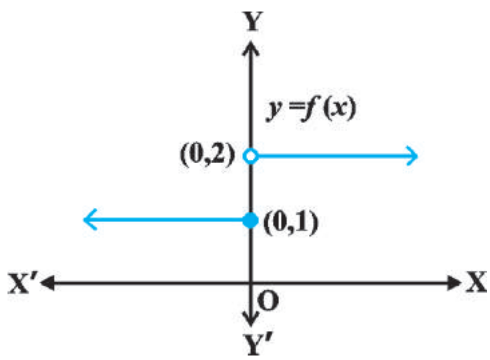
આ પ્રકરણના અભ્યાસ માટે આપણે ધોરણ 11માં વિધેયોનો જે પરિચય કર્યો હતો. તેમને ઊંડાણથી સમજવા જરૂરી છે. આપણે બહુપદીય વિધેયો અને ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના વિકલનનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે *સાતત્ય (continuity)*, *વિકલનીયતા (differentiability)* તથા તેમની વચ્ચેના સંબંધ એવી ખૂબ જ અગત્યની સંકલ્પનાઓનો અભ્યાસ કરીશું. વળી, આપણે *ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો* ના વિકલનનો પણ અભ્યાસ કરીશું. વધુમાં, આપણે *ઘાતાંકીય વિધેય (exponential)* અને *લઘુગણકીય વિધેયો (logarithmic)* જેવાં નવાં વિધેયો પ્રસ્તુત કરીશું. આ વિધેયો વિકલનની સક્ષમ રીત તરફ દોરે છે. *વિકલનના કલનગણિત (differential calculus)* દ્વારા આપણે કેટલાંક ભૌમિતિક પરિણામો સાહજિક રીતે સમજીશું. આ પ્રક્રિયામાં, આપણે આગળ વધતાં કેટલાક મૂળભૂત પ્રમેયોનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

5.2 સાતત્ય

સાતત્યની સંકલ્પના અનુભવી શકાય તે માટે આ વિભાગની શરૂઆત બે અનૌપચારિક ઉદાહરણોથી કરીશું. વિધેય

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$ નો વિચાર કરો.

આ વિધેય ખરેખર *વાસ્તવિક રેખા (real line)* પરના પ્રત્યેક બિંદુ માટે વ્યાખ્યાયિત છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.1માં દર્શાવેલ છે. આલેખ પરથી જોઈ શકાય કે X-અક્ષ પરના $x = 0$ સિવાયના 0 ની નજીક પાસપાસેની સંખ્યાઓ માટે મળતાં મૂલ્યો એકબીજાની નજીક હશે. 0 ની નજીક પરંતુ ડાબી બાજુની સંખ્યાઓ જેવી કે $-0.1, -0.01, -0.001$ માટે વિધેયનું મૂલ્ય 1 છે, જ્યારે 0 થી નજીક પરંતુ જમણી બાજુની સંખ્યાઓ જેવી કે $0.1, 0.01, 0.001$ માટે વિધેયનું મૂલ્ય 2 છે. આપણે એ પણ જોઈએ કે વિધેયનું $x = 0$



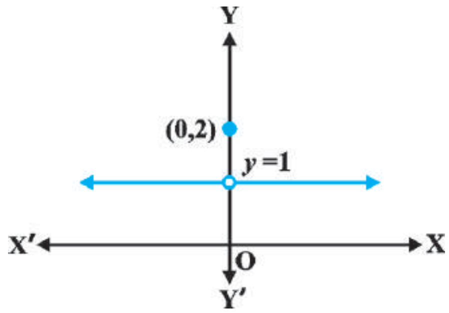
આકૃતિ 5.1

આગળનું મૂલ્ય તેના ડાબી બાજુના લક્ષ જેટલું છે. ડાબી તથા જમણી બાજુના લક્ષની ભાષાનો ઉપયોગ કરતાં આપણે કહી શકીએ કે વિધેય f નું 0 માટે ડાબી બાજુનું લક્ષ 1 અને જમણી બાજુનું લક્ષ 2 છે. આથી, ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષ સમાન નથી. આપણે એ પણ જોઈએ કે, વિધેયનું $x = 0$ આગળનું મૂલ્ય તેના ડાબી બાજુના લક્ષ જેટલું છે. આપણે નોંધીએ કે જો આ વિધેયનો આલેખ મુક્તહસ્ત રીતે દોરવાનો પ્રયત્ન કરીએ તો કાગળના સમતલમાં પેન ઉઠાવ્યા વગર તે શક્ય ના બને. ખરેખર તો આપણને ડાબી બાજુથી O તરફ આવતાં પેન ઉઠાવવી પડે. આથી આ 0 પાસે ***સતત ન*** હોય તેવા વિધેયનું ઉદાહરણ છે.

હવે, આપણે $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{જો } x \neq 0 \\ 2, & \text{જો } x = 0 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો વિચાર કરીશું.

આ વિધેય પણ વાસ્તવિક રેખાના પ્રત્યેક બિંદુએ વ્યાખ્યાયિત છે. $x = 0$ આગળ ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષ સમાન છે અને કિંમત 1 છે. પરંતુ વિધેયનું $x = 0$ આગળ મૂલ્ય 2 છે. તે જમણી અને ડાબી બાજુનાં લક્ષ જેટલું નથી. વળી, આપણે એ પણ નોંધીએ કે, વિધેયનો આલેખ પેન ઉઠાવ્યા વગર દોરવો શક્ય નથી. આથી, આ પણ $x = 0$ આગળ સતત ના હોય તેવા વિધેયનું ઉદાહરણ છે.



આકૃતિ 5.2

સાહજિક રીતે, આપણે કહી શકીએ કે જે વિધેયનો આલેખ નિશ્ચિત બિંદુ આસપાસ કાગળના સમતલમાં પેન ઉઠાવ્યા વગર દોરી શકીએ તે વિધેયને તે નિશ્ચિત બિંદુ આગળ સતત છે તેમ કહેવાય.

આ વાત ગાણિતિક રીતે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

વ્યાખ્યા 1 : ધારો કે, f એ વાસ્તવિક સંખ્યાના કોઈ ઉપગણ પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય છે અને c એ f ના પ્રદેશનું કોઈ બિંદુ છે.

જો $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ હોય, તો f એ c આગળ સતત છે તેમ કહેવાય.

વ્યાપક રીતે, જો ડાબી બાજુનું લક્ષ, જમણી બાજુનું લક્ષ અને $x = c$ આગળ વિધેયના મૂલ્યનું અસ્તિત્વ હોય અને તમામ મૂલ્યો સમાન હોય, તો વિધેય $x = c$ આગળ સતત છે તેમ કહેવાય. યાદ કરો કે જો ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુના $x = c$ આગળના લક્ષનાં મૂલ્યો સમાન હોય, તો આ સમાન મૂલ્યો વિધેયનું $x = c$ આગળનું લક્ષ કહેવાય. આમ, આપણે સાતત્યની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે પણ આપી શકીએ :

જો વિધેય $x = c$ આગળ વ્યાખ્યાયિત હોય અને જો વિધેય fનું $x = c$ આગળનું મૂલ્ય, વિધેયના x એ cને અનુલક્ષે ત્યારે મળતા લક્ષના મૂલ્ય જેટલું હોય તો વિધેય f, $x = c$ આગળ સતત છે એમ કહેવાય.

જો f એ c આગળ સતત ના હોય, તો આપણે f ને c આગળ અસતત કહીશું અને c ને વિધેય f માટેનું અસાતત્યનું બિંદુ કહીશું.

ઉદાહરણ 1 : વિધેય $f(x) = 2x + 3$ નું $x = 1$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.

ઉકેલ : આપણે પ્રથમ નોંધીએ કે વિધેય f એ $x = 1$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે અને તેનું મૂલ્ય 5 છે. હવે આપણે વિધેયનું $x = 1$ આગળ લક્ષ શોધીએ. સ્પષ્ટ છે કે,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$$

$$\therefore \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = 5 = f(1)$$

આથી, f, $x = 1$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 2 : વિધેય $f(x) = x^2$, $x = 0$ આગળ સતત છે કે નહિ તે ચકાસો.

ઉકેલ : આપણે પ્રથમ નોંધીએ કે વિધેય $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે અને તેનું મૂલ્ય ત્યાં 0 છે. હવે, આપણે વિધેયનું $x = 0$ આગળ લક્ષ શોધીએ. સ્પષ્ટ છે કે,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

$$\therefore \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

આથી, f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 3 : વિધેય $f(x) = |x|$ નું $x = 0$ આગળનું સાતત્ય ચર્ચો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પ્રમાણે $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$

સ્પષ્ટ છે કે, વિધેય f, $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે અને $f(0) = 0$. fનું 0 આગળ ડાબી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

આ જ રીતે, f નું 0 આગળ જમણી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

આમ, $x = 0$ આગળ ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષનાં મૂલ્યો વિધેયના $x = 0$ આગળના મૂલ્યને સમાન છે. આથી, f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે વિધેય f માટે,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

હોય, તો f એ $x = 0$ આગળ સતત નથી.

ઉકેલ : વિધેય $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે અને $x = 0$ આગળ તેનું મૂલ્ય 1 છે. જ્યારે $x \ne 0$ હોય ત્યારે વિધેય બહુપદી છે.

આથી, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 + 3) = 0^3 + 3 = 3$

આમ, fના $x = 0$ આગળના લક્ષનું મૂલ્ય $f(0)$ ને સમાન નથી. આપણે એ પણ નોંધીએ કે આ વિધેય માત્ર $x = 0$ આગળ જ અસતત છે.

ઉદાહરણ 5 : ***અચળ વિધેય (constant function)***, $f(x) = k$, કયા બિંદુ આગળ સતત છે તે ચકાસો.

ઉકેલ : આપેલ વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે અને વ્યાખ્યા પ્રમાણે, પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે તેનું મૂલ્ય k છે. ધારો કે c કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

હવે, કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા c માટે, $f(c) = k = \lim\limits_{x \to c} f(x)$ છે. આથી, વિધેય f પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વ્યાખ્યાયિત *તદેવ વિધેય (identity function)* $f(x) = x$ પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે અને પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા c માટે $f(c) = c$ છે.

વળી, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} x = c$

આમ, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = c = f(c)$ અને આથી, તદેવ વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

આપેલ બિંદુએ વિધેયના સાતત્યની વ્યાખ્યા પરથી આપણે આ વ્યાખ્યાનું વિધેયના પ્રદેશમાં સાતત્ય માટે વિસ્તૃતીકરણ કરીશું.

વ્યાખ્યા 2 : *જો વાસ્તવિક વિધેય f તેના પ્રદેશ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત હોય, તો f સતત વિધેય કહેવાય.*

આ વ્યાખ્યા થોડા વિસ્તારથી સમજવાની જરૂર છે. ધારો કે વિધેય f સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત છે, તો f ના સાતત્ય માટે તે અંત્યબિંદુઓ a તથા b અને $[a, b]$ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત હોય તે જરૂરી છે. fના a આગળના સાતત્યનો અર્થ

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

અને fના b આગળના સાતત્યનો અર્થ

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

જુઓ કે $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ અને $\lim\limits_{x \to b^+} f(x)$ અર્થહીન છે.

આ વ્યાખ્યાના પરિણામ સ્વરૂપ, જો f માત્ર એક બિંદુ આગળ વ્યાખ્યાયિત હોય, તો તે એ બિંદુએ સતત છે અર્થાત્ જો f નો પ્રદેશ એકાકી (singleton) હોય, તો f સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 7 : શું વિધેય $f(x) = |x|$ સતત વિધેય છે ?

ઉકેલ : આપણે f ને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ :

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

ઉદાહરણ 3 પરથી, આપણે કહી શકીએ કે f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

ધારો કે, c વાસ્તવિક સંખ્યા છે તથા $c < 0$. $f(c) = -c$. (કેમ ?)

વળી, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} (-x) = -c$

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, હોવાથી f પ્રત્યેક ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

હવે ધારો કે c ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે. હવે, $f(c) = c$.

વળી, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} x = c$ (કેમ ?)

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ હોવાથી, f પ્રત્યેક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

$\therefore$ આમ f એ તમામ વાસ્તવિક સંખ્યા આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 8 : વિધેય $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ ના સાતત્યની ચર્ચા કરો.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે f પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા c પર વ્યાખ્યાયિત છે અને તેની કિંમત $f(c) = c^3 + c^2 - 1$ છે.

વળી, આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x^3 + x^2 - 1) = c^3 + c^2 - 1$$

આમ, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ અને આથી f પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા પર સતત છે.

અર્થાત્ f સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 9 : શૂન્યેતર x માટે વિધેય $f(x) = \frac{1}{x}$ ના સાતત્યની ચર્ચા કરો.

ઉકેલ : કોઈ એક શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા c નિશ્ચિત કરો.

હવે, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$. વળી, $c \neq 0$ હોવાથી, $f(c) = \frac{1}{c}$

આમ, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ અને આથી f તેના પ્રદેશ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત છે. આથી, f સતત વિધેય છે.

હવે, આપણે *અનંતની* સંકલ્પના સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ. આપણે તેના માટે $f(x) = \frac{1}{x}$ નું $x = 0$ આગળ વિશ્લેષણ કરીશું. તેના માટે આપણે 0 ની નજીકની વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વિધેયનાં મૂલ્યો શોધવાની જાણીતી રીતનો અભ્યાસ કરીશું. આવશ્યક રીતે આપણે f નું 0 ની જમણી બાજુનું લક્ષ શોધીશું. તેનું કોષ્ટક નીચે આપેલ છે : (કોષ્ટક 5.1)

કોષ્ટક 5.1

x	1	0.3	0.2	$0.1 = 10^{-1}$	$0.01 = 10^{-2}$	$0.001 = 10^{-3}$	10^{-n}
$f(x)$	1	3.333...	5	10	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	10^n

આપણે જોઈશું કે જેમ x એ 0 ને જમણી બાજુથી અનુલક્ષે તેમ વિધેય $f(x)$ નું મૂલ્ય બહુ ઝડપથી વધે છે. આ વાતને બીજી રીતે કહીએ તો, 0 ની ખૂબ જ નજીકની વાસ્તવિક સંખ્યા પસંદ કરીને f નું મૂલ્ય કોઈ પણ આપેલ સંખ્યા કરતાં બહુ મોટું બનાવી શકાય.

આને સંકેતમાં $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ એમ લખીશું.

($f(x)$ નું 0 આગળ જમણી બાજુનું લક્ષ ધન અનંત છે, તેમ વંચાય.) અહીં, આપણે સ્પષ્ટ કરીશું કે $+\infty$ એ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી અને આથી fના જમણી બાજુના લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી. (વાસ્તવિક સંખ્યા તરીકે)

આ જ રીતે, fનું 0 આગળ ડાબી બાજુનું લક્ષ શોધી શકાય. નીચેનું કોષ્ટક સ્વયંસ્પષ્ટ છે :

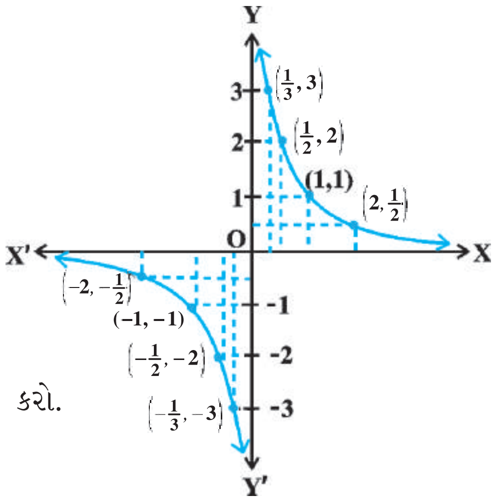
કોષ્ટક 5.2

x	-1	-0.3	-0.2	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-n}
$f(x)$	-1	$-3.333...$	-5	-10	-10^2	-10^3	-10^n

કોષ્ટક 5.2 પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, 0 ની ખૂબ જ નજીકની ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા પસંદ કરી $f(x)$ નું મૂલ્ય કોઈ પણ આપેલ સંખ્યા કરતાં નાનું બનાવી શકાય. સંકેતમાં,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \text{ એમ લખીશું.}$$

(આને $f(x)$ નું 0 આગળ ડાબી બાજુનું લક્ષ ઋણ અનંત છે, તેમ વંચાય.) ફરીથી આપણે સ્પષ્ટ કરીશું કે $-\infty$ એ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી અને આથી fના 0 આગળ ડાબી બાજુના લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી. (વાસ્તવિક સંખ્યા તરીકે) આકૃતિ 5.3માં આપેલ વાસ્તવિક વિધેયનો આલેખ ઉપર આપેલ તથ્યોનું ભૌમિતિક નિરૂપણ છે.



આકૃતિ 5.3

ઉદાહરણ 10 : નીચે આપેલ વ્યાખ્યાયિત વિધેય fના સાતત્યની ચર્ચા કરો.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le 1 \\ x-2, & x > 1 \end{cases}$$

ઉકેલ : વિધેય f વાસ્તવિક રેખા પરના પ્રત્યેક બિંદુએ વ્યાખ્યાયિત છે.

વિકલ્પ 1 : જો $c < 1$ તો $f(c) = c + 2$

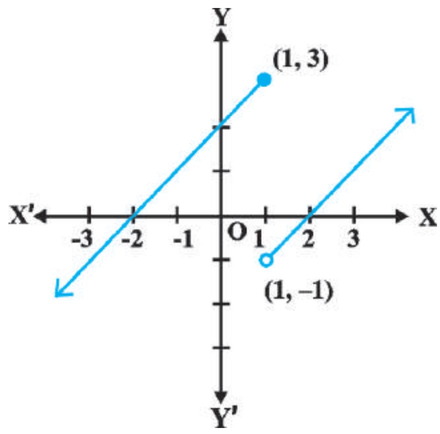
$$\therefore \quad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x + 2) = c + 2$$

આમ, f એ 1 કરતાં નાની પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.

વિકલ્પ 2 : જો $c > 1$ તો $f(c) = c - 2$

$$\therefore \quad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x - 2) = c - 2 = f(c)$$

આમ, f એ 1 કરતાં મોટી પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે.



આકૃતિ 5.4

વિકલ્પ 3 : જો $c = 1$ તો $x = 1$ આગળ f નું ડાબી બાજુનું લક્ષ.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 2) = 1 + 2 = 3 \text{ છે}$$

અને $x = 1$ આગળ f નું જમણી બાજુનું લક્ષ.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

આમ, fના બાજુના ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષનાં મૂલ્યો સમાન નથી. આમ, f એ $x = 1$ આગળ સતત નથી. આમ, f એક માત્ર $x = 1$ આગળ અસતત છે. વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.4માં આપેલ છે.

ઉદાહરણ 11 : નીચે આપેલ વિધેય f માટે જ્યાં તે અસતત હોય એવાં તમામ બિંદુઓ શોધો.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x-2, & x > 1 \end{cases}$$

ઉકેલ : ઉપરના ઉદાહરણની જેમ $x = 1$ સિવાયની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે f સતત છે.

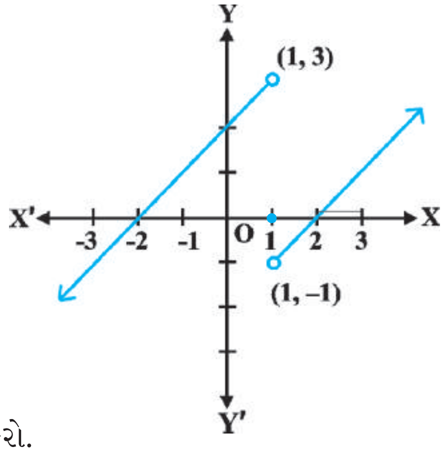
$x = 1$ આગળ f નું ડાબી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

અને $x = 1$ આગળ fનું જમણી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

આમ, $x = 1$ આગળ fના ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષનાં મૂલ્યો અસમાન છે. આથી, f માત્ર એક જ બિંદુ $x = 1$ આગળ અસતત છે. વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.5માં આપેલ છે.



આકૃતિ 5.5

ઉદાહરણ 12 : નીચે આપેલ વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે સાતત્યની ચર્ચા કરો.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ -x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

ઉકેલ : જુઓ કે વિધેય f, 0 સિવાયની તમામ વાસ્તવિક કિંમતો માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

વ્યાખ્યામાં આપેલ વિધેયનો પ્રદેશ

$D_1 \cup D_2$ જ્યાં $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ અને

$D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$

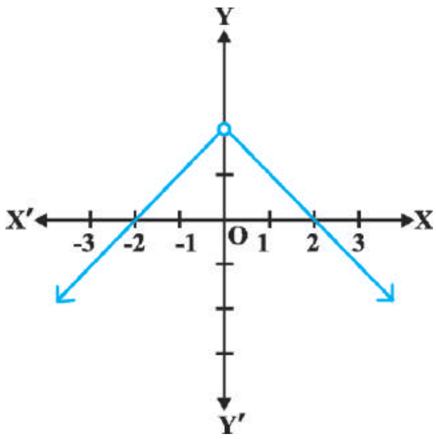
વિકલ્પ 1 : જો $c \in D_1$ તો,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x + 2) = c + 2 = f(c)$$

અને આથી વિધેય f એ D_1 માં સતત છે.

વિકલ્પ 2 : જો $c \in D_2$ તો,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x + 2) = -c + 2 = f(c)$$



આકૃતિ 5.6

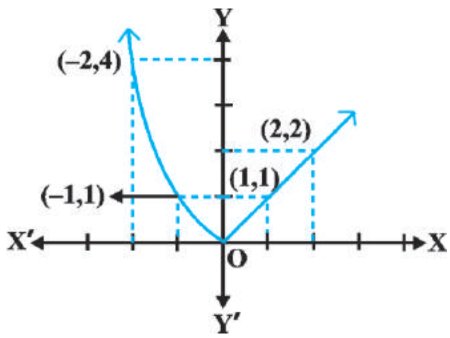
અને આથી f એ D_2માં સતત છે.

આપણે વિધેય f તેના પ્રદેશના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત હોવાથી f સતત છે તેમ તારવીશું. વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.6માં દર્શાવેલ છે. આપણે નોંધીએ કે વિધેયનો આલેખ કાગળના સમતલમાં દોરવા આપણે પેન ઉઠાવવી પડે છે, પરંતુ આવું માત્ર જ્યાં વિધેય વ્યાખ્યાયિત નથી તેવા બિંદુએ જ કરવું પડે છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચે આપેલ વિધેય f ના સાતત્યની ચર્ચા કરો :

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે વિધેય f પ્રત્યેક વાસ્તવિક કિંમત માટે વ્યાખ્યાયિત છે. વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.7માં આપેલ છે. આલેખ નિહાળતાં એવું તર્કસંગત લાગે છે કે, fનો પ્રદેશ વાસ્તવિક રેખાના ત્રણ અરિક્ત ઉપગણમાં વિભાજિત કરી શકાય.



આકૃતિ 5.7

ધારો કે, $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$,

$D_2 = \{0\}$ અને

$D_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$

વિકલ્પ 1 : D_1ના કોઈ પણ બિંદુએ $f(x) = x^2$ છે અને એ સરળતાથી જોઈ શકાય કે ત્યાં f સતત છે. (જુઓ ઉદાહરણ 2.)

વિકલ્પ 2 : D_3ના કોઈ પણ બિંદુએ $f(x) = x$ છે અને એ સરળતાથી જોઈ શકાય કે ત્યાં f સતત છે. (જુઓ ઉદાહરણ 6.)

વિકલ્પ 3 : આપણે $x = 0$ આગળના સાતત્યનું વિશ્લેષણ કરીએ. 0 આગળ વિધેયનું મૂલ્ય $f(0) = 0$ છે.

0 આગળ fનું ડાબી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^2 = 0$$

0 આગળ fનું જમણી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

આમ, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ અને આથી, f એ 0 આગળ સતત છે. આથી, f તેના પ્રદેશ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત છે. આથી, f સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે પ્રત્યેક બહુપદી વિધેય સતત છે.

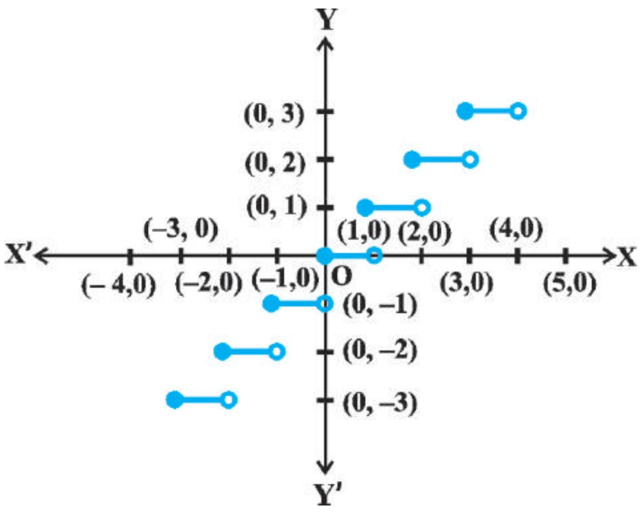
ઉકેલ : યાદ કરો કે જો n કોઈ અનૃણ પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય, $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$ માટે $a_i \in \mathbf{R}$ અને $a_n \neq 0$ તો $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ ને બહુપદી વિધેય કહેવાય. સ્પષ્ટ છે કે આ વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. કોઈ નિશ્ચિત વાસ્તવિક સંખ્યા c માટે,

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

આથી, વ્યાખ્યા પ્રમાણે p એ c આગળ સતત છે. હવે, c કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોવાથી p પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સતત છે. આથી, p સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 15 : $f(x) = [x]$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેયના તમામ અસાતત્યતાનાં બિંદુઓ શોધો. $[x]$ એ x થી નાનો કે તેના જેટલો મહત્તમ પૂર્ણાંક દર્શાવે છે. (બીજા શબ્દોમાં x થી અધિક નહિ તેવો અધિકતમ પૂર્ણાંક)

ઉકેલ : પ્રથમ જુઓ કે f પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 5.8 માં દર્શાવેલ છે. આલેખ પરથી એવું લાગે છે કે વિધેય પ્રત્યેક પૂર્ણાંક બિંદુ આગળ અસતત છે. હવે આપણે નિશ્ચિત કરીશું કે આ વિધાન સત્ય છે.



આકૃતિ 5.8

વિકલ્પ 1 : ધારો કે c પૂર્ણાંક ના હોય તેવી વાસ્તવિક સંખ્યા છે. આલેખ પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે c ની નજીકની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે તેનું મૂલ્ય $[c]$ છે.

અર્થાત્ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} [x] = [c]$.

વળી, $f(c) = [c]$ અને આથી પૂર્ણાંક ના હોય તેવી તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વિધેય સતત છે.

વિકલ્પ 2 : ધારો કે c એક પૂર્ણાંક છે. તો આપણે એવી પૂરતી નાની વાસ્તવિક સંખ્યા $r > 0$ શોધી શકીએ કે જેથી $[c - r] = c - 1$, જ્યારે $[c + r] = c$ થાય.

લક્ષની ભાષામાં આનો અર્થ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = c - 1$, $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = c$.

કોઈ પણ પૂર્ણાંક c માટે આ લક્ષ સમાન ના હોય. આથી, વિધેય પ્રત્યેક પૂર્ણાંક આગળ અસતત છે. ખરેખર તો $[x] = n - 1$, $n - 1 \le x < n$.

5.2.1 સતત વિધેયોનું બીજગણિત

આગળના ધોરણમાં લક્ષની સંકલ્પના સમજવા ઉપરાંત આપણે લક્ષના બીજગણિતનો પણ થોડો અભ્યાસ કર્યો. આ જ રીતે હવે આપણે સતત વિધેયના બીજગણિતનો થોડો અભ્યાસ કરીશું. કોઈ બિંદુએ વિધેયનું સાતત્ય, એ પૂર્ણરૂપે તે બિંદુએ વિધેયના લક્ષ પર આધારિત હોવાથી, એ તર્કસંગત છે કે આપણે લક્ષ જેવાં જ પરિણામોની અપેક્ષા રાખીએ.

પ્રમેય 1 : *ધારો કે f અને g પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા c આગળ સતત હોય તેવાં બે વાસ્તવિક વિધેયો છે, તો*

(1) $f + g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(2) $f - g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(3) $f \cdot g$ એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ એ $x = c$ આગળ સતત છે. *(જ્યારે $g(c) \ne 0$).*

સાબિતી : આપણે $f + g$ વિધેયનું સાતત્ય $x = c$ આગળ ચકાસવું છે. સ્પષ્ટ છે કે તે $x = c$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે. હવે,

$$\lim_{x \to c} (f + g)(x) = \lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] \quad (f + g \text{ ની વ્યાખ્યા પરથી})$$

$$= \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \quad (\text{લક્ષના પ્રમેય પરથી})$$

$$= f(c) + g(c) \quad (\text{કારણ કે } f \text{ અને } g \text{ સતત છે.})$$

$$= (f + g)(c) \quad (f + g \text{ ની વ્યાખ્યા પરથી})$$

આથી, $f + g$, $x = c$ આગળ સતત છે. સાબિતીના બાકીના ભાગ આ જ પ્રમાણેના હોવાથી વાચકોના સ્વપ્રયત્ન માટે છોડી દેવાયેલ છે.

નોંધ : (1) ઉપરના વિકલ્પ (3) ના વિશિષ્ટ કિસ્સા તરીકે જો f અચળ વિધેય હોય અર્થાત્ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા λ માટે $f(x) = \lambda$ હોય તો $(\lambda \cdot g)(x) = \lambda \cdot g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $(\lambda \cdot g)$ પણ સતત છે. વિશેષ રૂપે જો $\lambda = -1$ લઈએ, તો કહેવાય કે જો f સતત વિધેય હોય તો $-f$ પણ સતત વિધેય છે.

(2) વિકલ્પ (4)ના વિશિષ્ટ કિસ્સા તરીકે જો g એ સતત અને શૂન્યેતર મૂલ્યોવાળું વિધેય હોય અને $f(x) = \lambda$ હોય, તો $\frac{\lambda}{g}(x) = \frac{\lambda}{g(x)}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $\frac{\lambda}{g}$ પણ સતત છે. વિશેષ રૂપે જો g શૂન્યેતર સતત વિધેય હોય, તો $\frac{1}{g}$ પણ સતત થાય.

ઉપરના પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરીને અનેક સતત વિધેયો મેળવી શકાય. તેનાથી એ નક્કી કરવામાં પણ સહાયતા મળશે કે કોઈ વિધેય સતત છે કે નહિ. નીચેનાં ઉદાહરણો આ વાત સ્પષ્ટ કરે છે :

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે પ્રત્યેક સંમેય વિધેય સતત છે.

ઉકેલ : યાદ કરો કે પ્રત્યેક સંમેય વિધેય f ને બહુપદી $p(x)$ અને શૂન્યેતર બહુપદી $q(x)$ માટે $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ એમ લખાય છે.

$q(x)$ શૂન્ય હોય તે સિવાયની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ એ f નો પ્રદેશ છે. બહુપદી વિધેયો સતત હોવાથી (ઉદાહરણ 14), f પણ પ્રમેય 1 ના વિકલ્પ (4) પ્રમાણે સતત છે.

ઉદાહરણ 17 : *sine* વિધેયનું સાતત્ય ચર્ચો.

ઉકેલ : આ જોવા માટે આપણે નીચેનાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \text{ તથા } \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

આપણે આ સાબિત નથી કર્યાં, પરંતુ *sin* તથા *cos* વિધેયના 0 થી નજીકના આલેખ પરથી અનુભવી શકીશું.

હવે, જુઓ કે $f(x) = \sin x$ પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. ધારો કે c કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. $x = c + h$ લો. આપણે જાણીએ છીએ કે $x \to c$ તો $h \to 0$. આથી,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} \sin x \\
&= \lim_{h \to 0} \sin (c + h) \\
&= \lim_{h \to 0} [\sin c \cdot \cos h + \cos c \cdot \sin h] \\
&= \lim_{h \to 0} [\sin c \cdot \cos h] + \lim_{h \to 0} [\cos c \cdot \sin h] \\
&= \sin c \cdot 1 + \cos c \cdot 0 \\
&= \sin c = f(c)
\end{aligned}$$

આમ, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ અને આથી f સતત વિધેય છે.

નોંધ : આ જ પ્રમાણે *cosine* વિધેયના સાતત્યની સાબિતી પણ આપી શકાય.

ઉદાહરણ 18 : સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \tan x$ સતત છે.

ઉકેલ : વિધેય $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ એ જેમના માટે $\cos x \neq 0$ હોય તેવી પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. અર્થાત્ $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ માટે *tan* વિધેય વ્યાખ્યાયિત છે. આપણે હમણાં જ સાબિત કર્યું કે વિધેયો *sin* અને *cos* સતત છે. આથી *tan* જ્યાં વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યાં બે સતત વિધેયોનું ભાગફળ હોવાથી સતત છે.

સંયોજિત વિધેયો માટે સતત વિધેયની વર્તણૂક રસપ્રદ છે. યાદ કરો કે જો f અને g એ વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

એ જ્યારે g નો વિસ્તાર, fના પ્રદેશનો ઉપગણ હોય ત્યારે વ્યાખ્યાયિત થાય. આગળનું પ્રમેય (જેની સાબિતી આપી નથી) સંયોજિત વિધેયના સાતત્યને પરિભાષિત કરે છે.

પ્રમેય 2 : ***f અને g વાસ્તવિક વિધેયો છે અને fog એ c આગળ વ્યાખ્યાયિત છે. જો g એ c આગળ સતત હોય અને જો f એ $g(c)$ આગળ સતત હોય, તો fog પણ c આગળ સતત થાય.***

નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આ પ્રમેયનો ઉપયોગ જોઈએ :

ઉદાહરણ 19 : સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = sin\,(x^2)$ સતત વિધેય છે.

ઉકેલ : જુઓ કે વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. વિધેય f ને વિધેયો $g(x) = sin\,x$ અને $h(x) = x^2$ ના સંયોજિત વિધેય goh તરીકે વિચારી શકાય. હવે, g અને h સતત વિધેયો હોવાથી પ્રમેય 2 પ્રમાણે તારવી શકાય કે f પણ સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 20 : સાબિત કરો કે $f(x) = |1 - x + |x||$ એ સતત વિધેય છે.

ઉકેલ : પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે વિધેય g અને h નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરો :

$g(x) = 1 - x + |x|$ અને $h(x) = |x|$

તો $(hog)(x) = h(g(x))$

$= h(1 - x + |x|)$

$= |1 - x + |x|| = f(x)$

ઉદાહરણ 7 માં આપણે જોયું કે h સતત વિધેય છે. આથી બહુપદી વિધેય અને માનાંક વિધેયના સરવાળા સ્વરૂપનું વિધેય g પણ સતત છે. પરંતુ f બે સતત વિધેયોનું સંયોજિત વિધેય હોવાથી f પણ સતત છે.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = 5x - 3$, $x = 0$, $x = -3$ અને $x = 5$ આગળ સતત છે.

2. વિધેય $f(x) = 2x^2 - 1$ નું $x = 3$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.

3. નીચે આપેલ વિધેયોનાં સાતત્ય ચકાસો :

(a) $f(x) = x - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$, $x \neq 5$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x+5}$, $x \neq -5$ (d) $f(x) = |x - 5|$

4. સાબિત કરો કે ધનપૂર્ણાંક n માટે વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f(x) = x^n$ સતત છે.

5. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત છે ? $x = 1$ આગળ તે સતત છે ? $x = 2$ આગળ તે સતત છે ?

જો f નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત હોય, તો જે બિંદુઓએ f અસતત હોય તેવાં બિંદુ શોધો :

6. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 2 \\ 2x - 3, & x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} |x| + 3, & x \leq -3 \\ -2x, & -3 < x < 3 \\ 6x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ x^2+1, & x < 1 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x^3-3, & x \leq 2 \\ x^2+1, & x > 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} x^{10}-1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} x+5, & x \leq 1 \\ x-5, & x > 1 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય સતત છે ?

નીચે આપેલ વ્યાખ્યાયિત વિધેયો f માટે સાતત્ય ચર્ચો :

14. $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4, & 1 < x < 3 \\ 5, & 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x, & x > 1 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leq 3 \\ bx+3, & x > 3 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એ $x = 3$ આગળ સતત હોય, તો a અને b વચ્ચેનો સંબંધ શોધો.

18. λના કયા મૂલ્ય માટે $f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2-2x), & x \leq 0 \\ 4x+1, & x > 0 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $x = 0$ આગળ સતત છે ? $x = 1$ આગળ સાતત્ય માટે શું કહી શકાય ?

19. સાબિત કરો કે વિધેય $g(x) = x - [x]$ પ્રત્યેક પૂર્ણાંક માટે અસતત છે. અહીં $[x]$ એ x જેટલો કે તેથી નાનો હોય તેવો મહત્તમ પૂર્ણાંક દર્શાવે છે.

20. $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $x = \pi$ આગળ સતત છે ?

21. નીચેનાં વિધેયોનું સાતત્ય ચર્ચો :

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ (b) $f(x) = \sin x - \cos x$

(c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

22. *cosine, cosecant, secant* અને *cotangent* વિધેયોનાં સાતત્ય ચર્ચો.

23. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયો જ્યાં f અસતત હોય એવાં તમામ બિંદુઓ શોધો.

24. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય સતત વિધેય છે ?

25. $f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & x \neq 0 \\ -1 \quad , & x = 0 \end{cases}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનું સાતત્ય ચકાસો.

પ્રશ્નો 26થી 29 માં દર્શાવેલ બિંદુએ વિધેય f સતત હોય તો k નું મૂલ્ય શોધો :

26. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k \cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 3 \quad , & x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ આગળ.

27. $f(x) = \begin{cases} kx^2 , & x \leq 2 \\ 3 \quad , & x > 2 \end{cases}$, $x = 2$ આગળ.

28. $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$, $x = \pi$ આગળ.

29. $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq 5 \\ 3x - 5, & x > 5 \end{cases}$, $x = 5$ આગળ.

30. a અને b નાં એવાં મૂલ્યો શોધો કે જેથી

$$f(x) = \begin{cases} 5 \quad , & x \leq 2 \\ ax + b , & 2 < x < 10 \\ 21 \quad , & x \geq 10 \end{cases}$$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય સતત હોય.

31. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \cos(x^2)$ સતત વિધેય છે.

32. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = |\cos x|$ સતત વિધેય છે.

33. $\sin |x|$ વિધેયના સાતત્યનું પરીક્ષણ કરો.

34. $f(x) = |x| - |x + 1|$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય જ્યાં અસતત હોય એવાં તમામ બિંદુઓ શોધો.

5.3 વિકલનીયતા

આગળના ધોરણમાં શીખી ગયેલ નીચેનું તથ્ય યાદ કરો. આપણે વાસ્તવિક વિધેયના વિકલિતને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે :

ધારો કે f વાસ્તવિક વિધેય છે અને c તેના પ્રદેશનું કોઈ બિંદુ છે. જો દર્શાવેલ લક્ષનું અસ્તિત્વ હોય, તો f નું c આગળ વિકલિત $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરાય. f નું c આગળનું વિકલિત $f'(c)$ અથવા $\dfrac{d}{dx}(f(x))\big|_{x=a}$ દ્વારા દર્શાવાય.

જો આ લક્ષનું અસ્તિત્વ હોય તો, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયને fનું વિકલિત કહેવાય. સંકેતમાં fના વિકલિતને $f'(x)$ અથવા $\frac{d}{dx}[f(x)]$ અથવા જો $y = f(x)$ તો $\frac{dy}{dx}$ અથવા y' દ્વારા દર્શાવાય છે. વિધેયનું વિકલિત શોધવાની પ્રક્રિયાને ***વિકલન (differentiation)*** કહેવાય. આપણે $f(x)$ નો x ને સાપેક્ષ ***વિકલિત (derivative)*** દર્શાવવા માટે સંકેત $f'(x)$ નો ઉપયોગ કરીશું.

નીચેના નિયમો વિકલનના બીજગણિતના ભાગરૂપે પ્રમાણિત કર્યા છે :

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(2) $(uv)' = u'v + uv'$ (લિબનિટ્ઝનો કે ગુણાકારના વિકલિતનો નિયમ)

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$ (ભાગાકારના વિકલિતનો નિયમ)

નીચેનું કોષ્ટક કેટલાક પ્રચલિત વિધેયોના વિકલિત દર્શાવે છે :

કોષ્ટક 5.3

$f(x)$	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\sec^2 x$

આપણે જ્યારે વિકલિત વ્યાખ્યાયિત કરીએ, ત્યારે એક ચેતવણી મૂકીએ છીએ કે 'જો લક્ષનું અસ્તિત્વ હોય'. હવે સ્વાભાવિકપણે એ પ્રશ્ન થાય કે આવું ના હોય તો શું થાય ? આ પ્રશ્ન યથોચિત છે અને તેનો જવાબ પણ. જો $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ નું અસ્તિત્વ ના હોય, તો આપણે કહીશું કે f એ c આગળ વિકલનીય નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, વિધેય fના પ્રદેશના કોઈ બિંદુ c આગળ વિકલનીય હોય તો $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ અને $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ સાન્ત અને સમાન હોય. જો વિધેય f એ $[a, b]$ પરનાં તમામ બિંદુએ વિકલનીય હોય, તો તે $[a, b]$ પર વિકલનીય છે તેમ કહેવાય. જેમ સાતત્યમાં વિચારેલ તેમ અંત્યબિંદુઓ a અને b આગળ આપણે જમણી બાજુ અને ડાબી બાજુના લક્ષ જ લઈશું. તે ખરેખર તો અનુક્રમે a અને b આગળના ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુના વિકલિત જ છે. આ જ રીતે, જો વિધેય (a, b) પરના પ્રત્યેક બિંદુએ વિકલનીય હોય, તો તે (a, b) માં વિકલનીય છે તેમ કહેવાય.

પ્રમેય 3 : જો વિધેય f એ બિંદુ c આગળ વિકલનીય હોય, તો તે બિંદુ c આગળ સતત પણ છે.

સાબિતી : વિધેય f એ c આગળ વિકલનીય હોવાથી,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

વળી, $x \neq c$ માટે $f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c)$

$$\therefore \lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c)\right]$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} f(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c} (x - c)$$

$$= f'(c) \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

આથી, f એ $x = c$ આગળ સતત છે.

ઉપપ્રમેય 1 : *પ્રત્યેક વિકલનીય વિધેય સતત છે.*

આપણે નોંધીએ કે *ઉપરના વિધાનનું પ્રતીપ (converse) સત્ય નથી.*

આપણે જોઈ ગયાં છીએ કે વિધેય $f(x) = |x|$ સતત છે. નીચેનું ડાબી બાજુનું લક્ષ વિચારો.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

અને જમણી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

0 આગળના ડાબી તથા જમણી બાજુના લક્ષ સમાન ન હોવાથી $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ નું અસ્તિત્વ નથી અને આથી, f એ 0 આગળ વિકલનીય નથી. f એ 0 ને સમાવતા પ્રદેશ પર વિકલનીય વિધેય નથી.

5.3.1 સંયોજિત વિધેયનું વિકલિત

સંયોજિત વિધેયના વિકલનનો અભ્યાસ કરવા આપણે એક ઉદાહરણથી શરૂઆત કરીએ. ધારો કે આપણે $f(x) = (2x + 1)^3$ નું વિકલન કરવું છે.

એક રસ્તો $(2x + 1)^3$ નું દ્વિપદી પ્રમેયના ઉપયોગથી વિસ્તરણ કરી નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે બહુપદીય વિધેય તરીકે તેનું વિકલન કરવાનો છે.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(2x + 1)^3$$

$$= \frac{d}{dx}(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)$$

$$= 24x^2 + 24x + 6$$

$$= 6(2x + 1)^2$$

હવે, જુઓ કે $g(x) = 2x + 1$ અને $h(x) = x^3$ માટે $f(x) = (hog)(x)$

$t = g(x) = 2x + 1$ લો. આથી, $f(x) = h(t) = t^3$

આમ, $\dfrac{df}{dx} = 6(2x + 1)^2 = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 3t^2 \cdot 2$

$$= \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

આ બીજી રીતનો ફાયદો એ છે કે $(2x + 1)^{100}$ જેવા વિધેયના વિકલિત શોધવાની ગણતરી સરળ બનાવે છે. આપણે આ અવલોકનને પ્રમેય સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ. આપણે તેને સાંકળનો નિયમ કહીશું.

પ્રમેય 4 : *(સાંકળનો નિયમ) : ધારો કે વાસ્તવિક ચલનું વાસ્તવિક વિધેય f એ બે વાસ્તવિક ચલના વાસ્તવિક વિધેયો u તથા v નું સંયોજિત વિધેય છે. અર્થાત્ $f = vou$. ધારો કે $t = u(x)$ અને $\frac{dt}{dx}$ તથા $\frac{dv}{dt}$ બંનેનાં અસ્તિત્વ હોય, તો $\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$.*

આપણે આ પ્રમેયની સાબિતી આપીશું નહિ. સાંકળના નિયમને નીચે પ્રમાણે વિસ્તૃત કરી શકાય. ધારો કે વાસ્તવિક ચલનું વિધેય f, ત્રણ વિધેયો u, v અને w નું સંયોજિત વિધેય છે અર્થાત્

$f = (wou)\,ov$. જો $t = v(x)$ અને $s = u(t)$, તો

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(wou)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$ (જ્યારે વિધાનમાં આપેલ પ્રત્યેક વિકલિતનું અસ્તિત્વ હોય.)

વાચક વધારે વિધેયોના સંયોજિત વિધેય માટે સાંકળના નિયમનો ઉપયોગ કરી શકે.

ઉદાહરણ 21 : $f(x) = \sin x^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનું વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : જુઓ કે આપેલ વિધેય બે વિધેયોનું સંયોજિત વિધેય છે. જો $t = u(x) = x^2$ અને $v(t) = \sin t$ તો

$$f(x) = (vou)(x) = v(u(x)) = v(x^2) = \sin x^2$$

$t = u(x) = x^2$ મૂકો. જુઓ કે $\frac{dv}{dt} = \cos t$ અને $\frac{dt}{dx} = 2x$ નાં અસ્તિત્વ છે.

આથી, સાંકળ નિયમ મુજબ,

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot 2x$$

સામાન્ય રીતે અંતિમ પરિણામને x ના પદમાં મૂકીશું.

આથી, $\frac{df}{dx} = \cos t \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$.

બીજી રીત : આપણે નીચે પ્રમાણે સીધી પ્રક્રિયા કરી શકીએ :

$$y = \sin x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x^2).$$
$$= \cos x^2 \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= 2x \cos x^2$$

ઉદાહરણ 22 : $\tan(2x + 3)$ નું વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = \tan(2x + 3)$, $u(x) = 2x + 3$ અને $v(t) = \tan t$

આથી, $(vou)(x) = v(u(x)) = v(2x + 3) = \tan(2x + 3) = f(x)$

આમ, f બે વિધેયોનું સંયોજિત વિધેય છે.

$t = u(x) = 2x + 3$ છે. આથી, $\frac{dv}{dt} = sec^2\, t$ અને $\frac{dt}{dx} = 2$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

આથી, સાંકળના નિયમ મુજબ,

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2\, sec^2\,(2x + 3)$$

ઉદાહરણ 23 : $sin\,(cos\,x^2)$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : વિધેય $f(x) = sin\,(cos\,x^2)$ એ x નાં વિધેયો u, v અને w નું સંયોજન છે. $f(x) = (wovou)\,(x)$ જ્યાં, $u(x) = x^2$, $v(t) = cos\,t$ અને $w(s) = sin\,s$. હવે, $t = u(x) = x^2$ અને $s = v(t) = cos\,t$ લો. જુઓ કે પ્રત્યેક વાસ્તવિક x માટે $\frac{dw}{ds} = cos\,s$, $\frac{ds}{dt} = -sin\,t$ અને $\frac{dt}{dx} = 2x$ નાં અસ્તિત્વ છે. આથી, સાંકળના વ્યાપક નિયમ મુજબ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (cos\,s) \cdot (-sin\,t) \cdot (2x)$$

$$= -2x \cdot sin\,x^2 \cdot cos\,(cos\,x^2)$$

બીજી રીત : આપણે નીચે પ્રમાણે વિચારી શકીએ :

$$y = sin\,(cos\,x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,(sin\,(cos\,x^2)) = cos\,(cos\,x^2)\,\frac{d}{dx}\,(cos\,x^2)$$

$$= cos\,(cos\,x^2)\,(-sin\,x^2)\,\frac{d}{dx}\,(x^2)$$

$$= -sin\,x^2\,cos\,(cos\,x^2)\,(2x)$$

$$= -2x\,sin\,x^2\,cos\,(cos\,x^2)$$

સ્વાધ્યાય 5.2

પ્રશ્ન 1થી 8 માં આપેલ વિધેયોના x ને સાપેક્ષ વિકલિત શોધો :

1. $sin\,(x^2 + 5)$

2. $cos\,(sin\,x)$

3. $sin\,(ax + b)$

4. $sec\,(tan\,(\sqrt{x}\,))$

5. $\dfrac{sin\,(ax+b)}{cos\,(cx+d)}$

6. $cos\,x^3\,sin^2\,(x^5)$

7. $2\sqrt{cot\,(x^2)}$

8. $cos\,(\sqrt{x}\,)$

9. સાબિત કરો કે $f(x) = |x - 1|$, $x \in \mathbf{R}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

10. સાબિત કરો કે મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય,

$$f(x) = [x],\ 0 < x < 3$$

$x = 1$ અને $x = 2$ આગળ વિકલનીય નથી.

5.3.2 ગૂઢ વિધેયનાં વિકલિતો

અત્યાર સુધી આપણે $y = f(x)$ સ્વરૂપનાં જુદાં-જુદાં વિધેયોનાં વિકલન કરતાં હતાં. પરંતુ એ જરૂરી નથી કે વિધેયો હંમેશાં આ પ્રકારનાં જ હોય. ઉદાહરણ તરીકે આપેલાં x અને y વચ્ચેના સંબંધમાંથી એકનો વિચાર કરો.

$$x - y - \pi = 0$$
$$x + \sin xy - y = 0$$

પ્રથમ કિસ્સામાં, આપણે y માટે ઉકેલી અને આપેલ સંબંધ $y = x - \pi$ એમ લખી શકીએ. બીજા કિસ્સામાં y માટે ઉકેલ મેળવવાનું શક્ય જણાતું નથી.

જો x અને y નો સંબંધ એવી રીતે વ્યક્ત થયેલ હોય કે તેને y માટે ઉકેલી $y = f(x)$ એમ લખી શકીએ, તો આપણે કહીશું કે y ને x ના સ્પષ્ટ (explicit) વિધેય સ્વરૂપે દર્શાવેલ છે. જો આ શક્ય ના બને તો આપણે કહીશું કે y અને x નો સંબંધ અસ્પષ્ટ કે ગૂઢ (implicit) છે. આ ઉપવિભાગમાં આપણે આવાં ગૂઢ વિધેયોના વિકલિત મેળવવા વિશે શીખીશું.

ઉદાહરણ 24 : $x - y - \pi = 0$ માટે $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : એક રસ્તો y માટે ઉકેલી,

$y = x - \pi$ એમ લખવાનો છે.

અહીં $\frac{dy}{dx} = 1$.

બીજી રીત : આપેલ સમીકરણનું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dx}(x - y) = \frac{d\pi}{dx}$$

યાદ કરો કે, $\frac{d\pi}{dx}$ નો અર્થ અચળ વિધેય π નું x ને સાપેક્ષ વિકલન એવો થાય.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) = 0$$

આમ, $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$.

ઉદાહરણ 25 : $y + \sin y = \cos x$ માટે $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણનું x ને સાપેક્ષ વિકલિત કરીશું. અર્થાત્

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(\cos x)$$

સાંકળ નિયમ પ્રમાણે

$$\frac{dy}{dx} + \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{1 + \cos y}$$

અહીં, $y \neq (2n + 1)\pi$

5.3.3 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનું વિકલિત

આપણે નોંધીએ કે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો સતત વિધેય છે, પરંતુ આપણે તે સાબિત કરીશું નહિ. હવે આપણે આવા વિધેયના વિકલન માટે સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરીશું.

ઉદાહરણ 26 : $f(x) = sin^{-1} x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f નું વિકલિત અસ્તિત્વ ધરાવે છે તેમ માનીને તે શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = sin^{-1} x$. આથી, $x = sin\ y$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$1 = cos\ y \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\ y} = \frac{1}{cos\,(sin^{-1} x)}$$

જુઓ કે જો $cos\ y \neq 0$ અર્થાત્ $sin^{-1} x \neq \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

અર્થાત્ $x \neq -1, 1$ અર્થાત્ $x \in (-1, 1)$ હોય તો જ આ શક્ય છે.

આ પરિણામને નીચે પ્રમાણે વધુ સારા અને સરળ રૂપમાં મૂકીએ. યાદ કરો કે $x \in (-1, 1)$ માટે $sin\,(sin^{-1} x) = x$ અને આથી,

$$cos^2y = 1 - sin^2y = 1 - (sin\,(sin^{-1}x))^2 = 1 - x^2$$

વળી, પ્રત્યેક $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ માટે $cos\ y$ ધન છે.

અને આથી, $cos\ y = \sqrt{1-x^2}$

આમ, $x \in (-1, 1)$ માટે,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\ y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ઉદાહરણ 27 : $f(x) = tan^{-1} x$ ના વિકલિતનું અસ્તિત્વ સ્વીકારો અને તે શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = tan^{-1} x$. આથી, $x = tan\ y$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$1 = sec^2y \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2 y} = \frac{1}{1+tan^2 y} = \frac{1}{1+(tan\,(tan^{-1} x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

આપણે બાકીના ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના વિકલિત શોધવાનું સ્વાધ્યાય તરીકે છોડીશું. નીચેના કોષ્ટકમાં બાકીના ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના વિકલિત દર્શાવેલ છે :

કોષ્ટક 5.4

$f(x)$	$cos^{-1} x$	$cot^{-1} x$	$sec^{-1} x$	$cosec^{-1} x$
$f'(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
f'નો પ્રદેશ	$(-1, 1)$	**R**	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

સ્વાધ્યાય 5.3

$\dfrac{dy}{dx}$ શોધો : (પ્રશ્ન 1 થી 8 માં સ્વીકારી લો કે y એ x ના વિધેય તરીકે યોગ્ય પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત છે.)

1. $2x + 3y = \sin x$

2. $2x + 3y = \sin y$

3. $ax + by^2 = \cos y$

4. $xy + y^2 = \tan x + y$

5. $x^2 + xy + y^2 = 100$

6. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

7. $\sin^2 y + \cos xy = k$

8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

9. $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

10. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), \quad -\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

11. $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), \quad 0 < x < 1$

12. $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), \quad 0 < x < 1$

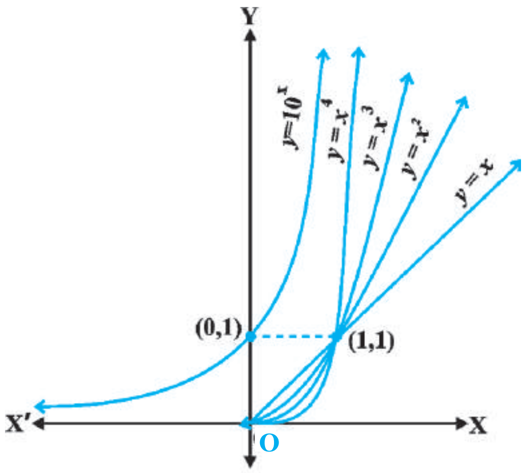
13. $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right), \quad -1 < x < 1$

14. $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

15. $y = \sec^{-1}\left(\dfrac{1}{2x^2-1}\right), \quad 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5.4 ઘાતાંકીય અને લઘુગણકીય વિધેયો

અત્યાર સુધી આપણે બહુપદી વિધેય, સંમેય વિધેય અને ત્રિકોણમિતીય વિધેય જેવા વિવિધ વિધેયોના વિકલિત વિશે શીખ્યાં. આ વિભાગમાં આપણે નવા પ્રકારનાં વિધેયો, ઘાતાંકીય વિધેયો અને લઘુગણકીય વિધેયો વિશે શીખીશું. વિશેષ રૂપે અહીં એ જણાવવું જરૂરી છે કે, આ વિભાગના ઘણાં વિધાન પ્રેરક છે અને તેમની સાબિતી આ પુસ્તકની મર્યાદા બહારની છે.



આકૃતિ 5.9

આકૃતિ 5.9 માં $y = f_1(x) = x$, $y = f_2(x) = x^2$, $y = f_3(x) = x^3$ અને $y = f_4(x) = x^4$ ના આલેખ આપેલ છે. જુઓ કે જેમ x ની ઘાત વધે છે તેમ વક્રનું સીધું ચઢાણ વધે છે. ચઢાણવાળા વક્ર માટે વૃદ્ધિ-દર ઝડપી હોય છે. આનો

અર્થ એમ થાય કે $x\,(x > 1)$ના મૂલ્યમાં નિશ્ચિત વધારાને સંગત $y = f_n(x)$નું મૂલ્ય $n = 1, 2, 3, 4$ ને અનુરૂપ વધતું જાય છે. એ કલ્પના કરી શકાય કે $f_n(x) = x^n$ ના સંદર્ભમાં પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક માટે આ વિધાન સત્ય છે. આવશ્યક રીતે, આનો અર્થ એ થાય કે $y = f_n(x)$ નો આલેખ n ની વધતી કિંમતો માટે y-અક્ષ તરફ વધારે ઢળતો જાય છે. ઉદાહરણ તરીકે $f_{10}(x) = x^{10}$ અને $f_{15}(x) = x^{15}$ લો. x નું મૂલ્ય 1 થી 2 સુધી વધે તેમ f_{10} નું મૂલ્ય 1થી 2^{10} જ્યારે f_{15}નું મૂલ્ય 1થી 2^{15} જેટલું વધે છે. આમ, x ના સમાન વધારા માટે f_{15}ની વૃદ્ધિ f_{10} કરતાં વધારે છે.

ઉપરની ચર્ચાનો નિષ્કર્ષ એ છે કે, બહુપદી વિધેયોની વૃદ્ધિ ચલની ઘાત પર આધારિત છે. અર્થાત્ ઘાત વધતાં વૃદ્ધિ પણ વધે છે. આ પછીનો સ્વાભાવિક પ્રશ્ન એ છે કે શું બહુપદી વિધેયથી પણ ઝડપથી વધતું કોઈ વિધેય છે ? આનો જવાબ હકારમાં છે અને આવા વિધેયનું ઉદાહરણ $y = f(x) = 10^x$ છે.

આપણે વિધાન કરી શકીએ કે આ વિધેય કોઈ પણ વિધેય $f_n(x) = x^n$, n ધન પૂર્ણાંક, કરતાં વધારે ઝડપથી વૃદ્ધિ પામે છે. ઉદાહરણ તરીકે, આપણે સાબિત કરી શકીએ કે 10^x એ $f_{100}(x) = x^{100}$ કરતાં વધુ ઝડપથી વધે છે. x ની મોટી કિંમતો જેમ કે $x = 10^3$ માટે નોંધો કે $f_{100}(10^3) = (10^3)^{100} = 10^{300}$ જ્યારે $f(10^3) = 10^{1000}$. સ્પષ્ટ છે કે $f(x)$ નું મૂલ્ય $f_{100}(x)$ ના મૂલ્ય કરતાં ઘણું જ વધારે છે. એ સાબિત કરવું મુશ્કેલ નથી કે પ્રત્યેક $x > 10^3$ માટે $f(x) > f_{100}(x)$. પરંતુ તેની સાબિતી આપણે આપીશું નહિ. આ જ રીતે x ની મોટી કિંમતો પસંદ કરી એ ચકાસી શકાય કે $f(x)$, $f_n(x)$ (n ધન પૂર્ણાંક) કરતાં વધુ ઝડપથી વૃદ્ધિ પામે છે.

વ્યાખ્યા 3 : ***ઘાતાંકીય વિધેય એટલે જેનો આધાર $b > 1$ હોય તેવું વિધેય $y = f(x) = b^x$.***

$y = 10^x$ નો આલેખ આકૃતિ 5.9 માં આપેલ છે.

વાચકને સલાહ છે કે b નાં નિશ્ચિત મૂલ્યો જેવાં કે 2, 3 અને 4 માટે આ આલેખ દોરે. ઘાતાંકીય વિધેયની કેટલીક વિશેષતાઓ નીચે પ્રમાણે છે :

(1) ઘાતાંકીય વિધેયનો પ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ **R** છે.

(2) ઘાતાંકીય વિધેયનો વિસ્તાર તમામ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

(3) બિંદુ (0, 1) હંમેશાં ઘાતાંકીય વિધેયના આલેખ પર હોય છે. (આ એ તથ્યનું પુનઃકથન છે કે પ્રત્યેક વાસ્તવિક $b > 1$ માટે $b^0 = 1$)

(4) ઘાતાંકીય વિધેય હંમેશાં વધતું વિધેય હોય છે. અર્થાત્ આપણે જેમ ડાબીથી જમણી તરફ જઈએ તેમ આલેખ ઉપર તરફ આગળ વધે છે.

(5) x ના ખૂબ જ નાના મૂલ્ય માટે ઘાતાંકીય વિધેયનો આલેખ 0 ની ખૂબ જ નજીક હોય છે. બીજા શબ્દોમાં, બીજા ચરણમાં આલેખ x-અક્ષને અનુલક્ષે છે (પરંતુ તેને ક્યારેય મળશે નહિ).

10 આધારવાળા ઘાતાંકીય વિધેયને સામાન્ય ઘાતાંકીય વિધેય (common exponential function) કહેવાય. પરિશિષ્ટ A.1.4, ધોરણ 11માં આપણે જોયું કે શ્રેઢી $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$નું મૂલ્ય 2 અને 3 વચ્ચે હોય છે અને તેને e વડે દર્શાવાય છે. આ જ e ને આધાર તરીકે લઈને આપણે એક ખૂબ જ અગત્યનું ઘાતાંકીય વિધેય $y = e^x$ મેળવીશું.

તેને પ્રાકૃતિક ઘાતાંકીય વિધેય (natural exponential function) કહેવાય.

એ જાણવું રસપ્રદ રહેશે કે ઘાતાંકીય વિધેયનું પ્રતિવિધેય શક્ય છે અને તેનું સુંદર અર્થઘટન થાય છે. આ અર્થઘટન હવે પછીની વ્યાખ્યા માટે પ્રેરિત કરે છે.

વ્યાખ્યા 4 : ધારો કે $b > 1$ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. જો $b^x = a$ તો b આધારવાળા a ના લઘુગણકનું મૂલ્ય x છે.

b આધારવાળા a ના લઘુગણકને $\log_b a$ એમ દર્શાવીશું. આથી, જો $b^x = a$ તો $\log_b a = x$.

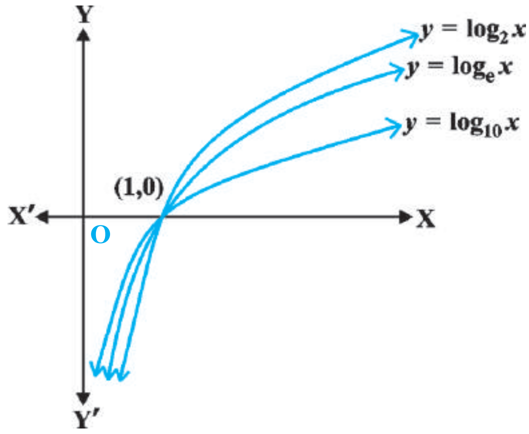
ચાલો આ સમજવા કેટલાંક સ્પષ્ટ ઉદાહરણો પર નજર નાખીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે $2^3 = 8$. લઘુગણકની પરિભાષામાં આપણે $\log_2 8 = 3$ એમ લખી શકીએ. આ જ રીતે $10^4 = 10000$ અને $\log_{10} 10000 = 4$ એ સમાન વિધાન છે. વળી, $625 = 5^4 = 25^2$ અને $\log_5 625 = 4$ અથવા $\log_{25} 625 = 2$ પણ સમાન વિધાન છે.

થોડા વધારે પરિપક્વ દૃષ્ટિકોણથી વિચારતાં, આધાર $b > 1$ લઈને આપણે લઘુગણકને તમામ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓથી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ પરના વિધેય તરીકે જોઈ શકીએ. આ વિધેયને લઘુગણકીય વિધેય (logarithamic function) કહેવાય અને તે

$$\log_b : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$$

જો $b^y = x$ તો $x \to \log_b x = y$ એમ વ્યાખ્યાયિત કરાય.

આગળ જોયું તેમ જો આધાર $b = 10$ હોય તો તેને સામાન્ય લઘુગણક (common logarithm) અને $b = e$ તો તેને પ્રાકૃતિક લઘુગણક (natural logarithm) કહીશું. ઘણી વખત પ્રાકૃતિક લઘુગણકને ln સંકેતથી દર્શાવાય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે e આધારવાળા લઘુગણકને $\log x$ વડે દર્શાવીશું. અર્થાત્ $ln\, x$ ને $\log x$ એમ લખીશું. આકૃતિ 5.10 માં 2, e અને 10 આધારવાળા લઘુગણકીય વિધેયોના આલેખ દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 5.10

આધાર $b > 1$ વાળા લઘુગણકીય વિધેય દર્શાવતાં કેટલાંક વિધેયોનાં અવલોકનો નીચે દર્શાવેલ છે :

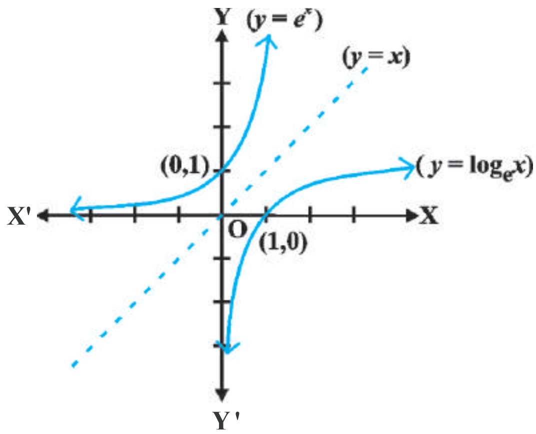
(1) આપણે ઋણ તથા શૂન્ય સંખ્યાઓ માટે લઘુગણકની અર્થપૂર્ણ વ્યાખ્યા ના આપી શકીએ. આથી, લઘુગણકીય વિધેયનો પ્રદેશ $\mathbf{R}^+$ છે.

(2) લઘુગણકીય વિધેયનો વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

(3) બિંદુ (1, 0) હંમેશાં લઘુગણકીય વિધેયના આલેખ પર હોય.

(4) લઘુગણકીય વિધેય સતત વધતું વિધેય છે. અર્થાત્ આપણે જેમ ડાબીથી જમણી તરફ જઈએ એમ આલેખ ઉપર તરફ વધે છે.

(5) x ની શૂન્યની નજીકની પરંતુ ધન કિંમત માટે $\log x$ નું મૂલ્ય આપેલ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા કરતાં નાનું બનાવી શકાય. બીજા શબ્દોમાં ચોથા ચરણમાં આલેખ ઋણ y-અક્ષને અનુલક્ષે છે. (પરંતુ તેને ક્યારેય મળશે નહિ.)



આકૃતિ 5.11

(6) આકૃતિ 5.11માં $y = e^x$ અને $y = \log x$ ના આલેખ આપેલ છે. એ જાણવું રસપ્રદ છે કે બંને વક્રો રેખા $y = x$ ના અરીસામાં મળતાં એકબીજાનાં પ્રતિબિંબો છે.

લઘુગણકીય વિધેયના કેટલાક ગુણધર્મો નીચે સાબિત કરેલ છે :

(1) આધાર પરિવર્તનના પ્રમાણિત નિયમ દ્વારા $\log_a p$ ને $\log_b p$ ના પદમાં ફેરવી શકાય. ધારો કે $\log_a p = \alpha$, $\log_b p = \beta$ અને $\log_b a = \gamma$.

આથી, $a^\alpha = p$, $b^\beta = p$ અને $b^\gamma = a$.

ત્રીજા સમીકરણનું મૂલ્ય પ્રથમ સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$(b^\gamma)^\alpha = b^{\gamma\alpha} = p$$

તેનો ઉપયોગ બીજા સમીકરણમાં કરતાં,

આપણને $b^\beta = p = b^{\gamma\alpha}$ મળે. $(b > 1)$

આથી, $\beta = \alpha\gamma$ અથવા $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}}$$

(2) લઘુગણકીય વિધેયનો બીજો રસપ્રદ ગુણધર્મ તેની ગુણાકાર પર થતી અસર છે.

ધારો કે $\log_b pq = \alpha$. આથી, $b^\alpha = pq$.

જો $\log_b p = \beta$ અને $\log_b q = \gamma$ તો $b^\beta = p$ અને $b^\gamma = q$.

આથી $b^\alpha = pq = b^\beta \cdot b^\gamma = b^{\beta + \gamma}$ મળે. $(b > 1)$

$\therefore \quad \alpha = \beta + \gamma$

અર્થાત્ $\boldsymbol{\log_b pq = \log_b p + \log_b q}$

આનું એક વિશેષ રસપ્રદ અને મહત્ત્વપૂર્ણ પરિણામ, જ્યારે $p = q$ લઈએ ત્યારે મળે છે. આ વિકલ્પમાં ઉપરના પરિણામને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\log_b p^2 = \log_b p + \log_b p = 2\log_b p$$

આનું સરળ વ્યાપક પરિણામ, (સ્વઅભ્યાસ માટે છોડીશું !)

$\log_b p^n = n \log_b p$ *(n કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે.) એમ થાય છે.*

ખરેખર તો આ પરિણામ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા માટે સત્ય છે, પરંતુ આપણે તે સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન નહિ કરીએ. આ જ રીતે વાચક ચકાસી શકશે કે,

$$\boldsymbol{\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y}$$

ઉદાહરણ 28 : પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x = e^{\log x}$ સત્ય છે ?

ઉકેલ : પ્રથમ જુઓ કે લઘુગણકીય વિધેયનો પ્રદેશ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. આથી ઉપરનું સમીકરણ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ કે 0 માટે સત્ય નથી. હવે, ધારો કે $y = e^{\log x}$. જો $y > 0$ તો બંને તરફ લઘુગણક લેતાં, $\log y = \log (e^{\log x}) = \log x \cdot \log e = \log x$ મળે. આથી, $y = x$. આમ, માત્ર ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x માટે જ $x = e^{\log x}$ સત્ય છે.

વિકલનના કલન ગણિતમાં પ્રાકૃતિક ઘાતાંકીય વિધેયનો મહત્ત્વનો ગુણધર્મ એ છે કે, તે વિકલનની પ્રક્રિયા દ્વારા બદલાતું નથી. આ ગુણધર્મ નીચેના પ્રમેયમાં દર્શાવેલ છે :

પ્રમેય 5 : (1) ***e^x નો x ને સાપેક્ષ વિકલિત e^x છે અર્થાત્ $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$***

(2) ***$\log x$ નો x ને સાપેક્ષ વિકલિત $\dfrac{1}{x}$ છે અર્થાત્ $\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}$***

(1) **ઘાતાંકીય વિધેય $f(x) = e^x$ નો વિકલિત :** જો $f(x) = e^x$, તો

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot 1 = e^x \qquad \left(\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\right)$$

આમ, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(2) લઘુગણકીય વિધેય $f(x) = \log_e x$ નો વિકલિત.

જો $f(x) = \log_e x$, તો

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e(x+\Delta x) - \log_e x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \qquad \left(\lim_{h \to 0} \frac{\log_e(1+h)}{h} = 1\right)$$

આમ, $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$

ઉદાહરણ 29 : નીચે આપેલ વિધેયોના x ને સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો :

(i) e^{-x} (ii) $\sin(\log x), x > 0$ (iii) $\cos^{-1}(e^x)$ (iv) $e^{\cos x}$

ઉકેલ : (1) ધારો કે $y = e^{-x}$.

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$

(2) ધારો કે $y = \sin(\log x)$.

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $\frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \cdot \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\cos(\log x)}{x}$

(3) ધારો કે $y = \cos^{-1}(e^x)$.

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(4) ધારો કે $y = e^{\cos x}$.

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $\frac{dy}{dx} = e^{\cos x}(-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x}$

સ્વાધ્યાય 5.4

નીચેનાં વિધેયોના x ને સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો :

1. $\dfrac{e^x}{\sin x}$

2. $e^{\sin^{-1} x}$

3. e^{x^3}

4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$

5. $\log(\cos e^x)$

6. $e^x + e^{x^2} + \cdots + e^{x^5}$

7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, $x > 0$

8. $\log(\log x)$, $x > 1$

9. $\dfrac{\cos x}{\log x}$, $x > 0$, $x \neq 1$

10. $\cos(\log x + e^x)$, $x > 0$

5.5 લઘુગણકીય વિકલન

આ વિભાગમાં આપણે જેનું સ્વરૂપ $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ હોય તેવા ખાસ પ્રકારનાં વિધેયોના વિકલિત મેળવતાં શીખીશું.

બંને તરફ e આધારવાળો લઘુગણક લેતાં,

$$\log y = v(x) \log [u(x)]$$

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરી વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log[u(x)]$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log[u(x)]\right]$$

આ રીતનો ઉપયોગ કરતી વખતે અગત્યનો મુદ્દો એ છે કે, $u(x)$ હંમેશાં ધન હોય તે જરૂરી છે. અન્યથા તેનો લઘુગણક વ્યાખ્યાયિત થશે નહિ. વિકલનની આ પ્રક્રિયાને લઘુગણકીય વિકલન કહીશું અને તે નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા સ્પષ્ટ કરેલ છે :

ઉદાહરણ 30 : $\sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$

બંને બાજુ log લેતાં,

$$\log y = \frac{1}{2}[\log(x-3) + \log(x^2+4) - \log(3x^2+4x+5)]$$

હવે, બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

અથવા $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2}\left[\dfrac{1}{(x-3)} + \dfrac{2x}{x^2+4} - \dfrac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

ઉદાહરણ 31 : a ધન અચળ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો a^x નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = a^x$. આથી,

$$\log y = x \log a$$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log a$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y \log a$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a}$$

બીજી રીત : $\dfrac{d}{dx}(a^x) = \dfrac{d}{dx}(e^{x \log a}) = e^{x \log a}\dfrac{d}{dx}(x \log a)$

$$= e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$$

ઉદાહરણ 32 : $x^{\sin x}$, $x > 0$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, $y = x^{\sin x}$

બંને બાજુ log લેતાં,

$$\log y = \sin x \log x$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)\frac{1}{x} + \log x \cdot \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \log x\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \log x\right]$$

$$= x^{\sin x - 1} \cdot \sin x + x^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \log x$$

ઉદાહરણ 33 : જો $y^x + x^y + x^x = a^b$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે, $y^x + x^y + x^x = a^b$

$u = y^x$, $v = x^y$ અને $w = x^x$ લેતાં,

$u + v + w = a^b$

$$\therefore \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \qquad ...(1)$$

હવે, $u = y^x$ ની બંને બાજુ log લેતાં,

$\log u = x \log y$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = x \frac{d}{dx}(\log y) + \log y \frac{d}{dx}(x)$$

$$= x \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \log y \cdot 1$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = u\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right]$$

$$= y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] \qquad ...(2)$$

હવે, $v = x^y$ ની બંને બાજુ log લેતાં,

$$\log v = y \log x$$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = y \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{dy}{dx}$$

$$= y \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = v\left[\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^y\left[\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}\right] \qquad ...(3)$$

ફરી, $w = x^x$

બંને બાજુ log લેતાં, $\log w = x \log x$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx} = x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(x)$$

$$= x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 1$$

$$\therefore \quad \frac{dw}{dx} = w(1 + \log x)$$

$$= x^x (1 + \log x) \qquad ...(4)$$

(1), (2), (3), (4) પરથી,

$$y^x \left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] + x^y \left[\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}\right] + x^x (1 + \log x) = 0$$

$$\therefore \quad (x \cdot y^{x-1} + x^y \cdot \log x)\frac{dy}{dx} = -x^x (1 + \log x) - y \cdot x^{y-1} - y^x \log y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{[y^x \log y + y \cdot x^{y-1} + x^x(1 + \log x)]}{x \cdot y^{x-1} + x^y \cdot \log x}\right)$$

સ્વાધ્યાય 5.5

પ્રશ્નો 1 થી 11 માં આપેલ વિધેયોના x ને સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો :

1. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$

2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

3. $(\log x)^{\cos x}$

4. $x^x - 2^{\sin x}$

5. $(x + 3)^2 \cdot (x + 4)^3 \cdot (x + 5)^4$

6. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

7. $(\log x)^x + x^{\log x}$

8. $(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$

9. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

10. $x^{x \cos x} + \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

11. $(x \cos x)^x + (x \sin x)^{\frac{1}{x}}$

પ્રશ્નો 12 થી 15 માં આપેલ વિધેયો માટે $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો :

12. $x^y + y^x = 1$

13. $y^x = x^y$

14. $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

15. $xy = e^{(x - y)}$

16. $f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનું વિકલિત શોધો. તે પરથી $f'(1)$ શોધો.

17. $(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$ નું વિકલિત ત્રણ રીતે મેળવો :

(1) ગુણાકારના નિયમથી

(2) વિસ્તરણ કરી બહુપદીય વિધેયથી

(3) લઘુગણકીય વિકલનથી

શું ત્રણેય જવાબ સમાન છે ?

18. જો u, v, w એ x ના વિધેય હોય તો બે રીતે, પ્રથમ પુનરાવર્તિત વિકલનના ગુણાકારના નિયમ અને બીજી લઘુગણકીય વિકલન દ્વારા બતાવો કે,

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v \cdot w) = \frac{du}{dx} v \cdot w + u \cdot \frac{dv}{dx} \cdot w + u \cdot v \cdot \frac{dw}{dx}$$

5.6 પ્રચલ વિધેયનું વિકલિત

ઘણી વખત બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ ના તો સ્પષ્ટ હોય છે અને ના તો અસ્પષ્ટ, પરંતુ આપેલ બે ચલ વચ્ચે કોઈ ત્રીજો ચલ અલગ-અલગ સાંકળ સ્વરૂપે રહીને પ્રથમ બે ચલ વચ્ચે સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરે છે. આ પરિસ્થિતિમાં આપણે કહી શકીએ કે, તેમની વચ્ચેનો સંબંધ ત્રીજા ચલ દ્વારા વ્યક્ત થાય છે. ત્રીજા ચલને **પ્રચલ (*parameter*)** કહેવાય. વધારે સ્પષ્ટ રીતે બે ચલ x અને y માટે જો $x = f(t)$, $y = g(t)$ એમ આપેલ હોય તો તે t ચલવાળા પ્રચલ સમીકરણ કહેવાય.

આ સ્વરૂપના વિધેયનું વિકલિત મેળવવા, સાંકળના નિયમ પ્રમાણે,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

અથવા $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad \left(\text{જ્યાં } \frac{dx}{dt} \neq 0\right)$$

આમ, $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \left(\text{કારણ કે } \frac{dy}{dt} = g'(t) \text{ અને } \frac{dx}{dt} = f'(t)\right) \qquad (\text{જ્યાં } f'(t) \neq 0)$$

ઉદાહરણ 34 : જો $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે, $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$$

આથી, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

ઉદાહરણ 35 : જો $x = at^2$, $y = 2at$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે, $x = at^2$, $y = 2at$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 2at \text{ અને } \frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

ઉદાહરણ 36 : જો $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a(\sin\theta)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a \sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

નોંધ : અહીં, આપણે એ નોંધીએ કે $\frac{dy}{dx}$ ને મુખ્ય ચલ x અને y ને સીધા સાંકળ્યા સિવાય પ્રચલ સ્વરૂપમાં જ વ્યક્ત કરેલ છે.

ઉદાહરણ 37 : જો $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : જો $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ હોય, તો

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^{\frac{2}{3}}$$

આથી, $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ એ વક્ર $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ નાં પ્રચલ સમીકરણ છે.

હવે, $\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta$ અને $\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$

આથી, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\cdot\sin\theta} = -\tan\theta \qquad (\sin\theta \neq 0,\ \cos\theta \neq 0)$$

$$= -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

અન્ય રીત : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

સ્વાધ્યાય 5.6

જો પ્રશ્ન 1 થી 10 માં x અને y પ્રચલ સમીકરણ સ્વરૂપે આપેલ હોય, તો પ્રચલનો લોપ કર્યા વગર $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

1. $x = 2at^2$, $y = at^4$

2. $x = a\cos\theta$, $y = b\cos\theta$

3. $x = \sin t$, $y = \cos 2t$

4. $x = 4t$, $y = \frac{4}{t}$

5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta$, $y = \sin\theta - \sin 2\theta$

6. $x = a\,(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 + \cos\theta)$

7. $x = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

8. $x = a\left(\cos t + \log \tan\dfrac{t}{2}\right),\ \ y = a \sin t$

9. $x = a \sec\theta,\ y = b \tan\theta$

10. $x = a\,(\cos\theta + \theta \sin\theta),\ \ y = a\,(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

11. જો $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{x}$.

5.7 દ્વિતીય કક્ષાનો વિકલિત

જો $y = f(x)$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ...(1)

જો $f'(x)$ વિકલનીય વિધેય હોય, તો આપણે (1) નું x વિશે ફરી વિકલન કરી શકીએ. આથી, ડાબી બાજુ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ બને. તેને y નો x ને સાપેક્ષ દ્વિતીય વિકલિત કહેવાય અને $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ વડે દર્શાવાય. $f(x)$ નો દ્વિતીય વિકલિત $f''(x)$ દ્વારા પણ દર્શાવાય. જો $y = f(x)$ તો તેને D^2y અથવા y'' અથવા y_2 દ્વારા પણ દર્શાવાય. આપણે નોંધીએ કે વધુ ઉચ્ચ કક્ષાના વિકલિત પણ આ જ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

ઉદાહરણ 38 : જો $y = x^3 + \tan x$ તો $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે $y = x^3 + \tan x$. આથી,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2 + \sec^2 x)$$

$$= 6x + 2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x$$

$$= 6x + 2\sec^2 x \cdot \tan x$$

ઉદાહરણ 39 : જો $y = A \sin x + B \cos x$, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

ઉકેલ : અહીં, $\dfrac{dy}{dx} = A \cos x - B \sin x$

અને $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(A\cos x - B\sin x)$

$$= -A\sin x - B\cos x = -y$$

આથી, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

ઉદાહરણ 40 : જો $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

ઉકેલ : આપેલ છે કે $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$.

આથી, $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6(e^{2x} + e^{3x})$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} + 18e^{3x} = 6(2e^{2x} + 3e^{3x})$

આથી, $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6(2e^{2x} + 3e^{3x}) - 30(e^{2x} + e^{3x}) + 6(3e^{2x} + 2e^{3x}) = 0$

ઉદાહરણ 41 : જો $y = sin^{-1}x$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$.

ઉકેલ : $y = sin^{-1}x$ હોવાથી,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\therefore \quad (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

બીજી રીત : $y = sin^{-1}x$ આપેલ હોવાથી,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ અર્થાત્ $(1 - x^2)\, y_1^2 = 1$

આથી, $(1 - x^2) \cdot 2y_1y_2 + y_1^2(0 - 2x) = 0$

$\therefore \quad (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$

સ્વાધ્યાય 5.7

પ્રશ્ન 1થી 10 માં આપેલ વિધેયો માટે દ્વિતીય વિકલિત મેળવો :

1. $x^2 + 3x + 2$

2. x^{20}

3. $x \cdot cos\, x$

4. $\log x$

5. $x^3 \log x$

6. $e^x\, sin\, 5x$

7. $e^{6x}\, cos\, 3x$

8. $tan^{-1}\, x$

9. $\log(\log x)$ **10.** $\sin(\log x)$

11. જો $y = 5\cos x - 3\sin x$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

12. જો $y = \cos^{-1} x$ હોય, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ માત્ર y ના પદ સ્વરૂપે મેળવો.

13. જો $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$.

14. જો $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$.

15. જો $y = 500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$.

16. જો $e^y(x+1) = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

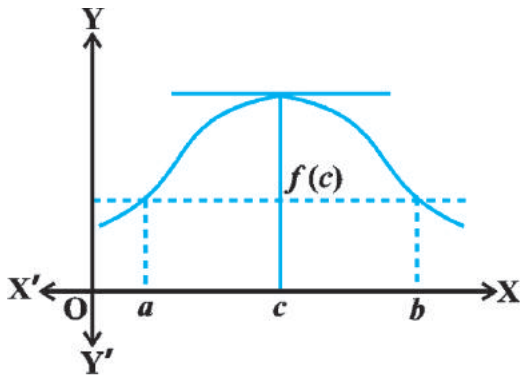
17. જો $y = (\tan^{-1} x)^2$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 = 2$.

5.8 મધ્યકમાન પ્રમેય

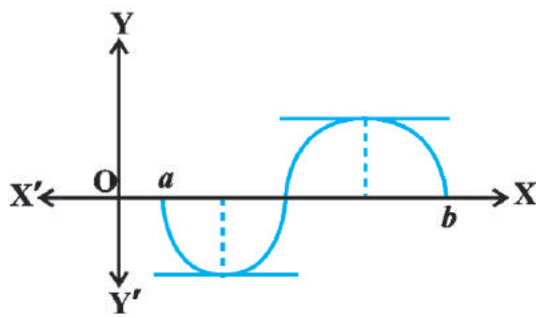
આ વિભાગમાં આપણે સાબિત કર્યા વગર કલનશાસ્ત્રના બે મૂળભૂત પ્રમેયોનાં વિધાન આપીશું. આપણે તેમનાં ભૌમિતિક અર્થઘટન પણ કરીશું.

પ્રમેય 6 : રોલનું પ્રમેય : *જો $f : [a, b] \to R$ એ $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) પર વિકલનીય હોય તથા વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે $f(a) = f(b)$ હોય, તો કોઈક $c \in (a, b)$ માટે $f'(c) = 0$.*

આકૃતિ 5.12 અને 5.13 માં રોલના પ્રમેયની શરતોનું સમાધાન કરે તેવાં કેટલાંક વિશિષ્ટ વિકલનીય વિધેયોના આલેખ આપેલ છે.



આકૃતિ 5.12

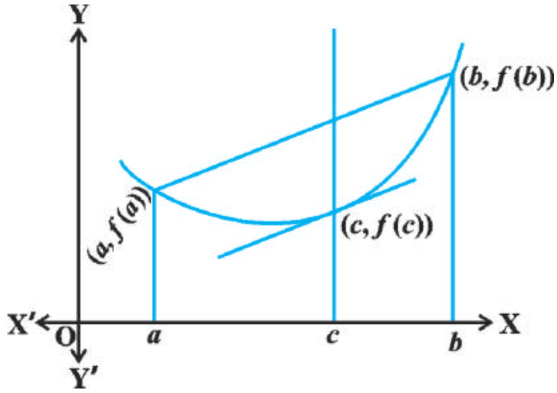


આકૃતિ 5.13

a અને b વચ્ચેનાં બિંદુઓએ વક્રના સ્પર્શકના ઢાળનું અવલોકન કરો. પ્રત્યેક આલેખમાં ઓછામાં ઓછા એક બિંદુએ તે શૂન્ય બને છે. રોલના પ્રમેયમાં ખરેખર તો આ જ વિધાનનું સમર્થન કરેલ છે. આલેખ પરના કોઈ પણ બિંદુએ વક્ર $y = f(x)$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ એ ખરેખર તો $y = f(x)$ નો તે બિંદુએ વિકલિત જ છે.

પ્રમેય 7 : મધ્યકમાન પ્રમેય : *જો $f : [a, b] \to R$ એ $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) પર વિકલનીય હોય, તો કોઈક $c \in (a, b)$ માટે $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

જુઓ કે મધ્યકમાન પ્રમેય એ રોલના પ્રમેયનું વિસ્તૃત રૂપ છે. ચાલો, હવે આપણે મધ્યકમાન પ્રમેયનું ભૌમિતિક અર્થઘટન સમજીએ. વિધેય $y = f(x)$ નો આલેખ આકૃતિ 5.14 માં આપેલ છે. આપણે પહેલા જ $f'(c)$ નો અર્થ વક્ર $y = f(x)$ ના $(c, f(c))$ આગળના સ્પર્શકના ઢાળ તરીકે કરી ચૂક્યા છીએ. બીજા શબ્દોમાં મધ્યકમાન પ્રમેય પ્રમાણે એવી વાસ્તવિક સંખ્યા $c \in (a, b)$ મળે કે જેથી વક્ર $y = f(x)$ નો $(c, f(c))$ આગળનો સ્પર્શક $(a, f(a))$ અને $(b, f(b))$ ને જોડતી છેદિકાને સમાંતર થાય.



આકૃતિ 5.14

ઉદાહરણ 42 : $a = -2$ અને $b = 2$ હોય, તો વિધેય $y = x^2 + 2$ માટે રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : વિધેય $y = x^2 + 2$, $[-2, 2]$ પર સતત અને $(-2, 2)$ માં વિકલનીય છે. વળી, $f(-2) = f(2) = 6$ અને આથી $f(x)$ ના -2 અને 2 આગળનાં મૂલ્યો સમાન છે. રોલના પ્રમેય પ્રમાણે $f'(c) = 0$ થાય તેવો $c \in (-2, 2)$ મળે. $f'(x) = 2x$ હોવાથી $f'(c) = 0$ પરથી આપણને $c = 0$ મળે. આમ, $c = 0$ માટે, $f'(c) = 0$ અને $c = 0 \in (-2, 2)$.

ઉદાહરણ 43 : $[2, 4]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f(x) = x^2$ માટે $[2, 4]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : વિધેય $f(x) = x^2$, $[2, 4]$ માં સતત અને $(2, 4)$માં વિકલનીય છે તથા $(2, 4)$ પર $f'(x) = 2x$ વ્યાખ્યાયિત છે.

હવે, $f(2) = 4$ અને $f(4) = 16$

આથી, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{16 - 4}{4 - 2} = 6$

મધ્યકમાન પ્રમેય પ્રમાણે $f'(c) = 6$ થાય એવી વાસ્તવિક સંખ્યા $c \in (2, 4)$ મળવી જોઈએ. પરંતુ $f'(x) = 2x$. આથી, $c = 3$. આમ, $c = 3 \in (2, 4)$ આગળ $f'(c) = 6$.

સ્વાધ્યાય 5.8

1. $x \in [-4, 2]$ માં વિધેય $f(x) = x^2 + 2x - 8$ માટે રોલનું પ્રમેય ચકાસો.
2. ચકાસો કે નીચેનાં વિધેયો પર રોલનું પ્રમેય લગાડી શકાય કે નહિ ? આ ઉદાહરણો પરથી તમે રોલના પ્રમેયના પ્રતીપ વિશે શું કહી શકશો ?
   (i) $f(x) = [x]$, $x \in [5, 9]$
   (ii) $f(x) = [x]$, $x \in [-2, 2]$
   (iii) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [1, 2]$
3. જો $f : [-5, 5] \to \mathbf{R}$ વિકલનીય વિધેય હોય અને $f'(x)$ ક્યાં ય શૂન્ય ના બને તો સાબિત કરો કે $f(-5) \neq f(5)$.

4. $a = 1$ અને $b = 4$ લઈ વિધેય $f(x) = x^2 - 4x - 3$ માટે $[a, b]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો.

5. $a = 1$ અને $b = 3$ લઈ વિધેય $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ માટે $[a, b]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો. $f'(c) = 0$ થાય તેવા તમામ $c \in (1, 3)$ શોધો.

6. ઉપર પ્રશ્ન 2 માં આપેલ ત્રણ વિધેયો માટે મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 44 : નીચેનાં વિધેયોના x વિશે વિકલિત મેળવો :

(i) $\sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ (ii) $e^{sec^2 x} + 3cos^{-1}x$ (iii) $\log_7 (\log x)$

ઉકેલ : (i) $y = \sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}} = (3x + 2)^{\frac{1}{2}} + (2x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}}$

આપણે નોંધીએ કે આ વિધેય તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $x \geq \frac{-2}{3}$ માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(3x+2) + \left(\frac{-1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2+4)$$

$$= \frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3) - \left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} - \frac{2x}{(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $x > \frac{-2}{3}$ માટે આ વિકલિત વ્યાખ્યાયિત છે.

(ii) $y = e^{sec^2 x} + 3cos^{-1}x$

આપેલ y, $[-1, 1]$ માંની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{sec^2 x} \cdot \frac{d}{dx}(sec^2 x) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= e^{sec^2 x} \cdot 2sec\,x \frac{d}{dx}(sec\,x) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= 2\ sec\ x\ (sec\ x \cdot tan\ x)\ e^{sec^2 x} + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= 2\ sec^2 x \cdot tan\ x\ e^{sec^2 x} - 3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

જુઓ કે આપેલ વિધેયનું વિકલિત $(-1, 1)$ માટે જ સત્ય છે, કારણ કે $cos^{-1}x$ નું વિકલિત $(-1, 1)$ માટે જ યથાર્થ છે.

(iii) $y = \log_7 (\log x) = \dfrac{\log (\log x)}{\log 7}$ **(આધાર પરિવર્તનના નિયમથી)**

$x > 1$ હોય તેવી તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે આ વિધેય વ્યાખ્યાયિત છે.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 7} \frac{d}{dx} (\log (\log x))$$

$$= \frac{1}{\log 7} \frac{1}{\log x} \cdot \frac{d}{dx} (\log x)$$

$$= \frac{1}{x \log 7 \log x}$$

ઉદાહરણ 45 : નીચેનાં વિધેયોનું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરો :

(i) $cos^{-1} (sin\ x)$ (ii) $tan^{-1} \left(\dfrac{sin\ x}{1 + cos\ x}\right)$ (iii) $sin^{-1} \left(\dfrac{2^{x+1}}{1 + 4^x}\right)$

ઉકેલ : (i) ધારો કે $f(x) = cos^{-1} (sin\ x)$. જુઓ કે આપેલ વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. આપણે આ વિધેયને

$$f(x) = cos^{-1} (sin\ x)$$

$= cos^{-1} \left[cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right]$ એમ લખી શકીએ. $\left(\dfrac{-\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} - x$$

આથી, $f'(x) = -1$

નોંધ : જો $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$, તો $f'(x) = 1$ થશે.

(ii) ધારો કે, $f(x) = tan^{-1} \left(\dfrac{sin\ x}{1 + cos\ x}\right)$. જુઓ કે આપેલ વિધેય જ્યાં $cos\ x \ne -1$ હોય તેવી પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. અર્થાત્ x એ π નો અયુગ્મ ગુણિત ના હોવો જોઈએ. આપણે આ વિધેયનું પુનર્ગઠન કરીએ.

$$f(x) = tan^{-1} \left(\frac{sin\ x}{1 + cos\ x}\right)$$

$$= tan^{-1} \left[\frac{2\,sin\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2cos^2 \frac{x}{2}}\right]$$

$$= tan^{-1} \left[tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2} \qquad -\pi < x < \pi$$

જુઓ કે $cos\dfrac{x}{2}$ શૂન્યેતર હોવાથી અંશ અને છેદમાંથી તે દૂર કરી શકાય. આમ, $f'(x) = \dfrac{1}{2}$

(iii) $f(x) = sin^{-1}\left(\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ વિધેયનો પ્રદેશ નક્કી કરવા આપણે $-1 \le \dfrac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$ હોય એવા તમામ x શોધવા જોઈએ.

હવે, $\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}$ હંમેશાં ધન હોવાથી, આપણે એવા x શોધવા જોઈએ કે જેથી, $\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$. અર્થાત્ પ્રત્યેક x માટે $2^{x+1} \le 1 + 4^x$. આપણે આ લખી શકીએ કારણ કે, $2 \le \dfrac{1}{2^x} + 2^x$ પ્રત્યેક વાસ્તવિક x માટે સત્ય છે.

આથી, વિધેય પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

$2^x = tan\,\theta$ લઈ આ વિધેયને ફરી લખતાં,

$$f(x) = sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$$

$$= sin^{-1}\left(\frac{2^x \cdot 2}{1+(2^x)^2}\right)$$

$$= sin^{-1}\left(\frac{2\,tan\,\theta}{1+tan^2\theta}\right)$$

$$= sin^{-1}\,(sin\,2\theta)$$

$$= 2\theta = 2\,tan^{-1}\,(2^x)$$

આથી, $$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+(2^x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= \frac{2}{1+4^x} \cdot (2^x)\log 2$$

$$= \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}$$

ઉદાહરણ 46 : જો $f(x) = (sin\,x)^{sin\,x}$ હોય, તો $0 < x < \pi$ માટે $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : વિધેય $y = (sin\,x)^{sin\,x}$ એ $x \in (0, \pi)$ હોય તેવી પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

બંને તરફ log લેતાં,

$$\log y = \log\,(sin\,x)^{sin\,x} = sin\,x\,\log\,(sin\,x)$$

આથી, $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sin\,x\,\log\,(sin\,x))$$

$$= cos\,x\,\log\,sin\,x + sin\,x\,\frac{1}{sin\,x}\,\frac{d}{dx}(sin\,x)$$

$$= cos\,x\,\log\,sin\,x + cos\,x$$

$$= (1 + \log\,sin\,x)\,cos\,x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\,[(1 + \log\,sin\,x)\,cos\,x]$$

$$= (1 + \log\,sin\,x)\,(sin\,x)^{sin\,x}\,cos\,x$$

ઉદાહરણ 47 : જો ધન વાસ્તવિક અચળ a માટે, $y = a^{t+\frac{1}{t}}$ અને $x = \left(t+\frac{1}{t}\right)^a$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : જુઓ કે પ્રત્યેક વાસ્તવિક $t > 0$ માટે y અને x બંને વ્યાખ્યાયિત છે. સ્પષ્ટ છે કે

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^{t+\frac{1}{t}}\right) = a^{t+\frac{1}{t}}\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right) \cdot \log a$$

$$= a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) \cdot \log a$$

આ જ રીતે, $\frac{dx}{dt} = a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1} \cdot \frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$

$$= a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1} \cdot \left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

જો $t \neq \pm 1$ તો અને તો જ $\frac{dx}{dt} \neq 0$. આમ, $t \neq 1$ માટે, $(t > 0$ હોવાથી$)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$= \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}}$$

$$= \frac{a^{t+\frac{1}{t}-1}\log a}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}} \qquad (t > 0,\ t \neq 1)$$

નોંધ : એક વિધેય $u = f(x)$ નો બીજા વિધેય $v = g(x)$ ને સાપેક્ષ વિકલિત, સંકેત $\frac{du}{dv}$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે અને તે $\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$ છે, જ્યાં, $\frac{dv}{dx} \neq 0$.

ઉદાહરણ 48 : sin^2x નો $e^{cos\,x}$ ને સાપેક્ષ વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $u(x) = sin^2x$ અને $v(x) = e^{cos\,x}$

આપણે $\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$ શોધવું છે.

સ્પષ્ટ છે કે, $\frac{du}{dx} = 2\,sin\,x \cdot cos\,x$ અને

$$\frac{dv}{dx} = e^{cos\,x}(-sin\,x) = -(sin\,x)\,e^{cos\,x}$$

આમ, $\frac{du}{dv} = \frac{2sin\,x\,.\,cos\,x}{-sin\,x \cdot e^{cos\,x}} = -\frac{2cos\,x}{e^{cos\,x}}$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 5

પ્રશ્ન 1 થી 11 માં આપેલ વિધેયોના x વિશે વિકલિત મેળવો :

1. $(3x^2 - 9x + 5)^9$

2. $\sin^3 x + \cos^6 x$

3. $(5x)^{3\cos 2x}$

4. $0 \le x \le 1$ માટે $\sin^{-1}(x\sqrt{x})$

5. $-2 < x < 2$ માટે, $\dfrac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}$

6. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ માટે, $\cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right]$

7. $(\log x)^{\log x}, x > 1$

8. કોઈ અચળ a, b માટે $\cos (a \cos x + b \sin x)$

9. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ માટે $(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$

10. કોઈ નિશ્ચિત $a > 0$ અને $x > 0$ માટે $x^x + x^a + a^x + a^a$

11. $x > 3$ માટે $x^{x^2 - 3} + (x - 3)^{x^2}$

12. $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ માટે $y = 12 (1 - \cos t)$, $x = 10(t - \sin t)$, તો $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો.

13. જો $0 \le x \le 1$ હોય, તો $y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ માટે $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો.

14. જો $-1 < x < 1$ માટે $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$.

15. જો કોઈક $c > 0$ માટે $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$

a અને b પર આધારિત ના હોય તેવો અચળ છે.

16. જો $\cos y = x \cos (a + y)$ અને $\cos a \ne \pm 1$ હોય, તો

સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2 (a+y)}{\sin a}$.

17. જો $x = a (\cos t + t \sin t)$ અને $y = a(\sin t - t \cos t)$, તો $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો.

18. જો $f(x) = |x|^3$, તો સાબિત કરો કે $f''(x)$ પ્રત્યેક વાસ્તવિક x માટે અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને તે શોધો.

19. ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી સાબિત કરો કે, $\dfrac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}$. (જ્યાં, n ધન પૂર્ણાંક છે.)

20. સૂત્ર $\sin (A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \sin B$ અને વિકલનનો ઉપયોગ કરી $\cos$ ના સરવાળા માટેનું સૂત્ર મેળવો.

21. શું બધે જ સતત હોય પરંતુ બરાબર બે બિંદુએ જ વિકલનીય ના હોય એવું વિધેય મળી શકે ? તમારો જવાબ ચકાસો.

22. જો $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

23. જો $-1 \le x \le 1$ માટે $y = e^{a\cos^{-1}x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$.

સારાંશ

- વાસ્તવિક ચલનું વિધેય તેના પ્રદેશ પરના કોઈ બિંદુએ **સતત** હોય તે માટે તે બિંદુએ વિધેયના લક્ષનું મૂલ્ય વિધેયના તે બિંદુ આગળના મૂલ્ય જેટલું થાય. જો વિધેય સમગ્ર પ્રદેશ પર સતત હોય તો તે સતત વિધેય કહેવાય.
- બે સતત વિધેયોના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર પણ સતત હોય, અર્થાત્ જો f અને g સતત વિધેયો હોય, તો

  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ સતત છે.

  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ સતત છે.

  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (જ્યાં $g(x) \ne 0$) સતત છે.
- પ્રત્યેક વિકલનીય વિધેય સતત છે, પરંતુ પ્રતીપ સત્ય નથી.
- સાંકળનો નિયમ એ સંયોજિત વિધેયના વિકલિત માટેનો નિયમ છે. જો $f = vou$, $t = u(x)$ અને $\frac{dt}{dx}$ તથા $\frac{dv}{dt}$ બંનેનું અસ્તિત્વ હોય, તો

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

- નીચે કેટલાક પ્રમાણિત વિકલિત (તેમના યોગ્ય પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત) આપેલ છે :

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(cosec^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

- લઘુગણકીય વિકલન એ $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ પ્રકારના વિધેયનું વિકલન કરવા માટે એક બહુ ઉપયોગી રીત છે. આ રીતનો ઉપયોગ કરવા માટે $u(x)$ ધન હોય તે જરૂરી છે.
- **રોલનું પ્રમેય :** જો $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) માં વિકલનીય હોય તથા $f(a) = f(b)$, તો કોઈક $c \in (a, b)$ માટે $f'(c) = 0$.
- **મધ્યકમાન પ્રમેય :** જો $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) માં વિકલનીય હોય, તો કોઈક $c \in (a, b)$ માટે $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

— ❖ —

પ્રકરણ **6**

વિકલિતના ઉપયોગો

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature." — WHITEHEAD* ❖

6.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 5 માં આપણે સંયોજિત વિધેય, ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય, ગૂઢ વિધેય, ઘાતાંકીય વિધેય અને લઘુગણકીય વિધેયોના વિકલિતો શોધવાની કેટલીક રીતો શીખ્યાં. આ પ્રકરણમાં, આપણે ઈજનેરીવિદ્યા, વિજ્ઞાન, સામાજિક વિજ્ઞાન જેવી ભિન્ન વિદ્યાશાખાઓ ઉપરાંત અન્ય ક્ષેત્રોમાં વિકલિતના ઉપયોગ વિશે અભ્યાસ કરીશું. ઉદાહરણ તરીકે વિકલિત (i) કોઈ ચલ રાશિમાં થતા ફેરફારનો દર નક્કી કરવા (ii) વક્રના કોઈ બિંદુ આગળના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો શોધવા (iii) વિધેયના આલેખ પરથી આપણને વિધેય ક્યાં બિંદુઓ આગળ (સ્થાનીય) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરશે તે નક્કી કરવામાં માર્ગદર્શન આપે છે. આપણે વિકલિતો નિર્ણાયક બિંદુઓનાં સ્થાન નક્કી કરવામાં કેવી રીતે ઉપયોગી છે તે શીખીશું. વળી, વિધેય કયા અંતરાલમાં વધે છે અથવા ઘટે છે તે અંતરાલો શોધવા માટે આપણે વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું. અંતમાં આપણે કોઈ ચોક્કસ રાશિનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધવા માટે પણ વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

6.2 રાશિમાં થતા ફેરફારનો દર

અંતર s માં સમય t ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર વિકલિત $\frac{ds}{dt}$ વેગ દર્શાવે છે. આ જ પ્રકારે, જ્યારે કોઈ એક રાશિ y માં અન્ય રાશિ x ની સાપેક્ષે ફેરફાર થાય ત્યારે વિધેય $y = f(x)$ માટે, $\frac{dy}{dx}$ (અથવા $f'(x)$) એ y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે અને $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0}$ (અથવા $f'(x_0)$) એ $x = x_0$ આગળ y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર સૂચવે છે.

વળી, જો કોઈ બે ચલ x તથા y માં અન્ય ચલ t ની સાપેક્ષે ફેરફાર થતો હોય એટલે કે, જો $x = f(t)$ તથા $y = g(t)$ આપેલ હોય અને $\frac{dx}{dt} \neq 0$ હોય, તો સાંકળ નિયમ દ્વારા $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ મેળવી શકાય.

આથી, y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારના દરની ગણતરી y તથા x બંનેમાં t ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારના દરનો ઉપયોગ કરી શોધી શકાય.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો સમજીએ.

ઉદાહરણ 1 : 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો.

ઉકેલ : r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$ દ્વારા મેળવી શકાય.

આથી, વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ દ્વારા મળે.

જ્યારે, $r = 5$ સેમી હોય ત્યારે $\frac{dA}{dr} = 10\pi$.

આથી, વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ 10π સેમી^{2}/સેમીના દરે ફેરફાર થાય છે.

ઉદાહરણ 2 : એક સમઘનનું કદ 9 સેમી^{3}/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે ઘનની ધારની લંબાઈ 10 સેમી હોય ત્યારે તેના પૃષ્ઠફળના વધવાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમઘનની ધારની લંબાઈ x, તેનું ઘનફળ V અને પૃષ્ઠફળ S છે. અહીં $V = x^3$ તથા $S = 6x^2$ છે. x એ સમય t નું વિધેય છે.

હવે, $\frac{dV}{dt} = 9$ સેમી^{3}/સે આપેલ છે.

આથી, $9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{dx}{dt}$ (સાંકળ નિયમ પરથી)

$\therefore \quad 9 = 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$

$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2}$ ...(1)

હવે, $\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2) \cdot \frac{dx}{dt}$ (સાંકળ નિયમ પરથી)

$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)$ ((1) પરથી)

$= \frac{36}{x}$

આથી, જ્યારે $x = 10$ સેમી હોય, ત્યારે, $\frac{dS}{dt} = \frac{36}{10} = 3.6$ સેમી^{2}/સે

ઉદાહરણ 3 : શાંત સરોવરમાં એક પથ્થર નાખવામાં આવે છે અને પાણીમાં વર્તુળાકાર વમળો સર્જાય છે. આ વર્તુળાકાર વમળોની ત્રિજ્યા 4 સેમી/સે ની ઝડપે વધે છે. જ્યારે વર્તુળાકાર વમળની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે આ વર્તુળાકાર વમળોનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપે વધે છે ?

ઉકેલ : r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$ છે. આથી, વર્તુળના ક્ષેત્રફળ A માં સમય t ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર

$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2) \cdot \frac{dr}{dt}$ (સાંકળ નિયમ પરથી)

$= 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

વળી, $\frac{dr}{dt} = 4$ સેમી/સે આપેલ છે.

$\therefore$ જ્યારે $r = 10$ સેમી હોય, ત્યારે

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi \text{ સેમી}^2\text{/સે}$$

આથી, જ્યારે $r = 10$ સેમી હોય, ત્યારે વર્તુળાકાર વમળોનું ક્ષેત્રફળ 80π સેમી^{2}/સે ની ઝડપે વધે છે.

નોંધ : જો $\frac{dy}{dx} > 0$ હોય તો અને તો જ આપણે કહીએ છીએ કે, જેમ x વધે છે તેમ y વધે છે તથા $\frac{dy}{dx} < 0$ હોય તો ને તો જ આપણે કહીએ છીએ કે જેમ x વધે છે તેમ y ઘટે છે.

ઉદાહરણ 4 : એક લંબચોરસની લંબાઈ x, 3 સેમી/મિનિટના દરે ઘટે છે તથા તેની પહોળાઈ y, 2 સેમી/મિનિટના દરથી વધે છે. જ્યારે $x = 10$ સેમી અને $y = 6$ સેમી હોય, ત્યારે (a) લંબચોરસની પરિમિતિ અને (b) લંબચોરસના ક્ષેત્રફળમાં થતા ફેરફારનો દર શોધો.

ઉકેલ : લંબચોરસની લંબાઈ x, સમય t ની સાપેક્ષે ઘટે છે અને પહોળાઈ y, સમય t ની સાપેક્ષે વધે છે.

આથી, $\frac{dx}{dt} = -3$ સેમી/મિનિટ અને $\frac{dy}{dt} = 2$ સેમી/મિનિટ

(a) લંબચોરસની પરિમિતિ $P = 2(x + y)$

$$\therefore \quad \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= 2(-3 + 2)$$

$$= -2 \text{ સેમી/મિનિટ}$$

(b) લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $A = x \cdot y$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$= 10(2) + 6(-3) \qquad (x = 10 \text{ સેમી અને } y = 6 \text{ સેમી})$$

$$= 2 \text{ સેમી}^2\text{/મિનિટ}$$

ઉદાહરણ 5 : એક વસ્તુના x એકમના ઉત્પાદનનો કુલ ખર્ચ (રૂપિયામાં) $C(x) = 0.005\, x^3 - 0.02\, x^2 + 30\, x + 5000$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે 3 એકમનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે ત્યારે સીમાંત ખર્ચ શોધો. સીમાંત ખર્ચ એટલે ઉત્પાદનના કોઈ પણ સ્તરે ઉત્પાદિત એકમની સંખ્યાને સાપેક્ષ કુલ ખર્ચમાં થતા ફેરફારનો દર.

ઉકેલ : સીમાંત ખર્ચ એટલે ઉત્પાદનના કોઈ પણ સ્તરે ઉત્પાદિત એકમની સંખ્યાને સાપેક્ષ કુલ ખર્ચમાં થતા ફેરફારનો દર.

$\therefore$ સીમાંત ખર્ચ (MC - ***Marginal Cost***) $= \frac{dC}{dx} = 0.005\,(3x^2) - 0.02\,(2x) + 30$

જ્યારે $x = 3$ હોય ત્યારે, $MC = 0.015\,(3^2) - 0.04\,(3) + 30$

$$= 0.135 - 0.12 + 30$$

$$= 30.015$$

આથી, માંગેલ સીમાંત ખર્ચ ₹ 30.02 (આસન્ન મૂલ્ય) છે.

ઉદાહરણ 6 : એક વસ્તુના x એકમના વેચાણમાંથી થતી રૂપિયામાં કુલ આવક $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે $x = 5$ હોય ત્યારે સીમાંત આવક શોધો. સીમાંત આવક એટલે વેચાયેલા કુલ એકમોને સાપેક્ષ કુલ આવકમાં થતા ફેરફારનો દર છે.

ઉકેલ : સીમાંત આવક એ વેચાયેલા કુલ એકમોને સાપેક્ષ થતી કુલ આવકના ફેરફારનો દર દર્શાવે છે.

$\therefore$ સીમાંત આવક (MR - ***Marginal Revenue***) $= \dfrac{dR}{dx} = 6x + 36$

જ્યારે $x = 5$ હોય ત્યારે, MR $= 6(5) + 36 = 66$

આથી, માંગેલ સીમાંત આવક ₹ 66 છે.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. જ્યારે (a) $r = 3$ સેમી તથા (b) $r = 4$ સેમી હોય ત્યારે વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યા r ને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો.
2. એક સમઘનનું કદ 8 સેમી^{3}/સેના દરથી વધે છે. જ્યારે સમઘનની ધારની લંબાઈ 12 સેમી હોય ત્યારે તેનું પૃષ્ઠફળ કેટલી ઝડપથી વધે ?
3. એક વર્તુળની ત્રિજ્યા એકધારી 3 સેમી/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં થતા વધારાનો દર શોધો.
4. એક સમઘનની ધાર 3 સેમી/સે ના દરથી વધે છે. જ્યારે સમઘનની ધારની લંબાઈ 10 સેમી હોય ત્યારે તે સમઘનનું ઘનફળ કેટલી ઝડપથી વધે ?
5. શાંત સરોવરમાં એક પથ્થર નાંખવામાં આવે છે અને પાણીમાં વર્તુળાકાર વમળો સર્જાય છે. વર્તુળાકાર વમળોની ત્રિજ્યા 5 સેમી/સે ની ઝડપે વધે છે. જ્યારે વર્તુળાકાર વમળની ત્રિજ્યા 8 સેમી હોય, ત્યારે આ વર્તુળાકાર વમળોનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપે વધે છે ?
6. એક વર્તુળની ત્રિજ્યા 0.7 સેમી/સે ના દરે વધે છે, તો વર્તુળના પરિઘના વધવાનો દર કેટલો હશે ?
7. એક લંબચોરસની લંબાઈ x, 5 સેમી/મિનિટના દરે ઘટે છે અને તેની પહોળાઈ 4 સેમી/મિનિટના દરે વધે છે. જ્યારે $x = 8$ સેમી અને $y = 6$ સેમી હોય, ત્યારે (a) લંબચોરસની પરિમિતિ અને (b) લંબચોરસના ક્ષેત્રફળમાં થતા ફેરફારનો દર શોધો.
8. એક ગોળાકાર ફુગ્ગામાં તેનું કદ 900 સેમી^{3}/સે ના દરે વધે એવી રીતે હવા ભરવામાં આવે છે. જ્યારે ફુગ્ગાની ત્રિજ્યા 15 સેમી હોય ત્યારે ત્રિજ્યાના વધવાનો દર શોધો. ફુગ્ગો ગોળાકાર જ રહે છે.
9. એક ગોળાકાર ફુગ્ગાની ત્રિજ્યા ચલિત થાય છે અને તે ફુગ્ગો ગોળાકાર જ રહે છે. જ્યારે તેની ત્રિજ્યા 10 સેમી હોય ત્યારે તેના ઘનફળમાં ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા વધારાનો દર શોધો.
10. એક 5 મીટર લાંબી નિસરણી દીવાલે ટેકવી છે. સીડીનો નીચેનો છેડો જમીન પર 2 સેમી/સે ના દરે દીવાલથી દૂર લઈ જવામાં આવે છે. જ્યારે સીડીનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 4 મીટર દૂર હોય, ત્યારે દીવાલ પર નિસરણીની ઊંચાઈ કેટલી ઝડપથી ઘટે છે ?
11. એક પદાર્થ, વક્ર $6y = x^3 + 2$ પર ગતિ કરે છે. વક્ર પરનાં જે બિંદુઓએ તેમના y-યામમાં તેમના x-યામ કરતાં 8 ગણી ઝડપે ફેરફાર થાય, તે બિંદુઓ શોધો.
12. હવાના પરપોટાની ત્રિજ્યા $\frac{1}{2}$ સેમી/સે ના દરથી વધે છે, જ્યારે પરપોટાની ત્રિજ્યા 1 સેમી હોય ત્યારે તેના કદમાં થતા વધારાનો દર કેટલો હોય ?
13. એક ગોળાકાર ફુગ્ગાનો વ્યાસ $\frac{3}{2}(2x + 1)$ છે, તો આ ફુગ્ગાના ઘનફળમાં x ને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો. ફુગ્ગો ગોળાકાર જ રહે છે.

14. એક પાઈપ દ્વારા 12 સેમી^{3}/સે ના દરથી રેતી નાખવામાં આવે છે. આ રેતી દ્વારા જમીન પર શંકુ બને છે. તેની ઊંચાઈ હંમેશાં તેના પાયાની ત્રિજ્યા કરતાં $\frac{1}{6}$ ગણી રહે છે. જ્યારે ઊંચાઈ 4 સેમી હોય ત્યારે રેતીના આ શંકુની ઊંચાઈના વધવાનો દર શોધો.

15. એક વસ્તુના x એકમના ઉત્પાદનનો કુલ ખર્ચ (રૂપિયામાં) $C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે 17 એકમનું ઉત્પાદન થયેલ હોય ત્યારે સીમાંત ખર્ચ શોધો.

16. એક વસ્તુના x એકમના વેચાણથી મળતી કુલ આવક (રૂપિયામાં) $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે $x = 7$ હોય ત્યારે સીમાંત આવક શોધો.

પ્રશ્નો 17 તથા 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

17. જ્યારે ત્રિજ્યા 6 સેમી હોય ત્યારે વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં તેની ત્રિજ્યાને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર .... હોય.

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18. એક વસ્તુના x એકમના વેચાણથી મળતી કુલ આવક (રૂપિયામાં) $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ દ્વારા મળે છે. જ્યારે $x = 15$ હોય ત્યારે થતી સીમાંત આવક ₹ .... હોય.

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

6.3 વધતાં તથા ઘટતાં વિધેયો

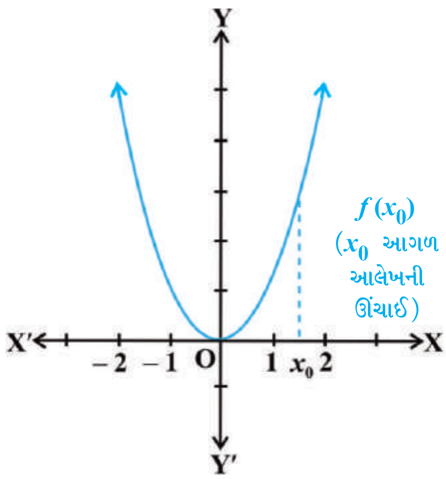
આ વિભાગમાં, વિધેય વધે છે કે ઘટે છે અથવા બેમાંથી કંઈ પણ નથી બનતું તે નક્કી કરવા માટે આપણે વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

વિધેય $f(x) = x^2$, $x \in R$ નો આલેખ આકૃતિ 6.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પરવલયાકાર છે.

ઊગમબિંદુની ડાબી તરફની કિંમતો

x	$f(x) = x^2$
-2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0

જેમ આપણે ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ જઈશું, તેમ આલેખની ઊંચાઈ ઘટશે.



આકૃતિ 6.1

ઊગમબિંદુની જમણી તરફની કિંમતો

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

જેમ આપણે ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ જઈશું, તેમ આલેખની ઊંચાઈ વધશે.

સૌપ્રથમ આપણે ઊગમબિંદુની જમણી તરફના આલેખનો વિચાર કરીશું. (આકૃતિ 6.1 જુઓ.) અહીં જોઈ શકાય છે કે, આલેખ પર જેમ આપણે ડાબી તરફથી જમણી તરફ જઈએ છીએ તેમ આલેખની ઊંચાઈમાં (ધન રહીને સંખ્યાત્મક રીતે) સતત વધારો થાય છે. આ કારણથી, ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ ($x > 0$) માટે, વિધેય વધે છે તેમ કહી શકાય.

હવે, આપણે ઊગમબિંદુની ડાબી તરફના આલેખનો વિચાર કરીશું (આકૃતિ 6.1 જુઓ.) અને જોઈશું કે, આલેખ પર જેમ આપણે ડાબી તરફથી જમણી તરફ જઈશું તેમ આલેખની ઊંચાઈમાં (ધન રહીને સંખ્યાત્મક રીતે) સતત ઘટાડો થાય છે. આથી, ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ ($x < 0$) માટે, વિધેય ઘટે છે તેમ કહી શકાય.

હવે, આપણે વિધેય કયા અંતરાલમાં વધે છે અથવા કયા અંતરાલમાં ઘટે છે તેની વિશ્લેષણાત્મક વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપીશું :

વ્યાખ્યા 1 : ધારો કે I = (a, b) એ વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશનો ઉપગણ છે.

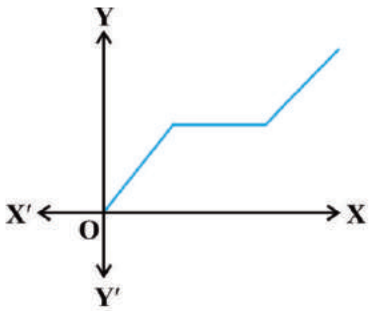
(i) *જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I} = (a, b)$, તો f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.*

(ii) *જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I} = (a, b)$, તો f એ (a, b) પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.*

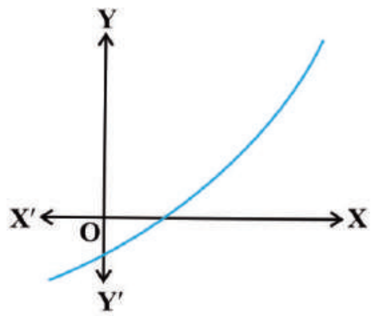
(iii) *જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I} = (a, b)$, તો f એ (a, b) પર ઘટતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.*

(iv) *જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I} = (a, b)$, તો f એ (a, b) પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.*

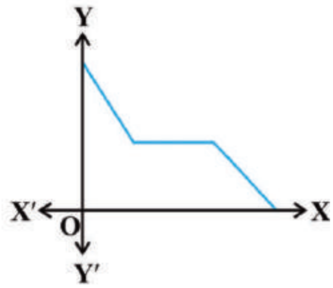
આ પ્રકારનાં વિધેયોની આલેખાત્મક રજૂઆત માટે આકૃતિ 6.2 જુઓ.



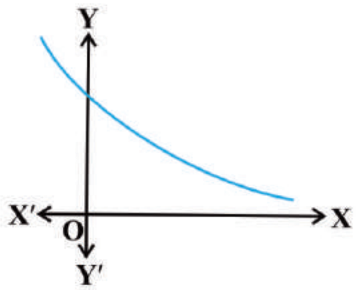
(i)
વધતું વિધેય



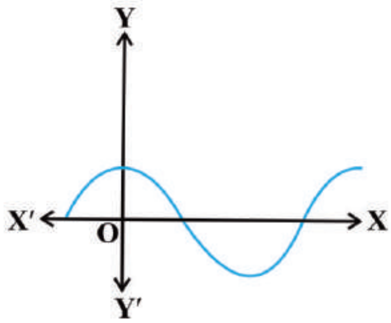
(ii)
ચુસ્ત વધતું વિધેય



(iii)
ઘટતું વિધેય



(iv)
ચુસ્ત ઘટતું વિધેય



(v)
ન વધતું વિધેય, ન ઘટતું વિધેય

આકૃતિ 6.2

હવે આપણે વિધેય કોઈક બિંદુ આગળ ક્યારે વધે છે અથવા ઘટે છે તેની વ્યાખ્યા આપીશું.

વ્યાખ્યા 2 : ધારો કે x_0 એ વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશનો ઘટક છે. જો x_0 ને સમાવતો કોઈક અંતરાલ I મળે કે જેથી, f એ I માં વધે, ચુસ્ત રીતે વધે, ઘટે કે ચુસ્ત રીતે ઘટે તો, તદનુસાર f એ x_0 આગળ વધે છે, ચુસ્ત રીતે વધે છે, ઘટે છે કે ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તેમ કહેવાય.

ચાલો, આપણે આ વ્યાખ્યાને વધતા વિધેય માટે સ્પષ્ટ કરીએ.

કોઈ $h > 0$ માટે f ના પ્રદેશનો ઉપગણ હોય તેવો કોઈ વિવૃત અંતરાલ $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ થાય, તો વિધેય f એ x_0 આગળ વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે, $f(x) = 7x - 3$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $x_1, x_2 \in R$; $f(x) = 7x - 3$ માટે,

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \\ &\Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

આથી, વ્યાખ્યા 1 પરથી કહી શકાય કે, વિધેય f એ R પર ચુસ્ત રીતે વધે છે.

નોંધ : જો f એ R ના કોઈ પણ અંતરાલમાં વધતું વિધેય હોય, તો તે R પર વધતું વિધેય છે. તે જ રીતે ઘટતાં વિધેય, ચુસ્ત રીતે વધતાં વિધેય કે ચુસ્ત રીતે ઘટતાં વિધેય માટે કહી શકાય.

હવે, આપણે વધતાં અને ઘટતાં વિધેયો માટે પ્રથમ વિકલિત કસોટી આપીશું. આ કસોટીની સાબિતી માટે મધ્યકમાન પ્રમેય જરૂરી છે. આપણે પ્રકરણ 5 માં તેનો અભ્યાસ કર્યો છે.

પ્રમેય 1 : ધારો કે વિધેય f એ સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ પર સતત અને વિવૃત અંતરાલ (a, b) પર વિકલનીય છે.

(a) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) > 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(b) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) < 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(c) પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) = 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં અચળ વિધેય છે.

સાબિતી : ધારો કે, $x_1 < x_2$ થાય તેવા $x_1, x_2 \in [a, b]$ છે.

આથી, મધ્યકમાન પ્રમેય (પ્રકરણ 5, પ્રમેય 8) પરથી, $c \in (x_1, x_2)$ એવો મળે કે જેથી,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

એટલે કે, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ($f'(c) > 0$ આપેલ છે.)

એટલે કે, $f(x_2) > f(x_1)$

આથી, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

આથી, f એ $[a, b]$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

વિકલ્પો (b) તથા (c) ની સાબિતી તે જ રીતે આપી શકાય. તે વાચક માટે, સ્વાધ્યાય તરીકે છોડેલ છે.

નોંધ : (i) અહીં વધુ એક વ્યાપક પ્રમેય દર્શાવે છે કે, જો કોઈ વિવૃત અંતરાલ (a, b) ના પ્રત્યેક x માટે $f'(x) > 0$ હોય તથા વિધેય f સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ માં સતત હોય, તો f એ ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. આ જ રીતે જો કોઈ વિવૃત અંતરાલ (a, b) ના પ્રત્યેક x માટે $f'(x) < 0$ તથા વિધેય $[a, b]$ માં સતત હોય, તો f એ ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(ii) અંતરાલ I માં જો વિધેય ચુસ્ત વધતું કે ચુસ્ત ઘટતું હોય, તો તે અંતરાલ I માં વધતું કે ઘટતું વિધેય હોય. તેમ છતાં તેનું પ્રતીપ સત્ય હોય, તે જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$, $x \in R$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : અહીં, R ના પ્રત્યેક અંતરાલમાં,

$$\begin{aligned} f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 &= 3(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ &= 3(x - 1)^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

આથી, વિધેય f એ R પર ચુસ્ત રીતે વધે છે.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $f(x) = cos\, x$ એ

(a) $(0, \pi)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(b) $(\pi, 2\pi)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(c) $(0, 2\pi)$ માં વધતું વિધેય પણ નથી કે ઘટતું વિધેય પણ નથી.

ઉકેલ : અહીં $f'(x) = -sin\, x$

(a) પ્રત્યેક $x \in (0, \pi)$ માટે, $sin\, x > 0$

$\therefore \quad f'(x) < 0$

આથી, f એ $(0, \pi)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(b) પ્રત્યેક $x \in (\pi, 2\pi)$ માટે, $sin\, x < 0$

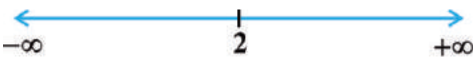
$\therefore \quad f'(x) > 0$

આથી, f એ $(\pi, 2\pi)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(c) વિકલ્પો (a) તથા (b) પરથી સ્પષ્ટ છે કે, f એ $(0, 2\pi)$ માં વધતું વિધેય નથી કે ઘટતું વિધેય પણ નથી.

☛ નોંધ : વિધેય f એ અંત્યબિંદુઓ 0, π અને 2π આગળ સતત છે. આથી, પ્રમેય 1 પરથી, f એ $[\pi, 2\pi]$માં વધતું વિધેય છે અને $[0, \pi]$માં ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 10 : વિધેય $f(x) = x^2 - 4x + 6$ એ કયા અંતરાલમાં (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે શોધો.



આકૃતિ 6.3

ઉકેલ : અહીં $f(x) = x^2 - 4x + 6$

$\therefore \quad f'(x) = 2x - 4$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 2$ મળે. આથી, $x = 2$ એ વાસ્તવિક સંખ્યારેખાને બે ભિન્ન અંતરાલો $(-\infty, 2)$ અને $(2, \infty)$ માં વિભાજિત કરે. (આકૃતિ 6.3 જુઓ.) અંતરાલ $(-\infty, 2)$ માં, $f'(x) = 2x - 4 < 0$.

આથી, આ અંતરાલમાં વિધેય f ચુસ્ત રીતે ઘટે છે. વળી, અંતરાલ $(2, \infty)$ માં, $f'(x) > 0$ હોવાથી વિધેય f ચુસ્ત રીતે વધે છે.

☛ નોંધ : વિધેય f એ $x = 2$ આગળ સતત છે. $x = 2$ એ બે અંતરાલોને જોડે છે. આથી, પ્રમેય 1 પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, આપેલ વિધેય f એ $(-\infty, 2]$ માં ઘટે છે અને $[2, \infty)$માં વધે છે.

ઉદાહરણ 11 : જે અંતરાલોમાં વિધેય $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે છે, તે અંતરાલો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$

$$\therefore \quad f'(x) = 12x^2 - 12x - 72 = 12(x^2 - x - 6) = 12(x - 3)(x + 2)$$

આકૃતિ 6.4

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = -2, 3$ મળે.

$x = -2$ અને $x = 3$ વાસ્તવિક સંખ્યારેખાને ત્રણ ભિન્ન અંતરાલો, $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ તથા $(3, \infty)$ માં વિભાજિત કરે છે. અંતરાલો $(-\infty, -2)$ અને $(3, \infty)$ માં, $f'(x) > 0$ છે, જ્યારે અંતરાલ $(-2, 3)$ માં $f'(x) < 0$ છે. આથી, f એ અંતરાલો $(-\infty, -2)$ અને $(3, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. જ્યારે, અંતરાલ $(-2, 3)$ માં f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે. તેમ છતાં પણ, f એ R માં વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.

અંતરાલ	$f'(x)$ ની નિશાની	વિધેય f નો પ્રકાર
$(-\infty, -2)$	$(-)(-) > 0$	f ચુસ્ત રીતે વધે છે.
$(-2, 3)$	$(-)(+) < 0$	f ચુસ્ત રીતે ઘટે છે.
$(3, \infty)$	$(+)(+) > 0$	f ચુસ્ત રીતે વધે છે.

ઉદાહરણ 12 : જે અંતરાલોમાં વિધેય $f(x) = \sin 3x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (a) વધે (b) ઘટે તે અંતરાલો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = \sin 3x$

$$\therefore \quad f'(x) = 3 \cos 3x$$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $\cos 3x = 0$ મળે.

આથી, $3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $\qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$

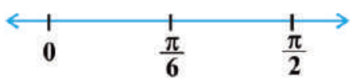
આથી, $x = \frac{\pi}{6}$ અને $\frac{\pi}{2}$ મળે.

હવે, $x = \frac{\pi}{6}$ એ અંતરાલ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ને બે ભિન્ન અંતરાલો $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ અને $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$માં વિભાજિત કરે.

હવે, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < 3x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 3x > 0 \text{ એટલે કે } f'(x) > 0$$



આકૃતિ 6.5

તથા $\forall x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x < \frac{3\pi}{2}$$

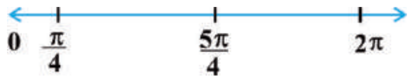
$$\Rightarrow \cos 3x < 0 \text{ એટલે કે } f'(x) < 0$$

આથી, f એ $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે અને $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

વળી, આપેલ વિધેય $x = 0$ અને $x = \frac{\pi}{6}$ આગળ સતત હોવાથી, પ્રમેય 1 પરથી, f એ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ પર વધતું તથા $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ પર ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 13 : વિધેય $f(x) = sin\ x + cos\ x$, $0 \le x \le 2\pi$ કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત વધે છે અને કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટે છે તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = sin\ x + cos\ x$



આકૃતિ 6.6

$\therefore \quad f'(x) = cos\ x - sin\ x$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $sin\ x = cos\ x$ મળે.

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ $\qquad (0 \le x \le 2\pi)$

$x = \frac{\pi}{4}$ અને $x = \frac{5\pi}{4}$ એ અંતરાલ $[0, 2\pi]$ ને ત્રણ ભિન્ન અંતરાલો $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ અને $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ માં વિભાજિત કરે.

જો $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ હોય, તો $f'(x) > 0$

$\therefore$ f એ અંતરાલો $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ અને $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

વળી, જો $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, તો $f'(x) < 0$

એટલે કે, f એ અંતરાલ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

અંતરાલ	$f'(x)$ ની નિશાની	વિધેય f નો ગુણધર્મ
$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	> 0	f ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	< 0	f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.
$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$	> 0	f ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. સાબિત કરો કે $f(x) = 3x + 17$ એ R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
2. સાબિત કરો કે $f(x) = e^{2x}$, R પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.
3. સાબિત કરો કે $f(x) = sin\ x$

   (a) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

   (b) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

   (c) $(0, \pi)$ માં વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.
4. વિધેય $f(x) = 2x^2 - 3x$ કયા અંતરાલમાં
   (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે તે શોધો.
5. વિધેય $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ કયા અંતરાલમાં
   (a) ચુસ્ત રીતે વધે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે તે નક્કી કરો.

6. નીચેનાં વિધેયો કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત રીતે વધે છે અથવા ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે નક્કી કરો :
(a) $x^2 + 2x - 5$ (b) $10 - 6x - 2x^2$ (c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$
(d) $6 - 9x - x^2$ (e) $(x + 1)^3 (x - 3)^3$

7. સાબિત કરો કે x પરનું વિધેય $y = \log (1 + x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$ એ તેના પ્રદેશ પર વધતું વિધેય છે.

8. $y = x (x - 2)^2$ એ x ની જે કિંમતો માટે વધતું વિધેય હોય તે કિંમતો શોધો.

9. સાબિત કરો કે $y = \frac{4 \sin \theta}{(2 + \cos \theta)} - \theta$ એ $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં વધતું વિધેય છે.

10. સાબિત કરો કે લઘુગણકીય વિધેય અંતરાલ $(0, \infty)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

11. સાબિત કરો કે $f(x) = x^2 - x + 1$, અંતરાલ $(-1, 1)$ પર ચુસ્ત વધતું કે ઘટતું વિધેય નથી.

પ્રશ્નો 12 તથા 13 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

12. નીચે આપેલાં વિધેયોમાંથી કયું વિધેય અંતરાલ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે ?
(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

13. વિધેય $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ એ નીચે આપેલા અંતરાલો પૈકી કયા અંતરાલમાં ચુસ્ત રીતે ઘટે છે ?
(A) $(0, 1)$ (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

14. 'a' ની નાનામાં નાની કઈ કિંમત માટે વિધેય $f(x) = x^2 + ax + 1$ એ અંતરાલ $[1, 2]$ પર ચુસ્ત રીતે વધે છે ?

15. જો I કોઈ વિવૃત્ત અંતરાલ હોય અને $I \cap [-1, 1] = \phi$ હોય, તો સાબિત કરો કે $f(x) = x + \frac{1}{x}$ એ I પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

16. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \log \sin x$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે તથા $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

17. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \log |\cos x|$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે તથા $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

18. સાબિત કરો કે $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ એ R પર વધતું વિધેય છે.

પ્રશ્ન 19 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

19. નીચે આપેલા અંતરાલો પૈકી કયા અંતરાલમાં $y = x^2 e^{-x}$ વધતું વિધેય છે ?
(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

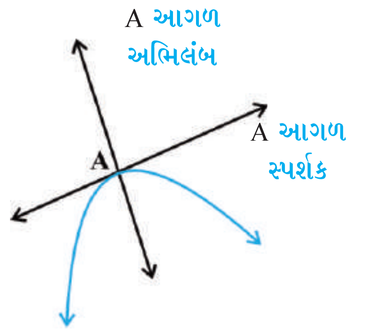
6.4 સ્પર્શક અને અભિલંબ

આ વિભાગમાં, આપણે કોઈ વક્રને કોઈ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણ શોધવા માટે વિકલનની ક્રિયાનો ઉપયોગ કરીશું.

(x_0, y_0) બિંદુમાંથી પસાર થતી અને નિશ્ચિત ઢાળ m વાળી રેખાનું સમીકરણ $(y - y_0) = m(x - x_0)$ દ્વારા મળે.

નોંધીએ કે $y = f(x)$ ને (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}$ $(= f'(x_0))$થી દર્શાવાય. આથી, $y = f(x)$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ દ્વારા મળે.

વળી, અભિલંબ એ સ્પર્શકને લંબ છે. આથી, જો $f'(x_0) \neq 0$ હોય, તો વક્ર $y = f(x)$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના અભિલંબનો ઢાળ $\frac{-1}{f'(x_0)}$ મળે. આથી, વક્ર $y = f(x)$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(y - y_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ દ્વારા મળે.



આકૃતિ 6.7

એટલે કે, $(y - y_0) f'(x_0) + (x - x_0) = 0$

નોંધ : જો વક્ર $y = f(x)$ નો સ્પર્શક X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે, તો $\frac{dy}{dx}$ = સ્પર્શકનો ઢાળ = $\tan\theta$.

વિશિષ્ટ કિસ્સાઓ :

(i) જો સ્પર્શકનો ઢાળ શૂન્ય હોય, તો $\tan\theta = 0$. આથી, $\theta = 0$. એનો અર્થ એ થયો કે, સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર છે અથવા X-અક્ષ સાથે સંપાતી છે. આ કિસ્સામાં, (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = y_0$ મળે.

(ii) જો $\theta \to \frac{\pi}{2}$ હોય, તો $\tan\theta \to \infty$. એટલે કે, સ્પર્શક એ X-અક્ષને લંબરેખા છે; એનો અર્થ એ થયો કે તે Y-અક્ષને સમાંતર છે અથવા Y-અક્ષ સાથે સંપાતી છે. આ કિસ્સામાં, (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $x = x_0$ મળે. **(શા માટે ?)**

ઉદાહરણ 14 : $x = 2$ આગળ વક્ર $y = x^3 - x$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 2$ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = (3x^2 - 1)_{x=2} = 11$ મળે.

ઉદાહરણ 15 : વક્ર $y = \sqrt{4x-3} - 1$ ને $\frac{2}{3}$ ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સ્પર્શબિંદુ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ વક્રને (x, y) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$

આપેલ ઢાળ $\frac{2}{3}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$$

અથવા $4x - 3 = 9$

અથવા $x = 3$

હવે, $y = \sqrt{4x-3} - 1$ માં, $x = 3$ લેતાં, $y = \sqrt{4(3)-3} - 1 = 2$

આથી, માંગેલ સ્પર્શબિંદુ $(3, 2)$ છે.

ઉદાહરણ 16 : વક્ર $y + \frac{2}{x-3} = 0$ ને 2 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : વક્રને (x, y) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-3)^2}$

પરંતુ આપેલ ઢાળ 2 હોવાથી, $2 = \frac{2}{(x-3)^2}$

અથવા $(x - 3)^2 = 1$

અથવા $x - 3 = \pm 1$

અથવા $x = 2, 4$

હવે, $x = 2$ લેતાં, $y = 2$ તથા $x = 4$ લેતાં, $y = -2$ મળે.

આથી, આપેલ વક્રને (2, 2) તથા (4, –2) સ્પર્શબિંદુવાળા, 2 ઢાળવાળા, બે સ્પર્શકો મળે.

(2, 2) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$$(y - 2) = 2(x - 2)$$

$\therefore \quad y - 2x + 2 = 0$ મળે.

તથા (4, –2) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$$y - (-2) = 2(x - 4)$$

$\therefore \quad y - 2x + 10 = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 17 : વક્ર $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ પરનાં જે બિંદુઓ આગળના સ્પર્શકો

(i) X-અક્ષને સમાંતર હોય (ii) Y-અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{25}\frac{dy}{dx} = 0$$

અથવા $\frac{dy}{dx} = \frac{-25}{4} \cdot \frac{x}{y}$

(i) હવે, જો સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર હોય, તો તેનો ઢાળ 0 થાય.

આથી, $\frac{-25}{4} \cdot \frac{x}{y} = 0$. જો $x = 0$ હોય તો અને તો જ આ શક્ય બને.

આથી, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ માં $x = 0$ લેતાં, $y^2 = 25$ એટલે કે, $y = \pm 5$ મળે.

આથી, બિંદુઓ (0, 5) અને (0, –5) આગળના સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર છે.

(ii) જો અભિલંબનો ઢાળ શૂન્ય હોય, તો સ્પર્શક Y-અક્ષને સમાંતર હોય. આથી, $\frac{4y}{25x} = 0$ એટલે કે $y = 0$.

આથી, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ માં $y = 0$ લેતાં, $x = \pm 2$ મળે.

આથી, બિંદુઓ (2, 0) અને (–2, 0) આગળના સ્પર્શકો Y-અક્ષને સમાંતર છે.

ઉદાહરણ 18 : વક્ર $y = \frac{x - 7}{(x - 2)(x - 3)}$ એ X-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : X-અક્ષ પર $y = 0$ હોવાથી, વક્રના સમીકરણમાં $y = 0$ લેતાં, $x = 7$ મળે. આથી, વક્ર X-અક્ષને (7, 0) બિંદુએ છેદે છે. હવે, આપેલ વક્રના સમીકરણનું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x - 5)}{(x - 2)(x - 3)} \text{ મળે.}$$ (કેવી રીતે ?)

અથવા $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(7, 0)} = \frac{1 - 0}{(5)(4)} = \frac{1}{20}$

આથી, (7, 0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{1}{20}$ છે.

આથી, (7, 0) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - 0) = \frac{1}{20}(x - 7)$

$\therefore \quad 20y - x + 7 = 0$

ઉદાહરણ 19 : વક્ર $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ના બિંદુ (1, 1) આગળના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો મેળવો.

ઉકેલ : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ મળે.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

આથી, (1, 1) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\ 1)} = -1$

આથી, (1, 1) બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$y - 1 = -1\,(x - 1)$ એટલે કે, $y + x - 2 = 0$ છે.

વળી, (1, 1) બિંદુ આગળના અભિલંબનો ઢાળ $= \dfrac{-1}{(1,\ 1) \text{ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ}} = 1$

આથી, (1, 1) બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(y - 1) = 1\,(x - 1)$ એટલે કે, $y - x = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 20 : $x = a\,sin^3 t,\ y = b\,cos^3 t$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રના $t = \frac{\pi}{2}$ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : $x = a\,sin^3 t,\ y = b\,cos^3 t$ ...(i)

x તથા y ના t પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dx}{dt} = 3a\,sin^2 t\,cos\,t$ તથા $\frac{dy}{dt} = -3b\,cos^2 t\,sin\,t$ મળે.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3b\,cos^2 t\,sin\,t}{3a\,sin^2 t\,cos\,t} = \frac{-b\,cos\,t}{a\,sin\,t}$$

આથી, $t = \frac{\pi}{2}$ આગળ, સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{-b\,cos\frac{\pi}{2}}{a\,sin\frac{\pi}{2}} = 0$

વળી, જ્યારે $t = \frac{\pi}{2}$ હોય ત્યારે $x = a$ અને $y = 0$ મળે.

આથી, વક્રને $t = \frac{\pi}{2}$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ એટલે કે,

બિંદુ $(a, 0)$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - 0) = 0\,(x - a)$ એટલે કે, $y = 0$ મળે.

નોંધ : ખરેખર પરિણામ સાચું છે, પરંતુ વધુ યોગ્ય ગણતરી નીચે પ્રમાણે થાય :

$x = a\,sin^3 t,\ \ y = b\,cos^3 t$ પરથી $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{a} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{b}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}\, a^{\frac{2}{3}}}$$

$t = \frac{\pi}{2}$ પરથી બિંદુ $(a, 0)$ મળે.

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a\,,\,0)} = 0$$

$\therefore$ માંગેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = 0$

સ્વાધ્યાય 6.3

1. વક્ર $y = 3x^4 - 4x$ ને $x = 4$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.
2. વક્ર $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ ને $x = 10$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.
3. વક્ર $y = x^3 - x + 1$ ના જે બિંદુનો x-યામ 2 હોય તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.
4. વક્ર $y = x^3 - 3x + 2$ ના જે બિંદુનો x-યામ 3 હોય તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ શોધો.
5. $x = a\,cos^3\,\theta$, $y = a\,sin^3\,\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રને $\theta = \frac{\pi}{4}$ આગળના અભિલંબનો ઢાળ શોધો.
6. $x = 1 - a\,sin\,\theta$, $y = b\,cos^2\,\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રને $\theta = \frac{\pi}{2}$ આગળના અભિલંબનો ઢાળ શોધો.
7. વક્ર $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ ને જે બિંદુઓ આગળના સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.
8. વક્ર $y = (x - 2)^2$ નો એક સ્પર્શક વક્ર પરનાં બિંદુઓ $(2, 0)$ અને $(4, 4)$ ને જોડતી જીવાને સમાંતર હોય, તો તે સ્પર્શકનું સ્પર્શબિંદુ શોધો.
9. વક્ર $y = x^3 - 11x + 5$ ના કોઈ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક $y = x - 11$ હોય, તો વક્ર પરનું તે બિંદુ શોધો.
10. વક્ર $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ ને -1 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.
11. વક્ર $y = \frac{1}{x-3}$, $x \neq 3$ ને 2 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.
12. વક્ર $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ ને 0 ઢાળવાળા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.
13. વક્ર $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ના જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકો
    (i) X-અક્ષને સમાંતર હોય, (ii) Y-અક્ષને સમાંતર હોય તે બિંદુઓ શોધો.
14. નીચે આપેલ વક્રોને દર્શાવેલ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો શોધો :
    (i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ પરના $(0, 5)$ બિંદુ આગળ
    (ii) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ પરના $(1, 3)$ બિંદુ આગળ
    (iii) $y = x^3$ પરના $(1, 1)$ બિંદુ આગળ
    (iv) $y = x^2$ પરના $(0, 0)$ બિંદુ આગળ
    (v) $x = cos\,t$, $y = sin\,t$ પરના $t = \frac{\pi}{4}$ ને સંગત બિંદુ પર
15. વક્ર $y = x^2 - 2x + 7$ ના (a) રેખા $2x - y + 9 = 0$ ને સમાંતર તથા (b) રેખા $5y - 15x = 13$ ને લંબ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.
16. વક્ર $y = 7x^3 + 11$ ના $x = 2$ તથા $x = -2$ આગળના સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર છે તેમ સાબિત કરો.

17. વક્ર $y = x^3$ ના જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ તે બિંદુના y-યામ જેટલો હોય, તે બિંદુઓ શોધો.

18. વક્ર $y = 4x^3 - 2x^5$ ના ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા સ્પર્શકોનાં સ્પર્શબિંદુઓ શોધો.

19. વક્ર $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ નાં જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકો X-અક્ષને સમાંતર હોય, તે બિંદુઓ મેળવો.

20. વક્ર $ay^2 = x^3$ ના (am^2, am^3) બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ મેળવો.

21. $y = x^3 + 2x + 6$ ના રેખા $x + 14y + 4 = 0$ ને સમાંતર અભિલંબનાં સમીકરણો શોધો.

22. પરવલય $y^2 = 4ax$ ના $(at^2, 2at)$ બિંદુ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો મેળવો.

23. ***જો બે વક્રોના છેદબિંદુ આગળના સ્પર્શકો પરસ્પર લંબ હોય, તો તે બે વક્રો લંબચ્છેદી છે તેમ કહેવાય.***

જો $8k^2 = 1$ હોય, તો વક્રો $y^2 = x$ તથા $xy = k$ લંબચ્છેદી છે, તેમ સાબિત કરો.

24. અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ના (x_0, y_0) બિંદુ આગળના સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણો મેળવો.

25. વક્ર $y = \sqrt{3x-2}$ ના રેખા $4x - 2y + 5 = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

પ્રશ્નો 26 તથા 27 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

26. વક્ર $y = 2x^2 + 3\sin x$ ને $x = 0$ આગળ દોરેલ અભિલંબનો ઢાળ .... છે.

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

27. વક્ર $y^2 = 4x$ ના .... બિંદુ આગળનો સ્પર્શક $y = x + 1$ છે.

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1, –2) (D) (–1, 2)

6.5 આસન્ન મૂલ્યો

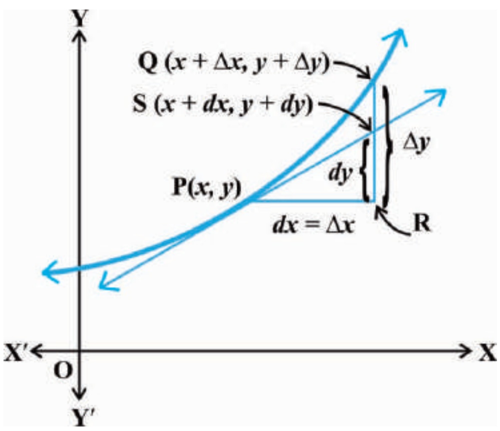
આ વિભાગમાં, આપણે કોઈ નિશ્ચિત રાશિનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધવા માટે વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

ધારો કે, $f : D \to R$, $D \subset R$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. વળી, $y = f(x)$ છે. ધારો કે x માં થતો સૂક્ષ્મ ફેરફાર એ Δx છે. x માં થતા સૂક્ષ્મ ફેરફારને અનુરૂપ y માં થતો સૂક્ષ્મ ફેરફાર Δy વડે દર્શાવાય.

તેને $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ દ્વારા મેળવી શકાય. આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યા આપીએ :

(i) dx વડે દર્શાવાતું x નું વિકલ $dx = \Delta x$ થી વ્યાખ્યાયિત થાય.

(ii) y નું વિકલ dy વડે દર્શાવાય છે. તેને



આકૃતિ 6.8

$dy = f'(x)\, dx$ અથવા $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$ થી દર્શાવી શકાય.

જો x ની સાથે તુલના કરીએ તો $dx = \Delta x$ તુલનાત્મક રીતે ઘણો નાનો છે તથા dy એ Δy નું આસન્ન મૂલ્ય છે. તેને $dy \approx \Delta y$ વડે દર્શાવાય.

Δx, Δy, dx અને dy ના ભૌમિતિક અર્થઘટન માટે, આકૃતિ 6.8 જુઓ.

☛ **નોંધ :** આકૃતિ 6.8 તથા ઉપર્યુક્ત ચર્ચાના સંદર્ભમાં આપણે નોંધીએ કે અવલંબી ચલનું વિકલ એ અવલંબી ચલમાં થતા વધારા જેટલું હોય તે આવશ્યક નથી. જ્યારે સ્વતંત્ર ચલનું વિકલ એ ચલમાં થતા વધારા જેટલું હોય છે.

ઉદાહરણ 21 : વિકલના ઉપયોગથી $\sqrt{36.6}$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = \sqrt{x}$; $x = 36$ તથા $\Delta x = 0.6$.

$$\therefore \quad \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$= \sqrt{36.6} - \sqrt{36}$$

$$= \sqrt{36.6} - 6$$

અથવા $\sqrt{36.6} = \Delta y + 6$

હવે, $dy \approx \Delta y$ છે અને $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \Delta x$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (0.6) \qquad (y = \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{36}} (0.6)$$

$$= 0.05$$

આથી, $\sqrt{36.6}$ નું આસન્ન મૂલ્ય $6 + 0.05 = 6.05$ છે.

ઉદાહરણ 22 : વિકલના ઉપયોગથી $(25)^{\frac{1}{3}}$ નું આસન્ન મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = x^{\frac{1}{3}}$; $x = 27$ તથા $\Delta x = -2$

$$\therefore \quad \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - (x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (25)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (25)^{\frac{1}{3}} - 3$$

$$\therefore \quad (25)^{\frac{1}{3}} = \Delta y + 3$$

હવે, $dy \approx \Delta y$ છે. $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \Delta x$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} (-2) \qquad (y = x^{\frac{1}{3}})$$

$$= \frac{1}{3((27)^{\frac{1}{3}})^2} (-2)$$

$$= \frac{-2}{27} = -0.074$$

$\therefore$ $(25)^{\frac{1}{3}}$ નું આસન્ન મૂલ્ય $3 + (-0.074) = 2.926$ છે.

ઉદાહરણ 23 : $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ હોય, તો $f(3.02)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x = 3$ અને $\Delta x = 0.02$

$$\therefore \quad f(3.02) = f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 3$$

વળી, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\therefore \quad f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$

$\approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ **($dx = \Delta x$)**

$\therefore \quad f(3.02) \approx (3x^2 + 5x + 3) + (6x + 5)\, \Delta x$

$= (3(3)^2 + 5(3) + 3) + (6(3) + 5)\,(0.02)$ **($x = 3, \Delta x = 0.02$)**

$= (27 + 15 + 3) + (18 + 5)\,(0.02)$

$= 45 + 0.46$

$= 45.46$

આથી, $f(3.02)$ નું આસન્ન મૂલ્ય 45.46 છે.

ઉદાહરણ 24 : જો સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર હોય તથા તેની બાજુની લંબાઈમાં 2 % નો વધારો થતો હોય, તો તેના ઘનફળમાં થતો ફેરફાર શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $V = x^3$

$$\Delta V \simeq \left(\frac{dV}{dx}\right) \cdot \Delta x$$

$= (3x^2) \cdot \Delta x$

$= (3x^2)\,(0.02x)$ **(x ના 2 % $= 0.02x$)**

$= 0.06\, x^3$ મી^{3}

$\therefore$ સમઘનના ઘનફળમાં થતો ફેરફાર $0.06\, x^3$ મી^{3} એટલે કે 6 %.

ઉદાહરણ 25 : ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં 0.03 સેમીની ત્રુટિ રહી ગયેલ છે. જો ગોલકની ત્રિજ્યા 9 સેમી માપવામાં આવી હોય, તો ગોલકના ઘનફળના માપનમાં આશરે કેટલી ત્રુટિ પ્રવેશે તે શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ગોલકની ત્રિજ્યા r તથા તેની ત્રિજ્યાના માપનમાં રહી ગયેલ ત્રુટિ Δr છે, જ્યારે $r = 9$ સેમી ત્યારે $\Delta r = 0.03$ સેમી છે.

હવે, ગોલકનું ઘનફળ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\therefore \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

આથી, $\Delta V \simeq \left(\frac{dV}{dr}\right) \cdot \Delta r$

$= 4\pi r^2 \cdot \Delta r$

$= 4\pi (9)^2\,(0.03)$

$= 9.72\, \pi$ સેમી^{3}

આથી, ગોલકના ઘનફળના માપમાં પ્રવેશતી ત્રુટિ $9.72\, \pi$ સેમી^{3} છે.

સ્વાધ્યાય 6.4

1. વિકલના ઉપયોગથી, નીચેનાં આસન્ન મૂલ્યો 3 દશાંશસ્થળ સુધી મેળવો :

(i) $\sqrt{25.3}$ (ii) $\sqrt{49.5}$ (iii) $\sqrt{0.6}$

(iv) $(0.009)^{\frac{1}{3}}$ (v) $(0.999)^{\frac{1}{10}}$ (vi) $(15)^{\frac{1}{4}}$

(vii) $(26)^{\frac{1}{3}}$ (viii) $(255)^{\frac{1}{4}}$ (ix) $(82)^{\frac{1}{4}}$

(x) $(401)^{\frac{1}{2}}$ (xi) $(0.0037)^{\frac{1}{2}}$ (xii) $(26.57)^{\frac{1}{3}}$

(xiii) $(81.5)^{\frac{1}{4}}$ (xiv) $(3.968)^{\frac{3}{2}}$ (xv) $(32.15)^{\frac{1}{5}}$

2. જો $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$ હોય, તો $f(2.01)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

3. જો $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$ હોય, તો $f(5.001)$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

4. એક સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. જો સમઘનની બાજુની લંબાઈમાં 1 % નો વધારો થતો હોય, તો તેના ઘનફળમાં થતા વધારાનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

5. એક સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. જો સમઘનની બાજુની લંબાઈમાં 1 % નો ઘટાડો થતો હોય, તો તેના પૃષ્ઠફળમાં આશરે કેટલો ઘટાડો થાય તે શોધો.

6. એક ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં 0.02 મીટર ત્રુટિ રહી ગયેલ છે. જો ગોલકની ત્રિજ્યા 7 મીટર માપવામાં આવી હોય, તો તેના ઘનફળમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

7. એક ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં 0.03 મીટર ત્રુટિ રહી ગયેલ છે. જો ગોલકની ત્રિજ્યા 9 મીટર માપવામાં આવી હોય, તો તેના પૃષ્ઠફળમાં પ્રવેશતી ત્રુટિનું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

પ્રશ્નો 8 તથા 9 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

8. જો $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$ હોય, તો $f(3.02)$નું આસન્ન મૂલ્ય .... હોય.

(A) 47.66 (B) 57.66 (C) 67.66 (D) 77.66

9. એક સમઘનની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. જો તેની બાજુની લંબાઈમાં 3 % નો વધારો થતો હોય, તો તેના ઘનફળમાં થતા વધારાનું આસન્ન મૂલ્ય .... છે.

(A) $0.06\, x^3$ (મીટર)^3 (B) $0.6\, x^3$ (મીટર)^3 (C) $0.09\, x^3$ (મીટર)^3 (D) $0.9\, x^3$ (મીટર)^3

6.6 મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો

આ વિભાગમાં, આપણે ભિન્ન વિધેયોનાં ઈષ્ટતમ મૂલ્યો શોધવા માટે વિકલિતની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીશું. હકીકતમાં, આપણે વિધેયના આલેખ પર *નિર્ણાયક બિંદુઓ* શોધીશું. આથી, વિધેયનો આલેખ તે નિર્ણાયક બિંદુઓ (કે સંખ્યા) આગળ *સ્થાનીય મહત્તમ (અથવા ન્યૂનતમ) (local maximum or minimum)* સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે. આવાં બિંદુઓ (અથવા સંખ્યા)નું જ્ઞાન આપેલ વિધેયનો આલેખ દોરવા માટે જરૂરી છે. વધુમાં, આપણે આપેલ વિધેયના વ્યાવહારિક કૂટપ્રશ્નોના ઉકેલ માટે ઉપયોગી હોય તેવા *વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) (global or absolute) મહત્તમ* અને *વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ* મૂલ્યો શોધીશું.

ચાલો, આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે, રોજિંદા જીવનમાં ઉદ્ભવતી સમસ્યાઓ ધ્યાનમાં લઈએ :

(i) જમીનમાં પ્રતિ એકર થતા નારંગીના વૃક્ષની સંખ્યા x હોય અને નારંગીના વૃક્ષના વેચાણથી થતો નફો $P(x) = ax + bx^2$; (a, b અચળ) હોય, તો મહત્તમ નફો મેળવવા માટે જમીનમાં પ્રતિ એકર નારંગીના કેટલાં વૃક્ષ વાવવા જોઈએ ?

(ii) 60 મીટર ઊંચા મકાનની છત પરથી એક દડાને હવામાં ફેંકવામાં આવે છે. તે $f(x) = 60 + x - \frac{x^2}{60}$ ના માર્ગે મુસાફરી કરે છે. અહીં, x એ દડાનું મકાનથી સમક્ષિતિજ અંતર તથા $h(x)$ એ દડાની ઊંચાઈ હોય, તો દડો મહત્તમ કેટલી ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરે ?

(iii) દુશ્મનનું એક (અપાચે) હેલિકૉપ્ટર વક્ર $f(x) = x^2 + 7$ના માર્ગે હવામાં ઊડે છે. બિંદુ (1, 2) આગળ ઊભેલ સૈનિક, જ્યારે હેલિકૉપ્ટર તેની એકદમ નજીક હોય ત્યારે તેને ગોળીથી વીંધવા ઇચ્છે છે, તો આ ન્યૂનતમ અંતર શું હોઈ શકે ?

ઉપર્યુક્ત તમામ કૂટપ્રશ્નોમાં કંઈક સામ્યતા રહેલી છે, એટલે કે આપણે આપેલ વિધેયનાં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધવા ઇચ્છીએ છીએ. સામાન્ય રીતે, આવી સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે, સૌપ્રથમ આપણે વિધેયનાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો, સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં નિર્ણાયક બિંદુઓ અને આવાં બિંદુઓ નક્કી કરવા માટેની કસોટીઓ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

વ્યાખ્યા 3 : ધારો કે f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

(a) કોઈ સંખ્યા $c \in$ I એવી મળે કે જેથી પ્રત્યેક $x \in$ I માટે, $f(c) \geq f(x)$ થાય, તો વિધેય f એ I માં મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે છે તેમ કહેવાય.

આ સંજોગોમાં, $f(c)$ ને વિધેય f ની I માં મહત્તમ કિંમત કહે છે તથા c ને વિધેય f ની I માં મહત્તમ કિંમત માટેની સંખ્યા કહે છે.

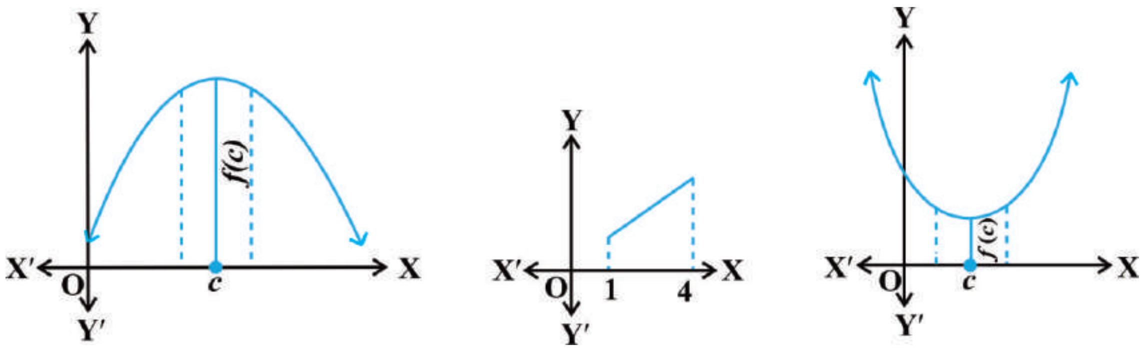
(b) કોઈ સંખ્યા c એવી મળે કે જેથી પ્રત્યેક $x \in$ I માટે, $f(c) \leq f(x)$ થાય તો, વિધેય f એ I માં ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે છે તેમ કહેવાય.

આ સંજોગોમાં, $f(c)$ ને વિધેય f ની I માં ન્યૂનતમ કિંમત કહે છે તથા c ને વિધેય f ની I માં ન્યૂનતમ કિંમત માટેની સંખ્યા કહે છે.

(c) કોઈ સંખ્યા $c \in$ I એવી મળે કે જેથી $f(c)$ એ વિધેય f ની I માં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમત હોય તો વિધેય f એ I માં આત્યંતિક મૂલ્ય ધરાવે છે તેમ કહેવાય.

આ સંજોગોમાં, $f(c)$ ને વિધેય f નું I માં આત્યંતિક મૂલ્ય કહે છે તથા સંખ્યા c ને આત્યંતિક સંખ્યા કહે છે.

નોંધ : અમુક વિશિષ્ટ વિધેયોના આલેખો આકૃતિ 6.9 (i), (ii) તથા (iii) માં દર્શાવેલ છે. તે આપણને વિધેય કયા બિંદુ આગળ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય દર્શાવે છે તે શોધવા માટે મદદ કરે છે. હકીકતે, આલેખ દ્વારા, આપણે વિધેય વિકલનીય ન હોય તેમ છતાં પણ વિધેયના તે બિંદુ આગળ મહત્તમ/ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધી શકીએ છીએ. (ઉદાહરણ 27 જુઓ.)



(i) (ii) (iii)

આકૃતિ 6.9

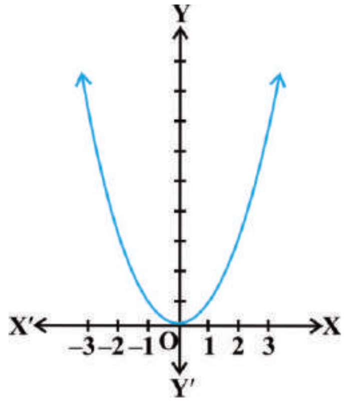
ઉદાહરણ 26 : વિધેય $f(x) = x^2$; $x \in R$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિધેયના આલેખ (આકૃતિ 6.10) પરથી,

જો $x = 0$ તો $f(x) = 0$.

વળી, $f(x) \geq 0$; $\forall x \in R$

આથી, f નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 0 છે અને આ ન્યૂનતમ મૂલ્ય $x = 0$ આગળ મળે છે. વધુમાં, વિધેયના આલેખ પરથી જોઈ શકાય છે કે, f ને મહત્તમ મૂલ્ય નથી. આથી, f ને R માં x ની કોઈ પણ કિંમત આગળ મહત્તમ મૂલ્ય નથી.



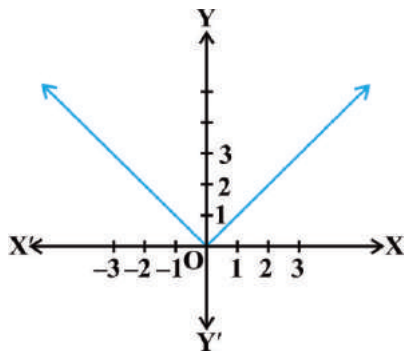
આકૃતિ 6.10

☛ નોંધ : જો આપણે વિધેય f નો પ્રદેશ માત્ર $[-2, 1]$ સુધી જ મર્યાદિત કરીએ, તો f ની $x = -2$ આગળ મહત્તમ કિંમત $(-2)^2 = 4$ મળે.

ઉદાહરણ 27 : જો વિધેય $f(x) = |x|$, $x \in R$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યોનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપણે આપેલ વિધેયના આલેખ (આકૃતિ 6.11) પરથી નોંધીએ કે, $f(x) \geq 0$; $\forall x \in R$ અને જો $x = 0$ તો $f(x) = 0$.

આથી, f નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 0 છે અને $x = 0$ આગળ આ ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે છે. વળી, વિધેય f ના આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, f ને R માં મહત્તમ મૂલ્ય નથી. આથી, f ને R માં x ની કોઈ પણ કિંમત આગળ મહત્તમ મૂલ્ય નથી.



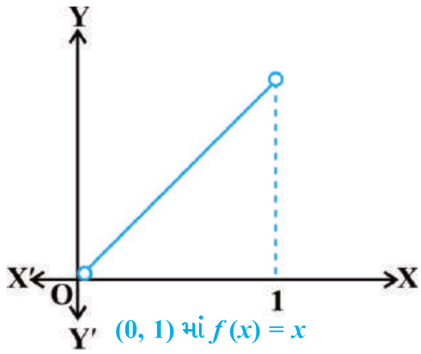
આકૃતિ 6.11

☛ નોંધ : (1) જો આપણે વિધેયનો પ્રદેશ માત્ર $[-2, 1]$ સુધી જ મર્યાદિત કરીએ, તો વિધેય f નું મહત્તમ મૂલ્ય $|-2| = 2$ મળે.

(2) ઉદાહરણ 27 માં આપણે નોંધીશું કે વિધેય f એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

ઉદાહરણ 28 : જો વિધેય $f(x) = x$, $x \in (0, 1)$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિધેય f એ અંતરાલ $(0, 1)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. વિધેય f ના આલેખ (આકૃતિ 6.12) પરથી, જોઈ શકાય છે કે, f ને શૂન્યની જમણી તરફ, 0 ની નજીક કોઈ સંખ્યા આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય તેમ લાગે છે તથા 1ની ડાબી તરફ, 1ની સૌથી નજીક કોઈ સંખ્યા આગળ મહત્તમ મૂલ્ય હોય તેવું લાગે છે. શું આવાં બિંદુઓ ઉપલબ્ધ છે ? ના, તે નથી. આવાં બિંદુઓ દર્શાવવાં શક્ય નથી. હકીકતમાં, જો x_0 એ શૂન્યની નજીક હોય, તો આપણે પ્રત્યેક $x_0 \in (0, 1)$ માટે, $\frac{x_0}{2} < x_0$ મેળવી શકીશું. વળી, જો x_1 એ 1 ની નજીક હોય, તો પ્રત્યેક $x_1 \in (0, 1)$ માટે, આપણે $\frac{x_1 + 1}{2} > x_1$ મેળવી શકીશું.



આકૃતિ 6.12

આથી, આપેલ વિધેય f ને અંતરાલ (0, 1) માં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી.

નોંધ : વાચકે ઉદાહરણ 28માં નોંધ્યું હશે કે, જો આપણે વિધેય f ના પ્રદેશમાં સંખ્યાઓ 0 અને 1નો સમાવેશ કરીએ, એટલે કે જો આપણે વિધેય f નો પ્રદેશ [0, 1] સુધી વિસ્તારીએ, તો વિધેય f ને $x = 0$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય તથા $x = 1$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય છે. હકીકતમાં, આપણી પાસે નીચેનું પરિણામ છે વર્તમાન પાઠ્યપુસ્તકમાં આ પરિણામની સાબિતીને અવકાશ નથી.

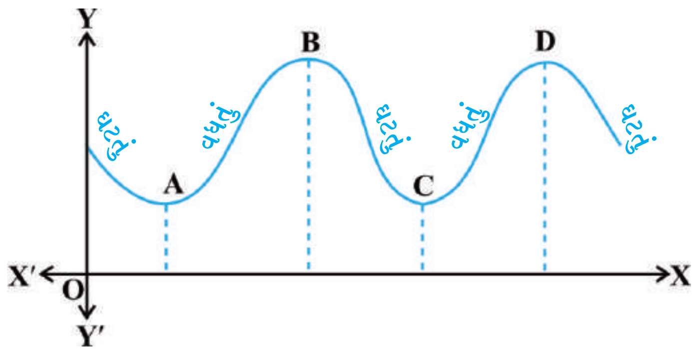
પ્રત્યેક વધતું (અથવા ઘટતું) વિધેય તે જેમાં વ્યાખ્યાયિત છે તે પ્રદેશનાં અંત્યબિંદુઓ આગળ મહત્તમ (અથવા ન્યૂનતમ) મૂલ્ય ધારણ કરે. (પ્રદેશ કોઈક સંવૃત અંતરાલ છે.)

વ્યાપક પરિણામ : *જો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત હોય તો તેને તેના પ્રદેશમાં મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય.*

☛ **નોંધ :** અંતરાલ I માં વ્યાખ્યાયિત એકસૂત્રી વિધેય f એટલે વિધેય f એ અંતરાલ I માં વધતું વિધેય છે અથવા ઘટતું વિધેય છે.

હવે, આ વિભાગમાં, $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયનાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો અંગેની ચર્ચા કરીશું.

ચાલો, આપણે આકૃતિ 6.13 માં દર્શાવેલ વિધેયના આલેખને ચકાસીએ. જુઓ કે, આલેખ પરનાં બિંદુઓ A, B, C અને D આગળ વિધેયનો પ્રકાર ઘટતાંથી વધતાં અથવા વધતાંથી ઘટતાં એ પ્રમાણે બદલાય છે. આ બિંદુઓને આપેલ વિધેયનાં **નિર્ણાયક બિંદુઓ** કહે છે. વધુમાં જુઓ કે, આ નિર્ણાયક બિંદુઓ આગળ આલેખ નાની **ટેકરી (શૃંગ)** અથવા **નાની ખીણ (ગર્ત)** સ્વરૂપે છે. ટૂંકમાં, વિધેયને બિંદુઓ A અને C આગળ (અનુક્રમે તેમની ખીણના તળિયે) કોઈક સામીપ્યમાં (અંતરાલમાં) ન્યૂનતમ કિંમત છે. આ જ રીતે, વિધેયને બિંદુઓ B અને D આગળ (અનુક્રમે ટેકરીના મથાળે) કોઈક સામીપ્યમાં મહત્તમ કિંમત છે. આ કારણે, બિંદુઓ A અને C ને વિધેયનાં સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (અથવા સંબંધિત ન્યૂનતમ મૂલ્ય) તથા બિંદુઓ B અને D ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (અથવા સંબંધિત મહત્તમ મૂલ્ય) કહે છે. વિધેયનાં સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યને અનુક્રમે સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ કહીશું.



આકૃતિ 6.13

હવે, આપણે નીચે પ્રમાણેની વ્યાખ્યા વિધિવત્ રીતે આપીએ.

વ્યાખ્યા 4 : *ધારો કે સંખ્યા c વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશમાં આવેલ છે.*

(a) જો ધન સંખ્યા h એવી મળે કે જેથી, પ્રત્યેક $x \in (c - h, c + h)$ માટે, $f(c) \geq f(x)$ થાય તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

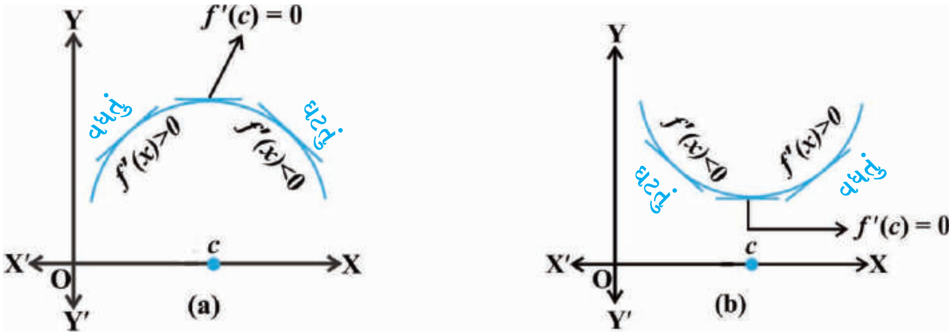
$f(c)$ને f ની સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત કહે છે.

(b) જો ધન સંખ્યા h એવી મળે કે જેથી પ્રત્યેક $x \in (c - h, c + h)$ માટે, $f(c) \leq f(x)$ થાય, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ ને f ની સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત કહે છે.

નોંધ : $(c - h, c + h)$ વિધેયના પ્રદેશનો ઉપગણ હોય, તે જરૂરી છે.

ભૌમિતિક રીતે, ઉપર્યુક્ત વ્યાખ્યા સૂચવે છે કે, જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય હોય, તો વિધેય f નો આલેખ c ની આસપાસ આકૃતિ 6.14(a) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો હશે. અહીં નોંધીએ કે, વિધેય f અંતરાલ $(c - h, c)$ માં વધે છે (એટલે કે, $f'(x) > 0$) તથા અંતરાલ $(c, c + h)$ માં ઘટે છે. (એટલે કે, $f'(x) < 0$).

તે સૂચવે છે કે $f'(c) = 0$.



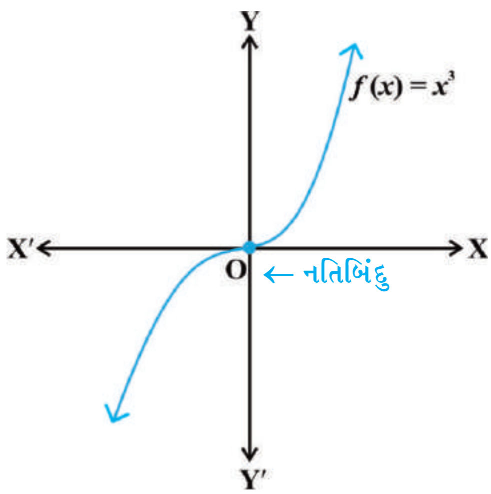
આકૃતિ 6.14

આ જ રીતે, જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો વિધેય f નો આલેખ c ની આસપાસ આકૃતિ 6.14(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો હોય. અહીં વિધેય f એ અંતરાલ $(c - h, c)$ માં ઘટે છે. (એટલે કે, $f'(x) < 0$) તથા અંતરાલ $(c, c + h)$ માં વધે છે (એટલે કે, $f'(x) > 0$). આ પણ સૂચવે છે કે $f'(c) = 0$.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા આપણને નીચેના પ્રમેય તરફ દોરી જાય છે. (આ પ્રમેયને સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું.)

પ્રમેય 2 : *ધારો કે f એ $I = (a, b)$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે તથા $c \in I$. જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો $f'(c) = 0$ અથવા f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય નથી.*

નોંધ : ઉપર્યુક્ત પ્રમેયનું પ્રતીપ સત્ય હોય તે જરૂરી નથી. એટલે કે કોઈ બિંદુ આગળ વિકલિત શૂન્ય થઈ જાય તો તે બિંદુ આગળ વિધેયનું સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ હોય તે જરૂરી નથી. ઉદાહરણ તરીકે, જો $f(x) = x^3$ તો $f'(x) = 3x^2$ અને આથી, $f'(0) = 0$. પરંતુ વિધેય f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. (આકૃતિ 6.15 જુઓ.)



આકૃતિ 6.15

☛ નોંધ : કોઈ પ્રદેશ D_f પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે, જો $c \in D_f$ હોય તો, $f'(c) = 0$ અથવા f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય ન હોય, તો c ને f ની નિર્ણાયક સંખ્યા કહે છે. અહીં નોંધીએ કે, વિધેય f એ $x = c$ આગળ સતત હોય અને $f'(c) = 0$ હોય, તો કોઈક $h > 0$ માટે વિધેય f એ અંતરાલ $(c - h, c + h)$ માં વિકલનીય હોય.

હવે, આપણે માત્ર પ્રથમ કક્ષાના વિકલિતોના ઉપયોગથી વિધેયના સ્થાનીય મહત્તમ અથવા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (કે x ની કિંમતો) શોધવા માટેના કાર્યનિયમ આપીશું.

પ્રમેય 3 : (પ્રથમ વિકલિત કસોટી) : ધારો કે f એ $I = (a, b)$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. $c \in I$ એ f ની નિર્ણાયક સંખ્યા છે તથા f એ c આગળ સતત છે.

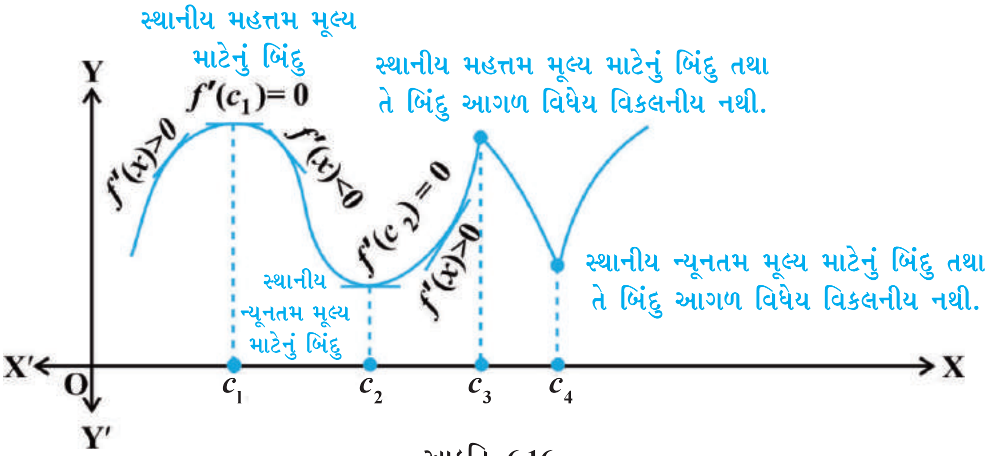
(i) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ નાં મૂલ્ય ધનમાંથી ઋણ થાય, એટલે કે, કોઈ ધન સંખ્યા h માટે જો $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) > 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) < 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ નાં મૂલ્ય ઋણમાંથી ધન બને, એટલે કે, જો કોઈ ધન સંખ્યા h માટે $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) < 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) > 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) જો $f'(x)$ એ $x = c$ આગળ તેનાં મૂલ્યો (ધનમાંથી ઋણ કે ઋણમાંથી ધન) ન બદલે તો f ને $x = c$ માટે સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે. હકીકતમાં, આવા બિંદુને નતિબિંદુ (Point of Inflection) કહે છે. (આકૃતિ 6.15 જુઓ.)

> **☛ નોંધ :** જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય હોય, તો $f(c)$ ને વિધેય fનું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય કહે છે. આ જ રીતે, જો વિધેય f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો $f(c)$ ને વિધેય fનું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કહે છે.

આકૃતિઓ 6.15 અને 6.16, પ્રમેય 3ની ભૌમિતિક સમજ આપે છે.



આકૃતિ 6.16

ઉદાહરણ 29 : વિધેય $f(x) = x^3 - 3x + 3$ નાં સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = x^3 - 3x + 3$

$$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$= 3(x - 1)(x + 1)$$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = -1$ અથવા $x = 1$ મળે.

આથી, $x = \pm 1$ એ વિધેય fનાં સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેની નિર્ણાયક સંખ્યાઓ છે. ચાલો, સૌપ્રથમ આપણે $x = 1$ આગળ ચકાસણી કરીએ.

નોંધીએ કે, જેમ $x \to 1_+$ તેમ $f'(x) > 0$ તથા જેમ $x \to 1_-$ તેમ $f'(x) < 0$. આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, f એ $x = 1$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે અને વિધેય f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(1) = 1$ છે. હવે $x = -1$ના કિસ્સામાં, નોંધો કે, જેમ $x \to -1_-$ તેમ $f'(x) > 0$ તથા જેમ $x \to -1_+$ તેમ $f'(x) < 0$. આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, f ને $x = -1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા વિધેય f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $f(-1) = 5$ છે.

x ની કિંમતો		$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ની નિશાની
1ની નજીક	1_+ (ઉદાહરણ તરીકે, 1.1)	> 0
	1_- (ઉદાહરણ તરીકે, 0.9)	< 0
-1ની નજીક	-1_+ (ઉદાહરણ તરીકે, -0.9)	< 0
	-1_- (ઉદાહરણ તરીકે, -1.1)	> 0

ઉદાહરણ 30 : વિધેય $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ને જે સંખ્યાઓ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$

$= 6(x-1)^2$

$\therefore \quad x = 1$ આગળ $f'(x) = 0$

આથી, માત્ર $x = 1$ એ જ વિધેય f ની નિર્ણાયક સંખ્યા છે. હવે, આપણે આ સંખ્યા માટે વિધેય f ના સ્થાનીય મહત્તમ અને/અથવા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટે તપાસ કરીએ. નોંધો કે, પ્રત્યેક $x \in R$ માટે, $f'(x) \geq 0$ અને વિશેષમાં, જેમ $x \to 1_-$ તથા $x \to 1_+$ તેમ $f'(x) > 0$. આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, વિધેયને $x = 1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. આથી, $x = 1$ એ નતિબિંદુ છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 30 માં જોઈ ગયાં કે, $f'(x)$ એ R માં તેની નિશાની બદલતું નથી. તેમજ વિધેય f ના આલેખને વળાંક (સંક્રાંતિ બિંદુ) નથી. આથી, વિધેય x ની કોઈ કિંમત આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવતું નથી.

હવે, આપણે આપેલ વિધેયના સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો ચકાસવા માટે બીજી કસોટી આપીશું. પ્રથમ વિકલિત કસોટી કરતાં આ કસોટીનો વધુ સરળતાથી ઉપયોગ કરી શકાય છે.

પ્રમેય 4 : *(દ્વિતીય વિકલિત કસોટી) : ધારો કે વિધેય f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત છે તથા $c \in$ I. ધારો કે $f''(c)$નું અસ્તિત્વ છે.*

(i) જો $f''(c) < 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $f''(c) > 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) જો $f''(c) = f'(c) = 0$ તો કસોટી કોઈ પણ તારણ આપવામાં નિષ્ફળ જાય છે.

(iii) ના જેવા સંજોગોમાં, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું અને $x = c$ આગળ વિધેયને સ્થાનીય મહત્તમ, સ્થાનીય ન્યૂનતમ કે નતિબિંદુ છે તે નક્કી કરીશું.

> **☛ નોંધ :** $f''(c)$ નું અસ્તિત્વ છે એનો અર્થ એ થયો કે, વિધેય fનું $x = c$ આગળ દ્વિતીય કક્ષાનું વિકલિત અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 31 : વિધેય $f(x) = 3 + |x|$, $x \in R$ નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : નોંધીશું કે આપેલ વિધેય $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી. આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી નિષ્ફળ જાય છે. ચાલો, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી અજમાવીએ. નોંધીએ કે fની નિર્ણાયક સંખ્યા 0 છે.

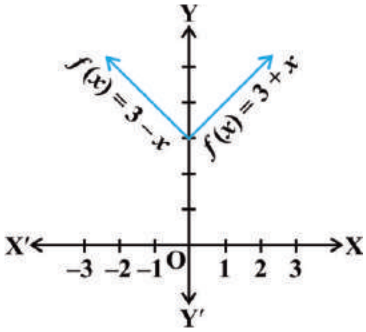
હવે, $x < 0$ માટે, $f(x) = 3 - x$.

તેથી, $f'(x) = -1 < 0$ મળે.

વળી, $x > 0$ માટે, $f(x) = 3 + x$

તેથી, $f'(x) = 1 > 0$

આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે અને f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 3$ છે.



આકૃતિ 6.17

નોંધ : $|x| \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 3$. આથી, $x = 0$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 3$ મળે.

ઉદાહરણ 32 : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ નાં સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$

$$\therefore \quad f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$$

$$= 12x(x + 2)(x - 1)$$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 0$, $x = 1$ અને $x = -2$ મળે.

વળી, $f''(x) = 36x^2 + 24x - 24$

$$= 12(3x^2 + 2x - 1)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} f''(0) = -12 < 0 \\ f''(1) = 48 > 0 \\ f''(-2) = 84 > 0 \end{cases}$$

આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી પરથી, વિધેય f ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $f(0) = 12$ છે. વળી, $x = 1$ તેમજ $x = -2$ આગળ વિધેય f ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો છે. તે અનુક્રમે $f(1) = 7$ અને $f(-2) = -20$ છે.

ઉદાહરણ 33 : વિધેય $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ને જે સંખ્યાઓ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

$$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$$

$$= 6(x - 1)^2$$

અથવા $f''(x) = 12(x - 1)$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 1$ મળે. પણ $f''(1) = 0$

આથી, આ કિસ્સામાં દ્વિતીય વિકલિત કસોટી નિષ્ફળ જાય છે. આથી, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું.

અગાઉ ઉદાહરણ 30 માં, પ્રથમ વિકલિત કસોટીના ઉપયોગથી જોઈ ગયાં છીએ કે, $x = 1$ આગળ વિધેયને સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. આથી, $x = 1$ એ નતિબિંદુ છે.

ઉદાહરણ 34 : જેમનો સરવાળો 15 હોય તથા જેમના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય એવી બે ધન સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે સંખ્યાઓ પૈકીની એક સંખ્યા x છે. આથી, બીજી સંખ્યા $(15 - x)$ થાય. ધારો કે $S(x)$ એ આ બે સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો દર્શાવે છે. આથી,

$$S(x) = x^2 + (15 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 30x + 225$$

$$\therefore \quad S'(x) = 4x - 30$$

$$\therefore \quad S''(x) = 4$$

હવે, $S'(x) = 0$ લેતાં, $x = \frac{15}{2}$ મળે. વળી, $S''\left(\frac{15}{2}\right) = 4 > 0$

આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી પરથી, $x = \frac{15}{2}$ આગળ S સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે. આથી, જ્યારે સંખ્યાઓ $\frac{15}{2}$ તથા $15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ હોય, ત્યારે તેમના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય.

નોંધ : ઉદાહરણ 34ની જેમ સાબિત કરી શકાય કે, બે ધન સંખ્યાઓનો સરવાળો k હોય તથા તેમના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય તો તે સંખ્યાઓ $\frac{k}{2}, \frac{k}{2}$ છે.

જો $x + y = k$ તો $S(x) = x^2 + (k - x)^2 = \frac{(2x-k)^2}{2} + \frac{k^2}{2}$ ન્યૂનતમ થવા માટે $x = \frac{k}{2}$.

ઉદાહરણ 35 : $0 \le c \le 5$ હોય, તો પરવલય $y = x^2$થી બિંદુ $(0, c)$ નું ન્યૂનતમ અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પરવલય $y = x^2$ પરનું કોઈ બિંદુ (h, k) છે.

ધારો કે બિંદુઓ (h, k) તથા $(0, c)$ વચ્ચેનું અંતર D છે.

$$\therefore \quad D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2}$$

$$= \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \qquad \text{...(1)}$$

વળી, બિંદુ (h, k), પરવલય $y = x^2$ પર હોવાથી, $k = h^2$ મળે.

આથી, (1) પરથી,

$$D \equiv D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

$$\therefore \quad D'(k) = \frac{1 + 2(k-c)}{2\sqrt{k + (k-c)^2}}$$

$D'(k) = 0$ લેતાં, $k = \frac{2c-1}{2}$ મળે.

જુઓ, કે જ્યારે $k < \frac{2c-1}{2}$ હોય, ત્યારે $1 + 2(k - c) < 0$. એટલે કે, $D'(k) < 0$.

પણ જ્યારે $k > \frac{2c-1}{2}$ હોય, ત્યારે $D'(k) > 0$.

આથી, પ્રથમ વિકલિત કસોટી પરથી, $k = \frac{2c-1}{2}$ માટે $D(k)$ ન્યૂનતમ છે.

આથી, માંગેલ ન્યૂનતમ અંતર $D\left(\frac{2c-1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2c-1}{2} + \left(\frac{2c-1}{2} - c\right)^2} = \frac{\sqrt{4c-1}}{2}$

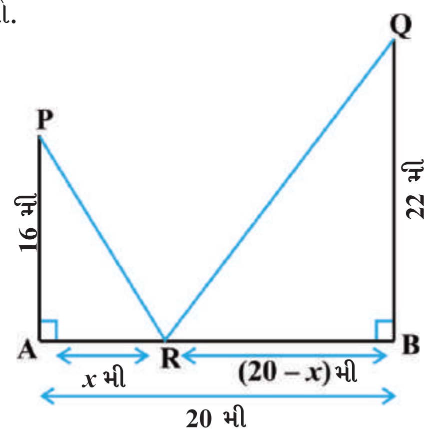
☛ નોંધ : વાચકે નોંધ્યું હશે કે, ઉદાહરણ 35 માં આપણે અગાઉની જેમ દ્વિતીય વિકલિત કસોટીને બદલે પ્રથમ વિકલિત કસોટીનો ઉપયોગ કરેલ છે. અહીં તે ટૂંકી અને સરળ છે.

ઉદાહરણ 36 : ધારો કે બિંદુઓ A તથા B આગળ અનુક્રમે AP તથા BQ એમ બે શિરોલંબ સ્તંભ છે. જો AP = 16 મીટર, BQ = 22 મીટર અને AB = 20 મીટર હોય, તો $RP^2 + RQ^2$ ન્યૂનતમ થાય તે શરત અનુસાર મળતા $\overline{AB}$ પરના બિંદુ R નું બિંદુ A થી અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે R એ AB પર માંગ્યા પ્રમાણેનું બિંદુ છે.

AR = x મીટર

$\therefore$ RB = $(20 - x)$ મીટર **(AB = 20 મીટર)**



આકૃતિ 6.18

આકૃતિ 6.18 પરથી,

$RP^2 = AR^2 + AP^2$

અને $RQ^2 = RB^2 + BQ^2$

$$\therefore \quad RP^2 + RQ^2 = AR^2 + AP^2 + RB^2 + BQ^2$$
$$= x^2 + (16)^2 + (20 - x)^2 + (22)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 1140$$

ધારો કે $S \equiv S(x) = RP^2 + RQ^2 = 2x^2 - 40x + 1140$

$\therefore \quad S'(x) = 4x - 40$

હવે $S'(x) = 0$ લેતાં, $x = 10$ મળે. તેમજ $S''(x) = 4 > 0, \forall x$

અને તેથી $S''(10) > 0$

આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી પરથી, $x = 10$ આગળ S ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. આથી, $RP^2 + RQ^2$ ન્યૂનતમ બને તે માટે $\overline{AB}$ પરના બિંદુ Rનું બિંદુ Aથી અંતર AR = x = 10 મીટર.

ઉદાહરણ 37 : જો સમલંબ ચતુષ્કોણની આધાર સિવાયની ત્રણેય બાજુઓ પૈકી પ્રત્યેકની લંબાઈ 10 સેમી હોય, તો તે સમલંબ ચતુષ્કોણનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : માંગેલ સમલંબ ચતુષ્કોણ આકૃતિ 6.19 માં દર્શાવેલ છે.

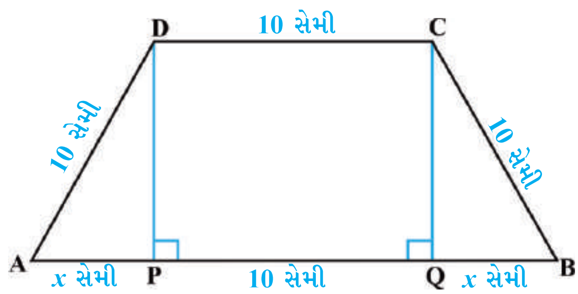
$\overline{AB}$ પર લંબ $\overline{DP}$ તથા $\overline{CQ}$ દોરો.

ધારો કે AP = x સેમી

અહીં, $\Delta APD \cong \Delta BQC$

આથી, QB = x સેમી

પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી,



આકૃતિ 6.19

$$DP = QC = \sqrt{100 - x^2}$$

ધારો કે, સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ S છે.

$$\therefore \quad S \equiv S(x) = \frac{1}{2}(\text{સમાંતર બાજુઓનો સરવાળો})(\text{ઊંચાઈ})$$
$$= \frac{1}{2}(2x + 10 + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$$
$$= (x + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$$

$$\therefore \quad S'(x) = (x + 10)\frac{(-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}} + (\sqrt{100 - x^2})$$

$$= \frac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100 - x^2}}$$

હવે, $S'(x) = 0$ લેતાં, $2x^2 + 10x - 100 = 0$ એટલે કે, $x = 5$ તથા $x = -10$ મળે.

પરંતુ x એ અંતર દર્શાવે છે. તે ઋણ ન હોઈ શકે. આથી, $x = 5$.

નોંધ : $S''(5) = \frac{-4x - 10}{\sqrt{100 - x^2}}$

$$= \frac{-30}{5\sqrt{3}} < 0$$

કારણ કે ગુણાકારના નિયમથી વિકલન કરતાં બીજું પદ તો $x = 5$ માટે શૂન્ય જ છે.

હવે, $$S''(x) = \frac{\sqrt{100 - x^2}(-4x - 10) - (-2x^2 - 10x + 100)\frac{(-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 300x - 1000}{(100 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$ (સાદું રૂપ આપતાં)

અથવા $$S''(5) = \frac{2(5)^3 - 300(5) - 1000}{(100 - (5)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2250}{75\sqrt{75}} = \frac{-30}{\sqrt{75}} < 0$$

આથી, $x = 5$ આગળ સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

$\therefore$ મહત્તમ ક્ષેત્રફળ $S(5) = (5 + 10)\sqrt{100 - (5)^2}$

$= 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3}$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 38 : જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય તેવા આપેલ શંકુને અંતર્ગત લંબવૃત્તીય નળાકારની ત્રિજ્યા એ આપેલ શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા કરતાં અડધી છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે OC $= r =$ શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને OA $= h =$ શંકુની ઊંચાઈ

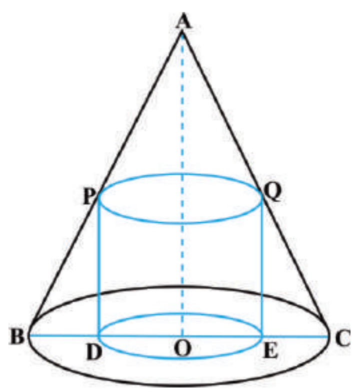
ધારો કે આપેલ શંકુને અંતર્ગત નળાકારની ત્રિજ્યા OE $= x$ (આકૃતિ 6.20)

નળાકારની ઊંચાઈ = QE

$$\therefore \quad \frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC} \qquad (\Delta QEC \sim \Delta AOC)$$

$$\therefore \quad \frac{QE}{h} = \frac{r - x}{r}$$

$$\therefore \quad QE = \frac{h(r - x)}{r}$$



આકૃતિ 6.20

ધારો કે નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S છે.

$$\therefore \quad S \equiv S(x) = \frac{2\pi xh(r - x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} S'(x) = \frac{2\pi h}{r}(r - 2x) \\ S''(x) = \frac{-4\pi h}{r} \end{cases}$$

હવે, $S'(x) = 0$ લેતાં, $x = \frac{r}{2}$ મળે. વળી, પ્રત્યેક x માટે, $S''(x) < 0$ અને તેથી $S''\left(\frac{r}{2}\right) < 0$.

આથી, $x = \frac{r}{2}$ આગળ S મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે.

આથી, આપેલ શંકુને અંતર્ગત જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય તેવા લંબવૃત્તીય નળાકારની ત્રિજ્યા એ શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા કરતાં અડધી છે.

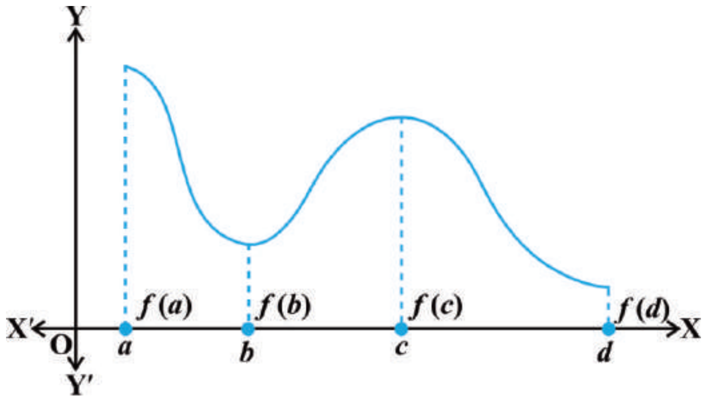
6.6.1 સંવૃત અંતરાલમાં વ્યાખ્યાયિત વિધેયનાં આત્યંતિક મૂલ્યો

ધારો કે $f(x) = x + 2$, $x \in (0, 1)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે.

જુઓ કે, વિધેય f એ $(0, 1)$ પર સતત છે અને તેને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. વધુમાં, આપણે નોંધીશું કે વિધેયને સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય પણ નથી.

તેમ છતાં પણ, જો વિધેયનો પ્રદેશ $[0, 1]$ સુધી વિસ્તારીએ, તો વિધેય f ને સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો તો ન જ મળે. પરંતુ તેને મહત્તમ મૂલ્ય $f(1) = 3$ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(0) = 2$ મળે. વિધેય f ની $x = 1$ આગળની મહત્તમ કિંમત 3 ને અંતરાલ $[0, 1]$ પર વિધેય f નું ***નિરપેક્ષ મહત્તમ મૂલ્ય (વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય) (Absolute or Global maximum value)*** કહે છે. આ જ રીતે, વિધેય f ની $x = 0$ આગળની ન્યૂનતમ કિંમત 2 ને વિધેય f નું અંતરાલ $[0, 1]$ પરનું ***નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ મૂલ્ય (વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય) (Absolute or Global minimum value)*** કહે છે.

આકૃતિ 6.21માં સંવૃત અંતરાલ $[a, d]$ પર વ્યાખ્યાયિત સતત વિધેયનો આલેખ આપેલ છે. નોંધીશું કે, વિધેય f ને $x = b$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે અને f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(b)$ છે. વળી, $x = c$ આગળ વિધેય f ને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.



આકૃતિ 6.21

વળી, આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, વિધેય f ને વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય $f(a)$ તથા વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્ય $f(d)$ છે. વધુમાં, નોંધીએ કે વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ (કે ન્યૂનતમ) મૂલ્ય એ f ના સ્થાનીય મહત્તમ (કે ન્યૂનતમ) મૂલ્ય કરતાં જુદું પડી શકે છે.

હવે, આપણે સંવૃત અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયના વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય અને વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્યોને સંબંધિત નીચેના બે પ્રમેયો (સાબિતી વગર) સ્વીકારીશું.

પ્રમેય 5 : *ધારો કે f એ સંવૃત અંતરાલ $I = [a, b]$ પર સતત વિધેય છે. વિધેય f એ ઓછામાં ઓછી કોઈ એક સંખ્યા $c \in I = [a, b]$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય તથા કોઈ એક સંખ્યા $d \in I = [a, b]$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરે.*

પ્રમેય 6 : *ધારો કે f એ સંવૃત અંતરાલ $I = [a, b]$ પર વિકલનીય છે તથા કોઈ એક સંખ્યા $c \in (a, b)$ માટે,*

(i) જો f એ $x = c$ આગળ નિરપેક્ષ મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે, તો $f'(c) = 0$.

(ii) જો f એ $x = c$ આગળ નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરે, તો $f'(c) = 0$.

ઉપર્યુક્ત પ્રમેયોના સંદર્ભમાં, સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેયનાં વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય અને/અથવા વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધવા માટે આપણે નીચેનો કાર્યનિયમ ધ્યાનમાં લઈશું.

કાર્યનિયમ :

સોપાન 1 : *આપેલ સંવૃત અંતરાલમાં વિધેય f ની તમામ નિર્ણાયક સંખ્યાઓ શોધો. આપણે જ્યાં $f'(x) = 0$ હોય અથવા વિધેય f એ x આગળ વિકલનીય ન હોય તેવી x ની કિંમતો શોધીશું.*

સોપાન 2 : *અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓ આગળ વિધેય f ની કિંમત શોધો. નિર્ણાયક સંખ્યાઓ આગળ શક્ય હોય, તો સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ હોય તેવી સંખ્યાઓ પસંદ કરો.*

સોપાન 3 : *આ તમામ બિંદુઓ (સોપાન 1 તથા સોપાન 2માં મેળવેલ) આગળ f ની કિંમત શોધો.*

સોપાન 4 : *વિધેય f ની સોપાન 3માં મેળવેલ તમામ કિંમતોમાંથી મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધી કાઢો. આ મહત્તમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્ય થશે.*

ઉદાહરણ 39 : વિધેય $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$, $x \in [1, 5]$ નાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

$$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3)$$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 2$ અથવા $x = 3$ મળે.

$$f''(x) = 12x - 30$$

હવે, આપણે x ની આ કિંમતો આગળ વિધેય f નાં મૂલ્યો મેળવીશું. તદુપરાંત અંતરાલ $[1, 5]$નાં અંત્યબિંદુઓ આગળ પણ વિધેય f નાં મૂલ્યો મેળવીશું. એટલે કે $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ તથા $x = 5$ આગળ વિધેયનાં મૂલ્યો મેળવીશું.

આથી, $f(1) = 2(1)^3 - 15(1)^2 + 36(1) + 1 = 24$

$f(2) = 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2) + 1 = 29$

$f(3) = 2(3)^3 - 15(3)^2 + 36(3) + 1 = 28$

$f(5) = 2(5)^3 - 15(5)^2 + 36(5) + 1 = 56$

આથી, આપણે કહી શકીએ વિધેય f ને $x \in [1, 5]$ માં $x = 5$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય 56 છે અને $x = 1$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય 24 છે.

નોંધ : $f''(2) = -6$, $f''(3) = 6$ આથી, $f(2)$, $f(3)$ અનુક્રમે સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ છે.

ઉદાહરણ 40 : વિધેય $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ નાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore \quad f'(x) = 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x-1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = \frac{1}{8}$ મળે. વધુમાં, $x = 0$, આગળ $f'(x)$ વ્યાખ્યાયિત નથી. આથી, $x = 0$ અને $x = \frac{1}{8}$ નિર્ણાયક સંખ્યાઓ/બિંદુઓ છે. હવે, આ નિર્ણાયક સંખ્યાઓ તથા અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓ $x = -1$ તથા $x = 1$ આગળ વિધેય f નાં મૂલ્યો મેળવીએ.

$$\therefore \quad f(-1) = 12(-1)^{\frac{4}{3}} - 6(-1)^{\frac{1}{3}} = 18$$

$$f(0) = 12(0) - 6(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-9}{4} \text{ તથા}$$

$$f(1) = 12(1)^{\frac{4}{3}} - 6(1)^{\frac{1}{3}} = 6$$

આથી, આપણે કહી શકીએ કે, વિધેય f ને $x = -1$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય 18 તથા $x = \frac{1}{8}$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય $\frac{-9}{4}$ મળે છે.

નોંધ : ખરેખર તો $x^{\frac{p}{q}}$ વ્યાખ્યાયિત થવા માટે $x > 0$ જરૂરી છે. $(-1)^{\frac{4}{3}}$ ને (-1) ના 4 ઘાતના ઘનમૂળ તરીકે મૂલવવા જોઈએ. તે જ રીતે $(-1)^{\frac{1}{3}}$ એ (-1) નું ઘનમૂળ છે.

ઉદાહરણ 41 : $x \geq 0$ માટે દુશ્મનનું એક (અપાચે) હેલિકૉપ્ટર વક્ર $y = x^2 + 7$ ના માર્ગે હવામાં ઊડે છે. બિંદુ $(3, 7)$ આગળ ઊભેલ સૈનિક, જ્યારે હેલિકૉપ્ટર તેની એકદમ નજીક હોય ત્યારે તેને નિશાન તાકી નીચે પાડવા ઇચ્છે છે, તો તેમની વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર શોધો.

ઉકેલ : પ્રત્યેક $x \geq 0$ માટે, હેલિકૉપ્ટરનું સ્થાન $(x, x^2 + 7)$ બિંદુએ છે. આથી, $(3, 7)$ આગળ ઊભેલ સૈનિક તથા હેલિકૉપ્ટર વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2}$ એટલે કે, $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ છે.

ધારો કે, $f(x) = (x - 3)^2 + x^4$

$$\therefore \quad f'(x) = 2(x - 3) + 4x^3$$

$$= 2(x - 1)(2x^2 + 2x + 3)$$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 1$ અથવા $2x^2 + 2x + 3 = 0$ મળે.

પરંતુ, $2x^2 + 2x + 3 = 0$ ને વાસ્તવિક બીજ નથી. જેના માટે $f'(x) = 0$ હોય, તેવા ગણમાં ઉમેરવા માટે અંતરાલનું કોઈ અંત્યબિંદુ છે જ નહિ. એટલે કે, માત્ર એક જ નિર્ણાયક સંખ્યા $x = 1$ મળે. આ બિંદુ આગળ વિધેય f નું મૂલ્ય $f(1) = (1 - 3)^2 + (1)^4 = 5$ મળે. આથી, સૈનિક તથા હેલિકૉપ્ટર વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$.

નોંધીએ કે, $\sqrt{5}$ એ મહત્તમ મૂલ્ય કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોઈ શકે.

વળી, $\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5}$

આ દર્શાવે છે કે, $\sqrt{5}$ એ $\sqrt{f(x)}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત છે. આથી, સૈનિક તથા હેલિકૉપ્ટર વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર $\sqrt{5}$ છે.

નોંધ : $f''(x) = 12x^2 + 2$

$$\therefore \quad f''(1) = 14 > 0$$

$\therefore \quad \sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$ ન્યૂનતમ છે.

સ્વાધ્યાય 6.5

1. નીચે આપેલાં વિધેયોને મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો :

(i) $f(x) = (2x - 1)^2 + 3$ (ii) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$

(iii) $f(x) = -(x - 1)^2 + 10$ (iv) $g(x) = x^3 + 1$

2. નીચેનાં વિધેયોને મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો :

(i) $f(x) = |x + 2| - 1$ (ii) $g(x) = -|x + 1| + 3$

(iii) $h(x) = sin\,(2x) + 5$ (iv) $f(x) = |\,sin\,4x + 3\,|$

(v) $h(x) = x + 1,\ x \in (-1, 1)$

3. નીચે આપેલાં વિધેયોને સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો હોય, તો તે શોધો :

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = x^3 - 3x$

(iii) $h(x) = sin\,x + cos\,x;\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ (iv) $f(x) = sin\,x - cos\,x;\ 0 < x < 2\pi$

(v) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ (vi) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x};\ x > 0$

(vii) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$ (viii) $f(x) = x\sqrt{1 - x},\ 0 < x < 1$

4. સાબિત કરો કે નીચે આપેલાં વિધેયોને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો નથી :

(i) $f(x) = e^x$ (ii) $g(x) = \log x$

(iii) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

5. આપેલ અંતરાલમાં નીચેનાં વિધેયોનાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો :

(i) $f(x) = x^3,\ x \in [-2, 2]$ (ii) $f(x) = sin\,x + cos\,x,\ x \in [0, \pi]$

(iii) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2,\ x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right]$ (iv) $f(x) = (x - 1)^2 + 3,\ x \in [-3, 1]$

6. જો કંપનીએ પ્રાપ્ત કરેલ નફાનું વિધેય, $P(x) = 41 - 72x - 18x^2$ હોય, તો કંપનીને પ્રાપ્ત થતો મહત્તમ નફો શોધો.

7. વિધેય $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25,\ x \in [0, 3]$ નાં મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

8. વિધેય $f(x) = sin\,2x,\ x \in [0, 2\pi]$ એ x ની કઈ કિંમતો આગળ મહત્તમ મૂલ્ય પ્રાપ્ત કરશે ?

9. $f(x) = sin\,x + cos\,x$ ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

10. વિધેય $f(x) = 2x^3 - 24x + 107,\ x \in [1, 3]$ માટે, f નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો. આ જ વિધેય માટે, $x \in [-3, -1]$ હોય, તો f નું મહત્તમ મૂલ્ય નક્કી કરો.

11. જો વિધેય $f(x) = x^4 - 62x^2 + ax + 9,\ x \in [0, 2]$ એ $x = 1$ આગળ મહત્તમ કિંમત ધારણ કરે છે તેમ આપેલ હોય, તો a ની કિંમત શોધો.

12. વિધેય $f(x) = x + sin\,2x,\ x \in [0, 2\pi]$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

13. જેમનો સરવાળો 24 હોય અને જેમનો ગુણાકાર મહત્તમ હોય એવી બે ધન સંખ્યાઓ શોધો.

14. $x + y = 60$ થાય તથા xy^3 મહત્તમ થાય એવી બે ધન સંખ્યાઓ x અને y મેળવો.

15. જેમનો સરવાળો 35 થાય એવી બે ધન સંખ્યાઓ x અને y મેળવો જેથી ગુણાકાર x^2y^5 મહત્તમ બને.

16. જેમનો સરવાળો 16 હોય એવી બે ધન સંખ્યાઓ શોધો જેથી તેમના ઘનનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય.

17. જેમની બાજુનું માપ 18 સેમી હોય તેવા પતરાના ચોરસ ટુકડાના દરેક ખૂણેથી ચાર એકરૂપ ચોરસ કાપીને અને બાકીના ભાગને વાળીને એક ખુલ્લી પેટી બનાવવામાં આવે છે. પેટીનું ઘનફળ મહત્તમ થાય તે માટે કાપવામાં આવતા ચોરસની બાજુની લંબાઈ શોધો.

18. 45 સેમી × 24 સેમી લંબચોરસ પતરાના દરેક ખૂણેથી ચાર એકરૂપ ચોરસ કાપીને તથા બાકીના ભાગને વાળીને એક ખુલ્લી પેટી બનાવવામાં આવે છે. પેટીનું ઘનફળ મહત્તમ થાય, તે માટે પતરામાંથી કાપવામાં આવતા ચોરસની લંબાઈ શોધો.

19. સાબિત કરો કે નિયત વર્તુળમાં અંતર્ગત તમામ લંબચોરસોમાં ચોરસનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ છે.

20. લંબવૃત્તીય નળાકારનું પૃષ્ઠફળ અચળ હોય, તો નળાકારના આધારનો વ્યાસ એ તેની ઊંચાઈ જેટલો હોય ત્યારે નળાકારનું ઘનફળ મહત્તમ છે તેમ સાબિત કરો.

21. આપેલ તમામ બંધ (લંબવૃત્તીય) નળાકાર કેનમાંથી પ્રત્યેક કેનનું કદ 100 સેમી^{3} હોય તો, તે કેનનું પૃષ્ઠફળ ન્યૂનતમ હોય ત્યારે તેનાં પરિમાણ શોધો.

22. 28 મીટર લાંબા વાયરને કાપીને બે ટુકડા બનાવવામાં આવે છે. તેના એક ટુકડામાંથી ચોરસ અને બીજા ટુકડામાંથી વર્તુળ બનાવવામાં આવે છે. તેમાંથી એવી રચના બને કે જ્યારે બંનેનું કુલ ક્ષેત્રફળ ન્યૂનતમ હોય ત્યારે વાયરના બંને ટુકડાની લંબાઈ શોધો.

23. R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનું ઘનફળ ગોલકના ઘનફળ કરતાં $\frac{8}{27}$ ગણું છે તેમ સાબિત કરો.

24. લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટી ન્યૂનતમ હોય અને ઘનફળ આપેલ હોય ત્યારે શંકુની ઊંચાઈ એ તેના આધારની ત્રિજ્યા કરતાં $\sqrt{2}$ ગણી છે તેમ સાબિત કરો.

25. તિર્યક ઊંચાઈ (l) આપેલ હોય ત્યારે મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનો અર્ધશિરઃકોણ $tan^{-1}\sqrt{2}$ છે તેમ સાબિત કરો.

26. લંબવૃત્તીય શંકુનું પૃષ્ઠફળ S આપેલ હોય ત્યારે મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનો અર્ધશિરઃકોણ $sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ છે તેમ સાબિત કરો.

પ્રશ્નો 27 થી 29 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

27. વક્ર $x^2 = 2y$ પરનું (0, 5) થી સૌથી નજીકનું બિંદુ .... હોય.

(A) $(2\sqrt{2}, 4)$ (B) $(2\sqrt{2}, 0)$ (C) (0, 0) (D) (2, 2)

28. વિધેય $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, $\forall x \in R$ ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

29. વિધેય $f(x) = [x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $x \in [0, 1]$ નું મહત્તમ મૂલ્ય .... છે.

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 42 : એક ગાડી $t = 0$ સેકન્ડના સમયે બિંદુ P થી ગતિ શરૂ કરીને t સેકન્ડે; બિંદુ Q આગળ પહોંચીને અટકે છે. આ સમય દરમિયાન ગાડીએ કાપેલું અંતર $x = t^2\left(2 - \frac{t}{3}\right)$ મીટર હોય, તો ગાડીને બિંદુ Q સુધી પહોંચતાં લાગતો સમય શોધો તથા આ બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર PQ શોધો.

ઉકેલ : t સેકન્ડમાં ગાડીએ કાપેલું અંતર $x = t^2\left(2 - \frac{t}{3}\right)$ છે.

$\therefore$ તેનો વેગ $V = \frac{dx}{dt} = 4t - t^2 = t(4 - t)$

આથી, $V = 0$ લેતાં, $t = 0$ તથા $t = 4$ મળે.

હવે, બિંદુઓ P તથા Q આગળ $V = 0$ છે.

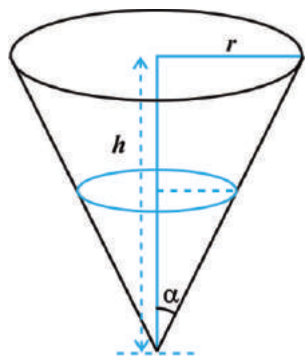
બિંદુ P આગળ $t = 0$. આથી Q આગળ $t = 4$

આથી, ગાડીને બિંદુ Q સુધી પહોંચતાં લાગતો સમય 4 સેકન્ડ છે. 4 સેકન્ડ દરમિયાન કાપેલું અંતર

$$(x)_{t=4} = 4^2\left(2 - \frac{4}{3}\right) = 16\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ મીટર}$$

ઉદાહરણ 43 : પાણીની એક ટાંકી ઊંધા શંકુ આકારની છે. તેનો અર્ધશિરઃકોણ $tan^{-1}(0.5)$ છે. આ ટાંકીમાં 5 મી^{3}/કલાકના દરે પાણી રેડવામાં આવે છે. જ્યારે ટાંકીમાં પાણીની ઊંડાઈ 4 મીટર હોય, ત્યારે પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ વધવાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, શંકુના આધારની ત્રિજ્યા r, ઊંચાઈ h તથા અર્ધશિરઃકોણ α છે. આ માહિતી આકૃતિ 6.22 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.22

$\therefore \quad tan\,\alpha = \frac{r}{h}$

આથી, $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right) = tan^{-1}(0.5)$ (આપેલ છે.)

અથવા $\frac{r}{h} = 0.5$

$\therefore \quad r = \frac{h}{2}$

ધારો કે, શંકુનું ઘનફળ V છે.

$\therefore \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$

આથી, $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right) \cdot \frac{dh}{dt}$ (સાંકળના નિયમ પરથી)

$= \frac{\pi}{4} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

હવે ઘનફળમાં થતા ફેરફારનો દર $= \frac{dV}{dt} = 5$ મી^{3}/કલાક અને $h = 4$ મીટર

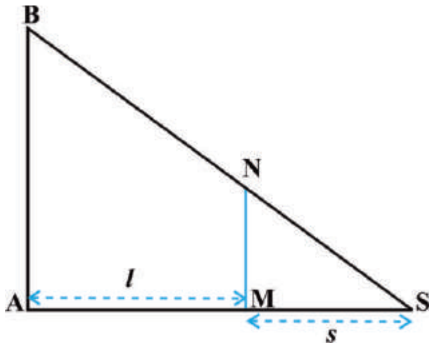
આથી, $5 = \frac{\pi}{4}(4)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

અથવા $\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88}$ મીટર/કલાક $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

આથી, પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ વધવાનો દર $\frac{35}{88}$ મીટર/કલાક છે.

ઉદાહરણ 44 : 2 મીટર ઊંચો એક માણસ 5 કિમી/કલાકના દરે પ્રકાશના સ્રોતથી અચળ ઝડપે દૂર જઈ રહ્યો છે. પ્રકાશના સ્રોતની જમીનથી ઊંચાઈ 6 મીટર છે, તો તેના પડછાયાની લંબાઈના વધવાનો દર શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 6.23 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, ધારો કે AB = પ્રકાશનો સ્રોત તથા B એ ગોળાની સ્થિતિ દર્શાવે છે. વળી, MN એ t સમયે માણસની સ્થિતિ અને AM = l મીટર છે. MS એ માણસનો પડછાયો છે.



આકૃતિ 6.23

ધારો કે, MS = s મીટર

નોંધીએ કે, ΔMSN ~ ΔASB

$$\therefore \quad \frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$$

અથવા AS = $3s$ (MN = 2 અને AB = 6 આપેલ છે.)

આથી AM = $3s - s = 2s$. પરંતુ AM = l

તેથી $l = 2s$

$$\therefore \quad \frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}$$

વળી, $\frac{dl}{dt}$ = 5 કિમી/કલાક છે, તેથી $\frac{ds}{dt} = \frac{5}{2}$ કિમી/કલાક

આથી, પડછાયાની લંબાઈમાં $\frac{5}{2}$ કિમી/કલાકની ઝડપે વધારો થાય છે.

ઉદાહરણ 45 : વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતા અભિલંબનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : $x^2 = 4y$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$ મળે.

ધારો કે (h, k) એ વક્ર $x^2 = 4y$ પરનું સ્પર્શબિંદુ છે.

આથી, ઊગમબિંદુ સિવાયના બિંદુ (h, k) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(h,\ k)} = \frac{h}{2}$ મળે.

આથી, બિંદુ (h, k) આગળના અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{-2}{h}$. **($h \neq 0$)**

આથી બિંદુ (h, k) આગળના અભિલંબનું સમીકરણ

$$y - k = \frac{-2}{h}(x - h) \qquad ...(1)$$

વળી, તે બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થાય છે.

$$\therefore \quad 2 - k = \frac{-2}{h}(1 - h)$$

અથવા $$k = 2 + \frac{2}{h}(1 - h) \qquad ...(2)$$

વળી, બિંદુ (h, k) વક્ર $x^2 = 4y$ પર છે.

$$\therefore \quad h^2 = 4k \qquad ...(3)$$

આથી, (2) તથા (3) પરથી, $h = 2$ તથા $k = 1$ મળે.

h અને k ની આ કિંમતો સમીકરણ (1)માં મૂકતાં, માંગેલ અભિલંબનું સમીકરણ

$$y - 1 = \frac{-2}{2}(x - 2)$$

$\therefore$ $x + y = 3$ મળે.

ઉદાહરણ 46 : વક્ર $y = cos\,(x + y)$, $-2\pi \le x \le 2\pi$ ના રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

ઉકેલ : $y = cos\,(x + y)$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-sin\,(x+y)}{1+sin\,(x+y)}$$

$\therefore$ (x, y) બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{-sin\,(x+y)}{1+sin\,(x+y)}$

વળી, આપેલ વક્રના સ્પર્શકો રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર હોવાથી, સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{-1}{2}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{-sin\,(x+y)}{1+sin\,(x+y)} = \frac{-1}{2}$$

$\therefore$ $sin\,(x + y) = 1$

$$\therefore \quad x + y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2};\ n \in Z$$

આથી, $y = cos\,(x + y) = cos\left(n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2}\right);\ n \in Z$

$= 0;\ \forall n \in Z$

વળી, $-2\pi \le x \le 2\pi$ હોવાથી, $x = \frac{-3\pi}{2}$ તથા $x = \frac{\pi}{2}$ મળે. **($sin\,(x + y) = 1$)**

આથી, રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર આપેલ વક્રના સ્પર્શકોનાં સ્પર્શબિંદુઓ $\left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right)$ અને $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ છે. આથી, માંગેલ સ્પર્શકોનાં સમીકરણ

$y - 0 = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ એટલે કે, $2x + 4y + 3\pi = 0$

અને $y - 0 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ એટલે કે, $2x + 4y - \pi = 0$ મળે.

ઉદાહરણ 47 : જે અંતરાલમાં $f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$ (a) ચુસ્ત વધતું વિધેય (b) ચુસ્ત ઘટતું વિધેય હોય તે અંતરાલો નક્કી કરો.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{3}{10}(4x^3) - \frac{4}{5}(3x^2) - 6x + \frac{36}{5}$$

$$= \frac{6}{5}(x - 1)(x + 2)(x - 3) \qquad \text{(સાદું રૂપ આપતાં)}$$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 1$ અથવા $x = -2$ અથવા $x = 3$ મળે.

x ની આ કિંમતો, વાસ્તવિક સંખ્યારેખાને ચાર ભિન્ન અંતરાલો, $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ તથા $(3, \infty)$માં વિભાજિત કરે. (આકૃતિ 6.24 જુઓ.)

આકૃતિ 6.24

અંતરાલ $(-\infty, -2)$ એટલે કે, $-\infty < x < -2$ લેતાં,

$(x - 1) < 0$, $(x + 2) < 0$ અને $(x - 3) < 0$ મળે.

(ઉદાહરણ તરીકે નોંધીએ કે, $x = -3$ માટે, $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3) = (-4)(-1)(-6) < 0$)

આથી, જ્યારે $-\infty < x < -2$ ત્યારે $f'(x) < 0$

આથી, વિધેય f એ $(-\infty, -2)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

હવે, અંતરાલ $(-2, 1)$ એટલે કે, $-2 < x < 1$ લેતાં,

$(x - 1) < 0$, $(x + 2) > 0$ તથા $(x - 3) < 0$ મળે.

(ઉદાહરણ તરીકે નોંધીએ કે, $x = 0$ માટે $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

$= (-1)(2)(-3) = 6 > 0$)

આથી, $-2 < x < 1$ માટે, $f'(x) > 0$

આથી, વિધેય f એ $(-2, 1)$માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

હવે, અંતરાલ $(1, 3)$ એટલે કે, $1 < x < 3$ લેતાં,

$(x - 1) > 0$, $(x + 2) > 0$, $(x - 3) < 0$ મળે.

આથી, $1 < x < 3$ માટે, $f'(x) < 0$

આથી, વિધેય f એ $(1, 3)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

અંતમાં, અંતરાલ $(3, \infty)$ એટલે કે, $x > 3$ લેતાં,

$(x - 1) > 0$, $(x + 2) > 0$ તથા $(x - 3) > 0$ મળે.

આથી જ્યારે $x > 3$ ત્યારે $f'(x) > 0$

આથી, વિધેય f એ $(3, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 48 : સાબિત કરો કે, વિધેય $f(x) = tan^{-1}(sin\ x + cos\ x)$, $x > 0$ એ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = tan^{-1}(sin\ x + cos\ x)$, $x > 0$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{1}{1 + (sin\ x + cos\ x)^2}(cos\ x - sin\ x)$$

$$= \frac{cos\ x - sin\ x}{2 + sin\ 2x}$$ (સાદું રૂપ આપતાં)

આપણે નોંધીએ કે, પ્રત્યેક $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માટે $2 + sin\ 2x > 0$.

આથી, જો $(cos\ x - sin\ x) > 0$ તો $f'(x) > 0$.

અથવા જો $cos\ x > sin\ x$ અથવા $cot\ x > 1$ તો $f'(x) > 0$.

હવે, જો $0 < tan\ x < 1$ તો અને તો જ $cot\ x > 1$

એટલે કે, જો $0 < x < \frac{\pi}{4}$ તો $f'(x) > 0$.

આથી, વિધેય f એ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 49 : 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળી એક વર્તુળાકાર તક્તીને ગરમ કરવામાં આવે છે. આથી વિસ્તારના કારણે તેની ત્રિજ્યા 0.05 સેમી/સે ના દરે વધી રહી છે. જ્યારે તક્તીની ત્રિજ્યા 3.2 સેમી હોય ત્યારે તેના ક્ષેત્રફળમાં થતા વધારાનો દર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ તક્તીની ત્રિજ્યા r તથા ક્ષેત્રફળ A છે.

$\therefore \quad A = \pi r^2$

અથવા $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ (સાંકળ નિયમ પરથી)

હવે, ત્રિજ્યામાં થતા વધારાનો દર $= \frac{dr}{dt} = 0.05$ સેમી/સે

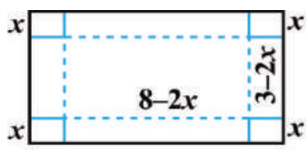
$\therefore$ ક્ષેત્રફળમાં થતા વધારાનો દર $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

$= 2\pi\ (3.2)(0.05)$ (r = 3.2 સેમી)

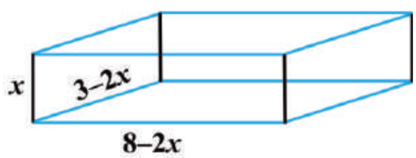
$= 0.320\pi$ સેમી^{2}/સે

ઉદાહરણ 50 : 3 મીટર × 8 મીટર માપના ઍલ્યુમિનિયમના લંબચોરસ પતરાના દરેક ખૂણેથી ચાર એકરૂપ ચોરસ કાપી દરેક બાજુ વાળીને ખુલ્લી પેટી બનાવવામાં આવે છે. આ રીતે બનતી પેટીનું મહત્તમ ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે દરેક ખૂણેથી કાપવામાં આવતા ચોરસની બાજુની લંબાઈ x મીટર છે. આથી, પેટીની ઊંચાઈ x મીટર, લંબાઈ $8 - 2x$ મીટર તથા પહોળાઈ $3 - 2x$ મીટર છે. (આકૃતિ 6.25 જુઓ.)



(a)



(b)

આકૃતિ 6.25

જો આ પેટીનું ઘનફળ V(x) હોય, તો

$$V(x) = x\,(3 - 2x)(8 - 2x)$$
$$= 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

આથી, $V'(x) = 12x^2 - 44x + 24$

$= 4(x - 3)(3x - 2)$

$\therefore \quad V''(x) = 24x - 44$

હવે, $V'(x) = 0$ લેતાં, $x = 3, \frac{2}{3}$ મળે. પરંતુ $x \neq 3$ (શા માટે ?)

આથી, $x = \frac{2}{3}$ લેતાં, $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44$

$$= -28 < 0$$

આથી, $x = \frac{2}{3}$ માટે મહત્તમ કિંમત મળે. એટલે કે, આપણે પતરાના દરેક ખૂણેથી $\frac{2}{3}$ મીટરની લંબાઈ ધરાવતો ચોરસ દૂર કરીએ અને બાકીના ભાગમાંથી પેટી બનાવીએ, તો મળતી પેટીનું ઘનફળ મહત્તમ થાય.

$$\therefore \quad V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{200}{27} \text{ (મીટર)}^3$$

ઉદાહરણ 51 : કોઈ એક ઉત્પાદક પ્રત્યેક એકમના ₹ $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ના દરે x વસ્તુઓનું વેચાણ કરે છે. જો x વસ્તુઓની પડતર કિંમત ₹ $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ હોય, તો ઉત્પાદકને મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત કરવા માટે કેટલી વસ્તુઓનું વેચાણ કરવું પડે ?

ઉકેલ : ધારો કે x વસ્તુઓની વેચાણકિંમત $S(x)$ તથા પડતર કિંમત $C(x)$ છે.

હવે, $S(x) = \left(5 - \frac{x}{100}\right) x = 5x - \frac{x^2}{100}$

અને $C(x) = \frac{x}{5} + 500$

આથી, નફાનું વિધેય $P(x) = S(x) - C(x)$ દ્વારા મેળવી શકાય.

$$\therefore \quad P(x) = 5x - \frac{x^2}{100} - \frac{x}{5} - 500$$

એટલે કે, $P(x) = \frac{24}{5}x - \frac{x^2}{100} - 500$

$$\therefore \quad P'(x) = \frac{24}{5} - \frac{x}{50}$$

હવે, $P'(x) = 0$ લેતાં, $x = 240$ મળે.

વળી, $P''(x) = \frac{-1}{50}$. આથી, $P''(240) = \frac{-1}{50} < 0$.

આથી, $x = 240$ આગળ મહત્તમ કિંમત મળે. આથી ઉત્પાદકને મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત કરવા માટે 240 વસ્તુઓનું વેચાણ કરવું પડે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 6

1. વિકલનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં વિધેયોનાં આસન્ન મૂલ્યો શોધો :

(a) $\left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ (b) $(33)^{\frac{-1}{5}}$

2. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ને $x = e$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય છે.

3. એક સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના અચળ આધારનું માપ b છે તથા તેની બે સમાન લંબાઈની બાજુઓનાં માપ 3 સેમી/સે ના દરે ઘટી રહ્યા છે. જ્યારે આ ત્રિકોણની બે સમાન બાજુઓનાં માપ આધારના માપ જેટલાં થાય ત્યારે તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કેટલી ઝડપથી ઘટે ?

4. વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતા અભિલંબનું સમીકરણ શોધો.

5. $x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta$, $y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રનો θ બિંદુ આગળનો અભિલંબ ઊગમબિંદુથી અચળ અંતરે આવેલો છે તેમ સાબિત કરો.

6. કયા અંતરાલમાં વિધેય $f(x) = \dfrac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2+\cos x}$ (a) ચુસ્ત રીતે વધે અને કયા અંતરાલમાં તે (b) ચુસ્ત રીતે ઘટે છે તે નક્કી કરો.

7. કયા અંતરાલમાં વિધેય $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ (a) વધતું વિધેય અને કયા અંતરાલમાં તે (b) ઘટતું વિધેય છે તે નક્કી કરો.

8. જેનું શીર્ષ પ્રધાન અક્ષનું એક અંત્યબિંદુ હોય તેવા ઉપવલય $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ માં અંતર્ગત સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. લંબચોરસ આધાર તથા પૃષ્ઠો ધરાવતી એક ખુલ્લી ટાંકીની ઊંડાઈ 2 મીટર તથા ઘનફળ 8 (મીટર)^3 છે. જો આ ટાંકીના આધારના બાંધકામની કિંમત ₹ 70 પ્રતિ(મીટર)^2 તથા પૃષ્ઠોના બાંધકામની કિંમત ₹ 45 પ્રતિ(મીટર)^2 હોય, તો ટાંકી બનાવવા માટે થતો ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

10. એક ચોરસની પરિમિતિ તથા વર્તુળના પરિઘનો સરવાળો અચળ k છે. સાબિત કરો કે જ્યારે ચોરસની બાજુની લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા કરતાં બમણી હોય ત્યારે તેમના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ છે.

11. એક બારી લંબચોરસ પર અર્ધવર્તુળ ગોઠવેલ હોય તે આકારની છે. બારીની કુલ પરિમિતિ 10 મીટર છે. બારીમાંથી મહત્તમ પ્રકાશ પ્રવેશી શકે તે માટે બારીનાં પરિમાણ શોધો.

12. કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પરના એક બિંદુનાં કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓથી લંબઅંતર a તથા b છે (a, b અચળ છે) સાબિત કરો કે, કર્ણની મહત્તમ લંબાઈ $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ છે.

13. જે બિંદુઓ આગળ (અથવા x ની જે કિંમતો આગળ) વિધેય $f(x) = (x - 2)^4 (x + 1)^3$, (a) સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય (b) સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય (c) નતિબિંદુ ધરાવે તે બિંદુઓ (અથવા x ની કિંમતો) શોધો.

14. વિધેય $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$ નાં વૈશ્વિક મહત્તમ તથા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

15. r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ $\dfrac{4r}{3}$ છે તેમ સાબિત કરો.

16. ધારો કે f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે $f'(x) > 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે વિધેય f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે.

17. R ત્રિજ્યાવાળા ગોલકમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા નળાકારની ઊંચાઈ $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ છે તેમ સાબિત કરો. આ નળાકારનું મહત્તમ ઘનફળ શોધો.

18. h ઊંચાઈવાળા અને અર્ધશિરઃકોણ α હોય, તેવા લંબવૃત્તીય શંકુમાં અંતર્ગત મહત્તમ ઘનફળવાળા નળાકારની ઊંચાઈ એ શંકુની ઊંચાઈ કરતાં ત્રીજા ભાગની છે તેમ સાબિત કરો અને સાબિત કરો કે નળાકારનું મહત્તમ ઘનફળ $\dfrac{4\pi}{27} h^3 \tan^2\alpha$ છે.

પ્રશ્નો 19 થી 24 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

19. 10 મીટર ત્રિજ્યાવાળા એક નળાકાર પીપમાં 314 (મીટર)^3/કલાકના દરે ઘઉં ભરવામાં આવે છે, તો ઘઉંની ઊંડાઈના વધવાનો દર .... હોય.

(A) 1 મીટર/કલાક (B) 0.1 મીટર/કલાક (C) 1.1 મીટર/કલાક (D) 0.5 મીટર/કલાક

20. $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રના $(2, -1)$ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ .... છે.

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{-6}{7}$

21. રેખા $y = mx + 1$ એ વક્ર $y^2 = 4x$ નો સ્પર્શક હોય, તો $m =$ ....

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

22. વક્ર $2y + x^2 = 3$ ના બિંદુ $(1, 1)$ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x + y = 0$ (B) $x - y = 0$ (C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y = 1$

23. વક્ર $x^2 = 4y$ ના બિંદુ $(1, 2)$ માંથી પસાર થતાં અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x + y = 3$ (B) $x - y = 3$ (C) $x + y = 1$ (D) $x - y = 1$

24. વક્ર $9y^2 = x^3$ પરનાં .... બિંદુઓ આગળ દોરેલ અભિલંબ યામાક્ષો સાથે સમાન અંતઃખંડ બનાવે.

(A) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (B) $\left(4, -\frac{8}{3}\right)$ (C) $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$ (D) $\left(\pm 4, \frac{3}{8}\right)$

સારાંશ

- જો કોઈ એક રાશિ y માં અન્ય રાશિ x ની સાપેક્ષે ફેરફાર થતો હોય, તો $y = f(x)$ માટે, $\frac{dy}{dx}$ (અથવા $f'(x)$) એ y માં x ની સાપેક્ષે થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે તથા $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0}$ (અથવા $f'(x_0)$) એ y માં x ની સાપેક્ષે $x = x_0$ આગળ થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે.
- જો કોઈ બે ચલ x તથા y માં અન્ય ચલ t ની સાપેક્ષે ફેરફાર થતો હોય, એટલે કે જો $x = f(t)$ અને $y = g(t)$ આપેલ હોય, તેમજ $\frac{dx}{dt} \neq 0$ હોય, તો સાંકળ નિયમ દ્વારા $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ મેળવી શકાય.
- કોઈ એક વિધેય f માટે,

  (a) પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in (a, b)$ માટે, જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ હોય અથવા પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) \ge 0$ હોય, તો વિધેય f એ (a, b) પર વધતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.

  (b) પ્રત્યેક $x_1, x_2 \in (a, b)$ માટે, જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ હોય અથવા પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, જો $f'(x) \le 0$ હોય, તો વિધેય f એ (a, b) પર ઘટતું વિધેય છે તેમ કહેવાય.
- વક્ર $y = f(x)$ ના બિંદુ (x_0, y_0) આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $(y - y_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} (x - x_0)$ દ્વારા મેળવી શકાય.

- જો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ $\frac{dy}{dx}$ નું અસ્તિત્વ ન હોય, તો આ બિંદુ આગળનો સ્પર્શક Y-અક્ષને સમાંતર છે તથા તેનું સમીકરણ $x = x_0$ છે.
- જો વક્ર $y = f(x)$ ને $x = x_0$ આગળનો સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર હોય, તો $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = 0$.
- વક્ર $y = f(x)$ ના બિંદુ (x_0, y_0) આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $(y - y_0) = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}} (x - x_0)$ દ્વારા મેળવી શકાય. અહીં, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} \neq 0$.
- જો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ $\frac{dy}{dx} = 0$ હોય, તો અભિલંબનું સમીકરણ $x = x_0$ છે.
- જો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ $\frac{dy}{dx}$ નું અસ્તિત્વ ન હોય (અથવા $\frac{dy}{dx}$ અવ્યાખ્યાયિત હોય), તો અભિલંબ X-અક્ષને સમાંતર હોય અને તેનું સમીકરણ $y = y_0$ છે.
- ધારો કે, Δx એ x માં થતું 'સૂક્ષ્મ પરિવર્તન' છે અને તેને અનુરૂપ Δy એ $y = f(x)$ માં થતું 'સૂક્ષ્મ પરિવર્તન' છે. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. આથી, y નું વિકલ, $dy = f'(x)\,dx$ તથા

  $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$ એ Δy નું આસન્ન મૂલ્ય છે.

  $dx = \Delta x$ તુલનાત્મક રીતે ઘણો નાનો હોય ત્યારે તેને $dy \approx \Delta y$ વડે દર્શાવાય.
- કોઈ એક સંખ્યા $c \in D_f$ એવી મળે કે જેથી $f'(c) = 0$ અથવા f એ $x = c$ આગળ વિકલનીય ન હોય, તો c ને વિધેય f ની નિર્ણાયક સંખ્યા (અથવા નિર્ણાયક બિંદુ) કહે છે.
- **પ્રથમ વિકલિત કસોટી :** ધારો કે f એ $I = (a, b)$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે. $c \in I$ એ f ની નિર્ણાયક સંખ્યા (અથવા બિંદુ) છે તથા f એ c આગળ સતત છે.
  (i) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ ધનમાંથી ઋણ બને એટલે કે, કોઈ ધન સંખ્યા h માટે જો $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) > 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) < 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે. $(c - h, c + h) - \{c\}$ માં f વિકલનીય છે.
  (ii) જો $x = c$ આગળ $f'(x)$ ઋણમાંથી ધન બને એટલે કે, કોઈ ધન સંખ્યા h માટે જો $(c - h, c + h) \subset I$ તથા $(c - h, c)$ માં $f'(x) < 0$ તથા $(c, c + h)$ માં $f'(x) > 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $(c - h, c + h) - \{c\}$ માં f વિકલનીય છે.
  (iii) જો $f'(x)$ એ $x = c$ આગળ તેની નિશાની ન બદલે તો f ને $x = c$ માટે સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ન મળે. હકીકતમાં, આવા બિંદુને નતિબિંદુ કહે છે.
- **દ્વિતીય વિકલિત કસોટી :** ધારો કે વિધેય f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત છે તથા $c \in I$ છે. ધારો કે $f''(c)$ નું અસ્તિત્વ છે.
  (i) જો $f''(c) < 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $f''(c) > 0$ તથા $f'(c) = 0$ તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ f નું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) જો $f''(c) = 0 = f'(c)$ તો કસોટી કોઈ પણ તારણ આપવામાં નિષ્ફળ જાય છે.

આ સંજોગોમાં, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું અને વિધેયને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય, સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કે નતિબિંદુ છે, તે નક્કી કરીશું.

- વૈશ્વિક મહત્તમ અને/અથવા વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધવા માટેનો કાર્યનિયમ :

સોપાન 1 : આપેલ અંતરાલમાં વિધેય f નાં તમામ નિર્ણાયક બિંદુઓ (અથવા નિર્ણાયક સંખ્યાઓ) શોધવાં એટલે કે, x ની એવી કિંમતો શોધીશું કે જ્યાં $f'(x) = 0$ હોય અથવા x ની તે કિંમતો આગળ f વિકલનીય ન હોય.

સોપાન 2 : અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓએ વિધેય f ની કિંમતો શોધો. નિર્ણાયક બિંદુઓ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય, તો તે શોધો.

સોપાન 3 : આ તમામ બિંદુઓ (સોપાન 1 તથા સોપાન 2 માં મેળવેલ) આગળ f ની કિંમતો શોધો.

સોપાન 4 : વિધેય f ની સોપાન 3 માં, મેળવેલ તમામ કિંમતોમાંથી મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો ઓળખી કાઢો. આ મહત્તમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય એ વિધેય f નું વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય થશે.

પરિશિષ્ટ 1

: ગણિતમાં સાબિતીઓ :

A.1.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ 9, 10 અને 11માં આપણે વિધાન, સંયુક્ત વિધાન, વિધાનનું નિષેધ, સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ, પૂર્વધારણાઓ, અટકળો, પ્રમેયો અને અનુમાનિત તર્ક શીખી ગયાં.

અહીં, આપણે ગાણિતિક સાધ્યોને જુદી-જુદી પદ્ધતિથી સાબિત કરવાની ચર્ચા કરીશું.

A.1.2 સાબિતી શું છે ?

ગાણિતિક વિધાનની સાબિતી એ વિધાનોની શ્રેણીથી બને છે અને માત્ર તાર્કિક નિયમોનો ઉપયોગ કરી પ્રત્યેક વિધાનની યથાર્થતાની ચકાસણી વ્યાખ્યા અથવા પૂર્વધારણા અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ પ્રમેય દ્વારા અનુમાનિક પદ્ધતિથી થાય છે.

આમ, પ્રત્યેક સાબિતી એ પરિકલ્પના અને તારવણી હોય તેવી અનુમાનિક દલીલોની સાંકળ છે. મોટા ભાગે, આપણે સાધ્યમાં આપેલ તથ્યોનો સીધો ઉપયોગ કરી સાધ્ય સાબિત કરીએ છીએ. પરંતુ ઘણી વાર સાધ્યને સાબિત કરવા કરતાં તેના જેવા અન્ય સાધ્યની સાબિતી આપવાનું સરળ બને છે. સાધ્યની સાબિતી આપણને બે માર્ગ તરફ દોરી જાય છે; પ્રત્યક્ષ અથવા પરોક્ષ. આ રીતે મેળવેલી સાબિતીઓને પ્રત્યક્ષ સાબિતી અને પરોક્ષ સાબિતી કહેવાય તથા હજુ આગળ વધીએ તો દરેકની સાબિતી માટે ત્રણ જુદી-જુદી રીતો છે તેની ચર્ચા નીચે પ્રમાણે છે :

પ્રત્યક્ષ સાબિતી : પ્રમેયમાં આપેલ તથ્યોનો ઉપયોગ કરી આપણે પ્રત્યક્ષ રીતે જ સાબિતી આપવાની શરૂઆત કરીએ તેને પ્રમેયની સાબિતી આપવાની પ્રત્યક્ષ રીત કહે છે.

(i) **પ્રત્યક્ષ અભિગમ :** આપેલ અથવા સ્વીકારેલ તથ્યોની પૂર્વધારણાઓ, વ્યાખ્યાઓ અથવા આગળ સાબિત કરેલ પ્રમેયોની મદદ લઈ તર્કના નિયમોના ઉપયોગથી સાધ્ય કરવા માટેની દલીલોની એક શૃંખલા તરફ દોરી જાય છે. આ રીતને **પ્રત્યક્ષ અભિગમ (Straight Forward Approach)** કહે છે. નીચેના ઉદાહરણનો વિચાર કરીએ :

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે જો $x^2 - 5x + 6 = 0$ હોય, તો $x = 3$ અથવા $x = 2$.

ઉકેલ : $x^2 - 5x + 6 = 0$ (આપેલ છે.)

$\therefore$ $(x - 3)(x - 2) = 0$ (આપેલ પદાવલિનું તેને સમતુલ્ય બીજી પદાવલિ દ્વારા પરિવર્તન કરતાં)

$\therefore$ $x - 3 = 0$ અથવા $x - 2 = 0$ (સાબિત કરેલા પ્રમેય $a, b \in R$ માટે, $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ અથવા $b = 0$ પરથી)

$\therefore$ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ અથવા $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (સમીકરણની બંને બાજુ સમાન રાશિ ઉમેરતાં સમીકરણનું સ્વરૂપ બદલાતું નથી.)

$\therefore$ $x + 0 = 3$ અથવા $x + 0 = 2$. (પૂર્ણાંકના સરવાળાના તટસ્થ ઘટકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$\therefore$ $x = 3$ અથવા $x = 2$. (પૂર્ણાંકના સરવાળાના તટસ્થ ઘટકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

આમ, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ અથવા $x = 2$.

સ્પષ્ટતા : ધારો કે, આપેલ વિધાન '$p : x^2 - 5x + 6 = 0$' છે અને વિધાન q નિષ્કર્ષ વિધાન $x = 3$ અથવા $x = 2$ છે. વિધાન p માં $x^2 - 5x + 6$ અભિવ્યક્તિને, $x^2 - 5x + 6$ ને સમાન બીજી અભિવ્યક્તિ $(x - 3)(x - 2)$ થી પરિવર્તિત કરીને આપણે વિધાન p માંથી વિધાન $r : (x - 3)(x - 2) = 0$ તારવ્યું.

અહીં, બે પ્રશ્ન ઉદ્ભવે છે :

(i) પદાવલિ $(x - 3)(x - 2)$ એ પદાવલિ $x^2 - 5x + 6$ ને સમાન કેવી રીતે થાય ?

(ii) એક પદાવલિને આગળના જેવી બીજી પદાવલિ દ્વારા આપણે કેવી રીતે પરિવર્તિત કરી શકીએ ?

પ્રથમ પ્રશ્ન માટેની સાબિતી અગાઉના ધોરણમાં અવયવીકરણ દ્વારા આપેલ છે. અર્થાત્

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 3x - 2x + 6 \\ &= x(x - 3) - 2(x - 2) \\ &= (x - 3)(x - 2) \end{aligned}$$

જ્યારે બીજા પ્રશ્ન માટેની સાબિતી દલીલ સ્વરૂપની કાયદેસરતા (તર્કના નિયમ) પરથી આપેલ છે.

હવે, વિધાન r પક્ષ બને છે. વિધાન $s : x - 3 = 0$ અથવા $x - 2 = 0$ તારવવામાં આવે છે અને તેનાં કારણો કૌંસમાં આપ્યાં છે.

આ પ્રક્રિયા જ્યાં સુધી નિષ્કર્ષ પર ના પહોંચીએ ત્યાં સુધી સતત ચાલ્યા કરે છે.

દલીલની પ્રતિકાત્મક સમાનતા $p \Rightarrow q$ સત્ય છે તેવા તારણ પર આવવા માટે છે.

p થી શરૂ કરી, આપણે $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ તારવીએ છીએ. આથી, "$p \Rightarrow q$" સત્ય છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$f(x) = 2x + 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક છે.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે જો $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ હોય, તો f એક-એક વિધેય થાય.

(એક-એક વિધેયની વ્યાખ્યા)

હવે, આપેલ છે કે, $f(x_1) = f(x_2)$

અર્થાત્ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ આપેલ છે.

$\therefore\ 2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$ (બંને તરફ સમાન રાશિ ઉમેરતાં)

$\therefore\ 2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\therefore\ 2x_1 = 2x_2$ (વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટેના સરવાળાના તટસ્થ ઘટકનો ઉપયોગ કરતાં)

$\therefore\ \frac{2}{2}x_1 = \frac{2}{2}x_2$ (સમાન શૂન્યેતર સંખ્યા વડે બંને બાજુને ભાગતાં)

$\therefore\ x_1 = x_2$

આથી, આપેલ વિધેય એક-એક છે.

(ii) ગાણિતિક અનુમાન : ગાણિતિક અનુમાન એ લાક્ષણિક રીતે અનુમાનિક હોય તેવાં સાધ્યોને સાબિત કરવાની એક વ્યૂહરચના છે. સાબિતીની આ સંપૂર્ણ પ્રક્રિયા નીચેની ત્રણ પૂર્વધારણા પર આધારિત હોય છે :

આપેલ $\mathbf{N}$ ના ઉપગણ S માટે, જો,

(i) પ્રાકૃતિક સંખ્યા $1 \in \mathrm{S}$ અને

(ii) જ્યારે પ્રાકૃતિક સંખ્યા $k \in \mathrm{S}$ ત્યારે $k + 1 \in \mathrm{S}$, તો $\mathrm{S} = \mathbf{N}$.

જો વિધાન "$n = 1$ માટે $\mathrm{S}(n)$ સત્ય હોય" (અથવા અન્ય કોઈ શરૂઆતની સંખ્યા j માટે સત્ય હોય), તથા જો "$n = k$ માટે $\mathrm{S}(n)$ સત્ય હોય" તે પરથી "$n = k + 1$ માટે $\mathrm{S}(n)$ સત્ય થાય." (કોઈ પણ પૂર્ણાંક $k \geq j$ માટે) તો આપેલ વિધાન ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n (પૂર્ણાંક $n \geq j$) માટે સત્ય છે.

આપણે હવે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈશું.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે જો $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ તો $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

ઉકેલ : અહીં, $P(n) : A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

આપણે નોંધીએ કે, $P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

આથી, P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, $P(k)$ સત્ય છે.

અર્થાત્ $P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$

આપણે સાબિત કરવું છે કે, જ્યારે $P(k)$ સત્ય હોય ત્યારે $P(k + 1)$ પણ સત્ય છે. અર્થાત્

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix} \text{ સત્ય છે.}$$

હવે, $A^{k+1} = A^k \cdot A$

$P(k)$ સત્ય હોવાથી,

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta & \cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta \\ -\sin k\theta\cos\theta - \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(શ્રેણિકના ગુણાકાર પરથી)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

આમ, જ્યારે $P(k)$ સત્ય હોય ત્યારે, $P(k + 1)$ પણ સત્ય છે.

આથી, પ્રત્યેક $n \geq 1$ માટે $P(n)$ સત્ય છે. (ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી)

(iii) વિકલ્પો દ્વારા અથવા વિકલ્પો પૂરા થઈ જાય ત્યાં સુધી :

સાબિતી : જો $p = r \vee s \vee t$ (જ્યાં '$\vee$' એ 'અથવા' માટેનો સંકેત છે.) થાય તેવાં r, s, t વિધાનોમાં p ને વિભાજિત કરીએ તો વિધાન $p \Rightarrow q$ સાબિત કરવા આ રીત શક્ય છે.

જો આપણે પ્રેરણ શરતો $r \Rightarrow q$;

$s \Rightarrow q$;

અને $t \Rightarrow q$

સાબિત કરીએ, તો $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ સાબિત થાય અને આથી, $p \Rightarrow q$ સાબિત થાય.

આ રીતને **વિકલ્પો દ્વારા અથવા વિકલ્પો પૂરા થઈ જાય ત્યાં સુધી (Proof by Cases or by Exhaustion)** કહે છે.

આ રીતમાં સાધ્યની પ્રત્યેક શક્યતાને ચકાસવાનો સમાવેશ થાય છે. જ્યારે વિકલ્પોની સંખ્યા ઓછી હોય ત્યારે જ વ્યવહારુ રીતે આ રીત અનુકૂળ થાય.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે કોઈ પણ ત્રિકોણ ABC માટે, $a = b \cos C + c \cos B$

ઉકેલ : ધારો કે વિધાન p, "ABC એ કોઈ પણ ત્રિકોણ છે." અને વિધાન q "$a = b \cos C + c \cos B$" છે.

એક ત્રિકોણ ABC લો. A માંથી BC પર વેધ AD દોરો. (જરૂર પડે તો BC ને લંબાવીને)

આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈ પણ ત્રિકોણ એ લઘુકોણ, ગુરુકોણ કે કાટકોણ હોય, આથી આપણે p ને ત્રણ વિધાન r, s અને t માં વહેંચી શકીએ. જ્યાં

r : ત્રિકોણ ABC લઘુકોણ ત્રિકોણ છે, જ્યાં $\angle C$ લઘુકોણ છે.

s : ત્રિકોણ ABC ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે, જ્યાં $\angle C$ ગુરુકોણ છે.

t : ત્રિકોણ ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે, જ્યાં $\angle C$ કાટકોણ છે.

આથી, આપણે પ્રમેયની સાબિતી ત્રણ વિકલ્પો દ્વારા આપીશું.

વિકલ્પ (i) : જ્યારે $\angle C$ લઘુકોણ હોય (આકૃતિ A1.1)

કાટકોણ ત્રિકોણ ADB માં,

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

અર્થાત્ $BD = AB \cos B$

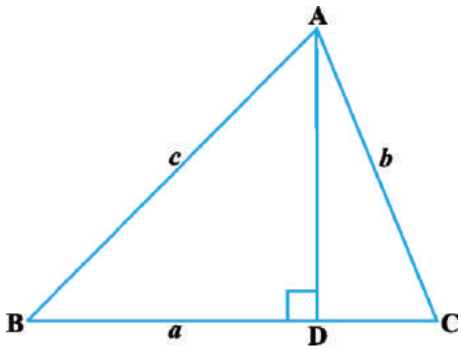
$= c \cos B$

કાટકોણ ત્રિકોણ ADC માં,

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

અર્થાત્ $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$



આકૃતિ A1.1

હવે, $a = BD + CD$

$= c \cos B + b \cos C$ ...(1)

વિકલ્પ (ii) : જ્યારે $\angle C$ ગુરુકોણ હોય (જુઓ આકૃતિ A1.2.)

કાટકોણ ત્રિકોણ ADB માં,

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

અર્થાત્ $BD = AB \cos B$

$= c \cos B$

કાટકોણ ત્રિકોણ ADC માં,

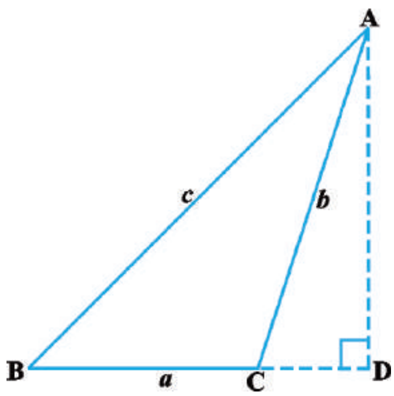
$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$= \cos (180^\circ - C)$

$= - \cos C$

અર્થાત્ $CD = -AC \cos C$

$= -b \cos C$



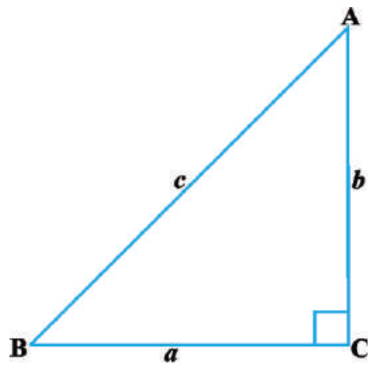
આકૃતિ A1.2

હવે, a = BC = BD – CD

અર્થાત્ a = c cos B – (–b cos C)

= c cos B + b cos C ...(2)

વિકલ્પ (iii) : જ્યારે ∠C કાટકોણ હોય (જુઓ આકૃતિ A1.3.)



આકૃતિ A1.3

કાટકોણ ત્રિકોણ ACB માં,

$$\frac{BC}{AB} = cos\ B$$

અર્થાત્ BC = AB cos B

= c cos B

અને b cos C = b cos 90° = 0

આમ, a = 0 + c cos B

= b cos C + c cos B લખી શકાય. ...(3)

(1), (2), (3) પરથી આપણે તારવી શકીએ કે કોઈ પણ ત્રિકોણ ABC માટે,

$a = b\ cos\ C + c\ cos\ B$

વિકલ્પ (1) પરથી, $r \Rightarrow q$ સાબિત થયું.

વિકલ્પ (2) પરથી, $s \Rightarrow q$ સાબિત થયું.

વિકલ્પ (3) પરથી, $t \Rightarrow q$ સાબિત થયું.

આમ, વિકલ્પોમાં આપેલ સાબિતીઓથી $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ સાબિત થાય છે. અર્થાત્ $p \Rightarrow q$ સિદ્ધ થયું.

પરોક્ષ સાબિતી :

આપેલ પરિકલ્પનાની પ્રત્યક્ષ સાબિતી આપવાના સ્થાને, તેના જેવી પરિકલ્પના પ્રસ્થાપિત કરી તેને સાબિત કરીએ. આ રીતને **પરોક્ષ સાબિતી (Indirect proof)** કહે છે.

(i) અનિષ્ટાપત્તિની રીતે સાબિતી : અહીં, આપણે એ ધારણા સાથે શરૂઆત કરીએ છીએ કે, આપેલ વિધાન અસત્ય છે. તર્કના નિયમોનો ઉપયોગ કરી, આપણી ધારણા કરતાં વિરોધી નિષ્કર્ષ પર પહોંચીએ છીએ અને આથી કહી શકાય કે આપણી ધારણા અસત્ય છે અને આથી અનુમાન કરીશું કે આપેલ વિધાન સત્ય છે. આ રીતને **અનિષ્ટાપત્તિ (Contradiction)ની રીતે સાબિતી (Reductio Ad Absurdum)** કહે છે.

ચાલો, આ રીત આપણે એક ઉદાહરણથી સમજીએ.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત છે.

ઉકેલ : ધારો કે p અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ છે. આપણે આપેલ વિધાન 'અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત છે.'નું નિષેધ લઈએ. અર્થાત્ આપણે ધારીએ કે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ સાન્ત છે. આથી, આપણે બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ $p_1, p_2,..., p_k$ (ધારો)ની યાદી બનાવી શકીએ. આપણે નોંધીએ કે ધારેલ $p_1, p_2,..., p_k$ સિવાયની કોઈ પણ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

હવે, $n = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_k) + 1$ લો. ...(1)

યાદીની સંખ્યાઓ કરતાં n મોટો હોવાથી n આ યાદીમાં નથી. ક્યાં તો n અવિભાજ્ય અથવા વિભાજ્ય છે. જો n અવિભાજ્ય હોય, તો (1) પરથી કહી શકાય કે, આપણી યાદીમાં ન હોય તેવી અવિભાજ્ય સંખ્યાનું અસ્તિત્વ છે.

અન્યથા જો n વિભાજ્ય હોય, તો તેનો અવિભાજ્ય ભાજક હોવો જોઈએ. પરંતુ nનો ભાગાકાર $p_1, p_2,..., p_k$ પૈકી દરેક વડે કરતાં શેષ 1 વધતી હોવાથી આપણી યાદીની કોઈ પણ સંખ્યા વડે n વિભાજ્ય નથી. આથી, યાદી સિવાયનો અવિભાજ્ય ભાજક હોવો જોઈએ.

આમ, n ભાજ્ય હોય કે અવિભાજ્ય, એ બંને વિકલ્પોમાં આપણે અવિભાજ્ય સંખ્યાની યાદીથી વિરોધાભાસી અંત પર પહોંચ્યા.

આથી, આપણી ધારણા કે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ સાન્ત છે, તે ખોટી છે.

આમ, અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત છે.

☛ નોંધ : જુઓ કે, ઉપરની સાબિતીમાં આપણે વિકલ્પોની રીતનો પણ ઉપયોગ કરી શકીએ.

(ii) આપેલ વિધાનના સમાનાર્થી વિધાન દ્વારા સાબિતી : અહીં આપણે શરતી વિધાન $p \Rightarrow q$ સાબિત કરવાને બદલે તેનું સમાનાર્થી વિધાન $\sim q \Rightarrow \sim p$ (વિદ્યાર્થીઓ ચકાસી શકશે.) સાબિત કરીશું.

શરતી વિધાનનું **સમાનાર્થી વિધાન (Contrapositive)** પક્ષ અને સાધ્યની અદલબદલ કરી તે બંનેના નિષેધ લઈ બતાવી શકાય.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે $f(x) = 2x + 5$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ એક-એક છે.

ઉકેલ : વિધેય f માટે, જો $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ હોય, તો તે એક-એક છે.

આનો ઉપયોગ કરવા આપણે સાબિત કરવું પડે કે "$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$" $\Rightarrow$ "$x_1 = x_2$". જે $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપનું છે. અહીં, p એ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ અને $q : x_1 = x_2$ છે. આપણે ઉદાહરણ 2 માં "પ્રત્યક્ષ રીત"થી આ સાબિત કરેલ છે.

આપણે આ જ વિધાન સમાનાર્થી પ્રેરણનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરી શકીએ. હવે, આપેલ વિધાનનું સમાનાર્થી વિધાન $\sim q \Rightarrow \sim p$ અર્થાત્ "જો $f(x_1) = f(x_2)$ તો $x_1 = x_2$"નું સમાનાર્થી વિધાન "જો $x_1 \neq x_2$ હોય, તો $f(x_1) \neq f(x_2)$".

હવે, $x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2$

$\Rightarrow 2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

"$\sim q \Rightarrow \sim p$" અને "$p \Rightarrow q$" સમાન હોવાથી સાબિતી પૂર્ણ થઈ.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે, "જો શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શક્ય હોય, તો A સામાન્ય છે."

ઉકેલ : ઉપરના વિધાનને સાંકેતિક રીતે લખતાં,

$p \Rightarrow q$, જ્યાં p એ "શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શક્ય છે." અને q "શ્રેણિક A સામાન્ય છે." મળે.

આપેલ વિધાન સાબિત કરવાને બદલે, આપણે તેનું સમાનાર્થી પ્રેરણ સાબિત કરીશું. અર્થાત્, જો A અસામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શક્ય નથી. જો A સામાન્ય શ્રેણિક ના હોય, તો તેનો અર્થ A અસામાન્ય શ્રેણિક છે. અર્થાત્ $|\mathrm{A}| = 0$.

આથી, $|\mathrm{A}| = 0$ હોવાથી, $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{adj\ \mathrm{A}}{|\mathrm{A}|}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

આથી, A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શક્ય નથી.

આમ, આપણે સાબિત કર્યું કે જો A સામાન્ય શ્રેણિક ન હોય, તો A નો વ્યસ્ત શક્ય નથી.

અર્થાત્ $\sim q \Rightarrow \sim p$

આમ, જો શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શક્ય હોય, તો A સામાન્ય શ્રેણિક છે.

(iii) પ્રતિ ઉદાહરણ દ્વારા સાબિતી : ગણિતના ઇતિહાસમાં એવા ઘણા પ્રસંગો બને છે કે જ્યાં માન્ય સાબિતી આપવાના બધા જ પ્રયત્નો નિષ્ફળ જાય અને વિધાનના મૂલ્યની સત્યાર્થતાની નિશ્ચિતતા અપ્રાપ્ય રહે.

આવી સ્થિતિમાં, વિધાન અસત્ય છે તે સાબિત કરવા આપણે p ની અસત્યાર્થતા માટે એક ઉદાહરણ શોધી કાઢીએ તો એ લાભકારક રહે. કોઈ વિધાનને અસત્ય સાબિત કરવા અપાતા આવા ઉદાહરણને ***પ્રતિઉદાહરણ* (counter example)** કહેવાય છે. સાધ્ય $p \Rightarrow q$ અસત્ય છે, તે સાબિત કરવા સાધ્ય $\sim(p \Rightarrow q)$ સત્ય છે તે બતાવવું પૂરતું છે. આથી, આ પણ સાબિતીની એક રીત છે.

ઉદાહરણ 8 : પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $2^{2^n} + 1$ અવિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : આ વિધાન સત્ય છે, તેવો એક વખત વિચાર આવે કેમકે,

$2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$ અવિભાજ્ય છે.

$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ અવિભાજ્ય છે.

$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ અવિભાજ્ય છે.

આમ, પ્રથમ દૃષ્ટિએ એવું લાગે કે વ્યાપક રીતે તે સત્ય છે. પરંતુ આખરે આપણે એ દર્શાવીશું કે, $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ એ અવિભાજ્ય નથી. કેમકે,

$4294967297 = 641 \times 6700417$ (બે સંખ્યાઓનો ગુણાકાર)

આમ, વ્યાપક રીતે ''પ્રત્યેક n માટે, $2^{2^n} + 1$ અવિભાજ્ય છે $(n \in N)$'' એ અસત્ય છે.

$2^{2^5} + 1$ એ એક જ ઉદાહરણ, વ્યાપક વિધાન અસત્ય છે, તેમ બતાવવા પૂરતું છે. આને પ્રતિઉદાહરણ કહેવાય.

આમ આપણે સાબિત કર્યું કે, ''પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $2^{2^n} + 1$ અવિભાજ્ય છે.''ની વ્યાપકતા સત્ય નથી.

ઉદાહરણ 9 : પ્રત્યેક સતત વિધેય વિકલનીય છે.

ઉકેલ : આપણે નીચેનાં કેટલાંક વિધેયોનો વિચાર કરીએ :

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

આ વિધેયો x નાં પ્રત્યેક મૂલ્યો માટે સતત છે. જો આપણે તેની વિકલનીયતા ચકાસીએ તો જણાય છે કે, x નાં પ્રત્યેક મૂલ્યો માટે તે વિકલનીય પણ છે. તે આપણને ''પ્રત્યેક સતત વિધેય વિકલનીય હોય છે'' સત્ય માનવા પ્રેરે છે. પરંતુ આપણે સતત વિધેય ''$\phi(x) = |x|$''ની વિકલનીયતા ચકાસીએ તો જણાય છે કે, $x = 0$ આગળ તે વિકલનીય નથી. આથી કહી શકાય કે, ''પ્રત્યેક સતત વિધેય વિકલનીય હોય'' તે વ્યાપક રીતે અસત્ય છે. આમ, માત્ર એક વિધેય ''$\phi(x) = |x|$'' એ વિધાન અસત્ય છે તે બતાવવા પૂરતું છે. આમ, ''$\phi(x) = |x|$''ને પ્રતિઉદાહરણ કહીશું, જેના દ્વારા વિધાન ''પ્રત્યેક સતત વિધેય વિકલનીય હોય'' નું ખંડન થાય છે.

પરિશિષ્ટ 2

: ગાણિતિક મૉડેલિંગ :

A.2.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ 11 માં આપણે વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાઓના કેટલાક અંશોનો ગાણિતિક ભાષામાં અભ્યાસ કરવાના હેતુસર ગાણિતિક મૉડેલિંગ શીખી ગયાં છીએ. કેટલીક ઉચિત શરતોનો ઉપયોગ કરીને કોઈ ભૌતિક પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક ભાષામાં રૂપાંતર એ ગાણિતિક મૉડેલિંગ છે. સામાન્ય રીતે કહીએ તો, ગાણિતિક મૉડેલિંગ એ એક એવી પ્રવૃત્તિ છે કે, જેમાં આપણે વિવિધ ઘટનાઓને અનુરૂપ થતા વ્યવહારોનું વર્ણન કરી શકાય તે હેતુથી કોઈ નમૂના (મૉડેલ)ની રચના કરીએ છીએ. તેમાં આપણા રસ અનુસાર વિવિધ પ્રકારના શબ્દો, ચિત્રો કે રેખાચિત્રો, કમ્પ્યૂટર પ્રોગ્રામો કે ગાણિતિક સૂત્રો વગેરેનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

અગાઉના ધોરણમાં આપણે જોઈ ગયાં છીએ કે, વિવિધ ગાણિતિક સંકલ્પનાઓનો સમાવેશ થતો હોય તેવી ઘણી સમસ્યાઓના ઉકેલ સાથે ગાણિતિક મૉડેલિંગ એક યા બીજી રીતે સંકળાયેલ છે. આથી ગાણિતિક મૉડેલિંગનો એક અલગ વિષય તરીકે અભ્યાસ કરવો ખૂબ જ અગત્યનો છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે ગાણિતિક મૉડેલિંગનો અભ્યાસ કરીશું. તેમાં આપણે શ્રેણિક, કલનશાસ્ત્ર, સુરેખ આયોજનનાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરીશું.

A.2.2 ગાણિતિક મૉડેલિંગ શા માટે ?

વિદ્યાર્થીઓ અંકગણિત, બીજગણિત, ત્રિકોણમિતિ તથા સુરેખ આયોજન વગેરેમાં આવતી શાબ્દિક સમસ્યાઓના ઉકેલથી પરિચિત છે. કેટલીક વાર આપણે ભૌતિક રીતે પરિસ્થિતિજન્ય સમસ્યાઓમાં ઊંડા ઊતર્યા સિવાય આંતરસૂઝ દ્વારા સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી શકીએ છીએ. પરિસ્થિતિજન્ય સમસ્યાઓને ઉકેલવા માટે ભૌતિક રીતે તે સમસ્યા અંગે ઊંડાણપૂર્વક વિચારવું જરૂરી છે. અર્થાત્ પ્રાપ્ત થયેલ ગાણિતિક પરિણામો સાથે પ્રાયોગિક કિંમતની સરખામણી થઈ શકે તે માટે કેટલાક ભૌતિક સિદ્ધાંતો તથા સંકેતોનો પરિચય કેળવવો જરૂરી છે. આપણી સમક્ષ પ્રસ્તુત હોય તેવી ઘણી સમસ્યાઓના ઉકેલ માટે આપણને કોઈ યુક્તિ કે પ્રયુક્તિની આવશ્યકતા રહે છે. તેને ગાણિતિક મૉડેલિંગ કહે છે. ચાલો આપણે નીચે પ્રમાણેની કેટલીક સમસ્યાઓને ધ્યાનમાં લઈએ :

(i) નદીની પહોળાઈ શોધવી. (વિશેષમાં, જ્યારે નદી ઓળંગવી મુશ્કેલ હોય)

(ii) શોટ-પુટ (ગોળાફેંક)માં ખૂણાનું ઇષ્ટતમ મૂલ્ય શોધવું. (ગોળો ફેંકનારની ઊંચાઈ, માધ્યમનો અવરોધ, ગુરુત્વપ્રવેગ વગેરે જેવા ચલોને ધ્યાનમાં રાખીને)

(iii) મિનારા (ટાવર)ની ઊંચાઈ શોધવી. (વિશેષમાં, જ્યારે મિનારાની ટોચ પર પહોંચવું અશક્ય હોય.)

(iv) સૂર્યની સપાટીનું ઉષ્ણતામાન શોધવું.

(v) હૃદયની બીમારી ધરાવતા દર્દીઓએ શા માટે લિફ્ટનો ઉપયોગ ન કરવો જોઈએ ? (મનુષ્યનું શરીર-વિજ્ઞાન જાણ્યા સિવાય)

(vi) પૃથ્વીનું દળ શોધવું.

(vii) ભારતમાં ઊભા પાક દ્વારા કઠોળ/દાળના ઉત્પાદન વિશે અંદાજ લગાવવો. (કોઈ પણ વ્યક્તિને તે પાક કાપવાની છૂટ ન હોય ત્યારે)
(viii) વ્યક્તિના શરીરમાં રહેલ લોહીનું ઘનફળ શોધવું (જ્યારે તે વ્યક્તિનું લોહી સંપૂર્ણપણે બહાર કાઢવાની છૂટ ન હોય.)
(ix) વર્ષ 2020માં ભારતની વસ્તીનો અંદાજ લગાવવો. (વ્યક્તિને ત્યાં સુધી રાહ જોવાની છૂટ ન હોય ત્યારે)

ઉપર્યુક્ત તમામ સમસ્યાઓને ઉકેલી શકાય છે અને હકીકતમાં, ગણિતની મદદ દ્વારા ગાણિતિક મૉડેલિંગનો ઉપયોગ કરીને આ સમસ્યાઓ ઉકેલવામાં આવી છે. વાસ્તવમાં તમે આમાંથી કેટલીક સમસ્યાઓને ઉકેલવાની રીતોનો અભ્યાસ વર્તમાન પાઠ્યપુસ્તકમાં કર્યો છે. તેમ છતાં પણ જો શક્ય હોય, તો સૌપ્રથમ તમે તેને ગણિતનો ઉપયોગ કર્યા સિવાય સ્વપ્રયત્ને ઉકેલવાની કોશિશ કરો તો તે શિક્ષણપ્રદ થશે અને તો જ તમે ગણિતની ક્ષમતા તથા ગાણિતિક મૉડેલિંગની જરૂરિયાતને જાણી શકશો.

A.2.3 ગાણિતિક મૉડેલિંગના સિદ્ધાંતો

ગાણિતિક મૉડેલિંગ એ સૈદ્ધાંતિક ક્રિયા છે અને તેથી તેને સંબંધિત કેટલાક સિદ્ધાંતો છે. મોટે ભાગે, આ સિદ્ધાંતો દાર્શનિક સ્વરૂપે છે. ગાણિતિક મૉડેલિંગના કેટલાક પાયાના સિદ્ધાંતોની યાદી નીચે આપેલ છે તે સૂચનાત્મક સ્વરૂપમાં છે :

(i) મૉડેલ માટેની જરૂરિયાત જાણવી. **(આપણે શા માટે મૉડેલની શોધમાં છીએ ?)**
(ii) મૉડેલ માટે જરૂરી એવા ચલ/પ્રચલની યાદી બનાવવી.
(iii) ઉપલબ્ધ હોય તેવી સંબંધિત માહિતીને ઓળખવી. **(શું આપેલ છે ?)**
(iv) ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવી પરિસ્થિતિઓને ઓળખવી. **(ધારણાઓ)**
(v) ભૌતિક સિદ્ધાંતોનું નિયમન કરવું.
(vi) ઓળખો :
   (a) ઉપયોગી હોય તેવાં સમીકરણો
   (b) કરવી જરૂરી હોય તેવી ગણતરીઓ
   (c) પરિણામ સ્વરૂપે પ્રાપ્ત થતો ઉકેલ
(vii) નીચે પ્રમાણેનું પરીક્ષણ કરી શકે તેવી કસોટીઓ ઓળખવી.
   (a) મૉડેલની સુસંગતતા
   (b) મૉડેલની ઉપયોગિતા
(viii) મૉડેલને વધુ અસરકારક બનાવી શકે તેવા પ્રચલની કિંમતો ગણવી.

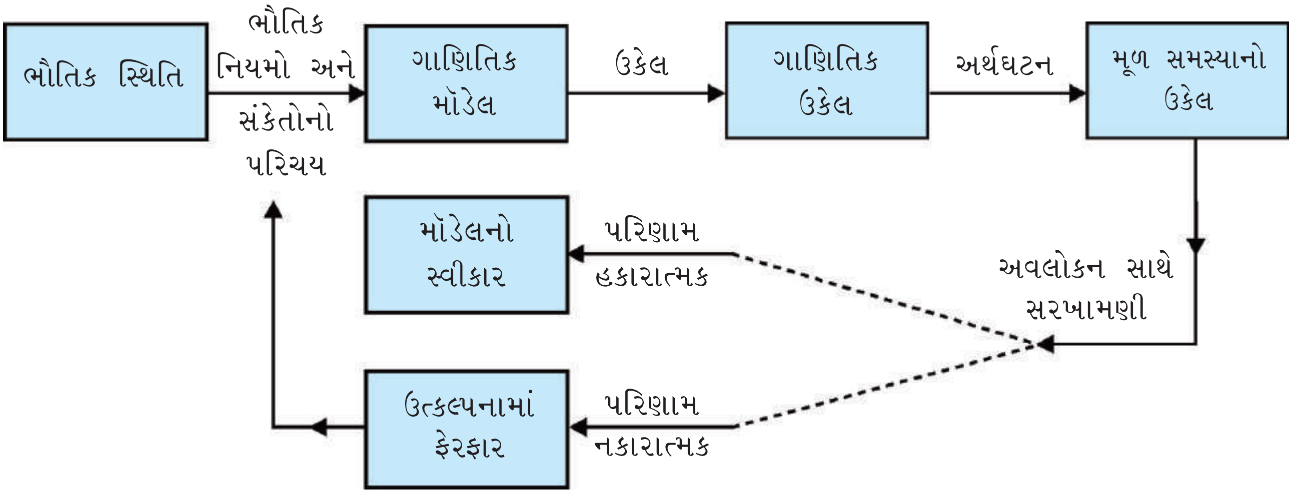
ગાણિતિક મૉડેલિંગના ઉપર્યુક્ત સિદ્ધાંતો આપણને તે માટેના જરૂરી એવાં નીચેનાં સોપાનો (પગલાંઓ) તરફ દોરી જાય છે :

પગલું 1 : ભૌતિક પરિસ્થિતિ ઓળખવી.
પગલું 2 : પ્રચલ/ચલની રજૂઆત અને ભૌતિક નિયમો તથા સંકેતોના ઉપયોગ દ્વારા ભૌતિક સ્થિતિને ગાણિતિક મૉડેલમાં પરિવર્તિત કરવી.
પગલું 3 : ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ શોધવો.

પગલું 4 : પરિણામનું મૂળ સમસ્યાના સંદર્ભમાં અર્થઘટન કરવું અને પરિણામની અવલોકનો કે પ્રયોગો સાથે સરખામણી કરવી.

પગલું 5 : જો પરિણામ હકારાત્મક હોય, તો મૉડેલ સ્વીકાર્ય છે. અન્યથા ઉત્કલ્પનાઓ/ધારણાઓમાં ભૌતિક સ્થિતિ પ્રમાણે ફેરફાર કરો અને પગલા 2 પર જાઓ.

ઉપર્યુક્ત પગલાંઓને આકૃતિ સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :



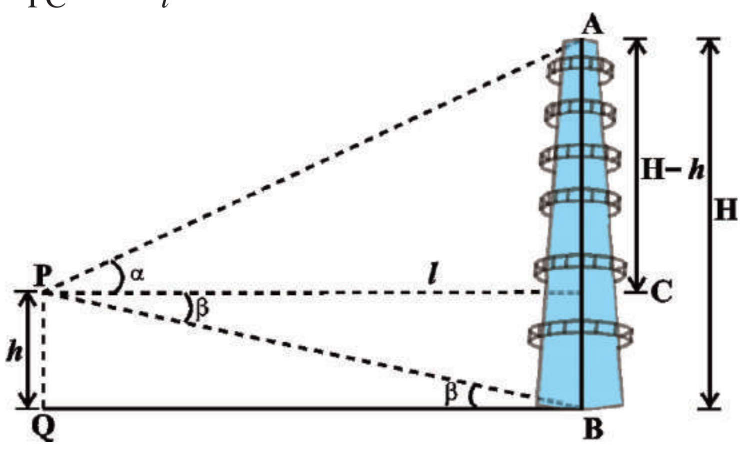
આકૃતિ A.2.1

ઉદાહરણ 1 : ગાણિતિક મૉડેલિંગના ઉપયોગથી આપેલ મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : પગલું 1 : ‘‘આપેલ મિનારાની ઊંચાઈ શોધવી’’ એ ભૌતિક પરિસ્થિતિ છે.

પગલું 2 : ધારો કે AB આપેલ મિનારો છે. (આકૃતિ A.2.2) ધારો કે કોઈ નિરીક્ષક (PQ)ની આંખ બિંદુ P આગળ છે અને તે મિનારાની ઊંચાઈ માપે છે. ધારો કે PQ = h તથા મિનારાની ઊંચાઈ H છે. ધારો કે વ્યક્તિની આંખથી મિનારાની ટોચ સુધીનો ઉત્સેધકોણ α છે તથા l = QB = PC.

હવે, $\tan\alpha = \dfrac{AC}{PC} = \dfrac{H - h}{l}$ અથવા $H = h + l\tan\alpha$ ...(1)



આકૃતિ A.2.2

પગલું 3 : અહીં નોંધીએ કે, (ષષ્ટાંક યંત્રના ઉપયોગથી) જો નિરીક્ષક પ્રચલો h, l તથા α ની કિંમતો જાણતા હોય, તો પરિણામ (1) પરથી સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

પગલું 4 : જો મિનારાનો આધાર સુલભ ન હોય, એટલે કે નિરીક્ષકને જ્યારે l ની જાણકારી ન હોય તેવા કિસ્સામાં, ધારો કે બિંદુ P થી મિનારાના તળિયા સુધીનો અવસેધકોણ β છે. આથી ΔPQB પરથી આપણને

$$tan\,\beta = \frac{PQ}{QB} = \frac{h}{l} \text{ અથવા } l = h\,cot\,\beta \text{ મળે.}$$

પગલું 5 : પ્રચલો h, l, β તથા α ની કિંમતોની જાણ હોય તેવી પરિસ્થિતિમાં પગલાં 5 ની જરૂર રહેતી નથી.

ઉદાહરણ 2 : ધારો કે કોઈ એક વ્યાવસાયિક કંપની ત્રણ પ્રકારનાં ઉત્પાદનો P_1, P_2 અને P_3 માટે ત્રણ પ્રકારના કાચા માલ R_1, R_2 તથા R_3 નો ઉપયોગ કરે છે. ધારો કે બે ગ્રાહકો F_1 તથા F_2 કંપની પાસેથી ખરીદીની માંગ કરે છે; પરંતુ કંપની પાસે અનુક્રમે R_1, R_2 તથા R_3 નો મર્યાદિત જથ્થો છે. આ પરિસ્થિતિને ધ્યાનમાં રાખીને, ગ્રાહકોની માંગને સંતોષી શકે તથા તે માટે જરૂરી કાચા માલ R_1, R_2 તથા R_3 નું પ્રમાણ નક્કી કરી શકે તેવું મૉડેલ તૈયાર કરો.

ઉકેલ : પગલું 1 : સમસ્યામાં ભૌતિક સ્થિતિ સરળતાથી ઓળખી શકાય છે.

પગલું 2 : ધારો કે ગ્રાહકો F_1 તથા F_2 ની ખરીદીની માંગ દર્શાવતો શ્રેણિક A છે. તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

ધારો કે ઉત્પાદિત વસ્તુઓ P_1, P_2 અને P_3 ના દરેક એકમના નિર્માણ માટે જરૂરી એવો કાચો માલ R_1, R_2 તથા R_3 નો જથ્થો દર્શાવતો શ્રેણિક B છે. આથી,

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

પગલું 3 : બે શ્રેણિકો A તથા B નો ગુણાકાર AB (જે આ પરિસ્થિતિમાં સુવ્યાખ્યાયિત છે) નીચેના શ્રેણિક દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$AB = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

તે હકીકતમાં, ગ્રાહકો F_1 તથા F_2 ની ખરીદીની માંગને પૂર્ણ કરી શકે તે માટે જરૂરી કાચા માલ R_1, R_2 તથા R_3 નું પ્રમાણ નક્કી કરી આપે છે.

ઉદાહરણ 3 : જો $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$ તથા કાચા માલ R_1 ના 330 એકમો, R_2 ના 455 એકમો અને R_3 ના 140 એકમો ઉપલબ્ધ હોય, તો ઉદાહરણ 2 માં આપેલ મૉડેલનું અર્થઘટન કરો.

ઉકેલ : અહીં નોંધીએ કે,

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

આ શ્રેણિક સ્પષ્ટપણે દર્શાવે છે કે, ગ્રાહકો F_1 તથા F_2 ની ખરીદીની માંગને પૂરી કરવા માટે કાચો માલ R_1 ના 335 એકમો, R_2 ના 467 એકમો તથા R_3 ના 147 એકમોની જરૂર છે. તે ઉપલબ્ધ કાચા માલના જથ્થા કરતાં ઘણા વધારે છે. વળી, ત્રણેય ઉત્પાદનના પ્રત્યેક એકમના નિર્માણ માટે જરૂરી કાચા માલનું પ્રમાણ સુનિશ્ચિત છે. આથી આપણે કાં તો ઉપલબ્ધ કાચા માલનો જથ્થો વધારી શકીએ અથવા ગ્રાહકોને તેમની ખરીદીની માંગ ઘટાડવા માટેનું નિવેદન કરી શકીએ.

નોંધ : જો આપણે ઉદાહરણ 3 માં A ના સ્થાને નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો શ્રેણિક A_1 લઈએ,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

એટલે કે, જો ગ્રાહકો તેમની ખરીદીની માંગમાં ઘટાડો કરવા સહમત થાય, તો

$$A_1B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

આ દર્શાવે છે કે, R_1 ના 311 એકમો, R_2 ના 436 એકમો તથા R_3 ના 138 એકમો જરૂરી છે. તે ઉપલબ્ધ કાચા માલના જથ્થા કરતાં ઓછા છે. એટલે કે, R_1 ના 330 એકમો, R_2 ના 455 એકમો તથા R_3 ના 140 એકમો કરતાં ઓછા છે. આથી, જો ગ્રાહકો દ્વારા શ્રેણિક A_1 પ્રમાણે ખરીદીની માંગમાં ફેરફાર કરવામાં આવે, તો કંપની ગ્રાહકોની ખરીદી માટેની માંગ પ્રમાણેનો માલ સરળતાથી આપી શકે.

☛ નોંધ : ઉપલબ્ધ કાચા માલનો સંપૂર્ણ ઉપયોગ થાય તે માટે કોઈ વ્યક્તિ A માં ફરીથી સુધારો કે ફેરફાર કરી શકે છે.

પ્રશ્ન : શ્રેણિક B તથા ઉપલબ્ધ કાચા માલના જથ્થાને ધ્યાનમાં રાખીને, કંપનીના માલિકને સહાય મળે તે હેતુથી, ગ્રાહકોને તેમની માંગમાં ફેરફાર કરવાનો અનુરોધ કરવામાં આવે, જેના દ્વારા કંપની ઉપલબ્ધ કાચા માલનો સંપૂર્ણપણે ઉપયોગ કરી શકે. શું આપણે આવું ગાણિતિક મૉડેલ તૈયાર કરી શકીએ ?

આ પ્રશ્નનો જવાબ નીચેના ઉદાહરણમાં આપેલ છે :

ઉદાહરણ 4 : ધારો કે P_1, P_2, P_3 અને R_1, R_2, R_3 ઉદાહરણ 2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જ છે. ધારો કે કંપની પાસે R_1 ના 330 એકમો, R_2 ના 455 એકમો અને R_3 ના 140 એકમો ઉપલબ્ધ છે અને ધારો કે ત્રણેય ઉત્પાદનોના પ્રત્યેક એકમના નિર્માણ માટે જરૂરી કાચો માલ R_1, R_2 તથા R_3 નો જથ્થો નીચે આપેલ શ્રેણિકમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો છે. તો,

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

ઉપલબ્ધ કાચા માલનો સંપૂર્ણપણે ઉપયોગ થાય તે માટે પ્રત્યેક ઉત્પાદનના કેટલા એકમો બનાવવાં જોઈએ ?

ઉકેલ : પગલું 1 : પરિસ્થિતિને સરળતાથી ઓળખી શકાય છે.

પગલું 2 : ધારો કે કંપની P_1 ના x એકમો, P_2 ના y એકમો તથા P_3 ના z એકમોનું ઉત્પાદન કરે છે. વળી, (શ્રેણિક B જુઓ.) ઉત્પાદન P_1 ના પ્રત્યેક એકમ માટે R_1 ના 3 એકમો, P_2 ના પ્રત્યેક એકમ માટે R_1 ના 7 એકમો તથા P_3 માટે R_1 ના 5 એકમો તેમજ તમામ એકમો મળીને R_1 ના 330 એકમો ઉપલબ્ધ હોય, તો

$3x + 7y + 5z = 330$ મળે. (કાચા માલ R_1 માટે)

આ જ રીતે, આપણને

$4x + 9y + 12z = 455$ તથા (કાચા માલ R_2 માટે)

$3y + 7z = 140$ મળે. (કાચા માલ R_3 માટે)

સમીકરણોની આ સંહતિને શ્રેણિક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 455 \\ 140 \end{bmatrix}$$

પગલું 3 : પ્રાથમિક હાર-ક્રિયાનો ઉપયોગ કરીને આપણે

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ મેળવી શકીએ.}$$

તે પરથી $x = 20$, $y = 35$, $z = 5$ મળે. આથી, ઉપલબ્ધ કાચા માલનો સંપૂર્ણપણે ઉપયોગ થાય તે માટે કંપની P_1 ના 20 એકમો, P_2 ના 35 એકમો તથા P_3 ના 5 એકમોનું ઉત્પાદન કરી શકે.

નોંધ : આપણે નોંધીએ કે જો નિર્માતા ગ્રાહકો F_1 તથા F_2 ની ખરીદીની માંગ પ્રમાણે (ઉદાહરણ 3માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) નહિ પરંતુ ઉપલબ્ધ કાચા માલ પ્રમાણે નિર્માણ કરવાનું નક્કી કરે તો પણ તે ગ્રાહકોની માંગને સંતોષી શકે નહિ કારણ કે ગ્રાહક F_1 એ P_3 ના 6 એકમોની માંગ કરે છે જ્યારે નિર્માતા P_3 ના માત્ર પાંચ એકમ જ ઉત્પાદિત કરી શકે છે.

ઉદાહરણ 5 : એક દવા-નિર્માતા દવાઓ M_1 તથા M_2 ના ઉત્પાદન માટેની યોજના તૈયાર કરે છે. M_1 ની 20000 તથા M_2 ની 40000 શીશીઓ બનાવવા માટે પૂરતા પ્રમાણમાં કાચો માલ ઉપલબ્ધ છે. પરંતુ નિર્માતા બેમાંથી ગમે તે એક દવા શીશીમાં ભરી શકે તે માટે તેની પાસે 45000 શીશીઓ જ છે. વધુમાં, M_1 ની 1000 શીશીઓ ભરી શકાય તે માટે પૂરતી સામગ્રી તૈયાર કરતાં તેને 3 કલાક જેટલો સમય લાગે છે તથા M_2 ની 1000 શીશીઓ ભરી શકાય તે માટે પૂરતી સામગ્રી તૈયાર કરતાં 1 કલાક જેટલો સમય લાગે છે. આ ક્રિયા માટે નિર્માતા પાસે 66 કલાક ઉપલબ્ધ છે. M_1 ની પ્રત્યેક શીશી દીઠ થતો નફો ₹ 8 જ્યારે M_2 ની પ્રત્યેક શીશી દીઠ થતો નફો ₹ 7 છે. મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત થાય તે માટે દવા-નિર્માતાએ કેવી ઉત્પાદન યોજના બનાવવી જોઈએ ?

ઉકેલ : પગલું 1 : આપેલ ઉત્કલ્પના/પરિસ્થિતિને અંતર્ગત, મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત થાય તે માટે દવાઓ M_1 તથા M_2 ની શીશીઓની સંખ્યા શોધવી.

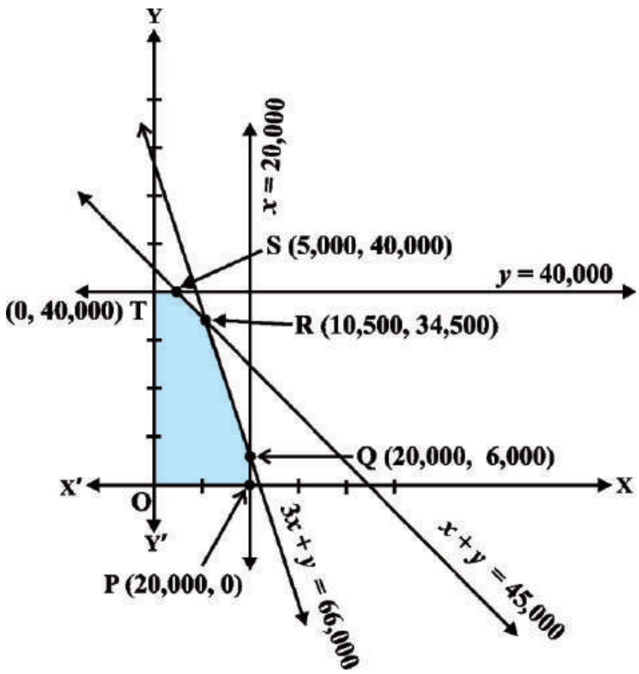
પગલું 2 : ધારો કે M_1 પ્રકારની દવા માટે ઉપલબ્ધ શીશીઓની સંખ્યા x તથા M_2 પ્રકારની દવા માટે ઉપલબ્ધ શીશીઓની સંખ્યા y છે. M_1 માટેની પ્રત્યેક શીશી દીઠ થતો નફો ₹ 8 તથા M_2 ની પ્રત્યેક શીશી દીઠ થતો નફો ₹ 7 હોવાથી, મળતું હેતુલક્ષી વિધેય (મહત્તમ મૂલ્ય માટે)

$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$ છે.

નીચેની મર્યાદાઓને અધીન, હેતુલક્ષી વિધેય મહત્તમ થવું જોઈએ. (સુરેખ આયોજન પરનું પ્રકરણ 12 જુઓ.)

$$\left.\begin{array}{l} x \le 20000 \\ y \le 40000 \\ x + y \le 45000 \\ 3x + y \le 66000 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots(1)$$

પગલું 3 : છાયાંકિત પ્રદેશ OPQRST એ (1)માં આપેલ મર્યાદાઓ માટેનો શક્ય ઉકેલ પ્રદેશ છે. શિરોબિંદુઓ O, P, Q, R, S તથા T અનુક્રમે (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) અને (0, 40000) છે.



આકૃતિ A.2.3

આપણે નોંધીએ કે,

O(0, 0) = 0 આગળ Z = 0

P(20000, 0) આગળ $Z = 8 \times 20000 = 160000$

Q(20000, 6000) આગળ $Z = 8 \times 20000 + 7 \times 6000 = 202000$

R(10500, 34500) આગળ $Z = 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$

S(5000, 40000) આગળ $Z = 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$

T(0, 40000) આગળ $Z = 7 \times 40000 = 280000$

આથી, સ્પષ્ટ છે કે, $x = 10500$ અને $y = 34500$ આગળ મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત થાય છે તથા મહત્તમ નફાનું મૂલ્ય ₹ 325500 છે. આથી, દવા-નિર્માતાએ મહત્તમ નફો ₹ 325500 પ્રાપ્ત થાય તે માટે દવા M_1 ની 10500 શીશીઓ તથા M_2 ની 34500 શીશીઓનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 6 : ધારો કે કોઈ એક કંપની એક નવી બનાવટનું ઉત્પાદન કરવા અંગે વિચારે છે, પરંતુ તે માટે કેટલીક કિંમતો (નિર્ધારિત અને ચલિત) લાગુ પડે છે. તેમજ કંપની તે બનાવટને કોઈ ચોક્કસ કિંમતે વેચવાની યોજના તૈયાર કરે છે, તો કંપનીને થતી નફાકારકતા ચકાસી શકાય તે માટેનું ગાણિતિક મૉડેલ તૈયાર કરો.

ઉકેલ : પગલું 1 : પરિસ્થિતિ સંપૂર્ણપણે સ્પષ્ટ છે.

પગલું 2 : સૂત્રીકરણ : અહીં નિર્ધારિત તથા ચલિત એમ બે પ્રકારની કિંમતો લાગુ પડે છે તેમ આપેલ છે. નિર્ધારિત કિંમત એ ઉત્પાદિત એકમોની સંખ્યાથી સ્વતંત્ર છે. (ઉદાહરણ તરીકે, ભાડું, દર વગેરે) જ્યારે ચલિત કિંમત ઉત્પાદિત એકમોની સંખ્યા વધે તેમ વધે છે. (ઉદાહરણ તરીકે, સામગ્રી). શરૂઆતમાં આપણે ધારીશું કે, ચલિત કિંમત એ ઉત્પાદિત એકમોની સંખ્યાના પ્રમાણમાં છે - તેનાથી આપણું મૉડેલ સરળતાથી તૈયાર થશે. કંપની તેની ઉત્પાદિત વસ્તુના વેચાણ દ્વારા કોઈ ચોક્કસ નાણાકીય રકમ કમાય અને તેને તે મહત્તમ કરવા ઇચ્છે. સરળતા ખાતર આપણે ધારીશું કે ઉત્પાદિત થયેલ તમામ એકમ તુરત જ વેચાઈ જાય છે.

ગાણિતિક મૉડેલ :

ધારો કે, x = ઉત્પાદિત થયેલ અને વેચાણ થયેલ એકમોની સંખ્યા

C = કુલ ઉત્પાદન-ખર્ચ (રૂપિયામાં)

I = વેચાણ દ્વારા થતી આવક (રૂપિયામાં)

P = નફો (રૂપિયામાં)

ઉપર દર્શાવેલ આપણી ધારણાઓ પ્રમાણે C બે ભાગને સમાવે છે.

(i) નિર્ધારિત કિંમત = a (રૂપિયામાં)

(ii) ચલિત કિંમત = b (રૂપિયા/ઉત્પાદિત એકમ)

આથી, $C = a + bx$ ...(1)

વળી, આવક I એ વેચાણકિંમત s (રૂપિયા/એકમ) પર આધારિત છે.

આથી, $I = sx$ ...(2)

આવક તથા ખર્ચ વચ્ચેનો તફાવત નફો P દર્શાવે છે.

આથી, $P = I - C$

$= sx - (a + bx)$

$= (s - b)x - a$ ...(3)

હવે આપણને ચલિત રાશિઓ x, C, I, P, a, b, s તથા સમીકરણો (1)થી (3) વચ્ચેના પારસ્પરિક સંબંધો દર્શાવતું ગાણિતિક મૉડેલ પ્રાપ્ત થશે. આ તમામ ચલને નીચે પ્રમાણે વર્ગીકૃત કરી શકાય :

સ્વતંત્ર ચલ	x
અવલંબી ચલ	C, I, P
પ્રચલો	a, b, s

જો નિર્માતાને x, a, b, s જ્ઞાત હોય, તો P નક્કી કરી શકે.

પગલું 3 : (3) પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, સરભર બિંદુ (એટલે કે નહિ નફો, નહિ નુકસાન) માટે P = 0 એટલે $x = \frac{a}{s-b}$ એકમ.

પગલું 4 અને 5 : સરભર બિંદુના સંદર્ભમાં, આપણે તારવી શકીએ કે, જો કંપની ઓછા એકમનું ઉત્પાદન કરે એટલે કે, $x = \frac{a}{s-b}$ એકમ કરતાં ઓછા એકમનું ઉત્પાદન કરે, તો કંપનીને નુકસાન થશે અને જો કંપની વધુ એકમનું ઉત્પાદન કરે એટલે કે $\frac{a}{s-b}$ કરતાં વધુ એકમોનું ઉત્પાદન કરે, તો કંપનીને વધુ નફો પ્રાપ્ત થશે. વધુમાં, જો સરભર બિંદુ અવાસ્તવિક સાબિત થાય, તો અન્ય મૉડેલ બનાવવા પ્રયત્ન કરી શકાય અથવા રોકડ વ્યવહારને સંબંધિત આપણી ધારણામાં ફેરફાર કરી શકાય.

નોંધ : (3) પરથી, $\frac{dP}{dx} = s - b$

એટલે કે, x ને સાપેક્ષ P માં થતા ફેરફારનો દર રાશિ $s - b$ પર આધારિત છે. તે વેચાણકિંમત અને પ્રત્યેક ઉત્પાદનની ચલિત કિંમતના તફાવત જેટલો છે. આથી, નફો પ્રાપ્ત થાય તે માટે આ તફાવત ધન હોવો જરૂરી છે. તથા વધુ નફો પ્રાપ્ત થાય તે માટે એક જ સમયે વિશાળ સંખ્યામાં એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ અથવા ચલિત કિંમત ન્યૂનતમ કરવાનો પ્રયત્ન કરવો જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : ધારો કે એક ટાંકીમાં 1000 લિટર લવણજળ સમાયેલું છે. તેમાં પ્રતિ લિટરે 250 ગ્રામ મીઠું સમાયેલું છે. પ્રતિ લિટરે 200 ગ્રામ મીઠું સમાવતા લવણજળને પ્રતિ મિનિટ 25 લિટરના દરેથી ટાંકીમાં રેડવામાં આવે છે અને આ જ દરથી ટાંકીમાંથી બહાર કાઢવામાં આવે છે. ધારો કે પ્રત્યેક ક્ષણે મિશ્રણને એકસરખી રીતે હલાવવામાં આવે છે, તો કોઈ t સમયે ટાંકીમાં રહેલા મીઠાનું પ્રમાણ શું હશે ?

ઉકેલ : પગલું 1 : પરિસ્થિતિને સરળતાથી જાણી શકાય છે.

પગલું 2 : ધારો કે $y = y(t)$ એ આંતરપ્રવાહ અને બહિર્પ્રવાહ શરૂ થયા પછી કોઈ t સમયે (મિનિટમાં), ટાંકીમાં રહેલ મીઠાનું પ્રમાણ (કિલોગ્રામમાં) દર્શાવે છે. વધુમાં, ધારો કે y એ વિકલનીય વિધેય છે.

જ્યારે $t = 0$ એટલે કે, લવણજળનો આંતરપ્રવાહ - બહિર્પ્રવાહ શરૂ થાય તે પહેલાં,

$y = 250$ ગ્રામ $\times 1000 = 250$ કિલોગ્રામ

આપણે નોંધીએ કે મિશ્રણના આંતરપ્રવાહ તથા બહિર્પ્રવાહને કારણે y માં ફેરફાર ઉદ્ભવે છે.

હવે, લવણજળનો આંતરપ્રવાહ 5 કિલોગ્રામ પ્રતિ મિનિટના દરે ટાંકીમાં મીઠું લાવે છે (કારણ કે, 25×200 ગ્રામ = 5 કિલોગ્રામ) તથા બહિર્પ્રવાહ $25\left(\frac{y}{1000}\right) = \frac{y}{40}$ કિલોગ્રામ પ્રતિમિનિટના દરે ટાંકીમાંથી મીઠું બહાર લઈ જાય છે. (t સમયે ટાંકીમાં $\frac{y}{1000}$ કિલોગ્રામ મીઠું છે.)

આથી, t ની સાપેક્ષે મીઠાના પ્રમાણમાં થતા ફેરફારનો દર

$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40}$ દ્વારા દર્શાવી શકાય. (શા માટે ?)

અથવા $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40}y = 5$ ...(1)

આ પરિણામ આપેલ સમસ્યા માટે એક ગાણિતિક મૉડેલ આપશે.

પગલું 3 : સમીકરણ (1) સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે અને તેને સરળતાથી ઉકેલી શકાય છે. સમીકરણ (1)નો ઉકેલ

$y \cdot e^{\frac{t}{40}} = 200\, e^{\frac{t}{40}} + c$ અથવા

$y(t) = 200 + ce^{-\frac{t}{40}}$ ...(2)

દ્વારા આપી શકાય, જ્યાં c એ સંકલનનો અચળ છે. નોંધીશું કે, જ્યારે $t = 0$, ત્યારે $y = 250$

$\therefore$ $250 = 200 + c$ અથવા

$c = 50$

$\therefore$ સમીકરણ (2) પરથી, $y = 200 + 50e^{-\frac{t}{40}}$ ...(3)

અથવા $\frac{y-200}{50} = e^{-\frac{t}{40}}$

અથવા $e^{\frac{t}{40}} = \frac{50}{y-200}$

$\therefore$ $t = 40 \log_e\left(\frac{50}{y-200}\right)$ ...(4)

અહીં, સમીકરણ (4), ટાંકીમાં રહેલ મીઠાનું પ્રમાણ y કિલોગ્રામ હોય ત્યારે મળતો સમય દર્શાવે છે.

પગલું 4 : (3) પરથી, $e^{-\frac{t}{40}}$ હંમેશાં ધન હોય છે. આપણે તારવી શકીએ કે પ્રત્યેક સમયે $y > 200$ છે. આથી ટાંકીમાં રહેલ મીઠાનો ન્યૂનતમ જથ્થો 200 કિલોગ્રામ છે.

વળી, (4) પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, જો $0 < y - 200 < 50$ હોય તો અને માત્ર તો જ $t > 0$ એટલે કે, જો $200 < y < 250$ હોય, તો અને માત્ર તો જ લવણજળનો આંતરપ્રવાહ અને બહિર્પ્રવાહ શરૂ થયા પછી ટાંકીમાં રહેલ મીઠાનું પ્રમાણ (જથ્થો) 200 કિલોગ્રામથી 250 કિલોગ્રામની વચ્ચે છે.

ગાણિતિક મૉડેલની મર્યાદાઓ :

અત્યાર સુધીમાં ઘણાં ગાણિતિક મૉડેલ્સ વિકસાવવામાં આવ્યા છે અને અનેકવિધ પરિસ્થિતિઓને ઊંડાણપૂર્વક સમજી શકાય તે માટે તેનો સફળતાપૂર્વક ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે. કેટલાક વિષયો જેવા કે ગાણિતિક ભૌતિકશાસ્ત્ર, ગાણિતિક અર્થશાસ્ત્ર, ક્રિયાત્મક સંશોધન, જીવ-ગણિતશાસ્ત્ર વગેરે લગભગ ગાણિતિક મૉડેલિંગના પર્યાય જેવાં છે.

પરંતુ, આજે પણ ઘણી પરિસ્થિતિઓ એવી છે કે, જેના મૉડેલ હજુ બનાવવાના બાકી છે. જેની પાછળનું કારણ એ છે કે કાં તો પરિસ્થિતિ ખૂબ જ જટિલ છે અથવા તો ગાણિતિક રીતે મૉડેલ વિકસાવવું અશક્ય હોય.

પરિસ્થિતિઓની સંખ્યા ઘણી મોટી હોય (અથવા જટિલ પરિસ્થિતિ હોય) તોપણ આપણે શક્તિશાળી કમ્પ્યૂટરો અને અતિસક્ષમ (સુપર) કમ્પ્યૂટરના વિકાસને કારણે ગાણિતિક મૉડેલ બનાવવા માટે સક્ષમ છીએ. અતિ ઝડપી અને અદ્યતન કમ્પ્યૂટરના કારણે આપણે વધુ વાસ્તવિક મૉડેલની રચના કરી શકીએ છીએ કે જે અવલોકનોની સાથે વધુ સારો હકારાત્મક અભિગમ આપી શકે.

આપણી પાસે ગાણિતિક મૉડેલ માટે ઉપયોગમાં લીધેલ ચલ કે પ્રચલની અંદાજિત કિંમતો (મૂલ્યાંકન) કે પસંદગી માટેનું યોગ્ય માર્ગદર્શન નથી તેમ છતાં પણ, હકીકતે આપણે પાંચ કે છ ચલ કે પ્રચલની પસંદગી દ્વારા માહિતીને અનુરૂપ યથાર્થ મૉડેલ તૈયાર કરી શકીએ છીએ. તેના યોગ્ય મૂલ્યાંકન માટે ચલ/પ્રચલની સંખ્યા ન્યૂનતમ રાખવી જોઈએ.

જટિલ કે બૃહદ પરિસ્થિતિઓના ગાણિતિક મૉડેલિંગને તેની પોતાની વિશિષ્ટ સમસ્યાઓ હોય છે. સામાન્ય રીતે આ પ્રકારની પરિસ્થિતિઓ પર્યાવરણ, સમુદ્રવિજ્ઞાન, વસતીનિયંત્રણ વગેરેના વૈશ્વિક મૉડેલના અભ્યાસ દરમિયાન ઉદ્ભવે છે. શિક્ષણની શાખાઓ જેવી કે ગણિત, કમ્પ્યૂટર વિજ્ઞાન, ભૌતિકવિજ્ઞાન, ઇજનેરીવિદ્યા, સમાજશાસ્ત્ર વગેરે સાથે સંકળાયેલા ગાણિતિક નિદર્શકો આ પરિસ્થિતિને હિંમતપૂર્વક પડકારની જેમ સ્વીકારે છે.

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (i) સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી તથા પરંપરિત નથી.
(ii) સ્વવાચક નથી અને સંમિત નથી પરંતુ પરંપરિત છે.
(iii) સ્વવાચક અને પરંપરિત છે, પરંતુ સંમિત નથી.
(iv) સ્વવાચક, સંમિત તથા પરંપરિત છે.
(v) (a) સ્વવાચક, સંમિત તથા પરંપરિત છે.
(b) સ્વવાચક, સંમિત તથા પરંપરિત છે.
(c) સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી તથા પરંપરિત નથી.
(d) સ્વવાચક અને સંમિત નથી પરંતુ પરંપરિત છે.
(e) સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી તથા પરંપરિત નથી.

3. સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી તથા પરંપરિત નથી.

5. સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી તથા પરંપરિત નથી.

9. (i) $\{1, 5, 9\}$ (ii) $\{1\}$

12. T_1 એ T_3 ને સંબંધિત છે.

13. તમામ ત્રિકોણોનો ગણ

14. રેખાઓ $y = 2x + c$, $c \in R$ નો ગણ

15. B

16. C

સ્વાધ્યાય 1.2

1. ના

2. (i) એક-એક વિધેય છે, પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.
(ii) એક-એક વિધેય નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય નથી.
(iii) એક-એક વિધેય નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય નથી.
(iv) એક-એક વિધેય છે પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.
(v) એક-એક વિધેય છે પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

7. (i) એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.
(ii) એક-એક વિધેય નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

9. ના

10. હા

11. D

12. A

સ્વાધ્યાય 1.3

1. $gof = \{(1, 3), (3, 1), (4, 3)\}$

3. (i) $(gof)(x) = |\, 5\,|\,x\,| - 2\,|$, $(fog)(x) = |\, 5x - 2\,|$ (ii) $(gof)(x) = 2x$, $(fog)(x) = 8x$

4. $f^{-1} = f$

5. (i) ના, કારણ કે, f અનેક-એક વિધેય છે.
(ii) ના, કારણ કે g અનેક-એક વિધેય છે.
(iii) હા, કારણ કે, h એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

6. $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1-y}$; $y \neq 1$ દ્વારા f^{-1} મળે છે.

7. $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{4}$ દ્વારા f^{-1} મળે છે.

11. $f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$, $f^{-1}(c) = 3$ દ્વારા f^{-1} મળે છે.

13. C

14. B

સ્વાધ્યાય 1.4

1. (i) ના (ii) હા (iii) હા (iv) હા (v) હા

2. (i) * એ ક્રમના તથા જૂથના નિયમ પૈકી એકેયનું પાલન ન કરે.

(ii) * એ ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે, પરંતુ જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

(iii) * એ ક્રમના તથા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(iv) * એ ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે, પરંતુ જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

(v) * એ ક્રમના તથા જૂથના નિયમ પૈકી એકેયનું પાલન ન કરે.

(vi) * એ ક્રમના તથા જૂથના નિયમ પૈકી એકેયનું પાલન ન કરે.

3.

^	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

4. (i) $(2 * 3) * 4 = 1$ અને $2 * (3 * 4) = 1$ (ii) હા (iii) 1 **5.** હા

6. (i) $5 * 7 = 35$, $20 * 16 = 80$ (ii) હા (iii) હા (iv) 1 (v) 1 **7.** ના

8. $*$ એ ક્રમના તથા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે. $*$ ને N માં કોઈ એકમ ઘટક નથી.

9. (ii), (iv), (v) ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે. (v) જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે

10. (v) **11.** એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ નથી.

12. (i) અસત્ય (ii) સત્ય **13.** B

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 1

1. $g(y) = \frac{y-7}{10}$ **2.** $f^{-1} = f$

3. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$ **8.** ના **10.** $n\,!$

11. (i) $F^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$ (ii) F^{-1}નું અસ્તિત્વ નથી. **12.** ના

15. હા **16.** A **17.** B **18.** B **19.** B

સ્વાધ્યાય 2.1

1. $\frac{-\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **4.** $\frac{-\pi}{3}$

5. $\frac{2\pi}{3}$ **6.** $\frac{-\pi}{4}$ **7.** $\frac{\pi}{6}$ **8.** $\frac{\pi}{6}$

9. $\frac{3\pi}{4}$ **10.** $\frac{-\pi}{4}$ **11.** $\frac{3\pi}{4}$ **12.** $\frac{2\pi}{3}$

13. B **14.** B

સ્વાધ્યાય 2.2

5. $\frac{1}{2}tan^{-1}x$ **6.** $\frac{\pi}{2} - sec^{-1}x$ **7.** $\frac{x}{2}$ **8.** $\frac{\pi}{4} - x$

9. $sin^{-1}\frac{x}{a}$ **10.** $3tan^{-1}\frac{x}{a}$ **11.** $\frac{\pi}{4}$ **12.** 0

13. $\frac{x+y}{1-xy}$ **14.** $\frac{1}{5}$ **15.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ **16.** $\frac{\pi}{3}$

17. $\frac{-\pi}{4}$ **18.** $\frac{17}{6}$ **19.** B **20.** D

21. B

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 2

1. $\frac{\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **13.** $x = \frac{\pi}{4}$ **14.** $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

15. D **16.** C **17.** C

સ્વાધ્યાય 3.1

1. (i) 3×4 (ii) 12 (iii) 19, 35, –5, 12, $\frac{5}{2}$

2. 1×24, 2×12, 3×8, 4×6, 6×4, 8×3, 12×2, 24×1; 1×13, 13×1

3. 1×18, 2×9, 3×6, 6×3, 9×2, 18×1; 1×5, 5×1

4. (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (i) $x = 1$, $y = 4$, $z = 3$

(ii) $x = 4$, $y = 2$, $z = 0$ અથવા $x = 2$, $y = 4$, $z = 0$

(iii) $x = 2$, $y = 4$, $z = 3$

7. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

8. C **9.** B **10.** D

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (i) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B - C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (i) $X = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-12}{5} \\ \frac{-11}{5} & 3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix}$

8. $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $x = 3, y = 3$ **10.** $x = 3, y = 6, z = 9, t = 6$

11. $x = 3, y = -4$ **12.** $x = 2, y = 4, w = 3, z = 1$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ **17.** $k = 1$

19. (a) ₹ 15,000, ₹ 15,000 (b) ₹ 5000, ₹ 25,000

20. ₹ 20,160 **21.** A **22.** B

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (i) $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

10. (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

11. A **12.** B

સ્વાધ્યાય 3.4

1. $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **12.** વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

13. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

15. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

18. D

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 3

6. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **7.** $x = -1$ **9.** $x = \pm 4\sqrt{3}$

10. (a) બજાર I માં થતી કુલ આવક = ₹ 46,000; બજાર II માં થતી કુલ આવક = ₹ 53,000

(b) ₹ 15,000; ₹ 17,000

11. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **13.** C **14.** B **15.** C

સ્વાધ્યાય 4.1

1. (i) 18 **2.** (i) 1 (ii) $x^3 - x^2 + 2$

5. (i) –12 (ii) 46 (iii) 0 (iv) 5 **6.** 0

7. (i) $x = \pm\sqrt{3}$ (ii) $x = 2$ **8.** B

સ્વાધ્યાય 4.2

15. C **16.** C

સ્વાધ્યાય 4.3

1. (i) $\frac{15}{2}$ (ii) $\frac{47}{2}$ (iii) 15

3. (i) 0, 8 (ii) 0, 8 **4.** (i) $y = 2x$ (ii) $x - 3y = 0$ **5.** D

સ્વાધ્યાય 4.4

1. (i) $M_{11} = 3$, $M_{12} = 0$, $M_{21} = -4$, $M_{22} = 2$, $A_{11} = 3$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = 4$, $A_{22} = 2$

(ii) $M_{11} = d$, $M_{12} = b$, $M_{21} = c$, $M_{22} = a$

$A_{11} = d$, $A_{12} = -b$, $A_{21} = -c$, $A_{22} = a$

2. (i) $M_{11} = 1$, $M_{12} = 0$, $M_{13} = 0$, $M_{21} = 0$, $M_{22} = 1$, $M_{23} = 0$, $M_{31} = 0$, $M_{32} = 0$, $M_{33} = 1$

$A_{11} = 1$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 0$, $A_{31} = 0$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 1$

(ii) $M_{11} = 11$, $M_{12} = 6$, $M_{13} = 3$, $M_{21} = -4$, $M_{22} = 2$, $M_{23} = 1$, $M_{31} = -20$, $M_{32} = -13$, $M_{33} = 5$

$A_{11} = 11$, $A_{12} = -6$, $A_{13} = 3$, $A_{21} = 4$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -1$, $A_{31} = -20$, $A_{32} = 13$, $A_{33} = 5$

3. 7 **4.** $(x - y)(y - z)(z - x)$ **5.** D

સ્વાધ્યાય 4.5

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

13. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $a = -4,\ b = 1$ **15.** $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **17.** B **18.** B

સ્વાધ્યાય 4.6

1. સુસંગત **2.** સુસંગત **3.** સુસંગત નથી

4. સુસંગત **5.** સુસંગત નથી. **6.** સુસંગત

7. $x = 2,\ y = -3$ **8.** $x = \frac{-5}{11},\ y = \frac{12}{11}$ **9.** $x = \frac{-6}{11},\ y = \frac{-19}{11}$

10. $x = -1,\ y = 4$ **11.** $x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{-3}{2}$

12. $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$ **13.** $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$

14. $x = 2,\ y = 1,\ z = 3$

15. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}$, $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

16. 1 કિલોગ્રામ ડુંગળીની કિંમત = ₹ 5
1 કિલોગ્રામ ઘઉંની કિંમત = ₹ 8
1 કિલોગ્રામ ચોખાની કિંમત = ₹ 8

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 4

3. 1 **5.** $x = \frac{-a}{3}$ **7.** $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. $-2(x^3 + y^3)$ **10.** xy **16.** $x = 2,\ y = 3,\ z = 5$

17. A **18.** A **19.** D

સ્વાધ્યાય 5.1

2. f એ $x = 3$ આગળ સતત છે. **3.** તમામ (a), (b), (c) તથા (d) સતત વિધેયો છે.

5. f એ $x = 0$ અને $x = 2$ આગળ સતત છે, પરંતુ $x = 1$ આગળ અસતત છે.

6. $x = 2$ આગળ અસતત **7.** $x = 3$ આગળ અસતત **8.** $x = 0$ આગળ અસતત

9. કોઈ પણ સંખ્યા આગળ અસતત નથી. **10.** કોઈ પણ સંખ્યા આગળ અસતત નથી.

11. કોઈ પણ સંખ્યા આગળ અસતત નથી.

12. f એ $x = 1$ આગળ અસતત છે.

13. f એ $x = 1$ આગળ અસતત છે.

14. f એ $x = 1$ અને $x = 3$ આગળ અસતત છે.

15. માત્ર $x = 1$ આગળ જ અસતત છે.

16. સતત

17. $a = b + \frac{2}{3}$

18. λ ની કોઈ પણ કિંમત માટે f એ $x = 0$ આગળ સતત નથી, પરંતુ f એ λ ની કોઈ પણ કિંમત માટે $x = 1$ આગળ સતત છે.

20. f એ $x = \pi$ આગળ સતત છે.

21. (a), (b) તથા (c) તમામ સતત

22. $\forall x \in R$, *cos* વિધેય સતત છે; $x = n\pi$, $n \in Z$ સિવાય તમામ x માટે *cosec* વિધેય સતત છે; $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$ સિવાય તમામ x માટે *sec* વિધેય સતત છે તથા $x = n\pi$, $n \in Z$ સિવાય તમામ x માટે *cot* વિધેય સતત છે.

23. કોઈ પણ સંખ્યા માટે અસતત નથી.

24. હા, $\forall x \in R$, f સતત વિધેય છે.

25. $\forall x \in R$, f સતત વિધેય છે.

26. $k = 6$

27. $k = \frac{3}{4}$

28. $k = \frac{-2}{\pi}$

29. $k = \frac{9}{5}$

30. $a = 2$, $b = 1$

34. કોઈ પણ સંખ્યા માટે અસતત નથી.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. $2x \cos(x^2 + 5)$

2. $-\cos x \sin(\sin x)$

3. $a \cos(ax + b)$

4. $$\frac{\sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

5. $a \cos(ax + b) \sec(cx + d) + c \sin(ax + b) \tan(cx + d) \sec(cx + d)$

6. $10x^4 \sin x^5 \cos x^5 \cos x^3 - 3x^2 \sin x^3 \sin^2 x^5$

7. $\dfrac{-2\sqrt{2}x}{\sin x^2\sqrt{\sin 2x^2}}$

8. $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

સ્વાધ્યાય 5.3

1. $\dfrac{\cos x - 2}{3}$

2. $\dfrac{2}{\cos y - 3}$

3. $-\dfrac{a}{2by + \sin y}$

4. $\dfrac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$

5. $-\dfrac{(2x + y)}{(x + 2y)}$

6. $-\dfrac{(3x^2 + 2xy + y^2)}{(x^2 + 2xy + 3y^2)}$

7. $\dfrac{y \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$

8. $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}$

9. $\dfrac{2}{1 + x^2}$

10. $\dfrac{3}{1 + x^2}$

11. $\dfrac{2}{1 + x^2}$

12. $\dfrac{-2}{1 + x^2}$

13. $\dfrac{-2}{1 + x^2}$

14. $\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

15. $-\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

સ્વાધ્યાય 5.4

1. $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$, $x \neq n\pi$, $n \in Z$

2. $\dfrac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$

3. $3x^2 e^{x^3}$

4. $-\dfrac{e^{-x}\cos(\tan^{-1} e^{-x})}{1+e^{-2x}}$

5. $-e^x \tan e^x$, $e^x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in N$

6. $e^x + 2xe^{x^2} + 3x^2 e^{x^3} + 4x^3 e^{x^4} + 5x^4 e^{x^5}$

7. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$, $x > 0$

8. $\dfrac{1}{x \log x}$, $x > 1$

9. $-\dfrac{(x \sin x \cdot \log x + \cos x)}{x(\log x)^2}$, $x > 0$

10. $-\left(\dfrac{1}{x} + e^x\right)\sin(\log x + e^x)$, $x > 0$

સ્વાધ્યાય 5.5

1. $-\cos x \cos 2x \cos 3x\, [\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x]$

2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-5}\right]$

3. $(\log x)^{\cos x}\left[\dfrac{\cos x}{x \log x} - \sin x \log(\log x)\right]$

4. $x^x(1 + \log x) - 2^{\sin x}\cos x \log 2$

5. $(x+3)(x+4)^2(x+5)^3(9x^2 + 70x + 133)$

6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\dfrac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right] + x^{1+\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x+1-\log x}{x^2}\right)$

7. $(\log x)^{x-1}[1 + \log x \cdot \log(\log x)] + 2x^{\log x - 1} \cdot \log x$

8. $(\sin x)^x(x \cot x + \log \sin x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

9. $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right] + (\sin x)^{\cos x}[\cos x \cot x - \sin x \log \sin x]$

10. $x^{x \cos x}[\cos x \cdot (1 + \log x) - x \sin x \log x] - \dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

11. $(x \cos x)^x\, [1 - x \tan x + \log(x \cos x)] + (x \sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{x \cot x + 1 - \log(x \sin x)}{x^2}\right]$

12. $-\dfrac{yx^{y-1}+y^x\log y}{x^y\log x+xy^{x-1}}$

13. $\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{y-x\log y}{x-y\log x}\right)$

14. $\dfrac{y\tan x+\log\cos y}{x\tan y+\log\cos x}$

15. $\dfrac{y(x-1)}{x(y-1)}$

16. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{4x^3}{1+x^4}+\dfrac{8x^7}{1+x^8}\right]$; $f'(1) = 120$

17. $5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11$

સ્વાધ્યાય 5.6

1. t^2

2. $\dfrac{b}{a}$

3. $-4\sin t$

4. $-\dfrac{1}{t^2}$

5. $\dfrac{\cos\theta-2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta-\sin\theta}$

6. $-\cot\dfrac{\theta}{2}$

7. $-\cot 3t$

8. $\tan t$

9. $\dfrac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$

10. $\tan\theta$

સ્વાધ્યાય 5.7

1. 2

2. $380\,x^{18}$

3. $-x\cos x-2\sin x$

4. $-\dfrac{1}{x^2}$

5. $x(5+6\log x)$

6. $2e^x(5\cos 5x-12\sin 5x)$

7. $9e^{6x}(3\cos 3x-4\sin 3x)$

8. $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

9. $-\dfrac{(1+\log x)}{(x\log x)^2}$

10. $-\dfrac{\sin(\log x)+\cos(\log x)}{x^2}$

12. $-\cot y\operatorname{cosec}^2 y$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 5

1. $27(3x^2-9x+5)^8(2x-3)$

2. $3\sin x\cos x(\sin x-2\cos^4 x)$

3. $(5x)^{3\cos 2x}\left[\dfrac{3\cos 2x}{x}-6\sin 2x\log 5x\right]$

4. $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}$

5. $-\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}\sqrt{2x+7}}+\dfrac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}\right]$

6. $\dfrac{1}{2}$

7. $(\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{\log(\log x)}{x}\right]$, $x > 1$

8. $(a\sin x-b\cos x)\sin(a\cos x+b\sin x)$

9. $(\sin x-\cos x)^{\sin x-\cos x}(\cos x+\sin x)(1+\log(\sin x-\cos x))$, $\sin x > \cos x$

10. $x^x(1+\log x)+ax^{a-1}+a^x\log a$

11. $x^{x^2-3}\left[\frac{x^2-3}{x}+2x\log x\right]+(x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3}+2x\log(x-3)\right]$

12. $\frac{6}{5}\cot\frac{t}{2}$ **13.** 0 **17.** $\frac{\sec^3 t}{at}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (a) 6π સેમી^{2}/સેમી (b) 8π સેમી^{2}/સેમી

2. $\frac{8}{3}$ સેમી^{2}/સે **3.** 60π સેમી^{2}/સે **4.** 900 સેમી^{3}/સે

5. 80π સેમી^{2}/સે **6.** 1.4π સેમી/સે

7. (a) -2 સેમી/મિનિટ (b) 2 સેમી^{2}/મિનિટ

8. $\frac{1}{\pi}$ સેમી/સે **9.** 400π સેમી^{3}/સેમી **10.** $\frac{8}{3}$ સેમી/સે

11. (4, 11) અને $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$ **12.** 2π સેમી^{3}/સે

13. $\frac{27}{8}\pi\,(2x+1)^2$ **14.** $\frac{1}{48\pi}$ સેમી/સે **15.** ₹ 20.967

16. ₹ 208 **17.** B **18.** D

સ્વાધ્યાય 6.2

4. (a) $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

5. (a) $(-\infty, -2)$ અને $(3, \infty)$ (b) $(-2, 3)$

6. (a) $x < -1$ માટે ચુસ્ત ઘટતું અને $x > -1$ માટે ચુસ્ત વધતું

(b) $x > \frac{-3}{2}$ માટે ચુસ્ત ઘટતું અને $x < \frac{-3}{2}$ માટે ચુસ્ત વધતું

(c) $-2 < x < -1$ માટે ચુસ્ત વધતું અને $x < -2$ તથા $x > -1$ માટે ચુસ્ત ઘટતું

(d) $x < \frac{-9}{2}$ માટે ચુસ્ત વધતું અને $x > \frac{-9}{2}$ માટે ચુસ્ત ઘટતું

(e) (1, 3) અને $(3, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું તથા $(-\infty, -1)$ અને $(-1, 1)$ માં ચુસ્ત ઘટતું

8. $0 < x < 1$ અને $x > 2$ **12.** A, B

13. D **14.** $a = -2$ **19.** D

સ્વાધ્યાય 6.3

1. 764 **2.** $\frac{-1}{64}$ **3.** 11 **4.** 24

5. 1 **6.** $\frac{-a}{2b}$ **7.** $(3, -20)$ અને $(-1, 12)$

8. (3, 1) **9.** $(2, -9)$

10. (i) $y + x + 1 = 0$ અને $y + x - 3 = 0$

11. વક્રને 2 ઢાળવાળો કોઈ સ્પર્શક ન મળે.

12. $y = \frac{1}{2}$ **13.** (i) $(0, \pm 4)$ (ii) $(\pm 3, 0)$

14. (i) સ્પર્શક : $10x + y = 5$; અભિલંબ : $x - 10y + 50 = 0$

(ii) સ્પર્શક : $y = 2x + 1$; અભિલંબ : $x + 2y - 7 = 0$

(iii) સ્પર્શક : $y = 3x - 2$; અભિલંબ : $x + 3y - 4 = 0$

(iv) સ્પર્શક : $y = 0$; અભિલંબ : $x = 0$

(v) સ્પર્શક : $x + y - \sqrt{2} = 0$; અભિલંબ : $x = y$

15. (a) $y - 2x - 3 = 0$ (b) $36y + 12x - 227 = 0$

17. $(0, 0)$, $(3, 27)$ **18.** $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, -2)$

19. $(1, \pm 2)$ **20.** $2x + 3my - am^2 (2 + 3m^2) = 0$

21. $x + 14y - 254 = 0$, $x + 14y + 86 = 0$

22. $ty = x + at^2$, $y = -tx + 2at + at^3$

24. $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$, $\frac{y - y_0}{a^2 y_0} + \frac{x - x_0}{b^2 x_0} = 0$

25. $48x - 24y = 23$ **26.** D **27.** A

સ્વાધ્યાય 6.4

1. (i) 5.03 (ii) 7.035 (iii) 0.8

(iv) 0.208 (v) 0.9999 (vi) 1.96875

(vii) 2.9629 (viii) 3.9961 (ix) 3.009

(x) 20.025 (xi) 0.06083 (xii) 2.984

(xiii) 3.0046 (xiv) 7.904 (xv) 2.00187

2. 28.21 **3.** –34.995 **4.** $0.03\ x^3$ મી^{3} **5.** $0.12\ x^2$ મી^{2}

6. $3.92\ \pi$ મી^{3} **7.** $2.16\ \pi$ મી^{2} **8.** D **9.** C

સ્વાધ્યાય 6.5

1. (i) ન્યૂનતમ કિંમત = 3 (ii) ન્યૂનતમ કિંમત = –2

(iii) મહત્તમ કિંમત = 10 (iv) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

2. (i) ન્યૂનતમ કિંમત = –1, મહત્તમ કિંમત ન મળે.

(ii) મહત્તમ કિંમત = 3, ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

(iii) ન્યૂનતમ કિંમત = 4, મહત્તમ કિંમત = 6

(iv) ન્યૂનતમ કિંમત = 2, મહત્તમ કિંમત = 4

(v) ન્યૂનતમ કે મહત્તમ કિંમત ન મળે.

3. (i) $x = 0$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય = 0

(ii) $x = 1$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય = –2

$x = -1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય = 2

(iii) $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય = $\sqrt{2}$

(iv) $x = \frac{3\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય = $\sqrt{2}$

$x = \frac{7\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય = $-\sqrt{2}$

(v) $x = 1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય = 19

$x = 3$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય = 15

(vi) $x = 2$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય = 2

(vii) $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય = $\frac{1}{2}$

(viii) $x = \frac{2}{3}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય = $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

5. (i) (નિરપેક્ષ) વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય = –8; વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય = 8

(ii) વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય = –1; વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય = $\sqrt{2}$

(iii) વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય = –10; વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય = 8

(iv) વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય = 3; વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય = 19

6. મહત્તમ નફો = 113 એકમ

7. $x = 2$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે; ન્યૂનતમ મૂલ્ય = –39

$x = 0$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે; મહત્તમ મૂલ્ય = 25

8. $x = \frac{\pi}{4}$ અને $x = \frac{5\pi}{4}$ આગળ

9. મહત્તમ મૂલ્ય = $\sqrt{2}$

10. $x = 3$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે, મહત્તમ મૂલ્ય = 89

$x = -2$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે, મહત્તમ મૂલ્ય = 139

11. $a = 120$

12. $x = 2\pi$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે, મહત્તમ મૂલ્ય = 2π

$x = 0$ આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે, ન્યૂનતમ મૂલ્ય = 0

13. 12, 12 **14.** 45, 15 **15.** 25, 10 **16.** 8, 8

17. 3 સેમી **18.** $x = 5$ સેમી

21. ત્રિજ્યા = $\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ સેમી અને ઊંચાઈ = $2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ સેમી

22. $\frac{112}{\pi + 4}$ સેમી; $\frac{28\pi}{\pi + 4}$ સેમી **27.** A **28.** D **29.** C

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 6

1. (a) 0.677 (b) 0.497

3. $b\sqrt{3}$ સેમી^{2}/સેકન્ડ

4. $x + y - 3 = 0$

6. (i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ અને $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

7. (i) $x < -1$ અને $x > 1$ (ii) $-1 < x < 1$

8. $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$

9. ₹ 1000

11. લંબાઈ $= \frac{20}{\pi + 4}$ મીટર; પહોળાઈ $= \frac{10}{\pi + 4}$ મીટર

13. (i) $x = \frac{2}{7}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે.

(ii) $x = 2$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે.

(iii) $x = -1$ આગળ નતિબિંદુ

14. વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય $= \frac{5}{4}$; વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= 1$

17. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

19. A

20. B

21. A

22. B

23. A

24. A