ભૌતિકવિજ્ઞાન

ભાગ I

ધોરણ XI

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10એ, ગાંધીનગર- 382010

અનુવાદ

પ્રો. પી. એન. ગજ્જર
પ્રો. એમ. એસ. રામી
ડૉ. દિપક એચ. ગદાણી
શ્રી કે. ડી. પટેલ

સમીક્ષા

પ્રો. પી. બી. ઠાકોર
પ્રો. એન. કે. ભટ્ટ
પ્રિ. જી. ટી. પટેલ
ડૉ. જી. એમ. સુતરિયા
ડૉ. તરૂણ આર. ત્રિવેદી
શ્રી અશ્વિન એફ. ડોડિયા
શ્રી દિનેશ વી. સુથાર
શ્રી પી. એમ. પટેલ
શ્રી મયુર એમ. રાવલ
શ્રી વાસુદેવ બી. રાવલ
શ્રી આનંદ એન. ઠક્કર
શ્રી શૈલેષ એસ. પટેલ
શ્રી એ. જી. મોમીન

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી વિજય ટી. પારેખ

સંયોજન

ડૉ. ચિરાગ એચ. પટેલ
(વિષય સંયોજક : ભૌતિકવિજ્ઞાન)

નિર્માણ-આયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા તા. 25-10-2017ના ઠરાવ ક્રમાંક મશબ/1217/1036/છ -થી શાળા કક્ષાએ NCERTના પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્હી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ XI**ના **ભૌતિકવિજ્ઞાન (ભાગ I)** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મુકતા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલા આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક સ્ટેટ લેવલની કમિટીની રચના કરવામાં આવી. આ કમિટિની સાથે NCERTના પ્રતિનિધી તરીકે RIE, ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની એક ત્રિદિવસીય કાર્ય શિબીરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું છે. જેમાં ડૉ. એસ. કે. મકવાણા (RIE, ભોપાલ), ડૉ. કલ્પના મસ્કી (RIE, ભોપાલ), ડૉ. પી. એન. ગજ્જર, ડૉ. એન. કે. ભટ્ટ, ડૉ. જી. એમ. સુતરિયા અને શ્રી પી. એમ. પટેલે ઉપસ્થિત રહી પોતાના કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરા પાડ્યા છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે માન. અગ્રસચિવશ્રી (શિક્ષણ) દ્વારા અંગત રસ લઈને જરૂરી માર્ગદર્શન આપવામાં આવ્યું છે. મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે, તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્હીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

ડૉ. એમ. આઇ. જોષી
નિયામક
તા.

ડૉ. નીતિન પેથાણી
કાર્યવાહક પ્રમુખ
ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2018

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી ડૉ. એમ. આઇ. જોષી, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005 recommends that childrens life at sc hool must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making childrens life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor A.W. Joshi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a [1][SOLVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC] and to secure to all its citizens :

JUTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the [2][unity and integrity of the Nation];

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949 do HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.

1. Subs, by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec. 2, for Sovereign Democratic Republic (w.e.f. 3.1.1977)
2. Subs, by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for Unity of the Nation (w.e.f. 3.1.1977)

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group for Textbooks in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor,* Chairman, Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCCA), Ganeshbhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

A.W. Joshi, *Professor,* Honorary Visiting Scientist, NCRA, Pune (Formerly at Department of Physics, University of Pune)

Members

Anuradha Mathur, *PGT* , Modern School, Vasant Vihar, New Delhi

Chitra Goel, *PGT,* Rajkiya Pratibha Vikas Vidyalaya, Tyagraj Nagar, Lodhi Road, New Delhi

Gagan Gupta, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi

H.C. Pradhan, *Professor,* Homi Bhabha Centre of Science Education, Tata Institute of Fundamental Research, V.N. Purav Marg, Mankhurd, Mumbai

N. Panchapakesan, *Professor* (Retd.), Department of Physics and Astrophysics, University of Delhi, Delhi

P.K. Srivastava, *Professor* (Retd.), Director, CSEC, University of Delhi, Delhi

P.K. Mohanty, *PGT,* Sainik School, Bhubaneswar

P.C. Agarwal, *Reader,* Regional Institute of Education, NCERT, Sachivalaya Marg, Bhubaneswar

R. Joshi, *Lecturer* (S.G.), DESM, NCERT, New Delhi

S. Rai Choudhary, *Professor,* Department of Physics and Astrophysics, University of Delhi, Delhi

S.K. Dash, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi

Sher Singh, *PGT,* Lodhi Road, New Delhi

S.N. Prabhakara, *PGT,* DM School, Regional Institute of Education, NCERT, Mysore

Thiyam Jekendra Singh, *Professor,* Department of Physics, University of Manipur, Imphal

V.P. Srivastava, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

Member-Coordinator

B.K. Sharma, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

ACKNOWLEDGEMENTS

The National Council of Educational Research and Training acknowledges the valuable contribution of the individuals and organisations involved in the development of Physics textbook for Class XI. The Council also acknowledges the valuable contribution of the following academics for reviewing and refining the manuscripts of this book: Deepak Kumar, *Professor,* School of Physical Sciences, Jawaharlal Nehru University, New Delhi; Pankaj Sharan, *Professor,* Jamia Millia Islamia, New Delhi; Ajoy Ghatak, *Emeritus Professor*, Indian Institute of Technology, New Delhi; V. Sundara Raja, *Professor,* Sri Venkateswara University, Tirupati, Andhra Pradesh; C.S. Adgaonkar, *Reader* (*Retd*), Institute of Science, Nagpur, Maharashtra; D.A. Desai, *Lecturer* (*Retd*), Ruparel College, Mumbai, Maharashtra; F.I. Surve, *Lecturer*, Nowrosjee Wadia College, Pune, Maharashtra; Atul Mody, *Lecturer* (SG), VES College of Arts, Science and Commerce, Chembur, Mumbai, Maharashtra; A.K. Das, *PGT*, St. Xaviers Senior Secondary School, Delhi; Suresh Kumar, *PGT*, Delhi Public School, Dwarka, New Delhi; Yashu Kumar, *PGT*, Kulachi Hansraj Model School, Ashok Vihar, Delhi; K.S. Upadhyay, *PGT*, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Muzaffar Nagar (U.P.); I.K. Gogia, *PGT*, Kendriya Vidyalaya, Gole Market, New Delhi; Vijay Sharma, *PGT*, Vasant Valley School, Vasant Kunj, New Delhi; R.S. Dass, *Vice Principal* (*Retd*), Balwant Ray Mehta Vidya Bhawan, Lajpat Nagar, New Delhi and Parthasarthi Panigrahi, *PGT*, D.V. CLW Girls School, Chittranjan, West Bengal.

The Council also gratefully acknowledges the valuable contribution of the following academics for the editing and finalisation of this book: A.S. Mahajan, Professor (*Retd*), Indian Institute of Technology, Mumbai, Maharashtra; D.A. Desai, *Lecturer* (*Retd*), Ruparel College, Mumbai, Maharashtra; V.H. Raybagkar, *Reader*, Nowrosjee Wadia College, Pune, Maharashtra and Atul Mody, *Lecturer* (SG), VES College of Arts, Science and Commerce, Chembur, Mumbai, Maharashtra.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor and Head,* DESM, NCERT for her support.

The Council also acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, *Incharge,* Computer Station, Inder Kumar, *DTP Operator*; Saswati Banerjee, *Copy Editor;* Abhimanu Mohanty and Anuradha, *Proof Readers* in shaping this book.

The contributions of the Publication Department in bringing out this book are also duly acknowledged.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Preface

More than a decade ago, based on National Policy of Education (NPE-1986), National Council of Educational Research and Training published physics textbooks for Classes XI and XII, prepared under the chairmanship of Professor T. V. Ramakrishnan, F.R.S., with the help of a team of learned co-authors. The books were well received by the teachers and students alike. The books, in fact, proved to be milestones and trend-setters. However, the development of textbooks, particularly science books, is a dynamic process in view of the changing perceptions, needs, feedback and the experiences of the students, educators and the society. Another version of the physics books, which was the result of the revised syllabus based on *National Curriculum Framework for School Education*-2000 (NCFSE-2000), was brought out under the guidance of Professor Suresh Chandra, which continued up to now. Recently the NCERT brought out the *National Curriculum Framework*-2005 (NCF-2005), and the syllabus was accordingly revised during a curriculum renewal process at school level. The higher secondary stage syllabus (NCERT, 2005) has been developed accordingly. The Class XI textbook contains fifteen chapters in two parts. Part I contains first eight chapters while Part II contains next seven chapters. This book is the result of the renewed efforts of the present Textbook Development Team with the hope that the students will appreciate the beauty and logic of physics. The students may or may not continue to study physics beyond the higher secondary stage, but we feel that they will find the thought process of physics useful in any other branch they may like to pursue, be it finance, administration, social sciences, environment, engineering, technology, biology or medicine. For those who pursue physics beyond this stage, the matter developed in these books will certainly provide a sound base.

Physics is basic to the understanding of almost all the branches of science and technology. It is interesting to note that the ideas and concepts of physics are increasingly being used in other branches such as economics and commerce, and behavioural sciences too. We are conscious of the fact that some of the underlying simple basic physics principles are often conceptually quite intricate. In this book, we have tried to bring in a conceptual coherence. The pedagogy and the use of easily understandable language are at the core of our effort without sacrificing the **rigour** of the subject. The nature of the subject of physics is such that a certain minimum use of mathematics is a must. We have tried to develop the mathematical formulations in a logical fashion, as far as possible.

Students and teachers of physics must realise that physics is a branch which needs to be understood, not necessarily memorised. As one goes from secondary to higher secondary stage and beyond, physics involves mainly four components, (a) large amount of **mathematical base**, (b) **technical words and terms**, whose normal English meanings could be quite different, (c) new **intricate concepts**, and (d) **experimental foundation**. Physics needs mathematics because we wish to develop objective description of the world around us and express our observations in terms of measurable quantities. Physics discovers new properties of particles and wants to create a name for each one. The words are picked up normally from common English or Latin or Greek, but gives entirely different meanings to these words. It would be illuminating to look up words like energy, force, power, charge, spin, and several others, in any standard English dictionary, and compare their meanings with their physics meanings. Physics develops intricate and often weird-looking concepts to explain the behaviour of particles. Finally, it must be remembered that entire physics is based on observations and experiments, without which a theory does not get acceptance into the domain of physics.

This book has some features which, we earnestly hope, will enhance its usefulness for the students. Each chapter is provided with a **Summary** at its end for a quick overview of the contents of the chapter. This is followed by **Points to Ponder** which points out the likely misconceptions arising in the minds of students, hidden implications of certain statements/principles given in the chapter and **cautions** needed in applying the knowledge gained from the chapter. They also raise some thought-provoking questions which would make a student think about life beyond physics. Students will find it interesting to think and apply their mind on these **points**. Further, a large number of **solved examples** are included in the text in order to clarify the concepts and/or to illustrate the application of these concepts in everyday real-life situations. Occasionally, historical perspective has been included to share the excitement of sequential development of the subject of physics. Some **Boxed** items are introduced in many chapters either for this purpose or to highlight some special features of the contents requiring additional attention of the learners. Finally, a **Subject Index** has been added at the end of the book for ease in locating keywords in the book.

The special nature of physics demands, apart from conceptual understanding, the knowledge of certain conventions, basic mathematical tools, numerical values of important physical constants, and systems of measurement units covering a vast range from microscopic to galactic levels. In order to equip the students, we have included the necessary tools and database in the form of **Appendices** A-1 to A-9 at the end of the book. There are also some other appendices at the end of some chapters giving additional information or applications of matter discussed in that chapter.

Special attention has been paid for providing illustrative figures. To increase the clarity, the figures are drawn in two colours. A large number of **Exercises** are given at the end of each chapter. Some of these are from real-life situations. Students are urged to solve these and in doing so, they may find them very educative. Moreover, some **Additional Exercises** are given which are more challenging. Answers and hints to solve some of these are also included. In the entire book, SI units have been used. A comprehensive account of units and measurement is given in Chapter 2 as a part of prescribed syllabus/curriculum as well as a help in their pursuit of physics. A box-item in this chapter brings out the difficulty in measuring as simple a thing as the length of a long curved line. Tables of SI base units and other related units are given here merely to indicate the presently accepted definitions and to indicate the high degree of accuracy with which measurements are possible today. The numbers given here are not to be memorised or asked in examinations.

There is a perception among students, teachers, as well as the general public that there is a steep gradient between secondary and higher secondary stages. But a little thought shows that it is bound to be there in the present scenario of education. Education up to secondary stage is general education where a student has to learn several subjects sciences, social sciences, mathematics, languages, at an elementary level. Education at the higher secondary stage and beyond, borders on acquiring professional competence, in some chosen fields of endeavour. You may like to compare this with the following situation. Children play cricket or badminton in lanes and small spaces outside (or inside) their homes. But then some of them want to make it to the school team, then district team, then State team and then the National team. At every stage, there is bound to be a steep gradient. Hard work would have to be put in whether students want to pursue their education in the area of sciences, humanities, languages, music, fine arts, commerce, finance, architecture, or if they want to become sportspersons or fashion designers.

Completing this book has only been possible because of the spontaneous and continuous support of many people. The Textbook Development Team is thankful to Dr. V. H. Raybagkar for allowing us to use his box item in Chapter 4 and to Dr. F. I. Surve for allowing us to use two of his box items in Chapter 15. We express also our gratitude to the Director, NCERT, for entrusting us with the task of preparing this textbook as a part of national effort for improving science education. The Head, Department of Education in Science and Mathematics, NCERT, was always willing to help us in our endeavour in every possible way.

The previous text got excellent academic inputs from teachers, students and experts who sincerely suggested improvement during the past few years. We are thankful to all those who conveyed these inputs to NCERT. We are also thankful to the members of the Review Workshop and Editing Workshop organised to discuss and refine the first draft. We thank the Chairmen and their teams of authors for the text written by them in 1988, which provided the base and reference for developing the 2002 version as well as the present version of the textbook. Occasionally, substantial portions from the earlier versions, particularly those appreciated by students/teachers, have been adopted/ adapted and retained in the present book for the benefit of coming generation of learners.

We welcome suggestions and comments from our valued users, especially students and teachers. We wish our young readers a happy journey to the exciting realm of physics.

A. W. Joshi
Chief Advisor
Textbook Development Committee

શિક્ષકો માટે નોંધ

અભ્યાસક્રમને અભ્યાસુ-કેન્દ્રિત બનાવવા માટે, શીખવવાની પ્રક્રિયામાં વિદ્યાર્થીઓને પ્રત્યક્ષ ભાગ લેતા અને આંતરક્રિયા કરતા કરવા જોઈએ. અઠવાડિયે એક વાર અથવા દર છ તાસમાંથી એકવાર આવા સેમિનાર (જ્ઞાનચર્ચાસભા) માટે કે પરસ્પર આંતરક્રિયા માટે એક સારું પુનરાવર્તન બની શકશે. આ પુસ્તકના કેટલાક મુદ્દાઓના સંદર્ભમાં ચર્ચાને સર્વ-સામેલ બનાવવા માટે કેટલાંક સૂચનો નીચે આપેલ છે :

વિદ્યાર્થીઓને પાંચ કે છ ના સમૂહોમાં વહેંચી શકાય. જો જરૂરી જણાય તો આ સમૂહોના સભ્યોને વર્ષ દરમિયાન એકથી બીજામાં ફેરફાર કરાવી શકાય.

ચર્ચા માટેનો મુદ્દો બોર્ડ પર અથવા કાગળ પર રજુ કરી શકાય. વિદ્યાર્થીઓને તેમના પ્રતિભાવો અથવા પ્રશ્નોના ઉત્તરો જે કંઈ કહેવામાં આવે તે આપેલા પાના પર લખવાનું કહી શકાય. તેમણે પછીથી તેમના સમૂહોમાં ચર્ચા કરીને તે પાનાઓ પર સુધારાઓ કે ટીકાઓ ઉમેરવી જોઈએ. આ બાબતો વિશે તે જ તાસમાં કે પછીના તાસમાં ચર્ચા કરવી જોઈએ. આ પાનાઓનું મૂલ્યાંકન પણ થઈ શકે.

અમે અહીં પુસ્તકમાંથી ત્રણ શક્ય મુદ્દાઓ સૂચવીએ છીએ. સૂચવેલા પ્રથમ બે મુદ્દાઓ, હકીકતમાં, ખૂબ વ્યાપક છે અને છેલ્લી ચાર કે વધુ સદીઓ દરમિયાન વિજ્ઞાનના વિકાસ અંગે છે. શિક્ષકો અને વિદ્યાર્થીઓએ દરેક સેમિનાર (જ્ઞાનચર્ચાસભા) માટે આવા બીજા વધુ મુદ્દાઓ વિશે વિચાર કરવો.

1. વિચારો (ખ્યાલો) જેમણે સંસ્કૃતિને બદલી નાખી

ધારો કે માનવજાત લુપ્ત (નાબૂદ) થઈ રહી છે. ભવિષ્યની પેઢી અથવા પરગ્રહવાસી મુલાકાતીઓ માટે કોઈ સંદેશ છોડી જવો છે. વિખ્યાત ભૌતિકવિજ્ઞાની આર. પી. ફીનમેન (R. P. Feynmann) ભવિષ્યમાં કોઈ અસ્તિત્વ ધરાવનાર હોય તો તેમને માટે નીચેનો સંદેશ છોડી જવા માગતા હતા :

"દ્રવ્ય પરમાણુઓનું બનેલું છે."

એક વિદ્યાર્થિની અને સાહિત્યના શિક્ષક નીચેનો સંદેશ છોડી જવા માગતા હતા :

"પાણીનું અસ્તિત્વ હતું તેથી માનવો થઈ શક્યા."

અન્ય એક વ્યક્તિએ એમ વિચાર્યું કે, તે આવો હોવો જોઈએ :

"ગતિ માટે ચક્રનો ખ્યાલ"

આવનારી પેઢીઓ માટે તમારામાંની દરેક વ્યક્તિ કયો સંદેશ છોડી જવા માગે છે તે લખો. પછી તમારા સમૂહમાં તે ચર્ચા અને જો તમે તમારું મન બદલવા માંગતા હો તો તેમાં સુધારો-વધારો કરો. તે તમારા શિક્ષકને આપો અને તે પછી થનારી ચર્ચામાં જોડાઓ.

2. ન્યૂનીકરણ

વાયુનો ગતિવાદ મોટાને નાના સાથે, સ્થૂળ ને સૂક્ષ્મ સાથે, સંબંધિત કરે છે. એક તંત્ર તરીકે વાયુ તેના ઘટકો-અણુઓ સાથે સંબંધિત છે. તંત્રને તેના ઘટકોના ગુણધર્મોના પરિણામરૂપે દર્શાવવાની આ રીતને સામાન્ય રીતે ન્યૂનીકરણ કહે છે. તે સમૂહની વર્તણૂકને તેના વ્યક્તિગત ઘટકોના સરળ અને આગાહી કરી શકાય તેવા ગુણધર્મો દ્વારા સમજાવે છે. આ અભિગમમાં, સ્થૂળ નિરીક્ષણો (અવલોકનો) અને સૂક્ષ્મ ગુણધર્મો એકબીજા પર અવલંબન ધરાવે છે. આ રીત ઉપયોગી છે ?

સમજણ મેળવવાની આ રીતને, ભૌતિકવિજ્ઞાન અને રસાયણવિજ્ઞાનના વિષયો બહાર, તેની પોતાની મર્યાદાઓ છે અને આ વિષયોમાં પણ હશે. કોઈ રંગચિત્રને કેનવાસ અને ચિત્રકામમાં વપરાયેલા રસાયણોના સમૂહ તરીકે ચર્ચી **શકાય નહિ**. જે ઉત્પન્ન થયું છે તે તેના ઘટકોના સરવાળા કરતાં વિશેષ છે.

પ્રશ્ન : આવા અભિગમનો ઉપયોગ થયો હોય તેવા બીજા ક્ષેત્રોનો તમે વિચાર કરી શકો છો ?

જે તંત્ર તેના ઘટકોના પદમાં સંપૂર્ણપણે વર્ણવી શકાતું હોય તેવા એક તંત્રનું ટૂંકમાં વર્ણન કરો. એક તંત્ર એવું વર્ણવો, જેમાં આવું થઈ શકતું ન હોય. સમૂહના અન્ય સભ્યો સાથે ચર્ચા કરો અને તમારા મંતવ્યો લખો. તે તમારા શિક્ષકને આપો અને તે પછી થનારી ચર્ચામાં જોડાઓ.

3. ઉષ્મા અંગે આણ્વિક અભિગમ

નીચેના કિસ્સામાં શું થશે તે વિશે તમારા વિચારો જણાવો : એક બંધ પાત્રના બે ભાગ છિદ્રાળુ દિવાલ વડે અલગ કરેલ છે. એક ભાગને નાઈટ્રોજન (N_2) વાયુ વડે અને બીજાને CO_2 વડે ભરેલ છે. એક બાજુથી બીજી બાજુ વાયુઓ વિસરણ પામશે.

પ્રશ્ન 1 : બન્ને વાયુઓ એકસમાન પ્રમાણમાં વિસરણ પામશે ?
જો ના, તો બન્નેમાં ફેરફારો કેવા હશે ? કારણો આપો.

પ્રશ્ન 2 : શું દબાણ અને તાપમાન બદલાશે નહિ ? જો ના, તો બન્નેમાં ફેરફારો કેવા હશે ? કારણો આપો.

તમારા જવાબો લખો. સમૂહમાં ચર્ચા કરો અને તેઓમાં સુધારા કરો અથવા ટીકાઓ ઉમેરો. શિક્ષકને આપો અને ચર્ચામાં જોડાઓ.

વિદ્યાર્થીઓ અને શિક્ષકોને જણાશે કે આવા સેમિનાર (ચર્ચાસભા) અને ચર્ચાઓ માત્ર ભૌતિકવિજ્ઞાન નહિ પણ વિજ્ઞાન અને સમાજવિજ્ઞાનની પુષ્કળ સમજ તરફ દોરી જાય છે. તેનાથી વિદ્યાર્થીઓમાં અમુક પરિપક્વતા પણ આવશે.

અનુક્રમણિકા

પ્રકરણ 4

સમતલમાં ગતિ (MOTION IN A PLANE)

પ્રકરણ 5

ગતિના નિયમો (LAWS OF MOTION)

પ્રકરણ 6

કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર (WORK, ENERGY AND POWER)

COVER DESIGN

(Adapted from the website of the Nobel Foundation
http://www.nobelprize.org)

The strong nuclear force binds protons and neutrons in a nucleus and is the strongest of natures four fundamental forces. A mystery surrounding the strong nuclear force has been solved. The three quarks within the proton can sometimes appear to be free, although no free quarks have ever been observed. The quarks have a quantum mechanical property called colour and interact with each other through the exchange of particles called gluons nature glue .

BACK COVER

(Adapted from the website of the ISRO
http://www.isro.org)

CARTOSAT-1 is a state-of-the-art Remote Sensing Satellite, being eleventh one in the Indian Remote Sensing (IRS) Satellite Series, built by ISRO. CARTOSAT-1, having mass of 156 kg *at lift off, has been launched into a* 618 km *high polar Sun Synchronous Orbit (SSO) by ISROs Polar Satellite Launch Vehicle, PSLV-C6. It is mainly intended for cartographic applications.*

પ્રકરણ 1

ભૌતિક જગત (PHYSICAL WORLD)

1.1 ભૌતિકવિજ્ઞાન શું છે ? (WHAT IS PHYSICS ?)

માનવીને સદાયથી તેની આસપાસ ફેલાયેલા વિશ્વની બાબતમાં જાણવાની જિજ્ઞાસા રહેલી છે. અનાદિકાળથી આકાશમાં રાત્રે ચમકતાં અવકાશીય પદાર્થો તેને સંમોહિત કરતાં રહ્યા છે. દિવસ અને રાત્રિનું નિયમિત પુનરાવર્તન થવું, ઋતુઓનું વાર્ષિકચક્ર, ગ્રહણો, ભરતી-ઓટ, જ્વાળામુખીઓ, મેઘધનુષ્ય એ કાયમ માટે તેના આશ્ચર્યના સ્રોત રહ્યા છે. વિશ્વમાં દ્રવ્યના અચરજ પમાડે તેવા પ્રકારો અને જીવન તથા વર્તણૂકની વિસ્મયકારી વિભિન્નતા છે. પ્રકૃતિના આવા આશ્ચર્યો અને વિસ્મયો પ્રત્યે મનુષ્ય કલ્પનાશીલ તથા જિજ્ઞાસાશીલ મગજથી અલગ અલગ રીતે પોતાના પ્રતિભાવ વ્યક્ત કરતો રહ્યો છે. મનુષ્યનો એક પ્રતિભાવ એ રહ્યો છે કે, તેણે પોતાની આસપાસના ભૌતિક પર્યાવરણને ધ્યાનપૂર્વક અવલોકિત કરવું. કુદરતી ઘટનાઓમાં અર્થપૂર્ણ પૅટર્ન તથા સંબંધો શોધવા તથા પ્રકૃતિ સાથે આંતરક્રિયા કરવા માટે નવાં ઉપયોગી સંસાધનો બનાવવાં અને તેનો ઉપયોગ કરવો. સમયાંતરે મનુષ્યના આવા પ્રયત્નો આધુનિક વિજ્ઞાન અને ટેક્નોલૉજી તરફ દોરી ગયા છે.

સાયન્સ (**Science**) શબ્દનો ઉદ્‌ભવ લૅટિન ભાષાના શબ્દ સિન્ટિયા (Scientia) પરથી થયો છે. જેનો અર્થ છે 'જાણવું'. સંસ્કૃત ભાષાનો શબ્દ 'વિજ્ઞાન' તથા અરબી ભાષાનો શબ્દ 'ઈલ્મ' પણ આ જ અર્થ વ્યક્ત કરે છે. જેનો અર્થ છે 'જ્ઞાન' વ્યાપક અર્થમાં વિજ્ઞાન માનવજાતિ જેટલું જ પ્રાચીન છે. ઇજિપ્ત, ભારત, ચીન, ગ્રીસ, મેસોપોટેમિયા તથા વિશ્વનાં અન્ય દેશોની પ્રાચીન સભ્યતાઓએ વિજ્ઞાનની પ્રગતિમાં ખૂબ મહત્ત્વનું યોગદાન આપ્યું છે. સોળમી સદીથી યુરોપમાં વિજ્ઞાનક્ષેત્રે હરણફાળ ભરાઈ હતી. વીસમી સદીના મધ્ય ભાગથી વિજ્ઞાન આંતરરાષ્ટ્રીય ઉપક્રમ બની ચૂક્યું હતું. જેમાં ઘણા દેશો અને સભ્યતાઓએ તેના ઝડપી વિકાસમાં ફાળો આપ્યો હતો.

વિજ્ઞાન અને **વૈજ્ઞાનિક પદ્ધતિ** શું છે ? વિજ્ઞાન કુદરતી ઘટનાઓને શક્ય તેટલી વિસ્તૃત અને ઊંડાણપૂર્વક સમજવા માટે કરવામાં આવતો સુવ્યવસ્થિત પ્રયત્ન છે અને આ રીતે મેળવેલ જ્ઞાનનો ઉપયોગ કુદરતી ઘટનામાં આગાહી, નિયંત્રણ અને બદલાવ માટેનો પ્રયત્ન છે. આપણી આજુબાજુ જે કંઈ જોવા મળે છે તેના આધારે સંશોધન કરવું, પ્રયોગ કરવા અને આગાહી કરવી તે વિજ્ઞાન છે. વિશ્વને સમજવા માટેની જિજ્ઞાસા, પ્રકૃતિનાં રહસ્યોને ઉકેલવાનું વિજ્ઞાનમાં સંશોધન તરફનું પ્રથમ પગલું છે. વૈજ્ઞાનિક પદ્ધતિમાં આંતરસંબંધ ધરાવતા કેટલાક પદ : પદ્ધતિસરનાં

અવલોકનો, નિયંત્રિત પ્રયોગો, ગુણાત્મક અને માત્રાત્મક તર્ક, ગાણિતિક નમૂનીકરણ (મોડલિંગ), આગાહીઓ, સિદ્ધાંતો ચકાસવા અથવા નકારવાનો સમાવેશ થાય છે. અનુમાન અને નિરાધાર કલ્પનાઓનું સ્થાન પણ વિજ્ઞાનમાં છે. પરંતુ વૈજ્ઞાનિક સિદ્ધાંતો છેવટે તો ત્યારે જ સ્વીકાર્ય બને છે જ્યારે તેને સંબંધિત અવલોકનો અથવા પ્રયોગો દ્વારા તેની સત્યાર્થતા ચકાસી શકાય. પ્રકૃતિ અને વિજ્ઞાનની પ્રવિધિઓ માટે ઘણા તાર્કિક વિવાદો છે જેની ચર્ચા અત્રે કરવી આવશ્યક નથી.

સિદ્ધાંત તથા અવલોકનો (અથવા પ્રયોગો)નો એકબીજાની આંતરક્રીડા (Interplay) વિજ્ઞાનની પ્રગતિનો મુખ્ય આધાર છે. વિજ્ઞાન હંમેશાં ગતિશીલ (Dynamic) છે. વિજ્ઞાનમાં કોઈ પણ સિદ્ધાંત અંતિમ હોતો નથી તથા વૈજ્ઞાનિકોમાંથી કોઈને નિર્વિવાદિત સત્તા હોતી નથી. જેમ જેમ અવલોકનોની વિગતો અને ચોકસાઈમાં સુધારો થતો જાય અથવા પ્રયોગો દ્વારા નવાં પરિણામો પ્રાપ્ત થાય તેમ તેમ સિદ્ધાંતોએ જરૂર હોય તો પોતાનામાં ફેરફાર કરીને પણ તેમને સમજાવવાં જોઈએ. ઘણી વાર ફેરફારો મોટા હોતા નથી અને હયાત સિદ્ધાંતોનાં માળખામાં જ હોય છે. ટાઈકો બ્રાહે (1546-1601) દ્વારા ગ્રહોની ગતિને સંબંધિત એકત્રિત કરેલ વિસ્તૃત માહિતીનું, જોહાનીસ કેપ્લરે (1571-1630) પરીક્ષણ કર્યું તો, આ તમામ માહિતી, નિકોલસ કોપરનિક્સે આપેલ સૂર્યકેન્દ્રીયવાદ (જેમાં સૂર્ય સમગ્ર સૂર્યમાળાનાં કેન્દ્રમાં સ્થિર છે)ની વર્તુળાકાર કક્ષાઓને બદલે લંબવૃત્તીય કક્ષાઓ દ્વારા વધુ સારી રીતે સમજાવી શકાઈ. ઘણી વાર પ્રવર્તમાન સિદ્ધાંતો નવાં અવલોકનોને સમજાવવા માટે અસમર્થ હોય છે. આને કારણે વિજ્ઞાનમાં મોટા ખળભળાટ મચે છે. વીસમી સદીની શરૂઆતમાં એવું અનુભવાયું કે તે સમયનો સૌથી સફળ ન્યૂટોનિયન યંત્રશાસ્ત્રનો સિદ્ધાંત પરમાણ્વીય ઘટનાઓનાં મૂળભૂત લક્ષણો સમજાવવામાં અસમર્થ નીવડ્યો. આ જ રીતે પ્રકાશનું તરંગસ્વરૂપ ફોટોઈલેક્ટ્રિક લાક્ષણિકતા સમજાવવામાં નિષ્ફળ રહ્યું. પરિણામે પરમાણ્વીય અને આણ્વીય સિદ્ધાંતો સમજવા માટે ધરમૂળથી નવા સિદ્ધાંતોનો (ક્વૉન્ટમ મિકેનિક્સ) વિકાસ થયો.

જેવી રીતે કોઈ નવો પ્રયોગ વૈકલ્પિક રીતે સૈદ્ધાંતિક નમૂના (પ્રતિકૃતિ)ઓનું સૂચન કરે છે, તે જ રીતે કોઈ સિદ્ધાંતની પ્રગતિ, કેટલાક પ્રયોગોમાંથી કેવાં અવલોકનો મેળવવાં જોઈએ તેમ સૂચવે છે. અર્નેસ્ટ રધરફૉર્ડ (1871-1934) 1911માં સોનાના વરખ પર α-કણોનાં પ્રકીર્ણનના પ્રયોગનાં પરિણામો દ્વારા પરમાણુનું ન્યુક્લિયર મોડેલ સ્થાપિત કર્યું. આ મોડેલ નીલ્સ બ્હોરે (1885-1962) 1913માં આપેલ હાઈડ્રોજન પરમાણુના ક્વૉન્ટમવાદનો પાયો બન્યું. બીજી તરફ પૉલ ડિરાકે (1902થી 1984) 1930માં પ્રતિકણના ખ્યાલને સૌ પ્રથમવાર સૈદ્ધાંતિક રીતે રજૂ કર્યો, જેનાં બે વર્ષ બાદ કાર્લ એન્ડરસને પ્રોઝીટ્રોન(ઇલેક્ટ્રૉનનો પ્રતિકણ)ની પ્રાયોગિક શોધ દ્વારા તેની પુષ્ટિ કરી.

પ્રાકૃતિક વિજ્ઞાનના વિભાગોમાં ભૌતિકવિજ્ઞાન એક મુખ્ય વિભાગ છે, આ વિભાગોમાં રસાયણ વિજ્ઞાન અને જીવવિજ્ઞાનનો પણ સમાવેશ થાય છે. ભૌતિકવિજ્ઞાન માટે અંગ્રેજીમાં વપરાતો શબ્દ **Physics** એ 'પ્રકૃતિ' એવા અર્થ ધરાવતા ગ્રીક શબ્દ પરથી આવ્યો છે. સંસ્કૃત શબ્દ 'ભૌતિકી' પરથી ભૌતિક જગતને લગતા વિજ્ઞાન માટે 'ભૌતિકવિજ્ઞાન' શબ્દનો ઉપયોગ થયો. આ વિષયની સચોટ વ્યાખ્યા આપવી સંભવ નથી અને જરૂરી નથી. કુદરતના મૂળભૂત નિયમોના અભ્યાસ તથા વિવિધ પ્રાકૃતિક ઘટનાઓમાં તેની અભિવ્યક્તિ રજૂ કરતા વિજ્ઞાનને આપણે ભૌતિકવિજ્ઞાન કહી શકીએ. હવે પછીના વિભાગમાં ભૌતિકવિજ્ઞાનનાં કાર્યક્ષેત્ર વિસ્તારનું સંક્ષિપ્ત વર્ણન કરેલ છે. અહીં આપણે ભૌતિકવિજ્ઞાનમાંની બે મુખ્ય વિચારોની નોંધ લઈએ. **એકીકીકરણ (Unification)** અને **ન્યૂનીકરણ (Reductionism)**.

ભૌતિકવિજ્ઞાન અંતર્ગત આપણે જુદી જુદી ઘટનાઓની સમજૂતી કેટલીક સંકલ્પના અને નિયમોનાં પદમાં કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ. આપણો ઉદ્દેશ જુદાં જુદાં **પ્રભાવક્ષેત્રો (domain)** અને ***જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓમાં કેટલાક સાર્વત્રિક નિયમો***ની અભિવ્યક્તિ સ્વરૂપે ભૌતિક જગતને જોવાનો છે. દા.ત., (ન્યૂટને આપેલ) તે જ ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ જમીન પર સફરજનનું પતન, પૃથ્વીની આસપાસ ચંદ્રની ગતિ, સૂર્યની આસપાસ ગ્રહોની ગતિને સમજાવે છે. આ જ રીતે વિદ્યુતચુંબકત્વ માટેનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત (મેક્સવેલ સમીકરણ) તમામ વિદ્યુત અને ચુંબકત્વના સિદ્ધાંતોનું સંચાલન કરે છે. કુદરતમાં પ્રવર્તતા મૂળભૂત બળોના એકીકીકરણ (પરિચ્છેદ 1.4)ના પ્રયત્નો એકીકીકરણનાં સંશોધનોને પ્રતિબિંબિત કરે છે.

કોઈ મોટા અને ખૂબ જ જટિલ તંત્રના ગુણધર્મો અને તેનાં સાદાં ઘટકો વચ્ચેની આંતરક્રિયાના ગુણધર્મો તારવવા, તે એક સંબંધિત પ્રયત્ન છે. આવા પ્રયત્નોને **ન્યૂનીકરણ** કહે છે અને તે ભૌતિકવિજ્ઞાનનું હાર્દ છે. દા.ત., ઓગણીસમી સદીમાં વિકસેલ વિષય થરમૉડાયનેમિક્સમાં તાપમાન, આંતરિક ઊર્જા, એન્ટ્રોપી જેવી સ્થૂળ ભૌતિકરાશિઓનાં પદોમાં મોટા તંત્ર સાથે કામ લેવું પડે છે. ત્યાર બાદ ગતિવાદ અને સ્ટેટેસ્ટિકલ યંત્રશાસ્ત્ર વિષયોમાં સ્થૂળતંત્રનાં આણ્વીય ઘટકોના ગુણધર્મોનાં પદમાં આ રાશિઓનું અર્થઘટન કરવામાં આવ્યું હતું. જેમકે તંત્રનું તાપમાન અણુઓની સરેરાશ ગતિઊર્જા સાથે સંબંધિત હોવાનું જણાયું.

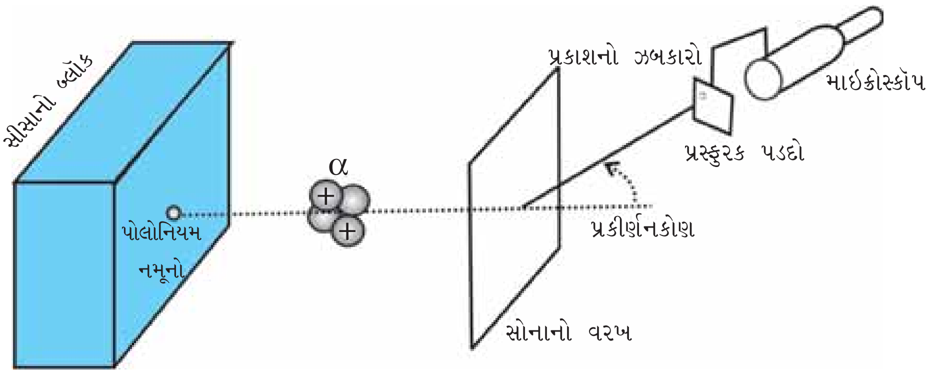
1.2 ભૌતિકવિજ્ઞાનનું કાર્યક્ષેત્ર અને ઉત્તેજના (SCOPE AND EXCITEMENT OF PHYSICS)

ભૌતિકવિજ્ઞાનનું કાર્યક્ષેત્ર અને વિસ્તાર ભૌતિકવિજ્ઞાનની જુદી જુદી વિદ્યાશાખાઓ દ્વારા મેળવી શકાય છે. મૂળભૂત રૂપે તેનાં બે રસપ્રદ પ્રભાવક્ષેત્રો છે. સ્થૂળ અને સૂક્ષ્મ. સ્થૂળ પ્રભાવક્ષેત્રમાં પૃથ્વી પરની તથા ખગોળિય સ્તરની ઘટનાઓનો સમાવેશ

પ્રયોગશાળામાં થાય છે. જ્યારે સૂક્ષ્મ પ્રભાવક્ષેત્રમાં પરમાણ્વીક, આણ્વીક અને ન્યુક્લિયર ઘટનાઓનો* સમાવેશ થાય છે. **પ્રચલિત ભૌતિકવિજ્ઞાન (Classical Physics)**માં મુખ્યત્વે સ્થૂળ ઘટનાઓનો અભ્યાસ થાય છે. જેમાં **યંત્રશાસ્ત્ર (Mechanics)**, **ઈલેક્ટ્રૉડાયનૅમિક્સ (Electrodynamics)**, **પ્રકાશશાસ્ત્ર (Optics)** અને **થરમૉડાયનેમિક્સ (Thermodynamics)** જેવી વિદ્યાશાખાઓનો સમાવેશ થાય છે. ન્યૂટનના ગતિના નિયમો અને ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમો પર આધારિત યંત્રશાસ્ત્ર એ કણોની ગતિ, દૃઢ તથા વિરુપણશીલ પદાર્થની ગતિ તથા કણોના વ્યાપક તંત્રની સાથે સંકળાયેલ છે. જૅટ દ્વારા બહાર નીકળતા વાયુ વડે રૉકેટનું આગળ વધવું, હવામાં પ્રસરતા ધ્વનિતરંગો અથવા પાણીના તરંગો તથા બોજ હેઠળ વળીને રહેલા સળિયાનું સંતુલન વગેરે યંત્રશાસ્ત્ર સંબંધિત સમસ્યાઓ છે. ઇલેક્ટ્રૉડાયનેમક્સિ એ વિદ્યુતભાર અને કાર્યક્ષમતા, ભૌતિક અથવા રાસાયણિક પ્રક્રિયાની દિશા વગેરે થરમૉડાયનેમક્સિની રસપ્રદ સમસ્યાઓ છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાનના સૂક્ષ્મ પ્રભાવક્ષેત્રમાં સૂક્ષ્મ સ્તરે (લંબાઈના પણ સૂક્ષ્મ સ્તરે) પરમાણુઓ અને ન્યૂક્લિયસનાં દ્રવ્યનું બંધારણ અને સંરચના તથા ઇલેક્ટ્રૉન, ફોટોન અને બીજા પ્રાથમિક કણો સાથેની તેમની આંતરક્રિયાઓનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. પ્રચલિત ભૌતિકવિજ્ઞાન (Classical Physics) આ સૂક્ષ્મ પ્રભાવક્ષેત્રને સમજાવવા માટે અપૂરતું છે. જ્યારે સૂક્ષ્મ પ્રભાવક્ષેત્રની ઘટનાઓને સમજાવવા માટે હાલમાં ક્વૉન્ટમ સિદ્ધાંતને સ્વીકારેલ છે. વ્યાપક રૂપે ભૌતિકવિજ્ઞાનની ઈમારત સુંદર અને ભવ્ય છે. જેમ જેમ આ વિષયમાં તમે આગળ વધશો તેમ તેમ તેનાથી વધુ અભિભૂત થતા જશો.

હવે તમે જોઈ શકો છો કે ભૌતિકવિજ્ઞાનનું કાર્યક્ષેત્ર કેટલું



આકૃતિ **1.1** *ભૌતિકવિજ્ઞાનના સિદ્ધાંત અને પ્રયોગ બંને સાથે જઈને એકબીજાના વિકાસમાં મદદ કરે છે. રધરફૉર્ડના α પ્રકીર્ણનના પ્રયોગોએ પરમાણુનું ન્યુક્લિયર મોડેલ આપ્યું.*

ચુંબકીય પદાર્થ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત અને ચુંબકીય ઘટનાઓ સાથે સંબંધિત છે. કુલંબ, ઑર્સ્ટેડ, ઍમ્પિયર અને ફેરેડેએ તેના પાયાના નિયમો આપ્યા. આ નિયમોને મેક્સવેલે તેનાં પ્રચલિત સમીકરણોમાં સમાવેશ કરી અનુમોદિત કર્યાં. ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં વીજપ્રવાહધારિત સુવાહકની ગતિ, પ્રત્યાવર્તી વૉલ્ટેજ (ac વૉલ્ટેજ) માટે પરીપથની વર્તણૂક, એન્ટેનાની કાર્યપદ્ધતિ, આયનોસ્ફિયરમાં રેડિયોતરંગોનું પ્રસરણ વગેરે સમસ્યાઓનો સમાવેશ ઇલેક્ટ્રૉડાયનેમિક્સમાં થાય છે. પ્રકાશશાસ્ત્રમાં પ્રકાશીય ઘટનાઓનો અભ્યાસ થાય છે. માઇક્રોસ્કૉપ અને ટેલિસ્કૉપની કાર્યપદ્ધતિ, પાતળી ફિલ્મ (કપોટી) વડે પ્રદર્શિત રંગો વગેરે પ્રકાશશાસ્ત્રના વિષયાંગો છે. યંત્રશાસ્ત્રથી વિરુદ્ધ થરમૉડાયનેમિક્સમાં સમગ્ર રીતે પદાર્થોની ગતિનો વિચાર કરવામાં આવતો નથી. પરંતુ તંત્રના સ્થૂળ સંતુલન સાથે કામ લઈને બાહ્ય કાર્ય અને ઉષ્માની આપ-લે દ્વારા તંત્રનાં તાપમાન, આંતરિક ઊર્જા, એન્ટ્રોપી વગેરેના ફેરફારો વિશે વિચારવામાં આવે છે. ઉષ્મા એન્જિનો અને રેફ્રિજરેટરોની વિસ્તરેલું છે. તે લંબાઈ, દ્રવ્યમાન, સમય, ઊર્જા જેવી ભૌતિક રાશિઓનાં આશ્ચર્યજનક મૂલ્યોને આવરી લે છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં એક તરફ ઇલેક્ટ્રૉન, પ્રોટોન વગેરે સાથે સંકળાયેલ લંબાઈમાં અતિસૂક્ષ્મ માપક્રમ પર (10^{-14} m કે તેથી પણ નાની) ઘટનાઓનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે, તેનાંથી વિરુદ્ધ બીજી તરફ તેમાં વિશાળ ફલક પર આકાશગંગા અથવા સમગ્ર વિશ્વ સાથે સંકળાયેલ ખગોળીય ઘટનાઓનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. જેના વિસ્તાર 10^{26} mના માપક્રમનો છે. આમ લંબાઈના માપક્રમનો ગુણોત્તર 10^{40}ના ક્રમનો કે તેનાથી વધુ છે. લંબાઈના માપક્રમને પ્રકાશના વેગથી ભાગતા સમયના માપક્રમનો વિસ્તાર 10^{-22} s થી 10^{18} s જેટલો મળે છે. દ્રવ્યમાનનો વિસ્તાર 10^{-30} kg (ઇલેક્ટ્રૉનનું દ્રવ્યમાન)થી 10^{55}kg (જ્ઞાત અવલોકનીય વિશ્વનું દ્રવ્યમાન) જેટલો છે. ભૂમિગત ઘટનાઓ આ વિસ્તારના મધ્યમાં ક્યાંક હોય છે.

* *હાલમાં શોધખોળના ઉત્તેજનાપૂર્ણ ક્ષેત્રમાં સ્થૂળ અને સૂક્ષ્મ પ્રભાવક્ષેત્રોની વચ્ચે એક એવું પ્રભાવક્ષેત્ર (Mesoscopic Physics) કે જે અમુક દશકથી શતક સંખ્યા સુધીના પરમાણુઓ સાથે કામ લે છે તેનો આવિર્ભાવ થયો છે.*

ભૌતિકવિજ્ઞાન ઘણીબધી રીતે ઉત્તેજનાત્મક છે. ભૌતિકવિજ્ઞાન કેટલીક મૂળભૂત સંકલ્પનાઓ તથા નિયમો વડે વિશાળ શ્રેણીનાં પરિમાણ ધરાવતી ભૌતિકરાશિઓને સમાવતી ઘટનાઓને સમજાવી શકે છે. આ તથ્યોને લઈને કેટલીક વ્યક્તિઓ પાયાના સિદ્ધાંતોની સુઘડતા અને સર્વવ્યાપકતાના સંદર્ભે ઉત્તેજના અનુભવે છે. જ્યારે કેટલાક લોકો કુદરતનાં ગૂઢ રહસ્યો જાણવા કલ્પનાશીલ નવા પ્રયોગો કરવાનો પડકાર, સિદ્ધાંતોની ચકાસણી કે અસ્વીકૃતિમાં ઉત્તેજના અનુભવે છે. સમાનરૂપે પ્રયોજિત ભૌતિકવિજ્ઞાન (Applied Physics) એટલું જ મહત્ત્વનું છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં નિયમોનું ઉપયોજન અને પૂરેપૂરા ઉપયોગ દ્વારા ઉપયોગી રચનાઓ (Divices) બનાવવી તે રસપ્રદ અને ઉત્તેજક છે. તે માટે કુશળતા અને ખંતપૂર્વકના પ્રયત્નો જરૂરી છે.

છેલ્લી કેટલીક સદીઓમાં ભૌતિકવિજ્ઞાનની અસાધારણ પ્રગતિનું શું રહસ્ય છે ? આ પ્રગતિ મૂળભૂત ધારણાઓ સાથે થતા ફેરફારોને સંલગ્ન છે. વૈજ્ઞાનિક પ્રગતિ માટે ગુણાત્મક વિચારો હોવા જોઈએ તે મહત્ત્વનું છે પરંતુ પર્યાપ્ત નથી. ખાસ કરીને ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં માત્રાત્મક અવલોકનો મહત્ત્વનાં છે. કારણ કે કુદરતી નિયમો ચોક્કસ ગણિતીય સમીકરણો દ્વારા વ્યક્ત કરવામાં આવે છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનના પાયાના નિયમો સાર્વત્રિક છે અને તે જુદા જુદા વિશાળ સંદર્ભોમાં પણ લાગુ પાડી શકાય છે, આ બીજી મહત્ત્વની કોઠાસૂઝ હતી અને છેલ્લે અંદાજ લગાવવાની વ્યૂહરચના ખૂબ જ સરળ રહી છે. રોજિંદા જીવનમાં મોટા ભાગની ઘટનાઓ, પાયાના નિયમોની જટિલ અભિવ્યક્તિ હોય છે. કોઈ એક ઘટનાનાં જુદાં જુદાં પાસાઓમાંથી ઓછી મહત્ત્વપૂર્ણ બાબતો કરતાં વધુ મહત્ત્વપૂર્ણ બાબતોને વૈજ્ઞાનિકો અલગ તારવવાનું વધુ મહત્ત્વનું સમજે છે. એક સારી પ્રયુક્તિ એ છે કે, પ્રથમ કોઈ ઘટનાનાં અતિઆવશ્યક લક્ષણો પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીને, તેના મૂળ સિદ્ધાંતો શોધવામાં આવે અને ત્યાર બાદ તેમાં જરૂરી સુધારા કરીને વધુ શુદ્ધ સ્વરૂપમાં સિદ્ધાંત રચવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે સમાન ઊંચાઈએથી મુક્તપતન કરાવેલ એક પથ્થર અને એક પીંછું સરખા સમયે જમીન પર પહોંચતાં નથી કારણ કે આ ઘટનાનું આવશ્યક પાસું 'ગુરુત્વક્ષેત્રમાં મુક્તપતન'ને હવાનો અવરોધ વધુ જટિલ બનાવે છે. અવરોધ અવગણી શકાય તેવી સ્થિતિનું નિર્માણ કરવામાં આવે, તો ગુરુત્વક્ષેત્રમાં મુક્તપતનનો નિયમ મેળવી શકાય. દા.ત., લાંબી અને શૂન્યાવકાશીત નળીમાં પથ્થર અને પીંછાનું મુક્તપતન કરાવવામાં આવે, તો બંને લગભગ એકસરખા દરથી મુક્તપતન પામે છે. આ પરથી મૂળ નિયમ મેળવી શકાય છે કે, ગુરુત્વપ્રવેગ પદાર્થનાં દળ પર આધારિત નથી. આ રીતે મેળવેલ નિયમ માટે ફરીથી પીંછાંનાં મુક્તપતનનો કિસ્સો વિચારીએ, તો હવાના અવરોધનો સુધારો

અધિતર્કો, સ્વયંસિદ્ધ સિદ્ધાંતો અને નમૂના (Hypothesis, axioms and models)

ભૌતિકવિજ્ઞાન અને ગણિત દ્વારા જ બધું જ સાબિત થઈ શકે તેમ માનવું યોગ્ય નથી. તમામ ભૌતિકવિજ્ઞાન અને ગણિત પણ ધારણાઓ પર આધારિત છે. જે જુદી જુદી રીતે પૂર્વધારણાઓ, સ્વયંસિદ્ધ સિદ્ધાંતો અને અધિતર્કો તરીકે ઓળખાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, ન્યૂટન દ્વારા પ્રતિપાદિત થયેલ ગુરુત્વાકર્ષણ સાર્વત્રિક નિયમ એક અભિધારણા કે પરિકલ્પના જ છે. જેને ન્યૂટને પોતાનાં કૌશલ્યથી પ્રસ્થાપિત કર્યો હતો. આ પહેલાં સૂર્યની આસપાસ ગ્રહોની ગતિ, પૃથ્વીની આસપાસ ચંદ્રની ગતિ, લોલક, પૃથ્વી તરફ પડતા પદાર્થો વગેરે માટેનાં અવલોકનો, પ્રયોગો અને આંકડાકીય માહિતી ઉપલબ્ધ હતા. આ બધા માટે અલગ અલગ સમજૂતીની જરૂર હતી જે વધુ કે ઓછા પ્રમાણમાં ગુણાત્મક હતું. ગુરુત્વાકર્ષીય સાર્વત્રિક નિયમ કહે છે કે જો આપણે ધારીએ કે બે પદાર્થો વચ્ચે પ્રવર્તતું આકર્ષણબળ તે બે પદાર્થનાં દળનો ગુણાકારને સપ્રમાણ અને તેમની વચ્ચેનાં અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય, તો આપણે ઉપર્યુક્ત તમામ અવલોકનોની સમજૂતી તરત આપી શકીએ. જે માત્ર આ ઘટનાઓની સમજૂતી જ નહિ પરંતુ ભવિષ્યમાં થનારા પ્રયોગોનાં પરિણામોનું પૂર્વાનુમાન કરવાની અનુમતિ આપે છે.

પરિકલ્પના એટલે એક એવું અનુમાન કે જેની સત્યાર્થતા વિશે કોઈ જ ધારણા કરેલી હોતી નથી. કોઈ પણ વ્યક્તિને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ સાબિત કરવાનું કહેવું તે ન્યાય-સંગત નથી કારણ કે તે સાબિત થઈ શકે નહિ તેને માત્ર અવલોકનો અને પ્રયોગો દ્વારા જ ચકાસી શકાય અને સિદ્ધ કરી શકાય છે.

સ્વયંસિદ્ધ સિદ્ધાંતો સ્વયં સત્ય છે જ્યારે મોડલ અવલોકિત ઘટનાઓને સમજવા માટેનો પ્રસ્તાવિત સિદ્ધાંત છે. પરંતુ આપ સૌને અભ્યાસના આ સ્તરે આ તમામ શબ્દોના પ્રયોગ માટે ભેદ સ્પષ્ટ કરવા માટેની ચિંતા કરવાની જરૂર નથી. ઉદાહરણ તરીકે તમે હવે પછીના વર્ષે હાઇડ્રોજન પરમાણુનું બ્હોર મોડેલ વિશે અભ્યાસ કરશો. જેમાં બ્હોરે કલ્પના કરી હતી કે "હાઇડ્રોજન પરમાણુમાં ઈલેક્ટ્રૉન કેટલાક નિયમો (પૂર્વધારણા)ને અનુસરે છે." તેણે આવું શા માટે કર્યું ? તેની પાસે વિસ્તૃત પ્રમાણમાં સ્પેક્ટ્રોસ્કોપીક આંકડાકીય માહિતી ઉપલબ્ધ હતી. જેને બીજો કોઈ સિદ્ધાંત સમજાવી શકતો ન હતો. બ્હોરે જણાવ્યું હતું કે જો આપણે કલ્પના કરી લઈએ કે પરમાણુની વર્તણૂક અમુક પ્રકારની છે તો આપણે બધી જ ઘટના તરત સમજાવી શકીએ છીએ.

આઈન્સ્ટાઈનનો વિશિષ્ટ સાપેક્ષવાદ બે પૂર્વધારણાઓ પર આધારિત છે. 'વિદ્યુતચુંબકીય વિકિરણોની ઝડપનું અચલત્વ' તથા 'બધી જ જડત્વીય નિર્દેશ ફ્રેમમાં ભૌતિકશાસ્ત્રના નિયમોની યથાર્થતા' શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ અચળ હોય છે તથા તે ઉદ્ગમસ્થાન અને અવલોકનકારથી સ્વતંત્ર હોય છે તેમ સાબિત કરવાનું કોઈને કહેવું એ બુદ્ધિમતા ન કહેવાય.

ગણિતશાસ્ત્રમાં દરેક તબક્કે પરિકલ્પનાઓ અને સિદ્ધ સિદ્ધાંતોની આપણને જરૂર પડે છે. યુક્લિડનું કથન 'બે સમાંતર રેખાઓ ક્યારેય એકબીજાને છેદતી નથી.' એક પરિકલ્પના જ છે. એનો અર્થ એવો થાય કે જો આપણે આ કથન સ્વીકારી લઈએ તો સુરેખાઓની ઘણીબધી લાક્ષણિકતાઓ અને તેના દ્વારા તૈયાર થતી દ્વિ કે ત્રિપરિમાણિય આકૃતિઓને સમજાવી શકીએ. પરંતુ આ કથન તમે ન સ્વીકારો તો તમે એક અન્ય અભિધારણાનો ઉપયોગ કરીને નવી ભૂમિતિ પ્રસ્થાપિત કરવા માટે મુક્ત છો. વાસ્તવિક રીતે છેલ્લી કેટલીય શતાબ્દી કે દશકોમાં આવું બન્યું પણ છે.

વર્તમાન સિદ્ધાંતમાં લાગુ પાડી, પૃથ્વી પર મુક્તપતન પામતા પદાર્થો માટે વધુ વાસ્તવિક સિદ્ધાંત મેળવી શકાય છે.

1.3 ભૌતિકવિજ્ઞાન, ટેક્નોલૉજી અને સમાજ (PHYSICS, TECHNOLOGY AND SOCIETY)

ભૌતિકવિજ્ઞાન, ટેક્નોલૉજી અને સમાજ વચ્ચેનો સંબંધ ઘણાં-બધાં ઉદાહરણોમાં જોઈ શકાય છે. ઉષ્મા એન્જિનોની કોઈ પ્રણાલીને સમજવા માટે અને તેમાં સુધારા કરવાની જરૂરિયાતને કારણે ઉષ્માગતિશાસ્ત્ર વિષયનો ઉદ્ભવ થયો. આપણે જાણીએ છીએ કે વરાળયંત્ર કે જેની માનવસભ્યતા પર ખૂબ મોટી અસર પડી છે તેને અઢારમી સદીમાં ઇંગ્લૅન્ડમાં થયેલ ઔદ્યોગિક ક્રાંતિથી અલગ પાડી શકાય તેમ નથી. ઘણી વખત ટેક્નોલૉજી નવા ભૌતિકવિજ્ઞાનને વિકસાવે છે તો ક્યારેક ભૌતિકવિજ્ઞાન નવી ટેક્નોલૉજી વિકસાવે છે. જેનું ઉદાહરણ છે વાયરલેસ કમ્યૂનિકેશન. જે ઓગણીસમી સદીમાં શોધાયેલ વિદ્યુત અને ચુંબકત્વના મૂળભૂત નિયમોને અનુસરે છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનના પ્રયોજન માટે પૂર્વાનુમાન બાંધવું દરેક વખતે સરળ હોતું નથી. વર્ષ 1933ના અંત સુધીમાં મહાન ભૌતિકશાસ્ત્રી અર્નેસ્ટ રધરફૉર્ડ પરમાણુમાંથી ઊર્જાના ઉત્સર્જનની ઘટનાને નકારી ચૂક્યા હતા. પરંતુ થોડાં વર્ષ બાદ 1938માં હાન અને મિટનરે ન્યુટ્રૉનનો મારો ચલાવી યુરેનિયમમાં ન્યુક્લિયસની વિખંડનની ઘટના શોધી, જે ન્યુક્લિયર પાવર રીએક્ટરો અને ન્યુક્લિયર હથિયારોની કાર્યપ્રણાલીનો પાયો છે. ભૌતિકવિજ્ઞાન ટેક્નોલૉજી વધુ ને વધુ ઊંચાઈ પર લઈ જાય છે તેનું બીજું ઉદાહરણ છે સિલિકોન 'ચીપ' જેને વીસમી શતાબ્દીના અંતિમ ત્રણ દશકામાં કમ્પ્યૂટર ક્રાંતિ જન્માવી છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનનું એક મહત્ત્વનું કાર્યક્ષેત્ર, 'વૈકલ્પિક ઊર્જાસ્રોતોનો વિકાસ' એ ભૌતિકવિજ્ઞાનનું યોગદાન હતું અને ભવિષ્યમાં પણ રહેશે. આપણી પૃથ્વી પર અશ્મીકૃત બળતણ ખૂબ જ ઝડપથી ઘટી રહ્યું છે. તેથી પરવડે તેવા અને નવા ઊર્જાસ્રોત શોધવાની જરૂરિયાત છે. આ દિશામાં ઘણી પ્રગતિ થઈ ચૂકી છે. (ઉદાહરણ તરીકે સૌરઊર્જા અને ભૂતાપીય ઊર્જાનું વિદ્યુતઊર્જામાં રૂપાંતર) પરંતુ તેને સંપૂર્ણ પરિપૂર્ણ કરવાનું હજુય બાકી છે.

કેટલાક મહાન વૈજ્ઞાનિકો તેમનું મુખ્ય યોગદાન અને તેમના મૂળ દેશનું નામ કોષ્ટક નં. 1.1માં દર્શાવેલ છે. આ કોષ્ટક દ્વારા આપ સૌ વૈજ્ઞાનિકોના પ્રયત્નોને બહુ સાંસ્કૃતિક અને આંતરરાષ્ટ્રીય સ્વરૂપ પ્રત્યે અભિભૂત થશો. કોષ્ટક નં. 1.2માં ટેક્નોલૉજી અને તે ભૌતિકવિજ્ઞાનના કયા સિદ્ધાંત પર આધારિત છે તે દર્શાવેલ છે. સ્પષ્ટ છે કે આ કોષ્ટકની માહિતી સંપૂર્ણ નથી. વિદ્યાર્થીમિત્રો, આપ સૌને વિનંતી છે કે તમે સૌ તમારા શિક્ષકોની મદદથી સારા પુસ્તકો અને વિજ્ઞાનની વેબસાઇટોની મદદથી આ કોષ્ટકની માહિતી વધુ સમૃદ્ધ બનાવી શકો છો. તમે અનુભવશો કે તમારો આ પ્રયત્ન જ્ઞાનવર્ધક અને મનોરંજક હશે. આવા પ્રયત્નોનો અંત ક્યારેય નહિ આવે તેમ ખાતરીપૂર્વક કહી શકાય. કારણ કે વિજ્ઞાનની સતત પ્રગતિ રોકી શકાય તેમ નથી.

ભૌતિકવિજ્ઞાન એટલે કુદરત અને કુદરતની ઘટનાઓનો અભ્યાસ. ભૌતિકશાસ્ત્રીઓ પ્રયોગો, અવલોકનો અને તેના વિશ્લેષણના આધારે કુદરતમાં પ્રવર્તમાન નિયમોને શોધવાના પ્રયત્નો કરે છે. ભૌતિકવિજ્ઞાન કુદરતી જગતને નિયંત્રિત કરતા મૂળભૂત નિયમો સાથે સંકળાયેલ છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનના નિયમોની

કોષ્ટક 1.1 દુનિયાના જુદા જુદા દેશોના કેટલાક ભૌતિકના વૈજ્ઞાનિકો અને તેમનું મહત્ત્વનું યોગદાન

નામ	મહત્ત્વનું યોગદાન / સંશોધન	મૂળ દેશ
આર્કિમિડિઝ	ઉત્પ્લાવનનો સિદ્ધાંત, ઉચ્ચાલનનો સિદ્ધાંત	ગ્રીસ
ગૅલેલિયો ગેલિલી	જડત્વનો નિયમ	ઇટલી
ક્રિશ્ચિયન હાઇગેન્સ	પ્રકાશનો તરંગ-સિદ્ધાંત	હોલૅન્ડ
આઇઝેક ન્યૂટન	ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ, ગતિના નિયમો, પરાવર્તક ટેલિસ્કોપ	યુ.કે.
માઇકલ ફેરાડે	વિદ્યુતચુંબકીય પ્રેરણનો નિયમ	યુ.કે.
જેમ્સ ક્લાર્ક મેક્સવેલ	વિદ્યુતચુંબકીય સિદ્ધાંત, પ્રકાશ-એક વિદ્યુતચુંબકીય તરંગ	યુ.કે.
હેનરિક રુડોલ્ફ હર્ટ્ઝ	વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોનું ઉત્પાદન	જર્મની
જે. સી. બોઝ	અલ્ટ્રાશોર્ટ (ખૂબ જ ટૂંકા) રેડિયોતરંગો	ભારત
ડબલ્યૂ. કે. રોન્જન	ઍક્સ-રે	જર્મની
જે. જે. થોમ્સન	ઇલેક્ટ્રૉન	યુ.કે.
મૅરી સ્કલોડોસ્કા ક્યૂરી	રેડિયમ તથા પોલોનિયમની શોધ, કુદરતી રેડિયોઍક્ટિવિટીનો અભ્યાસ	પોલૅન્ડ
આલ્બર્ટ આઇન્સ્ટાઇન	ફોટોઇલેક્ટ્રિક અસરની સમજૂતી, સાપેક્ષતાનો સિદ્ધાંત	જર્મની

નામ	મહત્ત્વનું યોગદાન / સંશોધન	મૂળ દેશ
વિક્ટર ફ્રાન્સિસ હેઝ	કોસ્મિક વિકિરણો	ઓસ્ટ્રિયા
આર. એ. મિલિકાન	ઇલેક્ટ્રૉન પરના વિદ્યુતભારનું માપન	યુ.એસ.એ.
અર્નેસ્ટ રધરફોર્ડ	પરમાણુનું ન્યુક્લિયર મોડેલ	ન્યૂઝીલેન્ડ
નીલ બ્હોર	હાઇડ્રોજન પરમાણુનું ક્વૉન્ટમ મોડેલ	ડેનમાર્ક
સી. વી. ચંદ્રશેખર	અણુઓ દ્વારા પ્રકાશનું અસ્થિતિસ્થાપક પ્રકીર્ણન	ભારત
લ્યૂઇસ વિક્ટર-દ-બ્રોગ્લી	દ્રવ્યની તરંગપ્રકૃતિ	ફ્રાન્સ
એમ. એન. સહા	થર્મલ આયોનાઇઝેશન	ભારત
એસ. એન. બોઝ	ક્વૉન્ટમ સ્ટેટેસ્ટિક	ભારત
વુલ્ફગેંગ પાઉલી	અપવર્ઝનનો નિયમ	ઓસ્ટ્રિયા
ઍનરિકો ફર્મી	નિયંત્રિત ન્યૂક્લિયર ફિશન	ઇટલી
વર્નર હાઇઝેનબર્ગ	ક્વૉન્ટમ મિકેનિક્સ, અનિશ્ચિતતાનો સિદ્ધાંત	જર્મની
પૉલ ડિરાક	ઇલેક્ટ્રૉનની સાપેક્ષતાનો સિદ્ધાંત, ક્વૉન્ટમ સ્ટેટસ્ટિક	યુ.કે.
એડવિન હબલ	વિશ્વનું વિસ્તરણ	યુ.એસ.એ.
અર્નેસ્ટ ઑરલૅન્ડો લૉરેન્સ	સાયક્લોટ્રોન	યુ.એસ.એ.
જૅમ્સ ચૅડવિક	ન્યુટ્રૉન	યુ.કે.
હિડેકી યુકાવા	ન્યૂક્લિયર બળોનો સિદ્ધાંત	જાપાન
હોમી જહાંગીર ભાભા	કોસ્મિક વિકિરણોની સોપાનીય (Cascade) પ્રક્રિયા	ભારત
લેવ ડેવિડોવિક લેઉન્ડો	સંઘનિત દ્રવ્ય સિદ્ધાંત, પ્રવાહી હિલિયમ	રશિયા
એસ. ચંદ્રશેખર	ચંદ્રશેખર-સીમા તારાઓની સંરચના અને વિકાસ	ભારત
જ્હૉન બારડીન	ટ્રાન્ઝિસ્ટર, સુપરકન્ડક્ટિવિટીનો સિદ્ધાંત	યુ.એસ.એ.
સી. એચ. ટાઉન્સ	મેસર, લેસર	યુ.એસ.એ.
અબ્દુસ સલામ	નિર્બળ અને વિદ્યુતચુંબકીય ક્રિયાનું એકીકીકરણ	પાકિસ્તાન

પ્રકૃતિ શું છે ? હવે આપણે કુદરતમાં પ્રવર્તતાં મૂળભૂત બળોની પ્રકૃતિ તથા ભૌતિકજગતનું વિવિધ પ્રકારે સંચાલન કરતા નિયમોની ચર્ચા કરીશું.

1.4 કુદરતમાં પ્રવર્તતા મૂળભૂત બળો (FUNDAMENTAL FORCES IN NATURE)*

આપણે સૌ બળ અંગેનો સાહજિક ખ્યાલ ધરાવીએ છીએ. આપણા અનુભવ પ્રમાણે પદાર્થને ધકેલવા, ઊંચકવા, ફેંકવા, તોડવા કે વિરૂપિત કરવા માટે બળની જરૂર પડે છે. જેમકે, ગતિશીલ પદાર્થ આપણને અથડાય અથવા આપણે મેરિગોરાઉન્ડ (ચગડોળ)માં હોઈએ ત્યારે બળની અસર અનુભવીએ છીએ. આ સાહજિક ખ્યાલોની મદદથી બળની વૈજ્ઞાનિક વ્યાખ્યા કરવી સરળ નથી. અહીં વૈજ્ઞાનિક એરિસ્ટોટલે આપેલ બળની વ્યાખ્યા ખોટી પડી હતી. બળ અંગેનો સાચો ખ્યાલ આઇઝેક ન્યૂટને આપેલા તેના ગતિના પ્રસિદ્ધ નિયમો દ્વારા મળ્યો. તેણે બે પદાર્થો વચ્ચે પ્રવર્તતા ગુરુત્વાકર્ષણબળનું સચોટ સ્વરૂપ આપ્યું. આપણે આગળના પ્રકરણમાં તેના વિશે અભ્યાસ કરીશું.

સ્થૂળ જગતમાં ગુરુત્વાકર્ષણબળ ઉપરાંત બીજા ઘણા પ્રકારોનાં બળો જોવા મળે છે. જેવા કે, સ્નાયુબળ, બે પદાર્થ વચ્ચેનું સંપર્કબળ, ઘર્ષણ (જે સંપર્કસપાટીને સમાંતર લાગતું સંપર્કબળ),

* *વિભાગ 1.4 અને 1.5 કેટલાક એવા ખ્યાલો ધરાવે છે કે જે તમે પ્રથમ વાચનમાં પૂરી રીતે સમજી ન શકો છતાં ભૌતિકવિજ્ઞાનની કેટલીક મૂળભૂત બાબતો અનુભવી શકાય તે માટે અમારી તમને સલાહ છે કે, તેમનું ધ્યાનપૂર્વક વાચન કરો. તેમાં કેટલાંક એવાં ક્ષેત્રો છે કે જેમાં ભૌતિક વૈજ્ઞાનિકો આજે પણ કાર્યરત છે.*

કોષ્ટક 1.2 ટેક્નોલૉજી અને ભૌતિકવિજ્ઞાન વચ્ચેનો સંબંધ

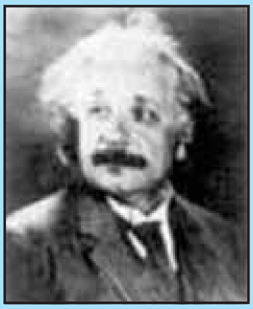
ટેક્નોલૉજી	વૈજ્ઞાનિક સિદ્ધાંત
વરાળયંત્ર	થરમૉડાયનેમિક્સનો નિયમ
ન્યૂક્લિયર રીએક્ટર	નિયંત્રિત ન્યૂક્લિયર ફીશન
રેડિયો અને ટેલિવિઝન	વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોનું ઉત્પાદન, પ્રસરણ અને ઓળખ (detection)
કમ્પ્યૂટર્સ	ડિજિટલ લૉજિક
લેસર	વિકિરણોના ઉત્તેજિત ઉત્સર્જન દ્વારા પ્રકાશનું વિવર્ધન
અતિપ્રબળ ચુંબકીયક્ષેત્રનું ઉત્પાદન	સુપરકન્ડક્ટિવિટી
રૉકેટ પ્રોપલ્શન	ન્યૂટનના ગતિના નિયમો
ઈલેક્ટ્રિક જનરેટર	ફેરેડેનો વિદ્યુતચુંબકીય પ્રેરણનો સિદ્ધાંત
જળવિદ્યુત પાવરસ્ટેશન	ગુરુત્વીય સ્થિતિઊર્જાનું વિદ્યુતઊર્જામાં રૂપાંતરણ
ઍરોપ્લેન	તરલશાસ્ત્રમાં બર્નુલીનો સિદ્ધાંત
કણ પ્રવેગકો	વિદ્યુતચુંબકીય ક્ષેત્રમાં વીજભારિત કણની ગતિ
સોનાર	અલ્ટ્રાસોનિક તરંગોનું પરાવર્તન
ઓપ્ટિકલ ફાઈબર	પ્રકાશનું પૂર્ણઆંતરિક પરાવર્તન
અપરાવર્તક આવરણ	પાતળી ફિલ્મ વડે પ્રકાશનું વ્યતિકરણ
ઈલેક્ટ્રૉન માઈક્રોસ્કૉપ	ઈલેક્ટ્રૉનની તરંગપ્રકૃતિ
ફોટોસેલ	ફોટોઈલેક્ટ્રિક અસર
ફ્યુઝન પરીક્ષણ રીએક્ટર (Tokamak)	પ્લાઝ્માનું ચુંબકીય બંધન
જાયન્ટ મીટરવેવ રેડિયો ટેલિસ્કૉપ (GMRT)	કોસ્મિક રેડિયોતરંગોને પારખવા
બૉઝ-આઈન્સ્ટાઈન-કન્ડેન્સેટ	લેસર બીમ અને ચુંબકીયક્ષેત્ર વડે પરમાણુઓનું (ટ્રેપિંગ અને કુલિંગ) આંતરવા અને શીતલન કરવા

દબાયેલી કે ખેંચાણમાં રહેલી સ્પ્રિંગો વડે લાગતું બળ, તણાવ સહિતની દોરી કે દોરડા વડે લાગતું બળ (તણાવ), ઉત્પ્લાવકબળ, તરલના સંપર્કમાં રહેલ ઘન પદાર્થ પર લાગતું શ્યાનતાબળ, તરલના દબાણને લીધે ઉદ્ભવતું બળ, પ્રવાહીના પૃષ્ઠતાણને લીધે ઉદ્ભવતું બળ અને બીજાં ઘણાંબધાં બળો. વીજભારિત અને ચુંબકત્વ ધરાવતા પદાર્થો વચ્ચે પણ બળો પ્રવર્તે છે. વિદ્યુતબળો, ચુંબકીયબળો, પ્રોટોન અને ન્યુટ્રૉન વચ્ચે પ્રવર્તતા ન્યુક્લિયર બળો, આંતર પરમાણ્વિક બળો અને આંતર આણ્વીકબળો વગેરે બળોનો સૂક્ષ્મ પ્રભાવક્ષેત્રમાં સમાવેશ થાય છે. આપણે અભ્યાસક્રમમાં હવે પછીનાં પ્રકરણોમાં ઉપર્યુક્ત બળો પૈકી કેટલાંક બળોથી પરિચિત થઈશું.

વીસમી શતાબ્દીની મહાન આંતરસૂઝ એ છે કે જુદા જુદા સંદર્ભોમાંથી મળી આવતાં વિવિધ પ્રકારનાં બળો, ખરેખર કુદરતના અલ્પ સંખ્યાનાં જ મૂળભૂત બળોમાંથી ઉદ્ભવ્યા હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, સ્થિતિસ્થાપક સ્પ્રિંગ જ્યારે ખેંચાયેલી/ સંકોચાયેલી હોય છે ત્યારે સ્પ્રિંગના પાસપાસે રહેલા અણુઓ વચ્ચે પરિણામી આકર્ષણ/અપાકર્ષણ બળ ઉદ્ભવે છે. જેને કારણે સ્થિતિસ્થાપક સ્પ્રિંગમાં પુનઃ સ્થાપકબળ ઉદ્ભવે છે. અહીં લાગતું કુલ આકર્ષી/અપાકર્ષીબળ અણુઓનાં વિદ્યુતભારિત સૂક્ષ્મ કણો વચ્ચે પ્રવર્તતા અસંતુલિત વિદ્યુતબળો દ્વારા શોધી શકાય છે.

'સાધિત' બળ (જેવાં કે સ્પ્રિંગમાં ઉદ્ભવતું બળ, ઘર્ષણબળ)ના નિયમો કુદરતનાં મૂળભૂત બળોના નિયમોથી સ્વતંત્ર નથી. પરંતુ આ સાધિત બળોનું ઉદ્ભવસ્થાન વધુ જટિલ છે.

હાલમાં કુદરતમાં ચાર પ્રકારનાં મૂળભૂત બળો હોવાનું મનાય છે. જેનું ટૂંકમાં વર્ણન આ મુજબ છે :



આલ્બર્ટ આઈન્સ્ટાઈન (1879-1955)

1879માં ઉલ્મ, જર્મનીમાં જન્મેલા આલ્બર્ટ આઈન્સ્ટાઈન સાર્વત્રિક રીતે સર્વકાલિન મહાન ગણાતા ભૌતિક વિજ્ઞાનીઓ પૈકીના એક વૈજ્ઞાનિક ગણાય છે. તેમના દ્વારા 1905માં પ્રકાશિત ત્રણ સંશોધન-લેખોથી તેમનું વિસ્મયકારી વૈજ્ઞાનિક જીવન શરૂ થયું. તેમનાં પ્રથમ સંશોધનપત્રમાં પ્રકાશ ક્વૉન્ટમ્ (જેને હવે ફોટોન કહે છે.) રજૂ કરેલ આ ધારણાનો ઉપયોગ ફોટોઇલેક્ટ્રિક અસરની લાક્ષણિકતા સમજવા માટે થયો હતો. જેને વિકિરણના પ્રચલિત તરંગવાદ વડે સમજાવી શકાઈ ન હતી. બીજા શોધપત્રમાં તેમણે બ્રાઉનિયન ગતિનો સિદ્ધાંત રજૂ કરેલ હતો. જેની પ્રાયોગિક સાબિતી થોડાં વર્ષો બાદ થઈ હતી. આ સિદ્ધાંતોએ દ્રવ્યના પરમાણ્વિય ચિત્રનું આધારભૂત પ્રમાણ આપ્યું. તેમનાં ત્રીજા સંશોધનપત્રએ વિશિષ્ટ સાપેક્ષવાદ (Special Theory of Relativity)નો જન્મ આપ્યો. જેને કારણે આઈન્સ્ટાઈન તેમના મહાનકાળ દરમિયાન દંતકથા સમાન બની ગયા. બીજા દશકમાં તેમના નવા સિદ્ધાંતોનાં પરિણામો અંગે સંશોધન કર્યું. જેમાં અન્ય તથ્યોની સાથે સાથે દ્રવ્યઊર્જા સમતૂલ્યતાનું સમીકરણ $E = mc^2$ પ્રસ્થાપિત કર્યું. તેમણે સાપેક્ષવાદની વ્યાપક સ્વરૂપ (The General Theory of Relativity)ની રચના કરી. જે ગુરુત્વાકર્ષણનો આધુનિક સિદ્ધાંત છે. આઈન્સ્ટાઈન પછીનાં મહત્ત્વપૂર્ણ યોગદાનો પૈકીનાં કેટલાક યોગદાનો નીચે મુજબ છે. પ્લાન્કે કાળા પદાર્થનાં વિકિરણનાં નિયમમાં વૈકલ્પિક વ્યુત્પન દ્વારા રજૂ કરાવેલ ઉદ્દીપ્ત (Stimulated) ઉત્સર્જનની ધારણાં, બ્રહ્માંડનું સ્થિત મોડેલ જેના દ્વારા બ્રહ્માંડની ઉત્પત્તિનો આધુનિક વિજ્ઞાનનો યુગ શરૂ થયો. દળદાર બોઝોન ગૅસનું ક્વૉન્ટમ સ્ટેટેસ્ટિક તથા ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્ર પાયાનું વિવેચનાત્મક પૃથક્કરણ વગેરે. આઈન્સ્ટાઈન દ્વારા 1905માં ભૌતિકવિજ્ઞાન ક્ષેત્રે તેમનું ચિરઃસ્થાયી યોગદાન, જેમાં ક્રાંતિકારી વૈજ્ઞાનિક સંકલ્પનાઓની માહિતી હતી, જે આપણા આધુનિક જીવનને પ્રભાવિત કરતી રહી છે. તેના સન્માનમાં વર્ષ 2005ને ભૌતિકવિજ્ઞાનનું આંતરરાષ્ટ્રીય વર્ષ તરીકે ઘોષિત કરવામાં આવ્યું.

1.4.1 ગુરુત્વાકર્ષણ બળ (Gravitational Force)

ગુરુત્વાકર્ષણ બળ બે પદાર્થો વચ્ચે તેમનાં દ્રવ્યમાનને કારણે લાગતું પરસ્પર આકર્ષીબળ છે. તે એક સાર્વત્રિક બળ છે. વિશ્વમાં પ્રત્યેક પદાર્થ અન્ય પદાર્થને કારણે આ બળ અનુભવે છે. ઉદાહરણ તરીકે પૃથ્વી પરના બધા જ પદાર્થ પૃથ્વીને કારણે ગુરુત્વબળ અનુભવે છે. ખાસ કરીને પૃથ્વીને અનુલક્ષીને પૃથ્વીની આસપાસ ચંદ્ર અને માનવસર્જિત ઉપગ્રહોનું પરિભ્રમણ, સૂર્યની આસપાસ પૃથ્વી તથા અન્ય ગ્રહોનું પરિભ્રમણ અને પૃથ્વી પર પડતા પદાર્થોની ગતિ, ગુરુત્વબળ દ્વારા નિયંત્રિત થાય છે. વિશ્વની વિશાળ સ્તરિય ઘટનાઓ જેમકે, તારાવિશ્વ, તારા, આકાશગંગા, આકાશગંગાના ઝૂમખાઓની રચના અને વિકાસમાં ગુરુત્વાકર્ષણ બળની મુખ્ય ભૂમિકા છે.

1.4.2 વિદ્યુતચુંબકીય બળ (Electromagnetic Force)

વિદ્યુતભારિત કણો વચ્ચે લાગતાં બળને વિદ્યુતચુંબકીય બળ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સરળ કિસ્સામાં જ્યારે વિદ્યુતભારો સ્થિર સ્થિતિમાં હોય છે ત્યારે તેમની વચ્ચે લાગતું બળ કુલંબના નિયમ પરથી મળે છે. વિજાતીય વીજભારો વચ્ચે આ બળ આકર્ષી અને સજાતીય વીજભારો વચ્ચે આ બળ અપાકર્ષી પ્રકારનું હોય છે. જ્યારે વીજભારો ગતિમાં હોય છે ત્યારે તે ચુંબકીય અસર નીપજાવે છે અને ચુંબકીયક્ષેત્ર ગતિશીલ વીજભારો પર બળ લગાડે છે. વિદ્યુત અને ચુંબકીયક્ષેત્રની આ સંયુક્ત અસર અલગ ન પાડી શકાય તેવી હોવાથી આ બળને વિદ્યુતચુંબકીય બળ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. ગુરુત્વાકર્ષણ બળની માફક વિદ્યુતચુંબકીય બળ પણ ગુરુઅંતરિય બળ છે તથા તેને લાગવા માટે તેમની વચ્ચે કોઈ માધ્યમની જરૂર પડતી નથી. આ બળ ગુરુત્વાકર્ષી બળ કરતાં અતિશય પ્રબળ બળ છે. નિશ્ચિત અંતરે રહેલા બે પ્રોટોન વચ્ચે લાગતાં ગુરુત્વાકર્ષીબળ કરતાં વિદ્યુતબળ 10^{36} ગણું મોટું હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે દ્રવ્ય એ ઇલેક્ટ્રૉન, પ્રોટોન અને તેના જેવા બીજા વીજભારિત મૂળભૂત કણોનું બનેલું છે. વિદ્યુતચુંબકીય બળ ગુરુત્વાકર્ષી બળ કરતાં ઘણું વધુ પ્રબળ હોવાથી આણ્વીક અને પરમાણ્વીક સ્તરે થતી ઘટનાઓમાં વિદ્યુતચુંબકીય બળનું પ્રભુત્વ વધુ છે. (બીજાં બે બળો જેનો અભ્યાસ હવે કરીશું તે માત્ર ન્યુક્લિયસના માપક્રમ સુધી જ પ્રવર્તે છે). આમ પરમાણુ અને અણુઓની સંરચના, રાસાયણિક પ્રક્રિયાનું ગતિશાસ્ત્ર તથા દ્રવ્યની યાંત્રિક, ઉષ્મીય અને અન્ય લાક્ષણિકતાઓનું સંચાલન મુખ્યત્વે વિદ્યુતચુંબકીય બળ દ્વારા જ થાય છે. તણાવબળ, ઘર્ષણબળ, લંબબળ (Normal Force) અને સ્પ્રિંગમાં ઉદ્ભવતાં બળો જેવાં સ્થૂળ બળોના પાયામાં વિદ્યુતચુંબકીય બળ રહેલું છે.

ગુરુત્વાકર્ષણ બળ હંમેશાં આકર્ષી પ્રકારનું બળ છે જ્યારે વિદ્યુતચુંબકીય બળ આકર્ષી અથવા અપાકર્ષી પ્રકારનું હોઈ શકે છે. આ બાબત બીજી રીતે સમજીએ તો દ્રવ્યમાન માત્ર એક જ પ્રકારનું છે. (ઋણ દ્રવ્યમાન હોતું નથી.) જ્યારે વીજભાર બે પ્રકારના હોય છે : ધનવીજભાર અને ઋણવીજભાર. બધાં જ તફાવતનું કારણ આ જ છે. દ્રવ્ય મોટે ભાગે વિદ્યુતીય રીતે તટસ્થ હોય છે. (કુલ વીજભાર શૂન્ય હોય છે) અને તેથી તેના પર લાગતું વિદ્યુતબળ શૂન્ય હોય છે. જ્યારે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ પૃથ્વી પરની ઘટનાઓ પર પ્રભુત્વ ધરાવે છે. જ્યારે પરમાણુઓ આયનીકૃત થાય છે ત્યારે વાતાવરણમાં સ્વતઃ વિદ્યુતબળ ઉદ્ભવે છે અને તેને કારણે જ વીજળીના ચમકારા થાય છે.

સત્યેન્દ્રનાથ બૉઝ (1894-1974)

વર્ષ 1894માં કોલકાતામાં જન્મેલા સત્યેન્દ્રનાથ બૉઝ મહાન ભારતીય ભૌતિક વિજ્ઞાનીઓ પૈકી એક છે. જેમણે વીસમી શતાબ્દીમાં વિજ્ઞાનની પ્રગતિ માટે મહત્ત્વનું યોગદાન આપ્યું હતું. તેઓ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ઉત્કૃષ્ટ વિદ્યાર્થી હતા. વર્ષ 1916માં કોલકતા વિશ્વવિદ્યાલયમાં પ્રાધ્યાપક તરીકે તેમની કારકિર્દી શરૂ કરી. પાંચ વર્ષ પછી તેઓ ઢાકા વિશ્વવિદ્યાલયમાં ગયા. જ્યાં તેમણે 1924માં પોતાની પ્રતિભાશાળી અંતઃદૃષ્ટિથી પ્લાન્કના નિયમની નવી તારવણી રજૂ કરી. જેમાં તેમણે વિકિરણને ફોટોન વાયુ તરીકે સ્વીકારી અને ફોટોન અવસ્થાઓની નવી આંકડાકીય ગણતરીની પદ્ધતિ અપનાવી હતી. આ વિષય પર તેમણે એક ટૂંકો શોધપત્ર લખી આઈન્સ્ટાઈનને મોકલી આપ્યો. આઈન્સ્ટાઈને તરત જ આ મહત્ત્વપૂર્ણ શોધને ઓળખીને તેનો જર્મન ભાષામાં અનુવાદ કરી તેને પ્રકાશિત કરવા મોકલી આપ્યો. ગણતરીની આ નવીન પદ્ધતિનો ઉપયોગ આઈન્સ્ટાઈને અણુઓના વાયુમાં કર્યો.

બૉઝનાં આ કાર્યમાં નવી સંકલ્પનામાં મૂળ ઘટકનો વિચાર એટલે કે કણો જુદા ન પાડી શકાય તેવા માનવામાં આવેલા જે પ્રચલિત મૅક્સવેલ બોલ્ટ્ઝમેન આંકડાશાસ્ત્રને આધારે થયેલ ધારણાથી ઘણી વિપરિત હતી. તે પછી તરત જ એવું અનુભવાયું કે, બૉઝ-આઈન્સ્ટાઈનની આંકડાકીય ધારણા માત્ર પૂર્ણાંક સ્પિન સંખ્યા ધરાવતાં કણોને જ લાગુ પાડી શકાય છે અને અર્ધપૂર્ણાંક સ્પિન સંખ્યા ધરાવતા કણો જે પાઉલીના અપવર્જન સિદ્ધાંતોને સંતોષે છે. તેમનાં માટે નવી ક્વૉન્ટમ આંકડાકીય માહિતી (ફર્મી-ડિરાક આંકડાકીય માહિતી)ની જરૂર પડી. બૉઝના સન્માનમાં પૂર્ણાંક સ્પિન ધરાવતા કણોને હવે બોઝોન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

બૉઝ-આઈન્સ્ટાઈન સ્ટેટસ્ટિકનાં મહત્ત્વનું પરિણામ એ છે કે, અણુઓનું વાયુ સ્વરૂપ એક નિશ્ચિત તાપમાનથી નીચા તાપમાને કેટલીક એવી લઘુત્તમ ઊર્જાવાળી જ અવસ્થામાં સંક્રમણ કરશે કે જ્યાં પરમાણુઓનો મોટો જથ્થો તે જ અવસ્થામાં હોય. બૉઝના પાયાના વિચારો જેને આઈન્સ્ટાઈને વધુ વિકસિત કર્યા. આ વિચારો 70 વર્ષ બાદ મંદવાયુના અતિશીત (Ultra Cold) આલ્કલી પરમાણુ બૉઝ આઈન્સ્ટાઈન સંઘનનમાં દ્રવ્યની નવી અવસ્થામાં અવલોકનો દ્વારા નાટ્યાત્મક રીતે પ્રમાણિત થયાં.

જો આપણે થોડું ચિંતન કરીએ તો આપણી રોજિંદા જીવનની ઘણીબધી ઘટના પરથી સ્પષ્ટ થઈ શકે છે કે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ કરતાં વિદ્યુતચુંબકીય બળ વધુ પ્રબળ છે. જ્યારે આપણા હાથ પર એક પુસ્તક મૂકીએ છીએ ત્યારે હાથ વડે પુસ્તકને લંબબળ લાગુ પાડીએ છીએ જે પૃથ્વીના મોટા દ્રવ્યમાન વડે પુસ્તક પર લાગતાં ગુરુત્વાકર્ષણ બળને સંતુલિત કરે છે. આ લંબબળ એટલે જ હાથ અને પુસ્તકના વીજભારિત ઘટકો વચ્ચે સંપર્કસપાટીએ પ્રવર્તતું કુલ વિદ્યુતબળ જ છે. જો વિદ્યુતચુંબકીય બળ ગુરુત્વાકર્ષણ બળ કરતાં સ્વભાવથી વધુ પ્રબળ ન હોય, તો સૌથી મજબૂત વ્યક્તિનો હાથ પીંછાના વજનથી નાના નાના ટુકડા થઈ જાય ! ખરેખર આવી પરિસ્થિતિ હોય તો આપણે જ આપણા વજનબળને કારણે ટુકડે ટુકડામાં વિભાજીત થઈ જઈએ !

1.4.3 પ્રબળ ન્યુક્લિયર બળ (Strong Nuclear Force)

પ્રબળ ન્યુક્લિયર બળ પ્રોટૉન અને ન્યુટ્રૉનને ન્યુક્લિયસમાં જકડી રાખે છે. એ સ્પષ્ટ છે કે આકર્ષી પ્રકારનાં કોઈ પણ બળ વગર, પ્રોટોન વચ્ચે લાગતાં વિદ્યુતીય અપાકર્ષણને લીધે ન્યુક્લિયસ અસ્થાયી બની જાય. આ આકર્ષીબળ ગુરુત્વીય ન હોઈ શકે. કારણ કે વિદ્યુતીય બળની સરખામણીમાં ગુરુત્વીય બળ અવગણ્ય છે. માટે કોઈ નવા મૂળભૂત બળનો વિચાર કરવો પડે. પ્રબળ ન્યુક્લિયર બળ એ બધાં જ મૂળભૂત બળોમાં સૌથી વધુ પ્રબળ છે, વિદ્યુતચુંબકીય બળથી લગભગ 100 ગણું પ્રબળ છે. તે વિદ્યુતભાર પર આધારિત નથી અને તે પ્રોટોન-પ્રોટોન, પ્રોટોન-ન્યુટ્રૉન અને ન્યુટ્રૉન-ન્યુટ્રૉન વચ્ચે સમાનપણે લાગે છે. જોકે તેની અવધિ લગભગ ન્યુક્લિયસના પરિમાણ (10^{-15} m) જેટલી અતિસૂક્ષ્મ છે. તે ન્યુક્લિયસના સ્થાયીપણા માટે જવાબદાર છે. અત્રે એ નોંધવું જોઈએ કે, ઇલેક્ટ્રૉન આ બળ અનુભવતો નથી.

આમ છતાં આધુનિક શોધોએ દર્શાવ્યું કે પ્રોટોન અને ન્યુટ્રૉન પણ ક્વાર્ક્સ તરીકે ઓળખાતા વધુ મૂળભૂત ઘટકોનાં બનેલાં છે.

1.4.4 નિર્બળ ન્યુક્લિયરબળ (Weak Nuclear Force)

વીક (નિર્બળ) ન્યુક્લિયરબળ એ માત્ર નિશ્ચિત ન્યુક્લિયર પ્રક્રિયાઓ જેવી કે ન્યુક્લિયસમાંથી β-કણોના ઉત્સર્જન દરમ્યાન જોવા મળે છે. β-કણના ઉત્સર્જન દરમિયાન ન્યુક્લિયસ ઇલેક્ટ્રૉન અને વિદ્યુતભારવિહીન એવા ન્યુટ્રિનો કણોનું ઉત્સર્જન કરે છે. વીક્ (નિર્બળ) ન્યુક્લિયરબળ એ ગુરુત્વાકર્ષીય બળ કરતાં પ્રબળ પરંતુ સ્ટ્રૉંગ ન્યુક્લિયરબળ અને વિદ્યુતચુંબકીય બળ કરતાં નબળું હોય છે. વીક્ (નિર્બળ) ન્યુક્લિયરબળની અવધિ અત્યંત સૂક્ષ્મ 10^{-16} mના ક્રમની છે.

1.4.5 બળોના એકીકીકરણ તરફ (Towards Unification of Forces)

પરિચ્છેદ 1.1માં આપણે નોંધ્યું કે ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં એકીકીકરણ એ મૂળભૂત શોધનો મુદ્દો છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનની મહત્ત્વની પ્રગતિ ઘણીવાર વિવિધ સિદ્ધાંતો અને પ્રભાવક્ષેત્રોના એકીકીકરણ તરફ દોરી જાય છે. ન્યૂટને ભૂમિગત (Terrestrial) અને આકાશીય (Celestial) પ્રભાવક્ષેત્રોને ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમ વડે એકત્રિત

કોષ્ટક 1.3 કુદરતમાં પ્રવર્તતાં મૂળભૂત તત્ત્વો

નામ	સાપેક્ષ પ્રબળતા	અવધિ	કોની વચ્ચે પ્રવર્તે છે
ગુરુત્વાકર્ષણ બળ	10^{-38}	અનંત	વિશ્વના બધા જ પદાર્થો
વીક્ (નિર્બળ) ન્યુક્લિયરબળ	10^{-13}	અતિસૂક્ષ્મ, ન્યુક્લિયર પરિમાણથી પણ ઓછું ($\sim 10^{-16}$ m)	કેટલાક મૂળભૂત કણો, ખાસ કરીને ઇલેક્ટ્રૉન અને ન્યુટ્રિનો
વિદ્યુતચુંબકીયબળ	10^{-2}	અનંત	વિદ્યુતભારિત કણો વચ્ચે
પ્રબળ ન્યુક્લિયરબળ	1	સૂક્ષ્મ, ન્યુક્લિયર સાઇઝનું ($\sim 10^{-15}$ m)	ન્યૂક્લિઑન્સ અને ભારે પ્રાથમિક કણો

કર્યા. ઓર્સ્ટેડ અને ફેરેડેની પ્રાયોગિક શોધોએ દર્શાવ્યું કે વિદ્યુત અને ચુંબકીય ઘટનાઓ સામાન્યત: એકબીજાથી અલગ પાડી શકાય નહિ. મેક્સવેલની 'પ્રકાશ એ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગ છે' શોધથી તેણે વિદ્યુતચુંબકત્વ અને પ્રકાશશાસ્ત્રને એકત્રિત કર્યા. આઇન્સ્ટાઇને ગુરુત્વાકર્ષણ અને વિદ્યુતચુંબકત્વને એકીકીકરણ કરવા પ્રયત્નો કર્યા જેમાં તેમને સફળતા ન મળી. પરંતુ આને લીધે બળોના એકીકીકરણના હેતુ માટે ખંતપૂર્વક પ્રયત્નો કરવામાંથી ભૌતિક વિજ્ઞાનીઓને હતોત્સાહ કરી શકાયા નહિ.

છેલ્લા કેટલાક દશકોમાં આ ક્ષેત્રમાં ઘણીબધી પ્રગતિ થઈ છે. વિદ્યુતચુંબકીય બળ અને વીક્ ન્યુક્લિયર બળનું એકીકીકરણ કરવામાં આવ્યું અને તેમને ઇલેક્ટ્રૉનિક બળ નામના એક જ બળનાં જુદાં જુદાં પાસાંઓ તરીકે જોવામાં આવે છે. આ એકીકીકરણનો વાસ્તવમાં શું અર્થ થાય છે તે અત્રે સમજાવી શકાય તેમ નથી. ઇલેક્ટ્રૉ-વીકબળ અને પ્રબળ બળનું એકીકીકરણ ઉપરાંત ગુરુત્વાકર્ષણ બળનું અન્ય બીજાં મૂળભૂત બળો સાથેનું એકીકીકરણના પ્રયત્નો થયા છે અને હજુ થઈ રહ્યા છે. આમાના કેટલાક ખ્યાલો હજુ અનુમાનની સ્થિતિમાં અને અનિર્ણાયક છે. કુદરતનાં મૂળભૂત બળોનું એકીકીકરણની પ્રગતિની દિશામાં કેટલાક સીમાચિહનો કોષ્ટક 1.4માં દર્શાવેલ છે.

1.5 ભૌતિકશાસ્ત્રના નિયમોની પ્રકૃતિ (NATURE OF PHYSICAL LAW)

ભૌતિક વિજ્ઞાનીઓ વિશ્વનું અન્વેષણ કરે છે. તેમનાં સંશોધનો એવી વૈજ્ઞાનિક પ્રક્રિયાઓ પર આધારિત છે કે, જેનો વિસ્તાર પરમાણુથી પણ સૂક્ષ્મ કણોથી શરૂ કરીને અતિ દૂર રહેલા તારાઓ (Stars) સુધીનો છે. અવલોકનો અને પ્રયોગો દ્વારા તથ્યો શોધવાની સાથે સાથે ભૌતિક વિજ્ઞાનીઓ તથ્યોનો સમાવેશ હોય તેવા નિયમો શોધવાનો પ્રયત્ન કરે છે. (ઘણી વાર તે ગણિતીય સૂત્રો સ્વરૂપે પણ હોય છે.

જુદાં જુદાં બળો દ્વારા નિયંત્રિત ભૌતિક ઘટનાઓમાં સમય સાથે ઘણી ભૌતિકરાશિ બદલાઈ શકે છે. જ્યારે તે પણ હકીકત છે કે કેટલીક વિશિષ્ટ રાશિઓ સમય સાથે અચળ રહે છે. જેને પ્રકૃતિની સંરક્ષિત ભૌતિકરાશિઓ કહે છે. અવલોકિત ઘટનાઓનાં માત્રાત્મક વર્ણન માટે સંરક્ષણના સિદ્ધાંતો સમજવા જરૂરી છે.

બાહ્ય સંરક્ષી બળની અસર હેઠળ થતી તંત્રની ગતિ માટે ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો એટલે કે તંત્રની યાંત્રિકઊર્જા અચળ હોય છે. આ બાબતનું એક વધુ પ્રચલિત ઉદાહરણ ગુરુત્વક્ષેત્રમાં મુક્ત પતન પામતો પદાર્થ છે. સમય સાથે પદાર્થની ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા બંને સતત બદલાય છે. પરંતુ

કોષ્ટક 1.4 કુદરતનાં જુદાં જુદાં બળો/પ્રભાવક્ષેત્રોના એકીકીકરણમાં પ્રગતિ

ભૌતિકવિજ્ઞાનીનું નામ	વર્ષ	એકીકીકરણ તરફની ઉપલબ્ધિ
આઇઝેક ન્યૂટન	1687	ભૂલોક અને આકાશીય યંત્રશાસ્ત્રનું એકીકીકરણ, ગતિના નિયમો અને ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ સમાન રીતે બંને પ્રભાવક્ષેત્રોમાં લાગુ પડે છે તેમ બતાવ્યું.
હેંસ ક્રિશ્ચિયન ઓર્સ્ટેડ માઇકલ ફેરેડે	1820 1830	વિદ્યુત અને ચુંબકીય ઘટનાઓ કોઈ એક જ પ્રભાવક્ષેત્ર : વિદ્યુતચુંબકત્વથી અલગ ન પાડી શકાય તેવાં બે પાસાં છે.
જેમ્સ ક્લાર્ક	1873	વિદ્યુતીય, ચુંબકીયથી અને પ્રકાશશાસ્ત્રનું એકીકીકરણ, પ્રકાશ એ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગ છે તેમ બતાવ્યું.
શૈલ્ડન ગ્લેશોવ, અબ્દુસ સલામ, સ્ટીવન વીનબર્ગ	1979	વિદ્યુતચુંબકીય બળ અને વીક્ ન્યુક્લિયર બળ એ ઇલેક્ટ્રૉનિક બળનાં જ બે પાસાં તરીકે જોઈ શકાય છે તેમ બતાવ્યું.
કાર્લો રુબિયા, સાઇમન વાંડન મિર	1984	ઇલેક્ટ્રોવીક્ બળના સિદ્ધાંતની આગાહીઓની પ્રાયોગિક ચકાસણી કરી.

તેમનો સરવાળો અચળ રહે છે. સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત પતન પામતો પદાર્થ પૃથ્વીની સપાટીને અથડાય છે. તે અગાઉની ક્ષણે તેની બધી જ સ્થિતિઊર્જા ગતિઊર્જામાં રૂપાંતર પામે છે. સંરક્ષીબળ પૂરતા સીમિત આ નિયમની અલગ કરેલા તંત્ર માટે ઊર્જા-સંરક્ષણના વ્યાપક નિયમ (જે થરમૉડાયનેમિક્સના પ્રથમ નિયમનો પાયો છે.) સાથે ગેરસમજ રાખવી જોઈએ નહિ.

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ઊર્જાની સંકલ્પના કેન્દ્રસ્થાને છે. બધી જ ભૌતિક પ્રણાલીઓ માટે ઊર્જાની અભિવ્યક્તિ કરી શકાય છે. ઉષ્માઊર્જા, યાંત્રિકઊર્જા, વિદ્યુતઊર્જા વગેરે જેવાં તમામ ઊર્જાનાં સ્વરૂપોને ધ્યાનમાં લઈએ તો એવો નિષ્કર્ષ તારવી શકાય છે કે ઊર્જાનું હંમેશાં સંરક્ષણ થાય છે. ઊર્જા-સંરક્ષણનો વ્યાપક નિયમ બધાં જ બળો તથા જુદા જુદા પ્રકારની ઊર્જાના પરસ્પર રૂપાંતરણો માટે સાચો છે.

સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત પતન પામતા પથ્થરનાં ઉદાહરણમાં પતન દરમિયાન હવાનો અવરોધ ગણતરીમાં લેવામાં આવે ત્યારે પદાર્થ સપાટીને અથડાઈને સ્થિર થાય તે સ્થિતિમાં સ્પષ્ટ છે કે કુલ યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ થતું નથી. છતાં પણ ઊર્જા-સંરક્ષણનો વ્યાપક નિયમ લાગુ પડતો હોય છે. અહીં પદાર્થની પ્રારંભિક સ્થિતિઊર્જા, ઉષ્મા અને ધ્વનિ જેવી ઊર્જાનાં સ્વરૂપમાં રૂપાંતર પામે છે. (અહીં ધ્વનિઊર્જાનું શોષણ થયા બાદ તે ઉષ્માઊર્જામાં રૂપાંતર પામે છે.) આમ, તંત્ર (પથ્થર અને પરિસરથી બનેલું તંત્ર)ની કુલ ઊર્જા અચળ રહે છે.

કુદરતનાં બધાં જ પ્રભાવક્ષેત્રોમાં સૂક્ષ્મથી સ્થૂળ સુધી ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમનું પાલન થાય છે. પરમાણ્વિય, ન્યુક્લિયર અને મૂળભૂત કણોની પ્રક્રિયાઓનાં પૃથક્કરણમાં આ નિયમ નિયમિત રીતે લાગુ પાડી શકાય છે. તેનાથી વિપરીત દરેક ક્ષણે વિશ્વમાં પ્રચંડ ઘટનાઓ બનતી હોય છે. છતાંય વિશ્વ (સૌથી વધુ શક્ય તેવું આદર્શ રીતે અલગ કરેલું તંત્ર)ની કુલ ઊર્જા અચળ રહે છે તેમ માનવામાં આવે છે.

આઈન્સ્ટાઈને સાપેક્ષવાદનો સિદ્ધાંત આપ્યો તે પહેલાં, દ્રવ્યનો નાશ થઈ શકતો નથી તેમ મનાતું હોવાથી કુદરતના અન્ય એક મૂળભૂત નિયમોમાં દ્રવ્ય સંરક્ષણના નિયમનો સમાવેશ થયેલ હતો. આ નિયમ ઉપયોગમાં લેવાતા નિયમોમાં મહત્ત્વનો હતો અને આજે પણ છે. ઉદાહરણ તરીકે રાસાયણિક પ્રક્રિયાનાં વિશ્લેષણમાં આ નિયમનો ઉપયોગ આજે પણ કરવામાં આવે છે. રાસાયણિક પ્રક્રિયા એટલે મૂળભૂત રીતે અણુઓમાં રહેલા જુદા જુદા પરમાણુઓની પુનઃગોઠવણી. આવી પ્રક્રિયાઓમાં પ્રક્રિયક અણુઓની કુલ બંધનઊર્જા નીપજ અણુઓની બંધનઊર્જા કરતાં ઓછી હોય, તો પ્રક્રિયા દરમિયાનનો ઊર્જાનો તફાવત ઉષ્મા સ્વરૂપે ઉદ્ભવે છે અને તેને ઉષ્માક્ષેપક પ્રક્રિયા કહે છે. તેનાથી ઊલટું પણ સત્ય છે. ઉષ્માશોષક પ્રક્રિયામાં ઉષ્માનું શોષણ થાય છે. પ્રક્રિયામાં પરમાણુઓની પુનઃગોઠવણી થાય છે. પરંતુ પરમાણુઓનો નાશ થતો નથી. કોઈ પણ રાસાયણિક પ્રક્રિયામાં નીપજોનું કુલ દ્રવ્યમાન પ્રક્રિયકોનાં કુલ દ્રવ્યમાન જેટલું જ હોય છે તથા બંધનઊર્જામાં થતાં સૂક્ષ્મ ફેરફાર એટલા સૂક્ષ્મ હોય છે કે દ્રવ્યમાનમાં થતાં સૂક્ષ્મ ફેરફાર સ્વરૂપે માપી શકાતા નથી.

આઈન્સ્ટાઈનના સિદ્ધાંત મુજબ, દળ (m)ને સમતુલ્ય ઊર્જા (E)ને $E = mc^2$ સૂત્ર વડે આપવામાં આવે છે. જ્યાં (c) શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ છે.

ન્યુક્લિયર પ્રક્રિયાઓમાં દળ ઊર્જામાં રૂપાંતરિત થાય છે. (તેનાથી ઊલટું પણ થાય છે.) ન્યુક્લિયર પાવર જનરેટરોમાં, પરમાણુ વિસ્ફોટોમાં આ જ ઊર્જા મુક્ત થતી હોય છે.

સર સી. વી. રામન (Sir C. V. Raman) (1888-1970)

ચંદ્રશેખર વેંકટરામનનો જન્મ 7 નવેમ્બર, 1888માં થીરુવંનાઈક્કલમાં થયો હતો. તેઓએ તેમનું શાળાકીય શિક્ષણ 11 વર્ષની ઉંમરે પૂર્ણ કરી પ્રેસિડેન્સી કૉલેજ, ચેન્નાઈથી સ્નાતકની ઉપાધિ મેળવી હતી. પોતાનો અભ્યાસ પૂર્ણ કર્યા બાદ તેઓ ભારત સરકારના નાણાવિભાગમાં જોડાયા.

કોલકાતામાં રહેવાની સાથે સાથે સાંજના કલાકો ડૉ. મહેન્દ્રલાલ સરકાર દ્વારા સ્થાપિત ઈન્ડિયન ઍસોસિયેશન ઑફ કલ્ટિવેશન સાયન્સ (Indian Association of Cultivation Science)માં પોતાના રુચિકર ક્ષેત્રમાં કાર્ય કરવાનું શરૂ કર્યું. તેમનાં રુચિકર ક્ષેત્રમાં દોલનો, વાદ્યયંત્રોની વિવિધતા, અલ્ટ્રાસોનિક તરંગો, વિવર્તન વગેરે સામેલ હતાં.

વર્ષ 1917માં તેમની કોલકાતા યુનિવર્સિટીમાં પ્રોફેસર તરીકેની નિમણૂક થઈ. 1924માં રૉયલ સોસાયટી ઑફ લંડનના ફેલો (Fellow) તરીકે ચૂંટાઈ આવ્યા અને 1930માં તેમની રામન અસરની શોધ માટે ભૌતિકવિજ્ઞાનનું નૉબલ પ્રાઈઝ મળ્યું. રામન અસરમાં, માધ્યમના અણુઓ પ્રકાશીય ઊર્જા દ્વારા કંપનઊર્જા સ્તરો સુધી ઉત્તેજિત થાય છે ત્યારે તેમના દ્વારા થતાં પ્રકાશનાં પ્રકીર્ણનનો અભ્યાસ થાય છે. તેમનાં આ શોધકાર્યએ આવનારાં વર્ષોમાં સંશોધનકાર્યનો એક નવો માર્ગ ચીંધ્યો.

તેમને પોતાનાં જીવનનું અંતિમ વર્ષ પ્રથમ બૅંગ્લોર ખાતે ભારતીય વિજ્ઞાન સંસ્થાન અને તે પછી રામન અનુસંધાન સંસ્થાનમાં વિતાવ્યું. તેમનાં કાર્યએ યુવાપેઢીના વિદ્યાર્થીઓને ખૂબ જ પ્રોત્સાહિત કર્યા હતા.

ઊર્જા, અદિશ ભૌતિકરાશિ છે, પરંતુ બધી જ સંરક્ષિત ભૌતિકરાશિઓ અદિશ હોવી જરૂરી નથી. અલગ કરેલા તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અને કુલ કોણીય વેગમાન (બંને સદિશ રાશિઓ) સંરક્ષિત ભૌતિકરાશિઓ છે. આ નિયમો યંત્રશાસ્ત્રમાં ન્યૂટનના ગતિના નિયમો પરથી મેળવી શકાય છે. પરંતુ યંત્રશાસ્ત્ર સિવાય અન્ય ભૌતિક વિદ્યાશાખામાં પણ આ નિયમનું પાલન થાય છે. ન્યૂટનના નિયમનું પાલન ન થતું હોય તેવાં પ્રભાવક્ષેત્રો સહિત બધાં જ પ્રભાવક્ષેત્રોમાં જળવાતા સંરક્ષણના આ નિયમો કુદરતના મૂળભૂત નિયમો છે.

કુદરતના સંરક્ષણના નિયમોની સરળતા અને વ્યાપકતા ઉપરાંત તે વ્યાવહારિક રીતે પણ ઉપયોગી છે. જુદાં જુદાં કણો અને પ્રવર્તતા બળોનો સમાવેશ થતો હોય તેવા જટિલ પ્રશ્નોનો ઉકેલ ઘણી વખત ગતિશાસ્ત્ર દ્વારા આપણે મેળવી શકતા નથી. છતાં સંરક્ષણના નિયમો દ્વારા ઉપયોગી પરિણામો મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે બે વાહનોની અથડામણ દરમિયાન લાગતાં જટિલ બળોથી આપણે અજાણ હોઈએ છીએ. છતાં વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ જટિલતાને બાજુએ રાખીને આપણને એટલા સક્ષમ બનાવે છે કે, આવી અથડામણો વિશેનાં શક્ય પરિણામોનું અનુમાન લગાવી શકીએ છીએ અથવા નકારી શકીએ છીએ. ન્યુક્લિયર અને મૂળભૂત કણો સાથે સંકળાયેલ ઘટનાઓનાં પૃથક્કરણ માટે સંરક્ષણના નિયમો ઉપયોગી છે. ઊર્જા અને વેગમાન સંરક્ષણના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને 1931માં વુલ્ફગેંગ પાઉલીએ (1900-1958) β-ક્ષય દરમિયાન ઇલેક્ટ્રૉનના ઉત્સર્જન સાથે એક નવો કણ (જે હવે ન્યુટ્રિનો કહેવાય છે) પણ ઉત્સર્જિત થાય છે, તેવી સાચી આગાહી કરેલી હતી.

કુદરતની સંમિતિનો સંરક્ષણના નિયમો સાથે ગાઢ સંબંધ છે તેવું આપ સૌ મિત્રો ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં હવે પછીના ઉચ્ચ અભ્યાસમાં ભણશો. ઉદાહરણ તરીકે કુદરતના નિયમો સમય સાથે બદલાતા નથી તે એક મહત્ત્વનું અવલોકન છે ! આજે તમે પ્રયોગશાળામાં કોઈ એક પ્રયોગ કરો છો અને એક વર્ષ બાદ આજ પ્રયોગનું (તમામ પરિસ્થિતિ અગાઉની જેમ જ રાખીને) પુનરાવર્તન કરો તો બંને વખતે મળેલાં પરિણામો સમાન હોવા જ જોઈએ. એવું જણાય છે કે કુદરતમાં સમયમાં સ્થાનાંતર સંમિતિ એ ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમને સમતુલ્ય છે. તે જ રીતે અવકાશ સમાંગ છે, અને વિશ્વમાં કોઈ (આંતરિક રીતે) વિશિષ્ટ સ્થાન નથી. વધુ સ્પષ્ટ રીતે કહીએ તો કુદરતના નિયમો સમગ્ર વિશ્વમાં સમાન છે. (ધ્યાન રાખો : જુદી જુદી પરિસ્થિતિ અને જુદાં જુદાં સ્થળોને કારણે કોઈ ઘટનાઓ જુદી જુદી હોઈ શકે. દા.ત., ચંદ્ર પર ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય પૃથ્વી પરનાં ગુરુત્વપ્રવેગ કરતાં $\frac{1}{6}$ ગણું છે પરંતુ ચંદ્ર અને પૃથ્વી પર **ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ** સમાન છે. અવકાશમાં સ્થાનાંતરની સાપેક્ષે કુદરતના નિયમોની સંમિતિ રેખીય વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ આપે છે. આ જ રીતે અવકાશની સમદિગ્ધર્મિતા (Isotropy) (અવકાશમાં આંતરિક રીતે કોઈ વિશિષ્ટ દિશા ન હોવી)ને કારણે કોણીય વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ મળે* વીજભાર સંરક્ષણનો નિયમ અને મૂળભૂત કણોનાં લક્ષણો કેટલીક અમૂર્ત સંમિતિઓ સાથે સંકળાયેલ હોઈ શકે. કુદરતમાં પ્રવર્તતા મૂળભૂત બળોના આધુનિક સિદ્ધાંતોમાં અવકાશ, સમય અને અમૂર્ત સંદર્ભોની ભૂમિકા કેન્દ્રિય સ્થાને છે.

* *જુઓ પ્રકરણ 7.*

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં સંરક્ષણના નિયમો

ઊર્જા, વેગમાન, કોણીય વેગમાન અને વીજભાર વગેરેના સંરક્ષણને ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં સંરક્ષણના મૂળભૂત નિયમો માનવામાં આવે છે. વર્તમાન સમયમાં આ પ્રકારના ઘણા સંરક્ષણના નિયમો છે. ઉપર્યુક્ત ચાર સંરક્ષણના નિયમો ઉપરાંત અન્ય સંરક્ષણના નિયમો અંતર્ગત મોટે ભાગે ન્યુક્લિયસ અને કણ ભૌતિકવિજ્ઞાન સાથે સંકળાયેલ ભૌતિકરાશિઓનો વિચાર કરવામાં આવે છે. સ્પિન, સ્ટ્રેન્જનેસ, બેરિઓન સંખ્યા અને હાઇપરચાર્જ જેવી કેટલીક સંરક્ષિત ભૌતિકરાશિઓ છે. પરંતુ તેની ચિંતા તમારે કરવાની જરૂર નથી.

સંરક્ષણનો નિયમ એ અધિતર્ક છે. જે પ્રયોગો અને અવલોકનો પર આધારિત હોય છે. અત્રે એ યાદ રાખવું અગત્યનું છે કે, સંરક્ષણનો નિયમ સાબિત કરી શકાતો નથી. તેને પ્રયોગો દ્વારા ચકાસી શકાય છે અથવા ખોટો ઠેરવી શકાય છે. કોઈ એક પ્રયોગનું પરિણામ આ નિયમને અનુરૂપ મળે તો તે પ્રયોગ દ્વારા નિયમની ચકાસણી થઈ અથવા નિયમનું પ્રમાણ મળ્યું તેમ કહેવાય. તે નિયમની સાબિતી નથી આપતો. બીજી તરફ કોઈ એક પ્રયોગનાં પરિણામો નિયમની વિરુદ્ધ મળે તો તે નિયમને ખોટો ઠેરવવા માટે પર્યાપ્ત છે.

કોઈને પણ ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમની સાબિતી આપવા માટે કહેવું તે ખોટું છે. આ નિયમ સદીઓના આપણા અનુભવોનું પરિણામ છે તથા તેનું યંત્રશાસ્ત્ર, ઉષ્માગતિશાસ્ત્ર, વિદ્યુત-ચુંબકત્વ, પ્રકાશશાસ્ત્ર, પરમાણ્વીય અને ન્યૂક્લિયર ભૌતિકવિજ્ઞાન જેવા અન્ય પરમાણ્વીય અને ન્યુક્લિયર ભૌતિકવિજ્ઞાન જેવાં અન્ય ક્ષેત્રોના પ્રયોગોમાં તેનું પાલન થતું જણાયેલ છે.

કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ એવું માને કે ગુરુત્વક્ષેત્રમાં મુક્ત પતન પામતા પદાર્થની કોઈ એક સ્થાને ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો અચળ રહે છે, તે યાંત્રિકઊર્જાનાં સંરક્ષણની સાબિતી છે. પરંતુ ઉપર જણાવ્યા મુજબ નિયમની ચકાસણી જ છે. તેની સાબિતી નથી.

સારાંશ

1. કુદરતના મૂળભૂત નિયમોનો અભ્યાસ તથા પ્રાકૃતિક ઘટનાઓમાં તેની અભિવ્યક્તિ કરતું વિજ્ઞાન એટલે ભૌતિકવિજ્ઞાન. ભૌતિકવિજ્ઞાનના પાયાના નિયમો સાર્વત્રિક છે અને જુદા જુદા સંદર્ભો અને પરિસ્થિતિઓમાં તેને લાગુ પાડી શકાય છે.
2. ભૌતિકવિજ્ઞાનનો વ્યાપ ખૂબ જ વિશાળ છે. જે ભૌતિકરાશિઓનાં મૂલ્યોની ખૂબ જ મોટી અવધિને આવરી લે છે.
3. ભૌતિકવિજ્ઞાન અને ટેક્નોલૉજી એકબીજા સાથે સંબંધિત છે. ઘણી વાર ટેક્નોલૉજીને લીધે નવું ભૌતિકવિજ્ઞાન અને બીજી કેટલીક વાર ભૌતિકવિજ્ઞાનને લીધે નવી ટેક્નોલૉજી ઉદ્ભવે છે. બંને સમાજ પર સીધી અસર કરે છે.
4. કુદરતમાં પ્રવર્તતા મુખ્ય ચાર બળો છે જે જગતની સ્થૂળ અને સૂક્ષ્મ ઘટનાઓને નિયંત્રિત કરે છે. આ ચાર બળો, ગુરુત્વાકર્ષણ બળ, વિદ્યુતચુંબકીય બળ, પ્રબળ ન્યુક્લિયર બળ અને નિર્બળ ન્યુક્લિયર બળ કુદરતમાં વિવિધ બળો/પ્રભાવક્ષેત્રો, એકીકીકરણ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં શોધના મુખ્ય મુદ્દા છે.
5. કોઈ પણ પ્રક્રિયાઓ દરમિયાન બદલાતી ન હોય (અચળ રહેતી હોય) તેવી ભૌતિકરાશિઓને સંરક્ષિત રાશિઓ કહે છે. કુદરતના અમુક સંરક્ષણના નિયમોમાં દ્રવ્યમાન ઊર્જા, રેખીય વેગમાન, કોણીય વેગમાન, વીજભાર અને પેરિટી (Parity) વગેરેના સંરક્ષણના નિયમોનો સમાવેશ થાય છે. કેટલાક સંરક્ષણનાં નિયમો એક મૂળભૂત બળ માટે સાચા હોય છે પણ બીજા માટે નહિ.
6. કુદરતની સંમિતિઓ સાથે સંરક્ષણના નિયમોનો ગાઢ સંબંધ છે. કુદરતમાં પ્રવર્તતા મૂળભૂત બળોના આધુનિક સિદ્ધાંતોમાં અવકાશ અને સમય સંમિતિઓ તથા બીજા પ્રકારની સંમિતિઓની ભૂમિકા કેન્દ્રસ્થાને છે.

સ્વાધ્યાય

વિદ્યાર્થીઓ માટે નોંધ

અહીં આપવામાં આવેલ સ્વાધ્યાયનો મુખ્ય ઉદ્દેશ વિજ્ઞાન, ટેક્નોલૉજી અને સમાજ સાથે સંકળાયેલ સમસ્યાઓથી આપ સૌને માહિતગાર કરવાનો તથા તમે તે સમસ્યાઓ અંગે વિચારણા કરી આપનાં મંતવ્યો સ્પષ્ટ રીતે રજૂ કરી શકો તે માટેનો છે. એવું પણ બની શકે કે, સ્વાધ્યાયમાં આપેલ પ્રશ્નોના વસ્તુલક્ષી ઉત્તર સુસ્પષ્ટ ન પણ હોય.

શિક્ષકમિત્રો માટે નોંધ

અહીં આપેલ પ્રશ્નો ઔપચારિક પરીક્ષા માટે નથી.

1.1 આજ સુધીમાં મહાન વૈજ્ઞાનિકો પૈકીના એક વૈજ્ઞાનિક આલ્બર્ટ આઇન્સ્ટાઇન દ્વારા કુદરતને સંબંધિત વિજ્ઞાનનાં કેટલાંક ગહન કથનો આપવામાં આવેલાં છે. આઇન્સ્ટાઇનના મત મુજબ 'વિશ્વની ન સમજી શકાય તેવી (અગમ્ય) બાબતો તે છે કે તે સમજી શકાય તેવી છે.' આ કથન માટે આપના વિચારો વ્યક્ત કરો.

1.2 'ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં દરેક મહાન સિદ્ધાંત, સર્વ સંમિતિ તરીકે શરૂ થાય છે અને માન્યતા તરીકે પૂર્ણ થાય છે.' આ કટાક્ષપૂર્ણ નોંધના અનુસંધાને કેટલાંક ઐતિહાસિક ઉદાહરણો જણાવો.

1.3 'રાજનીતિ શક્યતાઓની કળા છે.' તે જ રીતે 'વિજ્ઞાન પ્રશ્નોનું નિરાકરણ મેળવવાની કળા છે.' વિજ્ઞાનની પ્રકૃતિ અને વ્યાવહારિકતા માટેની આ સુંદર કહેવતને સમજાવો.

1.4 ખૂબ ઝડપથી ફેલાવો થતાં વિજ્ઞાન અને ટેક્નોલૉજીમાં ભારત પાસે ખૂબ જ વિશાળ આધાર છે. છતાં ભારતને વિજ્ઞાનક્ષેત્રમાં વિશ્વનેતા બનવાની તેની ક્ષમતાને પુરવાર કરવા ઘણી પ્રગતિ કરવાની જરૂર છે. ભારતની આવી પ્રગતિને અડચણરૂપ હોય તેવા તમારા ધ્યાનમાં રહેલાં અગત્યનાં પરિબળો જણાવો.

1.5 કોઈ પણ ભૌતિક વૈજ્ઞાનિકે હજુ સુધી ઇલેક્ટ્રૉનને જોયો નથી છતાં બધા જ વૈજ્ઞાનિકો ઇલેક્ટ્રૉનનું અસ્તિત્વ છે તેમ સ્વીકારે છે. કોઈ બુદ્ધિશાળી પરંતુ અંધ વિશ્વાસુ વ્યક્તિ આ જ બાબતને 'ભૂતનું અસ્તિત્વ છે. પરંતુ કોઈએ તેને જોયું નથી.' તેવા તર્ક સાથે સરખાવે છે. તો આ વ્યક્તિની તર્કસંગત વાતને આપ કેવી રીતે ખંડિત કરશો ?

1.6 જાપાનમાં એક વિશિષ્ટ સમુદ્રીય તટ વિસ્તારમાં મળી આવતાં કરચલાઓની કવચ પૌરાણિક સામુરાઈ જાતના ચહેરાને મળતી આવે છે. આ તથ્યસભર અવલોકન માટે બે સ્પષ્ટતા કરેલ છે. આ બે પૈકી કઈ સ્પષ્ટતા વૈજ્ઞાનિક રીતે તમને સ્પષ્ટ લાગે છે ?

(a) ઘણી સદીઓ પહેલાં એક ભયાનક સમુદ્રીય અકસ્માતમાં એક યુવાન સામુરાઈ ડૂબી ગયો હતો. તેની બહાદૂરીને શ્રદ્ધાંજલિ આપવા કુદરતે ગૂઢ રીતે તેના ચહેરાને કરચલાનાં કવચ પર અંકિત કરીને આ ક્ષેત્રમાં તેને અમર બનાવ્યો છે.

(b) આ સમુદ્રીય અકસ્માત બાદ આ વિસ્તારના માછીમારો તેમના મૃતક નેતાના સન્માનમાં સદ્ભાવના દર્શાવવા માટે, સમુરાઈના ચહેરાની મળતી આવતી કરચલાની કવચો પાછી સમુદ્રમાં ફેંકી દેતા હતા. પરિણામે વિશેષ પ્રતિકૃતિ ધરાવતાં આ કવચો લાંબા સમય સુધી અસ્તિત્વ ધરાવતી રહી અને સમયાંતરે આ કૃતિના જનીનીક્ (Genetically) પ્રસાર થયો. આ સ્પષ્ટીકરણ કૃત્રિમ પસંદગી દ્વારા ઉત્ક્રાંતિનું એક ઉદાહરણ છે.

[**નોંધ** : આ રોમાંચિત ઉદાહરણ કાર્લ-સાગનના પુસ્તક 'The Cosmos'માંથી લીધેલ છે. આ ઉદાહરણ તે વાત સમજાવે છે કે, વિચિત્ર અને ન સ્વીકારી શકાય તેવું આ તથ્ય પ્રથમ દૃષ્ટિએ અલૌકિક લાગે છે. પરંતુ તે વાસ્તવમાં આ તથ્ય સરળ વૈજ્ઞાનિક સમજૂતી ધરાવે છે. આ જ રીતે આવા પ્રકારનાં બીજાં ઉદાહરણો માટે આપ વિચારી શકો છો.]

1.7 બે શતાબ્દીથી વધુ પૂર્વે ઇંગ્લૅન્ડ અને પશ્ચિમ યુરોપમાં થયેલી ઔદ્યોગિક ક્રાંતિ જેનું કારણ કેટલીક વિજ્ઞાન અને ટેક્નોલૉજીની પ્રગતિ હતી. ટેક્નોલૉજીની આવી પ્રગતિઓ હતી.

1.8 ઘણી વખત એમ કહેવામાં આવે છે કે, વિશ્વ બીજી ઐતિહાસિક ક્રાંતિનું સાક્ષી બની રહ્યું છે, જે સમાજમાં પ્રથમ ઔદ્યોગિક ક્રાંતિની માફક ધરમૂળથી પરિવર્તન લાવશે. વિજ્ઞાન અને ટેક્નોલૉજીના આવાં મુખ્ય સમકાલિન ક્ષેત્રોની યાદી તૈયાર કરો. જે બીજી ઔદ્યોગિક ક્રાંતિ માટે જવાબદાર હોય.

1.9 ''બાવીસમી સદીમાં વિજ્ઞાન અને ટેક્નોલૉજી'' આ વિષય પર કાલ્પનિક અટકળોને આધારે 1000 શબ્દોમાં નિબંધ લખો.

1.10 ''વૈજ્ઞાનિક વ્યવહાર પર તમારો નૈતિક દૃષ્ટિકોણ રચવાનો પ્રયત્ન કરો.'' કલ્પના કરો કે સંજોગવશાત્ તમે એક એવું સંશોધન કરી રહ્યા છો કે જે શૈક્ષણિક દૃષ્ટિરૂપે રસપ્રદ છે. પરંતુ તેનાં પરિણામો નિશ્ચિતરૂપે સમાજ માટે ભયંકર નુકસાનકારક છે. આવી દુવિધા નિવારણ કરવા આપ શું કરશો ?

1.11 વિજ્ઞાનનો ઉપયોગ બીજા કોઈ પણ જ્ઞાનની માફક સારો કે ખરાબ થઈ શકે છે. જેનો આધાર ઉપયોગ કરનાર વ્યક્તિ ઉપર છે. વિજ્ઞાનનાં કેટલાંક પ્રયોજનો નીચે આપેલ છે. આ પ્રયોજનો પૈકી કયા પ્રયોજનનો ઉપયોગ સારો છે, ખરાબ છે કે વર્ગીકૃત થઈ શકે તેમ નથી. તે વિશે તમારો દૃષ્ટિકોણ સ્પષ્ટ કરો.

(a) સામાન્ય જનતાને ઑરી (Small Pox)નું રસીકરણ કરી તેના પર નિયંત્રણ મેળવવું અને આ રોગને સમાજમાંથી નાબૂદ કરવો. (જે ભારતમાંથી સફળતાપૂર્વક કરવામાં આવેલ છે.)

(b) નિરક્ષરતાની નાબૂદી અને સમાચાર તથા વિચારોના દૂર-સંચારણ માટે ટેલિવિઝન

(c) બાળકના જન્મ પહેલાં તેનું જાતિ-પરીક્ષણ કરવું

(d) કાર્યક્ષમતા વધારવા માટે કમ્પ્યૂટરનો ઉપયોગ

(e) પૃથ્વીની આસપાસ કૃત્રિમ ઉપગ્રહોને કક્ષામાં સ્થાપિત કરવાં

(f) ન્યુક્લિયર હથિયારોનો વિકાસ કરવો

(g) રાસાયણિક તથા જૈવિક યુદ્ધ માટે નવી અને શક્તિશાળી પ્રવિધિઓનો વિકાસ કરવો

(h) પીવાલાયક પાણીનું શુદ્ધીકરણ

(i) પ્લાસ્ટિક સર્જરી

(j) ક્લોનિંગ

1.12 ભારતમાં ગણિત, ખગોળીય, ભાષાવિજ્ઞાન, તર્ક અને નૈતિકતામાં મહાન છે તેવા વિદ્વાનોની અતૂટ પરંપરા રહી છે, છતાં તેની સાથે સાથે આપણા સમાજમાં ઘણો અંધવિશ્વાસ, રૂઢિચુસ્ત દૃષ્ટિકોણ અને પરંપરાઓ વિકસેલ છે. દુર્ભાગ્યવશ તે આજે પણ શિક્ષિતોમાં વ્યાપ્ત છે. આવા દૃષ્ટિકોણો અને પરંપરાઓનો સામનો કરવા માટેની રણનીતિ ઘડવા તમે વિજ્ઞાનના જ્ઞાનનો કેવી રીતે ઉપયોગ કરશો ?

1.13 ''ભારતમાં કાયદો સ્ત્રીઓને સમાન દરજ્જો આપતો હોવા છતાં ઘણા લોકો સ્ત્રીઓની સ્વાભાવિક પ્રકૃતિ, ક્ષમતા અને બુદ્ધિમતા માટે અવૈજ્ઞાનિક વિચારો રાખે છે તથા તેમને વ્યવહારમાં ગૌણ મહત્ત્વ અને ભૂમિકા પ્રદાન કરે છે.'' વૈજ્ઞાનિક તર્કો તથા અન્ય ક્ષેત્રોમાં મહત્ત્વનું યોગદાન પ્રદાન કરેલ મહાન સ્ત્રીઓનાં ઉદાહરણો આપી સ્ત્રીઓને સમાન તક આપવામાં આવે, તો તેઓ પુરુષોને સમકક્ષ થઈ શકે છે. તેવું તમે પોતે અને અન્યોને સમજાવી ઉપર્યુક્ત વિચારનું ખંડન કરો.

1.14 મહાન બ્રિટિશ વૈજ્ઞાનિક પી. એ. એમ. ડિરાકના મંતવ્ય ''ભૌતિકવિજ્ઞાનનાં સમીકરણમાં તેના પ્રયોગ સાથે સહમત હોવા કરતાં તેમનામાં સુંદરતા હોવી વધુ મહત્ત્વની છે.'' ડિરાકના આ મંતવ્યની સમીક્ષા કરો. આ પુસ્તકમાં આવાં પ્રયોગો અને સમીકરણો શોધો જે તમને સુંદર લાગે.

1.15 ઉપર્યુક્ત મંતવ્ય વિવાદાસ્પદ હોઈ શકે પરંતુ મોટા ભાગના વૈજ્ઞાનિકોનો સ્પષ્ટ મત છે કે, ''ભૌતિકવિજ્ઞાનના મહાન નિયમો એકદમ સરળ અને સુંદર છે.'' ડિરાક ઉપરાંત ઘણા સુપ્રસિદ્ધ ભૌતિક વૈજ્ઞાનિકોએ પણ આવી લાગણી વ્યક્ત કરેલ છે. જેમનાં નામ છે : આઇન્સ્ટાઇન, બ્હોર, હાઇઝનબર્ગ, ચન્દ્રશેખર, ફાઇનમૅન. આપ સૌને વિનંતી છે કે, ભૌતિકશાસ્ત્રના આવા મહાન વૈજ્ઞાનિકો દ્વારા લખાયેલ પુસ્તકો અને તેના લેખો શોધવાનો પ્રયત્ન કરો. (આ પુસ્તકના અંતમાં આવેલી ગ્રંથસૂચિ જુઓ.) આ લેખો અને પુસ્તકો ખરેખર પ્રેરણાદાયી છે.

1.16 વિજ્ઞાનનાં પાઠ્યપુસ્તકો તમારા મનમાં એવી છાપ ઊભી કરે છે કે વિજ્ઞાન ભણવું કંટાળાજનક અને અત્યંત અઘરું છે તથા વૈજ્ઞાનિકો ભુલકણા, અંર્તમુખી, ક્યારેય હસતા ન હોય અને દાંત કચકચાવતી વ્યક્તિ હોય છે, વિજ્ઞાન અને વૈજ્ઞાનિકો વિશેની આવી છાપ આધારહીન છે. અન્ય માનવ સમુદાયોની માફક વૈજ્ઞાનિકો પણ રમૂજી સ્વભાવના હોય છે. ઘણા વૈજ્ઞાનિકો તેમનાં વૈજ્ઞાનિક કાર્ય માટે ગંભીર હોવા છતાં પોતાનું જીવન રમૂજી સ્વભાવ અને સાહસિક કાર્યો કરીને વિતાવ્યું છે. ગેમો (Gamow) અને ફાઇનમૅન (Feynman) આવી જ પ્રકૃતિ ધરાવતા બે ભૌતિક વૈજ્ઞાનિકો છે. ગ્રંથસૂચિમાં તેમનાં દ્વારા રચાયેલ પુસ્તકોનાં નામ આપેલ છે, જે વાંચીને આપને આનંદ મળશે.

પ્રકરણ 2

એકમ અને માપન (UNITS AND MEASUREMENT)

2.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

કોઈ પણ ભૌતિકરાશિનાં માપન એક નિશ્ચિત, આધારભૂત, યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ આંતરરાષ્ટ્રીય માન્યતા પ્રાપ્ત પ્રમાણભૂત માપ સાથેની સરખામણી કરવામાં આવે છે. ભૌતિકરાશિનાં આ પ્રમાણિત માપને **એકમ** કહે છે. ભૌતિકરાશિનાં માપનોનાં પરિણામને ચોક્કસ સંખ્યા (આંકડાકીય માપ)ની સાથે એકમ લખીને રજૂ કરવામાં આવે છે. જોકે, ભૌતિકરાશિઓની સંખ્યા ખૂબ જ વધારે છે. છતાં તેમને રજૂ કરવા માટે મર્યાદિત સંખ્યામાં એકમોની જરૂર પડે છે, કારણ કે ભૌતિકરાશિઓ એકબીજા સાથે આંતર સંબંધો ધરાવે છે. મૂળભૂત ભૌતિકરાશિ કે પાયાની ભૌતિકરાશિઓના એકમોને **મૂળભૂત એકમો** કે **પાયાના એકમો** કહે છે. આ મૂળભૂત એકમોનાં પદમાં બાકીની બધી જ ભૌતિકરાશિઓના એકમો દર્શાવી શકાય છે. આ રીતે મેળવેલ ભૌતિકરાશિઓના એકમોને **સાધિત એકમો** કહે છે. મૂળભૂત એકમો અને સાધિત એકમોના સમૂહને **એકમ પદ્ધતિ** કહે છે.

2.2 એકમોની આંતરરાષ્ટ્રીય પદ્ધતિ (THE INTERNATIONAL SYSTEM OF UNITS)

જુદા જુદા દેશોના વૈજ્ઞાનિકો વર્ષો સુધી માપન માટે જુદી જુદી એકમ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરતાં હતા. થોડાં વર્ષો પૂર્વે આવી ત્રણ એકમ પદ્ધતિઓ, CGS એકમ પદ્ધતિ, FPS (બ્રિટિશ) એકમ પદ્ધતિ અને MKS એકમ પદ્ધતિ વ્યાપકરૂપે ઉપયોગમાં લેવાતી હતી.

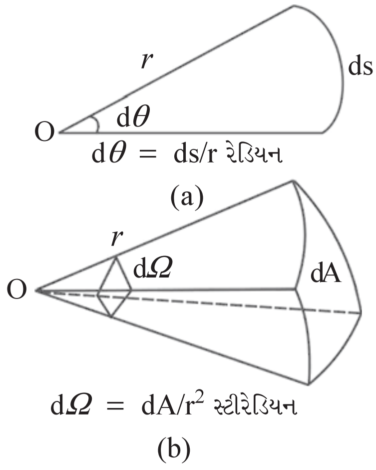
આ ત્રણેય એકમ પદ્ધતિમાં લંબાઈ, દળ અને સમયના મૂળભૂત એકમો નીચે મુજબ છે :

- CGS એકમ પદ્ધતિમાં સેન્ટિમીટર, ગ્રામ, સેકન્ડ
- FPS એકમ પદ્ધતિમાં ફૂટ, પાઉન્ડ, સેકન્ડ
- MKS એકમ પદ્ધતિમાં મીટર, કિલોગ્રામ, સેકન્ડ હતા.

હાલમાં ''સિસ્ટીમ ઈન્ટરનેશનલ'' (Systeme Internationale d' Unites) (ફ્રેન્ચ ભાષામાં આંતરરાષ્ટ્રીય એકમ પદ્ધતિ) આંતરરાષ્ટ્રીય સ્તરે સ્વીકારાયેલ એકમ પદ્ધતિ છે. આ એકમ પદ્ધતિને સંકેતમાં SI વડે દર્શાવાય છે. સંકેત અને એકમોના સંકેતાક્ષરો સાથે SI ને 1971માં તોલમાપ સંસ્થાની સામાન્ય સભામાં તૈયાર કરવામાં આવી અને તેને વૈજ્ઞાનિક, ટેક્નિકલ, ઔદ્યોગિક અને વ્યાપારક્ષેત્રે આંતરરાષ્ટ્રીય સ્તરે ઉપયોગ કરવાની ભલામણ કરી. SI એકમોમાં દશક પદ્ધતિનો ઉપયોગ થતો હોવાથી આ પદ્ધતિ અંતર્ગત એકમોનાં રૂપાંતરણો ખૂબ સરળ અને

સુવિધાભર્યાં હોય છે. આપણે આ પુસ્તકમાં SI એકમોનો જ ઉપયોગ કરીશું.

SI પદ્ધતિમાં સાત મૂળભૂત એકમોનો સમાવેશ થાય છે જેને કોષ્ટક 2.1માં દર્શાવેલ છે. આ સાત મૂળભૂત એકમો ઉપરાંત બીજા બે પૂરક એકમો આપવામાં આવ્યા. જેને નીચે જણાવેલી ભૌતિકરાશિઓ માટે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે : (a) સમતલકોણ ($d\theta$) : આકૃતિ 2.1(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ચાપની લંબાઈ (ds) અને તેની ત્રિજ્યા (r)ના ગુણોત્તરને સમતલકોણ ($d\theta$) કહે છે. (b) ઘનકોણ ($d\Omega$) : આકૃતિ 2.1(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ ગોળાના પૃષ્ઠ પરનાં ક્ષેત્રફળ (dA)એ ગોળાનાં કેન્દ્ર સાથે આંતરેલ કોણ અને તેની ત્રિજ્યા (r)ના વર્ગના ગુણોત્તરને ઘનકોણ ($d\Omega$) કહે છે. સમતલકોણનો એકમ રેડિયન અને તેનો સંકેત rad તથા ઘનકોણનો એકમ સ્ટીરેડિયન છે જેનો સંકેત sr છે. બંને ભૌતિકરાશિઓ પરિમાણરહિત છે.



આકૃતિ 2.1(a) સમતલીય કોણ ($d\theta$)
(b) ઘનકોણ ($d\Omega$)નું ચિત્રાત્મક નિરૂપણ

કોષ્ટક 2.1 SI ભૌતિકરાશિ અને એકમો*

મૂળભૂત ભૌતિકરાશિ	SI એકમો		
	એકમનું નામ	સંજ્ઞા	વ્યાખ્યા
લંબાઈ	મીટર	m	શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશ 1/299, 792, 458 સેકન્ડમાં કાપેલા અંતરને 1 મીટર કહે છે. (1983)
દળ	કિલોગ્રામ	kg	ફ્રાંસમાં પેરિસ પાસે સેવ્રે ખાતેના International Bureau of Weights and Measuresમાં રાખેલ પ્લેટિનમ-ઈરિડિયમ મિશ્રધાતુમાંથી બનાવેલ નળાકાર નમૂનાના દળને 1 kg કહે છે. (1889)
સમય	સેકન્ડ	s	સિઝિયમ-133 પરમાણુની ધરાસ્થિતિના બે અતિસૂક્ષ્મ ઊર્જાના સ્તરો વચ્ચેની ઈલેક્ટ્રૉનની સંક્રાંતિને અનુલક્ષીને ઉત્સર્જિત વિકિરણનાં 9, 192, 631, 770 દોલનો માટેના સમયગાળાને એક સેકન્ડ કહે છે.
વિદ્યુતપ્રવાહ	ઍમ્પિયર	A	અનંત લંબાઈ ધરાવતા તેમજ અવગણ્ય આડછેદવાળા બે સુરેખ પરસ્પર સમાંતર તારને શૂન્યાવકાશમાં એકબીજાથી 1m અંતરે રાખી દરેક તારમાંથી સમાન વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરતાં તેમની 1m લંબાઈ દીઠ તેમની વચ્ચે પરસ્પર 2×10^{-7}N બળ લાગે, તો દરેક તારમાં વહેતા વિદ્યુતપ્રવાહનાં મૂલ્યને એક ઍમ્પિયર કહે છે. (1948)
થરમૉડાયનેમિક તાપમાન	કેલ્વિન	K	પાણીના ટ્રીપલ પૉઈન્ટના તાપમાનના 1/273.16મા ભાગને થરમૉડાયનેમિક માપક્રમ પર એક કેલ્વિન કહેવામાં આવે છે. (1967)
દ્રવ્યનો જથ્થો	મોલ	mol	0.012 kg દળ ધરાવતાં કાર્બન (C^{12})માં જેટલી સંખ્યાના પરમાણુ છે, તેટલા જ ઘટકકણ ધરાવતાં દ્રવ્યના જથ્થાને મોલ કહે છે. (1971)
જ્યોતિ તીવ્રતા (દિપ્તી તીવ્રતા)	કેન્ડેલા	cd	આપેલ દિશામાં 540×10^{12} Hz આવૃત્તિ ધરાવતા વિકિરણનું ઉત્સર્જન કરતાં અને તે જ દિશામાં 1/683 W/sr જેટલી વિકિરણ તીવ્રતા ધરાવતા ઉદ્‌ગમની દિપ્તી તીવ્રતાને કેન્ડેલા કહે છે. (1979)

* *કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ મૂલ્યો યાદ રાખવાની કે પરીક્ષામાં પૂછવા નહિ. અહીં તેમનાં મૂલ્યો માપનની ચોકસાઈ સૂચવવા માટે જ આપવામાં આવેલ છે. ટેક્નોલૉજીના વિકાસ સાથે વધુ સચોટતા સાથેનું માપન કરવા માટે માપનની રીતમાં સુધારા થયા છે. આ પ્રગતિ સાથે તાલમેલ મેળવવા માટે મૂળભૂત એકમોની વ્યાખ્યાઓમાં સુધારા કરવામાં આવ્યા છે.*

કોષ્ટક 2.2 (SI એકમ ઉપરાંત) સામાન્ય ઉપયોગ માટેના અન્ય એકમો

નામ	સંકેત	SI એકમમાં મૂલ્ય
મિનિટ	min	60 s
કલાક	h	60 min = 3600 s
દિવસ	d	24h = 86400 s
વર્ષ	y	365.25 d = 3.156×10^7 s
ડિગ્રી	^{o}	$1^o = (\pi/180)$ rad
લિટર	L	1 $dm^3 = 10^{-3}$ m^3
ટન	t	10^3 kg
કૅરેટ	c	200 mg
બાર	bar	0.1 MPa = 10^5Pa
ક્યુરિ	Ci	3.7×10^{10} s^{-1}
રૉન્ટજન	R	2.58×10^{-4} C/kg
ક્વિન્ટલ	q	100 kg
બાર્ન	b	100 $fm^2 = 10^{-28}$ m^2
આરે	a	1 $dam^2 = 10^2$ m^2
હેક્ટર	ha	1 $hm^2 = 10^4$ m^2
પ્રમાણિત વાતાવરણ દબાણ	atm	101325 Pa = 1.013×10^5 Pa

મોલ એકમ સાથે કયા મૂળભૂત કણોની વાત કરીએ છીએ તે સ્પષ્ટ કરવું જોઈએ. આ કણો તરીકે પરમાણુઓ, અણુઓ, આયનો, ઇલેક્ટ્રૉન અથવા આવા મૂળભૂત કણોનો સમૂહ હોઈ શકે.

આપણે એવી જ ભૌતિકરાશિના એકમોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ જેના એકમો SIના સાત મૂળભૂત (પરિશિષ્ટ A6) એકમો દ્વારા મેળવી શકાય છે. (પરિશિષ્ટ A 6.1)માં કેટલાક સાધિત એકમો SI પદ્ધતિના સાત મૂળભૂત એકમો સ્વરૂપે દર્શાવેલ છે. કેટલાક (પરિશિષ્ટ A 6.2) સાધિત એકમોને વિશિષ્ટ નામ આપવામાં આવેલ છે અને કેટલાક સાધિત એકમો વિશિષ્ટ નામ અને SI પદ્ધતિના મૂળ સાત એકમોનાં સંયોજનથી બનાવેલ છે. (પરિશિષ્ટ A 6.3) તમારા સંદર્ભ માટે આ બધા જ એકમો પરિશિષ્ટ A 6.2 અને A 6.3માં દર્શાવેલ છે. સામાન્ય રીતે ઉપયોગમાં લેવાતા એકમો કોષ્ટક 2.2માં દર્શાવેલ છે.

SI એકમોનાં ગુણાકાર અને ભાગાકારને પૂર્વગો અને તેના એકમ સ્વરૂપે પરિશિષ્ટ A2માં દર્શાવેલ છે. ભૌતિકરાશિઓ, રાસાયણિક તત્ત્વો અને ન્યુક્લિઇડ્સની સંજ્ઞાઓ માટેનાં સામાન્ય નિર્દેશો પરિશિષ્ટ (A7)માં તથા તમારા માર્ગદર્શન અને સંદર્ભ માટે SI એકમો તથા અન્ય કેટલાક એકમો સંબંધિત નિર્દેશો પરિશિષ્ટ (A8)માં આપેલા છે.

2.3 લંબાઈનું માપન (MEASUREMENT OF LENGTH)

લંબાઈનાં માપનની કેટલીક પ્રત્યક્ષ રીતોથી તમે સૌ પરિચિત છો. ઉદાહરણ તરીકે, 10^{-3} m થી 10^2 m ના ક્રમની લંબાઈના માપન માટે મીટરપટ્ટી વાપરવામાં આવે છે. (10^{-4} mના ક્રમની લંબાઈનું ચોકસાઈપૂર્વક માપન કરવા વર્નિયર કેલિપર્સનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.) માઇક્રોમીટર સ્ક્રૂગેજ, સ્ફેરોમીટરનો ઉપયોગ 10^{-5} m જેટલી નાની લંબાઈના માપન માટે થાય છે. આ માપક્રમના વિસ્તારથી મોટા અંતરના માપન માટે કેટલીક વિશિષ્ટ પરોક્ષ રીતોનો ઉપયોગ કરવો પડે છે.

2.3.1 મોટા અંતરનું માપન (Measurement of Large Distance)

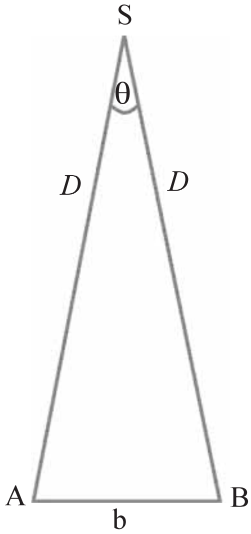
2.3.1 મોટા અંતરનું માપન (Measurement of Large Distance) : ખૂબ જ મોટા અંતરનું માપન જેમકે ગ્રહ અથવા તારાનું પૃથ્વીથી અંતર સીધેસીધું મીટરપટ્ટીથી આપણે માપી શકીએ નહિ. આવા કિસ્સાઓમાં **દૃષ્ટિસ્થાનભેદની રીત (Parallax Method)** મહત્ત્વની છે.

જ્યારે તમે એક પેન્સિલને તમારી આંખ સામે રાખી તેની પૃષ્ઠભૂમિ (ધારો કે દીવાલ) પર કોઈ એક બિંદુની સાપેક્ષે પેન્સિલને ડાબી આંખ A વડે (જમણી આંખ બંધ રાખીને) જુઓ અને ત્યાર બાદ તે જ બિંદુની સાપેક્ષે જમણી આંખ B વડે (ડાબી આંખ બંધ રાખીને) જુઓ ત્યારે તમે નોંધી શકો છો કે દીવાલ પરનાં બિંદુની સાપેક્ષે બંને કિસ્સામાં પેન્સિલનું સ્થાન બદલાય છે. આ બાબતને **દૃષ્ટિસ્થાનભેદ** કહે છે. બે અવલોકન સ્થાન (A અને B) વચ્ચેનાં અંતરને **બેઝિઝ (પાયો) (Basis)** કહે છે. આ ઉદાહરણમાં basis બે આંખો વચ્ચેનું અંતર છે.

દૃષ્ટિસ્થાનભેદની રીતથી પૃથ્વીથી ઘણે દૂર આવેલ ગ્રહ Sનું અંતર D નક્કી કરવા માટે પૃથ્વી પરનાં બે જુદાં જુદાં અવલોકન સ્થાનો (વેધશાળા) A અને B પરથી એક જ સમયે ગ્રહ Sનું અવલોકન કરવામાં આવે છે (આકૃતિ 2.2). A અને B વચ્ચેનું અંતર AB = b છે. બંને સ્થાનોની અવલોકન દિશાઓએ ગ્રહ સાથે આંતરેલ ખૂણો θ માપવામાં આવે છે. આકૃતિ 2.2માં $\angle$ASBને θ વડે દર્શાવેલ છે, જેને **દૃષ્ટિસ્થાનભેદ કોણ** કહે છે. ગ્રહ ઘણા જ દૂર હોવાથી, $\frac{b}{D} << 1$ અને તેથી ખૂણો θ ખૂબ જ નાનો હોય છે. આવી સ્થિતિમાં આપણે ABને, S કેન્દ્ર અને D ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના b લંબાઈની ચાપ તરીકે લઈ શકીએ.

∴ ત્રિજ્યા AS = BS, AB = b = Dθ
જ્યાં, θ રેડિયનમાં છે.

$$\therefore D = \frac{b}{\theta} \quad 2.1$$



આકૃતિ 2.2 દૃષ્ટિસ્થાનભેદની રીત

અંતર Dનું મૂલ્ય નક્કી થયા બાદ આ જ પદ્ધતિથી ગ્રહનું પરિમાણ અથવા કોણીય વ્યાસ (Angular Diameter) નક્કી કરી શકીએ. જો કોઈ ગ્રહનો વ્યાસ d અને કોણીય વ્યાસ α હોય (ગ્રહનાં વ્યાસાંત બિંદુઓ વડે પૃથ્વી પરના કોઈ એક અવલોકન સ્થળે આંતરાતો ખૂણો) તો

$$\alpha = d/D \quad 2.2$$

પૃથ્વી પરનાં તે જ અવલોકનો સ્થળેથી કોણ α નું માપન કરી શકાય છે. ગ્રહનાં વ્યાસાંત બિંદુઓનું અવલોકન ટેલિસ્કોપ વડે પૃથ્વી પરથી કરતાં મળતી બે અવલોકન-દિશા વચ્ચેનો ખૂણો એટલે કોણીય વ્યાસ α. ગ્રહ અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર D જાણીતું હોવાથી સમીકરણ 2.2 વડે વ્યાસ dનું મૂલ્ય નક્કી કરી શકાય છે.

> **ઉદાહરણ 2.1** નીચે આપેલ ખૂણાનાં મૂલ્યોને રેડિયન માપક્રમમાં શોધો : (a) 1° (ડિગ્રી) (b) $1'$ (minute of arc અથવા arcmin) (c) $1''$ (second of arc અથવા arc of second). $360^\circ = 2\pi$ rad, $1^\circ = 60'$ તથા $1' = 60''$નો ઉપયોગ કરો.

ઉકેલ (a) આપણે જાણીએ છીએ કે $360^\circ = 2\pi$ rad

$\therefore 1^\circ = (\pi/180)$ rad $= 1.745 \times 10^{-2}$ rad

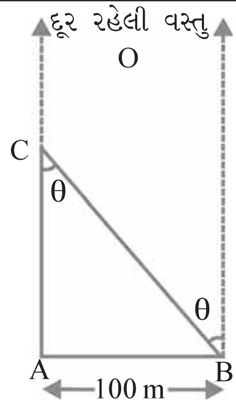
(b) $1^\circ = 60' = 1.745 \times 10^{-2}$ rad

$1' = 2.908 \times 10^{-4}$ rad $\cong 2.91 \times 10^{-4}$ rad

(c) $1' = 60'' = 2.908 \times 10^{-4}$ rad

$1'' = 4.847 \times 10^{-6}$ rad $\cong 4.85 \times 10^{-6}$ rad ◀

> **ઉદાહરણ 2.2** એક વ્યક્તિ તેની સામે આવેલા એક મિનારાનું અંતર પોતાનાથી કેટલું છે તે નક્કી કરવા માગે છે. આ માટે વ્યક્તિ મિનારા Cની સામે કોઈ એક બિંદુ A પાસે ઊભા રહીને ACની સીધી રેખામાં ઘણે દૂર આવેલ એક વસ્તુ Oને નિહાળે છે. ત્યાર બાદ વ્યક્તિ ACને લંબદિશામાં 100 m ચાલીને B બિંદુએ પહોંચે છે. B સ્થાનેથી વ્યક્તિ વસ્તુ O અને મિનારા Cને નિહાળે છે. વસ્તુ O ઘણી જ દૂર હોવાથી વ્યાવહારિક રીતે અવલોકન દિશા BO અને AO એકરૂપ બને છે. પરંતુ તે નોંધે છે કે Cની સીધી દૃષ્ટિરેખા, મૂળ દૃષ્ટિ રેખાથી $\theta = 40^\circ$ જેટલી ખસી છે. (θ = દૃષ્ટિ સ્થાનભેદ કોણ) તો વ્યક્તિનાં મૂળ સ્થાન Aથી મિનારા Cનું અંતર નક્કી કરો.



આકૃતિ 2.3

ઉકેલ અહીં, દૃષ્ટિસ્થાનભેદ કોણ $\theta = 40^\circ$

આકૃતિ 2.3 પરથી સ્પષ્ટ છે કે, AB = AC tan θ

$\therefore$ AC = AB / tanθ = 100 m / tan 40°

= 100 m / 0.8391 = 119 m ◀

> **ઉદાહરણ 2.3** પૃથ્વીનાં બે વ્યાસાંત બિંદુઓ A અને Bથી એક સાથે ચંદ્રનું અવલોકન કરતાં બંને અવલોકન દિશાઓ A ચંદ્ર પાસે $\theta = 1^\circ 54'$ જેટલો ખૂણો આંતરે છે. જો પૃથ્વીનો વ્યાસ 1.276×10^7 m હોય, તો ચંદ્ર અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ અહીં, $\theta = 1^\circ 54' = 114'$

$= (114 \times 60)'' \times (4.85 \times 10^{-6})$ rad

$= 3.32 \times 10^{-2}$ rad $(1'' = 4.85 \times 10^{-6}$rad)

હવે, b = AB = 1.276×10^7 m

ચંદ્ર અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર સમીકરણ (2.1) મુજબ,

$$D = b/\theta = \frac{1.276 \times 10^7}{3.32 \times 10^{-2}} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$ ◀

> **ઉદાહરણ 2.4** સૂર્યનો કોણીય વ્યાસનું માપ $1920''$ છે. સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર D = 1.496×10^{11} m છે તો સૂર્યનો વ્યાસ કેટલો થાય ?

ઉકેલ સૂર્યનો કોણીય વ્યાસ α

$= 1920''$

$= 1920 \times 4.85 \times 10^{-6}$ rad

$= 9.31 \times 10^{-3}$rad

∴ સૂર્યનો વ્યાસ

$d = \alpha D$

$= (9.31 \times 10^{-3}) \times (1.496 \times 10^{11})$ m

$= 1.39 \times 10^{9}$ m ◀

2.3.2 ખૂબ જ સૂક્ષ્મ અંતરોનો અંદાજ મેળવવો : અણુના પરિમાણ (Estimation of Very Small Distance : Size of Molecule)

ખૂબ જ સૂક્ષ્મ અંતરો, જેમકે અણુનું પરિમાણ (10^{-8} m થી 10^{-10} m)ના માપન માટે આપણે સ્ક્રૂગેજ કે તેના જેવા માપનના બીજા સાધનનો ઉપયોગ કરી શકીએ નહિ. માઇક્રોસ્કૉપની પણ કેટલીક મર્યાદાઓ છે. જેની તપાસ કરવી છે તે તંત્રને જોવા માટે ઓપ્ટિકલ માઇક્રોસ્કૉપ એ દૃશ્યપ્રકાશનો ઉપયોગ કરે છે. પ્રકાશ તરંગ પ્રકૃતિ ધરાવતો હોવાને કારણે ઉપયોગમાં લીધેલ પ્રકાશની તરંગલંબાઈ જેટલા જ વિભેદન માટે જ ઓપ્ટિકલ માઇક્રોસ્કૉપને વાપરી શકાય. (આ બાબતમાં વિસ્તૃત સમજૂતી તમે ધોરણ 12 ભૌતિકવિજ્ઞાનના પાઠ્યપુસ્તકમાં મેળવશો.) દૃશ્યપ્રકાશની તરંગલંબાઈ 4000 Å થી 7000 Å (1 ઍંગસ્ટ્રોમ = 1 Å = 1×10^{10} m)ના ક્રમની હોય છે. પરિણામે ઓપ્ટિકલ માઇક્રોસ્કૉપ વડે આ ક્રમથી નાના પરિમાણવાળા કણોનું વિભેદન કરી શકાતું નથી. ત્યાર બાદ વિકસાવવામાં આવેલ ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપમાં દૃશ્યપ્રકાશને બદલે ઇલેક્ટ્રૉન બીમનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ઇલેક્ટ્રૉન બીમને યોગ્ય રીતે ડિઝાઇન કરેલ વિદ્યુત અને ચુંબકીયક્ષેત્રો દ્વારા કેન્દ્રિત કરવામાં આવે છે. આવા ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપની વિભેદનશક્તિ પણ સીમિત હોય છે કારણ કે, ઇલેક્ટ્રૉન પણ તરંગપ્રકૃતિ ધરાવે છે. (તમે ધોરણ 12માં આ બાબતનો વધુ અભ્યાસ કરશો.) ઇલેક્ટ્રૉનની તરંગલંબાઈ એક ઍન્ગસ્ટ્રોમ (1 Å) કરતાં પણ નાની હોય છે. 0.6 Å વિભેદન ધરાવતાં ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપ બનાવવામાં આવ્યા છે. હાલમાં વિકસાવવામાં આવેલ ટનલિંગ માઇક્રોસ્કૉપની પણ વિભેદન મર્યાદા 1 Å કરતાં સારી છે. તેની મદદથી અણુઓનાં પરિમાણનો અંદાજ મેળવવો શક્ય બન્યો છે.

ઓલિક ઍસિડના અણુના પરિમાણનો અંદાજ મેળવવાની એક સરળ રીત નીચે આપેલ છે. ઑલિક ઍસિડ સાબુ જેવું એક પ્રવાહી છે. જેના અણુનું પરિમાણ 10^{-9} mના ક્રમ જેટલું મોટું છે.

આ પ્રયુક્તિનો મુખ્ય હેતુ પાણીની સપાટી પર ઑલિક ઍસિડનું એક આણ્વીય સ્તર (Mono-Molecular Layer) બનાવવાનો છે.

આ માટે આપણે 1 cm^3 ઓલિક ઍસિડને આલ્કોહૉલમાં મિશ્ર કરી 20 cm^{3}નું દ્રાવણ બનાવીશું. તૈયાર થયેલ આ દ્રાવણમાંથી આપણે 1 cm^3 દ્રાવણ લઈ ફરીથી આલ્કોહૉલમાં 20 cm^3 દ્રાવણ તૈયાર કરીશું. આ દ્રાવણની સાંદ્રતા, ઓલિક ઍસિડના પ્રતિ cm^3 દીઠ $\left(\frac{1}{20 \times 20}\right)$cm^3 થશે.

ત્યાર બાદ મોટા પહોળા પાત્રમાં પાણી ભરી તેના પર લાયકોપોડિયમ (Lycopodium) પાવડરનો હલકો છંટકાવ કરી પાણીની સપાટી પર તેનું સ્તર બનાવવામાં આવે છે. હવે તૈયાર કરેલ ઓલિડ ઍસિડનાં દ્રાવણનાં એક બુંદને સપાટી પર મૂકવામાં આવે છે ત્યારે આ બુંદ સપાટી પર પાતળું, મોટું અને લગભગ વર્તુળાકારે પ્રસરીને એક અણુની જાડાઈનું સ્તર બનાવે છે. આ રીતે તૈયાર થયેલ ઓલિક ઍસિડના પાતળા સ્તરનું ક્ષેત્રફળ A નક્કી કરવા માટે તેના વ્યાસ તરત જ માપવામાં આવે છે.

ધારો કે પાણીની સપાટી પર ઓલિક ઍસિડનાં n બુંદ નાખ્યાં. પ્રારંભમાં દરેક બુંદનું અંદાજિત કદ (V cm^3) શોધીએ છીએ.

દ્રાવણમાં n બુંદનું કદ $= n$V cm^3

દ્રાવણમાં ઓલિક ઍસિડનું કદ $= nV\left(\frac{1}{20 \times 20}\right)$cm^3

ઓલિક ઍસિડનું દ્રાવણ પાણીની સપાટી પર ખૂબ જ ઝડપથી પ્રસરણ પામી t જાડાઈનું પાતળું સ્તર બનાવતું હોય અને તે સ્તરનું ક્ષેત્રફળ A cm^2 હોય તો,

$$t = \frac{\text{પાતળા સ્તરનું કદ}}{\text{સ્તરનું ક્ષેત્રફળ}}$$

$$\therefore\ t = \frac{nV}{20 \times 20A} \text{ cm}$$

જો આપણે સ્વીકારીએ કે તૈયાર થયેલ સ્તર એક આણ્વીય સ્તર છે, તો સ્તરની જાડાઈ (t) ઓલિક ઍસિડના અણુનું પરિમાણ સૂચવે છે. અહીં મળતી જાડાઈનું મૂલ્ય 10^{-9} mના ક્રમનું હોય છે.

▶ *ઉદાહરણ 2.5* જો ન્યુક્લિયસનું પરિમાણ (જે 10^{-15} m થી 10^{-14} mના વિસ્તારનું છે.) વધારીને એક તીક્ષ્ણપિનની અણી (tip)ના જેટલી કરવામાં આવે, તો પરમાણુનું અંદાજિત પરિમાણ શું હોઈ શકે ? (પિનની અણીનો વિસ્તાર 10^{-5} m થી 10^{-4} m ક્રમનો ધારો.)

ઉકેલ ન્યુક્લિયસના માપક્રમનો વિસ્તાર 10^{-15} m થી 10^{-14} mના ક્રમનો છે. પિનની અણી (tip)ના માપક્રમનો વિસ્તાર 10^{-5} m થી 10^{-4} m જેટલો છે. એટલે કે માપક્રમ 10^{10} ગણો કરવો પડે. લગભગ 10^{-10} mના પરિમાણવાળા પરમાણુનું પરિમાણ વધારીને 1 mના ક્રમનું કરવાનું છે. આમ, પરમાણુમાં રહેલા ન્યુક્લિયસની સાઇઝ 1 m ત્રિજ્યાવાળા ગોળાના કેન્દ્ર પર રહેલ પિનની અણી (tip) જેટલી નાની હશે. ◀

2.3.3 લંબાઈનો વિસ્તાર (Range of Lengths)

આપણે વિશ્વમાં નિહાળી શકતાં પદાર્થોનાં પરિમાણ ખૂબ જ વિશાળ વિસ્તારમાં ફેલાયેલા છે. આ પરિમાણોમાં પરમાણુનાં ન્યુક્લિયસનાં 10^{-14} m જેટલાં સૂક્ષ્મ પરિમાણથી લઈને અવલોકિત વિશ્વના 10^{26} m જેટલા વિશાળ માપક્રમનો સમાવેશ થાય છે.

ખૂબ જ સૂક્ષ્મ અંતર અને ખૂબ જ મોટા અંતર માટેના કેટલાક વિશિષ્ટ એકમોનો ઉપયોગ આપણે કરીશું જે નીચે મુજબ છે :

1 ફર્મી $= 1$ fm $= 10^{-15}$ m

1 ઍંગસ્ટ્રોમ $= 1\ \mathring{A} = 10^{-10}$ m

1 એસ્ટ્રોનોમિકલ યુનિટ = 1 AU (સૂર્ય અને પૃથ્વીની વચ્ચેના સરેરાશ અંતરને 1 AU કહે છે.)
$= 1.496 \times 10^{11}$ m

1 પ્રકાશવર્ષ $= 1$ ly $= 9.46 \times 10^{15}$ m (પ્રકાશે 1 વર્ષમાં 3×10^{8} m s^{-1} જેટલી ઝડપથી કાપેલ અંતર)

1 પાર્સેક $= 3.08 \times 10^{16}$ m (જે અંતરે પૃથ્વીની ભ્રમણકક્ષાની સરેરાશ ત્રિજ્યા વડે 1″ (Arc second) જેટલો ખૂણો અંતરાય છે તે અંતરને 1 પાર્સેક કહે છે.)

2.4 દળનું માપન (MEASUREMENT OF MASS)

દ્રવ્યમાન પદાર્થનો મૂળભૂત ગુણધર્મ છે. તે પદાર્થની અવકાશમાં સ્થિતિ, દબાણ કે તાપમાન પર આધારિત નથી. દ્રવ્યમાનનો SI એકમ કિલોગ્રામ (kg) છે. આંતરરાષ્ટ્રીય તોલમાપ સંસ્થા (BIPM) દ્વારા આપવામાં આવેલ કિલોગ્રામની આંતરરાષ્ટ્રીય પ્રતિકૃતિ દુનિયાના જુદા જુદા દેશોની પ્રયોગશાળામાં ઉપલબ્ધ છે. ભારતમાં તેને નવી દિલ્હી ખાતે રાષ્ટ્રીય ભૌતિકવિજ્ઞાન પ્રયોગશાળા (NPL)માં રાખવામાં આવેલ છે.

પરમાણુઓ અને અણુઓનાં દ્રવ્યમાન માટે કિલોગ્રામ એકમ સુવિધાભર્યો ન હોવાથી અણુઓ અને પરમાણુઓનાં દ્રવ્યમાન માટે એક મહત્ત્વનો એકમ નક્કી કરવામાં આવ્યો છે. જેને **યુનિફાઇડ ઍટોમિક માસ યુનિટ (u) (Unified Atomic Mass Unit)** કહે છે. જેની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે.

1 યુનિફાઇડ ઍટોમિક માસ = ઇલેક્ટ્રૉન સહિત કાર્બન સમસ્થાનિક $\left({}^{12}_{6}\mathrm{C}\right)$ના એક પરમાણુનો $\frac{1}{12}$મો ભાગ

$= 1.66 \times 10^{-27}$kg

સામાન્ય વસ્તુનાં દ્રવ્યમાનનું માપન પ્રોવિઝન સ્ટોર્સમાં જોવા મળતી સામાન્ય તુલા વડે કરી શકાય છે. વિશ્વમાં જોવા મળતાં વિશાળ પદાર્થો, ગ્રહો, તારા વગેરેનું દ્રવ્યમાન ન્યૂટનનાં ગુરુત્વાકર્ષણ બળના નિયમ (જુઓ પ્રકરણ 8) વડે નક્કી કરી શકાય છે. પરમાણુઓ/પરમાણુનાં ઘટક કણો જેવા સૂક્ષ્મ કણોનું દ્રવ્યમાન માસ સ્પેક્ટ્રોગ્રાફ વડે નક્કી કરવામાં આવે છે. જેમાં સમાન વિદ્યુત અને ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં વીજભારિત કણના ગતિમાર્ગની ત્રિજ્યા તેના દળને સપ્રમાણ હોય છે.

2.4.1 દળના માપક્રમનો વિસ્તાર (Range of Masses)

આપણને વિશ્વમાં જોવા મળતા પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાન જુદા જુદા અને વિશાળ માપક્રમની શ્રેણીમાં હોય છે. માપક્રમની આ શ્રેણીમાં ઇલેક્ટ્રૉનના 10^{-30} kg જેટલા સૂક્ષ્મ દળથી લઈને અવલોકિત વિશ્વનાં 10^{55} kg જેટલાં મોટા દળનો સમાવેશ થાય છે. કોષ્ટક 2.4માં વિશિષ્ટ દળ ધરાવતા કેટલાક પદાર્થોના વિસ્તાર અને તેનો માપક્રમ દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક 2.3 લંબાઈનો વિસ્તાર અને માપક્રમ

વસ્તુનું પરિમાણ અથવા અંતર	લંબાઈ (m)
પ્રોટોનનું પરિમાણ (Size)	10^{-15}
પરમાણુમાં ન્યુક્લિયસનું પરિમાણ (Size)	10^{-14}
હાઇડ્રોજન અણુનું પરિમાણ (Size)	10^{-10}
વિશિષ્ટ વિષાણુ (Virus)ની લંબાઈ	10^{-8}
પ્રકાશની તરંગલંબાઈ	10^{-7}
લાલ રક્તકણોનું પરિમાણ (Size)	10^{-5}
કાગળની જાડાઈ	10^{-4}
દરિયાની સપાટીથી માઉન્ટ એવરેસ્ટની ઊંચાઈ	10^{4}
પૃથ્વીની ત્રિજ્યા	10^{7}
પૃથ્વીથી ચંદ્રનું અંતર	10^{8}
પૃથ્વીથી સૂર્યનું અંતર	10^{11}
સૂર્યથી પ્લૂટોનું અંતર	10^{13}
આપણી આકાશગંગાનું પરિમાણ (Size)	10^{21}
પૃથ્વીથી એન્ડ્રોમેડા આકાશગંગાનું અંતર	10^{22}
અવલોકીય વિશ્વની પરિસીમા સુધીનું અંતર	10^{26}

કોષ્ટક 2.4 દળનો વિસ્તાર અને માપક્રમ

વસ્તુ	દળ (kg)
ઈલેક્ટ્રૉન	10^{-30}
પ્રોટોન	10^{-27}
યુરેનિયમ પરમાણુ	10^{-25}
લાલ રુધિર કણ	10^{-13}
ધૂળનો કણ	10^{-9}
વરસાદનું બુંદ	10^{-6}
મચ્છર	10^{-5}
દ્રાક્ષ	10^{-3}
માનવ	10^{2}
ઑટોમોબાઈલ	10^{3}
બોઈંગ 747 ઍરક્રાફ્ટ	10^{8}
ચંદ્ર	10^{23}
પૃથ્વી	10^{25}
સૂર્ય	10^{30}
મીલ્કી-વે આકાશગંગા	10^{41}
અવલોકીય વિશ્વ	10^{55}

2.5 સમયનું માપન (MEASUREMENT OF TIME)

કોઈ પણ સમયગાળાનાં માપન માટે આપણને ઘડિયાળની જરૂર પડે છે. પરંતુ હવે આપણે **સમયના પરમાણ્વીય માનક** (Atomic Standard) કે જે સિઝિયમ પરમાણુમાં થતાં આવર્ત દોલનો પર આધારિત છે, તેનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. તેના પરથી **સિઝિયમ ઘડિયાળ** કે જેને ઘણી વાર **ઍટોમિક ક્લૉક** કહે છે, તે રચાયેલ છે અને તે રાષ્ટ્રીય માનક તરીકે વપરાય છે. આવા માનક ઘણીબધી પ્રયોગશાળાઓમાં ઉપલબ્ધ છે. સિઝિયમ ઍટોમિક ઘડિયાળમાં સિઝિયમ-133 પરમાણુની સંક્રાંતિને અનુલક્ષીને ઉત્સર્જિત વિકિરણનાં 9, 192, 631, 770 પૂર્ણ દોલનો માટેના સમયગાળાને એક સેકન્ડ તરીકે ગણવામાં આવે છે. જેવી રીતે કાંડા ઘડિયાળ (Wrist Watch)માં સંતુલન ચક્રનાં દોલનો અથવા ક્વાર્ટ્ઝ ઘડિયાળમાં ક્વાર્ટ્ઝ ક્રીસ્ટલનાં દોલનો સમયનું નિયમન કરે છે. તેવી જ રીતે સિઝિયમ ઍટોમિક ઘડિયાળમાં સિઝિયમ પરમાણુનાં દોલનો સમયને નિયમન કરે છે.

સિઝિયમ ઍટોમિક ઘડિયાળ ખૂબ જ ચોકસાઈ ધરાવે છે. સૈદ્ધાંતિક રીતે આવી ઘડિયાળો પોર્ટેબલ (સરળતાથી હેરફેર કરી શકાય તેવી) માનક ઉપલબ્ધ કરાવે છે. ચાર સિઝિયમ ઘડિયાળો દ્વારા સમયગાળો 'સેકન્ડ' અને 'આવૃત્તિ'ના રાષ્ટ્રીય માનક જાળવી રાખવામાં આવે છે. ભારતીય પ્રમાણભૂત સમય (ઇન્ડિયન સ્ટાન્ડર્ડ ટાઈમ-IST)ને જાળવી રાખવા માટે નવી દિલ્હી ખાતે રાષ્ટ્રીય ભૌતિક પ્રયોગશાળા (NPL)માં સિઝિયમ ઍટોમિક ઘડિયાળનો ઉપયોગ થાય છે.

આપણા દેશમાં સમય, આવૃત્તિ વગેરેના ભૌતિક માનકોની જાળવણી અને સુધારાની જવાબદારી NPLની છે. અત્રે નોંધો કે, ભારતીય પ્રમાણભૂત સમય (IST) આ ઍટોમિક ઘડિયાળોનાં સમૂહ સાથે સાંકળવામાં આવેલ છે. સમય-માપનની અનિશ્ચિતતા $\pm 1 \times 10^{-13}$ (એટલે કે 10^{13} માં 1 ભાગ) સુધીની મેળવી શકાય તેટલી ચોક્કસ કાર્યક્ષમતા સિઝિયમ ઍટોમિક ઘડિયાળની હોય છે. આ દર્શાવે છે કે આવી રચના વડે સમય-માપનમાં અનિશ્ચિતતા 10^{13} માં 1 ભાગથી ઓછી હોય છે. આ ઘડિયાળો એક વર્ષમાં 3 માઈક્રો સેકન્ડથી વધુ આગળ કે પાછળ થતી નથી. સમય-માપનની આ પ્રચંડ ચોકસાઈને ધ્યાનમાં રાખીને લંબાઈના SI એકમોને પ્રકાશ વડે (1/299, 792, 458) સેકન્ડમાં કાપેલ અંતર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે. (કોષ્ટક 2.1)

વિશ્વમાં ઘટતી ઘટનાઓમાં સમય અંતરાલ (Time Interval)નો વિસ્તાર ખૂબ જ વિશાળ છે. કોષ્ટક 2.5માં કેટલાક વિશિષ્ટ સમય અંતરાલોનો વિસ્તાર અને ક્રમ દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક 2.3 અને 2.5માં દર્શાવેલ સંખ્યાઓમાં આશ્ચર્યજનક સંયોગ છે. જો તેનું ધ્યાનપૂર્વક અવલોકન કરવામાં આવે તો તમે જોઈ શકશો કે વિશ્વમાં મોટામાં મોટા અને સૂક્ષ્મમાં સૂક્ષ્મ પદાર્થોની લંબાઈના માપક્રમનો ગુણોત્તર 10^{41} છે તથા તેટલું જ રસપ્રદ એ પણ છે કે, વિશ્વની ઘટનાઓ સાથે સંકળાયેલ સૌથી મોટા અને સૌથી નાના સમય અંતરાલોનો ગુણોત્તર પણ 10^{41} છે. આ સંખ્યા 10^{41} કોષ્ટક 2.4માં ફરી વાર આવે છે. જેમાં કેટલાક પદાર્થોનાં વિશિષ્ટ દ્રવ્યમાન દર્શાવેલ છે. આપણા વિશ્વમાં મહત્તમ અને લઘુતમ દ્રવ્યમાન ધરાવતા પદાર્થોનાં દળોનો ગુણોત્તર પણ લગભગ $(10^{41})^2$ ક્રમનો છે. શું આ મોટી સંખ્યાઓનો આશ્ચર્યજનક સંયોગ માત્ર આકસ્મિક છે ?

2.6 સાધનની સચોટતા, ચોકસાઈ તથા માપનમાં ત્રુટિ (ACCURACY, PRECISION OF INSTRUMENTS AND ERRORS IN MEASUREMENT)

સમગ્ર પ્રાયોગિક વિજ્ઞાન અને ટેક્નોલૉજીનો મુખ્ય આધાર માપન પર રહેલો છે. માપન માટે ઉપયોગમાં લેવાતાં કોઇ પણ સાધન વડે લીધેલા માપનનાં પરિણામોમાં કેટલીક અચોકસાઈ જોવા મળે છે. આ અચોકસાઈને ત્રુટિ કહે છે. માપનનાં મૂલ્યો પર આધારિત કોઈ પણ ભૌતિકરાશિનાં મૂલ્યમાં **ત્રુટિ** જોવા મળે છે. પ્રથમ આપણે બે શબ્દો **ચોકસાઈ** અને **સચોટતા** વચ્ચેનો ભેદ જોઈશું. કોઈ રાશિનાં માપનનું મૂલ્ય તે રાશિનાં સાચા મૂલ્યની કેટલી નજીક છે. તેને ચોકસાઈ (Accuracy) કહે છે. આ માપન કેટલા વિભેદન (Resolution) અથવા સીમા (Limit) સુધી કરવામાં આવ્યું છે તેને સચોટતા (Precision) કહે છે.

માપનમાં ચોકસાઈનો આધાર સાધનનાં વિભેદન અથવા સીમા જેવી કેટલીક બાબતો ઉપર રહેલો છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ એક લંબાઈનું સાચું મૂલ્ય 3.678 cmની નજીક છે. એક પ્રયોગમાં 0.1 cm વિભેદન ધરાવતાં સાધન વડે તે જ લંબાઈનું માપ 3.5 cm મળે છે. બીજા પ્રયોગમાં વધુ વિભેદન 0.01 cm ધરાવતાં સાધન વડે લંબાઈનું માપન કરતાં તે 3.38 cm મળે છે. અહીં પ્રથમ માપ વધુ ચોકસાઈવાળું કહેવાય. (કારણ કે તે સાચા માપની વધુ નજીક છે.) પરંતુ તેમાં સચોટતા ઓછી છે. (સાધનનું વિભેદન 0.1 cm છે.) જ્યારે બીજું માપ ઓછી ચોકસાઈ ધરાવે છે. પરંતુ વધુ સચોટ છે. આમ, માપનમાં રહેલી ત્રુટિને કારણે

કોષ્ટક 2.5 સમયગાળાનો વિસ્તાર અને માપક્રમ

ઘટના	સમયગાળો (s)
કોઈ અતિ અસ્થાયી કણનો જીવનકાળ	10^{-24}
પ્રકાશ દ્વારા ન્યુક્લિયર અંતર કાપવા માટે લાગતો સમય	10^{-22}
ઍક્સ-રે કિરણોનો આવર્તકાળ	10^{-19}
પરમાણ્વીય દોલનોનો આવર્તકાળ	10^{-15}
પ્રકાશ તરંગનો આવર્તકાળ	10^{-15}
કોઈ પરમાણુની ઉત્તેજિત અવસ્થાનો જીવનકાળ	10^{-8}
રેડિયો તરંગનો આવર્તકાળ	10^{-6}
ધ્વનિ તરંગનો આવર્તકાળ	10^{-3}
આંખના પલકારા (Wink) માટેનો સમય	10^{-1}
માનવ હૃદયના બે ક્રમિક ધડકનો (Beats) વચ્ચેનો સમય	10^{0}
પ્રકાશને ચંદ્રથી પૃથ્વી સુધી આવતાં લાગતો સમય	10^{0}
પ્રકાશને સૂર્યથી પૃથ્વી સુધી આવતાં લાગતો સમય	10^{2}
ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ	10^{4}
પૃથ્વીનો ભ્રમણકાળ	10^{5}
ચંદ્રનો ભ્રમણ અને પરિભ્રમણ કાળ	10^{6}
પૃથ્વીનો પરિભ્રમણ કાળ	10^{7}
નજીકના તારાથી પ્રકાશને આવતા લાગતો સમય	10^{8}
માનવનો સરેરાશ જીવનકાળ	10^{9}
ઇજિપ્તના પિરામિડનું આયુષ્ય	10^{11}
ડાયનોસોરના વિલુપ્ત થયા પછીનો વિતેલો સમય	10^{15}
વિશ્વનું આયુષ્ય	10^{17}

દરેક અવલોકન સન્નિકટ માપ દર્શાવે છે. સામાન્ય રીતે અવલોકનમાં ઉદ્ભવતી ત્રુટિઓને નીચે દર્શાવેલ બે ભાગમાં વર્ગીકૃત કરી શકાય : (a) વ્યવસ્થિત ત્રુટિ (b) આકસ્મિક ત્રુટિ.

વ્યવસ્થિત ત્રુટિ (Systematic Error)

વ્યવસ્થિત ત્રુટિઓ આપેલા પ્રયોગ દરમિયાન એક જ દિશામાં એટલે કે ધન અથવા ઋણ જ હોય છે. આ ત્રુટિઓના અમુક ઉદ્ગમો નીચે મુજબ છે :

(a) **સાધનની ત્રુટિ (Instrumental Error)** આ પ્રકારની ત્રુટિ સાધનમાં રહેલાં કોઈ ક્ષતિયુક્ત રચના કે સાધનમાં સ્કેલના ખામીયુક્ત કેલિબ્રેશન (અંકન), સાધનની શૂન્ય ત્રુટિ વગેરેને કારણે ઉદ્ભવે છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ એક થરમૉમિટરનાં તાપમાનનું અંકન વ્યવસ્થિત ન થયેલું હોય. (STP એ ઉકળતાં પાણીનું તાપમાન 100 °Cને બદલે 104 °C દર્શાવે.) વર્નિયર કેલિપર્સમાં તેના બંને જડબાં (Jaws) ભેગા હોય ત્યારે વર્નિયર માપક્રમનો શૂન્યનો કાપો મુખ્ય સ્કેલના શૂન્ય કાપા સાથે સંપાત ન થતો હોય, સામાન્ય મીટરપટ્ટીનો કોઈ એક છેડો ઘસાઈ ગયેલો હોય.

(b) **પ્રયોગની ટેક્નિક અથવા પદ્ધતિમાં રહેલી અપૂર્ણતા (Imperfection in Experimental Technique or Procedure)** ઉદાહરણ તરીકે થરમૉમિટરની મદદથી શરીરનું તાપમાન માપવામાં આવે છે ત્યારે થરમૉમિટરને બગલમાં મૂકીને માપેલ તાપમાન શરીરનાં વાસ્તવિક તાપમાન કરતાં હંમેશાં ઓછું જ તાપમાન દર્શાવે છે. પ્રયોગ દરમિયાન બાહ્ય પરિબળો (જેમકે, તાપમાન, દબાણ, પવનનો વેગ, ભેજમાં થતા ફેરફારો) પણ માપનમાં વ્યવસ્થિત ત્રુટિ ઉત્પન્ન કરે છે.

(c) **વ્યક્તિગત ત્રુટિ (Personal Error)** પ્રયોગ દરમિયાન અવલોકનકારની ખાસિયત (પૂર્વગ્રહ), સાધનોની અયોગ્ય ગોઠવણી અથવા પૂરતી સાવચેતી વગર વ્યક્તિગત બેદરકારીથી લીધેલ અવલોકનોને કારણે આ પ્રકારની ત્રુટિ ઉદ્ભવે છે. દા.ત., માપક્રમ પરની સોયની સ્થિતિનું અવલોકન લેતી વખતે સ્વભાવગત્ તમારું માથું સાચા સ્થાનને બદલે વધુ જમણી બાજુ રાખીને અવલોકન લેશો તો **દૃષ્ટિસ્થાનભેદ**ને કારણે **અવલોકન**માં ત્રુટિ આવશે.

પ્રાયોગિક ટેક્નિકમાં સુધારો કરીને વધુ સારી ગુણવત્તાવાળાં પ્રાયોગિક સાધનો પસંદ કરીને અને શક્ય હોય તેટલા વ્યક્તિગત પૂર્વગ્રહો દૂર કરીને અવલોકનના વ્યવસ્થિત ત્રુટિને લઘુતમ કરી શકાય છે. આપેલ પ્રાયોગિક ગોઠવણીમાં આવી ત્રુટિઓનો કેટલાંક પ્રમાણમાં અંદાજ કાઢીને જરૂરી સુધારો અવલોકનમાં લાગુ પાડી શકાય છે.

અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ (Random Error)

માપનમાં અનિયમિત રૂપે ઉદ્ભવતી ત્રુટિને **અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ** કહે છે અને તેથી તે ધન કે ઋણ તેમજ મૂલ્ય નાનું કે

મોટું હોઈ શકે છે. પ્રયોગ દરમિયાન પ્રયોગ પર અસર કરતાં પરિબળોમાં અનિયમિત અને આગાહી ન કરી શકાય તેવા ફેરફારો (દા.ત., તાપમાન, વૉલ્ટેજ સપ્લાય, પ્રાયોગિક ગોઠવણીનાં યાંત્રિક દોલનો વગેરેમાં ન ધારેલા ફેરફારો) અવલોકનકર્તા દ્વારા અવલોકન લેતી વખતે ઉદ્ભવેલ વ્યક્તિગત ત્રુટિઓ વગેરેને કારણે અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ ઉદ્ભવે છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ એક જ વ્યક્તિ એક જ અવલોકનનું વારંવાર પુનરાવર્તન કરે, તો દરેક વખતે તેનાં દ્વારા લેવાયેલ અવલોકનો જુદાં જુદાં હોઈ શકે છે.

લઘુતમ માપ ત્રુટિ (Least Count Error)

માપન માટેનાં સાધન વડે માપી શકાતાં નાનાંમાં નાનાં માપને તે સાધનનું **લઘુતમ માપ** કહે છે. આ સાધનથી મપાયેલાં મૂલ્યો કે અવલોકનો આટલા મૂલ્ય સુધી જ સચોટ છે.

લઘુતમ માપ ત્રુટિ એ સાધનના વિભેદન સાથે સંકળાયેલ ત્રુટિ છે. ઉદાહરણ તરીકે વર્નિયર કેલિપર્સનું લઘુતમ માપ 0.01cm, સ્ફેરોમીટરનું લઘુતમ માપ 0.001 cm છે. લઘુતમ માપ ત્રુટિનો સમાવેશ અવ્યવસ્થિત ત્રુટિમાં થાય છે. પરંતુ તેનું પ્રમાણ સીમિત હોય છે. આ ત્રુટિ વ્યવસ્થિત અને અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ એમ બંને રીતે ઉદ્ભવે છે. જો આપણે લંબાઈનું માપન મીટરપટ્ટી વડે કરીએ, તો મીટર સ્કેલમાં બે ક્રમિક કાપા વચ્ચેનું અંકન 1 mm જેટલું હોય છે.

વધુ સચોટતા ધરાવતાં સાધનો સુધારેલ પ્રાયોગિક ટેક્નિક (પ્રવિધિ) વગેરેનો ઉપયોગ કરીને આપણે લઘુતમ માપત્રુટિ ઘટાડી શકીએ છીએ. અવલોકનનું ઘણી વાર પુનરાવર્તન કરીને મળતાં બધાં જ અવલોકનોનું સરેરાશ મૂલ્ય મળે છે જે માપેલ રાશિનાં સાચા મૂલ્યની ઘણું નજીક હોય છે.

2.6.1 નિરપેક્ષ ત્રુટિ, સાપેક્ષ ત્રુટિ અને પ્રતિશત ત્રુટિ (Absolute Error, Relative Error, Percentage Error)

(a) ધારો કે કોઈ એક જ ભૌતિકરાશિનાં કેટલાંક માપેલ અવલોકનોનાં મૂલ્યો $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ છે. આપેલ પરિસ્થિતિઓમાં આ અવલોકનોનું સરેરાશ મૂલ્ય ભૌતિકરાશિનાં સાચા મૂલ્ય (વાસ્તવિક મૂલ્ય) તરીકે લઈ શકાય.

$$a_{mean} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \qquad (2.4)$$

અથવા

$$a_{mean} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \qquad (2.5)$$

આનું કારણ એ છે કે, અગાઉ સ્પષ્ટીકરણ કર્યું છે તેમ એવું સ્વીકારવું તર્કસંગત છે કે કોઈ પણ ભૌતિકરાશિનું વ્યક્તિગત માપન તે ભૌતિકરાશિનાં વાસ્તવિક મૂલ્યથી એટલું જ વધારે હોય છે જેટલું વાસ્તવિક મૂલ્યથી ઓછું હોવાની સંભાવના હોય.

કોઈ ભૌતિકરાશિનાં સાચાં મૂલ્ય અને વ્યક્તિગત માપેલ મૂલ્યના તફાવતનાં માનને તે અવલોકનની નિરપેક્ષ ત્રુટિ કહે છે. તેને $|\Delta a|$ વડે દર્શાવાય છે. ભૌતિકરાશિનું સાચું મૂલ્ય ન જાણતાં હોઈએ ત્યારે આપણે અવલોકનમાં સરેરાશ મૂલ્યને સાચા મૂલ્ય તરીકે ગણીએ છીએ.

પ્રત્યેક માપનમાં મળતી ત્રુટિ,

$$\Delta a_1 = a_1 - a_{mean}$$

$$\Delta a_2 = a_2 - a_{mean}$$

....

....

$$\Delta a_n = a_n - a_{mean}$$

અહીં ગણતરી પરથી કેટલાંક પરિણામમાં Δa ધન અને કેટલાંક પરિણામોમાં Δa ઋણ મળશે. પરંતુ નિરપેક્ષ ત્રુટિ $|\Delta a|$ હંમેશાં ધન થાય.

(b) તમામ અવલોકનોની નિરપેક્ષ ત્રુટિનાં મૂલ્યોનું સરેરાશ મૂલ્ય ભૌતિકરાશિની અંતિમ નિરપેક્ષ ત્રુટિ Δa_{mean} સૂચવે છે. એટલે કે,

$$\Delta a_{mean} = \left[\frac{|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + \ldots + |\Delta a_n|}{n}\right]$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} |a_n|}{n}$$

જો આપણે ભૌતિકરાશિનું કોઈ એક જ અવલોકન લઈએ તો તેનું મૂલ્ય $a_{mean} \pm \Delta a_{mean}$ મુજબના વિસ્તારમાં મળે.

એટલે કે, $a = a_{mean} \pm \Delta a_{mean}$

અથવા

$$a_{mean} - \Delta a_{mean} \le a \le a_{mean} + \Delta a_{mean}$$

આનો અર્થ એટલો જ થાય કે કોઈપણ ભૌતિકરાશિ aનું પ્રાયોગિક મૂલ્ય $(a_{mean} + \Delta a_{mean})$ અને $(a_{mean} - \Delta a_{mean})$ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના હોય છે.

(c) આપણે ઘણી વાર નિરપેક્ષ ત્રુટિને બદલે **સાપેક્ષ ત્રુટિ** અથવા **પ્રતિશત ત્રુટિ** (δa)નો ઉપયોગ કરીએ છીએ. **સાપેક્ષ ત્રુટિ એટલે ભૌતિકરાશિનાં માપનની સરેરાશ નિરપેક્ષ ત્રુટિ Δa_{mean} અને સરેરાશ સાચા મૂલ્ય a_{mean}નો ગુણોત્તર**

$$\text{સાપેક્ષ ત્રુટિ} = \frac{\Delta a_{mean}}{a_{mean}} \qquad 2.9$$

જ્યારે સાપેક્ષ ત્રુટિને ટકાવારીમાં દર્શાવાય છે ત્યારે તેને **પ્રતિશત ત્રુટિ** (δa) કહે છે.

આમ, પ્રતિશત ત્રુટિ

$$\delta a = \left(\frac{\Delta a_{mean}}{a_{mean}}\right) \times 100\ \% \qquad 2.10$$

હવે આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

▶ *ઉદાહરણ 2.6* રાષ્ટ્રીય પ્રયોગશાળામાં આવેલી પ્રમાણભૂત ઘડિયાળ સાથે બે ઘડિયાળોનું પરીક્ષણ કરવામાં આવે છે. પ્રમાણભૂત ઘડિયાળ જ્યારે બપોરના 12:00નો સમય દર્શાવે છે ત્યારે આ બે ઘડિયાળના સમય નીચે મુજબ મળે છે :

	ઘડિયાળ 1	ઘડિયાળ 2
સોમવાર	12:00:05	10:15:06
મંગળવાર	12:01:15	10:14:59
બુધવાર	11:59:08	10:15:18
ગુરુવાર	12:01:50	10:15:07
શુક્રવાર	11:59:15	10:14:53
શનિવાર	12:01:30	10:15:24
રવિવાર	12:01:19	10:15:11

જો તમે કોઈ પ્રયોગ કરી રહ્યાં હોય જેના માટે તમને ચોકસાઈ સાથે સમય અંતરાલ દર્શાવતી ઘડિયાળની આવશ્યકતા છે, તો આ બે પૈકી કઈ ઘડિયાળ લેવાનું મુનાસિબ માનશો ? શા માટે ?

ઉકેલ સાત દિવસની ઘડિયાળ-1નાં અવલોકનના ફેરફારનો વિસ્તાર 162 s છે અને ઘડિયાળ-2માં આ વિસ્તાર 31 s નો છે. ઘડિયાળ-1 દ્વારા લીધેલો સરેરાશ સમય, ઘડિયાળ-2 દ્વારા લીધેલા સરેરાશ સમયની સાપેક્ષમાં પ્રમાણભૂત સમયની વધુ નજીક છે. મહત્ત્વપૂર્ણ વાત એ છે કે ઘડિયાળની શૂન્ય ત્રુટિ ચોકસાઈપૂર્ણ કાર્ય માટે એટલી મહત્ત્વપૂર્ણ નથી જેટલું મહત્ત્વ તેના સમયમાં થતા ફેરફારનું છે. કારણ કે શૂન્ય ત્રુટિને સરળતાથી દૂર કરી શકાય છે. અહીં ઘડિયાળ-1ની તુલનામાં ઘડિયાળ-2ને પસંદ કરી શકાય. ◀

▶ *ઉદાહરણ 2.7* આપણે સાદા લોલકના દોલનના આવર્તકાળનું માપન કરીએ છીએ. જેમાં ક્રમિક અવલોકનોનાં માપ નીચે મુજબ મળે છે : 2.63 s, 2.56 s, 2.42 s, 2.71 s અને 2.80 s તો અવલોકનોમાં ઉદ્‌ભવતી નિરપેક્ષ ત્રુટિ, સાપેક્ષ ત્રુટિ અને પ્રતિશત ત્રુટિની ગણતરી કરો.

ઉકેલ લોલકના દોલનનો સરેરાશ આવર્તકાળ

$$T = \frac{(2.63+2.56+2.42+2.71+2.80)\ s}{5}$$

$$= \frac{13.12}{5}\ s$$

$$= 2.624\ s$$

$$= 2.62\ s$$

અહીં, સમયનું માપન 0.01 s ના વિભેદન સુધી કરેલ હોવાથી સમય માપનના દરેક અવલોકનો બે દશાંશ સ્થાન સહિત છે. તેથી દોલનના સરેરાશ આવર્તકાળને પણ બે દશાંશ સ્થાન સુધી લેવા યોગ્ય છે.

માપનમાં ઉદ્‌ભવેલી ત્રુટિઓ નીચે મુજબ છે :

$2.63\ s - 2.62\ s = 0.01\ s$

$2.56\ s - 2.62\ s = 0.06\ s$

$2.42\ s - 2.62\ s = 0.20\ s$

$2.71\ s - 2.62\ s = 0.09\ s$

$2.80\ s - 2.62\ s = 0.18\ s$

અહીં નોંધો કે ત્રુટિઓના એકમ પણ માપેલ ભૌતિકરાશિઓના જ એકમો છે.

બધી જ નિરપેક્ષ ત્રુટિઓનું ગાણિતિક સરેરાશ (ગાણિતિક સરેરાશ માટે આપણે માત્ર મૂલ્યો જ લઈશું.)

$$\Delta T_{mean} = \frac{[(0.01+0.06+0.20+0.09+0.18)\ s]}{5}$$

$$= \frac{0.54\ s}{5}$$

$$= 0.11\ s$$

આનો અર્થ એ થાય કે સાદા લોલકના દોલનનો આવર્તકાળ (2.62 ± 0.11) s છે.

એટલે કે તેનું મૂલ્ય $(2.62 + 0.11)$s અને $(2.62 - 0.11)$s અથવા 2.73 s અને 2.51 s ની વચ્ચે આવેલ છે. અહીં બધી જ નિરપેક્ષ ત્રુટિનું સરેરાશ 0.11 s છે. આમ, આ મૂલ્યમાં સેકન્ડનાં દસમા ભાગ જેટલી ત્રુટિ પહેલેથીજ છે. તેથી દોલનના આવર્તકાળનું મૂલ્ય સેકન્ડના સોમા ભાગ સુધી દર્શાવવાનો કોઈ જ અર્થ નથી. આમ, તેને વધુ સાચી રીતે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

$T = 2.6 \pm 0.1\ s$

કોઈ રેખાની લંબાઈ તમે કેવી રીતે માપશો ?

તમે કહેશો કે આ સ્તરે આવ્યા પછી આ કેવો તુચ્છ પ્રશ્ન ? પરંતુ જરા વિચારો કે આ રેખા સુરેખ ન હોય તો ? તમે તમારી નોટબુક કે બ્લેકબૉર્ડ પર વાંકીચૂંકી રેખા દોરો. આ રેખાની લંબાઈ માપવી બહુ મુશ્કેલ નથી. એક દોરી લઈ આ વાંકીચૂંકી રેખા પર તેને ગોઠવી દો. ત્યાર બાદ દોરીને ઉપાડીને તેની લંબાઈ માપી લો.

હવે કલ્પના કરો કે તમે કોઈ રાષ્ટ્રીય ધોરીમાર્ગ, નદી કે બે રેલવે સ્ટેશનો વચ્ચે આવેલા રેલપાટા કે બે રાજ્યો કે દેશો વચ્ચેની સીમારેખાની લંબાઈ માપો છો. આ માટે 1 મીટર કે 100 મીટર લંબાઈનું દોરડું લઈ તેને રેખા પર મૂકી અવારનવાર રેખા પર આગળ ને આગળ ગોઠવતા જાવ અને લંબાઈનું માપન કરો તો આ પ્રૉજેક્ટમાં માનવીય શ્રમ અને સમય તો ખૂબ જ વ્યય થાય તથા તે ખૂબ જ ખર્ચાળ બને છે, જે મેળવેલ ઉપલબ્ધીને અનુરૂપ ન કહેવાય. ઉપરાંત આ વિશાળ કાર્યમાં માપનમાં ત્રુટિ વધુ આવશે. આવી જ એક રસપ્રદ હકીકત છે કે, ફ્રાન્સ (France) અને બેલ્જિયમ (Belgium) વચ્ચે આવેલ આંતરરાષ્ટ્રીય સીમારેખાની લંબાઈની નોંધ બંને દેશોના રાજકીય દસ્તાવેજોમાં છે, પણ ઘણી જુદી જુદી છે.

એક ડગલું વધુ આગળ, કલ્પના કરો કે સમુદ્રતટ રેખા કે જ્યાં જમીન અને સમુદ્ર એકબીજાને મળે છે. રસ્તા અને નદીઓ તેની સરખામણીએ ઓછા વળાંકવાળા હોય છે. તે ઉપરાંત બધા જ દસ્તાવેજો જેમાં, આપણી શાળાનાં પુસ્તકોનો પણ સમાવેશ થાય છે. તેમાં ગુજરાત અથવા આંધ્રપ્રદેશના સમુદ્રતટની લંબાઈ અથવા બે રાજ્યો વચ્ચેની સીમારેખાની લંબાઈની માહિતી આપેલી હોય છે. રેલવે ટિકિટ પર સ્ટેશનની સાથે તેમની વચ્ચેનું અંતર છાપેલું હોય છે. આપ સૌએ રસ્તાઓના કિનારે લાગેલા પથ્થર જોયા હશે. જે જુદાં જુદાં શહેરો વચ્ચેનું અંતર દર્શાવે છે. અંતે આ બધું કેવી રીતે નક્કી કરેલ હશે ?

તમારે એ નક્કી કરવું પડશે કે માપન-પ્રક્રિયામાં કેટલી ત્રુટિ ચલાવી શકાય અને કેટલો ખર્ચ ભોગવી શકાય છે. જો તમારે લઘુતમ ત્રુટિ જોઈએ તો તે માટે ઊંચી ટેક્નોલૉજી અને વધુ ખર્ચની જરૂર પડશે. એ કહેવું પર્યાપ્ત છે કે આ માટે તમારે આધુનિક સ્તરનાં ભૌતિકવિજ્ઞાન, ગણિતશાસ્ત્ર, એન્જિનિયરિંગ અને ટેક્નોલૉજીની જરૂર પડશે. આ બાબતનો સંબંધ જ વિસ્તાર ખંડો (Fractals) સાથે સંબંધિત છે, જે કેટલાક સમયથી સૈદ્ધાંતિક ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ઘણું લોકપ્રિય છે. આમ છતાં જે આંકડા પ્રાપ્ત થાય છે તે કેટલા વિશ્વસનીય છે તે કહેવું મુશ્કેલ છે, જે ફ્રાન્સ અને બેલ્જિયમનો ઉદાહરણમાં સ્પષ્ટ છે. ફ્રાન્સ અને બેલ્જિયમની વાતમાં રહેલી આ વિસંગતતા, વિસ્તારખંડો (Fractals) અને અવ્યવસ્થાપન (Chaos) વિશેની આધુનિક ભૌતિકવિજ્ઞાનના એક પુસ્તકમાં પ્રથમ પાન પર રજૂ કરવામાં આવી છે.

નોંધો કે અહીં અંતિમ અંક 6 વિશ્વસનીય નથી કારણ કે આ અંક 5 તથા 7ની વચ્ચેનો કોઈ પણ હોઈ શકે. અહીં અવલોકનોમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા બે હોવાથી આપણે આમ દર્શાવી શકીએ છીએ. આ કિસ્સામાં બે સાર્થક અંક 2 તથા 6 છે. જેમાં અંક 2 વિશ્વસનીય છે. જ્યારે અંક 6 સાથે ત્રુટિ સંકળાયેલી છે. સાર્થક અંક વિશે વધુ વિસ્તારથી પરિચ્છેદ 2.7માં આપ શીખશો.

આ ઉદાહરણમાં સાપેક્ષ ત્રુટિ અથવા પ્રતિશત ત્રુટિ

$$\delta a = \frac{0.1}{2.6} \times 100 = 4\ \%$$ ◀

2.6.2 ત્રુટિઓનું સંયોજન (Combination of Errors)

આપણે કોઈ પ્રયોગ કરીએ જેમાં ઘણાંબધાં અવલોકનો હોય, તો આપણે ચોક્કસ જાણવું જોઈએ કે બધાં જ અવલોકનોની સંયુક્ત ત્રુટિ કેટલી હશે. ઉદાહરણ તરીકે પદાર્થમાં દ્રવ્યની ઘનતા તેના દળને કદ વડે ભાગતા મળે. જો તેના દળ અને પરિમાણનાં માપનમાં ત્રુટિ હોય, તો આપણે તે જાણવું જોઈએ કે દ્રવ્યની ઘનતામાં કેટલી ત્રુટિ હશે. ત્રુટિનો આવો અંદાજ મેળવવા માટે કેટલીક ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ દ્વારા ત્રુટિનું સંયોજન શીખવું પડશે. આ માટે નીચે મુજબની પ્રક્રિયાને અનુસરીશું :

(a) સરવાળા અથવા તફાવતની ત્રુટિ (Error of a sum or a difference)

ધારો કે બે ભૌતિકરાશિઓ A અને Bનાં માપેલાં મૂલ્યો અનુક્રમે, $A \pm \Delta A$, $B \pm \Delta B$ છે. જ્યાં ΔA અને ΔB તેમની નિરપેક્ષ ત્રુટિઓ છે. આપણે $Z = A + B$માં ઉદ્‌ભવેલી ત્રુટિ ΔZ શોધવી છે. સરવાળો કરતાં

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B)$$

Zમાં શક્ય મહત્તમ ત્રુટિ $\Delta Z = \Delta A + \Delta B$

તફાવત $Z = A - B$ માટે

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B)$$
$$= (A - B) \pm \Delta A \pm \Delta B$$

અથવા $\therefore \pm \Delta Z = \pm \Delta A \pm \Delta B$

અહીં Zની શક્ય મહત્તમ ત્રુટિ ફરીથી $\Delta Z = \Delta A + \Delta B$ છે. **આ પરથી, નિયમ : બે ભૌતિકરાશિઓનો સરવાળો કે બાદબાકી હોય ત્યારે અંતિમ પરિમાણની નિરપેક્ષ ત્રુટિ દરેક રાશિની સ્વતંત્ર નિરપેક્ષ ત્રુટિઓના સરવાળા જેટલી હોય છે.**

▶ *ઉદાહરણ 2.8* થરમૉમિટર વડે બે પદાર્થોનાં માપવામાં આવેલા તાપમાનો અનુક્રમે : $t_1 = 20\ ^\circ C \pm 0.5\ ^\circ C$ અને $t_2 = 50\ ^\circ C \pm 0.5\ ^\circ C$ છે. બંને પદાર્થોનાં તાપમાનનો તફાવત અને તેમાં ઉદ્‌ભવેલ ત્રુટિની ગણતરી કરો.

ઉકેલ $t' = t_2 - t_1 = (50\ ^\circ C \pm 0.5\ ^\circ C) - (20\ ^\circ C \pm 0.5\ ^\circ C)$ $t' = 30\ ^\circ C \pm 1\ ^\circ C$ ◀

(b) ગુણાકાર અથવા ભાગાકારની ત્રુટિ (Error of a product or a quotient)

ધારો કે $Z = AB$ તથા A અને Bનાં માપેલ મૂલ્યો અનુક્રમે $(A \pm \Delta A)$ અને $(B \pm \Delta B)$ છે તો,

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A)(B \pm \Delta B)$$
$$= AB \pm B\Delta A + A\Delta B + \Delta A\Delta B$$

સમીકરણની ડાબી બાજુને Z વડે અને જમણી બાજુને AB વડે ભાગતાં

$$1 \pm \frac{\Delta Z}{Z} = 1 \pm \left(\frac{\Delta A}{A}\right) \pm \left(\frac{\Delta B}{B}\right) \pm \left(\frac{\Delta A}{A}\right)\left(\frac{\Delta B}{B}\right)$$

ΔA અને ΔB સૂક્ષ્મ હોવાથી ગુણાકારવાળું અંતિમ પદ અવગણતાં અહીં મહત્તમ સાપેક્ષ ત્રુટિ, $\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$

તમે સરળતાથી ચકાસી શકો છો કે ઉપર્યુક્ત પરિણામ ભાગાકાર માટે પણ સાચું છે.

આ પરથી, નિયમ : બે ભૌતિકરાશિઓનો ગુણાકાર અથવા ભાગાકાર કરવામાં આવે તો અંતિમ પરિણામમાં ઉદ્ભવતી સાપેક્ષ ત્રુટિ ગુણકોની સાપેક્ષ ત્રુટિના સરવાળા જેટલી હોય છે.

ઉદાહરણ 2.9 અવરોધ $R = V/I$, જ્યાં $V = (100 \pm 5)$ V અને $I = (10 \pm 0.2)$A છે, તો Rમાં પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો.

ઉકેલ Vમાં પ્રતિશત ત્રુટિ 5 % અને Iમાં પ્રતિશત ત્રુટિ 2 % છે.
Rમાં ઉદ્ભવતી કુલ પ્રતિશત ત્રુટિ = 5 % + 2 % = 7 %

ઉદાહરણ 2.10 $R_1 = 100 \pm 3$ ohm અને $R_2 = 200 \pm 4$ ohm અવરોધ ધરાવતા બે અવરોધોને (a) શ્રેણીમાં (b) સમાંતરે જોડેલ છે. (a) શ્રેણી-જોડાણનો તથા (b) સમાંતર જોડાણનો સમતુલ્ય અવરોધ શોધો. (a) માટે સંબંધ $R = R_1 + R_2$ તથા (b) માટે $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ અને $\frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$નો ઉપયોગ કરો.

ઉકેલ (a) શ્રેણી-જોડાણનો સમતુલ્ય અવરોધ

$$R = R_1 + R_2 = (100 \pm 3)\text{ ohm} + (200 \pm 4)\text{ ohm}$$
$$= 300 \pm 7\text{ ohm.}$$

(b) સમાંતર જોડાણનો સમતુલ્ય અવરોધ

$$R' = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{200}{3} = 66.7\text{ohm}$$

હવે, $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ પરથી,

$\frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$ મળે.

$$\Delta R' = (R'^2)\frac{\Delta R_1}{R_1^2} + (R'^2)\frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$
$$= \left(\frac{66.7}{100}\right)^2 3 + \left(\frac{66.7}{200}\right)^2 4$$
$$= 1.8$$

આમ, $R' = 66.7 \pm 1.8$ ohm

(સાર્થક અંકોના નિયમોને અનુસરીને અહીં ΔRને 2ને બદલે 1.8 વડે દર્શાવેલ છે.)

(c) ઘાતાંક ધરાવતી ભૌતિકરાશિનાં માપનમાં ત્રુટિ (Error in Case of a Measured Quantity Raised to a Power)

ધારો કે, $Z = A^2$

તો $\frac{\Delta Z}{Z} = \left(\frac{\Delta A}{A}\right) + \left(\frac{\Delta A}{A}\right) = 2\left(\frac{\Delta A}{A}\right)$

આમ, A^2માં સાપેક્ષ ત્રુટિ Aની સાપેક્ષ ત્રુટિ કરતાં બે ગણી છે.

વ્યાપક રૂપે, $Z = \frac{A^pB^q}{C^r}$

તો $\frac{\Delta Z}{Z} = p\left(\frac{\Delta A}{A}\right) + q\left(\frac{\Delta B}{B}\right) + r\left(\frac{\Delta C}{C}\right)$

આ પરથી, નિયમ : k જેટલો ઘાતાંક ધરાવતી ભૌતિકરાશિમાં ઉદ્ભવતી સાપેક્ષ ત્રુટિ વ્યક્તિગત રાશિની સાપેક્ષ ત્રુટિના k ગણી હોય છે.

ઉદાહરણ 2.11 જો $Z = \frac{A^4B^{\frac{1}{3}}}{CD^{\frac{3}{2}}}$ હોય, તો Zમાં સાપેક્ષ ત્રુટિ શોધો.

ઉકેલ Zમાં ઉદ્ભવતી સાપેક્ષ ત્રુટિ

$$\frac{\Delta Z}{Z} = 4\left(\frac{\Delta A}{A}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta B}{B}\right) + \left(\frac{\Delta C}{C}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\Delta D}{D}\right)$$

ઉદાહરણ 2.12 સાદા લોલકનાં દોલનોનો આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ છે. 1mmની ચોકસાઈ સાથે માપેલ લંબાઈ $L = 20$cm અને 1 s વિભેદનવાળી કાંડા ઘડિયાળથી 100 દોલનો માટે માપેલ સમય 90 s જેટલો મળે છે, તો gનું મૂલ્ય કેટલી ચોકસાઈથી નક્કી થયું હશે ?

ઉકેલ $g = \frac{4\pi^2L}{T^2}$

અહીં, $T = \frac{t}{n}$ અને $\Delta T = \frac{\Delta t}{n}$ માટે $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t}$

L અને tમાં ઉદ્ભવતી ત્રુટિ લઘુતમ માપ ત્રુટિ જેટલી છે.

માટે, $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = \frac{0.1}{20.0} + 2\left(\frac{1}{90}\right) = 0.027$

આમ, gમાં ઉદ્ભવતી પ્રતિશત ત્રુટિ, $100\left(\frac{\Delta g}{g}\right) = 100\left(\frac{\Delta L}{L}\right) + 2 \times 100\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = 3\ \%$

2.7 સાર્થક અંકો (SIGNIFICANT FIGURES)

ઉપર ચર્ચા કરી તેમ દરેક માપનમાં ત્રુટિઓ હોય છે. આમ, માપનમાં પરિણામો એવી રીતે દર્શાવવાં જોઈએ કે જેથી માપનની સચોટતા સ્પષ્ટ થાય. સામાન્ય રીતે માપનમાં દર્શાવાતાં પરિણામો એક સંખ્યા હોય છે, જેમાં બધા જ

વિશ્વસનીય અંકો તથા પ્રથમ અચોક્કસ અંકનો સમાવેશ થાય છે. **વિશ્વસનીય અંકો** અને **પ્રથમ અચોક્કસ અંક**ને સંખ્યાના સાર્થક અંકો કહે છે. જો આપણે કહીએ કે સાદા લોલકના દોલનનો આવર્તકાળ 1.62 s છે. જેમાં અંક 1 અને 6 વિશ્વસનીય અને નિશ્ચિત છે, જ્યારે અંક 2 અચોક્કસ છે. આમ, અવલોકનના માપમાં ત્રણ સાર્થક અંક છે. એક પદાર્થની લંબાઈ માપન બાદ 287.5 cm નોંધવામાં આવે છે. જેમાં ચાર સાર્થક અંક છે. અહીં અંક 2, 8 અને 7 ચોક્કસ છે. પરંતુ અંક 5 અચોક્કસ છે. સ્પષ્ટ છે કે, માપનનાં પરિણામમાં સાર્થક અંકોથી વધુ અંક દર્શાવવા બિનજરૂરી અને ભ્રમિત હોય છે, કારણ કે તે માપનની સચોટતાની બાબતે ગેરમાર્ગે દોરે છે.

કોઈ પણ સંખ્યામાં સાર્થક અંકો નક્કી કરવાના નિયમો નીચે આપેલ ઉદાહરણો દ્વારા સમજી શકાય છે. જેમ આગળ જણાવ્યું તેમ સાર્થક અંક માપનની સચોટતા દર્શાવે છે જે સાધનની લઘુતમ માપ પર આધારિત હોય છે. **કોઈ માપનને જુદા જુદા એકમોમાં પરિવર્તિત કરવાથી સાર્થક અંકોની સંખ્યા બદલાતી નથી.** આ મહત્ત્વપૂર્ણ નોંધ નીચે દર્શાવેલ મોટા ભાગનાં માપનોને સ્પષ્ટ કરે છે.

(1) ઉદાહરણ તરીકે લંબાઈ 2.308 cmમાં ચાર સાર્થક અંક છે. પરંતુ જુદા જુદા એકમોના સંદર્ભે આ લંબાઈ 0.02308 m અથવા 23.08 mm અથવા 23080 μm દર્શાવી શકીએ. આ તમામ સંખ્યાઓમાં સાર્થક અંક સમાન (2, 3, 0, 8) એટલે કે ચાર છે. જે દર્શાવે છે કે સાર્થક અંક નક્કી કરવા માટે દશાંશચિહ્ન કયા સ્થાને છે તેનું કોઈ જ મહત્ત્વ નથી. ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણ પરથી નીચે મુજબના નિયમો મળી શકે છે :

- **બધા જ શૂન્યેતર અંકો સાર્થક અંકો છે.**
- **સંખ્યામાં જો દશાંશચિહન હોય તો તે ગમે ત્યાં હોય તો પણ બે શૂન્યેતર અંકોની વચ્ચે આવેલા બધા જ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક છે.**
- **જો સંખ્યા 1 કરતાં નાની હોય તો દશાંશચિહનની જમણી તરફના પરંતુ પ્રથમ શૂન્યેતર અંકની ડાબી તરફના અંકો સાર્થક અંક નથી. (<u>0</u>.<u>00</u>2308)માં લીટી દોરેલ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક નથી.**
- **દશાંશચિહન સિવાયની સંખ્યામાં અંતિમ શૂન્યેતર અંકની જમણી તરફના શૂન્યાંકો સાર્થક અંક નથી.**

  (એટલે કે 123 m = 12300 cm = 123000 mm સંખ્યાઓમાં ત્રણ જ સાર્થક અંક છે. સંખ્યામાં અંતિમ શૂન્યો સાર્થક અંક નથી.) જોકે તમે હવે પછીનાં અવલોકનો જુઓ,
- **દશાંશચિહનવાળી સંખ્યામાં અંતિમ શૂન્યેતર અંક પછીના બધા જ શૂન્યાંકો સાર્થક અંકો છે.** (સંખ્યા 3.500 અથવા 0.06900માં ચાર સાર્થક અંક છે.)

(2) સંખ્યામાં અંતિમ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક છે કે નહિ તે બાબતે મૂંઝવણ થઈ શકે છે. ધારો કે કોઈ એક લંબાઈ 4.700m નોંધવામાં આવે છે. આ અવલોકન સૂચવે છે કે અહીં અંતિમ શૂન્યાંકનો ઉદ્દેશ માપનની સચોટતા દર્શાવવાનો છે. તેથી તે સાર્થક છે. (જો આ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક ન હોય તો તેને સ્પષ્ટરૂપે દર્શાવવાનો અર્થ નથી અને ત્યારે આપણે આ માપનને માત્ર 4.7 m દર્શાવ્યું હોત.) હવે ધારો કે આ માપનમાં આપણે એકમ બદલીએ 4.700 m = 470.0 cm = 4700 mm = 0.004700 km લખી શકીએ. અહીં છેલ્લાં માપનમાં દશાંશચિહ્ન વગરની સંખ્યામાં અંતિમ બે શૂન્યાંક છે. એટલે કે તેમાં બે સાર્થક અંક છે, એવો માપન (1) મુજબનો નિષ્કર્ષ ખોટો છે. તેમાં વાસ્તવિક રીતે ચાર સાર્થક અંક છે. માત્ર સંખ્યાના એકમ બદલવાથી સાર્થક અંકોની સંખ્યા બદલાતી નથી.

(3) **સાર્થક અંકો નક્કી કરવામાં આવતી દ્વિધા દૂર કરવા માટેનો શ્રેષ્ઠ ઉપાય એ છે કે, માપનને વૈજ્ઞાનિક સંકેત (10 ની ઘાત સ્વરૂપે)માં દર્શાવવા જોઈએ.** આ સંકેત પદ્ધતિમાં દરેક સંખ્યાને $a \times 10^b$ના સ્વરૂપમાં લખવામાં આવે છે. જ્યાં a 1 થી 10 વચ્ચેની કોઈ સંખ્યા અને b 10નો ધન અથવા ઋણ ઘાતાંક છે. સંખ્યાનું સન્નિકટ મૂલ્ય દર્શાવવા માટે આપણે તેને પૂર્ણાંકન (Round Off) કરી શકીએ છીએ. એટલે કે ($a \le 5$) હોય ત્યારે તેને 1 અથવા ($5 < a \le 10$) હોય ત્યારે 10 લઈને સંખ્યાનું રાઉન્ડ ઑફ કરી શકીએ અને ત્યારે સંખ્યાને લગભગ 10^b સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ છીએ. અહીં 10ની ઘાત b ભૌતિકરાશિનાં **માનનો ક્રમ** દર્શાવે છે. ભૌતિકરાશિનાં મૂલ્યના માત્ર અંદાજની જરૂરિયાત હોય ત્યારે તે 10^bના ક્રમનું છે તેમ કહી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે પૃથ્વીનો વ્યાસ (1.28×10^7 m) 10^7mના ક્રમનો છે. તેના માનનો ક્રમ 7 છે. હાઈડ્રોજન પરમાણુનો વ્યાસ (1.06×10^{-10} m) 10^{-10} mના ક્રમનો છે. જેના માનનો ક્રમ −10 છે. એટલે કે પૃથ્વીનો વ્યાસ હાઈડ્રોજન પરમાણુના વ્યાસથી 17 માનના ક્રમ જેટલો મોટો છે. આમ પ્રથમ અંક પછી દશાંશચિહ્ન મૂકવાની એક પ્રથા છે. આમ કરવાથી ઉપર દર્શાવેલ ઉદાહરણ (a)માં ઉદ્ભવતી મૂંઝવણ દૂર થાય છે.

$4.700\text{m} = 4.700 \times 10^2 \text{ cm} = 4.700 \times 10^3 \text{ mm} = 4.700 \times 10^{-3} \text{ km}$

અહીં સાર્થક અંકોની સંખ્યા નક્કી કરવામાં 10ની ઘાતમાં વિસંગતતા છે. છતાં પણ વૈજ્ઞાનિક સંકેતમાં આધાર સંખ્યાના

બધા જ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક હોય છે. ઉપરના કિસ્સામાં દરેક સંખ્યાને ચાર સાર્થક અંક હોય છે.

આમ, વૈજ્ઞાનિક સંકેત સાથે દર્શાવેલી સંખ્યામાં આધાર સંખ્યા a પછી આવતાં શૂન્યાંકો અંગેની દ્વિધા દૂર થાય છે અને આ બધા જ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક છે.

(4) કોઈ પણ માપનને દર્શાવવાની વૈજ્ઞાનિક સંકેત પદ્ધતિ આદર્શ પદ્ધતિ છે.

પરંતુ આ પદ્ધતિ ન અપનાવેલી હોય ત્યારે અગાઉના ઉદાહરણમાં દર્શાવેલ નિયમોનું પાલન કરવું પડે.

- **દશાંશચિહ્ન વગરની 1થી મોટી સંખ્યા માટે અંતિમ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક નથી.**
- **દશાંશચિહ્નવાળી સંખ્યા માટે અંતિમ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક છે.**

(5) 1થી નાની સંખ્યામાં રૂઢિગત રીતે દશાંશચિહ્નની ડાબી તરફ (જેમકે, 0.1250) આવેલા શૂન્યાંક સાર્થક અંક નથી પરંતુ માપનમાં આવી સંખ્યાના અંતમાં આવેલા શૂન્યાંકો સાર્થક અંક છે.

(6) ગુણક અથવા ભાજક કે જે Round Off (સંનિકટ) સંખ્યા ન હોય અને કોઈ માપનનું મૂલ્ય ન દર્શાવતી તે ચોક્કસ હોય છે અને તેમાં અનંત સાર્થક અંકો હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે $r = \frac{d}{2}$ અથવા $s = 2\pi r$માં કારક 2 એક ચોક્કસ સંખ્યા છે અને તેને 2.0, 2.00 અથવા 2.0000 જરૂરિયાત મુજબ લખી શકાય છે. આ જ પ્રમાણે, $T = \frac{t}{n}$ માં n એક ચોક્કસ સંખ્યા છે.

2.7.1 સાર્થક સંખ્યાની ગણિતીય પ્રક્રિયા માટેના નિયમો (Rules of Arithmatic Operation with Significant Figures)

કોઈ ભૌતિકરાશિનાં માપનનાં મૂલ્યોનાં સન્નિકટ મૂલ્યોને સમાવતી ગણતરીનું પરિણામ (દા.ત. એવાં મૂલ્યો જેમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા સીમિત છે.) માપનમાં મૂળ મૂલ્યોમાં રહેલી અનિશ્ચિતતા દર્શાવતી હોવી જોઈએ. માપેલ મૂલ્યો પર આધારિત આ પરિણામ, તે જેનાં પર આધારિત છે તે મૂળ માપેલાં મૂલ્યો કરતાં વધારે ચોકસાઈવાળું હોઈ શકે નહિ. આમ, સામાન્ય રીતે અંતિમ પરિણામમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા તે જેમાંથી મેળવેલ હોય તે મૂળ મૂલ્યોમાંના સાર્થક અંકો કરતાં વધુ ન હોવી જોઈએ. એટલે કે જો પદાર્થના દળનું માપન 4.237 g (ચાર સાર્થક અંકો) અને કદનું માપન 2.51 cm^3 માપેલ હોય તો 11 દશાંશસ્થાનો સુધીની ગાણિતિક ગણતરી દ્વારા તેની ઘનતા 1.68804780876 g/cm^3 મળે છે. સ્પષ્ટ છે કે ઘનતાનાં મૂલ્યની આ ગણતરી આટલી સચોટતા સાથે દર્શાવેલી હાસ્યાસ્પદ અને અસંગત છે કારણ કે જે માપનો પર આ ગણતરીનો આધાર છે તે માપનોની સચોટતા ઘણી ઓછી છે. ગાણિતિક ગણતરીના નીચે આપેલ નિયમો સ્પષ્ટતા કરે છે કે કોઈ પણ ગણતરીનાં અંતિમ પરિણામને એટલી સચોટતાથી દર્શાવવું જોઈએ કે જે ઇનપુટ તરીકે લીધેલા માપનનાં મૂલ્યોની સચોટતા સાથે સુસંગત હોય.

(1) **સંખ્યાઓમાં ગુણાકાર કે ભાગાકારથી મળતાં અંતિમ પરિણામમાં એટલા જ સાર્થક અંક રાખવા જોઈએ જેટલા મૂળ સંખ્યાઓ પૈકીની જે સંખ્યામાં લઘુતમ સાર્થક અંક હોય.**

એટલે કે ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં ઘનતાનાં મૂલ્યને ત્રણ સાર્થક અંક સાથે દર્શાવવા જોઈએ.

$$\text{ઘનતા} = \frac{4.237\ \text{g}}{2.51\ \text{cm}^3} = 1.69\ \text{g/cm}^3$$

આ જ રીતે, પ્રકાશની આપેલ ઝડપ 3.00×10^8 m s^{-1} (ત્રણ સાર્થક અંક)

અને એક વર્ષ (1 y = 365.25 d)માં

3.1557×10^7 s (પાંચ સાર્થક અંક) છે. તો પ્રકાશવર્ષમાં

9.47×10^{15} m (ત્રણ સાર્થક અંક) હોવા જોઈએ.

(2) **સંખ્યાઓનાં સરવાળા-બાદબાકીથી તે સંખ્યાઓમાંથી લઘુતમ દશાંશસ્થાનો ધરાવતી સંખ્યામાં જેટલાં દશાંશસ્થાનો હોય તેટલાં જ દશાંશસ્થાનો અંતિમ પરિણામમાં રાખવાં જોઈએ.**

ઉદાહરણ તરીકે 436.32 g, 227.2 g અને 0.301 gનો માત્ર ગણિતીય સરવાળો 663.821 g છે. આપેલ સંખ્યાઓ પૈકી સૌથી ઓછી સચોટતાવાળું માપ (227.2 g)માં દશાંશચિહ્ન બાદ એક અંક છે. માટે અંતિમ પરિણામ 663.8 g Round off કરીને દર્શાવવું જોઈએ. આ જ રીતે લંબાઈનો તફાવત નીચે મુજબ દર્શાવવો જોઈએ :

$0.307\ \text{m} - 0.304\ \text{m} = 0.003\ \text{m} = 3 \times 10^{-3}\ \text{m}$

અહીં એ નોંધો કે ગુણાકાર અને ભાગાકાર માટેના નિયમ (1)નો ઉપયોગ કરીને આ ઉદાહરણમાં **સરવાળો** 664 *g* ન લખી શકાય તથા **બાદબાકી** માટે 3.00×10^{-3} m ન લખી શકાય. અહીં નિયમ (1) માપનની સચોટતાને યોગ્ય રીતે વ્યક્ત કરતો નથી. સરવાળા અને બાદબાકીનો નિયમ દશાંશ-સ્થાનોના પદમાં છે.

2.7.2 અનિશ્ચિત અંકોની સંન્નિકટતા (Rounding off the uncertain Digits)

સંન્નિકટ સંખ્યાઓની ગણતરીથી મેળવેલ જે પરિણામોમાં એક કરતાં વધુ અનિશ્ચિત અંકો હોય છે તેમને રાઉન્ડ ઑફ (Round off) કરવા જોઈએ. મોટા ભાગના કિસ્સાઓમાં સંખ્યાઓને યોગ્ય સાર્થક અંક સુધી Round off કરવાના નિયમો સ્પષ્ટ છે. સંખ્યા 2.746ને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી રાઉન્ડ ઑફ કરતાં 2.75 મળે જ્યારે 2.743ને રાઉન્ડ ઑફ કરતાં 2.74 મળે છે. **પરંપરા મુજબ નિયમ એ છે કે, જો પડતો મૂકવામાં આવતો**

બિનસાર્થક અંક 5થી મોટો હોય. (આગળનાં ઉદાહરણમાં લીટી દોરેલ અંક) તો તે અંકના પૂર્વવર્તી અંકમાં 1નો વધારો કરવો અને જો અંક 5થી નાનો હોય તો કોઈ જ ફેરફાર કરવો નહિ. પરંતુ જો સંખ્યા 2.745 કે જેમાં બિનસાર્થક અંક 5 છે. ત્યારે શું ? અહીં પરંપરા એવી છે કે, પૂર્વવર્તી અંક બેકી હોય તો બિનસાર્થક અંક પડતો મૂકવો અને એકી સંખ્યા હોય તો તેમાં 1નો વધારો કરવો. માટે સંખ્યા 2.745ને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી Rounded off કરતાં સંખ્યા 2.74 થાય. બીજી તરફ સંખ્યા 2.735ને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી Rounded off કરતાં સંખ્યા 2.74 થાય. કારણ કે અહીં પૂર્વવર્તી અંક એકી છે.

અટપટી અથવા જટિલ લાંબી ગણતરી હોય ત્યારે મધ્યવર્તી પદોમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા કરતાં એક અંક વધુ રાખવો જોઈએ અને ગણતરીને અંતે યોગ્ય સાર્થક અંક સુધી Round off કરવી જોઈએ. આ જ રીતે ઘણા સાર્થક અંક ધરાવતી એક જાણીતી સંખ્યા શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ 2.99792458×10^8 m/s ને Round off કરતાં તેનું સંનિકટ મૂલ્ય 3×10^8 m/s મળે છે. જેનો ઘણી વખત ગણતરીમાં ઉપયોગ કરીએ છીએ. છેલ્લે યાદ રાખો કે સૂત્રોમાં આવતો ચોક્કસ અંક જેમકે,

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ માં 2πના સાર્થક અંકોની સંખ્યા ખૂબ જ મોટી (અનંત) હોય છે. πનું મૂલ્ય = 3.1415926 .... ખૂબ વધુ સાર્થક અંકો માટે જાણીતું છે. સાર્થક અંકોની સંખ્યા મર્યાદિત હોય તેવા ચોક્કસ કિસ્સાઓમાં જરૂરિયાત પ્રમાણે πનું મૂલ્ય 3.142 અથવા 3.14 તમે લઈ શકો છો.

▶ *ઉદાહરણ 2.13* કોઈ ઘનની બધી જ બાજુનું માપેલ મૂલ્ય 7.203 m છે. યોગ્ય સાર્થક અંક સુધી ઘનનું કુલ પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ તથા કદ શોધો.

ઉકેલ માપેલ લંબાઈમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા 4 છે. આ માટે ગણતરી કરેલ ક્ષેત્રફળ અને કદનાં મૂલ્યોને પણ 4 સાર્થક અંકો સુધી Round off (સંનિકટ) કરવા જોઈએ.

ઘનનું પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ $= 6(7.203)^2\ m^2$

$= 311.299254\ m^2$

$= 311.3\ m^2$

ઘનનું કદ $= (7.203)^3\ m^3$

$= 373.714754\ m^3$

$= 373.7\ m^3$ ◀

▶ *ઉદાહરણ 2.14* 5.74 gનો એક પદાર્થ 1.2 cm³ જેટલો અવકાશ રોકે છે. સાર્થક અંકોને ધ્યાનમાં રાખી તેની ઘનતા શોધો.

ઉકેલ દળનાં માપનમાં 3 સાર્થક અંક છે. જ્યારે કદનાં માપનમાં માત્ર બે સાર્થક અંક છે. તેથી ઘનતાને માત્ર બે સાર્થક અંકો સુધી દર્શાવી શકાય.

ઘનતા $= \frac{5.74}{1.2}\ g\ cm^{-3}$

$= 4.8\ g\ cm^{-3}$ ◀

2.7.3 અંકગણિતીય ગણતરીનાં પરિણામોમાં અનિશ્ચિતતા નક્કી કરવાના નિયમો (Rules for Determining the Uncertainty in the Results of Arithmatic Calculations)

સંખ્યા/માપેલ રાશિની ગાણિતિક ગણતરીમાં અનિશ્ચિતતા અથવા ત્રુટિ નક્કી કરવાના નિયમો નીચે આપેલ ઉદાહરણો દ્વારા સમજી શકાય :

(1) એક પાતળી લંબચોરસ તકતીની લંબાઈ અને પહોળાઈનું માપન મીટરપટ્ટીથી કરતાં તે અનુક્રમે 16.2 cm અને 10.1 cm મળે છે. અહીં દરેક માપનમાં ત્રણ સાર્થક અંક છે. તેનો અર્થ એ થાય કે લંબાઈ l ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$l = 16.2 \pm 0.1$ cm

$= 16.2$ cm $\pm$ 0.6 %

આ જ રીતે, પહોળાઈ b ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$b = 10.1 \pm 0.1$ cm

$= 10.1$ cm $\pm$ 1 %

હવે ત્રુટિનાં સંયોજનના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને, બે (અથવા વધુ) પ્રાયોગિક મૂલ્યોનાં ગુણનફળમાં ત્રુટિ,

$l\ b = 163\ cm^2 \pm 1.6$ %

$= 163.62 \pm 2.6\ cm^2$ થશે.

આ ઉદાહરણ અનુસાર આપણે અંતિમ પરિણામ આ મુજબ લખીશું.

$l\ b = 164 \pm 3\ cm^2$

અહીં, લંબચોરસ તકતીનાં ક્ષેત્રફળની ગણતરીમાં અનિશ્ચિતતા અથવા ત્રુટિ 3 cm² છે.

(2) **જો કોઈ પ્રાયોગિક મૂલ્યોનો ગણ n-સાર્થક અંકો સુધી દર્શાવેલ હોય, તો આ મૂલ્યોના સંયોજનથી મળતા પરિણામમાં પણ n-સાર્થક અંકો જ માન્ય છે.**

પરંતુ જો પ્રાયોગિક મૂલ્યોની સંખ્યા ઘટાડવામાં આવે, તો સાર્થક અંકોની સંખ્યા ઘટાડી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, 12.9 g − 7.06 g બંને ત્રણ સાર્થક અંક દર્શાવે છે. પરંતુ તેને 5.84 g રૂપે મૂલ્યાંકિત ન કરી શકાય. પણ તેને 5.8 g દર્શાવાય કારણ કે સરવાળો કે બાદબાકીમાં અનિશ્ચિતતા અલગ રીતે સંયોજિત થાય છે. (સરવાળા કે બાદબાકી માટેની સંખ્યામાં લઘુતમ સાર્થક અંક નહિ પરંતુ લઘુતમ દશાંશસ્થાનો ધરાવતી સંખ્યા જોવાય છે.)

(3) સાર્થક સંખ્યાના મૂલ્યમાં અંકો સહિત દર્શાવેલ સાપેક્ષ ત્રુટિ માત્ર n પર આધારિત નથી. પરંતુ સંખ્યા તે સંખ્યા પર પણ આધારિત છે.

ઉદાહરણ તરીકે, દ્રવ્યમાન 1.02 g માપનમાં ચોકસાઈ ±0.01 g સુધી છે. જ્યારે આ જ રીતે બીજા માપન 9.89 gમાં પણ ચોકસાઈ ±0.01 g સુધીની છે.

$$1.02 \text{ gમાં સાપેક્ષ ત્રુટિ} = \pm\left(\frac{0.01}{1.02}\right) \times 100\ \% = \pm1\ \%$$

$$\text{આ જ રીતે } 9.89 \text{ gમાં સાપેક્ષ ત્રુટિ,} = \left(\frac{\pm0.01}{9.89}\right) \times 100\ \% = \pm0.1\ \%$$

અંતમાં યાદ રાખો કે, **બહુપદીય ગણતરીમાં લઘુત્તમ સચોટ માપનના અંક કરતાં દરેક માપનમાં એક સાર્થક અંક વધારે રાખીને મધ્યવર્તી પરિણામોની ગણતરી કરવી જોઈએ. આ રીતે આંકડાઓ યોગ્ય કર્યા બાદ ગણિતીય પ્રક્રિયા કરવી જોઈએ.** અન્યથા Round off માં ત્રુટિ ઉદ્‌ભવશે. ઉદાહરણ તરીકે 9.58ના વ્યસ્તને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી Round off કરતાં મળતું મૂલ્ય 0.104 છે. પરંતુ 0.104નાં વ્યસ્તને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી Round off કરતાં મળતું મૂલ્ય 9.62 છે. જો આપણે $\frac{1}{9.58} = 0.1044$ લખ્યા હોત, તો તેના વ્યસ્તને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી Round off કરતાં 9.58 મળે.

ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણ જટિલ બહુપદીની ગણતરીનાં મધ્યવર્તી પરિણામમાં (લઘુતમ સચોટ માપના અંકોની સાપેક્ષે) એક-અંક વધુ રાખવાની ધારણા ન્યાય સંગત છે તેમ દર્શાવે છે. જેથી સંખ્યાઓની Round off પ્રક્રિયામાં વધારાની ત્રુટિ નિવારી શકાય.

2.8 ભૌતિકરાશિનાં પરિમાણો (DIMENTIONS OF PHYSICAL QUANTITIES)

કોઈ ભૌતિકરાશિની પ્રકૃતિ તેનાં પરિમાણ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે. મેળવેલા એકમો દ્વારા વ્યક્ત થતી બધી જ ભૌતિકરાશિઓ સાત મૂળભૂત અથવા પાયાની રાશિઓનાં સંયોજનના પદમાં આપી શકાય છે. આ મૂળ સાત રાશિઓને આપણે ભૌતિક જગતનાં સાત પરિમાણ કહી શકીએ અને તેને ચોરસ કૌંસ [ ] (Square Brackets) સાથે દર્શાવી શકીએ છીએ. **આ રીતે લંબાઈનું પરિમાણ [L], દળનું [M], સમયનું [T], વિદ્યુતપ્રવાહનું [A], થરમૉડાયનેમિક તાપમાનનું [K], જ્યોતી તીવ્રતાનું [cd] અને દ્રવ્યના જથ્થાનું [mol] છે. કોઈ પણ ભૌતિકરાશિને વ્યક્ત કરવા માટે મૂળભૂત રાશિઓ પર મૂકવામાં આવતાં ઘાતાંકોને તે ભૌતિકરાશિના પરિમાણ કહે છે.** ધ્યાન રાખો કે કોઈ રાશિને ચોરસ કૌંસ [ ]માં મૂકવાનો અર્થ તે છે કે આપણે તે **રાશિના પરિમાણ** પર વિચાર કરીએ છીએ.

યંત્રશાસ્ત્રમાં બધી જ ભૌતિકરાશિઓને [L], [M] અને [T]નાં પરિમાણનાં પદોમાં વ્યક્ત કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે પદાર્થ દ્વારા ઘેરાયેલા કદને લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અથવા ત્રણ લંબાઈના ગુણાકાર દ્વારા વ્યક્ત કરવામાં આવે છે માટે કદનું પરિમાણ $[L] \times [L] \times [L] = [L]^3 = [L^3]$ છે. અહીં કદ, દળ અને સમય પર આધારિત ન હોવાથી એમ કહી શકાય કે કદમાં દળનું પરિમાણ શૂન્ય $[M^0]$, સમયનું પરિમાણ શૂન્ય $[T^0]$ અને લંબાઈમાં પરિમાણ ત્રણ છે. આ જ રીતે, બળને દ્રવ્યમાન અને પ્રવેગના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે.

$$\text{બળ} = \text{દળ} \times \text{પ્રવેગ} = \text{દ્રવ્યમાન} \times \text{લંબાઈ}/(\text{સમય})^2$$

$$\text{બળનાં પરિમાણ } \frac{[M][L]}{[T]^2} = [MLT^{-2}] \text{ છે.}$$

અહીં બળને દ્રવ્યમાનમાં 1, લંબાઈમાં 1 અને સમયમાં −2 પરિમાણ ધરાવે છે તથા બાકીની મૂળ રાશિઓમાં પરિમાણ શૂન્ય છે.

અહીં નોંધો કે આ પ્રકારની રજૂઆતમાં માનનો વિચાર કરવામાં આવતો નથી. તેમાં માત્ર ભૌતિકરાશિઓના પ્રકાર ને જ ધ્યાનમાં લેવાય છે. આમ, વેગમાં તફાવત, મૂળવેગ, સરેરાશ વેગ, અંતિમ વેગ અને ઝડપ તે બધા જ આ સંદર્ભમાં સમતુલ્ય છે. આ બધી રાશિઓને લંબાઈ/સમય તરીકે દર્શાવી શકાતી હોવાથી તેમના પરિમાણ $\frac{[L]}{[T]}$ અથવા $[LT^{-1}]$ છે.

2.9 પારિમાણિક સૂત્રો અને પારિમાણિક સમીકરણો (DIMENSIONAL FORMULAE AND DIMENSIONAL EQUATIONS)

આપેલ ભૌતિકરાશિને કેટલી અને કઈ મૂળભૂત રાશિઓ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે તે દર્શાવતા સમીકરણને તે ભૌતિકરાશિનું પારિમાણિક સૂત્ર કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે કદનું પારિમાણિક સૂત્ર $[M^0L^3T^0]$ અને ઝડપ અથવા વેગનું $[M^0LT^{-1}]$ છે. આ જ રીતે $[M^0LT^{-2}]$ એ પ્રવેગનું પારિમાણિક સૂત્ર અને $[ML^{-3}T^0]$ દળઘનતાનું પારિમાણિક સૂત્ર છે.

કોઈ ભૌતિકરાશિને તેના પારિમાણિક સૂત્ર સાથે લખવાથી મળતાં સમીકરણને તે **ભૌતિકરાશિનું પારિમાણિક સમીકરણ**

કહે છે. આમ, પારિમાણિક સમીકરણ એવું સમીકરણ છે કે જેમાં ભૌતિકરાશિને મૂળભૂત રાશિઓનાં પરિણામનાં પદોમાં નિરૂપણ કરેલ હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે કદ [V], ઝડપ [υ], બળ [F] અને દળઘનતા [ρ]નાં પારિમાણિક સમીકરણો નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય છે :

$$[V] = [M^0L^3T^0]$$
$$[\upsilon] = [M^0LT^{-1}]$$
$$[F] = [MLT^{-2}]$$
$$[\rho] = [ML^{-3}T^0]$$

ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતાં સમીકરણ પરથી પારિમાણિક સમીકરણ મેળવી શકાય છે. વિવિધ પ્રકારની ઘણીબધી ભૌતિકરાશિઓનાં પારિમાણિક સૂત્રો તે ભૌતિકરાશિનો અન્ય ભૌતિકરાશિ સાથેનો સંબંધ દર્શાવતાં સૂત્રો પરથી મેળવી, મૂળભૂત ભૌતિકરાશિના સંદર્ભમાં રજૂ કરેલાં પારિમાણિક સૂત્રો તમારા માર્ગદર્શન અને ત્વરિત સંદર્ભ માટે પરિશિષ્ટ 9માં આપેલ છે.

2.10 પારિમાણિક વિશ્લેષણ અને તેના ઉપયોગો (DIMENSIONAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS)

પરિમાણની સંકલ્પનાની જાણકારી ભૌતિક વર્તણૂકનાં વર્ણનમાં માર્ગદર્શન આપે છે અને પોતાનું એક પાયાનું મહત્ત્વ ધરાવે છે, કારણ કે સમાન પરિમાણો ધરાવતી ભૌતિકરાશિઓના જ સરવાળા અથવા બાદબાકી થઈ શકે. પારિમાણિક વિશ્લેષણનું સંપૂર્ણ જ્ઞાન, જુદી જુદી ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેના સંબંધો મેળવવામાં, તારવણી, ચોકસાઈ અને પારિમાણિક સુસંગતતાની અથવા જુદા જુદા ગણિતીય સૂત્રોમાં સમાંગ ચકાસણી કરવામાં મદદરૂપ છે. જ્યારે બે અથવા વધારે ભૌતિકરાશિઓના માનનો ગુણાકાર કરવામાં આવે ત્યારે, તેમના એકમોની સાથે સામાન્ય બીજગણિતીય સંજ્ઞાઓની જેમ જ ગણતરી કરવામાં આવે છે. અંશ અને છેદમાંના સમાન એકમો રદ કરી શકીએ છીએ. આ બાબત ભૌતિકરાશિનાં પરિમાણોને પણ લાગુ પાડી શકાય છે. આ રીતે સમીકરણની બંને બાજુએ દર્શાવાતી ભૌતિકરાશિની સંજ્ઞાઓમાં સમાન પરિમાણ હોવાં જોઈએ.

2.10.1 સમીકરણોની પારિમાણિક સુસંગતતાની ચકાસણી (Checking the Dimensional Consistency of Equations)

ભૌતિકરાશિનાં માનને ઉમેરીને ભેગા અથવા એકબીજામાંથી બાદ ત્યારે જ કરી શકાય જ્યારે તેમનાં પરિમાણ સમાન હોય. બીજા શબ્દોમાં સમાન ભૌતિકરાશિને આપણે ઉમેરી અથવા બાદ કરી શકીએ. આમ, વેગને બળમાં ઉમેરી શકાય નહિ, અથવા વિદ્યુતપ્રવાહને થરમૉડાયનેમિક તાપમાનમાંથી બાદ ન કરી શકાય. આ સરળ સિદ્ધાંતોને **પરિમાણનો સુસંગતતાનો નિયમ (The principle of homogeneity of dimensions)** કહે છે. જે સમીકરણોની સત્યાર્થતા ચકાસવા ખૂબ જ ઉપયોગી છે. જો કોઈ સમીકરણનાં બધાં જ પદોનાં પરિમાણ સમાન ન હોય, તો તે સમીકરણ ખોટું છે. આથી તે કોઈ પદાર્થની લંબાઈ (અથવા અંતર) માટે, મૂળ ગાણિતિક સંબંધમાં આવતી સંજ્ઞાઓને અનુલક્ષીને સૂત્રની તારવણી આપણે કરી શકીએ જ્યારે બધાં જ વ્યક્તિગત પરિમાણોનું સાદું રૂપ આપીએ ત્યારે તેમાં માત્ર લંબાઈનું જ પરિમાણ બાકી રહેવું જોઈએ. આ જ રીતે આપણે ઝડપનું સમીકરણ મેળવીએ તો બંને બાજુએ રહેલાં પરિમાણોનું સાદું રૂપ આપતાં લંબાઈ/સમય અથવા [LT^{-1}] રહેવું જોઈએ.

જો કોઈ સમીકરણની સત્યાર્થતા માટે સંદેહ હોય ત્યારે સમીકરણની સુસંગતતાની ચકાસણી માટે સર્વમાન્ય પ્રથા અનુસાર પરિમાણોનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ. પરંતુ પારિમાણિક સુસંગતતા કોઈ પણ સમીકરણ સાચું જ છે તેવી બાંયધરી આપતું નથી. પરિમાણરહિત રાશિઓ અથવા વિધેયો માટે તે અનિશ્ચિત છે. આ દલીલ મુજબ વિશિષ્ટ વિધેયો જેવા કે ત્રિકોણમિતીય, લઘુગણકીય અને ચરઘાતાંકીય વિધેયો પરિમાણરહિત હોવા જોઈએ. એક ચોક્કસ અંક, સમાન ભૌતિકરાશિનો ગુણોત્તર જેમકે ખૂણો, જેમકે (લંબાઈ/લંબાઈ) ગુણોત્તર, વક્રીભવનાંક એટલે કે (પ્રકાશની શૂન્યાવકાશમાં ઝડપ/પ્રકાશની માધ્યમમાં ઝડપ) વગેરેને પરિમાણ નથી.

હવે આપણે નીચેના સમીકરણની સુસંગતતા અથવા સમાંગતા ચકાસીએ,

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \left(\frac{1}{2}\right) at^2$$

અહીં અંતર x કણ અથવા પદાર્થ વડે t સમયમાં કપાયેલ અંતર છે. જે x_0 સ્થાનેથી ગતિની શરૂઆત કરે છે. $t = 0$ સમયે તેનો પ્રારંભિક વેગ υ_0 અને ગતિની દિશામાં અચળ પ્રવેગ a છે.

દરેક પદનાં પરિમાણો નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$[x] = [L]$$
$$[x_0] = [L]$$
$$[\upsilon_0 t] = [LT^{-1}][T] = [L]$$
$$\left[\left(\frac{1}{2}\right) at^2\right] = [LT^{-2}][T^2] = [L]$$

આ સમીકરણની જમણી બાજુએ દરેક પદ સમાન પરિમાણ ધરાવે છે અને તે લંબાઈનું જ છે, જે સમીકરણની ડાબી બાજુના પરિમાણ જેવું જ છે. આથી આ સમીકરણ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ સાચું સમીકરણ છે.

અહીં નોંધવું જોઈએ કે પારિમાણિક સુસંગતતાની ચકાસણી એકમોની સુસંગતતાથી વધારે કે ઓછું કંઈ જ જણાવતું નથી.

પરંતુ તેનો ફાયદો એ છે કે કોઈ એકમની ચોક્કસ પસંદગી માટે આપણને કોઈ જ બંધન નથી તથા આપણે એકમોના ગુણકો કે સહગુણકો વિશેની ચિંતા કરવાની જરૂર નથી. એક વાત મગજમાં ગોઠવી દો કે **જો કોઈ સમીકરણ સાતત્યતા ચકાસણીમાં અસફળ થાય તો તે ખોટું સાબિત થાય, પરંતુ જો તે સફળ થાય તો તે સાચું જ છે તેમ સાબિત નથી થતું. આમ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ સાચું સમીકરણ વાસ્તવિક રીતે યથાર્થ (સાચું) ન પણ હોઈ શકે પરંતુ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ વિસંગત સમીકરણ ખોટું જ સમીકરણ હોવું જોઈએ.**

ઉદાહરણ 2.15 આપેલ સમીકરણ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ સાચું છે કે નહિ તે ચકાસો. $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh$ જ્યાં m પદાર્થનું દળ, υ તેનો વેગ, g ગુરુત્વપ્રવેગ અને h ઊંચાઈ છે.

ઉકેલ ડાબી બાજુનાં પરિમાણ

$$[M][LT^{-1}]^2 = [M][L^2T^{-2}]$$
$$= [ML^2T^{-2}]$$

જમણી બાજુનાં પરિમાણ

$$= [M][LT^{-2}][L] = [M][L^2T^{-2}]$$
$$= [ML^2T^{-2}]$$

અહીં, ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુનાં પરિમાણો સમાન છે. એટલે કે સમીકરણ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ સાચું છે. ◀

ઉદાહરણ 2.16 ઊર્જાનો SI એકમ J = kgm^{2}s^{-2} અને તે જ રીતે, વેગ υ માટે ms^{-1} અને પ્રવેગ a માટે ms^{-2} છે. નીચે આપેલ સૂત્રો પૈકી કયાં સૂત્રો પારિમાણિક દૃષ્ટિએ ગતિઊર્જા (K) માટે તમે ખોટાં ઠેરવશો ? (m પદાર્થનું દળ સૂચવે છે.)

(a) $K = m^2\upsilon^3$

(b) $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

(c) $K = ma$

(d) $K = \left(\frac{3}{16}\right)m\upsilon^2$

(e) $K = \left(\frac{1}{2}\right)m\upsilon^2 + ma$

ઉકેલ દરેક સાચું સૂત્ર કે સમીકરણની બંને બાજુએ પરિમાણો સમાન હોય છે. માત્ર સમાન ભૌતિક પરિમાણ ધરાવતી ભૌતિકરાશિ ઉમેરી અથવા બાદ કરી શકાય છે. સમીકરણોની જમણી બાજુની ભૌતિકરાશીના પરિમાણ (a) માટે $[M^2L^3T^{-3}]$ (b) અને (d) માટે $[ML^2T^{-2}]$ (c) માટે $[MLT^{-2}]$, જ્યારે (e)માં જમણી બાજુ આવેલી રાશિ યોગ્ય પરિમાણ ધરાવતી નથી. કારણ કે તેમાં જુદાં જુદાં પરિમાણ ધરાવતી રાશિઓનો સરવાળો છે. હવે ગતિઊર્જા Kનું પરિમાણ $[ML^2T^{-2}]$ હોવાથી સૂત્રો (a), (c) અને (e) નકારી શકાય. નોંધો કે, પારિમાણિક દલિલો (b) અથવા (d) તે બે પૈકી કયું સૂત્ર સાચું છે તે જણાવતી નથી. આ માટે ગતિઊર્જાની મૂળ વ્યાખ્યા જોવી જોઈએ. (જુઓ પ્રકરણ 6.) ગતિઊર્જાનું સાચું સૂત્ર (b) વડે રજૂ થાય છે. ◀

2.10.2 ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવવો (Deducing Relation among the Physical Quantities)

ઘણી વાર ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ તારવવા માટે પરિમાણની રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. આ માટે આપણે એક ભૌતિકરાશિ અન્ય કઈ કઈ ભૌતિકરાશિ (ત્રણ ભૌતિકરાશિ સુધી અથવા રેખીય સ્વતંત્ર ચલો સુધી) પર આધારિત છે તે જાણવું પડે અને તેને તેમના ગુણાકાર પર આધારિત લેવી પડે. હવે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 2.17 એક સાદું લોલક વિચારો જેમાં ગોળાને એક દોરી સાથે બાંધેલું છે અને તે ગુરુત્વબળની અસર હેઠળ દોલનો કરે છે. ધારો કે સાદા લોલકનાં દોલનોનો આવર્તકાળ તેની લંબાઈ (l), ગોળાનાં દળ (m), ગુરુત્વપ્રવેગ (g) પર આધારીત છે. તો પરિમાણની રીતનો ઉપયોગ કરીને આવર્તકાળનું સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ આવર્તકાળ Tનો આધાર ભૌતિકરાશિઓ l, g અને m પર છે જેને ગુણાકાર સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખી શકાય :

$T = kl^x g^y m^z$ જ્યાં k = પરિમાણરહિત અચળાંક અને x, y અને z ઘાતાંક છે. બંને બાજુનાં પરિમાણો લેતાં

$$[L^0M^0T^1] = [L^1]^x\ [L^1T^{-2}]^y\ [M^1]^z$$
$$= L^{x+y}T^{-2y}M^z$$

બંને બાજુ પરિમાણોની સરખામણી કરતાં

$x + y = 0$; $-2y = 1$ અને $z = 0$

આથી, $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$

આમ, $T = k\,l^{\frac{1}{2}}\,g^{\frac{1}{2}}$ અથવા $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$

અહીં નોંધો કે અચળાંક kનું મૂલ્ય પરિમાણની રીતે મેળવી શકાતું નથી. અહીં સમીકરણની જમણી બાજુએ કોઈ અંકનો ગુણાકાર કરવામાં કોઈ જ વાંધો નથી. કારણ કે પરિમાણ પર કોઈ જ અસર કરતો નથી.

વાસ્તવમાં, $k = 2\pi$, તેથી $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ◀

પરસ્પર આધારિત ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવવામાં પારિમાણિક વિશ્લેષણ ખૂબ જ ઉપયોગી છે. જોકે પરિમાણરહિત અચળાંકો આ રીતથી મેળવી શકાતા નથી. પરિમાણની રીત માત્ર પારિમાણિક માન્યતા ચકાસે છે પણ તેના વડે કોઈ પણ સમીકરણમાં ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો સચોટ (યથાર્થ) સંબંધ ચકાસી શકાતો નથી. તે સમાન પરિમાણ ધરાવતી ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો ભેદ દર્શાવતી નથી.

આ પ્રકરણના અંતમાં આપવામાં આવેલ સ્વાધ્યાયના ઘણા પ્રશ્નો પારિમાણિક વિશ્લેષણ માટે કૌશલ્ય મેળવવામાં તમને મદદરૂપ થશે.

સારાંશ

1. ભૌતિકવિજ્ઞાન ભૌતિકરાશિઓનાં માપન પર આધારિત એક પારિમાણિક વિજ્ઞાન છે. કેટલીક ભૌતિકરાશિઓ જેવી કે (લંબાઈ, દ્રવ્યમાન, સમય વિદ્યુતપ્રવાહ, થરમૉડાયનેમિક તાપમાન, દ્રવ્યનો જથ્થો અને જ્યોતિ તીવ્રતા)ને મૂળભૂત / પાયાની ભૌતિકરાશિ તરીકે પસંદ કરવામાં આવી છે.
2. બધી જ મૂળભૂત ભૌતિકરાશિને કેટલીક પાયાની, યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પરિસ્થિતિના સંદર્ભે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે જે પ્રમાણભૂત માનક દ્વારા પ્રમાણિત થયેલ છે. જેને એકમ કહે છે (જેમકે મીટર, કિલોગ્રામ, સેકન્ડ, એમ્પિયર, કેલ્વિન, મોલ અને કૅન્ડેલા) મૂળભૂત અથવા પાયાની ભૌતિકરાશિઓના એકમોને મૂળભૂત અથવા પાયાના એકમો કહે છે.
3. પાયાની ભૌતિકરાશિઓ પરથી મેળવેલ અન્ય ભૌતિકરાશિઓના એકમોને મૂળભૂત રાશિઓના એકમોનાં સંયોજન રૂપે દર્શાવી શકાય છે અને તેને સાધિત એકમો કહે છે. મૂળભૂત એકમો અને સાધિત એકમોના સંપૂર્ણ સમૂહને એકમ પદ્ધતિ કહે છે.
4. સાત મૂળભૂત એકમો પર આધારિત એકમોની આંતરરાષ્ટ્રીય પદ્ધતિ (SI) હાલમાં આંતરરાષ્ટ્રીય સ્તરે સ્વીકૃત એકમ પદ્ધતિ છે. આ પદ્ધતિ સમગ્ર વિશ્વમાં વ્યાપક રૂપે ઉપયોગમાં લેવાય છે.
5. મૂળભૂત રાશિ અને તેના દ્વારા મેળવેલ સાધિત રાશિઓના ભૌતિક માપન માટે SI એકમોનો ઉપયોગ થાય છે. કેટલાક તારવેલા એકમોને SI એકમ વિશેષ નામથી રજૂ કરવામાં આવે છે. (જેમકે જૂલ, ન્યૂટન, વૉટ વગેરે)
6. SI એકમો અર્થસભર અને આંતરરાષ્ટ્રીય સ્વીકૃત એકમ સંકેતો છે. (જેમકે મીટર માટે (m) કિલોગ્રામ માટે (kg), સેકન્ડ માટે (s), એમ્પિયર માટે (A) ન્યૂટન માટે (N) વગેરે.
7. નાની અને મોટી રાશિઓની ભૌતિક માપનોને વૈજ્ઞાનિક સંકેતમાં 10ની ઘાતો દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે. માપનનાં સંકેતચિહ્નો તથા આંકડાકીય ગણતરીની સરળતા અને સંખ્યાઓની સચોટતા વ્યક્ત કરવા માટે વૈજ્ઞાનિક સંકેતચિહ્નો અને પૂર્વગોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.
8. ભૌતિકરાશિઓના સંકેત અને SI એકમોનો પ્રમાણિત સંકેતોના ઉપયોગ માટે કેટલાક ચોક્કસ નિયમો અને માર્ગદર્શનને અનુસરવું પડે. ભૌતિકરાશિઓ અને માપનોને ચોક્કસ રીતે રજૂ કરવા માટે કેટલાક બીજા એકમો અને SI પૂર્વગો પણ છે.
9. કોઈ ભૌતિકરાશિની ગણતરીમાં તેનો એકમ ન મળે ત્યાં સુધી રાશિ સાથે સંબંધ (સંબંધો) ધરાવતી ભૌતિકરાશિઓના એકમોને બીજગણિતની રાશિની માફક સમજવી જોઈએ.
10. ભૌતિકરાશિના માપન માટે પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. માપી શકાય તેવી રાશિઓનાં પરિણામને દર્શાવતી વખતે માપન માટેનાં સાધનોની ચોકસાઈ અને સચોટતાની સાથે માપનમાં ઉદ્ભવેલ ત્રુટિઓ દર્શાવવી જોઈએ.
11. માપી શકાય તેવી અને ગણતરીથી મેળવેલ રાશિઓમાં યોગ્ય સાર્થક અંકોને જ રાખવા જોઈએ. સંખ્યાઓમાં સાર્થક અંક નક્કી કરવા તેની સાથે ગણિતીય ક્રિયાઓ કરવા અને Round off કરવા માટે બનાવેલ નિયમોનું પાલન કરવું જોઈએ.
12. પાયાની રાશિઓનાં પરિમાણ અને આ પરિમાણોનું સંયોજન રાશિઓની પ્રકૃતિનું વર્ણન કરે છે. સમીકરણોની પારિમાણિક સાતત્યતાની ચકાસણી અને ભૌતિકરાશિઓનો સંબંધ મેળવવા વગેરે માટે પારિમાણિક વિશ્લેષણનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. પારિમાણિક દૃષ્ટિએ યથાર્થ સમીકરણ વાસ્તવમાં સાચું જ હોય તે જરૂરી નથી. પરંતુ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ ખોટું કે અસંગત સમીકરણ ખોટું જ હોય છે.

સ્વાધ્યાય

નોંધ : સંખ્યાત્મક જવાબ લખતી વખતે સાર્થક અંકોને ધ્યાનમાં રાખવા.

2.1 **ખાલી જગ્યા પૂરો :**

(a) 1 cm બાજુવાળા એક ઘનનું કદ .... m^3 જેટલું હશે.

(b) 2.0 cm ત્રિજ્યા અને 10 cm ઊંચાઈ ધરાવતાં નક્કર નળાકારનું પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ .... $(mm)^2$ જેટલું હશે.

(c) 18 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરતું એક વાહન 1 sમાં .... m અંતર કાપશે.

(d) સીસાની સાપેક્ષ ઘનતા 11.3 છે, તો તેની ઘનતા .... g cm^{-3} અથવા .... kg m^{-3}.

2.2 **એકમોનાં યોગ્ય પરિવર્તન દ્વારા ખાલી જગ્યા પૂરો :**

(a) 1 kg m^2 s^{-2} = ... g cm^2 s^{-2}

(b) 1 m = ... ly

(c) 3.0 m s^{-2} .... km h^{-2}

(d) $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 $(kg)^{-2}$ = ... $(cm)^3 s^{-2} g^{-1}$

2.3 ઉષ્મા અથવા ઊર્જાનો એકમ કૅલરી છે અને તે લગભગ 4.2 J બરાબર છે. જ્યાં 1 J = 1 kg m^2 s^{-2}. ધારો કે એકમોની એક નવી પ્રણાલિનો ઉપયોગ કરીએ કે જેમાં દળનો એકમ α kg, લંબાઈનો એકમ β m અને સમયનો એકમ γ s હોય, તો દર્શાવો કે નવા એકમોના સંદર્ભે કૅલરીનું માન $\alpha^{-1}\beta^{-2}\gamma^2$ છે.

2.4 આ કથનને સ્પષ્ટ રીતે સમજાવો :

"સરખામણી માટેનાં માનકોની સ્પષ્ટતા કર્યા વગર કોઈ પારિમાણિક રાશિ 'મોટી' છે કે 'નાની' તેમ કહેવું અર્થહીન છે." આ બાબતને ધ્યાનમાં રાખી નીચે આપેલ કથનોને જરૂરિયાત મુજબ ફરી લખો :

(a) પરમાણુઓ ખૂબ જ નાના પદાર્થ છે.

(b) જેટ પ્લેન ખૂબ ઝડપથી ચાલે છે.

(c) જ્યુપિટરનું દળ ઘણું વધુ છે.

(d) આ રૂમમાં રહેલી હવામાં અણુઓની સંખ્યા ખૂબ જ વધારે છે.

(e) ઇલેક્ટ્રૉન કરતાં પ્રોટોન વધુ દળદાર છે.

(f) પ્રકાશની ઝડપ કરતાં ધ્વનિની ઝડપ ખૂબ જ ઓછી છે.

2.5 લંબાઈનો નવો એકમ એવી રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે કે શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ એક એકમ થાય. જો પ્રકાશને સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર કાપતાં 8 min અને 20 s લાગતા હોય, તો લંબાઈના નવા એકમ સંદર્ભે સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર કેટલું થાય ?

2.6 લંબાઈના માપન માટે નીચે આપેલ સાધનો પૈકી કયું સાધન વધુ સચોટ છે ?

(a) વર્નિયર કેલિપર્સ જેના વર્નિયર માપમાં 20 વિભાગ છે.

(b) એક સ્ક્રૂગેજ જેનું પેચઅંતર 1 mm અને વર્તુળાકાર સ્કેલ પર 100 વિભાગ છે.

(c) એક પ્રકાશીય યંત્ર જે પ્રકાશની તરંગલંબાઈ સુધીની લંબાઈ માપી શકે છે.

2.7 એક વિદ્યાર્થી 100 મોટવણી ધરાવતા માઇક્રોસ્કૉપ વડે માનવ-વાળ (Hair)ની જાડાઈ માપે છે. તે 20 અવલોકનો નોંધે છે અને નક્કી કરે છે કે માઇક્રોસ્કૉપનાં દૃશ્યક્ષેત્રમાં વાળની જાડાઈ 3.5 mm છે, તો વાળની અંદાજિત જાડાઈનું અનુમાન કરો.

2.8 **નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :**

(a) તમને એક દોરી અને મીટરપટ્ટી આપેલ છે. તમે દોરીની જાડાઈ કેવી રીતે નક્કી કરશો ?

(b) એક સ્ક્રૂગેજમાં પેચઅંતર 1.0 mm અને વર્તુળાકાર સ્કેલ પર 200 વિભાગ છે. શું તમે વિચારી શકો કે વર્તુળાકાર સ્કેલ પર વિભાગોની સંખ્યા સ્વેચ્છાએ વધારીને તેની સચોટતા વધારી શકાય ?

(c) પાતળા બ્રાસના સળિયાનો વ્યાસ વર્નિયર કેલિપર્સ વડે માપવામાં આવે છે. ફક્ત 5 અવલોકનો દ્વારા મેળવેલ પરિણામની સરખામણીમાં 100 અવલોકનો વડે મેળવેલ વ્યાસનું અપેક્ષિત પરિણામ શા માટે વધુ વિશ્વસનીય હશે ?

2.9 એક મકાનનો ફોટોગ્રાફ 35 mmની સ્લાઇડ પર 1.75 cm^2 ક્ષેત્રફળને આવરી લે છે. આ સ્લાઇડને એક પડદા પર પ્રૉજેક્ટ કરતાં પડદા પર મકાનનું ક્ષેત્રફળ 1.55 m^2 મળે છે, તો પ્રૉજેક્ટર અને પડદાની ગોઠવણીની રેખીય મોટવણી શું હશે ?

2.10 નીચે આપેલ સંખ્યાઓમાં સાર્થક અંકો નક્કી કરો :

(a) 0.007 m^2

(b) 2.64×10^{24} kg

(c) 0.2370 g cm^{-3}

(d) 6.320 J

(e) 6.032 N m^{-2}

(f) 0.0006032 m^2

2.11 એક લંબચોરસ પાતળી ધાતુની તક્તીની લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈ અનુક્રમે 4.234 m, 1.005 cm અને 2.01 cm છે. સાર્થક અંકોને ધ્યાનમાં રાખી તક્તીનું ક્ષેત્રફળ અને કદ શોધો.

2.12 પ્રોવિઝન સ્ટોરની તુલા વડે માપેલ એક બૉક્સનું દળ 2.300 kg મળે છે. હવે આ બૉક્સમાં 20.15 g અને 20.17 g દળનાં સોનાના બે ટુકડા મૂકવામાં આવે છે તો (a) બૉક્સનું કુલ દળ કેટલું થશે ? (b) યોગ્ય સાર્થક અંક સુધી બંને ટુકડાના દળનો તફાવત કેટલો થાય ?

2.13 એક ભૌતિકરાશિ Pનો માપન યોગ્ય ચાર રાશિઓ a, b, c અને d સાથેનો સંબંધ આ મુજબ છે. $P = a^3b^2 / (\sqrt{c}\ d)$, a, b, c અને dમાં પ્રતિશત ત્રુટિ અનુક્રમે 1 %, 3 %, 4 % અને 2 % છે, તો Pમાં પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો. જો ઉપર્યુક્ત સંબંધનો ઉપયોગ કરીને ગણતરી કરતાં Pનું મૂલ્ય 3.763 મળતું હોય, તો તમે આ પરિણામને કયા મૂલ્ય સુધી Round off કરશો ?

2.14 મુદ્રણની ઘણી ત્રુટિઓ ધરાવતાં એક પુસ્તકમાં આવર્તગતિ કરતાં એક કણના સ્થાનાંતરનાં ચાર જુદાં જુદાં સૂત્રો આપેલ છે :

(a) $y = a \sin 2\pi\ t/T$

(b) $y = a \sin \upsilon t$

(c) $y = (a/T) \sin t/a$

(d) $y = (a\sqrt{2}) (\sin 2\pi t / T + \cos 2\pi t / T)$

(a = કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર, υ = કણની ઝડપ, T = આવર્તકાળ) પરિમાણને આધારે ખોટાં સૂત્રોને નાબૂદ કરો.

2.15 એક વિદ્યાર્થી ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં પ્રચલિત એવા કોઈ કણનાં ચલિતદળ (moving mass)m અને સ્થિર દળ (rest mass) m_0 તથા કણનો વેગ υ અને પ્રકાશની ઝડપ c વચ્ચેનો (આ સંબંધ પ્રથમ આલ્બર્ટ આઈન્સ્ટાઈનના વિશિષ્ટ સાપેક્ષતાના સિદ્ધાંતનાં પરિણામ સ્વરૂપે મળેલ હતો.) સંબંધને લગભગ સાચો યાદ રાખીને લખે છે. પરંતુ અચળાંક cને ક્યાં મૂકવો તે ભૂલી જાય છે. તે $m = \dfrac{m_0}{(1-\upsilon^2)^{1/2}}$ લખે છે. અનુમાન કરો કે cને ક્યાં મૂકવો જોઈએ ?

2.16 પરમાણ્વીય માપક્રમની લંબાઈનો સુવિધાજનક એકમ ઍન્ગસ્ટ્રોમ છે અને તેને Å : 1 Å = 10^{-10} m દ્વારા દર્શાવાય છે. હાઇડ્રોજન પરમાણુનો વિસ્તાર 0.5 Å છે, તો એક મોલ હાઇડ્રોજન પરમાણુઓનું આણ્વીક કદ m^3માં કેટલું થશે ?

2.17 એક મોલ આદર્શ વાયુ પ્રમાણભૂત તાપમાને અને દબાણે 22.4 L જગ્યા (મોલર કદ) રોકે છે, તો 1 મોલ હાઇડ્રોજન વાયુ માટે મોલર કદ અને પરમાણ્વીક કદનો ગુણોત્તર શું થશે ? શા માટે આ ગુણોત્તર ઘણો મોટો છે ? (હાઇડ્રોજન અણુનું પરિમાણ 1 Å જેટલું લો.)

2.19 નજીક દેખાતા બે તારા (Stars)નું અંતર માપવા માટે પરિચ્છેદ 2.3.1ની દષ્ટિસ્થાનભેદની રીતના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. સૂર્યની આસપાસ પોતાની ભ્રમણ કક્ષામાં છ મહિનાના સમય અંતરાલમાં પૃથ્વીનાં બે સ્થાનોને જોડતી આધાર રેખા AB છે એટલે કે આધાર રેખા પૃથ્વીની કક્ષાના વ્યાસ $\approx 3 \times 10^{11}$ m જેટલી લગભગ છે. જોકે નજીક રહેલા બે તારા એટલા દૂર છે કે આટલી લાંબી આધાર રેખા હોવા છતાં તેઓ 1″ (સેકન્ડ) જેટલો ચાપનો (Arc) દષ્ટિસ્થાનભેદ દર્શાવે છે. ખગોળીય સ્તર પર લંબાઈનો સુવિધાજનક એકમ પાર્સેક છે. પાર્સેક કોઈ પદાર્થનું અંતર સૂચવે છે કે જે પૃથ્વી અને સૂર્ય વચ્ચેનાં

અંતર જેટલી આધાર રેખાના બે છેડાઓએ આંતરેલ ખૂણો 1 ”(Second Arc) બરાબર હોય. એક પાર્સેકનું મૂલ્ય મીટરમાં કેટલું થશે ?

2.20 આપણા સૂર્યમંડળમાં નજીકનો તારો 4.29 પ્રકાશવર્ષ દૂર છે. પાર્સેકમાં આ અંતર કેટલું થશે ? સૂર્યની આસપાસ પોતાની ભ્રમણકક્ષામાં છ મહિનામાં સમય અંતરાલે પૃથ્વીનાં બે સ્થાનો પરથી આ તારા (આલ્ફા સેન્ટૉરી નામ ધરાવતો)ને જોવામાં આવે, તો તે કેટલો કોણ (દૃષ્ટિસ્થાનભેદ કોણ) આંતરશે ?

2.21 ભૌતિકરાશિઓનાં માપનમાં સચોટતા હોવી તે વિજ્ઞાનની આવશ્યકતા છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ વિમાનની ઝડપ નક્કી કરવા માટે ખૂબ જ સૂક્ષ્મ સમય અંતરાલોએ તેનાં સ્થાન નક્કી કરવા માટે એક ચોક્કસ પદ્ધતિ હોવી જોઈએ. બીજા વિશ્વયુદ્ધમાં રડારની શોધ પાછળ આ જ પ્રયોજન હતું. આધુનિક વિજ્ઞાનમાં એવાં જુદાં જુદાં ઉદાહરણો વિશે વિચારો જેમાં લંબાઈ, સમય, દ્રવ્યમાન વગેરેનાં સચોટ માપનની આવશ્યકતા હોય છે. જોકે આ ઉપરાંત શક્ય હોય ત્યાં, સચોટતાના માત્રાત્મક વિચારો આપી શકો છો.

2.22 જે રીતે વિજ્ઞાનમાં સચોટ માપન જરૂરી છે તેવી જ રીતે અલ્પવિકસિત વિચારો તથા સામાન્ય માપનો દ્વારા રાશિનો સામાન્ય અંદાજ લગાવવો તેટલું જ મહત્ત્વનું છે. નીચે આપેલા અનુમાન લગાવી શકાય તે માટેનાં ઉપાયો વિચારો (જ્યાં અનુમાન મેળવવાનું અઘરું લાગે ત્યાં રાશિઓની મહત્તમ મર્યાદા (upper bound) મેળવવાનો પ્રયત્ન કરો.

(a) વર્ષાઋતુના સમયમાં ભારત ઉપર છવાયેલ વરસાદી વાદળોનું કુલ દ્રવ્યમાન
(b) કોઈ હાથીનું દ્રવ્યમાન
(c) કોઈ આંધી દરમિયાન પવનની ઝડપ
(d) તમારા માથાના વાળની સંખ્યા
(e) તમારા વર્ગખંડમાં વાયુના અણુઓની સંખ્યા

2.23 સૂર્ય એક ગરમ પ્લાઝમા (આયનીકૃત દ્રવ્ય) છે જેની અંદરનો ગર્ભ (Core)નું તાપમાન 10^7 Kથી વધારે અને બાહ્ય પૃષ્ઠનું તાપમાન 6000 K છે. આટલા ઊંચા તાપમાને કોઈ પણ પદાર્થ ઘન કે પ્રવાહી અવસ્થામાં રહી શકે નહિ. સૂર્યની દળઘનતા, ઘન અને પ્રવાહી અથવા વાયુની ઘનતાઓમાંથી કયા વિસ્તારમાં હોવાની તમને ધારણા છે ? તમારું અનુમાન સાચું છે તેની ચકાસણી નીચે આપેલ માહિતી પરથી નક્કી કરી શકો છો. સૂર્યનું દળ $= 2.0 \times 10^{30}$ kg, સૂર્યની ત્રિજ્યા 7.0×10^8 m

2.24 જ્યારે જ્યુપિટર (ગુરુ) ગ્રહ પૃથ્વીથી 824.7 મિલિયન કિલોમીટર દૂર હોય છે ત્યારે તેના કોણીય વ્યાસનું માપ 35.72″ (આર્ક સેકન્ડ) છે, તો જ્યુપિટરનો વ્યાસ શોધો.

વધારાનું સ્વાધ્યાય

2.25 વરસાદમાં એક વ્યક્તિ υ ઝડપથી ચાલી રહી છે. તેને તેની છત્રી શિરોલંબ દિશા સાથે આગળ તરફ θ કોણે નમાવી રાખેલ છે. એક વિદ્યાર્થી θ અને υ વચ્ચેનો સંબંધ $\tan \theta = \upsilon$ મેળવે છે અને તે અપેક્ષા મુજબ $\upsilon \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$ની મર્યાદામાં આ સંબંધને ચકાસે છે.
(આપણે ધારી લઈએ કે પવન પ્રબળ નથી અને વરસાદ શિરોલંબ પડી રહ્યો છે.) તમે વિચારી શકો કે આ સંબંધ સાચો હોઈ શકે ? જો નથી તો આવા કારણનું અનુમાન કરો.

2.26 એવો દાવો કરવામાં આવે છે કે જો કોઈ પણ જાતની ખલેલ વગર 100 વર્ષ સુધી બે સિઝિયમ ઘડિયાળોને ચલાવવામાં આવે, તો તેમના સમયમાં માત્ર 0.02 sનો તફાવત જોવા મળે છે. 1 sનો સમય અંતરાલ માપવા માટે આ પ્રમાણભૂત ઘડિયાળોની ચોકસાઈ શું સૂચવે છે ?

2.27 સોડિયમ પરમાણુની સરેરાશ દળઘનતાનો અંદાજ કરો. ધારી લો કે તેનું પરિમાણ 2.5 $\mathring{A}$ જેટલું છે. (એવોગેડ્રો અંક અને સોડિયમના પરમાણ્વીય દળનાં જાણીતાં મૂલ્યોનો ઉપયોગ કરો.) સોડિયમનાં સ્ફટિક સ્વરૂપની ઘનતા 970 kg m^{-3} સાથે તેની સરખામણી કરો. શું બંને ઘનતાનું માન સમાન ક્રમનું છે ? જો હા તો શા માટે ?

2.28 ન્યુક્લિયર માપક્રમ પર લંબાઈનો અનુકૂળ એકમ ફર્મી છે. 1 fm $= 10^{-15}$ m છે. ન્યુક્લિયસનું પરિમાણ નીચે આપેલ આનુભાવિક સમીકરણને સામાન્ય રીતે અનુસરે છે. $r = r_0 A^{\frac{1}{3}}$

જ્યાં r ન્યુક્લિયસની ત્રિજ્યા, A તેનો પરમાણુ-દળાંક અને r_0 અચળાંક છે જે 1.2 fm જેટલો લગભગ

છે. દર્શાવો કે આ નિયમ સૂચવે છે કે વિભિન્ન ન્યુક્લિયસોની દળઘનતા લગભગ અચળ હોય છે. સોડિયમના ન્યુક્લિયસ માટે દળઘનતાની ગણતરી કરો. સ્વાધ્યાય 2.27માં મેળવેલ સોડિયમ પરમાણુની દળઘનતા સાથે તેની સરખામણી કરો.

2.29 લેસર (LASER) પ્રકાશનો અત્યંત તીવ્ર, એકરંગી તથા એકદીશ કિરણપુંજનો સ્રોત છે. લેસરના આ ગુણોનો ઉપયોગ લાંબાં અંતરોનાં માપન માટે કરવામાં આવે છે. લેસરનો પ્રકાશીય સ્રોત તરીકે ઉપયોગ કરીને પૃથ્વીથી ચંદ્રનું અંતર ખૂબ જ સચોટતાપૂર્વક મપાઈ ચૂક્યું છે. લેસર પ્રકાશીય પુંજ ચંદ્રની સપાટીથી પરાવર્તન પામી 2.56 sમાં પાછો આવે છે. પૃથ્વીની ફરતે ચંદ્રની કક્ષા (Lunar orbit)ની ત્રિજ્યા કેટલી હશે ?

2.30 પાણીની નીચે રહેલી વસ્તુઓને શોધવા માટે તેમજ તેમનાં સ્થાન નક્કી કરવા માટે SONAR (Sound Navigation And Ranging)માં અલ્ટ્રાસોનિક તરંગોનો ઉપયોગ થાય છે. એક સબમરીન SONAR થી સુસજ્જ છે. જેના દ્વારા ઉત્પન્ન થતાં સંશોધક તરંગ (Probe Wave) અને દુશ્મન સબમરીન પરથી પરાવર્તિત તેના પ્રતિધ્વનીની પ્રાપ્તિ વચ્ચેનો સમય વિલંબ 77.0 s છે, તો શત્રુની સબમરીન કેટલી દૂર હશે ? (પાણીમાં ધ્વનિની ઝડપ 1450 m s^{-1} લો.)

2.31 આપણા વિશ્વમાં આધુનિક ખગોળવિદો દ્વારા શોધાયેલ સૌથી દૂરનો પદાર્થ એટલો દૂર છે કે તેના દ્વારા ઉત્સર્જાયેલ પ્રકાશને પૃથ્વી સુધી પહોંચવા માટે અરબો વર્ષ લાગે છે. આ પદાર્થો (જેને ક્વાસાર 'Quasar' કહે છે.)નાં કેટલાંય રહસ્યમય લક્ષણો છે જેનો આજ સુધી સંતોષકારક રીતે સમજાવી શકાયાં નથી. આવા એક Quasarમાંથી ઉત્સર્જાતો પ્રકાશને આપણા સુધી પહોંચવા 3.0 અબજ વર્ષ (Billium Year) લાગે છે, તો તેનું અંતર kmમાં નક્કી કરો.

2.32 એ પ્રખ્યાત તથ્ય છે કે સંપૂર્ણ સૂર્યગ્રહણ વખતે ચંદ્ર Disk સૂર્યની Diskને પૂરેપૂરી ઢાંકી દે છે. આ તથ્ય અને ઉદાહરણ 2.3 અને 2.4નાં સૂચનોનો ઉપયોગ કરી ચંદ્રનો વ્યાસ શોધો.

2.33 આ શતાબ્દીના મહાન વૈજ્ઞાનિક (પી. એ. એમ. ડિરાક) પ્રકૃતિના મૂળભૂત અચળાંકોનાં મૂલ્યો સાથે રમત રમીને આનંદ મેળવી રહ્યા હતા. ત્યારે તેમાં એમણે એક રોચક અવલોકન કર્યું. પરમાણ્વીય ભૌતિકના મૂળ અચળાંકો (જેમ કે ઈલેક્ટ્રૉનનું દળ, પ્રોટોનનું દળ) તથા ગુરુત્વીય અચળાંક G પરથી તેમને માલૂમ પડ્યું કે તે એક એવી સંખ્યા સુધી પહોંચી ગયા છે, જેને સમયનું પરિમાણ હતું. સાથે સાથે તે ખૂબ જ મોટી સંખ્યા હતી. જેનું માન વિશ્વનાં વર્તમાન અંદાજિત આયુષ્ય 15 અબજ વર્ષ (~15 B.Y.)ની નજીક હતું. આ પુસ્તકમાં આપેલ મૂળભૂત અચળાંકોને આધારે પ્રયત્ન કરો કે આ સંખ્યા (અથવા આવી જ કોઈ સંખ્યા જેનો તમે વિચાર કરો) બનાવી શકો છો ? જો વિશ્વનું આયુષ્ય અને આ સંખ્યાની સરખામણી આકસ્મિક હોય, તો મૂળભૂત અચળાંકોની અચળતા અંગે તે શું દર્શાવે છે ?

પ્રકરણ 3

સુરેખપથ પર ગતિ (MOTION IN A STRAIGHT LINE)

3.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

વિશ્વમાં બધી જ બાબતો માટે ગતિ સામાન્ય છે. જેમકે આપણે ચાલીએ, દોડીએ અને સાઈકલ ચલાવીએ, જ્યારે આપણે ઊંઘી જઈએ ત્યારે પણ આપણા ફેફસાંમાં અંદર અને બહાર જતી હવા તથા ધમની અને શીરામાં વહેતું લોહી. આપણે વૃક્ષ પરથી નીચે પડતાં પાંદડા અને બંધમાંથી નીચે વહેતું પાણી જોઈએ છીએ. વાહનો અને વિમાનો લોકોને એક સ્થળેથી બીજા સ્થળે લઈ જાય છે. પૃથ્વી ચોવીસ કલાકમાં એકવાર ભ્રમણ કરે છે અને વર્ષમાં એક વખત સૂર્યની આસપાસ પરિક્રમણ કરે છે. સૂર્ય પોતે આકાશગંગા (Milky Way)માં ગતિમાં છે, જે ફરીથી આકાશગંગાના સ્થાનિક સમૂહમાં ગતિ કરે છે.

પદાર્થનાં સ્થાનમાં સમય સાથે થતાં ફેરફારને ગતિ કહે છે. સમય સાથે સ્થાન કેવી રીતે બદલાતું હશે ? આ પ્રકરણમાં, ગતિનું વર્ણન કેવી રીતે થાય તે ભણીશું. આ માટે આપણે વેગ અને પ્રવેગનો ખ્યાલ વિકસાવીશું. આપણે પદાર્થની સુરેખ રેખા પર થતી ગતિના અભ્યાસ પૂરતા સીમિત રહીશું. આવી ગતિ **સુરેખગતિ (Rectilinear Motion)** તરીકે જાણીતી છે. અચળ પ્રવેગ સાથે થતી સુરેખગતિના કિસ્સામાં સાદા સમીકરણોનો સમૂહ મેળવી શકાય છે. અંતે ગતિની સાપેક્ષ પ્રકૃતિ સમજવા માટે આપણે સાપેક્ષ વેગનો ખ્યાલ રજૂ કરીશું.

આપણી ચર્ચામાં, ગતિ કરતાં પદાર્થને બિંદુવત્ પદાર્થ (કણ) ગણીશું. જ્યાં સુધી પદાર્થનું પરિમાણ માફકસર સમયગાળામાં તેણે કાપેલ અંતરની સરખામણીમાં ખૂબ નાનું હોય ત્યાં સુધી આવું સન્નિકટ નિરૂપણ માન્ય થશે. વાસ્તવિક જીવનમાં ઘણીબધી પરિસ્થિતિઓમાં પદાર્થોનાં પરિમાણને અવગણી શકાય છે અને વધારે ત્રુટિ વગર તેને બિંદુવત્ પદાર્થ ગણી શકાય છે.

શુદ્ધ ગતિ-વિજ્ઞાનમાં પદાર્થની ગતિનાં કારણોની ચર્ચા કર્યા સિવાય માત્ર તેની ગતિનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. આ પ્રકરણ અને પછીના પ્રકરણમાં વર્ણવેલ ગતિનાં કારણો પ્રકરણ 5માં વિષયવસ્તુનું સ્વરૂપ છે.

3.2 સ્થાન, પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતર (POSITION, PATH LENGTH AND DISPLACEMENT)

અગાઉ તમે ભણી ગયાં છો કે પદાર્થનાં સ્થાનમાં સમય સાથે થતાં ફેરફારને ગતિ કહે છે. પદાર્થનું સ્થાન નક્કી કરવા આપણને એક સંદર્ભ બિંદુ અને અક્ષોનાં સમૂહનો ઉપયોગ કરવાની જરૂર પડશે. અનુકૂળતા માટે ત્રણ પરસ્પર લંબ અક્ષો, જેવી કે X–, Y– અને Z– અક્ષો, ધરાવતી લંબ યામાક્ષ

(Rectangular Co-ordinate) પ્રણાલિ પસંદ કરીશું. આ ત્રણેય અક્ષોનાં છેદબિંદુને ઊગમબિંદુ (O) કહે છે. જેને **સંદર્ભબિંદુ** તરીકે લઈ શકાય. કોઈ પણ પદાર્થના યામો (x, y, z) આ યામાક્ષ પદ્ધતિની સાપેક્ષે તેનું સ્થાન દર્શાવે છે. સમયના માપન માટે આ તંત્રમાં એક ઘડિયાળ મૂકવામાં આવે તો ઘડિયાળ સહિત આ તંત્રને **નિર્દેશફ્રેમ** (Frame of reference) કહે છે.

કોઈ પણ પદાર્થના એક કે તેથી વધુ યામો સમય સાથે બદલાતાં હોય, તો આપણે કહી શકીએ કે પદાર્થ ગતિમાં છે. અન્યથા પદાર્થ આ નિર્દેશફ્રેમની સાપેક્ષે સ્થિર સ્થિતિમાં છે તેમ કહેવાય.

કોઈ નિર્દેશફ્રેમમાં અક્ષોની પસંદગી પરિસ્થિતિ પર નિર્ભર કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક પારિમાણિક ગતિનાં વર્ણન માટે આપણને એક જ અક્ષની જરૂર પડે છે. દ્વિ, ત્રિપારિમાણિક ગતિનાં વર્ણન માટે આપણને બે/ત્રણ અક્ષોના સમૂહની જરૂર પડે.

કોઈ ઘટનાના વર્ણનનો આધાર, વર્ણન માટે પસંદ કરેલ નિર્દેશફ્રેમ પર છે. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યારે તમે કહો કે કાર સડક પર દોડી રહી છે ત્યારે કારની ગતિનું વર્ણન તમારી સાથે અથવા જમીન (Ground) સાથે સંકળાયેલ નિર્દેશફ્રેમના સંદર્ભે કરો છો. પરંતુ કારમાં બેઠેલ વ્યક્તિ સાથે સંકળાયેલ નિર્દેશફ્રેમની સાપેક્ષે કાર સ્થિર છે તેમ કહેવાય.

સુરેખ રેખા પર થતી ગતિનાં વર્ણન માટે આપણે એક અક્ષ એવી પસંદ કરીશું (ધારો કે X-અક્ષ) કે જે પદાર્થના ગતિમાર્ગ પર સંપાત થતી હોય. આકૃતિ 3.1માં દર્શાવ્યા મુજબ સરળતા ખાતર પસંદ કરેલ ઊગમબિંદુ Oની સાપેક્ષે પદાર્થનું સ્થાન નક્કી કરવામાં આવે છે. Oની જમણી બાજુનાં સ્થાનો ધન અને Oની ડાબી બાજુનાં સ્થાનોને ઋણ લેવામાં આવે છે. આ સંજ્ઞા પ્રણાલિ અનુસાર આકૃતિ 3.1માં બિંદુ P અને Qના સ્થાન યામ અનુક્રમે +360 m અને +240 m છે. આ જ રીતે બિંદુ Rનું સ્થાન યામ −120 m છે.

પથલંબાઈ (PATH LENGTH)

એક કાર સુરેખ રેખા પર ગતિ કરે છે તેમ સ્વીકારો. આપણે X-અક્ષની પસંદગી એવી કરીએ કે તે કારના ગતિમાર્ગ ઉપર સંપાત થાય અને કાર ગતિની શરૂઆત કરે છે, તે બિંદુએ X-અક્ષનું ઊગમબિંદુ હોય એટલે કે $t = 0$ સમયે કાર $x = 0$ પાસે હતી. (આકૃતિ 3.1) ધારો કે જુદી જુદી ક્ષણે P, Q અને R બિંદુઓ કારનું સ્થાન દર્શાવે છે. કારના બે કિસ્સા વિચારો. પ્રથમ કિસ્સામાં કાર O થી P સુધી ગતિ કરે છે. તો કાર વડે કપાયેલ અંતર OP = + 360 m, આ અંતરને કાર વડે કપાયેલ **પથલંબાઈ** કહે છે. બીજા કિસ્સામાં, કાર પહેલા O થી P સુધી ગતિ કરે છે અને પછી P થી Q સુધી પરત આવે છે. ગતિના આ કિસ્સામાં કાર વડે કપાયેલ પથલંબાઈ OP + PQ = +360 m + (+120) m = +480 m પથલંબાઈ અદિશ રાશિ છે, એટલે કે તેને માત્ર માન હોય છે જ્યારે દિશા હોતી નથી. (જુઓ પ્રકરણ 4.)

સ્થાનાંતર (DISPLACEMENT)

સ્થાનમાં થતાં ફેરફાર માટે બીજી રાશિ સ્થાનાંતરને વ્યાખ્યાયિત કરવી ઉપયોગી નીવડશે. ધારો કે t_1 અને t_2 સમયે એક પદાર્થનાં સ્થાનો x_1 અને x_2 છે, તો $\Delta t = (t_2 - t_1)$ જેટલા સમયમાં તેનું સ્થાનાંતર Δx વડે દર્શાવાય જે અંતિમ અને પ્રારંભિક સ્થાનનો તફાવત આપે છે.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

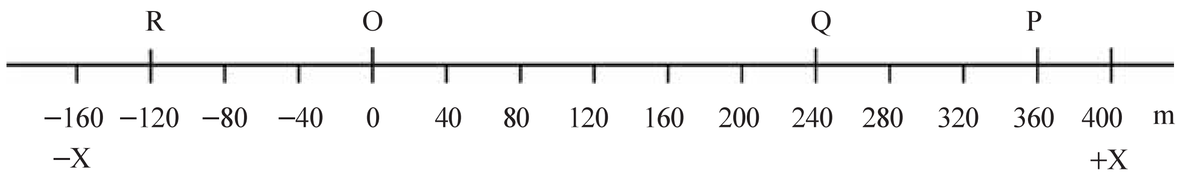
(રાશિમાં થતાં ફેરફારને ગ્રીક અક્ષર ડેલ્ટા (Δ) વડે દર્શાવાય છે.)

જો $x_2 > x_1$ તો Δx ધન થાય અને જો $x_2 < x_1$ તો Δx ઋણ થાય.

સ્થાનાંતરને માન અને દિશા બંને હોય છે. આવી રાશિઓને સદિશો વડે રજૂ કરાય છે. તમે સદિશો વિશેનો અભ્યાસ હવે પછીના પ્રકરણમાં કરશો. આપણે સુરેખ માર્ગ પર થતી ગતિ (જેને રેખીયગતિ પણ કહે છે)ની ચર્ચા કરીશું. એક પારિમાણિક ગતિમાં માત્ર બે જ દિશા હોય છે. (આગળ તરફ અને પાછળ તરફ, ઉપર તરફ અને નીચે તરફ) કે જ્યાં, પદાર્થ ગતિ કરી શકે અને આ બંને દિશાઓને સહેલાઈથી + અને − સંજ્ઞાઓ વડે દર્શાવી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે કાર O થી P સુધી ગતિ કરે છે ત્યારે તેનું સ્થાનાંતર

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (+360\ \text{m}) - 0\ \text{m} = +360\ \text{m}.$$

અહીં સ્થાનાંતરનું માન 360 m અને દિશા ધન X દિશામાં છે જે + સંજ્ઞા વડે દર્શાવી છે. આ જ રીતે કારનું Pથી Q સ્થાનાંતર 240 m − 360 m = −120 m. અહીં, ઋણ



આકૃતિ 3.1 X-અક્ષ, ઊગમબિંદુ અને જુદા જુદા સમયે કારનાં સ્થાનો

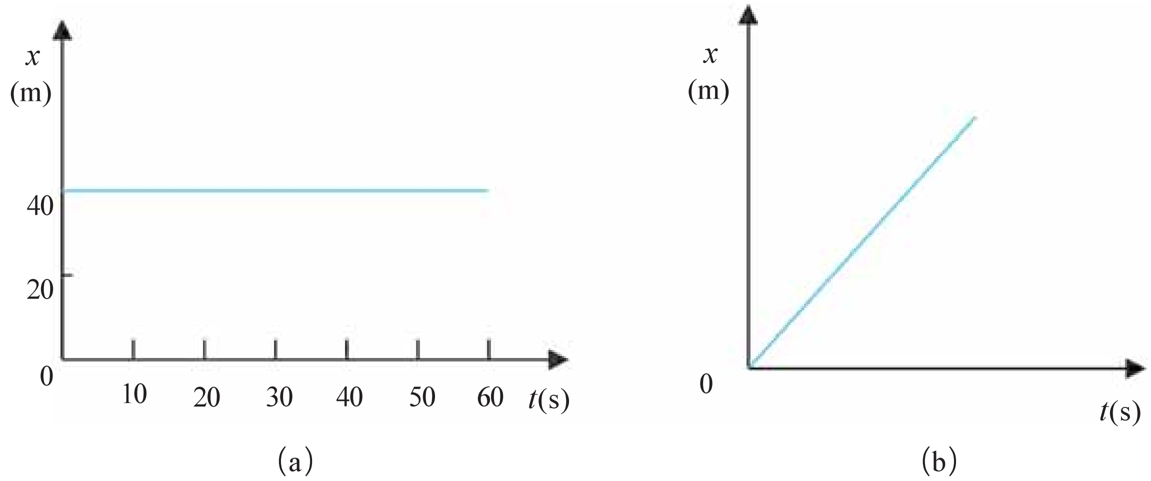
નિશાની સ્થાનાંતરની દિશા સૂચવે છે. આમ, પદાર્થોની એક-પારિમાણિક ગતિની ચર્ચામાં સદિશ સંકેતોના ઉપયોગની જરૂરિયાત નથી.

સ્થાનાંતરનું માન ગતિમાન પદાર્થે કાપેલ પથલંબાઈ જેટલું હોઈ પણ શકે અને ન પણ હોય. ઉદાહરણ તરીકે, કારની O થી P ગતિ માટે પથલંબાઈ +360 m અને સ્થાનાંતર +360 m છે. આ કિસ્સામાં સ્થાનાંતરનું માન (360 m) અને પથલંબાઈ (360 m) સરખી છે. કાર Oથી P સુધી જઈ અને Q પર પરત આવે તેવી ગતિ વિચારો. આ કિસ્સામાં, પથલંબાઈ = (+360 m) + (+120 m) = +480 m. પરંતુ સ્થાનાંતર = (+240 m) − (0 m) = +240 m. આમ, સ્થાનાંતરનું માન (240 m), પથલંબાઈ (480 m) જેટલી સરખી નથી.

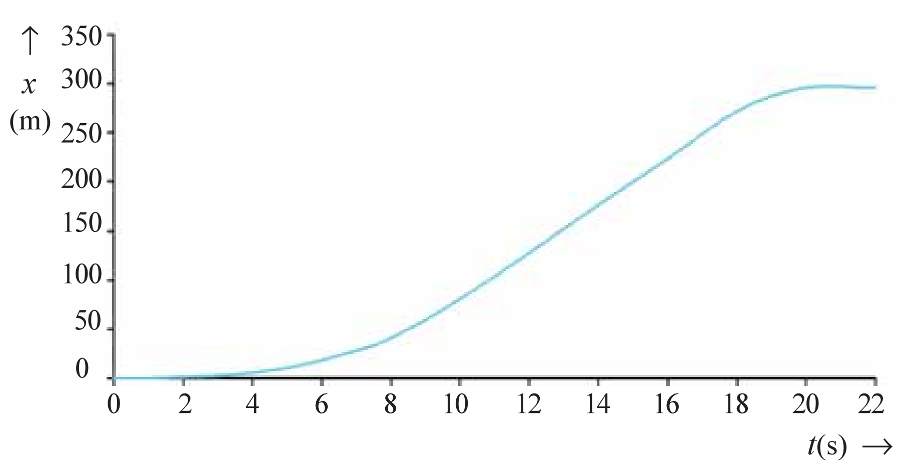
સ્થાનાંતરનું માન ગતિની કોઈ વર્તણૂક માટે શૂન્ય હોઈ શકે છે, પરંતુ તદ્અનુરૂપ પથલંબાઈ **શૂન્ય હોતી નથી** ઉદાહરણ તરીકે, જો કાર O થી ગતિ શરૂ કરીને P પર જાય છે અને પછી O પાસે પરત આવે તો અંતિમ સ્થાન, પ્રારંભિક સ્થાન સાથે સંપાત થાય છે અને સ્થાનાંતર શૂન્ય થાય. આમ છતાં, મુસાફરીની પથલંબાઈ OP + PO = +360 m + 360 m = 720 m થાય છે.

તમે અગાઉ ભણી ગયાં છો કે, પદાર્થની ગતિને સ્થાન-સમય આલેખ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે. આ આલેખ પદાર્થની ગતિનાં જુદાં જુદાં પાસાઓનું વિશ્લેષણ અને રજૂઆત કરવા માટેનું શક્તિશાળી સાધન છે. સુરેખ રેખા પર થતી ગતિને X-અક્ષ પર લેવામાં આવે તો સમય સાથે માત્ર x-યામ બદલાય અને આપણને $x - t$ આલેખ મળે. ધારો કે પ્રથમ સાદો કિસ્સો વિચારીએ કે જેમાં પદાર્થ સ્થિર હોય. ઉદાહરણ તરીકે કાર, x = 40 m પાસે સ્થિર ઊભી છે. આ કિસ્સામાં સ્થાન-સમય ($x - t$) આલેખ આકૃતિ 3.2(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ સમયની અક્ષને સમાંતર હોય છે.

જો સુરેખ રેખા પર ગતિ કરતો કોઈ એક પદાર્થ એક સરખા સમયગાળામાં એકસરખું અંતર કાપે તો તેની ગતિ સુરેખ રેખા પરની **નિયમિત ગતિ (Uniform motion)** કહેવાય. આકૃતિ 3.2(b) આવી ગતિ માટે સ્થાન-સમય આલેખ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 3.2 સ્થાન-સમય આલેખ (a) સ્થિર પદાર્થ માટે અને (b) નિયમિત ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે



આકૃતિ 3.3 કાર માટે સ્થાન-સમય આલેખ

હવે આપણે એ કારની ગતિનો વિચાર કરીશું જે ઊગમબિંદુ O થી $t = 0$ s સમયે સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિની શરૂઆત કરે છે અને તેની ઝડપ $t = 10$ s સુધી વધે છે. ત્યાર બાદ નિયમિત ઝડપથી $t = 18$ s સુધી ગતિ કરે છે, પછી બ્રેક લગાડતા કાર $t = 20$ s પછી $x = 296$ m અંતરે સ્થિર થાય છે. આ કિસ્સા માટે સ્થાન-સમય $(x - t)$ આલેખ આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ છે. આપણે આ આલેખની ચર્ચા નીચેના પરિચ્છેદમાં કરીશું :

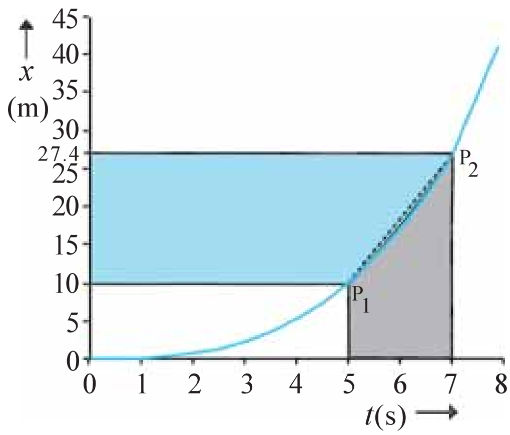
3.3 સરેરાશ વેગ અને સરેરાશ ઝડપ (AVERAGE VELOCITY AND AVERAGE SPEED)

જ્યારે પદાર્થ ગતિમાં હોય છે ત્યારે તેનું સ્થાન સમય સાથે બદલાય છે પણ સમય સાથે કેટલી ઝડપથી સ્થાન બદલાશે અને કઈ દિશામાં ? આનું વર્ણન કરવા આપણે એક રાશિ **સરેરાશ વેગ**ને વ્યાખ્યાયિત કરીશું. સ્થાનમાં થતા ફેરફાર અથવા સ્થાનાંતર (Δx) અને તે માટે લાગતા સમયગાળા (Δt)ના ગુણોત્તર (ભાગાકાર)ને સરેરાશ વેગ કહે છે.

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.1)$$

જ્યાં, x_2 અને x_1, પદાર્થનાં અનુક્રમે t_2 અને t_1 સમયે સ્થાનો છે. અહીં, વેગ પર દર્શાવેલ બાર (Bar)ની નિશાની પ્રમાણિત સંજ્ઞા છે. જેનો ઉપયોગ સરેરાશ રાશિ દર્શાવવા થાય છે. વેગનો SI એકમ m/s અથવા m s^{-1} છે. જો કે ઘણા રોજિંદા ઉપયોગોમાં km h^{-1} વપરાય છે.

સરેરાશ વેગ પણ સ્થાનાંતરની માફક સદિશ રાશિ છે. પરંતુ આગળ સમજાવ્યું તેમ સુરેખ રેખા પરની ગતિમાં સદિશની દિશા નિર્દેશન માટે + અને − સંજ્ઞાઓની કાળજી રાખવી જોઈએ. આપણે વેગ માટે સદિશની નિશાનીનો ઉપયોગ આ પ્રકરણમાં કરીશું નહિ.

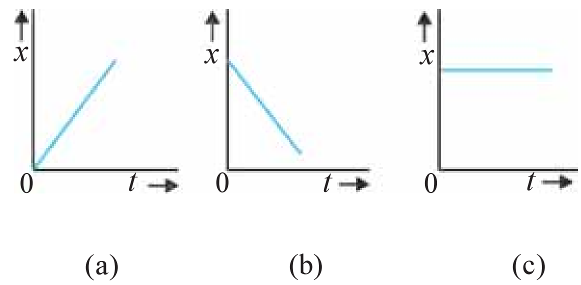


આકૃતિ 3.4 રેખા P_1P_2નો ઢાળ સરેરાશ વેગ છે

ધારો કે કારની ગતિનો આલેખ આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ છે. $x - t$ આલેખમાં $t = 0$ s અને $t = 8$ s વચ્ચેનો ભાગ વિવર્ધિત કરીને આકૃતિ 3.4માં દર્શાવેલ છે. આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે $t = 5$ s અને $t = 7$ s વચ્ચેના સમયમાં સરેરાશ વેગ

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{27.4 - 10.0}{7 - 5} = 8.7 \text{ m s}^{-1}$$

ભૌમિતિક રીતે, આ મૂલ્ય આકૃતિ 3.4માં દર્શાવેલ પ્રારંભિક સ્થાન P_1 અને અંતિમ સ્થાન P_2ને જોડતી સીધી રેખા P_1P_2ના ઢાળ જેટલું છે. સરેરાશ વેગ ધન કે ઋણ હશે તેનો આધાર સ્થાનાંતરની સંજ્ઞા પર રહેલો છે. જો સ્થાનાંતર શૂન્ય હોય, તો તે પણ શૂન્ય હોય. પદાર્થની ગતિ માટે આકૃતિ 3.5માં $x - t$ આલેખો દર્શાવેલ છે, જેમાં ધન વેગથી ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે 3.5(a), ઋણ વેગ માટે 3.5(b) અને સ્થિર પદાર્થ માટે 3.5(c).



આકૃતિ 3.5 પદાર્થ માટે સ્થાન-સમયનો આલેખ (a) ધન વેગ સાથે ગતિ (b) ઋણ વેગ સાથે ગતિ અને (c) સ્થિર સ્થિતિમાં

સરેરાશ વેગને ઉપર મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે પદાર્થનું માત્ર સ્થાનાંતર આવશ્યક છે. અગાઉ આપણે જોયું તેમ સ્થાનાંતરનું માન મૂળ પથલંબાઈ કરતાં જુદું હોઈ શકે છે. પદાર્થના સમગ્ર ગતિપથ પર ગતિનો દર દર્શાવવા આપણે **સરેરાશ ઝડપ** નામની બીજી રાશિ રજૂ કરીશું.

પદાર્થની મુસાફરીની અવધિમાં કપાયેલ કુલ પથલંબાઈ અને તે માટે લાગતાં સમયગાળાનાં ભાગાકાર (ગુણોત્તર)ને **સરેરાશ ઝડપ** વડે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે.

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{\text{કુલ પથલંબાઈ}}{\text{કુલ સમયગાળો}} \qquad (3.2)$$

સરેરાશ ઝડપને પણ તે જ એકમ હોય જે વેગનો એકમ (m s^{-1}) છે. પરંતુ તે પદાર્થ કઈ દિશામાં ગતિ કરે છે તે દર્શાવતું નથી. આમ, સરેરાશ ઝડપ હંમેશાં ધન હોય છે. (તેનાથી વિરુદ્ધ સરેરાશ વેગ કે જે ધન અથવા ઋણ હોઈ શકે). જો પદાર્થની ગતિ સુરેખ રેખા પર અને **એક જ દિશામાં** થતી હોય, તો સ્થાનાંતરનું માન કુલ પથલંબાઈ જેટલું હોય,

આવા કિસ્સામાં સરેરાશ વેગનું માન, સરેરાશ ઝડપ જેટલું હોય છે. આ વાત હંમેશાં સાચી નથી જે તમે નીચે આપેલ ઉદાહરણ 3.1માં જોઈ શકશો :

▶ **ઉદાહરણ 3.1** એક કાર સુરેખ રેખા પર ગતિ કરે છે. જેમકે આકૃતિ 3.1માં OP. આ કાર 18 sમાં O થી P જાય છે અને 6 sમાં P થી Q પરત જાય છે. (a) કાર O થી P જાય ત્યારે અને (b) O થી P પર જઈ Q પર પાછી ફરે. ત્યારે તેનો સરેરાશ વેગ અને સરેરાશ ઝડપ શું હશે ?

ઉકેલ (a)

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{\text{સ્થાનાંતર}}{\text{સમયગાળો}}$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{+360\ \text{m}}{18\ \text{s}} = +20\ \text{m s}^{-1}$$

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{\text{પથલંબાઈ}}{\text{સમયગાળો}}$$

$$= \frac{360\ \text{m}}{18\ \text{s}} = 20\ \text{m s}^{-1}$$

આમ, આ કિસ્સામાં સરેરાશ ઝડપ અને સરેરાશ વેગના માન સરખા છે.

(b) આ કિસ્સામાં,

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{\text{સ્થાનાંતર}}{\text{સમયગાળો}} = \frac{+240\,\text{m}}{(18+6.0)\,\text{s}}$$

$$= 10\ \text{m s}^{-1}$$

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{\text{પથલંબાઈ}}{\text{સમયગાળો}} = \frac{OP+PQ}{\Delta t}$$

$$= \frac{(360+120)\,\text{m}}{24\,\text{s}} = 20\ \text{m s}^{-1}$$

આમ, આ કિસ્સામાં, સરેરાશ ઝડપ, સરેરાશ વેગનાં માન જેટલી સમાન નથી તેનું કારણ તે છે કે ગતિ દરમિયાન દિશામાં ફેરફાર થાય છે. પરિણામ સ્વરૂપ પથલંબાઈ સ્થાનાંતરનાં માન કરતાં વધારે છે. જે દર્શાવે છે કે **સામાન્યતઃ ઝડપ વેગના માન કરતાં વધારે હોય છે** (ખાસ કિસ્સામાં સરખા હોઈ શકે). ◀

ઉદાહરણ 3.1માં જો કાર O થી P ગતિ કરી અને O પર તેટલા જ સમયગાળામાં પરત ફરે તો સરેરાશ ઝડપ 20 m/s થાય. પરંતુ સરેરાશ વેગ શૂન્ય થાય !

3.4 તત્કાલીન (તાત્ક્ષણિક) વેગ અને ઝડપ (INSTANTANEOUS VELOCITY AND SPEED)

સરેરાશ વેગ એ પદાર્થ આપેલ સમયગાળામાં કેટલી ઝડપી ગતિ કરે છે તેની માહિતી આપે છે પરંતુ આ સમયગાળા દરમિયાનના જુદા જુદા તાત્ક્ષણિક સમયે કેટલી ઝડપે ગતિ કરે છે, તે જાણી શકાતું નથી. આ માટે આપણે તાત્ક્ષણિક વેગ અથવા t ક્ષણે વેગ υ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

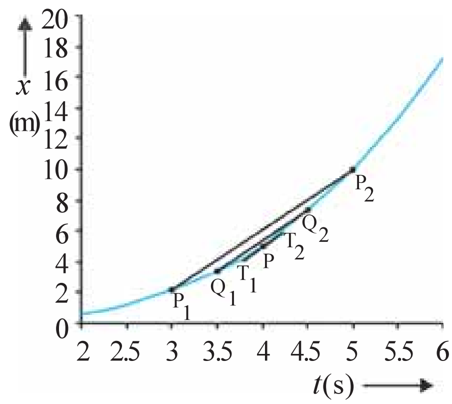
કોઈ ક્ષણે વેગને એટલે કે તત્કાલીન વેગને, સરેરાશ વેગના અતિસૂક્ષ્મ સમયગાળા (Δt)ના લક્ષ વડે દર્શાવી શકાય છે. બીજા શબ્દોમાં

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{3.3a}$$

$$= \frac{dx}{dt} \tag{3.3b}$$

જ્યાં, $\lim_{\Delta t \to 0}$ નો સંકેત તેની જમણી બાજુ રહેલી રાશિ પર $\Delta t \to 0$ના લક્ષમાં ક્રિયા દર્શાવે છે. કલન ગણિતની ભાષામાં, સમીકરણ (3.3b)માં જમણી બાજુ આવેલી રાશિને xનો t સાપેક્ષે વિકલિત ગુણક કહે છે અને તેને $\frac{dx}{dt}$ વડે દર્શાવ્યો છે. (જુઓ પરિશિષ્ટ 3.1) તે સમયને સાપેક્ષ તે ક્ષણે સ્થાનના ફેરફારનો દર છે. સમીકરણ (3.3a)નો ઉપયોગ કરીને આપણે કોઈ ક્ષણે વેગનું મૂલ્ય આલેખીય રીતે અથવા સંખ્યાકીય (સાંખ્યિક) રીતે મેળવી શકીએ છીએ. ધારો કે આપણે આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ ગતિમાન કારનાં (બિંદુ P) $t = 4$ s માટે વેગનું મૂલ્ય આલેખીય રીતે મેળવવું છે, તો ગણતરીની સગવડતા ખાતર આકૃતિ 3.3ને અલગ સ્કેલમાપ પર આકૃતિ 3.6માં દર્શાવેલ છે.

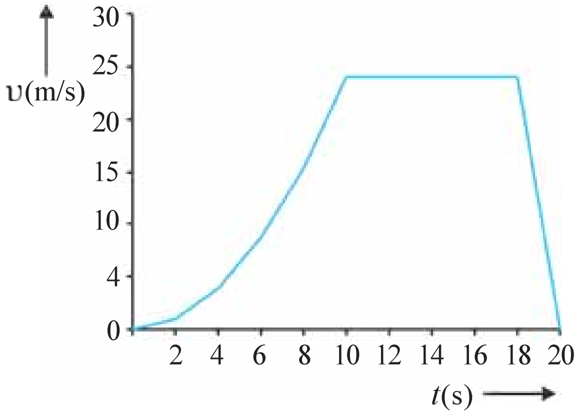
ધારો કે $t = 4$ sને કેન્દ્રમાં લઈને $\Delta t = 2$ s લઈએ તો સરેરાશ વેગની વ્યાખ્યા મુજબ, સુરેખ રેખા P_1P_2 (આકૃતિ 3.6)નો ઢાળ, 3 s અને 5 sનાં સમયગાળા માટે



આકૃતિ 3.6 *સ્થાન-સમય આલેખ દ્વારા વેગ શોધવો. t = 4 s પર વેગ, તે ક્ષણે આલેખના સ્પર્શકના ઢાળ જેટલો હોય છે.*

સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય આપે છે. હવે આપણે Δtનું મૂલ્ય 2 સ્થી ઘટાડી 1 s કરીએ. તો P_1P_2 રેખા Q_1Q_2 રેખા બને છે અને તેનો ઢાળ, 3.5 s અને 4.5 sના સમયગાળા માટે સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય આપે છે. આમ, limit $\Delta t \to 0$ના લક્ષમાં, રેખા P_1P_2 સ્થાન-સમય વક્રના P બિંદુએ સ્પર્શક બને છે અને આ બિંદુના સ્પર્શકનો ઢાળ $t = 4$ s માટે સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય આપે છે. **જોકે આલેખની રીતે આ બધી પ્રક્રિયા દર્શાવવી કઠિન છે. પરંતુ વેગના મૂલ્ય માટે સંખ્યાત્મક પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરીએ તો સીમાંત પ્રક્રિયા (Limiting Process)નો અર્થ સ્પષ્ટ થઈ જાય.** આકૃતિ 3.6માં $x = 0.08t^3$ માટે આલેખ દર્શાવ્યો છે. કોષ્ટક 3.1માં $\Delta x/\Delta t$નાં મૂલ્યો $t = 4.0$ sને કેન્દ્રમાં રાખી $\Delta t = 2.0$ s, 1.0 s, 0.5 s, 0.1 s અને 0.01 s માટે દર્શાવેલ છે. બીજા અને ત્રીજા સ્તંભ (Columns)માં $t_1 = \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)$ તથા $t_2 = \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ અને ચોથા અને પાંચમા સ્તંભમાં xનાં તદ્અનુરૂપ મૂલ્યો એટલે કે $x(t_1) = (0.08)t_1^3$ તથા $x(t_2) = (0.08)t_2^3$ દર્શાવેલ છે. છઠ્ઠા સ્તંભમાં તફાવત $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ની યાદી અને અંતિમ સ્તંભમાં Δx અને Δtનો ગુણોત્તર આપેલ છે, કે જે પ્રથમ સ્તંભમાં દર્શાવેલ Δtના મૂલ્યોને અનુરૂપ સરેરાશવેગ દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 3.1 પરથી સ્પષ્ટ છે કે જેમ જેમ આપણે Δtનું મૂલ્ય 2.0 સ્થી ઘટાડીને 0.01 s કરીએ છીએ તેમ તેના સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય સીમાંત મૂલ્ય (Limiting Value) 3.84થી વધુ નજીક આવતું જાય છે, જે $t = 4.0$ s માટે વેગનું મૂલ્ય છે. એટલે કે $t = 4.0$ s માટે $\frac{dx}{dt}$ના મૂલ્ય જેટલું જ છે. આવી જ રીતે, આકૃતિ 3.3 દર્શાવેલ ગતિ માટે પ્રત્યેક ક્ષણે આપણે કારનો વેગ શોધી શકીએ છીએ. આ કિસ્સા માટે, સમય સાપેક્ષે મેળવેલ વેગમાં થતો ફેરફાર આકૃતિ 3.7માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.7 આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ ગતિના સંદર્ભે વેગ-સમયનો આલેખ

તાત્ક્ષણિક વેગ શોધવા માટે આલેખીય પદ્ધતિ, દરેક વખતે સુવિધાજનક હોતી નથી. આ માટે આપણે સ્થાન-સમયનો આલેખ કાળજીપૂર્વક દોરવો પડે અને Δt ક્રમશઃ ઘટાડતા જઈને સરેરાશ વેગનાં મૂલ્યની ગણતરી કરવી જોઈએ. જો આપણી પાસે જુદી જુદી ક્ષણોને અનુરૂપ સ્થાનની આધારભૂત માહિતી ઉપલબ્ધ હોય અથવા સ્થાનનું સમયપરનું ચોક્કસ સૂત્ર હોય, તો વેગનું મૂલ્ય ગણતરી દ્વારા શોધવું વધુ સરળ પડે છે. આવી સ્થિતિમાં આપણે આધારભૂત માહિતી પરથી Δtનાં ક્રમશઃ ઘટાડેલાં મૂલ્યો માટે $\Delta x/\Delta t$ની ગણતરી કરી કોષ્ટક 3.1માં કરેલ પ્રવિધિ મુજબ સીમાંત મૂલ્ય શોધીએ છીએ અથવા આપેલ સૂત્ર માટે વિકલિત કલનશાસ્ત્રનો ઉપયોગ કરીને જુદી જુદી ક્ષણો માટે $\frac{dx}{dt}$ની ગણતરી કરીએ છીએ જે ઉદાહરણ 3.2માં કરેલ છે.

કોષ્ટક 3.1 $t = 4$ s માટે $\frac{\Delta x}{\Delta t}$નું સીમાંત મૂલ્ય (Limiting Value)

Δt (s)	t_1 (s)	t_2 (s)	$x(t_1)$ (m)	$x(t_2)$ (m)	Δx (m)	$\Delta x/\Delta t$ (m s^{-1})
2.0	3.0	5.0	2.16	10.0	7.84	3.92
1.0	3.5	4.5	3.43	7.29	3.86	3.86
0.5	3.75	4.25	4.21875	6.14125	1.9225	3.845
0.1	3.95	4.05	4.93039	5.31441	0.38402	3.8402
0.01	3.995	4.005	5.100824	5.139224	0.0384	3.8400

▶ *ઉદાહરણ 3.2* x-અક્ષને અનુલક્ષીને ગતિ કરતાં એક પદાર્થનું સ્થાન $x = a + bt^2$ વડે દર્શાવ્યું છે. જ્યાં $a = 8.5$ m, $b = 2.5$ ms^{-2} અને tનું માપન સેકન્ડમાં કરેલ છે. $t = 0$ સમયે તેનો વેગ કેટલો હશે ? 2.0 s અને 4.0 s વચ્ચે સરેરાશ વેગ કેટલો હશે ?

ઉકેલ વિકલન કલનશાસ્ત્રની સંજ્ઞા મુજબ વેગ,

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(a + bt^2) = 2bt = 5.0\ t \text{ m s}^{-1}$$

જ્યારે, $t = 0$ s, $\upsilon = 0$ m s^{-1} અને જ્યારે $t = 2.0$ s, $\upsilon = 10$ m s^{-1}

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{x(4.0) - x(2.0)}{4.0 - 2.0}$$

$$= \frac{a + 16b - a - 4b}{2.0} = 6.0 \times b$$

$$= 6.0 \times 2.5 = 15 \text{ m s}^{-1}$$ ◀

આકૃતિ 3.7 પરથી સ્પષ્ટ છે કે $t = 10$ s થી $t = 18$ s સમય દરમિયાન વેગ અચળ છે. $t = 18$ s થી $t = 20$ s વચ્ચેના સમયમાં નિયમિત રીતે ઘટે છે અને $t = 0$ s થી $t = 10$ s સમય દરમિયાન તે વધે છે. **નોંધો કે, નિયમિત ગતિ માટે દરેક ક્ષણે વેગ, સરેરાશ વેગ જેટલો હોય છે.**

તાત્ક્ષણિક ઝડપ અથવા ઝડપ ગતિમાન પદાર્થના વેગનું માન. ઉદાહરણ તરીકે, +24.0 m s^{-1} વેગ અને −24.0 m s^{-1} વેગ બંને સાથે સંકળાયેલ ઝડપ 24.0 m s^{-1} છે. અહીં એક બાબત નોંધો કે સીમિત (Finite) સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ એ સરેરાશ વેગનાં માન જેટલી કે તેનાથી વધુ હોઈ શકે. પરંતુ કોઈ પણ ક્ષણ માટે મેળવેલ તાત્ક્ષણિક ઝડપ તે જ ક્ષણ માટે તાત્ક્ષણિક વેગનાં માન જેટલી હોય છે. આવું કેમ ?

3.5 પ્રવેગ (ACCELERATION)

સામાન્ય રીતે, પદાર્થ ગતિમાં હોય તે દરમિયાન તેના વેગમાં ફેરફાર થતો હોય છે. આ ફેરફાર કેવી રીતે વર્ણવી શકાય ? શું તેને **સ્થાન સાપેક્ષે** અથવા **સમય સાપેક્ષે** વેગમાં થતાં ફેરફારના દર વડે વર્ણવી શકાય ? આ સમસ્યા ગૅલેલિયોના સમયમાં પણ હતી. પ્રથમ તેણે વિચાર્યું કે, આ ફેરફારને અંતર સાપેક્ષે વેગના ફેરફારના દર તરીકે વર્ણવી શકાય. પરંતુ મુક્ત પતન પામતાં અને ઢોળાવવાળી સપાટી પર ગતિ કરતા પદાર્થોની ગતિના અભ્યાસ દરમિયાન ગૅલેલિયોએ એવું અનુમાન કર્યું કે, બધા જ મુક્ત પતન પામતા પદાર્થોની ગતિ માટે વેગના ફેરફારનો દર સમય સાથે અચળ રહે છે. જ્યારે બીજી તરફ અંતર સાપેક્ષે વેગમાં થતો ફેરફાર અચળ નથી. પરંતુ પતન પામતાં પદાર્થનું અંતર વધે તેમ તે (વેગનો ફેરફાર) ઘટે છે. સમય સાપેક્ષે વેગમાં થતા ફેરફારનો દર પ્રવેગના ખ્યાલ તરફ દોરી જાય છે.

વેગના ફેરફાર અને સમયગાળાના ભાગાકાર (ગુણોત્તર)ને આપેલ સમયગાળા માટે સરેરાશ પ્રવેગ કહે છે.

$$\bar{a} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \qquad (3.4)$$

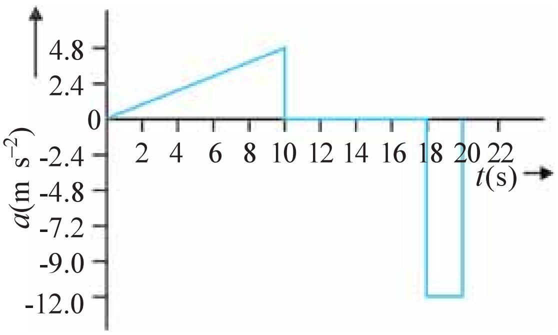
જ્યાં, υ_2 અને υ_1 અનુક્રમે t_2 અને t_1 સમયે તાત્ક્ષણિક વેગ અથવા વેગ છે. પ્રવેગ, એકમ સમયમાં વેગમાં થતો સરેરાશ ફેરફાર છે. જેનો SI એકમ m s^{-2}.

વેગ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ દોરવામાં આવે, તો (υ_2, t_2) અને (υ_1, t_1)ને જોડતી સુરેખાનો ઢાળ સરેરાશ પ્રવેગ જેટલો હોય છે. સરેરાશ પ્રવેગ માટે આકૃતિ 3.7માં વેગ-સમયનો આલેખ દર્શાવ્યો છે. જુદા જુદા સમયગાળા 0 s − 10 s, 10 s − 18 s અને 18 s − 20 s માટે પ્રવેગ

$$0 \text{ s} - 10 \text{ s},\quad \bar{a} = \frac{(24 - 0)\text{m s}^{-1}}{(10 - 0)\text{s}} = 2.4 \text{ m s}^{-2}$$

$$10 \text{ s} - 18 \text{ s},\quad \bar{a} = \frac{(24 - 24)\text{m s}^{-1}}{(18 - 10)\text{s}} = 0 \text{ m s}^{-2}$$

$$18 \text{ s} - 20 \text{ s},\quad \bar{a} = \frac{(0 - 24)\text{m s}^{-1}}{(20 - 18)\text{s}} = -12 \text{ m s}^{-2}$$



આકૃતિ 3.8 આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ ગતિ માટે સમયના વિધેય તરીકે પ્રવેગ

તાત્ક્ષણિક વેગની માફક જ તાત્ક્ષણિક પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt} \qquad (3.5)$$

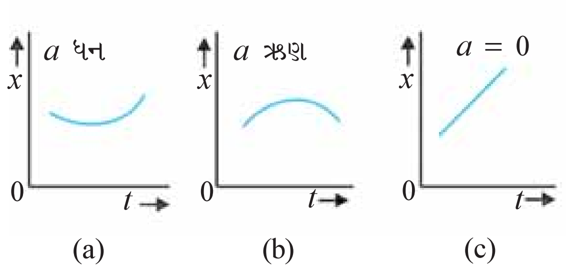
$\upsilon - t$ વક્રના કોઈ એક ક્ષણ માટે દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ તે ક્ષણે પ્રવેગ દર્શાવે છે. આકૃતિ 3.7માં દર્શાવેલ $\upsilon - t$ વક્ર માટે પ્રત્યેક ક્ષણ માટે આપણે પ્રવેગ મેળવી શકીએ છીએ. પરિણામી $a - t$ વક્ર, આકૃતિ 3.8માં દર્શાવેલ છે. આપણે

જોઈ શકીએ છીએ કે 0 s થી 10 sની વચ્ચે પ્રવેગ અનિયમિત છે. 10 s થી 18 sની વચ્ચે પ્રવેગ શૂન્ય અને 18 s થી 20 s વચ્ચે $-12\ m\ s^{-2}$ના મૂલ્ય સાથે પ્રવેગ નિયમિત છે. જ્યારે પ્રવેગ નિયમિત હોય, તો સમગ્ર સમયગાળા પર સરેરાશ પ્રવેગ સરખો હોય છે.

જેમકે, વેગ એવી રાશિ છે જેને માન અને દિશા બંને છે તેથી વેગનો ફેરફાર પણ કોઈ પણ એક અથવા આ બંને ઘટકો ધરાવે છે. માટે જ ઝડપ (વેગનું માન)માં ફેરફારને લીધે કે વેગની દિશાના ફેરફારને લીધે અથવા આ બંનેમાં ફેરફારને કારણે પ્રવેગ ઉદ્ભવે છે. વેગની માફક પ્રવેગ ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે છે. ધન, ઋણ અને શૂન્ય પ્રવેગી ગતિ માટે સ્થાન-સમય આલેખો આકૃતિ 3.9 (a), (b) અને (c) અનુક્રમે દર્શાવેલ છે. નોંધો કે, આલેખમાં ધન પ્રવેગ માટેનો વક્ર ઉપર તરફ, ઋણ પ્રવેગ માટેનો વક્ર-આલેખ નીચે તરફ અને શૂન્ય પ્રવેગ માટે તે સુરેખ છે. સ્વાધ્યાય માટે આકૃતિ 3.3માં પ્રવેગના ઉપર્યુક્ત ત્રણેય કિસ્સાને અનુરૂપ વક્ર વિભાગો ઓળખી બતાવો.

જોકે પ્રવેગ સમય સાથે બદલાઈ શકે છે. આ પ્રકરણમાં આપણો અભ્યાસ નિયમિત પ્રવેગી ગતિ સુધી સીમિત રાખીશું. આ કિસ્સામાં, સરેરાશ પ્રવેગનું મૂલ્ય ગતિનાં ગાળા માટે મળેલ પ્રવેગનાં મૂલ્ય જેટલું હોય છે. જો $t = 0$ સમયે પદાર્થનો વેગ υ_0 અને t સમયે υ હોય તો.

$$\bar{a} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t - 0} \quad \text{અથવા} \quad \upsilon = \upsilon_0 + at \qquad (3.6)$$



આકૃતિ 3.9 (a) *ધન પ્રવેગ* (b) *ઋણ પ્રવેગ* (c) *શૂન્ય પ્રવેગવાળી ગતિ માટે સ્થાન-સમય આલેખ*

હવે આપણે જોઈએ કે, કેટલાક સાદા કિસ્સાઓ માટે વેગ–સમય આલેખ કેવા મળે છે. નિયમિત પ્રવેગિ ગતિ માટે વેગ–સમય આલેખના કેટલાક કિસ્સાઓ આકૃતિ 3.10માં દર્શાવેલ છે.

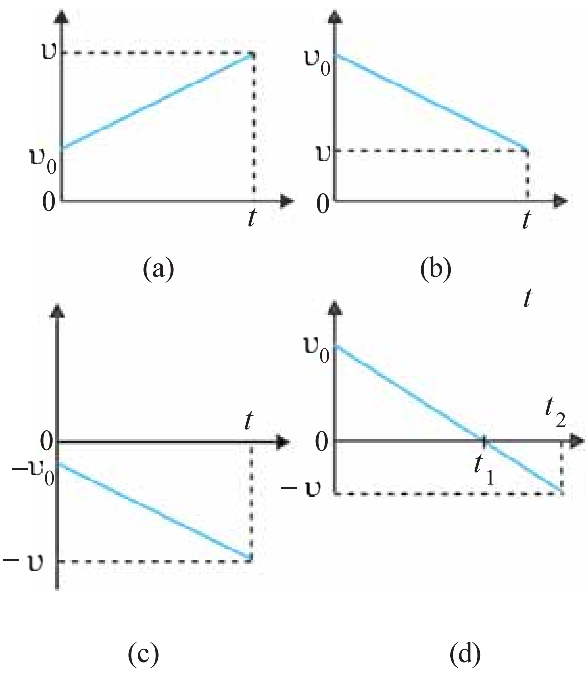
(a) પદાર્થ ધન પ્રવેગ સાથે ધન દિશામાં ગતિ કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.3માં $t = 0$ s થી $t = 10$ s વચ્ચે કારની ગતિ.

(b) પદાર્થ ઋણ પ્રવેગ સાથે ધન દિશામાં ગતિ કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.3માં $t = 18$ s થી $t = 20$ s વચ્ચેની કારની ગતિ.

(c) પદાર્થ ઋણ પ્રવેગ સાથે ઋણ દિશામાં ગતિ કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.1માં O પાસેથી ઋણ x-દિશામાં વધતી ઝડપથી દોડતી કારની ગતિ.

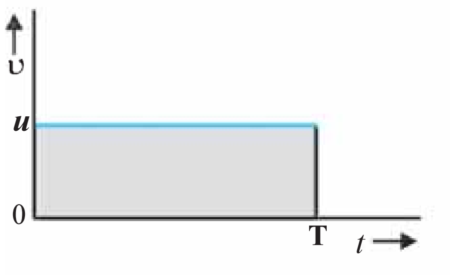
(d) પદાર્થ ધન દિશામાં t_1 સમય સુધી ગતિ કરે અને પછી તેટલા જ ઋણ પ્રવેગ સાથે પાછી ફરે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.1માં ગતિ કરતી કાર t_1 સમય સુધી ઘટતી ઝડપે Q સુધી ગતિ કરે અને પછી તેટલા જ ઋણ પ્રવેગ સાથે પાછી ફરે.

કોઈ ગતિમાન પદાર્થના વેગ-સમય આલેખનું એક રસપ્રદ લક્ષણ તે છે કે, **$\upsilon - t$ આલેખ નીચે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ તે સમયગાળા માટે પદાર્થનું સ્થાનાંતર દર્શાવે છે.** આ કથનની સામાન્ય સાબિતી માટે કલનશાસ્ત્રનો ઉપયોગ કરવો



આકૃતિ 3.10 *અચળ પ્રવેગી ગતિ માટે વેગ-સમય આલેખ*
(a) ધન પ્રવેગ સાથે ધન દિશામાં ગતિ
(b) ઋણ પ્રવેગ સાથે ધન દિશામાં ગતિ
(c) ઋણ પ્રવેગ સાથે ઋણ દિશાની ગતિ
(d) ઋણ પ્રવેગ સાથે ગતિ કરતો પદાર્થ કે જેની દિશા t_1 સમયે બદલાય છે. 0 થી t_1 સમય વચ્ચે તે ધન દિશામાં ગતિ કરે છે અને t_1 થી t_2 વચ્ચે તે વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે.

પડે. તેમ છતાં આપણે અચળવેગ u થી ગતિ કરતાં પદાર્થના એક સરળ કિસ્સા માટે તેની સત્યાર્થતા જોઈશું. આ પદાર્થ માટે વેગ-સમય આલેખ આકૃતિ 3.11માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.11 *$\upsilon - t$ વક્ર વડે દોરાયેલ ક્ષેત્રફળ આપેલ સમયગાળામાં પદાર્થના સ્થાનાંતર જેટલું હોય છે.*

અહીં $\upsilon - t$ વક્ર સમયની અક્ષને સમાંતર સુરેખા છે અને $t = 0$ થી $t = T$ વચ્ચે તેના દ્વારા દોરાતું ક્ષેત્રફળ u ઊંચાઈ અને T પાયાવાળા લંબચોરસનાં ક્ષેત્રફળ જેટલું છે. તેથી, ક્ષેત્રફળ $= u \times T = uT$, જે આ સમયગાળા માટે થતાં સ્થાનાંતર જેટલું છે. આ કિસ્સામાં કાપેલ અંતર ક્ષેત્રફળ જેટલું કેવી રીતે આવે ? વિચારો ! બંને અક્ષ પર રહેલી રાશિનાં પરિમાણો નોંધો જેના પરથી તમે જવાબ સુધી પહોંચી શકશો.

નોંધ : આ પ્રકરણમાં ઘણી જગ્યાએ $x - t$, $\upsilon - t$, $a - t$ આલેખો છે. જેમાં કેટલાંક બિંદુઓ તીક્ષ્ણ વળાંક (Sharp Kinks) ઉપર આવેલ છે. જે સૂચવે છે કે બિંદુઓએ આપેલ વિધેયોનું વિકલન થઈ શકે નહિ. પરંતુ કોઈ વાસ્તવિક પરિસ્થિતિમાં, જો આલેખનાં દરેક બિંદુઓએ વિધેયનું વિકલન થઈ શકે, તો તે આલેખ સરળ વક્ર (Smooth) હશે.

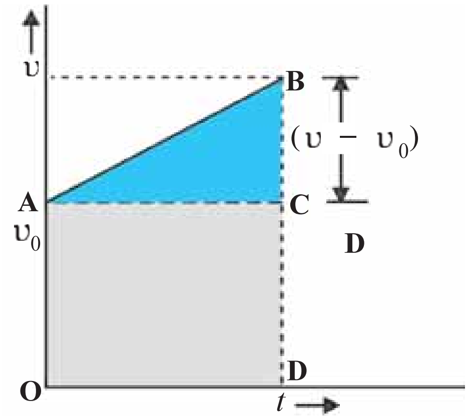
આનો અર્થ એવો થયો કે, કોઈ એક ક્ષણે વેગ અને પ્રવેગનાં મૂલ્યોનો ફેરફાર અચાનક (Abruptly) નહિ થાય પરંતુ આ ફેરફારો હંમેશાં સતત હશે.

3.6 નિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે શુદ્ધ ગતિવિજ્ઞાનનાં સમીકરણો (KINEMATIC EQUATIONS FOR UNIFORMLY ACCELERATED MOTION)

નિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે આપણે કેટલાંક સાદાં સમીકરણો મેળવીશું કે જે સ્થાનાંતર (x), લીધેલ સમય (t), પ્રારંભિક વેગ (υ_0), અંતિમ વેગ (υ) અને પ્રવેગ (a) સાથે જોડાયેલ છે. સમીકરણ 3.6માં અગાઉ આપણે સાબિત કરી ચૂક્યા છીએ કે જે a જેટલા નિયમિત પ્રવેગથી ગતિ કરતાં પદાર્થમાં અંતિમ અને પ્રારંભિક વેગ (υ) અને (υ_0) વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad (3.6)$$

આ સંબંધ આકૃતિ 3.12માં આલેખીય રીતે દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.12 *નિયમિત પ્રવેગી ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે $\upsilon - t$ વક્ર નીચે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ*

વક્ર વડે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ :

0 અને t ક્ષણો વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિકોણ ABCનું ક્ષેત્રફળ + લંબચોરસ OACDનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}(\upsilon - \upsilon_0)t + \upsilon_0 t$$

આગળના પરિચ્છેદમાં સમજાવ્યું તે મુજબ, $\upsilon - t$ વક્ર નીચે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ સ્થાનાંતર સૂચવે છે. માટે પદાર્થનું સ્થાનાંતર x :

$$x = \frac{1}{2}(\upsilon - \upsilon_0)\, t + \upsilon_0 t \qquad (3.7)$$

પરંતુ, $\upsilon - \upsilon_0 = at$

તેથી, $x = \frac{1}{2}at^2 + \upsilon_0 t$ અથવા

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.8)$$

સમીકરણ (3.7) નીચે મુજબ પણ લખી શકાય :

$$x = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} t = \bar{\upsilon} t \qquad (3.9a)$$

જ્યાં

$$\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} \text{ (માત્ર નિયમિત પ્રવેગ માટે)} \qquad (3.9b)$$

સમીકરણ (3.9a) અને (3.9b) સૂચવે છે કે પદાર્થનું સ્થાનાંતર x, સરેરાશ વેગના સંદર્ભે થાય છે, જે પ્રારંભિક અને અંતિમ વેગોના અંકગાણિતિક સરેરાશ જેટલું હોય છે.

સમીકરણ (3.6) પરથી, $t = (\upsilon - \upsilon_0)/a$ સમીકરણ (3.9a)માં મૂકતાં,

$$x = \bar{\upsilon} t = \left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}\right)\left(\frac{\upsilon - \upsilon_0}{a}\right) = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax \qquad (3.10)$$

સમીકરણ (3.6)માંથી tનું મૂલ્ય સમીકરણ (3.8)માં મૂકીને પણ ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પણ મેળવી શકાય છે. આમ, આપણે ત્રણ અગત્યનાં સમીકરણો મેળવ્યાં.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax \qquad (3.11a)$$

પાંચ રાશિઓ υ_0, υ, a, t અને xને સાંકળતાં આ સમીકરણો સુરેખ રેખા પર નિયમિત પ્રવેગ સાથે થતી ગતિ માટેના શુદ્ધ ગતિ વિજ્ઞાનનાં સમીકરણો છે.

સમીકરણ (3.11a)માં સમીકરણોનો સમૂહ $t = 0$ સમયે કણનું સ્થાન $x = 0$ છે તેમ ધારીને મેળવેલ છે. જો આપણે $t = 0$ સમયે સ્થાનનો યામ અશૂન્ય એટલે કે x_0 લઈએ, તો સમીકરણ (3.11a) વધુ વ્યાપક સ્વરૂપમાં (xને બદલે $x - x_0$ મૂકતાં) મળશે.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.11b)$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (3.11c)$$

ઉદાહરણ 3.3 કલનશાસ્ત્રની રીતનો ઉપયોગ કરીને નિયમિત પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો મેળવો.

ઉકેલ વ્યાખ્યા પરથી,

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$d\upsilon = a\,dt$$

બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t a\,dt$$

$$= a\int_0^t dt \qquad (a \text{ અચળ છે.})$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = at$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

હવે, $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$

$$dx = \upsilon\,dt$$

બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon\,dt$$

$$= \int_0^t (\upsilon_0 + at)\,dt$$

$$x - x_0 = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

આપણે લખી શકીએ,

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

અથવા $\upsilon\,d\upsilon = a\,dx$

બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon\,d\upsilon = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

$$\frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2} = a(x - x_0)$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0)$$

આ રીતનો ફાયદો તે છે કે તેનો ઉપયોગ અનિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે પણ કરી શકાય.

હવે, આપણે આ સમીકરણોનો ઉપયોગ કેટલાક અગત્યના કિસ્સા માટે કરીશું.

ઉદાહરણ 3.4 એક બહુમાળી મકાનના ટોચ પરથી એક દડાને (Ball) શીરોલંબ ઊર્ધ્વદિશામાં 20 m s^{-1}ની ઝડપથી ફેંકવામાં આવે છે. દડો જે બિંદુએથી ફેંકવામાં આવે છે તેની જમીન (Ground)થી ઊંચાઈ 25 m છે. (a) દડો કેટલી ઊંચાઈએ પહોંચશે ? (b) દડો જમીનને અથડાય તે પહેલાં કેટલો સમય લાગશે ? g = 10 m s^{-2} લો.

ઉકેલ (a) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ y-અક્ષને શિરોલંબ ઊર્ધ્વદિશામાં એવી રીતે લઈએ કે તેનું ઊગમબિંદુ જમીન પર હોય.

હવે υ_0 = 20 m s^{-1}

$a = -g = -10$ m s^{-2}

υ = 0 m s^{-1}

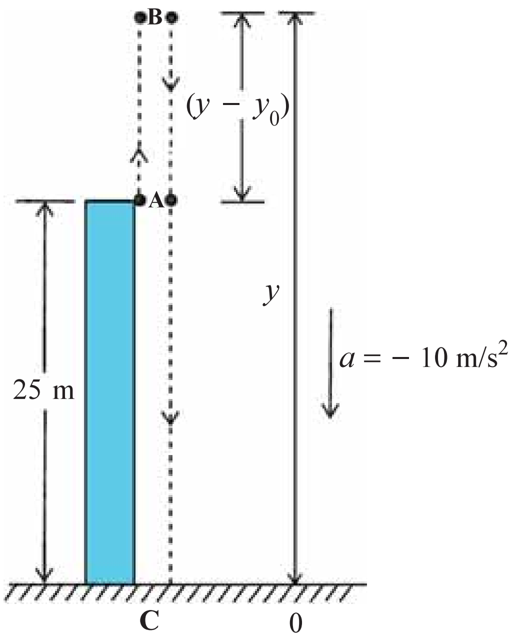
દડાને જે બિંદુએથી ફેંક્યો છે ત્યાંથી તે y ઊંચાઈ સુધી જાય છે તો

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(y - y_0)$ સમીકરણનો ઉપયોગ કરતાં.

$$0 = (20)^2 + 2(-10)(y - y_0)$$

સાદું રૂપ આપતાં, $(y - y_0)$ = 20 m

(b) આ પ્રશ્નનો ઉકેલ બે રીતે મેળવી શકાય. **ઉપયોગમાં લીધેલ રીતની સાવચેતીપૂર્વક નોંધ કરો.**



આકૃતિ 3.13

પ્રથમ રીત : આ પ્રથમ રીતમાં ગતિમાર્ગને બે ભાગમાં વિભાજિત કરીએ. ઊર્ધ્વદિશામાં ગતિ (A થી B) અને અધોદિશામાં ગતિ (B થી C) અને તેમને અનુરૂપ સમય t_1 અને t_2ની ગણતરી કરીએ.

B પાસે વેગ શૂન્ય છે. માટે

$\upsilon = \upsilon_0 + at$ પરથી,

$0 = 20 - 10t_1$ અથવા $t_1 = 2$ s

આ દડાને B સુધી જવા માટે લાગતો સમય છે. હવે B અથવા મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએથી ગુરુત્વપ્રવેગની અસર હેઠળ દડો મુક્તપતન પામે છે. અહીં દડો ઋણ y-દિશામાં ગતિ કરે છે. આપણે સમીકરણ

$y = y_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$ નો ઉપયોગ કરીશું.

જ્યાં, $y_0 = 45$ m, $y = 0$, $\upsilon_0 = 0$, $a = -g = -10$ m s^{-2}

$0 = 45 + \frac{1}{2}(-10)t_2^2$ સાદું રૂપ આપતાં, $t_2 = 3$ s

તેથી, દડો જમીનને અથડાય તે ક્ષણ પહેલાં દડાએ લીધેલ કુલ સમય $t_1 + t_2 = 2$ s + 3 s = 5 s

બીજી રીત : પસંદ કરેલ ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે દડાની પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થિતિના યામોનો ઉપયોગ, નીચે આપેલ સમીકરણમાં મૂકી, દડાએ લીધેલ કુલ સમય પણ ગણી શકાય છે.

$$y = y_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

હવે, $y_0 = 25$ m, $y = 0$ m,

$\upsilon_0 = 20$ m s^{-2}, $a = -10$ m s^{-2}, $t = ?$

$$0 = 25 + 20\,t + (1/2)\,(-10)t^2$$

અથવા $5t^2 - 20t - 25 = 0$

આ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવતાં,

$t = 5$ s

નોંધો કે બીજી રીત વધુ શ્રેષ્ઠ છે. જ્યાં સુધી અચળ પ્રવેગ હેઠળ ગતિ થતી હોય ત્યાં સુધી ગતિમાર્ગની ચિંતા આપણે કરવી જોઈએ નહિ. ◀

▶ *ઉદાહરણ 3.5* **મુક્તપતન (Free Fall)** મુક્તપતન પામતા પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરો. હવાનો અવરોધ અવગણો.

ઉકેલ જો પૃથ્વીની સપાટીથી થોડી ઊંચાઈ પરથી કોઈ પદાર્થને મુક્ત કરવામાં આવે, તો ગુરુત્વબળને કારણે તે નીચે તરફ પ્રવેગી ગતિ કરશે. ગુરુત્વને કારણે ઉદ્‌ભવતો પ્રવેગનાં માનને **g** વડે દર્શાવાય છે. જો હવાનો અવરોધ અવગણવામાં આવે, તો પદાર્થ **મુક્તપતન** કરે છે તેમ કહેવાય. પદાર્થ જે ઊંચાઈએથી પતન પામે છે તે ઊંચાઈ પૃથ્વીની ત્રિજ્યા કરતાં નાની હોય ત્યારે g ને 9.8 m s^{-2} જેટલો અચળ લઈ શકાય. આમ, મુક્તપતન એ અચળ પ્રવેગી ગતિનો કિસ્સો છે.

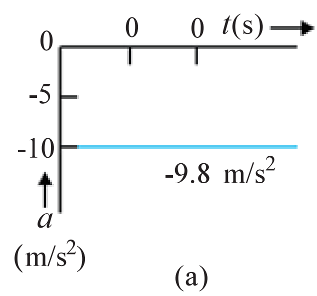
આવી ગતિને આપણે y-અક્ષની દિશામાં ધારીએ. વધુ સ્પષ્ટ રીતે $-y$ દિશામાં. કારણ કે આપણે ઊર્ધ્વદિશાની ગતિને ધન પસંદ કરેલ છે. જોકે ગુરુત્વીય પ્રવેગ હંમેશાં અધોદિશામાં હોવાથી તે ઋણ દિશામાં છે આમ,

$$a = -g = -9.8 \text{ m s}^{-2}$$

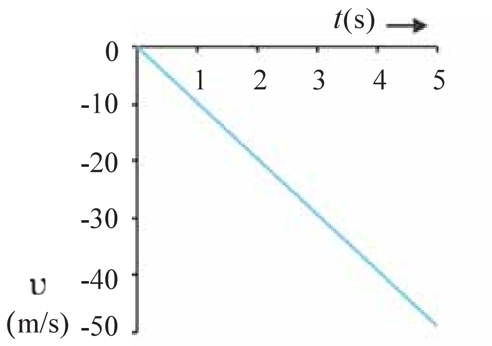
આમ, પદાર્થને $y = 0$ પાસેથી સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરવામાં આવે છે. તેથી $\upsilon_0 = 0$ અને આવી ગતિનાં સમીકરણો નીચે મુજબ મળે :

$$\upsilon = 0 - g\,t \quad = -9.8\,t \quad \text{m s}^{-1}$$
$$y = 0 - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \quad = -4.9\,t^2 \quad \text{m}$$
$$\upsilon^2 = 0 - 2\,g\,y \quad = -19.6\,y \quad \text{m}^2\,\text{s}^{-2}$$

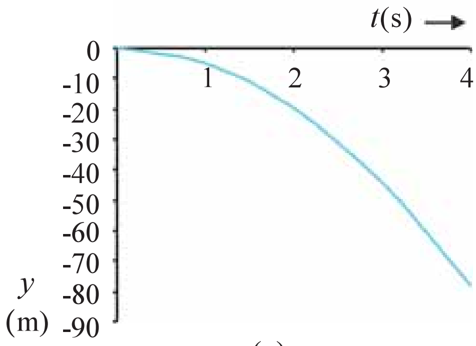
આ સમીકરણો વેગ અને કપાયેલ અંતરને સમય પરનાં વિધેય અને અંતર સાથે વેગનો ફેરફાર પણ આપે છે. આકૃતિ 3.14(a), (b) અને (c)માં સમય સાથે પ્રવેગ, વેગ અને અંતરમાં થતાં ફેરફારના આલેખ દોરેલા છે.



(a)



(b)



(c)

આકૃતિ **3.14** *મુક્તપતન પામતાં પદાર્થની ગતિ*
(a) સમય સાથે પ્રવેગમાં થતો ફેરફાર
(b) સમય સાથે વેગમાં થતો ફેરફાર
(c) સમય સાથે અંતરમાં થતો ફેરફાર

ઉદાહરણ 3.6 ગૅલેલિયોનો એકી અંકનો નિયમ (Galileo's Law of Odd Numbers) "સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્તપતન પામતાં પદાર્થ દ્વારા સમાન સમયગાળામાં કપાયેલ અંતરો એકબીજાના એવા ગુણોત્તરમાં હશે જે ગુણોત્તર 1થી શરૂ થતી એકી સંખ્યા માટે હોય. (એટલે કે 1 : 3 : 5 : 7 : ....) તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ મુક્તપતન પામતા પદાર્થના સમય અંતરાલને ઘણા-બધા સમાન સમયગાળા τમાં વિભાજિત કરીને ક્રમિક સમયગાળામાં પદાર્થ દ્વારા કપાયેલ અંતરો શોધીએ. અહીં પદાર્થનો પ્રારંભિક વેગ શૂન્ય છે માટે,

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરી, આપણે જુદા જુદા સમયગાળા 0, τ, 2τ, 3τ...માં પદાર્થનાં સ્થાનની ગણતરી કરી શકીએ છે. જેને કોષ્ટક 3.2ના બીજા સ્તંભમાં દર્શાવેલ છે. જો પ્રથમ સમયગાળા τ પછી પદાર્થનાં સ્થાન યામ $y_0 = (-1/2)g\tau^2$ લઈએ, તો ત્રીજા સ્તંભમાં પદાર્થનાં સ્થાનો y_0ના ગુણક સ્વરૂપે આપે છે. ચોથા સ્તંભમાં ક્રમિક સમયગાળામાં કપાયેલ અંતરો દર્શાવેલ છે. અંતિમ સ્તંભમાં દર્શાવ્યા મુજબ જોઈ શકાય છે કપાયેલાં અંતરો 1 : 3 : 5 : 7 : 9 જેવા સરળ ગુણોત્તરમાં છે.

આ નિયમને ગૅલેલિયો ગૅલિલીએ (1564–1642) પ્રતિપાદિત કર્યો હતો કે જેમણે મુક્તપતન પામતા પદાર્થ માટે પ્રથમ વખત માત્રાત્મક અભ્યાસ કર્યો હતો.

ઉદાહરણ 3.7 વાહનનું સ્ટોપિંગ ડિસ્ટન્સ (Stopping distance of vahicle) ગતિમાન વાહનને બ્રેક લગાડવામાં આવે ત્યારે તે થોભે તે પહેલાં તેણે કાપેલ અંતરને વાહનનું સ્ટોપિંગ ડિસ્ટન્સ કહે છે. રસ્તા પર વાહનોની સલામતી માટે આ એક અગત્યનું પરિબળ છે. Stopping distance વાહનના પ્રારંભિક વેગ, બ્રેકની ક્ષમતા અથવા બ્રેક લગાડવાથી વાહનમાં ઉદ્‌ભવતા પ્રતિપ્રવેગ $(-a)$ પર આધારિત છે. વાહન υ_0 અને a માટેના પદમાં Stopping distanceનું સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ ધારો કે, બ્રેક માર્યા પછી વાહન ઊભું રહે તે પહેલાં તેને કાપેલું અંતર d_s છે. સમીકરણ $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax$નો ઉપયોગ કરી અને $\upsilon = 0$ લેતાં, આપણને Stopping distanceનું સૂત્ર મળે.

$$d_s = -\frac{\upsilon_0^2}{2a}$$

કોષ્ટક 3.2

t	y	y_0 [$=(-1/2)g\tau^2$] yના સંદર્ભે	ક્રમિક સમયગાળામાં કપાયેલ અંતરો	કપાયેલ અંતરોનો ગુણોત્તર
0	0	0		
τ	$-(1/2)\ g\ \tau^2$	y_0	y_0	1
2 τ	$-4(1/2)\ g\ \tau^2$	4 y_0	3 y_0	3
3 τ	$-9(1/2)\ g\ \tau^2$	9 y_0	5 y_0	5
4 τ	$-16(1/2)g\ \tau^2$	16 y_0	7 y_0	7
5 τ	$-25(1/2)g\ \tau^2$	25 y_0	9 y_0	9
6 τ	$-36(1/2)g\ \tau^2$	36y_0	11 y_0	11

આમ, Stopping distance વાહનની પ્રારંભિક વેગનાં વર્ગને સપ્રમાણ છે. વાહનનો પ્રારંભિક વેગ બમણો કરવામાં આવે તો Stopping distance ચારગણું થાય છે. (સમાન પ્રતિપ્રવેગ માટે).

કોઈ એક વિશિષ્ટ બનાવટની કાર માટે જુદા જુદા વેગો 11, 15, 20 તથા 25 m/sને અનુરૂપ Stopping distance અનુક્રમે 10 m, 20 m, 34 m તથા 50 m મળે છે. જે ઉપર્યુક્ત સમીકરણને લગભગ સુસંગત છે.

ઉદાહરણ તરીકે, શાળાકીય વિસ્તારમાં વાહનોની ગતિમર્યાદા માટે Stopping distance અગત્યનું પરિબળ છે. ◀

▶ ***ઉદાહરણ 3.8* પ્રતિક્રિયા સમય (Reaction Time) :** જ્યારે કોઈ પરિસ્થિતિ એવી નિર્માણ પામે કે જેથી આપણે ત્વરિત પ્રતિક્રિયા આપવાની જરૂરિયાત ઉભી થાય તો તે ક્રિયા ખરેખર કરીએ તે પહેલા અમુક સમય લાગે છે. આમ, કોઈ વ્યક્તિ અવલોકન કરે, તેના પર વિચાર કરે અને પછી કાર્યવાહી કરે તે માટે લાગતા સમયને પ્રતિક્રિયા-સમય કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ એક વ્યક્તિ કાર ચલાવી રહ્યો છે અને અચાનક એક છોકરો રસ્તા પર આવી જાય છે ત્યારે કારને બ્રેક લગાડ્યા પહેલાં જે સમય વિતેલાં છે તેને Reaction time કહે છે. Reaction time પરિસ્થિતિની જટિલતા અને વ્યક્તિ વિશેષ પર આધારિત છે.

તમે તમારા Reaction timeનું માપન એક સરળ પ્રયોગ દ્વારા કરી શકો છો. તમારા મિત્રને એક ફૂટપટ્ટી આપો અને તેને કહો કે તે ફૂટપટ્ટી તમારા 1 અંગૂઠા અને બાકીની ચાર આંગળીઓ વચ્ચેની જગ્યામાંથી (આકૃતિ 3.15) શિરોલંબ પડતી મૂકે. જેવી ફૂટપટ્ટી મુક્તપતન પામે કે તરત જ તમે તેને પકડી લો. ફૂટપટ્ટી વડે કપાયેલ અંતર d માપો. એક વિશેષ ઉદાહરણમાં $d = 21.0$ cm મળ્યું હતું, તો Reaction timeની ગણતરી કરો.

***આકૃતિ* 3.15** *ક્રિયા-સમયનું માપન*

ઉકેલ

ફૂટપટ્ટી મુક્તપતન કરે છે. અહીં $\upsilon_o = 0$ અને $a = -g = -9.8$ m s^{-2}. પ્રતિક્રિયા સમય t_r તથા કપાયેલ અંતર d વચ્ચેનો સંબંધ.

$$d = -\frac{1}{2}gt_r^2 \quad \text{અથવા} \quad t_r = \sqrt{\frac{2d}{g}} \text{ s}$$

$d = 21.0$ cm, $g = -9.8$ m s^{-2} આપેલ છે, તો પ્રતિક્રિયા સમય,

$$\therefore\ t_r = \sqrt{\frac{2 \times 0.21}{9.8}} \cong 0.2 \text{ s.}$$ ◀

3.7 સાપેક્ષ વેગ (RELATIVE VELOCITY)

તમને ટ્રેનમાં મુસાફરી કરવાનો અને તમારી જ ટ્રેનની દિશામાં ગતિ કરતી બીજી ટ્રેનને તમારાથી આગળ જવાના અનુભવથી પરિચિત હશો. તમારી ટ્રેન કરતાં તે ટ્રેન વધારે ઝડપથી ગતિ કરતી હશે તો તે તમારાથી આગળ જશે. જમીન પર ઊભા રહેલા અને બંને ટ્રેનને જોનાર વ્યક્તિને તમારી ટ્રેન બીજી ટ્રેન કરતાં ધીમી દેખાશે. જો જમીનની સાપેક્ષે બંને ટ્રેનોનો વેગ સમાન હોય, તો તમને બીજી ટ્રેન ગતિ કરતી દેખાતી નથી. આવા અનુભવો સમજવા માટે આપણે સાપેક્ષ વેગની સંકલ્પના પ્રસ્તાવિત કરીશું.

એક પારિમાણિક (x-અક્ષ) પર નિયમિત ગતિ કરતાં બે પદાર્થો A અને Bના સરેરાશ વેગ υ_A અને υ_B છે. (જ્યાં સુધી વિશેષ રૂપે ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય ત્યાં સુધી આ પ્રકરણમાં તમામ વેગનું જમીન સાપેક્ષે માપન કરેલ છે.) $t = 0$ સમયે $x_A(0)$ અને $x_B(0)$ અનુક્રમે A અને Bનાં સ્થાન છે. t સમયે તેમનાં સ્થાન $x_A(t)$ અને $x_B(t)$ નીચે મુજબ આપી શકાય :

$$x_A(t) = x_A(0) + \upsilon_A t \qquad (3.12a)$$

$$x_B(t) = x_B(0) + \upsilon_B t \qquad (3.12b)$$

તો પદાર્થ Aથી પદાર્થ B સુધીનું સ્થાનાંતર,

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t)$$

$$= [x_B(0) - x_A(0)] + (\upsilon_B - \upsilon_A)\, t. \qquad (3.13)$$

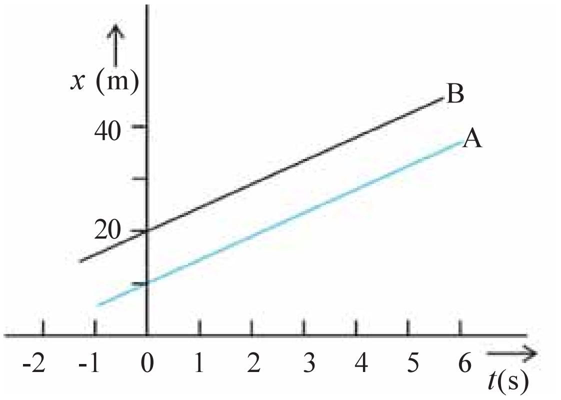
પરથી મળે છે.

સમીકરણ (3.13)નું અર્થઘટન સરળતાથી કરી શકાય છે. જે આપણને જણાવે છે કે, પદાર્થ Aથી જોઈએ તો, પદાર્થ Bનો વેગ $\upsilon_B - \upsilon_A$ કારણ કે એકમ સમયમાં A થી B સુધીનું સ્થાનાંતર $\upsilon_B - \upsilon_A$ જેટલા સ્થિત ફેરફાર જેટલું હોય છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે પદાર્થ Bનો વેગ પદાર્થ A સાપેક્ષે $\upsilon_B - \upsilon_A$ છે.

$$\upsilon_{BA} = \upsilon_B - \upsilon_A \qquad (3.14a)$$

આ જ રીતે પદાર્થ Aનો વેગ પદાર્થ B સાપેક્ષે વેગ

$$\upsilon_{AB} = \upsilon_A - \upsilon_B \qquad (3.14b)$$



આકૃતિ **3.16** *સમાન વેગથી ગતિ કરતાં બે પદાર્થ માટે સ્થાન-સમય આલેખ*

આ સૂચવે છે કે $\upsilon_{BA} = -\upsilon_{AB}$ (3.14c)

હવે આપણે કેટલાક વિશિષ્ટ કિસ્સા જોઈએ.

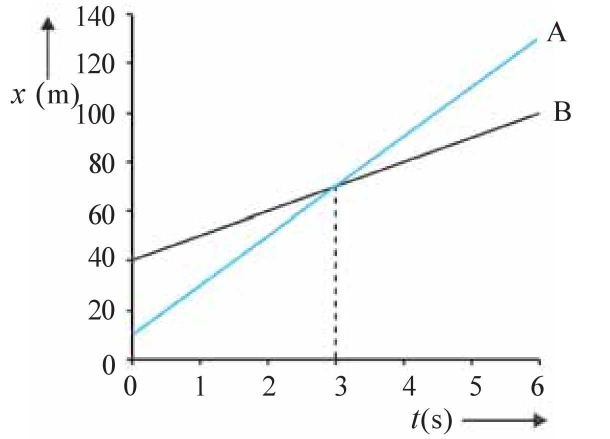
(a) જો $\upsilon_B = \upsilon_A$, તો $\upsilon_B - \upsilon_A = 0$ તો સમીકરણ (3.13) પરથી $x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0)$. તેથી બંને પદાર્થ $x_B(0) - x_A(0)$ જેટલા અચળ અંતરે રહેલા છે અને તેમનો સ્થાન-સમય આકૃતિ 3.16માં દર્શાવ્યા મુજબ, એકબીજાને સમાંતર સુરેખા હશે. આ કિસ્સામાં સાપેક્ષ વેગ υ_{AB} અથવા υ_{BA} શૂન્ય હોય.

(b) જો $\upsilon_A > \upsilon_B$ તો $\upsilon_B - \upsilon_A$ ઋણ મળશે. એક આલેખ બીજા આલેખ કરતાં વધુ ઢોળાવવાળો હશે અને બંને આલેખો કોઈ સામાન્ય બિંદુએ ભેગા મળશે. ઉદાહરણ તરીકે ધારો કે $\upsilon_A = 20 \text{ m s}^{-1}$ અને $x_A(0) = 10$ m અને $\upsilon_B = 10 \text{ m s}^{-1}$, $x_B(0) = 40$ m, તો જે સમયે બંને પદાર્થો એકબીજાને મળશે તે સમય $t = 3$s હશે. (આકૃતિ 3.17) આ ક્ષણે બંનેનાં સ્થાન $x_A(t) = x_B(t) = 70$ m હશે. આમ, પદાર્થ (A) આ સમયે પદાર્થ Bની આગળ નીકળી જશે. આ કિસ્સામાં

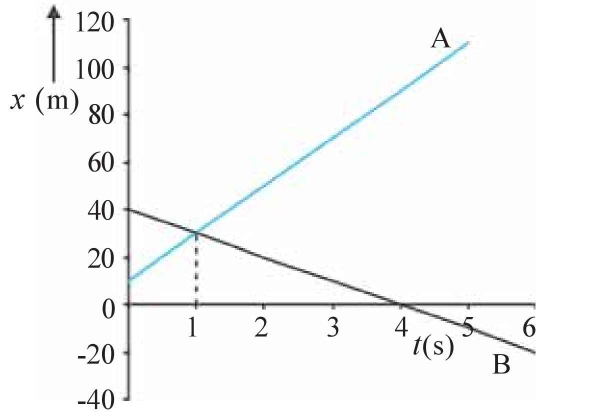
$\upsilon_{BA} = 10 \text{ m s}^{-1} - 20 \text{ m s}^{-1} = -10 \text{ m s}^{-1} = -\upsilon_{AB}$.

(c) ધારો કે υ_A અને υ_B વિરુદ્ધ સંજ્ઞા ધરાવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, ઉપરનાં ઉદાહરણમાં પદાર્થ A, 20 m s^{-1} જેટલા વેગથી $x_A(0) = 10$ m સ્થાનેથી ગતિની શરૂઆત કરે છે અને પદાર્થ B, -10 m s^{-1} જેટલા વેગથી $x_B(0) = 40$ m સ્થાનેથી ગતિની શરૂઆત કરે છે. $t = 1$ s પછી બંને પદાર્થો એકબીજાને મળે છે. (આકૃતિ 3.18) Bનો A સાપેક્ષ વેગ $\upsilon_{BA} = [-10 - (20)] \text{ m s}^{-1} = -30 \text{ m s}^{-1} = -\upsilon_{AB}$. આ કિસ્સામાં υ_{BA} અને υ_{AB}ના માન ($= 30 \text{ m s}^{-1}$), A અને Bનાં વેગનાં માન કરતાં વધારે હોય છે. જોકે વિચારેલ પદાર્થો બે ટ્રેનો હોય, તો બેમાંથી કોઈ એક ટ્રેનમાં બેઠેલ વ્યક્તિને બીજી ટ્રેન ખૂબ જ ઝડપી ગતિ કરે છે તેમ દેખાશે.

નોંધો કે સમીકરણ (3.14) ત્યારે જ સાચા છે જ્યારે υ_A અને υ_B તાત્ક્ષણિક વેગોને રજૂ કરતા હોય.



આકૃતિ **3.17** *અસમાન વેગથી ગતિ કરતાં બે પદાર્થ માટે સ્થાન-સમય આલેખ, એકબીજાને મળવાનો સમય દર્શાવે છે.*



આકૃતિ **3.18** *વિરુદ્ધ દિશામાં વેગ ધરાવતા પદાર્થો માટે સ્થાન-સમય આલેખ, એકબીજાને મળવાનો સમય દર્શાવે છે.*

ઉદાહરણ 3.9 બે સમાંતર રેલવે ટ્રેક ઉત્તર દક્ષિણ દિશામાં છે. ટ્રેન A ઉત્તર તરફ 54 km h^{-1}ની ઝડપે અને ટ્રેન B દક્ષિણ દિશામાં 90 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરે છે. તો,

(a) A સાપેક્ષ Bનો વેગ

(b) B સાપેક્ષ જમીનનો વેગ અને

(c) ટ્રેન Aની છત પર તેની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં. (ટ્રેન A સાપેક્ષ 18 km h^{-1}ની ઝડપથી) દોડતાં વાંદરાનો વેગ જમીન પર ઊભી રહેલી વ્યક્તિ સાપેક્ષે શોધો.

ઉકેલ (a) X-અક્ષની ધન દિશાને દક્ષિણથી ઉત્તર દિશા તરફની પસંદ કરો તો,

$\upsilon_A = + 54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$

$\upsilon_B = - 90 \text{ km h}^{-1} = - 25 \text{ m s}^{-1}$

A સાપેક્ષે Bનો વેગ $\upsilon_B - \upsilon_A = - 40 \text{ m s}^{-1}$ થશે. એટલે કે ટ્રેન Aને ટ્રેન B, ઉત્તરથી દક્ષિણ દિશામાં 40 m s^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરતી દેખાશે.

(b) B સાપેક્ષે જમીનનો સાપેક્ષ વેગ $= 0 - \upsilon_B = 25 \text{ m s}^{-1}$

(c) ધારો કે જમીન સાપેક્ષે વાંદરાનો વેગ υ_M છે. A સાપેક્ષ વાંદરાનો વેગ $\upsilon_{MA} = \upsilon_M - \upsilon_A = - 18 \text{ km h}^{-1} = - 5 \text{ m s}^{-1}$

તેથી, $\upsilon_M = (15 - 5) \text{ m s}^{-1} = 10 \text{ m s}^{-1}$ ◄

સારાંશ

1. જો પદાર્થનું સ્થાન સમય સાથે બદલાતું હોય, તો પદાર્થ ગતિમાં છે તેમ કહેવાય. અનુકૂળતા મુજબ પસંદ કરેલ ઊગમબિંદુ સાપેક્ષે પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવી શકાય છે. સુરેખ રેખાની ગતિ માટે, ઊગમબિંદુની જમણી બાજુ ધન અને ડાબી બાજુ ઋણ લેવામાં આવે છે.

2. પદાર્થ વડે કપાયેલ કુલ અંતરને પથલંબાઈ કહે છે.

3. સ્થાનમાં થતાં ફેરફારને સ્થાનાંતર કહે છે. $\Delta x = x_2 - x_1$ આપેલ બે બિંદુ વચ્ચેની પથલંબાઈ સ્થાનાંતરના માન જેટલી કે તેનાથી વધુ હોઈ શકે.

4. જ્યારે કોઈ પદાર્થ સમાન સમયગાળામાં સમાન અંતર કાપે, તો તેવી ગતિને નિયમિત ગતિ કહે છે. તેમ ના હોય, તો અનિયમિત ગતિ કહેવાય.

5. સ્થાનાંતર અને તે માટે લાગતા સમયગાળાનાં ભાગાકારને સરેરાશ વેગ કહે છે.

$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

$x - t$ આલેખમાં, આપેલ સમયગાળા માટેનો સરેરાશ વેગ તે જ સમયગાળા માટે પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાનને જોડતી રેખાના ઢાળ જેટલો હોય છે.

6. કપાયેલ કુલ પથલંબાઈ અને તે માટે લાગતાં સમયગાળાના ગુણોત્તરને સરેરાશ ઝડપ કહે છે. આપેલ સમયગાળા માટે પદાર્થની સરેરાશ ઝડપ તેના સરેરાશ વેગનાં માન જેટલી કે તેનાથી વધુ હોય છે.

7. તાત્ક્ષણિક વેગ અથવા સાદી રીતે વેગ તે સરેરાશ વેગના સમયગાળાનું ખૂબ જ સૂક્ષ્મ મૂલ્ય $\Delta t \to 0$ લક્ષમૂલ્ય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$x \to t$ આલેખમાં કોઈ એક ક્ષણ માટે દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ તે ક્ષણે તાત્ક્ષણિક વેગ બરાબર હોય છે.

8. વેગમાં થતાં ફેરફાર અને તે ફેરફાર માટેના સમયગાળાના ભાગાકારને સરેરાશ પ્રવેગ કહે છે.

$$\bar{a} = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$$

9. તાત્ક્ષણિક પ્રવેગને સરેરાશ પ્રવેગના $\Delta t \to 0$ લક્ષમૂલ્ય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$\upsilon - t$ આલેખમાં કોઈ એક ક્ષણ પાસે ઢાળ તે ચોક્કસ ક્ષણે પદાર્થનો પ્રવેગ દર્શાવે છે. નિયમિત ગતિ માટે પ્રવેગ શૂન્ય હોય છે અને $x - t$ આલેખ સમય અક્ષ સાથે સીધી રેખામાં ઢળતો હોય છે અને $\upsilon - t$ આલેખ સમયની અક્ષને સમાંતર સીધી રેખામાં હોય છે. નિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે $x - t$ આલેખ પરવલય જ્યારે $\upsilon - t$ આલેખ સમયની અક્ષ સાથે ઢળતી સીધી રેખા હોય છે.

10. t_2 અને t_1 સમય વચ્ચેના વેગ-સમય વક્ર નીચે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ આ જ સમયગાળા માટે સ્થાનાંતર જેટલું હોય છે.

11. સુરેખ રેખા પર નિયમિત પ્રવેગી ગતિ કરતાં પદાર્થો માટે પાંચ રાશિઓ, સ્થાનાંતર x, લાગેલ સમય t, પ્રારંભિક વેગ υ_0, અંતિમ વેગ υ અને પ્રવેગ a ને સાંકળતાં સાદાં સમીકરણોના સમૂહને શુદ્ધ ગતિવિજ્ઞાનમાં ગતિનાં સમીકરણ કહે છે.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax$$

જો $t = 0$ સમયે પદાર્થનું સ્થાન 0 (zero) હોય. પરંતુ કણ $x = x_0$ પાસેથી ગતિ શરૂ કરે, તો ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં xને બદલે $(x - x_0)$ લેવું પડે.

ભૌતિક રાશિ	સંકેત/સંજ્ઞા	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
પથલંબાઈ		[L]	m	
સ્થાનાંતર	Δx	[L]	m	$= x_2 - x_1$ એક પરિમાણીય, તેની નિશાની દિશાનું સૂચન કરે છે.
વેગ		$[LT^{-1}]$	m s^{-1}	
(a) સરેરાશ	$\bar{\upsilon}$			$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$
(b) તાત્ક્ષણિક	υ			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ એક પરિમાણીય, તેની નિશાની દિશાનું સૂચન કરે છે.
ઝડપ		$[LT^{-1}]$	m s^{-1}	
(a) સરેરાશ				$= \frac{\text{પથલંબાઈ}}{\text{સમયગાળો}}$
(b) તાત્ક્ષણિક				$= \frac{dx}{dt}$
પ્રવેગ		$[LT^{-2}]$	m s^{-2}	
(a) સરેરાશ	$\bar{a}$			$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$
(b) તાત્ક્ષણિક	a			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt}$ એક પરિમાણીય તેની નિશાની દિશાનું સૂચન કરે છે.

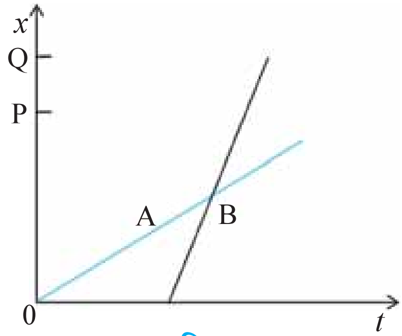
ગહન વિચારણાના મુદ્દા (POINTS TO PONDER)

1. પદાર્થ વડે બે બિંદુ વચ્ચે કપાયેલ પથલંબાઈ સામાન્ય રીતે સ્થાનાંતરનાં માન જેટલી હોતી નથી. સ્થાનાંતરનો આધાર ફક્ત અંતિમ સ્થાન પર છે. પથલંબાઈ (નામ જ સ્પષ્ટ કરે છે.) પદાર્થના ખરા ગતિમાર્ગ પર આધારિત છે. એક પરિમાણમાં જ્યારે પદાર્થ ગતિ દરમિયાન પોતાની દિશા બદલતા ન હોય ત્યારે બંને રાશિ સમાન હોય છે. જ્યારે બાકીના કિસ્સાઓમાં પથલંબાઈ હંમેશાં સ્થાનાંતરનાં માન કરતાં મોટી હોય છે.
2. ઉપરના મુદ્દા 1ના સંદર્ભે આપેલ સમયગાળા માટે પદાર્થની સરેરાશ ઝડપ, સરેરાશ વેગનાં માન જેટલી કે તેનાથી વધારે હોય છે. જ્યારે પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતરનું માન સમાન હોય ત્યારે જ બંને સમાન હશે.
3. ઉદ્‌ગમબિંદુ અને અક્ષની ધન દિશા પસંદગીની બાબત છે. સ્થાનાંતર, વેગ અને પ્રવેગ જેવી રાશિઓને સંજ્ઞા આપતાં પહેલાં પસંદગીની સ્પષ્ટતા કરવી જોઈએ.
4. જો કણની ઝડપ વધતી હોય તો પ્રવેગ વેગની દિશામાં હોય. જો તેની ઝડપ ઘટતી હોય, તો પ્રવેગ ગતિની વિરુધ્ધ દિશામાં હોય. આ કથન ઊગમબિંદુ અને અક્ષની પસંદગીથી સ્વતંત્ર છે.
5. પ્રવેગનું ચિહ્ન કણની ઝડપ વધે છે કે ઘટે છે તે આપણને સૂચવતું નથી. પ્રવેગના ચિહ્ન (મુદ્દા 3 મુજબ)નો આધાર અક્ષની ધન દિશાની પસંદગી પર છે. ઉદાહરણ તરીકે શિરોલંબ ઊર્ધ્વદિશાને અક્ષની ધન દિશા તરીકે પસંદ કરેલ હોય, તો ગુરુત્વીય પ્રવેગ ઋણ ગણાય. જો કણ ગુરુત્વની અસર હેઠળ પતન પામતો હોય, તો ઋણ પ્રવેગ તેની ઝડપમાં વધારો કરે છે. કોઈ એક કણને ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકવામાં આવે, તો આ જ ઋણપ્રવેગ તેના વેગને ઘટાડે છે.
6. કોઈ એક ક્ષણે કણનો વેગ શૂન્ય હોય, તો તે ક્ષણે તેનો પ્રવેગ શૂન્ય હોવો જરૂરી નથી. કોઈ કણ ક્ષણ માટે સ્થિર અવસ્થામાં હોઈ શકે પરંતુ તે ક્ષણે પ્રવેગ શૂન્ય નથી હોતો. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ કણને ઉપર તરફ ફેંકવામાં આવે, તો તેની મહત્તમ ઊંચાઈએ વેગ શૂન્ય થશે પરંતુ તેનો પ્રવેગ ગુરુત્વીયપ્રવેગ જેટલો જ હશે.
7. ગતિ માટેના શુદ્ધ ગતિકી સમીકરણ (સમીકરણ 3.11)ની વિભિન્ન રાશિઓ બીજગણિતીય રાશિઓ છે. એટલે કે તે ધનાત્મક અને ઋણાત્મક હોઈ શકે. વિભિન્ન રાશિઓના મૂલ્ય યોગ્ય ચિહ્ન સાથે મૂકવામાં આવે, તે શરતને આધિન આ સમીકરણો બધી જ પરિસ્થિતિમાં (અચળ પ્રવેગી એક પારિમાણિય ગતિ માટે) લાગુ પડે છે.
8. તાત્ક્ષણિક વેગ તથા પ્રવેગની વ્યાખ્યાઓ (સમીકરણ (3.3) અને (3.5)) ચોક્કસ અને હંમેશ માટે સાચા છે જ્યારે શુદ્ધ ગતિકી સમીકરણો (સમીકરણ (3.11)) તે જ ગતિ માટે સાચા થશે કે જેમાં પ્રવેગનું માન અને દિશા સમગ્ર ગતિ દરમિયાન અચળ રહે.

સ્વાધ્યાય

3.1 નીચે આપેલ ગતિનાં ઉદાહરણો પૈકી કયા ઉદાહરણમાં તંત્રને આશરે બિંદુવત પદાર્થ ગણી શકાય ?
(a) બે સ્ટેશન વચ્ચે વગર ઝટકે (jerks) ગતિ કરતી ટ્રેન
(b) સરળતાથી કોઈ વર્તુળમાર્ગ પર સાઇકલ ચલાવતી વ્યક્તિના માથા પર બેઠેલ કોઈ વાંદરો
(c) જમીન પર અથડાઈને તીવ્ર વળાંક લેતો સ્પિન થતો (spining) ક્રિકેટનો દડો
(d) ટેબલની કિનારી પરથી ખસીને પડતું બીકર

3.2 બે બાળકો A અને B તેમની શાળા Oથી અનુક્રમે તેમના ઘરે P અને Q પરત ફરી રહ્યાં છે. જેનો સ્થાન-સમય ($x - t$) આલેખ આકૃતિ 3.19માં દર્શાવેલ છે. નીચે કૌંસમાં દર્શાવેલ સાચી નોંધ પસંદ કરો.
(a) (B/A), (A/B) કરતાં શાળાની નજીક રહે છે.
(b) (B/A), (A/B) કરતાં શાળાએથી વહેલી શરૂઆત કરે છે.
(c) (B/A), (A/B) કરતાં ઝડપથી ચાલે છે.
(d) A અને B એક જ/જુદા જુદા સમયે ઘરે પહોંચે છે.
(e) (A/B) રસ્તા પર (B/A)થી (એક વખત/બે વખત) આગળ નીકળી જાય છે.



આકૃતિ **3.19**

3.3 એક મહિલા સવારે 9.00 કલાકે પોતાના ઘરેથી 2.5 km દૂર આવેલા પોતાના કાર્યાલય પર 5 km h^{-1}ની ઝડપે સીધી સડક પર ચાલીને જાય છે. ત્યાં તે સાંજે 5.00 કલાક સુધી રહે છે અને 25 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરતી ઑટોરિક્સામાં પોતાના ઘરે પરત ફરે છે. યોગ્ય સ્કેલમાપ પસંદ કરીને મહિલાની ગતિ માટે $x - t$ આલેખ દોરો.

3.4 એક દારૂડિયો એક સાંકડી ગલીમાં 5 પગલાં આગળ ભરે છે અને 3 પગલાં પાછળ ભરે છે. ત્યાર બાદ ફરીથી 5 પગલાં આગળ ભરે છે અને 3 પગલાં પાછળ ભરે છે અને આ રીતે તે ચાલતો રહે છે. તેનું દરેક પગલું 1 m લંબાઈનું અને તે માટે 1 s જેટલો સમય લે છે, તો તેની આ ગતિ માટે $x - t$ આલેખ દોરો. આલેખીય રીતે કે અન્ય કોઈ રીતે નક્કી કરો કે તેની ગતિનો પ્રારંભ બિંદુથી 13 m દૂર આવેલા ખાડામાં તે કેટલા સમય બાદ પડશે.

3.5 એક જેટ પ્લેન 500 km h^{-1}ની ઝડપે ઊડી રહ્યું છે, અને તે જેટ પ્લેનની સાપેક્ષે 1500 km h^{-1}ની ઝડપે દહન-ઉત્પાદનો (વાયુ)ને બહાર કાઢી રહ્યું છે. જમીન પર ઊભેલા કોઈ અવલોકનકારની સાપેક્ષે દહન- ઉત્પાદનોની ઝડપ કેટલી હશે ?

3.6 સુરેખ રાજમાર્ગ પર 126 km h^{-1} જેટલા ઝડપે દોડી રહેલી એક કાર 200 m અંતર કાપીને ઊભી રાખવી છે તો કારનો નિયમિત પ્રતિપ્રવેગ કેટલો હોવો જોઈએ ? કારને સ્થિર થવા માટે કેટલો સમય લાગશે ?

3.7 400 m જેટલી સમાન લંબાઈ ધરાવતી બે ટ્રેનો A અને B બે સમાંતર રેલવે ટ્રેક પર 72 km h^{-1}ની ઝડપે એક જ દિશામાં દોડી રહી છે. ટ્રેન A, ટ્રેન B કરતાં આગળ છે. B ટ્રેનનો ડ્રાઇવર ટ્રેન Aને ઓવરટેક કરવાનું વિચારે છે અને પોતાની ટ્રેનને 1 m s^{-2} જેટલી પ્રવેગિત કરે છે. જો 50 s બાદ ટ્રેન Bનો ગાર્ડ ટ્રેન Aના ડ્રાઇવરની આગળ થઈ જાય છે, તો બંને ટ્રેન વચ્ચેનું પ્રારંભિક અંતર કેટલું હશે ?

3.8 એક દ્વિમાર્ગી (two-lane road) રસ્તા પર કાર A 36 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરે છે. એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં 54 km h^{-1} જેટલી સમાન ઝડપથી દોડતી કાર B અને C કાર A સુધી પહોંચવાનો પ્રયત્ન કરે છે. કોઈ એક ક્ષણે AB તથા AC વચ્ચેનું સમાન અંતર 1 km છે. આ ક્ષણે કાર Bનો ડ્રાઇવર, કાર C, કાર Aને ઓવરટેક કરે તે પહેલાં ઓવરટેક કરવાનું વિચારે છે, તો અકસ્માત-નિવારણ માટે કાર Bનો લઘુતમ પ્રવેગ કેટલો હોવો જોઈએ ?

3.9 બે શહેર A અને B નિયમિત બસસેવા દ્વારા એકબીજાંથી જોડાયેલાં છે. તથા પ્રત્યેક T મિનિટ પછી બંને બાજુ બસો દોડે છે. કોઈ એક વ્યક્તિ 20 km h^{-1}ની ઝડપે સાઇકલ દ્વારા A થી B તરફ જઈ રહ્યો છે. ત્યારે તે નોંધે છે કે પ્રત્યેક 18 min પછી એક બસ તેની ગતિની દિશામાં તથા પ્રત્યેક 6 min પછી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં પસાર થાય છે. બસસેવા સમય T કેટલો હશે અને રસ્તા પર દોડતી બસની ઝડપ (અચળ ધારો) કેટલી હશે ?

3.10 કોઈ એક ખેલાડી 29.4 m s^{-1}ની પ્રારંભિક ઝડપથી એક દડાને ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકે છે.

(a) દડાની ઊર્ધ્વદિશાની ગતિ દરમિયાન પ્રવેગની દિશા કઈ હશે ?

(b) તેની ગતિના મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએ દડાનો વેગ અને પ્રવેગ કેટલા હશે ?

(c) દડાની મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએ સ્થાન $x = 0$ m અને $t = 0$ s તથા શિરોલંબ નીચે તરફની દિશાને x-અક્ષની ધન દિશા તરીકે પસંદ કરો. આ પસંદગીના સંદર્ભે દડાની ઊર્ધ્વદિશાની ગતિ અને અધોદિશાની ગતિ માટે સ્થાન, વેગ અને પ્રવેગનાં ચિહ્નો દર્શાવો.

(d) દડો કેટલી મહત્તમ ઊંચાઈએ પહોંચશે ? અને કેટલા સમય બાદ ખેલાડીના હાથમાં પાછો આવશે ? ($g = 9.8$ m s^{-2} અને વાયુનો અવરોધ અવગણીએ છીએ.)

3.11 નીચે આપેલ કથનોને ધ્યાનપૂર્વક વાંચી ઉદાહરણ અને કારણ સહિત તે સાચાં છે કે ખોટાં તે દર્શાવો કણની એક પરિમાણિક ગતિમાં,

(a) કોઈ એક ક્ષણે તેની ઝડપ શૂન્ય હોવા છતાં તેનો પ્રવેગ અશૂન્ય હોઈ શકે છે.

(b) ઝડપ શૂન્ય હોવા છતાં તેનો વેગ અશૂન્ય હોઈ શકે.

(c) ઝડપ અચળ હોય, તો પ્રવેગ હંમેશાં શૂન્ય હોય.

(d) પ્રવેગ ધન મૂલ્ય માટે ગતિ વધતી હોય છે.

3.12 કોઈ એક દડાને 90 mની ઊંચાઈ પરથી ફર્શ (floor) પર પડતો મૂકવામાં આવે છે. ફર્શ સાથેના પ્રત્યેક સંઘાત દરમિયાન, દડો તેની મૂળ ઝડપના દસમા ભાગ જેટલી ઝડપ ગુમાવે છે. દડાની આ ગતિ માટે $t = 0$ થી $t = 12$ s માટે ઝડપ સમયનો આલેખ દોરો.

3.13 ઉદાહરણ સહિત બંને તફાવત સ્પષ્ટ કરો.

(a) કોઈ એક સમયગાળામાં સ્થાનાંતરનું માન (જેને ઘણી વાર અંતર પણ કહે છે.) અને કોઈ કણ દ્વારા આટલા જ સમયગાળામાં કાપેલ કુલ પથલંબાઈ

(b) કોઈ એક સમયગાળામાં સરેરાશ વેગનું માન અને એટલા જ સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ [આપેલ સમયગાળા માટે કણની સરેરાશ ઝડપને કુલ પથલંબાઈ અને સમયગાળાના ગુણોત્તર વડે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.] (a) અને (b) બંને માટે દર્શાવો કે બીજી રાશિ પ્રથમ રાશિ કરતાં મોટી કે તેના જેટલી જ છે. સમાનતાનું ચિહ્ન ક્યારે સાચું હશે ? [સરળતા માટે ગતિને એક પારિમાણિક ગતિ લો.]

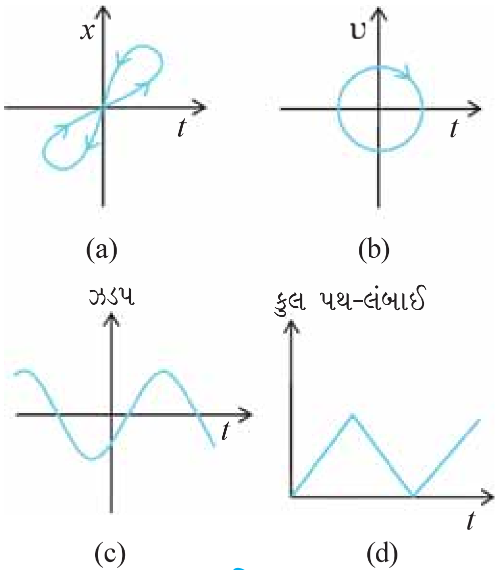
3.14 એક વ્યક્તિ સુરેખ માર્ગે 5 km h^{-1}ની ઝડપે તેના ઘરેથી 2.5 km દૂર આવેલા માર્કેટમાં જાય છે. પરંતુ માર્કેટને બંધ જુએ છે, તે તરત જ 7.5 km h^{-1}ની ઝડપે ઘરે પાછો ફરે છે તો,

(a) સરેરાશ વેગનું માન અને

(b) સમયગાળા (i) 0 થી 30 min (ii) 0 થી 50 min (iii) 0 થી 40 min માટે વ્યક્તિની સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ? (નોંધ : આ ઉદાહરણથી તમે પ્રભાવિત થશો કે સરેરાશ ઝડપને સરેરાશ વેગનાં માન તરીકે દર્શાવવા કરતાં કુલ પથલંબાઈ અને કુલ સમયગાળાના ગુણોત્તર સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કરવી કેમ વધુ યોગ્ય છે ? થાકીને ઘરે પહોંચેલી વ્યક્તિને તેની સરેરાશ ઝડપ શૂન્ય છે, તેમ કહેવાનું મુનાસિબ નહિ માનો !)

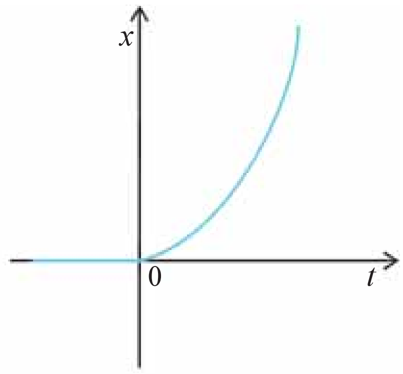
3.15 સ્વાધ્યાય પ્રશ્ન 3.13 અને 3.14માં આપણે સરેરાશ ઝડપ અને સરેરાશ વેગ વચ્ચેનો તફાવત કાળજીપૂર્વક સ્પષ્ટ કર્યો. તાત્ક્ષણિક ઝડપ અને તાત્ક્ષણિક વેગ માટે આવા તફાવત પર વિચાર કરવો આવશ્યક નથી. તાત્ક્ષણિક ઝડપ હંમેશાં તાત્ક્ષણિક વેગના માન જેટલી હોય છે. શા માટે ?

3.16 આકૃતિ 3.20માં દર્શાવેલ આલેખો (a) થી (d) ધ્યાનથી જુઓ અને કારણ સહિત જણાવો કે તે પૈકી કયો આલેખ એક પારિમાણિક ગતિ કરતાં કણ માટે શક્ય નથી.



આકૃતિ 3.20

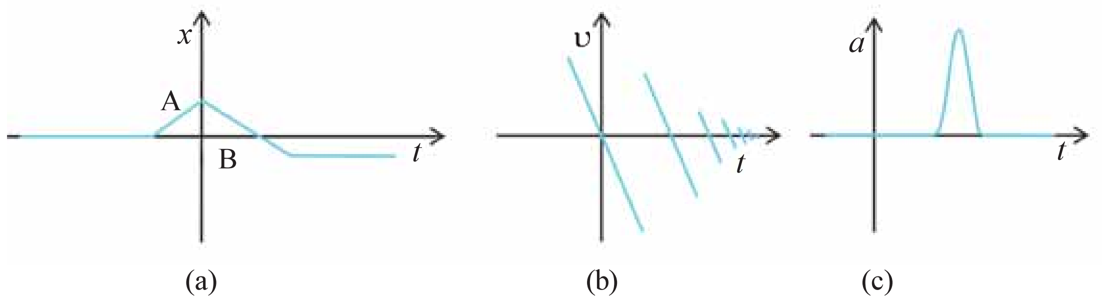
3.17 આકૃતિ 3.21માં કણની એક પારિમાણિક ગતિ માટે $x - t$ આલેખ દર્શાવેલ છે. આલેખ પરથી એમ કહેવું સાચું છે કે, $t < 0$ માટે કણ સુરેખ માર્ગે અને $t > 0$ માટે પરવલય માર્ગે ગતિ કરે છે ? જો ના, તો આ આલેખ માટે યોગ્ય ભૌતિક સંદર્ભનો અભિપ્રાય આપો.



આકૃતિ 3.21

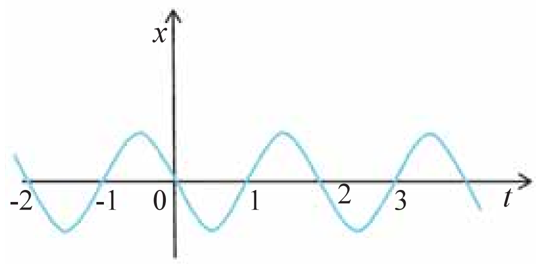
3.18 કોઈ એક રાજમાર્ગ પર 30 km h^{-1}ની ઝડપે દોડતી પોલીસવાનમાંથી, તેની જ દિશામાં 192 km h^{-1} ઝડપે દોડી રહેલી ચોરની કાર પર ગોળી છોડવામાં આવે છે. જો બંદૂકની નળીમાંથી નીકળતી ગોળીની ઝડપ 150 km h^{-1} હોય, તો ગોળી ચોરની કારને કઈ ઝડપે અથડાશે ? (નોંધ : ગોળીની તે ઝડપ નક્કી કરો કે જે ચોરની કારને નુકસાન પહોંચાડી શકે ?)

3.19 નીચે આકૃતિ 3.22માં આપેલ આલેખો માટે યોગ્ય પરિસ્થિતિ સૂચવો.



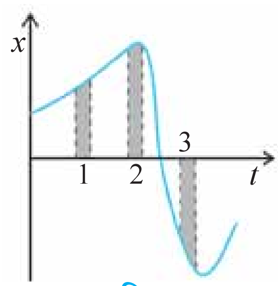
આકૃતિ 3.22

3.20 આકૃતિ 3.23માં એક પારિમાણિક સરળ આવર્તગતિ માટેનો $x - t$ આલેખ દર્શાવેલ છે. (આ ગતિ વિશેનો વિગતવાર અભ્યાસ તમે પ્રકરણ 14માં કરશો.) સમય t = 0.3 s, 1.2 s, − 1.2 s માટે કણનાં સ્થાન, વેગ અને પ્રવેગનાં ચિહ્નો શું હોઈ શકે ?



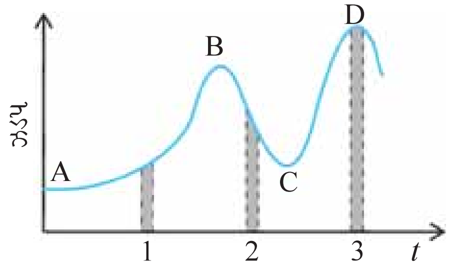
આકૃતિ 3.23

3.21 આકૃતિ 3.24માં એક પારિમાણિક ગતિ કરતાં કણ માટેનો $x - t$ આલેખ દર્શાવેલ છે. જેમાં ત્રણ સમાન સમયગાળા દર્શાવેલ છે. કયા સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ સૌથી વધુ અને કયા માટે તે સૌથી ઓછી હશે ? દરેક સમયગાળાને અનુરૂપ સરેરાશ વેગનાં ચિહ્ન આપો.



આકૃતિ 3.24

3.22 આકૃતિ 3.25માં અચળ દિશામાં ગતિ કરતાં કણ માટે ઝડપ-સમયનો આલેખ દર્શાવેલ છે. જેમાં ત્રણ સમાન સમયગાળા દર્શાવ્યા છે. કયા સમયગાળા માટે સરેરાશ પ્રવેગનું માન સૌથી વધુ હશે ? કયા સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ સૌથી વધુ હશે ? પદાર્થની અચળ ગતિની દિશાને ધન દિશા તરીકે પસંદ કરી, ત્રણેય સમયગાળાને અનુરૂપ v અને aનાં ચિહ્ન જણાવો. A, B, C અને D. બિંદુ પર પ્રવેગ શું હશે ?



આકૃતિ 3.25

વધારાનું સ્વાધ્યાય

3.23 ત્રિચક્રી વાહન પોતાની સ્થિર સ્થિતિમાંથી 1 m s^{-2} જેટલા અચળ પ્રવેગ સાથે સુરેખમાર્ગ પર 10 s સુધી ગતિ કરે છે અને ત્યાર બાદ તે નિયમિત વેગથી ગતિ કરે છે. વાહન દ્વારા nમી સેકન્ડ (n = 1, 2, 3, ...)માં કપાયેલ અંતર વિરુદ્ધ nનો આલેખ દોરો. પ્રવેગી ગતિ દરમિયાન આવા આલેખ માટે તમે શું ધારો છો ? એક સુરેખા કે પરવલય ?

3.24 સ્થિર લિફ્ટ (ઉપરથી ખુલ્લી હોય તેવી)માં ઊભેલો એક બાળક 49 m s^{-1} જેટલી મહત્તમ પ્રારંભિક ઝડપે એક દડાને ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકે છે. તો દડાને તેના હાથમાં પાછો આવવા માટે કેટલો સમય લાગશે ? જો લિફ્ટ 5 m s^{-1} જેટલી નિયમિત ઝડપે ઉપર તરફ ગતિ કરવાની શરૂઆત કરે અને બાળક ફરીથી દડાને ઉપર તરફ તે જ મહત્તમ ઝડપે ફેંકે, તો કેટલા સમય પછી દડો બાળકના હાથમાં પરત આવશે ?

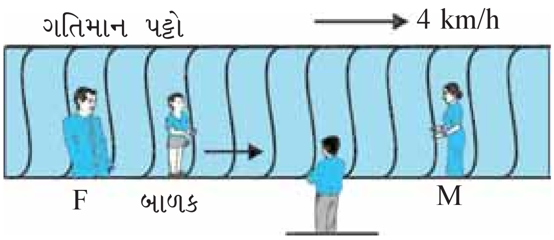
3.25 આકૃતિ 3.26માં દર્શાવ્યા મુજબ સમક્ષિતિજ લાંબો પટ્ટો 4 km h^{-1} ઝડપે ગતિમાં છે. આ પટ્ટા પર એક બાળકનાં માતા-પિતા એકબીજાંથી 50 m દૂર બેઠાં છે અને બાળક પટ્ટાની સાપેક્ષે 9 km h^{-1} ઝડપે પટ્ટા પર માતા-પિતાની વચ્ચે આગળ-પાછળ દોડે છે. પ્લેટફૉર્મ ઉપર સ્થિર ઊભેલ અવલોકનકાર માટે

(a) પટ્ટાની ગતિની દિશામાં દોડતાં બાળકની ઝડપ શું હશે ?

(b) પટ્ટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં દોડતા બાળકની ઝડપ શું હશે ?

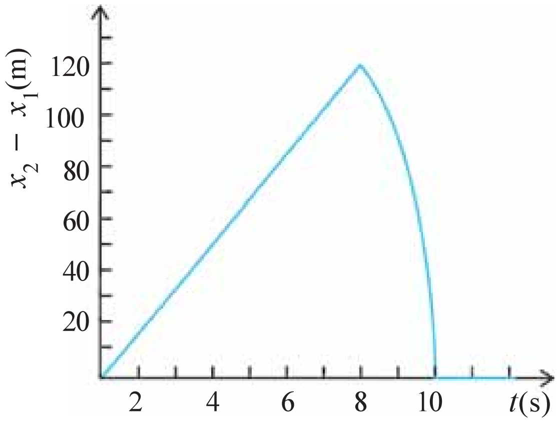
(c) (a) અને (b)માં બાળકને લાગતો સમય શું હશે ?

જો બાળકની ગતિનું અવલોકન તેનાં માતા કે પિતા કરતાં હોય, તો ઉપરમાંથી કયા પ્રશ્નનો જવાબ પરસ્પર બદલાઈ જશે ?



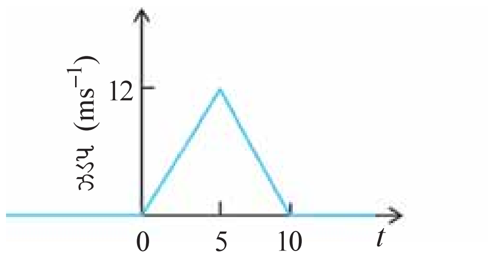
આકૃતિ 3.26

3.26 200 m ઊંચાઈના એક ખડકની ટોચ પરથી બે પથ્થરને એક સાથે 15 m s^{-1} અને 30 m s^{-1}ની પ્રારંભિક ઝડપથી ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકવામાં આવે છે. આકૃતિ 3.27માં દર્શાવેલ આલેખ પ્રથમ પથ્થરની સાપેક્ષે બીજા પથ્થરનું સ્થાનમાં સમય સાથે થતાં ફેરફારો દર્શાવે છે, તેની ચકાસણી કરો. હવાનો અવરોધ અવગણો અને સ્વીકારો કે જમીનને અથડાયા બાદ પથ્થર ઉપર તરફ ઊછળતા નથી. g = 10 m s^{-2} લો. આલેખમાં રેખીય અને વક્ર ભાગ માટેનાં સમીકરણો લખો.



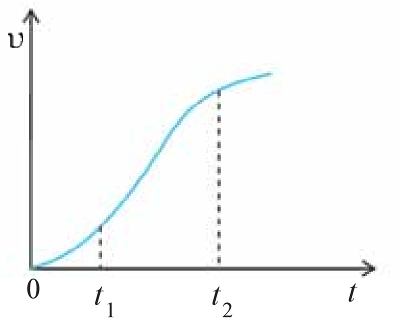
આકૃતિ 3.27

3.27 આકૃતિ 3.28માં ચોક્કસ દિશામાં ગતિ કરતાં કણ માટે ઝડપ-સમય આલેખ દર્શાવેલ છે. (a) $t = 0$ s થી $t = 10$ s (b) $t = 2$ s થી $t = 6$ s માટે કણ દ્વારા કપાયેલ અંતર શોધો. સમયગાળા (a) અને (b) માટે કણની સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ?



આકૃતિ 3.28

3.28 આકૃતિ 3.29માં એક પરિમાણમાં ગતિ કરતાં કણ માટે વેગ-સમય આલેખ દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.29

સમયગાળા t_1 થી t_2 માટે નીચેમાંથી કયાં સમીકરણો કણની ગતિને વર્ણવે છે :

(a) $x(t_2) = x(t_1) + \upsilon(t_1)\,(t_2 - t_1) + (1/2)\,a\,(t_2 - t_1)^2$

(b) $\upsilon(t_2) = \upsilon(t_1) + a\,(t_2 - t_1)$

(c) $\upsilon_{average} = [x(t_2) - x(t_1)]\,/\,(t_2 - t_1)$

(d) $a_{average} = [\upsilon(t_2) - \upsilon(t_1)]\,/\,(t_2 - t_1)$

(e) $x(t_2) = x(t_1) + \upsilon_{average}\,(t_2 - t_1) + (1/2)\,a_{average}\,(t_2 - t_1)^2$

(f) $x(t_2) - x(t_1) =$ t-અક્ષ અને રેખાંકન કરેલી લાઈન વડે $\upsilon - t$ વક્ર નીચે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ.

પરિશિષ્ટ 3.1 : કલનશાસ્ત્રનાં તત્ત્વો (ELEMENTS OF CALCULUS)

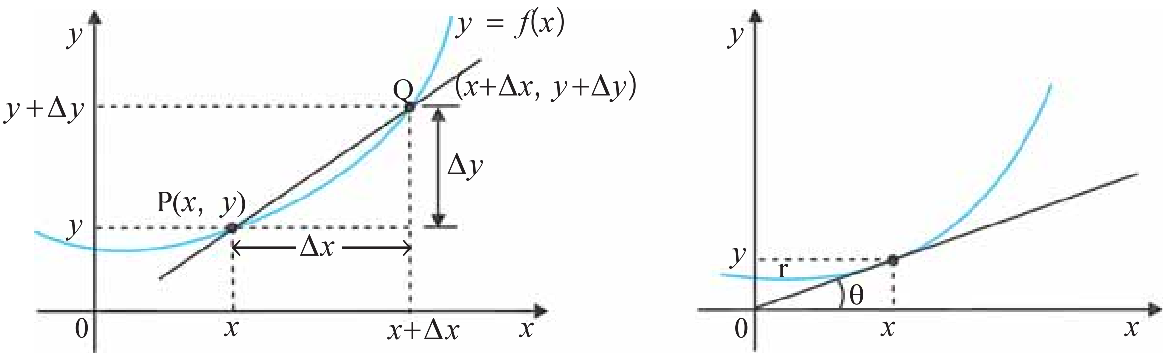
વિકલ કલનશાસ્ત્ર (Differential Calculus)

વિકલ ગુણાંક અથવા વિકલિતની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીને આપણે સરળતાથી વેગ અને પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ. જો કે વિકલિત વ્યુત્પનોનો અભ્યાસ વધુ વિસ્તારથી ગણિતમાં કરશો. છતાં આ પરિશિષ્ટ દ્વારા સંક્ષિપ્તમાં વિકલનનો પરિચય કેળવીશું. જેથી ગતિ સંબંધિત ભૌતિકરાશિઓનાં વર્ણન માટે સરળતા રહે.

ધારો કે, આપણી પાસે એક રાશિ y છે. જેનું માન કોઈ સુરેખ ચલ (x) પર આધારિત છે તથા રાશિને એક સમીકરણ વડે વ્યક્ત કરી શકાય છે. જે y ને xના ચોક્કસ વિધેય સ્વરૂપે દર્શાવતું હોય, જેને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$y = f(x) \tag{1}$$

આકૃતિ 3.30 (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ x અને y કાર્ટેઝિયન યામોના અનુસંધાનને વિધેય $y = f(x)$નો આલેખ દોરીને ઉપર્યુક્ત સંબંધ આલેખમાં જોઈ શકાય છે.



(a) (b)

આકૃતિ 3.30

$y = f(x)$ વક્ર પર એક બિંદુ P જેના યામ (x, y) અને બીજું બિંદુ Q જેના યામ $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ છે. P અને Qને જોડતી રેખાનો ઢાળ

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \tag{2}$$

ધારો કે, બિંદુ Q વક્ર પર P બિંદુ તરફ ખસે છે. આ પ્રક્રિયામાં Δy અને Δx ઘટતા જશે અને શૂન્યની નજીક પહોંચશે. પરંતુ તેમનો ગુણોત્તર $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ જરૂરી નથી કે શૂન્ય (નાશ) થાય. જ્યાં, $\Delta y \to 0$, $\Delta x \to 0$ માટે રેખા PQ નું શું થાય ? આકૃતિ 3.30(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ તમે જોઈ શકો છો કે આ રેખા PQ, P બિંદુએ વક્રનો સ્પર્શક બની જશે. એનો અર્થ એ થાય કે $\tan\theta$નું મૂલ્ય બિંદુ P પાસેના સ્પર્શકના ઢાળના મૂલ્યની ખૂબ જ નજીક જાય છે. તેને m વડે દર્શાવીએ તો,

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \tag{3}$$

ગુણોત્તર $\Delta y/\Delta x$નું લક્ષ જેમ Δx શૂન્યની નજીક જાય તેને yનું x સાપેક્ષ વિકલન કહેવાય તથા તેને dy/dx લખાય. જે, વક્ર $y = f(x)$નો બિંદુ (x, y) પાસે સ્પર્શકનો ઢાળ દર્શાવે છે.

જો $y = f(x)$ તથા $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, હોય તો આપણે વિકલિતની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ લખી શકીએ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

નીચે કેટલાંક વિધેયોનાં વિકલિત સૂત્રો આપેલ છે. અહીં, $u(x)$ તથા $v(x)$ યાદચ્છિક વિધેયો xને રજૂ કરે છે. a અને b અચળ રાશિઓને દર્શાવે છે જે x પર આધારિત નથી. કેટલાંક સામાન્ય વિધેયો માટે વિકલનની યાદી પણ નોંધેલ છે.

$\frac{d(a\ u)}{dx} = a\frac{du}{dx}$: $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

$\frac{d(u\ v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$: $\frac{d}{dx}x^n = n\ x^{n-1}$

$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$: $\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v^2}\left[v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right]$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$: $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$: $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$

$\frac{d}{dx}(u)^n = n\ u^{n-1}\frac{du}{dx}$: $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^2 x) = -\cot x\ \text{cosec}\ x$

$\frac{d}{du}(e^u) = e^u$: $\frac{d}{du}(ln\ u) = \frac{1}{u}$

વિકલનના સંદર્ભે તાત્ક્ષણિક વેગ અને પ્રવેગ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય :

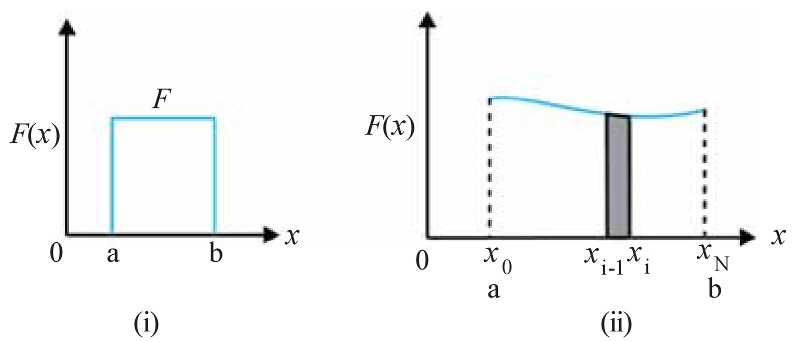
$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

સંકલન કલનશાસ્ત્ર (Integral Calculus)

તમે ક્ષેત્રફળની ધારણાથી પરિચિત છો. કેટલાક સરળ ભૌમિતિક આકારોનાં સૂત્રો પણ તમે જાણો છો. ઉદાહરણ તરીકે, લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની લંબાઈ અને પહોળાઈમાં ગુણાકાર જેટલું તથા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ તેના પાયા અને વેધના ગુણાકાર કરતાં અડધું હોય છે. પરંતુ કોઈ અનિયમિત ભૌમિતિક આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની સમસ્યા પર વિચારીએ તો ? આવી સમસ્યાઓ સાથે સંકલનની ગાણિતીય ધારણા અનિવાર્યપણે સંકળાયેલ છે.

હવે આપણે એક વાસ્તવિક ઉદાહરણ જોઈએ. ધારો કે કોઈ એક કણ ચર બળ $f(x)$ની અસર હેઠળ ($x = a$) થી ($x = b$) સુધી x-અક્ષ પર ગતિ કરે છે. કણની ગતિ દરમિયાન બળ વડે થતું કાર્ય નક્કી કરવાની સમસ્યા છે. આ સમસ્યાની વિસ્તારપૂર્વક ચર્ચા પ્રકરણ 6માં કરેલ છે.



આકૃતિ 3.31

આકૃતિ 3.31, x સાથે બળ $F(x)$માં થતો ફેરફાર દર્શાવે છે. જો બળ અચળ હોય, તો આકૃતિ 3.31 (i) મુજબ થતું કાર્ય, $F(b - a)$ ક્ષેત્રફળ જેટલું થાય. પરંતુ વ્યાપક કિસ્સામાં બળ ચલિત હોય છે.

આકૃતિ 3.31(ii)માં દર્શાવેલ વક્ર નીચેનાં ક્ષેત્રફળની ગણતરી કરવી છે. આ માટે નીચે મુજબની એક યુક્તિ અપનાવીશું. X-અક્ષ પર a થી b સુધીનાં અંતરાલને ખૂબ જ મોટી સંખ્યા (N) જેટલા સૂક્ષ્મ અંતરાલોમાં વિભાજિત કરીશું. જે $x_0 = a$ થી x_1, x_1 થી x_2, x_2 થી x_3 .... x_{N-1}થી $x_N (= b)$. આમ, વક્ર નીચેનું ક્ષેત્રફળ N સંખ્યાની પાતળી પટ્ટીઓમાં વિભાજિત થશે. દરેક પટ્ટી પર $F(x)$નો ફેરફાર અવગણતાં દરેક પાતળી પટ્ટી લગભગ લંબચોરસ થશે. આકૃતિ 3.11(ii)માં દર્શાવેલ i^{th} પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ લગભગ,

$$\Delta A_i = F(x_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i)\Delta x$$

અહીં, Δx પટ્ટીની પહોળાઈ છે. જે દરેક પટ્ટી માટે આપણે સમાન લીધેલ છે. તમે દ્વિધામાં પડશો કે ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં આપણે $F(x_{i-1})$ અથવા $F(x_i)$ અને $F(x_{i-1})$નું સરેરાશ મૂકવું જોઈએ. આ બાબતનું કોઈ જ મહત્ત્વ રહેતું નથી, જ્યારે આપણે સંખ્યા N ખૂબ જ મોટી $(N \to \infty)$ લઈએ. ત્યારે દરેક પટ્ટી એટલી પાતળી હોય કે જેનાથી $F(x_i)$ અને $F(x_{i-1})$ વચ્ચેનું અંતર અવગણી શકાય તેટલું નાનું બનશે. પરિણામે, વક્ર નીચે ઘેરાયેલું કુલ ક્ષેત્રફળ,

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} F(x_i)\Delta x$$

આ સરવાળાનું લક્ષ $N \to \infty$ હોય ત્યારે તે a થી b સુધી $F(x)$નું x પર સંકલન દર્શાવે છે તેની ચોક્કસ સંજ્ઞા નીચે દર્શાવ્યા મુજબ છે :

$$\mathrm{A} = \int_a^b F(x)dx$$

સંકલનની સંજ્ઞા $\int$ વિસ્તરેલ s આકાર જેવી છે, જે આપણને યાદ કરાવે છે કે, તે અસંખ્ય પદોના સરવાળાની સીમા છે. એક અત્યંત મહત્ત્વપૂર્ણ ગણિતીય તથ્ય એ છે કે સંકલન એ વિકલનનું વ્યસ્ત છે. ધારો કે, આપણી સામે એક વિધેય $g(x)$ જેનું વિકલિત $f(x)$ છે, ત્યારે $f(x) = \dfrac{dg(x)}{dx}$

વિધેય $g(x)$ને અનિયત સંકલન કહે છે તથા તેને નીચે મુજબ દર્શાવાય છે :

$$g(x) = \int f(x)dx$$

સંકલનમાં નીચલી સીમા અને ઊપલી સીમા આપેલ હોય ત્યારે તેને નિયત સંકલન કહે છે અને તે એક સંખ્યા છે. અનિયત સંકલનને કોઈ સીમા હોતી નથી અને તે એક વિધેય છે.

ગણિતનો પાયાનો એક પ્રમેય દર્શાવે છે કે,

$$\int_a^b f(x)dx = g(x)\Big|_a^b \equiv g(b) - g(a)$$

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે $f(x) = x^2$ તથા આપણે $x = 1$ થી $x = 2$ સુધી નિયત સંકલનનું મૂલ્ય શોધવા ઈચ્છીએ છીએ. વિધેય $f(x) = x^2$નું સંકલન $g(x) = x^3/3$ છે. તેથી,

$$\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

સ્પષ્ટ છે કે, નિયત સંકલનનું મૂલ્યાંકન કરવા માટે આપેલ તદ્નુરૂપ અનિયત સંકલનને જાણવું પડે. આ માટે કેટલાંક સામાન્ય અનિયત સંકલનો નીચે દર્શાવેલ છે :

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = ln\, x \qquad (x > 0)$$

$$\int \sin x \ \mathrm{d}x = -\cos x \qquad \int \cos x \ \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

વિકલન અને સંકલન કલનશાસ્ત્રની આ પ્રસ્તાવના વિસ્તૃત નથી અને તેનો ઈરાદો તમને કલનશાસ્ત્રની પાયાની વ્યાખ્યાઓ સમજાવવાનો છે.

પ્રકરણ 4

સમતલમાં ગતિ (MOTION IN A PLANE)

4.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આગળના પ્રકરણમાં આપણે સુરેખ પથ પર પદાર્થની ગતિના વર્ણન માટે જરૂરી સ્થાન, સ્થાનાંતર, વેગ તેમજ પ્રવેગની સંકલ્પનાની વિચારણા કરી. આપણે જોયું કે એક પરિમાણમાં માત્ર બે જ દિશાઓની શક્યતા હોવાથી (+) ધન અને (–) ઋણ ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવાથી દિશાઓની કાળજી આપોઆપ લઈ શકાય છે. પરંતુ પદાર્થની ગતિનું દ્વિપરિમાણમાં (સમતલમાં) અથવા ત્રિપરિમાણમાં (અવકાશમાં) વર્ણન કરવા માટે ઉપર્યુક્ત ભૌતિકરાશિઓને દર્શાવવા માટે સદિશની જરૂર પડે છે. તેથી સૌપ્રથમ આપણે સદિશો વિશેની સમજૂતી મેળવવી જરૂરી છે. સદિશ એટલે શું ? સદિશનાં સરવાળા, બાદબાકી અને ગુણાકાર કેવી રીતે કરવાં ? સદિશને વાસ્તવિક સંખ્યાથી ગુણતાં શું પરિણામ મળશે ? આ બધું આપણે એટલા માટે શીખીશું કે જેથી સમતલમાં પદાર્થના વેગ તેમજ પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે સદિશનો ઉપયોગ કરી શકીએ. ત્યાર બાદ આપણે સમતલમાં પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરીશું. સમતલમાં ગતિના સાદા કિસ્સા તરીકે આપણે અચળ પ્રવેગી ગતિ તથા વિગતવાર રીતે પ્રક્ષિપ્ત ગતિની ચર્ચા કરીશું. ગતિના પ્રચલિત પ્રકાર વર્તુળાકાર ગતિનું રોજબરોજના જીવનમાં ખાસ મહત્ત્વ હોવાથી આપણે નિયમિત વર્તુળગતિનો વિગતવાર અભ્યાસ કરીશું.

આ પ્રકરણમાં સમતલમાંની ગતિ માટે મેળવેલાં સમીકરણોને સહેલાઈથી ત્રિપરિમાણીક ગતિનાં સમીકરણોમાં વિસ્તારિત કરી શકાય છે.

4.2 અદિશ અને સદિશ (SCALARS AND VECTORS)

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આપણે રાશિઓનું અદિશ અથવા સદિશ તરીકે વર્ગીકરણ કરી શકીએ. મૂળભૂત ફરક એટલો છે કે અદિશ રાશિઓ સાથે દિશા સંકળાયેલી નથી જ્યારે સદિશ રાશિઓ સાથે **દિશા** સંકળાયેલી છે. અદિશ રાશિને ફક્ત મૂલ્ય (માન) હોય છે. તેને મૂલ્ય દર્શાવતી સંખ્યા અને યોગ્ય એકમ સાથે સંપૂર્ણપણે દર્શાવી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે : બે બિંદુઓ વચ્ચે અંતર, પદાર્થનું દળ, શરીરનું તાપમાન અને તે સમય કે જ્યારે કોઈ ઘટના બની હોય. અદિશ રાશિઓનું સંયોજન સામાન્ય બીજગણિતના નિયમોને અનુસરે છે. સામાન્ય સંખ્યાઓ જેમ જ અદિશ રાશિઓનાં સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર

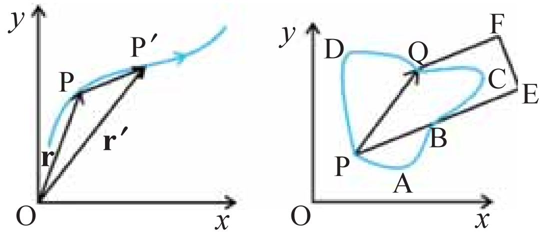
અને ભાગાકાર થઈ શકે છે.* ઉદાહરણ તરીકે એક લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે 1.0 m અને 0.5 m હોય, તો તેની પરિમિતિ તેની ચારેય બાજુઓની લંબાઈના સરવાળા 1.0 m + 0.5 m + 1.0 m + 0.5 m = 3.0 m જેટલી થાય. દરેક બાજુની લંબાઈ અદિશ રાશિ છે તથા પરિમિતિ પણ અદિશ રાશિ છે. એક બીજું ઉદાહરણ લઈએ : કોઈ એક દિવસનું મહત્તમ અને લઘુતમ તાપમાન અનુક્રમે 35.6 °C અને 24.2 °C છે. આથી, આ બંને તાપમાનો વચ્ચેનો તફાવત 11.4 °C થશે. તે જ રીતે ઍલ્યુમિનિયમના એક નિયમિત સમઘનની દરેક બાજુની લંબાઈ 10 cm હોય અને તેનું દળ 2.7 kg હોય, તો તેનું કદ 10^{-3} m^3 (અદિશ) તથા તેની ઘનતા 2.7×10^3 kg m^{-3} (અદિશ) થશે.

જે રાશિઓ વિશેની સંપૂર્ણ માહિતી મેળવવા માટે તેમના માન ઉપરાંત દિશાની પણ જરૂર પડતી હોય, તેવી રાશિઓને **સદિશ રાશિઓ** કહે છે તથા તે **સરવાળા માટેના ત્રિકોણનો નિયમ** અથવા **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમ**નું પાલન કરે છે. આમ, કોઈ સદિશના માનને સંખ્યા આપીને તથા તેની દિશા આપીને સદિશને રજૂ કરી શકાય છે. કેટલીક ભૌતિકરાશિઓ કે જેમને સદિશ સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે છે તે સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ અને બળ છે.

સદિશને રજૂ કરવા માટે આપણે આ પુસ્તકમાં ઘાટા (Bold) અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીશું. આમ, વેગ સદિશને **v** સંજ્ઞા વડે દર્શાવી શકાય. પરંતુ હાથથી લખતી વખતે ઘાટા અક્ષરો લખવા થોડા મુશ્કેલ હોવાથી સદિશ રાશિની સંજ્ઞા ઉપર તીર મૂકીને પણ દર્શાવાય છે જેમકે, $\vec{v}$. આમ, **v** અને $\vec{v}$ બંને વેગ સદિશને રજૂ કરે છે. કોઈ સદિશના માનને ઘણી વાર 'નિરપેક્ષ મૂલ્ય' પણ કહીએ છીએ. તેને $|\mathbf{v}| = v$ વડે દર્શાવાય છે. આમ, એક સદિશને આપણે ઘાટા અક્ષરો જેમકે **A, a, p, q, r, ... x, y** વડે રજૂ કરીએ છીએ જ્યારે તેના માનને આછા અક્ષરો વડે અનુક્રમે A, a, p, q, r, ... x, y વડે દર્શાવી શકાય.

4.2.1 સ્થાન અને સ્થાનાંતર સદિશો (Position and Displacement Vectors)

કોઈ સમતલમાં ગતિમાન પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવવા માટે આપણે અનુકૂળતા ખાતર કોઈ બિંદુ 'O'ને (ઉગમ બિંદુ) (સંદર્ભ બિંદુ) તરીકે લઈશું. ધારો કે કોઈ *t* અને *t′* સમયે વસ્તુનાં સ્થાન અનુક્રમે P અને P′ છે (આકૃતિ 4.1.(a)). જો આપણે બિંદુ P ને O સાથે જોડતી રેખા દોરીએ, તો મળતી રેખા **OP** પદાર્થનો *t* સમયે સ્થાનસદિશ દર્શાવે છે. આ રેખાના છેડા પર એક તીરનું નિશાન દોરવામાં આવે છે. તેને (રેખાને) કોઈ એક ચિહ્ન **r** થી દર્શાવવામાં આવે છે, એટલે કે **OP** = **r**. તે જ રીતે બિંદુ P′ને બીજા સ્થાનસદિશ **OP′** એટલે કે **r′** વડે દર્શાવાય છે. સદિશ **r** ની લંબાઈ સદિશનું માન દર્શાવે છે અને તેની દિશા, બિંદુ Oથી જોતાં P જ્યાં આવેલું છે તે તરફની હોય છે. જો પદાર્થ P થી P′ સુધી જાય, તો (*t* સમયે) બિંદુ P પરથી (*t′* સમયે) બિંદુ P′ સુધીની ગતિને અનુલક્ષીને સદિશ **PP′** (જેની પુચ્છ P પર અને શીર્ષ P′ હોય)ને **સ્થાનાંતર સદિશ** કહેવાય છે.



(a) (b)

આકૃતિ 4.1 (a) *સ્થાન તથા સ્થાનાંતર સદિશો*
(b) *સ્થાનાંતર સદિશ* **PQ** *તથા ગતિના જુદા જુદા માર્ગ*

અત્રે અગત્યની નોંધવા જેવી બાબત એ છે કે, 'સ્થાનાંતર સદિશ'ને એક સુરેખા વડે દર્શાવાય છે જે પદાર્થની પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થિતિને જોડે છે તથા તે વાસ્તવિક પથ પર આધાર રાખતું નથી જેના પર પદાર્થ ખરેખર ગતિ કરતો હોય. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 4.1(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રારંભિક સ્થિતિ P અને અંતિમ સ્થિતિ Qની વચ્ચે સ્થાનાંતર સદિશ **PQ**, જુદા જુદા ગતિમાર્ગો PABCQ, PDQ કે PBEFQ માટે સમાન જ રહેશે. તેથી **કોઈ પણ બે બિંદુઓની વચ્ચે સ્થાનાંતર સદિશનું માન ગતિમાન પદાર્થની પથલંબાઈ જેટલું અથવા તેનાથી ઓછું હશે.** આ હકીકત અગાઉના પ્રકરણમાં સુરેખ પથ પર પદાર્થની ગતિ દરમિયાન પણ આપણે સારી રીતે સમજી ચૂક્યાં છીએ.

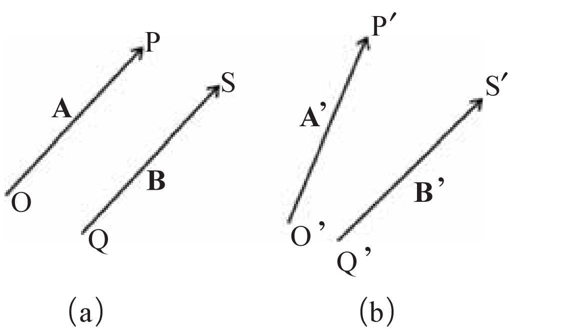
4.2.2 સદિશોની સમાનતા (Equality of Vectors)

જો બે સદિશો **A** અને **B**નાં માન અને દિશા સમાન હોય, તો તેવા સદિશોને સમાન સદિશો કહે છે.**

આકૃતિ 4.2(a)માં બે સમાન સદિશો **A** તથા **B**ને દર્શાવેલ છે. આપણે તેની સમાનતા સરળતાથી ચકાસી શકીએ છીએ. હવે **B**ને તેને પોતાને સમાંતર એવી રીતે ખસેડો કે જેથી તેની પૂચ્છ Q, સદિશ **A**ની પૂચ્છ O પર સંપાત થાય. હવે તેમના શીર્ષ S અને P

* *અદિશ રાશિઓનાં સરવાળા અને બાદબાકી ફક્ત સમાન એકમો ધરાવતી રાશિઓ માટે જ શક્ય છે. જ્યારે ગુણાકાર કે ભાગાકાર જુદા જુદા એકમો ધરાવતી અદિશ ભૌતિકરાશિઓ માટે કરી શકાય.*

** *આપણા અભ્યાસમાં, સદિશોને કોઈ ચોક્કસ સ્થાન હોતું નથી. તેથી સદિશને તેના પોતાને સમાંતર સ્થાનાંતરિત કરાવતાં તે સદિશ બદલાતો નથી. આવા સદિશોને મુક્ત સદિશો કહે છે. જોકે કેટલાક ભૌતિક ઉપયોગોમાં સદિશોની રેખા કે સ્થાન ઘણાં જ અગત્યનાં છે. આવા સદિશોને સ્થાનિય સદિશો (Localised Vectors) કહે છે.*



આકૃતિ 4.2 (a) *બે સમાન સદિશ* **A** *અને* **B** **(b)** *બે સદિશો* **A′** *અને* **B′** *અસમાન છે છતાં તેમની લંબાઈ સમાન છે.*

પણ સંપાત થતાં હોવાથી બંને સદિશો સમાન સદિશો કહેવાશે. સામાન્ય રીતે આ સમાનતાને **A** = **B** વડે દર્શાવાય છે. એ બાબત પર ધ્યાન આપો કે આકૃતિ 4.2(b)માં સદિશો **A′** અને **B′**ના માન સમાન હોવા છતાં તે સમાન સદિશો નથી કારણ કે તેમની દિશાઓ જુદી જુદી છે. **B′**ને તેને પોતાને સમાંતર એવી રીતે ખસેડો કે જેથી તેની પૂચ્છ Q′, સદિશ **A′**ની પુચ્છ O′ પર સંપાત થાય પરંતુ સદિશ **B′**નું શીર્ષ S′, **A′**નું શીર્ષ P′ પર સંપાત થતું નથી.

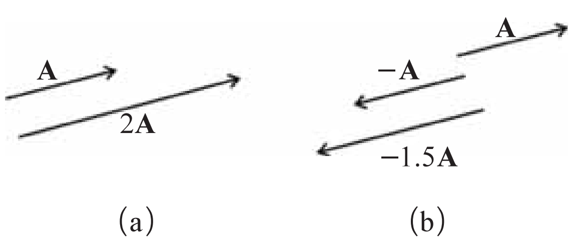
4.3 વાસ્તવિક સંખ્યા વડે સદિશોનો ગુણાકાર (MULTIPLICATION OF VECTORS BY REAL NUMBERS)

કોઈ સદિશ **A**નો ધન સંખ્યા λ સાથે ગુણાકાર કરતાં મળતાં સદિશનું મૂલ્ય λ ગણું થાય છે પરંતુ તેની દિશા સદિશ **A** ની દિશામાં જ રહે છે.

$$|\lambda \mathbf{A}| = \lambda |\mathbf{A}| \text{ જો } \lambda > 0$$

ઉદાહરણ તરીકે, જો **A**ને 2 વડે ગુણવામાં આવે તો આકૃતિ 4.3 (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ પરિણામી સદિશ 2**A** થશે જેની દિશા **A**ની દિશામાં જ હશે તથા માન |**A**| કરતાં બમણું થશે.

સદિશ **A**ને કોઈ ઋણ સંખ્યા λ વડે ગુણવામાં આવે, તો સદિશ λ**A** પ્રાપ્ત થશે જેની દિશા **A**ની દિશાની વિરુદ્ધમાં હશે અને માન |**A**| કરતાં −λ ગણું હશે.



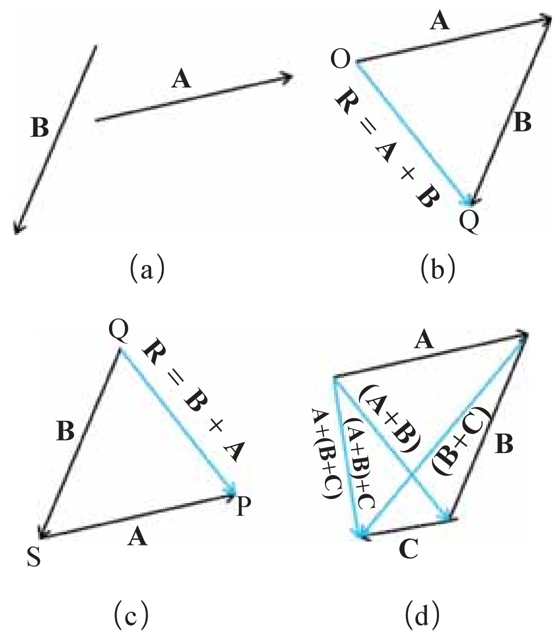
આકૃતિ 4.3 (a) *સદિશ* **A** *અને* **A***ને ધન સંખ્યા 2થી ગુણવાથી મળતો પરિણામી સદિશ* (b) *સદિશ* **A** *અને તેને ઋણ સંખ્યાઓ −1 અને −1.5થી ગુણતાં મળતા પરિણામી સદિશ*

જો કોઈ સદિશ **A**ને ઋણ સંખ્યા, ધારો કે −1 અને −1.5 વડે ગુણવામાં આવે, તો મળતા પરિણામી સદિશ આકૃતિ 4.3(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ મળશે.

સદિશ **A** સાથે ગુણાકારમાં લેવાતો ગુણાંક λ ભૌતિક પરિમાણ ધરાવતો અદિશ પણ હોઈ શકે છે. તેથી પરિણામી સદિશ λ**A**ના પરિમાણ, λ અને **A** પરિમાણોનો ગુણાકાર છે. દા.ત., અચળ વેગનો સમયગાળા સાથેનો ગુણાકાર, સ્થાનાંતર સદિશ આપે છે.

4.4 સદિશોનાં સરવાળા અને બાદબાકી - આલેખની રીત (ADDITION AND SUBTRACTION OF VECTORS) (GRAPHICAL METHOD)

પરિચ્છેદ 4.2માં ઉલ્લેખ કર્યા મુજબ સદિશો, વ્યાખ્યા મુજબ સરવાળા માટેનો ત્રિકોણના નિયમ કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમનું પાલન કરે છે. હવે આપણે સરવાળા માટેના આ નિયમો આલેખની રીતથી સમજીશું. આકૃતિ 4.4(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક સમતલમાં રહેલા બે સદિશો **A** અને **B**નો વિચાર કરો. આ સદિશોને દર્શાવતાં રેખાખંડોની લંબાઈ સદિશોના માનના સમપ્રમાણમાં છે. **A** + **B** સરવાળો મેળવવા માટે આકૃતિ 4.4(b)માં દર્શાવ્યા અનુસાર આપણે સદિશ **B**ને એવી રીતે ગોઠવીશું કે જેથી તેની પુચ્છ સદિશ **A**ના શીર્ષ પર હોય. ત્યાર બાદ આપણે **A**ની પુચ્છને **B**ના શીર્ષ સાથે જોડીશું. આ રેખા OQ, પરિણામી સદિશ **R** દર્શાવે છે, જે સદિશો **A** અને **B**નો સરવાળો છે. સદિશોના સરવાળાની આ પ્રક્રિયામાં



આકૃતિ 4.4 (a) *સદિશ* **A** *અને* **B** *સદિશો* (b) **A** *અને* **B***ના સરવાળા માટે આલેખીય રીત* (c) *સદિશો* **B** *અને* **A***ના સરવાળા માટે આલેખીય રીત* (d) *સદિશોના સરવાળા માટે જૂથના નિયમનું ઉદાહરણ*

કોઈ એકના શીર્ષ પર બીજાના પુચ્છને ગોઠવતા હોવાથી આ આલેખીય રીતને **શીર્ષથી પુચ્છ રીત** પણ કહે છે. સદિશોના સરવાળાની આ રીતમાં બે સદિશો અને તેમનો પરિણામી સદિશ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની રચના કરતાં હોવાથી તેને **સદિશ સરવાળાની ત્રિકોણની રીત** પણ કહે છે. જો આપણે આકૃતિ 4.4(c)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે **B** + **A**નો પરિણામી સદિશ પ્રાપ્ત કરીશું તો તે સદિશ **R** જ મળશે. આમ, સદિશોનો સરવાળો **ક્રમના નિયમ**નું પાલન કરે છે.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad (4.1)$$

સદિશોનો સરવાળો **જૂથના નિયમ**નું પણ પાલન કરે છે જે આકૃતિ 4.4(d)માં દર્શાવેલ છે. પ્રથમ સદિશો **A** અને **B**નો સરવાળો કરી તેમાં સદિશ **C** ઉમેરતાં તે જ પરિણામ છે જે સદિશો **B** અને **C**નો પ્રથમ સરવાળો કરી તેમાં સદિશ **A** ઉમેરતાં મળતું હોય. આમ,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \qquad (4.2)$$

સમાન અને વિરોધી બે સદિશોનો સરવાળો કરતાં શું પરિણામ મળે ? આકૃતિ 4.3(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે સદિશો **A** અને **–A**નો વિચાર કરો. તેમનો સરવાળો **A** + (**–A**) થશે. અહીં બંને સદિશોના માન સમાન હોવા છતાં તે પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી પરિણામી સદિશનું માન શૂન્ય મળશે. તેને **શૂન્ય સદિશ (Null Vector)** કહે છે અને **0** વડે દર્શાવાય છે.

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{0}| = 0 \qquad (4.3)$$

શૂન્ય સદિશનું મૂલ્ય શૂન્ય હોવાથી તેની દિશા દર્શાવી શકાય નહિ.

કોઈ સદિશ **A**ને શૂન્ય સંખ્યા વડે ગુણતાં પણ આપણને શૂન્ય સદિશ મળે છે. **0** સદિશ (શૂન્ય સદિશ)ના ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :

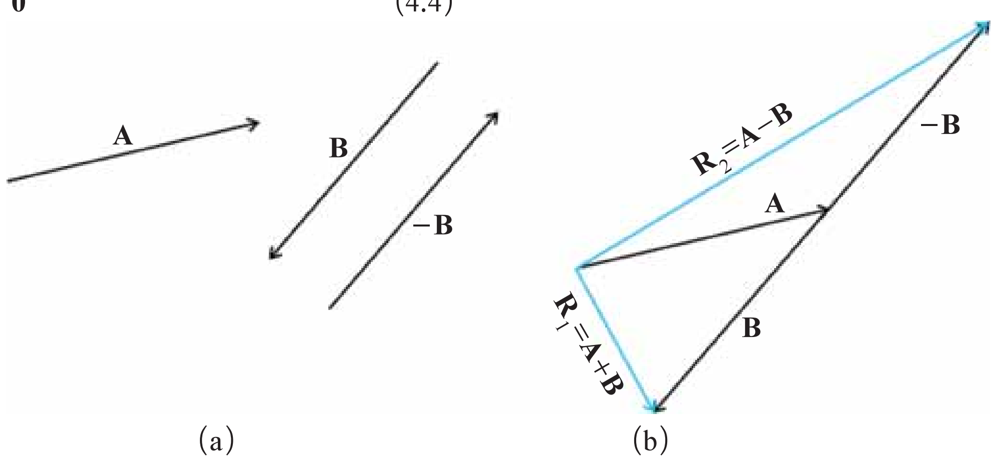
$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad (4.4)$$

શૂન્ય સદિશનો ભૌતિક અર્થ શું છે ? આકૃતિ 4.1(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમતલમાં સ્થાનસદિશ અને સ્થાનાંતર સદિશનો વિચાર કરો. હવે, ધારો કે t સમયે બિંદુ P પાસે રહેલો એક પદાર્થ ગતિ કરીને P′ સુધી પહોંચે છે અને ત્યાંથી ફરી પાછો P પાસે આવે છે, તો તેનું સ્થાનાંતર કેટલું હશે ? અહીં તેનું પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાન એક જ હોવાથી તેનું સ્થાનાંતર 'શૂન્ય સદિશ' મળશે.

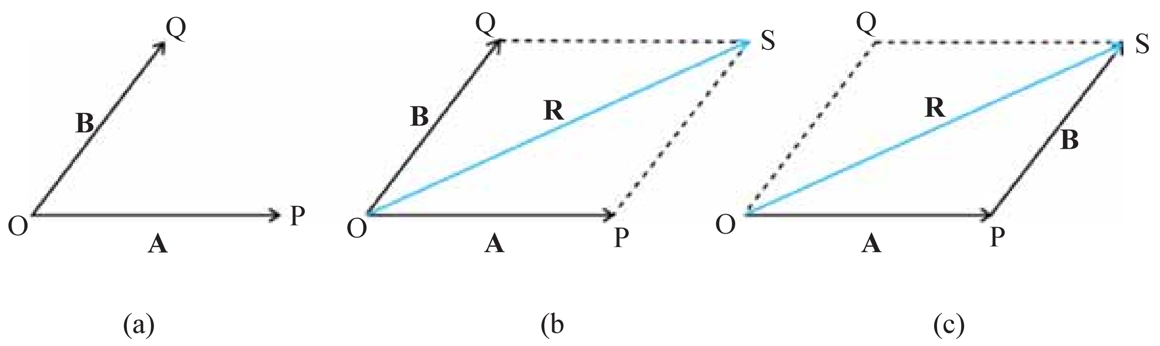
સદિશોની બાદબાકી (Subtraction of Vectors)ને સદિશોના સરવાળા સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. બે સદિશો **A** અને **B**ના તફાવતને આપણે બે સદિશો **A** અને **–B**ના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકીએ :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (4.5)$$

જે આકૃતિ 4.5માં દર્શાવેલ છે. સદિશ **–B**ને સદિશ **A**માં ઉમેરતાં $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})$ મળે છે. સરખામણી માટે આ આકૃતિમાં સદિશ $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ પણ દર્શાવેલ છે. આપણે સદિશોનો સરવાળો કરવા માટે **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત**નો પણ ઉપયોગ કરી શકીએ. ધારો કે આપણી પાસે બે સદિશ **A** અને **B** છે. તેમનો સરવાળો કરવા માટે બંને સદિશોના પુચ્છ આકૃતિ 4.6(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક જ બિંદુ O પર લાવીશું. હવે, આપણે **A**ના શીર્ષથી **B**ને સમાંતર એક રેખા દોરીશું તથા **B**ના શીર્ષથી **A**ને સમાંતર એક બીજી રેખા દોરી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ OQSP પૂર્ણ કરીશું. જે બિંદુ પર આ બંને રેખાઓ એકબીજીને છેદે છે તેને ઊગમબિંદુ O સાથે જોડી દો. પરિણામી સદિશ **R**ની દિશા સામાન્ય ઊગમબિંદુ Oથી છેદનબિંદુ S સુધી દોરેલ વિકર્ણ OSની દિશામાં મળે છે (આકૃતિ 4.6(b)). આકૃતિ 4.6(c)માં સદિશો **A** અને **B**નો પરિણામી સદિશ મેળવવા માટેનો ત્રિકોણનો નિયમ દર્શાવ્યો છે. બંને આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, બંને રીતોમાં સમાન પરિણામ મળે છે. એટલે કે બંને રીતો એકબીજાને સમતુલ્ય છે.

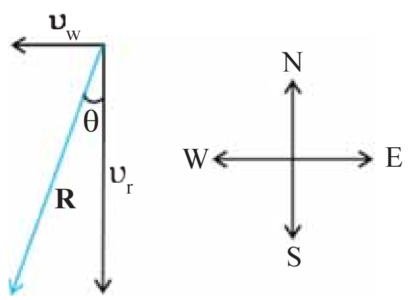


આકૃતિ 4.5 (a) *બે સદિશો* **A** *અને* **B, –B** *પણ દર્શાવેલ છે.* (b) *સદિશ* **A***માંથી* **B** *બાદ કરતાં પરિણામે* $\mathbf{R}_2$ *મળે છે. સરખામણી માટે સદિશો* **A** *અને* **B***નો સરવાળો* $\mathbf{R}_1$ *પણ દર્શાવ્યો છે.*



આકૃતિ 4.6 (a) *એક જ ઉગમબિંદુ પર પુચ્છ રહે તે રીતે દર્શાવેલ બે સદિશો* **A** *અને* **B** (b) *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીતથી મેળવેલ સરવાળો* **A** + **B** (c) *બે સદિશોના સરવાળા માટેની સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત, ત્રિકોણની રીતને સમતુલ્ય છે.*

> *ઉદાહરણ 4.1* વરસાદ શિરોલંબ દિશામાં 35 m s^{-1}ની ઝડપથી પડે છે. થોડા સમય બાદ હવા 12 m s^{-1}ની ઝડપે પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશામાં ફૂંકાવા લાગે છે. બસ-સ્ટેન્ડ પર ઉભેલા છોકરાએ પોતાની છત્રી કઈ દિશામાં રાખવી જોઈએ ?



આકૃતિ 4.7

ઉકેલ વરસાદ તથા હવાના વેગોને સદિશ υ_r તથા υ_w વડે આકૃતિ 4.7માં દર્શાવ્યા છે. તેમની દિશાઓ પ્રશ્નમાં આપ્યા મુજબ દર્શાવેલ છે. સદિશોના સરવાળા માટેના નિયમનો ઉપયોગ કરી υ_r અને υ_wનો પરિણામી **R** આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ છે.

Rનું માન,

$$R = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_w^2} = \sqrt{35^2 + 12^2}\ \text{m s}^{-1} = 37\ \text{m s}^{-1}$$

જો પરિણામી સદિશ R શિરોલંબ દિશા સાથે θ ખૂણો બનાવતો હોય તો,

$$\tan\theta = \frac{\upsilon_w}{\upsilon_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

અથવા $\theta = \tan^{-1}(0.343) = 19^{\circ}$

આમ, છોકરાએ પોતાની છત્રી ઊર્ધ્વ સમતલમાં શિરોલંબ સાથે 19°ના ખૂણે પૂર્વ તરફ રાખવી જોઈએ. ◀

4.5 સદિશોનું વિભાજન (RESOLUTION OF VECTORS)

આકૃતિ 4.8માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક સમતલમાં જુદી જુદી દિશાઓમાં બે અશૂન્ય સદિશ **a** અને **b** તથા તે જ સમતલમાં બીજો એક સદિશ **A** ધ્યાનમાં લો. સદિશ **A**ને બે સદિશોના સરવાળારૂપે દર્શાવી શકાય જેમાંનો એક સદિશ, **a**ને કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા વડે ગુણીને મેળવેલ હોય અને બીજો સદિશ, **b**ને અન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા વડે ગુણીને મેળવેલ હોય. ઉપર્યુક્ત વિધાનને ચકાસવા માટે ધારો કે O અને P સદિશ **A**ના પુચ્છ અને શીર્ષ છે. Oમાંથી પસાર થતી અને **a**ને સમાંતર સુરેખા દોરો. તેવી જ રીતે Pમાંથી પસાર થતી તથા **b**ને સમાંતર સુરેખા દોરો. આ બંને સુરેખાઓના છેદનબિંદુને Q વડે દર્શાવવામાં આવે, તો

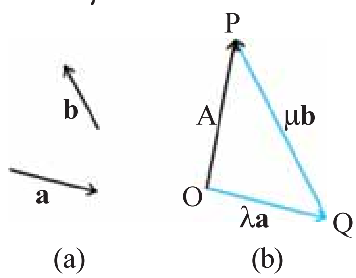
$$\mathbf{A} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} \tag{4.6}$$

પરંતુ **OQ** સદિશ **a**ને સમાંતર છે અને **QP** સદિશ **b**ને સમાંતર છે, તેથી

$$\mathbf{OQ} = \lambda\mathbf{a} \text{ અને } \mathbf{QP} = \mu\mathbf{b} \tag{4.7}$$

જ્યાં λ અને μ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

તેથી, $$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \tag{4.8}$$



આકૃતિ 4.8 (a) *બે અરેખીય સદિશો* **a** *અને* **b** (b) *સદિશ* **A***નું* **a** *અને* **b***નાં પદોમાં વિભાજન*

આમ, આપણે કહી શકીએ કે સદિશ **A**નું **a** અને **b**ની દિશામાં રહેલાં ઘટક સદિશો અનુક્રમે λ**a** અને μ**b**માં વિભાજન થયું છે. આ રીતનો ઉપયોગ કરીને આપણે આપેલ સદિશને

બે ઘટક સદિશોમાં વિભાજિત કરી શકીએ - ત્રણેય સદિશો એક જ સમતલમાં મળશે. લંબ યામાક્ષ પદ્ધતિમાં એકમ સદિશનો ઉપયોગ કરી સામાન્ય સદિશનું અક્ષોની દિશાઓમાં સરળતાથી વિભાજન કરી શકાય છે. જેની હવે આપણે ચર્ચા કરીશું.

એકમ સદિશ (Unit Vector) : એકમ સદિશ એવો સદિશ છે કે જેનું માન એક એકમ છે અને તે ચોક્કસ દિશાનું નિર્દેશન કરે છે. તેને કોઈ એકમ કે પરિમાણ હોતાં નથી. તે ફક્ત દિશા દર્શાવવા માટે ઉપયોગી છે. લંબ યામાક્ષ પદ્ધતિમાં x, y અને z અક્ષની દિશામાંના એકમ સદિશોને અનુક્રમે $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ અને $\hat{\mathbf{k}}$ વડે દર્શાવાય છે, જે આકૃતિ 4.9(a)માં દર્શાવેલ છે.

આ દરેક એકમ સદિશો હોવાથી

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1 \qquad (4.9)$$

આ એકમ સદિશો એકબીજાને લંબ હોય છે. બીજા સદિશોથી તેમને અલગ તારવવા માટે આપણે આ પુસ્તકમાં તેમને ઘાટા અક્ષરોની ઉપર એક કૅપ (^) દ્વારા દર્શાવેલ છે. આ પ્રકરણમાં આપણે દ્વિપરિમાણમાં થતી ગતિની ચર્ચા કરતાં હોવાથી આપણને ફક્ત બે એકમ સદિશોની જરૂરિયાત પડશે. જો આપણે એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{n}}$ ને કોઈ અદિશ λથી ગુણીએ તો પરિણામી સદિશ $\lambda\hat{\mathbf{n}}$ મળશે. સામાન્ય રીતે કોઈ સદિશ $\mathbf{A}$ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\ \hat{\mathbf{n}} \qquad (4.10)$$

જ્યાં, $\hat{\mathbf{n}}$ એ $\mathbf{A}$ની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે.

આપણે કોઈ સદિશ $\mathbf{A}$ને એકમ સદિશો $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$ના ઘટક સદિશોમાં વિભાજિત કરી શકીએ છીએ. ધારો કે સદિશ $\mathbf{A}$ આકૃતિ 4.9(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $x - y$ સમતલમાં આવેલ છે. આકૃતિ 4.9(b)માં દર્શાવ્યા અનુસાર સદિશ $\mathbf{A}$ના શીર્ષ પરથી આપેલ અક્ષો પર આપણે લંબ દોરીશું. તેથી આપણને બે સદિશો $\mathbf{A}_1$ તથા $\mathbf{A}_2$ એ પ્રકારે મળશે કે જેથી $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$. $\mathbf{A}_1$ એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\mathbf{A}_2$ એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{j}}$ને સમાંતર હોવાથી,

$$\mathbf{A}_1 = A_x\hat{\mathbf{i}} \text{ તથા } \mathbf{A}_2 = A_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.11)$$

જ્યાં A_x અને A_y વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

$$\text{આમ, } \mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.12)$$

જે આકૃતિ 4.9(c)માં દર્શાવેલ છે. રાશિ A_x અને A_yને સદિશ $\mathbf{A}$ના x અને y ઘટકો કહે છે. અહીં ધ્યાન રાખો કે, A_x પોતે સદિશ નથી પરંતુ $A_x\hat{\mathbf{i}}$ સદિશ છે, તે જ રીતે $A_y\hat{\mathbf{j}}$ પણ સદિશ છે. ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ કરી આપણે A_x અને A_yને $\mathbf{A}$ના માનના સ્વરૂપમાં તથા તેના દ્વારા x-અક્ષ સાથે બનતા ખૂણા θ ના પદમાં દર્શાવી શકીએ :

$$A_x = A \cos\theta$$
$$A_y = A \sin\theta \qquad (4.13)$$

સમીકરણ (4.13) પરથી સ્પષ્ટ છે કે કોઈ સદિશનાં ઘટકો ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે જે ખૂણા θ ના મૂલ્ય પર આધારિત છે.

કોઈ સમતલમાં સદિશ $\mathbf{A}$ને બે રીતે રજૂ કરી શકાય :

(i) તે સદિશનું માન A તથા તેના દ્વારા x-અક્ષ સાથે બનાવેલ ખૂણા θ વડે, અથવા

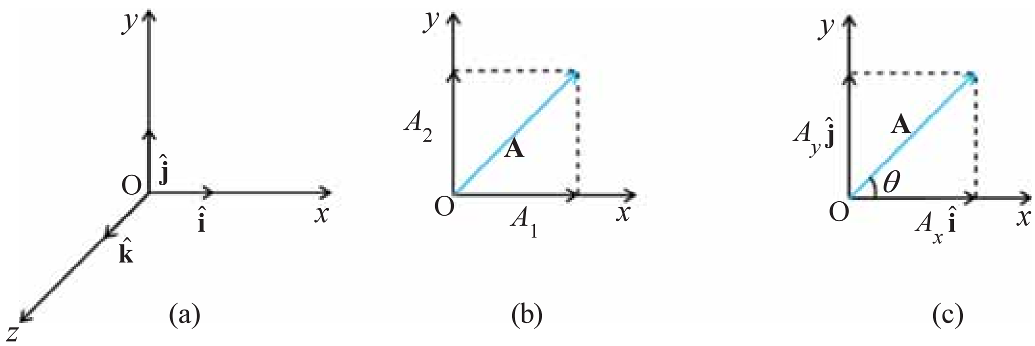
(ii) તેનાં ઘટકો A_x તથા A_y દ્વારા.

જો આપણે A અને θ જાણતાં હોઈએ તો A_x અને A_yનાં મૂલ્યો સમીકરણ (4.13) પરથી મેળવી શકાય છે. જો A_x અને A_y જાણતાં હોઈએ, તો A અને θનાં મૂલ્યો નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય છે :

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta$$
$$= A^2$$

$$\text{અથવા } A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (4.14)$$

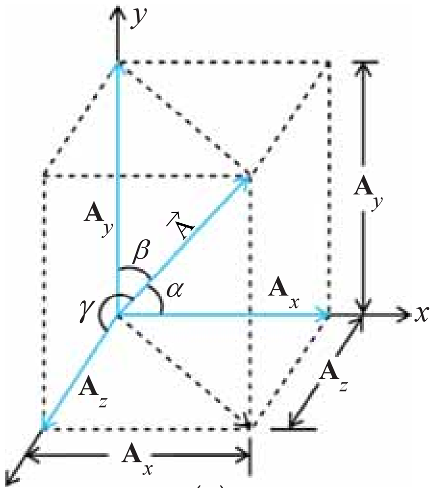
$$\text{અને } \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \qquad (4.15)$$



આકૃતિ 4.9 (a) એકમ સદિશો $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ અક્ષો x, y, zની દિશામાં છે. (b) કોઈ સદિશ $\mathbf{A}$ને x અને y અક્ષોની દિશામાં અનુરૂપ ઘટકો A_1 તથા A_2માં વિભાજિત કરેલ છે. (c) $\mathbf{A}_1$ અને $\mathbf{A}_2$ને $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$નાં પદોમાં દર્શાવેલ છે.

અત્યાર સુધી આપણે $x–y$ સમતલમાં રહેલ સદિશ ધ્યાનમાં લીધેલ. આ જ પ્રક્રિયા દ્વારા કોઈ સદિશ **A**ને ત્રિપરિમાણમાં x, y અને z અક્ષો પર આવેલા ત્રણ ઘટકોમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. આકૃતિ 4.9(d)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જો સદિશ **A**ના x, y તથા z અક્ષો સાથેના ખૂણાઓ* અનુક્રમે α, β અને γ હોય તો,

$$A_x = A\cos\alpha,\ A_y = A\cos\beta,\ A_z = A\cos\gamma \quad (4.16a)$$



(d)

આકૃતિ **4.9** (d) સદિશ **A**નું x, y અને z અક્ષો પરનાં અનુરૂપ ઘટકોમાં વિભાજન

વ્યાપક રૂપે,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.16b)$$

સદિશ **A**નું માન,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (4.16c)$$

સ્થાન સદિશ **r**ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.17)$$

જ્યાં x, y અને z. **r**ના અનુક્રમે x, y અને z અક્ષ પરનાં ઘટકો છે.

4.6 સદિશોના સરવાળા : બૈજિક રીત (VECTOR ADDITION - ANALYTICAL METHOD)

આમ તો સદિશોના સરવાળા માટેની આલેખીય રીત આપણને સદિશો તથા તેના પરિણામી સદિશને સ્પષ્ટ રૂપે સમજવા માટે ઉપયોગી છે પરંતુ ક્યારેક આ પ્રક્રિયા કંટાળાજનક અને તેની ચોકસાઈ પણ મર્યાદિત હોય છે. આવા સંજોગોમાં સદિશ સરવાળાની બૈજિક રીત ખૂબ જ અનુકૂળ પડે છે. ધારો કે સદિશ **A** અને **B** એ x-y સમતલમાં આવેલા બે સદિશો છે અને તેમનાં ઘટકો A_x, A_y અને B_x, B_y છે માટે,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}$$

જો તેમનો સરવાળો **R** હોય, તો

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}) \quad (4.19a)$$

સદિશોના સરવાળા સમક્રમી છે અને તે જૂથના નિયમને અનુસરે છે, માટે આપણે સમીકરણ (4.19a)માં સદિશોને આપણને અનુકૂળ એવા જૂથમાં ગોઠવી શકીએ.

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} \quad (4.19b)$$

વળી $\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$ હોવાથી, (4.20)

$$R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y \quad (4.21)$$

આમ, પરિણામી સદિશ **R**નો દરેક ઘટક એ સદિશ **A** અને **B**નાં અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

આ રીતે ત્રિપરિમાણમાં,

$$\mathrm{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathrm{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathrm{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

જ્યાં, $R_x = A_x + B_x$

$$R_y = A_y + B_y$$

$$R_z = A_z + B_z \quad (4.22)$$

આ રીતની મદદથી ગમે તેટલી સંખ્યાના સદિશોનો સરવાળો કે બાદબાકી કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે જો સદિશો **a**, **b** અને **c** નીચે પ્રમાણે આપેલ હોય :

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{c} = c_x\hat{\mathbf{i}} + c_y\hat{\mathbf{j}} + c_z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.23a)$$

તો સદિશ **T** = **a** + **b** − **c**નાં ઘટકો,

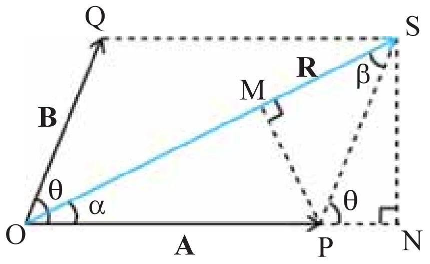
$$T_x = a_x + b_x - c_x$$

$$T_y = a_y + b_y - c_y \quad (4.23b)$$

$$T_z = a_z + b_z - c_z$$

ઉદાહરણ 4.2 આપેલ સદિશો **A** અને **B**ના પરિણામી સદિશનું માન અને દિશા, તેમના માન અને તેમની વચ્ચેના ખૂણા θ ના પદમાં મેળવો.

* *અહીં નોંધો કે α, β અને γ અવકાશમાં રહેલા ખૂણાઓ છે. તે એવી બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાઓ છે જે એક જ સમતલમાં નથી.*



આકૃતિ 4.10

ઉકેલ આકૃતિ 4.10માં દર્શાવ્યા અનુસાર **OP** અને **OQ** બે સદિશો **A** અને **B**ને રજૂ કરે છે જેમની વચ્ચેનો ખૂણો θ છે. તો સદિશોના સરવાળા માટેની સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત અનુસાર **OS** પરિણામી સદિશ **R** રજૂ કરે છે :

R = **A** + **B**

SN, *OP*ને લંબ છે તથા *PM*, *OS*ને લંબ છે.

તેથી આકૃતિની ભૂમિતિ અનુસાર,

$OS^2 = ON^2 + SN^2$

પરંતુ, $ON = OP + PN = A + B\cos\theta$

$SN = B\sin\theta$

$OS^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$

અથવા, $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (4.24a)$$

ΔOSNમાં, $SN = OS\sin\alpha = R\sin\alpha$, અને

ΔPSNમાં, $SN = PS\sin\theta = B\sin\theta$

તેથી $R\sin\alpha = B\sin\theta$

$$\text{અથવા, } \frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24b)$$

તે જ રીતે, $PM = A\sin\alpha = B\sin\beta$

$$\text{અથવા, } \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24c)$$

સમીકરણ (4.24b) અને (4.24c) પરથી,

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24d)$$

સમીકરણ (4.24d) પરથી આપણે નીચેનું સૂત્ર મેળવી શકીએ છીએ :

$$\sin\alpha = \frac{B}{R}\sin\theta \qquad (4.24e)$$

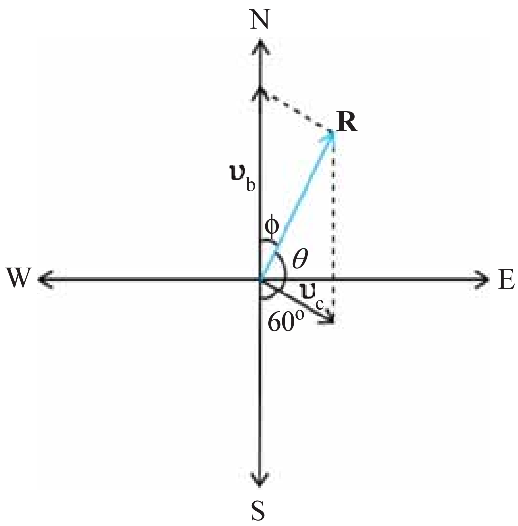
અહીં *R*નું મૂલ્ય સમીકરણ (4.24a)માં આપેલ છે.

$$\text{અથવા, } \tan\alpha = \frac{SN}{OP + PN} = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} \qquad (4.24f)$$

સમીકરણ (4.24a) પરિણામી સદિશનું માન અને સમીકરણો (4.24e) તથા (4.24f) તેની દિશા આપે છે. સમીકરણ (4.24a)ને **કોસાઈનનો નિયમ (Law of Cosines)** અને સમીકરણ (4.24d)ને **સાઈનનો નિયમ (Law of Sines)** કહે છે. ◀

▶ *ઉદાહરણ 4.3* એક મોટરબોટ ઉત્તર દિશામાં 25 km/h ના વેગથી ગતિ કરે છે અને આ વિસ્તારમાં પાણીના પ્રવાહનો વેગ 10 km/h છે. પાણીના પ્રવાહની દિશા દક્ષિણથી પૂર્વ તરફ 60°ના ખૂણે છે. મોટરબોટનો પરિણામી વેગ શોધો.

ઉકેલ આકૃતિ 4.11માં સદિશ $\mathbf{v}_b$ મોટરબોટનો વેગ તથા $\mathbf{v}_c$ પાણીના પ્રવાહનો વેગ દર્શાવે છે. પ્રશ્નમાં જણાવ્યા અનુસાર આકૃતિમાં તેમની દિશા દર્શાવેલ છે. સદિશોના સરવાળા માટેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમ અનુસાર મળતાં પરિણામી સદિશ **R**ની દિશા આકૃતિમાં દર્શાવી છે.



આકૃતિ 4.11

કોસાઈન નિયમ (Law of Cosines)નો ઉપયોગ કરી આપણે સદિશ **R**નું મૂલ્ય શોધી શકીએ છીએ.

$$R = \sqrt{v_b^2 + v_c^2 + 2v_b v_c\cos 120^o}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2\times 25\times 10(-1/2)} \cong 22 \text{ km/h}$$

દિશા શોધવા માટે આપણે સાઈન નિયમ (Laws of Sine)નો ઉપયોગ કરીશું.

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{v_c}{\sin\phi} \text{ અથવા } \sin\phi = \frac{v_c}{R}\sin\theta$$

$$= \frac{10\times\sin 120^o}{21.8} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times 21.8} \cong 0.397$$

$\phi \cong 23.4^o$ ◀

4.7 સમતલમાં ગતિ (MOTION IN A PLANE)

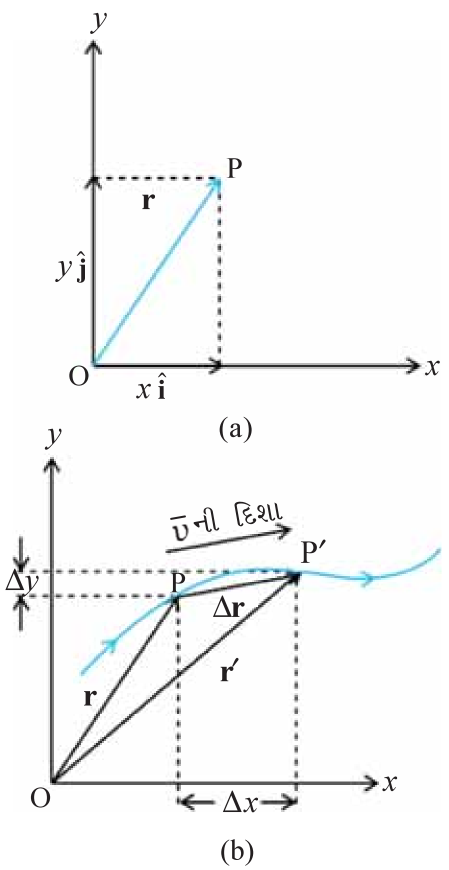
આ વિભાગમાં આપણે જોઈશું કે સદિશોના ઉપયોગથી કેવી રીતે દ્વિપરિમાણિક ગતિ વર્ણવી શકાય છે.

4.7.1 સ્થાન સદિશ અને સ્થાનાંતર (Position Vector and Displacement)

કોઈ સમતલમાં આવેલા કણ Pનો x–y નિર્દેશ ફ્રેમના ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ $\mathbf{r}$ આ મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

જ્યાં x અને y અનુક્રમે સદિશ $\mathbf{r}$ના X-અક્ષ તથા Y-અક્ષ પરનાં ઘટકો એટલે કે કણના યામ છે.



આકૃતિ 4.12 (a) *સ્થાન સદિશ* $\mathbf{r}$ (b) *કણના સ્થાનાંતર* $\Delta\mathbf{r}$ *અને સરેરાશ વેગ* $\bar{\boldsymbol{\upsilon}}$

ધારો કે, આકૃતિ (4.12b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ કણ જાડી રેખા દ્વારા દર્શાવેલ વક્ર પર ગતિ કરે છે અને તે t સમયે P પાસે તથા t' સમયે P′ પાસે પહોંચે છે. તેથી કણનું સ્થાનાંતર,

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (4.25)$$

અને તેની દિશા P થી P′ તરફની છે.

સમીકરણ (4.25)ને આપણે સદિશોના ઘટકના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

$$\Delta\mathbf{r} = (x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}) - (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})$$
$$= \hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta x$$

જ્યાં, $\Delta x = x' - x,\ \Delta y = y' - y \qquad (4.26)$

વેગ (Velocity)

પદાર્થના સ્થાનાંતર તથા તેને અનુરૂપ સમયગાળાના ગુણોત્તરને સરેરાશ વેગ ($\bar{\boldsymbol{\upsilon}}$) કહે છે.

$$\bar{\boldsymbol{\upsilon}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (4.27)$$

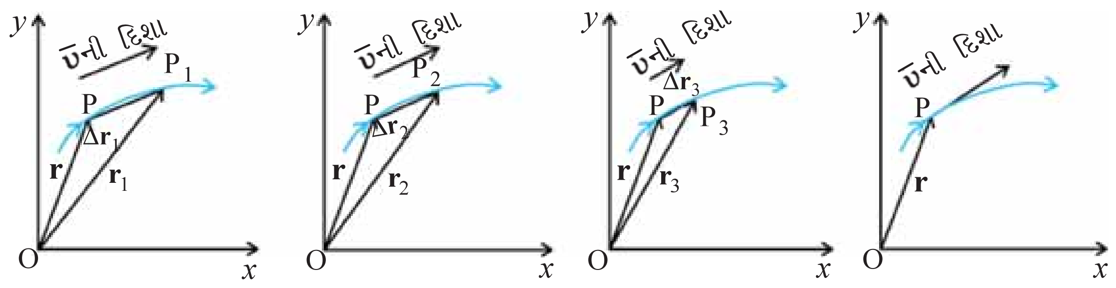
અથવા, $\bar{\boldsymbol{\upsilon}} = \bar{\upsilon}_x\hat{\mathbf{i}} + \bar{\upsilon}_y\hat{\mathbf{j}}$

$\bar{\boldsymbol{\upsilon}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ હોવાથી, આકૃતિ (4.12) અનુસાર સરેરાશ વેગની દિશા $\Delta\mathbf{r}$ની દિશામાં જ મળે છે. ગતિમાન પદાર્થનો **વેગ** (તાત્ક્ષણિક વેગ), સમયગાળો શૂન્ય તરફ જાય ($\lim_{\Delta t \to 0}$), ત્યારે મળતા સરેરાશ વેગનું સીમાન્ત મૂલ્ય છે.

એટલે કે,

$$\boldsymbol{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4.28)$$

લક્ષની પ્રક્રિયાનો અર્થ આકૃતિ 4.13(a) થી (d) દ્વારા સહેલાઈથી સમજી શકાય છે. આ આકૃતિઓમાં જાડી રેખા પદાર્થનો ગતિપથ દર્શાવે છે, જે t સમયે P પાસે છે. P_1, P_2 અને P_3 અનુક્રમે Δt_1, Δt_2 અને Δt_3 સમયગાળા બાદ પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવે છે. Δt_1, Δt_2 અને Δt_3 સમય દરમિયાન પદાર્થના સ્થાનાંતરો અનુક્રમે $\Delta\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}_2$ અને $\Delta\mathbf{r}_3$ છે. આકૃતિ (a), (b)



(a) (b) (c) (d)

આકૃતિ 4.13 *સમયગાળો* Δt *શૂન્ય લક્ષ તરફ જાય છે ત્યારે સરેરાશ વેગ પદાર્થના વેગ* $\boldsymbol{\upsilon}$ *જેટલો થઈ જાય છે.* $\bar{\boldsymbol{\upsilon}}$*ની દિશા તે ક્ષણે પથ પર દોરેલ સ્પર્શક રેખાની દિશામાં હોય છે.*

તથા (c)માં Δtના ક્રમશઃ ઘટતાં જતાં મૂલ્યો એટલે કે Δt_1, Δt_2, Δt_3 $(\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3)$ માટે પદાર્થના સરેરાશ વેગ $\bar{\boldsymbol{\upsilon}}$ની દિશા દર્શાવી છે. જ્યારે $\Delta t \to 0$ થાય ત્યારે $\Delta \mathbf{r} \to 0$ અને તે ગતિપથના સ્પર્શકની દિશામાં મળે છે. (આકૃતિ 4.13(d)). આમ, **પદાર્થના ગતિપથના કોઈ પણ બિંદુ પાસે તેનો વેગ તે બિંદુ પાસે ગતિપથને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે અને ગતિની દિશામાં હોય છે.**

આપણે સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$ને તેનાં ઘટકોના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} \right) \quad (4.29)$$

$$= \hat{\mathbf{i}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

અથવા $\boldsymbol{\upsilon} = \hat{\mathbf{i}}\dfrac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\dfrac{dy}{dt} = \upsilon_x \hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y \hat{\mathbf{j}}$

જ્યાં, $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}, \ \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$ (4.30a)

આમ, જો ગતિ કરતાં પદાર્થના યામો x અને y સમયના વિધેય સ્વરૂપે જાણીતા હોય, તો ઉપર્યુક્ત સમીકરણોનો ઉપયોગ કરીને υ_x અને υ_y મેળવી શકાય છે.

તેથી, $\boldsymbol{\upsilon}$નું મૂલ્ય,

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \quad (4.30b)$$

તથા $\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા, ખૂણા θ ના સ્વરૂપમાં

$\tan\theta = \dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x}, \ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right)$ વડે આપી શકાય છે. (4.30c)

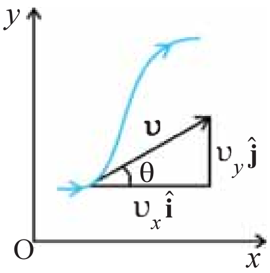
આકૃતિ 4.14માં વેગ સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$ માટે υ_x, υ_y અને ખૂણો θ દર્શાવેલ છે.

પ્રવેગ (Acceleration)

x–y સમતલમાં ગતિમાન પદાર્થનો **સરેરાશ પ્રવેગ a** તેના વેગમાં થતાં ફેરફાર તથા તેને અનુરૂપ સમયગાળાના ગુણોત્તર જેટલો હોય છે.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\upsilon_x \hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y \hat{\mathbf{j}})}{\Delta t} = \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta \upsilon_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} \quad (4.31a)$$

અથવા, $\boldsymbol{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}$ (4.31b)



આકૃતિ 4.14 વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$નાં ઘટકો υ_x, υ_y તથા તે X-અક્ષ સાથે ખૂણો θ બનાવે છે. $\upsilon_x = \upsilon\cos\theta$, $\upsilon_y = \upsilon\sin\theta$

પ્રવેગ (તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ), **સમયગાળો શૂન્ય તરફ જાય ત્યારે મળતા સરેરાશ પ્રવેગનું સીમાન્ત મૂલ્ય છે. એટલે કે,**

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} \quad (4.32a)$$

$\Delta \boldsymbol{\upsilon} = \Delta \upsilon_x \hat{\mathbf{i}} + \Delta \upsilon_y \hat{\mathbf{j}}$ હોવાથી,

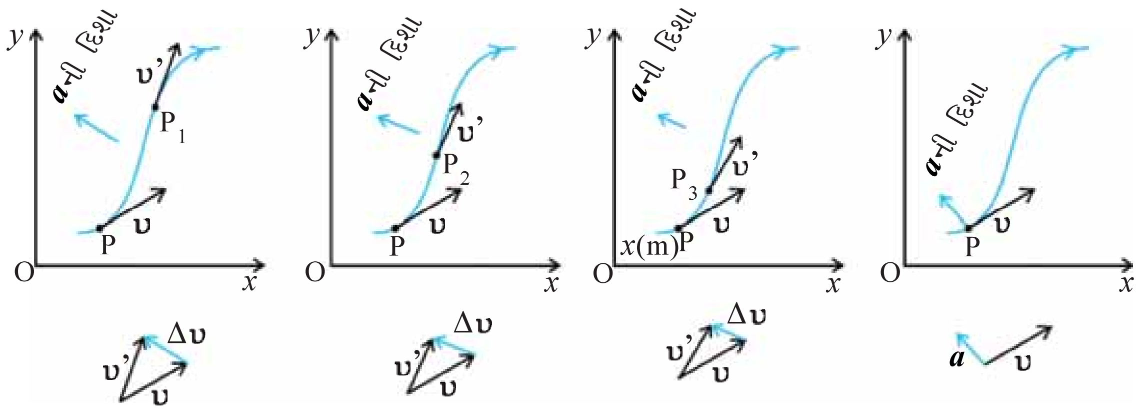
$$\boldsymbol{a} = \hat{\mathbf{i}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_y}{\Delta t}$$

અથવા $\boldsymbol{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}$ (4.32b)

જ્યાં, $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt}, \ a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt}$ (4.32c)*

વેગના કિસ્સાની જેમ આપણે પદાર્થનો પથ દર્શાવતા આલેખ પર, પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે લક્ષની પ્રક્રિયાને આલેખીય રીતે સમજી શકીએ છીએ. તે આકૃતિ (4.15a) થી (4.15d)માં દર્શાવેલ છે. t સમયે પદાર્થનું સ્થાન P દ્વારા દર્શાવેલ છે. Δt_1, Δt_2, Δt_3 $(\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3)$ સમયગાળા બાદ પદાર્થના સ્થાનને અનુક્રમે P_1, P_2, P_3 દ્વારા દર્શાવેલ છે. આકૃતિ (4.15) (a), (b) અને (c)માં આ દરેક બિંદુઓ P, P_1, P_2, P_3 પર વેગના સદિશો પણ દર્શાવેલ છે. Δtના દરેક કિસ્સામાં $\Delta \boldsymbol{\upsilon}$ સદિશ સરવાળાના ત્રિકોણના નિયમ પરથી મેળવેલ છે. વ્યાખ્યા મુજબ સરેરાશ પ્રવેગની દિશાએ $\Delta \boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા જ છે. આપણે જોઈએ છીએ કે જેમ જેમ Δtનું મૂલ્ય ઘટતું જાય છે તેમ તેમ $\Delta \boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા પણ બદલાતી જાય છે. તેના પરિણામ સ્વરૂપે પ્રવેગની દિશા પણ બદલાય છે. અંતમાં $\Delta t \to 0$

* x અને yનાં પદોમાં a_x અને a_yને આ પ્રમાણે દર્શાવી શકાય : $a_x = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{d^2x}{dt^2}, \ a_y = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) = \dfrac{d^2y}{dt^2}$



(a) (b) (c) (d)

આકૃતિ 4.15 *ત્રણ સમયગાળા* (a) Δt_1, (b) Δt_2, (c) Δt_3 $(\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3)$ *માટે સરેરાશ પ્રવેગ* ***a*** (d) $\Delta t \rightarrow 0$ *સીમાને અનુરૂપ સરેરાશ પ્રવેગ પદાર્થના પ્રવેગ જેટલો થાય છે.*

લક્ષમાં (આકૃતિ 4.15d), સરેરાશ પ્રવેગ, તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ જેટલો થઈ જાય છે અને તેની દિશા આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હોય છે.

ખાસ નોંધો કે એક પરિમાણમાં પદાર્થનો વેગ તથા પ્રવેગ હંમેશાં એક જ સુરેખ પથ પર હોય છે. (તે કાં તો એક જ દિશામાં હશે કે પછી પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં) જ્યારે દ્વિપરિમાણમાં કે ત્રિપરિમાણમાં પદાર્થની ગતિ માટે વેગ અને પ્રવેગ સદિશો વચ્ચે 0° થી 180° વચ્ચેનો કોઈ પણ ખૂણો હોઈ શકે છે.

▶ *ઉદાહરણ 4.4* કોઈ કણનું સ્થાન $\mathbf{r} = 3.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}}$ વડે અપાય છે, જ્યાં t સેકન્ડમાં છે. સહગુણકોના એકમો એવી રીતે છે કે જેથી **r** મીટરમાં મળે. (a) કણના $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ તથા $\boldsymbol{a}(t)$ શોધો. (b) $t = 1.0$ s માટે $\upsilon(t)$નું મૂલ્ય અને દિશા શોધો.

ઉકેલ

$$\boldsymbol{\upsilon}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}})$$

$$= 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 4.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = +4.0\,\hat{\mathbf{j}}$$

$a = 4.0$ m s^{-2} y-દિશામાં

$t = 1.0$ s પર $\boldsymbol{\upsilon} = 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 4.0\,\hat{\mathbf{j}}$

તેનું માન $\upsilon = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.0$ m s^{-1} તથા

તેની દિશા $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53^\circ$

x-અક્ષ સાથે. ◀

4.8 સમતલમાં થતી અચળ પ્રવેગી ગતિ (MOTION IN A PLANE WITH CONSTANT ACCELERATION)

ધારો કે કોઈ પદાર્થ $x-y$ સમતલમાં અચળ પ્રવેગ **a**થી ગતિ કરે છે. પ્રવેગ અચળ હોવાથી કોઈ પણ સમયગાળામાં તેનો સરેરાશ પ્રવેગ આ અચળ પ્રવેગના મૂલ્ય જેટલો જ મળશે. હવે, ધારો કે $t = 0$ સમયે પદાર્થનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_0$ અને t સમયે વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$ છે.

તેથી વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\upsilon}_0}{t - 0} = \frac{\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\upsilon}_0}{t}$$

અથવા $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t$ (4.33a)

ઘટકોના સ્વરૂપમાં,

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t \quad (4.33b)$$

હવે આપણે જોઈશું કે સમયની સાથે સ્થાનસદિશ **r** કેવી રીતે બદલાય છે. અહીં એક પરિમાણમાં ઉપયોગમાં લીધેલી પદ્ધતિને અનુસરીશું. ધારો કે, $\mathbf{r}_0$ અને **r** અનુક્રમે $t = 0$ અને t સમયે કણના સ્થાનસદિશો છે અને આ સમયે કણના વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_0$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ છે. તેથી t સમયગાળામાં પદાર્થનો સરેરાશ વેગ $(\boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{\upsilon}) / 2$ થશે. હવે, સ્થાનાંતર એટલે સરેરાશ વેગ અને સમયગાળાનો ગુણાકાર,

$$\therefore\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \frac{\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\upsilon}_0}{2}\,t = \left(\frac{(\boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t) + \boldsymbol{\upsilon}_0}{2}\right)t$$

$$= \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

અથવા $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ (4.34a)

સમીકરણ (4.34a)નું વિકલન એટલે કે $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ કરતાં સમીકરણ (4.33a) મળે છે તેમ સરળતાથી ચકાસી શકાય છે તથા તે $t = 0$ સમયે $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ શરતનું પણ પાલન કરે છે. સમીકરણ (4.34a)ને ઘટકોના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (4.34b)$$

સમીકરણ (4.34b)નું સીધું અર્થઘટન એ છે કે x તથા y દિશાઓમાંની ગતિઓને એકબીજાથી સ્વતંત્ર ગતિ તરીકે ગણી શકાય છે. એટલે કે, **સમતલમાં (દ્વિપરિમાણમાં) થતી અચળ પ્રવેગી ગતિને બે સ્વતંત્ર, એક સાથે અચળ પ્રવેગથી એક પરિમાણમાં પરસ્પર લંબ દિશાઓમાં થતી ગતિ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે.** આ એક અગત્યનું પરિણામ છે, જે દ્વિપરિમાણમાં પદાર્થની ગતિના વિશ્લેષણ માટે ઉપયોગી છે. આવું પરિણામ ત્રિપરિમાણીક ગતિમાં પણ મળે છે. ઘણીબધી ભૌતિક સ્થિતિઓમાં બે લંબ દિશાઓની પસંદગી અનુકૂળતા મુજબની હોય છે, જે પરિચ્છેદ (4.10)માં પ્રક્ષિપ્ત ગતિ માટે આપણે જોઈશું.

ઉદાહરણ 4.5 $t = 0$ સમયે એક કણ ઊગમબિંદુ પાસેથી $5.0\hat{\mathbf{i}}$ m s^{-1}ના વેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. x-y સમતલમાં તેની પર બળ એવી રીતે લાગે છે કે જેથી તે $(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s^{2}નો અચળ પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે. (a) જ્યારે કણનો x-યામ 84 m હોય ત્યારે y-યામ કેટલો હશે ? (b) તે સમયે કણની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ કણનું સ્થાન નીચેના સૂત્ર પ્રમાણે આપી શકાય :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

$$= 5.0\hat{\mathbf{i}}t + (1/2)(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$= (5.0t + 1.5t^2)\hat{\mathbf{i}} + 1.0t^2\hat{\mathbf{j}}$$

તેથી, $x(t) = 5.0t + 1.5t^2$

$y(t) = +1.0t^2$

હવે, $x(t) = 84$ m, $t = ?$

$5.0t + 1.5t^2 = 84 \Rightarrow t = 6$ s

હવે, $t = 6$ s માટે, $y = 1.0\,(6)^2 = 36.0$ m

હવે, વેગ $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (5.0 + 3.0t)\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\,\hat{\mathbf{j}}$

તેથી $t = 6$ s માટે, $\mathbf{v} = 23.0\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}}$ માટે,

ઝડપ $= |\mathbf{v}| = \sqrt{23^2 + 12^2} = 26$ m s^{-1} ◀

4.9 દ્વિપરિમાણમાં સાપેક્ષ વેગ (RELATIVE VELOCITY IN TWO DIMENSIONS)

પરિચ્છેદ 3.7માં કોઈ સુરેખ પથ પર ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે સાપેક્ષ વેગની સંકલ્પનાથી આપણે પરિચિત થયા જેને સમતલ કે ત્રિપરિમાણમાં વિસ્તારિત કરી શકાય છે. ધારો કે, બે પદાર્થો A અને B, $\mathbf{v}_A$ અને $\mathbf{v}_B$ જેટલા વેગથી ગતિ કરે છે. (દરેક ગતિ કોઈ સામાન્ય નિર્દેશ ફ્રેમ જેમકે જમીનની સાપેક્ષે છે.) તેથી પદાર્થ **A**નો **B**ની સાપેક્ષે વેગ

$$\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B \quad (4.35a)$$

તે જ રીતે પદાર્થ Bનો Aની સાપેક્ષ વેગ,

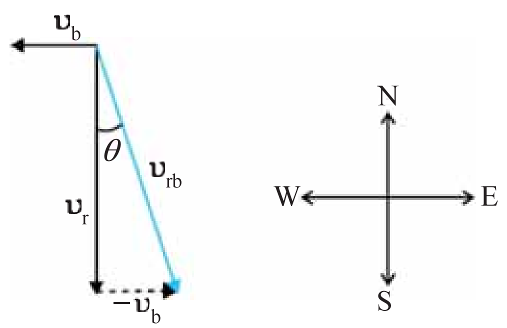
$$\mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

તેથી $\mathbf{v}_{AB} = -\mathbf{v}_{BA}$ (4.35b)

અને $|\mathbf{v}_{AB}| = |\mathbf{v}_{BA}|$ (4.35c)

ઉદાહરણ 4.6 શિરોલંબ દિશામાં 35 m s^{-1}ના વેગથી વરસાદ પડી રહ્યો છે. કોઈ મહિલા પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશામાં 12 m s^{-1} ઝડપથી સાઇકલ ચલાવી રહી છે. વરસાદથી બચવા માટે તેણીએ કઈ દિશામાં છત્રી રાખવી જોઈએ ?

ઉકેલ આકૃતિ 4.16માં $\mathbf{v}_r$ વરસાદનો વેગ અને $\mathbf{v}_b$ મહિલા દ્વારા ચલાવાતી સાઇકલનો વેગ દર્શાવે છે. આ બંને વેગ જમીનની સાપેક્ષે છે. મહિલા સાઇકલ ચલાવતી હોવાથી તેણીને વરસાદનો



આકૃતિ 4.16

વેગ સાઇકલની સાપેક્ષે અનુભવાશે. એટલે કે, $\mathbf{v}_{rb} = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_b$

આકૃતિ 4.16માં દર્શાવ્યા અનુસાર આ સાપેક્ષ વેગ શિરોલંબ દિશા સાથે θ કોણ બનાવશે. જેનું મૂલ્ય,

$$\tan\theta = \frac{\upsilon_b}{\upsilon_r} = \frac{12}{35} = 0.343 \text{ થશે.}$$

એટલે કે, $\theta \cong 19^o$

આમ, મહિલાએ પોતાની છત્રી શિરોલંબ દિશા સાથે 19^oના ખૂણે પશ્ચિમની તરફ રાખવી જોઈએ.

તમે આ ઉદાહરણ અને ઉદાહરણ 4.1 વચ્ચેનો ભેદ પારખો. ઉદાહરણ 4.1માં બાળકને બે વેગોના પરિણામી વેગ (સદિશ સરવાળો)નો અનુભવ થાય છે. જ્યારે આ ઉદાહરણમાં મહિલાને સાઈકલના સાપેક્ષે વરસાદના વેગ (બંને વેગોની સદિશ બાદબાકી)નો અનુભવ થાય છે. ◀

4.10 પ્રક્ષિપ્ત ગતિ (PROJECTILE MOTION)

અગાઉના પરિચ્છેદમાં જે વિચારો વિકસિત થયા હતા તેમનો ઉપયોગ ઉદાહરણના રૂપમાં પ્રક્ષિપ્ત ગતિના અભ્યાસમાં કરીશું. જ્યારે કોઈ પદાર્થને ફેંકવામાં આવે ત્યારે તે ઉડ્ડયનમાં હોય તે દરમિયાન તે પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ કહે છે. આવો પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ ફૂટબૉલ, ક્રિકેટનો બૉલ, બેઝ બૉલ કે અન્ય કોઈ પણ વસ્તુ હોઈ શકે. પ્રક્ષિપ્ત ગતિને એકીસાથે પરસ્પર લંબ દિશામાં થતી બે જુદી જુદી સ્વતંત્ર ઘટક-ગતિઓનાં સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. આ પૈકીનો એક ઘટક કોઈ પ્રવેગ વગરનો (અચળ વેગી) સમક્ષિતિજ દિશામાં હોય છે જ્યારે બીજો ઘટક ગુરુત્વીય બળને કારણે અચળ પ્રવેગથી ઊર્ધ્વદિશામાં હોય છે. સૌપ્રથમ ગૅલિલિયોએ (1632) તેના પુસ્તક **"ડાયલોગ ઑન ધ ગ્રેટ વર્લ્ડ સિસ્ટમ" (Dialogue on the Great World Systems)**માં પ્રક્ષિપ્ત ગતિના સમક્ષિતિજ તેમજ ઊર્ધ્વ ઘટકોની સ્વતંત્રતાનો ઉલ્લેખ કર્યો હતો.

સરળતા ખાતર આપણી ચર્ચામાં પ્રક્ષિપ્ત ગતિ પર હવાના અવરોધની અસર અવગણીશું. આકૃતિ 4.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે કોઈ પદાર્થને x-અક્ષ (સમક્ષિતિજ દિશા) સાથે θ_0 કોણ બનાવતી દિશામાં $\boldsymbol{\upsilon}_0$ જેટલા વેગથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે.

પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત કર્યા બાદ તેના પર ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે ઉદ્ભવતો પ્રવેગ શિરોલંબ અધોદિશામાં હશે.

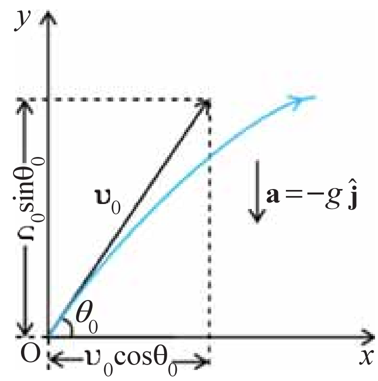
$$\mathbf{a} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$$

અથવા $a_x = 0$ તથા $a_y = -g$ (4.36)

પ્રારંભિક વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_0$નાં ઘટકો,

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0\cos\theta_0$$

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0\sin\theta_0 \quad (4.37)$$



આકૃતિ 4.17 *$\boldsymbol{\upsilon}_0$વેગથી θ_0 ખૂણે પ્રક્ષિપ્ત કરેલા પદાર્થની ગતિ*

આકૃતિ 4.17માં દર્શાવ્યા અનુસાર જો આપણે પદાર્થના પ્રારંભિક સ્થાનને નિર્દેશ ફ્રેમના ઊગમબિંદુ પર લઈએ તો,

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

તેથી સમીકરણ (4.34b)ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$x = \upsilon_{0x} t = (\upsilon_0\cos\theta_0)\, t$$

અને $y = (\upsilon_0\sin\theta_0)\, t - (1/2)g\, t^2$ (4.38)

સમીકરણ (4.33b)નો ઉપયોગ કરી કોઈ સમય t માટે વેગના ઘટકોને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0\cos\theta_0$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0\sin\theta_0 - g\,t \quad (4.39)$$

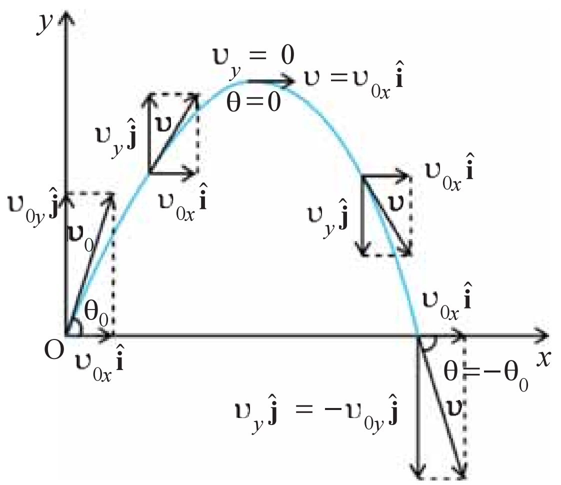
સમીકરણ (4.38) કોઈ સમય t માટે પ્રારંભિક વેગ υ_0 તથા પ્રક્ષિપ્ત કોણ θ_0ના પદમાં પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના સ્થાનનાં x અને y ઘટકો આપે છે. અહીં એ વાત નોંધો કે x અને y દિશાઓ પરસ્પર લંબ હોવાથી પ્રક્ષિપ્ત ગતિના વિશ્લેષણમાં ઘણી સરળતા થઈ ગઈ છે. વેગનાં બે ઘટકોમાંથી એક x-ઘટક ગતિના પૂરા સમયગાળા દરમિયાન અચળ રહે છે. જ્યારે બીજો y-ઘટક શિરોલંબ દિશામાં મુક્તપતન પામતા પદાર્થની જેમ બદલાય છે. આકૃતિ 4.18માં જુદા જુદા સમયે આ હકીકતને આલેખીય રીત વડે દર્શાવેલ છે. ધ્યાન આપો કે મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએ $\upsilon_y = 0$ અને તેથી $\theta = \tan^{-1}\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = 0$.

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની ગતિપથનું સમીકરણ (Equation of Path of a Projectile)

પ્રક્ષિપ્ત ગતિ કરતાં પદાર્થનો ગતિપથનો આકાર કેવો હશે ? તે x તથા y ઘટકોનાં સમીકરણોમાં સમયનો લોપ કરીને જોઈ શકાય (સમીકરણ 4.38), જે નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$y = (\tan\theta_0)\,x - \frac{g}{2(\upsilon_0\cos\theta_0)^2}x^2 \qquad (4.40)$$

g, θ_0 અને υ_0 અચળ હોવાથી, સમીકરણ (4.40)ને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય. $y = ax + bx^2$, જ્યાં a તથા b અચળ છે. જે પરવલયનું સમીકરણ છે, એટલે કે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે (આકૃતિ 4.18).



આકૃતિ **4.18** *પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે.*

મહત્તમ ઊંચાઈ માટે લાગતો સમય (Time of maximum height)

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ મહત્તમ ઊંચાઈએ પહોંચવા માટે કેટલો સમય લેશે ? ધારો કે આ સમય t_m છે. આ બિંદુ પાસે $\upsilon_y = 0$ હોવાથી સમીકરણ (4.39) પરથી t_mનું મૂલ્ય મળી શકે છે.

$$\upsilon_y = \upsilon_0\sin\theta_0 - g\,t_m = 0$$

$$\text{અથવા } t_m = \upsilon_0\sin\theta_0 / g \qquad (4.41a)$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો કુલ ઉડ્ડયન સમય (T_f) આપણે સમીકરણ (4.38)માં $y = 0$ મૂકીને મેળવી શકીએ છીએ. તેથી,

$$T_f = 2(\upsilon_0\sin\theta_0) / g \qquad (4.41b)$$

T_fને પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો **ઉડ્ડયન સમય** કહે છે. અહીં એ વાત નોંધો કે $T_f = 2t_m$ પરવલય ગતિપથની સંમિતિ પરથી આપણે માટે આ અપેક્ષિત જ હતું.

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની મહત્તમ ઊંચાઈ (Maximum height of a projectile)

સમીકરણ (4.38)માં $t = t_m$ મૂકી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ દ્વારા પ્રાપ્ત થતી મહત્તમ ઊંચાઈ શોધી શકાય છે.

$$y = h_m = (\upsilon_0\sin\theta_0)\left(\frac{\upsilon_0\sin\theta_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{\upsilon_0\sin\theta_0}{g}\right)^2$$

$$\text{અથવા } h_m = \frac{(\upsilon_0\sin\theta_0)^2}{2g} \qquad (4.42)$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની સમક્ષિતિજ અવધિ (Horizontal range of a projectile)

પ્રારંભિક સ્થાન ($x = y = 0$)થી શરૂ કરી તેના પતન દરમિયાન ફરીથી $y = 0$ને પસાર કરે ત્યાં સુધી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે કાપેલા સમક્ષિતિજ અંતરને **સમક્ષિતિજ અવધિ** R કહે છે. સમક્ષિતિજ અવધિ ઉડ્ડયન-સમય T_fમાં કપાયેલ અંતર છે. તેથી અવધિ Rનું મૂલ્ય,

$$R = (\upsilon_0\cos\theta_0)(T_f)$$

$$= (\upsilon_0\cos\theta_0)(2\upsilon_0\sin\theta_0) / g$$

$$\text{અથવા } R = \frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta_0}{g} \qquad (4.43a)$$

સમીકરણ (4.43a) પરથી દર્શાવે છે કે કોઈ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના વેગ υ_0 માટે, જ્યારે $\sin 2\theta_0$ મહત્તમ હોય, ત્યારે R મહત્તમ મળશે એટલે કે, $\theta_0 = 45^\circ$ હોય.

તેથી મહત્તમ સમક્ષિતિજ અવધિ,

$$R_m = \frac{\upsilon_0^2}{g} \qquad (4.43b)$$

ઉદાહરણ 4.7 ગૅલિલિયોએ તેના પુસ્તક "Two New Sciences"માં એવું વિધાન કર્યું છે. '45°ના ખૂણા સાથે સમાન તફાવત ધરાવતાં બે જુદા-જુદા કોણે પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે, તો તેમની અવધિ સમાન હોય છે.' આ વિધાન સાબિત કરો.

ઉકેલ કોઈ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થને θ_0 કોણે પ્રારંભિક વેગ $\mathbf{v}_0$થી ફેંકવામાં આવે તો તેની અવધિ,

$$R = \frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

હવે, ખૂણાઓ $(45^\circ + \alpha)$ તથા $(45^\circ - \alpha)$ માટે, $2\theta_0$નું મૂલ્ય અનુક્રમે $(90^\circ + 2\alpha)$ અને $(90^\circ - 2\alpha)$ થશે. $\sin(90^\circ + 2\alpha)$ અને $\sin(90^\circ - 2\alpha)$ બંનેના મૂલ્યો સમાન એટલે કે $\cos 2\alpha$ હોય છે. તેથી 45°ના ખૂણા સાથે સમાન તફાવત α ધરાવતાં વધારે કે ઓછા મૂલ્યના ખૂણાઓ માટે અવધિ Rનું મૂલ્ય સમાન હોય છે. ◀

ઉદાહરણ 4.8 એક પર્વતારોહક જમીનથી 490 m ઊંચે પર્વતની ધાર પર ઊભો છે. તે એક પથ્થરને સમક્ષિતિજ દિશામાં 15 m s^{-1}નાં પ્રારંભિક વેગથી ફેંકે છે. હવાના અવરોધને અવગણતાં પથ્થર કેટલા સમયમાં જમીન પર પડશે તે શોધો તથા જમીન પર અથડાતી વખતે તેનો વેગ શોધો. ($g = 9.8$ m s^{-2})

ઉકેલ આપણે, પર્વતની ધારને x અને y-અક્ષનું ઊગમબિંદુ તથા જ્યારે પથ્થરને ફેંકવામાં આવે તે ક્ષણને $t = 0$ s લઈશું. x-અક્ષની ધન દિશા પ્રારંભિક વેગની દિશામાં અને y-અક્ષની ધન દિશા શિરોલંબ ઉપરની તરફ પસંદ કરીશું. ગતિનાં x અને y ઘટકો એકબીજાંથી સ્વતંત્ર રીતે લઈ શકાય. ગતિનાં સમીકરણો,

$$x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}\, t$$

$$y(t) = y_0 + \upsilon_{0y}\, t + (1/2)\, a_y t^2$$

અહીં $x_0 = y_0 = 0$, $\upsilon_{0y} = 0$, $a_y = -g = -9.8$ m s^{-2},

જ્યારે, $\upsilon_{0x} = 15$ m s^{-1}

પથ્થર જ્યારે જમીન પર અથડાય છે ત્યારે $y(t) = -490$ m થાય.

$$-490 \text{ m} = -(1/2)(9.8)\, t^2$$

તેથી $t = 10$ s

વેગના ઘટક $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$ તથા $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - g\, t$ થશે.

આમ, જ્યારે પથ્થર જમીન સાથે અથડાશે ત્યારે,

$$\upsilon_{0x} = 15 \text{ m s}^{-1}$$

$$\upsilon_{0y} = 0 - 9.8 \times 10 \approx -98 \text{ m s}^{-1}$$

તેથી પથ્થરનો વેગ

$$\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{15^2 + 98^2} \approx 99 \text{ m s}^{-1}.$$ ◀

▶ ***ઉદાહરણ 4.9*** સમક્ષિતિજ સાથે 30°ના ખૂણે એક ક્રિકેટ બૉલને 28 m s^{-1}ના વેગથી ફેંકવામાં આવે છે. (a) બૉલ માટે મહત્તમ ઊંચાઈ (b) તે જ સ્તરે પાછા આવવા માટે બૉલે લીધેલ સમય તથા (c) ફેંકવામાં આવેલ બિંદુથી બૉલ તે જ ઊંચાઈના જે બિંદુએ પડે છે તે બિંદુના અંતરની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

(a) મહત્તમ ઊંચાઈ

$$h_m = \frac{(\upsilon_0 \sin\theta_0)^2}{2g} = \frac{(28 \sin 30^\circ)^2}{2(9.8)} \text{ m}$$

$$= \frac{14 \times 14}{2 \times 9.8} = 10.0 \text{ m થશે.}$$

(b) તે જ સ્તર પર પાછા આવવા માટે લાગતો સમય

$$T_f = (2\upsilon_0 \sin\theta_0)/g = (2 \times 28 \times \sin 30^\circ)/9.8$$
$$= 28/9.8 \text{ s} = 2.9 \text{ s.}$$

(c) ફેંકવામાં આવેલા બિંદુથી બૉલ તે જ ઊંચાઈના જે બિંદુએ પડે છે તેનું અંતર,

$$R = \frac{(\upsilon_0^2 \sin 2\theta_0)}{g} = \frac{28 \times 28 \times \sin 60^\circ}{9.8} = 69 \text{ m}$$ ◀

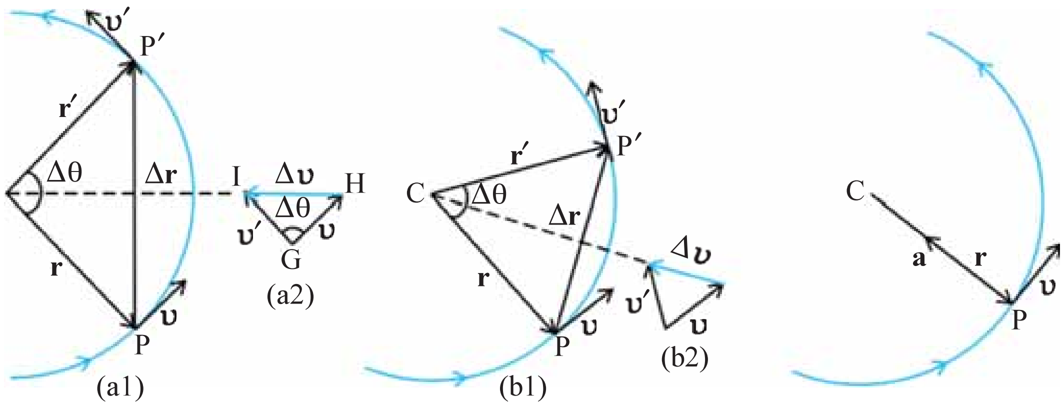
હવાના અવરોધને અવગણવો – આ પૂર્વધારણાનો વાસ્તવિક અર્થ શું છે ? (Neglecting air resistance - what does the assumption really mean ?)

પ્રક્ષિપ્ત ગતિની ચર્ચા કરતી વખતે આપણે કહ્યું હતું તેમ, આપણે માની લઈએ છીએ કે, હવાના અવરોધની, પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની ગતિ પર કોઈ અસર થતી નથી. તમારે એ સમજવું જોઈએ કે આ વિધાનનો સાચો અર્થ શું થાય ? ઘર્ષણ, શ્યાનતાબળ, હવાનું અવરોધક બળ આ બધા ઊર્જાનો વ્યય કરનારાં બળો (Dissipative Forces) છે. ગતિનો વિરોધ કરતાં આવાં બળોની હાજરીને કારણે ગતિમાન પદાર્થની મૂળ ઊર્જા અને તેના પરિણામે તેના વેગમાનમાં ઘટાડો થાય છે. આમ, પોતાના પરવલયકાર પથ પર ગતિમાન પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ હવાના અવરોધક બળની હાજરીમાં ચોક્કસરૂપે પોતાના આદર્શ ગતિપથથી વિચલિત થઈ જશે. તેથી જમીનની સપાટીને તે જ વેગથી નહિ અથડાય જેટલા વેગથી તેને ફેંકવામાં આવ્યો હતો. હવાના અવરોધક બળની ગેરહાજરીમાં વેગનો x ઘટક અચળ રહે છે. ફક્ત y ઘટકમાં જ સતત ફેરફાર થાય છે. જ્યારે હવાના અવરોધક બળની હાજરીમાં બંને ઘટકો પ્રભાવિત થાય છે. તેનો અર્થ એ થયો કે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ માટે સમક્ષિતિજ અવધિનું મૂલ્ય સમીકરણ (4.43) દ્વારા મળતાં મૂલ્ય કરતાં ઓછું મૂલ્ય મળશે. મહત્તમ ઊંચાઈ પણ સમીકરણ (4.42) દ્વારા ગણેલ મૂલ્ય કરતાં ઓછી હશે. ત્યારે તમે અનુમાન લગાવી શકો છો કે ઉડ્ડયન સમયમાં શું ફેરફાર થશે ?

હવાના અવરોધથી બચવું હોય તો આપણે પ્રયોગ શૂન્યાવકાશમાં કે બહુ જ ઓછા દબાણની સ્થિતિમાં કરવો પડે, જે સહેલું કાર્ય નથી. જ્યારે આપણે 'હવાના અવરોધને અવગણ્ય માની લો.' જેવાં વાક્યોના ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે આપણે જાણીએ છીએ કે અવધિ, ઊંચાઈ જેવાં પ્રાચલોમાં તેના કારણે થતાં ફેરફારો, હવાની ગેરહાજરીમાં મળતાં મૂલ્યોની સરખામણીમાં ખૂબ જ ઓછા છે. હવાના અવરોધને ધ્યાનમાં લીધા વગર ગણતરી કરવી, હવાના અવરોધને ધ્યાનમાં લઈને કરવા કરતાં ઘણી જ સરળ છે.

4.11 નિયમિત વર્તુળ-ગતિ (UNIFORM CIRCULAR MOTION)

અચળ ઝડપથી વર્તુળાકાર માર્ગ પર ગતિ કરતા પદાર્થની ગતિને **નિયમિત વર્તુળ ગતિ** કહે છે. શબ્દ 'નિયમિત' તે ઝડપ માટે વાપરવામાં આવ્યો છે જે સમગ્ર ગતિ દરમિયાન સમાન (અચળ) રહે છે. આકૃતિ 4.19માં દર્શાવ્યા અનુસાર કોઈ પદાર્થ υ જેટલી ઝડપથી R ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરે છે. અહીં વેગની દિશા સતત બદલાતી હોવાથી તેમાં પ્રવેગ ઉત્પન્ન થાય છે. આપણે આ પ્રવેગનું મૂલ્ય તથા દિશા શોધીએ.



(a) (b) (c)

આકૃતિ 4.19 નિયમિત વર્તુળ-ગતિ કરતા પદાર્થનો વેગ અને પ્રવેગ. આકૃતિ (a) થી (c) સુધી સમયગાળો Δt ઘટતો જઈને શૂન્ય બને છે. વર્તુળાકાર પથ પર દરેક બિંદુ પાસે પ્રવેગ વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય છે.

આકૃતિ 4.19(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે પદાર્થ P અને P' બિંદુઓ પાસે હોય ત્યારે તેના સ્થાનસદિશ અને વેગ અનુક્રમે $\mathbf{r}$ અને $\mathbf{r}'$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}'$ છે. વ્યાખ્યા અનુસાર કોઈ બિંદુ પાસે પદાર્થનો વેગ તે બિંદુ પાસે ગતિની દિશામાં દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે. આકૃતિ 4.19 (a1)માં વેગ સદિશો $\boldsymbol{\upsilon}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}'$ને દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 4.19 (a2)માં સદિશ સરવાળા માટે ત્રિકોણના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ મેળવેલ છે. ગતિપથ વર્તુળાકાર હોવાથી r ને υ અને $\mathbf{r}'$ને $\boldsymbol{\upsilon}'$ લંબરૂપે છે. તેથી $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$, $\Delta\mathbf{r}$ને લંબ હોય છે. સરેરાશ પ્રવેગ $\left(\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}\right)$ $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશામાં છે તેથી $\bar{\mathbf{a}}$ પણ $\Delta\mathbf{r}$ને લંબ છે. હવે જો આપણે $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ને $\mathbf{r}$ તથા $\mathbf{r}'$ની વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગતી રેખા પર મૂકીએ તો આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે તેની દિશા વર્તુળના કેન્દ્રની તરફ હશે. આ રાશિઓને આકૃતિ 4.19(b)માં સમયના નાના ગાળા માટે દર્શાવેલ છે. $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ અને તેથી $\bar{\mathbf{a}}$ની દિશા ફરીથી કેન્દ્ર તરફ હશે. આકૃતિ 4.19(c)માં $\Delta t \to 0$ છે, તેથી સરેરાશ પ્રવેગ, તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ જેટલો થશે તેની દિશા કેન્દ્ર તરફની હોય છે.* આમ, એ નિષ્કર્ષ નીકળે છે કે નિયમિત વર્તુળ ગતિ માટે પદાર્થના પ્રવેગની દિશા વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય છે. હવે આપણે આ પ્રવેગનું માન મેળવીશું.

વ્યાખ્યા અનુસાર **a**નું મૂલ્ય નીચે દર્શાવેલ સમીકરણ દ્વારા રજૂ કરી શકાય :

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{\upsilon}|}{\Delta t}$$

ધારો કે સ્થાનસદિશો $\mathbf{r}$ અને $\mathbf{r}'$ની વચ્ચેનો ખૂણો $\Delta\theta$ છે. હવે, વેગ સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$ તથા $\boldsymbol{\upsilon}'$ હંમેશાં સ્થાનસદિશોને લંબ હોય છે. તેથી તેમની વચ્ચેનો ખૂણો પણ $\Delta\theta$ થશે. તેથી સ્થાનસદિશો દ્વારા બનતો ત્રિકોણ CPP' તથા વેગ સદિશો $\boldsymbol{\upsilon}$, $\boldsymbol{\upsilon}'$ અને $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ દ્વારા બનતો ત્રિકોણ GHI સમરૂપ છે (આકૃતિ 4.19a). તેથી એક ત્રિકોણના આધારની લંબાઈ તથા બાજુની લંબાઈનો ગુણોત્તર બીજા ત્રિકોણની તેને અનુરૂપ લંબાઈઓના ગુણોત્તર જેટલો હશે.

એટલે કે,

$$\frac{|\Delta\boldsymbol{\upsilon}|}{\upsilon} = \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{R} \quad (|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'| = R \text{ મૂકેલ છે.})$$

અથવા $|\Delta\boldsymbol{\upsilon}| = \upsilon \dfrac{|\Delta\mathbf{r}|}{R}$

તેથી,

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{\upsilon}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon|\Delta\mathbf{r}|}{R\Delta t} = \frac{\upsilon}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}$$

જો Δt નાનો હોય તો $\Delta\theta$ પણ નાનો હશે. આવી સ્થિતિમાં ચાપ PP′ને લગભગ $|\Delta\mathbf{r}|$ જેટલો લઈ શકાય છે. એટલે કે

$$|\Delta\mathbf{r}| \cong \upsilon\Delta t$$

$$\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} \cong \upsilon$$

અથવા $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} = \upsilon$

આ રીતે, કેન્દ્રગામી પ્રવેગ a_cનું મૂલ્ય નીચે પ્રમાણે મળશે :

* $\Delta t \to 0$ લક્ષમાં $\Delta\mathbf{r}$, $\mathbf{r}$ને લંબ થાય છે. આ લક્ષમાં $\Delta\boldsymbol{\upsilon} \to 0$ હોય છે, તેના પરિણામ સ્વરૂપે તે પણ $\boldsymbol{\upsilon}$ ને લંબ થશે. આમ, વર્તુળાકાર પથના દરેક બિંદુ પાસે પ્રવેગની દિશા વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય છે.

$$a_c = \left(\frac{\upsilon}{R}\right)\upsilon = \upsilon^2/R \qquad (4.44)$$

આમ, R ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર υ જેટલી ઝડપથી ગતિ કરતાં પદાર્થના પ્રવેગનું માન υ^2/R હોય છે જેની દિશા હંમેશાં **વર્તુળના કેન્દ્ર તરફની** હોય છે. આ કારણે આ પ્રકારના પ્રવેગને **કેન્દ્રગામી પ્રવેગ** કહે છે. (આ શબ્દ ન્યૂટને સૂચવ્યો હતો). કેન્દ્રગામી પ્રવેગને સંબંધિત સંપૂર્ણ વિશ્લેષણાત્મક લેખ સૌપ્રથમ 1673માં ડચ વૈજ્ઞાનિક ક્રિશ્ચિયન હાઈગેન્સે (1629-1695) પ્રકાશિત કર્યો હતો. પરંતુ કદાચ ન્યૂટનને પણ કેટલાંક વર્ષો પહેલાં જ આ હકીકતની જાણ થઈ ગઈ હતી. કેન્દ્રગામીને અંગ્રેજીમાં સેન્ટ્રિપેટલ કહે છે. જે એક ગ્રીક શબ્દ છે જેનો અર્થ કેન્દ્ર-અભિમુખ (કેન્દ્રની તરફ) થાય છે. υ તથા R બંને અચળ હોવાથી કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું માન પણ અચળ હોય છે. પરંતુ તેની દિશા બદલાતી રહે છે અને તે હંમેશાં કેન્દ્રની તરફ હોય છે. આ પરથી એ નિષ્કર્ષ નીકળે છે કે કેન્દ્રગામી પ્રવેગ અચળ સદિશ નથી.

કોઈ પદાર્થની નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિના વેગ તથા પ્રવેગને આપણે બીજી રીતે પણ વર્ણવી શકીએ છીએ. આકૃતિ 4.19માં દર્શાવ્યા અનુસાર Δt $(= t' - t)$ સમયગાળામાં જ્યારે કણ P થી P′ પર પહોંચે છે ત્યારે CP રેખા $\Delta\theta$ જેટલો ખૂણો ફરી જાય છે. $\Delta\theta$ને કોણીય અંતર કહે છે. કોણીય ઝડપ ω (ગ્રીક અક્ષર 'ઓમેગા')ને આપણે કોણીય અંતરના ફેરફારના સમય-દર રૂપે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ.

$$\text{તેથી, } \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (4.45)$$

હવે, જો Δt સમયમાં કણ દ્વારા કપાયેલ અંતર Δs હોય, એટલે કે $PP' = \Delta s$, તો

$$\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

પરંતુ $\Delta s = R\Delta\theta$ તેથી,

$$\upsilon = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$$

$$\text{આમ, } \upsilon = R\omega \qquad (4.46)$$

કેન્દ્રગામી પ્રવેગ a_cને આપણે કોણીય વેગના રૂપમાં પણ રજૂ કરી શકીએ. એટલે કે,

$$a_c = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\text{અથવા } a_c = \omega^2 R \qquad (4.47)$$

વર્તુળનું એક પરિભ્રમણ પૂરું કરવા માટે પદાર્થને જે સમય લાગે છે તેને આવર્તકાળ T કહે છે. એક સેકન્ડમાં પદાર્થ જેટલાં પરિભ્રમણ કરે છે તેને પદાર્થની આવૃત્તિ ν $(=1/T)$ કહે છે. પરંતુ આ સમયમાં પદાર્થ દ્વારા કપાયેલ અંતર $s = 2\pi R$ હોય છે. તેથી

$$\upsilon = 2\pi R / T = 2\pi R\nu \qquad (4.48)$$

આ રીતે, આવૃત્તિ νના પદમાં,

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$\upsilon = 2\pi R\nu$$

$$a_c = 4\pi^2\nu^2 R \qquad (4.49)$$

ઉદાહરણ 4.10 એક જંતુ વર્તુળાકાર ખાંચમાં કે જેની ત્રિજ્યા 12 cm છે તેમાં ફસાઈ જાય છે. તે ખાંચમાં એકધારી ગતિ કરે છે અને 100 સેકન્ડમાં 7 પરિભ્રમણ પૂરાં કરે છે. (a) જંતુની કોણીય ઝડપ તથા રેખીય ઝડપ કેટલી હશે ? (b) શું પ્રવેગ સદિશ એ અચળ સદિશ છે ? તેનું માન કેટલું હશે ?

ઉકેલ આ નિયમિત વર્તુળ ગતિનું ઉદાહરણ છે. અહીં $R = 12$ cm. કોણીય ઝડપ ωનું મૂલ્ય

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 7/100 = 0.44 \text{ rad/s}$$

તથા રેખીય ઝડપ

$$\upsilon = \omega R = 0.44 \text{ s}^{-1} \times 12 \text{ cm} = 5.3 \text{ cm s}^{-1}.$$

વર્તુળના દરેક બિંદુ પાસે વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા તે બિંદુ પાસે દોરેલ સ્પર્શકની દિશા હશે તથા પ્રવેગ વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હશે. તે સતત દિશા બદલતું હોવાથી પ્રવેગ અચળ સદિશ નથી. પરંતુ તેનું માન અચળ રહેશે.

$$a = \omega^2 \text{R} = (0.44 \text{ s}^{-1})^2 \text{ (12 cm)}$$

$$= 2.3 \text{ cm s}^{-2}$$

સારાંશ

1. અદિશરાશિઓ એ રાશિઓ છે કે જેને માત્ર માન જ હોય. અંતર, ઝડપ, દ્રવ્યમાન તથા તાપમાન અદિશરાશિઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે.
2. સદિશરાશિઓ એ રાશિઓ છે કે જેને માન અને દિશા બંને હોય છે. સ્થાનાંતર, વેગ તથા પ્રવેગ વગેરે આ પ્રકારની રાશિઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે. તેઓ સદિશ બીજગણિતના ચોક્કસ નિયમોનું પાલન કરે છે.
3. જો કોઈ સદિશ **A**ને વાસ્તવિક સંખ્યા λ વડે ગુણવામાં આવે તો મળતો સદિશ **B** એવો હોય છે કે તેનું માન **A**ના માન કરતાં λ ગણું હોય છે. નવા સદિશની દિશા કાં તો **A**ની દિશામાં અથવા તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે, જે λ ધન કે ઋણ છે તેના પર આધાર રાખે છે.
4. બે સદિશો **A** તથા **B**ના સરવાળા માટે કાં તો શીર્ષથી પુચ્છની આલેખીય રીત અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીતનો ઉપયોગ થાય છે.
5. સદિશોનો સરવાળો ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

તથા તે જૂથના નિયમનું પણ પાલન કરે છે એટલે કે,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

6. શૂન્ય સદિશ એક એવો સદિશ છે કે જેનું માન શૂન્ય હોય છે. તેનું માન શૂન્ય હોવાથી તેની સાથે દિશા દર્શાવવી જરૂરી નથી. તેના ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

7. સદિશ **B**ને **A**માંથી બાદ કરવો એટલે સદિશ **A**માં **−B** સદિશ ઉમેરવો.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

8. કોઈ સદિશ **A**ને તે જ સમતલમાં રહેલા બે સદિશો **a** અને **b**ની દિશામાં બે ઘટક સદિશોમાં વિભાજિત કરી શકાય છે.

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$

જ્યાં λ તથા μ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

9. સદિશ **A** સાથે સંકળાયેલ એકમ સદિશનું માન એક એકમ તથા દિશા સદિશ **A**ની દિશામાં હોય છે. એકમ સદિશ

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

એકમ સદિશો $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ એકમ માન ધરાવતાં સદિશ છે જેમની દિશાઓ અનુક્રમે જમણા હાથની યામપદ્ધતિની અક્ષો x, y તથા zની દિશામાં હોય છે.

10. સદિશ **A**ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$

જ્યાં A_x, A_y અનુક્રમે x અને y-અક્ષોને અનુરૂપ **A**ના ઘટકો છે. જો સદિશ **A**, x-અક્ષની સાથે θ કોણ બનાવતો હોય, તો $A_x = A\cos\theta$, $A_y = A\sin\theta$ તથા $A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}$

11. સદિશોનો સરવાળો બૈજિક રીત (Analytical Method)થી પણ સરળતાથી કરી શકાય છે. જો $x-y$ સમતલમાં બે સદિશો **A** તથા **B**નો સરવાળો **R** હોય, તો

$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$, જ્યાં, $R_x = A_x + B_x$ તથા $R_y = A_y + B_y$

12. $x-y$ સમતલમાં કોઈ પદાર્થનો સ્થાનસદિશ આ પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે : $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ અને સ્થાન **r** થી સ્થાન **r'** સુધીનું સ્થાનાંતર આ મુજબ લખી શકાય,

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}' - \mathbf{r} \\ &= (x' - x)\hat{\mathbf{i}} + (y' - y)\hat{\mathbf{j}} \\ &= \Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

13. જો કોઈ પદાર્થ $\Delta \mathbf{r}$ સમયગાળામાં Δt જેટલું સ્થાનાંતર કરતો હોય, તો તેનો સરેરાશ વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ થશે. t સમયે પદાર્થનો વેગ, સરેરાશ વેગના મૂલ્યમાં $\Delta t \to 0$ લક્ષ લઈને મળતાં મૂલ્ય જેટલો હોય છે.

$\boldsymbol{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$. તેને એકમ સદિશના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_x \hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y \hat{\mathbf{j}} + \upsilon_z \hat{\mathbf{k}}$ જ્યાં $\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\upsilon_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $\upsilon_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

જ્યારે કોઈ યામપદ્ધતિમાં પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવવામાં આવે છે, ત્યારે વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$ ની દિશા પદાર્થના ગતિપથ દર્શાવતા વક્રના કોઈ બિંદુ પાસે દોરેલ સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.

14. જો કોઈ પદાર્થનો વેગ Δt સમયગાળામાં $\boldsymbol{\upsilon}$ થી બદલાઈને $\boldsymbol{\upsilon}'$ થતો હોય, તો તેનો સરેરાશ પ્રવેગ : $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}' - \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}$

t સમયે પ્રવેગ $\boldsymbol{a}$, સરેરાશ પ્રવેગ $\boldsymbol{a}$ના $\Delta t \to 0$ લક્ષમાં મળતાં મૂલ્ય જેટલો હોય છે.

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}}{\mathrm{d}t}$$

ઘટકોના સ્વરૂપમાં, $\boldsymbol{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$

જ્યાં $a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}$, $a_y = \frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}$, $a_z = \frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t}$

15. જો કોઈ પદાર્થ સમતલમાં અચળ પ્રવેગ $a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ થી ગતિ કરતો હોય તથા $t = 0$ સમયે તેનો સ્થાન સદિશ $\mathbf{r}_0$ હોય, તો t સમયે તે જે બિંદુ પાસે હશે તેનો સ્થાનસદિશ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

અને તેનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t$

જ્યાં $\boldsymbol{\upsilon}_0$ એ $t = 0$ સમયે તેનો વેગ છે.

ઘટકોના સ્વરૂપમાં,

$$x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t$$

કોઈ સમતલમાં અચળ પ્રવેગી ગતિ પરસ્પર લંબરૂપે બે દિશાઓમાં એક સાથે થતી એક પારિમાણિક સ્વતંત્ર ગતિઓના સંયોજન સ્વરૂપમાં જોઈ શકાય છે.

16. કોઈ ફેંકાયેલો પદાર્થ ઉડ્ડયનમાં હોય તે દરમિયાન પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ કહેવાય છે. જો x-અક્ષ સાથે θ_0 કોણે વસ્તુનો પ્રારંભિક વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_0$ હોય અને જો પદાર્થની પ્રારંભિક સ્થિતિ, યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ સાથે સંપાત (Coincide) થતી હોય, તો t સમયે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનું સ્થાન અને વેગ નીચે પ્રમાણે આપી શકાય :

$$x = (\upsilon_0 \cos \theta_0)\, t$$

$$y = (\upsilon_0 \sin \theta_0)\, t - (1/2)\, g\, t^2$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos \theta_0$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin \theta_0 - g\, t$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે જેનું સમીકરણ

$$y = (\tan \theta_0)\, x - \frac{g x^2}{2(\upsilon_0 \cos \theta_0)^2} \text{ થશે.}$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની મહત્તમ ઊંચાઈ

$$h_m = \frac{(\upsilon_0 \sin \theta_0)^2}{2g}$$

તે ઊંચાઈએ પહોંચવા માટે લાગતો સમય

$$t_m = \frac{\upsilon_0 \sin \theta_0}{g} \text{ થશે.}$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ દ્વારા તેના પ્રારંભિક સ્થાનથી તેના પતન દરમિયાન $y = 0$માંથી પસાર થાય ત્યાં સુધી કાપેલા સમક્ષિતિજ અંતરને અવધિ R કહે છે.

આમ, પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધિ $R = \frac{\upsilon_0^2}{g} \sin 2\ \theta_0$.

17. જ્યારે કોઈ પદાર્થ વર્તુળાકાર પથ પર અચળ ઝડપથી ગતિ કરતો હોય ત્યારે તેની ગતિને નિયમિત વર્તુળગતિ કહે છે. તેના પ્રવેગનું મૂલ્ય $a_c = \upsilon^2/R$. a_cની દિશા હંમેશાં વર્તુળના કેન્દ્ર તરફની હોય છે. કોણીય સ્થાનમાં થતાં ફેરફારના સમય-દરને કોણીય ઝડપ ω કહે છે. તે રેખીય વેગ υ સાથે $\upsilon = \omega R$ સૂત્ર દ્વારા સંકળાયેલ છે. પ્રવેગ $a_c = \omega^2 R$.
જો પદાર્થના પરિભ્રમણનો સમય T હોય અને વર્તુળાકાર પથ પર આવૃત્તિ ν હોય, તો $\omega = 2\pi\nu$, $\upsilon = 2\pi\nu R$, $a_c = 4\pi^2\nu^2 R$.

ભૌતિકરાશિ	સંજ્ઞા	પારિમાણિક સૂત્ર	એકમ	નોંધ
સ્થાનસદિશ	**r**	[L]	m	સદિશ. કોઈ બીજા ચિહ્નથી પણ દર્શાવી શકાય.
સ્થાનાંતર	Δ**r**	[L]	m	સદિશ. કોઈ બીજા ચિહ્નથી પણ દર્શાવી શકાય.
વેગ		$[LT^{-1}]$	m s^{-1}	
(a) સરેરાશ	$\bar{\boldsymbol{\upsilon}}$			$= \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, સદિશ
(b) તાત્ક્ષણિક	$\boldsymbol{\upsilon}$			$= \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, સદિશ
પ્રવેગ		$[LT^{-2}]$	m s^{-2}	
(a) સરેરાશ	$\bar{\mathbf{a}}$			$= \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}$, સદિશ
(b) તાત્ક્ષણિક	**a**			$= \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}$, સદિશ
પ્રક્ષિપ્ત ગતિ				
(a) મહત્તમ ઊંચાઈ માટે લાગતો સમય	t_m	[T]	s	$= \frac{\upsilon_0 \sin \theta_0}{g}$
(b) મહત્તમ ઊંચાઈ	h_m	[L]	m	$= \frac{(\upsilon_0 \sin \theta_0)^2}{2g}$
(c) સમક્ષિતિજ અવધિ	R	[L]	m	$= \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$
વર્તુળગતિ				
(a) કોણીય ઝડપ	ω	$[T^{-1}]$	rad/s	$= \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{r}$
(b) કેન્દ્રગામી પ્રવેગ	a_c	$[LT^{-2}]$	m s^{-2}	$= \frac{\upsilon^2}{r}$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. કોઈ પદાર્થ દ્વારા બે બિંદુઓ વચ્ચેની પથલંબાઈ સામાન્ય રીતે સ્થાનાંતરના માન જેટલી હોતી નથી. સ્થાનાંતર ફક્ત ગતિપથનાં અંતિમ બિંદુઓ પર આધાર રાખે છે. જ્યારે પથલંબાઈ (નામ પરથી જ સ્પષ્ટ છે) વાસ્તવિક પથ પર આધાર રાખે છે. બંને રાશિઓ ત્યારે જ સમાન હશે જ્યારે પદાર્થ ગતિ દરમ્યાન પોતાની દિશા બદલતો ન હોય. આ સિવાય અન્ય સ્થિતિઓમાં પથલંબાઈ સ્થાનાંતરના મૂલ્ય કરતાં વધારે હોય છે.
2. ઉપર્યુક્ત મુદ્દા 1ના સંદર્ભે પદાર્થની સરેરાશ ઝડપ કોઈ આપેલ સમયગાળામાં કાં તો સરેરાશ વેગના મૂલ્ય જેટલી કે તેના કરતાં વધારે હશે. જ્યારે પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતરના મૂલ્ય સમાન હોય ત્યારે બંને સમાન મળે છે.
3. સદિશ સમીકરણ (4.33a) તથા (4.34a) અક્ષોની પસંદગી પર આધાર રાખતી નથી. ચોક્કસ તમે તેને બે સ્વતંત્ર અક્ષો પર વિભાજિત કરી શકો છો.
4. અચળ પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો નિયમિત વર્તુળગતિ માટે લાગુ પાડી શકાય નહિ. કારણ કે તેમાં પ્રવેગનું માન અચળ હોય છે પરંતુ દિશા સતત બદલાતી રહે છે.
5. જો કોઈ પદાર્થના બે વેગ $\mathbf{v}_1$ તથા $\mathbf{v}_2$ હોય, તો તેનો પરિણામી વેગ $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ થશે. ઉપર્યુક્ત સૂત્ર તથા પદાર્થ 2 ની સાપેક્ષે પદાર્થ 1 નો વેગ એટલે કે $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ વચ્ચેનો ભેદ બરાબર ઓળખો. અહીં $\mathbf{v}_1$ તથા $\mathbf{v}_2$ કોઈ સામાન્ય નિર્દેશ ફ્રેમની સાપેક્ષે વેગ છે.
6. વર્તુળાકાર ગતિમાં પદાર્થનો પરિણામી પ્રવેગ વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય, તો જ તેની ઝડપ અચળ હોય.
7. કોઈ પદાર્થના ગતિપથનો આકાર માત્ર પ્રવેગથી જ નક્કી નથી થતો, પરંતુ તે ગતિની પ્રારંભિક સ્થિતિઓ (પ્રારંભિક સ્થાન તથા પ્રારંભિક વેગ) પર પણ આધાર રાખે છે. ઉદાહરણ તરીકે સમાન ગુરુત્વપ્રવેગથી ગતિ કરતાં કોઈ પદાર્થનો માર્ગ સુરેખ પથ પણ હોઈ શકે કે પરવલય પણ હોઈ શકે જે પ્રારંભિક સ્થિતિઓ પર આધાર રાખે છે.

સ્વાધ્યાય

4.1 નીચે આપેલી ભૌતિકરાશિઓમાંથી દર્શાવો કે કઈ સદિશ રાશિ છે અને કઈ અદિશ રાશિ છે :
કદ, દ્રવ્યમાન, ઝડપ, પ્રવેગ, ઘનતા, મોલસંખ્યા, વેગ, કોણીય આવૃત્તિ, સ્થાનાંતર, કોણીય વેગ

4.2 નીચે આપેલ યાદીમાંથી બે અદિશ રાશિઓ ઓળખી બતાવો :
બળ, કોણીય વેગમાન, કાર્ય, વિદ્યુતપ્રવાહ, રેખીય વેગમાન, વિદ્યુતક્ષેત્ર, સરેરાશ વેગ, ચુંબકીય ચાકમાત્રા, સાપેક્ષ વેગ

4.3 નીચે આપેલ યાદીમાંથી ફક્ત સદિશ રાશિઓ ઓળખી બતાવો :
તાપમાન, દબાણ, આઘાત, સમય, પાવર, કુલ પથલંબાઈ, ઊર્જા, ગુરુત્વીય સ્થિતિમાન, ઘર્ષણાંક, વિદ્યુતભાર

4.4 કારણ સહિત જણાવો કે અદિશ તથા સદિશ રાશિઓ સાથે નીચે દર્શાવેલ કઈ પ્રક્રિયાઓ અર્થપૂર્ણ છે ?
(a) બે અદિશોનો સરવાળો (b) સમાન પરિમાણના એક સદિશ અને એક અદિશનો સરવાળો (c) એક સદિશનો એક અદિશ સાથે ગુણાકાર (d) બે અદિશોનો ગુણાકાર (e) બે સદિશોનો સરવાળો (f) એક સદિશના ઘટકનો તે જ સદિશ સાથે સરવાળો.

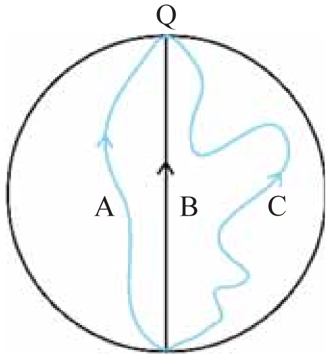
4.5 નીચે આપેલ પ્રત્યેક કથનને ધ્યાનપૂર્વક વાંચો અને કારણ સહિત દર્શાવો કે તે સાચું છે કે ખોટું :
(a) કોઈ સદિશનું મૂલ્ય હંમેશાં અદિશ હોય છે. (b) કોઈ સદિશનો દરેક ઘટક હંમેશાં અદિશ હોય છે. (c) કોઈ કણ દ્વારા કપાયેલ અંતરની કુલ પથલંબાઈ હંમેશાં સ્થાનાંતર સદિશના મૂલ્ય જેટલી હોય છે. (d) કોઈ કણની સરેરાશ ઝડપ (કુલ પથલંબાઈ ભાગ્યા તે પથ કાપવા લાગેલો સમય) સમાન સમયગાળામાં કણના સરેરાશ વેગના મૂલ્યથી વધારે કે તેના જેટલી હોય છે. (e) ત્રણ સદિશો કે જે એક જ સમતલમાં નથી તેનો સરવાળો કદાપી શૂન્ય સદિશ થતો નથી.

4.6 નીચે દર્શાવેલ અસમતાઓ ભૌમિતિક કે અન્ય કોઈ રીતે સાબિત કરો :
(a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
(b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$

(c) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
(d) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$
તેમાં સમતાનું ચિહ્ન ક્યારે લાગુ પડે છે ?

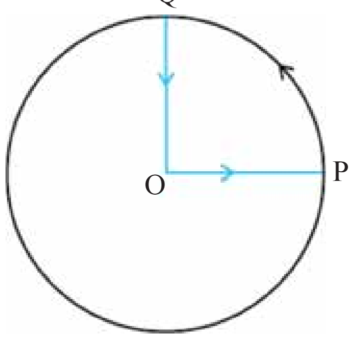
4.7 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ આપેલ છે. નીચે આપેલ વિધાનોમાંથી કયું સાચું છે :
(a) **a, b, c** તથા **d** દરેક શૂન્ય સદિશ છે.
(b) $(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ નું મૂલ્ય $(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ના મૂલ્ય જેટલું છે.
(c) **a**નું માન **b, c** તથા **d**ના માનના સરવાળાથી ક્યારેય વધારે ન હોઈ શકે.
(d) જો **a** અને **d** એક રેખસ્થ ન હોય તો **b** + **c**, **a** અને **d** વડે બનતા સમતલમાં હશે અને જો **a** અને **d** એક રેખસ્થ હોય, તો તે **a** અને **d**ની રેખામાં હશે.

4.8 ત્રણ છોકરીઓ 200 m ત્રિજ્યાવાળી વર્તુળાકાર રિંગમાં બરફની સપાટી પર સ્કેટિંગ કરી રહી છે તે સપાટીની કિનારી પર બિંદુ Pથી સ્કેટિંગ શરૂ કરે છે તથા Pના વ્યાસાંત બિંદુ Q પર જુદા જુદા પથો પર થઈને આકૃતિ (4.20)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પહોંચે છે. દરેક છોકરીના સ્થાનાંતર સદિશનું માન કેટલું છે ? કઈ છોકરી માટે તેનું માન તેની મૂળ સ્કેટની પથલંબાઈ જેટલું થશે ?



આકૃતિ **4.20**

4.9 કોઈ સાઈકલ-સવાર 1 km ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળાકાર બગીચાના કેન્દ્ર Oથી ગતિ શરૂ કરે છે તથા બગીચાના કિનારા P સુધી પહોંચે છે. ત્યાંથી તે બગીચાના પરિઘ પર સાઈકલ ચલાવતા ચલાવતા QO માર્ગે (આકૃતિ 4.21માં દર્શાવ્યા મુજબ) કેન્દ્ર O પર પાછો આવે છે. જો આ ચક્કર કાપવા માટે તેને 10 મિનિટ જેટલો સમય લાગતો હોય, તો સાઈકલ-સવારનું (a) ચોખ્ખું સ્થાનાંતર (b) સરેરાશ વેગ તથા (c) સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ?



આકૃતિ **4.21**

4.10 એક ખુલ્લા મેદાનમાં એક કારચાલક એવો રસ્તો પકડે છે કે જે દરેક 500 મીટર અંતર બાદ તેની ડાબી બાજુ $60°$ના ખૂણે વળાંક લે છે. એક વળાંકથી શરૂ કરી, કારચાલકના ત્રીજા, છઠ્ઠા તથા આઠમા વળાંક પાસે સ્થાનાંતર શોધો. આ દરેક સ્થિતિમાં કારચાલકની કુલ પથ લંબાઈની તેના સ્થાનાંતરના માન સાથે તુલના કરો.

4.11 એક મુસાફર એક નવા શહેરમાં સ્ટેશન પર ઊતરીને ટેક્સી કરે છે. સ્ટેશનથી સુરેખ રોડ પર તેની હોટલ 10 km દૂર છે. ટેક્સી ડ્રાઈવર મુસાફરને 23 km લંબાઈના વાંકાચૂંકા માર્ગે 28 minમાં હોટલ પર પહોંચાડે છે, તો (a) ટેક્સીની સરેરાશ ઝડપ અને (b) સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય કેટલું હશે ? શું આ બંને સમાન હશે ?

4.12 વરસાદ શિરોલંબ દિશામાં 30 m s^{-1}ની ઝડપથી પડી રહ્યો છે. કોઈ સ્ત્રી ઉત્તરથી દક્ષિણ દિશા તરફ 10 m s^{-1}ની ઝડપથી સાઈકલ ચલાવી રહી છે. તેને પોતાની છત્રી કઈ દિશામાં રાખવી જોઈએ ?

4.13 એક વ્યક્તિ સ્થિર પાણીમાં 4.0 km/hની ઝડપથી તરી શકે છે. નદીનું પાણી 3.0 km/hની અચળ ઝડપથી વહી રહ્યું અને વ્યક્તિ આ વહેણને લંબરૂપે તરવાનો પ્રયત્ન કરતો હોય, તો જ્યારે તે નદીના બીજા કિનારે પહોંચશે ત્યારે તે નદીના વહેણ તરફ કેટલે દૂર પહોંચશે ?

4.14 એક બંદર (Harbour) પાસે હવા 72 km/h ઝડપથી વહી રહી છે. આ બંદરમાં ઊભેલી એક નૌકા ઉપર લગાવેલ ઝંડો N-E દિશામાં ફરકી રહ્યો છે. જો આ નૌકા ઉત્તર દિશામાં 51 km/hની ઝડપથી ગતિ કરવાનું શરૂ કરે, તો નૌકા પર લગાવેલ ઝંડો કઈ દિશામાં ફરકશે.

4.15 એક લાંબા હૉલની છત 25 m ઊંચી છે. 40 ms^{-1}ની ઝડપથી ફેંકવામાં આવેલ દડો છતને અથડાયા વગર પસાર થઈ શકે તે રીતે કેટલું મહત્તમ સમક્ષિતિજ અંતર કાપશે ?

4.16 ક્રિકેટનો કોઈ ખેલાડી દડાને 100 m જેટલા મહત્તમ સમક્ષિતિજ અંતર સુધી ફેંકી શકે છે. આ ખેલાડી આ જ દડાને જમીનથી ઉપર તરફ કેટલી ઊંચાઈ સુધી ફેંકી શકશે ?

4.17 80 cm લાંબા દોરડાના છેડે એક પથ્થર બાંધેલ છે તેને અચળ ઝડપથી સમક્ષિતિજ વર્તુળાકાર ફેરવવામાં આવે છે. જો પથ્થર 25 secમાં 14 પરિભ્રમણ પૂરા કરતો હોય, તો પથ્થરના પ્રવેગનું માન તથા તેની દિશા શોધો ?

4.18 એક વિમાન 900 km h^{-1}ની અચળ ઝડપથી ઊડી રહ્યું છે અને 1.00 km ત્રિજ્યાનું સમક્ષિતિજ વર્તુળ બનાવે છે. તેના કેન્દ્રગામી પ્રવેગ ગુરુત્વીય પ્રવેગની સાથે સરખામણી કરો.

4.19 નીચે આપેલ વિધાનોને ધ્યાનથી વાંચો અને કારણ સહિત દર્શાવો કે તે સાચાં છે કે ખોટાં :

(a) વર્તુળ ગતિમાં કોઈ કણનો ચોખ્ખો પ્રવેગ હંમેશાં વર્તુળાકાર પથની ત્રિજ્યાની દિશામાં કેન્દ્ર તરફ હોય છે.

(b) કોઈ બિંદુ પાસે કણનો વેગ હંમેશાં તે બિંદુ પાસેના પથની દિશામાં દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.

(c) નિયમિત વર્તુળ ગતિ કરતાં કણ માટે એક પરિભ્રમણ પર લીધેલ સરેરાશ પ્રવેગ 0 સદિશ હોય છે.

4.20 એક કણનો સ્થાનસદિશ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે :

$$\mathbf{r} = 3.0t\hat{\mathbf{i}} - 2.0\,t^2\hat{\mathbf{j}} + 4.0\,\hat{\mathbf{k}}\,\text{m}$$

જ્યાં t સેકન્ડમાં તથા દરેક સહગુણકનો એકમ એ રીતે છે કે જેથી r મીટરમાં મળે.

(a) કણનો $\boldsymbol{\upsilon}$ તથા $\boldsymbol{a}$ મેળવો. (b) t = 2.0 સેકન્ડે કણના વેગનું માન તથા દિશા શોધો.

4.21 કોઈ કણ t = 0 સમયે ઊગમબિંદુથી 10.0 $\hat{\mathbf{j}}$ m/sના વેગથી ગતિ શરૂ કરે છે અને xy સમતલમાં તેનો અચળ પ્રવેગ $(8.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m s^{-2} છે. તો (a) કયા સમયે તેનો x-યામ 16 m થશે ? આ સમયે તેનો y-યામ કેટલો હશે ? (b) આ સમયે તેની ઝડપ કેટલી હશે ?

4.22 $\hat{\mathbf{i}}$ તથા $\hat{\mathbf{j}}$ અનુક્રમે X અને Y-અક્ષ પરના એકમ સદિશ છે. સદિશો $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ તથા $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$નાં મૂલ્યો અને દિશા કઈ હશે ? સદિશ $A = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ના $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ તથા $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ની દિશાઓમાં ઘટક શોધો. (તમે આલેખીય રીતનો ઉપયોગ કરી શકો છો.)

4.23 અવકાશમાં કોઈ સ્વૈચ્છિક ગતિ માટે નીચે આપેલા સંબંધો પૈકી કયો સાચો છે ?

(a) $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{સરેરાશ}} = (1/2)\,(\boldsymbol{\upsilon}(t_1) + \boldsymbol{\upsilon}(t_2))$

(b) $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{સરેરાશ}} = [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)] \,/\, (t_2 - t_1)$

(c) $\boldsymbol{\upsilon}(t) = \boldsymbol{\upsilon}(0) + \boldsymbol{a}\,t$

(d) $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}(0) + \boldsymbol{\upsilon}(0)t + (1/2)\;\boldsymbol{a}t^2$

(e) $\boldsymbol{a}_{\text{સરેરાશ}} = [\boldsymbol{\upsilon}(t_2) - \boldsymbol{\upsilon}(t_1)] \,/\, (t_2 - t_1)$

(અહીં 'સરેરાશ મૂલ્ય' t_1 થી t_2 સમયગાળા સાથે સંબંધિત ભૌતિકરાશિનું સરેરાશ મૂલ્ય છે.)

4.24 નીચે દર્શાવેલ દરેક વિધાન ધ્યાનપૂર્વક વાંચો અને કારણ તથા ઉદાહરણ સહિત દર્શાવો કે તે સાચું છે કે ખોટું : અદિશ રાશિ તે છે કે જે

(a) કોઈ પ્રક્રિયામાં અચળ રહે છે.

(b) તે ક્યારેય ઋણ નથી હોતી.

(c) તે પરિમાણરહિત હોય છે.

(d) અવકાશમાં એક બિંદુથી બીજા બિંદુ વચ્ચે બદલાતી નથી.

(e) તે દરેક અવલોકનકાર માટે એક મૂલ્ય હોય છે પછી ભલે તેના યામાક્ષોનાં નમન (Orientations) જુદાં હોય.

4.25 કોઈ વિમાન પૃથ્વીથી 3400 mની ઊંચાઈએ ઊડી રહ્યું છે. જો પૃથ્વી પરના કોઈ અવલોકન બિંદુ પાસે વિમાન દ્વારા 10 secમાં કપાયેલ અંતર 30°નો કોણ બનાવતું હોય, તો વિમાનની ઝડપ કેટલી હશે ?

વધારાનું સ્વાધ્યાય

4.26 કોઈ સદિશને માન તથા દિશા બંને હોય છે. શું અવકાશમાં તેને કોઈ સ્થાન હોય છે ? શું સમય સાથે તે બદલાઈ શકે ? શું અવકાશમાં જુદાંજુદાં સ્થાનો પાસે બે સમાન સદિશો **a** તથા **b** સમાન ભૌતિક અસર દર્શાવશે ? તમારા જવાબના સમર્થનમાં ઉદાહરણ આપો.

4.27 કોઈ સદિશને માન તથા દિશા બંને હોય છે. શું તેનો અર્થ એ થાય કે કોઈ રાશિ જેને માન અને દિશા બંને હોય તે સદિશ જ હશે ? કોઈ વસ્તુનું પરિભ્રમણ, ભ્રમણાક્ષની દિશા તથા કોણીય સ્થાન વડે દર્શાવી શકાય છે. શું તેનો અર્થ એ થાય કે કોઈ પણ પરિભ્રમણ એક સદિશ છે ?

4.28 (a) કોઈ વર્તુળાકાર લૂપમાં વાળેલ તારની લંબાઈ (b) કોઈ સમતલ ક્ષેત્રફળ (c) કોઈ ગોળા સાથે સદિશને સાંકળી શકાય ? સમજાવો.

4.29 બંદૂકમાંથી સમક્ષિતિજ સાથે 30°ના કોણે છોડેલી ગોળી જમીનને 3.0 km દૂર અથડાય છે. પ્રક્ષિપ્ત કોણનું મૂલ્ય ગોઠવીને આપણે 5.0 km દૂર આવેલા લક્ષ્ય પર ગોળી મારી શકીએ ? ગણતરી કરીને જણાવો. હવાનો અવરોધ અવગણો.

4.30 એક ફાઇટર જેટ પ્લેન 1.5 kmની ઊંચાઈ પર 720 km/hની ઝડપથી સમક્ષિતિજ દિશામાં ઊડી રહ્યું છે. જો તે વિમાન વિરોધી તોપની બરાબર ઉપરથી પસાર થતું હોય, તો શિરોલંબ દિશા સાથે તોપના નાળચાનો ખૂણો કેટલો હોવો જોઈએ કે જેથી 600 m s^{-1}ની ઝડપથી છોડેલ ગોળો ફાઇટર પ્લેનને અથડાય ? ફાઇટર પ્લેનના પાઇલોટે લઘુતમ કેટલી ઊંચાઈએ પ્લેન ઉડાડવું જોઈએ કે જેથી તે ગોળાથી બચી શકે ? (g = 10 ms^{-2})

4.31 એક સાઇકલ-સવાર 27 km/h ની ઝડપથી સાઇકલ ચલાવી રહ્યો છે. જેવો તે રસ્તા પર 80 m ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર વળાંક પર પહોંચે તેવો તે, બ્રેક લગાવી દરેક સેકન્ડે પોતાની ઝડપ 0.50 m/sના એક સમાન દરથી ઓછી કરે છે. વર્તુળાકાર પથ પર સાઇકલ-સવારના ચોખ્ખા પ્રવેગનું મૂલ્ય તથા દિશા શોધો.

4.32 (a) દર્શાવો કે કોઈ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ x-અક્ષ તથા તેના વેગ સદિશ વચ્ચે બનતો ખૂણો સમયના પદમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v_{0y} - gt}{v_{0x}}\right)$$

(b) ઊગમબિંદુ આગળથી પ્રક્ષિપ્ત કરેલા પદાર્થનો પ્રક્ષિપ્ત કોણ

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{4h_m}{R}\right)$$

વડે અપાય છે તેમ સાબિત કરો. અહીં સંજ્ઞાઓને પ્રચલિત અર્થ છે.

પ્રકરણ 5

ગતિના નિયમો (LAWS OF MOTION)

5.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે અવકાશમાં કણની ગતિનું માત્રાત્મક વર્ણન કર્યું. આપણે જોયું કે નિયમિત (Uniform) ગતિના વર્ણન માટે માત્ર વેગનો ખ્યાલ જરૂરી છે, જ્યારે અનિયમિત (Non-uniform) ગતિ માટે તે ઉપરાંત પ્રવેગનો ખ્યાલ જરૂરી છે. હજી સુધી આપણે એવો પ્રશ્ન પૂછ્યો નથી કે પદાર્થોની ગતિનું નિયંત્રણ શાનાથી થાય છે. આ પ્રકરણમાં, આપણે આ મૂળભૂત પ્રશ્ન પર આવીશું.

પ્રારંભમાં ચાલો આપણા સામાન્ય અનુભવ પર આધારિત જવાબનું અનુમાન કરીએ. સ્થિર રહેલા ફૂટબૉલને ખસેડવા કોઈક તેને લાત (Kick) મારવી પડે. કોઈ પથ્થરને ઉપર ફેંકવા માટે કોઈકે તેને ઉપર તરફ ધકેલવો પડે. પવન વૃક્ષની ડાળીઓને ઝુલાવે છે; ભારે પવન ભારે પદાર્થોને પણ ખસેડી શકે છે. હલેસાં માર્યા વિના પણ નાવ વહેતી નદીમાં ગતિ કરે છે. સ્પષ્ટ રીતે, પદાર્થને સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ કરાવવા માટે જરૂરી બળ પૂરું પાડવા માટે કોઈક બાહ્ય પરિબળ જરૂરી છે. તે જ રીતે, ગતિને (વેગને) ધીમી પાડવા કે અટકાવવા માટે પણ બાહ્ય બળ જરૂરી છે. ઢાળ પરથી ગબડતા બૉલને તેની ગતિની દિશાની વિરુદ્ધ દિશામાં બળ લગાડીને તમે અટકાવી શકો છો.

આ બધાં ઉદાહરણોમાં બળ લગાડતું બાહ્ય પરિબળ (હાથ, પવન, જલપ્રવાહ વગેરે) પદાર્થ સાથે સંપર્કમાં છે. આમ, હોવું હંમેશ જરૂરી નથી. કોઈ મકાનની ટોચ પરથી મુક્ત કરેલો પથ્થર પૃથ્વીના ગુરુત્વીય ખેંચાણને લીધે નિમ્ન દિશામાં (અધોદિશામાં) પ્રવેગિત થાય છે. એક ગજિયો ચુંબક દૂરથી પણ એક લોખંડની ખીલીને આકર્ષી શકે છે. **આ દર્શાવે છે કે બાહ્ય પરિબળો (દા.ત., ગુરુત્વાકર્ષણ અને ચુંબકીય બળો) દૂરથી પણ પદાર્થ પર બળ લગાડી શકે છે.**

ટૂંકમાં, સ્થિર પદાર્થને ગતિમાં લાવવા અથવા ગતિમાન પદાર્થને અટકાવવા માટે બળ જરૂરી છે અને આવું બળ પૂરું પાડવા માટે કોઈક બાહ્ય પરિબળ જરૂરી છે. આ બાહ્ય પરિબળ પદાર્થ સાથે સંપર્કમાં હોય પણ ખરું અથવા ન પણ હોય.

આ બધું તો બરાબર છે. પણ જો પદાર્થ નિયમિત ગતિ કરતો હોય (દા.ત., બરફના સમક્ષિતિજ ચોસલા પર અચળ ઝડપથી સુરેખ ગતિ કરતો સ્કેટર) તો શું ? **શું પદાર્થને નિયમિત ગતિમાં રાખવા માટે બાહ્ય બળની જરૂર છે ?**

5.2 ઍરિસ્ટોટલની ભૂલભરેલી માન્યતા (ARISTOTLE'S FALLACY)

ઉપર દર્શાવેલ પ્રશ્ન સહેલો લાગે છે. તેમ છતાં તેનો જવાબ મળતાં વર્ષો થયાં હતાં. ખરેખર, આ પ્રશ્નનો ગૅલિલિયોએ સત્તરમી સદીમાં આપેલો સાચો જવાબ ન્યૂટનના યંત્રશાસ્ત્રનો પાયો હતો, જેણે આધુનિક વિજ્ઞાનના જન્મનો સંકેત આપ્યો.

ગ્રીક ચિંતક, ઍરિસ્ટોટલ (ઈ.સ. પૂર્વે 384 - ઈ.સ. પૂર્વે 322) એવું માનતો હતો કે જો પદાર્થ ગતિમાં હોય, તો તેને ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે કંઈક બાહ્ય અસર જરૂરી છે. આ મત મુજબ, દા.ત., ધનુષમાંથી છોડેલું તીર ઊડ્યા કરે છે કારણ કે, તીરની પાછળની હવા તેને ધકેલે જાય છે. આ મત, વિશ્વમાં પદાર્થોની ગતિ અંગે, ઍરિસ્ટોટલે વિકસાવેલ વિસ્તૃત વિચાર પદ્ધતિનો એક ભાગ હતો. ગતિ અંગેના ઍરિસ્ટોટલના મોટા ભાગના ખ્યાલો હવે અસત્ય હોવાનું જણાયું છે અને તેથી તે આપણને સ્પર્શતા નથી. અત્રે, આપણા હેતુ માટે ગતિ અંગેનો ઍરિસ્ટોટલનો નિયમ આમ લખાય : **પદાર્થને ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે બાહ્ય બળ જરૂરી છે.**

આપણે જોઈશું કે ગતિ અંગેનો ઍરિસ્ટોટલનો નિયમ ભૂલભરેલો છે. આમ છતાં કોઈ પણ વ્યક્તિ સામાન્ય અનુભવમાંથી જે અભિપ્રાય ધરાવે એવો એ સ્વાભાવિક અભિપ્રાય છે. એક નાનું બાળક પણ સાદી રમકડાની કાર (અવિદ્યુતીય) વડે રમતાં જાણે છે કે તે કારને જમીન પર ગતિમાં રાખવા માટે તેની સાથે જોડેલી દોરીને અમુક બળથી ખેંચતા રહેવું પડે છે. જો તે દોરીને છોડી દે છે તો કાર સ્થિર થાય છે. પૃથ્વી પર જોવા મળતી ગતિમાં આ એક સામાન્ય અનુભવ છે. પદાર્થોને ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે બાહ્ય બળો જરૂરી હોય તેવું લાગે છે. જો પદાર્થોને માત્ર તેમના પર છોડી દેવામાં આવે તો બધા પદાર્થો અંતે તો સ્થિર થઈ જાય છે.

ઍરિસ્ટોટલની દલીલમાં ભૂલ કઈ છે ? જવાબ આ છે : ગતિ કરતી રમકડાની કાર સ્થિર થાય છે કારણ કે જમીન વડે કાર પર લાગતું ઘર્ષણનું બાહ્ય બળ તેની ગતિનો વિરોધ કરે છે. આ (ઘર્ષણ) બળનો સામનો કરવા માટે બાળકને ગતિની દિશામાં કાર પર બાહ્ય બળ લગાડવું પડે છે. જ્યારે કાર નિયમિત ગતિમાં હોય છે ત્યારે તેની પર કોઈ ચોખ્ખું (Net) બાહ્ય બળ લાગતું નથી : બાળક વડે લાગતું બળ, જમીન વડે લાગતા (ઘર્ષણ) બળને નાબૂદ કરે છે. આ પરથી એવું કહી શકાય કે, જો કોઈ ઘર્ષણ હોત જ નહિ તો કારને નિયમિત ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે બાળકને કોઈ બળ લગાડવું પડત નહિ.

કુદરતી વિશ્વમાં, ઘર્ષણ (ઘન પદાર્થો માટે) અને શ્યાનતા (તરલ પદાર્થો માટે) જેવા ગતિનો વિરોધ કરનારાં બળો હંમેશાં હાજર હોય છે. આ પરથી પદાર્થોને નિયમિત ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે, ઘર્ષણ બળોનો સામનો કરવા બાહ્ય પરિબળો વડે બળો લગાડવાનું કેમ જરૂરી છે તે સમજાય છે. હવે આપણને એ સમજાય કે ઍરિસ્ટોટલની ક્યાં ભૂલ થઈ. તેણે એક વ્યાવહારિક અનુભવને એક મૂળભૂત દલીલનું સ્વરૂપ આપ્યું. બળો અને ગતિ અંગેનો કુદરતનો સાચો નિયમ શું છે તે જાણવા માટે એવા વિશ્વની કલ્પના કરવી પડે કે જેમાં ગતિને અવરોધતા ઘર્ષણ બળો વગરની નિયમિત ગતિ શક્ય હોય. ગૅલિલિયોએ આમ જ કર્યું હતું.

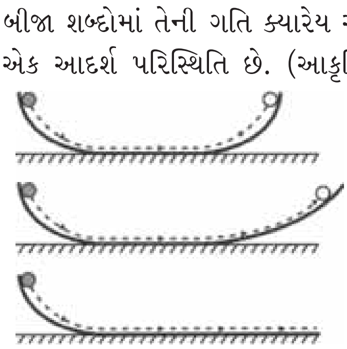
5.3 જડત્વનો નિયમ (LAW OF INERTIA)

ગૅલિલિયોએ ઢળતા સમતલ પર પદાર્થની ગતિનો અભ્યાસ કર્યો. (i) ઢળતા સમતલ પર નીચે તરફ ગતિ કરતા પદાર્થો પ્રવેગિત થાય છે જ્યારે (ii) ઉપર તરફ ગતિ કરતા પદાર્થો પ્રતિપ્રવેગિત થાય છે. (iii) સમક્ષિતિજ સમતલ પરની ગતિ એ વચગાળાની સ્થિતિ છે. આ પરથી ગૅલિલિયોએ એવો નિષ્કર્ષ તારવ્યો કે ઘર્ષણરહિત સમક્ષિતિજ સમતલ પર ગતિ કરતા પદાર્થને પ્રવેગ કે પ્રતિપ્રવેગ એકેય હોઈ જ ન શકે, એટલે કે તે અચળ વેગથી ગતિ કરતો હોવો જોઈએ. (આકૃતિ 5.1(a))

આકૃતિ 5.1(a)

આ જ નિષ્કર્ષ તરફ દોરી જતા ગૅલિલિયોના એકબીજા પ્રયોગમાં બે ઢળતા સમતલો વપરાય છે. એક સમતલ પર સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરેલ બૉલ ગબડીને નીચે આવે છે અને બીજા સમતલ પર ચઢે છે. જો ઢળતા સમતલની સપાટીઓ લીસી હોય તો બૉલે પ્રાપ્ત કરેલી અંતિમ ઊંચાઈ લગભગ મૂળ ઊંચાઈ જેટલી હોય છે. (સહેજ ઓછી પણ કદી વધારે તો નહિ જ.) આદર્શ પરિસ્થિતિમાં જ્યારે ઘર્ષણ ગેરહાજર હોય ત્યારે બૉલને મળતી અંતિમ ઊંચાઈ પ્રારંભિક ઊંચાઈ જેટલી જ હોય.

જો બીજા સમતલનો ઢાળ ઓછો રાખવામાં આવે તો પ્રયોગનું પુનરાવર્તન કરતાં બૉલ હજીય તેટલી જ ઊંચાઈએ પહોંચે છે પરંતુ આમ કરવામાં તે વધારે લાંબું અંતર કાપે છે. સીમાંત કિસ્સામાં જ્યારે બીજા સમતલનો ઢાળ શૂન્ય બને છે (એટલે કે, સમતલ સમક્ષિતિજ બને છે) ત્યારે બૉલ અનંત અંતર કાપે છે. બીજા શબ્દોમાં તેની ગતિ ક્યારેય અટકતી નથી. અલબત્ત, આ એક આદર્શ પરિસ્થિતિ છે. (આકૃતિ 5.1(b))



આકૃતિ 5.1(b) ગૅલિલિયોએ બે ઢળતાં સમતલો પર બૉલની ગતિનાં અવલોકનો પરથી જડત્વનો નિયમ તારવ્યો હતો

વ્યવહારમાં, સમક્ષિતિજ સમતલ પર બૉલ અમુક નિશ્ચિત અંતર કાપીને સ્થિર થાય છે, તેનું કારણ ગતિનો વિરોધ કરતું ઘર્ષણ બળ છે, જેને કદી સંપૂર્ણતઃ નિવારી શકાતું નથી. આમ છતાં, જો ઘર્ષણ ન હોત, તો સમક્ષિતિજ સમતલ પર બૉલ અચળ વેગથી ગતિ કરવાનું ચાલુ રાખત.

આમ, ગૅલિલિયોએ ગતિ અંગે ઊંડી સમજ મેળવી જે ઍરિસ્ટોટલ અને તેના અનુયાયીઓને મળી ન હતી. સ્થિર અવસ્થા અને નિયમિત સુરેખ ગતિ (અચળ વેગ સાથેની ગતિ)ની અવસ્થા બંને સમતુલ્ય છે. બંને કિસ્સાઓમાં, પદાર્થ પર કોઈ ચોખ્ખું (પરિણામી, Net) બળ લાગતું નથી. પદાર્થને નિયમિત ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે ચોખ્ખા (પરિણામી, Net) બળની જરૂર છે એમ માની લેવું સાચું નથી. પદાર્થને નિયમિત ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે ઘર્ષણનો સામનો કરવા માટે આપણે બાહ્ય બળ લગાડવું પડે છે કે જેથી બંને બળોનો સરવાળો થઈ ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય બને.

ટૂંકમાં, જો ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તો સ્થિર પદાર્થ સ્થિર જ રહે છે અને ગતિમાન પદાર્થ નિયમિત વેગથી ગતિ કરવાનું ચાલુ રાખે છે. પદાર્થના આ ગુણધર્મને જડત્વ કહે છે. જડત્વ એટલે **'ફેરફારનો વિરોધ'**. પદાર્થ તેની સ્થિર અવસ્થા કે નિયમિત ગતિની અવસ્થા બદલતો નથી, સિવાય કે કોઈ બાહ્ય બળ તેને તે અવસ્થા બદલવા માટે ફરજ પાડે.

5.4 ન્યૂટનનો ગતિનો પહેલો નિયમ (NEWTON'S FIRST LAW OF MOTION)

ગૅલિલિયોના સાદા પરંતુ ક્રાંતિકારી વિચારોએ ઍરિસ્ટોટેલિયન યંત્રશાસ્ત્રનું સામ્રાજ્ય ખતમ કર્યું. એક નવું યંત્રશાસ્ત્ર વિકસાવવું પડ્યું. આ કાર્ય સર્વકાલિન મહાન વૈજ્ઞાનિકોમાંના એક એવા આઈઝૅક ન્યૂટને લગભગ એકલે હાથે પાર પાડ્યું.

ન્યૂટને ગૅલિલિયોના વિચારોથી શરૂઆત કરીને, યંત્રશાસ્ત્રનો પાયો નાંખનાર ગતિના ત્રણ નિયમો આપ્યા, જે તેના નામથી ઓળખાય છે. ગૅલિલિયોનો જડત્વનો નિયમ એ તેનું આરંભ બિંદુ હતો, જેને તેણે **ગતિના પહેલા નિયમ** તરીકે રજૂ કર્યો :

દરેક પદાર્થ તેની સ્થિર અવસ્થા અથવા નિયમિત સુરેખ ગતિની અવસ્થા જાળવી રાખે છે સિવાય કે કોઈ બાહ્ય બળ તેને અન્ય કંઈક કરવાની ફરજ પાડે.

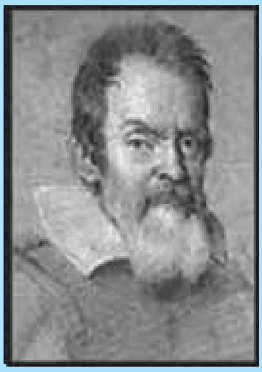
પ્રાચીન ભારતીય વિજ્ઞાનમાં ગતિ અંગેના ખ્યાલો

પ્રાચીન ભારતીય ચિંતકો ગતિ અંગેની એક વિસ્તૃત વિચારપદ્ધતિ પર પહોંચ્યા હતા. બળ કે જે ગતિનું કારણ છે તે, જુદા જુદા પ્રકારોનું માનવામાં આવતું : સતત દબાણના કારણે ઉદ્ભવતું બળ (નોદાન) જેમ કે તરતા વહાણ પર લાગતું પવનનું બળ, આઘાત (અભિઘાટ) જેમકે કુંભારનો સળિયો ચાકડાને અથડાય છે, સુરેખામાં ગતિ કરવાનું (વેગ) સતત વલણ (સંસ્કાર), સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થમાં આકારની પુનઃસ્થાપના, દોરી, સળિયો વગેરે દ્વારા બળનું સંચારણ. વૈસેસિકા નામના ગતિના સિદ્ધાંતમાં વેગનો ખ્યાલ કદાચ જડત્વના ખ્યાલની સૌથી નજીક છે. વેગ, જે સુરેખામાં ગતિનું વલણ છે તે, વાતાવરણ સહિત પદાર્થો સાથેના સંપર્ક વડે અવરોધાય છે. આ ખ્યાલ ઘર્ષણ અને હવાના અવરોધના ખ્યાલ જેવો જ છે. વિસ્તૃત પદાર્થની જુદા જુદા પ્રકારની ગતિ (સ્થાનાંતરિત, ચાક અને દોલન) માત્ર તેના ઘટક કણોની સ્થાનાંતરિત ગતિમાંથી ઉદ્ભવે છે તેમ સાચી રીતે જ દર્શાવાયું હતું. એક પાંદડું પવનમાં પડે ત્યારે સમગ્રપણે અધોદિશામાં ગતિ કરે (પતન) અને તેને ચાકગતિ અને દોલનગતિ (ભ્રમણ, સ્પંદન) પણ હોય, પરંતુ પાંદડાના દરેક કણને આપેલી ક્ષણે જ નિશ્ચિત (નાનું) સ્થાનાંતર હોય છે. ગતિનાં માપ તેમજ લંબાઈ અને સમયના એકમો અંગે ભારતીયોએ સારું એવું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરેલું હતું. અવકાશમાં પદાર્થનું સ્થાન ત્રણ અક્ષોની દિશામાં માપેલાં અંતરો પરથી દર્શાવી શકાય છે એમ જાણીતું હતું. ભાસ્કર (ઈ.સ. 1150) દ્વારા 'તાત્ક્ષણિક ગતિ'નો ખ્યાલ રજૂ થયો હતો. જે, વિકલ કલનશાસ્ત્ર પરથી મળતા તાત્ક્ષણિક વેગના આધુનિક વિચારની અગમ જાણકારી સમાન હતો. તરંગ અને જલપ્રવાહ વચ્ચેનું અંતર સ્પષ્ટ રીતે સમજાયેલું હતું : પ્રવાહ એ ગુરુત્વ અને તરલતાની અસર નીચે પાણીના કણોની ગતિ છે, જ્યારે તરંગ તો પાણીના કણોનાં દોલનોના સંચારથી પરિણમે છે.

સ્થિર અવસ્થા અથવા નિયમિત સુરેખ ગતિની અવસ્થા, બંને શૂન્ય પ્રવેગ દર્શાવે છે. આથી ગતિનો પહેલો નિયમ સરળ રીતે આ પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય : **જો પદાર્થ પર ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો તેનો પ્રવેગ શૂન્ય હોય છે. જો પદાર્થ પર ચોખ્ખું બાહ્ય બળ લાગતું હોય, તો જ તેનો પ્રવેગ અશૂન્ય હોય છે.**

આ નિયમોના વ્યાવહારિક ઉપયોગમાં બે પ્રકારની પરિસ્થિતિઓનો સામનો કરવો પડે છે. કેટલાક કિસ્સાઓમાં આપણે જાણીએ છીએ કે, પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય છે. આવા કિસ્સામાં આપણે એવો નિર્ણય કરીએ છીએ કે પદાર્થનો પ્રવેગ શૂન્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, બીજા બધા પદાર્થોથી દૂર અને પોતાનાં રૉકેટો બંધ કરેલાં હોય તેવું, અવકાશયાન બાહ્ય અવકાશમાં હોય ત્યારે તેના પર કોઈ ચોખ્ખું બાહ્ય બળ લાગતું નથી. પહેલા નિયમ મુજબ તેનો પ્રવેગ શૂન્ય હોવો જોઈએ. જો તે ગતિમાં હોય તો નિયમિત વેગથી ગતિ કરવાનું ચાલુ જ રાખવું જોઈએ.

ગૅલિલિયો ગૅલિલી (1564-1642)



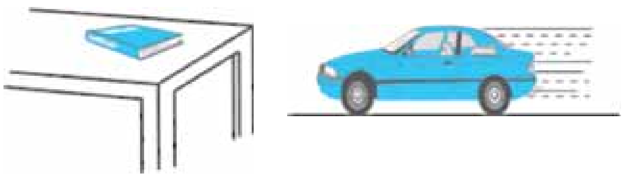
ઈટલીના પીસા શહેરમાં ઈ.સ. 1564માં જન્મેલ ગૅલિલિયો ચાર સદી અગાઉ યુરોપમાં થયેલ વૈજ્ઞાનિક ક્રાંતિનો પ્રણેતા હતો. ગૅલિલિયોએ ઢળતા સમતલો પર ગતિ કરતા અથવા મુક્ત પતન કરતા પદાર્થોના અભ્યાસ પરથી પ્રવેગનો ખ્યાલ રજૂ કર્યો. તેણે ઍરિસ્ટોટલના એવા મતનું ખંડન કર્યું કે ગતિ ચાલુ રાખવા માટે બળની જરૂર છે અને ગુરુત્વાકર્ષણની અસર હેઠળ ભારે પદાર્થો હલકા પદાર્થો કરતાં વધુ ઝડપથી પડે છે. આમ, તેણે જડત્વનો નિયમ મેળવ્યો, જે ત્યાર પછી ન્યૂટનના યુગપ્રવર્તક કાર્યનું આરંભબિંદુ હતો.

ખગોળશાસ્ત્રમાં પણ ગૅલિલિયોની શોધો એટલી જ ક્રાંતિકારી હતી. 1609માં તેણે પોતાનું ટેલિસ્કૉપ બનાવ્યું. (અગાઉ તે હોલૅન્ડમાં શોધાયેલું હતું.) અને સંખ્યાબંધ આશ્ચર્યકારક અવલોકનો કરવા માટે તેનો ઉપયોગ કર્યો : ચંદ્રની સપાટી પરના પર્વતો અને ખીણો, સૂર્ય પરનાં કાળાં ધાબાં, ગુરુના ચંદ્રો અને શુક્રની કળાઓ. તેણે એવો નિષ્કર્ષ મેળવ્યો કે આકાશગંગાની પ્રકાશિતતા, નરી આંખે ન જોઈ શકાતા અસંખ્ય તારાઓમાંથી આવતા પ્રકાશને આભારી છે. વૈજ્ઞાનિક તર્કનું કૌશલ્ય ધરાવતી તેની ઉત્તમ રચના : "Dialogue on the Two Chief World Systems"માં ગૅલિલિયોએ, કૉપરનિક્સ દ્વારા સૂર્યમંડળ માટે રજૂ થયેલ "સૂર્ય-કેન્દ્રીવાદ"નું સમર્થન કર્યું જે આજે પણ સાર્વત્રિક સ્વીકૃતિ પામેલ છે.

ગૅલિલિયો સાથે વૈજ્ઞાનિક શોધખોળની મૂળ પદ્ધતિમાં વળાંક આવ્યો. વિજ્ઞાન એ માત્ર કુદરતનાં અવલોકનો અને તેમાંથી મળતાં અનુમાનો જ રહ્યું ન હતું. વિજ્ઞાનમાં સિદ્ધાંતોને ચકાસવા માટે અથવા નકારવા માટે પ્રયોગો રચવાના અને કરવાના પણ હોય. વિજ્ઞાનમાં રાશિઓની માપણી કરવાની અને તેમની વચ્ચે ગાણિતિક સંબંધો શોધવાના હોય. ગૅલિલિયોને ઘણા લોકો આધુનિક વિજ્ઞાનનો પિતા કહે છે તે અયોગ્ય નથી.

જોકે, ઘણી વાર આપણને પ્રારંભમાં બધાં બળોની ખબર હોતી નથી, એ કિસ્સામાં જો આપણને ખબર પડે કે પદાર્થ પ્રવેગિત નથી. (એટલે કે કાં તો સ્થિર છે અથવા નિયમિત સુરેખ ગતિમાં છે) તો આપણે પહેલા નિયમ પરથી એવું અનુમાન કરી શકીએ કે પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોવું જ જોઈએ. ગુરુત્વાકર્ષણ દરેક સ્થળે છે. ખાસ તો, પૃથ્વી પરની ઘટનાઓમાં દરેક પદાર્થ પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ અનુભવે છે. વળી ગતિમાં રહેલા પદાર્થો સામાન્યતઃ ઘર્ષણ, શ્યાનતા બળ વગેરે અનુભવે છે. તેથી જો પૃથ્વી પર કોઈ પદાર્થ સ્થિર હોય કે નિયમિત સુરેખ ગતિમાં હોય તો, તે એટલા માટે નહિ કે તેના પર કોઈ બળો લાગતાં નથી પણ એટલા માટે કે તેની પર લાગતાં જુદાં જુદાં બાહ્ય બળો નાબૂદ થાય છે. એટલે કે કુલ થઈને ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય બને છે.

એક સમક્ષિતિજ સપાટી પર સ્થિર રહેલા એક પુસ્તકનો વિચાર કરો. [આકૃતિ 5.2(a)] તેનાં પર બે બાહ્ય બળો લાગે છે. ગુરુત્વાકર્ષણને લીધે લાગતું બળ (એટલે કે તેનું વજન W) અધોદિશામાં અને ટેબલ દ્વારા પુસ્તક પર લાગતું ઊર્ધ્વદિશામાંનું બળ, લંબબળ R. R એ સ્વનિયમન કરતું બળ છે. ઉપર દર્શાવેલ જેવી પરિસ્થિતિનું આ ઉદાહરણ છે. બળો પૂરેપૂરાં જાણીતાં નથી પરંતુ ગતિની અવસ્થા જાણીતી છે. આપણે પુસ્તક સ્થિર હોવાનું અવલોકન કરીએ છીએ. તેથી આપણે પહેલા નિયમ પરથી નિર્ણય કરીએ છીએ કે Rનું માન Wના માન જેટલું છે. ઘણી વાર એવું વિધાન જોવા મળે છે કે, "W = R હોવાથી, બળો નાબૂદ થાય છે અને તેથી પુસ્તક સ્થિર રહે છે." આ તર્ક અસત્ય છે. સાચું વિધાન આ છે : "પુસ્તક સ્થિર હોવાનું જણાતાં પહેલા નિયમ મુજબ તેના પરનું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોવું જ જોઈએ. આ દર્શાવે છે કે લંબબળ R વજન Wના જેટલું અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવું જોઈએ."



(a) (b)

આકૃતિ **5.2** (a) *ટેબલ પર સ્થિર રહેલું પુસ્તક* (b) *નિયમિત વેગથી ગતિ કરતી કાર. દરેક કિસ્સામાં ચોખ્ખું બળ શૂન્ય છે.*

સ્થિર સ્થિતિમાંથી શરૂ કરી, ઝડપ પ્રાપ્ત કરતી અને પછી સીધી, લીસી સડક પર નિયમિત ઝડપથી ગતિ કરતી કારનો વિચાર કરો. [આકૃતિ 5.2(b)] જ્યારે કાર સ્થિર હોય ત્યારે તેના પર કોઈ ચોખ્ખું બળ લાગતું નથી. જ્યારે તે ઝડપ પકડે છે ત્યારે તે પ્રવેગિત થાય છે. આવું કોઈ ચોખ્ખા બાહ્ય બળને લીધે જ બનવું જોઈએ. તે બાહ્ય બળ જ હોવું જોઈએ તે બરાબર નોંધો. કારનો પ્રવેગ કોઈ પણ આંતરિક બળ દ્વારા ગણી શકાય નહિ. આ બાબત કદાચ આશ્ચર્યજનક લાગે પણ તે સાચી છે. સડકને સમાંતર કોઈ પણ વિચારી શકાય તેવું બળ હોય તો એ ઘર્ષણબળ છે. આ ઘર્ષણબળ જ કારને સમગ્રપણે પ્રવેગિત કરે છે. (તમે ઘર્ષણ અંગે પરિચ્છેદ 5.9માં શીખશો.) જ્યારે કાર અચળ વેગથી ગતિ કરે છે ત્યારે કોઈ ચોખ્ખું બાહ્ય બળ લાગતું નથી.

પહેલા નિયમમાં સમાયેલો પદાર્થના જડત્વનો ગુણધર્મ કેટલીક પરિસ્થિતિઓમાં સ્પષ્ટ જણાય છે. ધારો કે આપણે એક સ્થિર બસમાં ઊભા છીએ અને ડ્રાઈવર બસને એકાએક ચાલુ કરે છે. એક ધક્કા સાથે આપણે પાછળની તરફ ફેંકાઈએ છીએ. આમ કેમ ? આપણા પગ બસના તળિયાના સંપર્કમાં છે. જો ઘર્ષણ ન હોત તો આપણે જ્યાં હતાં ત્યાં જ રહેત અને બસનું તળિયું આપણા પગ નીચે આગળ ખસત અને બસનો પાછળનો ભાગ આપણને અથડાત. જોકે સદ્નસીબે પગ અને બસના તળિયા વચ્ચે થોડું ઘર્ષણ હોય છે. જો બસનું ચાલુ થવું બહુ એકાએક ન હોત, એટલે કે પ્રવેગ બહુ ઓછો હોત તો ઘર્ષણબળ આપણા પગને બસની સાથે પ્રવેગિત કરવા માટે પૂરતું હોત. પરંતુ આપણું શરીર સંપૂર્ણપણે એક દૃઢ પદાર્થ નથી. તે વિરૂપિત થઈ શકે તેવું છે. એટલે કે તે તેના જુદા જુદા ભાગો વચ્ચે થોડી સાપેક્ષ ગતિ થવા દે છે. આનો અર્થ એ કે જ્યારે આપણા પગ બસની સાથે જાય છે ત્યારે શરીરનો બાકીનો ભાગ જડત્વને લીધે જ્યાં હોય ત્યાં જ રહે છે. તેથી બસની સાપેક્ષે આપણે પાછળ ધકેલાઈએ છીએ. જોકે આવું થાય કે તરત બાકીના શરીર પર સ્નાયુ વડે (પગ વડે) લાગતાં બળો પોતાનો ભાગ ભજવે છે અને શરીરને બસની સાથે ગતિ કરાવે છે. જ્યારે બસ એકાએક અટકે છે ત્યારે પણ આવું જ થાય છે. આપણા પગ ઘર્ષણ, કે જે પગ અને બસના તળિયા વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ થવા દેતું નથી, તેને લીધે અટકે છે. પરંતુ બાકીનું શરીર જડત્વને લીધે આગળ ગતિ કરવાનું ચાલુ રાખે છે. આમ, આપણે આગળ ધકેલાઈએ છીએ. ફરીથી સ્નાયુ વડે લાગતાં બળો પોતાનો ભાગ ભજવે છે અને શરીરને સ્થિર સ્થિતિમાં લાવે છે.

> *ઉદાહરણ 5.1* $100\ m\ s^{-2}$ના અચળ પ્રવેગથી બાહ્ય અવકાશમાં ગતિ કરતા એક નાના અવકાશયાનમાંથી એકાએક અવકાશયાત્રી છૂટો પડે છે. અવકાશયાનની બહાર આવ્યા પછીની ક્ષણે તેનો પ્રવેગ કેટલો હશે ? (એવું ધારો કે નજીકમાં તેના પર ગુરુત્વબળ લગાડતા કોઈ તારાઓ હાજર નથી.)

ઉકેલ તેની પર ગુરુત્વબળ લગાડતા કોઈ તારા નજીકમાં નથી અને નાનું અવકાશયાન તેના પર અવગણ્ય ગુરુત્વાકર્ષણ લગાડે તેથી અવકાશયાનમાંથી બહાર નીકળતાં તેના પરનું કુલ (ચોખ્ખું) બળ શૂન્ય છે. ગતિના પહેલા નિયમ મુજબ અવકાશયાત્રીનો પ્રવેગ શૂન્ય છે. ◀

5.5 ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ (NEWTON'S SECOND LAW OF MOTION)

ગતિનો પહેલો નિયમ, જ્યારે પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તેવા સાદા કિસ્સાની વાત કરે છે. ગતિનો બીજો નિયમ, જ્યારે પદાર્થ પર કંઈક ચોખ્ખું બાહ્ય બળ લાગતું હોય તેવા વ્યાપક કિસ્સા વિશે જણાવે છે. તે ચોખ્ખા બાહ્ય બળને પદાર્થના પ્રવેગ સાથે સંબંધિત કરે છે.

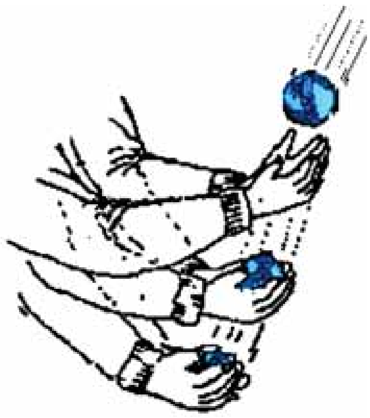
વેગમાન (Momentum) : પદાર્થનું વેગમાન તેના દળ m અને વેગ **υ**ના ગુણાકાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે અને તેને **p** તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon} \quad (5.1)$$

સ્પષ્ટ છે કે વેગમાન એ સદિશ રાશિ છે. નીચેના સામાન્ય અનુભવો, ગતિ પર બળની અસર અંગે વિચારણા કરવામાં, આ રાશિનું મહત્ત્વ દર્શાવે છે.

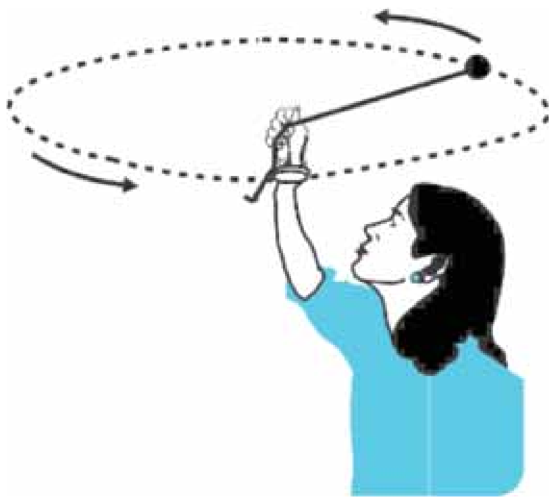
- ધારો કે એક હલકા વજનનું વાહન (દા.ત., નાની કાર) અને એક ભારે વજનનું વાહન (દા.ત., વજન ભરેલી ટ્રક) એક સમક્ષિતિજ રસ્તા પર રહેલા છે. આપણે સૌ જાણીએ છીએ કે, એકસમાન સમયમાં એક સમાન ઝડપમાં લાવવા માટે કાર કરતાં ટ્રકને વધારે બળ લગાડવાની જરૂર પડે છે. તે જ રીતે જો તેઓ સમાન ઝડપથી ગતિ કરતા હોય તો એકસમાન સમયમાં તેમને અટકાવવા માટે હલકા પદાર્થ કરતાં ભારે પદાર્થને વધારે (મોટા) અવરોધક બળની જરૂર પડે છે.
- એક હલકો અને એક ભારે એમ બે પથ્થર એક મકાનની ટોચ પરથી પડવા દેવામાં આવે તો જમીન પરની વ્યક્તિને ભારે કરતાં હલકા પથ્થરને ઝીલવાનું સહેલું જણાય છે. આમ પદાર્થની ગતિ પર બળની અસર નક્કી કરવામાં તેનું દળ પણ એક અગત્યનો પ્રાચલ (Parameter) છે.
- ઝડપ એ ધ્યાનમાં લેવાનો અન્ય અગત્યનો પ્રાચલ છે. બંદૂકમાંથી છૂટેલી બુલિટ (ગોળી) અટકતાં પહેલાં માનવશરીરની પેશીઓને સહેલાઈથી વીંધી શકે છે. જેનાથી મોત પણ નીપજે છે. તે જ બુલિટને મર્યાદિત ઝડપથી ફેંકવામાં આવે તો તે બહુ નુકસાન કરી શકતી નથી. આમ, આપેલા દળ માટે જો ઝડપ વધુ હોય તો ચોક્કસ સમયમાં તે પદાર્થને અટકાવવા માટે મોટા અવરોધક બળની જરૂર પડે છે. દળ અને વેગને એક સાથે લેતાં તેમનો ગુણાકાર એટલે કે વેગમાન એ ગતિનો એક મહત્ત્વનો પ્રાચલ છે. આપેલા સમયમાં વેગમાનમાં વધારે ફેરફાર ઉત્પન્ન કરવા માટે વધારે મોટું બળ લગાડવાની જરૂર પડે છે.
- એક અનુભવી ક્રિકેટર વધુ ઝડપે આવતા ક્રિકેટ બૉલને ઘણી સહેલાઈથી ઝીલે છે, જ્યારે આ કાર્યમાં કોઈ શિખાઉ ખેલાડીનો હાથ ઈજાગ્રસ્ત થઈ શકે છે. એક કારણ એ છે કે, અનુભવી ક્રિકેટર બૉલને અટકાવવા માટે વધારે સમય આપે છે. તમે નોંધ્યું હશે કે તે બૉલને ઝીલવાની ક્રિયામાં તેના હાથને પાછળની તરફ ખેંચે છે (આકૃતિ 5.3) જ્યારે શિખાઉ ખેલાડી તેના હાથ સ્થિર રાખીને બૉલને તત્કાળ ઝીલવાનો પ્રયત્ન કરે છે. બૉલને તત્કાળ અટકાવવા માટે તેને વધુ મોટા બળની જરૂર પડે છે અને આમાં તેને ઈજા થાય છે. આનો નિષ્કર્ષ સ્પષ્ટ છે : બળ માત્ર વેગમાનના

ફેરફાર પર આધારિત નથી પણ એ ફેરફાર કેટલો ઝડપથી કરવામાં આવે છે તેના પર પણ આધારિત છે. ઓછા સમયમાં વેગમાનમાં અમુક નિશ્ચિત ફેરફાર ઉત્પન્ન કરવા માટે વધુ મોટું બળ લગાડવાની જરૂર પડે છે. ટૂંકમાં, વેગમાનના ફેરફારનો દર મોટો હોય, તો બળ પણ મોટું હોય.



આકૃતિ 5.3 *બળ વેગમાનના માત્ર ફેરફાર પર આધારિત નથી પરંતુ તે ફેરફાર કેટલી ઝડપથી કરવામાં આવે છે તેના પર પણ આધારિત છે. અનુભવી ક્રિકેટર દડાને ઝીલવા દરમિયાન તેના હાથ પાછા ખેંચે છે અને દડાને અટકવામાં વધારે સમય લાગવા દે છે. આમ તેને નાના બળની જરૂર પડે છે.*

- અવલોકનો પુષ્ટિ કરે છે કે દળ અને વેગનો ગુણાકાર (એટલે કે વેગમાન), ગતિ પર બળની અસર ઊપજાવવામાં પાયાની બાબત છે. જો પ્રારંભમાં સ્થિર એવા બે જુદા જુદા દળના પદાર્થો પર એક નિશ્ચિત બળ નિશ્ચિત સમયગાળા માટે લગાડવામાં આવે તો હલકો પદાર્થ ભારે પદાર્થ કરતાં વધારે ઝડપ પ્રાપ્ત કરે છે. પરંતુ અવલોકનો દર્શાવે છે કે એ સમયગાળાને અંતે બંને પદાર્થો વેગમાન તો એકસરખું જ પ્રાપ્ત કરે છે. **આમ જુદા જુદા પદાર્થો પર સમાન બળ સમાન સમયમાં વેગમાનનો એકસમાન ફેરફાર ઉત્પન્ન કરે છે.** ગતિના બીજા નિયમ માટે આ નિર્ણાયક બાબત છે.
- અગાઉનાં અવલોકનો વેગમાનના સદિશ તરીકેના ગુણધર્મનો પુરાવો આપતાં નથી. એ બધાં ઉદાહરણોમાં વેગમાન અને વેગમાનનો ફેરફાર બંનેને એક જ (અથવા વિરુદ્ધ) દિશા છે. પણ હંમેશાં આવું નથી હોતું. ધારો કે એક દોરી વડે એક પથ્થરને સમક્ષિતિજ સમતલમાં નિયમિત ઝડપથી ઘુમાવવામાં આવે છે. આમાં વેગમાનનું માન નિશ્ચિત છે પરંતુ તેની દિશા બદલાય છે. (આકૃતિ 5.4). આ વેગમાન સદિશમાં ફેરફાર કરવા માટે બળની જરૂર પડે છે. આવું બળ આપણા હાથ વડે દોરી મારફતે લગાડાય છે. અનુભવ પરથી જણાય છે કે, પથ્થરને વધારે ઝડપથી અથવા નાની ત્રિજ્યાના વર્તુળમાં ઘુમાવવા અથવા એ બંને કરવા માટે આપણા હાથ વડે મોટું બળ લગાડવાની જરૂર પડે છે. આ બાબત મોટા પ્રવેગ એટલે કે વેગમાન સદિશના ફેરફારના મોટા દર સાથે સંકળાયેલ છે. આ સૂચવે છે કે વેગમાન સદિશમાં ફેરફારનો દર મોટો હોય, તો લગાડેલું બળ પણ મોટું હોય.



આકૃતિ 5.4 *વેગમાનનું મૂલ્ય અચળ હોય તોપણ તેની દિશા બદલવા માટે બળની જરૂર છે. સમક્ષિતિજ વર્તુળમાં એક દોરી વડે પથ્થરને અચળ ઝડપથી ઘુમાવતાં આપણે આમ અનુભવી શકીએ છીએ.*

આ બધાં ગુણાત્મક અવલોકનો **ગતિના બીજા નિયમ** તરફ દોરી જાય છે જેને ન્યૂટને નીચે મુજબ રજૂ કર્યો :

પદાર્થના વેગમાનના ફેરફારનો દર લાગુ પાડેલા બળના સમપ્રમાણમાં અને લગાડેલા બળની દિશામાં હોય છે.

આમ, જો બળ **F**, સમયગાળા Δt માટે લાગતાં m દળના પદાર્થનો વેગ $\mathbf{v}$થી બદલાઈને $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ થાય એટલે કે તેનું પ્રારંભિક વેગમાન $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$માં $\Delta\mathbf{p} = m\Delta\mathbf{v}$ જેટલો ફેરફાર થાય તો, ગતિના બીજા નિયમ મુજબ,

$$\mathbf{F} \propto \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} \text{ અથવા } \mathbf{F} = k\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}$$

જ્યાં k સપ્રમાણતાનો અચળાંક છે. $\Delta t \rightarrow 0$ લક્ષ લેતાં, $\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}$ પદ, **p**નું *t*ને અનુલક્ષીને વિકલન અથવા વિકલ અચળાંક બને છે, જેને $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ તરીકે દર્શાવાય છે. આમ,

$$\mathbf{F} = k\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \quad (5.2)$$

અચળ દળ m ધરાવતા પદાર્થ માટે

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\ \boldsymbol{\upsilon}) = m\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = m\ \mathbf{a} \quad (5.3)$$

એટલે કે ગતિનો બીજો નિયમ

$$\mathbf{F} = k\ m\ \mathbf{a} \quad (5.4)$$

તરીકે પણ લખી શકાય, જે દર્શાવે છે કે બળ એ દળ m અને પ્રવેગ **a**ના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં છે.

હજી સુધી બળનો એકમ વ્યાખ્યાયિત કર્યો નથી.

વાસ્તવમાં, આપણે સમીકરણ (5.4)નો ઉપયોગ કરી બળના એકમને વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આથી આપણને *k*નું કોઈ પણ મૂલ્ય પસંદ કરવાની સ્વતંત્રતા છે. સરળતા ખાતર આપણે $k = 1$ પસંદ કરીએ છીએ. હવે ગતિનો બીજો નિયમ

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\ \mathbf{a} \quad (5.5)$$

તરીકે લખાય. SI એકમમાં એકમ બળ 1 kg દળના પદાર્થમાં 1 m s^{-2}નો પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે. આ એકમને **newton** કહે છે : 1 N = 1 kg m s^{-2}

આ તબક્કે ગતિના બીજા નિયમના કેટલાક મહત્ત્વના મુદ્દાઓ નોંધીએ :

1. ગતિના બીજા નિયમ પરથી **F** = 0 સૂચવે છે કે **a** = 0. આમ, બીજો નિયમ પહેલા નિયમ સાથે સુસંગત છે.
2. ગતિનો બીજો નિયમ એ સદિશ નિયમ છે. સદિશના દરેક ઘટકને અનુરૂપ એક સમીકરણ લખતાં તે ત્રણ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે :

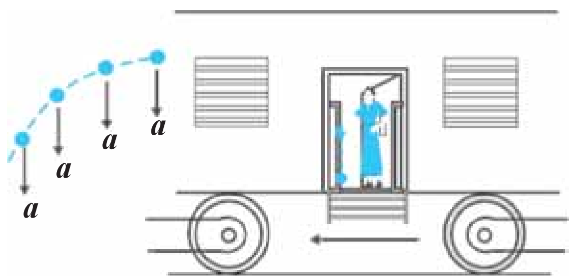
$$F_x = \frac{\mathrm{dp_x}}{\mathrm{dt}} = ma_{\mathrm{x}}$$

$$F_y = \frac{\mathrm{dp_y}}{\mathrm{dt}} = ma_{\mathrm{y}}$$

$$F_z = \frac{\mathrm{dp_z}}{\mathrm{dt}} = ma_{\mathrm{z}} \quad (5.6)$$

આનો અર્થ એ છે કે, જો બળ પદાર્થના વેગને સમાંતર ન હોય પણ વેગ સાથે કંઈક કોણ બનાવતું હોય, તો તે બળની દિશામાંના વેગના ઘટકમાં જ બદલાવ લાવી શકે છે. બળને લંબ દિશામાંનો ઘટક અફર રહે છે. દાખલા તરીકે, અધોદિશામાંના ગુરુત્વ બળની અસર નીચે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની ગતિમાં વેગનો સમક્ષિતિજ ઘટક અચળ રહે છે. (આકૃતિ 5.5)

3. સમીકરણ (5.5) વડે અપાતો ગતિનો બીજો નિયમ એકાકી (Single) બિંદુરૂપ કણને લાગુ પડે છે. નિયમમાં બળ **F** એ કણ પરનું ચોખ્ખું (પરિણામી) બાહ્ય બળ છે અને **a** કણનો પ્રવેગ છે. પરંતુ એવું જણાય છે કે આ નિયમ દઢ પદાર્થ અથવા વ્યાપક રીતે કણોના તંત્રને પણ તે જ સ્વરૂપમાં લાગુ પડે છે. તે પરિસ્થિતિમાં **F** એ તંત્ર પરનું કુલ (પરિણામી) બાહ્ય બળ અને **a** એ સમગ્ર તંત્રનો પ્રવેગ છે. વધુ ચોકસાઈથી કહીએ તો **a** એ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો પ્રવેગ છે, જેના વિશે આપણે પ્રકરણ 7માં વિગતે શીખીશું. **તંત્રની અંદરના કોઈ આંતરિક બળને Fમાં સમાવવાનું (ગણવાનું) નથી.**



આકૃતિ 5.5 આપેલી ક્ષણે પ્રવેગ તે ક્ષણે લાગતા બળ વડે નક્કી થાય છે. પ્રવેગિત ગતિ કરતી ટ્રેનમાંથી પથ્થરને બહાર પડવા દેવાની પછીની ક્ષણે તેના પર કોઈ સમક્ષિતિજ બળ કે પ્રવેગ હોતા નથી (હવાનો અવરોધ અવગણતાં). પથ્થરને અગાઉની ક્ષણે તેના ટ્રેનની સાથેના પ્રવેગની કોઈ સ્મૃતિ હોતી નથી.

4. ગતિનો બીજો નિયમ એક સ્થાનિક સંબંધ છે. એનો અર્થ એમ છે કે અવકાશમાં (પદાર્થના સ્થાને) આપેલા બિંદુએ આપેલી ક્ષણે બળ **F** તે બિંદુએ તે જ ક્ષણે પદાર્થના પ્રવેગ **a** સાથે સંબંધ ધરાવે છે. અહીં અને અત્યારે પ્રવેગ, અહીં અને અત્યારે લાગતા બળ વડે નક્કી થાય છે, **કણની ગતિના કોઈ ઈતિહાસ (તે ક્ષણ અગાઉની બાબતો) પરથી નહિ. (જુઓ આકૃતિ 5.5.)**

▶ *ઉદાહરણ 5.2* 0.04 kg દળ ધરાવતી અને 90 m s^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરતી એક બુલિટ એક ભારે લાકડાના બ્લૉકમાં પ્રવેશે છે અને 60 cmનું અંતર કાપીને અટકી જાય છે. બ્લૉક વડે બુલિટ પર સરેરાશ અવરોધક બળ કેટલું લાગે છે ?

ઉકેલ બુલિટનો પ્રતિપ્રવેગ (અચળ ગણેલ છે.)

$$a = \frac{-u^2}{2s} = \frac{-90\times90}{2\times0.6} = -6750\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

ગતિના બીજા નિયમ મુજબ અવરોધક બળ

$= 0.04 \text{ kg} \times 6750 \text{ m s}^{-2} = 270 \text{ N}$

અહીં, ખરેખર લાગતું અવરોધક બળ અને તેથી બુલેટનો પ્રતિપ્રવેગ અચળ ન પણ હોય. તેથી આ જવાબ માત્ર સરેરાશ અવરોધક બળ દર્શાવે છે. ◀

ઉદાહરણ 5.3 m દળના પદાર્થની ગતિ $y = ut + \frac{1}{2}gt^2$ તરીકે વર્ણવાય છે. પદાર્થ પર લાગતું બળ શોધો.

ઉકેલ આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$y = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

હવે, $v = \frac{dy}{dt} = u + gt$

પ્રવેગ $a = \frac{dv}{dt} = g$

સમીકરણ (5.5) પરથી બળ

$$F = ma = mg$$ ◀

આમ, આપેલ સમીકરણ ગુરુત્વપ્રવેગની અસર હેઠળ પદાર્થની ગતિ વર્ણવે છે અને y, gની દિશામાંનો સ્થાન યામ છે.

આઘાત (*Impulse*)

ઘણી વાર આપણને એવી ઘટનાઓ જોવા મળે છે કે એક મોટું બળ ખૂબ નાના સમયગાળા માટે લાગે છે અને પદાર્થના વેગમાનમાં નિશ્ચિત ફેરફાર ઉત્પન્ન કરે છે. દાખલા તરીકે, જ્યારે દડો દીવાલને અથડાઈને પાછો પડે છે, ત્યારે દીવાલ વડે દડા પર લાગતું બળ તે બંને સંપર્કમાં હોય તેવા ખૂબ ટૂંકા સમયગાળા માટે જ લાગતું હોય છે, પરંતુ બળ દડાના વેગમાનને ઊલટાવી દેવા જેટલું પર્યાપ્ત મોટું હોય છે. આવા સંજોગોમાં ઘણી વાર બળ અને સમયગાળાને જુદા જુદા માપવાનું અઘરું હોય છે. પરંતુ બળ અને સમયગાળાનો ગુણાકાર કે જે વેગમાનનો ફેરફાર છે તે માપી શકાય તેવી રાશિ છે. આ ગુણાકારને આઘાત કહે છે.

આઘાત = બળ × સમયગાળો

= વેગમાનમાં ફેરફાર (5.7)

વેગમાનમાં નિશ્ચિત ફેરફાર ઉત્પન્ન કરવા માટે ટૂંકા સમયગાળામાં લાગતા મોટા બળને **આઘાતી બળ** કહે છે. વિજ્ઞાનના ઇતિહાસમાં આઘાતી બળોને સામાન્ય બળો કરતાં સંકલ્પનાની રીતે જુદાં પ્રકારનાં બળો તરીકે ગણવામાં આવતાં હતાં. ન્યૂટોનિયન યંત્રશાસ્ત્રમાં આવો કોઈ ભેદભાવ નથી. આઘાતી બળ અન્ય બળ જેવું જ છે સિવાય કે તે મોટું છે અને ટૂંકા સમય માટે લાગે છે.

ઉદાહરણ 5.4 એક બૅટ્સમૅન બૉલને તેની 12 m s^{-1}ની પ્રારંભિક ઝડપને બદલ્યા સિવાય સીધો બૉલરની દિશામાં પાછો ફટકારે છે. જો બૉલનું દળ 0.15 kg હોય, તો બૉલ પર લાગતો આઘાત શોધો. (બૉલની ગતિ સુરેખ ધારો.)

ઉકેલ વેગમાનમાં ફેરફાર

$= 0.15 \times 12 - (-0.15 \times 12)$

$= 3.6 \text{ N s}$

આઘાત $= 3.6 \text{ N s}$,

બૅટ્સમૅનથી બૉલરની દિશામાં. આ એવું ઉદાહરણ છે કે જેમાં બૅટ્સમૅન વડે બૉલ પર લગાડેલું બળ તેમજ બૉલ અને બૅટ વચ્ચેનો સંપર્કસમય જાણવાનું મુશ્કેલ છે, પરંતુ આઘાત સહેલાઈથી ગણી શકાય છે. ◀

5.6 ન્યૂટનનો ગતિનો ત્રીજો નિયમ (NEWTON'S THIRD LAW OF MOTION)

ગતિનો બીજો નિયમ પદાર્થ પર લાગતા બળ અને તેના પ્રવેગ વચ્ચેનો સંબંધ છે. પદાર્થ પર લાગતા બાહ્ય બળનું ઉદ્ગમ શું છે ? કયું પરિબળ બાહ્ય બળ લગાડે છે ? ન્યૂટોનિયન યંત્રશાસ્ત્રમાં આનો સરળ જવાબ એ છે કે પદાર્થ પર બાહ્ય બળ હંમેશાં બીજા પદાર્થને લીધે ઉદ્ભવે છે. A અને B એ બે પદાર્થોની એક જોડ વિચારો. B પદાર્થ, A પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લગાડે છે. હવે સહજ પ્રશ્ન એવો થાય કે બદલામાં શું A પદાર્થ B પર બાહ્ય બળ લગાડે છે ? કેટલાક કિસ્સાઓમાં જવાબ સ્પષ્ટ જણાય છે. તમે એક ગૂંચળા આકારની સ્પ્રિંગને દબાવો તો સ્પ્રિંગ તમારા હાથના બળ વડે દબાય છે. દબાયેલી સ્પ્રિંગ બદલામાં તમારા હાથ પર બળ લગાડે છે અને તમે તે અનુભવી શકો છો. પણ જો પદાર્થો સંપર્કમાં ન હોય તો શું ? પૃથ્વી ગુરુત્વને લીધે પથ્થરને અધોદિશામાં ખેંચે છે. શું પથ્થર પૃથ્વી પર બળ લગાડે છે ? આનો જવાબ સ્પષ્ટ એટલા માટે જણાતો નથી કે આપણને પથ્થરની પૃથ્વી પર થતી અસર દેખાતી નથી. ન્યૂટનના મત મુજબ જવાબ છે : હા. પથ્થર પૃથ્વી પર તેટલું જ બળ વિરુદ્ધ દિશામાં લગાડે છે. આપણે એ નોંધી શકતા નથી કારણ કે પૃથ્વી બહુ દળદાર છે અને નાના બળની તેની ગતિ પરની અસર અવગણ્ય છે.

આમ, ન્યૂટોનિયમ યંત્રશાસ્ત્ર મુજબ કુદરતમાં બળ કદી એકલું (એકાકી) હોતું નથી. બળ એ બે પદાર્થો વચ્ચેની પરસ્પર આંતરક્રિયા છે. બળો હંમેશાં જોડ (Pair)માં જ લાગે છે. વળી

બે પદાર્થો વચ્ચેનાં પરસ્પર બળો હંમેશાં સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. આ ખ્યાલને ન્યૂટને **ગતિના ત્રીજા નિયમ**માં રજૂ કર્યો.

દરેક ક્રિયાબળ (action)ને હંમેશાં સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાંનું પ્રતિક્રિયાબળ (reaction) હોય છે.

ગતિના ત્રીજા નિયમના ન્યૂટનના શબ્દપ્રયોગ -

To every action, there is equal and opposite reaction – એવાં તો અલંકૃત અને સુંદર છે કે તે સામાન્ય વાતચીતનો ભાગ બની ગયાં છે. તેથી જ કદાચ ત્રીજા નિયમ વિશે ગેરસમજ પ્રવર્તે છે. ગતિના ત્રીજા નિયમ અંગે – વિશેષ તો ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ જેવાં પદોના ઉપયોગ અંગે - આપણે કેટલાક મહત્ત્વના મુદ્દાઓની નોંધ લઈએ :

1. ગતિના ત્રીજા નિયમમાં ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ એ શબ્દોનો અર્થ બીજો કોઈ નહિ પણ 'બળ' છે. એક જ ભૌતિક ખ્યાલ માટે જુદા જુદા શબ્દોનો ઉપયોગ ઘણી વખત ગૂંચવણ ઉપજાવે છે. ત્રીજા નિયમને એકદમ સરળ અને સ્પષ્ટ શબ્દોમાં રજૂ કરવાની રીત નીચે મુજબ છે :

   બળો હંમેશાં જોડ (pairs)માં જ લાગે છે. A પદાર્થ પર B વડે લાગતું બળ, B પદાર્થ પર A વડે લાગતા બળ જેટલું જ અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

2. ત્રીજા નિયમમાં ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ શબ્દો કદાચ એવી ગેરસમજ ઉપજાવે છે કે ક્રિયાબળ; પ્રતિક્રિયાબળની અગાઉ લાગે છે. એટલે કે ક્રિયાબળ કારણ છે અને પ્રતિક્રિયાબળ એ તેની અસર છે. **ત્રીજા નિયમમાં કોઈ કારણ-અસરનો સંબંધ અભિપ્રેત નથી. B વડે A પરનું બળ અને A વડે B પરનું બળ એક જ ક્ષણે લાગે છે.** આ કારણથી તેમાંના ગમે તે એકને ક્રિયાબળ અને બીજાને પ્રતિક્રિયાબળ કહી શકાય છે.

3. ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ એક જ પદાર્થ પર નહિ પણ બે જુદા પદાર્થો પર લાગે છે. A અને B પદાર્થોની એક જોડ વિચારો. ગતિના ત્રીજા નિયમ મુજબ,

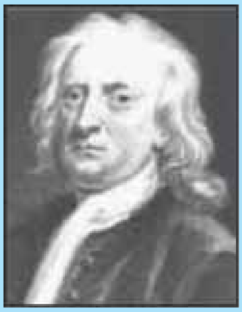
$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \qquad (5.8)$$

(A પર B વડે બળ) = –(B પર A વડે બળ)

આથી જો આપણે કોઈ એક પદાર્થ (A અથવા B)ની ગતિનો વિચાર કરતા હોઈએ તો, બેમાંનું એક જ બળ ગણવાનું છે. બે બળોનો સરવાળો કરીને ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ શૂન્ય થાય છે એમ કહેવું ભૂલભરેલું છે.

જોકે, બે પદાર્થોનું સમગ્રપણે એક તંત્ર વિચારતા હોઈએ તો $\mathbf{F}_{AB}$ અને $\mathbf{F}_{BA}$ એ (A + B) તંત્રનાં આંતરિક બળો છે. તેમનો સરવાળો થઈને શૂન્ય બળ બને છે. આમ, પદાર્થમાં અથવા કણોના તંત્રમાં આંતરિક બળોની જોડ નાબૂદ થાય છે. આ મહત્ત્વની હકીકતને લીધે ગતિનો બીજો નિયમ પદાર્થ અથવા કણોના તંત્ર પર પણ લાગુ પાડી શકાય છે. (જુઓ પ્રકરણ 7.)

આઈઝૅક ન્યૂટન (1642-1727)

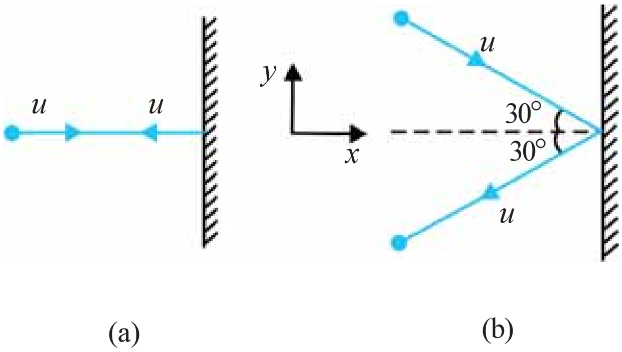


આઈઝૅક ન્યૂટનનો જન્મ, જે વર્ષે ગૅલિલિયોનું અવસાન થયું તે જ વર્ષે - 1642માં - વુલ્સથોર્પ, ઇંગ્લૅન્ડમાં થયો હતો. તેનું અસામાન્ય ગાણિતિક અને યાંત્રિક વલણ તેના શાળાજીવન દરમિયાન બીજાઓથી છૂપું રહ્યું હતું. તે 1662માં પૂર્વ-સ્નાતક અભ્યાસ માટે કેમ્બ્રિજ ગયો. 1665માં પ્લેગનો રોગચાળો ફાટી નીકળતાં યુનિવર્સિટીનું નગર બંધ થયું અને તે તેની માતાના ફાર્મ પર પાછો ફર્યો. ત્યાં બે વર્ષના એકાંતવાસ દરમિયાન તેની સુષુપ્ત સર્જનાત્મકતા ગણિત અને ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં મૂળભૂત શોધખોળોના ઘોડાપુર રૂપે વિકાસ પામી : ઋણ અને અપૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટે દ્વિપદી પ્રમેય, કલનગણિતની શરૂઆત, ગુરુત્વાકર્ષણનો વ્યસ્ત વર્ગનો નિયમ, શ્વેત પ્રકાશનો વર્ણપટ વગેરે. કેમ્બ્રિજ પાછા ફરીને તેણે પ્રકાશશાસ્ત્રમાં તેની શોધખોળ ચાલુ રાખી અને પરાવર્તક ટેલિસ્કૉપની રચના કરી.

1684માં તેના મિત્ર ઍડમંડ હેલીના પ્રોત્સાહનથી ન્યૂટને 'The Principia Mathematica' નામના ગ્રંથના લેખનમાં ઝુકાવ્યું, જે અત્યાર સુધી થયેલા મહાન વૈજ્ઞાનિક પ્રકાશનોમાંનું એક બન્યું. તેમાં તેણે ગતિના ત્રણ નિયમો અને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ જણાવ્યા, જેના વડે ગ્રહોની ગતિના કેપ્લરના ત્રણ નિયમોની સમજૂતી આપી. તે પુસ્તકમાં ચીલા-ચાતરનાર ઘણી સિદ્ધિઓ સમાયેલી હતી : તરલ યંત્રશાસ્ત્રના મૂળભૂત સિદ્ધાંતો, તરંગ ગતિનું ગણિત, પૃથ્વી સૂર્ય અને બીજા ગ્રહોના દળની ગણતરી, અયનબિંદુઓનાં ચલનની સમજૂતી, ભરતીનો સિદ્ધાંત વગેરે. 1704માં ન્યૂટને બીજું એક ખૂબીભર્યું પુસ્તક 'Opticks' બહાર પાડ્યું, જેમાં તેના પ્રકાશ અને રંગો પરના કાર્ય રજૂ થયાં.

કૉપરનિકસથી પ્રારંભ થયેલ અને કેપ્લર અને ગૅલિલિયોએ પ્રબળતાથી આગળ ધપાવેલ ક્રાંતિની ન્યૂટન દ્વારા ભવ્ય પૂર્ણાહુતિ થઈ. ન્યૂટોનિયન યંત્રશાસ્ત્ર વડે પૃથ્વી પરની અને આકાશમાં થતી ઘટનાઓનું એકીકીકરણ થયું જમીન પર પડતા સફરજન અને પૃથ્વીની ફરતે ચંદ્રની ગતિ એ બંનેમાં એક જ પ્રકારના ગણિતીય સમીકરણ જણાય છે. તર્કનો યુગ આરંભી ગયો હતો.

> *ઉદાહરણ 5.5* આકૃતિ 5.6માં દર્શાવ્યા મુજબ બે એક સમાન બિલિયર્ડ બૉલ એક દૃઢ દીવાલ પર સમાન ઝડપથી પણ જુદા જુદા કોણે અથડાઈને ઝડપમાં કોઈ ફેરફાર વિના પરાવર્તન પામે છે. (i) દરેક બૉલને લીધે દીવાલ પર લાગતા બળની દિશા કઈ હશે ? (ii) દીવાલ વડે બંને બૉલ પર લગાડેલ આઘાતના માનનો ગુણોત્તર કેટલો હશે ?



આકૃતિ 5.6

ઉકેલ સાહજિક રીતે પ્રશ્ન (i) માટે એવો જવાબ સૂઝે કે કદાચ કિસ્સા (a)માં દીવાલ પરનું બળ દીવાલને લંબદિશામાં છે. જ્યારે કિસ્સા (b)માં તે દિવાલને લંબ સાથે 30°ના કોણે ઢળેલું છે. આ જવાબ ખોટો છે. બંને કિસ્સામાં દીવાલ પરનું બળ દીવાલને લંબદિશામાં છે.

દીવાલ પરનું બળ કેવી રીતે શોધવું ? એની યુક્તિ એ છે કે બીજા નિયમનો ઉપયોગ કરી દીવાલ વડે બૉલ પર લાગતું બળ (અથવા આઘાત) વિચારો અને પછી ત્રીજા નિયમનો ઉપયોગ કરી પ્રશ્ન (i)નો જવાબ મેળવો. ધારો કે દરેક બૉલની દિવાલ સાથે સંઘાત પહેલાંની અને પછીની ઝડપ u છે અને દરેક બૉલનું દળ m છે. x અને y-અક્ષોને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પસંદ કરો અને દરેક કિસ્સામાં બૉલના વેગમાનમાં ફેરફાર વિચારો.

કિસ્સો (a)

$(p_x)_{પ્રારંભિક} = \text{m u} \quad (p_y)_{પ્રારંભિક} = 0$

$(p_x)_{અંતિમ} = -\text{m u} \quad (p_y)_{અંતિમ} = 0$

આઘાત એટલે વેગમાન સદિશનો ફેરફાર. આથી,

આઘાતનો x ઘટક $= -2\ m\ u$

આઘાતનો y ઘટક $= 0$

આઘાત અને બળ એક જ દિશામાં હોય છે. આ પરથી સ્પષ્ટ છે કે દીવાલ વડે બૉલ પર લાગતું બળ, દીવાલને લંબ ઋણ x દિશામાં છે. ગતિના ત્રીજા નિયમ પરથી દીવાલ પર બૉલ વડે લાગતું બળ, દીવાલને લંબ ધન x-દિશામાં છે. બળનું માન અત્રે મેળવી શકાશે નહિ કારણ કે આ પ્રશ્નમાં સંઘાત માટે લાગતો નાનો સમયગાળો આપેલ નથી.

કિસ્સો (b)

$(p_x)_{પ્રારંભિક} = m\ u \cos 30°,$

$(p_y)_{પ્રારંભિક} = -\ \text{m u} \sin 30°$

$(p_x)_{અંતિમ} = -\ m\ u \cos 30°,$

$(p_y)_{અંતિમ} = -\ m\ u \sin 30°$

નોંધો કે, સંઘાત બાદ p_xની નિશાની બદલાય છે પણ p_yની બદલાતી નથી. આથી,

આઘાતનો x-ઘટક $= -2\ m\ u \cos 30°$

આઘાતનો y-ઘટક $= 0$

આઘાત (અને બળ)ની દિશા (a)માં હતી તે જ છે અને તે દીવાલને લંબ ઋણ x-દિશામાં છે. અગાઉની જેમ જ ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ પરથી દીવાલ પર બૉલ વડે લાગતું બળ દીવાલને લંબ ધન x-દિશામાં છે.

(ii) (a) અને (b) કિસ્સાઓમાં બૉલ પર લાગતા આઘાતના માનનો ગુણોત્તર

$2\ m\ u\ /\ (2\ m\ u \cos 30°) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$ ◀

5.7 વેગમાનનું સંરક્ષણ (CONSERVATION OF MOMENTUM)

ગતિનો બીજો અને ત્રીજો નિયમ એક અગત્યના પરિણામ તરફ દોરી જાય છે : વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ. એક જાણીતું ઉદાહરણ લઈએ. એક ગનમાંથી બુલિટ છોડવામાં આવે છે. જો ગન વડે બુલિટ પર લાગતું બળ **F** હોય, તો ગતિના ત્રીજા નિયમ મુજબ બુલિટ વડે ગન પર લાગતું બળ − **F** છે. આ બે બળો એક સમાન સમયગાળા Δt માટે લાગે છે. ગતિના બીજા નિયમ મુજબ, $\mathbf{F}\ \Delta t$ એ બુલિટના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર છે અને $-\ \mathbf{F}\ \Delta t$ એ ગનના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર છે. પ્રારંભમાં બંને સ્થિર હોવાથી વેગમાનનો ફેરફાર તે દરેકના અંતિમ વેગમાન જેટલો હશે. આમ જો બુલિટને છોડ્યા બાદ બુલિટનું વેગમાન $\mathbf{P}_b$ હોય અને રિકોઈલ (પાછી ફેંકાતી) ગનનું વેગમાન $\mathbf{P}_g$ હોય તો $\mathbf{P}_g = -\ \mathbf{P}_b$ એટલે કે $\mathbf{P}_g + \mathbf{P}_b = 0$, એટલે કે (બુલિટ + ગન)ના તંત્રના કુલ વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે.

આમ, અલગ કરેલા તંત્ર (એટલે કે બાહ્ય બળ ન લાગતું હોય તેવું તંત્ર)માં કણોની દરેક જોડમાં પરસ્પર લાગતાં બળો વ્યક્તિગત કણોના વેગમાનમાં ફેરફાર કરી શકે છે પરંતુ પરસ્પર લાગતાં બળો સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી, દરેક જોડમાં વેગમાનના ફેરફાર એકબીજાને નાબૂદ કરે અને કુલ વેગમાન અફર રહે છે. આ હકીકતને **વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ** કહે છે :

આંતરક્રિયા કરતા કણોના અલગ કરેલા તંત્રનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે.

વેગમાન સંરક્ષણના નિયમના ઉપયોગનું એક અગત્યનું ઉદાહરણ બે પદાર્થો વચ્ચેનો સંઘાત (અથડામણ) છે. બે પદાર્થો A અને Bને ધ્યાનમાં લો. તેમનાં પ્રારંભિક વેગમાન $\mathbf{P}_A$ અને $\mathbf{P}_B$ છે. આ બે પદાર્થો અથડાઈને છૂટા પડે છે અને તેમના અંતિમ વેગમાન અનુક્રમે $\mathbf{P'}_A$ અને $\mathbf{P'}_B$ છે. ગતિના બીજા નિયમ પરથી,

$$\mathbf{F}_{AB}\Delta t = \mathbf{P'}_A - \mathbf{P}_A \text{ અને}$$

$$\mathbf{F}_{BA}\Delta t = \mathbf{P'}_B - \mathbf{P}_B$$

(જ્યાં આપણે બંને બળો માટે એક સમાન સમયગાળો લીધેલ છે જે બે પદાર્થો માટે સંપર્કનો સમય છે.)

ગતિના ત્રીજા નિયમ પરથી,

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \text{ હોવાથી}$$

$$\mathbf{P'}_A - \mathbf{P}_A = -(\mathbf{P'}_B - \mathbf{P}_B)$$

$$\text{એટલે કે } \mathbf{P'}_A + \mathbf{P'}_B = \mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B \qquad (5.9)$$

જે દર્શાવે છે કે અલગ કરેલા તંત્રનું કુલ અંતિમ વેગમાન તેના કુલ પ્રારંભિક વેગમાન જેટલું હોય છે. ધ્યાન રાખજો કે, સંઘાત સ્થિતિસ્થાપક હોય કે અસ્થિતિસ્થાપક પણ આ બાબત બંનેમાં સત્ય છે. સ્થિતિસ્થાપક સંઘાતમાં એક બીજી શરત એ છે કે, તંત્રની કુલ પ્રારંભિક ગતિઊર્જા તેની કુલ અંતિમ ગતિઊર્જા જેટલી હોય છે (જુઓ પ્રકરણ 6).

5.8 કણનું સંતુલન (EQUILIBRIUM OF A PARTICLE)

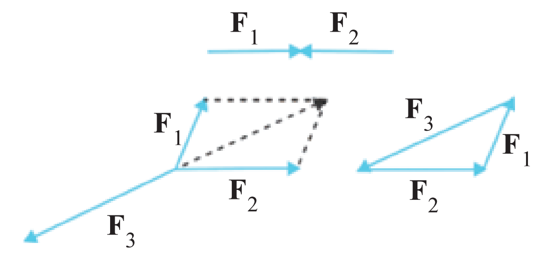
યંત્રશાસ્ત્રમાં કણનું સંતુલન એવી સ્થિતિનો નિર્દેશ કરે છે કે જેમાં કણ પરનું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય છે.* ગતિના પહેલા નિયમ મુજબ આનો અર્થ એ થાય કે કણ કાં તો સ્થિર છે અથવા નિયમિત ગતિમાં છે.

જો બે બળો $\mathbf{F}_1$ અને $\mathbf{F}_2$ એક કણ પર એકસાથે લાગતાં હોય, તો સંતુલન માટે જરૂરી છે કે

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \qquad (5.10)$$

એટલે કે, કણ પરનાં બે બળો સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાં જ જોઈએ. એક બિંદુગામી એવાં ત્રણ બળો $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ અને $\mathbf{F}_3$ની અસર હેઠળ સંતુલન માટે એ જરૂરી છે કે આ ત્રણ બળોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય થાય.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0 \qquad (5.11)$$



આકૃતિ 5.7 એક બિંદુગામી બળોની અસર હેઠળ સંતુલન

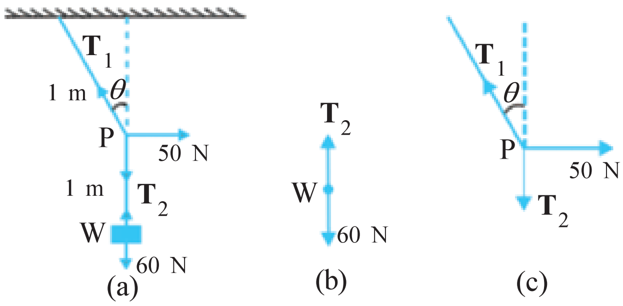
બીજા શબ્દોમાં, બળોના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમ પરથી મળતાં કોઈ પણ બે બળો $\mathbf{F}_1$ અને $\mathbf{F}_2$ નું પરિણામી બળ ત્રીજા બળ $\mathbf{F}_3$ના જેટલું અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. આકૃતિ 5.7માં દર્શાવ્યા મુજબ, સંતુલનમાં રહેલાં ત્રણ બળોને ત્રિકોણની બાજુઓ વડે દર્શાવી શકાય છે કે જેમાં સદિશોને દર્શાવતા તીરો ક્રમશઃ એક પૂરો થાય ત્યાંથી બીજો શરૂ થાય એમ લીધેલ છે. વ્યાપક રૂપે આ પરિણામ ગમે તે સંખ્યાનાં બળો માટે લાગુ પાડી શકાય છે. $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, --. $\mathbf{F}_n$ બળોની અસર નીચે કણ સંતુલનમાં રહે છે, જો તે બળોને n-બાજુઓ-વાળા બંધ બહુકોણ વડે દર્શાવી શકાય કે જેમાં એક તીર પૂરું થાય ત્યાંથી બીજું તીર શરૂ થાય એમ દર્શાવેલ હોય.

સમીકરણ (5.11) પરથી

$$\mathbf{F}_{1x} + \mathbf{F}_{2x} + \mathbf{F}_{3x} = 0$$
$$\mathbf{F}_{1y} + \mathbf{F}_{2y} + \mathbf{F}_{3y} = 0$$
$$\mathbf{F}_{1z} + \mathbf{F}_{2z} + \mathbf{F}_{3z} = 0 \qquad (5.12)$$

જ્યાં $\mathbf{F}_{1x}$, $\mathbf{F}_{1y}$ અને $\mathbf{F}_{1z}$, બળ $\mathbf{F}_1$ ના અનુક્રમે x, y અને z દિશામાંનાં ઘટકો છે.

> *ઉદાહરણ 5.6* આકૃતિ 5.8 જુઓ. 6 kg દળને છતથી 2 m લંબાઈના દોરડા વડે લટકાવેલ છે. દોરડાના મધ્યબિંદુ (P) એ 50 Nનું એક બળ સમક્ષિતિજ દિશામાં દર્શાવ્યા મુજબ લગાડવામાં આવે છે. સંતુલન સ્થિતિમાં દોરડું ઊર્ધ્વ દિશા સાથે કેટલો કોણ બનાવશે ? ($g = 10 \text{ m s}^{-2}$ લો). દોરડાનું દળ અવગણો.



આકૃતિ 5.8

* *પદાર્થના સંતુલન માટે માત્ર સ્થાનાંતરિત ગતિમાંનું સંતુલન (ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય) જરૂરી નથી પણ ચાકગતિ માટેનું સંતુલન (ચોખ્ખું બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય) પણ જરૂરી છે, જે આપણે પ્રકરણ 7માં જોઈશું.*

ઉકેલ આકૃતિ 5.8 (b) અને 5.8 (c)ને free-body diagrams કહે છે. આકૃતિ 5.8 (b) એ Wનો free-body diagram છે અને આકૃતિ 5.8 (c) એ બિંદુ Pનો free-body diagram છે.

વજન Wનું સંતુલન વિચારો. સ્પષ્ટ છે કે, $T_2 = 6 \times 10 = 60$ N.

બિંદુ Pનું સંતુલન ત્રણ બળો-તણાવ T_1, તણાવ T_2 અને સમક્ષિતિજ બળ 50 Nની અસર હેઠળ વિચારો. પરિણામી બળનો સમક્ષિતિજ ઘટક શૂન્ય બનવો જોઈએ અને ઊર્ધ્વઘટક પણ અલગથી શૂન્ય બનવો જોઈએ.

$$T_1 \cos \theta = T_2 = 60 \text{ N}$$

$$T_1 \sin \theta = 50 \text{ N}$$

આ પરથી,

$$\tan\theta = \frac{5}{6} \text{ અથવા } \theta = \tan^{-1} \frac{5}{6} = 40^\circ$$

અત્રે, એ નોંધો કે જવાબ (દળરહિત ધારેલા) દોરડાની લંબાઈ પર આધારિત નથી કે સમક્ષિતિજ બળ કયા બિંદુએ લગાડ્યું છે તે બિંદુ પર પણ આધારિત નથી. ◀

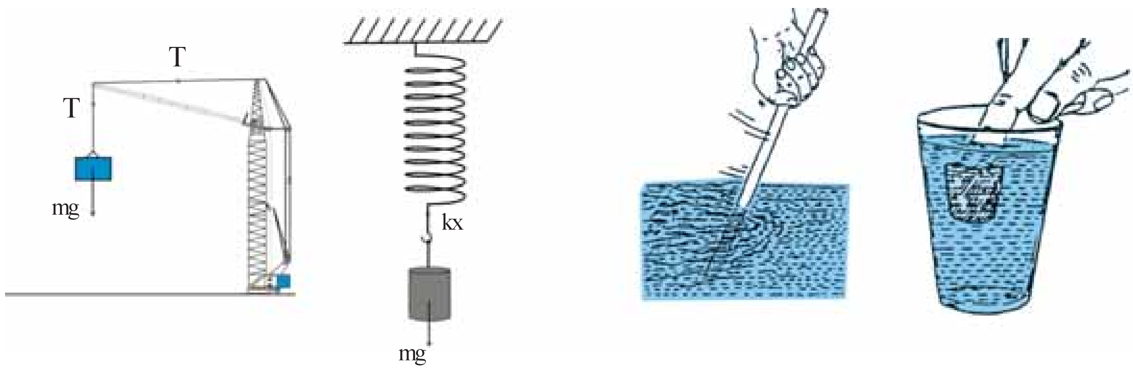
5.9 યંત્રશાસ્ત્રમાં સામાન્ય બળો (COMMON FORCES IN MECHANICS)

યંત્રશાસ્ત્રમાં આપણને જુદાં જુદાં પ્રકારનાં બળો જોવા મળે છે. જોકે ગુરુત્વબળ તો બધે વ્યાપ્ત છે. પૃથ્વી પરનો દરેક પદાર્થ પૃથ્વીના ગુરુત્વબળનો અનુભવ કરે છે. આકાશી પદાર્થોની ગતિ પણ ગુરુત્વબળ વડે નિયંત્રિત થાય છે. ગુરુત્વબળ દૂરથી પણ, વચ્ચે કોઈ માધ્યમની જરૂર સિવાય, લાગે છે.

યંત્રશાસ્ત્રમાં જોવા મળતાં બીજાં બધાં સામાન્ય બળો સંપર્ક બળો* છે. નામ જ સૂચવે છે કે સંપર્ક બળ એક ઘન કે પ્રવાહી પદાર્થના બીજા પદાર્થના સંપર્કને લીધે ઉદ્ભવે છે. જ્યારે પદાર્થો સંપર્કમાં હોય છે. (દા. ત. ટેબલ પર સ્થિર રહેલું પુસ્તક, સળિયા વડે જોડાયેલું દૃઢ પદાર્થોનું તંત્ર, મિજાગરા અને અન્ય પ્રકારના ટેકા), ગતિના ત્રીજા નિયમનું પાલન કરતા (પદાર્થોની દરેક જોડ માટે) પરસ્પર સંપર્ક બળો લાગતા હોય છે. સંપર્ક બળના, સંપર્ક સપાટીને લંબ ઘટકને લંબ પ્રતિક્રિયા કહે છે. સંપર્ક બળના સંપર્ક સપાટીને સમાંતર ઘટકને ઘર્ષણ કહે છે. જ્યારે ઘન પદાર્થો તરલ સાથે સંપર્કમાં હોય ત્યારે પણ સંપર્ક બળો લાગે છે. દાખલા તરીકે, તરલમાં ડૂબેલા ઘન પદાર્થ પર ઉપર તરફનું ઉત્પ્લાવક બળ લાગે છે જે તેણે ખસેડેલા તરલના વજન જેટલું હોય છે. શ્યાનતા બળ, હવાનો અવરોધ વગેરે પણ સંપર્ક બળનાં ઉદાહરણ છે. (આકૃતિ 5.9)

બીજાં બે સામાન્ય બળોમાં એક દોરીમાં ઉદ્ભવતું તણાવ અને બીજું સ્પ્રિંગથી ઉદ્ભવતું બળ છે. જ્યારે કોઈ સ્પ્રિંગને બાહ્ય બળ વડે દબાવવામાં કે વિસ્તારવામાં આવે છે ત્યારે પુનઃસ્થાપક બળ ઉદ્ભવે છે. આ બળ સામાન્ય રીતે (નાના સ્થાનાંતર માટે) સંકોચન અથવા લંબાઈ-વધારાને સમપ્રમાણમાં હોય છે. સ્પ્રિંગમાં બળ F ને $F = -kx$ તરીકે લખવામાં આવે છે જ્યાં x સ્થાનાંતર છે અને k બળ અચળાંક છે. ઋણ ચિહ્ન દર્શાવે છે કે, આ બળ ખેંચાયા વગરની સ્થિતિમાંથી થયેલા સ્થાનાંતરની વિરુદ્ધ દિશામાં છે. અતન્ય (inextensible) દોરી માટે બળ-અચળાંક ખૂબ મોટો હોય છે. દોરીમાં ઉદ્ભવતા પુનઃસ્થાપક બળને તણાવ કહે છે. એક પ્રણાલિકા મુજબ સમગ્ર દોરીમાં બધે એક અચળ તણાવ T ગણવામાં આવે છે. આ પૂર્વધારણા અવગણ્ય દળ ધરાવતી દોરી માટે સત્ય ઠરે છે.

પ્રકરણ 1માં, આપણે જાણ્યું કે કુદરતમાં ચાર મૂળભૂત પ્રકારનાં બળ છે. આમાંથી નિર્બળ (weak) અને પ્રબળ (strong) બળો, (અંતરના માપક્રમના) એવા વિસ્તારમાં લાગે છે કે અહીં આપણે તેમની ચિંતા કરીશું નહિ. યંત્રશાસ્ત્રના પરિપ્રેક્ષમાં માત્ર ગુરુત્વબળો અને વિદ્યુતબળો જ પ્રસ્તુત છે. ઉપર જણાવ્યાં તેવાં યંત્રશાસ્ત્રનાં જુદાં જુદાં સંપર્ક બળો મૂળભૂત રીતે વિદ્યુતબળોમાંથી ઉદ્ભવે છે. યંત્રશાસ્ત્રમાં આપણે વિદ્યુતભાર રહિત



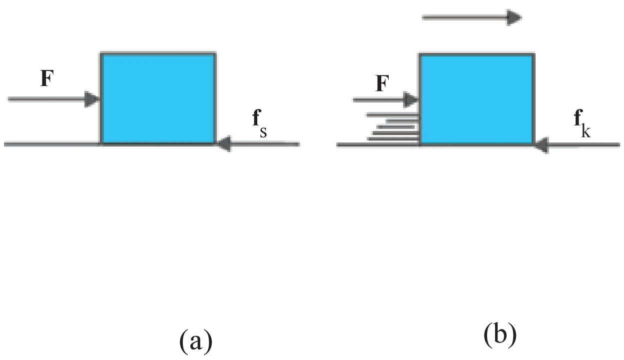
આકૃતિ 5.9 યંત્રશાસ્ત્રમાં સંપર્ક બળોનાં કેટલાંક ઉદાહરણો

* *સરળતા ખાતર આપણે વિદ્યુતભારિત અને ચુંબકીય પદાર્થો અત્રે લક્ષમાં લીધેલ નથી. ગુરુત્વાકર્ષણ ઉપરાંત તેમને માટે વિદ્યુત અને ચુંબકીય બિનસંપર્ક બળો લાગતાં હોય છે.*

અને અચુંબકીય પદાર્થોની વાત કરતા હોવાથી એ બાબત કદાચ આશ્ચર્યજનક લાગે. સૂક્ષ્મ સ્તરે બધા પદાર્થો વિદ્યુતભાર ધરાવતાં ઘટકો (ન્યુક્લિયસ અને ઇલેક્ટ્રૉન્સ)નાં બનેલાં છે અને પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપકતા, અણુઓના સંઘાતો વગેરેથી ઉદ્‌ભવતા સંપર્ક બળોને વિદ્યુતભારિત પદાર્થો વચ્ચેનાં વિદ્યુતબળના રૂપમાં જોઈ શકાય છે. સૂક્ષ્મ સ્તરે આ બળોનું વિગતવાર ઉદ્‌ગમ જોકે જટિલ છે અને સ્થૂળ પદાર્થોના સ્તરે યંત્રશાસ્ત્રના પ્રશ્નો ઉકેલવામાં ઉપયોગી નથી. આથી પ્રાયોગિક રીતે મળતા તેમનાં વિશિષ્ટ લક્ષણો સાથે તેમને જુદા પ્રકારનાં બળો તરીકે ગણેલ છે.

5.9.1 ઘર્ષણ (Friction)

વળી પાછા, આપણે સમક્ષિતિજ ટેબલ પર સ્થિર રહેલા m દળના પદાર્થનો વિચાર કરીએ. ગુરુત્વાકર્ષણ બળ (mg) લંબ પ્રતિક્રિયા બળ N દ્વારા નાબૂદ થાય છે. હવે ધારો કે પદાર્થ પર બળ F સમક્ષિતિજ દિશામાં લગાડવામાં આવે છે. અનુભવ પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે, લગાડેલું નાનું બળ કદાચ પદાર્થને ખસેડવા માટે પૂરતું ન પણ હોય. પણ પદાર્થ પર આ લગાડેલું બળ એકલું જ લાગતું હોત તો તે ગમે તેટલું નાનું હોય તોપણ પદાર્થ F/m જેટલા પ્રવેગથી ખસતો જ હોત. આથી સ્પષ્ટ છે કે પદાર્થ એટલા માટે સ્થિર રહે છે કે સમક્ષિતિજ દિશામાં બીજું કોઈક બળ લાગવા માંડે છે અને આપણે લગાડેલા બળ Fનો વિરોધ કરે છે જેથી પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું બળ શૂન્ય બને છે. પદાર્થની ટેબલ સાથેની સંપર્ક સપાટીને સમાંતર દિશામાં લાગતા આ બળ f_sને ઘર્ષણબળ અથવા સાદી રીતે ઘર્ષણ કહે છે. (આકૃતિ 5.10 (a)). અહીં



આકૃતિ 5.10 *સ્થિત અને ગતિક ઘર્ષણ : (a) પદાર્થની અપેક્ષિત ગતિ સ્થિત ઘર્ષણ દ્વારા અવરોધાય છે. જ્યારે બાહ્ય બળ મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણથી વધી જાય છે ત્યારે પદાર્થ ગતિની શરૂઆત કરે છે. (b) એકવાર પદાર્થ ગતિમાં આવે એટલે તેના પર ગતિક ઘર્ષણબળ લાગે છે. જે સંપર્કમાં રહેલી બે સપાટીઓની સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરે છે. ગતિકઘર્ષણ સામાન્યતઃ મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણ કરતાં ઓછું હોય છે.*

s સ્થિત (static) ઘર્ષણ માટે વાપરેલ છે જેથી તેને હવે પછી આવનારા ગતિક ઘર્ષણ f_k (આકૃતિ 5.10 (b)) થી જુદું પાડી શકાય. એ નોંધનીય છે કે સ્થિત ઘર્ષણ પોતાની મેળે અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી. જ્યારે કોઈ બળ લગાડવામાં આવતું નથી ત્યારે કોઈ સ્થિત ઘર્ષણ લાગતું નથી. જ્યારે બળ લગાડવામાં આવે ત્યારે જ તે (ઘર્ષણ) લાગવા માંડે છે. જેમ લગાડેલું બળ F વધારીએ તેમ f_s પણ વધતું જાય છે (અમુક હદ સુધી) અને લગાડેલા બળ જેટલું જ વિરુદ્ધ દિશામાં રહીને પદાર્થને સ્થિર રાખે છે. તેથી તેને **સ્થિત ઘર્ષણ** કહે છે. સ્થિત ઘર્ષણ **અપેક્ષિત ગતિ**નો વિરોધ કરે છે. અપેક્ષિત ગતિ એટલે જો ઘર્ષણ ન હોત તો લગાડેલા બળની અસર નીચે જે ગતિ થાત (પણ વાસ્તવમાં થતી નથી) તે.

અનુભવ પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે, લગાડેલું બળ અમુક સીમાથી વધે તો પદાર્થ ગતિ કરવા (ખસવા) લાગે છે. પ્રયોગોથી જણાયું છે કે સ્થિત ઘર્ષણનું સીમાંત મૂલ્ય $(f_s)_{max}$ સંપર્ક ક્ષેત્રફળ પર આધારિત નથી અને લગભગ

$$(f_s)_{max} = \mu_s N \tag{5.13}$$

મુજબ લંબ બળ સાથે બદલાય છે, જ્યાં μ_s એ સપ્રમાણતાનો અચળાંક છે, જે સંપર્કમાં રહેલી સપાટીઓના માત્ર પ્રકાર પર આધાર રાખે છે. અચળાંક μ_sને સ્થિત ઘર્ષણાંક કહે છે. આમ સ્થિત ઘર્ષણનો નિયમ

$$f_s \le \mu_s N \tag{5.14}$$

તરીકે લખી શકાય છે. જો લગાડેલું બળ F, $(f_s)_{max}$થી વધી જાય તો પદાર્થ સપાટી પર ખસવા લાગે છે. પ્રયોગો પરથી જણાય છે કે સાપેક્ષ ગતિ શરૂ થાય પછી ઘર્ષણબળ, મહત્તમ ઘર્ષણબળ $(f_s)_{max}$થી ઘટવા લાગે છે. સંપર્કમાં રહેલી સપાટીઓની સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરતા ઘર્ષણબળને ગતિક ઘર્ષણ કહે છે અને તેને f_k વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સ્થિત ઘર્ષણની જેમજ ગતિક ઘર્ષણ પણ સંપર્ક ક્ષેત્રફળથી સ્વતંત્ર છે. ઉપરાંત, તે વેગથી પણ લગભગ સ્વતંત્ર છે. તે સ્થિત ઘર્ષણના નિયમ જેવા જ નિયમનું પાલન કરે છે.

$$f_k = \mu_k \mathrm{N} \tag{5.15}$$

જ્યાં μ_k એ ગતિક ઘર્ષણાંક છે, જે માત્ર સંપર્ક સપાટીઓ પર આધારિત છે. ઉપર જણાવ્યું તેમ, પ્રયોગો દર્શાવે છે કે μ_kનું મૂલ્ય μ_s કરતાં ઓછું હોય છે. એકવાર સાપેક્ષ ગતિ શરૂ થાય પછી, ગતિના બીજા નિયમ મુજબ પદાર્થનો પ્રવેગ $(\mathrm{F} - f_k)/\mathrm{m}$ હોય છે. અચળ વેગથી ગતિ કરતા પદાર્થ માટે $\mathrm{F} = f_k$. જો પદાર્થ પર લગાડેલું બળ દૂર કરવામાં આવે તો તેનો પ્રવેગ $-f_k/\mathrm{m}$ થાય છે અને છેવટે તે અટકી જાય છે.

ઉપર દર્શાવેલા ઘર્ષણના નિયમો ગુરુત્વાકર્ષણ, વિદ્યુત કે ચુંબકીય બળોના નિયમો જેવા મૂળભૂત પ્રકારના નથી. તેઓ આનુભવિક સંબંધો છે અને માત્ર આશરા પડતા સાચા છે.

છતાં યંત્રશાસ્ત્રમાં વ્યાવહારિક ગણતરીઓમાં તેઓ ઘણા ઉપયોગી છે.

આમ, જ્યારે બે પદાર્થો સંપર્કમાં હોય ત્યારે દરેક પદાર્થ બીજાને લીધે સંપર્કબળ અનુભવે છે. વ્યાખ્યા મુજબ, ઘર્ષણ એ સંપર્કબળનો સંપર્ક સપાટીઓને સમાંતર ઘટક છે જે, બે સપાટીઓ વચ્ચેની અપેક્ષિત કે વાસ્તવિક સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરે છે. બરાબર નોંધો કે ઘર્ષણ બળ ગતિનો નહિ પણ **સાપેક્ષ ગતિ**નો વિરોધ કરે છે. એક પ્રવેગિત થતી ટ્રેનના કંપાર્ટમેન્ટમાં સ્થિર રહેલ એક બૉક્સનો વિચાર કરો. જો બૉક્સ ટ્રેનની સાપેક્ષે સ્થિર હોય તો ટ્રેન સાથે જ તે પણ પ્રવેગિત થાય છે. બૉક્સનો પ્રવેગ કયાં બળોથી થાય છે ? સ્પષ્ટ છે કે, સમક્ષિતિજ દિશામાં ઘર્ષણબળ જ એકમાત્ર વિચારણીય બળ છે. જો ઘર્ષણ ન હોત તો ટ્રેનનું તળિયું ખસવા માંડત અને બૉક્સ તો તેના જડત્વના ગુણધર્મને લીધે ત્યાંનું ત્યાં જ રહેત (અને ટ્રેનના પાછળના ભાગ સાથે અથડાત).

આ અપેક્ષિત સાપેક્ષ ગતિ, સ્થિત ઘર્ષણ f_s વડે અવરોધાય છે. સ્થિત ઘર્ષણ બૉક્સને ટ્રેનના જેટલો જ પ્રવેગ આપે છે અને ટ્રેનની સાપેક્ષે તેને સ્થિર રાખે છે.

> ▶ *ઉદાહરણ 5.7* બૉક્સ અને ટ્રેનના તળિયા વચ્ચેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક 0.15 હોય, તો ટ્રેનના તળિયા પર રહેલ બૉક્સ સ્થિર રહે તે માટે ટ્રેનનો મહત્તમ પ્રવેગ શોધો.

ઉકેલ બૉક્સનો પ્રવેગ સ્થિત ઘર્ષણને લીધે હોવાથી

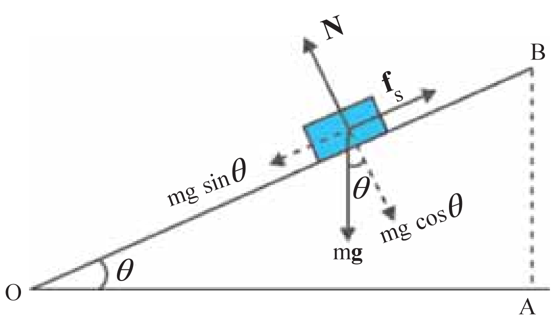
$$ma = f_s \le \mu_s N = \mu_s mg$$

એટલે કે $a \le \mu_s g$

$$\therefore a_{max} = \mu_s g = 0.15 \times 10 \text{ m s}^{-2}$$

$$= 1.5 \text{ m s}^{-2}$$ ◀

> ▶ *ઉદાહરણ 5.8* આકૃતિ 5.11 જુઓ. 4 kg દળ એક સમક્ષિતિજ સમતલ પર રહેલ છે. સમતલને સમક્ષિતિજ સાથે ક્રમશઃ ઢળતું કરતાં $\theta = 15°$ એ તે દળ ખસવાની શરૂઆત કરે છે. બ્લૉક અને સપાટી વચ્ચેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક કેટલો હશે ?



આકૃતિ 5.11

ઉકેલ ઢાળ પર સ્થિર રહેલા દળ m પર (i) વજન mg અધો દિશામાં લાગે (ii) સમતલ વડે બ્લૉક પર લંબ બળ N લાગે (iii) અપેક્ષિત ગતિનો વિરોધ કરતું સ્થિત ઘર્ષણબળ f_s લાગે. સંતુલનમાં આ બધાં બળોનું પરિણામી બળ શૂન્ય બનવું જોઈએ. દર્શાવેલી બે દિશાઓમાં mgનાં ઘટકો લેતાં,

$$mg \sin\theta = f_s, \; mg\cos\theta = N$$

જેમ જેમ θ વધે છે તેમ તેમ સ્વનિયમન કરતું ઘર્ષણબળ વધે છે અને $\theta = \theta_{max}$ માટે f_s તેનું મહત્તમ મૂલ્ય પ્રાપ્ત કરે છે જ્યાં $(f_s)_{max} = \mu_s N$

આથી, $\tan\theta_{max} = \mu_s$ અથવા $\theta_{max} = \tan^{-1}\mu_s$

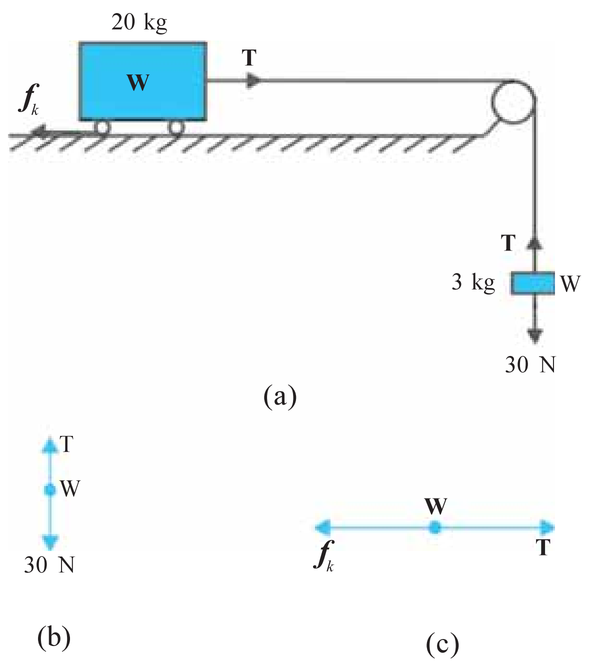
જ્યારે θ, θ_{max} કરતાં સહેજ જ વધે કે તરત બ્લૉક પર સહેજ ચોખ્ખું બળ લાગે અને તે ખસવા લાગે. એ નોંધો કે θ_{max} માત્ર μ_s પર આધારિત છે પણ બ્લૉકના દળ પર આધારિત નથી.

$\theta_{max} = 15°$ માટે

$$\mu_s = \tan 15°$$

$$= 0.27$$ ◀

> ▶ *ઉદાહરણ 5.9* આકૃતિ 5.12 (a)માં દર્શાવેલ ટ્રૉલી અને સપાટી વચ્ચેનો ગતિક ઘર્ષણાંક 0.04 હોય, તો બ્લૉક અને ટ્રૉલીના તંત્રનો પ્રવેગ કેટલો હશે ? દોરીમાં કેટલું તણાવ હશે ? (g = 10 m s^{-2} લો). દોરીનું દળ અવગણો.



આકૃતિ 5.12

ઉકેલ દોરી ખેંચાણ વગરની અને ગરગડી લીસી હોવાથી, 3 kg બ્લૉક અને 20 kg ટ્રૉલી બંનેના પ્રવેગનું મૂલ્ય એક સમાન હશે. બ્લૉક માટે ગતિનો બીજો નિયમ લગાડતાં [આકૃતિ 5.12(b)].

$30 - T = 3a$

ટ્રૉલી માટે ગતિનો બીજો નિયમ લગાડતાં [આકૃતિ 5.12(c)]

$T - f_k = 20\ a.$

હવે, $f_k = \mu_k\ N.$

અહીં, $\mu_k = 0.04.$

$N = 20 \times 10$

$= 200\ N$

આમ, ટ્રૉલી માટે ગતિનું સમીકરણ

$T - 0.04 \times 200 = 20\ a$ અથવા $T - 8 = 20\ a$

આ સમીકરણો પરથી $a = \frac{22}{23}\ m\ s^{-2} = 0.96\ m\ s^{-2}$

અને $T = 27.1$ N. ◀

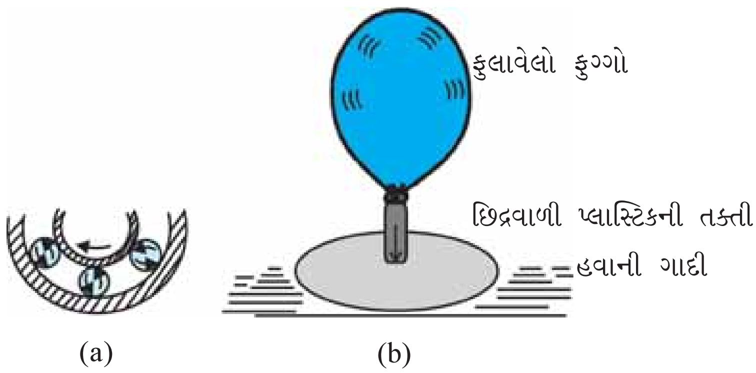
રોલિંગ ઘર્ષણ (*Rolling friction*)

એક વલય અથવા ગોળા જેવો પદાર્થ જ્યારે સમક્ષિતિજ સમતલ પર સરક્યા વિના ગબડે છે ત્યારે સૈદ્ધાંતિક રીતે તો, તે કોઈ ઘર્ષણનો અનુભવ કરે નહિ. દરેક ક્ષણે પદાર્થ અને સમતલ વચ્ચે માત્ર એક સંપર્કબિંદુ હોય છે અને આ બિંદુને સમતલની સાપેક્ષે કોઈ ગતિ હોતી નથી. આવી આદર્શ પરિસ્થિતિમાં, ગતિક અને સ્થિત ઘર્ષણ શૂન્ય હોય છે અને પદાર્થે અચળ વેગથી ગબડવાનું ચાલુ રાખવું જોઈએ. વ્યવહારમાં આપણને ખબર છે કે આવું નહિ થાય અને ગતિને કંઈક અવરોધ (રોલિંગ ઘર્ષણ) નડે છે, એટલે કે પદાર્થને ગબડતો રાખવા માટે કંઈક બળ લગાડવું પડે છે. આપેલ વજન માટે રોલિંગ ઘર્ષણ, સ્થિત અને ગતિક ઘર્ષણ કરતાં ઘણા ઓછા માપનું (બે કે ત્રણ ક્રમનું નાનું – એટલે 10^2 કે 10^3મા ભાગનું) હોય છે. આ કારણથી ચક્રની શોધ માનવ-ઇતિહાસમાં એક મહત્ત્વનું સીમાચિહ્ન છે.

રોલિંગ ઘર્ષણનું ઉદ્‌ગમ પણ જટિલ છે, જોકે તે સ્થિત અને ગતિક ઘર્ષણના ઉદ્‌ગમ કરતાં થોડું જુદું છે. રોલિંગ દરમિયાન સંપર્કમાં રહેલી સપાટીઓ સહેજ વિકૃત થાય છે અને તેથી પદાર્થનું નિશ્ચિત ક્ષેત્રફળ (બિંદુ નહિ) સપાટી સાથે સંપર્કમાં રહે છે. આની પરિણામી અસર એવી થાય છે કે, સંપર્કબળનો સપાટીને સમાંતર ઘટક ગતિનો વિરોધ કરે છે.

આપણે ઘણી વાર ઘર્ષણને કંઈક અનિચ્છનીય ગણીએ છીએ. જુદા જુદા ગતિશીલ ભાગો ધરાવતા યંત્રમાં અને તેના જેવા ઘણા સંજોગોમાં ઘર્ષણ નકારાત્મક ભાગ ભજવે છે. તે સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરે છે અને તે રીતે ઊર્જાનો ઉષ્મા વગેરે રૂપે વ્યય કરે છે. યંત્રમાં ગતિક ઘર્ષણ ઘટાડવા માટે ઊંજણ (Lubricants) વપરાય છે. બીજો રસ્તો યંત્રના ગતિશીલ ભાગો વચ્ચે બૉલ-બેરિંગ્સ વાપરવાનો છે. (આકૃતિ 5.13(a)). બૉલ-બેરિંગ્સ અને તેના સંપર્કમાંની સપાટીઓ વચ્ચેનું રોલિંગ ઘર્ષણ ઘણું ઓછું હોવાથી ઊર્જાનો વ્યય ઘટાડી શકાય છે. ઘર્ષણ ઘટાડવાનો હજી એક બીજો અસરકારક રસ્તો, સાપેક્ષ ગતિમાં હોય તેવી ઘન સપાટીઓ વચ્ચે હવાની પાતળી ગાદી જાળવી રાખવાનો છે. [આકૃતિ 5.13(b)]

જોકે કેટલીક વ્યાવહારિક પરિસ્થિતિઓમાં ઘર્ષણ અત્યંત જરૂરી છે. ગતિક ઘર્ષણ ઊર્જાનો વ્યય કરે છે પણ તે સાપેક્ષ ગતિને ઝડપથી અટકાવવા માટે જરૂરી છે. તેનો ઉપયોગ યંત્રોમાં અને ઑટોમોબાઇલ્સમાં બ્રેક દ્વારા થાય છે. તે જ રીતે સ્થિત ઘર્ષણ રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગી છે. આપણે ઘર્ષણને લીધે જ ચાલી શકીએ છીએ. અત્યંત લીસી સડક પર કાર માટે ગતિ કરવાનું અશક્ય છે. સામાન્ય સડક પર ટાયર અને સડક વચ્ચેનું ઘર્ષણ કારને પ્રવેગ આપવા માટે જરૂરી બાહ્ય બળ પૂરું પાડે છે.



આકૃતિ 5.13 *ઘર્ષણ ઘટાડવાના કેટલાક રસ્તા* (a) *યંત્રના ગતિશીલ ભાગો વચ્ચે મૂકેલ બૉલ-બેરિંગ્સ* (b) *સાપેક્ષ ગતિમાં રહેલ સપાટીઓ વચ્ચે સંકોચિત હવાની ગાદી*

5.10 વર્તુળાકાર ગતિ (CIRCULAR MOTION)

આપણે પ્રકરણ 4માં જોયું કે R ત્રિજ્યાના વર્તુળ પર નિયમિત ઝડપ υથી ગતિ કરતા પદાર્થનો પ્રવેગ υ^2/R છે અને તે કેન્દ્ર તરફની દિશામાં હોય છે. ગતિના બીજા નિયમ મુજબ આટલો પ્રવેગ પૂરું પાડતું બળ

$$f_c = \frac{m\upsilon^2}{R} \qquad (5.16)$$

છે, જ્યાં m પદાર્થનું દળ છે. કેન્દ્ર તરફની દિશામાં લાગતા આ બળને કેન્દ્રગામી બળ કહે છે. દોરી વડે વર્તુળમાં ઘુમાવાતા પથ્થર માટે કેન્દ્રગામી બળ દોરીમાંના તણાવ દ્વારા પૂરું પાડવામાં આવે છે. સૂર્યને લીધે ગ્રહ પર લાગતું ગુરુત્વ બળ એ સૂર્યની આસપાસ ગ્રહની ગતિ માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ તરીકે વર્તે વર્તુળથી દૂરની તરફ લઈ જનારી અપેક્ષિત ગતિનો વિરોધ કરે છે. સમીકરણો (5.14) અને (5.16) પરથી,

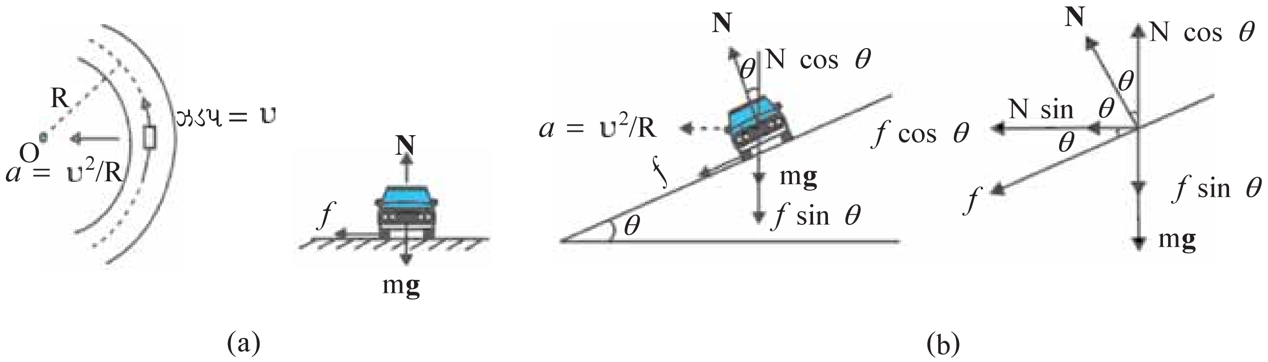
$$f \le \mu_s N = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

$$\upsilon^2 \le \frac{\mu_s RN}{m} = \mu_s Rg \qquad [\because N = mg]$$

જે કારના દળ પર આધારિત નથી. આ દર્શાવે છે કે μ_s અને Rનાં આપેલ મૂલ્યો માટે કારની વર્તુળગતિ માટે જે મહત્તમ ઝડપ υ_{max} શક્ય છે, તે

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\mu_s Rg} \qquad (5.18)$$

પરથી મળે છે.



આકૃતિ 5.14 કારની વર્તુળગતિ (a) સમતલ રસ્તા પર (b) ઢોળાવવાળા રસ્તા પર

છે. સમક્ષિતિજ સડક પર વર્તુળાકાર વળાંક લેતી કાર માટે કેન્દ્રગામી બળ એ ઘર્ષણબળ છે.

સપાટ અને ઢોળાવવાળા રસ્તા પર કારની વર્તુળ ગતિમાં ગતિના નિયમોના રસપ્રદ ઉપયોગ થતા જણાય છે.

સમતલ રસ્તા પર કારની ગતિ (Motion of a car on a level road)

કાર પર ત્રણ બળો લાગે છે. (આકૃતિ 5.14(a) :

(i) કારનું વજન, mg

(ii) લંબ પ્રતિક્રિયા, N

(iii) ઘર્ષણબળ, f

ઊર્ધ્વદિશામાં કોઈ પ્રવેગ ન હોવાથી

$$N - mg = 0$$

$$N = mg \qquad (5.17)$$

વર્તુળગતિ માટેનું જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ રસ્તાની સપાટીને સમાંતર છે અને તે રસ્તા અને કારના ટાયર વચ્ચેના સંપર્ક બળના, રસ્તાને સમાંતર ઘટક દ્વારા પૂરું પાડવામાં આવે છે. વ્યાખ્યા મુજબ આ ઘર્ષણબળ છે. એ નોંધો કે તે સ્થિત ઘર્ષણ છે કે જે કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડે છે. સ્થિત ઘર્ષણ કારને

ઢોળાવવાળા રસ્તા પર કારની ગતિ (Motion of a car on a banked road)

જો રસ્તાને ઢોળાવવાળા રાખવામાં આવે તો [આકૃતિ 5.14(b)] કારની વર્તુળગતિ માટે જરૂરી બળમાં ઘર્ષણનો ફાળો ઘટાડી શકાય. ઊર્ધ્વદિશામાં કોઈ પ્રવેગ ન હોવાથી આ દિશામાં ચોખ્ખું બળ શૂન્ય જ હશે. આથી

$$N\cos\theta = mg + f\sin\theta \qquad (5.19a)$$

N અને fનાં સમક્ષિતિજ ઘટકો દ્વારા કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવામાં આવે છે.

$$N\sin\theta + f\cos\theta = \frac{m\upsilon^2}{R} \qquad (5.19b)$$

પરંતુ, $f \le \mu_s N$

આથી, υ_{max} મેળવવા માટે આપણે $f = \mu_s N$ મૂકીએ.

આ પરથી સમીકરણો (5.19a) અને (5.19b) નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$N\cos\theta = mg + \mu_s N\sin\theta \qquad (5.20a)$$

$$N \sin\theta + \mu_s N \cos\theta = m\upsilon^2/R \qquad (5.20b)$$

સમીકરણ (5.20a) પરથી,

$$N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}$$

Nનું આ મૂલ્ય સમીકરણ [5.20(b)]માં અવેજ કરતાં,

$$\frac{mg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = \frac{m\upsilon^2_{max}}{R}$$

અથવા $\upsilon_{max} = \left(Rg\frac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s\tan\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$ (5.21)

આ સમીકરણને સમીકરણ (5.18) સાથે સરખાવતાં આપણને જણાય છે કે, કારની શક્ય મહત્તમ ઝડપ સપાટ રસ્તા પર હોય તે કરતાં ઢોળાવવાળા રસ્તા પર વધુ હોય છે.

સમીકરણ (5.21)માં $\mu_s = 0$ માટે,

$$\upsilon_0 = (R\ g\ \tan\theta)^{1/2} \qquad (5.22)$$

આ ઝડપે, કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવા માટે ઘર્ષણબળની સહેજ પણ જરૂર નથી. ઢોળાવવાળા રસ્તા પર આ ઝડપે વાહન હંકારતાં ટાયરોને ઘસારો ખૂબ ઓછો લાગે છે. આ સમીકરણ એમ પણ જણાવે છે કે $\upsilon < \upsilon_0$ માટે ઘર્ષણબળ ઢાળ પર ઉપર તરફ લાગે અને જો $\tan\theta \le \mu_s$ હોય તો જ કારને ઢોળાવવાળા રસ્તા પર પાર્ક કરી શકાય.

ઉદાહરણ 5.10 18 km/hની ઝડપે જઈ રહેલો એક સાઈકલ-સવાર એક સમતલ રસ્તા પર 3 m ત્રિજ્યાનો તીવ્ર વર્તુળાકાર વળાંક, ઝડપ ઘટાડ્યા સિવાય લે છે. ટાયર અને રસ્તા વચ્ચેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક 0.1 છે. શું વળાંક લેતી વખતે સાઈકલ-સવાર લપસી જશે ?

ઉકેલ ઢોળાવ વગરના રસ્તા પર સાઈકલ-સવારને વર્તુળાકાર વળાંક પર લપસ્યા વિના ગતિ કરાવવા માટે એકલું ઘર્ષણબળ જ, જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડી શકે છે. જો ઝડપ ઘણી વધુ હોય અથવા વળાંક બહુ તીવ્ર (એટલે કે બહુ નાની ત્રિજ્યાનો) અથવા બંને હોય તો કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવામાં ઘર્ષણબળ અપૂરતું રહે છે અને સાઈકલ-સવાર લપસી જાય છે. સાઈકલ-સવાર લપસી ન જાય તે માટેની શરત સમીકરણ (5.18) પરથી

$\upsilon^2 \le \mu_s R g$ પરથી મળે છે.

હવે, $R = 3$ m, $g = 9.8$ m s^{-2}, $\mu_s = 0.1$. એટલે કે $\mu_s R g = 2.94$ m^2 s^{-2}. $\upsilon = 18$ km/h $= 5$ m s^{-1}. $\therefore \upsilon^2 = 25$ m^2 s^{-2}. ઉપર્યુક્ત શરતનું પાલન થતું નથી એટલે સાઈકલ-સવાર વળાંક લેતી વખતે લપસી પડશે. ◀

ઉદાહરણ 5.11 સ્પર્ધા માટેનો એક 300 m ત્રિજ્યાનો વર્તુળાકાર માર્ગ 15°ના ઢોળાવવાળો છે. જો રેસકારનાં પૈડાં અને માર્ગ વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.2 હોય તો (a) રેસકારના ટાયરનો ઘસારો નિવારવા માટે તેની optimum (ઇષ્ટ) ઝડપ કેટલી હશે ? (b) લપસવાનું નિવારી શકાય તેવી શક્ય મહત્તમ ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ ઢોળાવવાળા રસ્તા પર, લંબબળનો સમક્ષિતિજ ઘટક અને ઘર્ષણબળ એ બંને કારને લપસ્યા વિના વર્તુળાકાર વળાંક પર ગતિ કરાવવા માટે કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવામાં ફાળો આપે છે. optimum (ઇષ્ટ) ઝડપ વખતે ઘર્ષણબળની જરૂર પડતી નથી અને ફક્ત લંબ પ્રતિક્રિયાનો ઘટક જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવા માટે પર્યાપ્ત છે. આ optimum ઝડપ સમીકરણ (5.22) પરથી મળે.

$$\upsilon_0 = (R\ g\ \tan\theta)^{1/2}$$

અહીં, $R = 300$ m, $\theta = 15°$, $g = 9.8$ m s^{-2}.

$\therefore \upsilon_0 = 28.1$ m s^{-1}.

શક્ય મહત્તમ ઝડપ υ_{max} સમીકરણ (5.21) પરથી,

$$\upsilon_{max} = \left(Rg\frac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s\tan\theta}\right)^{\frac{1}{2}} = 38.1 \text{ m s}^{-1}.$$ ◀

5.11 યંત્રશાસ્ત્રમાં કોયડાઓ ઉકેલવા (SOLVING PROBLEMS IN MECHANICS)

આ પ્રકરણમાં તમે શીખેલા ગતિના ત્રણ નિયમો એ યંત્રશાસ્ત્રનો પાયો છે. હવે તમે યંત્રશાસ્ત્રમાંના ઘણા પ્રકારના કોયડાઓ ઉકેલી શકતા હોવા જોઈએ. યંત્રશાસ્ત્રમાં કોઈ વિશિષ્ટ કોયડો આપેલાં બળોની અસર નીચે કોઈ એક જ પદાર્થ અંગે નથી હોતો. ઘણી વાર આપણે એકબીજા પર બળ લગાડતા જુદા જુદા પદાર્થોના સમૂહનો વિચાર કરવાની જરૂર પડે છે. તે ઉપરાંત સમૂહનો દરેક પદાર્થ ગુરુત્વબળ પણ અનુભવે છે. આ પ્રકારના કોયડાઓને ઉકેલવામાં એ હકીકત યાદ રાખવી ઉપયોગી છે કે આપણે સમૂહના કોઈ પણ ભાગને પસંદ કરી શકીએ છીએ અને તેના પર ગતિના નિયમો લગાડી શકીએ છીએ, જો આપણે સમૂહના બાકીના ભાગો વડે, પસંદ કરેલા ભાગ પર લાગતાં બળોનો સમાવેશ કરીએ તો. પદાર્થ-સમૂહના આપણે પસંદ કરેલા ભાગને તંત્ર અને પદાર્થ-સમૂહના બાકીના ભાગને (ઉપરાંત બીજા બળ લગાડતાં માધ્યમોને) પરિસર કહીશું. આપણે આ જ પદ્ધતિ અહીં ઉકેલ સહિત આપેલાં ઉદાહરણોમાં

પણ અપનાવી છે. યંત્રશાસ્ત્રમાં વ્યવસ્થિત રીતે કોઈ વિશિષ્ટ કોયડાને ઉકેલવા નીચે મુજબનાં સોપાનો મુજબ આગળ વધવું જોઈએ :

(i) પદાર્થ-સમૂહના જુદા જુદા ભાગો, જોડાણો, આધારો વગેરેને વ્યવસ્થિત રીતે દર્શાવતી આકૃતિ દોરો. (રેખાકૃતિ)

(ii) સમૂહના એક સગવડ પડે તેવા ભાગને તંત્ર તરીકે પસંદ કરો.

(iii) આ તંત્ર અને સમૂહના બાકીના ભાગો વડે તેના પર લાગતાં બળોને દર્શાવતી એક જુદી આકૃતિ દોરો. બીજાં માધ્યમો વડે લાગતાં બળોનો પણ સમાવેશ કરો. **તંત્ર વડે પરિસર પર લાગતાં બળોનો સમાવેશ કરશો નહિ.** આ પ્રકારની આકૃતિને free-body diagram (મુક્ત-પદાર્થ રેખાચિત્ર) કહે છે. (બરાબર ધ્યાન રાખો કે આનો અર્થ એવો નથી કે આપણી વિચારણા હેઠળના તંત્ર પર કોઈ ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ લાગતું નથી.)

(iv) free-body diagramમાં જે બળો તમને આપેલા હોય અથવા જેમના લાગવા વિશે તમે ચોક્કસ હોવ, (દા.ત., દોરીમાં તેની લંબાઈને સમાંતર તણાવ) તેમની માહિતીનો સમાવેશ કરો. બાકીનાને અજ્ઞાત તરીકે લઈ, ગતિના નિયમો વાપરીને શોધી કાઢવાના છે એમ ગણો.

(v) જરૂર પડે તો બીજું એક તંત્ર પસંદ કરી તેના માટે પણ આ જ પદ્ધતિ અપનાવો. આમ કરવામાં ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમનો ઉપયોગ કરો. એટલે કે જો Aના free-body diagramમાં, B વડે A પર લાગતું બળ **F** દર્શાવેલ હોય, તો Bના free-body diagramમાં, A વડે B પર લાગતું બળ −**F** તરીકે દર્શાવવું જોઈએ. નીચેનો દાખલો ઉપરની પદ્ધતિની સમજૂતી આપે છે :

▶ ***ઉદાહરણ 5.12*** આકૃતિ (5.15) જુઓ. એક નરમ સમક્ષિતિજ સપાટી પર લાકડાનો 2 kg દળનો એક બ્લૉક સ્થિર રહેલો છે. જ્યારે 25 kg દળના લોખંડના એક નળાકારને આ બ્લૉક પર મૂકવામાં આવે છે ત્યારે તળિયું સતત નમતું જાય છે અને બ્લૉક અને નળાકાર બંને એક સાથે $0.1\ m\ s^{-2}$ ના પ્રવેગથી નીચે ઊતરે છે. બ્લૉક વડે તળિયા પર તળિયું નમતાં (a) પહેલાં અને (b) પછી, કેટલું ક્રિયાબળ લાગે ? $g = 10\ m\ s^{-2}$ લો. આ પ્રશ્નમાં ક્રિયાબળ-પ્રતિક્રિયાબળની જોડની ઓળખ કરો.

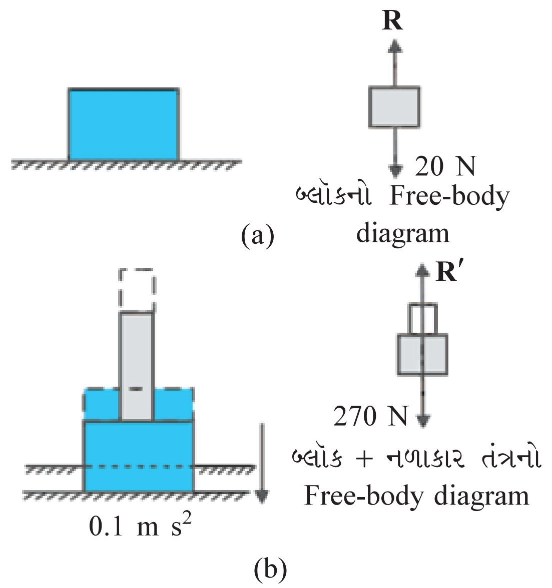
ઉકેલ

(a) તળિયા પર બ્લૉક સ્થિર છે. તેનો free-body diagram બ્લૉક પર બે બળો લાગતાં દર્શાવે છે : પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ $2 \times 10 = 20$ N અને તળિયા વડે બ્લૉક પર લાગતું લંબબળ R. પહેલા નિયમ મુજબ બ્લૉક પર ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ શૂન્ય હોવું જોઈએ, એટલે કે R = 20 *N*. ત્રીજા નિયમ પરથી બ્લૉક વડે લાગતું ક્રિયાબળ (એટલે કે બ્લૉક વડે તળિયા પર લાગતું બળ) 20 *N* જેટલું અને અધો દિશામાં છે.

(b) (બ્લૉક + નળાકાર) એ તંત્ર અધોદિશામાં $0.1\ m\ s^{-2}$ના પ્રવેગથી ગતિ કરે છે. એ તંત્રનો free-body diagram દર્શાવે છે કે તંત્ર પર બે બળો લાગે છે : પૃથ્વી વડે લાગતું ગુરુત્વબળ (270 *N*) અને તળિયા વડે લાગતું લંબબળ R′. અહીં એ નોંધો કે free-body diagram બ્લૉક અને નળાકાર વચ્ચેનાં આંતરિક બળો દર્શાવતો નથી. ગતિનો બીજો નિયમ લગાડતાં,

$270 - R' = 27 \times 0.1$ N

એટલે કે $R' = 267.3$ N



આકૃતિ 5.15

ત્રીજા નિયમ પરથી આ તંત્ર વડે તળિયા પર લાગતું ક્રિયાબળ 267.3 N જેટલું અધોદિશામાં છે.

ક્રિયાબળ-પ્રતિક્રિયા બળની જોડ

(a) માટે : (i) પૃથ્વીનું બ્લૉક પરનું ગુરુત્વ બળ (20 N) (તેને ક્રિયાબળ કહીએ), બ્લૉક વડે પૃથ્વી પર લાગતું ગુરુત્વ બળ 20 N જેટલું, ઉપર તરફ, જે આકૃતિમાં દર્શાવેલ નથી. (પ્રતિક્રિયા બળ).
(ii) બ્લૉક વડે તળિયા પર લાગતું બળ (ક્રિયાબળ), તળિયા વડે બ્લૉક પર લાગતું બળ (પ્રતિક્રિયા બળ).

(b) માટે : (i) પૃથ્વી વડે તંત્ર પર લાગતું ગુરુત્વબળ (270 N), (ક્રિયાબળ), તંત્ર વડે પૃથ્વી પર લાગતું ગુરુત્વબળ 270 N જેટલું (પ્રતિક્રિયા બળ), ઊર્ધ્વદિશામાં (આકૃતિમાં દર્શાવેલ નથી.).

(ii) તંત્ર વડે તળિયા પર લાગતું બળ (ક્રિયાબળ), તળિયા વડે તંત્ર પર લાગતું બળ (પ્રતિક્રિયા બળ). આ ઉપરાંત, (b) માટે બ્લૉક પર નળાકાર વડે લાગતું બળ અને નળાકાર પર બ્લૉક વડે લાગતું બળ પણ ક્રિયાબળ પ્રતિક્રિયાબળની જોડ રચે છે.

જે અગત્યની બાબત યાદ રાખવાની છે તે એ છે કે, ક્રિયાબળ-પ્રતિક્રિયાબળની જોડ બે પદાર્થો વચ્ચે લાગતા એવાં બે પરસ્પર બળોથી રચાય છે કે જેઓ સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. એક જ પદાર્થ પર બે સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાંનાં બળો ક્રિયાબળ-પ્રતિક્રિયાબળની જોડ રચી શકતા નથી. (a) અથવા (b)માં દળ પર લાગતું ગુરુત્વબળ અને દળ પર તળિયા વડે લાગતું લંબ બળ એ ક્રિયાબળ-પ્રતિક્રિયાબળની જોડ રચતા નથી. (a)માં દળ સ્થિર હોવાથી આ બે સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં છે. જોકે, કિસ્સા (b)માં હમણાં જોયું તેમ, એ પ્રમાણે નથી. તંત્રનું વજનબળ 270 N છે જ્યારે લંબબળ R′ 267.3 N છે. ◀

યંત્રશાસ્ત્રમાં કોયડા ઉકેલવામાં free-body diagram દોરવાની પદ્ધતિ ઘણી ઉપયોગી છે. તેનાથી તમારું તંત્ર સ્પષ્ટપણે જાણી શકાય છે અને તંત્રનો પોતાનો ભાગ ન હોય તેવા પદાર્થો વડે તંત્ર પર લાગતાં બળોનો વિચાર કરી શકાય છે. આ પ્રકરણ અને હવે પછી આવનારાં પ્રકરણોમાં સંખ્યાબંધ સ્વાધ્યાયમાં આવી ટેવ પાડેલી હશે તે તમને મદદરૂપ થશે.

સારાંશ

1. પદાર્થને નિયમિત ગતિમાં ચાલુ રાખવા માટે બળની જરૂર છે એવો ઍરિસ્ટોટલનો મત ખોટો છે. વ્યવહારમાં ગતિનો વિરોધ કરનારા ઘર્ષણબળનો સામનો કરવા માટે બળની જરૂર પડે છે.
2. ગૅલિલિયોએ ઢોળાવવાળા સમતલો પર પદાર્થની ગતિનાં સામાન્ય અવલોકનોને આગળ ધપાવી, જડત્વનો નવો નિયમ મેળવ્યો. ન્યૂટનનો પહેલો નિયમ આ જ નિયમ છે જેને નવા સ્વરૂપે આમ લખાય છે : "દરેક પદાર્થ કોઈ બાહ્યબળ દ્વારા બીજી રીતે વર્તવા માટે તેને ફરજ ન પડે ત્યાં સુધી સ્થિર સ્થિતિમાં જ અથવા સુરેખા પર નિયમિત ગતિની સ્થિતિમાં જ ચાલુ રહે છે." સાદા શબ્દોમાં ગતિનો પહેલો નિયમ આમ છે : **"જો પદાર્થ પરનું બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તો તેનો પ્રવેગ શૂન્ય હોય છે."**
3. પદાર્થનું વેગમાન ($\mathbf{p}$) એ તેના દળ (m) અને વેગ ($\mathbf{v}$)નો ગુણાકાર છે. $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
4. ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ :
   "પદાર્થના વેગમાનના ફેરફારનો દર લાગુ પાડેલા બળના સમપ્રમાણમાં અને બળની દિશામાં હોય છે." આમ,
   $$\mathbf{F} = k\,\frac{d\mathbf{p}}{dt} = k\,m\mathbf{a}$$
   જ્યાં, $\mathbf{F}$ પદાર્થ પરનું ચોખ્ખું (પરિણામી) બાહ્ય બળ છે અને $\mathbf{a}$ તેનો પ્રવેગ છે. SI એકમમાં આપણે સપ્રમાણતાનો અચળાંક $k = 1$ લઈએ છીએ. આથી,
   $$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}$$
   બળનો SI એકમ ન્યૂટન છે : $1\ \text{N} = 1\ \text{kg m s}^{-2}$
   (a) ગતિનો બીજો નિયમ પહેલા નિયમ સાથે સુસંગત છે. ($\mathbf{F} = 0$ સૂચવે છે કે $\boldsymbol{a} = 0$)
   (b) તે સદિશ સ્વરૂપનું સમીકરણ છે.
   (c) તે એક કણ પર તેમજ પદાર્થ પર કે કણોના તંત્ર પર લગાડી શકાય છે, જો $\mathbf{F}$ એ તંત્ર પરનું કુલ પરિણામી બળ અને $\boldsymbol{a}$ એ સમગ્ર તંત્રનો પ્રવેગ હોય તો.
   (d) આપેલા બિંદુએ અમુક ક્ષણે $\mathbf{F}$, તે બિંદુએ તે ક્ષણે પ્રવેગ $\boldsymbol{a}$ નક્કી કરે છે. એટલે કે ગતિનો બીજો નિયમ એ સ્થાનિક નિયમ છે. આપેલ ક્ષણે $\boldsymbol{a}$ તેના ઇતિહાસ (અગાઉની બાબતો) પર આધારિત નથી.
5. આઘાત એ બળ અને સમયનો ગુણાકાર છે જે વેગમાનમાં ફેરફારના જેટલો છે.
   આઘાતનો ખ્યાલ જ્યારે મોટું બળ ટૂંકા સમય માટે લાગે છે અને માપી શકાય તેવો વેગમાનનો ફેરફાર ઉત્પન્ન કરે છે ત્યારે ઉપયોગી છે. બળ લાગવાનો સમય અત્યંત ઓછો હોવાથી આપણે એવું ધારી શકીએ કે આવા આઘાતી બળ લાગવા દરમિયાન તેના સ્થાનમાં ખાસ ફેરફાર થશે નહિ.
6. **ન્યૂટનનો ગતિનો ત્રીજો નિયમ :**
   દરેક ક્રિયાબળને હંમેશાં સમાન અને વિરુદ્ધ એવું પ્રતિક્રિયા બળ હોય છે. સામાન્ય શબ્દોમાં આ નિયમ આ

પ્રમાણે રજૂ થાય : ''કુદરતમાં બળો હંમેશાં જોડમાંના પદાર્થો વચ્ચે લાગે છે. પદાર્થ A પર, પદાર્થ B વડે લાગતું બળ, પદાર્થ B પર પદાર્થ A વડે લાગતા બળ જેટલું અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ એક સાથે લાગે છે. ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ વચ્ચે કોઈ કારણ-અસરનો સંબંધ નથી. બેમાંના કોઈ પણ એકને ક્રિયાબળ અને બીજાને પ્રતિક્રિયા બળ કહી શકાય. ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ જુદા જુદા પદાર્થો પર લાગે છે અને તેથી તેમને નાબૂદ કરી શકાય નહિ. જોકે, પદાર્થના જુદા જુદા ભાગો વચ્ચે લાગતા આંતરિક ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે.

7. *'વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ'*

અલગ કરેલા કણોના તંત્રના કુલ વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. આ નિયમ ગતિના બીજા અને ત્રીજા નિયમો પરથી મળે છે.

8. *'ઘર્ષણ'*

ઘર્ષણબળ સંપર્કમાં રહેલી બે સપાટીઓ વચ્ચેની સાપેક્ષ ગતિ (અપેક્ષિત અથવા વાસ્તવિક)નો વિરોધ કરે છે. તે સંપર્કબળનો સંપર્કમાંની સામાન્ય સપાટીને સમાંતર ઘટક છે. સ્થિત ઘર્ષણ f_s અપેક્ષિત સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરે છે, ગતિક ઘર્ષણ f_k વાસ્તવિક સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરે છે. તેઓ સંપર્ક ક્ષેત્રફળ પર આધારિત નથી અને નીચેના આશરા પડતા નિયમોનું પાલન કરે છે :

$$f_s \le (f_s)_{max} = \mu_s R$$

$$f_k = \mu_k R$$

μ_s (સ્થિત ઘર્ષણાંક) અને μ_k (ગતિક ઘર્ષણાંક) સંપર્ક સપાટીઓની જોડના લાક્ષણિક અચળાંકો છે. પ્રયોગો પરથી જણાયું છે કે μ_kનું મૂલ્ય μ_s કરતાં નાનું હોય છે.

રાશિ	સંજ્ઞા	એકમો	પરિમાણ	નોંધ
વેગમાન	**P**	kg m s^{-1} અથવા N s	$[MLT^{-1}]$	સદિશ
બળ	**F**	N	$[MLT^{-2}]$	**F** = ma બીજો નિયમ
આઘાત		kg m s^{-1} અથવા N s	$[MLT^{-1}]$	આઘાત = બળ × સમય = વેગમાનમાં ફેરફાર
સ્થિત ઘર્ષણ	f_s	N	$[MLT^{-2}]$	$f_s \le \mu_s$ N
ગતિક ઘર્ષણ	f_k	N	$[MLT^{-2}]$	$f_k = \mu_k$ N

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ :

1. બળ હંમેશાં ગતિની દિશામાં જ હોય એવું નથી. પરિસ્થિતિ પર આધાર રાખીને બળ **υ**ની દિશામાં હોય, **υ**ની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય, **υ**ને લંબ હોય અથવા **υ** સાથે બીજો કોઈ કોણ બનાવતું હોય. દરેક કિસ્સામાં તે પ્રવેગને સમાંતર હોય છે.
2. આપેલ ક્ષણે જો **υ** = 0 હોય, એટલે કે પદાર્થ ક્ષણ પૂરતો સ્થિર હોય તો તેનો અર્થ એવો નથી કે તેના પરનું બળ કે તેનો પ્રવેગ શૂન્ય હોય જ. ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકેલો પદાર્થ જ્યારે મહત્તમ ઊંચાઈએ પહોંચે છે ત્યારે બળ તરીકે તેનું વજન mg ચાલુ જ રહે છે અને પ્રવેગ શૂન્ય નહિ પણ g છે.
3. આપેલા સમયે પદાર્થ પરનું બળ તે સમયે તેના સ્થાન પરની પરિસ્થિતિ દ્વારા નક્કી થાય છે. બળ, પદાર્થની અગાઉની ગતિ સાથે ચાલી આવતું નથી. કોઈ પ્રવેગિત ટ્રેનમાંથી એક પથ્થરને બહાર છોડી દેવામાં આવે તો તે પછીની ક્ષણે પથ્થર પર આસપાસની હવાની અસર અવગણતાં, કોઈ સમક્ષિતિજ બળ (કે પ્રવેગ) હોતો નથી. પછી તો પદાર્થ પર ફક્ત અધોદિશામાંનું ગુરુત્વ બળ જ હોય છે.
4. ગતિના બીજા નિયમ **F** = m **a**માં, **F** એ પદાર્થની બહારના બધા દ્રવ્યમાનોને લીધે લાગતું ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ છે. **a** બળની અસર છે. m અને **F** ઉપરાંત બીજું બળ ગણવાનું નથી.

5. કેન્દ્રગામી બળને એક બીજા પ્રકારના બળ તરીકે ગણવાનું નથી. એ તો ફક્ત વર્તુળગતિ કરતા પદાર્થને અંદર તરફ ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ આપતા બળને અપાયેલું નામ છે. કોઈ પણ વર્તુળાકાર ગતિમાં દળથી ઉદ્‌ભવતા તણાવ, ગુરુત્વબળ, વિદ્યુતબળ, ઘર્ષણ વગેરે જેવામાંથી કોઈક બળ કેન્દ્રગામી બળ તરીકે લાગતું હોય તે શોધવાનું હોય છે.
6. સ્થિત ઘર્ષણ તેની મર્યાદા μ_s N સુધીમાં સ્વનિયમન કરતું ($f_s \le \mu_s$ N) બળ છે. મહત્તમ સ્થિત ઘર્ષણ લાગતું હોવાનું ચોક્કસ ન લાગે ત્યાં સુધી $f_s = \mu_s$ N મૂકવું નહિ.
7. ટેબલ પર સ્થિર પડેલા પદાર્થ માટે જાણીતું સમીકરણ m g = R ત્યારે જ સત્ય છે કે જ્યારે પદાર્થ સંતુલનમાં હોય. બે બળો mg અને R જુદાં જુદાં હોઈ શકે છે. (દા.ત., પ્રવેગિત લિફ્ટમાંનો પદાર્થ). mg અને Rની સમાનતાને ગતિના ત્રીજા નિયમ સાથે કોઈ સંબંધ નથી.
8. ગતિના ત્રીજા નિયમમાં 'ક્રિયાબળ' અને 'પ્રતિક્રિયાબળ' એ શબ્દો માત્ર એક જોડમાંના પદાર્થો વચ્ચે એક સાથે લાગતાં પરસ્પર બળોને રજૂ કરે છે. સામાન્ય ભાષામાં જણાતા તેમના અર્થ કરતાં એ રીતે અલગ છે કે ક્રિયાબળ, પ્રતિક્રિયા બળની પહેલાં લાગતું કે તેનું કારણ નથી. ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ જુદા જુદા પદાર્થો પર લાગે છે.
9. જુદાં જુદાં પદો જેવા કે, 'ઘર્ષણ', 'લંબ પ્રતિક્રિયા', 'તણાવ', 'હવાનો અવરોધ', 'શ્યાન ખેંચાણ', 'ધક્કો', 'ઉત્પ્લાવક બળ', 'વજન', 'કેન્દ્રગામી બળ' - એ બધાં જુદા જુદા પરિપ્રેક્ષમાં બળ માટે વપરાતા શબ્દો છે. સ્પષ્ટતા ખાતર યંત્રશાસ્ત્રમાં આવતા બળ અને તેના સમતુલ્ય શબ્દો અંતે તો 'A પર B વડે લાગતું બળ' એમ દર્શાવે છે.
10. ગતિનો બીજો નિયમ લગાડવામાં સજીવ કે નિર્જીવ પદાર્થો વચ્ચે કોઈ વૈચારિક ભેદભાવ નથી. મનુષ્ય જેવા સજીવ પદાર્થોને પણ પ્રવેગિત ગતિ કરાવવા બળની જરૂર છે. દાખલા તરીકે બાહ્ય ઘર્ષણબળ વિના આપણે જમીન પર ચાલી શકીએ નહિ.
11. ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં બળના વસ્તુલક્ષી ખ્યાલને 'બળની લાગણી' જેવા આત્મલક્ષી ખ્યાલ સાથે ગૂંચવી દેવાનો નથી. ચકડોળ (Merry-go-round) પર આપણા શરીરના બધા ભાગો પર અંદર તરફ બળ લાગે છે, પરંતુ આપણને બહાર તરફ-અપેક્ષિત ગતિની દિશામાં-ફેંકાઈ જતા હોઈએ તેવી લાગણી થાય છે.

સ્વાધ્યાય

(સરળતા ખાતર સંખ્યાકીય ગણતરીઓમાં g = 10 m s^{-2} લો.)

5.1 નીચેના કિસ્સાઓમાં લાગતા ચોખ્ખા (પરિણામી) બળનાં માન અને દિશા જણાવો :
(a) અચળ ઝડપથી નીચે પડતા વરસાદનાં ટીંપા પર
(b) પાણી પર તરતા 10 g દળના બૂચ પર
(c) આકાશમાં યુક્તિપૂર્વક સ્થિર રાખેલા પતંગ પર
(d) ખરબચડા રસ્તા પર 30 km/hના અચળ વેગથી ગતિ કરતી કાર પર
(e) બધા દ્રવ્ય પદાર્થોથી દૂર અને વિદ્યુત અને ચુંબકીયક્ષેત્રોથી દૂર અવકાશમાં ગતિ કરતા ખૂબ ઝડપી ઇલેક્ટ્રૉન પર

5.2 0.05 kg દળની એક લખોટી ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકવામાં આવે છે. લખોટી પર લાગતા ચોખ્ખા બળનું માન અને દિશા નીચેના કિસ્સાઓમાં જણાવો.
(a) તેની ઊર્ધ્વદિશામાંની ગતિ દરમિયાન
(b) તેની અધોદિશામાંની ગતિ દરમિયાન
(c) તે ક્ષણિક સ્થિર હોય તે ઉચ્ચતમ બિંદુએ. જો લખોટીને સમક્ષિતિજ સાથે 45°ના કોણે ફેંકવામાં આવી હોત તો શું તમારા જવાબો જુદા હોત ? હવાનો અવરોધ અવગણો.

5.3 નીચેના દરેક કિસ્સામાં 0.1 kg દળ ધરાવતા એક પથ્થર પર લાગતા બળનું માન અને દિશા જણાવો :
(a) સ્થિર રહેલી ટ્રેનની બારીમાંથી તેને પડવા દીધા પછી તરત
(b) 36 km/hની અચળ ઝડપથી દોડતી ટ્રેનની બારીમાંથી તેને પડવા દીધા પછી તરત
(c) 1 m s^{-2}થી પ્રવેગિત થતી ટ્રેનની બારીમાંથી તેને પડવા દીધા પછી તરત
(d) 1 m s^{-2}થી પ્રવેગિત થતી ટ્રેનના તળિયા પર ટ્રેનની સાપેક્ષે સ્થિર રહેલ હોય ત્યારે. દરેક કિસ્સામાં હવાનો અવરોધ અવગણો.

5.4 લીસા સમક્ષિતિજ ટેબલ પર l લંબાઈની દોરીનો એક છેડો m દળના કણ સાથે અને બીજો છેડો એક નાની ખીલી સાથે જોડેલ છે. જો કણ υ ઝડપથી વર્તુળમય ગતિ કરે, તો કણ પરનું ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ (કેન્દ્ર તરફની દિશામાં) કેટલું હશે તે નીચેનામાંથી પસંદ કરો :

(i) T (ii) $T - \dfrac{m\upsilon^2}{l}$ (iii) $T + \dfrac{m\upsilon^2}{l}$ (iv) 0

T દોરીમાંનું તણાવ છે.

5.5 15 m s^{-1} ની પ્રારંભિક ઝડપથી ગતિ કરતા 20 kg દળના એક પદાર્થ પર 50 Nનું પ્રતિપ્રવેગ ઉપજાવતું અચળ બળ લગાડવામાં આવે છે. પદાર્થને અટકાવવામાં કેટલો સમય લાગશે ?

5.6 3 kg દળના એક પદાર્થ પર લાગતું અચળ બળ તેની ઝડપ 2.0 m s^{-1}થી 25 sમાં બદલીને 3.5 m s^{-1} કરે છે. પદાર્થની ગતિની દિશા બદલાતી નથી. બળનું માન અને દિશા જણાવો.

5.7 5 kg દળના એક પદાર્થ પર પરસ્પર લંબ એવાં બે બળો 8 N અને 6 N લાગે છે. પદાર્થના પ્રવેગનું માન અને દિશા જણાવો.

5.8 36 km/h ની ઝડપથી વાહન ચલાવતો એક ડ્રાઈવર રસ્તા વચ્ચે એક બાળકને ઊભેલો જુએ છે અને તે બાળકને બચાવવા માટે તેનું વાહન 4.0 sમાં સ્થિર થવું તેને જરૂરી લાગે છે. તો વાહન પર વેગ ઘટાડતું સરેરાશ કેટલું બળ લગાડવું પડે ? વાહનનું દળ 400 kg અને ડ્રાઈવરનું દળ 65 kg છે.

5.9 ઊંચકાયા (lift) વગર 20,000 kg નું દળ ધરાવતા એક રૉકેટને વિસ્ફોટ કરાવતાં તે ઊર્ધ્વદિશામાં 5.0 m s^{-2}ના પ્રારંભિક પ્રવેગથી ગતિ કરે છે. તો વિસ્ફોટથી લાગતો પ્રારંભિક ધક્કો (બળ) ગણો.

5.10 0.40 kg દળના અને પ્રારંભમાં ઉત્તર દિશામાં 10 m s^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરતા એક પદાર્થ પર 8.0 N બળ દક્ષિણ દિશામાં 30 s સુધી લાગે છે. બળ લગાડવાની ક્ષણને $t = 0$ અને તે સ્થાનને $x = 0$ લઈને $t = -5$ s, 25 s; 100 s સમયે તેનાં સ્થાન શોધો.

5.11 એક ટ્રક સ્થિર સ્થિતિમાંથી શરૂ કરીને 2.0 m s^{-2}ની પ્રવેગિત ગતિ કરે છે. $t = 10$ સેકન્ડે ટ્રકની ઉપર ઊભેલી (જમીનથી 6 m ઊંચાઈએ) એક વ્યક્તિ પથ્થરને પડવા દે છે. $t = 11$ સેકન્ડે પથ્થરના (a) વેગ અને (b) પ્રવેગ કેટલા હશે ? (હવાનો અવરોધ અવગણો.)

5.12 એક ઓરડાની છત પરથી 2 m લાંબી દોરી વડે 0.1 kg દળના લટકાવેલા એક ગોળાને દોલિત કરવામાં આવે છે. તેના મધ્યમાન સ્થાને ગોળાની ઝડપ 1 m s^{-1} છે. ગોળો જ્યારે (a) તેનાં કોઈ એક અંત્યસ્થાને હોય (b) તેના મધ્યમાન સ્થાને હોય, ત્યારે દોરીને કાપવામાં આવે તો ગોળાનો ગતિપથ કેવો હશે ?

5.13 70 kg દળનો એક માણસ એક લિફ્ટમાં વજનકાંટા પર ઊભો છે. નીચેના દરેક કિસ્સામાં વજનકાંટા પરનું અવલોકન કેટલું હશે ?

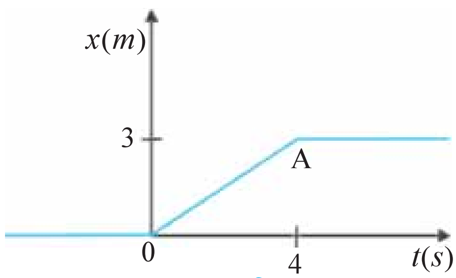
(a) લિફ્ટ ઉપર તરફ 10 m s^{-1}ની નિયમિત ઝડપથી ગતિ કરે છે.

(b) લિફ્ટ નિમ્ન દિશામાં (અધોદિશામાં) 5 m s^{-2}ના નિયમિત પ્રવેગથી ગતિ કરે છે.

(c) લિફ્ટ ઊર્ધ્વદિશામાં 5 m s^{-2}ના નિયમિત પ્રવેગથી ગતિ કરે છે.

(d) લિફ્ટની યંત્રરચના નિષ્ફળ જાય છે અને લિફ્ટ સપાટાભેર ગુરુત્વાકર્ષણની અસર નીચે મુક્તપતન કરે છે.

5.14 આકૃતિ 5.16 4 kg દળના એક કણનો સ્થાન-સમય આલેખ દર્શાવે છે. (a) $t < 0$, $t > 4$ s, $0 < t < 4$ s, સમયે કણ પર લાગતું બળ (b) $t = 0$ અને $t < 4$ s સમયે આઘાત શોધો. (ગતિ એક પારિમાણિક ગણો)



આકૃતિ **5.16**

5.15 10 kg અને 20 kg દળ ધરાવતા બે પદાર્થો A અને Bને લીસી સમક્ષિતિજ સપાટી પર રાખી એક હલકી દોરીના છેડાઓ સાથે બાંધેલ છે. F = 600 Nનું એક સમક્ષિતિજ બળ (i) A પર (ii) B પર દોરીની દિશામાં લગાડવામાં આવે છે. દરેક કિસ્સામાં દોરીમાં તણાવ કેટલો હશે ?

5.16 8 kg અને 12 kg દળના બે પદાર્થો ઘર્ષણરહિત ગરગડી પરથી પસાર થતી એક ખેંચાય નહિ તેવી દોરીના એક-એક છેડે બાંધેલ છે. આ દળોને છોડી દેવામાં આવે (દોરીથી છોડ્યા વિના પડવા દઈએ), તો તેમનો પ્રવેગ અને દોરીમાંનું તણાવ શોધો.

5.17 પ્રયોગશાળાની નિર્દેશ ફ્રેમમાં એક ન્યુક્લિયસ સ્થિર છે. જો તે બે નાના ન્યુક્લિયસોમાં વિભંજન પામે, તો દર્શાવો કે તે નીપજો વિરુદ્ધ દિશામાં જ ગતિ કરવા જોઈએ.

5.18 0.05 kg દળના બે બિલિયર્ડ બૉલ 6 m s^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરતા કરતા અથડાય છે અને તેટલી જ ઝડપથી પાછા ફેંકાય (rebound) છે. દરેક બૉલને બીજા વડે લગાડેલો આઘાત કેટલો હશે ?

5.19 100 kg દળની ગનમાંથી 0.020 kg દળનો એક શૅલ ફોડવામાં આવે છે. ગનની નાળમાંથી બહાર આવતા શૅલની ઝડપ 80 m s^{-1} હોય, તો ગન કેટલી ઝડપથી પાછી ફેંકાશે (recoil) ?

5.20 એક બૅટ્સમૅન એક બૉલનું તેની 54 km/h ની પ્રારંભિક ઝડપમાં બદલાવ લાવ્યા સિવાય 45°ના કોણ જેટલું આવર્તન (deflection) કરે છે. બૉલ પર લાગુ પાડેલ આઘાત કેટલો હશે ? (બૉલનું દળ 0.15 kg છે.)

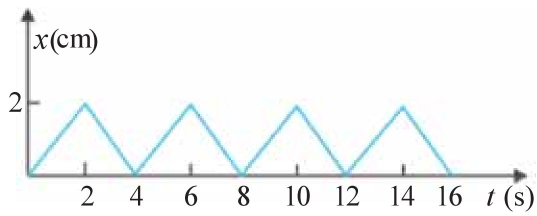
5.21 દોરીના એક છેડે બાંધેલા 0.25 kg દળના પથ્થરને સમક્ષિતિજ સમતલમાં 1.5 m ત્રિજ્યાના વર્તુળમાં 40 rev./min (પરિભ્રમણ/મિનિટ)ની ઝડપથી ઘુમાવવામાં આવે છે. દોરીમાં તણાવ કેટલું હશે ? જો દોરી મહત્તમ 200 Nનું તણાવ ખમી શકે તેમ હોય, તો કેટલી મહત્તમ ઝડપથી પથ્થરને ઘુમાવી શકાય ?

5.22 ઉપરના સ્વાધ્યાય 5.21માં, જો એ મહત્તમ ઝડપ કરતાં વધુ ઝડપ આપતાં દોરી એકાએક તૂટી પડે, તો તૂટ્યા બાદ પદાર્થનો ગતિપથ નીચેનામાંથી કઈ સાચી રીતે વર્ણવી શકાય ?
(a) પથ્થર ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં બહાર ફેંકાય છે.
(b) દોરી તૂટે તે ક્ષણથી પથ્થર સ્પર્શકની દિશામાં ગતિ કરશે.
(c) પથ્થર સ્પર્શક સાથે એવા કોણે ગતિ કરશે કે જેનું માન પથ્થરની ઝડપ પર આધારિત હશે.

5.23 સમજાવો શા માટે,
(a) ખાલી અવકાશમાં ઘોડો ગાડીને ખેંચી અને દોડી શકતો નથી.
(b) ઝડપથી ગતિ કરતી બસ એકાએક અટકે ત્યારે મુસાફરો તેમની બેઠકથી આગળ તરફ ફેંકાય છે.
(c) ઘાસ-કાપતા મશીનને ધકેલવા કરતાં ખેંચવાનું સહેલું છે.
(d) ક્રિકેટર કૅચ પકડવા દરમિયાન તેના હાથ પાછળ તરફ ખેંચે છે.

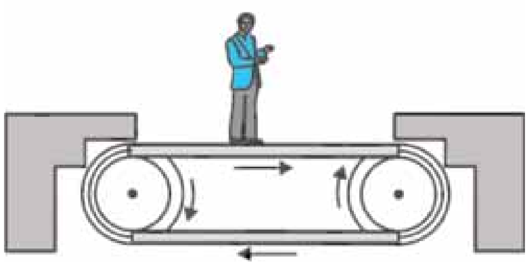
વધારાનું સ્વાધ્યાય

5.24 આકૃતિ 5.17માં 0.04 kg દળના એક પદાર્થનો સ્થાન-સમય આલેખ દર્શાવેલ છે. આ ગતિ માટે યોગ્ય ભૌતિક સંદર્ભ જણાવો. પદાર્થને પ્રાપ્ત થતા બે ક્રમિક આઘાતો વચ્ચેનો સમય કેટલો છે ? દરેક આઘાતનું મૂલ્ય શું છે ?



આકૃતિ 5.17

5.25 આકૃતિ 5.18, એક સમક્ષિતિજ કન્વેયર (વહન કરાવતા) બૅલ્ટ, જે 1 m s^{-2}થી પ્રવેગિત થાય છે, તેના પર બૅલ્ટની સાપેક્ષે ઊભેલો એક સ્થિર માણસ દર્શાવેલ છે. માણસ પર ચોખ્ખું (પરિણામી બળ) કેટલું હશે ? જો માણસના બૂટ અને બૅલ્ટ વચ્ચેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક 0.2 હોય, તો બૅલ્ટના કેટલા પ્રવેગ સુધી માણસ બૅલ્ટની સાપેક્ષે સ્થિર ઊભો રહી શકે ? (માણસનું દળ = 65 kg)



આકૃતિ 5.18

5.26 એક દોરીને છેડે બાંધેલો m દળનો પથ્થર R ત્રિજ્યાના ઊર્ધ્વ વર્તુળમાં ભ્રમણ કરે છે. વર્તુળના ઉચ્ચતમ અને નિમ્નતમ બિંદુઓએ, અધોદિશામાં લાગતા ચોખ્ખા (પરિણામી) બળ માટે નીચેનામાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો :

	નિમ્નતમ બિંદુએ	ઉચ્ચતમ બિંદુએ
(a)	$mg - T_1$	$mg + T_2$
(b)	$mg + T_1$	$mg - T_2$
(c)	$mg + T_1 - (mv_1^2) / R$	$mg - T_2 + (mv_2^2)/R$
(d)	$mg - T_1 - (mv_1^2) / R$	$mg + T_2 + (mv_2^2)/R$

T_1 અને v_1 નિમ્નતમ બિંદુએ તણાવ અને ઝડપ દર્શાવે છે. T_2 અને v_2 અનુરૂપ મૂલ્યો ઉચ્ચતમ બિંદુએ દર્શાવે છે.

5.27 1000 kg દળનું હેલિકૉપ્ટર 15 m s^{-2}ના ઊર્ધ્વદિશામાંના પ્રવેગથી ઊંચે ચઢી રહ્યું છે. ચાલક અને મુસાફરોનું કુલ દળ 300 kg છે. નીચેના કિસ્સાઓમાં બળનાં માન અને દિશા જણાવો :

(a) ચાલક અને મુસાફરો વડે તળિયા પર લાગતું બળ

(b) હેલિકૉપ્ટરના રોટર (rotor) વડે આસપાસની હવા પરનું ક્રિયાબળ

(c) આસપાસની હવા વડે હેલિકૉપ્ટર પર લાગતું બળ

5.28 10^{-2} m^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતી એક નળીમાં 15 m s^{-1}ની ઝડપે સમક્ષિતિજ વહન કરતા પાણીના પ્રવાહમાંથી પાણી બહાર ધસી આવીને નજીકની ઊર્ધ્વ દીવાલને અથડાય છે. પાણીની અસરથી દીવાલ પર લાગતું બળ કેટલું હશે ? પાણી પાછું ફેંકાતું (rebound) નથી તેમ ધારો.

5.29 એક ટેબલ પર એક-એક રૂપિયાના દસ સિક્કાઓ ઉપરાઉપરી મૂકેલ છે. દરેક સિક્કાનું દળ m છે. નીચેના કિસ્સાઓમાં બળનાં માન અને દિશા જણાવો :

(a) નીચેથી ગણતાં 7મા સિક્કા પર તેનાથી ઉપરના બધા સિક્કાઓ વડે લાગતું બળ

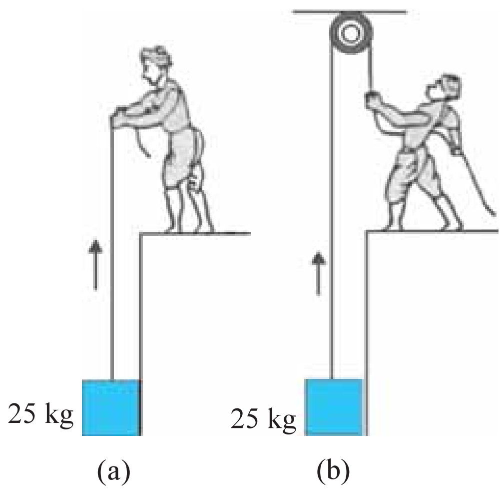
(b) આઠમા સિક્કા વડે 7મા સિક્કા પર લાગતું બળ

(c) છઠ્ઠા સિક્કાનું 7મા સિક્કા પરનું પ્રતિક્રિયાબળ

5.30 એક વિમાન તેની પાંખોને $15°$ એ ઢળતી રાખીને 720 km/hની ઝડપથી એક સમક્ષિતિજ સમતલમાં બંધ ગાળો (loop) રચે છે. આ બંધગાળાની ત્રિજ્યા કેટલી હશે ?

5.31 એક ટ્રેન ઢોળાવ વગરના 30 m ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર ટ્રેક પર 54 km/hની ઝડપથી દોડી રહી છે. ટ્રેનનું દળ 10^6 kg છે. આ હેતુ માટે કેન્દ્રગામી બળ કોના દ્વારા પુરું પાડવામાં આવે છે – ઍન્જિન કે રેલ ? રેલના પાટાનો ઘસારો અટકાવવા માટે ઢોળાવનો કેટલો કોણ કેટલો રાખવો પડે ?

5.32 આકૃતિ (5.19)માં દર્શાવ્યા મુજબ 50 kgનો એક માણસ 25 kg દળના એક બ્લૉકને બે જુદી જુદી રીતે ઊંચકી રહ્યો છે. બે કિસ્સાઓમાં માણસ વડે તળિયા પર કેટલું ક્રિયાબળ લાગશે ? જો તળિયું 700 N લંબબળ વડે નમી પડતું હોય, તો માણસે બ્લૉકને ઊંચકવા કઈ રીત અપનાવવી જોઈએ કે જેથી તળિયું નમી પડે નહિ ?



આકૃતિ 5.19

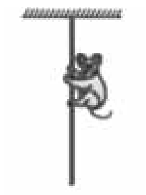
5.33 40 kgનો એક વાંદરો એક દોરડું (આકૃતિ 5.20) કે જે મહત્તમ 600 Nનું તણાવ ખમી શકે છે તેના પર ચઢે છે. નીચેનામાંથી કયા કિસ્સામાં દોરડું તૂટી જશે ?

(a) વાંદરો 6 m s^{-2}ના પ્રવેગથી ઉપર ચડે છે.

(b) વાંદરો 4 m s^{-2}ના પ્રવેગથી નીચે ઊતરે છે.

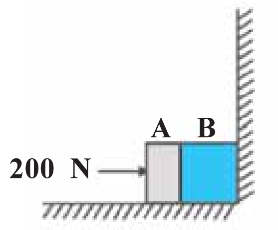
(c) વાંદરો 5 m s^{-1}ની નિયમિત ઝડપથી ઉપર ચડે છે.

(d) વાંદરો દોરડા પર ગુરુત્વાકર્ષણની અસર હેઠળ લગભગ મુક્ત પતન કરે છે. (દોરડાનું દળ અવગણો.)



આકૃતિ **5.20**

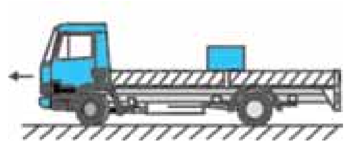
5.34 5 kg અને 10 kg દળના બે પદાર્થો A અને B, ટેબલ પર એકબીજાની સાથે સંપર્કમાં અને દીવાલને અડીને રહેલા છે (આકૃતિ 5.21) પદાર્થો અને ટેબલ વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.15 છે. 200 Nનું એક બળ A પર સમક્ષિતિજ લગાડવામાં આવે છે. (a) દીવાલનું પ્રતિક્રિયાબળ (b) A અને B વચ્ચે ક્રિયાપ્રતિક્રિયા બળો શોધો. જ્યારે દીવાલને દૂર કરવામાં આવે ત્યારે શું થાય ? જ્યારે પદાર્થો ગતિમાં હોય ત્યારે (b)ના જવાબમાં ફેરફાર થશે ? μ_s અને μ_k વચ્ચેનો તફાવત અવગણો.



આકૃતિ **5.21**

5.35 એક લાંબી ટ્રૉલી પર 15 kg દળનો બ્લૉક મૂકેલ છે. બ્લૉક અને ટ્રૉલી વચ્ચેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક 0.18 છે. ટ્રૉલી સ્થિર સ્થિતિમાંથી શરૂ કરી 20 s માટે 0.5 m s^{-2}થી પ્રવેગિત થઈને ત્યાર બાદ નિયમિત વેગથી ગતિ કરે છે. (a) જમીન પરના સ્થિર નિરીક્ષક (b) ટ્રૉલી સાથે ગતિમાન નિરીક્ષકને દેખાતી બ્લૉકની ગતિની ચર્ચા કરો.

5.36 આકૃતિ 5.22માં દર્શાવ્યા મુજબ એક ટ્રકની પાછળની બાજુ ખુલ્લી છે અને 40 kg દળનું એક બૉક્સ ખુલ્લા છેડાથી 5 m દૂર તેના પર મૂકેલ છે. બૉક્સ અને નીચેની સપાટી વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.15 છે. એક સીધા રસ્તા પર ટ્રક સ્થિર સ્થિતિમાંથી શરૂ કરી 2 m s^{-2}થી પ્રવેગિત થાય છે. પ્રારંભ બિંદુથી કેટલા અંતરે બૉક્સ ટ્રકમાંથી પડી જશે ? (બૉક્સનું પરિમાણ અવગણો.)



આકૃતિ **5.22**

5.37 15 cm ત્રિજ્યાની એક તકતી $33\frac{1}{3}$ rev/min (પરિભ્રમણ/મિનિટ)ની ઝડપથી ભ્રમણ કરે છે. રેકોર્ડ (તકતી)ના કેન્દ્રથી બે સિક્કાઓ 4 cm અને 14 cm દૂર મૂકેલા છે. જો સિક્કા અને રેકોર્ડ વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.15 હોય, તો કયો સિક્કો રેકોર્ડ સાથે ભ્રમણ ચાલુ રાખશે ?

5.38 તમે સરકસમાં 'મોતના કૂવા' (એક પોલી ગોળાકાર ચેમ્બર જેમાં છિદ્રો હોય જેથી પ્રેક્ષકો બહારથી જોઈ શકે)માં ઊર્ધ્વ વલયમાં મોટરસાઈકલ ચલાવતો માણસ જોયો હશે. જ્યારે મોટરસાઈકલ ચલાવતો માણસ ઉચ્ચતમ બિંદુ પર હોય ત્યારે નીચે આધાર ન હોવા છતાં કેમ પડી જતો નથી તે સ્પષ્ટ સમજાવો. જો ચેમ્બરની ત્રિજ્યા 25 m હોય, તો ઉચ્ચતમ બિંદુએ ઊર્ધ્વ વલય રચવા માટે લઘુતમ ઝડપ કેટલી જોઈશે ?

5.39 3 m ત્રિજ્યા ધરાવતા અને ઊર્ધ્વ અક્ષની ફરતે 200 rev/min (પરિભ્રમણ/મિનિટ)થી ભ્રમણ કરતા પોલા નળાકારની અંદરની દીવાલને અડીને 70 kgનો એક માણસ ઊભો છે. દીવાલ અને તેનાં કપડાં વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.15 છે. જો તળિયું એકાએક દૂર કરવામાં આવે, તો માણસ (પડ્યા વિના) દીવાલને ચોંટીને રહી શકે તે માટે નળાકારની લઘુતમ કોણીય ઝડપ કેટલી હશે ?

5.40 R ત્રિજ્યાનો એક પાતળો વર્તુળાકાર તાર તેના ઊર્ધ્વ વ્યાસની ફરતે ω જેટલી કોણીય આવૃત્તિથી ભ્રમણ કરે છે. આ વર્તુળ તાર પર એક નાની ગોળી તેના નિમ્નતમ બિંદુએ રહે તે માટે $\omega \le \sqrt{g/R}$ છે તેમ દર્શાવો. $\omega = \sqrt{2g/R}$ માટે કેન્દ્રને ગોળી સાથે જોડતા ત્રિજ્યા સદિશ વડે અધોદિશા (નિમ્નદિશા) સાથે બનાવેલ કોણ કેટલો હશે ? ઘર્ષણ અવગણો.

પ્રકરણ 6

કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર (WORK, ENERGY AND POWER)

6.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

'કાર્ય' (Work), 'ઊર્જા' (Energy) અને 'પાવર' (Power) આ શબ્દપ્રયોગ આપણે વાતચીતમાં દરરોજ કરીએ છીએ. ખેતર ખેડતો ખેડૂત, બાંધકામ માટે ઇંટો લઈ જતો મજૂર, સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષા માટે મહેનત કરતો વિદ્યાર્થી, સૃષ્ટિ સૌંદર્યનું ચિત્ર દોરતો ચિત્રકાર, આ બધાં જ કાર્ય કરે છે તેમ કહેવાય. જોકે ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં 'કાર્ય' શબ્દનો ચોક્કસ અને સચોટ અર્થ થાય છે. જે કોઈ વ્યક્તિની ક્ષમતા દિવસના 14-16 કલાક કામ કરવાની હોય તેની શક્તિ કે ઊર્જા ખૂબ છે તેમ કહીએ છીએ. આપણે લાંબા અંતરની દોડવીરની તેણીની શક્તિ બદલ પ્રશંસા કરીએ છીએ. આમ 'ઊર્જા' એ આપણી કાર્ય કરવાની ક્ષમતા (Capacity) દર્શાવે છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં પણ, 'ઊર્જા' આ સંદર્ભમાં કાર્ય સાથે સંકળાયેલ છે, પરંતુ ઉપર દર્શાવ્યું તે મુજબ 'કાર્ય' ઘણી વધુ સચોટતાથી વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ. 'પાવર' શબ્દનું આપણે રોજિંદા જીવનમાં જુદી જુદી રીતે અર્થઘટન કરીએ છીએ. કરાટે કે બૉક્સિંગમાં આપણે 'પાવરફુલ' પંચ (મુક્કા)ની વાત કરીએ છીએ. આપણે પંચ ખૂબ ઝડપથી ઉગામતા હોઈએ છીએ. આ અર્થઘટન ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આવતા શબ્દ 'પાવર'ને મળતું આવે છે. આપણે દર્શાવીશું કે ભૌતિકવિજ્ઞાનની વ્યાખ્યાઓ અને શરીરવિજ્ઞાનમાં આ ભૌતિકરાશિના આપણા મગજમાં ઉદ્ભવતાં ચિત્રો વચ્ચે ખાસ સંબંધ નથી. આ પ્રકરણમાં આપણે આ ત્રણ ભૌતિકરાશિઓ (Quantitites) વિશે સમજવા પ્રયત્ન કરીશું. પરંતુ તે પહેલાં આપણે જરૂરી એવા ગાણિતિક ખ્યાલો, એટલે કે બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર (Scalar Product) સમજી લઈએ.

6.1.1 અદિશ ગુણાકાર (The Scalar Product)

પ્રકરણ 4માં આપણે સદિશોનો પરિચય કેળવ્યો. ભૌતિકરાશિઓ જેવી કે સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ, બળ વગેરે સદિશો છે. આપણે એ પણ શીખ્યાં કે સદિશોનો સરવાળો કે બાદબાકી કેવી રીતે થાય. હવે આપણે સદિશોનો ગુણાકાર કેવી રીતે થાય તે જોઈએ. આપણને જરૂર પડશે તેવી સદિશોના ગુણાકારની બે રીત આપણે જોઈએ : એક રીત છે સદિશોના અદિશ ગુણાકારની કે જે આપણને અદિશ આપે છે અને બીજી રીત છે સદિશોના સદિશ ગુણાકારની જે પરિણામ રૂપે આપણને નવો સદિશ આપે છે. સદિશ ગુણાકાર આપણે પ્રકરણ 7માં સમજીશું. અહીં આપણે બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર જોઈએ. કોઈ બે સદિશો **A** અને **B**નો અદિશ ગુણાકાર કે ડૉટ (·) ગુણાકાર, **A·B** તરીકે દર્શાવાય છે (**A** ડૉટ **B** તેમ વંચાય) અને તેને

$$\mathbf{A\cdot B} = A\ B\ \cos\ \theta \qquad (6.1a)$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે. જ્યાં θ એ આકૃતિ 6.1(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ બે સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો છે. A, B અને $\cos\theta$ અદિશો હોવાથી **A** અને **B**નો અદિશ ગુણાકાર પણ અદિશ છે. દરેક સદિશ **A** અને **B**ને દિશા હોય છે પરંતુ તેમના અદિશ ગુણાકારને કોઈ દિશા હોતી નથી.

સમીકરણ (6.1a) પરથી

$$\mathbf{A\cdot B} = A\ (B\cos\ \theta)$$
$$= B\ (A\cos\ \theta)$$

ભૌમિતિક રીતે, આકૃતિ 6.1(b) મુજબ $B\cos\theta$ એ **B**નો **A** પરનો પ્રક્ષેપ છે અને આકૃતિ 6.1(c) મુજબ $A\cos\theta$ એ **A**નો **B** પરનો પ્રક્ષેપ છે. આમ, **A·B** એ **A**ના મૂલ્ય અને **B**ના **A** પરના પ્રક્ષેપનો ગુણાકાર છે. બીજી રીતે કહીએ તો, તે **B**ના મૂલ્ય અને **A**ના **B** પરના પ્રક્ષેપનો ગુણાકાર છે.

સમીકરણ (6.1a) દર્શાવે છે કે અદિશ ગુણાકાર **ક્રમના નિયમ (Commutative Law)**નું પાલન કરે છે :

$$\mathbf{A\cdot B} = \mathbf{B\cdot A}$$

અદિશ ગુણાકાર **વિભાજનના નિયમ (Distributive Law)**નું પાલન કરે છે :

$$\mathbf{A\cdot(B + C)} = \mathbf{A\cdot B} + \mathbf{A\cdot C}$$

આ ઉપરાંત $\lambda\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot(\lambda\mathbf{B})$

જ્યાં λ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. આ સમીકરણોનો ઉકેલ તમે સ્વાધ્યાય તરીકે મેળવજો.

એકમ સદિશો $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ માટે

આપેલ બે એકમ સદિશો માટે અદિશ ગુણાકાર

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

નીચે આપેલ બે સદિશો

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

માટે અદિશ ગુણાકાર

$$\mathbf{A\cdot B} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}})$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (6.1b)$$

અદિશ ગુણાકારની વ્યાખ્યા અને (સમીકરણ 6.1b) પરથી :

(i) $\mathbf{A\cdot A} = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z$

અથવા $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad (6.1c)$

કારણ કે $\mathbf{A\cdot A} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}|\cos 0 = A^2$

(ii) $\mathbf{A\cdot B} = 0$, જો **A** અને **B** પરસ્પર લંબ હોય તો.

> *ઉદાહરણ 6.1* બળ $\mathbf{F} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}})$ એકમ અને સ્થાનાંતર $\mathbf{d} = (5\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})$ એકમ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો તથા **F**ના **d** પરના પ્રક્ષેપનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ $\mathbf{F\cdot d} = F_xd_x + F_yd_y + F_zd_z$

$= 3(5) + 4(4) + (-5)(3)$

$= 16$ એકમ

આથી $\mathbf{F\cdot d} = Fd\cos\theta = 16$ એકમ

હવે $\mathbf{F\cdot F} = F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$

$= 9 + 16 + 25$

$= 50$ એકમ

અને $\mathbf{d\cdot d} = d_x^2 + d_y^2 + d_z^2$

$= 25 + 16 + 9$

$= 50$ એકમ

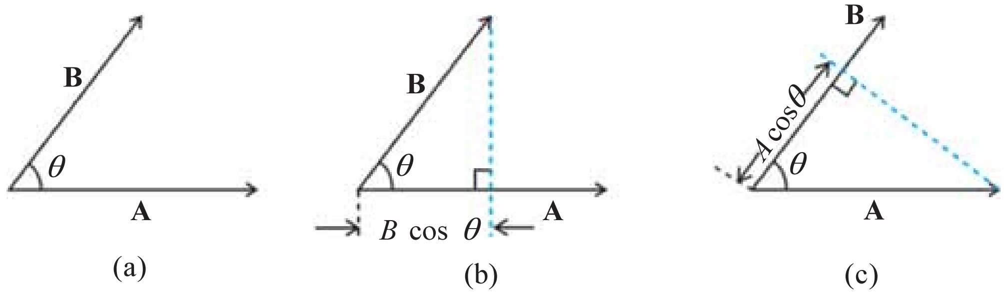
આથી, $\cos\theta = \dfrac{16}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \dfrac{16}{50} = 0.32$

$\theta = \cos^{-1}0.32$

Fનો d પરનો પ્રક્ષેપ

$= F\cos\theta$

$= \sqrt{50} \times 0.32$ એકમ



આકૃતિ 6.1 બે સદિશો **A** અને **B**નો અદિશ ગુણાકાર અદિશ હોય છે : $\mathbf{A\cdot B} = A\ B\cos\theta$. (b) $B\cos\theta$ એ **B**નો **A** પરનો પ્રક્ષેપ છે. (c) $A\cos\theta$ એ **A**નો **B** પરનો પ્રક્ષેપ છે.

6.2 કાર્ય અને ગતિઊર્જાના ખ્યાલો : કાર્યઊર્જા પ્રમેય (NOTIONS OF WORK AND KINETIC ENERGY : THE WORK-ENERGY THEOREM)

એક દિશામાં a અચળ પ્રવેગથી ગતિ કરતા પદાર્થનું સમીકરણ, પ્રકરણ 3માં આવ્યું હતું જે મુજબ

$$\upsilon^2 - u^2 = 2\,as \qquad \text{(A)}$$

જ્યાં u અને υ એ પ્રારંભિક અને અંતિમ ઝડપ તથા s એ કાપેલ અંતર છે. બંને બાજુ $m/2$ વડે ગુણતાં

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}mu^2 = mas = Fs \qquad (6.2a)$$

જ્યાં અંતિમ પદ ન્યૂટનના બીજા નિયમ અનુસાર દર્શાવેલ છે. આપણે સમીકરણ (A)ને સદિશોનો ઉપયોગ કરીને ત્રિપરિમાણમાં આ રીતે દર્શાવી શકીએ.

$$\upsilon^2 - u^2 = 2\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}$$

અહીં, ફરીથી બંને બાજુ $m/2$ વડે ગુણતાં

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}mu^2 = m\,\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} \qquad (6.2b)$$

ઉપરનું સમીકરણ કાર્ય અને ગતિઊર્જાને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટેની પ્રેરણા પૂરી પાડે છે. સમીકરણની ડાબી બાજુનું પદ એ પ્રારંભિક અને અંતિમ 'વેગના વર્ગ અને દળના ગુણાકારના અડધા મૂલ્ય'ના તફાવત જેટલું છે. આ દરેક પદને આપણે 'ગતિઊર્જા' તરીકે ઓળખીએ છીએ જે K વડે દર્શાવાય છે. જમણી બાજુનું પદ એ સ્થાનાંતર અને બળના સ્થાનાંતરની દિશામાંના ઘટકના ગુણનફળ જેટલું છે. આ પદને આપણે 'કાર્ય' કહીએ છીએ જે W વડે દર્શાવાય છે. આમ સમીકરણ (6.2b) પરથી,

$$K_f - K_i = W \qquad (6.3)$$

જ્યાં K_i અને K_f અનુક્રમે પદાર્થની પ્રારંભિક અને અંતિમ ગતિઊર્જા છે. અહીં કાર્યમાં, બળ અને તે જે સ્થાનાંતર સુધી લાગે છે તેનો ઉલ્લેખ છે. **પદાર્થ પર લાગતા બળ વડે થતા ચોક્કસ સ્થાનાંતર દરમિયાન તેના પર કાર્ય થાય છે.**

સમીકરણ (6.2) એ કાર્યઊર્જા (Work Energy, WE) પ્રમેય : **કણની ગતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર તેના પર લાગતા ચોખ્ખા (પરિણામી) બળ વડે થતા કાર્ય જેટલો હોય છે** - નો વિશિષ્ટ કિસ્સો છે. આપણે ચલબળ માટે ઉપરની તારવણી પછીના પરિચ્છેદમાં કરીશું.

▶ *ઉદાહરણ 6.2* આપણે જાણીએ છીએ કે, વરસાદનું ટીપું નીચે તરફ લાગતા ગુરુત્વાકર્ષણ બળ અને વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતા અવરોધક બળની અસર હેઠળ પડે છે. અવરોધક બળ ટીપાની ઝડપના સમપ્રમાણમાં હોય છે જે સામાન્ય રીતે જાણી શકાતું નથી. ધારો કે 1.00 ગ્રામ દળનું એક ટીપું 1.00 km ઊંચાઈએથી પડે છે. તે જમીન પર 50.0 m s^{-1}ની ઝડપથી સ્પર્શે છે. (a) ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ? (b) અજ્ઞાત અવરોધક બળ વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

ઉકેલ (a) ટીપાની ગતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0$$
$$= \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times 50 \times 50$$
$$= 1.25 \text{ J}$$

અહીં આપણે ધાર્યું છે કે પ્રારંભમાં ટીપું સ્થિર છે.

gનું મૂલ્ય 10 m/s^2 જેટલું અચળ ધારીએ તો, ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે થયેલ કાર્ય

$$W_g = mgh$$
$$= 10^{-3} \times 10 \times 10^3$$
$$= 10.0 \text{ J}$$

(b) કાર્યઊર્જા પ્રમેય પરથી

$$\Delta K = W_g + W_r$$

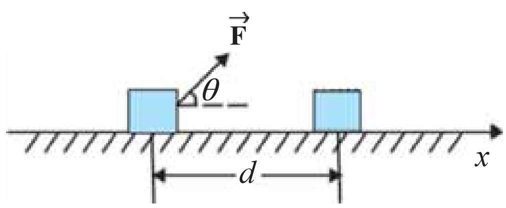
જ્યાં W_r એ અવરોધક (Resistive) બળ વડે વરસાદનાં ટીપાં પર થયેલું કાર્ય છે. આથી

$$W_r = \Delta K - W_g$$
$$= 1.25 - 10$$
$$= -8.75 \text{ J}$$

જે ઋણ છે. ◀

6.3 કાર્ય (WORK)

અગાઉ જોયું તે મુજબ, કાર્ય એ બળ અને તેના વડે થતા સ્થાનાંતર સાથે સંકળાયેલ છે. ધારો કે m દળવાળા પદાર્થ પર અચળ બળ **F** લાગે છે. આકૃતિ 6.2 મુજબ પદાર્થ ધન X-અક્ષની દિશામાં **d** જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે.



આકૃતિ 6.2 બળ **F**ની અસર હેઠળ પદાર્થ **d** જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે.

બળ વડે થતું કાર્ય, બળના સ્થાનાંતરની દિશામાંના ઘટક અને સ્થાનાંતરના મૂલ્યના ગુણન, વડે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. આમ

$$W = (F\cos\,\theta)d = \mathbf{F \cdot d} \qquad (6.4)$$

જ્યારે સ્થાનાંતર શૂન્ય હોય, ત્યારે બળ વધુ (મોટું) હોય તોપણ કાર્ય થતું નથી. આમ તમે ઈંટની દૃઢ દીવાલ પર ગમે તેટલું દબાણ કરો, તોપણ તમે લગાવેલા બળ વડે દીવાલ પર કાર્ય થતું નથી. ભલેને તમારા સ્નાયુઓ અનુક્રમે તંગ થતા હોય અને શિથિલ થતા હોય તથા તમારી આંતરિક ઊર્જા વપરાતી હોય અને તમે થાકી ગયાં હોય. આમ, ભૌતિકવિજ્ઞાન મુજબ કાર્યનો અર્થ રોજિંદી ભાષાથી અલગ છે.

નીચે દર્શાવેલા સંજોગોમાં બિલકુલ કાર્ય થતું નથી :

(i) સ્થાનાંતર શૂન્ય હોય ત્યારે, ઉપરના ઉદાહરણમાં જોયું તે મુજબ. કોઈ વેઈટલિફ્ટર (Weightlifter) 150 kg દળ તેના ખભા પર 30 s સુધી સ્થિર ઊંચકી રાખે તો પણ તેના વડે આ સમય દરમિયાન કોઈ કાર્ય થયું છે તેમ ન કહી શકાય.

(ii) બળ શૂન્ય હોય ત્યારે. લીસી સમતલ સપાટી પર સરકતા ચોસલા (બ્લૉક) પર સમક્ષિતિજ બળ લાગતું ન હોય (કારણ કે અહીં ઘર્ષણ થતું નથી), છતાં મોટું સ્થાનાંતર પણ કરે.

(iii) જો બળ અને (તેના વડે થતું) સ્થાનાંતર પરસ્પર લંબ હોય. કારણ કે, $\theta = \pi/2$ રેડિયન ($= 90^{\circ}$) માટે $\cos(\pi/2) = 0$. સમક્ષિતિજ લીસા ટેબલ પર ગતિ કરતા બ્લૉક માટે, ગુરુત્વીય બળ mg કાર્ય કરતું નથી કારણ કે તે સ્થાનાંતરને લંબરૂપે લાગે છે. જો આપણે ચંદ્રના પૃથ્વી આસપાસના પરિભ્રમણને બરોબર વર્તુળાકાર માનીએ તો પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ કોઈ કાર્ય કરતું નથી. દરેક બિંદુએ ચંદ્રનું તત્કાલીન સ્થાનાંતર સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે જ્યારે પૃથ્વી વડે લાગતું બળ અંદરની તરફ ત્રિજ્યાવર્તી હોય છે, જેથી $\theta = \pi/2$.

કાર્ય ધન કે ઋણ બંને હોઈ શકે છે. જો θ નું મૂલ્ય 0° અને 90°ની વચ્ચે હોય તો સમીકરણ (6.4)માં $\cos\,\theta$ ધન થાય. જો θ નું મૂલ્ય 90° અને 180°ની વચ્ચે હોય, તો $\cos\,\theta$ ઋણ થાય. ઘણા કિસ્સાઓમાં ઘર્ષણબળ સ્થાનાંતરની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે એટલે કે $\theta = 180^{\circ}$. અહીં ઘર્ષણબળ વડે થતું કાર્ય ઋણ હોય છે ($\cos 180^{\circ} = -1$).

સમીકરણ (6.4) પરથી એ સ્પષ્ટ થાય છે કે કાર્ય અને ઊર્જાના પરિમાણ સમાન હોય છે $[ML^2T^{-2}]$. તેમનો SI એકમ જૂલ (J) છે જે પ્રખ્યાત બ્રિટિશ ભૌતિકવિજ્ઞાની જૅમ્સ પ્રેસ્કોટ્ટ જૂલ (1811-1869)ની યાદમાં રાખવામાં આવેલ છે. કાર્ય અને ઊર્જાનો ઉપયોગ ભૌતિક સિદ્ધાંતોમાં ખૂબ થતો હોવાથી, તેમની સાથે સંકળાયેલા કેટલાંક વૈકલ્પિક એકમો પણ કોષ્ટક 6.1માં દર્શાવ્યા છે.

કોષ્ટક 6.1 J (જૂલ)માં દર્શાવેલ કાર્ય/ઊર્જાના વૈકલ્પિક એકમો

અર્ગ	10^{-7} J
ઈલેક્ટ્રૉન વોલ્ટ (eV)	1.6×10^{-19} J
કૅલરી (cal)	4.186 J
કિલોવૉટ અવર (kWh)	3.6×10^{6} J

▶ *ઉદાહરણ 6.3* એક સાઈકલ-સવાર 10 m અંતર ઘસડાઈને સ્થિર થાય છે. આ ઘટના દરમિયાન રસ્તા વડે સાઈકલ પર લાગતું 200 N બળ, ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે. (a) રસ્તા વડે સાઈકલ પર કેટલું કાર્ય થયું હશે ? (b) સાઈકલ વડે રસ્તા પર કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

ઉકેલ રસ્તા વડે સાઈકલ પર થયેલું કાર્ય, એ રસ્તા વડે ઘર્ષણબળ દ્વારા સાઈકલ પર થતું કાર્ય જેટલું હોય છે.

(a) થોભવા માટેના બળ અને સ્થાનાંતર વચ્ચે 180° (π રેડિયન) કોણ બનતો હોવાથી રસ્તા વડે થતું કાર્ય

$$W_r = Fd\cos\theta$$
$$= 200 \times 10 \times \cos\,\pi$$
$$= -2000 \text{ J}$$

કાર્યઊર્જા પ્રમેય અનુસાર આ ઋણ કાર્ય સાઈકલને રોકવા માટે થાય છે.

(b) ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ મુજબ સાઈકલ દ્વારા તેટલું જ અને વિરુદ્ધ દિશાનું બળ રસ્તા પર લાગે છે. તેનું મૂલ્ય 200 N છે. આમ છતાં રસ્તાનું સ્થાનાંતર થતું નથી. આથી સાઈકલ દ્વારા રસ્તા પર થતું કાર્ય શૂન્ય છે. ◀

આ ઉદાહરણ પરથી સમજી શકાય કે પદાર્થ A પર પદાર્થ B વડે લાગતું બળ, એ પદાર્થ B પર પદાર્થ A વડે લાગતા બળ જેટલું અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે (ન્યૂટનનો ત્રીજો નિયમ); પણ A પર B વડે થતું કાર્ય હંમેશાં B પર A વડે થતા કાર્ય જેટલું અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવું જરૂરી નથી.

6.4 ગતિઊર્જા (KINETIC ENERGY)

અગાઉ નોંધ્યું તેમ, જો m દળના પદાર્થનો વેગ $\mathbf{v}$ હોય, તો તેની ગતિઊર્જા Kનું મૂલ્ય

$$K = \frac{1}{2}m\,\mathbf{v \cdot v} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (6.5)$$

ગતિઊર્જા એ અદિશ રાશિ છે. પદાર્થની ગતિઊર્જા એ પદાર્થની ગતિ દ્વારા પદાર્થ વડે થઈ શકતા કાર્યનું મૂલ્ય દર્શાવે છે. આ બાબત ઘણા લાંબા સમયથી સહજ રીતે જાણીતી તો હતી જ.

કોષ્ટક 6.2 વિશિષ્ટ ગતિઊર્જાઓ (K)

વસ્તુ	દળ (kg)	ઝડપ(m s^{-1})	K(J)
કાર	2000	25	6.3×10^5
દોડવીર	70	10	3.5×10^3
બુલિટ (ગોળી)	5×10^{-2}	200	10^3
10 m થી છોડી દીધેલ પથ્થર	1	14	10^2
અંતિમ ઝડપ વખતે વરસાદનું ટીપું	3.5×10^{-5}	9	1.4×10^{-3}
હવાનો અણુ	$\simeq 10^{-26}$	500	$\simeq 10^{-21}$

ઝડપથી વહેતા પ્રવાહ (વહેણ)ની ગતિઊર્જાનો ઉપયોગ અનાજ દળવા થતો હતો. પવનની ગતિઊર્જાનો ઉપયોગ કરીને સઢવાળા વહાણ ચાલે છે. કોષ્ટક 6.2માં કેટલાક પદાર્થોની ગતિઊર્જા દર્શાવી છે.

▶ *ઉદાહરણ 6.4* લશ્કરી કવાયતમાં પોલીસ અધિકારી 50.0 g દળની બુલિટને 200 m s^{-1} (કોષ્ટક 6.2 જુઓ)ની ઝડપે 2.00 cm જાડાઈના નરમ પાટિયા તરફ છોડે છે. બુલિટને તેની પ્રારંભિક ગતિઊર્જાની 10 % ઊર્જા સાથે તેમાંથી બહાર નીકળે છે. બહાર નીકળતી બુલિટની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ બુલિટની પ્રારંભિક ગતિઊર્જા $m\upsilon^2/2 = 1000$ J. તેની અંતિમ ગતિઊર્જા $0.1 \times 1000 = 100$ J. જો બહાર નીકળતી બુલિટની ઝડપ υ_f હોય તો

$$\frac{1}{2}m\upsilon_f^2 = 100 \text{ J}$$

$$\upsilon_f = \sqrt{\frac{2 \times 100\text{J}}{0.05 \text{ kg}}}$$

$$= 63.2 \text{ m s}^{-1}$$

ઝડપમાં થતો ઘટાડો લગભગ 68 % છે. (90 % નહિ).◀

6.5 ચલબળ વડે થતું કાર્ય (WORK DONE BY A VARIABLE FORCE)

અચળ બળ જવલ્લેજ જોવા મળે છે. મોટે ભાગે ચલબળ સાથે જ કામ પડે છે. એક પરિમાણમાં ચલબળનો આલેખ આકૃતિ 6.3(a)માં દર્શાવ્યો છે.

જો સ્થાનાંતર Δx સૂક્ષ્મ હોય, તો આપણે બળ $F(x)$ને લગભગ અચળ ગણી શકીએ અને તેથી થયેલ કાર્ય

$$\Delta W = F(x)\ \Delta x$$

આ બાબત આકૃતિ 6.3(a)માં દર્શાવી છે. આકૃતિ 6.3(a)માં અનુક્રમે આવતા લંબચોરસ ક્ષેત્રફળનો સરવાળો કરતાં આપણને કુલ કાર્ય મળે, જે

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_f} F(x)\ \Delta x \qquad (6.6)$$

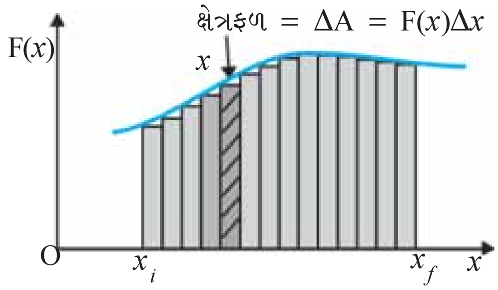
છે. અહીં સરવાળો પ્રારંભિક સ્થિતિ x_iથી અંતિમ સ્થિતિ x_f સુધીનો છે.

જો સ્થાનાંતર શૂન્યની નજીક અતિસૂક્ષ્મ ક્રમના લેવામાં આવે, તો સરવાળામાં પદોની સંખ્યા અમર્યાદ એટલે અનંત થાય, પરંતુ સરવાળાનું મૂલ્ય આકૃતિ 6.3(b)માં દર્શાવેલ વક્રની નીચેના ક્ષેત્રફળના ચોક્કસ મૂલ્ય જેટલું થાય. આમ, થયેલું કાર્ય

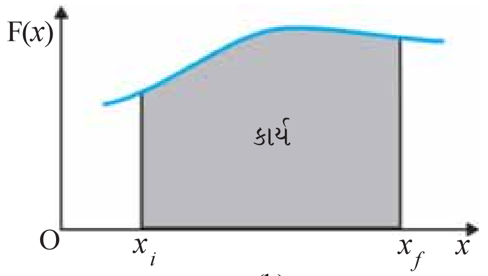
$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F(x)\ \Delta x$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} F(x)\mathrm{d}x \qquad (6.7)$$

અહીં જ્યારે Δx, શૂન્યની નજીક પહોંચે ત્યારે આ સરવાળાના લક્ષને '*lim*' વડે દર્શાવી છે. આમ, ચલિતબળ માટે થયેલ કાર્યને બળના સ્થાનાંતર પરના નિયત સંકલન વડે દર્શાવી શકાય છે. (પરિશિષ્ટ 3.1 જુઓ.)



આકૃતિ 6.3(*a*)

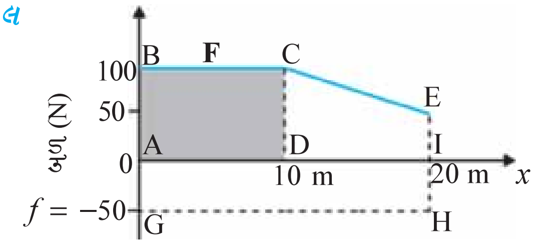


(b)

આકૃતિ 6.3 *(a) છાયાંકિત લંબચોરસ પટ્ટા વડે ઘેરાયેલું ક્ષેત્રફળ સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર Δx દરમિયાન ચલબળ વડે થયેલ કાર્ય $\Delta W = F(x)\,\Delta x$ દર્શાવે છે. (b) $\Delta x \to 0$ માટે આવા લંબચોરસોના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો, $F(x)$ વડે થયેલાં કાર્ય જેટલો જ હોય છે.*

▶ ***ઉદાહરણ 6.5*** રેલવે પ્લેટફૉર્મની ખરબચડી સપાટી પર એક બહેન પતરાની પેટી ઘસડે છે. તેણી 10 m અંતર સુધી 100 N બળ લગાડે છે. ત્યાર બાદ, થાકની માત્રા વધતાં તેમણે લગાડેલ બળ રેખીય (રીતે) ઘટીને 50 N થાય છે. પતરાની પેટીએ કાપેલ કુલ અંતર 20 m છે. બહેને લગાડેલ બળ અને 50 N જેટલા ઘર્ષણબળ-સ્થાનાંતર દર્શાવતો આલેખ દોરો. બંને બળો વડે 20 m અંતર સુધીમાં થયેલ કાર્ય શોધો.

ઉકેલ



આકૃતિ 6.4 *બહેને લગાડેલ બળ F અને તેની વિરુદ્ધ લાગતા ઘર્ષણબળ fનો સ્થાનાંતર વિરુદ્ધ આલેખ*

આકૃતિ 6.4માં લગાડેલ બળનો આલેખ દોરેલ છે. $x = 20$ m પાસે $F = 50$ N ($\neq 0$). ઘર્ષણબળ f નું મૂલ્ય $|\mathbf{f}| = 50$ આપણને આપેલું છે. તે **F**ની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે અને ગતિને અવરોધે છે. આથી, તેને બળ દર્શાવતી અક્ષ પર ઋણ તરફ દર્શાવ્યું છે.

બહેને કરેલ કાર્ય

$W_F \to$ ABCD લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ + CEID સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ

$$W_F = 100 \times 10 + \frac{1}{2}(100 + 50) \times 10$$
$$= 1000 + 750$$
$$= 1750 \text{ J}$$

અવરોધક બળ વડે થયેલું કાર્ય

$W_f \to$ લંબચોરસ AGHIનું ક્ષેત્રફળ

$$W_f = (-50) \times 20$$
$$= -1000 \text{ J}$$

બળ અક્ષની ઋણ તરફના ક્ષેત્રફળનું ચિહ્ન ઋણ હોય છે. ◀

6.6 ચલબળ માટે કાર્યઊર્જા પ્રમેય (THE WORK ENERGY THEOREM FOR A VARIABLE FORCE)

આપણે ચલબળ માટે કાર્યઊર્જા પ્રમેય સાબિત કરવા માટે જરૂરી કાર્ય અને ગતિઊર્જાના ખ્યાલો જાણીએ છીએ. અહીં આપણે એક પરિમાણ માટે ચર્ચા કરીશું. સમય સાથે ગતિઊર્જાના ફેરફારનો દર

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\, \upsilon^2\right)$$
$$= m \frac{d\upsilon}{dt}\, \upsilon$$
$$= F\, \upsilon \text{ (ન્યૂટનના બીજા નિયમ પરથી)}$$
$$= F \frac{dx}{dt}$$

આથી,

$$dK = F dx$$

પ્રારંભિક સ્થાન (x_i)થી અંતિમ સ્થાન (x_f) સુધી સંકલન કરતાં,

$$\int_{K_i}^{K_f} dK = \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

જ્યાં K_i અને K_f એ x_i અને x_fને અનુલક્ષીને પ્રારંભિક અને અંતિમ ગતિઊર્જાઓ છે.

$$\text{અથવા, } K_f - K_i = \int_{x_i}^{x_f} F dx \quad (6.8a)$$

સમીકરણ (6.7) પરથી,

$$K_f - K_i = W \text{ મળે.} \quad (6.8b)$$

આમ, ચલિત બળ માટે કાર્યઊર્જા પ્રમેય સાબિત થયું કહેવાય.

કાર્યઊર્જા પ્રમેય ભલે ઘણાબધા કિસ્સાઓમાં ઉપયોગી હોય, પરંતુ સામાન્ય રીતે, તે ન્યૂટનના બીજા નિયમની બધી જ ગત્યાત્મક માહિતી સમાવતું નથી. તે ન્યૂટનના બીજા નિયમનું સંકલિત સ્વરૂપ છે. ન્યૂટનનો બીજો નિયમ કોઈપણ ક્ષણે (સમયે) બળ અને પ્રવેગને સાંકળતો સંબંધ દર્શાવે છે. કાર્યઊર્જા પ્રમેયમાં ચોક્કસ સમય અંતરાલમાં સંકલન કરવામાં આવે છે. આ સંદર્ભમાં, ન્યૂટનના બીજા નિયમમાં દર્શાવેલ દરેક સમયની

ઘટનાનું 'સંકલન' થતું હોવાથી તે માહિતી સ્પષ્ટ (નિશ્ચિત) રીતે મળતી નથી. બીજું નિરીક્ષણ એ છે કે દ્વિ અને ત્રિપરિમાણમાં ન્યૂટનનો બીજો નિયમ સદિશ રૂપમાં હોય છે, જ્યારે કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય અદિશ રૂપમાં છે. ન્યૂટનના બીજા નિયમમાં દિશાને અનુલક્ષીને સંકળાયેલી માહિતી, આ અદિશ રૂપમાં સમાવિષ્ટ નથી હોતી.

▶ *ઉદાહરણ 6.6* સમતલ સપાટી પર $\upsilon_i = 2 \text{ m s}^{-1}$ની ઝડપથી ગતિ કરતો $m = 1$ kg દળનો એક બ્લૉક, ખરબચડા પટ્ટામાં પ્રવેશે છે જે $x = 0.10$ mથી $x = 2.01$ m સુધીનો છે. આ પટ્ટાની મર્યાદામાં બ્લૉક પર લાગતું અવરોધક બળ F_r એ x ના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

$F_r = \frac{-k}{x}$, જ્યાં, $0.1 < x < 2.01$ m

$= 0$ જ્યાં $x < 0.1$ m અને $x > 2.01$ m

અહીંયાં, $k = 0.5$ J. આ પટ્ટાને પસાર કર્યા પછી બ્લૉકની અંતિમ ગતિઊર્જા અને ઝડપ υ_f કેટલા હશે ?

ઉકેલ સમીકરણ (6.8a) પરથી

$$K_f = K_i + \int_{0.1}^{2.01} \frac{(-k)}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} m\upsilon_i^2 - k \ln(x)|_{0.1}^{2.01}$$

$$= \frac{1}{2} m\upsilon_i^2 - k\ln\left(\frac{2.01}{0.1}\right)$$

$$= 2 - 0.5 \ln (20.1)$$

$$= 2 - 1.5 = 0.5 \text{ J}$$

$$\upsilon_f = \sqrt{2K_f / m} = 1 \text{ m s}^{-1}$$

અહીં, નોંધો કે ln એ નેચરલ લોગેરિધમની સંજ્ઞા છે, જેનો આધાર e છે અને તે 10 આધારવાળું લોગેરિધમ નથી. [$\ln X = \log_e X = 2.303 \log_{10} X$] ◀

6.7 સ્થિતિઊર્જાની વિભાવના (ખ્યાલ) (THE CONCEPT OF POTENTIAL ENERGY)

Potential શબ્દ ક્રિયા કરવાની ક્ષમતા કે શક્યતા દર્શાવે છે. સ્થિતિઊર્જા શબ્દ સાંભળતા જ કોઈના પણ મનમાં 'સંગ્રહિત' ઊર્જા એવો ખ્યાલ આવે. ખેંચાયેલી ધનુષની પણછ (દોરી) સ્થિતિઊર્જા ધરાવે છે. જ્યારે પણછ છોડવામાં આવે ત્યારે તીર ખૂબ ઝડપથી છૂટે છે. પૃથ્વીની સપાટી (પોપડો) એકધારી નિયમિત નથી, પરંતુ તે અસતત અને અમુક જગ્યાએ ભંગાણવાળી છે જેને તિરાડો (ફૉલ્ટલાઇન) કહે છે. આ તિરાડો પૃથ્વીના પોપડાઓ વચ્ચે 'દબાયેલી સ્પ્રિંગ'ની જેમ હોય છે. તે ખૂબ સ્થિતિઊર્જા ધરાવે છે. જ્યારે આ તિરાડો એકબીજા સાથે ફરીથી ગોઠવાવા પ્રયત્ન કરે ત્યારે ધરતીકંપ થાય છે. આમ, સ્થિતિઊર્જા એ કોઈ પદાર્થની સ્થિતિ અથવા ગોઠવણીને અનુલક્ષીને 'સંગ્રહિત ઊર્જા' છે. જ્યારે પદાર્થને છોડી દેવામાં આવે ત્યારે તેની સંગ્રહિત ઊર્જા મુક્ત થાય છે જે ગતિઊર્જામાં પરિણમે છે. હવે આપણે સ્થિતિઊર્જાના ખ્યાલને વધુ મજબૂત કરીએ.

m દળના દડા પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ mg હોય છે. gને પૃથ્વીની સપાટી નજીક અચળ ગણી શકાય. 'નજીક' શબ્દનો અર્થ એ કે પૃથ્વીની સપાટીથી દડાની ઊંચાઈ h એ પૃથ્વીની ત્રિજ્યા R_Eથી ઘણી નાની ($h << R_E$) હોય, કે જેથી પૃથ્વીની સપાટી* પાસે gના ફેરફારને આપણે અવગણી શકીએ. અહીં આપણે ઉપર તરફના સ્થાનાંતરને ધન ગણેલ છે. ધારો કે આપણે દડાને h ઊંચાઈ સુધી લઈ જઈએ છીએ. બાહ્ય પરિબળ વડે ગુરુત્વાકર્ષણ બળની વિરુદ્ધ થયેલ કાર્ય mgh છે. આ કાર્ય સ્થિતિઊર્જાના રૂપમાં સંગ્રહિત થાય છે. પદાર્થની ઊંચાઈ h સાથે સંકળાયેલ ગુરુત્વીય સ્થિતિઊર્જા, $V(h)$ વડે દર્શાવાય છે અને તે પદાર્થને તેટલી ઊંચાઈએ લઈ જવા દરમિયાન ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે થતા કાર્યના ઋણ મૂલ્ય જેટલી હોય છે.

$$V(h) = mgh$$

જો hને એક ચલ તરીકે લઈએ તો એવું સહેલાઈથી જોઈ શકાય છે કે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ F, $V(h)$ના hને અનુલક્ષીને મળતા વિકલિતના ઋણ બરાબર હોય છે. આમ,

$$F = -\frac{d}{dh} V(h) = -m\ g$$

ઋણ ચિહ્ન દર્શાવે છે કે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ નીચે તરફ લાગે છે. જ્યારે દડાને છોડવામાં (મુક્ત કરવામાં) આવે ત્યારે તે વધતી ઝડપથી નીચે આવે છે. તે જમીનને સ્પર્શે તે પહેલાં (ની ક્ષણે) તેની ઝડપ ગતિના સમીકરણ

$$\upsilon^2 = 2gh$$

વડે મેળવી શકાય છે.

આ સમીકરણને બીજી રીતે લખીએ તો,

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = mgh$$

જે દર્શાવે છે કે h ઊંચાઈએ રહેલા પદાર્થને જ્યારે મુક્ત કરવામાં આવે ત્યારે તે જમીન પર પહોંચે ત્યાં સુધી તેની ગુરુત્વીય સ્થિતિઊર્જાનું ગતિઊર્જામાં રૂપાંતર થતું જાય છે.

ભૌતિક રીતે, સ્થિતિઊર્જાની વિભાવના ફક્ત એવા પ્રકારનાં બળોને લાગુ પડે છે કે જેમાં બળની વિરુદ્ધ કરવામાં આવેલું કાર્ય, ઊર્જાના રૂપમાં સંગ્રહિત થતું હોય. જ્યારે બાહ્ય પરિબળો દૂર થાય ત્યારે તે ગતિઊર્જાના રૂપમાં પરિવર્તિત થાય છે. ગણિતીય રીતે, (સરળતા માટે એક પરિમાણમાં) સ્થિતિઊર્જા

* *ઊંચાઈ સાથે gમાં થતો ફેરફાર ગુરુત્વાકર્ષણના પ્રકરણ-8માં ચર્ચેલ છે.*

$V(x)$ને તો જ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય કે જો બળ $F(x)$ને આ રીતે લખી શકાય :

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

જે દર્શાવે છે કે,

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = -\int_{V_i}^{V_f} dV = V_i - V_f$$

ગુરુત્વાકર્ષણ જેવા સંરક્ષી બળ વડે થયેલું કાર્ય ફક્ત પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થિતિઓ પર આધાર રાખે છે. અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે ઢાળવાળા સમતલ માટેનાં ઉદાહરણો જોયાં હતાં. જો m દળવાળા કોઈ પદાર્થને (ઘર્ષણરહિત) લીસા ઢાળની h ઊંચાઈ પરથી છૂટો મૂકવામાં આવે, તો તળિયા સુધી આવતાં તેની ઝડપ (ઢાળના કોઈ પણ કોણ માટે) $\sqrt{2gh}$ જેટલી થાય છે. આમ, ઢાળના છેડા સુધી પહોંચતા, તે mgh જેટલી ગતિઊર્જા મેળવી લે છે. જો થયેલ કાર્ય કે ગતિઊર્જા પદાર્થના ગતિપથ કે તેના વેગ જેવાં ઘટકો પર આધાર રાખતું હોય, તો તેને અસંરક્ષી બળ કહે છે.

સ્થિતિઊર્જાના પરિમાણ (ગતિઊર્જા અને કાર્યની જેમ) પણ $[ML^2T^{-2}]$ છે તથા તેનો એકમ જૂલ (J) છે. બીજી રીતે કહીએ તો સંરક્ષી બળ માટે, સ્થિતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર ΔV એ બળ વડે થયેલા કાર્યના ઋણ મૂલ્ય જેટલો હોય છે.

$$\Delta V = -F(x)\ \Delta x \qquad (6.9)$$

આ વિભાગમાં વિચારેલ પતન કરતા દડાના ઉદાહરણમાં આપણે દર્શાવ્યું કે કેવી રીતે સ્થિતિઊર્જાનું ગતિઊર્જામાં રૂપાંતર થાય છે. તે આપણને યંત્રશાસ્ત્રમાં અગત્ય ધરાવતા સંરક્ષણના સિદ્ધાંત તરફ દોરી જાય છે.

6.8 યાંત્રિક ઊર્જાનું સંરક્ષણ (THE CONSERVATION OF MECHANICAL ENERGY)

સરળતા માટે આપણે આ સિદ્ધાંતને એક પરિમાણમાં ચર્ચીશું. ધારો કે કોઈ એક પદાર્થ સંરક્ષી બળ Fની અસર હેઠળ Δx જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે. આથી, WE (કાર્યઊર્જા) પ્રમેય અનુસાર

$$\Delta K = F(x)\ \Delta x$$

સંરક્ષી બળ માટે સ્થિતિઊર્જા વિધેય $V(x)$, વ્યાખ્યા મુજબ

$-\Delta V = F(x)\ \Delta x$ પરથી મળે.

ઉપરનાં સમીકરણો પરથી,

$$\Delta K + \Delta V = 0$$

$$\therefore\ \Delta(K + V) = 0 \qquad (6.10)$$

જે દર્શાવે છે કે પદાર્થ માટે, ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો $K + V$ અચળ રહે છે. આથી, x_i થી x_f સુધીના સમગ્ર ગતિપથ માટે

$$K_i + V(x_i) = K_f + V(x_f) \qquad (6.11)$$

રાશિ $K + V(x)$ને તંત્રની કુલ યાંત્રિકઊર્જા કહે છે. સ્વતંત્ર રીતે દરેક બિંદુએ ગતિઊર્જા K અને સ્થિતિઊર્જા $V(x)$ બદલાતા હોઈ શકે છે, પરંતુ તેમનો સરવાળો અચળ રહે છે. આમ, 'સંરક્ષી બળ'નો મુદ્દો સ્પષ્ટ સમજી શકાય.

હવે આપણે સંરક્ષી બળની કેટલીક વ્યાખ્યાઓ ધ્યાનમાં લઈએ :

- જો અદિશ રાશિ $V(x)$ને સમીકરણ (6.9) વડે દર્શાવેલ સંબંધો દ્વારા દર્શાવી શકાય તો $F(x)$ને સંરક્ષી બળ કહેવાય. ત્રિપરિમાણમાં આ સમજવા માટે સદિશના વિકલનનો ઉપયોગ કરવો પડે, જે આ પુસ્તકની મર્યાદા બહાર છે.
- સંરક્ષી બળ વડે થયેલું કાર્ય ફક્ત અંતિમ બિંદુઓ પર આધાર રાખે છે. આ બાબત સમીકરણ,

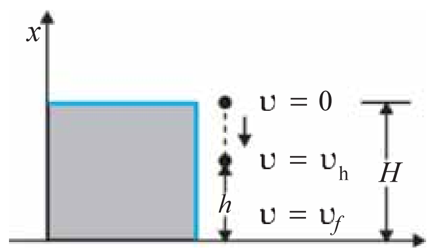
  $$W = K_f - K_i = V(x_i) - V(x_f)$$

  પરથી જોઈ શકાય છે. જે અંતિમ બિંદુઓ પર જ આધારિત છે.
- ત્રીજી વ્યાખ્યા દર્શાવે છે કે, બંધ માર્ગ પર આ બળ વડે થયેલ કાર્ય શૂન્ય હોય છે. જે ફરીથી સમીકરણ (6.11) પરથી જોઈ શકાય છે. કારણ કે, ફરીથી $x_i = x_f$.

આમ, કુલ યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત આ રીતે દર્શાવી શકાય :

જે તંત્ર પર સંરક્ષી બળો વડે કાર્ય થતું હોય તે તંત્રની કુલ યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે.

ઉપર મુજબની ચર્ચા વધુ સુદૃઢ બનાવવા આપણે ફરીથી ગુરુત્વીય બળોના અને પછીના વિભાગમાં સ્પ્રિંગબળના ઉદાહરણની ચર્ચા કરીશું. આકૃતિ 6.5માં m દળના દડાને H ઊંચાઈના ખડક (ભેખડ) પરથી પડતો દર્શાવ્યો છે.



આકૃતિ 6.5 m દળના દડાને H ઊંચાઈએથી પડતો મૂકતાં તેની સ્થિતિઊર્જાનું ગતિઊર્જામાં રૂપાંતરણ

ઊંચાઈઓ H, h અને શૂન્ય (જમીન પર) માટે દડાની કુલ યાંત્રિકઊર્જાઓ E_H, E_h અને E_0નાં મૂલ્યો

$$E_H = mgH \tag{6.11a}$$

$$E_h = mgh + \frac{1}{2} m\upsilon_h^2 \tag{6.11b}$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m\upsilon_f^2 \tag{6.11c}$$

અચળ બળ એ સ્થાન આધારિત બળ $F(x)$નો વિશિષ્ટ કિસ્સો છે. આથી, યાંત્રિકઊર્જા સંરક્ષાય છે. આમ,

$$E_H = E_0$$

અથવા, $mgH = \frac{1}{2} m\upsilon_f^2$

$$\therefore \ \upsilon_f = \sqrt{2gH}$$

આ પરિણામ મુક્ત પતન કરતા પદાર્થ માટે પરિચ્છેદ 3.7માં મેળવ્યું હતું.

આ ઉપરાંત,

$$E_H = E_h$$

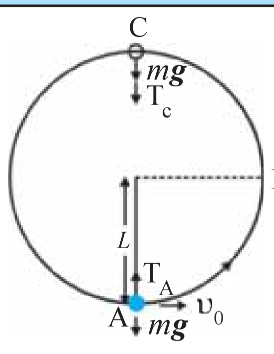
એટલે કે,

$$\upsilon_h^2 = 2g(H - h) \tag{6.11d}$$

જે શુદ્ધ ગતિશાસ્ત્રનું જાણીતું સમીકરણ છે.

H ઊંચાઈએ, ફક્ત સ્થિતિઊર્જા હોય છે. તે h ઊંચાઈએ અમુક અંશે ગતિઊર્જામાં રૂપાંતરિત થાય છે અને જમીન પર પૂર્ણ રીતે ગતિઊર્જા રૂપે મળે છે. આ યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 6.7 m દળનો એક દડો L લંબાઈની દળરહિત દોરી વડે લટકાવ્યો છે. તેને નિમ્નતમ બિંદુ A પાસે સમક્ષિતિજ દિશામાં υ_0 વેગથી ગતિ આપવામાં આવે છે કે જેથી તે ઉર્ધ્વસમતલમાં અર્ધવર્તુળાકાર માર્ગે જાય તથા ફક્ત મહત્તમ ઊંચાઈએ આવેલા બિંદુ C પાસે દોરી ઢીલી પડે. ઊર્ધ્વ સમતલમાં તે આકૃતિ 6.6 વડે દર્શાવેલ છે. તો (i) υ_0, (ii) બિંદુઓ B અને C પાસેની ઝડપ (iii) B અને C પાસે ગતિઊર્જાના ગુણોત્તર (K_B/K_C) માટેના સમીકરણ મેળવો. C બિંદુએ પહોંચ્યા પછી દડાનો માર્ગ કેવા પ્રકારનો હશે તે ચર્ચો.



આકૃતિ 6.6

ઉકેલ (i) દડા પર બે પ્રકારનાં બાહ્ય બળો લાગે છે : ગુરુત્વ અને દોરીમાં તણાવ (T). દડાનું સ્થાનાંતર હંમેશાં દોરીને લંબ રૂપે હોવાથી બીજું બળ (તણાવ) કાર્ય કરતું નથી. આમ, દડાની સ્થિતિઊર્જા ફક્ત ગુરુત્વાકર્ષણ બળ સાથે સંકળાયેલી હોય છે. તંત્રની કુલ યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે. ન્યૂનતમ બિંદુ A પાસે તંત્રની સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય ગણીશું. આથી, A પાસે

$$E = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 \tag{6.12}$$

$$T_A - mg = \frac{m\upsilon_0^2}{L} \quad \text{(ન્યૂટનનો બીજો નિયમ)}$$

જ્યાં, T_A એ બિંદુ A પાસે દોરીનું તણાવ બળ છે. મહત્તમ ઊંચાઈ C પરના બિંદુએ દોરી ઢીલા પડતાં દોરીનો તણાવ (T_C) શૂન્ય થાય છે. આથી C પાસે,

$$E = \frac{1}{2} m\upsilon_C^2 + 2mgL \tag{6.13}$$

$$mg = \frac{m\upsilon_C^2}{L} \quad \text{(ન્યૂટનનો બીજો નિયમ)} \tag{6.14}$$

જ્યાં, υ_C એ C પાસેની ઝડપ છે. સમીકરણો (6.13) અને (6.14) પરથી,

$$E = \frac{5}{2} mgL$$

જેને બિંદુ A પાસેની ઊર્જા સાથે સરખાવતાં,

$$\frac{5}{2} mgL = \frac{m}{2} \upsilon_0^2$$

અથવા, $\upsilon_0 = \sqrt{5gL}$

(ii) સમીકરણ (6.14) પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$$\upsilon_C = \sqrt{gL}$$

B બિંદુ પાસે ઊર્જા

$$E = \frac{1}{2} m\upsilon_B^2 + mgL$$

જેને બિંદુ A પાસેની ઊર્જા સાથે સરખાવી, (i)ના પરિણામ $\upsilon_0^2 = 5gL$નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{1}{2} m\upsilon_B^2 + mgL = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$$

$$= \frac{5}{2} mgL$$

$\therefore\ \upsilon_B = \sqrt{3gL}$

(iii) B અને C પાસેની ગતિઊર્જાઓનો ગુણોત્તર

$$\frac{K_B}{K_C} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_B^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_C^2} = \frac{3}{1}$$

બિંદુ C પાસે, દોરી ઢીલી પડે છે અને દડાનો વેગ ડાબી તરફ સમક્ષિતિજ દિશામાં છે. જો આ દોરીને આ જ ક્ષણે કાપી નાખવામાં આવે, તો દડો જાણે કે તે ઊંચાઈવાળા ખડક પરથી તેને સમક્ષિતિજ દિશામાં લાત મારતાં થતી પ્રક્ષિપ્ત ગતિની જેમ ગતિ કરશે, નહિતર દડો વર્તુળાકાર માર્ગ પર તેની પ્રદક્ષિણા ચાલુ રાખશે. ◀

6.9 સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા (THE POTENTIAL ENERGY OF A SPRING)

સ્પ્રિંગ બળ એ ચલિત બળનું ઉદાહરણ છે જે સંરક્ષી બળ છે. આકૃતિ 6.7માં દર્શાવ્યા મુજબ એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ એક બ્લૉક લીસા સમક્ષિતિજ સમતલ પર સ્થિર પડેલો છે. સ્પ્રિંગનો બીજો છેડો દૃઢ દીવાલ સાથે જડેલો છે. સ્પ્રિંગને હલકી અને વજનરહિત માની શકાય. આદર્શ સ્પ્રિંગ માટે, સ્પ્રિંગ બળ F_s એ xને સમપ્રમાણ હોય છે. જ્યાં, x એ સંતુલિત સ્થિતિથી બ્લૉકનું સ્થાનાંતર છે. સ્થાનાંતર ધન (આકૃતિ 6.7(b)) કે ઋણ (આકૃતિ 6.7(c)) હોઈ શકે છે. સ્પ્રિંગ માટે બળના આ નિયમને હૂકનો નિયમ કહે છે જે ગાણિતિક રીતે આ પ્રમાણે લખાય,

$$F_s = -kx$$

અચળાંક kને સ્પ્રિંગ અચળાંક કહે છે. તેનો એકમ $N\ m^{-1}$ છે. જો k મોટો હોય તો સ્પ્રિંગ કડક (અક્કડ) છે તેમ કહેવાય અને k નાનો હોય, તો સ્પ્રિંગ નરમ છે તેમ કહેવાય.

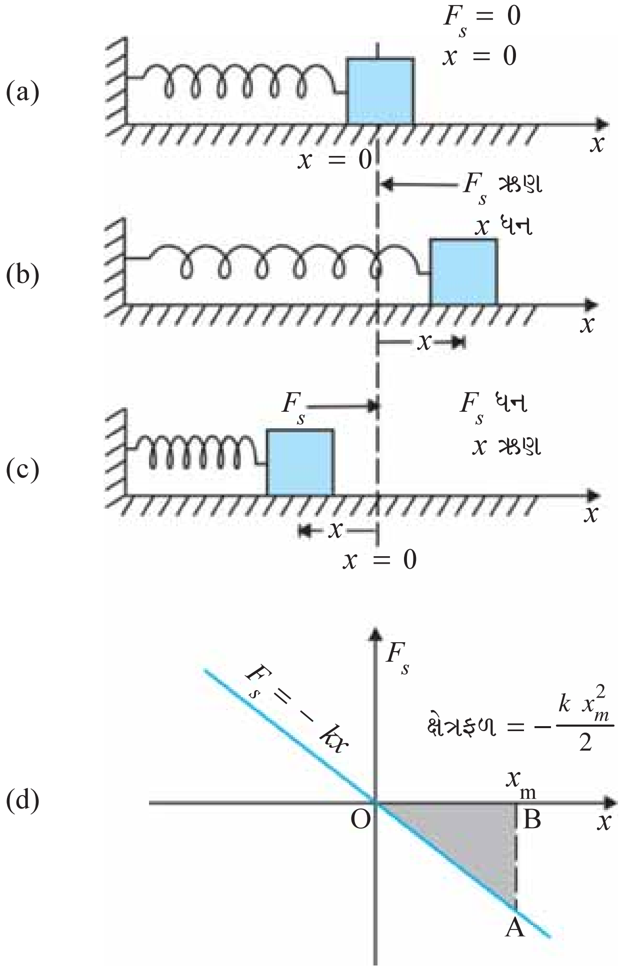
આકૃતિ 6.7(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે આપણે બ્લૉકને બહારની તરફ ખેંચીએ છીએ. જો લંબાઈમાં થતો વધારો x_m હોય, તો સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલ કાર્ય

$$W_s = \int_0^{x_m} F_s\,dx = -\int_0^{x_m} kx\,dx$$

$$= -\frac{k\,x_m^2}{2} \qquad (6.15)$$

આ સમીકરણ આકૃતિ 6.7(d)માં દર્શાવેલ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળથી પણ મેળવી શકાય. યાદ રાખો કે, બાહ્ય ખેંચાણ બળ F વડે થયેલ કાર્ય ધન છે કારણ કે તે સ્પ્રિંગ બળને પહોંચી વળે (Overcomes) છે.

$$W = \frac{k\,x_m^2}{2} \qquad (6.16)$$



આકૃતિ 6.7 *સ્પ્રિંગના મુક્ત છેડા સાથે જોડાયેલા બ્લૉક માટે સ્પ્રિંગ બળ (a) જ્યારે સંતુલિત સ્થિતિથી સ્થાનાંતર x શૂન્ય હોય ત્યારે સ્પ્રિંગ બળ F_s શૂન્ય થાય છે, (b) ખેંચાયેલ સ્પ્રિંગ માટે $x > 0$ અને $F_s < 0$, (c) સંકોચાયેલ સ્પ્રિંગ માટે $x < 0$ અને $F_s > 0$, (d) F_s વિરુદ્ધ xનો આલેખ. ઘાટા કરેલા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલ કાર્ય દર્શાવે છે. F_s અને xની નિશાની પરસ્પર વિરુદ્ધ હોવાથી, આ કાર્ય ઋણ હોય છે, $W_s = -kx_m^2 / 2$.*

જ્યારે સ્પ્રિંગને $x_c(< 0)$ સ્થાનાંતર સુધી સંકોચવામાં આવે ત્યારે પણ આ (સમીકરણ) સત્ય છે. સ્પ્રિંગ બળ $W_s = -kx_c^2/2$ જેટલું કાર્ય કરે છે, જ્યારે બાહ્ય બળ F વડે

થતું કાર્ય $+kx_c^2/2$ છે. જો બ્લૉકને પ્રારંભિક સ્થાનાંતર x_iથી અંતિમ સ્થાનાંતર x_f સુધી ગતિ કરાવવામાં આવે, તો સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલ કાર્ય W_sનું મૂલ્ય

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_f} kx \, dx = \frac{k\,x_i^2}{2} - \frac{k\,x_f^2}{2} \qquad (6.17)$$

આમ, સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલું કાર્ય અંતિમ બિંદુઓ પર જ આધાર રાખે છે. સ્પષ્ટ રીતે જોઈએ તો, જો બ્લૉકને x_iથી ખેંચવામાં આવે અને x_i સુધી પાછો આવવા દઈએ તો

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_i} kx \, dx = \frac{k\,x_i^2}{2} - \frac{k\,x_i^2}{2}$$

$$= 0 \qquad (6.18)$$

ચક્રિય પ્રક્રિયામાં સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલું કાર્ય શૂન્ય છે. આપણે સ્પષ્ટ રીતે દર્શાવ્યું છે કે, (i) હૂકે સૌપ્રથમ દર્શાવ્યા મુજબ ($F_s = -kx$), સ્પ્રિંગ બળ ફક્ત સ્થાન પર આધારિત છે. (ii) સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલ કાર્ય ફક્ત પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાન પર આધાર રાખે છે. દા.ત., સમીકરણ (6.17). આમ, સ્પ્રિંગ બળ **સંરક્ષી બળ** છે.

જ્યારે બ્લૉક અને સ્પ્રિંગનું તંત્ર સંતુલનની સ્થિતિમાં હોય ત્યારે આપણે સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા $V(x)$ શૂન્ય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ. x જેટલા ખેંચાણ (કે સંકોચન) માટે ઉપરનું વિશ્લેષણ દર્શાવે છે કે,

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} \qquad (6.19)$$

તમે સરળતાથી ચકાસી શકો કે સ્પ્રિંગ બળ $-dV/dx = -kx$. જો આકૃતિ 6.7માં દર્શાવેલ m દળના બ્લૉકને સંતુલિત સ્થિતિમાંથી x_m સુધી ખેંચીને છોડવામાં આવે, તો કોઈ પણ બિંદુ x, જ્યાં xનું મૂલ્ય $-x_m$ અને $+x_m$ની વચ્ચે હોય, પાસે તેની કુલ યાંત્રિકઊર્જા

$$\frac{1}{2}k\,x_m^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

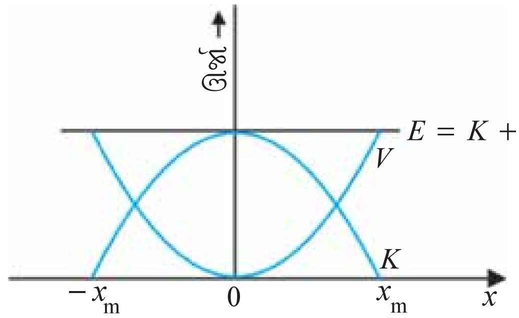
જ્યાં આપણે યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે તેમ માન્યું છે. આ દર્શાવે છે કે સંતુલન સ્થિતિ $x = 0$ પર ઝડપ અને ગતિઊર્જા મહત્તમ હશે. એટલે કે,

$$\frac{1}{2}m\upsilon_m^2 = \frac{1}{2}k\,x_m^2$$

જ્યાં, υ_m એ મહત્તમ ઝડપ છે.

અથવા $\upsilon_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x_m$

અહીંયાં નોંધો કે k/mના પરિમાણ $[T^{-2}]$ છે અને આપણું સમીકરણ પરિમાણની રીતે સાચું છે. ગતિઊર્જાનું સ્થિતિઊર્જામાં રૂપાંતર થાય છે અને તેથી ઊલટું પણ, પરંતુ કુલ યાંત્રિકઊર્જા અચળ રહે છે, જે આકૃતિ 6.8માં આલેખ દ્વારા દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.8 હૂકના નિયમનું પાલન કરતી સ્પ્રિંગ સાથે જોડેલા બ્લૉક માટે સ્થિતિઊર્જા V અને ગતિઊર્જા Kના પરવલય આલેખો. બંને આલેખો એકબીજાના પૂરક છે, એક વધે ત્યારે બીજું ઘટે છે. કુલ યાંત્રિકઊર્જા $E = K + V$ અચળ રહે છે.

▶ *ઉદાહરણ 6.8* કારના ઍક્સિડન્ટ (અથડામણ)ને તાદૃશ્ય (Simulation) કરવા માટે, કારના ઉત્પાદકો જુદા જુદા સ્પ્રિંગ અચળાંકવાળી સ્પ્રિંગ સાથે કારોની અથડામણનો અભ્યાસ કરે છે. એક એવું તાદૃશ્ય વિચારો કે જેમાં 18.0 km/hની ઝડપથી લીસા રસ્તા પર ગતિ કરતી 1000 kg દળની કાર, સમક્ષિતિજ રીતે લગાડેલ 6.25×10^3 N m^{-1} સ્પ્રિંગ અચળાંકવાળી સ્પ્રિંગ સાથે અથડાય છે. સ્પ્રિંગનું મહત્તમ સંકોચન કેટલું હશે ?

ઉકેલ મહત્તમ સંકોચન માટે કારની સંપૂર્ણ ગતિઊર્જાનું સ્થિતિઊર્જામાં રૂપાંતર થાય છે.

ગતિ કરતી કારની ગતિઊર્જા

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^3 \times 5 \times 5$$

$$K = 1.25 \times 10^4 \text{ J}$$

અહીંયાં આપણે 18 km h^{-1}ને 5 m s^{-1}માં રૂપાંતરિત કરેલ છે. **(એ યાદ રાખવું ઉપયોગી છે કે 36 km h^{-1} = 10 m s^{-1}).** યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ, મહત્તમ સંકોચન x_m માટે, સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા V એ ગતિ કરતી કારની ગતિઊર્જા જેટલી હોય છે.

$$V = \frac{1}{2}k\,x_m^2$$

$= 1.25 \times 10^4$ J

આથી,

$x_m = 2.00$ m મળે.

અહીંયાં નોંધીએ કે આપણે આદર્શ પરિસ્થિતિનું નિર્માણ કર્યું છે. સ્પ્રિંગને દળરહિત ધારી છે. સમતલને આપણે નજીવા ઘર્ષણવાળું ગણ્યું છે. ◀

આપણે સંરક્ષી બળો વિશે કેટલીક નોંધ કરીને આ વિભાગ પૂર્ણ કરીએ.

(i) અગાઉ (ઉપર)ની ચર્ચાઓમાં સમય વિશે કોઈ માહિતી ઉપલબ્ધ નથી. ઉપરના ઉદાહરણમાં, આપણે સંકોચનની ગણતરી કરી શકીએ છીએ, પરંતુ કેટલા સમય દરમિયાન સંકોચન થાય છે તે નહિ. ન્યૂટનના બીજા નિયમનું સમાધાન કરવા આ તંત્રની સમય આધારિત માહિતી જરૂરી છે.

(ii) બધાં બળો સંરક્ષી નથી. ઉદાહરણ તરીકે ઘર્ષણ, એ અસંરક્ષી બળ છે. આ કિસ્સા માટે ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમમાં જરૂરી ફેરફાર કરવો પડે. આ બાબત ઉદાહરણ 6.9માં દૃષ્ટાંત સાથે સમજાવી છે.

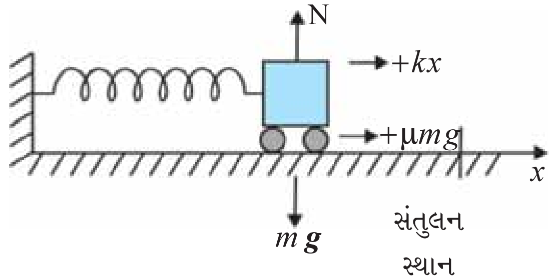
(iii) સ્થિતિઊર્જાનું શૂન્ય મૂલ્ય યાદચ્છિક છે. તે અનુકૂળતા મુજબ નક્કી કરી શકાય છે. સ્પ્રિંગ બળ માટે $x = 0$ પાસે આપણે $V(x) = 0$ લીધું, એટલે કે તણાવરહિત સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય હતી. પૃથ્વીની સપાટી (જમીન) પર અચળ ગુરુત્વાકર્ષણ બળ mg માટે આપણે $V = 0$ લીધું હતું. હવે પછીના પ્રકરણમાં આપણે જોઈશું કે ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમથી મળતા બળ માટે, ગુરુત્વાકર્ષણના ઉદ્‌ગમથી અનંત અંતરે સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લેવી શ્રેષ્ઠ છે. તેમ છતાં, કોઈ ચર્ચા (ઉદાહરણ)માં સ્થિતિઊર્જાનું શૂન્ય મૂલ્ય નક્કી કરવામાં આવે તે પછી સંપૂર્ણ ચર્ચા દરમિયાન તે મૂલ્યને વળગી રહેવું જોઈએ. ઘોડાદોડમાં તમે વચ્ચેથી ઘોડા ના બદલી શકો !

▶ *ઉદાહરણ 6.9* ઘર્ષણના અચળાંક μના 0.5 મૂલ્ય માટે ઉદાહરણ 6.8 ધ્યાનમાં લો અને સ્પ્રિંગનું મહત્તમ સંકોચન ગણો.

ઉકેલ ઘર્ષણની હાજરીમાં સ્પ્રિંગ બળ અને ઘર્ષણબળ બંને સ્પ્રિંગના સંકુચનની વિરુદ્ધ લાગે છે, જે આકૃતિ 6.9માં દર્શાવેલ છે.

આપણે યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણને બદલે કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેયની મદદ લઈશું.

ગતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર



આકૃતિ 6.9 કાર પર લાગતાં બળો

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

પરિણામી બળ વડે થતું કાર્ય

$$W = -\frac{1}{2}k\,x_m^2 - \mu m\,g\,x_m$$

બંને સમીકરણો સરખાવતાં,

$$\frac{1}{2}m\,\upsilon^2 = \frac{1}{2}k\,x_m^2 + \mu m\,g\,x_m$$

પરંતુ, $\mu mg = 0.5 \times 10^3 \times 10 = 5 \times 10^3$ N ($g = 10.0$ m s^{-2} લેતાં)

ઉપરનું સમીકરણ બીજી રીતે લખીએ તો આપણને અજ્ઞાત x_m માટે દ્વિઘાત સમીકરણ મળે.

$$k\,x_m^2 + 2\mu m\,g\,x_m - m\,\upsilon^2 = 0$$

$$x_m = \frac{-\mu m g + [\mu^2 m^2 g^2 + m k \upsilon^2]^{1/2}}{k}$$

અહીંયાં આપણે ધન વર્ગમૂળ લીધું છે કારણ કે x_m ધન છે. આપેલી કિંમતો આમાં મૂકતાં,

$x_m = 1.35$ m

જે આપણે ધાર્યું હતું તેમ, ઉદાહરણ 6.8ના મૂલ્ય કરતાં ઓછું છે.

જો પદાર્થ પર લાગતાં બળો, સંરક્ષી બળ F_c અને અસંરક્ષી બળ F_{nc} હોય, તો યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ દર્શાવતું સૂત્ર બદલવું પડે. કાર્યઊર્જા પ્રમેય મુજબ

$$(F_c + F_{nc})\,\Delta x = \Delta K$$

પણ, $F_c\Delta x = -\Delta V$

આથી, $\Delta(K + V) = F_{nc}\Delta x$

$\Delta E = F_{nc}\Delta x$

જ્યાં, E એ કુલ યાંત્રિકઊર્જા છે. પૂર્ણ માર્ગ માટે આ સમીકરણનું સ્વરૂપ

$$E_f - E_i = W_{nc}$$

જ્યાં, W_{nc} એ સંપૂર્ણ માર્ગ પર અસંરક્ષી બળ વડે થયેલું કુલ

કાર્ય છે. યાદ રહે કે સંરક્ષી બળથી અલગ, W_{nc} એ i થી f સુધીના ચોક્કસ માર્ગ પર આધાર રાખે છે.

6.10 ઊર્જાનાં જુદાં જુદાં સ્વરૂપો : ઊર્જા-સંરક્ષણનો નિયમ (VARIOUS FORMS OF ENERGY : THE LAW OF CONSERVATION OF ENERGY)

અગાઉના વિભાગમાં આપણે યાંત્રિકઊર્જા વિશે ચર્ચા કરી. આપણે જોયું કે તેને બે સ્પષ્ટ વિભાગોમાં દર્શાવી શકાય છે : એક ગતિ આધારિત, જેમ કે ગતિઊર્જા અને બીજી ગોઠવણી (સ્થાન) આધારિત, જેમ કે સ્થિતિઊર્જા. ઊર્જા ઘણા બધા સ્વરૂપે મળે છે જે એકમાંથી બીજા સ્વરૂપમાં કઈ કઈ રીતે રૂપાંતરિત થાય છે તેનો કદાચ આપણને (ખ્યાલ) અંદાજ પણ ન હોય.

6.10.1 ઉષ્મા (Heat)

આપણે જોયું કે ઘર્ષણ બળ એ સંરક્ષી બળ નથી. આમ છતાં, ઘર્ષણ બળ કાર્ય સાથે સંકળાયેલ છે, ઉદાહરણ 6.5. ખરબચડી સપાટીવાળા સમતલ પર υ_0 ઝડપથી સરકતો m દળનો બ્લૉક, x_0 અંતર કાપીને સ્થિર થાય છે. ગતિક ઘર્ષણ બળ fના કારણે x_0 અંતર સુધીમાં થતું કાર્ય $-f\,x_0$ છે. કાર્યઊર્જા પ્રમેય મુજબ $m\upsilon_0^2/2 = f\,x_0$. જો આપણે યંત્રશાસ્ત્રના સંદર્ભમાં વિચારીએ તો કહી શકીએ કે બ્લૉકની ગતિઊર્જા ઘર્ષણબળના કારણે વેડફાઈ જાય છે. બ્લૉક અને ટેબલનું અવલોકન કરીએ તો તેમના તાપમાનમાં થતો અલ્પ (નજીવો) વધારો જોવા મળે છે. ઘર્ષણ વડે થયેલું કાર્ય નકામું જતું નથી, પણ તે ઉષ્મા ઊર્જામાં ફેરવાય છે. તે બ્લૉક અને ટેબલની આંતરિક ઊર્જામાં વધારો કરે છે. શિયાળામાં, ગરમાવાનો અહેસાસ કરવા (ગરમાવો મેળવવા), આપણે આપણી બંને હથેળીઓ જોરથી ઘસીને ગરમી ઉત્પન્ન કરીએ છીએ. હવે પછી આપણે જોઈશું કે આંતરિક ઊર્જા અણુઓની અવિરત અને અનિયમિત ગતિ સાથે સંકળાયેલી છે. ઉષ્માઊર્જાના રૂપાંતરણનો ખ્યાલ એ પરથી આવે કે 1 kg પાણી $10^{\circ}C$ જેટલું ઠંડું થાય ત્યારે તે 42000 J ઊર્જા મુક્ત કરે છે.

6.10.2 રાસાયણિક ઊર્જા (Chemical Energy)

માનવજાતિની મોટામાં મોટી ટેક્નિકલ ઉપલબ્ધિ એ હતી કે આપણે અગ્નિને કેવી રીતે પ્રજ્વલિત કરી શકાય તેની શોધ કરી. આપણે ચકમકના બે પથ્થરોને એકબીજા સાથે ઘસીને (યાંત્રિકઊર્જા), તેમાં ગરમી પેદા કરીને સૂકાં પાંદડાંના ઢગલાંને સળગાવતા (રાસાયણિક ઊર્જા) શીખ્યાં, જેથી સતત હૂંફ (ગરમી) મળી શકે. દીવાસળી જ્યારે વિશેષ રીતે તૈયાર કરેલ રાસાયણિક સપાટી પર ઘસવામાં આવે ત્યારે એક ચમકતી જ્વાળાના રૂપમાં સળગે છે. જ્યારે સળગાવેલી દીવાસળી, ફટાકડાને લગાડવામાં આવે, ત્યારે અવાજ અને પ્રકાશનું ભવ્ય પ્રદર્શન થાય છે.

રાસાયણિક પ્રક્રિયામાં ભાગ લેતા અણુઓની જુદી જુદી બંધન ઊર્જાઓના કારણે રાસાયણિક ઊર્જા ઉત્પન્ન થાય છે. એક સ્થિર સંયોજનની ઊર્જા તેનાં મુક્ત ઘટકો કરતાં ઓછી હોય છે. રાસાયણિક પ્રક્રિયા મુખ્યત્વે પરમાણુઓની પુનઃ ગોઠવણી છે. જો પ્રક્રિયકોની કુલ ઊર્જા-પ્રક્રિયાની ઉપજોની ઊર્જા કરતાં વધારે હોય, તો ઉષ્મા મુક્ત થાય છે અને આ પ્રક્રિયા **ઉષ્માક્ષેપક પ્રક્રિયા** કહેવાય છે. જો આનાથી વિપરીત થતું હોય, ઉષ્માનું શોષણ થતું હોય, તો પ્રક્રિયા **ઉષ્માશોષક** કહેવાય. કોલસો કાર્બનનો બનેલો હોય છે અને તેના 1 kg જેટલા દહનના પરિણામે 3×10^7 J ઊર્જા મુક્ત થાય છે.

રાસાયણિક ઊર્જા એવાં બળો સાથે સંકળાયેલી છે કે જે પદાર્થોને સ્થિરતા પૂરી પાડે. આ બળો પરમાણુઓને અણુઓમાં, અણુઓને મિશ્રઅણુ (બહુલક-Polymeric Chain) શૃંખલા (શ્રેણી) વગેરેમાં બાંધે છે. કોલસા, રાંધણગૅસ, લાકડું અને પેટ્રોલિયમના દહનથી ઉત્પન્ન થતી રાસાયણિક ઊર્જા આપણા રોજિંદા જીવન (અસ્તિત્વ) માટે અનિવાર્ય છે.

6.10.3 વિદ્યુતઊર્જા (Electrical Energy)

વિદ્યુતપ્રવાહના વહનથી બલ્બ પ્રકાશે છે, પંખો ફરે છે અને ઘંટડી રણકે છે. વિદ્યુતભારો અને પ્રવાહોના આકર્ષણ અને અપાકર્ષણનું સંચાલન કરતા નિયમો આપણે આગળ જતાં ભણીશું. વિદ્યુતપ્રવાહ સાથે ઊર્જા સંકળાયેલી છે. ભારતીય શહેરનો (કોઈ) એક પરિવાર સરેરાશ રીતે એક સેકન્ડમાં આશરે 200 J જેટલી ઊર્જા વાપરે છે.

6.10.4 દળ અને ઊર્જાની સમતુલ્યતા (The Equivalence of Mass and Energy)

ઓગણીસમી સદીના અંત સુધી, ભૌતિક વિજ્ઞાનીઓ એવું માનતા હતા કે, દરેક ભૌતિક અને રાસાયણિક પ્રક્રિયામાં, અલગ કરેલા તંત્રનું દ્રવ્યમાન સંરક્ષિત રહે છે. દ્રવ્ય પોતાની અવસ્થા બદલી શકે. દા.ત., હિમનદીનો બરફ ઓગળીને પાણીનો ધસમસતો પ્રવાહ બની શકે છે, પરંતુ દ્રવ્ય નથી તો ઉત્પન્ન કરી શકાતું નથી કે નષ્ટ કરી શકાતું. પરંતુ, આઈન્સ્ટાઈને (1879-1955) દર્શાવ્યું કે દ્રવ્યમાન અને ઊર્જા સમતુલ્ય છે અને તેમને જોડતું સમીકરણ

$$E = m\,c^2 \tag{6.20}$$

છે, જ્યાં, c શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ કે જે લગભગ 3×10^8 m s^{-1} છે. આમ, ફક્ત એક કિલોગ્રામ પદાર્થ સાથે સંકળાયેલી ઊર્જા આશ્ચર્યજનક રીતે,

$$E = 1 \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} = 9 \times 10^{16} \text{ J}$$

જેટલી હોય છે. જે એક વર્ષમાં (3000 MW) પાવર ઉત્પન્ન કરતા બહુ મોટા પાવર-સ્ટેશનના આઉટપુટ જેટલી છે.

6.10.5 ન્યુક્લિઅર ઊર્જા (Nuclear Energy)

માનવનિર્મિત મહાવિનાશક શસ્ત્રો (આયુધો) જેવા કે વિખંડન (ફિશન) અને સંલયન (ફ્યુઝન) બૉમ્બ એક પ્રકારે દળ અને ઊર્જાની સમતુલ્યતાનાં જ ઉદાહરણો છે. બીજી બાજુ જોઈએ તો જીવન

કોષ્ટક 6.3 જુદી જુદી ઘટનાઓ સાથે સંકળાયેલી ઊર્જાનાં લગભગ મૂલ્યો

વર્ગીકરણ	ઊર્જા (J)
બિગ બેન્ગ	10^{68}
આકાશગંગાએ તેના જીવનકાળ દરમિયાન ઉત્સર્જેલી રેડિયોઊર્જા	10^{55}
આકાશગંગાની પરિભ્રમણ ઊર્જા	10^{52}
સુપરનોવા (અતિવિરાટ તારા)ના ધડાકા દરમિયાન મુક્ત થતી ઊર્જા	10^{44}
સમુદ્રના હાઇડ્રોજનનું ફ્યુઝન	10^{34}
પૃથ્વીની પરિભ્રમણ ઊર્જા	10^{29}
સૂર્ય પરથી પૃથ્વી પર આપાત થતી વાર્ષિક ઊર્જા	5×10^{24}
પૃથ્વીની સપાટી પાસે વેડફાતી વાર્ષિક પવનઊર્જા	10^{22}
સમગ્ર વિશ્વમાં માનવ દ્વારા ઉપયોગમાં લેવાતી વાર્ષિક ઊર્જા	3×10^{20}
સમુદ્રના મોજાઓમાં રહેલી (વેડફાતી) વાર્ષિક ઊર્જા	10^{20}
15 મેગાટનના ફ્યુઝન બૉમ્બમાંથી મુક્ત થતી ઊર્જા	10^{17}
વિદ્યુતઊર્જા ઉત્પન્ન કરતા મોટા પ્લાન્ટ વડે મળતી વાર્ષિક ઊર્જા	10^{16}
વાવાઝોડું	10^{15}
1000 kg કોલસાના દહન દરમિયાન મુક્ત થતી ઊર્જા	3×10^{10}
એક મોટા જેટ વિમાનની ગતિઊર્જા	10^{9}
1 લિટર પેટ્રોલના દહન દરમિયાન મુક્ત થતી ઊર્જા	3×10^{7}
પુખ્ત વયના માણસનો દરરોજનો ખોરાક	10^{7}
માનવહૃદયે એક ધબકારા દરમિયાન કરેલ કાર્ય	0.5
આ કાગળને ફેરવવા માટે	10^{-3}
(Fleahop) ચાંચડ (જંતુ)નો કૂદકો	10^{-7}
એક ન્યુટ્રૉનમાંથી નીકળતી ઊર્જા	10^{-10}
ન્યુક્લિયસમાં રહેલા પ્રોટોનની લાક્ષણિક ઊર્જા	10^{-13}
પરમાણુમાં રહેલા ઇલેક્ટ્રૉનની લાક્ષણિક ઊર્જા	10^{-18}
DNAના એક બંધને તોડવા માટે જરૂરી ઊર્જા	10^{-20}

બક્ષતી, સૂર્યમાંથી ઉદ્‌ભવતી ઊર્જા પણ ઉપરના સમીકરણ પર આધારિત છે. અહીંયાં અસલમાં હાઇડ્રોજનના ચાર ન્યુક્લિયસ ફ્યુઝ (એકબીજામાં ભળીને) થઈને હિલિયમનું એક ન્યુક્લિયસ બનાવે છે. જેનું દળ આ ચારેય પ્રક્રિયકોના કુલ દળ કરતાં ઓછું હોય છે. દળનો આ તફાવત કે જેને દળક્ષતિ (માસ ડિફેક્ટ) Δm કહે છે તે $(\Delta m)c^2$ જેટલી ઊર્જાનો સ્રોત છે. ફિશનમાં યુરેનિયમ $^{235}_{92}U$ જેવા ભારે ન્યુક્લિયસ, બે હલકા ન્યુક્લિયસમાં વહેંચાય છે. અહીં પણ અંતિમ દ્રવ્યમાન પ્રારંભિક દ્રવ્યમાન કરતાં ઓછું હોય છે અને આ દ્રવ્યમાન તફાવત ઊર્જામાં રૂપાંતરિત થાય છે, જેનો ઉપયોગ તેને કોઈ રીતે બહાર લઈ વિદ્યુતઊર્જા મેળવવા માટે કરી શકાય, જેમ કે ન્યુક્લિયર પાવર પ્લાન્ટ (Controlled Nuclear Fisson)માં અથવા ન્યુક્લિયર શસ્ત્રો બનાવવા માટે કરી શકાય (Uncontrolled Nuclear Fisson). રાસાયણિક પ્રક્રિયામાં મુક્ત થતી ઊર્જા ΔEને પણ ચોક્કસ દ્રવ્યમાન તફાવત $\Delta m = \Delta E/c^2$ સાથે સાંકળી શકાય. પરંતુ રાસાયણિક પ્રક્રિયા માટે આ દ્રવ્યમાન તફાવત ન્યુક્લિયર પ્રક્રિયા માટે મળતા મૂલ્ય કરતાં ઘણો નાનો (ઓછો) છે. કોષ્ટક 6.3માં જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓ અને ઘટનાઓ માટે કુલ ઊર્જાનાં મૂલ્યો દર્શાવ્યાં છે.

▶ *ઉદાહરણ 6.10* કોષ્ટક 6.3 જુઓ અને (a) DNAમાં રહેલા એક બંધને તોડવા માટે જરૂરી ઊર્જાને eVમાં, (b) હવાના એક અણુની ગતિઊર્જા (10^{-21} J)ને eVમાં, (c) પુખ્ત વયના માણસના દરરોજના ખોરાકને Kilocalories માં દર્શાવો.

ઉકેલ (a) DNAના એક બંધને તોડવા માટે જરૂરી ઊર્જા

$$\frac{10^{-20}\ \text{J}}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}} \simeq 0.06\ \text{eV}$$

જ્યાં '$\simeq$' ચિહ્ન લગભગ મૂલ્ય દર્શાવે છે.

નોંધો કે, 0.1 eV = 100 meV (100 millielectron Volt)

(b) હવાના અણુની ગતિઊર્જા

$$\frac{10^{-21}\ \text{J}}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}} \simeq 0.0062\ \text{eV}$$

જે 6.2 meV જેટલી છે.

(c) માણસનો દરરોજનો ખોરાક

$$\frac{10^{7}\ \text{J}}{4.2 \times 10^{3}\ \text{J/kcal}} \simeq 2400\ \text{kcal}$$

અહીં આપણે છાપાઓ અને મૅગેઝિન્સમાં આવતી ગેરસમજ (ભરેલી વાત) તરફ ધ્યાન દોરીએ. તેમાં ખોરાકનાં મૂલ્યો કૅલરીમાં દર્શાવવામાં આવે છે અને આપણને દરરોજ 2400 કૅલરી કરતા ઓછો ખોરાક લેવા માટે પ્રેરણા આપવામાં આવે છે. ખરેખર તેમણે કૅલરીના બદલે કિલોકૅલરી (kcal) લખવું જોઈએ. 2400 કૅલરી ખોરાક લેતી વ્યક્તિ ભૂખના દુઃખથી જ મરી જાય ! ખોરાકની 1 કૅલરી એ 1 kcal છે. ◀

6.10.6 ઊર્જા-સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત (The Principle of Conservation of Energy)

આપણે જોયું કે જો તંત્ર પર કાર્ય કરતાં બળો સંરક્ષી હોય, તો તેની કુલ યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે. જો કેટલાંક અસંરક્ષી બળો પણ લાગતાં હોય, તો યાંત્રિકઊર્જાનો અમુક ભાગ (હિસ્સો) બીજા પ્રકારમાં રૂપાંતર પામે છે. જેમકે, ઉષ્મા, પ્રકાશ અને અવાજ. આમ છતાં, બધા પ્રકારની ઊર્જાઓને ધ્યાનમાં લઈએ તો અલગ કરેલા તંત્રની કુલ ઊર્જા બદલાતી નથી. ઊર્જાનું એક પ્રકારમાંથી બીજા પ્રકારમાં રૂપાંતરણ થાય છે. પણ અલગ કરેલા તંત્રની કુલ ઊર્જા અચળ રહે છે. ક્યારેય ઊર્જા ઉત્પન્ન કરી શકાતી નથી કે નથી તેનો નાશ કરી શકાતો.

સમગ્ર વિશ્વને અલગ કરેલું તંત્ર ગણી શકાય અને તેથી સમગ્ર વિશ્વની કુલ ઊર્જા અચળ છે. જો વિશ્વના કોઈ ભાગમાં ઊર્જાનો વ્યય થાય તો બીજા ભાગને તેટલી જ ઊર્જા મળવી જોઈએ.

ઊર્જા-સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત સાબિત કરી શકાતો નથી. આમ છતાં, આ સિદ્ધાંતનું ખંડન થતું હોય તેવું પણ જાણવામાં આવ્યું નથી. ઊર્જા-સંરક્ષણ અને જુદા જુદા પ્રકારમાં તેના રૂપાંતરણનો સિદ્ધાંત ભૌતિકવિજ્ઞાન, રસાયણ વિજ્ઞાન અને જીવવિજ્ઞાનના જુદા જુદા વિભાગોને એકબીજા સાથે સાંકળે છે. તે આપણી વૈજ્ઞાનિક ધારણાઓને સંગઠિત રીતે ટકાવી રાખવા માટે મહત્ત્વ ધરાવે છે. ઇજનેરીની દૃષ્ટિએ વિદ્યુતીય સંચાર અને યાંત્રિક સાધનો કેટલાક પ્રકારની ઊર્જાના રૂપાંતરણ પર આધાર રાખે છે.

6.11 શક્તિ (પાવર, POWER)

પદાર્થ પર કાર્ય થયું એ કરતાં કેટલા દરથી આ કાર્ય થયું તે જાણવું ક્યારેક રસપ્રદ બની રહે છે. માણસ ફક્ત ચાર માળ ચડી શકે તે નહિ પરંતુ ઝડપથી ચડી જાય છે તે ચુસ્ત શરીરવાળો છે તેમ આપણે કહીએ છીએ. કાર્ય કરવાના કે ઊર્જાના રૂપાંતરણના સમય-દરને **પાવર (કાર્યત્વરા)** તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

કાર્ય W અને તે માટે લીધેલ કુલ સમય t ના ગુણોત્તરને તે બળનો સરેરાશ પાવર કહે છે.

$$P_{av} = \frac{W}{t}$$

સમય અંતરાલ શૂન્યની નજીક પહોંચે તે લક્ષમાં સરેરાશ પાવરનું મૂલ્ય તાત્ક્ષણિક પાવર (Instantaneons Power) તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{6.21}$$

બળ **F** વડે સ્થાનાંતર $d\mathbf{r}$ માટે થયેલ કાર્ય dWનું મૂલ્ય $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. બીજી રીતે તાત્ક્ષણિક પાવર દર્શાવીએ તો,

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\upsilon} \tag{6.22}$$

જ્યાં, $\boldsymbol{\upsilon}$ એ બળ **F** દરમિયાનનો તાત્ક્ષણિક વેગ છે.

કાર્ય અને ઊર્જાની જેમ પાવર પણ અદિશ રાશિ છે. તેના પરિમાણ $[ML^2T^{-3}]$ છે. SI પદ્ધતિમાં તેનો એકમ watt (W) છે. 1 watt એટલે 1 J s^{-1}. પાવરનો એકમ જેમ્સ વૉટ (James Watt)ના નામ પરથી પાડવામાં આવ્યો છે. જે અઢારમી સદીમાં વરાળયંત્રના શોધકોમાંનો એક છે. પાવરનો એક બીજો એકમ છે, હૉર્સ પાવર (hp)

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

આ એકમનો ઉપયોગ હજી પણ વાહનો, મોટરબાઇક વગેરેની ક્ષમતા દર્શાવવા માટે થાય છે.

જ્યારે આપણે વિદ્યુત ઉપકરણો, જેમકે બલ્બ, હીટર અને રેફ્રિજરેટર ખરીદીએ ત્યારે આપણે watt શબ્દ સાંભળીએ છીએ. 100 wattનો એક બલ્બ 10 કલાક માટે ચાલુ રહે, તો તે 1 કિલોવૉટ અવર (kWh) જેટલી ઊર્જા વાપરે છે.

$$100 \text{ (watt)} \times 10 \text{ (hour)}$$
$$= 1000 \text{ watt hour}$$
$$= 1 \text{ kilowatt hour (kWh)}$$
$$= 10^3 \text{ (W)} \times 3600 \text{ (s)}$$
$$= 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

આપણાં વીજળી-બિલો ઊર્જાના વપરાશને kWhના એકમમાં દર્શાવે છે. નોંધો કે kWh એ ઊર્જાનો એકમ છે નહિ કે પાવરનો.

▶ *ઉદાહરણ 6.11* મહત્તમ 1800 kg (લિફ્ટ + મુસાફરો) સહન કરી શકે એવી એક લિફ્ટ 2 m s^{-1}ની અચળ ઝડપથી ઉપર તરફ જઈ રહી છે. વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતું ગતિનું ઘર્ષણબળ 4000 N છે. મોટર વડે લિફ્ટને પૂરો પાડેલો (આપેલ) લઘુતમ પાવર watt અને horse powerમાં ગણો.

ઉકેલ લિફ્ટ પર નીચે તરફ (અધોદિશામાં) લાગતું બળ,

$F = m\,g + F_f = (1800 \times 10) + 4000 = 22000$ N

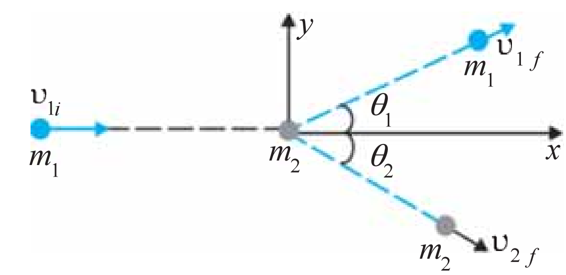
આ બળને સમતુલ્ય પૂરતું બળ તો મોટરે આપવું જ પડે. આથી,

$P = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\upsilon} = 22000 \times 2 = 44000$ W $= 59$ hp ◀

6.12 સંઘાત (અથડામણો) (COLLISIONS)

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આપણે ગતિનો (સ્થાનમાં ફેરફાર) અભ્યાસ કરીએ છીએ. તે જ સમયે, આપણે એવી ભૌતિકરાશિઓ શોધવા પ્રયત્ન કરીએ છીએ કે જે ભૌતિક-પ્રક્રિયા સાથે બદલાય નહિ. વેગમાન અને ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમો મહત્ત્વનાં ઉદાહરણો છે. આ પરિચ્છેદમાં આપણે આ નિયમોને સામાન્યતઃ જોવા મળતી પ્રક્રિયા એટલે કે અથડામણો (સંઘાત)ને લાગુ પાડીશું. કેટલીક રમતો જેમ કે, બિલિયર્ડ (Billiards), લખોટીઓ અથવા કેરમ અથડામણો સાથે સંકળાયેલ હોય છે. આપણે આદર્શ પરિસ્થિતિમાં બે દળોની અથડામણ સમજીશું.

બે દળો m_1 અને m_2 ધારો. m_1 દળનો કણ υ_{1i} ઝડપથી ગતિ કરે છે. Subscript 'i'નો અર્થ પ્રારંભિક (Initial) છે. આપણે m_2 સ્થિર છે તેમ ધારીશું. આવું ધારવામાં આપણે કોઈ સામાન્ય પરિસ્થિતિનો ભંગ કરતા નથી. આ પરિસ્થિતિમાં દળ m_1, સ્થિર દળ m_2 સાથે અથડાય છે અને તે આકૃતિ 6.10માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.10 સ્થિર દળ m_2 સાથે દળ m_1ની અથડામણ

સંઘાત પછી દળો m_1 અને m_2 જુદી જુદી દિશાઓમાં જાય છે. આ દળો, વેગ અને ખૂણાઓને સાંકળતાં કેટલાંક સમીકરણો આપણે જોઈશું.

6.12.1 સ્થિતિસ્થાપક અને અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણો (Elastic and Inelastic Collisions)

અથડામણોમાં કુલ રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે; તંત્રનું પ્રારંભિક વેગમાન તે તંત્રના અંતિમ વેગમાન જેટલું હોય છે. કોઈ તે માટે આ રીતે દલીલ કરી શકે. જ્યારે બે પદાર્થો અથડાય ત્યારે અથડામણના Δt સમય દરમિયાન પરસ્પર લાગતાં (impulsive) બળો તેમના અનુરૂપ વેગમાનમાં ફેરફાર કરે છે :

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_{12}\,\Delta t$$
$$\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{F}_{21}\,\Delta t$$

જ્યાં, $\mathbf{F}_{12}$ એ પ્રથમ કણ પર બીજા કણે લગાડેલ બળ છે. તે જ રીતે, $\mathbf{F}_{21}$ એ બીજા કણ પર પહેલા કણે લગાડેલ બળ છે. હવે, ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ મુજબ, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ આનો અર્થ એ કે

$$\Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0$$

અથડામણ વખતે Δt સમય દરમિયાન બળો જટિલ રીતે બદલાતા હોય તોપણ ઉપરનું તારણ સત્ય છે. ત્રીજો નિયમ દરેક ક્ષણે સાચો રહેતો હોવાથી, પ્રથમ પદાર્થ પર લાગતો આઘાત બીજા પદાર્થ પર લાગતા આઘાત જેટલો જ અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

બીજી તરફ, તંત્રની કુલ યાંત્રિકઊર્જા હંમેશાં માટે સંરક્ષી હોય તે જરૂરી નથી. અથડામણ દરમિયાન લાગતા આઘાત અને આકારના વિકાર દરમિયાન ઉષ્મા અને અવાજ (ધ્વની) પણ ઉત્પન્ન થઈ શકે છે. પ્રારંભિક ગતિઊર્જાનો કેટલોક ભાગ ઊર્જાનાં બીજાં સ્વરૂપોમાં રૂપાંતરિત થાય છે. અથડામણ દરમિયાન આકારના વિકારને સંકોચાયેલી સ્પ્રિંગ દ્વારા તાદૃશ્ય કરી શકાય. જો બે દળોને જોડતી 'સ્પ્રિંગ' ઊર્જાનો વ્યય કર્યા વગર તેનો આકાર પાછો મેળવી લે, તો પ્રારંભિક ગતિઊર્જા એ અંતિમ ગતિઊર્જા જેટલી હોય, પરંતુ અથડામણના સમય Δt દરમિયાન ગતિઊર્જા અચળ ન હોય. આવી અથડામણને **સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ** કહે છે. બીજી તરફ આકારના વિકારમાંથી પાછું ના ફરી શકાય અને બંને પદાર્થો અથડામણ પછી સાથે જ ગતિ કરી શકે છે. જે અથડામણમાં અથડામણ બાદ બંને કણો સાથે ગતિ કરવા લાગે તો તેને **સંપૂર્ણ અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણ** કહે છે. સામાન્ય કિસ્સામાં જ્યારે આકારનો વિકાર કેટલેક અંશે પાછો મેળવી શકાય અને થોડીક ગતિઊર્જાનો વ્યય થતો હોય છે, તેને **અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણ** કહે છે.

6.12.2 એક પરિમાણમાં અથડામણો (Collisions in One Dimension)

પહેલા એક પરિમાણમાં અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણ વિચારો તો, આકૃતિ 6.10માં,

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

$$m_1\upsilon_{1i} = (m_1 + m_2)\upsilon_f \quad \text{(વેગમાન સંરક્ષણ)}$$

$$\upsilon_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_{1i} \qquad (6.23)$$

અથડામણ દરમિયાન ગતિઊર્જાનો વ્યય

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1i}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_f^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1i}^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\upsilon_{1i}^2$$

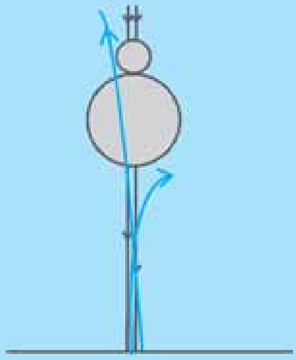
(સમીકરણ 6.23નો ઉપયોગ કરતા)

$$= \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1i}^2\left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right]$$

સન્મુખ (Head On) સંઘાત દર્શાવતા પ્રયોગ

સમક્ષિતિજ સપાટી પર સંઘાત દર્શાવતો પ્રયોગ કરતાં આપણે ત્રણ તકલીફો અનુભવીએ છીએ. એક એ કે તેમાં ઘર્ષણ હોય છે અને પદાર્થો એક સમાન વેગથી ગતિ કરતા નથી. બીજું, જ્યારે જુદાં જુદાં પરિમાણનાં બે પદાર્થો કોષ્ટક પર અથડાવાના હોય ત્યારે જો તેમનાં ગુરુત્વકેન્દ્રો સપાટીથી એકસરખી ઊંચાઈએ ન હોય તો તેમને સન્મુખ (Head On) સંઘાત માટે ગોઠવવા ખૂબ અઘરા પડે છે. ત્રીજું, બંને પદાર્થોના સંઘાત પહેલા અને પછીના તરતના વેગ માપવા પણ અઘરા પડે છે.

આ પ્રયોગને ઊર્ધ્વદિશામાં કરવાથી આ ત્રણેય તકલીફોનો અંત આવે છે. બે બૉલ લો. એક ભારે (બાસ્કેટ બૉલ/ફૂટબૉલ/વોલીબૉલ) અને બીજો હલકો (ટેનિસ બૉલ/રબરનો બૉલ/ટેનિસબૉલ). પહેલા માત્ર ભારે બૉલ લો અને તેને કોઈ ઊંચાઈ (લગભગ 1 m)થી લંબરૂપે પડતો મૂકો. તે ક્યાં સુધી ઉપર પાછો આવે છે તે નોંધો. આ પરથી જમીન પાસે પાછા આવતા પહેલાં અને પછીના તરતના ($\upsilon^2 = 2gh$નો ઉપયોગ કરીને) વેગ મળે છે. આ પરથી તમે રેસ્ટિટ્યુશન અંક (પરત ફરવાનો અંક) શોધી શકો.



હવે મોટો બૉલ અને એક નાનો બૉલ લો અને તેમને અહીં દર્શાવ્યા મુજબ એકબીજા પર ભારે બૉલ નીચે રહે અને હલકો ઉપર રહે તેમ હાથથી પકડી રાખો. તેમને એક સાથે એવી રીતે પડતા મૂકો કે જેથી પડતી વખતે તે સાથે જ જાય અને જુઓ કે શું થાય છે ? તમે જોશો કે ભારે બૉલ તેને એકલો પડવા દીધો હતો ત્યારે ઊંચાઈ સુધી પાછો આવતો હતો તે કરતાં ઓછી ઊંચાઈ સુધી પાછો આવે છે, જ્યારે હલકો બૉલ લગભગ 3 m ઊંચાઈ સુધી ઊછળે છે. થોડા પ્રયત્નોથી તમે બૉલને વ્યવસ્થિત રીતે પકડતાં શીખી જશો કે જેથી હલકો બૉલ આજુબાજુમાં જવાને બદલે સીધો ઊર્ધ્વદિશામાં જ ઊછળે. આ સન્મુખ સંઘાત છે.

તમે બૉલની સારામાં સારી જોડ શોધી શકો કે જે તમને સર્વોત્તમ અસર આપે. તમે પ્રમાણભૂત તુલા દ્વારા તેમના દળ માપી શકો. બંને બૉલના પ્રારંભિક અને અંતિમ વેગ કેવી રીતે શોધવા તે વિચારવાનું તમારા પર છોડીએ છીએ.

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_{1i}^2$$

જે, ધાર્યું હતું તેમ ધન સંખ્યા છે.

હવે સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ વિચારો $\theta_1 = \theta_2 = 0$ સાથે ઉપરના નામાભિધાનનો ઉપયોગ કરતાં, વેગમાન અને ગતિઊર્જાના સંરક્ષણનાં સમીકરણો.

$$m_1\upsilon_{1i} = m_1\upsilon_{1f} + m_2\upsilon_{2f} \qquad (6.24)$$

$$m_1\upsilon_{1i}^2 = m_1\upsilon_{1f}^2 + m_2\upsilon_{2f}^2 \qquad (6.25)$$

છે. સમીકરણ (6.24) અને (6.25) પરથી આ મુજબ મળે,

$$m_1\upsilon_{1i}(\upsilon_{2f} - \upsilon_{1i}) = m_1\upsilon_{1f}(\upsilon_{2f} - \upsilon_{1f})$$

અથવા $\upsilon_{2f}(\upsilon_{1i} - \upsilon_{1f}) = \upsilon_{1i}^2 - \upsilon_{1f}^2$

$$= (\upsilon_{1i} - \upsilon_{1f})(\upsilon_{1i} + \upsilon_{1f})$$

આથી, $\upsilon_{2f} = \upsilon_{1i} + \upsilon_{1f}$ (6.26)

જેને સમીકરણ (6.24)માં મૂકતાં, આપણને

$$\upsilon_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\upsilon_{1i} \qquad (6.27)$$

અને $\upsilon_{2f} = \frac{2m_1\upsilon_{1i}}{m_1 + m_2}$ મળે. (6.28)

આમ, 'અજ્ઞાત' (υ_{1f}, υ_{2f})નાં મૂલ્યો આપણને 'જ્ઞાત' (m_1, m_2, υ_{1i})ના રૂપમાં મળે. આપણા આ અર્થઘટનના મહત્ત્વના મુદ્દાઓ રસપ્રદ છે.

કિસ્સો I : જો બંને દળ સરખા હોય, તો

$$\upsilon_{1f} = 0$$

$$\upsilon_{2f} = \upsilon_{1i}$$

અથડામણ દરમિયાન, પહેલું દળ સ્થિર થાય છે અને બીજા દળને તેની પ્રારંભિક ઝડપથી ધક્કો મારે છે.

કિસ્સો II : જો એક દળ ઘણું વધુ હોય, દા.ત., $m_2 >> m_1$ તો

$$\upsilon_{1f} \simeq -\upsilon_{1i} \qquad \upsilon_{2f} \simeq 0$$

ભારેખમ દળને કશી અસર થતી નથી, જ્યારે હલકું દળ તેના વેગની દિશા ઉલટાવે છે.

▶ *ઉદાહરણ 6.12* **ન્યુટ્રૉન્સનું ધીમા પડવું :** ન્યુક્લિયર રિએક્ટરમાં એક ઝડપી ન્યુટ્રૉન (આશરે 10^7 m s^{-1})ને 10^3 m s^{-1} જેટલો ધીમો પાડવો જરૂરી છે, કે જેથી તેની $^{235}_{92}U$ સમસ્થાનિક સાથે આંતરક્રિયાની સંભાવના ખૂબ વધે અને તેનું વિખંડન થાય. દર્શાવો કે ડ્યુટેરિયમ કે કાર્બન કે જેમનું દળ ન્યુટ્રૉનના દળ કરતાં ફક્ત થોડા ગણું જ વધારે હોય છે, તેમની સાથે સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દરમિયાન ન્યુટ્રૉન તેમની મોટા ભાગની ગતિઊર્જા ગુમાવી શકે છે. હલકા ન્યુક્લિયસ બનાવતા પદાર્થ; જેવા કે ભારે પાણી (D_2O) અથવા ગ્રેફાઇટને મૉડરેટર કહે છે.

ઉકેલ ન્યુટ્રૉનની પ્રારંભિક ગતિઊર્જા

$$K_{1i} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1i}^2$$

જ્યારે તેની અંતિમ ગતિઊર્જા સમીકરણ (6.27) પરથી

$$K_{1f} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1f}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \upsilon_{1i}^2$$

ગતિઊર્જાનો ગુમાવાયેલ અંશ

$$f_1 = \frac{K_{1f}}{K_{1i}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

જ્યારે મૉડરેટિંગ ન્યુક્લિયસે ગતિઊર્જાનો મેળવેલ અંશ K_{2f} / K_{1i}નું મૂલ્ય

$$f_2 = 1 - f_1 \quad \text{(સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ)}$$

$$= \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

કોઈ પણ વ્યક્તિ આ પરિણામ સમીકરણ (6.28) પરથી મેળવીને ચકાસી શકે છે.

ડ્યુટેરિયમ માટે $m_2 = 2m_1$ અને આપણને $f_1 = 1/9$ જ્યારે $f_2 = 8/9$ મળે. ન્યુટ્રૉનની લગભગ 90 % ઊર્જા ડ્યુટેરિયમને મળે છે કાર્બન માટે $f_1 = 71.6$ % અને $f_2 = 28.4$ %. વ્યવહારમાં જોકે, આ સંખ્યા નાની હોય છે, કારણ કે સન્મુખ (Head on) અથડામણ ભાગ્યે જ થાય છે.◀

જો બંને પદાર્થોના પ્રારંભિક વેગ અને અંતિમ વેગ એક જ સીધી રેખા પર હોય, તો તેને એક-પારિમાણિક અથડામણ અથવા **સન્મુખ (Head on) અથડામણ** કહે છે. નાના ગોળાકાર પદાર્થોમાં, આ ત્યારે જ શક્ય બને કે જ્યારે પદાર્થ-1ની ગતિની દિશા સ્થિર રહેલા પદાર્થ-2ના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય. સામાન્ય રીતે અથડામણ દ્વિપારિમાણિક હોય છે, જ્યાં પ્રારંભિક વેગ અને અંતિમ વેગ એક સમતલમાં રહેલા હોય.

6.12.3 દ્વિ-પરિમાણમાં અથડામણો (Collisions in Two Dimensions)

આકૃતિ 6.10, એ ગતિ કરતા દળ m_1ની સ્થિર રહેલા દળ m_2 સાથેની અથડામણ પણ દર્શાવે છે. આ અથડામણમાં રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. પરંતુ વેગમાન સદિશ હોવાનો મતલબ એ કે ત્રણ દિશાઓ $\{x, y, z\}$ માટે ત્રણ સમીકરણો હોય. m_1 અને m_2ના અંતિમ વેગોની દિશાઓ વડે બનતું એક સમતલ વિચારો અને તેને x–y સમતલ તરીકે ધારો. રેખીય વેગમાનના z-ઘટકના સંરક્ષણનો મતલબ એ કે સંપૂર્ણ અથડામણ x–y સમતલમાં થાય છે. આથી x- અને y-ઘટક સમીકરણો

$$m_1\upsilon_{1i} = m_1\upsilon_{1f}\cos\theta_1 + m_2\upsilon_{2f}\cos\theta_2 \qquad (6.29)$$

$$0 = m_1\upsilon_{1f}\sin\theta_1 - m_2\upsilon_{2f}\sin\theta_2 \qquad (6.30)$$

મોટા ભાગની પરિસ્થિતિઓમાં (m_1, m_2, υ_{1i}) જાણીતા હોય છે. આથી, હવે ચાર અજ્ઞાત રહે છે (υ_{1f}, υ_{2f}, θ_1 અને θ_2) તથા ફક્ત બે સમીકરણો. જો $\theta_1 = \theta_2 = 0$ હોય, તો આપણને ફરીથી એક પરિમાણનું સમીકરણ (6.24) મળે. તથા જો અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક હોય, તો

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2f}^2 \qquad (6.31)$$

આમ, આપણને એક વધારાનું સમીકરણ મળે. હજી આપણને એક સમીકરણની ઘટ પડે છે. આ કોયડો ઉકેલી શકાય તે માટે ચાર અજ્ઞાતમાંથી, ઓછામાં ઓછો એક, ધારો કે θ_1, જાણીતો હોવો જોઈએ. દાખલા તરીકે, ડિટેક્ટરને કોણીય રીતે x થી y અક્ષની દિશામાં ઘુમાવીને (ફેરવીને) θ_1 શોધી શકાય. આપેલ (m_1, m_2, υ_{1i}, θ_1) માટે સમીકરણો (6.29)–(6.31) પરથી આપણે (υ_{1f}, υ_{2f}, θ_2)ની ગણતરી કરી શકીએ.

▶ *ઉદાહરણ 6.13* આકૃતિ 6.10માં સમાન દળ $m_1 = m_2$ના બે બિલિયર્ડ બૉલ વચ્ચેની અથડામણ દર્શાવી છે. પ્રથમ બૉલ મારક(Cue) કહેવાય છે જ્યારે બીજો બૉલ લક્ષ્ય (Target) કહેવાય છે. બિલિયર્ડનો ખેલાડી લક્ષ્ય બૉલને ખૂણાના કાણામાં 'નાખવા' (To Sink) માગે છે, જે $\theta_2 = 37^o$ ખૂણે રહેલ છે. ધારો કે અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે અને ઘર્ષણ તથા ચાકગતિ મહત્ત્વના નથી. તો θ_1 મેળવો.

ઉકેલ વેગમાનના સંરક્ષણ પરથી તથા બંને દળ સમાન હોવાથી

$$\boldsymbol{\upsilon}_{1i} = \boldsymbol{\upsilon}_{1f} + \boldsymbol{\upsilon}_{2f}$$

અથવા $$\upsilon_{1i}^2 = (\boldsymbol{\upsilon}_{1f} + \boldsymbol{\upsilon}_{2f}) \cdot (\boldsymbol{\upsilon}_{1f} + \boldsymbol{\upsilon}_{2f})$$

$$= \upsilon_{1f}^2 + \upsilon_{2f}^2 + 2\boldsymbol{\upsilon}_{1f} \cdot \boldsymbol{\upsilon}_{2f}$$

$= \{\upsilon_{1f}^2 + \upsilon_{2f}^2 + 2\upsilon_{1f}\upsilon_{2f}\cos(\theta_1 + 37^o)\}$ (6.32)

અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે અને $m_1 = m_2$ હોવાથી, ગતિઊર્જાના સંરક્ષણ પરથી લખી શકાય કે,

$$\upsilon_{1i}^2 = \upsilon_{1f}^2 + \upsilon_{2f}^2 \qquad (6.33)$$

(6.32) અને (6.33) સરખાવતાં,

$$\cos(\theta_1 + 37^o) = 0$$

અથવા $\theta_1 + 37^o = 90^o$

આથી $\theta_1 = 53^o$

જે નીચેનું પરિણામ સાબિત કરે છે : જ્યારે બે સરખા દળો, બેમાંથી એક સ્થિર હોય ત્યારે, એકબીજા સાથે ત્રાંસી (તિર્યક) સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ અનુભવે, તો અથડામણ પછી, તેઓ એકબીજાની સાપેક્ષે લંબ ખૂણે (દિશામાં) ગતિ કરે છે. ◀

જો આપણે લીસી સપાટીવાળા ગોળાકાર દળો વિચારીએ તો, આ વાત સહેલી થઈ જાય છે અને માની શકાય કે જ્યારે બે પદાર્થો એકબીજાને અડે ત્યારે જ અથડામણ થાય છે. લખોટીઓ, કેરમ કે બિલિયર્ડની રમતોમાં આમ જ થાય છે.

આપણી રોજિંદી દુનિયામાં, જ્યારે બે પદાર્થો એકબીજાને અડે ત્યારે જ અથડામણ થાય છે. પરંતુ ઘણા લાંબા અંતરેથી સૂર્ય તરફ આવતો ધૂમકેતુ કે ન્યુક્લિયસ તરફ આવીને બીજી કોઈ દિશામાં દૂર જતો α-કણ વિચારો. અહીંયા આપણે અમુક અંતરેથી લાગતાં બળો સાથે પણ કામ લેવું પડે છે. આવી ઘટનાને પ્રકિર્ણન (Scattering) કહે છે. બે કણો કેટલા વેગથી અને કઈ દિશામાં દૂર જશે તે, તેમના પ્રારંભિક વેગ ઉપરાંત તેમની વચ્ચે આંતરક્રિયાના પ્રકાર, તેમના દળ, આકાર અને કદ પર આધાર રાખે છે.

સારાંશ

1. કાર્યઊર્જા પ્રમેય દર્શાવે છે કે કોઈ પદાર્થની ગતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર તે પદાર્થ પર લાગતા પરિણામી બળ વડે થયેલ કાર્ય દર્શાવે છે.

$$K_f - K_i = W_{net}$$

2. બળ સંરક્ષી તો જ હોય જો (i) તેના દ્વારા કોઈ પદાર્થ પર થયેલ કાર્ય માર્ગ પર આધાર રાખતું ન હોય અને ફક્ત તેનાં અંતિમ બિંદુઓ (x_i, x_f) પર આધાર રાખતું હોય અથવા (ii) પદાર્થે લીધેલા કોઈ વૈકલ્પિક બંધ માર્ગ પર કે જેમાં પદાર્થ તેના પ્રારંભિક સ્થાન પર પાછો ફરતો હોય તે દરમિયાન બળ વડે થયેલ કાર્ય શૂન્ય હોય છે.

3. એક પરિમાણમાં કોઈ સંરક્ષી બળ માટે આપણે સ્થિતિઊર્જા વિધેય $V(x)$ને આ રીતે વ્યાખ્યાયીત કરી શકીએ :

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

અથવા $$V_i - V_f = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

4. યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત દર્શાવે છે કે, જો પદાર્થ પર ફક્ત સંરક્ષી બળો લાગતાં હોય, તો પદાર્થની કુલ યાંત્રિકઊર્જા અચળ રહે છે.

5. પૃથ્વીની સપાટીથી x ઊંચાઈએ રહેલા m દળના કણની ગુરુત્વીય સ્થિતિઊર્જા

$$V(x) = m\,g\,x$$

જેટલી હોય છે, જ્યાં ઊંચાઈ સાથે gમાં થતો ફેરફાર અવગણ્યો છે.

6. બળ-અચળાંક k અને x જેટલું ખેંચાણ (Extension) ધરાવતી સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા

$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ જેટલી હોય છે.

7. બે સદિશો **A** અને **B**નો અદિશ કે ડૉટ ગુણાકાર **A·B** વડે દર્શાવાય છે અને તે અદિશ રાશિ છે. જેનું મૂલ્ય : **A·B** = AB cos θ, જ્યાં θ એ **A** અને **B** વચ્ચેનો ખૂણો છે. તે ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે છે જે θ ના મૂલ્ય પર આધાર રાખે છે. બે સદિશોના અદિશ ગુણાકારને એક સદિશના મૂલ્ય (Magnitude) અને બીજા સદિશના પહેલા સદિશ પરના ઘટક (પ્રક્ષેપ)ના ગુણાકારથી સમજી શકાય. એકમ સદિશો માટે

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1 \text{ અને } \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

અદિશ ગુણાકારો ક્રમના અને જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

ભૌતિકરાશિ	સંજ્ઞા (સંકેત)	પરિમાણ	એકમો	નોંધ
કાર્ય (Work)	W	$[ML^2T^{-2}]$	J	$W = \mathbf{F \cdot d}$
ગતિઊર્જા (Kinetic Energy)	K	$[ML^2T^{-2}]$	J	$K = \frac{1}{2}mv^2$
સ્થિતિઊર્જા (Potential Energy)	$V(x)$	$[ML^2T^{-2}]$	J	$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$
યાંત્રિકઊર્જા (Mechanical Energy)	E	$[ML^2T^{-2}]$	J	$E = K + V$
સ્પ્રિંગ અચળાંક (Spring Constant)	k	$[MT^{-2}]$	$N\ m^{-1}$	$F = -kx$ $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$
પાવર (Power)	P	$[ML^2T^{-3}]$	W	$P = \mathbf{F \cdot v}$ $P = \frac{dW}{dt}$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ (POINTS TO PONDER)

1. શબ્દસમૂહ (Phrase) 'થયેલ કાર્ય શોધો' એ અધૂરો છે. આપણે ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ (એ બાબતની સ્પષ્ટતા કરવી જોઈએ) કે કયા ચોક્કસ બળ કે બળોના સમૂહ વડે કોઈ પદાર્થ પર કોઈ ચોક્કસ સ્થાનાંતર દરમિયાન કાર્ય થયું છે.
2. થયેલ કાર્ય એ અદિશ રાશિ છે. તે ધન કે ઋણ હોઈ શકે, નહિ કે દળ અથવા ગતિઊર્જાની જેમ જે ધન રાશિઓ છે. ઘર્ષણ કે શ્યાનતા બળ વડે ગતિ કરતા પદાર્થ પર થયેલ કાર્ય ઋણ હોય છે.
3. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ પરથી, બે પદાર્થો માટે, તેમની વચ્ચે લાગતાં પરસ્પર બળોનો સરવાળો શૂન્ય હોય છે.
$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$$
પરંતુ આ બળો વડે થયેલ કાર્યનો સરવાળો હંમેશાં નાબૂદ થાય એ જરૂરી નથી. એટલે કે
$$W_{12} + W_{21} \neq 0$$
આમ છતાં, ક્યારેક તે સાચું પણ બની શકે.
4. ક્યારેક બળનો પ્રકાર જાણીતો ન હોય તોપણ આ બળ વડે થયેલ કાર્ય ગણી શકાય છે. ઉદાહરણ 6.1 પરથી આ બાબત સ્પષ્ટ થાય છે જ્યાં આ પરિસ્થિતિમાં કાર્યઊર્જા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરેલ છે.
5. કાર્યઊર્જા પ્રમેય ન્યૂટનના બીજા નિયમથી સ્વતંત્ર નથી. કાર્યઊર્જા પ્રમેયને બીજા નિયમના સદિશ સ્વરૂપ તરીકે જોઈ શકાય. યાંત્રિકઊર્જા સંરક્ષણના સિદ્ધાંતને સંરક્ષી બળો માટેના કાર્યઊર્જા પ્રમેયના સંદર્ભમાં જોઈ શકાય.
6. કાર્યઊર્જા પ્રમેય દરેક જડત્વીય નિર્દેશન (Frame) માટે લાગુ પડે છે. તેને અજડત્વીય નિર્દેશન (Frame) માટે પણ વિસ્તારી શકાય. જો આપણને આપેલ પદાર્થ પર લાગતા કુલ બળમાં આભાસી (Pseudo) બળોને પણ ગણતરીમાં લઈએ
7. સંરક્ષી બળની અસર હેઠળ રહેલા પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા હંમેશાં કોઈ અચળ કિંમત સુધી અચોક્કસ (અસ્પષ્ટ) હોય છે. દા. ત, કોઈ બિંદુ કે જ્યાં સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય હોય તે સ્વૈચ્છિક છે. સ્થિતિઊર્જાના મૂલ્ય mgh માટે જમીન (Ground) પરની સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય માનવામાં આવે છે. સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા $kx^2/2$ માટે આંદોલન કરતા દળની સંતુલન સ્થિતિએ સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય હોય છે.
8. યંત્રશાસ્ત્રમાં આવતા દરેક બળ સાથે સ્થિતિઊર્જા સંકળાયેલી હોતી નથી. દા.ત., બંધ માર્ગ પર ઘર્ષણ વડે થયેલ કાર્ય શૂન્ય હોતું નથી અને ઘર્ષણ સાથે કોઈ પણ સ્થિતિઊર્જા સાંકળી શકાય નહિ.
9. અથડામણ દરમિયાન : (a) દરેક અથડામણની ક્ષણે કુલ રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. (b) ગતિઊર્જાનું સંરક્ષણ દરેક અથડામણ બાદ લાગુ પડે છે. (ભલેને પછી તે સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ હોય) અને તે અથડામણની દરેક ક્ષણે લાગુ પડતું નથી. ખરેખર તો તે વખતે અથડામણ અનુભવતા પદાર્થોના આકારમાં વિકૃતિ ઉદ્ભવે છે અને તે ક્ષણ પૂરતા બંને પદાર્થો એકબીજાની સાપેક્ષે સ્થિર હોય છે.

સ્વાધ્યાય

6.1 કોઈ પદાર્થ પર થતા કાર્યનું ચિહ્ન સમજવું અગત્યનું છે. આપેલી રાશિઓ ધન કે ઋણ છે તે કાળજીપૂર્વક દર્શાવો :

(a) દોરડા સાથે બાંધેલી બાલદી (ડૉલ) કૂવામાંથી બહાર કાઢતાં માણસ વડે થયેલ કાર્ય

(b) ઉપરના કિસ્સામાં ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે થયેલું કાર્ય.

(c) ઢળતા સમતલ પર લપસતા પદાર્થ પર ઘર્ષણ વડે થયેલું કાર્ય

(d) ખરબચડા સમક્ષિતિજ સમતલ પર સમાન વેગથી ગતિ કરતા પદાર્થ પર લગાડેલ બળ વડે થતું કાર્ય

(e) દોલન કરતા લોલકને સ્થિર કરવા માટે હવાના અવરોધક બળ વડે થયેલું કાર્ય

6.2 પ્રારંભમાં સ્થિર રહેલ 2 kg દળનો એક પદાર્થ 7 N જેટલા સમક્ષિતિજ દિશાના બળની અસર હેઠળ ટેબલ પર ગતિક ઘર્ષણ આંક = 0.1 સાથે ગતિ કરે છે, તો આપેલી ગણતરીઓ કરો અને તમારા પરિણામનું અર્થઘટન કરો :

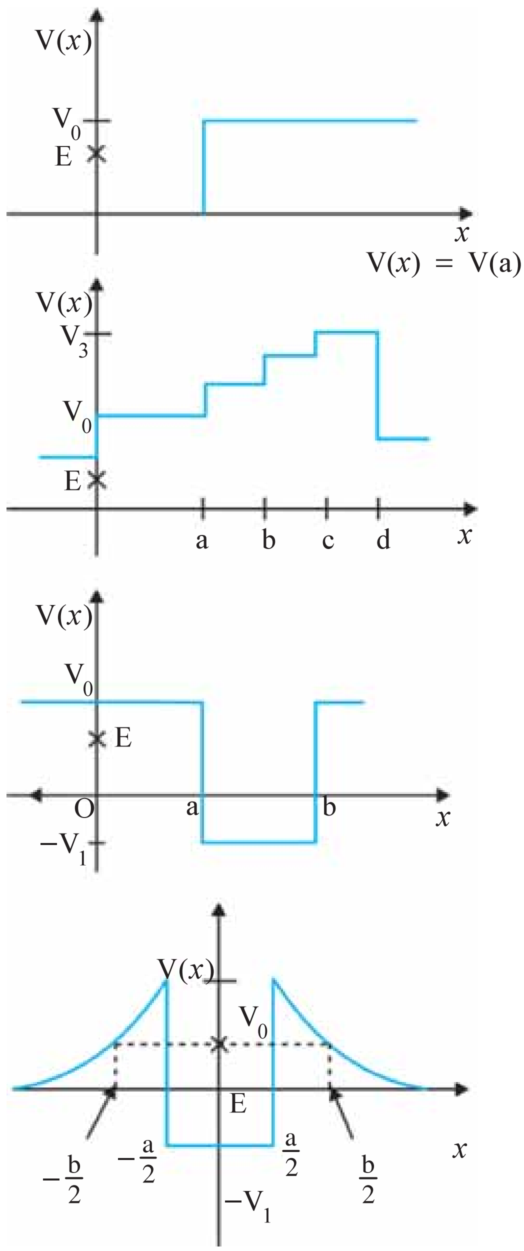
(a) લગાડેલ બળ વડે 10 sમાં થયેલ કાર્ય

(b) ઘર્ષણ વડે 10 sમાં થયેલ કાર્ય

(c) 10 sમાં પરિણામી બળ વડે પદાર્થ પર થયેલ કાર્ય

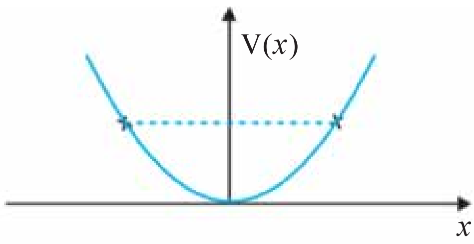
(d) 10 sમાં પદાર્થની ગતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર

6.3 આકૃતિ 6.11માં એક પરિમાણમાં સ્થિતિઊર્જા વિધેયના કેટલાંક ઉદાહરણો આપ્યાં છે. કણની કુલ ઊર્જાનું મૂલ્ય y (Ordinate) અક્ષ પર ચોકડી (Cross)ની નિશાની વડે દર્શાવ્યું છે. દરેક કિસ્સામાં, એવા વિસ્તાર દર્શાવો જો હોય તો, કે જેમાં આપેલ ઊર્જા માટે કણ અસ્તિત્વ ધરાવતો ન હોય. આ ઉપરાંત, દરેક કિસ્સામાં કણની કુલ લઘુતમ ઊર્જા કેટલી હોવી જોઈએ તે દર્શાવો. ભૌતિકશાસ્ત્રની દૃષ્ટિએ આવાં કેટલાંક ઉદાહરણો વિચારો કે જેમની સ્થિતિઊર્જાનાં મૂલ્યો આ સાથે મળતાં આવે.



આકૃતિ 6.11

6.4 રેખીય સરળ આવર્તગતિ કરતા એક કણ માટે સ્થિતિઊર્જા વિધેય $V(x) = kx^2/2$ આપેલ છે, જ્યાં k દોલકનો બળ અચળાંક છે. $k = 0.5 \text{ N m}^{-1}$ માટે, $V(x)$ વિરુદ્ધ xનો આલેખ આકૃતિ 6.2માં દર્શાવ્યો છે. દર્શાવો કે આ સ્થિતિમાં 1 J જેટલી કુલ ઊર્જા ધરાવતો ગતિ કરતો કણ $x = \pm 2$ m પહોંચે એટલે 'પાછો' જ ફરવો જોઈએ.

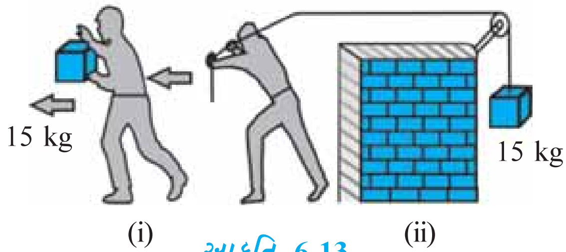


આકૃતિ 6.12

6.5 જવાબ આપો :

(a) રૉકેટનું અસ્તર (Casing) ઉડાણ દરમિયાન ઘર્ષણના કારણે સળગી ઊઠે છે. કોના ભોગે સળગવા માટે જરૂરી ઉષ્માઊર્જા મળે છે ? રૉકેટ કે વાતાવરણના ?

(b) સૂર્યની આસપાસ ધૂમકેતુઓ અતિ-દીર્ઘવૃત્તીય (Highly Elliptical) કક્ષામાં ઘૂમે છે. સામાન્ય રીતે સૂર્યના કારણે ધૂમકેતુ પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ લંબરૂપે લાગતું નથી. તેમ છતાં ધૂમકેતુની સંપૂર્ણ ભ્રમણકક્ષા દરમિયાન તેના પર લાગતા ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે થયેલ કાર્ય શૂન્ય હોય છે. શા માટે ?



આકૃતિ 6.13

(c) પૃથ્વીની આજુબાજુ પાતળા વાતાવરણમાં ભ્રમણ કરતો કૃત્રિમ ઉપગ્રહ, વાતાવરણના અવરોધને કારણે તેની ઊર્જા ક્રમશઃ ગુમાવે છે, ભલે તે સૂક્ષ્મ પ્રમાણમાં હોય. તેમ છતાં તે જેમ પૃથ્વીની નજીક અને નજીક આવતો જાય તેમ તેની ઝડપ શા માટે ક્રમશઃ વધતી જાય છે ?

(d) આકૃતિ 6.13(i)માં, એક માણસ તેના હાથોમાં 15 kg દળ ઊંચકીને 2 m જેટલું ચાલે છે. આકૃતિ 6.13(ii)માં, તે આટલું જ અંતર દોરડું ખેંચતા ખેંચતા ચાલે છે. દોરડું ગરગડી પરથી પસાર થઈને તેના બીજા છેડે 15 kg જેટલું દળ લટકાવેલ છે. કયા કિસ્સામાં વધુ કાર્ય થયું હશે ?

6.6 સાચા વિકલ્પ નીચે લીટી કરો :

(a) જ્યારે સંરક્ષી બળ પદાર્થ પર ધન કાર્ય કરે છે ત્યારે, પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા વધે છે/ઘટે છે/અચળ રહે છે.

(b) પદાર્થ વડે ઘર્ષણ વિરુદ્ધ થયેલું કાર્ય હંમેશાં તેની ગતિઊર્જા/સ્થિતિઊર્જાના ઘટાડામાં પરિણમે છે.

(c) વધુ કણ ધરાવતા તંત્રના કુલ વેગમાનમાં થતા ફેરફારનો દર બાહ્ય બળ/તંત્ર પરનાં આંતરિક બળોના સરવાળાને સપ્રમાણ હોય છે.

(d) બે પદાર્થોની અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણમાં જે રાશિઓ અથડામણ પછી બદલાતી નથી તે કુલ ગતિઊર્જા/કુલ રેખીય વેગમાન/બે પદાર્થો વડે બનતા તંત્રની કુલ ઊર્જા છે.

6.7 આપેલું વિધાન સાચું છે કે ખોટું તે દર્શાવો. તમારા જવાબ માટે કારણ આપો :

(a) બે પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણમાં, દરેક પદાર્થના વેગમાન અને ઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે.

(b) પદાર્થ પર લાગતા કોઈ પણ પ્રકારનાં આંતરિક કે બાહ્ય બળોની હાજરીમાં પણ તંત્રની કુલ આંતરિક ઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે.

(c) પદાર્થની બંધ માર્ગ પરની ગતિ દરમિયાન કુદરતમાંના દરેક પ્રકારનાં બળ માટે થયેલ કાર્ય શૂન્ય હોય છે.

(d) અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણમાં તંત્રની અંતિમ ગતિઊર્જા હંમેશાં તેની પ્રારંભિક ગતિઊર્જા કરતાં ઓછી હોય છે.

6.8 ધ્યાનપૂર્વક કારણ આપીને જવાબ લખો :

(a) બે બિલિયર્ડ બૉલની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દરમિયાન, અથડામણના ટૂંકા ગાળા દરમિયાન (એટલે કે જ્યારે તેઓ એકબીજાના સંપર્કમાં હોય તે દરમિયાન) શું બૉલની ગતિઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે ?

(b) શું બે બૉલની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દરમિયાનના ટૂંકા ગાળામાં તેમના રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે ?

(c) અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણ માટે (a) અને (b)ના જવાબ શું હશે ?

(d) જો બે બિલિયર્ડ બૉલની સ્થિતિઊર્જા તેમના કેન્દ્ર વચ્ચેના અંતર પર આધાર રાખતી હોય, તો આ અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે કે અસ્થિતિસ્થાપક ? (નોંધ : અહીં આપણે અથડામણ દરમિયાન લાગતા બળને અનુલક્ષીને સ્થિતિઊર્જાની વાત કરીએ છીએ, ગુરુત્વીય સ્થિતિઊર્જાની નહિ.)

6.9 પ્રારંભમાં એક પદાર્થ સ્થિર છે. તે એક પરિમાણમાં અચળ પ્રવેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. t સમયે તેને મળતો પાવર કોના સમપ્રમાણમાં હશે ?

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

6.10 એક પદાર્થ અચળ પાવરના ઉદ્‌ગમની અસર હેઠળ એક દિશામાં ગતિ કરે છે. t સમયમાં તેનું સ્થાનાંતર કોના સમપ્રમાણમાં હશે ?

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

6.11 એક પદાર્થને યામપદ્ધતિની z-અક્ષ પર ગતિ સીમિત રાખવા **F** જેટલું અચળ બળ લગાડવામાં આવે છે, જે

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}} \text{ N છે.}$$

અહીં $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ અનુક્રમે તંત્રના X-, Y- અને Z-અક્ષ પરના એકમ સદિશો છે. આ પદાર્થને Z-અક્ષ પર 4 m અંતર સુધી ગતિ કરાવવા માટે આ બળ વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

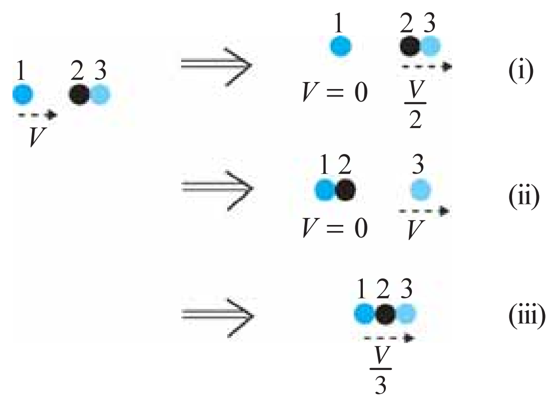
6.12 કૉસ્મિક કિરણોના એક પ્રયોગમાં એક ઈલેક્ટ્રૉન અને એક પ્રોટોનની હાજરી જોવા મળે છે, જેમાં ઈલેક્ટ્રૉનની ગતિઊર્જા 10 keV અને પ્રોટોનની 100 keV છે. કોણ ઝડપી હશે, ઈલેક્ટ્રૉન કે પ્રોટોન ? બંનેની ઝડપનો ગુણોત્તર મેળવો. (ઈલેક્ટ્રૉનનું દળ = 9.11×10^{-31} kg, પ્રોટોનનું દળ = 1.67×10^{-27} kg, 1 eV = 1.60×10^{-19} J)

6.13 2 mm ત્રિજ્યાનું વરસાદનું એક ટીપું 500 m ઊંચાઈએથી જમીન પર પડે છે. ઘટતા પ્રવેગથી (હવાના શ્યાનતા અવરોધને કારણે) તે મૂળ ઊંચાઈએથી અડધી ઊંચાઈ પ્રાપ્ત ના કરે ત્યાં સુધી પડે છે, જ્યાં તે અંતિમ (ટર્મિનલ) ઝડપ પ્રાપ્ત કરે છે અને ત્યાર બાદ તે એકધારી (સમાન) ઝડપથી ગતિ કરે છે. તેની સફરના પ્રથમ અને બીજા અડધા ભાગ દરમિયાન ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે ટીપાં પર થયેલ કાર્ય કેટલું હશે ? જો તે 10 m s^{-1}ની ઝડપથી તેની સફર પૂરી કરીને જમીન પર પડે, તો તેની આ સફર દરમિયાન અવરોધક બળ વડે ટીપાં પર કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

6.14 વાયુપાત્રમાં એક અણુ સમક્ષિતિજ દીવાલને 200 m s^{-1} ઝડપથી, લંબ સાથે 30° ખૂણે અથડાય છે અને તે જ ઝડપથી પાછો ફેંકાય છે. આ અથડામણમાં વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે ? અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે કે અસ્થિતિસ્થાપક ?

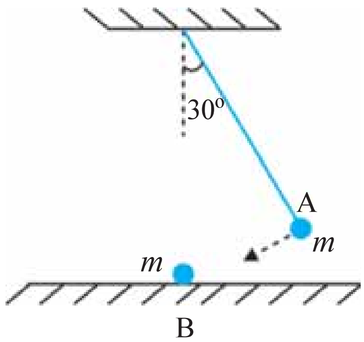
6.15 એક બિલ્ડિંગના ગ્રાઉન્ડ ફ્લોર પર રહેલ પંપ (મોટર) 30 m^3 કદની ટાંકીને 15 minમાં ભરી શકે છે. જો ટાંકી ગ્રાઉન્ડથી 40 m ઊંચાઈએ હોય અને પંપની કાર્યક્ષમતા 30 % હોય, તો પંપ દ્વારા કેટલા વિદ્યુતપાવરનો ઉપયોગ થયો હશે ?

6.16 બે એક જ સરખા બૉલ બેરિંગ એકબીજાના સંપર્કમાં રહે તે રીતે ઘર્ષણરહિત ટેબલ પર સ્થિર રહેલા છે, જેમને તેટલા જ દળનું V જેટલી ઝડપથી ગતિ કરતું બૉલ બેરિંગ સન્મુખ (Head-On) અથડાય છે. જો અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક હોય, તો અથડામણ બાદ નીચે આપેલ આકૃતિ 6.14માં કયું પરિણામ શક્ય છે ?



આકૃતિ 6.14

6.17 એક લોલકના ગોળા Aને લંબ સાથે 30^o ખૂણેથી છોડતાં, આકૃતિ 6.15માં દર્શાવ્યા મુજબ, તે એટલા જ દળના ટેબલ પર સ્થિર રહેલા દડા B સાથે અથડાય છે. અથડામણ બાદ ગોળો A કેટલે ઊંચે સુધી જશે ? ગોળાઓના કદને અવગણો અને અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે તેમ માનો.



આકૃતિ 6.15

6.18 એક લોલકના ગોળાને સમક્ષિતિજ સ્થિતિ (સ્થાન) પરથી છોડવામાં આવે છે. જો લોલકની લંબાઈ 1.5 m હોય, તો ગોળો જ્યારે ન્યૂનતમ બિંદુએ આવે ત્યારે તેની ઝડપ કેટલી હશે ? અહીં આપેલ છે કે તે તેની પ્રારંભિક ઊર્જાની 5 % ઊર્જા હવાના અવરોધક બળ સામે ગુમાવે છે.

6.19 300 kg દળની એક લારી, 25 kg રેતીનો કોથળો લઈને ઘર્ષણરહિત રસ્તા પર 27 km/hની એક ધારી ઝડપથી ગતિ કરે છે. થોડા સમય પછી રેતી એક કાણામાંથી $0.05\ kg\ s^{-1}$ના દરે નીકળીને લારીના તળિયા પર ઢોળાવા લાગે છે. રેતીનો સંપૂર્ણ કોથળો ખાલી થઈ જાય ત્યારે લારીની ઝડપ કેટલી હશે ?

6.20 0.5 kgનો એક પદાર્થ સીધી રેખામાં વેગ $\upsilon = ax^{3/2}$ થી જાય (મુસાફરી કરે) છે, જ્યાં $a = 5\ m^{-1/2}\ s^{-1}$. તેના $x = 0$ થી $x = 2$ m સ્થાનાંતર દરમિયાન પરિણામી બળ વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

6.21 એક પવનચક્કીનાં પાંખિયાં ફરે ત્યારે A જેટલા ક્ષેત્રફળનું વર્તુળ આવરી લે છે. (a) જો પવન υ વેગથી આ વર્તુળને લંબરૂપે વહેતો હોય, તો t સમયમાં કેટલા દળની હવા તેમાંથી પસાર થશે ? (b) હવાની ગતિઊર્જા કેટલી હશે ? (c) ધારો કે પવનચક્કી પવનઊર્જાની 25 % ઊર્જાનું વિદ્યુતઊર્જામાં રૂપાંતર કરે છે અને $A = 30\ m^2$, $\upsilon = 36$ km/h તથા હવાની ઘનતા $1.2\ kg\ m^{-3}$ છે, તો કેટલો વિદ્યુતપાવર ઉત્પન્ન થશે ?

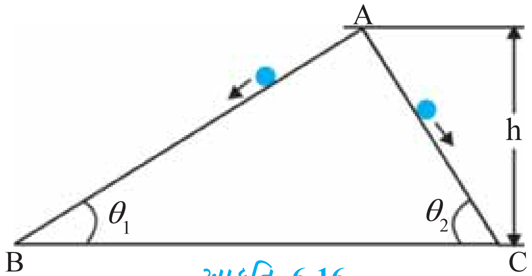
6.22 વજન ઓછું કરવા માગતી (ડાયેટિંગ કરતી) એક વ્યક્તિ, 10 kg દળને એક હજારવાર દરેક વખતે 0.5 m જેટલું ઊંચકે છે. ધારો કે તેણી જેટલી વખત દળને નીચે લાવે તેટલી વખત સ્થિતિઊર્જાનો વ્યય થાય છે. (a) તેણી ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વિરુદ્ધ કેટલું કાર્ય કરે છે ? (b) ખોરાક (ફેટ)માંથી કિલોગ્રામ દીઠ 3.8×10^7 J ઊર્જા મળે છે જેનું યાંત્રિકઊર્જામાં રૂપાંતરણ 20 % કાર્યક્ષમતાના દરે થાય છે. ડાયેટિંગ કરનારે કેટલું ફેટ વાપર્યું હશે ?

6.23 એક કુટુંબ 8 kW પાવરનો ઉપયોગ કરે છે. (a) સમક્ષિતિજ સપાટી પર સૂર્યઊર્જા સીધી જ, એક ચોરસ મીટર દીઠ 200 W જેટલા સરેરાશ દરથી, આપાત થાય છે. જો આની 20 % ઊર્જાનું ઉપયોગી વિદ્યુતઊર્જામાં રૂપાંતરણ થઈ શકતું હોય, તો 8 kW મેળવવા માટે કેટલું મોટું ક્ષેત્રફળ જોઈએ ? (b) આ ક્ષેત્રફળને સામાન્ય રીતે જોવા મળતા ઘરના છાપરાના ક્ષેત્રફળ સાથે સરખાવો.

વધારાનું સ્વાધ્યાય

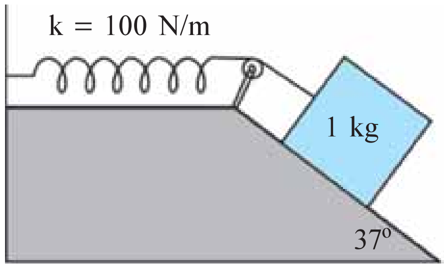
6.24 0.012 kg દળની એક બુલિટ (ગોળી) $70\ m\ s^{-1}$ની સમક્ષિતિજ ઝડપથી 0.4 kg દળના લાકડાના બ્લૉકને અથડાય છે અને તરત જ બ્લૉકની સાપેક્ષે સ્થિર થઈ જાય છે. આ બ્લૉકને ઉપરની છત સાથે પાતળા તાર વડે લટકાવ્યો છે. બ્લૉક કેટલી ઊંચાઈ સુધી જશે તે ગણો. આ ઉપરાંત, બ્લૉકમાં કેટલી ઉષ્મા ઉત્પન્ન થઈ જશે તે ગણો.

6.25 બે ઘર્ષણરહિત રસ્તાઓ એક ધીમો અને બીજો ઝડપી ઢાળવાળો એકબીજાને A પાસે મળે છે, જ્યાંથી બે પથ્થરોને સ્થિર સ્થિતિમાંથી દરેક રસ્તા પર સરકાવવામાં આવે છે (આકૃતિ 6.16). શું બંને પથ્થરો તળિયે એક જ સમયે પહોંચશે ? શું બંને ત્યાં એકસરખી ઝડપથી પહોંચશે ? સમજાવો. અહીંયાં $\theta_1 = 30^o$, $\theta_2 = 60^o$ અને $h = 10$ m આપેલ હોય, તો બંને પથ્થરોની ઝડપ અને તેમણે લીધેલ સમય કેટલા હશે ?



આકૃતિ 6.16

6.26 આકૃતિ 6.17માં દર્શાવ્યા મુજબ ખરબચડા ઢાળ પર રાખેલ 1 kgનો એક બ્લૉક, 100 N m^{-1} જેટલા સ્પ્રિંગ અચળાંકવાળી સ્પ્રિંગ સાથે જોડેલ છે. સ્પ્રિંગની ખેંચાયા પહેલાંની સામાન્ય પરિસ્થિતિમાં બ્લૉકને સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરવામાં આવે છે. બ્લૉક સ્થિર સ્થિતિમાં આવતા પહેલાં ઢાળ પર 10 cm જેટલું નીચે જાય છે. બ્લૉક અને ઢાળ વચ્ચેનો ઘર્ષણ-આંક શોધો. ધારો કે સ્પ્રિંગનું દળ અવગણ્ય છે અને ગરગડી ઘર્ષણરહિત છે.

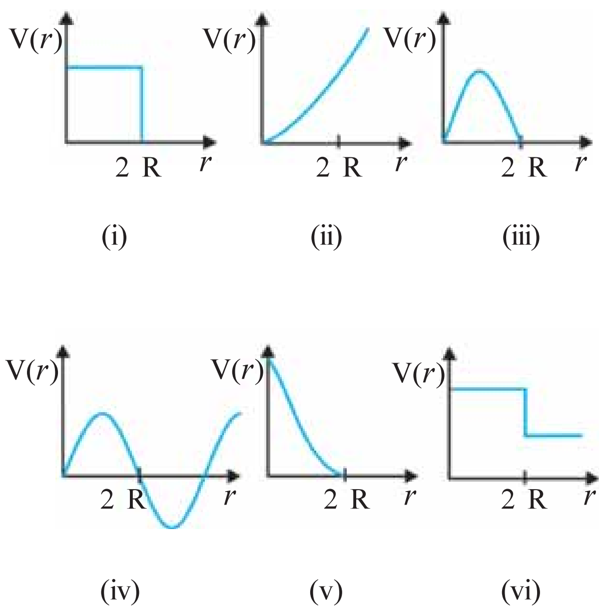


આકૃતિ **6.17**

6.27 સમાન ઝડપ 7 m s^{-1}થી નીચે તરફ જતી લિફ્ટની ઉપરની છત પરથી 0.3 kgનો એક સ્ક્રૂ (બૉલ્ટ) નીચે પડે છે. તે લિફ્ટના ભોંયતળિયા પર (લિફ્ટની લંબાઈ = 3 m) પડે છે અને પાછો ઉછળતો નથી. આ ધક્કા વડે કેટલી ઉષ્મા ઉત્પન્ન થઈ હશે ? જો લિફ્ટ સ્થિર હોત, તો તમારો જવાબ જુદો હોત ?

6.28 200 kg દળની એક લારી ઘર્ષણરહિત પટ્ટા પર 36 km/hની સમાન (એક ધારી) ઝડપે ગતિ કરે છે. 20 kg દળનો એક બાળક લારી પર તેના એક છેડાથી બીજા છેડા સુધી (10 મીટર સુધી) લારીની સાપેક્ષે તેની વિરુદ્ધ દિશામાં 4 m s^{-1}ની ઝડપથી દોડે છે અને લારી પરથી બહાર કૂદકો મારે છે. લારીની અંતિમ ઝડપ કેટલી છે ? છોકરો દોડવાનું શરૂ કરે તે સમયથી લારી કેટલે સુધી ગઈ હશે ?

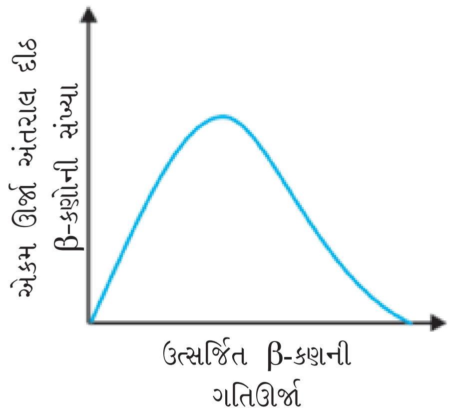
6.29 આકૃતિ 6.18માં દર્શાવેલ સ્થિતિઊર્જા વક્રોમાંથી કયા વક્રો બે બિલિયર્ડ બૉલની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દર્શાવતા નથી ? અહીં r એ બૉલનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર છે.



આકૃતિ **6.18**

6.30 સ્થિર રહેલા ન્યુટ્રૉનનો ક્ષય વિચારો : $n \rightarrow p + e^{-}$

દર્શાવો કે આ પ્રકારના દ્વિ-કણ ક્ષયમાં ચોક્કસ ઊર્જા ધરાવતો જ ઇલેક્ટ્રૉન મળવો જોઈએ અને તેથી ન્યુટ્રૉન કે ન્યુક્લિયસના (આકૃતિ 6.19) β-ક્ષયના સતત ઊર્જા-વિતરણને સમજાવી ન શકે.



આકૃતિ **6.19**

[**નોંધ :** આ સ્વાધ્યાયનું સામાન્ય પરિણામ, W. Pouli ના β-ક્ષય દરમિયાન ત્રીજા કણના અસ્તિત્વની ધારણા માટેની ઘણી દલીલોમાંનું એક હતું. આ કણને ન્યુટ્રિનો કહે છે. આપણે હવે જાણીએ છીએ કે, આ કણનો પ્રાકૃતિક સ્પીન (પરિક્રમણાંક) 1/2 (e^-, p અથવા nની જેમ) હોય છે, પરંતુ તે તટસ્થ (વિદ્યુતભારરહિત) હોય છે અને તે લગભગ દળરહિત અથવા અત્યંત નહિવત (ઇલેક્ટ્રૉનના દળ કરતાં પણ ઘણું ઓછું) દળ ધરાવે છે તથા તે દ્રવ્ય સાથે ખૂબ નબળી રીતે આંતરક્રિયા કરે છે. ન્યુટ્રૉનના ક્ષયની સાચી પ્રક્રિયા આ મુજબ છે : $n \rightarrow p + e^- + \nu$]

પરિશિષ્ટ 6.1 : ચાલતી વખતે થતો પાવરનો વપરાશ (વ્યય) (POWER CONSUMPTION IN WALKING)

નીચે આપેલ કોષ્ટકમાં 60 kg દળના પુખ્ત માણસે ખર્ચેલ (વાપરેલ) પાવરનું લિસ્ટ દર્શાવ્યું છે :

કોષ્ટક 6.4 પાવરના વપરાશનું લગભગ મૂલ્ય

પ્રવૃત્તિ	પાવર (W)
સુતી વખતે	75
ધીમેથી ચાલવું	200
સાઈકલ ચલાવવી	500
હૃદયનો ધબકાર	1.2

યાંત્રિક કાર્યની ગેરસમજ દરરોજના સામૂહિક કાર્ય (ટીમ વર્ક) સાથે ના કરવી જોઈએ. માથા પર ખૂબ ભાર ઊંચકીને ઊભી રહેલ સ્ત્રી ખૂબ થાકી જાય છે. પરંતુ કોઈ યાંત્રિક કાર્ય સંકળાયેલું નથી. આનો મતબલ એ નથી કે, માણસની દરરોજની પ્રવૃત્તિ (કામ)ને યાંત્રિક કાર્ય સાથે સાંકળી ન શકાય.

ધારો કે કોઈ વ્યક્તિ અચળ ઝડપ υ_0થી ચાલે છે. તેણે કરેલ યાંત્રિક કાર્યને કાર્યઊર્જા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સહેલાઈથી શોધી શકાય. ધારો કે,

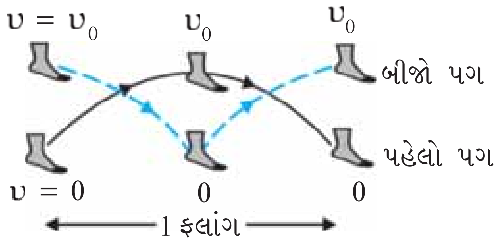
(a) ચાલતી વખતે ફલંગો (Stride) દરમિયાન બંને પગના પ્રવેગ અને પ્રતિપ્રવેગના કારણે મહત્તમ કાર્ય થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 6.20)

(b) હવાનો અવરોધ અવગણો.

(c) પગને ગુરુત્વાકર્ષણની વિરુદ્ધ ઉપાડતી વખતે થતું નાનું કાર્ય અવગણો.

(d) ચાલતી વખતે હાથ વગેરેના ઝૂલવાને અવગણો.

આકૃતિ 6.20માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, દરેક ફલાંગ દરમિયાન પગને સ્થિર સ્થિતિમાંથી ઝડપ (ગતિ) આપવામાં આવે છે, જે લગભગ ચાલવાની ઝડપ જેટલી હોય છે અને ત્યાર બાદ ફરીથી તે સ્થિર સ્થિતિમાં આવે છે.



આકૃતિ **6.20** ચાલતી વખતે એક તરફની ફલાંગનું ઉદાહરણ. જ્યારે પહેલો પગ જમીનથી મહત્તમ ઊંચાઈએ હોય ત્યારે બીજો પગ જમીન પર હોય અને તે રીતે વારાફરતી

કાર્યઊર્જા પ્રમેય અનુસાર, ફલાંગ વખતે એક પગ વડે થયેલ કાર્ય, $m_1\upsilon_0^2$ છે. અહીંયાં $m_1\upsilon_0^2/2$ ઊર્જા એક પગના સ્નાયુઓ વડે ખર્ચાય છે, જ્યારે વધારાની $m_1\upsilon_0^2/2$ સામેના પગને સ્થિર સ્થિતિમાંથી υ_0 ઝડપ આપવા માટે ખર્ચાય છે. આથી બંને પગ વડે એક ફલાંગ દરમિયાન થયેલ કાર્ય (આકૃતિ 6.20નો ધ્યાનથી અભ્યાસ કરો.)

$$W_s = 2m_1\upsilon_0^2 \qquad (6.34)$$

m_1 = 10 kg અને ધીમી ઝડપે દોડીને નવ માઈલ જેટલું સામાન્ય અંતર SI એકમમાં 3 m s^{-1} જેટલી ઝડપે કાપવામાં આવે તો આપણને

$$W_s = 180 \text{ J / ફલાંગ}$$

મળે. જો આપણે ફલાંગ 2 m લાંબી ગણીએ, તો માણસ એક સેકન્ડમાં 3 m s^{-1}ની ઝડપે 1.5 ફલાંગ કાપે. આથી વપરાયેલ પાવર

$$P = 180 \frac{\text{J}}{\text{ફલાંગ}} \times 1.5 \frac{\text{ફલાંગ}}{\text{second}}$$

$$= 270 \text{ W}$$

આપણે એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ કે આ આછો અંદાજ છે કારણ કે પાવરના વ્યયના કેટલાય રસ્તાઓ (દા.ત., હાથનું ઝૂલવું, હવાનો અવરોધ વગેરે) અવગણવામાં આવ્યા છે. અગત્યની વાત એ છે કે આપણે આમાં સંકળાયેલાં બળોની ચિંતા કરવાની જરૂર નથી. અહીંયાં ઘર્ષણ અને શરીરના બીજા સ્નાયુઓ વડે પગ પર લાગતાં બળોની ગણતરી કરવી મુશ્કેલ છે. સ્થિત ઘર્ષણ કોઈ કાર્ય કરતું નથી અને આપણે કાર્યઊર્જા પ્રમેયનો આધાર લઈને સ્નાયુઓ વડે થતા કાર્યને ટાળ્યું છે. આપણે પૈડાની અગત્ય પણ જોઈ શકીએ છીએ. પૈડું આપણા સ્નાયુઓને સ્વયંસંચાલિત રીતે શરૂ કરવા અને ઊભા રહેવાની, હલન-ચલનની પળોજણમાંથી મુક્તિ આપે છે.

પ્રકરણ 7

કણોનાં તંત્રો અને ચાકગતિ
(SYSTEMS OF PARTICLES AND ROTATIONAL MOTION)

7.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

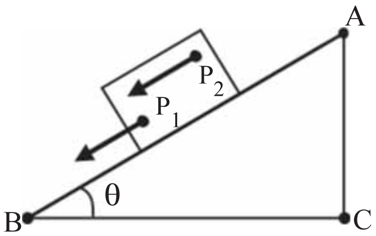
અગાઉનાં પ્રકરણોમાં આપણે મુખ્યત્વે એક જ કણની ગતિને ધ્યાનમાં લીધી હતી. (કણને એક દળબિંદુ (point mass) તરીકે રજૂ કર્યું છે. વ્યવહારમાં તેનું કોઈ કદ નથી.) ત્યાર બાદ આવા પદાર્થોની ગતિને એક કણની ગતિ તરીકે વર્ણવી શકાય છે એમ ધારી લઈને, આપણા અભ્યાસનાં આ પરિણામોને ચોક્કસ કદના પદાર્થોની ગતિને પણ લાગુ પાડ્યા છે.

દૈનિક જીવનમાં આપણા સંપર્કમાં આવતો કોઈ પણ વાસ્તવિક પદાર્થ પરિમિત કદ ધરાવે છે. મોટા (વિસ્તરીત) પદાર્થો (પરિમિત કદના પદાર્થો)ની ગતિ સમજવા ઘણી વખત કણોના આદર્શ સ્વરૂપનું મૉડેલ અપૂરતું હોય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ અપૂર્ણતાથી આગળ વધવાનો પ્રયાસ કરીશું. તેમજ આપણે વિસ્તૃત પદાર્થોની ગતિને સમજવાનો પણ પ્રયાસ કરીશું. એક વિસ્તૃત પદાર્થ, પ્રથમ તો, કણોનું એક તંત્ર છે. હવે આપણે સમગ્રપણે તંત્રની ગતિની વિચારણાથી શરૂ કરીશું. કણોના આ તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (centre of mass) અહીં મુખ્ય સંકલ્પના હશે. આપણે કણોના આ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ તથા વિસ્તરીત પદાર્થોની ગતિ સમજવામાં આ સંકલ્પનાની ઉપયોગિતાની ચર્ચા કરીશું.

મોટા વિસ્તરીત પદાર્થો સાથે સંકળાયેલ ઘણીબધી સમસ્યાઓ, તેમને દૃઢ પદાર્થો (rigid bodies) તરીકે વિચારીને ઉકેલી શકાય છે. **આદર્શ રીતે એક દૃઢ પદાર્થ એ એક સંપૂર્ણપણે ચોક્કસ અને અપરિવર્તિત આકાર ધરાવતો પદાર્થ છે. આવા પદાર્થના કણોની બધી જ જોડીઓ વચ્ચેનું અંતર બદલાતું નથી.** દૃઢ પદાર્થની આ વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે કોઈ વાસ્તવિક પદાર્થ પૂર્ણતઃ દૃઢ નથી. કારણ કે વાસ્તવિક પદાર્થો બળોના પ્રભાવ હેઠળ વિરૂપ થાય છે. પરંતુ ઘણીબધી પરિસ્થિતિઓમાં આ વિરૂપતા અવગણ્ય હોય છે. બીજી તરફ, ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં કે જ્યાં પૈડાઓ, ભમરડાઓ, સ્ટીલના સ્તંભો, અણુઓ અને ગ્રહો જેવા પદાર્થો સામેલ છે ત્યાં તેઓનું મરડાવું, વાંકું વળવું કે કંપન કરવું ને આપણે અવગણીશું અને તેમને દૃઢ તરીકે ગણીશું.

7.1.1 એક દૃઢ પદાર્થને કયા પ્રકારની ગતિ હોઈ શકે છે ? (What kind of motion can a rigid body have ?)

ચાલો, દૃઢ પદાર્થોની ગતિના કેટલાંક ઉદાહરણો લઈને આ પ્રશ્નને ઉકેલવાનો પ્રયાસ કરીએ. એક લંબચોરસ બ્લૉકથી શરૂ કરીએ જે એક ઢળતા સમતલ (inclined plane) પર આજુ બાજુ ખસ્યા વગર નીચે તરફ સરકે છે. આ બ્લૉક

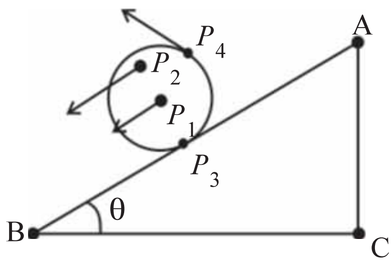


આકૃતિ 7.1 *ઢળતા સમતલ પર એક બ્લૉકની નીચે તરફ સ્થાનાંતરણ (સરકતી) ગતિ (આ બ્લૉકના કોઈ પણ બિંદુ જેવા કે P_1 અથવા P_2 સમયની કોઈ પણ ક્ષણે સમાન વેગથી ગતિ કરે છે.)*

એક દૃઢ પદાર્થ છે. આ સમતલ પર તેની નીચે તરફની ગતિ એવી છે કે પદાર્થના તમામ કણો એકસાથે આગળ વધી રહ્યા છે. એટલે કે કોઈ પણ સમયે બધા જ કણો સમાન વેગ ધરાવે છે. અહીં દૃઢ પદાર્થ શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ (ટ્રાન્સલેશનલ) ગતિમાં છે. (આકૃતિ 7.1)

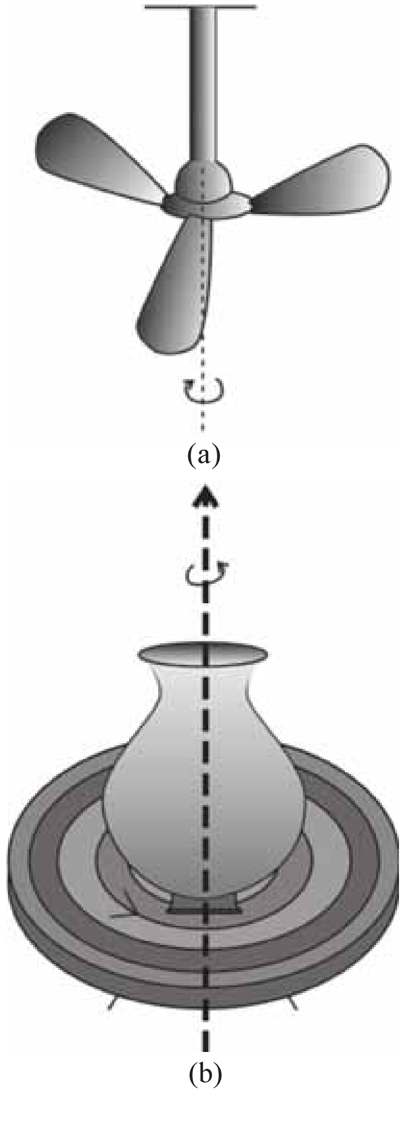
શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ (ટ્રાન્સલેશનલ) ગતિમાં તે પદાર્થનો દરેક કણ કોઈ પણ ક્ષણે સમાન વેગ ધરાવે છે.

ચાલો હવે, તે જ ઢળતા સમતલ પર ધાતુના અથવા લાકડાના એક નળાકારની નીચેની તરફ ગબડતી ગતિ (rolling motion)ને ધ્યાનમાં લો (આકૃતિ 7.2). આ સમસ્યામાં દૃઢ પદાર્થ, એટલે કે નળાકાર, જે ઢળતા સમતલની ટોચથી તળિયે સ્થાનાંતરિત થાય છે અને આમ, તેને સ્થાનાંતરણ ગતિ છે. પરંતુ આકૃતિ 7.2 એમ દર્શાવે છે કે તેના બધા જ કણો કોઈ પણ ક્ષણે એક સરખા વેગ સાથે આગળ ગતિ કરી રહ્યા નથી. આમ, આ પદાર્થ તેથી શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ ધરાવતો નથી. એટલે કે તેની ગતિમાં સ્થાનાંતરણની સાથે 'બીજું કંઈક છે.'



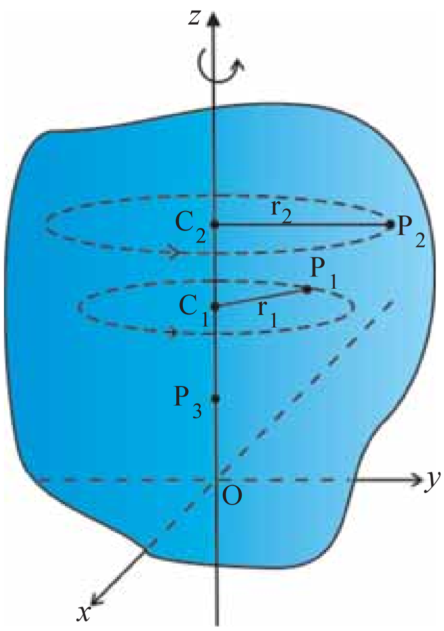
આકૃતિ 7.2 *નળાકારની રોલીંગ ગતિ. તે શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ ગતિ નથી. કોઈ એક ક્ષણે બિંદુઓ P_1, P_2, P_3 અને P_4ના વેગો અલગ અલગ છે. (તીરો વડે દર્શાવેલ છે.) વાસ્તવમાં, જો નળાકાર સરક્યા વિના ગબડતો હોય, તો કોઈ પણ ક્ષણે સંપર્કબિંદુ P_3 નો વેગ શૂન્ય છે.*

આ 'કંઈક બીજું' શું છે તે સમજવા માટે, ચાલો આપણે કોઈ એક દૃઢ પદાર્થ લઈએ કે જેને એ રીતે નિયંત્રિત કરવામાં આવેલ હોય કે તે સ્થાનાંતરણ ગતિ ન કરી શકે. એક દૃઢ પદાર્થને, સ્થાનાંતરણ ગતિ ન ધરાવે તે રીતે નિયંત્રિત કરવાની સૌથી સામાન્ય રીત એ છે કે, તેને એક સુરેખાને અનુલક્ષીને સ્થિર કરી દેવામાં આવે. આવા પદાર્થની એક માત્ર શક્ય ગતિ એ **ચાકગતિ (Rotational motion)** છે. એ રેખા કે જેને અનુલક્ષીને આ પદાર્થ સ્થિર છે તેને તેની **ભ્રમણ અક્ષ (ધરી) (Axis of rotation)** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જો તમે આસપાસ જુઓ તો સિલીંગ પંખો. કુંભારનો ચાકડો, મેળામાંનો એક વિશાળ ફાળકો (જાયન્ટ વ્હીલ), ચકડોળ (મેરી-ગો રાઉન્ડ) અને બીજાં એવાં ઘણાં ઉદાહરણો જોવા મળશે કે તેમાં ચાકગતિ (પરિભ્રમણ) કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને થતી હોય છે (આકૃતિ (7.3 (a) અને (b)).



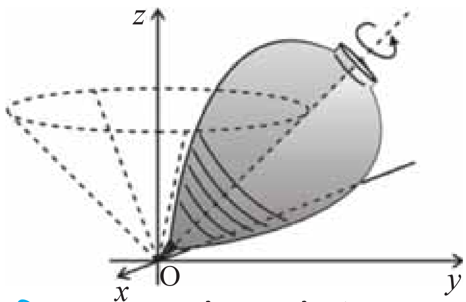
આકૃતિ 7.3 *સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ*
(a) સિલીંગ પંખો
(b) કુંભારનો ચાકડો

ચાલો, આપણે એ સમજવા પ્રયત્ન કરીએ કે, ચાકગતિ શું છે, ચાકગતિનાં લક્ષણો કયાં છે. તમે જોશો કે **સ્થિર અક્ષને**

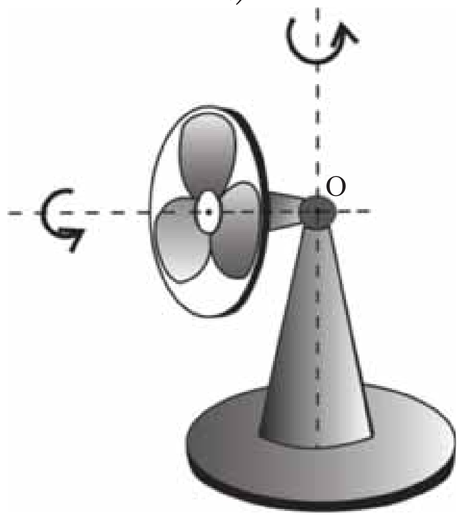


આકૃતિ 7.4 *z-અક્ષને અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થનું પરિભ્રમણ (આ પદાર્થનું દરેક બિંદુ જેમકે P_1 અથવા P_2 એ આ અક્ષ પર જેનું કેન્દ્ર (C_1 કે C_2) હોય તેવું વર્તુળ બનાવે છે. આ વર્તુળની ત્રિજ્યા (r_1 કે r_2) તે આ અક્ષથી બિંદુ (P_1 કે P_2) સુધીનું લંબઅંતર છે. P_3 જેવું અક્ષ પર આવેલ બિંદુ સ્થિર રહે છે.)*

અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થના પરિભ્રમણમાં, પદાર્થનો દરેક કણ વર્તુળમાં ફરે છે, જે વર્તુળ અક્ષના લંબસમતલમાં છે અને તેનું કેન્દ્ર અક્ષ પર છે. આકૃતિ 7.4 એ એક સ્થિર અક્ષ (નિર્દેશ-ફ્રેમની z-અક્ષ)ને અનુલક્ષીને એક દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિ દર્શાવે છે. એક સ્થિર અક્ષથી r_1 અંતર પર દૃઢ પદાર્થના યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરાયેલા એક કણ P_1ને ધ્યાનમાં લો. આ કણ P_1 સ્થિર અક્ષ પર તેના કેન્દ્ર C_1 સાથે r_1 ત્રિજ્યાનું વર્તુળ બનાવે છે. આ વર્તુળ અક્ષના લંબસમતલમાં છે. આ આકૃતિમાં દૃઢ પદાર્થનો બીજો કણ P_2 પણ દર્શાવેલ છે. P_2 સ્થિર અક્ષથી r_2 અંતર પર છે. આ કણ P_2 એ r_2 ત્રિજ્યાના વર્તુળ પર ગતિ કરે છે કે જેનું અક્ષ પર કેન્દ્ર C_2 છે. આ વર્તુળ પણ અક્ષના લંબસમતલમાં છે. નોંધ કરો કે P_1 અને P_2 દ્વારા બનાવેલ વર્તુળો અલગ અલગ સમતલમાં આવેલા હોઈ શકે છે; જોકે, આમ છતાં આ બંને સમતલો સ્થિર અક્ષને લંબ છે. અક્ષ પર કોઈ P_3 જેવા કણ માટે $r = 0$ છે. પદાર્થ જ્યારે ચાકગતિ કરતો હોય ત્યારે પણ આવો દરેક કણ સ્થિર જ રહે છે. આ અપેક્ષિત છે કારણ કે અક્ષ સ્થિર જ રહે છે.



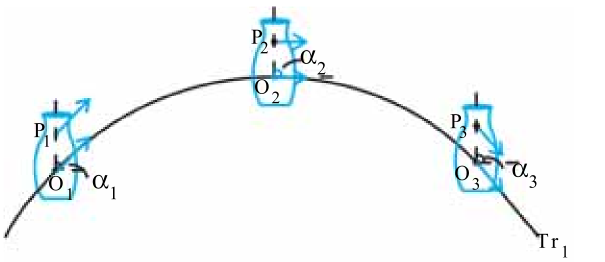
આકૃતિ 7.5 (a) *ફરતો ભમરડો (આ ભમરડાનું જમીન સાથેનું સંપર્ક-બિંદુ, તેની અણિ O, તે સ્થિર છે.)*



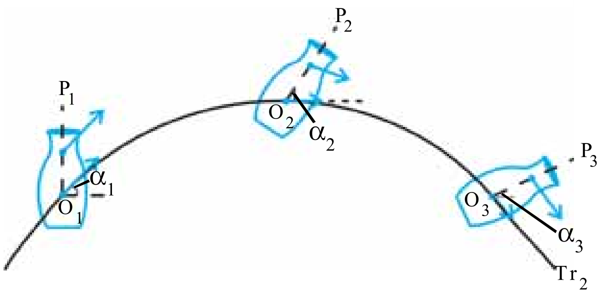
આકૃતિ 7.5 (b) *ફરતા ટેબલ-ફેનનું આધારબિંદુ O સ્થિર છે.*

પરિભ્રમણનાં કેટલાંક ઉદાહરણોમાં, જોકે ધરી સ્થિર ન પણ હોય. આ પ્રકારની ચાકગતિનું જાણીતું ઉદાહરણ એ જમીન પર ફરતો ભમરડો છે [આકૃતિ 7.5 (a)]. (આપણે અહીં એમ ધારીએ છીએ કે ભમરડો એક સ્થાનેથી બીજા સ્થાને સ્થાનાંતરિત થતો નથી જેથી તેને સ્થાનાંતરણ ગતિ પણ નથી.) અનુભવથી આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, આવા ફરતા ભમરડાની (સ્પિનિંગ ટોપની) અક્ષ, જમીન સાથેના તેના સંપર્ક-બિંદુમાંથી પસાર થતી અભિલંબને ફરતે ગતિ કરે છે જે આકૃતિ 7.5(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક શંકુ બનાવે છે. (ભમરડાની અક્ષનું ઉર્ધ્વઅક્ષને અનુલક્ષીને આ રીતે ફરવું તેને **ધૂર્ણન (precession)** કહેવામાં આવે છે. એ ધ્યાન રાખો કે, **જમીન સાથેનું ભમરડાનું સંપર્ક-બિંદુ સ્થિર છે.** કોઈ પણ ક્ષણે, ભમરડાની પરિભ્રમણ અક્ષ સંપર્ક-બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. આ પ્રકારના પરિભ્રમણનું બીજું સરળ ઉદાહરણ એ દોલન કરતો (Oscillating) ટેબલ-ફેન અથવા પૅડેસ્ટલ-ફેન છે. તમે એવું જોયું હશે કે આવા પ્રકારના પંખાની ભ્રમણાક્ષ સમક્ષિતિજ સમતલમાં દોલિત (એક બાજુથી બીજી બાજુ) ગતિ ધરાવે છે અને આ ગતિ ઊર્ધ્વ અક્ષને અનુલક્ષીને હોય છે જે એ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે કે જ્યાં તે અક્ષ કિલકિત છે (આકૃતિ 7.5 (b)માં બિંદુ O).

જ્યારે પંખો ફરતો હોય છે અને તેની અક્ષ એક બાજુથી બીજી બાજુ ગતિ કરે છે, ત્યારે પણ આ બિંદુ સ્થિર રહે છે. આમ, ચાકગતિના વધુ સામાન્ય કિસ્સાઓમાં, જેમકે ભમરડા અથવા પૅડેસ્ટલ-ફેનના પરિભ્રમણમાં દૃઢ પદાર્થનું **એક બિંદુ સ્થિર રહે છે, નહિ કે એક રેખા.** આ કિસ્સામાં અક્ષ સ્થિર નથી. તેમ છતાં તે હંમેશા એક સ્થિર બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. આપણા અભ્યાસમાં જોકે આપણે મોટે ભાગે ચાકગતિના એવા સરળ અને વિશિષ્ટ કિસ્સા જોઈશું કે જેમાં એક રેખા (એટલે કે અક્ષ) સ્થિર હોય. આમ, આપણા માટે ચાકગતિ એ ફક્ત એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને હશે. સિવાય કે બીજું વિશેષમાં જણાવ્યું હોય.



આકૃતિ 7.6(a) *દૃઢ પદાર્થની ગતિ જે શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ છે.*



આકૃતિ 7.6(b) *દૃઢ પદાર્થની ગતિ જે સ્થાનાંતરિત અને ચાકગતિનું મિશ્રણ છે.*

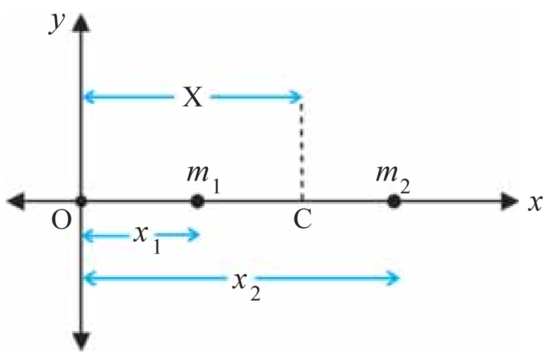
આકૃતિ 7.6(*a*) અને 7.6 (*b*) એક જ પદાર્થની જુદી જુદી ગતિને સમજાવે છે. ધ્યાન રહે કે P એ પદાર્થનું કોઈ યાદચ્છિક બિંદુ છે; O પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે. જેને હવે પછીના પરિચ્છેદમાં વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે. અહીં એ કહેવું પૂરતું છે કે O બિંદુના ગતિપથો એ જ પદાર્થના સ્થાનાંતરીય ગતિપથો Tr_1 અને Tr_2 છે. ત્રણ અલગ અલગ સમયે, બિંદુઓ O અને Pની સ્થિતિઓ બંને આકૃતિઓ 7.6 (*a*) અને (*b*)માં અનુક્રમે O_1, O_2, O_3 અને P_1, P_2, P_3 દ્વારા દર્શાવવામાં આવેલ છે. આકૃતિ 7.6(*a*) પરથી જોઈ શકાય છે કે, શુદ્ધ સ્થાનાંતરણની સ્થિતિમાં, પદાર્થના O અને P જેવા કોઈ પણ કણોનો વેગ સમાન હોય છે. નોંધ લો કે, આ કિસ્સામાં OPનું નમન (orientation), એટલે કે OP એ એક નિશ્ચિત દિશા છે - દા. ત., સમક્ષિતિજ, સાથે બનાવેલ કોણ સમાન રહે છે એટલે કે $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. *આકૃતિ* 7.6 (*b*) સ્થાનાંતરણ અને ચાકગતિના મિશ્રણનો કિસ્સો દર્શાવે છે. આ કિસ્સામાં કોઈ પણ સમયે O અને Pના વેગો અલગ અલગ હોઈ શકે છે. ઉપરાંત α_1, α_2 અને α_3 પણ બધા અલગ અલગ હોઈ શકે છે.

એક ઢળતાં સમતલ પર નીચેની તરફ ગબડતા એક નળાકારની રોલિંગ ગતિ એ સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરિત ગતિઓનું મિશ્રણ છે. આમ, લોટણ ગતિના કિસ્સામાં 'બીજું કંઈક' જેનો આપણે અગાઉ ઉલ્લેખ કરેલ તે ચાકગતિ છે આ દૃષ્ટિકોણથી આકૃતિ 7.6 (a) અને (b) તમારા માટે ઉપયોગી બનશે. આ બંને આકૃતિઓમાં એક જ પદાર્થની ગતિને સમાન સ્થાનાંતરિત ગતિ-પથ પર દર્શાવેલ છે. એક કિસ્સામાં, [આકૃતિ 7.6(a)], ગતિ એ શુદ્ધ સ્થાનાંતરિત છે; અન્ય કિસ્સામાં [આકૃતિ 7.6(b)] તે સ્થાનાંતરિત ગતિ અને ચાકગતિનું મિશ્રણ છે. (આપ પણ ભારે પુસ્તક જેવા એક દૃઢ પદાર્થનો ઉપયોગ કરીને અહીં બતાવવામાં આવેલ બે પ્રકારની ગતિને ઉત્પન્ન કરવાનો પ્રયત્ન કરી શકો છો.)

આવો, હવે આપણે પ્રસ્તુત વિભાગના સૌથી મહત્ત્વપૂર્ણ નિરીક્ષણોને ફરીથી જોઈ લઈએ : **એક દૃઢ પદાર્થની ગતિ કે જે કોઈ રીતે અક્ષ સાથે જોડાયેલ નથી અથવા સ્થિર નથી તે કાં તો શુદ્ધ સ્થાનાંતરિત છે અથવા સ્થાનાંતરિત અને ચાકગતિનું સંયોજન છે. એક દૃઢ પદાર્થની ગતિ કે જે અમુક રીતે કિલકિત (pivoted) અથવા સ્થિર છે તે ચાકગતિ છે.** ચાકગતિ એ એક સ્થિર અક્ષને (ઉદાહરણ : એક સિલીંગ પંખો) અથવા ચલિત અક્ષને (ઉદાહરણ : એક ઓસિલેટિંગ ટેબલ ફેન) અનુલક્ષીને હોઈ શકે છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં, આપણે માત્ર એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ વિશે અધ્યયન કરીશું.

7.2 દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (CENTRE OF MASS)

આપણે સૌપ્રથમ એ જોઈશું કે, કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શું છે અને તે પછી તેના મહત્ત્વની ચર્ચા કરીશું. સરળતા માટે આપણે બે કણોના તંત્રથી શરૂઆત કરીશું. આપણે બે કણોને જોડતી રેખાને x-અક્ષ તરીકે લઈશું.



આકૃતિ 7.7

ધારો કે ઉદ્‌ગમ બિંદુ Oથી બે કણોના અંતરો અનુક્રમે x_1 અને x_2 છે. આ કણોનાં દ્રવ્યમાનો અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે.

આ તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર બિંદુ C એ એવું બિંદુ હશે કે જે O થી X અંતર પર છે, જ્યાં Xને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય છે :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{7.1}$$

સમીકરણ (7.1)માં X ને આપણે x_1 અને x_2 નું દળ ભારિત સરેરાશ કહી શકીએ છીએ. જો બંને કણોના દળ $m_1 = m_2 = m$ સરખા હોય, તો

$$X = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

આમ, સમાન દળના બે કણોનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તે બંનેની બરાબર મધ્યમાં હોય છે.

જો આપણી પાસે અનુક્રમે m_1, m_2, ..., m_n દળના n કણો હોય અને તે બધાંને x-અક્ષ તરીકે લીધેલ સુરેખા પર મૂકેલ હોય, તો આ વ્યાખ્યા અનુસાર આ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનું સ્થાન નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \tag{7.2}$$

જ્યાં x_1, x_2, ..., x_n એ કણોના ઉદ્ગમ બિંદુથી અંતરો છે. X પણ તે જ ઉદ્ગમ બિંદુથી માપવામાં આવે છે. સંકેત $\sum$ (ગ્રીક મૂળાક્ષર સિગ્મા) એ સરવાળો દર્શાવે છે જે આ કિસ્સામાં n કણો માટે છે. આમ, સરવાળો

$$\sum m_i = M$$

એ આ તંત્રનું કુલ દળ છે.

ધારો કે આપણી પાસે ત્રણ કણો છે. જે એક સુરેખા પર નથી. તો આપણે આ કણો જે સમતલમાં છે તેમાં x અને y-અક્ષોને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ અને આ ત્રણ કણોનાં સ્થાનને અનુક્રમે યામો (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) વડે દર્શાવી શકાય છે. આ ત્રણ કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર C ને યામો (X, Y) વડે દર્શાવી શકાય છે અને તેને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{7.3a}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{7.3b}$$

$m_1 = m_2 = m_3 = m$ સમાન દળના કણો માટે,

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

આમ, સમાન દળના ત્રણ કણો માટે, તેનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર આ કણોથી બનતા ત્રિકોણના મધ્ય કેન્દ્ર પર હશે.

સમીકરણો (7.3a) અને (7.3b)ને n કણોના તંત્ર માટે સરળતાથી વ્યાપકરૂપ આપી શકાય છે. અહીં એ જરૂરી નથી કે બધા જ કણો એક જ સમતલમાં હોય. તે અવકાશમાં પણ વિતરીત હોય. આવા પ્રકારના તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (X, Y, Z) પર છે, જ્યાં,

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{M} \tag{7.4a}$$

$$Y = \frac{\sum m_i y_i}{M} \tag{7.4b}$$

$$\text{અને } Z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \tag{7.4c}$$

અહીં $M = \sum m_i$ એ તંત્રનું કુલ દળ છે. સંકેત i એ 1થી n સુધી બદલાય છે. m_i એ iમા કણનું દળ છે અને iમા કણના સ્થાનને (x_i, y_i, z_i) વડે આપવામાં આવે છે.

સ્થાનસદિશ (Position Vector)ના સંકેતનો ઉપયોગ કરીને સમીકરણો (7.4a), (7.4b) અને (7.4c)ને એક સમીકરણમાં સંયોજિત કરી શકાય છે. જો $\mathbf{r}_i$ એ iમાં કણનો સ્થાનસદિશ અને $\mathbf{R}$ એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ હોય, તો

$$\mathbf{r}_i = x_i\,\hat{\mathbf{i}} + y_i\,\hat{\mathbf{j}} + z_i\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{અને } \mathbf{R} = X\hat{\mathbf{i}} + Y\hat{\mathbf{j}} + Z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{તો } \mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \tag{7.4d}$$

જમણી બાજુનો સરવાળો એ સદિશ સરવાળો છે.

સદિશોના ઉપયોગ દ્વારા પ્રાપ્ત કરેલ સમીકરણોની સંક્ષિપ્તતાની નોંધ લો. જો નિર્દેશ ફ્રેમ (યામ તંત્ર)ના ઉદ્ગમ બિંદુને આપેલ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર લેવામાં આવે, તો કણોના આપેલા તંત્ર માટે $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$.

એક દૃઢ પદાર્થ, જેવા કે મીટર-પટ્ટી કે ફ્લાય વ્હીલ એ ખૂબ જ નજીક નજીક હોય તેવા કણોનું તંત્ર છે, આથી સમીકરણો (7.4a), (7.4b), (7.4c) અને (7.4d) એ દૃઢ પદાર્થને લાગુ પડે છે. આ પ્રકારના પદાર્થમાં કણોની (પરમાણુ અથવા અણુની) સંખ્યા એટલી મોટી હોય છે કે આ સમીકરણોમાં પ્રત્યેક કણો પર સરવાળો કરવો અસંભવ છે. કારણ કે આ કણો વચ્ચેનું અંતર ખૂબ જ નાનું છે. તેથી આપણે પદાર્થને દ્રવ્યમાનના સતત

વિતરણ તરીકે લઈ શકીએ છીએ. આપણે પદાર્થને n નાના દ્રવ્યમાન-ખંડોમાં વિભાજિત કરીએ કે જેનાં દ્રવ્યમાન Δm_1, Δm_2, ..., Δm_n હોય અને તેનો iમો ખંડ Δm_i એ બિંદુ (x_i, y_i, z_i) પર સ્થિત હોય. આમ વિચારીએ તો દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના યામોને લગભગ નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

$$X = \frac{\Sigma(\Delta m_i)x_i}{\Sigma \Delta m_i},\ Y = \frac{\Sigma(\Delta m_i)y_i}{\Sigma \Delta m_i},\ Z = \frac{\Sigma(\Delta m_i)z_i}{\Sigma \Delta m_i}$$

જેમ આપણે n મોટો અને મોટો લઈએ છીએ અને દરેક Δm_i જેમ નાનો લઈએ તેમ આ સમીકરણો વધુ સચોટ બને છે. આવા કિસ્સામાં i પરના સરવાળાઓને આપણે સંકલનો દ્વારા દર્શાવીએ છીએ. આમ,

$$\sum \Delta m_i \to \int \mathrm{d}m = M,$$

$$\sum (\Delta m_i)x_i \to \int x\,\mathrm{d}m,$$

$$\sum (\Delta m_i)y_i \to \int y\,\mathrm{d}m,$$

અને $$\sum (\Delta m_i)z_i \to \int z\,\mathrm{d}m,$$

અહીં M એ પદાર્થનું કુલ દ્રવ્યમાન છે. હવે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના યામો

$$X = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\ Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m \text{ અને } Z = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m \quad (7.5a)$$

થશે. આ ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય સદિશ સમીકરણ

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m \quad (7.5b)$$

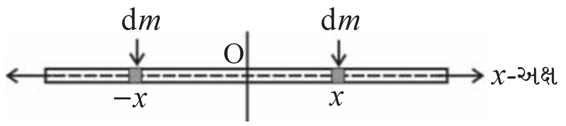
છે. જો આપણે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને આપણા યામ તંત્રનું ઉદ્‌ગમબિંદુ તરીકે પસંદ કરીએ, તો

$\mathbf{R}\ (x, y, z) = 0$

એટલે કે, $\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m = \mathbf{0}$

અથવા $\int x\,\mathrm{d}m = \int y\,\mathrm{d}m = \int z\,\mathrm{d}m = 0$ (7.6)

ઘણીબધી વખત આપણે વલય, તક્તી, ગોળાઓ, સળિયાઓ વગેરે જેવા નિયમિત આકારના સમાંગ પદાર્થોના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગણતરી કરવી પડશે. (સમાંગ પદાર્થોનો આપણો અર્થ એ છે કે, એકસરખી રીતે વિતરણ થયેલ દ્રવ્યમાનવાળો પદાર્થ) સંમિતિના ખ્યાલને ધ્યાનમાં લેતાં, આપણે સરળતાથી તે બતાવી શકીએ છીએ કે, આ પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રો તેમનાં ભૌમિતિક કેન્દ્રો પર આવેલાં છે.



આકૃતિ 7.8 એક પાતળા સળિયાનું CM નક્કી કરવું

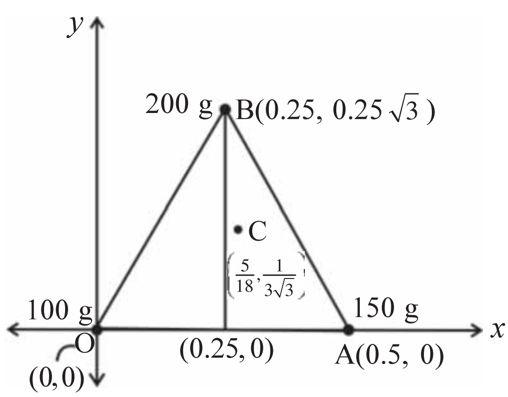
ચાલો હવે એક પાતળો સળિયો લો કે જેની પહોળાઈ અને જાડાઈ (જો સળિયાનો આડછેદ લંબચોરસ હોય) અથવા ત્રિજ્યા (જો સળિયાનો આડછેદ નળાકાર હોય) તેની લંબાઈ કરતાં ઓછી છે. સળિયાની લંબાઈ x-અક્ષની દિશાને સમાંતર દિશામાં મૂકતાં અને ઉદ્‌ગમબિંદુને તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર લેતાં, પરાવર્તન સમિતિને લીધે આપણે એમ કહી શકીએ છીએ કે, પ્રત્યેક x પર સ્થિત સળિયાના દરેક dm ખંડને સમાન dmનો ખંડ એ $-x$ પર રહેલો છે. (આકૃતિ 7.8)

સંકલનમાં આવી દરેક જોડનો ચોખ્ખો ફાળો શૂન્ય છે અને તેથી સંકલન xdm પોતે પણ શૂન્ય થાય છે. સમીકરણ (7.6) પરથી એમ કહી શકાય કે, જે બિંદુ માટે સંકલન પોતે શૂન્ય હોય તે બિંદુ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે. આમ, સમાંગ પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર સાથે એકરૂપ છે. પરાવર્તન સંમિતિના આધારે આ સમજી શકાય છે.

સંમિતિની આ દલીલ સમાંગ વલય, તકતી, ગોળાઓ અથવા વર્તુળાકાર કે લંબચોરસ આડછેદના જાડા સળિયા પર પણ લાગુ થશે. આવા તમામ પદાર્થો માટે તમે જોઈ શકશો કે એક બિંદુ (x, y, z) પર સ્થિત દરેક ઘટક dm માટે બિંદુ $(-x, -y, -z)$ પર પણ તેટલા જ દ્રવ્યમાનનો એક ઘટક લઈ શકો છો. (અન્ય શબ્દોમાં, આ બધા પદાર્થો માટે ઉદ્‌ગમબિંદુ એ પરાવર્તન સંમિતિનું બિંદુ છે.) પરિણામે, સમીકરણ (7.5 a)માં બધાં સંકલન શૂન્ય છે. તેનો અર્થ એ છે કે, ઉપર્યુક્ત તમામ પદાર્થો માટે તેમના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર સંપાત થયેલ હશે.

> ▶ *ઉદાહરણ 7.1* એક સમભુજ ત્રિકોણના શિરોબિંદુ પર રહેલ ત્રણ કણોના બનેલા તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શોધો. આ કણોના દ્રવ્યમાન અનુક્રમે 100 g, 150 g અને 200 g છે. સમભુજ ત્રિકોણની દરેક બાજુ 0.5 m લાંબી છે.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.9

આકૃતિ 7.9માં બતાવ્યા પ્રમાણે x અને y અક્ષોની પસંદગી કરતાં સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવતાં બિંદુઓ O, A અને Bના યામો એ અનુક્રમે (0, 0), (0.5, 0) અને $(0.25, 0.25\sqrt{3})$ છે. 100 g, 150 g અને 200 gના દ્રવ્યમાન અનુક્રમે O, A અને B પર સ્થિત છે. ત્યારે,

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{[100(0) + 150(0.5) + 200(0.25)]\ \text{g m}}{(100 + 150 + 200)\ \text{g}}$$

$$= \frac{75+50}{450}\text{m} = \frac{125}{450}\text{m} = \frac{5}{18}\text{m}$$

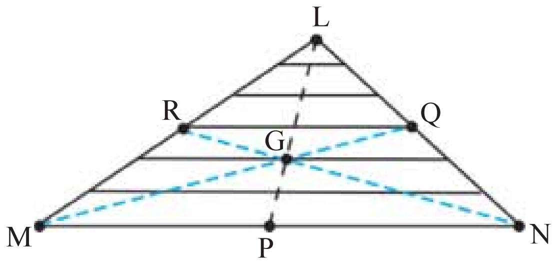
$$Y = \frac{[100(0) + 150(0) + 200(0.25)\sqrt{3}]\ \text{g m}}{450\ \text{g}}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450}\text{m} = \frac{\sqrt{3}}{9}\text{m} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\text{m}$$

દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર C ને આકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવ્યું છે. નોંધો કે તે ત્રિકોણ OABનું ભૌમિતિક કેન્દ્ર નથી. શા માટે ?

ઉદાહરણ 7.2 ત્રિકોણાકાર તક્તી (લેમિના)નું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શોધો.

ઉકેલ આકૃતિ 7.10માં બતાવ્યા પ્રમાણે આ લેમિના (ΔLMN)ને પાયા (MN)ને સમાંતર સાંકડી પટ્ટીઓ (સ્ટ્રિપ્સ)માં વિભાજિત કરી શકાય.

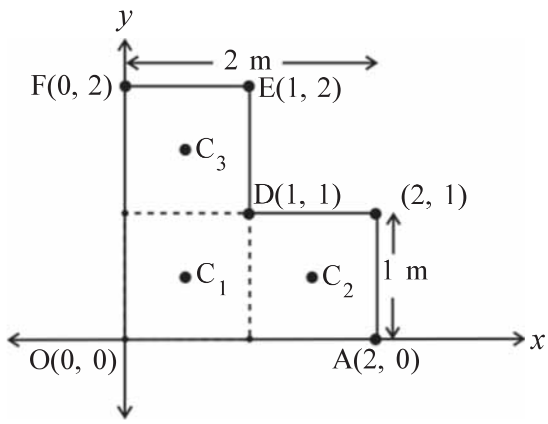


આકૃતિ 7.10

સંમિતિના આધારથી આપણે એમ કહી શકીએ કે દરેક સ્ટ્રિપનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેના મધ્યબિંદુ પર છે. જો આપણે આ તમામ સ્ટ્રિપ્સનાં મધ્યબિંદુઓને જોડીએ તો આપણને મધ્યગા (median) LP મળશે. આમ, સમગ્ર ત્રિકોણનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર મધ્યગા LP પર આવેલ છે. તેવી જ રીતે, આપણે એવી દલીલ કરી શકીએ કે તે મધ્યગા MQ અને NR પર પણ સ્થિત છે. આનો અર્થ એ કે આ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ મધ્યગાઓનું છેદ બિંદુ છે. એટલે કે ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર (Centroid) G પર છે.

ઉદાહરણ 7.3 આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણેનાં પરિમાણોવાળી એક સમાંગ L આકારની લેમિના (પાતળી સપાટ તક્તી)નું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શોધો. આ તક્તીનું દળ 3 kg છે.

ઉકેલ આકૃતિ 7.11માં બતાવ્યા પ્રમાણે x અને y-અક્ષો પસંદ કરતાં, આપણને L આકારની તક્તીનાં શિરોબિંદુઓના યામો આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણેના મળે છે. આપણે એમ વિચારી શકીએ કે, આ L આકાર એ દરેક 1 m લંબાઈના 3 ચોરસનો બનેલો છે. દરેક ચોરસનું દ્રવ્યમાન 1 kg છે, કેમ કે લેમિના સમાંગ છે. આ ચોરસોનાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રો C_1, C_2 અને C_3 તેમની સંમિતિના કારણે તેમનાં ભૌમિતિક કેન્દ્રો છે અને તેમના યામો અનુક્રમે (1/2, 1/2), (3/2, 1/2), (1/2, 3/2) છે. આપણે ચોરસનાં દ્રવ્યમાનોને આ બિંદુઓ પર કેન્દ્રિત થયેલ છે તેમ લઈએ છીએ. સમગ્ર L આકારનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (X, Y)એ આ દ્રવ્યમાન બિંદુઓનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે.



આકૃતિ 7.11

તેથી,

$$X = \frac{[1(1/2) + 1(3/2) + 1(1/2)]\ \text{kg m}}{(1+1+1)\ \text{kg}} = \frac{5}{6}\text{m}$$

$$Y = \frac{[1(1/2) + 1(1/2) + 1(3/2)]\ \text{kg m}}{(1+1+1)\ \text{kg}} = \frac{5}{6}\text{m}$$

આ L આકારનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર રેખા OD પર આવેલું છે. આ અનુમાન આપણે કોઈ પણ ગણતરી વિના પણ લગાવી શકીએ છીએ. તમે કહી શકો કેવી રીતે ? ધારો કે, ત્રણેય

ચોરસો કે જે આકૃતિ 7.11ની L આકારની તક્તી બનાવે છે તેમનાં દ્રવ્યમાન જુદાં જુદાં છે. તો પછી તમે આ તક્તીનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર કેવી રીતે નક્કી કરશો ? ◀

7.3 દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ (MOTION OF CENTRE OF MASS)

દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની વ્યાખ્યાથી સજ્જ હવે આપણે એ સ્થિતિમાં છીએ કે, કણોના તંત્ર માટે તેના ભૌતિક મહત્ત્વની ચર્ચા કરી શકીએ. સમીકરણ (7.4d)ને ફરીથી આપણે નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ છીએ :

$$M\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + ... + m_n\mathbf{r}_n \quad (7.7)$$

આ સમીકરણની બંને બાજુઓનું સમયની સાપેક્ષમાં વિકલન લેતા આપણને

$$M\frac{d\mathbf{R}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + ... + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

અથવા

$$M\mathbf{V} = m_1\boldsymbol{\upsilon}_1 + m_2\boldsymbol{\upsilon}_2 + ... + m_n\boldsymbol{\upsilon}_n \quad (7.8)$$

મળે છે. અહીં $\boldsymbol{\upsilon}_1(= d\mathbf{r}_1/dt_1)$ એ પ્રથમ કણનો વેગ છે. $\boldsymbol{\upsilon}_2(= d\mathbf{r}_2/dt)$ એ દ્વિતીય કણનો વેગ છે વગેરે અને $\mathbf{V}(= d\mathbf{R}/dt)$ એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ છે. ધ્યાન રહે કે આપણે m_1, m_2, ... વગેરે દ્રવ્યમાનોનું મૂલ્ય સમય સાથે બદલાતું નથી તેમ ધારેલ છે. આથી આપણે તેમને સમીકરણોનું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતી વખતે અચળ લીધા છે.

સમીકરણ (7.8)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં આપણને

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = m_1\frac{d\boldsymbol{\upsilon}_1}{dt} + m_2\frac{d\boldsymbol{\upsilon}_2}{dt} + ... + m_n\frac{d\boldsymbol{\upsilon}_n}{dt}$$

અથવા

$$M\mathbf{A} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + ... + m_n\mathbf{a}_n \quad (7.9)$$

મળે છે. જ્યાં, $\mathbf{a}_1(= d\boldsymbol{\upsilon}_1/dt)$ એ પ્રથમ કણનો પ્રવેગ છે. $\mathbf{a}_2(= d\boldsymbol{\upsilon}_2/dt)$ એ દ્વિતીય કણનો પ્રવેગ છે વગેરે અને $\mathbf{A}$ $(= d\mathbf{V}/dt)$ એ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો પ્રવેગ છે.

હવે, ન્યૂટનના બીજા નિયમ અનુસાર, પ્રથમ કણ પર લાગતા બળને $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1$ વડે આપવામાં આવે છે. દ્વિતીય કણ પર લાગતા બળને $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$ વડે આપવામાં આવે છે વગેરે. તેથી સમીકરણ (7.9)ને નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n \quad (7.10)$$

આમ, કણોના તંત્ર (પ્રણાલી) પર લાગતાં તમામ બળોનો સદિશ સરવાળો એ કણોના તંત્રના કુલ દ્રવ્યમાન અને તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના પ્રવેગના ગુણાકાર જેટલો છે.

નોંધ કરો કે, આપણે પ્રથમ કણ પરના જે બળ $\mathbf{F}_1$ની વાત કરીએ છીએ તે ફક્ત એક જ બળ નથી, પરંતુ પ્રથમ કણ પર લાગતા તમામ બળોનો સદિશ સરવાળો છે. તેવી જ રીતે બીજા કણ માટે વગેરે. દરેક કણ પર લાગતાં આ બળોમાં પ્રણાલી પર બહારના પદાર્થો દ્વારા લાગતાં **બાહ્ય (External)** બળો અને કણો દ્વારા એકબીજાં પર લગાડવામાં આવતા **આંતરિક (Internal)** બળો પણ હશે. આપણે ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ અનુસાર એ પણ જાણીએ છીએ કે, આ આંતરિક બળો દરેક જોડમાં સમાન અને વિરુદ્ધ હોય છે અને સમીકરણ (7.10)ના બળોના સરવાળામાં તેમનું યોગદાન શૂન્ય છે. આમ માત્ર બાહ્ય બળો જ આ સમીકરણમાં ફાળો આપે છે. આપણે તેથી સમીકરણ (7.10)ને ફરીથી નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ છીએ :

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_{ext} \quad (7.11)$$

જ્યાં $\mathbf{F}_{ext}$ એ કણોના તંત્ર પર લાગતા બધાં જ બાહ્ય બળોનો સદિશ સરવાળો છે.

સમીકરણ (7.11) દર્શાવે છે કે કણોના કોઈ એક તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ રીતે ગતિ કરે છે **જાણે કે તંત્રનું સમગ્ર દ્રવ્યમાન, તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર સંકેન્દ્રિત હોય તથા બધા જ બાહ્ય બળો તેના પર જ લાગતાં હોય.**

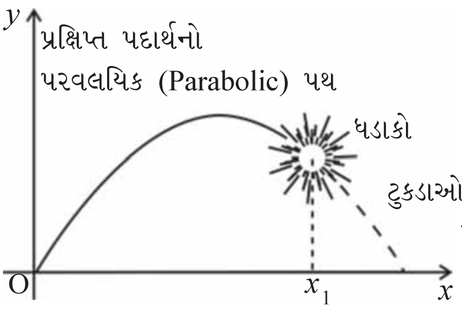
નોંધો કે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ જાણવા માટે કણોના તંત્રના આંતરિક બળોની જાણકારીની જરૂરિયાત નથી. આ માટે આપણે ફક્ત બાહ્ય બળોને જાણવા જ આવશ્યક છે.

સમીકરણ (7.11) મેળવવા માટે આપણે કણોના તંત્રના પ્રકારને સ્પષ્ટ કરવાની જરૂર નથી. આ તંત્ર એ ગતિમાન કણોનું એક સમૂહ હોઈ શકે છે, જેમાં તમામ પ્રકારની આંતરિક ગતિ હોઈ શકે છે અથવા તે એક દૃઢ પદાર્થ પણ હોઈ શકે છે કે જે શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ (ટ્રાન્સલેશન) ગતિ અથવા સ્થાનાંતરણ ગતિ અને ચાકગતિ (રોટેશનલ)નું મિશ્રણ ધરાવતું હોય. કોઈ પણ તંત્ર અને તેના પ્રત્યેક કણોની ગતિ ગમે તેવા હોય તો પણ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સમીકરણ (7.11) મુજબ ગતિ કરે છે.

જેમ આપણે અગાઉનાં પ્રકરણોમાં કર્યું છે તેમ હવે આપણે વિસ્તરીત પદાર્થોને એકાકી (single) કણો તરીકે લેવાની જગ્યાએ તેમને કણોનાં તંત્રો તરીકે લઈ શકીએ છીએ. તંત્રનું સમગ્ર દ્રવ્યમાન તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું અને તંત્ર પરનાં તમામ બાહ્ય બળો દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર લાગે છે. આમ ધારીને, આપણે તેમની ગતિના શુદ્ધ સ્થાનાંતરીય ઘટક એટલે કે, તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ મેળવી શકીએ છીએ.

અગાઉ આપણે આ પ્રક્રિયાને સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત અને યોગ્ય ઠેરવ્યા વિના પદાર્થો પરના બળના વિશ્લેષણમાં અને

સમસ્યાઓ ઉકેલવા માટે અનુસરતા હતા. હવે આપણે સમજીએ છીએ કે અગાઉના અભ્યાસોમાં આપણે કહ્યા વગર જ એમ ધાર્યું હતું કે કણોની ચાકગતિ અને/અથવા આંતરિક ગતિ કાં તો હતી જ નહિ અથવા અવગણ્ય હતી. હવે આપણે આમ કરવાની જરૂર નથી. હવે આપણે અગાઉ જે પ્રક્રિયાને અનુસરતા હતા તેને ફક્ત સમર્થન જ નથી મળ્યું, પરંતુ એ પણ જાણી શક્યા છીએ કે જેના દ્વારા (1) એક દઢ પદાર્થ જે પરિભ્રમણ કરતો હોય અથવા (2) એક એવું કણોનું તંત્ર કે જેમાં કણો તમામ પ્રકારની આંતરિક ગતિ ધરાવતા હોય, તો તેમની સ્થાનાંતરણ ગતિને કેવી રીતે વર્ણવી શકાય અને અલગ પાડી શકાય.



આકૃતિ 7.12 *કોઈ એક પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ટુકડાઓના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ વિસ્ફોટ બાદ પણ એ જ પરવલય પથ પર ચાલુ રહે છે કે જે ગતિપથને તે વિસ્ફોટ ન થયો હોત તો પણ અનુસરત*

આકૃતિ 7.12 એ સમીકરણ (7.11)નું સારું ઉદાહરણ છે. સામાન્યતઃ પરવલય આકારના પથને અનુસરતો એક પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ હવામાં ફૂટીને ટુકડાઓમાં વિભાજિત થાય છે. આ વિસ્ફોટ તરફ દોરી રહેલાં બળો આંતરિક બળો છે. તેઓ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિમાં કોઈ જ ફાળો આપતા નથી. કુલ બાહ્ય બળ એટલે કે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ એ પદાર્થ પર લાગે છે. તે વિસ્ફોટ પહેલાં અને પછી સમાન જ છે. દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર વિસ્ફોટ બાદ પણ આ બાહ્ય બળના પ્રભાવ હેઠળ એ જ પરવલય પથ પર ગતિમાન રહે છે કે જેને તે વિસ્ફોટ ન થયો હોત તોપણ અનુસરત.

7.4 કણોના તંત્રનું રેખીય વેગમાન (LINEAR MOMENTUM OF A SYSTEM OF PARTICLES)

ચાલો આપણે ફરીથી યાદ કરીએ કે, કણોના રેખીય વેગમાનને

$$\mathbf{p} = m\,\boldsymbol{\upsilon} \tag{7.12}$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કર્યું છે.

ચાલો આપણે એ પણ યાદ કરીએ કે, એક કણ માટે સાંકેતિક સ્વરૂપે ન્યૂટનના દ્વિતીય નિયમને નીચે મુજબ લખી શકાય છે.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{7.13}$$

જ્યાં, **F** એ કણ પરનું બળ છે. ચાલો આપણે n કણોનું એક તંત્ર લઈએ કે જેમનાં દ્રવ્યમાનો અનુક્રમે $m_1, m_2, ..., m_n$ અને વેગો અનુક્રમે $\boldsymbol{\upsilon}_1, \boldsymbol{\upsilon}_2, ..., \boldsymbol{\upsilon}_n$ હોય. આ કણો પરસ્પર આંતરક્રિયા પણ કરતાં હોઈ શકે અને તેમના પર બાહ્ય બળ પણ લાગતું હોઈ શકે છે. પ્રથમ કણનું રેખીય વેગમાન $m_1\boldsymbol{\upsilon}_1$ છે, દ્વિતીય કણનું રેખીય વેગમાન $m_2\boldsymbol{\upsilon}_2$ છે અને વગેરે વગેરે.

n કણોના આ તંત્ર માટે તંત્રના રેખીય વેગમાનને તંત્રના તમામ વ્યક્તિગત (એકાકી) કણોના રેખીય વેગમાનના સદિશ સરવાળા તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + ... + \mathbf{p}_n$$

$$= m_1\boldsymbol{\upsilon}_1 + m_2\boldsymbol{\upsilon}_2 + ... + m_n\boldsymbol{\upsilon}_n \tag{7.14}$$

આ સમીકરણને સમીકરણ (7.8) સાથે સરખાવતાં,

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \tag{7.15}$$

આ રીતે **કણોના તંત્રનું કુલ વેગમાન એ તંત્રના કુલ દ્રવ્યમાન અને તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના વેગના ગુણનફળ સમાન છે.** સમીકરણ (7.15)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A} \tag{7.16}$$

સમીકરણ (7.16) અને સમીકરણ (7.11)ને સરખાવતાં,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.17}$$

આ વિધાન એ **કણના તંત્રને લાગુ પડતું ન્યૂટનના બીજા નિયમનું કથન છે.**

હવે ધારી લો કે કણોના તંત્ર પર લાગતાં બાહ્ય બળોનો સરવાળો શૂન્ય છે, તો સમીકરણ (7.17) પરથી,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \text{ અથવા } \mathbf{P} = \text{અચળ} \tag{7.18a}$$

આમ, જ્યારે કણોના તંત્ર પર લાગતું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, ત્યારે તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે. આ વિધાનને કણોના તંત્રના કુલ રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ કહે છે. સમીકરણ (7.15)ના કારણે આનો અર્થ એ પણ છે કે જ્યારે તંત્ર પર કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય છે ત્યારે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ અચળ રહે છે. (આપણે આ પ્રકરણમાં કણોનાં તંત્રોની ચર્ચા દરમિયાન તંત્રનું કુલ દ્રવ્યમાન અચળ રહે છે તેમ ધારીએ છીએ.)

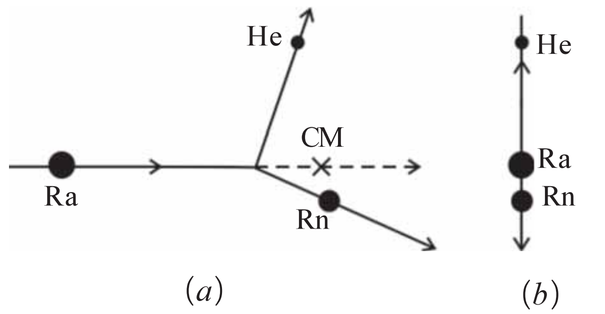
નોંધ કરો કે આંતરિક બળો એટલે કે કણો દ્વારા એકબીજા પર લાગતાં બળોના કારણે પ્રત્યેક કણોનો ગતિપથ જટિલ હોઈ શકે છે. છતાં, જો તંત્ર પર લાગતું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર અચળ વેગ સાથે ગતિ કરે છે. એટલે

કે એક મુક્ત કણની જેમ સીધી રેખામાં એકસમાન રીતે ગતિ કરે છે.

સદિશ સમીકરણ (7.18a) નીચેનાં ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે.

$P_x = c_1$, $P_y = c_2$ અને $P_z = c_3$ (7.18 b)

અહીં P_x, P_y અને P_z એ કુલ રેખીય વેગમાન સદિશ **P**ના અનુક્રમે x, y અને z અક્ષ પરના ઘટકો છે. c_1, c_2 અને c_3 એ અચળાંકો છે.

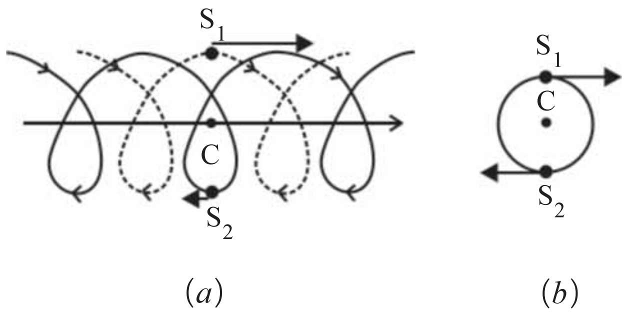


આકૃતિ **7.13** (*a*) *એક ભારે ન્યુક્લિયસ* (Ra)*એ એક હલકા ન્યુક્લિયસ* (Rn) *અને આલ્ફા કણ* (He)*માં વિભાજિત થાય છે. તંત્રનું* CM *નિયમિત ગતિમાં છે.*

(*b*) *દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સ્થિર અવસ્થામાં આ જ ભારે ન્યુક્લિયસ* (Ra)*ના વિભાજનમાં બે કણો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, ચાલો ગતિમાન એવા અસ્થાયી કણના કિરણોત્સર્ગી ક્ષય (Radioactive Decay)ને ધ્યાનમાં લઈએ. જેમકે, રેડિયમનું ન્યુક્લિયસ. રેડિયમ ન્યુક્લિયસનું એક રેડોન ન્યુક્લિયસ અને એક આલ્ફા કણમાં વિઘટન થાય છે. આ ક્ષયકારક બળો તંત્રનાં આંતરિક બળો છે અને તંત્ર પરના બાહ્ય બળો અવગણ્ય છે. તેથી તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન ક્ષય પહેલાં અને પછી સમાન જ છે. ક્ષયમાં ઉત્પન્ન થયેલા બે કણો રેડોન ન્યુક્લિયસ અને આલ્ફા કણ એવી રીતે જુદી જુદી દિશામાં ગતિમાન થાય છે કે, તેમના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ જ દિશામાં ગતિ કરે છે કે ક્ષય પૂર્વે મૂળ રેડિયમ ન્યુક્લિયસ જે પથ પર ગતિ કરતો હતો. [આકૃતિ 7.13(a)]

જો આપણે એ નિર્દેશ ફ્રેમમાંથી ક્ષયનું અવલોકન કરીએ કે જેમાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સ્થિર છે, તો ક્ષયમાં સામેલ કણોની ગતિ વિશેષરૂપે સરળ લાગે છે. ઉત્પન્ન થયેલા કણો એકબીજાની પ્રતિસમીપ (Back to Back) દિશામાં એવી રીતે ગતિ કરે છે કે જેથી તેમનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સ્થિર રહે, જે આકૃતિ 7.13(b)માં બતાવ્યું છે. ઉપર્યુક્ત રેડિયોઍક્ટિવ ક્ષય સમસ્યાની જેમ કણોના તંત્રની ઘણી સમસ્યાઓમાં લેબોરેટરી નિર્દેશ ફ્રેમના સ્થાને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને નિર્દેશ ફ્રેમ તરીકે લઈ કામ કરવું અનુકૂળ છે.



આકૃતિ **7.14** (*a*) *દ્વિસંગી (યુગ્મ) તંત્ર બનાવતા બે તારાઓ,* S_1 *(ત્રુટક રેખા) અને* S_2 *(સળંગ રેખા)ના ગતિપથો. તેમનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર* C *નિયમિત ગતિમાં છે.*

(*b*) *તે જ દ્વિસંગી તંત્ર કે જેનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર* C *સ્થિર છે.*

ખગોળશાસ્ત્રમાં, દ્વિસંગી (યુગ્મ) તારા એક સામાન્ય ઘટના છે. જો કોઈ બાહ્ય બળો ન હોય, તો કોઈ દ્વિસંગી (યુગ્મ) તારાનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એક મુક્ત કણની જેમ ગતિ કરશે. જે આકૃતિ 7.14(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણે છે. સમાન દ્રવ્યમાનવાળા બે તારાઓના ગતિપથો પણ આકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવ્યા છે, જે જટિલ દેખાય છે. જો આપણે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની નિર્દેશ ફ્રેમમાં જઈએ તો આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ત્યાં બે તારાઓ એક વર્તુળમાં સ્થિર દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ગતિ કરે છે. નોંધ કરો કે આ તારાઓનાં સ્થાન એકબીજાથી સંપૂર્ણ વિરુદ્ધ વ્યાસાંત બિંદુઓ પર હોય છે. (આકૃતિ 7.14(b)) આમ, આપણી નિર્દેશ ફ્રેમમાં, તારાઓના ગતિપથોએ (i) દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સીધી રેખામાં નિયમિત ગતિ અને (ii) દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તારાઓની વર્તુળાકાર ભ્રમણકક્ષાઓનું સંયોજન છે.

આ બે ઉદાહરણો પરથી જોઈ શકાય છે, તેમ તંત્રના જુદા જુદા ભાગોની ગતિને **દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને થતી ગતિમાં વિભાજન કરવું** એ ખૂબ જ ઉપયોગી પદ્ધતિ છે જે તંત્રની ગતિ સમજવામાં મદદ કરે છે.

7.5 બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર (VECTOR PRODUCT OF TWO VECTORS)

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આપણે સદિશ અને તેમના ઉપયોગથી પરિચિત છીએ જ. પ્રકરણ 6 (કાર્ય, ઊર્જા, પાવર)માં આપણે બે સદિશોના અદિશ ગુણાકારને વ્યાખ્યાયિત કર્યો છે. એક મહત્ત્વપૂર્ણ ભૌતિકરાશિ, કાર્યને બે સદિશ રાશિઓ, બળ અને સ્થાનાંતરના અદિશ ગુણાકાર (Scalar Product) તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે.

હવે આપણે બે સદિશોના અન્ય ગુણાકારને વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આ ગુણાકાર એ સદિશ રાશિ છે. ચાકગતિના અભ્યાસમાં બે મહત્ત્વની રાશિઓ, બળની ચાકમાત્રા (Moment of Force) અને કોણીય વેગમાન (Angular Momentum) સદિશ ગુણાકારો તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

સદિશ ગુણાકારની વ્યાખ્યા

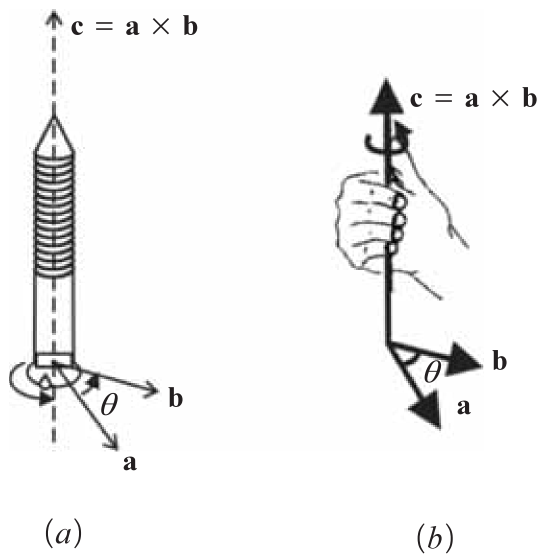
બે સદિશો **a** અને **b**નો સદિશ ગુણાકાર એ સદિશ **c** એવો છે કે,

(i) **c**નું માન = $c = ab \sin\theta$ છે, જ્યાં a અને b એ **a** અને **b**ના માન છે અને θ બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ છે.

(ii) **c** એ **a** અને **b**ને સમાવતા સમતલને લંબ છે.

(iii) જો આપણે એક જમણા હાથના સ્ક્રૂને લઈએ કે જેનું શિર્ષ **a** અને **b**ના સમતલમાં હોય અને આ સ્ક્રૂ આ સમતલને લંબ હોય અને જો આપણે તેના શિર્ષને **a** થી **b** દિશામાં ફેરવીએ તો સ્ક્રૂની અણી (ટીપ)એ **c**ની દિશામાં ખસશે. જમણા હાથના સ્ક્રૂનો આ નિયમ આકૃતિ 7.15aમાં દર્શાવેલ છે.

આના બદલે આકૃતિ 7.15bમાં બતાવ્યા પ્રમાણે જો સદિશો **a** અને **b**ના સમતલને લંબ રેખાની ફરતે જમણા હાથની આંગળીઓને **a** થી **b**ની દિશામાં વીંટાળવામાં આવે, તો વિસ્તરેલો (ઊભો) અંગૂઠો **c**ની દિશા દર્શાવે છે.



આકૃતિ **7.15** (a) *બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારની દિશા નિર્ધારિત કરવા માટે જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ*
(b) *સદિશ ગુણાકારની દિશા નિર્ધારિત કરવા માટે જમણા હાથનો નિયમ*

જમણા હાથના નિયમનું એક સરળ સ્વરૂપ નીચે મુજબ છે : તમારા જમણા હાથની હથેળી ખોલો અને આંગળીઓને **a** થી લઈને **b** તરફ વાળો. તમારો ઊભો અંગૂઠો **c** ની દિશામાં હશે.

તે યાદ રાખવું જોઈએ કે કોઈ પણ બે સદિશો **a** અને **b** વચ્ચે બે ખૂણા છે. આકૃતિ 7.15 (a) અથવા (b)માં તેઓ θ (દર્શાવ્યા પ્રમાણે) અને $(360° - \theta)$ને અનુરૂપ છે. ઉપર્યુક્ત નિયમોમાંથી કોઈ એકને લાગુ કરતી વખતે પરિભ્રમણને **a** ને **b** વચ્ચેના નાના કોણ ($<180°$) દ્વારા લેવું જોઈએ. જે અહીં θ છે.

સદિશ ગુણાકારને દર્શાવવા માટે ઉપયોગમાં લેવાતા ક્રોસને (×) કારણે તેને ક્રોસ પ્રોડક્ટ તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

- નોંધો કે બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે જે અગાઉ જણાવ્યું છે. **a.b** = **b.a**

  સદિશ ગુણાકાર, જોકે ક્રમના નિયમનું પાલન કરતો નથી એટલે કે **a** × **b** ≠ **b** × **a.**

  a × **b** અને **b** × **a** બંનેનું માન સમાન ($ab \sin\theta$) જ છે તથા તે બંને **a** અને **b**ના સમતલને લંબ છે. પરંતુ જમણા હાથના સ્ક્રૂનું પરિભ્રમણ **a** × **b**ના કિસ્સામાં **a** થી **b**નું હોય છે. જ્યારે **b** × **a**માં તે **b** થી **a** છે. આનો અર્થ એ છે કે બે સદિશો પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાઓમાં છે. આમ

  આપણને **a** × **b** = − **b** × **a** મળે છે.

- સદિશ ગુણાકારની અન્ય એક રસપ્રદ બાબત એ તેનો પરાવર્તન હેઠળનો તેનો ગુણધર્મ છે. પરાવર્તન હેઠળ (એટલે કે અરીસામાં પ્રતિબિંબ તરીકે લેતાં) આપણને $x \to -x$, $y \to -y$ અને $z \to -z$ મળે છે. પરિણામે સદિશના બધાં ઘટકો સંજ્ઞા બદલે છે અને આમ $a \to -a$, $b \to -b$. પરાવર્તનમાં **a** × **b**નું શું થશે ?

  a × **b** → (−**a**) × (−**b**) = **a** × **b**

  આમ, **a** × **b** પરાવર્તનમાં સંજ્ઞા બદલતું નથી.

- અદિશ અને સદિશ બંને ગુણાકારો સદિશ સરવાળા પર વિભાજનના નિયમનું પાલન કરે છે.

  a. (**b** + **c**) = **a.b** + **a.c**

  a × (**b** + **c**) = **a** × **b** + **a** × **c**

- આપણે ઘટક સ્વરૂપમાં **c** = **a** × **b** લખી શકીએ છીએ. આ માટે આપણે પહેલાં કેટલાક પ્રાથમિક સદિશ ગુણાકારો (ક્રોસ પ્રોડક્ટ્સ) મેળવવાની જરૂર છે.

(i) **a** × **a** = **0** (**0** એ એક શૂન્ય સદિશ (Null Vector) છે. એટલે કે શૂન્ય માનવાળો સદિશ)

આમ થવાનું કારણ એ છે કે **a** × **a**નું માન એ $a^2 \sin 0° = 0$ છે.

આ પરથી નીચેના પરિણામ મળે છે :

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

(ii) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$

નોંધો કે, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$નું માન sin 90° કે 1 છે. કારણ કે $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$ બંને એકમ માન ધરાવે છે અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો 90° છે. આમ, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ એકમ સદિશ (Unit Vector) છે. $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$ના સમતલને લંબ અને જમણી બાજુના સ્ક્રૂના નિયમ દ્વારા તેમની સાથે સંકળાયેલ એવો એક એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{k}}$ છે. તેથી ઉપર્યુક્ત પરિણામ મળે છે. તમે આ જ રીતે ચકાસી શકો છો કે,

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \text{ અને } \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

સદિશ ગુણાકારના ક્રમના નિયમ પરથી આપણે કહી શકીએ કે,

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$$

નોંધ કરો કે, ઉપરના સદિશ ગુણાકારના સંબંધમાં જો $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ ચક્રીય ક્રમમાં હોય તો સદિશ ગુણાકાર ધન છે. જો $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ ચક્રીય ક્રમમાં ન હોય, તો સદિશ ગુણાકાર ઋણ છે.

હવે,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \times (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}})$$

$$= a_x b_y \hat{\mathbf{k}} - a_x b_z \hat{\mathbf{j}} - a_y b_x \hat{\mathbf{k}} + a_y b_z \hat{\mathbf{i}} + a_z b_x \hat{\mathbf{j}} - a_z b_y \hat{\mathbf{i}}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\mathbf{k}}$$

ઉપર્યુક્ત સંબંધ મેળવવા માટે આપણે પ્રાથમિક ક્રોસ પ્રોડક્ટ્સનો ઉપયોગ કર્યો છે. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ની આ અભિવ્યક્તિને નિશ્ચાયક સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય છે જે યાદ રાખવું સરળ છે.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

▶ *ઉદાહરણ 7.4* *બે સદિશોના અદિશ અને સદિશ ગુણાકારો શોધો.*

$\mathbf{a} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})$ અને $\mathbf{b} = (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$

ઉકેલ

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}) \cdot (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}) \\ &= -6 - 4 - 15 \\ &= -25\end{aligned}$$

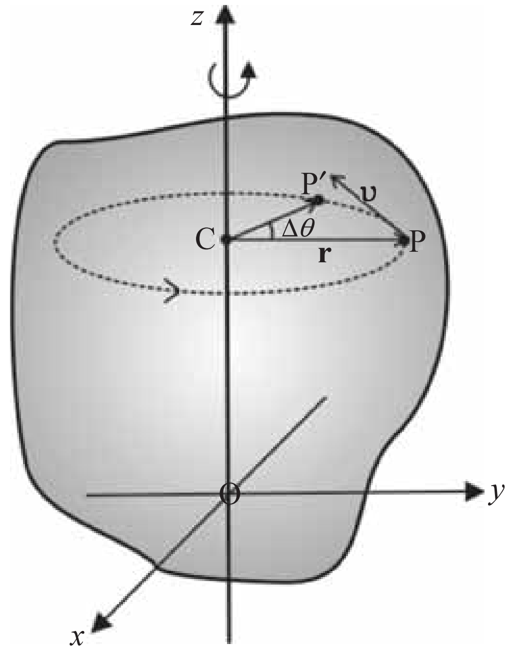
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$$

નોંધો કે, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -7\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ ◀

7.6 કોણીય વેગ અને તેનો રેખીય વેગ સાથેનો સંબંધ (ANGULAR VELOCITY AND ITS RELATION WITH LINEAR VELOCITY)

આ વિભાગમાં આપણે કોણીય વેગ અને ચાકગતિમાં તેની ભૂમિકા શું છે તેનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે જોયું છે કે ચાકગતિ કરતાં પદાર્થનું દરેક કણ વર્તુળ-પથ પર ગતિમાન છે. કણોનો રેખીય વેગ તેના કોણીય વેગથી સંબંધિત છે. આ બંને રાશિઓ વચ્ચેના સંબંધમાં જેના વિશે આપણે છેલ્લા વિભાગમાં શીખ્યા તે સદિશ ગુણાકારનો સમાવેશ થાય છે.

ચાલો પાછા આકૃતિ 7.4 પર જઈએ. ઉપર જણાવ્યા મુજબ, સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતા એક દૃઢ



આકૃતિ 7.16 *સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને પરિભ્રમણ. (સ્થિર z– અક્ષને અનુલક્ષીને ફરતા એક દૃઢ પદાર્થનો એક કણ (P) અક્ષ પરના કેન્દ્ર (C)ની આસપાસ એક વર્તુળ પર ગતિમાન છે.)*

પદાર્થનો દરેક કણ એક વર્તુળ-પથ પર ગતિ કરે છે. જે અક્ષને લંબ સમતલમાં છે અને તેનું કેન્દ્ર અક્ષ પર છે. આકૃતિ 7.16માં આપણે આકૃતિ 7.4ને ફરીથી દોરેલ છે. જે એક સ્થિર અક્ષ (z-અક્ષ તરીકે લેવામાં આવેલ છે)ની ફરતે ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થનો કોઈ એક લાક્ષણિક કણ (એક બિંદુ P) દર્શાવે છે. આ કણ જેનું કેન્દ્ર C હોય તેવું એક વર્તુળ બનાવે

છે. આ વર્તુળની ત્રિજ્યા r છે, જે બિંદુ 'P'નું અક્ષથી લંબઅંતર દર્શાવે છે. P આગળ કણનો રેખીય વેગ સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$ પણ બતાવેલ છે. તે વર્તુળ પર P પરના સ્પર્શકની દિશામાં છે.

Δt સમયના અંતરાલ (આકૃતિ 7.16) પછી કણની સ્થિતિ P′ છે. કોણ PCP′ એ Δt સમયમાં કણનું કોણીય સ્થાનાંતર $\Delta\theta$ દર્શાવે છે. Δt અંતરાલ પર કણનો સરેરાશ કોણીય વેગ એ $\Delta\theta$ / Δt છે. Δt જેમ શૂન્યની નજીક જાય છે (એટલે કે ક્રમશઃ નાનાં મૂલ્યો લે છે.) તેમ ગુણોત્તર $\Delta\theta$ / Δt એવા લક્ષ પર પહોંચે છે કે જે P સ્થાન પરના કણનો તાત્ક્ષણિક કોણીય વેગ $d\theta$ / dt છે. આપણે **તાત્ક્ષણિક કોણીય વેગ (Instantaneous Angular Velocity)**ને ω (ગ્રીક અક્ષર ઓમેગા) વડે દર્શાવીએ. આપણે વર્તુળાકાર ગતિના આપણા અભ્યાસ પરથી જાણીએ છીએ કે વર્તુળાકાર ગતિ કરતા કોઈ કણના રેખીય વેગનું માન એ તે કણના કોણીય વેગ સાથે સરળ સંબંધ $\upsilon = \omega r$ દ્વારા સંબંધિત છે. જ્યાં r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

આપણે એમ પણ અવલોકન કરી શકીએ છીએ કે કોઈ પણ ક્ષણે સંબંધ $\upsilon = \omega r$ એ બધા કણોને લાગુ પડે છે. આમ, દઢ પદાર્થમાં સ્થિર અક્ષથી લંબ અંતર r_i પરના કણ માટે આપેલ ક્ષણે રેખીય વેગ

$$\upsilon_i = \omega r_i \tag{7.19}$$

દ્વારા અપાય છે. ક્રમ i એ 1 થી n સુધી ચલે છે. જ્યાં n એ પદાર્થના કણોની કુલ સંખ્યા છે.

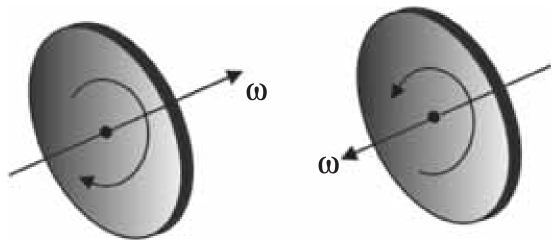
અક્ષ પરના કણો માટે $r = 0$ અને તેથી $\upsilon = \omega r = 0$, તેથી ધરી પરના કણો સ્થિર છે. આમ અક્ષ સ્થિર છે તેની ચકાસણી થાય છે.

નોંધ લો કે **આપણે તમામ કણો માટે સમાન કોણીય વેગ ω નો ઉપયોગ કરીએ છીએ. તેથી આપણે ωને સમગ્ર પદાર્થના કોણીય વેગ તરીકે સ્વીકારીશું.**

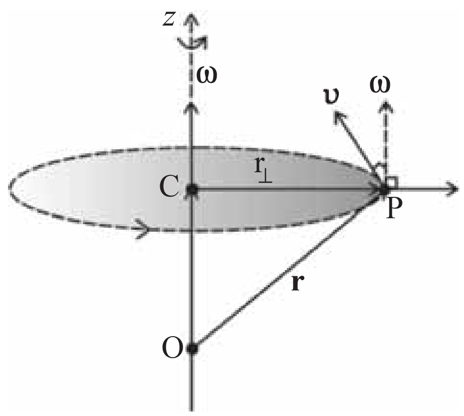
આપણે પદાર્થના શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ માટે એવી લાક્ષણિકતા જણાવી છે કે પદાર્થના તમામ ભાગો કોઈ પણ ક્ષણે સમાન વેગ ધરાવે છે. એ જ રીતે, શુદ્ધ ચાકગતિની લાક્ષણિકતા આપણે પદાર્થના તમામ ભાગો, સમયની કોઈ પણ ક્ષણે સમાન કોણીય વેગ ધરાવે છે તે દ્વારા જણાવી શકીએ છીએ. નોંધ કરો કે સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને દઢ પદાર્થના પરિભ્રમણની આ લાક્ષણિકતા એ વિભાગ 7.1માં વર્ણવેલ કે પદાર્થના દરેક કણ એક વર્તુળમાં કે જે અક્ષના લંબ સમતલમાં છે તેની પર ગતિ કરે છે અને તેનું કેન્દ્ર અક્ષ પર છે તેની જેમ જ ચાકગતિને દર્શાવવાની આ અન્ય એક રીત છે.

આપણી ચર્ચામાં અત્યાર સુધી તો કોણીય વેગ અદિશ રાશિ હોય તેવું લાગે છે. હકીકતમાં તે સદિશ છે. આપણે આ હકીકતને સાબિત નહિ કરીએ. પરંતુ આપણે તેને સ્વીકારી લઈશું. સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે કોણીય વેગ સદિશએ ભ્રમણાક્ષની દિશામાં હોય છે અને તે જ્યારે જમણા હાથના સ્ક્રૂનું શીર્ષ પદાર્થ સાથે ફેરવવામાં આવે છે ત્યારે જમણા હાથનો સ્ક્રૂ જે દિશામાં આગળ વધે છે એ દિશાનો નિર્દેશ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.17a.)

ઉપર ઉલ્લેખ કર્યા મુજબ આ સદિશનું માન $\omega = d\theta/dt$ છે.



આકૃતિ 7.17(a) જો જમણા હાથના સ્ક્રૂનું શીર્ષ પદાર્થ સાથે ભ્રમણ કરે તો સ્ક્રૂ કોણીય વેગ ωની દિશામાં આગળ વધે છે. જો પદાર્થના પરિભ્રમણની [સમઘડી અથવા વિષમઘડી] દિશામાં ફેરફાર થાય છે તો તે ωની દિશામાં પણ ફેરફાર કરે છે.



આકૃતિ 7.17(b) કોણીય વેગ સદિશ ω એ સ્થિર અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. P પરના કણનો રેખીય વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ છે. જે ω અને r બંનેને લંબ છે અને કણ દ્વારા બનાવાયેલ વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં છે.

હવે આપણે સદિશ ગુણાકાર $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ શું છે તે જોઈશું. આકૃતિ 7.17 (b)નો સંદર્ભ લો, જે આકૃતિ 7.16નો એક ભાગ છે અને તેને કણ P નો માર્ગ બતાવવા પુનઃ પ્રસ્તુત કરેલ છે. આ આકૃતિ એ સ્થિર (z−અક્ષની) દિશામાંનો સદિશ ω દર્શાવે છે જે સાથે સાથે ઉદ્‌ગમબિંદુના સંદર્ભમાં આ દઢ પદાર્થના P પરના કણનું સ્થાનસદિશ $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ પણ છે. નોંધ કરો કે ઉદ્‌ગમબિંદુને પરિભ્રમણના અક્ષ પર પસંદ કરવામાં આવેલ છે.

હવે $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{OC} + \mathbf{CP})$

પણ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OC} = \mathbf{0}$ કેમ કે $\boldsymbol{\omega}$ એ $\mathbf{OC}$ તરફ છે.

જેથી $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$

સદિશ $\boldsymbol{\omega} \times$ CP એ $\boldsymbol{\omega}$ને એટલે કે z-અક્ષને અને P પરના કણ દ્વારા બનાવેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા **CP**ને પણ લંબ છે. તેથી તે P આગળ વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં છે. પણ $\boldsymbol{\omega} \times$ **CP**નું માન ω (CP) છે કારણ કે ω અને CP એકબીજાને લંબ છે. આપણે CPને $\mathbf{r}_{\perp}$ દ્વારા દર્શાવીશું, અગાઉ કર્યું તેમ **r** દ્વારા નહિ.

આ રીતે $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ એ $\omega r_{\perp}$ના માનનો સદિશ છે અને તે P પરના કણ દ્વારા બનાવેલ વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં છે. P પર રેખીય વેગ સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$નું માન અને દિશા પણ એટલા જ છે.

આમ,

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (7.20)$$

હકીકતમાં, આ સંબંધ સમીકરણ (7.20), એક સ્થિર બિંદુને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં દૃઢ પદાર્થ જેમકે ભમરડા માટે પણ સત્ય છે [આકૃતિ 7.6(a)]. આ કિસ્સામાં **r** એ ઉદ્‌ગમ બિંદુ તરીકે લેવાયેલા સ્થિર બિંદુની સાપેક્ષે કણનો સ્થાન સદિશ રજૂ કરે છે.

આપણે નોંધીએ કે **સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને પરિભ્રમણ માટે, સદિશ $\boldsymbol{\omega}$ની દિશા સમય સાથે બદલાતી નથી. આમ છતાં, તેમનું માન ક્ષણે ક્ષણે બદલાઈ શકે છે. વધુ વ્યાપક પરિભ્રમણ માટે $\boldsymbol{\omega}$નું માન અને દિશા બંનેમાં ક્ષણે ક્ષણે ફેરફાર થઈ શકે છે.**

7.6.1 કોણીય પ્રવેગ (Angular acceleration)

તમે કદાચ નોંધ્યું હશે કે, જેની સાથે આપણે પહેલેથી જ પરિચિત છીએ તે સ્થાનાંતરણ ગતિના અભ્યાસની દિશામાં જ આપણે ચાકગતિનો અભ્યાસ આગળ ધપાવી રહ્યા છીએ. રેખીય સ્થાનાંતર અને વેગ ($\boldsymbol{\upsilon}$)ના શુદ્ધ ગતિકી ચલોને અનુરૂપ ચાકગતિમાં, કોણીય સ્થાનાંતર અને કોણીય વેગ ($\boldsymbol{\omega}$) છે. એ હવે સ્વાભાવિક છે કે સ્થાનાંતરણ ગતિમાં રેખીય પ્રવેગને વેગના ફેરફારના સમય-દર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કર્યું હતું તેવી જ રીતે ચાકગતિમાં કોણીય પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરીએ. આપણે કોણીય વેગના ફેરફારના સમય-દર તરીકે કોણીય પ્રવેગ $\boldsymbol{\alpha}$ને વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આમ,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \qquad (7.21)$$

જો પરિભ્રમણની અક્ષ સ્થિર હોય, તો $\boldsymbol{\omega}$ની દિશા અને તેથી, $\boldsymbol{\alpha}$ની દિશા પણ સ્થિર હોય. આ કિસ્સામાં સદિશ સમીકરણ એ એક અદિશ સમીકરણમાં પરિણમે છે.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (7.22)$$

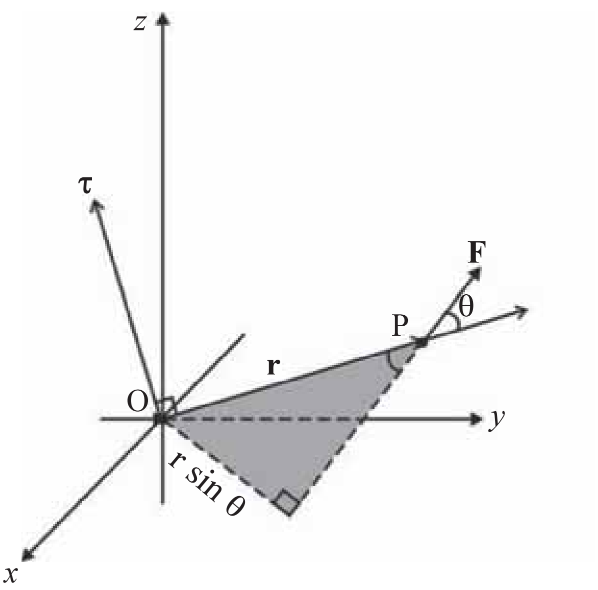
7.7 ટૉર્ક અને કોણીય વેગમાન (TORQUE AND ANGULAR MOMENTUM)

આ વિભાગમાં, આપણે એવી બે ભૌતિકરાશિઓથી અવગત થઈશું કે જેને બે સદિશોના સદિશ ગુણાકાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. આપણે જોઈશું કે આ રાશિઓ કણોનાં તંત્રોની, ખાસ કરીને દૃઢ પદાર્થોની, ગતિની ચર્ચામાં મહત્ત્વની છે.

7.7.1 બળની ચાકમાત્રા (ટૉર્ક) [Moment of force (Torque)]

આપણે શીખ્યાં છીએ કે સામાન્ય રીતે દૃઢ પદાર્થની ગતિ એ ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરણનું સંયોજન છે. જો પદાર્થ કોઈ એક બિંદુ અથવા રેખા સાથે જડિત હોય, તો તેને માત્ર ચાકગતિ હોય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈ પદાર્થની સ્થાનાંતરણ અવસ્થાને બદલવા માટે એટલે કે રેખીય પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળ જરૂરી છે. આપણે પછી સવાલ કરી શકીએ કે ચાકગતિના કિસ્સામાં બળને સમતુલ્ય શું છે ? વાસ્તવિક પરિસ્થિતિમાં આ પ્રશ્નની ચકાસણી કરવા માટે આપણે બારણું ખોલવાનું કે બંધ કરવાનું ઉદાહરણ લઈએ. બારણું એક દૃઢ પદાર્થ છે, જે મિજાગરામાંથી પસાર થતી સ્થિર ઊભી અક્ષને અનુલક્ષીને ફરી શકે છે. બારણાને કોણ પરિભ્રમણ કરાવે છે ? એ તો સ્પષ્ટ છે કે જ્યાં સુધી કોઈ બળ લગાડવામાં ન આવે ત્યાં સુધી બારણું ભ્રમણ કરતું નથી. પરંતુ ગમે તે બળ આ કાર્ય નથી કરી શકતું. મિજાગરામાંથી પસાર થતી સ્થિર ઊભી અક્ષ પર લગાડવામાં આવતું બળ એ કોઈ પણ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરી શકતું નથી, આથી વિશેષ આપેલ માનનું એક બળ બારણાની બાહ્ય ધાર પર લંબવત લગાડવામાં આવે, તો તે પરિભ્રમણ ઉત્પન્ન કરવા માટે સૌથી વધુ અસરકારક છે. ચાકગતિમાં એકલું બળ નહિ, પરંતુ તે કેવી રીતે અને ક્યાં લગાડવામાં આવે છે તે પણ મહત્ત્વનું છે.

ચાકગતિમાં બળને સમતુલ્ય ભૌતિકરાશિ **બળની ચાકમાત્રા (Moment of Force)** છે. તેને **ટૉર્ક (Torque)** અથવા **બળયુગ્મ (Couple)** તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. (આપણે બળની ચાકમાત્રા અને ટૉર્ક શબ્દોનો ઉપયોગ એકબીજાના પર્યાય તરીકે કરીશું.) પ્રથમ આપણે એક કણના ખાસ કિસ્સા માટે બળની ચાકમાત્રા વ્યાખ્યાયિત કરીશું. ત્યારબાદ આ ખ્યાલ વિસ્તારીને આપણે તેને દૃઢ પદાર્થ સહિત કણોનાં તંત્રોને લાગુ કરીશું. આપણે ચાકગતિની અવસ્થામાં થતાં ફેરફાર એટલે કે દૃઢ પદાર્થના કોણીય પ્રવેગ સાથે પણ તેને સાંકળીશું.



આકૃતિ 7.18 **τ** = **r** × **F**, **τ** *એ* **r** *અને* **F** *ધરાવતાં સમતલને લંબરૂપ છે અને તેની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ દ્વારા આપવામાં આવે છે.*

જો કોઈ એક બિંદુ P કે જેનું ઉદ્‌ગમબિંદુ Oની સાપેક્ષે સ્થાન એ સ્થાનસદિશ **r** (આકૃતિ 7.18) વડે આપવામાં આવે છે તે બિંદુએ એક કણ પર બળ **F** લાગે તો ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે કણ પર લાગતા બળની ચાકમાત્રા નીચેના સદિશ ગુણાકાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{7.23}$$

બળની ચાકમાત્રા (અથવા ટૉર્ક) એક સદિશ રાશિ છે. તેની સંજ્ઞા τ ગ્રીક અક્ષર ટૌ છે. τનું માન

$$\tau = r\,F\,\sin\theta \tag{7.24a}$$

છે. જ્યાં r એ સ્થાનસદિશ ***r***નું માન એટલે કે લંબાઈ OP છે. F એ બળ **F**નું માન છે અને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ θ એ ***r*** અને **F** વચ્ચેનો ખૂણો છે.

બળની ચાકમાત્રાનાં પરિમાણો ML^2T^{-2} છે. તેનાં પરિમાણો કાર્ય અથવા ઊર્જાના જેવા જ છે. તેમ છતાં તે કાર્યથી ખૂબ જ અલગ ભૌતિકરાશિ છે.

બળની ચાકમાત્રા એ સદિશ છે. જ્યારે કાર્ય એક અદિશ છે. બળની ચાકમાત્રાનો SI એકમ ન્યૂટન મીટર (N m) છે. બળની ચાકમાત્રાનું માન નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

$$\tau = (r\,\sin\theta)\,F = r_{\perp}F \tag{7.24b}$$

અથવા $$\tau = r\,F\,\sin\theta = rF_{\perp} \tag{7.24c}$$

જ્યાં, $r_{\perp} = r\,\sin\theta$ એ ઉદ્‌ગમબિંદુથી **F**ની કાર્યરેખાનું લંબઅંતર છે અને $F_{\perp}$ (= $F\,\sin\theta$) એ **F**નો **r**ની લંબ દિશામાંનો ઘટક છે. નોંધ કરો કે જો $r = 0$, F = 0 અથવા $\theta = 0°$ અથવા 180° હોય તો $\tau = 0$. આમ, જો બળનું માન શૂન્ય હોય અથવા જો બળની કાર્યરેખા ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય, તો બળની ચાકમાત્રા શૂન્ય થાય છે.

આપણે નોંધવું જોઈએ કે **r** × **F** એ સદિશ ગુણાકાર છે. તેથી બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારના બધા જ ગુણધર્મો તેને લાગુ પડે છે. જો બળની દિશા ઉલટાવવામાં આવે તો બળની ચાકમાત્રાની દિશા પણ ઊલટાય છે. જો **r** અને **F** બંનેની દિશા ઉલટાવવામાં આવે, તો બળની ચાકમાત્રાની દિશા તે જ રહે છે (ઊલટાતી નથી).

7.7.2 કણનું કોણીય વેગમાન (Angular Momentum of a particle)

જેમ બળની ચાકમાત્રા એ બળનું પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે. તે જ પ્રમાણે કોણીય વેગમાન નામની રાશિ રેખીય વેગમાનનું પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે. પ્રથમ આપણે એક કણના વિશિષ્ટ કિસ્સા માટે કોણીય વેગમાનને વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને એક કણની ગતિના સંદર્ભમાં તેની ઉપયોગિતા જોઈશું. ત્યાર બાદ આપણે દૃઢ પદાર્થ સહિતના કણોનાં તંત્રો માટે કોણીય વેગમાનની આ વ્યાખ્યાને લાગુ પાડીશું.

બળની ચાકમાત્રાની જેમ કોણીય વેગમાન પણ એક સદિશ ગુણાકાર છે. તે (રેખીય) વેગમાનની ચાકમાત્રા તરીકે પણ ઓળખાય છે. આ પદ પરથી કોણીય વેગમાન કેવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે તેનું અનુમાન કોઈ કરી શકે છે.

ઉદ્‌ગમબિંદુ O થી **r** સ્થાને, m દળનો અને **p** રેખીય વેગમાન ધરાવતો એક કણ લો. ઉદ્‌ગમબિંદુ Oની સાપેક્ષે કોણીય વેગમાન ***l***ને

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{7.25a}$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

આ કોણીય વેગમાન સદિશનું માન

$$l = r\,p\,\sin\theta \tag{7.26a}$$

છે, જ્યાં p એ **p**નું માન છે અને θ એ **r** અને **p** વચ્ચેનો ખૂણો છે. આમ આપણે લખી શકીએ કે,

$$l = r\,p_{\perp} \text{ અથવા } r_{\perp}p \tag{7.26b}$$

જ્યાં $r_{\perp}$ (= $r\,\sin\theta$) એ ઉદ્‌ગમબિંદુથી **p**ની દિશારેખાનું લંબઅંતર છે અને $p_{\perp}$ (= $p\,\sin\theta$) એ **p**નો **r**ને લંબ દિશામાંનો ઘટક છે. જ્યારે રેખીય વેગમાન લુપ્ત પામે ($p = 0$) અથવા જો કણ ઉદ્‌ગમબિંદુ પર હોય ($r = 0$) અથવા જો **p**ની દિશારેખા ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય $\theta = 0°$ અથવા 180° ત્યારે આપણે અપેક્ષા મુજબ કોણીય વેગમાન શૂન્ય ($l = 0$) થાય.

ભૌતિકરાશિઓ, બળની ચાકમાત્રા અને કોણીય વેગમાન તેમની વચ્ચે મહત્ત્વપૂર્ણ સંબંધ ધરાવે છે. તે બળ અને રેખીય વેગમાન વચ્ચેના સંબંધનો પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે. એક કણના સંદર્ભમાં સંબંધ તારવવા માટે આપણે સમયના સાપેક્ષે $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$નું વિકલન કરીએ.

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

જમણી બાજુએ વિકલન માટે ગુણાકારનો નિયમ લાગુ પાડતાં,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

હવે, કણનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = d\mathbf{r}/dt$ છે અને $\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$. આના કારણે

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \boldsymbol{\upsilon} \times m\,\boldsymbol{\upsilon} = 0.$$

કારણ કે, બે સમાંતર સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર શૂન્ય થાય છે. વધુમાં $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ છે.

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

આથી $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}$

અથવા $$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \qquad (7.27)$$

આમ, કણના કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય-દર તેના પર લાગતાં ટૉર્ક જેટલો છે. આ સમીકરણ $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$નું પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે, જે એક કણની સ્થાનાંતરિત ગતિ માટે ન્યૂટનના બીજા નિયમને વ્યક્ત કરે છે.

કણોના કોઈ તંત્ર માટે ટૉર્ક અને કોણીય વેગમાન (Torque and angular momentum for a system of particles)

આપેલ બિંદુને અનુલક્ષીને કણોના તંત્રનું કુલ કોણીય વેગમાન મેળવવા માટે આપણે પ્રત્યેક કણના કોણીય વેગમાનોનો સદિશ સરવાળો કરવો પડે છે. આમ, n કણોના તંત્ર માટે

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + ... + \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{l}_i$$

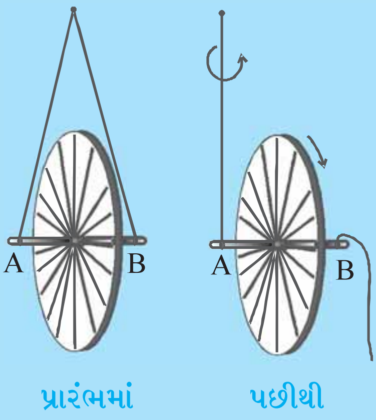
iમા કણના કોણીય વેગમાનને

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

વડે દર્શાવાય છે.

જ્યાં, $\mathbf{r}_i$ એ આપેલ ઉદ્ગમબિંદુના સંદર્ભમાં iમાં કણનો સ્થાનસદિશ છે અને $\mathbf{p}_i = (m_i\boldsymbol{\upsilon}_i)$ એ કણનું રેખીય વેગમાન છે. (આ કણનું દળ m_i અને વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_i$ છે.) આપણે કણોના

સાઈકલની રિંગ સાથે પ્રયોગ



એક સાઈકલની રિંગ લો અને બંને બાજુએ તેની ધરી (એક્સલને) લંબાવો. બાજુની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બે દોરી, બંને છેડા A અને B પર બાંધો. આ બંને દોરીને એક હાથમાં એ રીતે પકડી રાખો કે રિંગ શિરોલંબ રહે. જો તમે એક દોરીને છોડો છો તો રિંગ નમી જશે. હવે બંને દોરીને એક હાથમાં રાખીને રિંગને ઊભી સ્થિતિમાં રાખીને વ્હીલને બીજા હાથથી ધરીની ફરતે ઝડપી ફેરવો. પછી તમારા હાથમાંથી એક દોરી, દા.ત., Bને છોડો અને શું થાય છે તેનું અવલોકન કરો.

રિંગ ઊર્ધ્વ સમતલમાં ફરતી રહે છે અને તેના પરિભ્રમણનું સમતલ દોરી Aની આસપાસ ફરે છે. આપણે કહીએ છીએ કે રિંગની પરિભ્રમણ-અક્ષ અથવા સમતુલ્ય રીતે તેનું કોણીય વેગમાન દોરી Aને અનુલક્ષીને ધૂર્ણન (precession) કરે છે.

આ ફરતી રિંગ કોણીય વેગમાન ઉત્પન્ન કરે છે. આ કોણીય વેગમાનની દિશા નિર્ધારિત કરો. જ્યારે તમે ફરતી રિંગને દોરી A વડે પકડી રાખો છો ત્યારે ટૉર્ક પેદા થાય છે. (અમે ટૉર્ક કેવી રીતે પેદા થાય છે અને તેની દિશા શું છે તે શોધવાનું તમારે માટે છોડી દઈએ છીએ.) આ કોણીય વેગમાન પર ટૉર્કની અસર તે કોણીય વેગમાન અને ટૉર્ક એમ બંનેને લંબ અક્ષની આસપાસ તેનું ધૂર્ણન કરવાની છે. આ તમામ નિવેદનો ચકાસો.

કોઈ એક તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાનને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ છીએ :

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (7.25b)$$

આ એક એકાકી કણના કોણીય વેગમાનની વ્યાખ્યા (સમીકરણ 7.25a)નું કણોના તંત્ર માટેનું વ્યાપકીકરણ છે.

સમીકરણો (7.23) અને (7.25b)નો ઉપયોગ કરીને આપણે

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \mathbf{l}_i\right) = \sum_i \frac{d\mathbf{l}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \qquad (7.28a)$$

મેળવી શકીએ, જ્યાં τ_i એ iમા કણ પર લાગતું ટૉર્ક છે.

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

iમા કણ પર લાગતું બળ $\mathbf{F}_i$ એ કણ પર લાગતાં બાહ્ય બળો $\mathbf{F}_i^{ext}$ અને તંત્રના બીજા કણો દ્વારા તેના પર લાગતાં આંતરિક બળો $\mathbf{F}_i^{int}$નો સદિશ સરવાળો છે. આથી, આપણે કુલ ટૉર્કમાં બાહ્ય અને આંતરિક બળોના ફાળાને જુદા પાડી શકીએ છીએ.

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext} + \boldsymbol{\tau}_{int}$$

જ્યાં, $\boldsymbol{\tau}_{ext} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}$

અને $\boldsymbol{\tau}_{int} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{int}$

આપણે ન્યૂટનનો માત્ર ત્રીજો નિયમ-કે તંત્રના કોઈ પણ બે કણો વચ્ચે લાગતાં બળો એ સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે-તે જ નહિ પરંતુ આ બળો તે બંને કણોને જોડતી રેખાની દિશામાં હોય છે તેમ પણ ધારેલ છે. આ કિસ્સામાં તંત્ર પરના કુલ ટૉર્કમાં આંતરિક બળોનો ફાળો શૂન્ય હોય છે. કારણ કે, પ્રત્યેક ક્રિયા-પ્રતિક્રિયા યુગ્મ બળોની જોડથી પરિણમતું ટૉર્ક શૂન્ય છે. આમ, આપણને $\boldsymbol{\tau}_{int} = 0$ અને તેથી $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$.

પણ $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$ હોવાથી સમીકરણ (7.28a) પરથી

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext} \tag{7.28b}$$

આમ, **કોઈ એક બિંદુની સાપેક્ષે** (આપણી નિર્દેશ-ફ્રેમમાં તેને ઉદ્ગમબિંદુ તરીકે લીધેલ છે.) **કણોના કોઈ એક તંત્ર પરના કુલ કોણીય વેગમાનના સમય સાથે ફેરફારનો દર એ આ જ બિંદુની સાપેક્ષે તંત્ર પર લાગતાં બાહ્ય ટૉર્ક** (એટલે કે બાહ્ય બળોથી ઉદ્ભવતા ટૉર્ક)**ના સરવાળા બરાબર છે.** સમીકરણ (7.28b) એ સમીકરણ (7.23)ના એકાકી કણના કિસ્સાનું કણોના તંત્ર માટેનું વ્યાપકીકરણ છે. નોંધો કે જ્યારે આપણી પાસે ફક્ત એક જ કણ હોય ત્યારે કોઈ પણ આંતરિક બળો કે ટૉર્ક હોતાં નથી. સમીકરણ (7.28b) એ

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.17}$$

નું ચાકગતિમાંનું સમતુલ્ય છે.

ધ્યાન રહે કે સમીકરણ (7.17)ની જેમ સમીકરણ (7.28b) એ કણોના કોઈ પણ તંત્રને લાગુ પડે છે. પછી ભલે તે દૃઢ પદાર્થ હોય કે વિભિન્ન પ્રકારની આંતરિક ગતિ ધરાવતા સ્વતંત્ર કણોનું તંત્ર.

કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ (Conservation of angular momentum)

જો $\boldsymbol{\tau}_{ext} = 0$ હોય તો સમીકરણ (7.28b) પરથી,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

$$\text{અથવા } \mathbf{L} = \text{અચળ} \tag{7.29a}$$

થશે. આમ, જો કણોના તંત્ર પરનું કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો આ તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થશે, એટલે કે અચળ રહેશે. સમીકરણ (7.29a) એ ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે.

$$L_x = K_1,\ L_y = K_2 \text{ અને } L_z = K_3 \tag{7.29b}$$

અહીં, K_1, K_2 અને K_3 એ અચળાંકો છે. L_x, L_y અને L_z એ કુલ કોણીય વેગમાન $\mathbf{L}$ના અનુક્રમે x, y અને z-અક્ષો પરનાં ઘટકો છે. કુલ કોણીય વેગમાન સંરક્ષિત છે આ વિધાનનો અર્થ એ છે કે આ ત્રણેય ઘટકો પણ સંરક્ષિત છે.

સમીકરણ (7.29a) એ સમીકરણ (7.18a) એટલે કે કણોના કોઈ પણ તંત્ર માટે કુલ રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમનું ચાકગતિમાંનું સમતુલ્ય છે. સમીકરણ (7.18a)ની જેમ તેની પણ વ્યવહારુ પરિસ્થિતિઓમાં ઘણી ઉપયોગિતાઓ છે. આ પ્રકરણમાં હવે પછી આપણે તેની કેટલીક રસપ્રદ ઉપયોગિતાઓ જોઈશું.

▶ *ઉદાહરણ 7.5* ઉદ્ગમબિંદુને અનુલક્ષીને બળ $7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$નો ટૉર્ક શોધો. જે કણ પર બળ લાગે છે તેનો સ્થાનસદિશ $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ છે.

ઉકેલ અહીં, $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

અને $\mathbf{F} = 7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$.

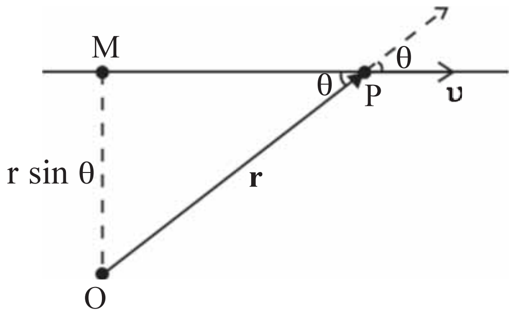
આપણે ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ શોધવા નિશ્ચાયકના નિયમનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (5-3)\hat{\mathbf{i}} - (-5-7)\hat{\mathbf{j}} + (3+7)\hat{\mathbf{k}}$$

અથવા $\boldsymbol{\tau} = 2\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$ ◀

▶ *ઉદાહરણ 7.6* દર્શાવો કે કોઈ એક બિંદુની સાપેક્ષે અચળ વેગથી ગતિ કરતાં કોઈ એક કણનું કોણીય વેગમાન સમગ્ર ગતિ દરમિયાન અચળ રહે છે.

ઉકેલ ધારો કે, $\boldsymbol{\upsilon}$ વેગ ધરાવતો આ કણ કોઈક ક્ષણે P બિંદુ પર છે. આપણે એક યાદચ્છિક બિંદુ Oની સાપેક્ષે કણના કોણીય વેગમાનની ગણતરી કરવા માંગીએ છીએ.



આકૃતિ 7.19

કોણીય વેગમાન $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times m\boldsymbol{\upsilon}$ છે. તેનું માન $m\upsilon r \sin\theta$ છે, જ્યાં θ એ આકૃતિ 7.19માં બતાવ્યા પ્રમાણે $\mathbf{r}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ વચ્ચેનો કોણ છે. જોકે, કણ સમય સાથે સ્થાન બદલે છે, તેમ છતાં $\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા-રેખા સમાન જ રહે છે અને તેથી OM = $r \sin\theta$ એ અચળ છે.

વધુમાં $\boldsymbol{l}$ ની દિશા $\mathbf{r}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ના સમતલને લંબ છે જે આકૃતિના પૃષ્ઠની અંદરની તરફની છે. આ દિશા સમય સાથે બદલાતી નથી. આ રીતે, $\boldsymbol{l}$નું માન અને દિશા પણ બદલાતી નથી અને તેથી તે સંરક્ષિત છે. આ કણ પર કોઈ બાહ્ય ટૉર્ક છે ? ◄

7.8 દૃઢ પદાર્થનું સંતુલન (EQUILIBRIUM OF A RIGID BODY)

હવે આપણે કણોનાં વ્યાપક તંત્રોની ગતિના બદલે દૃઢ પદાર્થોની ગતિ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરવા જઈ રહ્યા છીએ.

બાહ્ય બળો દૃઢ પદાર્થ પર શું અસર કરે છે તે આપણે સ્મરણ કરીએ. (હવેથી આપણે વિશેષણ 'બાહ્ય'નો ઉપયોગ નહિ કરીએ, કારણ કે જ્યાં સુધી અન્યથા જણાવ્યું ના હોય ત્યાં સુધી આપણે ફક્ત બાહ્ય બળો અને ટૉર્ક સાથે વ્યવહાર કરીશું.) આ બળો દૃઢ પદાર્થની ગતિની સ્થાનાંતર અવસ્થાને ફેરફાર કરી શકે છે. એટલે કે તે સમીકરણ (7.17) મુજબ તેનું કુલ રેખીય વેગમાન બદલે છે. પરંતુ બળોની આ એક માત્ર જ અસર નથી. પદાર્થ પરનું કુલ ટૉર્ક જો શૂન્ય ન થાય તો આવા ટૉર્ક દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિની અવસ્થામાં પરિવર્તન લાવે છે. એટલે તે સમીકરણ (7.28b)ના અનુસાર પદાર્થનું કુલ કોણીય વેગમાન બદલે છે.

દૃઢ પદાર્થ જો તેના બંને, રેખીય વેગમાન અને કોણીય વેગમાન સમય સાથે બદલાતા ન હોય એટલે કે, પદાર્થ રેખીય પ્રવેગ કે કોણીય પ્રવેગ ન ધરાવે, તો યાંત્રિક સંતુલનમાં કહેવાય છે. આનો અર્થ એ થાય કે,

(1) દૃઢ પદાર્થ પરનું કુલ બળ એટલે કે બળોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય છે.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \qquad (7.30a)$$

જો પદાર્થ પરનું કુલ બળ શૂન્ય છે, તો પદાર્થનું કુલ રેખીય વેગમાન સમય સાથે બદલાતું નથી. સમીકરણ (7.30a) પદાર્થની સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટેની શરત આપે છે.

(2) કુલ ટૉર્ક એટલે કે દૃઢ પદાર્થ પરના બધા ટૉર્કનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય છે.

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + ... + \boldsymbol{\tau}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0} \qquad (7.30b)$$

જો દૃઢ પદાર્થ પર કુલ ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો પદાર્થનું કુલ કોણીય વેગમાન સમય સાથે બદલાતું નથી. સમીકરણ (7.30 b) પદાર્થની ચાકગતિના સંતુલન માટેની શરત આપે છે.

કોઈ એ પ્રશ્ન પણ ઉપસ્થિત કરી શકે છે કે જે ઉદ્ગમબિંદુની સાપેક્ષે ટૉર્ક લેવામાં આવેલ છે તે બિંદુ સ્થાનાંતરિત થાય તો શું ચાકગતિના સંતુલનની શરત [સમીકરણ 7.30(b)] માન્ય રહે ? કોઈ એમ પણ બતાવી શકે છે કે જો સ્થાનાંતરણ સંતુલનની શરત [સમીકરણ 7.30(a)] દૃઢ પદાર્થ માટે લાગુ પડતી હોય તો ઉદ્ગમબિંદુના આવા કોઈ પણ સ્થાનાંતરણની અસર થશે નહિ. એટલે કે ચાકગતિના સંતુલનની શરત જેને અનુલક્ષીને ટૉર્ક લેવામાં આવેલ હોય તે ઉદ્ગમબિંદુના સ્થાન પર આધાર રાખતી નથી (સ્વતંત્ર છે). ઉદાહરણ 7.7 એ બળ-યુગ્મના એટલે કે સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બે બળોના વિશિષ્ટ કિસ્સામાં આ પરિણામની સાબિતી આપે છે. આ પરિણામનું n બળો માટેનું વ્યાપક સ્વરૂપ તમારા માટે એક સ્વાધ્યાય તરીકે છોડી દેવામાં આવેલ છે.

સમીકરણ (7.30a) અને સમીકરણ (7.30b) બંને સદિશ સમીકરણો છે. તેઓ દરેક ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે. સમીકરણ (7.30a) એ

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \text{ અને } \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (7.31a)$$

ને અનુરૂપ છે, જ્યાં F_{ix}, F_{iy} અને F_{iz} એ બળ $\mathbf{F}_i$ના અનુક્રમે x, y અને z ઘટકો છે. એ જ રીતે, સમીકરણ (7.30b) એ નીચેનાં ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે :

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} \tau_{iy} = 0 \text{ અને } \sum_{i=1}^{n} \tau_{iz} = 0 \qquad (7.31b)$$

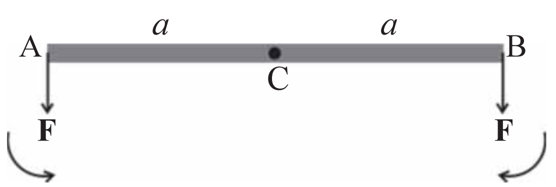
જ્યાં, τ_{ix}, τ_{iy} અને τ_{iz} એ τ_iના અનુક્રમે x, y અને z ઘટકો છે.

સમીકરણ (7.31a) અને (7.31b) એ કોઈ એક દૃઢ પદાર્થના યાંત્રિક સંતુલન માટેની જરૂરી એવી છ સ્વતંત્ર (એકબીજા પર નિર્ભર ન હોય તેવી) શરતો આપે છે. ઘણી સમસ્યાઓમાં, પદાર્થ પર લાગતાં તમામ બળો એક જ સમતલમાં હોય છે. ત્યારે યાંત્રિક સંતુલન માટે માત્ર ત્રણ જ શરતો સંતુષ્ટ થવાની જરૂર પડે છે. આમાંની બે શરતો સ્થાનાંતરણ સંતુલનને અનુરૂપ છે; સમતલમાં કોઈ પણ બે લંબ અક્ષોને અનુલક્ષીને બળોનાં ઘટકોનો સરવાળો શૂન્ય જ હોવો જોઈએ. ત્રીજી શરત ચાકગતિય સંતુલનને અનુલક્ષીને છે. બળોના સમતલને લંબ કોઈ પણ અક્ષની સાપેક્ષે ટૉર્કનાં ઘટકોનો સરવાળો શૂન્ય જ હોવો જોઈએ.

દૃઢ પદાર્થના સંતુલનની શરતોની સરખામણી એક કણ માટેની શરતો સાથે થઈ શકે છે, જેને આપણે પહેલાનાં પ્રકરણોમાં લીધી હતી. ચાકગતિની કોઈ વિચારણા એક કણને લાગુ પડતી નથી, તેથી માત્ર સ્થાનાંતરણ સંતુલન (સમીકરણ 7.30a) માટેની જ શરતો કણને લાગુ પડે છે. આમ, એક કણના સંતુલન માટે તેના પરનાં તમામ બળોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય હોવો જોઈએ. આ તમામ બળો એ એક જ કણ પર કાર્યરત હોવાથી તેઓ એક બિંદુગામી હોવાં જોઈએ. અગાઉનાં પ્રકરણોમાં એક બિંદુગામી બળોની અસરમાં સંતુલનની ચર્ચા કરવામાં આવી છે.

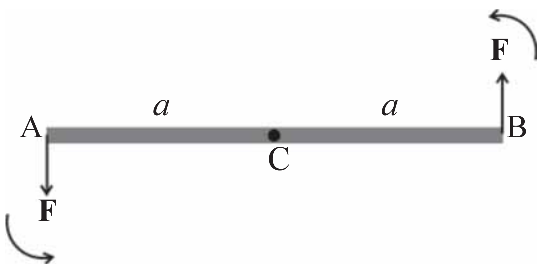
કોઈ પદાર્થ આંશિક સંતુલનમાં હોઈ શકે છે, એટલે કે, તે સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં હોય અને ચાકગતિય સંતુલનમાં ન હોય, અથવા તે ચાકગતિય સંતુલનમાં હોય અને સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં ન હોય.

એક હલકા (એટલે કે અવગણ્ય દળના) સળિયા (AB)ને ધ્યાનમાં લો. જેના બે છેડા (A અને B) પર સમાન માનના બે સમાંતર બળ આકૃતિ 7.20(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સળિયાને લંબરૂપે લગાડવામાં આવે છે.



આકૃતિ 7.20(*a*)

AB નું મધ્યબિંદુ C લો. CA = CB = a. A અને B પર બંને બળોની ચાકમાત્રાનું માન (aF) સમાન પરંતુ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વિરુદ્ધ દિશામાં છે. આ સળિયા પરની બળની કુલ ચાકમાત્રા શૂન્ય હશે. આ તંત્ર ચાકગતિય સંતુલનમાં છે. પરંતુ તે સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં નથી. $\sum \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$.



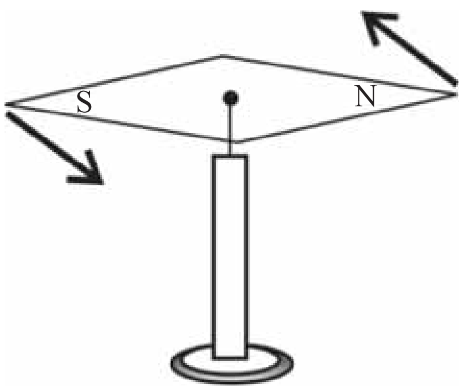
આકૃતિ 7.20(*b*)

આકૃતિ 7.20(a)માં B છેડા પરના બળને આકૃતિ 7.20(b)માં ઉલટાવેલ છે. આમ, આપણી પાસે સળિયાને લંબરૂપે એક છેડા A પર અને બીજા છેડા B પર લાગતાં બે સમાન અને વિરુદ્ધ બળો સાથેનો તે જ સળિયો છે. બંને બળોની ચાકમાત્રા સમાન છે. પરંતુ તેઓ વિરુદ્ધ દિશામાં નથી. તેઓ સમાન દિશામાં કાર્ય કરે છે અને સળિયામાં વિષમઘડીના દિશામાં ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરે છે. પદાર્થ પર કુલ બળ શૂન્ય છે. તેથી પદાર્થ સ્થાનાંતરીય સંતુલનમાં છે. પરંતુ તે ચાકગતિય સંતુલનમાં નથી. જોકે, સળિયો કોઈ પણ રીતે સ્થિર નથી. તે શુદ્ધ ચાકગતિ (એટલે કે સ્થાનાંતરીય વગરની ચાકગતિ) કરે છે.

જુદી જુદી કાર્યરેખા ધરાવતા બે સમાન મૂલ્યના અને વિરુદ્ધ દિશામાંનાં બળોની જોડને **બળયુગ્મ (Couple)** અથવા **ટૉર્ક** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. બળયુગ્મ સ્થાનાંતરીય ગતિ વિના ચાકગતિ પેદા કરે છે.

જ્યારે આપણે બોટલના ઢાંકણને ઘુમાવીને ખોલીએ છીએ, ત્યારે આપણી આંગળીઓ ઢાંકણાં પર એક બળયુગ્મ લગાડે છે. (આકૃતિ 7.21(a)). આકૃતિ 7.21(b)માં બતાવ્યા પ્રમાણે પૃથ્વીના ચુંબકીયક્ષેત્રમાં હોકાયંત્રની સોય એ એક અન્ય જાણીતું ઉદાહરણ છે. પૃથ્વીનું ચુંબકીયક્ષેત્ર ઉત્તર અને દક્ષિણ ધ્રુવો પર સમાન બળો લગાડે છે. ઉત્તર ધ્રુવ પર લાગતું બળ ઉત્તર તરફ અને દક્ષિણ ધ્રુવ પર લાગતું બળ દક્ષિણ તરફ છે. સોય જ્યારે ઉત્તર-દક્ષિણ દિશાનો નિર્દેશ કરે તે સિવાય, બે બળોની ક્રિયા-રેખા એક જ નથી હોતી. આમ, પૃથ્વીના ચુંબકીયક્ષેત્રને કારણે સોય પર એક **બળયુગ્મ** લાગે છે.

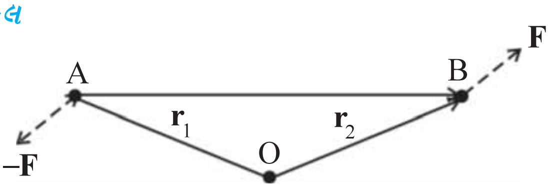
આકૃતિ 7.21(a) ઢાંકણ ખોલવા આપણી આંગળીઓ એક બળયુગ્મ લગાડે છે.



આકૃતિ 7.21(b) પૃથ્વીનું ચુંબકીયક્ષેત્ર હોકાયંત્રની સોય પર સમાન મૂલ્યનાં બે બળો વિરુદ્ધ દિશામાં લગાડે છે. આ બે બળો બળયુગ્મ બનાવે છે.

ઉદાહરણ 7.7 દર્શાવો કે કોઈ બળયુગ્મની ચાકમાત્રા એ બિંદુ પર આધારિત નથી કે જે બિંદુને અનુલક્ષીને તમે ચાકમાત્રાઓ લીધી હોય.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.22

આકૃતિ 7.22માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું એક બળયુગ્મ ધ્યાનમાં લો. બિંદુ B અને A પર અનુક્રમે બળો **F** અને **–F** લાગે છે. ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે આ બિંદુઓના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\mathbf{r}_1$ અને $\mathbf{r}_2$ છે. આવો, ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે બળોની ચાકમાત્રાઓ લઈએ.

બળયુગ્મની ચાકમાત્રા = આ યુગ્મ બનાવતાં બે બળોની ચાકમાત્રાનો સરવાળો

$= \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$

$= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$

$= (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}$

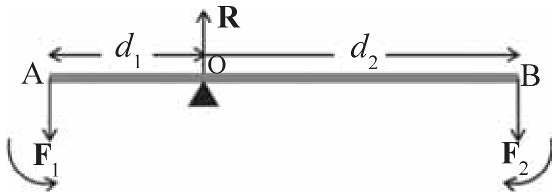
પણ, $\mathbf{r}_1 + \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2$, અને તેથી $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

આથી, બળયુગ્મની ચાકમાત્રા $\mathbf{AB} \times \mathbf{F}$ છે.

સ્પષ્ટપણે આ ઉદ્‌ગમબિંદુથી એટલે કે તે બિંદુ કે જેને અનુલક્ષીને આપણે બળોની ચાકમાત્રા લીધી હતી તેનાથી સ્વતંત્ર છે. ◀

7.8.1 ચાકમાત્રાનો સિદ્ધાંત (Principle of moments)

એક આદર્શ ઉચ્ચાલન (લિવર) મૂળભૂત રીતે, એક હલકો (એટલે કે અવગણ્ય દ્રવ્યમાનનો) સળિયો છે કે જે તેની લંબાઈ પરના કોઈ એક બિંદુ પર કિલકિત કરેલ (pivoted) છે. આ બિંદુને આધારબિંદુ (fulcrum) કહેવામાં આવે છે. બાળકોના રમતનાં મેદાનમાં જોવા મળતો ચીચવો (see-saw) એ એક ઉચ્ચાલનનું વિશિષ્ટ ઉદાહરણ છે. બે બળો F_1 અને F_2 એકબીજાને સમાંતર અને સામાન્ય રીતે લિવરને લંબ આકૃતિ 7.23માં બતાવ્યા પ્રમાણે આધારબિંદુથી અનુક્રમે d_1 અને d_2 અંતરે લાગે છે.



આકૃતિ 7.23

ઉચ્ચાલન (લિવર) એ યાંત્રિક સંતુલનમાંનું એક તંત્ર છે. ધારો કે **R** એ આધારબિંદુ પર આધાર દ્વારા પ્રતિક્રિયાબળ છે. **R** એ બળો F_1 અને F_2ની વિરુદ્ધ દિશામાં છે. સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટે,

$$R - F_1 - F_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

ચાકગતિય સંતુલન માટે જો આપણે આધારબિંદુને અનુલક્ષીને ચાકમાત્રા લઈએ, તો ચાકમાત્રાનો સરવાળો શૂન્ય હોવો જોઈએ.

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

સામાન્ય રીતે વિષમઘડી દિશા (સમઘડી દિશા)માં ચાકમાત્રા ધન (ઋણ) લેવામાં આવે છે. નોંધો કે R એ આધારબિંદુ પર જ લાગે છે અને આધારબિંદુને અનુલક્ષીને તે શૂન્ય ચાકમાત્રા ધરાવે છે.

લિવરના કિસ્સામાં F_1 એ સામાન્યતઃ થોડુંક વજન હોય છે. જેને ઉંચકવાનું હોય છે તેને ભાર (load) કહેવામાં આવે છે અને આધારબિંદુથી તેના અંતર d_1ને ભારભુજા (load arm) કહેવાય છે. બળ F_2 એ ભારને ઉપાડવા માટે લાગુ પાડવામાં આવતો પ્રયાસ (effort) છે. આધારબિંદુથી તેના અંતર d_2ને પ્રયાસભુજા (effort arm) કહેવાય છે.

સમીકરણ (ii)ને

$$d_1F_1 = d_2F_2 \qquad (7.32a)$$

અથવા ભારભુજા × ભાર = પ્રયાસભુજા × પ્રયાસ તરીકે લખી શકાય છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ ઉચ્ચાલન માટે ચાકમાત્રાના સિદ્ધાંતને વ્યક્ત કરે છે. ગુણોત્તર F_1/F_2ને યાંત્રિક-લાભ (Mechanical Advantage - M.A.) કહેવાય છે.

$$\text{M.A.} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad (7.32b)$$

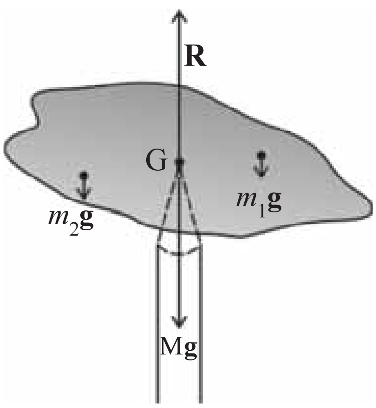
જો પ્રયાસભુજા d_2 એ ભારભુજા કરતાં મોટી હોય, તો યાંત્રિક-લાભ એક કરતાં મોટો હોય છે. એક કરતા મોટો યાંત્રિક-લાભનો અર્થ એ થાય છે કે, ઓછા પ્રયાસથી વધુ ભાર

ઉંચકી શકાય છે. ચીચવા સિવાય પણ તમારી આસપાસ ઉચ્ચાલનના (લિવરનાં) કેટલાંય ઉદાહરણો મળી આવશે. તુલાનો દંડ એ પણ એક ઉચ્ચાલન છે. આ પ્રકારનાં વધુ ઉદાહરણો શોધવાનો પ્રયાસ કરો અને દરેક કિસ્સામાં ઉચ્ચાલન માટે આધારબિંદુ, પ્રયાસ અને પ્રયાસભુજા તથા ભાર અને ભારભુજાને ઓળખો.

તમે એ સહેલાઈથી બતાવી શકો છો કે જો આ સમાંતર બળો F_1 અને F_2 એ ઉચ્ચાલનને લંબ ન હોય, પરંતુ કોઈ અન્ય કોણે લાગુ પડે ત્યારે પણ ચાકમાત્રાનો સિદ્ધાંત લાગુ પાડી શકાય છે.

7.8.2 ગુરુત્વ કેન્દ્ર (Centre of gravity)

તમારામાંથી ઘણા બધાને આંગળીની ટોચ પર તમારી નોટબુકને સંતુલિત કરવાનો અનુભવ હશે. આકૃતિ 7.24 એ આવા જ એક પ્રયોગને દર્શાવે છે જે તમે સરળતાથી કરી શકો છો. એક અનિયમિત આકારનું પૂંઠું (કાર્ડબૉર્ડ) લો અને પેન્સિલ જેવી પાતળી અણીવાળી એક વસ્તુ લો. તમે કેટલાક પ્રયત્નો દ્વારા કાર્ડબૉર્ડ પર એક બિંદુ Gને શોધી શકો છો કે જ્યાં તે પેન્સિલની અણી પર સંતુલિત થઈ શકે છે. (કાર્ડબૉર્ડ આ સ્થિતિમાં સમક્ષિતિજ રહે છે.) આ સંતુલનનું બિંદુ એ કાર્ડબૉર્ડનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર (CG) છે. પેન્સિલની અણી ઊર્ધ્વદિશામાં ઉપર તરફનું બળ આપે છે જેના કારણે કાર્ડબૉર્ડ યાંત્રિક સંતુલનમાં રહે છે. આકૃતિ 7.24માં બતાવ્યા પ્રમાણે, અણીનું પ્રતિક્રિયા બળ કાર્ડબૉર્ડનું કુલ વજન (એટલે કે, તેના પરનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ) $M\mathbf{g}$ને સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં છે. અને તેથી કાર્ડબૉર્ડ સ્થાનાંતરીય સંતુલનમાં છે. તે ચાકગતિય સંતુલનમાં પણ છે. જો તે આમ ન હોય તો અસંતુલિત ટૉર્કને કારણે તે એક તરફ નમી અને પડી જશે. એકાકી કણો પર ગુરુત્વાકર્ષણને લીધે લાગતાં બળો જેવાં કે, $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$, ... વગેરેના કારણે કાર્ડબૉર્ડ પર ટૉર્ક લાગે છે જેના થકી તે સંતુલનમાં રહે છે.



આકૃતિ 7.24 પૂંઠાને પેન્સિલની અણી પર સંતુલિત કરવું. આધારબિંદુ G એ ગુરુત્વ કેન્દ્ર છે.

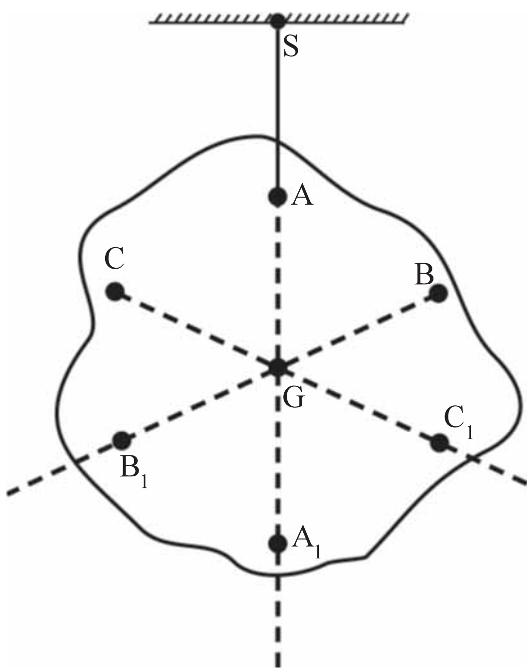
કાર્ડબૉર્ડનું CG એવી રીતે નિર્ધારિત કરવામાં આવે છે કે બળો $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$ .... વગેરેના કારણે તેના પરનું કુલ ટૉર્ક શૂન્ય થાય.

જો $\mathbf{r}_i$ એ વિસ્તરીત પદાર્થના iમા કણનો તેના CGની સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ હોય, તો પછી CGની સાપેક્ષે કણો પર ગુરુત્વાકર્ષણ બળને કારણે, ટૉર્ક $\tau_i = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g}$ લાગે છે. CGને અનુલક્ષીને કુલ ગુરુત્વાકર્ષણ ટૉર્ક શૂન્ય છે. એટલે કે,

$$\tau_g = \sum\tau_i = \sum\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g} = \mathbf{0} \qquad (7.33)$$

તેથી આપણે પદાર્થના CGને એ બિંદુ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ કે જ્યાં પદાર્થ પરનું કુલ ગુરુત્વાકર્ષણ ટૉર્ક શૂન્ય છે.

આપણે નોંધ્યું છે કે સમીકરણ (7.33)માં $\mathbf{g}$ બધા જ કણો માટે સમાન છે અને તેથી તે સરવાળામાં બહાર આવે છે. કેમ કે $\mathbf{g}$ એ શૂન્ય નથી. આથી $\sum m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$. યાદ રાખો કે સ્થાનસદિશ ($\mathbf{r}_i$) એ CGના સંદર્ભમાં લેવામાં આવેલ છે. હવે પરિચ્છેદ 7.2માં સમીકરણ (7.4a)ની નીચે આપવામાં આવેલ તર્ક અનુસાર, જો સરવાળો શૂન્ય હોય, તો ઉદ્‌ગમબિંદુ એ પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર હોવું જોઈએ. આમ, નિયમિત ગુરુત્વમાં કે ગુરુત્વમુક્ત અવકાશમાં, પદાર્થનું ગુરુત્વકેન્દ્ર એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સાથે સંપાત થાય છે. આપણે એ નોંધીએ કે પદાર્થ નાનો છે કે જેથી પદાર્થના એક બિંદુ કે બીજા બિંદુ પર $\mathbf{g}$ બદલાતો નથી, આથી આ સાચું છે.



આકૃતિ 7.25 અનિયમિત આકારના પદાર્થનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર G નક્કી કરવું. પદાર્થના આધારબિંદુ Aમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વ રેખા AA_1 પર આ ગુરુત્વ કેન્દ્ર આવેલું છે.

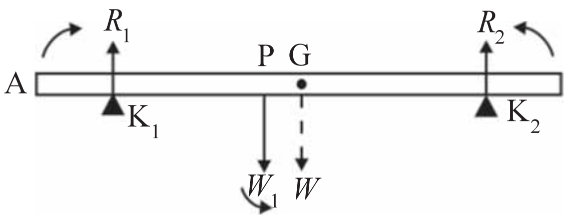
જો પદાર્થ એટલો વિસ્તરીત હોય કે જેથી પદાર્થના એક ભાગથી બીજા ભાગ પર **g** બદલાતો હોય, તો પછી ગુરુત્વ કેન્દ્ર અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સંપાતી (એક) નથી. મૂળભૂત રીતે આ બંને અલગ અલગ ખ્યાલો છે. દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને ગુરુત્વાકર્ષણ સાથે કોઈ સંબંધ નથી. તે ફક્ત પદાર્થના દળ-વિતરણ પર જ આધાર રાખે છે.

પરિચ્છેદ 7.2માં આપણે કેટલાક નિયમિત, સમાંગી પદાર્થોના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના સ્થાન શોધ્યા છે. સ્પષ્ટતઃ જો પદાર્થ પૂરતો નાનો હોય, તો આ માટે ત્યાં ઉપયોગમાં લીધેલ રીતો પણ આવા પદાર્થોના ગુરુત્વ કેન્દ્ર આપે છે.

આકૃતિ 7.25, કાર્ડબૉર્ડ જેવા અનિયમિત આકારના પદાર્થનું CG શોધવા માટેની એક બીજી રીત દર્શાવે છે. જો તમે A જેવા કોઈ બિંદુએથી પદાર્થને લટકાવો તો Aમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વરેખા CG માંથી પસાર થાય છે. આપણે આ રેખા AA_1 નોંધીએ. પછી બીજા B અને C જેવા બિંદુએથી પદાર્થને લટકાવીએ. આ બધી ઊર્ધ્વરેખાઓનું છેદનબિંદુ CG આપે છે. આ રીત કેમ ચાલી શકે તે સમજાવો. પદાર્થ પૂરતો નાનો હોવાથી, આ રીતે આપણે દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પણ શોધી શકીએ.

ઉદાહરણ 7.8 70 cm લાંબા અને 4.00 kg દળના એક ધાતુના સળિયાને બંને છેડેથી 10 cm દૂર મૂકેલ બે છરીધાર (Knife-edges) પર ગોઠવેલ છે. એક છેડાથી 30 cm દૂર એક 6.00 kg બોજને લટકાવવામાં આવેલ છે. છરીધાર પર પ્રતિક્રિયા બળો શોધો. (આ સળિયો નિયમિત આડછેદનો અને સમાંગ છે તેમ ધારો.)

ઉકેલ



આકૃતિ 7.26

આકૃતિ 7.26માં એક સળિયો AB, છરી-ધારની સ્થિતિ K_1 અને K_2, આ સળિયાનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર G અને P પર લટકાવેલ બોજ દર્શાવે છે.

નોંધો કે સળિયાનું વજન W તેના ગુરુત્વ કેન્દ્ર પર લાગે છે. સળિયો એ સમાંગ અને એક સમાન આડછેદનો છે. તેથી G એ સળિયાની મધ્યમાં છે. AB = 70 cm, AG = 35 cm, AP = 30 cm, PG = 5 cm, $AK_1 = BK_2 = 10$ cm અને $K_1G = K_2G = 25$ cm. ઉપરાંત W = સળિયાનું વજન = 4.00 kg અને W_1 = લટકાવેલ વજન (બોજ) = 6.00 kg, R_1 અને R_2 એ છરી ધાર આગળ ટેકા દ્વારા લાગતાં લંબ પ્રતિક્રિયાબળો છે.

આ સળિયાના સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટે,

$R_1 + R_2 - W_1 - W = 0$ (i)

નોંધો કે, W_1 અને W એ શિરોલંબ દિશામાં નીચે તરફ લાગે છે અને R_1 અને R_2 એ શિરોલંબ દિશામાં ઉપર તરફ લાગે છે.

ચાકગતિય સંતુલનને ધ્યાનમાં લેવા માટે આપણે બળોની ચાકમાત્રા લઈએ છીએ. ચાકમાત્રા શોધવાનું સૌથી સુલભ બિંદુ એ G છે. R_2 અને W_1ની ચાકમાત્રા વિષમઘડી દિશામાં (+ve) છે, જ્યારે R_1ની ચાકમાત્રા સમઘડી દિશામાં (–ve) છે.

ચાકગતિય સંતુલન માટે,

$-R_1(K_1G) + W_1(PG) + R_2(K_2G) = 0$ (ii)

W = 4.00g N અને W_1 = 6.00g N આપવામાં આવ્યું છે. જ્યાં g = ગુરુત્વ પ્રવેગ છે. આપણે $g = 9.8\ m/s^2$ લઈએ છીએ.

સમીકરણ (i)માં સંખ્યાત્મક મૂલ્યો મૂકતાં,

$R_1 + R_2 - 4.00g - 6.00g = 0$

અથવા $R_1 + R_2 = 10.00$ g N (iii)

$= 98.00$ N

(ii) પરથી, $-0.25\ R_1 + 0.05\ W_1 + 0.25\ R_2 = 0$

અથવા $R_1 - R_2 = 1.2$ g N = 11.76 N (iv)

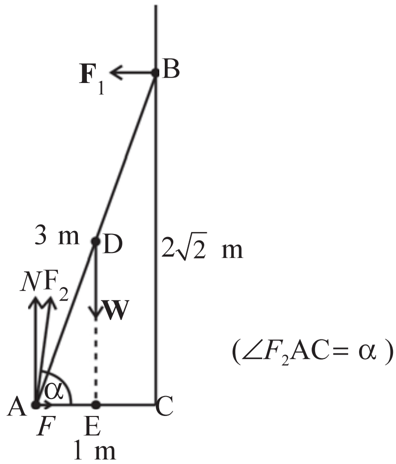
(iii) અને (iv) પરથી $R_1 = 54.88$ N,

$R_2 = 43.12$ N

આમ, આધારો પરનાં પ્રતિક્રિયા બળો K_1 પર આશરે 55 N અને K_2 પર આશરે 43 N છે.

ઉદાહરણ 7.9 એક 3 m લાંબી નિસરણી, જે 20 kg વજન ધરાવે છે તે ઘર્ષણરહિત દીવાલ પર ઝુકાવેલ છે. આકૃતિ 7.27માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 1 m દૂર છે. દીવાલ અને ભોંયતળિયાનાં પ્રતિક્રિયા બળો શોધો.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.27

આ નિસરણી AB એ 3 m લાંબી છે, તેનો નીચેનો છેડો એ દીવાલથી AC = 1 mના અંતરે છે. પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી, BC = $2\sqrt{2}$ m. આ નિસરણી પરનાં બળોએ તેના ગુરુત્વકેન્દ્ર D પર લાગતું તેનું વજન W, દીવાલ અને ભોંયતળિયાના પ્રતિક્રિયા બળો અનુક્રમે F_1 અને F_2 છે. બળ F_1 એ દીવાલને લંબ છે, કારણ કે દીવાલ એ ઘર્ષણરહિત છે. બળ F_2 બે ઘટકોમાં વિભાજિત થાય છે, લંબ પ્રતિક્રિયા બળ N અને ઘર્ષણ બળ F. નોંધ કરો કે F એ સીડીને દીવાલથી દૂર સરકતાં અટકાવે છે અને તેથી દીવાલ તરફની દિશામાં છે.

સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટે, ઊર્ધ્વદિશામાંનાં બળો લેતાં

$$N - W = 0 \tag{i}$$

સમક્ષિતિજ દિશામાંનાં બળો લેતાં

$$F - F_1 = 0 \tag{ii}$$

ચાકગતિય સંતુલન માટે A ને અનુલક્ષીને બળોની ચાકમાત્રા લેતાં

$$2\sqrt{2}\ F_1 - (1/2)\ W = 0 \tag{iii}$$

હવે, W = 20 × g = 20 × 9.8 N = 196.0 N

(i) પરથી N = 196.0

(ii) પરથી $F = F_1$ = 34.6 N

(iii) પરથી $F_1 = W/4\sqrt{2} = 196.0/4\sqrt{2} = 34.6$ N

$$F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0 \text{ N}$$

બળ F_2 એ સમક્ષિતિજ સાથે બનાવેલ ખૂણો α, હોય તો

$\tan\alpha = N/F = 4\sqrt{2}$, $\alpha = \tan^{-1}(4\sqrt{2}) \approx 80°$ ◀

7.9 જડત્વની ચાકમાત્રા (MOMENT OF INERTIA)

આપણે અગાઉ પણ ઉલ્લેખ કર્યો છે કે, આપણે ચાકગતિના અભ્યાસનો વિકાસ સ્થાનાંતરણ ગતિ કે જેની સાથે આપણે પરિચિત છીએ તેને સમાંતર જ કરી રહ્યા છીએ. આપણે આ સંબંધમાં હજુ સુધી એક મુખ્ય પ્રશ્નનો જવાબ આપ્યો નથી. **ચાકગતિમાં દ્રવ્યમાનને સમતુલ્ય શું છે ?** આપણે આ વિભાગમાં આ પ્રશ્નનો જવાબ આપવાનો પ્રયાસ કરીશું. ચર્ચા સરળ રાખવા માટે, આપણે માત્ર એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ (પરિભ્રમણ) પર વિચારણા કરીશું. ચાલો **ચાકગતિ કરતા પદાર્થની ગતિઊર્જા (Kinetic Energy)** માટેનું સમીકરણ મેળવવાનો પ્રયાસ કરીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે પદાર્થ સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે, ત્યારે પદાર્થના દરેક કણ એક વર્તુળમાં સમીકરણ (7.19) દ્વારા દર્શાવ્યા મુજબ રેખીય વેગ સાથે ગતિ કરે છે. (આકૃતિ 7.16નો સંદર્ભ લો.) અક્ષથી કોઈક અંતર પરના કણ માટે, રેખીય વેગ $\upsilon_i = r_i\omega$ છે. આ કણની ગતિઊર્જા

$$k_i = \frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2 \text{ છે.}$$

જ્યાં m_i એ કણનું દળ છે. આ પદાર્થની કુલ ગતિઊર્જા K એ દરેક કણોની ગતિઊર્જાઓનો સરવાળો છે.

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_ir_i^2\omega^2)$$

અહીં n એ પદાર્થમાં રહેલ કુલ કણોની સંખ્યા છે. એ ધ્યાનમાં રહે કે ω એ બધા જ કણો માટે સમાન છે. આથી ω ને સરવાળાની બહાર લેતાં,

$$K = \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2\right)$$

આપણે દઢ પદાર્થની લાક્ષણિકતાને રજૂ કરતા એક નવા પ્રાચલ જેને જડત્વની ચાકમાત્રા I કહેવામાં આવે છે તેને

$$I = \sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2 \tag{7.34}$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

આ વ્યાખ્યા થકી,

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{7.35}$$

નોંધ કરો કે પ્રાચલ I એ કોણીય વેગના માનથી સ્વતંત્ર (આધારિત નથી) છે. તે દઢ પદાર્થની અને જે અક્ષને અનુલક્ષીને તે ચાકગતિ કરે છે તેની એક લાક્ષણિકતા છે.

ચાકગતિ કરતા પદાર્થની ગતિઊર્જા માટેના સમીકરણ (7.35)ની રેખીય ગતિમાંના પદાર્થની ગતિઊર્જા $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ સાથે સરખામણી કરો.

અહીં m એ પદાર્થનું દળ છે અને υ એ તેનો વેગ છે. આપણે કોણીય વેગ ω (સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના સંદર્ભમાં) અને રેખીય વેગ υ (રેખીય ગતિના સંદર્ભમાં) વચ્ચેની સામ્યતાને પહેલાથી જ નોંધેલ છે. તે પછી સ્પષ્ટ છે કે પ્રાચલ, જડત્વની ચાકમાત્રા I એ દ્રવ્યમાનનું ચાકગતિમાનું જરૂરી સમતુલ્ય છે. (એક સ્થિત અક્ષને અનુલક્ષીને) ચાકગતિમાં, જડત્વની ચાકમાત્રા એ રેખીય ગતિમાં દ્રવ્યમાન જેવી જ સમાન ભૂમિકા ભજવે છે.

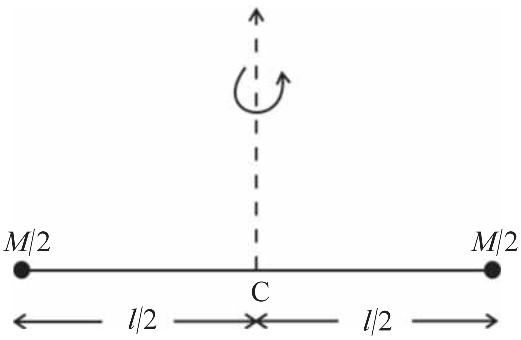
હવે આપણે સમીકરણ (7.34)ની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ બે સરળ કિસ્સાઓમાં જડત્વની ચાકમાત્રાની ગણતરી કરવા માટે કરીશું :

(a) R ત્રિજ્યા અને M દળની એક પાતળી રિંગ (વલય)નો વિચાર કરો કે જે તેના સમતલમાં કેન્દ્રની ફરતે કોણીય વેગ ω સાથે પરિભ્રમણ કરે છે. આ રિંગનો દરેક દળ ખંડ અક્ષથી R અંતરે છે અને $R\omega$ જેટલી ઝડપ

સાથે ગતિ કરે છે. તેથી આ ગતિઊર્જા

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

છે. સમીકરણ (7.35) સાથે સરખાવતાં આ રિંગ માટે આપણને $I = MR^2$ મળશે.



આકૃતિ 7.28 દ્રવ્યમાનની એક જોડ ધરાવતો, l લંબાઈનો એક વજનમાં હલકો સળિયો આ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સળિયાને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને ઘૂમે છે. આ તંત્રનું કુલ દળ M છે.

(b) હવે, નાના દ્રવ્યમાનની એક જોડ ધરાવતો, l લંબાઈનો એક દ્રવ્યમાનરહિત સળિયો લો, જે આ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સળિયાને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે (આકૃતિ 7.28). દરેક દળ $M/2$ એ ધરીથી $l/2$ અંતરે છે. તેથી આ દ્રવ્યમાનોની જડત્વની ચાકમાત્રા

$$(M/2)\ (l/2)^2 + (M/2)\ (l/2)^2$$

દ્વારા મળે છે.

આ રીતે, દળોની જોડી, જે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સળિયાને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે તેના માટે

$I = Ml^2/4$

કોષ્ટક 7.1માં કેટલાક સુપરિચિત નિયમિત આકારોવાળા નક્કર પદાર્થોની વિશિષ્ટ અક્ષોને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા આપેલ છે.

પદાર્થનું દળ એ તેની રેખીય ગતિની સ્થિતિમાં ફેરફારને અવરોધે છે, તેથી તે તેની રેખીય ગતિમાં જડત્વનું માપ છે. તેવી જ રીતે, ચાકગતિ (પરિભ્રમણ)માં આપેલ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા તેની ચાકગતિમાં ફેરફારનો પ્રતિકાર કરે છે, તેથી તેને પદાર્થની ચાકગતિય જડત્વના માપ તરીકે ગણવામાં આવે છે; પદાર્થના જુદા જુદા ભાગો અક્ષથી વિવિધ અંતરો પર કેવી રીતે વહેંચાયેલા છે તેનું એ માપ છે. પદાર્થના દ્રવ્યમાનથી વિપરીત, જડત્વની ચાકમાત્રાએ ચોક્કસ જથ્થો નથી, પરંતુ સમગ્ર પદાર્થના સંદર્ભમાં પરિભ્રમણ અક્ષના નમન અને સ્થાન પર આધારિત છે. કોઈ એક ભ્રમણાક્ષના સંદર્ભમાં ચાકગતિ કરતાં દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેવી રીતે વિતરણ થયેલ છે તેના એક માપ તરીકે, આપણે એક નવો પ્રાચલ **ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા (radius of gyration)** વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ. તે જડત્વની ચાકમાત્રા અને પદાર્થના કુલ દ્રવ્યમાન સાથે સંબંધિત છે.

કોષ્ટક 7.1માંથી નોંધો કે બધા કિસ્સાઓમાં, આપણે $I = Mk^2$ લખી શકીએ છીએ, જ્યાં k એ લંબાઈનું પરિમાણ છે. એક સળિયા માટે, તેના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને, $k^2 = L^2/12$, એટલે કે, $k = L/\sqrt{12}$. એ જ રીતે, વર્તુળાકાર ડિસ્ક માટે તેના વ્યાસને અનુલક્ષીને $k = R/2$. લંબાઈ k એ પદાર્થનો અને ભ્રમણાક્ષનો એક ભૌમિતિક ગુણધર્મ છે. તેને **ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા** કહેવામાં આવે છે. **અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યાને** કોઈ અક્ષથી એક એવા દળબિંદુના અંતર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે, કે જેનું દ્રવ્યમાન એ સમગ્ર પદાર્થના દ્રવ્યમાન જેટલું જ હોય છે અને જેની જડત્વની ચાકમાત્રાએ પદાર્થની અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા જેટલી હોય છે.

આમ, એક દૃઢ પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા પદાર્થના દળ, તેના આકાર અને કદ, ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને દ્રવ્યમાન વિતરણ, અને પરિભ્રમણ અક્ષની સ્થિતિ અને નમન પર આધાર રાખે છે.

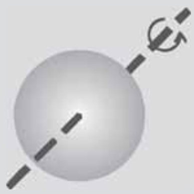
આ વ્યાખ્યા, સમીકરણ (7.34), પરથી આપણે એ અનુમાન કરી શકીએ છીએ કે જડત્વની ચાકમાત્રાનાં પરિમાણ ML^2 અને તેના SI એકમ kg m^2 છે.

કોઈ પદાર્થની ચાકગતિમાં જડત્વના માપ તરીકે અત્યંત મહત્ત્વની રાશિ Iના ઘણા પ્રાયોગિક ઉપયોગ છે. સ્ટીમ ઍન્જિન અને ઑટોમોબાઈલ ઍન્જિન જેવાં મશીનો વગેરે, જે ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરે છે તેમાં ખૂબ જ મોટા જડત્વની ચાકમાત્રાવાળી એક ડિસ્ક હોય છે, જેને **ફ્લાયવીલ (flywheel)** કહેવાય છે. તેની મોટી જડત્વની ચાકમાત્રાને કારણે, ફ્લાયવીલ વાહનની ઝડપના અચાનક વધારા અથવા ઘટાડાને અવરોધે છે. તે ઝડપમાં ધીમે ધીમે પરિવર્તન થવા દે છે અને આંચકાવાળી ગતિ અટકાવે છે, જેનાથી વાહનમાં મુસાફરો માટે સવારી સરળ બને છે.

7.10 લંબ અને સમાંતર અક્ષોના પ્રમેયો (THEOREMS OF PERPENDICULAR AND PARALLEL AXES)

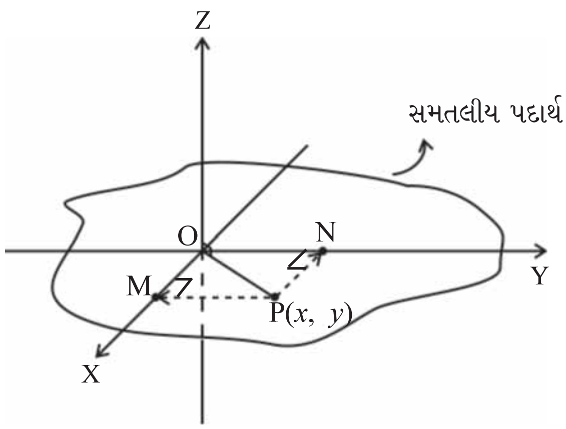
જડત્વની ચાકમાત્રાને લગતાં આ બે ઉપયોગી પ્રમેયો છે. આપણે પ્રથમ લંબ અક્ષોનો પ્રમેય અને નિયમિત આકારના પદાર્થોની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવાના તેના કેટલાક સરળ અને લાભદાયી ઉપયોગોની ચર્ચા કરીશું.

કોષ્ટક 7.1 કેટલાક નિયમિત આકારોવાળા પદાર્થોની વિશિષ્ટ અક્ષોને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા

Z	પદાર્થ (Body)	અક્ષ (Axis)	આકૃતિ (Figure)	I
(1)	પાતળી વર્તુળાકાર રિંગ, ત્રિજ્યા R (Thin circular ring, radius R)	સમતલને લંબ, કેન્દ્ર પર (Perpendicular to plane, at centre)		MR^2
(2)	પાતળી વર્તુળાકાર રિંગ, ત્રિજ્યા R (Thin circular ring, radius R)	વ્યાસ (Diameter)		$MR^2/2$
(3)	પાતળો સળિયો, લંબાઈ L (Thin rod, length L)	સળિયાને લંબ, મધ્ય બિંદુ પર (Perpendicular to rod, at mid point)		$ML^2/12$
(4)	વર્તુળાકાર ડિસ્ક (તકતી), ત્રિજ્યા R (Circular disc, radius R)	ડિસ્કને લંબ, કેન્દ્ર પર (Perpendicular to disc at centre)		$MR^2/2$
(5)	વર્તુળાકાર ડિસ્ક, ત્રિજ્યા R (Circular disc, radius R)	વ્યાસ (Diameter)		$MR^2/4$
(6)	પોલો નળાકાર, ત્રિજ્યા R (Hollow cylinder, radius R)	નળાકારની અક્ષ (Axis of cylinder)		MR^2
(7)	નક્કર નળાકાર, ત્રિજ્યા R (Solid cylinder, radius R)	નળાકારની અક્ષ (Axis of cylinder)		$MR^2/2$
(8)	નક્કર ગોળો, ત્રિજ્યા R (Solid sphere, radius R)	વ્યાસ (Diameter)		$2\ MR^2/5$

લંબ અક્ષોનો પ્રમેય

આ પ્રમેય એવા પદાર્થ પર લાગુ થાય છે કે જે સમતલીય હોય. વ્યવહારમાં તેનો મતલબ એવો થાય છે કે આ પ્રમેય સપાટ પદાર્થો પર લાગુ પડે છે, જેમની જાડાઈ તેમનાં અન્ય પરિમાણો (દા.ત., લંબાઈ, પહોળાઈ અથવા ત્રિજ્યા)ની સરખામણીમાં ખૂબ ઓછી હોય. આકૃતિ 7.29 એ આ પ્રમેયને સમજાવે છે. તેનું વિધાન આ પ્રમાણે છે : **કોઈ એક સમતલીય પદાર્થ (લેમિના)ની તેના સમતલને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાએ તેની સાથે સંગામી અને લેમિનાના સમતલમાં સ્થિત બે લંબ અક્ષોને અનુલક્ષીને તેની જડત્વની ચાકમાત્રાઓના સરવાળા જેટલી જ હોય છે.**



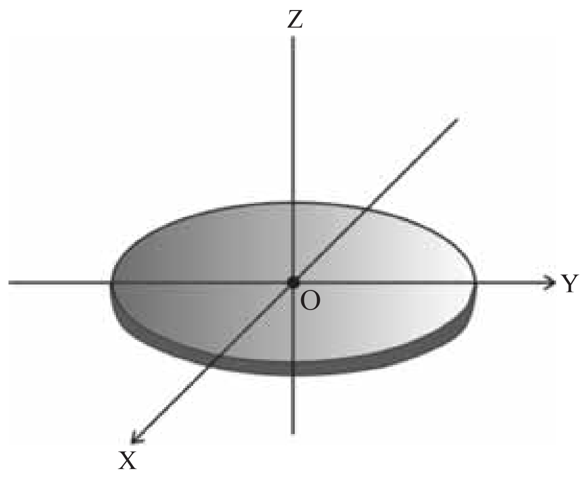
આકૃતિ 7.29 સમતલીય પદાર્થને લાગુ પડતો લંબ અક્ષનો પ્રમેય; X અને Y-અક્ષો એ સમતલમાં બે લંબ અક્ષો છે અને Z-અક્ષ એ સમતલને લંબ છે.

આ આકૃતિ એ એક સમતલીય પદાર્થ દર્શાવે છે. બિંદુ O પર આ પદાર્થને લંબ એક અક્ષને Z-અક્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે. આ પદાર્થના સમતલ અને Z-અક્ષ સાથે સંગામી (સહવર્તી) એટલે કે, Oમાંથી પસાર થતા, બે પરસ્પર લંબ અક્ષોને, X અને Y-અક્ષો તરીકે લેવામાં આવે છે. આ પ્રમેય જણાવે છે કે,

$$I_z = I_x + I_y \qquad (7.35)$$

ચાલો એક ઉદાહરણ દ્વારા આ પ્રમેયની ઉપયોગિતા જોઈએ.

ઉદાહરણ 7.10 એક તક્તીની તેના કોઈ એક વ્યાસને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કેટલી છે ?



આકૃતિ 7.30 વ્યાસને અનુલક્ષીને એક તક્તીની M.I. તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી સમતલને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને M.I. આપેલ છે.

ઉકેલ આપેલ તક્તીની તેના સમતલને લંબ અને તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા જ્ઞાત છે તેમ ધારેલ છે; તે $MR^2/2$ છે, જ્યાં M એ તક્તીનું દળ છે R તેની ત્રિજ્યા છે (કોષ્ટક 7.1)

તક્તીને સમતલીય પદાર્થ ગણવામાં આવે છે. તેથી લંબ અક્ષનો પ્રમેય તેને લાગુ પડે છે. આકૃતિ 7.30માં બતાવ્યા પ્રમાણે, તક્તીના કેન્દ્ર Oથી આપણે ત્રણ સહવર્તી અક્ષોને X, Y, Z તરીકે લઈએ છીએ; X અને Y અક્ષો તક્તીના સમતલમાં આવેલા છે અને z તેને લંબ છે. લંબ અક્ષોના પ્રમેય દ્વારા,

$$I_z = I_x + I_y$$

હવે, x અને y-અક્ષો એ આ તક્તીના બે વ્યાસની દિશામાં છે અને સંમિતિ દ્વારા તક્તીની જડત્વની ચાકમાત્રા કોઈ પણ વ્યાસને સાપેક્ષે સમાન છે. તેથી

$$I_x = I_y$$

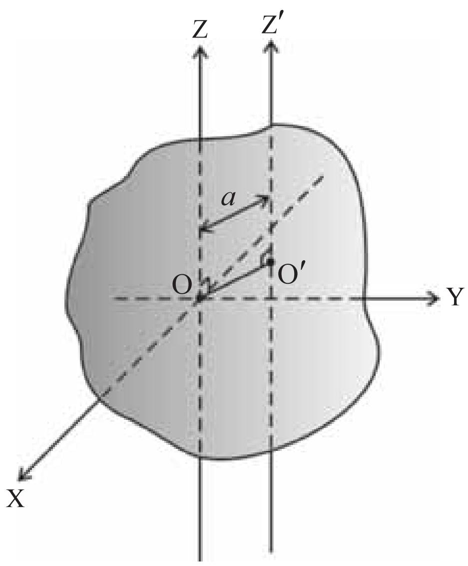
અને $\quad I_z = 2\,I_x$

પરંતુ $\quad I_z = MR^2/2$

તેથી અંતતઃ $\quad I_x = I_z/2 = MR^2/4$

આમ તેના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને તક્તીની જડત્વની ચાકમાત્રા $MR^2/4$ છે. ◀

આ જ રીતે, કોઈ રિંગની તેના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો. શું આ પ્રમેય નક્કર નળાકારને પણ લાગુ પડશે ?



આકૃતિ 7.31 સમાંતર અક્ષોનો પ્રમેય. Z અને Z′ બે સમાંતર અક્ષો છે જેમની વચ્ચેનું અંતર a છે; O એ પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે, OO′ = a.

7.10.1 સમાંતર અક્ષોનો પ્રમેય (Theorem of parallel axes)

આ પ્રમેય કોઈ પણ આકારના પદાર્થને લાગુ પડે છે. જો પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા આપેલ હોય, તો આ અક્ષને સમાંતર કોઈ પણ અક્ષને અનુલક્ષીને આપણે જડત્વની ચાકમાત્રા શોધી શકીએ છીએ. આપણે ફક્ત આ પ્રમેયનું વિધાન જ લઈશું અને તેને સાબિત નહિ કરીએ. તેમ છતાં, આપણે તેને થોડીક સરળ પરિસ્થિતિઓમાં લાગુ કરીશું. જે આપણને આ પ્રમેયની ઉપયોગિતા વિશે સમજાવવા માટે પૂરતી હશે. આ પ્રમેયનું કથન નીચે પ્રમાણે છે :

કોઈ પણ અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા એ પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી સમાંતર અક્ષને અનુલક્ષીને લીધેલ પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા અને તેના દ્રવ્યમાન અને બે સમાંતર અક્ષો વચ્ચેના લંબ અંતરના વર્ગના ગુણાકારના સરવાળા જેટલી છે. આકૃતિ 7.31માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, Z અને Z′ એ બે સમાંતર અક્ષો છે કે જે બે વચ્ચેનું અંતર a છે. Z-અક્ષ એ પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર O માંથી પસાર થાય છે. સમાંતર અક્ષોના પ્રમેય અનુસાર,

$$I_{z'} = I_z + Ma^2 \qquad (7.37)$$

જ્યાં I_z અને $I_{z'}$ એ પદાર્થની અનુક્રમે Z અને Z′ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાઓ છે. M એ પદાર્થનું કુલ દળ અને a એ બે અક્ષો વચ્ચેનું લંબઅંતર છે.

ઉદાહરણ 7.11 M દ્રવ્યમાન અને l લંબાઈના એક સળિયાની તેને લંબ હોય અને તેના કોઈ એક છેડામાંથી પસાર થતી હોય તેવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કેટલી હશે ?

ઉકેલ M દ્રવ્યમાન અને l લંબાઈના એક સળિયા માટે, $I = Ml^2/12$. સમાંતર અક્ષોના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં $I' = I + Ma^2$. હવે $a = l/2$ લેતા આપણને,

$$I' = M\frac{l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$

મળે.

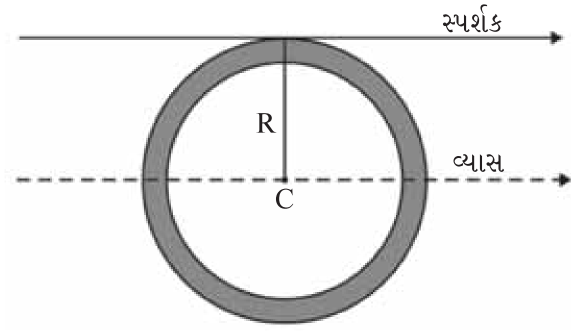
આ આપણે સ્વતંત્ર રીતે પણ ચકાસી શકીએ છીએ, કારણ કે I એ $2M$ દળ અને $2l$ લંબાઈના સળિયાની તેના મધ્યબિંદુને અનુલક્ષીને મળતી જડત્વની ચાકમાત્રા કરતાં અડધા મૂલ્યની છે.

$$I' = 2M.\frac{4l^2}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{Ml^2}{3}$$ ◀

ઉદાહરણ 7.12 કોઈ એક પાતળી રિંગની તેના વલયના સ્પર્શકને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કેટલી હશે ?

ઉકેલ

આ રિંગના સમતલમાં, રિંગનો સ્પર્શક એ રિંગના કોઈ એક વ્યાસને સમાંતર છે. આ બે સમાંતર અક્ષો વચ્ચેનું અંતર R એ રિંગની ત્રિજ્યા બને છે. સમાંતર અક્ષના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને,



આકૃતિ 7.32

$$I_{tangent} = I_{dia} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$ ◀

7.11 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિની શુદ્ધ ગતિકી (KINEMATICS OF ROTATIONAL MOTION ABOUT A FIXED AXIS)

આપણે અગાઉ પણ ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરીય ગતિ વચ્ચે સામ્યતાનો ઉલ્લેખ કર્યો છે. ઉદાહરણ તરીકે, કોણીય વેગ ω એ ચાકગતિમાં એવી જ સમાન ભૂમિકા ભજવે છે જે સ્થાનાંતરણમાં રેખીય વેગ $\mathbf{v}$ ભજવે છે. અમે આ સામ્યતાને વધુ આગળ લઈ જવા માંગીએ છીએ. આમ કરતાં આપણે માત્ર સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને થતી ચાકગતિ માટે ચર્ચાને સીમિત કરીશું. આવી ગતિના આ કિસ્સામાં માત્ર એક મુક્તતાના અંશનો (degree of freedom) સમાવેશ થાય છે, એટલે કે ગતિનું વર્ણન કરવા માટે માત્ર એક જ સ્વતંત્ર ચલની જરૂર પડે છે. સ્થનાંતરીયમાં આ રેખીય ગતિને અનુરૂપ છે. આ પરિચ્છેદ માત્ર શુદ્ધ ગતિકી પૂરતો મર્યાદિત છે. આપણે પછીના પરિચ્છેદમાં ગતિશાસ્ત્ર (ડાયનામિક્સ) તરફ જઈશું.

આપણે યાદ કરીએ કે ચાકગતિ કરતાં પદાર્થના કોણીય સ્થાનાંતરને સ્પષ્ટ કરવા માટે આપણે પદાર્થનો P જેવો કોઈ પણ કણ લઈએ છીએ (આકૃતિ 7.33). તે જે સમતલમાં ગતિ કરે છે તેમાં તેનું કોણીય સ્થાનાંતર θ આ સમગ્ર પદાર્થનું કોણીય સ્થાનાંતર છે; θ એ Pની ગતિના સમતલમાં એક નિશ્ચિત દિશાથી માપવામાં આવે છે, જેને આપણે X′-અક્ષ તરીકે લઈએ છીએ, જે X-અક્ષને સમાંતર પસંદ કરેલ છે. નોંધો કે દર્શાવ્યા પ્રમાણે, પરિભ્રમણ અક્ષ એ z-અક્ષ છે અને કણની ગતિનું સમતલ એ x–y સમતલ છે. આકૃતિ 7.33 એ θ_0 પણ બતાવે છે જે $t = 0$ સમયે કોણીય સ્થાનાંતર છે.

આપણે એ પણ યાદ કરીએ કે કોણીય વેગ એ કોણીય સ્થાનાંતરના ફેરફારનો સમય-દર છે, $\omega = d\theta/dt$. નોંધ કરો કે ભ્રમણાક્ષ સ્થિર છે, તેથી કોણીય વેગને સદિશ

તરીકે લેવાની જરૂર નથી. વધુમાં, કોણીય પ્રવેગ, $\alpha = d\omega/dt$.

શુદ્ધ ચાકગતિમાં વપરાતી રાશિઓ, કોણીય સ્થાનાંતર (θ), કોણીય વેગ (ω) અને કોણીય પ્રવેગ (α) એ રેખીય ગતિમાં વપરાતી રાશિઓ અનુક્રમે સ્થાનાંતર (x), વેગ (υ) અને પ્રવેગ (a)ને અનુરૂપ છે. આપણે નિયમિત (એટલે કે અચળ) પ્રવેગ સાથે શુદ્ધ રેખીય ગતિનાં સમીકરણો જાણીએ છીએ :

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \quad \text{(a)}$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{(b)}$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0) \quad \text{(c)}$$

જ્યાં x_0 = પ્રારંભિક સ્થાનાંતર અને υ_0 = પ્રારંભિક વેગ છે. 'પ્રારંભિક' શબ્દનો અર્થ $t = 0$ સમયે છે.

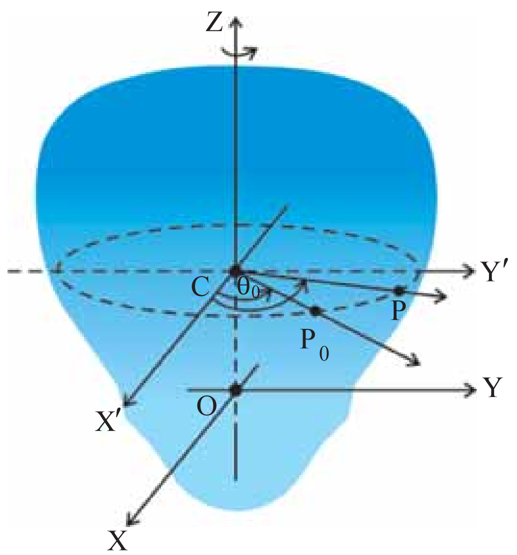
શુદ્ધ રેખીય ગતિના સમીકરણોને અનુરૂપ નિયમિત કોણીય પ્રવેગ સાથેના ચાકગતિના સમીકરણો આ પ્રમાણે છે :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (7.38)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (7.39)$$

$$\text{અને } \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (7.40)$$

જ્યાં θ_0 ચાકગતિ કરતાં પદાર્થનું પ્રારંભિક કોણીય સ્થાનાંતર, અને ω_0 = પદાર્થનો પ્રારંભિક કોણીય વેગ છે.



આકૃતિ 7.33 એક દૃઢ પદાર્થનું કોણીય સ્થાન દર્શાવવું

ઉદાહરણ 7.13 પ્રાથમિક સિદ્ધાંતોના આધારે સમીકરણ (7.38) મેળવો.

ઉકેલ કોણીય પ્રવેગ નિયમિત છે, તેથી

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{અચળ} \qquad \therefore\ d\omega = \alpha\, dt$$

આ સમીકરણનું સંકલન કરતાં,

$\omega = \alpha t + c$ (α અચળ હોવાથી)

$t = 0$ પર $\omega = \omega_0$ (આપેલ છે.)

પરથી $t = 0$ પર $\omega = c = \omega_0$ મળે છે.

આમ, $\omega = \alpha t + \omega_0$ જે માંગેલ સમીકરણ છે. $\omega = d\theta/dt$ વ્યાખ્યા સાથે આપણે સમીકરણ (7.38)નું સંકલન કરીને સમીકરણ (7.39) મેળવી શકીએ. આ તારવણી અને સમીકરણ (7.40)ની તારવણી સ્વાધ્યાય તરીકે છોડેલ છે.

ઉદાહરણ 7.14 એક મોટરના પૈડાંની કોણીય ઝડપ 16 સેકન્ડમાં 1200 rpm થી 3120 rpm સુધી વધે છે. (i) કોણીય પ્રવેગ નિયમિત છે તેમ ધારતાં તેનો કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ? (ii) આ સમય દરમિયાન ઍન્જિન કેટલા પરિભ્રમણ (ચાકગતિ) કરે છે ?

ઉકેલ

(i) આપણે $\omega = \omega_0 + \alpha t$નો ઉપયોગ કરીશું.

ω_0 = rad/sમાં પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ

$= 2\pi \times$ rev/sમાં કોણીય ઝડપ

$= \dfrac{2\pi \times \text{rev/min માં કોણીય ઝડપ}}{60\ \text{s/min}}$

$= \dfrac{2\pi \times 1200}{60}$ rad/s

$= 40\pi$ rad/s

તે જ રીતે ω = rad/sમાં અંતિમ કોણીય ઝડપ

$= \dfrac{2\pi \times 3120}{60}$ rad/s

$= 2\pi \times 52$ rad/s

$= 104\pi$ rad/s

$\therefore$ કોણીય પ્રવેગ

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = 4\ \pi\ \text{rad/s}^2$$

ઍન્જિનનો કોણીય પ્રવેગ = $4\ \pi$ rad/s^2

(ii) t સમયમાં કોણીય સ્થાનાંતર

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \text{ પરથી મળે.}$$

$$= (40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 16^2) \text{ rad}$$

$$= (640\pi + 512\pi) \text{ rad}$$

$$= 1152\pi \text{ rad}$$

પરિભ્રમણોની સંખ્યા $= \frac{1152\pi}{2\pi} = 576$ ◀

7.12 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિનું ગતિશાસ્ત્ર (DYNAMICS OF ROTATIONAL MOTION ABOUT A FIXED AXIS)

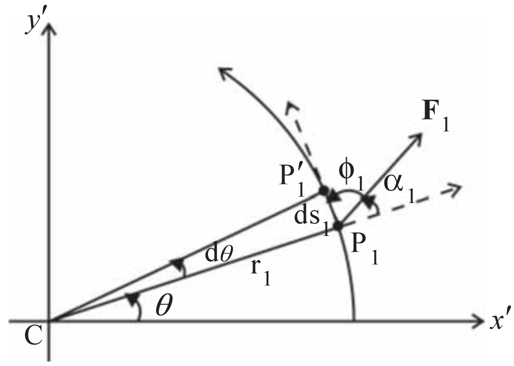
કોષ્ટક 7.2માં રેખીય ગતિ સાથે સંકળાયેલ રાશિઓ અને ચાકગતિમાં તેમની સાથે સામ્યતા ધરાવતી રાશિઓની યાદી આપેલ છે. આપણે આ પહેલાં પણ બે ગતિઓની શુદ્ધ ગતિકીની સરખામણી કરી છે. ઉપરાંત, આપણે જાણીએ છીએ કે ચાકગતિમાં જડત્વની ચાકમાત્રા અને ટૉર્ક એ રેખીય ગતિમાં તેને સમતુલ્ય એવા અનુક્રમે દ્રવ્યમાન અને બળની જેમ સમાન ભૂમિકા ભજવે છે. આને જોતાં આપણે ધારી શકીએ કે કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ અન્ય સમતુલ્યો શું છે. દાખલા તરીકે, આપણે જાણીએ છીએ કે રેખીય ગતિમાં, થયેલ કાર્યને $F\,dx$ દ્વારા આપવામાં આવે છે. એક ચોક્કસ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિમાં, તે $\tau\, d\theta$ હોવું જોઈએ, કારણ કે $dx \rightarrow d\theta$ અને $F \rightarrow \tau$ને સમતુલ્ય છે જે આપણે પહેલાથી જ જાણીએ છીએ. તેમ છતાં, જરૂરી છે કે આ સંગતતા નક્કર ગતિશીલ વિચારણાઓ પર સ્થાપિત થયેલ હોય. આપણે હવે આમ જ કરવા જઈ રહ્યા છીએ.

પ્રારંભ કરીએ તે પહેલાં, આપણે **એક સરળીકરણ નોંધીએ કે જે સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના કિસ્સામાં ઉદ્‌ભવે છે.** અક્ષ સ્થિર હોવાથી આપણી ચર્ચામાં ટૉર્કના માત્ર જે ઘટકો, સ્થિર અક્ષની દિશામાં છે, તેને જ ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે. ફક્ત આ ઘટકો જ પદાર્થને અક્ષની સાપેક્ષે ભ્રમણ કરાવવા માટે જવાબદાર છે. પરિભ્રમણના અક્ષને લંબ રહેલો ટૉર્કનો ઘટક અક્ષને તેના સ્થાનેથી ફેરવશે. આપણે વિશેષ રૂપે ધારીએ છીએ કે (બાહ્ય) ટૉર્કના આ લંબરૂપ ઘટકોની અસર નાબૂદ (સમતુલિત) કરવા માટે જરૂરી બળોની ચાકમાત્રા સર્જાશે, જેથી અક્ષની સ્થિર સ્થિતિ જળવાઈ રહેશે. ટૉર્કનાં લંબ ઘટકોને, તેથી ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર નથી. આનો અર્થ એ થાય કે દૃઢ પદાર્થ પર ટૉર્કની આપણી ગણતરી માટે :

(1) આપણે માત્ર તે બળોને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે જે અક્ષના લંબ સમતલમાં આવેલા છે. જે બળો અક્ષને સમાંતર હોય છે તે અક્ષને લંબ ટૉર્ક આપશે અને તેમને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર નથી.

(2) આપણે સ્થાનસદિશોનાં માત્ર તે ઘટકોને જ ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે જે અક્ષને લંબ છે. સ્થાનસદિશોનાં અક્ષની દિશામાનાં ઘટકો અક્ષને લંબરૂપે ટૉર્ક આપે છે અને તેને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર નથી.

ટૉર્ક દ્વારા કરવામાં આવેલું કાર્ય



આકૃતિ 7.34 એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરતા એક દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બળ $\mathbf{F}_1$ વડે થતું કાર્ય. આ કણ એ વર્તુળાકાર પથ બનાવે છે કે જેનું કેન્દ્ર C એ અક્ષ પર છે. ચાપ $P_1P'_1$ (ds_1) એ આ કણનું સ્થાનાંતર આપે છે.

આકૃતિ 7.34 એ એક સ્થિર અક્ષ, જેને Z-અક્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે (પૃષ્ઠના સમતલને લંબ, જુઓ આકૃતિ 7.33), તેને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં એક દૃઢ પદાર્થનો આડછેદ બતાવે છે. ઉપર જણાવ્યા મુજબ આપણે માત્ર તે જ બળોને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે જે અક્ષના લંબ સમતલમાં હોય. ધારો કે $\mathbf{F}_1$ એ આવું કોઈ એક બળ છે, જે દર્શાવ્યા પ્રમાણે આ પદાર્થના બિંદુ P_1 પરના કણ પર લાગે છે જેની કાર્યરેખાએ અક્ષના લંબ સમતલમાં છે. સરળતા ખાતર આપણે તેને $X'-Y'$ સમતલ કહીશું. (તે પૃષ્ઠના સમતલ સાથે સંપાતી છે.) P_1 પરનો કણ એ r_1 ત્રિજ્યાનો વર્તુળાકાર પથ બનાવે છે કે જેનું કેન્દ્ર C એ અક્ષ પર છે; $CP_1 = r_1$

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે Δt સમયમાં આ બિંદુ, P'_1 પર પહોંચે છે. આમ આ કણનું સ્થાનાંતર ds_1નું માન $ds_1 = r_1 d\theta$ અને વર્તુળાકાર પથને P_1 પરના સ્પર્શકની દિશામાં છે. અહીં $d\theta$ એ આ કણનું કોણીય સ્થાનાંતર $d\theta = \angle P_1CP_1'$ છે. કણ ઉપર આ બળ વડે થતું કાર્ય.

$$dW_1 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{ds}_1 = F_1 ds_1 \cos\phi_1 = F_1(r_1 d\theta) \sin\alpha_1$$

છે, જ્યાં ϕ_1 એ $\mathbf{F}_1$ અને P_1 આગળના સ્પર્શક વચ્ચેનો ખૂણો,

કોષ્ટક 7.2 સ્થાનાંતરીય ગતિ અને ચાકગતિની સરખામણી

	રેખીય ગતિ (Linear Motion)	સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ (Rotational Motion about a Fixed Axis)
1.	સ્થાનાંતર (Displacement) x	કોણીય સ્થાનાંતર (Angular displacement) θ
2.	વેગ (Velocity) $\upsilon = dx/dt$	કોણીય વેગ (Angular velocity) $\omega = d\theta/dt$
3.	પ્રવેગ (Acceleration) $a = d\upsilon/dt$	કોણીય પ્રવેગ (Angular acceleration) $\alpha = d\omega/dt$
4.	દ્રવ્યમાન (Mass) M	જડત્વની ચાકમાત્રા (Moment of inertia) I
5.	બળ (Force) $F = Ma$	ટૉર્ક (બળની ચાકમાત્રા) (Torque) $\tau = I\alpha$
6.	કાર્ય (Work) $dW = F\ ds$	કાર્ય (Work) $W = \tau d\theta$
7.	ગતિઊર્જા (Kinetic energy) $K = M\upsilon^2/2$	ગતિઊર્જા (Kinetic energy) $K = I\omega^2/2$
8.	પાવર (Power) $P = F\ \upsilon$	પાવર (Power) $P = \tau\omega$
9.	રેખીય વેગમાન (Linear momentum) $p = M\upsilon$	કોણીય વેગમાન (Angular momentum) $L = I\omega$

α_1 એ $\mathbf{F}_1$ અને ત્રિજ્યા સદિશ $\mathbf{OP}_1$ વચ્ચેનો ખૂણો છે; $\phi_1 + \alpha_1 = 90°$.

ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે $\mathbf{F}_1$ને કારણે ટૉર્ક $\mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1$ છે. હવે $\mathbf{OP}_1 = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}_1$ (આકૃતિ 7.17 (b)નો સંદર્ભ લો.) કારણ કે $\mathbf{OC}$ એ અક્ષની દિશામાં છે, તેનાથી પરિણમતા ટૉર્કને આપણી ચર્ચામાંથી બાકાત રાખવામાં આવે છે. $\mathbf{F}_1$ના કારણે અસરકારક ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{CP}_1 \times \mathbf{F}_1$ છે; તે પરિભ્રમણ અક્ષની દિશામાં છે અને તેનું માન $\tau_1 = r_1 F_1 \sin\alpha_1$ છે. તેથી,

$$dW_1 = \tau_1 d\theta$$

જો પદાર્થ પર એક કરતાં વધુ બળો કાર્યરત હોય, તો તે બધાં દ્વારા કરવામાં આવેલ કાર્યને ઉમેરતાં પદાર્થ પર થતું કુલ કાર્ય મળે છે. વિવિધ બળોને કારણે લાગતાં ટૉર્કના માનને τ_1, τ_2, ... વગેરે દ્વારા દર્શાવતાં,

$$dW = (\tau_1 + \tau_2 + ...)d\theta$$

યાદ રાખો કે, ટૉર્કને ઉત્પન્ન કરતાં બળો અલગ અલગ કણો પર લાગે છે, પરંતુ કોણીય સ્થાનાંતરણ $d\theta$ એ બધા જ કણો માટે સમાન છે. સ્થિર અક્ષને સમાંતર બધા ટૉર્ક ગણેલા હોવાથી કુલ ટૉર્ક τનું માન એ દરેક ટૉર્કના માનનો બૈજિક સરવાળો છે, એટલે કે, $\tau = \tau_1 + \tau_2 + ...$

તેથી, આપણને

$$dW = \tau d\theta \qquad (7.41)$$

મળે છે.

આ સૂત્ર સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં પદાર્થ પર લાગતાં કુલ (બાહ્ય) ટૉર્ક τ વડે થતું કાર્ય આપે છે. જે રેખીય ગતિના સમીકરણ $dW = F\ ds$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે તે સ્વાભાવિક છે.

સમીકરણ (7.41)ને બંને બાજુએ dt દ્વારા ભાગતાં,

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

અથવા $P = \tau\omega$ (7.42)

આ તાત્ક્ષણિક પાવર છે. રેખીય ગતિના કિસ્સામાં પાવર માટેના સૂત્ર $P = Fv$ સાથે સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના કિસ્સામાં પાવર માટેના આ સૂત્રની તુલના કરો.

એક સંપૂર્ણ દૃઢ પદાર્થમાં કોઈ આંતરિક ગતિ નથી. આથી બાહ્ય ટૉર્ક દ્વારા કરવામાં આવતું કાર્ય વ્યય પામતું નથી અને તેથી પદાર્થની ગતિઊર્જા વધારવામાં વપરાય છે. પદાર્થ પર જે દરથી કાર્ય થાય છે તેને સમીકરણ (7.42) દ્વારા આપવામાં આવે છે. આને જે દરથી ગતિઊર્જા વધે છે તેની સાથે સરખાવી શકાય છે. ગતિઊર્જાનો વૃદ્ધિનો દર

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\frac{(2\omega)}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

આપણે ધાર્યું છે કે જડત્વની ચાકમાત્રા સમય સાથે બદલાતી નથી. આનો અર્થ એ છે કે પદાર્થનું દળ બદલાતું નથી. પદાર્થ દૃઢ જ રહે છે અને અક્ષ પણ પદાર્થના સંદર્ભમાં તેનું સ્થાન બદલતી નથી.

$\alpha = d\omega/dt$ હોવાથી,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\ \omega\ \alpha \text{ મળે છે.}$$

કાર્ય થવાનો દર અને ગતિઊર્જામાં વધારાના દરને સરખાવતાં.

$$\tau\omega = I\ \omega\ \alpha$$

$$\tau = I\alpha \qquad (7.43)$$

સમીકરણ (7.43) એ રેખીય ગતિ માટેના ન્યૂટનના બીજા નિયમ જેવું હોવાથી તેને સંજ્ઞા સ્વરૂપે

$F = ma$ તરીકે લખાય છે,

જેમ બળ પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે, તેમ ટૉર્ક પદાર્થમાં કોણીય પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે. કોણીય પ્રવેગ એ લાગુ પડતા ટૉર્કના સમપ્રમાણમાં અને તે પદાર્થના જડત્વની ચાકમાત્રાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે. સમીકરણ (7.43)ને સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે ન્યૂટનનો બીજો નિયમ કહી શકાય છે.

▶ ***ઉદાહરણ 7.15*** અવગણ્ય દ્રવ્યમાનની એક દોરીને 20 kg દળ અને 20 cm ત્રિજ્યાના ફ્લાયવ્હીલની કોર (rim) પર વિંટાળેલ છે. આકૃતિ 7.35માં બતાવ્યા પ્રમાણે દોરી પર 25 N જેટલું અચળ ખેંચાણબળ (pull) લગાડેલ છે. આ ફ્લાયવ્હીલ ઘર્ષણરહિત બેરિંગ્સ સાથે એક સમક્ષિતિજ અક્ષ પર જડેલ છે.

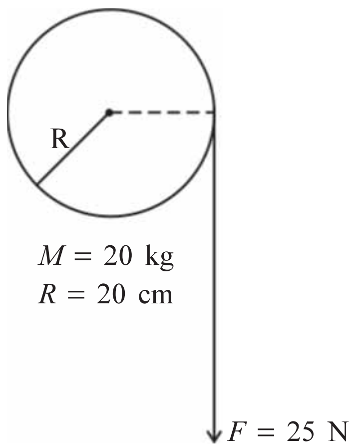
(a) વ્હીલના કોણીય પ્રવેગની ગણતરી કરો.

(b) જ્યારે દોરી 2m ખૂલશે ત્યાં સુધી ખેંચાણબળ (pull) દ્વારા કરવામાં આવેલ કાર્ય શોધો.

(c) આ બિંદુ એ વ્હીલની ગતિઊર્જા પણ શોધો. વ્હીલ તેની સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ શરૂ કરે છે, તેમ ધારો.

(d) વિભાગો (b) અને (c)ના જવાબોની સરખામણી કરો.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.35

(a) આપણે $I\,\alpha = \tau$નો ઉપયોગ કરીશું.

ટૉર્ક $\tau = F\,R$

$= 25 \times 0.20$ Nm (કારણ કે $R = 0.20$ m)

$= 5.0$ Nm

I = ફ્લાયવ્હીલની તેની અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા

$$(\text{M.I.}) = \frac{MR^2}{2}$$

$$= \frac{20.0 \times (0.2)^2}{2} = 0.4 \text{ kg m}^2$$

α = કોણીય પ્રવેગ

$= 5.0$ N m/0.4 kg m^2 = 12.5 s^{-2}

(b) દોરી 2m ઉકેલાતાં, ખેંચાણબળ (pull) વડે થતું કાર્ય

$= 25$ N $\times$ 2m = 50 J

(c) ધારો કે, ω અંતિમ કોણીય વેગ છે.

ગતિઊર્જાનો વધારો $= \frac{1}{2}I\omega^2$

કારણ કે વ્હીલ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ શરૂ કરે છે. હવે,

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \quad \omega_0 = 0$

કોણીય સ્થાનાંતર θ = ઉકેલાયેલ દોરીની લંબાઈ / વ્હીલની ત્રિજ્યા

$= 2$m/0.2m = 10 rad

$\omega^2 = 2 \times 12.5 \times 10.0 = 250(\text{rad/s})^2$

ગતિઊર્જામાં વધારો (પ્રાપ્ત કરેલી ગતિઊર્જા)

$= \frac{1}{2} \times 0.4 \times 250 = 50$ J

(d) આ બધાં જવાબો એક સમાન જ છે. એટલે કે વ્હીલે પ્રાપ્ત કરેલી ગતિઊર્જા = બળે કરેલું કાર્ય. ઘર્ષણને લીધે કોઈ ઊર્જાનો વ્યય થતો નથી. ◀

7.13 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના કિસ્સામાં કોણીય વેગમાન (ANGULAR MOMENTUM IN CASE OF ROTATION ABOUT A FIXED AXIS)

કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનનો આપણે પરિચ્છેદ 7.7માં અભ્યાસ કર્યો છે. તે પરથી આપણે એ જાણીએ છીએ કે, એક બિંદુને અનુલક્ષીને કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનનો સમય દર એ તે જ બિંદુને અનુલક્ષીને લેવામાં આવેલ તંત્ર પરના કુલ બાહ્ય ટૉર્ક જેટલો છે. જ્યારે કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય ત્યારે તે તંત્રનું કુલ કોણીય વેગમાન સંરક્ષિત (અચળ) છે.

હવે આપણે એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના વિશેષ કિસ્સામાં કોણીય વેગમાનનો અભ્યાસ કરવા માગીએ છીએ. તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાન માટેનું વ્યાપક સમીકરણ

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \text{ છે.} \qquad (7.25b)$$

આપણે સૌપ્રથમ ભ્રમણ કરતા દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક લાક્ષણિક કણના કોણીય વેગમાનને ધ્યાનમાં લઈશું. ત્યાર બાદ આપણે સમગ્ર પદાર્થનું **L** મેળવવા માટે પ્રત્યેક કણોના યોગદાનનો સરવાળો કરીશું.

કોઈ એક લાક્ષણિક કણ માટે $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. છેલ્લા પરિચ્છેદમાં જે જોયું તે $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}$ (આકૃતિ 7.17(b)) $\mathbf{p} = m\,\boldsymbol{\upsilon}$ સાથે

$\mathbf{l} = (\mathbf{OC} \times m\,\boldsymbol{\upsilon}) + (\mathbf{CP} \times m\,\boldsymbol{\upsilon})$

P પરના કણના રેખીય વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$નું માન $\upsilon = \omega\, r_\perp$ છે, જ્યાં $r_\perp$ એ CPની લંબાઈ કે કણનું પરિભ્રમણ અક્ષથી લંબઅંતર છે. વધુમાં, $\boldsymbol{\upsilon}$ એ આ કણ જે વર્તુળ બનાવે છે તેને P પરના સ્પર્શકની દિશામાં છે. જમણા હાથના નિયમનો ઉપયોગ કરીને એ ચકાસી શકાય છે કે, $\mathbf{CP} \times \boldsymbol{\upsilon}$ એ સ્થિર અક્ષને સમાંતર છે. $\hat{\mathbf{k}}$ એ સ્થિર અક્ષને (Z-અક્ષને પસંદ કરેલ છે.) અનુલક્ષીને એકમ સદિશ છે. આમ,

$$\mathbf{CP} \times m\boldsymbol{\upsilon} = r_\perp (m\upsilon)\hat{\mathbf{k}}$$
$$= m r_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{કારણ કે } v = \omega\, r_\perp)$$

આ જ રીતે આપણે ચકાસી શકીએ છીએ કે $\mathbf{OC} \times \boldsymbol{\upsilon}$ એ સ્થિર અક્ષને લંબ છે. સ્થિર અક્ષ (એટલે કે z-અક્ષ)ને અનુલક્ષીને $\mathbf{l}$ના ઘટકને $\mathbf{l}_z$ વડે દર્શાવતાં,

$$\mathbf{l}_z = \mathbf{CP} \times m\,\boldsymbol{\upsilon} = m r_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}}$$

અને $\mathbf{l} = \mathbf{l}_z + \mathrm{OC} \times m\,\boldsymbol{\upsilon}$

આપણે એ નોંધવું રહ્યું કે $\mathbf{l}_z$ એ સ્થિર અક્ષને સમાંતર છે પણ $\mathbf{l}$ તેને સમાંતર નથી. વ્યાપક રૂપે કોઈ પણ કણ માટે કોણીય વેગમાન એ પરિભ્રમણ અક્ષની દિશામાં નથી હોતું, એટલે કે કોઈ કણ માટે $\mathbf{l}$ અને $\boldsymbol{\omega}$ એ સમાંતર જ હોય તે જરૂરી નથી. રેખીય ગતિમાં આને સમતુલ્ય તથ્યની સાથે સરખામણી કરો. કોઈ પણ કણ માટે $\mathbf{p}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ એ હંમેશાં એકબીજાને સમાંતર જ હોય છે.

સમગ્ર દૃઢ પદાર્થનું કુલ કોણીય વેગમાન ગણવા માટે, આપણે આ પદાર્થના દરેક કણના ફાળાનો સરવાળો કરીશું.

આમ, $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum \mathbf{l}_{iz} + \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i$

આપણે, $\mathbf{L}$ના z-અક્ષને લંબ અને z-અક્ષની દિશામાંનાં ઘટકોને અનુક્રમે $\mathbf{L}_\perp$ અને $\mathbf{L}_z$ વડે દર્શાવીશું.

$$\mathbf{L}_\perp = \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i \qquad (7.44a)$$

જ્યાં, m_i અને $\boldsymbol{\upsilon}_i$એ i માં કણનું અનુક્રમે દળ અને વેગ છે તથા C_i એ કણ દ્વારા રચાતાં વર્તુળનું કેન્દ્ર છે.

$$\text{અને } \mathbf{L}_z = \sum \mathbf{l}_{iz} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega \hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{અથવા } \mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44b)$$

છેલ્લું પદ આવું મળે છે કારણ કે iમા કણનું અક્ષથી લંબઅંતર એ r_i છે અને વ્યાખ્યા મુજબ પરિભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા $I = \sum m_i r_i^2$ છે.

$$\text{નોંધો, } \mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp \qquad (7.44c)$$

આ પ્રકરણમાં આપણે મુખ્યત્વે જે દૃઢ પદાર્થોનો વિચાર કર્યો છે તેઓ પરિભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને સંમિત છે. એટલે કે, ભ્રમણ અક્ષ તેમની કોઈ એક સંમિતિ અક્ષ છે. આવા પદાર્થો માટે કોઈ એક આપેલ OC_i માટે $\boldsymbol{\upsilon}_i$ વેગ ધરાવતા દરેક કણ માટેના, એક બીજો $-\boldsymbol{\upsilon}_i$ વેગ ધરાવતો કણ હોય છે જે C_i કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પર વ્યાસના સામેના છેડે આવેલો હોય છે. $\mathbf{L}_\perp$માં આવી જોડીઓનો કુલ ફાળો શૂન્ય હશે અને પરિણામે સંમિત પદાર્થો માટે $\mathbf{L}_\perp$ શૂન્ય છે અને તેથી

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44d)$$

જે પદાર્થો ભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને સંમિત નથી હોતા તેમને માટે $\mathbf{L}$ એ $\mathbf{L}_z$ જેટલા મૂલ્યના સમાન હોતા નથી અને તેથી $\mathbf{L}$ ભ્રમણ અક્ષને સમાંતર હોતા નથી.

કોષ્ટક 7.1નો સંદર્ભ લઈ તમે કહી શકશો કે કયા કિસ્સાઓમાં $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z$ લાગુ પડશે નહિ ?

ચાલો સમીકરણ (7.44b)નું વિકલન કરીએ. $\hat{\mathbf{k}}$ એ નિશ્ચિત (અચળ) સદિશ હોવાથી, આપણને

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_z) = \left(\frac{d}{dt}(I\omega)\right)\hat{\mathbf{k}} \text{ મળે.}$$

હવે, સમીકરણ (7.28b) જણાવે છે કે,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

છેલ્લા પરિચ્છેદમાં આપણે જોયું છે કે, જ્યારે આપણે નિશ્ચિત અક્ષની આસપાસ ચાકગતિની ચર્ચા કરીએ ત્યારે બાહ્ય ટૉર્કના માત્ર જે ઘટકો ભ્રમણ અક્ષને સમાંતર હોય તેમને જ ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે. એટલે કે આપણે $\boldsymbol{\tau} = \tau\hat{\mathbf{k}}$ લઈ શકીએ.

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$ હોવાથી અને $\mathbf{L}_z$ (સદિશ $\hat{\mathbf{k}}$)ની દિશા નિશ્ચિત હોવાથી, સ્થિર ભ્રમણ અક્ષની આસપાસ ચાકગતિ માટે

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \tau\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.45a)$$

$$\text{અને } \frac{d\mathbf{L}_\perp}{dt} = 0 \qquad (7.45b)$$

આમ, સ્થિર ભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે કોણીય વેગમાનનો સ્થિર અક્ષને લંબ ઘટક અચળ રહે છે.

$\mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}}$ હોવાથી, સમીકરણ (7.45a) પરથી

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \tau \qquad (7.45c)$$

જો જડત્વની ચાકમાત્રા સમય સાથે બદલાતી ન હોય તો,

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

અને આપણને સમીકરણ (7.45c) પરથી

$\tau = I\alpha$ મળે છે. (7.43)

આપણે આ સમીકરણ કાર્ય-ગતિઊર્જાના માર્ગે અગાઉ મેળવેલું જ છે.

7.13.1 કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ (Conservation of angular momentum)

આપણે હવે એ સ્થિતિમાં છીએ કે કોઈ એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના સંદર્ભમાં કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના સિદ્ધાંતનું પુનરાવર્તન કરી શકીએ. સમીકરણ (7.45c) પરથી, જો બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો,

$L_z = I\omega =$ અચળ (7.46)

સંમિત પદાર્થ માટે સમીકરણ (7.44d) પરથી L_zને સ્થાને L મૂકી શકાય છે. (L અને L_z અનુક્રમે $\mathbf{L}$ અને $\mathbf{L}_z$ના માન છે.)

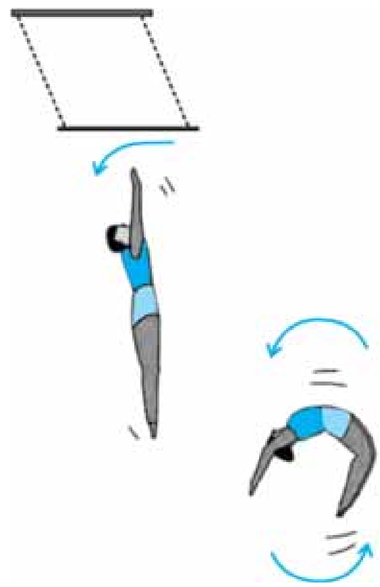
સમીકરણ (7.29a), જે કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના વ્યાપક નિયમને વ્યક્ત કરે છે. તેનું આ સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે વ્યાપક સ્વરૂપ છે. સમીકરણ (7.46) એ આપણા દૈનિક જીવનમાં આવતી ઘણી પરિસ્થિતિઓને લાગુ પડે છે. તમે તમારા મિત્ર સાથે આ પ્રયોગ કરી શકો છો. તમારા હાથ વાળીને અને પગ નીચે ટેકવેલ ન હોય એટલે કે, જમીનથી દૂર હોય તે રીતે, ભ્રમણ કરી શકતી ખુરશી (Swivel Chair) પર બેસી જાઓ. તમારા મિત્રને આ ખુરશી ઝડપથી ફેરવવા માટે કહો. જ્યારે ખુરશી પર્યાપ્ત કોણીય ઝડપે ફરતી હોય ત્યારે તમારા હાથોને સમક્ષિતિજ ફેલાવો. શું થયું ? તમારી કોણીય ઝડપમાં ઘટાડો થાય છે. જો તમે તમારા હાથોને તમારા શરીરની નજીક લાવો, તો કોણીય ઝડપ ફરીથી વધે છે. આ એવી પરિસ્થિતિ છે કે જ્યાં કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત લાગુ પડે છે. જો ચાકગતિની પ્રક્રિયામાં ઘર્ષણ અવગણવામાં આવે, તો ખુરશીના પરિભ્રમણની અક્ષને અનુલક્ષીને કોઈ બાહ્ય ટૉર્ક નથી અને તેથી $I\omega$ એ અચળ રહે છે. ફેલાયેલા હાથોએ પરિભ્રમણના અક્ષને અનુલક્ષીને Iમાં વધારો કરે છે. પરિણામે કોણીય ઝડપ ω ઘટે છે. હાથને શરીરની નજીક લાવવાથી વિરુદ્ધ અસર જોવા મળે છે.

કોઈ સર્કસમાં નટ કલાકાર (ઍક્રોબેટ) અને મરજીવા આ સિદ્ધાંતનો લાભ લે છે. ઉપરાંત, સ્કેટર અને શાસ્ત્રીય, ભારતીય અથવા એક પગના અંગૂઠા પર ચક્રીય પશ્ચિમી નૃત્ય કરતા નૃત્યકારોના પ્રદર્શનમાં આ સિદ્ધાંત પરની તેમની 'નિપુણતા' જોવા મળે છે. શું તમે આ સમજાવી શકો ?

7.14 ગબડતી ગતિ (ROLLING MOTION)

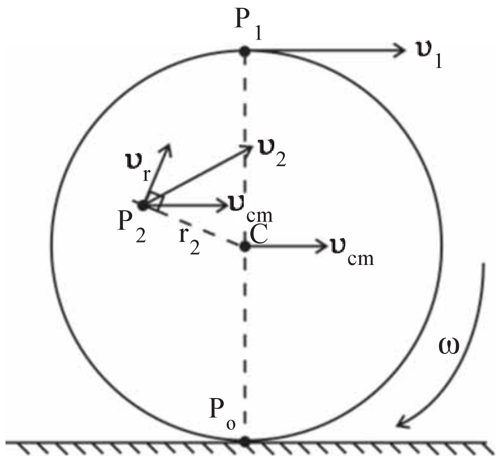
રોજિંદા જીવનમાં જોવા મળતી બહુ સામાન્ય ગતિઓમાંની એક એ ગબડતા પદાર્થની ગતિ છે. પરિવહનમાં વપરાતાં બધાં પૈડાં (Wheels)ની ગતિ એ ગબડતા પદાર્થની ગતિ છે. ખાસ કરીને આપણે એક તક્તીથી આરંભ કરીશું, પરંતુ પરિણામ એક સમતલ સપાટી પર ગબડતા કોઈ પણ પદાર્થને લાગુ પડશે. આપણે એવું ધારી લઈશું કે તક્તી સરક્યા (લપસ્યા-Slipping) વિના ગબડે છે. આનો અર્થ એ છે કે કોઈ પણ ક્ષણે, સપાટી સાથે સંપર્કમાં રહેલું તક્તીનું તળિયું સ્થિર રહે છે.

આકૃતિ. 7.36 (a) કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનું નિદર્શન. એક છોકરી રીવોલ્વિંગ ખુરશી પર બેસે છે અને તેના હાથોને સમક્ષિતિજ લંબાવે છે/તેના હાથોને શરીરની નજીક લાવે છે.



આકૃતિ 7.36 (b) એક નટ કલાકાર (Acrobat) તેના કાર્યમાં કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના સિદ્ધાંતને કામે લગાડે છે.

અગાઉ આપણે નોંધ્યું છે કે, ગબડવાની ગતિ એ ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરણ ગતિનું સંયોજન છે. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે કણોના તંત્રની સ્થાનાંતરણ ગતિ તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ છે.



આકૃતિ 7.37 સમતલ સપાટી પર તક્તીની (સરક્યા વિના) ગબડવાની ગતિ. નોંધો કે કોઈ પણ ક્ષણે તક્તીનું સપાટી સાથેનું સંપર્ક બિંદુ P_o સ્થિર રહે છે. તક્તીનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર υ_{cm} વેગથી ગતિ કરે છે. તક્તી Cમાંથી પસાર થતી તેની અક્ષને અનુલક્ષીને કોણીય વેગ ωથી ભ્રમણ કરે છે. $\upsilon_{cm} = R\omega$, જ્યાં R એ તક્તીની ત્રિજ્યા છે.

ધારો કે, $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ અને તેથી તક્તીની સ્થાનાંતરણ ગતિનો વેગ છે. ગબડતી તક્તીનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર C પર હોવાથી (આકૃતિ 7.37)માં $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ એ Cનો વેગ છે. તે સમતલ સપાટીને સમાંતર છે. તક્તીની ચાકગતિ Cમાંથી પસાર થતી સંમિતિ અક્ષની આસપાસ છે. તક્તીના P_0, P_1 અને P_2 જેવા કોઈ પણ બિંદુનો વેગ બે ભાગનો બનેલો છે. એક સ્થાનાંતરણ વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ અને બીજો ચાકગતિને લીધે રેખીય વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_r$. $\boldsymbol{\upsilon}_r$નું માન $\upsilon_r = r\omega$, જ્યાં ω એ તક્તીની અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિનો કોણીય વેગ છે અને r તે બિંદુનું અક્ષથી (એટલે કે Cથી) અંતર છે. વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_r$ આપેલ બિંદુના Cને અનુલક્ષીને સ્થાનસદિશને લંબ છે. આકૃતિ 7.37માં P_2 બિંદુનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_2$ અને તેનાં ઘટકો $\boldsymbol{\upsilon}_r$ અને $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ દર્શાવ્યા છે. અહીં $\boldsymbol{\upsilon}_r$ એ CP_2ને લંબ છે. એવું સહેલાઈથી દર્શાવી શકાય કે $\boldsymbol{\upsilon}_2$ એ P_oP_2 રેખાને લંબ છે. આથી P_oમાંથી પસાર થતી અને $\boldsymbol{\omega}$ને સમાંતર રેખાને તાત્ક્ષણિક ભ્રમણાક્ષ કહે છે.

P_o પર ચાકગતિને લીધે રેખીય વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_r$ સ્થાનાંતર વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ની બરાબર વિરુદ્ધ દિશામાં છે. વળી, અત્રે $\boldsymbol{\upsilon}_r$નું માન $R\omega$ છે. જ્યાં R એ તક્તીની ત્રિજ્યા છે. P_o ક્ષણિક રીતે સ્થિર રહે તે માટે જરૂરી છે કે $\boldsymbol{\upsilon}_{cm} = R\omega$ આમ તક્તી માટે સરક્યા વિના ગબડવાની શરત

$$\boldsymbol{\upsilon}_{cm} = R\omega \text{ છે.} \tag{7.47}$$

સાહજિક રીતે જ આનો અર્થ એ થાય કે તક્તીની ટોચ પરના બિંદુ P_1ના વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_1$નું માન $\boldsymbol{\upsilon}_{cm} + R\omega$ અથવા $2\,\upsilon_{cm}$ છે અને સમતલ સપાટીને સમાંતર છે. સમીકરણ (7.47) વડે મળતી શરત દરેક ગબડતા પદાર્થને લાગુ પડે છે.

7.14.1 ગબડતી ગતિની ગતિઊર્જા (Kinetic Energy of Rolling Motion)

આપણું આગામી કાર્ય ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જા માટેનું સૂત્ર પ્રાપ્ત કરવાનું છે. ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જાને સ્થાનાંતર ગતિઊર્જા અને ભ્રમણની ગતિઊર્જામાં અલગ કરી શકાય છે. આ કણોના એવા તંત્ર માટે વ્યાપક પરિણામનો વિશિષ્ટ કિસ્સો છે, જે મુજબ કણોના તંત્રની ગતિઊર્જા (K)ને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિઊર્જા (સ્થાનાંતરણ) ($MV^2/2$) અને કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ચાકગતિની ઊર્જા (K')માં અલગ કરી શકાય છે. આમ,

$$K = K' + MV^2/2 \tag{7.48}$$

આપણે આ વ્યાપક પરિણામ ધારી લઈએ છીએ (સ્વાધ્યાય 7.31 જુઓ) અને ગબડતી ગતિના કિસ્સામાં તેને લાગુ કરીએ છીએ. આપણા સંકેતમાં, ગબડતા પદાર્થ માટે, દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિઊર્જા એટલે કે સ્થાનાંતરની ગતિઊર્જાએ $m\upsilon^2_{cm}/2$ છે. જ્યાં m એ પદાર્થનું દળ છે અને υ_{cm} એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ છે. દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ગબડતા પદાર્થની ગતિ એ ચાકગતિ હોવાથી K' એ પદાર્થની ચાકગતિની ગતિઊર્જા રજૂ કરે છે. $K' = I\omega^2/2$ જ્યાં I એ સુયોગ્ય અક્ષ જે ગબડતા પદાર્થની સંમિત અક્ષ છે. તેને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે. આમ, ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જાને નીચેના સમીકરણ દ્વારા આપવામાં આવે છે :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm} \tag{7.49a}$$

$I = mk^2$ જ્યાં k = પદાર્થની ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા અને $v_{cm} = R\omega$ મૂકતાં,

$$K = \frac{1}{2}\frac{mk^2\upsilon^2_{cm}}{R^2} + \frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm}$$

$$\text{અથવા } K = \frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right) \tag{7.49b}$$

સમીકરણ (7.49b) એ કોઈ પણ ગબડતા પદાર્થ (રોલિંગ બોડી) પર લાગુ પાડી શકાય છે. જેમકે તક્તી, નળાકાર, વલય અથવા ગોળો.

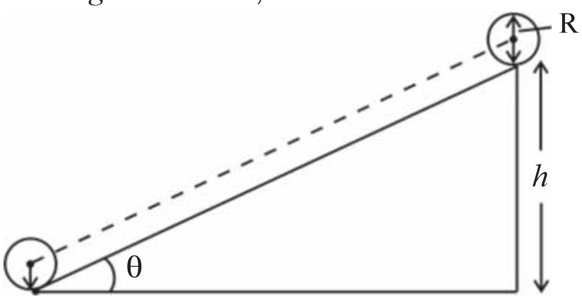
> **ઉદાહરણ 7.16** ત્રણ પદાર્થો, એક રિંગ, એક ઘન નળાકાર અને એક ઘન ગોળો એક જ ઢળતાં પાટિયા (Inclined Plane) પર સરક્યા વગર નીચે તરફ ગબડે છે. તેઓ સ્થિર અવસ્થામાંથી ગતિ શરૂ કરે છે. બધા જ પદાર્થોની ત્રિજ્યાઓ એક સમાન છે. કયો પદાર્થ મહત્તમ વેગ સાથે જમીન પર પહોંચશે ?

ઉકેલ આપણે ગબડતા પદાર્થ માટે ઊર્જા-સંરક્ષણ માની લઈએ છીએ, એટલે કે ઘર્ષણ વગેરેને લીધે ઊર્જામાં કોઈ વ્યય થતો નથી. આથી ઢળતા પાટિયા પરથી નીચે ગબડતા પદાર્થ દ્વારા ગુમાવાતી સ્થિતિઊર્જા (= mgh) તેની ગતિઊર્જામાં થતાં વધારા બરાબર થવી જ જોઈએ. (આકૃતિ 7.38 જુઓ.) પદાર્થ સ્થિર સ્થિતિથી ગતિ શરૂ કરે છે તેથી ગતિઊર્જામાં થતો વધારો એ પદાર્થની અંતિમ ગતિઊર્જા બરાબર છે. તેથી

સમીકરણ (7.49b) પરથી,

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$$

જ્યાં, υ એ પદાર્થનો (દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો) અંતિમ વેગ છે. K અને mghને સરખાવતાં,



આકૃતિ 7.38

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$$

અથવા $\upsilon^2 = \left(\dfrac{2gh}{1+k^2/R^2}\right)$

નોંધો કે υનું મૂલ્ય એ ગબડતા પદાર્થના દ્રવ્યમાન પર આધાર રાખતો નથી.

રિંગ માટે, $k^2 = R^2$

$$\upsilon_{ring} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1}} = \sqrt{gh}$$

નક્કર નળાકાર માટે $k^2 = R^2/2$

$$\upsilon_{disc} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1/2}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

નક્કર ગોળા માટે $k^2 = 2R^2/5$

$$\upsilon_{sphere} = \sqrt{\frac{2gh}{1+2/5}} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

પ્રાપ્ત પરિણામો પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે ઢળતા પાટિયાના તળિયે ત્રણેય પદાર્થોમાં ગોળામાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ સૌથી મહત્તમ અને રિંગનો સૌથી ઓછો હોય છે.

ધારો કે, આ પદાર્થોના દ્રવ્યમાન સમાન છે. ઢળતા સમતલના તળિયે આ પદાર્થો પહોંચે છે ત્યારે કયા પદાર્થની ચાકગતિય ગતિઊર્જા મહત્તમ હશે ?

સારાંશ

1. આદર્શ રીતે એક દૃઢ પદાર્થ એ છે કે જેનાં પર બળો લાગવા છતાં પદાર્થના જુદા જુદા કણો વચ્ચેનું અંતર બદલાતું નથી.
2. એક બિંદુ અથવા એક રેખા સાથે જડેલ એક દૃઢ પદાર્થ માત્ર ચાકગતિ કરી શકે છે. દૃઢ પદાર્થ કે જે કોઈ રીતે જડેલ ન હોય, તો તેની ગતિ કાં તો શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ અથવા સ્થાનાંતરણ અને ચાકગતિનું સંયોજન હોઈ શકે છે.
3. સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિમાં, દૃઢ પદાર્થના દરેક કણ એ અક્ષને લંબ સમતલમાંના એક વર્તુળાકાર ગતિ કરે છે અને તેનું કેન્દ્ર આ અક્ષ પર છે. ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થના દરેક બિંદુ કોઈ પણ સમયે સમાન કોણીય વેગ ધરાવે છે.
4. શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ ગતિમાં પદાર્થનો દરેક કણ કોઈ પણ સમયે એક જ વેગ સાથે ગતિ કરે છે.
5. કોણીય વેગ એક સદિશ છે. તેનું માન $\omega = d\theta/dt$ છે અને તે ભ્રમણાક્ષની દિશામાં છે. સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને પરિભ્રમણ માટે આ સદિશ $\boldsymbol{\omega}$ ને એક નિશ્ચિત દિશા ધરાવે છે.

6. બે સદિશો **a** અને **b**નો સદિશ ગુણાકાર અથવા ક્રોસ પ્રોડક્ટ એ સદિશ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ વડે લખાય છે. આ સદિશનું માન $ab\sin\theta$ છે અને તેની દિશા ને જમણા હાથના સ્ક્રૂ અથવા જમણા હાથના નિયમ વડે આપવામાં આવે છે.
7. કોઈ એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં એક દૃઢ પદાર્થના એક કણના રેખીય વેગને $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ વડે આપવામાં આવે છે. જ્યાં **r** એ ઉદ્ગમબિંદુના સંદર્ભમાં અક્ષની સાપેક્ષે કણનો સ્થાનસદિશ છે. દૃઢ પદાર્થ માટે ચાકગતિના વધુ વ્યાપક કિસ્સાઓ કે જ્યાં એક જ બિંદુ સ્થિર હોય ત્યાં પણ આ સંબંધ લાગુ પડે છે. આવા કિસ્સામાં ઉદ્ગમબિંદુ તરીકે લીધેલ સ્થિર બિંદુની સાપેક્ષે **r** એ કણનો સ્થાનસદિશ છે.
8. જે બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\mathbf{R} = \dfrac{\sum m_i r_i}{M}$ હોય તેને કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.
9. કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$ દ્વારા આપવામાં આવે છે. જ્યાં **P** એ તંત્રનું રેખીય વેગમાન છે. તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ રીતે ગતિ કરે છે કે જાણે તંત્રનું સમગ્ર દ્રવ્યમાન તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત હોય તથા બધાં બાહ્ય બળો તેના પર જ લગતાં હોય. જો તંત્ર પરનું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો આ તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે.
10. ઉદ્ગમબિંદુની સાપેક્ષે n કણોના તંત્રનું કોણીય વેગમાન,

    $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ છે.

    ઉદ્ગમબિંદુની સાપેક્ષે n કણોના તંત્ર પર લાગતું ટૉર્ક અથવા બળની ચાકમાત્રા

    $\boldsymbol{\tau} = \sum_{i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ છે.

    iમાં કણ પર લાગતા બળ $\mathbf{F}_i$માં બાહ્ય અને આંતરિક બળો પણ સામેલ છે. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ અને કોઈ પણ બે કણો વચ્ચે લાગતાં બળો તેમને જોડતી રેખા પર લાગે છે તેમ લેતાં, આપણે એમ દર્શાવી શકીએ છીએ કે, $\boldsymbol{\tau}_{\text{int}} = \mathbf{0}$ અને

    $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$
11. એક દૃઢ પદાર્થ યાંત્રિક સંતુલનમાં હોય જો,

    (1) તે સ્થાનાંતરિય સંતુલનમાં હોય એટલે કે તેના પરનું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તેથી $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, અને

    (2) તે ચાકગતિય સંતુલનમાં હોય એટલે કે તેના પરનું કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય.

    $\sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$
12. કોઈ વિસ્તરિત પદાર્થનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર તે એવું બિંદુ છે કે જ્યાં પદાર્થ પર લાગતું કુલ ગુરુત્વીય ટૉર્ક શૂન્ય હોય.
13. કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રાને સૂત્ર $I = \sum m_i r_i^2$ વડે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે, જ્યાં r_i એ પદાર્થના iમાં કણનું આ અક્ષથી લંબઅંતર છે. આ ચાક ગતિઊર્જા $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ છે.
14. સમાંતર અક્ષોના પ્રમેય : $I_z' = I_z + Ma^2$ લાગુ કરીને આપણે દૃઢ પદાર્થની કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા, આ અક્ષને સમાંતર ગુરુત્વકેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા અને પદાર્થનું દ્રવ્યમાન તથા આ બંને અક્ષો વચ્ચેનાં લંબઅંતરના વર્ગના ગુણાકારના સરવાળાથી શોધી શકીએ છીએ.

15. કાયનેમેટિક્સ અને ડાયનેમિક્સના સંદર્ભમાં કોઈ એક ચોક્કસ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ એ સુરેખીય ગતિ સાથે સીધી સામ્યતા ધરાવે છે.
16. કોઈ એક સ્થિર ભ્રમણાક્ષને (ધારો કે z-અક્ષ) અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં કોઈ એક પદાર્થ માટે $L_z = I\omega$ જ્યાં I એ z-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે. સામાન્યતઃ આવા પદાર્થ માટે **L** એ ભ્રમણાક્ષની દિશામાં હોતું નથી. જ્યારે પદાર્થ એ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને સંમિત હોય ફક્ત ત્યારે જ **L** એ ભ્રમણાક્ષની દિશામાં હોય છે. આ કિસ્સામાં $|\mathbf{L}| = L_z = I\omega$ કોઈ એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં પદાર્થના કોણીય પ્રવેગને $I\alpha = \tau$ વડે આપવામાં આવે છે. જો પદાર્થ પર લાગતું બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય, તો સ્થિર ભ્રમણાક્ષને (ધારો કે z-અક્ષ) અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં આવા પદાર્થના કોણીય વેગમાનનો ઘટક L_z $(=I\omega)$ અચળ હોય છે.
17. સરક્યા વિના ગબડતી ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે $\upsilon_{cm} = R\omega$ જ્યાં υ_{cm} એ સ્થાનાંતરીય વેગ (એટલે કે પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો) છે, R એ આ પદાર્થની ત્રિજ્યા અને m દળ છે. આવા ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જા એ સ્થાનાંતરણ અને પરિભ્રમણની ગતિઊર્જાઓનો સરવાળો છે :

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

રાશિ (Quantity)	સંજ્ઞા (Symbols)	પરિમાણ (Dimensions)	એકમો (Units)	નોંધ (Remark)
કોણીય વેગ (Angular Velocity)	ω	$[T^{-1}]$	rad s	$\upsilon = \omega \times r$
કોણીય વેગમાન (Angular Momentum)	L	$[ML^2T^{-1}]$	J s	$L = r \times p$
ટૉર્ક (Torque)	τ	$[ML^2T^{-2}]$	N m	$\tau = r \times F$
જડત્વની ચાકમાત્રા (Moment of Intertia)	I	$[ML^2]$	kg m^2	$I = \sum m_i r_i^2$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. કોઈ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ જાણવા માટે, તંત્રનાં આંતરિક બળોની જાણકારી જરૂરી નથી. આ હેતુ માટે આપણે ફક્ત પદાર્થ પરનાં બાહ્ય બળો જ જાણવાની જરૂર છે.
2. કણોના તંત્રના ગતિશાસ્ત્રમાં, કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ (એટલે તંત્રની રેખીય ગતિ) અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને (એટલે કે તેની સાપેક્ષે) થતી ગતિને અલગ કરવી એ એક ઉપયોગી તકનિક છે. આ તકનિકના એક ઉદાહરણ તરીકે કણોના તંત્રની ગતિઊર્જા Kને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તેની ગતિઊર્જા K' અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિઊર્જા $MV^2/2$ને અલગ કરવી તે છે.
   $K = K' + MV^2/2$.
3. પરિમિત પરિમાણના પદાર્થો (કે કણોના તંત્રો) માટે ન્યૂટનનો બીજો નિયમ; ન્યૂટનના બીજા નિયમ ઉપરાંત કણો માટેના ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ પર પણ આધારિત છે.
4. કણોના તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય-દર, તંત્ર પરના કુલ બાહ્ય ટૉર્ક જેટલો હોય છે. તેમ સ્થાપિત કરવામાં આપણે કણો માટે ન્યૂટનના બીજા નિયમ ઉપરાંત ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમની પણ જરૂર પડે છે. જેમાં બે કણો વચ્ચે લાગતાં બળો તેમને જોડતી રેખા પર હોવાં જરૂરી છે.
5. કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોવું અને કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોવું એ બે સ્વતંત્ર શરતો છે. એક વિના બીજું હોઈ શકે છે. બળયુગ્મમાં કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય છે પણ કુલ ટૉર્ક અશૂન્ય છે.
6. જો કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તો તંત્ર પરનું કુલ ટૉર્ક ઉગમબિંદુ પર આધારિત નથી.
7. જો પદાર્થના એક ખંડથી બીજા ખંડ પરનું ગુરુત્વક્ષેત્ર બદલાતું ન હોય તો જ, પદાર્થનું ગુરુત્વકેન્દ્ર તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સાથે સંપાત થાય છે.
8. કોણીય વેગમાન **L** અને કોણીય વેગ $\boldsymbol{\omega}$, સમાંતર સદિશો હોવા જરૂરી નથી. જોકે આ પ્રકરણમાં ચર્ચેલ સરળ પરિસ્થિતિઓમાં, જ્યારે, કોઈ સ્થિર અક્ષ કે જે દૃઢ વસ્તુની સંમિતિ અક્ષ છે તેની આસપાસ ચાકગતિ થતી હોય, તો $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ સંબંધ યથાર્થ છે, જ્યાં I ભ્રમણ અક્ષની દિશામાં પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

સ્વાધ્યાય

7.1 એક સમાન દળ ઘનતા ધરાવતાં (i) ગોળા (ii) નળાકાર (iii) રિંગ અને (iv) સમઘનના આ દરેક પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનું સ્થાન જણાવો. શું પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પદાર્થની અંદરના ભાગમાં જ હોય તે જરૂરી છે ?

7.2 HCl અણુમાં, બે પરમાણુઓના ન્યુક્લિયસો વચ્ચેનું અંતર લગભગ 1.27 Å ($1\,Å = 10^{-10}$m) છે. ક્લોરિન અણુ એ હાઇડ્રોજન પરમાણુથી લગભગ 35.5 ગણો દળદાર છે અને આ અણુનું લગભગ તમામ દળ તેના ન્યુક્લિયસમાં કેન્દ્રિત છે તેમ આપેલ છે, તો અણુના CMનું આશરે સ્થાન શોધો.

7.3 એક બાળક એક લાંબી ટ્રૉલીના એક છેડે સ્થિર બેઠો છે, જે એક લીસી સમક્ષિતિજ સપાટી પર એક નિયમિત V ઝડપથી આગળ વધી રહી છે. જો આ બાળક ટ્રૉલી પર ઊભો થઈને કોઈ પણ રીતે દોડે, તો (ટ્રૉલી + બાળક) તંત્રના CMની ઝડપ કેટલી હશે ?

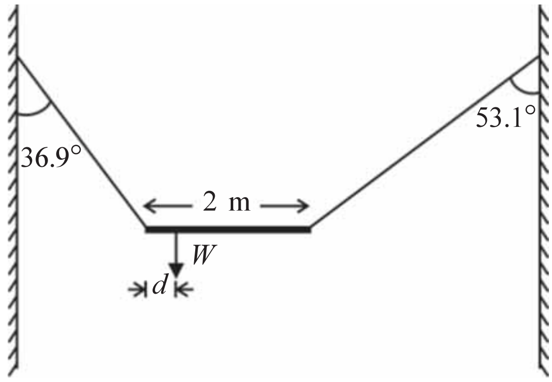
7.4 દર્શાવો કે સદિશો **a** અને **b**થી બનેલ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એ **a** × **b**ના મૂલ્યથી અડધું હોય છે.

7.5 દર્શાવો કે **a** · (**b** × **c**) એ ત્રણ સદિશો **a**, **b** અને **c**થી બનતા સમાંતરબાજુ ચતુષ્ફલકના કદના મૂલ્ય બરાબર હોય છે.

7.6 x, y, z ઘટકો સાથે જેનો સ્થાનસદિશ **r** અને p_x, p_y, p_z ઘટકો સાથે વેગમાન **p** હોય તે કણના કોણીય વેગમાન **l** ના X, Y, Z અક્ષો પરનાં ઘટકો શોધો કે જો કણ ફક્ત x-y સમતલમાં જ ગતિ કરે તો કોણીય વેગમાનને માત્ર z-ઘટક જ હોય છે.

7.7 દરેકનું દળ m અને ઝડપ υ હોય તેવા બે કણો એકબીજાથી d અંતરે રહેલ બે સમાંતર રેખાઓ પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે. દર્શાવો કે કોઈ પણ બિંદુની સાપેક્ષે કોણીય વેગમાન લેવામાં આવે તોપણ આ બે કણોના તંત્રનું સદિશ કોણીય વેગમાન સમાન જ રહે છે.

7.8 આકૃતિ 7.39માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે W વજનના એક અનિયમિત સળિયાને અવગણ્ય વજનની બે દોરીઓ દ્વારા લટકાવીને સ્થિર રાખવામાં આવેલ છે. ઊર્ધ્વદિશા (શિરોલંબ) સાથે દોરીઓ દ્વારા બનાવવામાં આવેલા ખૂણા અનુક્રમે 36.9° અને 53.1° છે. આ સળિયાની લંબાઈ 2 m છે. આ સળિયાની ડાબી બાજુના છેડાથી તેના ગુરુત્વકેન્દ્રના અંતર d ની ગણતરી કરો.



આકૃતિ 7.39

7.9 એક કારનું વજન 1800 kg છે. તેની આગળ અને પાછળની એક્સેલ્સ (ધરીઓ) વચ્ચેનું અંતર 1.8 m છે. તેનું ગુરુત્વકેન્દ્ર આગળની એક્સલથી 1.05 m પાછળ છે. સમતલ જમીન દ્વારા આગળના દરેક પૈડા (વ્હીલ) અને પાછળના દરેક પૈડાં (વ્હીલ) પર લાગતું બળ શોધો.

7.10 (a) ગોળાના સ્પર્શકને અનુલક્ષીને ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્ર શોધો. ગોળાના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્રા 2 $MR^2/5$ છે તેમ આપેલ છે, જ્યાં M એ ગોળાનું દળ અને R એ ગોળાની ત્રિજ્યા છે.

(b) M દળ અને R ત્રિજ્યાની એક તક્તીની તેના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા $MR^2/4$ છે. તક્તીને લંબ અને તેની ધાર પરના બિંદુમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને તક્તીની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

7.11 સમાન દળ અને સમાન ત્રિજ્યા ધરાવતા એક પોલા નળાકાર અને ઘન ગોળા પર સમાન મૂલ્યનું ટૉર્ક લાગુ પાડેલ છે. નળાકાર તેના પ્રમાણભૂત સંમિતિ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરવા માટે મુક્ત છે અને ગોળો એ તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરવા માટે મુક્ત છે. આપેલ સમય પછી બંનેમાંથી કોણ વધુ કોણીય ઝડપ પ્રાપ્ત કરશે ?

7.12 20 kg દળનો એક નક્કર નળાકાર તેની અક્ષને અનુલક્ષીને 100 rad s^{-1} કોણીય ઝડપથી પરિભ્રમણ કરે છે. આ નળાકારની ત્રિજ્યા 0.25 m છે. આ નળાકારની ચાકગતિ સાથે સંકળાયેલ ગતિઊર્જા કેટલી હશે ? તેની અક્ષને અનુલક્ષીને આ નળાકારના કોણીય વેગમાનનું માન કેટલું હશે ?

7.13 (a) એક બાળક તેના બે હાથ પહોળા કરીને ટર્નટેબલના કેન્દ્ર પર ઊભો છે. ટર્નટેબલ એ 40 rev/minની કોણીય ઝડપથી ભ્રમણ કરે છે. જો આ બાળક તેના હાથોને પાછા વાળે અને તેનાથી તે તેની જડત્વની ચાકમાત્રાનું મૂલ્ય ઘટાડીને તે તેની પ્રારંભિક જડત્વની ચાકમાત્રાના મૂલ્યના 2/5 ગણું કરે તો તેની કોણીય ઝડપ કેટલી થશે ? ટર્નટેબલ ઘર્ષણરહિત ફરે છે એમ ધારો.

(b) દર્શાવો કે બાળકના પરિભ્રમણની નવી ગતિઊર્જા તેના પ્રારંભિક પરિભ્રમણની ગતિઊર્જા કરતાં વધુ છે. ગતિઊર્જામાં થતો આ વધારો તમે કેવી રીતે સમજાવશો ?

7.14 3 kg દળ અને 40 cm ત્રિજ્યાના એક પોલા નળાકાર ફરતે અવગણ્ય દળનું એક દોરડું વીંટાળેલ છે. જો આ દોરડાને 30 N બળથી ખેંચવામાં આવે, તો આ નળાકારનો કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ? દોરડાનો રેખીય પ્રવેગ કેટલો હશે ? એમ ધારો કે અહીં દોરડું સરકતું નથી.

7.15 એક રોટરને 200 rad s^{-1} એક સમાન કોણીય ઝડપ જાળવવા, માટે એન્જિન 180 N m ટૉર્ક પ્રસ્થાપિત કરવું આવશ્યક છે. આ માટે ઍન્જિનને કેટલો પાવર આવશ્યક છે ? (નોંધ : ઘર્ષણની ગેરહાજરીમાં એક સમાન કોણીય વેગ એટલે શૂન્ય ટૉર્ક, વ્યવહારમાં, ઘર્ષણવાળા ટૉર્કનો સામનો કરવા માટે લગાડવા પડતાં ટૉર્કની જરૂરિયાત છે.) એમ ધારો કે ઍન્જિન 100 % કાર્યક્ષમ છે.

7.16 R ત્રિજ્યાની એક સમાન તક્તીમાંથી, $R/2$ ત્રિજ્યાના ગોળાકાર છિદ્રને કાપવામાં આવે છે. આ છિદ્રનું કેન્દ્ર મૂળ ડિસ્કના કેન્દ્રથી $R/2$ અંતરે છે. પરિણામી સપાટ પદાર્થનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર શોધો.

7.17 એક મીટર-પટ્ટી તેના મધ્યે છરીની ધાર પર સંતુલિત છે. જ્યારે એવા બે સિક્કા કે જે દરેકનું દળ 5 gm છે તેમને 12 cmના નિશાન પર એકબીજાની ઉપર મૂકવામાં આવે છે, ત્યારે આ પટ્ટી 45.0 cm પર સંતુલિત થાય છે. આ મીટર-પટ્ટીનું દળ શું હશે ?

7.18 એક ઘન ગોળો એક જ ઊંચાઈના અલગ અલગ નમન કોણ ધરાવતા બે ઢળતા સમતલ પરથી ગબડે છે. (a) શું તે દરેક કિસ્સામાં સમાન ઝડપ સાથે નીચે પહોંચશે ? (b) શું એક સમતલ કરતાં બીજા સમતલ પર વધુ સમય લેશે ? (c) જો એમ હોય તો કયા સમતલ પર અને શા માટે ?

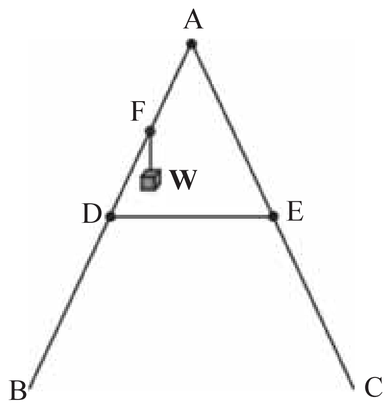
7.19 2 m ત્રિજ્યાના એક વલયનું દળ 100 kg છે. તે એક સમક્ષિતિજ સપાટી પર એવી રીતે ગબડે છે કે જેથી તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ઝડપ 20 cm/s હોય, તેને રોકવા માટે કેટલું કાર્ય કરવું પડે ?

7.20 ઑક્સિજન અણુનું દ્રવ્યમાન 5.30×10^{-26} kg અને તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તેના બે અણુઓને જોડતી રેખાને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને તેની જડત્વની ચાકમાત્ર 1.94×10^{-46} kg m^2 છે. ધારો કે કોઈ ગૅસમાં આવા અણુની સરેરાશ ઝડપ 500 m/s છે અને તેના પરિભ્રમણની ગતિઊર્જા એ તેના સ્થાનાંતરણની ગતિઊર્જાથી બે તૃતીયાંશ છે તો અણુનો સરેરાશ કોણીય વેગ શોધો.

7.21 30°ના ખૂણે નમેલા એક ઢળતા પાટિયા ઉપર એક નક્કર નળાકાર ગબડીને ઉપર તરફ જાય છે. આ ઢળતા પાટિયાના તળિયે નળાકારનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર 5 m/sની ગતિ ધરાવે છે. (a) નળાકાર આ ઢળતા પાટિયા પર કેટલો ઉપર જશે ? (b) તળિયે પાછા આવવા માટે તેને કેટલો સમય લાગશે ?

વધારાનું સ્વાધ્યાય

7.22 આકૃતિ 7.40માં બતાવ્યા પ્રમાણે BA અને CA બે બાજુઓ કે જેની લંબાઈ 1.6 મીટર છે તેવી એક નિસરણીને A પર લટકાવેલ છે. 0.5 mના એક દોરડા DEને નિસરણીની અધવચ્ચે બાંધેલ છે. BA બાજુ સાથે Bથી 1.2 m પર 40 kg વજન એક બિંદુ Fથી લટકાવવામાં આવેલ છે. ભોંયતળિયાને ઘર્ષણરહિત ધારીને અને નિસરણીના વજનની અવગણના કરીને, દોરડામાંનો તણાવ અને નિસરણી પર ભોંયતળિયા દ્વારા લગાડવામાં આવેલાં બળ શોધો. (g = 9.8 m/s^2 લો.)
(**સૂચના** : નિસરણીની દરેક બાજુનું સંતુલન અલગ અલગ ધ્યાનમાં લો.)



આકૃતિ **7.40**

7.23 એક વ્યક્તિ ઘૂમતા પ્લૅટફૉર્મ પર ઊભો છે. તેના સમક્ષિતિજ ટટ્ટાર રાખેલ દરેક હાથમાં 5 kg વજન ધરાવે છે. પ્લૅટફૉર્મની કોણીય ઝડપ 30 પરિભ્રમણ પ્રતિ મિનિટ છે. આ વ્યક્તિ તેના બંને હાથ તેના શરીરની નજીક લાવે છે. જેમાં દરેક વજનનું અક્ષથી અંતર 90 cmથી બદલાઈને 20 cm થાય છે. આ વ્યક્તિની પ્લૅટફૉર્મ સાથેની જડત્વની ચાકમાત્રા 7.6 kg m^2 જેટલી અને અચળ લેવામાં આવે છે.

(a) તેમની નવી કોણીય ઝડપ કેટલી હશે ? (ઘર્ષણ અવગણો.)

(b) શું ગતિઊર્જા આ પ્રક્રિયામાં સંરક્ષિત છે ? જો ના, તો આ પરિવર્તન ક્યાંથી આવે છે ?

7.24 10 g દળ અને 500 m/s ઝડપની એક બંદૂકની ગોળી (બુલિટ)ને બારણા પર છોડવામાં આવે છે અને તે બારણાંની બરાબર મધ્યમાં જડાઈ જાય છે. બારણું 1.0 m પહોળું છે અને તેનું વજન 12 kg છે. તે એક છેડેથી લટકાવેલ છે અને તે લગભગ ઘર્ષણ વિના એક શિરોલંબ અક્ષ ફરતે ભ્રમણ કરે છે. તેમાં બુલિટ જડિત થયા પછી બારણાંની તત્કાલીન કોણીય ઝડપ શોધો.

(**સૂચના** : એક છેડાની ઊર્ધ્વ અક્ષને અનુલક્ષીને બારણાંની જડત્વતાની ચાકમાત્રા $ML^2/3$ છે.)

7.25 બે તક્તી કે જેમની તેમની સંબંધિત અક્ષો (તક્તીને લંબ અને કેન્દ્રમાંથી પસાર થતાં હોય છે)ને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા I_1 અને I_2 છે અને તે ω_1 અને ω_2 કોણીય ઝડપે ભ્રમણ કરે છે. તેમને તેમના પરિભ્રમણ અક્ષો સંપાત થાય તેમ એકબીજાના સંપર્કમાં લાવવામાં આવે છે. (a) આ બે-તક્તી તંત્રની કોણીય ઝડપ શું છે ? (b) દર્શાવો કે સંયુક્ત તંત્રની ગતિઊર્જા એ બે તક્તીની પ્રારંભિક ગતિઊર્જાના સરવાળા કરતાં ઓછી છે. ઊર્જામાં થતાં આ ઘટાડાને તમે કેવી રીતે સમજાવશો ? $\omega_1 \neq \omega_2$ લો.

7.26 (a) લંબ અક્ષોનો પ્રમેય સાબિત કરો.

(**સૂચના** : x-y સમતલને લંબરૂપે અને ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અક્ષથી કોઈ એક બિંદુ (x, y)ના અંતરનો વર્ગ એ $x^2 + y^2$ છે.)

(b) સમાંતર અક્ષોનો પ્રમેય સાબિત કરો.

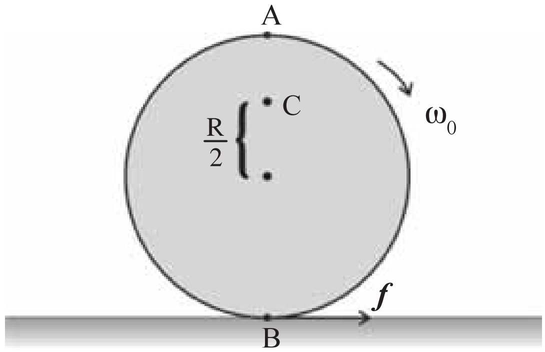
(**સૂચના** : જો દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને ઉદ્‌ગમબિંદુ તરીકે પસંદ કરવામાં આવે તો $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$)

7.27 ગતિશાસ્ત્રની વિચારધારાનો ઉપયોગ કરીને (એટલે કે બળો અને ટૉર્કના વિચાર દ્વારા) સાબિત કરો કે h ઊંચાઈના ઢળતા પાટિયાના તળિયે તેના પરથી ગબડતા પદાર્થ (જેમકે રિંગ, તક્તી, નળાકાર અથવા ગોળા જેવા)નો સ્થાનાંતરણ વેગ υનું મૂલ્ય

$$\upsilon^2 = \frac{2gh}{(1+k^2/R^2)}$$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.

નોંધો k એ પદાર્થની સંમિત અક્ષને અનુલક્ષીને ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા છે અને R પદાર્થની ત્રિજ્યા છે. પદાર્થ તેની ગતિ પાટિયાની ટોચ પરથી સ્થિર અવસ્થામાંથી શરૂ કરે છે.

7.28 ω_0 કોણીય ઝડપ સાથે તેની અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરતી એક તક્તીને સંપૂર્ણ ઘર્ષણરહિત ટેબલ પર હળવેથી (કોઈ પણ સ્થાનાતરિત બળ વગર) મૂકવામાં આવે છે. તક્તીની ત્રિજ્યા R છે. તક્તી પર દર્શાવેલ બિંદુઓ A, B અને Cના રેખીય વેગો કેટલા હશે ?



આકૃતિ **7.41**

7.29 સમજાવો કે આકૃતિ 7.41માંની તક્તીને દર્શાવેલ દિશામાં ગબડવા માટે ઘર્ષણ શા માટે જરૂરી છે.

(a) સંપૂર્ણ રોલિંગ શરૂ થાય તે પહેલાં B આગળ ઘર્ષણ બળની દિશા અને ઘર્ષણથી ઉદ્ભવતા ટૉર્કની દિશા આપો.

(b) સંપૂર્ણ રોલિંગ શરૂ થયા પછી ઘર્ષણ બળ કેટલું હશે ?

7.30 એક નક્કર તકતી અને રિંગ જે બંનેની ત્રિજ્યા 10 cm છે તે બંનેને જેની પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ 10π rad s^{-1} જેટલી છે. તેવા એક સમક્ષિતિજ કોષ્ટક પર એક સાથે મૂકવામાં આવે છે. આ બંનેમાંથી કોણ વહેલું રોલિંગ શરૂ કરશે ? સ્થિત ઘર્ષણાંક $\mu_s = 0.2$ છે.

7.31 10 kg દળ અને 15 cm ત્રિજ્યાનો એક નળાકાર 30°થી ઢળતા પાટિયા પર સંપૂર્ણપણે ગબડે છે. સ્થિર ઘર્ષણાંક $\mu_s = 0.25$.

(a) નળાકાર પર લાગતું ઘર્ષણ બળ કેટલું હશે ?

(b) રોલિંગ દરમિયાન ઘર્ષણ સામે કેટલું કાર્ય કરવામાં આવ્યું હશે ?

(c) જો આ પાટિયાનો ઢોળાવ θ વધારવામાં આવે, તો θ ના ક્યા મૂલ્ય માટે આ નળાકાર સંપૂર્ણતઃ ગબડવાને બદલે સરકવાનું શરૂ કરશે ?

7.32 નીચેનું દરેક વિધાન કાળજીપૂર્વક વાંચો અને તે સાચું છે કે ખોટું તે કારણ સાથે જણાવો :

(a) રોલિંગ દરમિયાન ઘર્ષણ બળ એ તે દિશામાં લાગે છે કે જે દિશામાં પદાર્થના CMની ગતિ હોય.

(b) રોલિંગ દરમિયાન સંપર્ક બિંદુની તાત્ક્ષણિક ઝડપ શૂન્ય છે.

(c) રોલિંગ દરમિયાન સંપર્ક બિંદુનો તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ શૂન્ય છે.

(d) શુદ્ધ (સંપૂર્ણ) રોલિંગ ગતિ માટે, ઘર્ષણ વિરુદ્ધ થતું કાર્ય શૂન્ય છે.

(e) એક સંપૂર્ણ ઘર્ષણરહિત ઢળતા પાટિયા પરથી નીચે તરફ ગતિ કરતાં એક વ્હીલ સરકતી (રોલિંગ નહિ) ગતિ કરશે.

7.33 કણોના તંત્રની ગતિનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ગતિમાં વિભાજન :

(a) બતાવો કે $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i' + m_i\mathbf{V}$

જ્યાં $\mathbf{p}_i$ એ iમા કણ (m_i દળના)નું વેગમાન અને $\mathbf{p}_i' = m_i\boldsymbol{\upsilon}_i'$. નોંધ $\boldsymbol{\upsilon}_i'$ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સાપેક્ષે iમા કણનો વેગ છે.

આ ઉપરાંત દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે $\Sigma\mathbf{p}_i' = 0$

(b) બતાવો કે $K = K' + \frac{1}{2}MV^2$

જ્યાં K એ કણોના તંત્રની કુલ ગતિઊર્જા છે. K' એ જ્યારે કણોના વેગોને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના સંદર્ભમાં લેવામાં આવે છે ત્યારની અને $MV^2/2$ એ સમગ્ર તંત્રની સ્થાનાંતરણની ગતિ ઊર્જા છે. (એટલે કે તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ). આ પરિણામ પરિચ્છેદ 7.14માં ઉપયોગમાં લીધેલ છે.

(c) દર્શાવો કે $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times M\mathbf{V}$ છે. જ્યાં $\mathbf{L}' = \Sigma\mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i'$ એ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સાપેક્ષે તંત્રનું કોણીય વેગમાન છે. જ્યાં વેગોને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સાપેક્ષે લીધેલ છે. યાદ રાખો $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$;

બાકીની બધી સંજ્ઞાઓ એ પ્રકરણમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલ પ્રમાણભૂત સંજ્ઞાઓ છે. નોંધો $\mathbf{L}'$ અને $M\mathbf{R} \times \mathbf{V}$ એ અનુક્રમે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તંત્રનું કોણીય વેગમાન અને કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનું કોણીય વેગમાન કહેવામાં આવે છે.

(d) બતાવો કે $\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \sum \mathbf{r}_i' \times \frac{d\mathbf{p}'}{dt}$

વધુમાં, દર્શાવો કે $\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \tau'_{ext}$

જ્યાં τ'_{ext} એ આ તંત્ર પર દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને લાગતા તમામ બાહ્ય ટૉર્કનો સરવાળો છે.

(**સૂચના :** દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની વ્યાખ્યા અને ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમનો ઉપયોગ કરો. એમ ધારો કે કોઈ પણ બે કણો વચ્ચે લાગતું આંતરિક બળ આ બે કણોને જોડતી રેખાની દિશામાં લાગે છે.)

પ્લુટો – એક અવિકસિત ગ્રહ (Pluto - A Dwarf Planet)

ઝેક પ્રજાસત્તાકમાંના પ્રેગ (Prague)માં ઑગસ્ટ 24, 2006માં મળેલી The International Astronomical Union (IAU) એ IAU-2006ની સામાન્યસભામાં આપણા સૂર્યમંડળમાંના ગ્રહો માટે એક નવી વ્યાખ્યા અપનાવી. નવી વ્યાખ્યા મુજબ પ્લુટો એ હવે ગ્રહ નથી. આનો અર્થ એ કે સૂર્યમંડળ આઠ ગ્રહોનું બનેલું છે : બુધ, શુક્ર, પૃથ્વી, મંગળ, ગુરુ, શનિ, યુરેનસ અને નેપ્ચૂન. IAU પ્રણાલિકા મુજબ આપણા સૂર્યમંડળમાં ઉપગ્રહો સિવાય 'ગ્રહો' અને 'અન્ય પદાર્થો'ને અવકાશીય પદાર્થોના ત્રણ સ્પષ્ટ વર્ગોમાં વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

1. 'ગ્રહ' એવો અવકાશીય પદાર્થ છે કે જે (a) સૂર્યની ફરતે કક્ષામાં છે (b) દૃઢ પદાર્થનાં બળોને પહોંચી વળવા (હરાવવા) માટેના પોતાના ગુરુત્વાકર્ષણ માટે પૂરતું દળ ધરાવે છે, જેથી તે દ્રવસ્થિત (Hydrostatic) સંતુલન (લગભગ ગોળ) આકાર પ્રાપ્ત કરે છે અને (c) કક્ષાની નજીકના વિસ્તારની સાફસૂફી કરેલી છે.

2. અવિકસિત ગ્રહ એ એવો અવકાશીય પદાર્થ છે કે જે (a) જે સૂર્યની ફરતે કક્ષામાં છે. (b) જે દૃઢ પદાર્થનાં બળોને પહોંચી વળવા (હરાવવા) માટેના પોતાના ગુરુત્વાકર્ષણ માટે પૂરતું દળ ધરાવે છે. જેથી તે દ્રવસ્થિત (Hydrostatic) સંતુલન (લગભગ ગોળ) આકાર પ્રાપ્ત કરે છે (c) તેવી કક્ષાની નજીકના વિસ્તારની સાફસૂફી કરેલી હોતી નથી અને જે પોતે ઉપગ્રહ નથી.

3. ઉપગ્રહો સિવાયના સૂર્યની આસપાસ ફરતા બધા 'અન્ય પદાર્થો' સામૂહિક રીતે 'સૂર્યમંડળના નાના પદાર્થો' તરીકે ઓળખાશે.

સૂર્યમંડળમાં બીજા આઠ ગ્રહોથી વિપરીત, પ્લુટોનો કક્ષીય માર્ગ 'અન્ય પદાર્થો'ના અને નૅપ્ચૂન ગ્રહના માર્ગ સાથે સંપાત થાય છે. હાલમાં 'અન્ય પદાર્થો'માં ઉલ્કાઓ, મોટા ભાગના ટ્રાન્સ-નૅપ્ચૂનિયન પદાર્થો (TNOs), ધૂમકેતુઓ અને અન્ય નાના પદાર્થોનો સમાવેશ થાય છે.

ઉપરની વ્યાખ્યા અનુસાર પ્લુટો 'અવિકસિત ગ્રહ' છે અને તેને ટ્રાન્સ-નૅપ્ચૂનિયન પદાર્થોની નવી શ્રેણીના મૂળ સ્વરૂપ (Prototype) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

પ્રકરણ 8

ગુરુત્વાકર્ષણ (GRAVITATION)

8.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આપણે આપણા જીવનના પ્રારંભિક તબક્કાથી બધા પદાર્થોના પૃથ્વી તરફ આકર્ષાવાના વલણથી સભાન છીએ. કંઈક પણ ઉપર તરફ ફેંકીએ તો તે (છેવટે તો) પૃથ્વી તરફ પાછું ફરે છે. ટેકરી પર ચઢવાનું, ટેકરી પરથી ઊતરવા કરતાં ઘણું વધારે થકવી દે તેવું છે. ઊંચે રહેલા વાદળોમાંથી વર્ષાબિંદુઓ પૃથ્વી તરફ પડે છે અને આવી બીજી ઘણી ઘટનાઓ છે. ઐતિહાસિક રીતે, ઇટાલિયન ભૌતિકવિજ્ઞાની ગૅલિલિયોએ (1564-1642) એ હકીકત જાણી લીધી હતી કે, કોઈપણ દળ ધરાવતા હોય તેવા બધા પદાર્થો અચળ પ્રવેગથી પૃથ્વી તરફ પ્રવેગિત થાય છે. એવું કહેવાય છે કે તેણે આ હકીકતનું સાર્વજનિક નિર્દેશન કર્યું હતું. સત્ય શોધવા માટે તેણે ઢોળાવવાળાં સમતલો પરથી ગબડતા પદાર્થો અંગે ખાસ પ્રયોગો કર્યા અને તે પરથી તેણે ગુરુત્વપ્રવેગનું જે મૂલ્ય મેળવ્યું તે ત્યાર પછીથી, વધારે ચોકસાઈપૂર્વક મેળવાયેલ મૂલ્યની નજીક હતું.

તારાઓ, ગ્રહો અને તેમની ગતિનું અવલોકન આની સાથે સંબંધ ધરાવતી ન હોય તેવી ઘટના લાગે છે પણ છેક આદિકાળથી ઘણા દેશોમાં તે ધ્યાન આકર્ષક વિષય રહ્યો છે. આદિકાળથી અવલોકનોમાં વર્ષોનાં વર્ષો સુધી આકાશમાં જેમનું સ્થાન બદલાતું દેખાતું ન હોય તેવા તારાઓની ઓળખ થઈ હતી. વધુ રસપ્રદ પદાર્થો તો તે ગ્રહો છે જે તારાઓની પૃષ્ઠભૂમિમાં પોતાની નિયમિત ગતિ ધરાવે છે. ગ્રહોની ગતિ અંગે સૌથી પ્રથમ નોંધાયેલ મૉડેલ, લગભગ 2000 વર્ષ પહેલાં ટૉલેમી (Ptolemy)એ રજૂ કરેલું 'પૃથ્વી કેન્દ્રિય' (Geo-Centric) મૉડેલ હતું, જેમાં તારાઓ, સૂર્ય અને ગ્રહો એ બધા આકાશી પદાર્થો પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરે છે. અવકાશી પદાર્થો માટે વિચારી શકાય તેવી શક્ય ગતિ એ વર્તુળાકાર ગતિ હતી. ગ્રહોની દેખાતી ગતિને રજૂ કરવા માટે ટૉલેમીએ ગતિની ગૂંચવણભરી (જટિલ) યોજનાઓ રજૂ કરી હતી. તેણે ગ્રહોને વર્તુળમાં ગતિ કરતા જણાવ્યા હતા અને આ વર્તુળના કેન્દ્ર વધુ મોટા વર્તુળમાં ગતિ કરતા હતા. ભારતીય ખગોળશાસ્ત્રીઓએ પણ લગભગ 400 વર્ષ પછી આવા સિદ્ધાંતો રજૂ કર્યા હતા. જોકે આર્યભટ્ટ (ઈશુની પાંચમી સદી) દ્વારા તેના પુસ્તકમાં એક વધારે સુંદર મૉડેલ-'સૂર્યકેન્દ્રી' (Helio-Centric) મૉડેલનો ઉલ્લેખ કરાયેલો હતો જેમાં સૂર્ય કેન્દ્રમાં હતો, જેની આસપાસ બધા ગ્રહો ભ્રમણ કરતા હતા. એક હજાર વર્ષ પછી નિકોલસ કૉપરનિક્સ (1473-1543) નામના પોલૅન્ડના એક સાધુએ એક નિર્ણાયક મૉડેલ રજૂ કર્યું જેમાં સૂર્ય કેન્દ્રમાં સ્થિર હોય તેવાં વર્તુળોમાં, ગ્રહો ગતિ કરતા હતા. તેના સિદ્ધાંતને ચર્ચ દ્વારા અમાન્ય કરવામાં

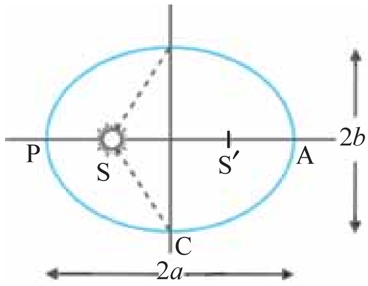
આવ્યું હતું, પરંતુ તેના ટેકેદારોમાં ગૅલિલિયો નોંધપાત્ર હતો જેને પોતાની માન્યતા માટે રાજસત્તા તરફથી કાયદાકીય કાર્યવાહીનો સામનો કરવો પડ્યો હતો.

લગભગ ગૅલિલિયોના સમય દરમિયાન ડેન્માર્કના એક ઉમદા વ્યક્તિ ટાઈકો બ્રાહે (1546-1601)એ પોતાનું સમગ્ર જીવન નરી આંખે ગ્રહોનાં અવલોકનો નોંધવામાં વિતાવ્યું હતું. તેણે એકઠી કરેલી વિગતોનું પાછળથી તેના મદદનીશ જોહનસ કૅપ્લર (1571-1640) દ્વારા વિશ્લેષણ કરવામાં આવ્યું. એ વિગતો પરથી તેણે ત્રણ અદ્ભુત નિયમો તારવ્યા જે કૅપ્લરના નિયમો તરીકે ઓળખાય છે. આ નિયમોની ન્યૂટનને ખબર હતી અને તેથી વૈજ્ઞાનિક હરણફાળ લગાવતા ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમને રજૂ કરવામાં તેનાથી તેને મદદ મળી હતી.

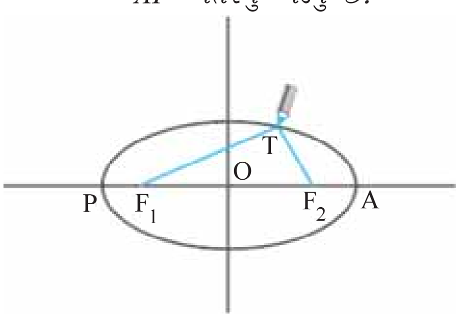
8.2 કૅપ્લરના નિયમો (KEPLER'S LAWS)

કૅપ્લરના ત્રણ નિયમો નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

1. કક્ષાઓનો નિયમ (Law of Orbits) : બધા ગ્રહો એવી દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે કે જેના એક કેન્દ્ર પર સૂર્ય રહેલો હોય. (આકૃતિ 8.1(a))



આકૃતિ 8.1(a) ગ્રહ વડે સૂર્યની આસપાસ રચાયેલું દીર્ઘવૃત્ત. સૌથી નજીકનું બિંદુ P છે અને સૌથી દૂરનું બિંદુ A છે. P ને સૂર્યનીચ બિંદુ (Perihelion) અને A ને સૂર્યોચ્ચ બિંદુ (Aphelion) કહે છે. અર્ધદીર્ઘ અક્ષ એ AP અંતરનું અડધું છે.



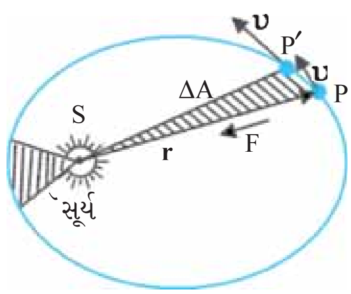
આકૃતિ 8.1(b) દીર્ઘવૃત્ત દોરવું. એક દોરીના છેડાઓને F_1 અને F_2 આગળ જડી દીધેલ છે. પેન્સિલની અણી વડે દોરીને કડક રાખી અણીને ફેરવવામાં આવે છે.

* પૃ. 182 પર બૉક્સમાં આપેલ માહિતીનો સંદર્ભ લો.

આ નિયમ કૉપરનિક્સના મોડેલ કે જેમાં માત્ર વર્તુળાકાર કક્ષાઓ માન્ય હતી તેના કરતાં જુદો પડે છે. દીર્ઘવૃત્ત એ એક બંધ વક્ર છે જેનો એક વિશિષ્ટ કિસ્સો એ વર્તુળ છે. આવું દીર્ઘવૃત્ત સહેલાઈથી નીચે મુજબ દોરી શકાય :

બે બિંદુઓ F_1 અને F_2 પસંદ કરો. અમુક લંબાઈની દોરી લઈને તેના છેડાઓને ટાંકણીની મદદથી F_1 અને F_2 આગળ જડી દો. પેન્સિલની અણી વડે દોરીને કડક ખેંચેલી રાખી પેન્સિલને ફેરવતા જઈ એક વક્ર દોરો. (આકૃતિ 8.1(b)) આ રીતે મળેલો બંધ વક્ર દીર્ઘવૃત્ત કહેવાય છે. સ્પષ્ટ જ છે કે દીર્ઘવૃત્ત પરના કોઈ પણ બિંદુ T માટે F_1 અને F_2થી અંતરોનો સરવાળો અચળ રહે છે. F_1 અને F_2ને કેન્દ્રો કહે છે. F_1 અને F_2 બિંદુઓને જોડી તે રેખાને લંબાવો જે દીર્ઘવૃત્તને આકૃતિ 8.1(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે P અને A બિંદુએ છેદે. PA રેખાનું મધ્યબિંદુ O દીર્ઘવૃત્તનું મધ્યબિંદુ છે અને PO = AO લંબાઈને દીર્ઘવૃત્તની અર્ધદીર્ઘ અક્ષ કહે છે. વર્તુળ માટે બે કેન્દ્રો ભળી જઈને એક બને અને અર્ધદીર્ઘઅક્ષ એ વર્તુળની ત્રિજ્યા બને છે.

2. ક્ષેત્રફળોનો નિયમ (Law of Areas) : કોઈ પણ ગ્રહને સૂર્ય સાથે જોડતી રેખા સમાન સમયગાળામાં સમાન ક્ષેત્રફળ આંતરે છે (આકૃતિ 8.2). આ નિયમ એવાં અવલોકનો પરથી મળેલ છે કે જ્યારે ગ્રહો સૂર્યથી દૂર હોય ત્યારે તે નજીક હતા તેના કરતાં ધીમા ફરતા જણાય છે.



આકૃતિ 8.2 ગ્રહ P સૂર્યની આસપાસ દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષામાં ગતિ કરે છે. છાયાંકિત ક્ષેત્રફળ એ નાના સમયગાળા Δtમાં આંતરાતું ક્ષેત્રફળ ΔA છે.

(3) આવર્તકાળનો નિયમ (Law of Periods) : ગ્રહના પરિભ્રમણના આવર્તકાળનો વર્ગ તેણે રચેલા દીર્ઘવૃત્તની અર્ધદીર્ઘ અક્ષના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

કોષ્ટક 8.1 આઠ* ગ્રહોના સૂર્યની ફરતે પરિભ્રમણના આવર્તકાળ (લગભગ) તેમજ તેમની અર્ધદીર્ઘઅક્ષનાં મૂલ્યો આપે છે.

કોષ્ટક 8.1 નીચે આપેલ ગ્રહોની ગતિની માપણીની વિગતો કેપ્લરના આવર્તકાળના નિયમની પુષ્ટિ કરે છે.

(a = અર્ધદીર્ઘ અક્ષ, 10^{10}mના એકમોમાં
T = ગ્રહના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ, વર્ષમાં (y)
Q = (T^2/a^3) આંક, $10^{-34}y^2m^{-3}$ના એકમોમાં

ગ્રહ	a	T	Q
બુધ	5.79	0.24	2.95
શુક્ર	10.8	0.615	3.00
પૃથ્વી	15.0	1	2.96
મંગળ	22.8	1.88	2.98
ગુરુ	77.8	11.9	3.01
શનિ	143	29.5	2.98
યુરેનસ	287	84	2.98
નૅપ્ચ્યૂન	450	165	2.99
પ્લુટો*	590	248	2.99

ક્ષેત્રફળોનો નિયમ કે જે કોઈ પણ કેન્દ્રિય બળ માટે સાચો છે તે કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના પરિણામ તરીકે સમજી શકાય છે. કેન્દ્રિય બળ એવું છે કે ગ્રહ પર લાગતું બળ, સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતા સદિશ પર હોય છે. સૂર્યને ઉદ્‌ગમ તરીકે લઈ ગ્રહનાં સ્થાન અને વેગમાન અનુક્રમે ધારો કે **r** અને **P** વડે દર્શાવાય છે. m દળના ગ્રહ દ્વારા Δt સમયગાળામાં આંતરાતું ક્ષેત્રફળ ΔA છે. (આકૃતિ 8.2), જ્યાં

$$\Delta A = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\upsilon}\Delta t) \qquad (8.1)$$

તેથી,

$$\Delta A/\Delta t = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})/m, \text{ (કારણ કે, } \boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{p}/m)$$

$$= \mathbf{L} / (2m) \qquad (8.2)$$

જ્યાં **υ** વેગ છે, **L** કોણીય વેગમાન છે, જે (**r** × **p**) બરાબર છે. સ્થાનસદિશ **r**ની દિશા પર લાગતા કેન્દ્રિય બળ માટે, ગ્રહ પરિભ્રમણ કરતો જાય તે દરમિયાન **L** અચળ રહે છે. તેથી છેલ્લા સમીકરણ મુજબ **ΔA/Δt** એ અચળાંક છે. આ ક્ષેત્રફળોનો નિયમ જ છે. ગુરુત્વ બળ એ કેન્દ્રિય બળ છે અને તેથી ક્ષેત્રફળોનો નિયમ પળાય છે.

જોહનસ કેપ્લર (1571-1630) એ જર્મન મૂળનો વિજ્ઞાની હતો. તેણે ટાઇકો બ્રાહે અને તેના સહકાર્યકરોએ કાળજીપૂર્વક લીધેલાં અવલોકનો પરથી ગ્રહોની ગતિ અંગેના ત્રણ નિયમોની રચના કરી. કેપ્લર પોતે બ્રાહેનો મદદનીશ હતો અને તેને ગ્રહો અંગેના ત્રણ નિયમો પર પહોંચતાં સોળ વર્ષ જેટલો લાંબો સમય લાગ્યો હતો. ટેલિસ્કોપમાં દાખલ થયા પછી પ્રકાશનું શું થાય છે તે જણાવનાર તે પ્રથમ હોવાથી તેને ભૌમિતિક પ્રકાશશાસ્ત્રનો પ્રણેતા ગણવામાં આવે છે.

* પૃ. 182 પર બૉક્સમાં આપેલ માહિતીનો સંદર્ભ લો.

▶ *ઉદાહરણ 8.1* ધારો કે આકૃતિ 8.1(a)માં સૂર્યનીચ (Perihelion) બિંદુ P આગળ ગ્રહની ઝડપ υ_p અને સૂર્યથી ગ્રહનું SP અંતર r_p છે. $\{r_p, \upsilon_p\}$નો, સૂર્યોચ્ચ (Aphetion) બિંદુ A આગળની અનુરૂપ રાશિઓ સાથે સંબંધ મેળવો. ગ્રહને BAC અને CPB અંતર કાપતાં સરખો સમય લાગશે ?

ઉકેલ P આગળ કોણીય વેગમાનનું માન $L_p = m_p \upsilon_p r_p$ છે કારણ કે આકૃતિ જોતાં જ $\mathbf{r}_p$ અને $\boldsymbol{\upsilon}_p$ પરસ્પર લંબ દેખાય છે. તે જ પ્રમાણે $L_A = m_p \upsilon_A r_A$. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણ પરથી,

$$m_p \upsilon_p r_p = m_p \upsilon_A r_A$$

$$\text{અથવા } \frac{\upsilon_p}{\upsilon_A} = \frac{r_A}{r_p}$$ ◀

અહીં, $r_A > r_p$ હોવાથી $\upsilon_p > \upsilon_A$

આકૃતિ 8.1માં ત્રિજ્યા સદિશો SB અને SC સાથે દીર્ઘવૃત્ત વડે ઘેરાયેલું ક્ષેત્રફળ SBAC, SBPC કરતાં વધુ છે. કેપ્લરના બીજા નિયમ પરથી એકસમાન સમયમાં એકસરખું ક્ષેત્રફળ આંતરાય છે. આથી, ગ્રહને CPB અંતર કરતાં BAC અંતર કાપતાં વધુ સમય લાગશે.

8.3 ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ (UNIVERSAL LAW OF GRAVITATION)

એક એવી દંતકથા છે કે, ઝાડ પરથી પડતા સફરજનને જોઈને ન્યૂટનને પ્રેરણા થઈ અને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ મેળવ્યો, જેના પરથી પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણ તેમજ કેપ્લરના નિયમોની સમજૂતી આપી શકાઈ. ન્યૂટનનો તર્ક એવો હતો કે, R_m ત્રિજ્યાની કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા ચંદ્ર પર, પૃથ્વીના ગુરુત્વને લીધે કેન્દ્રગામી પ્રવેગ હોય છે જેનું માન

$$a_m = \frac{V^2}{R_m} = \frac{4\pi^2 R_m}{T^2} \qquad (8.3)$$

છે, જ્યાં V એ ચંદ્રની ઝડપ છે જે આવર્તકાળ T સાથે $V = 2\pi R_m/T$ સંબંધ ધરાવે છે. આવર્તકાળ T લગભગ 27.3 દિવસ છે અને R_mનું મૂલ્ય, તે સમયે પણ લગભગ 3.84×10^8m હોવાનું જાણીતું હતું. જો આપણે આ મૂલ્યો સમીકરણ (8.3)માં અવેજ કરીએ, તો આપણને a_mનું મૂલ્ય, પૃથ્વીની સપાટી પર પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણથી ઉદ્‌ભવતા ગુરુત્વપ્રવેગ gના મૂલ્ય કરતાં ઘણું નાનું મળે છે.

કેન્દ્રિય બળો (Central Forces)

આપણે જાણીએ છીએ કે, ઊગમબિંદુને અનુલક્ષીને કોઈ એક કણના કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય-દર $\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ છે.

જો તેની પરના બળ **F**ને લીધે લાગતું ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ શૂન્ય બને તો કણના કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. જ્યારે **F** શૂન્ય હોય અથવા **F** એ **r**ની દિશામાં હોય ત્યારે આવું થાય છે. આપણને એવાં બળોમાં રસ છે જેઓ બીજી શરતનું પાલન કરતા હોય. કેન્દ્રિય બળો આ બીજી શરતનું પાલન કરે છે.

'કેન્દ્રિય' બળ હંમેશાં એક નિશ્ચિત બિંદુ તરફની દિશામાં અથવા તેનાથી દૂરની દિશામાં હોય છે. એટલે કે નિશ્ચિત બિંદુને અનુલક્ષીને બળના લાગબિંદુના સ્થાનસદિશની દિશામાં હોય છે (નીચેની આકૃતિ જુઓ). ઉપરાંત કેન્દ્રિય બળનું માન નિશ્ચિત બિંદુથી બળના લાગબિંદુના અંતર **r** પર આધાર રાખે છે. $F = F(r)$.

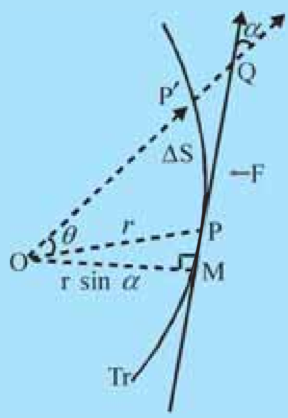
કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ થતી ગતિમાં, કોણીય વેગમાનનું હંમેશાં સંરક્ષણ થાય છે. આ પરથી બે મહત્ત્વનાં પરિણામ મળે :

(1) કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ કણની ગતિ હંમેશાં એક સમતલમાં સીમિત હોય છે.

(2) બળના કેન્દ્ર (નિશ્ચિત બિંદુ)ને અનુલક્ષીને કણના સ્થાનસદિશને અચળ ક્ષેત્રીય વેગ હોય છે. બીજા શબ્દોમાં કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ કણ ગતિ કરતો હોય ત્યારે તેનો સ્થાન સદિશ એક સમાન સમયમાં એક સમાન ક્ષેત્રફળ આંતરે છે.

આ બંને પરિણામો સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરો. તમારે એ જાણવું જરૂરી છે કે ક્ષેત્રીય વેગ,
$dA/dt = \frac{1}{2} r\, \upsilon \sin\alpha$ વડે અપાય છે.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચાનો ત્વરિત ઉપયોગ, સૂર્યના ગુરુત્વબળની અસર હેઠળ ગ્રહની ગતિ પર કરી શકાય છે. સરળતા ખાતર આપણે સૂર્યને એટલો ભારે ગણી લઈએ કે તે સ્થિર રહે છે. સૂર્યનું ગ્રહ પરનું ગુરુત્વબળ, સૂર્ય તરફની દિશામાં છે. આ બળ, $F = F(r)$ આવશ્યકતાનું પણ પાલન કરે છે. કારણ કે $F = G\, m_1 m_2/r^2$ જ્યાં m_1 અને m_2 એ અનુક્રમે ગ્રહ અને સૂર્યના દળ છે અને G એ ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક છે. આથી ઉપર દર્શાવેલાં બે પરિણામો, (1) અને (2), ગ્રહની ગતિને લાગુ પાડી શકાય છે. વાસ્તવમાં, પરિણામ (2)એ ખૂબ જાણીતો એવો કેપ્લરનો બીજો નિયમ છે.



Tr એ કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ કણનો ગતિપથ છે. *P* સ્થાને બળ **OP** પર (**PO** દિશામાં) છે, *O* બળનું કેન્દ્ર છે, તેને ઊગમબિંદુ તરીકે લીધેલ છે. Δt સમયમાં, કણ *P* થી *P'* પર ગતિ કરે છે. ચાપ $PP' = \Delta s = \upsilon \Delta t$. *P* આગળ ગતિપથને દોરેલો સ્પર્શક *PQ*, *P* આગળના વેગની દિશા આપે છે. Δt સમયમાં આંતરાતું ક્ષેત્રફળ; $POP' \approx (r \sin\alpha)\, PP'/2 = (r\, \upsilon \sin\alpha)\, \Delta t/2$ છે.

આ સ્પષ્ટ દર્શાવે છે કે, પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ અંતર સાથે ઘટે છે. જો પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ઘટતું જાય તો, $a_m \propto R_m^{-2}$ મળે, વળી $g \propto R_E^{-2}$ અને આમ,

$$\frac{g}{a_m} = \frac{R_m^2}{R_E^2} = 3600 \qquad (8.4)$$

જે, $g \approx 9.8 \text{ m s}^{-2}$ અને સમીકરણ (8.3) પરથી મળતા a_mના મૂલ્ય સાથે સુસંગત છે. આ અવલોકનો પરથી ન્યૂટને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ નીચે મુજબ આપ્યો :

વિશ્વમાંનો દરેક પદાર્થ બીજા દરેક પદાર્થને બળ દ્વારા આકર્ષે છે કે જે તેમના દળના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

આ અવતરણ ન્યૂટનના પ્રખ્યાત ગ્રંથ 'Mathematical Principles of Natural Philosophy' (ટૂંકમાં Principia)માંથી છે.

ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમને ગાણિતીક રીતે આમ રજૂ કરાય : એક બિંદુવત્ દળ m_1ને લીધે બીજા બિંદુવત્ દળ m_2 પર લાગતા બળ **F**નું માન

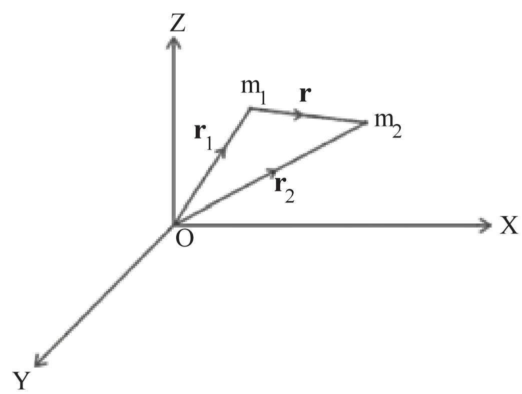
$$|\mathbf{F}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (8.5)$$

છે. સમીકરણ (8.5)ને સદિશ સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$\mathbf{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}(-\hat{\mathbf{r}}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$= -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

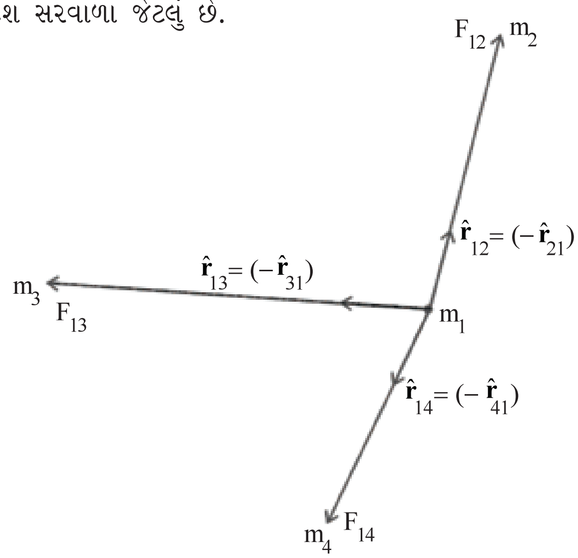
જ્યાં G એ ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક છે. $\hat{\mathbf{r}}$ એ m_1 થી m_2ની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે અને આકૃતિ 8.3માં દર્શાવ્યા મુજબ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ છે.



આકૃતિ 8.3 m_1 પર m_2 વડે લાગતું બળ **r** પર છે. જ્યાં સદિશ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ છે.

ગુરુત્વાકર્ષણ બળ એ આકર્ષી બળ છે. એટલે કે બળ **F**, −**r**ની દિશામાં છે. બિંદુવત્ દળ m_1 પર m_2ને લીધે લાગતું બળ, ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ મુજબ −**F** છે. આમ, પદાર્થ 1 પર 2ને લીધે લાગતું ગુરુત્વબળ $\mathbf{F}_{12}$ અને પદાર્થ 2 પર 1ને લીધે લાગતું ગુરુત્વબળ $\mathbf{F}_{21}$ વચ્ચેનો સંબંધ $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ છે.

સમીકરણ (8.5)ને આપણી વિચારણા હેઠળના પદાર્થો પર લાગુ પાડતાં પહેલાં આપણે ધ્યાન રાખવું પડે, કારણ કે નિયમ તો બિંદુવત્ દળો અંગે છે જ્યારે આપણે જેમને પરિમિત પરિમાણ હોય તેવા વિસ્તારીત પદાર્થો સાથે કામ પાડવાનું છે. જો આપણી પાસે બિંદુવત્ દળોનો સમૂહ હોય, તો તેમાંના કોઈ પણ એક પર લાગતું બળ, આકૃતિ 8.4માં દર્શાવ્યા મુજબ, બીજા બધા બિંદુવત્ દળો વડે તેના પર લાગતાં બળોના સદિશ સરવાળા જેટલું છે.



આકૃતિ 8.4 બિંદુવત્ દળ m_1 પર લાગતું ગુરુત્વબળ, m_2, m_3 અને m_4 વડે લાગતાં ગુરુત્વબળોના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે.

m_1 પર લાગતું કુલ બળ

$$\mathbf{F}_1 = -\left(\frac{Gm_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} + \frac{Gm_3 m_1}{r_{31}^2}\hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{Gm_4 m_1}{r_{41}^2}\hat{\mathbf{r}}_{41}\right)$$

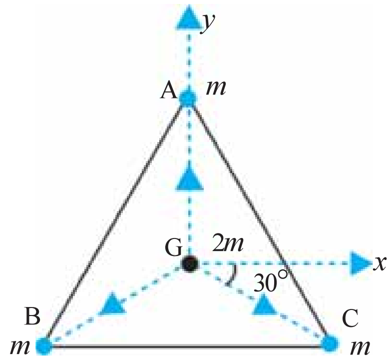
અહીં, $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ = m_2 થી m_1 તરફનો એકમ સદિશ, વગેરે.

આપેલા બિંદુએ એકમ દળ દીઠ લાગતા ગુરુત્વબળને તે બિંદુ આગળની ગુરુત્વ તીવ્રતા (અથવા ગુરુત્વક્ષેત્ર) કહે છે. તેનો એકમ N/kg છે.

▶ *ઉદાહરણ 8.2* સમબાજુ ત્રિકોણ ABCના દરેક શિરોબિંદુ પર m kg જેટલું દળ ધરાવતાં પદાર્થ રાખેલ છે.

(a) ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર G પર મૂકેલા 2*m* દળ પર કેટલું બળ લાગશે ? (b) જો શિરોબિંદુ A પરનું દળ બમણું કરવામાં આવે તો કેટલું બળ લાગે ?

AG = BG = CG = 1m લો. (જુઓ આકૃતિ 8.5.)



આકૃતિ 8.5 *ત્રિકોણ ABCનાં ત્રણ શિરોબિંદુએ સમાન દળ મૂકેલ છે. 2m દળ મધ્યકેન્દ્ર G પર મૂકેલ છે.*

ઉકેલ (a) GC અને ધન x-અક્ષ વચ્ચેનો કોણ 30° છે, તેટલા જ કોણ GB અને ઋણ x-અક્ષ વચ્ચે છે. સદિશ રૂપમાં વ્યક્તિગત બળો આ પ્રમાણે છે :

$$\mathbf{F}_{GA} = \frac{Gm(2m)}{1}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}_{GB} = \frac{Gm(2m)}{1}(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^\circ)$$

$$\mathbf{F}_{GC} = \frac{Gm(2m)}{1}(\hat{\mathbf{i}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^\circ)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અને સદિશ સરવાળાના નિયમ પરથી $(2m)$ પર પરિણામી ગુરુત્વબળ $\mathbf{F}_R$ હોય, તો

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_G &= \mathbf{F}_{GA} + \mathbf{F}_{GB} + \mathbf{F}_{GC}\\ &= 2Gm^2\hat{\mathbf{j}} + 2Gm^2(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^\circ)\\ &\quad + 2Gm^2(\hat{\mathbf{i}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^\circ) = 0\end{aligned}$$

વૈકલ્પિક રીતે સંમિતિ પરથી પણ પરિણામી બળ શૂન્ય બનવું જોઈએ તેવી કોઈ અપેક્ષા રાખી શકે.

(b) સંમિતિ પરથી બળનો x-ઘટક નાબૂદ થાય છે અને y-ઘટક બાકી રહે છે.

$$\mathbf{F}_R = 4Gm^2\hat{\mathbf{j}} - 2Gm^2\hat{\mathbf{j}} = 2Gm^2\hat{\mathbf{j}}$$ ◀

પૃથ્વી જેવા વિસ્તારીત પદાર્થ અને બીજા એક બિંદુવત્ દળ વચ્ચેના ગુરુત્વબળ માટે સમીકરણ (8.5) સીધેસીધું વાપરી શકાતું નથી. વિસ્તૃત પદાર્થની અંદરનું દરેક બિંદુવત્ દળ આપેલા બિંદુવત્ દળ પર બળ લગાડશે અને આવાં બધાં બળો એક જ દિશામાં નહિ હોય. કુલ બળ મેળવવા માટે આપણે વિસ્તૃત પદાર્થમાંના દરેક બિંદુવત્ દળ વડે લાગતું બળ મેળવી એ બધાં બળોનો સદિશ સરવાળો કરવો પડશે. કલનશાસ્ત્રની મદદથી આ સહેલાઈથી થઈ શકે છે. આમ કરતાં, બે ખાસ કિસ્સાઓમાં સાદો નિયમ મળે છે.

(1) **એક નિયમિત ઘનતા ધરાવતી પોલી ગોળાકાર કવચ અને તેની બહાર રહેલા બિંદુવત્ દળ વચ્ચેનું ગુરુત્વબળ, કવચનું સમગ્ર દળ જાણે કવચના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયું હોય ત્યારે મળતા બળ જેટલું જ હોય છે.** ગુણાત્મક રીતે આને આ રીતે સમજી શકાય : કવચના વિવિધ વિસ્તારો દ્વારા ઉદ્ભવતાં બળોનાં ઘટકો બિંદુવત્ દળ અને કેન્દ્રને જોડતી રેખા પર પણ હોય છે અને આ રેખાને લંબ દિશામાં પણ હોય છે. જ્યારે બધા વિસ્તારો માટેનો સરવાળો કરીએ ત્યારે આ રેખાને લંબ ઘટકો નાબૂદ થાય છે અને માત્ર તે બિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા પરનાં ઘટકો જ બાકી બચે છે. બળનું માન ઉપર જણાવ્યા જેટલું હોય છે.

ન્યૂટનનું પ્રિન્સિપિયા

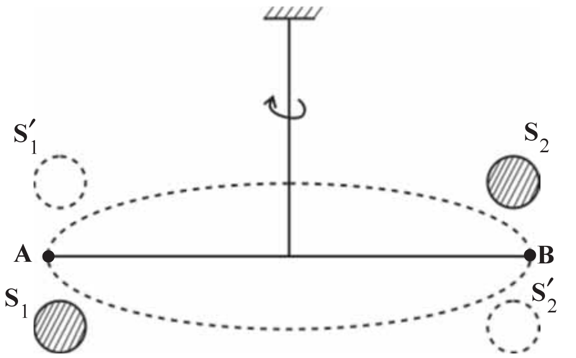
1619 સુધીમાં કેપ્લરે તેનો ત્રીજો નિયમ રચી દીધો હતો. તેમાં કાર્યરત એવા ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમની જાહેરાત લગભગ સિત્તેર વર્ષ પછી 1687માં ન્યૂટનના અદ્ભુત ગ્રંથ **"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"** ઘણી વાર ટૂંકમાં **Principia** કહેવાય છે તેના પ્રકાશન સાથે થઈ.

1685 આસપાસ, ઍડમંડ હેલી (હેલીના ધૂમકેતુનું નામ જેના પરથી પડ્યું તે) ન્યૂટનને મળવા કેમ્બ્રિજ આવ્યો અને વ્યસ્ત વર્ગના નિયમની અસર હેઠળ ગતિ કરતા પદાર્થના ગતિપથ વિશે પૂછ્યું. જરાય આનાકાની વગર ન્યૂટને જવાબ આપ્યો કે તે દીર્ઘવૃત્ત જ હોય, અને વધારામાં પ્લેગ ફાટી નીકળવાથી તેને કેમ્બ્રિજથી પોતાના ફાર્મ હાઉસ પર નિવૃત્તિ ગાળવી પડી ત્યારે, લગભગ 1665માં આ ગણતરી કરેલ હતી તેમ જણાવ્યું. દુર્ભાગ્યે ન્યૂટનના કાગળો ખોવાઈ ગયા હતા. હેલીએ ન્યૂટનને તેનું કાર્ય પુસ્તકરૂપે રજૂ કરવાનું સમજાવ્યું અને પ્રકાશનનો ખર્ચ ઉપાડી લેવા સંમતિ આપી. અઢાર માસના અતિમાનવ સમા પ્રયત્નથી ન્યૂટને આ પરાક્રમ સંપન્ન કર્યું. **પ્રિન્સિપિયા** એ અજોડ, વૈજ્ઞાનિક કૌશલ્ય છે. લાગ્રાન્જના શબ્દોમાં "માનવીય માનસની મહાનતમ નીપજ" છે. ભારતમાં જન્મેલ ખગોળ-ભૌતિકવિજ્ઞાની અને નૉબેલ ઇનામ વિજેતા એસ. ચંદ્રશેખરે **'પ્રિન્સિપિયા'** પર વિવરણ લખવામાં દસ વર્ષ ગાળ્યાં હતાં. તેનું પુસ્તક **Principia for the Common Reader** ન્યૂટનની પદ્ધતિઓમાં રહેલ સુંદરતા, સ્પષ્ટતા અને શ્વાસ થંભાવતી કરકસર પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરે છે.

(2) એક નિયમિત ઘનતા ધરાવતી પોલી ગોળાકાર કવચને લીધે તેની અંદર રહેલા બિંદુવત્ દળ પર લાગતું ગુરુત્વબળ શૂન્ય છે. વળી પાછા, ગુણાત્મક રીતે આપણે આ પરિણામ સમજી શકીએ. ગોળાકાર કવચના વિવિધ વિસ્તારો તે બિંદુવત્ દળને જુદી જુદી દિશાઓમાં આકર્ષે છે. આ બળો સંપૂર્ણ નાબૂદ થાય છે.

8.4 ગુરુત્વાકર્ષી અચળાંક (THE GRAVITATIONAL CONSTANT)

ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમમાં આવતો ગુરુત્વાકર્ષી અચળાંક પ્રયોગ પરથી નક્કી કરી શકાય છે અને આવું સૌપ્રથમ ઇંગ્લિશ વિજ્ઞાની હેન્રી કેવેન્ડિશે 1798માં કર્યું હતું. તેણે વાપરેલા સાધનને સંજ્ઞાત્મક રીતે આકૃતિ 8.6માં દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ 8.6 કેવેન્ડિશના પ્રયોગની સંજ્ઞાત્મક આકૃતિ. S_1 અને S_2 બે મોટા ગોળાઓ છે જેમને A અને B દળો (છાયાંકિત દર્શાવેલ છે)ની એક-એક બાજુએ દર્શાવેલ છે. જ્યારે મોટા ગોળાઓને દળોની બીજી બાજુ (ત્રુટક વર્તુળથી દર્શાવેલ) લઈ જવામાં આવે છે ત્યારે ટૉર્કની દિશા ઉલટાવાથી સળિયો AB થોડું ભ્રમણ કરે છે. ભ્રમણ કોણ પ્રયોગ પરથી માપી શકાય છે.

AB સળિયાના છેડાઓ પર બે નાના સીસાના ગોળા લગાડેલા છે. સળિયાને એક દૃઢ આધાર પરથી પાતળા તાર વડે લટકાવેલ છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ બે મોટા સીસાના ગોળાઓને નાના ગોળાઓની નજીક પરંતુ સામસામી બાજુએ લાવવામાં આવે છે. મોટા ગોળાઓ નાના ગોળાઓને સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાંનાં બળો વડે આકર્ષે છે. સળિયા પર કોઈ ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ લાગતું નથી પણ F અને સળિયાની લંબાઈના ગુણનફળ જેટલું ટૉર્ક લાગે છે, જ્યાં F એ મોટા ગોળા અને તેની નજીકના નાના ગોળા વચ્ચે લાગતું આકર્ષણ બળ છે. આ ટૉર્કને લીધે લટકાવેલ તારમાં ત્યાં સુધી વળ ચઢે છે કે જ્યારે તારમાનું પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક, ગુરુત્વાકર્ષી ટૉર્ક જેટલું બને. જો લટકાવેલ તારમાં વળ ચઢ્યાનો કોણ θ હોય તો પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક θ ના સમપ્રમાણમાં અને $\tau\theta$ જેટલું હોય છે. જ્યાં, τ એ વળના એકમ કોણ દીઠ ઉદ્ભવતું પુનઃસ્થાપક બળ યુગ્મ (Couple) છે. τ ને બીજા સ્વતંત્ર પ્રયોગથી માપી શકાય છે. દા.ત., જ્ઞાત મૂલ્યનું ટૉર્ક લગાડી વળ ચઢ્યાનો કોણ માપીને. ગોળાઓ વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વ બળ જાણે તેમનાં દળો તેમનાં કેન્દ્રો પર કેન્દ્રિત થયેલાં હોય ત્યારે લાગતા બળ જેટલું જ છે. આમ જો મોટા અને તેની નજીકના નાના ગોળાનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર d હોય, M અને m તેમનાં દળ હોય તો મોટા ગોળા અને તેની નજીકના નાના ગોળા વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વબળ

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \tag{8.6}$$

જેટલું છે. જો સળિયા ABની લંબાઈ L હોય તો F વડે ઉદ્ભવતું ટૉર્ક, F અને Lના ગુણનફળ જેટલું છે. સંતુલન સ્થિતિમાં આ પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક જેટલું હોય છે અને તેથી

$$\mathrm{G}\frac{Mm}{d^2}\mathrm{L} = \tau\,\theta \tag{8.7}$$

આમ, θ ના અવલોકન પરથી આ સમીકરણ વડે Gની ગણતરી કરી શકાય છે.

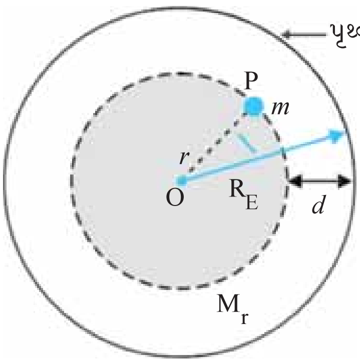
કેવેન્ડિશના સમયથી Gના માપનમાં સુધારા થતા ગયા છે અને હાલમાં સ્વીકૃત મૂલ્ય

$$\mathrm{G} = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2/kg^2} \text{ છે.} \tag{8.8}$$

8.5 પૃથ્વીના ગુરુત્વથી ઉદ્ભવતો પ્રવેગ (ACCELERATION DUE TO GRAVITY OF THE EARTH)

પૃથ્વીને એક ગોળા તરીકે કલ્પી લઈને તેને ખૂબ મોટી સંખ્યાના સમકેન્દ્રિય ગોળાકાર કવચોનો બનેલો ગણી શકીએ કે, જેમાં સૌથી નાની કવચ કેન્દ્ર પર અને સૌથી મોટી કવચ સપાટી પર હોય. પૃથ્વીની બહાર રહેલું બિંદુ સ્વાભાવિક રીતે જ બધી કવચોની બહાર છે. આમ બધી કવચો બહારના બિંદુએ એટલું ગુરુત્વબળ લગાડે કે જાણે તેમનાં દળો તેમનાં સામાન્ય કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલાં હોય ત્યારે મળે. પરિચ્છેદ 8.3માં જણાવેલ પરિણામ મુજબ બધી કવચોનું સંયુક્ત કુલ દળ પૃથ્વીના દળ જેટલું જ છે. આથી, પૃથ્વીની બહારના બિંદુએ ગુરુત્વબળ, જાણે પૃથ્વીનું સમગ્ર દળ તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય ત્યારે મળતા બળ જેટલું હોય.

પૃથ્વીની અંદરના બિંદુ માટે પરિસ્થિતિ જુદી છે. આ બાબત આકૃતિ 8.7માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 8.7 M_E દળ અને R_E ત્રિજ્યા ધરાવતી પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈ પર આવેલ ખીણમાં દળ m રહેલ છે. આપણે પૃથ્વીને ગોળીય સંમિતિ ધરાવતી ગણી છે.

વળી પાછા, પૃથ્વીને અગાઉની જેમ સમકેન્દ્રિય કવચોની બનેલી ગણો. તેના કેન્દ્રથી r અંતરે એક બિંદુવત્ દળ m રહેલ છે. P બિંદુ r ત્રિજ્યાના ગોળાની બહાર છે. r કરતાં વધુ ત્રિજ્યા ધરાવતી કવચો માટે P બિંદુ અંદર રહેલું છે. આથી છેલ્લા પરિચ્છેદમાં જણાવેલ પરિણામ મુજબ, P આગળ રાખેલ m દળ પર તેઓ કોઈ બળ લગાડતા નથી. ત્રિજ્યા $\le r$ ધરાવતી કવચો r ત્રિજ્યાનો ગોળો રચે છે, જેને માટે P બિંદુ સપાટી પર રહેલું છે. આ નાનો ગોળો P આગળ રાખેલા દળ m પર જાણે તેનું દળ M_r કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય તે રીતે વર્તીને બળ લગાડે છે. આમ P આગળના દળ m પર લાગતા બળનું માન

$$F = \frac{Gm(M_r)}{r^2} \text{ છે.} \tag{8.9}$$

આપણે સમગ્ર પૃથ્વીને નિયમિત ઘનતા ધરાવતી ધારી છે તેથી તેનું દળ $M_E = \frac{4\pi}{3} R_E^3 \rho$, જ્યાં M_E પૃથ્વીનું દળ, R_E તેની ત્રિજ્યા અને ρ ઘનતા છે. બીજી બાજુ r ત્રિજ્યાના M_r ગોળાનું દળ, $\frac{4\pi}{3}\rho r^3$ છે અને તેથી

$$F = Gm\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\frac{r^3}{r^2} = Gm\left(\frac{M_E}{R_E^3}\right)\frac{r^3}{r^2}$$

$$= \frac{GmM_E}{R_E^3} r \tag{8.10}$$

જો દળ m પૃથ્વીની સપાટી પર રહેલ હોય, તો $r = R_E$ અને તેના પરનું ગુરુત્વબળ, સમીકરણ (8.10) પરથી

$$F = G\frac{M_E m}{R_E^2} \tag{8.11}$$

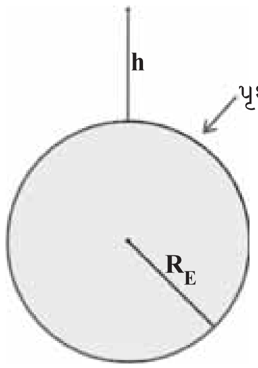
m દળ વડે અનુભવાતા પ્રવેગને સામાન્યતઃ સંજ્ઞા g વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને તે F સાથે ન્યૂટનના બીજા નિયમ F = mg દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે. આમ

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_E}{R_E^2} \tag{8.12}$$

પ્રવેગ g સહેલાઈથી માપી શકાય તેવો છે. R_E એ જ્ઞાત રાશિ છે. કેવેન્ડિશના પ્રયોગ (અથવા બીજી રીતે) Gની માપણી કરીને g અને R_Eની જાણકારી પરથી સમીકરણ (8.12) પરથી M_Eનો અંદાજ મેળવી શકાય છે. આ કારણથી કેવેન્ડિશ અંગે એક પ્રખ્યાત કથન છે : ''કેવેન્ડિશે પૃથ્વીનું વજન કર્યું''.

8.6 પૃથ્વીની સપાટીથી નીચે અને ઉપર ગુરુત્વપ્રવેગ (ACCELERATION DUE TO GRAVITY BELOW AND ABOVE THE SURFACE OF EARTH)

આકૃતિ 8.8(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ રહેલા એક બિંદુવત્ દળ mનો વિચાર કરો. પૃથ્વીની ત્રિજ્યા R_E વડે દર્શાવેલ છે.



(a)

આકૃતિ 8.8(a) પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ g

આ બિંદુ પૃથ્વીની બહાર હોવાથી પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તેનું અંતર $(R_E + h)$ છે. આ બિંદુવત્ દળ m પર લાગતું બળ $F(h)$ વડે દર્શાવીએ, તો સમીકરણ (8.5) પરથી

$$F(h) = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2} \tag{8.13}$$

આ બિંદુવત્ દળ વડે અનુભવાતો પ્રવેગ $F(h)/m \equiv g(h)$ છે. આમ

$$g(h) = \frac{F(h)}{m} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \quad (8.14)$$

સ્પષ્ટ રીતે, આ મૂલ્ય gના પૃથ્વીની સપાટી પરના મૂલ્ય $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$ કરતાં ઓછું છે. $h << R_E$ માટે આપણે સમીકરણ (8.14)નું વિસ્તરણ કરી શકીએ.

$$g(h) = \frac{GM_E}{R_E^2(1+h/R_E)^2} = g(1 + h / R_E)^{-2}$$

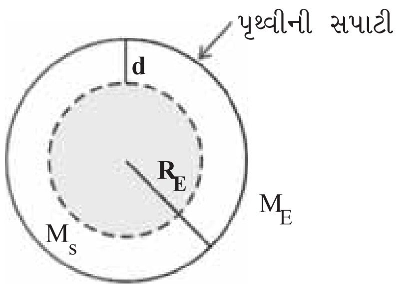
$\frac{h}{R_E} << 1$ માટે, દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$g(h) \cong g\left(1-\frac{2h}{R_E}\right) \quad (8.15)$$

સમીકરણ 8.15 જણાવે છે કે સપાટીથી ઉપર નાની ઊંચાઈ h માટે g એ $(1 - 2h / R_E)$ના ગુણાંક મુજબ ઘટે છે.

હવે, પૃથ્વીની સપાટીથી નીચે d ઊંડાઈએ એક બિંદુવત્ દળ mનો વિચાર કરો (આકૃતિ 8.8 (b)), આથી પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તેનું અંતર, આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ $(R_E - d)$ છે. પૃથ્વીને $(R_E - d)$ ત્રિજ્યાના નાના ગોળા અને d જાડાઈની ગોળાકાર કવચની બનેલી ગણી શકાય. અગાઉના પરિચ્છેદમાં જણાવેલ પરિણામ મુજબ d જાડાઈની બહારની કવચને લીધે m પર લાગતું બળ શૂન્ય છે. જ્યાં સુધી $(R_E - d)$ ત્રિજ્યાના નાના ગોળાને સંબંધ છે ત્યાં સુધી બિંદુવત્ દળ તેની બહાર છે અને અગાઉ જણાવેલ પરિણામ મુજબ આ નાના ગોળા વડે લાગતું બળ જાણે કે તેનું બધું દળ કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય તે પરથી મળે. જો નાના ગોળાનું દળ M_s હોય તો ગોળાનું દળ તેની ત્રિજ્યાના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોવાથી

$$M_s / M_E = (R_E - d)^3 / R_E^3 \quad (8.16)$$



(b)

આકૃતિ 8.8(*b*) d ઊંડાઈએ g. આ કિસ્સામાં ફક્ત $(R_E - d)$ ત્રિજ્યાનો નાનો ગોળો gમાં ફાળો આપે છે.

આમ બિંદુવત્ દળ m પર લાગતું બળ

$$F(d) = G\ M_s\ m / (R_E - d)^2 \quad (8.17)$$

ઉપરના સમીકરણમાં M_sનું મૂલ્ય અવેજ કરતાં,

$$F(d) = G\ M_E\ m\ (R_E - d) / R_E^3 \quad (8.18)$$

આથી d ઊંડાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ

$g(d) = \frac{F(d)}{m}$ પરથી

$$g(d) = \frac{F(d)}{m} = \left(\frac{GM_E}{R_E^3}\right)(R_E - d)$$

$$= g\frac{R_E - d}{R_E} = g(1 - d / R_E) \quad (8.19)$$

આમ, આપણે પૃથ્વીની સપાટીથી જેમ નીચે ને નીચે જઈએ તેમ ગુરુત્વપ્રવેગ $(1 - d / R_E)$ના ગુણાંક મુજબ ઘટે છે. પૃથ્વીના ગુરુત્વને લીધે મળતા પ્રવેગ અંગે નોંધનીય બાબત એ છે કે તેની સપાટી પર મહત્તમ છે અને તમે ઉપર કે નીચે તરફ જાઓ તેમ ઘટતો જાય છે.

8.7 ગુરુત્વસ્થિતિ ઊર્જા (GRAVITATIONAL POTENTIAL ENERGY)

અગાઉ આપણે સ્થિતિઊર્જાના ખ્યાલની, આપેલા સ્થાને પદાર્થમાં સંગ્રહ પામેલી ઊર્જા તરીકે ચર્ચા કરી છે. જો પદાર્થનું સ્થાન તેનાં પર બળો લાગવાથી બદલાતું હોય તો તેની સ્થિતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર એ બળ વડે પદાર્થ પર થયેલા કાર્ય જેટલો જ હોય. આપણે અગાઉ ચર્ચા કરી છે કે જે બળો વડે કરવામાં આવતું કાર્ય પથ (માર્ગ) પર આધારિત ન હોય તેવાં બળોને સંરક્ષી બળો કહે છે.

ગુરુત્વાકર્ષણ બળ એ સંરક્ષી બળ છે અને આ બળ દ્વારા ઉદ્ભવતી પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા આપણે ગણી શકીએ, જેને ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા કહે છે. પૃથ્વીની સપાટીની નજીક સપાટીથી પૃથ્વીથી ત્રિજ્યા કરતાં ઘણાં નાનાં અંતરોએ રહેલાં બિંદુઓનો વિચાર કરો. આવા કિસ્સાઓમાં ગુરુત્વ બળ વ્યવહારિક હેતુઓ પૂરતું mg જેટલું લગભગ અચળ અને પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ લાગતું હોય છે. જો આપણે પૃથ્વીની સપાટીથી h_1 ઊંચાઈએ એક બિંદુ અને તેનાથી ઊર્ધ્વદિશામાં ઉપર બીજું એક બિંદુ પૃથ્વીની સપાટીથી h_2 ઊંચાઈએ વિચારીએ તો, m દળના કણને પ્રથમથી બીજા બિંદુએ લઈ જવામાં થતું કાર્ય W_{12} વડે દર્શાવતાં

$$W_{12} = \text{બળ} \times \text{સ્થાનાંતર}$$

$$= mg(h_2 - h_1) \quad (8.20)$$

જો આપણે સપાટીથી h ઊંચાઈએ રહેલા બિંદુ સાથે સ્થિતિઊર્જા $W(h)$ સાંકળીએ કે જેથી

$$W(h) = mgh + W_0 \qquad (8.21)$$

(જ્યાં W_0 = અચળ)

તો એ સ્પષ્ટ છે કે

$$W_{12} = W(h_2) - W(h_1) \qquad (8.22)$$

પદાર્થને ખસેડવા માટે કરાતું કાર્ય તેનાં અંતિમ અને પ્રારંભિક સ્થાનો આગળની સ્થિતિઊર્જાના તફાવત જેટલું જ હોય છે. સમીકરણ (8.22)માં અચળ પદ W_0 નાબૂદ થાય છે તે જુઓ. આ અંતિમ સમીકરણમાં $h = 0$ મૂકતાં આપણને $W(h = 0) = W_0$ મળે. $h = 0$ એટલે પૃથ્વીની સપાટી પરનાં બિંદુઓ. આમ, W_0 એ પૃથ્વીની સપાટી પર સ્થિતિઊર્જા છે.

જો આપણે પૃથ્વીની સપાટીથી યાદચ્છિક અંતરે આવેલાં બિંદુઓ વિચારીએ તો હમણાં જ મળેલું પરિણામ યથાર્થ (valid) નથી કારણ કે ગુરુત્વબળ mg અચળ છે એવી ધારણા યથાર્થ નથી. આમ છતાં આપણી ચર્ચા પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે પૃથ્વીની સપાટીની બહારના બિંદુએ રહેલ કણ પર, પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ લાગતું બળ

$$F = \frac{G M_E m}{r^2} \qquad (8.23)$$

છે, જ્યાં M_E પૃથ્વીનું દળ, m = કણનું દળ અને r = તેનું પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતર. હવે જો આપણે કણને $r = r_1$ થી $r = r_2$ $(r_1 > r_2)$ સુધી ઊર્ધ્વ પથ પર લઈ જવા માટે કરવું પડતું કાર્ય ગણીએ તો સમીકરણ (8.20)ને બદલે,

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{GM_E}{r^2} dr$$ લખાય.

$$W_{12} = -G\, M_E\, m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (8.24)$$

સમીકરણ (8.21)ની જગ્યાએ, હવે આપણે r અંતરે સ્થિતિઊર્જા $W(r)$ સાંકળી શકીએ, જ્યાં

$$W(r) = -\frac{G M_E m}{r} + W_1 \qquad (8.25)$$

જે $r > R$ માટે યથાર્થ રહે છે.

આમ, ફરીથી આપણને $W_{12} = W(r_2) - W(r_1)$ મળે. સમીકરણ 8.25માં r = અનંત મૂકતાં, $W(r = \text{અનંત}) = W_1$ મળે. આમ, W_1 એ અનંત અંતરે સ્થિતિઊર્જા છે. સમીકરણ (8.22) અને (8.24) પરથી આપણે નોંધવું જોઈએ કે સ્થિતિઊર્જાના માત્ર તફાવતને જ કંઈક નિશ્ચિત અર્થ છે. રૂઢિગત રીતે W_1 ને શૂન્ય લેવામાં આવે છે. આથી, આપેલા બિંદુએ સ્થિતિઊર્જા એ કણને અનંત અંતરેથી ખસેડીને તે બિંદુને લાવવામાં કરવું પડતું કાર્ય છે.

આપણે આપેલા બિંદુએ કણ પર પૃથ્વીના ગુરુત્વબળને લીધે ઉદ્ભવતી સ્થિતિઊર્જા ગણી છે, તે કણના દળના સમપ્રમાણમાં છે. પૃથ્વીના ગુરુત્વબળને લીધે આપેલા બિંદુએ ગુરુત્વ સ્થિતિમાનને તે બિંદુએ એકમ દળના કણની સ્થિતિઊર્જા તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. અગાઉની ચર્ચા પરથી, આપણે જાણી શકીએ કે m_1 અને m_2 દળના બે કણો વચ્ચે અંતર r હોય, તો તેમની સાથે સંકળાયેલ સ્થિતિઊર્જા

$$V = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$ (જો $r \to \infty$ માટે $V = 0$ પસંદ કરીએ તો)

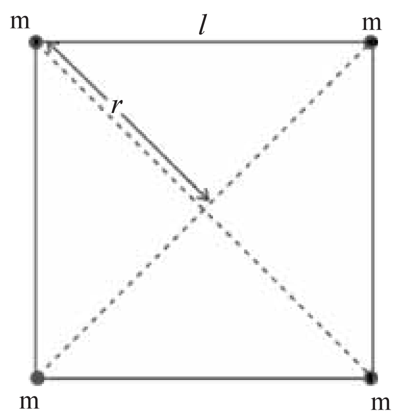
પરથી મળે છે. એ નોંધવું જોઈએ કે કણોના અલગ કરેલા તંત્રની કુલ સ્થિતિઊર્જા (ઉપરના સમીકરણ પરથી મળતી), તેના ઘટક કણોની દરેક શક્ય જોડ માટેની ઊર્જાઓના સરવાળા જેટલી હોય છે. આ સંપાતપણાના સિદ્ધાંતના ઉપયોગનું ઉદાહરણ છે.

ઉદાહરણ 8.3 l લંબાઈની બાજુઓ ધરાવતા ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ પર મૂકેલા ચાર કણના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા શોધો. ચોરસના કેન્દ્ર પર સ્થિતિમાન શોધો.

ઉકેલ l લંબાઈની બાજુઓ ધરાવતા ચોરસના દરેક શિરોબિંદુ પર m દળ વિચારો. (જુઓ આકૃતિ 8.9.) આપણને l અંતર ધરાવતી દળની ચાર જોડ અને $\sqrt{2}\,l$ અંતર ધરાવતી દળની બે વિકર્ણ જોડ મળે છે.

તેથી,

$$W(r) = -4\frac{G m^2}{l} - 2\frac{G m^2}{\sqrt{2}\, l}$$



આકૃતિ **8.9**

$$= -\frac{2Gm^2}{l}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5.41\frac{Gm^2}{l}$$

ચોરસના કેન્દ્ર આગળ ($r = \sqrt{2}\,l/2$) ગુરુત્વીય સ્થિતિમાન

$$U(r) = -4\sqrt{2}\,\frac{Gm}{l}$$

8.8 નિષ્ક્રમણ ઝડપ (ESCAPE SPEED)

જો એક પથ્થરને હાથથી ઉપર ફેંકવામાં આવે તો આપણે જોઈએ છીએ કે તે છેવટે તો પાછો પૃથ્વી પર પડે છે. અલબત્ત, આપણે યંત્રનો ઉપયોગ કરીને પદાર્થને વધુ ને વધુ પ્રારંભિક ઝડપે ઉપર ફેંકી શકીએ અને આવી વધુ ને વધુ ઝડપ સાથે પદાર્થ વધુ ને વધુ ઊંચાઈ સર કરી શકે. આ પરથી આપણા મનમાં એક જે સ્વાભાવિક પ્રશ્ન ઉદ્‌ભવે તે આ છે : શું આપણે પદાર્થને એટલી પ્રારંભિક ઝડપથી ફેંકી શકીએ કે જેથી તે પાછો પૃથ્વી પર પડે જ નહિ ?

ઊર્જા-સંરક્ષણનો નિયમ આ પ્રશ્નનો ઉત્તર મેળવવામાં આપણને મદદરૂપ થાય છે. ધારો કે પદાર્થ અનંત અંતરે પહોંચ્યો અને ત્યાં તેની ઝડપ V_f છે. પદાર્થની ઊર્જા એ સ્થિતિઊર્જા અને ગતિઊર્જાના સરવાળા જેટલી છે. અગાઉની જેમજ W_1 અનંત અંતરે પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા દર્શાવે છે. આમ, આ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની કુલ ઊર્જા

$$E(\infty) = W_1 + \frac{mV_f^2}{2} \tag{8.26}$$

જો આ પદાર્થને પ્રારંભિક ઝડપ V_i વડે, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી ($h + R_E$) અંતરે આવેલા બિંદુએથી ફેંકવામાં આવ્યો હોય, (R_E = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા) તો પ્રારંભમાં તેની ઊર્જા

$$E(h + R_E) = \frac{1}{2}mV_i^2 - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} + W_1 \tag{8.27}$$

ઊર્જા-સંરક્ષણના સિદ્ધાંત મુજબ સમીકરણો (8.26) અને (8.27) સમાન થવા જોઈએ. તેથી,

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} = \frac{mV_f^2}{2} \tag{8.28}$$

સમીકરણની જમણી બાજુ એ ધન રાશિ છે અને તેનું લઘુતમ મૂલ્ય શૂન્ય છે. આથી ડાબી બાજુ પણ તેમજ થવી જોઈએ. આમ, જ્યાં સુધી V_iનું મૂલ્ય નીચેની શરતનું પાલન કરે ત્યાં સુધી જ પદાર્થ અનંત અંતરે પહોંચી શકે :

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} \geq 0 \tag{8.29}$$

V_iના લઘુતમ મૂલ્ય માટે સમીકરણ (8.29)ની ડાબી બાજુ શૂન્ય બરાબર થવી જોઈએ. આમ, કોઈ પદાર્થને અનંત અંતરે પહોંચવા (એટલે કે પૃથ્વીથી મુક્ત થવા) માટેની જરૂરી ઝડપ $(V_i)_{min}$ લખીએ તો,

$$\frac{1}{2}m(V_i^2)_{min} = \frac{GmM_E}{(h+R_E)} \tag{8.30}$$

જો પદાર્થને પૃથ્વીની સપાટી પરથી ફેંકવામાં આવેલો હોય, તો $h = 0$ અને તેથી

$$(V_i)_{min} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \tag{8.31}$$

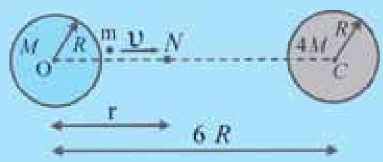
$g = GM_E / R_E^2$, સંબંધનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$(V_i)_{min} = \sqrt{2gR_E} \tag{8.32}$$

મળે. g અને R_Eનાં મૂલ્યોનો ઉપયોગ કરતાં $(V_i)_{min} \approx 11.2$ km/s મળે છે. આને નિષ્ક્રમણ ઝડપ કહે છે. તેને કેટલીકવાર નિષ્ક્રમણ વેગ પણ કહે છે.

આ સમીકરણ (8.32) ચંદ્રની સપાટી પરથી ફેંકેલા પદાર્થ માટે પણ લાગુ પડે છે, જ્યાં g ચંદ્રની સપાટી પરનો ગુરુત્વપ્રવેગ, R_Eને સ્થાને ચંદ્રની ત્રિજ્યા r મુકાય. આ બંને મૂલ્યો પૃથ્વી માટેનાં મૂલ્યો કરતાં નાનાં છે અને ચંદ્ર માટે નિષ્ક્રમણ ઝડપ 2.3 km/s મળે છે, જે પૃથ્વી માટેના મૂલ્યના લગભગ પાંચમા ભાગનું છે. આ કારણથી જ ચંદ્રને વાતાવરણ નથી. વાયુના અણુઓ ચંદ્રની સપાટી પર રચાય તોપણ ચંદ્રના ગુરુત્વાકર્ષણમાંથી તેઓ છટકી જાય છે.

ઉદાહરણ 8.4 આકૃતિ 8.10માં દર્શાવ્યા મુજબ R ત્રિજ્યાના બે નિયમિત ઘન ગોળાઓનાં દળ M અને $4M$ છે અને તેમનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર $6R$ છે. બંને ગોળાઓને સ્થિર જકડી રાખેલ છે. M દળના ગોળાની સપાટી પરથી m દળનો એક પદાર્થ સીધો બીજા ગોળાના કેન્દ્ર તરફ ફેંકવામાં આવે છે. આ પદાર્થ બીજા ગોળાની સપાટી પર પહોંચે તે માટે જરૂરી લઘુતમ ઝડપનું સૂત્ર મેળવો.



આકૃતિ 8.10

ઉકેલ અહીં, ફેંકાયેલા પદાર્થ પર બે ગોળાઓને લીધે, બે ગુરુત્વબળો પરસ્પર વિરુદ્ધ લાગે છે. આ બે બળો જે બિંદુએ

એકબીજાને બરાબર નાબૂદ કરે તે બિંદુ N (જુઓ આકૃતિ 8.10)ને તટસ્થ બિંદુ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં છે. જો ON = r હોય તો,

$$\frac{G\,M\,m}{r^2} = \frac{4\,G\,M\,m}{(6R-r)^2}$$

$$(6R - r)^2 = 4r^2$$

$$6R - r = \pm 2r$$

$$r = 2R \text{ અથવા } -6R$$

$r = -6R$ તટસ્થબિંદુની આ ઉદાહરણમાં આપણે ચિંતા કરવાની નથી. આમ, ON = r = 2R આથી પદાર્થને N બિંદુ સુધી પહોંચવા માટે જરૂરી હોય તેટલી ઝડપથી ફેંકવાનું પૂરતું છે. ત્યાર બાદ $4M$ વડે લાગતું ગુરુત્વબળ મોટું હોવાથી પદાર્થને તેની સપાટી પર ખેંચી જશે.

Mની સપાટી પર યાંત્રિકઊર્જા,

$$E_i = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{G\,M\,m}{R} - \frac{4\,G\,M\,m}{5R}$$

તટસ્થબિંદુએ ઝડપ શૂન્ય બને છે અને N આગળ યાંત્રિકઊર્જા માત્ર સ્થિતિઊર્જા છે.

$$E_N = -\frac{G\,M\,m}{2R} - \frac{4\,G\,M\,m}{4R}$$

યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ પરથી,

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} - \frac{4GM}{5R} = -\frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R}$$

અથવા

$$v^2 = \frac{2GM}{R}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$v = \left(\frac{3GM}{5R}\right)^{1/2}$$ ◀

એક નોંધપાત્ર મુદ્દો એ છે કે ફેંકેલા પદાર્થની ઝડપ N બિંદુએ શૂન્ય છે પરંતુ ભારે ગોળા 4 Mને અથડાય ત્યારે શૂન્ય નથી. આ ઝડપની ગણતરી વિદ્યાર્થી પર સ્વાધ્યાય તરીકે છોડેલ છે.

8.9 પૃથ્વીના ઉપગ્રહો (EARTH SATELLITES)

પૃથ્વીના ઉપગ્રહો એ પૃથ્વીની આસપાસ પરિભ્રમણ કરતા પદાર્થો છે. તેમની ગતિ, સૂર્યની આસપાસ ગ્રહોની ગતિ જેવી જ છે અને તેથી ગ્રહોની ગતિના કેપ્લરના નિયમો તેમને પણ સમાન રીતે લાગુ પડે છે. વિશેષ કરીને પૃથ્વીની આસપાસની તેમની કક્ષાઓ વર્તુળાકાર અથવા દીર્ઘવૃત્તિય હોય છે. ચંદ્ર એ પૃથ્વીનો એકમાત્ર કુદરતી ઉપગ્રહ છે. તેની કક્ષા લગભગ વર્તુળાકાર અને આવર્તકાળ લગભગ 27.3 દિવસ છે જે આશરે ચંદ્રની પોતાની અક્ષની આસપાસના તેના ભ્રમણના આવર્તકાળ જેટલો છે. 1957થી ટેક્નોલૉજીમાંના વિકાસને લીધે, ભારત સહિત ઘણા દેશોએ દૂરસંચાર, જીઓફિઝિક્સ અને હવામાનશાસ્ત્ર જેવાં ક્ષેત્રોમાંના વ્યાવહારિક ઉપયોગ માટે કૃત્રિમ ઉપગ્રહો પૃથ્વીની ફરતે તરતા મૂક્યા છે.

આપણે પૃથ્વીના કેન્દ્રથી (R_E + h) અંતરે આવેલી વર્તુળકક્ષામાંના ઉપગ્રહનો વિચાર કરીએ, જ્યાં R_E = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા. જો m એ ઉપગ્રહનું દળ અને V તેની ઝડપ હોય, તો કક્ષા માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ

$$F(\text{કેન્દ્રગામી}) = \frac{mV^2}{(R_E+h)} \qquad (8.33)$$

છે અને તે પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ હોવું જોઈએ. આ કેન્દ્રગામી બળ ગુરુત્વબળ દ્વારા પૂરું પાડવામાં આવે છે જે

$$F(\text{ગુરુત્વાકર્ષણ}) = \frac{G\,m\,M_E}{(R_E+h)^2} \qquad (8.32)$$

છે, જ્યાં M_E એ પૃથ્વીનું દળ છે. સમીકરણો (8.33) અને (8.34)ની જમણી બાજુઓને સરખાવતાં અને mનો છેદ ઉડાડતાં,

$$V^2 = \frac{G\,M_E}{(R_E+h)} \qquad (8.35)$$

આમ, જેમ h વધે છે તેમ V ઘટે છે. આ સમીકરણ પરથી h = 0 માટે ઝડપ Vનું મૂલ્ય

$$V^2(h = 0) = GM / R_E = gR_E \qquad (8.36)$$

પરથી મળે, જ્યાં આપણે $g = GM / R_E^2$ સંબંધનો ઉપયોગ કર્યો છે. દરેક કક્ષામાં ઉપગ્રહ $2\pi(R_E + h)$ અંતર V ઝડપથી કાપે છે. આથી તેનો આવર્તકાળ T

$$T = \frac{2\pi(R_E+h)}{V} = \frac{2\pi(R_E+h)^{3/2}}{\sqrt{G\,M_E}} \qquad (8.37)$$

છે. સમીકરણ (8.35)માંથી Vનું મૂલ્ય અવેજ કરેલ છે. સમીકરણની બંને બાજુનો વર્ગ કરતાં

$$T^2 = k(R_E + h)^3 \text{ (જ્યાં } k = 4\pi^2/GM_E) \qquad (8.38)$$

જે પૃથ્વીની આસપાસના ઉપગ્રહને લાગુ પાડેલ કેપ્લરનો આવર્તકાળનો નિયમ છે. પૃથ્વીની સપાટીની ખૂબ નજીકના ઉપગ્રહ માટે સમીકરણ (8.38)માં R_Eની સરખામણીએ hને અવગણી શકાય છે. આથી આવા ઉપગ્રહ માટે Tને T_0 કહીએ તો,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{R_E / g} \qquad (8.39)$$

મળે. જો આપણે સંખ્યાત્મક મૂલ્યો $g \approx 9.8$ m s^{-2} અને R_E = 6400 km અવેજ કરીએ તો,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{9.8}}\ \text{s}$$

મળે. જે લગભગ 85 મિનિટ મળે છે.

ઉદાહરણ 8.5 મંગળ ગ્રહને બે ચંદ્રો છે. ફોબોસ અને ડેલ્મોસ. (i) ફોબોસનો આવર્તકાળ 7 કલાક 39 મિનિટ છે અને કક્ષીય ત્રિજ્યા 9.4 × 10^3 km છે. મંગળનું દળ શોધો. (ii) પૃથ્વી અને મંગળ સૂર્યની આસપાસ વર્તુળાકારમાં ભ્રમણ કરતા ધારો. પૃથ્વીની કક્ષીય ત્રિજ્યા કરતાં મંગળની કક્ષા 1.52 ગણી છે. મંગળના વર્ષની લંબાઈ કેટલા દિવસની હશે ?

ઉકેલ (i) આપણે સમીકરણ (8.38) લગાડીએ. સૂર્યના દળની જગ્યાએ મંગળનું દળ M_m લઈએ.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_m} R^3$$

$$M_m = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2}$$

$$= \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times10^{-11}\times(459\times60)^2}$$

$$M_m = \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times(4.59\times6)^2\times10^{-5}}$$

$$= 6.48 \times 10^{23} \text{ kg}$$

(ii) વળી પાછા આપણે કેપ્લરના ત્રીજા નિયમની મદદ લઈએ.

$$\frac{T_M^2}{T_E^2} = \frac{R_{MS}^3}{R_{ES}^3}$$

જ્યાં R_{MS} એ મંગળ અને સૂર્ય વચ્ચેનું અંતર છે તથા R_{ES} એ પૃથ્વી અને સૂર્ય વચ્ચેનું અંતર છે.

$\therefore\ T_M = (1.52)^{3/2} \times 365$

$= 684$ દિવસ

આપણે નોંધીએ કે બુધ, મંગળ અને પ્લુટો* સિવાયના બધા ગ્રહોની કક્ષા વર્તુળાકારની ખૂબ નજીક જેવી છે. દાખલા તરીકે આપણી પૃથ્વી માટે અર્ધલઘુ અક્ષ અને અર્ધદીર્ઘ અક્ષનો ગુણોત્તર $b/a = 0.99986$ છે. ◀

ઉદાહરણ 8.6 પૃથ્વીનું વજન કરવું : તમને નીચેની વિગતો આપી છે : $g = 9.81$ m s^{-2}, $R_E = 6.37 \times 10^6$ m ચંદ્રનું, અંતર $R = 3.84 \times 10^8$ m અને ચંદ્રના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ 27.3 દિવસ છે. બે જુદી-જુદી રીતોથી પૃથ્વીનું દળ M_E મેળવો.

ઉકેલ સમીકરણ (8.12) પરથી

$$M_E = \frac{gR_E^2}{G}$$

$$= \frac{9.81\times(6.37\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}}$$

$$= 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

ચંદ્ર, પૃથ્વીનો ઉપગ્રહ છે. કેપ્લરના ત્રીજા નિયમ (સમીકરણ 8.38) પરથી

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_E}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$$

$$= \frac{4\times3.14\times3.14\times(3.84)^3\times10^{24}}{6.67\times10^{-11}\times(27.3\times24\times60\times60)^2}$$

$$= 6.02 \times 10^{24} \text{ kg}$$

બંને રીતોથી લગભગ સરખો જવાબ મળે છે. તેમની વચ્ચેનો તફાવત 1 % કરતાં ઓછો છે. ◀

ઉદાહરણ 8.7 સમીકરણ (8.38)માંના અચળાંક kને દિવસ અને કિલોમીટરમાં દર્શાવો. k = 10^{-13} s^{2}m^{-3} આપેલ છે. ચંદ્ર, પૃથ્વીથી 3.8 × 10^5 km અંતરે છે. તેના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ કેટલા દિવસ છે તે શોધો.

ઉકેલ અહીં આપેલ છે, k = 10^{-13} s^{2}m^{-3}

$$= 10^{-13}\left[\frac{1}{(24\times60\times60)^2}\text{d}^2\right]\left[\frac{1}{(1/1000)^3\text{km}^3}\right]$$

$$= 1.33 \times 10^{-14}\text{d}^2 \text{ km}^{-3}$$

સમીકરણ (8.38) અને kના આપેલ મૂલ્યનો ઉપયોગ કરતાં, ચંદ્રનો આવર્તકાળ T હોય તો

$T^2 = (1.33 \times 10^{-14})(3.84 \times 10^5)^3$

$T = 27.3$ d ◀

એ નોંધપાત્ર છે કે સમીકરણ (8.38), દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષા માટે પણ સાચું છે. જો આપણે $(R_E + h)$ની જગ્યાએ દીર્ઘવૃત્તની અર્ધદીર્ઘ અક્ષ લઈએ તો તે કિસ્સામાં પૃથ્વી દીર્ઘવૃત્તના એક કેન્દ્ર પર હશે.

8.10 કક્ષીય ગતિમાંના ઉપગ્રહની ઊર્જા (ENERGY OF AN ORBITING SATELLITE)

સમીકરણ (8.35)નો ઉપયોગ કરતાં, વર્તુળકક્ષામાં υ ઝડપથી ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહની ગતિઊર્જા

$$\text{ગતિઊર્જા} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$= \frac{GmM_E}{2(R_E + h)} \qquad (8.40)$$

* પૃ. 182 પર બૉક્સમાં આપેલ માહિતીનો સંદર્ભ લો.

અનંત અંતરે ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય ગણતાં, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $(R_E + h)$ અંતરે

$$\text{સ્થિતિઊર્જા} = -\frac{GmM_E}{(R_E+h)} \tag{8.41}$$

ગતિઊર્જા ધન છે જ્યારે સ્થિતિઊર્જા ઋણ છે. વળી, ગતિઊર્જા સ્થિતિઊર્જાથી અડધી છે. આથી કુલ ઊર્જા E,

$$E = \text{ગતિઊર્જા} + \text{સ્થિતિઊર્જા} = -\frac{GmM_E}{2(R_E+h)} \tag{8.42}$$

આમ, વર્તુળાકાર કક્ષામાંના ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા ઋણ છે કારણ કે ધન ગતિઊર્જા કરતાં ઋણ સ્થિતિઊર્જા બમણી છે.

જ્યારે ઉપગ્રહની કક્ષા દીર્ઘવૃત્તિય બને છે ત્યારે ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા બિંદુએ બિંદુએ બદલાય છે. વર્તુળાકાર કક્ષાના કિસ્સાની જેમ જ, કુલ ઊર્જા કે જે અચળ છે તે ઋણ છે. આ આપણી અપેક્ષા મુજબનું જ છે કારણ કે આપણે અગાઉ ચર્ચા કરી તેમ જો કુલ ઊર્જા ધન હોય કે શૂન્ય હોય તો પદાર્થ અનંત અંતરે છટકી જાય છે. ઉપગ્રહો હંમેશાં પૃથ્વીથી નિશ્ચિત અંતરે હોય છે અને તેથી તેમની ઊર્જા ધન કે શૂન્ય ન હોઈ શકે.

▶ *ઉદાહરણ 8.8* એક 400 kgનો ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ $2R_E$ ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર કક્ષામાં છે. તેને બદલીને $4R_E$ ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર કક્ષામાં લઈ જવા માટે કેટલી ઊર્જાની જરૂર પડે ? તેની ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જામાં શું ફેરફાર થાય ?

ઉકેલ પ્રારંભમાં,

$$E_i = -\frac{GM_E m}{4R_E}$$

જ્યારે અંતમાં,

$$E_f = -\frac{GM_E m}{8R_E}$$

કુલ ઊર્જામાં તફાવત, $\Delta E = E_f - E_i$

$$= \frac{GM_E m}{8R_E} = \left(\frac{GM_E}{R_E^2}\right)\frac{mR_E}{8}$$

$$\Delta E = \frac{g\,m R_E}{8} = \frac{9.81\times400\times6.37\times10^6}{8} = 3.13\times10^9 \text{ J}$$

ગતિઊર્જામાં, ΔE જેટલા મૂલ્યનો ઘટાડો થાય છે.

$\Delta K = K_f - K_i = -3.13 \times 10^9$ J

સ્થિતિઊર્જામાં ફેરફાર, કુલ ઊર્જામાંના ફેરફાર કરતાં બમણો થાય છે.

$\Delta V = V_f - V_i = -6.25 \times 10^9$ J ◀

8.11 ભૂસ્થિર અને ધ્રુવીય ઉપગ્રહો (GEOSTATIONARY AND POLAR SATELLITES)

જો આપણે $(R_E + h)$નું મૂલ્ય એવું યોગ્ય ગોઠવીએ કે જેથી સમીકરણ (8.37)માં Tનું મૂલ્ય 24 કલાક મળે તો એક રસપ્રદ ઘટના ઉદ્‌ભવે છે. જો વર્તુળાકાર કક્ષા પૃથ્વીના વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં હોય તો આવા ઉપગ્રહ માટે આવર્તકાળ, પૃથ્વીના પોતાની ધરીની આસપાસના ભ્રમણના આવર્તકાળ જેટલો થવાથી, પૃથ્વી પરના કોઈ બિંદુએથી જોતાં આવો ઉપગ્રહ સ્થિર દેખાશે. આ હેતુ માટે $(R_E + h)$નું મૂલ્ય R_Eની સરખામણીમાં મોટું મળે છે.

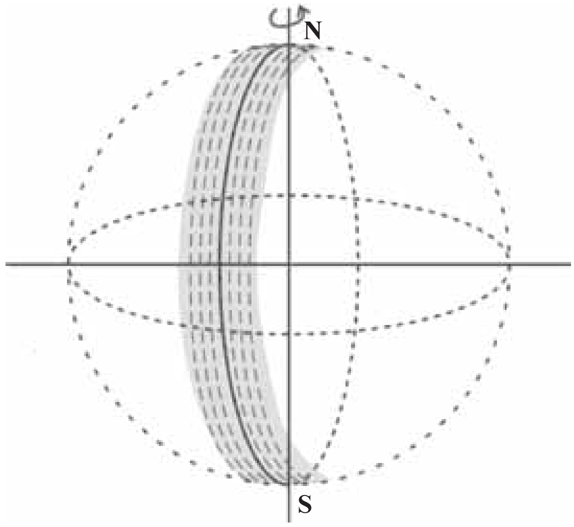
$$(R_E + h) = \left(\frac{T^2 GM_E}{4\pi^2}\right)^{1/3} \tag{8.43}$$

ભારતની અવકાશમાં હરણફાળ

ભારતે 1975માં લઘુ અંતરીય કક્ષકોના ઉપગ્રહ આર્યભટ્ટને તરતો મૂકીને અવકાશયુગમાં પ્રવેશ કર્યો. એ કાર્યક્રમના શરૂઆતના થોડાં વર્ષો લૉંચ વેહિકલ, અગાઉના સોવિયેટ યુનિયન દ્વારા પૂરા પાડવામાં આવ્યા હતા. સ્વદેશી લૉંચ વેહિકલનો ઉપયોગ 1980ના દશકના પ્રારંભમાં રોહિણી શ્રેણીના ઉપગ્રહોને અવકાશમાં મોકલવા માટે થયો હતો. ધ્રુવીય ઉપગ્રહોને અવકાશમાં મોકલવાનો કાર્યક્રમ 1980ના દશકના પાછળના ભાગમાં શરૂ થયો. IRS (Indian Remote Sensing Satellites) શ્રેણીના સંખ્યાબંધ ઉપગ્રહો તરતા મૂકવામાં આવ્યા છે અને આ કાર્યક્રમ ભવિષ્યમાં ચાલુ રહેવાની અપેક્ષા છે. ઉપગ્રહોનો ઉપયોગ મોજણી (Surveying) કરવા, હવામાનની આગાહી કરવા અને અવકાશમાં પ્રયોગો કરવા માટે થાય છે. છેક 1982થી માહિતીની આપ-લે તથા હવામાનની આગાહીના હેતુઓ માટે INSAT (Indian National Satellite) શ્રેણીના ગ્રહોની રચના અને કાર્યાન્વિત કરવામાં આવ્યા છે. INSAT શ્રેણીમાં યુરોપિયન લૉંચ વેહિકલનો ઉપયોગ થયેલ છે. ભારતે તેના ભૂસ્થિર ઉપગ્રહને તરતો મૂકવાની ક્ષમતાનું 2009માં પરીક્ષણ કરી લીધું, જ્યારે તેણે પ્રાયોગિક કમ્યુનિકેશન સેટેલાઇટ (GSAT-1) અવકાશમાં મૂક્યો. 1984માં રાકેશ શર્મા ભારતનો પ્રથમ અવકાશયાત્રી બન્યો. Indian Space Research Organisation (ISRO) એ એક સરકારી સંગઠન તરીકે ઘણાં કેન્દ્રો ચલાવે છે. તેનું મુખ્ય લૉંચ કેન્દ્ર શ્રીહરિકોટા (SHAR) ચેન્નઈથી 100 km ઉત્તરમાં છે. National Remote Sensing Agency (NRSA) હૈદરાબાદની નજીક છે. તેનું અવકાશ સંશોધન કેન્દ્ર, અમદાવાદમાં Physical Research Laboratory (PRL) ખાતે છે.

અને $T = 24$ કલાક માટે hનું મૂલ્ય 35,800 km મળે છે, જે R_E કરતાં ઘણું મોટું છે. પૃથ્વીની આસપાસ વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં વર્તુળાકાર કક્ષામાં $T = 24$ કલાક ધરાવતા ઉપગ્રહોને ભૂસ્થિર ઉપગ્રહો કહે છે. એ સ્પષ્ટ જ છે કે, પૃથ્વી આટલા જ આવર્તકાળથી ભ્રમણ કરતી હોવાથી, પૃથ્વી પરના કોઈ પણ આપેલા બિંદુએથી જોતાં આ ઉપગ્રહ સ્થિર દેખાય છે. પૃથ્વીથી આટલી બધી ઊંચાઈએ સેટેલાઇટને તરતો મૂકવા માટે ખૂબ શક્તિશાળી રૉકેટોની જરૂર પડે છે. ઘણા વ્યાવહારિક ઉપયોગોના લાભને ધ્યાનમાં રાખીને આમ કરવામાં આવ્યું છે.

એ જાણીતું છે કે અમુક નિશ્ચિત આવૃત્તિ કરતાં વધુ આવૃત્તિના વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો આયનોસ્ફિયરથી પરાવર્તિત થતા નથી. રેડિયો બ્રોડકાસ્ટમાં વપરાતા રેડિયોતરંગો જેમની આવૃત્તિ 2 MHz થી 10 MHzના વિસ્તારમાં હોય છે, તેઓ આ ક્રાંતિ આવૃત્તિની નીચેના વિસ્તારમાં છે. તેથી તેઓ આયનોસ્ફિયર વડે પરાવર્તિત થાય છે. આમ, એન્ટેનામાંથી બ્રોડકાસ્ટ થયેલા રેડિયો-તરંગો દૂર આવેલાં બિંદુઓએ પ્રાપ્ત (Receive) કરી શકાય છે, જ્યાં સીધું તરંગ પૃથ્વીની વક્રતાને લીધે નિષ્ફળ જાય છે. ટેલિવિઝન બ્રોડકાસ્ટ અથવા દૂરસંચારનાં બીજાં સ્વરૂપોમાં વપરાતા તરંગોની આવૃત્તિઓ ઘણી ઊંચી હોય છે અને દૃષ્ટિરેખા (Line of Sight) સિવાય બહુ દૂર પ્રાપ્ત કરી શકાતા નથી. જોકે, બ્રોડકાસ્ટિંગ સ્ટેશનની ઉપર સ્થિર દેખાતા ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ આવા સંકેતો (Signals) પ્રાપ્ત કરી શકે છે અને પાછા પૃથ્વી પર મોટા વિસ્તારમાં બ્રોડકાસ્ટ કરી શકે છે. ભારતે અવકાશમાં મોકલેલા ઉપગ્રહોનો INSAT સમૂહ, આવા ભૂસ્થિર ઉપગ્રહોનો સમૂહ છે. જે ભારતમાં દૂરસંચાર માટે વ્યાપક પ્રમાણમાં વપરાય છે.



આકૃતિ 8.11 *ધ્રુવીય ઉપગ્રહ. ઉપગ્રહના એક ચક્ર દરમ્યાન પૃથ્વીની સપાટી પરની એક પટ્ટી દૃશ્યમાન છે. ઉપગ્રહના તે પછીના ભ્રમણ દરમિયાન, પૃથ્વીએ પોતાની અક્ષ પર થોડું ભ્રમણ કરેલ છે. આથી તેની બાજુની પટ્ટી હવે દૃશ્યમાન બને છે.*

ઉપગ્રહોના અન્ય એક પ્રકારને ધ્રુવીય (Polar) ઉપગ્રહો કહે છે. (આકૃતિ 8.11). આ ઓછી ઊંચાઈ ($h \approx 500$ થી 800 km)ના ઉપગ્રહો છે, પરંતુ તેઓ પૃથ્વીની આસપાસ ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં ધ્રુવોની ફરતે ભ્રમણ કરે છે. પૃથ્વી તેની અક્ષની આસપાસ પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં ભ્રમણ કરે છે. આ ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ લગભગ 100 મિનિટ હોવાથી તે કોઈ પણ ઊંચાઈના બિંદુને (સ્થાનને) દિવસમાં ઘણી વખત પસાર કરે છે. જોકે પૃથ્વીની સપાટી પરથી તેની ઊંચાઈ લગભગ 500-800 km હોવાથી, તેની પર સ્થિર જડેલો કૅમેરા, એક કક્ષામાં (ભ્રમણમાં) પૃથ્વીની નાની પટ્ટીઓ જ જોઈ શકે છે. બાજુની પટ્ટીઓ તે પછીની કક્ષામાં (ભ્રમણમાં) દેખાય છે, જેથી આખા દિવસ દરમિયાન એક પછી બીજી પટ્ટી એમ કરીને સમગ્ર પૃથ્વીને જોઈ શકાય છે. આ ઉપગ્રહો ધ્રુવીય અને વિષુવવૃત્તીય વિસ્તારોને નજીકનાં અંતરોએથી સારા વિભેદન સાથે જોઈ શકે છે. આવા ઉપગ્રહોથી પ્રાપ્ત કરેલી માહિતી દૂર સંવેદન (Remote Sensing), હવામાનશાસ્ત્ર તેમજ પૃથ્વીના પર્યાવરણના અભ્યાસમાં ખૂબ ઉપયોગી છે.

8.12 વજનવિહીનતા (WEIGHTLESSNESS)

પૃથ્વી પદાર્થને જેટલા બળ વડે આકર્ષે છે તે, તે પદાર્થનું વજન છે. જ્યારે આપણે કોઈ સપાટી પર ઊભા રહીએ છીએ ત્યારે આપણે આપણા પોતાના વજનથી સભાન થઈએ છીએ, કારણ કે, સપાટી આપણને સ્થિર રાખવા માટે, આપણા વજન જેટલું જ બળ વિરુદ્ધ દિશામાં લગાડે છે. જ્યારે આપણે કોઈ પદાર્થનું વજન, નિશ્ચિત બિંદુ દા.ત., છતથી લટકાવેલા સ્પ્રિંગકાંટા વડે માપીએ છીએ ત્યારે પણ આ જ સિદ્ધાંત લાગુ પડે છે. જો ગુરુત્વબળની વિરુદ્ધમાં તેના પર બળ લાગતું ન હોય તો પદાર્થ નીચે પડી જાય. સ્પ્રિંગ આવું બળ પદાર્થ પર લગાડે છે. પદાર્થ પર ગુરુત્વીય ખેંચાણને લીધે સ્પ્રિંગ થોડી નીચે ખેંચાય છે અને બદલામાં સ્પ્રિંગ પદાર્થ પર ઊર્ધ્વદિશામાં બળ લગાડે છે.

હવે સ્પ્રિંગનો ઉપરનો છેડો છત સાથે જડિત રહેતો નથી એવું કલ્પો. સ્પ્રિંગના બંને છેડા તેમજ પદાર્થ પણ એક સમાન પ્રવેગ gથી ગતિ કરે છે. સ્પ્રિંગ ખેંચાયેલી નથી અને પદાર્થ કે જે g જેટલા ગુરુત્વપ્રવેગથી નિમ્ન ગતિ કરે છે તેના પર કોઈ ઊર્ધ્વદિશામાં બળ લગાડતી નથી. સ્પ્રિંગ બૅલેન્સમાં નોંધાતું અવલોકન શૂન્ય છે કારણ કે સ્પ્રિંગ જરાય ખેંચાયેલી જ નથી. જો પદાર્થ તરીકે માનવી હોત, તો તે માનવીને પોતાનું વજન લાગત જ નહિ કારણ કે તેના પર ઊર્ધ્વદિશામાં કોઈ બળ નથી. આમ જ્યારે કોઈ પદાર્થ મુક્ત પતન કરતો હોય છે ત્યારે તે વજનવિહીન હોય છે અને આ ઘટનાને સામાન્યતઃ વજનવિહીનતાની ઘટના કહે છે.

પૃથ્વીની આસપાસ ફરતા ઉપગ્રહના દરેકેદરેક ભાગને પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ પ્રવેગ હોય છે. જેનું મૂલ્ય તે સ્થાને પૃથ્વીના ગુરુત્વપ્રવેગ જેટલું જ હોય છે. આમ, ઉપગ્રહમાં, તેની અંદરની દરેક વસ્તુ

મુક્ત પતનની અવસ્થામાં છે. આ બાબત, કોઈ ઊંચાઈ પરથી આપણે પૃથ્વી પર પડતા હોઈએ તેના જેવી જ છે.

આમ, માનવસહિત ઉપગ્રહમાં તેની અંદરના લોકો કોઈ ગુરુત્વાકર્ષણનો અનુભવ કરતા નથી. આપણે માટે ગુરુત્વાકર્ષણ, ઊર્ધ્વદિશાને નક્કી કરે છે અને આમ તેમને માટે કોઈ ઊર્ધ્વ કે સમક્ષિતિજ દિશાઓ હોતી નથી, બધી દિશાઓ સમાન જ છે. ઉપગ્રહમાં તરતા અવકાશયાત્રીના ચિત્રો આ હકીકત દર્શાવે છે.

સારાંશ

1. ન્યૂટનનો સાર્વત્રિક ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ જણાવે છે કે, r અંતરે રહેલા m_1 અને m_2 દળના કોઈ બે કણો વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળનું માન

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ છે.}$$

જ્યાં G એ ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક છે, જેનું મૂલ્ય 6.672×10^{-11} N m^2 kg^{-2} છે.

2. જો આપણે કણ m પર જુદાં જુદાં દળો $M_1, M_2, ... M_n$ વડે લાગતું પરિણામી બળ શોધવું હોય, તો આપણે સંપાતપણાના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીએ. ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમ પરથી $M_1, M_2, ... M_n$ને લીધે લાગતાં બળો ધારો કે $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, ... \boldsymbol{F}_n$ છે. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ દરેક બળ સ્વતંત્ર રીતે અને બીજા પદાર્થોની અસર વિના લાગે છે. ત્યાર બાદ પરિણામી બળ $\boldsymbol{F}_R$ સદિશ સરવાળા પરથી મેળવાય છે.

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + ... + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

જ્યાં સંજ્ઞા '$\sum$' એ સરવાળો દર્શાવે છે.

3. ગ્રહોની ગતિ અંગેના કેપ્લરના નિયમો જણાવે છે કે,
   (a) બધા ગ્રહો, જેના એક કેન્દ્રબિંદુએ સૂર્ય હોય તેવી દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે.
   (b) સૂર્યથી ગ્રહ તરફ દોરેલો ત્રિજ્યા સદિશ સમાન સમયગાળામાં સમાન ક્ષેત્રફળ આંતરે છે. આ બાબત, ગ્રહ પર લાગતું ગુરુત્વબળ એ કેન્દ્રિય બળ છે તે હકીકત પરથી મળે છે, અને તેથી કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે.
   (c) ગ્રહના કક્ષીય આવર્તકાળનો વર્ગ, ગ્રહની દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષાની અર્ધદીર્ઘ અક્ષના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

   સૂર્યની આસપાસ ગ્રહની વર્તુળકક્ષાનો આવર્તકાળ T અને ત્રિજ્યા R વચ્ચે

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right)R^3$$

   સંબંધ છે, જ્યાં M_s એ સૂર્યનું દળ છે. દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષાઓ માટે ઉપરના સમીકરણમાં, Rની જગ્યાએ અર્ધદીર્ઘ અક્ષ a મૂકીને વાપરી શકાય છે.

4. (a) પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ

$$g(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}$$

$$= \frac{GM_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad .... \; h << R_E \text{ માટે}$$

$$g(h) = g(0)\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \text{ જ્યાં } g(0) = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

(b) પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ

$$g(d) = \frac{GM_E}{R_E^2}\left(1-\frac{d}{R_E}\right) = g(0)\left(1-\frac{d}{R_E}\right)$$

5. ગુરુત્વબળ એ સંરક્ષી બળ છે અને તેથી સ્થિતિઊર્જા વિધેયને વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. એકબીજાથી r અંતરે રહેલા બે કણો સાથે સંકળાયેલ ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા

$$V = -\frac{G\,m_1 m_2}{r}$$

પરથી મળે છે, જ્યાં $r \rightarrow \infty$ માટે Vને શૂન્ય લીધેલ છે. કણોના તંત્રની કુલ સ્થિતિઊર્જા એ કણોની દરેક જોડ (Pair) માટેની ઊર્જાના સરવાળા જેટલી છે, જેમાં દરેક જોડને ઉપરના સમીકરણ જેવા પદ વડે રજૂ કરાય છે. આ બાબત સંપાતપણાના સિદ્ધાંતને અનુસારે છે.

6. જો કોઈ અલગ કરેલું તંત્ર, M દળના ભારે પદાર્થના સાનિધ્યમાં v ઝડપથી પસાર થતા m દળના કણનું બનેલું હોય, તો કણની કુલ યાંત્રિકઊર્જા

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{G\,M\,m}{r}$$

એટલે કે કુલ યાંત્રિકઊર્જા એ ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો છે. કુલ ઊર્જા એ ગતિનો અચળાંક છે.

7. જો m એ Mની આસપાસ a ત્રિજ્યાની વર્તુળ કક્ષામાં ભ્રમણ કરતો હોય, તો તંત્રની કુલ ઊર્જા

$$E = -\frac{G\,M\,m}{2a} \text{ છે.}$$

અહીં, ઉપરના મુદ્દા 5માં આપેલ સ્થિતિઊર્જામાં અચળાંકની યાદચ્છિક પસંદગી કરી શકાય છે. કોઈ પણ બંધિત (Bound) તંત્ર માટે, એટલે કે દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષા જેવી બંધ કક્ષા માટે કુલ ઊર્જા ઋણ છે. ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા

$$K = \frac{G\,M\,m}{2a}$$

$$V = -\frac{G\,M\,m}{a} \text{ છે.}$$

8. પૃથ્વીની સપાટી પરથી નિષ્ક્રમણ ઝડપ

$$\upsilon_e = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E} \text{ છે}$$

અને તેનું મૂલ્ય 11.2 km s^{-1} છે.

9. જો કોઈ કણ નિયમિત ગોળીય કવચ અથવા ગોળીય રીતે સંમિત એવું આંતરિક દળ વિતરણ ધરાવતા ઘન ગોળાની બહાર હોય, તો કવચનું કે ગોળાનું સમગ્ર દળ જાણે કે તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય તે રીતે કણને આકર્ષે છે.

10. જો કોઈ કણ નિયમિત ગોળાકાર કવચની અંદર હોય તો કણ પરનું ગુરુત્વીય બળ શૂન્ય છે. જો કણ સમાંગ (Homogeneous) ઘન ગોળાની અંદર હોય, તો કણ પર ગોળાના કેન્દ્ર તરફ બળ લાગે છે. આ બળ કણના સ્થાનથી અંદરના તરફના ગોળીય દળ દ્વારા લાગે છે.

11. ભૂસ્થિર (Geostationary) અથવા (Geosynchronous Communication) ઉપગ્રહ, વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં પૃથ્વીના કેન્દ્રથી લગભગ 4.22×10^4 km અંતરે વર્તુળકક્ષામાં ભ્રમણ કરે છે.

ભૌતિકરાશિ	પ્રતીક	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
ગુરુત્વીય અચળાંક	G	$[M^{-1}L^3T^{-2}]$	N m^2 kg^2	6.67×10^{-11}
ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા	$V(r)$	$[ML^2T^{-2}]$	J	$-\frac{GMm}{r}$ (અદિશ)
ગુરુત્વ સ્થિતિમાન	$U(r)$	$[L^2T^{-2}]$	J kg^{-1}	$-\frac{GM}{r}$ (અદિશ)
ગુરુત્વ તીવ્રતા	**E** અથવા ***g***	$[LT^{-2}]$	m s^{-2}	$\frac{GM}{r^2}\hat{r}$ (સદિશ)

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ :

1. એક પદાર્થની ગુરુત્વાકર્ષી અસરમાં થતી બીજા પદાર્થની ગતિની વિચારણામાં નીચેની રાશિઓનું સંરક્ષણ થાય છે : (a) કોણીય વેગમાન (b) કુલ યાંત્રિકઊર્જા
રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થતું નથી.
2. કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ કેપ્લરના બીજા નિયમ તરફ દોરી જાય છે. આમ છતાં તે ગુરુત્વાકર્ષણના વ્યસ્ત વર્ગના નિયમ માટે વિશિષ્ટ નથી. તે કોઈ પણ કેન્દ્રિય બળ માટે સત્ય છે.
3. કેપ્લરના ત્રીજો નિયમ (જુઓ સમીકરણ (8.1))માં $T^2 = K_S R^3$. વર્તુળાકાર કક્ષામાંના બધા ગ્રહો માટે અચળાંક K_S સમાન જ છે. આ બાબત પૃથ્વીની ફરતે ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહોને પણ લાગુ પડે છે. (સમીકરણ (8.38)
4. અવકાશી ઉપગ્રહમાંનો અવકાશયાત્રી વજનવિહીનતાનો અનુભવ કરે છે. તેનું કારણ એવું નથી કે અવકાશમાં તે સ્થાને ગુરુત્વબળ નાનું છે. પણ કારણ એ છે કે, અવકાશયાત્રી અને ઉપગ્રહ બંને પૃથ્વી તરફ 'મુક્ત પતન'ની સ્થિતિમાં છે.
5. એકબીજાથી r અંતરે બે પદાર્થોના તંત્રની ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા
$$V = -\frac{G\,m_1 m_2}{r} + \text{અચળાંક}$$
અચળાંકને ગમે તે મૂલ્ય આપી શકાય છે. સૌથી સાદી પસંદગી એ છે કે તેને શૂન્ય લેવાય. આ પસંદગી સાથે
$$V = -\frac{G\,m_1 m_2}{r}$$
આ પસંદગી મુજબ $r \to \infty$ હોય ત્યારે $V \to 0$. ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જામાં શૂન્ય માટે સ્થાન પસંદ કરવું એ સ્થિતિઊર્જામાં યાદચ્છિક અચળાંક નક્કી કરવા બરાબર છે. એ નોંધો કે આ અચળાંકની પસંદગીથી ગુરુત્વબળ બદલાઈ જતું નથી.
6. પદાર્થની કુલ યાંત્રિકઊર્જા તેની ગતિઊર્જા (જે હંમેશાં ધન હોય છે.) અને સ્થિતિઊર્જાના સરવાળા જેટલી છે. અનંતની સાપેક્ષે (એટલે કે જો આપણે અનંત અંતરે સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય છે એમ ધારી લઈએ તો) પદાર્થની ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા ઋણ છે. ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા ઋણ છે.
7. સ્થિતિઊર્જા માટે સામાન્ય રીતે મળતું પદ mgh એ ઉપરના મુદ્દા 6માં ચર્ચેલ ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જાના તફાવતની સંનિકટતા (Approximation) છે.
8. બે કણો વચ્ચેનું ગુરુત્વબળ કેન્દ્રિય હોવા છતાં બે પરિમિત દૃઢ પદાર્થો વચ્ચેનું બળ તેમનાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રોને જોડતી રેખા પર જ હોવું જરૂરી નથી. જોકે ગોળીય સંમિતિ ધરાવતાં પદાર્થ માટે પદાર્થની બહારના કણ પર લાગતું બળ જાણે કે દળ કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયું હોય તે પરથી મળે.
9. ગોળાકાર કવચની અંદર રહેલા કણ પર લાગતું બળ શૂન્ય છે. આમ છતાં, (ધાતુની કવચ વિદ્યુતબળોથી સુરક્ષિત (Shelding કરે–તેના કરતાં અલગ) આ કવચ તેની અંદરના કણને બહારના પદાર્થો દ્વારા લાગતાં ગુરુત્વબળોથી બચાવી લેતું નથી. ગુરુત્વાકર્ષણનું Shielding શક્ય નથી.

સ્વાધ્યાય

8.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(a) એક પોલા વાહકની અંદર વિદ્યુતભાર મૂકીને વિદ્યુતબળોથી તમે તેનું Shielding કરી શકો છો. કોઈ પદાર્થને પોલા ગોળાની અંદર મૂકીને કે અન્ય રીતે તમે નજીકના દ્રવ્યની ગુરુત્વ અસરથી Shield કરી શકશો ?

(b) પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરતા નાના અવકાશયાનની અંદર રહેલો અવકાશયાત્રી ગુરુત્વાકર્ષણની પરખ (Detect) કરી શકતો નથી. જો પૃથ્વીની આસપાસ કક્ષીય ભ્રમણ કરતા અવકાશ-મથકનું પરિમાણ (Size) મોટું હોય તો તે ગુરુત્વાકર્ષણની પરખ કરવાની આશા રાખી શકશે ?

(c) જો તમે પૃથ્વી પર સૂર્યને લીધે લાગતાં અને ચંદ્રને લીધે લાગતાં ગુરુત્વીય બળોની સરખામણી કરો તો તમને જણાશે કે સૂર્યનું ખેંચાણબળ, ચંદ્રના ખેંચાણબળ કરતા મોટું છે. (તમે આ બાબતને હવે પછીના સ્વાધ્યાયમાં આવતી વિગતોની મદદથી ચકાસી શકો છો.) આમ છતાં, ભરતી પર ચંદ્રના ખેંચાણ બળની અસર, ભરતી પરની સૂર્યની અસર કરતાં મોટી છે. આવું શા માટે ?

8.2 સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો :

(a) ઊંચાઈ વધતાં ગુરુત્વપ્રવેગ વધે છે / ઘટે છે.

(b) ઊંડાઈ વધતાં ગુરુત્વપ્રવેગ વધે છે / ઘટે છે. (પૃથ્વીને નિયમિત ઘનતાનો ગોળો ગણો.)

(c) ગુરુત્વપ્રવેગ પૃથ્વીના દળ / પદાર્થના દળથી સ્વતંત્ર છે.

(d) પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r_1 અને r_2 અંતરે આવેલાં બે બિંદુઓએ સ્થિતિઊર્જાના તફાવત માટે $-GMm(1/r_1 - 1/r_2)$ સૂત્ર $mg(r_1 - r_2)$ સૂત્ર કરતાં વધુ / ઓછું ચોકસાઈભર્યું છે.

8.3 ધારો કે કોઈ ગ્રહ સૂર્યની આસપાસ પૃથ્વીની ઝડપ કરતાં બમણી ઝડપે પરિભ્રમણ કરે છે, તો તેની કક્ષાનું પરિમાણ પૃથ્વીની કક્ષાના પરિમાણની સરખામણીએ કેટલું હોય ?

8.4 ગુરુના એક ઉપગ્રહ, આયો (Io)નો કક્ષીય આવર્તકાળ 1.769 days છે અને કક્ષીય ત્રિજ્યા 4.22×10^8 m છે. દર્શાવો કે ગુરુનું દળ સૂર્યના દળના હજારમાં ભાગનું છે.

8.5 આપણે એવું ધારીએ કે આપણી આકાશગંગા (Galaxy) સૂર્યના દળ જેટલું દરેકનું દળ હોય તેવા 2.5×10^{11} તારાઓની બનેલી છે. આકાશગંગાના કેન્દ્રથી 50,000 ly (Light Year–પ્રકાશવર્ષ) દૂર રહેલો કોઈ તારો એક ભ્રમણ પૂરું કરવા માટે કેટલો સમય લેશે ? આકાશગંગાનો વ્યાસ 10^5 ly લો.

8.6 સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો :

(a) જો અનંત અંતરે સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લેવામાં આવે તો કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા તેની ગતિઊર્જા / સ્થિતિઊર્જાના ઋણ મૂલ્ય જેટલી હોય છે.

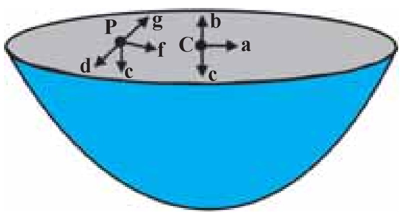
(b) કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહને પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણની બહાર મોકલી દેવા માટે આપવી પડતી ઊર્જા, તે ઉપગ્રહના સ્થાને જ સ્થિર રહેલા કોઈ પદાર્થને પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણમાંથી બહાર મોકલવા માટે જરૂરી ઊર્જા કરતાં વધુ / ઓછી હોય છે.

8.7 પૃથ્વી પરથી ફેંકાતા પદાર્થ માટે નિષ્ક્રમણ ઝડપ (a) શું તે પદાર્થના દળ પર આધારિત છે ? (b) જ્યાંથી ફેંકવામાં આવે તે સ્થાન પર આધારિત છે ? (c) પ્રક્ષિપ્ત કરવાની દિશા પર આધારિત છે ? (d) પદાર્થને ફેંકવાના સ્થાનની ઊંચાઈ પર આધારિત છે ?

8.8 એક ધૂમકેતુ સૂર્યની આસપાસ અતિ દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષામાં ભ્રમણ કરે છે. આ ધૂમકેતુ માટે (a) રેખીય ઝડપ (b) કોણીય ઝડપ (c) કોણીય વેગમાન (d) ગતિઊર્જા (e) સ્થિતિઊર્જા (f) સમગ્ર કક્ષા પર કુલ ઊર્જાઅચળ છે ? ધૂમકેતુ જ્યારે સૂર્યની ખૂબ નજીક આવે ત્યારે કોઈ દળ ક્ષતિ થાય તો તે અવગણો.

8.9 અવકાશમાંના અવકાશયાત્રીને થતી પીડા માટે કયાં લક્ષણો જણાય ? (a) પગમાં સોજો (b) ચહેરા પર સોજો (c) માથું દુઃખવું (d) સંરચનાની (Orientational) તકલીફ.

8.10 નીચેના બે પ્રશ્નોમાં આપેલા ઉત્તરોમાંથી સાચો ઉત્તર પસંદ કરો : (a) નિયમિત દળ ઘનતા ધરાવતા એક અર્ધગોળાકાર કવચના કેન્દ્ર પર ગુરુત્વ તીવ્રતાની દિશા દર્શાવતું તીર (જુઓ આકૃતિ 8.12.) (i) a (ii) b (iii) c (iv) d.



આકૃતિ **8.12**

8.11 ઉપરના પ્રશ્નમાં કોઈ યાદચ્છિક બિંદુ P આગળ ગુરુત્વ તીવ્રતાની દિશા દર્શાવતું તીર (i) d (ii) e (iii) f (iv) g.

8.12 પૃથ્વી પરથી એક રૉકેટ સૂર્ય તરફ છોડવામાં આવે છે. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી કેટલા અંતરે રૉકેટ પરનું ગુરુત્વબળ શૂન્ય બને છે ? સૂર્યનું દળ = 2×10^{30} kg, પૃથ્વીનું દળ = 6×10^{24} kg બીજા ગ્રહો વગેરેની અસર અવગણો. (કક્ષીય ત્રિજ્યા = 1.5×10^{11} m)

8.13 તમે 'સૂર્યનું વજન' કેવી રીતે કરશો, એટલે કે તેના દળનો અંદાજ કેવી રીતે મેળવશો ? સૂર્યની ફરતે પૃથ્વીની કક્ષાની સરેરાશ ત્રિજ્યા 1.5×10^{8} km છે.

8.14 શનિ પરના વર્ષનો સમયગાળો, પૃથ્વી પરના વર્ષના સમયગાળા કરતાં 29.5 ગણો છે. જો પૃથ્વી સૂર્યથી 1.50×10^{8} km અંતરે હોય, તો સૂર્યથી શનિ કેટલે દૂર હશે ?

8.15 એક પદાર્થનું પૃથ્વીની સપાટી પર વજન 63 N છે. પૃથ્વીની ત્રિજ્યા કરતાં અડધી ઊંચાઈએ તે પદાર્થ પરનું પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ કેટલું હશે ?

8.16 પૃથ્વીને નિયમિત દળ ઘનતા ધરાવતો ગોળો ધારીને, જે પદાર્થનું સપાટી પર વજન 250 N હોય, તો તેનું પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ અડધા અંતરે વજન કેટલું થશે ?

8.17 પૃથ્વીની સપાટી પરથી 5 km s^{-1}ની ઝડપે ઊર્ધ્વદિશામાં એક રૉકેટ છોડવામાં આવે છે. પૃથ્વી પર પાછા આવતા અગાઉ રૉકેટ કેટલે દૂર સુધી જશે ? પૃથ્વીનું દળ = 6×10^{24} kg, પૃથ્વીની સરેરાશ ત્રિજ્યા = 6.4×10^{6} m, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

8.18 પૃથ્વીની સપાટી પરથી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની નિષ્ક્રમણ ઝડપ 11.2 km s^{-1} છે. એક પદાર્થને આના કરતાં ત્રણગણી ઝડપે બહાર ફેંકવામાં આવે છે. પૃથ્વીથી અત્યંત દૂરના અંતરે જતાં એ પદાર્થની ઝડપ કેટલી હશે ? સૂર્ય અને બીજા ગ્રહોના અસ્તિત્વ અવગણો.

8.19 પૃથ્વીની સપાટીથી 400 km ઊંચાઈએ એક ઉપગ્રહ કક્ષામાં ભ્રમણ કરે છે. ઉપગ્રહને પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણની અસરમાંથી બહાર મોકલવા માટે કેટલી ઊર્જા ખર્ચવી પડશે ? ઉપગ્રહનું દળ = 200 kg, પૃથ્વીનું દળ = 6.0×10^{24} kg, પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6.4×10^{6} m, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

8.20 દરેકનું એક સોલર (સૂર્ય જેટલું = 2×10^{30} kg) દળ ધરાવતા બે તારા એકબીજા તરફ સન્મુખ (Head on) સંઘાત માટે જઈ રહ્યા છે. જ્યારે તેઓ 10^{9} km અંતરે હોય છે ત્યારે તેમની ઝડપ અવગણ્ય છે. તેઓ કેટલી ઝડપથી એકબીજાને અથડાશે ? દરેક તારાની ત્રિજ્યા 10^{4} km છે. સંઘાત થયા વિના વિના તારાઓ વિકૃત થતા નથી એમ ધારો. (Gનું જ્ઞાત મૂલ્ય લો.)

8.21 એક સમક્ષિતિજ કોષ્ટક પર દરેકનું 100 kg દળ અને 0.10 m ત્રિજ્યા હોય તેવા બે ભારે ગોળાઓને એકબીજાથી 1.0 m અંતરે મૂકેલા છે. ગોળાઓનાં કેન્દ્રોને જોડતી રેખાના મધ્યબિંદુએ ગુરુત્વબળ અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન કેટલા હશે ? તે બિંદુએ મૂકેલો કોઈ પદાર્થ સંતુલનમાં છે ? જો તેમ હોય તો સંતુલન સ્થિર છે કે અસ્થિર ?

વધારાનું સ્વાધ્યાય

8.22 તમે પાઠ્યપુસ્તકમાં શીખ્યાં છો કે ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ પૃથ્વીની સપાટીથી લગભગ 36,000 km ઊંચાઈ ધરાવતી કક્ષામાં ભ્રમણ કરે છે. આ ઉપગ્રહના સ્થાને ગુરુત્વસ્થિતિમાન કેટલું હશે ? (અનંત અંતરે ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લો.) પૃથ્વીનું દળ = 6.0×10^{24} kg, ત્રિજ્યા = 6400 km.

8.23 સૂર્યના દળ કરતાં 2.5 ગણું દળ ધરાવતો અને સંકોચાઈને 12 kmનું પરિમાણ ધરાવતો એક તારો 1.2 પરિભ્રમણ પ્રતિ સેકન્ડ જેટલી ઝડપથી ભ્રમણ કરે છે. (આ પ્રકારના અત્યંત ઠાંસીને નક્કર બનેલા compact તારાને ન્યુટ્રૉન તારા કહે છે. પલ્સાર તરીકે ઓળખાતા કેટલાક અવકાશી પદાર્થો આ પ્રકારમાં આવે છે.) તેના વિષુવવૃત્ત પર મૂકેલો પદાર્થ ગુરુત્વાકર્ષણને લીધે તેની સપાટીને ચોટીને રહેશે ? (સૂર્યનું દળ = 2×10^{30} kg).

8.24 મંગળ પર એક અવકાશયાન સ્થિર થયેલ છે. આ અવકાશયાનને સૂર્યમંડળની બહાર ધકેલી દેવા માટે કેટલી ઊર્જા ખર્ચવી પડશે ? અવકાશયાનનું દળ = 1000 kg, સૂર્યનું દળ = 2×10^{30} kg, મંગળનું દળ = 6.4×10^{23} kg, મંગળની ત્રિજ્યા = 3395 km, મંગળની કક્ષાની ત્રિજ્યા = 2.28×10^{8} km, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

8.25 મંગળની સપાટી પરથી એક રૉકેટ ઊર્ધ્વદિશામાં 2 km s^{-1}ની ઝડપથી છોડવામાં આવે છે. જો મંગળના વાતાવરણના અવરોધને લીધે તેની પ્રારંભિક ઊર્જાની 20 % ઊર્જા વ્યય પામતી હોય, તો મંગળની સપાટી પર પાછું આવતા પહેલાં રૉકેટ કેટલે દૂર જશે ? મંગળનું દળ = 6.4×10^{23} kg, મંગળની ત્રિજ્યા = 3395 km, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

પરિશિષ્ટ (APPENDICES)

પરિશિષ્ટ A 1
ગ્રીક આલ્ફાબેટ

આલ્ફા (Alpha)	A	α	ન્યુ (Nu)	N	ν
બીટા (Beta)	B	β	ક્ઝાઈ (Xi)	Ξ	ξ
ગામા (Gamma)	Γ	γ	ઓમિક્રોન (Omicron)	O	ο
ડેલ્ટા (Delta)	Δ	δ	પાઈ (Pi)	Π	π
એપ્સિલોન (Epsilon)	E	ε	રહૉ (Rho)	P	ρ
ઝેટા (Zeta)	Z	ς	સિગ્મા (Sigma)	Σ	σ
ઈટા (Eta)	H	η	ટાઉ (Tau)	T	τ
થીટા (Theta)	Θ	θ	અપ્સિલોન (Upsilon)	Y	υ
આયોટા (Iota)	I	ι	ફાઈ (Phi)	Φ	φ, φ
કેપ્પા (Kappa)	K	κ	ઝાઈ (Chi)	X	χ
લૅમ્ડા (Lambda)	Λ	λ	સાઈ (Psi)	Ψ	ψ
મ્યુ (Mu)	M	μ	ઓમેગા (Omega)	Ω	ω

પરિશિષ્ટ A 2
ગુણકો અને અપૂર્ણાંક ગુણકો માટે સામાન્ય SI પૂર્વગો અને પ્રતીકો

અવયવ	પૂર્વગ	પ્રતીક	અવયવ	પૂર્વગ	પ્રતીક
10^{18}	એક્ઝા (Exa)	E	10^{-18}	ઍટો (atto)	a
10^{15}	પેટા (Peta)	P	10^{-15}	ફેમ્ટો (femto)	f
10^{12}	ટેરા (Tera)	T	10^{-12}	પિકો (pico)	p
10^{9}	ગિગા (Giga)	G	10^{-9}	નેનો (nano)	n
10^{6}	મેગા (Mega)	M	10^{-6}	માઈક્રો (micro)	μ
10^{3}	કિલો (kilo)	k	10^{-3}	મિલિ (milli)	m
10^{2}	હેક્ટો (Hecto)	h	10^{-2}	સેન્ટિ (centi)	c
10^{1}	ડેકા (Deca)	da	10^{-1}	ડેસિ (deci)	d

પરિશિષ્ટ A 3

કેટલાક અગત્યના અચળાંકો

નામ	પ્રતીક	મૂલ્ય
શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ	c	2.9979×10^{8} m s^{-1}
ઈલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર	e	1.602×10^{-19} C
ગુરુત્વાકર્ષી અચળાંક	G	6.673×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}
પ્લાન્ક અચળાંક	h	6.626×10^{-34} J s
બોલ્ટ્ઝમૅન અચળાંક	k	1.381×10^{-23} J K^{-1}
ઍવોગેડ્રો અંક	N_A	6.022×10^{23} mol^{-1}
સાર્વત્રિક વાયુ-અચળાંક	R	8.314 J $mol^{-1}K^{-1}$
ઈલેક્ટ્રૉનનું દળ	m_e	9.110×10^{-31} kg
ન્યુટ્રૉનનું દળ	m_n	1.675×10^{-27} kg
પ્રોટોનનું દળ	m_p	1.673×10^{-27} kg
ઈલેક્ટ્રૉનના વિદ્યુતભાર અને દળનો ગુણોત્તર	e/m_e	1.759×10^{11} C/kg
ફેરેડે અચળાંક	F	9.648×10^{4} C/mol
રીડબર્ગ અચળાંક	R	1.097×10^{7} m^{-1}
બોહ્ર ત્રિજ્યા	a_0	5.292×10^{-11} m
સ્ટીફન-બોલ્ટ્ઝમૅન અચળાંક	σ	5.670×10^{-8} W $m^{-2}K^{-4}$
વીનનો અચળાંક	b	2.898×10^{-3} m K
શૂન્યાવકાશનો પરાવૈદ્યુતાંક (પરમિટીવીટી)	ε_0 $1/4\pi\varepsilon_0$	8.854×10^{-12} $C^{2}N^{-1}m^{-2}$ 8.987×10^{9} N $m^{2}C^{-2}$
શૂન્યાવકાશની પારગમ્યતા (પરમિએબીલીટી)	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T m A^{-1} $\cong 1.257 \times 10^{-6}$ Wb $A^{-1}m^{-1}$

બીજા ઉપયોગી અચળાંકો

નામ	પ્રતીક	મૂલ્ય
ઉષ્માનો યાંત્રિક તુલ્યાંક	J	4.186 J cal^{-1}
પ્રમાણભૂત વાતાવરણનું દબાણ	1 atm	1.013×10^{5} Pa
નિરપેક્ષ શૂન્ય	0 K	−273.15 °C
ઈલેક્ટ્રૉન વૉલ્ટ	1 eV	1.602×10^{-19} J
યુનિફાઈડ એટોમિક માસ યુનિટ	1 u	1.661×10^{-27} kg
ઈલેક્ટ્રૉનની સ્થિરઊર્જા	mc^2	0.511 MeV
1 u ને સમતુલ્ય ઊર્જા	1 uc^2	931.5 MeV
આદર્શ વાયુનું કદ (0°C અને 1 વાતા.)	V	22.4 L mol^{-1}
ગુરુત્વપ્રવેગ (વિષુવવૃત્ત પાસે દરિયાની સપાટીએ)	g	9.78049 m s^{-2}

પરિશિષ્ટ A 4
રૂપાંતરણ અવયવ

સરળતા ખાતર રૂપાંતરણ અવયવ નીચે મુજબ સમીકરણ સ્વરૂપે લખેલ છે :

લંબાઈ (Length)

1 km = 0.6215 mi

1mi = 1.609 km

1m = 1.0936 yd = 3.281 ft = 39.37 in

1 in = 2.54 cm

1 ft = 12 in = 30.48 cm

1 yd = 3ft = 91.44 cm

1 lightyear = 1 ly = 9.461×10^{15}m

1 Å = 0.1nm

ક્ષેત્રફળ (Area)

1 $m^2 = 10^4$ cm^2

1km^2 = 0.3861 mi^2 = 247.1 acres

1 in^2= 6.4516 cm^2

1ft^2= $9.29 \times 10^{-2} m^2$

1 m^2= 10.76 ft^2

1 acre = 43,560 ft^2

1 mi^2= 460 acres = 2.590 km^2

કદ (Volume)

1m^3= $10^6 cm^3$

1 L = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3

1 gal = 3.786 L

1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 in^3

1 in^3 = 16.39 cm^3

1ft^3 = 1728 in^3 = 28.32 L = 2.832×10^4 cm^3

ઝડપ (Speed)

1 km h^{-1} = 0.2778 m s^{-1} = 0.6215 mi h^{-1}

1mi h^{-1} = 0.4470 m s^{-1} = 1.609 km h^{-1}

1mi h^{-1} = 1.467 ft s^{-1}

ચુંબકીયક્ષેત્ર (Magnetic Field)

1 G = 10^{-4} T

1 T = 1 Wb m^{-2} = 10^4 G

ખૂણો અને કોણીય ઝડપ (Angle and Angular Speed)

π rad = 180°

1 rad = 57.30°

1° = 1.745×10^{-2} rad

1 rev min^{-1} = 0.1047 rad s^{-1}

1 rad s^{-1} = 9.549 rev min^{-1}

દળ (Mass)

1 kg = 1000 g

1 tonne = 1000 kg = 1 Mg

1 u = 1.6606×10^{-27} kg

1 kg = 6.022×10^{26} u

1 slug = 14.59 kg

1 kg = 6.852×10^{-2} slug

1 u = 931.50 MeV/ c^2

ઘનતા (Density)

1 g cm^{-3} = 1000 kg m^{-3} = 1 kg L^{-1}

બળ (Force)

1 N = 0.2248 lbf = 10^5 dyn

1 lbf = 4.4482 N

1 kgf = 2.2046 lbf

સમય (Time)

1 h = 60 min = 3.6 ks

1 d = 24 h = 1440 min = 86.4 ks

1y = 365.24 d = 31.56 Ms

દબાણ (Pressure)

1 Pa = 1 N m^{-2}

1 bar = 100 kPa

1 atm = 101.325 kPa = 1.01325 bar

1atm = 14.7 lbf/in^2 = 760 mm Hg

= 29.9 in Hg = 33.8 ft H_2O

1 lbf in^{-2} = 6.895 kPa

1 torr = 1mm Hg = 133.32 Pa

ઊર્જા (Energy)

1 kW h = 3.6 MJ

1 cal = 4.186 J

1ft lbf = 1.356 J = 1.286×10^{-3} Btu

1 L atm = 101.325 J

1 L atm = 24.217 cal

1 Btu = 778 ft lb = 252 cal = 1054.35 J

1 eV = 1.602×10^{-19} J

1 u c^2 = 931.50 MeV

1 erg = 10^{-7} J

પાવર (Power)

1 horsepower (hp) = 550 ft lbf/s

= 745.7 W

1 Btu min^{-1} = 17.58 W

1 W = $1.341 \cdot 10^{-3}$ hp

= 0.7376 ft lbf/s

ઉષ્માવાહકતા (Thermal Conductivity)

1 W m^{-1} K^{-1} = 6.938 Btu in/hft^2 °F

1 Btu in/hft^2 °F = 0.1441 W/m K

પરિશિષ્ટ A 5
ગાણિતિક સૂત્રો

ભૂમિતિ (Geometry)

વર્તુળની ત્રિજ્યા r: પરિઘ = $2\pi r$;

ક્ષેત્રફળ = πr^2

ગોળાની ત્રિજ્યા r: ક્ષેત્રફળ = $4\pi r^2$;

કદ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

r ત્રિજ્યા અને h, ઊંચાઈના વર્તુળાકાર નળાકાર માટે ક્ષેત્રફળ = $2\pi r^2 + 2\pi r h$;

કદ = $\pi r^2 h$;

a પાયો અને h વેધવાળા ત્રિકોણનું

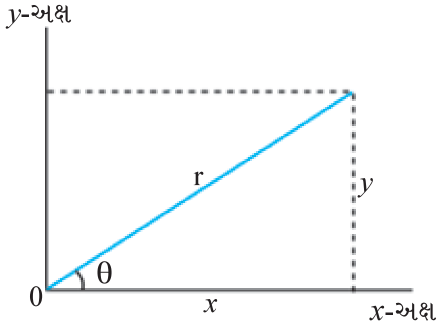
ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}\ a\,h$

દ્વિઘાત સમીકરણ (Quadratic Formula)

જો $ax^2 + bx + c = 0$,

તો $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

θ ખૂણા માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયો (Trigonometric Functions of Angle θ)



આકૃતિ A 5.1

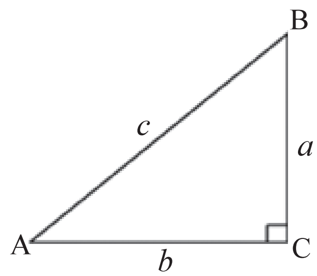
$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\quad\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\quad\cot\theta = \frac{x}{y}$

$\sec\theta = \frac{r}{x}$ $\quad\csc\theta = \frac{r}{y}$

પાયથાગોરસ પ્રમેય (Pythagorean Theorem)

આ કાટકોણ ત્રિકોણ માટે, $a^2 + b^2 = c^2$



આકૃતિ A 5.2

ત્રિકોણો (Triangles)

ખૂણાઓ A, B, C છે.

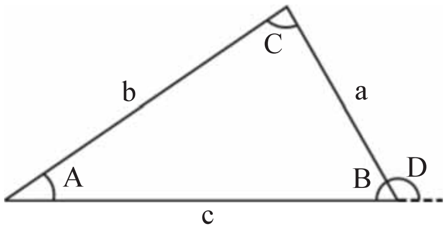
તેમની વિરુદ્ધ બાજુઓ a, b, c છે.

ખૂણાઓ $A + B + C = 180^0$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

બહિષ્કોણ $D = A + C$



આકૃતિ A 5.3

ગણિતીય ચિહ્નો અને પ્રતીકો (Mathematical Signs and Symbols)

= બરાબર

≅ લગભગ બરાબર

~ માનના ક્રમનું છે.

≠ બરાબર નથી.

≡ એકરૂપ છે, તરીકે વ્યાખ્યાયિત છે.

> કરતાં મોટું છે. (>> કરતાં ઘણું મોટું છે.)

< કરતાં નાનું છે. (<< કરતાં ઘણું નાનું છે.)

≥ કરતાં મોટું અથવા બરાબર છે. (કરતાં નાનું નથી.)

≤ કરતાં નાનું અથવા બરાબર છે. (કરતાં મોટું નથી.)

± વત્તા કે ઓછા

∝ ને સમપ્રમાણમાં છે.

Σ નો સરવાળો

$\bar{x}$ અથવા $<x>$ અથવા x_{av} x નું સરેરાશ મૂલ્ય

ત્રિકોણમિતીય સૂત્રો (Trigonometric Identities)

$\sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90^0 - \theta) = \sin\theta$

$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$

$\cos\alpha + \cos\beta$

$= 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta$

$= -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

દ્વિપદી પ્રમેય (Binomial Theorem)

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots\ldots (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \ldots\ldots (x^2 < 1)$$

ચર ઘાતાંકી વિસ્તરણ (Exponential Expansion)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

લઘુગણકીય વિસ્તરણ (Logarithmic Expansion)

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots \quad (|x| < 1)$$

ત્રિકોણમિતીય વિસ્તરણ (Trigonometric Expansion) (θ in radians)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\ldots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} - \ldots\ldots$$

સદિશોના ગુણાકાર (Products of Vectors)

x, y અને z દિશામાંના એકમ સદિશોને $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ અને $\hat{\mathbf{k}}$ તરીકે લખીએ તો

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1,\ \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = 0,\ \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

x, y અને z અક્ષો પર a_x, a_y અને a_z ઘટકો ધરાવતો કોઈ પણ સદિશ **a** આ પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

કોઈ પણ સદિશો **a, b** અને **c** નાં માન a, b અને c હોય તો

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

$$(s\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad (s \text{ અદિશ છે.})$$

a અને **b** વચ્ચેનો નાનો કોણ θ હોય તો

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\sin\theta$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z)\,\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

પરિશિષ્ટ A 6
SI સાધિત એકમો
A 6.1 કેટલાક SI સાધિત એકમો SI મૂળ એકમોમાં દર્શાવ્યા છે.

ભૌતિકરાશિ (Physical quantity)	SI એકમ (SI Unit)	
	નામ (Name)	પ્રતીક (Symbol)
ક્ષેત્રફળ	square metre	m^2
કદ	cubic metre	m^3
ઝડપ, વેગ	metre per second	m/s or m s^{-1}
કોણીય વેગ	radian per second	rad/s or rad s^{-1}
પ્રવેગ	metre per second square	m/s^2 or m s^{-2}
કોણીય પ્રવેગ	radian per second square	rad/s^2 or rad s^{-2}
તરંગસંખ્યા	per metre	m^{-1}
ઘનતા, દળ ઘનતા	kilogram per cubic metre	kg/m^3 or kg m^{-3}
પ્રવાહ ઘનતા	ampere per square metre	A/m^2 or A m^{-2}
ચુંબકીયક્ષેત્ર પ્રબળતા, ચુંબકીય તીવ્રતા, ચુંબકીય ચાકમાત્રા ઘનતા	ampere per metre	A/m or A m^{-1}
(દ્રવ્યના જથ્થાની) સાંદ્રતા	mole per cubic metre	mol/m^3 or mol m^{-3}
વિશિષ્ટ કદ	cubic metre per kilogram	m^3/kg or m^3 kg^{-1}
જ્યોતિર્મયતા, જ્યોતિતીવ્રતા	candela per square metre	cd/m^2 or cd m^{-2}
શુદ્ધ ગતિક શ્યાનતા	square metre per second	m^2/s or m^2 s^{-1}
વેગમાન	kilogram metre per second	kg m s^{-1}
જડત્વની ચાકમાત્રા	kilogram square metre	kg m^2
ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા	metre	m
રેખીય/ક્ષેત્રીય/કદ-પ્રસરણાંક	per kelvin	K^{-1}
વહન દર	cubic metre per second	m^3 s^{-1}

A 6.2 SI સાધિત એકમો, વિશિષ્ટ નામ સહિત

ભૌતિકરાશિ (Physical quantity)	SI એકમ (SI Unit) નામ (Name)	પ્રતીક (Symbol)	બીજા એકમોના પદમાં (Expression in terms of other units)	SI મૂળ એકમોના પદમાં (Expression in terms of SI base Unit
આવૃત્તિ	hertz	Hz	-	s^{-1}
બળ	newton	N	-	$kg\ m\ s^{-2}$ or $kg\ m/s^2$
દબાણ, પ્રતિબળ	Pascal	Pa	N/m^2 or $N\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$ or $kg\ /\ s^2\ m$
ઊર્જા, કાર્ય, ઉષ્માનો જથ્થો	joule	J	N m	$kg\ m^2\ s^{-2}$ or $kg\ m^2/s^2$
પાવર, વિકિરણ ફ્લક્સ	watt	W	J/s or $J\ s^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}$ or $kg\ m^2\ /\ s^3$
વિદ્યુતનો જથ્થો, વિદ્યુતભાર	coulomb	C	-	A s
વિદ્યુત સ્થિતિમાન, સ્થિતિમાનનો તફાવત, વિદ્યુતચાલક બળ	volt	V	W/A or $W\ a^{-1}$	$kg\ m^2 s^{-3}\ A^{-1}$ or $kg\ m^2/s^3\ A$
કેપેસિટન્સ	farad	F	C/V	$A^2 s^4\ kg^{-1}\ m^{-2}$
વિદ્યુત અવરોધ	ohm	Ω	V/A	$kg\ m^2 s^{-3}\ A^{-2}$
વાહકતા	siemens	S	A/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^3\ A^2$
ચુંબકીય ફ્લક્સ	weber	Wb	V s or J/A	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-1}$
ચુંબકીયક્ષેત્ર, ચુંબકીય ફ્લક્સ ઘનતા, ચુંબકીય પ્રેરણ	tesla	T	Wb/m^2	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
પ્રેરકત્વ	henry	H	Wb/A	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-2}$
જ્યોતિ ફ્લક્સ, જ્યોતિ તીવ્રતા	lumen	lm	-	cd / sr
પ્રદીપ્ત ઘનત્વ	lux	lx	lm/m^2	$m^{-2}\ cd\ sr^{-1}$
રેડિયો ન્યુક્લાઇડ/રેડિયો ઍક્ટિવ સ્રોતની ઍક્ટિવિટી	becquerel	Bq	-	s^{-1}
શોષીત જથ્થો, શોષીત જથ્થાઅંક	gray	Gy	J/kg	m^2/s^2 or $m^2\ s^{-2}$

A 6.3 વિશિષ્ટ નામ સાથે SI એકમોમાં દર્શાવતા કેટલાક SI સાધિત એકમો

ભૌતિકરાશિ (Physical quantity)	નામ (Name)	SI એકમ પ્રતીક (SI Unit Symbol)	SI મૂળ એકમોના પદમાં (Expression in terms of SI base Unit)
ચુંબકીય ચાકમાત્રા	joule per tesla	$J\ T^{-1}$	$m^2\ A$
ડાયપોલ ચાકમાત્રા	coulomb metre	C m	s A m
ગતિક શ્યાનતા	poiseiulles or pascal second or newton second per sq. m	Pl or Pa s or $N\ s\ m^{-2}$	$m^{-1}\ kg\ s^{-1}$
ટૉર્ક, બળયુગ્મ, બળની ચાકમાત્રા	newton metre	N m	$m^2\ kg\ s^{-2}$
પૃષ્ઠતાણ	newton per metre	N/m	$kg\ s^{-2}$
પાવર ઘનતા, વિકિરણમાત્રા ઉષ્મા ફ્લક્સ ઘનતા	watt per square metre	W/m^2	$kg\ s^{-3}$

ઉષ્માધારિતા, એન્ટ્રોપી	joule per kelvin	J/K	$m^2\ kg\ s^{-2}\ k^{-1}$
વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા, વિશિષ્ટ એન્ટ્રોપી	joule per kilogram kelvin	J/kg K	$m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$
વિશિષ્ટ ઊર્જા, ગુપ્ત ઉષ્મા	joule per kilogram	J/kg	$m^2\ s^{-2}$
વિકિરણ તીવ્રતા	watt per steradian	$W\ sr^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}\ sr^{-1}$
ઉષ્માવાહકતા	watt per metre kelvin	$W\ m^{-1}\ K^{-1}$	$kg\ m\ s^{-3}\ k^{-1}$
ઊર્જા ઘનતા	joule per cubic metre	J/m^3	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
વિદ્યુતક્ષેત્ર તીવ્રતા	volt per metre	V/m	$m\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
વિદ્યુતભાર ઘનતા	coulomb per cubic metre	C/m^3	$m^{-3}\ A\ s$
વિદ્યુત ફ્લક્સ ઘનતા	coulomb per square metre	C/m^2	$m^{-2}\ A\ s$
પરાવૈદ્યુતાંક	farad per metre	F/m	$m^{-3}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$
પારગમ્યતા	henry per metre	H/m	$m\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
મોલર ઊર્જા	joule per mole	J/mol	$m^2\ kg\ s^{-2}\ mol^{-1}$
કોણીય વેગમાન પ્લાન્કનો અચળાંક	joule second	J s	$kg\ m^2\ s^{-1}$
મોલર એન્ટ્રોપી, મોલર ઉષ્માધારિતા	joule per mole kelvin	$\frac{J}{mol\ k}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ k^{-1}\ mol^{-1}$
એક્સ્પોઝર(x-rays) અને(γ-rays)	coulomb per kilogram	C/kg	$kg^{-1}\ s\ A$
શોષીત જથ્થા-દર	gray per second	Gy/s	$m^2\ s^{-3}$
દબનીયતા	par pascal	Pa^{-1}	$m\ kg^{-1}\ s^2$
સ્થિતિસ્થાપક અંકો	Newton per square metre	N/m^2 or $N\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
દબાણ પ્રચલન	pascale per metre	Pa/m or $N\ m^{-3}$	$kg\ m^{-2}\ s^{-2}$
પૃષ્ઠ સ્થિતિમાન	joule per kilogram	J/kg or N m / kg	$m^2\ s^{-2}$
દબાણઊર્જા	pascal cubic metre	$Pa\ m^3$ or N m	$kg\ m^2\ s^{-2}$
આઘાત	newton second	N s	$kg\ m\ s^{-1}$
કોણીય આઘાત	newton metre second	N m s	$kg\ m^2\ s^{-1}$
વિશિષ્ટ અવરોધ	ohm metre	Ωm	$kg\ m^3\ s^{-3}\ A^{-2}$
પૃષ્ઠ ઊર્જા	joule per square metre	J/m^2 or N/m	$kg\ s^{-2}$

પરિશિષ્ટ A 7

ભૌતિકરાશિઓ, રાસાયણિક તત્ત્વો અને ન્યુક્લાઇડ્ઝનાં પ્રતીકો (સંકેતો) વાપરવા માટે સામાન્ય માર્ગદર્શન

- ભૌતિકરાશિઓનાં પ્રતીકો સામાન્ય રીતે એક અક્ષર હોય છે અને ઇટાલિક (ઢળતા) ટાઈપમાં છપાય છે. આમ છતાં ગુણાકારમાં એક અવયવ તરીકે દેખાતા બે અક્ષરનાં પ્રતીકોના કિસ્સામાં બીજા પ્રતીકોથી અલગ પાડવા માટે આ પ્રતીકને થોડા અંતરે રખાય છે.
- ભૌતિક સમીકરણોમાં નામો કે પદોના ટૂંકાક્ષરી દા.ત., સ્થિતિઊર્જા માટે સ્થિ. ઊ. વપરાતા નથી. પુસ્તકમાં આ ટૂંકાક્ષરી સામાન્ય / રોમન (ઊભા) ટાઈપમાં લખાય છે.
- સદિશો ઘાટા (ઘટ્ટ) અને સામાન્ય/રોમન (ઊભા) ટાઈપમાં છપાય છે. જોકે વર્ગખંડની પરિસ્થિતિમાં સદિશો પ્રતીકના માથે તીર મૂકીને દર્શાવી શકાય.
- બે રાશિઓનો ગુણાકાર તેમની વચ્ચે થોડી જગ્યા રાખીને લખાય છે. એક રાશિનો બીજી રાશિ દ્વારા ભાગાકાર સમક્ષિતિજ લીટી અથવા ત્રાંસી લીટી (/) તરીકે દર્શાવાય અથવા અંશ અને છેદના પ્રથમ ઘાતના વ્યસ્તના ગુણાકાર તરીકે યોગ્ય સ્થળોએ અંશ અને છેદને સ્પષ્ટ જુદા પાડીને લખી શકાય.

- રાસાયણિક તત્ત્વોનાં પ્રતીકો સામાન્ય/રોમન (ઊભા) ટાઈપમાં લખાય છે. પ્રતીકના પછી પૂર્ણવિરામ મુકાતું નથી. ઉદાહરણ તરીકે, Ca, C, H, He, U વગેરે.
- ન્યુક્લાઇડને રજૂ કરવા માટે તેની સાથે જોડેલા અંકો ડાબા નિમ્નલિખિત (પરમાણુ-ક્રમાંક) અને ઉચ્ચલિખિત (દળાંક) તરીકે મુકાય છે.

  ઉદાહરણ તરીકે U–235 ન્યુક્લાઇડને ${}^{235}_{92}U$ તરીકે રજૂ કરાય છે. (રાસાયણિક સંજ્ઞા U સાથે, દળાંક 235 દ્વારા અને પરમાણુ-ક્રમાંક 92 દ્વારા દર્શાવાય છે.).
- જરૂર પડે તો જમણી બાજુ ઉચ્ચલિખિત સ્થાન આયનીકરણની સ્થિતિ (આયનોના કિસ્સામાં) દર્શાવવા માટે વપરાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, Ca^{2+}, PO_4^{3-}

પરિશિષ્ટ A 8
SI એકમો, કેટલાક બીજા એકમો અને SI પૂર્વગોનાં પ્રતીકોના ઉપયોગ માટે સામાન્ય માર્ગદર્શન

- ભૌતિકરાશિઓના એકમો માટેનાં પ્રતીકો સામાન્ય/રોમન સીધા ટાઈપમાં છપાય છે / લખાય છે.
- એકમોનાં પ્રમાણભૂત અને અનુમોદિત પ્રતીકો નાના અક્ષરોથી શરૂ થતા રોમન (સીધા) ટાઈપમાં લખાય છે. એકમોનાં ટૂંકાં સ્વરૂપો જેવા કે, kg, m, s, cd વગેરે પ્રતીકો છે. ટૂંકાક્ષરી નથી. એકમોના નામ કેપિટલમાં કદી લખાતા નથી. છતાં જો એકમનો પ્રતીક, વિજ્ઞાનીના નામ પરથી મેળવેલ હોય તો તેને કેપિટલમાં શરૂ કરી સામાન્ય/રોમન અક્ષરમાં લખાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, 'મીટર' એકમ માટે m, 'day' એકમ માટે d, 'atmospheric દબાણ' એકમ માટે atm, 'hertz' એકમ માટે Hz, 'weber' એકમ માટે Wb, 'joule' એકમ માટે J, 'ampere' એકમ માટે A, 'volt' એકમ માટે V, વગેરે. એક અપવાદ છે L જે 'litre' એકમનું પ્રતીક છે. આ અપવાદ, લઘુ સ્વરૂપમાં લખાતો અક્ષર *l* ની અરબી સંખ્યાંક 1 સાથે ગેરસમજ નિવારવા રાખેલ છે.
- એકમોનાં પ્રતીકોના અક્ષરને અંતે પૂર્ણવિરામ મુકાતું નથી અને બહુવચનમાં પણ તે બદલાતા નથી પણ એકવચનના રૂપમાં જ લખાય છે.

  ઉદાહરણ તરીકે, 25 centimetres લંબાઈ માટે એકમ પ્રતીક 25 cm તરીકે લખાય છે, નહિ કે 25 cms અથવા 25 cm વગેરે.
- ત્રાંસી લીટી (/) ફક્ત એકાક્ષરી એકમ પ્રતીકનો બીજા એકમ પ્રતીક સાથેનો ભાગાકાર દર્શાવવા જ વપરાય છે. એક જ એકમમાં એક કરતાં વધુ ત્રાંસી લીટી (એક કરતાં વધુ ગુણોત્તરો) વપરાતી નથી.

  ઉદાહરણ તરીકે :

  m/s^2 અથવા $m\ s^{-2}$ (m અને s^{-2} વચ્ચે જગ્યા રાખીને), પરંતુ m/s/s તરીકે નહિ.

  $1\ Pl = 1\ N\ s\ m^{-2} = 1\ N\ s/m^2 = 1\ kg/s\ m = 1\ kg\ m^{-1}\ s^{-1}$, પરંતુ 1 kg/m/s તરીકે નહિ.

  J/K mol અથવા $J\ K^{-1}\ mol^{-1}$, પરંતુ J/K/mol તરીકે નહિ વગેરે.
- પૂર્વગ પ્રતીકો સામાન્ય/રોમન (સીધા) ટાઈપમાં છપાય છે અને પૂર્વગ પ્રતીક અને એકમ પ્રતીક વચ્ચે કોઈ જગ્યા રખાતી નથી. આમ એકમ પ્રતીકની નજીક કેટલાંક માન્ય પૂર્વગ પ્રતીકો, SI એકમના દશાંશ-અપૂર્ણાંકો કે ગુણકો દર્શાવવા માટે અગવડભર્યા નાના કે મોટા હોય, ત્યારે લખાય છે.

  ઉદાહરણ તરીકે :

મેગાવૉટ ($1MW = 10^6$ W);	નેનો સેકન્ડ ($1\ ns = 10^{-9}$ s);
સેન્ટિમીટર ($1\ cm = 10^{-2}$ m);	પિકોફેરડ ($1\ pF = 10^{-12}$ F);.
કિલોમીટર ($1\ km = 10^3$ m);	માઇક્રોસેકન્ડ ($1\mu s = 10^{-6}$ s);
મિલિવોલ્ટ ($1\ mV= 10^{-3}$ V);	ગિગાહર્ટ્ઝ ($1GHz = 10^9$ Hz);

કિલોવોટ-અવર (1 kWh = 10^3 W h = 3.6 MJ = 3.6×10^6 J);

માઈક્રોએમ્પિયર (1μ A = 10^{-6} A); માઈક્રોન (1μm = 10^{-6} m);

ઍન્ગસ્ટ્રોમ (1 Å=0.1 nm = 10^{-10} m); વગેરે.

'માઈક્રોન' એકમ જે 10^{-6} m, એટલે કે માઈક્રોમીટર બરાબર છે તેને આ નામ માત્ર મીટરના અપૂર્ણાંક ગુણકને સગવડ માટે અપાયું છે. એવી જ રીતે ન્યુક્લિયર અભ્યાસોમાં લંબાઈના સગવડભર્યા એકમ તરીકે 'ફર્મિ' જે ફેમ્ટોમીટર અથવા 10^{-15} m બરાબર છે તે વપરાય છે. તેવી જ રીતે પરમાણુની અંદરના કણો (sub–atomic particle)ના સંઘાતોમાં આડછેદના ક્ષેત્રફળનો સગવડભર્યો એકમ બાર્ન, જે 10^{-28} m^2 બરાબર છે, તે વપરાય છે. જોકે લંબાઈ માપતા ઉપકરણ 'માઈક્રોમીટર' સાથે ગૂંચવાડો ન થાય તે માટે 'માઈક્રોમીટર' એકમને સ્થાને 'માઈક્રોન' વધુ પસંદ કરાય છે. SI એકમો મીટર અને સેકન્ડના આ નવા ગુણકો કે અપૂર્ણાંક ગુણકો (cm, km, μm, μs, ns) એકમોના સંયુક્ત અને અલગ ન પાડી શકાય તેવાં પ્રતીકોનું નિર્માણ કરે છે.

- જ્યારે એકમના પ્રતીકની આગળ પૂર્વગ મૂકવામાં આવે છે ત્યારે, પૂર્વગ અને પ્રતીકનું સંયોજન, એકમનું નવું પ્રતીક ગણાય છે જેને ધન કે ઋણ ઘાત કૌંસ વગર આપી શકાય છે. બીજા એકમ પ્રતીકો સાથે આને સંયોજીને સંયોજિત એકમ બનાવાય છે. ઘાતાંકોના બંધનના નિયમ સામાન્ય બીજગણિત જેવા નથી હોતા.

  ઉદાહરણ તરીકે :

  cm^3 નો અર્થ હંમેશાં $(cm)^3 = (0.01\ m)^3 = 10^{-6}\ m^3$, છે નહિ કે 0.01 m^3 અથવા

  10^{-2} m^3 અથવા 1 cm^3 (m^3 સાથે પૂર્વગ c વચ્ચે જગ્યા રાખેલી હોય, તો તે અર્થહીન છે કારણ કે પૂર્વગ c એકમના પ્રતીકને જોડાય છે અને એકમ પ્રતીક સાથે જોડાયા સિવાય તેની કોઈ ભૌતિક સાર્થકતા કે સ્વતંત્ર અસ્તિત્વ નથી.)

  તેવી જ રીતે, mA^2નો અર્થ હંમેશાં $(mA)^2 = (0.001A)^2 = 10^{-6}\ A^2$ છે નહિ કે 0.001 A^2 અથવા 10^{-3} A^2 અથવા m A^2;

  1 $cm^{-1} = (10^{-2}m)^{-1} = 10^2\ m^{-1}$, પરંતુ 1 c m^{-1} અથવા 10^{-2} m^{-1} નથી.

  1μs^{-1}નો અર્થ હંમેશાં $(10^{-6}s)^{-1} = 10^6\ s^{-1}$, છે, પણ 1×10^{-6} s^{-1} નથી.

  1 km^2નો અર્થ હંમેશાં $(km)^2 = (10^3\ m)^2 = 10^6\ m^2$, છે, પણ 10^3 m^2 નથી.

  1mm^2નો અર્થ હંમેશાં $(mm)^2 = (10^{-3}\ m)^2 = 10^{-6}\ m^2$, છે, પણ 10^{-3} m^2 નથી.

- પૂર્વગ કદી એકલો વપરાતો નથી. તે હંમેશાં એકમ પ્રતીકને જોડાયેલ છે અને એકમ પ્રતીકની પહેલાં (અગાઉ) લખાય છે.

  ઉદાહરણ તરીકે :

  $10^3/m^3$ નો અર્થ 1000/m^3 અથવા 1000 m^{-3}, છે, પણ k/m^3 અથવા k m^{-3} નથી.

  $10^6/m^3$ નો અર્થ 10,00,000/m^3 અથવા 10,00,000 m^{-3}, છે, પણ M/m^3 અથવા M m^{-3} નથી.

- પૂર્વગ પ્રતીક એ એકમ પ્રતીકની બહુ નજીક લખાય છે. તેમની વચ્ચે જગ્યા રખાતી નથી જ્યારે એકમોના ગુણાકાર થાય ત્યારે એકમ પ્રતીકો જુદા જુદા થોડી જગ્યા રાખીને લખાય છે.

  ઉદાહરણ તરીકે :

  m s^{-1} (m અને s^{-1}, પ્રતીકો, m અને s નાના અક્ષર એ જુદા જુદા અને સ્વતંત્ર એકમ પ્રતીકો અનુક્રમે metre અને second માટેના છે, તેમની વચ્ચે થોડી જગ્યા છે)નો અર્થ 'metre per second' છે પણ 'milli per second' નથી.

  તેવી જ રીતે ms^{-1} [પ્રતીકો m અને s એકબીજાની ખૂબ નજીક લખાય છે. પૂર્વગ milli માટેનો પૂર્વગ પ્રતીક m અને એકમ પ્રતીક s નાના અક્ષર (એકમ 'second' માટે) સાથે તેમની વચ્ચે જગ્યા રાખ્યા વિના અને ms ને નવો સંયોજિત એકમ બનાવીને લખાય) નો અર્થ 'per millisecond' છે પણ 'metre per second' નથી. mS^{-1} [પ્રતીકો m અને S એકબીજાની ખૂબ નજીક લખાય છે. પૂર્વગ પ્રતીક m (પૂર્વગ milli માટે) અને એકમ પ્રતીક S (એકમ 'siemens' માટે), વચ્ચે જગ્યા રખાતી નથી અને ms એક નવો સંયોજિત એકમ બનાવે છે.] નો અર્થ 'per milli siemens' છે પણ 'per millisecond' નથી.

  C m [પ્રતીક C અને m જુદા લખાય છે, તેઓ એકમ પ્રતીક C ('coulomb' એકમ માટે) અને m ('metre' એકમ માટે) રજૂ કરે છે, તેમની વચ્ચે જગ્યા રખાય છે.] નો અર્થ 'coulomb metre', છે પણ 'centimetre' નથી વગેરે.

- જ્યારે એક પૂર્વગ પ્રાપ્ય હોય ત્યારે બે પૂર્વગોનો ઉપયોગ કરાતો નથી.

  ઉદાહરણ તરીકે :

10^{-9} m = 1nm (nanometre), પરંતુ 1mμm (millimicrometre) નહિ.

10^{-6} m= 1μm (micron), પરંતુ 1mmm(millimillimetre) નહિ.

10^{-12} F= 1 pF (picofarad), પરંતુ 1μμF (micromicrofarad) નહિ.

10^{9} W=1 GW (giga watt), પરંતુ 1 kMW (kilomega watt) નહિ વગેરે.

- જ્યારે ભૌતિકરાશિને બે કે વધુ એકમોના સંયોજન સ્વરૂપે લખાય છે ત્યારે એકમોનું અને એકમોનાં પ્રતીકોનું સંયોજન કરાતું નથી.

  ઉદાહરણ તરીકે :

  joule per mole kelvin ને J/mol K અથવા J mol^{-1} K^{-1} તરીકે લખાય છે પણ joule/mole K અથવા J/ mol kelvin અથવા J/mole K તરીકે નહિ વગેરે.

  joule per tesla ને J/T અથવા J T^{-1} તરીકે પણ લખાય છે. joule /T અથવા J per tesla અથવા J/tesla તરીકે નહિ વગેરે.

  newton metre second ને N m s તરીકે લખાય છે પણ Newton m second અથવા N m second અથવા N metre s અથવા newton metre s તરીકે લખાય નહિ.

  joule per kilogram kelvin ને J/kg K અથવા J kg^{-1} K^{-1} તરીકે લખાય પણ J/kilog K અથવા joule/kg K અથવા J/kg kelvin અથવા J/kilogram K વગેરે તરીકે લખાય નહિ.

- ગણતરીઓ સહેલી બનાવવા, પૂર્વગ પ્રતીક અંશમાં એકમ પ્રતીક સાથે જોડાય છે પણ છેદમાં નહિ.

  ઉદાહરણ તરીકે :

  10^{6} N/m^{2} ને N/mm^{2}ને બદલે વધુ સુગમભરી રીતે લખવા માટે MN/m^{2} ને પ્રાથમિકતા અપાય છે.

  જે સંખ્યાઓમાં ગુણકો અથવા અપૂર્ણાંક ગુણકો જેમાં 1000 અવયવ તરીકે આવે તેને $10^{\pm 3n}$, (જ્યાં n પૂર્ણાંક છે.) તરીકે લખવાની પ્રાથમિકતા અપાય છે.

- જ્યારે ભૌતિકરાશિઓ માટે અને ભૌતિકરાશિઓના એકમો માટે તે જ (સમાન) પ્રતીકો વપરાતાં હોય ત્યારે પૂરતી સાવધાની જરૂરી છે.

  ઉદાહરણ તરીકે :

  ભૌતિકરાશિ વજન (W) દળ (m) અને ગુરુત્વપ્રવેગ (g) ના ગુણાકાર તરીકે પ્રતીકો W, m અને g ના પદમાં ઇટાલિક (ત્રાંસા) ટાઈપમાં $W = m\ g$, તરીકે m અને g વચ્ચે જગ્યા રાખીને છપાય છે. તેમને એકમો watt (W), metre (m) અને gram (g)ના એકમ પ્રતીકો સાથે ગૂંચવવા ન જોઈએ. જોકે $W=m\ g$, સમીકરણમાં પ્રતીક W વજન દર્શાવે છે, જેનો એકમ પ્રતીક N, m દળ દર્શાવે છે જેનો એકમ પ્રતીક kg અને g ગુરુત્વપ્રવેગ દર્શાવે છે. જેનો એકમ પ્રતીક m/s^{2} છે. તે જ રીતે $F = m\ a$, સમીકરણમાં પ્રતીક F બળ દર્શાવે છે જેનો એકમ પ્રતીક N છે, m દળ દર્શાવે છે જેનો એકમ પ્રતીક kg અને g ગુરુત્વપ્રવેગ દર્શાવે છે. જેનો એકમ પ્રતીક m/s^{2} છે. ભૌતિકરાશિઓનાં આ પ્રતીકોને એકમો 'farad' (F), 'metre'(m) અને 'are' (a) નાં એકમ પ્રતીકો સાથે ગૂંચવવા ન જોઈએ. પ્રતીકો h (પૂર્વગ hecto અને એકમ hour). c (પૂર્વગ centi અને એકમ carat), d (પૂર્વગ deci અને એકમ day), T (પૂર્વગ tera અને એકમ ટેસ્લા, a (પૂર્વગ atto અને એકમ are), da (પૂર્વગ deca અને એકમ deciare) વગેરે વાપરતી વખતે યોગ્ય ભેદ (તફાવત) દર્શાવવો જોઈએ.

- દળનો મૂળભૂત SI એકમ 'kilogram' એક cgs (centimetre, gram, second) એકમ 'gram' ને SI પૂર્વગ (એક ગુણક = 10^{3}) 'kilo' જોડીને બનાવેલ છે અને પરિણામે દેખીતી ભૂલ લાગે છે. આમ લંબાઈના એકમ મીટરના હજારમા ભાગને millimetre (mm) કહે છે પણ દળના એકમ (kg) ના હજારમા ભાગને millikilogram કહેવાતું નથી પણ માત્ર gram કહેવાય છે. આ પરથી એવી છાપ ઉદ્ભવતી દેખાય છે કે દળનો એકમ gram (g) છે. પણ તે સાચું નથી. આવી પરિસ્થિતિ એટલા માટે ઉદ્ભવી છે કે આપણે 'kilogram' નામની જગ્યાએ બીજો કોઈ યોગ્ય એકમ મૂકી શક્યા નથી. તેથી એક અપવાદ તરીકે દળના એકમના ગુણકો અને અપૂર્ણાંક ગુણકોનાં નામ 'gram' શબ્દની સાથે પૂર્વગો જોડીને બનાવાય છે, 'kilogram' શબ્દ સાથે નહિ.

  ઉદાહરણ તરીકે :

  10^{3} kg =1 megagram (1Mg), પરંતુ 1 kilo kilogram (1 kkg) નહિ.

  10^{-6} kg = 1 milligram (1 mg), પરંતુ 1 microkilogram (1μkg) નહિ.

  10^{-3} kg = 1 gram (1g), પરંતુ 1 millikilogram (1 mkg) નહિ. વગેરે.

ફરીથી એ બાબતનું ધ્યાન રાખવાનું છે કે, તમારે આંતરરાષ્ટ્રીય માન્યતા પ્રાપ્ત અને ભલામણ કરેલ એકમો જ વાપરવા જોઈએ. એકમ પ્રતીકો લખવામાં સામાન્ય નિયમો અને માર્ગદર્શનનું પાલન કરવાના સતત મહાવરાથી SI એકમો, પૂર્વગો અને યોગ્ય સંદર્ભમાં ભૌતિકરાશિઓના સંબંધિત પ્રતીકોના ઉપયોગમાં નિપુણતા મેળવશો.

પરિશિષ્ટ A 9
ભૌતિકરાશિઓનાં પારિમાણિક સૂત્રો

ક્રમ (S. No)	ભૌતિકરાશિ (Physical Quantity)	અન્ય ભૌતિકરાશિઓ સાથેનો સંબંધ (Relationship with other Physical Quantities)	પરિમાણ (Dimensions)	પારિમાણિક સૂત્ર (Dimensional Formula)
1.	ક્ષેત્રફળ (Area)	લંબાઈ × પહોળાઈ	$[L^2]$	$[M^0L^2T^0]$
2.	કદ (Volume)	લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ	$[L^3]$	$[M^0L^3T^0]$
3.	દળ-ઘનતા (Mass density)	દળ/કદ	$[M]/[L^3]$ અથવા $[ML^{-3}]$	$[ML^{-3}T^0]$
4.	આવૃત્તિ (Frequency)	1/આવર્તકાળ	$1/[T]$	$[M^0L^0T^{-1}]$
5.	વેગ, ઝડપ (Velocity, speed)	સ્થાનાંતર/સમય	$[L]/[T]$	$[M^0LT^{-1}]$
6.	પ્રવેગ (Acceleration)	વેગ/સમય	$[LT^{-1}]/[T]$	$[M^0LT^{-2}]$
7.	બળ (Force)	દળ × પ્રવેગ	$[L]/[LT^{-2}]$	$[MLT^{-2}]$
8.	બળનો આઘાત (Impulse)	બળ × સમય	$[MLT^{-2}][T]$	$[MLT^{-1}]$
9.	કાર્ય, ઊર્જા (Work, Energy)	બળ × અંતર	$[MLT^{-2}]/[L]$	$[ML^2T^{-2}]$
10.	પાવર (Power)	કાર્ય/સમય	$[ML^2T^{-2}]/[L]$	$[ML^2T^{-3}]$
11.	વેગમાન (Momentum)	દળ × વેગ	$[M][LT^{-1}]$	$[MLT^{-1}]$
12.	દબાણ, પ્રતિબળ(Pressure, stress)	બળ/ક્ષેત્રફળ	$[MLT^{-2}]/[L^2]$	$[ML^{-1}T^{-2}]$
13.	વિકૃતિ (Strain)	$\frac{\text{પરિમાણમાં ફેરફાર}}{\text{મૂળ પરિમાણ}}$	$[L]/[L]$ અથવા $[L^3]/[L^3]$	$[M^0L^0T^0]$
14.	સ્થિતિસ્થાપક અંક (Modulus or elasticity)	પ્રતિબળ/વિકૃતિ	$\frac{[ML^{-1}T^{-2}]}{[M^0L^0T^0]}$	$[ML^{-1}T^{-2}]$
15.	પૃષ્ઠતાણ (Surface tension)	બળ/લંબાઈ	$[MLT^{-2}]/[L]$	$[ML^0T^{-2}]$
16.	પૃષ્ઠઊર્જા (Surface energy)	ઊર્જા/ક્ષેત્રફળ	$[ML^2T^{-2}]/[L^2]$	$[ML^0T^{-2}]$
17.	વેગ-પ્રચલન (Velocity gradient)	વેગ/અંતર	$[LT^{-1}]/[L]$	$[M^0L^0T^{-1}]$
18.	દબાણ પ્રચલન (Pressure gradient)	દબાણ/અંતર	$[ML^{-1}T^{-2}]/[L]$	$[ML^{-2}T^{-2}]$
19.	દબાણઊર્જા (Pressure energy)	દબાણ × કદ	$[ML^{-1}T^{-2}]\times[L^3]$	$[ML^2T^{-2}]$
20.	શ્યાનતા ગુણાંક (Coeffcient of viscosity)	બળ/(ક્ષેત્રફળ × વેગ-પ્રચલન)	$\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2][LT^{-1}/L]}$	$[ML^{-1}T^{-1}]$
21.	કોણ, કોણીય સ્થાનાંતર (Angle, angular displacement)	ચાપ/ત્રિજ્યા	$[L]/[L]$	$[M^0L^0T^0]$
22.	ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર (Trigonometric ratio) ($\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, etc.)	લંબાઈ/લંબાઈ	$[L]/[L]$	$[M^0L^0T^0]$

23.	કોણીય વેગ (Angular velocity)	ખૂણો/સમય	$[L^0]/[T]$	$[M^0L^0T^{-1}]$
24.	કોણીય પ્રવેગ (Angular acceleration)	કોણીય વેગ/સમય	$[T^{-1}]/[T]$	$[M^0L^0T^{-2}]$
25.	ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા (Radius of gyration)	અંતર	$[L]$	$[M^0LT^0]$
26.	જડત્વની ચાકમાત્રા (Moment of inertia)	દ્રવ્યમાન × (ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા)^2	$[M]\ [L^2]$	$[ML^2T^0]$
27.	કોણીય વેગમાન (Angular momentum)	જડત્વની ચાકમાત્રા × કોણીય વેગ	$[ML^2][T^{-1}]$	$[ML^2T^{-1}]$
28.	બળની ચાકમાત્રા,બળયુગ્મની ચાકમાત્રા (Moment of force, moment of couple)	બળ × અંતર	$[MLT^2][L]$	$[ML^2T^{-2}]$
29.	ટૉર્ક (Torque)	કોણીય વેગમાન/સમય અથવા બળ × અંતર	$[M^1L^2T^{-1}]/[T]$ અથવા $[MLT^{-2}][L]$	$[ML^2T^{-2}]$
30.	કોણીય આવૃત્તિ (Angular frequency)	2π × આવૃત્તિ	$[T^{-1}]$	$[M^0L^0T^{-1}]$
31.	તરંગલંબાઈ (Wavelength)	અંતર	$[L]$	$[M^0LT^0]$
32.	હબલ અચળાંક (Hubble constant)	નિર્ગમન ઝડપ/અંતર	$[LT^{-1}]/[L]$	$[M^0L^0T^{-1}]$
33.	તરંગની તીવ્રતા (Intensity of wave)	(ઊર્જા/સમય)/ક્ષેત્રફળ	$[ML^2T^{-2}/T]/[L^{+2}]$	$[ML^0T^{-3}]$
34.	વિકિરણ દબાણ (Radiation pressure)	તરંગતીવ્રતા/પ્રકાશની ઝડપ	$[MT^{-3}]/[LT^{-1}]$	$[ML^{-1}T^{-2}]$
35.	ઊર્જા-ઘનતા (Energy density)	ઊર્જા/કદ	$[ML^2T^{-2}]/[L^3]$	$[ML^{-1}T^{-2}]$
36.	ક્રાંતિવેગ (Critical velocity)	$\dfrac{\text{રેનોલ્ડ અંક × શ્યાનતા ગુણાંક}}{\text{દળઘનતા × ત્રિજ્યા}}$	$\dfrac{[M^0L^0T^0][ML^{-1}T^{-1}]}{[ML^{-3}][L]}$	$[M^0LT^{-1}]$
37.	નિષ્ક્રમણ વેગ (Escape velocity)	(2 × ગુરુત્વપ્રવેગ × પૃથ્વીની ત્રિજ્યા)$^{1/2}$	$[LT^{-2}]^{1/2} \times [L]^{1/2}$	$[M^0LT^{-1}]$
38.	ઉષ્મીય ઊર્જા, આંતરિક ઊર્જા (Heat energy, internal energy)	કાર્ય (= બળ × અંતર)	$[MLT^{-2}][L]$	$[ML^2T^{-2}]$
39.	ગતિઊર્જા (Kinetic energy)	(1/2) દળ × (વેગ)^2	$[M][LT^{-1}]^2$	$[ML^2T^{-2}]$
40.	સ્થિતિઊર્જા (Potential energy)	દળ × ગુરુત્વપ્રવેગ × ઊંચાઈ	$[M][LT^{-2}][L]$	$[ML^2T^{-2}]$
41.	ચાકગતિ ઊર્જા (Rotational kinetic energy)	1/2 × જડત્વની ચાકમાત્રા × (કોણીયવેગ)^2	$[M^0L^0T^0]\ [ML^2] \times [T^{-1}]^2$	$[ML^2T^{-2}]$
42.	કાર્યક્ષમતા (Efficiency)	$\dfrac{\text{આઉટપુટ ઊર્જા અથવા કાર્ય}}{\text{ઇનપુટ ઊર્જા અથવા કાર્ય}}$	$\dfrac{[ML^2T^2]}{[ML^2T^2]}$	$[M^0L^0T^0]$
43.	કોણીય આઘાત Angular impulse	ટૉર્ક × સમય	$[ML^2T^{-2}][T]$	$[ML^2T^{-1}]$
44.	ગુરુત્વીય અચળાંક (Gravitational constant)	$\dfrac{\text{બળ} \times (\text{અંતર})^2}{\text{દળ} \times \text{દળ}}$	$\dfrac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M]\ [M]}$	$[M^{-1}L^3T^{-2}]$

45.	પ્લાન્ક અચળાંક (Planck constant)	ઊર્જા/આવૃત્તિ	$[ML^2T^{-2}]/[T^{-1}]$	$[ML^2T^{-1}]$
46.	ઉષ્માધારિતા, એન્ટ્રોપી (Heat capacity entropy)	ઉષ્મીય ઊર્જા/તાપમાન	$[ML^2T^{-2}]/[K]$	$[ML^2T^{-2}K^{-1}]$
47.	વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા (Specific heat capacity)	$\frac{\text{ઉષ્મીય ઊર્જા}}{\text{દ્રવ્યમાન} \times \text{તાપમાન}}$	$[ML^2T^{-2}]/[M][K]$	$[M^0L^2T^{-2}K^{-1}]$
48.	ગુપ્ત ઉષ્મા (Latent heat)	$\frac{\text{ઉષ્મીય ઊર્જા}}{\text{દ્રવ્યમાન}}$	$[ML^2T^{-2}]/[M]$	$[M^0L^2T^{-2}]$
49.	ઉષ્મીય પ્રસરણાંક (Thermal expansion coefficient or Thermal expansivity)	$\frac{\text{પરિમાણમાં ફેરફાર}}{\text{મૂળ પરિમાણ} \times \text{તાપમાન}}$	$[L]/[L][K]$	$[M^0L^0K^{-1}]$
50.	ઉષ્મા-વાહકતા (Thermal conductivity)	$\frac{\text{ઉષ્મીય ઊર્જા} \times \text{જાડાઈ}}{\text{ક્ષેત્રફળ} \times \text{તાપમાન} \times \text{સમય}}$	$\frac{[ML^2T^{-2}][L]}{[L^2]\,[K][T]}$	$[MLT^{-3}K^{-1}]$
51.	બલ્ક મોડ્યુલસ અથવા (દબનીયતા)$^{-1}$ Bulk modulus or (compressibility)$^{-1}$	$\frac{\text{કદ} \times \text{દબાણનો ફેરફાર}}{\text{કદનો ફેરફાર}}$	$\frac{[L^3][ML^{-1}T^{-2}]}{[L^3]}$	$[ML^{-1}T^{-2}]$
52.	કેન્દ્રગામી પ્રવેગ (Centripetal acceleration)	(વેગ)^2/ત્રિજ્યા	$[LT^{-1}]^2/[L]$	$[M^0LT^{-2}]$
53.	સ્ટીફન અચળાંક (Stefan constant)	$\frac{(\text{ઊર્જા / ક્ષેત્રફળ} \times \text{સમય})}{(\text{તાપમાન})^4}$	$\frac{[ML^2T^{-2}]}{[L^2][T][K]^4}$	$[ML^0T^{-3}K^{-4}]$
54.	વીન અચળાંક (Wien constant)	તરંગલંબાઈ × તાપમાન	$[L][K]$	$[M^0LT^0K]$
55.	બોલ્ટ્ઝમૅન અચળાંક (Boltzmann constant)	ઊર્જા/તાપમાન	$[ML^2T^{-2}]/[K]$	$[ML^2T^{-2}K^{-1}]$
56.	સાર્વત્રિક વાયુ-નિયતાંક (Universal gas constant)	$\frac{\text{દબાણ} \times \text{કદ}}{\text{મોલ} \times \text{તાપમાન}}$	$\frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^3]}{[mol][K]}$	$[ML^2T^{-2}K^{-1}mol^{-1}]$
57.	વિદ્યુતભાર (Charge)	વિદ્યુતપ્રવાહ / સમય	$[A][T]$	$[M^0L^0TA]$
58.	વીજપ્રવાહ ઘનતા (Current density)	વિદ્યુતપ્રવાહ / ક્ષેત્રફળ	$[A]/[L^2]$	$[M^0L^{-2}T^0A]$
59.	વૉલ્ટેજ, વિદ્યુતસ્થિતિમાન તફાવત, વીજચાલક બળ (Voltage, electric potential, electromotive force)	કાર્ય/વીજભાર	$[ML^2T^{-2}]/[AT]$	$[ML^2T^{-3}A^{-1}]$
60.	અવરોધ (Resistance)	$\frac{\text{વિદ્યુતસ્થિતિમાન તફાવત}}{\text{વિદ્યુતપ્રવાહ}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}{[A]}$	$[ML^2T^{-3}A^{-2}]$
61.	કૅપેસિટન્સ (Capacitance)	વીજભાર / વિદ્યુતસ્થિતિમાન-તફાવત	$\frac{[AT]}{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}$	$[M^{-1}L^{-2}T^4A^2]$
62.	વિદ્યુત અવરોધકતા અથવા (વિદ્યુત-વાહકતા)$^{-1}$ (Electrical resistivity or (electical conductivity)$^{-1}$	$\frac{\text{અવરોધ} \times \text{ક્ષેત્રફળ}}{\text{લંબાઈ}}$	$[ML^2T^{-3}A^{-2}]$ $[L^2]/[L]$	$[ML^3T^3A^{-2}]$
63.	વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric field)	વિદ્યુતબળ / વીજભાર	$[MLT^{-2}]/[AT]$	$[MLT^{-3}A^{-1}]$
64.	વિદ્યુતફ્લક્સ (Electric flux)	વિદ્યુતક્ષેત્ર × ક્ષેત્રફળ	$[MLT^{-3}A^{-1}][L^2]$	$[ML^3T^{-3}A^{-1}]$

65.	વિદ્યુત ડાયપોલ મોમેન્ટ (Electic dipole moment)	ટૉર્ક/વિદ્યુતક્ષેત્ર	$\frac{[ML^2T^2]}{[MLT^{-3}A^{-1}]}$	$[M^0LTA]$
66.	વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા અથવાવિદ્યુતતીવ્રતા	$\frac{\text{વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત}}{\text{અંતર}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}{[L]}$	$[MLT^{-3}A^{-1}]$
67.	ચુંબકીય ક્ષેત્ર, ચુંબકીય ફ્લક્સ ઘનતા, ચુંબકીયપ્રેરણ (Magnetic field, magnetic flux density, magnetic induction)	$\frac{\text{બળ}}{\text{વિદ્યુતપ્રવાહ} \times \text{લંબાઈ}}$	$[MLT^{-2}]/[A][L]$	$[ML^0T^{-2}A^{-1}]$
68.	ચુંબકીય ફ્લક્સ (Magnetic fluex)	ચુંબકીયક્ષેત્ર × ક્ષેત્રફળ	$[MT^{-2}A^{-1}][L^{+2}]$	$[ML^2T^{-2}A^{-1}]$
69.	પ્રેરકત્વ (Inductance)	$\frac{\text{ચુંબકીય ફ્લક્સ}}{\text{વિદ્યુતપ્રવાહ}}$	$\frac{[ML^2T^{-2}A^{-1}]}{[A]}$	$[ML^2T^{-2}A^{-2}]$
70.	ચુંબકીય ડાયપોલ મોમેન્ટ (Magnetic dipole moment)	ટૉર્ક/ચુંબકીયક્ષેત્ર અથવા વિદ્યુતપ્રવાહ × ક્ષેત્રફળ	$[ML^2T^{-2}]/[MT^{-2}A^{-2}]$ or $[A][L^2]$	$[M^0L^2T^0A]$
71.	ચુંબકીયક્ષેત્રની પ્રબળતા, ચુંબકીય તીવ્રતા અથવા ચુંબકીય મોમેન્ટ ઘનતા(Magnetic field strength, magnetic intensity or magnetic moment density)	$\frac{\text{ચુંબકીય મોમેન્ટ}}{\text{કદ}}$	$\frac{[L^2A]}{[L^3]}$	$[M^0L^{-1}T^0A]$
72.	પરાવૈદ્યુતાંક (મુક્ત અવકાશ માટે) Permittivity constant (of free space)	$\frac{\text{વીજભાર} \times \text{વીજભાર}}{4\pi \times \text{વિદ્યુતબળ} \times (\text{અંતર})^2}$	$\frac{[AT][AT]}{[MLT^{-2}][L]^2}$	$[M^{-1}L^{-3}T^4A^2]$
73.	પારગમ્યતા (મુક્ત અવકાશ માટે) Permeability constant (of free space)	$\frac{2\pi \times \text{બળ} \times \text{અંતર}}{\text{વિદ્યુતપ્રવાહ} \times \text{વિદ્યુતપ્રવાહ} \times \text{લંબાઈ}}$	$\frac{[M^0L^0T^0][MLT^{-2}][L]}{[A][A][L]}$	$[MLT^{-2}A^{-2}]$
74.	વક્રીભવનાંક (Refractive index)	$\frac{\text{શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ}}{\text{માધ્યમમાં પ્રકાશની ઝડપ}}$	$[LT^{-1}]/[LT^{-1}]$	$[M^0L^0T^0]$
75.	ફેરેડે અચળાંક (Faraday constant)	ઍવોગેડ્રો અચળાંક × મૂળભૂત વીજભાર	$[AT]/[mol]$	$[M^0L^0TAmol^{-1}]$
76.	તરંગસંખ્યા (Wave number)	2π/તરંગલંબાઈ	$[M^0L^0T^0]/[L]$	$[M^0L^{-1}T^0]$
77.	વિકિરણ ફ્લક્સ, વિકિરણ શક્તિ (Radiant flux, Radiant power)	ઉત્સર્જિત ઊર્જા/સમય	$[ML^2T^{-2}]/[T]$	$[ML^2T^{-3}]$
78.	વિકિરણ ફ્લક્સની જ્યોતિ અથવા વિકિરણ તીવ્રતા (Luminosity of radiant flux or radiant intensity)	$\frac{\text{વિકિરણ શક્તિ અથવા સ્રોતનું વિકિરણ ફ્લક્સ}}{\text{ઘનકોણ}}$	$[ML^2T^{-3}]$ / $[M^0L^0T^0]$	$[ML^2T^{-3}]$
79.	જ્યોતિ શક્તિ અથવા સ્રોતનો જ્યોતિ ફ્લક્સ (Luminous power or luminous flux of source)	$\frac{\text{ઉત્સર્જિત જ્યોતિ ઊર્જા}}{\text{સમય}}$	$[ML^2T^{-2}]/[T]$	$[ML^2T^{-3}]$

80.	જ્યોતિ તીવ્રતા અથવા સ્રોતની પ્રદીપન શક્તિ (Luminous intensity or illuminating power of source)	$\frac{\text{જ્યોતિ ફ્લક્સ}}{\text{ઘનકોણ}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}]}{[M^0L^0T^0]}$	$[ML^2T^{-3}]$
81.	પ્રદીપન તીવ્રતા અથવા જ્યોતિર્મયતા (Intensity of illumination or luminance)	$\frac{\text{જ્યોતિ તીવ્રતા}}{(\text{અંતર})^2}$	$[ML^2T^{-3}]/[L^2]$	$[ML^0T^{-3}]$
82.	સાપેક્ષ જ્યોતિ (Relative luminosity)	$\frac{\text{આપેલ તરંગલંબાઈના સ્રોતનો જ્યોતિ ફ્લક્સ}}{\text{તે જ ક્ષમતાના સ્રોતનો મહત્તમ સંવેદી તરંગલંબાઈ (55 nm)નો જ્યોતિ ફ્લક્સ}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}]}{[ML^2T^{-3}]}$	$[M^0L^0T^0]$
83.	જ્યોતિ-ક્ષમતા (Luminous efficiency)	$\frac{\text{કુલ જ્યોતિ ફ્લક્સ}}{\text{કુલ વિકિરણ ફ્લક્સ}}$	$[ML^2T^{-3}]/[ML^2T^{-3}]$	$[M^0L^0T^0]$
84.	પ્રદિપ્ત ઘનત્વ અથવા પ્રદિપ્ત (Illuminance or illumination)	$\frac{\text{આપાત જ્યોતિ ફ્લક્સ}}{\text{ક્ષેત્રફળ}}$	$[ML^2T^{-3}]/[L^2]$	$[ML^0T^{-3}]$
85.	દળક્ષતિ (Mass defect)	(ન્યુક્લિઓનનાં દળોનો સરવાળો) – ન્યુક્લિઓનનું દળ)	$[M]$	$[ML^0T^0]$
86.	ન્યુક્લિયસની બંધનઊર્જા (Binding energy or nucleus)	દળક્ષતિ × (શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ)^2	$[M][LT^{-1}]^2$	$[ML^2T^{-2}]$
87.	ક્ષયનિયતાંક (Decay constant)	0.693/અર્ધઆયુ	$[T^{-1}]$	$[M^0L^0T^{-1}]$
88.	અનુનાદ આવૃત્તિ (Resonant frequency)	(પ્રેરકત્વ × કૅપેસિટન્સ)$^{-\frac{1}{2}}$	$[ML^2T^{-2}A^{-2}]^{-\frac{1}{2}} \times [M^{-1}L^{-2}T^4A^2]^{-\frac{1}{2}}$	$[M^0L^0A^0T^{-1}]$
89.	ગુણવત્તા અંક અથવા કોઇલનો Q-ફેક્ટર (Quality factor or Q-factor of coil)	$\frac{\text{અનુનાદ આવૃત્તિ × પ્રેરકત્વ}}{\text{અવરોધ}}$	$\frac{[T^{-1}][ML^2T^{-2}A^{-2}]}{[ML^2T^{-3}A^{-2}]}$	$[M^0L^0T^0]$
90.	લેન્સનો પાવર (Power of lens)	(કેન્દ્રલંબાઈ)$^{-1}$	$[L^{-1}]$	$[M^0L^{-1}T^0]$
91.	મોટવણી (Magnification)	$\frac{\text{પ્રતિબિંબ અંતર}}{\text{વસ્તુ અંતર}}$	$[L]/[L]$	$[M^0L^0T^0]$
92.	તરલવહનનો દર (Fluid flow rate)	$\frac{(\pi/8) \times (\text{દબાણ}) \times (\text{ત્રિજ્યા})^4}{(\text{શ્યાનતા ગુણાંક}) \times (\text{લંબાઈ})}$	$\frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^4]}{[ML^{-1}T^{-1}][L]}$	$[M^0L^3T^{-1}]$
93.	કૅપેસિટિવ રીએક્ટન્સ (Capacitive reactance)	(કોણીય આવૃત્તિ × કૅપેસિટન્સ)$^{-1}$	$[T^{-1}]^{-1}[M^{-1}L^{-2}T^4A^2]^{-1}$	$[ML^2T^{-3}A^{-2}]$
94.	ઈન્ડક્ટિવ રીએક્ટન્સ (Inductive reactance)	(કોણીય આવૃત્તિ × પ્રેરકત્વ)	$[T^{-1}][ML^2T^{-2}A^{-2}]$	$[ML^2T^{-3}A^{-2}]$

જવાબો (Answers)

પ્રકરણ 2

2.1 (a) 10^{-6} ; (b) 1.5×10^{4} ; (c) 5 ; (d) 11.3, 1.13×10^{4}.

2.2 (a) 10^{7} ; (b) 10^{-16} ; (c) 3.9×10^{4} ; (d) 6.67×10^{-8}.

2.5 500

2.6 (c)

2.7 0.035 mm

2.9 94.1

2.10 (a) 1 ; (b) 3 ; (c) 4 ; (d) 4 ; (e) 4 ; (f) 4.

2.11 8.72 m^2; 0.0855 m^3

2.12 (a) 2.3 kg ; (b) 0.02 g

2.13 13 %; 3.8

2.14 પારિમાણિક દૃષ્ટિએ (b) અને (c) ખોટાં છે. સૂચના : ત્રિકોણમિતીય વિધેયનો કોણાંક (argument) હંમેશાં પરિમાણરહિત હોવો જોઈએ.

2.15 સાચું સૂત્ર $m = m_0 (1 - \upsilon^2/c^2)^{-1/2}$

2.16 $\cong 3 \times 10^{-7}$ m^3

2.17 $\cong 10^{4}$; વાયુમાં અણુઓ વચ્ચેનું અંતર અણુના પરિમાણ કરતાં ઘણું મોટું હોય છે.

2.18 દૂરની વસ્તુઓ કરતાં નજીકની વસ્તુઓ, નિરીક્ષકની આંખ આગળ મોટો ખૂણો બનાવે છે. જ્યારે તમે ગતિ કરો છો ત્યારે નજીકની વસ્તુઓ કરતાં દૂરની વસ્તુઓ માટે કોણીય ફેરફાર ઓછો હોય છે. તેથી આ પદાર્થો તમારી સાથે ફરતા દેખાય છે, પરંતુ નજીકના પદાર્થો વિરુદ્ધ દિશામાં જતા જણાય છે.

2.19 $\cong 3 \times 10^{16}$ m; લંબાઈના એકમ તરીકે 1 parsec, 3.084×10^{16} m બરાબર વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે.

2.20 1.32 parsec; 2.64″ [second of arc (ચાપ)]

2.23 1.4×10^{3} kg m^{-3}; સૂર્યની દળ ઘનતા ઘન/પ્રવાહી પદાર્થોની ઘનતાના વિસ્તારમાં હોય છે, વાયુની ઘનતાના વિસ્તારમાં નહિ. આટલી ઊંચી ઘનતા; સૂર્યના અંદરના સ્તરો વડે બહારના સ્તરો પર લાગતા અંદર તરફના ગુરુત્વાકર્ષણના લીધે છે.

2.24 1.429×10^{5} km

2.25 સૂચના : $\tan \theta$ પરિમાણરહિત હોવું જોઈએ. સાચું સૂત્ર $\tan \theta = \upsilon/\upsilon'$ છે, જ્યાં υ' એ વરસાદની ઝડપ છે.

2.26 10^{11} થી 10^{12} માં 1 ભાગની ચોકસાઈ

2.27 $\cong 0.7 \times 10^3$ kg m^{-3}. ઘન-અવસ્થામાં પરમાણુઓ ખીચોખીચ સમાવેલા હોય છે. તેથી પરમાણુ દળ ઘનતા, ઘન પદાર્થની દળ ઘનતાની નજીક હોય છે.

2.28 $\cong 0.3 \times 10^{18}$ kg m^{-3} ; ન્યુક્લિયર ઘનતા લાક્ષણિક રીતે દ્રવ્યની પરમાણુ ઘનતાના 10^{15} ગણી છે.

2.29 3.84×10^8 m

2.30 55.8 km

2.31 2.8×10^{22} km

2.32 3,581 km

2.33 સૂચના : $e^4/(16\pi^2 \in_0^2 m_p m_e^2 c^3 G)$ પદને સમયનું પરિમાણ છે.

પ્રકરણ 3

3.1 (a), (b)

3.2 (a) A....B, (b) A....B, (c) B....A, (d) તે જ/સમાન, (e) B....A.... એકવાર.

3.4 37 s

3.5 1000 km/h

3.6 3.06 m s^{-2}; 11.4 s

3.7 1250 m (સૂચના : B ની ગતિ Aની સાપેક્ષે જુઓ.)

3.8 1 m s^{-2} (સૂચના : B અને Cની ગતિ Aની સાપેક્ષે જુઓ.)

3.9 $T = 9$ min, ઝડપ = 40 km/h. સૂચના : $vT/(v-20) = 18$; $vT/(v+20) = 6$

3.10 (a) શિરોલંબ અધોદિશામાં; (b) શૂન્ય વેગ, 9.8 m s^{-2} નો પ્રવેગ અધોદિશામાં; (c) $x > 0$ (ઉપર તરફની અને નીચે તરફની ગતિ); $v < 0$ (ઉપર તરફ), $v > 0$ (નીચે તરફ), છેક સુધી $a > 0$; (d) 44.1 m, 6 s.

3.11 (a) સાચું (b) ખોટું (c) સાચું (જો કણ તત્ક્ષણ તે જ ઝડપથી પાછો ફેંકાય (rebound); એનો અર્થ પ્રવેગ અનંત છે એમ થાય, જે ભૌતિક રીતે શક્ય નથી. (d) ખોટું (જ્યારે પસંદ કરેલ ધન દિશા ગતિની દિશામાં હોય ત્યારે જ સાચું)

3.14 (a) 5 km h^{-1}, 5 km h^{-1}; (b) 0, 6 km h^{-1}; (c) $\frac{15}{8}$ km h^{-1}, $\frac{45}{8}$ km h^{-1}

3.15 કારણ કે, કોઈ યાદચ્છિક નાના સમયગાળા માટે, સ્થાનાંતરનું માન પથની લંબાઈ જેટલું હોય છે.

3.16 ચારેય આલેખો અશક્ય છે. (a) કણને એક જ સમયે બે જુદાં જુદાં સ્થાન ન હોઈ શકે; (b) કણને એક જ સમયે વિરુદ્ધ દિશાઓમાં વેગ ન હોઈ શકે; (c) ઝડપ હંમેશાં ધન હોય છે. (d) કણની કુલ પથલંબાઈ કદી સમય સાથે ઘટે નહિ. (નોંધો, આલેખો પર તીર અર્થહીન છે.

3.17 ના, ખોટું. $x-t$ આલેખ કણનો ગતિપથ દર્શાવતો નથી. સંદર્ભ : પદાર્થને $t = 0$ સમયે ટાવર પરથી ($x = 0$) પડવા દેવામાં આવે છે.

3.18 105 m s^{-1}

3.19 (a) એક લીસા સમતલ પર સ્થિર રહેલા બૉલને લાત મારવામાં આવે છે, તે દીવાલ પરથી ઘટેલી ઝડપે પાછો ફેંકાય છે અને સામેની દીવાલ તરફ ગતિ કરે છે, જે તેને સ્થિર કરે છે; (b) બૉલને કંઈક પ્રારંભિક વેગથી ઉપર તરફ ફેંકેલો છે, અને દરેક વખતે તળિયાને અથડાઈને ઘટેલી ઝડપથી પાછો ફેંકાય છે; (c) એક નિયમિત ગતિ કરતા દડાને બૅટ વડે ખૂબ નાના સમયગાળા માટે ફટકારતાં પાછો ફરે છે.

3.20 $x < 0, \upsilon < 0, a > 0$; $x > 0, \upsilon > 0, a < 0$; $x < 0, \upsilon > 0, a > 0$.

3.21 3 માં મહત્તમ, 2માં લઘુતમ; 1 અને 2 અંકમાં $\upsilon > 0$; 3માં $\upsilon < 0$.

3.22 પ્રવેગનું માન 2માં મહત્તમ; ઝડપ 3 માં મહત્તમ; 1, 2 અને 3માં $\upsilon > 0$; 1 અને 3 માં $a > 0$, 2 માં $a < 0$; A, B, C, D આગળ $a = 0$.

3.23 નિયમિત પ્રવેગીગતિ માટે, સમય-અક્ષ સાથે ઢળતી સુરેખા; નિયમિત ગતિ માટે સમય-અક્ષને સમાંતર

3.24 10 s, 10 s

3.25 (a) 13 km h^{-1} ; (b) 5 km h^{-1}; (c) દરેક દિશામાં 20 s, મા-બાપમાંથી ગમે તે દ્વારા અવલોકિત થયેલ, બાળકની ઝડપ દરેક દિશામાં 9 km h^{-1}; (c) નો જવાબ બદલાતો નથી.

3.26 $x_2 - x_1 = 15\, t$ (રેખીય વિભાગ); $x_2 - x_1 = 200 + 30\, t - 5\, t^2$ (વક્ર વિભાગ).

3.27 (a) 60 m, 6 m s^{-1} ; (b) 36 m, 9 m s^{-1}

3.28 (c), (d), (f)

પ્રકરણ 4

4.1 કદ, દળ, ઝડપ, ઘનતા, મોલ સંખ્યા, કોણીય આવૃત્તિ અદિશ છે; બાકીના સદિશ છે.

4.2 કાર્ય, વિદ્યુતપ્રવાહ

4.3 બળનો આઘાત

4.4 ફક્ત (c) અને (d) માન્ય કરી શકાય તેવા છે.

4.5 (a) T, (b) F, (c) F, (d) T, (e) T

4.6 ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુનો સરવાળો (બાદબાકી) ત્રીજી બાજુ કરતાં કદાપિ ઓછો (વધારે) હોઈ શકે નહિ. એક રેખસ્થ સદિશો માટે સમાનતા લાગુ પડે છે.

4.7 (a) સિવાયનાં બધાં વિધાનો સત્ય છે.

4.8 દરેક માટે 400 m; B

4.9 (a) O; (b) O; (c) 21.4 km h^{-1}

4.10 1 km માન અને મૂળ દિશા સાથે 60° કોણની દિશામાં સ્થાનાંતર; કુલ પથલંબાઈ = 1.5 km (ત્રીજો આંટો); તટસ્થ સ્થાનાંતર સદિશ, પથલંબાઈ = 3 km (છઠ્ઠો આંટો); 866 m, 30°, 4 km (આઠમો આંટો)

4.11 (a) 49.3 km h^{-1} ; (b) 21.4 km h^{-1}. ના, સરેરાશ ઝડપ સરેરાશ વેગના માન બરાબર ફક્ત સુરેખ પથ માટે જ હોય છે.

4.12 શિરોલંબ રેખા સાથે દક્ષિણ તરફ લગભગ 18°

4.13 15 min, 750 m

4.14 પૂર્વ (લગભગ)

4.15 150.5 m

4.16 50 m

4.17 9.9 m s^{-2}, દરેક બિંદુએ ત્રિજ્યા પર કેન્દ્ર તરફ

4.18 6.4 g

4.19 (a) ખોટું (ફક્ત નિયમિત વર્તુળ ગતિ માટે સાચું)

(b) સાચું (c) સાચું

4.20 (a) $\mathbf{v}(t) = (3.0\,\hat{\mathbf{i}} - 4.0\,t\,\hat{\mathbf{j}})\,\hat{\mathbf{a}}(t) = -4.0\,\hat{\mathbf{j}}$

(b) 8.54 m s^{-1}, x–અક્ષ સાથે $70°$

4.21 (a) 2 s, 24 m, 21.26 m s^{-1}

4.22 $\sqrt{2}$, x–અક્ષ સાથે $45°$; $\sqrt{2}$, x – અક્ષ સાથે $-45°$, $(5/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

4.23 (b) અને (e)

4.24 ફક્ત (e) સાચું છે.

4.25 182 m s^{-1}

4.27 ના. વ્યાપક રીતે ભ્રમણ (Rotation) ને સદિશો સાથે સાંકળી શકાય નહિ.

4.28 સમતલના ક્ષેત્રફળ સાથે સદિશને સાંકળી શકાય.

4.29 ના.

4.30 શિરોલંબ સાથે $\sin^{-1}(1/3) = 19.5°$ ના કોણે; 16 km.

4.31 0.86 m s^{-2}, વેગની દિશા સાથે $54.5°$

પ્રકરણ 5

5.1 (a) થી (d) પહેલા નિયમ મુજબ કોઈ ચોખ્ખું (net) બળ લાગતું નથી.

(e) વિદ્યુતચુંબકીય અને ગુરુત્વીય બળો ઉત્પન્ન કરતા બધાં દ્રવ્ય પરિબળોથી તે ખૂબ દૂર હોવાથી કોઈ બળ લાગતું નથી.

5.2 દરેક કિસ્સામાં એક માત્ર બળ ગુરુત્વબળ (હવાની અસર અવગણતાં) જે 0.5 N જેટલું શિરોલંબ અધોદિશામાં છે. લખોટીની ગતિ ઊર્ધ્વ રેખા પર ન હોય તોપણ જવાબો બદલાતા નથી. ઉચ્ચતમ બિંદુએ લખોટી સ્થિર નથી. સમગ્ર ગતિ દરમિયાન તેને વેગનો અચળ સમક્ષિતિજ ઘટક છે.

5.3 (a) 1 N, શિરોલંબ અધોદિશામાં (b) (a)માં છે તે જ.

(c) (a)માં છે તે જ; કોઈ ક્ષણે બળ તે ક્ષણની પરિસ્થિતિ પર આધારિત છે, ઇતિહાસ પર નહિ.

(d) ટ્રેનની ગતિની દિશામાં 0.1 N

5.4 (i) T

5.5 $a = -2.5 \text{ m s}^{-2}$. $\upsilon = u + at$ પરથી, $0 = 15 - 2.5\,t$ એટલે કે, $t = 6.0$ s

5.6 $a = 1.5/25 = 0.06 \text{ m s}^{-2}$

$F = 3 \times 0.06 = 0.18$ N ગતિની દિશામાં

5.7 પરિણામી બળ = 10 N, જે 8 N બળની દિશા સાથે $\tan^{-1}(3/4) = 37°$ના કોણે છે.

પ્રવેગ = 2 m s^{-2} પરિણામી બળની દિશામાં

5.8 $a = -2.5 \text{ m s}^{-2}$, ગતિ વિરોધક બળ $= 465 \times 2.5 = 1.2 \times 10^3$ N

5.9 $F - 20{,}000 \times 10 = 20{,}000 \times 5.0$, એટલે કે, $F = 3.0 \times 10^5$ N

5.10 $a = -20 \text{ m s}^{-2}$ $0 \le t \le 30$ s

$t = -5$ s : $x = u\,t = -\,10 \times 5 = -50$ m

$t = 25$ s : $x = u\,t + (½)\ a\,t^2 = (10 \times 25 - 10 \times 625)$m $= -\,6$ km

$t = 100$ s : પ્રથમ, 30 s સુધીની ગતિ વિચારો.

$x_1 = 10 \times 30 - 10 \times 900 = -\,8700$ m

$t = 30$ s, સમયે, $\upsilon = 10 - 20 \times 30 = -590$ m s^{-1}

30 s થી 100 s સુધીની ગતિ માટે : $x_2 = -\,590 \times 70 = -\,41300$ m

$x = x_1 + x_2 = -\,50$ km

5.11 (a) કારનો વેગ ($t = 10$ s સમયે) $= 0 + 2 \times 10 = 20$ m s^{-1}

પહેલા નિયમ મુજબ, છેક સુધી વેગનો સમક્ષિતિજ ઘટક 20 m s^{-1} છે.

વેગનો ઊર્ધ્વ ઘટક ($t = 11$ s) $= 0 + 10 \times 1 = 10$ m s^{-1}

પથ્થરનો ($t = 11$ s સમયે) વેગ $= \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = 22.4$ m s^{-1} જે સમક્ષિતિજ સાથે $\tan^{-1}$ (½) કોણે છે.

(b) 10 m s^{-2} શિરોલંબ અધોદિશામાં

5.12 (a) અંત્ય સ્થાને ગોળાની ઝડપ શૂન્ય છે. જો દોરી કાપવામાં આવે તો તે શિરોલંબ અધોદિશામાં પડશે.

(b) મધ્યમાન સ્થાને ગોળાને સમક્ષિતિજ વેગ છે. જો દોરી કાપવામાં આવે તો તે પરવલયાકાર પથ પર પડશે.

5.13 સ્કેલ પરનું અવલોકન, માનવ દ્વારા તળિયા પર લગાડેલા બળનું માપ છે. ત્રીજા નિયમ અનુસાર તે તળિયા વડે માનવ પર લાગતા લંબબળ Nને સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં છે.

(a) $N = 70 \times 10 = 700$ N ; અવલોકન 70 kg છે.

(b) $70 \times 10 - N = 70 \times 5$; અવલોકન 35 kg છે.

(c) $N - 70 \times 10 = 70 \times 5$; અવલોકન 105 kg છે.

(d) $70 \times 10 - N = 70 \times 10$; અવલોકન શૂન્ય છે, સ્કેલ શૂન્ય બતાવશે.

5.14 (a) બધા ત્રણેય ગાળાઓમાં પ્રવેગ અને તેથી બળ શૂન્ય છે.

(b) $t = 0$ સમયે, 3 kg m s^{-1} ; (c) $t = 4$ s સમયે -3 kg m s^{-1}.

5.15 જો 20 kg દળને ખેંચવામાં આવે તો,

$600 - T = 20\,a$, $T = 10\,a$

$a = 20$ m s^{-2}, $T = 200$ N

જો 10 kg દળને ખેંચવામાં આવે તો a = 20 m s^{-2}, $T = 400$ N

5.16 $T - 8 \times 10 = 8\,a$, $12 \times 10 - T = 12a$

એટલે કે $a = 2$ m s^{-2}, $T = 96$ N

5.17 વેગમાન સંરક્ષણના સિદ્ધાંત પરથી, કુલ અંતિમ વેગમાન શૂન્ય છે. બે વેગમાન સદિશોનો સરવાળો શૂન્ય વેગમાન ન થાય, સિવાય કે તેઓ સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય.

5.18 દરેક બૉલ પરનો આઘાત $= 0.05 \times 12 = 0.6$ kg m s^{-1} (માનમાં). બે આઘાતો સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં છે.

5.19 વેગમાન સંરક્ષણનો ઉપયોગ કરો : $100\ \upsilon = 0.02 \times 80$

$\upsilon = 0.016$ m s^{-1} = 1.6 cm s^{-1}

5.20 પ્રારંભિક અને અંતિમ દિશાઓના દ્વિભાજક પર આઘાતની દિશા છે. તેનું માન

$0.15 \times 2 \times 15 \times \cos 22.5° = 4.2$ kg m s^{-1} છે.

5.21 $\upsilon = 2\pi \times 1.5 \times \dfrac{40}{60} = 2\pi\, m\, s^{-1}$

$$T = \frac{m\upsilon^2}{R} = \frac{0.25 \times 4\pi^2}{1.5} = 6.6\,N$$

$200 = \dfrac{m\upsilon_{\max}^2}{R}$, તે પરથી $\upsilon_{\max} = 35$ m s^{-1}

5.22 પહેલા નિયમ મુજબ વિકલ્પ (b) સાચો છે.

5.23 (a) ઘોડાગાડીના તંત્ર પર મુક્ત (ખાલી) અવકાશમાં કોઈ બાહ્ય બળ નથી. ઘોડા અને ગાડી વચ્ચેનાં પરસ્પર બળો નાબૂદ થાય છે. (ત્રીજો નિયમ). જમીન પર, તંત્ર અને જમીન વચ્ચેનું સંપર્ક બળ (ઘર્ષણ) તેમને સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિમાં લાવે છે.

(b) બેઠક સાથે સીધા સંપર્કમાં નથી તે શરીરના જડત્વને લીધે.

(c) લોન-મુવર (ઘાસ-કાપતા મશીન)ને અમુક કોણે બળ લગાડીને ખેંચી શકાય અથવા ધકેલી શકાય. જ્યારે તમે ધકેલો ત્યારે, ઊર્ધ્વદિશામાંના સંતુલન માટે, લંબબળ તેના વજન કરતાં વધુ હોવું જ જોઈએ. આના પરિણામે વધારે ઘર્ષણબળ $f\,(f \propto N)$ લાગે છે અને તેથી ગતિ કરાવવા વધુ મોટા બળની જરૂર પડે છે. ખેંચવામાં આવે ત્યારે આનાથી બરાબર વિરુદ્ધ થાય છે.

(d) બૉલને અટકાવવા માટે વેગમાનના ફેરફારના દરને ઘટાડવા માટે અને તેથી જરૂરી બળને ઘટાડવા માટે.

5.24 $1\ \text{cm s}^{-1}$ની અચળ ઝડપવાળા પદાર્થ પર દર 2 s પછી $x = 0$ અને $x = 2$ cm આગળ બળનો આઘાત લાગે છે, જેનું માન $0.04\ \text{kg} \times 0.02\ \text{m s}^{-1} = 8 \times 10^{-4}\ \text{kg m s}^{-1}$ છે.

5.25 ચોખ્ખું (net) બળ $= 65\ \text{kg} \times 1\ \text{m s}^{-2} = 65\ \text{N}$

$a_{max} = \mu_s\, g = 2\ \text{m s}^{-2}$

5.26 વિકલ્પ (a) સાચો છે. નોંધો કે, $mg + T_2 = m\upsilon_2^2/\text{R}$; $T_1 - mg = m\upsilon_1^2/\text{R}$

સાર એ છે કે, આ ઉદાહરણમાં દ્રવ્યથી ઉદ્‌ભવતાં વાસ્તવિક બળો (તણાવ, ગુરુત્વ બળ વગેરે)ને તેમનાથી નીપજેલી અસર કેન્દ્રગામી પ્રવેગ υ_2^2/R કે υ_1^2/R સાથે ગૂંચવવાં નહિ.

5.27 (a) 'Free body' : સ્ટાફ અને મુસાફરો

તળિયા દ્વારા તંત્ર પરનું બળ $= F$ ઉપર તરફ; તંત્રનું વજન = mg નીચે તરફ;

$\therefore\ F - mg = ma$

$F - 300 \times 10 = 300 \times 15$

$F = 7.5 \times 10^3$ N ઉપર તરફ

ત્રીજા નિયમ પરથી, સ્ટાફ અને મુસાફરો દ્વારા તળિયા પરનું બળ $= 7.5 \times 10^3$ N નીચે તરફ.

(b) 'Free body' : હેલિકોપ્ટર + સ્ટાફ + મુસાફરો

હવા વડે તંત્ર પરનું બળ = R ઉપર તરફ; તંત્રનું વજન = mg નીચે તરફ

$\therefore\ R - mg = ma$

$R - 1300 \times 10 = 1300 \times 15$

$R = 3.25 \times 10^4$ N ઉપર તરફ

ત્રીજા નિયમ પરથી, હેલિકોપ્ટર વડે હવા પરનું બળ $= 3.25 \times 10^4$ N નીચે તરફ

(c) 3.25×10^4 N ઉપર તરફ

5.28 દીવાલ પર દર સેકન્ડે અથડાતા પાણીનું દળ

$= 10^3\ \text{kg m}^{-3} \times 10^{-2}\ \text{m}^2 \times 15\ \text{m s}^{-1} = 150\ \text{kg s}^{-1}$

દીવાલ વડે લાગતું બળ = પાણીએ દર સેકન્ડે ગુમાવેલું વેગમાન $= 150\ \text{kg s}^{-1} \times 15\ \text{m s}^{-1} = 2.25 \times 10^3$ N

5.29 (a) $3\,m\,g$ (નીચે) (b) $3\,m\,g$ (નીચે) (c) $4\,m\,g$ (ઉપર)

5.30 જો પાંખો પરનું લંબ બળ N હોય તો,

$$N\cos\theta = mg, \qquad N\sin\theta = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

તે પરથી $R = \dfrac{\upsilon^2}{g \tan\theta} = \dfrac{200\times200}{10\times tan15^\circ} = 15km$

5.31 રેલના પાટા વડે વીલની બહાર તરફની ઉપસેલી ધાર પર પાર્શ્વિક (Lateral) ધક્કા દ્વારા કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડવામાં આવે છે. ત્રીજા નિયમ મુજબ, ટ્રેન સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં રેલના પાટા પર બળ લગાડે છે તેના લીધે ઘસારો પહોંચે છે.

ઢોળાવનો કોણ $= \tan^{-1}\left(\dfrac{\upsilon^2}{R\,g}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{15\times15}{30\times10}\right) \simeq 37^\circ$

5.32 સંતુલનમાં માણસ પર લાગતાં બળો વિચારો : તેનું વજન, દોરડા વડે લાગતું બળ, તળિયા વડે લાગતું લંબબળ

(a) 750 N (b) 250 N (b) રીત અપનાવવી જોઈએ.

5.33 (a) $T - 400 = 240$, $T = 640$ N

(b) $400 - T = 160$, $T = 240$ N

(c) $T = 400$ N

(*d*) $T = 0$

કિસ્સા (a) માં દોરડું તૂટી જશે.

5.34 આપણે A અને B પદાર્થો અને દૃઢ દીવાલ વચ્ચે સંપૂર્ણ સંપર્ક ધારી લઈએ છીએ. આ કિસ્સામાં દીવાલ વડે (પ્રતિક્રિયા) B પરનું સ્વ-નિયમન થતું લંબબળ 200 N જેટલું છે. કોઈ અપેક્ષિત (impending) ગતિ કે ઘર્ષણ નથી. A અને B વચ્ચે ક્રિયાબળ અને પ્રતિક્રિયાબળ પણ 200 N છે. જ્યારે દીવાલ દૂર કરવામાં આવે ત્યારે ગતિક ઘર્ષણ લાગવા માંડે છે.

(A + B) નો પ્રવેગ $= [\,200 - (\,150 \times 0.15\,)\,] / 15 = 11.8$ m s^{-2}

A પરનું ઘર્ષણબળ $= 0.15 \times 50 = 7.5$ N

$200 - 7.5 - F_{AB} = 5 \times 11.8$

$F_{AB} = 1.3 \times 10^2$ N; ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં

$F_{BA} = 1.3 \times 10^2$ N; ગતિની દિશામાં

5.35 (a) બ્લૉક અને ટ્રૉલી વચ્ચેની અપેક્ષિત (impending) સાપેક્ષ ગતિનો વિરોધ કરતું શક્ય મહત્તમ ઘર્ષણબળ $= 150 \times 0.18 = 27$ N, તે ટ્રૉલી સાથે બૉક્સને પ્રવેગિત કરવા માટે જરૂરી ઘર્ષણબળ $15 \times 0.5 = 7.5$ N કરતાં વધુ છે. જ્યારે ટ્રૉલી નિયમિત (અચળ) વેગથી ગતિ કરે છે. ત્યારે બ્લૉક પર કોઈ ઘર્ષણબળ લાગતું નથી.

(b) પ્રવેગિત (અજડત્વીય) નિરીક્ષક માટે, ઘર્ષણ બળનો, તેના જેટલા જ માનવાળા આભાસી બળ દ્વારા વિરોધ થાય છે, જેનાથી નિરીક્ષકની સાપેક્ષે બૉક્સ સ્થિર રહે છે. જ્યારે ટ્રૉલી નિયમિત વેગથી ગતિ કરે છે ત્યારે ગતિમાન (જડત્વીય) નિરીક્ષક માટે કોઈ આભાસી બળ લાગતું નથી અને ઘર્ષણ લાગતું નથી.

5.36 ઘર્ષણને લીધે બૉક્સનો પ્રવેગ $= \mu g = 0.15 \times 10 = 1.5$ m s^{-2}. પરંતુ ટ્રકનો પ્રવેગ વધારે છે. બૉક્સનો ટ્રકની સાપેક્ષે પ્રવેગ 0.5 m s^{-2} પાછળના છેડા તરફ છે. ટ્રકમાંથી બૉક્સને પડી જવા લાગતો સમય $= \sqrt{\dfrac{2\times5}{0.5}} = \sqrt{20}$ s. આ સમય દરમિયાન ટ્રક $= \frac{1}{2} \times 2 \times 20 = 20$ m અંતર કાપે છે.

5.37 સિક્કાને તક્તી સાથે ભ્રમણ કરવા માટે, ઘર્ષણબળ, કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડી શકે તેટલું પૂરતું હોવું જોઈએ, એટલે કે $\frac{mv^2}{r} \le \mu mg$. હવે, $v = r\omega$, જ્યાં $\omega = \frac{2\pi}{T}$ એ તક્તીની કોણીય આવૃત્તિ છે. આપેલ μ અને ω, માટે $r \le \mu g / \omega^2$ એ શરત છે. આ શરતનું પાલન નજીકના સિક્કા દ્વારા થાય છે (કેન્દ્રથી 4 cm).

5.38 ઉચ્ચતમ બિંદુએ, $N + mg = \frac{mv^2}{R}$, જ્યાં N એ ચેમ્બરની છત દ્વારા મોટર સાયકલિસ્ટ પર લાગતું લંબબળ (નીચે તરફ) છે. ઉચ્ચતમ બિંદુએ શક્ય લઘુતમ ઝડપ $N = 0$ ને અનુરૂપ છે.

એટલે કે, $v_{min} = \sqrt{Rg} = \sqrt{25 \times 10} \simeq 16\, m\, s^{-1}$

5.39 દીવાલ વડે માણસ પર લાગતું સમક્ષિતિજ બળ N, જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડે છે : $N = m R \omega^2$. ઘર્ષણબળ f (શિરોલંબ ઊર્ધ્વદિશામાં) વજન mgનો વિરોધ કરે છે. તળિયાને દૂર કર્યા પછી માણસ દીવાલ સાથે ચોંટીને રહે તે માટે $mg = f < \mu N$ એટલે કે $mg < \mu m R \omega^2$. નળાકારના ભ્રમણની લઘુતમ કોણીય ઝડપ $\omega_{min} = \sqrt{g / \mu R} = 5\ s^{-1}$

5.40 જ્યારે તારના મધ્યબિંદુને જોડતો ત્રિજ્યા સદિશ, શિરોલંબ અધોદિશા સાથે θ કોણ બનાવે ત્યારે ગોળીનો free-body diagram વિચારો. આપણને $mg = N\cos\theta$ અને $m R \sin\theta\ \omega^2 = N \sin\theta$ મળે. આ સમીકરણો પરથી $\cos\theta = g/R\omega^2$.

$\cos\theta \le 1$ હોવાથી, ગોળી નિમ્નતમ બિંદુએ રહે તે માટે $\theta = 0$ અને $\omega \le \sqrt{\frac{g}{R}}$.

$\omega = \sqrt{\frac{2g}{R}}$ માટે $\cos\theta = \frac{1}{2}$ એટલે કે $\theta = 60^0$.

પ્રકરણ 6

6.1 (a) +ve (b) −ve (c) −ve (d) + ve (e) − ve

6.2 (a) 882 J (b) −247 J (c) 635 J (d) 635 J

ચોખ્ખા (net, પરિણામી) બળ વડે પદાર્થ પર થયેલું કાર્ય તેની ગતિઊર્જાના ફેરફાર બરાબર છે.

6.3 (a) $x > a$; 0 (c) $x < a,\ x > b$; $-V_1$

(b) $-\infty < x < \infty$, V_1 (d) $-b/2 < x < -a/2,\ a/2 < x < b/2$; $-V_1$

6.5 (a) રૉકેટ; (b) સંરક્ષીબળ માટે, કોઈ પથ પર થયેલું કાર્ય સ્થિતિઊર્જાના ફેરફારના ઋણ બરાબર છે. પૂર્ણ કક્ષા પર, સ્થિતિઊર્જામાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી. (c) ગતિઊર્જા વધે છે, પણ સ્થિતિઊર્જા ઘટે છે અને ઘર્ષણ વિરુદ્ધમાં ઊર્જા ગુમાવાથી સરવાળો ઘટે છે. (d) બીજા કિસ્સામાં

6.6 (a) ઘટે; (b) ગતિ ઊર્જા (c) બાહ્ય બળ (d) કુલ રેખીય વેગમાન અને કુલ ઊર્જા પણ (જો બે પદાર્થોનું તંત્ર અલગ કરેલું હોય.)

6.7 (a) F (b) F (c) F (d) F (સામાન્ય રીતે સત્ય પણ હંમેશાં નહિ. કેમ ?)

6.8 (a) ના

(b) હા

(c) અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાત દરમિયાન રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. અલબત્ત, સંઘાત પૂર્ણ થયા બાદ પણ ગતિઊર્જાનું સંરક્ષણ થતું નથી. (અચળ રહેતી નથી.)

(d) સ્થિતિસ્થાપક

6.9 (b) t

6.10 (c) $t^{3/2}$

6.11 12 J

6.12 ઇલેક્ટ્રૉન વધુ ઝડપી છે, $\upsilon_e / \upsilon_p = 13.5$

6.13 દરેક અર્ધગાળામાં 0.082 J ; – 0.163 J

6.14 હા, (અણુ + દીવાલ) તંત્રનું વેગમાન અચળ રહે છે. દીવાલને પ્રારંભમાં સ્થિર ધારી લેતાં, દીવાલનું વેગમાન + બહાર જતા અણુનું વેગમાન બરાબર અંદર આવતા અણુનું વેગમાન હોય તે રીતે દીવાલને recoil (પાછા પડવું) વેગમાન છે. જોકે recoil વેગમાન દીવાલના ખૂબ મોટા દળને લીધે અવગણ્ય વેગ ઉત્પન્ન કરે છે. ગતિઊર્જાનું પણ સંરક્ષણ થતું હોવાથી સંઘાત સ્થિતિસ્થાપક છે.

6.15 43.6 kW

6.16 (b)

6.17 તે તેનું સમગ્ર વેગમાન બૉલને આપી દે છે અને જરા પણ ઊંચે જતો નથી.

6.18 5.3 m s^{-1}

6.19 27 km h^{-1} (ઝડપમાં કોઈ ફેરફાર નહિ.)

6.20 50 J

6.21 (a) $m = \rho A \upsilon t$ (b) $K = \rho A \upsilon^3 t / 2$ (c) $P = 4.5$ kW

6.22 (a) 49,000 J (b) 6.45×10^{-3} kg

6.23 (a) 200 m^2 (b) મોટા ઘરના 14m × 14m પરિમાણવાળા છાપરા સાથે સરખાવી શકાય.

6.24 21.2 cm, 28.5 J

6.25 ના, વધુ ઊંચા સમતલ પરનો પથ્થર તળિયે વહેલો પહોંચે છે; હા, તેઓ એક સમાન ઝડપ (υ) થી પહોંચે છે. [કારણ કે $mgh = (1/2)\, m\, \upsilon^2$]

$\upsilon_B = \upsilon_C = 14.1$ m s^{-1} , $t_B = 2\sqrt{2}$ s , $t_C = 2\sqrt{2}$ s

6.26 0.125

6.27 બંને કિસ્સા માટે 8.82 J.

6.28 બાળક, પ્રારંભમાં ટ્રૉલીને આઘાત આપે છે અને પછી ટ્રૉલીના નવા વેગની સાપેક્ષે 4 m s^{-1}ના અચળ વેગથી દોડે છે. બહારના નિરીક્ષક માટે વેગમાન સંરક્ષણ લાગુ પાડો. 10.36 m s^{-1}, 25.9 m.

6.29 (V) સિવાયના બધા અશક્ય છે.

પ્રકરણ 7

7.1 દરેકનું ભૌમિતિક કેન્દ્ર. ના, રિંગ, પોલા નળાકાર, પોલા ગોળા, પોલા ઘન વગેરેની જેમ CM પદાર્થના દ્રવ્યની બહાર હોઈ શકે છે.

7.2 H અને *Cl* ન્યુક્લિયસોને જોડતી રેખા પર, H છેડાથી 1.24 Å અંતરે રહેલું છે.

7.3 (ટ્રૉલી + બાળક)ના બનેલા તંત્રના CMની ઝડપ અચળ (બરાબર v) રહે છે, કારણ કે તંત્ર પર કોઈ બાહ્ય બળ લાગતું નથી. ટ્રૉલી પર બાળકના દોડવાની ક્રિયામાં સંકળાયેલાં બળો આ તંત્રનાં આંતરિક બળો છે.

7.6 $l_z = xp_y - yp_x$, $l_x = yp_z - zp_y$, $l_y = zp_x - xp_z$

7.8 72 cm

7.9 દરેક આગળના પૈડા પર 3675 N, દરેક પાછળના પૈડા પર 5145 N

7.10 (a) 7/5 MR^2 (b) 3/2 MR^2

7.11 ગોળો

7.12 ગતિઊર્જા = 3125 J; કોણીય વેગમાન = 62.5 J s

7.13 (a) 100 rev/min (કોણીય વેગમાન સંરક્ષણ વાપરો.)

(b) નવી ચાકગતિ ઊર્જાએ પ્રારંભિક ચાકગતિ ઊર્જાના 2.5 ગણી છે. બાળક તેની આંતરિક ઊર્જાનો ઉપયોગ કરીને તેની ચાકગતિ ઊર્જા વધારે છે.

7.14 $25\ s^{-2}$; $10\ m\ s^{-2}$

7.15 36 kW

7.16 મૂળ તક્તીના કેન્દ્રથી R/6 અંતરે, કાપેલા ભાગના કેન્દ્રથી વિરુદ્ધ બાજુએ

7.17 66.0 g

7.18 (a) હા (b) હા (c) ઓછા ઢોળાવવાળા સમતલ પર વધુ સમય લાગે ($\because a \propto \sin\theta$)

7.19 4J

7.20 6.75×10^{12} rad s^{-1}

7.21 (a) 3.8 m (b) 3.0 s

7.22 તણાવ = 98 N, N_B = 245 N, N_C = 147 N.

7.23 (a) 59 rev/min (b)ના, ગતિઊર્જામાં વધારો થાય છે અને તે માણસે પ્રક્રિયામાં કરેલાં કાર્યમાંથી આવે છે.

7.24 0.625 rad s^{-1}

7.25 (a) કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણ પરથી, સામાન્ય કોણીય ઝડપ

$$\omega = (I_1\,\omega_1 + I_2\,\omega_2)\ /\ (I_1 + I_2)$$

(b) બે તક્તીઓ વચ્ચેના ઘર્ષણીય સંપર્ક જે તેમને બંનેને સમાન કોણીય ઝડપ ω પર લાવે છે તેમાં થતા વ્યયને લીધે ગતિ-ઊર્જામાં ઘટાડો થાય છે. જોકે ઘર્ષણથી ઉદ્ભવતા ટૉર્ક તંત્રના અંદરના હોવાથી કોણીય વેગમાન બદલાતું નથી.

7.28 Aનો વેગ $= \omega_o R$ તીરની દિશામાં; Bનો વેગ $= \omega_o R$ તીરની વિરુદ્ધ દિશામાં, Cનો વેગ $= \omega_o R/2$ તીરની દિશામાં. ઘર્ષણરહિત સમતલ પર તક્તી ગબડશે નહિ.

7.29 (a) B આગળનું ઘર્ષણબળ Bના વેગનો વિરોધ કરે છે. આથી, ઘર્ષણબળ તીરની દિશામાં છે. ઘર્ષણથી ઉદ્ભવતા ટૉર્કની દિશા એવી છે કે તે કોણીય ગતિનો વિરોધ કરે. $\boldsymbol{\omega}_0$ અને $\boldsymbol{\tau}$ બંને પાનાના પૃષ્ઠને લંબ છે. પહેલું પાનાની અંદર તરફ જતું અને બીજું પાનામાંથી બહાર તરફ આવતું.

(b) ઘર્ષણબળ સંપર્કબિંદુ Bના વેગને ઘટાડે છે. આ વેગ શૂન્ય બને તેના પરિણામે સંપૂર્ણ ગબડવાનું શરૂ કરે છે. એકવાર આમ બંને એટલે ઘર્ષણબળ શૂન્ય થાય છે.

7.30 ઘર્ષણબળ CMને પ્રારંભિક શૂન્ય વેગથી પ્રવેગિત કરે છે. ઘર્ષણબળથી ઉદ્ભવતું ટૉર્ક પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ ω_oમાં પ્રતિપ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે. ગતિનાં સમીકરણો : $\mu_k\, m\, g = m\, a$ અને $\mu_k\, m\, g\, R = -I\alpha$, તેમના પરથી $\upsilon = \mu_k\, g\, t$, $\omega = \omega_o - \mu_k\, m\, g\, R\, t\,/\,I$. જ્યારે $\upsilon = R\,\omega$ હોય ત્યારે ગબડવાનું શરૂ થાય છે. રિંગ (વલય) માટે $I = m\,R^2$ અને $t = \omega_o\ R/2\,\mu_k\, g$ હોય ત્યારે ગબડવાનું શરૂ થાય છે. તક્તી માટે, $I = ½\, m\, R^2$ અને break line $t = R\,\omega_o/3\,\mu_k\, g$ હોય ત્યારે ગબડવાનું શરૂ થાય છે. આમ R અને ω_o બંનેનાં સમાન મૂલ્યો માટે તક્તી ગબડવાની ક્રિયા વહેલી શરૂ કરે છે. વાસ્તવિક રીતે લાગતા સમયનાં મૂલ્યો $R = 10$ cm, $\omega_o = 10\,\pi$ rad s^{-1}, $\mu_k = 0.2$ માટે મેળવી શકાય.

7.31 (a) 16.4 N

(b) Zero

(c) લગભગ 37°

પ્રકરણ 8

8.1 (a) ના.

(b) હા, જો અવકાશયાનનું પરિમાણ (size) એટલું મોટું હોય કે તે તેમાં થતો ફેરફાર અનુભવી (પારખી) શકે તો.

(c) બળ જે અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં બદલાય થાય છે તેનાથી વિપરીત ભરતીની અસર અંતરના ઘનના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં બદલાય થાય છે.

8.2 (a) ઘટે છે (b) ઘટે છે (c) પદાર્થના દળ (d) વધારે

8.3 0.63 ગણી નાની

8.5 3.54×10^8 years

8.6 (a) ગતિ ઊર્જા (b) ઓછી

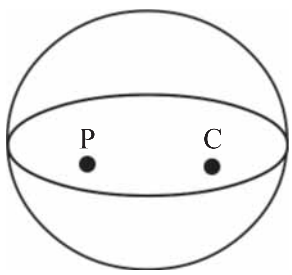
8.7 (a) ના (b) ના (c) ના (d) હા

[નિષ્ક્રમણ વેગ, પદાર્થના દળ અને પ્રક્ષિપ્ત કરવાની દિશા પર આધારિત નથી. જે બિંદુએથી તેને મોકલવામાં (લૉન્ચ કરવામાં) આવે તે બિંદુએ ગુરુત્વ સ્થિતિમાન પર તે આધારિત છે. આ સ્થિતિમાન (થોડે અંશે) અક્ષાંશ અને ઊંચાઈ પર આધારિત હોવાથી; નિષ્ક્રમણ વેગ (થોડે અંશે) આ પરિબળો પર આધારિત છે.]

8.8 સમગ્ર કક્ષા પર કોણીય વેગમાન અને કુલ ઊર્જા સિવાયની બધી રાશિઓ બદલાય છે.

8.9 (b), (c) અને (d)

8.10 અને **8.11** આ બે પ્રશ્નો માટે અર્ધગોળામાંથી ગોળો પૂર્ણ કરો. P અને C, બંને આગળ સ્થિતિમાન અચળ છે અને તેથી તીવ્રતા = 0. આથી અર્ધ ગોળા માટે (c) અને (e) સત્ય છે.



8.12 2.6×10^8 m

8.13 2.0×10^{30} kg

8.14 1.43×10^{12} m

8.15 28 N

8.16 125 N

8.17 પૃથ્વીના કેન્દ્રથી 8.0×10^6 m

8.18 31.7 km/s

8.19 5.9×10^9 J

8.20 2.6×10^6 m/s

8.21 0, 2.7×10^{-8} J/kg; મધ્યબિંદુએ મૂકેલ પદાર્થ અસ્થાયી સંતુલનમાં છે.

8.22 -9.4×10^6 J/kg

8.23 $G\,M\,/\,R^2 = 2.3 \times 10^{12}$ m s^{-2}, $\omega^2\,R = 1.1 \times 10^6$ m s^{-2}; અહીં ω એ પરિભ્રમણની કોણીય ઝડપ છે. આમ તારાની ભ્રમણ કરતી નિર્દેશ ફ્રેમમાં તેના વિષુવવૃત્ત પર અંદર તરફનું બળ બહાર તરફના કેન્દ્રત્યાગી બળ કરતાં ઘણું મોટું છે. પદાર્થ તેને વળગીને રહેશે (અને કેન્દ્રત્યાગી બળને લીધે દૂર ભાગી નહિ જાય.) નોંધો કે જો ભ્રમણની કોણીય ઝડપ 2000 ગણી મોટી કરવામાં આવે તો પદાર્થ તેને છોડીને ભાગી જશે.

8.24 3×10^{11} J

8.25 495 km