ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ / 1211 / 414 / છ, તા.15-9-2011-થી મંજૂર

ભૌતિકવિજ્ઞાન

ધોરણ 11

(સિમેસ્ટર II)

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

લેખન
ડૉ. પી. એન. ગજ્જર (કન્વીનર)
ડૉ. વી. પી. પટેલ
પ્રો. એમ. એસ. રામી
ડૉ. એ. પી. પટેલ
ડૉ. ડી. એચ. ગદાણી
શ્રી પંકજ જે. ચાવડા

અનુવાદ
ડૉ. પી. એન. ગજ્જર
ડૉ. વી. પી. પટેલ
પ્રો. એમ. એસ. રામી
ડૉ. એ. પી. પટેલ
ડૉ. ડી. એચ. ગદાણી
શ્રી પંકજ જે. ચાવડા

સમીક્ષા
શ્રી દિનેશભાઈ વી. સુથાર
શ્રી રજનીકાન્ત એન. ચૌધરી
શ્રી મૂકેશભાઈ એચ. ભટ્ટ
શ્રી એસ. જી. પટેલ
શ્રી મયૂર એમ. રાવલ
શ્રી શાન્તિલાલ એસ. પટેલ
શ્રી જે. પી. જોષી
શ્રી વાસુદેવ બી. રાવલ
શ્રી જયંતીભાઈ એમ. પટેલ
શ્રી કલ્પેશ ડી. પટેલ

ભાષાશુદ્ધિ
શ્રી ઓ. બી. દવે

ચિત્રાંકન
શ્રી જી. વી. મેવાડા

સંયોજન
શ્રી ચિરાગ એચ. પટેલ
(વિષય-સંયોજક : ભૌતિકવિજ્ઞાન)

નિર્માણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

કૉર-કરિક્યુલમ અને એન.સી.ઈ.આર.ટી. દ્વારા એન.સી.એફ.-2005 મુજબ તૈયાર કરવામાં આવેલા નવા રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમોના અનુસંધાનમાં ગુજરાત રાજ્ય માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડે નવા અભ્યાસક્રમો તૈયાર કર્યા છે. આ અભ્યાસક્રમો ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર કરવામાં આવે છે.

ગુજરાત સરકાર દ્વારા મંજૂર થયેલા **ધોરણ 11 (સિમેસ્ટર II)**ના **ભૌતિકવિજ્ઞાન** વિષયના નવા અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં એની હસ્તપ્રતની આ સ્તરે શિક્ષણકાર્ય કરતા શિક્ષકો અને તજ્જ્ઞો દ્વારા સર્વાંગી સમીક્ષા કરાવવામાં આવી છે. શિક્ષકો તથા તજ્જ્ઞોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારાવધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે.

આ મૂળ અંગ્રેજીમાં લખાયેલ પાઠ્યપુસ્તકનો આ ગુજરાતી અનુવાદ છે. ગુજરાતી અનુવાદની વિષય અને ભાષાના નિષ્ણાતો દ્વારા સમીક્ષા કરવામાં આવી છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળે પૂરતી કાળજી લીધી છે; તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

ડૉ. ભરત પંડિત
નિયામક
તા.05-08-2015

સુજીત ગુલાટી IAS
કાર્યવાહક પ્રમુખ
ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2011, પુનઃર્મુદ્રણ : 2012, 2013,2014, 2014, 2015
પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી ભરત પંડિત, નિયામક
મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજ નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતનાં સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓના ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવી.

* ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-क

અનુક્રમણિકા

આ પાઠ્યપુસ્તક વિશે...

National Curriculum Framwork (NCF), Core-Curriculum અને National Council of Educational Research and Training (NCERT)ના અભ્યાસક્રમોને ધ્યાનમાં રાખી રાષ્ટ્રીય શિક્ષણનીતિના ઉપલક્ષ્યમાં રાજ્ય સરકાર તરફથી મંજૂર કરવામાં આવેલ ધોરણ 11ના ભૌતિકવિજ્ઞાન વિષયના અભ્યાસક્રમ અનુસાર તૈયાર કરવામાં આવેલું આ પાઠ્યપુસ્તક આપની સમક્ષ રજૂ કરતાં અમે આનંદ અનુભવીએ છીએ.

રાજ્ય સરકારે ધોરણ 11માં સિમેસ્ટર પદ્ધતિનો અમલ કર્યો છે. સિમેસ્ટર પદ્ધતિ વિદ્યાર્થીઓના ભણતરનો ભાર ઘટાડનાર થશે તથા અભ્યાસ પ્રત્યે રુચિ વધારનાર થશે.

ધોરણ-11ના ભૌતિકવિજ્ઞાનના આ પાઠ્યપુસ્તકમાં, સિમેન્ટર I અને સિમેન્ટર II દરેકમાં આઠ પ્રકરણોનો સમાવેશ વિષયવસ્તુની ગહનતા, વર્ગખંડમાં અભ્યાસ માટે મળવાપાત્ર સમય વગેરેને ધ્યાનમાં રાખીને કરવામાં આવ્યો છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાનના કોઈ પણ વાદ (Theory)ની સ્પષ્ટ સમજણ તો જ પ્રાપ્ત થાય જો તેની સાથે-સાથે તેના આનુષંગિક કોયડાનો ઉકેલ મેળવતાં વિદ્યાર્થી શીખે. આથી જ દરેક પ્રકરણમાં કોઈ પણ નવા વાદને અનુરૂપ કોયડા ગણીને આપેલ છે. પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકનું એક જમા પાસું એ પણ છે કે, દરેક પ્રકરણના અંતે સવિસ્તૃત સારાંશ આપવામાં આવેલ છે, જેના પરથી સમગ્ર પ્રકરણના વિષયવસ્તુ પર ઝડપથી એક નજર કરી શકાય.

સમગ્ર દેશમાં લેવામાં આવતી વિવિધ પ્રવેશ પરીક્ષાના પરિરૂપને ધ્યાનમાં રાખી આ પુસ્તકમાં MCQs, Short questions, Objective questions અને Problemsનો સમાવેશ કરેલ છે. Problemsના ઉકેલ માટે પુસ્તકના અંતે Hints પણ આપવામાં આવેલ છે કે જેથી વિદ્યાર્થીઓ સ્વ-પ્રયત્ને આ કોયડા ઉકેલી શકે. પુસ્તકને અંતે આપેલ Appendices પણ અતિ મહત્ત્વનાં બની રહેશે.

આ પુસ્તક એક નવા જ પરિરૂપ તથા ચાર કલરના પ્રિન્ટિંગમાં પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું છે, તેથી તેમાં રહેલી આકૃતિઓ વધુ સ્પષ્ટ બની રહે છે. સામાન્ય રીતે વિદ્યાર્થીઓ એક ધોરણ પૂરું કરીને આગળના ધોરણમાં જાય ત્યારે જૂનાં પાઠ્યપુસ્તકો જાળવી રાખતાં ન હોવાનું વલણ નોંધાયેલું છે. પરંતુ સિમેસ્ટર પદ્ધતિમાં દરેક સિમેસ્ટરનું મહત્ત્વ હોવાથી તથા પાઠ્યપુસ્તકનું સ્વરૂપ જ અતિસુંદર હોવાથી તે દરેક વિદ્યાર્થીઓને સાચવી રાખવું ગમશે અને તે સંદર્ભ પુસ્તક તરીકે ઉપયોગી બનશે.

આ અગાઉના પાઠ્યપુસ્તકને વિદ્યાર્થીઓ, શિક્ષકો તથા તજજ્ઞો દ્વારા ખૂબ જ સારો પ્રતિભાવ મળ્યો હતો. આથી તે પુસ્તકમાંની ઘણા વિષયવસ્તુને આ પુસ્તકમાં મૂળ સ્વરૂપે કે થોડાક ફેરફાર સાથે લેવામાં આવેલ છે. અત્રે અગાઉના લેખકોની ટીમનો અમે ઋણ સ્વીકાર કરીએ છીએ. Review workshopમાં ઉપસ્થિત રહીને જે શિક્ષકમિત્રોએ આ પુસ્તકને ક્ષતિરહિત બનાવવા સૂચનો કર્યાં છે તે બદલ તેમનો પણ આભાર.

પુસ્તક તૈયાર કરતી વખતે તે ક્ષતિરહિત બને તેમજ હકીકતદોષ ન રહી જાય તેની જરૂરી કાળજી વિષય-સલાહકારો, લેખકો અને પરામર્શકો દ્વારા લેવામાં આવી છે. છતાં પણ કોઈ ક્ષતિ રહી ગઈ હોય તો, તે માટે ધ્યાન દોરવા આગ્રહ છે.

લેખકો/સંપાદકો

પ્રકરણ 1

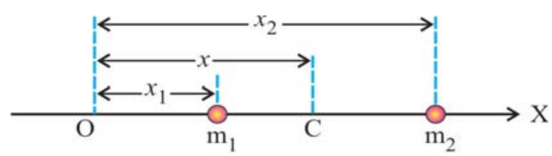
કણોના તંત્રનું ડાઈનેમિક્સ

1.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

સિમેસ્ટર-I માં આપણે કણની રેખીય ગતિનો અભ્યાસ કર્યો હતો. હવે આ પ્રકરણમાં આપણે બે કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, n-કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, તથા દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર કેવી રીતે શોધી શકાય તે વિશે અભ્યાસ કરીશું. આ ઉપરાંત આપણે કણોના તંત્રની ગતિ સાથે સંકળાયેલ ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ તારવીશું. કણોના તંત્ર માટે ભૌતિકવિજ્ઞાનના સાર્વત્રિક નિયમો પૈકીનો એક એવો વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ પણ તારવીશું.

1.2 એક-પરિમાણમાં કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a System of Particles in One Dimension)

આકૃતિ 1.1માં દર્શાવ્યા મુજબ, ધારો કે m_1 અને m_2 દ્રવ્યમાન ધરાવતા બે કણો X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુ (O) થી અનુક્રમે x_1 અને x_2 અંતરે રહેલા છે.



બે કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

આકૃતિ 1.1

આ તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એક એવું બિંદુ છે કે જેનું ઊગમબિંદુ O થી અંતર,

$$\therefore\ x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad (1.2.1)$$

સૂત્ર વડે આપી શકાય છે.

અહીં, x એ x_1 અને x_2નું દળભારિત સરેરાશ સ્થાન ધરાવે છે. જો બન્ને કણો સમાન દ્રવ્યમાનના હોય, તો $m_1 = m_2 = m$.

$$\therefore \ x = \frac{mx_1 + mx_2}{m + m}$$

$$\therefore \ x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (1.2.2)$$

આમ, **સમાન દ્રવ્યમાન ધરાવતા બે કણોનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (બન્ને કણોને જોડતા રેખાખંડ પર) બન્ને કણોની મધ્યમાં આવેલું હોય છે.**

આ જ રીતે, જો $m_1, m_2, ..., m_n$ દ્રવ્યમાન ધરાવતા n કણો X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુ 'O' થી અનુક્રમે $x_1, x_2, ..., x_n$ અંતરે રહેલા હોય, તો n કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર,

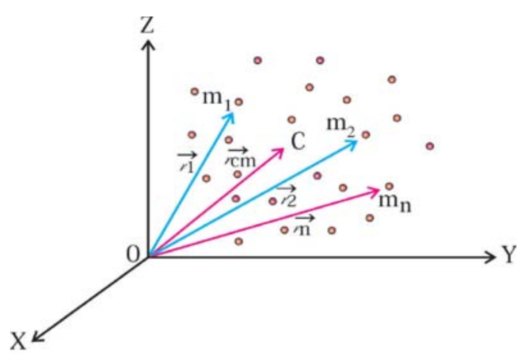
$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

$$\therefore \ x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \qquad (1.2.3)$$

$$\therefore \ x = \frac{\Sigma m_i x_i}{M} \qquad (1.2.4)$$

જ્યાં $M = \Sigma m_i = n$ કણોના તંત્રનું કુલદ્રવ્યમાન.

1.3 ત્રિ-પરિમાણમાં n-કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a System of *n*-Particles in Three Dimensions)



ત્રિપરિમાણમાં n-કણોનું તંત્ર

આકૃતિ 1.2

આકૃતિ 1.2 માં n-કણોનું તંત્ર ત્રિપરિમાણમાં દર્શાવ્યું છે. યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ 'O'ને અનુલક્ષીને $m_1, m_2, ..., m_n$ દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ છે. આ તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ નીચે આપેલા સૂત્ર વડે દર્શાવી શકાય.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} \qquad (1.3.1)$$

$$\therefore \ \vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{M}$$

અથવા

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... m_n\vec{r}_n \qquad (1.3.2)$$

જ્યાં,

$$M = m_1 + m_2 + ... + m_n \qquad (1.3.3)$$

$= n$-કણોના તંત્રનું કુલ દ્રવ્યમાન.

1.3.1 દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ગતિ અને ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ (Motion of Centre of Mass and Newton's Second Law of Motion) :

n-કણોના તંત્રમાં રહેલા દરેક કણનું દ્રવ્યમાન સમય સાથે બદલાતું ન હોય તો, સમીકરણ (1.3.2) નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$M\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + ... + m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

$$\therefore \ M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n$$

અહીં, $\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}$ એ દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ છે, તથા

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...$, એ અનુરૂપ કણોના વેગ છે.

$$\therefore \ M\vec{v}_{cm} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_n \qquad (1.3.4)$$

$$\therefore \ M\vec{v}_{cm} = \vec{P} \qquad (1.3.5)$$

જ્યાં $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ...$ વગેરે અનુરૂપ કણોના વેગમાન છે, તથા

$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_n$ એ n-કણોના તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન છે.

સમીકરણ (1.3.5) દર્શાવે છે કે **કણોના તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન, તંત્રના કુલ દળ અને તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના વેગના ગુણાકાર જેટલું હોય છે.**

સમીકરણ (1.3.4)નું સમય સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} + ... + \frac{d\vec{P}_n}{dt}$$

$$\therefore M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \vec{F} \qquad (1.3.6)$$

$$= m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + ... + m_n \vec{a}_n \qquad (1.3.7)$$

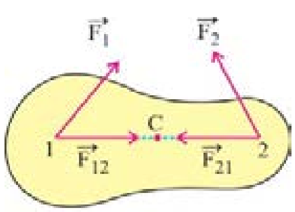
સમીકરણ (1.3.6)માં $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... , $\vec{F}_n$ એ તંત્રના અનુરૂપ કણો પર પ્રવર્તતાં બળો છે તથા $\vec{F}$ એ પરિણામી બળ છે. સમીકરણ (1.3.7)માં $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ એ આ બળો વડે ઉદ્દ્ભવતા અનુરૂપ કણોના પ્રવેગ છે.

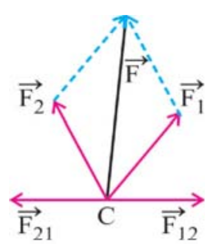
સમીકરણ (1.3.5) પરથી,

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{cm} \qquad (1.3.8)$$

તંત્રમાં કણો પર પ્રવર્તતાં બળો બે પ્રકારનાં હોય છે :

(1) તંત્રમાં કણો વચ્ચે પ્રવર્તતાં આંતરિક બળો અને (2) બાહ્ય બળો.





(*a*) (*b*)

બે કણોથી બનેલા તંત્ર પર લાગતાં વિવિધ બળો

આકૃતિ 1.3

આકૃતિ (1.3 *a*)માં દર્શાવ્યા મુજબ, ધારો કે બે કણોથી બનેલા તંત્રમાં, કણ 1 અને 2 પર લાગતાં બાહ્ય બળો અનુક્રમે $\vec{F}_1$ અને $\vec{F}_2$ છે તથા તેમની વચ્ચે પ્રવર્તતાં આંતરિક બળો $\vec{F}_{12}$ અને $\vec{F}_{21}$ છે.

સમગ્ર તંત્રની ગતિનો અભ્યાસ કરીએ ત્યારે આ બધાં જ બળો દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર 'C' પર લાગે છે તેમ ગણી શકાય (જુઓ આકૃતિ 1.3-*b*). ન્યૂટનના ગતિના ત્રીજા નિયમ મુજબ $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ હોવાથી, આંતરિક બળોનું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય છે. આમ, સમીકરણ (1.3.6)માં કણોના તંત્ર પર લાગતું પરિણામી બળ $\vec{F}$ એ ફક્ત બાહ્ય બળોનું જ પરિણામી બળ છે. સમીકરણ (1.3.6) અને (1.3.8) પરથી,

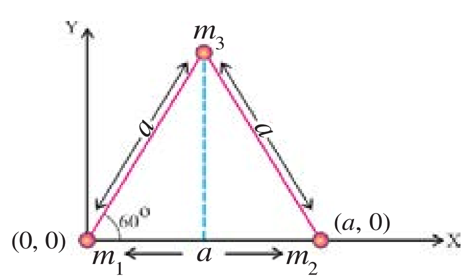
$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm} = \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (1.3.9)$$

સમીકરણ (1.3.9) દર્શાવે છે કે **તંત્ર પર લાગતું પરિણામી બાહ્ય બળ તંત્રના કુલ રેખીય વેગમાનના ફેરફારના દર બરાબર હોય છે, જે કણોના તંત્ર માટે ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ છે.** આ ઉપરાંત સમીકરણ (1.3.9) દર્શાવે છે કે **તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર જાણે કે તંત્રનું સમગ્ર દળ તેના પર કેન્દ્રિત થયું હોય તેમ, પરિણામી બાહ્ય બળ $\vec{F}$ ની અસર હેઠળ ગતિ કરે છે.**

ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ કોઈ એક કણ માટે ત્રીજા નિયમની મદદ વગર સ્વતંત્ર રીતે લખી શકાય છે. પણ કણોના તંત્ર માટે બીજો નિયમ મેળવવા માટે આપણે ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમની મદદ લેવી પડે છે. આ હકીકતને ન્યૂટનના ગતિના નિયમોનું પરસ્પર અવલંબન કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : '*a*' બાજુવાળા એક સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ પર m_1, m_2 અને m_3 દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણો મૂક્યા છે. m_1 દ્રવ્યમાનવાળા કણની સાપેક્ષે આ તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 1.4

સમબાજુ ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનાં માપ એકસરખાં ($60°$) હોય છે. આથી આકૃતિ (1.4) માં દર્શાવ્યા મુજબ m_1 દ્રવ્યમાનવાળા કણને ઊગમબિંદુ (0, 0) પર, તથા m_2 દ્રવ્યમાનવાળા કણને X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુથી 'a' અંતરે (a, 0) સ્થાન પર દર્શાવીએ, તો m_3 દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણના યામ

$$(a \cos 60°, a \sin 60°) = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$$

આમ, m_1, m_2 અને m_3 દ્રવ્યમાનવાળા કણોના સ્થાન-સદિશ અનુક્રમે

$$\vec{r}_1 = (0, 0),\ \vec{r}_2 = (a, 0), \text{ અને}$$

$$\vec{r}_3 = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$$

આથી વ્યાખ્યા મુજબ ત્રણ કણોના આ તંત્રના દ્રવ્યમાન-કેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m_1(0,0) + m_2(a,0) + m_3\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{\left(m_2 a + \frac{m_3 a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}m_3 a\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\therefore \vec{r}_{cm} = \left[\frac{\left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right)a}{m_1 + m_2 + m_3},\ \frac{\sqrt{3}\ m_3 \frac{a}{2}}{m_1 + m_2 + m_3}\right]$$

ઉદાહરણ 2 : ત્રણ કણોના તંત્રમાં કણોનાં રેખીય વેગમાન અનુક્રમે (1, 2, 3), (4, 5, 6) અને (5, 6, 7) છે. આ ઘટકો kg m s^{-1} માં છે. જો તંત્રના દ્રવ્યમાન-કેન્દ્રનો વેગ (30, 39, 48) m s^{-1} હોય, તો તંત્રનું કુલ દળ શોધો.

ઉકેલ : અહીંયાં $\vec{P}_1 = (1, 2, 3)$ kg m s^{-1}

$\vec{P}_2 = (4, 5, 6)$ kg m s^{-1}

$\vec{P}_3 = (5, 6, 7)$ kg m s^{-1}

તથા $\vec{v}_{cm} = (30, 39, 48)$ m s^{-1}

હવે, $M\vec{v}_{cm} = \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$

$\therefore$ M(30, 39 48) = (1, 2, 3) + (4, 5, 6) + (5, 6, 7)

$\therefore$ (30 M, 39 M, 48 M) = (10, 13, 16)

સમીકરણની બન્ને બાજુના અનુરૂપ ઘટકો સરખાવતાં

$$30\ M = 10 \Rightarrow M = \frac{1}{3}\ \text{kg}$$

$$39\ M = 13 \Rightarrow M = \frac{1}{3}\ \text{kg}$$

$$48\ M = 16 \Rightarrow M = \frac{1}{3}\ \text{kg}$$

આમ, તંત્રનું કુલ દળ $\frac{1}{3}$ kg છે.

ઉદાહરણ 3 : $t = 0$ સમયે, 0.1 kg ના એક પથ્થરને ઊંચા બિલ્ડિંગ પરથી મુક્ત રીતે પડતો મૂકવામાં આવે છે. બીજા 0.2 kg ના પથ્થરને તે જ સ્થાન પરથી 0.1s બાદ મુક્ત રીતે પડતો મૂકવામાં આવે છે.

(1) $t = 0.3$s સમયે આ બન્ને પથ્થરનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર મૂળ સ્થાનથી કેટલા અંતરે હશે ? (બેમાંથી એક પણ પથ્થર આ સમયે જમીન પર પડતો નથી.)

(2) આ સમયે બન્ને પથ્થરનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર કેટલી ઝડપથી ગતિ કરતું હશે ?

(3) આ સમયે બન્ને પથ્થર વડે બનતા તંત્રનું કુલ વેગમાન કેટલું હશે ?

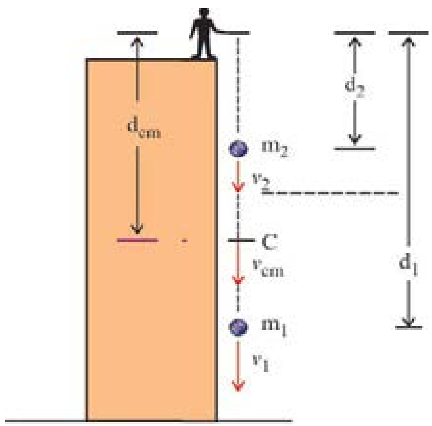
ઉકેલ : પથ્થર 1નું દ્રવ્યમાન $m_1 = 0.1$ kg

પથ્થર 2નું દ્રવ્યમાન $m_2 = 0.2$ kg

પથ્થર 1ની પ્રારંભિક ઝડપ $v_{01} = 0$ m s^{-1}

પથ્થર 2ની પ્રારંભિક ઝડપ $v_{02} = 0$ m s^{-1}

(1) અહીં બન્ને પથ્થરો એક જ દિશામાં ગતિ કરતા હોવાથી તેમના વેગ અને વેગમાન સદિશો અદિશ સ્વરૂપે લઈ શકાશે. $t = 0.3$ s સમયે પથ્થર 1 વડે કપાયેલ અંતર



આકૃતિ 1.5

$$d_1 = v_{01}\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\, (9.8)\, (0.3)^2$$

$$d_1 = 0.441 \text{ m} \qquad (1)$$

પથ્થર 2ને 0.1 s પછી છોડવામાં આવે છે. આથી t = 0.3 s, સમયે, પથ્થર 2એ પડવા માટે લીધેલ સમય $t\,' = 0.3 \text{ s} - 0.1 \text{ s} = 0.2$ s.

આમ $t\,'$ = 0.2 s સમયમાં (એટલે કે t = 0.3 s સમયે), પથ્થર 2 વડે કપાયેલ અંતર

$$d_2 = v_{02}t\,' + \frac{1}{2}\, g\, t'^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\, (9.8)\, (0.2)^2$$

$$d_2 = 0.196 \text{ m} \qquad (2)$$

આથી, t = 0.3 s, સમયે મૂળ સ્થાનથી બન્ને પથ્થર વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું અંતર

$$d_{cm} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(0.1)(0.441) + (0.2)(0.196)}{0.1 + 0.2}$$

$$\therefore\ d_{cm} = 0.277 \text{ m} \qquad (3)$$

(2) t = 0.3 s, સમયે પથ્થર 1ની ઝડપ

$$v_1 = v_{01} + gt = 0 + (9.8)(0.3)$$

$$\therefore\ v_1 = 2.94 \text{ m s}^{-1} \qquad (4)$$

t = 0.3 s, સમયે પથ્થર 2નો પડવાનો સમય અંતરાલ $t\,'$ = 0.2 s છે. આથી $t\,'$ = 0.2 s સમય પછી પથ્થર 2 ની ઝડપ

$$v_2 = v_{02} + gt\,' = 0 + (9.8)(0.2)$$

$$\therefore\ v_2 = 1.96 \text{ m s}^{-1} \qquad (5)$$

આથી, t = 0.3 s, સમયે બન્ને પથ્થર વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ઝડપ

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore\ v_{cm} = \frac{(0.1)(2.94) + (0.2)(1.96)}{0.1 + 0.2}$$

$$\therefore\ v_{cm} = 2.29 \text{ ms}^{-1} \qquad (6)$$

(3) t = 0.3 s, સમયે બન્ને પથ્થરો વડે બનતા તંત્રનું કુલ વેગમાન

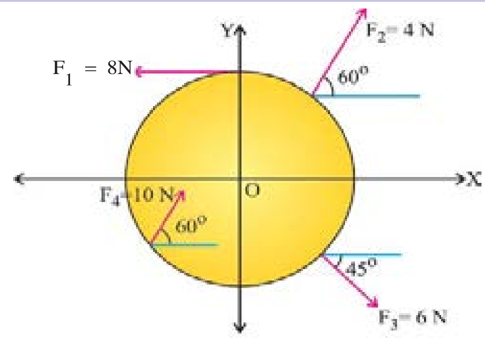
$$\text{P} = \text{P}_1 + \text{P}_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\therefore\ \text{P} = (0.1)\,(2.94) + (0.2)\,(1.96)$$

$$\therefore\ \text{P} = 0.686 \text{ kg m s}^{-1}$$

$$= 0.69 \text{ kg m s}^{-1} \qquad (7)$$

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ (1.6)માં દર્શાવ્યા મુજબ 2 kg દ્રવ્યમાનવાળા એક દ્વિપારિમાણિક પદાર્થ પર વિવિધ બળો લાગે છે. આ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો રેખીય પ્રવેગ શોધો.



આકૃતિ 1.6

ઉકેલ : બધાં બળોને તેમના ઘટકોના રૂપમાં લખતાં,

$$\vec{F}_1 = (-8,\ 0) \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = (4 \cos 60^\circ,\ 4 \sin 60^\circ) = (2,\ 2\sqrt{3}) \text{N}$$

$$\vec{F}_3 = [6 \cos (-45^\circ),\ 6 \sin (-45^\circ)]$$

$$= (6 \cos 45^\circ,\ -6 \sin 45^\circ)$$

$$\therefore\ \vec{F}_3 = \left(\frac{6}{\sqrt{2}},\ \frac{-6}{\sqrt{2}}\right) \text{N}$$

$$\vec{F}_4 = (10 \cos 60^\circ,\ 10 \sin 60^\circ) = (5,\ 5\sqrt{3}) \text{N}$$

હવે,

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

જ્યાં M = 2 kg

$$\therefore \vec{a}_{cm} = \frac{1}{2}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4)$$

$$= \frac{1}{2}[(-8+2+\frac{6}{\sqrt{2}}+5),(2\sqrt{3}-\frac{6}{\sqrt{2}}+5\sqrt{3})]$$

$$\therefore \vec{a}_{cm} = \frac{1}{2}[(-1+\frac{6}{\sqrt{2}}),(7\sqrt{3}-\frac{6}{\sqrt{2}})]\text{m s}^{-2}$$

1.4 રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ (Law of Conservation of Linear Momentum)

જો તંત્ર પર લાગતું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો સમીકરણ (1.3.9) પરથી

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad (1.4.1)$$

$$\therefore \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ...+ \vec{P}_n = \text{અચળ} \qquad (1.4.2)$$

જે દર્શાવે છે કે, **"જો તંત્ર પરનું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે."** આ વિધાનને **રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ** કહે છે. પરિણામી બાહ્યબળ શૂન્ય હોય ત્યારે તંત્રના જુદા-જુદા કણોના વેગમાન $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ...માં વ્યક્તિગત ફેરફારો થઈ શકે છે, પરંતુ આ ફેરફારો એવી રીતે જ થાય છે કે જેથી વેગમાનના ફેરફારોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય જ થાય. આમ, કણોના વેગમાનમાં થતો કુલ ફેરફાર શૂન્ય થવાથી, તંત્રનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે.

દા. ત., બંધ પાત્રમાં રહેલા હવાના અણુઓ પાત્રમાં અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરતા હોય છે, તેમની વચ્ચે અણુ-અણુ અથડામણ અથવા અણુની પાત્રની દીવાલ સાથેની અથડામણ દરમિયાન તેમનું વ્યક્તિગત વેગમાન બદલાય છે, પરંતુ તેમના વેગમાનના ફેરફારોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય હોય છે. એટલે કે તેમનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે.

(જો વાયુના અણુઓના વેગમાનના ફેરફારોનો સદિશ સરવાળો કોઈ ચોક્કસ દિશામાં હોય તો શું થાય ? વિચારો)

રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ મૂળભૂત અને સાર્વત્રિક છે. આ નિયમ ગ્રહોના બનેલા તંત્રો, તેમજ ઈલેક્ટ્રૉન, પ્રોટોન વગેરે જેવા સૂક્ષ્મ કણોનાં બનેલાં તંત્રો માટે પણ સમાન રીતે સાચો છે.

સમીકરણ (1.3.9) પરથી,

$$\vec{F} = M\vec{a}_{cm} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = 0$$

$$\therefore \vec{a}_{cm} = 0 \text{ અને } \vec{v}_{cm} = \text{અચળ}$$

જે દર્શાવે છે કે જો **પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો પ્રવેગ શૂન્ય હોય છે. એટલે કે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ અચળ રહે છે.** આમ બાહ્યબળની ગેરહાજરીમાં તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સ્થિર હોય તો સ્થિર રહે છે અથવા ગતિમાં હોય તો અચળ વેગથી ગતિ ચાલુ રાખે છે.

હવે નીચેનું ઉદાહરણ જોઈએ :

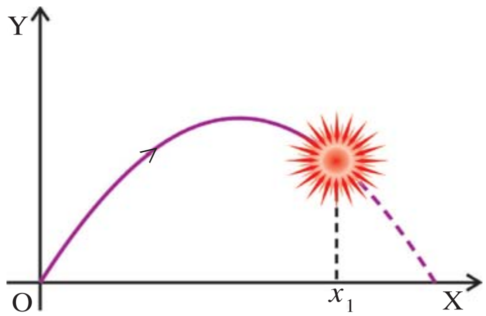
ધારો કે એક રાસાયણિક બૉમ્બ સ્થિર પડેલો છે. બૉમ્બના પ્રારંભિક વેગમાન અને ગતિઊર્જા શૂન્ય છે. બૉમ્બનો વિસ્ફોટ થતાં બૉમ્બના ટુકડાઓ હવામાં ફંગોળાય છે. આ ટુકડાઓ જુદા-જુદા વેગમાન સાથે જુદી-જુદી દિશાઓમાં ફંગોળાશે, પરંતુ તેમનાં વેગમાનોના સદિશો એવા જ હશે કે જેથી,

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_n = 0$$

અહીં $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ... વગેરે, ટુકડાઓનાં વેગમાન દર્શાવે છે

અહીં ટુકડાઓના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, મૂળ બૉમ્બનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર જે બિંદુ પર સ્થિર હતું તે જ બિંદુ પર રહેશે. પરંતુ ટુકડાઓની ગતિ ઊર્જાનો સરવાળો શૂન્ય નથી. વિસ્ફોટ અગાઉ બૉમ્બની ગતિ-ઊર્જા શૂન્ય હતી, પરંતુ વિસ્ફોટ બાદ તે શૂન્ય નથી. આમ, તંત્રની ગતિ-ઊર્જામાં ફેરફાર થયો. કાર્ય, ઊર્જા અને પાવરના પ્રકરણમાં તમે જાણ્યું હશે કે તંત્રની ગતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર, તેના પરના પરિણામી બાહ્ય બળ વડે થતા કાર્ય જેટલો હોય છે. અહીં, પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય છે. તો પછી તેની ગતિ ઊર્જામાં ફેરફાર કેવી રીતે થયો ? હકીકત એમ છે કે, રાસાયણિક બૉમ્બ પોતાના જટિલ અણુઓ વચ્ચે રાસાયણિક બંધોને લીધે (અને બીજાં કેટલાંક કારણોને લીધે) આંતરિક ઊર્જા ધરાવે છે. જ્યારે બૉમ્બનો વિસ્ફોટ થાય ત્યારે રાસાયણિક બંધો તૂટે છે અને તેમની સાથે સંકળાયેલી આંતરિક ઊર્જાના અમુક ભાગનું ઉષ્માઊર્જામાં રૂપાંતરણ થાય છે તથા બાકીની ઊર્જા ટુકડાઓને ગતિ-ઊર્જા સ્વરૂપે પ્રાપ્ત થાય છે. આમ, અહીં આંતરિક ઊર્જાના ભોગે યાંત્રિક કાર્ય થાય છે, **જે કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેયના વ્યાપક સ્વરૂપ તરફ દોરી જાય છે.**

અહીં તો બૉમ્બ પ્રારંભમાં સ્થિર હતો, પરંતુ, જો બૉમ્બ ગતિ કરતો હોત અને ગતિ દરમિયાન તે ફૂટ્યો હોત તો રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ ફૂટ્યા પછી તેના ટુકડાઓ એવી દિશામાં ગતિ કરતા હોત કે જેથી તેમનાં વેગમાનોનો સદિશ સરવાળો મૂળ બોમ્બના વેગમાન જેટલો હોય અને તેનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, તેનો મૂળ વેગ ($\vec{v}_{cm}$) અચળ જળવાઈ રહે તેવી દિશામાં ગતિ કરે (જુઓ આકૃતિ 1.7).



વિસ્ફોટ બાદ બોમ્બના ટુકડાઓના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ગતિ

આકૃતિ 1.7

ઉદાહરણ 5 : 50 kgનો એક બૉમ્બ 10 m/sના અચળ વેગથી ગતિ કરે છે. એકાએક તે 40 kg અને 10 kgના બે ટુકડાઓમાં વિભાજિત થાય છે. જો મોટા ટુકડાનો વેગ શૂન્ય હોય, તો નાના ટુકડાનો વેગ શોધો.

ઉકેલ : બૉમ્બ અચળ વેગથી ગતિ કરે છે. આથી તેના પરનું બાહ્ય બળ શૂન્ય છે. આથી રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

પ્રારંભિક રેખીય વેગમાન = અંતિમ રેખીય વેગમાન

$\therefore\ M\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

જ્યાં, M = બૉમ્બનું કુલ દળ = 50 kg

m_1 = મોટા ટુકડાનું દળ = 40 kg

m_2 = નાના ટુકડાનું દળ = 10 kg

$\vec{v}$ = બૉમ્બનો વેગ = 10 m/s

$\vec{v}_1$ = મોટા ટુકડાનો વેગ = 0

$\vec{v}_2$ = નાના ટુકડાનો વેગ = ?

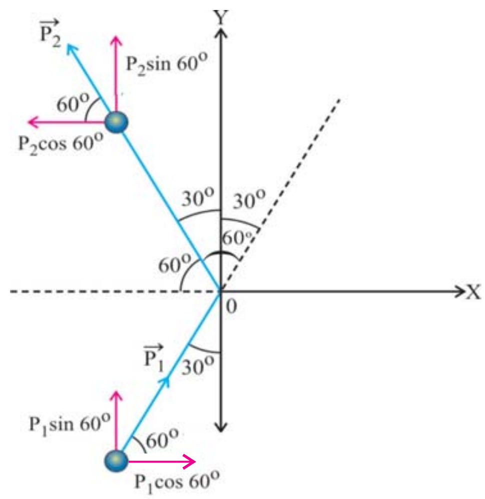
આથી,

$M\vec{v} = m_2\vec{v}_2$

$$\therefore\ \vec{v}_2 = \frac{M}{m_2}\vec{v} = \frac{50}{10} \times 10 = 50 \text{ m/s}$$

ઉદાહરણ 6 : 4 kg દળનો એક ગોળો દીવાલ સાથે 30° ખૂણે અથડાઈને પોતાની ગતિની મૂળ દિશા સાથે 60° કોણ બનાવતી દિશામાં પરાવર્તિત થાય છે. જો ગોળાનો દીવાલ સાથે સંપર્કસમય 0.1 s હોય, તો દીવાલ પર લાગતું બળ શોધો. ગોળાનો પ્રારંભિક અને અંતિમ વેગ 1 m s^{-1} છે.

ઉકેલ : ઉદાહરણમાં આપેલ પરિસ્થિતિ આકૃતિ 1.8માં દર્શાવી છે.



આકૃતિ 1.8

અહીંયા $\vec{P}_1$ = ગોળાનું પ્રારંભિક વેગમાન

$= mv \cos 60\hat{i} + mv \sin 60\hat{j}$

$\vec{P}_2$ = ગોળાનું અંતિમ વેગમાન

$= -mv \cos 60\hat{i} + mv \sin 60\hat{j}$

આથી, ગોળાના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$= -mv \cos 60\hat{i} + mv \sin 60\hat{j}$

$\quad -mv \cos 60\hat{i} - mv \sin 60\hat{j}$

$= -2mv \cos 60\hat{i}$

$$\therefore \Delta\vec{P} = -2 \times 4 \times 1 \times \frac{1}{2}\hat{i}$$

$= -4\hat{i}$ kg m s^{-1}

આથી દીવાલને મળતું વેગમાન

$= 4\hat{i}$ kg m s^{-1}

∴ દીવાલ પર લાગતું બળ

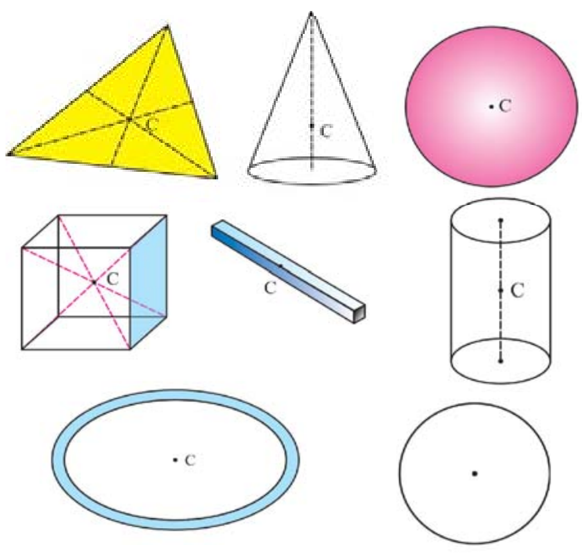
$$= \frac{\text{દીવાલને મળતું વેગમાન}}{\text{સંપર્કસમય}}$$

$$= \frac{4\hat{i}}{0.1} = 40\hat{i} \text{ N}$$

આમ, દીવાલ પર ધન X-દિશામાં 40 N બળ લાગે છે.

1.5 દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a Rigid Body)

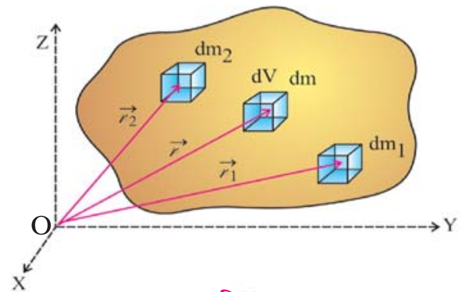
કણોના જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેના સાપેક્ષ સ્થાન (relative positions) અફર જળવાઈ રહેતાં હોય તેને દૃઢ પદાર્થ કહે છે. દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન તેના દ્રવ્યનું વિતરણ અને તેના આકાર પર આધાર રાખે છે. દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યની અંદર કે બહાર એમ ગમે ત્યાં હોઈ શકે છે. ઉદાહરણ તરીકે નિયમિત ઘનતાવાળી વર્તુળાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તકતીના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર, તકતીના દ્રવ્યની અંદર હોય છે, જ્યારે નિયમિત ઘનતાવાળી રિંગનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર રિંગના કેન્દ્ર પર પણ રિંગના દ્રવ્યની બહાર હોય છે. નિયમિત ઘનતા અને સમાન આડછેદવાળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર હોય છે. સંમિતિ ધરાવતા અને નિયમિત દળ-વિતરણવાળા દૃઢ પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનાં સ્થાન સહેલાઈથી સૈદ્ધાંતિક રીતે શોધી શકાય છે. કેટલાક સંમિત પદાર્થો માટેનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્રો 'C' આકૃતિ 1.9માં દર્શાવ્યા છે.



નિયમિત આકારના કેટલાક દૃઢ પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

આકૃતિ 1.9

1.5.1 ઘન પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર નક્કી કરવાની સૈદ્ધાંતિક રીત (Theoretical Method for Estimation of the Centre of Mass of a Solid Body) :



આકૃતિ 1.10

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે ઘન પદાર્થ સૂક્ષ્મ કણો (અણુઓ, પરમાણુઓ કે આયનો)નો બનેલો છે. આ કણો પદાર્થમાં સતત રીતે વિતરિત થયેલા હોય છે. આકૃતિ 1.10 માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે ઘન પદાર્થમાં dV જેટલું સૂક્ષ્મ કદ ધરાવતા કદ ખંડમાં સમાયેલ દળ dm છે. અહીં dm ને દળ-ખંડ કહે છે. જેનો સ્થાનસદિશ,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

આ રીતે સમગ્ર ઘન પદાર્થને આવા દળ-ખંડોનો બનેલો ગણી શકાય. ધારો કે ઘન પદાર્થ dm_1, dm_2 ..... dm_n દળ ખંડોમાં વહેંચાયેલો છે જેમના સ્થાન સદિશો અનુક્રમે $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, ..., $\vec{r_n}$ છે. આથી વ્યાખ્યા અનુસાર ઘન પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો સ્થાન સદિશ

$$\vec{r}_{cm} = \frac{dm_1\vec{r_1} + dm_2\vec{r_2} + \ldots\ldots + dm_n\vec{r_n}}{dm_1 + dm_2 + \ldots\ldots + dm_n} \quad (1.5.1)$$

અહીં દ્રવ્યમાન વિતરણ સતત હોવાથી સરવાળાને સંકલનના રૂપમાં દર્શાવી શકાય.

$$\therefore \vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

$$\therefore \vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M} \quad (1.5.2)$$

જ્યાં, $M = \int dm$

= ઘન પદાર્થનું કુલ દળ.

સમીકરણ (1.5.2) ને સદિશ ઘટકોના રૂપમાં દર્શાવતાં

$$(x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}) \quad (1.5.3)$$

$$= \frac{1}{M}\int (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})dm$$

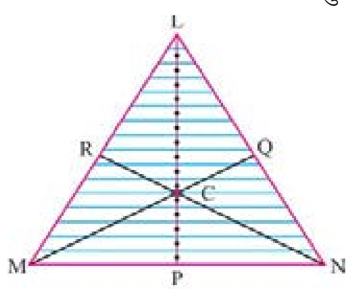
$$\therefore x_{cm} = \frac{1}{M}\int xdm$$
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int ydm \qquad (1.5.4)$$
$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int zdm$$

1.5.2 નિયમિત ઘનતાવાળા ચોક્કસ ભૌમિતિક આકારના ઘન પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર નક્કી કરવાની સૈદ્ધાંતિક રીત (Theoretical method for the estimation of centre of mass of a solid body of uniform density and specific geometrical shape) :

નિયમિત ઘનતાવાળા ચોક્કસ ભૌમિતિક આકારના પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધવા માટે પદાર્થના આકારની સંમિતિ (symmetry)નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. સંમિતિના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને આપણે સહેલાઈથી સાબિત કરી શકીએ કે આવા પદાર્થોનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર આવેલું હોય છે.

હવે આપેલું ઉદાહરણ જોઈએ :

આકૃતિમાં દર્શાવેલ ત્રિકોણાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધવું છે :

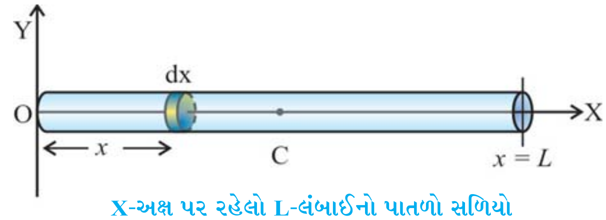


આકૃતિ 1.11

આકૃતિ 1.11 દર્શાવ્યા મુજબ ત્રિકોણાકાર તકતીને સાંકડી સમાંતર પટ્ટીઓમાં વિભાજિત થઈ ગયેલી ધારો. સંમિતિના નિયમ મુજબ દરેક પટ્ટીઓનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર આવેલું હશે. આ દરેક ભૌમિતિક કેન્દ્રને જોડતો રેખાખંડ LP દોરો. આમ, આ ત્રિકોણાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર મધ્યગા LP પર આવેલું હશે. તે જ રીતે ત્રિકોણાકાર તક્તીને ML અને LN બાજુઓને સમાંતર સાંકડી પટ્ટીઓમાં વિભાજિત થયેલી માનીને મધ્યગાઓ અનુક્રમે NR અને MQ દોરી શકીએ. આમ, ત્રિકોણાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ત્રણેય મધ્યગાઓના સામાન્ય બિંદુ ‘C’ પર આવેલું હશે.

1.6 નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a Thin Rod of Uniform Density)

આકૃતિ 1.12 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ‘M’ દળ તથા ‘L’ લંબાઈ ધરાવતો એક નિયમિત આડછેદવાળો અને નિયમિત રેખીય દળ ઘનતા ‘λ’ ધરાવતો પાતળો સળિયો ધ્યાનમાં લો. સળિયાનો એક છેડો ઉદ્‌ગમબિંદુ પર મૂકી સળિયાના ભૌમિતિક અક્ષ એ X-અક્ષ પર સંપાત થાય તે રીતે મૂકો.



X-અક્ષ પર રહેલો L-લંબાઈનો પાતળો સળિયો

આકૃતિ 1.12

હવે ઊગમબિંદુથી x અંતરે ‘dx’ લંબાઈ ધરાવતો સૂક્ષ્મ ખંડ સળિયા પર વિચારો.

સળિયાની એકમલંબાઈ દીઠ દળ, $\lambda = \frac{M}{L}$

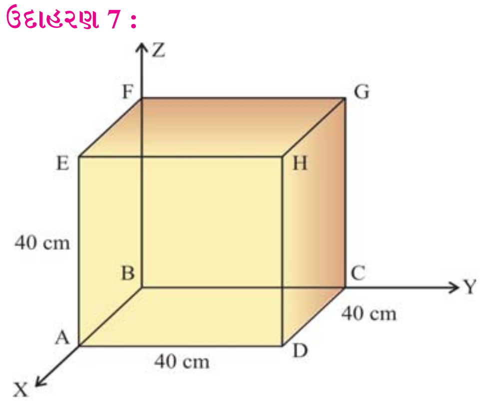
$\therefore$ dx લંબાઈના ખંડનું દળ $dm = \lambda dx = \frac{M}{L}dx$

વ્યાખ્યા મુજબ આપેલા સળિયાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન,

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int xdm$$
$$= \frac{1}{M}\int_0^L x \cdot \frac{M}{L}dx$$
$$= \frac{1}{L}\int_0^L xdx$$
$$= \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L$$
$$= \frac{1}{L}\left[\frac{L^2}{2} - 0\right]$$
$$\therefore x_{cm} = \frac{L}{2}$$

આમ, નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એ સળિયાની લંબાઈના મધ્યમાં એટલે કે તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર છે.

ઉદાહરણ 7 :



આકૃતિ 1.13

આકૃતિ 1.13 માં એક સમઘન ખોખું દર્શાવ્યું છે કે જે સમાન ઘનતા ધરાવતા તથા અવગણી શકાય તેવી જાડાઈના ધાતુના પતરાનું બનેલું છે. સમઘન ખોખાની દરેક ધારની લંબાઈ 40 cm હોય તો,

(*a*) ખોખાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) શોધો.

(*b*) જો ખોખું ઉપરથી ખુલ્લું હોય (EFGH પતરું ન હોય) તો ખોખાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ $(x'_{cm}, y'_{cm}, z'_{cm})$ શોધો.

ઉકેલ : બૉક્ષની દરેક પ્લેટ એકસરખી ઘનતા ધરાવે છે તથા ખૂબ જ પાતળી છે. આથી દરેક પ્લેટનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સંમિતિના નિયમ મુજબ તે પ્લેટના મધ્યબિંદુ પર હશે. આમ, દરેક પ્લેટનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધતાં :

પ્લેટનું નામ	દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ
ABCD	(20, 20, 0) cm
EFGH	(20, 20, 40) cm
ABFE	(20, 0, 20) cm
DCGH	(20, 40, 20) cm
BCGF	(0, 20, 20) cm
ADHE	(40, 20, 20) cm

(*a*) આ દરેક પ્લેટના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર પ્લેટનું દ્રવ્યમાન, ધારો કે M, કેન્દ્રિત થયેલું માનીએ, તો (દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ અને પૃષ્ઠ ઘનતા એકસરખી હોવાથી દરેક પ્લેટનું દ્રવ્યમાન પણ એક સરખું $M = \rho \times A$ હશે) બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

$$r_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c} M(20, 20, 0) + M(20, 20, 40) \\ + M(20, 0, 20) + M(20, 40, 20) \\ + M(0, 20, 20) + M(40, 20, 20) \end{array}\right\}}{6M}$$

$$= \frac{M(120, 120, 120)}{6M}$$

$$\therefore r_{cm} = (20, 20, 20) \text{ cm}$$

(*b*) જો ખોખું ઉપરથી ખુલ્લું હોય, તો EFGH પ્લેટ ન હોય, આથી બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

$$r'_{cm} = (x'_{cm}, y'_{cm}, z'_{cm})$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c} M(20, 20, 0) + M(20, 0, 20) \\ + M(20, 40, 20) + M(0, 20, 20) \\ + M(40, 20, 20) \end{array}\right\}}{5M}$$

$$= \frac{M(100, 100, 80)}{5M}$$

$$= (20, 20, 16) \text{ cm}$$

સારાંશ

1. **બે કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર :** m_1 અને m_2 દ્રવ્યમાન ધરાવતા બે કણો X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુથી અનુક્રમે x_1 અને x_2 અંતરે રહેલા હોય, તો તેમનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એવું બિંદુ છે કે ઊગમબિંદુથી તેનું અંતર $x_{cm} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ વડે અપાય છે.

2. ***n*–કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર :** જો કોઈ તંત્રમાં *n*–કણો આવેલા હોય, અને C તંત્રનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન દર્શાવતું હોય, તો 'C' એવું બિંદુ છે કે જ્યાં *n*-કણોના તંત્રનું કુલ દ્રવ્યમાન જાણે કે કેન્દ્રિત થયેલું છે તેમ ગણી શકાય. ત્રિ-પરિમાણમાં રહેલા *n*–કણોના તંત્રમાં રહેલા $m_1, m_2, ..., m_n$ દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_n}$ હોય, તો તેમના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + ... + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

3. n–કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ : $\vec{v}_{cm} = \dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \ldots + m_n \vec{v}_n}{M}$,

જ્યાં, $M = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n$.

4. કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો પ્રવેગ

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \ldots + m_n \vec{a}_n}{M}.$$

5. કણોના તંત્ર માટે ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm}.$$

6. **રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ :** જો તંત્ર પરનું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે. બાહ્ય બળની ગેરહાજરીમાં તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સ્થિર હોય તો સ્થિર રહે છે અને ગતિમાં હોય તો અચળ વેગથી ગતિ ચાલુ રાખે છે.

7. **દૃઢ વસ્તુ :** કણોના જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર જળવાઈ રહેતાં હોય તેને દૃઢ વસ્તુ કહે છે.

8. **દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર :** દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન તેમાં દ્રવ્યના વિતરણ અને તેના આકાર પર આધાર રાખે છે. સંમિત પદાર્થો માટે તેમનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર હોય છે.

9. વ્યાપક સ્વરૂપે દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ :

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm,\ y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm,\ z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. ધારો કે તમારું દ્રવ્યમાન 50 kg છે. તમારે કેટલી ઝડપથી દોડવું પડે કે જેથી તમારું રેખીય વેગમાન 20 km/h ની ઝડપથી સીધા રસ્તા પર ગતિ કરતા 100 kg સાઇકલ સવાર જેટલું થાય ?

(A) 40 m/s (B) 11.11 m/s (C) 20 km/h (D) 10 km/h

2. 2400 kgની એક બસ સીધા રસ્તા પર 60 km/h ની ઝડપથી જાય છે. બસની પાછળ 1600 kg ની એક કાર 80 km/h ની ઝડપથી આવી રહી છે. બન્ને વાહનોનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર કેટલી ઝડપથી ગતિ કરતું હશે ?

(A) 70 km/h (B) 75 km/h (C) 72 km/h (D) 68 km/h

3. જો 't' સમયે કોઈ પથ્થરનું વેગમાન $[(0.5\ \text{kg m/s}^3)t^2 + (3.0\ \text{kg m/s})]\hat{i} + [1.5\ \text{kg m/s}^2]t\hat{j}$ હોય, તો તેના પર લાગતું બળ કેટલું હોય ?

(A) $(t\hat{i} + 1.5\hat{j})$ N (B) $(0.5t\hat{i} + 1.5\hat{j})$ N

(C) $[(0.5t + 3)\hat{i} + 1.5\hat{j}]$ N (D) $(0.5\hat{i} + 1.5\hat{j})$ N

4. 2 kgનું એક પક્ષી $(2\hat{i} - 4\hat{j})$ m/sના અચળ વેગથી તથા 3 kgનું બીજું પક્ષી $(2\hat{i} + 6\hat{j})$ m/sથી ઊડતાં હોય, તો બન્ને પક્ષી વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ .... m/s હોય.

(A) $2\hat{i} + 5.2\hat{j}$ (B) $2\hat{i} + 2\hat{j}$ (C) $2\hat{i} - 2\hat{j}$ (D) $10\hat{i} + 10\hat{j}$

5. 0.100 g નું એક પીંછું $(-0.05\hat{j})$ m/s વેગથી નીચે પડે છે. નીચેથી તેના પર ફૂંક મારતાં તેનો વેગ $(0.20\hat{i} + 0.15\hat{j})$ m/s થાય છે, તો તેના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર .... kg m/s હશે.

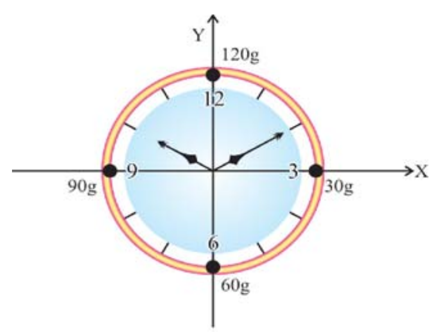
(A) $2 \times 10^{-2}\hat{i} + 2 \times 10^{-2}\hat{j}$ (B) $2 \times 10^{-5}\hat{i} + 2 \times 10^{-5}\hat{j}$

(C) $2 \times 10^{-2}\hat{i} + 1 \times 10^{-2}\hat{j}$ (D) $2 \times 10^{-2}\hat{i} - 2 \times 10^{-2}\hat{j}$

6. એક ઝાડની ડાળી પર બેઠેલ વાંદરો બરાબર તેની નીચે બેઠેલા મગર પર જાંબુનો 10 gનો ઠળિયો પડતો મૂકે છે. ઠળિયો 2 s સમયમાં મગરના મોઢામાં પડીને સ્થિર થઈ જતો હોય, તો મગરને (ઠળિયા ઉપરાંત) મળતું વેગમાન .... kg m/s હોય. ($g = 9.8$ m s^{-2})

(A) 0.196 (B) −0.196 (C) 19.6 (D) −19.6

7. આકૃતિ 1.14માં દર્શાવેલ નહીંવત્ વજન ધરાવતા ઘડિયાળના 10 cm ત્રિજ્યાના ડાયલ પર 3, 6, 9 અને 12 કલાકની નિશાનીઓ પર અનુક્રમે 30, 60, 90 અને 120 gના પથ્થર મૂકવામાં આવે, તો બનતા આ તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ શોધો.



આકૃતિ 1.14

(A) (2, −2) cm (B) (0, 0) cm (C) (−2, 2) cm (D) (−4, 4) cm

8. ક્રિકેટમૅચમાં બૉલર 0.5 kgના દડાને 20 m/sની ઝડપથી ફેંકે છે. બૅટ્સમેન બૅટ ઉગામે ત્યારે દડો બૅટની સપાટીને લંબરૂપે અથડાઈને વિરુદ્ધ દિશામાં 30 m/sની ઝડપથી પાછો ફરે છે. જો દડાનો બૅટ સાથેનો સંપર્ક સમય 0.1 s હોય, તો બૅટ પર લાગતું બળ .... N હોય.

(A) 250 (B) 25 (C) 50 (D) 125

9. 10 માળના મકાનની અગાશીમાં ઊભેલો એક છોકરો જુદા-જુદા વજનના ચાર પથ્થર જમીન તરફ પડતા મૂકે છે. જો કોઈ સમયે 500 gનો પથ્થર 8મા માળે, 400 gનો પથ્થર 6ઠા માળે, 1 kgનો પથ્થર 3જા માળે અને 600 gનો પથ્થર 1લા માળે પહોંચ્યા હોય, તો તે સમયે ચાર પથ્થરો વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર .... માળે હશે.

(A) 7મા (B) 5મા (C) 3જા (D) 4થા

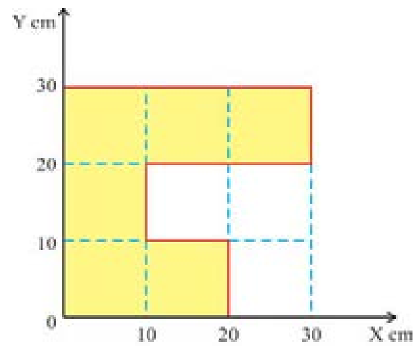
10. આકૃતિ 1.15માં દર્શાવેલ નિયમિત ઘનતા-વાળા પાતળા પતરાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર .... cm છે.

(A) (10.00, 14.28)

(B) (11.67, 16.67)

(C) (8.75, 12.50)

(D) (7.78, 11.11)



આકૃતિ 1.15

જવાબો

1. (B)	**2.** (D)	**3.** (A)	**4.** (B)	**5.** (B)	**6.** (A)
7. (C)	**8.** (A)	**9.** (D)	**10.** (B)		

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. ન્યૂટનના ગતિના નિયમોનું પરસ્પર અવલંબન એટલે શું ?
2. દૃઢ વસ્તુની વ્યાખ્યા આપો.
3. જે દૃઢ પદાર્થોના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યની બહાર હોય તેવાં બે ઉદાહરણો આપો.
4. નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ક્યાં આવેલું હોય છે ?
5. ઘન પદાર્થનો દળ-ખંડ dm એટલે શું ?
6. સ્થિર પડેલા રાસાયણિક બૉમ્બનો વિસ્ફોટ થાય ત્યારે તેના ટુકડાઓને ગતિ-ઊર્જા ક્યાંથી પ્રાપ્ત થાય છે ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ત્રિપરિમાણમાં n-કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સૂત્ર લખો અને તેના વેગનું સૂત્ર મેળવો.
2. રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ લખો અને સમજાવો.
3. રાસાયણિક બૉમ્બનું ઉદાહરણ કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેયના વ્યાપક સ્વરૂપ તરફ કેવી રીતે દોરી જાય છે, તે સમજાવો.
4. n-કણોના તંત્ર માટે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના વેગનું સૂત્ર લખો અને ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ મેળવો.
5. ઘન પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર નક્કી કરવાની સૈદ્ધાંતિક રીત ઉદાહરણ આપીને સમજાવો.
6. નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન તેના કોઈ એક છેડાની સાપેક્ષે મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. કાર્બન મોનૉક્સાઇડ (CO) વાયુના અણુ માટે જો કાર્બન પરમાણુ તથા ઑક્સિજન પરમાણુનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર 1.130×10^{-10} m હોય, તો કાર્બન પરમાણુની સાપેક્ષે CO અણુના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન શોધો.

(કાર્બનનો પરમાણુભાર = 12 g mol^{-1}, તથા ઑક્સિજનનો પરમાણુભાર = 16 g mol^{-1})

[જવાબ : 0.64 Å]

2. 1 kg, 2 kg અને 3 kg દળવાળા ત્રણ ''કણો''ના વેગ-સદિશો અનુક્રમે (1, 2, 3), (3, 4, 5) અને (6, 7, 8) છે. વેગ, સદિશના ઘટકો m s^{-1} માં છે. આ તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના વેગ-સદિશ શોધો. [**જવાબ :** $\frac{1}{6}(25, 31, 37)$ m s^{-1}]

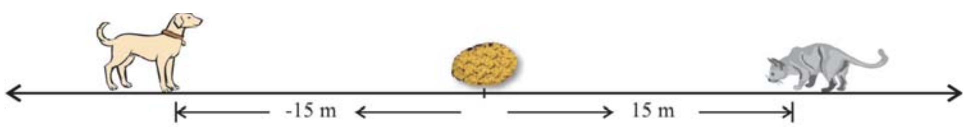
3. 1000 kgની એક કાર ટ્રાફિક સિગ્નલ પાસે ઊભી છે. લીલી લાઇટ થતાં કાર 4.0 m s^{-2}ના પ્રવેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. તે જ વખતે 2000 kgની એક ટ્રક, 8.0 m s^{-1}ની અચળ ઝડપથી કારને ઓવરટેઇક કરીને આગળ નીકળે છે.

(*a*) 3 sec પછી કાર-ટ્રક વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ટ્રાફિક સિગ્નલથી કેટલે દૂર હશે ?

(*b*) તે વખતે કાર-ટ્રક વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ઝડપ કેટલી હશે ?

[**જવાબ :** (*a*) 22.0 m, (*b*) 9.33 m s^{-1}]

4. 40 kg દળ ધરાવતો એક કૂતરો અને 20 kg દળવાળી એક બિલાડી, રોટલીની બન્ને બાજુ 15–15 m મીટરના અંતરે ઊભાં છે (જુઓ આકૃતિ 1.16). બન્ને રોટલી ખાવા માટે એક સાથે એવી રીતે દોડે છે કે જેથી કોઈ પણ સમયે કૂતરા અને બિલાડી વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સ્થિર જ રહે. કોષ્ટકમાં જુદા-જુદા સમયે રોટલી પરના ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે કૂતરાનું સ્થાન દર્શાવ્યું છે. દરેક સમયે બિલાડીનું સ્થાન તથા બંનેના વેગ, વેગમાન અને તેમના વેગમાનનો સરવાળો શોધો.
કોણ રોટલી પાસે પહેલું પહોંચશે ? કૂતરો કે બિલાડી ? આ કિસ્સામાં વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે ? કેમ ?



આકૃતિ 1.16

સમય t sec	રોટલીથી અંતર: કૂતરો $x_1(m)$	રોટલીથી અંતર: બિલાડી $x_2(m)$	કૂતરા અને બિલાડીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી અંતર $x_{cm}(m)$	વેગ ms^{-1}: કૂતરો v_1	વેગ ms^{-1}: બિલાડી v_2	વેગ માન $kgms^{-1}$: કૂતરો P_1	વેગ માન $kgms^{-1}$: બિલાડી P_2	કુલ વેગમાન $P = P_1+P_2$ kg ms^{-1}
0	−15.0	15	.....(અચળ)					
2	−12.5	.....	,,					
4	−10.0	.....	,,					
6	−7.5	.....	,,					

જવાબ :

t sec	કૂતરો $x_1(m)$	બિલાડી $x_2(m)$	દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર $x_{cm}(m)$	વેગ ms^{-1}: કૂતરો v_1 ms^{-1}	વેગ ms^{-1}: બિલાડી v_2 ms^{-1}	વેગમાન: કૂતરો P_1 kg ms^{-1}	વેગમાન: બિલાડી P_2 kg ms^{-1}	કુલ વેગમાન Total $P = P_1+P_2$ kg ms^{-1}
0	−15.0	15.0	−5.0 *m* (અચળ)	0	0	0	0	0
2	−12.5	10.0	−5.0 *m*	1.25	−2.5	50	−50	0
4	−10.0	5.0	−5.0 *m*	1.25	−2.5	50	−50	0
6	−7.5	0	−5.0 *m*	1.25	−2.5	50	−50	0

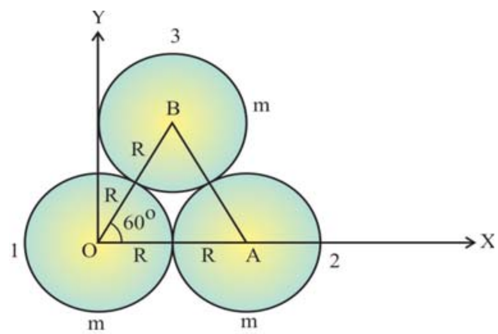
t = 6 sec સમયે, x_1 = -7.5 m, x_2 = 0 m અને રોટલી ઊગમબિંદુ x = 0 પર છે, આથી બિલાડી પહેલા પહોંચશે.
કુલ વેગમાન અચળ રહે છે, આથી વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. આનું કારણ એ છે કે દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર અહીં સ્થિર રહે છે.

5. m_1 અને m_2 દળ ધરાવતા બે કણો વચ્ચેનું અંતર r છે. જો આ કણોના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી અંતર અનુક્રમે r_1 અને r_2 હોય, તો દર્શાવો કે

$$r_1 = r\left[\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right] \text{ અને } r_2 = r\left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right].$$

6. આકૃતિ 1.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે R મીટર ત્રિજ્યાના 3 ગોળા પરસ્પર એકબીજાને અડકે તેમ સમક્ષિતિજ સપાટી પર ગોઠવ્યા છે. જો દરેક ગોળાનું દળ m હોય, તો ગોળા 1ના કેન્દ્રને ઊગમબિંદુ તરીકે લઈને દ્રવ્યમાન-કેન્દ્રનું સ્થાન નક્કી કરો. Z-અક્ષ પુસ્તકના પાનાને લંબરૂપે છે.

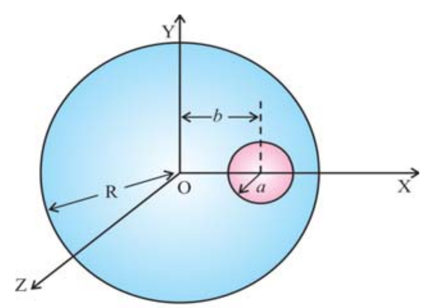
[**જવાબ :** $\left(R, \dfrac{R}{\sqrt{3}}, 0\right)$ m]



આકૃતિ 1.17

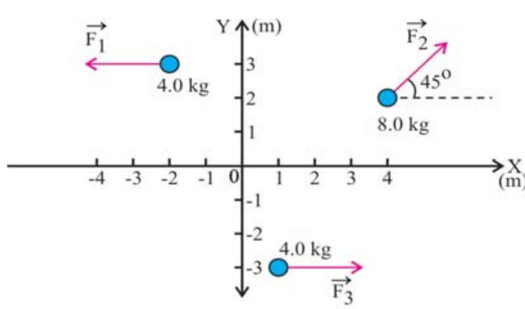
7. આકૃતિ 1.18માં દર્શાવેલ નિયમિત ઘનતા ρ ધરાવતા R ત્રિજ્યાના એક સમાંગ ગોળામાંથી a ત્રિજ્યાની ગોળી કાપી લેવામાં આવે છે, તો બાકીના ભાગનું, મૂળ ગોળાના કેન્દ્રની સાપેક્ષમાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધો.

[**જવાબ :** $\left(\dfrac{-a^3 b}{\left(R^3 - a^3\right)}, 0, 0\right)$]



આકૃતિ 1.18

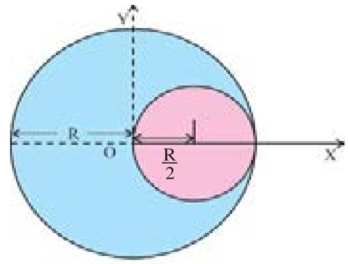
8. આકૃતિ 1.19માં ત્રણ સ્થિર 'કણો'નાં સ્થાન દર્શાવ્યાં છે. કણોના આ તંત્ર માટે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ શોધો. આ કણો પર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ બાહ્ય બળો F_1 = 6.0 N, F_2 = 12.0 N અને F_3 = 14.0 N લાગે છે, તો દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના પ્રવેગ તથા પ્રવેગની દિશા શોધો.



આકૃતિ 1.19

[**જવાબ :** $\vec{r}_{cm}$ = (1.75, 1.00) m, $\vec{a}_{cm}$ = (1.03, 0.53) m s^{-2}, $|\vec{a}| = a$ = 1.16 m s^{-2}
X–અક્ષ સાથે $\theta = 27^o$ ખૂણો બનાવતી દિશા]

9. આકૃતિ 1.20માં દર્શાવેલ ρ જેટલી સમાન પૃષ્ઠ ઘનતાવાળી અને R ત્રિજ્યાની અત્યંત પાતળી તકતીમાંથી $\frac{R}{2}$ ત્રિજ્યાવાળી તકતી જેટલો ભાગ કાપી લેવામાં આવે, તો મૂળ તકતીના કેન્દ્રને અનુલક્ષીને બાકી રહેલા ભાગનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધો.



આકૃતિ 1.20

[જવાબ : $(-\frac{R}{6}, 0)$]

•

પ્રો. સત્યેન્દ્રનાથ બોઝ (1894-1974)

સત્યેન્દ્રનાથ બોઝનો જન્મ 1 જાન્યુઆરી, 1894ના રોજ કોલકાતા ખાતે થયો હતો. તેમણે યુનિવર્સિટી ઑફ કોલકાતા ખાતે અભ્યાસ કર્યો હતો અને ત્યાર બાદ 1916 સુધી ભણાવ્યું હતું. યુનિવર્સિટી ઑફ ઢાકા ખાતે તેમણે 1921-45 સુધી ભણાવ્યું અને ત્યાર બાદ 1945-46માં કોલકાતા પાછા ફર્યા. તેમણે ક્વૉન્ટમ થિયરીમાં પ્લાન્કના બ્લૅક બોડી રેડિયેશનના નિયમ પર કાર્ય કર્યું. 1924માં તેમણે પ્લાન્કના સિદ્ધાંત અને પ્રકાશના કણવાદ પરનું તેમનું કાર્ય આઇન્સ્ટાઇનને મોકલ્યું. જેને આઇન્સ્ટાઇને ખૂબ વખાણ્યું. આઇન્સ્ટાઇને આ કાર્યનો જર્મન ભાષામાં અનુવાદ કર્યો. બોઝે, બોઝ-આઇન્સ્ટાઇન સ્ટેટીસ્ટિક્સ પર પણ કાર્ય કર્યું હતું. ડિરાકે આ સ્ટેટીસ્ટિક્સનું પાલન કરતાં કણોને બોઝોન નામ આપ્યું. સત્યેન્દ્રનાથ બોઝ અને આઇન્સ્ટાઇને ભેગા મળીને integer spins (bosons) પર ઘણાં પેપરો પબ્લિશ કર્યાં હતાં. 1974માં તેમનું અવસાન થયું.

પ્રકરણ 2

ચાકગતિ

2.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

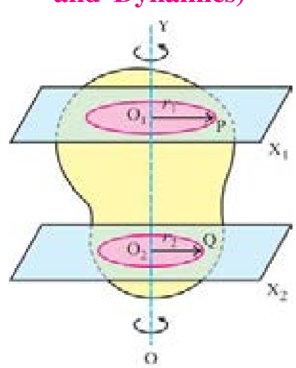
વિદ્યાર્થીમિત્રો, તમે પંખાની ગતિ, ભમરડાની ગતિ તેમજ ચકડોળની ગતિ જોઈ હશે. પૃથ્વી પોતાની અક્ષની આસપાસ ભ્રમણ કરે છે, જેનો તમને ખ્યાલ છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે આવા પ્રકારની ગતિનો અભ્યાસ કરીશું. આવી ગતિ ચાકગતિ છે.

પ્રથમ આપણે દૃઢ પદાર્થની સ્થિર ભ્રમણાને અનુલક્ષીને ચાકગતિની ચર્ચા કરીશું અને છેલ્લે સરક્યા વિના ગબડતા દૃઢ પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરીશું.

કણોના જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેના સાપેક્ષ અંતરો અફર જળવાઈ રહેતા હોય તેને દૃઢ પદાર્થ (Rigid body) કહે છે.

દૃઢ પદાર્થ એક આદર્શ વિભાવના છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનની દૃષ્ટિએ દૃઢ પદાર્થ અને ઘન પદાર્થ તદ્દન સમાન નથી. ઘન પદાર્થનું વિરૂપણ થઈ શકે છે, પરંતુ દૃઢ પદાર્થનું વિરૂપણ થઈ શકે નહિ. ઘણા વ્યાવહારિક હેતુઓ પૂરતું ઘન પદાર્થને દૃઢ પદાર્થ ગણી શકાય છે.

2.2 રોટેશનલ કાઇનેમેટિક્સ અને ડાઇનેમિક્સ (Ratational Kinematics and Dynamics)



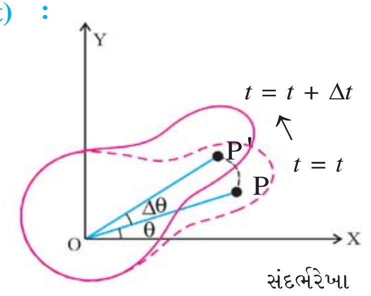
દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિ
આકૃતિ 2.1

જો દૃઢ પદાર્થના બધા જ કણો વર્તુળગતિ કરતાં હોય અને આ વર્તુળોના કેન્દ્રો કોઈ એક નિશ્ચિત સુરેખા પર સ્થિર હોય, તો દૃઢ પદાર્થની તેવી ગતિને ચાકગતિ કહે છે. આ નિશ્ચિત સુરેખા (જે ભૌમિતિક રેખા છે)ને ભ્રમણાક્ષ કહે છે. આકૃતિ 2.1માં કોઈ એક દૃઢ પદાર્થના બે કણો P અને Q ને દર્શાવ્યા છે. તથા દૃઢ પદાર્થ ભ્રમણાક્ષ OYને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. O_1 અને r_1 કણ P જે વર્તુળ પર ગતિ કરે છે, તેના અનુક્રમે કેન્દ્ર તથા ત્રિજ્યા છે. તેવી જ રીતે O_2 અને r_2 કણ Q જે વર્તુળ પર ગતિ કરે છે, તેના અનુક્રમે કેન્દ્ર તથા ત્રિજ્યા છે. કણ P અને Q જે વર્તુળમાર્ગો પર ગતિ કરે છે, તે ભ્રમણાક્ષ OYને લંબસમતલોમાં આવેલા હોય છે.

આપણે પ્રથમ ચાકગતિનાં કારણોનો ઉલ્લેખ કર્યા સિવાય માત્ર ચાકગતિનું વર્ણન કરીશું. ભૌતિકવિજ્ઞાનના આ વિષયાંગને રોટેશનલ કાઇનેમેટિક્સ કહે છે. પદાર્થની ચાકગતિ માટે જવાબદાર કારણો તથા વસ્તુના ગુણધર્મો સાથે ચાકગતિનું વર્ણન કરવામાં આવે, તો તે વિષયાંગને રોટેશનલ ડાઇનેમિક્સ કહે છે.

2.3 ચાકગતિની ચલરાશિઓ અને રેખીય ગતિની ચલ રાશિઓ વચ્ચેના સંબંધો (Relation Between Variables of Rotational Motion and the Variables of Linear Motion)

(*a*) કોણીય સ્થાનાંતર (Angular Displacement) :



કોણીય સ્થાનાંતર
આકૃતિ 2.2

ધારો કે કોઈ દૃઢ પદાર્થ આકૃતિ 2.2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પુસ્તકના પાનને લંબ રૂપે આવેલ સ્થિર ભ્રમણાક્ષ OZને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. અત્રે સ્પષ્ટ છે કે આ ભ્રમણાક્ષને લંબસમતલ (X–Y) પુસ્તકના પાનમાં આવેલ છે.

દૃઢ પદાર્થના પુસ્તકના પાન સાથેના આડછેદના t અને $t + \Delta t$ સમયે સ્થાન અનુક્રમે ત્રુટક રેખા અને સળંગ રેખા વડે દર્શાવાય છે.

દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક કણ P ને ધ્યાનમાં લો. કોઈ એક સમયે (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) આ કણને તેના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્ર (O) સાથે જોડતી રેખાએ (જે તેના વર્તુળમાર્ગની ત્રિજ્યા છે.) આપેલી નિશ્ચિત સંદર્ભરેખા સાથે બનાવેલા કોણને તે સમયે તે કણનું કોણીય સ્થાન કહે છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કણ P, t સમયે સંદર્ભરેખા OX સાથે θ કોણ રચે છે, જે કણ Pનું t સમયે કોણીય સ્થાન છે. $t + \Delta t$ સમયે કણ XY સમતલમાં વર્તુળગતિ કરી P થી P' બિંદુએ પહોંચે છે. આ સમયે કણનું કોણીય સ્થાન $\theta + \Delta\theta$ છે.

કણના કોણીય સ્થાનમાં થતા ફેરફારને કોણીય સ્થાનાંતર કહે છે. આમ કણ Pનું Δt જેટલા સમયગાળામાં કોણીય સ્થાનાંતર $\Delta\theta$ છે. (સંદર્ભરેખા તરીકે કોઈ પણ રેખા લઈ શકાય છે. સામાન્ય રીતે ધન X-અક્ષને સંદર્ભરેખા તરીકે લેવાય છે.)

દૃઢ પદાર્થમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર રહેતાં હોવાથી ચાકગતિ દરમિયાન બધા જ કણો સરખા સમયમાં સરખું કોણીય સ્થાનાંતર અનુભવે છે. માટે દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિનું વર્ણન અસંખ્ય કણોમાંના કોઈ એક પ્રતિનિધિ કણની ગતિ પરથી કરી શકાય છે. આમ, ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં કોણીય સ્થાનાંતર $\Delta\theta$ એ દૃઢ વસ્તુનું કોણીય સ્થાનાંતર છે. તેનો SI એકમ radian છે.

(*b*) કોણીય ઝડપ અને કોણીય વેગ (Angular speed and angular velocity) :

Δt સમયગાળામાં કણનું $\Delta\theta$ જેટલું કોણીય સ્થાનાંતર થતું હોવાથી સરેરાશ કોણીય ઝડપની વ્યાખ્યા અનુસાર

$$<\omega> = \frac{\text{કોણીય સ્થાનાંતર}}{\text{સમયગાળો}}$$

$$<\omega> = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (2.3.1)$$

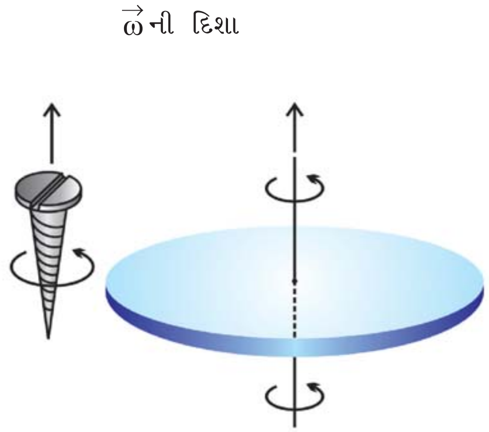
હવે $\Delta t \to 0$ લક્ષમાં આ ગુણોત્તરનું મૂલ્ય કણ Pની, t સમયે તત્કાલીન કોણીય ઝડપ થશે.

$$\therefore \ \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\therefore \ \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (2.3.2)$$

જે સમગ્ર દૃઢ પદાર્થની પણ t સમયે કોણીય ઝડપ છે. હવે પછી કોણીય ઝડપ, એટલે તત્કાલીન કોણીય ઝડપ સમજીશું, સિવાય કે વિશેષ ઉલ્લેખ કરેલો હોય. ωનો એકમ rad s^{-1} અથવા rotation s^{-1} કોણીય ઝડપ સાથે જ્યારે યોગ્ય દિશા સાંકળવામાં આવે છે, ત્યારે તેને કોણીય વેગ કહે છે. રૈવાજિક રીતે કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમથી નક્કી કરવામાં આવે છે.

જમણા હાથના સ્ક્રૂને આકૃતિ 2.3માં દર્શાવ્યા અનુસાર ભ્રમણાક્ષને સમાંતર ગોઠવી વસ્તુ જે રીતે ભ્રમણ કરતી હોય તે જ રીતે ભ્રમણ આપતાં સ્ક્રૂ જે દિશામાં ખસે તેને કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ની દિશા ગણવામાં આવે છે.



જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ

આકૃતિ 2.3

(c) કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો અદિશ સંબંધ (Scalar Relation between Angular Velocity and Linear Velocity) :

આકૃતિ 2.2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કણ P, Δt સમયગાળામાં ચાપ PP'જેટલું રેખીય અંતર કાપે છે. આથી,

$$\text{સરેરાશ રેખીય ઝડપ } <v> = \frac{\text{ચાપ PP}'}{\text{સમયગાળો } \Delta t}$$

જો કણ Pના વર્તુળપથની ત્રિજ્યા (ભ્રમણાક્ષથી કણ Pનું લંબઅંતર) r હોય તો, ચાપ PP' $= r\ \Delta\theta$

$$\therefore <v> = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= r<\omega> \qquad (2.3.3)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ લક્ષમાં ઉપર્યુક્ત ગુણોત્તરનું મૂલ્ય t સમયે કણ Pના તત્કાલીન રેખીય વેગનું મૂલ્ય આપે છે.

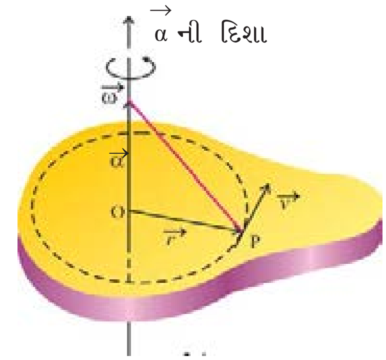
$$\therefore v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore v = r\omega \qquad (2.3.4)$$

જે પદાર્થના રેખીય વેગ અને કોણીય વેગ વચ્ચેનો અદિશ સંબંધ છે.

(d) કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ (Vector Releation between Angular Velocity and Linear Velocity) :



કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ

આકૃતિ 2.4

ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થના કોઈ કણ Pના ભ્રમણાક્ષને લંબ આવેલ સમતલમાંના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તેના સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ તથા રેખીય વેગ $\vec{v}$ ની સ્થિતિ આકૃતિ 2.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હોય છે તથા કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ જમણા હાથના નિયમ અનુસાર (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર) ભ્રમણાક્ષને સમાંતર છે.

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ પરથી શોધતાં તે $\vec{v}$ ની દિશામાં મળે છે. તેમજ $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ હોવાથી $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r\sin 90 = \omega r = \vec{v}$ નું મૂલ્ય.

રેખીય વેગ સદિશ છે. વર્તુળગતિમાં કોઈ પણ બિંદુએ રેખીય વેગની દિશા તે બિંદુએ વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.

સમીકરણ $v = r\omega$માં ડાબી બાજુ રેખીય વેગનું મૂલ્ય જ્યારે જમણી બાજુએ આવતા r અને ω એ સદિશ રાશિઓ $\vec{r}$ અને $\vec{\omega}$નાં મૂલ્યો છે. આ હકીકત સૂચવે છે કે સદિશ રાશિઓ $\vec{r}$ અને $\vec{\omega}$નો એવો ગુણાકાર લેવામાં આવે કે જેનું ગણનફળ પણ સદિશ જ હોય. જેને આપણે બે સદિશોના સદિશ ગુણાકાર (ક્રોસ ગુણાકાર) તરીકે ઓળખીએ છીએ. અત્રે $\vec{\omega} \times \vec{r}$ ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ પરથી શોધતાં તે $\vec{v}$ ની દિશામાં મળે છે. તેમજ $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ હોવાથી $|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin 90 = \omega r = \vec{v}$ નું મૂલ્ય. તેથી રેખીય વેગ $\vec{v}$ અને કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ સદિશ સંબંધના સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય. (તમે $\vec{r} \times \vec{\omega}$ની દિશા કઈ હશે તે વિચારો.)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2.3.5)$$

(e) કોણીય પ્રવેગ (Angular Acceleration) :

ધારો કે t અને $t + \Delta t$ સમયે કણ Pના તત્કાલીન કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ અને $\vec{\omega} + \Delta\vec{\omega}$ છે.

તેથી વ્યાખ્યા અનુસાર,

સરેરાશ કોણીય પ્રવેગ $<\vec{\alpha}> = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ (2.3.6)

$\Delta t \to 0$, લક્ષમાં ઉપર્યુક્ત ગુણોત્તરનું મૂલ્ય એ t સમયે કણ Pનો તત્કાલીન કોણીય પ્રવેગ આપે $\vec{\alpha}$ છે.

$$\therefore \ \vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

$$\therefore \ \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2.3.7)$$

$<\vec{\alpha}>$ની દિશા એ $\Delta\vec{\omega}$ (કોણીય વેગનો ફેરફાર) ની દિશામાં હોય છે. સ્થિર ભ્રમણાક્ષના કિસ્સામાં $\Delta\vec{\omega}$ની દિશા ભ્રમણાક્ષને સમાંતર હોય છે, તેથી $<\vec{\alpha}>$ની દિશા પણ ભ્રમણાક્ષને સમાંતર હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 2.4) $\vec{\alpha}$ નો એકમ rad s^{-2} અથવા rotation s^{-2} છે.

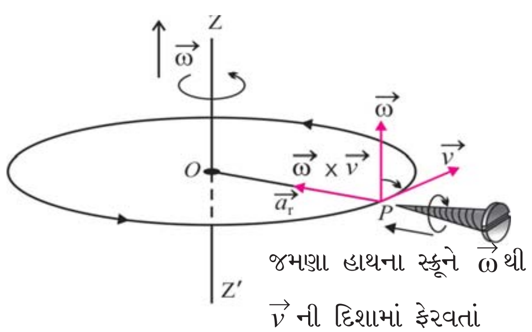
(*f*) રેખીય પ્રવેગ અને કોણીય પ્રવેગ વચ્ચેનો સંબંધ (Relation between Linear Acceleration and Angular Acceleration) :

રેખીય વેગનું સમય સાપેક્ષે વિકલન રેખીય પ્રવેગ ($\vec{a}$) આપે છે. સમીકરણ (2.3.5)નું સમય સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

અત્રે $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ અને $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$ હોવાથી

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad (2.3.8)$$



રેખીય પ્રવેગનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક

આકૃતિ 2.4 (*a*)

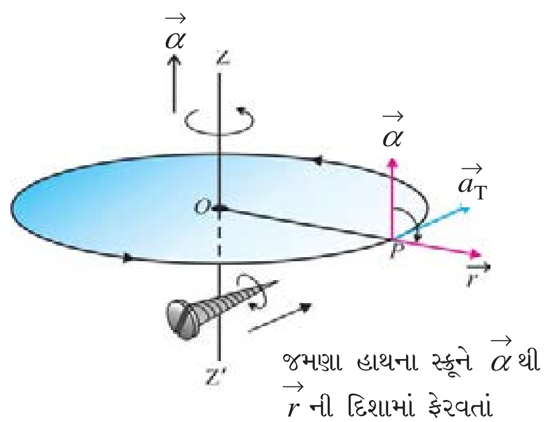
આમ રેખીય પ્રવેગ $\vec{a}$ ના બે સદિશ ઘટકો $\vec{\omega} \times \vec{v}$ અને $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ છે.

આકૃતિ 2.4(*a*) અનુસાર જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\vec{\omega} \times \vec{v}$ની દિશા શોધતાં તે કેન્દ્ર તરફ ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં મળે છે. તેથી $\vec{\omega} \times \vec{v}$ને રેખીય પ્રવેગ $\vec{a}$ નો **ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક** કહે છે. તેને $\vec{a}_r$ વડે દર્શાવાય છે. તેનું મૂલ્ય $\omega v \sin\frac{\pi}{2} = \omega v = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

($\because v = r\omega$)

આ જ પ્રમાણે $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ની દિશા વર્તુળમાર્ગના સ્પર્શકની દિશામાં મળતી હોઈ તેને રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક કહે છે (જુઓ આકૃતિ 2.4 (*b*)). તેને $\vec{a}_T$ વડે દર્શાવાય છે. તેનું મૂલ્ય $\alpha r \sin\frac{\pi}{2} = \alpha r$ છે.

$$\therefore \ \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_T$$



રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક

આકૃતિ 2.4(*b*)

ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક $\vec{a}_r$ અને સ્પર્શીય ઘટક $\vec{a}_T$ પરસ્પર લંબ હોવાથી $\vec{a}$ નું મૂલ્ય

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2} = \sqrt{\omega^2 v^2 + \alpha^2 r^2} \qquad (2.3.9)$$

જો દૃઢ પદાર્થ અચળ કોણીય વેગથી ચાકગતિ કરતો હોય એટલે કે કોણીય પ્રવેગ $\alpha = 0$ હોય, તો તેનો રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક શૂન્ય બને, પરંતુ તેનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટકનો અશૂન્ય જ હોય છે.

આ સ્થિતિ નિયમિત વર્તુળગતિમાં જોવા મળે છે. નિયમિત વર્તુળગતિમાં કેન્દ્રગામી પ્રવેગ $\frac{v^2}{r}$ હોય છે, તે તમે જાણો જ છો.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં આપણે જોયું કે કોણીય સ્થાનાંતર (θ), કોણીય વેગ ($\vec{\omega}$), કોણીય પ્રવેગ $\vec{\alpha}$ દૃઢ વસ્તુના દરેક કણ માટે સમાન છે. આમ, θ, $\vec{\omega}$ અને $\vec{\alpha}$ દૃઢ વસ્તુની લાક્ષણિકતાઓ છે અને તેમને રોટેશનલ કાઇનેમેટિક્સની ચલ રાશિઓ કહે છે.

અત્રે નોંધો કે સ્થિર ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતી દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક કણની ગતિનું વર્ણન રેખીય ચલો ($\vec{r}$, $\vec{v}$ અને $\vec{a}$) અને કોણીય ચલો (θ, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$)ના સંદર્ભમાં કરી શકાય છે, પરંતુ જ્યારે દૃઢ પદાર્થના બધા કણોનો એક સાથે વિચાર કરવાનો હોય ત્યારે કોણીય ચલો (જે બધા જ કણો માટે સમાન છે.) વાપરવાથી સમગ્ર પદાર્થની ગતિનું વર્ણન સરળતાથી થઈ શકે છે.

ઉદાહરણ 1 : એક ઘડિયાળના સેકન્ડ-કાંટાની લંબાઈ 20 cm છે, તો તેની ટોચ પરના કણનાં (1) કોણીય વેગ (2) રેખીય વેગ (3) કોણીય પ્રવેગ (4) ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ (5) સ્પર્શીય પ્રવેગ (6) રેખીય પ્રવેગનાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ :

$r = 20$ cm

(1) સેકન્ડ-કાંટો એક મીનીટ (60 seconds)માં 2π rad કોણીય સ્થાનાંતર કરે છે. આથી કોણીય વેગ

$$\therefore \ \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \text{ rad s}^{-1}$$

(2) રેખીય વેગ $v = \omega r = \frac{\pi}{30} \times 20$

$= \frac{2}{3}\pi$ cm s^{-1}

(3) ઘડિયાળનો સેકન્ડ-કાંટો અચળ કોણીય ઝડપથી ગતિ કરતો હોઈ $\therefore \ \alpha = 0$ rad s^{-1}

(4) ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ $= a_r = \frac{v^2}{r}$

$$= \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{20}\right) = \frac{\pi^2}{45} \text{ cm s}^{-2}$$

(5) સ્પર્શીય પ્રવેગ $= a_T = \alpha r = 0$

(6) રેખીય પ્રવેગ $a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2} = a_r = \frac{\pi^2}{45}$ cms^{-2}

(15 cm લંબાઈના મિનિટ તથા 10 cm લંબાઈના કલાકકાંટા માટે આવી જ ગણતરી જાતે કરી જુઓ.)

2.4 નિયમિત (અચળ) કોણીય પ્રવેગ સાથેની ચાકગતિનાં સમીકરણો (Equations of Rotational Motion with Constant Angular Acceleration)

ધારો કે $t = 0$ સમયે દૃઢ પદાર્થના કોઈ કણનું કોણીય સ્થાન $\theta = 0$ અને કોણીય વેગ એ ω_0 છે.

$t = t$ સમયે તેનું કોણીય સ્થાન એ $\theta = \theta$ અને કોણીય વેગ એ ω છે.

જો દૃઢ પદાર્થ સ્થિર ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતો હોય, તો $\vec{\omega}_0$, $\vec{\omega}$ અને તેનો અચળ કોણીય પ્રવેગ $\vec{\alpha}$ની દિશા સ્થિર ભ્રમણાક્ષની દિશા પર હોય છે. આથી θ, $\vec{\omega}$ અને $\vec{\alpha}$ના સંબંધોને અદિશ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. α અચળ હોવાથી

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} \qquad (2.4.1)$$

અથવા $\qquad \omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (2.4.2)$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ $v = v_0 + at$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

અત્રે કોણીય પ્રવેગ અચળ હોવાથી, સરેરાશ કોણીય વેગનો ઉપયોગ કરી કોણીય સ્થળાંતર શોધી શકાય.

$\therefore$ કોણીય સ્થાનાંતર

θ = (સરેરાશ કોણીય વેગ) (t)

$$\therefore \ \theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)t \qquad (2.4.3)$$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ

$x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

સમીકરણ (2.4.2)માંથી ωનું મૂલ્ય સમીકરણ (2.4.3)માં મૂકતાં

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \alpha t + \omega_0}{2}\right)t$$

$$\therefore \ \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (2.4.5)$$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

સમીકરણ (2.4.1)માંથી tનું મૂલ્ય સમીકરણ (2.4.3)માં મૂકતાં

$$\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)$$

$$\therefore\ 2\alpha\theta = \omega^2 - {\omega_0}^2 \qquad (2.4.6)$$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ $2ax = v^2 - {v_0}^2$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 2 : ચિલ્ડ્રનપાર્કમાં 18 km/hના રેખીય વેગથી દોડતી એક મીનીટ્રેનને બ્રેક લગાડતાં તેમાં અચળ કોણીય પ્રતિપ્રવેગ ઉત્પન્ન થઈ તે 10 sમાં સ્થિર થઈ જાય છે. જો મીની ટ્રેનના પૈડાની ત્રિજ્યા 30 cm, હોય, તો પૈડાનો કોણીય પ્રવેગ શોધો.

ઉકેલ :

$v_0 = 18$ km/h $= 5$ m/s; $r = 30$ cm $= 0.3$ m

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{5}{0.3} = \frac{50}{3} \text{ rad s}^{-1}$$

$\omega_2 = 0, \quad t = 10$ s

$$\therefore\ \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{0 - \frac{50}{3}}{10}$$

$$= \frac{-5}{3} = -1.666 \text{ rad s}^{-2}$$

ઉદાહરણ 3 : એક ટ્રક 54 km/hની ઝડપથી દોડે છે. તેના પૈડાની ત્રિજ્યા 50 cm છે. બ્રેક લગાડતાં પૈડાં 20 ભ્રમણ કરીને સ્થિર થાય છે, તો તે દરમિયાન ટ્રક કેટલું રેખીય અંતર કાપશે ? પૈડાનો કોણીય પ્રવેગ પણ શોધો.

ઉકેલ : અત્રે $v_1 = 54$ km/h $= 15$ m/s; $r = 50$ cm $= 0.5$ m, $\theta = 20$ ભ્રમણ $= 20 \times 2\pi$ rad $= 40\pi$ rad; $d = ?$, $\alpha = ?$

$$v_1 = r\omega_1\ \therefore\ \omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{15}{0.5} = 30 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 0;\ \alpha = \frac{{\omega_2}^2 - {\omega_1}^2}{2\theta} = \frac{0 - 900}{2 \times 40\pi}$$

$$= -3.58 \text{ rad/s}^2$$

હવે 1 પરિભ્રમણ $= 2\pi r$ રેખીય અંતર

$\therefore$ 20 પરિભ્રમણ $= 20 \times 2\pi r$ અંતર

$\therefore$ ટ્રકે કાપેલું રેખીય અંતર

$d = 20 \times 2 \times 3.14 \times 0.5$

$= 62.8$ m

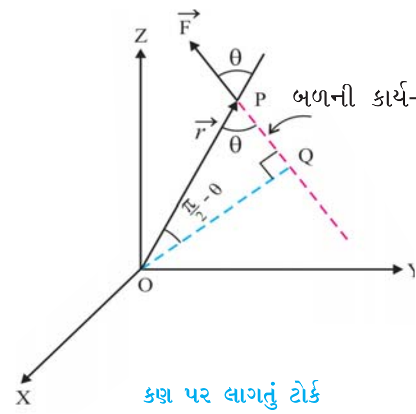
2.5 ટૉર્ક (Torque)

અત્યાર સુધી આપણે દઢ પદાર્થની ચાકગતિની ચાકગતિનાં કારણોની ચિંતા કર્યા સિવાય કરી. હવે આપણે તેના કારણ વિષે પણ વિચારીએ.

ટૉર્ક એ રોટેશનલ ડાઇનેમિક્સની અગત્યની ભૌતિક રાશિ છે. રેખીય ગતિમાં બળ જે ભાગ ભજવે છે, તેવો જ ભાગ ચાક ગતિમાં ટૉર્ક ભજવે છે.

પ્રથમ આપણે એક કણ પર લાગતા ટૉર્કની ચર્ચા કરીશું. ત્યાર બાદ કણોના તંત્ર પર લાગતા ટૉર્ક વિષે ચર્ચા કરીશું.

(a) કણ પર લાગતું ટૉર્ક (Torque Acting on a Particle) :



કણ પર લાગતું ટૉર્ક

આકૃતિ 2.5

આકૃતિ 2.5માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે, કોઈ કણ P પર બળ $\vec{F}$ લાગે છે. આ બળની કાર્યરેખા QP છે. ઊગમબિંદુ Oના સાપેક્ષે Pનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે. $\vec{r}$ અને $\vec{F}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. અત્રે કણ P કોઈ દઢ પદાર્થનો કણ હોવો જરૂરી નથી.

$\vec{r}$ અને $\vec{F}$ના સદિશ ગુણાકારને O બિંદુની સાપેક્ષે કણ P પર લાગતું ટૉર્ક $(\vec{\tau})$ કહે છે.

$$\therefore\ \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (2.5.1)$$

$$\therefore\ \tau = rF\sin\theta$$

આકૃતિ 2.5 પરથી, $r\sin\theta$ = OQ = બળની કાર્યરેખાનું O થી લંબઅંતર

$\therefore\ \tau$ = (F) (બળની કાર્યરેખાનું Oથી લંબઅંતર)

= બિંદુ O ને અનુલક્ષીને બળની ચાકમાત્રા (moment of force) (વ્યાખ્યા અનુસાર)

આમ, **ટૉર્ક એ આપેલ સંદર્ભબિંદુને અનુલક્ષીને બળની ચાકમાત્રા છે.** તેનું પરિમાણિક સૂત્ર $M^1 L^2 T^{-2}$ છે અને તેનો SI એકમ N m છે.

યાદ રાખો કે,

(*i*) $\vec{\tau}$ ની દિશા સદિશ ગુણાકાર માટેના જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ અનુસાર $\vec{r}$ અને $\vec{F}$ વડે રચાતા સમતલને લંબ હોય છે.

(*ii*) $\vec{\tau}$ નું મૂલ્ય સંદર્ભબિંદુ પર આધાર રાખતું હોવાથી તેની વ્યાખ્યામાં સંદર્ભબિંદુનો ઉલ્લેખ અનિવાર્ય છે.

(*b*) કણોના તંત્ર પર લાગતું ટૉર્ક (Torque Acting on the System of Particles) :

તંત્રના કણો વચ્ચે લાગતાં પરસ્પર આંતરિક બળો સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી તેમના વડે ઉદ્‌ભવતું પરિણામી બળ અને તેથી ટૉર્ક શૂન્ય બને છે.

તેથી ચર્ચામાં આપણે આંતરિક બળોને ધ્યાનમાં લઈશું નહિ. ધારો કે $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_n}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા કણોના તંત્ર માટે કણો પર લાગતાં બાહ્ય બળો અનુક્રમે $\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}$. તંત્ર પરનું પરિણામી ટૉર્ક એટલે તંત્રના દરેક કણ પર લાગતા ટૉર્કનો સદિશ સરવાળો.

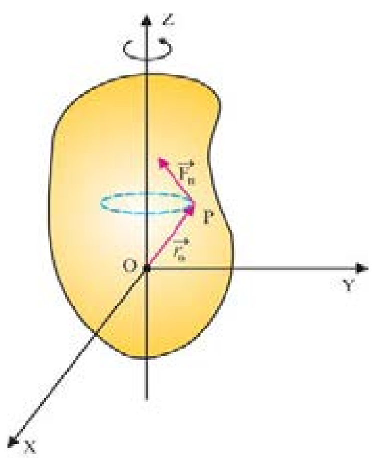
$$\vec{\tau} = \vec{\tau_1} + \vec{\tau_2} + ... \vec{\tau_n} \qquad (2.5.2)$$

∴ પરિણામી ટૉર્ક

$$\vec{\tau} = (\vec{r_1} \times \vec{F_1}) + (\vec{r_2} \times \vec{F_2}) + ... + (\vec{r_n} \times \vec{F_n})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \times \vec{F_i}) \qquad (2.5.3)$$

(*c*) દઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક (Torque Acting on the Rigid Body) :



દઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક

આકૃતિ 2.6

આકૃતિ 2.6માં દર્શાવ્યા અનુસાર ધારો કે કોઈ એક દઢ પદાર્થ સ્થિર ભ્રમણાક્ષ OZને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_n}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા કણો પર લાગતાં બળો અનુક્રમે $\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}$ છે. હવે $\vec{r_n}$ સદિશ ધરાવતા કણ પર લાગતા બળ $\vec{F_n}$ ને ધ્યાનમાં લઈએ તો વ્યાખ્યા અનુસાર તેના પર લાગતું ટૉર્ક $\vec{\tau_n}$

$$\vec{\tau_n} = \vec{r_n} \times \vec{F_n}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_n & y_n & z_n \\ F_{nx} & F_{ny} & F_{nz} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{\tau_n} = (y_n F_{nz} - z_n F_{ny})\hat{i} + (z_n F_{nx} - x_n F_{nz})\hat{j} + (x_n F_{ny} - y_n F_{nx})\hat{k} \qquad (2.5.4)$$

સમીકરણ (2.5.4) પરથી સમગ્ર પદાર્થ પરનું ટૉર્ક બધા કણો પર લાગતા ટૉર્કના સદિશ સરવાળા સ્વરૂપે નીચે મુજબ થાય :

$$\vec{\tau} = \sum_n (y_n F_{nz} - z_n F_{ny})\hat{i} + (z_n F_{nx} - x_n F_{nz})\hat{j} + (x_n F_{ny} - y_n F_{nx})\hat{k} \qquad (2.5.5)$$

દઢ પદાર્થની Z-અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે ઉપર્યુક્ત ટૉર્કનો Z ઘટક જ જવાબદાર છે. X-અક્ષ અથવા Y-અક્ષને અનુલક્ષીને થતી ચાકગતિ માટે અનુક્રમે ટૉર્કના X અને Y ઘટક જવાબદાર હોય. વ્યાપક રીતે **પરિભ્રમણ અક્ષ પરનો એકમસદિશ $\hat{n}$** હોય, તો $\vec{\tau} \cdot \hat{n}$ ઘટક ચાક ગતિ માટે જવાબદાર હોય છે.

દઢ પદાર્થની ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા તેના બધા જ કણો પર બાહ્ય બળ લગાડવાં જરૂરી નથી. જેમકે બારણું ખોલવા કે બંધ કરવા માટે આપણે તેના બધા જ કણો પર બળ લગાડતાં નથી.

દઢ પદાર્થના બધા જ કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર રહેતા હોવાથી **કોઈ એક જ કણ** પર બળ લગાડતાં

ઉદ્‌ભવતું ટૉર્ક સમગ્ર દઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક જ કહેવાય. કોઈ સંદર્ભબિંદુને અનુલક્ષીને $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા કોઈ એક જ કણ પર લાગતું બળ $\vec{F}$ હોય, તો દઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

ઉદાહરણ 4 : એક દઢ પદાર્થના $\vec{r} = (4, 6, 12)$ m સ્થાનસદિશ ધરાવતા કણ પર લાગતું બળ $\vec{F} = (6, 8, 10)$ N છે, તો દઢ પદાર્થ કે જેના પરનો એકમસદિશ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (1, 1, 1) તેવી ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. આ ચાકગતિ કરાવનાર ટૉર્કનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$

જેના પર એકમસદિશ $\hat{n}$ હોય તેવા અક્ષને અનુલક્ષીને ટૉર્કનું મૂલ્ય

$$\tau_n = (\vec{r} \times \vec{F})\cdot\hat{n}$$

$$\text{હવે } \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 6 & 12 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= (-36)\hat{i} - (-32)\hat{j} + (-4)\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_n = (-36, 32, -4) \text{ N m}$$

ચાકગતિ માટે જવાબદાર ટૉર્કનું મૂલ્ય.

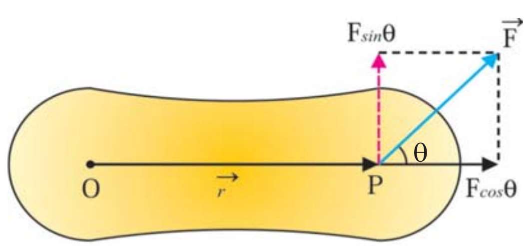
હવે, $(\vec{r} \times \vec{F})\cdot\hat{n}$

$$= (-36, 32, -4) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-36 + 32 - 4)$$

$$= -\frac{8}{\sqrt{3}} \text{ N m}$$

(a) ટૉર્કની વ્યાખ્યા ભૌતિક સમજૂતી (Physical interpretation of the definition of torque)



ટૉર્કનો અસરકારક ઘટક

આકૃતિ 2.7

ધારો કે આકૃતિ 2.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દઢ પદાર્થના કણ P પર બળ $\vec{F}$ લાગે છે. અત્રે બળ $\vec{F}$ એ ભ્રમણાક્ષને લંબ એવા સમતલમાં લીધેલ છે. ભ્રમણાક્ષ O બિંદુમાંથી પુસ્તકના પાનને લંબ રૂપે બહાર આવતી દિશામાં છે.

P નો પોતાના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્રને અનુલક્ષીને સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે. $\vec{F}$ અને $\vec{r}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવામાં $\vec{F}$ની અસરકારકતા જોવા માટે $\vec{F}$ના બે ઘટકો વિચારો.

(i) $F_1 = F\cos\theta$ જે $\vec{r}$ ને સમાંતર હોવાથી $\vec{r} \times \vec{F_1} = 0$ થશે, જે ટૉર્ક ઉત્પન્ન કરતો નથી, આથી તે ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરતો નથી.

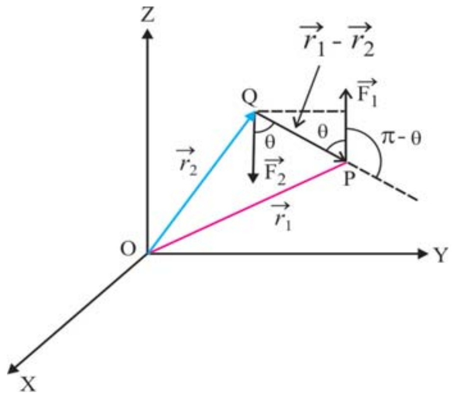
(ii) $F_2 = F\sin\theta$ જે $\vec{r}$ ને લંબ છે. આ ઘટક ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરે છે. જો Fનું અને/અથવા θનું મૂલ્ય વધારે હશે, તો $\vec{F}$ વધારે અસરકારક બનશે. વળી, આપણો સામાન્ય અનુભવ કહે છે જો $\vec{F}$ના લાગબિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ મોટો હોય તોપણ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવામાં $\vec{F}$ વધારે અસરકારક બને છે. આમ, ચાકગતિ માટે જવાબદાર રાશિ માત્ર $\vec{F}$ નહિ, પરંતુ r F sinθ છે.

આ રાશિને આપણે ટૉર્ક કહીએ છીએ. આ સૂત્ર સદિશ સ્વરૂપે લખતાં,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (2.5.6)$$

યાદ રાખો કે, **ટૉર્ક એ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળની અસરકારકતાનું માપ છે.**

(e) બળયુગ્મ (Couple) : બે સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાંના એકરેખસ્થ ન હોય તેવાં બળો બળયુગ્મની રચના કરે છે. આકૃતિ 2.8માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે ઊગમબિંદુ Oને અનુલક્ષીને કોઈ એક દઢ પદાર્થના $\vec{r_1}$ અને $\vec{r_2}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બે કણો P અને Q પર અનુક્રમે $\vec{F_1}$ અને $\vec{F_2}$ બળો લાગે છે. અહીં $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}|$ તથા $\vec{F_1}$ અને $\vec{F_2}$ ની દિશાઓ પરસ્પર વિરુદ્ધ છે. હવે $\vec{F_1}$ અને $\vec{F_2}$ બળોના કારણે ઉત્પન્ન થતા ટૉર્ક $\vec{\tau_1}$ અને $\vec{\tau_2}$ ના પરિણામી ટૉર્કને બળયુગ્મની ચાકમાત્રા $(\vec{\tau})$ કહે છે.



બળયુગ્મ

આકૃતિ 2.8

$$\vec{\tau} = \vec{\tau_1} + \vec{\tau_2}$$

$$\therefore \ \vec{\tau} = (\vec{r_1} \times \vec{F_1}) + (\vec{r_2} \times \vec{F_2})$$

$$= (\vec{r_1} \times \vec{F_1}) - (\vec{r_2} \times \vec{F_1})$$

$$(\because \ \vec{F_2} = -\vec{F_1})$$

$$\therefore \ \vec{\tau} = (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{F_1}$$

$$= |\vec{r_1} - \vec{r_2}|(F_1) \sin(\pi - \theta)$$

$$= |\vec{r_1} - \vec{r_2}|(F_1) \sin\theta$$

જ્યાં $(\pi - \theta)$ એ $(\vec{r_1} - \vec{r_2})$ અને $\vec{F_1}$ વચ્ચેનો ખૂણો છે.

આકૃતિ પરથી $|\vec{r_1} - \vec{r_2}| \sin\theta$ = બે બળો વચ્ચેનું લંબ-અંતર

∴ બળયુગ્મની ચાકમાત્રા = (F_1) (બે બળો વચ્ચેનું લંબ અંતર)

= (બેમાંથી એક બળનો માનાંક) (બે બળો વચ્ચેનું લંબ અંતર) (2.5.8)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, વ્યવહારમાં તમે બળયુગ્મનો ઉપયોગ કરો છો તે તમે જાણો છો ? તમે સાઈકલ, સ્કૂટર કે કાર ચલાવો ત્યારે આ વાહનને વાળવા માટે બે હાથે સ્ટિયરિંગ પર જે બળો લગાડો છો, તે બળયુગ્મ રચે છે.

(*f*) દૃઢ પદાર્થનું સંતુલન (Equilibrium of a rigid body) :

હવે આપણે દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં અનેક બળોની અસર હેઠળ દૃઢ પદાર્થના સંતુલનના ચર્ચા કરીશું. જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બાહ્ય બળો $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots\ldots, \vec{F_n}$ હોય અને જો પરિણામી $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots.. + \vec{F_n} = 0$ (2.5.9) થાય તો દૃઢ પદાર્થ રેખીય સંતુલનમાં રહે છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણને બળોના ઘટકોના સ્વરૂપમાં લખતાં

$$\sum_i F_{xi} = 0; \sum_i F_{yi} = 0; \text{ અને } \sum_i F_{zi} = 0. \qquad (2.5.9\ a)$$

જો ઉપર્યુક્ત બળોને કારણે ઉદ્ભવતાં ટૉર્ક અનુક્રમે $\vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}, \ldots.., \vec{\tau_n}$ હોય, તો જ્યારે

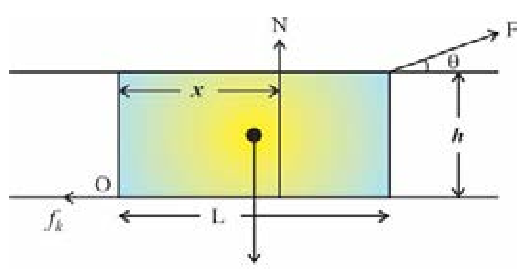
$$\vec{\tau} = \vec{\tau_1} + \vec{\tau_2} + \ldots.. + \vec{\tau_n} = 0. \qquad (2.5.10)$$

ત્યારે દૃઢ પદાર્થ **ચાકગતીય સંતુલનમાં** રહે છે. એટલે કે જો દૃઢ પદાર્થ સ્થિર હોય તો સ્થિર રહે અને જો ચાક-ગતિ કરતો હોય તો અચળ કોણીય વેગથી ચાકગતિ ચાલુ રાખે છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણને ઘટકોના સ્વરૂપમાં લખતાં,

$$\sum_i \tau_{xi} = 0; \sum_i \tau_{yi} = 0; \text{ અને } \sum_i \tau_{zi} = 0 \qquad (2.5.10\ a)$$

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 2.9માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે m દળનો એક બ્લૉક સમક્ષિતિજ સાથે θ કોણ બનાવતી દિશામાં લાગતા બળ F ની અસર હેઠળ અચળ વેગથી ગતિ કરે છે. જો બ્લૉકની સપાટી અને સમક્ષિતિજ સપાટી વચ્ચે ઘર્ષણબળ f_k હોય, તો લંબ પ્રત્યાઘાતી બળ Nની કાર્યરેખાનું Oથી અંતર શોધો. બ્લૉકની લંબાઈ L અને ઊંચાઈ h છે.



આકૃતિ 2.9

ઉકેલ : બ્લૉક અત્રે જુદાં-જુદાં બળોની અસર હેઠળ હોવા છતાં ચાકગતિ કરતો નથી. પરિણામે તે ચાકગતિય સંતુલનમાં છે. આ સ્થિતિમાં જુદાં-જુદાં બળોને લીધે લાગતા ટૉર્કનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય થવો જોઈએ. બિંદુ Oને અનુલક્ષીને બધાં ટૉર્ક લેતાં, $\tau = f_k(0) - (mg)\left(\frac{L}{2}\right) + N(x) - (F\cos\theta)(h) + F\sin\theta(L) = 0.$

(અત્રે સમઘડી દિશામાં ટૉર્ક ઋણ અને વિષમઘડી દિશામાં ટૉર્ક ધન લીધેલ છે).

$$\therefore \quad N(x) = (mg)\left(\frac{L}{2}\right) + (F\cos\theta)(h) - F\sin\theta\ (L) \qquad (1)$$

હવે રેખીય સંતુલન માટે,

$mg = N + F\sin\theta$ અને $F\cos\theta = f_k$

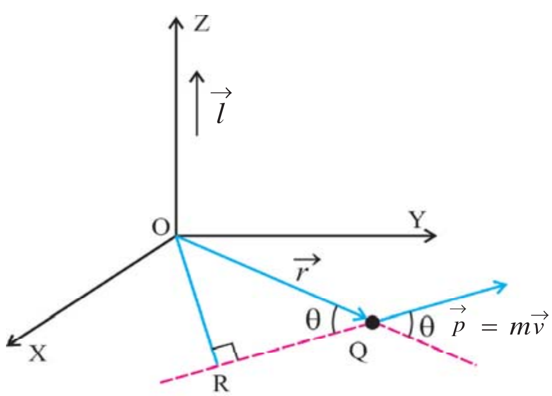
$\therefore N = mg - F\sin\theta$

આ મૂલ્યને સમીકરણ (1)માં મૂકતાં અને xને સૂત્રનો કર્તા બનાવતાં,

$$x = \frac{(mg)\left(\frac{L}{2}\right) + (F\cos\theta)(h) - (F\sin\theta)(L)}{mg - F\sin\theta}$$

2.6 કોણીય વેગમાન (Angular Momentum)

(a) કણનું કોણીય વેગમાન (Angular Momentum of a Particle) : ધારો કે આકૃતિ 2.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે m દળવાળા કોઈ કણ Qનો કાર્તેઝીય યામ-પદ્ધતિમાં સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OQ} = \vec{r}$ છે. આ કણનો રેખીય વેગ $\vec{v}$ છે. અને તેનું રેખીય વેગમાન $\vec{p} = m\vec{v}$ છે. અહીં કણ Q કોઈ દૃઢ પદાર્થનો કણ હોવો જરૂરી નથી. ધારો કે $\vec{p}$ અને $\vec{r}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. માત્ર સરળતા ખાતર જ કણ અને તેની ગતિને $(x - y)$ સમતલમાં લીધેલ છે. $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ના સદિશ ગુણાકારને O બિંદુના સંદર્ભમાં કણનું કોણીય વેગમાન $\vec{l}$ કહે છે.



કણનું કોણીય વેગમાન

આકૃતિ 2.10

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (2.6.1)$$

$\vec{l}$ નો SI એકમ kg m^2 s^{-1} અથવા J s.

(i) $\vec{l}$ નું મૂલ્ય સંદર્ભબિંદુની પસંદગી પર આધારિત હોવાથી તેની વ્યાખ્યામાં સંદર્ભબિંદુનો ઉલ્લેખ અનિવાર્ય છે.

(ii) $\vec{l}$ ની દિશા સદિશગુણાકારના જમણાહાથના સ્ક્રુના નિયમ વડે મળે છે. પ્રસ્તુત કિસ્સામાં $\vec{l}$ ની દિશા OZ દિશામાં છે.

(iii) હવે $|\vec{l}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = r\,p\sin\theta$

પણ આકૃતિ 2.10 પરથી, $r\sin\theta = OR$

$\therefore l = (p)$ (અંતર OR)

આમ, કણનું કોણીય વેગમાન = (રેખીય વેગમાન) (સંદર્ભબિંદુથી રેખીય વેગમાનના સદિશનું લંબઅંતર)

= બિંદુ Oને અનુલક્ષીને રેખીય વેગમાનની ચાકમાત્રા (વ્યાખ્યા પ્રમાણે)

(iv) કણના કોણીય વેગમાનના કાર્તેઝીય ઘટકો : કોણીય વેગમાનની વ્યાખ્યા આ પ્રમાણે છે.

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$= (yp_z - zp_y)\hat{i} + (zp_x - xp_z)\hat{j} + (xp_y - yp_x)\hat{k}$$

$$\vec{l} = l_x\hat{i} + l_y\hat{j} + l_z\hat{k}$$

અત્રે l_x, l_y અને l_z અનુક્રમે X, Y અને Z અક્ષને અનુલક્ષીને કણના કોણીય વેગમાનના ઘટકો છે.

(b) કણનું કોણીય વેગમાન અને તેના પર લાગતા ટૉર્ક વચ્ચેનો સંબંધ (The relation between angular momentum of a particle and torque acting on it) :

સમીકરણ (2.6.1)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

પરંતુ $\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ = રેખીય વેગમાનના ફેરફારનો દર = $\vec{F}$ (બળ) અને $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ (વેગ)

$$\therefore \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{v} \times \vec{p}$$

પરંતુ $\vec{v}$ અને $\vec{p}$ એક જ દિશામાં હોવાથી સદિશ ગુણાકાર $\vec{v} \times \vec{p} = 0$

$$\therefore \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \qquad (2.6.2)$$

આમ, **કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય દર ટૉર્ક બરાબર હોય છે.**

આ પરિણામ ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ 'રેખીય વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર બળ બરાબર હોય છે.' સાથે સામ્ય ધરાવે છે.

(*c*) કણોના તંત્રનું કોણીય વેગમાન (Angular momentum of system of particles) :

ધારો કે n કણોના બનેલા તંત્રના કણોનાં કોણીય વેગમાન $\vec{l_1}, \vec{l_2}, ... \vec{l_n}$ છે.

તેથી તંત્રનું કુલ કોણીય વેગમાન $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2} + \dots + \vec{l_n} \qquad (2.6.3)$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{l_1}}{dt} + \frac{d\vec{l_2}}{dt} + \dots + \frac{d\vec{l_n}}{dt} \qquad (2.6.4)$$

સમીકરણ (2.6.2)નો ઉપયોગ કરતાં

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau_1} + \vec{\tau_2} + ... + \vec{\tau_n}$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \qquad (2.6.5)$$

આમ, કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો દર તંત્ર પર પ્રવર્તતા પરિણામી બાહ્ય ટૉર્ક બરાબર હોય છે.

(*d*) દૃઢ પદાર્થનું કોણીય વેગમાન (Angular momentum of a rigid body) :

દૃઢ વસ્તુમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર રહેતાં હોવાથી તે કણોના તંત્રનો ખાસ કિસ્સો છે. આપણે જાણીએ છીએ કે દૃઢ વસ્તુનો દરેક કણ ભ્રમણાક્ષને લંબ એવા સમતલમાં વર્તુળગતિ કરે છે. તેથી દરેક કણનું રેખીય વેગમાન પણ આ વર્તુળના સમતલમાં હોય છે. દરેક કણના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્રને સંદર્ભબિંદુ લઈને દરેક કણ માટે કોણીય વેગમાન મેળવતાં તે ભ્રમણાક્ષને સમાંતર મળે છે. વળી, દરેક કણ માટે $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ પરસ્પર લંબ હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2} + \dots + \vec{l_n}$$

સમીકરણ (2.6.1)નો ઉપયોગ કરતાં

$$\vec{L} = \vec{r_1} \times \vec{p_1} + \vec{r_2} \times \vec{p_2} + ... + \vec{r_n} \times \vec{p_n}$$

અત્રે સદિશો $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ પરસ્પર લંબ હોવાથી $\vec{L}$ નું મૂલ્ય

$$|\vec{L}| = r_1 p_1 + r_2 p_2 + ... + r_n p_n$$

($\because$ $\vec{r} \perp \vec{p}$, હોવાથી $|\vec{r} \times \vec{p}| = rp \sin 90° = rp$ થશે)

$$\therefore |\vec{L}| = r_1 m_1 v_1 + r_2 m_2 v_2 + ... + r_n m_n v_n$$

($\because$ $p = mv$)

આમ દરેક કણની કોણીય ઝડપ સમાન હોવાથી

$$|\vec{L}| = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \dots + m_n r_n^2 \omega$$

($\because$ $v = r\omega$)

$$= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2)\omega$$

$$\therefore |\vec{L}| = I\,|\vec{\omega}| \qquad (2.6.6)$$

અત્રે $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

I ને દૃઢ પદાર્થની આપેલ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કહે છે, જેના વિશે વધુ માહિતી પરિચ્છેદ 2.9માં આપેલ છે. પ્રસ્તુત કિસ્સામાં $\vec{\omega}$ અને $\vec{L}$ બન્ને ભ્રમણાક્ષને સમાંતર હોવાથી I ને અદિશ લઈ શકાય. આ સંજોગોમાં સમીકરણ (2.6.6)ને સદિશ સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (2.6.7)$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2.6.8)$$

સમીકરણ (2.6.5) અને (2.6.8)નો સમન્વય કરતાં,

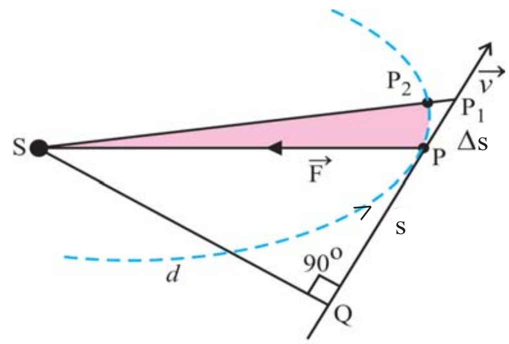
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau} \quad (2.6.9)$$

કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ (Law of conservation of angular momentum) :

સમીકરણ (2.6.9)માં જો $\vec{\tau} = 0$, ($\vec{L}$ = અચળ)

એટલે કે, **'જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું પરિણામી બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો તે દૃઢ પદાર્થનું કોણીય વેગમાન અચળ રહે છે.'** આ વિધાનને **કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ કહે છે.**

2.7 કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનું ભૌમિતિક નિરૂપણ (Geometrical Representation of the Law of Conservation of Angular Momentum)



કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમનું ભૌમિતિક નિરૂપણ

આકૃતિ 2.11

આકૃતિ 2.11માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સૂર્યની ફરતે કોઈ એક ગ્રહ P લંબવૃત્તીય (elliptical) કક્ષામાં ગતિ કરે છે. (જે તૂટક રેખા વડે દર્શાવેલ છે.) ધારો કે P પાસે ગ્રહનો રેખીય વેગ $\vec{v}$ છે.

∴ સૂર્યને અનુલક્ષીને ગ્રહનું કોણીય વેગમાન

$$L = mvd \quad (2.7.1)$$

હવે ત્રિકોણ SQPનું ક્ષેત્રફળ

$$A = \frac{1}{2}(SQ)\ (PQ)$$

$$= \frac{1}{2}(d)\ (s) \qquad (\because PQ = s)$$

Δt સમયમાં ગ્રહ Pથી P_2 પર જાય છે. તે દરમિયાન ત્રિકોણ SQPના ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો ΔA હોય તો,

$$\Delta A = \frac{1}{2}(d)(\Delta s)$$

હવે $lim\ \Delta t \to 0$ લક્ષમાં ત્રિકોણ SPP_2 અને ત્રિકોણ SPP_1નાં ક્ષેત્રફળો સમાન બને છે.

∴ ગ્રહને સૂર્ય સાથે જોડતી રેખા વડે આંતરાતાં ક્ષેત્રફળના ફેરફારનો સમયદર

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(d)\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{1}{2}(d)(v)$$

બંને બાજુને m વડે ગુણતાં $m\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}mvd$

$$(2.7.2)$$

સમીકરણ (2.7.1)માંથી mvdનું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$m\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}L \quad (2.7.3)$$

હવે ગ્રહ પર સૂર્યને કારણે લાગતાં ગુરુત્વાકર્ષણ બળની કાર્ય રેખા Sમાંથી પસાર થતી હોવાથી આ બળ વડે મળતું સૂર્યને અનુલક્ષીને ટૉર્ક શૂન્ય થાય છે. પરિણામે ગ્રહનું કોણીય વેગમાન L અચળ હોય છે.

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \text{અચળ} \quad (2.7.4)$$

સમીકરણ (2.7.4) ગ્રહોની ગતિ માટેના કૅપ્લરનો બીજો નિયમ રજૂ કરે છે. **"સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખાએ એકમસમયમાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળ (જેને ક્ષેત્રીય વેગ કહે છે.) અચળ હોય છે."**

આમ, **ક્ષેત્રીય વેગ અચળ હોવો એ કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમની ભૌમિતિક રજૂઆત છે.**

2.8 જડત્વની ચાકમાત્રા (Moment of Inertia)

ધારો કે કોઈ દૃઢ પદાર્થના કણોના દળ m_1, m_2, …., m_n છે. તથા કોઈ આપેલ અક્ષથી તેમના લંબઅંતરો અનુક્રમે r_1, r_2, …, r_n છે તો $m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2$ ને તે પદાર્થની તે અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા (I) કહે છે.

એટલે કે, $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2$

$$= \sum_i m_ir_i^2$$

જડત્વની ચાકમાત્રાનું મૂલ્ય અક્ષની પસંદગી અને તેને અનુલક્ષીને દ્રવ્યના વિતરણ પર આધારિત છે.

ચાકમાત્રાનો SI એકમ kg m^2 છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^2T^0$ છે.

સમીકરણ $\vec{L} = I\vec{\omega}$ એ, રેખીય ગતિના સમીકરણ $\vec{p} = m\vec{v}$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે. ત્યા $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ એ રેખીય ગતિના સમીકરણ $\vec{F} = m\vec{a}$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે. આ સામ્યતાના સંદર્ભમાં કહી શકાય કે, રેખીય ગતિમાં દળ જે ભાગ ભજવે છે, તેવો જ ભાગ ચાકગતિમાં જડત્વની ચાકમાત્રા ભજવે છે. **દળ એ રેખીય ગતિ માટે જડત્વ છે અને જડત્વની ચાકમાત્રા એ ચાકગતિ માટે જડત્વ છે.**

ઉદાહરણ 6 : પૃથ્વીને નિયમિત ઘનતા ધરાવતા નક્કર ગોળા તરીકે સ્વીકારી લઈએ અને માનીએ કે તેનું એકાએક સંકોચન થઈ દળમાં ફેરફાર વગર તેની ત્રિજ્યા અડધી થઈ જાય છે, તો હાલનો 24 કલાકનો દિવસ કેટલા કલાકનો થઈ જાય ?

ઉકેલ : પૃથ્વી પર કોઈ બાહ્ય ટૉર્ક લાગતું નથી એમ સ્વીકારીએ તો કોણીય વેગમાન અચળ લઈ શકાય. સમીકરણ (2.6.6) નો ઉપયોગ કરી બંને વખતના પૃથ્વીના કોણીય વેગમાન સરખાવતાં,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \qquad (1)$$

હવે નક્કર ગોળા માટે તેના વ્યાસને અનુલક્ષીને

$I = \frac{2}{5}MR^2$ હોય છે. જ્યાં M = ગોળાનું દળ છે અને R = ગોળાની ત્રિજ્યા છે. (જુઓ ટેબલ – 1).

$$\therefore I_1 = \frac{2}{5}MR_1^2 \text{ અને } I_2 = \frac{2}{5}MR_2^2$$

પરંતુ, $R_1 = 2R_2$ આ મૂલ્યો સમીકરણ (1)માં મૂકતાં $\omega_2 = 4\omega_1$.

આમ, પૃથ્વીનો નવો ભ્રમણદર ω_2 તેના હાલના ભ્રમણ દર ω_1 કરતાં ચાર ગણો થઈ જાય અને 24 કલાકનો દિવસ 6 કલાકનો થઈ જાય.

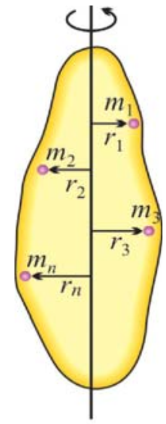
2.9 ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા (Radius of Gyration)

ધારો કે કોઈ દૃઢ પદાર્થનું દળ M છે. તેના દરેક કણનું દળ m હોય તેવા n કણોનો બનેલો છે.

$$\therefore m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m \quad \therefore M = nm$$

આકૃતિ 2.12માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપેલ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા

$$I = mr_1^2 + mr_2^2 + \ldots + mr_n^2$$



ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા

આકૃતિ 2.12

અત્રે r_1 , r_2, … r_n અનુક્રમે પદાર્થના કણોના આપેલ અક્ષથી લંબઅંતરો છે.

$$\therefore I = \frac{mn(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)}{n}$$

$$= M\frac{(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)}{n}$$

$$= MK^2 \qquad (2.9.1)$$

$$\text{જ્યાં, } K^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{n}$$

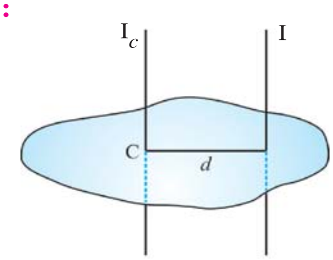
$$= \langle r^2 \rangle \qquad (2.9.2)$$

$$\therefore K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{n}} \qquad (2.9.3)$$

અહીં, K^2 એ આપેલ ભ્રમણાક્ષથી પદાર્થના કણોના લંબઅંતરોના વર્ગોનું સરેરાશ (mean) મૂલ્ય દર્શાવે છે. K ને આપેલ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થની **ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા** કહે છે. તેનો SI એકમ m છે.

2.10 જડત્વની ચાકમાત્રા અંગેના બે પ્રમેયો (Two Theorems Regarding Moment of Inertia)

(i) સમાંતર અક્ષનું પ્રમેય (Theorem of parallel axes) :



સમાંતર અક્ષનું પ્રમેય

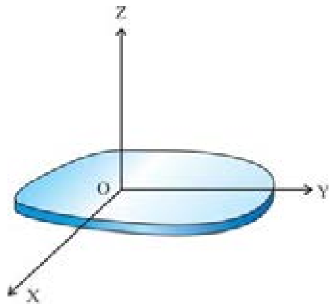
આકૃતિ 2.13

આ પ્રમેયનું કથન આ પ્રમાણે છે. "પદાર્થની કોઈપણ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા I એ તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી સમાંતર અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા I_c તથા પદાર્થના દળ M અને બે સમાંતર અક્ષો વચ્ચેના લંબઅંતર d ના વર્ગના ગુણાકારના સરવાળા બરાબર થાય છે." (જુઓ આકૃતિ 2.13)

$$I = I_c + Md^2 \quad (2.10.1)$$

(*ii*) લંબઅક્ષનું પ્રમેય (Theorem of perpendicular axes) :

આ પ્રમેય સમતલીય (planar) પદાર્થોને જ લાગુ પડે છે. સમતલીય પદાર્થના સમતલમાં X અને Y-અક્ષો લઈએ (જુઓ આકૃતિ 2.14) તો સમતલને લંબ એવી Z-અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા I_Z એ X-અક્ષને અને Y-અક્ષને અનુલક્ષીને મળતી જડત્વની ચાકમાત્રાઓના સરવાળા બરાબર હોય છે.



લંબઅક્ષનું પ્રમેય

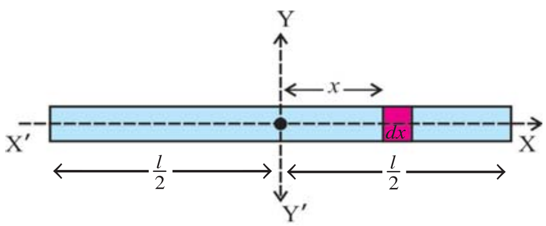
આકૃતિ 2.14

$$I_Z = I_X + I_Y \quad (2.10.2)$$

જ્યાં I_X અને I_Y અનુક્રમે X અને Y અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રાઓ છે. જો સમતલીય પદાર્થ YZ સમતલમાં હોય તો $I_x = I_Y + I_Z$ અને જો તે XZ સમતલમાં હોય તો $I_Y = I_X + I_Z$ થશે.

2.11 જડત્વની ચાકમાત્રા અને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યાની ગણતરી (Calculation of moment of inertia and radius of gyration)

નિયમિત પાતળા સળિયાની તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેની લંબાઈને લંબઅક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા.



પાતળા સળિયાની જડત્વની ચાકમાત્રા

આકૃતિ 2.15

આકૃતિ 2.15 દર્શાવ્યા પ્રમાણે M દળ તથા l લંબાઈ ધરાવતો એક નિયમિત આડછેદ તથા નિયમિત દળ વિતરણ ધરાવતો સળિયો છે. સળિયાના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા સળિયાની લંબાઈને લંબ હોય તેવા અક્ષ YY' ધ્યાનમાં લો. યામપદ્ધતિનું ઊગમબિંદુ સળિયાના કેન્દ્ર O પર સંપાત થાય છે અને X–અક્ષ સળિયાની લંબાઈ પર સંપાત થાય છે. ઊગમબિંદુથી x અંતરે dx લંબાઈ ધરાવતો સળિયાનો સૂક્ષ્મ ખંડ વિચારો.

સળિયાની એકમલંબાઈ દીઠ દળ $\lambda = \dfrac{M}{l}$

dx લંબાઈના ખંડનું દળ $\lambda dx = \dfrac{M}{l} dx$

આ ખંડ માટે, Y-અક્ષની સાપેક્ષે જડત્વની ચાકમાત્રા

$$dI = \frac{M}{l} dx \cdot x^2 \quad (2.11.1)$$

અક્ષ Y ની સાપેક્ષે સમગ્ર સળિયાના જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવા માટે સમીકરણ (2.11.1)નું $x = -l/2$ થી $x = l/2$ ના અંતરાલ વચ્ચે સંકલન કરતાં,

$$\therefore I = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{M}{l} dx\ x^2 = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{+l/2}$$

$$= \frac{M}{3l}\left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right]$$

$$I = \frac{Ml^2}{12} \quad (2.11.2)$$

નિયમિત પાતળા સળિયા માટે તેનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એ ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર છે. આથી, આ જડત્વની ચાકમાત્રાને તેના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રમાંથી પસાર થતા અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા (I_c) પણ કહે છે.

ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા : સમીકરણ 2.11.2ને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં,

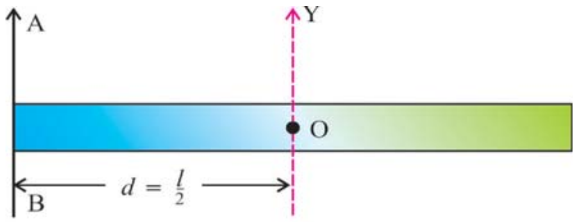
$$K^2 = \frac{l^2}{12}$$

$$\therefore K = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

ઉદાહરણ 7 : M દળવાળા તથા l લંબાઈ અને નિયમિત આડછેદવાળા સળિયાની તેના એક છેડામાંથી પસાર થતી લંબાઈને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા અને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સળિયાનું દળ M અને લંબાઈ l છે. સળિયાના કેન્દ્રથી છેડા સુધીનું અંતર $d = l/2$ છે.

સમીકરણ (2.11.2) અનુસાર આવા સળિયાની તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા લંબાઈને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા $I_c = \frac{Ml^2}{12}$.



આકૃતિ 2.16

સમાંતર અક્ષના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં સળિયાના છેડામાંથી પસાર થતી તથા લંબાઈને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીની જડત્વની ચાકમાત્રા

$$I = I_c + Md^2$$

$$= \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} \quad (\because d = l/2)$$

$$\therefore I = \frac{Ml^2}{3}$$

હવે ઉપર્યુક્ત સમીકરણને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં

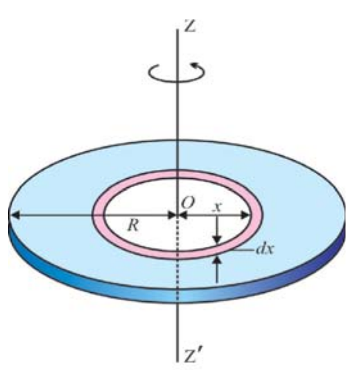
$$K^2 = \frac{l^2}{3}$$

$\therefore$ ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા $K = \frac{l}{\sqrt{3}}$

ઉદાહરણ 8 : નિયમિત વર્તુળાકાર તકતીની તેના ભૌમિતિક કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા તથા ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા શોધો :

ઉકેલ :

આકૃતિ 2.17માં દર્શાવ્યા મુજબ M દ્રવ્યમાન તથા R ત્રિજ્યા ધરાવતી નિયમિત વર્તુળાકાર તકતીને તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર Oમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબ આવેલી ZZ' અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવી છે.



આકૃતિ 2.17

અત્રે તકતીનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi R^2$ તથા તકતીનું એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ દ્રવ્યમાન

$$\sigma = \frac{\text{તકતીનું દ્રવ્યમાન}}{\text{તકતીનું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{M}{\pi R^2}$$

આ તકતીને જુદી જુદી ત્રિજ્યાઓવાળી ઘણી બધી સમકેન્દ્રીય રિંગોની બનેલી કલ્પો તથા તેમનું કેન્દ્ર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ O છે.

આકૃતિ 2.17માં દર્શાવ્યા મુજબ આવી કોઈ એક રિંગ ધ્યાન લો. ધારો કે તેની ત્રિજ્યા x છે તથા પહોળાઈ dx છે. આ રિંગનું ક્ષેત્રફળ $a = 2\pi x \cdot dx$ તથા

દ્રવ્યમાન $m = \sigma \cdot a = \frac{M}{\pi R^2} (2\pi x \cdot dx)$

$$= \frac{2Mx}{R^2} dx.$$

આ રિંગની ZZ' અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા dI કહીએ તો

dI = (રિંગનું દ્રવ્યમાન)(રિંગની ત્રિજ્યા)^2

$$= \frac{2Mx}{R^2} dx \cdot x^2 \tag{1}$$

આમ, આવી જુદી-જુદી ત્રિજ્યાઓવાળી સમકેન્દ્રીય રિંગોની ZZ'ને અનુલક્ષીને ચાકમાત્રાઓ શોધી તેનો સરવાળો કરતાં સમગ્ર વર્તુળાકાર ZZ'ને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા મળે.

આ માટે સમીકરણ (1)નું $x = 0$ થી $x = R$ના અંતરાલ વચ્ચે સંકલન કરતાં,

$$I = \int dI = \int_0^R \frac{2Mx^3}{R^2} \cdot dx$$

$$I = \frac{2M}{R^2} \int_0^R x^3 \cdot dx$$

$$= \frac{2M}{R^2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{2M}{R^2} \left[\frac{R^4}{4} - 0\right]$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} MR^2 \tag{2}$$

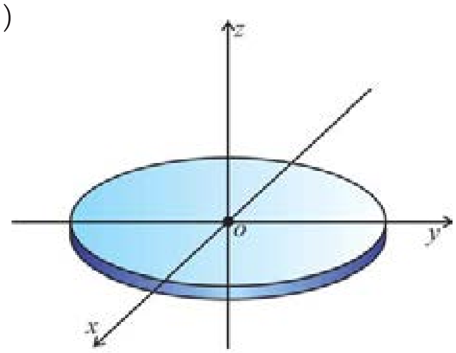
સમીકરણ (2)ને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં

$$K^2 = \frac{1}{2} R^2$$

ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

ઉદાહરણ 9 : નિયમિત ઘનતા ધરાવતી તકતીની તેના વ્યાસ સાથે સંપાત થતી કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે M દળ અને R ત્રિજ્યા ધરાવતી તકતી XY સમતલમાં છે. તકતીના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબ Z અક્ષ છે. (જુઓ આકૃતિ 2.18)



આકૃતિ 2.18

આ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા

$I_z = \frac{MR^2}{2}$ છે

લંબઅક્ષોના પ્રમેય અનુસાર

$I_z = I_x + I_y$

તકતી X અને Y અક્ષોને સંમિત હોવાથી

$\therefore I_x = I_y \qquad \therefore I_z = 2I_x$

વળી, $I_z = \frac{MR^2}{2}$

$\therefore \frac{MR^2}{2} = 2I_x$

$\therefore I_x = \frac{MR^2}{4}$

ઉદાહરણ 10 : એક પોલા નળાકારનું દળ 4 kg અને ત્રિજ્યા 0.1 m છે. તેની ભૌમિતિક અક્ષને અનુલક્ષીને તે ભ્રમણ કરી શકે છે. તેની ફરતે એક પાતળી દોરી વીંટાળી દોરડાના છૂટાછેડા પર નળાકારની સપાટીએ સ્પર્શક રૂપે રહે તેમ 50 N બળ લગાડતાં તે ચાકગતિ શરૂ કરે છે, તો નીચેના જવાબ શોધો.

(1) નળાકાર પર લાગતું ટૉર્ક (2) નળાકારનો કોણીય પ્રવેગ (3) 4 sના અંતે કોણીય વેગ (4) 4 sના અંતે કોણીય વેગમાન (5) 4 sના અંતે ચાકગતિ ઊર્જા (6) 4 sમાં કરેલું કોણીય સ્થાનાંતર (7) 4 s દરમિયાન નળાકાર પર થતું કાર્ય (8) 4 sના અંતે પાવર.

ઉકેલ :

(1) નળાકાર પર લાગતું ટૉર્ક :

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\theta\ \hat{n}$

$\therefore |\vec{\tau}| = rF \qquad (\because \theta = \frac{\pi}{2})$

$= (0.1)\ (50) = 5\ N\ m$

(2) નળાકારનો કોણીય પ્રવેગ (α) :

અત્રે $\tau = I\alpha = mr^2\alpha$

$\therefore 5 = (4)\ (0{\cdot}1)^2\ (\alpha) = 0.04\ \alpha$

$\therefore \alpha = 125\ rad\ s^{-2}$

(3) કોણીય વેગ (ω) :

$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (125)\ (4)$

$= 500\ rad\ s^{-1}$

(4) કોણીય વેગમાન (L) :

$L = I\omega = mr^2\omega$

$\therefore L = (4)\ (0{\cdot}1)^2\ (500) = (0{\cdot}04)\ (500)$

$= 20\ kg\ m^2\ s^{-1}$

(5) ચાકગતિ-ઊર્જા :

$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\ \omega^2$

$= \frac{1}{2}(4)\ (0{\cdot}1)^2\ (500)^2$

$= 5000\ J$

(6) 4 sમાં કરેલું કોણીય સ્થાનાંતર :

$\theta = \left[\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right]t$

$= \left[\frac{0+500}{2}\right]4$

$= 1000\ rad$

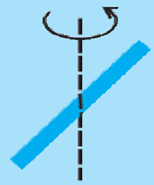
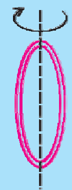
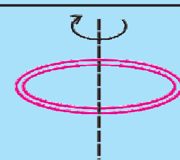
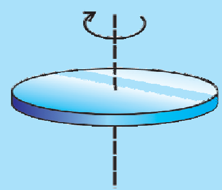
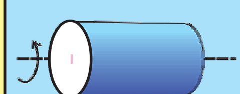
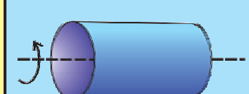
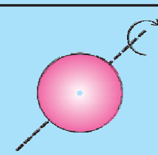
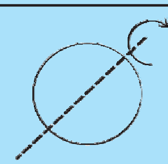
(7) 4 sમાં કરેલું કાર્ય W = આ સમયમાં નળાકારને મળેલી ગતિ-ઊર્જા = 5000 J

અથવા કાર્ય $\omega = \tau\theta = 5 \times 1000 = 5000\ J$

(8) 4 sના અંતે પાવર

$P = \tau\omega = 5 \times 500 = 2500$ watt

ટેબલ 2.1 : કેટલાક સંમિત પદાર્થોની જડત્વની ચાકમાત્રા અને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા

પદાર્થ	અક્ષ	આકૃતિ	I	K
L લંબાઈનો પાતળો સળિયો	તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા સળિયાને લંબ		$\frac{1}{12}ML^2$	$\frac{L}{2\sqrt{3}}$
R ત્રિજ્યાની વીંટી	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
R ત્રિજ્યાની વીંટી	કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને વીંટીના સમતલને લંબ		MR^2	R
R ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર તકતી	કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના પૃષ્ઠને લંબ		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
R ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર તકતી	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{1}{4}MR^2$	$\frac{R}{2}$
R ત્રિજ્યાનો પોલો નળાકાર	નળાકારની ભૌમિતિક અક્ષ		MR^2	R
R ત્રિજ્યાનો નક્કર નળાકાર	નળાકારની ભૌમિતિક અક્ષ		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
R ત્રિજ્યાનો નક્કર ગોળો	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{2}{5}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}R$
R ત્રિજ્યાનો પોલો ગોળો	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{2}{3}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}R$

ટેબલ 2.2 : રેખીય ગતિ અને ચાકગતિની ભૌતિક રાશિઓની સરખામણી

રેખીય ગતિ	ચાકગતિ
રેખીય સ્થાનાંતર, $\vec{d}$	કોણીય સ્થાનાંતર, θ
રેખીય વેગ, $\vec{v}$	કોણીય વેગ, $\vec{\omega}$
રેખીય પ્રવેગ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	કોણીય પ્રવેગ, $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
દળ, m	જડત્વની ચાકમાત્રા, I
રેખીય વેગમાન, $\vec{p} = m\vec{v}$	કોણીય વેગમાન, $\vec{L} = I\vec{\omega}$
બળ, $\vec{F} = m\vec{a}$	ટૉર્ક, $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
ન્યૂટનનો બીજો નિયમ; $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	ન્યૂટનના બીજા નિયમ જેવું જ પરિણામ, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
રેખીય ગતિ-ઊર્જા, $K = \frac{1}{2}mv^2$	ચાકગતિ-ઊર્જા $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
કાર્ય, $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$	કાર્ય, $W = \tau\theta$
પાવર, $P = Fv$	પાવર, $P = \tau\omega$
અચળ પ્રવેગી રેખીય ગતિનાં સમીકરણો : $v = v_0 + at$; $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$; $2ad = v^2 - v_0^2$	અચળ કોણીય પ્રવેગવાળી ચાકગતિનાં સમીકરણો : $\omega = \omega_0 + \alpha t$; $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$; $2\alpha\theta = \omega^2 - \omega_0^2$

ઉદાહરણ 11 : એક વર્તુળાકાર ટર્નટેબલ 20 rpm કોણીય ઝડપથી તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વ અક્ષને અનુલક્ષીને સમક્ષિતિજ તલમાં ભ્રમણ કરે છે. 60 kg દળવાળો માણસ આ ટેબલની કિનારી પર ઊભો છે. આ માણસ કિનારી પરથી કેન્દ્ર પર જાય, તો ટર્નટેબલ હવે કેટલી કોણીય ઝડપથી ભ્રમણ કરશે ? માણસને બિંદુવત્ પદાર્થ ગણો અને ટર્નટેબલને નિયમિત તકતી ગણો. ટર્નટેબલનું દળ 200 kg છે.

ઉકેલ : વ્યક્તિનું દળ $m = 60$ kg, ટર્નટેબલનું દળ M = 200 kg, $\omega_1 = 20$ rpm.

અત્રે તંત્ર પરનું બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય છે. તેથી કોણીય વેગમાન અચળ રહે છે.

$\therefore$ (ટર્નટેબલનું + વ્યક્તિનું) પ્રારંભિક કોણીય વેગમાન = તેમનું અંતિમ કોણીય વેગમાન

$$\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\omega_1 = \frac{MR^2}{2}\omega_2$$

$$\therefore \left(\frac{M}{2} + m\right)\omega_1 = \frac{M}{2}\omega_2$$

$$\therefore (100 + 60)(20) = 100\omega_2$$

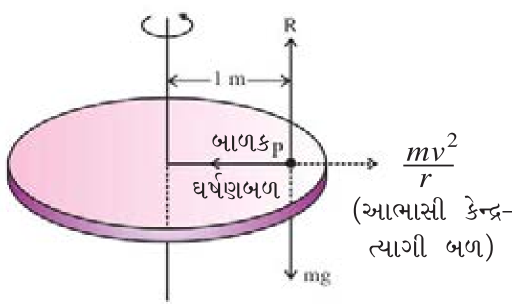
$$\therefore \omega_2 = 32 \text{ rpm}$$

નોંધ : આ ઉદાહરણમાં અંતિમ ગતિ ઊર્જા, પ્રારંભિક ગતિ-ઊર્જા કરતાં વધારે મળશે તે ચકાસી જુઓ. ગતિ-

ઊર્જાનો આ વધારો માણસ વડે કિનારી પરથી કેન્દ્ર તરફ આવતાં થતું કાર્ય છે. આ ગણતરી કરવા ટર્ન ટેબલની ત્રિજ્યા R = 1·5 m લો.

ઉદાહરણ 12 : ચાકગતિ કરતા ચકડોળના પાટિયા પર તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબ એવી ભ્રમણાક્ષથી 1 m દૂર m દળનો એક બાળક બેઠેલ છે. આ ચકડોળને કેટલા કોણીય વેગથી ભ્રમણ કરાવીએ, તો આ બાળક ચકડોળના પાટિયા પર સરકવાની તૈયારીમાં હોય ? બાળક અને પાટિયાની સપાટી વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.25 છે. $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ લો.

ઉકેલ : P બિંદુએ બાળક પર લાગતાં જુદાં-જુદાં બળો આકૃતિ 2.19માં દર્શાવ્યાં છે.



આકૃતિ 2.19

અહીં, R = લંબપ્રત્યાઘાતી બળ તથા $\frac{mv^2}{r}$ = કેન્દ્રત્યાગી (આભાસી) બળ છે. જ્યારે ઘર્ષણબળ $\mu R = \frac{mv^2}{r}$ થાય, ત્યારે બાળક ચકડોળના પાટિયા પર સરકવાની તૈયારીમાં હોય.

$$\frac{mv^2}{r} = \mu R = \mu mg \qquad (\because R = mg)$$

$$\therefore r^2\omega^2 = r\mu g \qquad (\because v = r\omega)$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{\cdot}25 \times 10}{1}}$$

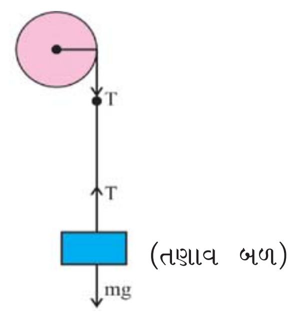
$$= 1{\cdot}58 \text{ rad s}^{-1}.$$

ઉદાહરણ 13 : R ત્રિજ્યા અને દળ M વાળી લીસી તકતીને ફરતે દોરી વીંટાળી તેના મુક્ત છેડે m દળવાળો પદાર્થ લટકાવવામાં આવેલ છે. હવે આ પદાર્થને નીચે ઊતરવા દેવામાં આવે છે. દર્શાવો કે તકતીનો કોણીય પ્રવેગ $\alpha = \frac{mg}{R\left(m+\frac{M}{2}\right)}$ છે.

ઉકેલ : લટકાવેલ દળ અને તકતી પર લાગતાં બળો આકૃતિ 2.20માં દર્શાવ્યા છે. લટકાવેલ પદાર્થની રેખીય ગતિનું સમીકરણ

$ma = mg - T$ (જ્યાં, T = દોરીમાં તણાવ)

$\therefore T = m(g - a)$



આકૃતિ 2.20

હવે તકતી પર લાગતું ટૉર્ક $\tau = RT$

$$(\because \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F})$$

$$\therefore I\alpha = RT \quad \therefore \alpha = \frac{RT}{I} = \frac{Rm(g-a)}{I}$$

$$\therefore \alpha = \frac{Rm(g-a)}{MR^2/2} \quad \therefore \alpha = \frac{2m}{RM}(g-a)$$

પરંતુ $a = R\alpha$

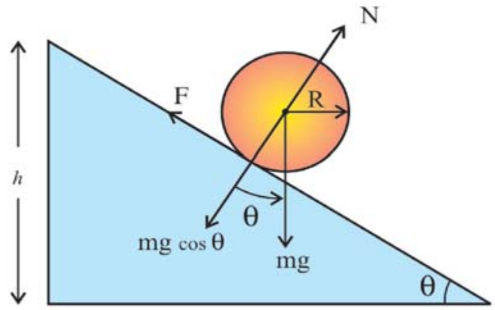
$$\therefore \alpha = \frac{2mg}{RM} - \frac{2mR\alpha}{RM}$$

$$= \frac{mg}{R\left(m+\frac{M}{2}\right)}$$

2.12 સરક્યા વિના ગબડતા દૃઢ પદાર્થો (Rigid Bodies Rolling Without Slipping)

દૃઢ પદાર્થ જ્યારે સરક્યા વિના ગબડતો હોય છે ત્યારે તેની ગતિ, રેખીય ગતિ અને ચાકગતિની મિશ્રિત ગતિ હોય છે. દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર રેખીય ગતિ કરતું હોય છે તથા પદાર્થ પોતે તેની અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતો હોય છે.

આવી મિશ્રિત ગતિનાં વર્ણનમાં ઉપર્યુક્ત બંને ગતિનું વર્ણન એકબીજાથી સ્વતંત્ર રીતે કરી શકાય છે.



સરક્યા વિના ગબડતા દૃઢ પદાર્થ

આકૃતિ 2.21

આકૃતિ 2.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે કોઈ એક દૃઢ પદાર્થ h ઊંચાઈ અને સમક્ષિતિજ સાથે θ કોણ ધરાવતા ઢાળની ટોચ પરથી સરક્યા વિના ગબડે છે. અત્રે પદાર્થનું દળ m, જડત્વની ચાકમાત્રા I, ભૌમિતિક ત્રિજ્યા R અને ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા K છે. જ્યારે પદાર્થ ઢાળના તળિયે પહોંચે છે, ત્યારે તેની સ્થિતિ ઊર્જામાં mgh જેટલો ઘટાડો થાય છે. યાંત્રિક ઊર્જાસંરક્ષણના નિયમ અનુસાર સ્થિતિ-ઊર્જાનો આ ઘટાડો ગતિ-ઊર્જામાં વધારા તરીકે રૂપાંતરિત થતો હોય છે. અત્રે,

પદાર્થની ગતિ-ઊર્જા = રેખીય ગતિ-ઊર્જા + ચાક ગતિ-ઊર્જા

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

યાંત્રિક ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ અનુસાર,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (2.12.1)$$

હવે, $\omega = v/R$ અને $I = MK^2$નો ઉપયોગ સમીકરણ (2.12.1)માં કરતાં,

(**નોંધ** : $\omega = v/R$ પદાર્થ સરક્યા વિના ગબડતો હોય ત્યારે જ લાગુ પડે છે. ગબડવા સાથે સરકતા પદાર્થ માટે આ સમીકરણ વાપરી શકાય નહીં.)

$$v^2 = \frac{2gh}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]} \qquad (2.12.2)$$

જો ઢાળની લંબાઈ d હોય અને પદાર્થ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિની શરૂઆત કરી a જેટલા રેખીય પ્રવેગ સાથે ઢાળના તળિયે પહોંચે તો,

$$\therefore v^2 = 2ad$$

આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી,

$$d = \frac{h}{\sin\theta}$$

$$\therefore v^2 = \frac{2ah}{\sin\theta} \qquad (2.12.3)$$

સમીકરણ (2.11.2) અને (2.12.3)નો સમન્વય કરતાં,

$$a = \frac{g\sin\theta}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]} \qquad (2.12.4)$$

અત્રે રેખીય પ્રવેગ a ઢાળની સપાટીને સમાંતર હોવાથી તેનું મૂલ્ય gના ઢાળને સમાંતર ઘટક $g\sin\theta$ જેટલું થવું જોઈએ. પરંતુ સમીકરણ (2.12.4) અનુસાર

આ મૂલ્ય $\frac{g\sin\theta}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]}$ મળે છે.

∴ રેખીય પ્રવેગમાં થતો ઘટાડો

$$= g\sin\theta - \frac{g\sin\theta}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]}$$

$$= g\sin\theta\left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right]$$

રેખીય પ્રવેગમાં થતો આ ઘટાડો ગબડતા પદાર્થ પર લાગતાં ઘર્ષણબળ Fને આભારી છે.

આ ઘર્ષણ બળની વિરુદ્ધ થતું કાર્ય ચાકગતિમાં પરિણમે છે અને તેથી જ ઘર્ષણબળની હાજરીમાં પણ આપણે યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણનો નિયમ વાપરી શક્યા છીએ.

આમ, ઘર્ષણબળ

$$F = mg\sin\theta\left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right] \qquad (2.12.5)$$

હવે આકૃતિ 2.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લંબપ્રત્યાઘાતી બળ N અને $mg\cos\theta$ એકબીજાને સમતોલતાં હોવાથી

$$N = mg\cos\theta \qquad (2.22.6)$$

સમીકરણ (2.11.5)ને સમીરણ (2.11.6) વડે ભાગતાં,

$$\frac{F}{N} = \left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right]\tan\theta$$

પરંતુ, $\frac{F}{N} = \mu_s$ (સ્થિત-ઘર્ષણાંક)

$$\therefore \mu_s = \left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right] tan\theta$$

$$\therefore \mu_s = \frac{1}{\left[1+\frac{R^2}{K^2}\right]} tan\theta \quad (2.12.7)$$

અત્રે ગબડતાં પદાર્થની સપાટી પરની જે રેખા આપેલી ક્ષણે ઢાળને અટકે છે, તે તત્ક્ષણ પૂરતી સ્થિર હોય છે અને તેથી ઉપરના સમીકરણ (2.11.7)માં સ્થિત ઘર્ષણાંક વાપર્યો છે.

ઘર્ષણનાં કારણે પદાર્થ સરક્યા વિના ગબડતો હોવાથી સમીકરણ (2.12.7) પરથી કહી શકાય કે જો,

$$\mu_s \geq \frac{1}{\left[1+\frac{R^2}{K^2}\right]} tan\theta \quad (2.12.8)$$

શરત પળાય તો જ પદાર્થ ઢાળ પરથી સરક્યા સિવાય ગબડી શકે છે.

ખાસ કિસ્સા :

(1) પાતળી વીંટી :

ટેબલ 1માંથી પાતળી વીંટી માટે K = R

Kનું આ મૂલ્ય સમીકરણ (2.12.8)માં મૂકતાં,

$$\mu_s \geq \frac{1}{2} tan\theta \quad (2.12.9)$$

(2) વર્તુળાકાર તકતી : $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$ (ટેબલ 1માંથી)

Kનું આ મૂલ્ય સમીકરણ (2.12.8)માં મૂકતાં,

$$\mu_s \geq \frac{1}{3} tan\theta \quad (2.12.10)$$

(3) નક્કર ગોળો : $K = \sqrt{\frac{2}{5}}R$ (ટેબલ 1માંથી)

આ મૂલ્ય સમીકરણ (2.12.8)માં મૂકતાં

$$\mu_s \geq \frac{2}{7} tan\theta \quad (2.12.11)$$

સારાંશ

1. **દૃઢ પદાર્થ :** જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર જળવાઈ રહેતાં હોય તેને દૃઢ પદાર્થ **(rigid body)** કહે છે.

   રોટેશનલ કાઇનેમેટિક્સ : જ્યારે દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિનાં કારણોની ચિંતા કર્યા સિવાય માત્ર ચાકગતિનું વર્ણન કરવામાં આવે, ત્યારે તે વિષયાંગને રોટેશનલ કાઇનેમેટિક્સ કહે છે.

   રોટેશનલ ડાઇનેમિક્સ : દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિનું, તે માટે જવાબદાર કારણો તેમજ પદાર્થના ગુણધર્મો સાથે વર્ણન કરીએ, તો તે વિષયાંગને રોટેશનલ ડાઇનેમિક્સ કહે છે.

2. **કોણીય ઝડપ :** $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ તેનો SI એકમ rad s^{-1} અથવા rotation s^{-1}

   કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો અદિશ સંબંધ

   $v = r\omega$

   કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ

   $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

   જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ :

   જમણા હાથના સ્ક્રૂને ભ્રમણાક્ષને સમાંતર ગોઠવી, વસ્તુ જે રીતે ભ્રમણ કરતી હોય તે જ રીતે સ્ક્રૂને ભ્રમણ આપતાં સ્ક્રૂ જે દિશામાં ખસે, તેને $\vec{\omega}$ની દિશા ગણવામાં આવે છે.

   કોણીય પ્રવેગનું સૂત્ર :

   $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ તેનો SI એકમ rad s^{-2} અથવા rotation s^{-2}

   રેખીય પ્રવેગ $\vec{a}$ અને કોણીય પ્રવેગ $\vec{\alpha}$ વચ્ચેનો સંબંધ

   $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} = \vec{\alpha_r} + \vec{\alpha_T}$

$\vec{\omega} \times \vec{v}$ ને રેખીય પ્રવેગનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક a_r કહે છે.

$$a_r = \omega v = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$\vec{\alpha} \times \vec{r}$ ને રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક a_T કહે છે.

$$a_T = \alpha r$$

રેખીય પ્રવેગનાં માનાંક

$$a = \sqrt{a^2{}_r + a^2{}_T} = \sqrt{\omega^2 v^2 + \alpha^2 r^2}$$

3. અચળ કોણીય પ્રવેગવાળી ચાકગતિ અને અચળ રેખીય પ્રવેગવાળી રેખીય ગતિનાં સૂત્રો વચ્ચેની સામ્યતા.

રેખીય ગતિ	ચાક ગતિ
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}t^2$
$d = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$	$\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)\cdot t$
$d = \left(\frac{v^2 - {v_0}^2}{2a}\right)$	$\theta = \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}\right)$

4. રેખીય ગતિમાં જે ભાગ બળ ભજવે છે, તે જ ભાગ ચાકગતિમાં ટૉર્ક ભજવે છે.

ટૉર્ક $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ = બળની ચાકમાત્રા.

તેની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ પરથી મળે છે.

જો સ્થિર ભ્રમણાક્ષ પરનો એકમસદિશ $\hat{n}$ હોય, તો ટૉર્કનો $\vec{\tau} \cdot \hat{n}$ ઘટક ચાકગતિ માટે જવાબદાર હોય છે.

ટૉર્ક એ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળની અસરકારકતાનું માપ છે.

બળયુગ્મની ચાકમાત્રા = (બેમાંથી એક બળનું માન)(બે બળો વચ્ચેનું લંબઅંતર)

દૃઢ પદાર્થના રેખીય સંતુલન માટે જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બળો

$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ..... $\vec{F}_n$ હોય, તો $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_n = 0$, થવું જરૂરી છે.

ઉપર્યુક્ત બળોને કારણે ઉદ્ભવતાં ટૉર્ક $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, ... $\vec{\tau}_n$ અને $\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \ldots\ldots + \vec{\tau}_n = 0$ ચાકગતીય સંતુલનની શરત છે.

5. રેખીય વેગમાનની ચાકમાત્રાને કોણીય વેગમાન કહે છે.

કોણીય વેગમાન $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર ટૉર્ક દર્શાવે છે.

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

કણોના તંત્ર પર પ્રવર્તતું ટૉર્ક

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

દૃઢ વસ્તુ માટે

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

જ્યાં I જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

જડત્વની ચાકમાત્રા $I = m_1 r^2_1 + m_2 r^2_2 + ... + m_n r^2_n$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

6. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ :

"જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું પરિણામી ટૉર્ક શૂન્ય હોય, તો દૃઢ પદાર્થનું કોણીય વેગમાન અચળ રહે છે."

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{અચળ}$$

7. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમની ભૌમિતિક રજૂઆત પરથી ગ્રહોની ગતિ માટેનો કૅપ્લરનો બીજો નિયમ મળી શકે છે, જે નીચે મુજબ છે :

"સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખાએ એકમસમયમાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળ અચળ હોય છે."

સૂત્ર સ્વરૂપે લખતાં $\frac{dA}{dt}$ = અચળ. અત્રે $\frac{dA}{dt}$ ને ક્ષેત્રીય વેગ કહે છે.

8. દૃઢ પદાર્થ માટે વ્યાપક સ્વરૂપે $I = MK^2$

જ્યાં, $K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + ... + r_n^2}{n}}$

અહીં K ને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા કહે છે.

9. જડત્વની ચાકમાત્રા માટેનું સમાંતર અક્ષનું પ્રમેય :

$I = I_C + Md^2$ અહીં I_C દ્રવ્યમાનકેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે. M એ વસ્તુનું દળ છે અને I એ ઉપર્યુક્ત અક્ષને સમાંતર તથા તેનાથી (d) જેટલા લંબઅંતરે આવેલી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

જડત્વની ચાકમાત્રા માટેનું લંબઅક્ષનું પ્રમેય :

જો I_x, I_y અને I_z, X, Y અને Z, અક્ષોને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાઓ હોય તો,

$I_z = I_x + I_y$.

10. સરક્યા વિના ઘન પદાર્થને ગબડવાની શરત,

$$\mu_s \geq \left[\frac{1}{1 + \frac{R^2}{K^2}}\right] tan\theta$$

ઉપરાંત ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થ માટે રેખીય વેગ અને રેખીય પ્રવેગનાં સૂત્રો અનુક્રમે,

$$v = \left[\frac{2gh}{1 + \frac{K^2}{R^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ અને } a = \left[\frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)}\right].$$

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. દઢ પદાર્થની ભ્રમણાક્ષથી 10 cm અંતરે આવેલા કણની કોણીય ઝડપ 12 rad s^{-1} છે, તો તે ભ્રમણાક્ષથી 20 cm અંતરે આવેલા કણની કોણીય ઝડપ કેટલી હશે ?

(A) 2 rad s^{-1} (B) 15 rad s^{-1} (C) 12 rad s^{-1} (D) 10 rad s^{-1}

2. ભ્રમણાક્ષથી 10 cm અંતરે આવેલા કણની કોણીય ઝડપ 20 rad s^{-1} છે, તો તેની રેખીય ઝડપ કેટલી ?

(A) 1 cm s^{-1} (B) 20 cm s^{-1} (C) 200 cm s^{-1} (D) 400 cm s^{-1}

3. ઘડિયાળના મિનિટ-કાંટાની કોણીય ઝડપ કેટલી ?

(A) $\frac{\pi}{43200}$ rad s^{-1} (B) $\frac{\pi}{1800}$ rad s^{-1}

(C) $\frac{\pi}{6}$ rad s^{-1} (D) $\frac{\pi}{12}$ rad s^{-1}

4. એક વ્હીલ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ શરૂ કરી 4 s ના અંતે 64 rad s^{-1} જેટલો કોણીય વેગ પ્રાપ્ત કરે છે, તો તેનો અચળ કોણીય પ્રવેગ .... હોય.

(A) 64 rad s^{-2} (B) 128 rad s^{-2} (C) 16 rad s^{-2} (D) 4 rad s^{-2}

5. પૃથ્વીની ફરતે ભ્રમણ કરતાં એક કૃત્રિમ ઉપગ્રહનું દળ 500 kg છે. તેનું કોણીય વેગમાન 4×10^7 J s હોય, તો તેનો ક્ષેત્રીય વેગ શોધો.

(A) 2×10^4 m^2 s^{-1} (B) 0

(C) 2×10^7 m^2 s^{-1} (D) 4×10^4 m^2 s^{-1}

6. ધારો કે પૃથ્વીનું દળ અચળ રહે તેમ એકાએક સંકોચન થઈ તેની ત્રિજ્યા $\frac{R}{4}$ થઈ જાય, તો પૃથ્વી પરનો 24 કલાકનો દિવસ કેટલા કલાકનો થઈ જાય ? R એ પૃથ્વીની હાલની ત્રિજ્યા છે.

(A) 1.5 h (B) 6 h (C) 48 h (D) 36 h

7. બે સમાન ઈંડામાં એક ઈંડુ કાચું છે તથા બીજું બાફેલું છે. બંને સમાન કોણીય ઝડપથી ભ્રમણ કરે છે. કયું ઈંડુ વહેલું સ્થિર થશે ?

(A) કંઈ કહી શકાય નહિ. (B) બંને ઈંડા એકી સાથે સ્થિર થશે.

(C) બાફેલું (D) કાચું

8. સમાન દળ અને ત્રિજ્યા ધરાવતાં એક પોલો નળાકાર અને નક્કર ગોળો આપેલ છે. આ બંને પર સરખું ટૉર્ક સમાન સમય માટે લગાડીને ભ્રમણ કરાવવામાં આવે છે, ત્યારે નળાકાર તેની ભૌમિતિક અક્ષને તથા ગોળો તેના વ્યાસને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે. આ બંનેમાંથી કોની કોણીય ઝડપ વધારે હશે ?

(A) કહી ન શકાય. (B) બંનેની ઝડપ સમાન હશે.

(C) નળાકાર (D) ગોળો

9. એક ઢાળનો કોણ 30° છે. આ ઢાળ પર ગતિ કરતા નક્કર નળાકારનો ઢાળ સાથેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક 0.35 છે, તો આ નળાકાર ઢાળ પર સરક્યા વગર ગબડશે ?

(A) નળાકાર ઢાળ પર સ્થિર રહેશે. (B) કશું કહી શકાય નહિ.

(C) હા. (D) ના.

10. ઘર્ષણયુક્ત ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડીને તળિયે આવતા નક્કર નળાકારનો વેગ શાના પર આધારિત છે ?

(A) નળાકારનું દળ (B) નળાકારની લંબાઈ

(C) ઢાળની ઊંચાઈ (D) નળાકારની ત્રિજ્યા

11. એક વર્તુળાકાર તકતીનું દળ 4 kg અને તેની ત્રિજ્યા 2 m છે. તેના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા .... છે.

(A) 24 kg m^2 (B) 8 kg m^2 (C) 16 kg m^2 (D) 11 kg m^2

12. પૃથ્વીના ધ્રુવપ્રદેશોનો બરફ પીગળીને વિષુવવૃત્ત પર આવે, તો દિવસની લંબાઈ (હાલ 24 કલાક) પર શી અસર થાય ?

(A) દિવસ ટૂંકો બને. (B) દિવસ લાંબો બને.

(C) કોઈ જ ફેરફાર થાય નહિ.

(D) દિવસ અને રાતની લંબાઈ સમાન બને.

13. જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક શૂન્ય હોય, તો નીચેનામાંથી કઈ ભૌતિક રાશિ અચળ રહેશે ?

(A) રેખીય વેગમાન (B) કોણીય વેગમાન

(C) બળ (D) રેખીય બળનો આઘાત

14. એક ફ્લાયવ્હીલ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ભ્રમણ કરવાનું શરૂ કરી 4 મિનિટમાં 240 પરિભ્રમણ s^{-1} ની કોણીય ઝડપ પ્રાપ્ત કરે છે, તો તેનો સરેરાશ કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ?

(A) 1 પરિભ્રમણ s^{-2} (B) 3 પરિભ્રમણ s^{-2}

(C) 4 પરિભ્રમણ s^{-2} (D) 2 પરિભ્રમણ s^{-2}

15. બે સમાન ગોળાઓ ઢાળ પર ગબડે છે. તેમાંનો એક નક્કર છે અને બીજો પોલો છે, તો નક્કર ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્રા અને પોલા ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્રાનો ગુણોત્તર (વ્યાસને અનુલક્ષીને ભ્રમણાક્ષ લેતાં).

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$

16. બે સમાન નળાકારોમાંનો એક નક્કર છે અને બીજો પોલો છે. જો તેમની ભ્રમણાક્ષો તરીકે તેમની ભૌમિતિક અક્ષો લેવામાં આવે, તો નક્કર નળાકારની ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા (radius of gyration) અને પોલા નળાકારની ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર કેટલો હશે ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

17. M દ્રવ્યમાન અને R ત્રિજ્યાવાળી એક પાતળી વીંટી તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને ω જેટલા કોણીય વેગથી ગતિ કરે છે. હવે જો બિલકુલ હળવેથી બે બિંદુવત્ m દળવાળા કણ તેના વ્યાસના સામ સામેના છેડાઓ પર લાગડતા તેનો કોણીય વેગ કેટલો બનશે ?

(A) $\left(\dfrac{M}{M+2m}\right)\omega$ (B) $\left(\dfrac{M}{M+m}\right)\omega$

(C) $\left(\dfrac{M+2m}{M}\right)\omega$ (D) $\left(\dfrac{M-2m}{M+2m}\right)\omega$

18. r ત્રિજ્યા તથા m દળવાળી એક વીંટી તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાક ગતિ કરે છે. તો તેની ચાકગતિ-ઊર્જા કેટલી હશે ?

(A) $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ (B) $\frac{1}{2}mr\omega^2$ (C) $mr^2\omega^2$ (D) $mr\omega^2$

19. ભૂસ્થિત ઉપગ્રહ (geostationary statellite)ના કક્ષીય કોણીય વેગના મૂલ્ય અને પૃથ્વીના તેની અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણગતિના કોણીય વેગના મૂલ્યનો ગુણોત્તર કેટલો હશે ?

(A) 3 : 1 (B) 4 : 3 (C) 1 : 1 (D) 1 : 2

20. સૂર્યને ફરતે ભ્રમણ કરતાં ગ્રહનો ક્ષેત્રીય-વેગ (areal velocity)

(A) વધ્યા કરે છે. (B) અચળ રહે છે.

(C) ઘટ્યા કરે છે. (D) કશું કહી શકાય નહિ.

જવાબો

1. (C)	2. (C)	3. (B)	4. (C)	5. (D)	6. (A)
7. (C)	8. (D)	9. (C)	10. (C)	11. (B)	12. (B)
13. (B)	14. (A)	15. (B)	16. (B)	17. (A)	18. (A)
19. (C)	20. (B)				

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. કોણીય વેગના અને કોણીય પ્રવેગના SI એકમ જણાવો.
2. અચળ કોણીય વેગથી ચાકગતિ કરતી દૃઢ પદાર્થના પ્રતિનિધિ કણના રેખીય પ્રવેગના સ્પર્શીય ઘટકનું મૂલ્ય કેટલું હશે ?
3. શું દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિ માટે બધા કણોના રેખીય ચલો સમાન હોય છે ?
4. રેખીય ગતિમાં જે ભાગ બળ ભજવે છે, તેવો જ ભાગ ચાકગતિમાં કઈ ભૌતિક રાશિ ભજવે છે ?
5. ટૉર્કની દિશા કેવી રીતે શોધવામાં આવે છે ?
6. Z-અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે ટૉર્કનો કયો ઘટક જવાબદાર હશે ?
7. ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળની અસરકારકતાના માપને શું કહે છે ?
8. બળયુગ્મની ચાકમાત્રાનું સૂત્ર આપો.
9. રેખીય વેગમાનની ચાકમાત્રાને શું કહે છે ?
10. કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર શું દર્શાવે છે ?
11. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ લખો.
12. ગ્રહને સૂર્ય સાથે જોડતી રેખા વડે આંતરાતા ક્ષેત્રફળના સમયદરને શું કહે છે ?
13. જડત્વની ચાકમાત્રા માટેના સમાંતર અક્ષના પ્રમેયનું વિધાન લખો.
14. જડત્વની ચાકમાત્રા માટેના લંબઅક્ષના પ્રમેયનું વિધાન લખો.
15. ઢાળ પર પદાર્થ સરક્યા સિવાય ગબડે તે માટેની શરત સૂત્ર સ્વરૂપે લખો.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. દૃઢ પદાર્થના કોણીય સ્થાનાંતરને વ્યાખ્યાયિત કરી તેમની તત્કાલીન કોણીય ઝડપનું સૂત્ર મેળવો.
2. ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક પ્રતિનિધિ કણ માટે રેખીય ઝડપ અને કોણીય ઝડપ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.
3. કોણીય વેગની દિશા માટેનો જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ લખી કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરો.
4. રેખીય પ્રવેગ અને કોણીય પ્રવેગ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.
5. અચળ કોણીય પ્રવેગ સાથેની ચાકગતિનાં સમીકરણો તારવો.
6. દૃઢ પદાર્થના સંતુલન માટેની શરતો જણાવો.
7. ટૉર્કની ભૌતિક સમજૂતી આપો.
8. બળયુગ્મ એટલે શું ? બળયુગ્મની ચાકમાત્રાનું સૂત્ર મેળવો.
9. કોણીય વેગમાન અને ટૉર્ક વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.
10. દૃઢ વસ્તુના કોણીય વેગમાનનું સૂત્ર $\vec{L} = I\vec{\omega}$ મેળવો.
11. θ કોણવાળા ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થ માટે $v^2 = \left[\dfrac{2gh}{1 + \dfrac{K^2}{R^2}}\right]$ સૂત્ર મેળવો.
12. θ કોણવાળા ઢાળની ટોચ પરથી સરક્યા સિવાય પદાર્થ ગબડીને તળિયે આવતાં તેનો વેગ $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + \dfrac{K^2}{R^2}}}$ મળે છે, તેમ સ્વીકારી તેના રેખીય પ્રવેગ અને ઘર્ષણબળનું સૂત્ર મેળવો.
13. ઢાળ પરથી સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થનો પ્રવેગ $a = \dfrac{g\sin\theta}{1 + \dfrac{K^2}{R^2}}$ સ્વીકારી સ્થિત ઘર્ષણાંકનું સૂત્ર મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. એક દૃઢ પદાર્થ 12 sમાં 600 radનું કોણીય સ્થાનાંતર અનુભવી 100 rad s^{-1}ની કોણીય ઝડપ પ્રાપ્ત કરે છે, તો તેના અચળ કોણીય પ્રવેગ અને પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ શોધો.

   [**જવાબ :** 8.33 rad s^{-1}; 0 rad s^{-1}]

2. એક ચક્રની પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ 20 rad s^{-1} છે. 10 s દરમિયાન તે 100 radનું કોણીય સ્થાનાંતર કરે છે, તો પ્રારંભથી માંડીને તે અટકી જાય ત્યાં સુધીમાં કેટલાં પરિભ્રમણ કરશે ? તેનો કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ?

   [**જવાબ :** $\theta = \dfrac{50}{\pi}$ પરિભ્રમણો; $\alpha = -2$ rad s^{-2}]

3. 1 m ત્રિજ્યાવાળી 20 kg દળની એક રિંગ તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબઅક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે. આ રિંગની કોણીય ઝડપ 4 s માં 5 rad s^{-1} થી વધીને 25 rad s^{-1} થાય છે, તો (1) રિંગ પર પ્રવર્તતા ટૉર્કનું મૂલ્ય શોધો. (2) 4 s દરમિયાન આ ટૉર્ક પર થયેલું કાર્ય શોધો. [જવાબ : τ = 100 N m; W = 6000 J]

4. એક કણનો જ્યારે સ્થાનસદિશ (4, 6, 12) એકમ છે, ત્યારે તેનો વેગ-સદિશ (2, 3, 6) એકમ છે. જો કણનું દળ 50 એકમ હોય, તો આ કણનું કોણીય વેગમાન શોધો.

[જવાબ : શૂન્ય]

5. એક પોલો નળાકાર θ કોણવાળા ઢાળ પરથી સરક્યા સિવાય ગબડે છે, તો ઢાળની સપાટીને સમાંતર તેનો રેખીય પ્રવેગ શોધો. [જવાબ : 0.5 $g\sin\theta$)]

6. 100 kg અને 200 kg ના બિંદુવત્ પદાર્થોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે (2, 4, 6) m અને (3, 5, 7) m છે, તો આ તંત્રની Z-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

[જવાબ : 8800 kg m^2]

7. એક નક્કર ગોળાનું દળ 8 kg છે. તે 70 m ઊંચાઈના ઢાળ પરથી સરક્યા વિના ગબડીને તળિયે આવે છે, તો ઢાળના તળિયે તેનો રેખીય વેગ કેટલો હશે ? તથા તે વખતે તેની ચાકગતિ-ઊર્જા શોધો. (g = 10 m s^{-2} લો.)

[જવાબ : રેખીય વેગ $v = 10\sqrt{10}$ m s^{-1}; ચાકગતિ-ઊર્જા = 16×10^2 J]

8. પૃથ્વીની પોતાની ધરીને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે કોણીય વેગમાન શોધો. પૃથ્વીનું દળ = 6×10^{24} kg તથા પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6400 km છે.

[જવાબ : 7.15×10^{33} kg m^2 s^{-1}]

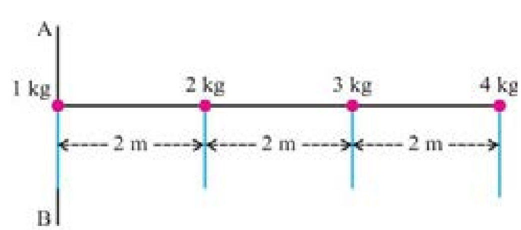
9. 200 kg દળ ધરાવતા એક પદાર્થ માટે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી 3 m અંતરે રહેલી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા 8200 kg m^2 છે, તો આ અક્ષને સમાંતર એવી દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી 5 m અંતરે રહેલી અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

[જવાબ : 11400 kg m^2]

10. m જેટલા સમાન દળ ધરાવતા ચાર બિંદુવત્ કણ 'a' બાજુ ધરાવતા એક ચોરસના ચાર ખૂણાઓ પર મૂકેલા છે, તો આ ચોરસના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તેના સમતલને લંબ આવેલ અક્ષને અનુલક્ષીને આ તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો. [જવાબ : 2 ma^2]

11. M દળ તથા R ત્રિજ્યાવાળા ચાર નક્કર ગોળાઓ એક ચોરસના ચાર ખૂણાઓ પર મૂકેલા છે. જો ચોરસની બાજુનું માપ 'a' હોય, તો ચોરસની કોઈ એક બાજુને અક્ષ તરીકે લેતાં તેને અનુલક્ષીને આ તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો. [જવાબ : $2\left(\frac{4}{5}MR^2 + Ma^2\right)$]

12. ચાર બિંદુવત્ કણના દળ 1 kg, 2 kg, 3kg અને 4 kg છે. તેમને એક વજનરહિત સળિયા સાથે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જોડેલા છે. તો આ તંત્રની AB અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.



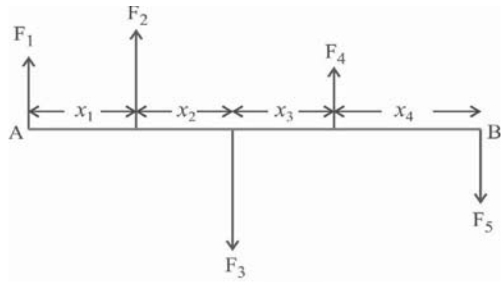
આકૃતિ **2.22**

[જવાબ : 200 kg m^2]

13. એક તકતી સરક્યા સિવાય અચળ વેગથી ગબડે છે. તો તેની કુલ ગતિ-ઊર્જાનો કેટલામો ભાગ તેની ચાકગતિ-ઊર્જાના સ્વરૂપમાં હશે ? [જવાબ : $\frac{1}{3}$]

14. M દળ ધરાવતી તથા R ત્રિજ્યા ધરાવતી નિયમિત રિંગની જડત્વની ચાકમાત્રા તેની ભૌમિતિક અક્ષને અનુલક્ષીને MR^2 હોય છે, તેમ સાબિત કરો.

15. આકૃતિ 2.25માં દર્શાવ્યા પ્રમાણ એક હલકા સળિયા પર બળો લાગે છે. આ બળોના પરિણામી બળનું સૂત્ર લખો. આ પરિણામી બળ Aથી કેટલા અંતરે હશે ?



આકૃતિ 2.25

[જવાબ : $\vec{F} = F_1(\hat{j}) + F_2(\hat{j}) + F_3(-\hat{j}) + F_4(\hat{j}) + F_5(-\hat{j})$

$$x = \frac{x_1F_2 - (x_1+x_2)F_3 + (x_1+x_2+x_3)F_4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)F_5}{F_1+F_2+F_4-F_3-F_5}$$]

•

સર જગદીશચંદ્ર બોઝ (1858-1937)

જગદીશચંદ્રનો જન્મ બંગાળમાં 30 નવેમ્બર, 1858ના રોજ થયો હતો. તેમણે કેમ્બ્રિજથી બી.એ.ની પદવી મેળવી, તથા બી.એસ.સી.ની પદવી લંડન યુનિવર્સિટીમાંથી મેળવી. તેમણે વક્રીભવન, નિવર્તન અને ધ્રુવીભવનના પ્રયોગો કર્યા. તેમણે વિજ્ઞાનનું મુખ્ય કાર્ય માઈક્રોવેવ્ઝમાં કર્યું. તેમણે ખૂબ નાની તરંગલંબાઈના તરંગો ઉત્પન્ન કર્યા અને હટ્ર્ઝના વિદ્યુતતરંગોના ડિરેક્ટરમાં સુધારો કર્યો. તેમણે 25 થી 5mm તરંગલંબાઈના તરંગો ઉત્પન્ન કરવા માટેનું નાનું સાધન બનાવ્યું. 19મી સદીના અંત દરમિયાન તેમણે વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોની વનસ્પતિ પર થતી અસર તરફ ધ્યાન કેન્દ્રિત કર્યું. પ્રોફેસર તરીકે પ્રેસિડન્સિ કૉલેજમાં 1915માં નિયુક્તિ મળી. 1920માં રૉયલ સોસાયટીના ફેલો તરીકે ચૂંટાયા. 23 નવેમ્બર, 1937ના રોજ ગિરિધર (બિહાર)માં તેમનું અવસાન થયું.

પ્રકરણ 3

ગુરુત્વાકર્ષણ

3.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, આકાશમાંના તારાઓ અને સૂર્યની આસપાસ ઘૂમતા ગ્રહો પ્રાચીન સમયથી વિજ્ઞાનીઓનું ધ્યાન આકર્ષતા રહ્યા છે.

સૂર્યમંડળનો વૈજ્ઞાનિક પદ્ધતિથી અભ્યાસ કરનાર સૌપ્રથમ ગ્રીક લોકો હતા. લગભગ 2000 વર્ષ અગાઉ ટોલેમી (Ptolemy) નામના વિજ્ઞાનીએ ગ્રીક ખગોળશાસ્ત્રનો જે સિદ્ધાંત રજૂ કર્યો, તેને ટોલેમીનો **પૃથ્વી-કેન્દ્રીય વાદ (geo-centric theory)** કહે છે.

આ વાદ અનુસાર પૃથ્વી વિશ્વના કેન્દ્રમાં સ્થિર છે અને બધા આકાશી પદાર્થો-તારાઓ, સૂર્ય અને ગ્રહો એ બધા - પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરે છે. ટોલેમીએ આ પદાર્થોની ગતિ વર્તુળમય હોવાનો મત રજૂ કર્યો હતો. તેના મત મુજબ ગ્રહો વર્તુળમાર્ગે ગતિ કરે છે અને એ વર્તુળોનાં કેન્દ્ર વધુ મોટાં વર્તુળોમાં ગતિ કરે છે. પરંતુ પાંચમી સદીમાં આર્યભટ્ટે, સૂર્યને કેન્દ્ર તરીકે રાખી બધા ગ્રહો તેની આસપાસ વર્તુળમય ગતિ કરે છે, તેવો સિદ્ધાંત રજૂ કર્યો.

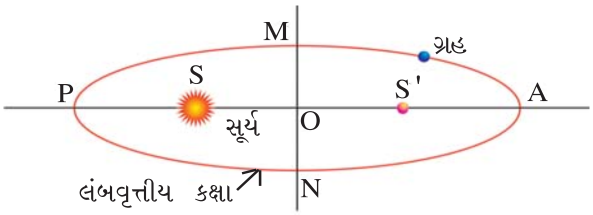
ત્યાર બાદ લગભગ એક હજાર વર્ષ પછી પોલૅન્ડના નિકોલસ કૉપરનિકસે (1473-1543) કેન્દ્રમાં સૂર્ય હોય અને તેની આસપાસ બધા ગ્રહો વર્તુળમાર્ગો પર ભ્રમણ કરતા હોય તે અંગેનું **સચોટ મૉડેલ** રજૂ કર્યું. આને કૉપરનિકસનો **સૂર્ય-કેન્દ્રીય વાદ (helio-centric theory)** કહે છે. આમ, આર્યભટ્ટના સિદ્ધાંતને સમર્થન મળ્યું. જોકે કોપરનિકસના મૉડેલને તે સમયની માન્ય સંસ્થાઓ તરફથી સમર્થન-સ્વીકૃતિ મળ્યાં ન હતાં, પરંતુ ગેલિલિયોએ તેના સિદ્ધાંતને ટેકો આપ્યો હતો.

ડેન્માર્કના ટાઇકો બ્રાહે (Tyco Brahe, 1546-1601) એ પોતાના સમગ્ર જીવન દરમ્યાન ગ્રહોની ગતિ અંગે નરી આંખે મેળવેલાં અવલોકનોનો અભ્યાસ જહૉન કૅપ્લરે (1571-1640) કર્યો અને ગ્રહોની ગતિ અંગેના ત્રણ નિયમો પ્રતિપાદિત કર્યા, જે કૅપ્લરના નિયમો તરીકે ઓળખાય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ નિયમો, ન્યૂટનનો ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ અને ઉપગ્રહો વિષે અભ્યાસ કરીશું.

3.2 કૅપ્લરના નિયમો (Kepler's Laws)

ટાઇકો બ્રાહેએ મેળવેલાં અવલોકનોના અભ્યાસ પરથી જહૉન કૅપ્લરે ગ્રહોની ગતિ અંગે ત્રણ નિયમો આપ્યા, જેને કૅપ્લરના નિયમો કહે છે. આ નિયમો નીચે મુજબ છે.

પહેલો નિયમ (કક્ષાનો નિયમ) First law (law of orbits) : "બધા ગ્રહો એવી લંબવૃત્તીય કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે કે જેના એક કેન્દ્ર પર સૂર્ય હોય."



ગ્રહની લંબવૃત્તીય કક્ષા

આકૃતિ 3.1

PA = $2a$, MN = $2b$

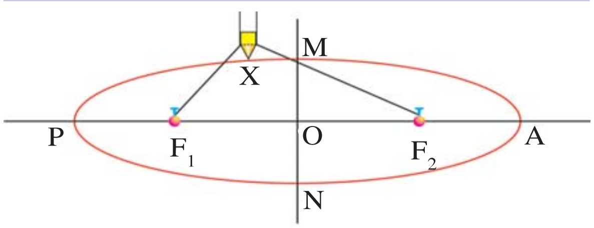
OP = OA = a = અર્ધ-દીર્ઘ અક્ષ

આકૃતિ 3.1માં કોઈ ગ્રહનો ગતિપથ દર્શાવતા લંબવૃત્ત P N A Mનાં બે કેન્દ્રો S અને S' છે.

કૉપરનિકસે વર્તુળકક્ષા સૂચવી હતી, તેના કરતાં આ કક્ષાનો નિયમ અલગ આકાર સૂચવે છે.

[**માત્ર જાણકારી માટે :** લંબવૃત્ત નીચે પ્રમાણે દોરી શકાય.

એક l લંબાઈની દોરીના બે છેડાઓને F_1 અને F_2 બિંદુઓ પર સ્થિર રાખો, જ્યાં $F_1F_2 < l$. હવે એક પેન્સિલની અણીને દોરી સાથે રાખી દોરી કડક રહે તેમ ફેરવતાં મળતો વક્ર P N A M આકૃતિ 3.2 મુજબનો લંબવૃત્ત બને છે.



લંબવૃત્ત આ રીતે દોરી શકાય

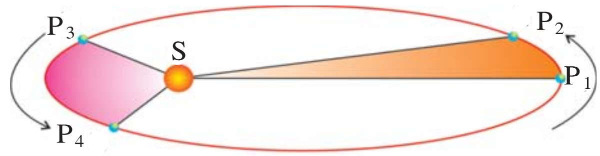
આકૃતિ 3.2

OP = a = OA

OM = b = ON

અહીં $F_1X + F_2X$ = અચળ. તે લંબવૃત્તની લાક્ષણિકતા દર્શાવે છે. વળી, જ્યારે $a = b$; બને ત્યારે લંબવૃત્ત એ વર્તુળ બને છે.]

બીજો નિયમ (ક્ષેત્રફળનો નિયમ) Second Law (Law of Areas) : "સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખાએ સમાન સમયગાળામાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે." જુઓ આકૃતિ 3.3.



ક્ષેત્રીય વેગ અચળ હોય છે

આકૃતિ 3.3

જ્યારે ગ્રહ સૂર્યથી દૂર હોય છે, ત્યારે અમુક Δt સમયગાળામાં P_1 થી P_2 સ્થાને જાય છે અને સૂર્યની નજીક હોય ત્યારે તેટલા જ સમયગાળામાં P_3 થી P_4 પર જાય છે. આથી આ નિયમ મુજબ,

SP_1P_2નું ક્ષેત્રફળ = SP_3P_4નું ક્ષેત્રફળ

ગ્રહ જ્યારે સૂર્યથી દૂર હોય ત્યારે તેની કક્ષામાં ધીમે ફરતા હોય છે અને નજીક હોય ત્યારે વધારે ઝડપથી ફરતા હોય છે, તેવાં અવલોકનો પરથી આ નિયમ મળેલ છે.

એકમસમયમાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળને આપણે ક્ષેત્રીય વેગ (= ક્ષેત્રફળ/સમય) areal velocity કહી શકીએ અને આ નિયમ ક્ષેત્રીય વેગ અચળ રહે છે તેમ દર્શાવે છે. આ બાબત પ્રકરણ 2માં પણ તમે જોઈ ગયા છો.

ત્રીજો નિયમ (આવર્તકાળનો નિયમ) Third Law (Law of Period) : "કોઈ પણ ગ્રહના પરિભ્રમણના આવર્તકાળ (T)નો વર્ગ તેની લંબવૃત્તીય કક્ષાની અર્ધ-દીર્ઘ અક્ષ (a)ના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે." એટલે કે $T^2 \propto a^3$.

આવર્તકાળ (T) એટલે એક પરિભ્રમણ પૂરું કરવા લાગતો સમય.

નીચેના ટેબલમાં નમૂનારૂપે આપેલ કેટલાક ગ્રહોના ઉદાહરણ પરથી T^2/a^3 = અચળ અને તેથી $T^2 \propto a^3$ હોય છે, તેમ તમે જોઈ શકશો.

ટેબલ 3.1 : (કેટલાક ગ્રહો માટે T^2/a^3 નાં મૂલ્ય)

(આ ટેબલ માત્ર જાણકારી માટે છે.)

ગ્રહ	a m	T year	T^2/a^3 year^2/m^3
બુધ	5.79×10^{10}	0.24	2.95×10^{-34}
પૃથ્વી	15×10^{10}	1.0	2.96×10^{-34}
મંગળ	22.8×10^{10}	1.88	2.98×10^{-34}
શનિ	143×10^{10}	29.5	2.98×10^{-34}

[ગુરુત્વાકર્ષણની શોધ : માત્ર જાણકારી માટે :

ન્યૂટને સફરજનને નીચે પડતું જોયું

આકૃતિ 3.4

એક દંતકથા પ્રમાણે ઝાડ નીચે બેઠેલા ન્યૂટને ઝાડ પરથી સફરજનને નીચે પડતું જોયું. (તે ખાઈ જવાને બદલે !) "તે નીચે જ કેમ પડ્યું ?" - તેના ગહન ચિંતનમાં તે ડૂબી ગયો. આવા ચિંતનના પરિણામ-સ્વરૂપે ન્યૂટને ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમની શોધ કરી. તેની વિચારયાત્રા કંઈક અંશે આવી હતી : (*i*) પૃથ્વીની સપાટી નજીક મુક્તપતન કરતા પદાર્થનો પ્રવેગ 9.8 m/s^2 છે, તે જાણીતું હતું. તેથી સફરજનનો પ્રવેગ $a_{apple} = 9.8\ m/s^2$. (*ii*) પૃથ્વીની આસપાસ વર્તુળભ્રમણ કરતા ચંદ્રનો પ્રવેગ $a_{moon} = v^2/r_m$ પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ હોય છે. જ્યાં r_m = ચંદ્રની કક્ષાની ત્રિજ્યા $= 3.84 \times 10^5$ km. ચંદ્રનો પૃથ્વીની આસપાસના ભ્રમણનો આવર્તકાળ $T_m = 27.3$ દિવસ છે. આ પરથી $v = 2\pi\ r_m/T_m$ મેળવીને તેને ઉપરના સમીકરણમાં મૂકતાં $a_{moon} = 0.0027\ m/s^2$ મળે છે.

$$\therefore \quad \frac{a_{apple}}{a_{moon}} = \frac{9.8}{0.0027} = 3600 \qquad (1)$$

વળી પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તેમનાં અંતરોનો ગુણોત્તર

$$\frac{r_{apple}}{r_{moon}} = \frac{6400\ km}{3.84 \times 10^5 km} = \frac{1}{60} \qquad (2)$$

જ્યાં r_{apple} = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા જેટલું અંતર. પરિણામ (1) અને (2) પરથી ન્યૂટનને જણાયું કે, પદાર્થનો પ્રવેગ, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે, ($a \propto \frac{1}{r^2}$). તેથી પૃથ્વી વડે m દળના પદાર્થ પર લાગતું બળ $\propto \frac{m}{r^2}$.

હવે ન્યૂટનના ગતિના ત્રીજા નિયમ અનુસાર આ પદાર્થ પણ તેટલા જ મૂલ્યનું બળ પૃથ્વી પર વિરુદ્ધ દિશામાં લગાડે, તેથી બળનું મૂલ્ય પૃથ્વીના દળ (M)ને પણ સમપ્રમાણમાં હશે. આમ, $F \propto \frac{Mm}{r^2}$ અથવા $F = \frac{GMm}{r^2}$ મળે, જ્યાં G = અચળાંક.

આ મહાન વૈજ્ઞાનિક શોધના પાયામાં ન્યૂટનની કેટલીક ક્રાંતિકારી માન્યતા હતી. ન્યૂટને એમ માન્યું હતું કે **પૃથ્વી પરના પદાર્થો માટે તેમજ આકાશી પદાર્થો માટે કુદરતના નિયમો (laws of nature)** એકસમાન છે.

આથી પૃથ્વી અને સફરજન વચ્ચેનું બળ તથા પૃથ્વી અને ચંદ્ર વચ્ચેનું બળ એક જ નિયમને અનુસરતા હોવા જોઈએ. આજે તો આપણને આ વિધાન બહુ સાહજિક (obvious) લાગે પણ ન્યૂટનના તે સમયમાં પૃથ્વી પરના પદાર્થો માટેના અને આકાશી પદાર્થો માટેના નિયમો અલગ-અલગ હોવાની માન્યતા હતી. તેથી ન્યૂટનની માન્યતા ખરેખર ક્રાંતિકારી હતી.]

3.3 ન્યૂટનનો ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ (Newton's Universal Law of Gravitation)

ન્યૂટને આપેલો ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ નીચે મુજબ છે :

"વિશ્વમાંનો દરેક કણ બીજા દરેક કણ પર આકર્ષી બળ લગાડે છે, જેનું મૂલ્ય તેમનાં દળોના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે." આ બળની દિશા તેમને જોડતી રેખા પર હોય છે. આ બળને ગુરુત્વાકર્ષણ બળ, અથવા ગુરુત્વાકર્ષી બળ અથવા ગુરુત્વબળ પણ કહે છે.

આ નિયમ મુજબ દળ m_1 ધરાવતા **કણ 1 પર** તેનાથી r અંતરે રહેલા બીજા દળ m_2 ધરાવતા કણ 2 વડે લાગતા ગુરુત્વાકર્ષણ બળનું મૂલ્ય

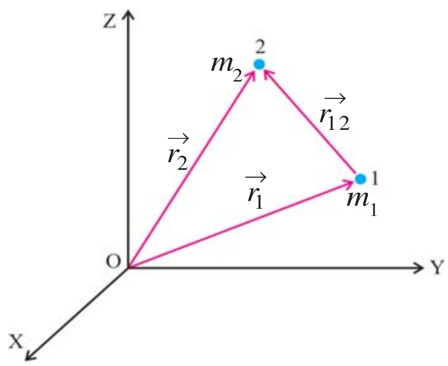
$$|\vec{F}_{12}| = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \qquad (3.3.1)$$

આ બળની દિશા કણ 1થી કણ 2 તરફ ($\vec{r}_{12}$ની દિશામાં) છે. (જુઓ આકૃતિ 3.5)

અત્રે, G એ અચળાંક છે અને તેને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક કહે છે, કારણ કે તેનું મૂલ્ય સમગ્ર વિશ્વમાં બધાં સ્થળે અને બધા સમયે એકસમાન જ હોય

છે. G નું મૂલ્ય સૌપ્રથમ કેવેન્ડિશ નામના વિજ્ઞાનીએ પ્રયોગ પરથી મેળવ્યું હતું. ત્યાર બાદ ઘણા વિજ્ઞાનીઓએ પણ વધુ ચોકસાઈપૂર્વક મેળવ્યું હતું. હાલમાં G નું સ્વીકૃત મૂલ્ય 6.67×10^{-11} N m^2/kg^2 છે. G નું પારિમાણિક સૂત્ર M^{-1} L^3 T^{-2} છે.

સમીકરણ (3.3.1)ને સદિશ સ્વરૂપમાં લખવા માટે આકૃતિ 3.5 ને ધ્યાનમાં લો.



ગુરુત્વબળના સૂત્રનું સદિશ સ્વરૂપ મેળવવું

આકૃતિ 3.5

આકૃતિ પરથી,

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r} \quad (3.3.2)$$

અહીં $r = |\vec{r}_{12}|$

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

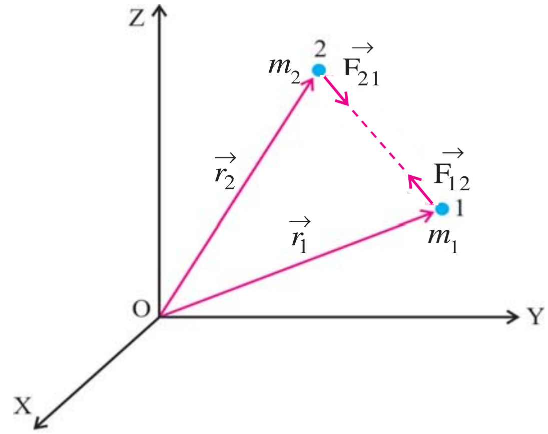
$$\left[\begin{array}{c}\vec{F}_{12} \\ \text{1 પર 2 વડે} \\ \text{લાગતું બળ}\end{array}\right] = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (3.3.3)$$

ગુરુત્વાકર્ષણ બળો પરસ્પર ક્રિયાગત બળો છે. તેથી જેટલું બળ કણ 1 પર કણ 2 વડે $\left(\vec{F}_{12}\right)$ લાગે છે. **તેટલું જ** બળ કણ 2 પર કણ 1 વડે $\left(\vec{F}_{21}\right)$ **વિરુદ્ધ દિશામાં** લાગે છે.

$$\therefore \left[\begin{array}{c}\vec{F}_{21} \\ \text{2 પર 1 વડે} \\ \text{લાગતું બળ}\end{array}\right] = \frac{-G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

(3.3.4)

આ બંને બળો $\vec{F}_{12}$ અને $\vec{F}_{21}$ આકૃતિ 3.6માં દર્શાવ્યાં છે.



બે કણ પરનાં પરસ્પર બળો

આકૃતિ 3.6

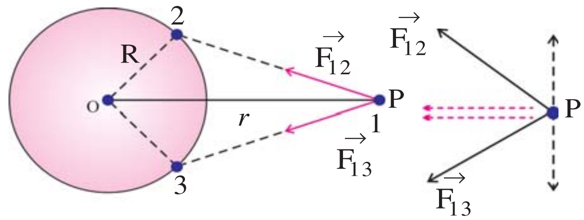
વિસ્તૃત પદાર્થ (extended object) વડે લાગતું બળ : વિસ્તૃત પદાર્થને આપણે બિંદુવત્ કણોના સમૂહ તરીકે લઈ શકીએ. આવા વિસ્તૃત પદાર્થ વડે કોઈ **એક બિંદુવત્ કણ** પર લાગતું કુલ બળ, વિસ્તૃત પદાર્થમાંના દરેક બિંદુવત્ કણ દ્વારા તે કણ પર લાગતા વ્યક્તિગત બળોના સદિશ સરવાળા જેટલું થાય છે. એટલે કે કણ 1 પર વિસ્તૃત પદાર્થ દ્વારા લાગતું કુલ બળ,

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \ldots \quad (3.3.5)$$

$$= \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} + \frac{G m_1 m_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} + \frac{G m_1 m_4}{r_{14}^2} \hat{r}_{14} + \ldots (3.3.6)$$

આ જ રીતે આપણે એક વિસ્તૃત પદાર્થના દરેક કણ વડે **બીજા વિસ્તૃત** પદાર્થના દરેક કણ પર લાગતાં બળોના સદિશ સરવાળા પરથી તે પદાર્થ પર લાગતું કુલ બળ શોધી શકીએ છીએ. કલનશાસ્ત્રની મદદથી આવી ક્રિયા સહેલાઈથી કરી શકીએ છીએ. ખાસ કિસ્સાઓ તરીકે આપણે બે બાબતોની નોંધ લઈશું : (1) સમાન ઘનતાવાળા પોલા ગોળાકાર કવચ વડે કવચની બહાર આવેલા બિંદુવત્ કણ પર લાગતું ગુરુત્વબળ, જાણે કે કવચનું બધું દળ તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયું હોય તેમ ગણીને મળતા બળ જેટલું હોય છે.

[ગુણાત્મક સમજૂતી – માત્ર જાણકારી માટે]



r > R, માટે કવચ વડે લાગતું બળ કવચના કેન્દ્ર તરફ છે

આકૃતિ 3.7

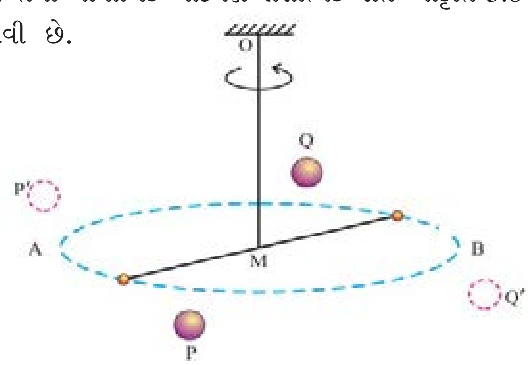
કવચ પરના કણ 2 અને 3 વડે કણ 1 પર લાગતા બળો $\vec{F}_{12}$ અને $\vec{F}_{13}$ ના બે ઘટકો (*i*) OPને સમાંતર અને (*ii*) OP ને લંબ વિચારો. OPને લંબઘટકો નાબૂદ થશે અને OPને સમાંતર ઘટકોનો સરવાળો થશે. આવી ક્રિયા OP રેખાને અનુલક્ષીને સંમિત સ્થાનો ધરાવતા કવચના કણો માટે વિચારતાં P પરનું પરિણામી બળ કવચના કેન્દ્ર પર લાગતું જોઈ શકાય છે. આપણે સાબિતિ આપ્યા વિના એમ સ્વીકારી લઈશું કે આ બળનું મૂલ્ય ઉપર જણાવ્યા મુજબ મેળવી શકાય છે.]

(2) સમાન ઘનતાવાળા પોલા ગોળાકાર કવચ વડે કવચની અંદરના કોઈ પણ બિંદુએ આવેલ કણ પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ શૂન્ય હોય છે.

[ગુણાત્મક સમજૂતી -- માત્ર જાણકારી માટે : કવચના જુદા-જુદા કણો આપેલ કણ પર જુદી-જુદી બધી દિશાઓમાં આકર્ષણબળ લગાડે છે અને આવાં બધાં બળોનું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય છે. આને પણ આપણે સાબિતી વિના સ્વીકારી લઈશું.]

3.4 ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક (Universal Constant of Gravitation)

ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમને રજૂ કરતા સૂત્ર (3.3.1)માં આવતા અચળાંક Gનું મૂલ્ય સૌપ્રથમ ઈંગ્લિશ વિજ્ઞાની કેવેન્ડીશે 1798માં પ્રાયોગિક રીતે મેળવ્યું હતું. તેની પ્રાયોગિક ગોઠવણ સંજ્ઞાત્મક રીતે આકૃતિ 3.8માં દર્શાવી છે.



કેવેન્ડિશના પ્રયોગની ગોઠવણ

આકૃતિ 3.8

એક સ્થિર આધાર પરથી ધાતુના પાતળા તાર વડે લટકાવેલા લાંબા સળિયાના બે છેડે સીસાના નાના સમાન ગોળા A અને B લગાડેલા છે. સીસાના બીજા બે મોટા સમાન ગોળા નાના ગોળાઓની નજીક વિરુદ્ધ બાજુએ સમાન અંતરે લાવવામાં આવે છે. મોટા ગોળા વડે નાના ગોળા પર લાગતાં ગુરુત્વબળો સમાન મૂલ્યનાં અને વિરુદ્ધ દિશામાં છે. આ બળોથી ટૉર્ક રચાય છે, આથી સળિયો તાર OMની આસપાસ ભ્રમણ કરે છે. આમ તાર OM માં વળ ચઢે છે અને તેનો વિરોધ કરતું પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક તારમાં (સ્થિતિસ્થાપકતાને લીધે) ઉત્પન્ન થાય છે.

ગુરુત્વબળોથી રચાતું ટૉર્ક, પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક જેટલું બને ત્યારે તંત્ર સંતુલનમાં આવે છે અને સ્થિર થાય છે. આ સ્થિતિમાં તારમાં ચઢેલો વળ θ માપવામાં આવે છે. વળી, આ સ્થિતિમાં મોટા ગોળાના સ્થાન P અને Q (અથવા P'અને Q') AB રેખાને લંબરેખાઓ પર છે.

ધારો કે દરેક મોટા ગોળાનું દળ = M

દરેક નાના ગોળાનું દળ = *m*

સંતુલનસ્થિતિમાં તેમનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર = AP = BQ = *r*.

સંતુલનસ્થિતિમાં તારમાં ચઢેલ વળ (કોણ) = θ

તારમાં એકમ વળ દીઠ ઉદ્ભવતું પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક = *k*

સળિયાની લંબાઈ AB = *l*.

અત્રે મોટા ગોળા વડે નાના ગોળા પરનું ગુરુત્વબળ

$$= \frac{GMm}{r^2} \qquad (3.4.1)$$

આવાં બંને બળોથી રચાતું કુલ ટૉર્ક

$$= \left(\frac{GMm}{r^2}\right)(l) \qquad (3.4.2)$$

અને પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક $\tau = k\theta$ (3.4.3)

$$\text{સંતુલનસ્થિતિમાં} \left(\frac{GMm}{r^2}\right)(l) = k\theta \quad (3.4.4)$$

$$\therefore \; G = \frac{k\theta r^2}{Mml} \qquad (3.4.5)$$

[અહીં θનું મૂલ્ય તાર પર લગાડેલા એક નાના અરીસાની મદદથી લેમ્પ અને સ્કેલની રીતે મેળવવામાં આવે છે. આ બાબતો આકૃતિમાં દર્શાવેલ નથી. વળી, *k*નું મૂલ્ય એક અન્ય પ્રકારના બીજા પ્રયોગમાં જાણીતું ટૉર્ક τ લગાડીને ઉદ્ભવતો વળ θ માપીને $k = \frac{\tau}{\theta}$ પરથી મેળવાય છે.]

આમ θના માપન પરથી Gનું મૂલ્યાંકન થઈ શકે છે.

ઉદાહરણ 1 : 25 kg અને 10 kg દળના પદાર્થોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે (4, 7, 5) m અને (1, 3, 5) m છે, તો 25 kgના પદાર્થ પર 10 kgના પદાર્થ વડે લાગતા બળનો સદિશ મેળવો. ($G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 લો.)

ઉકેલ : અત્રે $m_1 = 25$ kg, $m_2 = 10$ kg,

$\vec{r_1} = (4, 7, 5)m$, $\vec{r_2} = (1, 3, 5)m$, $\vec{F}_{12} = ?$

$$\vec{F}_{12} \begin{bmatrix} \text{1 પર 2 વડે} \\ \text{લાગતું બળ} \end{bmatrix} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (1)$$

$\vec{r}_{12} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (1, 3, 5) - (4, 7, 5) = (-3, -4, 0)\ m$

$$\therefore r = |\vec{r}_{12}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = 5m$$

અને $$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{(-3, -4, 0)}{5}$$

$$= (-0.6, -0.8, 0)\ m$$

સમીકરણ (1) માં આ મૂલ્યો મૂકતાં,

$$\vec{F}_{12} = (6.67 \times 10^{-11}) \frac{(25 \times 10)}{5^2} (-0.6, -0.8, 0)$$

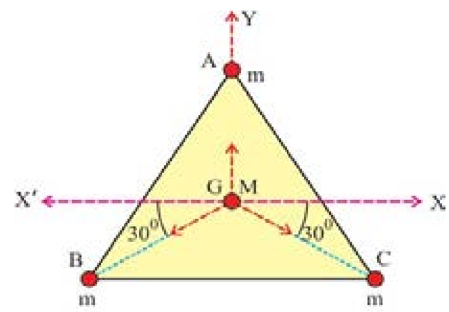
$$= (6.67 \times 10^{-10})\ (-0.6\hat{i} - 0.8\hat{j})\ N$$

ઉદાહરણ 2 : સમબાજુ ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુ પર m kg દળ ધરાવતો કણ રહેલ છે. આ ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર પર M kg દળનો કણ મૂકવામાં આવે, તો તેના પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ શોધો. મધ્યકેન્દ્રથી શિરોબિંદુ વચ્ચેનું અંતર 1 m છે.

ઉકેલ : આકૃતિ 3.9માં દર્શાવ્યા મુજબ ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર પર જેનું ઊગમબિંદુ હોય તેવી યામાક્ષ પદ્ધતિ સ્વીકારતાં $\angle XGC = \angle X'GB = 30^\circ$.

G આગળના કણ પર A આગળના કણ વડે લાગતું

બળ, $$\vec{F}_{GA} = \frac{G m (M)}{1^2} \hat{j} \quad (1)$$



આકૃતિ 3.9

તે જ રીતે B અને C આગળના કણોને લીધે લાગતાં બળો અનુક્રમે

$$\vec{F}_{GB} = \frac{G(m)(M)}{1^2}[-\hat{i}\cos 30^\circ - \hat{j}\sin 30^\circ] \quad (2)$$

$$\vec{F}_{GC} = \frac{G(m)(M)}{(1^2)}[\hat{i}\cos 30^\circ - \hat{j}\sin 30^\circ] \quad (3)$$

$\therefore$ G બિંદુએ રહેલા કણ પર લાગતું પરિણામી બળ

$$\vec{F} = \vec{F}_{GA} + \vec{F}_{GB} + \vec{F}_{GC}$$

$$= \frac{G m (M)}{1^2} \hat{j}$$

$$+ \frac{G m (M)}{1^2}[-\hat{i}\cos 30^\circ - \hat{j}\sin 30^\circ]$$

$$+ \frac{G m (M)}{1^2}[\hat{i}\cos 30^\circ - \hat{j}\sin 30^\circ]$$

$$= 0$$

નોંધ : સદિશોના સરવાળા માટેનો ત્રિકોણનો નિયમ વાપરીને પણ તમે ઉપર મુજબનું પરિણામ મેળવી શકો. ઉપરાંત અહીં બળોને દર્શાવતા સદિશો વડે બંધ ગાળો રચાતો હોવાનું જોઈ શકાય છે અને તે પરથી પણ પરિણામી બળ શૂન્ય હોવાનું કહી શકાશે.

3.5 ગુરુત્વપ્રવેગ અને તેમાં ફેરફારો (Gravitational Acceleration and Variations in it)

3.5 (a) ગુરુત્વપ્રવેગ (Gravitational Acceleration) :

ગુરુત્વાકર્ષી બળને લીધે પદાર્થમાં ઉદ્‌ભવતા પ્રવેગને ગુરુત્વપ્રવેગ (g) કહે છે.

પૃથ્વીને સંપૂર્ણ ગોળાકાર ગણીને અને પૃથ્વીની અંદર ઘનતા બધે એકસમાન છે એમ માનીને આપણે જુદાં-જુદાં બિંદુઓએ પૃથ્વીને લીધે ઉદ્‌ભવતા ગુરુત્વપ્રવેગ અંગે વિચારીશું. આપણે પૃથ્વીને અસંખ્ય પોલી સંકેન્દ્રિય ગોળાકાર

કવચોની બનેલી કલ્પી શકીએ. હવે પૃથ્વીની બહારના બિંદુએ આવેલો કણ **આ બધી કવચોની પણ બહાર** છે અને તેથી તેવા કણ પર દરેક કવચથી લાગતું બળ શોધવામાં દરેક કવચનું દળ પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું ગણી શકીએ (પરિચ્છેદ 3.3માં જણાવ્યા મુજબ). આમ, સમગ્ર પૃથ્વી વડે તે કણ પર લાગતું બળ શોધવા માટે સમગ્ર પૃથ્વીનું દળ તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું ગણી શકીએ.

ધારો કે પૃથ્વીનું દળ M_e અને ત્રિજ્યા R_e છે. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r અંતરે, પૃથ્વીની બહાર આવેલા (અહીં $r > R_e$) m દળના કણ પર લાગતું પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ

$F = \dfrac{GM_e m}{r^2}$ છે.

તેથી ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ પરથી આપણે

ગુરુત્વપ્રવેગ $g = \dfrac{F}{m} = \dfrac{GM_e}{r^2}$ લખી શકીએ. (3.5.1)

હવે પૃથ્વીની સપાટી પરના કણ માટે $r = R_e$.

$\therefore$ પૃથ્વીની સપાટી પરના કણ માટે,

$$\text{ગુરુત્વપ્રવેગ } g_e = \frac{GM_e}{R_e^{\,2}} \qquad (3.5.2)$$

આપણે પૃથ્વીને સંપૂર્ણ ગોળાકાર ધારી હોવાથી આ g_eનું મૂલ્ય પૃથ્વીની સમગ્ર સપાટી પરનાં બધાં સ્થળોએ એકસમાન મળે. વાસ્તવમાં પૃથ્વી સંપૂર્ણ ગોળાકાર નથી. પણ વિષુવવૃત્ત પાસે થોડીક ઉપસેલી છે અને ધ્રુવો પાસે સહેજ ચપટી છે. ધ્રુવો પાસેની પૃથ્વીની ત્રિજ્યા કરતાં વિષુવવૃત્ત પાસેની પૃથ્વીની ત્રિજ્યા લગભગ 21 km વધુ છે. આથી ધ્રુવો પાસેનું g_eનું મૂલ્ય વિષુવવૃત્ત પાસેના g_eના મૂલ્ય કરતાં સહેજ વધારે હોય છે, પરંતુ પૃથ્વીની સમગ્ર સપાટી પરનાં જુદાં-જુદાં સ્થળોએ g_eના મૂલ્યમાં જણાતો તફાવત અત્યંત સૂક્ષ્મ હોવાથી પૃથ્વીની સમગ્ર સપાટી પરનાં બધાં સ્થળો માટે વ્યાવહારિક હેતુઓ માટે g_eનું મૂલ્ય એક-સમાન લેવામાં આવે છે. આ g_eનું પ્રાયોગિક મૂલ્ય 9.8 m/s^2 માલૂમ પડેલ છે.

તમે ઉપરના સમીકરણમાં $M_e = 6 \times 10^{24}$ kg અને R_e = 6400 km લઈ g_eનું મૂલ્ય ગણતરીથી મેળવો.

ઉદાહરણ 3 : જો કોઈ કારણસર પૃથ્વીનું સંકોચન થઈ (તેનું દળ અચળ રહે તે રીતે) પૃથ્વીની ત્રિજ્યા હાલની ત્રિજ્યાના 60% થઈ જાય, તો પૃથ્વીની સપાટી પરના ગુરુત્વપ્રવેગના મૂલ્યમાં કેટલા ટકાનો ફેરફાર થાય ?

ઉકેલ : ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂળ મૂલ્ય $g_e = \dfrac{GM_e}{R_e^2}$

પૃથ્વીની નવી ત્રિજ્યા $R' = \dfrac{60}{100} R_e = 0.6\ R_e$

$\therefore$ ગુરુત્વપ્રવેગનું નવું મૂલ્ય $g' = \dfrac{GM_e}{R'^2}$

$$= \frac{GM_e}{(0.6\ R_e)^2} = \frac{g_e}{0.36}$$

$$= \frac{25}{9} g_e$$

$\therefore$ ગુરુત્વપ્રવેગમાં થતો વધારો

$$= g' - g_e = \frac{25}{9} g_e - g_e = \frac{16}{9} g_e$$

$\therefore$ ગુરુત્વપ્રવેગના મૂલ્યમાં ટકાવાર વધારો

$$= \frac{\text{વધારો}}{\text{મૂળ મૂલ્ય}} \times 100$$

$$= \frac{16}{9} \times \frac{g_e}{g_e} \times 100$$

$$= 177.8\ \%$$

ઉદાહરણ 4 : જો પૃથ્વીના દળ અને ત્રિજ્યા બંનેમાં 1 ટકાનો ઘટાડો થાય તો સપાટી પરના ગુરુત્વપ્રવેગમાં કેટલા ટકાનો ફેરફાર થાય ?

ઉકેલ : ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂળ મૂલ્ય $g = \dfrac{GM_e}{R_e^{\,2}}$

હવે જો $M_e' = 0.99\ M_e$ અને $R_e' = 0.99\ R_e$, થાય તો ગુરુત્વપ્રવેગનું નવું મૂલ્ય

$$g' = \frac{GM'_e}{R'^{\,2}_e} = \frac{G \times 0.99\ M_e}{(0.99\ R_e)^2}$$

$$= 1.01\left(\frac{GM_e}{R_e^{\,2}}\right)$$

$$= 1.01\ g$$

$\therefore$ ગુરુત્વપ્રવેગમાં ફેરફાર $= g' - g$

$$= 1.01\ g - g = 0.01\ g$$

$\therefore$ ગુરુત્વપ્રવેગમાં ટકાવાર ફેરફાર

$$= \frac{\text{ફેરફાર}}{\text{મૂળ મૂલ્ય}} \times 100$$

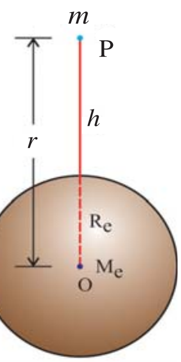
$$= \frac{0.01\ g}{g} \times 100$$

$$= 1\ \%$$

આમ, gના મૂલ્યમાં 1 ટકાનો વધારો થાય.

3.5(*b*) ગુરુત્વપ્રવેગ *g*માં ઊંચાઈ સાથે ફેરફાર (Variation in Gravitational Acceleration *g* with Altitude) :

પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગ $g_e = \dfrac{GM_e}{R_e^{\ 2}}$



h

પૃથ્વીની સપાટીથી ***h*** ઊંચાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ

આકૃતિ 3.10

પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ આવેલા બિંદુ Pનું પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતર $r = R_e + h$ છે.

∴ આ બિંદુએ m દળના પદાર્થ પર લાગતું પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ

$$F(h) = \frac{GM_e m}{(R_e + h)^2} \qquad (3.5.3)$$

∴ P બિંદુએ ગુરુત્વપ્રવેગ

$$g(h) = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} \qquad (3.5.4)$$

$$\therefore \ \frac{g(h)}{g_e} = \frac{R_e^{\ 2}}{(R_e + h)^2}$$

$$= \frac{R_e^{\ 2}}{R_e^{\ 2}\left[1 + \dfrac{h}{R_e}\right]^2} \qquad (3.5.5)$$

$$\therefore \ g(h) = \frac{g_e}{\left[1 + \dfrac{h}{R_e}\right]^2} \qquad (3.5.6)$$

આ પરથી સ્પષ્ટ છે કે $g(h) < g_e$ સમીકરણ (3.5.6)

પરથી $g(h) = g_e\left[1 + \dfrac{h}{R_e}\right]^{-2}$ (3.5.7)

$= g_e \ [1 - \dfrac{2h}{R_e} + \dfrac{h}{R_e}$ ની એક કરતાં મોટી ઘાતનાં પદો] (3.5.8)

..... (દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં)

જો $h << R_e$, હોય તો $\dfrac{h}{R_e}$નાં એક કરતાં મોટી ઘાતનાં પદોને અવગણી શકાય છે. એ સંજોગોમાં

$$g(h) = g_e\left[1 - \frac{2h}{R_e}\right] \qquad (3.5.9)$$

સમીકરણ (3.5.6) કોઈ પણ ઊંચાઈ (h) માટે વાપરી શકાય છે. જ્યારે સમીકરણ (3.5.9) ફક્ત $h << R_e$ હોય ત્યારે જ વાપરી શકાય છે.

જોકે પૃથ્વીની સપાટીથી થોડી ઊંચાઈ માટે gનું મૂલ્ય g_e જેટલું લગભગ લઈ શકાય છે. આ બાબત એક ઉદાહરણથી સમજીએ. પૃથ્વીની સપાટીથી h = 10 km ઊંચાઈ માટે g શોધવા માટે ઉપરના સમીકરણ (3.5.9)માં R_e = 6400 km અને g_e = 9.8 m/s^2 મૂકતાં,

$$\therefore \ g(h = 10 \text{ km}) = 9.8\left[1 - \frac{(2)(10)}{6400}\right]$$

$$= 9.8 - 0.028$$

$$= 9.772$$

$$\simeq 9.8 \text{ m/s}^2.$$

આમ, પૃથ્વીની સમગ્ર સપાટી પર તેમજ સપાટીની નજીક થોડીક ઊંચાઈના વિસ્તારમાં પણ $g = g_e$ = 9.8 m/s^2 વ્યાવહારિક હેતુઓ પૂરતું લઈ શકાય છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે પૃથ્વીની સપાટીથી પૃથ્વીની ત્રિજ્યા જેટલી ઊંચાઈએ આવેલા સ્થળે gમાં થતા ફેરફારનો દર અને પૃથ્વીની સપાટી પરના gના મૂલ્યનો ગુણોત્તર $\dfrac{-1}{4R_e}$.

ઉકેલ : પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $r \geq R_e$ જેટલા અંતરે ગુરુત્વપ્રવેગ $g(r) = GM/r^2$ છે.

આ સમીકરણનું અંતર r સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\left[\frac{dg(r)}{dr}\right] = \frac{-2GM_e}{r^3}$$

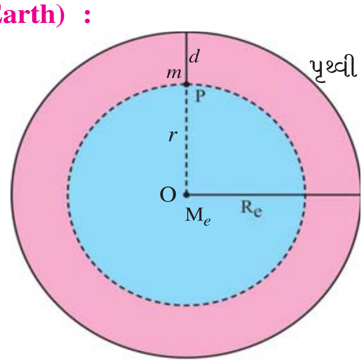
વળી, $r = R_e + h = R_e + R_e = 2R_e$

$$\therefore \left[\frac{dg(r)}{dr}\right]_{2R_e} = \frac{-2GM_e}{(2R_e)^3} = \frac{-2GM_e}{8R_e^{\,3}}$$

પરંતુ પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગ $g_e = \frac{GM_e}{R_e^{\,2}}$

$$\therefore \frac{\left[\frac{dg(r)}{dr}\right]_{2R_e}}{g_e} = \frac{-2GM_e}{8R_e^{\,3}} \times \frac{R_e^{\,2}}{GM_e} = \frac{-1}{4R_e}$$

3.5(*c*) ગુરુત્વપ્રવેગ *g* માં પૃથ્વીની સપાટીથી ઊંડાઈ સાથે ફેરફાર (Variation in the Gravitational Acceleration *g* with Depth from the Surface of the Earth) :



પૃથ્વીની સપાટીથી ઊંડાઈ સાથે *g*માં ફેરફાર

આકૃતિ 3.11

પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈએ P બિંદુએ રહેલ m દળનો કણનો વિચાર કરો. તેનું પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતર $r = R_e - d$ છે.

આ કણ પર લાગતું પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ શોધવા માટે આપણે પૃથ્વીને $r = R_e - d$ ત્રિજ્યાના નાના નક્કર ગોળા અને તેની ઉપર d જાડાઈની ગોળાકાર કવચની બનેલી કલ્પી શકીએ. P બિંદુ આગળનો આ કણ આ ગોળાકાર કવચની અંદર આવેલો છે. તેથી આ ગોળાકાર કવચને લીધે તે કણ પર લાગતું બળ શૂન્ય છે (પરિચ્છેદ 3.3માં સમજાવ્યા મુજબ). વળી, આ કણ r ત્રિજ્યાના નાના (છાયાંકિત કરેલા) ગોળાની બહારની સપાટી પર છે. આથી તે કણ પર લાગતું બળ નાના ગોળાનું સમગ્ર દળ (M') તેના કેન્દ્ર O પર કેન્દ્રિત થયેલું ગણીને મેળવી શકાય છે.

જો પૃથ્વીની સમાન ઘનતા ρ હોય તો,

$$\rho = \frac{\text{કુલ દળ}}{\text{કુલ કદ}} = \frac{M_e}{\frac{4}{3}\pi R_e^{\,3}} \qquad (3.\ 5.10)$$

∴ અને r ત્રિજ્યાના નાના ગોળાનું દળ

M' = (કદ) (ઘનતા)

$$= \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)(\rho) \qquad (3.5.11)$$

∴ P આગળ ગુરુત્વપ્રવેગ,

$$g(r) = \frac{GM'}{r^2}$$

$$= \frac{G}{r^2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)(\rho)$$

$$= \frac{4}{3}\pi\ G\rho\ r \qquad (3.5.12)$$

આ સમીકરણ પરથી પૃથ્વીની સપાટી ($r = R_e$) પર ગુરુત્વપ્રવેગ

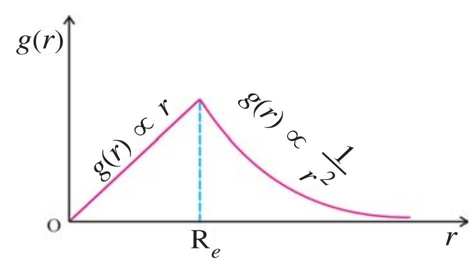
$$g_e = \frac{4}{3}\pi G\rho R_e \qquad (3.5.13)$$

સમીકરણ (3.5.12) અને (3.5.13) પરથી,

$$\frac{g(r)}{g_e} = \frac{r}{R_e} \qquad (3.5.14)$$

$$\therefore\ g(r) = g_e\left(\frac{r}{R_e}\right) \qquad (3.5.15)$$

સમીકરણ (3.5.12) અને (3.5.15) પરથી સ્પષ્ટ છે કે પૃથ્વીના કેન્દ્રથી સપાટી સુધી $g(r)$એ rના સમપ્રમાણમાં છે એટલે કે પૃથ્વીની અંદરના વિસ્તારમાં આવેલ બિંદુએ ગુરુત્વપ્રવેગ gનું મૂલ્ય પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તે બિંદુના અંતરના સમપ્રમાણમાં હોય છે. વળી, પૃથ્વીની સપાટીની બહારના વિસ્તારમાં $g(r) = GM_e/r^2$ પરથી $g(r) \propto \frac{1}{r^2}$. મુજબ બદલાય છે. આથી પૃથ્વીના કેન્દ્ર (0)થી શરૂ કરતાં સપાટી સુધી અંતર (r)ના સમપ્રમાણમાં $g(r)$નું મૂલ્ય વધે છે. પછી સપાટીની બહાર $g(r)$નું મૂલ્ય અંતરના વ્યસ્ત વર્ગ મુજબ ઘટે છે. gમાં થતા આવા ફેરફાર નીચેની આકૃતિ 3.12માં દર્શાવ્યા છે.



પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતર r સાથે gમાં ફેરફાર

આકૃતિ 3.12

સમીકરણ (3.5.15)માં $r = R_e - d$ મૂકતા ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય પૃથ્વીની સપાટીથી ઊંડાઈ dના પદમાં મળે છે. તેને $g(d)$, તરીકે દર્શાવીશું.

$$\therefore \quad g(d) = \frac{g_e}{R_e}(R_e - d)$$

$$= g_e\left[1 - \frac{d}{R_e}\right] \qquad (3.5.16)$$

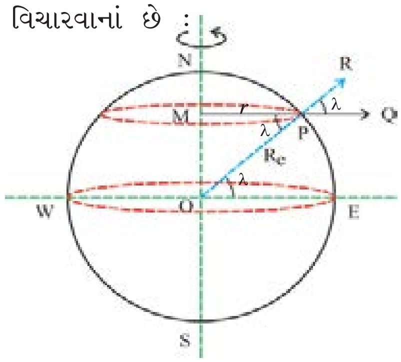
આ દર્શાવે છે કે d ઊંડાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય સપાટી પરના મૂલ્ય કરતાં ઓછું છે.

આમ, પૃથ્વીના ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય તેની સપાટી પર સૌથી વધુ છે અને ત્યાંથી ઉપર કે નીચે જતાં તે ઘટતું જાય છે અને પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર શૂન્ય બને છે. આ નોંધપાત્ર બાબત છે.

3.5 (*d*) પૃથ્વીના ભ્રમણને લીધે અક્ષાંશ સાથે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ g'માં થતો ફેરફાર (Variation in effective Gravitational Acceleration g' with Lattitute Due to Earth's Rotation) :

પૃથ્વીની સપાટી પરના આપેલા સ્થળને પૃથ્વીના કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખાએ વિષુવવૃત્તીય રેખા સાથે બનાવેલા ખૂણાને તે સ્થળનો અક્ષાંશ (lattitude) (λ) કહે છે. આથી વિષુવવૃત્ત પર અક્ષાંશ $\lambda = 0^\circ$ અને ધ્રુવ પર અક્ષાંશ $\lambda = 90^\circ$ થાય.

આકૃતિ (3.13)માં દર્શાવ્યા મુજબ પૃથ્વીની સપાટી પરના P સ્થાને અક્ષાંશ $\lambda = \angle POE$ છે. આ સ્થાને m દળના કણનો વિચાર કરો. તેના પર લાગતાં બળો તરીકે બે બળો વિચારવાનાં છે :



પૃથ્વીના ભ્રમણને લીધે અક્ષાંશ સાથે અસરકારક g'માં ફેરફાર

આકૃતિ 3.13

(1) પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ $= mg$, $\overrightarrow{PO}$ દિશામાં(3.5.17)

(2) બીજું બળ સમજવા પૃથ્વીની ચાકગતિને ધ્યાનમાં લો. પૃથ્વી તેની ચાકગતિને કારણે પ્રવેગ ધરાવે છે. એટલે આ કણ પ્રવેગી નિર્દેશફ્રેમમાં છે. આ બિંદુએ તે નિર્દેશ-ફ્રેમનો પ્રવેગ $= \frac{v^2}{r}$ જેટલો $\overrightarrow{PM}$ દિશામાં (એટલે કે વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્ર તરફ) છે. આથી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં એટલે કે $\overline{MPQ}$ દિશામાં $\frac{v^2}{r}$ જેટલો કણનો આભાસી પ્રવેગ અને તેથી $\frac{mv^2}{r}$ જેટલું તેના પર આભાસી બળ ગણવાનું છે. આ બળનો $\overrightarrow{PR}$ દિશામાંનો ઘટક

$$= \frac{mv^2}{r}\cos\lambda \qquad (3.5.18)$$

જે બીજું બળ આપણે ગણવાનું છે તે આ છે.

આમ સમીકરણ (3.5.17) અને (3.5.18) મુજબનાં બે બળો ગણતરીમાં લેતાં, P આગળના કણ પર પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ લાગતું અસરકારક બળ

$$mg' = mg - \frac{mv^2}{r}\cos\lambda \qquad (3.5.19)$$

જ્યાં g' = આ સ્થાને પૃથ્વીની ચાકગતિને ધ્યાનમાં લઈને મળતો અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ

g = પૃથ્વીની ચાકગતિ ધ્યાનમાં લીધા સિવાય આ સ્થાને ગુરુત્વપ્રવેગ

$$\therefore \; g' = g - \frac{v^2}{r}\cos\lambda \qquad (3.5.20)$$

પરંતુ $v = r\omega$ જ્યાં ω = પૃથ્વીની કોણીય ઝડપ

$$\therefore \; g' = g - \frac{(r\omega)^2}{r}\cos\lambda \qquad (3.5.21)$$

$$= g - r\omega^2\cos\lambda \qquad (3.5.22)$$

આકૃતિ પરથી, $r = MP = R_e\cos\lambda \qquad (3.5.23)$

$$\therefore \; g' = g - R_e\omega^2\cos^2\lambda \qquad (3.5.24)$$

$$\text{અથવા } g' = g\left[1 - \frac{R_e\omega^2\cos^2\lambda}{g}\right] \qquad (3.5.25)$$

આ સમીકરણ (3.5.24) અથવા (3.5.25) પરથી પૃથ્વીના ભ્રમણને લીધે અક્ષાંશ સાથે gમાં થતા ફેરફારની માહિતી મળે છે. બે વિશિષ્ટ કિસ્સાઓની નોંધ લઈએ :

(*i*) વિષુવવૃત્ત માટે, $\lambda = 0^\circ$, $\therefore \cos\lambda = 1$, $\therefore g' = g - R_e\omega^2$, જે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગનું લઘુતમ મૂલ્ય દર્શાવે છે.

(*ii*) ધ્રુવ પર, $\lambda = 90^\circ$, $\cos\lambda = 0$, $\therefore g' = g$; જે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગનું મહત્તમ મૂલ્ય દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 6 : પૃથ્વીના વિષુવવૃત્ત પર અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ શૂન્ય થવા માટે પૃથ્વીની તેની અક્ષની આસપાસની ચાકગતિનો આવર્તકાળ કેટલો હોવો જોઈએ ?

ઉકેલ : વિષુવવૃત્ત પર અક્ષાંશ $\lambda = 0^o$. પૃથ્વીની સપાટી પરના λ અક્ષાંશ ધરાવતા સ્થળે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ $g' = g - R_e\omega^2\cos^2\lambda$... (સમીકરણ 3.5.24 પરથી). R_e = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા,

g = ચાકગતિ ધ્યાનમાં લીધા સિવાય પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગ.

ω = પૃથ્વીની ચાકગતિની કોણીય ઝડપ = $\frac{2\pi}{T}$.

વિષુવવૃત્ત પર $g' = 0$ થવા માટે આવર્તકાળ T શોધવાનો છે.

$$\therefore\ 0 = g - R_e\omega^2\cos^2(0^o)$$

$$\therefore\ g = R_e\omega^2 \quad ...(\cos 0^o = 1)$$

$$= R_e\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)$$

$$\therefore\ T^2 = 4\pi^2\frac{R_e}{g} \quad \therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$$

3.6 ગુરુત્વાકર્ષી તીવ્રતા (Gravitational Intensity)

એક પદાર્થ વડે બીજા પદાર્થ પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષી બળ ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમ (સમીકરણ 3.3.1)પરથી મળે છે. એકબીજાથી દૂર રહેલા બે પદાર્થો વચ્ચે બળ લાગવાની આ પ્રક્રિયા **(action at a distance)**ને નીચે મુજબ **ક્ષેત્ર દ્વારા** થતી હોય તેમ સમજાવવામાં આવે છે.

(1) દરેક પદાર્થ તેના દળને લીધે પોતાની આસપાસ **ગુરુત્વક્ષેત્ર** ઉત્પન્ન કરે છે. (2) આ ક્ષેત્રમાં આવતા (કે રહેલા) બીજા પદાર્થ પર આ ક્ષેત્ર બળ લગાડે છે. આથી આવા ગુરુત્વક્ષેત્રની તીવ્રતા (પ્રબળતા) વિશે જાણવાનું મહત્ત્વનું છે.

"આપેલા પદાર્થ વડે આપેલા બિંદુએ એકમદળના પદાર્થ પર લાગતા ગુરુત્વાકર્ષી બળને તે બિંદુએ ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રની તીવ્રતા (I) કહે છે." તેને ઘણી વાર ટૂંકમાં **ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્ર**, અથવા **ગુરુત્વક્ષેત્ર** અથવા **ગુરુત્વીય તીવ્રતા** અથવા **ગુરુત્વાકર્ષી તીવ્રતા** અથવા **ગુરુત્વતીવ્રતા** પણ કહે છે.

ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમનો ઉપયોગ કરીને આપણે ગુરુત્વતીવ્રતાનું સૂત્ર લખી શકીએ. યામાક્ષોના ઊગમબિંદુએ M દળના પદાર્થનો વિચાર કરો. તેના લીધે કોઈ P બિંદુએ ઉદ્‌ભવતી ગુરુત્વતીવ્રતા

$\vec{I} = \frac{-GM(1)}{r^2}\hat{r} = \frac{-GM}{r^2}\hat{r}$ ...(3.6.1), જ્યાં

$\vec{OP} = \hat{r}$ અને $\hat{r} = \vec{r}$ ની દિશા (એટલે $\vec{OP}$)માંનો એકમ સદિશ. મૂલ્યમાં આપણે $I = \frac{GM}{r^2}$ ...(3.6.2) લખી શકીએ. તેનો એકમ N/kg અને પારિમાણિક સૂત્ર $M^0L^1T^{-2}$ છે.

હવે જો કોઈ m દળના પદાર્થને આ P બિંદુ પર લાવીએ (અથવા ત્યાં રહેલો હોય) તો ગુરુત્વક્ષેત્ર વડે તેના પર લાગતું બળ $\vec{F} = \vec{I}m = \frac{-GMm}{r^2}\hat{r}$ ..(3.6.3)

સમીકરણ (3.6.2) દર્શાવે છે કે પૃથ્વીને લીધે આપેલા બિંદુએ ગુરુત્વતીવ્રતાનું મૂલ્ય તે બિંદુ આગળના ગુરુત્વ પ્રવેગ **જેટલું** હોય છે. પરંતુ આ બે રાશિઓ અલગ-અલગ છે. અને તેમના એકમ જુદા-જુદા પરંતુ સમતુલ્ય છે, [N/kg = m/s^2]. આમ, એ સ્પષ્ટ છે કે પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્ર માટે $I - r$ આલેખ $g - r$ આલેખ જેવો જ હોય (આકૃતિ 3.12 જેવો) [ભવિષ્યમાં તમે વિદ્યુતના કિસ્સામાં વિદ્યુતબળ = (વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{E}$) × (વિદ્યુતભાર q) એવું સૂત્ર ભણશો.]

ઉદાહરણ 7 : એક બિંદુએ ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{I} = 10^{-9}(\hat{i} + \hat{j})$ N/kg છે. તો તે બિંદુએ 10 kg દળના પદાર્થ પર લાગતા બળનું મૂલ્ય અને તેના પ્રવેગનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ :

$$\vec{F} = (\vec{I})(m)$$

$$= (10^{-9})(\hat{i} + \hat{j})(10)$$

$$= 10^{-8}\hat{i} + 10^{-8}\hat{j}\ \text{N}$$

$$\therefore\ |\vec{F}| = \sqrt{(10^{-8})^2 + (10^{-8})^2}$$

$$= 10^{-8}\sqrt{2}$$

$$= 1.414 \times 10^{-8}\ \text{N}$$

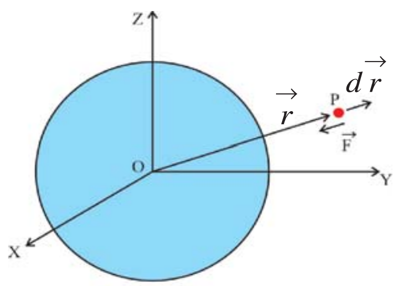
$$g = \frac{|\vec{F}|}{m} = \frac{1.414 \times 10^{-8}}{10}$$

$$= 1.414 \times 10^{-9}\ \text{m/s}^2.$$

3.7 પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાં ગુરુત્વસ્થિતિમાન અને ગુરુત્વ સ્થિતિ-ઊર્જા (Gravitational Potential and Gravitational Potential Energy in the Earth's Gravitational Field)

(*a*) ગુરુત્વસ્થિતિમાન : દરેક પદાર્થ પોતાની આસપાસ ગુરુત્વક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરે છે. આવા ક્ષેત્રની એક લાક્ષણિકતાને **ગુરુત્વસ્થિતિમાન (gravitational potential)** નામની રાશિ તરીકે નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

"એકમ દળના પદાર્થને અનંત અંતરેથી ગુરુત્વક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવવા દરમિયાન ગુરુત્વબળે કરેલા કાર્યના ઋણ મૂલ્યને તે બિંદુ આગળનું ગુરુત્વ સ્થિતિમાન (ϕ) કહે છે." ... ગુરુત્વસ્થિતિમાનનો એકમ J kg^{-1} છે અને તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^0L^2T^{-2}$ છે.



સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતરમાં ગુરુત્વ બળ વડે થતું કાર્ય

આકૃતિ 3.14

પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાં ગુરુત્વસ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવવા આકૃતિ 3.14ને ધ્યાનમાં લો.

પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર આપણે યામતંત્રનું ઊગમબિંદુ 0 મૂકીશું. પૃથ્વીનું દળ M_e અને ત્રિજ્યા R_e છે. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r અંતરે આવેલા P બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{OP} = \vec{r}$. અત્રે $r \geq R_e$ છે. આ બિંદુએ એકમદળના પદાર્થ પર લાગતું પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ

$$\vec{F} = \frac{-GM_e(1)}{r^2}\hat{r}$$

$$= \frac{-GM_e}{r^2}\hat{r} \quad (3.7.1)$$

આ બળ અચળ નથી પણ અંતર સાથે બદલાય છે, પરંતુ સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર $d\vec{r}$ દરમ્યાન બળને અચળ ગણી શકાય છે. આથી આ સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતરમાં ગુરુત્વબળ વડે થતું કાર્ય

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{-GM_e}{r^2}\hat{r}\right)(dr\hat{r}) \quad (3.7.2)$$

$$= \frac{-GM_e}{r^2}dr \quad (3.7.3)$$

P બિંદુથી અનંત અંતર સુધીના સમગ્ર ગાળાને મોટી સંખ્યાના સૂક્ષ્મ ગાળાઓમાં વિભાગેલો કલ્પી શકાય. આ દરેક સૂક્ષ્મ ગાળામાં બળ અચળ ગણીને તે ગાળા દરમિયાન થતું કાર્ય ગણી શકાય અને એવા બધા કાર્યનો સરવાળો કરવાથી કુલ કાર્ય W મળે. આ પ્રક્રિયા સતત હોવાથી સરવાળાને સંકલન રૂપે લખી શકાય. આથી, આ કિસ્સામાં આ પદાર્થને r અંતરે રહેલા બિંદુ Pથી અનંત અંતરે લઈ જવા દરમિયાન ગુરુત્વબળ વડે થતું કાર્ય.

$$W_{r\to\infty} = \int dW = \int_r^{\infty}\left(-\frac{GM_e}{r^2}\right)dr \quad (3.7.4)$$

$$= -GM_e\int_r^{\infty}\frac{1}{r^2}dr \quad (3.7.5)$$

$$= -GM_e\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} \quad (3.7.6)$$

$$= \frac{-GM_e}{r} \quad (3.7.7)$$

હવે આ પદાર્થને અનંત અંતરેથી r અંતરના P બિંદુએ લાવીએ, તો તે દરમિયાન **ગુરુત્વબળ વડે થતું કાર્ય** ($W_{\infty\to r}$) એ સમીકરણ (3.7.7) થી મળતા કાર્ય જેટલું જ પણ વિરુદ્ધ ચિહ્ન ધરાવતું હશે.

[$W_{\infty\to r} = -W_{r\to\infty}$], કારણ કે ગુરુત્વબળ એ સંરક્ષી બળ છે.

$$\therefore\ W_{\infty\to r} = \frac{GM_e}{r} \quad (3.7.8)$$

આ કાર્ય ($W_{\infty\to r}$) ના ઋણ મૂલ્યને વ્યાખ્યા મુજબ P બિંદુ આગળનું ગુરુત્વસ્થિતિમાન ϕ કહે છે.

$\therefore$ P આગળનું ગુરુત્વસ્થિતિમાન

$$\phi = \frac{-GM_e}{r} \quad (3.7.9)$$

આ પરથી પૃથ્વીની સપાટી પર ($r = R_e$ મૂકતાં) ગુરુત્વસ્થિતિમાન

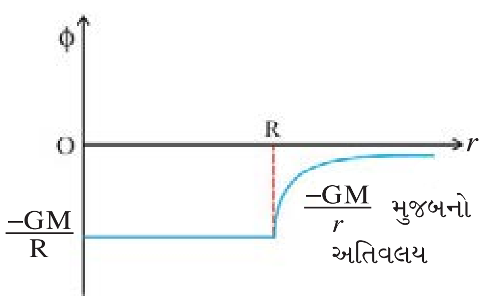
$$\phi_e = \frac{-GM_e}{R_e} \qquad (3.7.10)$$

આપણે ગુરુત્વસ્થિતિમાન અંગેની કેટલીક બાબતોની નોંધ લઈએ :

(1) પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અનંત અંતરે ગુરુત્વસ્થિતિમાન = 0.

(2) ગોળાકાર નિયમિત કવચની અંદરના ભાગમાં **બધા બિંદુએ ગુરુત્વસ્થિતિમાન એકસમાન છે** અને તે તેની સપાટી પરના મૂલ્ય જેટલું જ એટલે કે $\frac{-GM}{R}$ જેટલું છે, જ્યાં M = કવચનું દળ, R = કવચની ત્રિજ્યા. આનું કારણ એ છે કે કવચની અંદર બધા બિંદુએ ગુરુત્વબળ શૂન્ય હોવાથી **કવચની અંદરના** ભાગમાંની પદાર્થની ગતિ દરમિયાન કોઈ **કાર્ય કરવું પડતું નથી.** માત્ર ∞થી સપાટી સુધીની ગતિમાંનું કાર્ય જ ગણતરીમાં આવે છે.

(3) M દળની અને R ત્રિજ્યાની કવચના કેન્દ્રથી અંતર r સાથે સ્થિતિમાન ϕ નો ફેરફાર આકૃતિ 3.15માં દર્શાવેલ છે.



ϕ માં અંતર r સાથે ફેરફાર

આકૃતિ 3.15

(b) ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા : "આપેલા (m દળના) પદાર્થને પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રમાં અનંત અંતરેથી આપેલા બિંદુએ લાવવા દરમિયાન ગુરુત્વબળે કરેલા કાર્યના ઋણ મૂલ્યને તે બિંદુ પાસે તે પદાર્થની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા U કહે છે. તે ખરેખર તો પૃથ્વી + તે પદાર્થના તંત્રની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા છે.

ગુરુત્વસ્થિતિમાન અને ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જાની વ્યાખ્યાઓને ધ્યાનમાં લેતાં, સમીકરણ (3.7.8) પરથી, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $r(\geq R_e)$ અંતરે, m દળના પદાર્થની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = \phi m = \frac{-GM_e m}{r} \qquad (3.7.10)$$

આથી પૃથ્વીની સપાટી પર ($r = R_e$) રહેલા m દળના પદાર્થની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા

$$U_e = \frac{-GM_e m}{R_e} \qquad (3.7.11)$$

ગુરુત્વસ્થિતિમાન એ એકમદળના પદાર્થની સ્થિતિ-ઊર્જા છે, એમ પણ આપણે કહી શકીએ.

પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અનંત અંતરે તે પદાર્થ પરનું પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ શૂન્ય છે અને ઉપરની વ્યાખ્યા મુજબ આપણે કહી શકીએ કે તેની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા પણ શૂન્ય છે.

સ્થિતિ-ઊર્જા (કે સ્થિતિમાન)ના **નિરપેક્ષ મૂલ્યનું કોઈ મહત્ત્વ નથી,** માત્ર તેના મૂલ્યમાં થતા **ફેરફારનું જ મહત્ત્વ છે.** એટલે શૂન્ય સ્થિતિ-ઊર્જા (કે શૂન્ય સ્થિતિમાન) માટેનું સંદર્ભબિંદુ આપણે ગમે ત્યાં લઈ શકીએ છીએ. (યાદ કરો, "કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર"ના પ્રકરણમાં આપણે પૃથ્વીની સપાટી પર સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય લીધી હતી, જ્યારે અહીં આપણે અનંત અંતરે સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય લીધી છે. પરંતુ બંને કિસ્સામાં માત્ર ફેરફારો જ મહત્ત્વના હોવાથી કોઈ વિરોધાભાસ સર્જાતો નથી.)

અત્રે સ્થિતિ-ઊર્જા U એ પૃથ્વી અને પદાર્થથી બનેલા તંત્રની છે પણ આ ક્રિયામાં પૃથ્વીના સ્થાનમાં કે વેગમાં ખાસ કંઈ ફેરફાર થતો ન હોવાથી તેને રૂઢિગત રીતે **પદાર્થની** સ્થિતિ-ઊર્જા તરીકે પણ ઉલ્લેખવામાં આવે છે. જ્યારે પણ આવો ઉલ્લેખ થાય ત્યારે આપણે એમ સમજવાનું છે કે આ સ્થિતિ-ઊર્જા તત્ત્વતઃ **તો એ તંત્રની** છે પણ તે સ્થિતિ-ઊર્જાનો બધો ફેરફાર **માત્ર પદાર્થ જ** અનુભવતો દેખાય છે.

આગળ ઉપર આપણે ઉપગ્રહનો પણ વિચાર કરવાના છીએ. તે કિસ્સામાં સ્થિતિ-ઊર્જા પૃથ્વી અને ઉપગ્રહથી બનેલા તંત્રની હોય છે. પણ આપણે ઉપગ્રહની સ્થિતિ-ઊર્જા તરીકે તેનો ઉલ્લેખ કરીશું.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ (3.16) માં દર્શાવ્યા મુજબ જેની પ્રત્યેક બાજુનું માપ l છે તેવા ચોરસના દરેક શિરોબિંદુ પર m દળ ધરાવતા કણ રહેલ છે. આ ચાર કણોથી બનતા તંત્રની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા શોધો. આ ચોરસના કેન્દ્ર પર ગુરુત્વસ્થિતિમાન પણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં કણોની દરેક જોડથી મળતી સ્થિતિ-ઊર્જાને $U_{ij} = \frac{-Gm_i m_j}{r_{ij}}$ તરીકે લખી શકાય, જ્યાં

m_i અને m_j એ અનુક્રમે i અને j ક્રમનાં કણોનાં દળ છે અને r_{ij} તેમની વચ્ચેનું અંતર છે. $m_i = m_j = m$.

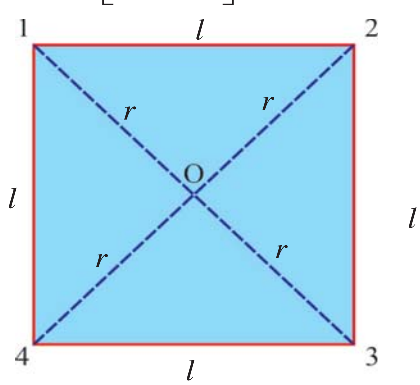
∴ કુલ સ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = -Gm^2\left[\sum_{i<j}\frac{1}{r_{ij}}\right]$$

$$= -Gm^2\left[\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{14}} + \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{24}} + \frac{1}{r_{34}}\right]$$

$$= -Gm^2\left[\frac{1}{l} + \frac{1}{\sqrt{2}l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{\sqrt{2}l} + \frac{1}{l}\right]$$

$$= -Gm^2\left[\frac{4+\sqrt{2}}{l}\right]$$



આકૃતિ 3.16

$$r_{13} = r_{24} = \sqrt{2}\,l$$

$$r_{01} = r_{02} = r_{03} = r_{04} = r$$

ચોરસના કેન્દ્ર પર કુલ ગુરુત્વસ્થિતિમાન

ϕ = 4 (દરેક કણથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન)

$$= 4\left(\frac{-Gm}{r}\right);\ \text{જ્યાં}\ r = \frac{\sqrt{2}l}{2}$$

$$\therefore\ \phi = \frac{-4\sqrt{2}Gm}{l}$$

3.8 નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા અને નિષ્ક્રમણ-ઝડપ (Escape Energy and Escape Speed)

આપણે હાથથી કોઈ પથ્થરને ઊર્ધ્વ દિશામાં ફેંકીએ તો તે અમુક ઊંચાઈએ જઈને ફરી પાછો પૃથ્વી તરફ પડે છે. જો પ્રારંભિક ઝડપ વધુ ને વધુ આપીએ, તો તે પથ્થરને આપણે વધુ ને વધુ ઊંચે મોકલી શકીએ. આ પરથી એવો સ્વાભાવિક પ્રશ્ન ઉદ્ભવે કે શું આપણે પથ્થરને એટલી પ્રારંભિક ઝડપથી ફેંકી શકીએ કે જેથી તે ફરી પાછો પૃથ્વી તરફ આવે જ નહિ ? એટલે કે તે કાયમ માટે પૃથ્વીથી દૂર અનંત અંતરે જતો રહે અને તેના પર પૃથ્વીનું કોઈ આકર્ષણબળ રહે નહિ. આનો ઉકેલ મેળવવા તેની ઊર્જાનો વિચાર કરીએ.

પૃથ્વીની સપાટી પર સ્થિર રહેલા m દળના પદાર્થની સ્થિતિ-ઊર્જા $= \dfrac{-GM_e m}{R_e}$ અને ગતિ-ઊર્જા શૂન્ય હોય છે તેથી તેની કુલ ઊર્જા $= \dfrac{-GM_e m}{R_e}$ છે. જો આ પદાર્થને આપણે $\dfrac{+GM_e m}{R_e}$ જેટલી ઊર્જા ગતિ-ઊર્જા સ્વરૂપે પૂરી પાડીએ, તો તે એવા બિંદુ સુધી જઈ શકે કે જ્યાં તેની કુલ ઊર્જા $\dfrac{+GM_e m}{R_e} + \left(\dfrac{-GM_e m}{R_e}\right) = 0$ બને.

એટલે કે તે પૃથ્વીથી અનંત અંતરે પહોંચી જાય અને ત્યાં તેની સ્થિતિ-ઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જા બંને શૂન્ય હોય. આ સ્થિતિમાં પદાર્થ કાયમ માટે પૃથ્વીના બંધનમાંથી છૂટી જાય છે અને ફરી પાછો આવતો નથી. (જો આપણે પદાર્થને $GM_e m/R_e$ કરતાં વધુ ગતિ-ઊર્જા આપીએ તો અનંત અંતરે તેની સ્થિતિ-ઊર્જા તો શૂન્ય હોય પણ તેની પાસે અમુક ગતિ-ઊર્જા પણ બચેલી હોય છે.)

"પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રમાંથી (બીજા શબ્દોમાં પૃથ્વીના બંધનમાંથી) પદાર્થને મુક્ત કરવા માટે તેને આપવી પડતી લઘુતમ ઊર્જાને તે પદાર્થની નિષ્ક્રમણ ઊર્જા (Escape energy) કહે છે." અને તેને ઘણીવાર પદાર્થની બંધન-ઊર્જા (Binding energy) પણ કહે છે.

આમ, પૃથ્વીની સપાટી પર સ્થિર રહેલા m દળના

$$\text{પદાર્થની નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા} = \frac{GM_e m}{R_e} \qquad (3.8.1)$$

આ નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા જેટલી ગતિ-ઊર્જા પદાર્થને આપવા માટે તેને આપવી પડતી ઝડપને નિષ્ક્રમણ-ઝડપ (v_e) કહે છે, જેને ઘણીવાર નિષ્ક્રમણ-વેગ પણ કહે છે.

$$\therefore\ \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GM_e m}{R_e} \qquad (3.8.2)$$

$$\therefore\ \text{નિષ્ક્રમણ-ઝડપ}\ v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} \qquad (3.8.3)$$

$$= \sqrt{2gR_e} \qquad (3.8.3a)$$

સમીકરણ (3.8.3) પરથી સ્પષ્ટ છે કે પદાર્થની નિષ્ક્રમણ-ઝડપ (v_e)નું મૂલ્ય તેના પોતાના દળ પર આધારિત નથી. (પણ જેના બંધનમાંથી-ત્રાસમાંથી ! - તેને છૂટવાનું છે, તે પદાર્થના દળ અને ત્રિજ્યા પર આધારિત છે.)

ઉપરના સમીકરણ (3.8.3) માં G, M_e અને R_e નાં મૂલ્યો મૂકતાં, v_e = 11.2 km/s મળે છે. જો પદાર્થની પ્રારંભિક ઝડપ v_e જેટલી કે વધુ હોય, તો પદાર્થ હંમેશ માટે પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાંથી છટકી જાય છે.

ચંદ્રની સપાટી પરના સ્થિર પદાર્થને આ પ્રમાણે ચંદ્રથી મુક્ત કરાવી દેવા માટે જરૂરી ઝડપ v_e' હોય, તો

$v_e' = \sqrt{\frac{2GM_m}{R_m}}$, જ્યાં M_m = ચંદ્રનું દળ,

R_m = ચંદ્રની ત્રિજ્યા. આ કિસ્સામાં v_e' = 2.3 km/s મળે છે, જે પૃથ્વીની સપાટી પર રહેલા પદાર્થ માટેના નિષ્ક્રમણ-ઝડપના મૂલ્ય કરતાં લગભગ $\left(\frac{1}{6}\right)$ ગણું છે. આ કારણથી ચંદ્રને વાતાવરણ નથી. તેની સપાટી પર જો વાયુના અણુઓ નિર્માણ પામે, તો ત્યાંના તાપમાને તે અણુઓની ઝડપ ઉપર જણાવેલ મૂલ્ય કરતાં વધુ હોય છે. તેથી તેઓ ચંદ્રના ગુરુત્વક્ષેત્રમાંથી કાયમ માટે છટકી જાય છે.

જો કોઈ પદાર્થની ઘનતાનું મૂલ્ય એટલું બધું વધારે હોય કે જેથી તેની સપાટી પરના બિંદુએ $v_e > C$ (પ્રકાશનો વેગ) હોય, તો તેની સપાટી પરથી કંઈ પણ કાયમ માટે છટકી શકશે નહિ. (પ્રકાશ પણ નહિ !) આવા પદાર્થને **black hole** કહે છે. આપણે ખ્યાલમાં રાખવાનું છે કે કોઈ પણ દ્રવ્ય કણનો વેગ પ્રકાશના વેગ જેટલો કે તેથી વધુ હોઈ શકતો નથી. (C = 3 × 10^8 m s^{-1})

ઉદાહરણ 9 : પૃથ્વી પરના સ્થિર પદાર્થ માટે નિષ્ક્રમણ-ઝડપનું મૂલ્ય v_e = 11.2 km/s છે. જો પૃથ્વીની સપાટી પરના કોઈ સ્થિર પદાર્થને આના કરતાં ત્રણ ગણી ઝડપથી દૂર તરફ ફેંકવામાં આવે તો પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાંથી છટક્યા પછી તે પદાર્થની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ : ફેંકેલા પદાર્થની પ્રારંભિક ઝડપ = $v = 3v_e$, જ્યાં v_e = નિષ્ક્રમણ-ઝડપ = 11.2 km/s

પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાંથી છટક્યા પછી (એટલે કે અનંત અંતરે), ધારો કે આ પદાર્થની ઝડપ = v'

યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ પરથી,

$$\left\{\begin{matrix}\text{પૃથ્વી પરની ગતિ-}\\ \text{ઊર્જા + સ્થિતિ-}\\ \text{ઊર્જા}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{અનંત અંતરે ગતિ-}\\ \text{ઊર્જા + સ્થિતિ-}\\ \text{ઊર્જા}\end{matrix}\right\}$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{-GM_e m}{R_e}\right) = \left[\frac{1}{2}mv'^2 + 0\right] \quad ...(1)$$

($\because$ અનંત અંતરે સ્થિતિ-ઊર્જા = 0)

પરંતુ, $v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} \quad \therefore \frac{GM_e}{R_e} = \frac{v_e^2}{2}$

આ મૂલ્ય સમીકરણ (1) માં મૂકતાં અને $v = 3v_e$ (આપેલ છે) લખતાં

$$\frac{1}{2}m(9v_e^2) + \left(\frac{-v_e^2 m}{2}\right) = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$\therefore 9v_e^2 - v_e^2 = v'^2$$

$$\therefore v' = \sqrt{8}\,v_e = \left(\sqrt{8}\right)(11.2)$$

$$= 31.63 \text{ km/s}$$

ઉદાહરણ 10 : પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r ($>R_e$) અંતરે રહેલા એક પદાર્થને મુક્ત પતન કરાવવામાં આવે, તો તે પદાર્થ પૃથ્વીની સપાટી પર અથડાય ત્યારે તેની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $r > R_e$ અંતરે રહેલા પદાર્થને મુક્ત પતન કરાવતાં તેનો પ્રારંભિગ વેગ શૂન્ય હોવાથી તેની ગતિ-ઊર્જા = 0 અને સ્થિતિ-ઊર્જા = $\frac{-GM_e m}{r}$; જ્યાં m = પદાર્થનું દળ.

પદાર્થ પૃથ્વીની સપાટી પર પડે ત્યારે તેનો વેગ v હોય તો ગતિ-ઊર્જા = $\frac{1}{2}mv^2$, અને અહીં તેની

સ્થિતિ-ઊર્જા = $\frac{-GM_e m}{R_e}$

હવાનો અવરોધ અવગણતાં, યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

$$\left\{\begin{matrix}\text{પૃથ્વીના કેન્દ્રથી } r\\ \text{અંતરે ગતિ-ઊર્જા +}\\ \text{સ્થિતિ-ઊર્જા}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{પૃથ્વીની સપાટી પર}\\ \text{ગતિ-ઊર્જા +}\\ \text{સ્થિતિ-ઊર્જા}\end{matrix}\right\}$$

$$\therefore \left\{0 + \left(\frac{-GM_e m}{r}\right)\right\} = \left\{\frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{-GM_e m}{R_e}\right)\right\}$$

$$\therefore v^2 = 2GM_e\left[\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r}\right] \quad (1)$$

આ પરથી માંગેલ ઝડપ v મળે છે.

પરંતુ જો gના પદમાં જવાબ મેળવવો હોય તો,

$$g = \frac{GM_e}{{R_e}^2} \text{ પરથી } GM_e = g{R_e}^2$$

ઉપરના સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$v^2 = 2g\ {R_e}^2\left[\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r}\right] \quad (2)$$

$$\therefore v = \left[2g{R_e}^2\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

નોંધ : જો પદાર્થને ખૂબ જ ઊંચેથી ($r \to \infty$) મુક્ત-પતન કરાવેલ હોય તો સમીકરણ (1) અને (2) પરથી

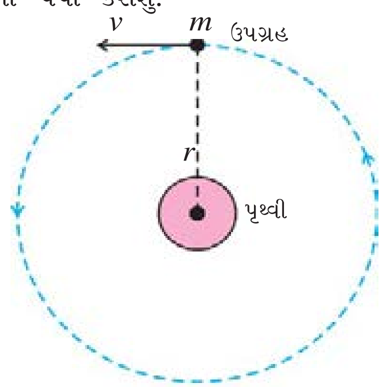
$v = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} = \sqrt{2R_e g}$. આ નિષ્ક્રમણ-ઝડપનું જ સૂત્ર છે.

3.9 ઉપગ્રહો (Satellites)

કોઈ પણ ગ્રહની આસપાસ પરિભ્રમણ કરતા પદાર્થને તેનો ઉપગ્રહ (satellite) કહે છે. ઉપગ્રહની કક્ષીય ગતિ ગ્રહના ગુરુત્વાકર્ષણ બળ અને પ્રારંભિક શરતો પર આધારિત હોય છે. ઉપગ્રહોને બે વર્ગોમાં વહેંચી શકાય : (1) કુદરતી ઉપગ્રહ (2) કૃત્રિમ ઉપગ્રહ.

ચંદ્ર એ પૃથ્વીનો કુદરતી ઉપગ્રહ છે. વળી, ગુરુને અને બીજા ગ્રહોને પણ તેમના ચંદ્રો (એટલે કે ઉપગ્રહો) છે. આપણા ચંદ્રનો પૃથ્વીની આસપાસના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ 27.3 દિવસ છે અને ચંદ્રનો પોતાની ધરીની આસપાસનો આવર્તકાળ પણ લગભગ આટલો જ છે.

1957માં રશિયન વિજ્ઞાનીઓએ પૃથ્વીની આસપાસ તરતો મૂકેલો **'સ્પુટનિક'** નામનો ઉપગ્રહ એ માનવજાતે બનાવેલો સૌપ્રથમ કૃત્રિમ ઉપગ્રહ હતો. આપણા ભારતીય વિજ્ઞાનીઓએ પણ અવકાશ ક્ષેત્રે હરણફાળ ભરીને 'આર્યભટ્ટ' અને 'ઈન્સેટ' શ્રેણીના ઘણા ઉપગ્રહો સફળતાપૂર્વક તરતા મૂક્યા છે. હાલમાં તો વિશ્વના ઘણા બધા દેશો દ્વારા તરતા મૂકાયેલા સેંકડો ઉપગ્રહો પૃથ્વીની આસપાસ અવકાશમાં ભ્રમણ કરી રહ્યા છે, જેમનો ઉપયોગ વૈજ્ઞાનિક, એન્જિનિયરિંગ, હવામાનની આગાહી, જાસુસી, લશ્કરી, સંદેશા વ્યવહાર, વગેરે હેતુઓ માટે કરાય છે. પ્રસ્તુત પરિચ્છેદમાં આપણે ઉપગ્રહોના ગતિવિજ્ઞાનની અને ભૂસ્થિર તેમજ ધ્રુવીય ઉપગ્રહોની ચર્ચા કરીશું.



ઉપગ્રહની કક્ષીય ગતિ

આકૃતિ 3.17

ધારો કે m દળના એક ઉપગ્રહને પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r અંતરે તરતો મૂકેલો છે, અને તેની વર્તુળ કક્ષામાંની ઝડપ v_0 છે. તેને કક્ષીય ઝડપ અથવા કક્ષીય વેગ કહે છે. અહીં, $r = R_e + h$ જ્યાં, R_e = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા અને h = પૃથ્વીની સપાટીથી ઉપગ્રહની ઊંચાઈ. તેની આ વર્તુળગતિ માટેનું જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ (${mv_0}^2/r$), એ તેના પરના પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણ બળ દ્વારા પૂરું પડાય છે.

$$\therefore \frac{m{v_0}^2}{r} = \frac{GM_e m}{r^2} \quad (3.9.1)$$

$$\therefore \text{ ઉપગ્રહની કક્ષીય ઝડપ } v_0 = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \quad (3.9.2)$$

સમીકરણ (3.9.1), પરથી ઉપગ્રહની ગતિ-ઊર્જા

$$K = \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{GM_e m}{2r}. \quad (3.9.3)$$

સમીકરણ (3.7.10) પરથી આ ઉપગ્રહની (ખરેખર તો પૃથ્વી + ઉપગ્રહના તંત્રની) સ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = \frac{-GM_e m}{r} \quad (3.9.4)$$

$\therefore$ ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા

E = ગતિ-ઊર્જા K + સ્થિતિ-ઊર્જા U

$$= \frac{GM_em}{2r} - \frac{GM_em}{r} \quad (3.9.5)$$

$$= \frac{-GM_em}{2r} \quad (3.9.6)$$

આ કુલ ઊર્જા ઋણ છે, તેથી તે આ ઉપગ્રહ બંધિત અવસ્થામાં હોવાનું સૂચવે છે. સમીકરણ (3.9.3), (3.9.4) અને (3.9.6) પરથી તમે જોઈ શકશો કે જો ઉપગ્રહની ગતિ-ઊર્જા x હોય તો તેની સ્થિતિ-ઊર્જા $-2x$ અને કુલ ઊર્જા $-x$ થાય છે. તેથી તેની બંધન-ઊર્જા (નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા) x થશે.

ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ (T) : ઉપગ્રહને પૃથ્વીની આસપાસ એક પરિભ્રમણ પૂરું કરતાં લાગતો સમય એ તેનો આવર્તકાળ (T) છે અને આ સમય દરમિયાન તેણે કાપેલું અંતર વર્તુળમાર્ગના પરિઘ ($2\pi r$) જેટલું છે.

$$\therefore \text{ કક્ષીય ઝડપ } v_0 = \frac{2\pi r}{T} \quad (3.9.7)$$

∴ સમીકરણ (3.9.1) પરથી,

$$\frac{m}{r}\left(\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}\right) = \frac{GM_em}{r^2} \quad (3.9.8)$$

$$\therefore T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_e}\right) r^3 \quad (3.9.9)$$

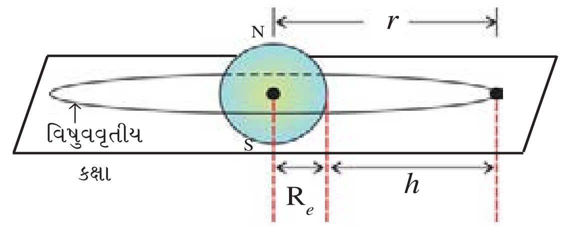
કૌંસમાંની બધી રાશિઓ અચળ હોવાથી $T^2 \propto r^3$ (3.9.10)

આમ, **"ઉપગ્રહના કક્ષીય આવર્તકાળનો વર્ગ તેની કક્ષીય ત્રિજ્યાના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે."** આ વિધાન ઉપગ્રહની વર્તુળકક્ષાના સંદર્ભમાં કૅપ્લરનો ત્રીજો નિયમ છે.

સમીકરણ (3.9.9) પરથી,

$$T = \left(\frac{4\pi^2 r^3}{GM_e}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9.11)$$

ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ : પૃથ્વીના જે ઉપગ્રહનો કક્ષીય આવર્તકાળ 24 hour (એટલે કે પૃથ્વીની પોતાની અક્ષની આસપાસની ચાકગતિના આવર્તકાળ જેટલો) હોય તેને ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ (geo-stationary અથવા geo-synchronous satellite) કહે છે, કારણ કે પૃથ્વી પરથી જોતાં તે કાયમ સ્થિર દેખાય છે. આવા ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ વિષુવવૃતીય સમતલમાં ભ્રમણ કરતા હોય છે. જુઓ આકૃતિ 3.18(a).



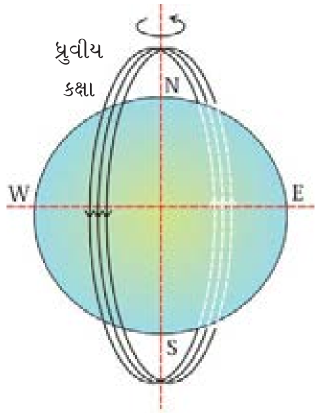
ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ

આકૃતિ 3.18(a)

ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ માટે સમીકરણ (3.9.11)માં G = 6.67 × 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}, M_e = 5.98 × 10^{24} kg અને T = 24 × 3600 s, મૂકતાં, r = 42260 km મળે છે. આથી પૃથ્વીની સપાટીથી આ ભૂસ્થિર ઉપગ્રહની ઊંચાઈ $h = r - R_e$ = 42260 − 6400 = 35860 km મળે છે. આ સિવાયની બીજી કોઈ ઊંચાઈ માટે ઉપગ્રહ ભૂસ્થિર રહી શકતો નથી.

આવા ઉપગ્રહ દૂર સંચાર (tele communication)માં વપરાય છે. ઉપરાંત તેમનો ઉપયોગ **Global Positioning System (GPS)**માં પણ થાય છે, જેમાં વ્યક્તિને આપેલા સ્થાનેથી તેના ગંતવ્યસ્થાન (destination) સુધી જવા માટેના વિવિધ રસ્તાઓની અને તેમાંથી સૌથી ટૂંકા રસ્તા અંગેની માહિતી નકશાસહિત મૉનિટરના screen પર દર્શાવવામાં આવે છે.

ધ્રુવીય ઉપગ્રહ (Polar Satellite) : આવા ઉપગ્રહ પૃથ્વીની ફરતે ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં ભ્રમણ કરતા હોય છે. તેઓ પૃથ્વીની સપાટીથી લગભગ 800 km ઊંચાઈએ હોય છે. પૃથ્વીનું ભ્રમણ પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં થતું હોવાથી આવા ઉપગ્રહ (તેમનો આવર્તકાળ T લગભગ 100 મિનિટ હોય છે.) પૃથ્વીના દરેક વિભાગને દરરોજ કેટલીય વાર જોઈ શકે છે. તેમાં રાખેલા કૅમેરાની મદદથી દર એક ભ્રમણમાં પૃથ્વીનો એક પાતળી પટ્ટી જેવો વિસ્તાર જોઈ શકે છે. બીજા ભ્રમણમાં તેની બાજુની પટ્ટીનો વિસ્તાર જોઈ શકે છે. આમ સમગ્ર દિવસ દરમિયાન સમગ્ર પૃથ્વીનું અવલોકન ઘણીવાર કરી શકે છે. આ પરથી મળેલી માહિતી દૂર-સંવેદન (remote sensing)માં, હવામાનશાસ્ત્રમાં, પર્યાવરણના અભ્યાસમાં, જાસૂસીમાં વગેરેમાં થાય છે.



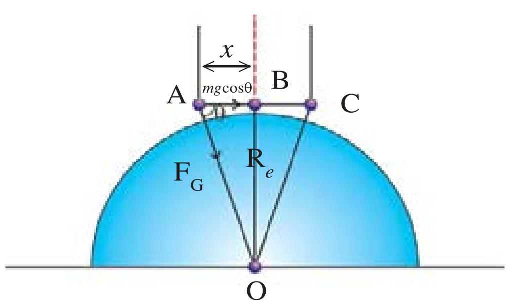
ધ્રુવીય કક્ષા

આકૃતિ 3.18(*b*)

ઉદાહરણ 11 : એક કાલ્પનિક સાદા લોલકનું આધારબિંદુ પૃથ્વીની સપાટીથી અનંત ઊંચાઈએ છે અને લોલકનો ગોળો પૃથ્વીની સપાટીથી તદ્દન નજીક છે. આ લોલકનો (એટલે કે અનંત લંબાઈના લોલકનો) આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$ છે. તેમ દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં લોલકનું આધારબિંદુ અનંત ઊંચાઈએ હોવાથી ગોળાનો સૂક્ષ્મ ગતિપથ લગભગ સુરેખ લઈ શકાય. ગોળાનું દળ $= m$.

અહીં ગુરુત્વબળ F_G $(= mg)$નો $mg\cos\theta$ ઘટક ગોળાને પુનઃસ્થાપક બળ પૂરું પાડે છે. તેથી ગોળા પરનું પુનઃસ્થાપક બળ $F = -mg\cos\theta$ (બળ પુનઃસ્થાપક હોવાથી ઋણ ચિહ્ન મૂક્યું છે.)



આકૃતિ 3.19

આકૃતિ 3.19 પરથી $\cos\theta = \frac{x}{R_e}$. (ગોળો પૃથ્વીની સપાટીની તદ્દન નજીક હોવાથી AO = BO = R_e લઈ શકાય.)

$$\therefore\ F = -mg\left(\frac{x}{R_e}\right)$$

$$\therefore\ F = -kx \qquad (1)$$

જ્યાં, k = બળ-અચળાંક $= \frac{mg}{R_e}$

$\therefore$ સમીકરણ (1) સૂચવે છે કે લોલકની ગતિ સરળ આવર્તગતિ છે.

$$\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ gives,}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg / R_e}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$$

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે પૃથ્વીની સપાટીની તદ્દન નજીક રહીને પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહ માટે બંધન-ઊર્જા $\frac{1}{2}mgR_e$ જેટલી હોય છે.

ઉકેલ : અહીં, ઉપગ્રહ (દળ $= m$), વર્તુળ ગતિ માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ એ પૃથ્વીનું તેના પરનું ગુરુત્વાકર્ષી બળ છે.

$$\therefore\ \frac{mv^2}{R_e} = \frac{GM_e m}{R_e^2} = gm \ \left(\because\ g = \frac{GM_e}{R_e^2}\right)$$

ઉપગ્રહની ગતિ-ઊર્જા $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgR_e$

અને સ્થિતિ-ઊર્જા $= \frac{-GM_e m}{R_e}$

$$= \frac{-GM_e m}{R_e^2} R_e$$

$$= -gmR_e$$

$\therefore$ કુલ ઊર્જા = ગતિ-ઊર્જા + સ્થિતિ-ઊર્જા

$$= \frac{1}{2}mgR_e - gmR_e$$

$$= -\frac{1}{2}mgR_e$$

$\therefore$ ઉપગ્રહની બંધન-ઊર્જા $= \frac{1}{2}mgR_e$

ઉદાહરણ 13 : એકબીજાથી 10*m* અંતરે રહેલા 1 kg અને 2 kg દળના પદાર્થો સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરવામાં આવે છે. તેમના પર પરસ્પર ગુરુત્વબળો જ લાગતા હોવાનું સ્વીકારીને જ્યારે તેમની વચ્ચેનું અંતર 5*m* થાય, ત્યારે તે દરેકના વેગ શોધો.
($G = 6.66 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 લો.)

ઉકેલ : પ્રારંભમાં બંને પદાર્થોની વેગ શૂન્ય છે, તેથી ગતિ-ઊર્જાઓ શૂન્ય છે. (એટલે કે, $v_1 = v_2 = 0$; $K_1 = K_2 = 0$)

જ્યારે તેમની વચ્ચેનું અંતર $5m$ થાય ત્યારે તેમના વેગ અનુક્રમે v_1' અને v_2' છે અને ગતિ-ઊર્જાઓ K_1' અને K_2' છે.

આ તંત્રની પ્રારંભિક સ્થિતિ-ઊર્જા $U_1 = \dfrac{-Gm_1m_2}{r_1}$

$$= \frac{-(6.67 \times 10^{-11})(1 \times 2)}{10}$$

$= -13.32 \times 10^{-12}$ J.

અંતિમ સ્થિતિ-ઊર્જા $U_2 = \dfrac{-Gm_1m_2}{r_2}$

$$= \frac{-(6.66 \times 10^{-11})(1 \times 2)}{5}$$

$= -26.64 \times 10^{-12}$ J.

$\therefore$ સ્થિતિ-ઊર્જાનો ફેરફાર $\Delta U = U_2 - U_1$

$= -26.64 \times 10^{-12} - (-13.32 \times 10^{-12})$

$= -13.32 \times 10^{-12}$ J

યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ $K + U =$ અચળ $\therefore \Delta K + \Delta U = 0$.

$\therefore \Delta K = -\Delta U$

$\therefore (K_1' + K_2') - 0 = -(U_2 - U_1)$

$\therefore (\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2) - (0) = 13.32 \times 10^{-12}$ J

$$\therefore \frac{v_1'^2}{2} + v_2'^2 = 13.32 \times 10^{-12} \quad (1)$$

વેગમાનસંરક્ષણના નિયમ મુજબ પ્રારંભિક કુલ વેગમાન = અંતિમ કુલ વેગમાન

$$\therefore m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}' = 0$$

$$\therefore m_1\vec{v_1}' = -m_2\vec{v_2}'$$

$$\therefore \vec{v_1}' = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v_2}'$$

$$\therefore |\vec{v_1}'| = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)(|\vec{v_2}'|)$$

$$\therefore v_1' = 2v_2' \quad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી

$$\frac{4v_2'^2}{2} + v_2'^2 = 13.32 \times 10^{-12}$$

$$\therefore 3v_2'^2 = 13.32 \times 10^{-12}$$

$$\therefore v_2'^2 = 4.44 \times 10^{-12} = 444 \times 10^{-14}$$

$$\therefore v_2' = 21.07 \times 10^{-7} \text{ m/s}$$

$$\therefore v_1' = 42.14 \times 10^{-7} \text{ m/s}$$

ઉદાહરણ 14 : એક ગ્રહની આસપાસ બે ઉપગ્રહો S_1 અને S_2 એક સમતલસ્થ એવી બે જુદી-જુદી વર્તુળાકાર કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે. જો તેમના આવર્તકાળ અનુક્રમે 31.4 h અને 62.8 h હોય અને S_1 ની કક્ષાની ત્રિજ્યા 4000 km હોય, તો (i) S_2ની કક્ષાની ત્રિજ્યા શોધો. (ii) બંને ઉપગ્રહોનાં કક્ષીય વેગનાં મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ :

(i) $T^2 \propto r^3$

$$\therefore \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

$$\therefore r_2^3 = r_1^3\left(\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)$$

$$= (4000)^3\left(\frac{62.8^2}{31.4^2}\right)$$

$$\therefore r_2 = (4000)(4)^{\frac{1}{3}} = (4000)(1.588)$$

$$= 6352 \text{ km}$$

(ii) $$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = \frac{(2)(3.14)(4000)}{31.4}$$

$$= 800 \text{ km/h}$$

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2} = \frac{(2)(3.14)(6352)}{62.8}$$

$$= 635.2 \text{ km/h}$$

સમુદ્રમાં ભરતી
(માત્ર જાણકારી માટે)

વિદ્યાર્થીમિત્રો,

તમને કદાચ એવો ખ્યાલ હશે કે સમુદ્રમાં આવતી ભરતીનું કારણ ગુરુત્વાકર્ષણ છે. આ ઘટનામાં સૂર્ય અને ચંદ્ર બંનેનાં ગુરુત્વબળ ભાગ ભજવે છે. હવે સૂર્ય વડે પૃથ્વી પર લાગતું ગુરુત્વબળ, ચંદ્ર વડે પૃથ્વી પર લાગતા ગુરુત્વબળ કરતાં લગભગ 175 ગણું છે, તેમ છતાં ભરતીની ઘટનામાં સૂર્ય કરતાં ચંદ્રનો ફાળો વધુ છે - સૂર્ય કરતાં લગભગ 2.17 ગણો છે. આ હકીકત છે. આનું કારણ શું હશે ?

આનું કારણ એવું છે કે ગણતરીઓ પરથી ભરતી-જનકબળ (tidal force-ટાઇડ્લ ફોર્સ) **ગુરુત્વબળના અંતર સાથેના ફેરફારના દર પર આધારિત** હોવાનું જણાય છે, **નહિ કે ગુરુત્વબળના મૂલ્ય પર.** એટલે $F_{\text{સૂર્ય વડે}} > F_{\text{ચંદ્ર વડે}}$ હોવા છતાં $\frac{d}{dr}(F_{\text{ચંદ્ર વડે}}) > \frac{d}{dr}(F_{\text{સૂર્ય વડે}})$ હોય છે, તેથી ભરતીની ઘટનામાં ચંદ્રનો ફાળો વધુ છે. $F = \frac{GMm}{r^2}$ પરથી $\frac{d}{dr}(F) = \frac{-2GMm}{r^3}$. આ સૂત્રોમાં m = એકમ દળનું પાણી વિચારીને તમે જાતે આ બાબતને ચકાસી શકશો. આ માટે ઉપરનાં સૂત્રોમાં ($M_S = 2 \times 10^{30}$ kg, $r_S = 1.5 \times 10^{11}\ m$, $M_m = 7.36 \times 10^{22}$ kg, $r_m = 3.84 \times 10^8 m$ લો.)

(આ તો માત્ર સાદી સમજૂતી છે, બાકી ભરતીની ઘટના ઘણી જટિલ છે. તેમાં સ્થાનિક પરિબળો-જેવાં કે સમુદ્ર તટથી સમુદ્રના તળિયાનું અંતર, સમુદ્રની નીચેનું નજીકનું પૃથ્વીનું બંધારણ, ઉપરાંત પૃથ્વીની ચાકગતિ વગેરે પણ અમુક અંશે ભાગ ભજવે છે.)

આપણે માત્ર ભરતી-જનક-બળ $\frac{1}{r^3}$ પર આધારિત હોવાની નોંધ લઈશું અને આ કારણથી ઉપરનાં સૂત્રો મુજબ ચંદ્રનો ફાળો સૂર્ય કરતાં વધુ છે.

સારાંશ

1. ટોલેમીના પૃથ્વી-કેન્દ્રીય વાદ અને કૉપરનિક્સના સૂર્ય-કેન્દ્રીય વાદમાંથી હાલમાં સૂર્ય-કેન્દ્રીયવાદની સત્યતા સ્વીકારવામાં આવી છે.
2. **કૅપ્લરના નિયમો :** (1) "બધા ગ્રહો એવી લંબવૃત્તીય કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે કે જેના એક કેન્દ્ર પર સૂર્ય હોય." (2) "સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખાએ સમાન સમયગાળામાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે." (3) કોઈ પણ ગ્રહના પરિભ્રમણના આવર્તકાળ (T)નો વર્ગ તેની લંબવૃત્તીય કક્ષાની અર્ધ-દીર્ઘ અક્ષ (a) ના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે. ($T^2 \propto a^3$)
3. **ન્યૂટનનો ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ :** "વિશ્વમાંનો દરેક પદાર્થ બીજા દરેક પદાર્થ પર આકર્ષી બળ લગાડે છે. જેનું મૂલ્ય તેમનાં દળોના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે." એટલે કે, $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$.

   સદિશ સ્વરૂપમાં $\left[\begin{matrix}\vec{F}_{12} \\ 1 \text{ પર } 2 \text{ વડે} \\ \text{બળ}\end{matrix}\right] = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$

   જ્યાં $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_{12}|}$ અને $\vec{r}_{12} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$; $|\vec{r}_{12}| = r$

વળી, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

નોંધપાત્ર મુદ્દા : (*i*) પોલા ગોળાકાર કવચને લીધે તેની બહારના બિંદુએ આવેલા કણ પર લાગતું ગુરુત્વબળ, જાણે કે તે કવચનું બધું દળ તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયું હોય તેમ ગણીને, મળતા બળ જેટલું હોય છે. (*ii*) પોલા ગોળાકાર કવચની અંદરના કોઈ પણ બિંદુએ આવેલ કણ પર લાગતું ગુરુત્વબળ શૂન્ય હોય છે.

4. G નું મૂલ્ય સૌપ્રથમ કેવેન્ડિશે પ્રાયોગિક રીતે મેળવ્યું હતું. હાલમાં Gનું સ્વીકૃત મૂલ્ય 6.67×10^{-11} N m^2/kg^2 છે.

5. ગુરુત્વાકર્ષી બળને લીધે પદાર્થમાં ઉદ્‌ભવતા પ્રવેગને ગુરુત્વપ્રવેગ g કહે છે. પૃથ્વીની સપાટી પરના બિંદુ માટે ગુરુત્વપ્રવેગનું સૂત્ર $g_e = \frac{GM_e}{R_e^{\ 2}}$ છે. તેનું મૂલ્ય 9.8 m/s^2 છે.

વિષુવવૃત્ત કરતાં ધ્રુવ પર g_eનું મૂલ્ય થોડું વધારે હોય છે, પરંતુ તફાવત અત્યંત અલ્પ છે.

પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ $g(h) = \frac{g_e}{\left[1+\frac{h}{R_e}\right]^2}$ છે. સપાટીથી થોડી ઊંચાઈ માટે $g(h) \approx g_e$ લઈ શકાય છે.

પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈએ પૃથ્વીની અંદર આવેલા બિંદુએ ગુરુત્વપ્રવેગ $g(d) = g_e\left[1 - \frac{d}{R_e}\right]$ છે. પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર ગુરુત્વપ્રવેગ શૂન્ય છે.

પૃથ્વીના ભ્રમણને લીધે λ અક્ષાંશ ધરાવતા સ્થળે પૃથ્વીની સપાટી પર અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ

$$g' = g\left[1 - \frac{R_e\omega^2\cos^2\lambda}{g}\right] \text{ છે.}$$

6. “આપેલ બિંદુએ એકમ દળના પદાર્થ પર લાગતા ગુરુત્વબળને તે બિંદુ આગળની **ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રની તીવ્રતા** (I) કહે છે. $I = \frac{GM}{r^2}$ કહે છે. આ પરથી તે બિંદુએ મૂકેલા m દળના પદાર્થ પર લાગતું ગુરુત્વબળ F = (I)(m). પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર ગુરુત્વતીવ્રતા શૂન્ય છે. I અને gનાં મૂલ્યો સમાન હોય છે.

7. **એકમદળના** પદાર્થને અનંત અંતરેથી ગુરુત્વક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવવા દરમિયાન ગુરુત્વ-બળે કરેલા કાર્યના ઋણ મૂલ્યને તે બિંદુ આગળનું ગુરુત્વસ્થિતિમાન (ϕ) કહે છે. $\phi = \frac{GM_e}{r}$

પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r ($>R_e$) અંતરે $\phi_e = \frac{-GM_e}{R_e}$ અને પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વસ્થિતિમાન

$\phi_e = \frac{-GM_e}{R_e}$. ગુરુત્વસ્થિતિમાનનો એકમ J kg^{-1} અને પારિમાણિક સૂત્ર $M^0L^2T^{-2}$ છે.

આપેલા (m દળના) પદાર્થને પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રમાં અનંત અંતરેથી આપેલા બિંદુએ લાવવા દરમિયાન ગુરુત્વબળે કરેલા કાર્યના ઋણ મૂલ્યને તે બિંદુ પાસે પૃથ્વી અને તે પદાર્થના તંત્રની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા U કહે છે, જેને સામાન્ય રીતે તે પદાર્થની સ્થિતિ-ઊર્જા તરીકે પણ ઉલ્લેખવામાં આવે છે. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r ($> R_e$) અંતરે રહેલા m દળના પદાર્થની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા

$U = \frac{-GM_em}{r} = \phi m$ અને પૃથ્વીની સપાટી પરના પદાર્થની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા

$U_e = \frac{-GM_em}{R_e} = \phi_e m$.

ગુરુત્વસ્થિતિમાન અને ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જાનાં મૂલ્યોનું કોઈ મહત્ત્વ નથી, માત્ર તેમના ફેરફારનું જ મહત્ત્વ છે.

8. પૃથ્વીની સપાટી પરના સ્થિર પદાર્થ માટે કુલ ઊર્જા = તેની સ્થિતિ-ઊર્જા = $\frac{-GM_em}{R_e}$.

$\therefore$ તેની નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા = બંધન-ઊર્જા = $\frac{GM_em}{R_e}$ અને નિષ્ક્રમણ-વેગ $v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$ = 11.2 km/s.

ચંદ્રની સપાટી પરના સ્થિર પદાર્થ માટે નિષ્ક્રમણ-વેગ 2.3 km/s.

9. પૃથ્વીની આસપાસ ફરતા ઉપગ્રહનો કક્ષીય વેગ $v_0 = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ અને ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા $= \frac{-GM_em}{2r}$. તેની બંધન-ઊર્જા $= \frac{GM_em}{2r}$. ભૂસ્થિર ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ T = 24 hour = 24 × 3600 s. તેઓ વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં ભ્રમણ કરે છે. પૃથ્વીની સપાટીથી તેની ઊંચાઈ h = 35800 km (લગભગ) છે. ધ્રુવીય ઉપગ્રહ ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં ભ્રમણ કરે છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. N m^2/kg^2 એ નીચેનામાંથી શાનો એકમ છે ?

(A) રેખીય વેગમાન (B) ગુરુત્વબળ

(C) ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક (D) ગુરુત્વપ્રવેગ

2. કોઈ ગ્રહની આસપાસ ભ્રમણ કરતા જુદા જુદા ઉપગ્રહોની કક્ષીય ત્રિજ્યા r અને અનુરૂપ આવર્તકાળ T પરથી મળતા log r − log T ના આલેખનો ઢાળ કેટલો હશે ?

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{2}{3}$ (D) 2

3. પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય 9.81 m/s^2 હોય તો પૃથ્વીની સપાટીથી પૃથ્વીના વ્યાસ જેટલી ઊંચાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ કેટલો હશે ?

(A) 4.905 m/s^2 (B) 2.452 m/s^2 (C) 3.27 m/s^2 (D) 1.09 m/s^2

4. પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વસ્થિતિમાન Φ_e હોય, તો સપાટીથી પૃથ્વીની ત્રિજ્યા જેટલી ઊંચાઈએ ગુરુત્વસ્થિતિમાન કેટલું હશે ?

(A) $\frac{\Phi_e}{2}$ (B) $\frac{\Phi_e}{4}$ (C) Φ_e (D) $\frac{\Phi_e}{3}$

5. પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગ 10 m/s^2 અને પૃથ્વીની ત્રિજ્યા 6400 km લેતાં, સપાટીથી 64 km ઊંડાઈએ જતાં ગુરુત્વપ્રવેગ gના મૂલ્યમાં થતો ઘટાડો .... m/s^2 હશે.

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.05 (D) 0.3

6. પૃથ્વીની ચાકગતિને લીધે તેના વિષુવવૃત્ત પર રહેલા પદાર્થનો પૃથ્વીના કેન્દ્રથી દૂર તરફની ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાંનો આભાસી પ્રવેગ કેટલો હશે ?

(A) ωR_e (B) $\omega^2 R_e$ (C) ωR_e^2 (D) $\omega^2 R_e^2$

જ્યાં, ω = પૃથ્વીની કોણીય ઝડપ,

R_e = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા

7. ગ્રહની આસપાસ જુદી-જુદી વર્તુળકક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરતા જુદા-જુદા ઉપગ્રહો માટે કોણીય વેગમાન L અને કક્ષીય ત્રિજ્યા r વચ્ચેનો સંબંધ નીચેનામાંથી કયો છે ?

(A) $L \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ (B) $L \propto r^2$ (C) $L \propto \sqrt{r}$ (D) $L \propto \frac{1}{r^2}$

8. ગોળાકાર નિયમિત કવચની અંદરના વિસ્તારમાં બધાં બિંદુઓએ ....

(A) ગુરુત્વતીવ્રતા અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન બંને શૂન્ય હોય છે.

(B) ગુરુત્વતીવ્રતા અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન બંને અશૂન્ય હોય છે.

(C) ગુરુત્વતીવ્રતા અશૂન્ય અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન શૂન્ય હોય છે.

(D) ગુરુત્વતીવ્રતા શૂન્ય અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન અશૂન્ય પણ સમાન હોય છે.

9. નીચેનામાંથી કયો વિકલ્પ અનુક્રમે ગુરુત્વસ્થિતિમાન અને ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જાનાં પારિમાણિક સૂત્રો રજૂ કરે છે ?

(A) $M^1L^1T^{-1}$, $M^1L^2T^{-2}$ (B) $M^0L^2T^{-2}$, $M^1L^2T^{-2}$

(C) $M^0L^2T^{-2}$, $M^1L^2T^2$ (D) $M^1L^2T^{-1}$, $M^2L^1T^{-1}$

10. સૂર્યની આસપાસ પરિભ્રમણ કરતા ગ્રહ માટે ....

(A) રેખીય ઝડપ અને કોણીય ઝડપ અચળ હોય છે.

(B) ક્ષેત્રીય વેગઅને કોણીય વેગમાન અચળ હોય છે.

(C) રેખીય ઝડપ અને ક્ષેત્રીય વેગ અચળ હોય છે.

(D) ક્ષેત્રીય વેગ અચળ હોય છે, પણ કોણીય વેગમાન બદલાય છે.

11. ગ્રહની આસપાસ એક જ કક્ષામાં ઘૂમતા બે ઉપગ્રહોનાં દળોનો ગુણોત્તર $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$ હોય, તો તેમના કક્ષીય વેગોનો ગુણોત્તર $\frac{v_1}{v_2}$ = ...

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 4

12. એક ગ્રહની આસપાસ r ત્રિજ્યાની કક્ષામાં રહેલા ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ T હોય, તો $4r$ ત્રિજ્યાની કક્ષામાંના ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ T' = ...

(A) 4T (B) 2T (C) 8T (D) 16T

13. બે ગ્રહોની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે r_1 અને r_2 તથા તેમની ઘનતાઓ અનુક્રમે ρ_1 અને ρ_2 છે. તેમની સપાટી પરના ગુરુત્વપ્રવેગ અનુક્રમે g_1 અને g_2 છે, તો. $\frac{g_1}{g_2}$ = ...

(A) $\frac{r_1\rho_1}{r_2\rho_2}$ (B) $\frac{r_2\rho_2}{r_1\rho_1}$ (C) $\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$ (D) $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$

14. પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહોની ગતિ-ઊર્જા (E_k) અને તેમની કક્ષીય ત્રિજ્યા (r) વચ્ચેનો સંબંધ કેવા પ્રકારનો હશે ?

(A) $E_k \propto r$ (B) $E_k \propto \frac{1}{r}$ (C) $E_k \propto r^2$ (D) $E_k \propto \frac{1}{r^2}$

15. પૃથ્વીની ત્રિજ્યા R_eમાંથી $\frac{R_e}{2}$ થાય તેમ પૃથ્વીનું સંકોચન થાય (પણ કપાઈ જતી નથી !) તો તે બે સ્થિતિમાં તેના કેન્દ્રથી R_e અંતરે આવેલા બિંદુએ ગુરુત્વપ્રવેગ gનાં મૂલ્ય અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન ϕનાં મૂલ્ય અંગે શું કહી શકાય ?

(A) g અને ϕ બંનેનાં મૂલ્ય અડધાં થાય છે.

(B) gનું મૂલ્ય અડધું થાય અને ϕનું મૂલ્ય અગાઉ જેટલું જ છે.

(C) gનું મૂલ્ય અગાઉ જેટલું જ અને ϕનું મૂલ્ય અડધું થાય છે.

(D) g અને ϕ ના બંનેનાં મૂલ્ય અગાઉ જેટલાં જ રહે છે.

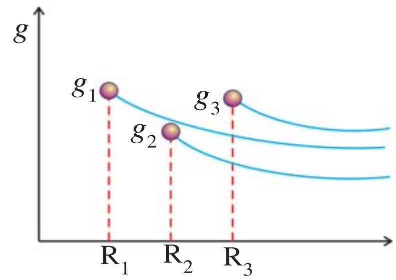
જવાબો

1. (C)	2. (C)	3. (D)	4. (A)	5. (A)	6. (B)
7. (C)	8. (D)	9. (B)	10. (B)	11. (A)	12. (C)
13. (A)	14. (B)	15. (D)			

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. પૃથ્વીના વિષુવવૃત્ત અને ધ્રુવમાંથી કયા સ્થળે ગુરુત્વપ્રવેગ gનું મૂલ્ય વધારે હોય છે ? શા માટે ?
2. પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર ગુરુત્વપ્રવેગ અને ગુરુત્વતીવ્રતાનાં મૂલ્યો જણાવો.
3. એક બિંદુએ ગુરુત્વતીવ્રતાનું મૂલ્ય 0.7 N/kg છે, તો તે બિંદુએ 5 kg દળના પદાર્થ પર લાગતા ગુરુત્વબળનું મૂલ્ય કેટલું હશે ? [જવાબ : 3.5 N]
4. "કોઈ ગ્રહની સપાટી પરના સ્થિર પદાર્થ માટે નિષ્ક્રમણ-વેગ v_e નું મૂલ્ય ગ્રહના દળ અને ત્રિજ્યાના સમપ્રમાણમાં હોય છે." – આ વિધાન સાચું છે ? જો ન હોય તો સુધારીને લખો.
5. ધ્રુવીય ઉપગ્રહના કોઈ બે ઉપયોગો જણાવો.
6. જો કોઈ ઉપગ્રહની ગતિ-ઊર્જા 6×10^9 J હોય તો તેની સ્થિતિ-ઊર્જા કેટલી હશે ? કુલ ઊર્જા કેટલી હશે ?
7. એક ઉપગ્રહની સ્થિતિ-ઊર્જા -8×10^9 J છે. તો તેની બંધન-ઊર્જા (અથવા નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા) કેટલી હશે ?

8. જુદા-જુદા ગ્રહોનાં દળ M_1, M_2, M_3 ત્રિજ્યાઓ R_1, R_2, R_3 અને સપાટી પરના ગુરુત્વ-પ્રવેગ g_1, g_2, g_3 છે, તો તેમને માટેના નીચેના આલેખ પરથી તેમનાં દળનાં મૂલ્યોને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવો.



આકૃતિ 3.20

(**Hint :** કોઈક નિશ્ચિત અંતર $r > R_3$ માટે $g = \frac{GM}{r^2}$ પરથી વિચારો.]

[**જવાબ :** $M_3 > M_1 > M_2$]

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ન્યૂટનનો ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ જણાવો અને તેના સૂત્રને સદિશ સ્વરૂપમાં લખો અને સમજાવો.

2. પૃથ્વીના ઉપગ્રહ માટે કક્ષીય વેગનું સૂત્ર મેળવો.

3. પૃથ્વીના ઉપગ્રહ માટે આવર્તકાળનું સૂત્ર તારવો.

4. પૃથ્વીની સપાટી પર રહેલા સ્થિર પદાર્થ માટે નિષ્ક્રમણ-ઝડપ (નિષ્ક્રમણ-વેગ)નું સૂત્ર મેળવો.

5. પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગનું સૂત્ર મેળવો.

6. ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જાનું સૂત્ર મેળવો.

7. ગુરુત્વાકર્ષી તીવ્રતાની વ્યાખ્યા આપો અને તેનું સૂત્ર લખો. તેનો એકમ અને પારિમાણિક સૂત્ર જણાવો.

8. ગુરુત્વસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા આપો. તેનો એકમ અને પારિમાણિક સૂત્ર જણાવો.

9. ગુરુત્વ સ્થિતિ-ઊર્જાની વ્યાખ્યા આપો. તેનો એકમ અને પારિમાણિક સૂત્ર જણાવો.

10. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r ($> R_e$) અંતરે તેના ગુરુત્વસ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવો.

11. પૃથ્વીના ભ્રમણને લીધે અક્ષાંશ સાથે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ g' માં થતાં ફેરફારનું સૂત્ર મેળવો.

12. સૂર્યની આસપાસ ઘૂમતા ગ્રહની અર્ધ-દીર્ઘ અક્ષ a છે અને આટલા અંતરે ગ્રહની યાંત્રિક ઊર્જા $\frac{-GMm}{2a}$; જ્યાં, M = સૂર્યનું દળ; m = ગ્રહનું દળ. જ્યારે ગ્રહનું સૂર્યથી અંતર r હોય ત્યારે તેનો વેગ શોધો.

[**જવાબ :** $v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$]

[**Hint :** યાંત્રિક ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમનો ઉપયોગ કરો.].

13. g અને G વચ્ચેના તફાવતના મુદ્દા આપો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. એક અવકાશયાન પૃથ્વીથી સીધું સૂર્ય તરફ જાય છે. તો પૃથ્વીના કેન્દ્રથી કેટલે દૂર અવકાશયાન પર લાગતાં સૂર્ય અને પૃથ્વીનાં ગુરુત્વાકર્ષી બળો સમાન મૂલ્યનાં થશે ? સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર 1.49×10^8 km, સૂર્ય અને પૃથ્વીનાં દળ અનુક્રમે 2×10^{30} kg અને 6×10^{24} kg લો. [**જવાબ :** 25.7×10^4 km]

2. પૃથ્વી જો સમગ્રપણે સોનાનો જ બનેલો ગોળો હોત (!) તો પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય કેટલું હોત ? પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6400 km., સોનાની ઘનતા = 19.3×10^3 kg/m^3, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. [જવાબ : 34.49 m s^{-2}]

3. સૂર્યની આસપાસ પૃથ્વીની વર્તુળાકાર ભ્રમણકક્ષાની ત્રિજ્યા 1.5×10^8 km છે. પૃથ્વીની કક્ષીય ઝડપ 30 km/s છે, તો સૂર્યનું દ્રવ્યમાન શોધો. $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

[જવાબ : 2.02×10^{30}kg]

4. પૃથ્વીની સપાટીથી, પૃથ્વીની ત્રિજ્યા જેટલી ઊંચાઈએ એક ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે, તો તેના (*i*) કક્ષીય ઝડપ અને (*ii*) આવર્તકાળ શોધો. $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6400 km અને પૃથ્વીનું દળ = 6×10^{24} kg લો.

[જવાબ : $v_0 = 5.59 \times 10^3$ m/s, T = 14376s]

5. 200 kg નો એક ઉપગ્રહ, પૃથ્વીની સપાટીથી 1000 km ઊંચાઈએ પૃથ્વીની આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે, તો આ ઉપગ્રહની (*i*) બંધન-ઊર્જા અને (*ii*) નિષ્ક્રમણ-ઝડપ શોધો. પૃથ્વીનું દળ $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 અને પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6400 km લો. પૃથ્વીનું દળ = 6×10^{24} kg. [જવાબ : 5.4×10^9 J; $v_e = 7.35 \times 10^3$ m/s]

6. એક કૃત્રિમ ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ, પૃથ્વીની સપાટીથી તદ્દન નજીક રહીને ભ્રમણ કરે છે, તો સાબિત કરો કે તેનો આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$.

7. સાબિત કરો કે પૃથ્વીની સપાટીની તદ્દન નજીક રહીને પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહની રેખીય (કક્ષીય) ઝડપ અને પૃથ્વી પરના સ્થિર પદાર્થની નિષ્ક્રમણ-ઝડપનો ગુણોત્તર $\frac{1}{\sqrt{2}}$ જેટલો છે.

8. પૃથ્વી અને ચંદ્રનાં દળો અને ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે M_1, R_1 અને M_2, R_2 છે. તેમનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર *d* છે, તો તેમને જોડતી રેખાના મધ્યબિંદુ પરથી *m* દળના કણને કેટલા વેગથી ફેંકવો જોઈએ કે જેથી તે અનંત અંતરે નાસી જાય ?

[જવાબ : $v_e = \sqrt{\frac{4G}{d}(M_1 + M_2)}$]

9. ખૂબ જ મોટા દળવાળા તારા (star)ની આસપાસ જુદી-જુદી વર્તુળાકાર કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા ગ્રહોનો વિચાર કરો. જો ગ્રહો અને તારા વચ્ચેનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ $r^{-5/2}$ અનુસાર લાગતું હોય તો કક્ષીય આવર્તકાળનો વર્ગ *r* ના કયા ઘાતાંક પર આધાર રાખતો હશે ?

[જવાબ : $T^2 \propto r^{7/2}$]

•

પ્રકરણ 4

ઘન પદાર્થોના યાંત્રિક ગુણધર્મો

4.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

આ પ્રકરણમાં આપણે, ઘન પદાર્થનું બંધારણ અને તેના યાંત્રિક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું. આ ગુણધર્મો પૈકી એક સ્થિતિ સ્થાપકતાનો વિસ્તૃત અભ્યાસ આપણે આ પ્રકરણમાં કરીશું. વીસમી સદીના છેલ્લા બે દાયકામાં સોલિડ સ્ટેટ ભૌતિકવિજ્ઞાન અને લિક્વિડ સ્ટેટ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ઘણી પ્રગતિ સધાઈ છે. હવે ઘણા પદાર્થો માટે સ્થિતિસ્થાપકતાને લગતી ભૌતિક રાશીઓના મૂલ્ય કમ્પ્યૂટરની મદદથી ગણી કાઢવાનું શક્ય બન્યું છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે સ્થિતિસ્થાપકતાને લગતી પ્રાથમિક માહિતીની ચર્ચા કરીશું અને છેલ્લે ઘન પદાર્થની સ્થિતિસ્થાપકતાના વ્યાવહારિક ઉપયોગોની ચર્ચા કરીશું.

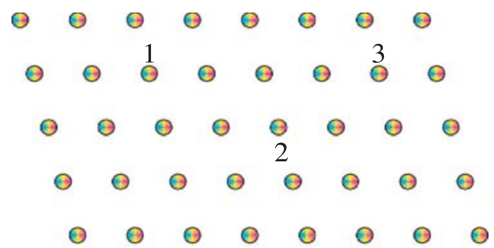
4.2 ઘન પદાર્થો (Solids)

ઘન પદાર્થોનો એક અગત્યનો ગુણધર્મ એ છે કે, નિશ્ચિત ભૌતિક પરિસ્થિતિઓમાં ઘટકકણો વચ્ચેનું અંતર અચળ હોય છે. પદાર્થના તાપમાનને અનુરૂપ હોય તેવા કંપવિસ્તારથી આ ઘટક કણો પોતાના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ દોલનો કરતાં હોય છે. પરંતુ કોઈ પણ બે કણ વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર હંમેશાં અચળ રહે છે. સંતુલન સ્થાનમાં રહેલા કણો વચ્ચેના અંતરોમાં વધારો ઘટાડો કરવામાં આવે, તો આ કણો વચ્ચે પ્રર્વતતાં આંતરઅણુ બળો એ રીતે બદલાય છે જેથી કણો વચ્ચેના સરેરાશ અંતરો જળવાઈ રહે. આમ, જ્યારે કણોને તેમના મધ્યમાન સ્થાનથી વિચલિત કરવામાં આવે તો તેમને તેમના મૂળ સ્થાન તરફ ખેંચી જતું બળ અસ્તિત્વમાં આવે છે. આવા બળને પુનઃસ્થાપક બળ કહે છે.

ઘન પદાર્થોમાં બંધારણીય કણોની ગોઠવણને આધારે તેમના ત્રણ પ્રકાર પાડવામાં આવે છે. આવુ વર્ગીકરણ અન્ય કોઈ ગુણધર્મને આધારે પણ કરી શકાય. આ પ્રકારો છે : (i) સ્ફટિકમય પદાર્થો (ii) અસ્ફટિકમય પદાર્થો અને (iii) અર્ધસ્ફટિકમય પદાર્થો.

(i) સ્ફટિકમય ઘન પદાર્થો (Crystalline Solids) : આ પ્રકારના ઘન પદાર્થોમાં ઘટકકણોની નિયમિત ભૌમિતિક હારબદ્ધ ગોઠવણી હોય છે. આ બાબત સમજવા માટે આકૃતિ 4.1 માં બિન્દુઓની દ્વિપરિમાણમાં અનંત ગોઠવણીનો અંશમાત્ર છે. અહીં કોઈ પણ બિન્દુ 1, 2, કે 3 પર રહીને અવલોકન કરતાં તમને સમાન ભાત જોવા મળશે. ત્રિપરિમાણમાં બિન્દુઓની આવી ગોઠવણીને 'લૅટિસ' કહે છે. લૅટિસ ગાણિતિક ખ્યાલ છે. જો બધી રીતે સમાન અણુઓ, પરમાણુઓ કે આયનો અથવા તેમના સમૂહો (કે જેમને બેસિસ કહેવાય છે.) લૅટિસ બિન્દુઓ પર મૂકતાં સ્ફટિકનું

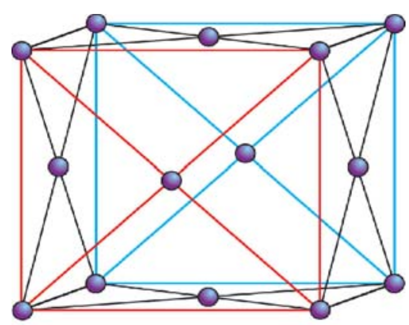
થાય છે. ઘટકકણો વચ્ચે પ્રવર્તમાન આંતરક્રિયાઓને અનુલક્ષીને જુદા જુદા પ્રકારના સ્ફટિકનું નિર્માણ થાય છે. પરંતુ ઘન પદાર્થ આપેલ પરિસ્થિતિમાં, એવું જ બંધારણ અપનાવે છે, જેથી તેની આંતરિક ઊર્જા લઘુતમ થાય.



લૅટિસ

આકૃતિ 4.1

સ્ફટિકને એક કરતાં વધુ એકસમાન એકમોનો બનેલો વિચારી શકાય. આવો જ એક કૉપરના ઘટકકણો (આયનો)નો બનેલો 'એકમ' આકૃતિ 4.2માં દર્શાવેલ છે. અહીં આ ગોઠવણીમાં સમઘનના દરેક શિરોબિન્દુ પર અને સમઘનની બાજુઓનાં કેન્દ્રો પર એક-એક આયન ગોઠવાયેલા હોય છે. હવે જો આવા એકમોને ત્રિપરિમાણમાં એકબીજાની પાસેપાસે ગોઠવતા જઈએ તો કૉપરનો સ્ફટિક તૈયાર થાય છે.



કૉપરના સ્ફટિકનો એકમકોષ

આકૃતિ 4.2

સ્ફટિકના બંધારણનો અભ્યાસ કરતી ભૌતિકવિજ્ઞાનની શાખોને ક્રિસ્ટલોગ્રાફી કહે છે. સ્ફટિક બંધારણનો અભ્યાસ X–કિરણો, ઇલેક્ટ્રૉન-કિરણો (electron beam) અને ન્યુટ્રૉન કિરણો (neutron beam) વડે કરી શકાય છે.

સ્ફટિકમય પદાર્થોમાં લાંબા ગાળાની વ્યવસ્થા **(long range order)** જોવા મળે છે. પરિણામે સ્ફટિકમય પદાર્થો નિશ્ચિત તાપમાને પીગળે છે.

સ્ફટિકમય પદાર્થોને તેમના બંધારણીય કણોના પ્રકાર અને તેમની વચ્ચેના પ્રવર્તમાન બંધન (bonding)ના આધારે ચાર વર્ગોમાં વહેંચવામાં આવે છે.

આણ્વિક ઘન (Molecular Solids) : આવા ઘન પદાર્થોમાં બંધારણીય કણો તરીકે અણુઓ હોય છે. આવા પદાર્થના અણુઓ ઇલેક્ટ્રૉનની ભાગીદારીને કારણે બનતા સહસંયોજક-બંધને કારણે નિર્માણ પામે છે. અણુઓ ધ્રુવીય કે અધ્રુવીય હોઈ શકે. (જો અણુઓમાં ધન વીજભાર અને ઋણ વીજભારનાં કેન્દ્ર એકબીજાં સાથે સંપાત થતાં હોય તો અણુ-અધ્રુવીય (non-polar) કહેવાય, નહીં તો ધ્રુવીય (polar) કહેવાય, આયોડિન (I_2), ફૉસ્ફરસ (P_4) અને સલ્ફર (S_8) અને કાર્બન ડાયૉક્સાઇડ (CO_2)ના અણુઓ અધ્રુવીય છે. જ્યારે પાણી (H_2O) ના ધ્રુવીય અણુ છે. જો ઘન પદાર્થ ધ્રુવીય અણુઓનો બનેલો હોય, તો આવા ઘન પદાર્થના નિર્માણ માટે ડાયપોલ-ડાયપોલ આકર્ષણબળ જવાબદાર હોય છે. જ્યારે અન્ય પ્રકારના આણ્વિક ઘન પદાર્થના નિર્માણ માટે વાન-ડર-વાલ બળો જવાબદાર હોય છે. આ આંતર-અણુબળો નબળા હોવાથી આવા ઘન પદાર્થોના ગલનબિન્દુ અન્ય ઘન પદાર્થોની સરખામણીમાં નીચા (ઓછા મૂલ્યના) હોય છે. આ પદાર્થો ઉષ્મા અને વિદ્યુતના અવાહક હોય છે.

આયનિક ઘન પદાર્થો (Ionic Solids) : આ પ્રકારના ઘન પદાર્થોમાં બંધારણીય કણો આયન હોય છે. આ આયનો વચ્ચે ઉદ્ભવતા સ્થિતવિદ્યુતીય આકર્ષણ અને જેના મૂળ ક્વૉન્ટમ મિકેનિક્સમાં છે, તેવા અપાકર્ષણના સંયુક્ત પરિણામે બંધ રચાતા હોય છે. આ આકર્ષી બળો ઘણાં જ પ્રબળ હોવાથી આવા પદાર્થો સખત (hard) હોય છે. અને તેમનાં ગલનબિન્દુ ઊંચાં હોય છે. આવા ઘન પદાર્થો વિદ્યુતના અવાહક હોય છે. દા.ત., NaCl.

સહસંયોજક ઘન પદાર્થો (Covalent Solids) : આવા પદાર્થોના બંધારણીય કણો તરીકે પરમાણુ હોય છે. દરેક પરમાણુ તેના નિકટતમ પડોશી પરમાણુઓ સાથે સહસંયોજક-બંધથી જોડયેલો હોય છે. જો કોઈ પરમાણુને સમચતુષ્ફલક (tetrahedron)ના કેન્દ્ર પર રહેલો વિચારીએ તો તેના ચાર નિકટતમ પડોશી પરમાણુઓ સમચતુષ્ફલકના શિરોબિન્દુ પર હોય છે. આવી રચનાનું ત્રિપરિમાણમાં પુનરાવર્તન કરતાં સહસંયોજક ઘન પદાર્થો તૈયાર થાય છે. ડાયમંડ, સિલિકોન, જર્મેનિયમ વગેરે આ પ્રકારના પદાર્થો છે. આવા પદાર્થો પણ ઘણા સખત હોય છે અને તેમનાં ગલનબિન્દુઓ પણ ઊંચાં હોય છે. આવા પદાર્થો અર્ધવાહકો તરીકે વર્તે છે. આવા ઘન પદાર્થો 'નેટવર્ક સોલિડ' તરીકે પણ ઓળખાય છે.

ધાત્વિક ઘન પદાર્થો (Metallic Solids) : જો લૅટિસ બિન્દુઓ પર ધન આયનો ગોઠવવામાં આવે, તો ધાત્વિક ઘન પદાર્થનું નિર્માણ થાય. ધાત્વિક ઘન પદાર્થોના નિર્માણ સમયે ધાતુના અણુઓ તેમના વેલેન્સ ઇલેક્ટ્રૉન ગુમાવીને ઘન આયન બને છે. આ રીતે મળેલાં મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન આયનો વચ્ચેના અવકાશમાં અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરે છે. તેથી આવા ઘન પદાર્થો ઉષ્મા અને વિદ્યુતના સુવાહકો હોય છે.

(ii) અસ્ફટિકમય પદાર્થો (Non-crystalline substances) : અમુક ઘન પદાર્થોના બંધારણીય કણોની ગોઠવણી વ્યવસ્થિત હોતી નથી. આવા ઘન પદાર્થોને અસ્ફટિકમય ઘન પદાર્થો કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે લાકડું.

અમુક ઘન પદાર્થો એવા પણ હોય છે જે કે સ્ફટિકમય રૂપ ધારણ કરી શકે તેમ છે. પરંતુ આવા પદાર્થને પીગળેલ અવસ્થામાં તેના ઘનીકરણ તાપમાન કરતો ઊંચા તાપમાને રાખી જો એકાએક તેનું તાપમાન ખૂબ નીચું લાવી દેવામાં આવે, તો તેના ઘટકકણોને યોગ્ય રીતે ગોઠવાઈને સ્ફટિકરચના કરવાની તક મળે તે પહેલાં જ તેઓ ફક્ત ટૂંકા ગાળાની વ્યવસ્થા (short range order) સાથે ગોઠવાઈને જે ઘન પદાર્થ રચે છે, તેને **ગ્લાસી અથવા એમોરફસ** પદાર્થ કહે છે. અહીં short range order નો અર્થ એ છે કે કોઈ કણ તેની નજીકના અમુક (ચાર-પાંચ) કણો સાથે બંધ બનાવી તેમની વચ્ચે ચોક્કસ ભૌમિતિક ગોઠવણને ગ્લાસી પદાર્થની રચના કહે છે.

એ નોંધો કે ગ્લાસી પદાર્થોને જો પૂરતી તક આપવામાં આવી હોત, તો તેઓ સ્ફટિકમય પદાર્થ તરીકે પોતાની હાજરી જરૂર નોંધાવી શક્યા હોત. જ્યારે અમુક પદાર્થો તો એવા છે કે જેમને ગમે તેટલી તક પૂરી પાડવામાં આવી હોત તોપણ તેઓ અસ્ફટિકમય જ રહ્યા હોત.

અહીં પ્રશ્ન એ ઉપસ્થિત થાય કે જે રીતે ગ્લાસી પદાર્થોમાં long range order હોતો નથી, તે જ રીતે પ્રવાહીમાં પણ long range order હોતો નથી, તો પછી તે પદાર્થો પ્રવાહીની જેમ વહન પામતા કેમ નથી ? ઉત્તર એ છે કે પ્રવાહી કરતાં ગ્લાસી પદાર્થોમાં આંતર-અણુબળો વધુ પ્રબળ હોય છે. આથી જ તો પ્રવાહીની માફક ગ્લાસી પદાર્થ સામાન્ય સંજોગોમાં વહી શકતો નથી. હવે તમને પાકી ખાતરી થશે કે દ્રવ્યની અવસ્થા નક્કી કરવામાં આંતરઅણુ (કે પરમાણુ) બળો જ અગત્યનો ભાગ ભજવે છે.

ગ્લાસી પદાર્થમાં જુદા-જુદા બંધોની મજબૂતી જુદી જુદી હોવાના કારણે તેનું તાપમાન વધારતાં નબળા બંધો પહેલાં તૂટે છે અને મજબૂત બંધો પછી તૂટે છે. આથી તાપમાન વધારતાં પ્રથમ તે ઢીલો પડે છે, પછી તેનો જાડો રગડો થાય છે અને છેવટે સંપૂર્ણ પીગળી જાય છે.

(iii) અર્ધસ્ફટિકમય પદાર્થો (Semi-crystalline substances) : રોજબરોજના વપરાશમાં આવતા પોલિઈથિલિનના અણુને રાસાયણિક સૂત્ર $(-CH_2-)_n$, વડે દર્શાવાય છે. અહીં CH_2 જેવો ઘટકો n વખત પુનરાવર્તન પામી લાંબી ચેઈન જેવા અણુની રચના કરે છે. આવા અણુને મેક્રોઅણુ કહે છે. પ્રોટીનના અણુઓ પણ આ વર્ગમાં આવે છે. જ્યારે આવા અણુથી બનેલા પદાર્થને તેના પ્રવાહી સ્વરૂપ કે પીગળેલ સ્વરૂપમાંથી ઠંડા પાડવામાં આવે છે, ત્યારે તેમના અણુઓ એવી રીતે ગોઠવાય છે કે ઘનીકરણ પામેલા પદાર્થના અમુક ભાગમાં અણુઓની ચેઈનની ગોઠવણી વ્યવસ્થિત હોય છે અને બીજા ભાગોમાં આવી વ્યવસ્થિત ગોઠવણી હોતી નથી. આવા પદાર્થોને અર્ધસ્ફટિકમય પદાર્થો કહે છે. આ પદાર્થો જેને વ્યાપક રીતે પોલિમર કહે છે. તેની આધુનિક મટીરીયલ સાયન્સમાં ઘણી અગત્ય છે.

4.3 સ્થિતિસ્થાપકતા (Elasticity)

મિકેનિક્સમાં આપણે જોયું કે બળ પદાર્થની ગતિની અવસ્થા તેમજ તેનો આકાર બદલી શકે છે. પરંતુ આ બે પૈકી બળની બીજી અસરનો અભ્યાસ હજી સુધી આપણે કર્યો નથી. વાસ્તવમાં આદર્શ દૃઢ પદાર્થ એક કલ્પના માત્ર છે. વાસ્તવમાં દરેક ઘન પદાર્થમાં બાહ્ય વિરૂપક બળ દ્વારા વિરૂપણ ઉત્પન્ન કરી શકાય છે. પદાર્થમાં કેટલી માત્રામાં વિરૂપણ ઉત્પન્ન થશે. તેના આધાર પદાર્થની આ ફેરફારનો વિરોધ કરવાની ક્ષમતા પર રહેલો છે. દરેક પદાર્થ આવા ફેરફારનો વિરોધ એકસરખી માત્રામાં નથી કરી શકતા. બાહ્ય બળ દ્વારા વિરૂપણ પામેલા કેટલાંક વિરૂપક બળ દૂર થતાં પોતાનો મૂળ આકાર પ્રાપ્ત કરે છે. કેટલી માત્રામાં વિરૂપક પામેલો પદાર્થ, વિરૂપક બળ દૂર થતાં, પોતાના આકાર પુનઃપ્રાપ્ત કરશે તેનો આધાર પદાર્થ પર રહેલો છે. જે ગુણધર્મને કારણે પદાર્થ તેના પર લાગતા વિરૂપક બળનો પ્રતિકાર કરે છે અથવા તેની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરવાનો પ્રયત્ન કરે છે, તેને સ્થિતિસ્થાપકતા કહે છે.

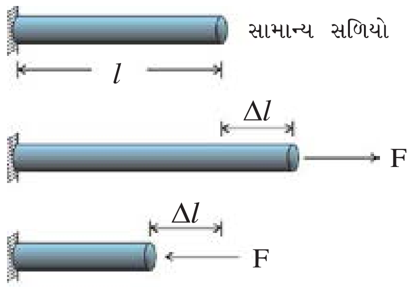
વિરૂપક બળ દૂર કરતાં જો પદાર્થ પોતાની મૂળ સ્થિતિ સંપૂર્ણપણે પ્રાપ્ત કરી શકે તો તેવા પદાર્થને **સંપૂર્ણ સ્થિતિ સ્થાપક** પદાર્થ કહે છે. જો પદાર્થ, વિરૂપક બળ દૂર કર્યા બાદ, પોતાની મૂળ સ્થિતિ અંશતઃ પણ પ્રાપ્ત ન કરી શકે તો તેવા પદાર્થને **સંપૂણ અસ્થિતિસ્થાપક** પદાર્થ કે પ્લાસ્ટિક કહે છે. જો પદાર્થ પોતાની મૂળ-સ્થિતિ અંશતઃ પુનઃપ્રાપ્ત કરી શકતો હોય, તો તે પદાર્થને અંશતઃ સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થો કહે છે. મોટા ભાગના પદાર્થો અંશતઃ સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થો હોય છે.

સ્થિતિસ્થાપકતાના અભ્યાસ માટે આપણે પ્રતિબળ (stress) અને વિકૃતિ (strain) નામની બે ભૌતિક રાશીઓ વ્યાખ્યાયિત કરવી પડશે. શરૂઆત વિકૃતિથી કરીએ.

4.3.1 વિકૃતિ (Strain) :

પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લગાડતાં તેની લંબાઈ કદ કે આકાર બદલાય છે. આ દરેક ફેરફારને અનુરૂપ ત્રણ પ્રકારની વિકૃતિ(ઇ)ની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

(i) પ્રતાન(સંગત)-વિકૃતિ (Logitudinal Strain) : પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લગાડતાં તેની લંબાઈમાં થતાં ફેરફાર અને મૂળ લંબાઈના ગુણોત્તરને (લંબાઈમાં થતાં આંશિક ફેરફારને) પ્રતાન-વિકૃતિ કહે છે.



પ્રતાન (સંગત)-વિકૃતિ

આકૃતિ 4.3

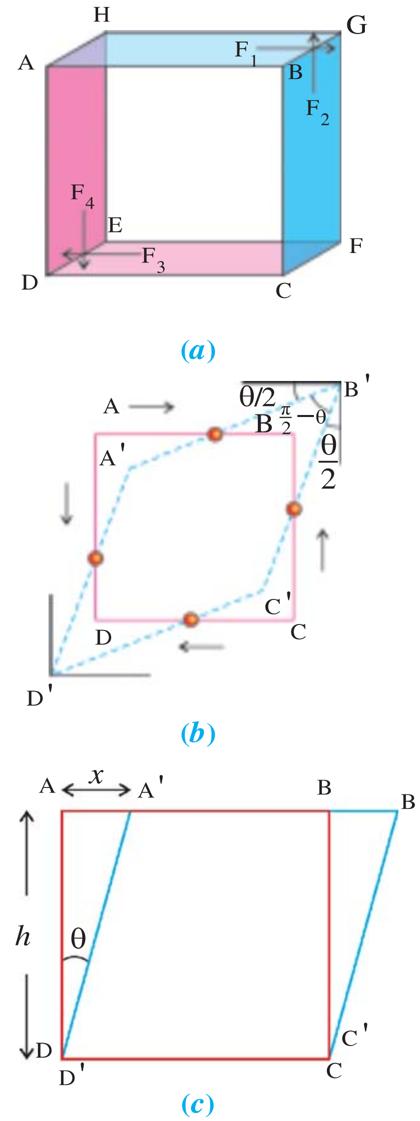
આમ, પ્રતાન-વિકૃતિ $\varepsilon_l = \dfrac{\Delta l}{l}$ (4.3.1)

જો બાહ્ય બળને કારણે સળિયાની લંબાઈમાં વધારો થતો હોય, તો પ્રતાન-વિકૃતિને **તણાવ-વિકૃતિ (tensile strain)** કહે છે. જો બાહ્ય બળને કારણે લંબાઈમાં ઘટાડો થતો હોય, તો અનુરૂપ વિકૃતિને **દાબીય વિકૃતિ (compressive strain)** કહે છે.

(ii) કદ વિકૃતિ (Volume Strain) : કોઈ પદાર્થની સપાટી પર બધે જ, સપાટીને લંબરૂપ બળ લગાડવામાં આવે તો તેના કદમાં ફેરફાર થાય છે. પદાર્થના કદમાં થતા આંશિક ફેરફારને કદ-વિકૃતિ કહે છે. જો પદાર્થનું મૂળ કદ V હોય અને તેના કદમાં થતો ફેરફાર ΔV હોય, તો કદ-વિકૃતિ

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} \qquad (4.3.2)$$

(iii) આકાર-વિકૃતિ (Shearing Strain) : કોઈ પદાર્થના કોઈ આડછેદ પર આડછેદને સ્પર્શીય બળ લગાડવામાં આવે, તો તેના આકારમાં ફેરફાર થાય છે. લંબાઈ અને કદની જેમ આકારને માપી શકાતો ન હોઈ આકાર-વિકૃતિ સમજવા માટે આકૃતિ 4.4*a* ધ્યાનમાં લો. અત્રે કોઈ સમઘન આકારનો પદાર્થ પર તેના સમતલો AHGB, BGFC, DEFC અને DAHE પર સ્પર્શક રૂપે સમાન મૂલ્યનાં બળો લગાડેલ છે. આ સ્થિતિમાં પદાર્થ પરનું કુલ બળ અને કુલ ટૉર્ક શૂન્ય હોવાથી પદાર્થ રેખીય તેમજ ચાકગતીય એમ બંને પ્રકારના સંતુલનમાં છે. પરંતુ આ પદાર્થ પર પરસ્પર વિરોધી દિશામાંના બળયુગ્મો લાગતાં હોવાથી તેમાં આકારનું વિરૂપણ ઉદ્‌ભવે છે. અહીં આકારના વિરૂપણને કારણે સમતલ ABCD કેવો આકાર ધારણ કરશે તે આકૃતિ 4.4(*b*)માં દર્શાવ્યું છે. સરળતા ખાતર આકૃતિમાં વિરૂપણ વિવર્ધિત કરીને દર્શાવ્યું છે.



કદવિકૃતિ

આકૃતિ 4.4

વિરૂપણના કારણે AB અને BC વચ્ચેનો ખૂણો $\dfrac{\pi}{2}$ ન રહેતાં $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ થાય છે. આ વિરૂપણ માપવા માટે ત્રુટક રેખાથી દર્શાવેલ વિરૂપિત આકાર A'B'C'D' (તેના સમતલને લંબ હોય તેવી અક્ષની આસપાસ) ભ્રમણ આપી તેને એવી રીતે ગોઠવીએ કે જેથી તેની ધાર D'C' અવિરૂપિત અવસ્થામાંની ધાર DC સાથે સંપાત થાય. આ હકીકત આકૃતિ 4.4(*c*)માં દર્શાવેલ છે. અહીં tanθને આકારની અથવા દઢતાની વિકૃતિ કહે છે. જો θનું મૂલ્ય (રેડિયનમાં) નાનું હોય તો $tan\theta \simeq \theta$ અને આ સ્થિતિમાં θને આકાર-વિકૃતિ કહે છે. $\theta = (\varepsilon_S)$.

આમ, આકાર-વિકૃતિ, $\varepsilon_S = \dfrac{x}{h} = tan\theta$ (4.3.3)

તથા θના નાના મૂલ્ય માટે $\varepsilon_S = \theta$

બધા પ્રકારની વિકૃતિ પરિમાણરહિત ભૌતિક રાશિઓ છે.

4.3.2 પ્રતિબળ (Stress) :

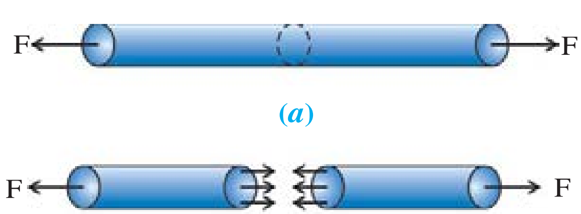
સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થ પર લાગેલું વિરૂપક બળ દૂર કરતાં તે પોતાની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે. આ ત્યારે જ શક્ય બને જ્યારે, વિરૂપણનો વિરોધ કરનારું પુનઃસ્થાપક બળ તેમાં ઉત્પન્ન થાય. પદાર્થમાં આડછેદના એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉદ્‌ભવતું પુનઃસ્થાપક બળ પ્રતિબળ કહેવાય છે. જો પદાર્થ પોતે સંતુલનમાં હોય, તો બાહ્ય બળનું મૂલ્ય પુનઃસ્થાપક બળના મૂલ્ય જેટલું થાય. જો પુનઃસ્થાપક બળ F અને આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A હોય, તો પ્રતિબળ (σ) નીચેના સૂત્ર પરથી મળે.

$$\text{પ્રતિબળ } \sigma = \frac{\text{બળ}}{\text{ક્ષેત્રફળ}} = \frac{F}{A} \qquad (4.3.4)$$

પ્રતિબળનો SI એકમ Nm^{-2} અથવા પાસ્કલ (Pa) છે. તેનું પરિમાણિક સૂત્ર $M^1L^{-1}T^{-2}$ છે.

(i) પ્રતાન-પ્રતિબળ (Longitudinal Stress)

આકૃતિ 4.5(*a*)માં એક સળિયો અને તેનો એક આડછેદ (ત્રુટક રેખાથી) દર્શાવેલ છે.



(*a*)

(*b*)

પ્રતાન-પ્રતિબળ

આકૃતિ 4.5

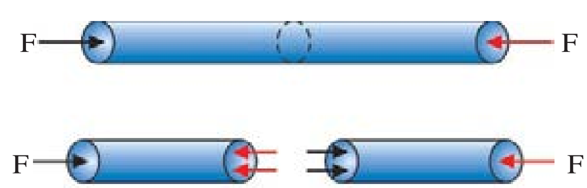
સળિયો બે સરખા અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતાં બાહ્ય બળોની અસર હેઠળ સંતુલનમાં છે. આ સંજોગોમાં આડછેદની ડાબી અને જમણી બાજુએ રહેલા સળિયાના ભાગ આ આડછેદને સમાન મૂલ્યના બળથી પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ખેંચે છે.

જો આડછેદ સળિયાના છેડા પાસે ન હોય તો તેવા બધા આડછેદો પાસે આવાં ખેંચાણબળો સમગ્ર આડછેદ પર સમાન રીતે વહેંચાયેલાં હોય છે. આવાં વહેંચાયેલાં બળો આકૃતિ 4.5(*b*)માં દર્શાવ્યાં છે. અહીં સુગમતાખાતર આડછેદ પાસેના બંને વિભાગો જુદા-જુદા દર્શાવ્યા છે.

જ્યારે સળિયા પર બાહ્ય બળ લગાડવામાં આવે છે ત્યારે આંતર-અણુ અંતરોમાં ફેરફાર થાય છે. આથી અણુઓ વચ્ચે એવી રીતે બળો ઉદ્‌ભવે છે કે જેના કારણે તેઓ ફરીથી પોતાની સમતોલન સ્થિતિમાં આવવાનો પ્રયત્ન કરે છે. આ બળોને પુનઃસ્થાપક બળો કહે છે. આકૃતિ 4.5(*b*)માં પુનઃસ્થાપક બળો નાના તીર વડે આડછેદ પર દર્શાવ્યાં છે. પુનઃસ્થાપક બળો દરેક જોડકાનાં અણુઓ વચ્ચે ઉદ્‌ભવતાં હોવાથી તે સમગ્ર આડછેદ પર સમાન રીતે વહેંચાયેલ હોય છે. બાહ્ય બળની અસર હેઠળ પદાર્થમાં પેદા થતા વિરૂપણને કારણે ઉદ્‌ભવતું પુનઃસ્થાપક બળ જુદા-જુદા આડછેદ માટે સમાન જ હોય છે, પરંતુ આવા આડછેદનાં ક્ષેત્રફળ જુદા હોવાથી આડછેદનો ઉલ્લેખ અનિવાર્ય છે.

આપણી ચર્ચામાં આપણે અત્યાર સુધી એવાં બાહ્ય બળ ધ્યાનમાં લીધાં છે, જેના કારણે સળિયાની લંબાઈમાં વધારો જ થાય છે. પરિણામે ઉદ્‌ભવતા પ્રતિબળને તણાવ-પ્રતિબળ કહે છે.

જો પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લગાડતાં પદાર્થની લંબાઈમાં ઘટાડો થાય, તો પરિણામે ઉદ્‌ભવતા પ્રતિબળને દાબીય પ્રતિબળ કહે છે. (આકૃતિ 4.6)



દાબીય પ્રતિબળ

આકૃતિ 4.6

(ii) કદ-પ્રતિબળ (Volume Hydraulic Stress) :

ધારો કે પદાર્થ પર લાગતું બળ પદાર્થની સમગ્ર સપાટી પર લાગે છે. સ્થાનીક રીતે આ બળો સપાટીને લંબ છે અને ક્ષેત્રફળ-ખંડના સમપ્રમાણમાં છે. પદાર્થ પર આવાં બળો લાગતાં પદાર્થના કદમાં ફેરફાર થાય છે અને પરિણામે કદ-પ્રતિબળ ઉદ્‌ભવે છે. જ્યારે પદાર્થને કોઈ તરલમાં ડુબાડવામાં આવે, ત્યારે આવી પરિસ્થિતિનું નિમાર્ણ થાય છે.

જો તરલમાં રહેલા પદાર્થ પર લાગતું દબાણ P હોય તો, ક્ષેત્રફળ A પર લંબ રૂપે લાગતું બળ PA હોય. સંતુલન-અવસ્થામાં એકમક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતું બળ કદ-પ્રતિબળ છે. આમ,

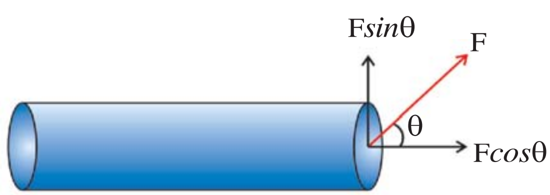
$$\text{કદ-પ્રતિબળ } \sigma_v = \frac{F}{A} = \frac{PA}{A} = P \qquad (4.3.5)$$

આમ, દાબીય પ્રતિબળ અને દબાણ સમાન છે. તેથી કહી શકાય કે અહીં દબાણ એક વિશિષ્ટ પ્રકારનું પ્રતિબળ છે. જેને કારણે પદાર્થનું માત્ર કદ બદલાય છે.

(iii) આકાર-પ્રતિબળ (Shearing Stress Tangential Stress) : આકૃતિ 4.4માં દર્શાવ્યા મુજબ જો બળ પદાર્થની સપાટીને સમાંતર લાગતું હોય, તો પદાર્થમાં આકાર વિકૃતિ ઉત્પન્ન થાય છે અને ઉત્પન્ન થતું અનુરૂપ પ્રતિબળ આકાર-પ્રતિબળ કહેવાય છે. આમ,

$$\text{આકાર-પ્રતિબળ} = \frac{\text{સ્પર્શીય બળ } (F_t)}{\text{ક્ષેત્રફળ } (A)} \qquad (4.3.6)$$

એવું પણ શક્ય છે કે પદાર્થ પર લાગતું બળ પદાર્થની સપાટીને લંબ કે સમાંતર ન હોય. આ કિસ્સામાં આકૃતિ 4.7માં દર્શાવ્યા મુજબ બળનો સપાટીને લંબદિશામાં અને સમાંતર ઘટકો વિચારી શકાય.

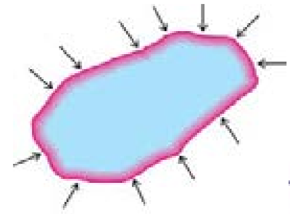


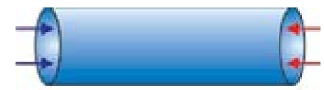
આકૃતિ 4.7

અહીં આકૃતિમાં સળિયા પર લાગતું બળ દર્શાવેલ છે. બળ ક્ષેત્રફળ સદિશ (ક્ષેત્રફળ જેટલું મૂલ્ય ધરાવતો ક્ષેત્રફળને લંબ બહારની તરફનો સદિશ) સાથે θ ખૂણો બનાવે છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ $F\cos\theta$ સપાટીને લંબ ઘટક છે અને $F\sin\theta$ સપાટીને સ્પર્શીય ઘટક છે, તેથી $F\cos\theta$ને કારણે પદાર્થમાં તણાવની અસર પેદા થશે, જ્યારે $F\sin\theta$ને કારણે પદાર્થના આકારમાં ફેરફાર થશે. આ કિસ્સામાં પદાર્થમાં તણાવ-પ્રતિબળ અને આકાર-પ્રતિબળ (અને આકાર-વિકૃતિ અને તણાવ-વિકૃતિ પણ) બન્ને પેદા થશે.

દબાણ અને પ્રતિબળ વચ્ચેનો તફાવત (Difference between pressure and stress) : દબાણ એટલે એકમક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતું બળ. આમ, દબાણ અને પ્રતિબળ બન્નેનાં પરિમાણ સમાન હોવા છતાં તેઓ એક જ ભૌતિક રાશિ નથી.

જ્યારે પદાર્થની સમગ્ર સપાટીને લંબરૂપે બળ લગાડવામાં આવે છે, ત્યારે એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતા બળને દબાણ કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 4.8)

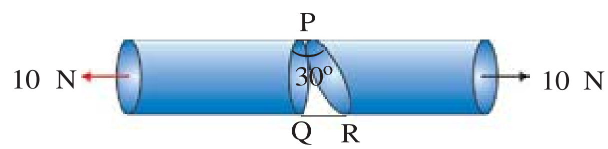




આકૃતિ 4.8 આકૃતિ 4.9

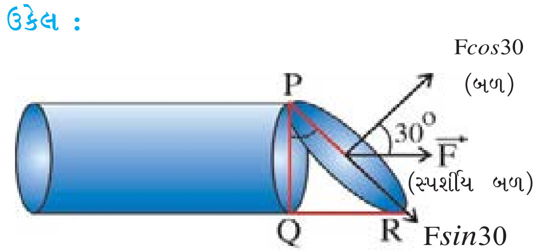
પ્રતિબળ પણ એકમક્ષેત્રફળ દીઠ બળ હોવા છતાં પદાર્થના જુદાં-જુદાં પૃષ્ઠો પર તે જુદું-જુદું હોઈ શકે. વળી અહીં બળ એ પૃષ્ઠને લંબ હોવું પણ જરૂરી નથી. એવું પણ શક્ય છે કે એક સપાટી પર પ્રતિબળ હોય બીજી સપાટી પર ન પણ હોય. (આકૃતિ 4.9).

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 4.9માં દર્શાવ્યા મુજબ 10 N બળ સળિયાના બે છેડા પર લગાડવામાં આવે છે, તો આડછેદ PR પર તણાવ-પ્રતિબળ અને સ્પર્શીય પ્રતિબળ શોધો. PQ આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 10 cm^2 છે.



આકૃતિ 4.10

ઉકેલ :



આકૃતિ 4.11

અહીં આડછેદ PQ અને PR વચ્ચેનો ખૂણો 30° છે. તેથી,

$$\frac{\text{PQ આડછેદનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{PR આડછેદનું ક્ષેત્રફળ}} = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

PR આડછેદનું ક્ષેત્રફળ

$$= \left(\frac{\text{આડછેદ PQનું ક્ષેત્રફળ}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= \frac{2 \times 10 \times 10^{-4}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times 10^{-3} m^2$$

વળી, બળ F અને PR છેદના ક્ષેત્રફળ સદિશ વચ્ચેનો ખૂણો પણ 30° છે. (કેવી રીતે ? વિચારો.)

તેથી, છેદ PR માટે તણાવબળ

$$F_l = F cos 30^o = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ \text{N}$$

તથા સ્પર્શીય બળ

$$F_t = F sin 30^o = 10 \times \frac{1}{2} = 5\text{N}$$

$\therefore$ છેદ PR માટે

$$\text{તણાવ-પ્રતિબળ } (\sigma^l) = \frac{\text{તણાવ બળ}}{\text{PR છેદનું ક્ષેત્રફળ}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}} \times 10^{-3}}$$

$$= 7.5 \times 10^3\ \text{N/m}^2$$

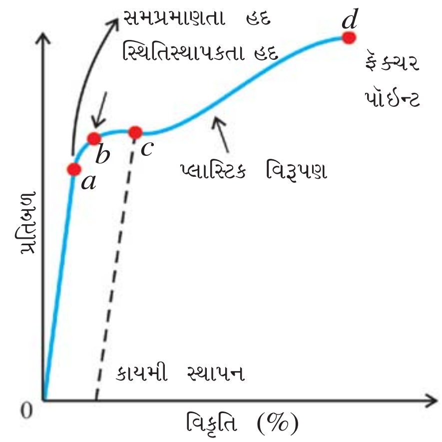
$$\text{સ્પર્શીય પ્રતિબળ } \sigma_t = \frac{\text{સ્પર્શીય બળ}}{\text{PR છેદનું ક્ષેત્રફળ}}$$

$$= \frac{5}{\frac{2}{\sqrt{3}} \times 10^{-3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 10^3 = 4.33 \text{N}/m^2$$

4.4 પ્રતાન-પ્રતિબળ અને પ્રતાન-વિકૃતિ વચ્ચેનો સંબંધ (Relation Between Longitudinal Stress and Longitudinal Strain)

પ્રતાન-વિકૃતિ અને પ્રતાન-પ્રતિબળ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે તારને બાહ્ય બળની મદદથી ખેંચવામાં આવે છે. જુદા-જુદા પ્રતિબળ માટે વિકૃતિનું મૂલ્ય (અથવા તેનું પ્રતિશત મૂલ્ય) મેળવવામાં આવે છે. પ્રતિબળ અને વિકૃતિ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ પ્રતિબળ-વિકૃતિ(%) આલેખ દોરીને કરી કાય છે. આવો એક આલેખ આકૃતિ 4.12માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 4.12

આલેખના શરૂઆતના ભાગમાં (0 થી *a* સુધી) વિકૃતિ 1% થી ઓછી છે. પ્રતિબળ અને વિકૃતિ એકબીજાના સમપ્રમાણમાં છે. અહીં બિંદુ *a*ને સપ્રમાણતાની હદ કહે છે.

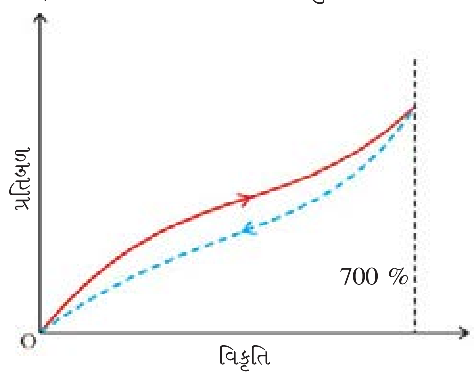
આલેખ પરના *a* થી *b* બિન્દુ સુધી પ્રતિબળ એ વિકૃતિના સમપ્રમાણમાં નથી. આમ છતાં 0થી *b* વચ્ચે ગમે તે બિન્દુ પાસે વિરૂપક બળ દૂર કરતાં પદાર્થ પોતાની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે. આ અર્થમાં પદાર્થ છેક બિન્દુ *b* સુધી સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક ધરાવે છે. બિન્દુ *b* ને સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ (elastic limit) અથવા આધીન બિન્દુ (yield point) કહે છે.

બિન્દુ *b* અને *c* વચ્ચે વિકૃતિમાં ઝડપથી વધારો થાય છે. *b* અને *c* વચ્ચેના કોઈ પણ બિન્દુ પાસેથી વિરૂપક બળ હટાવી લેતાં પદાર્થ, આકૃતિમાં ત્રુટક રેખાથી દર્શાવેલ માર્ગે એવી સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે કે જેથી તેમાં કંઈક કાયમી ત્રુટી રહી જાય છે. આ સ્થિતિમાં પદાર્થ કાયમી સ્થાપન (permanent set) સ્થિતિમાં હોવાનું કહેવાય છે.

બિન્દુ *c* આગળથી વધારે વિરૂપક બળ લગાડતાં વિકૃતિમાં ઝડપથી વધારો થાય છે. આ સ્થિતિમાં પદાર્થમાં મહત્તમ આકાર વિકૃતિ ધરાવતા સમતલો એકબીજા પર સરકતાં હોય છે. આ ઘટનાને પ્લાસ્ટિક વિરૂપણ કહે છે.

d બિન્દુ પાસે પદાર્થ તૂટી જાય છે. બિન્દુ *d* ને ફ્રેક્ચર બિન્દુ કહે છે. આ બિન્દુને અનુરૂપ પ્રતિબળને બ્રેકિંગ પ્રતિબળ કહે છે. સ્થિતિસ્થાપક હદ *b* અને બિન્દુ *d* વચ્ચે જો ખૂબ જ મોટું પ્લાસ્ટિક વિરૂપણ થતું હોય, તો ધાતુને તન્ય (ductile) કહે છે. જો પદાર્થ સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ પછી તરત જ ભાંગી જતો હોય, તો તેવા પદાર્થને બટકણો (brittle) કહે છે.

જોકે કેટલાક પદાર્થો (જેવા કે રબર), અત્યાર સુધી કરેલા વર્ણન કરતાં જુદી-જુદી વર્તણૂક ધરાવે છે, આપણે જાણીએ છીએ કે રબરની લંબાઈમાં અનેક ગણો વધારો કરવાં છતાં તે મૂળ અવસ્થા પ્રાપ્ત કરે છે. આકૃતિ 4.13 એક પ્રકારના વલ્કેનાઇઝ્ડ રબર માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિનો આલેખ દર્શાવ્યો છે. અહીં દર્શાવેલ 700% વિકૃતિ આશ્ચર્યજનક છે. જે પદાર્થમાં ખૂબ મોટા પ્રમાણમાં વિકૃતિ પેદા કરી શકાય છે તેવા પદાર્થને **ઇલાસ્ટોમર** (elastomers) કહે છે. આપણા શરીરમાં મહાધમની (હૃદયમાંથી શરીરના જુદા-જુદા ભાગમાં રુધિર લઈ જતી ધમની)ની પેશીઓ એ ઇલાસ્ટોમરનું ઉદાહરણ છે.



વલ્કેનાઇઝ્ડ રબર માટે હિસ્ટરિસીસ

આકૃતિ 4.13

આ આલેખની બે બાબતો નોંધપાત્ર છે : (i) આલેખના કોઈ પણ ભાગમાં પ્રતિબળ વિકૃતિના સમપ્રમાણમાં નથી. (ii) વિરૂપક બળ દૂર કરતાં પદાર્થ પોતાની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે પણ મૂળ માર્ગે નહીં. મૂળ સ્થિતિમાં પાછા ફરતી વખતે પદાર્થ વડે થતું કાર્ય, તેમાં વિરૂપણ ઉત્પન્ન કરતી વખતે વિરૂપક બળ વડે થયેલા કાર્યથી ઓછું હોય છે. આનો અર્થ એ થાય છે કે પદાર્થમાં અમુક ઊર્જા શોષાય છે. આ ઊર્જા ઉષ્મા-ઊર્જા સ્વરૂપે વિખેરણ પામે છે. આ ઘટનાને સ્થિતિસ્થાપક હિસ્ટેરિસીસ કહે છે. સ્થિતિસ્થાપક હિસ્ટેરિસીસનો ઉપયોગ શોક-એબ્સોબરમાં થાય છે. જો વલ્કેનાઇઝ્ડ રબરનું સ્તર (પેડ) કંપન પામતા તંત્ર અને આધાર વચ્ચે મૂકવામાં આવે, તો દરેક કંપન દરમિયાન રબરનું સ્તર સંકોચન પામે છે અને વિસ્તરે છે અને કંપન-ઊર્જાનો થોડો જ ભાગ આધાર સુધી પહોંચે છે, તેથી કંપનની અસર ઘટી જાય છે.

4.5 હુકનો નિયમ અને સ્થિતિસ્થાપકતા અંકો (Hooke's Law and Elastic Moduli)

ઈ.સ. 1678માં રૉબર્ટ હુકે પ્રાયોગિક રીતે દર્શાવ્યું કે "નાના વિરૂપણ માટે પ્રતિબળ અને વિકૃતિ એકબીજાના સમપ્રમાણમાં હોય છે" આ વિધાન હુકના નિયમ તરીકે ઓળખાય છે. આમ,

પ્રતિબળ α વિકૃતિ

$\therefore$ પ્રતિબ = અચળ × વિકૃતિ

$$\therefore \ \sigma = k\varepsilon \qquad (4.5.1)$$

સમીકરણ 4.5.1 માં k સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક તરીકે ઓળખાય છે. તેનો એકમ Nm^{-2} અથવા Pa છે.

હુકનો નિયમ આનુભવિક નિયમ છે અને મોટાં ભાગનાં દ્રવ્યો માટે (આકૃતિ 4.12માં દર્શાવ્યા મુજબ) લગભગ 1% વિકૃતિ માટે સાચો છે. રબર જેવા પદાર્થો માટે આવો રેખીય સંબંધ મળતો નથી.

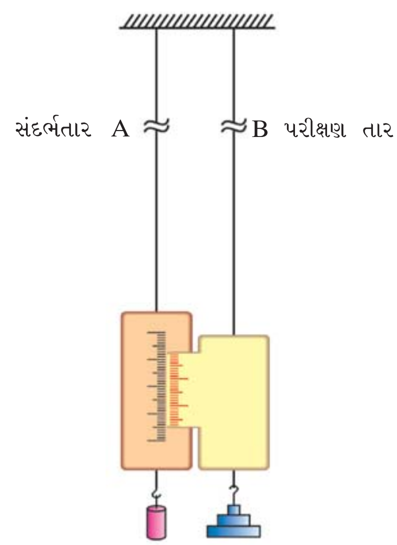
4.5.1 યંગ મૉડ્યુલસ (Young's Modulus) :

આપણે જોયું કે નાની વિકૃતિ માટે પ્રતિબળ અને વિકૃતિ એકબીજાના સમપ્રમાણમાં હોય છે. જો પ્રતિબળ અને વિકૃતિ તરીકે પ્રતાન-પ્રતિબળ અને પ્રતાન વિકૃતિ લેવામાં આવે, તો સમીકરણ 4.5.1 નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\sigma_l = Y\varepsilon_l \qquad (4.5.2)$$

અહીં સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક યંગ મૉડ્યુલસ (Y) તરીકે ઓળખાય છે.

યંગ મૉડ્યુલસના માપન માટેની પ્રાયોગિક ગોઠવણ આકૃતિ 4.14 માં દર્શાવી છે.



આકૃતિ 4.14

તાર A સંદર્ભતાર અને તાર B પરીક્ષણ તાર કહેવાય છે. તાર Aના છેડે લગાવેલ હુક સાથે નિયત દળ લટકાવવામાં આવે છે. જ્યારે પરીક્ષણ તાર (B)ના છેડે રહેલા હુક સાથે જુદાં-જુદાં દળ (m) લટકાવીને પરિણામે મળતા જુદા-જુદા તણાવબળ (mg)ને અનુરૂપ લંબાઈમાં થતો વધારો (Δl) તેની સાથે રહેલા વર્નિયર સ્કેલની મદદથી માપવામાં આવે છે.

$$\text{અહીં } \sigma_l = \frac{\text{તણાવબળ } (F_l)}{\text{ક્ષેત્રફળ } (A)} = \frac{mg}{\pi r^2} \qquad (4.5.3)$$

જ્યાં r પરીક્ષણ તારની ત્રિજ્યા છે.

અને પ્રતાન વિકૃતિ $\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$ (4.5.4)

જ્યાં l પરીક્ષણ તારની મૂળ લંબાઈ છે.

સમીકરણો (4.5.2) (4.5.3) અને (4.5.4) પરથી

$$\frac{mg}{\pi r^2} = Y\frac{\Delta l}{l}$$

$$\therefore Y = \frac{mgl}{\pi r^2 \Delta l} \quad (4.5.5)$$

યંગ મૉડ્યુલસ પદાર્થના દ્રવ્યનો ગુણધર્મ છે. મોટા ભાગના પદાર્થોમાં પ્રતાન-પ્રતિબળ અને દાબીય પ્રતિબળ માટે યંગ મૉડ્યુલસનાં મૂલ્યો સમાન મળે છે. જ્યારે હાડકા તથા કોંક્રીટ જેવા પદાર્થો માટે આમ હોતું નથી.

ઉદાહરણ 2 : 2 m લંબાઈના અને 5 mm વ્યાસવાળા તાંબાના તારના છેડે 5 kg વજન લટકાવ્યું છે, તો તારની લંબાઈમાં થતો વધારો શોધો. તારનો લઘુતમ વ્યાસ કેટલો રાખવો જોઈએ કે જેથી સ્થિતિસ્થાપક હદ વટાવી ન જવાય ? કૉપર માટે સ્થિતિસ્થાપક હદ = 1.5×10^9 dyne/cm^2, યંગનો મૉડ્યુલસ (Y) = 1.1×10^{12} dyne/cm^2

ઉકેલ :

Y = 1.1×10^{12} dyne/cm

L = 2 m = 200 cm

d = 5 mm = 0.5 cm

$\therefore r$ = 0.25 cm

F = mg = $5 \times 10^3 \times 980$ dyne

l = લંબાઈમાં થતો વધારો

$$Y = \frac{FL}{\pi r^2 l}$$

$$\therefore l = \frac{FL}{\pi r^2 Y}$$

$$= \frac{5.0 \times 10^3 \times 980 \times 200}{3.14 \times (0.25)^2 \times 1.1 \times 10^{12}}$$

$$= 4.99 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

તાંબા માટે સ્થિતિસ્થાપક હદ = 1.5×10^9 dyne/cm^2 આપેલ છે.

જો માંગેલ લઘુતમ વ્યાસ d' હોય તો,

તારમાં ઉત્પન્ન થતું મહત્તમ પ્રતિબળ

$$= \frac{F}{\pi\left(\frac{d'}{2}\right)^2} = \frac{4F}{\pi d'^2} = 1.5 \times 10^9$$

$$\therefore d'^2 = \frac{4 \times 5 \times 10^3 \times 980}{3.14 \times 1.5 \times 10^9}$$

$$= 41.6 \times 10^{-4}$$

$$\therefore d' = 6.45 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

4.5.2 કદ સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક (Bulk Modulus)

સમીકરણ 4.5.1માંના કદ પ્રતિબળ અને કદ વિકૃતિના ગુણોત્તરને કદ સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક કહે છે. તેથી,

કદ સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક (બલ્ક મૉડ્યુલસ) (B)

$$= \frac{\text{કદ-પ્રતિબળ}}{\text{કદવિકૃતિ}}$$

$$\therefore \text{બલ્ક મૉડ્યુલસ B} = -\frac{P}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)} \quad (4.5.6)$$

અહીં સમીકરણમાં આવતી ઋણ નિશાની કદવિકૃતિ ઋણ અને બલ્ક મૉડ્યુલસ ધન હોવાને કારણે આવે છે. બલ્ક મૉડ્યુલસના વ્યસ્તને દબનીયતા compressibility કહે છે. જેનો સંકેત (K) છે.

4.5.3 આકાર સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક (Modulus of Rigidity (shear modulus))

સ્પર્શીય પ્રતિબળ અને આકાર-વિકૃતિના ગુણોત્તરને આકાર સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક (modulus of rigidity) (η) કહે છે.

આમ, સમીકરણ (4.3.3) અને (4.3.6) પરથી,

$$\text{મૉડ્યુલસ ઑફ રિજીડીટી}(\eta) = \frac{\text{સ્પર્શીય-પ્રતિબળ}}{\text{આકારવિકૃતિ}}$$

$$= \frac{F_t/A}{\theta}$$

વળી, $\theta = \frac{x}{h}$

$$\therefore \eta = \frac{F_t/A}{x/h}$$

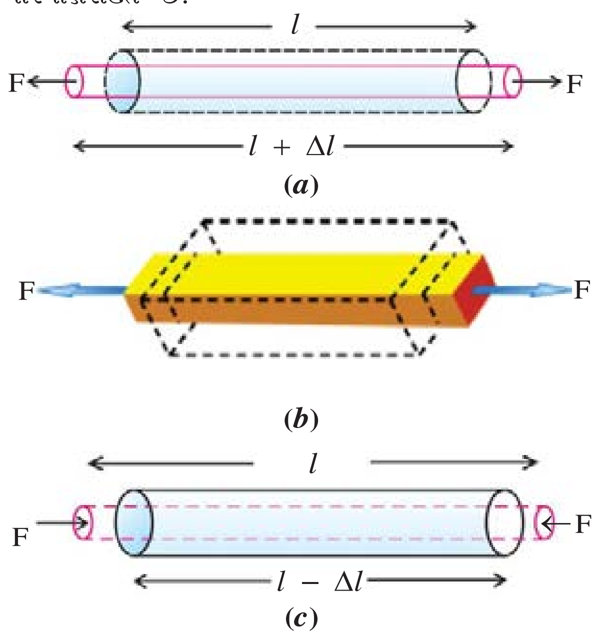
$$\therefore \eta = \frac{F_t h}{Ax} \quad (4.5.7)$$

4.6. પોઈસનનો ગુણોત્તર (Poisson's Ratio)

જ્યારે પદાર્થ પર તણાવબળ (અક્ષીય બળ) લગાડવામાં આવે, ત્યારે તેની લંબાઈમાં વધારો થાય છે. પરંતુ લંબાઈને લંબ એવાં પરિમાણો (પાર્શ્વિક પરિમાણો અથવા

lateral dimension)નાં મૂલ્યોમાં ઘટાડો થાય છે. તે જ રીતે જ્યારે પદાર્થ પર દાબીય બળ લગાડવામાં આવે, ત્યારે તેની લંબાઈમાં ઘટાડો થાય પણ પાર્શ્વિક પરિમાણોનાં મૂલ્યોમાં વધારો થાય છે. પાર્શ્વિક પરિમાણમાં થતો ફેરફાર અને પાર્શ્વિક પરિમાણના મૂળ મૂલ્યના ગુણોત્તરને પાર્શ્વિક વિકૃતિ-lateral strain કહે છે.

પાર્શ્વિક વિકૃતિ અને પ્રતાન (કેદાબીય) વિકૃતિનો ગુણોત્તર પોઈસનનો ગુણોત્તર કહેવાય છે. તેનો સંકેત μ છે. તે બે વિકૃતિનો ગુણોત્તર હોવાથી પોઈસનનો ગુણોત્તર પરિમાણરહિત છે.



લંબાઈમાં ફેરફારને કારણે પાર્શ્વિક પરિમાણોમાં ફેરફાર

આકૃતિ 4.15

આકૃતિ 4.15 માં દર્શાવ્યા મુજબ નળાકાર સળિયાના કિસ્સામાં પ્રતાન બળની અસર હેઠળ,

પ્રતાન-વિકૃતિ $= \dfrac{\Delta l}{l}$

અને પાર્શ્વિક વિકૃતિ $= \dfrac{\Delta d}{d}$,

જ્યાં d સળિયાનો વ્યાસ છે. વ્યાખ્યા અનુસાર

$$\mu = \frac{\text{પાર્શ્વિક વિકૃતિ} \left(\dfrac{\Delta d}{d}\right)}{\text{પ્રતાન-વિકૃતિ} \left(\dfrac{\Delta l}{l}\right)}$$

$$\therefore \frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l} \text{ અથવા } \frac{\Delta r}{r} = -\mu \frac{\Delta l}{l} \quad (4.6.1)$$

અહીં પાર્શ્વિક પરિમાણ અને અક્ષીય પરિમાણમાં થતા ફેરફાર વિરુદ્ધ પ્રકારના હોવાથી સમીકરણ (4.6.1)માં ઋણ નિશાની આવે છે. જો સળિયાનો આડછેદ લંબચોરસ હોય અને તે પ્રતાનબળની અસર હેઠળ હોય, તો તેની લંબાઈમાં વધારો થશે અને પહોળાઈ અને જાડાઈમાં ઘટાડો થશે. જો પહોળાઈ bમાં થતો ફેરફાર Δb અને જાડાઈ hમાં થતો ફેરફાર Δh હોય, તો અનુસંગત પાર્શ્વિક વિકૃતિનાં મૂલ્યો $\dfrac{\Delta b}{b}$ અને $\dfrac{\Delta h}{h}$ થાય.

તેથી, $\dfrac{\Delta b}{b} = -\mu \dfrac{\Delta l}{l}$

$$\text{અને } \frac{\Delta h}{h} = -\mu \frac{\Delta l}{l} \quad (4.6.2)$$

પ્રતાનબળોને કારણે કદમાં ફેરફાર :

પદાર્થ પર પ્રતાનબળો લાગતાં તેની લંબાઈમાં વધારો થાય છે અને પાર્શ્વિક પરિમાણોમાં ઘટાડો થાય છે, તેથી તેના કદમાં ફેરફાર થાય છે. (સામાન્ય રીતે કદમાં વધારો થાય છે.)

નળાકાર સળિયાનો કિસ્સો ધ્યાનમાં લેતાં તેની લંબાઈ l અને ત્રિજ્યા r હોય તો, કદ $V = \pi r^2 l$ હોવાથી

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta l}{l} \text{ (નાના ફેરફારો માટે)}$$

સમીકરણ 4.6.1 પરથી

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = -2\mu \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta l}{l} \quad (4.6.3)$$

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\mu)$$

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_l \, (1 - 2\mu) \quad (4.6.4)$$

સમીકરણ 4.6.4 સૂચવે છે કે $\Delta V > 0$ હોવાથી μનું મૂલ્ય 0.5થી વધી શકે નહીં.

અહીં આપણે નળાકાર સળિયાનો કિસ્સો ધ્યાનમાં લીધો છે. જોકે સમીકરણ કોઈ પણ આડછેદ ધરાવતા સળીયા માટે સાચું છે.

ઉદાહરણ 3 : એક સળિયા પર પ્રતાન-બળ લગાડવામાં આવે છે, તો નાના ફેરફારો માટે કદમાં થતા ફેરફારનો લંબાઈ સાપેક્ષ દર $\dfrac{\Delta V}{\Delta l} = A(1 - 2\mu)$ છે, તેમ દર્શાવો. અહીં A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ છે.

ઉકેલ : સમીકરણ 4.6.3 પરથી,

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_l \, (1 - 2\mu)$$

કદ V = આડછેદનું ક્ષેત્રફળ (A) × લંબાઈ (l) હોવાથી

$$\therefore \frac{\Delta V}{Al} = \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\mu)$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta V}{\Delta l} = A\ (1 - 2\mu)$$

અહીં ટેબલ 4.1માં કેલાક દ્રવ્યો માટે સ્થિતિસ્થાપકતા-અંકનાં મૂલ્યો આપેલ છે.

ટેબલ 4.1

સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક (માત્ર જાણકારી માટે)

દ્રવ્ય	યંગ મૉડ્યુલ્સ $\times 10^{11}$Pa	દૃઢતા મૉડ્યુલ્સ $\times 10^{11}$Pa	બલ્ક મૉડ્યુલ્સ $\times 10^{11}$Pa	પોઇસનનો ગુણોત્તર
ઍલ્યુમિનિયમ	0.7	0.3	0.7	0.16
પિત્તળ	0.91	0.36	0.61	0.26
તાંબું	1.1	0.42	1.4	0.32
લોખંડ	1.9	0.70	1.0	0.27
સ્ટીલ	2.0	0.84	1.6	0.19
ટંગસ્ટન	3.6	1.5	2.0	0.20

4.7 સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા

પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લાગે ત્યારે પદાર્થમાં વિરૂપણ ઉત્પન્ન થાય અને પુનઃસ્થાપક બળ પણ પેદા થાય. આમ, વિરૂપણ પુનઃસ્થાપક બળની વિરુદ્ધ થાય છે. તેથી વિરૂપણ ઉત્પન્ન કરવા માટે પુનઃસ્થાપક બળની વિરુદ્ધ કાર્ય કરવું પડે. આ કાર્ય પદાર્થમાં સ્થિતિ-ઊર્જાના સ્વરૂપમાં સંગૃહીત થાય છે. યાદ રાખો, કે સ્થિતિ-ઊર્જા પદાર્થને પ્રાપ્ત થતી નવી સંરચનાને કારણે છે.

આપણે પદાર્થ પર પ્રતાનબળ કાર્ય કરે ત્યારે પદાર્થને મળતી સ્થિતિ-ઊર્જા માટે સમીકરણ મેળવીશું.

L જેટલી લંબાઈનો અને A જેટલા આડછેદવાળો એક સળિયો ધ્યાનમાં લો. ધારો કે પ્રતાનબળને કારણે તેની લંબાઈમાં x જેટલો વધારો થાય છે. જો દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ Y હોય તો,

$$Y = \frac{F/A}{x/L}$$

તેથી પુનઃસ્થાપક બળ

$$F = \frac{YA}{L}x$$

હવે પુનઃસ્થાપક બળ વિરુદ્ધ લંબાઈમાં ΔL જેટલો વધારો કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય

$$w = \int_0^{\Delta L} \left(\frac{YA}{L}\right) x dx$$

$$= \frac{AY}{L}\int_0^{\Delta L} x dx$$

$$= \frac{AY}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\Delta L}$$

આ કાર્યનું મૂલ્ય સળિયામાં સંગૃહીત થતી સ્થિતિ-સ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જાનું મૂલ્ય છે.

$$\therefore \ U = \frac{AY}{2L}(\Delta L)^2 \qquad (4.7.1)$$

થોડું વધું વિચારતાં,
સમીકરણ 4.7.1 નીચે મુજબ પણ લખી શકાય.

$$\frac{U}{\text{પદાર્થનું કદ}} = \frac{U}{LA}$$

$$= \frac{1}{2}Y\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}Y\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{પ્રતિબળ}}{\text{વિકૃતિ}}\right) \times (\text{વિકૃતિ})^2$$

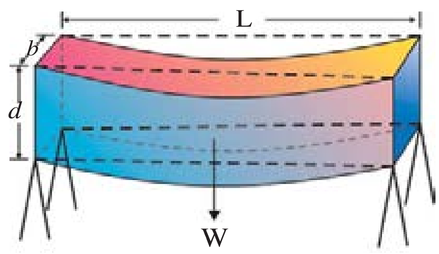
$\therefore$ એકમકદમાં સંગ્રહિત સ્થિતિસ્થાપકીય-ઊર્જા

$$= \frac{1}{2}\ \text{પ્રતિબળ} \times \text{વિકૃતિ} \qquad (4.7.2)$$

એકમકદમાં સંગૃહીત ઊર્જાને ઊર્જાઘનતા પણ કહે છે.

4.8 સ્થિતિસ્થાપક દ્રવ્યોની વ્યાવહારિક ઉપયોગિતા (Applications of Elastic Behaviour of Materials)

(*i*) દ્રવ્ય જ્યારે વ્યાવહારિક હેતુઓ માટે વપરાશમાં હોય ત્યારે તે કોઈક ને કોઈક રીતે પ્રતિબળની અસર હેઠળ હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, ક્રેઈનમાં ધાતુના 'દોરડા' (કૅબલ) દ્વારા જ્યારે કોઈ વસ્તુ ઊંચકાતી હોય છે. ત્યારે આ 'કૅબલ'માં તણાવ-પ્રતિબળ હોય છે. આ સ્થિતિમાં આપેલ કૅબલ વડે વધારેમાં વધારે એટલો જ ભાર ઊંચકી શકાય અથવા આપેલા ભારને વધારેમાં વધારે એટલો પ્રવેગિત ગતિ કરાવી શકાય કે જેથી સ્થિતિસ્થાપક હદને વટાવી ન જાય. દા.ત., સ્ટીલ માટે સ્થિતિસ્થાપક હદ પર પ્રતિબળનું મૂલ્ય 30×10^7 N m^{-2} છે. જો સ્ટીલના કૅબલના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A હોય અને તેના વડે ઊંચકવાનો બોજ M હોય, તો



આકૃતિ 4.16

પ્રતાન-પ્રતિબળ $\sigma_n = \frac{F_n}{A} = \frac{Mg}{A}$

$$\therefore A = \frac{Mg}{\sigma_n} \qquad (4.8.1)$$

અહીં કેબલનો આડછેદ એટલો લેવો જોઈએ કે તેનું મૂલ્ય $\frac{Mg}{\sigma_n}$ કરતાં સારું એવું વધારે હોય. જો $M = 10^4$ kg હોય, તો $g = 3.1\pi$ m s^{-2} લેતાં,

$$A = \pi r^2 = \frac{(10^4)(3.1\pi)}{(30 \times 10^7)}$$

$\therefore$ કેબલની ત્રિજ્યા $r \approx 10^{-2}$ m = 1 cm

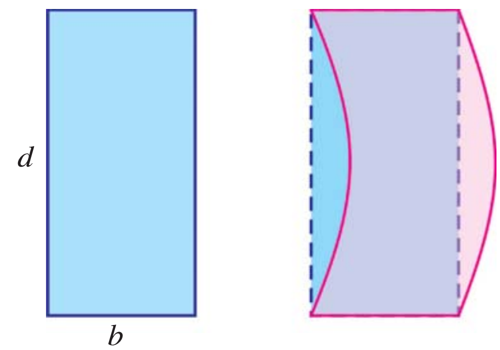
આથી, આવા કેબલની ત્રિજ્યા 1 cm કરતાં સારી એવી મોટી રાખવી જોઈએ. આટલી ત્રિજ્યાનું કેબલ તો ઘણું જ દૃઢ બની જાય, માટે ઘણા બધા પાતળા તારને એકબીજાની સાથે ગૂંથીને આવું કેબલ બનાવવામાં આવતું હોય છે.

હવે, કોઈ પુલ(bridge)નું ઉદાહરણ ધ્યાનમાં લો. પુલની ડિઝાઈન એવી રીતે કરવી જોઈએ કે જેથી તે ટ્રાફિકના ભારને લીધે, પોતાના જ ભારને લીધે અને પવનના સપાટાઓને લીધે એટલો બધો ન વળી જાય કે જેથી તે તૂટી જાય. આ જ રીતે સિમેન્ટ-કૉંક્રીટનાં મકાનો બાંધતી વખતે બીમ-કૉલમનો ઉપયોગ જાણીતો છે. આમાં પણ ભારને લીધે બીમનું થતું વંકન ધ્યાનમાં લેવું જ પડે છે.

આ હકીકત સમજવા માટે આકૃતિ 4.16માં દર્શાવેલું લંબચોરસ આડછેદવાળા સળિયાનું ઉદાહરણ ઉપયોગી થઈ પડશે. અહીં સળિયાની લંબાઈ L, પહોળાઈ b, અને જાડાઈ (ઊંડાઈ) d છે. તેને બે છેડેથી ટેકવીને તેના મધ્યબિંદુ પર W જેટલું વજન લટકાવતાં, ધારો કે તેનું મધ્યબિંદુ δ જેટલું નીચે ઊતરે છે તેને સળિયનું વંકન કહે છે. તેના વડે સળિયો કેટલો વાંકો વળ્યો તે જાણી શકાય છે. હવે,

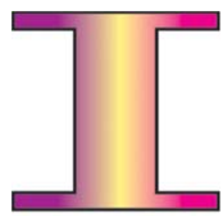
$$\delta = \frac{WL^3}{4bd^3Y} \qquad (4.8.2)$$

નોંધ : આ સૂત્ર તમારે સાબિતી વિના સ્વીકારવાનું છે.



આકૃતિ 4.17

આ સમીકરણ દર્શાવે છે સળિયાનું વંકન ઘટાડવા માટે યંગના મૉડ્યુલસનું મોટું મૂલ્ય ધરાવતા દ્રવ્યનો સળિયો વાપરવો જોઈએ. ઉપરાંત આપેલા દ્રવ્યના સળિયા માટે છેદમાં d^{-3} આવતો હોવાથી સળિયાની જાડાઈ d વધારે રાખીને δ ને ઘણો જ નાનો બનાવી શકાય છે. પણ, અહીં એક તકલીફ છે. સળિયાની જાડાઈ d વધારે રાખવાથી આકૃતિ 4.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સળિયામાં વિરૂપણ ઉત્પન્ન થાય છે. આને બકલિંગ કહે છે. આવું બકલિંગ ન થાય તે માટે સળિયાનો આડછેદ I આકારનો રાખવામાં આવે છે. જુઓ આકૃતિ 4.18. આમ, કરવાથી ભાર વહન કરતી સપાટીનું ક્ષેત્રફળ વધી જાય છે અને સાથોસાથ જરૂરી ઊંડાઈ પણ મળે છે.



આકૃતિ 4.18

(ii) અંતમાં આપણે કુદરતનું એક રસપ્રદ ઉદાહરણ જોઈએ.

h જેટલી ઊંચાઈ અને ρ જેટલી અચળ ઘનતાવાળો પર્વત વિચારો. તેના તળિયે એકમક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતું બળ $h\rho g$ થાય. અને તે અધોદિશામાં લાગે. પર્વતની બાજુઓ મુક્ત હોવાથી તેમાં આકાર પ્રતિબળ ઉત્પન્ન થાય છે અને તેનું મૂલ્ય લગભગ $h\rho g$ જેટલું થાય. જો પર્વતના ખડકોની સ્થિતિસ્થાપકતા હદ 3×10^8 N m^{-2} અને ઘનતા $\rho = 3 \times 10^3$ kg m^{-3} લેવામાં આવે, તો

$$h_{max}\rho g = 3 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$$

$$\therefore\ h_{max} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^3 \times 9.8} \simeq 10^4\ \text{m}$$

$$= 10\ \text{km}$$

આમ, ખડકોની સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ (મર્યાદા)ને કારણે પર્વતોની મહત્તમ ઊંચાઈ પર મર્યાદા લદાય છે. માઉન્ટ એવરેસ્ટની ઊંચાઈ 8848 m એટલે કે 8.848 km છે.

ઉદાહરણ 4 : F_1 જેટલા તણાવબળની અસર હેઠળ એક તારની લંબાઈ l_1 અને F_2 બળની અસર હેઠળ તેની લંબાઈ l_2 છે, તો સાબિત કરો કે તેની મૂળ લંબાઈ $l = \frac{F_2 l_1 - F_1 l_2}{F_2 - F_1}$ છે.

ઉકેલ :

$$\Delta l = \frac{Fl}{AY} \text{ હોવાથી,}$$

$$l_1 = l + \frac{F_1 l}{AY} \qquad (1)$$

$$\text{અને } l_2 = l + \frac{F_2 l}{AY} \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) ને F_2 અને સમીકરણ (2) ને F_1 વડે ગુણીને સમીકરણ (1)માંથી (2) બાદ કરતાં,

$$F_2 l_1 - F_1 l_2 = F_2 l + \frac{F_1 F_2 l}{AY} - F_1 l - \frac{F_1 F_2 l}{AY}$$

$$\therefore\ F_2 l_1 - F_1 l_2 = (F_2 - F_1) l$$

$$\therefore\ l = \frac{F_2 l_1 - F_1 l_2}{F_2 - F_1}$$

ઉદાહરણ 5 : દરિયાની અંદર અમુક ઊંડાઈએ દબાણ 80 atm છે. જો દરિયાની સપાટી પર પાણીની ઘનતા 1.03×10^3 kg/m^3 હોય અને પાણીની દબનીયતા 45.8×10^{-11} Pa^{-1}, હોય, તો ઉપર્યુક્ત ઊંડાઈએ પાણીની ઘનતા શોધો.

1 atm = 1.013×10^5 Pa.

ઉકેલ : ધારો કે કથિત ઊંડાઈએ પાણીની ઘનતા ρ' અને સપાટી પર પાણીની ઘનતા ρ છે. પાણીના આપેલા દ્રવ્યમાન M માટે ધારો કે સપાટી પર અને ઊંડાઈએ કદ અનુક્રમે V અને V$'$ છે.

$$\therefore\ V = \frac{M}{\rho} \text{ અને } V' = \frac{M}{\rho'}$$

$$\therefore \text{ કદમાં થતો ઘટાડો } = \Delta V$$

$$= V - V'$$

$$= M\left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right]$$

$$\therefore \text{ કદ-વિકૃતિ } = \frac{\Delta V}{V} = M\left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right] \times \frac{\rho}{M}$$

$$= 1 - \frac{\rho}{\rho'}$$

$$\text{પણ, દબનીયતા } K = \frac{\Delta V}{PV} = \frac{1}{P}\left[1 - \frac{\rho}{\rho'}\right]$$

$$\therefore 45.8 \times 10^{-11} = \frac{1}{80 \times 1.013 \times 10^5} \left[1 - \frac{1.03 \times 10^3}{\rho'}\right]$$

$$\therefore\ \rho' = 1.034 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

ઉદાહરણ 6 : 0.1 m ત્રિજ્યાવાળો અને 8 π kg દળવાળો સ્ટીલનો એક ગોળો 5 m લાંબા અને 10^{-3} m વ્યાસવાળા શિરોલંબ તારના છેડે લટકાવ્યો છે. આ તારને 5.22 m ઊંચાઈવાળી છત પરથી લટકાવેલ છે. જ્યારે આ ગોળાને સાદા લોલકની જેમ દોલનો કરાવવામાં આવે છે, ત્યારે તે રૂમના તળિયાને સ્પર્શે છે, તો દોલન દરમિયાન સૌથી નીચેના સ્થાને ગોળાનો વેગ શોધો. સ્ટીલનો યંગ મૉડ્યુલસ = 1.994×10^{11} Nm^{-2} છે.

ઉકેલ :

ગોળાની ત્રિજ્યા r = 0.1 m

પ્રારંભિક લંબાઈ L = 5 m

તારની લંબાઈમાં થતો વધારો

$$\Delta L = 5.22 - (L + 2r)$$

$$= 5.22 - (5 + 2 \times 0.1)$$

$$= 0.02\ \text{m}$$

તારની ત્રિજ્યા $r_o = 5 \times 10^{-4}$ m

જો દોલન દરમિયાન નીચેના છેડે તારમાં ઉત્પન્ન થતો તણાવ T હોય તો,

$$Y = \frac{T/A}{\Delta L/L}$$

$$\therefore\ T = \frac{YA\Delta L}{L} = \frac{Y(\pi r_0^2)\Delta L}{L}$$

$$= \frac{1.994 \times 10^{11} \times \pi \times (5 \times 10^{-4})^2 \times 0.02}{5}$$

$$= 199.4\pi\ \text{N}$$

પણ, ચોખ્ખું બળ $T - Mg = \frac{Mv^2}{R}$,

જ્યાં, R = ગોળાના ગતિપથની ત્રિજ્યા = 5.22 − 0.1 = 5.12 m

$$\therefore\ 199.4\pi - 8\pi \times 9.8 = \frac{8\pi \times v^2}{5.12}$$

$$\therefore\ 199.4 - 78.4 = \frac{8v^2}{5.12}$$

$$\therefore\ 121 = \frac{8v^2}{5.12}$$

$$\therefore\ v = 8.8\ ms^{-1}$$

ઉદાહરણ 7 : 15 kg દળનો એક પદાર્થ 1 m લંબાઈ ધરાવતા સ્ટીલના તારના છેડે બાંધ્યો છે, અને તેને શિરોલંબ સમતલમાં 1 rad/sના કોણીય વેગથી ભ્રમણ આપવામાં આવે છે. જો તારના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 0.06 cm^2 હોય, તો પદાર્થના નિમ્નતમ સ્થાન માટે તારની લંબાઈમાં થતો વધારો શોધો.

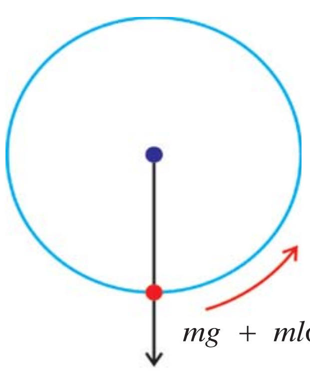
$Y_{steel} = 2 \times 10^{11}\ N\ m^{-2}$

ઉકેલ :

m = 15 kg, l = 1m, ω = 1 rad/s A = 0.06 $cm^2 = 6 \times 10^{-6} m^2$

$Y_{steel} = 2 \times 10^{11}\ N\ m^{-2}$

પદાર્થના નિમ્નતમ સ્થાન માટે પદાર્થ પર લાગતું કુલ બળ ગુરુત્વાકર્ષણ બળ અને કેન્દ્રત્યાગી બળનો સરવાળો થાય.



આકૃતિ 4.19

$F = mg + mv^2/r$માં $v = l\omega$ અને $r = l$ મૂકતાં,

$$\therefore\ F = mg + ml\omega^2$$

$$= 15(9.8 + 1 \times (1)^2)$$

$$= 15\ (10.8) = 162\ N$$

$$\therefore\ \text{હવે પ્રતિબળ}\ \sigma = \frac{F}{A} = \frac{162}{6 \times 10^{-6}}$$

$$= 27 \times 10^6\ N\ m^{-2}$$

વળી $Y = \frac{\sigma}{\varepsilon_l}$

$$\therefore\ \frac{\Delta l}{l} Y = \sigma$$

$$\therefore\ \Delta l = \frac{\sigma l}{Y}$$

$$= \frac{27 \times 10^6 \times 1}{2 \times 10^{11}} = 13.5 \times 10^{-5}\ m$$

$$= 0.135 \times 10^{-3}\ m$$

$$= 0.135\ mm$$

ઉદાહરણ 8 : એક તારની લંબાઈ 5 m અને તેના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 2.5 mm^2 છે. જો તેની લંબાઈમાં 1 mmનો વધારો કરવો હોય તો કરવું પડતું કાર્ય શોધો. દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ = $2 \times 10^{11}\ N\ m^{-2}$.

ઉકેલ : l = 5m, Δl = 1mm = 10^{-3}m

A = 2.5 mm^2 = $2.5 \times 10^{-6}\ m^2$, $Y = 2 \times 10^{11}\ N\ m^{-2}$

અહીં થતું કાર્ય,

$$W = \frac{1}{2}\text{પ્રતિબળ} \times \text{વિકૃતિ} \times \text{કદ}$$

$$= \frac{1}{2}(Y \times \varepsilon_l) \times \varepsilon_l \times V$$

$$= \frac{1}{2} Y \times \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 \times V$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{11} \times \left(\frac{10^{-3}}{5}\right)^2 \times 2.5 \times 10^{-6} \times 5 \qquad (\therefore\ V = Al)$$

$$= 5 \times 10^{-2}\ J.$$

સારાંશ

1. ઘન પદાર્થોનું વર્ગીકરણ નીચે મુજબ ત્રણ સમૂહમાં કરી શકાય : (i) સ્ફટિકમય પદાર્થો (ii) અસ્ફટિકમય પદાર્થો અને (iii) અર્ધ સ્ફટિકમય પદાર્થો.
2. સ્ફટિકમય પદાર્થોમાં અણુ આયનો કે પરમાણુઓની અવકાશમાં હારબદ્ધ બિંદુઓ પર ગોઠવાયેલાં છે. અવકાશમાં બિંદુઓની આવી હારબદ્ધ ગોઠવણીને લૅટિસ કહે છે.
3. સ્ફટિકમય પદાર્થ એક કરતાં વધુ એકસમાન એકમોનો બનેલો હોય છે.
4. સ્ફટિકમય પદાર્થો તેમાં રહેલા લૉંગરેન્જ ઑર્ડરને કારણે નિયત તાપમાને પીગળે છે.
5. અસ્ફટિકમય પદાર્થોમાં અણુઓની ગોઠવણી હારબદ્ધ હોતી નથી. આવા પદાર્થોના નિર્માણ સમયે આવી ગોઠવણી માટે જરૂરી સમયના અભાવે આમ બને છે.
6. અર્ધસ્ફટિકમય પદાર્થોમાં અમુક ભાગમાં ઘટકકણો નિયમિત હારબદ્ધ ગોઠવણી અને અમુક ભાગમાં અનિયમિત ગોઠવણી ધરાવે છે.
7. પદાર્થ પર બાહ્યબળ લાગતાં તેમાં વિરૂપણ થાય છે. પદાર્થના આવા વિરૂપણનો પ્રતિકાર કરવાના ગુણને સ્થિતિસ્થાપકતા કહે છે.
8. જે પદાર્થ બાહ્ય વિરૂપણ બળ દૂર કરતાં પોતાની મૂળ સ્થિતિ સંપૂર્ણપણે પરત મેળવી શકે તેવા પદાર્થને સંપૂર્ણ સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થ કહે છે.
9. જે પદાર્થ બાહ્ય વિરૂપણ બળ દૂર થતાં પોતાની મૂળ સ્થિતિ અંશતઃ પણ પ્રાપ્ત ન કરી શકે તેવા પદાર્થને અસ્થિતિસ્થાપક પદાર્થ કહે છે.
10. પદાર્થ પર બાહ્યબળ લગાડતાં તેના પરિમાણમાં ફેરફાર થાય છે. પરિમાણમાં થતા ફેરફાર અને મૂળ પરિમાણનાં મૂલ્યોના ગુણોત્તરને વિકૃતિ કહે છે. વિકૃતિ ત્રણ પ્રકારની હોય છે. વિકૃતિ પરિમાણરહિત છે.
11. પ્રતાન અથવા દાબીય વિકૃતિ (ε_l) પદાર્થની લંબાઈમાં થતો ફેરફાર અને મૂળ લંબાઈનો ગુણોત્તર છે.
12. પદાર્થના કદમાં થતા ફેરફાર અને મૂળ કદના ગુણોત્તરને કદ-વિકૃતિ કહે છે.
13. પદાર્થની સપાટી પર સ્પર્શીય બળ લાગતાં તેમાં આવતી વિકૃતિને આકાર-વિકૃતિ કહે છે.
14. પદાર્થ પર બાહ્ય વિરૂપક બળ લાગતાં તેમાં ઉત્પન્ન થતાં એકમક્ષેત્રફળ દીઠ પુનઃસ્થાપક બળને પ્રતિબળ કહે છે. તેનો એકમ Nm^{-2} છે.
15. લંબાઈ, આકાર અને કદની વિકૃતિને અનુરૂપ ઉદ્ભવતાં પ્રતિબળને અનુક્રમે પ્રતાન-પ્રતિબળ, આકાર-પ્રતિબળ અને કદ પ્રતિબળ કહે છે.
16. પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લાગતાં તેમાં ઉત્પન્ન થતાં પુનઃસ્થાપક બળ માટે આંતરઅણુ બળો જવાબદાર છે.
17. પદાર્થની સપાટી પર લાગતું બળ જો લંબરૂપે ન લાગતું હોય તો બળનો સપાટીને લંબ ઘટક પ્રતાન-વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરે છે. જ્યારે સપાટીને સમાંતર ઘટક આકાર-વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરે છે.
18. પ્રતિબળ અને દબાણ બંને એકમ ક્ષેત્રફળ પર લંબરૂપે લાગતું બળ હોવા છતાં બંને ભિન્ન ભૌતિકરાશી છે.
19. પ્રતાન વિકૃતિ જો 1 %થી ઓછી હોય, તો પ્રતિબળ વિકૃતિના સમપ્રમાણમાં હોય છે. જે પ્રતિબળના જે મહત્તમ મૂલ્ય સુધી પદાર્થ બાહ્ય બળ દૂર થયા બાદ પોતાની મૂળ સ્થિતિ મૂળ માર્ગે પ્રાપ્ત કરે તેના મૂલ્યને સપ્રમાણતાની હદ કહે છે. જે પ્રતિબળના મૂલ્ય માટે પદાર્થ પોતાની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરી શકે તે મૂલ્યને સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ કહે છે.
20. જો પદાર્થમાં પ્લાસ્ટિક વિરૂપણ મોટા પ્રમાણમાં પેદા કરી શકાય તો પદાર્થ તન્ય પદાર્થ કહેવાય. જ્યારે સ્થિતિસ્થાપકતા હદથી પ્રતિબળ વધતાં જો પદાર્થ તૂટી જાય, તો પદાર્થ બટકણો કહેવાય.

21. રબર જેવા પદાર્થમાં 700 % વિકૃતિ પેદા કરી શકાય છે. આવા પદાર્થોને ઇલાસ્ટોમર કહે છે.

22. રબર જેવા પદાર્થને બાહ્ય બળ આપી મોટા પ્રમાણ વિરૂપણ પેદા કર્યા બાદ, વિરૂપક બળ દૂર કરતાં પદાર્થ પોતાની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે, પણ મૂળ માર્ગે નહીં. અહીં વિરૂપણ આપવા માટે કરવું પડતું કાર્ય પદાર્થ મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે તે દરમિયાન મુક્ત થતી ઊર્જાથી વધુ હોય છે, આ ઘટનાને ઇલાસ્ટિક હિસ્ટેરીસીસ કહે છે. આ હકીકતનો ઉપયોગ શોક એબ્સોર્બરમાં થાય છે.

23. હુકનો નિયમ : નાના વિરૂપણ માટે પ્રતિબળ વિકૃતિના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

24. નાના વિરૂપણ માટે પ્રતિબળ અને વિકૃતિનો ગુણોત્તર સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક કહેવાય છે. પ્રતાન-વિકૃતિ, કદ-વિકૃતિ અને આકાર-વિકૃતિને અનુરૂપ સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક અનુક્રમે યંગ મૉડ્યુલસ (Y) બલ્ક મૉડ્યુલસ (B) અને આકાર-સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક અથવા દૃઢતાઅંક (η) કહેવાય છે. સ્થિતિસ્થાપકતા-અંકનો એકમ N m^{-2} છે.

25. પદાર્થ પર અક્ષીયબળ (તણાવબળ કે દાબીય બળ) લગાડતાં તેની લંબાઈમાં તથા પાર્શ્વિક પરિમાણોમાં ફેરફાર થાય છે. પાર્શ્વિક પરિમાણોમાં આંશિક ફેરફાર અને અક્ષીય પરિમાણમાં થતાં આંશિક ફેરફારનો ગુણોત્તર પોઇસનના ગુણોત્તર તરીકે ઓળખાય છે. તેનો સંકેત μ છે. તે એકમરહિત છે. μનું મૂલ્ય 0.5 ઓછું હોય છે.

26. પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લાગતાં પદાર્થ વિરૂપણને કારણે નવી સંરચના મેળવે છે, તેને કારણે તે સ્થિતિ-ઊર્જા ધરાવે છે. આ સ્થિતિ-ઊર્જાને સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા કહેવાય છે.

તેનું મૂલ્ય $U = \frac{1}{2}$ પ્રતિબળ $\times$ વિકૃતિ $\times$ કદ જેટલું થાય છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. એક તારને ખેંચીને તેની લંબાઈ બમણી કરવામાં આવે છે. નીચેનાં પૈકી કયું વિધાન આ સંદર્ભમાં ખોટું છે ?

(A) તેનું કદ વધે છે. (B) પ્રતાન-વિકૃતિ 1 થાય છે.

(C) પ્રતિબળ = યંગ મૉડ્યુલસ (D) પ્રતિબળ = 2 (યંગ મૉડ્યુલસ)

2. દૃઢતાઅંક (આકાર-સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક)નું પારિમાણિક સૂત્ર કયું છે ?

(A) $M^1L^1T^{-2}$ (B) $M^1L^{-1}T^{-2}$ (C) $M^1L^{-2}T^{-1}$ (D) $M^1L^{-2}T^{-2}$

3. એક તાર પર 20 kgથી વધુ દળ લટકાવતાં તે તૂટી જાય છે. આ જ દ્રવ્યના બનેલા બીજા અડધી ત્રિજ્યાવાળા તાર પર લટકાવી શકાતું મહત્તમ દળ કેટલું હશે ?

(A) 20 kg (B) 5 kg (C) 80 kg (D) 160 kg

4. એક ધાતુના બનેલ L લંબાઈના અને m જેટલા દળના સળિયાના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A છે. આ સળિયા નીચેના છેડે M દળ લટકાવવામાં આવે છે, તો સળિયાના ઉપરના છેડેથી $\frac{3L}{4}$ અંતરે આવેલા આડછેદ પર પ્રતિબળ કેટલું હશે ?

(A) Mg/A (B) $(M + m/4)\ g/A$

(C) $(M + \frac{3}{4}m)g/A$ (D) $M + m)\ g/A$

5. અહીં સમાન દ્રવ્યના ચાર તારની લંબાઈ અને વ્યાસનાં મૂલ્ય આપેલ છે. દરેકના છેડે સમાન દળ લટકાવતાં કયા તારની લંબાઈમાં થતો વધારો મહત્તમ હશે ?
(A) l = 0.5 m, d = 0.05 mm (B) 1 = 1m, d = 1mm
(C) l = 2m, d = 2mm (D) 1 = 3m, d = 3mm

6. 10^{-6} m^2 જેટલું આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા તારને 100 N પ્રતાનબળ આપતાં તેની લંબાઈમાં 1 % વધારો થાય છે, તો દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ .... છે.
(A) 10^{12} Pa (B) 10^{11} Pa (C) 10^{10} Pa (D) 10^{2} Pa

7. સમાન પરિમાણના કૉપર અને સ્ટીલના તારના છેડા જોડીને સંયુક્ત તાર બનાવ્યો છે. આ સંયુક્ત તારના છેડે વજન લટકાવતાં તેમની લંબાઈમાં થતાં વધારાનો ગુણોત્તર .... છે.

$$Y_{\text{સ્ટીલ}} = \frac{20}{7} Y_{\text{કૉપર}}$$

(A) 20 : 7 (B) 10 : 7 (C) 7 : 20 (D) 1 : 7

8. 100 m ઊંડા તળાવના તળિયે એક રબરબૉલને લઈ જતાં તેના કદમાં 1 % ઘટાડો થાય છે, તો રબરનો બલ્ક મૉડ્યુલસ .... છે. (g = 10 m s^{-2})
(A) 10^6 Pa (B) 10^8 Pa (C) 10^7 Pa (D) 10^9 Pa

9. દૃઢ પદાર્થનો યંગ મૉડ્યુલસ .... હોય છે.
(A) 0 (B) 1 (C) ∞ (D) 0.5

10. એક પદાર્થ પરનું દબાણ 1.01×10^5 Paથી વધીને 1.165×10^5 Pa થતાં તેનું કદ અચળ તાપમાને 10% જેટલું ઘટે છે, તો દ્રવ્યનો બલ્ક મૉડ્યુલસ .... છે.
(A) 1.55×10^5 Pa (B) 51.2×10^5 Pa
(C) 102.4×10^5 Pa (D) 204.8×10^5 Pa

11. એક તારના છેડે 200 N બળ લગાડતાં તેની લંબાઈમાં 1 mm વધારો થાય છે. તો આ ફેરફારને કારણે તેમાં સંગૃહીત સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા .... છે.
(A) 0.2 J (B) 10 J (C) 20 J (D) 0.1 J

12. જડ આધાર સાથે બાંધેલા તારના મુક્ત છેડા પર F બળ લગાડતાં તેની લંબાઈમાં l જેટલો વધારો કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય .... થાય.
(A) $\frac{F}{2L}$ (B) Fl (C) 2Fl (D) $\frac{1}{2}$Fl

13. સંપૂર્ણ પ્લાસ્ટિક પદાર્થ માટે યંગ મૉડ્યુલસની કિંમત .... છે.
(A) l (B) શૂન્ય (C) ∞ (D) 2

14. સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક પારિમાણિક દૃષ્ટિએ ....ને સમતુલ્ય છે.
(A) બળ (B) પ્રતિબળ (C) વિકૃતિ (D) એક પણ નહીં.

15. L લંબાઈના એક મેટલ-વાયરના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A છે અને તેના દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ Y છે. આ તાર સ્પ્રિંગ તરીકે વર્તતો હોય, તો તેનો બળ-અચળાંક કેટલો થાય ?
(A) $\frac{YA}{L}$ (B) $\frac{YA}{2L}$ (C) $\frac{2YA}{L}$ (D) $\frac{YL}{A}$

16. જ્યારે મેટલ વાયરમાં 10 Nનો તણાવ પેદા કરવામાં આવે છે, ત્યારે તેની કુલ લંબાઈ 5.001 m અને 20 N તણાવ માટે તેની કુલ લંબાઈ 5.002 m છે, તો તારની મૂળ લંબાઈ .... m છે.
(A) 5.001 (B) 4.009 (C) 5.0 (D) 4.008

જવાબો

1. (D)	2. (B)	3. (B)	4. (B)	5. (A)	6. (C)
7. (A)	8. (B)	9. (C)	10. (A)	11. (D)	12. (D)
13. (B)	14. (B)	15. (A)	16. (C)		

નીચે આપેલ પ્રશ્નોનો જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. આણ્વિક સ્ફટિકોના નિર્માણ માટે કયાં બળો જવાબદાર છે ?
2. સંપૂર્ણ સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થની વ્યાખ્યા આપો.
3. વિકૃતિનું પારિમાણિક સૂત્ર લખો.
4. પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લાગતાં તેમાં પુનઃસ્થાપક બળો ઉત્પન્ન થવાનું કારણ સમજાવો.
5. દબનીયતાની વ્યાખ્યા અને પારિમાણિક સૂત્ર આપો.
6. કયો પદાર્થ વધુ સ્થિતિસ્થાપક છે, રબર કે સ્ટીલ ?
7. કારણ આપો : સ્પ્રિંગ સ્ટીલમાંથી બનાવવામાં આવે છે, કૉપરમાંથી નહીં.
8. સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થના પરિમાણમાં ફેરફાર કરવા માટે ખર્ચાતી ઊર્જાનું શું થાય છે ?
9. એક સળિયાને ખેંચીને લંબાઈમાં Δl વધારો કરતાં તેની સ્થિતિ-ઊર્જામાં U જેટલો વધારો થાય છે. જો તેના પર દાબીય બળ લગાડીને તેની Δl જેટલો ઘટાડો કરતાં સ્થિતિ-ઊર્જામાં શું ફેરફાર થાય ?
10. એક તાર માટે બ્રેકિંગ ફોર્સ F છે. જો તારની જાડાઈ બમણી કરવામાં આવે, તો બ્રેકિંગ ફોર્સનું મૂલ્ય કેટલું થાય ?

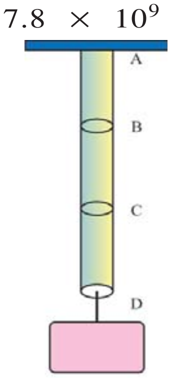
નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. આયનીક સ્ફટિકમય પદાર્થો પર ટૂંક નોંધ લખો.
2. વિકૃતિ એટલે શું ? યોગ્ય ઉદાહરણની મદદથી આકાર વિકૃતિ સમજાવો.
3. પદાર્થની સપાટીને દોરેલો લંબ સાથે θ ખૂણો બનાવતા બળને કારણે પદાર્થ પર થતી અસર ચર્ચો.
4. યંગ મૉડ્યુલસનું મૂલ્ય મેળવવાની પ્રાયોગિક રીત સમજાવો.
5. પ્રતિબળ અને દબાણ વચ્ચેનો ભેદ સ્પષ્ટ કરો.
6. પોઇસનના ગુણોત્તરની વ્યાખ્યા આપો અને દર્શાવો કે તેનું મૂલ્ય 0.5થી ઓછું હોય છે.
7. સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જાનું સૂત્ર મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

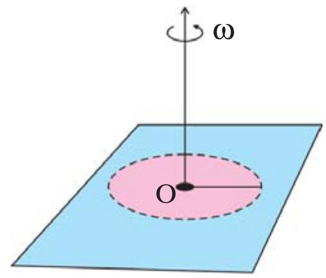
1. એક સ્ટીલનો તાર શિરોલંબ દિશામાં લટકાવેલ છે. આ તાર પોતાના વજનથી જ તૂટી જાય તેના માટે તેની મહત્તમ લંબાઈ કેટલી હોવી જોઈએ ? સ્ટીલની ઘનતા $= 7.8 \times 10^3$ kg m^{-3} સ્ટીલ માટે બ્રેકિંગ પ્રતિબળ $= 7.8 \times 10^9$ dyne/cm^2 છે. [જવાબ : $L = 1.02 \times 10^4$ m]

2. આકૃતિમાં 10^{-4} m^2 જેટલો એકસરખો આડછેદ ધરાવતો AB, BC અને CDનો બનેલો સંયુક્ત સળિયો દર્શાવ્યો છે અને છેડે 10 kgનું દળ લટકાવેલ છે. જો $L_{AB} = 0.1$ m, $L_{BC} = 0.2$ m અને $L_{CD} = 0.15$ m તથા $Y_{AB} = 2.5 \times 10^{10}$ Pa, $Y_{BC} = 4 \times 10^{10}$ Pa અને $Y_{CD} = 1 \times 10^{10}$ Pa તો બિંદુ B, C અને Dના સ્થાનાંતર ગણો.
[જવાબ : Bનું સ્થાનાંતર $= 3.9 \times 10^{-6}$ m, Cનું સ્થાનાંતર $= 8.8 \times 10^{-6}$ m અને Dનું સ્થાનાંતર $= 2.3 \times 10^{-5}$ m]



આકૃતિ 4.20

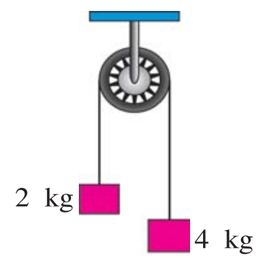
3. L લંબાઈ અને A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા તારને છેડે m દળનો પદાર્થ બાંધીને તેને ω કોણીય ઝડપથી સમક્ષિતિજ સમતલમાં ભ્રમણ આપવામાં આવે છે, તો તેની લંબાઈમાં વધારો $\Delta l = \frac{m\omega^2 L^2}{AY}$ છે તેમ દર્શાવો. Y યંગ મૉડ્યુલસ છે.



આકૃતિ 4.21

4. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ 2 kg અને 4 kgના બે પદાર્થ 2 cm^2 જેટલા આડછેદના એક તારના બે છેડે લટકાવેલ છે. તાર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ઘર્ષણરહિત ગરગડી પરથી પસાર થાય છે, તો તારમાં ઉત્પન્ન થતી વિકૃતિ શોધો. $g = 10$ m s^{-2} Y $= 2 \times 10^{11}$ Pa.

[જવાબ : 6.6×10^{-7}]



આકૃતિ 4.22

5. 5 m લંબાઈનો અને 2 mm વ્યાસવાળો એક તાર છત પરથી લટકે છે, તેના વડે 5 kg દળ લટકાવતાં તેના કદમાં કેટલો વધારો થાય. દ્રવ્ય માટે પોઈસનનો ગુણોત્તર 0.2 છે. Y $= 2 \times 10^{11}$ Pa, $g = 10$ m s^{-2}. તારની સ્થિતિ-ઊર્જામાં થતો વધારો પણ શોધો.

[જવાબ : $\Delta V = 7.5 \times 10^{-10}$ m^3, 10^{-2} J]

6. 1 mm^2 આડછેદ ધરાવતા એક સ્ટીલના વાયરને 60^o તાપમાન સુધી ગરમ કરીને બે છેડા વચ્ચે તાર તંગ રહે તેમ બાંધ્યો છે. તાપમાન 30^oC થાય, ત્યારે તેમાં રહેલ તણાવમાં શું ફેરફાર થાય ? સ્ટીલ માટે રેખીય પ્રસરણાંક $\alpha = 1.1 \times 10^{-5}$ $^oC^{-1}$, Y $= 2 \times 10^{11}$ Pa. (તાપમાનમાં Δt ફેરફાર થતાં તારની લંબાઈમાં થતો ફેરફાર $= \alpha l \Delta t$)

[જવાબ : 66 N]

•

પ્રકરણ 5

તરલનું મિકેનિક્સ

5.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વહી શકે તેવા દ્રવ્યને તરલ કહે છે. પ્રવાહીઓ અને વાયુઓ વહી શકે છે, તેથી તેઓને તરલ કહે છે. પીગળેલ કાચ અને ડામર પણ ધીમેથી વહી શકે છે. તેથી તેઓનો પણ સમાવેશ તરલમાં થાય છે.

તરલ મિકેનિક્સ એ તરલ સ્ટેટીક્સ અને તરલ ડાઈનેમિક્સનું બનેલું છે. તરલ સ્ટેટીક્સમાં સ્થિર તરલ પર લાગતાં બળો અને દબાણનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. તરલ ડાઈનેમિક્સમાં તરલના ગુણધર્મો અને તરલની ગતિનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. તરલ ડાઈનેમિક્સનો અભ્યાસ બે ભાગમાં કરવામાં આવે છે. હાઈડ્રોડાઈનેમિક્સ અને ઍરોડાઈનેમિક્સ.

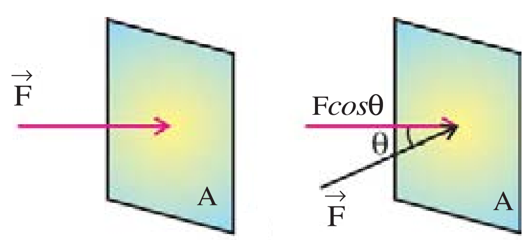
આપણે દબાણ અને પાસ્કલના નિયમનો અભ્યાસ તરલ સ્ટેટીક્સનો કરીશું. તરલ ડાઈનેમિક્સમાં પ્રવાહની લાક્ષણિકતાઓ, બર્નુલીનું સમીકરણ અને તેના ઉપયોગો અને શ્યાનતાનો અભ્યાસ કરીશું, અને છેલ્લે સ્થિર પ્રવાહીના પૃષ્ઠતાણની ચર્ચા પણ કરીશું. તો ચાલો શરૂઆત તરલ સ્ટેટીક્સથી કરીએ.

5.2 દબાણ અને ઘનતા

“પદાર્થની સપાટી પર એકમક્ષેત્રફળ દીઠ સપાટીને લંબરૂપે લાગતા બળને સપાટી પર લાગતું દબાણ કહે છે.”

$$\text{દબાણ (P)} = \frac{\text{બળ (F)}}{\text{ક્ષેત્રફળ (A)}} \quad (5.2.1)$$

જો બળ સપાટીને લંબ ન હોય, તો બળનો સપાટીને લંબઘટક આ સપાટી પર લાગતા દબાણ માટે ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. (જુઓ આકૃતિ 5.1)



સપાટી પરનું દબાણ
આકૃતિ 5.1

જો બળ ($\vec{F}$), સપાટીને દોરેલા લંબ સાથે θ ખૂણો બનાવે તો $F cos\theta$ જેટલું બળ સપાટીને લંબ દિશામાં લાગે. તેથી દબાણની વ્યાખ્યા અનુસાર, દબાણ

$$P = \frac{F cos\theta}{A} \quad (5.2.2)$$

દબાણનો એકમ newton/(metre)^2, (N/m^2) છે, જે પ્રસિદ્ધ ફ્રેન્ચ ભૌતિકવિજ્ઞાની બ્લેઈસ પાસ્કલ (1623–1662)ના માનમાં pascal (P_a) પણ ઓળખાય છે. દબાણ અદિશ રાશિ છે.

પાસ્કલ સિવાયના દબાણના એકમો બાર, વાતાવરણ (atm) અને ટોર (torr) છે.

$1\ P_a = 1\ N\ m^{-2}$

$1\ bar = 10^5\ P_a$

અને 1 વાતાવરણ (atm) $= 1.013 \times 10^5\ P_a$

$1\ torr = 133.28\ P_a$

1 atm દબાણ દરિયાની સપાટીએ વાતાવરણ દ્વારા ઉત્પન્ન થતું દબાણ છે. તેને પારાના સ્તંભની ઊંચાઈના સ્વરૂપમાં cm – Hg કે mm – Hgમાં પણ દર્શાવાય છે.

1 atm = 76 cm – Hg = 760 mm – Hg

ઘનતા : કોઈ પણ પદાર્થના દળ અને કદના ગુણોત્તરને તે પદાર્થની ઘનતા કહે છે. જો m દળના પદાર્થનું કદ V હોય, તો ઘનતા (ρ) નીચેના સૂત્રથી મળે.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (5.2.3)$$

સ્પષ્ટ છે કે ઘનતાનો એકમ kg m^{-3} થાય. સામાન્ય રીતે પ્રવાહીઓ અદબનીય હોય છે. (મોટા ભાગના પ્રવાહી કદમાં થતા પ્રતિશત ફેરફાર 0.005 ટકાના ક્રમનો હોય છે.) તેથી આપેલ તાપમાને તેમની ઘનતા અચળ હોય છે. વાયુઓની ઘનતા તેમના દબાણ પર આધારિત હોય છે. ટેબલ 5.1 માં કેટલાક તરલની ઘનતા આપેલ છે.

ટેબલ 5.1 : સામાન્ય તાપમાને અને દબાણે તરલોની ઘનતા (માત્ર જાણકારી માટે)

પ્રવાહી	ઘનતા (kg m^{-3})	વાયુ	ઘનતા (kg m^{-3})
પાણી	1×10^3	હવા	1.29
દરિયાનું પાણી	1.03×10^3	ઑક્સિજન	1.43
પારો	13.6×10^3	હાઈડ્રોજન	9.0×10^{-2}
ઈથાઈલ આલ્કોહૉલ	0.806×10^3	ઈન્ટર સ્ટેલર સ્પેસ	10^{-18}–10^{-21}
રુધિર	1.06×10^3		

કેટલીક વાર, આપેલ પદાર્થની ઘનતાને તેની વિશિષ્ટ ઘનતાનું મૂલ્ય આપી વર્ણવવામાં આવે છે. **"કોઈ પણ પદાર્થની વિશિષ્ટ ઘનતા એ પદાર્થની ઘનતા અને પાણીની 277 K તાપમાને ઘનતાનો ગુણોત્તર છે."** આમ,

$$\text{વિશિષ્ટ ઘનતા} = \frac{\text{પદાર્થની ઘનતા}}{\text{277 K તાપમાને પાણીની ઘનતા}}$$

વિશિષ્ટ ઘનતા પરિમાણરહિત છે. તેને સાપેક્ષ ઘનતા કે વિશિષ્ટ ગુરુત્વ પણ કહે છે. ઘનતાના વ્યસ્તને વિશિષ્ટ કદ કહે છે.

જો આપણે આપેલા પદાર્થના કદ જેટલું જ પાણી લઈએ, તો વિશિષ્ટ ઘનતા નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

પદાર્થની વિશિષ્ટ ઘનતા =

$$\frac{\text{પદાર્થનું દળ}}{\text{277 K તાપમાને તેટલા જ કદના પાણીનું દળ}}$$

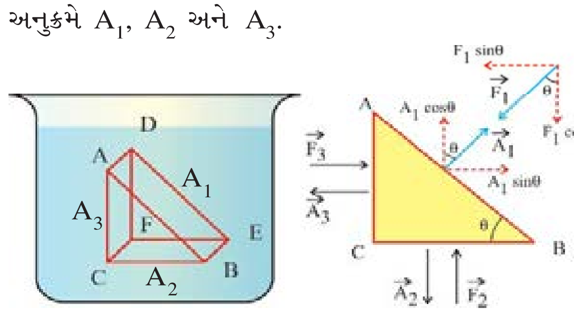
પદાર્થની વિશિષ્ટ ઘનતા શોધવા માટે ઉપર્યુક્ત સમીકરણ ખૂબ ઉપયોગી છે. આ રીતે પદાર્થની વિશિષ્ટ ઘનતા માટે પદાર્થની ઘનતા મેળવવાની જરૂરી રહેતી નથી.

5.3 પાસ્કલનો નિયમ અને તેના ઉપયોગો

પાસ્કલનો નિયમ : "જો ગુરુત્વાકર્ષણની અસરોને અવગણવામાં આવે તો સંતુલન-અવસ્થામાં રહેલા અદબનીય તરલમાં પ્રત્યેક બિંદુએ દબાણ સમાન હોય છે.'

આ વિધાનને સહેલાઈથી નીચે મુજબ ચકાસી શકાય :

સ્થિર અવસ્થામાં રહેલા પ્રવાહીના અંદરના ભાગમાં એક પ્રવાહી ખંડ વિચારો. આ ખંડ એક કાટકોણ ત્રિકોણની બનેલી બે બાજુ ધરાવતો એક પ્રિઝમ છે. આ ખંડની સપાટીઓ ADEB, CFEB અને ADFC ના ક્ષેત્રફળ અનુક્રમે A_1, A_2 અને A_3.



પાસ્કલના નિયમની ચકાસણી

આકૃતિ 5.2

આકૃતિ 5.2 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$A_2 = A_1 cos\theta$ and $A_3 = A_1 sin\theta$

વળી, પ્રવાહી ખંડ સંતુલનમાં હોવાથી,

$F_2 = F_1 cos\theta$ અને $F_3 = F_1 sin\theta$

હવે સપાટી ADEB પરનું દબાણ $P_1 = \frac{F_1}{A_1}$

સપાટી CFEB પરનું દબાણ

$$P_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1 cos\theta}{A_1 cos\theta} = \frac{F_1}{A_1}$$

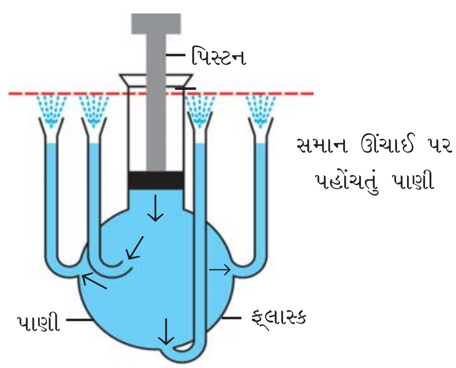
અને સપાટી ADFC પરનું દબાણ

$$P_3 = \frac{F_3}{A_3} = \frac{F_1 cos\theta}{A_1 cos\theta} = \frac{F_1}{A_1}$$

આમ, $P_1 = P_2 = P_3$

વળી, θ ખૂણો યાદચ્છિક હોવાથી આ પરિણામ કોઈ પણ સપાટી માટે સાચું છે. આમ, પાસ્કલનો નિયમ સાબિત થયો.

પાસ્કલના નિયમની એક સીધી અસર એ છે કે, "બંધ પાત્રમાં ભરેલા અદબનીય તરલ પરના દબાણમાં કરેલો ફેરફાર, તરલના પ્રત્યેક ભાગમાં અને પાત્રની દીવાલ પર એક સરખી રીતે પ્રસરે છે." આ દબાણ પાત્રની દીવાલને લંબ રૂપે હોય છે. આ વિધાનને પાસ્કલના તરલ-દબાણના પ્રસરણનો નિયમ કહે છે.

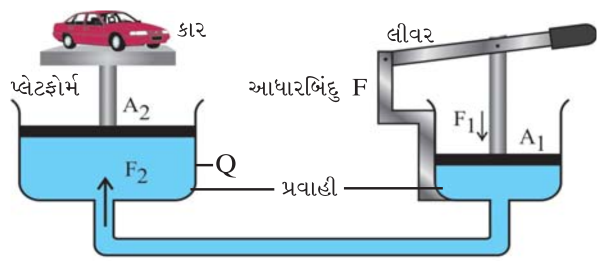


તરલમાં દબાણનું પ્રસરણ

આકૃતિ 5.3

આ પરિણામનું નિદર્શન એક કાચના ફ્લાસ્કની મદદથી કરી શકાય. આ ફ્લાસ્કમાંથી બધી બાજુએ નાની નળીઓ બહાર નીકળે છે (આકૃતિ 5.3). આ પાત્રમાં થોડું રંગીન પાણી ભરો. આ ફ્લાસ્કના ઉપરના ભાગમાં જોડાયેલા પિસ્ટનને થોડો નીચે તરફ ધકેલો. પાત્ર સાથે જોડાયેલ દરેક નળીમાં પાણી સમાન ઊંચાઈએ ઉપર ચઢશે. આ દર્શાવે છે કે પ્રવાહીના કોઈ પણ ભાગમાં દબાણમાં કરેલો ફેરફાર પ્રવાહીમાં દરેક દિશામાં સમાન રીતે પ્રસરે છે.

હાઈડ્રોલિક લિફ્ટ : હાઈડ્રોલિક લિફ્ટ પાસ્કલના નિયમ પર કાર્ય કરે છે. તે A_1 અને A_2, ($A_1 << A_2$) જેટલા આડછેદના ક્ષેત્રફળ ધરાવતા બે નળાકારનું બનેલું સાધન છે (આકૃતિ 5.4). આ બે નળાકારમાં ઘર્ષણરહિત રીતે સરકી શકે તેવા હવાચુસ્ત પિસ્ટન પર ફીટ કરેલા છે. આ સાધનમાં આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પ્રવાહી ભરવામાં આવે છે.



હાઈડ્રોલિક જેક

આકૃતિ 5.4

ધારો કે A_1 જેટલો આડછેદ ધરાવતા પિસ્ટન પર F_1 જેટલું બળ લગાડવામાં આવે છે. તેને કારણે આ આડછેદ પર દબાણ.

$$P = \frac{F_1}{A_1}$$

આ દબાણ બંધ પાત્રમાંના પ્રવાહીમાં સમાન રીતે પ્રસરિત થતું હોવાથી મોટા આડછેદવાળા પિસ્ટન પર પણ આટલું જ દબાણ લાગશે. આમ, બીજા પિસ્ટન પરનું દબાણ, આમ,

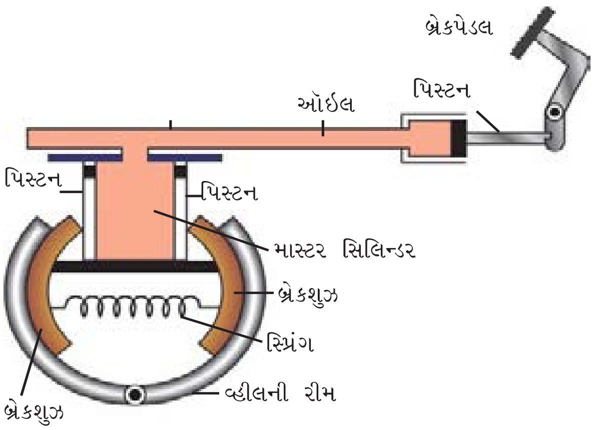
$$P = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\therefore \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1}$$

$$\therefore F_2 = F_1\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

અત્રે, $A_1 << A_2$ હોવાથી $F_1 << F_2$. આમ, ઓછા પ્રયત્નબળ (F_1) વડે ભારે પદાર્થને ઊંચકી શકાય છે.

હાઈડ્રોલિક બ્રેક : મોટા ભાગનાં ઑટોમોબાઇલ્સ આ નિયમ પર કામ કરતી હાઈડ્રોલિક બ્રેક ધરાવે છે. જ્યારે વાહનચાલક બ્રેક-પેડલ પર થોડું બળ લગાડે છે. ત્યારે માસ્ટર પિસ્ટન એ માસ્ટર સિલિન્ડરમાં ધકેલાય છે. આથી ઉદ્ભવતું દબાણ બ્રેકઑઈલ મારફતે ઘટ્યા વિના મોટા ક્ષેત્રફળવાળા પિસ્ટન પર લાગુ પડે છે. આથી પિસ્ટન પર મોટું બળ લાગે છે. જે બ્રેકશુઝને ધકેલીને બ્રેક લાઈનરના સંપર્કમાં લાગે છે. આમ, પેડલ પર લગાડેલા નાના બળ વડે પૈડાં પર મોટું અવરોધક બળ લાગે છે.



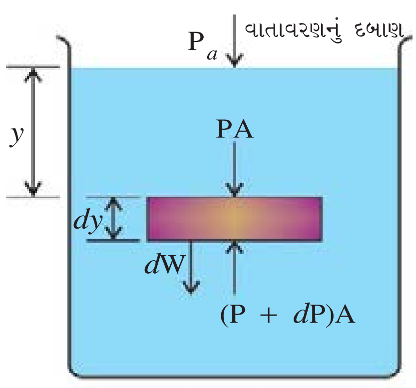
હાઇડ્રોલિક બ્રેક
આકૃતિ 5.5

ડોર ક્લોઝર અને વાહનોના શૉક ઍબ્સોર્બર પણ પાસ્કલના નિયમ પર કાર્ય કરે છે.

(આકૃતિ 5.5 માત્ર જાણકારી માટે છે.)

5.4 તરલસ્તંભને કારણે ઉત્પન્ન થતું દબાણ (Pressure Due to Fluid Column)

ધારો કે કોઈ પાત્રમાં ρ ઘનતાવાળું પ્રવાહી સ્થિત સંતુલનમાં છે. આ પ્રવાહીમાં y ઊંડાઈએ રહેલા dy જાડાઈનો અને A જેટલા આડછેદવાળો નળાકાર તરલ-ખંડ વિચારો. આકૃતિ 5.6માં દર્શાવ્યા મુજબ આ તરલ-ખંડનું કદ Ady છે, અને તેના દળ અને વજન અનુક્રમે $\rho \cdot A \cdot dy$ અને $dW = \rho g \cdot Ady$ થશે.



તરલસ્તંભ વડે ઉદ્‌ભવતું દબાણ
આકૃતિ 5.6

ધારો કે આકૃતિ 5.6માં દર્શાવ્યા મુજબ આ નળાકાર ખંડની ઉપરની અને નીચેની સપાટી પર દબાણ અનુક્રમે P અને $P + dp$ છે. તેથી ઉપરની સપાટી પર અધોદિશામાં લાગતું બળ PA થશે અને નીચેની સપાટી પર ઊર્ધ્વદિશામાં લાગતું બળ $(P + dp)A$ થશે.

$$PA + dW = (P + dp)A$$

$$\therefore\ PA + \rho g A dy = PA + A dp$$

$$\therefore\ \rho g A dy = A dp.$$

$$\therefore\ \frac{dp}{dy} = \rho g \qquad (5.4.1)$$

આ સમીકરણ દર્શાવે છે કે દબાણમાં ઊંડાઈ (કે ઊંચાઈ) સાથે થતો ફેરફાર ભૌતિક રાશિ ρg પર આધારિત છે. ρgને વજનઘનતા (એકમકદવાળા પદાર્થનું વજન) કહે છે. મોટા ભાગના પ્રવાહીઓ અદબનીય હોવાથી ρg ઓછી ઊંચાઈના તરલસ્તંભ માટે અચળ રહે છે. હવા જેવા તરલ માટે ઘનતા ρ પૃથ્વીની ઊંચાઈ, તાપમાન વગેરે પર આધારિત છે. તેથી હવા માટે વજન ઘનતાનું મૂલ્ય અચળ ગણી ન શકાય.

આકૃતિ 5.6માં દર્શાવ્યા મુજબ પાત્ર ખુલ્લું હોવાથી પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પર વાતાવરણનું દબાણ હોય છે. તેથી $y = 0$ માટે $P = P_a$ અને $y = h$ ઊંડાઈએ દબાણ P સમીકરણ 5.4.1નું સંકલન કરીને મેળવી શકાય.

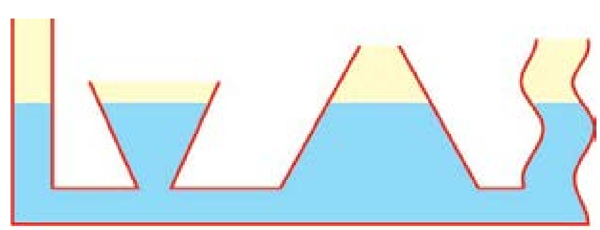
$$\int_{P_a}^{P} dP = \int_{0}^{h} \rho g dy$$

$$\therefore\ P - P_a = \rho g h$$

$$\therefore\ P = P_a + \rho g h \qquad (5.4.2)$$

અહીં, $P = P_a + \rho g h$ એ નિરપેક્ષ દબાણ છે, જ્યારે $P - P_a$ ને તે બિન્દુએ ગેજદબાણ અથવા હાઇડ્રોસ્ટેટિક દબાણ કહેવાય છે.

પ્રવાહીમાં કોઈ પણ બિન્દુએ દબાણ પાત્રના આકાર કે ક્ષેત્રફળ પર આધારિત નથી. આ હકીકતને **હાઇડ્રોસ્ટેટિક પેરાડોક્સ** કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 5.7) જુદા-જુદા આકાર ધરાવતાં પણ એકબીજાં સાથે જોડાયેલાં પાત્રોમાં જ્યારે પ્રવાહી ભરવામાં આવે છે, ત્યારે દરેક પાત્રમાં પ્રવાહીની ઊંચાઈ સમાન હોય છે.



હાઇડ્રોસ્ટેટિક પેરોડોક્સ
આકૃતિ 5.7

સમીકરણ (5.4.2) સૂચવે છે કે જો બે બિંદુઓ સ્થિર પ્રવાહીમાં એક જ સમક્ષિતિજ સમતલમાં આવેલાં હોય, તો આ બંને બિંદુ આગળ દબાણ સમાન હોય છે.

5.5 આર્કિમિડિઝનો સિદ્ધાંત : "જ્યારે કોઈ પદાર્થને પ્રવાહીમાં આંશિક કે સંપૂર્ણપણે ડુબાડવામાં આવે, ત્યારે તેના પર લાગતું ઉત્પ્લાવક બળ તેણે વિસ્થાપિત કરેલ પ્રવાહીના વજન જેટલું હોય છે અને તે વિસ્થાપિત કરેલા પ્રવાહીના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર ઊર્ધ્વ દિશામાં લાગે છે."

જો પ્રવાહીની ઘનતા ρ_f અને ડુબાડેલ પદાર્થનું કદ V હોય, તો ઉત્પ્લાવક બળ $F_b = \rho_f V g$ થાય.

જે પદાર્થના વજનમાં થતા ઘટાડા જેટલું છે.

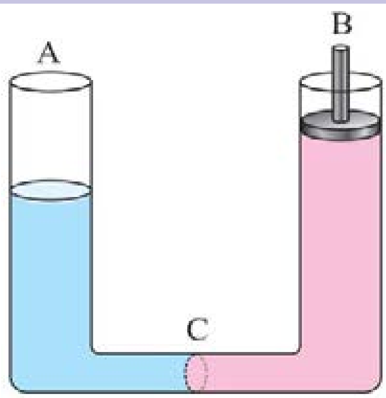
ફ્લોટેશનનો નિયમ : જ્યારે પદાર્થનું વજન (W) એ તરતા પદાર્થના આંશિક ડૂબેલા ભાગ દ્વારા વિસ્થાપિત પ્રવાહીના વજન જેટલું હોય, ત્યારે પદાર્થ પ્રવાહીની સપાટી પર તરે છે.

(i) જો $W > F_b$ હોય, તો પદાર્થ પ્રવાહીમાં ડૂબે છે.

(ii) જો $W = F_b$ હોય, તો પદાર્થ પ્રવાહીમાં કોઈ પણ ઊંડાઈએ સમતોલ રહે છે.

(iii) જો $W < F_b$ હોય, તો પદાર્થ પ્રવાહીની સપાટી પર તરે છે, અને તે પદાર્થ અંશતઃ ડુબેલો રહે છે.

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 5.8માં દર્શાવ્યા મુજબ બે નળાકાર પાત્રો A અને B એકબીજાં સાથે જોડાયેલાં છે. પાત્ર Aમાં 2 mની ઊંચાઈ સુધી પાણી ભરેલ છે. પાત્ર Bમાં કેરોસીન ભરેલું છે. આ બે પ્રવાહી હવાચુસ્ત તકતી C દ્વારા જુદા પાડેલાં છે. જો કેરોસીનના સ્તંભની ઊંચાઈ 2 m રાખવી હોય, તો પાત્ર Bમાં રહેલા પિસ્ટન પર કેટલું દળ મૂકવું પડે. આ દળ વડે તકતી C પર લાગતું બળ પણ શોધો. પિસ્ટનનું ક્ષેત્રફળ = 100 cm^2, તકતીનું ક્ષેત્રફળ 10 cm^2 પાણીની ઘનતા 10^3 kg m^{-3} અને કેરોસીનની વિશિષ્ટ ઘનતા = 0.8 છે.



આકૃતિ 5.8

ઉકેલ : પિસ્ટનનું ક્ષેત્રફળ $A_1 = 100\ cm^2 = 10^{-2}\ m^2$

તકતીનું ક્ષેત્રફળ $A_2 = 10\ cm^2 = 10^{-3}\ m^2$

પાણીની ઘનતા $\rho_\omega = 10^3$ kg m^{-3}

હવે $\dfrac{\text{કેરોસીનની ઘનતા}}{\text{પાણીની ઘનતા}} = 0.8$

$\therefore$ કેરોસીનની ઘનતા $\rho_k = 0.8 \times$ પાણીની ઘનતા $= 0.8 \times 10^3 = 800$ kg m^{-3}

કેરોસીનની ઊંચાઈ 2 m છે.

પાણીના સ્તંભનું દબાણ $= \dfrac{mg}{A_1}$ + કેરોસીન સ્તંભનું દબાણ

$$\therefore h\rho_\omega g = h\rho_k g + \frac{mg}{A_1}$$

$$\therefore 2 \times 10^3 = 2 \times 800 + \frac{m}{10^{-2}}$$

$$\therefore 2000 - 1600 = \frac{m}{10^{-2}}$$

$$\therefore 400 \times 10^{-2} = m$$

$$\therefore m = 4 \text{ kg}$$

હવે દળ m દ્વારા ઉત્પન્ન થતું દબાણ કોઈ ફેરફાર વિના તકતી C પર પણ લાગે છે, તેથી

4 kg દળને કારણે દબાણ $= \dfrac{\text{તકતી C પર બળ}}{\text{તકતી Cનું ક્ષેત્રફળ}}$

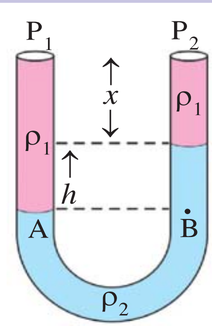
$$\therefore \frac{mg}{A_1} = \frac{F_C}{A_2}$$

$$\therefore F_C = mg\frac{A_2}{A_1}$$

$$= \frac{4 \times 9.8 \times 10^{-3}}{10^{-2}}$$

$$= 3.92 \text{ N}$$

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 5.9માં દર્શાવ્યા મુજબ મેનોમીટરના નીચેના ભાગમાં ρ_2 ઘનતાવાળું તરલ અને ઉપરના ભાગમાં ρ_1 ઘનતાવાળું તરલ ભરેલું છે. મેનોમીટરના બે ભુજની ટોચ પરના દબાણ P_1 અને P_2 હોય તો, દબાણનો તફાવત $P_1 - P_2$ ગણો.



આકૃતિ 5.9

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ તળીયેથી સમાન ઊંચાઈ ધરાવતાં બે બિંદુઓ A અને B વિચારો.

આ બિંદુઓ માટે,

$P_A = P_B$

$\therefore P_1 + (h + x)\rho_1 g = x\rho_1 g + h\rho_2 g + P_2$

$\therefore P_1 - P_2 = x\rho_1 g + h\rho_2 g - h\rho_1 g - x\rho_1 g$

$\therefore P_1 - P_2 = (\rho_2 - \rho_1)gh$

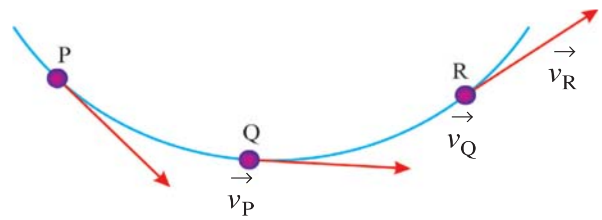
5.6 તરલ ડાઈનેમિક્સ

કણની ગતિનો અભ્યાસ કરતી વખતે આપણે કોઈ એક જ કણની ગતિ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરવાનું હતું, તેથી ખાસ મુશ્કેલી પડતી ન હતી. પરંતુ તરલની ગતિમાં તો તરલના 'જથ્થાબંધ' કણો એકસાથે ગતિ કરતાં હોય, તો તે દરેકની ગતિ પર એકસાથે ધ્યાન કેવી રીતે આપી શકાય ? જે. એલ. લાગ્રાન્જે કણના ગતિવિજ્ઞાનના ખ્યાલોને વ્યાપક બનાવી તરલના દરેક કણ સાથે કેવી રીતે કામ પાર પાડવું તે સમજાવ્યું છે. જોકે અત્યારે આપણે આ અભિગમની ચિંતા કરીશું નહિ. વિજ્ઞાની ઑઈલરે વિકસાવેલો બીજો અભિગમ સગવડભર્યો છે. આ અભિગમમાં આપણે તરલના દરેક કણની ચિંતા કરતાં નથી, તેને બદલે તરલમાં દરેક બિંદુએ દરેક ક્ષણે તરલની ઘનતા, દબાણ અને વેગનો વિચાર કરવાનો હોય છે. આમ છતાં, તરલના કણોને સર્વથા ભૂલી જવાનું તો પોસાય નહિ, કારણ કે છેવટે તો તરલની ગતિ તેના કણોની ગતિને જ આભારી છે.

અહીં, આપણે તરલની ગતિના અભ્યાસમાં ઘણી આદર્શ અને સરળ પરિસ્થિતિઓનો જ વિચાર કરીશું. આ માટે સૌપ્રથમ તરલ વહનની કેટલીક લાક્ષણિકતાઓ જાણી લઈએ.

તરલ વહનની લાક્ષણિકતાઓ (Characteristics of Fluid Flow) :

(1) સ્થાયી વહન (Steady flow) : જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલનો વેગ સમય સાથે અફર (અચળ) રહેતો હોય, તો તેવા વહનને સ્થાયી વહન કહે છે. આનો અર્થ એવો થયો કે આવા વહનમાં કોઈ એક આપેલા બિંદુ પાસેથી પસાર થતા તરલ કણોનો વેગ એકસરખો જ રહે છે. આ બાબત સમજવા માટે આકૃતિ 5.10 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે નમૂના તરીકે ત્રણ બિંદુઓ P, Q અને R ધ્યાનમાં લો. આ બિંદુઓ પરથી પસાર થતા દરેક કણના વેગ અનુક્રમે $\vec{v}_P$, $\vec{v}_Q$ અને $\vec{v}_R$ છે. વળી, આ વેગો સમય સાથે અચળ રહે છે. યાદ રાખો કે સ્થાયી વહનમાં જુદાં-જુદાં બિંદુઓ પરથી પસાર થતા કણના વેગ એકસરખા હોવા જરૂરી નથી, પરંતુ જે-તે બિંદુ પરથી પસાર થતા કણોના વેગ સમય સાથે બદલાતા નથી. એટલે કે $\vec{v}_P = \vec{v}_Q = \vec{v}_R$ હોવું જરૂરી નથી. પરંતુ $\vec{v}_P$, $\vec{v}_Q$ અને $\vec{v}_R$ સમય સાથે અચળ રહે તે જરૂરી છે. બહુ જ ઓછા વેગથી ગતિ કરતા તરલની ગતિને સ્થાયી વહન કહી શકાય. જેમકે ખૂબ ધીમે વહેતું ઝરણું.



સ્થાયી વહનની લાક્ષણિકતાઓ

આકૃતિ 5.10

(2) અસ્થાયી વહન (Unsteady flow) : જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલનો વેગ સમય સાથે બદલાતો રહેતો હોય, તો તેવા વહનને અસ્થાયી વહન કહે છે. જેમકે ભરતી અને ઓટ વખતે દરિયાના પાણીની ગતિ.

(3) પ્રક્ષુબ્ધ વહન (Turbulent flow) : જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલના વેગમાં સમય સાથે અનિયમિત તેમજ ઝડપી ફેરફાર થતો હોય, તો તેવા વહનને પ્રક્ષુબ્ધ વહન કહે છે. આવા વહનમાં એક બિંદુએથી બીજા બિંદુએ જતાં કણના વેગમાં અનિયમિત અને ઝડપી ફેરફાર થતો હોય છે. જેમકે ધોધ રૂપે પડતા પાણીની ગતિ, કિનારા પરના ખડકો સાથે અફળાતાં દરિયાનાં મોજામાંના પાણીની ગતિ.

(4) અચક્રીય વહન (Irrotational flow) : તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે જો તરલના અંશને (તરલના નાના ભાગને) તે બિંદુને અનુલક્ષીને કોઈ પરિણામી કોણીય વેગ ન હોય, તો તરલનું વહન અચક્રીય વહન કહેવાય છે.

વહેણમાં નાના હળવા ચક્રની ગતિ

આકૃતિ 5.11

જો તરલ વહન અચક્રીય હોય, તો આકૃતિ 5.11માં દર્શાવ્યા મુજબ વહેણમાં એક નાનું હળવું પાંખિયાંવાળું ચક્ર મૂકીએ, તો તે ચક્રીય ગતિ કર્યા સિવાય ફક્ત રેખીય ગતિ જ કરશે.

(5) ચક્રીય વહન (Rotational–flow) : જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલના નાના અંશને તે બિંદુને અનુલક્ષીને કંઈક ચોખ્ખો કોણીય વેગ હોય, તો વહન ચક્રીય કહેવાય છે. આવા વહનમાં મૂકેલ પાંખિયાંવાળું ચક્ર ગોળ-ગોળ ફરતું-ફરતું રેખીય ગતિ કરે છે. ચક્રીય વહન વમળયુક્ત હોય છે. જેમકે ઘૂમરીવાળા પાણીના પ્રવાહો, એગ્ઝોસ્ટ ફેનમાંથી બહાર આવતી હવાની ગતિ.

(6) અદબનીય વહન (Incompressible flow) : જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે દરેક ક્ષણ તરલની ઘનતા અચળ રહેતી હોય, તો તેવા વહનને અદબનીય

વહન કહે છે. આમ, અદબનીય વહનમાં સમય કે સ્થાન સાથે તરલની ઘનતામાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી. સામાન્ય રીતે પ્રવાહીરૂપ તરલ અદબનીય વહન કરે છે. વાયુરૂપ તરલ માટે અમુક પરિસ્થિતિમાં ઘનતામાં થતા ફેરફારો બહુ અગત્યના હોતા નથી. આવા કિસ્સાઓમાં વાયુરૂપ તરલ અદબનીય વહન કરે છે તેમ કહી શકાય. જેમકે ધ્વનિની ઝડપ કરતાં ઘણી ઓછી ઝડપે ઊડતા વિમાનની પાંખોની સાપેક્ષે હવાની ગતિ લગભગ અદબનીય ગણી શકાય.

(7) દબનીય વહન (Compressible flow) : જો તરલ વહનમાં સ્થાન અને સમય સાથે તરલની ઘનતા બદલાતી રહેતી હોય, તો તેવા વહનને દબનીય વહન કહે છે.

(8) અશ્યાન વહન (Non-viscous flow) : જે તરલ માટે શ્યાનતા-ગુણાંક (co-efficient of viscosity) નું મૂલ્ય ઓછું હોય, તેવા તરલના વહનને અશ્યાન વહન કહે છે. સામાન્ય શબ્દોમાં કહીએ તો સહેલાઈથી વહેતા વહનને અશ્યાન વહન કહે છે. જેમકે સામાન્ય સ્થિતિમાં પાણીનું વહન.

(9) શ્યાન વહન (Viscous flow) : જે તરલ માટે શ્યાનતા-ગુણાંકનું મૂલ્ય વધારે હોય, તેવા તરલના વહનને શ્યાન વહન કહે છે. સામાન્ય શબ્દોમાં કહીએ તો સહેલાઈથી ન વહી શકતા તરલના વહનને શ્યાન વહન કહે છે. જેમકે દિવેલનું, મધનું વહન.

અહીં પ્રારંભમાં, આપણે સ્થાયી, અચક્રીય, અદબનીય અને અશ્યાન વાહનનો જ વિચાર કરીશું. જોકે વાસ્તવિક પરિસ્થિતિ કરતાં આપણી ધારણા વધારે પડતી આદર્શ છે. શું આપણી આ ધારણા પ્રમાણેનું તરલ પ્રવાહી મળે ખરું ? વિચારો.

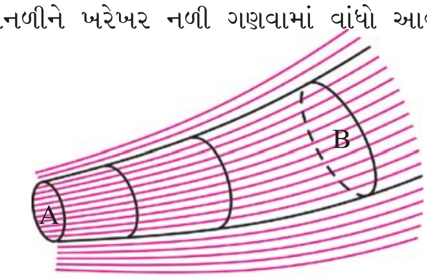
5.6.1 ધારારેખાઓ (Streamlines), વહનનળી (Tube of flow) :

તરણકણના ગતિમાર્ગને પ્રવાહરેખા (line of flow) કહેવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે પોતાના ગતિમાર્ગ પર કણના વેગનું મૂલ્ય અને દિશા બદલાતી જતી હોય છે, અને એક જ બિંદુ પાસેથી પસાર થતા બધા કણો એક જ માર્ગે ગતિ કરતા ન પણ હોય. આમ છતાં, સ્થાયી વહનમાં પરિસ્થિતિ રસપ્રદ છે.

સ્થાયી વહનમાં, દરેક બિંદુ પાસેથી પસાર થતા કણનો વેગ સમય સાથે અફર હોય છે. આકૃતિ 5.10 માં, સ્થાયી વહનમાં, ધારો કે P પાસેથી પસાર થતા કણનો વેગ $\vec{v}_P$ છે. તે સમય સાથે બદલાતો નથી. આમ, P પાસેથી પસાર થતા દરેક કણનો વેગ $\vec{v}_P$ છે અને આ દરેક કણ P પાસેથી એકસરખી દિશામાં જ આગળ વધે છે. જ્યારે P પાસેથી પસાર થતો દરેક કણ Q પાસે જાય છે, ત્યાં તેનો વેગ $\vec{v}_Q$ પણ સમય સાથે અફર છે અને ત્યાંથી તે આગળ વધીને R પાસે જાય છે. ત્યાં પણ તેનો વેગ $\vec{v}_R$ સમય સાથે અફર હોય છે. આમ, P પાસેથી પસાર થતા દરેક કણનો ગતિમાર્ગ PQR બને છે. સમય જતાં આ માર્ગ બદલાતો નથી. સ્થાયી વહનમાંના આવા સ્થિર ગતિમાર્ગને ધારારેખા કહે છે. અહીં સ્પષ્ટ છે કે સ્થાયી વહનમાં પ્રવાહ રેખા અને ધારારેખા એકાકાર બની જાય છે. આ ચર્ચા પરથી ધારારેખાની વ્યાખ્યા બીજી રીતે પણ આપી શકાય. જે વક્ર પરના દરેક બિંદુ પાસેનો સ્પર્શક તે બિંદુ પાસેથી પસાર થતા કણના વેગની દિશામાં હોય તેવા વક્રને ધારારેખા કહે છે. જે વહન માટે આવી ધારારેખાઓ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે, તેવા વહનને ધારારેખી વહન (Streamline flow) પણ કહેવાય છે. અસ્થાયી વહનમાં પ્રવાહરેખાઓ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય પણ ધારારેખાઓ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય નહિ.

સ્થાયી વહનમાં ધારારેખાઓ એકબીજીને છેદી શકે નહિ. જો તેઓ છેદે તો છેદનબિંદુ પાસેના બે સ્પર્શકોમાંના કોઈ પણ સ્પર્શકની દિશામાં કણ ગતિ કરે, જે સ્થાયી વહનમાં શક્ય નથી..

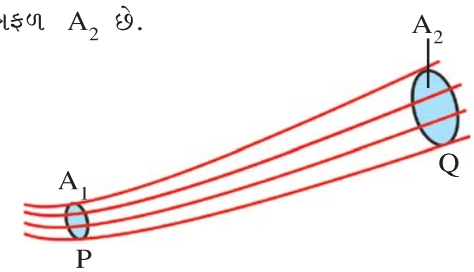
વહનનળી (પ્રવાહનળી) (Tube of flow) : સૈદ્ધાંતિક રીતે દરેક બિંદુમાંથી પસાર થતી ધારારેખા દોરી શકાય. આકૃતિ 5.12માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ પૃષ્ઠની પરિસીમામાંથી પસાર થતી ધારારેખાઓનું બંડલ વિચારીએ, તો આ બંડલ વડે ઘેરાતા નળી જેવા ભાગને વહનનળી કહે છે. વહનનળીની દીવાલ ધારારેખાઓની બનેલી હોય છે. સ્થાયી વહનમાં બે ધારારેખાઓ છેદી શકતી ન હોવાથી કોઈ તરલ કણ વહન નળીની દીવાલમાંથી પસાર થઈ શકતો નથી અને વહનનળીને ખરેખર નળી ગણવામાં વાંધો આવતો નથી.



વહનનળી
આકૃતિ 5.12

5.7 સાતત્ય-સમીકરણ (Equation of Continuity)

આકૃતિ 5.13માં દર્શાવ્યા મુજબ એક પ્રવાહનળી વિચારો. P બિંદુ આગળ તરલનો વેગ v_1 છે. P આગળ પ્રવાહનળી આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A_1 છે, તથા બિંદુ Q, આગળ વેગ v_2 છે. Q આગળ પ્રવાહનળીના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A_2 છે.



આકૃતિ 5.13

આમ, P આગળના આડછેદમાંથી પસાર થતું તરલ એકમ સમયમાં v_1 જેટલું અંતર કાપશે. તેથી P આગળના

આડછેદમાંથી પસાર થતા તરલનું કદ A_1v_1 થશે. જો અદબનીય તરલની ઘનતા ρ હોય તો P આગળના આડછેદમાંથી એકમસમયમાં પસાર થતું તરલનું દળ ρA_1v_1.

કોઈ આડછેદમાંથી એકમસમયમાં પસાર થતા તરલનું દળ દળ-ફલક્સ કહેવાય છે. આમ,

P આગળ દળ ફલક્સ $= \rho A_1v_1$. (5.7.1)

આ જ રીતે Q આગળ દળ ફલક્સ $= \rho A_2v_2$ (5.7.2)

તરલ પ્રવાહનળીની દીવાલમાંથી પસાર થઈ શકતું નથી વળી તરલનો નાશ કે નવા તરલનું સર્જન પ્રવાહનળીમાં શક્ય નથી. તેથી P અને Q આગળના આડછેદ માટે દળ ફલક્સ સમાન હોવાં જોઈએ. આમ, સમીકરણ 5.7.1 અને 5.7.2 પરથી,

$$\rho A_1v_1 = \rho A_2v_2$$

$$\therefore A_1v_1 = A_2v_2 \quad (5.7.3)$$

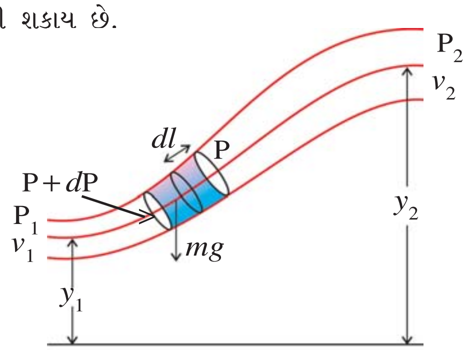
અથવા પ્રવાહનળીના કોઈ પણ આડછેદ માટે

$$Av = \text{અચળ} \quad (5.7.4)$$

સમીકરણ 5.7.3 અથવા 5.7.4 સાતત્યનું સમીકરણ કહેવાય છે. કોઈ પણ આડછેદ પાસેના વેગ અને ક્ષેત્રફળના ગુણાકારને કદ ફલક્સ (volume–flux) કહે છે. સમીકરણ 5.7.4 દર્શાવે છે કે વહનનળીના સાંકડા વિભાગમાં ધારા રેખાઓ ગીચોગીચ થઈ જાય છે. જે દર્શાવે છે કે જ્યાં ધારા રેખાઓ ગીચ હોય ત્યાં વેગ વધારે હોય છે. પહોળા વિભાગમાં આથી ઊલટું હોય છે. આમ, ગીચ ધારારેખાઓ વધારે વેગનો અને છૂટ્ટીછુટ્ટી ધારાઓ ઓછા વેગનો નિર્દેશ કરે છે.

5.8 બર્નુલીનું સમીકરણ અને તેના ઉપયોગો (Bernoulli's Equations and its Applications)

બર્નુલીનું સમીકરણ તરલ-મિકેનિક્સમાં પાયાનું સમીકરણ છે. આ સમીકરણ તરલ-મિકેનિક્સમાં કોઈ નવો સિદ્ધાંત રજૂ નથી કરતું. આ સમીકરણ કાર્ય-ઊર્જાપ્રમેયથી મેળવી શકાય છે.



આકૃતિ 5.14

આપણે અહીં ધારારેખી, સ્થાયી, અચક્રીય અદબનીય અને અશ્યાન પ્રવાહ ધ્યાનમાં લઈશું. આ પ્રવાહ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ વહનનળીમાંથી પસાર થઈ રહ્યો છે. A ક્ષેત્રફળ અને dl લંબાઈનો નાનો તરલખંડ વિચારો. આ તરલખંડના મધ્યમાંથી પસાર થતી મધ્યમાન ધારારેખા સંદર્ભસપાટીને સાપેક્ષ y_1 અને y_2 ઊંચાઈએથી પસાર થાય છે. y_1 ઊંચાઈએ દબાણ P_1 અને તરલનો વેગ v_1 જ્યારે y_2 ઊંચાઈએ દબાણ P_2 અને વેગ v_2 છે. આ તરલખંડ પર બે બળો લાગે છે : (1) દબાણના તફાવતને કારણે લાગતું બળ (AdP) અને (2) ગુરુત્વાકર્ષણ બળ mg ધારો કે આ તરલ-ખંડ dl જેટલું અંતર કાપે છે. આ દરમિયાન પ્રથમ બળ દ્વારા થતું કાર્ય $Adl\ dP$ છે અને ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વિરુદ્ધ થતું કાર્ય (સ્થિતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર)–$mgdy$ છે. જ્યાં dy તરલખંડની ઊંચાઈમાં થતો ફેરફાર છે. જો શરૂઆતમાં તેની ગતિ-ઊર્જા $\frac{1}{2}mv^2$ હોય, તો આ સ્થાનાંતર dy દરમિયાન ગતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર $d(\frac{1}{2}mv^2) = mvdv$ થાય.

કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય અનુસાર,

$$mvdv = AdldP - mg\ dy \quad (5.8.1)$$

Adl તરલખંડનું કદ હોવાથી સમીકરણ 5.8.1 નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$\frac{m}{Adl}vdv = dP - \frac{m}{Adl}gdy \quad (5.8.2)$$

અહીં m/Adl તરલની ઘનતા છે અને તરલ અદબનીય હોવાથી તે અચળ છે. આમ, સમીકરણ 5.8.2 નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\rho vdv = -dp - \rho gdy$$

$$\therefore \rho\int_{v_1}^{v_2} vdv = -\int_{P_1}^{P_2} dP - \rho g\int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$\therefore \rho\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = -[P]_{P_1}^{P_2} - \rho g[y]_{y_1}^{y_2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = -[P_2 - P_1] - \rho g(y_2 - y_1)$$

$$\therefore P_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (5.8.3)$$

$$\therefore P + \rho gy + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{અચળ} \quad (5.8.4)$$

સમીકરણ 5.8.3 અથવા 5.8.4 બર્નુલીના સમીકરણ તરીકે ઓળખાય છે. અત્રે નોંધવું જરૂરી છે. આ સમીકરણના બધાં પદો એક જ ધારારેખા પર ગણવાં જોઈએ. જો વહન અચક્રીય હોય તો એવું સાબિત કરી શકાય કે સમીકરણ 5.8.4માં આવતો અચળાંક બધી જ ધારારેખાઓ માટે સમાન છે.

સમીકરણ 5.8.4ને ρg વડે ભાગતાં

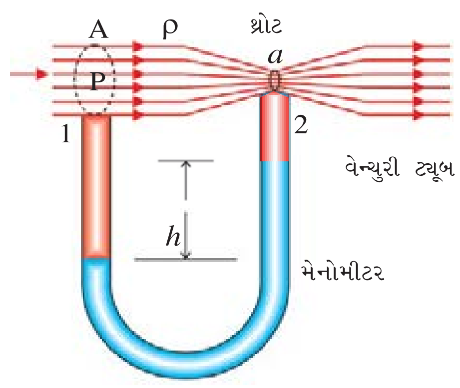
$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + y = \text{અચળ} \qquad (5.8.5)$$

આ સમીકરણ બર્નુલીના સમીકરણનું વૈકલ્પિક સ્વરૂપ છે. આ સમીકરણમાં પ્રથમ પદ પ્રેસરહેડ, બીજું પદ વેલોસિટી હેડ અને ત્રીજું પદ એલિવેશન હેડ તરીકે ઓળખાય છે.

બર્નુલીના સમીકરણના ઉપયોગો

(1) વેન્ચુરીમીટર : આ સાધનનો ઉપયોગ તરલનો વેગ જાણવા માટે થાય છે. વેન્ચુરીમીટરની રચના આકૃતિ 5.15માં દર્શાવી છે. વેન્ચુરીમીટરમાં ખાસ પ્રકારની વેન્ચુરી-ટ્યુબ સાથે મેનોમીટર જોડેલું છે. વેન્ચુરી ટ્યૂબનો સાંકડો ભાગ થ્રોટ તરીકે ઓળખાય છે.

પહોળા ભાગના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 'A' અને થ્રોટના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 'a' છે. પહોળા ભાગ આગળ તરલનો વેગ v_1 અને થ્રોટ પાસે તેનો વેગ v_2 છે. આ સ્થાનો પર દબાણ P_1 અને P_2 છે. મેનોમીટરમાં રહેલા પ્રવાહીની ઘનતા ρ_2 અને જેનો વેગ માપવાનો છે, તે તરલની ઘનતા ρ_1 છે.



વેન્ચુરીમીટર

આકૃતિ 5.15

બિન્દુ '1' અને '2' માટે બર્નુલીનું સમીકરણ વાપરતાં,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_1 g v_2^2 + \rho_1 g y_2$$

બિન્દુ '1' અને '2'ની સંદર્ભસપાટીથી ઊંચાઈ સરખી હોવાથી $y_1 = y_2$

$$\therefore\ P_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = P + \frac{1}{2}\rho_1 g v_2^2$$

$$\therefore\ P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho_1(v_2^2 - v_1^2) \qquad (5.8.6)$$

અહીં મેનોમીટર માટે $P_1 - P_2 = (\rho_2 - \rho_1)gh$ (ઉદાહરણ 2 જુઓ)

$P_1 - P_2$ની આ કિંમત સમીકરણ 5.8.6માં મૂકતાં,

$$(\rho_2 - \rho_1)\,gh = \frac{1}{2}\rho_1(v_2^2 - v_1^2) \qquad (5.8.7)$$

પણ, $Av_1 = av_2$ ($\because$ સાતત્ય સમીકરણ)

$$\therefore\ v_2 = \frac{Av_1}{a}$$

v_2ની કિંમત સમીકરણ 5.8.7માં મૂકતાં,

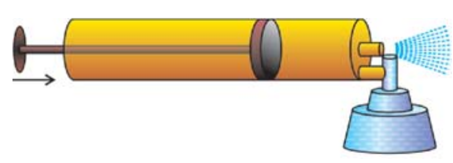
$$(\rho_2 - \rho_1)gh = \frac{1}{2}\rho_1\left(\frac{A^2}{a^2}\ v_1^2 - v_1^2\right)$$

$$\therefore\ v_1^2 = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)gh}{\rho_1} \cdot \frac{a^2}{A^2 - a^2}$$

$$\therefore\ v_1 = a\sqrt{\frac{2(\rho_2 - \rho_1)gh}{\rho_1(A^2 - a^2)}} \qquad (5.8.8)$$

કદ-ફ્લક્સ અથવા પ્રવાહદર શોધવા માટે $R = v_1 A$ અથવા $v_2 a$ શોધવું જોઈએ.

વાહનોના કાર્બ્યુરેટરમાં રહેલ વેન્ચુરી ચેનલમાંથી હવાનું વહન થાય છે. થ્રોટ પાસે દબાણ ઓછું હોવાથી બળતણ અંદર ખેંચાઈ આવે છે અને દહન માટે આવશ્યક પ્રમાણમાં હવા અને બળતણ પૂરાં પાડે છે.



સ્પ્રેપંપ

આકૃતિ 5.16

આકૃતિ 5.16માં દર્શાવેલ સ્પ્રેપંપમાં પણ આજ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ થાય છે. પિસ્ટનને ધક્કો મારતાં પંપના નાના કાણામાંથી વધુ ઝડપે હવા બહાર આવે છે. પરિણામે કાણા પાસે દબાણ ઓછું થાય છે. અને તેથી પ્રવાહી સાંકડી નળીમાંથી ઉપર તરફ ખેંચાઈ આવે છે અને હવા સાથે તેનો છંટકાવ થાય છે.

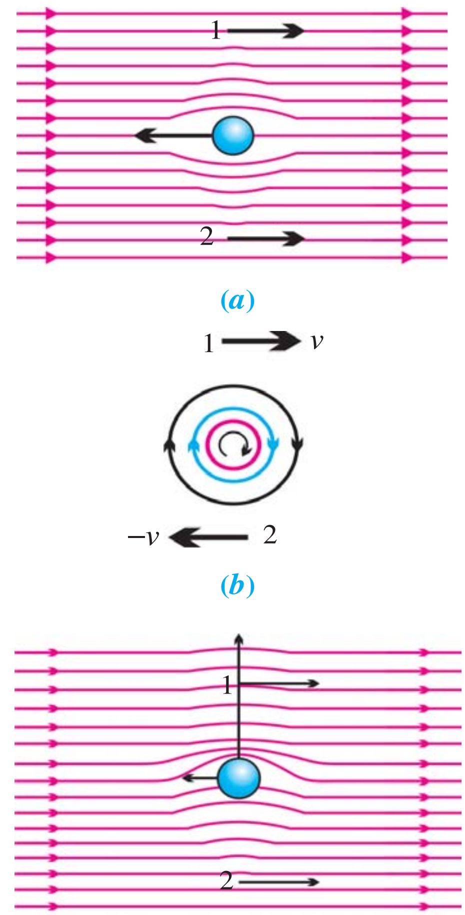
(2) ઊંડાઈ સાથે દબાણમાં થતો ફેરફાર : અગાઉ આપણે $P - P_a = h\rho g$ સમીકરણ મેળવ્યું છે. આ સમીકરણ બર્નુલીના સમીકરણની મદદથી પણ મેળવી શકાય. જો તરલ સ્થિર હોય તો $v_1 = v_2 = 0$, $P_2 = P_a$ (પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પરનું દબાણ, જુઓ આકૃતિ 5.6) જો ઊંચાઈનો તફાવત $y_2 - y_1 = h$ લેવામાં આવે, તો બર્નુલીના સમીકરણ પરથી $P_1 = P_a + \rho gh$.

(3) ડાયનેમિક લિફ્ટ (Dynamic Lift) અને સ્વિંગ-બૉલિંગ (Swing Bowling) : આપણે શીખી ગયાં કે જ્યારે કોઈ વસ્તુને તરલમાં મૂકવામાં આવે છે ત્યારે આર્કિમિડિઝના સિદ્ધાંત અનુસાર તેના પર ઉત્પ્લાવક બળ લાગે છે. આ બળને સ્ટેટીક લિફ્ટ (static lift) પણ કહે છે. હવે, જ્યારે વસ્તુ તરલની સાપેક્ષે ગતિ કરે ત્યારે એક બીજું બળ ઉદ્ભવે છે, જેને ડાયનેમિક લિફ્ટ કહે છે.

આ હકીકત સમજવા માટે આકૃતિ 5.17(*a*) ધ્યાનમાં લો. આકૃતિમાં હવામાં ગતિ કરતો એક દડો બતાવ્યો છે. આ દડાની સાપેક્ષમાં હવાની ધારારેખાઓ દડાને અનુલક્ષીને સંમિત છે. (કારણ કે દડો પોતે જ સંમિત છે.) બિંદુ 1 અને 2 પાસે હવાના વેગ એકસમાન છે. બર્નુલીના સમીકરણ અનુસાર 1 અને 2 પાસે દબાણ સરખાં થાય છે અને દડા પરનો ડાયનેમિક લિફ્ટ શૂન્ય બને છે.

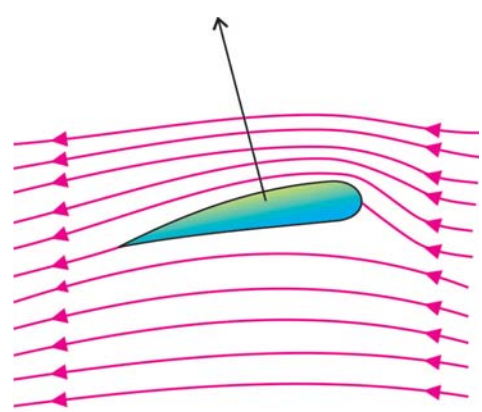
હવે, આકૃતિ 5.17(*b*)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે પુસ્તકના પાનને લંબ અને દડાના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને દડો સ્પિનગતિ કરે છે. દડો સંપૂર્ણ રીતે લીસો ન હોતાં તેની સાથે થોડી હવાને ઘસડે છે, જેને લીધે મળતી ધારારેખાઓ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.

આકૃતિ 5.17(*c*)માં દડો જ્યારે સ્પિનગતિ અને રેખીય ગતિ એમ બંને ગતિ કરે ત્યારે તેની આસપાસ હવાની ધારારેખાઓ કેવી હોય તે દર્શાવ્યું છે. અહીં બિંદુ 1 પાસે ગીચ થઈ જતી ધારારેખાઓ વધારે વેગ અને ઓછું દબાણ સૂચવે છે, જ્યારે 2 પાસે ઓછો વેગ અને વધારે દબાણ હોય છે. પરિણામે દડા પર ઊર્ધ્વ દિશામાં ધક્કો લાગે છે. એટલે કે દડાને ડાયનેમિક લિફ્ટ મળે છે. આમ, આ રીતે સ્પિન કરી ફેંકેલો દડો તેના ગતિ પથ પર ધારણા કરતાં ઊંચો રહી જાય છે. (બૉલરે દડો સાથે છેડછાડ કરવા કેમ લલચાય છે તે હવે તમને સમજાયું હશે.)



(*c*)
સ્પ્રેપંપ
આકૃતિ 5.17

હવે, જો પુસ્તકના પાનના સમતલમાં રહેલી અને દડાની રેખીય ગતિને લંબ એવી અક્ષની સાપેક્ષે દડાને સ્પિન કરતો ફેંકવામાં આવે, તો દડો ઑફ કે લેગ સ્ટમ્પ બાજુ વળે છે. ઝડપી બૉલિંગમાં સ્વિંગનું મુખ્ય કારણ આ છે.



ઑરોફૉઈલ
આકૃતિ 5.18

(4) ઍરોફૉઈલ : આકૃતિ 5.18માં દર્શાવ્યા મુજબના વિશિષ્ટ આકારના ઘન ટુકડાને ઍરોફૉઈલ કહે છે. તેના આ વિશિષ્ટ આકારના કારણે જ્યારે ઍરોફૉઈલ હવામાં સમક્ષિતિજ દિશામાં ગતિ કરતો હોય ત્યારે પણ ઊર્ધ્વ દિશામાં બળ લાગે છે. પરિણામે તે હવામાં તરી શકે છે.

વિમાનની પાંખનો આકાર (પાંખની લંબાઈને લંબ આડછેદનો આકાર) ઍરોફૉઈલ જેવો રાખવામાં આવે છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પાંખની આસપાસ હવાનું ધારારેખીય વહન થતું હોય છે. (જોકે વિમાનની પાંખ અને ગતિની દિશા વચ્ચેનો ખૂણો-angle of attack નાનો હોય ત્યારે જ ધારારેખી વહન શક્ય છે.) આકૃતિ 5.18માં પાંખની આસપાસની ધારારેખાઓ દર્શાવેલ છે. પાંખના ઉપરના ભાગની ગીચ ધારારેખાઓ વધારે વેગ અને ઓછું દબાણ દર્શાવે છે, જ્યારે પાંખની નીચેના ભાગની છૂટી ધારારેખાઓ ઓછો વેગ અને વધારે દબાણ દર્શાવે છે. દબાણના આ તફાવતના કારણે ઊર્ધ્વ દિશામાં બળ લાગે છે. આથી ગતિ કરતા વિમાન પરની ડાયનેમિક લિફ્ટને કારણે તે હવામાં તરી શકે છે.

ઉદાહરણ 3 : પાણીનું વહન કરતી નળીના એક છેડાનો વ્યાસ 2 cm અને બીજા છેડાનો વ્યાસ 3 cm છે. સાંકડા છેડા પાસે પાણીનો વેગ 2 ms^{-1} અને દબાણ 1.5×10^5 Nm^{-2} છે. જો નળીના પહોળા અને સાંકડા છેડા વચ્ચેનો ઊંચાઈનો તફાવત 2.5 m હોય, તો નળીના પહોળા છેડા પાસે પાણીનો વેગ અને દબાણ શોધો. (પાણીના ઘનતા 1×10^3 kg m^{-3} લો.) નળીનો સાંકડો છેડો વધુ ઊંચાઈએ લો.

ઉકેલ :

વહનનળીનો સાંકડો છેડો

$d_1 = 2$ cm

$\therefore r_1 = 1 \text{ cm} = 1 \times 10^{-2}$ m

$v_1 = 2$ ms^{-1}

$P_1 = 1.5 \times 10^5$ Nm^{-2}

વહનનળીનો પહોળો છેડો

$d_2 = 3$ cm

$\therefore r_2 = 1.5 \text{ cm} = 1.5 \times 10^{-2}$ m

$v_2 = ?$

$P_2 = ?$

$A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$\therefore v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$$

$$= \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} \cdot v_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot v_1$$

$$= \frac{(1 \times 10^{-2})^2}{(1.5 \times 10^{-2})^2} \times 2$$

$$= 0.89 \text{ ms}^{-1}$$

બર્નુલીના સમીકરણ મુજબ,

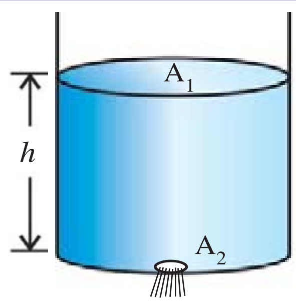
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_2$$

$$\therefore P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) + \rho g(y_1 - y_2)$$

$$= (1.5 \times 10^5) + \frac{1}{2} \times 1 \times 10^3 \times [(2)^2 - (089)^2] + 1 \times 10^3 \times 9.8 \times 2.5$$

$$P_2 = 1.76 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$$

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 5.19માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મોટો આડછેદ A_1 ધરાવતા એક નળાકાર પાત્રમાં ρ જેટલી ઘનતા ધરાવતું પ્રવાહી ભરેલ છે. પાત્રના તળિયે A_2 જેટલા આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતું નાનું હોલ (છિદ્ર) છે. જ્યારે આડછેદ A_2 થી પ્રવાહીના સ્તંભની ઊંચાઈ h હોય ત્યારે તેમાંથી બહાર આવતા પ્રવાહીનો વેગ શોધો. (અહીં, $A_1 >> A_2$)



આકૃતિ 5.19

ઉકેલ : ધારો કે A_1 અને A_2 આડછેદો પાસે પ્રવાહીનો વેગ અનુક્રમે v_1 અને v_2 છે. બંને આડછેદ વાતાવરણમાં ખુલ્લા હોવાથી ત્યાં વાતાવરણના દબાણ P_a જેટલું જ દબાણ પ્રવર્તે છે. બંને આડછેદો માટે બર્નુલીનું સમીકરણ લાગુ પાડતાં,

$$\therefore P_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = P_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (1)$$

સાતત્યના સમીકરણ અનુસાર,

$A_1v_1 = A_2v_2$

$$\therefore\ v_1 = \frac{A_2v_2}{A_1} \qquad (2)$$

સમીકરણ (2)માંથી સમીકરણ (1)માં v_1નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^{\,2} + gh = \frac{1}{2}v_2^{\,2}$$

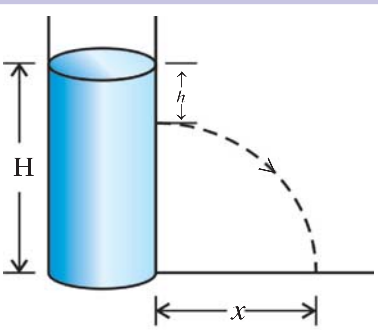
$$\therefore\ v_2^{\,2} = \frac{2gh}{\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]} \cong 2gh$$

$$(\because A_2 << A_1)$$

$$\therefore\ v_2 = \sqrt{2gh}$$

નોંધ : પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીથી h ઊંડાઈએ રહેલા હોલમાંથી બહાર આવતા પ્રવાહીનો વેગ, તેટલી જ ઊંચાઈ પરથી મુક્તપતન કરતા કણના અંતિમ વેગ જેટલો હોય છે. આ વિધાનને ટોરીસિલિ(Torriceli)નો નિયમ કહે છે.

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 5.20માં દર્શાવેલ એક પાત્રમાં H જેટલી ઊંચાઈ સુધી પાણી ભરેલ છે. પાણીની સપાટીથી h જેટલી ઊંડાઈએ પાત્રની દીવાલમાં એક હોલ પાડવામાં આવે છે. તો હોલમાંથી બહાર આવતી પાણીની ધાર જમીન પર દીવાલથી કેટલા સમક્ષિતિજ અંતરે પડતી હશે ? hના કયા મૂલ્ય માટે આ અંતર મહત્તમ થશે ? આ મહત્તમ અંતર શોધો.



આકૃતિ 5.20

ઉકેલ : પાણીની સપાટીથી h ઊંડાઈ પર રહેલા હોલમાંથી બહાર આવતા પાણીનો સમક્ષિતિજ દિશામાં વેગ

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

અહીં, બહાર આવતા પાણી પર માત્ર અધોદિશામાં પ્રવેગ (ગુરુત્વપ્રવેગ g) લાગતો હોવાથી સમક્ષિતિજ દિશામાં તે અચળ વેગથી ગતિ કરે છે અને અધોદિશામાં અચળ પ્રવેગી ગતિ કરે છે. (પ્રક્ષિપ્ત ગતિ જેવું)

ગતિનાં સમીકરણો પરથી,

અધોદિશામાં કપાયેલ અંતર, $H - h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$

જ્યાં, t = હોલમાંથી બહાર નીકળતા પાણીએ જમીન પર પહોંચવા લીધેલ સમય.

સમક્ષિતિજ દિશામાં કપાયેલ અંતર $x = vt \qquad (3)$

સમીકરણ (1) અને (2)માંથી v અને tનાં મૂલ્યો સમીકરણ (3)માં મૂકતાં,

$$x = \sqrt{2gh}\left(\frac{2(H-h)}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (4hH - 4h^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= [H^2 - (H-2h)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

સમીકરણ (4) દર્શાવે છે કે $H = 2h$ માટે x મહત્તમ થાય.

$$\therefore\ h = \frac{H}{2}$$

આ માટે $h = \frac{H}{2}$ સમીકરણ (4)માં મૂકતાં,

$$\therefore\ x = H$$

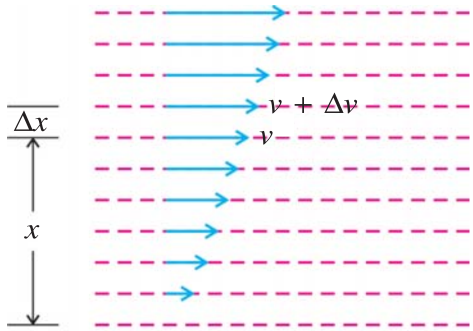
5.9 શ્યાનતા

આપણે જાણીએ છીએ કે પાણી કે કેરોસીન જેવાં પ્રવાહીઓ આસાનીથી વહી શકે છે, જ્યારે મધ કે દિવેલ (castor oil) જેવાં પ્રવાહીઓનું વહન આસાનીથી થતું નથી. જો બર્નુલીના સમીકરણમાં સમક્ષિતિજ પ્રવાહ માટે $y_1 = y_2$ મૂકીએ,

$$\text{તો } P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^{\,2} = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^{\,2}$$

આ સમીકરણ દર્શાવે છે કે સમક્ષિતિજ તરલ-વહન માટે અચળ ઝડપથી ($v_1 = v_2$) તરલના વહન માટે દબાણનો તફાવત જરૂરી નથી એટલે કે $P_1 = P_2$. પરંતુ વાસ્તવમાં આવું બનતું નથી. અચળ ઝડપથી તરલનું વહન શક્ય બનાવવા માટે દબાણનો તફાવત જરૂરી બને છે. આ દર્શાવે છે કે તરલના વહનનો વિરોધ કરતું બળ હોવું જ જોઈએ.

આ બાબત સમજવા માટે કોઈ સ્થિર સમક્ષિતિજ સપાટી પર તરલનો સ્થાયી પ્રવાહ ધ્યાનમાં લો.



સ્તરીય વહન

આકૃતિ 5.21

અહીં સપાટી અને પ્રવાહીના અણુઓ વચ્ચે લાગતાં આસક્તિ બળોને કારણે સપાટીના સંસર્ગમાં રહેલો પ્રવાહીનું સ્તર સપાટીને ચીટકી રહે છે. સૌથી ઉપરના સ્તરનો વેગ સૌથી વધુ હોય છે.

આકૃતિ 5.21માં પ્રવાહીના કેટલાક સ્તર અને તેમના વેગસદિશો દર્શાવ્યા છે. આમ, સ્થાયી પ્રવાહમાં પ્રવાહીના જુદા જુદા સ્તર એકબીજામાં ભળી ગયા સિવાય એકબીજા પર સરકે છે. આવા વહનને સ્તરીય વહન (laminar flow) કહે છે.

સ્તરીય વહનમાં તરલના કોઈ પણ બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ હોય છે. પરિણામે તેમની સંપર્કસપાટી પર સ્પર્શીય અવરોધક બળ ઉદ્ભવે છે. આવા આંતરિક અવરોધક બળને શ્યાનતાબળ (viscous force) કહે છે. તરલના જે ગુણધર્મને કારણે બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચેની સાપેક્ષ ગતિ અવરોધાય છે, તેને તરલની શ્યાનતા કહે છે. આથી જો સ્તરો વચ્ચેની સાપેક્ષ ગતિ જાળવી રાખવી હોય તો શ્યાનતાબળોને સમતોલે તેટલું ઓછામાં ઓછું બળ લગાડવું જરૂરી છે. આવાં બાહ્ય બળોની ગેરહાજરીમાં શ્યાનતા બળોને લીધે સ્તરો વચ્ચેની સાપેક્ષ ગતિ સમય જતાં મંદ પડે છે અને તરલ સ્થિર થઈ જાય છે. આ કારણને લીધે પ્યાલામાં રાખેલ દૂધ ચમચીથી હલાવ્યા પછી થોડી વારમાં સ્થિર થઈ જાય છે.

વેગપ્રચલન (Velocity gradient) : સ્તરીય વહનમાં વહનની દિશાને લંબ એવી દિશામાં એકબીજાથી એકમ અંતરે રહેલા બે સ્તરોના વેગના તફાવતને વેગપ્રચલન કહે છે.

આકૃતિ 5.21માં દર્શાવ્યા મુજબ એકબીજાથી Δx જેટલા અંતરે આવેલા બે સ્તરોના વેગમાં તફાવત Δv છે. આમ, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ વેગપ્રચલન થાય. જો Δx નું મૂલ્ય ખૂબ જ નાનું હોય

તો વેગપ્રચલન $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$ થાય.

સ્તરીય વહન માટે વેગપ્રચલન કોઈ પણ સ્તરો માટે સમાન હોય છે. તેનો એકમ s^{-1} છે.

હવે શ્યાનતા પર આપણું ધ્યાન ફરીથી કેન્દ્રિત કરીએ. અહીં શ્યાનતાબળ ગતિનો વિરોધ કરતું બળ છે. ન્યૂટનના પ્રાયોગિક કાર્ય અનુસાર અચળ તાપમાને શ્યાનતાબળનું મૂલ્ય નીચેના સૂત્રથી મળે.

$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \qquad (5.9.1)$$

અહીં F શ્યાનતાબળ અને A બે સ્તર વચ્ચેની સંપર્ક સપાટીનું ક્ષેત્રફળ છે. η સપ્રમાણતાનો અચળાંક છે. જે શ્યાનતા-ગુણાંક તરીકે પણ ઓળખાય છે. ηનું મૂલ્ય તરલના પ્રકાર અને તાપમાન પર આધાર રાખે છે.

આમ, ηનું મૂલ્ય વધુ હોય તો શ્યાનતાબળનું મૂલ્ય વધુ હોય છે, અને તેને કારણે તરણનું વહન ધીમું થાય છે. આમ, શ્યાનતા-ગુણાંક તરલની શ્યાનતાનું માપ છે. વળી, η નું મૂલ્ય પ્રવાહીમાં તાપમાન સાથે ઘટે છે જ્યારે વાયુમાં તેનું મૂલ્ય તાપમાન સાથે વધે છે. સમીકરણ 5.9.1 પરથી,

$$\eta = \frac{F}{A\frac{dv}{dx}}$$

જો A = 1 એકમ અને $\frac{dv}{dx}$ = 1 એકમ લેવામાં આવે

તો, $\eta = F$

આમ, **"સ્તરીય વહનમાં તરલના કોઈ પણ બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચે એકમ વેગપ્રચલન અને એકમ સંપર્ક-ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉદ્ભવતા શ્યાનતાબળને તરલનો શ્યાનતા-ગુણાંક કહે છે."**

શ્યાનતા-ગુણાંકનો CGS એકમ dyne s cm^{-2}, છે અને તે તબીબ અને ભૌતિકવિજ્ઞાની Jean Lois Poiseuilleની સ્મૃતિમાં 'poise' તરીકે ઓળખાય છે. તેનો SI એકમ N s m^{-2} અથવા Pa s છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^{-1}T^{-1}$.

કેટલાક તરલ માટે શ્યાનતા-ગુણાંકનાં મૂલ્યો નીચે ટેબલ 5.2માં આપ્યા છે.

ટેબલ 5.2

તરલના શ્યાનતા-ગુણાંક (માત્ર જાણકારી માટે)

તરલ	તાપમાન	શ્યાનતા-ગુણાંક ($N\ s\ m^{-2}$)
પાણી	20°C	1×10^{-3}
	100°C	2.8×10^{-4}
હવા	0°C	1.71×10^{-5}
	340°C	1.9×10^{-5}
લોહી	38°C	1.5×10^{-3}
તલનું તેલ		4.0×10^{-2}
એન્જિન ઑઈલ	16°C	1.13×10^{-1}
	38°C	3.4×10^{-2}
મધ		2.0×10^{-1}
પાણીની બાષ્પ	100°C	1.25×10^{-5}
ગ્લિસરીન	20°C	8.30×10^{-1}
એસિટોન	25°C	3.6×10^{-4}

ઉદાહરણ 6 : 10^{-2} m^2 ક્ષેત્રફળ ધરાવતી ધાતુની એક તકતી 2×10^{-3} m જાડાઈના તેલના સ્તર પર મૂકી છે. તેલનો શ્યાનતા-ગુણાંક 1.55 N s m^{-2} હોય, તો તકતીને 3×10^{-2} ms^{-1} ના વેગથી ગતિ કરાવવા માટે જરૂરી સમક્ષિતિજ (સ્પર્શીય) બળની ગણતરી કરો.

ઉકેલ :

$A = 10^{-2}\ m^2$

$\Delta v = 3 \times 10^{-2}\ ms^{-1}$

$\Delta x = 2 \times 10^{-3}\ m$

$\eta = 1.55\ N\ s\ m^{-2}$

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= 1.55 \times 10^{-2} \times \frac{3 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-3}}$$

$$\therefore F = 2.32 \times 10^{-1}\ N$$

ઉદાહરણ 7 : એક નળીમાં વહેતા પ્રવાહીના અક્ષથી 0.8 cm અને 0.82 cm અંતરે રહેલા બે નળાકાર સ્તરોના વેગ અનુક્રમે 3 cm s^{-1} અને 2.5 cm s^{-1} છે. જો નળીની લંબાઈ 10 cm હોય અને પ્રવાહીનો શ્યાનતા-ગુણાંક 8 પોઈસ હોય, તો આ બે સ્તરો વચ્ચે લાગતું શ્યાનતાબળ શોધો.

ઉકેલ :

$r_1 = 0.8$ cm

$r_1 = 0.82$ cm

$\Delta v = 3 - 2.5 = 0.5$ cm s^{-1}

Δx = બે સ્તરો વચ્ચેનું અંતર

$= 0.02$ cm

L = 10 cm

A = સ્તરોનું સંપર્ક ક્ષેત્રફળ

$$= 2\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)L$$

η = 8 પોઈસ

$$F_v = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \eta\left[2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)L\right]\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= 8\left[2 \times 3.14\left(\frac{0.8 + 0.82}{2}\right)10\right]\frac{0.5}{0.02}$$

$$= 16 \times 3.14 \times 0.81 \times 10 \times \frac{0.5}{0.02}$$

$$= 10173.6 \text{ dyne}$$

5.10 સ્ટોક્સનો નિયમ (Stokes' Law)

જ્યારે કોઈ વસ્તુ શ્યાન માધ્યમમાં ગતિ કરે ત્યારે વસ્તુના સંપર્કમાં રહેલા માધ્યમના સ્તર તેની સાથે ઘસડાય છે. તેથી આ સ્તર વસ્તુના વેગ જેટલા જ વેગથી ગતિ કરે છે. પરંતુ વસ્તુથી અતિ દૂરનો સ્તર સ્થિર રહે છે. આમ, વસ્તુ અને અતિ દૂરના સ્થિર સ્તર વચ્ચેના વિસ્તારમાં સ્તરીય વહન ઉદ્ભવે છે. અહીં પણ માધ્યમના બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચે શ્યાનતાબળ ઉદ્ભવે છે, જે આખરે માધ્યમમાં ગતિ કરતાં પદાર્થ પરના અવરોધક બળમાં પરિણમે છે. સ્ટોક્સ નામના વિજ્ઞાનીએ દર્શાવ્યું કે,

η જેટલો શ્યાનતા-ગુણાંક ધરાવતા મોટા વિસ્તારવાળા શ્યાન માધ્યમમાં v જેટલા વેગથી ગતિ કરતી r ત્રિજ્યાવાળી નાની લીસી ગોળાકાર ઘન વસ્તુ પર લાગતું ગતિ અવરોધક બળ, (શ્યાનતાબળ)

$$F(v) = 6\pi\eta v \qquad (5.10.1)$$

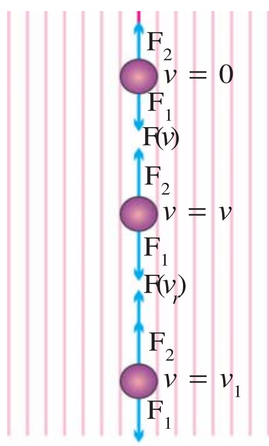
હોય છે. આ સૂત્રને સ્ટોક્સનો નિયમ કહે છે.

સ્ટોક્સનો નિયમ વેગ આધારિક બળનું એક રસપ્રદ ઉદાહરણ છે. માધ્યમમાં ગતિ કરતી વસ્તુ પર વસ્તુના વેગને સમપ્રમાણમાં ગતિ વિરુદ્ધ બળ લાગે છે.

તરલમાં ગોળાની ગતિ અને ટર્મિનલ વેગ (Motion of the sphere in a fluid and terminal velocity) :

આકૃતિ 5.22માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે r ત્રિજ્યા ધરાવતો, ρ જેટલી દ્રવ્યની ઘનતા ધરાવતો એક નાનો લીસો ઘન ગોળો તરલમાં ધારો કે શૂન્ય વેગ સાથે ગતિ શરૂ કરે છે. તરલનો શ્યાનતા-ગુણાંક η તથા ઘનતા ρ_o છે. અહીં $\rho > \rho_o$ છે.

આકૃતિ 5.22માં ગતિ દરમિયાન ત્રણ જુદી-જુદી ક્ષણે ગોળા પર લાગતાં બળો દર્શાવ્યાં છે. આ બળો નીચે પ્રમાણે છે : (1) ગોળાનું વજન F_1 (અધોદિશામાં) (2) તરલ ઉત્પ્લાવક બળ, F_2 (ઊર્ધ્વ દિશામાં) (3) ગતિ-અવરોધક બળ $F(v)$ (ઊર્ધ્વ દિશામાં).



શ્યાન-માધ્યમમાં નાની લીસી ગોળાકાર વસ્તુનું પતન

આકૃતિ 5.22

(1) ગોળાનું કદ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ ગોળાનું દળ $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$

$\therefore$ ગોળાનું વજન $F_1 = mg = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g$

(2) તરલનું ઉત્પ્લાવક બળ ગોળા વડે વિસ્થાપિત થયેલા તરલના વજન જેટલું હોય છે. ગોળા વડે વિસ્થાપિત થયેલા તરલનું કદ,

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ ગોળા વડે વિસ્થાપિત થયેલા તરલનું દળ

$m_o = V\rho_o = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_o$

$\therefore$ ગોળા વડે વિસ્થાપિત થયેલા તરલનું વજન $= m_o g$

$= \frac{4}{3}\pi r^3\rho_o g.$

$\therefore$ ઉત્પ્લાવક બળ $F_2 = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_o g$ (5.10.3)

(3) સ્ટોક્સના નિયમ પ્રમાણે ગતિ અવરોધક બળ $F(v) = 6\pi\eta r v$ (5.10.4)

$\therefore$ ગોળા પર લાગતું પરિણામી બળ

$F = F_1 - F_2 - F(v)$

$\therefore F = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_o g - 6\pi\eta r v$ (5.10.5)

સમીકરણ 5.10.5 ગોળાની ગતિનું સમીકરણ દર્શાવે છે.

$t = 0$ સમયે તરલમાં ગોળાની ગતિ શરૂ થાય ત્યારે ગોળાનો વેગ $v = 0$ છે. તેથી આ વખતે ગતિ-અવરોધક બળ $F(v) = 0$ થશે.

$\therefore F = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_o g = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_o)$ (5.10.6)

જો $t = 0$ સમયે ગોળાનો પ્રવેગ a_o હોય, તો

$F = ma_o = \frac{4}{3}\pi r^3\rho a_o$ (5.10.7)

(5.10.6) અને (5.10.7) સરખાવતાં,

$\frac{4}{3}\pi r^3\rho a_o = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_o)$

$a_o = \frac{\rho - \rho_o}{\rho}$ (5.10.8)

ગોળો તરલમાં પ્રવેગી ગતિ શરૂ કરે છે. સમય જતાં ગોળાનો વેગ જેમજેમ વધતો જાય છે, તેમતેમ તેના પર ઊર્ધ્વ દિશામાં લાગતું ગતિ-અવરોધક બળ વધતું જાય છે. F_1 અને F_2 બળો અચળ છે. તેથી પરિણામી બળ અને તેથી પ્રવેગ ઘટતો જાય છે. આમ, ગોળાનો વેગ વધતો જાય છે અને પ્રવેગ ઘટતો જાય છે. જ્યારે $F_1 = F_2 + F(v)$ થાય ત્યારે ગોળા પર લાગતું પરિણામી બળ શૂન્ય બને છે અને તેથી પ્રવેગ પણ શૂન્ય થાય છે. આ ક્ષણથી ગોળો અચળ વેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. આ વેગને ગોળાનો ટર્મિનલ વેગ (terminal velocity) v_t કહે છે. હવે પછીની સમગ્ર ગતિ દરમિયાન ગોળાનો વેગ અચળ જળવાઈ રહે છે. ગોળો ટર્મિનલ વેગ પ્રાપ્ત કરે ત્યારે સમીકરણ (5.10.8) $F = 0$ અને $v = v_t$ થશે.

$$\therefore\ 0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g - 6\pi\eta r v_t$$

$$\therefore\ 6\pi\eta r v_t = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_o)$$

$$\therefore\ v_t = \frac{2}{9}\ \frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho_o) \qquad (5.10.9)$$

ગોળાને તરલમાં મુક્ત પતન કરાવી તેનો ટર્મિનલ વેગ પ્રાયોગિક રીતે માપી લેવામાં આવે, તો સમીકરણ (5.10.9)નો ઉપયોગ કરી તરલનો શ્યાનતા-ગુણાંક શોધી શકાય છે.

પ્રવાહીમાં રચાતા હવાના પરપોટાને હવાનો ગોળો ગણી શકાય. આ કિસ્સામાં $\rho_o > \rho$ થાય છે. પરિણામે પ્રારંભથી જ $F_1 < F_2$ થતા પરપોટાને ઊર્ધ્વ દિશામાં પ્રવેગ મળે છે. પરિણામે તે પ્રવાહીમાં ઊંચે ચડે છે અને અમુક સમય પછી ટર્મિનલ વેગ પ્રાપ્ત કરે છે. આ અંતિમ વેગ સમીકરણ (5.10.9)નો ઉપયોગ કરી શોધી શકાય છે. અહીં v_t ઋણ મળે છે જે સૂચવે છે કે પરપોટાનો ટર્મિનલ વેગ ઊર્ધ્વ દિશામાં છે. સોડાવૉટરની બૉટલમાં ઊંચે ચઢતા પરપોટા તમે જોયાં હશે.

ઉદાહરણ 8 : સમાન કદના વરસાદનાં બે ટીપાં હવામાં 10 cm s^{-1}ના અંતિમ વેગથી ગતિ કરતાં-કરતાં એકબીજાંમાં ભળી જઈ એક મોટું ટીપું બનાવે છે, તો આ મોટા ટીપાનો અંતિમ વેગ શોધો.

ઉકેલ :

બંને ટીપાંની ત્રિજ્યા ધારો કે r અને કદ V છે. જ્યારે તે બંને એકત્ર થઈ એક ટીપું બનાવે ત્યારે (કુલ દળ અને ઘનતા અચળ હોવાથી) તે નવા ટીપાનું કદ V' તે દરેકના કદ કરતાં બમણું થશે.

ધારો કે નવા ટીપાની ત્રિજ્યા R છે.

હવે, V' = 2V

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$R^3 = 2r^3$$

$$\therefore\ R = (2^{\frac{1}{3}})r$$

નાના ટીપાનો ટર્મિનલ વેગ v અને મોટા ટીપાનો ટર્મિનલ વેગ v' કહીએ, તો

$$v = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho_o) \text{ અને}$$

$$v' = \frac{2}{9}\frac{R^2 g}{\eta}(\rho - \rho_o)$$

$$\therefore\ \frac{v'}{v} = \frac{R^2}{r^2}$$

$$\therefore\ v' = v\frac{R^2}{r^2} = 10(2^{\frac{1}{3}})^2 = 15.87 \text{ cm s}^{-1}$$

5.11 રેનોલ્ડ્-અંક અને ક્રાંતિવેગ (Reynold's Number and Critical Velocity)

નળીમાંથી વહેતા તરલનું વહન ધારારેખી કે વમળયુક્ત કે મિશ્ર પ્રકારનું હોઈ શકે. શ્યાનતા-ગુણાંકના લગભગ બધા જ પ્રયોગો વહન ધારારેખી હોવું જરૂરી છે. આથી કયા સંજોગોમાં ધારારેખી વહન મળે તે જાણવું જરૂરી છે.

બ્રિટિશ ગણિતશાસ્ત્રી અને ભૌતિકવિજ્ઞાની ઓસબોર્ન રેનોલ્ડ્ઝે દર્શાવ્યું કે નળીમાંથી વહેતા તરલના વહનનો પ્રકાર નીચેની બાબતો પર આધારિત છે : (1) તરલનો શ્યાનતા-ગુણાંક (η) (2) તરલની ઘનતા (ρ) (3) તરલનો સરેરાશ વેગ (v) (4) નળીનો વ્યાસ (D)

આ ચાર ભૌતિક રાશિના સમન્વયથી બનતા અંકને N_Rને રેનોલ્ડ્ઝ-અંક કહે છે.

$$\text{રેનોલ્ડ્ઝ અંક } N_R = \frac{\rho v D}{\eta} \qquad (5.11.1)$$

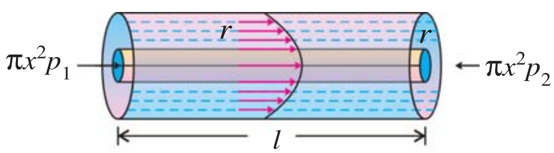
N_Rનું મૂલ્ય તરલ વહનના પ્રકાર પર આધાર રાખે છે. N_R પરિમાણરહિત અંક છે. પ્રયોગો દર્શાવે છે કે જો $N_R < 2000$ હોય, તો વહન ધારારેખી વહન હોય છે. જો $N_R > 3000$ તો તરલ વહન વમળયુક્ત હોય છે અને જે $2000 < N_R < 3000$ હોય, તો તરલ વહન અસ્થિર હોય છે અને વહનનો પ્રકાર બદલાતો જાય છે.

ક્રાંતિ વેગ (Critical Velocity) : સમીકરણ 5.11.1 પરથી સ્પષ્ટ છે કે વેગ વધવા સાથે રેનોલ્ડ્ઝ-અંકનું મૂલ્ય વધે છે. વેગના જે મહત્તમ મૂલ્ય સુધી તરલ વહન ધારા રેખી રહે તે વેગના મૂલ્યને ક્રાંતિવેગ કહે છે. ક્રાંતિવેગને અનુસંગત રેનોલ્ડ્ઝ અંકના મૂલ્યને ક્રિટીકલ રેનોલ્ડ્ઝ-અંક કહે છે.

એ સ્પષ્ટ છે કે જો $\eta = 0$ (એટલે કે અશ્યાન તરલ માટે) N_R નું મૂલ્ય અનંત બને. આમ અશ્યાન તરલનું વહન કદી ધારારેખીય ન હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 9 : આકૃતિ 5.23માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, નિયમિત આંતરિક ત્રિજ્યા r ધરાવતી l લંબાઈની એક નળીમાં η જેટલો શ્યાનતા-ગુણાંક ધરાવતા એક તરલનું સ્તરીય વહન થઈ રહ્યું છે. નળીમાં આવું વહન જાળવી

રાખવા માટે શ્યાનતાબળને સમતોલતું બળ, નળીના બે છેડે દબાણનો તફાવત (p) ઉત્પન્ન કરીને મેળવવા આવે છે. તો નળીના અક્ષથી 'x' અંતરે રહેલા સ્તરના વેગનું સૂત્ર $v = \frac{p}{4\eta l}(r^2 - x^2)$ મેળવો.



આકૃતિ 5.23

ઉકેલ : આકૃતિ 5.23માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે x જેટલી ત્રિજ્યાવાળો અક્ષ પરનો પ્રવાહીનો નળાકાર ધ્યાનમાં લો. તેના પર લાગતાં બળો નીચે મુજબ છે :

(1) દબાણના તફાવત p વડે ઉદ્‌ભવતું બળ, $F_1 = \pi x^2 p$

(2) શ્યાનતાબળ, $F_2 = \eta A \frac{dv}{dx}$

$$= \eta(2\pi x l)\left(-\frac{dv}{dx}\right)$$

જ્યાં, A = વિચારેલ નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi x l$

અત્રે, x વધતાં v ઘટતો હોવાથી વેગ-પ્રચલન ઋણ લીધેલ છે. અહીં, નળાકારના અચળવેગી વહન માટે

$F_1 = F_2$

$$\therefore \pi x^2 p = -\eta \cdot 2\pi x l \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore -dv = \frac{p}{2\eta l}\, x\, dx$$

$x = r$ પર વેગ $v = 0$ છે અને $x = x$, $v = v$ હોવાથી આ limitsમાં સંકલન કરતાં

$$-\int_v^0 dv = \int_x^r \frac{p}{2\eta l}\, x\, dx$$

$$\therefore -[v]_v^0 = \frac{p}{4\eta l}\left[x^2\right]_x^r$$

$$\therefore -[0 - v] = \frac{p}{4\eta l}[r^2 - x^2]$$

$$\therefore v = \frac{p}{4\eta l}(r^2 - x^2)$$

ઉદાહરણ 10 : ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં નળીમાંથી દર સેકન્ડે વહેતા પ્રવાહીનું કદ શોધો. [**Hint :** નળીમાંથી વહેતા પ્રવાહીનો વેગ તેની અક્ષ અને દીવાલ પાસેના વેગોના સરેરાશ જેટલો લો.]

ઉકેલ :

$$v = \frac{p}{4\eta l}(r^2 - x^2)$$

$\therefore$ અક્ષ ($x = 0$), પર વેગ $v = \frac{pr^2}{4\eta l}$

દીવાલ ($x = r$), પર વેગ $v = 0$

$\therefore$ સરેરાશ વેગ $= \frac{pr^2}{8\eta l}$

હવે, નળીમાંથી દર સેકન્ડે વહેતા પ્રવાહીનું કદ

V = (વેગ) (આડછેદનું ક્ષેત્રફળ)

$$= \left(\frac{pr^2}{8\eta l}\right)(\pi r^2)$$

$$\therefore V = \frac{\pi p r^4}{8\eta l}$$

[**નોંધ :** આ સમીકરણને Poiseuilleનો નિયમ કહે છે.]

ઉદાહરણ 11 : એક પાઇપલાઇનના આડછેદની ત્રિજ્યા $r = r_0 e^{-\alpha x}$; સૂત્ર પ્રમાણે ઘટતી જાય છે, જ્યાં $\alpha = 0.50\ m^{-1}$ અને x એ પાઇપલાઇનના પ્રથમ છેડાથી ($x = 0$)થી આડછેદનું અંતર છે, તો એકબીજાથી 2 m જેટલા અંતરે રહેલા બે આડછેદ માટે રેનોલ્ડ્ઝ-અંકનો ગુણોત્તર શોધો. ($e = 2.718$ લો.)

ઉકેલ : રેનોલ્ડ્ઝ-અંક $N_R = \frac{\rho v D}{\eta}$

$\therefore$ આપેલ પ્રવાહી માટે $N_R \propto vD$

$$\therefore \frac{(N_R)_1}{(N_R)_2} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{D_1}{D_2} \qquad (1)$$

સાતત્યના સમીકરણ પરથી,

$A_1 v_1 = A_2 v_2$

$\therefore \pi r_1^2 v_1 = \pi r_2^2 v_2$

$$\therefore \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{(N_R)_1}{(N_R)_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \times \frac{D_1}{D_2} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_0 e^{-\alpha x_2}}{r_0 e^{-\alpha x_1}}$$

$$\frac{(N_R)_1}{(N_R)_2} = e^{-\alpha(x_2 - x_1)} = e^{-(0.5)(2)} = e^{-1}$$

$$= 0.368$$

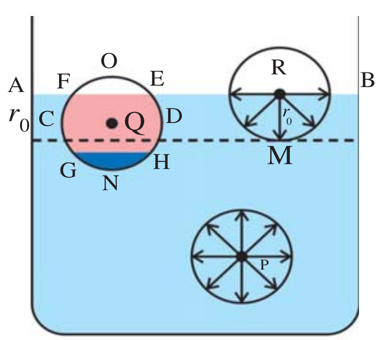
5.12 પૃષ્ઠ-ઊર્જા અને પૃષ્ઠતાણ (Surface Energy and Surface Tension)

આપ સૌએ એક બાબતની નોંધ લીધી હશે કે પાણીથી કાચ ભીંજાય છે, પણ કમળ કે તેનું પર્ણ નહીં. દીવામાં તેલ ગુરુત્વાકર્ષણ વિરુદ્ધ ઉપર ચઢે છે. પાણી પર અમુક કિટકો ચાલી શકે છે. જો પૂરતી કાળજી લેવામાં આવે, તો પાણી પર સમક્ષિતિજ મૂકેલ સોય પાણી પર તરે છે. આવી ઘટનાઓ માટે પ્રવાહીનો પૃષ્ઠતાણ નામનો ગુણધર્મ જવાબદાર છે. પૃષ્ઠતાણને કારણે પ્રવાહી એક ખેંચી રાખેલા પડની જેમ વર્તે છે. પૃષ્ઠતાણ માત્ર પ્રવાહીનો ગુણધર્મ છે.

5.12.1 પૃષ્ઠ-ઊર્જા (Surface energy) :

એક જ દ્રવ્યના અણુઓ વચ્ચે લાગતા આકર્ષણબળને **સંસક્તિ (cohesive) બળ** અને જુદાં-જુદાં દ્રવ્યના અણુઓ વચ્ચે લાગતા આકર્ષણબળને **આસક્તિ (adhesive) બળ** કહે છે.

જે ગુરુતમ અંતર સુધી બે અણુઓ એકબીજા પર આકર્ષણબળ લગાડી શકે તે અંતરને અણુઓની **અણુક્રિયા-અવધિ** કહે છે. અણુને કેન્દ્ર તરીકે લઈ અણુક્રિયા-અવધિ જેટલી ત્રિજ્યાનો ગોળો વિચારીએ, તો તેને તે અણુનો **અણુક્રિયા-ગોળો** કહે છે. આવા ગોળાની અંદર રહેલા અણુઓ જ કેન્દ્ર પર રહેલા અણુ પર આકર્ષણબળ લગાડી શકે છે. ગોળાની બહાર રહેલા અણુઓ કેન્દ્ર પર રહેલા અણુ પર આકર્ષણબળ લગાડી શકતા નથી.



અણુક્રિયા-ગોળાઓ

આકૃતિ 5.24

આંતર-અણુબળોને લીધે ઉદ્ભવતી પૃષ્ઠ-અસર સમજવા માટે આકૃતિ 5.23માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક પ્રવાહીમાંના ત્રણ અણુઓ P, Q, અને R તેમના અણુક્રિયા ગોળાઓ સાથે ધ્યાનમાં લો.

ધારો કે અણુક્રિયા-અવધિ r_0 છે. AB પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી દર્શાવે છે. P અણુનો અણુક્રિયા-ગોળો પ્રવાહીમાં સંપૂર્ણપણે ડૂબેલો છે. તેથી તે સમાન રીતે પ્રવાહીના અણુઓથી ભરાયેલો છે. પરિણામે P અણુ પર બધી જ દિશાઓમાંથી એકસરખું આકર્ષણબળ લાગે છે. તેથી તેના પર લાગતું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય છે અને તે સંતુલનમાં રહે છે. પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીથી r_0 કરતાં વધારે ઊંડાઈએ આવેલા બધા જ અણુઓની પરિસ્થિતિ આવી હોય છે.

હવે r_0 કરતાં ઓછી ઊંડાઈએ આવેલા અણુ Q અને તેના અણુક્રિયા-ગોળાને ધ્યાન પર લો. આ અણુક્રિયા-ગોળાનો FOEF ભાગ પ્રવાહીની બહાર છે. આ ભાગમાં હવા અને બાષ્પના અણુઓ રહેલા હોય છે. હવા અને પ્રવાહીની બાષ્પની ઘનતા પ્રવાહીની ઘનતાં કરતાં ઘણી ઓછી હોય છે. ઉપરાંત હવા અને પ્રવાહીના અણુઓ વચ્ચેનાં આસક્તિબળો પ્રમાણમાં નબળાં હોય છે. આથી GNHG ભાગમાંના પ્રવાહીના અણુઓ વડે Q પર લાગતું અધોદિશામાંનું સમાસબળ પ્રવાહીની બહાર રહેલા તેના જેવા જ FOEF ભાગમાંના હવા અને બાષ્પના અણુઓ વડે લાગતા ઊર્ધ્વ દિશામાંના સમાસબળ કરતાં વધારે હોય છે. અણુક્રિયા-ગોળાના CDHG અને CDEF ભાગોમાં તો પ્રવાહીના અણુઓની સંખ્યા સમાન છે. પરિણામે તે ભાગોમાંના અણુઓ વડે Q પર લાગતું સમાસબળ શૂન્ય હોય છે. આમ, Q અણુ પર સમાસ આંતર-અણુબળ અધોદિશામાં લાગે છે. **મુક્ત સપાટીથી r_0 જેટલી જાડાઈના સ્તરને પ્રવાહીનું પૃષ્ઠ કહે છે.** આમ, પ્રવાહીના પૃષ્ઠમાં રહેલા અણુઓ પર અધોદિશામાં સમાસબળ લાગે છે. પૃષ્ઠમાં જેમ-જેમ ઉપર આવતાં જઈએ તેમ આ સમાસબળનું મૂલ્ય વધતું જાય છે. મુક્ત સપાટી AB પરના અણુઓ માટે તે મહત્તમ હોય છે. આથી પ્રવાહીના પૃષ્ઠમાં રહેલા અણુઓ પ્રવાહીની અંદર જવાનું વલણ ધરાવે છે.

આ સંજોગોમાં કેટલાક અણુઓ પ્રવાહીની અંદર (પૃષ્ઠ નીચે) જવા શક્તિમાન પણ બને છે. આમ થતાં પૃષ્ઠની નીચે પ્રવાહીની ઘનતા વધી જાય છે અને અમુક કરતાં વધારે અણુઓ પૃષ્ઠની નીચે જઈ શકતા નથી. પરિણામે પ્રવાહીના પૃષ્ઠ નીચે પ્રવાહીની ઘનતા વધારે હોય છે. જ્યારે

પૃષ્ઠમાં ઉપર જઈ એ તેમ ક્રમશઃ તે ઘટતી જાય છે. બીજી રીતે કહીએ, તો પ્રવાહીમાં તેના પૃષ્ઠની નીચે આંતર-અણુ-અંતરો ઓછાં હોય છે. જ્યારે પૃષ્ઠમાં તે વધારે હોય છે. હવે આંતર-અણુબળોને આંતર-અણુ-અંતરોના વિધેય તરીકે લઈને સાબિત કરી શકાય છે કે, પૃષ્ઠમાં આંતર-અણુ-અંતરો વધારે હોવાથી તેમાં રહેલા પ્રવાહીના અણુઓ વચ્ચે પૃષ્ઠને સમાંતર ખેંચાણબળ ઉદ્‌ભવે છે.

આથી પ્રવાહીનું પૃષ્ઠ ખેંચાયેલી સ્થિતિસ્થાપક કપોટી (film)ની માફક સંકોચાવાનું વલણ ધરાવે છે. તેમાં પૃષ્ઠને સમાંતર તણાવબળ પ્રવર્તતું હોય છે. આ તણાવબળનું માપ પૃષ્ઠતાણ નામની ભૌતિક રાશિ વડે આપવામાં આવે છે.

પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પર કલ્પેલી એકમલંબાઈની રેખાની એક બાજુ પર રહેલા પ્રવાહીના અણુઓ રેખાની બીજી બાજુ પર રહેલા અણુઓ પર, રેખાને લંબ અને સપાટીને સમાંતર જે બળ લગાડે છે તેને પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ કહે છે.

$$\therefore \text{ પૃષ્ઠતાણ } T = \frac{F}{L} \qquad (5.12.1)$$

$$\therefore F = TL \qquad (5.12.2)$$

પૃષ્ઠતાણનો એકમ $N\ m^{-1}$ છે.

યાદ રાખો કે પૃષ્ઠતાણનું બળ પ્રવાહીની સપાટી પરના અણુઓ વચ્ચે લાગતું સમાસ-આંતર-અણુબળ નથી. સપાટી પર રહેલા અણુઓ પર લાગતાં સમાસ-આંતર-અણુબળો તો સપાટીને લંબરૂપે પ્રવાહીની અંદર તરફ હોય છે. જ્યારે પૃષ્ઠતાણનું બળ સપાટીને સમાંતર હોય છે.

જો એકમલંબાઈની રેખા સપાટીના મધ્ય ભાગમાં કલ્પવામાં આવે, તો તેની બંને બાજુના અણુઓ એકબીજા પર સમાન મૂલ્યના પરંતુ પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાનાં બળો લગાડતાં હોવાથી સપાટીના મધ્ય ભાગમાં પૃષ્ઠતાણનું બળ અસરકારક જણાતું નથી. સપાટીના કિનારીની બીજી બાજુ પ્રવાહીના અણુઓ ન હોવાથી કિનારી પર પૃષ્ઠતાણનું બળ સપાટીને સમાંતર અને કિનારીને લંબ અંદર તરફનું અનુભવાય છે.

સ્થિતિ-ઊર્જાના સંદર્ભમાં પૃષ્ઠતાણ

આપણે જોયું કે પ્રવાહીના પૃષ્ઠમાં રહેલા અણુઓ પ્રવાહીની અંદર જવાનું વલણ ધરાવે છે. આ વલણ અણુઓની સ્થિતિ-ઊર્જાના સંદર્ભમાં પણ સમજી શકાય છે. આકૃતિ 5.24માં જો P જેવા અણુને પૃષ્ઠમાં લાવવો હોય તો તે પૃષ્ઠમાં જેટલું અંતર (ઊર્ધ્વ દિશામાં) કાપે તે દરમિયાન તેના પર અધોદિશામાં લાગતા બળની વિરુદ્ધ કાર્ય કરવું પડે છે. આથી આવો અણુ પૃષ્ઠમાં આવે ત્યારે સ્થિતિ-ઊર્જા પ્રાપ્ત કરે છે. આ હકીકત દર્શાવે છે કે પૃષ્ઠમાં રહેલા અણુઓની સ્થિતિ-ઊર્જા પૃષ્ઠની નીચે રહેલા અણુઓની સ્થિતિ-ઊર્જા કરતાં વધારે હોય છે. **હવે, કોઈ પણ તંત્ર પોતાની સ્થિતિ-ઊર્જા લઘુતમ રહે તેવી સ્થિતિમાં રહેવા હંમેશાં પ્રયત્ન કરે છે.** આથી, પૃષ્ઠમાંના અણુઓ પોતાની સ્થિતિ-ઊર્જા ઘટાડવાનું વલણ ધરાવે છે અને પ્રવાહીનું પૃષ્ઠ પોતાનું ક્ષેત્રફળ લઘુતમ બને તે રીતે સંકોચાવાનું વલણ ધરાવે છે.

પૃષ્ઠતાણનું મૂલ્ય અણુઓની સ્થિતિ-ઊર્જાના સંદર્ભમાં પણ માપી શકાય છે. આપણે જોયું કે અણુઓને પ્રવાહીની અંદરની સપાટી પર લાવવા માટે કાર્ય કરવું પડે છે જે તેમાં સ્થિતિ-ઊર્જાના રૂપમાં સંગ્રહ પામે છે. નોંધનીય વાત તો એ છે કે આ રીતે સપાટી પર આવતો અણુ સપાટી પર રહેલા મૂળ બે અણુઓની વચ્ચે ગોઠવાતો હોતો નથી. સપાટી પર આવતા અણુઓ નવી સપાટીનું નિર્માણ કરે છે. અર્થાત્ સપાટીનું વિસ્તરણ થાય છે. પ્રવાહીની સમગ્ર સપાટી આ રીતે જ નિર્માણ પામેલી ગણી શકાય. આમ, પ્રવાહીની સપાટીમાંના અણુઓ, તેમને સપાટી પર લાવતાં તેમના પર થયેલ કાર્ય જેટલી સ્થિતિ-ઊર્જા મેળવતા હોય છે.

"પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીના એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ રહેલી સ્થિતિ-ઊર્જાને પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ (T) કહે છે."

આ વ્યાખ્યા મુજબ, પૃષ્ઠતાણ $T = \frac{E}{A}$

આ સંદર્ભમાં પૃષ્ઠતાણનો એકમ $J\ m^{-2}$ થશે.

$$\text{હવે, } \frac{\text{જૂલ}}{\text{મીટર}^2} = \frac{\text{ન્યૂટન મીટર}}{\text{મીટર}^2} = \frac{\text{ન્યૂટન}}{\text{મીટર}} \text{ છે.}$$

આથી બંને વ્યાખ્યાઓથી મળતા એકમો સમાન જ છે.

પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ પ્રવાહીની જાત તેમજ તાપમાન પર આધાર રાખે છે. તાપમાન વધતાં પૃષ્ઠતાણ ઘટે છે અને ક્રાંતિ તાપમાને તે શૂન્ય બને છે. વળી, પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ પ્રવાહી જે માધ્યમનાં સંપર્કમાં હોય તે માધ્યમ પર પણ આધાર રાખે છે.

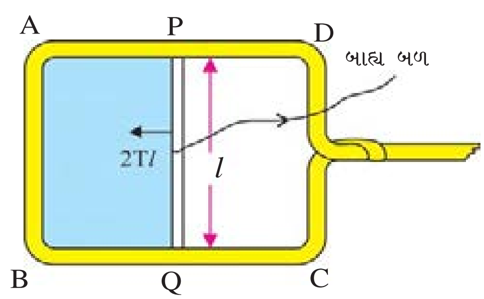
પૃષ્ઠ-ઊર્જા (Surface energy) : ધારો કે એક પ્રવાહીનું આપેલા તાપમાને પૃષ્ઠતાણ T છે. અચળ તાપમાને પ્રવાહીની સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં એકમવધારો કરવો હોય તો T જેટલું કાર્ય કરવું પડે. આપણે જાણીએ છીએ કે સપાટીનું વિસ્તરણ થતાં તેનું તાપમાન ઘટે છે. આથી તાપમાન અચળ

રાખવું હોય, તો વિસ્તરણ દરમિયાન તેને બહારથી ઉષ્મા-ઊર્જા આપવી પડે છે. આમ, પ્રવાહીની સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં એક એકમ જેટલો વધારો થતાં આ એક એકમ જેટલી નવી સપાટીને સ્થિતિ-ઊર્જા (=T) ઊર્જા ઉપરાંત ઉષ્મા-ઊર્જા પણ મળે છે.

∴ એકમક્ષેત્રફળ દીઠ કુલ પૃષ્ઠ-ઊર્જા = સ્થિતિ-ઊર્જા (પૃષ્ઠતાણ) + ઉષ્મા-ઊર્જા

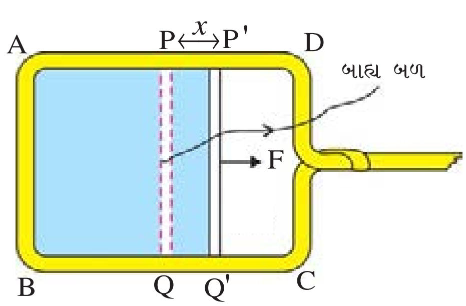
આમ, આપેલા તાપમાને પૃષ્ઠ-ઊર્જાનું મૂલ્ય પૃષ્ઠતાણ કરતાં વધારે હોય છે. તાપમાન વધારતાં પૃષ્ઠતાણ અને પૃષ્ઠ-ઊર્જા ઘટે છે અને ક્રાંતિ-તાપમાને તેઓ શૂન્ય બને છે.

અત્યાર સુધીની આપણી ચર્ચા ઘટનાત્મક પ્રકારની (phenomenological) છે. હવે આ ચર્ચાના નિષ્કર્ષોને આપણે પ્રયોગની એરણ પર ચઢાવીને ચકાસીએ. આ માટે આકૃતિ 5.25માં દર્શાવ્યા મુજબની તારમાંથી બનાવેલી એક લંબચોરસ ફ્રેમ ABCD પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો. તાર PQ આ ફ્રેમની AD અને BC ભુજાઓ પર ઘર્ષણરહિત સરકી શકે છે. તાર PQ સાથે એક પાતળી દોરી બાંધેલી છે.



(a)

લંબચોરસ ફ્રેમ પર રચેલ પ્રવાહીની ફિલ્મ



(b)

ફિલ્મનું વિસ્તરણ

આકૃતિ 5.25

જો ફ્રેમને સાબુના દ્રાવણમાં બોળીને, દોરી વડે તાર PQ ને યોગ્ય રીતે ખેંચી રાખીને, ફ્રેમને દ્રાવણમાંથી બહાર કાઢીએ, તો ફ્રેમ પર દ્રાવણની ફિલ્મ (film) ABQP મેળવી શકાય છે. જો દોરી છોડી દઈએ, તો PQ તાર AB બાજુ તરફ સરકી જતો જણાય છે, એટલે કે ફિલ્મ સંકોચાય છે. આ પ્રયોગ દર્શાવે છે કે પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીની કિનારી પર, કિનારીને લંબ અને સપાટીને સમાંતર પૃષ્ઠતાણનું બળ લાગે છે.

હવે ફિલ્મ ABQP ફરીથી તૈયાર કરી, દોરીને તાર PQ પર લાગતાં બળ કરતાં સહેજ વધારે બળથી ખેંચીને તાર PQને આકૃતિ 5.25(*b*)માં દર્શાવ્યા મુજબ x જેટલું સ્થાનાંતર કરાવીએ, તો થતું કાર્ય નીચે પ્રમાણે ગણી શકાય :

ધારો કે દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ T અને તાર PQની લંબાઈ l છે.

તેથી તાર પર લાગતું પૃષ્ઠતાણનું બળ $2Tl$; અહીં ફિલ્મને બે મુક્ત સપાટીઓ હોવાથી બળના સૂત્રમાં 2 આવે છે. (5.12.4)

∴ લગાડેલું બાહ્ય બળ $F = 2Tl$

કાર્ય = બાહ્ય બળ × સ્થાનાંતર

$\therefore W = 2Tlx$

પણ, ફિલ્મની સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો = $\Delta A = 2lx$ (5.12.5)

$\therefore W = T\Delta A$

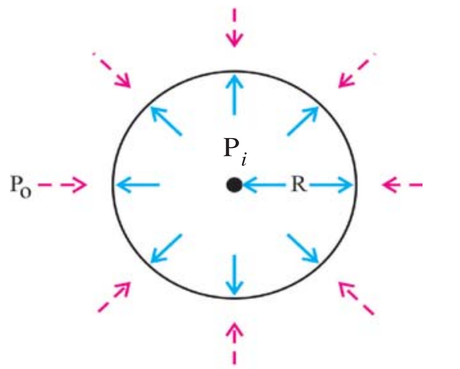
જો $\Delta A = 1$ એકમ થાય, તો $W = T$

∴ સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં એક એકમ જેટલો વધારો કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય પૃષ્ઠતાણના માપ જેટલું હોય છે.

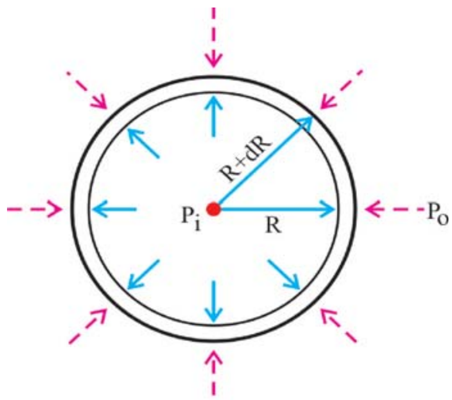
5.13 બુંદ અને પરપોટાઓ (Drops and Bubbles)

પ્રવાહીનાં નાનાં બુંદ કે પરપોટા હંમેશાં ગોળાકાર હોય છે. તમને સ્વાભાવિક રીતે જ પ્રશ્ન થાય કે આમ શા કારણે થતું હશે ? પૃષ્ઠતાણને કારણે પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી તેનું ક્ષેત્રફળ લઘુતમ રહે તેવી સ્થિતિમાં રહે છે. આપેલા કદ માટે ગોળાકાર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ લઘુતમ હોય છે. આથી પ્રવાહીનાં નાનાં બુંદ હંમેશાં ગોળાકાર હોય છે.

બુંદ કે પરપોટાની સપાટીઓ વક્રાકાર હોય છે. પ્રવાહીની આ વક્રાકાર સપાટીના અંતર્ગોળ ભાગ પર લાગતું દબાણ, બહિર્ગોળ ભાગ પર લાગતા દબાણ કરતાં વધારે હોય છે. આથી જ પ્રવાહીનાં બુંદ કે પરપોટાની અંદરનું દબાણ બહારના દબાણ કરતાં વધારે હોય છે.



(*a*)



(*b*)

પરપોટો

આકૃતિ 5.26

આકૃતિ 5.26*a* માં દર્શાવ્યા મુજબ R ત્રિજ્યા ધરાવતા હવામાં રહેલા કોઈ એક પરપોટાને ધ્યાનમાં લો. તેની અંદર અને બહારના દબાણ અનુક્રમે P_i અને P_0 છે. અહીં $P_i > P_0$ છે. પરપોટાની દીવાલ રચતા પ્રવાહી (દ્રાવણ)નું પૃષ્ઠતાણ ધારો કે T છે.

હવે, ધારો કે પરપોટાને ફુલાવતાં તેની ત્રિજ્યા Rથી વધીને $(R + dR)$ થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 5.26*b*) અને આમ કરવાથી તેની મુક્ત સપાટીનું ક્ષેત્રફળ ધારો કે S થી વધીને $S + dS$ થાય છે. આ માટેનું કાર્ય બે રીતે ગણી શકાય.

(1) પરપોટાની ફૂલવાની પ્રક્રિયામાં તેની $4\pi R^2$ ક્ષેત્રફળની સપાટી પર દબાણના તફાવત $(P_i - P_0)$ના લીધે $(P_i - P_0)\ 4\pi R^2$ બળ લાગે છે અને આ બળની અસર હેઠળ સપાટી dR અંતર ખસે છે. આથી સપાટી પર થતું કાર્ય,

$$W = \text{બળ} \times \text{સ્થાનાંતર}$$
$$= (P_i - P_0)\ 4\pi R^2 \cdot dR \qquad (5.13.1)$$

(2) પરપોટાની ત્રિજ્યા R હોય ત્યારે સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $S = 4\pi R^2$.

હવે, પરપોટાની ત્રિજ્યા $(R + dR)$ થાય, ત્યારે ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો.

$$dS = 8\pi R dR$$

પરંતુ હવામાં રહેલા પરપોટાને બે મુક્ત સપાટીઓ હોય છે.

$\therefore$ ક્ષેત્રફળમાં થતો કુલ વધારો $= 2 \times 8\pi R dR$
$= 16\pi R dR$

તેથી, આ માટે જરૂરી કાર્ય,

W = પૃષ્ઠતાણ $\times$ ક્ષેત્રફળમાં થતો કુલ વધારો

$$\therefore W = 16\pi T R dR \qquad (5.13.2)$$

(5.13.1) અને (5.13.2) સરખાવતાં,

$$4\pi(P_i - P_0)R^2\ dR = 16\pi\, T\, R\, dR$$

$$\therefore P_i - P_0 = \frac{4T}{R} \qquad (5.13.3)$$

જો પરપોટો પ્રવાહીની અંદર રહેલો હોય, તો તેને એક જ મુક્ત સપાટી હોય છે.

$$\therefore P_i - P_0 = \frac{2T}{R} \qquad (5.13.4)$$

નોંધ : પ્રવાહીના બુંદને પણ એક જ મુક્ત સપાટી હોવાથી દબાણનો તફાવત સમીકરણ (5.13.4) ની મદદથી શોધી શકાય.

ઉદાહરણ 12 : પાણીમાં તેની મુક્ત સપાટીથી 5 cm ઊંડાઈએ બનતા 0.2 cm ત્રિજ્યાના પરપોટાની અંદરનું દબાણ શોધો. પાણીનું પૃષ્ઠતાણ 70 dyne cm^{-1} અને ઘનતા 1 g cm^{-3} છે. વાતાવરણનું દબાણ 10^6 dyne cm^{-2} લો. ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય 980 cm s^{-2} છે.

ઉકેલ :

h = 5 cm
R = 0.2 cm
T = 70 dyne cm^{-1}
ρ = 1 g cm^{-3}
P = વાતાવરણનું દબાણ
= 10^6 dyne cm^{-2}
g = 980 cm s^{-2}

પાણીમાં બનતા હવાના પરપોટાનું અંદરનું અને બહારનું દબાણ અનુક્રમે P_i અને P_0 હોય, તો

$$P_i - P_0 = \frac{2T}{R}$$ (પરપોટો પાણીમાં બનતો હોવાથી તેને એક જ મુક્ત સપાટી છે.)

$$\therefore\ P_i = P_0 + \frac{2T}{R} \qquad (1)$$

પરંતુ P_0 = વાતાવરણનું દબાણ + h ઊંડાઈના પાણીના સ્તંભનું દબાણ

$$\therefore\ P_0 = P + h\rho g \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$P_i = P + h\rho g + \frac{2T}{R}$$

$$= 10^6 + (5 \times 1 \times 980) + \frac{2 \times 70}{0.2}$$

$$= 10^6 + 4900 + 700$$

$$P_i = 1.0056 \times 10^6 \text{ dyne cm}^{-2}$$

ઉદાહરણ 13 : એક છિદ્રવાળો પોલો ગોળો જ્યારે પાણીની સપાટીની નીચે 40 cm ઊંડાઈએ લઈ જવામાં આવે છે, ત્યારે જ છિદ્રમાંથી પાણી દાખલ થવા લાગે છે. જો પાણીનું પૃષ્ઠતાણ 70 dyne cm^{-1} હોય, તો છિદ્રની ત્રિજ્યા શોધો. g = 10 ms^{-2}.

ઉકેલ : ધારો કે કાણાની ત્રિજ્યા r છે. અહીં ગોળાની ઊંડાઈ h = 40 cm છે. આ ઊંડાઈએ પાણીનું દબાણ = hdg = 40 × 1 × 1000 = 40000 dyne cm^{-2}.

જ્યારે પાણી ગોળામાં પ્રવેશશે, ત્યારે ગોળાના છિદ્રમાંથી છિદ્રની ત્રિજ્યા જેટલી જ ત્રિજ્યા ધરાવતો હવાનો પરપોટો ગોળામાંથી બહાર આવશે. આ પરપોટાની અંદરનું વધારાનું દબાણ = $\frac{2T}{r} = \frac{2 \times 70}{r}$.

$\therefore$ સમતોલન સ્થિતિમાં $hdg = \frac{2T}{r}$

$$\therefore\ 40000 = \frac{2 \times 70}{r}$$

$$\therefore\ r = 3.5 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

ઉદાહરણ 14 : r ત્રિજ્યાવાળાં એકસરખાં n ટીપાં એકત્ર થઈ R ત્રિજ્યાનું એક મોટું ટીપું રચે છે. જો પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ T હોય, તો વિમુક્ત થતી ઊર્જા શોધો.

ઉકેલ : r ત્રિજ્યાવાળાં n ટીપાંનું કુલ કદ = R ત્રિજ્યાનાં ટીપાંનું કદ

$$\therefore\ \left(n\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\therefore\ nr^3 = R^3 \qquad (1)$$

n ટીપાંની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $A_1 = n(4\pi r^2)$

અને એક મોટા ટીપાનું ક્ષેત્રફળ $A_2 = 4\pi R^2$

$\therefore$ ક્ષેત્રફળમાં ઘટાડો = ΔA

$$= A_1 - A_2 = n \cdot 4\pi r^2 - 4\pi R^2$$

$$= 4\pi(nr^2 - R^2)$$

$\therefore$ વિમુક્ત થતી ઊર્જા $W = T\Delta A = 4\pi T (nr^2 - R^2)$ (2)

(પરિણામ (2) મેળવવા માટે પરિણામ (1) મેળવવાની જરૂર નથી, પરંતુ પરિણામ (2) ને નીચે જણાવેલ વિશિષ્ટ સ્વરૂપમાં દર્શાવવા માટે પરિણામ (1) જરૂરી છે.)

$$W = T\Delta A = 4\pi T R^3\left(\frac{nr^2 - R^2}{R^3}\right)$$

$$= 4\pi T R^3\left(\frac{nr^2}{nr^3} - \frac{R^2}{R^3}\right)$$

$$= 4\pi T R^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \qquad ...(3)$$

ઉદાહરણ 15 : R_1 અને R_2 ત્રિજ્યાવાળા સાબુના બે પરપોટા એકત્રિત થઈને R ત્રિજ્યાવાળો એક પરપોટો રચે છે. જો વાતાવરણનું દબાણ P અને સાબુના દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ T હોય, તો સાબિત કરો કે,

$$P(R_1^3 + R_2^3 - R^3) = 4T(R^2 - R_1^2 - R_2^2)$$

આ ક્રિયા દરમિયાન તાપમાન અચળ રહે છે, તેમ ધારો.

ઉકેલ :

પહેલા પરપોટાની અંદરનું દબાણ $= P_1 = P + \frac{4T}{R_1}$

બીજા પરપોટાની અંદરનું દબાણ $= P_2 = P + \frac{4T}{R_2}$

અને સંયુક્ત પરપોટાની અંદરનું દબાણ $= P_3 = P + \frac{4T}{R}$.

અત્રે P = દરેક માટે બહારનું દબાણ = વાતાવરણનું દબાણ જે સમાન છે.

જો આ ત્રણ પરપોટાનાં કદ અનુક્રમે V_1, V_2 અને V_3 હોય તો,

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^{\,3};\ V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^{\,3};\ V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

અત્રે તાપમાન અચળ છે. બૉઇલના નિયમ મુજબ,

$$P_1V_1 + P_2V_2 = P_3V_3$$

$$\therefore \left(P + \frac{4T}{R_1}\right)\left(\frac{4}{3}\pi R_1^{\,3}\right) + \left(P + \frac{4T}{R_2}\right)\left(\frac{4}{3}\pi R_2^{\,3}\right)$$

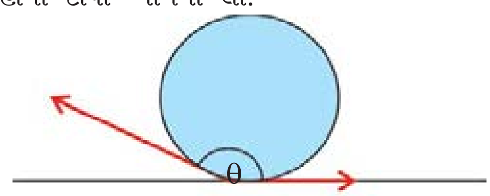
$$= \left(P + \frac{4T}{R}\right)\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\therefore \frac{4}{3}\pi P(R_1^{\,3} + R_2^{\,3} - R^3) = \frac{4}{3}\pi \times 4T$$
$$(R^2 - R_1^{\,2} - R_2^{\,2})$$

$$P\ (R_1^{\,3} + R_2^{\,3} - R^3) = 4T(R^2 - R_1^{\,2} - R_2^{\,2})$$

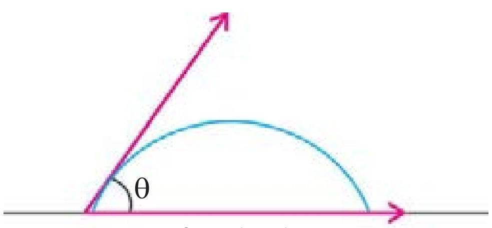
5.14 સંપર્કકોણ (Angle of Contact)

આપ સૌએ ઝાકળનાં બિંદુઓ જોયાં હશે. તેઓ ગોળાકાર હોય છે. જ્યારે પ્રવાહી ઘન પદાર્થના સંપર્કમાં આવે ત્યારે તેની સપાટી વક્ર બને છે. આ બાબત વધુ સારી રીતે સમજવા આકૃતિ 5.27(*a*) અને 5.27(*b*)માં દર્શાવેલા પ્રવાહીનાં ટીપાં ધ્યાનમાં લો.



θ ગુરુકોણ છે.

(*a*)



θ લઘુકોણ છે.

(*b*)

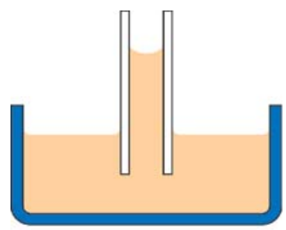
સંપર્કકોણ

આકૃતિ 5.27

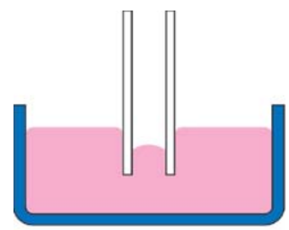
પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થના સંપર્કબિંદુએ પ્રવાહીની સપાટીને દોરેલો સ્પર્શક અને પ્રવાહીમાં રહેલા ઘન સપાટી વચ્ચેનો ખૂણો સંપર્કકોણ કહેવાય છે. સંપર્કકોણ સંપર્કમાં રહેલ પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થ પર આધાર રાખે છે. જો સંપર્કકોણ 90^oથી ઓછો હોય, તો પ્રવાહી ઘન પદાર્થને ભીંજવે છે, ઘન પદાર્થ સાથે ચોંટી જાય છે, અને આપેલ ઘન પદાર્થની બનલી કેશનળીમાં ઉપર ચઢે છે. જો સંપર્ક કોણ 90^oથી વધુ હોય તો પ્રવાહી ઘન પદાર્થને ભીંજવતું નથી, ઘન પદાર્થ સાથે ચોંટી જતું નથી અને પદાર્થની બનેલી કેશનળીમાં નીચે ઉતરે છે. ઉદાહરણ તરીકે જો પાણીનું ટીપું કમળના પાન પર હોય તો (આકૃતિ 5.27*a*) સંપર્કકોણ ગુરુકોણ છે. પણ જો પાણીનું ટીપું કાચના સંપર્કમાં હોય તો (આકૃતિ 5.27*b*) સંપર્કકોણ લઘુકોણ છે.

5.15 કેશાકર્ષણ (Capillarity)

પ્રવાહીમાં ઊભી રાખવામાં આવેલી કેશનળીમાં પ્રવાહીની ઊંચે ચડવાની કે નીચે ઊતરવાની ઘટનાને કેશાકર્ષણ કહે છે. આ ઘટનામાં પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ મુખ્ય ભાગ ભજવે છે.



પાણી (*a*)

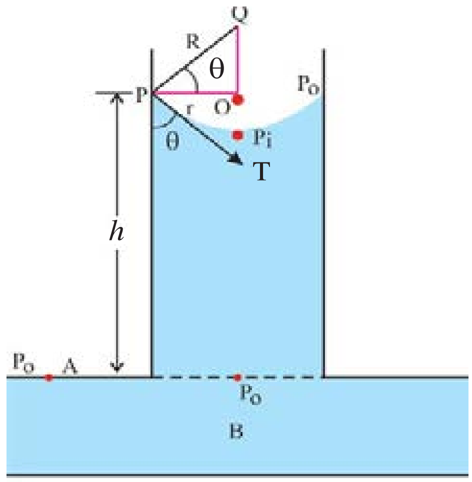


પારો (*b*)

કાચની કેશનળીમાં કેશાકર્ષણની ઘટના

આકૃતિ 5.28

આકૃતિ 5.28(*a*)માં દર્શાવ્યા મુજબ પાણીમાં કાચની કેશનળી (નાના વેહવાળી નળી) ઊભી રાખતાં કેશનળીમાં પાણી ઊંચે ચઢે છે. જ્યારે આકૃતિ 5.28(*b*)માં દર્શાવ્યા મુજબ પારામાં કાચની કેશનળી ઊભી રાખતાં કેશનળીમાં પારો નીચે ઊતરે છે. વળી, એ પણ અહીં નોંધો કે પાણી કાચને ભીંજવે છે, જ્યારે પારો કાચને ભીંજવતો નથી. અહીં તમે ધ્યાનથી જોશો તો ખ્યાલ આવશે કે કેશનળીમાં ઉપર ચડેલા પાણીની મુક્ત સપાટી (મેનિસ્કસ - meniscus) અંતર્ગોળ હોય છે, જ્યારે કેશનળીમાં નીચે ઊતરેલા પારાની મુક્ત સપાટી બહિર્ગોળ હોય છે.



કેશનળીમાં પ્રવાહીનો સ્તંભ

આકૃતિ 5.29

આકૃતિ 5.29માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે r ત્રિજ્યાની એક કેશનળીને પ્રવાહીમાં ઊભી ગોઠવતાં પ્રવાહી કેશનળીમાં h ઊંચાઈ સુધી ઉપર ચડે છે. આ સ્થિતિમાં કેશનળીમાં પ્રવાહીના અંતર્ગોળ મેનિસ્કસની વક્રતા ત્રિજ્યા ધારો કે R છે.

મેનિસ્કસની ત્રિજ્યા R અને કેશનળીની ત્રિજ્યા r વચ્ચેનો સંબંધ નીચે મુજબ મેળવી શકાય :

આકૃતિ 5.29 ની ભૂમિતિ પરથી $\angle OPQ = \theta$માં ΔOPQ,

$$\therefore \cos\theta = \frac{OP}{PQ}$$

$$= \frac{\text{કેશનળીની ત્રિજ્યા } (r)}{\text{મેનિસ્કસની ત્રિજ્યા } (R)}$$

$$\therefore R = \frac{r}{\cos\theta} \qquad (5.15.1)$$

હવે, આકૃતિમાં દર્શાવેલ સ્થિતિમાં પ્રવાહી સમતોલનમાં છે. અહીં મેનિસ્કસની અંતર્ગોળ બાજુ પર દબાણ ધારો કે P_o અને બહિર્ગોળ બાજુ પર દબાણ ધારો કે P_i છે. આ કિસ્સામાં ,$P_o > P_i$ તેમજ $P_o - P_i = \frac{2T}{R}$ ($\because$ અહીં પ્રવાહીની એક જ મુક્ત સપાટી છે.) (5.15.2)

નોંધો કે P_o એ વાતાવરણનું દબાણ છે. આટલું જ દબાણ પ્રવાહીની સમતલ સપાટી પર A બિંદુએ અને સમક્ષિતિજ એવા B બિંદુએ પણ લાગે છે.

B બિંદુ આગળનું દબાણ $P_o = P_i + h\rho g$

અહીં, ρ એ પ્રવાહીની ઘનતા અને g ગુરુત્વપ્રવેગ છે.

$$\therefore P_o - P_i = h\rho g \qquad (5.15.3)$$

સમીકરણો (5.15.2) અને (5.15.3)

$$\frac{2T}{R} = h\rho g$$

$$\therefore T = \frac{Rh\rho g}{2}$$

(5.15.1) માંથી Rનું મૂલ્ય કરતાં,

$$T = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g} \qquad (5.15.4)$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ પરથી પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ શોધી શકાય છે. આ સમીકરણ પરથી,

$$h = \frac{rh\rho g}{2\cos\theta}$$

(*i*) જો $\theta < 90^o$ હશે, તો $\cos\theta$ ધન થશે અને આ સમીકરણ પરથી h ધન મળશે. આથી, પ્રવાહી કેશનળીમાં ઊંચે ચઢે છે. (દા.ત., કાચ-પાણી).

(*ii*) જો $\theta > 90^o$ હશે તો $\cos\theta$ ઋણ થશે અને આ સમીકરણ પરથી h ઋણ મળશે. આથી, પ્રવાહી કેશનળીમાં નીચે ઊતરે છે. (દા.ત., કાચ-પારો).

આ કિસ્સામાં મેનિસ્કસ બહિર્ગોળ હોય છે. વળી,

$P_i > P_o$. હોય છે, તેથી (5.15.2)માં $P_i - P_o = \frac{2T}{R}$ લેવું જોઈએ. વળી, $P_i - P_o = h\rho g$ મળશે. તેથી અંતિમ પરિણામ (5.15.4) માં કશો ફેર પડતો નથી.

ડિટરજન્ટ કે સાબુ પાણીમાં ઓગાળતાં દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ પાણીના પૃષ્ઠતાણથી ઓછું થાય છે. પરિણામે પ્રક્ષાલન ક્ષમતામાં વધારો થાય છે.

ઉદાહરણ 16 : કાચની એક કેશનળીની ત્રિજ્યા 0.5 mm છે. તેને પાણીમાં ઊભી ગોઠવતાં કેશનળીમાં પાણીના સ્તંભની ઊંચાઈ શોધો. પાણીની ઘનતા 10^3 kg m^{-3} તથા પાણીનો કાચ સાથેનો સંપર્કકોણ 0^o છે. ગુરુત્વપ્રવેગ g = 9.8 ms^{-2} લો. પાણીનું પૃષ્ઠતાણ T = 0.0727 Nm^{-1}.

ઉકેલ :

r = 0.5 mm = 5×10^{-4} m

ρ = 103 kg m^{-3}

$\theta = 0^o \quad \therefore \cos 0^o = 1$

g = 9.8 ms^{-2}

T = 0.0727 Nm^{-1}

$$T = \frac{rh\rho g}{2cos\theta}$$

$$\therefore h = \frac{2Tcos\theta}{r\rho g}$$

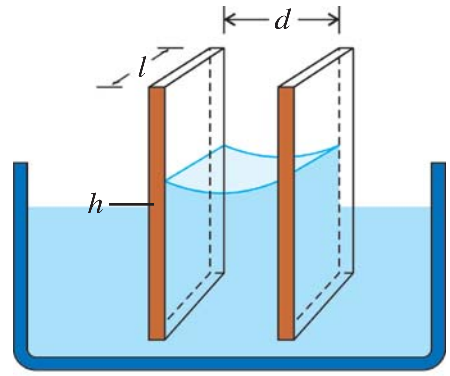
$$= \frac{2 \times 0.0727 \times 1}{5 \times 10^{-4} \times 10^{3} \times 9.8}$$

$$\therefore h = 0.0296 \text{ m} = 2.96 \text{ cm}$$

ઉદાહરણ 17 : બે લંબચોરસ કાચની તકતીઓને એકબીજાથી 1 mm દૂર રાખેલી છે. આકૃતિ 5.30માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેમને પાણીમાં અંશતઃ ડુબાડી છે કે જેથી તેમની વચ્ચેનો હવા (તથા પાણી)નો સ્તંભ ઊર્ધ્વ રહે, તો તેમની વચ્ચેની જગ્યામાં પાણી કેટલું ઊંચે ચડશે ?

$T = 70$ dyn cm^{-1}.

ઉકેલ : ધારો કે પ્લેટની પહોળાઈ l છે. આ સ્થિતિમાં બંને પ્લેટની મળીને $2l$ જેટલી લંબાઈ પર પાણી અને કાચ એકબીજાના સંપર્કમાં હશે. પાણીનો કાચના સંદર્ભમાં સંપર્કકોણ શૂન્ય છે. ધારો કે પાણી h cm ઊંચે ચઢે છે.



આકૃતિ 5.30

$\therefore$ પાણીના ઉપર ચઢેલા સ્તંભનું કદ $= ldh$.

જ્યાં d = બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર

પાણીની ઘનતા ρ હોય અને ગુરુત્વપ્રવેગ g હોય, તો પાણીના આ સ્તંભનું નીચે તરફ લાગતું વજનબળ $= (ldh)\rho g$. આ બળ $2l$ લંબાઈ પર લાગતા પૃષ્ઠતાણના બળ જેટલું હોવું જોઈએ.

$$\therefore 2Tl = (ldg)h\rho$$

$$h = \frac{2T}{dg\rho} = 1.43 \text{ cm}$$

સારાંશ

1. વહી શકે તેવા પદાર્થને તરલ કહે છે.
2. પદાર્થની એકમક્ષેત્રફળવાળી સપાટીને લંબ રૂપે લાગતા બળના મૂલ્યને દબાણ કહે છે. દબાણ અદિશ રાશિ છે. તેનો એકમ Nm^{-2} અથવા P_a છે.
3. જો બળ સપાટીને દોરેલા લંબ સાથે θ ખૂણો બનાવે તેમ લાગતું હોય, તો બળના $Fcos\theta$ ઘટકને કારણે દબાણ પેદા થાય છે અને તેથી દબાણ
$$P = \frac{Fcos\theta}{A}$$
4. પદાર્થ દળ અને કદના ગુણોત્તરને ઘનતા કહે છે. ઘનતાને એકમ kg m^{-3} છે.
5. પદાર્થની ઘનતા અને 277K તાપમાને પાણીની ઘનતાના ગુણોત્તરને વિશિષ્ટ ઘનતા કહે છે. વિશિષ્ટ ઘનતા પરિમાણ રહિત છે.
6. **પાસ્કલનો નિયમ :** જો ગુરુત્વાકર્ષણની અસરો અવગણવામાં આવે, તો તરલમાં સર્વત્ર દબાણ સમાન હોય છે.
7. **પાસ્કલનો દબાણ-પ્રસરણનો નિયમ :** બંધ પાત્રમાં ભરેલા અદબનીય તરલ પરના દબાણમાં કરેલો ફેરફાર, તરલના પ્રત્યેક ભાગમાં અને પાત્રની દીવાલ પર એકસરખી રીતે પ્રસરે છે. આ દબાણ પાત્રની દીવાલને લંબ હોય છે.
8. હાઇડ્રોલિક લિફ્ટ, હાઇડ્રોલિક બ્રેક, ડોર-ક્લોઝર અને વાહનોના શૉક એબ્સોર્બર પાસ્કલના નિયમ પર કાર્ય કરે છે.
9. તરલમાં ઊંડાઈ સાથે દબાણમાં થતો ફેરફારનો દર ρg જેટલો છે.

10. અદબનીય તરલ સ્તંભને કારણે તળિયે ઉદ્‌ભવતું hpg જેટલું હોય છે.

11. તરલ સ્તંભને કારણે ઉદ્‌ભવતું દબાણ પાત્રના આકાર કે ક્ષેત્રફળ પર આધારિત નથી.

12. **આર્કિમિડિઝનો સિદ્ધાંત :** જ્યારે કોઈ પદાર્થને પ્રવાહીમાં આંશિક કે સંપૂર્ણપણે ડુબાડવામાં આવે ત્યારે તેના પર લાગતું ઉત્લાવક બળ તેણે વિસ્થાપિત કરેલા પ્રવાહીના વજન જેટલું હોય છે અને વિસ્થાપિત પ્રવાહીના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર ઊર્ધ્વ દિશામાં લાગે છે.

13. **ફ્લોટેશનનો નિયમ :** જ્યારે પદાર્થનું વજન એ તરતા પદાર્થના ડૂબેલા ભાગ દ્વારા વિસ્થાપિત કરાયેલા પ્રવાહીના વજન જેટલું હોય ત્યારે તે પદાર્થ પ્રવાહીમાં તરે છે.

14. **સ્થાયી વહન :** જે તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલનો વેગ સમય સાથે અચળ રહેતો હોય તેવા વહનને સ્થાયી વહન કહે છે.

15. **પ્રક્ષુબ્ધ વહન :** જો તરલ વહનમાં દરેક બિન્દુ પાસે તરલના વેગમાં સમય સાથે અનિયમિત તેમજ ઝડપી ફેરફાર થાય, તો તેવા વહનને પ્રક્ષુબ્ધ વહન કહે છે.

16. **અચક્રીય વહન :** જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલના અંશને તે બિંદુને અનુલક્ષીને કોઈ પરિણામી કોણીય વેગ ન હોય, તો તરલનું વહન અચક્રીય વહન કહેવાય.

17. **અદબનીય વહન :** જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલની ઘનતા અચળ રહેતી હોય, તો તેવા વહનને અદબનીય વહન કહે છે.

18. **અશ્યાન વહન :** જે તરલ માટે શ્યાનતા-ગુણાંક મૂલ્ય ઓછું હોય તેવા તરલના વહનને અશ્યાન વહન કહે છે.

19. આદર્શ તરલનું વહન સ્થાયી, અચક્રિય, અદબનીય અને અશ્યાન પ્રકારનું હોય છે.

20. **પ્રવાહરેખા :** વહેતા તરલમાં તરલકણના ગતિમાર્ગને પ્રવાહરેખા કહે છે.

21. **ધારારેખા :** જે વક્ર પરના દરેક બિંદુ પાસેનો સ્પર્શક તે બિંદુ પાસેથી પસાર થતા કણના વેગની દિશામાં હોય, તેવા વક્રને ધારારેખા કહે છે.

22. ધારારેખાના સમૂહથી બનતી કાલ્પનિક નળીને વહનનળી કહે છે.

23. **કદ ફ્લક્સ :** કોઈ પણ આડછેદમાંથી એકમસમયમાં પસાર થતા તરલના કદને કદ ફ્લક્સ કહે છે. તેનું મૂલ્ય આડછેદના ક્ષેત્રફળ અને વેગના ગુણાકાર જેટલું હોય છે.

24. **ડાયનેમિક લિફ્ટ :** જ્યારે કોઈ વસ્તુ તરલને સાપેક્ષ ગતિ કરે ત્યારે એક બીજું બળ ઉદ્‌ભવે છે. જે વસ્તુને તેના મૂળ માર્ગ પરથી વિચલિત કરે છે. આ ઘટનાને ડાયનેમિક લિફ્ટ કહે છે.

25. **ઍરોફોઇલ :** જે ઘન પદાર્થ હવામાં સમક્ષિતિજ દિશામાં ગતિ કરતો, ત્યારે તેના પર તેના આકારને કારણે ઊર્ધ્વ દિશામાં બળ લાગે તેવા પદાર્થને ઍરોફોઇલ કહે છે.

26. **સ્તરીય વહન :** સ્થાયી પ્રવાહમાં તરલના જુદા-જુદા સ્તર એકબીજામાં ભળી ગયા વિના એકબીજા પર સરકે છે. આવા વહનને સ્તરીય વહન કહે છે.

27. **શ્યાનતાબળ :** સ્તરીય વહનમાં તરલના કોઈ પણ બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ હોય છે. પરિણામે તેમની સંપર્કસપાટી પર સ્પર્શીય અવરોધક બળ ઉત્પન્ન થાય છે. આવા અવરોધક બળને શ્યાનતાબળ કહે છે.

28. **વેગ-પ્રચલન :** તરલમાં સ્તરીય વહન દરમિયાન વહનને લંબ દિશામાં એકબીજાથી એકમઅંતરે રહેલા બે સ્તરોના વેગના તફાવતને વેગ-પ્રચલન કહે છે. તેનો એકમ s^{-1} છે.

29. **શ્યાનતા-ગુણાંક :** તરલના સ્તરીય વહનમાં કોઈ પણ બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચે એકમ વેગ-પ્રચલન અને એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉદ્‌ભવતા શ્યાનતાબળને તરલનો શ્યાનતા-ગુણાંક કહે છે.

30. **સ્ટોક્સનો નિયમ :** મોટા વિસ્તારવાળા અને η જેટલો શ્યાનતા-ગુણાંક ધરાવતા શ્યાન માધ્યમમાં v જેટલા વેગથી ગતિ કરતા r ત્રિજ્યાવાળા ગોળાકાર પદાર્થ પર લાગતું શ્યાનતાબળ $6\pi\eta rv$ જેટલું હોય છે.

31. જ્યારે નળીમાંથી તરલનું વહન થતું હોય ત્યારે વહનનો પ્રકાર તરલની ઘનતા ρ, વેગ v, નળીના વ્યાસ D અને તરલની શ્યાનતા η પર આધારિત છે. જે રેનોલ્ડ્ઝ-અંકથી નક્કી કરી શકાય છે.

રેનોલ્ડ્ઝ-અંક $N_R = \dfrac{\rho D v}{\eta}$

જો $N_R < 2000$ તો પ્રવાહ, ધારારેખી $N_R > 3000$ તે પ્રક્ષુબ્ધ પ્રવાહ અને $2000 < N_R < 3000$ તો પ્રવાહ અનિશ્ચિત હોય છે.

32. વેગના જે મહત્તમ મૂલ્ય સુધી પ્રવાહ ધારારેખી રહે છે તે વેગને ક્રાંતિ વેગ કહે છે.

33. **આસક્તિ બળ :** જુદા-જુદા પ્રવાહના અણુઓ વચ્ચે લાગતાં આકર્ષણબળોને આસક્તિ બળ કહે છે.

34. **સંસક્તિ બળ :** એક જ દ્રવ્યના અણુઓ વચ્ચે લાગતા આકર્ષણબળને સંસક્તિ બળ કહે છે.

35. અણુ જે મહત્તમ અંતર સુધી રહેલા બીજા અણુ પર બળ લગાડી શકે તે અંતરને અણુક્રિયા અવધિ કહે છે. અણુક્રિયા અવધિ જેટલી ત્રિજ્યાવાળો ગોળા કે જેના કેન્દ્ર પર અણુ હોય તેવા ગોળાને અણુનો અણુક્રિયા-ગોળા કહે છે.

36. અચળ તાપમાને પ્રવાહીની સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં એક એકમ જેટલો વધારો કરવા માટે કરવા પડતા કાર્યને પૃષ્ઠતાણ કહે છે. વળી, પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પર એકમલંબાઈની કાલ્પનિક રેખાની એક બાજુ રહેલા પ્રવાહીના અણુઓ રેખાની બીજી બાજુ પર રહેલા અણુઓ પર રેખાને લંબ અને સપાટીને સમાંતર જે બળ લગાડે છે, તેને પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ કહે છે. પૃષ્ઠતાણનો એકમ N/m અથવા J/m^2 છે.

37. પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીનો આકાર તેની બે બાજુ લાગતાં દબાણ પર આધારિત છે. જો ઉપરની દિશામાં દબાણ વધુ હોય તો સપાટી અંતર્ગોળ હોય છે અને જો નીચેની દિશાનું દબાણ વધુ હોય તો સપાટી બહિર્ગોળ હોય છે.

38. પરપોટાની અંદરનું દબાણ P_i અને બહારનું દબાણ P_o હોય, તો હવામાં રહેલા પરપોટા માટે $P_i - P_o = \dfrac{4T}{R}$.

જ્યાં T પૃષ્ઠતાણ અને R પરપોટાની ત્રિજ્યા છે.

પ્રવાહીના બુંદ કે પ્રવાહીમાં રહેલા પરપોટા માટે $P_i - P_o = \dfrac{2T}{R}$

39. પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થ એકબીજાના સંપર્કમાં આવતા પ્રવાહીની સપાટી વક્ર બને છે. પ્રવાહી ઘન પદાર્થને જ્યાં સ્પર્શે ત્યાં પ્રવાહીની સપાટીને દોરેલો સ્પર્શક અને પ્રવાહીમાં રહેલી ઘનસપાટી વચ્ચેનો ખૂણો સંપર્કકોણ કહેવાય છે.

40. પ્રવાહીમાં ઊભી રાખવામાં આવેલી કેશનળીમાં પ્રવાહીની ઊંચે ચઢવાની કે નીચે ઊતરવાની ઘટનાને કેશાકર્ષણ કહે છે.

41. પાણીમાં સાબુ કે ડિટરજન્ટ ઓગાળતાં પ્રવાહીની પૃષ્ઠતાણ ઘટે છે અને પ્રક્ષાલન-ક્ષમતા વધે છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. ઍરોપ્લેનની સમક્ષિતિજ સમતલમાં રહેલી પાંખ ઉપર હવાની ઝડપ 120 ms^{-1} અને નીચે તે 90 ms^{-1} છે. જો હવાની ઘનતા 1.3 kgm^{-3} હોય તો પાંખ ઉપર અને નીચે દબાણનો તફાવત .... છે. (પાંખની જાડાઈ અવગણો.)

(A) 156 Pa (B) 39 Pa (C) 4095 Pa (D) 6300 Pa

2. m દળ અને r ત્રિજ્યાવાળી એક ગોળી શ્યાન માધ્યમમાં પતન કરે છે, તો તેનો અંતિમ વેગ (ટર્મિનલ વેગ) ....ના સમપ્રમાણમાં છે.

(A) માત્ર $\frac{1}{r}$ (B) માત્ર m (C) $\sqrt{\frac{m}{r}}$ (D) $\frac{m}{r}$

3. 10 cm^2 ક્ષેત્રફળ ધરાવતી એક પ્લેટ બીજી મોટી પ્લેટ પર મૂકેલ છે. બે પ્લેટ વચ્ચે 1 mm જાડું ગ્લિસરિનનું પાતળું સ્તર છે. ઉપરની પ્લેટને 10 ms^{-1} જેટલા વેગથી ગતિ કરાવવા માટે જરૂરી બાહ્ય બળ .... છે. (η ગ્લિસરીનનો શ્યાનતા-ગુણાંક = 20 poise)

(A) 80 dyne (B) 200×10^3 dyne

(C) 800 dyne (D) 2000×10^3 dyne

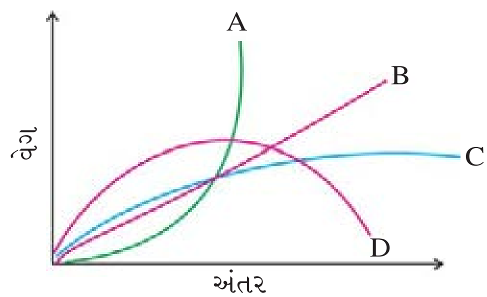
4. શ્યાન માધ્યમમાં એક નાની ગોળી પતન કરે છે, તો આકૃતિ 5.31માંનો .... વક્ર તેની ગતિનું નિરૂપણ કરે છે.

(A) A

(B) B

(C) C

(D) D



આકૃતિ 5.31

5. રેનોલ્ડ્ઝ-અંકનું મૂલ્ય .... ધરાવતા તરલ માટે ઓછું છે.

(A) ઓછા વેગ (B) ઓછી ઘનતા (C) વધુ શ્યાનતા (D) આપેલા ત્રણે વિકલ્પ

6. રેનોલ્ડ્ઝ અંકના સંદર્ભમાં નીચેનામાંથી કયા માટે ધારારેખી વહનની શક્યતા સૌથી વધુ છે ?

(A) ઓછી ρ (B) ઊંચી ρ, ઊંચી η

(C) ઊંચી ρ, ઓછી η (D) ઓછી ρ, ઊંચી η

7. સાબુના દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ 1.9×10^{-2} Nm^{-1} છે, તો 2.0 cm વ્યાસનો પરપોટો ફુલાવવા માટે કરવું પડતું કાર્ય .... છે.

(A) $17.6 \times 10^{-6} \pi$ J (B) $15.2 \times 10^{-6} \pi$ J

(C) $19 \times 16^{-6} \pi$ J (D) $10^{-4} \pi$ J

8. બે પરપોટા માટે અંદરના વધારાના દબાણના મૂલ્ય 1.01 atm અને 1.02 atm છે, તો તેમની સપાટીનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર .... છે.

(A) 4 : 1 (B) 1 : 26 (C) 8 : 1 (D) 1 : 8

9. એક કેશનળીમાં h ઊંચાઈ સુધી પ્રવાહી ઉપર ચઢે છે. નીચેના પૈકી કયા કિસ્સામાં પ્રવાહીની ઊંચાઈ h થી વધુ હશે ?

(A) અધોદિશામાં પ્રવેગિત લિફ્ટમાં

(B) ઊર્ધ્વ-દિશામાં પ્રવેગિત લિફ્ટમાં

(C) ધ્રુવો પર

(D) અચળ રહેશે

10. 0.5 cm ત્રિજ્યાની નળીમાંથી 10 cm s^{-1}ના સરેરાશ વેગથી ગતિ કરતા પાણીનું વહન .... પ્રકારનું હશે. (η_{water} = 0.1 poise, ρ_{water} = 1g cm^{-3})

(A) ધારારેખી (B) અસ્થિર

(C) પ્રક્ષુબ્ધ (D) આપેલ વિકલ્પ પૈકી એક પણ નથી.

11. 4 cm ત્રિજ્યાની એક રિંગને (T = 63 dyne cm^{-1}) પૃષ્ઠતાણ ધરાવતા ગ્લિસરીનમાં બોળીને સપાટી પર સમક્ષિતિજ રહે તે રીતે ગ્લિસરીનમાંથી બહાર કાઢવામાં આવે, તો ગ્લિસરીનની સપાટીથી છૂટી પડતી વખતે તેના પર તેના વજન ઉપરાંત .... dyne બળ લગાડવું પડે.

(A) 63 π (B) 504 π (C) 1008 π (D) 1512 π

12. 10 cm લાંબી અને 4 cm પહોળી એક લંબચોરસ ફ્રેમમાં સાબુના દ્રાવણની ફિલ્મ રચાયેલ છે, તો ફ્રેમની નાની ધાર પર પૃષ્ઠતાણનું બળ .... લાગે. (સાબુના દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ = 30 dyne cm^{-1} છે.)

(A) 60 (B) 120 (C) 300 (D) 240

13. ઉપરના પ્રશ્નમાં વર્ણવેલ ફિલ્મ રચવા માટે પૃષ્ઠતાણનાં બળો વિરુદ્ધ .... erg યાંત્રિક કાર્ય થાય.

(A) 1200 (B) 2400 (C) 2600 (D) 4800

14. જ્યારે હવા ધરાવતો પરપોટા તળાવના તળિયેથી તળાવની સપાટી પર આવે ત્યારે તે ત્રિજ્યા બમણી થાય છે. જો 10 *m* પાણીનો સ્તંભ વાતાવરણનું દબાણ ઉત્પન્ન કરી શકે, તો તળાવની ઊંડાઈ .... *m* હશે. (g = 10 m s^{-2} લો)

(A) 10 (B) 20 (C) 70 (D) 80

15. અદબનીય પ્રવાહી એક સમક્ષિતિજ નળીમાં વહે છે. બિંદુ A પાસે નળીની ત્રિજ્યા x અને B પાસે તેની ત્રિજ્યા $\frac{x}{2}$ છે. તો બિંદુ A અને બિંદુ B પાસે તરલના વેગનો ગુણોત્તર .... છે.

(A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 1 : 4 (D) 4 :1

16. એક ટાંકીમાં રહેલા છિદ્રમાંથી તરલના વહનદર જો છિદ્ર .... હોય, તો વધુ હશે.

(A) ટોચ પાસે (B) તળિયા પાસે

(C) મધ્યમાં (D) આપેલ વિકલ્પમાંથી એક પણ નહીં.

17. પ્રવાહીના અણુઓ P, Q અને R અનુક્રમે પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પર, પૃષ્ઠમાં અને પૃષ્ઠ નીચે આવેલ છે. જો તેમની સ્થિતિ-ઊર્જા U_P, U_Q અને U_R હોય તો,

(A) $U_P < U_Q < U_R$ (B) $U_P < U_R < U_Q$

(C) $U_R < U_P < U_Q$ (D) $U_R < U_Q < U_P$

18. શ્યાન પ્રવાહીમાં એક નાની ગોળી મુક્ત કરવામાં આવે છે, તો તેનો વેગ ....

(A) વધ્યા કરે. (B) ઘટ્યા કરે.

(C) અચળ રહે. (D) વહેલા વધે પછી અચળ રહે.

જવાબો

1. (C)	**2.** (D)	**3.** (D)	**4.** (C)	**5.** (D)	**6.** (D)
7. (B)	**8.** (A)	**9.** (A)	**10.** (A)	**11.** (C)	**12.** (D)
13. (B)	**14.** (C)	**15.** (C)	**16.** (B)	**17.** (D)	**18.** (D)

નીચે આપેલ પ્રશ્નોનો જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. પાસ્કલના દબાણ પ્રસરણનો નિયમ લખો.
2. કોને કારણે વધુ દબાણ ઉત્પન્ન થાય ? 75 cm ઊંચાઈવાળા પારાના સ્તંભથી કે 10 m ઊંચાઈવાળા પાણીના સ્તંભથી ? (પારાની વિશિષ્ટ ઘનતા = 13.6)
3. પાણીના છંટકાવ માટે વપરાતા 'સ્પ્રિંકલર'ના સિદ્ધાંત જણાવો.
4. 'તરલના વહન માટે બર્નુલીનું સમીકરણ ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમનું એક સ્વરૂપ છે.' વિધાન સાચું છે કે ખોટું ?
5. પ્રેસરહેડ, વેલોસિટી હેડ અને એલિવેશન હેડના એકમો જણાવો.
6. રેલ્વે-પ્લેટફૉર્મ પર પાટાની નજીક ઊભા હોઈએ ત્યારે ઝડપથી પસાર થતી ટ્રેન તરફ ખેંચાણ કેમ અનુભવાય છે ?
7. ઍરોફોઈલ શું છે ?
8. તરલની શ્યાનતામાં તાપમાન સાથે શું ફેરફાર થાય છે ?
9. પહોળી નળીમાંથી વહેતું તરલ સાંકડી નળીમાં પ્રવેશતાં રેનોલ્ડ્ઝ-અંકના મૂલ્યમાં શું ફેરફાર થશે ? (નળી સમક્ષિતિજ છે.)
10. અમુક કિટકો પાણી પર ચાલી શકે છે. કારણ આપો.
11. પાણીનાં ટીપાં અને રેઈનકોટના મટીરિયલ વચ્ચે સંપર્કકોણ લઘુકોણ હશે કે ગુરુકોણ ?
12. પૃષ્ઠતાણની વ્યાખ્યા આપો અને તેનાં એકમો અને પરિમાણ જણાવો.
13. એક પાતળી નળીના બે છેડાઓ પર એક નાનો અને એક મોટો એમ બે પરપોટા છે. આ સ્થિતિમાં પરપોટાઓનું શું થશે ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. પાસ્કલનો નિયમ લખો અને સાબિત કરો.
2. h ઊંચાઈવાળા અને ρ ઘનતાવાળા તરલ સ્તંભને કારણે ઉદ્‌ભવતા દબાણનું સૂત્ર મેળવો.
3. ધારારેખી પ્રવાહ એટલે શું ? સ્થાયી અદબનીય પ્રવાહ માટે સાતત્ય-સમીકરણ મેળવો.
4. સ્થાયી, અદબનીય, અચક્રીય, અશ્યાન તરલ પ્રવાહ માટે બર્નુલીનું સમીકરણ મેળવો.
5. યોગ્ય આકૃતિ અને સમીકરણની મદદથી વેન્ચુરીમીટરનું કાર્ય સમજાવો.
6. સ્તરીય પ્રવાહ એટલે શું ? આવા પ્રવાહ માટે શ્યાનતાબળની સમજૂતી આપો.
7. સ્ટોક્સનો નિયમ લખો અને તેનો ઉપયોગ કરીને શ્યાન પ્રવાહીમાં પતન કરતાં નાના લીસા ગોળાનો પ્રારંભિક પ્રવેગનું સૂત્ર મેળવો.
8. રેનોલ્ડ્ઝ-અંક પર ટૂંક નોંધ લખો.
9. હવામાં રહેલા પરપોટા માટે પરપોટાની અંદરના વધારાના દબાણનું સૂત્ર મેળવો.
10. કેશાકર્ષણ એટલે શું ? કેશનળીને પ્રવાહીમાં ઊભી રાખતાં કેશનળીમાં ઉપર ચઢતા પ્રવાહીની ઊંચાઈ માટે સમીકરણ મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. સમક્ષિતિજ દિશામાં રાખેલ એક સિરિંજના પિસ્ટન અને નોઝલના વ્યાસ અનુક્રમે 5 mm અને 1 mm છે. પિસ્ટનને 0.2 m s^{-2}ના અચળ વેગથી અંદર તરફ ધકેલવામાં આવે છે. નોઝલમાંથી બહાર આવતા પાણી દ્વારા જમીનને સ્પર્શે તે પહેલાં કપાતું સમક્ષિતિજ અંતર ગણો. (g = 10 m s^{-1}) સિરિંજ જમીનથી 1 m ઊંચાઈએ છે. [જવાબ : $\sqrt{5}$ m]

2. એક U ટ્યૂબમાં પાણી અંશતઃ ભરેલું છે અને તેને ઊર્ધ્વ સમતલમાં રાખેલ છે. બેમાંથી એક ભુજમાં પાણીમાં ભળી ન જાય તેવું બીજું પ્રવાહી રેડવામાં આવે છે. આથી બીજા ભુજમાં પાણી 'd' એકમ ઊંચાઈ જેટલું ચઢે છે. આ સમયે પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પાણીની મુક્ત સપાટીથી 'h' એકમ જેટલી વધુ ઊંચાઈએ છે, તો પ્રવાહીની ઘનતા શોધો. પાણીની ઘનતા ρ એકમ છે. [જવાબ : $\left(\frac{2d}{2d + h}\right)\rho$]

3. સમક્ષિતિજ રાખેલ એક અસમાન આડછેદવાળી પાઈપમાંથી પાણી પસાર થઈ રહ્યું છે. તેમાં કોઈ એક બિંદુ પાસે પાણીનો વેગ $0.2 ms^{-1}$ અને દબાણ 30 mm – Hg જેટલું છે. જે બિંદુ પાસે પાણીનો વેગ $1.2\ ms^{-1}$ હોય ત્યાં દબાણ કેટલું હશે ? (પારાની ઘનતા $= 13.6\ g\ cm^{-3}$, $g = 1000\ cm\ s^{-2}$, પાણીની ઘનતા $= 1\ g\ cm^{-3}$) [જવાબ : 24.85 mm – Hg]

4. સાબુના દ્રાવણના 1 cm ત્રિજ્યાના પરપોટાનું કદ આઠ ગણું કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય શોધો. સાબુના દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ $30\ dyne\ cm^{-1}$ છે. [જવાબ : 2261 erg.]

5. એક U ટ્યૂબની ભુજાઓના વ્યાસ અનુક્રમે 10 mm અને 1 mm છે. તે અંશતઃ પાણીથી ભરેલી છે અને ઊર્ધ્વ સમતલમાં રાખેલ છે. તો તેની બંને ભુજામાંના પાણીના સ્તંભની ઊંચાઈનો તફાવત શોધો. પાણીનું પૃષ્ઠતાણ $= 70\ dyne\ cm^{-1}$. અને સંપર્કકોણ $= 0^{\circ}$ છે. $g = 980\ cm\ s^{-2}$) [જવાબ : 2.8571 cm]

6. 0.2 cm વ્યાસનો હવાનો પરપોટો પાણીમાં 200 cm/sના અચળ વેગથી ઉપર ચઢે છે. જો પાણીની ઘનતા $1\ g\ cm^{-3}$ હોય, તો પાણીનો શ્યાનતા-ગુણાંક શોધો. અહીં હવાની ઘનતાને પાણીની ઘનતાની સાપેક્ષ અવગણો. પરપોટાના કદમાં થતો ફેરફારને અવગણો. ($g = 9.8\ ms^{-2}$) [જવાબ : 0.0109 poise)

7. 0.5 cm ત્રિજ્યાની નળીમાં અક્ષથી 0.4 cm અંતરે નળાકાર પ્રવાહી સ્તરનો વેગ 3.6 cm/s છે, તો અક્ષથી 0.3 cm અંતરે પ્રવાહી સ્તરનો વેગ શોધો. [સૂચન : $v = \frac{P}{4\eta l}(r^2 - x^2)$]
[જવાબ : 6.4 cm/s]

8. 8 cm વ્યાસ ધરાવતી 4km લંબાઈની એક સમક્ષિતિજ સુરેખ પાઈપલાઈનમાંથી 20 litre/secondના દરથી પાણીનું વહન જાળવી રાખવા માટે તેના બે છેડા વચ્ચે કેટલો દબાણ તફાવત લગાડવો જોઈએ ? પાણીનો શ્યાનતા-ગુણાંક $\eta_{water} = 10^{-2}$ MKS એકમ, શ્યાનતા બળ સિવાયનાં બળો અવગણો. (સૂચન : $V = \frac{\pi p r^4}{8\eta l}$) [જવાબ : $7.96 \times 10^5\ P_a$]

9. $10^5\ Nm^{-2}$ દબાણ ધરાવતી હવા ભરેલ એક નળાકારમાં 2.4×10^{-4}m ત્રિજ્યાનો સાબુના દ્રાવણનો એક પરપોટો છે. હવે નળાકારની હવાનું તાપમાન અચળ રાખીને સંકોચન કરતાં પરપોટાની ત્રિજ્યા અડધી થાય છે, તો નળાકારમાં હવાનું નવું દબાણ શોધો. સાબુના દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ $0.03\ Nm^{-1}$ છે. [જવાબ : $8.03 \times 10^5\ P_a$]

•

પ્રકરણ 6

થરમૉડાઈનેમિક્સ

6.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

શિયાળાની કડકડતી ઠંડી રાત હોય કે ઉનાળાની પરસેવે રેબઝેબ કરી નાખતી બપોર, આપણા શરીરનું તાપમાન 98.60 °F એટલે કે 37.00 °C જેટલું જળવાઈ રહે તે જરૂરી છે. આપણા શરીરની આંતરિક રચના એવી છે કે જેથી સામાન્ય સંજોગોમાં આપણા શરીરના તાપમાનનું નિયમન જૈવિક પ્રક્રિયાઓ દ્વારા થાય છે, પરંતુ જ્યારે વાતાવરણમાં ખૂબ જ ઠંડી કે ગરમી હોય ત્યારે આપણે શરીરને બહારથી રક્ષણ આપવું પડે છે.

તમે અનુભવ્યું હશે કે જ્યારે કોલ્ડ (ઠંડી) કૉફીનો કપ અને ગરમ ચાનો કપ થોડા સમય માટે ખુલ્લો રાખવામાં આવે, તો કૉફી ગરમ થાય છે, જ્યારે ચા ઠંડી થાય છે અને છેવટે બન્નેનું તાપમાન ઓરડાના તાપમાન જેટલું થઈ જાય છે. આ પ્રકારની પ્રક્રિયાઓ થરમૉડાઇનેમિક્સના શૂન્ય ક્રમના નિયમ સુધી દોરી જાય છે.

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં અમુક ચોક્કસ તાપમાન અને દબાણે દ્રવ્યના અમુક ચોક્કસ સ્વરૂપનું અસ્તિત્વ **ફેઝ ડાયાગ્રામ** વડે સમજાવેલ છે.

તાપમાન અને **ઉષ્મા** જેવા શબ્દો દરરોજની જીવનશૈલીમાં એકસરખા અર્થમાં ઉપયોગમાં લેવાય છે, પરંતુ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આ બન્ને શબ્દોના અર્થ તદ્દન જુદા છે. આ પ્રકરણમાં તાપમાનની વ્યાખ્યા, દ્રવ્યના ભૌતિક (ઉષ્મીય) ગુણધર્મોના વિધેયના રૂપમાં તથા જુદાં-જુદાં માપક્રમ અને તેમની વચ્ચેના સંબંધોના રૂપમાં આપવામાં આવી છે. બે પદાર્થો વચ્ચે તાપમાનના તફાવત સાથે સંકળાયેલ ઉષ્મા એટલે કે વિનિમય પામતી ઉષ્મા-ઊર્જાની પણ ચર્ચા કરેલ છે.

થરમૉડાઇનેમિક્સનો પહેલો નિયમ ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમનું વ્યાપક સ્વરૂપ છે, જે મુજબ ઊર્જાનો વિનિમય એ ઉષ્માના વિનિમય, યાંત્રિક ઊર્જાના રૂપમાં કાર્ય, અને તંત્રની આંતરિક ઊર્જા સાથે સંકળાયેલ છે. વિશિષ્ટ ઉષ્મા તેમજ ઉષ્માધારિતાની ચર્ચા પણ આ પ્રકરણમાં કરેલ છે.

આજે આપણે ગૃહઉપયોગી સાધનો જેવા કે રેફ્રિજરેટર અને ઍરકંડિશનરની ગુણવત્તાના સ્ટાર રેટિંગ જોઈએ છીએ, વાહનોની ગુણવત્તા વાહન ઉત્પાદકો, પેટ્રોલ કે ડીઝલના સંદર્ભમાં km/litre ની વાહનની ઈંધણ ક્ષમતા વડે દર્શાવે છે. આ બધાં સાધનો એક પ્રકારની ઊર્જાનું બીજા પ્રકારની ઊર્જામાં રૂપાંતરણ

કરવાની તેમની કાર્યક્ષમતા દર્શાવે છે. થરમૉડાઇનેમિક્સનો બીજો નિયમ આ પ્રક્રિયાઓની મર્યાદા વ્યાખ્યાયિત કરે છે.

ઉષ્મા-એન્જિન અને કાર્નોટ-એન્જિનની કાર્યપદ્ધતિ પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં સમજાવેલ છે.

6.2 થરમૉડાઇનેમિક તંત્ર અને પરિસરનું અર્થઘટન (Concept of Thermodynamic System and Environment)

થરમૉડાઇનેમિક્સમાં 'વસ્તુ'ને બદલે વ્યાપક રીતે તંત્ર શબ્દ પ્રયોજવામાં આવે છે. વિશ્વના જે ભાગનો થરમૉડાઇનેમિક અભ્યાસ કરવાનો હોય તે ભાગને **થરમૉડાઇનેમિક તંત્ર (system)** કહે છે. તંત્ર એક પારિમાણિક, દ્વિ-પારિમાણિક કે ત્રિ-પારિમાણિક હોઈ શકે છે. તે એક જ વસ્તુ કે પછી અનેક વસ્તુઓનું બનેલું હોઈ શકે. તંત્ર જે વસ્તુઓનું બનેલું હોય તે વસ્તુઓને તંત્રના **ઘટકો** કહેવાય. તંત્ર **વિકિરણ (radiation)**નું બનેલું પણ હોઈ શકે અથવા વિકિરણ એ તંત્રનો કોઈ ઘટક હોઈ શકે છે.

તંત્રની આસપાસના બાકીના ભાગ (વિશ્વ) કે જેની સીધી અસર તંત્ર પર થતી હોય, તેને તંત્રનું **પરિસર કે વાતાવરણ** (surrounding or environment) કહે છે. તંત્ર અને તેના પરિસરને જુદા પાડતી હદને તંત્રની **પરિસીમા (સરહદ)** કહે છે. તંત્ર તેના પરિસર સાથે કેવા પ્રકારની આંતરક્રિયા (interaction) કરશે, તેનો આધાર પરિસીમાના પ્રકાર પર રહેલો છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાનની દરેક શાખામાં કોઈ પણ તંત્રનું સ્થૂળ (macroscopic) વર્ણન તેના અમુક માપી શકાય તેવા ગુણધર્મોના આધારે કરવામાં આવે છે. દા. ત., દૃઢ વસ્તુની ચાકગતિનો અભ્યાસ કરતી વખતે તેના આંતરિક પાસાની ચિંતા કર્યા સિવાય, કોઈ યામાક્ષોની સાપેક્ષે જુદા-જુદા સમયે તેના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના સ્થાન અને વેગ જેવી સ્થૂળ રાશિઓનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. આવી રાશિઓને **યાંત્રિક યામો** (mechanical co–ordinates) કહે છે. યાંત્રિક યામોની મદદથી કોઈ યામાક્ષોની સાપેક્ષે દૃઢ વસ્તુની સ્થિતિ-ઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જાનાં મૂલ્યો અને તે પરથી યાંત્રિક-ઊર્જાનું મૂલ્ય નક્કી થાય છે.

થરમૉડાઇનેમિક્સમાં તંત્રની આંતરિક અવસ્થા પર સીધી રીતે અસર કરનાર સ્થૂળ રાશિઓને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. આવી રાશિઓને **થરમૉડાઇનેમિક યામો** (thermodynamic co-ordinates) કહે છે. થરમૉડાઇનેમિક યામો વડે રજૂ થતા તંત્રને થરમૉડાઇનેમિક તંત્ર કહે છે.

તંત્રના યાંત્રિક અને ઉષ્મીય ગુણધર્મોનાં મૂલ્યો પરથી તંત્રની થરમૉડાઇનેમિક અવસ્થા (state) નક્કી થાય છે. દા. ત., કોઈ વાયુતંત્રનું દબાણ, કદ જેવા યાંત્રિક ગુણધર્મો તથા તાપમાન, ઉષ્મા ઊર્જા નો જથ્થો જેવા ઉષ્મીય ગુણધર્મો તંત્રની થરમૉડાઇનેમિક અવસ્થા નક્કી કરે છે.

તંત્ર અને તેના પરિસર વચ્ચે થતી આંતરક્રિયાને થરમૉડાઇનેમિક પ્રક્રિયા (process) કહે છે.

જો તંત્ર પોતાના પરિસર સાથે આંતરક્રિયા ન કરતું હોય તો તે **અલગ કરેલું તંત્ર** (isolated system) કહેવાય છે. આવા તંત્રના ઉષ્મીય અને યાંત્રિક ગુણધર્મો અચળ રહે છે અને તંત્ર કોઈ ચોક્કસ સંતુલિત થરમૉડાઇનેમિક અવસ્થામાં છે તેમ કહેવાય.

તંત્ર પોતાના પરિસર સાથે આંતરક્રિયા કરીને ઉષ્મા-ઊર્જા અને/અથવા યાંત્રિક-ઊર્જાનો વિનિમય કરે ત્યારે તેના ઉષ્મીય અને/અથવા યાંત્રિક ગુણધર્મોમાં સતત ફેરફાર થાય છે. આવી અનેક અવસ્થાઓમાંથી પસાર થતું-થતું તંત્ર અંતે બીજી કોઈ નિશ્ચિત સંતુલિત થરમૉડાઇનેમિક અવસ્થા પ્રાપ્ત કરે છે. તંત્રની પરિસર સાથેની આંતરક્રિયા દરમિયાન વિનિમય પામતી **ઉષ્મા-ઊર્જાને ઉષ્મા (Q)** અને વિનિમય પામતી **યાંત્રિક-ઊર્જાને કાર્ય (W)** કહે છે.

થરમૉડાઇનેમિક તંત્રની સંતુલિત અવસ્થા અમુક ચલ-રાશિઓ વડે નક્કી થતી હોય છે. આવી રાશિઓને થરમૉડાઇનેમિક ચલરાશિઓ કે અવસ્થા **ચલરાશિઓ** (state variables) કહે છે. અવસ્થા ચલરાશિઓ વચ્ચેના સંબંધને **અવસ્થા-સમીકરણ** (equation of state) કહે છે. દા. ત., **'વાયુનો ગતિવાદ'**ના પ્રકરણમાં તમે ભણ્યા તે મુજબ આદર્શ વાયુનાં દબાણ, કદ, તાપમાન અને વાયુના જથ્થાને સાંકળતું સમીકરણ $PV = \mu RT$ એ આદર્શ વાયુનું અવસ્થા સમીકરણ છે.

થરમૉડાઇનેમિક અવસ્થા ચલરાશિઓ બે પ્રકારની હોય છે :

(i) એક્સ્ટેન્સિવ ચલરાશિઓ (Extensive Variables) : તંત્રના પરિમાણ પર આધારિત હોય તેવી રાશિઓને એક્સ્ટેન્સિવ ચલરાશિઓ કહે છે. દા. ત., દળ, કદ, આંતરિક ઊર્જા વગેરે.

(ii) ઈન્ટેન્સિવ ચલરાશિઓ (Intensive Variables) : તંત્રના પરિમાણ પર આધારિત ન હોય તેવી

રાશિઓને ઈન્ટેન્સિવ ચલરાશિઓ કહે છે. દા. ત., દબાણ, તાપમાન વગેરે.

6.3 તાપીય સંતુલન અને તાપમાનની વ્યાખ્યા (થરમૉડાઈનેમિક્સનો શૂન્યક્રમનો નિયમ) Thermal Equilibrium and Definition of Temperature (Zeroth Law of Thermodynamics)

જ્યારે જુદા-જુદા તાપમાન ધરાવતાં બે તંત્રોને એકબીજાના ઉષ્મીય સંપર્કમાં લાવવામાં આવે છે, ત્યારે ઉષ્માનું વહન વધારે તાપમાનવાળા તંત્ર તરફથી ઓછા તાપમાનવાળા તંત્ર તરફ થાય છે. જ્યારે બન્ને તંત્રોનાં તાપમાન સરખાં થઈ જાય ત્યારે તેમની વચ્ચે વિનિમય પામતી ઉષ્માનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે. આ વખતે બન્ને તંત્રો એકબીજાં સાથે તાપીય **(ઉષ્મીય) સંતુલન**માં છે, તેમ કહેવાય.

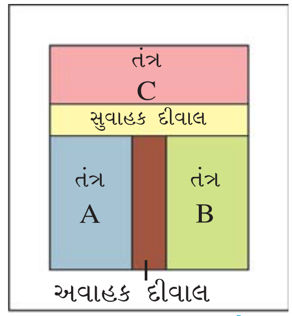
જ્યારે જુદા-જુદા તાપમાન ધરાવતા તંત્ર અને તેના પરિસરને જુદા પાડતી પરિસીમા (દીવાલ) ઉષ્મીય અવાહક (insulating or adiabatic wall) હોય ત્યારે તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે ઉષ્માનો વિનિમય થતો નથી, પરંતુ જ્યારે આ તંત્ર અને તેના પરિસરને જુદા પાડતી સીમા ઉષ્માની સુવાહક (conducting or diathermic wall) હોય ત્યારે તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે ઉષ્માનો વિનિમય થાય છે અને જ્યારે તંત્ર અને પરિસરનાં તાપમાન સરખાં થઈ જાય, ત્યારે ઉષ્માનો વિનિમય શૂન્ય થાય છે.

જ્યારે તંત્ર અને તેના પરિસર વચ્ચે કોઈ અસંતુલિત બળ ન લાગતું હોય ત્યારે તંત્ર **યાંત્રિક સંતુલન**માં છે તેમ કહેવાય. જ્યારે તંત્રમાં કોઈ રાસાયણિક પ્રક્રિયા ન થતી હોય અને તંત્રના એક ભાગથી બીજા ભાગ તરફ કોઈ રાસાયણિક ઘટકની ગતિ ન થતી હોય ત્યારે તંત્ર **રાસાયણિક સંતુલન**માં છે તેમ કહેવાય. જ્યારે તંત્ર ઉષ્મીય, યાંત્રિક અને રાસાયણિક સંતુલનમાં હોય ત્યારે તે **થરમૉડાઈનેમિક સંતુલનમાં** છે, તેમ કહેવાય.

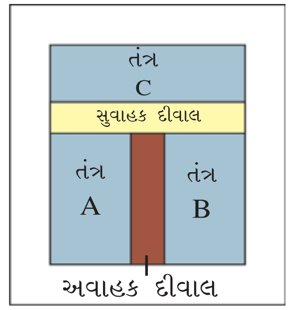
6.3.1 થરમૉડાઈનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ (Zeroth Law of Thermodynamics) :

કોઈ તંત્ર અને તેનું પરિસર અથવા કોઈ બે તંત્રો એકબીજાની સાથે ઉષ્મીય સંતુલનમાં છે કે નહીં તે જાણવા માટે કોઈ એક ત્રીજી વસ્તુ (દા. ત., થરમૉમીટર)નો ઉપયોગ કરી શકાય (આદર્શ રીતે આ ત્રીજી વસ્તુ, બન્ને તંત્રો સાથે ઉષ્માનો વિનિમય (શોષણ કે ઉત્સર્જન) ન કરતું હોવું જોઈએ).

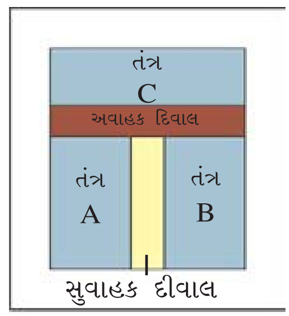
આકૃતિ 6.1(*a*)માં દર્શાવ્યા મુજબ, ધારો કે કોઈ બે તંત્રો A અને B ને એકબીજાંથી ઉષ્મીય અવાહક દીવાલ વડે જુદાં પાડેલ છે તથા આ બન્ને તંત્રો ત્રીજા એક તંત્ર C સાથે સુવાહક દીવાલ દ્વારા સંપર્કમાં છે. આ સમગ્ર રચનાની આજુબાજુ અવાહક દીવાલ છે. આકૃતિ 6.1(*b*)માં દર્શાવ્યા મુજબ અમુક સમય બાદ આ બન્ને તંત્રો A અને B, તંત્ર C સાથે ઉષ્મીય સંતુલન પ્રાપ્ત કરે છે.



(*a*) ઉષ્મીય સંતુલન પહેલાં



(*b*) ઉષ્મીય સંતુલિત સ્થિતિ



(*c*) ઉષ્મીય સંતુલિત સ્થિતિ

તંત્ર A, B અને C વચ્ચે સ્થપાતું ઉષ્મીય સંતુલન
આકૃતિ 6.1

હવે આકૃતિ 6.1(*c*)માં દર્શાવ્યા મુજબ A અને Bને જુદા પાડતી અવાહક દીવાલ દૂર કરી તેના સ્થાને સુવાહક દીવાલ રાખવામાં આવે અને તંત્ર Cને A અને Bથી અવાહક દીવાલ વડે અલગ કરવામાં આવે તોપણ તેમની સંતુલિત સ્થિતિમાં કોઈ ફેરફાર નોંધાતો નથી.

હવે આ તંત્રો A અને Bને એક જ સમયે C સાથે ઉષ્મીય સંતુલન પ્રાપ્ત કરવા દેવાને બદલે તેમને વારાફરતી C સાથે સંતુલન પ્રાપ્ત કરવા દેવાય અને ત્યાર બાદ A, B અને C ને સુવાહક દીવાલ દ્વારા સંપર્કમાં લાવવામાં આવે, તો પણ પહેલાંની માફક જ ઉષ્મીય સંતુલન સ્થપાશે. આમ,

“જો તંત્ર A અને B કોઈ ત્રીજા તંત્ર C સાથે ઉષ્મીય સંતુલનમાં હોય, તો A અને B પણ એકબીજા સાથે ઉષ્મીય સંતુલનમાં હોય છે.”

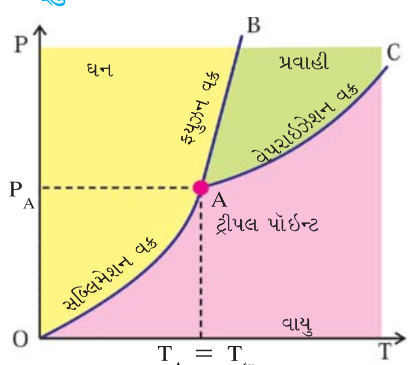
આ વિધાનને **થરમૉડાઈનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ** કહે છે.

વ્યવહારમાં આપણે વસ્તુના ગરમ કે ઠંડાપણાની માત્રા સાથે, તાપમાન નામના ખ્યાલનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. શૂન્ય ક્રમનો નિયમ આ ખ્યાલના સંદર્ભમાં દર્શાવે છે કે **તાપમાન એ તંત્રનો ગુણધર્મ છે.** એકબીજા સાથે ઉષ્મીય સંપર્કમાં રહેલી વસ્તુઓ ઉષ્મીય સંતુલન પ્રાપ્ત કરે, ત્યારે તેમનાં તાપમાન સરખાં થઈ જાય છે. સ્થૂળ રીતે વિચારતાં શૂન્ય ક્રમના નિયમ પરથી લખી શકાય કે "તાપમાન નામની એક અગત્યની ભૌતિક રાશિ અસ્તિત્વ ધરાવે છે."

6.4 ફેઝ (અવસ્થા) ડાયાગ્રામ (Phase Diagram)

દ્રવ્ય કયા (ઘન, પ્રવાહી કે વાયુ) સ્વરૂપમાં રહેશે, તેનો આધાર દબાણ અને તાપમાન જેવાં પરિબળો પર હોય છે. કેટલીક ખાસ પરિસ્થિતિઓમાં દ્રવ્યનાં બે અથવા ત્રણ સ્વરૂપો એકીસાથે પણ સંતુલનમાં અસ્તિત્વ ધરાવે છે. દબાણ અને તાપમાનનાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો માટે આપેલ દ્રવ્ય કેવું સ્વરૂપ ધરાવે છે, તે દર્શાવતાં દબાણ (P) વિરુદ્ધ તાપમાન (T)ના આલેખને તે **દ્રવ્યનો ફેઝ ડાયાગ્રામ** કહે છે. આકૃતિ 6.2માં કોઈ એક પદાર્થ માટે ફેઝ ડાયાગ્રામ દર્શાવેલ છે.

ફેઝ ડાયાગ્રામ પરના વક્ર AB પરનાં બિંદુઓ વડે મળતાં દબાણ-તાપમાનનાં મૂલ્યો માટે પદાર્થની ઘન અને પ્રવાહી અવસ્થાઓ સંતુલનમાં સહ-અસ્તિત્વ ધરાવે છે. માટે **AB** વક્રને **ફ્યુઝન-વક્ર** કહે છે.



ફેઝ ડાયાગ્રામ

આકૃતિ 6.2

આ જ રીતે વક્ર OA પરનાં બિંદુઓ વડે મળતાં દબાણ-તાપમાનનાં મૂલ્યો માટે પદાર્થનાં ઘન અને વાયુ અવસ્થા સ્વરૂપો સંતુલનમાં સહ-અસ્તિત્વ ધરાવે છે. માટે વક્ર **OA** ને **સબ્લિમેશન-વક્ર** કહે છે.

વક્ર AC પરનાં બિંદુઓ વડે મળતાં દબાણ-તાપમાનનાં મૂલ્યો માટે પદાર્થનાં વાયુ અને પ્રવાહી અવસ્થા સ્વરૂપો સંતુલનમાં સહ-અસ્તિત્વ ધરાવે છે. માટે વક્ર **AC**ને **વેપરાઈઝેશન (બાષ્પીકરણ) વક્ર** કહે છે.

વેપરાઈઝેશન વક્ર, ફ્યુઝન-વક્ર અને સબ્લિમેશન-વક્ર A બિંદુ પર મળે છે, એટલે કે દબાણ-તાપમાનનાં જે મૂલ્યો માટે પદાર્થનાં ત્રણેય સ્વરૂપો સહ-અસ્તિત્વમાં અને સંતુલનમાં હોય છે. તે બિંદુને તે દ્રવ્ય(પદાર્થ)નું **ટ્રીપલ પૉઈન્ટ** કહે છે. આકૃતિમાં બિંદુ **A** આપેલ દ્રવ્યનું ટ્રીપલ પૉઈન્ટ છે.

જુદાં-જુદાં દ્રવ્યો માટે ચોક્કસ દબાણે અને તાપમાને જ તેમના બે અથવાં ત્રણ સ્વરૂપો સંતુલનમાં સહ-અસ્તિત્વ ધરાવતાં હોય તેવી પરિસ્થિતિ મેળવી શકાય છે. પાણીનું ટ્રીપલ પૉઈન્ટ 4.58 mm પારાના દબાણે અને 273.16 K તાપમાને મળે છે. પાણીના ટ્રીપલ પૉઈન્ટનો ઉપયોગ થરમૉમિટરનો સ્કેલ નક્કી કરવામાં થાય છે.

6.4.1 તાપમાનનું માપન : થરમૉમેટ્રી (Measurement of temperature thermometry) :

કોઈ પણ પદાર્થ ઠંડો છે કે ગરમ તે, ચોકસાઈપૂર્વક, ફક્ત સ્પર્શ કરીને નક્કી કરી શકાતું નથી. દા.ત., ડાબા હાથને ગરમ તથા જમણા હાથને ઠંડા પાણીમાં થોડીવાર રાખ્યા બાદ, બંને હાથને નવશેકા પાણીમાં રાખવામાં આવે, તો નવશેકું પાણી ડાબા હાથને ઠંડું તથા જમણા હાથને ગરમ અનુભવાય છે. આ ઉપરાંત સ્પર્શથી અનુભવેલ પરિણામ વ્યક્તિલક્ષી પણ હોય છે.

કોઈ વસ્તુની ઉષ્મીય સંતુલનની પરિસ્થિતિમાં તેના તાપમાનને કોઈ ચોક્કસ વાસ્તવિક સંખ્યા વડે સાંકળીએ, અને આ પ્રમાણે તેની જુદી-જુદી ઉષ્મીય સંતુલનની સ્થિતિઓ વખતના તાપમાનને અનન્ય એવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ વડે સાંકળીએ, તો આ રીતે ઉષ્મીય (તાપીય) સંતુલન પર વ્યાખ્યાયિત થતાં વિધેયને **તાપમાન-વિધેય** કહે છે.

થરમૉડાઇનેમિક્સનો શૂન્યક્રમનો નિયમ દર્શાવે છે કે તાપમાન વિધેય એક-એક વિધેય છે.

જે સાધન વડે આપેલા ઉષ્મીય સંતુલન સાથે સંકળાયેલી નિશ્ચિત અનન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા (એટલે કે તાપમાન) માપી શકાય, તેવા સાધનને થરમૉમીટર કહે છે.

સામાન્ય રીતે થરમૉમીટર તૈયાર કરવા માટે તાપમાન સાથે પ્રવાહીના કદમાં થતાં ફેરફારના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. મોટા ભાગે પ્રવાહી સહિત કાચના થરમૉમીટરમાં પારો અને આલ્કોહૉલ જેવા પ્રવાહીનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

થરમૉમીટરનું કેલિબરેશન (અંકન) એવી રીતે કરવામાં આવે છે કે જેથી તાપમાનના દરેક ચોક્કસ મૂલ્ય સાથે કોઈ નિશ્ચિત અંક સાંકળી શકાય. સર્વમાન્ય માપક્રમનું કેલિબરેશન

(અંકન) કરવા માટે, તાપમાનના બે ચોક્કસ (જાણીતા) મૂલ્યો જરૂરી છે. સરળતા માટે 1 વાતાવરણના દબાણે પાણીનું ઠારણબિંદુ (32^oF અથવા 0^oC) અને પાણીનું ઉત્કલનબિંદુ (212^oF અથવા 100^oC) ચોક્કસ મૂલ્ય તરીકે લેવામાં આવે છે.

જુદા-જુદા પ્રવાહીના ઉષ્મીય પ્રસરણના ગુણધર્મો જુદા-જુદા હોવાથી બે ચોક્કસ બિંદુઓ પરના તાપમાન સિવાય બીજા તાપમાનનાં મૂલ્યો માટે પ્રવાહી-સહિત-થરમૉમીટરો જુદાં-જુદાં અવલોકન આપે છે. પરંતુ, જેમાં પૂરતા ઓછા દબાણે કોઈ પણ વાયુઓ ભરેલા હોય તેવા અચળ કદ થરમૉમીટર એક જ તાપમાન માટે એકસમાન અવલોકનો જ આપે છે.

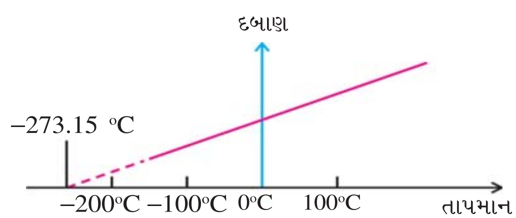
પૂરતાં ઓછા દબાણે રહેલો આપેલ જથ્થાનો વાયુ આદર્શવાયુ અવસ્થા-સમીકરણ,

$PV = \mu RT$નું પાલન કરે છે.

જ્યાં, μ = વાયુના મોલની સંખ્યા,

અને $R = 8.31 \ J \ mol^{-1} \ K^{-1}$

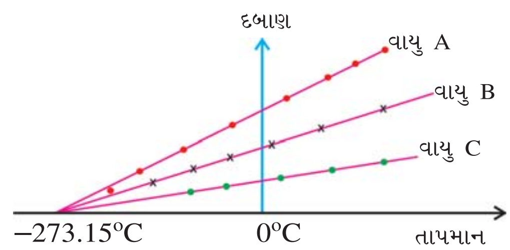
આથી વાયુનું કદ અચળ રાખીએ, તો $P \propto T$. આમ, અચળ કદ વાયુ થરમૉમીટર વડે તાપમાનનું માપન તેના દબાણના સંદર્ભમાં કરી શકાય છે. આકૃતિ 6.3માં દર્શાવ્યા મુજબ $P - T$ નો આલેખ સીધી રેખા મળે છે.



ઓછી ઘનતાવાળા અચળ કદના વાયુ માટે દબાણ વિરુદ્ધ તાપમાનનો આલેખ

આકૃતિ 6.3

નીચા તાપમાને વાસ્તવિક વાયુઓ વડે કરેલું તાપમાનનું માપન આદર્શ વાયુ માટે અનુમાન કરેલ માપન કરતાં થોડું જુદું પડે છે. પરંતુ આપેલ તાપમાનના ગાળા માટે આ સંબંધ સુરેખ જ હોય છે. જો વાયુ પોતાનું વાયુસ્વરૂપ જાળવી રાખે, તો તાપમાનના ઘટાડા સાથે દબાણ શૂન્ય સુધી પહોંચે છે. આ સુરેખ આલેખને આગળ લંબાવવામાં આવે તો આદર્શવાયુ માટે તેનું મૂલ્ય તાપમાન અક્ષને **-273.15^oC** પાસે મળે છે, જેને **નિરપેક્ષ શૂન્ય તાપમાન** કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.4).



P – T નો આલેખ અને ઓછી ઘનતાવાળા વાયુઓ માટે સુરેખાઓને લંબાવતા તે એકસરખું નિરપેક્ષ શૂન્ય તાપમાન દર્શાવે છે

આકૃતિ 6.4

આકૃતિ 6.4 પરથી જોઈ શકાય છે કે, ઓછી ઘનતા વાળા અને જુદા-જુદા ઉષ્મીય પ્રસરણ ધરાવતા વાયુઓ માટે એકસરખું નિરપેક્ષ શૂન્ય તાપમાન મળે છે. નિરપેક્ષ શૂન્ય એ કેલ્વિન માપક્રમ અથવા નિરપેક્ષ માપક્રમનો પાયો છે, જેનું મૂલ્ય 0 K જેટલું લેવામાં આવે છે.

વ્યવહારમાં તાપમાનના માપન માટે સેલ્સિયસ માપક્રમ અને ફેરનહીટ માપક્રમ પ્રચલિત છે, જે આ મુજબ છે.

સેલ્સિયસ માપક્રમ : જો સેલ્સિયસ માપક્રમનું તાપમાન T_C વડે અને કેલ્વિન માપક્રમ પરનું તાપમાન T વડે દર્શાવવામાં આવે તો,

$$T_C = T - 273.15$$

પાણીના ટ્રીપલ પૉઇન્ટ તાપમાનને સેલ્સિયસ માપક્રમમાં માપતાં,

$T_C = 273.16 - 273.15 = 0.01^oC$ તાપમાન મળે છે.

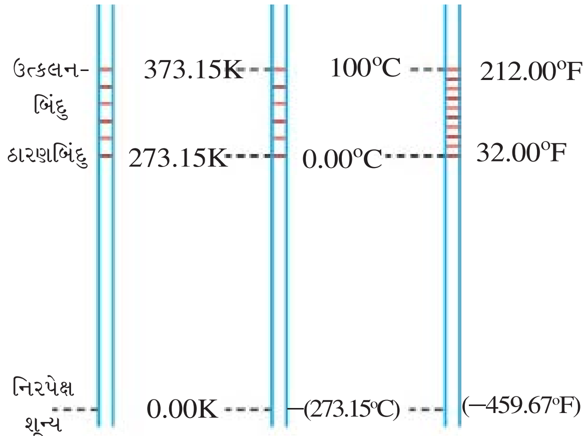
આ માપક્રમમાં વાતાવરણના દબાણે શુદ્ધ પાણી અને તેની બાષ્પ વચ્ચે સંતુલન રચાય ત્યારે તાપમાન 100^oC લેવામાં આવે છે, જેનું મૂલ્ય કેલ્વિન માપક્રમમાં,

$$T = 100 + 273.15 = 373.15 \ K$$

ફેરનહીટ માપક્રમ : ફેરનહીટ માપક્રમ પરના તાપમાન T_F અને સેલ્સિયસ માપક્રમ પરના તાપમાન T_C વચ્ચેનો સંબંધ આ મુજબ છે.

$$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32^o$$

એક માપક્રમમાં પાણીનું ઉત્કલનબિંદુ અને ઠારણબિંદુ (Freezing point) જાણતા હોઈએ, તો તાપમાનનું માપન કર્યા પછી તેને બીજા કોઈ માપક્રમમાં સહેલાઈથી દર્શાવી શકાય છે. આકૃતિ 6.5 માં કેલ્વિન, સેલ્સિયસ અને ફેરનહીટ માપક્રમની સરખામણી દર્શાવી છે.



પાણી માટે કેલ્વિન, સેલ્સિયસ અને ફેરનહીટ માપક્રમની સરખામણી
આકૃતિ 6.5

સેલ્સિયસ અને ફેરનહીટ માપક્રમમાં તાપમાનનું માપન દર્શાવવા માટે અનુક્રમે C અને F અક્ષરો લખવામાં આવે છે. દા.ત., $0^\circ C = 32^\circ F$

એટલે કે સેલ્સિયસ માપક્રમમાં 0° એટલે ફેરનહીટ માપક્રમ મુજબ તેટલું જ તાપમાન 32°, પરંતુ તાપમાનનો તફાવત આ બંને માપક્રમમાં જુદી રીતે દર્શાવવામાં આવે છે.

$5\ C^\circ = 9\ F^\circ$નો મતલબ એ કે, સેલ્સિયસ માપક્રમ મુજબ 5 સેલ્સિયસ ડિગ્રી **(નોંધો કે ડિગ્રીની સંજ્ઞા C પછી આવે છે)**નો તફાવત અને 9 ફેરનહીટ ડિગ્રીનો તફાવત સમતુલ્ય છે.

માત્ર જાણકારી માટે :

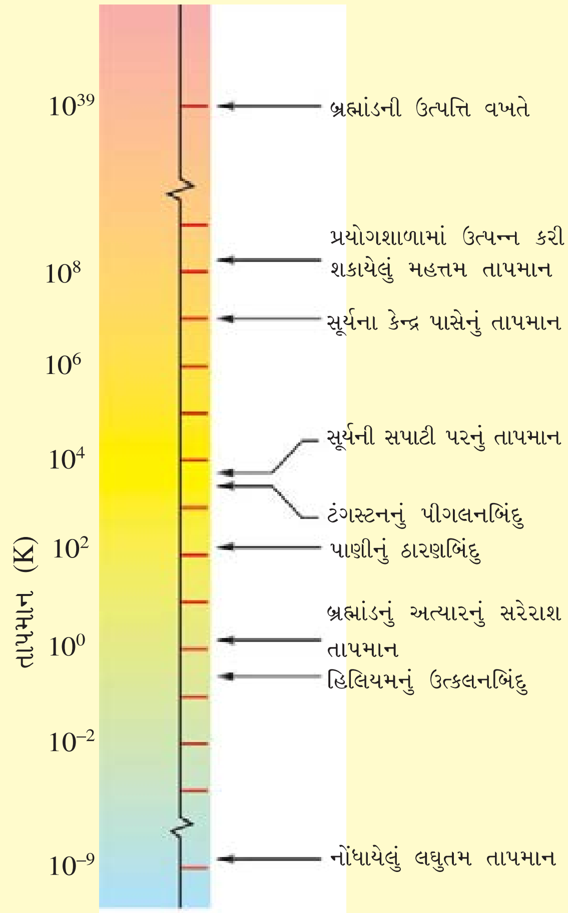
પાણીનાં ઉત્કલનબિંદુ અને ઠારણબિંદુ વચ્ચે તફાવત 100 કેલ્વિન (100 K) અને 100 સેલ્સિયસ ડિગ્રી ($100\ C^\circ$) હોય છે. પરંતુ પાણીનાં ઉત્કલનબિંદુ અને ઠારણબિંદુ વચ્ચે ફેરનહીટનો તફાવત $180\ F^\circ$ છે. આમ,

$\Delta T = 180\ F^\circ = 100\ K = 100\ C^\circ$

એટલે કે એક ફેરનહીટનું મૂલ્ય સેલ્સિયસ કે કેલ્વિનના $\left(\frac{100}{180} = \frac{5}{9}\right)$ $\frac{5}{9}$ ભાગ જેટલું હોય છે, જે દર્શાવે છે કે ફેરનહીટમાં દર્શાવેલો તાપમાનનો તફાવત સેલ્સિયસ કે કેલ્વિન માપક્રમના તફાવત કરતાં $\frac{9}{5}$ ગણો હોય છે.

તાપમાન અને **તાપમાનનો તફાવત** બંને અલગ છે. 10 K તાપમાન એ $10^\circ C$ કે $18^\circ F$ નથી, પરંતુ 10 K તાપમાનનો તફાવત એ $10\ C^\circ$ કે $18\ F^\circ$ જેટલો હોય છે.

માત્ર જાણકારી માટે :



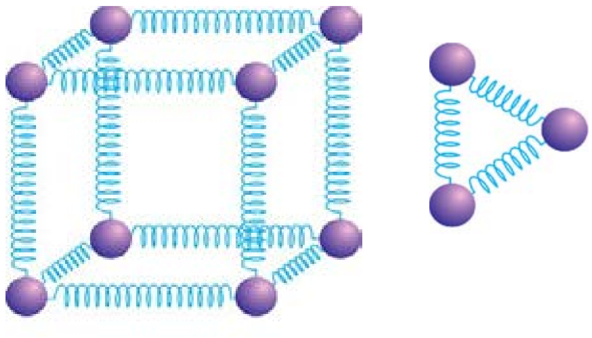
કેલ્વિન માપક્રમ પર કેટલાંક તાપમાનનાં મૂલ્યો
આકૃતિ 6.6

6.5 ઉષ્મીય પ્રસરણ (Thermal Expansion)

આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ પદાર્થનું તાપમાન વધારતાં (ઉષ્મા આપતાં) તેના પરિમાણમાં વધારો થાય છે અને તાપમાન ઘટાડતાં (ઉષ્મામુક્ત કરીને) તેના પરિમાણમાં ઘટાડો થાય છે. આમ, પદાર્થ દ્વારા ઉષ્માનું શોષણ કરીને તેના પરિમાણમાં થતા વધારાને **ઉષ્મીય પ્રસરણ** અને ઉષ્મા-મુક્ત કરીને પદાર્થના પરિમાણમાં થતા ઘટાડાને **ઉષ્મીય સંકોચન** કહે છે.

ઘન પદાર્થની આંતર-રચનામાં તેના ઘટકકણો (અણુ, પરમાણુ કે આયનો) ચોક્કસ રીતે ગોઠવાયેલા હોય છે. તેઓ એકબીજા પર આકર્ષણ અને અપાકર્ષણ બળો લગાડીને પોતપોતાના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ દોલનો કરતા હોય છે. આમ, આ ઘટકકણો જાણે કે સ્પ્રિંગથી જોડાયેલા હોય તેમ કલ્પી શકાય છે (જુઓ આકૃતિ 6.7).

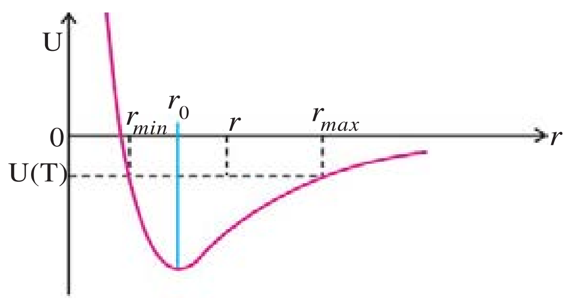
તાપમાનના વધવા સાથે આ દોલનોનો કંપવિસ્તાર વધે છે અને અણુઓ વચ્ચેનાં સરેરાશ અંતરો વધે છે. આમ, ઘન પદાર્થનું તાપમાન વધતાં તેના કદમાં વધારો થાય છે.



કાલ્પનિક સ્પ્રિંગ વડે જોડાયેલા ઘટકકણો

આકૃતિ 6.7

આકૃતિ 6.8માં આંતરઅણુ-સ્થિતિ-ઊર્જા વિરુદ્ધ અંતરનો આલેખ દર્શાવ્યો છે, જેના પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે આ વક્ર આંતરઅણુ સંતુલન-અંતર (r_0)ને અનુલક્ષીને સંમિત નથી. r_0 કરતાં વધારે અંતરે આકર્ષી સ્થિતિ-ઊર્જા જે દરે વધે છે, તે દરથી r_0 કરતાં ઓછા અંતર માટે અપાકર્ષીય સ્થિતિ-ઊર્જા વધતી નથી.



આંતરઅણુ સ્થિત-ઊર્જા વિરુદ્ધ અંતરનો આલેખ

આકૃતિ 6.8

આપેલા તાપમાને (એટલે કે સ્થિતિ-ઊર્જા U(T)ના કોઈ એક મૂલ્ય માટે) ઘટકકણો r_{min} અને r_{max}ની વચ્ચે દોલનો કરતાં હોય છે (જુઓ આકૃતિ 6.8). જો આ તાપમાને પાસપાસેના ઘટકકણો વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર r હોય તો

$$r = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$$

આમ, આ વક્રની અસંમિતતા પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે તાપમાનના વધારા સાથે આ સરેરાશ અંતરો વધતાં જાય છે. આ અસંમિતતા ઉષ્મીય પ્રસરણ માટે જવાબદાર છે.

રેખીય પ્રસરણ (Linear Expansion)

તાપમાનમાં થતા વધારા સાથે પદાર્થની લંબાઈમાં થતા વધારાને રેખીય પ્રસરણ કહે છે. તાપમાનના નાના ફેરફારો માટે વસ્તુની લંબાઈમાં થતો વધારો (Δl) એ વસ્તુની મૂળ લંબાઈ 'l' અને તાપમાનના વધારા 'ΔT'ના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

$\Delta l \propto l$, અને

$\Delta l \propto \Delta T$

$\therefore \ \Delta l \propto l\Delta T$

$$\therefore \ \Delta l = \alpha l \Delta T \qquad (6.5.1)$$

અહીં 'α' એ સમપ્રમાણતા અચળાંક છે, જેને વસ્તુના દ્રવ્યનો રેખીય પ્રસરણાંક (coefficient of linear expansion) કહે છે. 'α'નું મૂલ્ય પદાર્થની જાત પર અને તેના તાપમાન પર આધારિત છે. જો તાપમાનનો ગાળો મોટો ન હોય તેવા સંજોગોમાં 'α' તાપમાન પર આધારિત નથી.

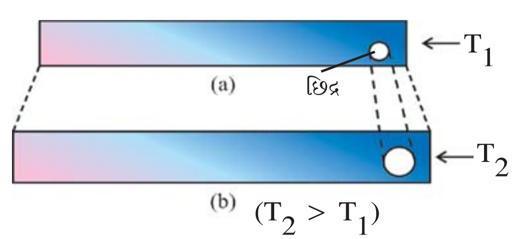
α નો એકમ $(C^o)^{-1}$ અથવા K^{-1} છે કેટલાક પદાર્થોના રેખીય પ્રસરણાંકના મૂલ્યો ટેબલ 6.1માં (માત્ર જાણ સારુ) આપ્યા છે.

ટેબલ 6.1

કેટલાક ઉષ્મીય પ્રસરણાંકનાં મૂલ્યો (માત્ર જાણકારી માટે)

પદાર્થ	α $(10^{-5}\ C^{o-1})$	γ $(10^{-5}C^{o-1}$ or $K^{-1})$
ઍલ્યુમિનિયમ	2.4	7.2
બ્રાસ (કાંસુ)	2.0	6.0
લોખંડ	1.2	3.6
સામાન્ય કાચ	0.4 – 0.9	1.2 – 2.7
પાયરેક્ષ કાચ	0.32	

કેટલાક પદાર્થો દરેક દિશામાં એકસરખું ઉષ્મીય પ્રસરણ ધરાવતા હોય છે. આવા પદાર્થોને **આઈસોટ્રોપિક (isotropic)** પદાર્થ કહે છે. તાપમાન વધવા સાથે આવા પદાર્થની લંબાઈમાં જેટલા ગણો વધારો થાય છે, તેટલા જ ગણો વધારો પહોળાઈ અને જાડાઈમાં થાય છે. આથી તેનું પ્રસરણ જાણે કે **ફોટોગ્રાફિક વિવર્ધન** થયું હોય તેમ લાગે છે (જુઓ આકૃતિ 6.9).



સ્ટીલની ફૂટપટ્ટીનું તાપમાન વધારતાં તેનું આઈસોટ્રોપિક પ્રસરણ (વધારીને બતાવેલું છે.)

આકૃતિ 6.9

આથી,

ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો $\Delta A = 2\ \alpha\ A\Delta T$, અને

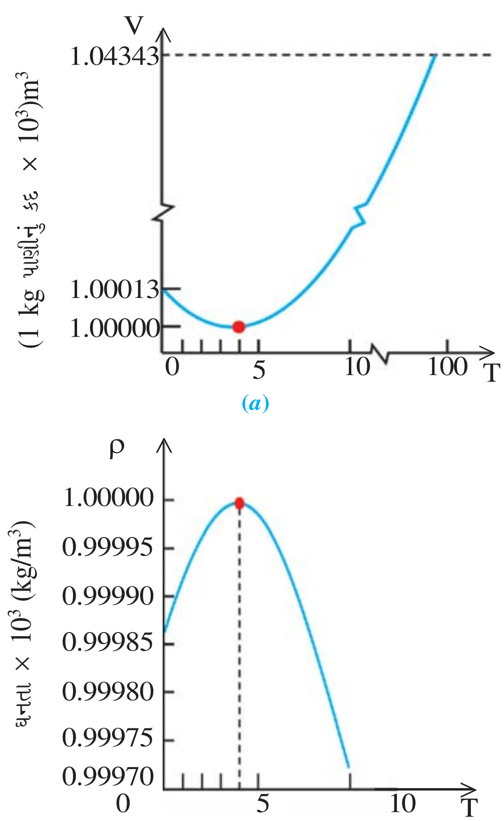
કદમાં થતો વધારો $\Delta V = 3\alpha V\Delta T = \gamma V\Delta T$

કેટલાક પદાર્થોના કદ પ્રસરણાંક ($\gamma = 3\alpha$)નાં મૂલ્યો ટેબલ 6.1માં (માત્ર જાણકારી માટે) આપ્યાં છે.

કદમાં થતો વધારો ઘન પદાર્થ કરતાં પ્રવાહીમાં વધારે હોય છે અને આ વધારો વાયુમાં મહત્તમ હોય છે.

પાણીનું અનિયમિત ઉષ્મીય પ્રસરણ

તાપમાન સાથે પાણીનું ઉષ્મીય પ્રસરણ અનિયમિત હોય છે. પાણીનું તાપમાન 4°C સુધી ઘટાડવામાં આવે, તો પાણીનું કદ ઘટતું જાય છે, પરંતુ જ્યારે તાપમાન 4°Cથી 0°C, સુધી ઘટાડવામાં આવે, તો પાણીના કદમાં વધારો થાય છે (જુઓ આકૃતિ 6.10(*a*)). આમ, પાણીના આપેલ જથ્થા માટે, 4°C તાપમાને પાણીનું કદ લઘુતમ હોય છે. આથી, 4°C તાપમાને પાણીની ઘનતા મહત્તમ હોય છે (જુઓ આકૃતિ 6.10(*b*)).



0°C થી 10°C ના તાપમાનની વચ્ચે 1 kg પાણીના (*a*) કદ અને (*b*) ઘનતાનો ફેરફાર

આકૃતિ 6.10

પાણીની આ પ્રકારની વર્તણૂકના કારણે તળાવનાં પાણીની ઉપરની સપાટી, નીચેની સપાટી કરતાં વહેલી ઠારણ પામે છે. (નીચેથી ઉપરના બદલે ઉપરથી નીચે તરફ ઠારણ પામે છે). જેમ પાણીના ઉપરના સ્તરનું તાપમાન (ધારો કે 10°C થી) ઘટતું જાય છે, તેમ ઉપરનું સ્તર નીચેના સ્તર કરતાં વધુ ઘટ્ટ બને છે અને તેથી તે નીચે જાય છે. આ પ્રક્રિયા ત્યાં સુધી ચાલુ રહે છે કે જ્યાં સુધી તળાવનું સંપૂર્ણ પાણી 4°C તાપમાને પહોંચે. હવે જ્યારે પાણીના ઉપરના સ્તરનું તાપમાન 4°Cથી ઓછું થાય ત્યારે તેની ઘનતા ઘટે છે (જુઓ આકૃતિ 6.5 *b*), અને તેથી તે પાણીની સપાટી પર જ રહે છે અને વધુ ને વધુ ઠંડું થતું જાય છે. આ રીતે પાણીની ઉપરની સપાટી થીજી જાય છે જ્યારે નીચેનું પાણી પ્રવાહી સ્વરૂપમાં જ રહે છે.

પાણીની આવી અનિયમિત વર્તણૂકના કારણે જ પાણીમાં રહેલી જળસૃષ્ટિ ઘણા નીચા તાપમાને પણ જીવી શકે છે.

ઉદાહરણ 1 : એક લુહાર લોખંડની રિંગને ગાડાના પૈડાની ધાર પર જડે છે. 27°C તાપમાને પૈડાની ધાર અને રિંગના વ્યાસ અનુક્રમે 1.5 m અને 1.495 m છે. રિંગને કેટલા તાપમાન સુધી તપાવવી પડે કે જેથી તે પૈડાની ધાર પર ચઢાવી શકાય ? લોખંડ માટે $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ K^{-1}$.

ઉકેલ :

અહીં, $T = 27°C = 273 + 27 = 300\ K$

$T' = ?$

$\alpha = 12 \times 10^{-6}\ K^{-1}$

પૈડાની ધારનો વ્યાસ $d_1 = 1.5$ m

લોખંડની રિંગનો વ્યાસ $d_2 = 1.495$ m

ધારની કુલ લંબાઈ $l_1 = \pi d_1$

રિંગની કુલ લંબાઈ $l_2 = \pi d_2$

$\therefore\ \Delta l = l_1 - l_2 = \pi d_1 - \pi d_2$

પરંતુ, $\Delta l = \alpha l \Delta T$

$\therefore\ \pi(d_1 - d_2) = \alpha \pi d_2 (T' - T)$

$$\therefore\ T' - T = \frac{d_1 - d_2}{\alpha d_2}$$

$$\therefore\ T' = \frac{d_1 - d_2}{\alpha d_2} + T$$

$$= \frac{1.5 - 1.495}{12 \times 10^{-6} \times 1.495} + 300$$

$$= 278.7 + 300$$

$\therefore$ T' = 578.7 K

$\therefore$ T' = 578.7 − 273 = 305.7°C

આમ, રિંગને 305.7°C સુધી તપાવવી જોઈએ. (વાસ્તવમાં આનાથી થોડી વધારે તપાવવી જોઈએ.)

ઉદાહરણ 2 : જો બ્રાસ અને ઍલ્યુમિનિયમના સળિયાઓની લંબાઈ વચ્ચેનો તફાવત કોઈ પણ તાપમાને 5 cm જેટલો રાખવો હોય, તો 0°C તાપમાને આ સળિયાઓની લંબાઈ કેટલી રાખવી જોઈએ ?

(બ્રાસ માટે $\alpha = 18 \times 10^{-6}$ C^{o-1}, ઍલ્યુમિનિયમ માટે $\alpha = 24 \times 10^{-6}$ C^{o-1})

ઉકેલ : ધારો કે 0°C તાપમાને બ્રાસ અને ઍલ્યુમિનિયમ સળિયાઓની લંબાઈ અનુક્રમે l_1 અને l_2 છે. અહીં કોઈ પણ તાપમાને આ સળિયાઓની લંબાઈ વચ્ચેનો તફાવત સરખો રહે છે. તેથી તાપમાનના સરખા વધારા સાથે બંને સળિયાની લંબાઈમાં થતો વધારો સરખો હોવો જોઈએ.

$\therefore \Delta l_1 = \Delta l_2$

$\therefore \alpha_1 l_1 \Delta T = \alpha_2 l_2 \Delta T$

$$\therefore \frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{24 \times 10^{-6}}{18 \times 10^{-6}} = \frac{4}{3} \quad (1)$$

હવે, આપેલ શરત મુજબ $l_1 - l_2 = 5$ cm (2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{l_1}{l_1 - 5} = \frac{4}{3}$$

$\therefore 3l_1 = 4l_1 - 20$

$\therefore l_1 = 20$ cm અને $l_2 = 15$ cm

આમ, 0°C તાપમાને બ્રાસ અને ઍલ્યુમિનિયમના સળિયાઓની લંબાઈ અનુક્રમે 20 cm અને 15 cm લેવી જોઈએ.

ઉદાહરણ 3 : T તાપમાને V કદની ઘન વસ્તુની ઘનતા ρ છે. સાબિત કરો કે તાપમાનમાં dT જેટલો સૂક્ષ્મ વધારો કરવાથી વસ્તુની ઘનતામાં $\gamma\rho dT$ જેટલો ઘટાડો થાય છે. (**સૂચન :** $\frac{dx^n}{dx} = n\, x^{n-1}$)

ઉકેલ :

ઘનતા $\rho = \frac{M}{V}$, (1)

જ્યાં, M = વસ્તુનું દળ, અને V = વસ્તુનું કદ

વસ્તુનું કદ dV, તાપમાન પર આધારિત છે. તાપમાનમાં dT જેટલો વધારો કરવાથી તેના કદમાં વધારો થાય છે.

$\therefore dV = \gamma V dT$ (2)

સ્પષ્ટ છે કે કદમાં વધારો થવાથી વસ્તુની ઘનતામાં ઘટાડો થાય છે. ધારો કે ઘનતામાં થતો ઘટાડો $d\rho$ છે.

$\therefore$ સમીકરણ (1) પરથી,

$$d\rho = -\frac{M}{V^2}\, dV \quad (3)$$

$$= -\frac{M}{V^2} \cdot \gamma V dT$$

$$= -\frac{M}{V}\, \gamma \cdot dT$$

$\therefore d\rho = -\rho\gamma dT$ (4)

અહીં, ઋણ નિશાની સૂચવે છે કે તાપમાનના વધારા સાથે ρ ઘટે છે.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે અચળ દબાણે તાપમાનના વધારા સાથે આદર્શ વાયુનો કદ-પ્રસરણાંક ઘટે છે. આદર્શવાયુ માટે 0°C તાપમાને કદ-પ્રસરણાંક કેટલો હશે ?

ઉકેલ : આદર્શવાયુ માટે, PV = μRT (1)

અચળ દબાણે તાપમાનમાં ΔT જેટલો વધારો કરવાથી કદમાં થતો વધારો, ધારો કે ΔV છે.

$\therefore P\Delta V = \mu R \Delta T$ (2)

સમીકરણ (2)ને સમીકરણ (1) વડે ભાગતાં,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

$$\therefore \frac{\Delta V}{V\Delta T} = \frac{1}{T}$$

$$\therefore \gamma = \frac{1}{T} \quad (\because \Delta V = \gamma V \Delta T) \quad (3)$$

સમીકરણ (3) દર્શાવે છે કે આદર્શ વાયુ માટે તાપમાનના વધારા સાથે કદ-પ્રસરણાંક ઘટે છે.

T = 0°C = 273.15 K તાપમાને

$$\gamma = \frac{1}{273.15} = 3.66 \times 10^{-3}\ K^{-1}$$

ઉદાહરણ 5 : ગ્લિસરિન (glycerine)નો કદ-પ્રસરણાંક 49×10^{-5} C^{o-1} છે, તો તેના તાપમાનમાં 30 C^o નો વધારો કરતાં તેની ઘનતામાં થતો પ્રતિશત ઘટાડો શોધો.

ઉકેલ : $V = V_0 (1 + \gamma\Delta T)$

હવે, $V = \frac{M}{\rho}$, $V_0 = \frac{M}{\rho_0}$

$$\therefore \frac{M}{\rho} = \frac{M}{\rho_0} (1 + \gamma\Delta T)$$

$$\therefore \frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \gamma\Delta T$$

$$\therefore \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1+\gamma\Delta T}$$

$$\therefore \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{-\gamma\Delta T}{1+\gamma\Delta T}$$

$$= -\frac{(49)(10^{-5})(30)}{1+(49)(10^{-5})(30)}$$

$$= -0.0145$$

$\therefore$ ઘનતામાં થતો પ્રતિશત ઘટાડો = 1.45 %

નોંધ : γ નું મૂલ્ય પ્રમાણમાં ઘણું નાનું હોવાથી, આ ઉદાહરણ તમે ઉદાહરણ 3માં મેળવેલ સૂત્ર પરથી પણ ઉકેલી શકો છો.

ઉદાહરણ 6 : જ્યારે પૃથ્વી અસ્તિત્વમાં આવી ત્યારે તેનું સરેરાશ તાપમાન 300 K હતું. હાલમાં તેનું સરેરાશ તાપમાન 3000 K છે. (પૃથ્વીના પેટાળમાં રહેલા રેડિયો-ઍક્ટિવ તત્ત્વોના વિભંજનના કારણે જે ઉષ્મા ઉત્પન્ન થઈ તેના કારણે આમ બન્યું છે). તો પૃથ્વીના જન્મકાળ વખતે તેની ત્રિજ્યા કેટલી હશે ? પૃથ્વીના દ્રવ્ય માટે $\gamma = 3 \times 10^{-5}\ K^{-1}$ લો. હાલની, પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6400 km.

ઉકેલ :

$$V = V_0\ (1 + \gamma\Delta T)$$

$$\therefore \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^{\,3}(1 + \gamma\Delta T)$$

$$\therefore R = R_0(1+\gamma\Delta T)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore R_0 = \frac{R}{(1+\gamma\Delta T)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{6400}{[1+(3\times10^{-5})(2700)]^{\frac{1}{3}}}$$

$$= 6236 \text{ km}$$

6.6 રૂપાંતરણની ઉષ્મા (ગુપ્ત ઉષ્મા) (Heat of Transformation (Latent Heat))

જ્યારે કોઈ ઘન કે પ્રવાહી પદાર્થને ઉષ્મા આપવામાં આવે, ત્યારે તેનું તાપમાન વધે જ તેવું જરૂરી નથી. ક્યારેક પદાર્થ ઉષ્માનું શોષણ કરીને બીજી અવસ્થા પ્રાપ્ત કરે છે. કોઈ ઘન પદાર્થને પિગાળીને પ્રવાહી અવસ્થામાં લાવવા માટે, એટલે કે ઘન પદાર્થના દૃઢ માળખામાં રહેલા અણુઓને મુક્ત કરવા માટે, ઉષ્મા આપવી પડે છે (દા.ત., બરફનું પાણીમાં રૂપાંતરણ). તે જ રીતે જ્યારે પ્રવાહી થીજીને ઘન અવસ્થામાં રૂપાંતરણ પામે ત્યારે પ્રવાહીમાંથી ઊર્જા મુક્ત (ઓછી) થાય છે.

કોઈ પ્રવાહીનું વરાળ (વાયુ)માં રૂપાંતરણ કરવા માટે ઉષ્મા આપવી પડે છે (દા.ત., પાણીનું વરાળમાં રૂપાંતરણ). તે જ રીતે જ્યારે વાયુના અણુઓ ભેગા થઈને પ્રવાહી સ્વરૂપમાં ઠારણ પામે ત્યારે વાયુમાંથી ઊર્જા મુક્ત (ઓછી) થાય છે. વ્યાપક રીતે, એકમ દળના કોઈ પદાર્થનું એક અવસ્થા (ઘન, પ્રવાહી કે વાયુ)માંથી બીજી અવસ્થામાં રૂપાંતર કરવા માટે આપવી પડતી ઉષ્માને **રૂપાંતરણની ઉષ્મા (ગુપ્ત ઉષ્મા) (Latent heat) L** કહે છે. m દળના પદાર્થનું સંપૂર્ણ રીતે બીજી અવસ્થામાં રૂપાંતરણ કરવા માટે જરૂરી ઉષ્મા $Q = Lm$ (6.6.1)

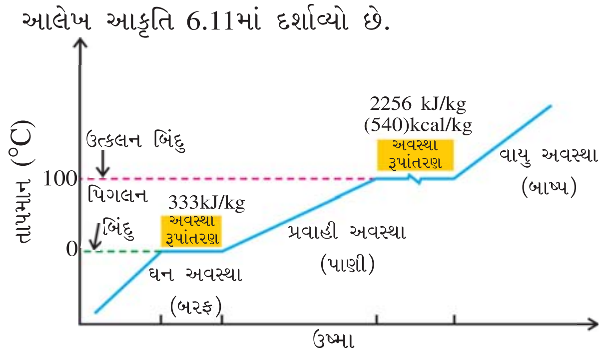
કોઈ પ્રવાહીનું વાયુ (વરાળ)માં અથવા વાયુ (વરાળ)નું પ્રવાહીમાં રૂપાંતરણ કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માને **બાષ્પાયન ગુપ્ત ઉષ્મા (ઉત્કલન ગુપ્ત ઉષ્મા) L_V કહે છે.**

સામાન્ય રીતે પાણી માટે L_V = 2256 kJ/kg છે.

એકમ દળના ઘન પદાર્થનું પ્રવાહીમાં રૂપાંતરણ કરવા (ત્યારે પદાર્થ ઉષ્મા મેળવશે) અથવા પ્રવાહીનું ઘનમાં રૂપાંતરણ કરવા (ત્યારે પદાર્થ ઉષ્મા ગુમાવશે) માટે જરૂરી ઉષ્માને **ગલનગુપ્ત ઉષ્મા L_F** કહે છે.

સામાન્ય રીતે પાણી માટે L_F = 333 kJ/kg

પાણીના અમુક જથ્થા માટે તાપમાન વિરુદ્ધ ઉષ્માનો આલેખ આકૃતિ 6.11માં દર્શાવ્યો છે.



1 વાતાવરણના દબાણે પાણી માટે તાપમાન વિરુદ્ધ ઉષ્માનો આલેખ (સ્કેલમાપ મુજબ નથી.)

આકૃતિ 6.11

આકૃતિ દર્શાવે છે કે જ્યારે અવસ્થા રૂપાંતરણ દરમ્યાન ઉષ્મા ઉમેરવામાં (કે ઘટાડવામાં) આવે તોપણ તાપમાન અચળ રહે છે. બધી ફેઝ રેખાઓના ઢાળ એકસરખા નથી, જે દર્શાવે છે કે જુદી-જુદી અવસ્થાઓની વિશિષ્ટ ઉષ્મા એક સરખી નથી. પાણી માટે L_F = 333 kJ/kg દર્શાવે છે કે 1 kg બરફને 0^oC તાપમાને પિગાળવા માટે 333 kJ જેટલી ઉષ્મા જોઈએ છે, અને L_V = 2256 kJ/kg દર્શાવે છે કે 1 kg પાણીને 100^oC તાપમાને વરાળમાં રૂપાંતરિત કરવા માટે

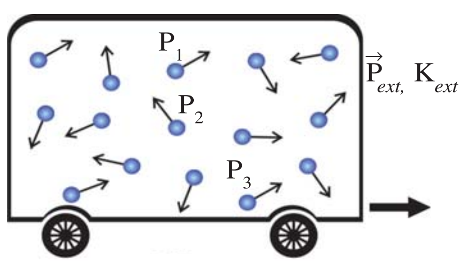
2256 kJ ઉષ્મા આપવી પડે છે. આથી $100^{\circ}C$ તાપમાને રહેલી વરાળ, $100^{\circ}C$ તાપમાને રહેલા પાણી કરતાં 2256 kJ/kg જેટલી વધુ ઉષ્મા ધરાવે છે. આ જ કારણથી મોટા ભાગે ઊકળતા પાણી કરતાં વરાળ વધારે નુકસાનકારક (દઝાડે) છે.

6.7 ઉષ્મા, આંતરિક ઊર્જા અને કાર્ય (Heat, Internal Energy and Work)

સ્થિર વાયુપાત્રમાં વાયુના અણુઓની વાયુના દ્રવ્યમાન-કેન્દ્રને અનુલક્ષીને અસ્તવ્યસ્ત ગતિના કારણે તેમને વેગમાન અને ગતિ-ઊર્જા હોય છે. વાયુના અણુઓની અસ્તવ્યસ્ત ગતિની સંભાવના દરેક દિશામાં સમાન હોવાના કારણે વાયુના અણુઓનું આ અસ્તવ્યસ્ત ગતિ સાથે સંકળાયેલ કુલ વેગમાન શૂન્ય થશે ($\vec{P}_{int} = 0$), પરંતુ અણુઓની આ અસ્તવ્યસ્ત ગતિ સાથે સંકળાયેલ કુલ ગતિ-ઊર્જા શૂન્ય થશે નહીં ($K_{int} \neq 0$).

વાયુના અણુઓની અસ્તવ્યસ્ત ગતિ સાથે સંકળાયેલ (કુલ વેગમાન શૂન્ય હોય તેવી ગતિ) કુલ ગતિ-ઊર્જાને વાયુમાં રહેલ ઉષ્મા-ઊર્જા કહે છે.

હવે જો વાયુના અણુઓ વચ્ચે આંતરક્રિયા થતી હોય તો અણુઓ આ આંતરક્રિયા સાથે સંકળાયેલ સ્થિતિ-ઊર્જા (U_{int}) પણ ધરાવતા હોય. બીજું, વાયુ પર જો કોઈ બહારનું પરિબળ (જેમકે ગુરુત્વાકર્ષણ) આંતરક્રિયા કરતું હોય, તો સમગ્ર વાયુ વધારાની સ્થિતિ-ઊર્જા U_{ext} પણ ધરાવતો હોય.



વાયુ ભરેલ વાયુપાત્રની ગતિ

આકૃતિ 6.12

આકૃતિ 6.12માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે વાયુ ભરેલું એક વાયુપાત્ર ગતિ કરે છે. આ કિસ્સામાં વાયુપાત્ર સાથે વાયુ પણ ગતિ કરે છે. આથી વાયુના અણુઓ અસ્તવ્યસ્ત ગતિ ઉપરાંત સરેરાશ વેગમાન $\vec{P}_{ext}$ અને ગતિ-ઊર્જા K_{ext} ધરાવે છે.

આમ, વાયુ કુલ ચાર પ્રકારની ઊર્જા ધરાવી શકે છે :

(1) K_{int}, (2) U_{int}, (3) K_{ext}, (4) U_{ext}

પ્રથમ બે ઊર્જાઓના સરવાળા ($K_{int} + U_{int}$) ને વાયુની આંતરિક ઊર્જા (E_{int}) કહે છે, જ્યારે છેલ્લી બે ઊર્જાના સરવાળા ($K_{ext} + U_{ext}$) ને વાયુની યાંત્રિક-ઊર્જા કહે છે.

વાયુ સાથે સંકળાયેલ ઊર્જાની આ પરિસ્થિતિ પદાર્થના કોઈ પણ સ્વરૂપ માટે સાચી છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે બે અસમાન તાપમાન-વાળા પદાર્થો એકબીજાના ઉષ્મીય સંપર્કમાં આવે ત્યારે વધુ તાપમાનવાળા પદાર્થના તાપમાનમાં ઘટાડો થાય છે અને ઓછા તાપમાનવાળા પદાર્થના તાપમાનમાં વધારો થાય છે. આમ બંને પદાર્થો વચ્ચે ઉષ્મા-ઊર્જાનો વિનિમય થાય છે. **વિનિમય પામતી આ ઉષ્મા-ઊર્જા એટલે જ ઉષ્મા.** એટલે કે **તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે, માત્ર તાપમાનના તફાવતના કારણે થતા ઊર્જાના વિનિમયને ઉષ્મા કહે છે.**

આ પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે કોઈ તંત્ર ઉષ્મા-ઊર્જા ધરાવી શકે પણ ઉષ્મા ધરાવી શકે નહિ.

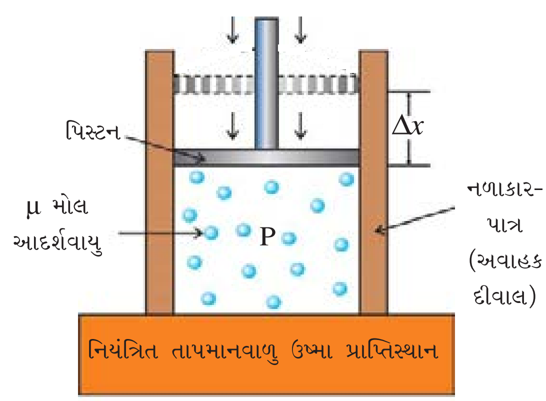
તંત્ર જો ઉષ્માનું શોષણ કરે, તો તેને ધન અને જો ઉષ્મા ગુમાવે તો ઋણ ગણવામાં આવે છે.

6.7.1 થરમૉડાઇનેમિક્સમાં કાર્ય (Work in Thermodynamics) :

બે વસ્તુઓ વચ્ચે થતી યાંત્રિક આંતરક્રિયાને કારણે જે યાંત્રિક-ઊર્જાનો વિનિમય થાય છે, તેને કાર્ય કહે છે. આમ, કાર્ય એ યાંત્રિક આંતરક્રિયા સાથે સંકળાયેલી રાશી છે. **તંત્ર યાંત્રિક-ઊર્જા ધરાવી શકે પણ કાર્ય ધરાવી શકે નહિં.**

અગાઉ તમે કાર્ય વિશે ભણ્યા છો તે મુજબ તંત્ર વડે બળની વિરુદ્ધમાં થતાં કાર્યને ઋણ અને તંત્ર પર થતા કાર્યને ધન ગણાય છે. પરંતુ **થરમૉડાઇનેમિક્સમાં તંત્ર વડે થતા કાર્યને ધન અને તંત્ર પર થતા કાર્યને ઋણ લેવામાં આવે છે.** આવી સંજ્ઞા પ્રણાલીનું કારણ ઉષ્માયંત્ર (heat engine)ની કાર્યપદ્ધતિ છે કે જેમાં એન્જિન પરિસરમાંથી Q જેટલી ઉષ્મા શોષી તેનું કાર્ય W માં રૂપાંતર કરે છે. એટલે કે W જેટલી ઊર્જા તંત્રમાંથી ઓછી થાય છે.

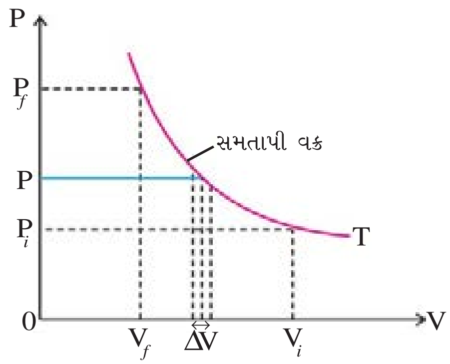
6.7.2 અચળ તાપમાને વાયુનું સંકોચન કરતાં વાયુ પર થતા કાર્યનું સૂત્ર :



નળાકાર વાયુપાત્રમાં રહેલો μ મોલ આદર્શવાયુ

આકૃતિ 6.13

આકૃતિ 6.13માં દર્શાવ્યા મુજબ એક નળાકાર પાત્રમાં પૂરતી ઓછી ઘનતાવાળો μ મોલ આદર્શવાયુ ભરી તેમાં હવા ચુસ્ત અને ઘર્ષણરહિત સરકી શકે તેવો A આડછેદના ક્ષેત્રફળવાળો પિસ્ટન રાખેલો છે. નળાકારના સુવાહક તળિયે તાપમાનનું નિયંત્રણ કરી શકાય તેવું ઉષ્મા-પ્રાપ્તિસ્થાન રાખેલ છે. અચળ તાપમાને વાયુના જુદા-જુદા દબાણને અનુરૂપ કદનાં અવલોકનો લઈ આકૃતિ 6.14માં દર્શાવ્યા મુજબ P – V નો આલેખ દોરી શકાય. આવી પ્રક્રિયાઓ સમતાપી પ્રક્રિયાઓ કહેવાય, તથા P – V ના વક્રને સમતાપી વક્ર કહેવાય.



આપેલ વાયુ માટે P – V નો આલેખ (અચળ તાપમાને)

આકૃતિ 6.14

ધારો કે પ્રારંભિક અવસ્થા *i*માં વાયુના દબાણ અને કદ અનુક્રમે P_i અને V_i છે. વાયુનું તાપમાન T અચળ રહે તે રીતે પિસ્ટન પર બળ લગાડીને ધીમે-ધીમે વાયુનું કદ ઘટાડતાં, ધારો કે વાયુનું અંતિમ દબાણ P_f અને અંતિમ કદ V_f થાય છે.

આ પ્રક્રિયા દરમિયાન કોઈ એક તબક્કે જ્યારે વાયુનું દબાણ P હોય અને કદ V હોય, ત્યારે ધારો કે પિસ્ટન Δx જેટલું અંતર અંદરની તરફ ખસે છે. જેના કારણે વાયુના કદમાં ΔV જેટલો ઘટાડો થાય છે. આ સ્થાનાંતર એટલું સૂક્ષ્મ છે કે વાયુના દબાણ Pમાં ખાસ નોંધપાત્ર ફેરફાર થતો નથી. આથી, વાયુ પર બાહ્ય બળ વડે થતું કાર્ય,

$$\Delta W = F\Delta x \qquad (6.7.1)$$

$$= PA\Delta x \quad (\because F = PA)$$

$$\therefore \Delta W = P\Delta V \quad (\because A\Delta x = \Delta V)$$

આવા સૂક્ષ્મ ફેરફારોના લીધે વાયુનું કદ V_i થી ઘટીને V_f થતું હોય, તો આ માટે વાયુ પર થતું કુલ કાર્ય

$$W = \Sigma\Delta W = \sum_{V_i}^{V_f} P\Delta V \qquad (6.7.2)$$

આ સરવાળામાં $\lim\limits_{\Delta V \to 0}$ લેતાં, સરવાળો સંકલનમાં પરિણમે છે.

$$\therefore W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV \qquad (6.7.3)$$

પરંતુ અચળ તાપમાને μ મોલ વાયુના જથ્થા માટે આદર્શવાયુ અવસ્થા-સમીકરણ મુજબ

$$PV = \mu RT$$

$$\therefore P = \frac{\mu RT}{V}$$

દબાણની આ કિંમત સમીકરણ (6.7.3)માં મૂકતાં,

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{\mu RT}{V} dV \qquad (6.7.4)$$

$$\therefore W = \mu RT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V}$$

$$= \mu RT [\ ln\ V\ ]_{V_i}^{V_f}$$

$$= \mu RT [\ lnV_f - lnV_i\ ]$$

$$\therefore W = \mu RT\ ln\frac{V_f}{V_i} \qquad (6.7.5)$$

સમીકરણ (6.7.5)માં $V_f < V_i$ હોવાથી $ln\ \frac{V_f}{V_i} < 0$.

આથી કાર્ય Wનું મૂલ્ય ઋણ મળે છે, જે દર્શાવે છે કે અચળ તાપમાને વાયુનું સંકોચન કરતાં વાયુ પર કાર્ય થાય છે.

જો અચળ તાપમાને વાયુનું પ્રસરણ કરવામાં આવે (કદ વધતું હોય), તો $V_f > V_i$ થવાથી સમીકરણ (6.7.5)માં $ln\ \frac{V_f}{V_i} > 0$ મળે. જેથી Wનું મૂલ્ય ધન મળે છે. જે દર્શાવે છે કે વાયુના કદપ્રસરણ દરમિયાન વાયુ વડે કાર્ય થાય છે.

6.7.3 અચળ કદ અને અચળ દબાણે થતું કાર્ય :

સમીકરણ (6.7.5) આદર્શ વાયુ માટે દરેક થરમૉડાઈનેમિક પ્રક્રિયા દરમિયાન થતું કાર્ય W નથી આપતું, પરંતુ તે ફક્ત સમતાપી પ્રક્રિયા માટે થતું કાર્ય જ આપે છે. જો તાપમાન બદલાતું હોય તો સમીકરણ (6.7.4)માં તાપમાન Tને સંકલનની બહાર ન લઈ શકાય અને પરિણામે સમીકરણ (6.7.5) મળે નહિ.

સમીકરણ (6.7.3)માં જો વાયુનું કદ V અચળ રાખવામાં આવે, તો (dV = ΔV = 0 થવાથી)

$$W = 0 \text{ (અચળ કદ માટે)} \qquad (6.7.6)$$

તે જ રીતે જો કદ બદલાતું હોય, પરંતુ દબાણ P અચળ રહેતું હોય તો સમીકરણ (6.7.3) પરથી,

$$W = P\int_{V_i}^{V_f} dV = P[V]_{V_i}^{V_f}$$

$$= P[V_f - V_i]$$

$$\therefore W = P\Delta V \text{ (અચળ દબાણ માટે)} \qquad (6.7.7)$$

ઉદાહરણ 7 : (a) એક મોલ ઑક્સિજન (આદર્શ વાયુ તરીકે ગણતાં)નું 310 K જેટલા અચળ તાપમાને પ્રસરણ કરતાં તેનું કદ V_i = 12 Lથી વધીને V_f = 19 L થાય છે. આ પ્રસરણ દરમિયાન વાયુ વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ? (b) આ તાપમાન અચળ રાખીને 1 મોલ ઑક્સિજનનું કદ 19 Lથી ઘટાડીને 15 L કરવા માટે બાહ્ય બળ વડે વાયુતંત્ર પર કેટલું કાર્ય કરવું પડે ?

(R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1})

ઉકેલ :

μ = 1 મોલ T = 310 K

V_i = 12 L V_f = 19 L

અહીંયા, ઑક્સિજનનું પ્રસરણ સમતાપી પ્રક્રિયા હોવાથી,

$$\therefore W = \mu RT\ ln\frac{V_f}{V_i}$$

$$= 1 \times 8.31 \times 310 \times ln\ \frac{19}{12}$$

$$\therefore W = 1183.6 \text{ J}$$

જે દર્શાવે છે કે સમતાપી પ્રસરણ દરમ્યાન ઑક્સિજન વડે 1183.6 Joule જેટલું કાર્ય થયું હશે.

(b) બીજા કિસ્સામાં,

μ = 1 મોલ T = 310 K

V_i = 19L V_f = 15 L

અહીંયા ઑક્સિજનનું સંકોચન પણ સમતાપી પ્રક્રિયા હોવાથી,

$$\therefore W = \mu RT\ ln\frac{V_f}{V_i}$$

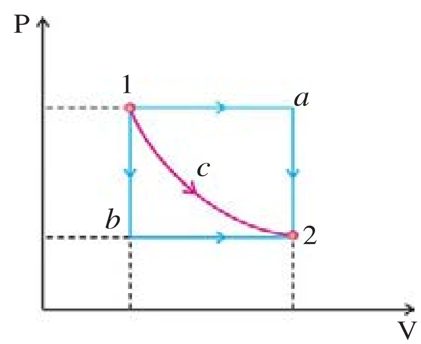
$$\therefore W = 1 \times 8.31 \times 310 \times ln\left(\frac{15}{19}\right)$$

$$\therefore W = -608.7 \text{ J}$$

એટલે કે સમતાપી સંકોચન દરમિયાન ઑક્સિજન વડે થયેલું કાર્ય –608.7 J છે. એટલે કે, બાહ્ય બળ વડે ઑક્સિજનનું સંકોચન (19 L થી 15 L) કરવા માટે થયેલું કાર્ય 608.7 Joule જેટલું હશે.

6.7.4 ઉષ્મા અને કાર્યની વિશેષ સમજૂતી (More understanding of Heat and Work) :

ધારો કે કોઈ એક તંત્રને ધીમે-ધીમે (દરેક તબક્કે તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે તાપીય સંતુલન જળવાતું રહે તે રીતે) પ્રારંભિક અવસ્થા 1માંથી અંતિમ અવસ્થા 2 સુધી લઈ જવામાં આવે છે. આ માટેના જુદા-જુદા માર્ગો (પ્રક્રિયાઓ) આકૃતિ 6.15માં દર્શાવ્યા છે.

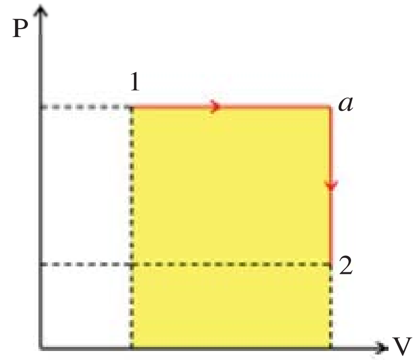


તંત્રને પ્રારંભિક અવસ્થાથી અંતિમ અવસ્થા સુધી લઈ જવાના જુદા-જુદા માર્ગો

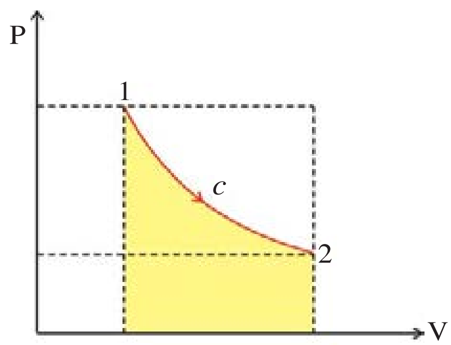
આકૃતિ 6.15

આ પ્રક્રિયાઓ દરમિયાન થતું કાર્ય સમીકરણ (6.7.3) પરથી $W = \int_1^2 P dV$, મુજબ શોધી શકાય છે. સંકલનનું આ મૂલ્ય અવસ્થા 1 અને 2 ને જોડતા માર્ગ વડે V-અક્ષ સાથે ઘેરાયેલા ક્ષેત્રફળ જેટલું હોય છે. આમ, તંત્રને પ્રારંભિક અવસ્થા 1 થી અંતિમ અવસ્થા 2 સુધી 1a2, 1c2 અને 1b2

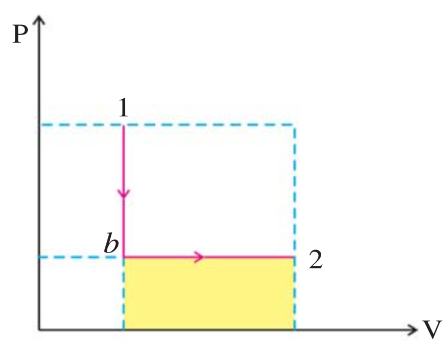
માર્ગે લાવતાં તંત્ર વડે થતું કાર્ય આકૃતિ 6.16માં પ્રક્રિયા માર્ગ વડે ઘેરાયેલા ક્ષેત્રફળ વડે અનુક્રમે દર્શાવેલ છે.



(a) 1*a* 2 માર્ગ



(b) 1*c* 2 માર્ગ



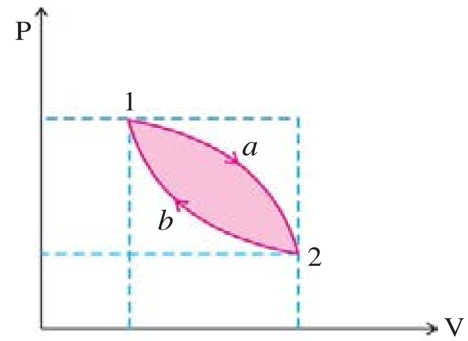
(c) 1*b* 2 માર્ગ

જુદા-જુદા માર્ગે થતું કાર્ય

આકૃતિ 6.16

આકૃતિ 6.16 દર્શાવે છે કે તંત્રને અવસ્થા 1થી અવસ્થા 2 સુધી લાવતાં તંત્ર વડે થતું કાર્ય 1*a*2 માર્ગ પર મહત્તમ (મહત્તમ ક્ષેત્રફળ) થાય છે, જ્યારે લઘુતમ કાર્ય 1*b*2 માર્ગ પર (લઘુતમ ક્ષેત્રફળ) થાય છે.

જો તંત્રને 2*a*1, 2*c*1 અથવા 2*b*1 માર્ગે અવસ્થા 2 પરથી અવસ્થા 1 પર લઈ જવામાં આવે તો (કદમાં ઘટાડો થતો હોવાથી ΔV ઋણ થશે) થતું કાર્ય ઋણ મળે છે, જે દર્શાવે છે કે તંત્ર પર બાહ્ય બળ વડે કાર્ય થાય છે.



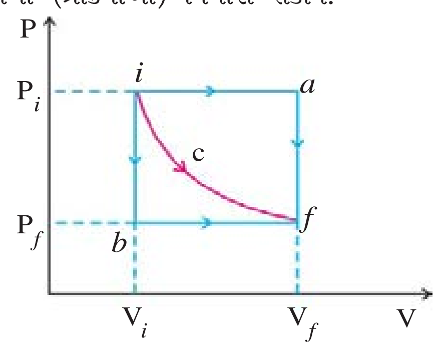
તંત્રની ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન 1*a*2*b*1 માર્ગે લાવતાં થતું કુલ કાર્ય

આકૃતિ 6.17

આકૃતિ 6.17માં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ તંત્રને પ્રારંભિક અવસ્થા 1થી 1*a*2 માર્ગે અવસ્થા 2 સુધી લઈ જઈને પાછું 2*b*1 માર્ગે પ્રારંભિક અવસ્થા 1 સુધી લાવવામાં આવે, તો આવી પ્રક્રિયા ચક્રીય પ્રક્રિયા કહેવાય. આ ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્ર વડે થતું કુલ કાર્ય બંધ વક્ર વડે ઘેરાયેલા ક્ષેત્રફળ જેટલું હોય છે. (1*a*2 માર્ગે તંત્ર વડે થતું કાર્ય ધન હોય છે, જ્યારે 2*b*1 માર્ગે તંત્ર પર કાર્ય થતું હોવાથી તંત્ર વડે થતું કાર્ય ઋણ હોય છે. આથી 1*a*2*b*1 માર્ગે થતું કુલ કાર્ય બંધ વક્ર વડે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ જેટલું હોય છે.)

6.8 થરમૉડાઇનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ (First Law of Thermodynamics)

ધારો કે કોઈ એક તંત્ર ઉષ્માનું શોષણ કરે છે અને તેના વડે (તંત્ર વડે) કાર્ય થાય છે. તંત્રને પ્રારંભિક અવસ્થા *i* માંથી અંતિમ અવસ્થા *f* માં લઈ જવા માટે જુદા-જુદા અનેક માર્ગો (પ્રક્રિયાઓ) વિચારી શકાય.



તંત્રને પ્રારંભિક અવસ્થા *i*માંથી અંતિમ અવસ્થા *f*માં લઈ જવા માટેના માર્ગો

આકૃતિ 6.18

આકૃતિ 6.18માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે માર્ગો *iaf*, *ibf*, *icf* દરમિયાન તંત્ર દ્વારા શોષાતી ઉષ્મા અનુક્રમે Q_a, Q_b, Q_c અને તંત્ર વડે થતા કાર્યનાં મૂલ્યો અનુક્રમે W_a, W_b, W_c છે. અહીંયાં $Q_a \neq Q_b \neq Q_c$ તથા $W_a \neq W_b \neq W_c$ હોય છે, પરંતુ આ દરેક માર્ગ માટે ઉષ્મા અને કાર્યનો તફાવત લેવામાં આવે તો તેનું મૂલ્ય એકસરખું આવે છે. એટલે કે,

$Q_a - W_a = Q_b - W_b = Q_c - W_c$.

આમ, **તંત્રને કોઈ પ્રારંભિક અવસ્થા *i* પરથી અંતિમ અવસ્થા *f* સુધી લઈ જવામાં આવે, તો ઉષ્મા Q અને કાર્ય W નાં મૂલ્યો, પ્રક્રિયા (માર્ગ) પર આધાર રાખે છે. પરંતુ Q − Wનું મૂલ્ય પ્રક્રિયા પર આધાર રાખતું નથી. Q − Wનું મૂલ્ય ફક્ત તંત્રની પ્રારંભિક અને અંતિમ અવસ્થા પર જ આધાર રાખે છે.**

આ ચર્ચા પરથી કહી શકાય કે તંત્રની જુદી-જુદી થરમૉડાઇનેમિક અવસ્થા માટે એક એવું થરમૉડાઇનેમિક અવસ્થા-વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય કે કોઈ પણ બે અવસ્થા વચ્ચે તેના મૂલ્યનો તફાવત Q − W જેટલો થાય. આ વિધેયને તંત્રની આંતરિક ઊર્જા (internal energy) E_{int} કહે છે.

તંત્રને Q જેટલી ઊર્જા, ઉષ્મા-ઊર્જા રૂપે મળે છે અને W જેટલી ઊર્જા તંત્ર દ્વારા કાર્ય થતાં તંત્રમાંથી ઓછી થાય છે. આમ, તંત્રની આંતરિક ઊર્જામાં Q − W જેટલો ફેરફાર થાય છે.

તંત્રની પ્રારંભિક અવસ્થા *i* અને અંતિમ અવસ્થા *f* માં તંત્રની આંતરિક ઊર્જાઓ અનુક્રમે E_i અને E_f હોય તો,

$$E_f - E_i = \Delta E_{int} = Q - W \qquad (6.8.1)$$

જે **થરમૉડાઇનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ** છે.

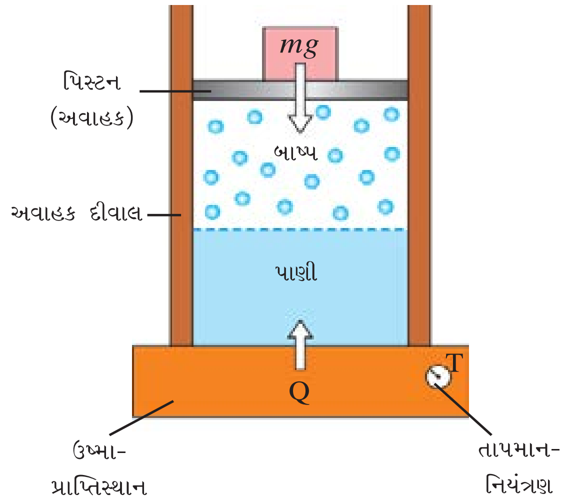
જો તંત્રને Q જેટલી ઉષ્મા મળતી હોય, તો તેની આંતરિક ઊર્જા E_{int} વધે છે, જ્યારે તંત્ર વડે થતાં કાર્ય W દરમિયાન તેની આંતરિક ઊર્જા ઘટે છે.

કુદરતમાં થતા કોઈ પણ ફેરફારો દરમિયાન થરમૉડાઇનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ પળાય છે.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 6.19માં દર્શાવ્યા મુજબ 100 °C તાપમાને રહેલ 1.00 kg પાણીનું 1.00 વાતાવરણના દબાણે ગરમ કરીને 100 °C તાપમાને વરાળમાં રૂપાંતર કરવામાં આવે છે. આ પ્રક્રિયા દરમ્યાન પાણીનું પ્રારંભિક કદ $1.00 \times 10^{-3}\ m^3$ થી વધીને વરાળના કદ $1.671\ m^3$ જેટલું થાય છે.

(*a*) આ પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્ર વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ? (*b*) આ પ્રક્રિયા દરમિયાન કેટલી ઉષ્માનો વિનિમય થયો હશે ? (*c*) આ પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્રની આંતરિક ઊર્જામાં કેટલો ફેરફાર થયો હશે ?

પાણી માટે $L_V = 2256 \dfrac{kJ}{kg}$



અચળ દબાણે ઊકળતું પાણી

આકૃતિ 6.19

ઉકેલ :

(*a*) $V_i = 1.00 \times 10^{-3} m^3, \quad V_f = 1.671\ m^3$

$P = 1.00$ atm $= 1.01 \times 10^5\ P_a$

અહીંયા અચળ દબાણે કદમાં વધારો થતો હોવાથી તંત્ર વડે થતું કાર્ય ધન હશે, જેનું મૂલ્ય

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV = P \int_{V_i}^{V_f} dV$$

(P અચળ હોવાથી સંકલનની બહાર લઈ શકાય.)

$$= P[V]_{V_i}^{V_f} = P[V_f - V_i]$$

$$\therefore W = 1.01 \times 10^5 \times [1.671 - 1.00 \times 10^{-3}]$$

$$= 1.69 \times 10^5$$

$$\therefore W = 169 \text{ kJ} \qquad (1)$$

(*b*) 100°C તાપમાને ઊકળતા પાણીનું 100°C તાપમાને રહેલી બાષ્પમાં રૂપાંતર થતું હોવાથી, તંત્રને મળતી ઉષ્મા,

$$Q = L_V m$$

$$= 2256 \times 1.00$$

$$\therefore Q = 2256 \text{ kJ} \qquad (2)$$

(*c*) થરમૉડાઇનેમિક્સના પ્રથમ નિયમ મુજબ, તંત્રની આંતરિક ઊર્જામાં થતો ફેરફાર

$$\Delta E_{int} = Q - W = 2256 - 169$$

$$= 2087 \text{ kJ} \qquad (3)$$

ΔE_{int} ધન છે, જે દર્શાવે છે કે તંત્રની આંતરિક ઊર્જામાં વધારો થાય છે. આ ઊર્જા પાણીના અણુઓને પાણીની સપાટી પરથી મુક્ત કરીને બાષ્પ (વરાળ)માં રૂપાંતરિત કરવામાં વપરાય છે.

6.9 ઉષ્માધારિતા અને વિશિષ્ટ ઉષ્મા (Heat Capacity and Specific Heat)

પદાર્થમાં જેમ વધારે અને વધારે ઉષ્મા ઉમેરતાં જઈએ તેમ તેનું તાપમાન પણ વધતું જાય છે. જુદા-જુદા પદાર્થો માટે તાપમાનનો સમાન ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માનો જથ્થો જુદો-જુદો હોય છે. વિજ્ઞાનીઓએ **એક કિલોગ્રામ શુદ્ધ પાણીનું તાપમાન 14.5 $^{\circ}$Cથી 15.5 $^{\circ}$C સુધી વધારવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને એક કિલો કૅલરી તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે.** એક કિલો કૅલરીના હજારમા ભાગને એક કૅલરી કહે છે.

પદાર્થને આપેલ ઉષ્મા Q અને તદ્નુરૂપ તેના તાપમાનના ફેરફાર ΔTના ગુણોત્તરને પદાર્થની ઉષ્માધારિતા (heat capacity, H_C) કહે છે. એટલે કે,

$$H_C = \frac{Q}{\Delta T} \tag{6.9.1}$$

H_C નો SI એકમ J K^{-1} અથવા cal/K

પદાર્થની ઉષ્માધારિતાનું મૂલ્ય પદાર્થની જાત તેમજ પદાર્થના દળ પર પણ આધારિત છે. એક જ દ્રવ્યના બનેલા જુદા-જુદા દળવાળા પદાર્થોની ઉષ્માધારિતા જુદી-જુદી હોય છે.

ઉષ્માધારિતા (heat capacity)નો મતલબ કાંઈ ડોલની કૅપેસિટી (ધારિતા) જેવો નથી કે તે કેટલું પાણી ધારણ કરી શકશે. પદાર્થ અમુક ઉષ્મા ધરાવી શકતો હશે કે શોષી શકતો હશે તેવો અર્થ પણ નથી. ઉષ્માનું શોષણ કે ઉત્સર્જન ત્યાં સુધી ચાલુ રહે છે કે જ્યાં સુધી જરૂરી તાપમાનનો તફાવત જળવાઈ રહે. આ પ્રક્રિયા દરમિયાન પદાર્થ પીગળી કે બાષ્પમાં રૂપાંતરિત પણ થઈ શકે છે.

પદાર્થના એકમ દળ દીઠ તેના તાપમાનમાં એક એકમ જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે પદાર્થના દ્રવ્યની વિશિષ્ટ ઉષ્મા (C) કહે છે. વિશિષ્ટ ઉષ્માનો એકમ cal $g^{-1}K^{-1}$ અથવા J kg^{-1} K^{-1} છે. આમ,

$$\text{વિશિષ્ટ ઉષ્મા} = \frac{\text{ઉષ્માધારિતા}}{\text{દળ}}$$

$$\therefore C = \frac{Q/\Delta T}{m} = \frac{Q}{m\Delta T} \tag{6.9.2}$$

યાદ રહે કે તાંબાના સિક્કા માટે ઉષ્માધારિતા સિક્કાની છે તેમ કહેવાય, પરંતુ વિશિષ્ટ ઉષ્મા તો તાંબાની જ કહેવાય. ઉષ્મા ધારિતા કે વિશિષ્ટ ઉષ્મા એ બંનેમાંથી કોઈ રાશિ અચળ નથી અને તેમનાં મૂલ્યો તાપમાનનો ગાળો ΔT કયા તાપમાને લેવાયો છે, તેના પર આધાર રાખે છે. સમીકરણો (6.9.1) અને (6.9.2) તે ગાળા દરમિયાનનાં તેમના સરેરાશ મૂલ્યો આપે છે. સમીકરણ (6.9.2) પરથી,

$$Q = mC\Delta T \tag{6.9.3}$$

ટેબલ 6.2 માં ઓરડાના તાપમાને કેટલાક પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં મૂલ્યો માહિતી માટે આપેલ છે.

ટેબલ 6.2

ઓરડાના તાપમાને પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્મા (માત્ર જાણકારી માટે)

પદાર્થ	વિશિષ્ટ ઉષ્મા		મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા
	Cal $g^{-1}K^{-1}$	J $kg^{-1}K^{-1}$	J $mol^{-1}K^{-1}$
ચાંદી	0.0564	236	25.5
તાંબું	0.0923	386	24.5
ઍલ્યુમિનિયમ	0.215	900	24.4
બરફ(-10°C)	0.530	2220	–
પાણી	1.00	4190	–
સમુદ્રનું પાણી	0.93	3900	–

6.9.1 વાયુની વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ (Specific heats of gases) :

સિમેસ્ટર Iમાં વાયુનો ગતિવાદ પ્રકરણમાં તમે વિશિષ્ટ ઉષ્મા અને વાયુની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માનો અભ્યાસ કર્યો હતો. આ વ્યાખ્યાઓ ફરીથી યાદ કરીને વાયુની વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ વચ્ચેનો સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરીશું.

મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા : વાયુના એક મોલ દીઠ તેના તાપમાનમાં 1K (અથવા 1 C^{o}) જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા કહે છે.

કેટલાક પદાર્થોની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં મૂલ્યો ટેબલ 6.2 માં જાણ સારું આપેલ છે.

અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્મા (C_V)

એક મોલ વાયુનું કદ અચળ રાખી તેના તાપમાનમાં એક કૅલ્વિન જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્મા C_V કહે છે.

અચળ દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા (C_P)

એક મોલ વાયુનું દબાણ અચળ રાખી તેના તાપમાનમાં એક કેલ્વિન જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની અચળ દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા C_P કહે છે.

C_P અને C_V વચ્ચેનો સંબંધ :

થરમૉડાઈનેમિક્સના પ્રથમ નિયમ મુજબ, અતિ સૂક્ષ્મ ફેરફારો માટે

$$dE_{int} = dQ - dW$$

$$\therefore\ dQ = dE_{int} + dW$$

$$\therefore\ dQ = dE_{int} + PdV \qquad (6.9.4)$$

પરંતુ અચળ કદે $dV = 0$ હોવાથી

$$dQ = dE_{int}$$

$$\therefore\ \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \left(\frac{dE_{int}}{dT}\right)_V$$

વાયુનો ગતિવાદ પ્રકરણ (સિમેસ્ટર I)માં તમે ભણ્યા, તે મુજબ જે વાયુના અણુઓની મુક્તતાના અંશો f હોય તેવા એક મોલ વાયુની આંતરિક ઊર્જા

$$E_{int} = \frac{fRT}{2} \quad (\mu = 1) \qquad (6.9.5)$$

આથી,

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = C_V = \left(\frac{dE_{int}}{dT}\right)_V = \frac{fR}{2} \qquad (6.9.6)$$

તે જ રીતે સમીકરણ (6.9.4)માં અચળ દબાણે એક મોલ વાયુને ઉષ્મા આપતાં,

$$(dQ)_P = dE_{int} + PdV$$

પરંતુ, એક મોલ (આદર્શ) વાયુ માટે

$$PV = RT \quad (\mu = 1)$$

$$\therefore\ PdV = RdT$$

આથી,

$$(dQ)_P = dE_{int} + RdT$$

$$\therefore\ \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P = \left(\frac{dE_{int}}{dT}\right)_P + R$$

અહીં સમીકરણ (6.9.5)નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_P = C_P = \frac{fR}{2} + R \qquad (6.9.7)$$

સમીકરણ (6.9.6) અને (6.9.7) પરથી,

$$C_P - C_V = R \qquad (6.9.8)$$

અચળ દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા C_P અને અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્મા C_V ના ગુણોત્તરને γ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આથી,

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{fR}{2} + R}{\frac{fR}{2}} = \frac{fR + 2R}{fR}$$

$$\therefore\ \gamma = \frac{f+2}{f} = 1 + \frac{2}{f} \qquad (6.9.9)$$

એક પરમાણ્વિક વાયુની મુક્તતાના અંશો $f = 3$ હોય છે. આથી એક પરમાણ્વિક અણુવાળા વાયુ માટે

$$C_V = \frac{3R}{2},\ C_P = \frac{5R}{2},\ \gamma = \frac{5}{3}$$

દ્વિ-પરમાણ્વિક વાયુ (rigid rotator) માટે $f = 5$

$$C_V = \frac{5R}{2},\ C_P = \frac{7R}{2},\ \gamma = \frac{7}{5}$$

તથા દ્વિ-પરમાણ્વિક વાયુ (with vibrations) માટે $f = 7$

$$\therefore\ C_V = \frac{7R}{2},\ C_P = \frac{9R}{2},\ \gamma = \frac{9}{7}$$

દ્વિ-પરમાણ્વિક અને બહુ-પરમાણ્વિક વાયુઓ માટે વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં મૂલ્યો પ્રમાણમાં ઊંચાં છે. વાયુના અણુમાં પરમાણુઓની સંખ્યા વધવાની સાથે વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં મૂલ્યોમાં પણ વધારો જોવા મળે છે. આનો અર્થ એ થાય કે બહુ-પરમાણ્વિક અણુઓને ગરમ કરવા માટે વધારે ઉષ્મા જોઈએ છે, જેનું કારણ આ મુજબ છે. એક-પરમાણ્વિક અણુઓ ફક્ત રેખીય ગતિ-ઊર્જા ધરાવતા હોય છે. આથી તેમને ઉષ્મા આપતાં તેમની રેખીય ગતિ ઊર્જા વધે છે. જ્યારે બહુ પરમાણ્વિક અણુઓ તેમની મુક્ત રેખીય ગતિ ઉપરાંત ચાકગતિ અને દોલનગતિ પણ ધરાવતા હોય છે. આથી આ વાયુઓને ઉષ્મા આપતાં તે ઉષ્મા અણુઓની ઉપરોક્ત ત્રણેય પ્રકારની ગતિઓની ઊર્જા વધારવા માટે વપરાતી હોવાથી તેમને વધુ ઉષ્મા આપવી પડે છે. આમ, બહુપરમાણ્વિક અણુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્મા વધુ હોય છે.

ઉદાહરણ 9 : (*a*) $-10\,^{\circ}C$ તાપમાને રહેલા 720 gના બરફના એક ટુકડાને $0\,^{\circ}C$ તાપમાને પાણીમાં રૂપાંતરિત કરવા માટે કેટલી ઉષ્મા આપવી પડે ?

(*b*) $0^{o}C$ તાપમાને રહેલા આ પાણીનું તાપમાન વધારીને $100^{o}C$ કરવા માટે કેટલી ઉષ્મા આપવી પડે ?

(*c*) $100^{o}C$ તાપમાને રહેલા પાણીને સંપૂર્ણપણે બાષ્પમાં રૂપાંતરિત કરવા માટે કેટલી ઉષ્મા આપવી પડે ?

(*d*) $-10^{o}C$ તાપમાને રહેલા 720 g બરફનું સંપૂર્ણ રીતે બાષ્પમાં રૂપાંતરણ કરવા માટે કુલ કેટલી ઉષ્મા આપવી પડે ?

($C_{ice} = 2220$ J kg^{-1} K^{-1}, $C_{water} = 4190$ J kg^{-1} K^{-1}, $L_F = 333$ kJ/kg, $L_V = 2256$ kJ/kg)

ઉકેલ : (*a*) જ્યાં સુધી બરફનું તાપમાન ગલનબિંદુ સુધી નહીં જાય, ત્યાં સુધી બરફ ઓગળશે નહિ. આથી બરફનું તાપમાન $T_i = -10^{o}C$ થી $T_f = 0^{o}C$ સુધી લઈ જવા (ત્યાર બાદ બરફ પીગળવાનું શરૂ થશે) માટે આપવી પડતી ઉષ્મા

$$Q_1 = C_{ice}\ m\ (T_f - T_i)$$

જ્યાં,

$C_{ice} = -10^{o}C$ તાપમાને રહેલા બરફની વિશિષ્ટ ઉષ્મા

$$= 2220\ \frac{J}{kg\ K}$$

$$\therefore\ Q_1 = (2220)\ (0.720)\ [0 - (-10)]$$

$$= 15{,}984\ J$$

$$\therefore\ Q_1 = 15.98\ kJ \qquad (1)$$

જ્યાં સુધી બરફ પૂરેપૂરો પીગળી નહિ જાય ત્યાં સુધી તેનું તાપમાન $0^{o}C$ થી વધશે નહિ. આથી બરફને પૂરેપૂરો પિગાળવા માટે આપવી પડતી ઉષ્મા

$$Q_2 = L_F m = (333)\ (0.720)$$

$$\therefore\ Q_2 = 239.8\ kJ \qquad (2)$$

(*b*) હવે $T_i = 0^{o}C$ તાપમાને રહેલા 0.720 kg પાણીનું તાપમાન $T_f = 100^{o}C$ સુધી વધારવા માટે આપવી પડતી ઉષ્મા

$$Q_3 = C_{water}\ m(T_f - T_i)$$

$$\therefore\ Q_3 = (4190)\ (0.720)\ (100 - 0)$$

$$\therefore\ Q_3 = 301680$$

$$\therefore\ Q_3 = 301.68\ kJ \qquad (3)$$

(*c*) $100^{o}C$ તાપમાને રહેલા પાણીનું સંપૂર્ણપણે બાષ્પમાં રૂપાંતરણ કરવા માટે આપવી પડતી ઉષ્મા

$$Q_4 = L_V\ m$$

$$= (2256)\ (0.720)$$

$$\therefore\ Q_4 = 1624.32\ kJ \qquad (4)$$

(*d*) $-10^{o}C$ તાપમાને રહેલા 720 g બરફનું સંપૂર્ણપણે બાષ્પમાં રૂપાંતર કરવા માટે આપવી પડતી કુલ ઉષ્મા

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$\therefore\ Q = 2181.78\ kJ \qquad (5)$$

ઉદાહરણ 10 : $-10^{o}C$ તાપમાને રહેલા 1 kg બરફને 210 kJ ઉષ્મા આપવામાં આવે, તો મળતા પાણીનું દ્રવ્યમાન અને તાપમાન કેટલું હશે ?

($C_{ice} = 2220$ J kg^{-1} K^{-1})

ઉકેલ : બરફનું દળ $m = 1$ kg

બરફનું તાપમાન $T_i = -10^{o}C$ થી $T_f = 0^{o}C$, સુધી લઈ જવા માટે આપવી પડતી ઉષ્મા

$$Q_1 = C_{ice}\ m(T_f - T_i)$$

$$= 2220 \times 1 \times [0 - (-10)]$$

$$= 22200\ J$$

$$\therefore\ Q_1 = 22.2\ kJ \qquad (1)$$

જ્યાં સુધી બરફ પૂરેપૂરો પીગળી ન જાય ત્યાં સુધી તેનું તાપમાન $0^{o}C$ થી વધશે નહિ. બરફને આપવામાં આવેલી ઉષ્મા $Q_1 = 210$ kJ છે. જેમાંથી $Q_1 = 22.2$ kJ જેટલી ઉષ્મા બરફનું તાપમાન $-10^{o}C$ થી $0^{o}C$ સુધી લઈ જવામાં વપરાઈ ગઈ છે. આથી $0^{o}C$ તાપમાને આવ્યા પછી બરફને મળેલી ચોખ્ખી ઉષ્મા

$$Q' = Q - Q_1 = 210\ kJ - 22.2\ kJ$$

$$\therefore\ Q' = 188.8\ kJ \qquad (2)$$

આ ઉષ્મા વડે પીગળેલો બરફનો જથ્થો (દળ)

$$m = \frac{Q'}{L_F} = \frac{188.8}{333}$$

$$\therefore\ m = 0.564\ kg \qquad (3)$$

જે દર્શાવે છે કે 1 kg બરફમાંથી 0.564 kg જેટલો બરફ પીગળ્યો છે. (એટલે કે 0.564 kg જેટલું પાણી બન્યું છે) અને 1 kg – 0.564 kg = 0.436 kg જેટલો બરફ પીગળ્યા વગરનો છે. આમ 1 kg બરફમાંથી મળતાં પાણીનું દ્રવ્યમાન $m = 0.564$ kg (4)

અને તેનું તાપમાન

$T = 0^oC$ (5)

6.10 કેટલીક થરમૉડાઇનેમિક પ્રક્રિયાઓ (Some Thermodynamic Processes)

એકનું એક પરિણામ મેળવવાની રીતો ઘણી વખત જુદી-જુદી હોઈ શકે છે. થરમૉડાઇનેમિક્સમાં પણ કેટલીક વખત એકનું એક પરિણામ ઘણી રીતે મેળવી શકાય છે. જેમકે નળાકાર અને હવાચુસ્ત, ઘર્ષણરહિત સરકતા પિસ્ટનની સંરચનામાં ભરેલા વાયુનું તાપમાન વધારવું હોય તો પિસ્ટન પર ઝડપથી દબાણ વધારી વાયુનું તાપમાન વધારી શકાય અથવા બહારથી જ્યોત વડે નળાકારને ગરમ કરી તેમાં રહેલા વાયુનું તાપમાન વધારી શકાય. આમ, થરમૉડાઇનેમિક્સમાં તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે થતી આંતરક્રિયાઓ પરની શરતો ઘણી અગત્યની છે અને તેવી શરતો મુજબ તેને ચોક્કસ પ્રક્રિયા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે, તો ચાલો આવી કેટલીક પ્રક્રિયાઓનો આપણે અભ્યાસ કરીએ.

સમદાબ પ્રક્રિયા (Isobaric process) : "જે પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્રનું દબાણ અચળ રહે છે, તે પ્રક્રિયાને સમદાબ પ્રક્રિયા કહે છે."

આ પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્રની થરમૉડાઇનેમિક સંતુલન અવસ્થાઓ બદલાતી જશે. વચગાળાની સંતુલિત અવસ્થાઓ દરમિયાન તંત્રના થરમૉડાઇનેમિક વિધેયોનાં ચોક્કસ મૂલ્યો અસ્તિત્વ ધરાવતાં હોય છે. તે પરથી આ પ્રક્રિયા માટે $P - V$ આલેખ દોરતાં તે V-અક્ષને સમાંતર સુરેખા મળશે.

સમીકરણ (6.7.3) પરથી $W = \int_{V_i}^{V_f} P dV$

P અચળ હોવાથી, $W = P\int_{V_i}^{V_f} dV$

$= P(V_f - V_i)$ (6.10.1)

સમકદ પ્રક્રિયા (Isochoric process) : આ પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્રનું કદ અચળ રહેતું હોય છે. આવી પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્ર પર કે તંત્ર વડે કોઈ કાર્ય થતું ન હોવાથી થરમૉડાઇનેમિક્સના પ્રથમ નિયમ મુજબ $Q = \Delta E_{int}$ થશે. આમ, સમકદ ફેરફાર દરમિયાન તંત્રની આંતરિક ઊર્જાનો ફેરફાર તંત્ર વડે વિનિમય પામતી ઉષ્મા જેટલો હોય છે.

સમોષ્મી પ્રક્રિયા (Adiabatic process) : આવી પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્ર અને તેના પરિસર વચ્ચે ઉષ્મા-ઊર્જાનો વિનિમય થતો હોતો નથી. આવી પ્રક્રિયા કરવા માટે (1) તંત્રની પરિસીમા ઉષ્માની અવાહક હોવી જોઈએ અથવા તો (2) પ્રક્રિયા અત્યંત ઝડપથી થવી જોઈએ.

ધ્વનિ-તરંગોના પ્રસરણ દરમિયાન માધ્યમમાં સંઘનન અને વિઘનન રચાવાની પ્રક્રિયા ઘણી ઝડપી હોવાથી તેને સમોષ્મી ગણી શકાય. સાઇકલમાં હવા પૂરવાનો પંપ ઝડપથી ચલાવતાં શા માટે તે ગરમ થઈ જાય છે તેનો ખ્યાલ હવે તમને આવશે. સમોષ્મી પ્રક્રિયા દરમિયાન $\Delta Q = 0$ હોવાથી થરમૉડાઇનેમિક્સના પ્રથમ નિયમ મુજબ $\Delta E_{int} = -W$ થશે. એટલે કે જો તંત્ર વડે કાર્ય થાય $(W > 0)$ તો તંત્રની આંતરિક ઊર્જામાં ઘટાડો થાય છે અને જો તંત્ર પર કાર્ય થાય, તો તંત્રની આંતરિક ઊર્જામાં વધારો થાય છે.

આદર્શવાયુ માટે સમોષ્મી પ્રક્રિયા દરમિયાન દબાણ અને કદ વચ્ચેનો સંબંધ નીચે મુજબ છે :

(તારવણીની ચિંતા ભવિષ્ય પર છોડો.)

$PV^\gamma =$ અચળ, જ્યાં $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$

સમતાપી પ્રક્રિયા (Isothermal process) : "જે થરમૉડાઇનેમિક પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્રનું તાપમાન અચળ જળવાઈ રહેતું હોય તેવી પ્રક્રિયાને સમતાપી પ્રક્રિયા કહે છે."

આદર્શવાયુના સમતાપી વિસ્તરણ દરમિયાન થતું કાર્ય : ધારો કે μ મોલ આદર્શવાયુનું કદ, અચળ તાપમાને V_1માંથી વધીને V_2 થાય છે. સમીકરણ (6.7.3) પરથી,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

આદર્શવાયુના અવસ્થા-સમીકરણ $PV = \mu RT$ પરથી,

$$P = \frac{\mu RT}{V} \quad (6.10.2)$$

$$\therefore W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mu RT}{V} dV$$

$$= \mu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV$$

(સમતાપી પ્રક્રિયામાં તાપમાન અચળ હોવાથી Tને સંકલનની નિશાનીની બહાર લીધેલ છે.)

$$= \mu RT [ln\ V]_{V_1}^{V_2}$$

$$= \mu RT [ln\ V_2 - ln\ V_1]$$

$$\therefore W = \mu RT\ ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (6.10.3)$$

આદર્શવાયુની આંતરિક ઊર્જા ફક્ત તાપમાન પર આધારિત હોવાથી સમતાપી ફેરફાર દરમિયાન આંતરિક ઊર્જાનો ફેરફાર

શૂન્ય હોય છે. તેથી થરમૉડાઇનેમિક્સના પ્રથમ નિયમ ($Q = W + \Delta E_{int}$) માં $\Delta E_{int} = 0$ મૂકતાં, $Q = W$ થાય છે અને પરિણામે સમીકરણ (6.10.3)ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$W = Q = \mu RT \ ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (6.10.4)$$

ચક્રીય પ્રક્રિયા (Cyclic process) : ''જે થરમૉડાઇનેમિક પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્રને તેની એક થરમૉડાઇનેમિક સંતુલન અવસ્થામાંથી શ્રેણીબદ્ધ પ્રક્રિયાઓ કરી અંતે મૂળ અવસ્થામાં પાછું લાવવામાં આવે છે, તેવી પ્રક્રિયાને ચક્રીય પ્રક્રિયા કહે છે.''

ચક્રીય પ્રક્રિયામાં તંત્રની પ્રારંભિક અને અંતિમ અવસ્થાઓ એક જ હોવાથી તંત્રની આંતરિક ઊર્જામાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી. (અર્થાત્ $\Delta E_{int} = 0$) અને તેથી થરમૉડાઇનેમિક્સના પ્રથમ નિયમ મુજબ $Q = W$ હોય છે. આમ, ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે વિનિમય પામતી ઉષ્મા-ઊર્જાનો ચોખ્ખો જથ્થો તંત્ર વડે થતા ચોખ્ખા કાર્ય જેટલો હોય છે.

6.11 પ્રતિવર્તી અને અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાઓ (Reversible and Irreversible Processes)

ધારો કે સિલિન્ડર-પિસ્ટન રચનામાં વાયુ ભરેલ વાયુતંત્ર કોઈ પ્રારંભિક સંતુલિત અવસ્થા *i*માં છે કે જેમાં તેના દબાણ, કદ અને તાપમાનનાં મૂલ્યો અનુક્રમે P, V અને T છે. આ તંત્રનું અચળ તાપમાને કદ અડધું કરીને બીજી કોઈ સંતુલિત અવસ્થા *f*માં લઈ જવું હોય, તો તે માટેની ઘણી શક્ય પ્રક્રિયાઓ વિચારી શકાય.

આવી એક પ્રક્રિયામાં પિસ્ટનને ઝડપથી નીચે ધકેલી દઈ શકાય અને પછી તંત્ર, તેના પરિસર સાથે સંતુલન પ્રાપ્ત કરી પાછું પોતાનું તાપમાન T સ્થાપિત કરી લે ત્યાં સુધી રાહ જોઈ શકાય. પરંતુ આ રીતે વાયુનું ઝડપથી સંકોચન કરતાં તેમાં અસંતુલન પેદા કરતી અસરો ઉત્પન્ન થાય છે. પરિણામે તંત્ર અવસ્થા *i* અને *f* વચ્ચે અનેક અસંતુલિત સ્થિતિઓમાંથી ઝડપથી પસાર થાય છે. જોકે ઉપર જણાવ્યું તેમ સારી એવી રાહ જોયા પછી તંત્ર અંતે સંતુલિત અવસ્થા *f*માં આવે છે ખરું.

હવે આ પ્રક્રિયાને ઉલટાવીએ એટલે કે પિસ્ટનને પાછો ઝડપથી ઊંચે લઈ જઈ વાયુનું કદ ફરી V જેટલું (પ્રારંભિક કદ જેટલું) કરી નાખીએ તો સંકોચન વખતે વાયુ વચગાળાની જે-જે અસંતુલિત અવસ્થાઓમાંથી પસાર થયો હતો, તે જ અસંતુલિત અવસ્થાઓમાંથી પાછો પસાર થઈને અવસ્થા *f* માંથી *i* માં જશે નહિ. આવી પ્રક્રિયાને **અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા** કહે છે.

હવે એક બીજા પ્રકારની પ્રક્રિયા વિચારીએ કે જેમાં વાયુના કદમાં અત્યંત સૂક્ષ્મ ઘટાડો કરતાં કરતાં છેવટે વાયુનું કદ અડધું કરી શકીએ. વાયુના કદમાં અત્યંત સૂક્ષ્મ ઘટાડો કરતાં તેમાં સહેજ ક્ષણિક અસંતુલન જરૂર ઉત્પન્ન થશે, તાપમાન પણ સહેજ જરૂર વધશે, પરંતુ પ્રક્રિયા અત્યંત ધીમી હોવાથી મળતા પૂરતા સમયમાં તંત્ર વધારાની ઉષ્મા પરિસરને આપી દઈને પાછું સંતુલન અવસ્થામાં આવી જશે અને વચગાળાના દરેક તબક્કે તંત્રનું તાપમાન T જેટલું જ જળવાઈ રહેશે. આમ, કદ ઘટાડાના દરેક તબક્કે તંત્ર સંતુલિત અવસ્થાઓમાંથી જ પસાર થાય છે તેમ કહેવાય. આ રીતે થતી પ્રક્રિયાને **ક્વોસાઈ-સ્ટેટિક (quasi-static) પ્રક્રિયા** કહે છે. આ રીતે તંત્રનું તાપમાન અચળ રહે તેમ તેનું કદ અડધું કરી શકાય છે. આ જ રીતે આ પ્રક્રિયાને ઉલટાવીને એટલે કે તંત્ર પરના દબાણમાં અત્યંત સૂક્ષ્મ ઘટાડો કરતાં-કરતાં ધીરે-ધીરે તંત્રનું કદ વધારીને તંત્રને મૂળ માર્ગે જ (એટલે કે પ્રક્રિયા થઈ ત્યારે તંત્ર વચગાળાની જે-જે સંતુલિત અવસ્થાઓમાંથી પસાર થયું હતું તેમાંથી જ પાછું પસાર કરાવીને) પ્રારંભિક અવસ્થા *i* માં પાછું લાવી શકાય છે. આવી પ્રક્રિયાને **પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા** કહેવાય છે. પરંતુ એ વાતનું સ્મરણ રાખવું ઘટે કે પ્રસ્તુત ઉદાહરણમાં આપણે સમતાપી પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાનો વિચાર કર્યો છે અને ઊર્જાનો કોઈ રીતે વ્યય ન થાય તેમ પિસ્ટનને ઘર્ષણરહિત ગતિ કરતો ધાર્યો છે. જ્યારે પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા ઉલટાવીએ ત્યારે માત્ર તંત્ર જ નહિ, પરંતુ પરિસર પણ પોતાની મૂળ અવસ્થામાં આવી જાય છે.

આટલી ચર્ચા પછી એ તો સ્પષ્ટ થશે જ કે ઊર્જાનો વ્યય કરે તેવાં પરિબળોની ગેરહાજરી એ તો એક આદર્શ પરિસ્થિતિ હોવાથી વ્યવહારમાં સંપૂર્ણપણે પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા શક્ય નથી. બધી જ કુદરતી પ્રક્રિયાઓ (એટલે કે આપમેળે થતી પ્રક્રિયાઓ) અપ્રતિવર્તી છે. દા.ત., લોખંડનું કટાવું, ખડકોનું ઘસાવું, પ્રાણીમાત્રને વૃદ્ધત્વ આવવું વગેરે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે જ્યારે આદર્શ વાયુતંત્ર સમોષ્મી પ્રક્રિયા દ્વારા પ્રારંભિક અવસ્થા (P_1, V_1, T_1) માંથી અંતિમ અવસ્થા (P_2, V_2, T_2)માં જાય ત્યારે તેના વડે થતું કાર્ય.

$$W = \frac{P_1V_1 - P_2V_2}{\gamma - 1} = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$ જેટલું હોય છે.

[સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે $PV^{\gamma} = A$ અચળાંક]

ઉકેલ : સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

$$= A\int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^{\gamma}} dV \qquad (\because P = \frac{A}{V^{\gamma}})$$

$$\therefore\ W = A\int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV$$

$$= A\left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]^{V_2}$$

$$= A\left[\frac{V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}}{(1-\gamma)}\right]$$

$$= \frac{AV_2^{-\gamma+1} - AV_1^{-\gamma+1}}{(1-\gamma)}$$

$$= \frac{P_2V_2^{\gamma}V_2^{-\gamma+1} - P_1V_1^{\gamma}V_1^{-\gamma+1}}{(1-\gamma)}$$

$$= \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{(1-\gamma)} \qquad (1)$$

$$\therefore\ W = \frac{P_1V_1 - P_2V_2}{\gamma-1} \qquad (2)$$

પરંતુ $PV = \mu RT$

$$\therefore\ W = \frac{\mu RT_1 - \mu RT_2}{\gamma-1} = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{\gamma-1} \qquad (3)$$

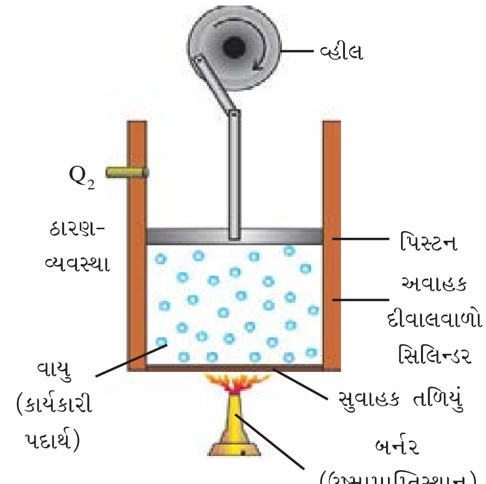
6.12 કૅલોરીમેટ્રી (Calorimetry)

કૅલોરીમેટ્રી એટલે ઉષ્માનું માપન : જ્યારે ઊંચા તાપમાને રહેલા પદાર્થને નીચા તાપમાને રહેલા બીજા પદાર્થના સંપર્કમાં લાવવામાં આવે, ત્યારે ગરમ પદાર્થે ગુમાવેલી ઉષ્મા બરાબર ઠંડા પદાર્થે મેળવેલી ઉષ્મા થાય છે (જો ઉષ્માનો પરિસરમાં વ્યય ન થવા દેવાય તો). આ ત્યારે જ શક્ય બને કે જ્યારે તંત્ર અલગ કરેલું (isolated) હોય, એટલે કે તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે ઉષ્માનો વિનિમય ન થતો હોય.

જે સાધન ઉષ્માનું માપન કરે તેને કૅલોરીમીટર કહે છે. તે તાંબું કે ઍલ્યુમિનિયમ જેવી ધાતુના પાત્ર અને હલાવવા માટેના તે જ ધાતુના સળીયાનું બનેલું હોય છે. આ પાત્રને લાકડાના ખોખામાં એક આવરણમાં મૂકવામાં આવે છે, જે ઉષ્માના અવાહક પદાર્થો જેવા કે કાચ, ઊન વગેરેનું બનેલું હોય છે. બહારનું આવરણ (ખોખું) ઉષ્માના અવાહક તરીકે વર્તે છે અને અંદરના પાત્રમાંથી થતો ઉષ્માનો વ્યય ઘટાડે છે. બહારના આવરણમાં એક છિદ્ર હોય છે, જેમાંથી કૅલોરીમીટરમાં થરમૉમીટર દાખલ કરી શકાય છે.

6.13 ઉષ્મા-એન્જિન અને તેની કાર્યક્ષમતા (Heat Engine and its Efficiency)

ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર કરતી રચનાને ઉષ્મા-એન્જિન કહે છે.



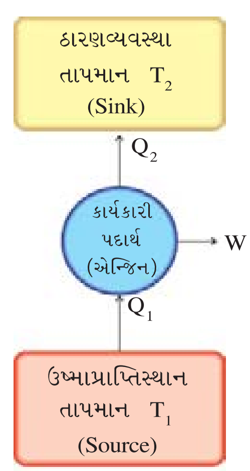
સાદું ઉષ્મા-એન્જિન

આકૃતિ 6.20

આકૃતિ 6.20માં સાદું ઉષ્મા-એન્જિન (heat engine) દર્શાવ્યું છે. અહીં પિસ્ટન સાથેના સિલિન્ડરમાંના વાયુને બર્નરની જ્યોત વડે ગરમ કરતાં વાયુ ઉષ્મા મેળવે છે. આ ઉષ્માને લીધે વાયુનું પ્રસરણ થાય છે અને પિસ્ટન પર દબાણ લગાડી વાયુ પિસ્ટનને ઉપર ધકેલે છે. પરિણામે વ્હીલ ચાકગતિ કરે છે. વ્હીલની આવી ચાકગતિ ચાલુ રાખવા માટે ઉષ્મા-એન્જિનમાં પિસ્ટન પુનરાવર્તિત રીતે ઉપર-નીચે સરકી શકે તેવી વ્યવસ્થા કરવામાં આવે છે. આ માટે પિસ્ટન વધુ ઉપર સરકે ત્યારે ઉપર આવેલા છિદ્રમાંથી ગરમ વાયુ (ઠારણવ્યવસ્થામાં) બહાર નીકળે છે.

અહીં વાયુને કાર્યકારી પદાર્થ (working substance) કહે છે. બર્નરની જ્યોતને ઉષ્મા-પ્રાપ્તિસ્થાન (source) કહે છે, અને પ્રસરણ બાદ વાયુને (ઉષ્માને) જેમાં છોડી મૂકવામાં આવે છે, તેને ઠારણવ્યવસ્થા (sink) કહે છે.

આકૃતિ 6.21માં ઉષ્મા-એન્જિનની કાર્યપદ્ધતિ રેખાચિત્ર દ્વારા દર્શાવી છે.



રેખાચિત્ર દ્વારા ઉષ્મા-એન્જિનની કાર્યપદ્ધતિ

આકૃતિ 6.21

ઉષ્મા-એન્જિનમાં કાર્યકારી પદાર્થ ચક્રિય પ્રક્રિયા અનુભવે છે. આ માટે કાર્યકારી પદાર્થ ઊંચા તાપમાન T_1વાળા ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી ઉષ્મા Q_1 શોષે છે. તેમાંથી અમુક ઉષ્મા-ઊર્જાનું યાંત્રિક-ઊર્જા (W)માં રૂપાંતર થાય છે, જ્યારે બાકીની ઉષ્મા Q_2 ઠારણવ્યવસ્થામાં છોડી દેવામાં આવે છે.

આથી, કાર્યકારી પદાર્થે શોષેલ ઉષ્માનો ચોખ્ખો જથ્થો,

$$Q = Q_1 - Q_2 \tag{6.13.1}$$

ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્ર દ્વારા શોષાતી ચોખ્ખી ઉષ્મા, તંત્ર દ્વારા થતાં ચોખ્ખા કાર્ય જેટલી હોય છે. આથી,

$$Q = W$$

$$\therefore Q_1 - Q_2 = W \tag{6.13.2}$$

ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન એક ચક્ર દીઠ મળતા ચોખ્ખા કાર્ય (W) અને ચક્ર દીઠ શોષાતી ઉષ્માના ગુણોત્તરને ઉષ્મા- એન્જિનની કાર્યક્ષમતા (η) કહે છે. એટલે કે,

$$\text{કાર્યક્ષમતા, } \eta = \frac{\text{ચક્ર દીઠ મળતું ચોખ્ખું કાર્ય}}{\text{ચક્ર દીઠ શોષાતી ઉષ્મા}}$$

$$\therefore \eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\therefore \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \tag{6.13.3}$$

સમીકરણ (6.13.3) પરથી કહી શકાય કે જો $Q_2 = 0$ હોય, તો એન્જિનની કાર્યક્ષમતા $\eta = 1$ મળે. એટલે કે એન્જિનની કાર્યક્ષમતા 100% મળે અને કાર્યકારી પદાર્થને આપવામાં આવેલી બધી જ ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર થાય. વ્યવહારમાં કોઈ પણ એન્જિન માટે $Q_2 \neq 0$. એટલે કે, થોડી ઉષ્મા Q_2 હંમેશાં વેડફાય છે. આથી $\eta < 1$.

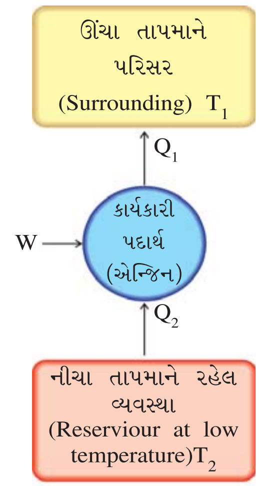
સામાન્ય રીતે ઉષ્મા-એન્જિન બે પ્રકારનાં બનાવવામાં આવે છે :

(1) બાહ્ય દહન (External combustion) એન્જિન, જેમ કે, સ્ટીમ એન્જિન.

(2) અંતર્દહન (Internal combustion) એન્જિન, જેમ કે ડીઝલ એન્જિન, પેટ્રોલ એન્જિન.

6.14 રેફ્રિજરેટર/હીટપંપ અને પરફૉર્મન્સ-ગુણાંક Refrigeratior/Heat Pump and Coefficient of Performance

ઉષ્મા-એન્જિનમાં કાર્યકારી પદાર્થ પર થતી ચક્રીય પ્રક્રિયાને જો ઉલટાવવામાં આવે, તો તે તંત્ર રેફ્રિજરેટર કે હીટપંપ તરીકે કાર્ય કરે છે. આકૃતિ 6.22માં રેફ્રિજરેટર/હીટપંપની કાર્યપદ્ધતિને રેખાચિત્ર દ્વારા દર્શાવેલ છે.



રેખાચિત્ર દ્વારા રેફ્રિજરેટર / હીટપંપની સમજ

આકૃતિ 6.22

રેફ્રિજરેટરમાં કાર્યકારી પદાર્થ, T_2 જેટલા નીચા તાપમાનવાળી વ્યવસ્થામાંથી Q_2 ઉષ્મા શોષે છે. કાર્યકારી પદાર્થ પર W જેટલું કાર્ય કરવામાં આવે છે. કાર્યકારી પદાર્થ, Q_1 જેટલી ઉષ્મા T_1 જેટલા ઊંચા તાપમાનવાળા પરિસરમાં છોડી દે (મુક્ત કરે) છે.

કાર્યકારી પદાર્થે શોષેલી ઉષ્મા Q_2 અને તેના પર કરવામાં આવેલા કાર્ય Wના ગુણોત્તરને રેફ્રિજરેટરનો પરફોર્મન્સ-ગુણાંક (α) કહે છે. એટલે કે,

$$\alpha = \frac{Q_2}{W} \tag{6.14.1}$$

અહીં, પરિસરમાં છોડી દેવાતી ઉષ્મા

$$Q_1 = W + Q_2$$

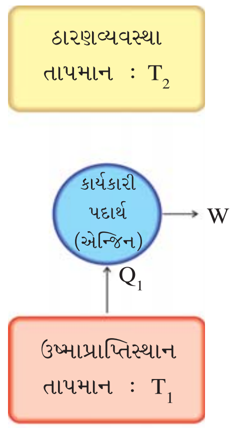
$$\therefore W = Q_1 - Q_2 \tag{6.14.2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \tag{6.14.3}$$

અહીં αનું મૂલ્ય 1 કરતાં વધુ હોઈ શકે ($\because Q_2 > Q_1 - Q_2$), પરંતુ અનંત ન હોઈ શકે.

6.15 થરમૉડાઇનેમિક્સનો બીજો નિયમ (Second Law of Thermodynamics)

ઉષ્મા-એન્જિન અને રેફ્રિજરેટરના સંદર્ભમાં વિવિધ વિજ્ઞાનીઓએ કરેલાં વિધાનોને થરમૉડાઇનેમિક્સના બીજા નિયમનાં વિધાનો કહે છે, જે આ મુજબ છે :



આદર્શ ઉષ્મા-એન્જિન (Q_1 = W)

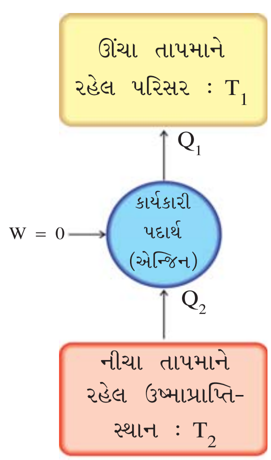
આકૃતિ 6.23

કૅલ્વિન-પ્લાન્કનું વિધાન :

એવું એન્જિન બનાવવું અશક્ય છે કે જે, ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી ઉષ્માનું શોષણ કર્યા બાદ પૂરેપૂરી ઉષ્માનું તેટલા જ કાર્યમાં રૂપાંતર કરે. (જુઓ આકૃતિ 6.23)

ક્લોસિયસનું વિધાન (Statement of Rudolf Clausius) :

એવું એન્જિન બનાવવું અશક્ય છે કે જેમાં કાર્ય દ્વારા એન્જિનને ઉષ્મા (ઊર્જા) આપ્યા વગર, ઉષ્માનો વિનિમય સતત, ઓછા તાપમાનવાળા પ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી વધુ તાપમાનવાળા પરિસરમાં થયા કરે (જુઓ આકૃતિ 6.24).



અશક્ય એવું આદર્શ રેફ્રિજરેટર (ઉષ્મા-એન્જિન કે જેમાં $Q_1 = Q_2$ હોય, તથા W = 0 હોય)

આકૃતિ 6.24

ઉદાહરણ 12 : એક ઉષ્મા-એન્જિન ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી 360 J ઉષ્મા મેળવે છે અને 25 J જેટલું કાર્ય કરે છે. તો (*a*) ઉષ્મા-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા શોધો. (*b*) ચક્રીય પ્રક્રિયાના દરેક ચક્ર દરમિયાન ઉષ્મા-એન્જિન પરિસરને કેટલી ઉષ્મા આપશે ?

ઉકેલ : અહીંયાં Q_1 = 360 J, W = 25 J

(*a*) ઉષ્મા-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{25J}{360J} = 0.07 = 7\%$$

(*b*) દરેક ચક્ર દરમિયાન પરિસરને મળતી ઉષ્મા

$$Q_2 = Q_1 - W = 360 - 25 = 335 \text{ J}$$

ઉદાહરણ 13 : એક ઉષ્મા-એન્જિન તેણે કરેલા કાર્ય કરતાં ત્રણ ગણી ઉષ્માનું શોષણ કરે છે તો,

(*a*) તેની કાર્યક્ષમતા કેટલી હશે ?

(*b*) તેણે શોષેલી ઉષ્માનો કેટલામો ભાગ તે ઠારણ-વ્યવસ્થામાં મુક્ત કરશે ?

ઉકેલ : અહીંયાં Q_1 = 3W છે. આથી,

$$(a)\ \eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{W}{3W} = \frac{1}{3} = 0.333$$

આથી, કાર્યક્ષમતા η = 33.3%

(*b*) એન્જિને દરેક ચક્ર દરમિયાન પરિસરને આપેલી ઉષ્મા

$$Q_2 = Q_1 - W = 3W - W = 2W$$

આમ, $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2W}{3W} = \frac{2}{3}$

આથી, એન્જિન તેણે શોષેલી ઉષ્માનો $\frac{2}{3}$ ભાગ ઠારણ-વ્યવસ્થામાં મુક્ત કરશે.

ઉદાહરણ 14 : એક રેફ્રિજરેટરનો પરફૉર્મન્સ-ગુણાંક 5 છે. જો રેફ્રિજરેટર દરેક ચક્ર દરમિયાન ઠંડા ઉષ્મા-પ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી 120 J જેટલી ઉષ્મા શોષતું હોય, તો દરેક ચક્ર દરમિયાન

(*a*) તે કેટલું કાર્ય કરતું હશે ?

(*b*) તે કેટલી ઉષ્મા ઊંચા તાપમાને રહેલા પરિસરમાં મુક્ત કરતું હશે ?

ઉકેલ : અહીં $\alpha = 5$, Q_2 = 120 J

$$(a)\ \alpha = \frac{Q_2}{W}$$

આથી, કાર્ય $W = \frac{Q_2}{\alpha} = \frac{120J}{5} = 24$ J

(*b*) પરિસરમાં મુક્ત કરેલી ઉષ્મા

$$Q_1 = W + Q_2 = 24 \text{ J} + 120 \text{ J} = 144 \text{ J}$$

6.16 કાર્નો-ચક્ર અને કાર્નો-એન્જિન (Carnot Cycle and Carnot Engine)

સિમેસ્ટર Iમાં આપણે વાસ્તવિક વાયુઓની વર્તણૂકનો અભ્યાસ, આદર્શવાયુઓનાં પૃથક્કરણ પરથી કર્યો કે જેઓ $PV = \mu RT$ સમીકરણનું પાલન કરે છે. ભલે વાસ્તવમાં આદર્શવાયુઓ હોતા નથી, પરંતુ જ્યારે વાસ્તવિક વાયુની ઘનતા પૂરતી ઓછી હોય ત્યારે તે આદર્શ વાયુ જેવી વર્તણૂક ધરાવે છે.

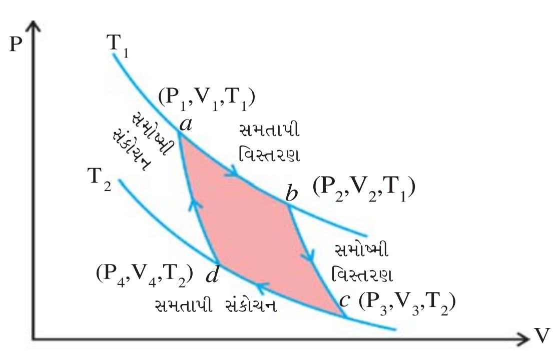
આદર્શ એન્જિનમાં બધી જ પ્રક્રિયાઓ પ્રતિવર્તી હોય છે અને કોઈ પણ પ્રકારની ઊર્જાનો વ્યય (ઘર્ષણ કે પ્રક્ષુબ્ધતા વગેરે કારણે) થતો નથી.

આ મુદ્દામાં આપણે કાર્નો-એન્જિનનો અભ્યાસ કરીશું કે જેની સૌપ્રથમ રજૂઆત 1824માં ફ્રેન્ચ વૈજ્ઞાનિક અને એન્જિનિયર સાડી કાર્નોએ કરી હતી.

કાર્નો-એન્જિન, બે સમોષ્મી પ્રક્રિયાઓ અને બે સમતાપી પ્રક્રિયાઓ દ્વારા પૂરી થતી ચક્રીય પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા દ્વારા ઉષ્મા-ઊર્જાનું યાંત્રિક-ઊર્જામાં રૂપાંતરણ કરે છે. આમ, જે પ્રતિવર્તી ઉષ્મા-એન્જિન બે તાપમાન વચ્ચે કાર્ય કરે, તેને કાર્નો-એન્જિન કહે છે.

કાર્નો-એન્જિનમાં તળિયા સિવાય બધી જ અવાહક બાજુઓ ધરાવતા એક સિલિન્ડરમાં ઘર્ષણરહિત સરકતો પિસ્ટન હોય છે. આ એન્જિનનો કાર્યકારી પદાર્થ μ મોલ જેટલો પૂરતા ઓછા દબાણે રહેલો વાયુ છે. (જે આદર્શ-વાયુ તરીકે વર્તે છે). એન્જિનના દરેક ચક્ર દરમિયાન, અચળ તાપમાને રહેલા ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી કાર્યકારી પદાર્થ ઉષ્મા શોષે (મેળવે) છે અને નીચા અચળ તાપમાન $T_2 < T_1$ પર રહેલ ઠારણવ્યવસ્થામાં ઉષ્મા મુક્ત કરે (ગુમાવે) છે.

આકૃતિ 6.25 માં દર્શાવેલ P – Vના આલેખ મુજબ આ ચક્રીય પ્રક્રિયા અને તેના જુદા-જુદા તબક્કા આકૃતિ 6.25માં દર્શાવ્યા છે.



P – V કાર્નો-ચક્ર

આકૃતિ 6.25

(i) પ્રથમ તબક્કો : વાયુનું સમતાપી વિસ્તરણ ($a \rightarrow b$)

આકૃતિ (6.26 *a*)માં દર્શાવ્યા મુજબ, સૌપ્રથમ કાર્યકારી પદાર્થ થરમૉડાઇનેમિક સંતુલન અવસ્થા (P_1, V_1, T_1)માં છે.

હવે, સિલિન્ડરના સુવાહક તળિયાને T_1 તાપમાને રહેલા ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાન પર મૂકી, વાયુનું ધીમે-ધીમે સમતાપી વિસ્તરણ કરીને થરમૉડાઇનેમિક સંતુલન અવસ્થા b (P_2, V_2, T_1)માં લાવવામાં આવે છે (જુઓ આકૃતિ 6.26 *b*) ધારો કે $a \rightarrow b$ પ્રક્રિયા દરમિયાન વાયુ Q_1 ઉષ્મા શોષે છે. આથી સમીકરણ (6.10.4) અનુસાર, વાયુ વડે થયેલું કાર્ય

$$W_1 = Q_1 = \mu RT_1 \, ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (6.16.1)$$

આ ઉપરાંત, સમતાપી પ્રક્રિયા માટે

$$P_1V_1 = P_2V_2 \qquad (6.16.2)$$

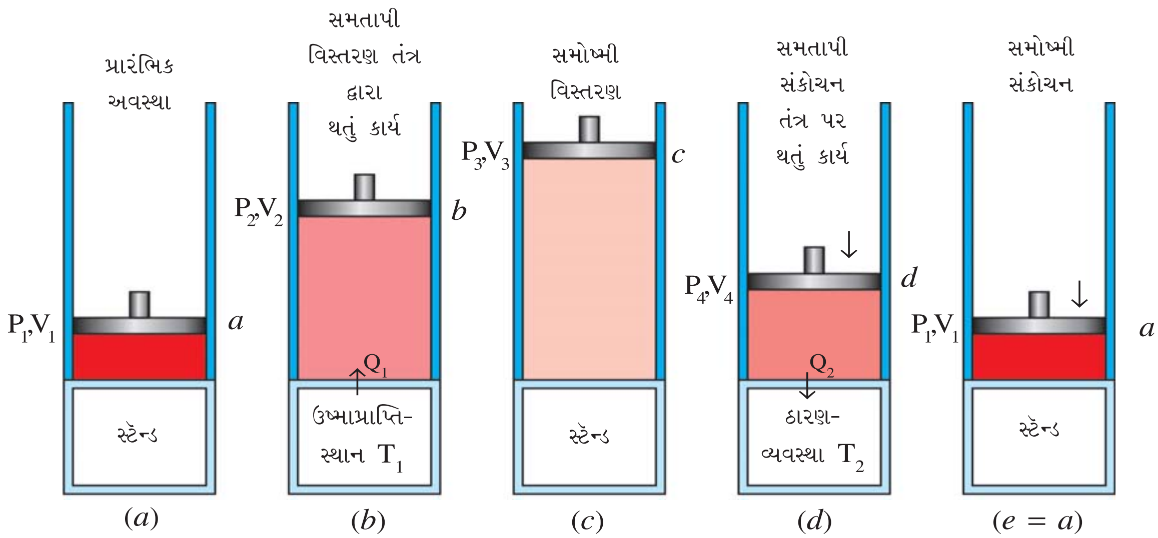
(ii) બીજો તબક્કો : વાયુનું સમોષ્મી વિસ્તરણ ($b \rightarrow c$)

હવે સિલિન્ડરના તળિયાને ઉષ્માના અવાહક સ્ટૅન્ડ પર મૂકી વાયુનું સમોષ્મી વિસ્તરણ થવા દઈને થરમૉડાઇનેમિક સંતુલન અવસ્થા c (P_3, V_3, T_2)માં લાવવામાં આવે છે (જુઓ આકૃતિ 6.26(*c*)). આ સમોષ્મી પ્રક્રિયા દરમિયાન વાયુ ઉષ્માનું શોષણ કરતો નથી, પરંતુ વિસ્તરણ દરમિયાન કાર્ય કરે છે, આથી તેનું તાપમાન ઘટે છે. આ પ્રક્રિયા માટે

$$P_2V_2^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma} \qquad (6.16.3)$$

(iii) ત્રીજો તબક્કો : વાયુનું સમતાપી સંકોચન ($c \rightarrow d$)

હવે, સિલિન્ડરના સુવાહક તળિયાને T_2 તાપમાને રહેલી ઠારણવ્યવસ્થાના સંપર્કમાં લાવીને તેનું ધીમે-ધીમે સમતાપી સંકોચન કરવામાં આવે છે કે જેથી વાયુ સંતુલિત અવસ્થા d (P_4, V_4, T_2) પર આવે છે (જુઓ આકૃતિ (6. 26*d*)). $c \rightarrow d$ અવસ્થા સુધીના વાયુના સમતાપી સંકોચન દરમિયાન વાયુ પર થતું કાર્ય



કાર્નોટ-એન્જિનના વિવિધ તબક્કા
આકૃતિ 6.26

$$W_2 = Q_2 = -\mu RT_2 \, ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

(અહીં વાયુ તંત્ર પર કાર્ય થતું હોવાથી ઋણ સંજ્ઞા મૂકેલ છે.)

$$\therefore \; W_2 = Q_2 = \mu RT_2 \, ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad (6.16.4)$$

અહીં, Q_2 = વાયુ વડે ઠારણવ્યવસ્થામાં છોડી દેવાયેલી ઉષ્મા

આ ઉપરાંત, સમતાપી પ્રક્રિયા માટે

$$P_3V_3 = P_4V_4 \qquad (6.16.5)$$

(*iv*) ચોથો તબક્કો : વાયુનું સમોષ્મી સંકોચન (*d* → *a*)

હવે સિલિન્ડરના તળિયાને ઉષ્મા અવાહક સ્ટૅન્ડ પર મૂકી વાયુનું સમોષ્મી સંકોચન કરી પોતાની મૂળ અવસ્થા *a* (P_1, V_1, T_1) માં લઈ જવામાં આવે છે. આ પ્રક્રિયા સમોષ્મી છે, આથી વાયુ પરિસર સાથે ઉષ્માનો વિનિમય કરતો નથી, પરંતુ વાયુ પર કાર્ય થાય છે અને તેનું તાપમાન T_2 થી વધીને T_1 જેટલું થાય છે.

આ સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે

$$P_4V_4^{\gamma} = P_1V_1^{\gamma} \qquad (6.16.6)$$

આ સમગ્ર ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન વાયુ વડે શોષાતી ઉષ્મા Q_1 છે અને છોડી દેવાતી ઉષ્મા Q_2 છે તે નોંધો. આથી, કાર્નોટ-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા η નું મૂલ્ય,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\therefore \; \eta = 1 - \frac{T_2 \, ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{T_1 \, ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \qquad (6.16.7)$$

સમીકરણો (6.16.2), (6.16.3) (6.16.5) અને (6.16.6)નો ગુણાકાર કરતાં

$$P_1V_1P_2V_2^{\gamma} \, P_3V_3P_4V_4^{\gamma} = P_2V_2P_3V_3^{\gamma}P_4V_4P_1V_1^{\gamma}$$

$$\therefore \; (V_2V_4)^{\gamma - 1} = (V_3V_1)^{\gamma - 1}$$

$$\therefore \; V_2V_4 = V_3V_1$$

$$\therefore \; \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \qquad (6.16.8)$$

$$\therefore \; ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad (6.16.9)$$

આ કિંમત સમીકરણ (6.16.7)માં મૂકતાં,

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad (6.16.10)$$

સમીકરણ (6.16.10) દર્શાવે છે કે **કાર્નોટ-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાન અને ઠારણવ્યવસ્થાના તાપમાન પર જ આધાર રાખે છે. તેની કાર્યક્ષમતા કાર્યકારી પદાર્થ પર આધારિત નથી** (જો તે આદર્શ વાયુ હોય તો). જો ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનનું તાપમાન (T_1) અનંત હોય અથવા ઠારણવ્યવસ્થાનું તાપમાન (T_2) નિરપેક્ષ શૂન્ય હોય (જે શક્ય નથી) તો જ કાર્નોટ-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા 100 % મળે, જે અશક્ય છે.

ઉદાહરણ 15 : એક કાર્નો-એન્જિનમાં ઠારણ-વ્યવસ્થાનું તાપમાન 280 K છે અને તેની કાર્યક્ષમતા 40 % છે. ઠારણવ્યવસ્થાનું તાપમાન અચળ રાખીને, ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનનું તાપમાન કેટલું વધારતા એન્જિનની કાર્યક્ષમતા વધીને 50 % જેટલી થાય ?

ઉકેલ : $T_2 = 280$ K, $\eta_1 = 0.4$, $\eta_2 = 0.5$

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta_1 = 1 - 0.4 = 0.6 \qquad (1)$$

$$\therefore T_1 = \frac{T_2}{0.6} = \frac{280}{0.6} = 466.6 \text{ K}$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_2}{T_1 + x}$$ (જ્યાં x = ઉષ્માપ્રાપ્તિ-સ્થાનના તાપમાનનો વધારો)

$$\therefore \frac{T_2}{T_1 + x} = 1 - \eta_2 = 1 - 0.5 = 0.5 \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{T_1 + x}{T_1} = \frac{0.6}{0.5}$$

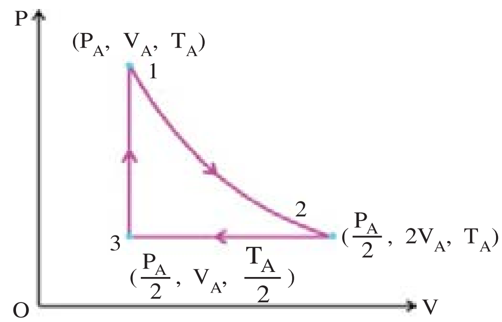
$$\therefore 5T_1 + 5x = 6T_1$$

$$\therefore T_1 = 5x$$

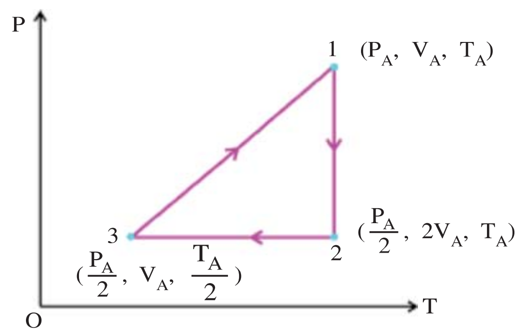
$$\therefore x = \frac{T_1}{5} = \frac{466.6}{5} = 93.32 \text{ K}$$

ઉદાહરણ 16 : 1 mole આદર્શવાયુનું દબાણ P_A અને તાપમાન T_A છે. પ્રથમ તેનું સમતાપી વિસ્તરણ કરી કદ બમણું કરવામાં આવે છે. હવે તેનું અચળ દબાણે સંકોચન કરી મૂળ કદ પ્રાપ્ત કરવામાં આવે છે અને ત્યાર પછી અચળ કદે દબાણ વધારી મૂળ દબાણ P_A પ્રાપ્ત કરવામાં આવે છે, તો આ સંપૂર્ણ પ્રક્રિયા માટે P – V અને P – T આલેખો સ્કેચ કરો.

ઉકેલ :



(*a*)



(*b*)

આકૃતિ 6.27

સારાંશ

1. **તંત્ર :** વિશ્વના જે ભાગનો થરમૉડાઈનેમિક અભ્યાસ કરવાનો હોય તે ભાગને થરમૉડાઈનેમિક તંત્ર કહે છે.
2. **પરિસર :** તંત્રની આસપાસના બાકીના ભાગ (વિશ્વ) કે જેની સીધી અસર તંત્ર પર થતી હોય, તેને તંત્રનું પરિસર (કે વાતાવરણ) કહે છે.
3. **પરિસીમા :** તંત્ર અને તેના પરિસરને જુદા પાડતી હદને તંત્રની પરિસીમા (સરહદ) કહે છે.
4. **થરમૉડાઈનેમિક પ્રક્રિયા :** તંત્ર અને તેના પરિસર વચ્ચે થતી આંતરક્રિયાને થરમૉડાઈનેમિક પ્રક્રિયા કહે છે.
5. **અલગ કરેલું તંત્ર :** જો તંત્ર પોતાના પરિસર સાથે આંતરક્રિયા ન કરતું હોય તો તે અલગ કરેલું તંત્ર કહેવાય છે.
6. **થરમૉડાઈનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ :** જો તંત્ર A અને B કોઈ ત્રીજા તંત્ર C સાથે ઉષ્મીય સંતુલનમાં હોય, તો A અને B પણ એકબીજા સાથે ઉષ્મીય સંતુલનમાં હોય.
7. **ફેઝ ડાયાગ્રામ :** દબાણ અને તાપમાનનાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો માટે આપેલ દ્રવ્ય કેવું સ્વરૂપ ધરાવે છે, તે દર્શાવતા દબાણ (P) વિરુદ્ધ તાપમાન (T)ના આલેખને તે દ્રવ્યનો ફેઝ ડાયાગ્રામ કહે છે.

8. **ટ્રીપલ પૉઈન્ટ :** દબાણ-તાપમાનનાં જે મૂલ્યો માટે પદાર્થના ઘન, પ્રવાહી અને વાયુ એમ ત્રણેય સ્વરૂપો સહ-અસ્તિત્વમાં અને સમતોલનમાં હોય, તે બિંદુને તે દ્રવ્ય (પદાર્થ)નું ટ્રીપલ પૉઈન્ટ કહે છે.
9. **ઉષ્મીય પ્રસરણ / સંકુચન :** કોઈ પદાર્થનું તાપમાન વધારતાં (ઉષ્મા આપતાં) તેના પરિમાણમાં વધારો થાય છે અને તાપમાન ઘટાડતાં (ઉષ્મા મુક્ત કરીને) તેના પરિમાણમાં ઘટાડો થાય છે. આમ, પદાર્થ દ્વારા ઉષ્માનું શોષણ થતાં તેના પરિમાણમાં થતા વધારાને ઉષ્મીય પ્રસરણ અને ઉષ્મા મુક્ત કરીને પદાર્થના પરિમાણમાં થતા ઘટાડાને ઉષ્મીય સંકુલન કહે છે.
10. **રેખીય પ્રસરણ :** તાપમાનમાં થતા વધારા સાથે પદાર્થની લંબાઈમાં થતા વધારાને તેનું રેખીય પ્રસરણ કહે છે. જે પદાર્થો દરેક દિશામાં એકસરખું ઉષ્મીય પ્રસરણ ધરાવતા હોય તેવા પદાર્થોને આઈસોટ્રોપિક પદાર્થો કહે છે.
11. **ઉષ્મા-ઊર્જા :** વાયુના અણુઓની અસ્તવ્યસ્ત ગતિ સાથે સંકળાયેલ (કુલ વેગમાન શૂન્ય હોય તેવી ગતિ) કુલ ગતિ-ઊર્જાને વાયુમાં રહેલ ઉષ્મા-ઊર્જા કહે છે.
12. **ઉષ્મા :** તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે, માત્ર તાપમાનના તફાવતના કારણે થતાં ઊર્જાના વિનિમયને ઉષ્મા કહે છે.
13. **થરમૉડાઈનેમિક કાર્ય :** બે વસ્તુઓ વચ્ચે થતી યાંત્રિક આંતરક્રિયાને કારણે જે યાંત્રિક-ઊર્જાનો વિનિમય થાય છે, તેને થરમૉડાઈનેમિક કાર્ય કહે છે.
14. **થરમૉડાઈનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ :** જો તંત્રને પ્રારંભિક અવસ્થા i પરથી અંતિમ અવસ્થા f સુધી લઈ જવામાં આવે, તો તેની આંતરિક ઊર્જામાં થતો ફેરફાર (ΔE_{int}) તેણે મેળવેલ ઉષ્મા Q અને તંત્ર દ્વારા થયેલ કાર્ય Wના તફાવત જેટલો હોય છે. એટલે કે,

    $\Delta E_{int} = Q - W$
15. **સમોષ્મી પ્રક્રિયા :** જો તંત્ર અને તેના પરિસર વચ્ચે ઉષ્માનો વિનિમય ન થતો હોય ($Q = 0$), તો તેવી પ્રક્રિયાને સમોષ્મી પ્રક્રિયા કહે છે.
16. **સમકદ પ્રક્રિયા :** જે થરમૉડાઈનેમિક પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્રનું કદ અચળ રાખવામાં આવે તેવી પ્રક્રિયા સમકદ પ્રક્રિયા કહેવાય.
17. **ચક્રીય પ્રક્રિયા :** જે થરમૉડાઈનેમિક પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્રને તેની એક થરમૉડાઈનેમિક સંતુલન અવસ્થામાંથી શ્રેણીબદ્ધ પ્રક્રિયાઓ દ્વારા બીજી સંતુલિત અવસ્થામાં લઈ જઈને અંતે મૂળ અવસ્થામાં પાછું લાવવામાં આવે, તેવી પ્રક્રિયાને ચક્રીય પ્રક્રિયા કહે છે.
18. **કૅલરી :** એક કિલોગ્રામ શુદ્ધ પાણીનું તાપમાન 14.5 $^{\circ}$Cથી 15.5 $^{\circ}$C સુધી વધારવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને એક કિલો કૅલરી કહે છે. તેના હજારમા ભાગને કૅલરી કહે છે.
19. **ઉષ્માધારિતા :** પદાર્થને આપેલ ઉષ્મા Q અને તદ્‌નુરૂપ તેના તાપમાનના ફેરફાર ΔTના ગુણોત્તરને પદાર્થની ઉષ્માધારિતા H_C કહે છે.
20. **વિશિષ્ટ ઉષ્મા :** પદાર્થના એકમ દળ દીઠ તેના તાપમાનમાં એક એકમ જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે પદાર્થના દ્રવ્યની વિશિષ્ટ ઉષ્મા કહે છે.
21. **મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા :** વાયુના એક મોલ દીઠ તેના તાપમાનમાં 1 કૅલ્વિન (કે 1 C^{o}) જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા કહે છે.
22. **અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્મા (C_V) :** એક મોલ વાયુનું કદ અચળ રાખી તેના તાપમાનમાં એક કૅલ્વિન જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્મા કહે છે.

23. અચળ દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા (C_P) : એક મોલ વાયુનું દબાણ અચળ રાખી તેના તાપમાનમાં એક કેલ્વિન જેટલો ફેરફાર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને તે વાયુની અચળ દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા કહે છે.

24. રૂપાંતરણની ઉષ્મા (ગુપ્ત ઉષ્મા L) : એકમદળના કોઈ પદાર્થનું એક અવસ્થા (ઘન, પ્રવાહી કે વાયુ)માંથી બીજી અવસ્થામાં રૂપાંતર કરવા માટે આપવી પડતી ઉષ્માને રૂપાંતરણની ઉષ્મા (ગુપ્ત ઉષ્મા) કહે છે.

25. ગલનગુપ્ત ઉષ્મા (L_F) : એકમદળના ઘન પદાર્થનું પ્રવાહીમાં રૂપાંતરણ થાય (ત્યારે પદાર્થ ઉષ્મા મેળવે છે.) અથવા પ્રવાહીનું ઘનમાં રૂપાંતરણ થાય (ત્યારે પદાર્થ ઉષ્મા ગુમાવે છે), ત્યારે રૂપાંતરણની આ ઉષ્માને ગલનગુપ્ત ઉષ્મા કહે છે.

26. અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા : જો કોઈ પ્રક્રિયા એવી રીતે ઉલટાવવામાં આવે કે જેથી તે તંત્ર પોતાની પ્રારંભિક અવસ્થામાંથી અંતિમ અવસ્થામાં વચગાળાની જે અસંતુલિત અવસ્થાઓમાંથી પસાર થયું હોય તેવી જ અસંતુલિત અવસ્થાઓ અંતિમ અવસ્થામાંથી પ્રારંભિક અવસ્થા દરમિયાન ન આવે, તો તેને અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા કહે છે.

27. પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા : જો કોઈ પ્રક્રિયાને ખૂબ ધીમેથી એવી રીતે ઉલટાવવામાં આવે કે જેથી પ્રારંભિક અવસ્થામાં તે પોતાના મૂળ માર્ગે જ પાછી ફરે (તંત્ર પોતાની પ્રારંભિક અવસ્થામાંથી અંતિમ અવસ્થા સુધી વચગાળાની જે-જે સંતુલિત અવસ્થામાંથી પસાર થયું હતું, તેમાંથી જ પાછું પસાર કરાવીને), તો તેવી પ્રક્રિયાને પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા કહે છે.

28. ઉષ્મા-એન્જિન : ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર કરતી રચનાને ઉષ્મા-એન્જિન કહે છે.

29. ઉષ્મા-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા : ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન એક ચક્ર દીઠ મળતા ચોખ્ખા કાર્ય (W) અને ચક્ર દીઠ શોષાતી ચોખ્ખી ઉષ્માના ગુણોત્તરને ઉષ્મા-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કહે છે.

30. રેફ્રિજરેટરનો પરફૉર્મન્સ-ગુણાંક : કાર્યકારી પદાર્થે (એન્જિને) શોષેલી ઉષ્મા અને તેના પર કરવામાં આવેલા કાર્યના ગુણોત્તરને રેફ્રિજરેટરનો પરફૉર્મન્સ-ગુણાંક કહે છે.

31. થરમૉડાઇનેમિક્સનો બીજો નિયમ :

(1) કૅલ્વિન-પ્લાન્કનું કથન : એવું એન્જિન બનાવવું અશક્ય છે કે જે, ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી ઉષ્માનું શોષણ કર્યા બાદ પૂરેપૂરી ઉષ્માનું તેટલા જ કાર્યમાં રૂપાંતર કરે.

(2) ક્લોસિયસનું કથન : એવું એન્જિન બનાવવું અશક્ય છે કે જેમાં કાર્ય દ્વારા એન્જિનને ઉષ્મા (ઊર્જા) આપ્યા વગર, ઉષ્માનો વિનિમય સતત ઓછા તાપમાનવાળા પ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી વધુ તાપમાનવાળા પરિસરમાં થયા કરે.

32. કૅલોરીમેટ્રી : કૅલોરીમેટ્રી એટલે ઉષ્માનું માપન.

33. કૅલોરીમીટર : જે સાધન ઉષ્માનું માપન કરે તેને કૅલોરીમીટર કહે છે.

34. કાર્નોટ-એન્જિન : કાર્નોટ-એન્જિન, બે સમોષ્મી પ્રક્રિયાઓ અને બે સમતાપી પ્રક્રિયાઓ દ્વારા પૂરી થતી પ્રતિવર્તી ચક્રીય પ્રક્રિયા દ્વારા ઉષ્મા-ઊર્જાનું યાંત્રિક-ઊર્જામાં રૂપાંતરણ કરે છે.

35. કાર્નોટ-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા : કાર્નોટ-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા નીચેના સમીકરણ દ્વારા આપવામાં આવે છે. $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. જે દર્શાવે છે કે કાર્નોટ-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનના તાપમાન (T_1) અને ઠારણવ્યવસ્થાના તાપમાન (T_2) પર જ આધાર રાખે છે. તેની કાર્યક્ષમતા કાર્યકારી પદાર્થ પર આધારિત નથી.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. એક આદર્શવાયુનું પ્રારંભિક દબાણ 3 એકમ અને પ્રારંભિક કદ 4 એકમ છે. કોઠામાં વાયુના અંતિમ દબાણ અને કદના પાંચ પ્રક્રિયાઓ માટેનાં મૂલ્યો તે જ એકમોમાં દર્શાવ્યા છે. કઈ પ્રક્રિયા સમતાપી પ્રક્રિયા હશે ?

	i	*ii*	*iii*	*iv*	*v*
P	12	6	5	4	1
V	1	2	7	3	12

(A) *i, ii, iii, iv* (B) *ii, iii, iv, v* (C) *i, iii, iv, v* (D) *i, ii, iv, v*

2. Q જેટલી ઉષ્મા વડે 1 g જેટલા પદાર્થ Aનું તાપમાન 3 C° જેટલું વધે અને 1 g જેટલા પદાર્થ B નું તાપમાન 4 C° જેટલું વધે છે, તો કયા પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્મા વધારે હશે ?

(A) A (B) B

(C) A અને B (D) A અને Bમાંથી એકેય નહિ.

3. પાણીના ટ્રીપલ પૉઇન્ટ તાપમાનને સેલ્સિયસ માપક્રમમાં માપતાં .... °C તાપમાન મળે છે.

(A) 0 (B) −273.16 (C) 100 (D) 0.01

4. વાતાવરણના દબાણે શુદ્ધ પાણી અને તેની બાષ્પ વચ્ચે સંતુલન રચાય ત્યારે તાપમાન ....K લેવામાં આવે છે.

(A) 100 (B) 273.15 (C) 373.15 (D) 273.16

5. નિરપેક્ષ શૂન્ય તાપમાનનું મૂલ્ય ફેરનહીટ માપક્રમ મુજબ .... °F હોય છે.

(A) 0 (B) −273.15 (C) −459.67 (D) −356.67

6. તાપમાનના કયા મૂલ્ય માટે °C અને °F માપક્રમનાં મૂલ્યો સરખાં આવે છે ?

(A) 0 (B) 40 (C) −40 (D) 32

7. એક વાયુતંત્ર 450 cal ઉષ્માનું શોષણ કરે છે અને તંત્ર વડે 200 cal કાર્ય થાય છે, તો તંત્રની આંતરિક ઊર્જામાં થતો ફેરફાર .... cal થશે.

(A) 250 (B) 650 (C) 325 (D) શૂન્ય

8. તંત્ર .... ધરાવી શકે, પણ .... ધરાવી શકે નહિ.

(A) ઉષ્મા, ઉષ્મા-ઊર્જા (B) ઉષ્મા-ઊર્જા, ઉષ્મા

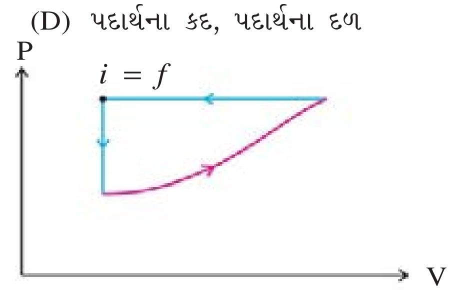
(C) ઉષ્મા, યાંત્રિક-ઊર્જા (D) કાર્ય, ઉષ્મા-ઊર્જા

9. પદાર્થની ઉષ્માધારિતાનું મૂલ્ય .... તેમજ .... પર આધારિત છે.

(A) પદાર્થની જાત, પદાર્થના દળ (B) પદાર્થની જાત, પદાર્થના તાપમાન

(C) પદાર્થના દળ, પદાર્થના તાપમાન (D) પદાર્થના કદ, પદાર્થના દળ

10. આપેલ આકૃતિમાં P – V ના આલેખમાં એક ચક્રીય પ્રક્રિયા દર્શાવી છે. ચક્રીય પ્રક્રિયા બાદ (*a*) વાયુની આંતરિક ઊર્જા ΔE_{int} અને (*b*) ચોખ્ખો ઉષ્માનો વિનિમય.



આકૃતિ 6.28

(A) ધન, ઋણ (B) ધન, શૂન્ય

(C) શૂન્ય, ઋણ (D) શૂન્ય, ધન

11. થરમૉડાઇનેમિક્સમાં તંત્ર વડે થતા કાર્યને .... અને તંત્ર પર થતા કાર્યને .... ગણવામાં આવે છે.

(A) ધન, શૂન્ય (B) ધન, ઋણ (C) ઋણ, ધન (D) શૂન્ય, અનંત

12. $20^{\circ}C$ તાપમાને પાણીની ઘનતા $998\ kg/m^3$ છે અને $40^{\circ}C$ તાપમાને $992\ kg/m^3$ છે, તો પાણીનો કદ-પ્રસરણાંક ....C^{o-1} છે.

(A) $\frac{998}{992 \times 20}$ (B) $\frac{992}{998 \times 20}$ (C) $\frac{6}{998 \times 20}$ (D) $\frac{6}{992 \times 20}$

13. આદર્શવાયુની સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે દબાણ-તાપમાનનો સંબંધ .... છે.

(A) $P^{1-\gamma}\ T^{\gamma}$ = અચળ (B) $P^{\gamma-1}\ T^{\gamma}$ = અચળ

(C) $P^{\gamma}\ T^{1-\gamma}$ = અચળ (D) $P^{\gamma}\ T^{\gamma-1}$ = અચળ

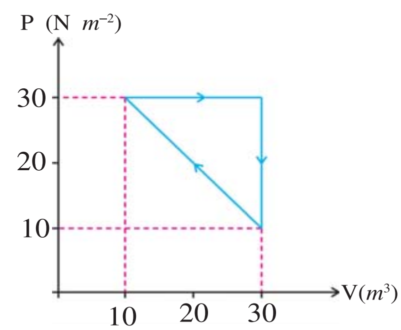
14. આકૃતિમાં દર્શાવેલ ચક્રીય પ્રક્રિયાના પ્રત્યેક ચક્ર દીઠ તંત્ર .... J જેટલી ચોખ્ખી ઉષ્માનું શોષણ કરશે.

(A) 400

(B) 900

(C) 200

(D) 300



આકૃતિ 6.29

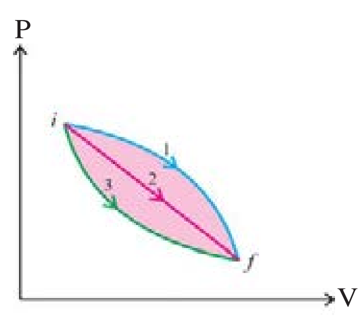
15. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ આદર્શવાયુ 1, 2 અને 3 આંક વડે રજૂ કરેલ અલગ-અલગ પથ પર પ્રારંભિક અવસ્થા *i*થી અંતિમ અવસ્થા *f* સુધી જાય છે. આ પથો પર થતું કાર્ય અનુક્રમે W_1, W_2 અને W_3 હોય તો,

(A) $W_1 > W_2 > W_3$

(B) $W_1 = W_2 = W_3$

(C) $W_1 < W_2 < W_3$

(D) $W_1 > W_3 > W_2$



આકૃતિ 6.30

16. $0^{\circ}C$ તાપમાને રહેલ 100 g બરફને $100^{\circ}C$ તાપમાને રહેલ 100 g પાણીમાં મૂકતાં મિશ્રણનું અંતિમ તાપમાન .... થાય. (બરફની ગલનગુપ્ત ઉષ્મા 80 cal/g અને પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્મા 1 cal/g C^{o}) છે.

(A) $10^{\circ}C$ (B) $20^{\circ}C$ (D) $30^{\circ}C$ (D) $50^{\circ}C$

17. આદર્શવાયુની કોઈ પ્રક્રિયામાં $dW = 0$ અને $dQ < 0$ છે, તો વાયુ માટે ....

(A) તાપમાન વધશે (B) કદ વધશે

(C) દબાણ અચળ રહેશે (D) તાપમાન ઘટશે

18. 1 મોલ આદર્શવાયુનું તાપમાન અચળ દબાણે 0^oCથી 100^oC જેટલું વધારતાં થતું કાર્ય .... છે.

(A) 8.3×10^{-3} J (B) 8.3×10^{-2} J (C) 8.3×10^{2} J (D) 8.3×10^{3} J

19. એક આદર્શવાયુના સમોષ્મી પ્રસરણ દરમિયાન તેના કદમાં 24 % જેટલો વધારો થાય છે, તો તેના દબાણમાં .... ઘટાડો થાય. ($\gamma = \frac{5}{3}$)

(A) 24% (B) 76% (C) 48% (D) 30%

20. 27^oC જેટલા અચળ તાપમાને 10 mole આદર્શવાયુના સમતાપી વિસ્તરણ દરમિયાન તેનું દબાણ 8 atm માંથી 4 થતું હોય, તો વાયુએ શોષેલ ઉષ્મા .... J હોય.

(A) 2079 R (B) 903 R (C) 187 R (D) 81.3 R

21. એક ઉષ્મા-એન્જિન ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી 50 kJ ઉષ્મા પ્રાપ્ત કરતું હોય અને તેની કાર્યક્ષમતા 40 % હોય, તો તેના પરિસરને તે કેટલી ઉષ્મા આપશે ?

(A) 40 kJ (B) 20 J (C) 30 k J (D) 20 k J

22. એક ઉષ્મા-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા 30 % છે તે પરિસરને 30 kJ જેટલી ઉષ્મા આપતું હોય, તો તે ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી .... kJ ઉષ્મા મેળવતું હશે.

(A) 9 (B) 39 (C) 29 (D) 42.8

23. જો ઉષ્મા-એન્જિન, ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી 2 kJ ઉષ્મા મેળવતું હોય, અને તે 1.5 kJ ઉષ્મા ઠારણવ્યવસ્થામાં છોડી દેતું હોય, તો તેની કાર્યક્ષમતા .... હશે.

(A) 25% (B) 50% (C) 75% (D) 0.5%

24. તાપમાનના કયા મૂલ્ય માટે ફેરનહીટ માપક્રમ અને કેલ્વિન માપક્રમ પર એક સરખા મૂલ્યો મળશે ?

(A) 459.67 (B) 574.32 (D) -32 (E) 100

25. એક દ્વિ-પરમાણ્વિક (rigid rotator) આદર્શવાયુનો કાર્નોટ-એન્જિનમાં કાર્યકારી પદાર્થ તરીકે ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે. ચક્રીય પ્રક્રિયામાં વાયુના સમોષ્મી પ્રસરણ દરમિયાન વાયુનું કદ Vથી વધીને 32 V જેટલું હોય તો કાર્નોટ-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા .... હશે.

(A) 0.35 (B) 0.25 (C) 0.5 (D) 0.75

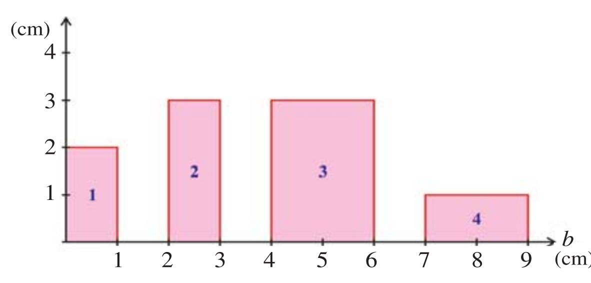
26. એક ગરમ દિવસે અમદાવાદથી એક ટ્રકવાળા 37,000 L ડીઝલ ભરે છે. તે ડીઝલને શ્રીનગર (કશ્મીર) પહોંચાડે છે, જ્યાંનું તાપમાન અમદાવાદના તાપમાન કરતાં 23 K નીચું છે. તેણે કેટલું ડીઝલ પહોંચાડ્યું (આપ્યું) હશે ? ડીઝલ માટે $\gamma = 3\alpha = 9.50 \times 10^{-4}\ C^{o-1}$
(ટ્રકની સ્ટીલ ટેન્કનું ઉષ્મીય પ્રસરણ-સંકુચન અવગણો.)

(A) 808 L (B) 36,190 L (C) 37,808 L (D) 37,000 L

27. આકૃતિ 6.30 માં એકસરખી જાડાઈ ધરાવતી એક જ દ્રવ્યની બનેલી ચાર લંબચોરસ પ્લેટ દર્શાવી છે. જો તેમનું તાપમાન Tથી વધારીને T + ΔT કરવામાં આવે, તો (*a*) તેમની ઊંચાઈમાં થતા વધારા અને (*b*) તેમના ક્ષેત્રફળમાં થતા વધારાને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવો.

(A) 2, 3, 1, 4 (B) 1, 2, 3, 4

(C) 4, 1, 2, 3 (D) 3, 2, 1, 4



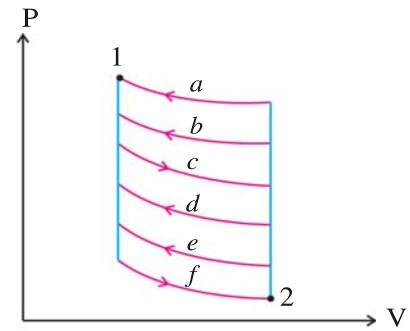
આકૃતિ 6.31

જવાબો

1. (D)	2. (A)	3. (D)	4. (C)	5. (C)	6. (C)
7. (A)	8. (B)	9. (A)	10. (C)	11. (B)	12. (D)
13. (A)	14. (C)	15. (A)	16. (A)	17. (D)	18. (C)
19. (D)	20. (A)	21. (C)	22. (D)	23. (A)	24. (B)
25. (D)	26. (B)	27. (D)			

નીચે આપેલ પ્રશ્નોનો જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. ફેઝ ડાયાગ્રામ એટલે શું ?
2. એક કિલો કૅલરી કોને કહેવાય ?
3. અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા કોને કહેવાય ?
4. આઇસોટ્રોપિક પદાર્થ કોને કહે છે ?
5. ઊકળતા પાણી કરતાં વરાળથી કેમ વધારે દઝાય છે ?
6. ક્વોસાઈ સ્ટેટીક પ્રક્રિયા કોને કહેવાય ?
7. કાર્નોટ-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કયા સંજોગોમાં 100% થાય છે ?
8. બે તંત્રો થરમૉડાઇનેમિક સંતુલનમાં છે તેમ ક્યારે કહેવાય ?
9. સમોષ્મી પ્રક્રિયા એટલે શું ?
10. ચક્રીય પ્રક્રિયા સમજાવો.
11. શા માટે બહુ પરમાણ્વિક અણુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્મા વધુ હોય છે ?
12. રેફ્રિજરેટરનો પરફૉર્મન્સ-ગુણાંક એટલે શું ?
13. સમદાબ પ્રક્રિયા એટલે શું ?
14. આપેલ આકૃતિમાં એક તંત્રની 1-2-1 માર્ગે ચક્રીય પ્રક્રિયા (દરેક વખતે તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે તાપીય સંતુલન સ્થપાય તે રીતે) માટેના જુદા-જુદા માર્ગ P – Vના આલેખમાં દર્શાવ્યા છે. કયા બંધ માર્ગ માટે તંત્ર વડે થતું કુલ કાર્ય મહત્તમ ધન મળશે ?



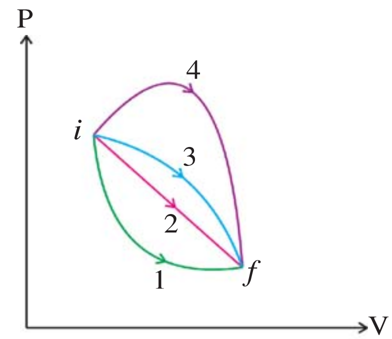
આકૃતિ 6.32

15. તાપમાનના કયા મૂલ્ય માટે ફેરનહીટ માપક્રમ પરનું અવલોકન (*a*) સેલ્સિયસ માપક્રમની બમણી કિંમત જેટલું મળશે ? (*b*) સેલ્સિયસ માપક્રમની અડધી કિંમત જેટલું મળશે ?

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. થરમૉડાઇનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ સમજાવો.
2. થરમૉડાઇનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ લખો અને સમજાવો.
3. ઉષ્મા-એન્જિનનું કાર્ય તથા તેની કાર્યક્ષમતાની સમજૂતી આપો.
4. અચળ તાપમાને વાયુનું સંકોચન કરતાં વાયુ પર થતા કાર્યનું સૂત્ર મેળવો.
5. કોઈ તંત્રને તેની પ્રારંભિક અવસ્થાથી અંતિમ અવસ્થા સુધી જુદા-જુદા માર્ગે લઈ જતાં થતા કાર્યની સમજૂતી P – V ના આલેખો દ્વારા આપો. ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન થતું કુલ કાર્ય સમજાવો.

6. પ્રતિવર્તી અને અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાઓ સમજાવો.
7. થરમૉડાઇનેમિક્સના બીજા નિયમનાં માત્ર કથનો લખો.
8. આકૃતિમાં તંત્રને પ્રારંભિક અવસ્થા *i*થી અંતિમ *f* સુધી લઈ જવા માટેના ચાર માર્ગ દર્શાવ્યા છે :
   (*a*) કયા માર્ગ પર આંતરિક ઊર્જાનો ફેરફાર ΔE_{int} મહત્તમ હશે ?
   (*b*) કયા માર્ગ (પ્રક્રિયા) પર તંત્ર વડે મહત્તમ કાર્ય W થશે ?
   (*c*) કયા માર્ગ પર ઉષ્માનો વિનિમય મહત્તમ હશે ?



આકૃતિ 6.33

નીચેના દાખલા ગણો :

1. 200 *g* દળના ઍલ્યુમિનિયમના એક ગોળાને 26°C તાપમાનથી 66°C તાપમાન સુધી લઈ જવા માટે કેટલી ઉષ્મા આપવી પડશે ? ઍલ્યુમિનિયમના આ ગોળાની ઉષ્માધારિતા કેટલી થશે ? C = 0.215 cal g^{-1} C^{o-1}. [જવાબ : 1720 cal, 43 cal C^{o-1}]
2. 10 g O_2ના દબાણ અને તાપમાન અનુક્રમે 3×10^5 N m^{-2} અને 10 °C છે. જ્યારે અચળ દબાણે આ વાયુને તપાવવામાં આવે છે, ત્યારે તેનું કદ 10 L થાય છે, તો
   (*a*) વાયુએ મેળવેલ ઉષ્મા
   (*b*) વાયુની આંતરિક ઊર્જામાં થતો ફેરફાર
   (*c*) વાયુ વડે વિસ્તરણ દરમિયાન થતું કાર્ય શોધો. R = 8.3 J mol^{-1} K^{-1}. O_2 એ દ્વિ-પરમાણ્વિક (rigid rotator) છે. [જવાબ : (*a*) 7929 J (*b*) 5664 J (*c*) 2265 J]
3. એક કાર્નો-એન્જિનમાં ઠારણવ્યવસ્થાનું તાપમાન 300 K છે અને તેની કાર્યક્ષમતા 40% છે. જો આ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા 50 % કરવી હોય, તો ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનનું તાપમાન અચળ રાખીને ઠારણવ્યવસ્થાનું તાપમાન કેટલું ઘટાડવું પડે ? [જવાબ : 50 K]
4. એક કાર્નો-એન્જિનમાં ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનનું તાપમાન 500 K અને ઠારણવ્યવસ્થાનું તાપમાન 375 K છે. જો એન્જિન તેના પ્રત્યેક ચક્ર દીઠ 600 k cal ઉષ્મા શોષતું હોય, તો (i) કાર્યક્ષમતા ગણો. (ii) પ્રત્યેક ચક્ર દીઠ થતું ચોખ્ખું કાર્ય શોધો. (iii) ઠારણવ્યવસ્થામાં પાછી મેળવાતી ઉષ્માની ગણતરી કરો. (J = 4.2 J/cal)
   [જવાબ : (i) 25% (ii) 6.3×10^5 J (iii) 450 k cal]
5. 27°C તાપમાને અને 2 atm દબાણે 1 મોલ આદર્શવાયુનું સમોષ્મી સંકોચન કરતાં તેનું કદ પ્રારંભિક કદના આઠમા ભાગનું થાય છે, તો વાયુના અંતિમ દબાણ અને તાપમાન શોધો. વાયુ માટે $\gamma = 1.5$ લો. [જવાબ : 45.2 atm, 848 K]
6. ઉપર્યુક્ત દાખલા 5માં વાયુ પર થતું કુલ કાર્ય શોધો. R = 8.3 J mol^{-1} K^{-1}.
   [જવાબ : 9097 J]
7. એક પરમાણ્વિક આદર્શવાયુને 1.6×10^6 *Pa* ના દબાણે, 300 K તાપમાને 0.0083 m^3 કદ ધરાવતા બંધ પાત્રમાં રાખેલો છે. આ વાયુને 2.49×10^4 J ઉષ્મા આપવામાં આવે છે, તો તેના અંતિમ તાપમાન અને દબાણ શોધો. પાત્રનું કદ પ્રસરણ અવગણો. R = 8.3 J mol^{-1} K^{-1}. [જવાબ : 675 K, 3.6×10^6 *Pa*]

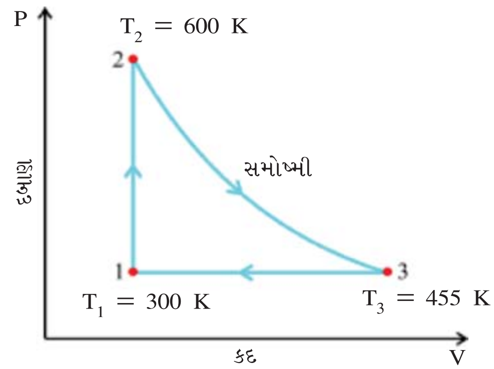
8. 1 મોલ આદર્શવાયુનું તાપમાન 30 C^o જેટલું વધારવા માટે કરવું પડતું કાર્ય શોધો. આ આદર્શવાયુનું પ્રસરણ $V \alpha T^{\frac{2}{3}}$ સંબંધ અનુસાર થાય છે. $R = 8.3 \ J \ mol^{-1} \ K^{-1}$.

[**જવાબ :** 166 J]

9. સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે PV^{γ} = અચળ હોય છે. એક સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે આ અચળાંકનું મૂલ્ય શોધો કે જેમાં 2 મોલ આદર્શવાયુ (rigid rotator) 1.0 atmના દબાણે અને 300 K તાપમાને ભરેલો છે. આદર્શવાયુ દ્વિ-પરમાણ્વિક (rigid rotator) ધારો.

[**જવાબ :** 1.48×10^3]

10. આકૃતિ 6.34માં દર્શાવ્યા મુજબ એક મોલ જેટલા એક પરમાણ્વિક વાયુ માટે પ્રક્રિયા $1 \rightarrow 2$ અચળ કદ રાખીને, પ્રક્રિયા $2 \rightarrow 3$ સમોષ્મી રીતે, અને પ્રક્રિયા $3 \rightarrow 1$ અચળ દબાણ રાખીને કરવામાં આવે છે, તો પ્રક્રિયા $1 \rightarrow 2$ અને $3 \rightarrow 1$ માટે જરૂરી ઉષ્મા Q, આંતરિક ઊર્જાનો ફેરફાર ΔE_{int} અને થયેલ કાર્ય W શોધો. $R = 8.314 \ J \ mol^{-1} \ K^{-1}$.



આકૃતિ 6.34

જવાબ :

પ્રક્રિયા	Q	ΔE_{int}	W
$1 \rightarrow 2$	3741 J	3741 J	0
$3 \rightarrow 1$	–3221.7 J	–1933 J	–1288.7 J

11. એક ઉષ્મા એન્જિનની કાર્યક્ષમતા 22% છે. જો દરેક ચક્ર દરમિયાન તેણે મેળવેલ ઉષ્મા અને ગુમાવેલ ઉષ્માનો તફાવત 75 J રહેતો હોય, તો ચક્ર દીઠ તેણે ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી મેળવેલ ઉષ્મા અને ઠારણવ્યવસ્થામાં ગુમાવેલ ઉષ્માનાં મૂલ્યો મેળવો.

[**જવાબ :** 341 J, અને 266 J]

12. ગૅસોલિનમાંથી ઉષ્મા પ્રાપ્ત કરતું એક ઉષ્મા-એન્જિન 10,000 J ઉષ્મા મેળવીને તેમાંથી 2000 J ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર કરે છે. ગૅસોલિનની (combustion) ગુપ્ત ઉષ્મા $L_C = 5.0 \times 10^4$ J/g છે.

(*a*) ઉષ્મા-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કેટલી હશે ?

(*b*) દરેક ચક્ર દરમિયાન કેટલી ઉષ્મા, એન્જિન ઠારણવ્યવસ્થામાં આપતું હશે ?

(*c*) દરેક ચક્ર દરમિયાન કેટલા ગ્રામ ગૅસોલિન વપરાતું હશે ?

(*d*) એન્જિન એક સેકન્ડમાં 25 વખત ચક્રીય પ્રક્રિયા કરતું હોય, તો એક કલાકમાં કેટલું ગૅસોલિન વપરાશે ?

(*e*) એક સેકન્ડમાં એન્જિન કેટલા વૉટ (watt) પાવર ઉત્પન્ન કરતું હશે ? હૉર્સ પાવરમાં ? (1 hp = 746 W)

[**જવાબ :** (*a*) 20% (*b*) 8000 J (*c*) 0.2 g (*d*) 18 kg/h (*e*) 50 kW, 67 hp]

•

પ્રકરણ 7

દોલનો

7.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વહાલા વિદ્યાર્થીઓ, વર્તુળમય ગતિ અને પ્રક્ષિપ્ત ગતિના અભ્યાસ દરમિયાન તમે એ શીખ્યા છો કે કણ પર વિશિષ્ટ પ્રકારે લાગતાં બળો તેના ગતિપથને કેવી અસર કરે છે. તરંગગતિ, આવર્તગતિ (પ્રસંવાદી ગતિ) અને દોલિત ગતિના ખ્યાલો, તેમની લાક્ષણિક્તાઓ જેવી કે આવૃત્તિ, આવર્તકાળ, કંપ વિસ્તાર વગેરે વિશે પણ તમે ધોરણ 9માં શીખ્યા છો.

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આવર્તગતિનું ખૂબ જ મહત્ત્વ છે. ધ્વનિ અને વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોની ઉત્પત્તિ અને તેના પ્રસરણને સમજવામાં આ ગતિ મુખ્ય ભાગ ભજવે છે. ઘટક કણો જેવા કે અણુ, પરમાણુ કે આયનો પણ દોલિત ગતિ ધરાવે છે.

આ પ્રકરણમાં પ્રથમ આપણે આવર્ત (પ્રસંવાદી)ગતિ અને દોલિત ગતિના આપણા ખ્યાલોને તાજા કરીશું અને સ્થાન આધારિત બળોની અસર હેઠળ આવી ગતિનો અભ્યાસ કરીશું. સ્થિતિ-ઊર્જા, ગતિ-ઊર્જા અને કુલ યાંત્રિક-ઊર્જાના આવર્તગતિ માટેનાં ગાણિતિક નિરૂપણોને જોઈશું. આપણે અવમંદિત દોલનો, પ્રણોદિત દોલનો અને અનુનાદની ઘટનાનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

7.2 આવર્તગતિ અને દોલિત ગતિ (Periodic Motion and Oscillatory Motion)

જો કોઈ પદાર્થ કોઈ નિશ્ચિત પથ પર, કોઈ નિશ્ચિત બિંદુને અનુલક્ષીને, નિયત સમયગાળે પોતાની ગતિનું પુનરાવર્તન કરતો હોય, તો આવી ગતિને આવર્તગતિ કહે છે.

ઘડિયાળના કાંટાઓની ગતિ, ચંદ્રની પૃથ્વીની આસપાસની ગતિ અને પૃથ્વીનું સૂર્યની આસપાસનું ભ્રમણએ આવર્તગતિનાં સુંદર ઉદાહરણો છે.

જો કોઈ પદાર્થ કોઈ નિયત બિંદુની આસપાસ આગળ-પાછળ કે ઉપર - નીચે નિયત સમયમાં પુનરાવર્તિત ગતિ કરતો હોય, તો આવી ગતિને દોલિત ગતિ કહે છે. જે પદાર્થ આવી ગતિ કરે છે, તેને **દોલક** કહે છે.

લોલકના ગોળાની ગતિ તથા સ્પ્રિંગ સાથે લટકાવેલ દળદાર પદાર્થની ગતિ એ દોલિત ગતિનાં જાણીતાં ઉદાહરણો છે.

દરેક દોલિત ગતિઓ આવર્તગતિઓ છે પરંતુ દરેક આવર્તગતિઓ દોલિત ગતિઓ ન પણ હોય. જેમકે ઘડિયાળના કાંટાની ગતિ, પૃથ્વીની સૂર્યની આસપાસની ગતિએ આવર્તગતિઓ છે, પરંતુ દોલિત ગતિ નથી. નિયતબિંદુની આસપાસ, આગળ પાછળ કે ઉપર નીચેની ગતિનો ખ્યાલ આ કિસ્સાઓમાં નથી.

આપણે જોઈશું કે દોલિત ગતિને sine અને cosine વિધેયો વડે દર્શાવાય છે. ત્રિકોણમિતિના વિધેયો sine અને cosineએ 2π રેડિયન આવર્તકાળ ધરાવતા આવર્ત વિધયો છે. ગણિતમાં આ વિધેયો પ્રસંવાદી વિધેયો (harmonic functions) તરીકે ઓળખાય છે. આથી દોલિત ગતિને પ્રસંવાદી ગતિ પણ કહેવાય છે.

7.3 સરળ આવર્તગતિ (સ.આ.ગ) (Simple Harmonic Motion (SHM))

સરળ આવર્તગતિ એ આવર્તગતિનો સાદામાં સાદો પ્રકાર છે.

જ્યારે કોઈ પદાર્થ નિયતબિંદુથી સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં અને નિયતબિંદુ તરફ લાગતા બળની અસર હેઠળ નિયતબિંદુની આસપાસ સુરેખ પથ પર આવર્તગતિ કરતો હોય, તો તેવી ગતિને સરળ આવર્તગતિ કહે છે.

સરળ આવર્તગતિ કરતા પદાર્થને **સરળ આવર્તદોલક (સ.આ.દો)** કહે છે.

હુકના નિયમનું પાલન કરતી વજનરહિત સ્પ્રિંગને આપણે હવે ધ્યાનમાં લઈશું. આ સ્પ્રિંગને દૃઢ આધાર પરથી આકૃતિ 7.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે શિરોલંબ લટકાવેલ છે. હવે m દળવાળો પદાર્થને તેના નીચેના છેડે બાંધો. જ્યારે આપણે આ પદાર્થને નીચે તરફ ખેંચીને છોડી દઈશું, ત્યારે તે (લગભગ) સરળ આવર્તગતિ કરશે.

સરળ આવર્તગતિ સાથે સંકળાયેલ કેટલીક મૂળભૂત રાશિઓને સમજવા હવે આકૃતિ7.1નો ઉપયોગ કરો.

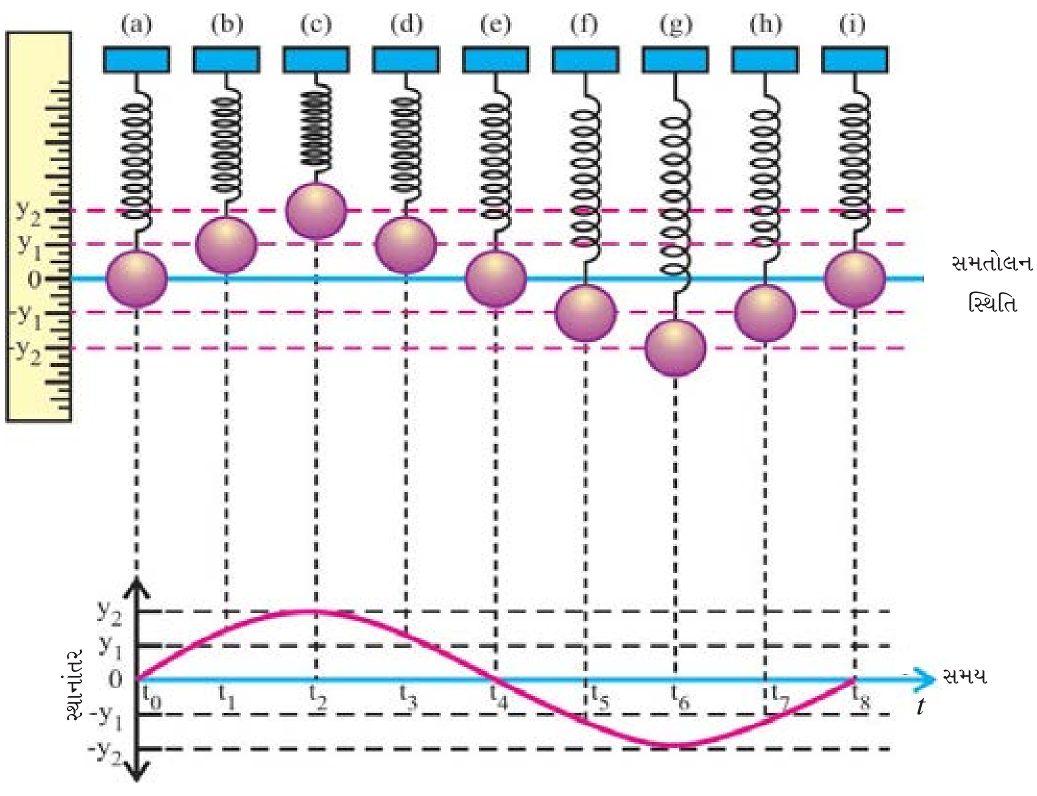
સમતોલન સ્થિતિ (મધ્યમાન સ્થિતિ) (Equilibrium position / Mean position) :

સરળ આવર્તદોલક જે બિંદુની સાપેક્ષે સરળ આવર્તગતિ કરતું હોય તે બિંદુને સમતોલન સ્થાન કે મધ્યમાન સ્થાન કહે છે.

આકૃતિ 7.1માં (a), (e) અને (i)એ પદાર્થ સમતોલન સ્થાન પર છે.

સ્થાનાંતર (Displacement)

સમતોલનબિંદુથી કોઈ પણ ક્ષણે દોલકના અંતરને તે ક્ષણે દોલકનું **સ્થાનાંતર** કહે છે.



સ્પ્રિંગ સાથે જોડેલા દળદાર પદાર્થની સરળ આવર્તગતિ તથા તેના સ્થાનાંતર-સમયનો આલેખ

આકૃતિ 7.1

આકૃતિ 7.1 (b)માં $t = t_1$ સમયે દોલકનું સ્થાનાંતર y_1 છે. $t = t_5$ સમયે દોલકનું સ્થાનાંતર $-y_1$ છે. (આકૃતિ 7.1 (f)).

કંપવિસ્તાર (Amplitude)

મધ્યમાન સ્થાનથી કોઈ એક તરફના દોલકના અધિકતમ સ્થાનાંતરને દોલકનો **કંપવિસ્તાર** કહે છે.

આકૃતિ 7.1 (c, g)માં બતાવ્યા પ્રમાણે, y_2એ દોલક વડે પ્રાપ્ત થતું મહતમ સ્થાનાંતર છે. આથી y_2 એ આ દોલકનો કંપવિસ્તાર થશે.

આવર્તકાળ (Periodic Time, Time period or period)

એક દોલન પૂર્ણ કરવા માટે લાગતા સમયને તે દોલકનો **આવર્તકાળ (T)** કહે છે.

બીજા શબ્દોમાં, જે લઘુતમ સમયનાં અંતરાલમાં દોલક આવર્તગતિનું પુનરાવર્તન કરે તે સમયને તે દોલકનો આવર્તકાળ કહે છે.

આવર્તકાળનો SI એકમ second (s) છે.

આકૃતિ 7.1ના દોલક માટે $t_8 - t_0$ એ આવર્તકાળ છે.

આવૃત્તિ (Ferquency)

એક સેકન્ડમાં પૂર્ણ થતાં દોલનોની સંખ્યાને તે સરળ આવર્ત દોલકની **આવૃત્તિ** તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

તેનો SI એકમ S^{-1} અથવા H_z છે.

તેને f વડે દર્શાવાય છે, અને $f = 1/T$.

કોણીય આવૃત્તિ (Angular frequency)

દોલકની આવૃત્તિના 2π ગણાને તે દોલકની **કોણીય આવૃત્તિ** કહે છે.

તેને ω ($= 2\pi f$) વડે દર્શાવાય છે.

તેનો SI એકમ rad s^{-1} છે.

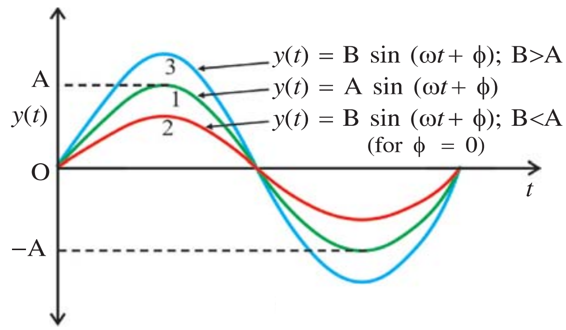
જો આપણે સરળ આવર્ત દોલક માટે સ્થાનાંતર વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ દોરીએ, તો આકૃતિ 7.1ના નિમ્ન ભાગમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો મળે. આવી ગતિને સમય સાથેના ગાણિતિક વિધેય તરીકે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

$$y(t) = A\sin(\overbrace{\omega t + \phi}^{\text{કળા}}) \qquad (7.3.1)$$

t સમયે સ્થાનાંતર, કંપવિસ્તાર, કોણીય આવૃત્તિ, સમય, પ્રારંભિક કળા

આપણે જાણીએ છીએ કે sine વિધેયનો વિસ્તાર [−1, 1] છે. આથી સ.આ.ગ.નું સ્થાનાંતર $y(t)$ એ $\pm A$ વચ્ચે બદલાશે. (આકૃતિ 7.2 જુઓ)

જો બીજી સ.આ.ગ. $y(t) = B\sin(\omega t + \phi)$ જ્યાં $B < A$ વડે દર્શાવાય, તો તે આકૃતિ 7.2 ના વક્ર 2 મુજબ હશે અને જો $B > A$ હોય, તો તે વક્ર 3 મુજબનો હોય.



સમયવિધેય તરીકે સ.આ.ગ.નું સ્થાનાંતર

આકૃતિ 7.2

રાશિ ($\omega t + \phi$)ને સ.આ.ગ.ની t સમયની કળા કહે છે. જે દોલકની તે સમયની ગતિની અવસ્થા દર્શાવે છે.

$t = 0$ સમયની સ.આ.દો.ની કળાને **પ્રારંભિક કળા** (ϕ) (intial phase or ephoch) કે **કળા-અચળાંક** (ϕ) કહે છે.

એક પૂર્ણ દોલનમાં સ.આ.ગ.ની કળામાં 2π rad જેટલો વધારો થાય છે અને આથી n દોલનોના અંતે કળામાં $2n\pi$ rad જેટલો વધારો થાય.

આવર્તગતિનો આવર્તકાળ T છે, તેથી (t + T) સમયનું દોલકનું સ્થાનાંતર એ કોઈ પણ t સમયે દોલકના સ્થાનાંતર જેટલું જ હોય.

એટલે કે,

$$y(t) = y(t + T)$$

$$A\sin(\omega t + \phi) = A\sin[\omega(t + T) + \phi]$$

$$\sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega t + \omega T + \phi)$$

$$\omega t + \phi + 2\pi = \omega t + \omega T + \phi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\therefore\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \left(\because\ T = \frac{1}{f}\right) \qquad (7.3.2)$$

વેગ (Velocity)

હવે દોલકનો વેગ

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi) \qquad (7.3.3)$$

સમીકરણ (7.3.3) પરથી,

$$v = \pm A\omega\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \phi)}$$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - A^2\sin^2(\omega t + \phi)}$$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} \quad (7.3.4)$$

$y = 0$ એ, $v = \pm A\omega = \pm v_m$

સ.આ.ગ.ની આ મહત્તમ વેગ કે વેગ-કંપવિસ્તાર (v_m) છે.

$y = \pm A$ (સ.આ.ગ.નાં અંત્યબિંદુ) આગળ, $v = 0$.

પ્રવેગ (Acceleration)

સ.આ.દો.નો પ્રવેગ એ,

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

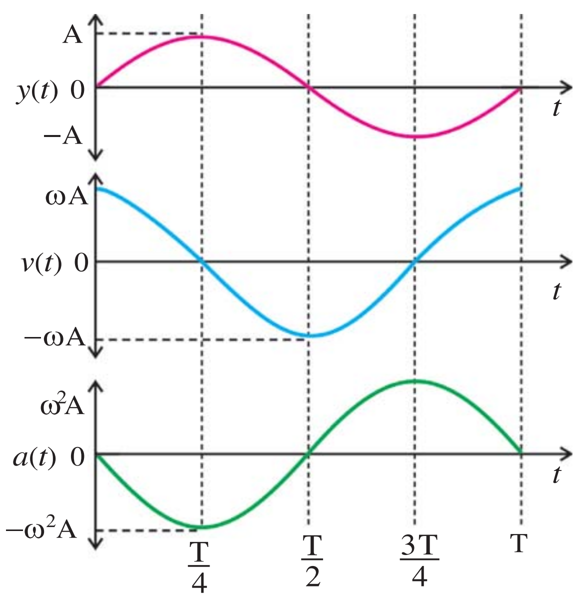
$$a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 y(t) \quad (7.3.5)$$

$y = 0$ આગળ, $a(t) = 0$ અને

$y = \pm A$ આગળ, $a(t) = \mp\omega^2 A$.

સ.આ.ગ.ના કણના સ્થાનાંતર $y(t)$, ગતિ $v(t)$ અને પ્રવેગ $a(t)$ના સમય વિરુદ્ધના આલેખો આકૃતિ 7.3માં દર્શાવેલ છે.



સ.આ.દો.નાં સ્થાનાંતર, ગતિ અને પ્રવેગના સમય વિરુદ્ધના આલેખો (ϕ = **0** માટે)

આકૃતિ 7.3

$y(t)$, $v(t)$ અને $a(t)$ના સમય સાથેનાં મૂલ્યો ટેબલ 7.1માં સંકલિત કરેલ છે.

ટેબલ 7.1

$y(t)$, $v(t)$ અને $a(t)$નાં મૂલ્યો

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
સ્થાનાંતર $y(t)$	0	A	0	−A	0
વેગ $v(t)$	ωA	0	−ωA	0	ωA
પ્રવેગ $a(t)$	0	$-\omega^2 A$	0	$\omega^2 A$	0

ઉદાહરણ 1 :

$y = 0.40 \sin(440t + 0.61)$ દ્વારા સરળ આવર્ત-દોલકનું સ્થાનાંતર આપવામાં આવેલ છે. આ માટે,

(i) કંપવિસ્તાર (ii) કોણીય આવૃત્તિ (iii) આવર્તકાળ અને (iv) પ્રારંભિક કળાનાં મૂલ્યો શું હશે ?

અહીં y મીટરમાં અને t secondમાં છે.

ઉકેલ :

$y = 0.40 \sin(440t + 0.61)$ ને

$y = A\sin(\omega t + \phi)$ સાથે સરખાવતાં,

(*i*) કંપવિસ્તાર $A = 0.40\ m$

(*ii*) કોણીય આવૃત્તિ $\omega = 440$ rad/s

(*iii*) આવર્તકાળ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{440}$

$= 0.0143$ s

(*iv*) પ્રારંભિક કળા $\phi = 0.61$ rad

7.4 સરળ આવર્તગતિ માટે બળનો નિયમ

સમીકરણ (7.3.5) પરથી એ જોઈ શકાય છે કે સરળ આવર્ત દોલકનો પ્રવેગ એ સમયનું વિધેય છે આથી, આ પ્રવેગ માટે કેટલા બળની જરૂર પડે ? આ પ્રશ્નના ઉત્તર આપવા આપણે ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમનો ઉપયોગ કરી શકીએ.

આપણે જાણીએ છીએ કે

$F = ma,$

$\therefore F = -m\omega^2 y(t), \quad (7.4.1)$

આ પુનઃસ્થાપક બળ છે.

હુકના નિયમ અનુસાર, પુનઃસ્થાપક બળ

$F = -ky(t) \quad (7.4.2)$

વડે આપવામાં આવે છે, જ્યાં k સ્પ્રિંગ અચળાંક છે.

સમીકરણો (7.4.1) અને (7.4.2)ને સરખાવતાં,

$k = m\omega^2$

$\therefore$ કોણીય આવૃત્તિ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.4.3)$$

અને દોલકની આવૃત્તિ

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \quad (7.4.4)$$

દોલકનો આવર્તકાળ

$$\mathrm{T} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \quad (7.4.5)$$

ઘણા બધા કિસ્સાઓમાં સ્પ્રિંગ વગર પણ સરળ આવર્તગતિ ઉદ્ભવે છે. આ કિસ્સામાં kને સ.આ.ગ.નો બળઅચળાંક કહે છે અને તે એકમ સ્થાનાંતર દીઠ લાગતું પુનઃસ્થાપક બળ છે ($k = -\frac{\mathrm{F}}{y}$).

7.5 સરળ આવર્તગતિનું વિકલ સમીકરણ (Differential Equation of Simple Harmonic Motion)

ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ પ્રમાણે,

$$\mathrm{F} = ma = m\frac{dv(t)}{dt} = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}. \quad (7.5.1)$$

આને $\mathrm{F} = -ky(t)$ સાથે સરખાવતાં

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -ky(t)$$

$$\therefore \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}y(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\omega^2 y(t) \quad (\because 7.4.3)$$

$$\therefore \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = 0 \quad (7.5.2)$$

આ સરળ આવર્તગતિનું દ્વિતીય ક્રમનું વિકલ સમીકરણ છે. આ સમીકરણનો ઉકેલ

$y(t) = \mathrm{A} \sin \omega t$

અથવા

$y(t) = \mathrm{B} \cos \omega t$

અથવા

sine અને cosine નું કોઈ રેખીય સંયોજન,

$y(t) = \mathrm{A} \sin \omega t + \mathrm{B} \cos \omega t$ જેવું હોય છે.

ઉદાહરણ 2 : એક સ્થિતિસ્થાપક સ્પ્રિંગના નીચેના છેડે 14.4 gનો પદાર્થ લટકાવતાં તેની લંબાઈમાં 9 cm વધારો થાય છે. આ સ્થિતિમાંથી તેને 3 cm નીચે તરફ ખેંચીને છોડી દેતાં તે સરળ આવર્તગતિ શરૂ કરે છે, તો આ ગતિ માટે

(1) કંપવિસ્તાર અને પ્રારંભિક કળા

(2) કોણીય આવૃત્તિ અને આવર્તકાળ

(3) $t = 3$ s પર કળા

(4) સ્થાનાંતરનું સમીકરણ અને

(5) $t = 1.5$ s ક્ષણે દોલકનું સ્થાનાંતર શોધો.

$g = 100\pi^2$ cm s^{-2} લો.

ઉકેલ :

(1) પદાર્થને 3 cm નીચે તરફ ખેંચવામાં આવે છે, આથી તેનો કંપવિસ્તાર 3 cm થાય.

વળી, અહીં દોલનની શરૂઆત ગતિ પથના નીચેના છેડેથી થાય છે.

$t = 0$, $y = -\mathrm{A}$.

$\therefore y = \mathrm{A} \sin(\omega t + \phi)$ પરથી,

$-\mathrm{A} = \mathrm{A} \sin\phi$

$\therefore \sin\phi = -1$

$\therefore \phi = \frac{3\pi}{2}$ rad.

(2) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$= \sqrt{\frac{mg}{\Delta l} \times \frac{1}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$

$= \sqrt{\frac{100\pi^2}{9}}$

$= \frac{10\pi}{3}$ rad s^{-1}.

વળી, $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$

$\therefore \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\left(10\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \frac{3}{5}$ s.

(3) આપણે જાણીએ છીએ કે કળા

$\theta = \omega t + \phi$

$= \frac{10\pi}{3} \times 3 + \frac{3\pi}{2}$

$\theta = \frac{23\pi}{2}$ rad.

(4) t સમયે સ્થાનાંતર માટે

$y = A \sin(\omega t + \phi)$

$= 3 \sin\left(\frac{10\pi}{3}t + \frac{3\pi}{2}\right)$(in cm).

(5) $t = 1.5$ sec

$y = 3 \sin\left(\frac{10\pi}{3} \times 1.5 + \frac{3\pi}{2}\right)$

$= 3 \sin(5\pi + \frac{3\pi}{2})$

$y = 3$ cm

ઉદાહરણ 3 : એક સરળ આવર્તગતિને $y = 3 \sin 314\, t + 4 \cos 314\, t$ વડે દર્શાવવામાં આવેલ છે. y cm અને t secondમાં છે. આ સ.આ.ગ. માટે કંપવિસ્તાર, પ્રારંભિક કળા, આવર્તકાળ અને મહત્તમ વેગ શોધો.

ઉકેલ : $y = A \sin(\omega t + \phi)$

$\therefore\ y = A \cos\phi \sin\omega t + A \sin\phi \cos\omega t$

અહીં, $y = 3\sin314t + 4\cos314t$ ને ઉપરોક્ત સમીકરણ સાથે સરખાવતાં,

$3 = A \cos\phi$ અને

$4 = A \sin\phi$

$\therefore\ A^2\cos^2\phi + A^2\sin^2\phi = 3^2 + 4^2$

$\therefore\ A^2 = 25$

$A = 5$ cm.

પ્રારંભિક કળા મેળવવા,

$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{4}{3}$

$\therefore\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$\therefore\ \phi = 53^{\circ}8'$.

હવે $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$= \frac{2\pi}{314} = 0.02$ s

મહત્તમ વેગ

$v_{max} = \omega A$

$= 314 \times 5$

$= 1570$ cm/s

ઉદાહરણ 4 : એક કણ સુરેખ પથ પર સ.આ.ગ. કરે છે. દોલકનો કંપવિસ્તાર 2 cm છે. મધ્યમાન સ્થિતિથી જ્યારે કણનું સ્થાનાંતર 1 cm હોય ત્યારે તેનો પ્રવેગ અને વેગના મૂલ્યો સમાન છે. આ સ.આ.ગ. માટે આવર્તકાળ, મહત્તમ વેગ અને મહત્તમ પ્રવેગ શોધો.

ઉકેલ :

અહીં $A = 2$ cm.

જ્યારે $y = 1$ cm,

{વેગનું મૂલ્ય} = {પ્રવેગનું મૂલ્ય}

$\therefore\ \omega\sqrt{A^2 - y^2} = \omega^2 y$

$A^2 - y^2 = \omega^2 y^2$

$2^2 - 1^2 = \omega^2 \times 1^2$

$\therefore\ \omega = \sqrt{3}$ rad/s.

$\therefore$ આવર્તકાળ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ s

હવે મહત્તમ વેગ

$v_m = \omega A$

$= \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$ cm s^{-1}

મહત્તમ પ્રવેગ $= A\omega^2$

$= 2 \times 3$

$= 6$ cm s^{-2}

ઉદાહરણ 5 : એક સ્પ્રિંગકાંટાનો માપક્રમ 50 kg આંક દેખાડે છે. આ માપક્રમની લંબાઈ 20 cm છે. આ સ્પ્રિંગ સાથે લટકાવેલ પદાર્થને જ્યારે ખેંચીને છોડતાં તે 0.6 sના આવર્તકાળથી દોલન કરે છે. આ પદાર્થનું વજન શોધો.

ઉકેલ :

અહીં $m = 50$ kg.

સ્પ્રિંગનું મહત્તમ ખેંચાણ $y = 20 - 0$

$= 20$ cm $= 0.2$ m

આવર્તકાળ $T = 0.6$ s

મહત્તમ બળ $F = mg$

$= 50 \times 9.8 = 490$ N

$\therefore\ k = \frac{F}{y}$

$= \frac{490}{0.2} = 2450$ N m^{-1}.

પણ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$m = \frac{T^2 k}{4\pi^2}$

$= \frac{(0.6)^2 \times 2450}{4 \times (3.14)^2} = 22.36$ kg

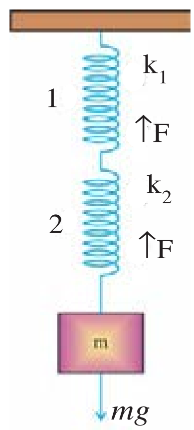
$\therefore$ પદાર્થનું વજન $= mg = 22.36 \times 9.8$

$= 219.1$ N $= 22.36$ kgf

[1 kgf (kilogram force) = g N; જ્યાં g = ગુરુત્વપ્રવેગ]

7.6 ભારિત સ્પ્રિંગોમાં દોલનો (Oscillations in Loaded Springs)

(i) k_1 અને k_2 બળ-અચળાંકવાળી બે વજનરહિત સ્પ્રિંગોના શ્રેણી જોડાણને એક છેડેથી આકૃતિ 7.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દૃઢ આધાર પરથી શિરોલંબ લટકાવેલ છે. તેના બીજા મુક્ત છેડા સાથે m દળ લટકાવેલ છે. હવે પદાર્થને y જેટલા નાના અંતર સુધી નીચે તરફ ખેંચી તે શિરોલંબ દોલન કરી શકે તેમ મુક્ત કરો.



બે સ્પ્રિંગોનું શ્રેણીજોડાણ
આકૃતિ 7.4

જો સ્પ્રિંગ 1ની લંબાઈમાં y_1 અને સ્પ્રિંગ 2ની લંબાઈમાં y_2 જેટલો વધારો થાય છે તો,

$$y = y_1 + y_2$$

પરંતુ દરેક સ્પ્રિંગ પર લાગતું પુનઃ સ્થાપક બળ ($= mg$) સરખું જ છે.

$$\therefore \mathrm{F} = -k_1 y_1 \text{ અને}$$

$$\mathrm{F} = -k_2 y_2$$

પણ $y = y_1 + y_2$

$$\therefore y = \frac{-\mathrm{F}}{k_1} + \frac{-\mathrm{F}}{k_2}$$

$$y = -\mathrm{F}\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}\right)$$

$$\therefore \mathrm{F} = -y\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) \quad (7.6.1)$$

આમ બે સ્પ્રિંગોનાં શ્રેણીજોડાણ માટેનો સમતુલ્ય બળ-અચળાંક

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (7.6.2)$$

હવે દોલનનો આવર્તકાળ

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\therefore \mathrm{T} = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}\right)} \quad (7.6.3)$$

જો $k_1 = k_2 = k'$

ત્યારે $k = \dfrac{k'k'}{k' + k'}$

આથી સમતુલ્ય સ્પ્રિંગ-અચળાંક

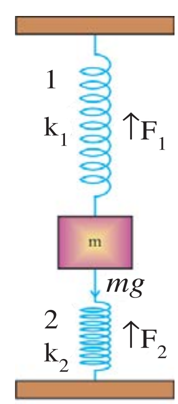
$$k = \frac{k'}{2}$$

અને દોલનનો આવર્તકાળ

$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k'}}$ થશે.

(ii) હવે આકૃતિ 7.5માં બતાવ્યા પ્રમાણેની પરિસ્થિતિ લો, જ્યાં m દળવાળો પદાર્થ k_1 અને k_2 સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી બે સ્પ્રિંગો વચ્ચે જોડેલ છે. દળ mને કોઈ એક તરફ ખેંચી તેને ઊર્ધ્વતલમાં સ.આ.ગ. કરે તેમ મુક્ત કરો.

આ સ્થિતિમાં જ્યારે પદાર્થને કોઈ એક તરફ y જેટલું નાનું સ્થાનાંતર આપવામાં આવે, ત્યારે એક સ્પ્રિંગની લંબાઈમાં y જેટલો વધારો થશે. જ્યારે બીજી સ્પ્રિંગમાં y જેટલો ઘટાડો થશે. આથી ઉત્પન્ન થતા પુનઃસ્થાપક બળો F_1 અને F_2 બન્ને એક જ દિશામાં લાગશે.



ભારિત બે સ્પ્રિંગોનું જોડાણ
આકૃતિ 7.5

$\therefore$ કુલ પુનઃસ્થાપક બળ એ

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 \\ &= -k_1 y - k_2 y \\ &= -(k_1 + k_2)y \\ &= -ky \end{aligned}$$

આમ આ કિસ્સામાં સમતુલ્ય સ્પ્રિંગ-અચળાંક એ

$$k = k_1 + k_2. \qquad (7.6.4)$$

હવે આવર્તકાળ

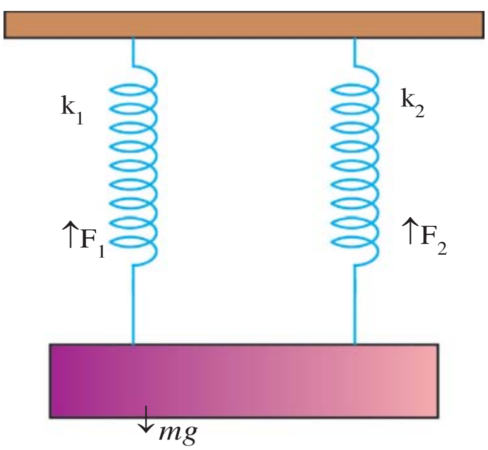
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \qquad (7.6.5)$$

જો $k_1 = k_2 = k'$ ત્યારે

$k = 2k'$ અને

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k'}}.$$

(iii) વજનરહિત અને સમાન લંબાઈ ધરાવતી અને k_1 અને k_2 બળ-અચળાંકવાળી બે સ્પ્રિંગોને આકૃતિ 7.6માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે શિરોલંબ લટકાવેલી છે. તેમના મુક્ત છેડે m દળવાળો અને અસમાન ઘનતા વિતરણવાળો બ્લૉક લટકાવેલ છે, આથી તેમની લંબાઈઓમાં સમાન વધારો થાય છે.



બે સ્પ્રિંગોનું સમાંતર જોડાણ

આકૃતિ 7.6

આ પરિસ્થિતિમાં પદાર્થને નીચે તરફ y જેટલા નાના અંતર સુધી ખેંચીને તેને મુક્ત કરવામાં આવે છે, જેથી તંત્ર ઊર્ધ્વતલમાં સ.આ.ગ. કરે છે.

અહીં બંને સ્પ્રિંગોના બળ-અચળાંકો જુદા-જુદા છે. વળી, બંને સ્પ્રિંગોની લંબાઈમાં સમાન વધારો થયેલ હોવાથી બળથી ઉદ્‌ભવતો બોજો દરેક સ્પ્રિંગ પર જુદો-જુદો વહેંચાય છે. આથી બંને સ્પ્રિંગમાં પુનઃસ્થાપક બળ જુદું-જુદું હોય છે.

જો F_1 અને F_2 એ સ્પ્રિંગના ખેંચાણને લીધે ઉત્પન્ન થયેલ પુનઃસ્થાપક બળો હોય તો,

$F_1 = -k_1 y$ અને

$F_2 = -k_2 y$

પણ કુલ પુનઃસ્થાપક બળ (= mg)

$$F = F_1 + F_2$$
$$= -k_1 y - k_2 y$$
$$-ky = -(k_1 + k_2)y$$

જ્યાં, બે સ્પ્રિંગોના સમાંતર જોડાણનો સમતુલ્ય સ્પ્રિંગ-અચળાંક છે.

$$\therefore\ k = k_1 + k_2. \qquad (7.6.6)$$

દોલકનો આવર્તકાળ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1 + k_2}} \qquad (7.6.7)$$

જો $k_1 = k_2 = k'$, તો

$k = 2k'$ અને

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k'}}.$$

ઉદાહરણ 6 : 0.1 m દબાયેલ એક સ્પ્રિંગમાં 10 N પુનઃસ્થાપક બળ ઉદ્‌ભવે છે. 4 kg દળવાળો એક પદાર્થ તેના પર મૂકેલ છે. જો આ સ્પ્રિંગ સ.આ.દો. કરે તો (i) આ સ્પ્રિંગનો બળ-અચળાંક, (ii) પદાર્થના વજનથી સ્પ્રિંગમાં ઉદ્‌ભવતું સંકોચન અને (iii) આ દોલકનો આવર્તકાળ ગણો (g = 10 N/kg).

ઉકેલ :

અહીં, F = 10 N

સ્થાનાંતર $\Delta y = 0.1\ m$

$m = 4$ kg.

આપણે જાણીએ છીએ,

(i) $k = \dfrac{F}{\Delta y}$

$= \dfrac{10}{0.1}$

$k = 100\ \text{Nm}^{-1}$.

(ii) $y = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{4 \times 10}{100} = 0.4\text{m}$

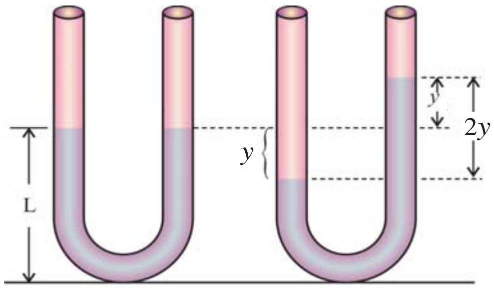
(iii) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$= 2\pi\sqrt{\dfrac{4}{100}}$

$= \dfrac{4\pi}{10}$

$T = 0.4\pi$ s.

ઉદાહરણ 7 : એક U નળી ρ જેટલી ઘનતાવાળા પ્રવાહીથી આંશિક ભરેલી છે. U નળીની દરેક ભુજામાં પ્રવાહીની ઊંચાઈ L છે. એક ભુજામાં પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીને y જેટલું સ્થાનાંતર આપી પ્રવાહીને દોલિત કરવામાં આવે, તો સાબિત કરો કે આ દોલનો સરળ આવર્ત પ્રકારનાં છે. આ સ.આ.ગ.નો આવર્તકાળ શોધો.



પ્રવાહી ભરેલ U-નળી

આકૃતિ 7.7

ઉકેલ :

U–નળીની એક ભુજામાં પ્રવાહી y જેટલું સ્થાનાંતર નીચે તરફ પામે, તો બીજી ભુજામાં પ્રવાહી y જેટલું સ્થાનાંતર ઉપર તરફ અનુભવે.

$\therefore$ આકૃતિ 7.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બંને ભુજાઓમાં પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીઓ વચ્ચે ઊંચાઈનો તફાવત = $2y$.

$\therefore$ $2y$ ઊંચાઈના પ્રવાહીના સ્તંભથી ઉદ્ભવતું દબાણ $P = 2y\rho g$

જ્યાં, ρ = પ્રવાહીની ઘનતા, g = ગુરુત્વપ્રવેગ.

આ દબાણને કારણે ઉદ્ભવતું બળ $F = PA$

$\therefore F = 2y\rho gA = (2\rho gA)y = ky$

$\therefore F \propto y$

વળી, આ બળ સ્થાનાંતર yની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતું હોવાથી $F \propto -y$.

$\therefore$ આ દોલનો સરળ આવર્ત પ્રકારનાં છે.

દોલકનો આવર્તકાળ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho gA}}.$$

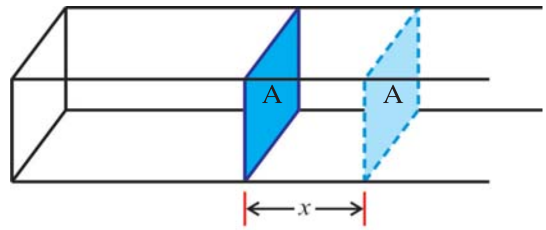
પ્રવાહીનું દળ $m = LA\rho = 2yA\rho$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2yA\rho}{2\rho gA}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{y}{g}}.$$

ઉદાહરણ 8 : A જેટલું આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતી એક લંબચોરસ પાઇપનો એક છેડો બંધ છે અને બીજો છેડો હવાચુસ્ત રહે તેમ તેટલા જ આડછેદવાળો બ્લૉક મૂક્યો છે. બ્લૉકની સમતોલન સ્થિતિમાં પાઇપમાં હવાનું દબાણ P અને કદ V છે. જો બ્લૉકને અંદર તરફ x જેટલું અતિ નાનું સ્થાનાંતર આપી છોડી દેવામાં આવે, તો સાબિત કરો કે તે સ.આ.ગ. કરે છે અને તેનો આવર્તકાળ પણ શોધો. હવાનું સંકોચન સમતાપી ગણો.

ઉકેલ :



લંબચોરસ પાઇપ

આકૃતિ 7.8

ધારો કે હવાનું સૂક્ષ્મ સંકોચન થતાં દબાણમાં થતો વધારો = ΔP અને કદમાં થતો ઘટાડો = ΔV

સમતાપી સંકોચન માટે,

$(P + \Delta P)(V - \Delta V) = PV$ (બૉઈલના નિયમ PV = અચળ પરથી)

$\therefore PV - P\Delta V + V\Delta P - \Delta P\Delta V = PV$

હવે $\Delta P\Delta V$ અત્યંત સૂક્ષ્મ હોવાથી બીજાં પદોની સરખામણીમાં $\Delta P\Delta V$ અવગણતાં અને ΔP સૂત્રોનો કર્તા બનાવતાં,

$$\Delta P = \frac{P\Delta V}{V} = \frac{PAx}{V} \quad (\because \Delta V = Ax) \qquad (1)$$

આ વધારાના દબાણને લીધે બ્લૉક પર તેના સ્થાનાંતરના વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતું (પુનઃસ્થાપક) બળ,

$$F = A\Delta P \qquad (2)$$

સમીકરણ (1)માંથી ΔPનું મૂલ્ય સમીકરણ (2)માં મૂકતાં,

$$F = \left(\frac{PA^2}{V}\right)x = kx$$

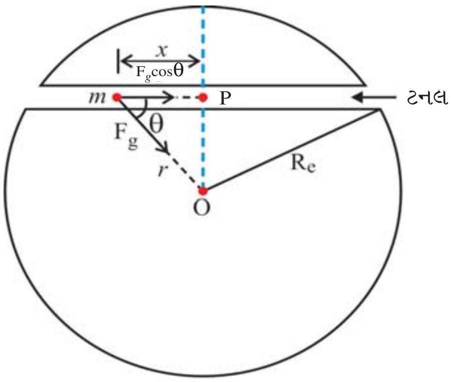
જ્યાં $k = \frac{PA^2}{V}$ = અચળ

આ બળ સ્થાનાંતરની વિરુદ્ધ અને સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં હોવાથી અત્રે બ્લૉક સ.આ.ગ. કરે છે.

હવે આવર્તકાળ, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$\therefore T = 2\pi\left(\frac{mV}{PA^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ઉદાહરણ 9 : આકૃતિ 7.9માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પૃથ્વીમાં કોઈ એક ટનલ (બોગદું) ખોદીને તેમાં પદાર્થને મુક્ત પતન કરાવવામાં આવે છે. સાબિત કરો કે આ પદાર્થ સ.આ.ગ. કરે છે. પૃથ્વીને સમાન ઘનતા ρ ધરાવતો ગોળો ધારો. આ સ.આ.ગ.નો આવર્તકાળ કેટલો હશે ?



આકૃતિ 7.9

ઉકેલ : આકૃતિમાં 7.9માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે આપેલી ટનલમાં m દળનો પદાર્થ, પૃથ્વીના કેન્દ્ર Oથી r જેટલા અંતરે છે. આ વખતે તેના પર ρ ઘનતાવાળા r ત્રિજ્યાના ગોળાના, પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર સંકેન્દ્રિત મનાતા દળના કારણે ગુરુત્વાકર્ષી બળ F_g લાગશે. F_g નો cosine ઘટક પદાર્થની ટનલમાં ગતિ માટે જવાબદાર છે.

$$\therefore F = F_g \cos\theta$$

$$= \frac{Gm\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)}{r^2} \cos\theta \quad (1)$$

જ્યારે પદાર્થ પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r અંતરે છે, ત્યારે ટનલના મધ્યબિંદુ Pથી ધારો કે તેનું અંતર x છે.

$$\therefore \cos\theta = \frac{x}{r} \quad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી

$$F = \left(\frac{4}{3}\pi G\rho m\right)x$$

$\Rightarrow F \propto x$ અને $k = \frac{4}{3}\pi G\rho m$

વળી, આ બળની દિશા મધ્યબિંદુ P તરફ છે.

$\therefore$ પદાર્થ ટનલમાં સ.આ.ગ. કરે છે.

હવે આવર્તકાળ, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m \times 3}{4\pi G\rho m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}$$

7.7 સરળ આવર્તદોલકની કુલ યાંત્રિક-ઊર્જા (Total Mechanical Energy in Simple Harmonic Osallator)

સ.આ.ગ. કરતો કણ બે પ્રકારની ઊર્જા ધરાવે છે :

(i) કણની ગતિ થકી ગતિ-ઊર્જા (Kinetic Enrgy) (KE) અને

(ii) કણના સ્થાન થકી સ્થિતિ-ઊર્જા (Potential Energy) (PE).

વહાલા વિદ્યાર્થીઓ, તમે જાણો છો કે કણની ગતિ-ઊર્જાએ

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

સમીકરણ $v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$ નો

ઉપયોગ કરતાં

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - y^2) \quad (7.7.1)$$

જો કણનું સ્થાનાંતર $y = A\sin(\omega t + \phi)$ હોય તો

$$v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

$$\therefore K = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \phi) \quad (7.7.2)$$

અત્રે પ્રસ્તુત કિસ્સામાં, દોલક પરનું બળ $F = -ky$ (જેને પુનઃસ્થાપક બળ કહે છે). આવા કિસ્સામાં સ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = \frac{1}{2}ky^2 \quad (7.7.3)$$

વડે આપવામાં આવે છે. (જે તમે સિમેસ્ટર I માં ભણ્યા છો.)

$\therefore$ સ.આ.ગ. કરતા કણની સ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) \quad (7.7.4)$$

હવે દોલકની કુલ યાંત્રિક-ઊર્જા (Mechanical Energy)

$$E = K + U$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - y^2) + .\frac{1}{2}m\omega^2y^2 \quad (\because k = m\omega^2)$$

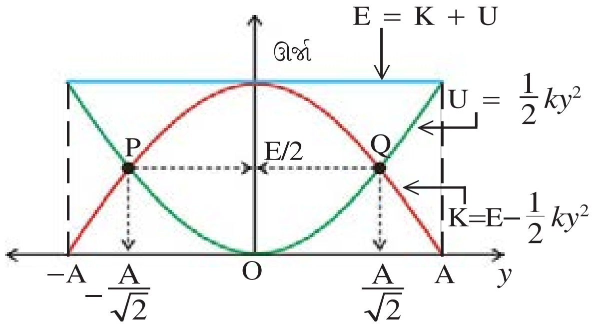
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \quad (7.7.5)$$

અથવા

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (7.7.6)$$

આ સમીકરણો (7.7.5) અને (7.7.6) સૂચવે છે કે રેખીય સરળ આવર્તદોલકની કુલ યાંત્રિક-ઊર્જા અચળ છે. તથા સમય t અને સ્થાનાંતર yથી સ્વતંત્ર છે. $E \alpha A^2$.

આકૃતિ 7.10 સ.આ.દો.ની ગતિ-ઊર્જા, સ્થિતિ-ઊર્જા અને કુલ યાંત્રિક-ઊર્જાના સ્થાનાંતર વિધેય તરીકેના આલેખો દર્શાવે છે. (સમીકરણો (7.7.1), (7.7.3) અને (7.7.6)નો ઉપયોગ કરો.)



સ.આ.દો.ની ઊર્જાઓ વિરુદ્ધ સ્થાનાંતર

આકૃતિ 7.10

આકૃતિ 7.10 પરથી નીચેના મુદ્દાઓ નોંધવા રહ્યા :

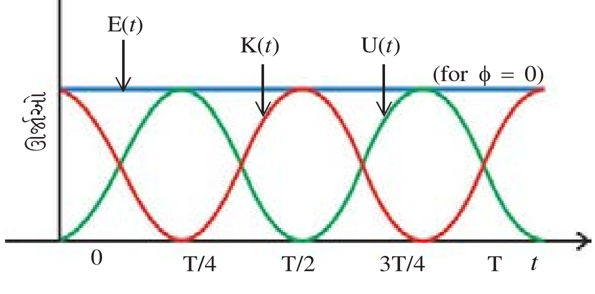
(i) મધ્યમાન સ્થિતિ $y = 0$ એ, સ્થિતિ-ઊર્જા ન્યૂનતમ $(U = 0)$ અને ગતિ-ઊર્જા મહત્તમ $(K = \frac{1}{2}kA^2 = E)$ હોય છે.

(ii) $y = \pm A$ (ગતિપથનાં અંત્યબિંદુઓ) આગળ સ્થિતિ-ઊર્જા મહત્તમ $(U = \frac{1}{2}kA^2 = E)$ અને ગતિ-ઊર્જા ન્યૂન્યતમ $(K = 0)$ છે.

(iii) બિંદુઓ P અને Q કે જ્યાં U અને K ના આલેખો એકબીજાને છેદે છે, ત્યારે $U = K = \frac{1}{2}E$.

(iv) P અને Qના યામો $(\mp \frac{A}{\sqrt{2}}, \frac{E}{2})$.

આકૃતિ 7.11 એ સ.આ.દો.ની ગતિ-ઊર્જા, સ્થિતિ-ઊર્જા અને યાંત્રિક-ઊર્જાના સમયવિધેયના આલેખો બતાવે છે. (સમીકરણો (7.7.2), (7.7.4) અને (7.7.6)નો ઉપયોગ કરો.)



સ.આ.દો.ની ઊર્જાઓ સમયવિધેય તરીકે

આકૃતિ 7.11

આલેખો 7.11 પરથી જોઈ શકાય છે કે દોલક જ્યારે એક દોલન પૂર્ણ કરે છે, ત્યારે K અને U બે દોલનો પૂર્ણ કરે છે. આમ, ગતિ-ઊર્જા અને સ્થિતિ-ઊર્જાની આવૃત્તિ સ.આ.ગ. કરતાં બમણી છે.

ઉદાહરણ 10 : મધ્યમાન સ્થિતિથી ગતિ શરૂ કર્યાની એક સેકન્ડ બાદ 10 kg દળ ધરાવતા એક પદાર્થનો વેગ 6 ms^{-1} છે. જો સ.આ.દો.નો આવર્તકાળ 6 s હોય તો સ.આ.દો.ની ગતિ-ઊર્જા, સ્થિતિ-ઊર્જા અને કુલ યાંત્રિક-ઊર્જા શોધો.

ઉકેલ :

અહીં, $m = 10$ kg,

$v = 6\ ms^{-1}$,

$T = 6$ s.

હવે $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 36 = 180$ J

$$v = \omega A \cos \omega t = \omega A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$6 = A\omega \cos\left(\frac{2\pi}{6} \times 1\right)$$

$$= A\omega/2$$

$$\therefore A\omega = 12.$$

હવે $E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 144$$

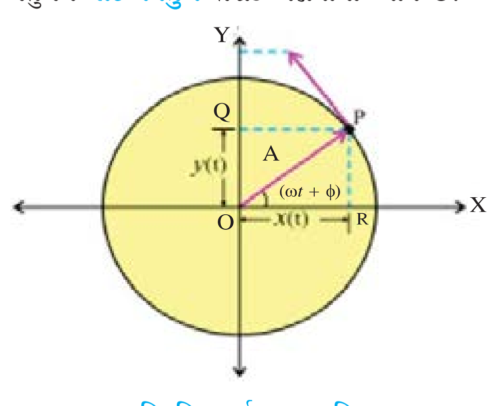
$$E = 720 \text{ J}$$

$$\therefore U = E - K = 720 - 180$$

$$\therefore U = 540 \text{ J.}$$

7.8 સરળ આવર્તગતિ અને નિયમિત વર્તુળમય ગતિ (Simple Harmonic Motion and Uniform Circular Motion)

O કેન્દ્ર અને A ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર માર્ગ પર ω જેટલી અચળ કોણીય ઝડપથી વિષમઘડી દિશામાં ગતિ કરતો એક કણ P લો (જુઓ આકૃતિ 7.12). અહીં કણને **સંદર્ભકણ** અને વર્તુળને **સંદર્ભવર્તુળ** તરીકે વર્ણવામાં આવે છે.



નિયમિત વર્તુળમય ગતિ

આકૃતિ 7.12

સંદર્ભરેખા OXની સાપેક્ષે t સમયે કણનું કોણીય સ્થાન $(\omega t + \phi)$ જ્યાં ϕ એ પ્રારંભિક કળા છે. Q એ Pનો Y-અક્ષ પરનો પ્રક્ષેપ છે, જે t સમયે સ્થાનસદિશ OPનો પ્રક્ષેપ = OQ = $y(t)$ આપે છે.

આકૃતિ 7.12ની ભૂમિતિ પરથી,

$$\sin(\omega t + \phi) = \frac{OQ}{OP}$$

$$\therefore\ y(t) = A \sin(\omega t + \phi) \qquad (7.8.1)$$

આ સમીકરણ (7.8.1) એ Y-અક્ષ પર સ.આ.ગ. કરતાં કણનું સ્થાનાંતર બતાવે છે.

જો OPનો પ્રક્ષેપ X-અક્ષ પર OR તરીકે લેવામાં આવે, તો

$$\cos(\omega t + \phi) = \frac{OR}{OP}$$

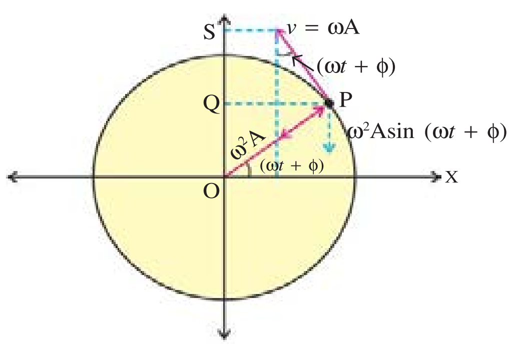
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \qquad (7.8.2)$$

આ સમીકરણ (7.8.2) એ X-અક્ષ પર સ.આ.ગ. કરતાં કણનું સ્થાનાંતર બતાવે છે.

આમ આપણે તારવી શકીએ કે,

સરળ આવર્તગતિ એ નિયમિત વર્તુળમય ગતિની, સંદર્ભવર્તુળના વ્યાસ પરના પ્રક્ષેપની ગતિ છે.

હવે A જેટલી ત્રિજ્યાના વર્તુળ પર ω જેટલી કોણીય ઝડપથી ગતિ કરતા સંદર્ભકણ Pની ગતિ $\vec{v}$નું મૂલ્ય $v = \omega A$ છે. t સમયે vનો Y-અક્ષ પરનો પ્રક્ષેપ આકૃતિ 7.13માં બતાવેલ છે.



નિયમિત વર્તુળમય ગતિનો વેગ અને પ્રવેગ

આકૃતિ 7.13

આકૃતિ 7.13 ની ભૂમિતિ પરથી,

$$\cos(\omega t + \phi) = \frac{SQ}{\omega A}$$

$$\therefore\ v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi) \qquad (7.8.3)$$

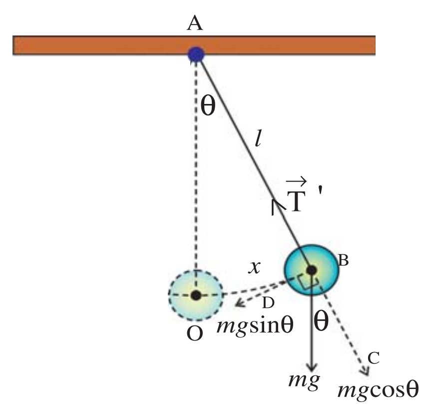
જ્યારે દોલક ધન y-દિશામાં ગતિ કરતો હોય ત્યારે v ધન હોય છે અને ઋણ y-દિશા તરફ ગતિ કરતો હોય તો v ઋણ હોય છે.

આ જ રીતે સંદર્ભકણનો કેન્દ્રગામી પ્રવેગ $\omega^2 A$નો y-દિશામાંનો ઘટક $\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$ છે.

7.9 સાદું લોલક (Simple Pendulum)

કોઈ એક સ્થિર (દૃઢ) આધાર પરથી વજનરહિત અને ખેંચી ન શકાય તેવી વળરહિત દોરી વડે લટકતી નાની દળદાર વસ્તુથી બનતી રચનાને સાદું લોલક કહે છે.

આકૃતિ 7.14ને ધ્યાનમાં લો. સાદા લોલકના સમગ્ર દળને લટકાવેલા ગોળાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર એકત્રિત થયેલ ગણવામાં આવે છે. આધારબિંદુથી ગોળાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સુધીનું અંતર તે સાદા લોલકની (અસરકારક) લંબાઈ (l) છે.



સાદું લોલક

આકૃતિ 7.14

હવે વિચારો કે લોલકના ગોળાને તેના સમતુલન-સ્થાન Oમાંથી θ જેટલું નાનું કોણીય સ્થાનાંતર આપી બિંદુ B આગળથી મુક્ત કરતાં તે એ ઊર્ધ્વ સમતલમાં દોલનો કરે છે. m દળ ધરાવતા આ ગોળા પર લાગતાં બળો નીચે મુજબ થશે :

(1) નિમ્ન દિશામાં લાગતું ગોળાનું વજન (= mg)

(2) $\overrightarrow{BA}$ દિશામાં દોરીમાં લાગતું તણાવ $\vec{T}'$.

બળ mgના ઘટકો :

(i) mg $\cos\theta$ એ $\overrightarrow{BC}$ તરફ લાગશે અને

(ii) mg $\sin\theta$ એ $\overrightarrow{BD}$ તરફ લાગશે.

દોરી ખેંચાયેલી રહે છે તેથી,

$$T' = mg\cos\theta \qquad (7.9.1)$$

બળનો બીજો ઘટક mg sinθ એ ગોળાને તેની સમતોલન સ્થિતિ Oમાં પાછો લાવે છે. આથી ગોળા પર લાગતું આ પુનઃ સ્થાપક બળ છે.

$$F = -mg \sin\theta. \tag{7.9.2}$$

જો ગોળાનું કોણીય સ્થાનાંતર θ નાનું હોય, તો

$$F = -mg\theta \quad (\text{જેમ } \theta \to 0, \sin\theta \approx \theta)$$

$$= -mg\frac{\text{ચાપ OB}}{l}$$

$$= -mg\frac{x}{l} \quad (\because \text{ ચાપ OB} = x)$$

$$\therefore F = -\left(\frac{mg}{l}\right)x \tag{7.9.3}$$

પણ m, g અને l અચળ છે.

$$F = -kx$$

$$\text{જ્યાં, } k = \frac{mg}{l} \tag{7.9.4}$$

સમીકરણ (7.9.4) એ સાદા લોલકનો બળ અચળાંક આપે છે.

હવે સાદા લોલકનો આવર્તકાળ,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}}$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7.9.5}$$

દોલકની આવૃત્તિ

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{7.9.6}$$

અને કોણીય આવૃત્તિ

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{7.9.7}$$

વહાલા વિદ્યાર્થીઓ, એ યાદ રાખો કે નાના ખૂણા θ માટે સાદા લોલકનો આવર્તકાળ

(i) ગોળાના દળથી સ્વતંત્ર છે.

(ii) દોલકના કંપવિસ્તારથી સ્વતંત્ર છે.

(iii) તે લોલકની લંબાઈ પર આધાર રાખે છે. $T \propto \sqrt{l}$ અને

(iv) તે ગુરુત્વીય પ્રવેગ પર આધારિત છે. $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$.

સમીકરણ (7.9.5) પરથી આકૃતિ 7.15 મુજબના આલેખો દોરી શકાય .

વહાલા વિદ્યાર્થીઓ, નીચેના મુદ્દાઓ નોંધો :

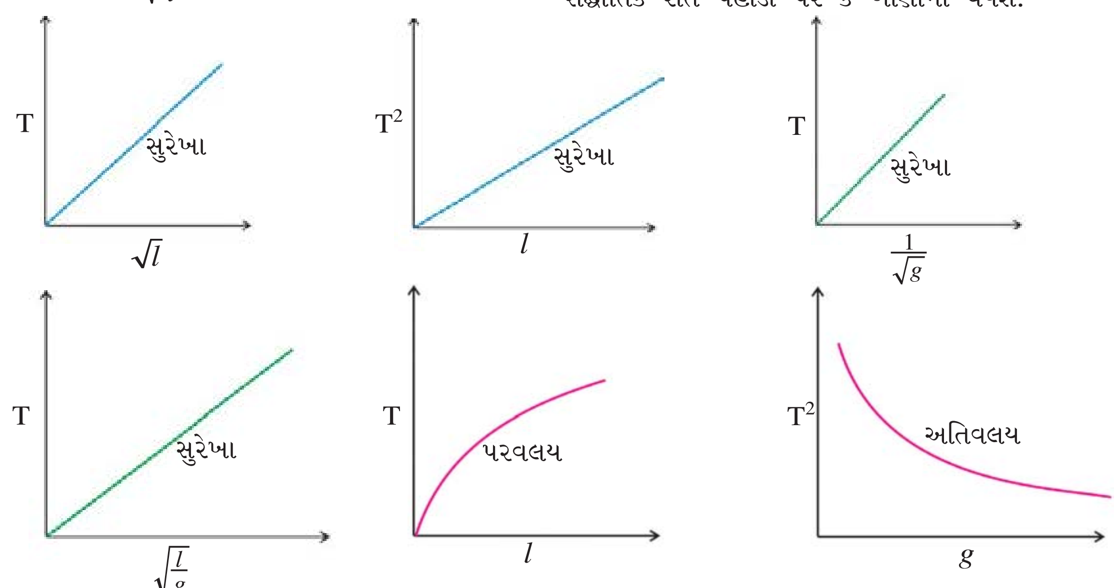
(i) $T \propto \sqrt{l}$ એનો અર્થ એવો નથી કે જેમ $l \to \infty$, $T \to \infty$.

આ સંબંધ $l \geq$ પૃથ્વીની ત્રિજ્યા માટે લાગું પડતું નથી.

(ii) સુતરાઉ દોરીની જગ્યાએ જો ગોળો ધાતુના તાર વડે લટકાવેલ હોય તો લોલકની લંબાઈ તાપમાનના વધવાથી વધશે અને તાપમાન ઘટવાથી ઘટશે.

આનો અર્થ એમ કે સાદા લોલકનો આવર્તકાળ વધે કે ઘટે તેનો આધાર તાપમાન વધશે કે ઘટશે તેના પર છે. આ જ કારણથી લોલક ઘડિયાળ શિયાળામાં ઝડપી અને ઉનાળામાં ધીમી પડે છે.

(iii) પૃથ્વીની સપાટી કરતાં પહાડો ઉપર કે ખાણોમાં g નું મૂલ્ય ઓછું હોય છે. આથી સાદા લોલકનો આવર્તકાળ સૈદ્ધાંતિક રીતે પહાડો પર કે ખાણોમાં વધશે.



સાદા લોલક માટે $T - \sqrt{l}$, $T^2 - l$, $T - \frac{1}{\sqrt{g}}$, $T - \sqrt{\frac{l}{g}}$, $T - l$ અને $T^2 - g$ના આલેખો

આકૃતિ 7.15

(A) લિફ્ટમાં સાદું લોલક :

જો a જેટલા પ્રવેગથી ગતિ કરતી લિફ્ટમાં સાદું લોલક દોલન કરતું હોય, તો તેના પર લાગતું અસરકારક g એ,

$g_{eff} = g \pm a$

'+' નિશાની લિફ્ટ ઉપર જતી હોય ત્યારે અને

'–' નિશાની લિફ્ટ નીચે આવતી હોય ત્યારે લેવામાં આવે છે.

આથી સાદા લોલકનો આવર્તકાળ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm a}}.$$

હવે, ધારો કે લિફ્ટ મુક્તપતન કરે છે.

$\therefore a = g$

અને $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g - g}} = \infty.$

એટલે કે લોલક દોલન નહીં કરે.

(B) ટ્રેનના ડબામાં સાદું લોલક :

a જેટલા પ્રવેગ કે પ્રતિપ્રવેગની ગતિ કરતાં ટ્રેનના ડબામાં જો સાદું લોલક દોલન કરતું હોય, તો gનું અસરકારક મૂલ્ય

$$g_{eff} = \sqrt{g^2 + a^2}$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{(g^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}}.$$

(C) સેકન્ડ લોલક :

જે લોલકનો આવર્તકાળ બે સેકન્ડ હોય છે તેવા લોલકને સેકન્ડ લોલક કહે છે. આવું લોલક તેના દોલન દરમિયાન એક અંતિમ સ્થાનેથી બીજા અંતિમ સ્થાન સુધી જતાં એક સેકન્ડ જેટલો સમય લે છે. તે સમતોલન સ્થિતિ આગળથી દર સેકન્ડે પસાર થાય છે.

ઉદાહરણ 10 : એક સેકન્ડ લોલકની લંબાઈ જો બમણી કરવામાં આવે, તો તેનો આવર્તકાળ શું થશે ?

ઉકેલ :

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \text{ s}$$

$$\therefore T' = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$= \sqrt{2} \times 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$= \sqrt{2} \times 2$$

$$T' = 2.828 \text{ s.}$$

ઉદાહરણ 11 : પૃથ્વીની સપાટી પર એક સેકન્ડ લોલકની લંબાઈ l_1 છે અને પૃથ્વીની સપાટીથી 'h' જેટલી ઊંચાઈએ સેકન્ડ લોલકની લંબાઈ l_2 છે, તો સાબિત કરો કે પૃથ્વીની ત્રિજ્યા $R_e = \dfrac{h\sqrt{l_2}}{\sqrt{l_1} - \sqrt{l_2}}$ છે.

ઉકેલ :

સેકન્ડ લોલકનો આવર્તકાળ 2 s હોય છે.

સેકન્ડ લોલક માટે પૃથ્વીની સપાટી પર, $2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g_1}}$,

જ્યાં, g_1 = પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગ.

સેકન્ડ લોલક માટે, પૃથ્વીની સપાટીથી 'h' ઊંચાઈ પર,

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g_2}},$$

જ્યાં, g_2 = પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ

$$\therefore \frac{l_1}{g_1} = \frac{l_2}{g_2} \Rightarrow \frac{g_2}{g_1} = \frac{l_2}{l_1} \quad (1)$$

પરંતુ, ગુરુત્વપ્રવેગ $g = \dfrac{GM_e}{r^2}$ - - - - - (A)

જ્યાં, r = પૃથ્વીના કેન્દ્રથી જે-તે સ્થાનનું અંતર

હવે $r_1 = R_e$ = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા,

$r_2 = R_e + h$

સમીકરણ (A) પરથી,

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{R_e^{\ 2}}{(R_e + h)^2} \quad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$\sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = \frac{R_e}{R_e + h}$$

$$\sqrt{l_2}\, R_e + \sqrt{l_2}\, h = \sqrt{l_1}\, R_e$$

$$(\sqrt{l_1} - \sqrt{l_2})R_e = \sqrt{l_2}\, h$$

$$\therefore R_e = \frac{h\sqrt{l_2}}{\sqrt{l_1} - \sqrt{l_2}}.$$

7.10 અવમંદિત સરળ આવર્તગતિ (Damped Simple Harmonic Motion)

સરળ આવર્તગતિ એ અતિ આદર્શ પરિસ્થિતિ વર્ણવે છે. યાંત્રિક તંત્ર પર જ્યારે કોઈ અવરોધક બળ કે ઘર્ષણબળ લાગતું ન હોય, ત્યારે જ સ.આ.ગ. કરે છે.

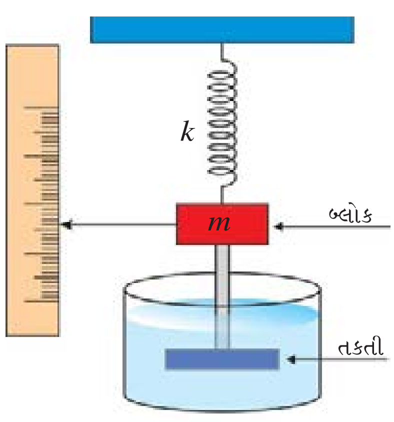
વ્યવહારમાં કોઈ પણ યાંત્રિક પ્રણાલી અવરોધ પેદા કરતાં માધ્યમમાં જ દોલનો કરે છે. તદુપરાંત યાંત્રિક પ્રણાલીમાં આંતરિક ઘર્ષણબળો પણ હોય છે. અવરોધક બળની વિરુદ્ધમાં દોલન કરતાં તંત્રને કાર્ય કરવું પડતું હોવાથી તેની યાંત્રિક-ઊર્જા એ ઊષ્મા-ઊર્જા સ્વરૂપે ઊર્જા મુક્ત કરે છે.

સ.આ.ગ.ની યાંત્રિક-ઊર્જા સમીકરણ $E = \frac{1}{2}kA^2$ એ દર્શાવે છે કે જેમ યાંત્રિક-ઊર્જા ઘટશે, તેમ તેનો કંપવિસ્તાર પણ ઘટશે. આમ, અંતે ગતિ બંધ પડશે.

આમ, જ્યારે **સરળ આવર્ત તંત્ર સમય સાથે ઘટતાં કંપવિસ્તારથી દોલન કરે, તો આવા દોલનોને અવમંદિત દોલનો કહે છે.**

હવામાં દોલન કરતું સાદું લોલક હવાનું અવરોધક બળ અનુભવે છે. જ્યારે સ્વરકાંટો દોલન કરે છે ત્યારે તેની ધાતુમાં આંતરિક ઘર્ષણબળ લાગતું હોય છે.

આકૃતિ 7.16માં બતાવ્યા પ્રમાણે k સ્પ્રિંગ-અચળાંકવાળી સ્પ્રિંગ સાથે m દળવાળો બ્લૉક ઊર્ધ્વતલમાં દોલન કરે છે. બ્લૉકના નીચેના છેડે એક સળિયા સાથે એક તકતી લગાડી તેને વાસણમાં ભરેલ પ્રવાહીમાં ડુબાડો. જ્યારે તકતી ઉપર નીચે ગતિ કરે છે, ત્યારે પ્રવાહી દોલન કરતા સમગ્ર તંત્ર પર અવરોધક બળ લગાડશે. આથી દોલન કરતા તંત્રની યાંત્રિક ઊર્જા ઘટશે.



અવમંદિત સરળ આવર્તદોલક

આકૃતિ 7.16

પ્રાયોગિક અભ્યાસો દર્શાવે છે કે, તરલ માધ્યમોમાં લાગતું અવરોધક બળ દોલકના વેગ પર આધારિત છે.

આથી દોલક પર લાગતું અવરોધક બળ કે અવમંદિત બળ એ (બહુ મોટો વેગ ન હોય ત્યારે)

$F_d \propto v$

$$\therefore F_d = -bv \qquad (7.10.1)$$

અહીં b એ **અવમંદન અચળાંક** છે અને તેનો SI એકમ kg / second છે. અહીં ઋણ નિશાની દર્શાવે છે કે બળ F_d એ ગતિને વિરોધે છે.

આમ, અવમંદિત દોલક બે પ્રકારનાં બળોની અસર નીચે દોલનો કરશે :

(i) પુનઃસ્થાપક બળ $F_y = -ky$ અને

(ii) અવરોધક બળ $F_d = -bv$

$\therefore$ કુલ બળ $F = F_y + F_d$

ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ અનુસાર,

$ma = -ky - bv$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0 \qquad (7.10.2)$$

આ અવમંદિત દોલનો માટેનું દ્વિતીય ક્રમનું વિકલ સમીકરણ છે અને તેનો ઉકેલ છે,

$$y(t) = A\, e^{-bt/2m} \sin(\omega' t + \phi) \qquad (7.10.3)$$

અથવા

$$y(t) = A(t) \sin(\omega' t + \phi). \qquad (7.10.4)$$

અહીં $A(t) = A\, e^{-bt/2m}$ એ અવમંદિત દોલનનો t સમયે કંપ વિસ્તાર છે. જે સમય સાથે ચરઘાતાંકીય રીતે ઘટતો જાય છે.

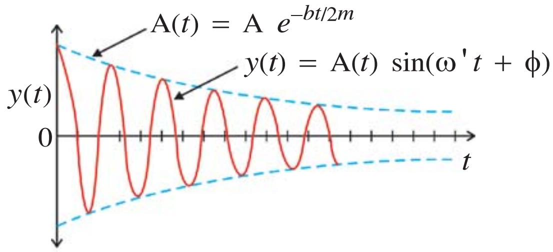
અવમંદિત દોલકની કોણીય આવૃત્તિ

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (7.10.5)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

જો $b = 0$, $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m}}$ એ આદર્શ સ.આ.ગ. દર્શાવે છે.

અવમંદિત દોલકના સ્થાનાંતર $y(t) - t$નો આલેખ આકૃતિ 7.17માં બતાવ્યો છે.



અવમંદિત દોલકનો સ્થાનાંતર-સમયનો આલેખ ($\phi = \frac{\pi}{2}$ માટે)

આકૃતિ 7.17

આપણે જાણીએ છીએ કે દોલકની યાંત્રિક-ઊર્જા

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\therefore\ E(t) = \frac{1}{2}kA^2(t)$$

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2\ e^{-bt/m} \qquad (7.10.6)$$

સમીકરણ (7.10.6) પરથી એ પણ સ્પષ્ટ છે કે અવમંદિત દોલકની યાંત્રિક-ઊર્જા પણ સમય સાથે ચરઘાતાંકીય રીતે ઘટતી જાય છે. સમીકરણ (7.10.6) એ નાના અવમંદન, $b << \sqrt{km}$ માટે જ સાચું છે.

ઉદાહરણ 12 : સાદા લોલકમાં દોરીના છેડે પિત્તળનો નાનો ગોળો લટકાવી તેનાં હવામાં સરળ આવર્તદોલનો મેળવીએ, તો તેનો આવર્તકાળ T મળે છે. હવે આ પિત્તળના ગોળાને પ્રવાહીમાં ડૂબે તેમ રાખીને તેનાં સરળ આવર્તદોલનો મેળવીએ, તો નવો આવર્તકાળ $\sqrt{2}$ T મળે છે, તેમ સાબિત કરો. પ્રવાહીની ઘનતા પિત્તળની ઘનતા કરતાં 1/2 ભાગની છે. અહીં દરેક પ્રકારનું અવરોધકતાબળ અવગણો.

ઉકેલ :

ગોળો પ્રવાહીમાં ડૂબેલો હોય ત્યારે તેની પર લાગતું ઉત્પ્લાવક બળ $= m_0g$; જ્યાં, m_0 ગોળાએ ખસેડેલ પ્રવાહીનું દળ.

જો ગોળાનું હવામાં વજન mg હોય, તો

પ્રવાહીમાં તેનું અસરકારક વજન $= mg - m_0g$

અહીં, $m_0 = V\rho_0 = \dfrac{V\rho}{2} = \dfrac{m}{2}$;

જ્યાં V = ગોળાનું કદ = ગોળાએ ખસેડેલ પ્રવાહીનું કદ. ρ_0 = પ્રવાહીની ઘનતા અને ρ = પિત્તળની ઘનતા.

$\therefore$ પ્રવાહીમાં ગોળાનું અસરકારક વજન $= mg - \dfrac{mg}{2}$

$$= \frac{1}{2}mg.$$

$\therefore$ પ્રવાહીમાં અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ $= g' = \dfrac{1}{2}g.$

હવે, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ પરથી $T\ \alpha\ \sqrt{\dfrac{1}{g}}$.

$$\therefore\ \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{2g}{g}}$$

$$\therefore\ T' = \sqrt{2}\,T.$$

ઉદાહરણ 13 : અવમંદિત દોલનોમાં કંપવિસ્તાર $\dfrac{A}{2^n}$ થતાં લાગતા સમયની ગણતરી કરો.

જ્યાં, A એ મૂળ કંપવિસ્તાર છે.

ઉકેલ : $A(t) = Ae^{-bt/2m}$

પણ, $A(t) = \dfrac{A}{2^n}$

$$\therefore\ \frac{A}{2^n} = Ae^{-bt/2m}$$

$\therefore$ બંને બાજુ eના બેઇઝ પર log લેતાં,

$$\therefore\ \frac{bt}{2m} = n\ ln2$$

(Natural log ને ln વડે લખાય છે.)

$$\therefore\ t = \frac{2mn}{b}(2.303)\ \log_{10}(2)$$

$(\because\ ln\ x = 2.303\ \log_{10}x)$

$$= \frac{2mn}{b}(2.303)(0.3010)$$

$$\therefore\ t = \frac{2mn}{b}(0.693).$$

7.11 પ્રાકૃતિક દોલનો, પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનો અને અનુનાદ (Natural Oscillations, Forced Oscillations and Resonance)

દોલન કરી શકે તેવા તંત્રને જ્યારે તેની સમતોલન-સ્થિતિથી થોડુંક પ્રારંભિક સ્થાનાંતર આપી છોડતાં તે દોલનો શરૂ કરશે. આમ, કોઈ પણ પ્રકારના અવરોધક બળની ગેરહાજરીમાં થતાં દોલનોને **પ્રાકૃતિક દોલનો** કહે છે. પ્રાકૃતિક દોલનોની આવૃત્તિને તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ f_0 કહે છે. ઉહરણ તરીકે સાદા લોલકના ગોળાને સહેજ ચલિત કરીને મુક્ત કરતાં તે $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ જેટલી પ્રાકૃતિક આવૃતિ

સાથે પ્રાકૃતિક દોલનો કરે છે. (અહીં, હવાના અવરોધક બળને અવગણેલ છે.)

વહાલા વિદ્યાર્થીઓ, તમે હીંચકામાં હીંચકા ખાવાનો આનંદ માણ્યો જ હશે. તમે એ પણ અનુભવ્યું હશે કે જો તમારે અવિરત ઝૂલવું હોય, તો તમારે તમારા પગ વડે જમીનને વારે વારે ધક્કા મારવા પડે અથવા કોઈએ તમને વારેવારે ધક્કો મારવો પડે (આકૃતિ 7.18). આમ, બાહ્ય આવર્તબળની શરતને આધીન હીંચકો અવિરત ઝૂલતો રહેશે.

હીંચકા ખાતું બાળક

આકૃતિ 7.18

મોટા ભાગના કિસ્સામાં અવમંદિત બળો હાજર જ હોય છે અને આખરે સમય સાથે દોલનો બંધ પડે છે. આથી દોલનો ચાલુ રાખવા બાહ્ય આવર્ત બળો જરૂરી છે.

આમ, **જ્યારે તંત્ર બાહ્ય આવર્ત બળની મદદથી દોલનો કરે, તો તેને પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનો કહે છે.**

તંત્રને દોલિત કરી શકે તેવું તંત્ર પર લાગતું કોઈ એક બાહ્ય આવર્તબળ F = $F_0 \sin\omega t$ લો.

આથી સમીકરણ (7.10.2) ને નીચેના સ્વરૂપે લખી શકાય.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt} + F_0 \sin\omega t$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{ky}{m} = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \qquad (7.11.1)$$

આ પ્રણોદિત દોલનો માટેનું દ્વિતીય ક્રમનું વિકલ સમીકરણ છે. સમીકરણ (7.11.1) નો ઉકેલ નીચે મુજબ આપી શકાય છે.

$$y = A \sin(\omega t + \phi)$$

અહીં, A અને ϕ એ ઉકેલના અચળાંકો છે, જે નીચે મુજબ મળે છે.

$$A = \frac{F_0}{[m^2({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad (7.11.2)$$

અને $\phi = \tan^{-1}\frac{\omega y_0}{v_0}$. (7.11.3)

અહીં m એ દોલકનું દળ, v_0 અને y_0 એ જ્યારે આવર્તબળ લગાડવામાં આવે, ત્યારે તેનો ક્રમિક વેગ અને સ્થાનાંતર છે.

પ્રારંભમાં દોલક પોતાની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિથી દોલનો કરે છે. જ્યારે આપણે બાહ્ય આવર્તબળ લગાડીએ, ત્યારે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ સાથેનાં દોલનો નાશ પામશે અને પદાર્થ બાહ્ય આવર્તબળની આવૃત્તિ સાથે દોલનો કરશે.

સમીકરણ (7.11.2) પરથી જોઈ શકાય છે કે પ્રણોદિત દોલનોનો કંપવિસ્તાર (i) $({\omega_0}^2 - \omega^2)$ તફાવત અને (ii) અવરોધક-ગુણાંક (અવમંદિત અચળાંક)ના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે.

નાના અવરોધક-ગુણાંક માટે $b\omega << m({\omega_0}^2 - \omega^2)$ આથી સમીકરણ (7.11.2)ને નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$A = \frac{F_0}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)}. \qquad (7.11.4)$$

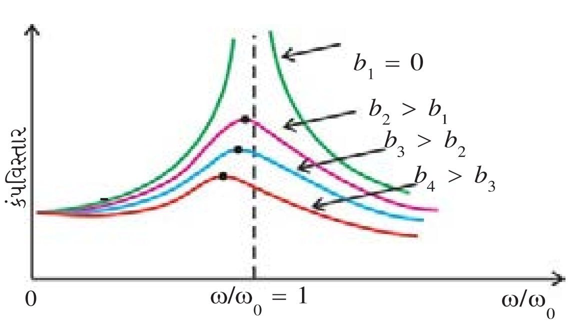
$\omega \approx \omega_0$ માટે

$m({\omega_0}^2 - \omega^2) << b\omega$, આથી

$$A = \frac{F_0}{b\omega}. \qquad (7.11.5)$$

જેમ ωનું મૂલ્ય ω_0 તરફ જાય છે તેમ કંપવિસ્તાર વધતો જાય છે અને ωના કોઈ લાક્ષણિક મૂલ્ય માટે કંપવિસ્તાર મહત્તમ થાય છે. આ ઘટનાને **અનુનાદ** કહે છે. ω ના જે મૂલ્ય માટે અનુનાદ ઉદ્ભવે છે તે મૂલ્યને **અનુનાદીય કોણીય આવૃત્તિ** કહે છે.

અવરોધક ગુણાંક b ના વિવિધ મૂલ્યો માટે કંપવિસ્તાર-ω/ω_0 નો આલેખો આકૃતિ 7.19માં બતાવેલ છે.



અનુનાદ-વક્રો

આકૃતિ 7.19

જો $b = 0$ હોય તો $\omega = \omega_0$ માટે કંપવિસ્તાર અનંત થાય છે. જેમ અવમંદન વધે છે તેમ આલેખમાં કંપવિસ્તારનું મહત્તમ મૂલ્ય ડાબી તરફ ખસે છે.

વ્યવહારમાં એવાં યાંત્રિક તંત્રો મળે છે કે જેનાં દોલનોની એક કરતાં વધારે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ હોય છે. જો તંત્ર પર લાગતાં બાહ્ય આવર્તબળની આવૃત્તિ તે તંત્રની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ જેટલી (અથવા લગભગ સમાન) થાય ત્યારે તંત્ર અતિ મોટા કંપવિસ્તાર સાથે દોલનો કરે છે અને તંત્ર તૂટી કે ફસકાઈ પણ પડે.

આથી ઝૂલતા પુલ પર જતાં સૈનિકોને માર્ચિંગ ન કરવાની સલાહ આપવામાં આવે છે. વળી, પુલ-ડિઝાઇન કરતી વખતે, ત્યાંથી વહેતા પવનને કારણે લાગતા બાહ્ય બળની આવૃત્તિ અને પુલનાં દોલનોની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિનાં મૂલ્યો સરખાં કે લગભગ સરખાં ન થાય તેની કાળજી લેવામાં આવે છે. કેટલીક વખત એવું પણ જોવામાં આવ્યું છે કે ધરતીકંપ વખતે ઓછી ઊંચાઈ અને મોટી ઊંચાઈવાળા બાંધકામ (structure)ને ઓછું નુકસાન થાય છે, જ્યારે મધ્યમ ઊંચાઈવાળાં બાંધકામો નીચે પડી જાય છે. કારણ કે સેસ્મિક તરંગોની આવૃત્તિ કરતાં ઓછી ઊંચાઈવાળા બાંધકામની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ વધુ હોય છે અને વધુ ઊંચાઈવાળાં બાંધકામની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ ઓછી હોય છે.

સારાંશ

1. જો કોઈ પદાર્થ કોઈ નિશ્ચિત પથ પર, કોઈ નિશ્ચિતબિંદુને અનુલક્ષીને, નિયત સમયગાળે પોતાની ગતિનું પુનરાવર્તન કરતો હોય, તો આવી ગતિને આવર્તગતિ કહે છે.

2. જો કોઈ પદાર્થ કોઈ નિયતબિંદુની આસપાસ, આગળ-પાછળ કે ઉપર નીચે નિયત સમયમાં ગતિ કરતો હોય, તો આવી ગતિને દોલિત ગતિ કહે છે.

3. જ્યારે કોઈ પદાર્થ નિયતબિંદુથી સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં અને નિયતબિંદુ તરફ લાગતા બળની અસર નીચે, નિયતબિંદુની આસપાસ સુરેખ પથ પર આવર્તગતિ કરતો હોય, તો તેવી ગતિને સરળ આવર્તગતિ કહે છે.

4. મધ્યમાન સ્થાનથી કોઈ એક તરફના દોલકના અધિકતમ સ્થાનાંતરને તે દોલકનો કંપવિસ્તાર કહે છે.

5. એક દોલન પૂર્ણ કરવા માટે દોલકે લીધેલ સમયને તે દોલકનો આવર્તકાળ (T) કહે છે.

6. એક સેકન્ડમાં પૂર્ણ થતાં દોલનોની સંખ્યાને તે સરળ આવર્ત દોલકની આવૃત્તિ (f) કહે છે.

7. દોલકની આવૃત્તિના 2π ગણાને તે દોલકની કોણીય આવૃત્તિ (ω) કહે છે.

8. $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ કે $f = \frac{1}{T}$ કે $\omega = \frac{2\pi}{T}$

9. સરળ આવર્તગતિ માટે, મધ્યમાન સ્થિતિથી કણનું સ્થાનાંતર $y(t)$ને sine, cosine અથવા તેના રેખીય સંયોજનથી દર્શાવવામાં આવે છે. જેમકે,

$y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$,

$y(t) = B \cos(\omega t + \phi)$,

$y(t) = A' \sin\omega t + B' \cos\omega t$

જ્યાં, $A' = A\cos\phi$ અને $B' = B\sin\phi$ છે.

10. સ.આ.દો.નો વેગ $v = \pm\, \omega \sqrt{A^2 - y^2}$ વડે આપવામાં આવે છે.

11. સ.આ.દોનો પ્રવેગ $a = -\omega^2 y$ વડે આપવામાં આવે છે.

12. હુકના નિયમની અસર હેઠળ દોલન કરતાં m દળવાળો કણ સરળ આવર્તગતિ કરે છે તથા

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

13. $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$ એ સ.આ.ગ. માટેનું વિકલ સમીકરણ છે.

14. $k_1, k_2, k_3 \ldots\ldots k_n$ સ્પ્રિંગ-અચળાંકો ધરાવતી n સ્પ્રિંગોનાં શ્રેણીજોડાણનો સમતુલ્ય સ્પ્રિંગ-અચળાંક k હોય તો, $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{k_n}$ અને આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ છે.

15. $k_1, k_2, k_3 \ldots\ldots k_n$ સ્પ્રિંગ-અચળાંકો ધરાવતી n સ્પ્રિંગોના સમાંતર જોડાણનો સમતુલ્ય સ્પ્રિંગ-અચળાંક $k = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots\ldots + k_n$ અને આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ છે.

16. $K = \frac{1}{2}m\omega^2 (A^2 - y^2)$ એ સ.આ.દો.ની ગતિ-ઊર્જા છે.

17. $U = \frac{1}{2}ky^2$ એ સ.આ.દો.ની સ્થિતિ-ઊર્જા છે.

18. $E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$ એ સ.આ.દો.ની કુલ યાંત્રિક-ઊર્જા છે.

19. સ.આ.દો. માટે, $y = 0$ એ, સ્થિતિ-ઊર્જા ન્યૂનતમ $(U = 0)$ અને ગતિ-ઊર્જા મહત્તમ $(K = \frac{1}{2}kA^2 = E)$ હોય છે.

20. સ.આ.દો. માટે, $y = \pm A$એ, સ્થિતિ-ઊર્જા મહત્તમ $(U = \frac{1}{2}kA^2 = E)$ અને ગતિ-ઊર્જા ન્યૂનત્તમ $(K = 0)$ છે.

21. સરળ આવર્તગતિ એ નિયમિત વર્તુળમય ગતિની, સંદર્ભ વર્તુળના વ્યાસ પરના પ્રક્ષેપની ગતિ છે.

22. સાદા લોલક માટે, નાના કોણીય સ્થાનાંતર માટે

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{અને} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

23. સાદા લોલકનો આવર્તકાળ T એ ગોળાના દળ તેમજ દોલનના કંપવિસ્તારથી સ્વતંત્ર છે.

24. સરળ આવર્તતંત્ર સમય સાથે ઘટતાં કંપવિસ્તારથી દોલન કરે, તો આવાં દોલનોને અવમંદિત દોલનો કહે છે.

$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0$. એ અવમંદિત દોલનો માટેનું વિકલ સમીકરણ છે,

જ્યાં સ્થાનાંતર $y(t) = Ae^{-bt/2m}\sin(\omega' t + \phi)$ અને કોણીય આવૃત્તિ $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ છે.

25. $E(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{\frac{-bt}{m}}$ એ અવમંદિત દોલનની t-સમયની યાંત્રિક-ઊર્જા આપે છે.

26. જ્યારે તંત્ર બાહ્ય આવર્ત બળની મદદથી દોલનો કરે, તો તેને પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનો કહે છે.

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$ એ પ્રણોદિત દોલનો માટેનું વિકલ સમીકરણ છે.

$A = \frac{F_0}{[m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}}$ એ પ્રણોદિત દોલનનો કંપવિસ્તાર છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. સ.આ.ગ.માં કણનો પ્રવેગ શૂન્ય થાય જ્યારે કે તેની,
(A) ગતિ શૂન્ય હોય.
(B) સ્થાનાંતર શૂન્ય હોય.
(C) ગતિ અને સ્થાનાંતર બંને શૂન્ય હોય.
(D) ગતિ અને સ્થાનાંતર બંને મહત્તમ હોય.

2. સ.આ.ગ. કરતાં પદાર્થનું મહત્તમ પ્રવેગ a_{max} અને મહત્તમ વેગ v_{max} છે, તો તેનો કંપવિસ્તાર
(A) $v^2_{max} / a_{max.}$ (B) $a^2_{max} / v_{max.}$
(C) $v^2_{max} / a^2_{max.}$ (D) $v_{max} / a_{max.}$

3. નીચેનામાંથી ગતિ એ સરળ આવર્ત બને તે માટેની આવશ્યક શરત કઈ છે ?
(A) અચળ બળ
(B) બળ ચલે છે સ્થાનાંતરને
(C) સ્થાનાંતરની વિરુદ્ધ બળ
(D) બળ સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં અને તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

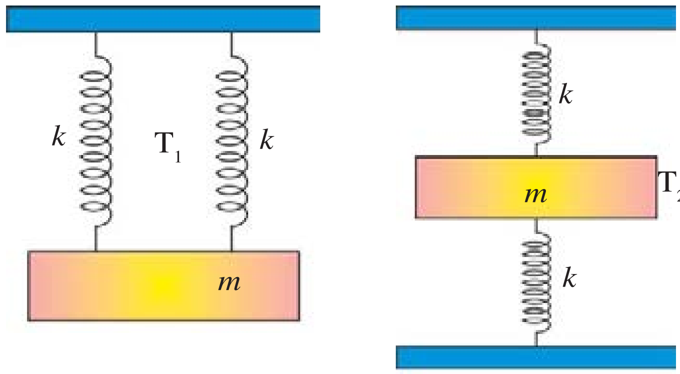
4. સાદા લોલકની લંબાઈ l અને તેના આવર્તકાળ Tનો આલેખ એ
(A) સુરેખા છે. (B) ઉપવલય છે. (C) પરવલય છે. (D) અતિવલય છે.

5. બે દોલકના આવર્તકાળ અનુક્રમે T અને $\frac{5T}{4}$ છે. તેઓ તેમનાં ગતિપથના મધ્યમાનસ્થાનેથી એકસાથે દોલનો શરૂ કરે છે. જ્યારે T આવર્તકાળ ધરાવતા દોલકનું એક દોલન પૂર્ણ થયું હોય, ત્યારે તેમની કળાનો તફાવત .... છે.
(A) 45° (B) 72° (C) 90° (D) 112°

6. એક સ.આ.દો.નો આવર્તકાળ T છે. નિયતબિંદુથી શરૂ કરીને $\frac{3}{8}$ જેટલા દોલન પૂરું કરતાં તેને કેટલો સમય લાગશે ?
(A) $\frac{3}{8}T$ (B) $\frac{5}{8}T$ (C) $\frac{5}{12}T$ (D) $\frac{8}{3}T$

7. નિયતબિંદુ પરથી પસાર થતા એક 0.5 m લંબાઈવાળા સાદા લોલકના ગોળાનો વેગ 3 m/s છે. જ્યારે લોલક શિરોલંબ સાથે 60°નો કોણ બનાવે, ત્યારે તેના ગોળાનો વેગ .... હશે. (g = 10 m/s^2 લો.)
(A) $\frac{1}{3}$ m/s (B) $\frac{1}{2}$ m/s (C) 2 m/s (D) 3 m/s

8. આકૃતિ 7.20માં બતાવ્યા પ્રમાણે સમાન સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી બે સ્પ્રિંગોને m દળ લટકાવેલ છે. $\frac{T_1}{T_2}$ શું થશે ?



આકૃતિ 7.20

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

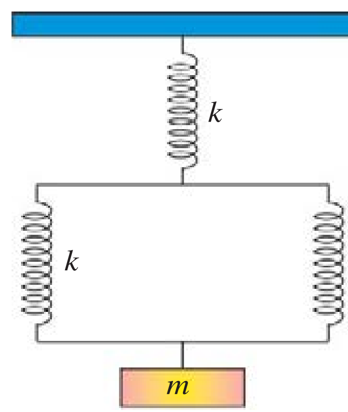
9. આકૃતિ 7.21માં બતાવ્યા પ્રમાણે m દળને ત્રણ સ્પ્રિંગો સાથે જોડેલ છે, તો T શું થશે ?

(A) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(B) $2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$

(C) $2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$

(D) $2\pi\sqrt{\frac{2k}{3m}}$



આકૃતિ 7.21

10. જો સ્પ્રિંગનો પુનઃસ્થાપક બળ F અને સ્પ્રિંગ-અચળાંક k હોય, તો સ્પ્રિંગને વજન લટકાવતાં y જેટલી ખેંચાય, ત્યારે સ્પ્રિંગમાં સંગ્રહીત યાંત્રિક-ઊર્જા કેટલી હશે ?

(A) $\frac{F^2}{2y}$ (B) $\frac{F^2}{2k}$ (C) $\frac{2y}{F^2}$ (D) $\frac{2k}{F^2}$

11. અવમંદિત દોલનના કિસ્સામાં કંપવિસ્તાર, મૂળ કંપવિસ્તારના eમા ભાગનો થવા લાગતો સમય .... છે.

(A) $\frac{m}{2b}$ (B) $\frac{2m}{b}$ (C) $e^{-bt/2m}$ (D) $e^{2m/b}$

12. એક સ.આ.દો. તેનાં દોલનો તેના ગતિપથના નીચેના અંતિમ છેડેથી શરૂ કરે છે. 10 દોલનોના અંતે તેની કળા .... હશે. ગતિ Y-અક્ષ પર અને સંદર્ભદિશા ધન X-અક્ષ લો.

(A) $\frac{1}{2}\pi$ rad (B) 5π rad (C) 10π rad (D) $\frac{43}{2}\pi$ rad

13. એક દોલક પર બાહ્ય આવર્તબળ $F = F_0 \sin \omega t$ લાગે છે. જો દોલકનો કંપવિસ્તાર $\omega = \omega_1$ માટે મહત્તમ અને ઊર્જા એ $\omega = \omega_2$ માટે મહત્તમ હોય ત્યારે (ω_0 એ પ્રાકૃતિક કોણીય આવૃત્તિ છે.)

(A) $\omega_1 = \omega_0$ અને $\omega_2 \neq \omega_0$ (B) $\omega_1 \neq \omega_0$ અને $\omega_2 = \omega_0$

(C) $\omega_1 \neq \omega_0$ અને $\omega_2 \neq \omega_0$ (D) $\omega_1 = \omega_0$ અને $\omega_2 = \omega_0$

14. સ્પ્રિંગના નીચેના છેડે 1 kg દળ લગાડેલ છે, જેના દોલનની એક ચોક્કસ આવૃત્તિ છે. આમાં કેટલું દળ ઉમેરતાં તેની આવૃત્તિમાં અડધો ઘટાડો થાય.

(A) 1 kg (B) 2 kg (C) 3 kg (D) 4 kg

15. જ્યારે ટ્રેન 10 m s^{-2}થી પ્રવેગી ગતિ કરે છે, ત્યારે ટ્રેનના ડબ્બાની છત પરથી લટકાવેલ લોલકનો આવર્તકાળ 2 s છે. આ લોલકનો આવર્તકાળ જ્યારે ટ્રેન 10 m s^{-2}ના પ્રતિપ્રવેગથી ગતિ કરશે ત્યારે કેટલો હશે ?

(A) 2 s(B) $\sqrt{2}$ s (C) $2\sqrt{2}$ s (D) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ s

જવાબો

1. (B)	**2.** (A)	**3.** (D)	**4.** (C)	**5.** (B)	**6.** (C)
7. (C)	**8.** (A)	**9.** (C)	**10.** (B)	**11.** (B)	**12.** (D)
13. (D)	**14.** (C)	**15.** (A)			

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. એક પૂર્ણ દોલનમાં સાદા લોલક વડે થતું કાર્ય કેટલું હશે ?

2. મુક્તપતન કરતી લિફ્ટમાં લોલકનો આવર્તકાળ કેટલો થશે ?

3. U–ટ્યૂબમાં પ્રવાહીના દોલનના આવર્તકાળનું સમીકરણ લખો.

4. પ્રારંભિક કળા શું છે ? તે કયા એકમમાં મપાય છે ?

5. એક સ.આ.દો.નો કંપવિસ્તાર 4 cm છે. નિયતબિંદુથી કેટલા અંતરે તેની સ્થિતિ-ઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જા સરખી થશે.

6. બળ અચળાંકનો SI એકમ શું છે ?

7. સ.આ.ગ માટે પ્રવેગ(a)-કંપવિસ્તાર , સ્થાનાંતર - કંપવિસ્તાર (A) અને કોણીય આવૃત્તિ (ω) વચ્ચેનો સંબંધ લખો.

8. સાદું લોલક આખરે કેમ થંભી જાય છે ?

9. $b << \sqrt{km}$ માટે અવમંદિત દોલક માટેની યાંત્રિક-ઊર્જાનું સૂત્ર લખો.

10. પ્રણોદિત દોલનો માટેનું વ્યાપક સ્વરૂપનું દ્વિતીય ક્રમનું વિકલ સમીકરણ લખો.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. આવર્તગતિ અને દોલિત ગતિ વ્યાખ્યાયિત કરો. તેનાં યોગ્ય ઉદાહરણો આપો.

2. સાદા લોલકના આવર્તકાળ માટેનું સૂત્ર તારવો.

3. અવમંદિત દોલનો એટલે શું ? તેની ગતિને અસર કરતાં પરિબળો ક્યાં છે ?

4. અવમંદિત આવર્ત દોલનની કુલ ઊર્જાનો સંબંધ તારવો.

5. પ્રણોદિત દોલનો અને અનુનાદ સમજાવો.

6. રેખિય સ.આ.ગ. માટે એક આવર્તકાળ પરની સરેરાશ KE અને તેટલા જ આવર્તકાળ પરની સરેરાશ PEનાં મૂલ્યો સમાન છે, તેમ બતાવો.

7. KE અને PE વિરુદ્ધ સ્થાનાંતર આલેખો જે બિંદુઓએ છેદે તેના યામો મેળવો.

8. સ.આ.ગ. માટે પ્રવેગ વિરુદ્ધ સ્થાનાંતરનો વક્ર કેવો હશે ? આ વક્રનો ઢાળ શું હશે ?

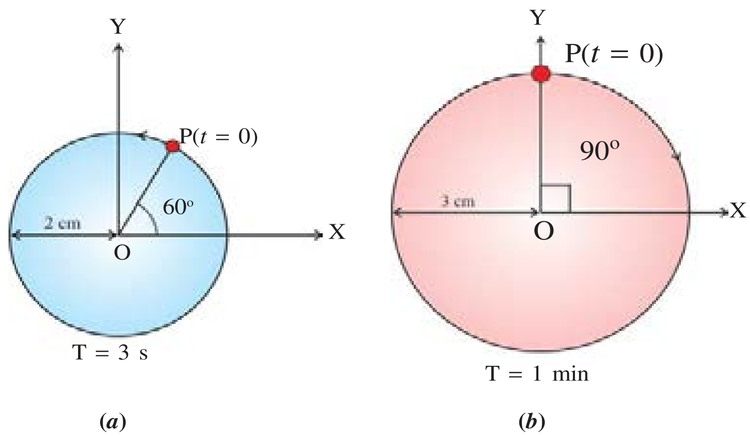
9. સ.આ.ગ. કરતાં કણનો આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ છે, તો સાદા લોલકનો આવર્તકાળ લોલકના દળથી સ્વતંત્ર કેમ છે ? સમજાવો.

10. સરળ આવર્તદોલકોના નીચેના કિસ્સાઓમાં પુનઃસ્થાપક બળ કોણ પૂરું પાડે છે ?

(i) સાદું લોલક (ii) સ્પ્રિંગ (iii) U ટ્યૂબના કૉલમમાં પારો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. આકૃતિ 7.22 (*a*) અને (*b*)ના કિસ્સામાં ભ્રમણ કરતાં કણ Pના ત્રિજ્યા સદિશના y-પ્રક્ષેપની સરળ આવર્તગતિનાં સમીકરણો મેળવો.

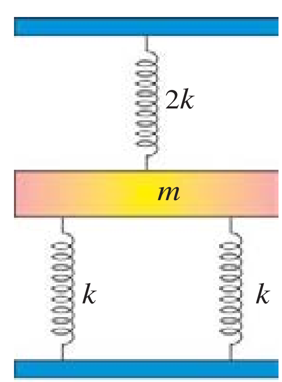


આકૃતિ 7.22

[જવાબ : (*a*) $y = 2\sin\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$ (*b*) $y = 3\cos\left(\frac{\pi}{30}t\right)$]

2. આકૃતિ 7.23 માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક $m = 80\ g$ દળ ત્રણ સ્પ્રિંગો સાથે લગાડેલ છે. જો $k = 2\ N\ m^{-1}$ હોય તો, સમતુલ્ય સ્પ્રિંગ-અચળાંક અને આવર્તકાળ કેટલો હશે ?

[જવાબ : $k = 8\ Nm^{-1}$, T = 0.628 s]



આકૃતિ 7.23

3. l લંબાઈની અને k જેટલો બળ-અચળાંક ધરાવતી સ્પ્રિંગના l_1 અને l_2 લંબાઈના બે ભાગ કરવામાં આવે છે. જો $l_1 = nl_2$ હોય, તો અત્રે મળતી બંને સ્પ્રિંગના બળ-અચળાંક k_1 અને k_2 નાં સૂત્રો n અને k ના સ્વરૂપમાં મેળવો. [જવાબ : $k_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)k$, $k_2 = (n+1)k$]

4. 100 g દળ ધરાવતો એક દોલક અવમંદિત દોલનો કરે છે. જ્યારે 100 દોલનો પૂરાં થાય ત્યારે દોલનનો કંપવિસ્તાર મૂળ કંપવિસ્તાર કરતાં અડધો બને છે. જો આવર્તકાળ 2 s હોય, તો અવરોધક-ગુણાંક શોધો. [જવાબ : 0.693 dyn s. cm^{-1}]

5. સ.આ.ગ. કરતા એક દોલકનો કંપવિસ્તાર A છે. જ્યારે આ દોલક તેના ગતિપથના મધ્યબિંદુથી y અંતરે હોય છે, ત્યારે તેની ગતિની દિશામાં એક ફટકો મારીને તેનો તાત્ક્ષણિક વેગ બમણો કરવામાં આવે છે, તો નવો કંપવિસ્તાર શોધો. [જવાબ : $\sqrt{4A^2 - 3y^2}$]

6. સ.આ.ગ. માટે સાબિત કરો કે, $a^2T^2 + 4\pi^2v^2$ = અચળ, જ્યાં a અને v એ અનુક્રમે કોઈ ક્ષણે પ્રવેગ અને વેગ છે. T એ આવર્તકાળ છે.

7. એક સાદા લોલકની લંબાઈ L અને ગોળાનું દળ m છે. ગોળો A જેટલા કંપવિસ્તારથી દોલન કરે છે. બતાવો કે દોરીમાંનું મહત્તમ તણાવ $T_{max} = mg\left[1 + \left(\frac{A}{L}\right)^2\right]$ (નાના કોણીય સ્થાનાંતર માટે) છે.

8. $y_1 = 10 \sin\frac{\pi}{4}(12t + 1)$ અને $y_2 = 5 (\sin 3\pi t + \sqrt{3}\cos 3\pi t)$ દ્વારા બે સરળ આવર્તગતિઓ દર્શાવેલ છે. તેમના કંપવિસ્તારનો ગુણોત્તર શોધો. બંને ગતિઓનો આવર્તકાળ કેટલો હશે ? [જવાબ : $\frac{A_1}{A_2} = 1$, $T_1 = T_2 = \frac{2}{3}$ s]

9. એક રેખીય આવર્તદોલકનો બળ-અચળાંક 2×10^6 N/m અને કુલ યાંત્રિક ઊર્જા 160 J છે. કોઈ ક્ષણે તેનું સ્થાનાંતર 0.01 m હોય તો તે સ્થાને તેની સ્થિતિ-ઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જા શોધો. [જવાબ : 100 J, 60 J]

10. રેખીય સ.આ.ગ. માટે જ્યારે દોલક મધ્યમાન સ્થિતિથી y_1 અને y_2 જેટલું અંતર હોય, ત્યારે તેની ગતિ v_1 અને v_2 છે. બતાવો કે દોલનનો આવર્તકાળ $T = 2\pi\left[\frac{y_2^2 - y_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ છે.

•

પ્રકરણ 8

તરંગો

8.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, અગાઉ આપણે ભણી ગયા કે બ્રહ્માંડ એ દ્રવ્ય અને વિકિરણનું બનેલું છે. આ વિકિરણ એ તરંગ સ્વરૂપે પ્રસરણ પામે છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનની લગભગ બધી જ શાખાઓમાં તરંગો પાયાની અગત્ય ધરાવે છે. પ્રકાશ અને ધ્વનિ-ઊર્જાનું પ્રસરણ તરંગ સ્વરૂપે થાય છે. સૂર્યમાંથી ઉદ્‌ભવતી અલગ-અલગ પ્રકારની વિકિરણ-ઊર્જાઓ એ તરંગ સ્વરૂપે આપણા સુધી પહોંચે છે. વાજિંત્રોમાંથી ઉદ્‌ભવેલું સંગીત આપણા કાન સુધી ‘ધ્વનિ-તરંગો’ સ્વરૂપે પહોંચે છે. રેડિયો, ટેલિવિઝન અને મોબાઈલ ફોન દ્વારા થતો આધુનિક સંદેશાવ્યવહાર એ તરંગોને આભારી છે. 20મી સદીમાં ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં પ્રવેશેલી દ્રવ્યતરંગ (matter waves)ની વિભાવનાને પરિણામે તરંગોનું મહત્ત્વ અનેક ગણું વધી ગયું છે.

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે તરંગો, તરંગોના પ્રકાર, જુદા-જુદા માધ્યમમાં તરંગોની ઝડપ, તરંગોનું પરાવર્તન અને તેમનું સંપાતીકરણ, સ્પંદ અને ડૉપ્લર અસર જેવી ઘટનાઓનો અભ્યાસ કરીશું.

8.2 તરંગ (Waves)

અવકાશમાં જ્યારે કણ ગતિ કરે ત્યારે તેની સાથે સંકળાયેલી ગતિ-ઊર્જાનું પણ પરિવહન થાય છે. અવકાશમાં ઊર્જા એ બીજી રીતે પણ વહન પામે છે. જેમાં કણ પોતાના સ્થાન નજીક દોલનો કરી દૂર સુધી ઊર્જા પહોંચાડે છે.

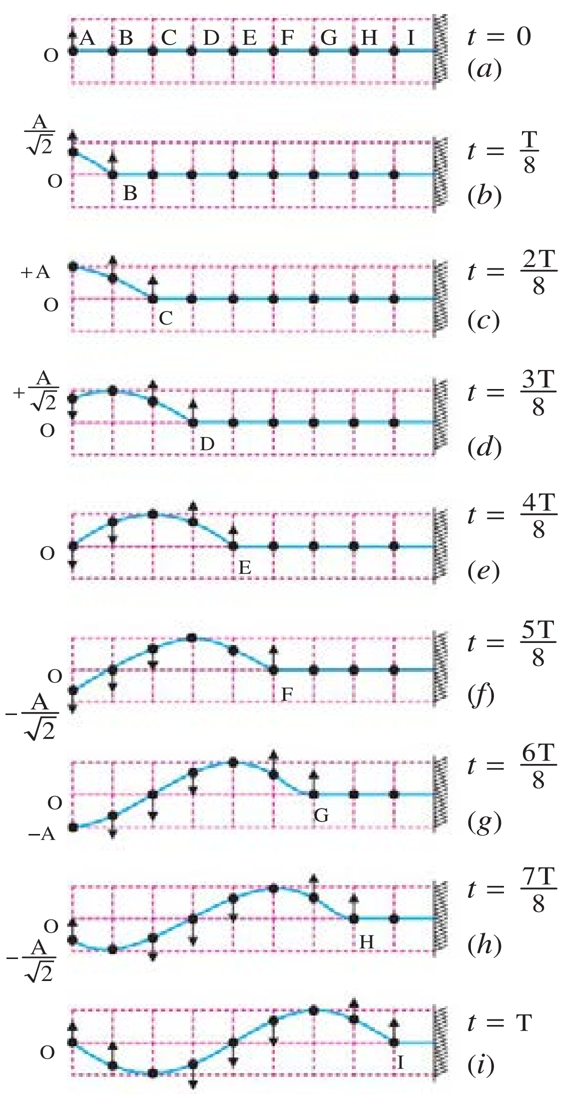
હવામાં ધ્વનિ આ રીતે પ્રસરણ પામે છે. જ્યારે તમે તમારા મિત્રને ‘Hello’ કહો છો, ત્યારે તમારા હોઠ આગળના માધ્યમના કણો ગતિ કરીને તમારા મિત્રના કાન સુધી પહોંચતા નથી, પરંતુ તમે તમારા હોઠની નજીક રહેલા માધ્યમમાં વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કરો છો, જે તરંગ સ્વરૂપે પ્રસરણ પામીને મિત્રના કાન સુધી પહોંચે છે.

તરંગનો ખ્યાલ સ્પષ્ટ રીતે મેળવવા માટે લાંબી, સ્થિતિસ્થાપક અને જડિત આધારે બાંધેલી તણાવવાળી દોરીને ધ્યાનમાં લો. ધારો કે, આ દોરીને કોઈ વ્યક્તિએ ખેંચીને તણાવવાળી સ્થિતિમાં રાખેલી છે. અહીં દોરી એ એક પારિમાણિક સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમ છે. આકૃતિ 8.1માં દર્શાવ્યા અનુસાર A, B, C, ... I એ દોરીના માધ્યમના કણ છે. પ્રારંભમાં માધ્યમના બધા જ કણો સમતોલનની અવસ્થામાં છે. (આકૃતિ 8.1*a*.)

(i) ધારો કે $t = 0$ સમયે વ્યક્તિ દ્વારા કણ Aમાં એવો વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કરવામાં આવે છે, જેથી તે $y = A\sin\omega t$ અનુસાર સરળ આવર્તદોલન કરે છે. આ દોલનનો આવર્તકાળ T છે.

(ii) માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપકતાના ગુણધર્મને લીધે $t = 0$ સમયે A પાસે ઉદ્‌ભવેલ વિક્ષોભની અસર $\frac{T}{8}$ સમયે ધારો કે કણ B પર પહોંચે છે. $\frac{T}{8}$ સમય દરમિયાન કણ Aનું સ્થાનાંતર $y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(\frac{T}{8}\right) = \frac{A}{\sqrt{2}}$ જેટલું થયું હશે ત્યારે કણ B એ સ.આ.ગ. શરૂ કરવાની તૈયારીમાં હશે. (આકૃતિ 8.1*b*)

(iii) હવે, વધારાનો $\frac{T}{8}$ જેટલો સમયગાળો પસાર થતાં એટલે કે $\frac{T}{8} + \frac{T}{8} = \frac{T}{4}$ જેટલા સમયગાળા બાદ A કણના દોલનની અસર કણ C પર પહોંચે છે અને તે દોલન શરૂ કરવાની તૈયારીમાં આવે છે. $\frac{T}{4}$ સમય દરમિયાન કણ Aનું સ્થાનાંતર, $y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(\frac{T}{4}\right) = A$



દોરી પર તરંગનો ઉદ્‌ભવ

આકૃતિ 8.1

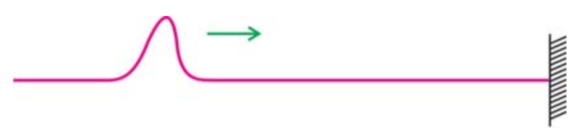
એટલે કે કંપવિસ્તાર જેટલું થાય છે અને કણ B નું સ્થાનાંતર $\frac{A}{\sqrt{2}}$ જેટલું થાય છે (જુઓ આકૃતિ 8.1*c*).

(iv) આમ, A પર ઉત્પન્ન કરેલ વિક્ષોભને લીધે ક્રમશઃ આવતા કણો એક પછી એક દોલનો શરૂ કરતા જાય છે અને પોતાના દોલનોની અસર પોતાનાથી આગળના કણો પર પહોંચાડતા જાય છે અને વિક્ષોભ માધ્યમમાં આગળ પ્રસરતો જાય છે.

(v) આ રીતે વિક્ષોભ આગળ વધતા $\frac{3T}{8}$ સમયે તે D કણ પર, $\frac{4T}{8}$ સમયે તે E કણ પર, ... અને T સમયે તે કણ I પર પહોંચે છે. આ T સમયમાં કણ Aનું એક દોલન પૂરું થાય છે ત્યારે કણ I દોલન શરૂ કરવાની તૈયારીમાં હોય છે.

આ સમગ્ર પરિસ્થિતિ આકૃતિ 8.1માં દર્શાવી છે. યાદ રાખો કે, માધ્યમના કણો સ્થિર સમતુલન અવસ્થામાં હતાં. તેમાં $t = 0$ સમયે કણ A પર આપણે સરળ આવર્તદોલન પ્રકારનો વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કર્યો, જે $t = T$ સમયે માધ્યમમાં પ્રસરણ પામતો, I પર પહોંચે છે.

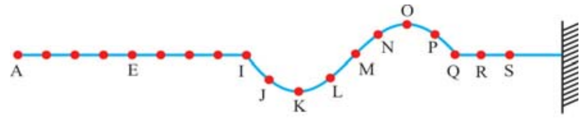
(vi) અહીં, કણ Aને આપેલ વિક્ષોભ સરળ આવર્તગતિ (sine પ્રકારની) પ્રકારનો હતો, તેથી દોરીમાં ઉત્પન્ન થતો આકાર sine વક્ર જેવો જોવા મળે છે. જો કણ Aનું સ્થાનાંતર કે દોલન બીજા કોઈ પ્રકારનું હોત, તો દોરી પર રચાતો આકાર તે દોલનના પ્રકાર અનુસાર મળે. અર્થાત્, **દોરી (માધ્યમ)માં રચાતો આકાર તેમાં ઉત્પન્ન કરેલ વિક્ષોભના પ્રકારને દર્શાવે છે.** ઉદાહરણ તરીકે, જો દોરીના મુક્ત છેડાને ફક્ત એક વાર ઝડપથી ઉપર-નીચે કરવામાં આવે, તો આકૃતિ 8.2માં દર્શાવ્યા અનુસાર આકાર ઉત્પન્ન થાય છે, **જેને તરંગસ્પંદ (pulse) કહે છે.**



વિક્ષોભ અનુરૂપ દોરીમાં ઉદ્‌ભવતો આકાર

આકૃતિ 8.2

જેમજેમ સમય પસાર થાય છે તેમ આકૃતિ 8.1માં દર્શાવેલ વિક્ષોભ (કે આકાર) કણ J, K, L,..... વગેરે પરથી પસાર થતો જાય છે. $t = T$ સમયે sine વક્ર જેવો આકાર A અને I કણ વચ્ચે રહેલો હતો. આ આકાર દોરી પર આગળ વધે છે અને $t = 2T$ સમયે તે આકૃતિ 8.3માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે I અને Q કણ વચ્ચે આવી જાય છે. આ દરમિયાન Aથી I વચ્ચેના દોલનો બંધ પડી જાય છે અને દોરી તે વિભાગમાં મૂળ સ્થિતિમાં આવી જાય છે.



t = 2T સમયે દોરીનો આકાર

આકૃતિ 8.3

આમ, દોરી પર કોઈ કણ પાસે વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કરતાં તે વિક્ષોભના પ્રકાર અનુસાર આકાર ઉત્પન્ન થઈ તે આકાર 'પોતાનું સ્વરૂપ' જાળવી રાખી દોરી પર ગતિ કરે છે. એટલે કે દોરીના માધ્યમમાં વિક્ષોભ પ્રસરણ પામતો જાય છે. **માધ્યમ (અવકાશ)માં વિક્ષોભની આવી ગતિને તરંગ-સ્પંદ અથવા સામાન્ય રીતે તરંગ કહે છે.**

અહીં યાદ રાખો કે દોરીના કણો A, B, C... એ સમગ્રપણે એક એકમ તરીકે માધ્યમમાં ગતિ કરતા નથી, પરંતુ તેઓ સમતુલન સ્થાનની આસપાસ માત્ર દોલન કે સ્થાનાંતર જ કરે છે. આમ, તરંગ એ માધ્યમમાં આગળ વધતી કોઈ ભૌતિક 'વસ્તુ' નથી. માધ્યમના કોઈ એક ભાગમાં ઉદ્ભવેલ વિક્ષોભની અસર માધ્યમના જુદા-જુદા કણો દ્વારા ક્રમશઃ જેમજેમ અનુભવાતી જાય તેમતેમ તરંગ આગળ વધતું જાય છે, તેમ કહેવાય. **કોઈ પણ કણ પાસેથી વિક્ષોભ પસાર થઈ ગયા પછી તે કણ ફરી પાછો પોતાની સમતુલિત અવસ્થામાં આવી જાય છે.**

રેલવે ટ્રેન સાથે જ્યારે એન્જિનનું જોડાણ થાય છે, ત્યારે એન્જિન પાસેનો પ્રથમ ડબો ધ્રૂજે છે. ત્યાર પછી બીજો અને ત્યાર પછી ત્રીજો ડબો ધ્રુજારી અનુભવે છે. આમ, ધ્રુજારી પ્રથમ ડબાથી લઈને છેલ્લા ડબા સુધી આગળ વધે છે. આ ઘટના 'રેલવેના ડબાઓથી બનતા' માધ્યમમાં પ્રસરતા તરંગની જ કહેવાય.

તરંગમાળા (Wavetrain)

ઉપરોક્ત ચર્ચામાં જો કણ Aના સરળ આવર્તદોલન સતત નિયમિત ચાલુ રાખવામાં આવે, તો પ્રથમ દોલનને કારણે ઉત્પન્ન થયેલ આકાર આગળ વધે તેની તરત પાછળ બીજા દોલનને કારણે ઉદ્ભવતો આકાર ગોઠવાઈ જાય છે. આમ, માધ્યયમાં એક પછી એક આકારો સતત ગતિ કરતા જણાય છે. **વિક્ષોભોની આવી હારમાળાને તરંગમાળા કહે છે.**

આપણે જે કિસ્સાની ચર્ચા કરી તેમાં તરંગ-ઘટનામાં ભાગ લેતાં કણો સરળ આવર્તગતિ કરતા હોય (અથવા તરંગને લીધે માધ્યમમાં ઉદ્ભવતા આકાર sine અથવા cosine વક્રો હોય) તેવા તરંગોને **હાર્મોનિક તરંગો (harmonic wave)** કહે છે.

જો માધ્યમમાં તરંગો સતત આગળ ને આગળ ગતિ કરતા હોય તેવા તરંગોને **પ્રગામીતરંગો (progressive waves) કહે છે.**

8.3 તરંગોનું વર્ગીકરણ (Classification of Waves)

(i) યાંત્રિક તરંગો (Mechanical waves) : જે તરંગોને પ્રસરણ માટે સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમની જરૂર છે તેવા તરંગોને યાંત્રિક તરંગો કહે છે. આવા તરંગો માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મને લીધે પ્રસરે છે. દા. ત., દોરી પરના તરંગો, પાણીની સપાટી પર પ્રસરતા તરંગો, ધ્વનિના તરંગો, ધરતીકંપના તરંગો (seismic waves). આ તરંગોની ખાસિયત એ છે કે તેઓ ન્યૂટનના નિયમોને અનુસરે છે.

(ii) વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો (Electromagnetic waves) : વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોના પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર નથી. તે શૂન્યાવકાશમાં પણ પ્રસરણ પામે છે. આ પ્રકારના તરંગમાં, અવકાશમાં વિદ્યુત અને ચુંબકીય ક્ષેત્રો સાથે સંકળાયેલ વિક્ષોભ પ્રસરણ પામે છે. તેમાં કણોને બદલે બધા બિંદુઓ પર વિદ્યુત અને ચુંબકીય ક્ષેત્રની તીવ્રતાના સદિશો 'દોલન' કરે છે.

પ્રકાશના તરંગો, રેડિયો-તરંગો, માઇક્રોવેવ તરંગો, X–ray વિગેરે એ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોના ઉદાહરણો છે. (આ તરંગોની વધારે સમજૂતી ધોરણ 12માં મેળવશો.)

(iii) દ્રવ્ય-તરંગો (Matter waves) : દ્રવ્ય-તરંગો એ ગતિમાન ઇલેક્ટ્રૉન, પ્રોટોન, ન્યુટ્રૉન અને બીજા મૂળભૂત કણો તેમજ અણુ અને પરમાણુઓ સાથે સંકળાયેલ છે. આ કણો દ્રવ્યની રચના કરતા હોવાથી તેને દ્રવ્ય-તરંગો કહે છે. આ પ્રકારના તરંગની વિભાવનાનો અભ્યાસ તમે ધોરણ 12માં કરશો. આધુનિક ટેક્નોલૉજીમાં આ તરંગની વિભાવના પરથી આધુનિક વૈજ્ઞાનિક ઉપકરણો બનાવવામાં આવ્યાં છે. ઉદાહરણ તરીકે, ઇલેક્ટ્રૉન સાથે સંકળાયેલ દ્રવ્ય-તરંગની વિભાવના પરથી ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપ વિકસાવવામાં આવેલ છે.

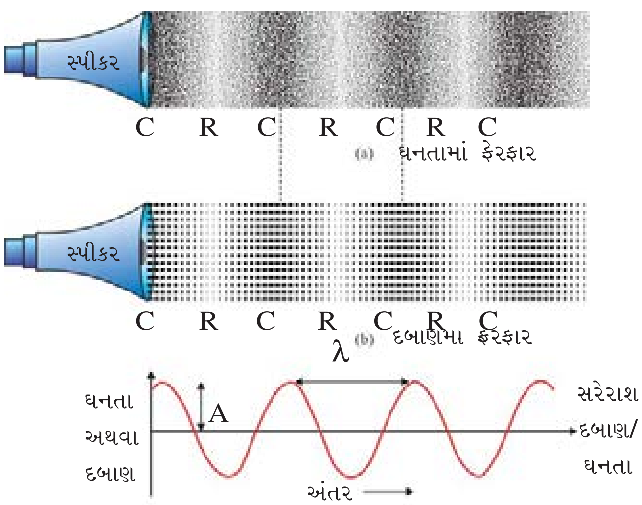
પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત યાંત્રિક-તરંગો વિશે અભ્યાસ કરીશું.

લંબગત તરંગ (Transverse wave) : જે તરંગમાં માધ્યમના કણોના સ્થાનાંતરની દિશા તરંગના પ્રસરણની દિશાને લંબ હોય, તેવા તરંગને **લંબગત તરંગ** કહે છે. પરિચ્છેદ 8.2 માં ચર્ચેલા દોરી પરના તરંગો એ લંબગત તરંગો છે. વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો (દા. ત. પ્રકાશના તરંગો) એ લંબગત તરંગો છે. આ તરંગોમાં એક તરફના મહત્તમ સ્થાનાંતરોને **શૃંગ (crest)** અને તેની વિરુદ્ધ દિશામાંના

મહત્તમ સ્થાનાંતરોને **ગર્ત (trough)** કહે છે. આ તરંગો માધ્યમમાં ક્રમશઃ શૃંગ અને ગર્ત રચીને પ્રસરણ પામે છે.

સંગત તરંગો (Longitudinal wave) : જે તરંગમાં માધ્યમના કણોનું સ્થાનાંતર તરંગ-પ્રસરણ દિશા પર જ હોય, તેવા તરંગને **સંગત તરંગ** કહે છે. દા. ત., હવામાં પ્રસરતા ધ્વનિના તરંગો. આ તરંગો માધ્યમમાં ક્રમશઃ સંઘનન અને વિઘનન રચીને પ્રસરણ પામતા હોય છે. માધ્યમમાં પ્રસરતા તરંગોમાં માધ્યમના કણો તરંગ-પ્રસરણની દિશા પર પોતાના સમતોલન સ્થાનની આસપાસ દોલન કરતા હોય છે.

સરળતા ખાતર હવામાંથી પસાર થતાં સંગત તરંગોના કિસ્સામાં માધ્યમના કણોની સ્થિતિ, કોઈ એક ક્ષણે કેવી હોય તે આકૃતિ 8.4માં દર્શાવ્યું છે.



હવામાં પ્રસરતા સંગત તરંગો

આકૃતિ 8.4

સંગત તરંગો (ધ્વનિ-તરંગો) હવામાંથી પસાર થાય ત્યારે અમુક વિભાગમાં હવાના અણુઓ તેમનાં દોલનો દરમિયાન એકબીજાની ખૂબ નજીક ધકેલાય છે. પરિણામે તે વિભાગોમાંથી હવાની ઘનતામાં અને પરિણામે હવાના દબાણમાં વધારો થાય છે અને આ વિભાગમાં **સંઘનન (condensation)** રચાયું છે તેમ કહેવાય. બે ક્રમિક સંઘનનો વચ્ચેના વિભાગમાં હવાના અણુઓ છૂટા પડેલા દેખાય છે. આ વિભાગમાં હવાની ઘનતા અને દબાણમાં ઘટાડો થાય છે અને આ વિભાગમાં **વિઘનન (rarefaction)** રચાયું છે, તેમ કહેવાય. (જુઓ આકૃતિ 8.4).

આમ, ધ્વનિના પ્રસરણ દરમિયાન માધ્યમના સ્તરો પોતાના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ દોલનો ચાલુ રાખે છે અને આ પ્રક્રિયા દરમિયાન ક્રમિક રીતે માધ્યમમાં સંઘનનો અને વિઘનનો રચાતાં જાય છે. જેમજેમ દોલનોની અસર એક પછી એક સ્તર પર પહોંચતી જાય છે, તેમ સંઘનનો અને વિઘનનો માધ્યમમાં આગળ વધતાં જાય છે. આ રીતે માધ્યમમાં ધ્વનિના તરંગોનું પ્રસરણ થાય છે. સંગત તરંગોના પ્રસરણ દરમિયાન માધ્યમના જુદા-જુદા વિભાગોનું દબાણ, સમય અને સ્થાન સાથે બદલાતું જતું હોવાથી આવા તરંગોને **દબાણ-તરંગો (pressure waves)** પણ કહે છે.

લંબગત તરંગોના કિસ્સામાં માધ્યમના કણોનાં દોલનો તરંગના પ્રસરણની દિશાને લંબ હોવાથી જ્યારે આવા તરંગો માધ્યમમાં પ્રસરે છે, ત્યારે માધ્યમનો દરેક ખંડ કે ઘટક આકાર-વિકૃતિ (shearing strain) અનુભવે છે. માત્ર ઘન માધ્યમમાં જ આકાર-પ્રતિબળ (shearing stress) સંભવ હોવાથી લંબગત તરંગો દોરી, તાર કે સળિયા જેવાં ઘન માધ્યમોમાં જ પ્રસરણ પામી શકે છે અને પ્રવાહી કે વાયુમાં લંબગત તરંગો શક્ય નથી.

સંગત તરંગના પ્રસરણમાં માધ્યમના કણોનાં દોલનો પ્રસરણની દિશામાં જ થતાં હોવાથી આવા તરંગના પ્રસરણ દરમિયાન દાબીય વિકૃતિ (compressive strain) ઉત્પન્ન થાય છે અને દાબ-પ્રતિબળ (compressive stress) તો ઘન, પ્રવાહી કે વાયુ એમ દરેક માધ્યમમાં શક્ય હોવાથી સંગત તરંગો બધાં જ માધ્યમોમાં શક્ય છે.

આમ, **ઘન માધ્યમમાં લંબગત અને સંગત એમ બંને પ્રકારના તરંગોનું પ્રસરણ શક્ય છે અને તરલ માધ્યમમાં માત્ર સંગત યાંત્રિક તરંગોનું જ પ્રસરણ શક્ય છે.**

[ધરતીકંપના લીધે પૃથ્વીમાં લંબગત અને સંગત એમ બંને પ્રકારના તરંગો ઉદ્ભવે છે, જેને અનુક્રમે S-તરંગ (secondary wave) અને P-wave (primary wave) કહે છે. પૃથ્વીની સપાટીના અંદરના ભાગમાં ધ્વનિ-તરંગ જેવા સંગત તરંગ (P-તરંગ) ઉદ્ભવે છે, જેની ઝડપ આશરે 4–8 km/s જેટલી હોય છે અને S-તરંગની ઝડપ આશરે 2–5 km/s જેટલી હોય છે. S-તરંગમાં પૃથ્વીની સપાટીનો અંદરનો ભાગ તરંગ પ્રસરણની દિશાને લંબ દિશામાં દોલન કરે છે. સિસ્મોગ્રાફમાં પહેલું P-તરંગ એ પહેલા S-તરંગ કરતાં કેટલું વહેલું નોંધાય છે. તે પરથી સિસ્મોગ્રાફથી ધરતીકંપનું ઉદ્ગમસ્થાન (epi-centre)નું અંતર નક્કી કરી શકાય છે.]

8.4 તરંગોમાં કંપવિસ્તાર, તરંગમાં ઊર્જાનું પ્રસરણ, તરંગલંબાઈ અને આવૃત્તિ (Amplitude of a Wave, Propagation of Energy in a Wave, Wavelength and Frequency)

તરંગનો કંપવિસ્તાર (Amplitude of a wave) : તરંગમાં 'કણો'ના દોલનના કંપવિસ્તારને તરંગનો

કંપવિસ્તાર કહે છે. આકૃતિ 8.5માં દર્શાવ્યા મુજબ તરંગનો કંપવિસ્તાર A છે.

તરંગમાં ઊર્જાનું પ્રસરણ (Propagation of energy in a wave) :

માધ્યમમાં તરંગ ઉત્પન્ન કરવા માટે તો કોઈ કણ (વિભાગ)ને દોલિત અથવા સ્થાનાંતરિત કરવો પડે છે. આ માટે તેના પર કાર્ય કરવું પડે છે. આ કાર્ય જેટલી ઊર્જા કણને મળે છે. જે તેના દોલન દરમિયાન તેની સ્થિતિ-ઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જાના સ્વરૂપમાં હોય છે. ક્રમશઃ આવતા કણો જેમજેમ વિક્ષોભ અનુભવતા જાય, તેમતેમ આ ઊર્જા માધ્યમના આગળને આગળના કણોને મળતી જાય છે. આમ, તરંગમાં ઊર્જાનું પ્રસરણ થાય છે. માધ્યમમાં આંતરિક ઘર્ષણબળ હોય તો ઊર્જાનું ઉષ્મા ઊર્જા સ્વરૂપે વિખેરણ થતું જાય છે અને આગળ વધતું તરંગ મંદ પડતું જાય છે.

તરંગની પ્રસરણની દિશાને લંબ એવી એકમ ક્ષેત્રફળ-વાળી સપાટીમાંથી એક સેકન્ડમાં પસાર થતી ઊર્જાને તરંગની તીવ્રતા (intensity) કહે છે.

$$\text{તરંગની તીવ્રતા (I)} = \frac{\text{ઊર્જા/સમય}}{\text{ક્ષેત્રફળ}}$$

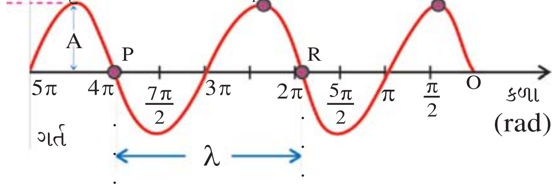
તરંગની તીવ્રતાનો SI એકમ $\frac{J/s}{m^2}$ અથવા $\frac{W}{m^2}$ છે.

તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^0T^{-3}$ છે.

કણના દોલનની ઊર્જા $E = \frac{1}{2}kA^2$, હોવાથી તરંગની તીવ્રતા, તરંગના કંપવિસ્તારના વર્ગના સમપ્રમાણમાં હોય છે. ($I \propto A^2$).

તરંગલંબાઈ (Wavelength)

તરંગપ્રસરણમાં જે બે ક્રમિક કણો (બિંદુઓ)ના દોલનની કળાનો તફાવત 2π rad હોય છે તેમની વચ્ચેના અંતરને તરંગની તરંગલંબાઈ (λ) કહે છે. તેનો SI એકમ m છે.



તરંગનો કંપવિસ્તાર અને તરંગલંબાઈ

આકૃતિ 8.5

આકૃતિ 8.5 દર્શાવ્યા અનુસાર કણ P અને Rની વચ્ચે દોલનની કળાનો તફાવત $4\pi - 2\pi = 2\pi$ rad છે. આથી, તેમની વચ્ચેનું અંતર એ તરંગની તરંગલંબાઈ (λ) દર્શાવે છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે બે ક્રમિક શૃંગ અથવા બે ક્રમિક ગર્ત વચ્ચે દોલનનો કળા તફાવત 2π rad હોવાથી તેમની વચ્ચેનું અંતર પણ એ તરંગની તરંગલંબાઈ (λ) દર્શાવે છે. આ જ રીતે ધ્વનિ-તરંગોના કિસ્સામાં બે ક્રમિક સંઘનન અથવા વિઘનન વચ્ચેના અંતરને ધ્વનિ-તરંગની તરંગલંબાઈ કહે છે.

તરંગ-સંખ્યા અને તરંગ-સદિશ (Wave number and wave veetor) :

એકમઅંતર દીઠ તરંગોની સંખ્યા $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ને તરંગ-સંખ્યા કહે છે. તરંગ-સંખ્યાનો એકમ m^{-1} છે.

તરંગ-પ્રસરણમાં λ અંતરે આવેલા બે કણોના દોલનની કળાનો તફાવત 2π rad હોય છે. આથી એકમઅંતરે રહેલા બે કણોના દોલનની કળાનો તફાવત $\frac{2\pi}{\lambda}$ rad થાય. $\frac{2\pi}{\lambda}$ ને તરંગ-સદિશ અથવા કોણીય તરંગ-સંખ્યા અથવા પ્રસરણ-અચળાંક (propagation constant) (k) કહે છે.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k નો SI એકમ rad/m છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^0L^{-1}T^0$ છે. તરંગ-સદિશની દિશા તરંગ-પ્રસરણની દિશામાં લેવાય છે.

તરંગની આવૃત્તિ (Frequency of a wave) :

એક સેકન્ડમાં માધ્યમના કણે પૂર્ણ કરેલ દોલનોની સંખ્યાને કણની આવૃત્તિ (f) કહે છે. તરંગની આવૃત્તિ (f) એ માધ્યમના કણોના દોલનની આવૃત્તિ જ છે. તરંગ-પ્રસરણમાં કોઈ સ્થાન (કે બિંદુ) પાસેથી એક સેકન્ડમાં પસાર થતા તરંગોની સંખ્યાને તરંગની આવૃત્તિ કહે છે.

તેનો SI એકમ s^{-1} અથવા Hz (Hertz) છે.

$\omega = 2\pi f$ને તરંગની કોણીય આવૃત્તિ કહે છે.

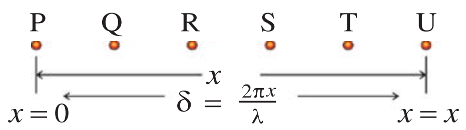
$T = \frac{1}{f}$ ને તરંગનો આવર્તકાળ કહે છે.

8.5 તરંગ-સમીકરણ (Wave Equation)

તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ભાગ લેતાં દરેક કણોના સ્થાનાંતર દરેક સમયે જાણી શકાય, તો તરંગ-પ્રસરણની ઘટનાનું વર્ણન કરી શકાય. એક પારિમાણિક તરંગો માટે x-યામ ધરાવતા કોઈ પણ કણનું કોઈ પણ t સમયે સ્થાનાંતર આપતું આપણે સમીકરણ મેળવીશું. આ સમીકરણમાં x અને tનાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો મૂકીને જુદા-જુદા કણોનાં જુદા-જુદા સમયે કણોનાં સ્થાનાંતરો જાણી શકાય છે અને સમગ્ર

ઘટનાનું વર્ણન મેળવી શકાય છે. આવા સમીકરણને (પ્રસ્તુત કિસ્સામાં એક પારિમાણિક) **તરંગ-સમીકરણ** કહે છે.

આપણે પ્રગામી, હાર્મોનિક, એક-પારિમાણિક તરંગનું સમીકરણ મેળવીશું. ધન x દિશામાં ગતિ કરતા તરંગ માટે તરંગ-સમીકરણ આકૃતિ 8.6માં દર્શાવેલા કોઈક માધ્યમના કણોને ધ્યાનમાં લો.



તરંગ-સમીકરણ

આકૃતિ 8.6

ધારો કે, $t = 0$ સમયે કણ P શૂન્ય પ્રારંભિક કળા સાથે સરળ આવર્તદોલનો શરૂ થાય છે. એટલે કે P પાસેથી $t = 0$ સમયે તરંગ ઉદ્ભવે છે.

કણ Pનો x-યામ શૂન્ય અને પ્રારંભિક કળા શૂન્ય હોવાથી $t = 0$ સમયે તેનું સ્થાનાંતર,

$$y = A\sin\omega t \qquad (8.5.1)$$

હવે, Pમાંથી ઉદ્ભવેલ તરંગ જ્યારે x અંતર કાપશે ત્યારે, P થી x અંતરે આવેલો માધ્યમનો કણ (U) એ સરળ આવર્તગતિની શરૂઆત કરશે. તેના દોલનની કળા Pના દોલનની કળા કરતાં ઓછી હશે. ધારો કે તેની કળા P કણની કળા કરતાં δ જેટલી ઓછી છે. આથી, x અંતરે આવેલ કણની સરળ આવર્તગતિનું સમીકરણ,

$$y = A\sin(\omega t - \delta) \qquad (8.5.2)$$

ધારો કે તરંગની તરંગલંબાઈ λ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે Pથી λ અંતરે આવેલા કણની કળા એ કણ Pની કળા કરતાં 2π જેટલી ઓછી હોય છે. આથી Pથી x અંતરે આવેલા કણની કળા Pની પ્રારંભિક કળા કરતાં $\frac{2\pi x}{\lambda}$ જેટલી ઓછી હશે.

$$\therefore\ \delta = \frac{2\pi x}{\lambda} \qquad (8.5.3)$$

δનું મૂલ્ય સમીકરણ (8.5.2)માં મૂકતાં,

$$y = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

પરંતુ $\frac{2\pi}{\lambda} = k$

$$\therefore\ y = A\sin(\omega t - kx) \qquad (8.5.4)$$

અહીં $(\omega t - kx)$ને ઉદ્ગમથી x અંતરે t જેટલા સમયે તરંગની કળા કહે છે. k સદિશની દિશા તરંગ-પ્રસરણની દિશામાં લેવામાં આવે છે.

સમીકરણ (8.5.4) એ xના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતાં પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગ માટેનું તરંગ-સમીકરણ છે. **જો તરંગ xના ઘટતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતા હોય તો ઉપરના સમીકરણમાં $\omega t - kx$ને બદલે $\omega t + kx$ લેવું.**

$$y = A\sin(\omega t + kx) \qquad (8.5.5)$$

સમીકરણ (8.5.4)માં $\omega = \frac{2\pi}{T}$ અને $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ મૂકતાં

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (8.5.6)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં $\lambda = vT$ મૂકતાં

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)$$

$$y = A\sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)\ \left(\because \frac{1}{T} = f\right) \qquad (8.5.7)$$

હવે,

$$y = A\sin 2\pi\frac{f}{v}(vt - x)$$

$$\therefore\ y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\ (\because\ v = f\lambda) \qquad (8.5.8)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણો (8.5.6), (8.5.7) અને (8.5.8) એ પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગો માટેના તરંગ-સમીકરણનાં જુદાં-જુદાં સ્વરૂપો છે.

જો કણ Pની પ્રારંભિક કળા ϕ હોય તો તરંગ-સમીકરણ (8.5.4)ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$y = A\sin(\omega t - kx + \phi) \qquad (8.5.9)$$

8.6 તરંગ-ઝડપ અને કળા-ઝડપ (Wave Speed and Phase Speed)

તરંગ તેના એક આવર્તકાળ T દરમિયાન λ જેટલું અંતર કાપે છે. આથી, તરંગ-ઝડપ

$$\therefore\ v = \frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}} = \frac{\lambda}{T}$$

પરંતુ $\frac{1}{T} = f$

$$\therefore\ v = f\lambda \qquad (8.6.1)$$

$$= \frac{\lambda(2\pi f)}{2\pi}$$

પરંતુ, $2\pi f = \omega$ અને $\frac{2\pi}{\lambda} = k$

$$\therefore\ v = \frac{\omega}{k} \qquad (8.6.2)$$

અત્યાર સુધીની ચર્ચામાં આપણે જોયું કે તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ભાગ લેતા કણનો કંપવિસ્તાર (A) તેનાં દોલનોનો આવર્તકાળ (T) અને આવૃત્તિ (f) અનુક્રમે એ જ તરંગનો

કંપવિસ્તાર, તરંગનો આવર્તકાળ અને તરંગની આવૃત્તિ છે. પરંતુ **દોલન કરતાં કણનો વેગ અને તરંગનો વેગ જુદો છે.**

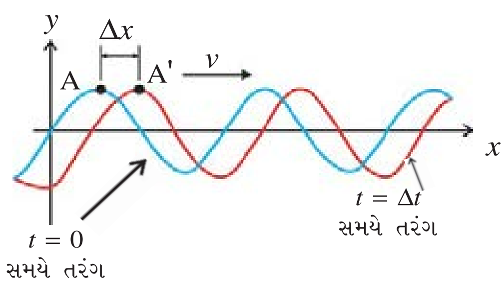
યાદ રાખો કે તરંગની આવૃત્તિ એ ઉદ્‌ગમનો ગુણધર્મ છે, જ્યારે તરંગલંબાઈ એ માધ્યમનો ગુણધર્મ છે. જુદા-જુદા માધ્યમમાં તરંગની ઝડપ જુદી-જુદી હોય છે. આથી તરંગલંબાઈ પણ જુદી-જુદી હોય છે, પરંતુ આપેલ માધ્યમમાં તરંગની ઝડપ અચળ હોય છે.

કળા-ઝડપ

આકૃતિ 8.7માં દર્શાવ્યા અનુસાર તરંગ એ xના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરે છે. અહીં સંપૂર્ણ તરંગભાત (wave pattern)એ Δt સમયમાં Δx જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે. તરંગભાત પરના દરેક બિંદુઓ (દા. ત., બિંદુ A)એ ગતિ દરમિયાન તેમનું સ્થાનાંતર જાળવી રાખે છે.(યાદ રાખો કે દોરી પરના બિંદુઓનું સ્થાનાંતર બદલાય છે, પરંતુ તરંગભાત પરનાં નહિ) તરંગભાત પરના દરેક બિંદુઓની કળા અચળ હોય છે. આકૃતિ 8.7માં A અને A'ની કળા સમાન છે. આથી,

$$\therefore \ \omega t - kx = \text{અચળ} \qquad (8.6.3)$$

અહીં, x અને t બંને બદલાય છે. જેમ t વધે છે તેમ x પણ એવી રીતે વધવો જોઈએ કે જેથી $\omega t - kx$ એ અચળ રહે. જે દર્શાવે છે કે તરંગભાત xના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરે છે.



તરંગ-ગતિ

આકૃતિ 8.7

ઉપર્યુક્ત સમીકરણનું tની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dt}(\omega t - kx) = 0$$

$$\therefore \ \omega - k\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\therefore \ \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k} \qquad (8.6.4)$$

અહીં v ને તરંગની **કળા-ઝડપ (phase speed)** કહે છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ (8.6.4) એ સમીકરણ (8.6.2)જેવું જ છે. આમ, આપણે જે તરંગ-ઝડપ શોધીએ છીએ તે ખરેખર તો તરંગની કળા ઝડપ છે.

ઉદાહરણ 1 : અમદાવાદ વિવિધભારતી પરથી પ્રસારિત રેડિયો-તરંગની આવૃત્તિ 96.7 MHz છે. આ તરંગોની તરંગલંબાઈ, તરંગ-સદિશ અને કોણીય આવૃત્તિ શોધો. રેડિયો-તરંગોની હવામાં ઝડપ 3×10^8 m/s છે.

ઉકેલ :

$f = 96.7$ MHz $= 96.7 \times 10^6$ Hz

$v = 3 \times 10^8$ m/s

તરંગ-ઝડપ, $v = f\lambda$

$$\therefore \ \lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8}{96.7 \times 10^6} = 3.102 \text{ m}$$

તરંગ-સદિશ, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$= \frac{2 \times 3.14}{3.102}$$

$$= 2.024 \text{ rad/m}$$

કોણીય આવૃત્તિ, $\omega = 2\pi f$

$= 2 \times 3.14 \times 96.7 \times 10^6$

$= 6.07 \times 10^8$ rad/s

ઉદાહરણ 2 : એક તરંગનું તરંગ-સમીકરણ

$y = 0.5\sin(x - 60t)$ cm છે.

(i) તરંગનો કંપવિસ્તાર (ii) તરંગ-સદિશ (iii) તરંગલંબાઈ (iv) તરંગની કોણીય આવૃત્તિ અને આવૃત્તિ (v) આવર્તકાળ અને (vi) તરંગની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : તરંગ-સમીકરણ,

$y = -0.5 \sin(60t - x)$ ને

$y = A \sin(\omega t - kx)$ સાથે સરખાવતાં,

(i) તરંગનો કંપવિસ્તાર A $= -0.5$ cm

(ii) તરંગ-સદિશ $k = 1$ rad/cm

(iii) તરંગ-લંબાઈ $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$$= \frac{2 \times 3.14}{1} = 6.28 \text{ cm}$$

(iv) તરંગની કોણીય આવૃતિ $\omega = 60$ rad/s

હવે, $\omega = 2\pi f$, પરથી તરંગની આવૃત્તિ

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{60}{2 \times 3.14} = 9.55 \text{ Hz}$$

(v) આવર્તકાળ $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{9.55} = 0.105$ s

(vi) તરંગ-ઝડપ $v = \frac{\omega}{k} = \frac{60}{1} = 60$ cm/s.

ઉદાહરણ 3 : એક સ્વરકાંટાની આવૃત્તિ 250 Hz છે. જ્યારે સ્વરકાંટો 50 દોલનો પૂરાં કરશે, ત્યારે તેમાંથી ઉદ્ભવતો ધ્વનિએ કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ? હવામાં ધ્વનિનો વેગ 340 m/s છે.

ઉકેલ : સ્વરકાંટામાંથી ઉદ્ભવતા તરંગની તરંગલંબાઈ,

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{250} = 1.36 \text{ m}$$

હવે, એક દોલન દરમિયાન તરંગ એ તરંગલંબાઈ (λ) જેટલું અંતર કાપે છે, આથી 50 દોલનો બાદ,

તરંગે કાપેલું અંતર $= 50 \times \lambda$

$= 50 \times 1.36 = 68$ m.

ઉદાહરણ 4 : એક વ્યક્તિ 100 m ઊંચા ટાવર પરથી એક પથ્થરને મુક્તપતન કરાવતાં તે તળાવમાં પડે છે. આ પથ્થર તળાવના પાણી સાથે અથડાતાં, તેમાંથી ઉત્પન્ન થતો ધ્વનિ એ વ્યક્તિએ પથ્થરને મુક્ત પતન કર્યા પછી કેટલા સમય પછી સંભળાશે ? ધ્વનિનો હવામાં વેગ 340 m/s છે.

ઉકેલ : ધારો કે પથ્થર ટાવરની ટોચ પરથી તળાવમાં પડતા t_1 જેટલો સમય લે છે. અને પથ્થર પાણી સાથે ટકરાતા ઉત્પન્ન થતો ધ્વનિ એ ટાવરની ટોચ સુધી પહોંચતા t_2 જેટલો સમય લે છે. આથી, ટાવર પર ઊભેલી વ્યક્તિને $t = t_1 + t_2$ સમય બાદ અથડામણનો ધ્વનિ સંભળાશે.

હવે, પથ્થરને પાણીની સપાટી સુધી પહોંચતાં લાગતા સમય t_1 નીચેના સૂત્ર પરથી શોધી શકાય.

$$s = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g\, t_1^2$$

$s = 100$ m, $v_0 = 0$, $g = 9.8$ m/s^2

$$\therefore\ 100 = 0 + \frac{1}{2}(9.8)t_1^2$$

$\therefore\ t_1 = 4.52$ s.

હવે, પાણીની સપાટી આગળથી ઉદ્ભવતા ધ્વનિને ટાવરની ટોચ સુધી પહોંચતાં લાગતો સમય,

$$t_2 = \frac{\text{અંતર}}{\text{તરંગ-ઝડપ}} = \frac{100}{340} = 0.29 \text{ s}$$

$\therefore\ t = t_1 + t_2 = 4.52 + 0.29 = 4.81$ s

ઉદાહરણ 5 : એક પરિમાણિક પ્રગામી, હાર્મોનિક લંબગત તરંગનું સમીકરણ,

$$y = 5\sin 30\pi\left(t - \frac{x}{240}\right) \text{ છે.}$$

અહીં y મીટરમાં અને t સેકન્ડમાં છે.

(i) ઉદ્ગમબિંદુએ શૂન્ય સમયે કણ ધન Y કે ઋણ Y માંથી કઈ દિશામાં ગતિ કરવાની શરૂઆત કરતું હશે ? એટલે ત્યાં પ્રથમ ગર્ત ઉત્પન્ન થશે કે શૃંગ ?

(ii) $t = 2$ s ને અંતે ઉદ્ગમબિંદુથી 480 m અંતરે આવેલ કણનું સ્થાનાંતર, કણના દોલનનો વેગ અને તરંગનો ઢાળ શોધો.

(iii) તરંગની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ :

(i) $x = 0$ પાસે $t = 0$ સમયથી શરૂ કરી y જો ઋણ દિશામાં વધતો હોય, તો ગર્ત ઉત્પન્ન થશે અને જો y ધન દિશામાં વધતો હોય, તો શૃંગ ઉત્પન્ન થશે.

અહીં, $x = 0$, પર $y = 5\sin 30\pi t$ માટે $t = 0$ સમયથી શરૂ કરતાં y ધન દિશામાં વધતો હોવાથી પહેલાં શૃંગ ઉત્પન્ન થશે.

(ii) $t = 2$ sના અંતે ઉદ્ગમબિંદુથી $x = 480$ m અંતરે સ્થાનાંતર

$$y = 5\sin 30\pi\left(2 - \frac{480}{240}\right)$$

$$= 5\sin 30\pi(0) = 0 \text{ m}$$

કણના દોલનનો વેગ,

$$v = \frac{dy}{dt} = 150\pi\cos 30\pi\left(t - \frac{x}{240}\right)$$

$$= 150\pi\cos 30\pi\left(2 - \frac{480}{240}\right)$$

$$= 150\pi \text{ m/s}$$

તરંગનો ઢાળ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5\pi}{8}\cos 30\pi\left(t - \frac{x}{240}\right)$$

$$= -\frac{5\pi}{8}\cos 30\pi\left(2 - \frac{480}{240}\right)$$

$$= -\frac{5\pi}{8}$$

(iii) આપેલ સમીકરણને,

$y = A\sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ સાથે સરખાવતાં

$\therefore$ તરંગ-ઝડપ $v = 240$ m/s

અહીં, નોંધો કે તરંગ-ઝડપ અને તરંગ-પ્રસરણમાં ભાગ લેતાં કણના દોલનનાં વેગનું મૂલ્ય સરખું નથી.

8.7 માધ્યમમાં તરંગ-ઝડપ (Speed of Waves in a Medium)

8.7.1 તણાવવાળી દોરી પર લંબગત તરંગની ઝડપ (Speed of Transverse Wave on Streched String) :

અગાઉ આપણે જોયું કે દોરીના કણો વિક્ષોભ પસાર થયા બાદ દોલન કરી, મૂળ સ્થાને પાછા આવે છે. આ માટે માધ્યમમાં પુનઃસ્થાપક બળ અને તેથી માધ્યમની સ્થિતિસ્થાપકતા આવશ્યક છે. તરંગની અસર હેઠળ દોલિત કણ કેટલું સ્થાનાંતર કરશે તે માધ્યમના જડત્વ પર આધારિત છે. આમ, **યાંત્રિક તરંગોના પ્રસરણ માટે માધ્યમમાં સ્થિતિસ્થાપકતા અને જડત્વ જરૂરી છે.** માધ્યમના આ બે ગુણધર્મો વડે તરંગની ઝડપ નક્કી થાય છે.

અભ્યાસો પરથી જણાયું છે કે, તણાવવાળી દોરી જેવા માધ્યમમાં લંબગત તરંગોની ઝડપ બે બાબતો (i) દોરીની રેખીય દળ ઘનતા (μ) અને (ii) દોરીમાંના તણાવબળ T પર આધાર રાખે છે.

અહીં, આપણે દોરી પર તરંગ-ઝડપ એ પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી મેળવીશું.

દોરીની રેખીય દળ ઘનતા એટલે એકમલંબાઈ દીઠ દોરીનું દળ.

μનું પારિમાણિક સૂત્ર,

$$\mu = \frac{\text{દોરીનું કુલ દળ}}{\text{દોરીની લંબાઈ}} = \frac{M^1}{L^1}$$

$$= M^1L^{-1}T^0$$

તણાવબળ Tનું પારિમાણિક સૂત્ર $= M^1L^1T^{-2}$

ધારો કે તરંગ-ઝડપ,

$$v = k\ \mu^a\ T^b \qquad (8.7.1)$$

અહીં, k = એ પરિમાણરહિત અંક અને $[a, b] \in$ R છે.

બન્ને બાજુનાં પરિમાણો લખતાં

$$M^0L^1T^{-1} = [M^1L^{-1}T^0]^a\ [M^1L^1T^{-2}]^b$$
$$= M^{a+b}\ L^{-a+b}\ T^{-2b}$$

બન્ને બાજુના પરિમાણો સરખાવતાં, $a + b = 0$, $-a + b = 1$ અને $-2b = -1$

આ પરથી, $a = -\frac{1}{2}$ અને $b = \frac{1}{2}$

સમીકરણ (8.7.1)માં a અને bનાં મૂલ્યો મૂકતાં,

$$v = k\ \mu^{-\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}$$

પ્રાયોગિક અને અન્ય અભ્યાસો પરથી $k = 1$ મળે છે.

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (8.7.2)$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ દર્શાવે છે કે તરંગની ઝડપએ તરંગની આવૃત્તિ કે કંપવિસ્તાર પર આધારિત નથી.

ઉદાહરણ 6 : સમાન ત્રિજ્યાઓ ધરાવતા બે તાર PQ અને QRને જોડીને તાર PQR બનાવેલ છે. તાર PQની લંબાઈ 4.8 m અને દળ 0.06 kg છે. તાર QRની લંબાઈ 2.56 m અને દળ 0.2 kg છે. તાર PQRમાં પ્રવર્તતું તણાવ 80 N છે. P છેડે ઉત્પન્ન કરેલ તરંગને R છેડે પહોંચતાં કેટલો સમય લાગશે ?

ઉકેલ : તાર PQ માટે એકમલંબાઈ દીઠ દળ,

$$\mu_1 = \frac{0.06}{4.8} = \frac{1}{80}\ \frac{kg}{m}$$

તાર QR માટે એકમલંબાઈ દીઠ દળ,

$$\mu_2 = \frac{0.2}{2.56} = \frac{10}{128}\ \frac{kg}{m}$$

$\therefore$ તાર PQમાં તરંગ-ઝડપ

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{80}{\frac{1}{80}}} = 80\ m/s$$

$\therefore$ તાર QR માં તરંગ-ઝડપ

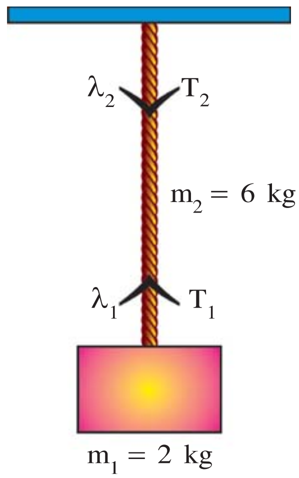
$$v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{80}{\frac{1}{128}}} = 32\ m/s$$

$\therefore$ તરંગને Pથી R પહોંચવા લાગતો સમય $t = t_1 + t_2$

$$= \frac{PQ}{v_1} + \frac{QR}{v_2}$$
$$= \frac{4.8}{80} + \frac{2.56}{32}$$
$$= 0.14\ s$$

ઉદાહરણ 7 : જડિત આધાર પરથી લટકાવેલ નિયમિત દોરડાની લંબાઈ 12 m અને દળ 6 kg છે. દોરડાના મુક્ત છેડે 2 kg દળનો બ્લૉક લટકાવેલ છે. દોરડાના નીચેના છેડે 0.06 m જેટલી તરંગલંબાઈવાળું એક તરંગ ઉત્પન્ન કરવામાં આવે છે. આ તરંગ દોરડાના ઉપરના છેડે (જડિત આધાર આગળ) પહોંચે ત્યારે તેની તરંગલંબાઈ કેટલી હશે ?

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.8

અહીં દોરડું ભારે હોવાથી દોરડાના નીચેના છેડે અને ઉપરના છેડે તણાવબળ (T) અલગ-અલગ હશે.

દોરડાનું દળ $m_2 = 6$ kg

બ્લૉકનું દળ $m_1 = 2$ kg

દોરડાના નીચેના છેડે તણાવબળ,

$T_1 = m_1 g = 2g$

દોરડાના ઉપરના છેડે તણાવબળ,

$T_2 = (m_1 + m_2)g$

$= (6 + 2)g = 8g$

હવે દોરડામાં તરંગની ઝડપ $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

$\therefore f\lambda = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ $\qquad (\because\ v = f\lambda)$

દોરડામાં પ્રસરતા તરંગની આવૃત્તિ દોરડાના દરેક ભાગમાં સમાન હોય છે. તેમજ μ પણ દોરડાના દરેક ભાગમાં સમાન છે. આથી,

$\lambda \propto \sqrt{T}$

દોરડાના નીચેના છેડે તરંગલંબાઈ $\lambda_1 \propto \sqrt{T_1}$

દોરડાના ઉપરના છેડે તરંગલંબાઈ $\lambda_2 \propto \sqrt{T_2}$

$$\therefore \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

અને $\lambda_2 = \lambda_1 \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$

$$= (0.06)\sqrt{\frac{8g}{2g}}$$

$= 0.12$ m

ઉદાહરણ 8 : એક તારની લંબાઈ 50 cm, અને આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 1 mm અને દળ 5.0 g છે. તારનો યંગ મૉડ્યુલસ 16×10^{11} N/m^2 છે. તારમાંથી પસાર થતાં તરંગની ઝડપ 80 m/s છે. આ તરંગ પ્રસરણને લીધે તારની મૂળ લંબાઈમાં થતો વધારો શોધો.

ઉકેલ :

તારની લંબાઈ $L = 50$ cm $= 50 \times 10^{-2}$ m

તારનું દળ $m = 5g = 5 \times 10^{-3}$ kg

તારના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ

$A = 1\text{mm}^2 = 1 \times 10^{-6}$ m^2

તારનો યંગ મૉડ્યુલસ $Y = 16 \times 10^{11}$ N/m^2

તારમાં તરંગની-ઝડપ $v = 80$ m/s.

તારનું એકમ લંબાઈ દીઠ દળ

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{5 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-2}} = 1 \times 10^{-2} \text{ kg/m}$$

તારમાં તરંગ-ઝડપ $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

$\therefore$ તારમાં તણાવબળ $= T = F = \mu v^2$

$= (1 \times 10^{-2})(80)^2$

$= 64$ N

યંગ મૉડ્યુલસ $Y = \dfrac{F/A}{\Delta L/L}$

$\therefore$ આથી, તારની લંબાઈમાં વધારો

$$\Delta L = \frac{FL}{AY}$$

$$= \frac{(64)(50 \times 10^{-2})}{(1 \times 10^{-6})(16 \times 10^{11})}$$

$= 0.02$ mm

8.7.2 માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગો (સંગત-તરંગો)ની ઝડપ (Speed of sound waves (longitudinal wave) in a medium) :

અભ્યાસો પરથી જાણી શકાયું છે કે માધ્યમમાં ધ્વનિ (સંગત-તરંગ) તરંગોની ઝડપ (i) માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપક અંક E અને (ii) માધ્યમની ઘનતા ρ પર આધાર રાખે છે.

આ હકીકતનો ઉપયોગ કરી અને પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી સંગત તરંગોની ઝડપ નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :

તરંગ-ઝડપ $v = kE^a \rho^b$

અહીં, k એ પરિમાણરહિત અચળાંક અને $[a, b] \in$ R છે.

હવે, $[E] = M^1L^{-1}T^{-2}$, $[\rho] = M^1L^{-3}T^0$

બંને બાજુએ પારિમાણિક સૂત્રો લખતાં,

$$M^0L^1T^{-1} = [M^1L^{-1}T^{-2}]^a\ [M^1L^{-3}T^0]^b$$
$$= M^{a+b}\ L^{-a-3b}\ T^{-2a}$$

બંને બાજુનાં પરિમાણો સરખાવતાં,

$a + b = 0, -a -3b = 1$ અને $-2a = -1$

$\therefore\ a = \frac{1}{2}$ અને $b = -\frac{1}{2}$

$$\therefore\ v = kE^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}$$

પ્રાયોગિક તેમજ બીજા અભ્યાસો પરથી $k = 1$ મળે છે.

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (8.7.3)$$

તરલ માધ્યમમાં ધ્વનિ જેવા સંગત-તરંગોનું પ્રસરણ સંઘનન-વિઘનન વડે થતું હોય છે. આ પરિસ્થિતિમાં માધ્યમમાં જુદા-જુદા વિસ્તારોમાં દબાણના ફેરફારોના કારણે અહીં સ્થિતિસ્થાપક-અંક તરીકે બલ્ક મૉડ્યુલસ (B) લેવામાં આવે છે.

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (8.7.4)$$

સળિયા જેવા રેખીય માધ્યમમાં સંગત-તરંગોનાં પ્રસરણ દરમિયાન રેખીય વિકૃતિ જોવા મળે છે. આથી સમીકરણ(8.7.3)માં સ્થિતિસ્થાપક-અંક તરીકે યંગ મૉડ્યુલસ (Y) લેતાં,

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (8.7.5)$$

ટેબલ 8.1માં જુદાં-જુદાં માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગોની ઝડપ દર્શાવી છે.

ટેબલ 8.1

કેટલાંક માધ્યમોમાં ધ્વનિની ઝડપ (માત્ર જાણકારી માટે)

માધ્યમ	ઝડપ (m/s)
વાયુઓ	
હવા (0^oC)	331
હવા (20^oC)	343
હિલિયમ	965
હાઇડ્રોજન	1284
પ્રવાહી	
પાણી (0^oC)	1402
પાણી (20^oC)	1482
દરિયાનું પાણી	1522
ઘન પદાર્થ	
ઍલ્યુમિનિયમ	6420
કૉપર	3560
સ્ટીલ	5941
રબર	54

ટેબલ (8.1) પરથી સ્પષ્ટ છે કે પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થોની ઘનતા, વાયુ કરતાં વધુ હોવા છતાં તે માધ્યમોમાં તરંગની ઝડપ વધુ છે. કારણ કે વાયુની સરખામણીમાં પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થો ઓછા દબનીય હોય છે. એટલે કે તેમનો બલ્ક મૉડ્યુલસ (B) વધુ હોય છે.

ન્યૂટનનું સૂત્ર : ન્યૂટને અનુમાન કર્યું કે વાયુ (હવા)માં ધ્વનિના પ્રસરણ દરમિયાન વાયુમાં ઉદ્‌ભવતાં સંઘનન અને વિઘનનની ઘટના સમતાપી હોવી જોઈએ. આથી સમીકરણ 8.7.4માં આઇસોથર્મલ (સમતાપી) બલ્ક મૉડ્યુલસ-અંક વાપરવો જોઈએ.

સમતાપી પ્રક્રિયા માટે PV = અચળ,

(T અચળ હોવાથી $PV = \mu RT$ = અચળ)

Vની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$P\frac{dV}{dV} + V\frac{dP}{dV} = 0$$

$$\therefore\ P = -V\frac{dP}{dV} = -\frac{dP}{dV/V} = \text{બલ્ક મૉડ્યુલસ } B$$

$$P = \text{બલ્ક મૉડ્યુલસ } B \qquad \left(\because\ B = -\frac{dP}{dV/V}\right)$$

આમ, વાયુનો આઇસોથર્મલ બલ્ક મૉડ્યુલસ (B) એ વાયુના દબાણ P જેટલો હોય છે.

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad (8.7.6)$$

આ સૂત્ર હવામાં ધ્વનિની ઝડપ શોધવા માટેનું ન્યૂટનનું સૂત્ર છે.

ઉદાહરણ 9 : ન્યૂટનના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી STP એ હવામાં ધ્વનિની ઝડપ મેળવો.

એક મોલ હવાનું દળ $= 29.0 \times 10^{-3}$ kg.

$(P = 1.01 \times 10^5$ Pa)

ઉકેલ : STPએ 1 mole હવાનું કદ $= 22.4$ L $= 22.4 \times 10^{-3}\ m^3$

આથી, STPએ હવાની ઘનતા $\rho = \frac{\text{દળ}}{\text{કદ}}$

$$\therefore\ \rho = \frac{29.0 \times 10^{-3}}{22.4 \times 10^{-3}} = \frac{29.0}{22.4} = 1.29 kg/m^2$$

$\therefore$ ન્યૂટનના સૂત્ર અનુસાર,

STP એ હવામાં ધ્વનિની ઝડપ $v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$

$$= \sqrt{\frac{1.01 \times 10^5}{1.29}} = 279.3\ m/s$$

લાપ્લાસનો સુધારો :

ન્યૂટનના સૂત્રથી મળતું ધ્વનિની ઝડપનું મૂલ્ય 279.3 m/s છે. પ્રાયોગિક રીતે STP એ મળતું મૂલ્ય 332 m/s છે. જે દર્શાવે છે કે સમીકરણ (8.7.6)માં કંઈક ક્ષતિ છે.

લાપ્લાસે સૂચવ્યું કે, જ્યાં સંઘનન રચાય છે, તે ભાગનું તાપમાન વધે છે અને જ્યાં વિઘનન રચાય છે, ત્યાં તાપમાન ઘટે છે. આથી ધ્વનિના પ્રસરણની ઘટના સમતાપી ન ગણી શકાય.

માધ્યમમાં સંઘનન અને વિઘનન રચાવાની પ્રક્રિયા એટલી ઝડપી હોય છે કે સંઘનન દરમિયાન ઉત્પન્ન થયેલ ઉષ્મા બહાર વિખેરણ પામે તે પહેલા તે સ્થાને રચાતા વિઘનન દરમિયાન શોષાઈ જાય છે. તેમજ વાયુઓની પ્રમાણમાં ઓછી ઉષ્માવાહકતા પણ ઉષ્માને બહાર ન જવા દેવામાં મદદ કરે છે. આમ, **વાયુમાં ધ્વનિ-પ્રસરણની ઘટના સમતાપી નહિ, પરંતુ સમોષ્મી છે.** આથી સમીકરણ (8.7.6)માં વાયુનો સમોષ્મી (adiabatic) બલ્ક મૉડ્યુલસ વાપરવો જોઈએ.

આદર્શવાયુની સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે

PV^{γ} = અચળ

જ્યાં, γ એ વાયુની બે વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ C_P અને C_Vનો ગુણોત્તર છે.

Vની સાપેક્ષે સમીકરણનું વિકલન કરતાં,

$$P \cdot \gamma V^{\gamma - 1} + V^{\gamma}\frac{dP}{dV} = 0$$

$$\therefore \gamma P + V\frac{dP}{dV} = 0$$

$$\therefore \frac{-dP}{dV/V} = \gamma P$$

$$\therefore B = \gamma P$$

આમ, સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે બલ્ક મૉડ્યુલસ $B = \gamma P$.

સમીકરણ (8.7.4) માં Bનું મૂલ્ય મૂકતાં, તરંગ-ઝડપ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (8.7.7)$$

હવા માટે $\gamma = 1.41$ છે અને STP એ ઝડપ v શોધતાં તે 331.6 m/s મળે છે, જે પ્રાયોગિક મૂલ્ય સાથે મળતું આવે છે. આદર્શવાયુ જેવા માધ્યમમાં તરંગ-ઝડપ મેળવવા માટે ન્યૂટનના સૂત્રને બદલે લાપ્લાસના સૂત્ર (સમીકરણ 8.7.7)નો ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

ધ્વનિની ઝડપ પર અસર કરતાં વિવિધ પરિબળો :

એક મોલ આદર્શવાયુ માટે અવસ્થા-સમીકરણ

$$PV = RT \quad (\mu = 1 \text{ mol})$$

$$\therefore P = \frac{RT}{V}$$

ધ્વનિની ઝડપના સૂત્ર $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ માં Pનું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$\therefore v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\rho V}}$$

પરંતુ, ρV = એક મોલ વાયુનું દળ = વાયુનો અણુભાર M

$$\therefore \text{ઝડપ } v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad (8.7.9)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પરથી સ્પષ્ટ છે કે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના વર્ગમૂળના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

એટલે કે, $v \propto \sqrt{T}$

જો તાપમાન અચળ રાખીને જો વાયુનું દબાણ (P) બદલવામાં આવે, તો વાયુની ઘનતા ρ પણ દબાણના સમપ્રમાણમાં બદલાતી હોવાથી $\frac{P}{\rho}$ અચળ રહે છે. આથી અચળ તાપમાને અને આર્દ્રતા (humidity) એ **વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ વાયુના દબાણ પર આધારિત નથી.**

અચળ દબાણે પાણીની બાષ્પની ઘનતા સૂકી હવાની ઘનતા કરતાં ઓછી હોય છે. આથી, **વાતાવરણમાં ભેજ વધતા $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ સૂત્ર પ્રમાણે ધ્વનિની ઝડપ વધે છે.**

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે t તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિ-તરંગની ઝડપ $v_t = v_0\left(1 + \frac{t}{546}\right)$ હોય છે. v_0 એ 0 °C તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ છે. ($t << 273$)

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ છે.

એટલે કે, $v \propto \sqrt{T}$

v_t = t °C તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ

v_0 = 0 °C તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ

$$\therefore \frac{v_t}{v_0} = \sqrt{\frac{273+t}{273}}$$

$(\because T(K) = t(°C) + 273)$

$$\therefore v_t = v_0\left(1+\frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$

હવે, દ્વિપદી વિસ્તરણનો ઉપયોગ કરતાં અને ઉચ્ચ ઘાતવાળાં પદો અવગણતાં,

$$v_t = v_0\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{t}{273}\right)$$

$$v_t = v_0\left(1+\frac{t}{546}\right)$$

[નોંધ : જો 0 °C તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ 332 m/s હોય, તો 1 °C તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ, $v_t = 332\left(1+\frac{1}{546}\right) = v_0\left(1+\frac{t}{546}\right) = 332.61$ m/s.

આમ, તાપમાનમાં 1 °C જેટલો વધારો થતાં વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપમાં 332.61 − 332 = 0.61 m/s જેટલો વધારો થાય છે.]

ઉદાહરણ 11 : 27 °C તાપમાન અને 76 cm દબાણે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ 345 m/s છે, તો 127 °C તાપમાન અને 75 cm દબાણે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : યાદ રાખો કે વાયુમાં દબાણ બદલાતા ધ્વનિની ઝડપ બદલાતી નથી. આથી,

જો v_1 અને v_2 એ અનુક્રમે 27°C અને 127°C તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ હોય તો,

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{273+127}{273+27}} = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

∴ 127°C તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ,

$$v_2 = v_1 \times \sqrt{\frac{4}{3}} = 345 \times \sqrt{\frac{4}{3}} = 398.4 \text{ m/s}$$

ઉદાહરણ 12 : STP એ સૂકી હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 332 m s^{-1} છે. ધારો કે હવામાં કદની દૃષ્ટિએ 4 ભાગ નાઇટ્રોજન અને એક ભાગ ઑક્સિજન છે. STP એ નાઇટ્રોજન અને ઑક્સિજનની ઘનતાનો ગુણોત્તર 16 : 14 હોય, તો આ સ્થિતિમાં ઑક્સિજનમાં ધ્વનિની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : હવાની ઘનતા = $\frac{\text{કુલ દળ}}{\text{કુલ કદ}}$

$$\rho_a = \frac{\text{ઑક્સિજનનું દળ + નાઇટ્રોજનનું દળ}}{\text{ઑક્સિજનનું કદ + નાઇટ્રોજનનું કદ}}$$

$$\rho_a = \frac{(V\times\rho_0)+(4V\times\rho_N)}{V+4V}$$

$$= \frac{\rho_0 + 4\rho_N}{5}$$

$$= \frac{\rho_0\left(1+4\times\frac{\rho_N}{\rho_0}\right)}{5}$$

$$= \frac{\rho_0\left(1+4\times\frac{14}{16}\right)}{5}$$

$$= 0.9\rho_0$$

ધ્વનિની ઝડપ $v \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ $\quad\left(\because v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}\right)$

∴ ઑક્સિજનમાં ધ્વનિની ઝડપ $v_0 \propto \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}$

અને હવામાં ધ્વનિની ઝડપ $v_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_a}}$

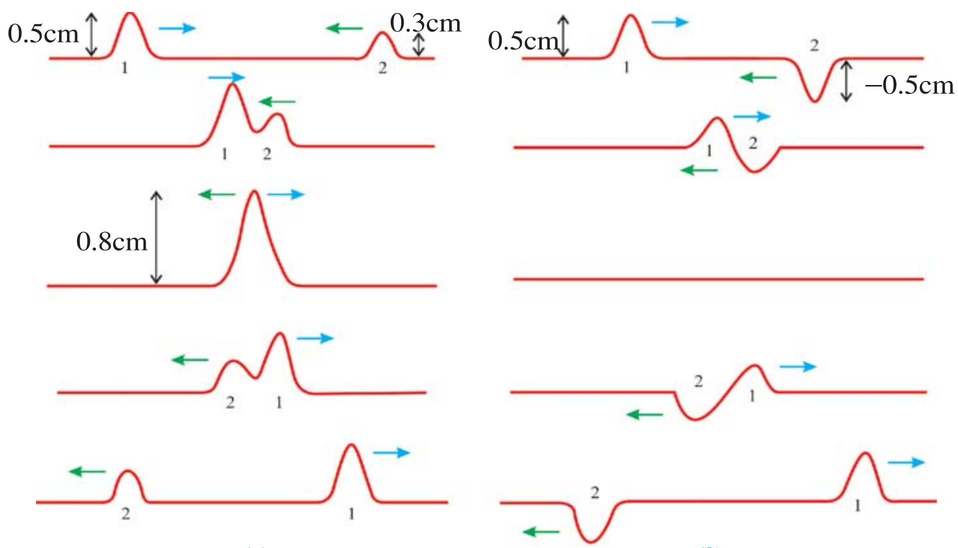
$$\therefore \frac{v_0}{v_a} = \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{0.9\rho_0}{\rho_0}} = 0.9487$$

$$\therefore v_0 = v_a \times 0.9487 = 332 \times 0.9487$$

$$= 314.77 \text{ m/s}$$

8.8 સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત (Principle of Superposition)

અત્યાર સુધી આપણે માધ્યમ (દોરી)માં પ્રસરતા ફક્ત એક જ તરંગની ચર્ચા કરી. ધારો કે બે વ્યક્તિઓ દોરીના બંને છેડેથી પકડીને દોરીને હલાવે, તો આકૃતિ 8.9(*a*)માં દર્શાવ્યા અનુસાર દોરી પર બે તરંગ-સ્પંદો એકબીજા તરફ ગતિ કરતા જણાશે. અહીં માધ્યમ એક જ હોવાથી બંને તરંગ-સ્પંદની ઝડપ સમાન હશે.



સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત

આકૃતિ 8.9

ધારો કે પહેલા તરંગમાં કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર 0.5 cm છે અને બીજા તરંગમાં તે 0.3 cm છે. અહીં બંને તરંગો એકબીજા તરફની દિશામાં ગતિ કરે છે. આથી કોઈ એક ક્ષણે તેઓ દોરીના કોઈ વિભાગ આગળ એકબીજા પર સંપાત થાય છે અને ત્યાર બાદ તેઓ પોતાની મૂળ દિશામાં પોતાનો આકાર જાળવી રાખીને ગતિ કરે છે. બંને તરંગો દોરીના જે વિભાગમાં સંપાત થાય છે, ત્યાં કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર 0.5 cm + 0.3 cm = 0.8 cm જેટલું થાય છે.

આકૃતિ 8.9(*b*)માં દર્શાવ્યા અનુસાર જો બંને વ્યક્તિઓ દોરીને એવી રીતે દોલિત કરે જેથી દોરીના એક છેડે ઉત્પન્ન થયેલ તરંગ-સ્પંદમાં મહત્તમ સ્થાનાંતર ઊર્ધ્વ દિશામાં 0.5 cm જેટલું મળે અને બીજા છેડે ઉત્પન્ન થયેલા તરંગ-સ્પંદમાં આ સ્થાનાંતર અધોદિશામાં 0.5 cm જેટલું મળે. જ્યારે આ બંને તરંગો દોરી પર ગતિ કરતાં, દોરીના કોઈ એક વિભાગમાં કોઈ એક સમયે સંપાત થશે. ત્યારે બધા કણોનું સ્થાનાંતર 0.5cm + (−0.5 cm) = 0 થશે. અહીં કણનું સ્થાનાંતર શૂન્ય થાય છે, પરંતુ કણનો વેગ શૂન્ય થતો નથી. આ સ્થિતિમાં દોરી સીધી થઈ જાય છે. ત્યાર બાદ બંને તરંગ-સ્પંદ છૂટા પડી પોતાની મૂળ દિશામાં ગતિ કરે છે.

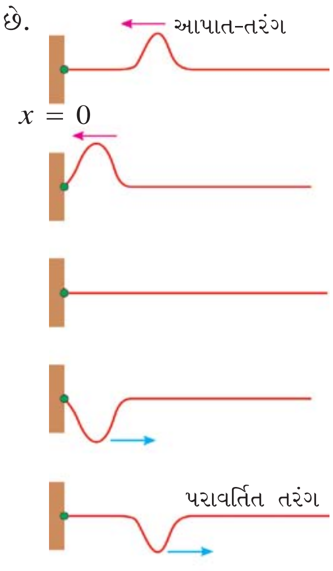
ઉપરનાં અવલોકનો પરથી સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત નીચે મુજબ લખી શકાય.

"જ્યારે માધ્યમનો કોઈ કણ એકીસાથે બે કે તેથી વધારે તરંગોની અસર હેઠળ આવે છે, એટલે કે કોઈ કણ પાસે બે કે બે કરતાં વધારે તરંગો સંપાત થાય છે, ત્યારે તે કણનું સ્થાનાંતર તે દરેક તરંગ વડે ઉદ્ભવતાં સ્વતંત્ર સ્થાનાંતરોના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે."

તરંગનું પરાવર્તન (Reflection of Waves) :

(*a*) જડિત આધાર પાસેથી તરંગનું પરાવર્તન (Reflection of waves from a rigid support) :

આકૃતિ 8.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે $y = A\sin(\omega t + kx)$ વડે રજૂ થતું એક પ્રગામી તરંગ xના ઘટતાં મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતાં $x = 0$ બિંદુ પાસે આવે છે. તરંગ જડિત આધાર પાસે આવતાં તે જડિત આધાર (દીવાલ) પર બળ લગાડે છે. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ અનુસાર દીવાલ એ દોરી પર પ્રતિક્રિયા બળ લગાડે છે. જે જડિત આધાર આગળ દોરી પર તરંગ ઉત્પન્ન કરે છે. આ તરંગ એ આપાત તરંગની વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે, જેને પરાવર્તિત તરંગ કહે છે.



દૃઢ આધાર આગળથી તરંગનું પરાવર્તન

આકૃતિ 8.10

આપાત-તરંગ $y = A\sin(\omega t + kx)$ને કારણે $x = 0$ બિંદુ પરનાં દોલનો

$$y_i = A \sin\omega t \qquad (8.8.1)$$

વડે રજૂ કરી શકાય. $x = 0$ આગળનો છેડો જડિત હોવાથી તેનું સ્થાનાંતર તો શૂન્ય જ રહેવાનું છે. આથી સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર $x = 0$ આગળ પરાવર્તિત તરંગનું સ્થાનાંતર નીચે મુજબ આપી શકાય.

$$y_r = -A \sin\omega t \qquad (8.8.2)$$

સમીકરણ (8.8.2) ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$y_r = A\sin(\omega t + \pi) \qquad (8.8.3)$$

આ દર્શાવે છે કે **તરંગ જ્યારે દૃઢ આધાર પરથી પરાવર્તન પામે છે, ત્યારે તેની કળામાં π, જેટલો વધારો થાય છે.** પરાવર્તન પામતી વખતે તરંગનો 'આકાર' ઉલટાઈ જાય છે. અર્થાત્ ગર્ત એ શૃંગરૂપે અને શૃંગ એ ગર્તરૂપે પરાવર્તિત થાય છે.

આ પરાવર્તિત તરંગ xના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતો હોવાથી તેનું તરંગ-સમીકરણ નીચે મુજબ મળે,

$$y_r = A \sin(\omega t + \pi - kx)$$

$$\therefore\ y_r = -A \sin(\omega t - kx) \qquad (8.8.4)$$

જો આપાત તરંગ વધતા xની દિશામાં ગતિ કરતું હોય, તો

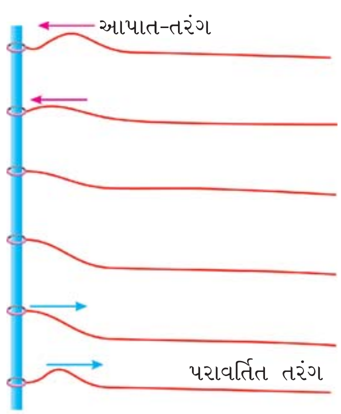
$$y_i = A \sin(\omega t - kx) \qquad (8.8.5)$$

અને પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$y_r = -A \sin(\omega t + kx) \qquad (8.8.6)$$

(*b*) મુક્ત આધાર પાસેથી તરંગનું પરાવર્તન (Reflection of waves from a free end) :

આકૃતિ 8.11માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દોરીનો એક છેડો ખૂબ જ હળવી રિંગ સાથે બાંધેલ છે અને આ રિંગ શિરોલંબ રાખેલ સળિયા પર ઘર્ષણરહિત સરકી શકે છે. અહીં દોરીનો આ છેડો મુક્ત છે તેમ કહેવાય અને આવા મુક્ત છેડેથી તરંગનું પરાવર્તન થાય ત્યારે શું થાય છે તે સમજીશું.



મુક્ત આધાર પાસેથી તરંગનું પરાવર્તન

આકૃતિ 8.11

દોરીના બીજા છેડેથી ઉત્પન્ન કરેલ તરંગનો ધારો કે શૃંગ જેવો વિભાગ રિંગ પાસે પહોંચે છે. રિંગ દૃઢ આધાર સાથે બાંધેલી ન હોવાથી રિંગ ઉપર તરફ ધકેલાય છે. આથી તેની સાથે બાંધેલી દોરી પણ ઉપર તરફ ખેંચાય છે. પરિણામે દોરીમાં આ છેડેથી પરાવર્તિત તરંગ ઉત્પન્ન થાય છે, જેની કળા આપાત તરંગ જેટલી જ હોય છે. અર્થાત્ આ પ્રકારના પરાવર્તનમાં આકાર ઊલટાતો નથી અને શૃંગ એ શૃંગરૂપે તથા ગર્ત એ ગર્તરૂપે જ પરાવર્તન પામે છે. આવી પરિસ્થિતિમાં રિંગ પર બંને તરંગો સાથે હોવાથી રિંગનું સળિયા પરનું સ્થાનાંતર આપાત-તરંગના કંપવિસ્તારથી બમણું હોય છે.

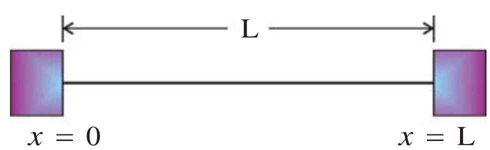
આ ચર્ચા પરથી સ્પષ્ટ છે કે જો આપાત-તરંગનું સમીકરણ $y_i = A \sin(\omega t + kx)$ હોય, તો મુક્ત છેડેથી તેના પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$y_r = A \sin(\omega t - kx) \qquad (8.8.7)$$

આમ, પ્રગામી તરંગ જ્યારે દૃઢ આધાર અથવા બંધ છેડા પરથી પરાવર્તન પામે છે ત્યારે તેની કળામાં π rad જેટલો વધારો થાય છે અને મુક્ત છેડા પરથી પરાવર્તન પામે ત્યારે તેની કળામાં કોઈ તફાવત ઉદ્‌ભવતો નથી.

8.9 સ્થિત-તરંગો (Stationary or Standing Waves)

સમાન કંપવિસ્તારવાળા અને સમાન તરંગલંબાઈવાળાં પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં અને સંપાતીકરણ અનુભવતાં તરંગોની સમાસ અસર રૂપે મળતાં તરંગો પ્રગામીપણાનો ગુણધર્મ ગુમાવી બેસે છે. આ રીતે રચાતા સમાસ-તરંગો માધ્યમમાં સ્થિત ભાત ઊપજાવે છે. આવાં તરંગોને **સ્થિત-તરંગો** કહે છે.



દૃઢ આધાર પર જડિત કરેલ દોરી

આકૃતિ 8.12

આકૃતિ 8.12માં દર્શાવ્યા મુજબ બંને છેડે દૃઢ આધાર પર જડિત કરેલી, L લંબાઈની તણાવવાળી દોરીને ધ્યાનમાં લો. આ દોરીમાં હાર્મોનિક તરંગ ઉત્પન્ન કરતાં તેનું દૃઢ આધારો પરથી વારંવાર પરાવર્તન થાય છે અને દોરીનો દરેક કણ આપાત-તરંગ અને પરાવર્તિત તરંગની અસર હેઠળ આવે છે.

ધારો કે, દોરી પર x ના વધતાં મૂલ્યોની દિશામાં ગતિ કરતું તરંગ (આપાત-તરંગ),

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx) \qquad (8.9.1)$$

વળી, દૃઢ આધાર આગળથી પરાવર્તન પામી xનાં ઘટતાં મૂલ્યોની દિશામાં ગતિ કરતું તરંગ (પરાવર્તિત તરંગ)

$$y_2 = -A\sin(\omega t + kx) \qquad (8.9.2)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર દોરીના કોઈ પણ કણનું સ્થાનાંતર,

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\sin(\omega t - kx) - A\sin(\omega t + kx)$$
$$\therefore y = -2A\cos\omega t \sin kx \text{ (જુઓ ફૂટનોટ)}$$
$$= -2A\sin kx \cos\omega t \qquad (8.9.3)$$

સમીકરણ (8.9.3)માં તરંગ-વિધેયનું સ્વરૂપ એ $f(\omega t \pm kx)$ પ્રકારનું નથી એટલે કે આ તરંગ પ્રગામી તરંગ નથી. સમીકરણ (8.9.3)એ સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ છે. **આવા તરંગ દ્વારા ઊર્જાનું વહન થતું નથી, આથી તેને સ્થિત-તરંગ કહે છે.**

સમીકરણ (8.9.3)માંનું પદ '$\cos\,\omega t$' સૂચવે છે કે દોરીનો દરેક કણ સરળ આવર્તગતિ કરે છે અને તેમના કંપવિસ્તારો $2A\sin kx$ અનુસાર કણના સ્થાન x પર આધાર રાખે છે. અહીં બધા જ કણનો કંપવિસ્તાર સમાન હોતો નથી. જે કણોના સ્થાન x એવાં છે, જેથી $\sin kx = 0$ થાય, તેવા કણોના કંપવિસ્તાર શૂન્ય છે. આવા કણોનું સ્થાનાંતર હંમેશાં શૂન્ય જ રહે છે. આવા બિંદુઓને **નિસ્પંદ-બિંદુઓ (Nodes)** કહે છે.

સ્થિત-તરંગમાં જે સ્થાનોએ કંપવિસ્તાર હંમેશા શૂન્ય રહે છે. તે સ્થાનોને નિસ્પંદ-બિંદુઓ કહે છે.

હવે, $\sin kx = 0$

$$\therefore kx = n\pi \qquad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

$$\therefore x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{2\pi/\lambda}$$

$$\therefore x = \frac{n\lambda}{2} \qquad (8.9.4)$$

આ દર્શાવે છે કે $x = 0$ થી $x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots \frac{n\lambda}{2}$ વગેરે અંતરોએ રહેલા બિંદુઓ નિસ્પંદ-બિંદુઓ છે. **બે અનુક્રમે આવતા નિસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$ છે.**

ફૂટનોટ : $\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

હવે, જે કણોના સ્થાન $\sin kx = \pm 1$ વડે આપી શકાય છે, તેવા કણો મહત્તમ કંપવિસ્તાર સાથે દોલનો કરે છે. તે બિંદુઓને **પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ (Antinodes)** કહે છે.

સ્થિત-તરંગમાં જે સ્થાનોએ કંપવિસ્તાર હંમેશા મહત્તમ રહે છે તે સ્થાનોને પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ કહે છે. આવાં બિંદુઓનો કંપવિસ્તાર 2A હોય છે.

હવે, $\sin kx = \pm 1$

$$\therefore kx = (2n - 1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\therefore x = \frac{(2n-1)\pi}{2k}$$

$$= (2n - 1)\frac{\lambda}{4} \qquad (8.9.5)$$

આમ, દોરીના $x = 0$ છેડાથી પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ અનુક્રમે $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots\ldots$ અંતરે આવેલાં છે. અહીં પણ **બે અનુક્રમે આવતાં પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$ છે.** વળી, અનુક્રમે આવતાં નિસ્પંદ-બિંદુઓ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{4}$ હોય છે.

આકૃતિ 8.13માં પ્રસ્પંદ-બિંદુઓને (Antinodes) A વડે અને નિસ્પંદ-બિંદુઓને (Nodes) N વડે દર્શાવ્યા છે.

અહીં, દોરીના બંને છેડા $x = 0$ તેમજ $x = L$ પાસે દૃઢ આધાર સાથે બાંધેલી હોવાથી તે છેડાનું સ્થાનાંતર પણ બધા જ સમયે શૂન્ય રહેવું જોઈએ.

$$\therefore \sin kL = 0 \text{ થવું જોઈએ.}$$

$$\therefore kL = n\pi \qquad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi$$

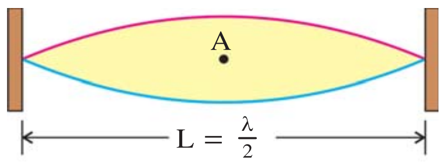
$$\therefore \lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (8.9.6)$$

આ સમીકરણ દર્શાવે છે કે, nના જુદાં-જુદાં મૂલ્યો અનુસાર, અત્રે આપેલ L લંબાઈની દોરીમાં $2L, L, \frac{2L}{3}, \frac{L}{2}, \ldots\ldots$ જેવી અમુક નિશ્ચિત તરંગલંબાઈનાં તરંગો માટે સ્થિતતરંગો જોવા મળશે. આમ, **આપેલી તણાવવાળી દોરીમાં ગમે તે તરંગલંબાઈના તરંગો ઉત્પન્ન કરી સ્થિત-તરંગોની રચના મેળવી શકાય નહિ.**

દોરી પર ઉત્પન્ન થતા સ્થિત-તરંગોની શક્ય એવી તરંગલંબાઈઓને અનુરૂપ આવૃત્તિ,

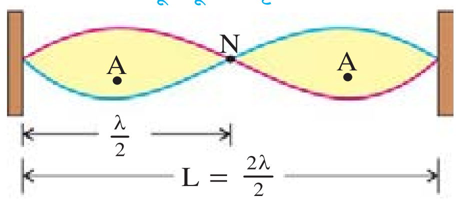
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

સમીકરણ 8.9.6 પરથી, $f_n = \frac{nv}{2L} \qquad (8.9.7)$



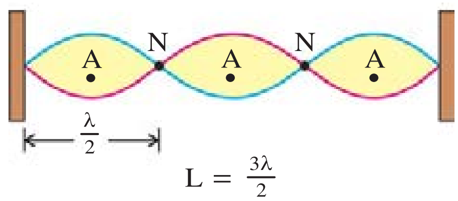
(a) $n = 1$

મૂળભૂત આવૃત્તિ



(b) $n = 2$

દ્વિતીય હાર્મોનિક અથવા પ્રથમ ઓવરટોન



(c) $n = 3$

તૃતીય હાર્મોનિક અથવા દ્વિતીય ઓવરટોન

દોરી પર સ્થિત-તરંગો

આકૃતિ 8.13

$$\text{અથવા } f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (8.9.8)$$

જ્યાં, v = દોરી પર તરંગની ઝડપ = $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

સમીકરણ (8.9.7)માં $n = 1$ મૂકતાં,

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

અહીં, f_1ને દોરીની **મૂળભૂત આવૃત્તિ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે.

$n = 2$ લેતાં,

$$f_2 = \frac{2v}{2L} = 2f_1$$

f_2 ને **દ્વિતીય (second) હાર્મોનિક** અથવા **પ્રથમ ઓવરટોન કહે છે.**

$n = 3$ લેતાં,

$$f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1$$

f_3 ને **તૃતીય હાર્મોનિક** અથવા **દ્વિતીય ઓવરટોન કહે છે.**

આમ, સમીકરણ (8.9.7)માં nના જુદાં-જુદાં મૂલ્યો લઈને દોરીના શક્ય પ્રકારનાં દોલનો મેળવી શકાય અને તેને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ શોધી ચતુર્થ.....વગેરે હાર્મોનિક્સ મેળવી શકાય.

પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય હાર્મોનિક્સ સાથે દોરી પર થતાં દોલનો આકૃતિ 8.13માં દર્શાવ્યાં છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે દોરી પર ઉત્પન્ન થતાં ગાળાઓની સંખ્યા n જેટલી છે.

આમ, જુદી-જુદી નિશ્ચિત આવૃત્તિઓ સાથેના શક્ય દોલનોને દોરીનાં **પ્રસામાન્યરીતિ દોલનો (Normal Modes of Vibration)** કહે છે.

જુદા-જુદા નૉર્મલ મોડ્સ ઑફ વાઈબ્રેશનને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ નીચેના સૂત્રથી મેળવી શકાય.

$$f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1 \text{ જ્યાં, } n = 1, 2, 3....$$

જ્યાં, દોરી પર ઉત્પન્ન થતી આવૃત્તિ f_nને n-મી હાર્મોનિક અથવા $(n-1)$મો ઓવરટોન કહે છે. અહીં, n એ દોરી પર રચાતા ગાળાઓની સંખ્યા પણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 13 : 60 cm લાંબી એક દોરીમાં ઉત્પન્ન કરેલા સ્થિત-તરંગો $y = 4\sin\left(\frac{\pi x}{15}\right)\cos(96\pi t)$ સમીકરણ વડે રજૂ કરવામાં આવે છે. અહીં x અને y cmમાં અને t સેકન્ડમાં છે.

(1) નિસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન શોધો.

(2) પ્રસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન શોધો.

(3) $x = 5$ cm અંતરે રહેલા કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર શોધો.

(4) આ સ્થિત-તરંગ જે ઘટક-તરંગોનું બનેલું હોય તે ઘટક-તરંગોનાં સમીકરણો શોધો.

ઉકેલ : $y = 4\sin\left(\frac{\pi x}{15}\right)\cos(96\pi t)$ ને $y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$ સાથે સરખાવતાં,

$$A = 2 \text{ cm}, k = \frac{\pi}{15}\frac{\text{rad}}{\text{cm}} \text{ અને } \omega = 96\pi \text{ rad/s.}$$

$$\text{પરંતુ, } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{15} \Rightarrow \lambda = 30 \text{ cm}$$

(1) નિસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન

$$= \frac{n\lambda}{2}, \text{ જ્યાં, } n = 1, 2,...$$

$$= 15 \text{ cm}, 30 \text{ cm}, 45 \text{ cm}$$

(0 cm અને 60 cm અંતરે રહેલા કણો તો જકડેલા રાખેલા છે, એટલે ગણતરીમાં તેમનો સમાવેશ કર્યો નથી.)

(2) પ્રસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન

$= (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$, જ્યાં, $n = 1, 2, 3,...$

$= 7.5$ cm, 22.5 cm, 37.5 cm, 52.5 cm

(3) $x = 5$ cm અંતરે રહેલ કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર

$= 2A\sin kx$

$= 4\sin\left(\frac{\pi x}{15}\right)$

$= 4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ($\because x = 5$ cm)

$= 4\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2\sqrt{3}$ cm

(4) $y = 4\sin\left(\frac{\pi x}{15}\right)\cos(96\pi t)$

$$=2\sin\left(\frac{\pi x}{15} + 96\pi t\right)+2\sin\left(\frac{\pi x}{15} - 96\pi t\right)$$

$\therefore$ ઘટક-તરંગ $y_1 = 2\sin\left(\frac{\pi x}{15} + 96\pi t\right)$cm અને,

$$y_2 = 2\sin\left(\frac{\pi x}{15} - 96\pi t\right)\text{cm}$$

ઉદાહરણ 14 : એક માધ્યમમાં પ્રસરતા પ્રગામી, હાર્મોનિક તરંગનું સમીકરણ $y_i = A\cos(ax + bt)$ છે, જ્યાં A, a અને b ધન અચળાંકો છે. $x = 0$ સ્થાને રાખેલ દૃઢ આધારથી આ તરંગનું પરાવર્તન થાય છે અને પરાવર્તિત તરંગની તીવ્રતા એ આપાત-તરંગની તીવ્રતાથી 0.64 ગણી છે, તો

(*a*) આપાત-તરંગની તરંગલંબાઈ અને આવૃત્તિ શોધો.

(*b*) પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ મેળવો.

(*c*) આપાત અને પરાવર્તિત તરંગોના સંપાતીકરણથી મળતા પરિણામી તરંગને પ્રગામી તરંગ અને સ્થિત-તરંગનાં સમીકરણો રૂપે દર્શાવો.

ઉકેલ :

(*a*) આપાત-તરંગ $y_i = A\cos(ax + bt)$

આ સમીકરણને તરંગ-સમીકરણ $y = A\cos(kx + \omega t)$ સાથે સરખાવતાં,

$\therefore$ તરંગ-સદિશ $k = a$

$\therefore \frac{2\pi}{\lambda} = a$

$\therefore \lambda = \frac{2\pi}{a}$

કોણીય આવૃત્તિ $\omega = 2\pi f = b$

$\therefore f = \frac{b}{2\pi}$

(*b*) તરંગ-તીવ્રતા $I \propto A^2$, જ્યાં A = કંપવિસ્તાર.

અહીં A_1 અને A_2 આપાત અને પરાવર્તિત તરંગોના કંપવિસ્તાર તથા I_1 અને I_2 અનુક્રમે તેઓની તીવ્રતાઓ છે.

$$\therefore \frac{I_2}{I_1} = \frac{(A_2)^2}{(A_1)^2}$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{\frac{1}{2}} = (0.64)^{\frac{1}{2}}$$

$\therefore A_2 = 0.8$ A ($\because A_1$ = આપાત તરંગનો કંપવિસ્તાર = A)

$\therefore$ પરાવર્તિત તરંગનો કંપવિસ્તાર $A_2 = 0.8$ A

પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ

$y_r = -A_2\cos(bt - ax)$

$\therefore y_r = -0.8\,A\cos(bt - ax)$

(*c*) પરિણામી તરંગ $y = y_i + y_r$

$= A\cos(bt + ax) - 0.8\,A\cos(bt - ax)$

$= 0.8\,A[\cos(bt + ax) - \cos(bt - ax)]$

$+ 0.2\,A\cos(bt + ax)$

$= -1.6\,A\sin(ax)\cdot\sin(bt) + 0.2\,A\cos(bt + ax)$,

જ્યાં સ્થિત-તરંગ

$y_s = -1.6\,A\sin(ax)\cdot\sin(bt)$ અને

પ્રગામી તરંગ $y_p = 0.2\,A\cos(bt + ax)$ છે.

ઉદાહરણ 15 : સોનોમીટરના તારના મુક્ત છેડે એક બ્લૉક લટકાવેલ છે. આ પરિસ્થિતિમાં તારનાં દોલનો માટે મૂળભૂત f_1 Hz છે. આ બ્લૉકને પાણીમાં ડુબાડતાં તે જ તાર માટે મૂળભૂત આવૃત્તિ f_2 Hz થાય છે. તે પછી બ્લૉકને એક પ્રવાહીમાં ડુબાડતાં આ તાર માટે f_3 Hz મૂળભૂત આવૃત્તિ મળે છે, તો બ્લૉકના દ્રવ્યની અને પ્રવાહીની વિશિષ્ટ ઘનતાઓ શોધો.

ઉકેલ : બ્લૉકને હવામાં, પાણીમાં અને પ્રવાહીમાં રાખતાં તેના પર જુદું-જુદું ઉત્પ્લાવક બળ (force of buoyancy) લાગે છે. આથી દરેક કિસ્સામાં અસરકારક વજન બદલાતાં તારમાં તણાવ બદલાય છે અને પરિણામે આપેલ લંબાઈના એક જ દ્રવ્યના તાર માટે આવૃત્તિ પણ બદલાય છે.

ધારો કે બ્લૉકનું વજન, હવામાં W_1, પાણીમાં W_2 અને પ્રવાહીમાં W_3 છે.

મૂળભૂત આવૃત્તિનું સૂત્ર $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ છે.

અહીં, L અને μ અચળ હોવાથી,

$f \propto \sqrt{T}$

$\therefore$ $T = kf^2$ જ્યાં, k = સમપ્રમાણતાનો અચળાંક

પરંતુ તણાવ $T = W$

$\therefore$ $W = kf^2$

$\therefore$ $W_1 = kf_1^2$; $W_2 = kf_2^2$; $W_3 = kf_3^2$

આર્કિમિડિઝના સિદ્ધાંત અનુસાર,

બ્લૉકના (ઘન પદાર્થના) દ્રવ્યની વિશિષ્ટ ઘનતા

$$= \frac{\text{હવામાં બ્લૉકનું વજન}}{\text{પાણીમાં બ્લૉકના વજનમાં ઘટાડો}}$$

$$= \frac{W_1}{W_1 - W_2} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}$$

પ્રવાહીની વિશિષ્ટ ઘનતા

$$= \frac{\text{પ્રવાહીમાં બ્લૉકના વજનમાં ઘટાડો}}{\text{પાણીમાં બ્લૉકના વજનમાં ઘટાડો}}$$

$$= \frac{W_1 - W_3}{W_1 - W_2} = \frac{kf_1^2 - kf_3^2}{kf_1^2 - kf_2^2}$$

$$= \frac{f_1^2 - f_3^2}{f_1^2 - f_2^2}$$

8.10 નળીમાં સ્થિત-તરંગો (Stationary Wave in Pipes)

જેમ દોરીમાં નિશ્ચિત આવૃત્તિવાળા લંબગત તરંગોનું પરાવર્તન થતાં, આપાત અને પરાવર્તિત તરંગોના સંપાતીકરણને લીધે સ્થિત-તરંગો રચાય છે તેવી જ રીતેનળી (pipe) માં રહેલા હવાના સ્તંભમાં પણ નિશ્ચિત આવૃત્તિવાળા સંગત-તરંગોના નળીના છેડેથી થતાં પરાવર્તનના કારણે સ્થિત-તરંગો રચાય છે. વાંસળી, ટ્રમ્પેટ (trumpet), ક્લેરિનેટ (clarinet) જેવાં સંગીતનાં વાદ્યો પણ આવી નળીઓ-ઑર્ગન પાઇપ્સ છે. જેમાં સ્થિર-તરંગો રચાય છે.

નળીઓ બે પ્રકારની હોય છે : (1) જે નળીમાં બંને છેડા ખુલ્લા હોય તેવી નળીને ઓપન પાઇપ (open pipe) કહે છે. દા.ત., વાંસળી. (2) જેમાં એક છેડો ખુલ્લો અને બીજો છેડો બંધ હોય તેવી નળીને ક્લોઝ્ડ પાઇપ (closed pipe) કહે છે. દા.ત., ક્લેરિનેટ.

જેમ દોરીના કિસ્સામાં જડિત છેડે હંમેશા નિસ્પંદ બિંદુ જ હોય છે, તેવી જ રીતે પાઇપના બંધ છેડેથી સંગત-તરંગનું પરાવર્તન એવી રીતે થાય છે કે તે છેડો **નિસ્પંદ-બિંદુ** જ બને. પરંતુ સંગત-તરંગની તરંગલંબાઈની સરખામણીમાં પાઇપ સાંકડી હોય, તો **ખુલ્લા છેડે (કે તેની સહેજ બહાર) પ્રસ્પંદ બિંદુ** મળે છે. (પાઇપના ખુલ્લા છેડેથી થતા સંગત તરંગોના પરાવર્તનની પ્રક્રિયા થોડી જટિલ હોય છે.)

ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં સ્થિર-તરંગો :

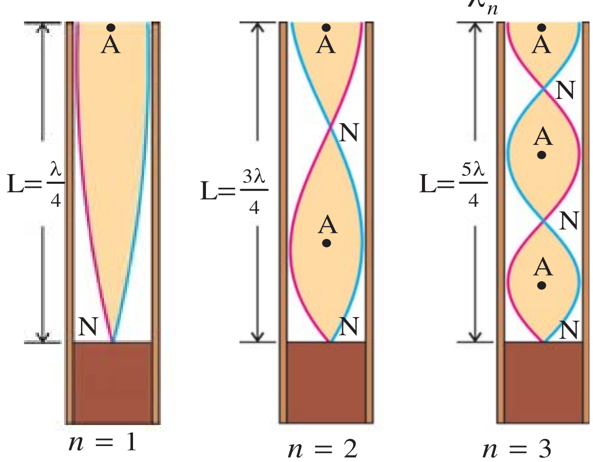
ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં સ્થિત-તરંગો મળે તે માટે તરંગલંબાઈ (λ) એવી હોવી જોઈએ કે જેથી પાઇપના બંધ છેડે નિસ્પંદ બિંદુ અને ખુલ્લા છેડે પ્રસ્પંદ-બિંદુ મળે. સ્થિત-તરંગોમાં નિસ્પંદ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}$, ...$(2n-1)\frac{\lambda}{4}$ હોય છે. આથી વ્યાપક રીતે, ક્લોઝ્ડ પાઇપની આપેલી લંબાઈ L માટે તરંગોની તરંગલંબાઈ λ એવી હોય કે જેથી,

$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$ જ્યાં, n = 1, 2, 3,.... (8.10.1)

થાય તો જ નળીમાં સ્થિત-તરંગો ઉદ્ભવે.

આથી, ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં ઉદ્ભવતાં સ્થિત-તરંગોની શક્ય એવી તરંગલંબાઈઓ નીચેના સૂત્રમાં nનાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો મૂકવાથી મળે છે. $\lambda_n = \frac{4L}{(2n-1)}$ (8.10.2)

પાઇપમાં સ્થિત-તરંગોની આવૃત્તિ $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$,



(a) મૂળભૂત આવૃત્તિ (પ્રથમ હાર્મોનિક) (b) તૃતીય હાર્મોનિક (પ્રથમ ઓવરટોન) (c) પાંચમી હાર્મોનિક (દ્વિતીય ઓવરટોન)

ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં સ્થિત-તરંગો

આકૃતિ 8.14

$$\therefore f_n = \frac{v}{4L}(2n - 1) \qquad (8.10.3)$$

જ્યાં, v એ તરંગની ઝડપ છે.

(i) $n = 1$ લેતાં,

$$f_1 = \frac{v}{4L}$$

f_1 ને **મૂળભૂત આવૃત્તિ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે (જુઓ આકૃતિ 8.14(*a*)).

(ii) $n = 2$ લેતાં,

$$f_2 = \frac{3v}{4L} = 3f_1 \qquad (\because f_1 = \frac{v}{4L})$$

f_2 ને **તૃતીય હાર્મોનિક** અથવા **પ્રથમ ઓવરટોન** કહે છે (જુઓ આકૃતિ 8.14(*b*)).

(iii) આ જ રીતે $n = 3$ લેતાં

$$f_3 = \frac{v}{4L}(2(3) - 1) = \frac{5v}{4L} = 5f_1$$

f_3 ને **પાંચમી હાર્મોનિક** અથવા **દ્વિતીય ઓવરટોન** કહે છે.

આમ, વ્યાપક રીતે ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં nમાં પ્રસામાન્ય, રીતી દોલનોની આવૃત્તિ નીચે મુજબ આપી શકાય.

$$f_n = \frac{v}{4L}(2n - 1) = (2n - 1)f_1 \qquad (8.10.4)$$

જ્યાં, $n = 1, 2, 3,....$

જ્યાં, f_n એ $(2n - 1)$મી હાર્મોનિક અથવા $(n - 1)$મો ઓવરટોન દર્શાવે છે.

આમ, ક્લોઝ્ડ પાઇપ માટે બધા જ હાર્મોનિક શક્ય નથી, મૂળભૂત આવૃત્તિના એકી પૂર્ણાંક હાર્મોનિક (f_1, $3f_1$, $5f_1$, ...) જ શક્ય છે.

[આ સંદર્ભમાં સમીકરણ (8.10.3)ને નીચે મુજબ પણ લખી શકાય.

$$f_n = nf_1 = \frac{nv}{4L} \text{ જ્યાં, } n = 1, 3, 5....$$

જ્યાં, f_n એ nમી હાર્મોનિક અથવા $\left(\frac{n-1}{2}\right)$મી ઓવરટોન કહે છે.]

નળીમાં જે આવૃત્તિઓવાળાં સ્થિત-તરંગો રચાય છે, તે આવૃત્તિઓનો (જુદા-જુદા હાર્મોનિક્સને) નળીની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ (natural or characteristics frequencies) કહે છે.

ઓપન પાઇપ (ખુલ્લી નળી)માં સ્થિત-તરંગો : ઓપન પાઇપમાં બંને છેડે પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ રચાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$, λ, $\frac{3\lambda}{2}$ ..... $\frac{n\lambda}{2}$ હોય છે. જ્યાં, $n = 1, 2, 3,.......$

આથી વ્યાપક રીતે, ઓપન પાઇપની આપેલી લંબાઈ L માટે તરંગોની તરંગલંબાઈ λ એવી હોય કે જેથી,

$$L = \frac{n\lambda}{2}$$

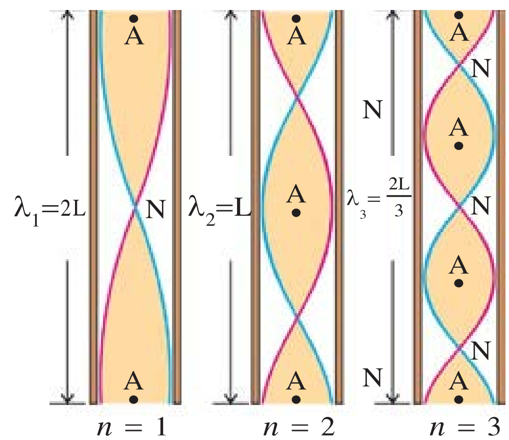
થાય તો જ નળીમાં સ્થિત-તરંગો ઉદ્ભવે,

$$\text{આથી, } \lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (8.10.5)$$

ઓપન પાઇપમાં સ્થિત-તરંગોની આવૃત્તિ,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} \qquad (8.10.6)$$

જ્યાં, v એ તરંગની ઝડપ છે.



(*a*) મૂળભૂત આવૃત્તિ (પ્રથમ હાર્મોનિક) (*b*) દ્વિતીય હાર્મોનિક (પ્રથમ ઓવરટોન) (*c*) તૃતીય હાર્મોનિક (દ્વિતીય ઓવરટોન)

ઓપન પાઇપમાં સ્થિત-તરંગો

આકૃતિ 8.15

(i) સમીકરણ (8.10.6)માં $n = 1$ મૂકતાં,

$$f_1 = \frac{v}{2L} \qquad (8.10.7)$$

અહીં, f_1 ને **મૂળભૂત આવૃત્તિ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.15*a*) જે ક્લોઝ્ડ પાઇપની મૂળભૂત આવૃત્તિ કરતાં બમણી છે. ($\because f_1 = \frac{v}{4L}$).

(ii) $n = 2$ લેતાં,

$$f_2 = \frac{2v}{2L} = \frac{v}{L} = 2f_1$$

f_2 ને **દ્વિતીય હાર્મોનિક** અથવા **પ્રથમ ઓવરટોન** કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.15*b*)

આમ, સમીકરણ (8.10.6)માં nનાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો લઈને તૃતીય, ચતુર્થ .... હાર્મોનિક્સ મેળવી શકાય છે. વ્યાપક રૂપે ઓપન પાઇપમાં **nમી હાર્મોનિક અથવા $(n - 1)$માં ઓવરટોન માટે,**

$$f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1 \qquad (8.10.8)$$

જ્યાં, n = 1, 2, 3....

આમ, **ઓપન પાઈપ માટે દરેક હાર્મોનિક (f_1, $2f_1$, $3f_1$....) શક્ય છે.**

આમ, બંને પ્રકારની પાઈપ્સમાં પણ હવાના સ્તંભ માટે નૉર્મલ મોડ્સ ઑફ વાઈબ્રેશન મળે છે.

ઉદાહરણ 16 : ક્લોઝ્ડ પાઈપનો દ્વિતીય ઓવરટોન અને ઓપન પાઈપનો તૃતીય ઓવરટોન સમાન હોય, તો બંને પાઈપની લંબાઈનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ :

ક્લોઝ્ડ પાઈપ માટે દ્વિતીય ઓવરટોન એટલે પાંચમી હાર્મોનિક્સ. આથી નીચેના સમીકરણમાં n = 5 મૂકતાં,

$$f = \frac{nv}{4L} = \frac{5v}{4L_1}.$$

ઓપન પાઈપ માટે ત્રીજી ઓવરટોન એટલે ચોથી હાર્મોનિક્સની આવૃત્તિ આથી નીચેના સમીકરણમાં n = 4 મૂકતાં, $f = \frac{nv}{2L} = \frac{4v}{2L_2}.$

હવે, બંને પાઈપ્સની આવૃત્તિ સમાન હોવાથી,

$$\frac{5v}{4L_1} = \frac{4v}{2L_2}$$

$$\therefore \frac{L_1}{L_2} = \frac{5}{8} \text{ OR } L_1 : L_2 = 5 : 8$$

ઉદાહરણ 17 : અનુનાદ-નળીના પ્રયોગમાં જ્યારે હવાના સ્તંભની (નળીની) લંબાઈ 9.75 cm હોય, ત્યારે 800 Hz આવૃત્તિવાળા સ્વરકાંટા સાથે પ્રથમ અનુનાદ થાય છે. હવે હવાના સ્તંભની (નળીની) લંબાઈ વધારીને 31.25 cm કરવામાં આવે ત્યારે પાછો તેજ સ્વરકાંટા સાથે અનુનાદ સર્જાય છે. આ અવલોકનો પરથી હવામાં ધ્વનિની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : અનુનાદ-નળીના પ્રયોગમાં ઓપન પાઈપનો એક છેડો પાણીમાં ડુબાડેલો રાખીને ક્લોઝ્ડ પાઈપની રચના મેળવી શકાય છે.

જો નળીમાંના હવાના સ્તંભને તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ જેટલી જ આવૃત્તિ ધરાવતા સ્વરકાંટાથી દોલિત કરવામાં આવે તો હવાનો સ્તંભ મોટા કંપવિસ્તાર સાથે દોલનો કરે છે. આ સ્થિતિમાં પ્રબળ અવાજ સંભળાય છે. આને **અનુનાદની ઘટના** કહે છે.

અહીંયા, f = 800 Hz, L_1 = 9.75 cm, L_2 = 31.25 cm.

અનુનાદ-નળી એ ક્લોઝ્ડ પાઈપ છે. ક્લોઝ્ડ પાઈપ માટે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ નીચેના સમીકરણ વડે અપાય છે.

$$f = (2n - 1)\frac{v}{4L}$$

પ્રથમ અનુનાદ વખતે ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં n = 1 લેતાં,

$$f = \frac{v}{4L_1}$$

$$\therefore L_1 = \frac{v}{4f}$$

બીજા અનુનાદ માટે n = 2 મૂકતાં,

$$f = (2 \times 2 - 1)\frac{v}{4L_2} = \frac{3v}{4L_2}$$

$$\therefore L_2 = \frac{3v}{4f}$$

$$\therefore L_2 - L_1 = \frac{3v}{4f} - \frac{v}{4f} = \frac{2v}{4f} = \frac{v}{2f}$$

$\therefore$ ધ્વનિની ઝડપ $v = (L_2 - L_1)(2f)$

$= (31.25 - 9.75)(2 \times 800)$

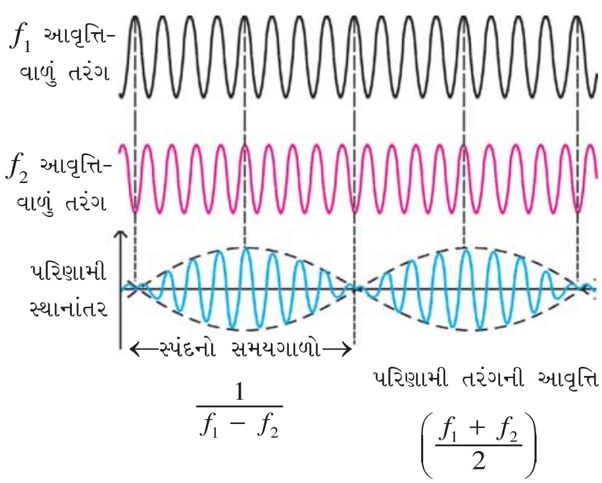
$= 34400$ cm/s

$= 344$ m/s

8.11 સ્પંદ (Beats)

આગળના પરિચ્છેદમાં આપણે એકસમાન કંપવિસ્તાર વાળા, સમાન આવૃત્તિવાળા અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં તરંગો માટે સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત લાગુ પાડ્યો, જે માધ્યમમાં અપ્રગામી એવા સ્થિત-તરંગો રચે છે.

હવે, સંપાતપણાના સિદ્ધાંતથી આપણે સમાન કંપવિસ્તારવાળાં પણ સહેજ જુદી પડતી આવૃત્તિવાળાં હાર્મોનિક તરંગો માધ્યમમાં એક જ દિશામાં ગતિ કરે, તો માધ્યમનું કણ કેવી દોલિત ગતિ કરશે તેનો અભ્યાસ કરીશું.



સ્પંદની ઘટના

આકૃતિ 8.16

ધારો કે માધ્યમમાં પ્રસરતાં બે હાર્મોનિક તરંગો,

$y_1 = A \sin \omega_1 t = A \sin 2\pi f_1 t$ અને

$y_2 = A \sin \omega_2 t = A\sin 2\pi f_2 t$

અહીં, સરળતા ખાતર આપણે બંને તરંગોની પ્રારંભિક કળા શૂન્ય લીધી છે. f_1 અને f_2 એ અનુક્રમે પ્રથમ અને બીજા તરંગની આવૃત્તિઓ છે. યાદ રાખો કે આપણે અહીં બંને તરંગોની અસર હેઠળ માધ્યમના કોઈ એક કણનું અવલોકન કરી રહ્યા છીએ.

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર t સમયે કથિત કણનું સ્થાનાંતર y હોય તો,

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A \sin 2\pi f_1 t + A \sin 2\pi f_2 t$$

$$\therefore\ y = [2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t]\ \sin 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t \quad (8.11.1)$$

$$y = A'\sin 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$$

અથવા $y = A'\sin 2\pi\ ft$ (8.11.2)

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ દર્શાવે છે કે કથિત કણનું પરિણામી દોલન $f = \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)$ આવૃત્તિ સાથેનાં આવર્તદોલનો છે. f એ બંને તરંગોની સરેરાશ આવૃત્તિ દર્શાવે છે. આ દોલનોનો કંપવિસ્તાર,

$$A' = 2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \quad (8.11.3)$$

કંપવિસ્તાર સમય સાથે આવર્ત રીતે બદલાતો જાય છે. કંપવિસ્તારનું આ પદ સમયમાં આવર્ત-વિધેય છે. આ વિધેયની આવૃત્તિ $\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) = f\,'$ છે. આથી, તેનો આવર્તકાળ,

$$T = \frac{1}{f'} = \frac{2}{f_1 - f_2} \quad (8.11.4)$$

હવે, એક આવર્તકાળ (T) જેટલા સમયગાળા દરમિયાન cosine વિધેય બેવાર મહત્તમ મૂલ્યો અને બે વાર શૂન્ય મૂલ્ય ધારણ કરે છે. તેથી એકમસમયમાં આ વિધેય $f_1 - f_2$ વખત મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે છે. અર્થાત્ કણનાં પરિણામી દોલનોનો કંપવિસ્તાર એકમસમયમાં $f_1 - f_2$ વખત મહત્તમ અને $f_1 - f_2$ વખત શૂન્ય બને છે.

ફૂટનોટ : $\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

જો તરંગો ધ્વનિ-તરંગો હોય તો ધ્વનિની પ્રબળતા કંપવિસ્તારના વર્ગ ના સમપ્રમાણમાં ($I \propto A^2$) હોવાથી બંને તરંગો માધ્યમના જે વિસ્તારમાં સંપાત થાય છે, ત્યાં એકમસમયમાં ધ્વનિ $f_1 - f_2$ વખત મહત્તમ અને $f_1 - f_2$ વખત શૂન્ય થાય છે.

આમ, **સમાન કંપવિસ્તારવાળા પણ સહેજ જુદી પડતી આવૃત્તિઓવાળાં તરંગોના સંપાતીકરણને કારણે આવર્ત રીતે કંપવિસ્તાર અને પરિણામે ધ્વનિની પ્રબળતા મહત્તમ બનવાની ઘટનાને સ્પંદ કહે છે. એકમસમય દીઠ સ્પંદની સંખ્યા $f_1 - f_2$ છે.** જેને સ્પંદની આવૃત્તિ પણ કહે છે.

નોંધ : ધ્વનિના કિસ્સામાં સ્પંદ સ્પષ્ટ રીતે અનુભવાય તે માટે $f_1 - f_2$ આશરે 6થી 7 કરતાં વધારે ન હોવો જોઈએ.

સ્પંદનો અનુભવ કરવા માટે સમાન આવૃત્તિવાળા બે સ્વરકાંટા લો. તેમાંથી એક સ્વરકાંટાનાં પાંખિયાં પર મીણ ચોંટાડો. આમ, કરવાથી તેની આવૃત્તિ થોડી ઘટશે. (જો તેના પાંખિયાને ઘસવામાં આવે તો સ્વરકાંટાની આવૃત્તિ વધે છે.) હવે બંને સ્વરકાંટાને કંપિત કરી પાસ પાસે રાખતા તમને નિયમિત સમયાંતરે ધ્વનિમાં થતી પ્રબળતાના ફેરફારનો અનુભવ થશે. સંગીતકારો તેમનાં જુદાં-જુદાં વાંજિત્રોને tune કરવા માટે સ્પંદની ઘટનાનો ઉપયોગ કરે છે.

ઉદાહરણ 18 : સ્વરકાંટો A અને સ્વરકાંટો B ને એક સાથે કંપિત કરતાં 8 સેકન્ડમાં 20 સ્પંદ ઉત્પન્ન થાય છે. કોઈ એક સ્વરકાંટા પર મીણ લગાડતાં તેઓ 8 સેકન્ડમાં 32 સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે. જે સ્વરકાંટા પર મીણ લગાવ્યું નથી, તેની આવૃત્તિ 512 Hz હોય, તો બીજા સ્વરકાંટાની આવૃત્તિ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સ્વરકાંટા B પર મીણ લગાવવામાં આવે છે. સ્વરકાંટા Aની આવૃત્તિ

$f_A = 512$ Hz.

સ્વરકાંટાની B મૂળ આવૃત્તિ $f_B = ?$

મીણ લગાડ્યા પહેલા, એકમસમયમાં ઉત્પન્ન થતાં,

સ્પંદોની સંખ્યા $= \frac{20}{8} = 2.5$ Hz.

$\therefore$ આથી, મીણ લગાવ્યા પહેલાં સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ

$512 + 2.5 = 514.5$ Hz

અથવા $512 - 2.5 = 509.5$ Hz

હવે, સ્વરકાંટા B પર મીણ લગાવ્યા બાદ

એકમ સમયમાં ઉત્પન્ન થતાં સ્પંદોની સંખ્યા

$= \frac{32}{8} = 4$ Hz.

આથી મીણ લગાવ્યા બાદ સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ,

$512 + 4 = 516$ Hz

અથવા $512 - 4 = 508$ Hz

પરંતુ, મીણ લગાવ્યા બાદ સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ ઘટશે. ઉપર્યુક્ત ગણતરીમાં જોઈ શકાય છે કે મીણ લગાવ્યા પહેલાં સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ 509.5 Hz અને ત્યાર બાદ તે 508 Hz થાય છે.

આથી, સ્વરકાંટા Bની મૂળ આવૃત્તિ 509.5 Hz હશે.

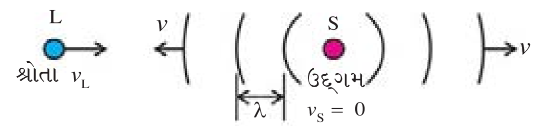
8.12 ડૉપ્લર-અસર (Doppler Effect)

જ્યારે ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ અથવા શ્રોતા અથવા બંને હવાના માધ્યમની સાપેક્ષે અને એકબીજાની સાપેક્ષે ગતિ કરે ત્યારે શ્રોતા દ્વારા અનુભવાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ, ઉદ્‌ગમ દ્વારા ઉત્સર્જાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ કરતાં જુદી સંભળાય છે. આ ઘટનાને **ડૉપ્લર અસર** કહે છે. આ અસર ક્રિશ્ચયન જ્હૉન ડૉપ્લર (1803–1853) નામના ઑસ્ટ્રિયન વિજ્ઞાનીએ શોધી હતી.

આપણી તરફ ગતિ કરતી ટ્રેનની વ્હીસલની આવૃત્તિ મૂળ આવૃત્તિ કરતાં વધુ અનુભવાતાં વ્હીસલનો ધ્વનિ વધુ તીક્ષ્ણ લાગે છે. ટ્રેન બરાબર આપણી પાસેથી પસાર થાય ત્યારે અનુભવાતી આવૃત્તિ એ મૂળ ઉત્સર્જાતિ આવૃત્તિ જેટલી અનુભવાય છે અને ટ્રેન આપણાથી દૂર જાય ત્યારે અનુભવાતી આવૃત્તિ એ મૂળભૂત આવૃત્તિ કરતાં ઓછી હોઈ અવાજ ઓછો તીક્ષ્ણ લાગે છે.

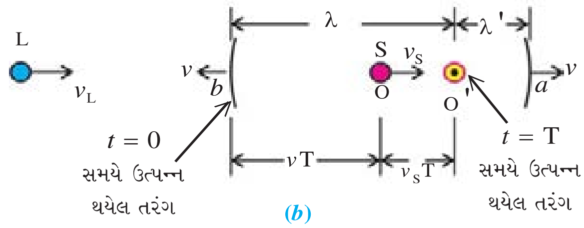
ડૉપ્લર અસર સમજવા માટે આપણે આકૃતિ 8.17 માં દર્શાવ્યા અનુસાર સુરેખ પથ પર, સ્થિર હવા (માધ્યમ)ની સાપેક્ષે શ્રોતાનો વેગ v_L અને ધ્વનિ ઉદ્‌ગમનો વેગ v_S લઈશું. તેમજ શ્રોતાથી ઉદ્‌ગમ તરફ જતી દિશામાંના વેગોને ધન ગણીશું અને તેનાથી વિરુદ્ધ દિશામાંના વેગોને ઋણ ગણીશું. ધ્વનિની ઝડપ v હંમેશાં ધન ગણીશું. આવી પ્રણાલિકા સ્વીકારવાથી એક વ્યાપક પરિણામ મેળવી શકાય છે અને બીજા કિસ્સાઓ તેના ખાસ કિસ્સા તરીકે ચર્ચી શકાય છે.

ગતિમાન શ્રોતા : ધારો કે શ્રોતા L એ v_L વેગથી સ્થિર ધ્વનિ ઉદ્‌ગમ S તરફ ગતિ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.17) ધ્વનિ-ઉદગમમાંથી ઉત્સર્જાતાં તરંગોની આવૃત્તિ f_S છે. આથી તેમની તરંગલંબાઈ $\lambda = \frac{v}{f_S}$ થશે. જ્યાં v એ ધ્વનિ-તરંગનો વેગ છે.



(a)

શ્રોતા ગતિમાં અને ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ સ્થિર



(b)

શ્રોતા અને ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ બંને ગતિમાં

ડૉપ્લર અસર

આકૃતિ 8.17

આ તરંગો શ્રોતા તરફ ગતિ કરતાં હોવાથી, શ્રોતાની સાપેક્ષે ધ્વનિ-તરંગોનો વેગ $v + v_L$ થશે. આથી, શ્રોતા વડે અનુભવાતી આવૃત્તિ

$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda} \qquad (8.12.1)$$

ગતિમાન ઉદ્‌ગમ અને ગતિમાન શ્રોતા : હવે, ધારો કે ધ્વનિ ઉદ્‌ગમ એ v_S જેટલા વેગથી L થી S તરફની દિશામાં ગતિ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.17 *b*).

$t = 0$ સમયે ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ (S) એ O સ્થાન પર અને $t = T$ સમયે તે O'સ્થાન પર છે, જ્યાં $T = \frac{1}{f_S}$ એ ઉદ્‌ભવતાં તરંગનો આવર્તકાળ છે.

આ T સમયમાં ધ્વનિ ઉદ્‌ગમે કાપેલું અંતર, $OO' = v_S T$ થશે અને ધ્વનિ ઉદ્‌ગમે $t = 0$ સમયે ઉત્પન્ન કરેલું તરંગ (શૃંગ) એ T સમયમાં vT અંતર કાપશે. આકૃતિ પરથી, $Oa = Ob = vT$.

હવે, $t = T$ સમયે ઉદ્‌ગમ O' પાસે હશે ત્યારે તે બીજું ક્રમિક ધ્વનિ તરંગ (શૃંગ) ઉત્પન્ન કરે છે અને શ્રોતા તરફ ગતિ કરતું તરંગ O'b વચ્ચે અને શ્રોતાથી દૂર જતું તરંગ O'a વિસ્તારમાં હશે.

શ્રોતા તરફ જતાં તરંગની તરંગલંબાઈ,

λ = O'b વિસ્તારમાં બે ક્રમિક તરંગ (શૃંગ) વચ્ચેનું અંતર

$= v_S T + vT$

$$\therefore \lambda = \frac{v_S + v}{f_S} \quad (\because \ T = \frac{1}{f_S}) \qquad (8.12.3)$$

સમીકરણ (8.12.1) માંથી λ નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} \cdot f_S \qquad (8.12.3)$$

$$\text{અથવા} \quad \frac{f_L}{v + v_L} = \frac{f_S}{v + v_S} \qquad (8.12.4)$$

આકૃતિ (8.17) પરથી સ્પષ્ટ છે કે ધ્વનિ-ઉદ્ગમની ગતિને લીધે ઉદ્ગમના આગળના વિસ્તાર (O'a) માં તરંગો દબાય છે અને તરંગલંબાઈ ઘટે છે, જ્યારે પાછળના વિસ્તારમાં (O'b) તરંગ ફેલાય છે અને તેની તરંગલંબાઈ વધે છે. અહીં, તરંગ એક જ માધ્યમ (હવા)માં પ્રસરતું હોવા છતાં તેની તરંગલંબાઈ બદલાય છે ? કેમ આમ થયું ? આ માટે તરંગ અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમનું સાપેક્ષ સ્થાનાંતર જવાબદાર છે.

કેટલાક ખાસ કિસ્સાઓ :

(i) શ્રોતા સ્થિર હોય અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ શ્રોતા તરફ ગતિ કરતું હોય, તો આપણે ઉપર આપેલી વેગોની સંજ્ઞાની પ્રણાલિકા અનુસાર સમીકરણ (8.12.3)માં $v_L = 0$ અને $v_S = -v_S$ લેતાં,

$$\text{શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ } f_L = \frac{v}{v - v_S} f_S$$

આ દર્શાવે છે કે શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ એ મૂળ આવૃત્તિ કરતાં ઊંચી આવૃત્તિ સંભળાશે. ($f_L > f_S$)

(ii) શ્રોતા સ્થિર હોય અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ શ્રોતાથી દૂર થાય તે કિસ્સામાં $v_L = 0$ અને $v_S = +v_S$ થશે.

$$\text{શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ } f_L = \frac{v}{v + v_S} f_S.$$

આ દર્શાવે છે કે $f_L < f_S$ એટલે કે શ્રોતાને મૂળ આવૃત્તિ કરતાં નીચી આવૃત્તિ સંભળાશે.

(iii) શ્રોતા અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ બંને એકબીજાં તરફ ગતિ કરતાં હોય, તો $v_L = +v_L$ અને $v_S = -v_S$ થશે. આથી શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ,

$$f_L = \frac{v + v_L}{v - v_S} f_S$$

આ કિસ્સામાં પણ $f_L > f_S$ થશે.

(iv) શ્રોતા અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ એકબીજાંથી દૂર જતાં હોય તે કિસ્સામાં $v_L = -v_L$ અને $v_S = +v_S$ લેવા પડે.

$$\therefore f_L = \frac{v - v_L}{v + v_S} f_S$$

આ કિસ્સામાં $f_L < f_S$ થશે.

આ ગણતરીમાં આપણે માધ્યમ (હવા)ને સ્થિર ધારેલ છે. જો પવન ધ્વનિની ગતિની દિશામાં જ (ઉદ્ગમથી શ્રોતા તરફ) v_w જેટલા વેગથી ગતિ કરતો હોય, તો સમીકરણ 8.12.3માં ધ્વનિ-તરંગોનો વેગ vને બદલે $v + v_w$ અને જો પવન ધ્વનિ-તરંગોની વિરુદ્ધ દિશામાં (શ્રોતાથી ઉદ્ગમ તરફ) ગતિ કરતો હોય તો ધ્વનિ-તરંગોનો વેગ $v - v_w$ લેવો.

આવા બધા કિસ્સાઓમાં આપણે શ્રોતા અને ઉદ્ગમનો વેગ ધ્વનિના વેગ કરતાં ઓછો ધાર્યો છે.

ઉદાહરણ 19 : એક પોલીસકારની સાઇરનમાંથી ઉદ્ભવતાં ધ્વનિની આવૃત્તિ 300 Hz છે. ધ્વનિની હવામાં ઝડપ 340 m/s છે. (a) પોલીસકાર સ્થિર હોય, ત્યારે સાયરનમાંથી ઉદ્ભવતા તરંગની તરંગલંબાઈ શોધો. (b) જો પોલીસકાર 108 km/hની ઝડપે ગતિ કરતી હોય તો કારની આગળના વિસ્તારમાં અને કારની પાછળના વિસ્તારમાં ધ્વનિ-તરંગોની તરંગલંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : (a) પોલીસકાર સ્થિર હોય ત્યારે,

$f_S = 300$ Hz, $v = 340$ m/s.

સાયરનમાંથી ઉદ્ભવતાં તરંગની તરંગલંબાઈ

$$\lambda = \frac{v}{f_S} = \frac{340}{300} = 1.13 \text{ m.}$$

(b) પોલીસકારની ઝડપ $v_S = 108$ km/h $= 30$ m/s.

$$\text{હવે } f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S$$

ગતિમાન કારની આગળના વિસ્તારમાં શ્રોતા ઊભો હોય, તો $v_L = 0$ થશે અને $v_S = -v_S$

$$\therefore f_{front} = \frac{v}{v - v_S} f_S$$

$$\therefore \frac{v}{\lambda_{\text{front}}} = \frac{v}{v - v_S} f_S$$

$$\therefore \lambda_{\text{front}} = \frac{v - v_S}{f_S} = \frac{340 - 30}{300} = 1.033 \text{ m}$$

હવે, ગતિમાન પોલીસકારની પાછળના વિસ્તાર માટે $v_L = 0$ અને $v_S = +v_S$.

$$f_{\text{behind}} = \frac{v}{v + v_S} f_S$$

$$\therefore \lambda_{\text{behind}} = \frac{v + v_S}{f_S} = \frac{340 + 30}{300} = 1.233\text{m}.$$

ઉદાહરણ 20 : દરિયામાં સ્થિર રહેલી સબમરીનમાં ગોઠવેલ SONAR તંત્રમાંથી ઉદ્દ્ભવતાં ધ્વનિ-તરંગોની આવૃત્તિ 40 kHz છે. દુશ્મનની સબમરીન એ SONAR તંત્ર તરફ 360 kmh^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરી રહી છે. દુશ્મનની સબમરીન દ્વારા પરાવર્તિત થતાં ધ્વનિની આવૃત્તિ કેટલી હશે ? પાણીમાં ધ્વનિ-તરંગોની ઝડપ 1450 m s^{-1} છે.

ઉકેલ : $f_S = 40$ kHz, $v = 1450$ m/s.

અહીં, SONAR માંથી ઉદ્દ્ભવતાં ધ્વનિ-તરંગની આવૃત્તિ બે તબક્કામાં બદલાય છે.

(i) SONAR થી દુશ્મનની ગતિમાન સબમરીન તરફ જતાં આવૃત્તિ બદલાશે. આ કિસ્સામાં SONAR એ ધ્વનિ ઉદ્દ્ગમ (S) તરીકે અને સબમરીન એ શ્રોતા (L) તરીકે વર્તશે.

આથી, $v_S = 0$ અને

$$v_L = 360 \text{ km/h} = \frac{360 \times 1000}{3600} = 100 \text{ m/s}$$

હવે, $$f_{L_1} = \frac{v + v_L}{v + v_S} \times f_S$$

$$= \frac{1450 + 100}{1450 + 0} \times 40 \times 10^3$$

$$= 42.758 \text{ kHz}$$

(ii) બીજા તબક્કામાં દુશ્મન સબમરીન એ 42.758 kHzની આવૃત્તિને પરાવર્તિત કરે છે. આ કિસ્સામાં સબમરીન એ ધ્વનિ-ઉદ્દ્ગમ (S) તરીકે અને SONAR એ શ્રોતા (L) તરીકે વર્તશે.

$f_S = 42.758$ kHz, $v_L = 0$, $v_S = -100$ m/s

પરાવર્તિત તરંગની આવૃત્તિ,

$$f_{L_2} = \frac{v + v_L}{v + v_S} \times f_S$$

$$= \frac{1450 + 0}{1450 - 100} \times 42.758 \times 10^3$$

$$= 45.92 \text{ kHz}$$

આમ, સબમરીનથી પરાવર્તિત થઈ SONAR તરફ જતાં ધ્વનિની આવૃત્તિ 45.92 kHz હશે.

સારાંશ

1. **તરંગ :** માધ્યમ (કે અવકાશ)માં વિક્ષોભની ગતિને તરંગ-સ્પંદ અથવા સામાન્ય રીતે તરંગ કહે છે.
2. **તરંગનો કંપવિસ્તાર :** તરંગમાં ‘કણો’ના દોલનના કંપવિસ્તારને તરંગનો કંપવિસ્તાર (A) કહે છે.
3. **તરંગલંબાઈ અને આવૃત્તિ :** તરંગ-પ્રસરણમાં જે બે ક્રમિક કણોના દોલનની કળાનો તફાવત 2π rad હોય, તેમની વચ્ચેના અંતરને તરંગની તરંગલંબાઈ (λ) કહે છે.

   તરંગ-પ્રસરણમાં માધ્યમના કણોના દોલનની આવૃત્તિને તરંગની આવૃત્તિ (f) કહે છે.

   $$v = f\lambda = \frac{\omega}{k}$$

   જ્યાં, v એ માધ્યમમાં તરંગની ઝડપ છે.
4. **યાંત્રિક-તરંગો :** જે તરંગોને પ્રસરવા માટે સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમની જરૂર પડે છે, તેને યાંત્રિક-તરંગો કહે છે.
5. **લંબગત અને સંગત-તરંગો :** તરંગમાં માધ્યમના કણોના સ્થાનાંતર (દોલન)ની દિશા તરંગ પ્રસરણની દિશાને લંબ હોય તેવા તરંગને લંબગત તરંગ કહે છે.

જે તરંગમાં માધ્યમના કણોનું સ્થાનાંતર તરંગ-પ્રસરણની દિશા પર જ હોય, તેવા તરંગને સંગત-તરંગ કહે છે.

6. **તરંગ-સમીકરણ :** એક પારિમાણિક તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ભાગ લેતાં દરેક કણનું કોઈ પણ સમયે સ્થાનાંતર દર્શાવતા સમીકરણને તરંગ-સમીકરણ કહે છે. તરંગ-સમીકરણનાં જુદાં-જુદાં સ્વરૂપો નીચે મુજબ છે :

(i) $y = \mathrm{A} \sin (\omega t - kx)$, (ii) $y = \mathrm{A} \sin \left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{x}{\lambda}\right)$,

(iii) $y = \mathrm{A} \sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)$, (iv) $y = \mathrm{A} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણો xનાં વધતાં મૂલ્યોની દિશામાં ગતિ કરતાં તરંગ માટે છે. જો તરંગ xનાં ઘટતાં મૂલ્યોની દિશામાં પ્રસરતું હોય, તો સમીકરણમાં '–' ને બદલે '+' મૂકવું.

7. યાંત્રિક-તરંગોના પ્રસરણ માટે માધ્યમની સ્થિતિસ્થાપકતા અને જડત્વ જરૂરી છે.

8. તણાવવાળી દોરી જેવા માધ્યમમાં લંબગત તરંગનો વેગ $v = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}$. જ્યાં, T = દોરીમાં તણાવ, μ = એકમલંબાઈ દીઠ દોરીનું દળ = $\frac{m}{\mathrm{L}}$

9. સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગનો વેગ $v = \sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\rho}}$. જ્યાં, E = માધ્યમનો સ્થિતિસ્થાપક-અંક, ρ = માધ્યમની ઘનતા

વાયુ જેવા તરલ માધ્યમમાં સંગત-તરંગનો વેગ $v = \sqrt{\frac{\mathrm{B}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma \mathrm{P}}{\rho}}$. જ્યાં, B = બલ્ક મૉડ્યુલસ

$\gamma = \frac{\mathrm{C_P}}{\mathrm{C_V}} = 1.41$ (હવા માટે)

સળિયા જેવા રેખીય માધ્યમમાં સંગત-તરંગોનો વેગ : $v = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}$

જ્યાં, γ = યંગ મૉડ્યુલસ, ρ = માધ્યમની ઘનતા, વાયુમાં ધ્વનિનો વેગ (અચળ દબાણે અને આદ્રતાએ) તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના વર્ગમૂળના સમપ્રમાણમાં હોય છે. $v = \sqrt{\frac{\gamma \mathrm{RT}}{\mathrm{M}}}$

$\therefore v \propto \sqrt{\mathrm{T}}$. ધ્વનિનો વેગ દબાણના ફેરફાર સાથે બદલાતો નથી.

10. **સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત :** જ્યારે માધ્યમના કોઈ કણ પાસે બે કે બે કરતાં વધારે તરંગો સંપાત થાય છે, ત્યારે તે કણનું સ્થાનાંતર તે દરેક તરંગ વડે ઉદ્ભવતા સ્વતંત્ર સ્થાનાંતરોના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે.

11. **સ્થિત-તરંગો :** સમાન કંપવિસ્તારવાળાં અને સમાન આવૃત્તિઓવાળાં પણ પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા અને સંપાતીકરણ અનુભવતાં તરંગોની સમાસ અસર રૂપે મળતાં તરંગો પ્રગામીપણાના ગુણધર્મ ગુમાવી બેસે છે. આવાં તરંગોને સ્થિત-તરંગો કહે છે.

સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ $y = -2\mathrm{A}\sin kx \cos\omega t$, આ સ્થિત-તરંગનો કંપવિસ્તાર $2\mathrm{A} \sin kx$

સ્થિત-તરંગમાં નિસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન $x_n = \frac{n\lambda}{2}$.

જ્યાં, n = 1, 2, 3..... આ બિંદુઓ પાસે કંપવિસ્તાર શૂન્ય હોય છે.

સ્થિત-તરંગમાં પ્રસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન $x_n = (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$

જ્યાં, n = 1, 2, 3,.... આ બિંદુઓ પાસે કંપવિસ્તાર 2A હોય છે.

12. બંને છેડે તણાવ સાથે બાંધેલી દોરીમાં ઉદ્ભવતા નૉર્મલ મોડ્સ ઑફ વાઈબ્રેશનને અનુરૂપ શક્ય આવૃત્તિઓ,

$f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ જ્યાં, n = 1, 2, 3......

13. ક્લોઝ્ડ પાઈપમાં સ્થિત તરંગભાત મેળવવા માટે શક્ય તરંગલંબાઈઓ,

$\lambda_n = \frac{4L}{(2n-1)}$ અને પાઈપની લંબાઈ શક્ય આવૃત્તિઓ $f_n = (2n-1)\frac{v}{4L} = (2n-1)f_1$

જ્યાં, n = 1, 2, 3,..... અને L = પાઈપની લંબાઈ

ક્લોઝ્ડ પાઈપમાં f_1, $3f_1$, $5f_1$, ... જેવી હાર્મોનિક જ શક્ય છે.

14. ઓપન પાઈપમાં સ્થિત તરંગભાત મેળવવા માટે શક્ય તરંગલંબાઈઓ,

$\lambda_n = \frac{2L}{n}$ જ્યાં, n = 1, 2, 3, ... અને L = પાઈપની લંબાઈ

શક્ય આવૃત્તિઓ $f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1$

ઓપન પાઈપમાં f_1, $2f_1$, $3f_1$, ... જેવી બધી જ હાર્મોનિક શક્ય છે.

15. **સ્પંદ :** સમાન કંપવિસ્તારવાળા પણ સહેજ જુદી પડતી આવૃત્તિઓવાળાં તરંગોના સંપતીકરણને કારણે આવર્ત રીતે કંપવિસ્તાર અને પરિણામે ધ્વનિની પ્રબળતા મહત્તમ બનવાની ઘટનાને સ્પંદ કહે છે.

એક સેકન્ડમાં ઉત્પન્ન થતાં સ્પંદોની સંખ્યા $= f_1 - f_2$

16. **ડૉપ્લર-અસર :** જ્યારે ધ્વનિ-ઉદ્ગમ કે શ્રોતા કે બંને હવાના માધ્યમની સાપેક્ષે અને એકબીજાની સાપેક્ષે ગતિ કરે છે, ત્યારે શ્રોતા દ્વારા અનુભવાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ, ઉદ્ગમ દ્વારા ઉત્સર્જાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ કરતાં જુદી હોય છે. આ ઘટનાને ડૉપ્લર-અસર કહે છે.

શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ, $f_L = \frac{v \pm v_L}{v \pm v_S} f_S$

જ્યાં, v = ધ્વનિનો વેગ

v_L = શ્રોતાનો વેગ

v_S = ઉદ્ગમનો વેગ

f_S = ઉદ્ગમ દ્વારા ઉત્સર્જાતા ધ્વનિની આવૃત્તિ

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. યાંત્રિક તરંગો .... નું વહન કરે છે.

   (A) ઊર્જા (B) દ્રવ્ય

   (C) ઊર્જા અને દ્રવ્ય બંને (D) એક પણ નહિ

2. એક સ્વરકાંટો (tunign fork) એ એક સેકન્ડમાં 256 વાર ધ્રુજારી અનુભવે છે. જો માધ્યમમાં ધ્વનિની ઝડપ 330 m/s હોય, તો સ્વરકાંટાની ઉત્પન્ન થતાં તરંગની તરંગલંબાઈ .... હશે.

   (A) 0.56 cm (B) 0.89 m (C) 1.11 m (D) 1.29 m

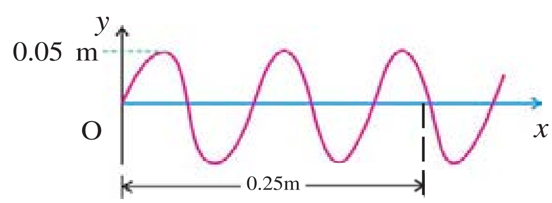
3. જ્યારે 300 Hz આવૃત્તિવાળો ધ્વનિ માધ્યમમાંથી પસાર થાય છે, ત્યારે માધ્યમના કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર 0.1 cm છે. આ કણનો મહત્તમ વેગ .... હશે.

   (A) 60π cm/s (B) 30π cm/s (C) 30 cm/s (D) 60 cm/s

4. 500 Hz આવૃત્તિવાળા એક તરંગની ઝડપ 360 m s^{-1} છે. તેના પર 60° જેટલો કળા-તફાવત ધરાવતા બે કણો વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર .... છે.

   (A) 0.23 m (B) 0.12 m (C) 8.33 m (D) 60 m

5. આકૃતિમાં દર્શાવેલ તરંગની માધ્યમમાં ઝડપ 330 m/s છે. આ તરંગ ધન x-દિશામાં ગતિ કરતું હોય તો તેનું તરંગ સમીકરણ ....



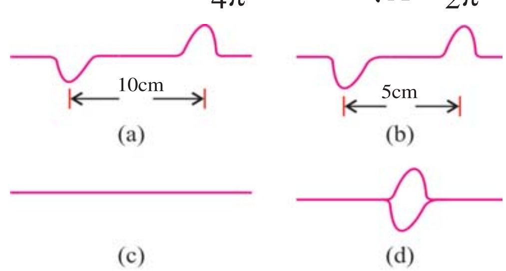
આકૃતિ 8.18

   (A) $y = 0.05 \sin 2\pi\ (4000\ t - 12.5x)$ m
   (B) $y = 0.05 \sin 2\pi\ (4000\ t - 122.5x)$ m
   (C) $y = 0.05 \sin 2\pi\ (3300\ t - 10x)$ m
   (D) $y = 0.05 \sin 2\pi\ (3300\ t - 10t)$ m

6. $y = A\sin^2 (kx - \omega t)$ તરંગ-સમીકરણ ધરાવતા તરંગનો કંપવિસ્તાર .... અને આવૃત્તિ .... હશે.

   (A) A, $\omega/2\pi$ (B) $\frac{A}{2}, \frac{\omega}{\pi}$ (C) 2A, $\frac{\omega}{4\pi}$ (D) $\sqrt{A}, \frac{\omega}{2\pi}$

7. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર બે સમાન તરંગ-સ્પંદો, દોરી પર પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં 2.5 cm/sની ઝડપથી ગતિ કરે છે. પ્રારંભમાં આ બે તરંગ-સ્પંદ વચ્ચેનું અંતર 10 cm છે. બે સેકન્ડ બાદ દોરીની સ્થિતિ કેવી હશે ?



આકૃતિ 8.19

8. $y = 10\sin(100\ t)\cos(0.01x)$ થી રજૂ થતાં સ્થિત તરંગનાં ઘટક-તરંગોની ઝડપ .... છે. અહીં, x એ yમાં અને t એ sમાં છે.

   (A) 1 m s^{-1} (B) 10^2 m s^{-1} (C) 10^3 m s^{-1} (D) 10^4 m s^{-1}

9. 7 m લાંબી દોરીનું દળ 0.035 kg છે. જો દોરી પરનો તણાવ 60.5 N હોય, તો દોરી પર તરંગની ઝડપ ....

(A) 77 m s^{-1} (B) 102 m s^{-1} (C) 110 m s^{-1} (D) 165 m s^{-1}

10. બે તરંગોના સંપાતીકરણથી ઉદ્ભવતા સ્પંદમાં મહત્તમ તીવ્રતા એ આપાત થતા મૂળ તરંગોની તીવ્રતાથી x ગણી હોય, તો x = ...

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 4

11. 2.00 m અને 2.02 m તરંગલંબાઈ ધરાવતા બે તરંગો એકબીજા પર સંપાત થઈને 1 s માં 2 સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે. જો બંને તરંગોની ઝડપ સમાન હોય, તો સમાન ઝડપ ....

(A) 400 m/s (B) 402 m/s (C) 404 m/s (D) 406 m/s

12. એક માધ્યમમાં 1200 m/s જેટલા ઘટક-તરંગોની ઝડપ ધરાવતા સ્થિત-તરંગોમાં ક્રમિક પ્રસ્પંદ-બિંદુ અને નિસ્પંદ-બિંદુ વચ્ચેનું અંતર 1 m હોય, તો સ્થિત તરંગની આવૃત્તિ ....

(A) 300 Hz (B) 400 Hz (C) 600 Hz (D) 1200 Hz

13. ધ્વનિ ઉદ્ગમ અને શ્રોતા બંને એકબીજાની સામે 50 m/s ની સમાન ઝડપે સુરેખ પથ પર ગતિ કરી રહ્યા છે. જો શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ 440 Hz હોય, તો ધ્વનિની મૂળ આવૃત્તિ કેટલી હશે ? (હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m/s છે.)

(A) 327 s^{-1} (B) 367 s^{-1} (C) 390 s^{-1} (D) 591 s^{-1}

14. એક ક્લોઝ્ડ પાઈપ માટે હવાના સ્તંભની મૂળભૂત આવૃત્તિ 512 Hz છે. જો આ પાઈપ બંને છેડેથી ખુલ્લી હોય, તો મૂળભૂત આવૃત્તિ .... Hz થાય.

(A) 1024 (B) 512 (C) 256 (D) 128

15. ક્લોઝ્ડ પાઈપમાં હવાના સ્તંભની લંબાઈ .... cm હોય, તો તેનો હવાનો સ્તંભ 264 Hz આવૃત્તિવાળા સ્વરકાંટા સાથે પ્રથમ અનુનાદમાં હોય, ધ્વનિની હવામાં ઝડપ 330 m/s.

(A) 31.25 (B) 62.50 (C) 93.75 (D) 125

16. એક આદર્શવાયુના તાપમાનમાં 600 K જેટલો વધારો કરતાં, તેમાં ધ્વનિ-તરંગની ઝડપ એ પ્રારંભિક ઝડપ કરતાં $\sqrt{3}$ ગણી થાય છે. આ વાયુનું પ્રારંભિક તાપમાન ....

(A) $-73\ ^{\circ}C$ (B) $27\ ^{\circ}C$ (C) $127\ ^{\circ}C$ (D) $327\ ^{\circ}C$

17. બે તરંગો y_1 = Asin $(2000\pi)t$ (m) અને y_2 = Asin (2008π)t (m)ના સંપાતીકરણથી માધ્યમમાં સ્પંદ ઉત્પન્ન થાય છે. એક સેકન્ડમાં અનુભવતાં સ્પંદોની સંખ્યા .... હશે.

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 8

18. એક સ્થિર શ્રોતા તરફ, ધ્વનિ ઉદ્ગમ એ ધ્વનિની ઝડપના 1/10 ગણી ઝડપે ગતિ કરી રહ્યું છે. શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ અને સાચી આવૃત્તિનો ગુણોત્તર ....

(A) 10/9 (B) 11/10 (C) $(11/10)^2$ (D) $(9/10)^2$

19. એક લંબગત તરંગનું સમીકરણ $y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ છે. તો કઈ તરંગલંબાઈ માટે કણનો મહત્તમ વેગ એ તરંગ-વેગથી બમણો થાય ?

(A) $\lambda = \frac{\pi A}{4}$ (B) $\lambda = \frac{\pi A}{2}$ (C) $\lambda = \pi A$ (D) $\lambda = 2\pi A$

20. કયા તાપમાને હવામાં ધ્વનિની ઝડપ એ 0^oC તાપમાને ઝડપ હોય તેના કરતાં બમણી થશે ?

(A) 273 K (B) 546 K (C) 1092 K (D) 0 K

જવાબો

1. (A)	**2.** (D)	**3.** (A)	**4.** (B)	**5.** (C)	**6.** (B)
7. (C)	**8.** (D)	**9.** (C)	**10.** (D)	**11.** (C)	**12.** (A)
13. (A)	**14.** (A)	**15.** (A)	**16.** (B)	**17.** (C)	**18.** (A)
19. (C)	**20.** (C)				

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. તરંગ તીવ્રતાની વ્યાખ્યા લખો અને તેનો SI એકમ જણાવો.
2. તરંગની કોણીય તરંગસંખ્યા (તરંગસદિશ) એટલે શું ?
3. એક પ્રગામી તરંગની તરંગલંબાઈ λ અને આવૃત્તિ f હોય, તો t સેકન્ડમાં તરંગે કાપેલું અંતર કેટલું થશે ?
4. યાંત્રિક તરંગના પ્રસરણ માટે માધ્યમના કયા ગુણધર્મો જરૂરી છે ?
5. દબાણના તરંગો કોને કહેવાય ?
6. માધ્યમના તાપમાન સાથે તેમાં પ્રસરતા તરંગની ઝડપ કેવી રીતે બદલાય છે ?
7. જો તારમાં રહેલું તણાવબળ ચાર ગણું કરવામાં આવે, તો તારમાં તરંગની ઝડપમાં શો ફેરફાર થશે ?
8. માધ્યમમાં દબાણમાં થતો ફેરફાર તેમાંથી પસાર થતાં તરંગની ઝડપ પર શું અસર કરશે ?
9. એક તરંગનું તરંગ સમીકરણ $y = 5 \sin (0.01x - 2t)$ છે. જ્યાં x અને y એ cmમાં છે. આ તરંગની ઝડપ કેટલી હશે ?
10. દોરી પર પ્રસરતું તરંગ જ્યારે જડિત આધારથી પરાવર્તિત થાય, તો તેની કળામાં કેટલો ફેરફાર થાય ?
11. સ્થિત-તરંગમાં નિસ્પંદ-બિંદુ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુનો કંપવિસ્તાર કેટલો હશે ?
12. સ્થિત-તરંગમાં ક્રમિક નિસ્પંદ-બિંદુ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુ વચ્ચેનું અંતર 5 cm હોય, તો બે ક્રમિક પ્રસ્પંદ-બિંદુ વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે ?
13. ક્લોઝ્ડ પાઈપની મૂળભૂત આવૃત્તિ 300 Hz છે, તો તેના દ્વિતીય ઓવરટોનની આવૃત્તિ કેટલી હશે ?
14. ધ્વનિઉદ્‌ગમની આવૃત્તિ 440 Hz છે. જો ધ્વનિઉદ્‌ગમ અને શ્રોતાનો સાપેક્ષ વેગ શૂન્ય હોય તો શ્રોતાને કઈ આવૃત્તિ સંભળાશે ?
15. સ્પંદ એટલે શું ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. તરંગોનું વર્ગીકરણ સમજાવો. પ્રત્યેક તરંગનાં ઉદાહરણ આપો.
2. તરંગની તરંગલંબાઈ, તરંગસંખ્યા અને આવૃત્તિ સમજાવો.
3. પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી તણાવવાળી દોરી પર પ્રસરતા તરંગના વેગનું સૂત્ર મેળવો.
4. માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગોનું પ્રસરણ કેવી રીતે થાય છે તે સમજાવો.
5. હવામાં ધ્વનિની ઝડપ માટે ન્યૂટનનું સૂત્ર લખો. ન્યૂટનના સૂત્રમાં લાપ્લાસે કરેલો સુધારો સમજાવો.

6. xના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતા એક પારિમાણિક પ્રગામી તરંગનું તરંગ-સમીકરણ $y = A\sin(\omega t - kx)$ મેળવો.
7. તરંગોના સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત લખો અને સમજાવો.
8. સ્થિત-તરંગો એટલે શું ? બે છેડેથી જડિત કરેલ દોરીમાં ઉદ્ભવતા સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ મેળવો.
9. દર્શાવો કે ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં રચાતા સ્થિત-તરંગમાં ફક્ત મૂળભૂત આવૃત્તિના એકી પૂર્ણાંક હાર્મોનિક જ શક્ય છે.
10. ડૉપ્લર-અસર એટલે શું ? ધ્વનિઉદ્ગમ સ્થિર હોય અને શ્રોતા ઉદ્ગમ તરફ ગતિ કરતો હોય તે કિસ્સામાં શ્રોતા તરફ જતાં તરંગની તરંગલંબાઈનું સૂત્ર મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગના કિસ્સામાં સાબિત કરો કે કોઈ પણ કણના દોલનના તાત્ક્ષણિક વેગના મૂલ્ય અને તરંગ-ઝડપનો ગુણોત્તર તરંગથી રચાતા આકારના આ બિંદુ પાસેના તે સમયના ઢાળના ઋણ મૂલ્ય જેટલો હોય છે.
2. ધરતીકંપના કારણે પૃથ્વીમાં લંબગત (S) અને સંગત (P) એમ બંને પ્રકારના ધ્વનિના તરંગો ઉદ્ભવે છે. S તરંગની ઝડપ લગભગ 4.0 km/s અને P તરંગની ઝડપ લગભગ 8.0 km/s હોય છે. ધરતીકંપ નોંધાતા સિસ્મોગ્રાફ પર પહેલું P તરંગ એ પહેલાં S તરંગ કરતાં 4 મિનિટ વહેલું નોંધાય છે. તરંગો સુરેખપથ પર પ્રસરે છે, તેવું ધારીને આ સિસ્મોગ્રાફથી કેટલા અંતરે ધરતીકંપનું ઉદ્ગમસ્થાન હશે તેનક્કી કરો. [જવાબ : લગભગ 1920 km.]
3. એક પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગનો કંપવિસ્તાર 10 m છે. આ તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ઉદ્ગમથી 2 m અંતરે આવેલા કણનું 2 સેકન્ડને અંતે સ્થાનાંતર 5 m છે અને ઉદ્ગમથી 16 m અંતરે આવેલા કણનું 8 સેકન્ડના અંતે સ્થાનાંતર $5\sqrt{3}$ m છે. આ તરંગની કોણીય આવૃત્તિ અને તરંગસદિશ શોધો. [જવાબ : $\omega = \pi/8$ rad/s, $k = \pi/24$ rad/m]
4. તણાવવાળી દોરી પર x–દિશામાં ગતિ કરતાં તરંગનું તરંગ સમીકરણ,

   $y = 3\sin[(3.14)x - (314)t]$ છે. જ્યાં x એ cm અને t એ સેકન્ડમાં છે.

   (*i*) દોરી પરના કણની મહત્તમ ઝડપ શોધો.

   (*ii*) ઊગમબિંદુથી $x = 6.0$ cm અંતરે આવેલા દોરી પરના કણનો $= t = 0.11$ સેકન્ડે પ્રવેગ શોધો. [જવાબ : મહત્તમ વેગ $= 9.4$ m/s, $a = 0$]
5. 0°C તાપમાને 250 Hz આવૃત્તિવાળો એક ધ્વનિઉદ્ગમ હવામાં 1.32 m તરંગ લંબાઈવાળા તરંગો ઉત્પન્ન કરે છે, તો 27°C તાપમાને તેની તરંગલંબાઈમાં કેટલો વધારો થયો હશે ? [જવાબ : 0.06 m]
6. હાઇડ્રોજન વાયુના કેટલા તાપમાને તેમાંથી પસાર થતાં ધ્વનિની ઝડપ એ 1200 °C તાપમાને રહેલા ઑક્સિજન વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ જેટલી હશે ? ઑક્સિજનની ઘનતા, હાઇડ્રોજનની ઘનતા કરતાં 16 ગણી છે. [જવાબ : −180.9 °C]
7. બે છેડે તણાવ સાથે બાંધેલા એક તારની લંબાઈ 110 cm છે. બે ટેકાઓ s_1 અને s_2 યોગ્ય સ્થાનોએ મૂકીને તારને એવી રીતે કંપિત કરવામાં આવે છે, કે તેના ત્રણ વિભાગોમાં રચાતા સ્થિત-તરંગોની મૂળભૂત આવૃત્તિઓ $f_1 : f_2 : f_3 = 1 : 2 : 3$ હોય, તો ટેકાઓનાં સ્થાન (કે તારના વિભાગોની લંબાઈઓ) શોધો.

   [જવાબ : $L_1 = 60$ cm, $L_2 = 30$ cm, $L_3 = 20$ cm]

8. બે છેડે તણાવ સાથે બાંધેલા તારની રેખીય ઘનતા 0.05 g/cm છે. તારમાં તણાવ 450 N છે. આ તાર 420 Hz આવૃત્તિવાળા સ્વરકાંટા સાથે અનુવાદ અનુભવે છે. ત્યાર બાદ તે જ તાર 490 Hz આવૃત્તિ સાથે અનુનાદ અનુભવે છે. આ તારની લંબાઈ શોધો. [જવાબ : 2.1 m]

9. એક દોરીની લંબાઈ 100 cm છે. તેના પર રચાયેલ સ્થિત-તરંગોમાં બે ક્રમિક હાર્મોનિક્સની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે 300 Hz અને 400 Hz છે. જ્યારે દોરી મૂળભૂત આવૃત્તિથી દોલનો કરે છે ત્યારે મહત્તમ કંપવિસ્તાર 10 cm છે, તો તે વખતના સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ મેળવો.

[જવાબ : $y = -10\sin\left(\frac{\pi x}{100}\right).\ \cos(200\pi)t$ (cm)]

10. 54 km/4ની ઝડપે ગતિ કરતી એક કાર જ્યારે એક સ્થિર શ્રોતા તરફ આવે છે અને તેનાથી દૂર જાય છે, ત્યારે શ્રોતાને અનુભવાતા હૉર્નના ધ્વનિની આવૃત્તિઓ વચ્ચેનો તફાવત શોધો. હૉર્નની આવૃત્તિ 500 Hz છે અને હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m/s છે.

[જવાબ : 44.2 Hz]

11. એક ટેકરી તરફ 10 m/s ની ઝડપે ગતિ કરતાં એન્જિનની વ્હીસલ 660 Hz આવૃત્તિવાળો ધ્વનિ ઉત્પન્ન કરે છે. ટેકરી પરથી પરાવર્તન પામીને આવતા ધ્વનિની આ એન્જિનના ડ્રાઈવરને અનુભવાતી આવૃત્તિ શોધો. ધ્વનિની હવામાં ઝડપ 340 m/s છે. [જવાબ : 700 Hz]

•

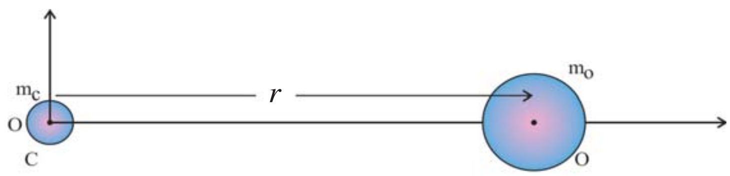
મેઘનાદ સહા (1893-1956)

મેઘનાદ સહાનો જન્મ 6 ઑક્ટોબર, 1893માં સાઓરાટોલી, ઢાકામાં (અત્યારે બાંગ્લાદેશમાં) થયો હતો. 1911માં પ્રેસિડન્સી કૉલેજમાં ભણવા માટે તે કોલકાતા આવ્યા. તે પદાર્થવિજ્ઞાની તરીકે જાણીતા થયા. તે પ્રક્રિયા સમીકરણની થિયરી ગ્લોબલ સાયન્ટિફિક કૉમ્યુનિટીમાં રજૂ કરવા 1920માં ઈંગ્લૅન્ડ ગયા, જે પાછળથી સહાનું થરમૉ આયોનાઈઝેશન સમીકરણ તરીકે ઓળખાયું. 1927માં તે રોયલ સોસાયટી ઑફ લંડનના ફેલો તરીકે ચૂંટાયા. તેમણે સોલાર રે (સૂર્યકિરણો)નું વજન દબાણ માપવાના સાધનની શોધ કરી હતી. તેમની યાદમાં 1943માં કોલકાતામાં સહા ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ન્યુક્લિઅર ફિઝિક્સની સ્થાપના થઈ. સહાનું અવસાન 16 ફેબ્રુઆરી, 1956ના રોજ થયું.

ઉકેલો (SOLUTION)

પ્રકરણ 1

1.



અહીં ઊગમબિંદુ કાર્બન (C)ના કેન્દ્ર પર લીધું છે :

r = ઑક્સિજનનું કાર્બન-પરમાણુથી અંતર = 1.130×10^{-10} m,

m_O = ઑક્સિજનનું દળ = 16 g mol^{-1}, m_C = કાર્બનનું દળ = 12 g mol^{-1},

r_C = કાર્બનનું ઊગમબિંદુથી અંતર = 0,

r_O = ઑક્સિજનનું ઊગમબિંદુથી અંતર = $r = 1.130 \times 10^{-1}$m,

$$\therefore\ r_{cm} = \frac{m_C r_C + m_o r_o}{m_C + m_o}$$

2. દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ $\vec{v}_{cm} = \dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

3. અહીંયાં કાર માટે $m_1 = 1000$ kg, $a_1 = 4.0$ m s^{-2}, પ્રારંભિક ઝડપ $v_{0_1} = 0$ m s^{-1},

ટ્રક માટે $m_2 = 2000$ kg, $a_2 = 0$ m s^{-2}, $v_{0_2} = v_2 = 8.0$ m s^{-1},

3 સેકન્ડ પછી કારની ઝડપ $v_1 = v_{0_1} + a_1 t$, 3 સેકન્ડમાં કાર વડે કપાયેલ અંતર

$d_1 = v_{0_1} t + \frac{1}{2} a_1 t^2$, 3 સેકન્ડમાં ટ્રક વડે કપાયેલ અંતર $d_2 = v_2 t$ ($\because a_2 = 0$)

(a) કાર-ટ્રક વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું ટ્રાફિક સિગ્નલથી અંતર

$$d_{cm} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2}$$

(b) $$M \vec{v}_{cm} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\therefore\ \vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (\because M = m_1 + m_2)$$

4. $t = 0$ sec સમયે $x_1 = -15\ m$, $x_2 = 15\ m$,

$m_1 = 40$ kg, $m_2 = 20$ kg,

$$\therefore\ x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

x_{cm} નું આ મૂલ્ય અચળ રહેતું હોવાથી $t = 2, 4, 6$ sec માટે x_1 અને x_{cm}નાં મૂલ્યો પરથી x_2 શોધો. $t = 0$ sec માટે કૂતરો અને બિલાડી ઊભાં હોવાથી

$\therefore\ v_1 = v_2 = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 = 0$

$\Rightarrow p = p_1 + p_2 = 0$

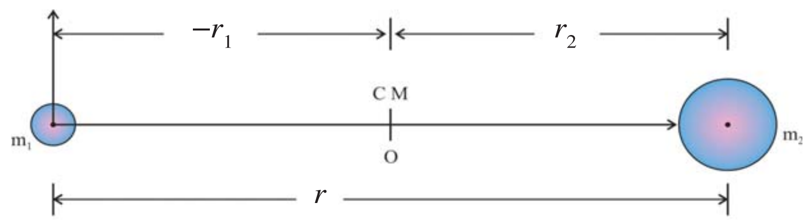
$t = 2$ sec માટે $v_1 = \dfrac{x_1(2\text{ s}) - x_1(0\text{ s})}{2\text{ s}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

$v_2 = \dfrac{x_2(2\text{ s}) - x_2(0\text{ s})}{2\text{ s}}$

આ પરથી, $p_1 = m_1v_1$, $p_2 = m_2v_2$ અને $p = p_1 + p_2$ શોધો.

તે જ રીતે $t = 4$ sec અને $t = 6$ sec માટે બાકીની ગણતરી કરો.

5.



આકૃતિમાં ઊગમબિંદુને દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર લીધું છે.

$\therefore$ ઊગમબિંદુથી m_1 નું સ્થાન $= -r_1$, ઊગમબિંદુથી m_2નું સ્થાન $= r_2$

$$\therefore\ r_{cm} = 0 = \frac{m_1(-r_1)+m_2r_2}{m_1+m_2},\ \therefore\ m_1r_1 = m_2r_2,\ \therefore\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad (1)$$

છેદમાં યોગ કરતાં $\dfrac{m_1}{m_1+m_2} = \dfrac{r_1}{r_1+r_2} = \dfrac{r_2}{r}$ $\quad (\because\ r = r_1 + r_2)$

$$\therefore\ r_2 = r\left[\frac{m_1}{m_1+m_2}\right]$$

સમીકરણ (1) માં અંશમાં યોગ કરતાં $\dfrac{m_1+m_2}{m_2} = \dfrac{r_1+r_2}{r_1} = \dfrac{r}{r_1}$

$$\therefore\ r_1 = r\left[\frac{m_2}{m_1+m_2}\right]$$

6. ત્રણ ગોળાઓ વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર $\vec{r}_{cm} = \dfrac{m\vec{r}_{cm_1} + m\vec{r}_{cm_2} + m\vec{r}_{cm_3}}{m+m+m}$

જ્યાં $\vec{r}_{cm}$ = ગોળા 1નું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, ... વગેરે.

7. અહીંયા R ત્રિજ્યાના ગોળાની ઘનતા ρ છે. માટે મૂળ ગોળાનું દળ

$$M = \rho V = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \text{(i)}$$

'a' ત્રિજ્યાની નાની ગોળીનું દળ $m_1 = \rho \times \dfrac{4}{3}\pi a^3$ (ii)

'R' ત્રિજ્યાના ગોળામાંથી 'a' ત્રિજ્યાની ગોળી કાપી લીધા પછી બાકીના ગોળાનું દળ

$$m_2 = M - m_1\ \therefore\ m_2 = \frac{4}{3}\pi\rho\ (R^3 - a^3) \qquad \text{(iii)}$$

મૂળ ગોળાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર $\vec{r}_{cm} = (0,\ 0,\ 0)$

'a' ત્રિજ્યાની ગોળીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર $\vec{r_1} = (b, 0, 0)$

બાકીના ગોળાની X-અક્ષ માટે સંમિતિ છે, પરંતુ Y અને Z-અક્ષ માટે નથી. આથી બાકીના ગોળાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ધારો કે $\vec{r_2} = (-x, 0, 0)$

હવે R ત્રિજ્યાનો મૂળ ગોળો 'a' ત્રિજ્યાની નાની ગોળી અને બાકીના (નાની ગોળી સિવાયના) ગોળાનો બનેલો હોવાથી $M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}$

$\therefore$ $M(0, 0, 0) = m_1(b, 0, 0) + m_2(-x, 0, 0)$

x-યામ સરખાવતાં $M(0) = m_1 b - m_2 x$

$$\therefore x = \frac{m_1}{m_2} b \qquad \text{(iv)}$$

અહીં સમીકરણો (ii) અને (iii), પરથી x શોધો.

8. આકૃતિ પરથી ત્રણ કણોના દ્રવ્યમાન તથા સ્થિર સ્થિતિ દરમિયાન તેમના સ્થાન અને તેમના પર લાગતાં બળો અનુક્રમે

$m_1 = 4.0$ kg, $\vec{r_1} = (-2, 3)\ m$, $\vec{F_1} = (-6, 0)$ N

$m_2 = 8.0$ kg, $\vec{r_2} = (4, 2)\ m$, $\vec{F_2} = (12 \cos 45^\circ, 12 \sin 45^\circ)$ N

$m_3 = 4.0$ kg, $\vec{r_3} = (1, -2)\ m$, $\vec{F_3} = (14, 0)$ N

$$\therefore \vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

ન્યૂટનના બીજા નિયમ મુજબ $\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$, $M = m_1 + m_2 + m_3$

$$\therefore \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = M\vec{a}_{cm},\ \vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}}{M},\ \therefore \vec{a}_{cm} = (a_{x_{cm}}, a_{y_{cm}})$$

પ્રવેગનું મૂલ્ય $|\vec{a}_{cm}| = \sqrt{(a_{xcm})^2 + (a_{ycm})^2}$

પ્રવેગની X-અક્ષ સાથેની દિશા $\theta = tan^{-1}\left(\frac{a_{ycm}}{a_{xcm}}\right)$

9. આકૃતિ પરથી, 'R' ત્રિજ્યાની સમાન પૃષ્ઠ ઘનતાવાળી તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સંમિતિ મુજબ 'ρ' ઊગમબિંદુ પર હશે. $\vec{r}_{cm} = (0, 0)$ (1)

ફક્ત $\frac{R}{2}$ ત્રિજ્યાની તકતી હોય, તો તેનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તકતીના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર હોય, જેને $\vec{r}_{cm_1}$ વડે દર્શાવીએ તો, $\vec{r}_{cm_1} = \left(\frac{R}{2}, 0\right)$ (2)

$\frac{R}{2}$ ત્રિજ્યાની તકતીને R ત્રિજ્યાની તકતીમાંથી કાપતાં, બનતી તકતીની સંમિતિ X-અક્ષની

સાપેક્ષે જળવાતી હોવાથી તેનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર X-અક્ષ પર હશે, પરંતુ Y-અક્ષની સાપેક્ષે સંમિતિ ન જળવાતી હોવાથી તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ઊગમબિંદુથી દૂર X-અક્ષ પર હશે. ધારો કે તે ઊગમબિંદુથી

$(-x)$ પર છે. $\therefore\ \vec{r}_{cm_2} = (-x, 0)$ (3)

સંપૂર્ણ તકતી, એ તકતી 1 અને 2 થી બનતી હોવાથી

$$\therefore\ \vec{r}_{cm} = \frac{M_1 \vec{r}_{cm_1} + M_2 \vec{r}_{cm_2}}{M_1 + M_2} \tag{4}$$

જ્યાં, M_1 = તકતી 1નું દ્રવ્યમાન = $\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 t\rho$ તથા M_2 = તકતી 2નું દ્રવ્યમાન =

$\pi R^2 t\rho - M_1 = \pi R^2 t\rho - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 t\rho,\ M_2 = \pi t\rho\left[R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]$

જ્યાં, ρ = તકતીની ઘટના, t = તકતીની જાડાઈ.

આથી સમીકરણ (4) પરથી $\vec{r}_{cm2}$ શોધો.

પ્રકરણ 2

1. સમીકરણ $\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)t$ નો ઉપયોગ કરી ω_0 મેળવો અને $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}t^2$ પરથી α મેળવો.

2. $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ પરથી α મેળવો. હવે $\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$ પરથી θ મેળવો અને તેને પરિભ્રમણમાં દર્શાવો. (2π rad = 1 પરિભ્રમણ)

3. $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$ નો ઉપયોગ કરી α મેળવો. હવે $I = m\,r^2$ અને $\tau = I\alpha$નો ઉપયોગ કરી τ મેળવો. $\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$ પરથી θ મેળવો. હવે કાર્ય = $\tau \cdot \theta$

4. $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ નો ઉપયોગ કરો. $\vec{r} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 12\hat{k}$ અને $\vec{p} = m\vec{v} = 50\,(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

5. θ કોણવાળા ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થના પ્રવેગનું સૂત્ર $a = \frac{g\sin\theta}{\left[1 + \frac{K^2}{R^2}\right]}$માં પોલા નળાકાર માટે K = R મૂકી a મેળવો.

6. તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા $I_z = I_{1z} + I_{2z}$; I_{1z} = 100 kg પદાર્થની Z-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા; I_{2z} = 200 k પદાર્થની Z-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

$$I_z = I_x + I_y = m(x^2 + y^2) \qquad (1)$$

અત્રે અંતરો Z-અક્ષની સાપેક્ષે લેવાના હોવાથી Z-યામ ગણતરીમાં આવતો નથી.

$$\therefore\ I_{1z} = I_{1x_1} + I_{2y_1} = 100\ (x^2{}_1 + y^2{}_1)$$

તે જ રીતે,

$$I_{2z} = I_{1x_2} + I_{2y_2}$$

આ મૂલ્યો (1)માં મૂકો.

7. $v^2 = \dfrac{g\sin\theta}{\left[1 + \dfrac{K^2}{R^2}\right]}$ અને નક્કર ગોળા માટે $K = \sqrt{\dfrac{2}{5}}R$નો ઉપયોગ કરી v મેળવો.

હવે $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2$નો ઉપયોગ કરી ચાકગતિ-ઊર્જા $\dfrac{1}{2}I\omega^2$ મેળવો.

8. પૃથ્વીને નક્કર ગોળા તરીકે સ્વીકારી તેની જડત્વની ચાકમાત્રા $I = \dfrac{2}{5}MR^2$ લઈ

$L = I\omega$માં $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{24 \times 3600}$ મૂકી L મેળવો.

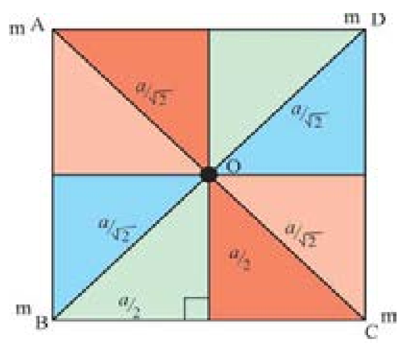
9. $I_1 = I_C + Md_1{}^2 \qquad \therefore\ I_C = I_1 - Md_1{}^2$

હવે, $I_2 = I_C + Md_2{}^2 = I_1 - Md_1{}^2 + Md_2{}^2$

$= I_1 + M(d_2{}^2 - d_1{}^2)$ પરથી I_2 મેળવો.

10. આકૃતિ પરથી Oમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને આ તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા I.

$$I = \frac{ma^2}{2} + \frac{ma^2}{2} + \frac{ma^2}{2} + \frac{ma^2}{2} = 2ma^2$$

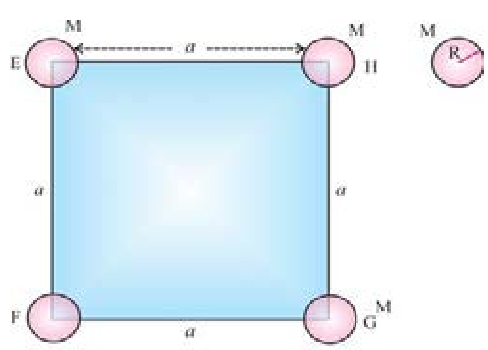


11. ગોળાની તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા $I_C = \dfrac{2}{5}MR^2$, EF અક્ષને અનુલક્ષીને તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા

$$I = I_E + I_F + I_G + I_H$$

$I = I_C + Md^2$ ઉપયોગમાં લેતાં,

$$I_E = \frac{2}{5}MR^2;\ I_F = \frac{2}{5}MR^2;$$



$$I_G = \frac{2}{5}MR^2 + Ma^2;\ I_H = \frac{2}{5}MR^2 + Ma^2$$

$$\therefore\ I = \frac{2}{5}MR^2 + \frac{2}{5}MR^2 + \frac{2}{5}MR^2 + Ma^2 + \frac{2}{5}MR^2 + Ma^2$$

$$= 2\left(\frac{4}{5}MR^2 + Ma^2\right)$$

12. $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ m, $r_3 = 4$ m, $r_4 = 6$ m, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg, $m_4 = 4$ kg, હવે, $I_{AB} = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + m_4r_4^2$ નો ઉપયોગ કરો.

13. કુલ ગતિ-ઊર્જા = રેખીય ગતિ-ઊર્જા + ચાક ગતિ-ઊર્જા

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

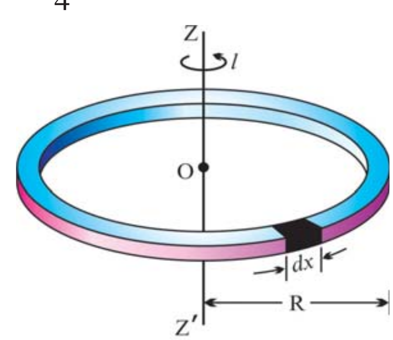
તકતી માટે $I = \frac{mr^2}{2}$ તથા $\omega = \frac{v}{r}$ $(\because v = r\omega)$

કુલ ગતિ-ઊર્જા $= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2$

ચાક ગતિ-ઊર્જા $= \frac{1}{4}mv^2$

કુલ ગતિ-ઊર્જાનો, ચાકગતિ-ઊર્જા રૂપે રહેલો ભાગ $= \dfrac{\frac{1}{4}mv^2}{\frac{3}{4}mv^2} = \frac{1}{3}$

14. પાતળી વર્તુળાકાર વીંટી (circular ring) અથવા વર્તુળાકાર તાર (circular wire)ની તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સમતલને લંબઅક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા તથા ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા શોધવા માટે આકૃતિ (2.29)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે R ત્રિજ્યા તથા M દળવાળી એક પાતળી રીંગ (વીંટી) ધ્યાન લો. આ રિંગની લંબાઈ l એટલે કે તેનો પરિઘ = 2πR થશે.



તથા રિંગનું એકમલંબાઈ દીઠ દ્રવ્યમાન $\lambda = \dfrac{\text{રિંગનું દળ}}{\text{રિંગની લંબાઈ (પરિઘ)}} = \dfrac{M}{2\pi R}$

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે dx લંબાઈના ખંડનું દ્રવ્યમાન $= \lambda \cdot dx$

$$= \frac{M}{2\pi R}dx$$

આ ખંડની ZZ'-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાને dI કહીએ તો,

dI = (ખંડનું દ્રવ્યમાન) (ખંડનું ZZ' અક્ષથી લંબઅંતર)^2 $= \left(\frac{M}{2\pi R}\cdot dx\right)(R^2)$

$$dI = \frac{M}{2\pi} R \cdot dx \qquad (1)$$

ZZ'-અક્ષની સાપેક્ષે સમગ્ર રિંગની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવા માટે સમીકરણ(1)નું $x = 0$થી $x = 2\pi R$ના અંતરાલ વચ્ચે સંકલન કરતાં

$$\therefore I = \int dI = \int_0^{2\pi R} \frac{M}{2\pi} R \cdot dx$$

$$\therefore I = \frac{M}{2\pi} R \int_0^{2\pi R} dx$$

$$= \frac{M}{2\pi} R [x]_0^{2\pi R}$$

$$= \frac{M}{2\pi} R [2\pi R - 0]$$

$$I = MR^2 \qquad (2)$$

સમીકરણ (2)ને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં $K^2 = R^2$ $\therefore$ ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા $K = R$.

15. હલકા સળિયા પર લાગતાં બળોનો સદિશ સરવાળો પરિણામી બળ F આપશે.

$\vec{F} = + \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} + \vec{F_5}$ ($\vec{F}$ પરિણામી બળ છે.)

$\vec{F} = \vec{F_1} \hat{j} + \vec{F_2} \hat{j} + \vec{F_3}(-\hat{j}) + \vec{F_4} \hat{j} + \vec{F_5}(-\hat{j})$

Aને અનુલક્ષીને $\vec{F}$ની ચાકમાત્રા = ઘટકબળોની ચાકમાત્રાનો સદિશ સરવાળો

$\therefore F \cdot x = [F_1 \times 0] + [F_2 \times x_1] - [F_3 \times (x_1 + x_2)] + [F_4 \times (x_1 + x_2 + x_3) - [F_5 \times (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)]$

$$\therefore x = \frac{x_1F_2 - (x_1+x_2)F_3 + (x_1+x_2+x_3)F_4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)F_5}{F_1 + F_2 + F_4 - F_3 - F_5}$$

પ્રકરણ 3

1. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી x અંતરે બંને બળો સમાન મૂલ્યનાં થતાં હોય તો,

$$\frac{GM_e m}{x^2} = \frac{GM_s m}{(r-x)^2},$$

M_e = પૃથ્વીનું દળ, M_s = સૂર્યનું દળ, r = પૃથ્વી અને સૂર્ય વચ્ચેનું અંતર આ પરથી x શોધો.

2. M_e = કદ $\times$ ઘનતા $= \left(\frac{4}{3}\pi R_e^3\right)(\rho)$

$\therefore g = \frac{GM_e}{R_e^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho R_e$ આ પરથી g શોધો.

3. $\left\{\begin{array}{c}\text{પૃથ્વીની વર્તુળગતિ માટે જરૂરી} \\ \text{કેન્દ્રગામી બળ} \\ \dfrac{M_e v_0^2}{r}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{સૂર્યનું પૃથ્વી પરનું ગુરુત્વબળ} \\ \dfrac{GM_s M_e}{r^2}\end{array}\right\}$

$\therefore\ M_s = \dfrac{r v_0^2}{G}$

4. ઉપગ્રહની વર્તુળગતિમાં $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_e}{r}} = \sqrt{\dfrac{GM_e}{2R_e}}$ $(\because r = R_e + R_e = 2R_e)$

આ પરથી v_0 શોધો.

હવે, $T^2 = \left(\dfrac{4\pi^2}{GM_e}\right)r^3$ આ પરથી T શોધો.

5. ઉપગ્રહની વર્તુળગતિ માટે $mv^2/r = GM_e\ m/r^2$

$\therefore$ ઉપગ્રહની ગતિ-ઊર્જા $\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{GM_e m}{2r}$.

પરંતુ સ્થિતિ-ઊર્જા $= \dfrac{-GM_e m}{r}$

$\therefore$ કુલ ઊર્જા = ગતિ-ઊર્જા + સ્થિતિ-ઊર્જા $= \dfrac{-GM_e m}{2r}$

$\therefore$ નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા $= \dfrac{GM_e m}{2r}$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}mv_e^2 = \dfrac{GM_e m}{2r}$ આ પરથી v_e શોધો.

6. ઉપગ્રહની વર્તુળગતિ માટે $\dfrac{mv^2}{R_e} = \dfrac{GM_e m}{R_e^2} = (g)m$ (1)

$\left(\because\ g = \dfrac{GM_e}{R_e^2}\right)$ $\therefore\ v^2 = gR_e$ પણ $v = \dfrac{2\pi R_e}{T}$

આ મૂલ્ય સમીકરણ (1)માં મૂકી T શોધો.

7. ઉપગ્રહની વર્તુળગતિ માટે $\dfrac{mv_0^2}{R_e} = \dfrac{GM_e m}{R_e^2}$ $\therefore\ v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_e}{R_e}}$

પૃથ્વી પર સ્થિર રહેલા પદાર્થ માટે $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM_e}{R_e}}$ હવે $\dfrac{v_0}{v_e}$ શોધો.

8. આપેલ બિંદુએ કુલ ઊર્જા $= \left[-\dfrac{GM_1 m}{d/2}\right] + \left[\dfrac{-GM_2 m}{d/2}\right] = \dfrac{-2G(M_1+M_2)m}{d}$

$\therefore$ નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા $= \dfrac{2G(M_1+M_2)m}{d}$

જો નિષ્ક્રમણ-વેગ v_e હોય તો, $\dfrac{1}{2}mv_e^2 = \dfrac{2G(M_1+M_2)m}{d}$, આ પરથી v_e શોધો.

9. આ ખાસ કિસ્સામાં, વર્તુળગતિ માટે

$\left(\text{કેન્દ્રગામી બળ } \dfrac{mv^2}{r}\right) = \left(\text{ગુરુત્વ બળ } \dfrac{GMm}{r^{5/2}}\right)$

હવે $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ મૂકીને T^2 શોધો.

પ્રકરણ 4

1. અહીં તારનું વજન = પ્રતાન બળ = Aldg, બ્રેકિંગ પ્રતિબળ = $\dfrac{\text{પ્રતાનબળ}}{\text{ક્ષેત્રફળ}}$ = ldg

$\therefore\ l = \dfrac{\text{બ્રેકિંગ પ્રતિબળ}}{dg}$

2. જો AB, BC અને CD માં લંબાઈમાં વધારો Δl_{AB}, Δl_{BC} અને Δl_{CD} હોય, તો ત્રણેયનાં

મૂલ્ય $\Delta l = \dfrac{Fl}{AY}$ સૂત્રથી મેળવો.

Bનું સ્થાનાંતર = Δl_{AB}, Cનું સ્થાનાંતર = $\Delta l_{AB} + \Delta l_{BC}$,
Dનું સ્થાનાંતર = $\Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD}$

3. વર્તુળગતિ માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ પુનઃસ્થાપકબળ દ્વારા પૂરું પડાય છે.

$Y = \dfrac{FL}{A\Delta l}$ $\therefore$ $F = \dfrac{YA\Delta L}{L}$ અને $F = \dfrac{mv^2}{L} = \dfrac{m\omega^2 L^2}{L}$ બંને Fને સરખાવો.

4. બંને દળના F.B.D. બનાવી તારમાં તણાવ T શોધો.

અહીં પ્રતિબળ = $\dfrac{T}{A}$ અને $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{\text{પ્રતિબળ}}{Y}$

5. સૌપ્રથમ $Y = \dfrac{Fl}{A\Delta L}$ નો ઉપયોગ કરી Δl મેળવો. હવે ઉદાહરણ 3નો ઉપયોગ કરો.

$U = \dfrac{1}{2}Y \times$ પ્રતિબળ $\times$ વિકૃતિ $\times$ કદનો ઉપયોગ કરો.

6. $\Delta l = l\ \alpha\ \Delta t$, $\therefore$ $\dfrac{\Delta l}{l} = \alpha\Delta t$ હવે $Y = \dfrac{F}{A}\dfrac{l}{\Delta t}$; જ્યાં અહીં F તણાવમાં થતો ફેરફાર

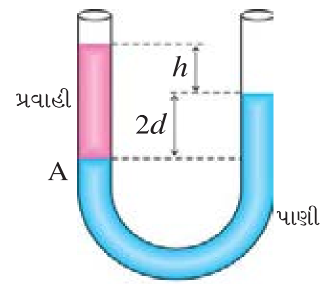
છે. હવે F ગણો.

પ્રકરણ 5

1. $A_1 v_1 = A_2 v_2$ ની મદદથી નોઝલમાંથી બહાર આવતા પાણીનો વેગ શોધો.

શિરોલંબ ગતિ માટે $y = \dfrac{1}{2}gt^2$ અને y = 1 m અને સમક્ષિતિજ ગતિ માટે $x = v_{L2}t$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_2}\right)^2$ $\therefore\ x = \sqrt{\dfrac{2yv_2^{\,2}}{g}}$



2. A આગળનું દબાણ = B આગળનું દબાણ

$\therefore\ (h + 2d)\rho_e g + P_a = P_a + 1(2d)g$

હવે ρ_l મેળવો.

3. સમક્ષિતિજ પ્રવાહ માટે

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\therefore\ P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_2^2)$$

$\therefore\ \rho_{Hg}\, g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho_{water}\,(r_2^2 - r_1^2)$ h_2 ની કિંમત શોધવા બાકીની કિંમતો મૂકો.

4. કાર્ય $= T\Delta A = T2\pi\ (r_2^2 - r_1^2)$

5. $T = \dfrac{rh\rho g}{2cos\theta}$

$\therefore\ h = \dfrac{2Tcos\theta}{r\rho g}$ પરથી બીજા ભુજ માટે ઊંચાઈ મેળવો અને તફાવત શોધો.

6. $\eta = \dfrac{2}{9}\dfrac{v^2}{v_t}(\rho - \rho_0)g$

અહીં પરપોટાનો અચળ વેગ તેનો અંતિમ વેગ છે.

7. અને **8.** સૂચનમાં આપેલ સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

9. $P_i - P_o = \dfrac{4T}{R}$ પરથી P_i શોધો. $P_o = 10^5\ Pa$

હવે સમતાપી સંકોચન માટે ત્રિજ્યા અડધી થાય માટે કદ આઠમા ભાગનું થાય.

$P_iV = P_i'\dfrac{V}{8}$ પરથી P_i' મેળવો.

હવે $P_i' - P_o' = \dfrac{4T}{R'}$ માટે $R' = \dfrac{R}{2}$ લઈને P_o' મેળવો.

પ્રકરણ 6

1. $m = 200$ g, $\Delta T = T_f - T_i$, $C = 0.215$ cal $g^{-1}\ C^{o-1}$, $Q = mC\Delta T$

અને $H_C = \dfrac{Q}{\Delta T}$

2. (*a*) 32 g O_2 = 1 મોલ

$\therefore$ 10 g $O_2 = \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{6}$ મોલ

$\therefore\ \mu = \dfrac{5}{6}$ મોલ

$P = 3 \times 10^5$ N m^{-2}, $T = 273 + 10 = 283$ K

આદર્શવાયુ અવસ્થા-સમીકરણ પરથી,

$$PV_1 = \mu RT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{\mu RT_1}{P}$$

તથા $V_2 = 10$ L $= 10^{-2}$ m^3

આથી વાયુ વડે થતું કાર્ય

$$W = P(V_2 - V_1)$$

(*b*) O_2 દ્વિપરમાણ્વિક (rigid rotator) હોવાથી

$$C_V = \frac{5}{2}R$$

તથા $PV_2 = \mu RT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{PV_2}{\mu R}$

$\therefore \ \Delta E_{int} = \mu C_V (T_2 - T_1)$

(*c*) $\Delta E_{int} = Q - W$

$\therefore \ Q = \Delta E_{int} + W$

3. અહીં, $T_2 = 300$ K, $\eta = 40$ % $= 0.4$, $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, પરથી T_1 શોધો.

T_1 = અચળ રાખીને $\eta' = 50$ % $= 0.5$ કરવા $T_2 = ?$

$\eta' = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ પરથી T_2' શોધો.

4. $T_1 = 500$ K, $T_2 = 375$ K, $Q_1 = 600$ k cal

(i) કાર્યક્ષમતા $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, (ii) $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \ \therefore \ Q_2 = \frac{T_2}{T_1} \times Q_1$

ચોખ્ખું કાર્ય $W = (Q_1 - Q_2) \times 4.2\frac{J}{cal}$ (iii) ઠારણ-વ્યવસ્થામાં પાછી મેળવાતી ઉષ્મા = Q_2

5. $T_i = 27\ ^{\circ}C = 27 + 273 = 300$ K

$P_i = 2$ atm, $\mu = 1$ mol, $\gamma = 1.5$, $V_f = \frac{1}{8}V_i$

(*a*) સમોષ્મી સંકોચન માટે PV^{γ} = અચળ

$$\therefore \ P_i V_i^{\gamma} = P_f V_f^{\gamma} \Rightarrow P_f = P_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma}$$

(*b*) આદર્શ વાયુ અવસ્થા-સમીકરણ મુજબ, $P_i V_i = \mu RT_i$

$$P_f V_f = \mu RT_f \ \therefore \ \frac{P_i V_i}{P_f V_f} = \frac{T_i}{T_f} \Rightarrow T_f = T_i \frac{P_f V_f}{P_i V_i}$$

6. સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે $W = \frac{\mu R(T_i - T_f)}{\gamma - 1}$, પરંતુ અહીંયાં કદ સંકોચન થતું હોવાથી કાર્ય ઋણ મળે છે.

$$\therefore \ W = \frac{-\mu R(T_i - T_f)}{\gamma - 1} = \frac{\mu R(T_f - T_i)}{\gamma - 1}$$

7. થરમૉડાઇનેમિક્સના પ્રથમ નિયમ મુજબ $\therefore \ \Delta E_{int} = Q - W$

પરંતુ બંધ વાયુપાત્ર માટે કદ અચળ હોવાથી $\Rightarrow \Delta V = 0 \ \therefore \ W = 0$

$$\Delta E_{int} = Q = \mu C_V \Delta T = \frac{PV}{RT} C_V \Delta T \quad (\because \ PV = \mu RT, \ \therefore \ \mu = \frac{PV}{RT})$$

$\therefore \ \Delta T = \frac{QRT}{PVC_V}$ (એક-પરમાણ્વિક વાયુ માટે $C_V = \frac{3}{2}R$)

$\therefore$ અંતિમ તાપમાન $T_f = T_i + \Delta T$, આ ઉપરાંત આદર્શવાયુ માટે $P_i V_i = \mu RT_i$

$P_f V_f = \mu RT_f \ (\because \ V_f = V_i)$

$$\therefore \ \frac{P_f}{P_i} = \frac{T_f}{T_i} \Rightarrow P_f = P_i \frac{T_f}{T_i}$$

8. અહીંયાં $\mu = 1$ મોલ, $\Delta T = 30\ C^o = 30$ K, $V \propto T^{\frac{2}{3}}$

$\therefore V = AT^{\frac{2}{3}}$, A = અચળ $\therefore dV = A\frac{2}{3}T^{-\frac{1}{3}}dT$

આથી $W = \int_T^{T+\Delta T} PdV = \int_T^{T+\Delta T} \frac{RT}{V}dV$ ($\because PV = \mu RT$, $\therefore$ $PV = RT$, $\mu = 1$)

$$= \int_T^{T+\Delta T} \frac{RT}{AT^{\frac{2}{3}}} A\frac{2}{3}T^{-\frac{1}{3}}dT = \frac{2R}{3}\int_T^{T+\Delta T} dT = \frac{2}{3}R\,[T]_T^{T+\Delta T}$$

$$= \frac{2}{3}R[T + \Delta T - T] \ \therefore \ W = \frac{2}{3}R\Delta T$$

9. અહીંયાં $P = 1.0$ atm $= 1.01 \times 10^5$ N m^{-2}, $T = 300$ K, $\mu = 2$ mol, $R = 8.31$ J mol^{-1} K^{-1}

દ્વિ-પરમાણ્વિક (rigid rotator) માટે $\gamma = \frac{7}{5}$

આદર્શવાયુ અવસ્થા-સમીકરણ મુજબ $PV = \mu RT$

$\therefore V = \frac{\mu RT}{P}$

સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે PV^{γ} = અચળ

$\therefore$ અચળાંક $= P\left(\frac{\mu RT}{P}\right)^{\gamma}$

10. અહીંયાં $T_1 = 300$ K, $T_2 = 600$ K, $T_3 = 455$ K, એક-પરમાણ્વિક વાયુ માટે $f = 3$

આથી 1 મોલ વાયુ માટે

$E_{int,\ 1} = \frac{fRT_1}{2}$, $E_{int,\ 2} = \frac{fRT_2}{2}$ અને $E_{int,\ 3}$ = બિંદુ 3 પાસે આંતરિક ઊર્જા $= \frac{fRT_3}{2}$

પ્રક્રિયા 1 → 2 : સમકદ પ્રક્રિયા હોવાથી $\Rightarrow W_1 = 0$

$\therefore Q_1 = \Delta E_{int,\ 12} = E_{int,\ 2} - E_{int,\ 1}$

પ્રક્રિયા 3 → 1 : સમદાબ પ્રક્રિયા હોવાથી

$\therefore \Delta E_{int,\ 31} = Q_3 - W_3$, $W_3 = PdV$

પરંતુ વાયુનું કદ સંકોચન થતું હોવાથી W ઋણ હોય છે.

$\therefore W_3 = -PdV = -\mu R(T_3 - T_1)$ અને $\Delta E_{int,\ 31} = \Delta E_{int,\ 1} - \Delta E_{int,\ 3}$

આથી, $Q_3 = \Delta E_{int,\ 31} + W_3$

11. $\eta = 22\% = 0.22$, $Q_1 - Q_2 = 75$ J, $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{\eta}$

અને $Q_2 = Q_1 - 75$ J

12. અહીંયા $Q_1 = 10{,}000$ J, $W = 2000$ J, $L_C = 5.0 \times 10^4$ J/g

(*a*) એન્જિનની કાર્યક્ષમતા $\eta = \frac{W}{Q_1}$,

(*b*) દરેક ચક્ર દરમિયાન ઠારણ-વ્યવસ્થામાં આપેલી ઉષ્મા $Q_2 = Q_1 - W$, (*c*) ધારો કે દરેક ચક્ર દરમિયાન m ગ્રામ ગેસોલિન વપરાય છે.

$$\therefore Q_1 = mL_C \quad \therefore m = \frac{Q_1}{L_C}$$

(*d*) એક ચક્ર દરમિયાન વપરાતું ગેસોલિન = m ગ્રામ, ∴ 1 સેકન્ડમાં 25 ચક્ર દરમિયાન વપરાતું ગેસોલિન, M = 25 × m ગ્રામ, ∴ 1 કલાકમાં વપરાતું ગેસોલિન = 60 × 60 × M g/h = ... kg/h

(*e*) 1 સેકન્ડમાં એન્જિને ઉત્પન્ન કરેલ પાવર = 1 સેકન્ડમાં થતા ચક્ર × 1 ચક્ર દીઠ થતું કાર્ય

પ્રકરણ 7

1. (*a*) $T = 3$ s, $A = 2$ cm, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$, $\phi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore y = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(*b*) $T = 1$ min $= 60$ s, $A = 3$ cm, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60}$, $\phi = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$

$$\therefore y = 3 \cos\left(\frac{\pi}{30}t\right)$$

2. $K = k + 2k + k = 8$ N m^{-1}, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0.628$ s

3. અહીં $F = -kl = -k(l_1 + l_2)$, ઉપરાંત $F_1 = -k_1 l_1 = -k(l_1 + \frac{l_1}{n}) \therefore k_1 = (1 + \frac{l_1}{n})\ k$,

અને $F_2 = -k_2 l_2 = -k(l_2 + l_2)\ \therefore\ k_2(n + 1)k$

4. $m = 100\ g$, $A\ (t) = \frac{A}{2}$, $t = 100 \times 2 = 200$ s, $A(t) = A^{-bt/2m}$

5. $v = \pm\omega\sqrt{4A^2 - 3y^2}$, $v_{new} = \pm\omega\sqrt{A_1^2 - y_1^2}$ $\quad v_{new} = 2\ v$,

$$2\sqrt{A^2_{new} - y^2} = \sqrt{A^2_{new} - y^2},\ 4(A^2 - y^2) = A^2_{new} - y^2$$

$$\therefore A^2_{new}\ A4^2 - 4y^2 + y,\ A_{new} = \sqrt{4A^2 - 3y^2}$$

6. $v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$, $a = -\omega^2 y$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $a^2T^2 + 4\pi^2v^2 = 4\pi^2\omega^2A^2 =$ અચળ

7. $T - mg\cos\theta = mv^2/L$, $\therefore T = mg\cos\theta + mv^2/L$

જ્યારે $\cos\theta = 1$ અને v મહત્તમ હોય, તો $T = T_{max}$

$$v^2_{max} = 2\ hg = 2g\ L\ \frac{\theta_0^{\ 2}}{2},\ v^2_{max} = 2\ hg = 2g\ L\ (1 - \cos\theta_1),$$

$$= 2g\ L\ (\sin^2\frac{\theta_0}{2})\ (\because\ \sin^2\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{2}) = 2g\ L\ \frac{\theta_0^{\ 2}}{2}$$

$$gL\left(\frac{A}{L}\right)^2 \quad T_{max} = mg\left[1 + \left(\frac{A}{L}\right)^2\right]$$

8. $y_1 = 10 \sin (3\pi t + \frac{\pi}{4})$, $A_1 = 10$, $\omega_1 = 3\pi \Rightarrow T_1 = \frac{2}{3}$ s.

$y_2 = 5 (\sin 3\pi t + \sqrt{3} \cos 3\pi t) = A_2 \cos\phi \sin 3\pi t + A_2 \sin\phi \cos 3\pi t$

$y_2 = A_2 \sin (3\pi t + \phi)$

$A_2 = \sqrt{(5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$, $\omega_2 = 3\pi$, $T_2 = \frac{2}{3}$ s, અને $\frac{A_1}{A_2} = 1$

9. $PE = \frac{1}{2} ky^2$, કુલ યાંત્રિક-ઊર્જા $E = K + U \therefore K = E - U$

10. $v_1 = \omega\sqrt{A^2 - y_1^2}$, $v_2 = \omega\sqrt{A^2 - y_2^2}$, $v_1^2 - v_2^2 = \omega^2(y_2^2 - y_1^2)$,

$T = \frac{2\pi}{\omega}$.

પ્રકરણ 8

1. તરંગ-સમીકરણ $y = A\sin (\omega t - kx)$નું t સાપેક્ષે વિકલન કરતાં, t સમયે કણનો તત્કાલીન વેગ મળશે. $v_p = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos (\omega t - kx)$

હવે તરંગ-ઝડપ $v = \omega/k$

તરંગનો x અંતરે ઢાળ $= \frac{dy}{dx} = - kA\cos (\omega t - kx)$

ઉપર્યુક્ત ત્રણેય સમીકરણો પરથી $\frac{v_P}{v} = -\frac{dy}{dx}$

2. P તરંગનો વેગ $v_P = \frac{d}{t}$, S તરંગનો વેગ $v_S = \frac{d}{t+240}$,

($\because$ 4 મિનિટ $= 60 \times 4 = 240$ s) આ બંને સમીકરણોને ઉકેલતાં, $t = 240$ s મળશે.

હવે $v_P = \frac{d}{t}$ સમીકરણમાં t નું અને v_P નું મૂલ્ય મૂકી d શોધો.

3. $A = 10$ m, $x_1 = 2$ m, $t_1 = 2$ s અને $y_1 = 5$ m, $x_2 = 16$ m, $t_2 = 8$ s અને $y_z = 5\sqrt{3}$ m.

હવે, $y_1 = A \sin (\omega t_1 - kx_1)$માં કિંમતો મૂકતાં, $\omega - k = \frac{\pi}{12}$ (1)

$y_2 = A\sin (\omega t_2 - kx_2)$ માં કિંમતો મૂકતાં, $\omega - 2k = \frac{\pi}{24}$ (2)

સમીકરણ (1) માંથી (2) બાદ કરતાં, $k = \frac{\pi}{24}$ rad/m, k નું મૂલ્ય સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$\omega = \pi/8$ rad/s

4. $y = 3 \sin ((3.14)x - (314)t)$નું t સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$v = \frac{dy}{dx} = -(3)(314) \cos ((3.14)x - (314)t)$

$\therefore$ કણનો મહત્તમ વેગ $= (3)(314) = 9.4$ m s^{-1}

ઉપર્યુક્ત સમીકરણનું tની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$a = \dfrac{dv}{dt} = -(3)(314)(314) \sin ((3.14)x - (314)t)$

હવે $x = 6$ cm અને $t = 0.11$ s મૂકતાં,

$a = -(3)(314)^2 \sin(6\pi - 11\pi) = (-3)(314)^2 \sin(-5\pi) = 0.$

5. $T_1 = 0. + 273 = 273$ K, $\lambda_1 = 1.32$ m, $T_2 = 27 + 273 = 300$ K, $\lambda_2 = ?$

હવે, $\dfrac{v_1}{v_2} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}$ $\therefore \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}$ $(\because v = f\lambda)$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં કિંમતો મૂકતાં, $\lambda_2 = 1.384$ m

તરંગલંબાઈમાં વધારો $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.064$ m

6. $T_0 = 1200 + 273 = 1473$ K, $\rho_0 = 16\ \rho_H$, $T_H = ?$ હવે, $v_0 = v_H$

$\therefore \sqrt{\dfrac{\gamma RT_0}{\rho_0 V}} = \sqrt{\dfrac{\gamma RT_H}{\rho_H V}}$ $\therefore T_H = T_0 \times \dfrac{\rho_H}{\rho_0} = 1473 \times \dfrac{1}{16} = 92.06$ K

$\therefore T_H = 92.06 - 273 = -180.94^\circ$C

7. અહીં $L_1 + L_2 + L_3 = 100$ cm છે. સમગ્ર તાર એક જ માધ્યમ હોવાથી બધા વિભાગોમાં તરંગ ઝડપ v સમાન હોય છે. $\therefore v = f_1\lambda_1 = f_2\lambda_2 = f_3\lambda_3$

તારનો દરેક વિભાગ મૂળભૂત આવૃત્તિથી ($f = 2L$) દોલનો કરે છે.

$\therefore f_1 (2L_1) = f_2 (2L_2) = f_3 (2L_3)$

આ સમીકરણમાં $f_1 : f_2 = 1 : 2$ અને $f_1 : f_3 = 1 : 3$ મૂકીને L_1, L_2 અને L_3 શોધો.

8. $\mu = 0.05$ g/cm, $f_n = 420$ Hz, $f_{n+1} = 490$ Hz, T = 490 N

ધારો કે તાર એ 420 Hz આવૃત્તિ માટે nમી હાર્મોનિક સાથે અને 490 Hz આવૃત્તિ માટે $(n + 1)$મી હાર્મોનિક સાથે અનુનાદ કરે છે.

$f = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ અનુસાર, $f_n = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ (1) અને $f_{n+1} = \dfrac{n+1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ (2)

બંને સમીકરણોનો ગુણોત્તર લેતાં,

$\dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{n+1}{n}$ $\therefore n = 6$ (f_{n+1} અને f_nની કિંમતો મૂકતાં)

$420 = \dfrac{6}{2L}\sqrt{\dfrac{450}{5 \times 10^{-3}}} = \dfrac{900}{L}$

$\therefore L = \dfrac{900}{420} = 2.1$ m

9. L = 100 cm, $f_n = 300$ Hz, $f_{n+1} = 400$ Hz, 2A = 10 cm

હવે, $f_{n+1} - f_n = (n + 1) f_1 - nf_1$, $\therefore f_1 = 100$ Hz, $\lambda_1 = \dfrac{2L}{1} = 200$ cm,

$\therefore k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi}{100}$ rad/cm, $\omega = 2\pi f_1 = 2\pi(100)$ rad/s

આથી, સ્થિત તરંગનું સમીકરણ, $y = -10 \sin(\dfrac{\pi}{100}x) \cos(200\pi)t$ cm

10. કાર શ્રોતા તરફ ગતિ કરે ત્યારે, $f_{L_1} = \left(\dfrac{v + 0}{v - v_S}\right) f_s$

કાર શ્રોતાથી દૂર તરફ ગતિ કરે ત્યારે $f_{L_2} = \left(\dfrac{v + 0}{v + v_S}\right) f_S$

$\therefore \; f_{L_1} - f_{L_2} = \left(\dfrac{v}{v - v_S} - \dfrac{v}{v + v_S}\right) f_S$ સમીકરણમાં, $v = 340$ m/s, $v_S = 15$ m/s અને $f_S = 500$ Hz મૂકતાં, $f_{L_1} - f_{L_2} = 44.2$Hz

11. $f_S = 600$ Hz, $v = 340$ m/s, $v_L = 10 \text{ m s}^{-1}$

એન્જિન જ્યારે ટેકરી તરફ 10 m s^{-1}ના વેગથી ગતિ કરે છે ત્યારે તેનું પ્રતિબિંબ તેનાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતું ગણી શકાય. શ્રોતા એન્જિનમાં બેઠેલો છે અને એન્જિન ટેકરી તરફ ગતિ કરે છે. આથી v_L ની દિશા L થી S તરફ અને v_S ની દિશા S થી L તરફ થશે.

$$\therefore f_L = \frac{v + v_L}{v - v_S} \times f_S = \frac{340 + 10}{340 - 10} \times 660 = 700 \text{ Hz}$$

•

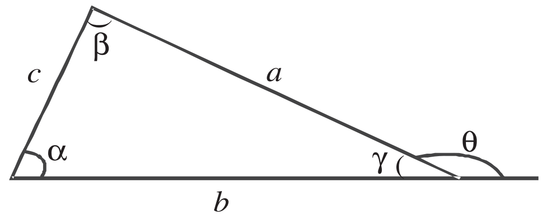
પરિશિષ્ટ

SINE અને COSINEના નિયમો

(i) $\dfrac{sin\ \alpha}{a} = \dfrac{sin\ \beta}{b} = \dfrac{sin\ \gamma}{c}$

(ii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\ abcos\ \gamma$

(iii) બહિર્કોણ $\theta = \alpha + \beta$



ત્રિકોણમિતીય સૂત્રો (TRIGONOMETRIC IDENTITIES)

(i) $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

(ii) $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$

(iii) $1 + cot^2\theta = cosec^2\theta$

(iv) $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

(v) $cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

(vi) $sin2\theta = 2sin\theta\ cos\theta$

(vii) $cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1 = 1 - 2sin^2\theta$

(viii) $sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$

(ix) $cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$

(x) $sin\alpha \pm sin\beta = 2sin\ \dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\ cos\ \dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$

(xi) $cos\alpha + cos\beta = 2cos\ \dfrac{\alpha + \beta}{2}\ cos\ \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

(xii) $cos\alpha - cos\beta = -2sin\ \dfrac{\alpha + \beta}{2}\ sin\ \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

ખાસ ખૂણાઓ માટે sine અને cosineનાં મૂલ્યો

વિધેય	0° 0 rad.	30° $\frac{\pi}{6}$ rad	45° $\frac{\pi}{4}$ rad	60° $\frac{\pi}{3}$ rad	90° $\frac{\pi}{2}$ rad	180° π rad	270° $\frac{3\pi}{2}$ rad	360° 2π rad
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ :

જો $ax^2 + bx + c = 0$, હોય તો, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

લોગ (Log) નાં સૂત્રો :

1. જો $log\ a = x$, તો $a = 10^x$
2. $log(ab) = log(a) + log(b)$
3. $log\left(\dfrac{a}{b}\right) = log(a) - log(b)$
4. $log(a^n) = n\ log\ a$
5. $log_a a = 1$
6. $ln\ a = log_e a = 2.303\ log_{10} a$

અગત્યનાં વિસ્તરણો :

1. દ્વિપદી વિસ્તરણ : $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \dfrac{n(n-1)x^2}{2!} + ...\ (x^2 < 1)$

   $(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \dfrac{n(n+1)x^2}{2!}\ ......\ (x^2 < 1)$

2. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ...$ જ્યારે $x << 1$, હોય ત્યારે $e^x = 1 + x$

3. $ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{3} + ...(|\ x\ | < 1)$

   જ્યારે $x << 1$, હોય, ત્યારે $ln(\ 1 \pm x\ ) = \pm x$

4. ત્રિકોણમિતીય વિસ્તરણો (θ રેડિયનમાં છે.)

   (i) $\sin\theta = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} + ...$

   (ii) $\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} + \dfrac{\theta^4}{4!} + ...$

   (iii) $\tan\theta = \theta + \dfrac{\theta^3}{3} + \dfrac{2\theta^5}{15} + ...$

   જો θ ખૂબ જ નાનો હોય, તો $sin\theta \approx \theta$; $cos\theta \approx 1$ and $tan\theta \approx \theta$ rad

y	$\dfrac{dy}{dx}$	y	$\dfrac{dy}{dx}$
x^n	nx^{n-1}	$sec\ x$	$\sec x \tan x$
$sin\ x$	$cos\ x$	$cosec\ x$	$-cosec\ x\ cot\ x$
$cos\ x$	$-sin^{-2}\ x$	lnx	$\dfrac{1}{x}$
$cot\ x$	$-cosec^2\ x$	$tan\ x$	$sec^2\ x$
$cos\ kx$	$-k\ sin\ x$	e^x	e^x
$sin\ kx$	$k\ cos\ x$	a^x	$a^x\ ln\ a$

વિકલિતના કાર્ય-નિયમો :

(1) $\dfrac{d}{dx}(k) = 0$ (જ્યાં, k અચળ છે.

(2) $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$

(3) $\dfrac{d}{dx}(ky) = k\dfrac{dy}{dx}$ (જ્યાં, k અચળ છે.)

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

(5) જો $y = u \pm v$, હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

(6) જો $y = uv$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} \pm v\dfrac{du}{dx}$

(7) જો $y = \dfrac{u}{v}$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

અમુક પ્રમાણિત વિધેયોનાં સંકલિતો :

$f(x)$	$F(x) = \ f(x)dx$	$f(x)$	$F(x) = \ f(x)dx$
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$(ax + b)^n$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$ln\ x + c$	$sin\ x$	$-cos\ x + c$
e^x	$e^x + c$	$cos\ x$	$sin\ x + \mathrm{c}$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx} + c$	$sin\ kx$	$-\frac{1}{k}cos\ x + \mathrm{c}$
a^x	$\frac{a^x}{lna} + c$	$cos\ kx$	$\frac{1}{k}sin\ kx + c$

સંદર્ભ ગ્રંથો (REFERENCE BOOKS)

1. PHYSICS, Part 1 and 2, Std. XI, GSBST
2. PHYSICS, Part 1 and 2, Std. XI, NCERT
3. Fundamentals of PHYSICS by Halliday, Resnick and Walker
4. University Physics by Young, Zemansky and sears
5. CONCEPTS OF PHYSICS by H. C. Verma
6. Advanced PHYSICS by Tom Duncan
7. Advanced LEVEL PHYSICS by Nelkon and Parker
8. FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS by Alonso and Finn
9. COLLEGE PHYSICS by Weber, Manning, White and Weygand
10. PHYSICS FOR SCIENTIST AND ENGINEERS by Fishbane, Gasiorowicz, Thornton
11. PHYSICS by Cutnell and Johnson
12. COLLEGE PHYSICS by Serway and Faughn
13. UNIVERSITY PHYSICS by Ronald Reese
14. CONCEPTUAL PHYSICS by Hewitt
15. PHYSICS FOR SCIENTIST AND ENGINEERS by Giancoli
16. Heat Transfer by Holman

•

પારિભાષિક શબ્દો

(સિમેસ્ટર I)

પ્રકરણ 1 ભૌતિક જગત

ગાણિતીય વાદ	Mathematical theory	(મેથેમેટિકલ થીયરી)
તર્ક	Logic	(લૉજિક)
ઘટના	Event	(ઇવેન્ટ)
દ્રવ્ય	Matter	(મેટર)
વિકિરણ	Radiation	(રેડિયેશન)
મૂળભૂત	Fundamental	(ફન્ડામેન્ટલ)
પરમાણુ	Atom	(એટમ)
અણુ	Molecule	(મોલેક્યુલ)
સંક્રાંતિ	Transition	(ટ્રાન્ઝિશન)
ઇલેક્ટ્રૉન સંરચના	Electronic configuration	(ઇલેક્ટ્રૉનિક કન્ફિગ્યુરેશન)
વાયુ	Gas	(ગૅસ)
પ્રવાહી	Liquid	(લિક્વિડ)
ઘન	Solid	(સોલિડ)
તાપમાન	Temperature	(ટેમ્પરેચર)
સ્રોત	Source	(સોર્સ)
આંતરક્રિયા	Interaction	(ઇન્ટરેક્શન)
તારાવિશ્વો	Galaxies	(ગૅલેક્સિઝ)
ઉપગ્રહ	Satellite	(સેટેલાઇટ)
ગુરુત્વાકર્ષણ બળ	Gravitational force	(ગ્રેવિટેશનલ ફૉર્સ)
વિદ્યુતચુંબકીય બળ	Electromagnetic force	(ઇલેક્ટ્રૉમૅગ્નેટિક ફૉર્સ)
લઘુઅંતરી	Short range	(શૉર્ટ રેન્જ)
ગુરુઅંતરી	Long range	(લૉન્ગ રેન્જ)
સંરક્ષણ	Conservation	(કૉન્ઝર્વેશન)
સમાંગ	Homogeneous	(હોમોજિનિયસ)
સમદિગ્ધર્મી	Isotropic	(આઇસોટ્રોપિક)
રેખીય વેગમાન	Linear momentum	(લિનિયર મોમેન્ટમ)
કોણીય વેગમાન	Angular momentum	(ઍન્ગ્યુલર મોમેન્ટ)
ઊર્જા	Energy	(ઍનર્જી)

પ્રકરણ 2 માપન તથા એકમપદ્ધતિ

ભૌતિકરાશિ	Physical quantity	(ફિઝિકલ ક્વૉન્ટિટી)
એકમ	Unit	(યુનિટ)
એકમપદ્ધતિ	System of Units	(સિસ્ટમ ઑફ યુનિટ્સ)
પ્રતિકૃતિ	Replica	(રેપ્લિકા)
મૂળભૂત	Fundamental	(ફન્ડામેન્ટલ)
સાધિત	Derived	(ડિરાઇવ્ડ)
વિદ્યુતપ્રવાહ	Electric current	(ઇલેક્ટ્રિક કરન્ટ)
અધિસૂક્ષ્મ	Hyperfine	(હાઇપરફાઇન)
ગલનબિંદુ	Melting point	(મેલ્ટિંગ પૉઇન્ટ)
દબાણ	Pressure	(પ્રેશર)
દળ	Mass	(માસ)
લંબાઈ	Length	(લેન્થ)
સમય	Time	(ટાઇમ)
સમતલ કોણ	Plane angle	(પ્લેન ઍન્ગલ)
ઘન કોણ	Solid angle	(સોલિડ ઍન્ગલ)
પૂરક	Supplementary	(સપ્લિમેન્ટરી)
દૃષ્ટિસ્થાનભેદ	Parallax	(પેરેલેક્સ)
ગ્રહ	Planet	(પ્લેનેટ)
કોણીય વ્યાસ	Angular diameter	(ઍન્ગ્યુલર ડાયામીટર)
આણ્વિક સ્તર	Molecular layer	(મોલેક્યુલર લેયર)
માપન	Measurement	(મેઝરમેન્ટ)
ચોકસાઈ	Accuracy	(એક્યુરસી)
ત્રુટિ	Error	(એરર)
વ્યવસ્થિત	Systematic	(સિસ્ટેમેટિક)
અવ્યવસ્થિત	Random	(રેન્ડમ)
અંદાજ	Estimation	(એસ્ટિમેશન)
નિરપેક્ષ	Absolute	(એબ્સોલ્યુટ)
સાપેક્ષ	Relative	(રિલેટિવ)
પ્રતિશત	Percentage	(પરસન્ટેજ)
સાદું લોલક	Simple pendulum	(સિમ્પલ પેન્ડ્યુલમ)
આવર્તકાળ	Periodic time (or Period)	(પિરિયોડિક ટાઇમ (ઓર પિરિયડ))
ઘાત	Index	(ઇન્ડેક્સ)
શૂન્યેતર	Non-zero	(નોન-ઝીરો)
સાર્થક	Significant	(સિગ્નિફિકન્ટ)
દશાંશચિહ્ન	Decimal point	(ડેસિમલ પૉઇન્ટ)
પરિમાણો	Dimensions	(ડાઇમેન્શન્સ)
પારિમાણિક વિશ્લેષણ	Dimensional analysis	(ડાઇમેન્શનલ એનાલિસિસ)

પ્રકરણ 3 સુરેખ પથ પર ગતિ
પ્રકરણ 4 સમતલમાં ગતિ

પરિમાણ	Dimension	(ડાઈમેન્શન)
ગતિ	Motion	(મોશન)
રેખીય ગતિ	Linear motion	(લિનિયર મોશન)
ચાકગતિ	Rotational motion	(રોટેશનલ મોશન)
કંપનગતિ	Vibrational motion	(વાઇબ્રેશનલ મોશન)
દોલનગતિ	Oscillatory motion	(ઓસ્સિલેટરી મોશન)
સ્થાનાંતર	Displacement	(ડિસ્પ્લેસમેન્ટ)
વેગ	Velocity	(વેલોસિટી)
પ્રવેગ	Acceleration	(એક્સલરેશન)
ભૌતિકરાશિ	Physical quantity	(ફિઝિકલ ક્વૉન્ટિટી)
અદિશ રાશિઓ	Scalar quantities	(સ્કેલર ક્વૉન્ટિટીઝ)
સદિશ રાશિઓ	Vector quantities	(વેક્ટર ક્વૉન્ટિટીઝ)
નિર્દેશ ફ્રેમ	Reference frame	(રેફરન્સ ફ્રેમ)
જડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ	Inertial reference frame	(ઇનર્શિયલ રેફરન્સ ફ્રેમ)
અજડત્વીય નિર્દેશફ્રેમ	Non-inertial reference frame	(નોન ઇનર્શિયલ રેફરન્સ ફ્રેમ)
અવલોકનકાર	Observer	(ઑબ્ઝર્વર)
કણ	Particle	(પાર્ટિકલ)
સ્થાન	Position	(પોઝિશન)
પથલંબાઈ	Pathlength	(પાથલેન્થ)
યામો	Co-ordinates	(કો-ઑર્ડિનેટ્સ)
દળ	Mass	(માસ)
ઘનતા	Density	(ડેન્સિટી)
કદ	Volume	(વૉલ્યુમ)
તાપમાન	Temperature	(ટેમ્પરેચર)
ક્ષેત્રફળ	Area	(એરિયા)
કાર્ય	Work	(વર્ક)
વેગમાન	Mometum	(મોમેન્ટમ)
પરિણામી	Resultant	(રઝિલ્ટન્ટ)
ગુણધર્મો	Properties	(પ્રોપર્ટિઝ)
એકમ સદિશ	Unit vector	(યુનિટ વેક્ટર)
શૂન્ય સદિશ	Null vector	(નલ વેક્ટર)
સ્થાનસદિશ	Position vector	(પોઝિશન વેક્ટર)
મૂલ્ય	Magnitude	(મેગ્નિટ્યૂડ)
દિશા	Direction	(ડાઈરેક્શન)
ઘટકો	Components	(કૉમ્પોનેન્ટ્સ)
વિભાજન	Resolution	(રિઝોલ્યુશન)
સરેરાશ	Average	(એવરેજ)
તત્કાલીન	Instantaneous	(ઇન્સ્ટેન્ટેનિયસ)
સમતલ	Plane	(પ્લેન)
ગતિપથ	Path of motion	(પાથ ઑફ મોશન)
સ્પર્શક	Tangent	(ટેન્જન્ટ)
વિધેય	Function	(ફંક્શન)
નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિ	Uniform circular motion	(યુનિફોર્મ સરક્યુલર મોશન)
કેન્દ્રગામી	Centripetal	(સેન્ટ્રિપીટલ)
ત્રિજ્યાવર્તી	Radial	(રેડિયલ)
સાપેક્ષ	Relative	(રીલેટિવ)
પ્રક્ષિપ્ત ગતિ	Projectile motion	(પ્રોજેક્ટાઈલ મોશન)
મહત્તમ	Maximum	(મેક્સિમમ)
અવધિ	Rance	(રેન્જ)
ઉડ્ડયન	Flight	(ફ્લાઇટ)

પ્રકરણ 5 ગતિના નિયમો

પ્રાચલો	Parameters	(પેરામીટર્સ)
બળ	Force	(ફોર્સ)
સંપર્કબળ	Contact force	(કોન્ટેક્ટ ફોર્સ)
લોહચુંબક	Magnet	(મૅગ્નેટ)
ક્ષેત્ર	Field	(ફિલ્ડ)
ઘર્ષણબળ	Frictional force	(ફ્રિક્શનલ ફોર્સ)
બાહ્યબળ	External force	(એક્સ્ટર્નલ ફોર્સ)
ગતિના નિયમો	Laws of motion	(લૉઝ ઑફ મોશન)
અસંતુલિત બળ	Unbalanced force	(અનબૅલેન્સ્ડ ફોર્સ)
સ્થિર	Stationary	(સ્ટેશનરી)
વેગ	Velocity	(વેલોસિટી)
અચળવેગી ગતિ	Uniform motion	(યુનિફૉર્મ મોશન)
જડત્વ	Inertia	(ઇનર્શિયા)
સંતુલન	Equilibrium	(ઇક્વિલિબ્રિયમ)
પ્રવેગી ગતિ	Accelerated motion	(એક્સલરેટેડ મોશન)

વેગમાન	Momentum	(મોમેન્ટમ)
પરિણામી બળ	Resultant force	(રીઝલ્ટન્ટ ફોર્સ)
સમક્ષિતિજ	Horizontal	(હોરિઝોન્ટલ)
બળનો આઘાત	Impulse of a force	(ઇમ્પલ્સ ઑફ અ ફોર્સ)
આંતરક્રિયા	Interaction	(ઇન્ટરેક્શન)
આઘાત અને પ્રત્યાઘાત	Action and reaction	(એક્શન ઍન્ડ રિએક્શન)
આંતરિક બળ	Internal force	(ઇન્ટર્નલ ફોર્સ)
સંરક્ષણનો નિયમ	Law of conservation	(લૉ ઑફ કોન્ઝરવેશન)
અલગ કરેલ તંત્ર	Isolated system	(આઇસોલેટેડ સિસ્ટમ)
ઊર્જા વર્ણપટ	Energy spectrum	(ઍનર્જી સ્પેક્ટ્રમ)
ઘટક	Component	(કોમ્પોનન્ટ)
એકબિંદુગામી બળો	Concurrent forces	(કોનકરન્ટ ફોર્સિસ)
તણાવ	Tension	(ટેન્શન)
લંબબળ	Normal force	(નોર્મલ ફોર્સ)
અપેક્ષિત ગતિ	Impending motion	(ઇમ્પેન્ડિંગ મોશન)
ઘર્ષણાંક	Co-efficient of friction	(કો-એફિશિયન્ટ ઑફ ફ્રિક્શન)
સ્થિત	Static	(સ્ટેટિક)
ગતિક	Kinetic	(કાઇનેટિક)
મહત્તમ સલામત ઝડપ	Maximum safe Speed	(મેક્સિમમ સેફ સ્પિડ)
કેન્દ્રગામી બળ	Centripetal force	(સેન્ટ્રિપીટલ ફોર્સ)
કેન્દ્રત્યાગી બળ	Centrifugal force	(સેન્ટ્રિફ્યુગલ ફોર્સ)
આભાસી બળ	Pseudo force	(સુડો ફોર્સ)
ચલ	Variable	(વેરિયેબલ)
દહન	Combustion	(કમ્બશન)

પ્રકરણ 6 કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર

કાર્ય	Work	(વર્ક)
ઊર્જા	Energy	(ઍનર્જી)
કાર્યત્વરા (પાવર)	Power	(પાવર)
સંખ્યાત્મક	Quantitative	(ક્વૉન્ટિટેટિવ)
સ્થાનાંતર	Displacement	(ડિસ્પ્લેસમેન્ટ)
સમક્ષિતિજ	Horizontal	(હોરિઝોન્ટલ)
ઘટક	Component	(કોમ્પોનન્ટ)
કેન્દ્રગામી બળ	Centripetal force	(સેન્ટ્રિપીટલ ફોર્સ)
પરિણામી બળ	Resultant force	(રિઝલ્ટન્ટ ફોર્સ)
ઘર્ષણબળ	Frictional force	(ફ્રિક્શનલ ફોર્સ)
ગતિનું સમીકરણ	Equation of motion	(ઇક્વેશન ઑફ મોશન)
ઘર્ષણાંક	Co-efficient of friction	(કો-ઍફિસિયન્ટ ઑફ ફ્રિક્શન)
પ્રક્ષેપ	Projection	(પ્રોજેક્શન)
સમક્રમી	Commutative	(કમ્યુટેટિવ)
વિભાજનનો ગુણધર્મ	Distributive property	(ડિસ્ટ્રિબ્યુટિવ પ્રોપર્ટી)
વર્ગમૂળ	Square root	(સ્ક્વેર રૂટ)
ચલ બળ	Variable force	(વેરિયેબલ ફોર્સ)
એકમ સદિશો	Unit vectors	(યુનિટ વેક્ટર્સ)
વક્રમાર્ગ	Curved path	(કર્વ્ડ પાથ)
ખંડ	Element	(એલીમેન્ટ)
ગતિ-ઊર્જા	Kinetic energy	(કાઇનેટિક ઍનર્જી)
ક્ષમતા	Capacity	(કેપેસિટી)
સ્થિતિ-ઊર્જા	Potential energy	(પોટૅન્શિયલ ઍનર્જી)
સંરચના	Configuration	(કન્ફિગ્યુરેશન)
સંરક્ષી બળ	Conservative force	(કોન્ઝર્વેટિવ ફોર્સ)
સંદર્ભસપાટી	Reference level	(રેફરન્સ લેવલ)
યાદચ્છિક	Arbitrary	(આર્બિટ્રરી)
યાંત્રિક-ઊર્જા	Mechanical energy	(મિકેનિકલ ઍનર્જી)
રેખાખંડ	Line element	(લાઇન એલીમેન્ટ)
સ્થિતિસ્થાપકતા	Elasticity	(ઇલાસ્ટિસિટી)
બળ-અચળાંક	Force constant	(ફોર્સ કોન્સ્ટન્ટ)
વિકલિત	Derivative	(ડેરિવેટિવ)
વિદ્યુત-ઊર્જા	Electric energy	(ઇલેક્ટ્રિક ઍનર્જી)
સંઘાત	Collision	(કોલિઝન)
સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત	Elastic collision	(ઇલાસ્ટિક કોલિઝન)
અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાત	Inelastic collision	(ઇનઇલાસ્ટિક કોલિઝન)
આંતરિક ઊર્જા	Internal energy	(ઇન્ટર્નલ ઍનર્જી)
રાસાયણિક ઊર્જા	Chemical energy	(કેમિકલ ઍનર્જી)
ઉષ્મા-ઊર્જા	Heat (or thermal) energy	(હીટ (ઓર થર્મલ) ઍનર્જી)
દળ	Mass	(માસ)
સમતુલ્યતા	Equivalence	(ઇક્વિવેલન્સ)
બંધન-ઊર્જા	Binding energy	(બાઇન્ડિંગ ઍનર્જી)
સંરક્ષણ	Conservation	(કોન્ઝર્વેશન)

પ્રકરણ 7 ઉષ્મા-પ્રસરણ

ઉષ્માવહન	Thermal conduction	(થર્મલ કન્ડક્શન)
સંતુલનસ્થાન	Equilibrium position	(ઈક્વિલિબ્રિયમ પોઝિશન)
લંબઘન ચોસલું	Slab	(સ્લેબ)
તાપમાન પ્રચલન	Temperature gradient	(ટેમ્પરેચર ગ્રેડિયન્ટ)
ઉષ્માપ્રવાહ	Heat current	(હીટ કરન્ટ)
ઉષ્મવાહકતા	Thermal conductivity	(થર્મલ કન્ડ્ક્ટિવિટી)
ઉષ્મીય રીતે અલગ	Thermally isolated	(થર્મલી આઈસોલેટેડ)
સ્થાયી ઉષ્મા-અવસ્થા	Steady thermal state	(સ્ટેડી થર્મલ સ્ટેટ)
ઉષ્મીય અવરોધ	Thermal resistance	(થર્મલ રેઝિસ્ટન્સ)
ઉષ્મીય વાહક	Thermal conductor	(થર્મલ કન્ડક્ટર)
ગોળાકાર કવચ	Sqherical shell	(સ્ફેરિકલ શેલ)
ઉષ્માનયન	Convection	(કન્વેક્શન)
ઉષ્મીય વિકરણ	Thermal radiation	(થર્મલ રેડિયેશન)
શોષકતા	Absorptivity	(એબ્સોર્પ્ટિવિટી)
કુલ ઉત્સર્જન પાવર	Total emissive power	(ટોટલ એમિસિવ પાવર)
સ્પેક્ટ્રલ ઉત્સર્જન પાવર	Total emissive power	(સ્પેક્ટ્રલ એમિસિવ પાવર)
તરંગલંબાઈ	Wavelength	(વેવલેન્થ)
સપાટી	Surface	(સરફેસ)
શોષક	Absorber	(એબ્સોર્બર)
ઉત્સર્જક	Emitter	(એમિટર)
પરાવર્તક	Reflector	(રિફ્લેક્ટર)
સ્થળાંતરનો નિયમ	Displacement law	(ડિસ્પોસમેન્ટ લૉ)
ઉત્સર્જકતા	Emissivity	(એમિસિવિટી)
વિખેરણ	Dissipation	(ડિસિપેશન)

પ્રકરણ 8 વાયુનો ગતિવાદ

ઉષ્માવહન	Thermal	(થર્મલ કન્ડક્શન)
સ્થૂળ રાશિ	Macroscopic quantitay	(મેક્રોસ્કોપિક ક્વોન્ટિટી)
સ્થૂળ વર્ણન	Macroscopic description	(મેક્રોસ્કોપિક ડિસ્ક્રિપ્શન)
સૂક્ષ્મ રાશિ	Microscopic quantity	(માઇક્રોસ્કોપિક ક્વોન્ટિટી)
સૂક્ષમ વર્ણન	Microscopic description	(માઇક્રોસ્કોપિક ડિસ્ક્રિપ્શન)
આદર્શ વાયુ	Ideal gas	(આઇડિયલ ગૅસ)
થર્મોડાઈનેમિક ચલ	Thermodynamic variable	(થરમૉડાઈનેમિક વેરિયેબલ)
વાસ્તવિક વાયુ	Real gas	(રિયલ ગૅસ)
સાર્વત્રિક વાયુ-નિયતાંક	Universal gas contant	(યુનિવર્સલ ગૅસ કોન્સટન્ટ)
એવોગેડ્રો અધિતક	Avogadro's hypothesis	(એવોગેડ્રો હાઈપોથેસિસ)
પરમાણુભાર	Atomic mass	(એટોમિક માસ)
અણુભાર	Molecular mass	(મોલિક્યુલર માસ)
એક-પરમાણુક	Monoatomic	(મોનોએટમિત)
દ્વિ-પરમાણુક	Diatomic	(ડાય એટમિક)
દોલનીય ગતિ	Vibrational motion	(વાઈબ્રેશનલ મોશન)
મુક્તતાન અંશો	Degrees of freedom	(ડિગ્રીઝ ઑફ ફ્રિડમ)
સંઘાત ગોળો	Sphere of collision	(સ્ફિયર ઑફ કોલિઝન)

(સિમેસ્ટર II)

પ્રકરણ 1 કણોના તંત્રનું ગતિવિજ્ઞાન

કણ	Particle	(પાર્ટિકલ)
તંત્ર	System	(સિસ્ટમ)
રેખીય વેગમાન	Linear momentum	(લિનિયર મોમેન્ટમ)
મૂળભૂત	Fundamental	(ફન્ડામેન્ટલ)
સાર્વત્રિક	Universal	(યુનિવર્સલ)
દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર	Centre of mass	(સેન્ટર ઓફ માસ)
યામપદ્ધતિ	Co-ordinate system	(કો-ઑર્ડિનેટ સિસ્ટમ)
સ્થાનસદિશ	Position vector	(પોઝિશન વેક્ટર)
બાહ્યબળ	External force	(એક્સ્ટર્નલ ફોર્સ)
આંતરિક બળ	Internal force	(ઇન્ટર્નલ ફોર્સ)
પરિણામી	Resultant	(રિઝલ્ટન્ટ)
અવલંબન	Dependence	(ડીપેન્ડન્સ)
શિરોબિંદુઓ	Vertices	(વર્ટાઇસીસ)
સમબાજુ ત્રિકોણ	Equilaternal triangle	(ઇક્વિલેટરલ ટ્રાઇન્ગલ)
રેખીય પ્રવેગ	Linear acceleration	(લિનિયર એક્સલરેશન)
સંરક્ષણનો નિયમ	Law of conservation	(લો ઓફ કોન્ઝર્વેશન)
પ્રારંભિક	Initial	(ઇનિશયલ)
કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય	Work energy theorem	(વર્ક એનર્જી થીઅરામ
જટિલ અણુઓ	Complex molecules	(કોમ્પલેક્સ મોલેક્યુલ્સ
ટુકડાઓ	Fragments	(ફ્રેગ્મેન્ટ્સ)
સમિતિ	Symmetry	(સીમેટ્રી)
સાપેક્ષ સ્થાન	Relative position	(રીલેટિવ પોઝિશન)
નિયમિત ઘનતા	Uniform density	(યુનિફોર્મ ડેન્સિટી)
સમાન આડછેદ	Uniform cross section	(યુનિફોર્મ ક્રોસ સેક્શન)
સૈદ્ધાંતિક રીતે	Theoretically	(થીઅરેટિકલી)
સતત વિતરણ	Continuous distribution	(કન્ટિન્યુઅસ ડિસ્ટ્રિબ્યુશન)
દળ ખંડ	Mass element	(માસ એલિમેન્ટ)

પ્રકરણ 2 ચાકગતિ

દૃઢ વસ્તુ	Particle	(રિજિડ બોડી)
ચાકગતિ	System	(રોટેશનલ મોશન)
ભ્રમણાક્ષ	Linear momentum	(એક્સિઝ ઑફ રોટેશન)
ભ્રમણ	Rotation	(રોટેશન)
કોણીય સ્થાનાંતર	Angular displacement	(ઍંગ્યુલર ડિસ્પ્લેસમેન્ટ)
સંદર્ભ રેખા	Reference line	(રેફરન્સ લાઇન)
કોણીય ઝડપ	Angular speed	(ઍંગ્યુલર સ્પીડ)
ત્રિજ્યા	Radius	(રેડિયસ)
ચાપ	Arc	(આર્ક)
ખૂણો (કોણ)	Angle	(ઍંગલ)
સ્પર્શક	Tangent	(ટેન્જન્ટ)
જમણા હાથના	Right hand	(રાઇટ હેન્ડ
સ્ક્રૂનો નિયમ	Screw rule	(સ્ક્રૂ રૂલ)
ત્રિજ્યાવર્તી	Radial	(રેડિયલ)
સ્પર્શીય	Tangential	(ટેન્જન્શિયલ)
લાક્ષણિકતાઓ	Characteristics	(કેરેક્ટરીસ્ટિક્સ)
કોણીય ચલો	Angular variables	(ઍંગ્યુલર વેરિયેબલ્સ)
રેખીય ચલો	Linear variables	(લિનિયર વેરિયેબલ્સ
કાર્યરેખા	Line of action	(લાઇન ઑફ એક્શન
બળયુગ્મ	Couple	(કપલ)
બળની ચાક-માત્રા	Moment of force	(મોમેન્ટ ઑફ ફોર્સ)
રેખીય વેગમાન-ચાકમાત્રા	Moment of linear moment	(મોમેન્ટ ઑફ ફોર્સ)
જડત્વની ચાકમાત્ર	Moment of inertia	(મોમેન્ટ ઑફ લનિયરમોમેન્ટમ)
ક્ષેત્રિય વેગ	Arial velocity	(એરિયલ વેલોસિટી)
ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા	Radius of gyration	(રેડિયસ ઑફ ગાયરેશન)
પાતળો સળિયો	Thin rod	(થિન રોડ)
વીંટી	Ring	(રિંગ)
વર્તુળાકાર તકતી	Circular disc	(સરર્ક્યુલર ડિસ્ક)
પોલો નળાકાર	Hollow cylinder	(હોલો સિલિન્ડર)
નક્કર નળાકાર	Solid cylinder	(સોલિડ સિલિન્ડર)
પોલો ગોળો	Spherical shell	(સ્ફેરિકલ શેલ)
નક્કર ગોળો	Solid sphere	(સોલિડ સ્ફીયર)
શંકુ	Cone	(કોન)

પ્રકરણ 3 ગુરુત્વાકર્ષણ

પૃથ્વી-કેન્દ્રિય વાદ	Geo-centric theory	(જીઓ સેન્ટ્રિક થીયરી)
સૂર્ય-કેન્દ્રિય વાદ	Helio-centric theory	(હિલિયો-સેન્ટ્રિક થીયરી)
લંબવૃતીય કક્ષા	Elliptical orbit	(ઇલિપ્ટિકલ ઓરબિટ)
લંબવૃત્ત	Ellipse	(ઇલિપ્સ)
અર્ધ-દીર્ઘ અક્ષ	Semi-major axis	(સેમિ-મેજર એક્સિસ)
ક્ષેત્રીય વેગ	Areal velocity	(એરિયલ વેલોસિટી)
આવર્તકાળ	Time-period	(ટાઈમ-પિરિયડ)
પરસ્પર ક્રિયાગત	Mutually interacting	(મ્યુચ્યુઅલી ઇન્ટરએક્ટિંગ)
ગુરુત્વાકર્ષણ	Gravitation	(ગ્રેવિટેશનલ)
ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયતાંક	Universal constant of gravitation	(યુનિવર્સલ કોન્સ્ટન્ટ ઑફ ગ્રેવિટેશન)
ગુરુત્વ પ્રવેગ	Gravitational acceleration or (acceleration due to gravity)	(ગ્રેવિટેશન એક્સેલરેશન) અથવા (એક્સેલરેશન ડ્યુ ટુ ગ્રેવિટી)
ગુરુત્વ બળ	Gravitational force	(ગ્રેવિટેશનલ ફોર્સ)
ગોળાકાર કવચ વળ	Spherical shell Twist	સ્ફેરિકલ શેલ ટ્વિસ્ટ)
ગુરુત્વ સ્થિતિ-માન	Gravitational potential	(ગ્રેવિટેશનલ પોટેન્શ્યલ)
ગુરુત્વ સ્થિતિ-ઊર્જા	Garavotational potential energy	(ગ્રેવિટેશનલ પોટે-ન્શ્યલ એનર્જી)
નિષ્ક્રમણ ઊર્જા	Escape energy	(એસ્કેમ એનર્જી)
નિષ્ક્રમણ ઝડપ	Escape speed	(એસ્કેમ સ્પીડ)
બંધન ઊર્જા	Binding energy	(બાઇન્ડિંગ એનર્જી)
ગુરુત્વતીવ્રતા	Gravitational intensity	(ગ્રેવિટેશનલ ઇન્ટે-સિટી)
ઉપગ્રહ	Satellite	(સેટેલાઇટ)
ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ	Geo-stationary satellite	(જીઓ સ્ટેશનરી સેટેલાઇટ)
વિષુવવૃત્તિય કક્ષા	Equatorial orbit	(ઇક્વેટોરિયલ ઓરબિટ)
ધ્રુવીય કક્ષા	Polar orbit	(પોલર ઓરબિટ)
કક્ષીય ગતિ	Orbital motion	(ઓરબિટલમોશન)
કક્ષીય ઝડપ	Orbital speed	(ઓરબિટલ ઝડપ)

પ્રકરણ 4 ઘન પદાર્થના ગુણધર્મો

ઘન પદાર્થ	Solid	(સોલિડ)
સ્થિતિસ્થાપકતા	Elasticity	(ઇલોસ્ટિસિટી)
આંતર પરમાણુ બળ	Inter atomic force	(ઇન્ટર એટમિક ફોર્સ)
આંતર અણુબળ	Inter molecular force	(ઇન્ટર મોલેક્યુલર ફોર્સ)
પ્રવાહી	Liquid	(લિક્વિડ)
વાયુ	Gas	(ગૅસ)
પરમાણુ	Atom	(એટમ)
અણુ	Molecule	(મોલેક્યુલ)
સ્ફટીક	Crystal	(ક્રિસ્ટલ)
સ્ફટીકમય પદાર્થ	Crystallive substance	(ક્રિસ્ટલાઇન સબસ્ટન્સ)
અસ્ફટીકમય પદાર્થ	Non-crystalline substance	(નોન ક્રિસ્ટલાઇન સબસ્ટન્સ)
વિકૃતિ	Strain	(સ્ટ્રેન)
પ્રતિબળ	Stress	(સ્ટ્રેસ)
દબાણ	Pressure	(પ્રેસર)
પ્રતાન(સંગત વિકૃતિ)	Longitudinal strain	(લોઝિટ્યુડિનલ સ્ટ્રેન)
કદ વિકૃતિ	Volume strain	(વોલ્યુમ સ્ટ્રેન)
સ્પર્શીય પ્રતિબળ	Shearing stress	(શિયરિંગ સ્ટ્રેસ)
દાબીય પ્રતિબળ	Compressive stress	(કોમ્પ્રેસિવ સ્ટ્રેસ)
કદ પ્રતિબળ	Volume strain	(વોલ્યુમ સ્ટ્રેસ)
આકાર વિકૃતિ	Shearing strain	(શિયરિંગ સ્ટ્રેન)
તન્ય	Ductile	(ડક્ટાઇલ)
કદ સ્થિતિસ્થા-પકતા અંક	Bulk modulus	(બલ્ક મોડ્યુલસ)
આકાર સ્થિતિ-સ્થાપકતા અંક (દઢતાઅંક)	Shear modulus (Modulus rigidity)	(શિયર મોડ્યુલસ) (મોડ્યુલસ ઑફ રિઝિડિટી)
પાર્શ્વિક	Lateral	(લેટરલ)
ઊર્જાઘનતા	Energy density	(એનર્જી ડેન્સિટી)

પ્રકરણ 5 તરલનું મિકેનિક્સ

તરલ	Fluid	(ફ્લુઇડ)
ઘનતા	Density	(ડેન્સિટી)
દબનીય	Compressible	(કોમ્પ્રિસિબલ)
અદબનીય	Incompressible	(ઇનકોમ્પ્રિસિબલ)
તરલસ્તંભ	Fluid column	(ફ્લુઇડ કૉલમ)
કદખંડ	Volume element	(વોલ્યુમ એલિમેન્ટ)
ઉત્પ્લાવક્તા	Buoyancy	(બોયન્ટ ફોર્સ)
વિસ્થાપિત	Byoyant force	(ડિસ્પલેસ્ડ)
સમઘન	Cube	(ક્યુબ)
શ્યાનતાબળ	Viscous force	(વિસ્કસ ફોર્સ)
શ્યાનતા ગુણાંક	Co-efficient of viscocity	(કો-એફિશિયન્ટ ઑફ વિસ્કોસિટી)
વેગ પ્રચલન	Velocity gradient	(વેલોસિટી ગ્રેડિયન્ટ)
ટર્મિનલ વેગ	Terminal velocity	(ટર્મિનલ વેલોસિટી)
વમળયુક્ત વહન	Turbulent flow	(ટરબ્યુલન્ટ ફ્લો)
સ્થિર વહન	Steady flow	(સ્ટેડી ફ્લો)
પૃષ્ઠતાણ	Surface force	(સરફેશ ઇન્સન)
સંસક્તી બળ	Cohasive force	(કોહેસિલ ફોર્સ)
આસક્તી બળ	Adhasive force	(એડહેસિલ ફોર્સ)
અણુક્રિયા અવધી	Range of inter molecular force	(રેન્જ ઑફ ઇન્ટર મોલેક્યુલર ફોર્સ)
અણુક્રિયા ગોળો	Sphere of mole-cular action	(સ્ફિયર ઑફ મોલેક્યુલર એક્શન)
મુક્ત સપાટી	Free surface	(સરફેશ)
આંતર અણુ અંતર	Inter molecular distance	(ઇન્ટર મોલેક્યુલર ડિસ્ટન્સ)
પૃષ્ઠઊર્જા	Surface energy	(સરફેશ એનર્જી)
ક્રાંતીવેગ	Critical velocity	(ક્રિટિકલ વેલોસિટી)
અંર્તગોળ	Concave	(કોન્ટકવ)
બર્હિગોળ	Conrex	(કોનવેક્ષ)
કેશાકર્ષણ	Capillarity	(કેપિલારિટી)
સંપર્કકોણ	Angle of contact	(એંગલ ઑફ કોન્ટેક્ટ)
વક્રતાત્રિજ્યા	Radius of curveture	(રેડિયસ ઑફ કર્વેચર)

પ્રકરણ 6 થરમૉડાઇનેમિક્સ

વિકિરણ	Radiation	(રેડિએશન)
પરિસર	Surrounding	(સરાઉન્ડિંગ)
વાતાવરણ	Environment	(એનવાયર્નમેન્ટ)
યાંત્રિક યામો	Mechanical co-ordinates	(મિકેનિકલ કો-ઓર્ડિનેટ્સ)
દૃઢવસ્તુ	Rigid body	(રિઝિડ બોડી)
વિનિમય	Transfer	(ટ્રાન્સફર)
બાષ્પીકરણ	Vaporization	(વેપરાઇઝેશન)
ઉષ્મીય સંકુચન	Termal contraction	(થર્મલ કોન્ટ્રેક્શન)
વિવર્ધન	Magnification	(મેગ્નિફિકેશન)
અનિયમિત	Anomalous	(આનોમાલસ)
ઠારણ	Freezing/ condensation	(ફ્રીઝિંગ કંન્ડેશેશન)
અલગ કરેલું	Isolated	(આઇસોલેટેડ)
રૂપાંતરણની ઉષ્મા	Heat of Trans-formation	(હીટ ઑફ ટ્રાન્સફોર્મેશન)
ગુપ્ત ઉષ્મા	Latent heat	(લેટેન્ટ હીટ)
તંત્ર	System	(સિસ્ટમ)
અવસ્થા	State	(સ્ટેટ)
ઉષ્મા	Heat	(હીટ)
ઉષ્મા-ઊર્જા	Heat energy	(હીટ એનર્જી)
કાર્ય	Work	(વર્ક)
ઉષ્મીય સંતુલન	Thermal equilibrium	(થર્મલ ઇક્વિલિબ્રિયમ)

તાપમાન	Temperature	(ટેમ્પરેચર)
ઉષ્મા-સંવેદી પદાર્થ	Thermo-sensitive object	(થર્મોસેન્સેટીવ ઓબ્જેક્ટ)
નિરપેક્ષ તાપમાન	Absolute Temperature	(એબ્સોલ્યુટ ટેમ્પરેચર)
ઉત્કલનબિંદુ	Boiling point	(બોઇલિંગ પૉઇન્ટ)
ઉષ્મીય પ્રસરણ	Thermal expansion	(થર્મલ એક્સ્પાન્શન)
રેખીય પ્રસરણ	Linear expansion	(લિનિયર એક્સ્પાન્શન)
પરિસીમા	Boundary	(બાઉન્ડ્રી)
સ્થૂળ રાશિ	Macroscopic quantity	(મેક્રોસ્કોપિક ક્વૉન્ટિટી)
સૂક્ષ્મ રાશિ	Microscpic quantity	(માઇક્રોસ્કોપિક ક્વૉન્ટિટી)
આંતરક્રિયા	Interaction	(ઇન્ટરેક્શન)
	Equation of state	
-	Scale	
-	Constituent particles	
-	Internal energy	
ઉષ્મીય આંતરક્રિયા	Thermal interaction	(થર્મલ ઇન્ટરેક્શન)
યાંત્રિક આંતરક્રિયા	Mechanical interaction	(મિકેનિકલ ઇન્ટરેક્શન)
અવસ્થા વિધેય	State function	(સ્ટેટ ફંક્શન)
ઉષ્માધારિતા	Heat capacity	(હીટ કેપેસિટી)
વિશિષ્ટ ઉષ્મા	Specific heat	(સ્પેસિફિક હીટ)
અચળ કદે-દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા	Specific heat at constant volume/pressure	(સ્પેસિફિક હીટ એટ કોન્સ્ટન્ટ વોલ્યુમ-પ્રેશન)
થરમૉડાઇનેમિક પ્રક્રિયા	Thermodynamic process	(થરમૉડાઇનેમિક પ્રોસેસ)
સમદાબ પ્રક્રિયા	Isobaric process	(આઇસોબેરિક પ્રોસેસ)
સમકદ પ્રક્રિયા	Isochoric process	(આઇસોકોરિક પ્રોસેસ)
સમોષ્મી પ્રક્રિયા	Adiabatic process	(એડિયાબેટિક પ્રોસેસ)
સમતાપી પ્રક્રિયા	Isothermal process	(આઇસોથપ્રોસેસ)
ચક્રીય પ્રક્રિયા	Cyclic process	(સાઇક્લિક પ્રોસેસ)
પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા	Reversible process	(રિવર્સિબલ પ્રોસેસ)
અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા	Irrversible process	(ઇર્રિવર્સિબલ પ્રોસેસ)
અસંતુલિત અવસ્થા	Inequilibrium state	(ઇનઇક્વિલિબ્રિ-યમ સ્ટેટ)
કાર્યકારી પદાર્થ	Working substance	(વર્કિંગ સબસ્ટન્સ)
ઠારણ-વ્યવસ્થા	Cooling system or sink	(કુલિંગ સિસ્ટમ ઓર સિંક)
ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાન	Heat source	(હીટ સોર્સ)
કાર્યક્ષમતા	Efficiency	(એફિશિયન્સી)
પરફોર્મન્સ-ગુણાંક	C-oefficient of performance	(કો-એફિશિયન્ટ ઑફ પરફૉર્મન્સ)
સમતાપી વિસ્તરણ	Isothermal expansion	(આઇસોથર્મલ એક્સ્પાન્શન)
સમોષ્મી વિસ્તરણ	Adiabatic expansion	(એડિયાબેટિક એક્સપાન્શન)
સમતાપી સંકોચન	Isthermal compression	(આઇસોથર્મલ કોમ્પ્રેશન)
સમોષ્મી સંકોચન	Adiabatic compression	(એડિયાબેટિક કોમ્પ્રેશન)

પ્રકરણ 7 દોલનો

દોલન	Oscillation	(ઓસ્સિલેશન)
આવર્તગતિ	Periodic motion	(પિરિયોડિક મોશન)
દોલકગતિ	Oscillatory motion	(ઓસ્સિલેટરી મોશન)
દોલક	Oscillator	(ઓસ્સિલેટર)
પ્રસંવાદિ	Harmonic	(હારમોનિક)
સરળ આવર્તગતિ (સ.આ.દો.)	Simple harmonic motion	(સિમ્પલ હાર્મોનિક મોશન)
સમતોલ સ્થિતિ	Equillibrium Position	(ઇક્વિલિબ્રિયમ પોઝિશન)
મધ્યમાન સ્થિતિ	Mean position	(મીન પોઝિશન)
સ્થાનાંતર	Displacement	(ડિસ્પ્લેસમેન્ટ)
કંપવિસ્તાર	Amplitude	(એમ્પ્લિટ્યૂડ)
આવર્તકાળ	Periodic time, time period, period	(પિરિયોડિક ટાઈમ ટાઈમ પિરિયડ પિરિયડ)
આવૃત્તિ	Frequency	(ફ્રિક્વન્સી)
કોણીય આવૃત્તિ	Angular frequency	(એંગ્યુલર ફ્રિક્વન્સી)
કળા	Phase	(ફેઝ)
કલા-અચળાંક	Phase constant	(ફેઝ કોન્સ્ટન્ટ)
પ્રારંભિક કળા	Initial phase epoch	(ઇનિશિયલ ફેઝ એપોક)
પુનઃસ્થાપક બળ	Restoring force	(રિસ્ટોરિંગ ફોર્સ)
-	Force constant	
સ્પ્રિંગ અચળાંક	Spring constant	(સ્પ્રિંગ કોન્સ્ટન્ટ)
વિકલ સમીકરણ	Differential equation	(ડિફરન્શિયલ ઇક્વેશન)
રેખિય સંયોજન	Linear combination	(લિનિયર કોમ્બિનેશન)
ગતિપથ	Trejectory	(ટ્રેજેક્ટરી)
શિરોલંબ	Vertical	(વર્ટિકલ)
યાંત્રિક-ઊર્જા	Mechanical energy	(મિકેનિકલ એનર્જી)
ગતિ-ઊર્જા	Kinetic energy	(કાયનેટિક એનર્જી)
સ્થિતિ-ઊર્જા	Potential energy	(પોટેન્શિયલ એનર્જી)
પ્રક્ષેપ	Projection	(પ્રોજેક્શન)
સંદર્ભકણ	Reference particle	(રેફરન્સ પાર્ટિકલ)
સંદર્ભવર્તુળ	Reference circle	(રેફરન્સ સર્કલ)
સાદુ લોલક	Simple pendulum	(સિમ્પલ પેન્ડ્યુલમ)
અવમંદિત દોલનો	Damped oscillations	(ડેમ્પ્ડ ઓસ્સિલેશન્સ)
અવમંદન	Damping	(ડેમ્પિંગ)
અવરોધક બળ	Resistive force damping force	(રેસિસ્ટીવ ફોર્સ-ડેમ્પિંગ ફોર્સ)
અવરોધક ગુણાંક	Damping co-efficient damping constant	(ડેમ્પિંગ કો-એફિશિયન્ટ-ડેમ્પિંગ કોન્સ્ટન્ટ)
ચરઘાતાકીય	Exponentially	(એક્સ્પોનેન્શિયલી)
પ્રાકૃતિક દોલનો	Natural oscillations	(નેચરલ ઓસ્સિમેશન્સ)
પ્રણોદિત્ત દોલનો (બળ-પ્રેરિત દોલનો)	Forced oscillation	(ફોર્સ્ડ એસ્સિલેશન્સ)
અનુનાદ	Resonance	(રેઝોનન્સ)
તરલ માધ્યમ	Fluid medium	(ફ્લુઇડ મિડિયમ)
સ્વરકાંટો	Tuning fork	(ટ્યૂનિંગ ફોર્ક)
અનુનાદીય આવૃત્તિ	Resonant frequency	(રેઝોનન્ટ ફ્રિક્વન્સી)

પ્રકરણ 8 તરંગો

તરંગો	Wave	(વેવ)
સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમ	Elastic medium	(ઇલાસ્ટિક મિડિયમ)
વિક્ષોભ	Disturbance	(ડિસ્ટર્બન્સ)
પ્રસરણ	Propagation	(પ્રોપેગેશન)
તરંગમાળા	Wave train	(વેવ ટ્રેન)
તરંગતીવ્રતા	Wave intensity	(વેવ ઇન્ટેન્સિટી)
યાંત્રિક તરંગો	Mechanical waves	(મિકેનિકલ વેઝ)
વિદ્યુત ચુંબકીય	Electromagnetic Waves	(ઇલેક્ટ્રોમેગ્નેટ વેવ)
દ્રવ્ય તરંગો	Matter waves	(મેટર વેવ)
લંબગત તરંગ	Transverse wave	(ટ્રાન્સવર્ઝ વેવ)
સંગત તરંગ	Longitudinal wave	(લોંગિટ્યૂડિનલ વેવ)
શૃંગ	Crest	(ક્રેસ્ટ)
ગર્ત	Trough	(ટ્રફ)
જડિત આધાર	Rigid support	(રિઝિડ સપોર્ટ)
તરંગ ઝડપ	Wave speed	(વેવ સ્પીડ)

રેખીય દળ ઘનતા	Linear mass denisity	(લિનિયર માસ ડેન્સિટી)
સંઘનન	Condensation	(કન્ડેન્સેશન)
વિઘનન	Rarefaction	(રેરફેક્શન)
પ્રગામી તરંગ	Progressive or propagating wave	(પ્રોગ્રેસિવ ઓર પ્રોપેગેટિંગ વેવ)
કળાઝડપ	Phase speed	(ફેઝ સ્પીડ)
સ્થિત-તરંગ	Stationary or standing wave	(સ્ટેશનરી ઓર સ્ટેન્ડિંગ વેવ)
સ્પંદબિંદુ	Node	(નોડ)
પ્રસ્પંદ બિંદુ	Antinode	(એન્ટિનોડ)
મૂળભૂત આવૃત્તિ	Fundamental frequency	(ફન્ડામેન્ટલ ફ્રિક્વન્સી)
બંધ નળી	Colsed pipe	(ક્લોઝ્ડ પાઇપ)
ખુલ્લી નળી	Open pipe	(ઓપન પાઇપ)
તરંગ સ્પંદ	Wave pulse	(વેવ પલ્સ)
સ્પંદ	Beat	(બીટ)
શ્રોતા	Listner	(લિસનર)
ઉદ્ગમ	Source	(સોર્સ)

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5566	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6345	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7769	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9843	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Antilogarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1289	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Antilogarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6715	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	12	14	16
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

NATURAL SINES

Degree	0' 0.0°	6' 0.1°	12' 0.2°	18' 0.3°	24' 0.4°	30' 0.5°	36' 0.6°	42' 0.7°	48' 0.8°	54' 0.9°	Mean Deifferences 1'	2'	3'	4'	5'
0	.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	.0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	.0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	.0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	.0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	.1045	1063	1080	1197	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	.1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	.1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	.1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10	.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	.1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	.2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	.2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	.2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	.2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	.2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	.2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	.3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	.3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	.3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	.3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	.3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	.4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	.4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	.4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	.4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	.4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	.4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	.5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	.5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	.5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	.5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	.5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	.5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	.6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	.6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	.6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	.6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	.6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	.6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	.6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10

NATURAL SINES

Degree	0' 0.0°	6' 0.1°	12' 0.2°	18' 0.3°	24' 0.4°	30' 0.5°	36' 0.6°	42' 0.7°	48' 0.8°	54' 0.9°	Mean Deifferences 1'	2'	3'	4'	5'
45	.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	.7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	.7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	.7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	.7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	.7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	.7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	.7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	.8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	.8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	.8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	.8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	.8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	.8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	.8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	.8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	.8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	.8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	.9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	.9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	.9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	.9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	.9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	.9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	.9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	.9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	.9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	.9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	.9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	.9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	.9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	.9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	.9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	.9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	.9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	.9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	.9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	.9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	.9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	.9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	.9998	9999	9999	9999	9999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0	0	0	0	0

NATURAL TANGENTS

Degree	0 0.0°	6 0.1°	12 0.2°	18 0.3°	24 0.4°	30 0.5°	36 0.6°	42 0.7°	48 0.8°	54 0.9°	Main Deifferences 1	2	3	4	5
0	.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	.0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	.0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	.0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	.0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	.1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	.1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	.1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	.1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	.1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	.1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	.2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	.2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	.2493	2512	2530	2549	2568	2686	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	.2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	.2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	.3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	.3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	.3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	.3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	.3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	.4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	.4245	4265	8286	4307	4327	4748	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	.4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	.4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	.4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	.5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	.5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	.5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	.5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	.6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	.6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	.6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	.6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	.7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	.7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	.7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	.7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	.8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	.8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	.8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	.9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	.9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	.9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

NATURAL TANGENTS

Degree	0 0.0°	6 0.1°	12 0.2°	18 0.3°	24 0.4°	30 0.5°	36 0.6°	42 0.7°	48 0.8°	54 0.9°	Main Deifferences 1	2	3	4	5
45	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	9711	9797	9883	9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.413	15	29	44	58	73
64	2.0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	9208	9375	9544	9714	9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3.4824	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646	Mean Differences no longer sufficiently accurate				
78	4.7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	1929	2422	2924	3465	3955	4486	5026	5578	6140					
80	5.6713	7297	7894	8502	9124	9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	7.0264					
82	7.1154	2066	3002	3962	4997	5958	6996	8062	9158	8.0285					
83	8.1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.514	9.677	9.845	10.02	10.20	10.39	10.58	10.78	10.99	11.20					
85	11.43	11.66	11.91	12.16	12.43	12.71	13.00	13.30	13.62	13.95					
86	14.30	14.67	15.06	15.46	15.89	16.35	16.83	17.34	17.89	18.46					
87	19.08	19.74	20.45	21.20	22.02	22.90	23.86	24.90	26.03	27.27					
88	28.64	30.14	31.82	33.69	35.80	38.19	40.92	44.07	47.74	52.08					
89	57.29	63.66	71.62	81.85	95.49	114.6	143.2	191.0	286.5	573.0					