गणित

कक्षा 8

सत्र 2019–20

DIKSHA एप कैसे डाउनलोड करें?

विकल्प 1 : अपने मोबाइल ब्राउज़र पर diksha.gov.in/app टाइप करें।

विकल्प 2 : Google Play Store में DIKSHA NCTE ढूंढ़े एवं डाउनलोड बटन पर tap करें।

DIKSHA

मोबाइल पर QR कोड का उपयोग कर डिजिटल विषय वस्तु कैसे प्राप्त करें ?

DIKSHA App को लॉच करे → App की समस्त अनुमति को स्वीकार करें → उपयोगकर्ता Profile का चयन करें।

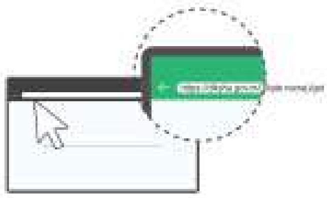
1 पाठ्यपुस्तक में QR Code को Scan करने के लिए मोबाइल में QR Code tap करें।

2 मोबाईल को QR Code पर केन्द्रित करें।

3 सफल Scan के पश्चात् QR Code से लिंक की गई सूची उपलब्ध होगी।

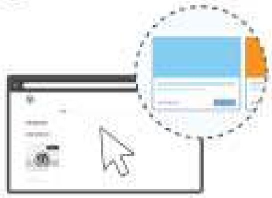
डेस्कटॉप पर QR Code का उपयोग कर डिजिटल विषय–वस्तु तक कैसे पहुँचे ?

1 QR Code के नीचे 6 अंक का Alpha Numeric Code दिया गया है।



2 ब्राउज़र में diksha. gov.in/cg टाईप करें।

3 सर्च बार पर 6 डिजिट का QR CODE टाईप करें।



4 प्राप्त विषय–वस्तु की सूची से चाही गई विषय–वस्तु पर क्लिक करें।

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् छत्तीसगढ़, रायपुर

निःशुल्क वितरण हेतु

प्रकाशन वर्ष – 2019

सहयोग

हृदय कांत दीवान (विद्या भवन, उदयपुर)

संयोजक

डॉ. विद्यावती चन्द्राकर

समन्वयक

यू.के चक्रवर्ती

लेखक दल

यू.के. चक्रवर्ती, सी.पी.सिंह, जी.पी.पांडेय, नागेन्द्र भारती गोस्वामी, आर. के. चारी, आर. के देवांगन, बी.एल. गुप्ता, हुलेश पटेल, अनिल गभेल, मीना श्रीमाली, संजय बोल्या, दीपक मंत्री, रंजना शर्मा

आवरण पृष्ठ

रेखराज चौरागड़े

प्रकाशक

छत्तीसगढ़ पाठ्यपुस्तक निगम, रायपुर

मुद्रक

मुद्रित पुस्तकों की संख्या – ....

प्राक्कथन

गणित शिक्षा का उद्देश्य बच्चों को केवल गणित का ज्ञान देना ही नहीं है बल्कि उनमें ऐसी समझ का विकास करना है जिससे वे गणित से भयभीत होने के बजाय उसका आनंद उठा सकें, गणित से संबंधित सार्थक प्रश्न बना सकें, उन्हें हल कर सकें। साथ ही अपने दैनिक जीवन के अनुभवों से निर्मित गणितीय ज्ञान का रूपान्तर अपनी सुविधानुसार कर सकें।

कक्षा आठवीं तक आते आते बच्चे गणित में निहित शक्ति का अनुभव करना प्रारंभ कर देते हैं। यहां वे बड़ी से बड़ी संख्या को अलग–अलग रूप में लिखना, घात की सहायता से चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करना तो सीखते ही हैं साथ ही साथ वे ज्यामितीय आकृतियों के विशिष्ट गुणों को भी पहचानने लगते हैं। वे बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करने के साथ–साथ किसी वस्तु द्वारा स्थान घेरने से संबंधित अवधारणाओं को भी समझने लगते हैं। गणित का सबसे महत्वपूर्ण काम सोच व तर्कशक्ति में सक्षमता हासिल करना और उन्हें वृहद बनाना है।

यह पुस्तक गणित शिक्षा के उद्देश्यों एवं बच्चों के उपलब्धि स्तर को ध्यान में रखकर बनाई गई है। परन्तु, कोई भी पुस्तक अपने आप में पूर्ण नहीं होती अतः इसे और अधिक बोधगम्य एवं रूचिकर बनाने के लिए आपके सुझाव सदैव आंमत्रित हैं। आपके द्वारा दिये गए सुझाव प्रदेश के समस्त छात्रों के हित में होंगे।

इस पुस्तक के लेखन में हमें विभिन्न शासकीय और अशासकीय संस्थाओं तथा प्रबुद्ध नागरिकों का मार्गदर्शन और सहयोग मिला है, हम उनके प्रति आभारी हैं। विशेष कर हम आभारी है विद्याभवन सोसाइटी, उदयपुर के जिनका इस पुस्तक के निर्माण में महत्वपूर्ण योगदान रहा है।

राष्ट्र शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (NCERT) ने कक्षा 1 से 8 तक सभी विषयों के लिए ऐसे लक्ष्य निर्धारित किए हैं जो स्पष्ट और मापने योग्य हैं। इन्हें ''अधिगम प्रतिफल'' (Learning outcomes) कहा गया है।

स्कूल शिक्षा विभाग एवं राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, छ.ग. द्वारा शिक्षकों एवं विद्यार्थियों में दक्षता संवर्धन हेतु अतिरिक्त पाठ्य संसाधन उपलब्ध कराने की दृष्टि से Energized Text Books एक अभिनव प्रयास है, जिसे ऑन लाईन एवं ऑफ लाईन (डाउनलोड करने के उपरांत) उपयोग किया जा सकता है। ETBs का प्रमुख उद्देश्य पाठ्यवस्तु के अतिरिक्त ऑडियो–वीडियो, एनीमेशन फॉरमेट में अधिगम सामग्री, संबंधित अभ्यास, प्रश्न एवं शिक्षकों के लिए संदर्भ सामग्री प्रदान करना है।

हमने इस वर्ष अपनी पाठ्यपुस्तकों में इन अधिगम प्रतिफलों के सन्दर्भ में कुछ आवश्यक बदलाव किए हैं। कुछ नई पाठ्यसामग्रियाँ जोड़ी गई हैं, कुछ पाठ एक कक्षा से अन्य कक्षाओं में स्थानांतरित किए गए हैं। इससे शिक्षक और विद्यार्थी भ्रमित न हो।

संचालक
राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
छत्तीसगढ़, रायपुर

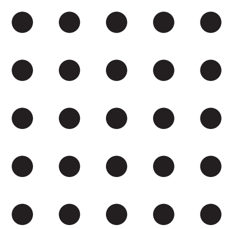
विषय–सूची

8HU4U4

अध्याय–1
वर्ग एवं घन
SQUARE & CUBE

वर्ग संख्याएँ (Square Numbers)

नीचे दिए गए चित्र के प्रत्येक पंक्ति (आड़ी) एवं स्तम्भ (खड़ी) में बिन्दुओं की संख्या समान हैं। इनमें से प्रत्येक में 5–5 बिन्दु हैं, इन बिन्दुओं की कुल संख्या कितनी होगी?



चित्र 1

इसी प्रकार प्रत्येक पंक्ति तथा स्तम्भ में समान संख्या में दो–दो, तीन–तीन, चार–चार, आठ–आठ इत्यादि बिन्दु लेकर कुछ वर्गाकार पैटर्न (प्रतिरूप) बनाइए तथा तालिका की पूर्ति कीजिए–

सारणी 1.1

क्रमांक	प्रत्येक पंक्ति या स्तम्भ में बिन्दुओं की संख्या	बनाए गए पैटर्न में बिन्दुओं की कुल संख्या
1.	5	25
2.	2	-------
3.	-------	9
4.	4	-------
5.	-------	-------
6.	-------	-------

अंतिम स्तम्भ की सभी संख्याएँ ऐसी हैं जो एक संख्या को उसी से गुणा करके प्राप्त की गई हैं। $25 = 5 \times 5$, $4 = 2 \times 2$, ये सभी संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25,... इत्यादि पूर्ण वर्ग संख्याएँ (Perfect Square Number) कहलाती हैं। आप भी 5 और पूर्ण वर्ग संख्याएँ लिखें।

इन संख्याओं को हमने स्वयं पूर्ण वर्ग संख्या बनाया है। अब यदि आपको कोई संख्या दी जाए तो कैसे पता करेंगे कि वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है अथवा नहीं?

पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

आप पायेंगे कि 9 बिन्दुओं को तीन–तीन बिन्दुओं की तीन पँक्तियों में जमा सकते हैं,16 बिन्दुओं को चार–चार की चार पँक्तियों में जमा सकते हैं, किन्तु 10, 11, 12 बिन्दु होने पर उन्हें इस तरह नहीं जमाया जा सकता कि पँक्तियों की संख्या और प्रत्येक पँक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर हो। चाहें तो कोशिश करके देख लें। 10, 11, 12 बिन्दु होने पर तो हम इस प्रकार जमा कर देखने का प्रयास कर सकते हैं किन्तु यदि बिन्दुओं की संख्या 109 हो, 784 हो या और भी बड़ी हो तो इस तरह बिन्दुओं को जमा कर जाँचना कठिन हो जायेगा। पूर्ण वर्ग संख्या पहचानने के लिए एक अच्छा तरीका है अभाज्य गुणनखण्ड की विधि।

अभाज्य गुणनखण्ड व पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

पूर्ण वर्ग संख्या में पंक्तियों की संख्या और प्रत्येक पंक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर है। जैसे पूर्ण वर्ग संख्या $6 \times 6, 5 \times 5, 3 \times 3, 7 \times 7$ इत्यादि।

जिस संख्या में भी इस तरह गुणनखण्डों के जोड़े पूरे–पूरे बन जाए वही पूर्ण वर्ग संख्या होगी। इसके लिए हम दी गई संख्या के गुणनखण्ड कर लेंगे और फिर जोड़े बनाएँगे।

अभाज्य गुणनखण्ड की विधि

इस विधि में दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड करके जोड़े बनाते हैं। जिन संख्याओं में सभी समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन जाते हैं, वे पूर्ण वर्ग संख्या होंगी।

जैसे – (1) **144** को लें

144 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं – $\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

यहाँ 144 में सभी अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन रहे हैं।

अतः 144 पूर्ण वर्ग संख्या हैं।

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

(2) **252** को देखें

252 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं – $\underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 7$

इसमें 7 का कोई जोड़ा नहीं है

अर्थात् 252 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

2	252
2	126
3	63
3	21
7	7
	1

क्रियाकलाप 1.

नीचे दी गई सारणी में संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

सारणी 1.2

क्र.सं.	संख्या	अभाज्य गुणनखण्ड	क्या सभी समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन रहे हैं?	पूर्ण वर्ग है या नहीं
1.	16	$\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$	हाँ	पूर्ण वर्ग हैं
2.	32	$\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 2$	नहीं	नहीं
3.	36			
4.	48			
5.	40			
6.	49			
7.	56			
8.	64			

अब इन्हें भी जाँचिए कि नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या हैं या नहीं –

(i) 164 (ii) 256 (iii) 81 (iv) 120 (v) 576

(vi) 205 (vii) 625 (viii) 324 (ix) 216 (x) 196

पूर्ण वर्ग संख्याओं के कुछ गुण

इकाई का अंक देख पूर्ण वर्ग की पहचान–

नीचे सारणी में दी गई पूर्ण वर्ग संख्याओं जैसे 4, 9, 16, 25, 81, 100,169, 324, 256, 625 आदि को ध्यान से देखिए। क्या कोई ऐसी पूर्ण वर्ग संख्या है, जिसमें इकाई के स्थान पर 2, 3, 7 अथवा 8 है? कुछ और संख्याए लेकर देखें क्या आप इनसे कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? आइए, इस सारणी को देखें –

सारणी 1·3

संख्या	पूर्ण वर्ग संख्या	संख्या	पूर्ण वर्ग संख्या
1	1	2	4
3	9	4	16
5	25	6	36
7	49	8	64
9	81	10	100
11	121	12	144
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

आप इस तालिका को और आगे बढ़ा सकते हैं।

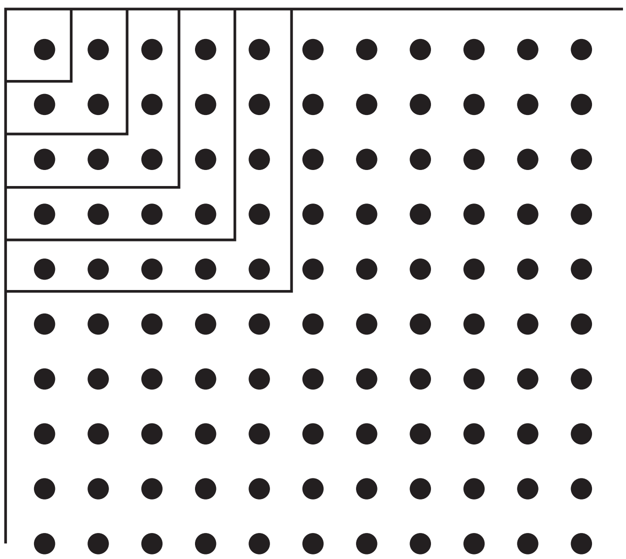
तालिका में दी गई विषम एवं सम संख्याओं के पूर्ण वर्ग किस प्रकार के हैं? नीचे ✓ का चिह्न लगाएँ।

विषम संख्याओं का पूर्ण वर्ग – विषम/सम

सम संख्याओं का पूर्ण वर्ग – विषम/सम

एक और मज़ेदार बात –

नीचे दिए गए चित्र का अवलोकन करें –



चित्र 2

चित्र में एक किनारे से आरम्भ करके विभिन्न वर्गों की रचना की गई है। इन वर्गों के हिस्से अपने आप नये वर्गों में शामिल होते गए हैं। यदि हम सब हिस्सों में शामिल बिन्दुओं को अलग–अलग जोड़ें तो हम देखते हैं कि वर्गों में बिन्दुओं की संख्या इस प्रकार से है–

पहला वर्ग	1	=	1	=	1^2
दूसरा वर्ग	1 + 3	=	4	=	2^2
तीसरा वर्ग	1 + 3 + 5	=	9	=	3^2
चौथा वर्ग	1 + 3 + 5 + 7	=	16	=	4^2
पांचवा वर्ग	1 + 3 + 5 + 7+9	=	25	=	5^2
छठा वर्ग	1 + 3 + ...	=	36	=	6^2
सातवा वर्ग	....	=	.....	=	....
आठवा वर्ग	....	=	....	=	....

इसको आगे बढ़ाने पर हम देख सकते हैं कि जो भी वर्ग लें उसमें बिन्दुओं की कुल संख्या भी

पूर्ण वर्ग है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसे आठवे वर्ग में और दसवे वर्ग में कुल कितने बिन्दु होंगे?

हमने देखा कि पहले, दूसरे ...... आदि वर्गों में शामिल कुल बिन्दु इस प्रकार हैं।

पहला वर्ग = पहली विषम संख्या = 1^2

दूसरा वर्ग = पहली दो विषम संख्याओं का योग = 2^2

तीसरा वर्ग = पहली तीन विषम संख्याओं का योग = 3^2

और इसी तरह से आगे भी जैसे, पहली 8 विषम संख्याओं का योग 8^2 के बराबर होता है।

हम कितना भी आगे जाए यह बात सही निकलती है।

इस प्रकार हम यह देख सकते हैं कि किसी भी प्राकृत संख्या n का वर्ग प्रारंभिक n विषम संख्याओं के योगफल के बराबर होता है।

कुछ और मनोरंजक पैटर्न –

1, 11, 111.... की वर्ग संख्याओं को देखें –

1^2 = 1

11^2 = 1 2 1

111^2 = 1 2 3 2 1

1111^2 = 1 2 3 4 3 2 1

11111^2 = - - - - - - - - - - -

111111^2 = - - - - - - - - - - - -

क्रियाकलाप 2.

अपने मित्र से दो क्रमागत संख्या बोलने को कहें। उन संख्याओं को मौखिक रूप से जोड़कर अपने कॉपी में लिख लें। मित्र को उन दो क्रमागत संख्याओं की वर्ग संख्याएँ पता करने को कहें और बड़ी वर्ग संख्या में से छोटी वर्ग संख्या घटाने को कहें। बाद में अपनी कॉपी में लिखी संख्या को दिखा दें। दोनों संख्याएँ बराबर हैं न?

यह कैसे हुआ?

क्या आप सोच सकते हैं कि ऐसा कैसे होगा? निम्न प्रतिरूपों का अवलोकन करें।

$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = 4 + 3,$

$9^2 - 8^2 = 81 - 64 = 17 = 9 + 8,$

$13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 13 + 12$

इन उदाहरणों को देखिए

$3^2 + 4^2 = 9+16= 25 = 5^2,$ $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

$5^2 +12^2= 25+144 =169=13^2$ अर्थात् $5^2 + 12^2 = 13^2$

आप भी कुछ और ऐसे उदाहरण खोजें। आप देखेंगे कि हर उदाहरण में संख्याओं की एक तिगड़ी है। इस प्रत्येक तिगड़ी में विशेष प्रकार की संख्याएँ हैं। बड़ी संख्या का वर्ग, शेष दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर है। इस प्रकार की संख्याएँ पाइथोगोरीय त्रिक कहलाती हैं। त्रिक याने तीन संख्याओं की तिगड़ी।

जैसे – (3, 4, 5), (6, 8, 10) एवं (5, 12, 13) पाइथोगोरीय त्रिक हैं।

उदाहरण 1. जाँच कीजिए कि (9, 40, 41) पाइथोगोरीय त्रिक है या नहीं?

हल: यहाँ $9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681$

तथा $41^2 = 1681$

अतः $9^2 + 40^2 = 41^2$, अतः (9, 40, 41) पाइथागोरीय त्रिक है।

अभ्यास 1

जाँच कीजिए कि नीचे दिए गए त्रिक पाइथागोरीय त्रिक हैं अथवा नहीं ?

(i) (5, 12, 13) (ii) (8, 15, 17)

(iii) (10, 15, 25) (iv) (4, 7, 11)

टिप्पणी : हमारे देश में संख्याओं का यह सम्बन्ध बहुत पहले से ज्ञात था। ऐसा माना जाता है कि 600 ईसा पूर्व एक भारतीय गणितज्ञ बोधायन ने इसे सर्वाधिक व्यापक रूप में व्यक्त किया और अनेक संख्यात्मक उदाहरणों के द्वारा स्पष्ट किया।

संख्याओं से पूर्ण वर्ग संख्याएँ बनाना

जैसा कि पृष्ठ क्र. 2 में आपने देखा कि 252 के गुणनखण्डों में अभाज्य गुणनखंड 2 और 3 के जोड़े बन गए किन्तु अभाज्य गुणनखंड 7 का जोडा नहीं बना।

यदि इसमें 7 का गुणा या भाग कर दिया जाता तो सभी गुणनखण्डों के जोड़े बन जाएगे , अर्थात 7 वह न्यूनतम सख्या है जिसका 252 से गुणा या भाग करने पर गुणनफल या भागफल पूर्ण वर्ग हो जायेगा। आइये, इसे कुंछ उदाहरणो से समझे –

उदाहरण 2. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 720 को गुणा करने पर प्राप्त संख्या पूर्ण वर्ग हो।

हल: $720 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 5$

720 के अभाज्य गुणनखण्डों में केवल 5 का जोड़ा नहीं बना। अतः पूर्ण वर्ग संख्या वह होगी जिसमें 5 का भी जोड़ा बन जाए इसके लिए हमें 720 को 5 से गुणा करना होगा।

अतः 5 वह छोटी से छोटी संख्या है, जिसका 720 से गुणा करने पर प्राप्त संख्या पूर्ण वर्ग होगी।

उदाहरण 3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 140 को भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग संख्या हो।

हल: $140 = \underline{2 \times 2} \times 5 \times 7$

140 के अभाज्य गुणनखण्डों में अभाज्य गुणनखंड 5 एवं 7 के जोड़े नहीं है। यदि हम 140 को $5 \times 7 = 35$ से भाग दें तब भागफल पूर्ण वर्ग बन जाएगी।

उदाहरण 4. वह न्यूनतम पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 6 एवं 8 से पूर्णतः विभाजित हो।

हल: 6 एवं 8 का ल.स. = 24

24 के अभाज्य गुणनखण्ड $= \underline{2 \times 2} \times 2 \times 3$

अब हम देखते हैं कि 24 के गुणनखण्डों में 2 एवं 3 के जोड़े नहीं हैं। अतः यदि 24 को $(2 \times 3) = 6$ से गुणा कर दें तब वह ऐसी पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी जो 6 एवं 8 दोनों से विभाजित होगी। अतः वांछित संख्या $24 \times 6 = 144$ होगी।

इन्हें भी कीजिए –

$(10)^2 = 100$ होता है, $(300)^2 = 90000$, $(5000)^2 = 25000000$

10 के वर्ग में 2 शून्य हैं, 300 के वर्ग में 4 शून्य तथा 5000 के वर्ग में 6 शून्य हैं, तो क्या कोई ऐसी संख्या सोच सकते हैं जिसका वर्ग करने पर मात्र इकाई के स्थान पर शून्य हों या इकाई, दहाई एवं सैकड़ा तीनों के स्थान पर शून्य हों।

अभ्यास 2

(i) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 200 से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

(ii) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 180 से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

(iii) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 2352 में भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

प्रश्नावली 1.1

प्र.1. निम्न संख्याओं के गुणनखण्डों के जोड़े बनाकर बताइये कि ये संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं अथवा नहीं?

(i) 164 (ii) 121 (iii) 289
(iv) 729 (v) 1100

प्र.2. निम्न संख्याओं के पूर्ण वर्ग न होने का कारण बताइये।

(i) 12000 (ii) 1227 (iii) 790
(iv) 1482 (v) 165000 (vi) 15050 (vii) 1078 (viii) 8123

प्र.3. निम्न संख्याओं में से किन संख्याओं का वर्ग सम संख्या एवं किन संख्याओं का वर्ग विषम संख्या है ?

(i) 14 (ii) 277 (iii) 179
(iv) 205 (v) 608 (vi) 11288
(vii) 1079 (viii) 4010 (ix) 1225

प्र.4. निम्न प्रतिरूप का अवलोकन करें एवं रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

11^2 = 121
101^2 = 10201
1001^2 = 1002001
10001^2 = -----------
100001^2 = ------------
----------- = 1000002000001

घन संख्याएँ (Cube Numbers)

अब तक हमने वर्ग संख्याओं पर विचार किया। किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को उस संख्या की वर्ग संख्या कहते है। यदि अब गुणनफल को पुनः उसी संख्या से गुणा कर दिया जाए तब प्राप्त संख्या उस संख्या की घन संख्या बन जाएगी।

जैसे $2 \times 2 \times 2 = 8$ या $2^3 = 8$

$7 \times 7 \times 7 = 343$ या $7^3 = 343$

यहाँ 8 एवं 343 क्रमशः 2 एवं 7 की घन संख्याएँ हैं।

निम्न सारणी का अवलोकन कर रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

सारणी 1.4

संख्या	तीनबार गुणा	घातीय रूप	घन संख्या
1	$1 \times 1 \times 1$	1^3	1
2	$2 \times 2 \times 2$	2^3	8
3	$3 \times 3 \times 3$	------	------
4	---------	------	------
5	---------	------	------
6	---------	------	------
7	---------	------	------
8	---------	------	------
9	---------	------	------
10	---------	------	------

उपरोक्त तालिका के अन्तिम स्तम्भ से प्राप्त संख्याएँ 1, 8, 27 .... इत्यादि क्रमशः 1,2,3,. ... इत्यादि पूर्णांकों की घन संख्याएँ हैं।

इस प्रकार की संख्याएँ पूर्ण घन संख्याएँ कहलाती हैं।

सारणी में दी गईं सम संख्याओं एवं उनके घनों पर विचार करें, आप किस निष्कर्ष पर पहुँचे? क्या सम संख्याओं के घन भी सम हैं? क्या विषम संख्याओं के घन भी विषम हैं?

घन संख्याओं की पहचान

कोई संख्या घन संख्या है या नहीं इसकी पहचान कैसे होगी ? वर्ग संख्याएँ पहचानने के लिए हमने अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बनाए थे। जिनके पूरे जोड़े बन गए थे, वे वर्ग संख्याएँ हैं।

घन संख्याओं के लिए इसी को आगे बढ़ाते हैं। 8 को हम $2 \times 2 \times 2$ के रूप में लिख सकते हैं अर्थात् इसके अभाज्य गुणनखण्ड करने पर हमें पता चलता है कि इसमें 2 को 2 के साथ तीन बार गुणा हुआ है और वह इनसे एक त्रिक (तिगड़ी) बनाने पर और कोई अभाज्य गुणनखण्ड नहीं बचता। इसी तरह 27 को देखें। इसमें तीन का तीन बार गुणा होता है। इसमें भी त्रिक बन जाएगा। यदि 24 को लें तो $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ अर्थात् 2 तीन बार है और उससे तिगड़ी (त्रिक) बन गया किन्तु 3 बच गया, इसका मतलब हुआ कि 24 घन संख्या नहीं है।

इस प्रकार, पूर्ण घन संख्याओं की पहचान के लिए हम देखते हैं कि संख्या के अभाज्य

गुणनखण्डों में समान अभाज्य गुणनखण्डों के यदि सभी गुणनखण्ड त्रिकों में व्यवस्थित हो जाए तो वह संख्या पूर्ण घन संख्या होगी, अन्यथा नहीं।

आइए, कुछ उदाहरणों के द्वारा इसे समझें –

उदाहरण 5. 216 पूर्ण घन संख्या है अथवा नहीं?

हल : $216 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$ (अभाज्य गुणनखण्ड बनाने पर)

$= 2^3 \times 3^3$ (सभी गुणनखण्डों के त्रिक बन गए)

$= (2 \times 3)^3 \quad = 6^3$

यहाँ 216 को 6 के घन के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

अतः 216 एक पूर्ण घन संख्या हैं।

उदाहरण 6. बताइये कि संख्या 23625 पूर्ण घन है अथवा नहीं?

हल : $23625 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} \times 7$ (अभाज्य गुणनखण्ड करने पर)

यहाँ 23625 के गुणनखण्डों में 3 एवं 5 के त्रिक तो बन गए किन्तु 7 का नहीं।

अतः 23625 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

उदाहरण 7. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 68600 में गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण घन संख्या हो?

हल: $68600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5 \times \underline{7 \times 7 \times 7}$

यहाँ 68600 के गुणनखण्डों में 2 एवं 7 के लिए तो त्रिक बन गए किन्तु 5 के त्रिक बनाने के लिए एक बार और 5 का गुणा करना होगा। अतः 68600 में यदि 5 का गुणा कर दें तब वह पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

उदाहरण 8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 408375 में भाग करने पर भागफल पूर्ण घन हो जाए?

हल: $408375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} \times 11 \times 11$

यहाँ 408375 के गुणनखण्डों में 3 एवं 5 के लिए तो त्रिक बन गए किन्तु 11 का त्रिक नहीं बन सका। अतः 408375 में $11 \times 11 = 121$ का भाग दें तब भागफल एक पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

प्रश्नावली 1.2

प्र.1. निम्न संख्याओं में से कौनसी संख्या पूर्ण घन है और कौन सी नहीं?

(i) 125 (ii) 800 (iii) 729 (iv) 2744

(v) 22000 (vi) 832

प्र.2. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 256 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 1352 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.4. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 8019 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.5. प्रश्न 1 में जो संख्याएँ घन संख्याएँ नहीं है उन्हें किस छोटी से छोटी संख्या से गुणा करें कि गुणनफल घन संख्या बन जाए

वर्गमूल [Square Root]

अध्याय के शुरूआत में हमने पूर्ण वर्ग संख्या के बारे में अध्ययन किया। आइए, उसे एक क्रियाकलाप द्वारा पुनः दोहराते है :–

क्रियाकलाप 3.

सारणी 5

क्र.सं.	संख्या	अभाज्य गुणनखण्ड	किस संख्या का वर्ग है
1.	16	$\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$	$2 \times 2 = 4$
2.	25	$\underline{5 \times 5}$	5
3.	36		
4.	49		
5.	64		
6.	100		
7.	144		
8.	196		

उपरोक्त क्रियाकलाप में आपने देखा कि 4 का वर्ग 16 है, 5 का वर्ग 25, 8 का वर्ग 64 है। इसे इस तरह भी हम कहते हैं कि 64 का वर्गमूल 8 है, 25 का वर्गमूल 5 है।

इसे ऐसे लिखते है :–

16 का वर्गमूल $= \sqrt{16} = 4$, 25 का वर्गमूल $= \sqrt{25}$ (वर्गमूल को चिह्न "$\sqrt{\ }$" से दर्शाते हैं।)

आपने देखा है कि किसी प्राकृत संख्या n का वर्ग, प्रारंभिक n विषम संख्याओं के योगफल बराबर होता है। (चित्र : 2)

जैसे : $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

जिस प्रकार पाँच प्रारंभिक विषम संख्याओं को जोड़ कर 5 का वर्ग (25) प्राप्त किया है, क्या उसी प्रकार 25 में से विषम संख्याओं को घटाकर 25 का वर्गमूल प्राप्त कर सकते हैं?

आइए देखें–

$25 - 1 = 24$, $24 - 3 = 21$, $21 - 5 = 16$

$16 - 7 = 9$, $9 - 9 = 0$,

यहाँ 25 में उत्तरोत्तर से प्रारंभिक पाँच विषम संख्याओं को घटाने पर शेषफल शून्य (0) प्राप्त हुआ है। इसका अर्थ हुआ कि 25 का वर्गमूल 5 है, अर्थात् $\sqrt{25}$

आप भी कुछ पूर्ण वर्ग संख्याओं के लिए इस प्रक्रिया को जाँचे।

आप पायेंगे कि **किसी पूर्ण वर्ग संख्या में से जितनी प्रारंभिक विषम संख्याओं को घटाने पर शून्य प्राप्त होता है, वही उस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल होता है।**

क्या इस प्रक्रिया द्वारा पूर्ण वर्ग संख्या की जाँच की जा सकती है?

आप पायेंगे कि शेषफल शून्य नहीं होने की दशा में दी गई संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होती।

अभ्यास 3

निम्नांकित के वर्गमूल मौखिक बताइए :–

(i) 25 (ii) 49 (iii) 64 (iv) 81 (v) 121 (vi) 144

कुछ संख्याओं के वर्गमूल हम मौखिक निकाल सकते हैं किन्तु सभी संख्याओं के वर्गमूल हम मौखिक ज्ञात नहीं कर सकते हैं। आइए, हम वर्गमूल निकालने की विधि पर चर्चा करें।

(1) अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल :

इस विधि के द्वारा वर्गमूल ज्ञात करने हेतु सर्वप्रथम दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कर लेते हैं। इसके पश्चात् समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बनाते हैं तथा प्रत्येक जोड़े से एक संख्या लेकर उनका गुणा कर लेते हैं।

8NCVXE

उदाहरण 9. 441 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $441 = \underline{3 \times 3}\ \ \underline{7 \times 7}$

3	441
3	147
7	49
7	7
	1

अतः $\sqrt{441} = \sqrt{\underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}}$

$= 3 \times 7$ (प्रत्येक जोड़े में से एक–एक संख्या लेने पर)

$= 21$

उदाहरण 10. 1296 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $1296 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}$

अतः $\sqrt{1296} = \sqrt{\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}}$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 36$

अभ्यास 4

निम्नांकित के अभाज्य गुणनखण्ड करके वर्गमूल ज्ञात कीजिए

(i) 289 (ii) 625 (iii) 900 (iv) 361 (v) 1764

उदाहरण 11. यदि एक वर्गाकार चित्र का क्षेत्रफल 2025 वर्ग सेमी हो तब चित्र की एक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 = 2025$ वर्ग सेमी

अतः चित्र की एक भुजा की लम्बाई $= \sqrt{2025}$

$= \sqrt{\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}\times\underline{5\times5}}$

$= 3\times3\times5$

$= 45$ सेमी.

3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

उदाहरण 12. एक व्यक्ति अपने बाग में 11025 आम के पौधे इस प्रकार लगाता है कि हर पंक्ति में उतने ही पौधे हैं जितनी पंक्तियाँ हैं तो बाग में कितनी पंक्तियाँ हैं?

हल: माना बाग में पंक्तियों की संख्या x हैं

चूंकि पौधों की कुल संख्या $= x \times x = x^2$

$x^2 = 11025$ या $x = \sqrt{11025}$

$= \sqrt{3\times3\times5\times5\times7\times7}$

$= 3\times5\times7 = 105$

3	11025
3	3675
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

अतः बाग में पंक्तियों की संख्या $= 105$

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा ज्ञात करिए

   (i) 361 (ii) 400 (iii) 784

   (iv) 1024 (v) 2304 (vi) 7056

2. एक बालकों की टोली ने 256 आम खरीदे और आपस में बाँट लिए यदि प्रत्येक को उतने ही आम मिले जितनी टोली में बालक थे तब बालकों की संख्या बताइये।

भागविधि से वर्गमूल ज्ञात करना

अभी तक हमने पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल निकालना सीखा है।

गणित में ऐसी भी मजेदार विधि है जिससे हम पूर्ण वर्ग संख्याओं के अलावा उन संख्याओं के वर्गमूल भी मालूम कर सकते हैं जो पूर्णवर्ग नहीं हैं। इसे वर्गमूल ज्ञात करने की 'भाग विधि' के नाम से जाना जाता है। इसे समझने के लिए हम कुछ उदाहरणों पर काम करेंगे।

आप जानते हैं कि एक अंक और दो अंक वाली पूर्णवर्ग संख्याओं के वर्गमूल के रूप में हमें एक अंक वाली संख्याएँ ही मिलती है। आप इन्हें पहाड़े का उपयोग कर आसानी से जान सकते हैं।

जैसे– $1\times1 = 1$, इसलिए 1 का वर्गमूल 1 है।

$3\times3 = 9$, इसलिए 9 का वर्गमूल 3 है।

$9\times9 = 81$, इसलिए 81 का वर्गमूल 9 है।

81 के बाद की पूर्ण वर्ग संख्या 100 है जो तीन अंक वाली संख्या है। इसका वर्गमूल 10 है, जो दो अंक वाली संख्या है। (क्या किसी संख्या और उसके वर्गमूल में निहित अंकों की संख्या में कोई पैटर्न दिखाई पड़ता है?) तीन अंकों वाली किसी बड़ी संख्या का वर्गमूल कैसे निकालेंगे? आइए इसे एक उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण 13. 625 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल :–

पद 1 :– संख्या 625 की इकाई की ओर से आरंभ करते हुए संख्याओं के जोड़े बनाइए। जोड़े बनाने के लिए संख्याओं के ऊपर एक छोटी सी आड़ी रेखा खींच सकते हैं। यहाँ केवल एक जोड़ा बनेगा 25, 6 अकेला रहेगा।

$$\overline{6}\,\overline{25}$$

पद 2 :– 625 को भाग चिह्न के भीतर रखिए। अब ऐसा बड़ा से बड़ा भाजक ढूँढ़िए जिसका वर्ग 6 से बड़ा न हो। यहाँ वह 2 होगा।

भागफल

भाजक $\sqrt{\overline{6}\ \overline{25}}$ भाज्य

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\ \overline{25} \end{array}$$

(2 × 2 = 4, 3 × 3 = 9, 9 > 6)

पद 3 :– भाजक और भागफल में 2 रखते हुए उनके गुणनफल 4 को 6 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 2 मिलेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\ \overline{25} \\ & -4 \\ \hline & 2 \end{array}$$

पद 4 :– भाजक में उतनी ही संख्या जोड़िए। 4 मिलेगा। उसे नीचे लिखिए। पद–3 में जो शेष 2 बचा था, उसके आगे पूरी एक जोड़ी संख्या 25 उतारकर रखिए। यह नया भाज्य 225 बनेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\ \overline{25} \\ +2 & -4 \\ \hline 4 & 2\ 25 \end{array}$$

पद 5 :– अब हमें भाजक में 4 के आगे और भागफल में 2 के आगे एक ऐसी संख्या रखनी है जिससे उस संख्या और नए भाजक का गुणनफल 225 से अधिक न हो। यदि हम भागफल में 3 रखें तो भाजक में 4 के आगे भी 3 रखेंगे, जिससे नया भाजक 43 होगा।

43 × 3 = 129, 129 < 225

क्रमशः भागफल में 4 और 5 रखकर भी देखें।

44 × 4 = 176 < 225

45 × 5 = 225 = 225

स्पष्ट है कि भागफल में 5 लेना उपयुक्त होगा। इस गुणनफल 225 को नए भाज्य 225 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 0 बचेगा। कुल भागफल 25 ही 625 का वर्गमूल होगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 5 \\ \hline 2 & \overline{6}\ \overline{25} \\ +2 & -4 \\ \hline 45 & 225 \\ & 225 \\ \hline & 0 \end{array}$$

अर्थात् $\sqrt{625} = 25$.

उदाहरण 14. 9409 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :–

पद 1 :– हमें 4 अंकों की संख्या दी गई है। इकाई के स्थान की ओर से शुरू करते हुए 2–2 अंकों की जोड़ियाँ बनाइए। दो जोड़ियाँ बनेंगी–

$\sqrt{\overline{94}\;\overline{09}}$

$\overline{94}\;\overline{09}$

इन्हें भाग चिह्न के भीतर रखिए।

पद 2 :– दूसरी जोड़ी 94 को भाज्य मानते हुए सबसे बड़ा ऐसा भाजक चुनिए जिसका वर्ग 94 से अधिक न हो। स्पष्ट है वह भाजक 9 होगा। अब भाजक एवं भागफल में 9 रखते हुए इनका गुणनफल 81, 94 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 13 मिलेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 9 & \overline{94}\;\overline{09} \\ & -81 \\ \hline & 13 \end{array}$$

पद 3 :– भाजक 9 में उतना ही जोड़िए। योगफल नीचे लिखिए। शेषफल 13 के आगे एक जोड़ी संख्या 09 उतारिए। नया भाज्य 1309 हो जाएगा। पहले उदाहरण की तरह देखिए, भाजक 18 के सामने क्या रखें कि इस संख्या और नए भाजक का गुणनफल 1309 के बराबर या उसके निकटतम और उससे छोटा हो। यहाँ हम अनुमान लगाते हैं। यहाँ भाजक तीन अंकों वाली संख्या होगी, भाज्य चार अंकों की संख्या है। दोनों से यदि इकाई का अंक छोड़ दें तो भाजक 18 और भाज्य 130 बचता है। अब यह आसानी से देखा जा सकता है कि 18X 7=126 मिलता है जो 130 से छोटा है। अतः भाजक और भाज्य में 7 रख कर देखा जा सकता है।

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 9 & \overline{94}\;\overline{09} \\ +9 & -81 \\ \hline 18 & 13\;09 \end{array}$$

$187 \times 7 = 1309$

इस गुणनफल को भागफल 1309 के नीचे रखकर घटाइए। शेष शून्य मिलेगा। कुल भागफल 97 ही संख्या 9409 का वर्गमूल होगा।

अर्थात् $\sqrt{9409} = 97$

$$\begin{array}{r|l} & 97 \\ \hline 9 & \overline{94}\;\overline{09} \\ +9 & -81 \\ \hline 187 & 13\;09 \\ & -13\;09 \\ \hline & 0 \end{array}$$

उक्त दोनों उदाहरणों में हमने पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल प्राप्त किए हैं। अब एक ऐसा उदाहरण लें जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। ऐसी स्थिति में वर्गमूल में दशमलव चिन्ह के बाद की संख्याएँ भी मिलती हैं।

उदाहरण 15. 8772 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :– आप जानते हैं कि 8772 को 8772.0000 के रूप में लिखा जा सकता है। जिस प्रकार पहले के दोनों उदाहरणों में हमने इकाई से शुरु करके संख्याओं के जोड़े बनाए थे, उसी

प्रकार यहाँ भी बनाएँगे। इकाई दहाई के अंक एक साथ, सैकड़े और हजार के अंक एक साथ। दशमलव चिह्न के दायीं ओर जोड़ियाँ बनाते समय दशांश और शतांश स्थानों के अंक एक साथ रखते हैं और उससे आगे भी इसी तरह।

संख्या 8772.0000 को इस प्रकार लिखेंगे – $\overline{87}\,\overline{72}.\overline{00}\,\overline{00}$

पहले की ही तरह 8772 का वर्गमूल ज्ञात करें –

123 शेष बचने के बाद दशमलव चिह्न के बाद के शून्यों का एक जोड़ा उतारें। अब भागफल में जो संख्या लिखेंगे उसके पहले दशमलव का चिह्न लगाएँ। भाग की प्रक्रिया वैसे ही आगे बढ़ाएँ।

यदि वर्गमूल को दशमलव के बाद के दो अंकों तक ही प्राप्त करना हो तो यह प्रक्रिया यहाँ रोकी जा सकती है। यदि आगे बढ़ाना हो तो प्रत्येक बार शून्य का एक जोड़ा शेष के आगे लिखकर नया भागफल प्राप्त करते जाएँगे।

	93·65
9	$\overline{87}\,\overline{72}\cdot\overline{00}\,\overline{00}$
+9	–81
183	672
+3	–549
1866	12300
+6	–11196
18725	110400
	–93625
	16775

अतः 8772 का वर्गमूल लगभग 93.65 होगा।

$\sqrt{8772}$ = 93.65 लगभग

प्रश्नावली 1.4

प्रश्न 01. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल, भाग विधि से ज्ञात कीजिए :–

(i) 529 (ii) 1369 (iii) 1024 (iv) 5776

(v) 900 (vi) 7921 (vii) 50625 (viii) 363609

प्रश्न 02. एक सिनेमा हॉल में सिनेमा मालिक सीटों को इस प्रकार व्यवस्थित करना चाहते हैं कि सिनेमा हॉल में जितनी स्तम्भों की संख्या है, उतनी ही संख्या पंक्तियों की हों। यदि उस हॉल में कुल 1849 सीटें हों तो पंक्तियों व स्तम्भों की संख्या ज्ञात कीजिए?

प्रश्न 03. एक वर्गाकार बगीचे का क्षेत्रफल 1444 वर्ग मीटर हो, तो बगीचे की लम्बाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए?

उदाहरण 16. 51.84 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :–

	7. 2
7	$\overline{51}.\,\overline{84}$
+ 7	- 49
14 2	02 84
	- 2 84
	0 00

$\sqrt{51.84} = 7.2$

उदाहरण 17. 23.1 का वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

हल :–

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 4.\,80 \\
\hline
4 & \overline{23}.\overline{10}\ \overline{00}\ \overline{00} \\
+4 & -16 \\
\hline
88 & \ 07\ 10 \\
8 & -\ 7\ 04 \\
\hline
960 & \qquad 6\ 00 \\
 & \quad -0\ 00 \\
\hline
 & \qquad 6\ 00
\end{array}
$$

$\sqrt{23.1} = 4.80$

उदाहरण 18. 2 का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

हल :–

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 1.41\,4 \\
\hline
1 & \quad 2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00} \\
+1 & -1 \\
\hline
2\,4 & \ 1\ 00 \\
+4 & -\ \ 96 \\
\hline
2\,81 & \quad 04\ 00 \\
+\ \ 1 & \ -\ 2\ 81 \\
\hline
2824 & \qquad 1\ 19\ 00 \\
 & \quad -1\ 12\ 96 \\
\hline
 & \qquad 0\ 07\ 04
\end{array}
$$

प्रश्नावली–1.5

प्रश्न 01. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :–

(i) 7.29 (ii) 16.81 (iii) 9.3025

प्रश्न 02. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए :–

(i) 0.9 (ii) 5 (iii) 7

घनमूल

किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए हमने उसके अमाज्य गुणनखण्डों में से समान गुणनखण्डों के दो–दो के जोड़ों का प्रयोग किया था। प्रत्येक जोड़े में से एक–एक संख्या लेकर उनका गुणा करके वर्गमूल प्राप्त किया था। किसी संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए इसी प्रक्रिया को आगे बढ़ाते हैं। किसी संख्या का घनमूल निकालने के लिए उसके अभाज्य गुणनखंडों में से

समान गुणनखंण्डों के तीन–तीन के त्रिक (तिकड़ी) बनाएँगे तथा ऐसी प्रत्येक तिकड़ी से एक–एक संख्या लेकर उनका गुणनफल ज्ञात कर लेंगे। यही दी गई संख्या का घनमूल होगा।

उदाहरण 17. 512 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

हल :–

$$512 = \underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}$$

$$\sqrt[3]{512} = 2\times2\times2$$

$$\sqrt[3]{512} = 8$$

उदाहरण 18. 91,125 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

(संकेत –: हम देखते हैं कि संख्या के इकाई के स्थान पर 5 है अतः संख्या 5 से पूर्णतः विभाजित होगी।)

5	91,125
5	18,225
5	3,645
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

हल :–

$$91,125 = \underline{5\times5\times5}\times\underline{3\times3\times3}\times\underline{3\times3\times3}$$

$$\sqrt[3]{91,125} = 5\times3\times3$$

$$\sqrt[3]{91,125} = 45$$

प्रश्नावली–1.6

1. निम्नलिखित संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :–

(i) 125 (ii) 343 (iii) 1331
(vi) 2197 (v) 9261 (vi) 166375
(vii) 4913 (viii) 42875

8ZR5DY

हमने सीखा

1. यदि n कोई संख्या है तब $n\times n$ या n^2 इसका वर्ग कहलाएगा और $n\times n\times n$ या n^3 इसका घन।
2. जिन संख्याओं के इकाई में 2,3,7 या 8 हो वे पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती हैं।
3. यदि पूर्ण वर्ग संख्या के अन्त में सम संख्या में शून्य हो तो वे भी पूर्ण वर्ग संख्या होगी।
4. सम संख्याओं के वर्ग एवं घन सदैव सम संख्याएँ एवं विषम संख्याओं के वर्ग एवं घन सदैव विषम संख्याएँ होती हैं।
5. किसी प्राकृत संख्या n का वर्ग, प्रारम्भिक n विषम संख्याओं के योगफल के बराबर होता है।
6. यदि तीन संख्याएँ इस प्रकार हो कि बड़ी संख्या का वर्ग शेष दोनों संख्याओं के वर्गों के योग के बराबर हो तब संख्याएँ पाइथागोरिय त्रिक कहलाती है। जैसे $3^2 + 4^2 = 5^2$ अतः (3,4,5) पाइथोगोरीय त्रिक है।
7. वर्गमूल को '$\sqrt{\ }$' चिह्न के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इस चिह्न को करणी चिह्न कहते हैं।

9111FL

अध्याय–2

घातांक

EXPONENT

पूर्णांकों की घात

अब तक हमने प्राकृत संख्याओं के घातांकों पर विचार किया, परन्तु फातिमा के मन में यह प्रश्न उठ रहा था कि ऋणात्मक संख्याओं की घातांकों से सम्बंधित प्रश्नों को कैसे हल करेंगे? उसने सोचा कि क्यों न धनात्मक के स्थान पर ऋणात्मक संख्या लिख कर उसके किसी भी घात के लिए हल करके देखें –

$$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$$
$$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1)$$
$$= \{(-1) \times (-1)\} \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$$
$$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$
$$= \{(-1) \times (-1)\} \times \{(-1) \times (-1)\}$$
$$= 1 \times 1 = 1$$
$$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$
$$= \{(-1) \times (-1)\} \times \{(-1) \times (-1)\} \times (-1)$$
$$= 1 \times 1 \times (-1) = -1$$

इन्हें देखकर कमली ने कहा ''जब (–1) का घात सम संख्या है तब उसका मान 1 एवं जब (–1) का घात विषम संख्या है तब उसका मान –1 है।''

अर्थात्

$\boxed{(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1}$ एवं $\boxed{(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1}$

इस प्रकार फातिमा एवं कमली के समझ में यह बात आ गई कि $(-1)^{25} = -1$, $(-1)^{50} = 1$ $(-1)^{143} = -1$, $(-1)^{144} = 1$ इत्यादि।

अब निम्नांकित पर विचार करें :–

$$(-5) = (-1) \times 5$$
$$(-5)^4 = \{(-1) \times 5\}^4$$
$$= (-1)^4 \times 5^4 \qquad [\therefore\ (a \times b)^m = a^m \times b^m \text{ से}]$$
$$= 1 \times 5^4$$

$$= 5^4$$

$$(-27)^{13} = \{(-1) \times 27\}^{13}$$
$$= (-1)^{13} \times 27^{13}$$
$$= (-1) \times 27^{13} \quad [\because (-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1]$$
$$= -27^{13}$$

$$(-m)^{16} = \{(-1) \times m\}^{16}$$
$$= (-1)^{16} \times m^{16} \quad [\because (-1)^{\text{सम संख्या}} = 1]$$
$$= m^{16}$$

सोचकर बताएँ कि घातांक संख्याओं $(-35)^{12}$, $(-149)^{23}$, $(-m)^{37}$, $(-m)^{100}$, $(-11)^{111}$ में से कौनसी धनात्मक होगी एवं कौन–सी ऋणात्मक? क्या आप इनसे कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? आप पायेंगे कि यदि a और m कोई प्राकृत संख्याएँ हों, तो $(-a)^m = \{(-1) \times a\}^m = (-1)^m \times a^m$

अर्थात् $(-a)^m$ धनात्मक है या ऋणात्मक, $(-1)^m$ पर निर्भर करता है।
या $(-a)^m$ धनात्मक होगा यदि m सम संख्या हो तथा ऋणात्मक होगा यदि m विषम संख्या हो

उदाहरण 1. सरल कीजिए –

(i) $(-5)^4 \times (-5)^7$

(ii) $(-4)^2 \times (-4)^6 \times (-4)^{17}$

(iii) $(-9)^8 \div (-9)^2$

(iv) $(-x)^7 \div (-x)^4$

हल : (i) $(-5)^4 \times (-5)^7 = [(-1) \times 5]^4 \times [(-1) \times 5]^7$
$$= [(-1)^4 \times 5^4] \times [(-1)^7 \times 5^7]$$
$$= 1 \times 5^4 \times (-1) \times 5^7$$
$$= -1 \times 5^{4+7} = -5^{11} \quad [\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$$

(ii) $(-4)^2 \times (-4)^6 \times (-4)^{17} = [(-1) \times (4)]^2 \times [(-1) \times (4)]^6 \times [(-1) \times (4)]^{17}$
$$= (-1)^2 \times (4)^2 \times (-1)^6 \times (4)^6 \times (-1)\,(4)^{17}$$
$$= 1 \times 4^2 \times 1 \times 4^6 \times (4)^{17}\,(-1) \times 4^{17}$$
$$= -4^{2+6+17}$$
$$= -4^{25} \quad [\because a^{\ell} \times a^m \times a^n = a^{\ell+m+n}]$$

(iii) $(-9)^8 \div (-9)^2 = \dfrac{(-9)^8}{(-9)^2} = \dfrac{\{(-1)\times 9\}^8}{\{(-1)\times 9\}^2}$
$$= \frac{(-1)^8 \times 9^8}{(-1)^2 \times 9^2} = \frac{1 \times 9^8}{1 \times 9^2} = \frac{9^8}{9^2}$$
$$= 9^{8-2} = 9^6 \quad [\because a^m \div a^n = a^{m-n}]$$

(iv) $(-x)^7 \div (-x)^4 = \dfrac{(-x)^7}{(-x)^4} = \dfrac{\{(-1)\times x\}^7}{\{(-1)\times x\}^4}$

$= \dfrac{(-1)^7 \times x^7}{(-1)^4 \times x^4} = \dfrac{-1\times x^7}{1\times x^4}$

$= (-1) \times x^{7-4} = -x^3$ $[\because a^m \div a^n = a^{m-n}]$

प्रश्नावली 2.1

1. सरल करें :–

(a) $(-5)^3$ (b) $(-4)^5$ (c) $(-2)^6$ (d) $(-3)^6$

2. निम्न को घातांक के रूप में लिखें :–

(a) $5^4 \times (-5)^2$ (b) $15 \times (-15)^{25}$

(c) $12^5 \div (-12)^3$ (d) $(-p)^{14} \div (-p)^7$

3. दोनों पक्षों को हल कर निम्न कथनों की सत्यता की जाँच कीजिए :–

(a) $(-2)^4 \times (-2)^2 = (-2)^8 \div (-2)^2$

(b) $(-3)^2 \times (-3)^{-6} = \dfrac{1}{(3^2)^2}$

(c) $(-7)^{32} \div (-7)^{32} = 1$

परिमेय संख्याओं की घात

रजिया के मन में विचार आया कि अभी तक हमने प्राकृत संख्याओं एवं पूर्णांकों के घातांकों पर ही विचार किया है किन्तु इनके स्थान पर यदि परिमेय संख्याएं हों तब क्या होगा?

आइए, रज़िया के सवाल का जवाब ढूँढें।

परिमेय संख्याओं के कुछ घातांकों पर विचार कीजिए:–

(1) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^4 = \dfrac{5}{7}\times\dfrac{5}{7}\times\dfrac{5}{7}\times\dfrac{5}{7}$

$= \dfrac{5\times5\times5\times5}{7\times7\times7\times7} = \dfrac{5^4}{7^4}$

(2) $\left(-\dfrac{3}{11}\right)^5 = \left\{(-1)\times\left(\dfrac{3}{11}\right)\right\}^5 = (-1)^5 \times \left(\dfrac{3}{11}\right)^5$

$$= (-1) \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \qquad [\because (-1)^5 = -1]$$

$$= -\frac{3^5}{11^5}$$

(3) $$\left(-\frac{4}{3}\right)^6 = (-1)^6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^6$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \ldots \text{ 6 बार} \qquad [\because (-1)^6 = 1]$$

$$= \frac{4^6}{3^6}$$

अतः यदि हमारे पास कोई परिमेय संख्या $\left(\frac{5}{4}\right)^m$ हो, तब

$$\left(\frac{5}{4}\right)^m = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times ----- \text{ (m बार)}$$

$$= \frac{5 \times 5 \times \ldots\ldots\text{m बार}}{4 \times 4 \times \ldots\ldots\text{m बार}} = \frac{5^m}{4^m}$$

अब आप $\left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{9}{4}\right)^5, \left(-\frac{4}{7}\right)^6, \left(-\frac{2}{5}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^p$ को विस्तारित करके देखें।

यदि कोई परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ $q \neq 0$) की घात m हो, तब

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \times ----- \text{ (m बार)}$$

$$= \frac{p \times p \times p \times \ldots\ldots\text{m बार}}{q \times q \times q \times \ldots\ldots\text{m बार}} = \frac{p^m}{q^m}$$

अर्थात् $\boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}}$ जहां p,q कोई पूर्णांक हैं एवं $q \neq 0$

अब यदि परिमेय संख्या का घात ऋणात्मक हो, तब स्थिति कैसी होगी?
निम्न उदाहरणों पर विचार कीजिए :–

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{5^{-2}}{4^{-2}}\right) = \frac{1/5^2}{1/4^2} = \frac{4^2}{5^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \qquad \left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ और } a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right]$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-4} = \frac{3^{-4}}{7^{-4}} = \frac{1/3^4}{1/7^4} = \frac{7^4}{3^4} = \left(\frac{7}{3}\right)^4$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-m} = \frac{2^{-m}}{5^{-m}} = \frac{1/2^m}{1/5^m} = \frac{5^m}{2^m} = \left(\frac{5}{2}\right)^m$$

अभ्यास

निम्नलिखित को स्वयं हल करने का प्रयास करें –

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{-5}, \left(\frac{14}{13}\right)^{-9}, \left(\frac{15}{6}\right)^{-4}, \left(\frac{113}{53}\right)^{-11}, \left(\frac{5}{7}\right)^{-7}$$

पुनः विचार करें :–

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

इस प्रकार स्पष्ट है कि –

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m}$ यहाँ a, b कोई पूर्णांक हैं तथा $a \neq o, b \neq o$

उदाहरण 2. निम्न को सरल कीजिए –

1. $\left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2$ 2. $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$

हल : 1. $\left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^{4+(-2)}$ $\left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^m - \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}\right]$ एवं $[\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^2}{7^2} = \frac{25}{49}$$

हल : 2. $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(-\frac{9}{2}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$

$$= (-1)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$= 1 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{4+2}$$

$$= \left(\frac{9}{2}\right)^6 = \frac{531441}{64}$$

3. $-\frac{36}{49}$ को घात के रूप में व्यक्त कीजिए।

यहाँ $-\frac{36}{49} = (-1) \times \frac{36}{49}$

$$= (-1) \times \left(\frac{6}{7}\right)^2 = -\left(\frac{6}{7}\right)^2$$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न को सरल कीजिए :–

(a) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ (b) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2$

(c) $(-5)^3 \div \left(-\frac{1}{5}\right)^2$ (d) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$

2. घात के रूप में व्यक्त कीजिए :–

(a) $-\frac{25}{49}$ (b) $\frac{27}{125}$ (c) $\frac{729}{64}$

3. सिद्ध कीजिए :–

(a) $\left(\frac{5}{7}\right)^7 \times \left(\frac{7}{5}\right)^7 - \left(\frac{3}{19}\right)^2 \times \left(\frac{19}{3}\right)^2 = 0$

(b) $\left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{q}{p}\right)^m = \left(\frac{q}{p}\right)^{-m}$

(c) $\left(\frac{25}{16}\right)^{-4} = \left(\frac{16}{25}\right)^4$

919HH9

4. सत्य या असत्य लिखिए :–

(a) $\left(\frac{-5}{4}\right)^{65} = \frac{-5^{65}}{4^{65}}$

(b) $\left(\frac{-32}{19}\right)^{150} = \frac{32^{150}}{19^{150}}$

(c) $(25 \times 3)^5 = 25 \times 3^5$

(d) $\left(\frac{27}{16}\right)^{-15} = \frac{27^{15}}{16^{15}}$

हमने सीखा

1. $\boxed{(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1}$ एवं $\boxed{(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1}$

2. यदि $\frac{p}{q}$ कोई परिमेय संख्या हो, तो $\boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}}$

3. यदि $\frac{a}{b}$ कोई परिमेय संख्या हो, तो $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m}$

अध्याय–3
समान्तर रेखाएँ
PARALLEL LINES

91ISIH

समान्तर रेखाएँ

पिछली कक्षा में आपने समान्तर रेखाओं के बारे में पढ़ा है। ये एक ही तल पर स्थित ऐसी दो रेखाएँ हैं, जिनके बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहती है। इन्हें दोनों ओर कितना भी बढ़ाया जाए, ये एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती हैं।

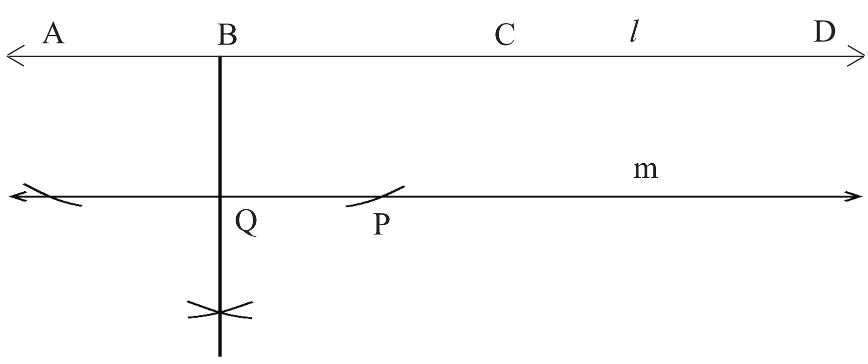
वर्ग या आयत की सम्मुख भुजाएँ, श्यामपट के सम्मुख किनारे, रेल की पटरी इत्यादि समान्तर रेखाओं के उदाहरण हैं। आप भी समान्तर रेखाओं के ऐसे ही कुछ उदाहरणों को सोच कर अपने कॉपी में लिखें।

समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी

दो समान्तर रेखाओं की लम्बवत दूरी सदैव समान होती है। इसे ज्ञात करने के लिए, एक रेखा के किसी बिन्दु से दूसरी रेखा पर लम्ब डालते है। इस प्रकार प्राप्त लम्ब की लम्बाई ही उन रेखाओं के बीच की दूरी होती है।

क्रियाकलाप 1

अपनी कॉपी पर दो समान्तर रेखाएँ बनाएं। उनके बीच की दूरी को अलग–अलग बिन्दुओं पर नाप कर अवलोकन सारणी को पूर्ण कीजिए –



चित्र 3.1

सारणी 3.1

क्रमांक	रेखा l पर चिन्हित् बिन्दु	रेखा l से समान्तर रेखा m पर डाले गए लम्ब का बिन्दु	दूरी (सेमी में)
1	A	....	....
2	B	Q	BQ =......
3	C	....	....
4	D	....	....

क्या प्रत्येक स्थिति में दोनों रेखाओं के बीच की दूरी समान है?
....

दी गई रेखा से निश्चित दूरी पर समान्तर रेखा खींचना

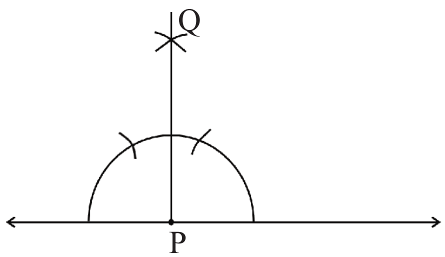
रेखा l खींच कर इससे 3 सेमी की दूरी पर एक समान्तर रेखा m की रचना करना–

रचना के चरण

1. दी गई रेखा l पर कोई बिन्दु P लीजिए (चित्र 3.2)

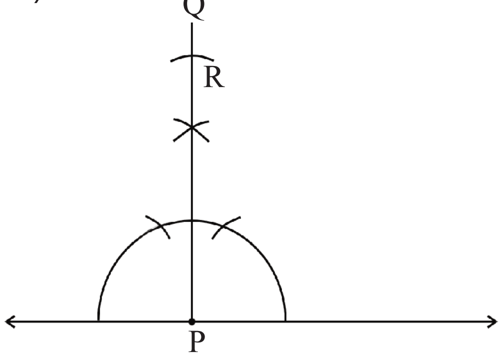
चित्र 3.2

2. P पर $PQ \perp l$ बनाइए (चित्र 3.3)



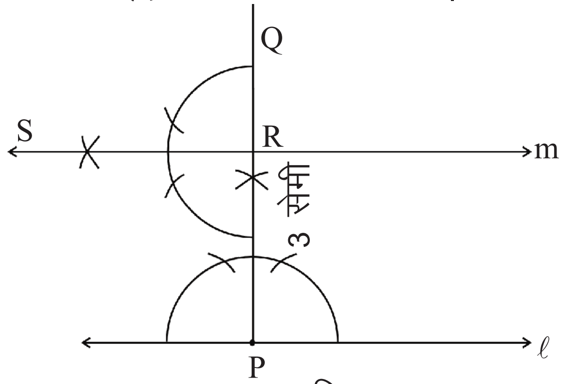
चित्र 3.3

3. बिन्दु P को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से PQ पर 3 सेमी. त्रिज्या का चाप काटिए जो PQ को R पर मिलता है। (चित्र 3.4)



चित्र 3.4

4. बिन्दु R पर RS⊥PR बनाइए तथा RS को आगे बढ़ाकर रेखा m बनाइए (चित्र 3.5)



चित्र 3.5

रेखा m, रेखा ℓ से 3 सेमी. दूरी पर स्थित समान्तर रेखा है।

टीप – सेट स्क्वायर की सहायता से भी दी गई रेखा से निश्चित दूरी पर समांतर रेखा खींची जा सकती है।

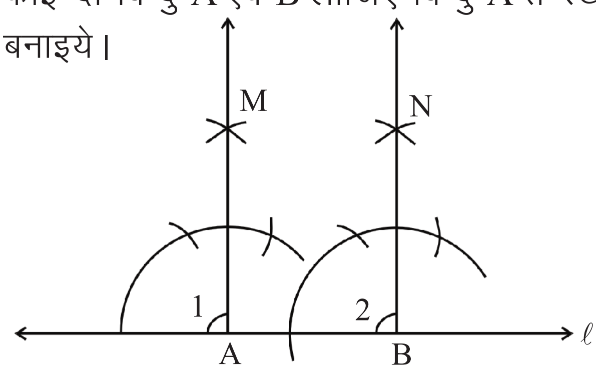
91SNKJ

समान्तर रेखाओं से सम्बन्धित कुछ गुणधर्म

1. एक ही रेखा के दो बिन्दुओं पर खींची गई लम्बवत् रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।

क्रियाकलाप 2.

एक रेखा ℓ खींच कर उस पर कोई दो बिन्दु A एवं B लीजिए बिन्दु A से रेखा ℓ पर लम्ब AM तथा बिन्दु B से लम्ब BN बनाइये।



चित्र 3.6

अब अपने मित्रों को भी इसी प्रकार अपनी–अपनी कॉपी में एक रेखा के लम्बवत् दो रेखाएँ खींचने को कहें तथा संगत कोण माप कर सारणी की पूर्ति करने को कहें –

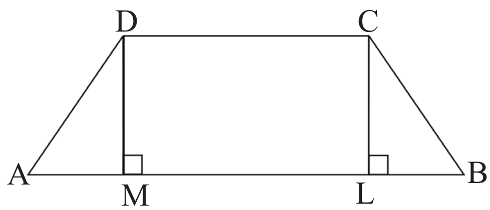
सारणी 3.2

क्र.सं.	नाम	∠1	∠2	क्या ∠1 = ∠2 है?
1.	मोहन	------	------	------------
2.	------------	------	------	------------
3.	------------	------	------	------------
4.	------------	------	------	------------

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में $\angle 1 = \angle 2$, चूँकि ये कोण संगत कोण है, अतः रेखाएँ AM एवं BN समान्तर रेखा होंगी। इस प्रकार एक ही तल में स्थित किसी रेखा के दो बिन्दुओं पर खींची गईं लम्बवत् रेखाएँ आपस में समान्तर होती हैं।

अभ्यास – 1

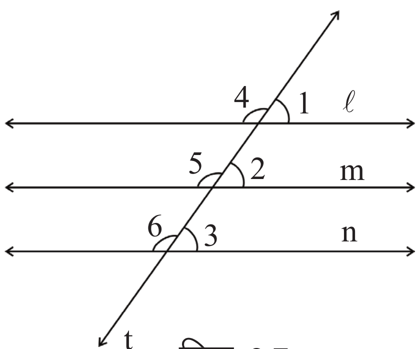
1. एक रेखा खींच कर उससे 5 सेमी. की दूरी पर इसके समान्तर रेखा की रचना कीजिए।
2. एक रेखा खींच कर उससे 4.3 सेमी. की दूरी पर इसके समान्तर रेखा की रचना कीजिए। इस प्रकार किसी रेखा के समान्तर अधिकतम कितनी समान्तर रेखाएँ खींची जा सकती हैं?
3. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \| CD$, $CL \perp AB$ और $DM \perp AB$ है तो क्या $CL \| DM$? चतुर्भुज DMLC किस प्रकार का चतुर्भुज होगा? $\triangle ADM$ और $\triangle LCB$ किस प्रकार के त्रिभुज हैं?



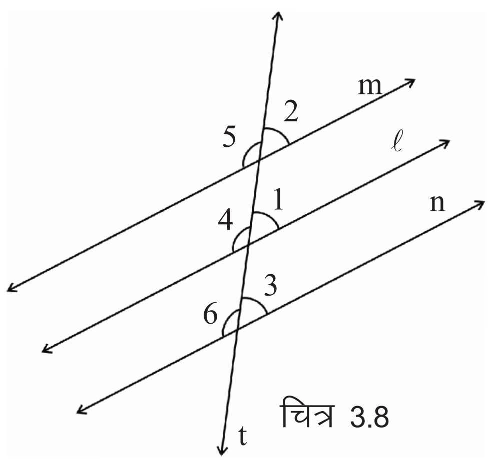
2. एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ परस्पर समान्तर होती है

क्रियाकलाप 3

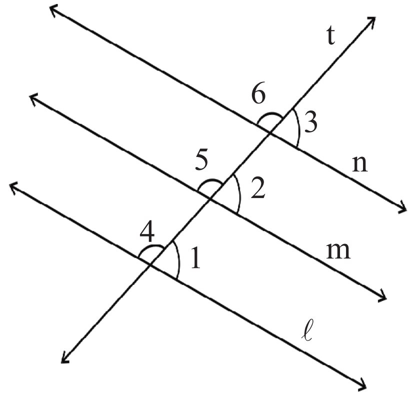
निम्न चित्रों में रेखाएँ m एवं n एक ही रेखा ℓ के समान्तर रेखाएँ हैं तथा t एक तिर्यक रेखा है जो इन्हें प्रतिच्छेद करती है। अब चित्रानुसार कोणों को माप कर सारणी की पूर्ति कीजिए–



चित्र 3.7



चित्र 3.8



चित्र 3.9

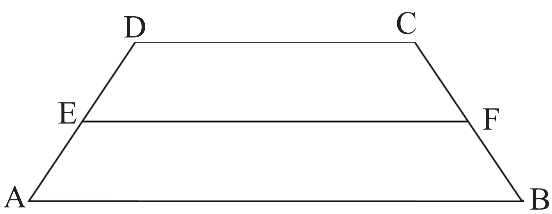
सारणी 3.3

चित्र क्रमांक	कोणों की माप (अंश में)							
	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$	$\angle 5$	$\angle 6$	क्या $\angle 2=\angle 3$?	क्या $\angle 5=\angle 6$?
3.7								
3.8								
3.9								

चित्र से हम पाते हैं कि $\angle 2=\angle 3$ तथा $\angle 5=\angle 6$, किन्तु ये संगत कोण हैं। अतः रेखाएँ m व n आपस में समान्तर होंगी अर्थात् "**एक ही रेखा के समान्तर खीचीं गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।**"

अभ्यास 2

1. चित्र में ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें AB||DC है। रेखाखण्ड EF||AB तथा E व F क्रमशः AD व BC पर हैं। क्या EF||DC होगी, यदि हाँ तो क्यों ?

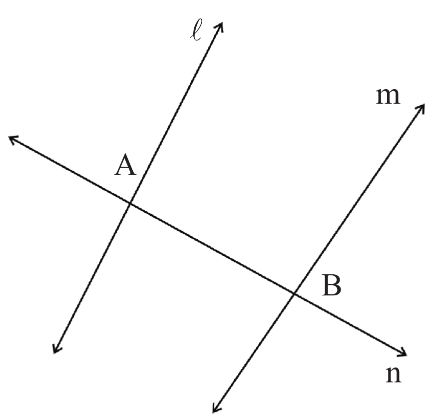


2. इस आकृति में कितने समलम्ब चतुर्भुज हैं। नाम लिखिए।

अन्तःखण्ड

जब दो सरल रेखाओं को तिर्यक रेखा काटती है तो तिर्यक रेखा का सरल रेखाओं के बीच कटा हुआ भाग **अन्तःखण्ड** कहलाता है। चित्र में AB, रेखा ℓ एवं m के द्वारा रेखा n पर काटा गया अन्तःभाग है इसे अन्तःखण्ड AB कहेंगे।

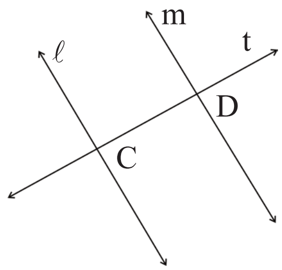
यह आवश्यक नहीं है कि दो रेखाएँ ℓ एवं m समान्तर ही हों।



चित्र 3.10

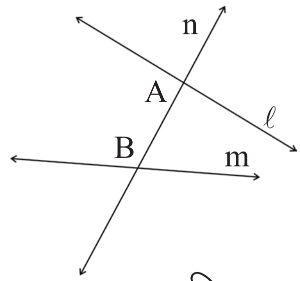
अभ्यास 3

1. निम्न चित्र में अन्तःखण्ड की पहचान कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए



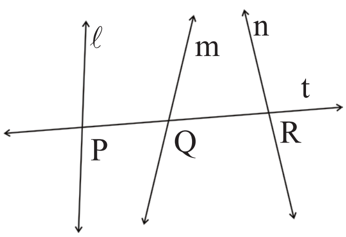
चित्र 3.11

अन्तःखण्ड ——————————



चित्र 3.12

अन्तःखण्ड ——————————



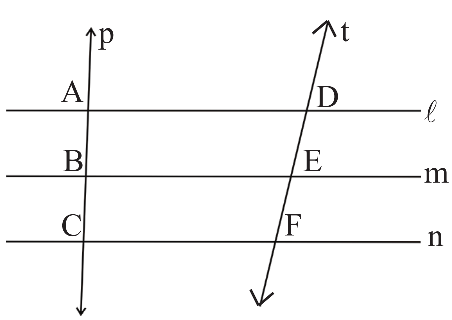
चित्र 3.13

अन्तःखण्ड ——————————

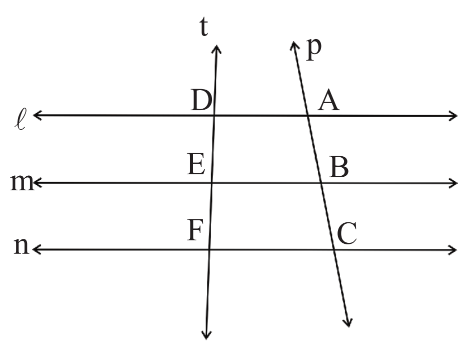
समान्तर रेखाएँ एवं समान अन्तःखण्ड

क्रियाकलाप 4

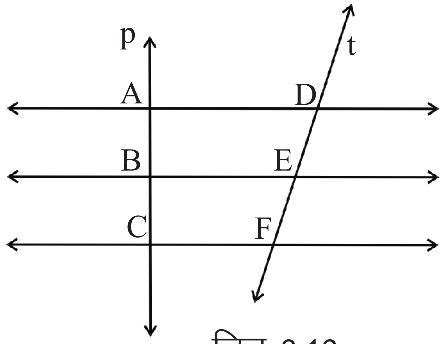
दिए गए चित्रों में रेखा P पर तीन बिन्दु A,B,C इस प्रकार लिए गए हैं कि AB = BC, इन बिन्दुओं से होती हुए तीन समान्तर रेखाएँ ℓ, m व n खींची गई हैं। इन समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती हुई एक तिर्यक रेखा t खीची गई है, जो इन्हें क्रमशः D,E व F पर काटती है। स्केल की सहायता से नापकर दी गई सारणी पूरा कीजिए–



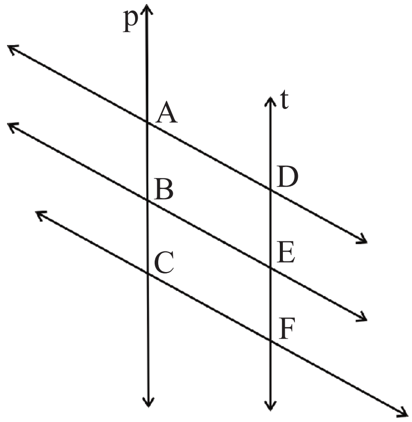
चित्र 3.14



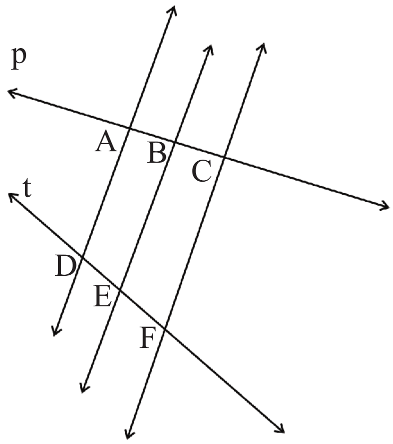
चित्र 3.15



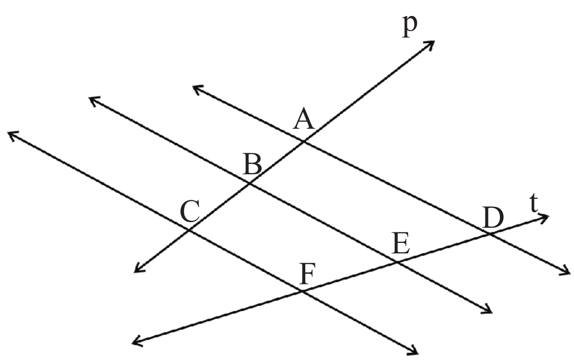
चित्र 3.16



चित्र 3.17



चित्र 3.18



चित्र 3.19

सारणी 3.4

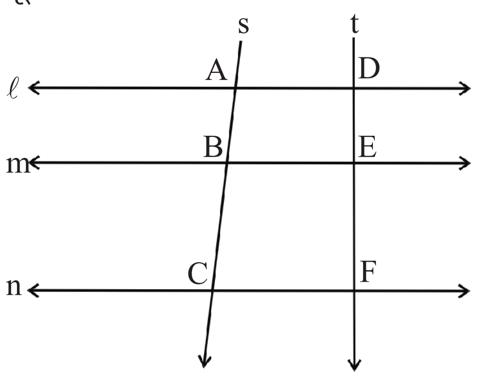
चित्र.क्र.	DE	EF	क्या DE = EF ?
3.14			
3.15			
3.16			
3.17			
3.18			
3.19			

उपरोक्त क्रियाकलाप में आपने पाया कि प्रत्येक स्थिति में DE = EF प्राप्त होता है।

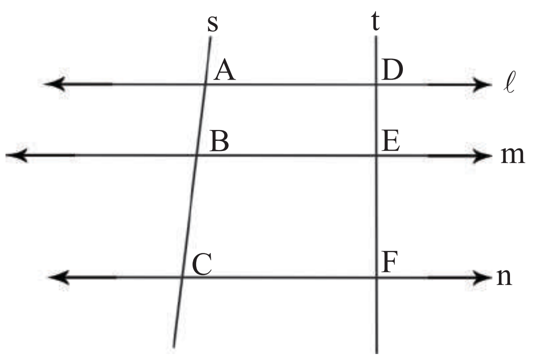
अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि **"तीन समान्तर रेखाओं पर एक तिर्यक रेखा समान अन्तःखण्ड काटती है तो दूसरी तिर्यक रेखा भी समान अन्तःखण्ड काटेगी।"**

क्रियाकलाप 5.

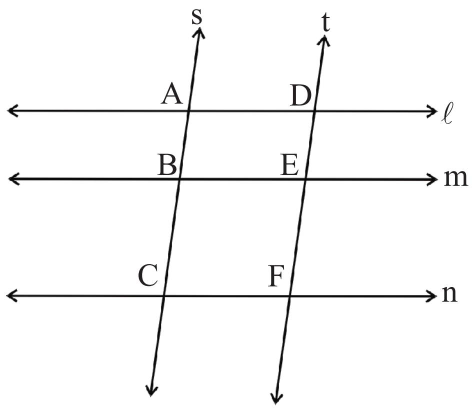
दिए गए चित्रों में $\ell \parallel m \parallel n$ है तथा तिर्यक रेखाएँ s व t तीनों समान्तर रेखाओं को A,B,C तथा D,E,F पर काटती हैं। स्केल की सहायता से सारणी में दिए गए मापों को नाप कर सारणी पूर्ण कीजिए?



चित्र 3.20



चित्र 3.21



चित्र 3.22

सारणी 3.5

क्र.सं.	चित्र क्र.	AB	BC	$\frac{AB}{BC}$	DE	EF	$\frac{DE}{EF}$	क्या $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$?
1.	3.20							
2.	3.21							
3.	3.22							

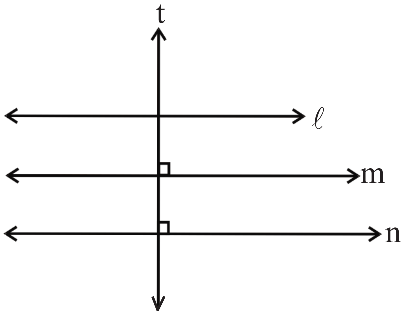
उपरोक्त क्रियाकलाप में प्रत्येक स्थिति में $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ प्राप्त होता है।

अतः **"तीन समान्तर रेखाओं पर किसी एक तिर्यक रेखा के द्वारा काटे गए अंतःखण्डों का जो अनुपात होता है, वहीं अनुपात अन्य तिर्यक रेखाओं में भी होता है।"**

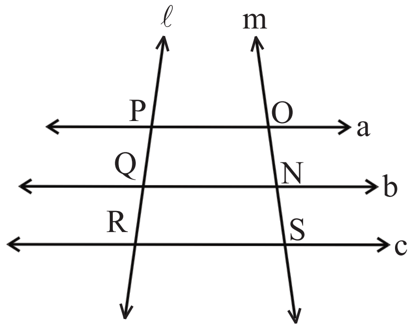
प्रश्नावली 3.1

1. 6 सेमी. का एक रेखाखण्ड खींचकर इस पर कोई बिन्दु P लेकर 2.5 सेमी. दूरी पर एक समान्तर रेखा खींचिए।

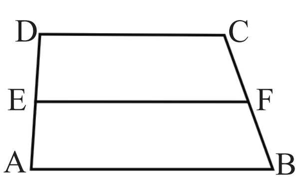
2. दी गई आकृति में $\ell \parallel m$, $t \perp m$ एवं $t \perp n$ है, तो
   (i) क्या $m \parallel n$ है? क्यों?
   (ii) क्या $\ell \parallel n$ है? क्यों?
   (iii) क्या $t \perp \ell$ है? क्यों?



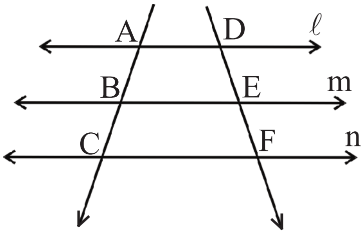
3. दिए गए चित्र में $a \parallel b \parallel c$ है तथा ℓ व m दो तिर्यक रेखाएँ है यदि $PQ = QR$ हो, तो क्या $ON = NS$ है? क्यों?



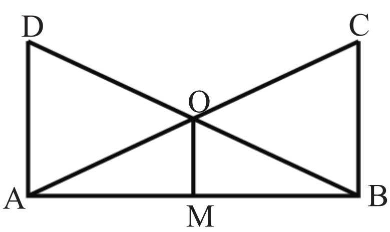
4. दी गई आकृति में $AB \parallel DC$, $EF \parallel AB$ और E रेखाखण्ड AD का मध्य बिन्दु है, तब
   (i) क्या $AB \parallel EF \parallel DC$ है? क्यों?
   (ii) क्या F, रेखाखण्ड CB का मध्यबिन्दु है? क्यों?



5. दी गई आकृति में $\ell \parallel m \parallel n$ है, तो क्या इनके अन्तःखण्डों का अनुपात बराबर होगा?



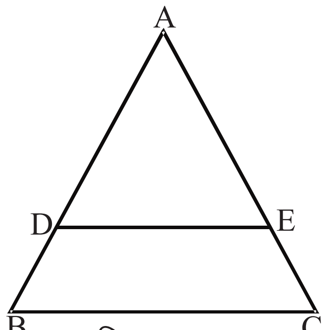
6. यदि DA, CB और OM सभी रेखाखण्ड AB पर लम्ब हैं जहाँ O रेखाखण्ड AC व DB का प्रतिच्छेद बिन्दु है। यदि OA = 2.4 सेमी. व OC = 3.6 सेमी. हो, तो
   (i) $\dfrac{AM}{BM}$ मान ज्ञात करो।
   (ii) यदि BO = 3 सेमी. तो DO का मान ज्ञात कीजिए।



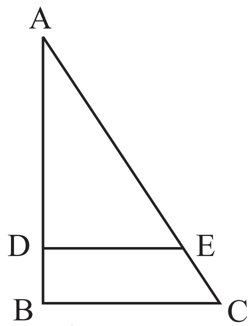
त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा का अन्य दोनों भुजाओं से संबंध–

क्रियाकलाप 6.

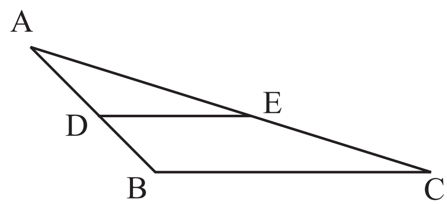
नीचे दिए गए ABC में DE || BC है, जो AB को D तथा AC को E पर प्रतिच्छेद करती है। चित्र की सहायता से सारणी में आये तथ्यों के मान माप कर लिखिए।



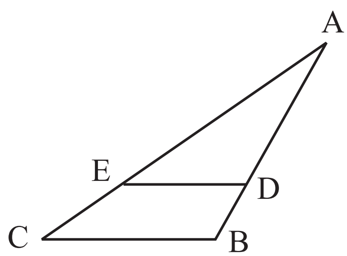
चित्र 3.23



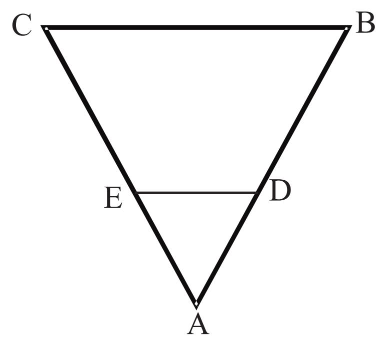
चित्र 3.24



चित्र 3.25



चित्र 3.26



चित्र 3.27

सारणी 3.6

क्र.सं.	चित्र क्र.	AD	DB	$\frac{AD}{DB}$	AE	EC	$\frac{AE}{EC}$	क्या $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$?
1.	3.23							
2.	3.24							
3.	3.25							
4.	3.26							
5.	3.27							

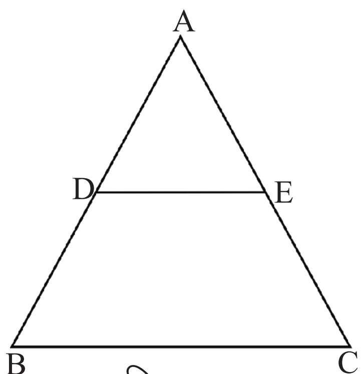
उपरोक्त क्रियाकलाप में प्रत्येक स्थिति में $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ प्राप्त होता है।

"अतः किसी त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।"

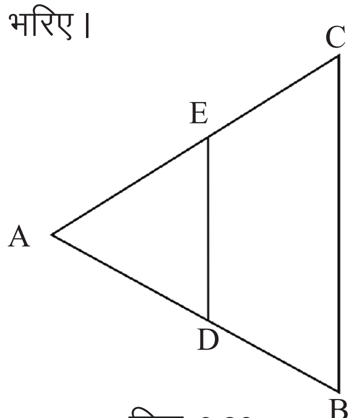
त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का तीसरी भुजा से सम्बन्ध

क्रियाकलाप 7

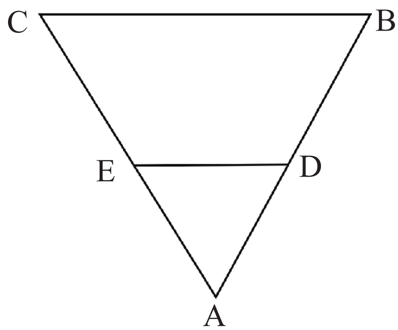
दिये गये $\triangle ABC$ में AB व AC के मध्य बिन्दु D व E हैं। DE पर बनने वाले कोण तथा B व C पर बने कोण को नाप कर सारणी में भरिए।



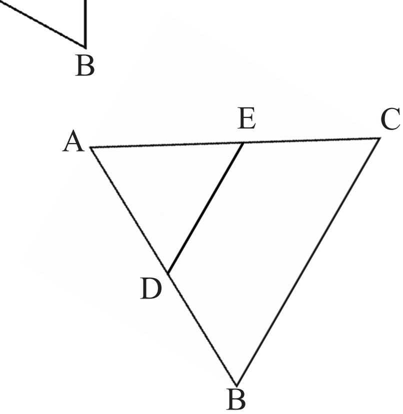
चित्र 3.28



चित्र 3.29



चित्र 3.30



चित्र 3.31

सारणी 3.7

क्र.सं.	चित्र क्र.	$\angle ADE$	$\angle B$	क्या $\angle ADE=\angle B$?	$\angle AED$	$\angle C$	क्या $\angle AED = \angle C$?
1.	3.28						
2.	3.29						
3.	3.30						
4.	3.31						

आप उपरोक्त क्रियाकलाप में पाते हैं कि $\angle ADE = \angle B$ तथा $\angle AED = \angle C$ है। पुनः इन कोणों को ध्यान से देखिए? इन कोणों को आप किस नाम से जानते हैं?

जब संगत कोण बराबर होते हैं तो रेखाओं में क्या सम्बन्ध होता है?

अतः "**त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती हैं।**"

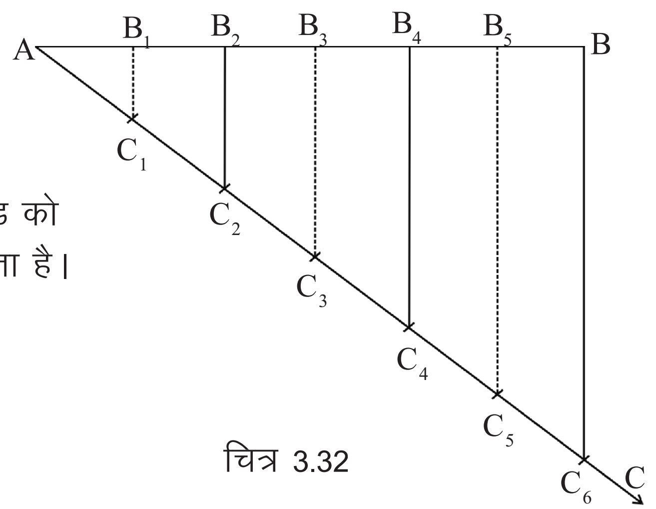
रेखाखण्ड का समान भागों में विभाजन

सलमा ने अशोक से कहा, क्या तुम 5 सेमी के एक रेखाखण्ड को तीन समान भागों में विभाजित कर सकते हो ?

अशोक ने कहा, क्यों नहीं उसने 5 को तीन से भाग दिया और $\frac{5}{3}=1.66..$ सेमी प्राप्त हुआ चुँकि स्केल से 1.66 सेमी मापा नही जा सकता है इसलिए उसने 1.6 सेमी तथा 1.6 सेमी के दो खण्ड किए तो तीसरा खण्ड 1.8 सेमी प्राप्त हुआ।

इस पर सलमा ने कहा, स्केल से मापकर किसी रेखाखण्ड को मनचाहे भागों में बाँटना तो सम्भव नहीं है, इसलिए कोई न कोई तरीका ऐसा होना चाहिए जिससे बिना मापे रेखाखण्डों को समान भागों में विभाजित किया जा सके।

आइए देखें, किस प्रकार समान्तर रेखाओं का उपयोग कर बिना स्केल की सहायता से मापन किये बिना किसी रेखाखण्ड को कई समान भागों में विभाजित किया जा सकता है।



चित्र 3.32

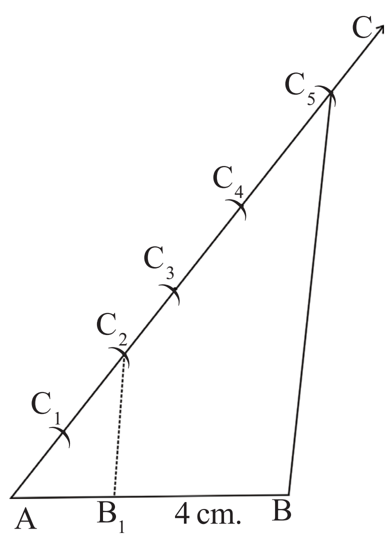
उदाहरण 1.

दिये गये रेखाखण्ड AB को 6 समान भागों में विभक्त करना।

रचना के पद

1. रेखाखण्ड AB के बिन्दु A पर न्यून कोण बनाते हुए AC किरण खीचें।
2. अब किरण AC के बिन्दु A से परकार की सहायता से समान दूरियों पर 6 भाग AC_1, C_1C_2, C_2C_3,...,C_5C_6 काटिये।
3. C_6 को B से मिलाइये और C_6B के समान्तर रेखाएँ क्रमशः C_5, C_4,....C_1 से खींचिए जो रेखाखण्ड BA को $B_5B_4B_3$...B_1 पर मिलती हैं।

इस प्रकार, AB रेखाखण्ड AB_1, B_1B_2, B_2B_3,B_3B_4, B_4B_5,B_5B, 6 समान भागों में विभक्त हो गया।



चित्र 3.33

उदाहरण 2. 4 सेमी. लम्बाई का रेखाखण्ड लेकर इसे 2:3 के अनुपात में विभाजित कीजिए।

रचना के पद

1. 4 सेमी. लम्बाई लेकर रेखाखण्ड AB खींचिए उसके बाद AC किरण खींचिए जो AB पर न्यून कोण बनाए

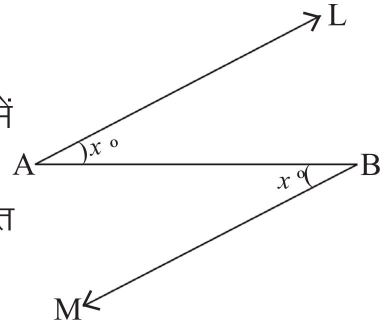
2. किरण AC को परकार की सहायता से समान माप के चाप काट कर अनुपात के योगफल (2+3=5) अर्थात् पाँच बराबर भागों में चिह्नित् कीजिए। जैसे– AC_1, C_1C_2, ...C_4C_5।
3. अब C_5B मिलाइये और उसके बाद C_5B के समान्तर एक रेखा AC को 2:3 में विभाजित करने वाले बिन्दु C_2 से खींचिए जो रेखाखण्ड AB को B_1 पर प्रतिच्छेद करे।
इस प्रकार अभीष्ट अनुपात का रेखाखण्ड AB_1 व B_1B प्राप्त हुआ अर्थात् $AB_1 : B_1B = 2 : 3$.
इसी प्रकार अब आप विभिन्न माप के रेखाखण्डों को लेकर मन चाहे अनुपात में विभाजित कीजिए तथा अपने साथियों को भी ऐसे ही प्रश्नों को हल करने दीजिए।

किसी रेखा के समान भाग करने की एक और विधि :

शैली को रेखाखण्डों को विभाजित करने में मज़ा तो आ रहा था परन्तु कभी–कभी उसे समान्तर रेखा खींचने में कुछ परेशानी हो रही थी। आइए एक और तरीका देखें जिससे समान दूरी पर समान्तर रेखाएँ भी बड़ी आसानी से खींची जा सकती हैं।

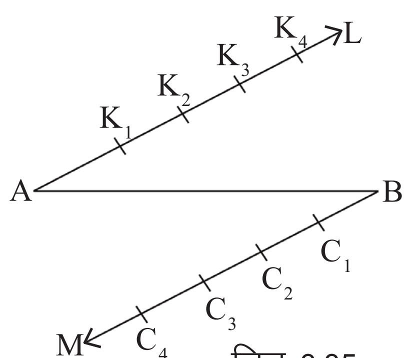
उदाहरण 3. AB रेखाखंड खींचकर उसको चार समान भागों में विभाजित करना।

रचना 1. AB रेखाखंड खींच कर उसके दोनों सिरों पर विपरीत दिशा में समान न्यून कोण बनाइए।
यह ध्यान रहे कि दोनों न्यून कोण एक समान हों।



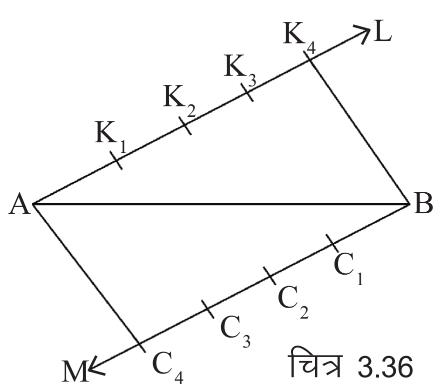
चित्र 3.34

रचना 2. परकार की सहायता से दोनों किरणों AL व BM पर 4–4 समान त्रिज्या के चाप काटिए।



चित्र 3.35

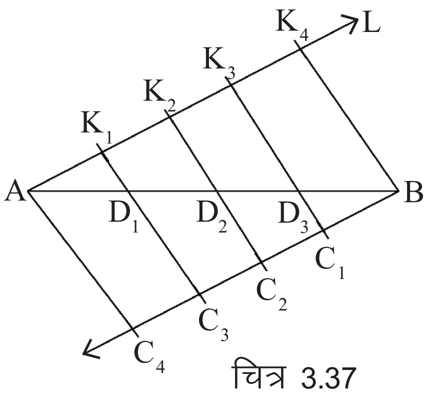
रचना 3. अन्तिम बिन्दु K_4 व C_4 को क्रमशः B व A से मिलाइए



चित्र 3.36

रचना 4. फिर K_3 को C_1 से K_2 को C_2 से और K_1 को C_3 से मिलाइए

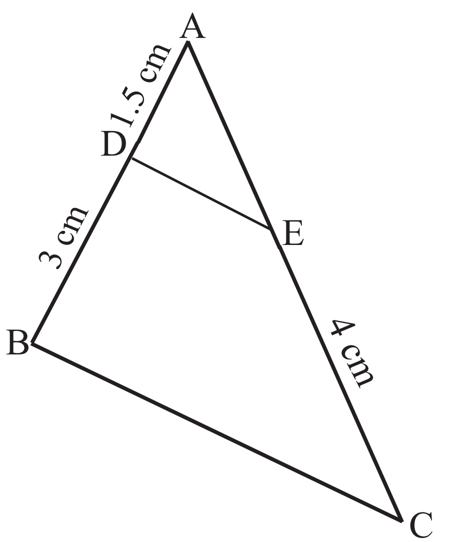
इस प्रकार AB पर व तीन बिन्दु D_1, D_2 एव D_3 प्राप्त हुए यह बिन्दु रेखाखण्ड को चार समान भागों में विभाजित करता है।



चित्र 3.37

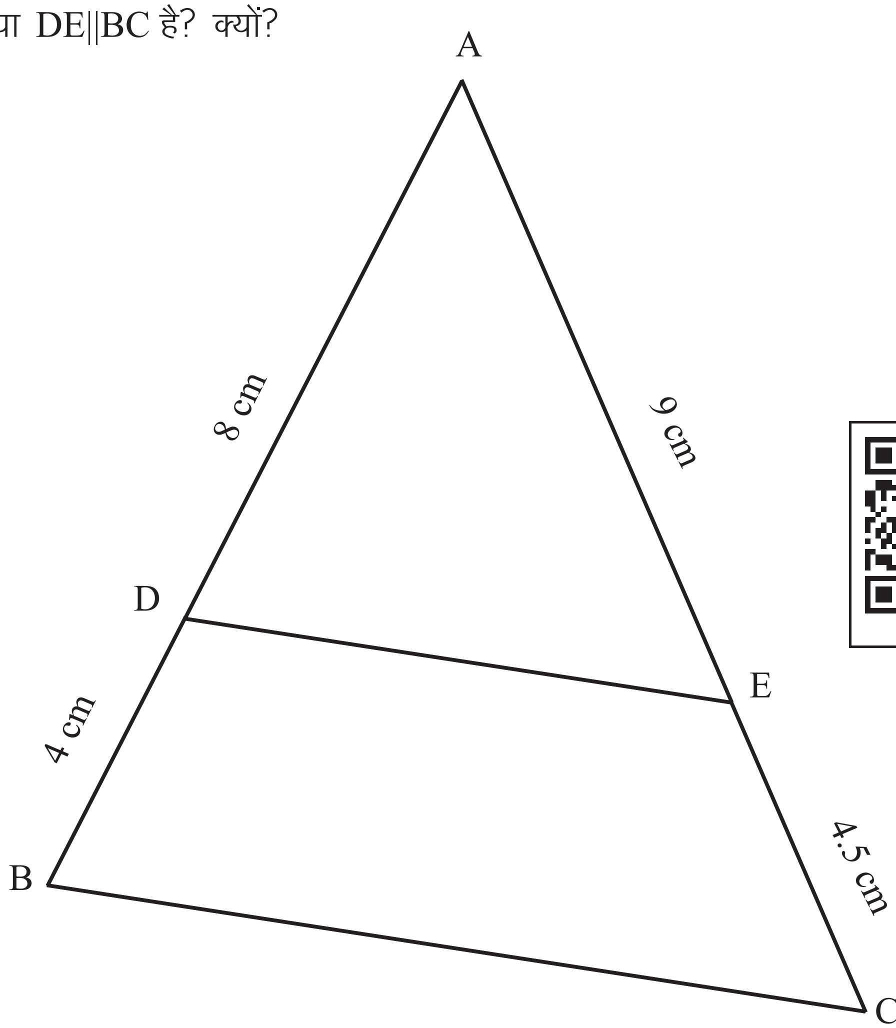
प्रश्नावली 3.2

1. दी गई आकृति में DE||BC, यदि AD = 1.5 सेमी, DB = 3 सेमी और EC = 4 सेमी हो, तो AE का मान ज्ञात कीजिए।



2. 7.5 सेमी. का एक रेखाखण्ड AB खींचिए और इसे तीन समान भागों में विभाजित कीजिए प्रत्येक भाग की लम्बाई नापिए।
3. 8.4 सेमी. का एक रेखाखण्ड खींचिए और इसे सात समान भागों में विभाजित कीजिए प्रत्येक भाग की लम्बाई नापिए।
4. 10 सेमी. के एक रेखाखण्ड को 2:3 के अनुपात में विभाजित कीजिए।
5. 7 सेमी. का एक रेखाखण्ड AB खींचिए इस पर एक बिन्दु P इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $AP = \frac{2}{5}AB$ हो।

6. दी गई आकृति में AD = 8 सेमी, BD = 4 सेमी तथा AE = 9 सेमी., EC = 4.5 सेमी. हो, तो क्या DE||BC है? क्यों?



922JM7

हमने सीखा

1. दो समान्तर रेखाओं के बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहती है।
2. एक रेखा के समान्तर खींची गई सभी रेखाएँ आपस में समान्तर होती हैं।
3. एक रेखा के विभिन्न बिन्दुओं से लम्बवत खींची गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।
4. तीन समान्तर रेखाओं पर एक तिर्यक रेखा समान अन्तःखण्ड काटती है तो अन्य तिर्यक रेखा भी समान अन्तःखण्ड काटेगी।
5. तीन समान्तर रेखाओं पर दो तिर्यक रेखाओं के अन्तःखण्डों का अनुपात समान होता है।
6. त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।
7. त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है।

अध्याय–4

बीजीय व्यंजकों का गुणा एवं भाग

MULTIPLICATION & DIVISION OF ALEGEBRAIC EXPRESSIONS

92BFNU

बीजीय व्यंजकों के योग एवं घटाने की क्रिया से आप परिचित हैं। योग एवं घटाने की क्रिया में पूर्णांक क्रमशः जुड़ते या घटते हैं तथा बीजांक वही रहता है। इसी प्रकार कक्षा सातवीं में आपने पढ़ा है – किन्हीं दो बीजीय व्यंजकों का गुणा करने पर उनके स्थिरांक का स्थिरांक से तथा चराकों का चराकों के साथ गुणा होता है।

क्रियाकलाप 1.

नीचे दी गई तालिका में दो बीजीय व्यंजक एवं उनका गुणनफल दिया गया है। कुछ स्थान रिक्त हैं। रिक्त स्थानों में मान लिखिए।

सारणी 4.1

क्र.सं.	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	प्रथम व्यंजक × द्वितीय व्यंजक	द्वितीय व्यंजक × प्रथम व्यंजक	गुणनफल
1	-3	a	$-3 \cdot a$	$a \cdot (-3)$	$-3a$
2	x	5	$x \cdot 5$	$5 \cdot x$	$5x$
3	2a	3a	$2a{\cdot}3a$	$3a{\cdot}2a$	$6a^2$
4	$7x$	$-4y$	--------	--------	--------
5	$-5xy$	$2x$	--------	--------	--------
6	$4a^2$	--------	--------	--------	$-12a^3b$
7	$-7a^2b^2$	8ab	--------	--------	--------

उपरोक्त तालिका में पदों का स्थान आपस में बदलने से प्राप्त गुणनफल समान रहता है। इससे गुणा सम्बन्धी किस नियम की पुष्टि होती है?

आइए कुछ और उदाहरण देखें

(i) $3x \cdot 5x = (3{\cdot}5)\ x \cdot x = 15x^2$

(ii) $(-4x)\ 6y = (-4 \times 6)\ x \cdot y = -24xy$

(iii) $(-ab)\ 5b^2 = (-1 \times 5)\ ab{\cdot}b^2 = -5\ a{\cdot}b{\cdot}b^2 = -5ab^3$

इस प्रकार आप देखते हैं कि जहाँ आधार समान होता है वहाँ चरांकों के घात, घातांक नियम के अनुसार आपस में जुड़ जाते हैं।

बीजीय व्यंजकों को जोड़ते समय आपने देखा है कि गुणांक आपस में जुड़ जाते हैं।

जैसे, $x + x = (1 + 1)\,x = 2x$ (यहाँ x का गुणांक 1 है)

इस प्रकार, $2x$, x को दो बार आपस में जोड़ने से प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, $x + x + x = 3x$

$$x + x + x + x = 4x$$

इस प्रकार, x को जितनी बार जोड़ते हैं, x का गुणांक उतना ही रहता है।

$2x$ में 2 गुणांक है एवं x चरांक है।

$2x$ का मान x के विभिन्न मानों के लिए भिन्न–भिन्न होगा।

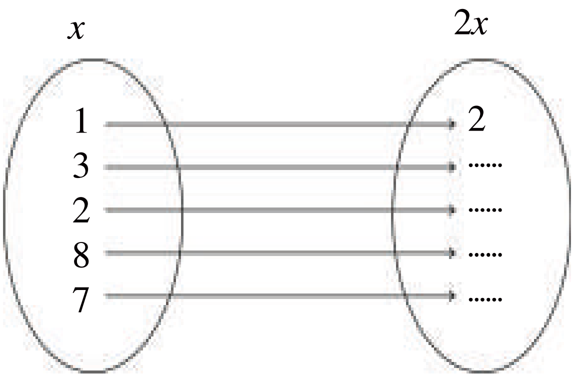
यदि $x = 3$ हो, तो $2x = 2{\cdot}(3) = 6$

यदि $x = -5$ हो, तो $2x = 2{\cdot}(-5) = -10$

और यदि $x = 0$ हो, तो $2x = 2{\cdot}(0) = 0$

$x = \frac{3}{8}$ हो, तो $2x = 2{\cdot}\frac{3}{8} = \frac{3}{4}$

निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



ध्यान रहे कि $2x$ में 2 गुणांक एवं x चरांक है। अतः यदि $x = 5$ हो, तो $2x = 25$ नहीं होगा, बल्कि $2x = 2 \times 5 = 10$ होगा।

एक दिन शिक्षक कक्षा में नीरज से पूछते हैं कि आपकी उम्र क्या है?

नीरज – मेरी उम्र 13 वर्ष है।

शिक्षक – 2 वर्ष बाद आपकी उम्र क्या होगी?

नीरज – 2 वर्ष बाद मेरी उम्र 13 + 2 = 15 वर्ष होगी।

शिक्षक – जितेन्द्र आपकी उम्र कितनी है?

जितेन्द्र – मेरी उम्र लगभग 12 वर्ष है।

शिक्षक – 2 वर्ष बाद आपकी उम्र क्या होगी?

जितेन्द्र – 2 वर्ष बाद मेरी उम्र 12 + 2 = 14 वर्ष होगी।

शिक्षक : यदि किसी व्यक्ति की वर्तमान आयु x वर्ष हो, तो 2 वर्ष पश्चात् उसकी आयु क्या होगी?

मनीषा ने उत्तर दिया कि 2 वर्ष बाद उसकी उम्र $(x + 2)$ वर्ष होगी।

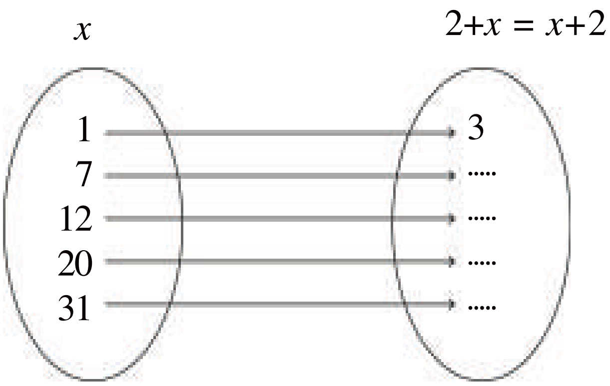
यदि हम x का मान अलग–अलग रखें तो $(x + 2)$ का मान भी भिन्न–भिन्न होगा।

यदि $x = 3$ हो, तो $x + 2 = 3 + 2 = 5$ वर्ष

$x = 8$ हो, तो $x + 2 = 8 + 2 = 10$ वर्ष

$x = 5$ हो, तो $x + 2 = 5 + 2 = 7$ वर्ष

निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



इस प्रकार हम पाते हैं कि $2x$ जहाँ x के दुगुने को प्रदर्शित करता है वहाँ $(2+x)$, x से 2 अधिक को प्रदर्शित करता है

यदि $x = 0$, तो $2x = 2 \times 0 = 0$

यदि $x = 0$, तो $2+x = 2 + 0 = 2$

अत : $\boxed{2x \neq 2+x}$

एकपदीय व्यंजक का बहुपदीय व्यंजक के साथ गुणा

कक्षा सातवी में हमने किसी एकपदीय बीजीय व्यंजक का किसी द्विपदीय बीजीय व्यंजक से गुणा करना सीखा है।

आइए, एक पदीय व्यंजक का, द्विपदीय व्यंजक के साथ गुणा हम एक क्रियाकलाप के माध्यम से पुनः दोहरा लेते हैं।

क्रियाकलाप 2.

आगे दी गई तालिका में एक पदीय व्यंजक का द्विपदीय व्यंजक के साथ गुणनफल दिया है। कुछ रिक्त स्थान दिए गए हैं उनकी पूर्ति कीजिए।

सारणी 4.2

क्र.सं.	एक पदीय व्यंजक	द्विपदीय व्यंजक	एक पदीय x द्विपदीय व्यंजक	गुणनफल
1	x	a + b	x(a + b)	ax + bx
2	−4y	3a + b	----------	----------
3	xy	7 + 8x	$xy(7 + 8x)$	----------
4	$2t^2$	$3r^2 - 55$	----------	----------
5	$\frac{1}{2}m$	$m^3 + \frac{3}{2}n$	----------	----------
6	4a	$5x - \frac{1}{2}y$	----------	----------

इसी तरीके से हम किसी एक पदीय व्यंजक का गुणा किसी बहुपदीय व्यंजक से कर सकते हैं।

अथवा a (b + c + d) = ab + ac + ad

(b + c + d) a = ba + ca + da

इसी प्रकार a (b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae

या (b + c + d + e) a = ba + ca + da + ea

उदाहरण 1. $2a\,(a + 2b + 5c) = 2a \cdot a + 2a \cdot 2b + 2a \cdot 5c$

$= 2a^2 + 4\,ab + 10ac$

उदाहरण 2. $(2q + r + 3s - t)\,p = 2q \cdot p + r \cdot p + 3s \cdot p - t \cdot p$

$= 2\,pq + pr + 3\,ps - pt$

उदाहरण 3. $(xy + 2y^2z + x^2)\,yz^2 = xy \cdot yz^2 + 2y^2z \cdot yz^2 + x^2 \cdot yz^2$

$= xy^2z^2 + 2\,y^3z^3 + x^2\,yz^2$

क्रियाकलाप 3.

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

सारणी 4.3

क्र.सं.	बीजीय व्यंजकों का गुणा	गुणन प्रक्रिया	गुणनफल
1.	(2a +b + c) 5d	2a × 5d + b × 5d + c × 5d	10ad + 5 bd + 5 cd
2.	$7a^2$ (b + 2d – t)	....	....
3.	..... ($x^2 + xy$ + z)	p × x^2 + p × xy + p × z	p x^2 + ...
4.	–5 m (....+....+ b)	....	$-5m^2 - 10mn - 5mb$
5.	$7p^2m$ (m + n^3 + p)	....	....

आइए, अब हम दो द्विपदीय व्यंजकों को आपस में गुणा करने पर विचार करें–

दो द्विपदीय व्यंजकों का गुणा

दो द्विपदीय व्यंजकों का आपस में गुणा दो एकपदीय व्यंजकों का द्विपदीय व्यंजकों से गुणा के योग के समान है।

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= a(c+d) + b(c+d)\\ &= (ac+ad)+(bc+bd)\\ &= ac+ad+bc+bd\end{aligned}$$

इसे हम निम्न प्रकार से भी हल कर सकते हैं:–

$$\begin{aligned}&(a+b)(c+d)\\ &= (a+b)\,c + (a+b)\,d\\ &= ac+bc+ad+bd\end{aligned}$$

इस प्रक्रिया में गुणा का योग पर वितरण के नियम का दो बार उपयोग होता है ।

उदाहरण 4. $(5x+3y)$ एवं $(4x+5y)$ को आपस में गुणा कीजिए।

हल: $(5x+3y)(4x+5y) = 5x(4x+5y) + 3y(4x+5y)$

[$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$ के प्रयोग से]

$= 5x\cdot 4x + 5x\cdot 5y + 3y\cdot 4x + 3y\cdot 5y$

[$a(b+c) = ab+ac$ के प्रयोग से]

$= 20x^2 + 25\,xy + 12\,yx + 15y^2$

$= 20x^2 + 37xy + 15y^2$

इसे निम्न प्रकार से भी हल किया जा सकता है–

$(5x+3y)(4x+5y) = (5x+3y)\cdot 4x + (5x+3y)\cdot 5y$

[$(a+b)(c+d) = (a+b)\,c + (a+b)\,d$ के प्रयोग से]

$= 5x\cdot 4x + 3y\cdot 4x + 5x\cdot 5y + 3y\cdot 5y$

[$(a+b)\,c = ac+bc$ के प्रयोग से]

$= 20x^2 + 12\,yx + 25\,xy + 15y^2$

$= 20x^2 + 37xy + 15y^2$

उदाहरण 5. $(3s^2+2t)$ एवं $(2r^2+st)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए –

हल: $(3s^2+2t)(2r^2+st) = 3s^2\cdot(2r^2+st) + 2t\cdot(2r^2+st)$

[$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$ के प्रयोग से]

$= 3s^2\cdot 2r^2 + 3s^2\cdot st + 2t\cdot 2r^2 + 2t\cdot st$

[$a(b+c) = ab+ac$ के प्रयोग से]

$= 6\,s^2r^2 + 3s^3t + 4\,tr^2 + 2st^2$

उदाहरण 6. $(5x + 3y)$ और $(x + y)$ का आपस में गुणा कीजिए एवं $x = 3, y = -2$ के लिए गुणनफल की जाँच कीजिए।

हल: $(5x + 3y)(x + y) = 5x(x + y) + 3y(x + y)$

$= 5x \cdot x + 5x \cdot y + 3y \cdot x + 3y \cdot y$

$= 5x^2 + 5xy + 3xy + 3y^2$

$(5x + 3y)(x + y) = 5x^2 + 8xy + 3y^2$

जाँच: बायाँ पक्ष $= (5x + 3y)(x + y)$

[$x = 3, y = -2$ रखने पर]

$= [5(3) + 3(-2)](3-2)$

$= [15-6](1)$

$= 9 \times 1 = 9$

दायाँ पक्ष $= 5x^2 + 8xy + 3y^2$

$= 5(3)^2 + 8(3)(-2) + 3(-2)^2$

$= 5(9) - 48 + 3(4)$

$= 45 + 12 - 48$

$= 57 - 48 = 9$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

क्रियाकलाप 4.

गुणा की प्रक्रिया के अनुसार सारणी में दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

सारणी 4.4

दो बीजीय व्यंजकों का गुणा	गुणा की प्रक्रिया: वितरण नियम के प्रयोग से	गुणा की प्रक्रिया: वितरण नियम के पुनः प्रयोग से	प्राप्त गुणनफल
1. $(a + b)(c + d)$	$a(c + d) + b(c + d)$ या $(a+b)c + (a+b)d$	$ac + ad + bc + bd$ या $ac + bc + ad + bd$	$ac+ad+bc+bd$ / $ac+bc+ad+bd$
(a) $(4x+5y)(2x+3y)$	$4x(2x+3y)+5y(2x+3y)$	$4x\times2x+4x\times3y+5y\times2x+5y\times3y$	$8x^2+22xy+15y^2$
(b) $(5x^2+2s)(2t+5)$	....	....	....
(c) $(2r^2+5s^3)(r^2+t^3)$	....	....	....
2. $(a + b)(c - d)$	$a(c - d) + b(c - d)$	$ac - ad + bc - bd$	$ac-ad+bc-bd$
(a) $(b+2c)(3b - c)$	....	....	....
(b) $(5x+3y)(2y^2 - z)$	....	....	....
3. $(a - b)(c + d)$	$a(c + d) - b(c + d)$	$ac + ad - bc - bd$	$ac+ad-bc-bd$
(a) $(2x-3y)(3x+z)$	....	....	....
(b) $(5p-2q)(3x+4s)$	....	....	....
4. $(a - b)(c - d)$	$a(c - d) - b(c - d)$	$ac - ad - bc + bd$	$ac-ad-bc+bd$
(a) $(2s-3p)(4x-5t)$	....	....	....
(b) $(x^2+xy)(y^2-z)(y^2-z)$	....	....	....

प्रश्नावली 4.1

प्र.1 निम्न पदों का आपस में गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(2x + 7)(3x + 2)$ (ii) $(3x - 5)(2x + 9)$

(iii) $(7x - 6)(15x - 2)$ (iv) $\left(\frac{1}{2}x + 5y\right)\left(3x - \frac{6}{5}y\right)$

(v) $(x + 5y)(7x - y)$

प्र.2 मान ज्ञात कीजिए –

(i) $(x + y)(2y + 3x) + (3x + y)(y+2x)$ (ii) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\right)$

(iii) $(x^2 + y^2)(3x - 5y)$ (iv) $(a + b)(a + b)$

प्र.3 $(x + y)$ और $(3y + 4x)$ का आपस में गुणा कीजिए एवं नीचे दिए मानों के लिए सत्यापन कीजिए –

(i) $x = 2, \ y = -1$

(ii) $x = 1, \ y = 0$

बीजीय व्यंजकों के भाग

आप किसी एक पूर्णांक से किसी दूसरे पूर्णांक का गुणा व भाग करना जानते हैं। आइए, कुछ उदाहरण देखें –

1. $6 \times 8 = 48$ तो $48 \div 8 = 6$ तथा $48 \div 6 = 8$
2. $-15 \times 3 = -45$ तो $-45 \div -15 = 3$ तथा $-45 \div 3 = -15$
3. $m \times n = mn$ तो $mn \div m = n$ तथा $mn \div n = m$

एक पदीय व्यंजक का एक पदीय व्यंजक से भाग

आइए, प्रारम्भ में हम एक पदीय व्यंजक का एक पदीय व्यजंक से भाग देना जाने।

उदाहरण 7. $18x^2y$ में $6xy$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ $18x^2y \div 6xy \quad = \dfrac{18x^2y}{6xy}$

$$= \frac{18}{6} \times \frac{x^2}{x} \times \frac{y}{y} = 3 \times \frac{x \times \cancel{x}}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}} = 3x$$

उदाहरण 8. $-35mn^2p$ में $7np$ का भाग दीजिए।

हल : $-35mn^2p \div 7np \quad = \dfrac{-35mn^2p}{7np}$

$$= \frac{-35}{7} \times \frac{m}{1} \times \frac{n^2}{n} \times \frac{p}{p} = -5 \times m \times \frac{n \times \cancel{n}}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{p}}{\cancel{p}} = -5mn$$

इस प्रकार आपने देखा कि भाग की क्रिया हम निम्न पदों में करते हैं –

1. यदि भाज्य और भाजक के चिन्ह समान हों, तो भागफल के चिह्न धनात्मक होता है।
2. यदि भाज्य और भाजक के चिन्ह असमान हों, तो भागफल का चिह्न ऋणात्मक होता है।
3. भाज्य के गुणांक में भाजक के गुणांक का भाग देते हैं।
4. भागफल में किसी चरांक का घात ज्ञात करने के लिए घातांक नियम $a^m \div a^n = a^{m-n}$ का उपयोग करते हैं। आइए, निम्न उदाहरण द्वारा समझें :–

उदाहरण 9. $-25a^3b^2c$ में $-5ab^2c$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ $-25a^3b^2c \div -5ab^2c$

$$= \frac{-25a^3b^2c}{-5ab^2c}$$

$$= \frac{-25}{-5} \times \frac{a^3}{a} \times \frac{b^2}{b^2} \times \frac{c}{c}$$

$$= 5 \times a^{3-1} \times b^{2-2} \times c^{1-1} \quad [\therefore a^m \div a^n = a^{m-n}]$$

$$= 5a^2b^0c^0 = 5a^2 \{\text{चूंकि } b^0 = 1, c^0 = 1\}$$

क्रियाकलाप 5.

निम्न सारणी में दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

सारणी 4.5

क्र.सं.	पहली संख्या × दूसरी संख्या	दोनों संख्याओं के गुणनफल का मान	भाग संक्रिया के रूप में दर्शाना — पहली विधि	भाग संक्रिया के रूप में दर्शाना — दूसरी विधि
1.	$3x \times 4y$	$12xy$	$12xy \div 3x = 4y$	$12xy \div 4y = 3x$
2.	$2x \times (-7x)$	$-14x^2$	------------------	------------------
3.	$m \times 4n$	$4mn$	------------------	------------------
4.	$18a^2 \times 2b^2$	--------------	------------------	------------------
5.	$13p^2 \times 7pq$	$91p^3q$	------------------	------------------

इस प्रकार, हम देखते है कि $3x$ एवं $4y$ का गुणा करने पर $12xy$ प्राप्त होता है तथा $12xy$ में $3x$ का भाग देने पर $4y$ तथा $12xy$ में $4y$ का भाग देने पर $3x$ प्राप्त होता है। अतः गुणा एवं भाग एक दूसरे की विपरीत क्रियाएं हैं।

बहुपदीय व्यंजकों का एकपदीय व्यंजक से विभाजन

आपने एकपदीय का एकपदीय व्यंजक से विभाजन तो जान लिया। आइए, अब निम्न उदाहरणों में बहुपदीय व्यंजकों का एकपदीय व्यंजकों से विभाजन देखें –

उदाहरण 10. $16m^2 + 4mn - 12mn^2$ को $2m$ से भाग दीजिए।

हल : $(16m^2 + 4mn - 12mn^2) \div 2m$

$$= \frac{16m^2 + 4mn - 12mn^2}{2m}$$

$$= \frac{16m^2}{2m} + \frac{4mn}{2m} - \frac{12mn^2}{2m}$$

$$= 8m^{2-1} + 2m^{1-1}n - 6m^{1-1}n^2$$

$$= 8m + 2n - 6n^2$$

यहाँ बहुपदीय व्यंजक को अलग–अलग एकपदीय व्यंजक में बदलकर भाग की क्रिया की गई है।

प्रश्नावली 4.2

प्र.1. मान ज्ञात कीजिए –

(i) $(18x^2y^2) \div (-6xy)$

(ii) $(-15x^3y^2z) \div (-5x^2yz)$

(iii) $(-x^5y^7) \div -x^4y^5)$

(iv) $(32a^4b^2c) \div (-8abc)$

(v) $(28a^4b^6c^8) \div (-7a^2b^4c^6)$

प्र.2. भाग दीजिए।

(i) $2x^4-6x^3+4x^2$ को $2x^2$ से

(ii) $5a^4b^3-10a^3b^2-15a^2b^2$ में $-5a^2b^2$ का

(iii) $27a^4-36a^2$ को $-9a$ से

(iv) $x^4+2x^3-2x^2$ को $4x^2$ से

(v) $a^2+ab+ac$ को a से

बहुपदीय में द्विपदीय का भाग

आप किसी एक पदीय या बहुपदीय व्यंजक में एक पदीय व्यंजक का भाग देना जान चुके हैं। आइए, निम्न उदाहरण को देखें –

उदाहरण 11. $18a^2 + 12a + 27a^3 + 8$ में $3a + 2$ का भाग दीजिए।

हल : सर्वप्रथम दिये गये बहुपदीय व्यंजक $18a^2 + 12a + 27a^3 + 8$ को घात के घटते हुए क्रम में लिख लेते हैं।

जैसे, $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$

चरण 1. यहाँ भाज्य का पहला पद $27a^3$ है। इसमें भाजक के पहले पद 3a का भाग देते हैं –

$$3a+2\overline{)\,27a^3+18a^2+12a+8}$$

$$\frac{27a^3}{3a}=9a^2$$

और $9a^2$ को भागफल में लिख लेते हैं।

चरण 2. अब $9a^2$ को पूरे भाजक से गुणा करते है।

अतः $9a^2(3a+2) = 27a^3 + 18a^2$

यहाँ $27a^3 + 18a^2$ को भाज्य में सजातीय पदों के नीचे लिखते है और घटा देते है।

अर्थात् नीचे वाले पद के चिह्न बदल देते है।

$$\begin{array}{r} 9a^2 \\ 3a+2\overline{)\,\cancel{27a^3}+\cancel{18a^2}+12a+8} \\ \underline{\pm\cancel{27a^3}\pm\cancel{18a^2}} \end{array}$$

चरण 3. घटाने के बाद शेष बची संख्या को नीचे लिख लेते हैं।

$$\begin{array}{r} 9a^2 \\ 3a+2\overline{)\,\cancel{27a^3}+\cancel{18a^2}+12a+8} \\ \underline{\pm 27a^3\pm 18a^2\qquad\qquad} \\ +12a+8 \end{array}$$

चरण 4. अब शेष भाज्य के पहले पद 12a में भाजक के पहले पद 3a का भाग देते हैं।

$12a \div 3a = 4$

+4 को भागफल में लिखते है तथा +4 का पुनः पूरे भाजक में गुणा करते है।

अतः $4(3a+2) = 12a+8$

$$\begin{array}{r} 9a^2 \\ 3a+2\overline{)\,\cancel{27a^3}+\cancel{18a^2}+12a+8} \\ \underline{\pm\cancel{27a^3}\pm\cancel{18a^2}\qquad\qquad} \\ +12a+8 \end{array}$$

चरण 5. भाज्य में सजातीय पदों के नीचे 12a + 8 को लिख लेते है एवं घटा देते है।

$$\begin{array}{r} 9a^2+4 \\ 3a+2\overline{)\,27a^3+18a^2+12a+8} \\ \underline{\pm 27a^3\pm 18a^2\qquad\qquad} \\ +\cancel{12a}+\cancel{8} \\ \underline{\pm\cancel{12a}\pm\cancel{8}} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9a^2+4 \\ 3a+2\overline{)\,27a^3+18a^2+12a+8} \\ \underline{\pm\cancel{27a^3}\pm\cancel{18a^2}\qquad\qquad} \\ 0+0\quad+12a+8 \\ \underline{\pm\cancel{12a}\pm\cancel{8}} \\ 0\quad 0 \end{array}$$

चरण 6. यहाँ घटाने पर शेषफल शून्य बचता है।

चरण 7. $\therefore$ अभीष्ट भागफल $= 9a^2 + 4$ है।

आप जानते है कि जब किसी एक संख्या में किसी दूसरी संख्या का पूरा–पूरा भाग जाता है और शेषफल शून्य बचता है तो दूसरी संख्या पहली संख्या का गुणनखण्ड कहलाती है।

यहाँ $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$ में $(3a + 2)$ का पूरा–पूरा भाग देने से शेषफल शून्य बचता है अतः $(3a+2)$, $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$ का एक गुणनखण्ड होगा।

आइए, एक और उदाहरण देखते हैं –

उदाहरण 12. $-12x^3 - 8x^2 - 5x + 10$ को $(2x - 3)$ से विभाजित कीजिए।

हल :

$$2x - 3)-12x^3 - 8x^2 - 5x + 10(-6x^2 - 13x - 22$$

$$\mp 12x^3 \pm 18x^2$$

$$-26x^2 - 5x + 10$$

$$\mp 26x^2 \pm 39x$$

$$-44x + 10$$

$$\mp 44x \pm 66$$

$$-56$$

यहाँ भी पूर्व की भाँति भाग दिया गया है। परन्तु शेषफल -56 है, शून्य नहीं।

अतः हम कह सकते है कि $(2x - 3)$ व्यंजक $-12x^3 - 8x^2 - 5x + 10$ का एक गुणनखण्ड नहीं है।

उदाहरण 13. $8q^3 + 2q - 8q^2 - 1$ में $4q + 2$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ q के घात घटते क्रम में नहीं है, अतः पहले व्यंजक को घटते क्रम में लिखने पर $8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

$$2q^2 - 3q + 2$$

$$4q + 2\,\overline{)\,8q^3 - 8q^2 + 2q - 1}$$

$$\pm 8q^3 \pm 4q^2$$

$$-12q^2 + 2q - 1$$

$$\mp 12q^2 \mp 6q$$

$$+8q - 1$$

$$\pm 8q \pm 4$$

$$-5$$

यहाँ भी भाग के चरण पूर्व में बताएं अनुसार पूर्ण किए गए है। भाग की क्रिया तब तक करते हैं। जब तक शेषफल में बीजीय चरांक का घात भाजक के बीजीय चरांक के घात से कम न हो जाए।

जांच : भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

इस प्रश्न में,

भाज्य $= 8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

भाजक $= 4q + 2$

भागफल $= 2q^2 - 3q + 2$

शेषफल $= -5$

दायाँ पक्ष = भाजक × भागफल + शेषफल

$= (4q + 2)\cdot(2q^2 - 3q + 2) + (-5)$

$= 4q\,(2q^2 - 3q + 2) + 2\,(2q^2 - 3q + 2) - 5$

$= 8q^3 - 12q^2 + 8q + 4q^2 - 6q + 4 - 5$

$= 8q^3 - 12q^2 + 4q^2 + 8q - 6q - 1$

$= 8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

= बायां पक्ष

अर्थात् **भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल**

अतः प्राप्त भागफल $= 2q^2 - 3q + 2$ और शेषफल $= -5$ सही है।

प्रश्नावली 4.3

प्र.1. निम्नलिखित बहुपद को चर राशि के घातांक के घटते क्रम में लिखिए –

(i) $15x^2 - 3x + 8x^4 - 4x^3 - 15$

(ii) $12m^5 - 9m^3 + 16 - 6m^2 + 8m$

(iii) $9m^4 - 16m^2 - 4m + 16 - m^3$

(iv) $4 - 8y^3 + 12y^4 - 6\,y^2$

प्र.2. भागफल ज्ञात कीजिए एवं बताइये कि क्या भाजक, भाज्य का एक गुणनखण्ड है?

(i) $x^2 - 11x + 30$ को $(x - 5)$ से

(ii) $x^2 + 20x + 91$ में $(x + 7)$ का

(iii) $x^2 - 5x - 6$ में $(x - 6)$ का

(iv) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ को $(x - 4)$ से

(v) $a^2 + 2ab + b^2$ में $(a + b)$ का

प्र.3 भागफल ज्ञात कीजिए एवं बताइए कि भाजक भाज्य का गुणनखण्ड नहीं है ? भागफल एवं शेषफल लिखिए –

(i) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ को $x - 1$ से

(ii) $-12 + 3x^2 - 4x + x^3$ को $x + 5$ से

(iii) $4x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 13x - 6$ को $2x + 3$ से

(iv) $8x^3 - 6x^2 + 10x + 15$ को $4x + 1$ से

प्र.4. भाग देकर जांच कीजिए कि क्या –

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

(i) $m^2 - 3m + 7$ को $m - 2$ से

(ii) $a^3 - 2a^2 + a + 2$ को $a + 2$ से

(iii) $9x^3 + 15x^2 - 5x + 3$ को $3x + 1$ से

(iv) $2x^3 + 3x^2 + 7x + 15$ को $x^2 + 4$ से

92U7S5

हमने सीखा

1. दो एक पदीय व्यंजकों का गुणा करने के लिए पहले उनके गुणांकों का उसके बाद चरांकों का गुणा करते है।
2. एक पदीय व्यंजक का द्विपदीय व्यंजकों से गुणा करने के लिए एक पदीय व्यंजक को, द्विपदीय व्यंजक के प्रत्येक पद से गुणा करते हैं तथा प्राप्त गुणनफलों को जोड़ देते हैं। इस प्रकार वितरण नियम का प्रयोग करते हैं।
3. चराकों का गुणा करते समय घातांक नियम का उपयोग करते है।
4. दो द्विपदीय व्यंजकों का आपस में गुणा करने के लिए दो बार वितरण नियम का प्रयोग करते हैं। जैसे–

   $(a+b)\ (c+d) = a\ (c+d) + b\ (c + d)$

   $= ac + ad + bc + bd$
5. गुणा करते समय यदि बीजीय व्यंजकों के चिह्न समान हो तो व्यंजक के चिह्न धनात्मक होता है एवं असमान चिह्न होने पर ऋणात्मक हो जाता है।
6. भागफल की क्रिया तब तक करते हैं जब तक शेषफल में बीजीय चरांक की घात, भाजक के घात से कम न हो जाये।
7. बहुपदीय व्यंजक में, एक पदीय व्यंजक का भाग देते समय प्रत्येक पद में, एकपदीय व्यंजक का भाग देते हैं।

अध्याय 5

वृत्त एवं उसके अवयव

CIRCLE

9343TS

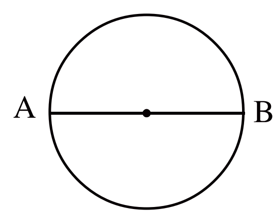
अनु ने कक्षा छठवीं में वृत्त के पाठ में पढ़ा था कि वृत्त के प्रत्येक बिन्दु की केन्द्र से दूरी समान होती है, यह दूरी त्रिज्या कहलाती है। उसको विभिन्न मापों का वृत्त बनाना भी आता है, चूड़ी से वृत्ताकार आकृति बनाना और नये नये डिजाइन बनाना तो उसका प्रिय खेल हैं।

एक दिन उसकी एक चूड़ी टूट गयी उसने चूड़ी के टुकड़ों को निश्चित स्थान में रखकर फिर से चूड़ी बना ली और पेंसिल की सहायता से एक वृत्ताकार आकृति भी बना ली। अनु सोच रही थी कि जिस प्रकार चूड़ी के कई टूकड़े हो सकते है वैसे ही क्या वृत्त के भी कई टुकड़े हो सकते हैं?

आप क्या सोचते है? आप शायद सोच रहे होंगे कि जब चूड़ी के टुकड़े हो सकते हैं, तो वृत्त के क्यों नहीं?

आइये, इन प्रश्नों का उत्तर ढूँढ़े–

कक्षा छठी में आपने पढ़ा है कि वृत्त के किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा, जो वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरती है, व्यास कहलाती है।



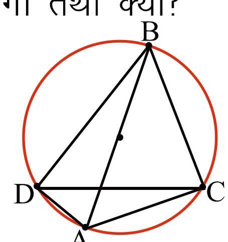
क्रियाकलाप 1.

कागज पर किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए तथा वृत्त के केन्द्र को चिन्हांकित कीजिए। वृत्त में एक व्यास खींचिए। व्यास के सापेक्ष वृत्त को काट लीजिए। क्या कटे हुए दोनों भाग समान है? क्या किसी भी वृत्त को व्यास के सापेक्ष काटने पर वह दो समान भागों में विभाजित होगा?

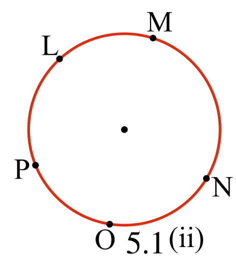
क्या इस प्रकार दो समान भागों में बँटे वृत्तों को अर्द्धवृत्त कह सकते हैं?

क्रियाकलाप 2.

नीचे दिए गए वृत्तों पर कुछ बिन्दुएँ अंकित है। इन्हें मिलाने पर कौनसा रेखाखंड वृत्त को दो अर्द्ध वृत्तों में बाँटेगा तथा क्यों?



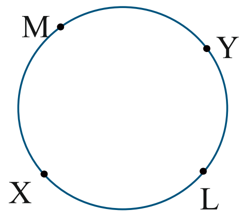
5.1 (i)



5.1 (ii)

चित्र 5.1 (i) में AB व्यास हैं एवं AC, AD, DC, BD और BC जीवाएँ हैं। प्रत्येक जीवा वृत्त

को दो वृत्तखण्डों में बाँटती है, इन वृत्त की परिधि के भाग को चाप कहते हैं। चित्र 5.1 (ii) में ON, NM, ML, PO .... इत्यादि चाप हैं।

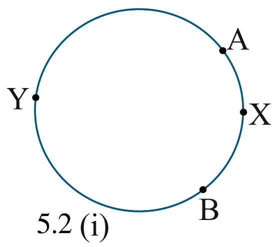


5.1 (iii)

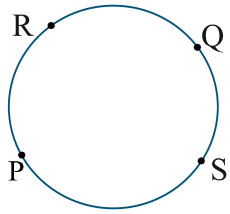
चित्र (iii) में यदि चाप XY कहा जाए तो यह स्पष्ट नहीं होता हैं कि यह कौनसा चाप है। गहरा वाला या हल्का वाला। अतः हम चापों का निर्धारण तीन बिन्दुओं से करते है जैसे चाप *XLY* या $\widehat{XLY}$ तथा इसी प्रकार चाप XMY या $\widehat{XMY}$, चाप $\widehat{XLY}$ की माप अर्द्धवृत्त से छोटी है, इसलिए इसे लघुचाप कहते है। उसी प्रकार $\widehat{XMY}$ की माप अर्द्धवृत्त से बड़ी है इसलिए इसे दीर्घचाप कहते है।

क्रियाकलाप 3.

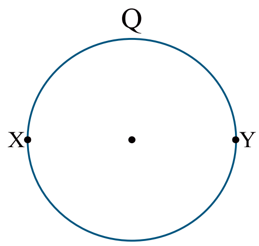
नीचे दिये गये चित्रों में लघु चाप एवं दीर्घ चाप को पहचानिए–



5.2 (i)



5.2 (ii)



5.2 (iii) P

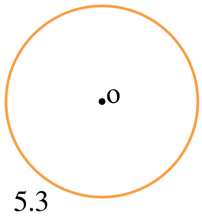
क्या सिर्फ देखकर यह बताया जा सकता है कि कोई चाप दीर्घ चाप है या लघु चाप?

पंकज सोच रहा था कि चित्र 5.2(i) में तो स्पष्ट दिख रहा है कि $\widehat{AXB}$ लघुचाप तथा $\widehat{AYB}$ दीर्घचाप है और इसी प्रकार चित्र 5.2 (ii) में $\widehat{PRQ}$ लघुचाप तथा $\widehat{PSQ}$ दीर्घचाप है। परंतु 5.2 (iii) में तो यह बताना मुश्किल है कि $\widehat{XPY}$ और $\widehat{XQY}$ में कौन सा दीर्घचाप है और कौन सा लघुचाप।

तभी राकेश ने चित्र 5.2 (i) में बिन्दु A और B को वृत्त के केन्द्र बिन्दु O से मिला दिया और यह देखा कि $\angle AOB$ जो कि $\widehat{AXB}$ की ओर बन रहा है यह $\widehat{AYB}$ की ओर बने $\angle AOB$ से छोटा है। आप भी चित्र 5.2 (ii) में बिन्दु P और बिन्दु Q को केन्द्र से मिलाइए और केन्द्र पर बने कोणों को नापकर बताइये कि कौन सा चाप, बड़ा और कौन सा चाप छोटा हैं ?

अनु ने चित्र 5.2 (iii) में बिंदु X और Y को केंद्र से जोडा और पाया कि XPY और XQY दोनों ओर बनें कोण समान हैं, अतः दोनों चाप समान है। XOY एक सरल रेखा है अतः $\angle XOY = 180^0$ । इसलिए राकेश ने कहा जिस चाप की तरफ केन्द्र पर बना कोण 180° से कम है, वह चाप लघु चाप और जिस चाप की ओर केन्द्र पर बना कोण 180° से अधिक है, वह चाप दीर्घ चाप कहलाएगा।

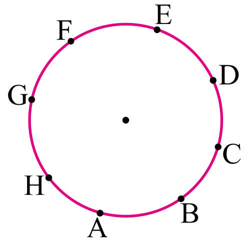
अब तो आप चापों को पहचानने लगे हैं, आइए इन्हीं से संबंधित कुछ गतिविधियाँ भी करते हैं–



5.3

नीचे एक वृत्त दिया गया है (चित्र5.3) इस वृत्त में कितने चाप बना सकते हैं? सुरेश सोच रहा था कि एक वृत्त के तो अनगिनत बिन्दु है और किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच का भाग चाप हैं। तब तो किसी वृत्त में भी अनगिनत चाप हो सकते है। सुरेश ने ठीक ही सोचा, एक वृत्त में अनगिनत चाप हो सकते हैं तथा जिस प्रकार अनगिनत बिन्दु है उसी प्रकार इनमें से किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाकर अनगिनत जीवाएँ बन सकती हैं।

रमेश ने एक वृत्त बनाकर उसमें चित्रानुसार (चित्र5.4) बिन्दुओं को अंकित किया और उनमें से दो बिन्दुओं A व C को मिलाकर जीवा AC प्राप्त की।



5.4

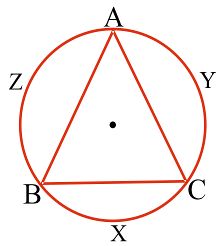
इसे देख कर सुरेश ने कहा कि जीवा AC वृत्त के दो वृत्त खण्डों (चापों) में विभाजित करती है। एक लघुचाप AC और दूसरा दीर्घ चाप AC। लघु चाप AC को तो $\overset{\frown}{ABC}$ लिखते है क्योंकि इस चाप में बिन्दु B सम्मिलित है, परन्तु दीर्घ चाप AC में बहुत सारे बिन्दुएँ इसे कैसे लिखा जाए?आइये सोचते है।

आप भी सोचिए ?

दीर्घ चाप AC को उस वृत्त खण्ड में आए सभी बिन्दुओं को लेकर AHGFEDC लिखना होगा। इस चाप को भी लघु चाप AC ($\overset{\frown}{ABC}$) की तरह $\overset{\frown}{AHC}$ या $\overset{\frown}{AGC}$ या .... या $\overset{\frown}{ADC}$ लिख सकते हैं जो कि उस दीर्घ वृत्त खंड को दर्शाते हैं।

चाप (वृत्तखण्ड) द्वारा वृत्त पर बनाया गया कोण –

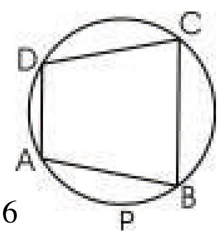
चित्र (5.5) में एक Δ ABC दिया गया है जिसके सभी शीर्ष A,B व C वृत्त पर स्थित है। यहाँ $\overset{\frown}{BXC}$ द्वारा वृत्त के बिन्दु A पर $\angle BAC$ बनाया गया है। क्या आप $\overset{\frown}{CYA}$ और $\overset{\frown}{AZB}$ द्वारा वृत्त पर बने कोणों को पहचान सकते हैं? कोणों को पहचान कर लिखिए।



5.5

क्रियाकलाप 4.

नीचे दिए गए चतुर्भुज ABCD के चारों शीर्ष A,B,C व D वृत्त पर स्थित है। इस वृत्त में किस चाप द्वारा वृत्त पर कौन सा कोण अंतरित किया जा रहा है, पहचान कर लिखिए–

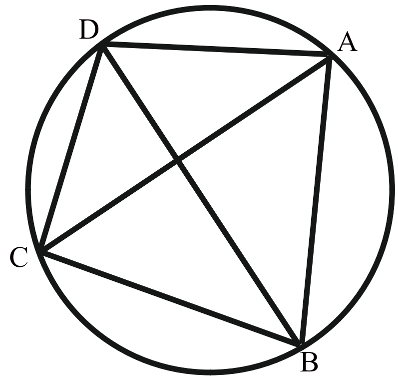


5.6

क्र. स.	बिन्दु जिनके बीच चाप बना है	लघुचाप का नाम	लघुचाप द्वारा वृत्त पर बना कोण	दीर्घ चाप का नाम	दीर्घ चाप द्वारा वृत्त पर बना कोण
1.	A एवं B	APB	कोई कोण नहीं	ADB या ACB	कोई कोण नहीं
2.	A एवं C				
3.					
4.					
5.					
6.					

प्रश्नावली 5.1

1. संलग्न चित्र से संबंधित निम्न प्रश्नों का उत्तर ढूँढिए–



(i) $\overparen{ABC}$ **लघु / दीर्घ चाप है**

(ii) $\overparen{BCD}$ **लघु / दीर्घ चाप है**

(iii) लघु चाप $\overparen{AB}$ द्वारा अंतरित कोणों के नाम लिखिए।

(iv) $\angle ACB$ किस चाप द्वारा बना है?

(v) $\angle CBA$ किस चाप द्वारा बना है?

(vi) $\angle CBD$ और $\angle CAD$ किस चाप द्वारा बने हैं।

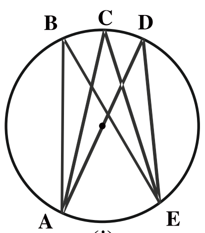
(vii) चापों द्वारा बिन्दु D पर बने कोणों के नाम लिखिए।

वृत्त के किसी चाप द्वारा वृत्त पर बनने वाले सभी कोणों को आपने पहचान लिया है, आइए इन कोणों के बीच संबंध ढूंढ़ें।

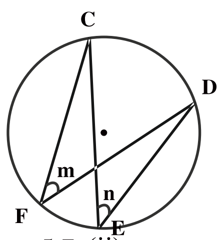
वृत्तखण्ड के कोणों के गुण

क्रियाकलाप 5.

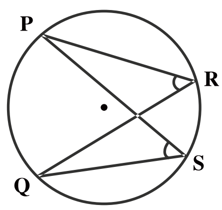
दिए गए प्रत्येक चित्र में एक चाप द्वारा वृत्त पर कई कोण बनाए गए हैं। उन कोणों को माप कर सारणी को पूरा कीजिए।



5.7 (i)



5.7 (ii)



5.7 (iii)

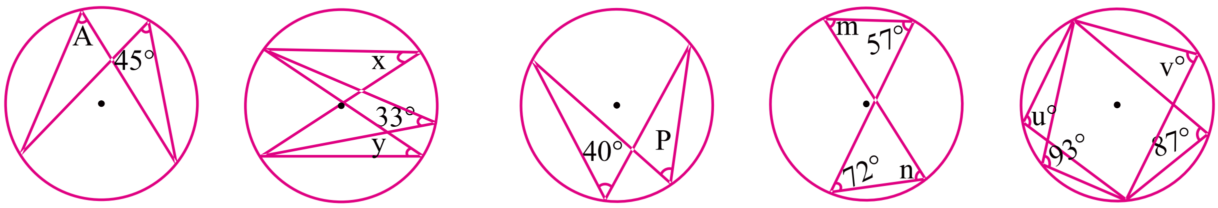
क्र.सं.	चित्र क्र.	चाप का नाम	चाप द्वारा वृत्त पर बने कोणों के नाम एवं उनका माप		
			1	2	3
1.					
2.					
3.					

उपरोक्त क्रियाकलापों को करते हुए शैली ने देखा कि किसी भी चाप द्वारा उसके सम्मुख वृत्तखण्ड पर जितने भी कोण बनाए जाते है वे सभी एक ही माप के हैं अर्थात् किसी चाप द्वारा एक ही वृत्तखण्ड में बने कोण बराबर होते है।

आप भी ऐसे ही कई वृत्त लेकर उनमें चाप खींचिए तथा उन चापों द्वारा सम्मुख वृत्तखण्डों पर कई कोण बनाइए और अपने साथियों से नपवाकर देखिए कि क्या एक ही चाप से बने सभी कोण समान हैं

प्रश्नावली 5.2

निम्न चित्रों में अंग्रेजी के अक्षरों द्वारा दर्शाए गए कोणों के माप चाँदा से बिना मापे ज्ञात कीजिए–



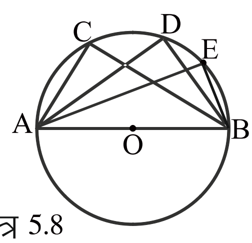
(i) (ii) (iii) (iv) (v)

A = ... x = ... p = ... m = ... u = ...

y = ... n = ... v = ...

क्रियाकलाप 6.

O केन्द्र वाले वृत्त में व्यास AOB खींचिए। व्यास के ऊपर वाले अर्द्धवृत्त पर बिन्दु C,D,E लीजिए। तथा $\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$ बनाइए। चाँदे की सहायता से इन कोणों को मापिए और उनका मान लिखिए–



चित्र 5.8

$\angle ACB$ = ..., $\angle ADB$ = ..., $\angle AEB$ = ...

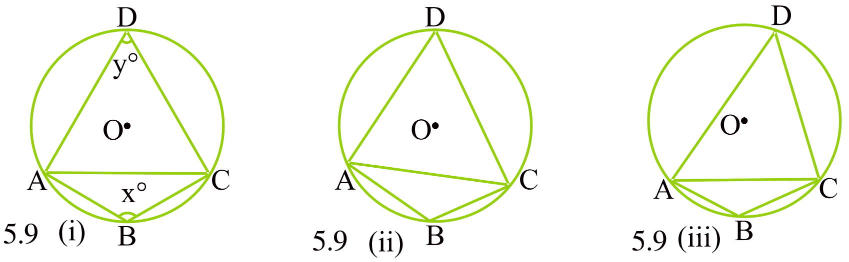
इन कोणों के माप से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? ....

अवलोकन पश्चात आप पायेंगे कि सभी कोण समकोण हैं अर्थात् **अर्द्धवृत्त का कोण समकोण होता है।**

वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं द्वारा लघु वृत्तखण्ड एवं संगत दीर्ध वृत्तखण्ड के कोण–

क्रियाकलाप 7.

केन्द्र O लेकर, एक वृत्त बनाइए। वृत्त पर दो बिन्दु A और C लीजिए जिससे यह एक लघु वृत्तखण्ड ABC तथा एक दीर्घवृत्त खण्ड ADC में बँट जाए।



5.9 (i) 5.9 (ii) 5.9 (iii)

लघुवृत्तखण्ड का कोण ∠ABC है तथा संगत दीर्घवृत्त खण्ड का कोण ∠ADC है। इन्हें मापकर निम्न सारणी पूर्ण कीजिए।

क्र.सं.	लघुवृत्तखण्ड का कोण x°	संगत दीर्घ–वृत्तखण्ड का कोण y°	$x^\circ + y^\circ$
1.	----------------------	-------------------------------------	---------------
2.	----------------------	-------------------------------------	---------------
3.	----------------------	-------------------------------------	---------------

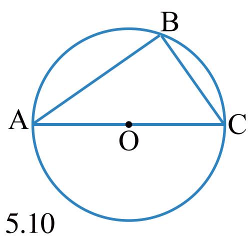
सारणी पूर्ण करने के पश्चात आप पायेगें कि जीवा के दोनों ओर के वृत्तखण्ड़ों में बने कोणों का योगफल 180° होता है।

प्रश्नावली 5.3

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

1. लघु वृत्तखण्ड का कोण ––––––––– है। (न्यून कोण / अधिक कोण)
2. दीर्घ–वृत्तखण्ड का कोण ––––––––– है। (न्यून कोण / अधिक कोण)
3. एक ही वृत्त में लघुवृत्तखण्ड एवं संगत दीर्घ वृत्तखण्ड में बने कोणों का योग ––––––– होता है। (180° / 270° / 360°)

उदाहरण 1. नीचे दिए गये आकृति में वृत्त का केन्द्र O है यदि $\angle C=55^\circ$ है तो $\angle BAC$ का मान ज्ञात कीजिए–



5.10

हल: AC व्यास है। (वह केन्द्र O से गुजरता है।) अत: $\angle ABC$ अर्द्धवृत्त का कोण है। जो कि समकोण होता है। अर्थात् $\angle B$ या $\angle ABC=90^\circ$

अत: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ($\because$ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।)

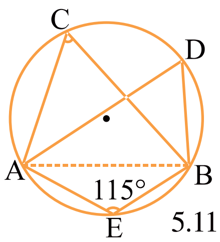
$= \quad \angle A + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

$= \quad \angle A + 145^\circ = 180^\circ$

$= \quad \angle A = 180^\circ - 145^\circ$

$= \quad \angle A = 35^\circ$ उत्तर

उदाहरण 2. दिये गये चित्र में $\angle AEB=115^\circ$ तो $\angle ACB$ तथा $\angle ADB$ ज्ञात कीजिए।



5.11

हल: दिया है – $\angle AEB = 115^\circ$

ज्ञात करना है – $\angle ACB$ तथा $\angle ADB$

चूँकि जीवा के दोनों ओर के वृत्तखण्डों में बने कोणों का योग 180^0 होता है। अतः

$\angle AEB + \angle ACB = 180^\circ$

$115^\circ + \angle ACB = 180^\circ$

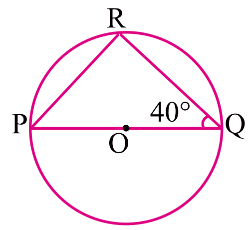
$\angle ACB = 180^\circ - 115^\circ$

$\angle ACB = 65^\circ$

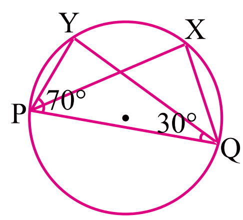
हम जानते है कि किसी चाप द्वारा एक ही वृत्तखण्ड पर बनाए गए कोण बराबर होते है अतः $\angle ACB = \angle ADB = 65^\circ$

प्रश्नावली 5.4

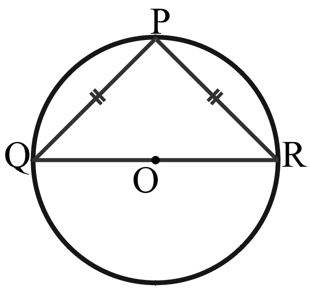
प्रश्न 1 सामने दिए चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle PRQ$ तथा $\angle QPR$ के माप ज्ञात कीजिए।



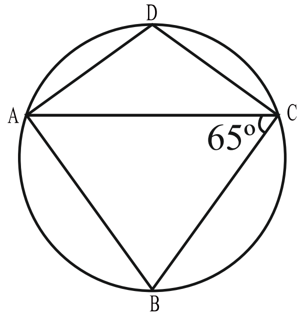
प्रश्न 2 सामने के चित्र में वृत्तखण्ड PQXY में बने $\angle YPQ=70^\circ$ तथा $\angle YQP=30^\circ$ हैं। $\angle PYQ$ तथा $\angle PXQ$ के माप ज्ञात कीजिए।



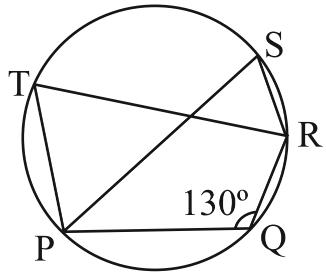
प्रश्न 3 दिए गए चित्र में PQ = PR है तथा O वृत्त का केन्द्र है तो त्रिभुज PQR के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।



प्रश्न 4 सामने चित्र में AB=BC तथा $\angle ACB=65^\circ$ है। $\angle ADC$ की माप ज्ञात कीजिए।



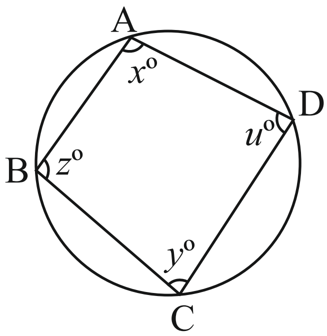
प्रश्न 5 सामने चित्र में $\angle PTR$ और $\angle PSR$ की माप ज्ञात कीजिए। जिसमें $\angle PQR=130^\circ$ है।



क्रियाकलाप–8

अपनी कापी में अलग–अलग माप का वृत्त लेकर दी गई आकृति के अनुसार आकृति बनाइए तथा कोणों को मापकर निम्न सारणी पूर्ण कीजिए।

वृत्त क्र.	x°	y°	$x^\circ+y^\circ$	z°	u°	$z^\circ+u^\circ$
1.						
2.						
3.						
4.						

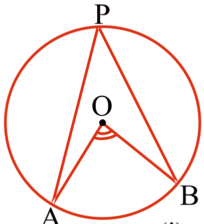


एक ही चाप का कोण और चाप द्वारा केन्द्र पर बनाये गये कोण में संबंध –

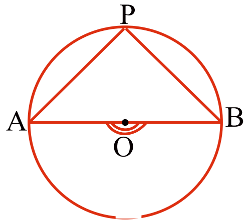
आप चाप $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा केन्द्र O पर बनाए गए $\angle AOB$ को पहचान चुके हैं। आपने चाप $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा शेष वृत्तखण्ड के बिन्दु P पर $\angle APB$ बनाना भी सीख लिया है।

क्रियाकलाप 9

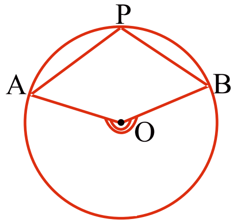
अब चाप AB का केन्द्रीय कोण $\angle AOB$ तथा शेष चाप पर बना कोण $\angle APB$ एक ही वृत्त पर निम्न प्रकार से बनाइए तथा अपनी कॉपी में कई वृत्त बनाकर इन कोणों को मापिए और तालिका पूर्ण कीजिए–



(i)
5.12



(ii)
5.12



(iii)
5.12

आकृति क्रं.	$\angle AOB$ की माप	$\angle APB$ की माप	2 $\angle APB$ की माप	क्या $\angle AOB = 2\angle APB$
5.12 (i)				
5.12 (ii)				
5.12 (iii)				

आपने क्या देखा?

$\angle AOB$ और $2\angle APB$ समान या लगभग समान हैं?

अतः $\angle AOB = 2\ \angle APB$ ....(1)

अर्थात् चाप AB का केन्द्रीय कोण = 2 x (शेष चाप पर बना कोण)

समी. (1) से, $\angle APB = \frac{1}{2} \times \angle AOB$

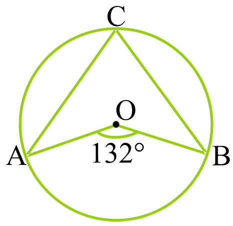
दूसरे शब्दों में, वृत्त में **"किसी चाप द्वारा शेष वृत्तखण्ड के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण, उसी चाप द्वारा केन्द्र पर बने कोण का आधा होता है।"**

अभ्यास

निम्न तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

चाप का केन्द्रीय कोण या अंशीय माप	चाप का कोण या चाप द्वारा शेष वृत्तखण्ड के किसी बिन्दु पर बनाया गया कोण	चाप कैसा है? लघुचाप/अर्धवृत्त/दीर्घचाप
150°	75° (क्यों)	लघुचाप (क्यों)
220°	————————	दीर्घचाप
————————	90°	अर्धवृत्त
————————	————————	दीर्घ चाप
————————	————————	लघु चाप

उदाहरण 3. एक वृत्त के चाप की अंशीय माप 132° है। इसी चाप द्वारा शेष वृत्तखण्ड के किसी बिन्दु पर अंतरित $\angle ACB$ ज्ञात कीजिए।



5.13

हल $\angle AOB = 132^\circ$ (दिया है)

चूंकि $\angle AOB = 2 \times \angle ACB$

या $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

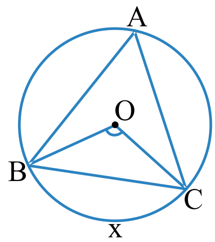
= $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 132^\circ = 66^\circ$

$\because$ $\angle ACB = 66^\circ$

उदाहरण 4.

समबाहु Δ ABC के परिगत वृत्त का केन्द्र O है।

$\angle BOC$ की माप ज्ञात कीजिए।



5.14

हलः Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

अतः $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

$\because$ $\overset{\frown}{BxC}$ का केन्द्रीय कोण $= \angle BOC$

$\because$ $\angle BOC = 2 \angle BAC$

= $\angle BOC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

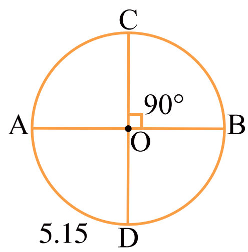
अतः $\angle BOC = 120^\circ$

इस उदाहरण में OA को मिलाने पर $\angle AOC$ और $\angle AOB$ की माप बताइए?

समान चाप, संगत जीवा, चाप की अंशीय माप

क्रियाकलाप 10.

एक सफेद कागज पर 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O है। व्यास AB खींचिए। AB से 90° का कोण बनाते हुए व्यास CD खींचिए।



5.15

आप जानते हैं प्रत्येक वृत्त अपने व्यास के सापेक्ष सममित है अतः दो समकोण बनाते हुए व्यास AB और CD वृत्त को चार समान टुकड़ों में बांट देंगे।

कागज को AB और CD दो बार मोड़ने से प्रत्येक चौथाई भाग एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेगा।

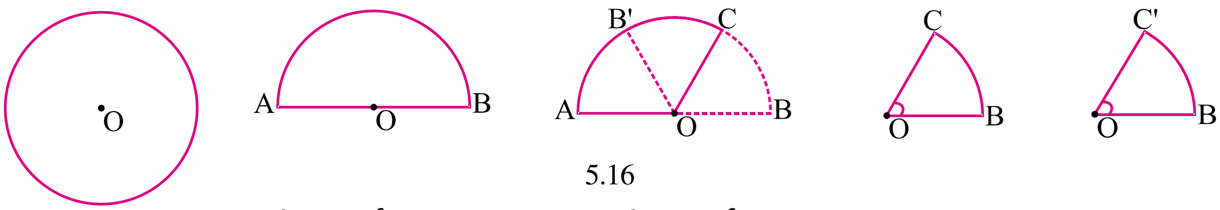
यहाँ चाप AD, DB, BC और CA एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेते हैं। इन चापों का केन्द्रीय कोण 90° है।

अतः लघु $\overset{\frown}{AD}$ = लघु $\overset{\frown}{DB}$ = लघु $\overset{\frown}{BC}$ = लघु $\overset{\frown}{CA}$

तो $\angle AOD = \angle DOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$

क्रियाकलाप 11.

O केन्द्र वाला एक वृत्त कागज पर बनाइए। व्यास AB खींचिए। इसे व्यास पर मोड़िये। केन्द्र O से इसे किसी अन्य त्रिज्या OC पर मोड़िये। कैंची से इसे OC पर काट लीजिए। फिर OB पर काटिये इस तरह दो टुकड़े OBC और OBC' दोनों त्रिज्या खण्ड हैं जो बराबर है।



5.16

अब चाप BC की लंबाई = चाप BC' की लंबाई

और $\angle COB = \angle C'OB'$

परिणाम–

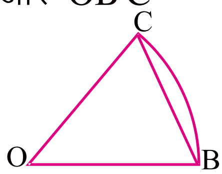
एक ही वृत्त में समान लंबाई के चाप, केन्द्र पर समान कोण बनाते हैं एवं इसका विलोम भी सत्य है अर्थात् **''एक ही वृत्त में केन्द्र पर बराबर कोण बनाने वाले चाप बराबर होते हैं।''** ऊपर लिखे क्रियाकलाप में BC और B'C' को मिलाइए।

अब देखिए ये दोनों त्रिज्याखण्ड OBC और OB'C'

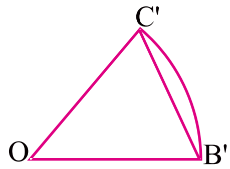
इनमें $\angle COB = \angle C'OB'$

चाप BC = चाप B'C'

जीवा BC = जीवा B'C'



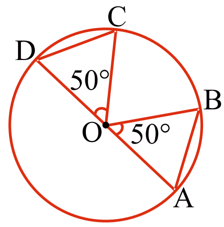
5.17



5.18

अतः समान चाप के संगत जीवाओं की लंबाई समान है एवं इसके विपरीत बराबर जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर होता है।

उदाहरण 5. आकृति में दो त्रिज्याखण्ड AOB तथा COD हैं। $\angle AOB = \angle COD = 50^\circ$ यदि AB=2.5 सेमी तो CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



5.19

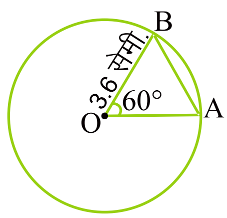
हल : चूँकि समान केन्द्रीय कोण वाले जीवाओं की लम्बाई समान होती है अतः

जीवा AB = जीवा CD

जीवा AB = 2.5 सेमी

अतः जीवा CD = 2.5 सेमी

उदाहरण 6. आकृति में वृत्त की त्रिज्या 3.6 सेमी है तथा $\angle AOB = 60^\circ$ है जीवा AB की लम्बाई तथा $\angle OAB$, $\angle OBA$ की माप ज्ञात कीजिए।



5.20

हल: दिया है त्रिज्या = 3.6 सेमी

OAB में

OA = OB = 3.6 सेमी (त्रिज्याएं)

$\therefore$ इन भुजाओं के सामने के कोण बराबर होंगे।

$\therefore$ $\angle OBA = \angle OAB = x^\circ$ (माना)

ΔOAB में कोणों को योग $= 180^\circ$

$\angle BOA + \angle OBA + \angle OAB = 180^\circ$

$60^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$

$60^\circ + 2x^\circ = 180^\circ$

$2x^\circ = 180^\circ - 60^\circ$

$2x^\circ = 120^\circ$

$x^\circ = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

$\therefore$ Δ OAB के तीनों कोण $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ के हैं।

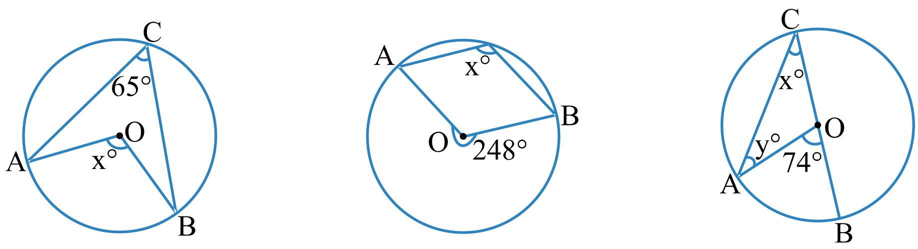
यह एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore$ AB = OB = OA = 3.6 सेमी

अतः जीवा AB = 3.6 सेमी, $\angle OAB = 60^\circ$, $\angle OBA = 60^\circ$

प्रश्नावली 5.5

प्रश्न 1 निम्न आकृतियों में x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।



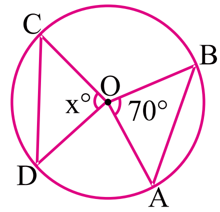
(a) (b) (c)

प्रश्न 2 निम्न आकृतियों में x तथा y का मान ज्ञात कीजिए बताइये।

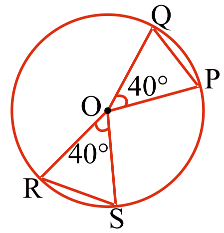
जब (i) $x = y$ (ii) $x = 2y$

(i) (ii)

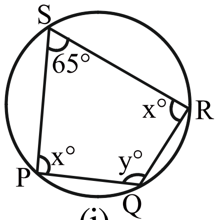
प्रश्न 3 आकृति में AB = CD यदि $\angle AOB = 70^\circ$ तो $\angle COD$ का मान ज्ञात कीजिए।



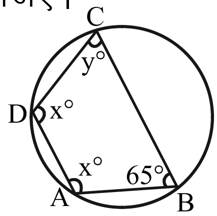
प्रश्न 4 आकृति में RS = 3.2 सेमी तो PQ की माप क्या होगी?



प्रश्न 5 निम्न आकृतियों में x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)

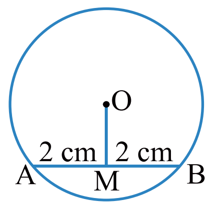
जीवा – पूर्व में आपने सीखा है कि वृत्त के किन्ही दो बिन्दुओं को मिलाने पर जो रेखाखण्ड प्राप्त होता है उसे जीवा कहते है और सबसे बड़ी जीवा ही व्यास है। आइए जीवा के कुछ गुणों को जाने।

वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब –

क्रियाकलाप 12.

केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त में जीवा AB खींचिए। अब $OM \perp AB$ इस प्रकार खींचिए कि M जीवा AB पर स्थित हो।

अलग–अलग त्रिज्याएँ और केन्द्र लेकर और उनसे वृत्त खींचकर उपर्युक्त क्रिया को दोहराइए।



उन आकृतियों को इसी प्रकार से नामांकित कीजिए।

वृत्तों को 1, 2 व 3 ..... से नामांकित कीजिए।

प्रत्येक स्थिति में AM तथा BM को माप कर सारणी पूर्ण कीजिए।

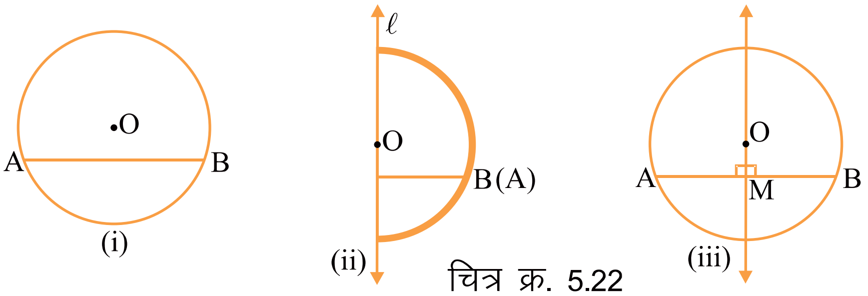
चित्र क्र. 5.21

वृत्त	AM	BM	क्या AM= BM ?
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

आप देखेगें कि प्रत्येक स्थिति में AM तथा BM का समान है अतः AM=BM

क्रियाकलाप 13.

एक मोटा कागज लीजिए और उस पर O केन्द्र वाला एक वृत्त बनाइए। इस वृत्त में जीवा AB भी खींचिए।



चित्र क्र. 5.22

अब वृत्त को इस प्रकार मोड़िए कि A बिन्दु B बिन्दु पर पड़े, रेखा ℓ के अनुदिश मोड़ का निशान प्राप्त करने के लिए कागज को दबाइए मोड़ के निशान को देखने पर पता चलता है कि रेखा ℓ वृत्त केन्द्र O से होकर गुजरती है, तथा दोनों भाग एक दूसरे को पूर्णतया ढँक लेते हैं।

अब कागज को खोलकर ℓ और जीवा AB के प्रतिच्छेद बिन्दु को M से अंकित कीजिए।

$\angle OMA$ तथा $\angle OMB$ को मापिये, ये दोनों 90° के होंगे। चूंकि AM, BM के संपाती है अतः AM=BM

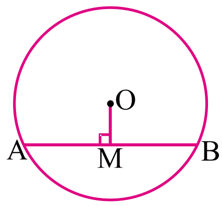
क्रियाकलाप 11 व 12 से स्पष्ट होता है कि –

"वृत्त में उसके केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।"

क्रियाकलाप 14.

केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इसकी एक जीवा AB भी खींचिए। AB को एक बिन्दु M पर समद्विभाजित कीजिए तथा O और M को मिलाइए।

इसी क्रियाकलाप को दोहराकर अन्य वृत्त बनाइए। इन वृत्तों को 1, 2, 3 .... से चिन्हित कीजिए एवं सभी आकृतियों को समान रूप से नामांकित कीजिए।



चित्र क्र. 5.23

प्रत्येक वृत्त में $\angle OMA$ को मापिए तथा निम्न सारणी को पूरा कीजिए।

वृत्त	$\angle OMA$	$\angle OMB$	क्या $\angle OMA = \angle OMB$?
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

आप पायेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $\angle OMA = \angle OMB$ (लगभग 90°) प्राप्त होता है। चूँकि

$\angle OMA$ तथा $\angle OMB$ दोनों जीवा AB के बीच के एक बिन्दु पर बने कोण है अतः उनका योगफल 180° है और साथ ही दोनों कोण बराबर है।

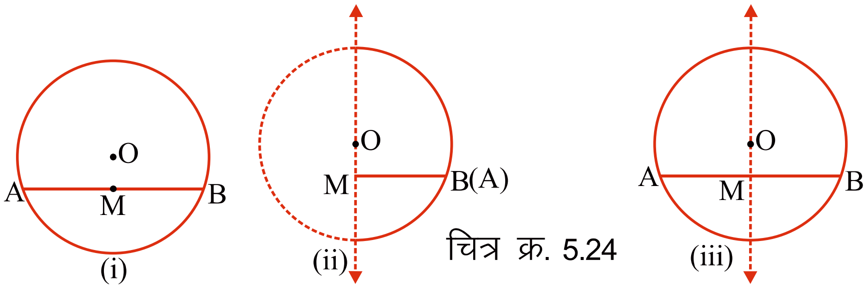
अतः $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$

अर्थात् $OM \perp AB$

अतः "वृत्त की जीवा के मध्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।"

क्रियाकलाप 15.

एक कागज लीजिए और उस पर O केन्द्र वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की एक जीवा AB खीचिंए और उसका मध्य बिन्दु M को चिन्हांकित कीजिए। M और O को मिलाइए, अब रेखा OM के अनुदिश इसे मोड़िए जिससे कि बिन्दु A बिन्दु B पर पड़े।



चित्र क्र. 5.24

अब कागज को खोलिए आप पायेगें कि $\angle OMA$, $\angle OMB$ पर पड़ता है। अतः $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$

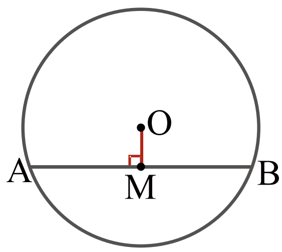
अर्थात् $OM \perp AB$

क्रियाकलाप 13 व 14 से स्पष्ट होता है कि –

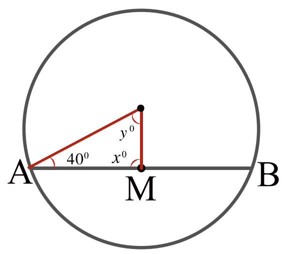
"वृत्त की किसी जीवा के मध्य–बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।"

प्रश्नावली 5.6

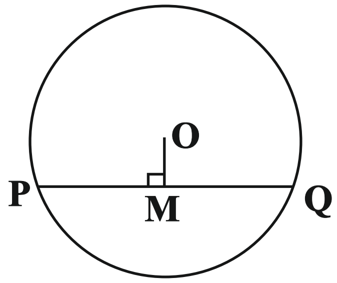
प्रश्न 1. आकृति में $OM \perp AB$. यदि $AM = 3.5$ सेमी. हो, तो BM और AB का मान ज्ञात कीजिए।



प्रश्न 2. आकृति में जीवा AB का मध्य बिन्दु M है, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।



प्रश्न 3. आकृति में $OM \perp PQ$. यदि $PQ = 8$ सेमी. हो, तो PM और MQ का मान ज्ञात कीजिए। क्या PM=MQ ?



प्रश्न 4.रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(1) वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को .... करता है।

(2) वृत्त में किसी जीवा के मध्य–बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर .... होती है।

हमने सीखा

1. वृत्त के किसी चाप द्वारा शेष वृत्त खण्ड पर बने सभी कोण समान होते हैं।
2. किसी जीवा के दोनों ओर वृत्त खण्डों में बनने वाले कोणों का योगफल 180^0 होता है।
3. वृत्त के किसी चाप द्वारा वृत्त शेष वृत्तखण्ड पर अतंरित कोण चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण का आधा होता है।
4. एक ही वृत्त में समान लम्बाई के चाप केन्द्र पर समान कोण बनाते हैं।
5. किसी वृत्त के केन्द्र से वृत्त के जीवा पर डाला गया उस जीवा को समद्विभाजित करता है।
6. वृत्त की किसी जीवा के मध्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

93VQYQ

अध्याय–6
सांख्यिकी
STATISTICS

9F9ZFA

समान्तर माध्य [MEAN]

जानवरों को पानी पिलाने में राधा बहुत आनन्द अनुभव करती है। वह रोज़ एक बड़ी टंकी में जानवरों के लिए पानी भर देती है और हिसाब भी रखती है कि प्रत्येक दिन सुबह 8 बजे से 11 बजे के बीच कितने जानवर पानी पी रहे हैं। उसके द्वारा लिखे गए पिछले हफ्ते का हिसाब कुछ इस प्रकार है :–

9FIVGX

चित्र 6.1

सोमवार	–	12,	मंगलवार	–	15,	बुधवार	–	13,
बृहस्पतिवार	–	11,	शुक्रवार	–	13,	शनिवार	–	12
रविवार	–	14						

क्या आप बता सकते हैं कि राधा प्रतिदिन औसतन कितने जानवरों को पानी पिलाती है।

क्रिकेट खिलाड़ी A ने अपनी दस पारियों में 60, 70, 15, 90, 72, 45, 11, 77, 125, 200 रन बनाये। इसी तरह खिलाड़ी B ने अपनी छः पारियों में 220, 110, 70, 37, 15, 07 रन बनाये। क्या आप बता सकते है कि किस खिलाड़ी की उपलब्धि अच्छी रही?

इस तरह की तुलना हम औसत निकाल कर आसानी से कर सकते है।

इसी प्रकार दैनिक जीवन में हम कई स्थानों पर औसत का उपयोग करते हैं। जैसे –

(1) आपकी कक्षा में पढ़ने वाले विद्यार्थियों की औसत आयु 14 वर्ष है।
(2) आपका रात में सोने का औसत समय 8 घंटे है।
(3) दैनिक समाचार पत्रों का औसत मूल्य 2.50 रूपये है।
(4) कक्षा में विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 45 है।
(5) इस वर्ष रायपुर में औसत से कम वर्षा हुई।

उपरोक्त उदाहरणों में आप देख रहे है कि कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु 15 वर्ष है। रात में सोने का औसत समय 8 घंटे है। इनसे तात्पर्य यह नहीं है कि कक्षा के प्रत्येक छात्र की आयु 14 वर्ष है या रोज़ रात में आप 8 घंटे सोते हैं। न ही यह अधिकतम या न्यूनतम है।

वास्तव में, औसत दिए गए प्रेक्षणों (आँकड़ों) के योग में प्रेक्षणों (आँकड़ों) की संख्या का भाग देने से प्राप्त होता है। इसे समान्तर माध्य भी कहते है। इसे संकेत M द्वारा दर्शाते हैं।

अतः $\boxed{\text{औसत या समान्तर माध्य (Mean) (M)} = \dfrac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}}$

अब हम आसानी से ज्ञात कर सकते हैं कि राधा प्रतिदिन औसतन कितने जानवरों को पानी पिलाती है।

$$\text{औसत} = \frac{12+15+13+11+13+13+14}{7} = \frac{91}{7} = 13$$

अतः राधा औसतन 13 जानवरों को प्रतिदिन पानी पिलाती है।

अब आप स्वयं खिलाड़ी A व B की पारियों का समान्तर माध्य ज्ञात कर बताइए कि किस खिलाड़ी का प्रदर्शन अच्छा रहा।

क्रियाकलाप 1

आप अपने परिवार के सदस्यों की औसत आयु निकालिए।

क्रियाकलाप 2.

आप अपनी अर्द्धवार्षिक परीक्षा में सभी विषयों के प्राप्तांकों का औसत निकालिए।

उदाहरण 1. एक फल की दुकान पर पांच टोकरियों में 46 किग्रा, 21 किग्रा, 18 किग्रा, 25 किग्रा. तथा 35 किग्रा. सेब रखे हैं। इनका समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर माध्य (M) = $\dfrac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

समान्तर माध्य (M) = $\frac{46+21+18+25+35}{5} = \frac{145}{5} = 29$ किग्रा.

उदाहरण 2. प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः प्रथम दस प्राकृत संख्याएँ निम्नांकित हैं –

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

समान्तर माध्य (M) = $\frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

समान्तर माध्य (M) = $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10}$

$= \frac{55}{10} = 5.5$

बहुलक [MODE]

विद्यालय द्वारा कक्षा आठवीं के छात्रों को दीपावली अवकाश में किसी दर्शनीय स्थल के भ्रमण कराने का निश्चय किया गया। प्रधानाध्यापक ने सिरपुर, रतनपुर, जगदलपुर तथा अम्बिकापुर में से एक स्थान का चुनाव करने का निर्देश दिया। कुछ छात्र सिरपुर तो कुछ छात्र जगदलपुर जाना चाहते है। स्थान तय नहीं होने के कारण, कक्षाध्यापक द्वारा चारों स्थानों के नाम श्यामपट्ट पर लिखकर बच्चों से हाथ खड़े करवाकर टैली (गणन चिह्न) द्वारा बारम्बारता सारणी बनाई गई, जो निम्नानुसार है–

सारणी 6.1

दर्शनीय स्थल	गणना चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
सिरपुर	$\cancel{||||}$ ||	7
जगदलपुर	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ |||	13
रतनपुर	$\cancel{||||}$	5
अम्बिकापुर	$\cancel{||||}$	5

सारणी बनाने के बाद कक्षाध्यापक ने कहा सर्वाधिक 13 विद्यार्थी जगदलपुर जाना चाहते हैं, अतः हमें जगदलपुर जाना चाहिए।

दैनिक जीवन में भी ऐसी कई घटनाएं होती है जिनका चयन इसी प्रकार करते हैं। जैसे – अधिकतर समान व्यक्तियों की शर्ट की माप 38 या 40 नम्बर होती हैं। अतः रेडिमेड कपड़े की दुकान में हमें 38 या 40 नम्बर की ही शर्ट आसानी से मिलती है। इससे कम या अधिक माप की शर्ट दुकान में कम रखी जाती है, क्योंकि उसकी मांग कम है। अतः कम्पनी उसी नम्बर का शर्ट अधिक बनाती है जिसकी मांग बाजार में अधिक है।

चयन का यह आधार ही बहुलक है। अर्थात् "**बहुलक दिए गये प्रेक्षणों में से वह मान है जो सर्वाधिक बार दोहराया गया हो।**" इसे संकेत M_0 द्वारा दर्शाते हैं।

उदाहरण 3. एक फुटबाल टीम के 11 खिलाड़ियों द्वारा पहने गए जूतों के नाप के नम्बर निम्न प्रकार हैं–

6, 4, 5, 6, 7, 7, 6, 5, 6, 7, 8

बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गये नम्बरों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिखने पर,

4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8

स्पष्ट है कि यहाँ 6 नम्बर सबसे अधिक बार (4 बार) आया है,

अतः बहुलक 6 होगा अर्थात् $\boxed{M_0 = 6}$

माध्यिका [MEDIAN]

उदाहरण 4. एक कक्षा के 15 छात्रों के वार्षिक परीक्षा में पूर्णांक 100 में से प्राप्तांक निम्नानुसार हैं :–

(A) 15, 35, 16, 25, 45, 76, 90, 99, 50, 16, 57, 60, 86, 17, 95

बताइये इनमें से कितने छात्रों के अंक आधे से अधिक है। यहाँ प्राप्तांकों को देखने से तो यह स्पष्ट नहीं हो रहा है। आइए, इन्हें हम आरोही (बढ़ते) क्रम में व्यवस्थित करके देखें –

(B) 15, 16, 16, 17, 25, 35, 45, 50, 57, 60, 76, 86, 90, 95, 99

(अ) प्राप्तांकों **(A)** के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

1. दिए गए प्राप्तांकों (पदों) में मध्य पद हैं ? ....
2. मध्य पद के प्राप्तांक से कम प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? ....
3. मध्य पद के प्राप्तांक से अधिक प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? ....
4. क्या मध्य पद के प्राप्तांक से कम एवं अधिक प्राप्तांक वाले पदों की संख्या समान (बराबर) है ? ....

(ब) व्यवस्थित प्राप्तांकों **(B)** के आधार पर प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

1. व्यवस्थित प्राप्तांकों में मध्य पद के प्राप्तांक क्या हैं ? ....
2. मध्य पद के प्राप्तांक से कम प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? ....
3. मध्य पद के प्राप्तांक से अधिक प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? ....
4. क्या मध्य पद के प्राप्तांक से कम एवं अधिक प्राप्तांक वाले पदों की संख्या समान है ? ....

पदों को घटते क्रम या बढ़ते क्रम में रखने पर ही मध्य पद का निर्धारण होता है। इसी मध्य पद को माध्यिका कहते हैं।

अर्थात् **"दिए गए आँकड़ों को घटते या बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करने पर उनके बीच वाला मान ही माध्यिका है।"** माध्यिका को संकेत M_d द्वारा दर्शाते हैं।

[A] माध्यिका ज्ञात करना जब आँकड़ों की संख्या N विषम हो :

जब दिए गए आँकड़ों की संख्या विषम संख्या में हो, तो सर्वप्रथम उनको आरोही या अवरोही क्रम में लिखकर $M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान ज्ञात करते हैं। प्राप्त मान ही माध्यिका है।

अर्थात् माध्यिका $M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान

उदाहरण 6. 3, 5, 10, 9, 8, 14, 6, 12, 13, 11, 7 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करके लिखने पर,

3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (यहाँ कुल पदों की संख्या 11 अर्थात विषम है)

$$M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ वाँ पद का मान} = \left(\frac{11+1}{2}\right) \text{ वाँ पद का मान} = 6 \text{ वाँ पद का मान}$$

$$\boxed{M_d = 9}$$

[B] माध्यिका, जब आँकड़ों की संख्या N सम हो :–

जब दिए गए आँकड़े सम संख्या में हों तो उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवथित करने पर मध्य में दो संख्याएँ होती हैं। ऐसी स्थिति में हम उन दोनों मध्य संख्याओं का माध्य ज्ञात कर माध्यिका निकालते हैं।

अर्थात्
$$M_d = \frac{\left[\left(\frac{N}{2}\right) \text{ वाँ पद का मान} + \left(\frac{N}{2}+1\right) \text{ वाँ पद का मान}\right]}{2}$$

उदाहरण 7. बंटन 5, 9, 4, 6, 12, 8 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर,

4, 5, 6, 8, 9, 12

यहाँ N = 6 (सम संख्या है)

$$\text{माध्यिका } M_d = \frac{\left[\frac{6}{2} \text{ वाँ पद का मान} + \left(\frac{6}{2}+1\right) \text{ वाँ पद का मान}\right]}{2}$$

$$M_d = \frac{\left[\frac{6}{2} \text{ वाँ पद का मान} + \left(\frac{6}{2}+1\right) \text{ वाँ पद का मान}\right]}{2}$$

$$= \frac{\text{तीसरे पद का मान + चौथे पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{6+8}{2} = 7$$

$$\therefore \quad \boxed{M_d = 7}$$

पश्नावली 6 1

प्र.1. समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

81, 74, 69, 73, 91, 55, 61

प्र.2. 50 से 70 तक की सम संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

प्र.3. माध्यिका ज्ञात कीजिए।

4, 5, 10, 6, 7, 14, 9, 15

प्र.4. एक कक्षा के 11 छात्रों का भार (किलोग्राम में) निम्न प्रकार हैं –

25, 27, 29, 32, 30, 28, 26, 31, 35, 41, 34

इनकी माध्यिका ज्ञात करो।

प्र.5. कक्षा आठवीं के छात्रों में विज्ञान प्रतियोगिता में निम्नानुसार अंक प्राप्त किये।

83, 61, 48, 73, 76, 52, 67, 61, 79

उपरोक्त आंकड़ों से माध्यिका की गणना कीजिए।

प्र.6. दिये गये आँकड़ों से बहुलक प्राप्त कीजिए :–

7, 5, 9, 9, 3, 1, 9, 7, 5, 3, 1, 1, 9, 7, 7, 5, 5, 5, 3, 1 ,5, 3, 5, 1, 5, 7, 7, 9, 9, 1

प्र.7. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

5, 3, 2, 2, 4, 5, 3, 3, 4, 3, 5, 3

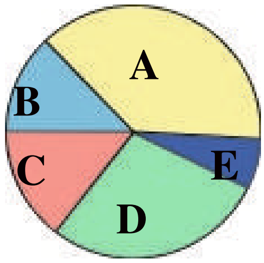
प्र.8. प्रथम पाँच विषम प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

प्र.9. संख्याएँ 8,5,x,6,10,5 का माध्य 7 हैं। x का मान ज्ञात कीजिए।

पाई चार्ट (वृत्त चित्र)

क्रियाकलाप 1.

किसी राज्य के A,B,C,D,E, 5 जिलों में वनों की मात्रा को वृत्ताकार रेखा चित्र द्वारा दर्शाया गया।



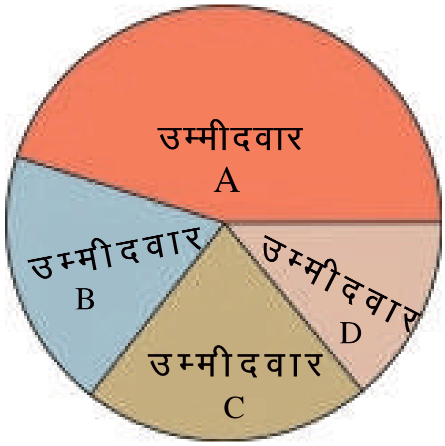
चित्र 6.2

यह मान लिया जाये कि जिस जिले में सर्वाधिक वन हैं, उस जिले में सर्वाधिक वर्षा होती है, तो क्या आप बता सकते हैं कि –

1. किस जिले में सर्वाधिक वर्षा होती है?
2. किस जिले में सबसे कम वर्षा होती है?

क्रियाकलाप 2.

किसी विधानसभा चुनाव में 4 उम्मीदवार ने चुनाव लड़ा। उनके प्राप्त मतों को वृत्ताकार रेखाचित्र में दर्शाया गया है। वृत्ताकार रेखा चित्र को देखकर निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



चित्र 6.3

1. किस उम्मीदवार को सर्वाधिक मत मिले?
2. किस उम्मीदवार को सबसे कम मत मिले?

इसका आंकलन आपने कैसे किया?

आप जानते हैं कि किसी वृत्त के केन्द्र पर बने कोणों का योग 360° होता है। उम्मीदवार A के प्राप्त मतों का क्षेत्र केन्द्र पर सबसे बड़ा कोण बनाता है। उसी प्रकार उम्मीदवार D के मतों द्वारा घेरा गया क्षेत्र केन्द्र पर सबसे छोटा कोण बनाता है।

उदाहरण 8. जशपुर के एक विद्यालय में कक्षा 6 से कक्षा 10 तक पढ़ने वाले विद्यार्थी की संख्या निम्नांकित है। इनको वृत्ताकार लेखाचित्र में दर्शाईये।

कक्षा	6	7	8	9	10
विद्यार्थी की संख्या	216	180	150	110	64

हलः वृत्ताकार रेखाचित्र बनाने के लिए हम सबसे पहले सभी कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या का योग करते हैं और प्रत्येक कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या के लिए वृत्त के केन्द्र पर बनने वाले कोण का मान ज्ञात करते है।

कुल विद्यार्थी $= 216 + 180 + 150 + 110 + 64 = 720$

सम्पूर्ण वृत्त 720 छात्रों का प्रतिनिधित्व करता है।

$\therefore$ 720 छात्रों के लिए इस वृत्त के केन्द्र पर कोण बनाया जाता है $= 360^o$

$\therefore$ एक छात्र के लिए केन्द्र पर बना कोण $= \frac{360^o}{720}$

$\therefore$ 216 छात्रों के लिए $= \frac{360^o}{720} \times 216$

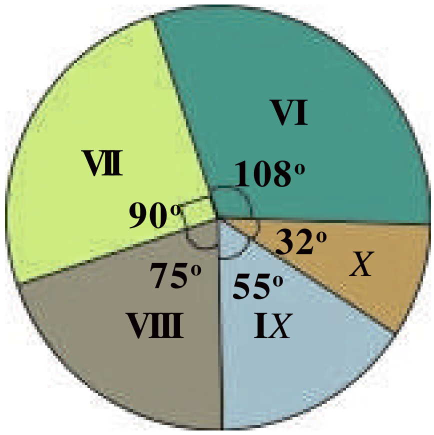
अतः कक्षा 6 के छात्रो के लिए बना कोण $= \frac{360^o}{720} \times 216 = 108^o$

कक्षा 7———,,——— $= \frac{360^o}{720} \times 180 = 90^o$

कक्षा 8———,,——— $= \frac{360^o}{720} \times 150 = 75^o$

कक्षा 9———,,——— $= \frac{360^o}{720} \times 110 = 55^o$

कक्षा 10———,,——— $= \frac{360^o}{720} \times 64 = 32^o$



चित्र 6.4

कोण ज्ञात करने के बाद किसी भी त्रिज्या का वृत्त बनाकर इसे एक–एक त्रिज्या खण्ड़ द्वारा चित्रानुसार (चित्र 6.4) निरूपित करेंगे।

उदाहरण 9. कक्षा आठवीं के 100 छात्रों की विभिन्न खेलों में रूचि(प्रतिशत में)निम्नानुसार है–

सारणी 6.2

खेल का नाम	खेलो में रूचि (%)	केन्द्रीय कोण
क्रिकेट	65	$\frac{65}{100} \times 360^o = 234^o$
फुटबॉल	15	$\frac{15}{100} \times 360^o = 54^o$
हॉकी	10	$\frac{10}{100} \times 360^o = 36^o$
हैंडबाल	3	$\frac{3}{100} \times 360^o = 11^o$
वालीबॉल	7	$\frac{7}{100} \times 360^o = 25^o$
कुल छात्रों की संख्या	100	कुल केन्द्रीय कोण 360^0

गणित

कक्षा 8

सत्र 2019–20

DIKSHA एप कैसे डाउनलोड करें?

विकल्प 1 : अपने मोबाइल ब्राउज़र पर diksha.gov.in/app टाइप करें।

विकल्प 2 : Google Play Store में DIKSHA NCTE ढूंढ़े एवं डाउनलोड बटन पर tap करें।

DIKSHA

मोबाइल पर QR कोड का उपयोग कर डिजिटल विषय वस्तु कैसे प्राप्त करें ?

DIKSHA App को लॉंच करे → App की समस्त अनुमति को स्वीकार करें → उपयोगकर्ता Profile का चयन करें।

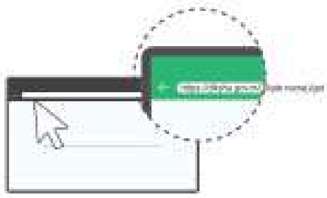
1 पाठ्यपुस्तक में QR Code को Scan करने के लिए मोबाइल में QR Code tap करें।

2 मोबाईल को QR Code पर केन्द्रित करें।

3 सफल Scan के पश्चात् QR Code से लिंक की गई सूची उपलब्ध होगी।

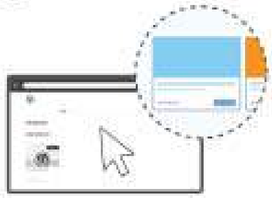
डेस्कटॉप पर QR Code का उपयोग कर डिजिटल विषय–वस्तु तक कैसे पहुँचे ?

1 QR Code के नीचे 6 अंक का Al-pha Numeric Code दिया गया है।



2 ब्राउज़र में diksha. gov.in/cg टाईप करें।

3 सर्च बार पर 6 डिजिट का QR CODE टाईप करें।



4 प्राप्त विषय–वस्तु की सूची से चाही गई विषय–वस्तु पर क्लिक करें।

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् छत्तीसगढ़, रायपुर

निःशुल्क वितरण हेतु

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

प्रकाशन वर्ष – 2019

सहयोग

हृदय कांत दीवान (विद्या भवन, उदयपुर)

4SQHHD

संयोजक

डॉ. विद्यावती चन्द्राकर

समन्वयक

यू.के चक्रवर्ती

लेखक दल

यू.के. चक्रवर्ती, सी.पी.सिंह, जी.पी.पांडेय, नागेन्द्र भारती गोस्वामी, आर. के. चारी, आर. के देवांगन, बी.एल. गुप्ता, हुलेश पटेल, अनिल गभेल, मीना श्रीमाली, संजय बोल्या, दीपक मंत्री, रंजना शर्मा

आवरण पृष्ठ

रेखराज चौरागड़े

प्रकाशक

छत्तीसगढ़ पाठ्यपुस्तक निगम, रायपुर

मुद्रक

मुद्रित पुस्तकों की संख्या – ....

प्राक्कथन

गणित शिक्षा का उद्देश्य बच्चों को केवल गणित का ज्ञान देना ही नहीं है बल्कि उनमें ऐसी समझ का विकास करना है जिससे वे गणित से भयभीत होने के बजाय उसका आनंद उठा सकें, गणित से संबंधित सार्थक प्रश्न बना सकें, उन्हें हल कर सकें। साथ ही अपने दैनिक जीवन के अनुभवों से निर्मित गणितीय ज्ञान का रूपान्तर अपनी सुविधानुसार कर सकें।

कक्षा आठवीं तक आते आते बच्चे गणित में निहित शक्ति का अनुभव करना प्रारंभ कर देते हैं। यहां वे बड़ी से बड़ी संख्या को अलग–अलग रूप में लिखना, घात की सहायता से चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करना तो सीखते ही हैं साथ ही साथ वे ज्यामितीय आकृतियों के विशिष्ट गुणों को भी पहचानने लगते हैं। वे बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करने के साथ–साथ किसी वस्तु द्वारा स्थान घेरने से संबंधित अवधारणाओं को भी समझने लगते हैं। गणित का सबसे महत्वपूर्ण काम सोच व तर्कशक्ति में सक्षमता हासिल करना और उन्हें वृहद बनाना है।

यह पुस्तक गणित शिक्षा के उद्देश्यों एवं बच्चों के उपलब्धि स्तर को ध्यान में रखकर बनाई गई है। परन्तु, कोई भी पुस्तक अपने आप में पूर्ण नहीं होती अतः इसे और अधिक बोधगम्य एवं रूचिकर बनाने के लिए आपके सुझाव सदैव आंमत्रित हैं। आपके द्वारा दिये गए सुझाव प्रदेश के समस्त छात्रों के हित में होंगे।

इस पुस्तक के लेखन में हमें विभिन्न शासकीय और अशासकीय संस्थाओं तथा प्रबुद्ध नागरिकों का मार्गदर्शन और सहयोग मिला है, हम उनके प्रति आभारी हैं। विशेष कर हम आभारी है विद्याभवन सोसाइटी, उदयपुर के जिनका इस पुस्तक के निर्माण में महत्वपूर्ण योगदान रहा है।

राष्ट्र शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (NCERT) ने कक्षा 1 से 8 तक सभी विषयों के लिए ऐसे लक्ष्य निर्धारित किए हैं जो स्पष्ट और मापने योग्य हैं। इन्हें ''अधिगम प्रतिफल'' (Learning outcomes) कहा गया है।

स्कूल शिक्षा विभाग एवं राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, छ.ग. द्वारा शिक्षकों एवं विद्यार्थियों में दक्षता संवर्धन हेतु अतिरिक्त पाठ्य संसाधन उपलब्ध कराने की दृष्टि से Energized Text Books एक अभिनव प्रयास है, जिसे ऑन लाईन एवं ऑफ लाईन (डाउनलोड करने के उपरांत) उपयोग किया जा सकता है। ETBs का प्रमुख उद्देश्य पाठ्यवस्तु के अतिरिक्त ऑडियो–वीडियो, एनीमेशन फॉरमेट में अधिगम सामग्री, संबंधित अभ्यास, प्रश्न एवं शिक्षकों के लिए संदर्भ सामग्री प्रदान करना है।

हमने इस वर्ष अपनी पाठ्यपुस्तकों में इन अधिगम प्रतिफलों के सन्दर्भ में कुछ आवश्यक बदलाव किए हैं। कुछ नई पाठ्यसामग्रियाँ जोड़ी गई हैं, कुछ पाठ एक कक्षा से अन्य कक्षाओं में स्थानांतरित किए गए हैं। इससे शिक्षक और विद्यार्थी भ्रमित न हो।

संचालक
राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
छत्तीसगढ़, रायपुर

विषय–सूची

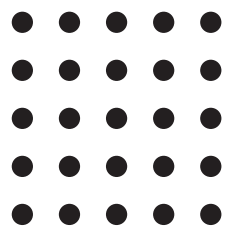
8HU4U4

अध्याय–1
वर्ग एवं घन
SQUARE & CUBE

8N3ZVR

वर्ग संख्याएँ (Square Numbers)

नीचे दिए गए चित्र के प्रत्येक पंक्ति (आड़ी) एवं स्तम्भ (खड़ी) में बिन्दुओं की संख्या समान हैं। इनमें से प्रत्येक में 5–5 बिन्दु हैं, इन बिन्दुओं की कुल संख्या कितनी होगी?



चित्र 1

इसी प्रकार प्रत्येक पंक्ति तथा स्तम्भ में समान संख्या में दो–दो, तीन–तीन, चार–चार, आठ–आठ इत्यादि बिन्दु लेकर कुछ वर्गाकार पैटर्न (प्रतिरूप) बनाइए तथा तालिका की पूर्ति कीजिए–

सारणी 1.1

क्रमांक	प्रत्येक पंक्ति या स्तम्भ में बिन्दुओं की संख्या	बनाए गए पैटर्न में बिन्दुओं की कुल संख्या
1.	5	25
2.	2	-------
3.	-------	9
4.	4	-------
5.	-------	-------
6.	-------	-------

अंतिम स्तम्भ की सभी संख्याएँ ऐसी हैं जो एक संख्या को उसी से गुणा करके प्राप्त की गई हैं। $25 = 5 \times 5$, $4 = 2 \times 2$, ये सभी संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25,... इत्यादि पूर्ण वर्ग संख्याएँ (Perfect Square Number) कहलाती हैं। आप भी 5 और पूर्ण वर्ग संख्याएँ लिखें।

इन संख्याओं को हमने स्वयं पूर्ण वर्ग संख्या बनाया है। अब यदि आपको कोई संख्या दी जाए तो कैसे पता करेंगे कि वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है अथवा नहीं?

पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

आप पायेंगे कि 9 बिन्दुओं को तीन–तीन बिन्दुओं की तीन पँक्तियों में जमा सकते हैं,16 बिन्दुओं को चार–चार की चार पँक्तियों में जमा सकते हैं, किन्तु 10, 11, 12 बिन्दु होने पर उन्हें इस तरह नहीं जमाया जा सकता कि पँक्तियों की संख्या और प्रत्येक पँक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर हो। चाहें तो कोशिश करके देख लें। 10, 11, 12 बिन्दु होने पर तो हम इस प्रकार जमा कर देखने का प्रयास कर सकते हैं किन्तु यदि बिन्दुओं की संख्या 109 हो, 784 हो या और भी बड़ी हो तो इस तरह बिन्दुओं को जमा कर जाँचना कठिन हो जायेगा। पूर्ण वर्ग संख्या पहचानने के लिए एक अच्छा तरीका है अभाज्य गुणनखण्ड की विधि।

अभाज्य गुणनखण्ड व पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

पूर्ण वर्ग संख्या में पंक्तियों की संख्या और प्रत्येक पंक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर है। जैसे पूर्ण वर्ग संख्या $6 \times 6, 5 \times 5, 3 \times 3, 7 \times 7$ इत्यादि।

जिस संख्या में भी इस तरह गुणनखण्डों के जोड़े पूरे–पूरे बन जाए वही पूर्ण वर्ग संख्या होगी। इसके लिए हम दी गई संख्या के गुणनखण्ड कर लेंगे और फिर जोड़े बनाएँगे।

अभाज्य गुणनखण्ड की विधि

इस विधि में दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड करके जोड़े बनाते हैं। जिन संख्याओं में सभी समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन जाते हैं, वे पूर्ण वर्ग संख्या होंगी।

जैसे – (1) **144** को लें

144 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं – $\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

यहाँ 144 में सभी अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन रहे हैं।

अतः 144 पूर्ण वर्ग संख्या हैं।

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

(2) **252** को देखें

252 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं – $\underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 7$

इसमें 7 का कोई जोड़ा नहीं है

अर्थात् 252 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

2	252
2	126
3	63
3	21
7	7
	1

क्रियाकलाप 1.

नीचे दी गई सारणी में संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

सारणी 1.2

क्र.सं.	संख्या	अभाज्य गुणनखण्ड	क्या सभी समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन रहे हैं?	पूर्ण वर्ग है या नहीं
1.	16	$\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$	हाँ	पूर्ण वर्ग हैं
2.	32	$\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 2$	नहीं	नहीं
3.	36			
4.	48			
5.	40			
6.	49			
7.	56			
8.	64			

अब इन्हें भी जाँचिए कि नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या हैं या नहीं –

(i) 164 (ii) 256 (iii) 81 (iv) 120 (v) 576
(vi) 205 (vii) 625 (viii) 324 (ix) 216 (x) 196

पूर्ण वर्ग संख्याओं के कुछ गुण

इकाई का अंक देख पूर्ण वर्ग की पहचान–

नीचे सारणी में दी गई पूर्ण वर्ग संख्याओं जैसे 4, 9, 16, 25, 81, 100, 169, 324, 256, 625 आदि को ध्यान से देखिए। क्या कोई ऐसी पूर्ण वर्ग संख्या है, जिसमें इकाई के स्थान पर 2, 3, 7 अथवा 8 है? कुछ और संख्याए लेकर देखें क्या आप इनसे कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? आइए, इस सारणी को देखें –

सारणी 1·3

संख्या	पूर्ण वर्ग संख्या	संख्या	पूर्ण वर्ग संख्या
1	1	2	4
3	9	4	16
5	25	6	36
7	49	8	64
9	81	10	100
11	121	12	144
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

आप इस तालिका को और आगे बढ़ा सकते हैं।

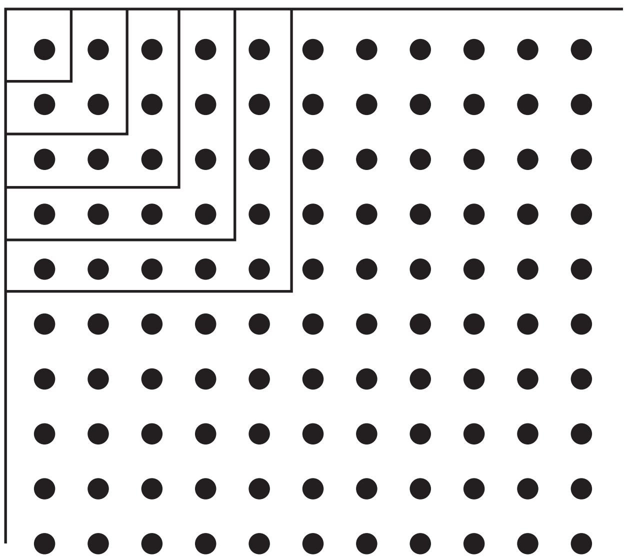
तालिका में दी गई विषम एवं सम संख्याओं के पूर्ण वर्ग किस प्रकार के हैं? नीचे ✓ का चिह्न लगाएँ।

विषम संख्याओं का पूर्ण वर्ग – विषम/सम

सम संख्याओं का पूर्ण वर्ग – विषम/सम

एक और मज़ेदार बात –

नीचे दिए गए चित्र का अवलोकन करें –



चित्र 2

चित्र में एक किनारे से आरम्भ करके विभिन्न वर्गों की रचना की गई है। इन वर्गों के हिस्से अपने आप नये वर्गों में शामिल होते गए हैं। यदि हम सब हिस्सों में शामिल बिन्दुओं को अलग–अलग जोड़ें तो हम देखते हैं कि वर्गों में बिन्दुओं की संख्या इस प्रकार से है–

पहला वर्ग	1	=	1	=	1^2
दूसरा वर्ग	1 + 3	=	4	=	2^2
तीसरा वर्ग	1 + 3 + 5	=	9	=	3^2
चौथा वर्ग	1 + 3 + 5 + 7	=	16	=	4^2
पांचवा वर्ग	1 + 3 + 5 + 7+9	=	25	=	5^2
छठा वर्ग	1 + 3 + ...	=	36	=	6^2
सातवा वर्ग	....	=	.....	=	....
आठवा वर्ग	....	=	....	=	....

इसको आगे बढ़ाने पर हम देख सकते हैं कि जो भी वर्ग लें उसमें बिन्दुओं की कुल संख्या भी

पूर्ण वर्ग है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसे आठवे वर्ग में और दसवे वर्ग में कुल कितने बिन्दु होंगे?

हमने देखा कि पहले, दूसरे ...... आदि वर्गों में शामिल कुल बिन्दु इस प्रकार हैं।

पहला वर्ग = पहली विषम संख्या = 1^2

दूसरा वर्ग = पहली दो विषम संख्याओं का योग = 2^2

तीसरा वर्ग = पहली तीन विषम संख्याओं का योग = 3^2

और इसी तरह से आगे भी जैसे, पहली 8 विषम संख्याओं का योग 8^2 के बराबर होता है।

हम कितना भी आगे जाए यह बात सही निकलती है।

इस प्रकार हम यह देख सकते हैं कि किसी भी प्राकृत संख्या n का वर्ग प्रारंभिक n विषम संख्याओं के योगफल के बराबर होता है।

कुछ और मनोरंजक पैटर्न –

1, 11, 111.... की वर्ग संख्याओं को देखें –

1^2 = 1

11^2 = 1 2 1

111^2 = 1 2 3 2 1

1111^2 = 1 2 3 4 3 2 1

11111^2 = - - - - - - - - - - -

111111^2 = - - - - - - - - - - - -

क्रियाकलाप 2.

अपने मित्र से दो क्रमागत संख्या बोलने को कहें। उन संख्याओं को मौखिक रूप से जोड़कर अपने कॉपी में लिख लें। मित्र को उन दो क्रमागत संख्याओं की वर्ग संख्याएँ पता करने को कहें और बड़ी वर्ग संख्या में से छोटी वर्ग संख्या घटाने को कहें। बाद में अपनी कॉपी में लिखी संख्या को दिखा दें। दोनों संख्याएँ बराबर हैं न?

यह कैसे हुआ?

क्या आप सोच सकते हैं कि ऐसा कैसे होगा? निम्न प्रतिरूपों का अवलोकन करें।

$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = 4 + 3,$

$9^2 - 8^2 = 81 - 64 = 17 = 9 + 8,$

$13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 13 + 12$

इन उदाहरणों को देखिए

$3^2 + 4^2 = 9+16= 25 = 5^2,$ $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

$5^2 +12^2= 25+144 =169=13^2$ अर्थात् $5^2 + 12^2 = 13^2$

आप भी कुछ और ऐसे उदाहरण खोजें। आप देखेंगे कि हर उदाहरण में संख्याओं की एक तिगड़ी है। इस प्रत्येक तिगड़ी में विशेष प्रकार की संख्याएँ हैं। बड़ी संख्या का वर्ग, शेष दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर है। इस प्रकार की संख्याएँ पाइथोगोरीय त्रिक कहलाती हैं। त्रिक याने तीन संख्याओं की तिगड़ी।

जैसे – (3, 4, 5), (6, 8, 10) एवं (5, 12, 13) पाइथोगोरीय त्रिक हैं।

उदाहरण 1. जाँच कीजिए कि (9, 40, 41) पाइथोगोरीय त्रिक है या नहीं?

हलः यहाँ $9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681$

तथा $41^2 = 1681$

अतः $9^2 + 40^2 = 41^2$, अतः (9, 40, 41) पाइथागोरीय त्रिक है।

अभ्यास 1

जाँच कीजिए कि नीचे दिए गए त्रिक पाइथागोरीय त्रिक हैं अथवा नहीं ?

(i) (5, 12, 13) (ii) (8, 15, 17)

(iii) (10, 15, 25) (iv) (4, 7, 11)

टिप्पणी : हमारे देश में संख्याओं का यह सम्बन्ध बहुत पहले से ज्ञात था। ऐसा माना जाता है कि 600 ईसा पूर्व एक भारतीय गणितज्ञ बोधायन ने इसे सर्वाधिक व्यापक रूप में व्यक्त किया और अनेक संख्यात्मक उदाहरणों के द्वारा स्पष्ट किया।

संख्याओं से पूर्ण वर्ग संख्याएँ बनाना

जैसा कि पृष्ठ क्र. 2 में आपने देखा कि 252 के गुणनखण्डों में अभाज्य गुणनखंड 2 और 3 के जोड़े बन गए किन्तु अभाज्य गुणनखंड 7 का जोडा नहीं बना।

यदि इसमें 7 का गुणा या भाग कर दिया जाता तो सभी गुणनखण्डों के जोड़े बन जाएगे , अर्थात 7 वह न्यूनतम सख्या है जिसका 252 से गुणा या भाग करने पर गुणनफल या भागफल पूर्ण वर्ग हो जायेगा। आइये, इसे कुंछ उदाहरणो से समझे –

उदाहरण 2. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 720 को गुणा करने पर प्राप्त संख्या पूर्ण वर्ग हो।

हलः $720 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 5$

720 के अभाज्य गुणनखण्डों में केवल 5 का जोड़ा नहीं बना। अतः पूर्ण वर्ग संख्या वह होगी जिसमें 5 का भी जोड़ा बन जाए इसके लिए हमें 720 को 5 से गुणा करना होगा।

अतः 5 वह छोटी से छोटी संख्या है, जिसका 720 से गुणा करने पर प्राप्त संख्या पूर्ण वर्ग होगी।

उदाहरण 3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 140 को भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग संख्या हो।

हलः $140 = \underline{2 \times 2} \times 5 \times 7$

140 के अभाज्य गुणनखण्डों में अभाज्य गुणनखंड 5 एवं 7 के जोड़े नहीं है। यदि हम 140 को $5 \times 7 = 35$ से भाग दें तब भागफल पूर्ण वर्ग बन जाएगी।

उदाहरण 4. वह न्यूनतम पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 6 एवं 8 से पूर्णतः विभाजित हो।

हलः 6 एवं 8 का ल.स. = 24

24 के अभाज्य गुणनखण्ड $= \underline{2 \times 2} \times 2 \times 3$

अब हम देखते हैं कि 24 के गुणनखण्डों में 2 एवं 3 के जोड़े नहीं हैं। अतः यदि 24 को $(2 \times 3) = 6$ से गुणा कर दें तब वह ऐसी पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी जो 6 एवं 8 दोनों से विभाजित होगी। अतः वांछित संख्या $24 \times 6 = 144$ होगी।

इन्हें भी कीजिए –

$(10)^2 = 100$ होता है, $(300)^2 = 90000$, $(5000)^2 = 25000000$

10 के वर्ग में 2 शून्य हैं, 300 के वर्ग में 4 शून्य तथा 5000 के वर्ग में 6 शून्य हैं, तो क्या कोई ऐसी संख्या सोच सकते हैं जिसका वर्ग करने पर मात्र इकाई के स्थान पर शून्य हों या इकाई, दहाई एवं सैकड़ा तीनों के स्थान पर शून्य हों।

अभ्यास 2

(i) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 200 से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

(ii) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 180 से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

(iii) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 2352 में भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

प्रश्नावली 1.1

प्र.1. निम्न संख्याओं के गुणनखण्डों के जोड़े बनाकर बताइये कि ये संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं अथवा नहीं?

(i) 164 (ii) 121 (iii) 289

(iv) 729 (v) 1100

प्र.2. निम्न संख्याओं के पूर्ण वर्ग न होने का कारण बताइये।

(i) 12000 (ii) 1227 (iii) 790

(iv) 1482 (v) 165000 (vi) 15050 (vii) 1078 (viii) 8123

प्र.3. निम्न संख्याओं में से किन संख्याओं का वर्ग सम संख्या एवं किन संख्याओं का वर्ग विषम संख्या है ?

(i) 14 (ii) 277 (iii) 179

(iv) 205 (v) 608 (vi) 11288

(vii) 1079 (viii) 4010 (ix) 1225

प्र.4. निम्न प्रतिरूप का अवलोकन करें एवं रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

11^2 = 121

101^2 = 10201

1001^2 = 1002001

10001^2 = -----------

100001^2 = ------------

----------- = 1000002000001

घन संख्याएँ (Cube Numbers)

अब तक हमने वर्ग संख्याओं पर विचार किया। किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को उस संख्या की वर्ग संख्या कहते है। यदि अब गुणनफल को पुनः उसी संख्या से गुणा कर दिया जाए तब प्राप्त संख्या उस संख्या की घन संख्या बन जाएगी।

जैसे $2 \times 2 \times 2 = 8$ या $2^3 = 8$

$7 \times 7 \times 7 = 343$ या $7^3 = 343$

यहाँ 8 एवं 343 क्रमशः 2 एवं 7 की घन संख्याएँ हैं।

निम्न सारणी का अवलोकन कर रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

सारणी 1.4

संख्या	तीनबार गुणा	घातीय रूप	घन संख्या
1	$1 \times 1 \times 1$	1^3	1
2	$2 \times 2 \times 2$	2^3	8
3	$3 \times 3 \times 3$	------	------
4	---------	------	------
5	---------	------	------
6	---------	------	------
7	---------	------	------
8	---------	------	------
9	---------	------	------
10	---------	------	------

उपरोक्त तालिका के अन्तिम स्तम्भ से प्राप्त संख्याएँ 1, 8, 27 .... इत्यादि क्रमशः 1,2,3,. ... इत्यादि पूर्णांकों की घन संख्याएँ हैं।

इस प्रकार की संख्याएँ पूर्ण घन संख्याएँ कहलाती हैं।

सारणी में दी गईं सम संख्याओं एवं उनके घनों पर विचार करें, आप किस निष्कर्ष पर पहुँचे? क्या सम संख्याओं के घन भी सम हैं? क्या विषम संख्याओं के घन भी विषम हैं?

घन संख्याओं की पहचान

कोई संख्या घन संख्या है या नहीं इसकी पहचान कैसे होगी ? वर्ग संख्याएँ पहचानने के लिए हमने अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बनाए थे। जिनके पूरे जोड़े बन गए थे, वे वर्ग संख्याएँ हैं।

घन संख्याओं के लिए इसी को आगे बढ़ाते हैं। 8 को हम $2 \times 2 \times 2$ के रूप में लिख सकते हैं अर्थात् इसके अभाज्य गुणनखण्ड करने पर हमें पता चलता है कि इसमें 2 को 2 के साथ तीन बार गुणा हुआ है और वह इनसे एक त्रिक (तिगड़ी) बनाने पर और कोई अभाज्य गुणनखण्ड नहीं बचता। इसी तरह 27 को देखें। इसमें तीन का तीन बार गुणा होता है। इसमें भी त्रिक बन जाएगा। यदि 24 को लें तो $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ अर्थात् 2 तीन बार है और उससे तिगड़ी (त्रिक) बन गया किन्तु 3 बच गया, इसका मतलब हुआ कि 24 घन संख्या नहीं है।

इस प्रकार, पूर्ण घन संख्याओं की पहचान के लिए हम देखते हैं कि संख्या के अभाज्य

गुणनखण्डों में समान अभाज्य गुणनखण्डों के यदि सभी गुणनखण्ड त्रिकों में व्यवस्थित हो जाए तो वह संख्या पूर्ण घन संख्या होगी, अन्यथा नहीं।

आइए, कुछ उदाहरणों के द्वारा इसे समझें –

उदाहरण 5. 216 पूर्ण घन संख्या है अथवा नहीं?

हल : $216 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$ (अभाज्य गुणनखण्ड बनाने पर)

$= 2^3 \times 3^3$ (सभी गुणनखण्डों के त्रिक बन गए)

$= (2 \times 3)^3 \quad = 6^3$

यहाँ 216 को 6 के घन के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

अतः 216 एक पूर्ण घन संख्या हैं।

उदाहरण 6. बताइये कि संख्या 23625 पूर्ण घन है अथवा नहीं?

हल : $23625 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} \times 7$ (अभाज्य गुणनखण्ड करने पर)

यहाँ 23625 के गुणनखण्डों में 3 एवं 5 के त्रिक तो बन गए किन्तु 7 का नहीं।

अतः 23625 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

उदाहरण 7. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 68600 में गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण घन संख्या हो?

हलः $68600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5 \times \underline{7 \times 7 \times 7}$

यहाँ 68600 के गुणनखण्डों में 2 एवं 7 के लिए तो त्रिक बन गए किन्तु 5 के त्रिक बनाने के लिए एक बार और 5 का गुणा करना होगा। अतः 68600 में यदि 5 का गुणा कर दें तब वह पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

उदाहरण 8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 408375 में भाग करने पर भागफल पूर्ण घन हो जाए?

हलः $408375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} \times 11 \times 11$

यहाँ 408375 के गुणनखण्डों में 3 एवं 5 के लिए तो त्रिक बन गए किन्तु 11 का त्रिक नहीं बन सका। अतः 408375 में $11 \times 11 = 121$ का भाग दें तब भागफल एक पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

प्रश्नावली 1.2

प्र.1. निम्न संख्याओं में से कौनसी संख्या पूर्ण घन है और कौन सी नहीं?

(i) 125 (ii) 800 (iii) 729 (iv) 2744

(v) 22000 (vi) 832

प्र.2. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 256 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 1352 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.4. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 8019 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.5. प्रश्न 1 में जो संख्याएँ घन संख्याएँ नहीं है उन्हें किस छोटी से छोटी संख्या से गुणा करें कि गुणनफल घन संख्या बन जाए

वर्गमूल [Square Root]

अध्याय के शुरूआत में हमने पूर्ण वर्ग संख्या के बारे में अध्ययन किया। आइए, उसे एक क्रियाकलाप द्वारा पुनः दोहराते है :–

क्रियाकलाप 3.

सारणी 5

क्र.सं.	संख्या	अभाज्य गुणनखण्ड	किस संख्या का वर्ग है
1.	16	$\underline{2\times 2}\times\underline{2\times 2}$	$2\times 2=4$
2.	25	$\underline{5\times 5}$	5
3.	36		
4.	49		
5.	64		
6.	100		
7.	144		
8.	196		

उपरोक्त क्रियाकलाप में आपने देखा कि 4 का वर्ग 16 है, 5 का वर्ग 25, 8 का वर्ग 64 है।

इसे इस तरह भी हम कहते हैं कि 64 का वर्गमूल 8 है, 25 का वर्गमूल 5 है।

इसे ऐसे लिखते है :–

16 का वर्गमूल $=\sqrt{16}=4$, 25 का वर्गमूल$=\sqrt{25}$ (वर्गमूल को चिह्न "$\sqrt{\ }$" से दर्शाते हैं।)

आपने देखा है कि किसी प्राकृत संख्या n का वर्ग, प्रारंभिक n विषम संख्याओं के योगफल बराबर होता है। (चित्र : 2)

जैसे : $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

जिस प्रकार पाँच प्रारंभिक विषम संख्याओं को जोड़ कर 5 का वर्ग (25) प्राप्त किया है, क्या उसी प्रकार 25 में से विषम संख्याओं को घटाकर 25 का वर्गमूल प्राप्त कर सकते हैं?

आइए देखें–

$25 - 1 = 24$, $24 - 3 = 21$, $21 - 5 = 16$

$16 - 7 = 9$, $9 - 9 = 0$,

यहाँ 25 में उत्तरोत्तर से प्रारंभिक पाँच विषम संख्याओं को घटाने पर शेषफल शून्य (0) प्राप्त हुआ है। इसका अर्थ हुआ कि 25 का वर्गमूल 5 है, अर्थात् $\sqrt{25}$

आप भी कुछ पूर्ण वर्ग संख्याओं के लिए इस प्रक्रिया को जाँचे।

आप पायेंगे कि **किसी पूर्ण वर्ग संख्या में से जितनी प्रारंभिक विषम संख्याओं को घटाने पर शून्य प्राप्त होता है, वही उस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल होता है।**

क्या इस प्रक्रिया द्वारा पूर्ण वर्ग संख्या की जाँच की जा सकती है?
आप पायेंगे कि शेषफल शून्य नहीं होने की दशा में दी गई संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होती।

अभ्यास 3

निम्नांकित के वर्गमूल मौखिक बताइए :–

(i) 25 (ii) 49 (iii) 64 (iv) 81 (v) 121 (vi) 144

कुछ संख्याओं के वर्गमूल हम मौखिक निकाल सकते हैं किन्तु सभी संख्याओं के वर्गमूल हम मौखिक ज्ञात नहीं कर सकते हैं। आइए, हम वर्गमूल निकालने की विधि पर चर्चा करें।

(1) अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल :

इस विधि के द्वारा वर्गमूल ज्ञात करने हेतु सर्वप्रथम दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कर लेते हैं। इसके पश्चात् समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बनाते हैं तथा प्रत्येक जोड़े से एक संख्या लेकर उनका गुणा कर लेते हैं।

8NCVXE

उदाहरण 9. 441 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

3	441
3	147
7	49
7	7
	1

हल : $441 = \underline{3\times3}\ \ \underline{7\times7}$

अतः $\sqrt{441} = \sqrt{\underline{3\times3}\times\underline{7\times7}}$

$= 3\times7$ (प्रत्येक जोड़े में से एक–एक संख्या लेने पर)

$= 21$

उदाहरण 10. 1296 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $1296 = \underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}$

अतः $\sqrt{1296} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}}$

$= 2\times2\times3\times3$

$= 36$

अभ्यास 4

निम्नांकित के अभाज्य गुणनखण्ड करके वर्गमूल ज्ञात कीजिए

(i) 289 (ii) 625 (iii) 900 (iv) 361 (v) 1764

उदाहरण 11. यदि एक वर्गाकार चित्र का क्षेत्रफल 2025 वर्ग सेमी हो तब चित्र की एक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 = 2025$ वर्ग सेमी

अतः चित्र की एक भुजा की लम्बाई $= \sqrt{2025}$

$= \sqrt{\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}\times\underline{5\times5}}$

$= 3\times3\times5$

$= 45$ सेमी.

3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

उदाहरण 12. एक व्यक्ति अपने बाग में 11025 आम के पौधे इस प्रकार लगाता है कि हर पंक्ति में उतने ही पौधे हैं जितनी पंक्तियाँ हैं तो बाग में कितनी पंक्तियाँ हैं?

हल: माना बाग में पंक्तियों की संख्या x हैं

चूंकि पौधों की कुल संख्या $= x \times x = x^2$

$x^2 = 11025$ या $x = \sqrt{11025}$

$= \sqrt{3\times3\times5\times5\times7\times7}$

$= 3\times5\times7 = 105$

3	11025
3	3675
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

अतः बाग में पंक्तियों की संख्या $= 105$

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा ज्ञात करिए
   (i) 361 (ii) 400 (iii) 784
   (iv) 1024 (v) 2304 (vi) 7056
2. एक बालकों की टोली ने 256 आम खरीदे और आपस में बाँट लिए यदि प्रत्येक को उतने ही आम मिले जितनी टोली में बालक थे तब बालकों की संख्या बताइये।

भागविधि से वर्गमूल ज्ञात करना

अभी तक हमने पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल निकालना सीखा है।

गणित में ऐसी भी मजेदार विधि है जिससे हम पूर्ण वर्ग संख्याओं के अलावा उन संख्याओं के वर्गमूल भी मालूम कर सकते हैं जो पूर्णवर्ग नहीं हैं। इसे वर्गमूल ज्ञात करने की 'भाग विधि' के नाम से जाना जाता है। इसे समझने के लिए हम कुछ उदाहरणों पर काम करेंगे।

आप जानते हैं कि एक अंक और दो अंक वाली पूर्णवर्ग संख्याओं के वर्गमूल के रूप में हमें एक अंक वाली संख्याएँ ही मिलती है। आप इन्हें पहाड़े का उपयोग कर आसानी से जान सकते हैं।

जैसे– $1\times1 = 1$, इसलिए 1 का वर्गमूल 1 है।

$3\times3 = 9$, इसलिए 9 का वर्गमूल 3 है।

$9\times9 = 81$, इसलिए 81 का वर्गमूल 9 है।

81 के बाद की पूर्ण वर्ग संख्या 100 है जो तीन अंक वाली संख्या है। इसका वर्गमूल 10 है, जो दो अंक वाली संख्या है। (क्या किसी संख्या और उसके वर्गमूल में निहित अंकों की संख्या में कोई पैटर्न दिखाई पड़ता है?) तीन अंकों वाली किसी बड़ी संख्या का वर्गमूल कैसे निकालेंगे? आइए इसे एक उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण 13. 625 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल :–

पद 1 :– संख्या 625 की इकाई की ओर से आरंभ करते हुए संख्याओं के जोड़े बनाइए। जोड़े बनाने के लिए संख्याओं के ऊपर एक छोटी सी आड़ी रेखा खींच सकते हैं। यहाँ केवल एक जोड़ा बनेगा 25, 6 अकेला रहेगा।

$$\overline{6}\,\overline{25}$$

पद 2 :– 625 को भाग चिह्न के भीतर रखिए। अब ऐसा बड़ा से बड़ा भाजक ढूँढ़िए जिसका वर्ग 6 से बड़ा न हो। यहाँ वह 2 होगा।

$$\begin{array}{r|l} & \text{भागफल} \\ \hline \text{भाजक} & \overline{6}\;\overline{25}\ \text{भाज्य} \end{array}$$

(2 × 2 = 4, 3 × 3 = 9, 9 > 6)

पद 3 :– भाजक और भागफल में 2 रखते हुए उनके गुणनफल 4 को 6 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 2 मिलेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\;\overline{25} \\ & -4 \\ \hline & \;2 \end{array}$$

पद 4 :– भाजक में उतनी ही संख्या जोड़िए। 4 मिलेगा। उसे नीचे लिखिए। पद–3 में जो शेष 2 बचा था, उसके आगे पूरी एक जोड़ी संख्या 25 उतारकर रखिए। यह नया भाज्य 225 बनेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\;\overline{25} \\ +2 & -4 \\ \hline 4 & \;2\;25 \end{array}$$

पद 5 :– अब हमें भाजक में 4 के आगे और भागफल में 2 के आगे एक ऐसी संख्या रखनी है जिससे उस संख्या और नए भाजक का गुणनफल 225 से अधिक न हो। यदि हम भागफल में 3 रखें तो भाजक में 4 के आगे भी 3 रखेंगे, जिससे नया भाजक 43 होगा।

43 × 3 = 129, 129 < 225

क्रमशः भागफल में 4 और 5 रखकर भी देखें।

44 × 4 = 176 < 225

45 × 5 = 225 = 225

स्पष्ट है कि भागफल में 5 लेना उपयुक्त होगा। इस गुणनफल 225 को नए भाज्य 225 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 0 बचेगा। कुल भागफल 25 ही 625 का वर्गमूल होगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2\;\;5 \\ \hline 2 & \overline{6}\;\overline{25} \\ +2 & -4 \\ \hline 45 & 225 \\ & 225 \\ \hline & \;\;0 \end{array}$$

अर्थात् $\sqrt{625}$ = 25.

उदाहरण 14. 9409 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :–

पद 1 :– हमें 4 अंकों की संख्या दी गई है। इकाई के स्थान की ओर से शुरू करते हुए 2–2 अंकों की जोड़ियाँ बनाइए। दो जोड़ियाँ बनेंगी– $\overline{94}\,\overline{09}$

$\sqrt{\overline{94}\,\overline{09}}$

इन्हें भाग चिह्न के भीतर रखिए।

पद 2 :– दूसरी जोड़ी 94 को भाज्य मानते हुए सबसे बड़ा ऐसा भाजक चुनिए जिसका वर्ग 94 से अधिक न हो। स्पष्ट है वह भाजक 9 होगा। अब भाजक एवं भागफल में 9 रखते हुए इनका गुणनफल 81, 94 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 13 मिलेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 9 & \overline{94}\ \overline{09} \\ & -81 \\ \hline & 13 \end{array}$$

पद 3 :– भाजक 9 में उतना ही जोड़िए। योगफल नीचे लिखिए। शेषफल 13 के आगे एक जोड़ी संख्या 09 उतारिए। नया भाज्य 1309 हो जाएगा। पहले उदाहरण की तरह देखिए, भाजक 18 के सामने क्या रखें कि इस संख्या और नए भाजक का गुणनफल 1309 के बराबर या उसके निकटतम और उससे छोटा हो। यहाँ हम अनुमान लगाते हैं। यहाँ भाजक तीन अंकों वाली संख्या होगी, भाज्य चार अंकों की संख्या है। दोनों से यदि इकाई का अंक छोड़ दें तो भाजक 18 और भाज्य 130 बचता है। अब यह आसानी से देखा जा सकता है कि 18*X* 7=126 मिलता है जो 130 से छोटा है। अतः भाजक और भाज्य में 7 रख कर देखा जा सकता है।

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 9 & \overline{94}\ \overline{09} \\ +9 & -81 \\ \hline 18 & 13\ 09 \end{array}$$

187 $\times$ 7 = 1309

इस गुणनफल को भागफल 1309 के नीचे रखकर घटाइए। शेष शून्य मिलेगा। कुल भागफल 97 ही संख्या 9409 का वर्गमूल होगा।

अर्थात् $\sqrt{9409}$ = 97

$$\begin{array}{r|l} & 97 \\ \hline 9 & \overline{94}\ \overline{09} \\ +9 & -81 \\ \hline 187 & 13\ 09 \\ & -13\ 09 \\ \hline & 0 \end{array}$$

उक्त दोनों उदाहरणों में हमने पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल प्राप्त किए हैं। अब एक ऐसा उदाहरण लें जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। ऐसी स्थिति में वर्गमूल में दशमलव चिन्ह के बाद की संख्याएँ भी मिलती हैं।

उदाहरण 15. 8772 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :– आप जानते हैं कि 8772 को 8772.0000 के रूप में लिखा जा सकता है। जिस प्रकार पहले के दोनों उदाहरणों में हमने इकाई से शुरु करके संख्याओं के जोड़े बनाए थे, उसी

प्रकार यहाँ भी बनाएँगे। इकाई दहाई के अंक एक साथ, सैकड़े और हजार के अंक एक साथ। दशमलव चिह्न के दायीं ओर जोड़ियाँ बनाते समय दशांश और शतांश स्थानों के अंक एक साथ रखते हैं और उससे आगे भी इसी तरह।

संख्या 8772.0000 को इस प्रकार लिखेंगे – $\overline{87}\,\overline{72}.\overline{00}\,\overline{00}$

पहले की ही तरह 8772 का वर्गमूल ज्ञात करें –

123 शेष बचने के बाद दशमलव चिह्न के बाद के शून्यों का एक जोड़ा उतारें। अब भागफल में जो संख्या लिखेंगे उसके पहले दशमलव का चिह्न लगाएँ। भाग की प्रक्रिया वैसे ही आगे बढ़ाएँ।

यदि वर्गमूल को दशमलव के बाद के दो अंकों तक ही प्राप्त करना हो तो यह प्रक्रिया यहाँ रोकी जा सकती है। यदि आगे बढ़ाना हो तो प्रत्येक बार शून्य का एक जोड़ा शेष के आगे लिखकर नया भागफल प्राप्त करते जाएँगे।

	93·65
9	$\overline{87}\,\overline{72}\cdot\overline{00}\,\overline{00}$
+9	–81
183	672
+3	–549
1866	12300
+6	–11196
18725	110400
	–93625
	16775

अतः 8772 का वर्गमूल लगभग 93.65 होगा।

$\sqrt{8772}$ = 93.65 लगभग

प्रश्नावली 1.4

प्रश्न 01. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल, भाग विधि से ज्ञात कीजिए :–

(i) 529 (ii) 1369 (iii) 1024 (iv) 5776

(v) 900 (vi) 7921 (vii) 50625 (viii) 363609

प्रश्न 02. एक सिनेमा हॉल में सिनेमा मालिक सीटों को इस प्रकार व्यवस्थित करना चाहते हैं कि सिनेमा हॉल में जितनी स्तम्भों की संख्या है, उतनी ही संख्या पंक्तियों की हों। यदि उस हॉल में कुल 1849 सीटें हों तो पंक्तियों व स्तम्भों की संख्या ज्ञात कीजिए?

प्रश्न 03. एक वर्गाकार बगीचे का क्षेत्रफल 1444 वर्ग मीटर हो, तो बगीचे की लम्बाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए?

उदाहरण 16. 51.84 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :–

	7. 2
7	$\overline{51}.\,\overline{84}$
+ 7	- 49
14 2	02 84
	- 2 84
	0 00

$\sqrt{51.84} = 7.2$

उदाहरण 17. 23.1 का वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

हल :–

	4. 80
4	$\overline{23}.\overline{10}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+ 4	– 16
88	07 10
8	– 7 04
960	6 00
	–0 00
	6 00

$\sqrt{23.1} = 4.80$

उदाहरण 18. 2 का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

हल :–

	1.41 4
1	$2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+ 1	– 1
2 4	1 00
+ 4	– 96
2 81	04 00
+ 1	– 2 81
2824	1 19 00
	– 1 12 96
	0 07 04

प्रश्नावली–1.5

प्रश्न 01. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :–

(i) 7.29 (ii) 16.81 (iii) 9.3025

प्रश्न 02. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए :–

(i) 0.9 (ii) 5 (iii) 7

घनमूल

किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए हमने उसके अमाज्य गुणनखण्डों में से समान गुणनखण्डों के दो–दो के जोड़ों का प्रयोग किया था। प्रत्येक जोड़े में से एक–एक संख्या लेकर उनका गुणा करके वर्गमूल प्राप्त किया था। किसी संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए इसी प्रक्रिया को आगे बढ़ाते हैं। किसी संख्या का घनमूल निकालने के लिए उसके अभाज्य गुणनखंण्डों में से

समान गुणनखंण्डों के तीन–तीन के त्रिक (तिकड़ी) बनाएँगे तथा ऐसी प्रत्येक तिकड़ी से एक–एक संख्या लेकर उनका गुणनफल ज्ञात कर लेंगे। यही दी गई संख्या का घनमूल होगा।

उदाहरण 17. 512 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

हल :–

$$512 = \underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}$$

$$\sqrt[3]{512} = 2\times2\times2$$

$$\sqrt[3]{512} = 8$$

उदाहरण 18. 91,125 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

(संकेत –: हम देखते हैं कि संख्या के इकाई के स्थान पर 5 है अतः संख्या 5 से पूर्णतः विभाजित होगी।)

5	91,125
5	18,225
5	3,645
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

हल :–

$$91{,}125 = \underline{5\times5\times5}\times\underline{3\times3\times3}\times\underline{3\times3\times3}$$

$$\sqrt[3]{91{,}125} = 5\times3\times3$$

$$\sqrt[3]{91{,}125} = 45$$

प्रश्नावली–1.6

1. निम्नलिखित संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :–

(i) 125 (ii) 343 (iii) 1331
(vi) 2197 (v) 9261 (vi) 166375
(vii) 4913 (viii) 42875

8ZR5DY

हमने सीखा

1. यदि n कोई संख्या है तब $n\times n$ या n^2 इसका वर्ग कहलाएगा और $n\times n\times n$ या n^3 इसका घन।
2. जिन संख्याओं के इकाई में 2,3,7 या 8 हो वे पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती हैं।
3. यदि पूर्ण वर्ग संख्या के अन्त में सम संख्या में शून्य हो तो वे भी पूर्ण वर्ग संख्या होगी।
4. सम संख्याओं के वर्ग एवं घन सदैव सम संख्याएँ एवं विषम संख्याओं के वर्ग एवं घन सदैव विषम संख्याएँ होती हैं।
5. किसी प्राकृत संख्या n का वर्ग, प्रारम्भिक n विषम संख्याओं के योगफल के बराबर होता है।
6. यदि तीन संख्याएँ इस प्रकार हो कि बड़ी संख्या का वर्ग शेष दोनों संख्याओं के वर्गों के योग के बराबर हो तब संख्याएँ पाइथागोरिय त्रिक कहलाती है। जैसे $3^2 + 4^2 = 5^2$ अतः (3,4,5) पाइथोगोरीय त्रिक है।
7. वर्गमूल को '$\sqrt{\ }$' चिह्न के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इस चिह्न को करणी चिह्न कहते हैं।

9111FL

अध्याय–2

घातांक

EXPONENT

पूर्णांकों की घात

अब तक हमने प्राकृत संख्याओं के घातांकों पर विचार किया, परन्तु फातिमा के मन में यह प्रश्न उठ रहा था कि ऋणात्मक संख्याओं की घातांकों से सम्बंधित प्रश्नों को कैसे हल करेंगे? उसने सोचा कि क्यों न धनात्मक के स्थान पर ऋणात्मक संख्या लिख कर उसके किसी भी घात के लिए हल करके देखें –

$$
\begin{aligned}
(-1)^2 &= (-1) \times (-1) = 1 \\
(-1)^3 &= (-1) \times (-1) \times (-1) \\
&= \{(-1) \times (-1)\} \times (-1) = 1 \times (-1) = -1 \\
(-1)^4 &= (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \\
&= \{(-1) \times (-1)\} \times \{(-1) \times (-1)\} \\
&= 1 \times 1 = 1 \\
(-1)^5 &= (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \\
&= \{(-1) \times (-1)\} \times \{(-1) \times (-1)\} \times (-1) \\
&= 1 \times 1 \times (-1) = -1
\end{aligned}
$$

इन्हें देखकर कमली ने कहा ''जब (–1) का घात सम संख्या है तब उसका मान 1 एवं जब (–1) का घात विषम संख्या है तब उसका मान –1 है।''

अर्थात्

$\boxed{(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1}$ एवं $\boxed{(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1}$

इस प्रकार फातिमा एवं कमली के समझ में यह बात आ गई कि $(-1)^{25} = -1$, $(-1)^{50} = 1$ $(-1)^{143} = -1$, $(-1)^{144} = 1$ इत्यादि।

अब निम्नांकित पर विचार करें :–

$$
\begin{aligned}
(-5) &= (-1) \times 5 \\
(-5)^4 &= \{(-1) \times 5\}^4 \\
&= (-1)^4 \times 5^4 \qquad [\therefore\ (a \times b)^m = a^m \times b^m \text{ से}] \\
&= 1 \times 5^4
\end{aligned}
$$

$= \quad 5^4$

$(-27)^{13} = \{(-1)\times 27\}^{13}$

$= (-1)^{13}\times 27^{13}$

$= (-1)\times 27^{13} \qquad [\because (-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1]$

$= -27^{13}$

$(-m)^{16} = \{(-1)\times m\}^{16}$

$= (-1)^{16}\times m^{16} \qquad [\because (-1)^{\text{सम संख्या}} = 1]$

$= m^{16}$

सोचकर बताएँ कि घातांक संख्याओं $(-35)^{12}$, $(-149)^{23}$, $(-m)^{37}$, $(-m)^{100}$, $(-11)^{111}$ में से कौनसी धनात्मक होगी एवं कौन–सी ऋणात्मक? क्या आप इनसे कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? आप पायेंगे कि यदि a और m कोई प्राकृत संख्याएँ हों, तो $(-a)^m = \{(-1)\times a\}^m = (-1)^m \times a^m$

अर्थात् $(-a)^m$ धनात्मक है या ऋणात्मक, $(-1)^m$ पर निर्भर करता है।
या $(-a)^m$ धनात्मक होगा यदि m सम संख्या हो तथा ऋणात्मक होगा यदि m विषम संख्या हो

उदाहरण 1. सरल कीजिए –

(i) $(-5)^4 \times (-5)^7$

(ii) $(-4)^2\times(-4)^6 \times(-4)^{17}$

(iii) $(-9)^8 \div (-9)^2$

(iv) $(-x)^7 \div (-x)^4$

हल : (i) $(-5)^4 \times (-5)^7 = [(-1)\times 5]^4 \times [(-1)\times 5]^7$

$= [(-1)^4\times 5^4]\times[(-1)^7\times 5^7]$

$= 1 \times 5^4\times(-1)\times 5^7$

$= -1\times 5^{4+7} = -5^{11} \quad [\because a^m\times a^n = a^{m+n}]$

(ii) $(-4)^2\times(-4)^6\times(-4)^{17} = [(-1)\times(4)]^2\times[(-1)\times(4)]^6\times[(-1)\times(4)]^{17}$

$= (-1)^2\times(4)^2\times(-1)^6\times(4)^6\times(-1)(4)^{17}$

$= 1\times 4^2\times 1\times 4^6\times(4)^{17}(-1)\times 4^{17}$

$= -4^{2+6+17}$

$= -4^{25} \quad [\because a^\ell\times a^m\times a^n = a^{\ell+m+n}]$

(iii) $(-9)^8 \div (-9)^2 = \dfrac{(-9)^8}{(-9)^2} = \dfrac{\{(-1)\times 9\}^8}{\{(-1)\times 9\}^2}$

$= \dfrac{(-1)^8\times 9^8}{(-1)^2\times 9^2} = \dfrac{1\times 9^8}{1\times 9^2} = \dfrac{9^8}{9^2}$

$= 9^{8-2} = 9^6 \qquad [\because a^m \div a^n = a^{m-n}]$

(iv) $(-x)^7 \div (-x)^4 = \dfrac{(-x)^7}{(-x)^4} = \dfrac{\{(-1)\times x\}^7}{\{(-1)\times x\}^4}$

$= \dfrac{(-1)^7 \times x^7}{(-1)^4 \times x^4} = \dfrac{-1\times x^7}{1\times x^4}$

$= (-1) \times x^{7-4} = -x^3$ $[\because a^m \div a^n = a^{m-n}]$

प्रश्नावली 2.1

1. सरल करें :–

(a) $(-5)^3$ (b) $(-4)^5$ (c) $(-2)^6$ (d) $(-3)^6$

2. निम्न को घातांक के रूप में लिखें :–

(a) $5^4 \times (-5)^2$ (b) $15 \times (-15)^{25}$

(c) $12^5 \div (-12)^3$ (d) $(-p)^{14} \div (-p)^7$

3. दोनों पक्षों को हल कर निम्न कथनों की सत्यता की जाँच कीजिए :–

(a) $(-2)^4 \times (-2)^2 = (-2)^8 \div (-2)^2$

(b) $(-3)^2 \times (-3)^{-6} = \dfrac{1}{(3^2)^2}$

(c) $(-7)^{32} \div (-7)^{32} = 1$

परिमेय संख्याओं की घात

रजिया के मन में विचार आया कि अभी तक हमने प्राकृत संख्याओं एवं पूर्णांकों के घातांकों पर ही विचार किया है किन्तु इनके स्थान पर यदि परिमेय संख्याएं हों तब क्या होगा?

आइए, रज़िया के सवाल का जवाब ढूँढें।

परिमेय संख्याओं के कुछ घातांकों पर विचार कीजिए:–

(1) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^4 = \dfrac{5}{7}\times\dfrac{5}{7}\times\dfrac{5}{7}\times\dfrac{5}{7}$

$= \dfrac{5\times5\times5\times5}{7\times7\times7\times7} = \dfrac{5^4}{7^4}$

(2) $\left(-\dfrac{3}{11}\right)^5 = \left\{(-1)\times\left(\dfrac{3}{11}\right)\right\}^5 = (-1)^5 \times \left(\dfrac{3}{11}\right)^5$

$$= (-1) \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \qquad [\because (-1)^5 = -1]$$

$$= -\frac{3^5}{11^5}$$

(3) $$\left(-\frac{4}{3}\right)^6 = (-1)^6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^6$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \text{.... 6 बार} \qquad [\because (-1)^6 = 1]$$

$$= \frac{4^6}{3^6}$$

अतः यदि हमारे पास कोई परिमेय संख्या $\left(\frac{5}{4}\right)^m$ हो, तब

$$\left(\frac{5}{4}\right)^m = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times ---- \text{ (m बार)}$$

$$= \frac{5 \times 5 \times \text{........m बार}}{4 \times 4 \times \text{........m बार}} = \frac{5^m}{4^m}$$

अब आप $\left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{9}{4}\right)^5, \left(-\frac{4}{7}\right)^6, \left(-\frac{2}{5}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^p$ को विस्तारित करके देखें।

यदि कोई परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ $q \neq 0$) की घात m हो, तब

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \times ---- \text{ (m बार)}$$

$$= \frac{p \times p \times p \times \text{........m बार}}{q \times q \times q \times \text{........m बार}} = \frac{p^m}{q^m}$$

अर्थात् $\boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}}$ जहां p,q कोई पूर्णांक हैं एवं $q \neq 0$

अब यदि परिमेय संख्या का घात ऋणात्मक हो, तब स्थिति कैसी होगी?
निम्न उदाहरणों पर विचार कीजिए :–

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{5^{-2}}{4^{-2}}\right) = \frac{1/5^2}{1/4^2} = \frac{4^2}{5^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \qquad \left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ और } a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right]$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-4} = \frac{3^{-4}}{7^{-4}} = \frac{1/3^4}{1/7^4} = \frac{7^4}{3^4} = \left(\frac{7}{3}\right)^4$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-m} = \frac{2^{-m}}{5^{-m}} = \frac{1/2^m}{1/5^m} = \frac{5^m}{2^m} = \left(\frac{5}{2}\right)^m$$

अभ्यास

निम्नलिखित को स्वयं हल करने का प्रयास करें –

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{-5}, \left(\frac{14}{13}\right)^{-9}, \left(\frac{15}{6}\right)^{-4}, \left(\frac{113}{53}\right)^{-11}, \left(\frac{5}{7}\right)^{-7}$$

पुनः विचार करें :–

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

इस प्रकार स्पष्ट है कि –

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m}$$ यहाँ a, b कोई पूर्णांक हैं तथा $a \neq o, b \neq o$

उदाहरण 2. निम्न को सरल कीजिए –

1. $\left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2$ 2. $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$

हल : 1. $\left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^{4+(-2)}$ $\left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^m - \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}\right]$ एवं $[\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^2}{7^2} = \frac{25}{49}$$

हल : 2. $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(-\frac{9}{2}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$

$$= (-1)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$= 1 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{4+2}$$

$$= \left(\frac{9}{2}\right)^6 = \frac{531441}{64}$$

3. $-\frac{36}{49}$ को घात के रूप में व्यक्त कीजिए।

यहाँ $-\frac{36}{49} = (-1) \times \frac{36}{49}$

$$= (-1) \times \left(\frac{6}{7}\right)^2 = -\left(\frac{6}{7}\right)^2$$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न को सरल कीजिए :–

(a) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ (b) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2$

(c) $(-5)^3 \div \left(-\frac{1}{5}\right)^2$ (d) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$

2. घात के रूप में व्यक्त कीजिए :–

(a) $-\frac{25}{49}$ (b) $\frac{27}{125}$ (c) $\frac{729}{64}$

3. सिद्ध कीजिए :–

(a) $\left(\frac{5}{7}\right)^7 \times \left(\frac{7}{5}\right)^7 - \left(\frac{3}{19}\right)^2 \times \left(\frac{19}{3}\right)^2 = 0$

(b) $\left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{q}{p}\right)^m = \left(\frac{q}{p}\right)^{-m}$

919WH9

(c) $\left(\frac{25}{16}\right)^{-4} = \left(\frac{16}{25}\right)^4$

4. सत्य या असत्य लिखिए :–

(a) $\left(\frac{-5}{4}\right)^{65} = \frac{-5^{65}}{4^{65}}$

(b) $\left(\frac{-32}{19}\right)^{150} = \frac{32^{150}}{19^{150}}$

(c) $(25 \times 3)^5 = 25 \times 3^5$

(d) $\left(\frac{27}{16}\right)^{-15} = \frac{27^{15}}{16^{15}}$

हमने सीखा

1. $\boxed{(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1}$ एवं $\boxed{(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1}$

2. यदि $\frac{p}{q}$ कोई परिमेय संख्या हो, तो $\boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}}$

3. यदि $\frac{a}{b}$ कोई परिमेय संख्या हो, तो $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m}$

अध्याय–3
समान्तर रेखाएँ
PARALLEL LINES

समान्तर रेखाएँ

पिछली कक्षा में आपने समान्तर रेखाओं के बारे में पढ़ा है। ये एक ही तल पर स्थित ऐसी दो रेखाएँ हैं, जिनके बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहती है। इन्हें दोनों ओर कितना भी बढ़ाया जाए, ये एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती हैं।

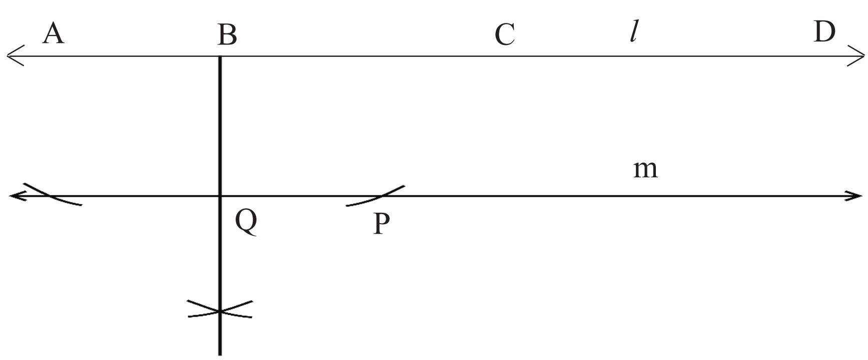
वर्ग या आयत की सम्मुख भुजाएँ, श्यामपट के सम्मुख किनारे, रेल की पटरी इत्यादि समान्तर रेखाओं के उदाहरण हैं। आप भी समान्तर रेखाओं के ऐसे ही कुछ उदाहरणों को सोच कर अपने कॉपी में लिखें।

समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी

दो समान्तर रेखाओं की लम्बवत दूरी सदैव समान होती है। इसे ज्ञात करने के लिए, एक रेखा के किसी बिन्दु से दूसरी रेखा पर लम्ब डालते है। इस प्रकार प्राप्त लम्ब की लम्बाई ही उन रेखाओं के बीच की दूरी होती है।

क्रियाकलाप 1

अपनी कॉपी पर दो समान्तर रेखाएँ बनाएं। उनके बीच की दूरी को अलग–अलग बिन्दुओं पर नाप कर अवलोकन सारणी को पूर्ण कीजिए –



चित्र 3.1

सारणी 3.1

क्रमांक	रेखा l पर चिन्हित् बिन्दु	रेखा l से समान्तर रेखा m पर डाले गए लम्ब का बिन्दु	दूरी (सेमी में)
1	A	....	....
2	B	Q	BQ =......
3	C	....	....
4	D	....	....

क्या प्रत्येक स्थिति में दोनों रेखाओं के बीच की दूरी समान है?
....

दी गई रेखा से निश्चित दूरी पर समान्तर रेखा खींचना

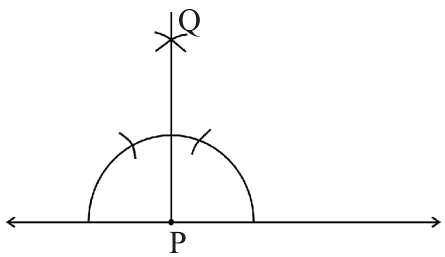
रेखा l खींच कर इससे 3 सेमी की दूरी पर एक समान्तर रेखा m की रचना करना–

रचना के चरण

1. दी गई रेखा l पर कोई बिन्दु P लीजिए (चित्र 3.2)

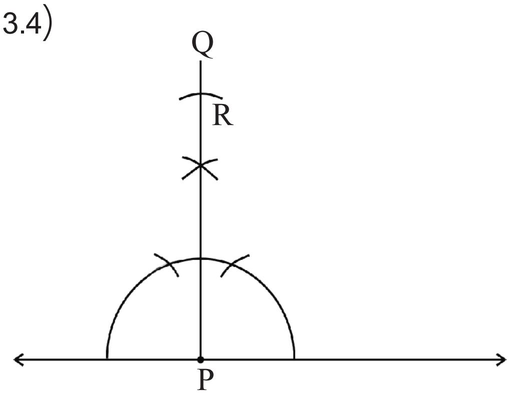
चित्र 3.2

2. P पर PQ⊥l बनाइए (चित्र 3.3)



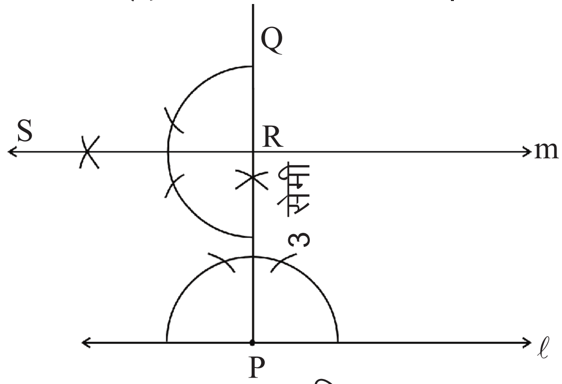
चित्र 3.3

3. बिन्दु P को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से PQ पर 3 सेमी. त्रिज्या का चाप काटिए जो PQ को R पर मिलता है। (चित्र 3.4)



चित्र 3.4

4. बिन्दु R पर RS⊥PR बनाइए तथा RS को आगे बढ़ाकर रेखा m बनाइए (चित्र 3.5)



चित्र 3.5

रेखा m, रेखा ℓ से 3 सेमी. दूरी पर स्थित समान्तर रेखा है।

टीप – सेट स्क्वायर की सहायता से भी दी गई रेखा से निश्चित दूरी पर समांतर रेखा खींची जा सकती है।

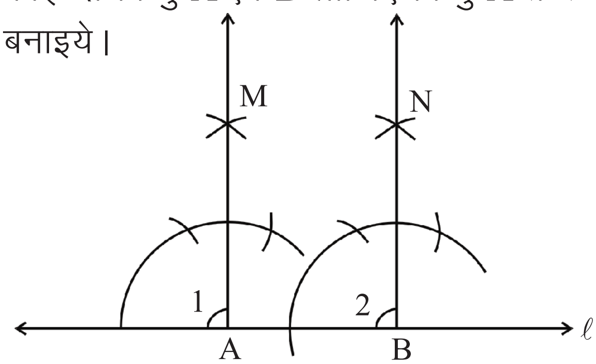
91SNKJ

समान्तर रेखाओं से सम्बन्धित कुछ गुणधर्म

1. एक ही रेखा के दो बिन्दुओं पर खींची गई लम्बवत् रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।

क्रियाकलाप 2.

एक रेखा ℓ खींच कर उस पर कोई दो बिन्दु A एवं B लीजिए बिन्दु A से रेखा ℓ पर लम्ब AM तथा बिन्दु B से लम्ब BN बनाइये।



चित्र 3.6

अब अपने मित्रों को भी इसी प्रकार अपनी–अपनी कॉपी में एक रेखा के लम्बवत् दो रेखाएँ खींचने को कहें तथा संगत कोण माप कर सारणी की पूर्ति करने को कहें –

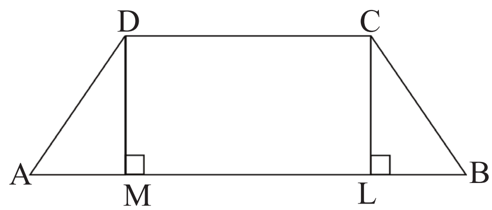
सारणी 3.2

क्र.सं.	नाम	∠1	∠2	क्या ∠1 = ∠2 है?
1.	मोहन	------	------	------------
2.	------------	------	------	------------
3.	------------	------	------	------------
4.	------------	------	------	------------

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में $\angle 1 = \angle 2$, चूँकि ये कोण संगत कोण है, अतः रेखाएँ AM एवं BN समान्तर रेखा होंगी। इस प्रकार एक ही तल में स्थित किसी रेखा के दो बिन्दुओं पर खींची गईं लम्बवत् रेखाएँ आपस में समान्तर होती हैं।

अभ्यास – 1

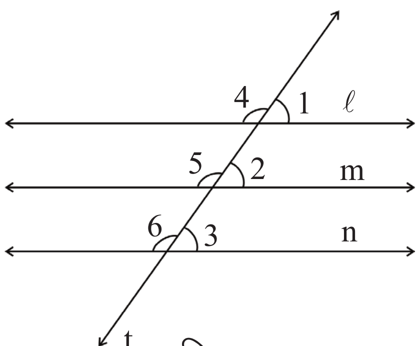
1. एक रेखा खींच कर उससे 5 सेमी. की दूरी पर इसके समान्तर रेखा की रचना कीजिए।
2. एक रेखा खींच कर उससे 4.3 सेमी. की दूरी पर इसके समान्तर रेखा की रचना कीजिए। इस प्रकार किसी रेखा के समान्तर अधिकतम कितनी समान्तर रेखाएँ खींची जा सकती हैं?
3. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel CD$, $CL \perp AB$ और $DM \perp AB$ है तो क्या $CL \parallel DM$? चतुर्भुज DMLC किस प्रकार का चतुर्भुज होगा? $\triangle ADM$ और $\triangle LCB$ किस प्रकार के त्रिभुज हैं?



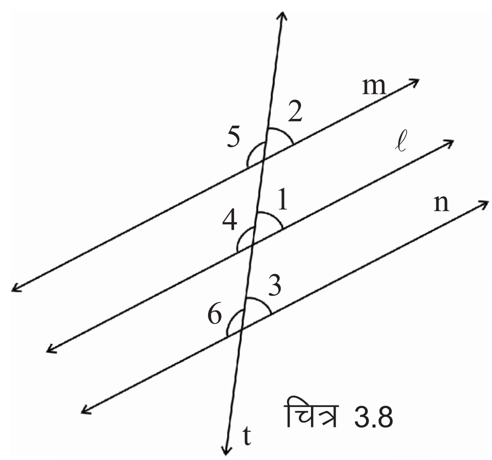
2. एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ परस्पर समान्तर होती है

क्रियाकलाप 3

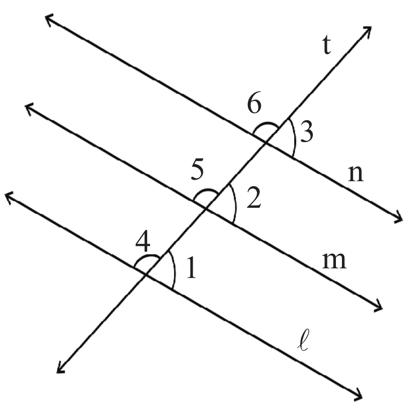
निम्न चित्रों में रेखाएँ m एवं n एक ही रेखा ℓ के समान्तर रेखाएँ हैं तथा t एक तिर्यक रेखा है जो इन्हें प्रतिच्छेद करती है। अब चित्रानुसार कोणों को माप कर सारणी की पूर्ति कीजिए–



चित्र 3.7



चित्र 3.8



चित्र 3.9

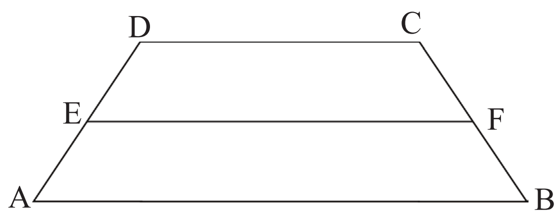
सारणी 3.3

चित्र क्रमांक	कोणों की माप (अंश में)							
	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$	$\angle 5$	$\angle 6$	क्या $\angle 2=\angle 3$?	क्या $\angle 5=\angle 6$?
3.7								
3.8								
3.9								

चित्र से हम पाते हैं कि $\angle 2=\angle 3$ तथा $\angle 5=\angle 6$, किन्तु ये संगत कोण हैं। अतः रेखाएँ m व n आपस में समान्तर होंगी अर्थात् "**एक ही रेखा के समान्तर खीचीं गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।**"

अभ्यास 2

1. चित्र में ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \| DC$ है। रेखाखण्ड $EF \| AB$ तथा E व F क्रमशः AD व BC पर हैं। क्या $EF \| DC$ होगी, यदि हाँ तो क्यों ?

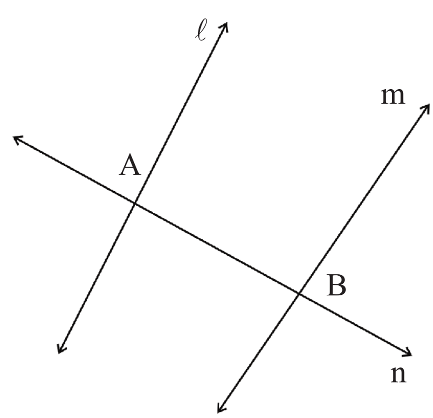


2. इस आकृति में कितने समलम्ब चतुर्भुज हैं। नाम लिखिए।

अन्तःखण्ड

जब दो सरल रेखाओं को तिर्यक रेखा काटती है तो तिर्यक रेखा का सरल रेखाओं के बीच कटा हुआ भाग **अन्तःखण्ड** कहलाता है। चित्र में AB, रेखा ℓ एवं m के द्वारा रेखा n पर काटा गया अन्तःभाग है इसे अन्तःखण्ड AB कहेंगे।

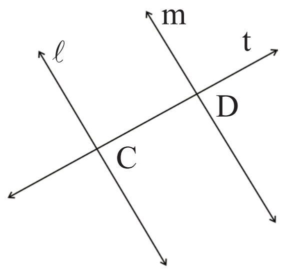
यह आवश्यक नहीं है कि दो रेखाएँ ℓ एवं m समान्तर ही हों।



चित्र 3.10

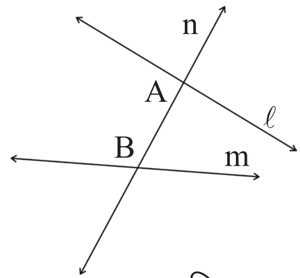
अभ्यास 3

1. निम्न चित्र में अन्तःखण्ड की पहचान कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए



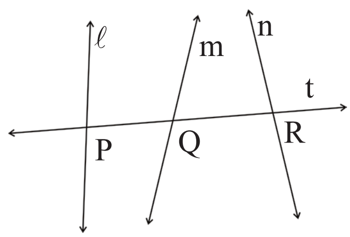
चित्र 3.11

अन्तःखण्ड ——————————



चित्र 3.12

अन्तःखण्ड ——————————



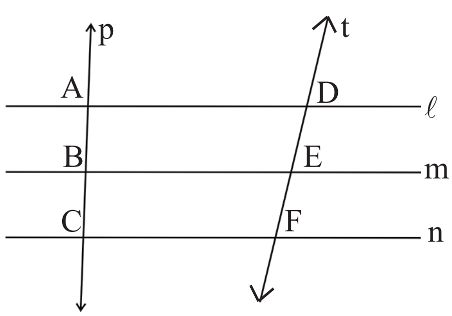
चित्र 3.13

अन्तःखण्ड ——————————

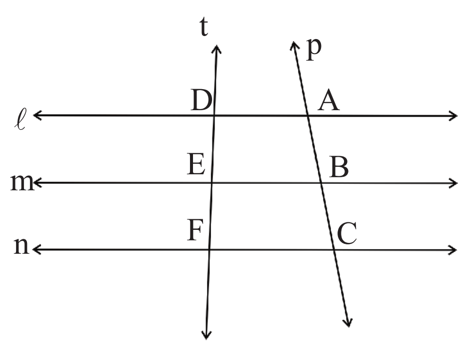
समान्तर रेखाएँ एवं समान अन्तःखण्ड

क्रियाकलाप 4

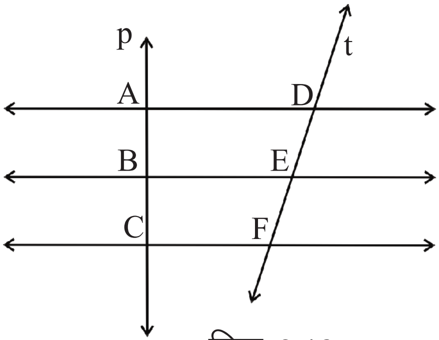
दिए गए चित्रों में रेखा P पर तीन बिन्दु A,B,C इस प्रकार लिए गए हैं कि AB = BC, इन बिन्दुओं से होती हुए तीन समान्तर रेखाएँ ℓ, m व n खींची गई हैं। इन समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती हुई एक तिर्यक रेखा t खीची गई है, जो इन्हें क्रमशः D,E व F पर काटती है। स्केल की सहायता से नापकर दी गई सारणी पूरा कीजिए–



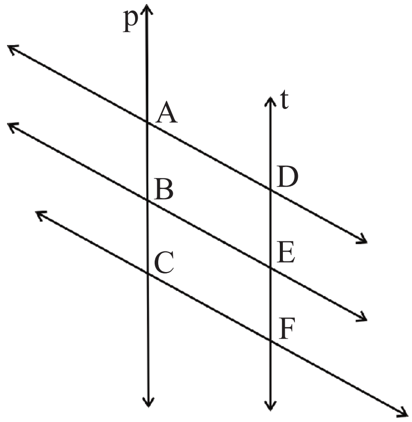
चित्र 3.14



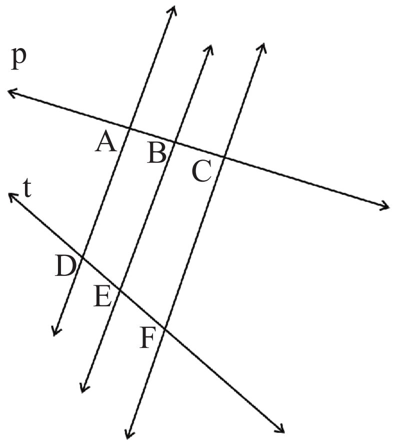
चित्र 3.15



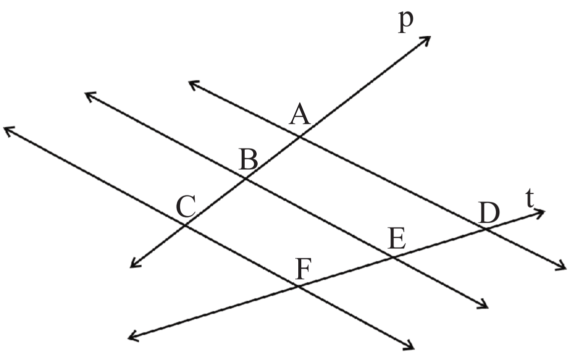
चित्र 3.16



चित्र 3.17



चित्र 3.18



चित्र 3.19

सारणी 3.4

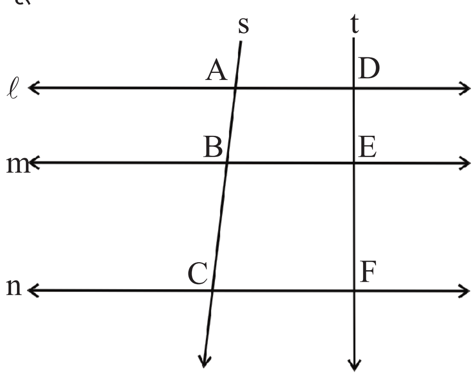
चित्र.क्र.	DE	EF	क्या DE = EF ?
3.14			
3.15			
3.16			
3.17			
3.18			
3.19			

उपरोक्त क्रियाकलाप में आपने पाया कि प्रत्येक स्थिति में DE = EF प्राप्त होता है।

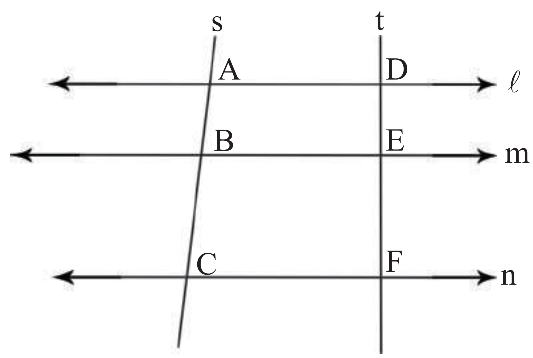
अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि **"तीन समान्तर रेखाओं पर एक तिर्यक रेखा समान अन्तःखण्ड काटती है तो दूसरी तिर्यक रेखा भी समान अन्तःखण्ड काटेगी।"**

क्रियाकलाप 5.

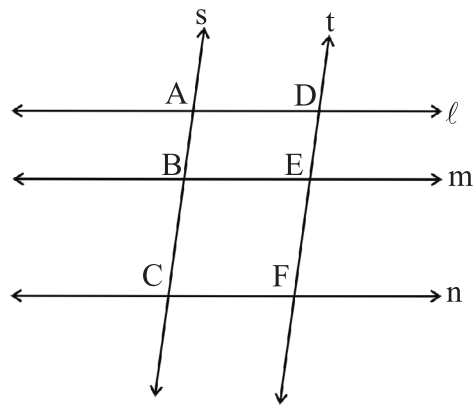
दिए गए चित्रों में $\ell \parallel m \parallel n$ है तथा तिर्यक रेखाएँ s व t तीनों समान्तर रेखाओं को A,B,C तथा D,E,F पर काटती हैं। स्केल की सहायता से सारणी में दिए गए मापों को नाप कर सारणी पूर्ण कीजिए?



चित्र 3.20



चित्र 3.21



चित्र 3.22

सारणी 3.5

क्र.सं.	चित्र क्र.	AB	BC	$\frac{AB}{BC}$	DE	EF	$\frac{DE}{EF}$	क्या $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$?
1.	3.20							
2.	3.21							
3.	3.22							

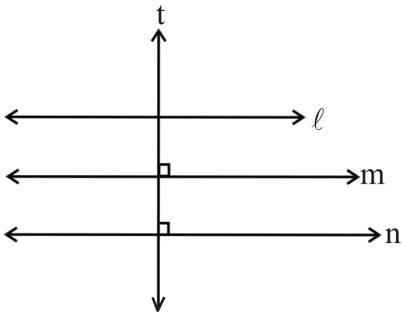
उपरोक्त क्रियाकलाप में प्रत्येक स्थिति में $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ प्राप्त होता है।

अत: **''तीन समान्तर रेखाओं पर किसी एक तिर्यक रेखा के द्वारा काटे गए अंत:खण्डों का जो अनुपात होता है, वहीं अनुपात अन्य तिर्यक रेखाओं में भी होता है।''**

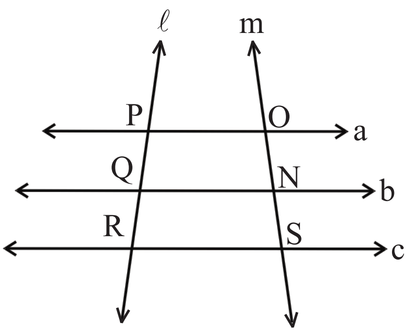
प्रश्नावली 3.1

1. 6 सेमी. का एक रेखाखण्ड खींचकर इस पर कोई बिन्दु P लेकर 2.5 सेमी. दूरी पर एक समान्तर रेखा खींचिए।

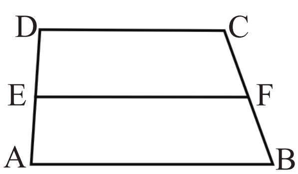
2. दी गई आकृति में $\ell \parallel m$, $t \perp m$ एवं $t \perp n$ है, तो
   (i) क्या $m \parallel n$ है? क्यों?
   (ii) क्या $\ell \parallel n$ है? क्यों?
   (iii) क्या $t \perp \ell$ है? क्यों?



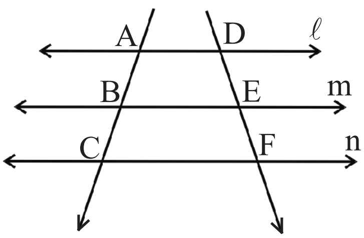
3. दिए गए चित्र में $a \parallel b \parallel c$ है तथा ℓ व m दो तिर्यक रेखाएँ है यदि $PQ = QR$ हो, तो क्या $ON = NS$ है? क्यों?



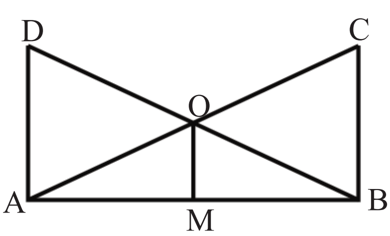
4. दी गई आकृति में $AB \parallel DC$, $EF \parallel AB$ और E रेखाखण्ड AD का मध्य बिन्दु है, तब
   (i) क्या $AB \parallel EF \parallel DC$ है? क्यों?
   (ii) क्या F, रेखाखण्ड CB का मध्यबिन्दु है? क्यों?



5. दी गई आकृति में $\ell \parallel m \parallel n$ है, तो क्या इनके अन्तःखण्डों का अनुपात बराबर होगा?



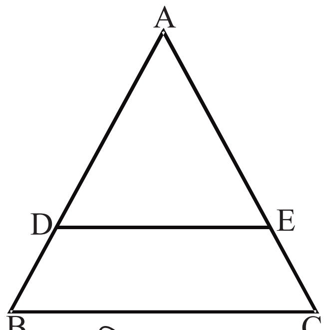
6. यदि DA, CB और OM सभी रेखाखण्ड AB पर लम्ब हैं जहाँ O रेखाखण्ड AC व DB का प्रतिच्छेद बिन्दु है। यदि OA = 2.4 सेमी. व OC = 3.6 सेमी. हो, तो
   (i) $\dfrac{AM}{BM}$ मान ज्ञात करो।
   (ii) यदि BO = 3 सेमी. तो DO का मान ज्ञात कीजिए।



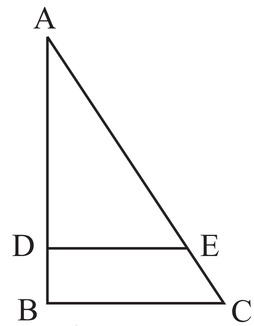
त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा का अन्य दोनों भुजाओं से संबंध–

क्रियाकलाप 6.

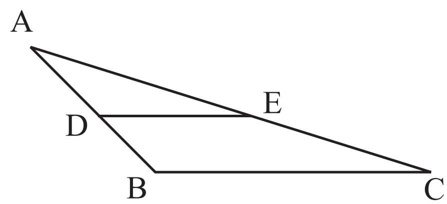
नीचे दिए गए ABC में DE || BC है, जो AB को D तथा AC को E पर प्रतिच्छेद करती है। चित्र की सहायता से सारणी में आये तथ्यों के मान माप कर लिखिए।



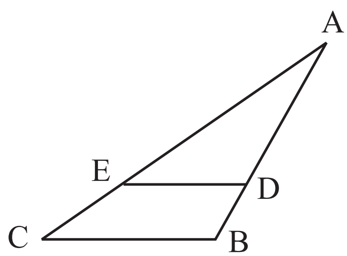
चित्र 3.23



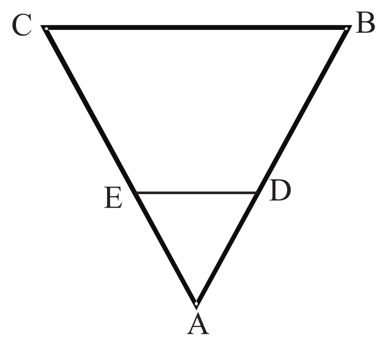
चित्र 3.24



चित्र 3.25



चित्र 3.26



चित्र 3.27

सारणी 3.6

क्र.सं.	चित्र क्र.	AD	DB	$\frac{AD}{DB}$	AE	EC	$\frac{AE}{EC}$	क्या $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$?
1.	3.23							
2.	3.24							
3.	3.25							
4.	3.26							
5.	3.27							

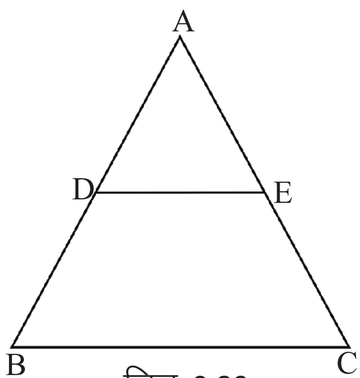
उपरोक्त क्रियाकलाप में प्रत्येक स्थिति में $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ प्राप्त होता है।

"अतः किसी त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।"

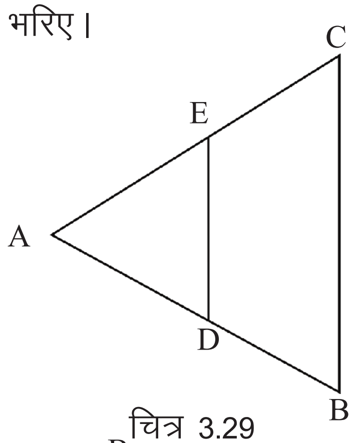
त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का तीसरी भुजा से सम्बन्ध

क्रियाकलाप 7

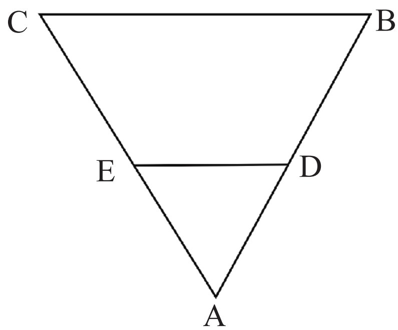
दिये गये ΔABC में AB व AC के मध्य बिन्दु D व E हैं। DE पर बनने वाले कोण तथा B व C पर बने कोण को नाप कर सारणी में भरिए।



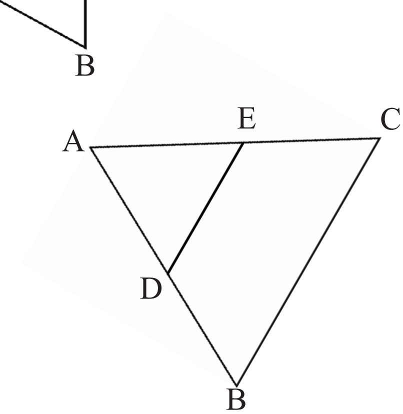
चित्र 3.28



चित्र 3.29



चित्र 3.30



चित्र 3.31

सारणी 3.7

क्र.सं.	चित्र क्र.	$\angle ADE$	$\angle B$	क्या $\angle ADE = \angle B$?	$\angle AED$	$\angle C$	क्या $\angle AED = \angle C$?
1.	3.28						
2.	3.29						
3.	3.30						
4.	3.31						

आप उपरोक्त क्रियाकलाप में पाते हैं कि $\angle ADE = \angle B$ तथा $\angle AED = \angle C$ है। पुनः इन कोणों को ध्यान से देखिए? इन कोणों को आप किस नाम से जानते हैं?

जब संगत कोण बराबर होते हैं तो रेखाओं में क्या सम्बन्ध होता है?

अतः "**त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती हैं।**"

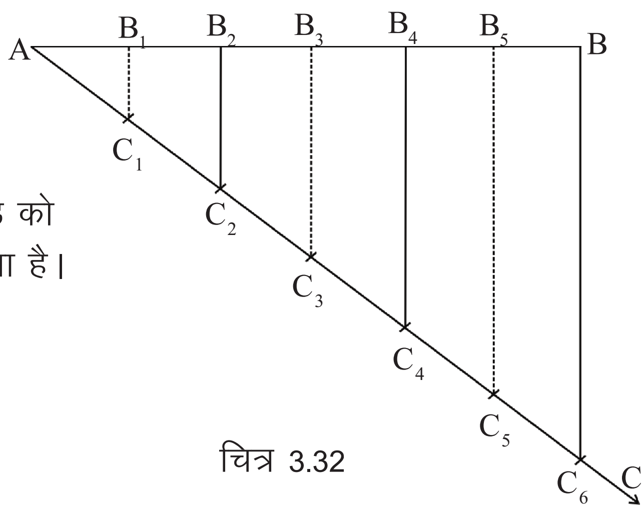
रेखाखण्ड का समान भागों में विभाजन

सलमा ने अशोक से कहा, क्या तुम 5 सेमी के एक रेखाखण्ड को तीन समान भागों में विभाजित कर सकते हो ?

अशोक ने कहा, क्यों नहीं उसने 5 को तीन से भाग दिया और $\frac{5}{3} = 1.66..$ सेमी प्राप्त हुआ चुँकि स्केल से 1.66 सेमी मापा नही जा सकता है इसलिए उसने 1.6 सेमी तथा 1.6 सेमी के दो खण्ड किए तो तीसरा खण्ड 1.8 सेमी प्राप्त हुआ।

इस पर सलमा ने कहा, स्केल से मापकर किसी रेखाखण्ड को मनचाहे भागों में बाँटना तो सम्भव नहीं है, इसलिए कोई न कोई तरीका ऐसा होना चाहिए जिससे बिना मापे रेखाखण्डों को समान भागों में विभाजित किया जा सके।

आइए देखें, किस प्रकार समान्तर रेखाओं का उपयोग कर बिना स्केल की सहायता से मापन किये बिना किसी रेखाखण्ड को कई समान भागों में विभाजित किया जा सकता है।



चित्र 3.32

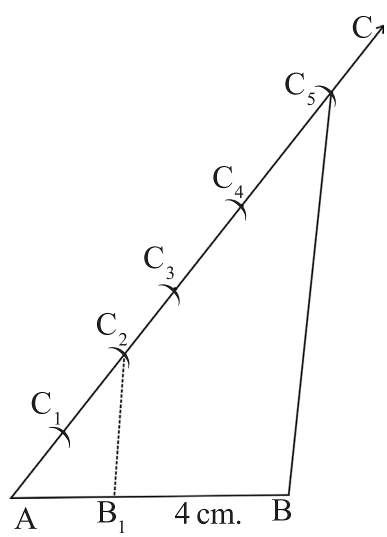
उदाहरण 1.

दिये गये रेखाखण्ड AB को 6 समान भागों में विभक्त करना।

रचना के पद

1. रेखाखण्ड AB के बिन्दु A पर न्यून कोण बनाते हुए AC किरण खीचें।
2. अब किरण AC के बिन्दु A से परकार की सहायता से समान दूरियों पर 6 भाग AC_1, C_1C_2, C_2C_3,...,C_5C_6 काटिये।
3. C_6 को B से मिलाइये और C_6B के समान्तर रेखाएँ क्रमशः C_5, C_4,....C_1 से खींचिए जो रेखाखण्ड BA को $B_5B_4B_3$...B_1 पर मिलती हैं।

इस प्रकार, AB रेखाखण्ड AB_1, B_1B_2, B_2B_3,B_3B_4, B_4B_5,B_5B, 6 समान भागों में विभक्त हो गया।



चित्र 3.33

उदाहरण 2. 4 सेमी. लम्बाई का रेखाखण्ड लेकर इसे 2:3 के अनुपात में विभाजित कीजिए।

रचना के पद

1. 4 सेमी. लम्बाई लेकर रेखाखण्ड AB खींचिए उसके बाद AC किरण खींचिए जो AB पर न्यून कोण बनाए

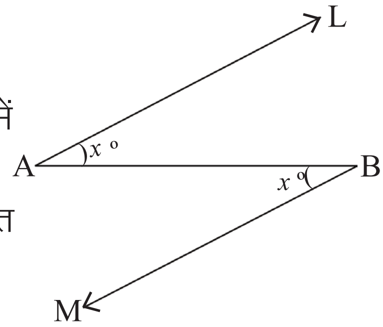
2. किरण AC को परकार की सहायता से समान माप के चाप काट कर अनुपात के योगफल (2+3=5) अर्थात् पाँच बराबर भागों में चिह्नित् कीजिए। जैसे– AC_1, C_1C_2, ...C_4C_5।
3. अब C_5B मिलाइये और उसके बाद C_5B के समान्तर एक रेखा AC को 2:3 में विभाजित करने वाले बिन्दु C_2 से खींचिए जो रेखाखण्ड AB को B_1 पर प्रतिच्छेद करे।
   इस प्रकार अभीष्ट अनुपात का रेखाखण्ड AB_1 व B_1B प्राप्त हुआ अर्थात् $AB_1 : B_1B = 2 : 3$.
   इसी प्रकार अब आप विभिन्न माप के रेखाखण्डों को लेकर मन चाहे अनुपात में विभाजित कीजिए तथा अपने साथियों को भी ऐसे ही प्रश्नों को हल करने दीजिए।

किसी रेखा के समान भाग करने की एक और विधि :

शैली को रेखाखण्डों को विभाजित करने में मज़ा तो आ रहा था परन्तु कभी–कभी उसे समान्तर रेखा खींचने में कुछ परेशानी हो रही थी। आइए एक और तरीका देखें जिससे समान दूरी पर समान्तर रेखाएँ भी बड़ी आसानी से खींची जा सकती हैं।

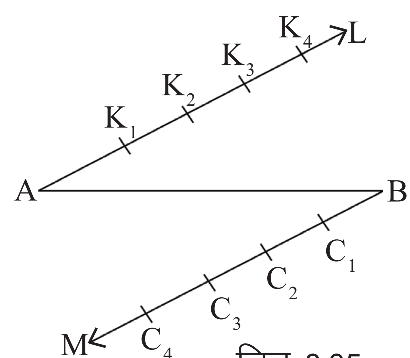
उदाहरण 3. AB रेखाखंड खींचकर उसको चार समान भागों में विभाजित करना।

रचना 1. AB रेखाखंड खींच कर उसके दोनों सिरों पर विपरीत दिशा में समान न्यून कोण बनाइए।
यह ध्यान रहे कि दोनों न्यून कोण एक समान हों।



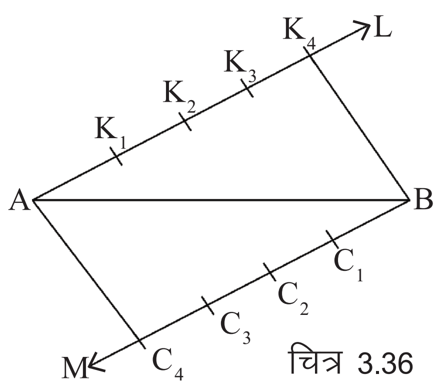
चित्र 3.34

रचना 2. परकार की सहायता से दोनों किरणों AL व BM पर 4–4 समान त्रिज्या के चाप काटिए।



चित्र 3.35

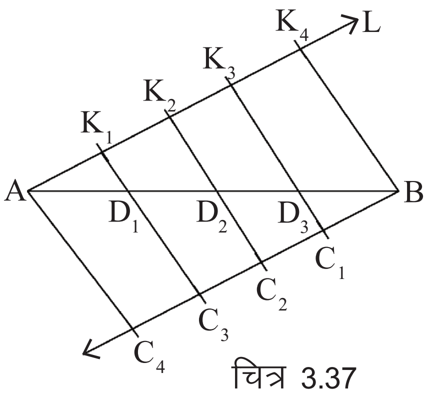
रचना 3. अन्तिम बिन्दु K_4 व C_4 को क्रमशः B व A से मिलाइए



चित्र 3.36

रचना 4. फिर K_3 को C_1 से K_2 को C_2 से और K_1 को C_3 से मिलाइए

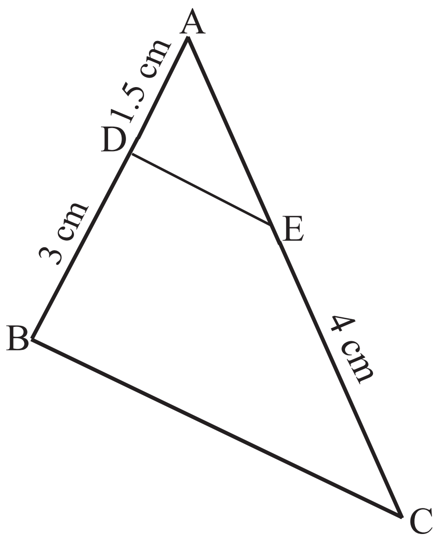
इस प्रकार AB पर व तीन बिन्दु D_1, D_2 एव D_3 प्राप्त हुए यह बिन्दु रेखाखण्ड को चार समान भागों में विभाजित करता है।



चित्र 3.37

प्रश्नावली 3.2

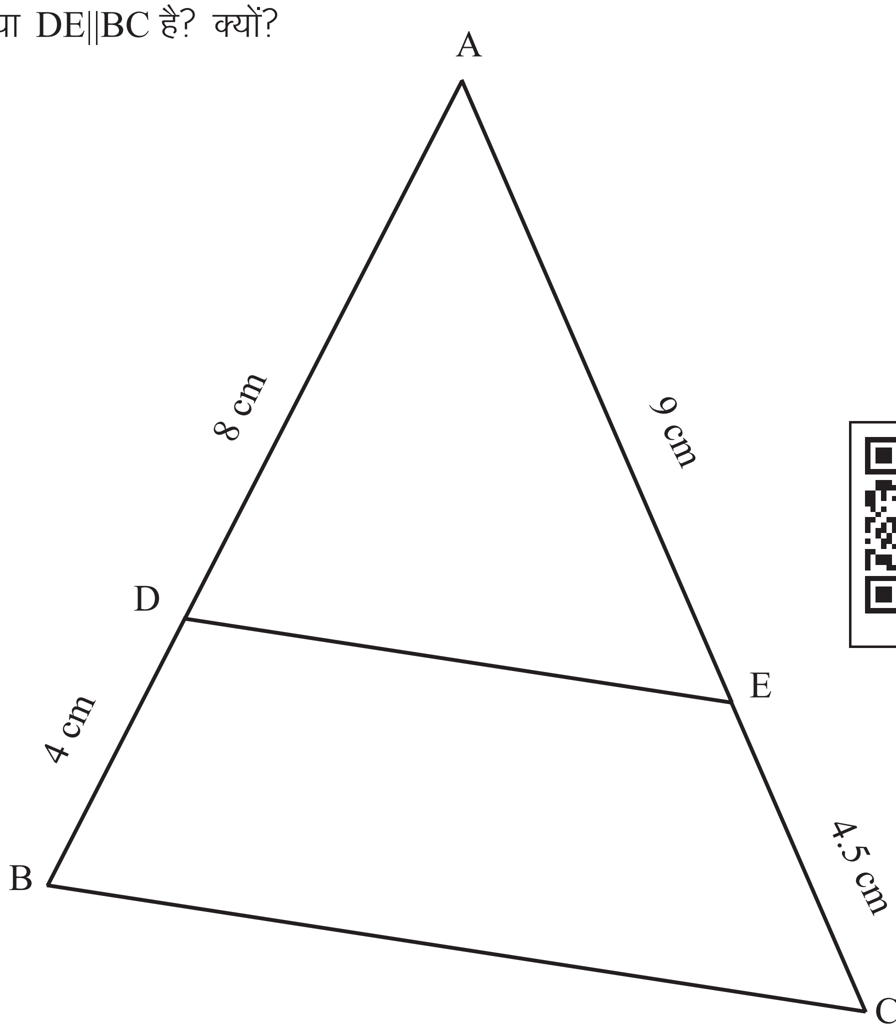
1. दी गई आकृति में DE||BC, यदि AD = 1.5 सेमी, DB = 3 सेमी और EC = 4 सेमी हो, तो AE का मान ज्ञात कीजिए।



2. 7.5 सेमी. का एक रेखाखण्ड AB खींचिए और इसे तीन समान भागों में विभाजित कीजिए प्रत्येक भाग की लम्बाई नापिए।
3. 8.4 सेमी. का एक रेखाखण्ड खींचिए और इसे सात समान भागों में विभाजित कीजिए प्रत्येक भाग की लम्बाई नापिए।
4. 10 सेमी. के एक रेखाखण्ड को 2:3 के अनुपात में विभाजित कीजिए।
5. 7 सेमी. का एक रेखाखण्ड AB खींचिए इस पर एक बिन्दु P इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि

$AP = \frac{2}{5}AB$ हो।

6. दी गई आकृति में AD = 8 सेमी, BD = 4 सेमी तथा AE = 9 सेमी., EC = 4.5 सेमी. हो, तो क्या DE||BC है? क्यों?



हमने सीखा

1. दो समान्तर रेखाओं के बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहती है।
2. एक रेखा के समान्तर खींची गई सभी रेखाएँ आपस में समान्तर होती हैं।
3. एक रेखा के विभिन्न बिन्दुओं से लम्बवत खींची गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।
4. तीन समान्तर रेखाओं पर एक तिर्यक रेखा समान अन्तःखण्ड काटती है तो अन्य तिर्यक रेखा भी समान अन्तःखण्ड काटेगी।
5. तीन समान्तर रेखाओं पर दो तिर्यक रेखाओं के अन्तःखण्डों का अनुपात समान होता है।
6. त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।
7. त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है।

अध्याय–4

बीजीय व्यंजकों का गुणा एवं भाग

MULTIPLICATION & DIVISION OF ALEGEBRAIC EXPRESSIONS

92BFNU

बीजीय व्यंजकों के योग एवं घटाने की क्रिया से आप परिचित हैं। योग एवं घटाने की क्रिया में पूर्णांक क्रमशः जुड़ते या घटते हैं तथा बीजांक वही रहता है। इसी प्रकार कक्षा सातवीं में आपने पढ़ा है – किन्हीं दो बीजीय व्यंजकों का गुणा करने पर उनके स्थिरांक का स्थिरांक से तथा चराकों का चराकों के साथ गुणा होता है।

क्रियाकलाप 1.

नीचे दी गई तालिका में दो बीजीय व्यंजक एवं उनका गुणनफल दिया गया है। कुछ स्थान रिक्त हैं। रिक्त स्थानों में मान लिखिए।

सारणी 4.1

क्र.सं.	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	प्रथम व्यंजक × द्वितीय व्यंजक	द्वितीय व्यंजक × प्रथम व्यंजक	गुणनफल
1	-3	a	$-3 \cdot a$	$a \cdot (-3)$	$-3a$
2	x	5	$x \cdot 5$	$5 \cdot x$	$5x$
3	2a	3a	2a·3a	3a·2a	$6a^2$
4	$7x$	$-4y$	--------	--------	--------
5	$-5xy$	$2x$	--------	--------	--------
6	$4a^2$	--------	--------	--------	$-12a^3b$
7	$-7a^2b^2$	8ab	--------	--------	--------

उपरोक्त तालिका में पदों का स्थान आपस में बदलने से प्राप्त गुणनफल समान रहता है। इससे गुणा सम्बन्धी किस नियम की पुष्टि होती है?

आइए कुछ और उदाहरण देखें

(i) $3x \cdot 5x = (3 \cdot 5)\ x \cdot x = 15x^2$

(ii) $(-4x)\ 6y = (-4 \times 6)\ x \cdot y = -24xy$

(iii) $(-ab)\ 5b^2 = (-1 \times 5)\ ab \cdot b^2 = -5\ a \cdot b \cdot b^2 = -5ab^3$

इस प्रकार आप देखते हैं कि जहाँ आधार समान होता है वहाँ चरांकों के घात, घातांक नियम के अनुसार आपस में जुड़ जाते हैं।

बीजीय व्यंजकों को जोड़ते समय आपने देखा है कि गुणांक आपस में जुड़ जाते हैं।

जैसे, $x + x = (1 + 1)\,x = 2x$ (यहाँ x का गुणांक 1 है)

इस प्रकार, $2x$, x को दो बार आपस में जोड़ने से प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, $x + x + x = 3x$

$$x + x + x + x = 4x$$

इस प्रकार, x को जितनी बार जोड़ते हैं, x का गुणांक उतना ही रहता है।

$2x$ में 2 गुणांक है एवं x चरांक है।

$2x$ का मान x के विभिन्न मानों के लिए भिन्न–भिन्न होगा।

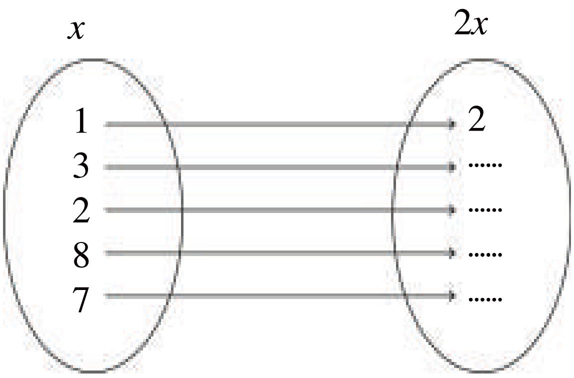
यदि $x = 3$ हो, तो $2x = 2\cdot(3) = 6$

यदि $x = -5$ हो, तो $2x = 2\cdot(-5) = -10$

और यदि $x = 0$ हो, तो $2x = 2\cdot(0) = 0$

$x = \frac{3}{8}$ हो, तो $2x = 2\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{4}$

निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



ध्यान रहे कि $2x$ में 2 गुणांक एवं x चरांक है। अतः यदि $x = 5$ हो, तो $2x = 25$ नहीं होगा, बल्कि $2x = 2 \times 5 = 10$ होगा।

एक दिन शिक्षक कक्षा में नीरज से पूछते हैं कि आपकी उम्र क्या है?

नीरज – मेरी उम्र 13 वर्ष है।

शिक्षक – 2 वर्ष बाद आपकी उम्र क्या होगी?

नीरज – 2 वर्ष बाद मेरी उम्र 13 + 2 = 15 वर्ष होगी।

शिक्षक – जितेन्द्र आपकी उम्र कितनी है?

जितेन्द्र – मेरी उम्र लगभग 12 वर्ष है।

शिक्षक – 2 वर्ष बाद आपकी उम्र क्या होगी?

जितेन्द्र – 2 वर्ष बाद मेरी उम्र 12 + 2 = 14 वर्ष होगी।

शिक्षक : यदि किसी व्यक्ति की वर्तमान आयु x वर्ष हो, तो 2 वर्ष पश्चात् उसकी आयु क्या होगी?

मनीषा ने उत्तर दिया कि 2 वर्ष बाद उसकी उम्र $(x + 2)$ वर्ष होगी।

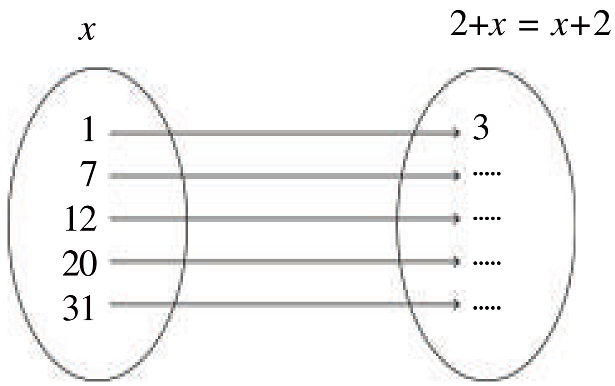
यदि हम x का मान अलग–अलग रखें तो $(x + 2)$ का मान भी भिन्न–भिन्न होगा।

यदि $x = 3$ हो, तो $x + 2 = 3 + 2 = 5$ वर्ष

$x = 8$ हो, तो $x + 2 = 8 + 2 = 10$ वर्ष

$x = 5$ हो, तो $x + 2 = 5 + 2 = 7$ वर्ष

निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



इस प्रकार हम पाते हैं कि $2x$ जहाँ x के दुगुने को प्रदर्शित करता है वहाँ $(2+x)$, x से 2 अधिक को प्रदर्शित करता है

यदि $x = 0$, तो $2x = 2 \times 0 = 0$

यदि $x = 0$, तो $2+x = 2 + 0 = 2$

अत : $\boxed{2x \neq 2+x}$

एकपदीय व्यंजक का बहुपदीय व्यंजक के साथ गुणा

कक्षा सातवी में हमने किसी एकपदीय बीजीय व्यंजक का किसी द्विपदीय बीजीय व्यंजक से गुणा करना सीखा है।

आइए, एक पदीय व्यंजक का, द्विपदीय व्यंजक के साथ गुणा हम एक क्रियाकलाप के माध्यम से पुनः दोहरा लेते हैं।

क्रियाकलाप 2.

आगे दी गई तालिका में एक पदीय व्यंजक का द्विपदीय व्यंजक के साथ गुणनफल दिया है। कुछ रिक्त स्थान दिए गए हैं उनकी पूर्ति कीजिए।

सारणी 4.2

क्र.सं.	एक पदीय व्यंजक	द्विपदीय व्यंजक	एक पदीय **x** द्विपदीय व्यंजक	गुणनफल
1	x	a + b	x(a + b)	ax + bx
2	−4y	3a + b	----------	----------
3	xy	7 + 8x	xy(7 + 8x)	----------
4	$2t^2$	$3r^2 - 55$	----------	----------
5	$\frac{1}{2}m$	$m^3 + \frac{3}{2}n$	----------	----------
6	4a	$5x - \frac{1}{2}y$	----------	----------

इसी तरीके से हम किसी एक पदीय व्यंजक का गुणा किसी बहुपदीय व्यंजक से कर सकते हैं।

अथवा $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

$(b + c + d)\,a = ba + ca + da$

इसी प्रकार $a(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae$

या $(b + c + d + e)\,a = ba + ca + da + ea$

उदाहरण 1. $2a(a + 2b + 5c) = 2a\cdot a + 2a\cdot 2b + 2a\cdot 5c$

$= 2a^2 + 4ab + 10ac$

उदाहरण 2. $(2q + r + 3s - t)\,p = 2q\cdot p + r\cdot p + 3s\cdot p - t\cdot p$

$= 2pq + pr + 3ps - pt$

उदाहरण 3. $(xy + 2y^2z + x^2)\,yz^2 = xy\cdot yz^2 + 2y^2z\cdot yz^2 + x^2\cdot yz^2$

$= xy^2z^2 + 2y^3z^3 + x^2yz^2$

क्रियाकलाप 3.

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

सारणी 4.3

क्र.सं.	बीजीय व्यंजकों का गुणा	गुणन प्रक्रिया	गुणनफल
1.	(2a +b + c) 5d	2a × 5d + b × 5d + c × 5d	10ad + 5 bd + 5 cd
2.	$7a^2$ (b + 2d – t)	....	....
3.	..... (x^2 + xy + z)	p × x^2 + p × xy + p × z	p x^2 + ...
4.	–5 m (....+....+ b)	....	$-5m^2 - 10mn - 5mb$
5.	$7p^2m\,(m + n^3 + p)$	....	....

आइए, अब हम दो द्विपदीय व्यंजकों को आपस में गुणा करने पर विचार करें–

दो द्विपदीय व्यंजकों का गुणा

दो द्विपदीय व्यंजकों का आपस में गुणा दो एकपदीय व्यंजकों का द्विपदीय व्यंजकों से गुणा के योग के समान है।

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= a(c + d) + b(c + d)\\ &= (ac + ad) + (bc + bd)\\ &= ac + ad + bc + bd\end{aligned}$$

इसे हम निम्न प्रकार से भी हल कर सकते हैं:–

$$\begin{aligned}&(a + b)(c + d)\\ &= (a + b)c + (a + b)d\\ &= ac + bc + ad + bd\end{aligned}$$

इस प्रक्रिया में गुणा का योग पर वितरण के नियम का दो बार उपयोग होता है ।

उदाहरण 4. $(5x + 3y)$ एवं $(4x + 5y)$ को आपस में गुणा कीजिए।

हल: $(5x + 3y)(4x + 5y) = 5x(4x + 5y) + 3y(4x + 5y)$

[$(a + b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$ के प्रयोग से]

$= 5x \cdot 4x + 5x \cdot 5y + 3y \cdot 4x + 3y \cdot 5y$

[$a(b + c) = ab + ac$ के प्रयोग से]

$= 20x^2 + 25xy + 12yx + 15y^2$

$= 20x^2 + 37xy + 15y^2$

इसे निम्न प्रकार से भी हल किया जा सकता है–

$(5x + 3y)(4x + 5y) = (5x + 3y) \cdot 4x + (5x + 3y) \cdot 5y$

[$(a + b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d$ के प्रयोग से]

$= 5x \cdot 4x + 3y \cdot 4x + 5x \cdot 5y + 3y \cdot 5y$

[$(a + b)c = ac + bc$ के प्रयोग से]

$= 20x^2 + 12yx + 25xy + 15y^2$

$= 20x^2 + 37xy + 15y^2$

उदाहरण 5. $(3s^2 + 2t)$ एवं $(2r^2 + st)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए –

हल: $(3s^2 + 2t)(2r^2 + st) = 3s^2 \cdot (2r^2 + st) + 2t \cdot (2r^2 + st)$

[$(a + b)(c + d) = a(c+d) + b(c+d)$ के प्रयोग से]

$= 3s^2 \cdot 2r^2 + 3s^2 \cdot st + 2t \cdot 2r^2 + 2t \cdot st$

[$a(b + c) = ab + ac$ के प्रयोग से]

$= 6s^2r^2 + 3s^3t + 4tr^2 + 2st^2$

उदाहरण 6. $(5x + 3y)$ और $(x + y)$ का आपस में गुणा कीजिए एवं $x = 3, y = -2$ के लिए गुणनफल की जाँच कीजिए।

हल: $(5x + 3y)(x + y) = 5x(x + y) + 3y(x + y)$

$= 5x \cdot x + 5x \cdot y + 3y \cdot x + 3y \cdot y$

$= 5x^2 + 5xy + 3xy + 3y^2$

$(5x + 3y)(x + y) = 5x^2 + 8xy + 3y^2$

जाँच: बायाँ पक्ष $= (5x + 3y)(x + y)$

$[x = 3, y = -2$ रखने पर $]$

$= [5(3) + 3(-2)](3-2)$

$= [15-6](1)$

$= 9 \times 1 = 9$

दायाँ पक्ष $= 5x^2 + 8xy + 3y^2$

$= 5(3)^2 + 8(3)(-2) + 3(-2)^2$

$= 5(9) - 48 + 3(4)$

$= 45 + 12 - 48$

$= 57 - 48 = 9$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

क्रियाकलाप 4.

गुणा की प्रक्रिया के अनुसार सारणी में दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

सारणी 4.4

दो बीजीय व्यंजकों का गुणा	गुणा की प्रक्रिया		प्राप्त गुणनफल
	वितरण नियम के प्रयोग से	वितरण नियम के पुनः प्रयोग से	
1. $(a + b)(c + d)$	$a(c + d) + b(c + d)$ या $(a+b)c + (a+b)d$	$ac + ad + bc + bd$ या $ac + bc + ad + bd$	$ac+ad+bc+bd$ $ac+bc+ad+bd$
(a) $(4x+5y)(2x+3y)$	$4x(2x+3y)+5y(2x+3y)$	$4x\times2x+4x\times3y+5y\times2x+5y\times3y$	$8x^2+22xy+15y^2$
(b) $(5x^2+2s)(2t+5)$	....	....	....
(c) $(2r^2+5s^3)(r^2+t^3)$	....	....	....
2. $(a + b)(c - d)$	$a(c - d) + b(c - d)$	$ac - ad + bc - bd$	$ac-ad+bc-bd$
(a) $(b+2c)(3b - c)$	....	....	....
(b) $(5x+3y)(2y^2 - z)$	....	....	....
3. $(a - b)(c + d)$	$a(c + d) - b(c + d)$	$ac + ad - bc - bd$	$ac+ad-bc-bd$
(a) $(2x-3y)(3x+z)$	....	....	....
(b) $(5p-2q)(3x+4s)$	....	....	....
4. $(a - b)(c - d)$	$a(c - d) - b(c - d)$	$ac - ad - bc+bd$	$ac-ad-bc+bd$
(a) $(2s-3p)(4x-5t)$	....	....	....
(b) $(x^2+xy)(y^2-z)(y^2-z)$	....	....	....

प्रश्नावली 4.1

प्र.1 निम्न पदों का आपस में गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(2x + 7)(3x + 2)$ (ii) $(3x - 5)(2x + 9)$

(iii) $(7x - 6)(15x - 2)$ (iv) $\left(\frac{1}{2}x + 5y\right)\left(3x - \frac{6}{5}y\right)$

(v) $(x + 5y)(7x - y)$

प्र.2 मान ज्ञात कीजिए –

(i) $(x + y)(2y + 3x) + (3x + y)(y+2x)$ (ii) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\right)$

(iii) $(x^2 + y^2)(3x - 5y)$ (iv) $(a + b)(a + b)$

प्र.3 $(x + y)$ और $(3y + 4x)$ का आपस में गुणा कीजिए एवं नीचे दिए मानों के लिए सत्यापन कीजिए –

(i) $x = 2,\ y = -1$

(ii) $x = 1,\ y = 0$

बीजीय व्यंजकों के भाग

आप किसी एक पूर्णांक से किसी दूसरे पूर्णांक का गुणा व भाग करना जानते हैं। आइए, कुछ उदाहरण देखें –

1. $6 \times 8 = 48$ तो $48 \div 8 = 6$ तथा $48 \div 6 = 8$
2. $-15 \times 3 = -45$ तो $-45 \div -15 = 3$ तथा $-45 \div 3 = -15$
3. $m \times n = mn$ तो $mn \div m = n$ तथा $mn \div n = m$

एक पदीय व्यंजक का एक पदीय व्यंजक से भाग

आइए, प्रारम्भ में हम एक पदीय व्यंजक का एक पदीय व्यजंक से भाग देना जाने।

उदाहरण 7. $18x^2y$ में $6xy$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ $18x^2y \div 6xy = \dfrac{18x^2y}{6xy}$

$$= \frac{18}{6} \times \frac{x^2}{x} \times \frac{y}{y} = 3 \times \frac{x \times \cancel{x}}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}} = 3x$$

उदाहरण 8. $-35mn^2p$ में $7np$ का भाग दीजिए।

हल : $-35mn^2p \div 7np = \dfrac{-35mn^2p}{7np}$

$$= \frac{-35}{7} \times \frac{m}{1} \times \frac{n^2}{n} \times \frac{p}{p} = -5 \times m \times \frac{n \times \cancel{n}}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{p}}{\cancel{p}} = -5mn$$

इस प्रकार आपने देखा कि भाग की क्रिया हम निम्न पदों में करते हैं –

1. यदि भाज्य और भाजक के चिन्ह समान हों, तो भागफल के चिह्न धनात्मक होता है।
2. यदि भाज्य और भाजक के चिन्ह असमान हों, तो भागफल का चिह्न ऋणात्मक होता है।
3. भाज्य के गुणांक में भाजक के गुणांक का भाग देते हैं।
4. भागफल में किसी चरांक का घात ज्ञात करने के लिए घातांक नियम $a^m \div a^n = a^{m-n}$ का उपयोग करते हैं। आइए, निम्न उदाहरण द्वारा समझें :–

उदाहरण 9. $-25a^3b^2c$ में $-5ab^2c$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ $-25a^3b^2c \div -5ab^2c = \dfrac{-25a^3b^2c}{-5ab^2c}$

$$= \frac{-25}{-5} \times \frac{a^3}{a} \times \frac{b^2}{b^2} \times \frac{c}{c}$$

$$= 5 \times a^{3-1} \times b^{2-2} \times c^{1-1} \quad [\therefore a^m \div a^n = a^{m-n}]$$

$= 5a^2b^0c^0 = 5a^2$ {चूंकि $b^0 = 1, c^0 = 1$}

क्रियाकलाप 5.

निम्न सारणी में दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

सारणी 4.5

क्र.सं.	पहली संख्या × दूसरी संख्या	दोनों संख्याओं के गुणनफल का मान	भाग संक्रिया के रूप में दर्शाना: पहली विधि	भाग संक्रिया के रूप में दर्शाना: दूसरी विधि
1.	$3x \times 4y$	$12xy$	$12xy \div 3x = 4y$	$12xy \div 4y = 3x$
2.	$2x \times (-7x)$	$-14x^2$	------------------	------------------
3.	$m \times 4n$	$4mn$	------------------	------------------
4.	$18a^2 \times 2b^2$	--------------	------------------	------------------
5.	$13p^2 \times 7pq$	$91p^3q$	------------------	------------------

इस प्रकार, हम देखते है कि $3x$ एवं $4y$ का गुणा करने पर $12xy$ प्राप्त होता है तथा $12xy$ में $3x$ का भाग देने पर $4y$ तथा $12xy$ में $4y$ का भाग देने पर $3x$ प्राप्त होता है। अतः गुणा एवं भाग एक दूसरे की विपरीत क्रियाएं हैं।

बहुपदीय व्यंजकों का एकपदीय व्यंजक से विभाजन

आपने एकपदीय का एकपदीय व्यंजक से विभाजन तो जान लिया। आइए, अब निम्न उदाहरणों में बहुपदीय व्यंजकों का एकपदीय व्यंजकों से विभाजन देखें –

उदाहरण 10. $16m^2 + 4mn - 12mn^2$ को $2m$ से भाग दीजिए।

हल : $(16m^2 + 4mn - 12mn^2) \div 2m$

$$= \frac{16m^2 + 4mn - 12mn^2}{2m}$$

$$= \frac{16m^2}{2m} + \frac{4mn}{2m} - \frac{12mn^2}{2m}$$

$$= 8m^{2-1} + 2m^{1-1}n - 6m^{1-1}n^2$$

$$= 8m + 2n - 6n^2$$

यहाँ बहुपदीय व्यंजक को अलग–अलग एकपदीय व्यंजक में बदलकर भाग की क्रिया की गई है।

प्रश्नावली 4.2

प्र.1. मान ज्ञात कीजिए –

(i) $(18x^2y^2) \div (-6xy)$ (ii) $(-15x^3y^2z) \div (-5x^2yz)$

(iii) $(-x^5y^7) \div -x^4y^5)$ (iv) $(32a^4b^2c) \div (-8abc)$

(v) $(28a^4b^6c^8) \div (-7a^2b^4c^6)$

प्र.2. भाग दीजिए।

(i) $2x^4-6x^3+4x^2$ को $2x^2$ से

(ii) $5a^4b^3-10a^3b^2-15a^2b^2$ में $-5a^2b^2$ का

(iii) $27a^4-36a^2$ को $-9a$ से

(iv) $x^4+2x^3-2x^2$ को $4x^2$ से

(v) $a^2+ab+ac$ को a से

92KBQH

बहुपदीय में द्विपदीय का भाग

आप किसी एक पदीय या बहुपदीय व्यंजक में एक पदीय व्यंजक का भाग देना जान चुके हैं। आइए, निम्न उदाहरण को देखें –

उदाहरण 11. $18a^2 + 12a + 27a^3 + 8$ में $3a + 2$ का भाग दीजिए।

हल : सर्वप्रथम दिये गये बहुपदीय व्यंजक $18a^2 + 12a + 27a^3 + 8$ को घात के घटते हुए क्रम में लिख लेते हैं।

जैसे, $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$

चरण 1. यहाँ भाज्य का पहला पद $27a^3$ है। इसमें भाजक के पहले पद 3a का भाग देते हैं –

$$3a+2\overline{)27a^3+18a^2+12a+8}$$

$$\frac{27a^3}{3a}=9a^2$$

और $9a^2$ को भागफल में लिख लेते हैं।

चरण 2. अब $9a^2$ को पूरे भाजक से गुणा करते है।

अतः $9a^2(3a+2) = 27a^3 + 18a^2$

यहाँ $27a^3 + 18a^2$ को भाज्य में सजातीय पदों के नीचे लिखते है और घटा देते है।

अर्थात् नीचे वाले पद के चिह्न बदल देते है।

$$\begin{array}{r} 9a^2 \qquad\qquad\qquad \\ 3a+2\overline{)\;27a^3+18a^2+12a+8} \\ \underline{\pm\cancel{27a^3}\pm\cancel{18a^2}} \qquad\qquad\quad \end{array}$$

चरण 3. घटाने के बाद शेष बची संख्या को नीचे लिख लेते हैं।

$$\begin{array}{r} 9a^2 \qquad\qquad\qquad \\ 3a+2\overline{)\;\cancel{27a^3}+\cancel{18a^2}+12a+8} \\ \pm 27a^3\pm 18a^2 \qquad\qquad\quad \\ \hline +12a+8 \end{array}$$

चरण 4. अब शेष भाज्य के पहले पद 12a में भाजक के पहले पद 3a का भाग देते हैं।

$12a \div 3a = 4$

+4 को भागफल में लिखते है तथा +4 का पुनः पूरे भाजक में गुणा करते है।

अतः $4(3a+2) = 12a+8$

$$\begin{array}{r} 9a^2 \qquad\qquad\qquad \\ 3a+2\overline{)\;27a^3+18a^2+12a+8} \\ \pm \cancel{27a^3}\pm \cancel{18a^2} \qquad\qquad\quad \\ \hline +12a+8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9a^2+4 \qquad\qquad\quad \\ 3a+2\overline{)\;27a^3+18a^2+12a+8} \\ \pm 27a^3\pm 18a^2 \qquad\qquad\quad \\ \hline +\cancel{12a}+\cancel{8} \\ \underline{\pm 12a\pm 8} \\ 0 \end{array}$$

चरण 5. भाज्य में सजातीय पदों के नीचे 12a + 8 को लिख लेते है एवं घटा देते है।

चरण 6. यहाँ घटाने पर शेषफल शून्य बचता है।

$$\begin{array}{r} 9a^2+4 \qquad\qquad\quad \\ 3a+2\overline{)\;27a^3+18a^2+12a+8} \\ \pm \cancel{27a^3}\pm \cancel{18a^2} \qquad\qquad\quad \\ \hline 0 \;+\; 0 \quad +12a+8 \\ \underline{\pm\cancel{12a}\pm\cancel{8}} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

चरण 7. $\therefore$ अभीष्ट भागफल $= 9a^2 + 4$ है।

आप जानते है कि जब किसी एक संख्या में किसी दूसरी संख्या का पूरा–पूरा भाग जाता है और शेषफल शून्य बचता है तो दूसरी संख्या पहली संख्या का गुणनखण्ड कहलाती है।

यहाँ $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$ में $(3a + 2)$ का पूरा–पूरा भाग देने से शेषफल शून्य बचता है अतः $(3a+2)$, $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$ का एक गुणनखण्ड होगा।

आइए, एक और उदाहरण देखते हैं –

उदाहरण 12. $-12x^3 - 8x^2 - 5x + 10$ को $(2x - 3)$ से विभाजित कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{l}
2x-3)\,-12x^3-8x^2-5x+10\,(-6x^2-13x-22\\
\quad\;\;\underline{\mp 12x^3 \pm 18x^2}\\
\qquad\quad -26x^2-5x+10\\
\qquad\quad \underline{\mp 26x^2 \pm 39x}\\
\qquad\qquad\quad -44x+10\\
\qquad\qquad\quad \underline{\mp 44x \pm 66}\\
\qquad\qquad\qquad\quad -56
\end{array}$$

यहाँ भी पूर्व की भाँति भाग दिया गया है। परन्तु शेषफल -56 है, शून्य नहीं।

अतः हम कह सकते है कि $(2x - 3)$ व्यंजक $-12x^3 - 8x^2 - 5x + 10$ का एक गुणनखण्ड नहीं है।

उदाहरण 13. $8q^3 + 2q - 8q^2 - 1$ में $4q + 2$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ q के घात घटते क्रम में नहीं है, अतः पहले व्यंजक को घटते क्रम में लिखने पर $8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2q^2-3q+2\\ \hline
4q+2 & 8q^3-8q^2+2q-1\\
 & \underline{\pm 8q^3 \pm 4q^2}\\
 & \quad -12q^2+2q-1\\
 & \quad \underline{\mp 12q^2 \mp 6q}\\
 & \qquad\quad +8q-1\\
 & \qquad\quad \underline{\pm 8q \pm 4}\\
 & \qquad\qquad -5
\end{array}$$

यहाँ भी भाग के चरण पूर्व में बताएं अनुसार पूर्ण किए गए है। भाग की क्रिया तब तक करते हैं। जब तक शेषफल में बीजीय चरांक का घात भाजक के बीजीय चरांक के घात से कम न हो जाए।

जांच : भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

इस प्रश्न में,

भाज्य $= 8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

भाजक $= 4q + 2$

भागफल $= 2q^2 - 3q + 2$

शेषफल $= -5$

दायाँ पक्ष = भाजक × भागफल + शेषफल

$= (4q + 2)\cdot(2q^2 - 3q + 2) + (-5)$

$= 4q\,(2q^2 - 3q + 2) + 2\,(2q^2 - 3q + 2) - 5$

$= 8q^3 - 12q^2 + 8q + 4q^2 - 6q + 4 - 5$

$= 8q^3 - 12q^2 + 4q^2 + 8q - 6q - 1$

$= 8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

= बायां पक्ष

अर्थात् **भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल**

अतः प्राप्त भागफल $= 2q^2 - 3q + 2$ और शेषफल $= -5$ सही है।

प्रश्नावली 4.3

प्र.1. निम्नलिखित बहुपद को चर राशि के घातांक के घटते क्रम में लिखिए –

(i) $15x^2 - 3x + 8x^4 - 4x^3 - 15$

(ii) $12m^5 - 9m^3 + 16 - 6m^2 + 8m$

(iii) $9m^4 - 16m^2 - 4m + 16 - m^3$

(iv) $4 - 8y^3 + 12y^4 - 6\,y^2$

प्र.2. भागफल ज्ञात कीजिए एवं बताइये कि क्या भाजक, भाज्य का एक गुणनखण्ड है?

(i) $x^2 - 11x + 30$ को $(x - 5)$ से

(ii) $x^2 + 20x + 91$ में $(x + 7)$ का

(iii) $x^2 - 5x - 6$ में $(x - 6)$ का

(iv) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ को $(x - 4)$ से

(v) $a^2 + 2ab + b^2$ में $(a + b)$ का

प्र.3 भागफल ज्ञात कीजिए एवं बताइए कि भाजक भाज्य का गुणनखण्ड नहीं है ? भागफल एवं शेषफल लिखिए –

(i) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ को $x - 1$ से

(ii) $-12 + 3x^2 - 4x + x^3$ को $x + 5$ से

(iii) $4x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 13x - 6$ को $2x + 3$ से

(iv) $8x^3 - 6x^2 + 10x + 15$ को $4x + 1$ से

प्र.4. भाग देकर जांच कीजिए कि क्या –

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

(i) $m^2 - 3m + 7$ को $m - 2$ से

(ii) $a^3 - 2a^2 + a + 2$ को $a + 2$ से

(iii) $9x^3 + 15x^2 - 5x + 3$ को $3x + 1$ से

(iv) $2x^3 + 3x^2 + 7x + 15$ को $x^2 + 4$ से

92U7S5

हमने सीखा

1. दो एक पदीय व्यंजकों का गुणा करने के लिए पहले उनके गुणांकों का उसके बाद चरांकों का गुणा करते है।
2. एक पदीय व्यंजक का द्विपदीय व्यंजकों से गुणा करने के लिए एक पदीय व्यंजक को, द्विपदीय व्यंजक के प्रत्येक पद से गुणा करते हैं तथा प्राप्त गुणनफलों को जोड़ देते हैं। इस प्रकार वितरण नियम का प्रयोग करते हैं।
3. चराकों का गुणा करते समय घातांक नियम का उपयोग करते है।
4. दो द्विपदीय व्यंजकों का आपस में गुणा करने के लिए दो बार वितरण नियम का प्रयोग करते हैं। जैसे–

$$(a+b)\ (c+d) = a\ (c+d) + b\ (c + d)$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

5. गुणा करते समय यदि बीजीय व्यंजकों के चिह्न समान हो तो व्यंजक के चिह्न धनात्मक होता है एवं असमान चिह्न होने पर ऋणात्मक हो जाता है।
6. भागफल की क्रिया तब तक करते हैं जब तक शेषफल में बीजीय चरांक की घात, भाजक के घात से कम न हो जाये।
7. बहुपदीय व्यंजक में, एक पदीय व्यंजक का भाग देते समय प्रत्येक पद में, एकपदीय व्यंजक का भाग देते हैं।

अध्याय 5

वृत्त एवं उसके अवयव

CIRCLE

9343TS

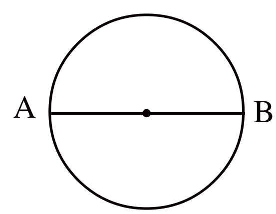
अनु ने कक्षा छठवीं में वृत्त के पाठ में पढ़ा था कि वृत्त के प्रत्येक बिन्दु की केन्द्र से दूरी समान होती है, यह दूरी त्रिज्या कहलाती है। उसको विभिन्न मापों का वृत्त बनाना भी आता है, चूड़ी से वृत्ताकार आकृति बनाना और नये नये डिजाइन बनाना तो उसका प्रिय खेल हैं।

एक दिन उसकी एक चूड़ी टूट गयी उसने चूड़ी के टुकड़ों को निश्चित स्थान में रखकर फिर से चूड़ी बना ली और पेंसिल की सहायता से एक वृत्ताकार आकृति भी बना ली। अनु सोच रही थी कि जिस प्रकार चूड़ी के कई टूकड़े हो सकते है वैसे ही क्या वृत्त के भी कई टुकड़े हो सकते हैं?

आप क्या सोचते है? आप शायद सोच रहे होंगे कि जब चूड़ी के टुकड़े हो सकते हैं, तो वृत्त के क्यों नहीं?

आइये, इन प्रश्नों का उत्तर ढूँढ़े–

कक्षा छठी में आपने पढ़ा है कि वृत्त के किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा, जो वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरती है, व्यास कहलाती है।



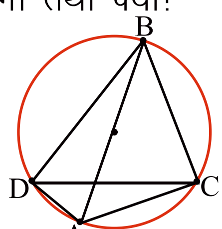
क्रियाकलाप 1.

कागज पर किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए तथा वृत्त के केन्द्र को चिन्हांकित कीजिए। वृत्त में एक व्यास खींचिए। व्यास के सापेक्ष वृत्त को काट लीजिए। क्या कटे हुए दोनों भाग समान है? क्या किसी भी वृत्त को व्यास के सापेक्ष काटने पर वह दो समान भागों में विभाजित होगा?

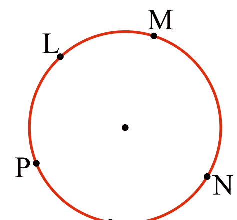
क्या इस प्रकार दो समान भागों में बँटे वृत्तों को अर्द्धवृत्त कह सकते हैं?

क्रियाकलाप 2.

नीचे दिए गए वृत्तों पर कुछ बिन्दुएँ अंकित है। इन्हें मिलाने पर कौनसा रेखाखंड वृत्त को दो अर्द्ध वृत्तों में बाँटेगा तथा क्यों?



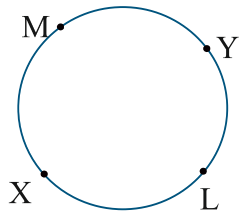
5.1 (i)



5.1 (ii)

चित्र 5.1 (i) में AB व्यास हैं एवं AC, AD, DC, BD और BC जीवाएँ हैं। प्रत्येक जीवा वृत्त

को दो वृत्तखण्डों में बाँटती है, इन वृत्त की परिधि के भाग को चाप कहते हैं। चित्र 5.1 (ii) में ON, NM, ML, PO .... इत्यादि चाप हैं।

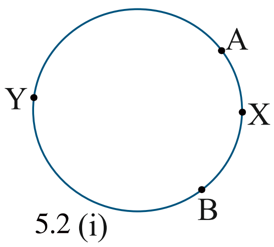


5.1 (iii)

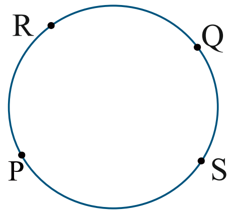
चित्र (iii) में यदि चाप XY कहा जाए तो यह स्पष्ट नहीं होता हैं कि यह कौनसा चाप है। गहरा वाला या हल्का वाला। अतः हम चापों का निर्धारण तीन बिन्दुओं से करते है जैसे चाप XLY या $\overset{\frown}{XLY}$ तथा इसी प्रकार चाप XMY या $\overset{\frown}{XMY}$, चाप $\overset{\frown}{XLY}$ की माप अर्द्धवृत्त से छोटी है, इसलिए इसे लघुचाप कहते है। उसी प्रकार $\overset{\frown}{XMY}$ की माप अर्द्धवृत्त से बड़ी है इसलिए इसे दीर्घचाप कहते है।

क्रियाकलाप 3.

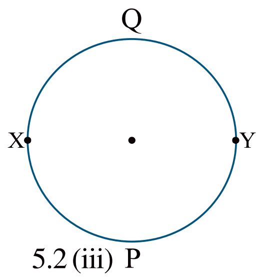
नीचे दिये गये चित्रों में लघु चाप एवं दीर्घ चाप को पहचानिए–



5.2 (i)



5.2 (ii)



5.2 (iii)

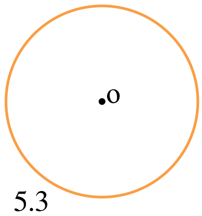
क्या सिर्फ देखकर यह बताया जा सकता है कि कोई चाप दीर्घ चाप है या लघु चाप?

पंकज सोच रहा था कि चित्र 5.2(i) में तो स्पष्ट दिख रहा है कि $\overset{\frown}{AXB}$ लघुचाप तथा $\overset{\frown}{AYB}$ दीर्घचाप है और इसी प्रकार चित्र 5.2 (ii) में $\overset{\frown}{PRQ}$ लघुचाप तथा $\overset{\frown}{PSQ}$ दीर्घचाप है। परंतु 5.2 (iii) में तो यह बताना मुश्किल है कि $\overset{\frown}{XPY}$ और $\overset{\frown}{XQY}$ में कौन सा दीर्घचाप है और कौन सा लघुचाप।

तभी राकेश ने चित्र 5.2 (i) में बिन्दु A और B को वृत्त के केन्द्र बिन्दु O से मिला दिया और यह देखा कि $\angle AOB$ जो कि $\overset{\frown}{AXB}$ की ओर बन रहा है यह $\overset{\frown}{AYB}$ की ओर बने $\angle AOB$ से छोटा है। आप भी चित्र 5.2 (ii) में बिन्दु P और बिन्दु Q को केन्द्र से मिलाइए और केन्द्र पर बने कोणों को नापकर बताइये कि कौन सा चाप, बड़ा और कौन सा चाप छोटा हैं ?

अनु ने चित्र 5.2 (iii) में बिंदु X और Y को केंद्र से जोडा और पाया कि XPY और XQY दोनों ओर बनें कोण समान हैं, अतः दोनों चाप समान है। XOY एक सरल रेखा है अतः $\angle XOY = 180^0$ । इसलिए राकेश ने कहा जिस चाप की तरफ केन्द्र पर बना कोण 180° से कम है, वह चाप लघु चाप और जिस चाप की ओर केन्द्र पर बना कोण 180° से अधिक है, वह चाप दीर्घ चाप कहलाएगा।

अब तो आप चापों को पहचानने लगे हैं, आइए इन्हीं से संबंधित कुछ गतिविधियाँ भी करते हैं–

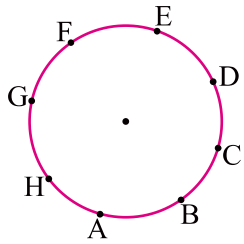


5.3

नीचे एक वृत्त दिया गया है (चित्र5.3) इस वृत्त में कितने चाप बना सकते हैं?

सुरेश सोच रहा था कि एक वृत्त के तो अनगिनत बिन्दु है और किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच का भाग चाप हैं। तब तो किसी वृत्त में भी अनगिनत चाप हो सकते है। सुरेश ने ठीक ही सोचा, एक वृत्त में अनगिनत चाप हो सकते हैं तथा जिस प्रकार अनगिनत बिन्दु है उसी प्रकार इनमें से किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाकर अनगिनत जीवाएँ बन सकती हैं।

रमेश ने एक वृत्त बनाकर उसमें चित्रानुसार (चित्र5.4) बिन्दुओं को अंकित किया और उनमें से दो बिन्दुओं A व C को मिलाकर जीवा AC प्राप्त की।



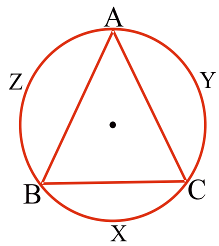
5.4

इसे देख कर सुरेश ने कहा कि जीवा AC वृत्त के दो वृत्त खण्डों (चापों) में विभाजित करती है। एक लघुचाप AC और दूसरा दीर्घ चाप AC। लघु चाप AC को तो $\overset{\frown}{ABC}$ लिखते है क्योंकि इस चाप में बिन्दु B सम्मिलित है, परन्तु दीर्घ चाप AC में बहुत सारे बिन्दुएँ इसे कैसे लिखा जाए?आइये सोचते है।

आप भी सोचिए ?

दीर्घ चाप AC को उस वृत्त खण्ड में आए सभी बिन्दुओं को लेकर AHGFEDC लिखना होगा। इस चाप को भी लघु चाप AC ($\overset{\frown}{ABC}$) की तरह $\overset{\frown}{AHC}$ या $\overset{\frown}{AGC}$ या .... या $\overset{\frown}{ADC}$ लिख सकते हैं जो कि उस दीर्घ वृत्त खंड को दर्शाते हैं।

चाप (वृत्तखण्ड) द्वारा वृत्त पर बनाया गया कोण –

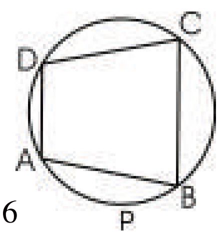


5.5

चित्र (5.5) में एक Δ ABC दिया गया है जिसके सभी शीर्ष A,B व C वृत्त पर स्थित है। यहाँ $\overset{\frown}{BXC}$ द्वारा वृत्त के बिन्दु A पर $\angle$BAC बनाया गया है। क्या आप $\overset{\frown}{CYA}$ और $\overset{\frown}{AZB}$ द्वारा वृत्त पर बने कोणों को पहचान सकते हैं? कोणों को पहचान कर लिखिए।

क्रियाकलाप 4.

नीचे दिए गए चतुर्भुज ABCD के चारों शीर्ष A,B,C व D वृत्त पर स्थित है। इस वृत्त में किस चाप द्वारा वृत्त पर कौन सा कोण अंतरित किया जा रहा है, पहचान कर लिखिए–

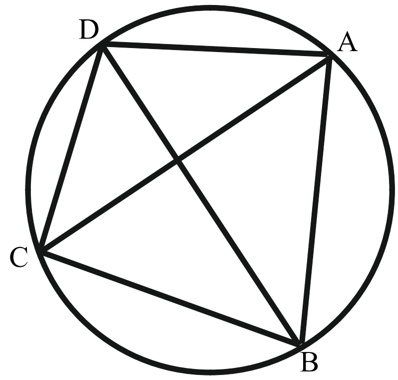


5.6

क्र. स.	बिन्दु जिनके बीच चाप बना है	लघुचाप का नाम	लघुचाप द्वारा वृत्त पर बना कोण	दीर्घ चाप का नाम	दीर्घ चाप द्वारा वृत्त पर बना कोण
1.	A एवं B	APB	कोई कोण नहीं	ADB या ACB	कोई कोण नहीं
2.	A एवं C				
3.					
4.					
5.					
6.					

प्रश्नावली 5.1

1. संलग्न चित्र से संबंधित निम्न प्रश्नों का उत्तर ढूँढिए–



(i) $\overset{\frown}{ABC}$ **लघु/दीर्घ चाप है**

(ii) $\overset{\frown}{BCD}$ **लघु/दीर्घ चाप है**

(iii) लघु चाप $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा अंतरित कोणों के नाम लिखिए।

(iv) $\angle ACB$ किस चाप द्वारा बना है?

(v) $\angle CBA$ किस चाप द्वारा बना है?

(vi) $\angle CBD$ और $\angle CAD$ किस चाप द्वारा बने हैं।

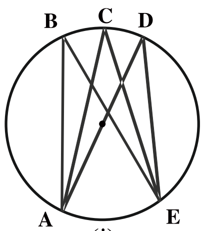
(vii) चापों द्वारा बिन्दु D पर बने कोणों के नाम लिखिए।

वृत्त के किसी चाप द्वारा वृत्त पर बनने वाले सभी कोणों को आपने पहचान लिया है, आइए इन कोणों के बीच संबंध ढूंढें।

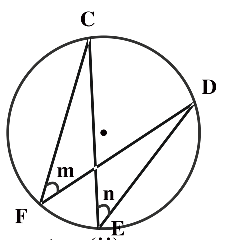
वृत्तखण्ड के कोणों के गुण

क्रियाकलाप 5.

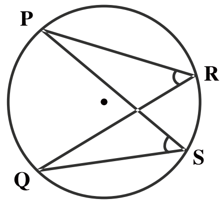
दिए गए प्रत्येक चित्र में एक चाप द्वारा वृत्त पर कई कोण बनाए गए हैं। उन कोणों को माप कर सारणी को पूरा कीजिए।



5.7 (i)



5.7 (ii)



5.7 (iii)

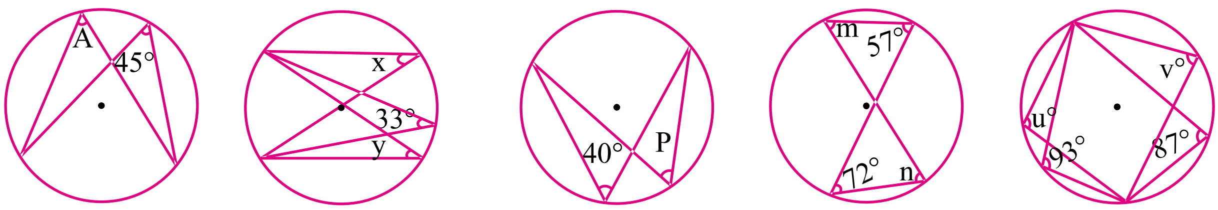
क्र.सं.	चित्र क्र.	चाप का नाम	चाप द्वारा वृत्त पर बने कोणों के नाम एवं उनका माप		
			1	2	3
1.					
2.					
3.					

उपरोक्त क्रियाकलापों को करते हुए शैली ने देखा कि किसी भी चाप द्वारा उसके सम्मुख वृत्तखण्ड पर जितने भी कोण बनाए जाते है वे सभी एक ही माप के हैं अर्थात् किसी चाप द्वारा एक ही वृत्तखण्ड में बने कोण बराबर होते है।

आप भी ऐसे ही कई वृत्त लेकर उनमें चाप खींचिए तथा उन चापों द्वारा सम्मुख वृत्तखण्डों पर कई कोण बनाइए और अपने साथियों से नपवाकर देखिए कि क्या एक ही चाप से बने सभी कोण समान हैं

प्रश्नावली 5.2

निम्न चित्रों में अंग्रेजी के अक्षरों द्वारा दर्शाए गए कोणों के माप चाँदा से बिना मापे ज्ञात कीजिए–



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

A = ... x = ... p = ... m = ... u = ...

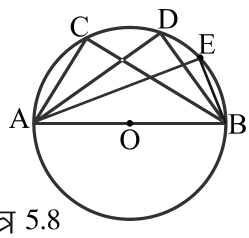
y = ... n = ... v = ...

क्रियाकलाप 6.

O केन्द्र वाले वृत्त में व्यास AOB खींचिए। व्यास के ऊपर वाले अर्द्धवृत्त पर बिन्दु C,D,E लीजिए। तथा $\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$ बनाइए। चाँदे की सहायता से इन कोणों को मापिए और उनका मान लिखिए–

$\angle ACB$ = ..., $\angle ADB$ = ..., $\angle AEB$ = ...

इन कोणों के माप से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? ....



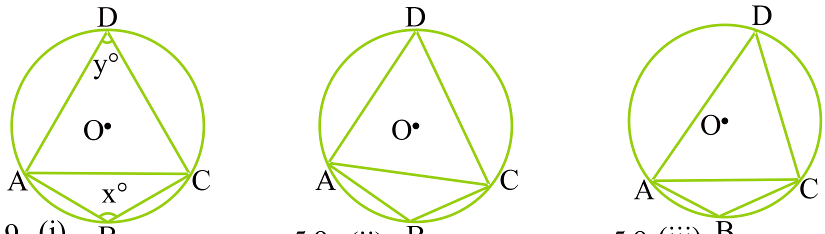
चित्र 5.8

अवलोकन पश्चात आप पायेंगे कि सभी कोण समकोण हैं अर्थात् **अर्द्धवृत्त का कोण समकोण होता है।**

वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं द्वारा लघु वृत्तखण्ड एवं संगत दीर्घ वृत्तखण्ड के कोण–

क्रियाकलाप 7.

केन्द्र O लेकर, एक वृत्त बनाइए। वृत्त पर दो बिन्दु A और C लीजिए जिससे यह एक लघु वृत्तखण्ड ABC तथा एक दीर्घवृत्त खण्ड ADC में बँट जाए।



5.9 (i) 5.9 (ii) 5.9 (iii)

लघुवृत्तखण्ड का कोण ∠ABC है तथा संगत दीर्घवृत्त खण्ड का कोण ∠ADC है। इन्हें मापकर निम्न सारणी पूर्ण कीजिए।

क्र.सं.	लघुवृत्तखण्ड का कोण x°	संगत दीर्घ–वृत्तखण्ड का कोण y°	$x^\circ + y^\circ$
1.	----------------------	-------------------------------------	---------------
2.	----------------------	-------------------------------------	---------------
3.	----------------------	-------------------------------------	---------------

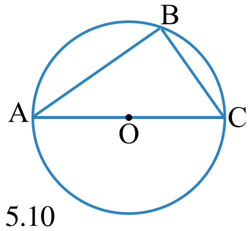
सारणी पूर्ण करने के पश्चात आप पायेगें कि जीवा के दोनों ओर के वृत्तखण्ड़ों में बने कोणों का योगफल 180° होता है।

प्रश्नावली 5.3

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

1. लघु वृत्तखण्ड का कोण ––––––––– है। (न्यून कोण / अधिक कोण)
2. दीर्घ–वृत्तखण्ड का कोण ––––––––– है। (न्यून कोण / अधिक कोण)
3. एक ही वृत्त में लघुवृत्तखण्ड एवं संगत दीर्घ वृत्तखण्ड में बने कोणों का योग –––––– होता है। (180° / 270° / 360°)

उदाहरण 1. नीचे दिए गये आकृति में वृत्त का केन्द्र O है यदि $\angle C = 55^\circ$ है तो $\angle BAC$ का मान ज्ञात कीजिए–



5.10

हल: AC व्यास है। (वह केन्द्र O से गुजरता है।) अत: ∠ABC अर्द्धवृत्त का कोण है। जो कि समकोण होता है। अर्थात् ∠B या $\angle ABC = 90^\circ$

अत: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (∵ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।)

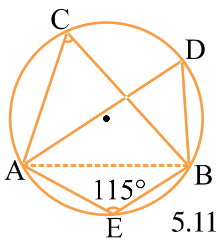
$= \quad \angle A + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

$= \quad \angle A + 145^\circ = 180^\circ$

$= \quad \angle A = 180^\circ - 145^\circ$

$= \quad \angle A = 35^\circ$ उत्तर

उदाहरण 2. दिये गये चित्र में $\angle AEB=115^\circ$ तो $\angle ACB$ तथा $\angle ADB$ ज्ञात कीजिए।



5.11

हलः दिया है – $\angle AEB = 115^\circ$

ज्ञात करना है – $\angle ACB$ तथा $\angle ADB$

चूँकि जीवा के दोनों ओर के वृत्तखण्ड़ों में बने कोणों का योग 180^0 होता है। अतः

$\angle AEB + \angle ACB = 180^\circ$

$115^\circ + \angle ACB = 180^\circ$

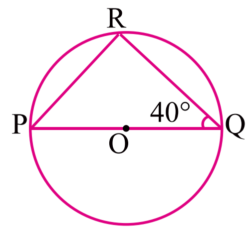
$\angle ACB = 180^\circ - 115^\circ$

$\angle ACB = 65^\circ$

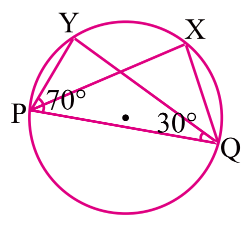
हम जानते है कि किसी चाप द्वारा एक ही वृत्तखण्ड पर बनाए गए कोण बराबर होते है अतः $\angle ACB = \angle ADB = 65^\circ$

प्रश्नावली 5.4

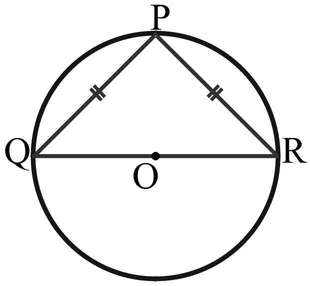
प्रश्न 1 सामने दिए चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle PRQ$ तथा $\angle QPR$ के माप ज्ञात कीजिए।



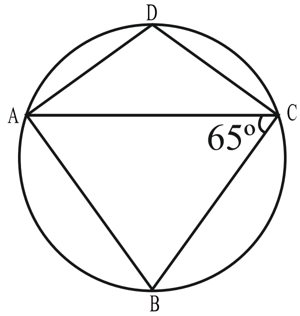
प्रश्न 2 सामने के चित्र में वृत्तखण्ड PQXY में बने $\angle YPQ=70^\circ$ तथा $\angle YQP=30^\circ$ हैं। $\angle PYQ$ तथा $\angle PXQ$ के माप ज्ञात कीजिए।



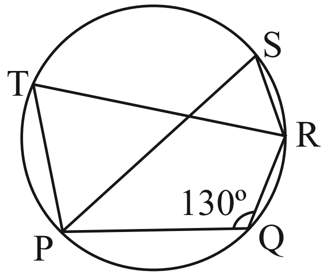
प्रश्न 3 दिए गए चित्र में PQ = PR है तथा O वृत्त का केन्द्र है तो त्रिभुज PQR के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।



प्रश्न 4 सामने चित्र में AB=BC तथा $\angle ACB=65^\circ$ है। $\angle ADC$ की माप ज्ञात कीजिए।



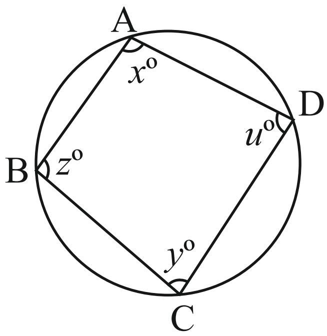
प्रश्न 5 सामने चित्र में $\angle PTR$ और $\angle PSR$ की माप ज्ञात कीजिए। जिसमें $\angle PQR=130^\circ$ है।



क्रियाकलाप–8

अपनी कापी में अलग–अलग माप का वृत्त लेकर दी गई आकृति के अनुसार आकृति बनाइए तथा कोणों को मापकर निम्न सारणी पूर्ण कीजिए।

वृत्त क्र.	x°	y°	$x^\circ+y^\circ$	z°	u°	$z^\circ+u^\circ$
1.						
2.						
3.						
4.						

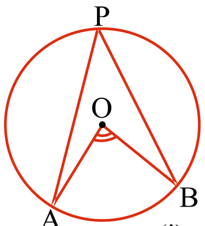


एक ही चाप का कोण और चाप द्वारा केन्द्र पर बनाये गये कोण में संबंध –

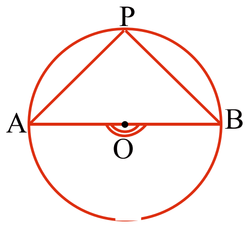
आप चाप $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा केन्द्र O पर बनाए गए $\angle AOB$ को पहचान चुके हैं। आपने चाप $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा शेष वृत्तखण्ड के बिन्दु P पर $\angle APB$ बनाना भी सीख लिया है।

क्रियाकलाप 9

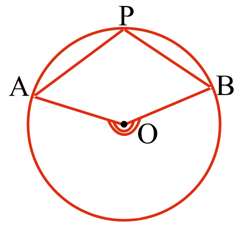
अब चाप AB का केन्द्रीय कोण ∠AOB तथा शेष चाप पर बना कोण ∠APB एक ही वृत्त पर निम्न प्रकार से बनाइए तथा अपनी कॉपी में कई वृत्त बनाकर इन कोणों को मापिए और तालिका पूर्ण कीजिए–



(i)
5.12



(ii)
5.12



(iii)
5.12

आकृति क्रं.	∠AOB की माप	∠APB की माप	2 ∠APB की माप	क्या ∠AOB = 2∠APB
5.12 (i)				
5.12 (ii)				
5.12 (iii)				

आपने क्या देखा?

∠AOB और 2∠APB समान या लगभग समान हैं ?

अत: ∠AOB = 2 ∠APB ....(1)

अर्थात् चाप AB का केन्द्रीय कोण = 2 x (शेष चाप पर बना कोण)

समी. (1) से, ∠APB = ½ ×∠AOB

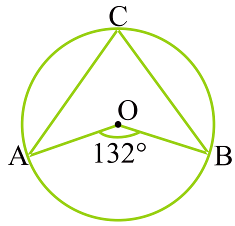
दूसरे शब्दों में, वृत्त में **"किसी चाप द्वारा शेष वृत्तखण्ड के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण, उसी चाप द्वारा केन्द्र पर बने कोण का आधा होता है।"**

अभ्यास

निम्न तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

चाप का केन्द्रीय कोण या अंशीय माप	चाप का कोण या चाप द्वारा शेष वृत्तखण्ड के किसी बिन्दु पर बनाया गया कोण	चाप कैसा है? लघुचाप/अर्धवृत्त/दीर्घचाप
150°	75° (क्यों)	लघुचाप (क्यों)
220°	————————	दीर्घचाप
————————	90°	अर्धवृत्त
————————	————————	दीर्घ चाप
————————	————————	लघु चाप

उदाहरण 3. एक वृत्त के चाप की अंशीय माप 132° है। इसी चाप द्वारा शेष वृत्तखण्ड के किसी बिन्दु पर अंतरित $\angle ACB$ ज्ञात कीजिए।



5.13

हल $\angle AOB = 132^\circ$ (दिया है)

चूंकि $\angle AOB = 2 \times \angle ACB$

या $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

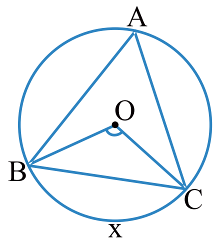
= $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 132^\circ = 66^\circ$

$\because$ $\angle ACB = 66^\circ$

उदाहरण 4.

समबाहु Δ ABC के परिगत वृत्त का केन्द्र O है।

$\angle BOC$ की माप ज्ञात कीजिए।



5.14

हल: Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

अतः $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

$\because$ $\overparen{BxC}$ का केन्द्रीय कोण $= \angle BOC$

$\because$ $\angle BOC = 2 \angle BAC$

= $\angle BOC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

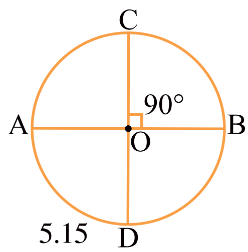
अतः $\angle BOC = 120^\circ$

इस उदाहरण में OA को मिलाने पर $\angle AOC$ और $\angle AOB$ की माप बताइए?

समान चाप, संगत जीवा, चाप की अंशीय माप

क्रियाकलाप 10.

एक सफेद कागज पर 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O है। व्यास AB खींचिए। AB से 90° का कोण बनाते हुए व्यास CD खींचिए।



5.15

आप जानते हैं प्रत्येक वृत्त अपने व्यास के सापेक्ष सममित है अतः दो समकोण बनाते हुए व्यास AB और CD वृत्त को चार समान टुकड़ों में बांट देंगे।

कागज को AB और CD दो बार मोड़ने से प्रत्येक चौथाई भाग एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेगा।

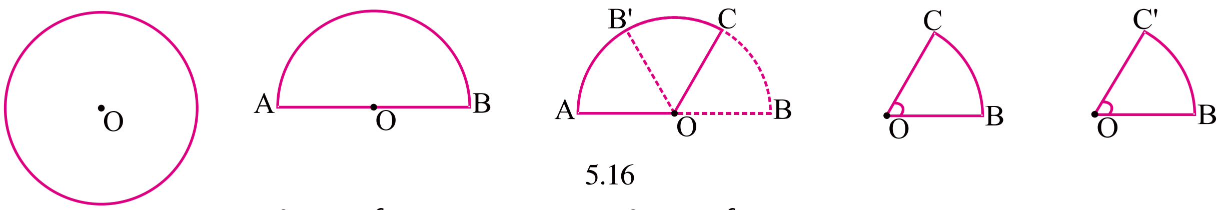
यहाँ चाप AD, DB, BC और CA एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेते हैं। इन चापों का केन्द्रीय कोण 90° है।

अतः लघु $\overparen{AD}$ = लघु $\overparen{DB}$ = लघु $\overparen{BC}$ = लघु $\overparen{CA}$

तो $\angle AOD = \angle DOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$

क्रियाकलाप 11.

O केन्द्र वाला एक वृत्त कागज पर बनाइए। व्यास AB खींचिए। इसे व्यास पर मोड़िये। केन्द्र O से इसे किसी अन्य त्रिज्या OC पर मोड़िये। कैंची से इसे OC पर काट लीजिए। फिर OB पर काटिये इस तरह दो टुकड़े OBC और OBC' दोनों त्रिज्या खण्ड हैं जो बराबर है।



5.16

अब चाप BC की लंबाई = चाप BC' की लंबाई

और $\angle COB = \angle C'OB'$

परिणाम–

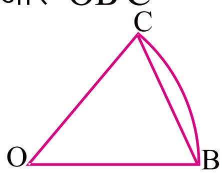
एक ही वृत्त में समान लंबाई के चाप, केन्द्र पर समान कोण बनाते हैं एवं इसका विलोम भी सत्य है अर्थात् **"एक ही वृत्त में केन्द्र पर बराबर कोण बनाने वाले चाप बराबर होते हैं।"** ऊपर लिखे क्रियाकलाप में BC और B'C' को मिलाइए।

अब देखिए ये दोनों त्रिज्याखण्ड OBC और OB'C'

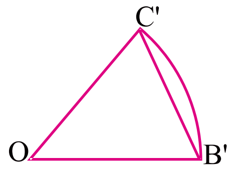
इनमें $\angle COB = \angle C'OB'$

चाप BC = चाप B'C'

जीवा BC = जीवा B'C'



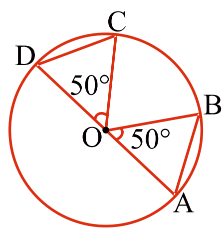
5.17



5.18

अतः समान चाप के संगत जीवाओं की लंबाई समान है एवं इसके विपरीत बराबर जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर होता है।

उदाहरण 5. आकृति में दो त्रिज्याखण्ड AOB तथा COD हैं। $\angle AOB = \angle COD = 50^\circ$ यदि AB=2.5 सेमी तो CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



5.19

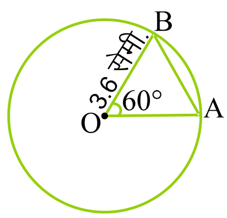
हल : चूँकि समान केन्द्रीय कोण वाले जीवाओं की लम्बाई समान होती है अतः

जीवा AB = जीवा CD

जीवा AB = 2.5 सेमी

अतः जीवा CD = 2.5 सेमी

उदाहरण 6. आकृति में वृत्त की त्रिज्या 3.6 सेमी है तथा $\angle AOB = 60^\circ$ है जीवा AB की लम्बाई तथा $\angle OAB$, $\angle OBA$ की माप ज्ञात कीजिए।



5.20

हलः दिया है त्रिज्या = 3.6 सेमी

OAB में

OA = OB = 3.6 सेमी (त्रिज्याएं)

∴ इन भुजाओं के सामने के कोण बराबर होंगे।

∴ $\angle OBA = \angle OAB = x^{\circ}$ (माना)

ΔOAB में कोणों को योग $= 180^{\circ}$

$\angle BOA + \angle OBA + \angle OAB = 180^{\circ}$

$60^{\circ} + x^{\circ} + x^{\circ} = 180^{\circ}$

$60^{\circ} + 2x^{\circ} = 180^{\circ}$

$2x^{\circ} = 180^{\circ} - 60^{\circ}$

$2x^{\circ} = 120^{\circ}$

$x^{\circ} = \dfrac{120^{\circ}}{2} = 60^{\circ}$

∴ Δ OAB के तीनों कोण $60^{\circ}, 60^{\circ}, 60^{\circ}$ के हैं।

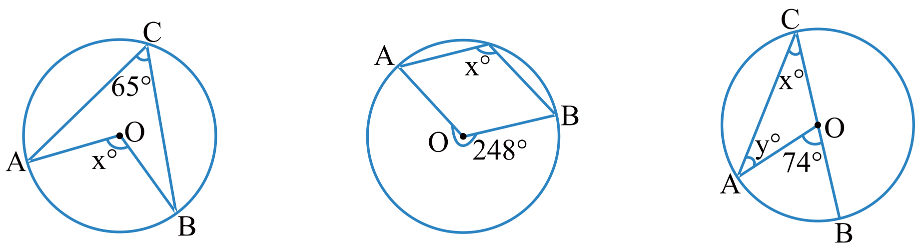
यह एक समबाहु त्रिभुज है।

∴ AB = OB = OA = 3.6 सेमी

अतः जीवा AB = 3.6 सेमी, $\angle OAB = 60^{\circ}$, $\angle OBA = 60^{\circ}$

प्रश्नावली 5.5

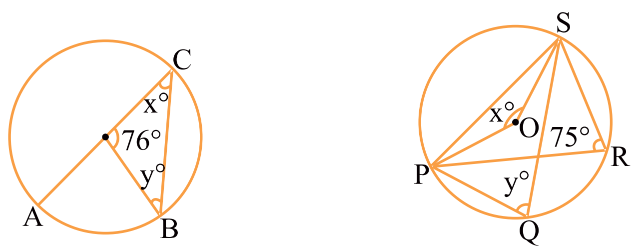
प्रश्न 1 निम्न आकृतियों में x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।



(a) (b) (c)

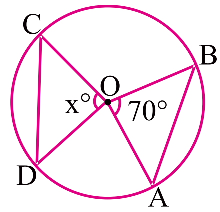
प्रश्न 2 निम्न आकृतियों में x तथा y का मान ज्ञात कीजिए बताइये।

जब (i) $x = y$ (ii) $x = 2y$

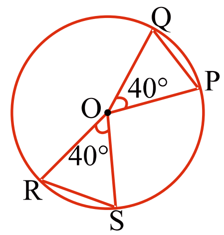


(i) (ii)

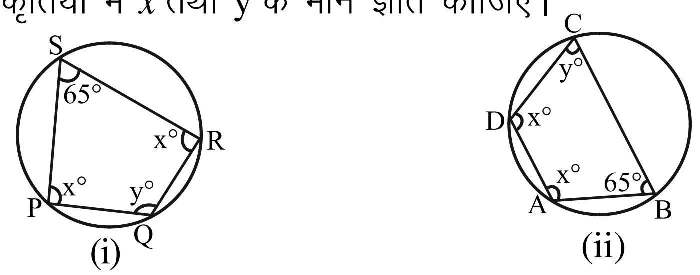
प्रश्न 3 आकृति में AB = CD यदि $\angle AOB = 70^\circ$ तो $\angle COD$ का मान ज्ञात कीजिए।



प्रश्न 4 आकृति में RS = 3.2 सेमी तो PQ की माप क्या होगी?



प्रश्न 5 निम्न आकृतियों में x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।



<u>जीवा</u> – पूर्व में आपने सीखा है कि वृत्त के किन्ही दो बिन्दुओं को मिलाने पर जो रेखाखण्ड प्राप्त होता है उसे जीवा कहते है और सबसे बड़ी जीवा ही व्यास है। आइए जीवा के कुछ गुणों को जाने।

<u>वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब –</u>

क्रियाकलाप 12.

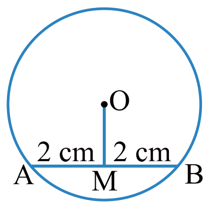
केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त में जीवा AB खींचिए। अब $OM \perp AB$ इस प्रकार खींचिए कि M जीवा AB पर स्थित हो।

अलग–अलग त्रिज्याएँ और केन्द्र लेकर और उनसे वृत्त खींचकर उपर्युक्त क्रिया को दोहराइए।

उन आकृतियों को इसी प्रकार से नामांकित कीजिए।

वृत्तों को 1, 2 व 3 ..... से नामांकित कीजिए।

प्रत्येक स्थिति में AM तथा BM को माप कर सारणी पूर्ण कीजिए।



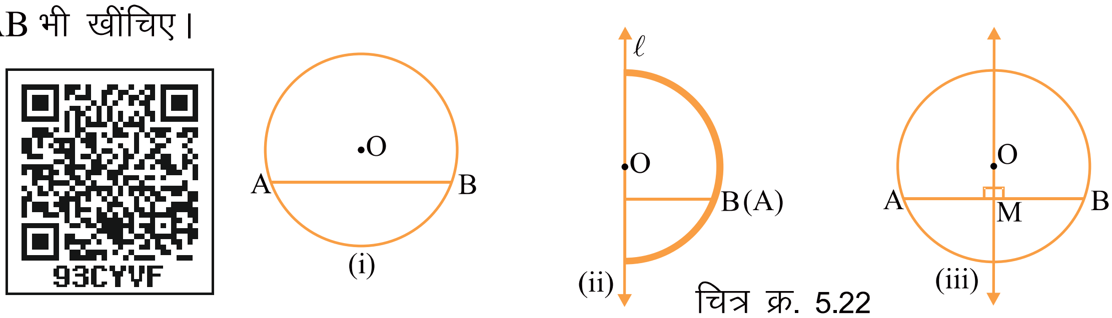
चित्र क्र. 5.21

वृत्त	AM	BM	क्या AM= BM ?
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

आप देखेगें कि प्रत्येक स्थिति में AM तथा BM का समान है अतः AM=BM

क्रियाकलाप 13.

एक मोटा कागज लीजिए और उस पर O केन्द्र वाला एक वृत्त बनाइए। इस वृत्त में जीवा AB भी खींचिए।



चित्र क्र. 5.22

अब वृत्त को इस प्रकार मोड़िए कि A बिन्दु B बिन्दु पर पड़े, रेखा ℓ के अनुदिश मोड़ का निशान प्राप्त करने के लिए कागज को दबाइए मोड़ के निशान को देखने पर पता चलता है कि रेखा ℓ वृत्त केन्द्र O से होकर गुजरती है, तथा दोनों भाग एक दूसरे को पूर्णतया ढँक लेते हैं।

अब कागज को खोलकर ℓ और जीवा AB के प्रतिच्छेद बिन्दु को M से अंकित कीजिए।

$\angle$OMA तथा $\angle$OMB को मापिये, ये दोनों 90° के होंगे। चूंकि AM, BM के संपाती है अतः AM=BM

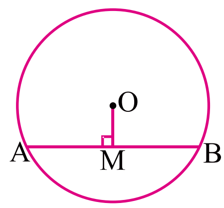
क्रियाकलाप 11 व 12 से स्पष्ट होता है कि –

"वृत्त में उसके केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।"

क्रियाकलाप 14.

केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इसकी एक जीवा AB भी खींचिए। AB को एक बिन्दु M पर समद्विभाजित कीजिए तथा O और M को मिलाइए।

इसी क्रियाकलाप को दोहराकर अन्य वृत्त बनाइए। इन वृत्तों को 1, 2, 3 .... से चिन्हित कीजिए एवं सभी आकृतियों को समान रूप से नामांकित कीजिए।



चित्र क्र. 5.23

प्रत्येक वृत्त में $\angle$OMA को मापिए तथा निम्न सारणी को पूरा कीजिए।

वृत्त	$\angle$OMA	$\angle$OMB	क्या $\angle$OMA= $\angle$OMB ?
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

आप पायेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $\angle$OMA= $\angle$OMB (लगभग 90°) प्राप्त होता है। चूँकि

$\angle OMA$ तथा $\angle OMB$ दोनों जीवा AB के बीच के एक बिन्दु पर बने कोण है अतः उनका योगफल 180° है और साथ ही दोनों कोण बराबर है।

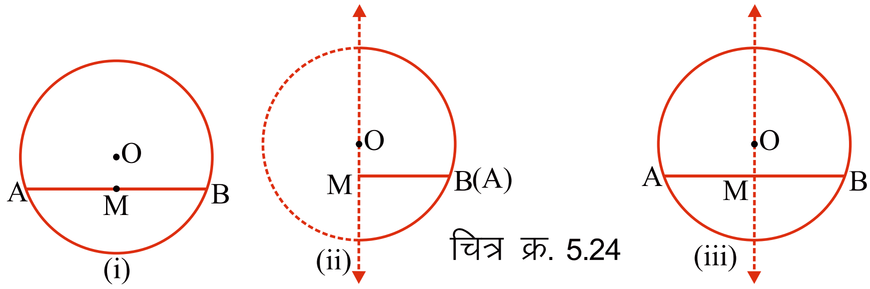
अतः $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$

अर्थात् $OM \perp AB$

अतः "वृत्त की जीवा के मध्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।"

क्रियाकलाप 15.

एक कागज लीजिए और उस पर O केन्द्र वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की एक जीवा AB खीचिंए और उसका मध्य बिन्दु M को चिन्हांकित कीजिए। M और O को मिलाइए, अब रेखा OM के अनुदिश इसे मोड़िए जिससे कि बिन्दु A बिन्दु B पर पड़े।



चित्र क्र. 5.24

अब कागज को खोलिए आप पायेगें कि $\angle OMA$, $\angle OMB$ पर पड़ता है। अतः $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$

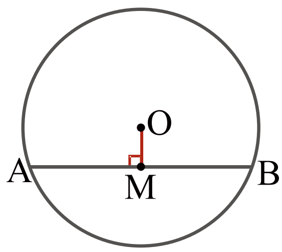
अर्थात् $OM \perp AB$

क्रियाकलाप 13 व 14 से स्पष्ट होता है कि –

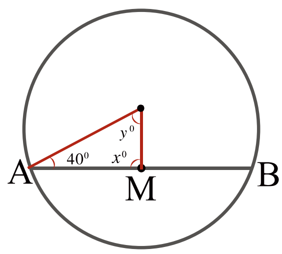
"वृत्त की किसी जीवा के मध्य–बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।"

प्रश्नावली 5.6

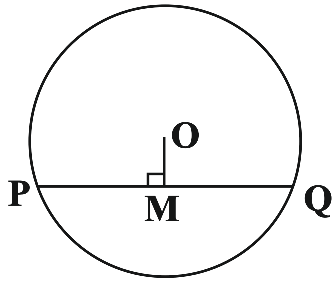
प्रश्न 1. आकृति में $OM \perp AB$. यदि $AM = 3.5$ सेमी. हो, तो BM और AB का मान ज्ञात कीजिए।



प्रश्न 2. आकृति में जीवा AB का मध्य बिन्दु M है, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।



प्रश्न 3. आकृति में $OM \perp PQ$. यदि $PQ = 8$ सेमी. हो, तो PM और MQ का मान ज्ञात कीजिए। क्या $PM=MQ$?



प्रश्न 4.रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(1) वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को .... करता है।

(2) वृत्त में किसी जीवा के मध्य–बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर .... होती है।

हमने सीखा

1. वृत्त के किसी चाप द्वारा शेष वृत्त खण्ड पर बने सभी कोण समान होते हैं।
2. किसी जीवा के दोनों ओर वृत्त खण्डों में बनने वाले कोणों का योगफल 180^0 होता है।
3. वृत्त के किसी चाप द्वारा वृत्त शेष वृत्तखण्ड पर अतंरित कोण चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण का आधा होता है।
4. एक ही वृत्त में समान लम्बाई के चाप केन्द्र पर समान कोण बनाते हैं।
5. किसी वृत्त के केन्द्र से वृत्त के जीवा पर डाला गया उस जीवा को समद्विभाजित करता है।
6. वृत्त की किसी जीवा के मध्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

93VQYQ

अध्याय–6
सांख्यिकी
STATISTICS

9F9ZFA

समान्तर माध्य [MEAN]

जानवरों को पानी पिलाने में राधा बहुत आनन्द अनुभव करती है। वह रोज़ एक बड़ी टंकी में जानवरों के लिए पानी भर देती है और हिसाब भी रखती है कि प्रत्येक दिन सुबह 8 बजे से 11 बजे के बीच कितने जानवर पानी पी रहे हैं। उसके द्वारा लिखे गए पिछले हफ्ते का हिसाब कुछ इस प्रकार है :–

9FIVGX

चित्र 6.1

सोमवार	–	12,	मंगलवार	–	15,	बुधवार	–	13,
बृहस्पतिवार	–	11,	शुक्रवार	–	13,	शनिवार	–	12
रविवार	–	14						

क्या आप बता सकते हैं कि राधा प्रतिदिन औसतन कितने जानवरों को पानी पिलाती है।

क्रिकेट खिलाड़ी A ने अपनी दस पारियों में 60, 70, 15, 90, 72, 45, 11, 77, 125, 200 रन बनाये। इसी तरह खिलाड़ी B ने अपनी छः पारियों में 220, 110, 70, 37, 15, 07 रन बनाये। क्या आप बता सकते है कि किस खिलाड़ी की उपलब्धि अच्छी रही?

इस तरह की तुलना हम औसत निकाल कर आसानी से कर सकते है।

इसी प्रकार दैनिक जीवन में हम कई स्थानों पर औसत का उपयोग करते हैं। जैसे –

(1) आपकी कक्षा में पढ़ने वाले विद्यार्थियों की औसत आयु 14 वर्ष है।
(2) आपका रात में सोने का औसत समय 8 घंटे है।
(3) दैनिक समाचार पत्रों का औसत मूल्य 2.50 रूपये है।
(4) कक्षा में विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 45 है।
(5) इस वर्ष रायपुर में औसत से कम वर्षा हुई।

उपरोक्त उदाहरणों में आप देख रहे है कि कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु 15 वर्ष है। रात में सोने का औसत समय 8 घंटे है। इनसे तात्पर्य यह नहीं है कि कक्षा के प्रत्येक छात्र की आयु 14 वर्ष है या रोज़ रात में आप 8 घंटे सोते हैं। न ही यह अधिकतम या न्यूनतम है।

वास्तव में, औसत दिए गए प्रेक्षणों (आँकड़ों) के योग में प्रेक्षणों (आँकड़ों) की संख्या का भाग देने से प्राप्त होता है। इसे समान्तर माध्य भी कहते है। इसे संकेत M द्वारा दर्शाते हैं।

अतः $\boxed{\text{औसत या समान्तर माध्य (Mean) (M)} = \dfrac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}}$

अब हम आसानी से ज्ञात कर सकते हैं कि राधा प्रतिदिन औसतन कितने जानवरों को पानी पिलाती है।

$$\text{औसत} = \frac{12+15+13+11+13+13+14}{7} = \frac{91}{7} = 13$$

अतः राधा औसतन 13 जानवरों को प्रतिदिन पानी पिलाती है।

अब आप स्वयं खिलाड़ी A व B की पारियों का समान्तर माध्य ज्ञात कर बताइए कि किस खिलाड़ी का प्रदर्शन अच्छा रहा।

क्रियाकलाप 1

आप अपने परिवार के सदस्यों की औसत आयु निकालिए।

क्रियाकलाप 2.

आप अपनी अर्द्धवार्षिक परीक्षा में सभी विषयों के प्राप्तांकों का औसत निकालिए।

उदाहरण 1. एक फल की दुकान पर पांच टोकरियों में 46 किग्रा, 21 किग्रा, 18 किग्रा, 25 किग्रा. तथा 35 किग्रा. सेब रखे हैं। इनका समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: $$\text{समान्तर माध्य (M)} = \frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

समान्तर माध्य (M) = $\frac{46+21+18+25+35}{5} = \frac{145}{5} = 29$ किग्रा.

उदाहरण 2. प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: प्रथम दस प्राकृत संख्याएँ निम्नांकित हैं –

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

समान्तर माध्य (M) = $\frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

समान्तर माध्य (M) = $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10}$

$= \frac{55}{10} = 5.5$

बहुलक [MODE]

विद्यालय द्वारा कक्षा आठवीं के छात्रों को दीपावली अवकाश में किसी दर्शनीय स्थल के भ्रमण कराने का निश्चय किया गया। प्रधानाध्यापक ने सिरपुर, रतनपुर, जगदलपुर तथा अम्बिकापुर में से एक स्थान का चुनाव करने का निर्देश दिया। कुछ छात्र सिरपुर तो कुछ छात्र जगदलपुर जाना चाहते है। स्थान तय नहीं होने के कारण, कक्षाध्यापक द्वारा चारों स्थानों के नाम श्यामपट्ट पर लिखकर बच्चों से हाथ खड़े करवाकर टैली (गणन चिह्न) द्वारा बारम्बारता सारणी बनाई गई, जो निम्नानुसार है–

सारणी 6.1

दर्शनीय स्थल	गणना चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
सिरपुर	||||/ ||	7
जगदलपुर	||||/ ||||/ |||	13
रतनपुर	||||/	5
अम्बिकापुर	||||/	5

सारणी बनाने के बाद कक्षाध्यापक ने कहा सर्वाधिक 13 विद्यार्थी जगदलपुर जाना चाहते हैं, अतः हमें जगदलपुर जाना चाहिए।

दैनिक जीवन में भी ऐसी कई घटनाएं होती है जिनका चयन इसी प्रकार करते हैं। जैसे – अधिकतर समान व्यक्तियों की शर्ट की माप 38 या 40 नम्बर होती हैं। अतः रेडिमेड कपड़े की दुकान में हमें 38 या 40 नम्बर की ही शर्ट आसानी से मिलती है। इससे कम या अधिक माप की शर्ट दुकान में कम रखी जाती है, क्योंकि उसकी मांग कम है। अतः कम्पनी उसी नम्बर का शर्ट अधिक बनाती है जिसकी मांग बाजार में अधिक है।

चयन का यह आधार ही बहुलक है। अर्थात् **"बहुलक दिए गये प्रेक्षणों में से वह मान है जो सर्वाधिक बार दोहराया गया हो।"** इसे संकेत M_0 द्वारा दर्शाते हैं।

उदाहरण 3. एक फुटबाल टीम के 11 खिलाड़ियों द्वारा पहने गए जूतों के नाप के नम्बर निम्न प्रकार हैं–

6, 4, 5, 6, 7, 7, 6, 5, 6, 7, 8

बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गये नम्बरों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिखने पर,

4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8

स्पष्ट है कि यहाँ 6 नम्बर सबसे अधिक बार (4 बार) आया है,

अतः बहुलक 6 होगा अर्थात् $\boxed{M_0 = 6}$

माध्यिका [MEDIAN]

उदाहरण 4. एक कक्षा के 15 छात्रों के वार्षिक परीक्षा में पूर्णांक 100 में से प्राप्तांक निम्नानुसार हैं :–

(A) 15, 35, 16, 25, 45, 76, 90, 99, 50, 16, 57, 60, 86, 17, 95

बताइये इनमें से कितने छात्रों के अंक आधे से अधिक है। यहाँ प्राप्तांकों को देखने से तो यह स्पष्ट नहीं हो रहा है। आइए, इन्हें हम आरोही (बढ़ते) क्रम में व्यवस्थित करके देखें –

(B) 15, 16, 16, 17, 25, 35, 45, 50, 57, 60, 76, 86, 90, 95, 99

(अ) प्राप्तांकों **(A)** के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

1. दिए गए प्राप्तांकों (पदों) में मध्य पद हैं ? ....
2. मध्य पद के प्राप्तांक से कम प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? ....
3. मध्य पद के प्राप्तांक से अधिक प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? ....
4. क्या मध्य पद के प्राप्तांक से कम एवं अधिक प्राप्तांक वाले पदों की संख्या समान (बराबर) है ? ....

(ब) व्यवस्थित प्राप्तांकों **(B)** के आधार पर प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

1. व्यवस्थित प्राप्तांकों में मध्य पद के प्राप्तांक क्या हैं ? ....
2. मध्य पद के प्राप्तांक से कम प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? ....
3. मध्य पद के प्राप्तांक से अधिक प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? ....
4. क्या मध्य पद के प्राप्तांक से कम एवं अधिक प्राप्तांक वाले पदों की संख्या समान है ? ....

पदों को घटते क्रम या बढ़ते क्रम में रखने पर ही मध्य पद का निर्धारण होता है। इसी मध्य पद को माध्यिका कहते हैं।

अर्थात् **"दिए गए आँकड़ों को घटते या बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करने पर उनके बीच वाला मान ही माध्यिका है।"** माध्यिका को संकेत M_d द्वारा दर्शाते हैं।

[A] माध्यिका ज्ञात करना जब आँकड़ों की संख्या N विषम हो :

जब दिए गए आँकड़ों की संख्या विषम संख्या में हो, तो सर्वप्रथम उनको आरोही या अवरोही क्रम में लिखकर $M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान ज्ञात करते हैं। प्राप्त मान ही माध्यिका है।

अर्थात् माध्यिका $M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान

उदाहरण 6. 3, 5, 10, 9, 8, 14, 6, 12, 13, 11, 7 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करके लिखने पर,

3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (यहाँ कुल पदों की संख्या 11 अर्थात विषम है)

$$M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ वाँ पद का मान} = \left(\frac{11+1}{2}\right) \text{ वाँ पद का मान} = 6 \text{ वाँ पद का मान}$$

$$\boxed{M_d = 9}$$

[B] माध्यिका, जब आँकड़ों की संख्या N सम हो :–

जब दिए गए आँकड़े सम संख्या में हों तो उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवथित करने पर मध्य में दो संख्याएँ होती हैं। ऐसी स्थिति में हम उन दोनों मध्य संख्याओं का माध्य ज्ञात कर माध्यिका निकालते हैं।

अर्थात्
$$M_d = \frac{\left[\left(\frac{N}{2}\right) \text{ वाँ पद का मान} + \left(\frac{N}{2}+1\right) \text{ वाँ पद का मान}\right]}{2}$$

उदाहरण 7. बंटन 5, 9, 4, 6, 12, 8 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर,

4, 5, 6, 8, 9, 12

यहाँ N = 6 (सम संख्या है)

$$\text{माध्यिका } M_d = \frac{\left[\frac{6}{2} \text{ वाँ पद का मान} + \left(\frac{6}{2}+1\right) \text{ वाँ पद का मान}\right]}{2}$$

$$M_d = \frac{\left[\frac{6}{2} \text{ वाँ पद का मान} + \left(\frac{6}{2}+1\right) \text{ वाँ पद का मान}\right]}{2}$$

$$= \frac{\text{तीसरे पद का मान} + \text{चौथे पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{6+8}{2} = 7$$

$$\therefore \boxed{M_d = 7}$$

पश्नावली 6 1

प्र.1. समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

81, 74, 69, 73, 91, 55, 61

प्र.2. 50 से 70 तक की सम संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

प्र.3. माध्यिका ज्ञात कीजिए।

4, 5, 10, 6, 7, 14, 9, 15

प्र.4. एक कक्षा के 11 छात्रों का भार (किलोग्राम में) निम्न प्रकार हैं –

25, 27, 29, 32, 30, 28, 26, 31, 35, 41, 34

इनकी माध्यिका ज्ञात करो।

प्र.5. कक्षा आठवीं के छात्रों में विज्ञान प्रतियोगिता में निम्नानुसार अंक प्राप्त किये।

83, 61, 48, 73, 76, 52, 67, 61, 79

उपरोक्त आंकड़ों से माध्यिका की गणना कीजिए।

प्र.6. दिये गये आँकड़ों से बहुलक प्राप्त कीजिए :–

7, 5, 9, 9, 3, 1, 9, 7, 5, 3, 1, 1, 9, 7, 7, 5, 5, 5, 3, 1,5, 3, 5, 1, 5, 7, 7, 9, 9, 1

प्र.7. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

5, 3, 2, 2, 4, 5, 3, 3, 4, 3, 5, 3

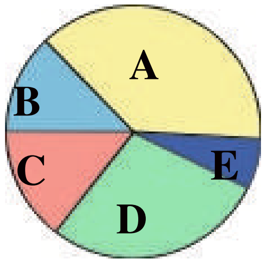
प्र.8. प्रथम पाँच विषम प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

प्र.9. संख्याएँ 8,5,x,6,10,5 का माध्य 7 हैं। x का मान ज्ञात कीजिए।

पाई चार्ट (वृत्त चित्र)

क्रियाकलाप 1.

किसी राज्य के A,B,C,D,E, 5 जिलों में वनों की मात्रा को वृत्ताकार रेखा चित्र द्वारा दर्शाया गया।



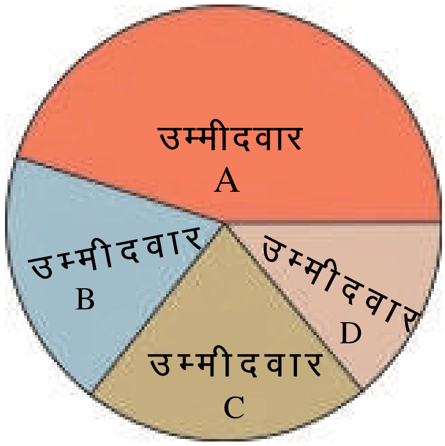
चित्र 6.2

यह मान लिया जाये कि जिस जिले में सर्वाधिक वन हैं, उस जिले में सर्वाधिक वर्षा होती है, तो क्या आप बता सकते हैं कि –

1. किस जिले में सर्वाधिक वर्षा होती है?
2. किस जिले में सबसे कम वर्षा होती है?

क्रियाकलाप 2.

किसी विधानसभा चुनाव में 4 उम्मीदवार ने चुनाव लड़ा। उनके प्राप्त मतों को वृत्ताकार रेखाचित्र में दर्शाया गया है। वृत्ताकार रेखा चित्र को देखकर निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



चित्र 6.3

1. किस उम्मीदवार को सर्वाधिक मत मिले?
2. किस उम्मीदवार को सबसे कम मत मिले?

इसका आंकलन आपने कैसे किया?

आप जानते हैं कि किसी वृत्त के केन्द्र पर बने कोणों का योग 360° होता है। उम्मीदवार A के प्राप्त मतों का क्षेत्र केन्द्र पर सबसे बड़ा कोण बनाता है। उसी प्रकार उम्मीदवार D के मतों द्वारा घेरा गया क्षेत्र केन्द्र पर सबसे छोटा कोण बनाता है।

उदाहरण 8. जशपुर के एक विद्यालय में कक्षा 6 से कक्षा 10 तक पढ़ने वाले विद्यार्थी की संख्या निम्नांकित है। इनको वृत्ताकार लेखाचित्र में दर्शाईये।

कक्षा	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
विद्यार्थी की संख्या	216	180	150	110	64

हलः वृत्ताकार रेखाचित्र बनाने के लिए हम सबसे पहले सभी कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या का योग करते हैं और प्रत्येक कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या के लिए वृत्त के केन्द्र पर बनने वाले कोण का मान ज्ञात करते है।

कुल विद्यार्थी $= 216 + 180 + 150 + 110 + 64 = 720$

सम्पूर्ण वृत्त 720 छात्रों का प्रतिनिधित्व करता है।

∴ 720 छात्रों के लिए इस वृत्त के केन्द्र पर कोण बनाया जाता है $= 360^o$

∴ एक छात्र के लिए केन्द्र पर बना कोण $= \frac{360^o}{720}$

∴ 216 छात्रों के लिए $= \frac{360^o}{720} \times 216$

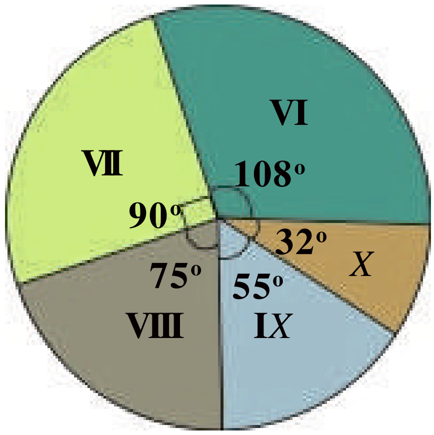
अतः कक्षा 6 के छात्रो के लिए बना कोण $= \frac{360^o}{720} \times 216 = 108^o$

कक्षा 7———,,——— $= \frac{360^o}{720} \times 180 = 90^o$

कक्षा 8———,,——— $= \frac{360^o}{720} \times 150 = 75^o$

कक्षा 9———,,——— $= \frac{360^o}{720} \times 110 = 55^o$

कक्षा 10———,,——— $= \frac{360^o}{720} \times 64 = 32^o$



चित्र 6.4

कोण ज्ञात करने के बाद किसी भी त्रिज्या का वृत्त बनाकर इसे एक–एक त्रिज्या खण्ड़ द्वारा चित्रानुसार (चित्र 6.4) निरूपित करेंगे।

उदाहरण 9. कक्षा आठवीं के 100 छात्रों की विभिन्न खेलों में रूचि(प्रतिशत में)निम्नानुसार है–

सारणी 6.2

खेल का नाम	खेलो में रूचि (%)	केन्द्रीय कोण
क्रिकेट	65	$\frac{65}{100} \times 360^o = 234^o$
फुटबॉल	15	$\frac{15}{100} \times 360^o = 54^o$
हॉकी	10	$\frac{10}{100} \times 360^o = 36^o$
हैंडबाल	3	$\frac{3}{100} \times 360^o = 11^o$
वालीबॉल	7	$\frac{7}{100} \times 360^o = 25^o$
कुल छात्रों की संख्या	100	कुल केन्द्रीय कोण 360^0

अध्याय–12
समीकरण
EQUATION

9X5SHF

पिछली कक्षा में आप निम्न प्रकार के समीकरणों को हल कर चुके हैं। आइये, कुछ और सरल समीकरणों को हल करें।

क्र.सं.	समीकरण	समीकरण का हल
1.	$3x + 9 = 12$	$x = 1$
2.	$3x + 5 = 8$	----------------------
3.	$5x + 9 = 2x + 12$	----------------------
4.	$6x + 18 = 24$	----------------------
5.	$x + 3 = 4$	----------------------

ऊपर के समीकरणों को हल करते हुए शैली ने अनु से कहा कि सभी समीकरणों के हल $x = 1$ प्राप्त हो रहे हैं। समीकरण तो अनेक हैं, लेकिन सभी समीकरणों के हल एक ही है, ऐसा क्यों?

इन समीकरणों को ध्यान से देखिए। आप पाते हैं कि पहले समीकरण से ही दूसरा समीकरण बना है, पहले समीकरण के दोनों पक्षों में 4 घटाने पर दूसरा समीकरण प्राप्त हुआ है। अतः दोनों समीकरणों का हल एक ही है। इसी प्रकार, पहले समीकरण के दोनों पक्षों में $2x$ जोड़ने पर तीसरा समीकरण प्राप्त हुआ।

पहले समीकरण में 2 का गुणा तथा 3 का भाग देने पर क्रमशः चौथा और पाँचवाँ समीकरण प्राप्त हुआ है। तभी रहीम ने कहा – चूँकि प्रत्येक बार समान संख्या से एक ही प्रकार की संक्रिया दोनों पक्षों में की जा रही है, इसलिए उसका हल नहीं बदल रहा है।

अतः

(i) किसी भी समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने या घटाने पर,

(ii) किसी भी समीकरण के दोनों पक्षों में समान शून्येत्तर (जो शून्य न हो) संख्या का गुणा या भाग करने पर, समीकरण के हल में कोई अन्तर नहीं आता।

किसी समीकरण के दोनों पक्षों में शून्य से गुणा करने अथवा शून्य से भाग देने पर क्या होगा? सोचिए, अपने साथियों एवं अध्यापक से चर्चा कीजिए।

क्रियाकलाप–1.

अब आप भी नीचे दी गई सारणी में निर्देशानुसार नया समीकरण बनाइये।

सारणी 12.1

क्र.सं.	समीकरण	दोनों पक्षों में की जाने वाली संक्रियाएं	नया समीकरण
1.	$5x + 6 = 11$	5 जोड़ने पर	$5x + 11 = 16$
2.	$17x - 8 = 22$	$4x$ घटाने पर	----------------------
3.	$4x - 5 = 2x + 9$	6 जोड़ने पर	----------------------
4.	$3x + 2 = 5$	2 गुणा करने पर	----------------------
5.	$6x + 15 = 9$	3 से भाग देने पर	----------------------
6.	$2x - 7 = 11$	$3x$ जोड़ने पर	----------------------

आप पिछली कक्षा में निम्न प्रकार के समीकरण भी हल कर चुके हैं –

जैसे, $\frac{x}{7} = 3$ को हल करने के लिए बाएँ पक्ष के हर से 7 हटाना होगा, इस हेतु समीकरण के दोनों पक्षों में 7 का गुणा करते हैं–

अर्थात् $\frac{x}{7} \times 7 = 3 \times 7$

$\Rightarrow x = 21$

अब यदि समीकरण $\frac{7}{x} = 1$ हो, तो आप इसे कैसे हल करेंगे?

यहाँ भी समीकरण के हर से x हटाने के लिए समीकरण के दोनों पक्षों में x का गुणा करना होगा।

इस प्रकार, बीजीय हर वाली समीकरण से हर को विलोपित किया जाता है।

नीचे सारणी में दिए गए निर्देशों के अनुसार समीकरणों को हल कीजिए–

सारणी 12.2

क्र.सं.	समीकरण	समीकरण के एक पक्ष को अंश/हर के रुप में लिखने पर	दोनों पक्षों में हर को गुणा करने पर	समीकरण को रेखिय रूप में लिखने पर	चर एवं अचर का पक्षान्तर करने पर	हल
1.	$\frac{8x+5}{2x+7}-3=0$	$\frac{8x+5}{2x+7}=3$	$\frac{(8x+5)\cancel{(2x+7)}}{\cancel{2x+7}}=3(2x+7)$	$8x+5=6x+21$	$8x-6x=21-5$	$x=8$
2.	$\frac{9x}{x+5}=4$					
3.	$\frac{2y+9}{3y+10}-3=0$					
4.	$\frac{3(x-3)}{x+4}=2$					

वास्तव में इस प्रकार के प्रश्न $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ के रूप में हैं। जहाँ a, b, c, d एवं k पूर्णांक हैं एवं x चर राशि है तथा $cx + d \neq 0$

$\boxed{\mathbf{\frac{ax+b}{cx+d}=k}}$ प्रकार के समीकरणों का हल–

समीकरण $\frac{6x+2}{4x+1}=2$ भी एकचरीय समीकरण है। इस समीकरण के हर में भी चर राशि है। व्यापक समीकरण $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ से तुलना करने पर $a = 6, b = 2, c = 4, d = 1$ एवं $k = 2$ है।

इस प्रकार के समीकरणों को हल करना आप सीख चुके हैं। आइए, कुछ और समीकरणों को हल करें –

उदाहरण 1. समीकरण $\frac{2x+5}{3x+1}=\frac{3}{11}$ को हल कीजिए।

हल: दिये गये समीकरण $\frac{2x+5}{3x+1}=\frac{3}{11}$

समीकरण के दोनों पक्षों में $(3x + 1)$ से गुणा करने पर,

$$\frac{2x+5}{3x+1}\times(3x+1)=\frac{3}{11}\times(3x+1)$$

$$\Rightarrow 2x + 5 = \frac{3}{11}(3x+1) \qquad \text{(चरण 1)}$$

दायें पक्ष के हर से 11 विलोपित करने हेतु समीकरण के दोनों पक्षों में 11 का गुणा करने पर,

$$11 \times (2x + 5) = \frac{3}{11}(3x+1)\times 11$$

$$\Rightarrow \quad 11(2x + 5) = 3(3x + 1) \qquad \text{(चरण 2)}$$

$$\Rightarrow \quad 22x + 55 = 9x + 3 \qquad \text{(कोष्ठक हल करने पर)}$$

$$\Rightarrow \quad 22x - 9x = 3 - 55$$

$$\Rightarrow \quad 13x = -52$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-52}{13}$$

$$\Rightarrow \quad x = -4$$

जाँच: बायां पक्ष $= \frac{2x+5}{3x+1}$

$$= \frac{2(-4)+5}{3(-4)+1}$$

$$= \frac{-8+5}{-12+1}$$

$$= \frac{-3}{-11}$$

$$= \frac{3}{11}$$

= दायाँ पक्ष

अतः प्राप्त हल $x = -4$ ही दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उपरोक्त उदाहरण में आप देख रहे हैं कि बाएँ पक्ष का हर $(3x+1)$ चरण, (1) में वहाँ से विलोपित होकर दाएँ पक्ष के अंश से गुणा हो जाता है। इसी प्रकार, दाएँ पक्ष का हर 11 चरण, (2) से विलोपित होकर बाएँ पक्ष के अंश से गुणा हो जाता है। इस प्रकार के परिवर्तन को वज्रगुणन कहते हैं।

इस प्रकार के प्रश्नों को वज्रगुणन या तिर्यक गुणन का उपयोग करके भी हल किया जा सकता है।

उदाहरण 2. समीकरण $\frac{5-7y}{2+4y} = \frac{-8}{7}$ को हल कीजिए।

$$\frac{5-7y}{2-4y} = \frac{-8}{7}$$

(वज्र गुणन या तिर्यक गुणा)

हल: दिये गये समीकरण–

$$\frac{5-7y}{2+4y} = \frac{-8}{7}$$

वज्र गुणा या तिर्यक गुणा करने पर,

$$7 \times (5-7y) = -8 \times (2+4y)$$

या $35 - 49y = -16 - 32y$

या $-49y + 32y = -16 - 35$ (पक्षान्तर करने पर)

या $-17y = -51$

या $y = \frac{-51}{-17}$

$$y = 3$$

उत्तर की जाँच आप स्वयं कीजिए।

उदाहरण 3. समीकरण $\frac{y-(7-8y)}{9y-(3+4y)}=\frac{11}{7}$ को हल कीजिए।

हलः दिये गये समीकरण

$$\frac{y-(7-8y)}{9y-(3+4y)}=\frac{11}{7}$$

या $\frac{y-7+8y}{9y-3-4y}=\frac{11}{7}$ (कोष्ठक हल करने पर)

या $\frac{9y-7}{5y-3}=\frac{11}{7}$

$\frac{9y-7}{5y-3} \times \frac{11}{7}$ (वज्रगुणन करने पर)

$7\times(9y-7) = 11\times(5y-3)$

या $63y-49 = 55y-33$ (कोष्ठक हल करने पर)

या $63y-55y = -33+49$ (पक्षान्तर करने पर)

या $8y = 16$

या $y = \frac{16}{8}$

$\Rightarrow$ $y = 2$

उत्तर की जाँच आप स्वयं कीजिए।

उदाहरण 4. समीकरण–

$\frac{x+0.5}{0.3x} = 20$ हल कीजिए।

हलः दिये गए समीकरण–

$$\frac{x+0.5}{0.3x}=\frac{20}{1}$$

$\frac{x+0.5}{0.3x} \times \frac{20}{1}$ वज्र गुणन करने पर

$1\times(x+0.5) = 20\times 0.3x$

या $x+0.5 = 6x$

या $6x = x + 0.5$

या $6x - x = 0.5$ (पक्षान्तर करने पर)

या $5x = 0.5$

$$5x = \frac{5}{10}$$

या $x = \frac{5}{10} \times \frac{1}{5}$ (गुणा 5 का पक्षान्तरण करने पर)

या $x = \frac{1}{10}$

या $x = 0.1$

अतः दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल $x = 0.1$ है।

प्रश्नावली 12.1

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए और अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

(1) $\frac{4x+18}{5x} = 2$ (2) $\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{7}{5}$

(3) $\frac{7m+6}{4m+2} = 2$ (4) $\frac{x-3}{x+2} = \frac{-3}{7}$

(5) $\frac{2y-5}{3y+1} = \frac{3}{13}$ (6) $\frac{8-3y}{5y+2} = \frac{1}{6}$

(7) $\frac{17-2k}{k-5} = -3$ (8) $\frac{4x-(x+7)}{3x-(5x-9)} = \frac{2}{3}$

(9) $\frac{1.5x+0.3}{3x} = \frac{3}{10}$

दैनिक जीवन में समीकरण के अनुप्रयोग

हमारे दैनिक जीवन में भी कई समस्याएं आती हैं। इन समस्याओं में ज्ञात, अज्ञात राशि या संख्याओं में कुछ सम्बन्ध होते हैं। इन सम्बन्धों को समीकरण बनाकर आसानी से हल कर सकते हैं। समीकरण हल करने के महत्वपूर्ण चरण निम्न हैं :–

1. प्रश्न को ध्यान से पढ़कर ज्ञात एवं अज्ञात राशि की पहचान करते हैं।
2. अज्ञात राशियों को x, y, z आदि अक्षरों से निरूपित करते हैं।
3. शाब्दिक समस्या के कथनों को गणितीय कथन में परिवर्तित कर समीकरण बनाते हैं।
4. समीकरण को हल करके अज्ञात राशि का मान ज्ञात करते हैं।

आइये, उपरोक्त प्रक्रिया को उदाहरणों से समझें।

उदाहरण 5. दो संख्याओं का योग 35 है एवं दोनों संख्याओं का अनुपात 1 : 4 है। वे संख्याएं ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि पहली संख्या x है।

प्रथम शर्तानुसार,

चूँकि दोनों संख्याओं का योग $= 35$

$\Rightarrow$ $x +$ दूसरी संख्या $= 35$

$\Rightarrow$ दूसरी संख्या $= 35 - x$

द्वितीय शर्तानुसार,

संख्याओं का अनुपात $= 1 : 4$

या $$\frac{x}{35-x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{35-x} \times \frac{1}{4}$$ (तिर्यक गुणन)

या $4x = 35 - x$

या $4x + x = 35$ (x का पक्षान्तर करने पर)

या $5x = 35$

या $x = \frac{35}{5}$ (5 का पक्षान्तर करने पर)

या $x = 7$

अतः एक संख्या $= 7$

एवं दूसरी संख्या $= 35 - 7 = 28$

जाँच :

1. दोनों संख्याओं का योग $= 7 + 28 = 35$
2. दोनों संख्याओं का अनुपात $= \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

अतः हमारा हल सही है।

उदाहरण 6.

एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 4 अधिक है। अंश में 6 जोड़ने एवं हर में 3 घटाने पर संख्या $\frac{3}{2}$ हो जाती है। वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि अंश x है

तो हर $= x + 4$

अतः परिमेय संख्या $= \frac{\text{अंश}}{\text{हर}} = \frac{x}{x+4}$

अंश में 6 जोड़ने पर $= x + 6$

हर में 3 घटाने पर $= (x + 4) - 3 = x + 1$

$\therefore$ नई परिमेय संख्या $= \dfrac{x+6}{x+1}$

शर्तानुसार, नई संख्या $\dfrac{3}{2}$ हो जाती है।

$$\frac{x+6}{x+1} = \frac{3}{2}$$

तिर्यक गुणा करने पर

$$\frac{x+6}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$2(x + 6) \quad = 3(x + 1)$

या $\quad 2x + 12 \quad = 3x + 3$

या $\quad 2x - 3x \quad = 3 - 12$

$-x \quad = -9$

$x \quad = 9$

अतः अभीष्ट परिमेय संख्या $= \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{9}{9+4} = \dfrac{9}{13}$

जाँच

1. $13 - 9 = 4$ अर्थात् हर, उसके अंश से 4 अधिक है।
2. 6 जोड़ने पर अंश $= 9 + 6 = 15$

   3 घटाने पर हर $= 13 - 3 = 10$

   नई संख्या $= \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$

   अतः हमारा हल सही है।

उदाहरण 7. दो अंकीय संख्या के दोनों अंकों का योग 12 है। अंकों को उलटने से प्राप्त नवीन संख्या मूल संख्या से 18 अधिक हो जाती है, तो मूल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि इकाई का अंक x है,

तो प्रश्नानुसार, इकाई अंक + दहाई अंक $= 12$

$\Rightarrow x +$ दहाई का अंक $= 12$

$\Rightarrow$ दहाई का अंक $= 12 - x$

अतः मूल संख्या $= 10\times$(दहाई का अंक) + इकाई का अंक

$= 10\times(12 - x) + x$ [स्थानीयमान के अनुसार]

$= 120 - 10x + x$

$= 120 - 9x$

अब अंकों को उलटने पर इकाई अंक, दहाई एवं दहाई अंक, इकाई अंक बन जायेगा।

अतः इकाई अंक $= 12 - x$

एवं दहाई अंक $= x$

तब नवीन संख्या $= 10 \times x + (12 - x)$

$= 10x + 12 - x$

$= 9x + 12$

शर्तानुसार, नवीन संख्या मूल संख्या से 18 अधिक हो जाती है।

अर्थात् नवीन संख्या = मूल संख्या + 18

$9x + 12 = 120 - 9x + 18$

$9x + 12 = 138 - 9x$

$9x + 9x = 138 - 12$ (पक्षान्तर करने पर)

$18x = 126$

$x = \frac{126}{18}$ या $x = 7$

अतः मूल संख्या $= 120 - 9x$

$= 120 - 9 \times 7$

$= 120 - 63 = 57$

जाँचः स्वयं करके देखिए।

उदाहरण 8. दो संख्याओं में 3 : 5 का अनुपात है। प्रत्येक में से 4 घटाने पर यह अनुपात 5 : 9 हो जाता है। संख्याएं ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि पहली संख्या $= 3x$

एवं दूसरी संख्या $= 5x$

पहली संख्या में से 4 घटाने पर $= 3x - 4$ एवं

दूसरी संख्या में से 4 घटाने पर $= 5x - 4$

शर्तानुसार, प्रत्येक संख्या में से 4 घटाने पर उनका अनुपात $= \frac{5}{9}$

$\Rightarrow \quad \frac{3x-4}{5x-4} = \frac{5}{9}$

$\frac{3x-4}{5x-4} \times \frac{5}{9}$ (वज्र गुणा करने पर)

$9 \times (3x - 4) = 5(5x - 4)$

$\Rightarrow \quad 27x - 36 = 25x - 20$ (कोष्ठक हल करने पर)

$\Rightarrow \quad 27x - 25x = -20 + 36$ (पक्षान्तर करने पर)

$\Rightarrow \quad 2x = 16$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{16}{2}$ या $\quad x = 8$

अतः पहली संख्या $= 3 \times 8 = 24$

एवं दूसरी संख्या $= 5 \times 8 = 40$

जाँच : 1. दोनों संख्याओं का अनुपात $= \dfrac{24}{40} = \dfrac{3}{5}$

2. प्रत्येक में से 4 घटाने पर अनुपात $= \dfrac{24-4}{40-4} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$

अतः हमारा हल सही है।

उदाहरण 9. पिता की वर्तमान आयु, पुत्र की आयु से 20 वर्ष अधिक है। 3 वर्ष बाद पुत्र तथा पिता की आयु का अनुपात $19:39$ हो जायेगा। पुत्र की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि पुत्र की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

तो पिता की वर्तमान आयु $= (x + 20)$ वर्ष

3 वर्ष बाद पुत्र की आयु $= (x + 3)$ वर्ष

3 वर्ष बाद पिता की आयु $= x + 20 + 3 = (x + 23)$ वर्ष

प्रश्नानुसार, 3 वर्ष बाद पुत्र तथा पिता की आयु का अनुपात $= 19 : 39$

$\Rightarrow \quad (x + 3) : (x + 23) = 19 : 39$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+3}{x+23} = \dfrac{19}{39}$ (तिर्यक गुणा करने पर)

$\Rightarrow \quad 39(x + 3) = 19(x + 23)$

$\Rightarrow \quad 39x + 117 = 19x + 437$ (कोष्ठक हटाने पर)

$\Rightarrow \quad 39x - 19x = 437 - 117$ (पक्षान्तर करने पर)

$\Rightarrow \quad 20x = 320$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{320}{20}$ (दोनों पक्षों में 20 से भाग देने पर)

$x = 16$

अतः पुत्र की वर्तमान आयु $= 16$ वर्ष

एवं पिता की आयु $= x + 20$

$= 16 + 20 = 36$ वर्ष

जाँच :

3 वर्ष बाद पुत्र की आयु $= 16 + 3 = 19$ वर्ष

तथा 3 वर्ष बाद पिता की आयु $= 36 + 3 = 39$ वर्ष

3 वर्ष बाद पुत्र और पिता की आयु का अनुपात $= 19 : 39$

अतः हमारा उत्तर सही है।

9XENY3

प्रश्नावली 12.2

1. दो संख्याओं का योग 42 है एवं यदि दूसरी संख्या पहली की दुगुनी हो तो संख्याएं ज्ञात कीजिए।
2. नीरज के पास मंयक से 3 गुने आम थे। यदि मयंक को 8 आम एवं नीरज को 6 आम और दिए जाए, तो मयंक और नीरज के आम का अनुपात 1 : 2 हो जाता है। बताइए दोनों के पास कितने–कितने आम थे।
3. दो समबाहु त्रिभुजों में से पहले त्रिभुज की भुजा, दूसरे त्रिभुज की भुजा से 3 सेमी अधिक है एवं दोनों त्रिभुजों के परिमापों का अनुपात 5 : 2 है, तो त्रिभुजों की भुजाएं ज्ञात कीजिए।
4. दो अंकीय संख्या के दहाई का अंक इकाई के अंक का तीन गुना है। यदि अंकों को उलट दिया जाए, तो नई संख्या मूल संख्या से 36 कम हो जाती है। संख्या ज्ञात कीजिए।
5. दो अंकीय संख्या के दोनों अंकों का योग 7 है। अंकों को उलटने पर नई संख्या, मूल संख्या से 9 अधिक हो जाती है। संख्या ज्ञात कीजिए।
6. एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 2 अधिक है, यदि अंश 4 गुना कर दिया जाये और हर में 8 जोड़ दिया जाये तो नवीन संख्या $\frac{4}{3}$ हो जाती है। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।
7. अनुराग और आकांक्षा की आयु का अनुपात 7 : 5 है। 6 वर्ष बाद उनकी आयु 5 : 4 के अनुपात में हो जाती है, तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
8. मनीषा की मां की आयु, मनीषा की आयु की तिगुनी है। चार वर्ष बाद माँ की आयु मनीषा की आयु से ढाई गुनी हो जाती है। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. समीकरण के मान में कोई अन्तर नहीं आता, यदि समीकरण के दोनों पक्षों में –
   (i) समान संख्या जोड़ दें।
   (ii) समान संख्या घटा दें।
   (iii) समान शून्येत्तर संख्या का गुणा कर दें।
   (iv) समान शून्येत्तर संख्या का भाग दें।
2. $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ जहाँ समीकरण में a, b, c, d एवं k पूर्णांक तथा $cx+d\neq 0$ हो, तो समीकरण एक चरीय समीकरण होता है।
3. $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ जैसी समीकरणों को हल करने में वज्रगुणन विधि उपयोगी रहती है।
4. किसी शाब्दिक समस्या को हल करने के लिए अज्ञात राशि को किसी चर से व्यक्त करते हैं एवं प्रश्नानुसार इसे बीजीय समीकरण में बदलकर समीकरण हल करते हैं।

9XNJZQ

अध्याय–13
प्रतिशतता के अनुप्रयोग
APPLICATION OF PERCENTAGE

भूमिका

हमने देखा था कि ब्याज की गणना करने में हमें यह पता होना चाहिए कि ब्याज की दर क्या है। सामान्यतः यह दर एक वर्ष में कुल राशि 100 रु. पर लगने वाले ब्याज के बराबर मानी जाती है। पूर्व में ब्याज दर व प्रतिशत पर हमने कई सवाल किए थे। हमने लाभ–हानि को भी ज्ञात किया था और क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य में इसकी (दर की) गणना भी की थी। जितनी ज्यादा दर उतना अधिक लाभ/हानि अथवा ब्याज।

इन सबको दोहराने के लिए चलिए कुछ सवाल हल कर लें और कुछ बातें पुनः याद कर लें। इन सवालों को हल करके देखिए –

1. एक विद्यार्थी के 600 में से 396 अंक आए। बताईए उसे कितने प्रतिशत अंक मिले।
2. एक स्कूल में वर्ष 2004 में 80% छात्र उत्तीर्ण हुए। यदि 12 छात्र अनुत्तीर्ण हुए तो कुल छात्रों की संख्या बताइए।
3. रजनी ने 3500 रुपये में 8 कैलकुलेटर बेचे यदि उसे 500 रुपये का लाभ हुआ है तो प्रति कैलकुलेटर उसका लाभ प्रतिशत बताएं।
   यह भी बताएँ कि उसका प्रति कैलकुलेटर क्रय मूल्य क्या था।
4. जमीला ने 50 कार्ड शीट 400 रु. की खरीदी। उसने 100 रु. के रंग, ब्रश आदि भी खरीद कर कार्ड शीट पर चित्र बनाए। इनमें से प्रत्येक कार्ड शीट से उसने 12 कार्ड बनाएं और उन्हें 2–2 रु. में बेचा। उसे कितना लाभ हुआ। लाभ प्रतिशत भी निकालें।
   सलमा बोली– जमीला को लाभ नहीं हानि हुई है आप इसे कैसे समझाएंगे कि वास्तव में सही क्या है?
5. एक व्यापारी ने 50 किलो धान 1000 रु. में खरीदा और उसे साफ करवा कर एक–एक किलोग्राम की थैलियाँ बनवाई। इसमें उसको 200 रु. का खर्च हुआ। बाज़ार में बड़ी मात्रा में धान आने से दाम कम हो गए और उसके पैकेट 21 रु. किलो में ही बिक पाए। उसे लाभ हुआ या हानि, दर भी निकालें।
6. मोहन ने दो वर्ष बाद उधार धन लौटाते समय 500 रु. ब्याज दिया। यदि साधारण ब्याज की दर 10% वार्षिक है तो उसने कितना धन उधार लिया था।
7. रीता ने 5000 रु. उधार दिए। दो वर्ष बाद 12% वार्षिक दर से ब्याज मिलने पर उसे कुल कितनी राशि मिलेगी।

8. मोहन ने किसी सेठ को 4 वर्ष बाद 3024 रु. लौटाए। यदि ब्याज की दर 11% वार्षिक है तो बताइए कि उसने कितनी राशि उधार ली थी।

कक्षा छठवीं और सातवीं में हमने इस प्रकार की कई समस्याओं का हल ढूँढ़ा है। आइए, ऐसी ही एक नई समस्या का हल ढूँढ़ने का प्रयास करें।

चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

अखिलेश ने घर के किसी उत्सव के लिए 10,000 रु. बैंक से उधार लिए। उसे 10% वार्षिक दर से उस पर ब्याज देना था। उस साल उसकी आय कम हुई तो वह बैंक गया। उसने कहा– मैं इस वर्ष 11,000 रु. देने के बदले अगले वर्ष 12,000 रु. लौटा दूंगा। इस पर उसे बताया गया कि उसे 12,100 रु. लौटाने होंगे। अखिलेश ने कहा, ये 100 रु. अतिरिक्त क्यों ले रहे हैं, 12000 रुपये ही लीजिए।

इस पर बैंक अधिकारी ने बताया हम आपसे कोई अतिरिक्त रुपये नहीं ले रहे हैं। यह तो इस साल नहीं चुकाए गए ब्याज पर ब्याज है। अर्थात् 10,000 रु. पर एक साल में ब्याज हुआ 1000 रु.। चूंकि आपने ब्याज नहीं चुकाया तो अगले साल का कुल मूलधन 10,000 + 1000 याने 11,000 रु. हो गया। दूसरे वर्ष में हम 11,000 रु. पर ब्याज निकालेंगे। अखिलेश बोला और अगर मैं इस साल भी नहीं दे पाया तो फिर क्या ब्याज 12,100 रूपये पर निकालेंगे। पर यह कुछ अलग ही तरीका है। उसे बैंक वालों ने समझाया कि सामान्य तौर पर हम साधारण ब्याज की बात करते हैं जिसमें ब्याज मूलधन में नहीं जुड़ता, किन्तु स्वाभाविक तौर पर उधार देने वाला हमेशा ब्याज पर भी ब्याज लेता है। इसे चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

अखिलेश को कितनी रकम देनी पड़ेगी उसके लिए यह तालिका देखें और इसी प्रकार दो अन्य मूलधनों के लिए तालिका की पूर्ति करें।

तालिका 13.1

क्रमांक	मूलधन	दर	पहले वर्ष		दूसरा वर्ष		तीसरा वर्ष	
			ब्याज	मिश्रधन	ब्याज	मिश्रधन	ब्याज	मिश्रधन
1.	10,000	10%	1000	11000	1100	12100	1210	13310
2.	80,000	5%						
3.	5,000	10%						

स्पष्ट है कि चक्रवृद्धि ब्याज साधारण ब्याज से अधिक होता है।

आइये, अब कुछ सवाल करें।

उदाहरण 1. 1500 रु. पर 2 वर्ष के लिए 6% वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए। मिश्रधन भी ज्ञात कीजिए।

प्रश्नानुसार पहले वर्ष के लिए $P = 1500$ रु.

$R = 6\%$

$T = 1$ वर्ष

पहले वर्ष का ब्याज $= \frac{P \times R \times T}{100}$

$= \frac{1500 \times 6 \times 1}{100}$

$= 90$ रु.

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

$= 1500 + 90$

$= 1590$ रु.

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन ही दूसरे वर्ष के लिए मूलधन होता है।

अतः दूसरे वर्ष के लिए मूलधन $P = 1590$ रु.

$R = 6\%$

$T = 1$ वर्ष

दूसरे वर्ष के लिए ब्याज $= \frac{P \times R \times T}{100}$

$= \frac{1590 \times 6 \times 1}{100}$

$= \frac{159 \times 6}{10} = 95.40$ रु.

चक्रवृद्धि ब्याज = पहले वर्ष का ब्याज + दूसरे वर्ष का ब्याज

$= 90.00 + 95.40$

$= 185.40$ रु.

मिश्रधन = मूलधन + चक्र. ब्याज

$= 1500 + 185.40$ रु.

$= 1685.40$ रु.

इस प्रकार चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के लिए प्रत्येक वर्ष ब्याज की गणना करनी पड़ती है।

उदाहरण 2. 4000 रु. पर दो वर्ष के लिए 8% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ मूलधन (P) = 4000 रु.

दर (R) = 8% या $\frac{8}{100}$

समय $(T) = 2$ वर्ष

पहले एक वर्ष का ब्याज ज्ञात करना है।

पहले वर्ष का ब्याज $= \frac{P \times R \times T}{100}$

$$= \frac{4000 \times 8 \times 1}{100} = 320 \text{ रु.}$$

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

$= 4000 + 320$

$= 4320$ रु.

यही दूसरे वर्ष के लिए मूलधन होगा।

दूसरे वर्ष का ब्याज $= \frac{P \times R \times T}{100}$

$$= \frac{4320 \times 8 \times 1}{100} = 345.60 \text{ रु.}$$

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = दूसरे वर्ष का मूलधन + ब्याज

$= 4320 + 345.60$ रु.

$= 4665.60$ रु.

प्रश्नावली 13.1

प्र.1. चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

(i) 4000 रु. पर 2 वर्ष के लिए 5 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

(ii) 6000 रु. पर 3 वर्ष के लिए 10 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

(iii) 6250 रु. पर 2 वर्ष के लिए 8 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

प्र.2. मिश्रधन ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज की गणना प्रतिवर्ष की जाती है।

(i) 7500 रु. पर 2 वर्ष के लिए 6 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

(ii) 2500 रु. पर 2 वर्ष के लिए 8 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

(iii) 5120 रु. पर 2 वर्ष के लिए $12\frac{1}{2}$ प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

प्र.3. एक किसान डीजल पंप लेने के लिए ग्रामीण बैंक से 5500 रु. 4% वार्षिक, चक्रवृद्धि ब्याज की दर से कर्ज लिया। वार्षिक गणना पर ज्ञात कीजिए कि 2 वर्ष पश्चात् किसान, बैंक को कितना रुपया देगा?

4. अनुराधा ने किसी संस्था में 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 8000 रु. जमा किए 3 वर्षों के बाद उसको मिलने वाला मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

तिमाही एवं छःमाही गणना पर चक्रवृद्धि ब्याज

बैंकों में और कई अन्य कार्यों में ब्याज की गणना वार्षिक न होकर छः माही और कभी–कभी तिमाही होती है। इसका मतलब हुआ कि हर छः अथवा तीन माह में मूलधन बदलता जाता है। आइए इसे एक उदाहरण द्वारा समझें –

उदाहरण 3. सकीना ने 4000 रु. बैंक में जमा करवाए। बैंक 5% वार्षिक दर से ब्याज देता है और ब्याज की गणना हर 6 माह में करता है। तो एक साल बाद उसके खाते में कितना पैसा होगा?

हलः यदि इस सवाल में ब्याज की गणना वार्षिक की जाए तो सकीना को साल भर में $\frac{4000 \times 5 \times 1}{100}$ अर्थात 200 रु. ब्याज मिलता और उसके खाते में 4200 रु. हो जाते।

चूंकि ब्याज की गणना 6 महीने में होती है इसलिए हमें 6 महीने तक का ब्याज निकाल कर मूलधन में जोड़ना होगा।

6 महीने का ब्याज = $\frac{4000 \times 5}{100} \times \frac{6}{12} = 100$ रु. {6 महीने को $\frac{6}{12}$ वर्ष भी लिख सकते हैं।}

अतः 6 महीने के बाद के लिए मूलधन 4100 रु.

6 महीने से 12 महीने तक के लिए ब्याज $= \frac{4100 \times 5}{100} \times \frac{6}{12} = 102.50$ रु.

अर्थात् साल भर बाद खाते में राशि $= 4000 + 100 + 102.50$

या $4100 + 102.50 = 4202.50$

जाहिर है कि 6 माह में गणना से 2 रु. 50 पैसा अतिरिक्त ब्याज मिला।

ब्याज की गणना जितने कम समय में होगी उतनी जल्दी ब्याज पर ब्याज लगना शुरू होगा और बकाया अथवा जमा राशि बढ़ती जाएगी।

प्रश्नावली 13.2

प्र.1. एक बैंक घरेलू बचत खाते पर 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज देता है यदि ब्याज प्रत्येक 6 माह में मूलधन में जोड़ दिया जाता है तो नरेश को बैंक में 1600 रु. जमा करने पर एक वर्ष पश्चात् कितना ब्याज मिलेगा?

प्र.2. अनामिका किसी वित्त कम्पनी में 24000 रु. 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए जमा कराता है। यदि ब्याज की गणना प्रति छः माही हो, तो परिपक्वता पर उसे

कल कितनी राशि प्राप्त होगी?

प्र.3. 7500 रु. की राशि पर 8% वार्षिक दर से 1 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज का अन्तर ज्ञात कीजिए, जबकि चक्रवृद्धि ब्याज की गणना प्रत्येक छः महीने में होती है।

प्र.4. 8000 रु. की राशि पर 5% वार्षिक दर से एक वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज की गणना प्रति छः माही की जाती है।

चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र

जाहिर है कि जैसे–जैसे वर्ष बढ़ते जाएंगे चक्रवृद्धि ब्याज निकालने के लिए गणना लम्बी होती जाएगी। हम कोशिश करते है कि इसके लिए एक सूत्र बना लें।

हम मूलधन के लिए P_1 (Principal amount) लिखते हैं। प्रतिमाह ब्याज की दर के लिए R (Rate) और समय के लिए T (Time) लिखते है।

अगर ब्याज की गणना वार्षिक होता है तो दूसरे वर्ष का मूलधन P_2, प्रथम वर्ष के मूलधन P_1 और प्रथम वर्ष के ब्याज (I_1) का योग होगा।

अर्थात् दूसरे वर्ष के लिए मूलधन $P_2 = P_1 + I_1$

साथ ही पहले वर्ष का ब्याज $I_1 = \frac{P_1 \times R}{100}$ (यहाँ समय T= 1 वर्ष है)

इसका मतलब हुआ कि $P_2 = P_1 + I_1 = P_1 + \frac{P_1 \times R}{100} = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$

दूसरे वर्ष का ब्याज $I_2 = \frac{P_2 \times R \times T}{100}$

$= \frac{P_2 \times R}{100}$ (यहाँ समय **T= 1** वर्ष है।)

तीसरे वर्ष का मूलधन $= P_2 + I_2 \quad = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) + P_2\frac{R}{100}$

$$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) + P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\frac{R}{100}$$

$$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right) = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$$

इसी तरह आगे बढ़ने पर हम आगे के वर्षों के लिए मूलधन और ब्याज निकाल सकते हैं।

अतः तीसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = चौथे वर्ष का मूलधन $(P_4) = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$

चौथे वर्ष के अन्त में मिश्रधन $= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^4$

और इसी तरह से आगे।

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि 't' वर्ष के बाद का मिश्रधन (Amount) मालूम करना है तो वह होगा $P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^t$ जहाँ शुरू का मूलधन P_1 है,

अतः 't' वर्षों में अर्जित कुल ब्याज = t वर्ष के बाद का मिश्रधन – प्रारम्भिक मूलधन

$$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^t - P_1$$

$$\text{'t' वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज (C.I.)} = P_1\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^t - 1\right]$$

उदाहरण 4. 800 रु. का 10% वार्षिक दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार, मूलधन (P) = 800 रु.

दर (R) = 10% वार्षिक

समय (t) = 2 वर्ष

यहाँ ब्याज की गणना वार्षिक है।

$$\text{अतः चक्रवृद्धि ब्याज C.I.} = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^t - 1\right]$$

$$= 800\times\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 - 1\right] = 800\times\left[\left(1+\frac{1}{10}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 800\times\left[\left(\frac{11}{10}\right)^2 - 1\right] \qquad = 800\times\left[\frac{121}{100} - 1\right]$$

$$= 800\times\frac{21}{100} = 168 \text{ रु.}$$

उदाहरण 5. यदि ऋतु विश्वास ने मकान बनवाने के लिए 80000 रु. की राशि 15% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से किसी भवन निर्माण सहकारी समिति से उधार ली, तो 3 वर्ष बाद उसे कुल कितनी राशि लौटानी होगी? यह भी बताइये कि वह ब्याज की कितनी राशि देगी ?

हल: प्रश्नानुसार, मूलधन (P) = 80000 रु.

दर (R) = 15% वार्षिक

समय (t) = 3 वर्ष

अतः चक्रवृद्धि मिश्रधन $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^t$

$$= 80000 \times \left(1+\frac{15}{100}\right)^3$$

$$= 80000 \times \left(1+\frac{3}{20}\right)^3 = 80000 \times \left(\frac{23}{20}\right)^3$$

$$= 80000 \times \frac{23}{20} \times \frac{23}{20} \times \frac{23}{20} = 80000 \times \frac{12167}{8000}$$

$= 121670$ रु.

ऋतु को 3 वर्ष बाद 121670 रु. लौटाने होंगे।

अब चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन (A) – मूलधन (P)

$= 121670 - 80000$

$= 41670$ रु.

उपरोक्त उदाहरणों में चक्रवृद्धि ब्याज की गणना वार्षिक आधार पर की गई है, किन्तु यह आवश्यक नहीं है कि सदैव चक्रवृद्धि ब्याज की गणना वर्षवार की जाए। प्रायः सभी बैंक ब्याज की गणना वर्ष में दो बार अर्थात् प्रति छः माही करते हैं। कुछ बैकिंग संस्थाएँ ब्याज की गणना तिमाही भी करती हैं और उसे मूलधन में शामिल करती रहती हैं। **स्मरणीय तथ्य यह है कि जब दर से समयावधि का कोई उल्लेख नहीं हो तो उसे वार्षिक ही समझा जाता है।**

अतः यदि ब्याज प्रति छः माही लगाया जाता है तो समय को दुगुना तथा दर को आधा करके सूत्र की सहायता से चक्रवृद्धि ब्याज एवं चक्रवृद्धि मिश्रधन की गणना की जाती है।

आइए, उदाहरण द्वारा इसे समझें –

उदाहरण 6. उर्वशी ने 2000 रु. 20% वार्षिक ब्याज की दर से उधार लिए। यदि ब्याज की गणना प्रति छः माही की जाती हो तो $1\frac{1}{2}$ वर्ष बाद उसे कितनी रकम चुकानी होगी? ब्याज की राशि भी बताइये?

हल: प्रश्नानुसार मूलधन (P) $= 2000$ रु.

दर (R) $= 20\%$ वार्षिक $= 10\%$ छः माही

समय (t) $= 1\frac{1}{2}$ वर्ष $= 3$ छः माही

अतः चक्रवृद्धि ब्याज से मिश्रधन A $= p\left(1+\frac{R}{100}\right)^t$

$$= 2000\times\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = 2000\times\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$$

$$= 2000\times\left(\frac{11}{10}\right)^3 = 2000\times\frac{1331}{1000}$$

$= 2662$ रु.

ब्याज की राशि $= 2662 - 2000 = 662$ रु.

उदाहरण 7. वह धन ज्ञात कीजिए जो 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्षों में 13310 रुपये हो जाता है।

हल: प्रश्नानुसार $A = 13310$ रु.

$R = 10\%$

$T = 3$ वर्ष

$$A = P\times\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$$

$$13310 = P\times\left(1+\frac{10}{100}\right)^3$$

या $$13310 = P\times\left(\frac{11\cancel{0}}{10\cancel{0}}\right)^3$$

या $$13310 = P\times\frac{11\times11\times11}{10\times10\times10}$$

या $$P = \frac{\overset{\overset{\overset{10}{\cancel{110}}}{\cancel{1210}}}{\cancel{13310}}\times10\times10\times10}{\cancel{11}\times\cancel{11}\times\cancel{11}} = 10000 \text{ रु.}$$

अतः वह धन 10,000 रुपये है।

प्रश्नावली 13.3

प्र.1. चक्रवृद्धि ब्याज और मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

(i) मूलधन = 6000 रु., समय = 3 वर्ष, दर = 10% वार्षिक

AABPHX

(ii) मूलधन = 1600 रु., समय = 2 वर्ष, दर = 5% वार्षिक

(iii) मूलधन = 8500 रु., समय = 2 वर्ष, दर = 15% वार्षिक

(iv) मूलधन = 20000 रु., समय = 3 वर्ष, दर = 5% वार्षिक

प्र.2. सलमा ने महिला समिति से 625 रु. सिलाई मशीन खरीदने के लिए उधार लिए। यदि ब्याज की दर 8% वार्षिक हो एवं वार्षिक गणना की जाए तो 2 वर्ष बाद सलमा समिति को कितनी रकम वापस करेगी?

प्र.3. वह धन ज्ञात कीजिए जो 8% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्षों में 5832 रु. हो जाता है।

प्र.4. कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 4000 रु. 2 वर्ष में 5290 रु. हो जाता है।

प्र.5. किस दर से 1800 रु. का चक्रवृद्धि ब्याज 2 वर्ष में 378 रु. हो जाता है यदि ब्याज वार्षिक लगाया जाता है।

प्र.6. 3200 रु. पर 12% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए साधारण ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज का अन्तर ज्ञात कीजिए।

प्रतिशतता का एक और अनुप्रयोग, बट्टा (Discount)

रेहाना अपनी माँ के साथ अपना कम्पास बॉक्स खरीदने गई। उसने कम्पास बॉक्स देख लिया तो माँ ने पूछा कितने का है। दुकानदार ने कहा 50 रु. का है। आपसे 46 रु. ही लूंगा। माँ ने कहा थोड़ी और ज्यादा छूट दो। थोडी देर बातचीत करने पर 42 रु. में कम्पास बॉक्स रेहाना को मिल गया।

रेहाना को तो बॉक्स मिल गया किन्तु क्या आपको छूट या बट्टा समझ में आया? छूट या बट्टा वस्तु के निर्धारित मूल्य (अंकित मूल्य) पर होता है और इसे देकर वस्तु को निर्धारित मूल्य से कम पर बेचना होता है।

बट्टा अथवा छूट = अंकित मूल्य − विक्रय मूल्य

कई बार तो दुकानदार बड़ी खरीदी करने पर काफी बट्टा देते हैं। कई बार वह एक निर्धारित दर से बट्टा देते हैं। **बट्टे की दर प्रतिशत सदैव अंकित मूल्य पर ही ज्ञात की जाती है।**

उदाहरण 8. एक पुस्तक का अंकित मूल्य 40 रु. है तथा वह 12% छूट पर उपलब्ध है। पुस्तक पर बट्टा एवं विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : अंकित मूल्य = 40 रुपये, बट्टे (छूट) की दर = 12%

चूंकि 100 रु. अंकित मूल्य पर बट्टा है = 12 रु.

$\therefore$ 1 रु. अंकित मूल्य पर बट्टा होगा $= \frac{12}{100}$ रु.

$\therefore$ 40 रु. अंकित मूल्य पर बट्टा होगा $= \frac{12}{10\cancel{0}} \times 4\cancel{0} = \frac{48}{10}$ रु.

$\therefore$ बट्टा $= 4.80$ रु.

विक्रय मूल्य $= 40.00$ रु. $-$ 4.80 रु.

$= 35.20$ रु.

उदाहरण 9. एक मेज का अंकित मूल्य 1250 रु. है, उसे एक ग्राहक को 1100 रु. में बेचा गया। मेज़ पर दिये गये बट्टे का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल :

अंकित मूल्य $= 1250$ रु.

विक्रय मूल्य $= 1100$ रु.

बट्टा $= 1250 - 1100 = 150$ रु.

1250 रु. पर बट्टा है $= 150$ रु.

1 रु. पर बट्टा होगा $= \frac{150}{1250}$

100 रु. पर बट्टा $= \frac{150 \times 100}{1250} = \frac{15\cancel{0} \times 4}{5\cancel{0}} = \frac{\overset{3}{\cancel{15}} \times 4}{\cancel{5}}$

बट्टा प्रतिशत $= 12\%$

उदाहरण 10. अंकित मूल्य पर 15% बट्टा देने के बाद एक कमीज़ 442 रु. में बेची गई। कमीज़ का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल :

मान लीजिए अंकित मूल्य $= x$ रु.

बट्टा $= x$ रु. का $15\% = x \times \frac{15}{100}$ रु. $= \frac{3x}{20}$ रु.

विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य – बट्टा

$442 = x - \frac{3x}{20}$

$442 = \frac{20x - 3x}{20}$

$442 = \frac{17x}{20}$

$$\frac{442 \times 20}{17} = x$$

$$x = 520$$

कमीज़ का अंकित मूल्य $= 520$ रु.

क्रियाकलाप 1

अब नीचे की तालिका देखिए और उसके रिक्त स्थान भरिये :

तालिका 3

क्र. सं.	छात्र का नाम	खरीदी गयी पुस्तक का नाम	अंकित मूल्य	बट्टा	विक्रय मूल्य	बट्टे की दर %
1.	रोहित	शब्द कोश	50 रु.	10 रु.	40 रु.	$\frac{10 \times 100}{50} = 20\%$
2.	अल्पना	अंक गणित के खेल	60 रु.	———	45 रु.	$\frac{---\times 100}{60} = 25\%$
3.	अबीदा	बच्चों के लिए गीत	45 रु.	30 रु.	———	———
4.	हेलेन	शीघ्र गणित	60 रु.	12 रु.	48 रु.	———
5.	महेश	कहानी की किताब	———	7.20 रु.	———	——— = 5%
6.	अहमद	रामानुजन	72 रु.	———	———	——— = 10%
7.	———	———	———	———	———	———
8.	———	———	———	———	———	———

उदाहरण 11. एक दुकानदार अपने ग्राहकों को गर्मी के दिनों में स्वेटर पर ऑफ सीजन 10% छूट (Discount) देता है, फिर भी उसे 12.5% लाभ होता है। दुकानदार ने स्वेटर को कितने रु. में खरीदा होगा जिसका अंकित मूल्य 500 रु. है।

हल :

अंकित मूल्य $= 500$ रु.

बट्टे की दर $= 10\%$

दिया गया बट्टा $= \dfrac{500 \times 10}{100} = 50$ रु.

स्वेटर का विक्रय मूल्य $= (500 - 50)$ रु. $= 450$ रु.

दुकानदार का लाभ % $= 12.5$ रु.

क्रयमूल्य $= \dfrac{450 \times 100}{100 + 12.50} = \dfrac{450 \times 100}{112.5} = 400$ रु. $\left[\because \text{क्रयमूल्य} = \dfrac{\text{विक्रयमूल्य} \times 100}{100 + \text{लाभ } \%}\right]$

स्वेटर का क्रय मूल्य $= 400$ रु.

कर (Tax)

कर के बारे में आपने जरूर पढ़ा होगा, सुना होगा। कर कई तरह के होते हैं आयकर, बिक्री कर, कृषि राजस्व कर, मनोरंजन कर आदि। कुछ कर केन्द्र सरकार इकट्ठा करती है और कुछ राज्य सरकारें इकट्ठा करती हैं। कुछ कर की राशि नगर पालिका अथवा ग्राम पंचायत को भी जाती है। कर क्यों लगाया जाता है, इस एकत्रित राशि का क्या–क्या उपयोग होता है, यह सब हम सामाजिक अध्ययन में पढ़ेंगे।

उदाहरण 12. किसान रामदीन के पास 25 एकड़ खेत है। यदि भूमि कर की दर प्रति एकड़ 15 रु. वार्षिक है तो रामदीन प्रति वर्ष कितना भूमि कर देगा?

हल: एक एकड़ खेत पर 15 रु. कर लगता है।

अतः 25 एकड़ खेत पर $= 25 \times 15$ रु.

$= 375$ रु.

रामदीन प्रतिवर्ष 375 रुपये भूमिकर देगा।

उदाहरण 13. एक मोटर साइकिल का मूल्य 42000 रुपया है इस पर 4% वेट (VAT) (Value added Tax) (मूल्य वर्द्धित कर) लगता है, उस मोटर साइकिल पर कितने रुपये वेट लगेगा?

हल:

चूंकि 100 रु. पर 4 रुपये वेट लगता है।

$\therefore$ 1 रु. पर $= \dfrac{4}{100}$ रु.

$\therefore$ 42000 रुपये पर $= \dfrac{4}{100} \times 42000$ रु.

$= 1680$ रु. वेट लगेगा।

उस मोटर साइकिल पर 1680 रुपये वेट लगेगा।

उदाहरण 14. एक शहर में 5242 मकान हैं यदि प्रति मकान 2 रु. मकान कर तथा 20 रु. जल कर प्रतिवर्ष जमा होता है तो कर के रूप में उस शहर में जमा होने वाला धन ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार, मकान कर $= 2$ रु. प्रति मकान प्रति वर्ष, जलकर $= 20$ रु. प्रति मकान प्रति वर्ष

कुल मकान कर = कुल मकान $\times$ प्रति मकान कर

$= 5242 \times 2$ रु.

$= 10484$ रु.

तथा जलकर = कुल मकान $\times$ प्रति मकान जल कर

$= 5242 \times 20$ रु.

$= 104840$ रु.

कुल जमा धन $= 10484 + 104840$ रु.

$= 115324$ रु.

उदाहरण 15.एक दुकानदार ने 6 महीने की बिक्री के बाद 4500 रु. वेट के रूप में जमा किया। यदि वेट की दर 4% हो तो यह बताइए कि उसने कितनी मूल राशि का सामान बेचा।

हलः प्रश्नानुसार, वेट की दर $= 4\%$

जब 4 रु. वेट है तो सामान की मूल राशि $= 100$ रु.

$\therefore$ 1 रु. वेट होने पर सामान की मूल राशि $= \dfrac{100}{4}$ रु.

4500 रु. वेट होने पर सामान की मूल राशि $= \dfrac{100}{4} \times 4500 = 1{,}12{,}500$ रु.

उदाहरण 16. रजिया दवाई खरीदने गई। उसने 625 रु. के अंकित मूल्य की दवाई खरीदी और उस पर 12 रु. 50 पैसे अतिरिक्त कर दिया। अतिरिक्त कर की दर प्रतिशत क्या थी?

हलः 625 रु. पर लगने वाला अतिरिक्त कर $= 12.50$ रु.

$\therefore$ 1 रु. पर लगने वाला अतिरिक्त कर $= \dfrac{12.50}{625}$

100 रु. पर लगने वाला अतिरिक्त कर $= \dfrac{12.50}{625} \times \dfrac{100}{1}$

$$= \frac{1250}{625} \times \frac{\cancel{100}}{\cancel{100}}$$

$$= 2\%$$

उदाहरण 17.

सुरेश ने कुछ सामान खरीदा। उसने दुकानदार को 4% कर सहित 780 रु. दिए। तो खरीदे गए सामान का मूल दाम बताओ।

हलः यहाँ माना सामान का मूल दाम $= 100$ रुपये

तथा कर की दर $= 4\%$

अतः दुकानदान को दिया गया मूल्य $= 100 + 4 = 104$ रु.

104 रु. दिए तो मूल दाम $= 100$

780 रु. दिए तो मूल दाम $= \dfrac{780 \times 100}{104}$

$= 750$ रु.

अब तो आपने देख लिया होगा कि ये सवाल भी ऐकिक नियम और प्रतिशतता के अनुप्रयोग ही हैं। ध्यान सिर्फ यह रखना है कि मूल राशि कितनी है, कर की मात्रा और दर कितनी–कितनी हैं और इनमें से कौन–सी सवाल में दी गई है और कौन सी मालूम करनी है। उदाहरण 13 में मूल दाम और वेट कर की दर दी हुई है, इसमें कर पता करना है। उदाहरण 15 में कर की दी गई राशि और दर दी गई है हमें मूल राशि पता करनी है और उदाहरण 16 में अंकित मूल्य और कर दिया गया है हमें कर की दर निकालनी है।

प्रश्नावली 13.4

प्र.1. सर्जियस ने एक साइकल खरीदी जिसका मूल्य 1750 रु. है। यदि सायकल पर बिक्री कर की दर 4% है तो सर्जियस को साइकल के लिए कितने रुपये देने पड़ेगें?

प्र.2. महानदी किनारे स्थित ग्राम पंचायत गिधपुरी रेत निकासी के लिए 20 रु. प्रति घन मीटर टैक्स लेती है। यदि एक ट्रेक्टर में 5 घन मीटर रेत आती है तो नदी से 12 ट्रेक्टर रेत निकालने पर पंचायत को कितना टैक्स मिलेगा?

प्र.3. अंजली ने एक दुकान से 500 रु. मूल्य के इत्र तथा 800 रु. मूल्य के गहने खरीदे। यदि इत्र पर बिक्री कर 16% तथा गहनों पर बिक्री कर 8% है तो अंजली कुल कितने रुपये दुकानदार को अदा करेगी?

प्र.4. किसान 4 रु. प्रति एकड़ भू–राजस्व सरकार को देता हैं। यदि रामदीन के पास 85 एकड़ कृषि भूमि है, तो वह भू–राजस्व के रूप में कितने रुपये अदा करेगा?

प्र.5. नगर निगम सुन्दरपुर ने आवासीय भूखण्डों के लिए विकास शुल्क 8 रु. प्रति वर्ग फुट तय किया। यदि भानुप्रकाश के भूखण्ड की माप 50 फीट × 30 फीट हो तो उसे कितना विकास शुल्क देना होगा?

प्र.6. दिनेश ट्रक से 37500 रु. का अनाज बाहर से मंगाता है। यदि अनाज के मूल्य पर 2.5% प्रवेश कर लगता है तो दिनेश कुल कितना प्रवेश कर अदा करेगा?

प्र.7. यदि ग्राम पंचायत अड़सेना प्रति मकान 25 रु. गृह कर लगाती है और पंचायत के अन्तर्गत 216 मकान है तो गृहकर से पंचायत को कितनी आय होगी?

प्र.8. भारत सरकार ट्रेक्टरों पर लागत मूल्य का 11% उत्पाद कर लगाती है। यदि कारखाने में 1 ट्रेक्टर की उत्पादन लागत 120000 रु. है तो प्रति ट्रेक्टर उत्पाद कर की राशि ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. जब किसी निश्चित अवधि के बाद ब्याज को मूलधन में जोड़कर फिर ब्याज की गणना की जाती है तो ऐसे ब्याज को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

2. चक्रवृद्धि ब्याज $C.I. = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^T - 1\right]$

AAKKJK

3. चक्रवृद्धि मिश्रधन $A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^T$

4. जब ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक हो तो समय वार्षिक समय का दुगुना तथा दर वार्षिक दर की आधी हो जाती है।

5. बट्टे की गणना अंकित मूल्य पर की जाती है।

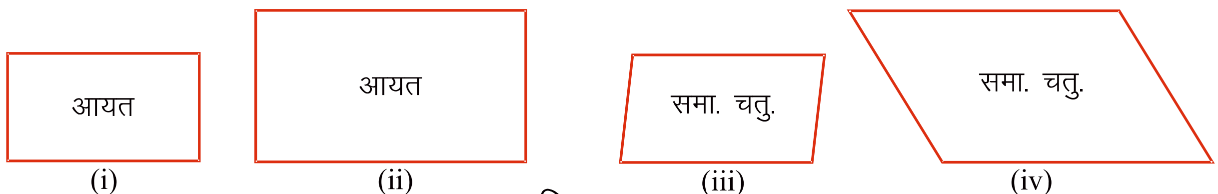
6. किसी वस्तु की बिक्री पर लगने वाला कर बिक्री कर कहलाता है।

7. यदि विक्रय मूल्य एवं लाभ अथवा हानि प्रतिशत ज्ञात हो तो

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{\text{विक्रय मूल्य} \times 100}{100 + \text{लाभ}\,\%} = \frac{\text{विक्रय मूल्य} \times 100}{100 - \text{हानि}\,\%}$$

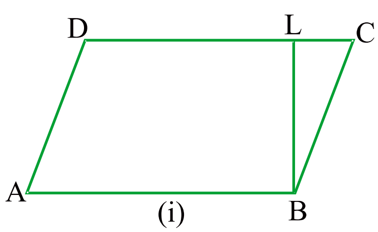
अध्याय–14
क्षेत्रमिति–1
MENSURATION-1

आकांक्षा और रानु ने मोटे कागज को काटकर विभिन्न मापों के आयत व समान्तर चतुर्भुज बना लिये जो नीचे दिये अनुसार थे–



चित्र 14-1

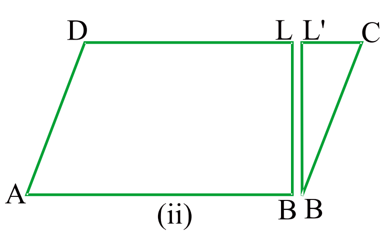
रानु ने आकांक्षा से इनका क्षेत्रफल निकालने के लिए कहा, आकांक्षा ने आयताकार टुकड़ों की लम्बाई तथा चौड़ाई का गुणा करके क्षेत्रफल निकाल लिया। (आयत का क्षेत्रफल = लं. × चौ.) लेकिन वह समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल नहीं निकाल पाई, क्योंकि वह समान्तर चतुर्भुज की लंबाई और चौड़ाई के बारे में निश्चय नहीं कर सकी। रानु ने कहा– यदि हम इन समान्तर चतुर्भुज वाली आकृति को काटकर आयत में बदल लें, तो इनका क्षेत्रफल निकाला जा सकता है।



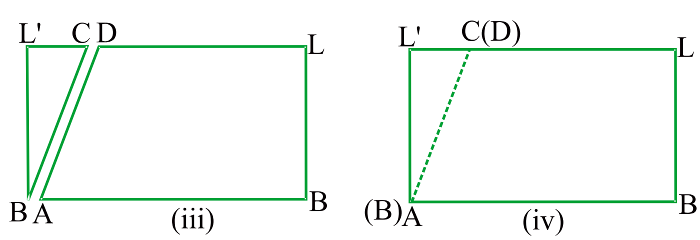
इसके लिए उन्होंने निम्न क्रियाकलाप किया–

एक समान्तर चतुर्भुज वाली आकृति को लेकर ABCD से नामांकित किया एवं भुजा AB को आधार मानकर एक शीर्ष लंब BL खींचा। त्रिभुजाकार टुकड़े BLC को काटकर अलग किया। (चित्र 14.2(ii))

त्रिभुजाकार आकृति को उठाकर रानू ने उसी आकृति से जोड़ने का प्रयास किया, तो चित्र–14.2(iii) के अनुसार आकृति प्राप्त हुई।



उसके पश्चात् आकांक्षा ने पूरी तरह जोड़कर आकृति–14.3(iv) को प्राप्त किया।



चित्र 14.2

इस तरह आयत का चित्र प्राप्त हुआ। आकांक्षा ने कहा– आकृति–14.2(i) तथा आकृति–14.2(iv)

का क्षेत्रफल बराबर होगा, क्योंकि आकृति–14.2(iv) आकृति–14.2(i) का परिवर्तित रुप है।

आयत ABLL' का क्षेत्रफल $= AB \times BL =$ समान्तर चतुर्भुज ABCD का आधार x ऊँचाई

अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई, प्राप्त हुआ। इस तरह उन्होंने समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिया।

अतः

(1) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

(2) समान्तर चतुर्भुज का आधार = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

(3) समान्तर चतुर्भुज का ऊँचाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

उदाहरण 1. आधार 15 सेमी तथा ऊंचाई 5 सेमी वाले समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः आधार = 15 सेमी तथा ऊँचाई = 5 सेमी

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

= 15 सेमी × 5 सेमी

= 75 वर्ग सेमी

उदाहरण 2. उस समान्तर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 240 वर्ग सेमी तथा ऊंचाई 8 सेमी है।

हलः हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का आधार = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

क्षेत्रफल = 240 वर्ग सेमी, ऊंचाई = 8 सेमी

अतः आधार $= \frac{240}{8} \frac{\text{सेमी}^2}{\text{सेमी}}$

= 30 सेमी

प्रश्नावली 14.1

प्र.1 उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके आधार और शीर्षलंब निम्नलिखित हैं।

(i) आधार = 15 सेमी., शीर्ष लंब = 10 सेमी

(ii) आधार = 90 सेमी, शीर्ष लंब = 8 सेमी

(iii) आधार = 120 सेमी, शीर्ष लंब = 15 सेमी

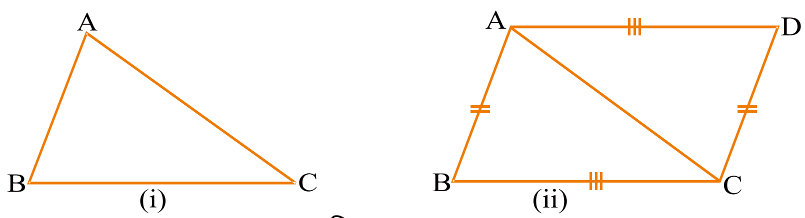
प्र.2 उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार 26.5 सेमी तथा शीर्ष लंब 7 सेमी है।

प्र.3 उस समान्तर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 390 वर्ग सेमी तथा शीर्ष लंब 26 सेमी हो।

प्र.4 उस समान्तर चतुर्भुज का शीर्ष लंब ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 1200 वर्ग मीटर और आधार 60 मीटर है।

आइए, अब निम्न क्रियाकलाप करते हैं–

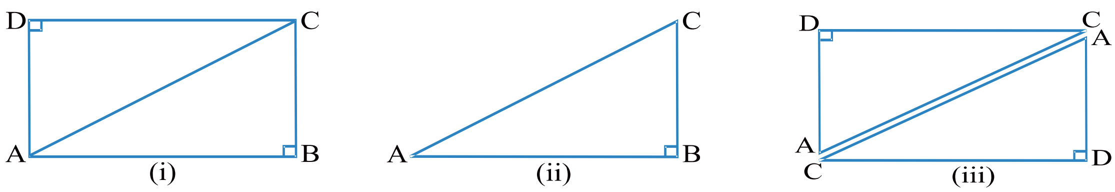
1. ABC एक त्रिभुज बनाइए तथा बिन्दु A से BC लम्बाई का तथा बिन्दु C से AB लम्बाई का चाप B के विपरीत ओर काटिए एवं दोनों चापों के कटान बिन्दु से A व C को मिलाइए तथा D से नामांकित कीजिए। इस प्रकार ABCD एक समान्तर चतुर्भुज प्राप्त होती है क्योंकि AB=DC तथा AD=BC है।



चित्र–14.3

क्रियाकलाप

एक मोटे आयताकार कागज ABCD को विकर्ण AC पर कैंची से काटिए।



चित्र –14.4

इस तरह, दो ΔABC और ΔADC बन गए। ΔABC और ΔADC को एक–दूसरे पर रखिए। क्या वे एक–दूसरे को पूरी तरह ढँक लेते हैं? आप पायेंगे कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं और उनके क्षेत्रफल भी बराबर हैं।

$\therefore$ ΔABC का क्षे. + ΔADC का क्षे.= आयत ABCD का क्षे.

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षे. + ΔABC का क्षे.= आयत ABCD का क्षे.

$\Rightarrow 2\Delta ABC$ का क्षे. = आयत ABCD का क्षे. [$\because \Delta ABC$ का क्षे. = ΔADC का क्षे.]

$\Rightarrow 2$ (ΔABC का क्षे.) = AB x BC

ΔABC का क्षे. = $\frac{1}{2} \times AB \times BC$

अभ्यास

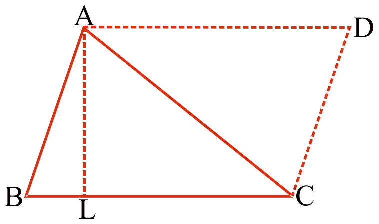
गत्ते पर एक समांतर चतुर्भुज बनाइए। उसे काटकर अलग कीजिए। एक विकर्ण पर उसे फिर काटिए। तब दो त्रिभुज मिलेंगे। क्या उन दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हैं? एक–दूसरे पर रखकर देखिए।

त्रिभुज का क्षेत्रफल

हम समान माप के दो त्रिभुजों को आपस में जोड़कर समान्तर चतुर्भुज की रचना कर सकते हैं। एक विकर्ण खींचने पर समान्तर चतुर्भुज में समान माप के दो त्रिभुज प्राप्त होते हैं। समांतर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC खींचने पर प्राप्त ΔABC और ΔADC सर्वांगसम हैं। उनके क्षेत्रफल भी बराबर हैं।

अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल +ΔADC का क्षेत्रफल

= 2 (ΔABC का क्षेत्रफल)



चित्र–14.5

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊंचाई = $\frac{1}{2} \times BC \times AL$

अतः **त्रिभुज का क्षेत्रफल $\boxed{A = \frac{1}{2} \times b \times h}$**

जहाँ b = त्रिभुज का आधार और h = त्रिभुज की ऊँचाई

याद रखें– **दो समान्तर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी आधार व ऊंचाई के समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।**

उदाहरण 3. आधार 28 सेमी तथा उंचाई 6 सेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार त्रिभुज का आधार b = 28 सेमी.

एवं ऊँचाई h = 6 सेमी

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 28 \times 6$

$= 84$ सेमी^{2}

उदाहरण 4. 80 सेमी आधार और 0.08 वर्गमीटर क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की उंचाई ज्ञात कीजिए।

हलः प्रश्नानुसार, त्रिभुज का आधार b = 80 सेमी. एवं क्षेत्रफल = 0.08 मी^{2}

यहाँ आधार सेमी. में दिया है अतः क्षेत्रफल को सेमी. में बदलने पर

1 मीटर^2 = 1 मीटर × 1 मीटर

= 100 सेमी × 100 सेमी (∴1 मीटर = 100 सेमी)

= 10000 सेमी^{2}

अतः 0.08 मीटर^2 = 0.08 × 10000 सेमी^{2}

= 800 सेमी^{2}

अब त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \times b \times h$ से

त्रिभुज की उंचाई = $h = \frac{2A}{b} = \frac{2 \times 800}{80}$

$\Rightarrow$ $h =$ 20 सेमी

प्रश्नावली–14.2

प्र.1 आधार 12 सेमी और संगत ऊँचाई 7 सेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.2 आधार 25 सेमी और शीर्ष लम्ब 1.5 सेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.3 आधार 6.5 सेमी और क्षेत्रफल 26 सेमी^{2} वाले त्रिभुज का शीर्ष लंब ज्ञात कीजिए।

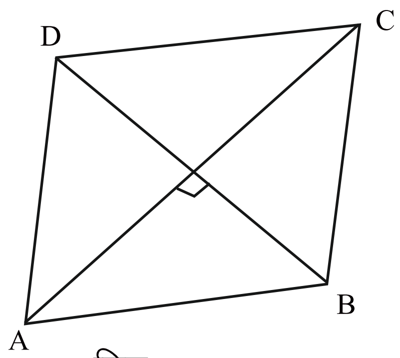
प्र.4 आधार 120 डेमी और ऊँचाई 75 डेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

समचतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज का ही एक रुप है अतः यदि उसका आधार तथा ऊँचाई ज्ञात हो तो क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है।

यदि आधार b तथा ऊँचाई h हो तो

क्षेत्रफल $A = b \times h$



चित्र–14.7

ABCD एक समचतुर्भुज है d_1 तथा d_2 इसके विकर्ण हैं चूँकि ये एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं अतः प्राप्त चार समकोण त्रिभुजों की लंबवत् भुजाएं $\frac{d_1}{2}$ तथा $\frac{d_2}{2}$ होंगी।

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= 4 \times$ एक समकोण त्रिभुज क्षेत्रफल

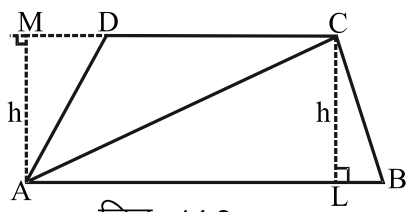
$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= 4 \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d_1\right)\times\left(\frac{1}{2}d_2\right)$$

अतः $\boxed{\text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\, d_1 d_2 \text{ सेमी}^2}$

$$\boxed{\text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{पहला विकर्ण} \times \text{दूसरा विकर्ण}}$$

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल



चित्र–14.8

एक ऐसा चतुर्भुज जिसकी दो सम्मुख भुजाएँ एक–दूसरे के समान्तर होती हैं। चित्र–14.8 में ABCD एक समलंब चतुर्भुज दिखाया गया है। भुजा AB भुजा DC के समान्तर है। दो समान्तर भुजाओं की लम्बवत दूरी को AM तथा CL से दर्शाया गया है।

यदि हम इस त्रिभुज का विकर्ण AC खींचे इससे समलंब चतुर्भुज दो त्रिभुज ABC तथा ACD प्राप्त होते हैं।

अतः समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $+ \Delta ACD$ का क्षेत्रफल

समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, AB \times CL + \frac{1}{2}\, DC \times AM$

चूंकि CL तथा AM समलंब चतुर्भुज की ऊंचाई है अतः यह बराबर होगी। माना कि यह h के बराबर है।

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, AB \times h + \frac{1}{2}\, DC \times h$

यदि $AB = b_1$ एवं $DC = b_2$ है तो

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\ b_1 \times h + \frac{1}{2}\ b_2 \times h$

$= \frac{1}{2}\ (b_1 + b_2) \times h$

$= \frac{1}{2} \times$ (समांतर भुजाओं का योग) उनके बीच की दूरी

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (समांतर भुजाओं का योग) ऊँचाई

या **समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल** $= \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$

उदाहरण 6. एक समचतुर्भुज की एक भुजा 7 सेमी तथा ऊँचाई 3.2 सेमी है इसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हलः प्रश्नानुसार आधार = 7 सेमी, ऊँचाई = 3.2 सेमी

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

क्षेत्रफल = 7 × 3.2 वर्ग सेमी

= 22.4 वर्ग सेमी

उदाहरण 7. एक समचतुर्भुज का एक विकर्ण 10 सेमी व दूसरा विकर्ण 12 सेमी है। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः समचतुर्भुज का पहला विकर्ण = 10 सेमी, दूसरा विकर्ण = 12 सेमी

यदि विकर्ण दिये हों तो समचतुर्भुज का

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (एक विकर्ण) × (दूसरा विकर्ण)

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12$

= 60 वर्ग सेमी

उदाहरण 8. एक समलंब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ 25 मीटर व 20 मीटर है व भुजाओं के बीच की दूरी 8 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार b_1 = 25मी, b_2 = 20मी, $h = 8$ मी

समलंब का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \times h \times (b_1+b_2)$

$A = \frac{1}{2} \times 8 \times (25+20)$

$A = \frac{1}{2} \times 8 \times (45)$

$A = 180$ वर्ग मी

उत्तर

उदाहरण 9. एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 140 सेमी² है, यदि समांतर भुजाओं में से एक भुजा 25 सेमी तथा ऊँचाई 7 सेमी है तो दूसरी समान्तर भुजा ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार A = 140 सेमी², b_1 = 25 सेमी

h = 7 सेमी

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्र A है तो

$A = \frac{1}{2} \times h \times (b_1+b_2)$

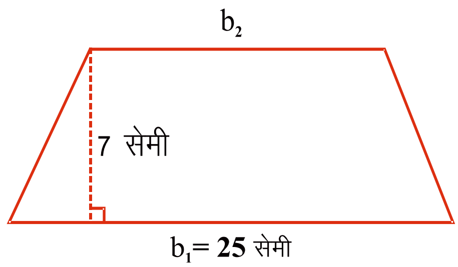
अतः $140 = \frac{1}{2} \times 7\,(25+b_2)$

$\frac{2 \times 140}{7} = 25 + b_2$

$40 = 25+b_2$

$b_2 = 40 - 25$

दूसरी भुजा $b_2 = 15$ सेमी.



चित्र–14.9

प्रश्नावली–14.3

प्र.1 एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण 24 सेमी व 10 सेमी हैं।

प्र.2 एक समचतुर्भुज की एक भुजा 7.5 सेमी और शीर्ष लंब 4 सेमी है तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.3 एक समलंब चतुर्भुज की समांतर भुजाएं 20 मी व 8 मी है। इन भुजाओं के बीच की दूरी 12 सेमी है, इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.4 आधार 30 सेमी और 24.4 सेमी वाले समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि शीर्ष लंब 1.5 सेमी है।

प्र.5 एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 105 वर्ग सेमी तथा ऊंचाई 7 सेमी है, समान्तर भुजाओं में से यदि एक दूसरी से 6 सेमी अधिक है तो दोनों समान्तर भुजाएं ज्ञात करो।

आयताकार पथ का क्षेत्रफल

चित्र–14.10

किसी विद्यालय के चारों ओर बना बरामदा, खेत के चारों ओर का रास्ता, खेल के मैदान का रास्ता आदि का क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है, इस स्थिति में हम क्या करते हैं।

चित्र–14.10 एक आयताकार खेत है जिसके चारों ओर रास्ता बना हुआ है। यदि हमें इस रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करना है तो क्या करेंगे?

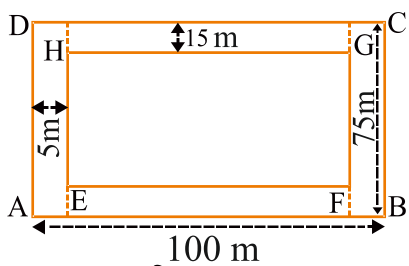
स्पष्ट है कि इसमें हमें दो आयत मिल रहे हैं अतः बड़े आयत के क्षेत्रफल में छोटे आयत के क्षेत्रफल को घटा देंगे।

आयताकार पथ का क्षेत्रफल = बड़े आयत का क्षेत्रफल – छोटे आयत का क्षेत्रफल

उदाहरण 10. एक आयताकार खेत जिसकी लम्बाई 90 मीटर तथा चौड़ाई 65 मीटर है इसके बाहर चारों ओर 5 मीटर चौड़ा एक रास्ता बना हुआ है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: चित्र से स्पष्ट है कि रास्ते का क्षेत्रफल = आयत ABCD का क्षेत्रफल – आयत का EFGH का क्षेत्रफल होगा।

अतः रास्ते का क्षेत्रफल $= (AB \times BC) - (EF \times FG)$



चित्र–14.11

यहाँ $AB = AE + EF + FB$

$AB = 5 + 90 + 5$

$AB = 100$ मीटर

इसी तरह $BC = 5 + 65 + 5$

$= 75$ मीटर

अतः रास्ते का क्षेत्रफल $= (AB \times BC) - (EF \times FG)$

$= 100 \times 75 - 90 \times 65$

$= 7500 - 5850$

$= 1650$ वर्ग मीटर

उदाहरण 11. एक दीवार जिसकी लम्बाई 15.5 मीटर तथा चौड़ाई 9 मीटर है इसमें 3 मीटर × 1.5 मीटर माप के दो दरवाजे तथा 2 मीटर × 1 मीटर माप की दो खिड़कियाँ लगी हैं इसे 5 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से रंगवाने (पोताई) का खर्च ज्ञात कीजिए।

हल: हमें पहले पोताई योग्य दीवार का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

अतः पोताई योग्य दीवार का क्षेत्रफल = दीवार का संपूर्ण क्षेत्रफल – (2 दरवाजों + 2 खिड़कियों का क्षेत्रफल)

दीवार का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= 15.5 \times 9$

$= 139.5$ वर्ग मीटर

1 दरवाजे का क्षेत्रफल= लम्बाई × चौड़ाई

$= 3 \times 1.5$

$= 4.5$ वर्ग मीटर

2 दरवाजों का क्षेत्रफल= 4.5×2

$= 9.0$ वर्ग मीटर

1 खिड़की का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= 2 \times 1$

$= 2$ वर्ग मीटर

2 खिड़कियों का क्षेत्रफल 2×2

$= 4$ वर्ग मीटर

अतः पोताई योग्य दीवार का क्षे. $= 139.5 - (9.0 + 4)$

$= 139.5 - 13.0$

$= 126.5$ वर्गमीटर

5 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से पोताई का खर्च $= 126.5 \times 5$

$= 632.50$ रु.

उदाहरण 12. एक आयताकार क्षेत्र की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 35 मीटर व 24 मीटर है। इसके बीचों बीच इसकी लम्बाई के समान्तर 2 मीटर चौड़ा तथा चौड़ाई के समान्तर 1 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

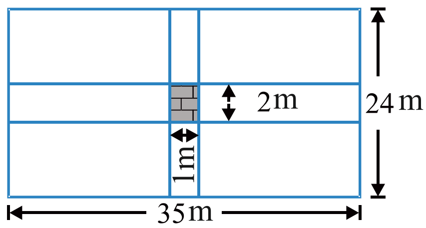
हल: लम्बाई के समान्तर रास्ते का क्षेत्रफल $= 35 \times 2 = 70$ वर्ग मीटर

चौड़ाई के समान्तर रास्ते का क्षेत्रफल $= 24 \times 1$

$= 24$ वर्ग मीटर

छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= 2 \times 1$

$= 2$ वर्ग मीटर



चित्र–14.12

(छायांकित भाग दोनों रास्तों में आया है अतः उसे एक बार घटायेंगे)

रास्ते का क्षेत्रफल $= 70 + 24 - 2$

$= 94 - 2$

$= 92$ वर्ग मीटर

प्रश्नावली–14.4

प्र.1 एक 25 सेमी लंबी तथा 10 सेमी चौड़े चित्र के बाहर चारों ओर 2 सेमी चौड़ाई की पट्टी बनी है। पट्टी का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.2 एक आयताकार खेल का मैदान 35 मी $\times$ 25 मी माप का है। इसके बीचों–बीच लम्बाई के समान्तर 3 मीटर चौड़ा तथा चौड़ाई के समान्तर 2 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

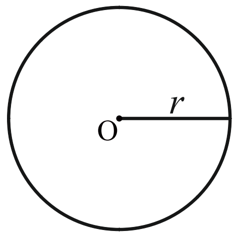
प्र.3 एक बास्केटबॉल का मैदान 28 मीटर लम्बा तथा 15 मीटर चौड़ा है। इसके बाहर चारों ओर 5 मीटर चौड़ी समतल दर्शक दीर्घा बनानी है। दीर्घा का क्षेत्रफल तथा दर्शक दीर्घा को बनाने का खर्च 5.25 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल

पिछली कक्षाओं में हमने वृत के बारे में जाना है। यदि एक वृत जिसकी त्रिज्या r है तो परिधि $C = 2\pi r$

तथा क्षेत्रफल $= \pi r^2$ होता है।

जहां π एक नियतांक है जिसका मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 होता है।



चित्र–14.13

उदाहरण 13. साईकिल के पहिए की परिधि तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 21 सेमी है।

हल: साईकिल का पहिया वृत्ताकार होता है

अतः पहिए की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21$ सेमी $= 132$ सेमी

पहिए का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times (21)^2$$

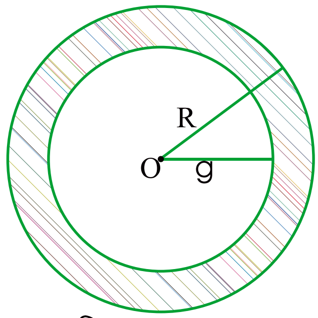
$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= \frac{22}{\cancel{7}} \times \overset{3}{\cancel{21}} \times 21$$

$= 1386$ वर्ग सेमी

सकेन्द्री वृत्त

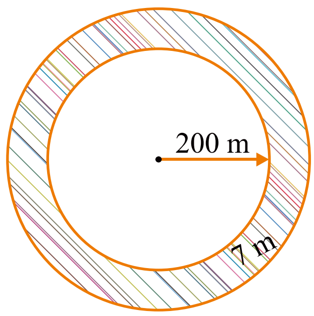
चित्र–14.14 में दो सकेन्द्री दिए गए हैं। यदि हमें छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है तो क्या करेंगे। स्पष्ट है कि हम बड़े वृत्त के क्षेत्रफल से छोटे वृत्त के क्षेत्रफल को घटा देंगे।



चित्र–14.14

अतः **वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल**

उदाहरण 14. एक वृत्ताकार तालाब की त्रिज्या 200 मीटर है। इसके बाहर चारों ओर 7 मीटर चौड़ाई का तट (मार्ग) बना हुआ है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



चित्र–14.15

हल: वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

छोटे वृत्त की त्रिज्या $r = 200$ मीटर

बड़े वृत्त की त्रिज्या $R = 200 + 7 = 207$ मीटर

वृत्ताकार तालाब का तट का क्षेत्रफल $= \pi R^2 - \pi r^2$

$$= \pi[(207)^2 - (200)^2]$$

$$= \frac{22}{7}(207+200)(207-200) \qquad [\because (a^2 - b^2) = (a+b)(a - b)]$$

$$= \frac{22}{7}(407)(7)$$

= 22 (407) वर्ग मीटर

= 8954 वर्ग मीटर

प्रश्नावली 14.5

प्र.1 दो सकेन्द्री वृत्तों की त्रिज्याएं क्रमशः 9 सेमी व 12 सेमी हैं दोनों वृत्तों के बीच बनने वाले वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.2 एक वृत्त का क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी है। इस वृत्त के बाहर 2 मीटर चौड़ाई का मार्ग है। उस मार्ग का क्षेत्रफल कितना होगा।

प्र.3 एक वृत्ताकार क्रिकेट मैदान की त्रिज्या 60 मीटर है। मैदान के बाहर चारों ओर 7 मीटर चौडी दर्शक दीर्घा बनानी है। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

ग्राफ पर बने समलम्ब चतुर्भुजों का वर्ग ग्रिड की सहायता से अनुमानित क्षेत्रफल निकालना तथा सूत्र से क्षेत्रफल निकालकर उसका सत्यापन करना।

चित्र क्रमांक 14.16 के लिए–

वर्ग गिड द्वारा समलम्ब चतुर्भुज के अनुमानित क्षेत्रफल की गणना

समलम्ब चतुर्भुज ABCD में

पूरे वर्ग तथा आधे से बड़े वर्गों की संख्या = 16

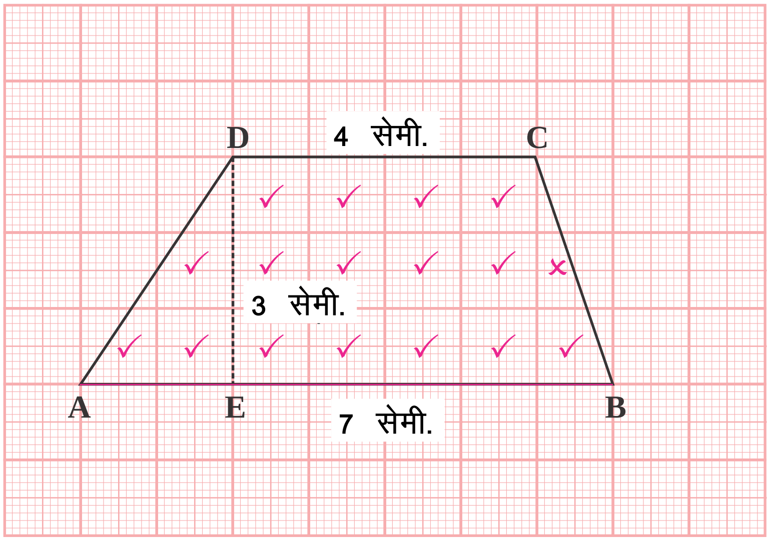
ठीक आधे वर्गों की संख्या = 1

AB4CHV

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = पूरे वर्गों की संख्या + $\frac{1}{2}$ आधे वर्गों की संख्या

$$= 16 + \frac{1}{2} \times 1$$

$$= 16 + \frac{1}{2} = 16 + .5 = 16.5$$ वर्ग सेमी.



चित्र–14.16

सूत्र द्वारा

समलम्ब चतुर्भुज ABCD में

समान्तर भुजाएँ AB = 7 सेमी.

व CD = 4 सेमी.

चतुर्भुज की ऊँचाई DE = 3 सेमी.

$\because$ समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) × ऊँचाई

$= \frac{1}{2}(AB + CD) \times DE$

$= \frac{1}{2}(7 + 4) \times 3$

$= \frac{1}{2} \times 11 \times 3$

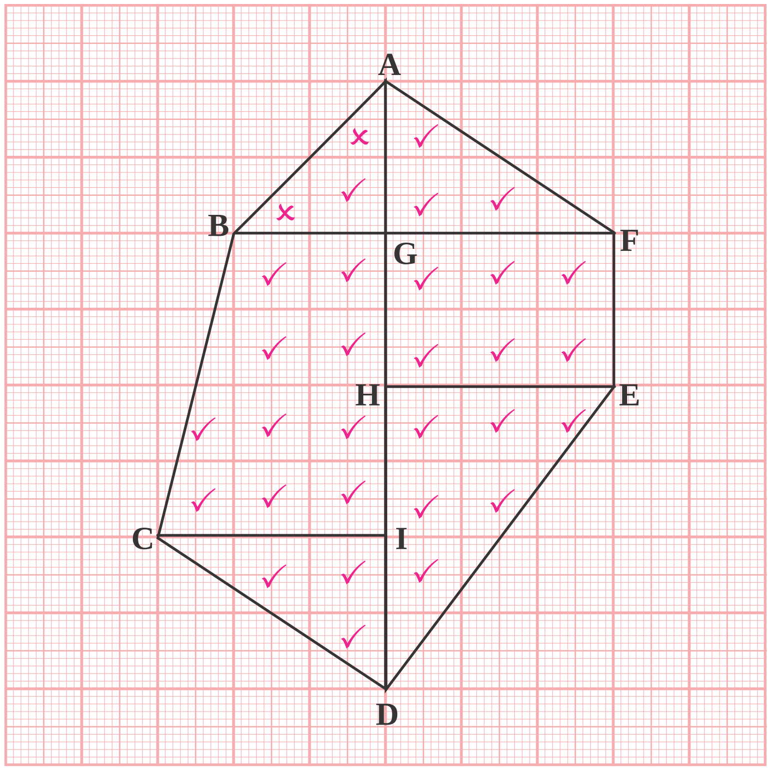
$= \frac{33}{2}$

= 16.5 वर्ग सेमी.

स्पष्ट है कि

वर्ग ग्रिड द्वारा ज्ञात समलम्ब चतुर्भुज ABCD का अनुमानित क्षेत्रफल

= सूत्र द्वारा ज्ञात समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल



चित्र–14.17

ग्राफ पर बने बहुभुज का वर्ग ग्रिड की सहायता से अनुमानित क्षेत्रफल निकालना तथा सूत्र से क्षेत्रफल निकालकर उसका सत्यापन करना

चित्र क्रमांक 14.17 के लिए

वर्ग ग्रिड द्वारा बहुभुज का अनुमानित क्षेत्रफल–

बहुभुज ABCDEFA में

पूरे तथा आधे से बड़े वर्गों की संख्या	=	29
ठीक आधे वर्गों की संख्या	=	2
ठीक पूरे वर्गों की संख्या	=	$29 + \frac{1}{2} \times 2$
	=	$29 + 1$
	=	30
अतः बहुभुज ABCDEFA का क्षेत्रफल	=	30 वर्ग सेमी.

सूत्र द्वारा बहुभुज के क्षेत्रफल की गणना–

बहुभुज ABCDEFA का क्षेत्रफल = ΔAGB का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज BGIC का क्षेत्रफल + ΔCID का क्षेत्रफल + ΔDHE का क्षेत्रफल + आयत HEFG का क्षेत्रफल + ΔGFA का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\ BG \times GA + \frac{1}{2}\ (BG + CI) \times GI + \frac{1}{2}\ CI \times ID$$

$$+ \frac{1}{2}\ HE \times HD + HE \times HG + \frac{1}{2}\ GF \times AG$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}^{1} \times 2 + \frac{1}{\cancel{2}}\ (2 + 3) \times \cancel{4}^{2} + \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \cancel{2}^{1} + \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \cancel{4}^{2}$$

$$+ 3 \times 2 + \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \cancel{2}^{1}$$

$= \quad 2 + (5 \times 2) + 3 + (3 \times 2) + 6 + 3$

$= \quad 2 + 10 + 3 + 6 + 6 + 3$

$=$ 30 वर्ग सेमी.

स्पष्ट है कि

वर्ग ग्रिड द्वारा ज्ञात बहुभुज का अनुमानित क्षेत्रफल = सूत्र द्वारा ज्ञात बहुभुज का क्षेत्रफल।

ABD8PI

हमने सीखा

1. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई
2. समांतर चतुर्भज के विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो समान त्रिभुजों में बाँटते हैं।
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई
4. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2
5. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

   या

   समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × पहला विकर्ण × दूसरा विकर्ण

   $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
6. समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × ऊँचाई × (समांतर भुजाओं का योग)

   $= \frac{1}{2} \times (b_1+b_2) \times h$
7. वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi \times$(त्रिज्या)^2

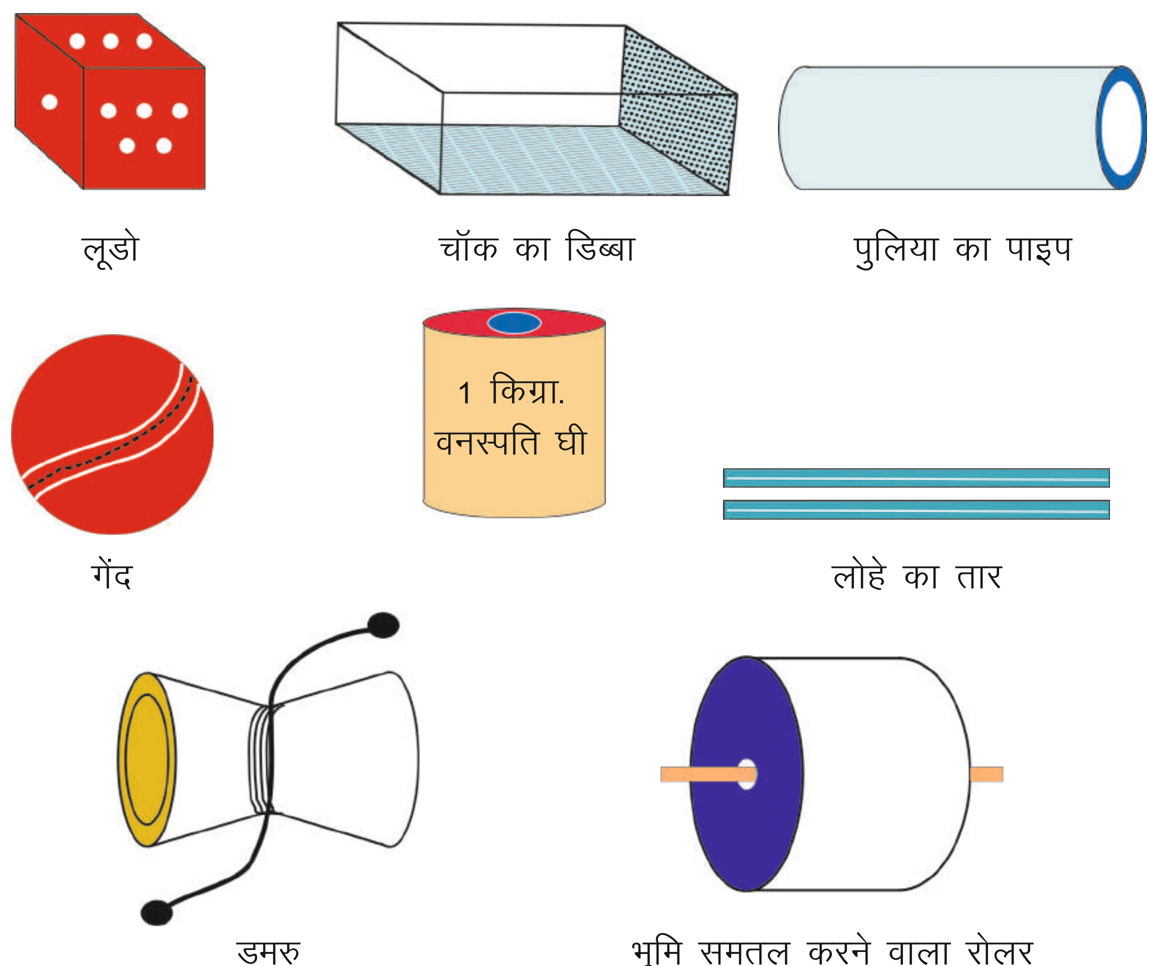
   $= \pi r^2$ (जहाँ π =नियतांक $= \frac{22}{7} = 3.14$ लगभग)
8. वृत्त की परिधि = $2 \times \pi \times$त्रिज्या

   $= 2\pi r$

अध्याय–15
क्षेत्रमिति – 3
MENSURATION

आप नल का पाइप, लकड़ी का रोलर, पेन का रिफिल, ट्यूब लाइट, टार्च की बैटरी, कुआँ जैसी चीज़ों को प्रतिदिन देखते हैं, इन आकृतियों के क्या नाम हैं? इनमें क्या–क्या समानताएँ हैं?

निम्न आकृतियों को ध्यानपूर्वक देखिये एवं उनका एक समूह बनाइये –



चित्र 15.1

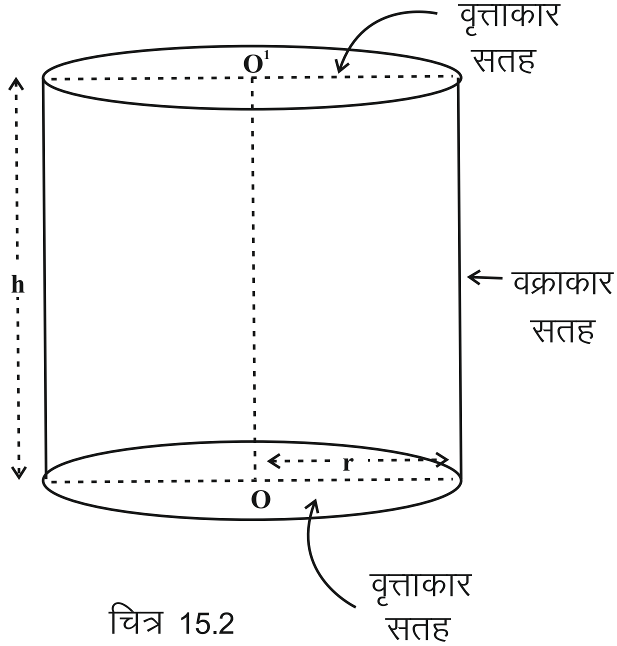
ऊपर दिये गये चित्रों में से समान आकृतियों को आपने किन–किन आधारों पर पहचाना? अपने साथियों से चर्चा कीजिए।

आप पाते है कि पाइप, रोलर जैसी आकृतियों में से प्रत्येक में दो वृत्ताकार सतहें हैं, जो

परस्पर समान्तर एवं बराबर हैं तथा तीसरी सतह वक्राकार है। ऐसी आकृतियों को बेलनाकार आकृतियाँ कहते हैं।

आइए, अब हम एक बेलन पर चर्चा करें –

दिये गये चित्र में एक बेलन की आकृति को दर्शाया गया है। बेलन में दो वृत्ताकार सिरे हैं, जो परस्पर समान्तर एवं सर्वांगसम हैं। ये वृत्ताकार सिरे बेलन का शीर्ष एवं आधार कहलाते हैं। बेलन का शेष पृष्ठीय भाग अर्थात् दोनों वृत्ताकार सिरों को मिलाने वाला बेलनाकार पृष्ठ बेलन का वक्राकार भाग या वक्र पृष्ठ कहलाता है।



चित्र 15.2

बेलन के आधार या शीर्ष की त्रिज्या बेलन की त्रिज्या होती है जिसे अक्षर 'r' से व्यक्त करते हैं।

बेलन के आधार एवं शीर्ष के केन्द्रों को मिलाने वाल रेखाखण्ड OO' उनके बीच की लम्बवत् दूरी होती है। यही लम्बवत् दूरी बेलन की ऊँचाई होती है जिसे अक्षर 'h' द्वारा दर्शाते हैं।

बेलन का आयतन

कक्षा–7 में आपने घनाभाकार आकृतियों का आयतन निकालना सीख लिया है। क्या आप बता सकते हैं कि घनाभ का आयतन कैसे ज्ञात करते हैं?

मोनिका : घनाभ का आयतन ज्ञात करने के लिए उसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का आपस में गुणा करते है। अर्थात् **घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई**

सुनील : परन्तु लं.×चौ. धनाभ के आधार के क्षेत्रफल के बराबर है।

तो क्या हम कह सकते है कि **घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई**

क्या बेलन के आयतन को भी इसी प्रकार ज्ञात किया जा सकता है? अपने साथियों एवं शिक्षक से चर्चा करें।

आप पायेंगे कि यह सूत्र बेलन के आयतन के लिए भी सत्य है।

अर्थात् बेलन का आयतन = बेलन के आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

माना बेलन के आधार की त्रिज्या r है। तो बेलन के आधार का क्षेत्रफल कितना होगा?

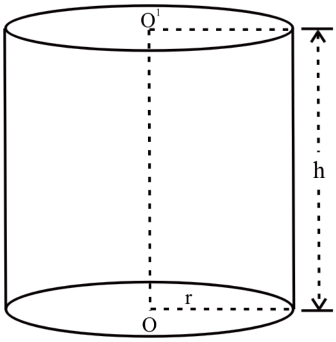
चूँकि बेलन का आधार वृत्ताकार है, इसलिए आधार का क्षेत्रफल = r^2

अब यदि बेलन की ऊँचाई h हो तो

बेलन का आयतन (V) = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

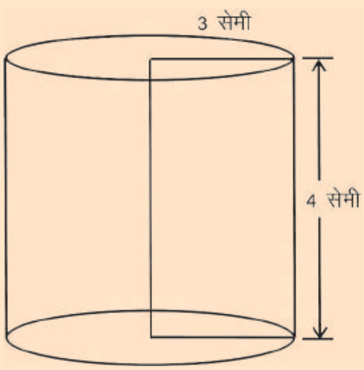
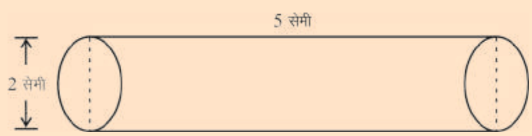


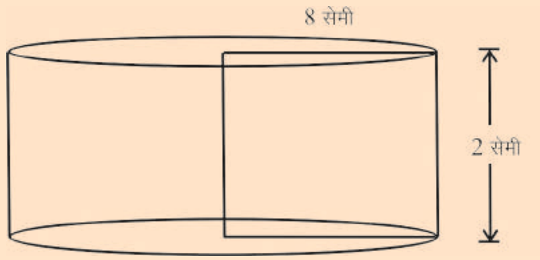
चित्र 15.3

बेलन का आयतन (V) = $\pi r^2 h$ घन इकाई

क्रियाकलाप 1.

नीचे दी गई मापों के आधार पर ज्ञात करके तालिका पूर्ण कीजिए –

क्रमांक	बेलन की आकृति	ऊँचाई या लम्बाई (h)	त्रिज्या (r)	आयतन (v)
1		----------	----------	----------
2		----------	----------	----------

3		----------	----------	----------

उदाहरण 1.

एक बेलन के आधार का व्यास 14 सेमी. तथा ऊँचाई 15 सेमी. है, तो उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

बेलन के आधार का व्यास = 14 सेमी.

बेलन के आधार की त्रिज्या (r) $= \frac{14}{2} = 7$ सेमी.

तथा बेलन की ऊँचाई (h) = 15 सेमी.

$\therefore$ बेलन का आयतन (V) $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 15$$

$$= \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \overset{1}{\cancel{7}} \times 7 \times 15$$

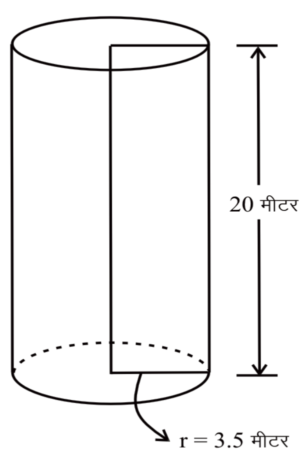
$$= 22 \times 7 \times 15$$

$= 2310$ सेमी^{3} या घन सेमी

अतः उस बेलन का आयतन 2310 सेमी^{3} है।

उदाहरण 2.

3.5 मीटर त्रिज्या वाला एक वृत्ताकार कुआँ 20 मीटर गहराई तक खोदा गया है। खुदाई से प्राप्त मिट्टी का आयतन ज्ञात कीजिये।



चित्र 15.4

हल : प्रश्नानुसार,

बेलनाकार कुएँ की त्रिज्या r = 3.5 मीटर

कुएँ की ऊँचाई h = 20 मीटर

खुदाई से प्राप्त मिट्टी का आयतन = कुएँ का आयतन

$= \pi r^2 h$

मिट्टी का आयतन $= \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 20$

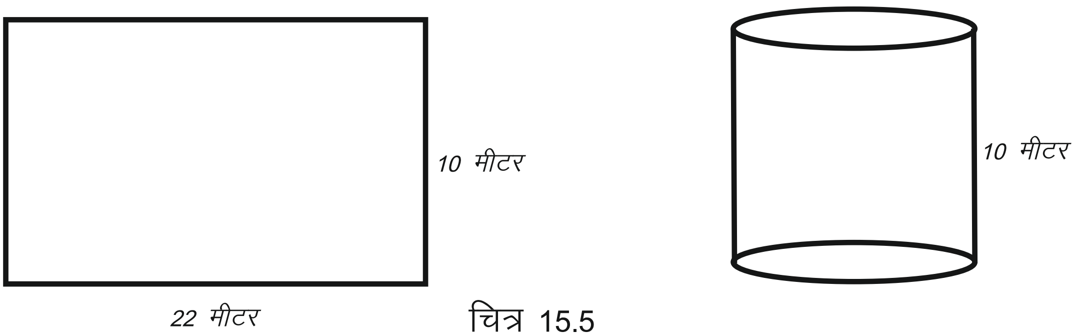
$$= \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \overset{0.5}{\cancel{3.5}} \times 3.5 \times 20$$

$$= 22 \times 0.5 \times 3.5 \times 20$$

$$= 770 \text{ सेमी}^3$$

उदाहरण 3.

22 मीटर × 10 मीटर आयताकार लोहे की चादर को लम्बाई के अनुदिश मोड़कर (दोनों सिरों को एक दूसरे पर चढ़ाये बिना) एक बेलनाकार पाइप बनाया गया है। पाइप का आयतन ज्ञात कीजिए।



चित्र 15.5

हलः

चूँकि लोहे की चादर को लम्बाई के अनुदिश मोड़ा गया है, अतः प्राप्त पाइप की ऊँचाई 10 मीटर होगी।

बेलनाकार पाइप की ऊँचाई $h = 10$ मीटर

यदि चादर को मोड़ने से बने पाइप की त्रिज्या r मीटर हो, तो

आयताकार चादर की लम्बाई = पाइप के आधार की परिधि

$$22 = 2\pi r$$

$$22 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\frac{22 \times 7}{2 \times 22} = r$$

$$r = 7/2 \text{ मीटर}$$

अतः पाइप का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 10$$

$$= \frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{2}} \times \frac{7}{2} \times 10$$

$$= 385 \text{ घन मीटर}$$

उदाहरण 4.

एक बेलन के आधार का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी और ऊँचाई 8 सेमी हो तो उसका आयतन कितना होगा?

हलः प्रश्नानुसार,

बेलन के आधार का क्षेत्रफल $= 154$ सेमी^{2}

बेलन की ऊँचाई $= 8$ सेमी

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= 154$ सेमी$^2 \times 8$ सेमी

$= 1232$ सेमी^{3}

प्रश्नावली 15.1

प्र.1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(i) बेलन के आधार का आकार .... होता है।

(ii) बेलन के आयतन का सूत्र .... है।

(iii) बेलन की त्रिज्या व ऊँचाई प्रत्येक 7 सेमी.की है तो बेलन का आयतन .... होगा।

प्र.2. एक बेलन के आधार का क्षेत्रफल 1386 सेमी^{2} है। यदि उसकी ऊँचाई 15 सेमी हो तो उसका आयतन कितना होगा?

प्र.3. बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी माप निम्नांकित हों –

(i) त्रिज्या $= 12$ सेमी, ऊँचाई $= 14$ सेमी.

(ii) त्रिज्या $= 2.8$ सेमी, ऊँचाई $= 5$ सेमी.

(iii) व्यास $= 20$ मीटर, ऊँचाई $= 21$ मीटर

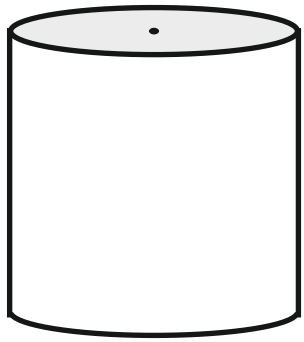
प्र.4. यदि एक बेलन का व्यास आधा कर दिया जाये तो प्राप्त नये बेलन का आयतन एवं पहले वाले बेलन के आयतन में क्या अनुपात होगा?

प्र.5. एक बेलनाकार टंकी की त्रिज्या 2.8 मीटर और ऊँचाई 3.5 मीटर है। उस टंकी की धारिता ज्ञात कीजिए।

प्र.6. 1.4 सेमी. व्यास वाली तथा 90 सेमी. लम्बी लोहे की एक ठोस छड़ बनवाने के लिए कितने लोहे की आवश्यकता पड़ेगी?

बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

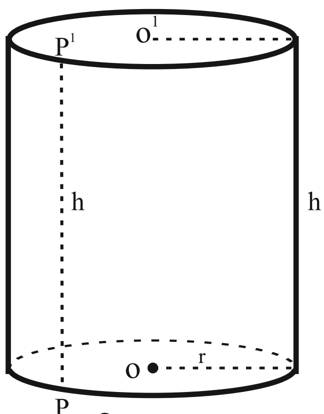
टिन का एक बन्द बेलनाकार डिब्बा लीजिए। बताइये कि इस डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए किन–किन भागों का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा?



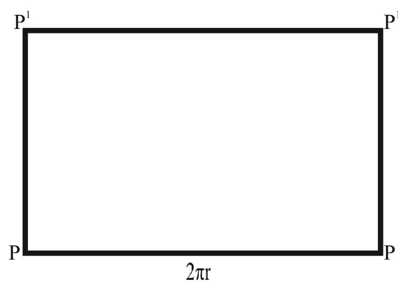
टिन का डिब्बा ३चित्र 15.6७

बेलनाकार डिब्बे में कुल तीन पृष्ठ हैं जिनमें से दो पृष्ठ वृत्ताकार (आधार व शीर्ष) तथा तीसरा पृष्ठ वक्राकार भाग है। आधार और शीर्ष दोनों वृत्तीय पृष्ठों का क्षेत्रफल बराबर होगा। यदि वृत्तीय पृष्ठों की त्रिज्या r हो तो प्रत्येक वृत्तीय पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ होगा।

अब प्रश्न उठता है कि तीसरे पृष्ठ अर्थात् वक्राकार भाग का क्षेत्रफल कैसे प्राप्त किया जाये? चर्चा कीजिए।



चित्र 15.7



चित्र 15.8

वक्राकार भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उसमें एक रेखाखण्ड PP^1 अंकित कर लेते हैं (चित्र 15.7)। अब डिब्बे के वक्राकार भाग को PP^1 (लम्बाई) के अनुदिश काटकर फैला देते है, जिससे हमें एक आयताकार पट्टी चित्र 15.8 की भाँति प्राप्त होती है। प्राप्त आयताकार पट्टी की लम्बाई, वक्राकार भाग की परिधि के बराबर होगी एवं चौड़ाई वक्राकार भाग की ऊँचाई के बराबर होगी। साथ ही आयताकार पट्टी एवं वक्राकार भाग के क्षेत्रफल भी बराबर होंगे।

चूँकि वक्राकार भाग की त्रिज्या r है, इसलिए उसकी परिधि $= 2\pi r$

अब यदि वक्राकार भाग की (डिब्बे की) ऊँचाई h हो, तो

वक्राकार भाग का क्षेत्रफल = आयताकार पट्टी का क्षेत्रफल

= पट्टी की लम्बाई × चौड़ाई

= वक्राकार भाग की परिधि ×ऊँचाई

$= 2\pi r \times h = 2\pi rh$

बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

अतः बेलनाकार डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्राकार भाग का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल + शीर्ष का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h+r)$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(r+h)$

उदाहरण 5. टिन का बना एक बन्द बेलनाकार डिब्बे की त्रिज्या 7 सेमी. तथा ऊँचाई 15 सेमी. है। उस डिब्बे को बनाने में प्रयुक्त चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः प्रश्नानुसार,

बेलनाकार डिब्बे की त्रिज्या $r = 7$ सेमी.

एवं ऊँचाई $h = 15$ सेमी.

प्रयुक्त चादर का क्षेत्रफल= डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r(h + r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (15 + 7)$$

$$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \cancel{7}^1 \times 22$$

$= 968$ सेमी^{2}

उदाहरण 6. किसी ठोस बेलन के आधार की त्रिज्या 5 सेमी. और ऊँचाई 21 सेमी. है। बेलन का वक्र पृष्ठ और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः प्रश्नानुसार,

बेलन के आधार की त्रिज्या $(r) = 5$ सेमी.

ऊँचाई $(h) = 21$ सेमी.

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times 5 \times \cancel{21}^3$$

$= 2 \times 22 \times 5 \times 3$

$= 660$ सेमी^{2}

तथा बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h + r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5 \times (21 + 5)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5 \times 26$$

$= 817.14$ सेमी^{2}

उदाहरण 7. एक बेलन का आयतन 36π सेमी^{3} और आधार का क्षेत्रफल 9π सेमी^{2} है। बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि बेलन के आधार की त्रिज्या r सेमी. एवं उसकी ऊँचाई h सेमी. है।

तो बेलन के आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$9\pi = \pi r^2$

$\frac{9\pi}{\pi} = r^2$

$r = \sqrt{9}$

$r = 3$ सेमी

तथा बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$36\pi = \pi(3)^2 \times h$

$36 = 9h$

$36/9 = h$

$h = 4$ सेमी

अतः बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(r + h)$

$= 2 \times \pi \times 3(3 + 4)$

$= 6\pi \times 7$

$= 42\pi$ सेमी^{2}

उदाहरण 8. एक बेलनाकार पाइप जिसका व्यास 14 सेमी. तथा ऊँचाई 20 सेमी. है, के वक्रीय पृष्ठ पर 2 रु. प्रति 100 सेमी^{2} की दर से रंगाई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

पाइप का व्यास = 14 सेमी.

त्रिज्या r $= \frac{14}{2} = 7$ सेमी.

तथा पाइप की ऊँचाई (h) $= 20$ सेमी.

पाइप का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7} \times 20 = 880 \text{ सेमी}^2$$

दिया है कि प्रति 100 वर्ग सेमी का रंगाई व्यय = 2 रु.

$$\text{पाइप को रंगाने का कुल व्यय} = \frac{88\cancel{0} \times 2}{10\cancel{0}} = 17.60 \text{ रु.}$$

उदाहरण 9.

एक बेलन के आधार की परिधि 132 सेमी है तथा उसकी ऊँचाई 2 मीटर है। उसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

आधार की परिधि = 132 सेमी

बेलन की ऊँचाई (h) = 2 मीटर = 200 सेमी.

वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = ?

बेलन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार की परिधि × ऊँचाई

= 132 × 200

= 26400 सेमी²

अतः उस बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 26400 सेमी² है।

प्रश्नावली 15.2

प्र.1. बेलन का वक्र पृष्ठ एवं सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिनके माप निम्नानुसार हों–

(i) त्रिज्या = 7 सेमी, ऊँचाई = 24 सेमी

(ii) व्यास = 20 मीटर, ऊँचाई = 21 मीटर

(iii) त्रिज्या = 10.5 सेमी, ऊँचाई = 35 सेमी

(iv) त्रिज्या = 14 सेमी, ऊँचाई = 1 मीटर

AC5VUG

प्र.2. एक बेलनाकार टैंक के आधार की परिधि 176 सेमी तथा ऊँचाई 30 सेमी हो तो उसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.3. एक बेलन का आयतन 44 घन सेमी तथा त्रिज्या 2 सेमी हैं। उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.4. 14 मीटर व्यास के 25 मीटर गहरे कुएँ को खोदने पर कितने घन मीटर मिट्टी निकलेगी? इस कुएँ को अन्दर की ओर से प्लास्टर करवाने में 3 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कितना खर्च आयेगा?

प्र.5. एक बेलन के आधार की परिधि 6 मीटर है एव ऊँचाई 44 मीटर है। उसका वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

प्र.6. एक बेलन के वक्राकार भाग का क्षेत्रफल 1000π वर्ग सेमी और उसका व्यास 20 सेमी है। उस बेलन की ऊँचाई कितनी होगी?

हमने सीखा

1. बेलन का आयतन $= \text{आधार का क्षेत्रफल} \times \text{ऊँचाई}$
   $= \pi r^2 h$
2. बेलन का वक्र पृष्ठ $= \text{आधार की परिधि} \times \text{ऊँचाई}$
   $= 2\pi rh$
3. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2 \times \text{आधार का क्षेत्रफल} + \text{वक्र पृष्ठ}$
   $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$
   $= 2\pi r(r + h)$
4. क्षेत्रफल की इकाई हमेशा वर्ग इकाई होती है जैसे वर्ग सेमी, वर्ग मीटर आदि तथा आयतन की इकाई घन इकाई होती है जैसे घन सेमी, घन मीटर आदि।
5. एक ठोस बेलन में कुल तीन पृष्ठ होते है जिनमें से दो पृष्ठ वृत्ताकार (आधार एवं शीर्ष) एवं एक पृष्ठ वक्राकार होता है।

ACERH4

अध्याय–16

आकृतियाँ (द्विविमीय एवं त्रिविमीय)

FIGURES (TWO & THREE DIMENSIONAL)

हमने बहुत सी आकृतियों के बारे में जाना है और उनके गुणों को समझा है। इनमें से बहुत सी आकृतियों को हमने अपने आस–पास की वस्तुओं में छिपे हुए अथवा स्पष्ट रूप से दिखते हुए पाया है। हमने रेखा, रेखाखण्ड, त्रिभुज, चतुर्भुज व उनके विशेष प्रकार (सम चतुर्भुज, आयत, वर्ग, समलम्ब चतुर्भुज आदि) एवं उससे ज्यादा भुजाओं वाली आकृतियों के बारे में अध्ययन किया है।

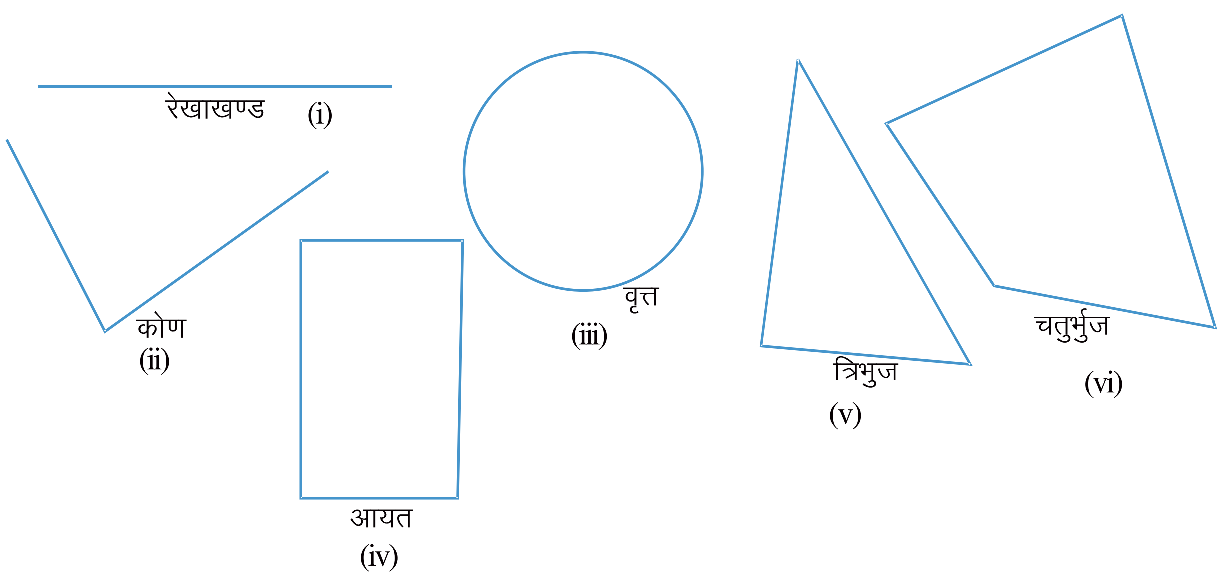
पूर्व की कक्षाओं में आपने अपने आस–पास पाए जाने वाले विभिन्न आकृतियों की पहचान की थी। क्या आप बता सकते हैं कि आयत की आकृति आपको कहां–कहां दिखती है?

और त्रिभुज कहां–कहां दिखता है?

त्रिभुज, सभी प्रकार के चतुर्भुज, बहुभुज, वृत्त आदि सभी किसी तल या दो आयाम में बनते हैं। अर्थात् इनमें लम्बाई है, चौड़ाई है किन्तु ऊँचाई नहीं है। लेकिन वास्तविक वस्तुओं में तो ऊँचाई होती है फिर कैसे इस ऊँचाई को भी चित्रों में प्रदर्शित करें।

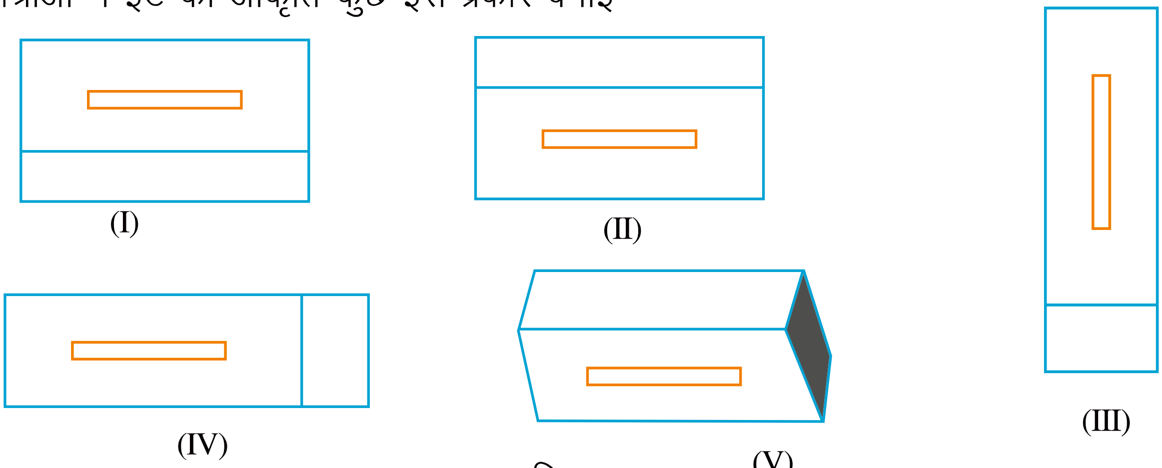
आइए करके देखें

आप निम्न आकृतियों से पूर्व परिचित हैं। आप इनकी रचना करना भी जानते हैं–



चित्र–16.1

क्या आप ईंट, डिब्बा, गोला जैसी वस्तुओं को कागज पर बना सकते हैं? कुछ छात्र/छात्राओं ने ईंट की आकृति कुछ इस प्रकार बनाई–



चित्र–16.2

क्या यह सब ठीक दिखते हैं? ये सभी वैसे दिख रही हैं जैसी ईंटें दिखती हैं?

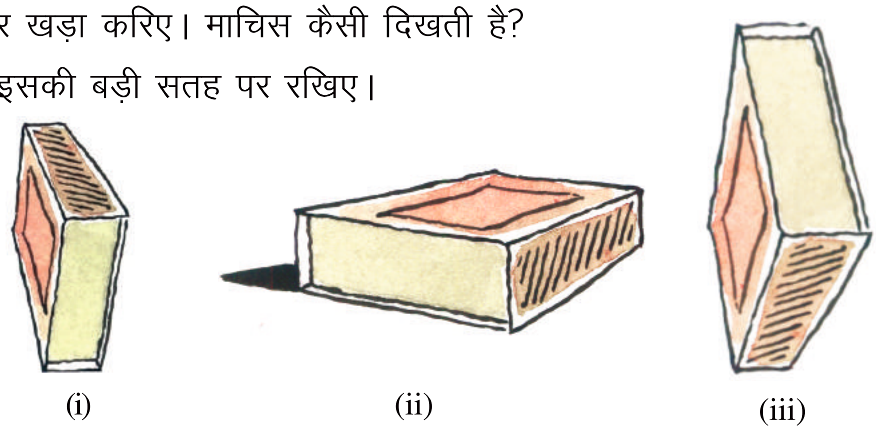
यह सभी आकृतियां एक दूसरे से भिन्न हैं।

क्या आप बता सकते हैं कि यह अलग–अलग क्यों हैं?

क्रियाकलाप 1.

इस बात को समझने के लिए माचिस का खाली डिब्बी लेकर माचिस को जलाने वाली (बारूद) सतह पर खड़ा करिए। माचिस कैसी दिखती है?

अब इसे इसकी बड़ी सतह पर रखिए।



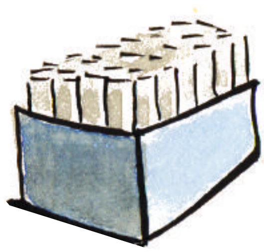
चित्र–16.3

यह स्पष्ट है कि माचिस अब कुछ अलग तरह की दिख रही है। चित्र 16.3 (iii) को भी देखिए। इसमें छोटी सतह पर डिब्बी को खड़ा किया गया है। तीनों चित्र माचिस के हैं किन्तु अलग–अलग स्थिति के हैं।

ईंट के चित्र भी अलग–अलग स्थिति के हैं। ईंटें लेकर उन्हें विभिन्न चित्रों के आधार पर रख कर देखिए। क्या आप ऊपर के चित्रों के समान ईंटों को रख पाए?

क्रियाकलाप 2.

आपने चॉक का डिब्बा देखा होगा। उसमें चॉक सीधे खड़े रखे जाते हैं। चॉक का एक भरा डिब्बा लीजिए और ठीक ऊपर से देखिए। आपको चॉक का वृत्तीय सिरा तो दिखेगा किन्तु उसकी लम्बाई नहीं।



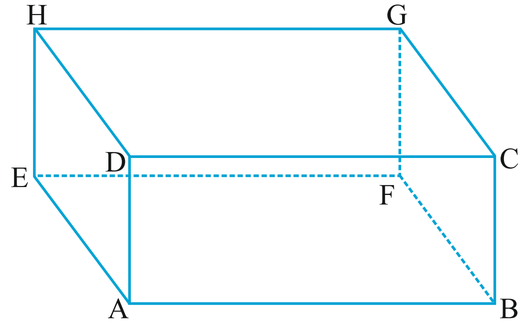
चित्र 16.4

अगर आप उसका चित्र बनाएँ तो कैसा दिखेगा? अनीता ने उसका चित्र कुछ इस प्रकार बनाया (चित्र 16.4) चॉक के खुले डिब्बे को सामने से बनाएं तो वह कैसा दिखेगा?

इसमें अब चॉक का ऊपरी हिस्सा नहीं दिखेगा।

अभ्यास 1

ऐसी 5 वस्तुएं लेकर उनको विभिन्न स्थितियों से देखकर उन वस्तुओं का चित्र बनाइये।



चित्र 16.5

वस्तु की अलग–अलग स्थितियों का चित्र

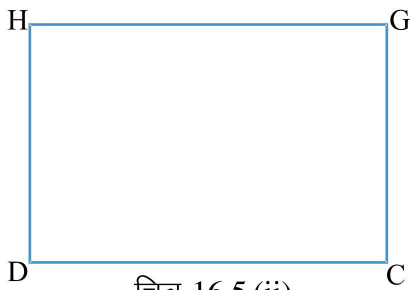
आइए, इस घनाभ की आकृति 16.5 को ध्यान से देखें–

इस आकृति को विभिन्न दिशाओं से देखने पर कुछ इस प्रकार दिखाई देता है–

ठीक सामने से देखने पर

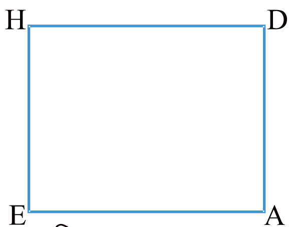
चित्र 16.5 (i)

ठीक ऊपर से देखने पर



चित्र 16.5 (ii)

बाँये (बगल) से देखने पर

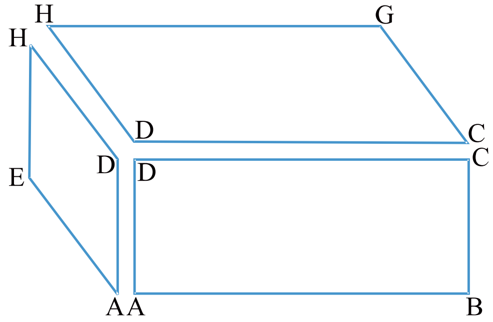


चित्र 16.5 (iii)

उपरोक्त तीनों आकृतियों को मिलाकर यदि एक आकृति बनाये तो पहले की आकृति बननी चाहिए। जिस प्रकार पहले की आकृति में एक विशेष झुकाव (कोण) के साथ इसकी फलकें आपस में जुड़ी हुई हैं उसी प्रकार इन तीनों आकृतियों को भी उसी विशेष झुकाव (कोण) के साथ जोड़ा जाये

तो पुनः वही आकृति प्राप्त होगी। यहाँ पर घनाभ की तीन ओर की फलकों को आपस में जोड़ा गया है। चित्र 16.5(iv)

अब यदि घनाभ की सभी छह फलकों को लेकर आपस में जोड़ें तो आकृति 16.5 प्राप्त होगी।

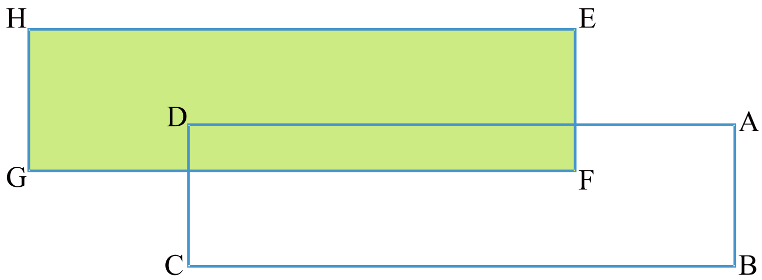


चित्र 16.5 (iv)

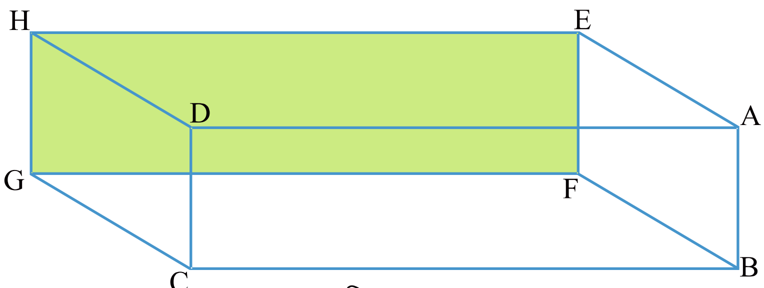
क्रियाकलाप–3.

घनाभ की आकृति बनाना

रचना – एक गत्ते का आयताकार टुकड़ा लेते हैं। कागज पर आयताकार गत्ते के टुकड़े को रखकर उसके चारों तरफ पेंसिल चलाते हैं। इसे चित्र में ABCD से दर्शाया गया है। अब गत्ते के टुकड़े के चित्रानुसार बाँयी ओर खिसका कर रखते हैं और पुनः उसके चारों ओर पेसिंल चलाते हैं। चित्र में इसे EFGH से दर्शाया गया है। इस EFGH को छायांकित किया गया है।



चित्र 16.6 (i)



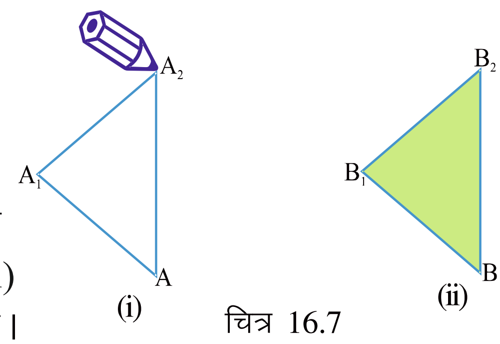
चित्र 16.6 (ii)

आकृति–16.6(ii) के अनुसार क्रमशः AE, BF, CG तथा DH को मिलाया गया है जो अभीष्ट घनाभ की आकृति है।

इसमें 6 आयताकार फलक– ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH, EFGH हैं तथा 12 कोर– AB, BC, CD, DA, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, HE हैं एवं आठ शीर्ष– A,B,C,D,E,F,G,H हैं।

क्रियाकलाप–4.

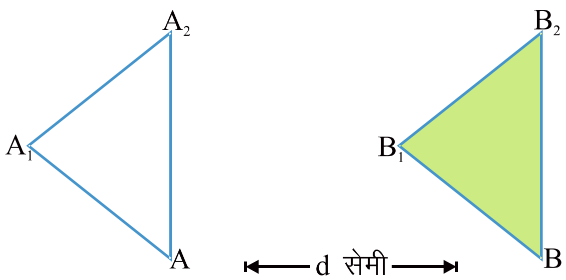
त्रिभुजीय प्रिज्म की आकृति बनाना –



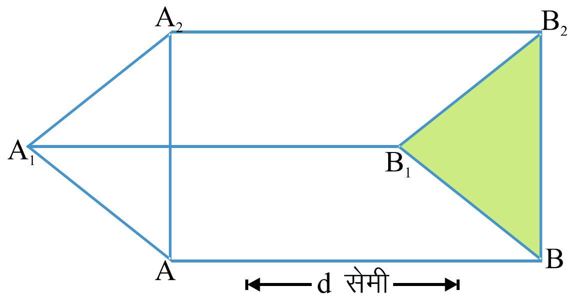
चित्र 16.7

रचना एक त्रिभुजाकार गत्ते का टुकड़ा लीजिए और एक कागज़ पर उसके चारों ओर पेन्सिल चलाकर आकृति (i) तथा उससे कुछ दूरी पर इसी प्रकार आकृति (ii) बनाइए। अब चित्र 16.7 (iii) की भांति नामांकित कीजिए तथा AB, A_1B_1 एवं A_2B_2 को मिलाइए और अब आपके सामने जो आकृति बनेगी वह चित्र 16.7 (iv) की भाँति

होगी, जो कि अभीष्ट त्रिभुजीय प्रिज्म है।



चित्र 16.7 (iii)



चित्र 16.7 (iv)

इसमें तीन आयताकार फलक $AB\,B_2A_2$, $A_1\,A_2\,B_2\,B_1$ तथा $AA_1\,B_1B$ और दो त्रिभुजाकार फलक $AA_1\,A_2$ तथा $BB_1\,B_2$ है। इसमें 9 कोरें AB, $A_1\,B_1$, A_2B_2, AA_1, $A_1\,A_2$, A_2A, BB_1, B_1B_2 तथा B_2B हैं और छह शीर्ष A, A_1, A_2, B, B_1 तथा B_2 हैं।

अभ्यास–2

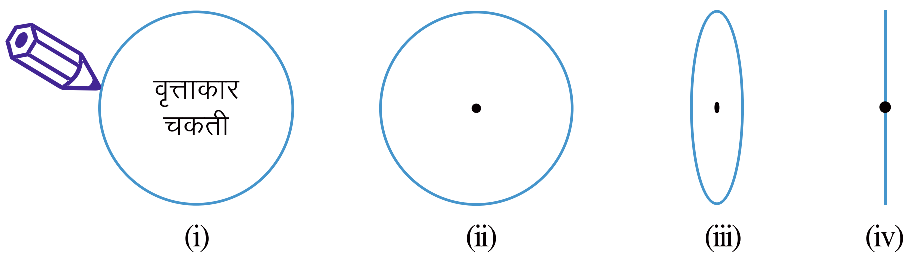
1. वर्गाकार गत्ते की सहायता से घन की रचना कीजिए।
2. एक त्रिभुजीय गत्ते की सहायता से 4 सेमी लम्बे प्रिज्म की रचना कीजिए।

क्रियाकलाप–5.

बेलन की आकृति बनाना

रचना – एक वृत्ताकार चकती लेकर उसके चारों ओर पेंसिल से परिधि खींचिए एवं केन्द्र बिन्दु भी निर्धारित कीजिए चित्र 16.8 (i) & (ii) अब आपके पास चित्र 16.8 (ii) जैसी वृत्ताकार आकृति है, जो कि चकती को ठीक सामने से देखने पर दिखाई देती है। अब चकती को थोड़ा घुमाकर उसकी तिरछी स्थिति को देखिये और जैसे दिखाई देता है लगभग वैसी आकृति बनाईये। चित्र 16.8 (iii)

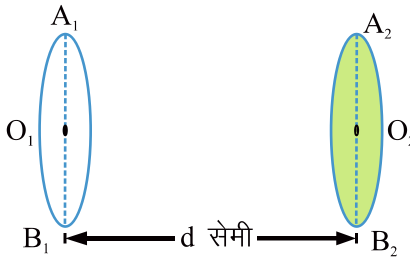
इसके बाद थोड़ा ओर घुमाकर चकती के एक किनारे से देखें तो यह चित्र 16.8 (iv) जैसी दिखाई देगी।



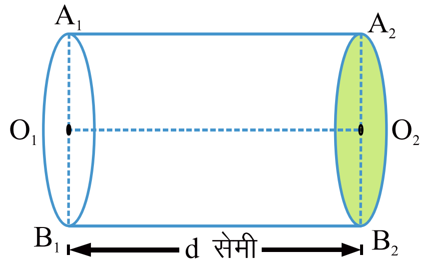
चित्र 16.8

अब चित्र 16.8 (iii) की आकृति के समान कुछ दूरी पर दो आकृतियाँ बनाइये। चित्र 16.8 (v) के अनुसार व्यास $A_1\,B_1$ और व्यास A_2B_2 को मिलाइये। उसके बाद $A_1\,A_2$ और $B_1\,B_2$ को मिलाइये। इस प्रकार एक बेलन की आकृति बन जाती है।

इसमें दोनों सिरों पर दो वृत्तीय फलक हैं एवं मध्य भाग वक्रीय है।



चित्र 16.8 (v)

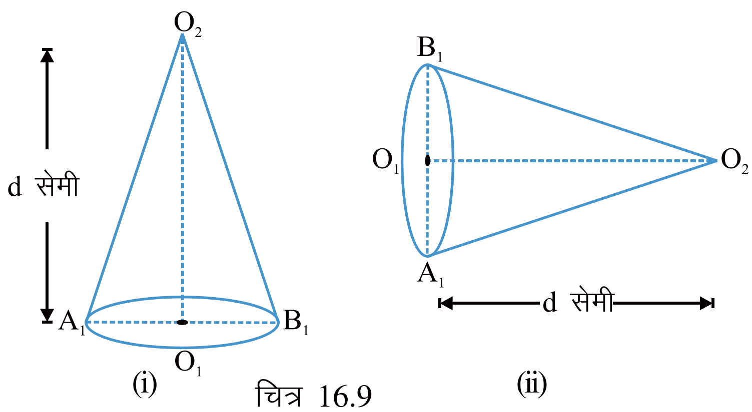


चित्र 16.8 (vi)

क्रियाकलाप 6

<u>शंकु की आकृति बनाना –</u>

चित्र 16.8 (iii) के समान एक आकृति बनाइये तथा कुछ दूरी पर लगभग मध्य में एक बिन्दु O_2 ले लें तथा O_2A_1 और O_2B_1 मिला देवें तो प्राप्त आकृति शंकु की आकृति होती है। चित्र 16.9 (i & ii) इस आकृति में एक वृत्ताकार फलक तथा एक शीर्ष और वक्रीय पृष्ठीय भाग होता है।



चित्र 16.9

अभ्यास–3

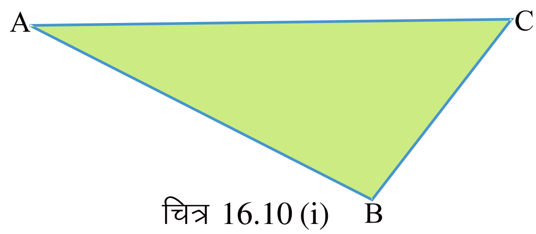
1. 5 सेमी लम्बाई के एक बेलन की रचना कीजिए।
2. 3 सेमी ऊँचाई के एक शंकु की रचना कीजए।
3. कागज मोड़कर बेलन एवं शंकु के मॉडल बनाइये।

क्रियाकलाप 7.

<u>चतुष्फलक की आकृति बनाना –</u>

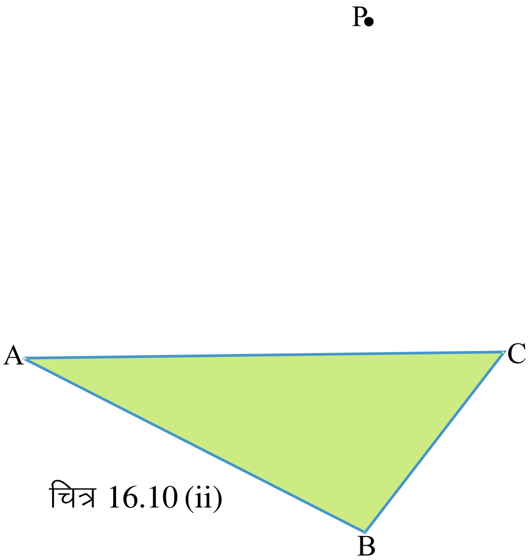
रचना

1. चित्र 16.10 (i) के अनुसार एक त्रिभुज बनाइये और छायांकित कीजिए।
2. अब उस त्रिभुज के ऊपर चित्र 16.10 (ii) के अनुसार कुछ दूरी पर एक बिन्दु P लीजिए।
3. अब उस त्रिभुज के शीर्षों A, B, C को क्रमशः बिन्दु P से मिलाइये। प्राप्त आकृति चित्र 16.10 (iii) की भांति होगी। यह अभीष्ट चतुष्फलक है।

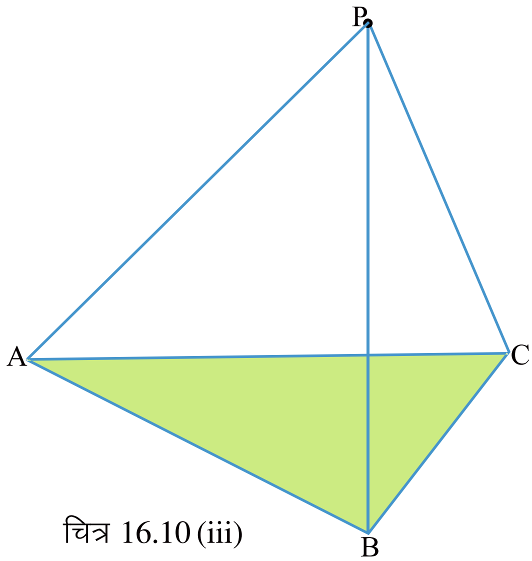


चित्र 16.10 (i)

इसमें चार त्रिभुजीय फलक ABC, BCP, CAP तथा ABP हैं। ये त्रिकोणीय फलक भी कहलाते हैं। इसमें छः कोर AB, BC, CA, AP, BP तथा CP हैं और शीर्ष A, B, C तथा P हैं। इसमें प्रत्येक शीर्ष पर तीन कोरें मिलती हैं।



चित्र 16.10 (ii)



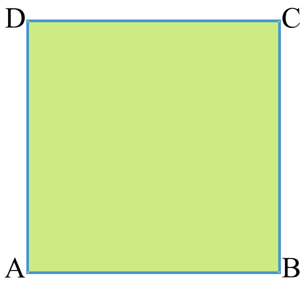
चित्र 16.10 (iii)

क्रियाकलाप 8.

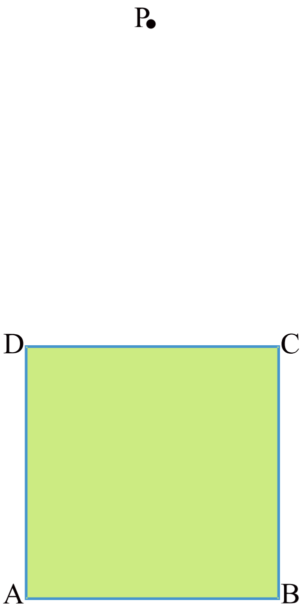
<u>पिरामिड की आकृति बनाना</u>

रचना

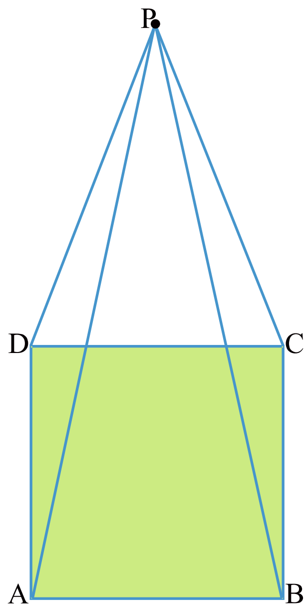
1. चित्र 16.11(i) के अनुसार एक वर्ग



चित्र 16.11 (i)



चित्र 16.11 (ii)



चित्र 16.11 (iii)

की आकृति बनाइये और उसे छायांकित कीजिए।

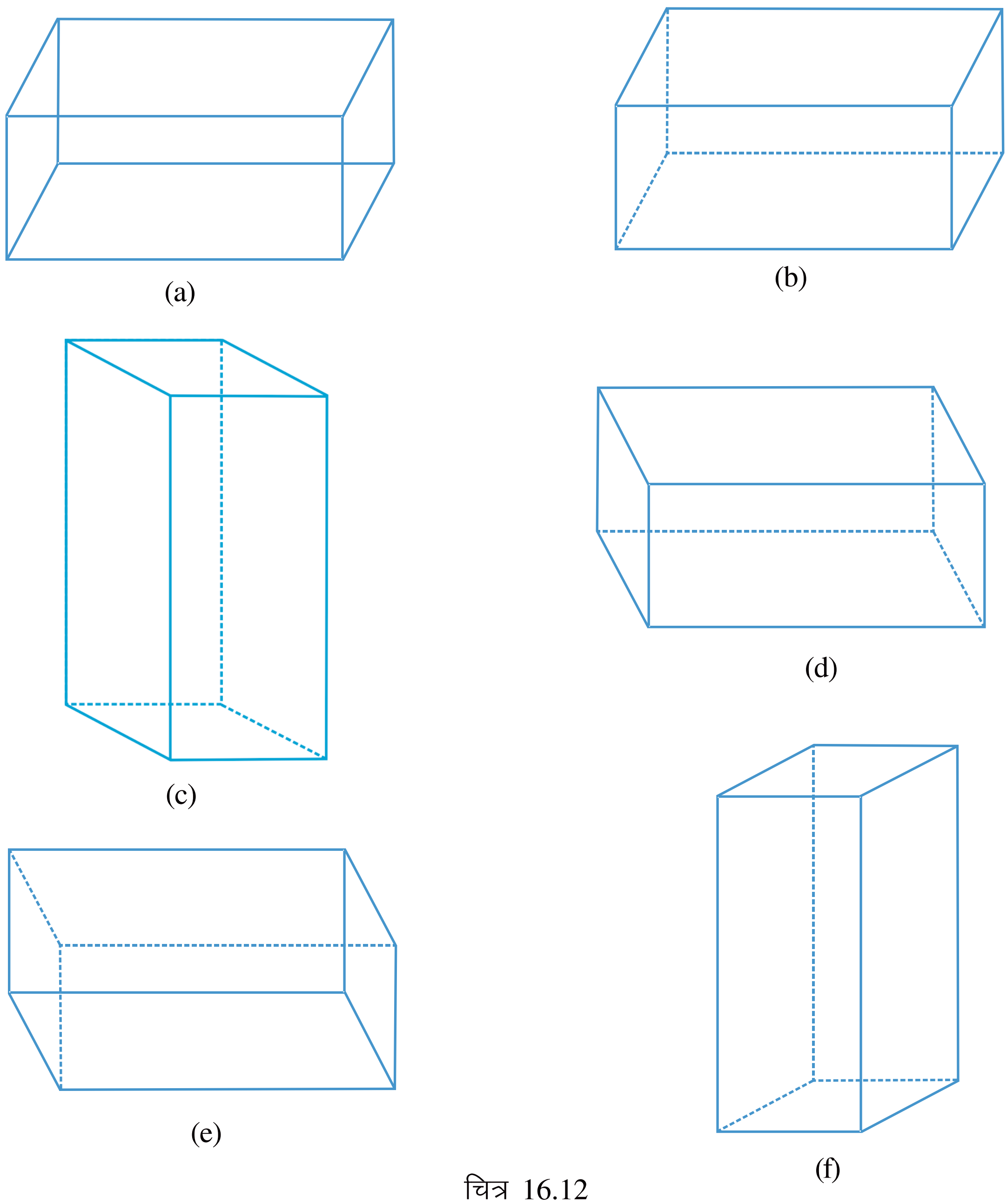
2. अब चित्र 16.11 (ii) के अनुसार वर्ग के उपर लगभग बीच में कुछ दूरी पर एक बिन्दु P लीजिए।
3. अब बिन्दु P को वर्ग के प्रत्येक शीर्ष से मिलाइये। आपको चित्र 16.11 (iii) की भांति एक आकृति प्राप्त होगी, यह आकृति पिरामिड है।

इसमें एक वर्गाकार फलक ABCD एवं चार त्रिकोणीय फलक ABP, BCP, CDP एवं

DAP हैं। इसकी 8 कोरें AB, BC, CD, DA, AP, BP, CP तथा DP है और पांच शीर्ष A,B, C,D तथा P है।

छिपे पृष्ठों का बिन्दुकित रेखा द्वारा प्रदर्शन

नीचे घनाभ की कुछ आकृतियाँ दी गई हैं। चित्र 16.12 (a) घनाभ की मुल आकृति है तथा अन्य आकृतियां घनाभ को विभिन्न स्थितियों में देखने पर बनती हैं। इन स्थितियों में घनाभ के कुछ भाग (शीर्ष, कोर एवं फलक) दिखाई नहीं देते। इनमें से शीर्ष एवं कोर को बिन्दुकित रेखा द्वारा दर्शाया गया है।

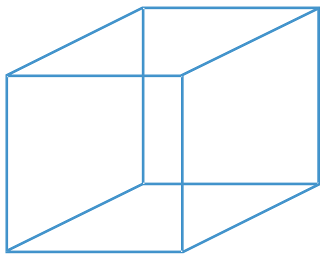


चित्र 16.12

अभ्यास–4

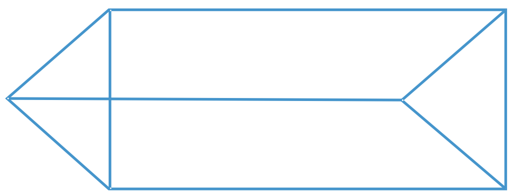
अब आप दिये गये आकृतियों के सामने से देखने पर छिपे हुए कोर एवं शीर्ष को बिन्दुकित रेखा द्वारा प्रदर्शित करते हुए पुनः चित्र बनाइये। (काई दो स्थिति)

(A) घन



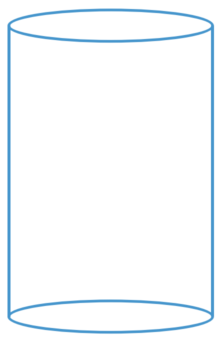
——————————

(B) त्रिभुजीय प्रिज्म



——————————

(C) बेलन



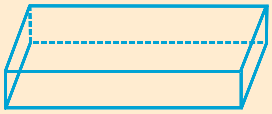
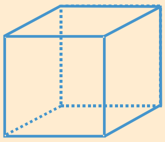
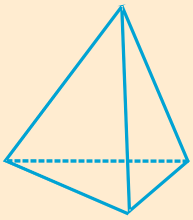
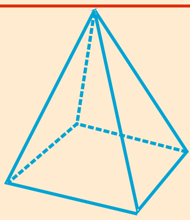
——————————

दी गई आकृतियों के शीर्ष, कोर और फलकों की पहचान एवं गणना करना।

क्रियाकलाप 9.

दिये गये आकृतियों में शीर्षों को नाम देकर शीर्षों, कोरों एवं फलकों को पहचानिए और सारणी में उनकी संख्या लिखिए। यहाँ घनाभ के शीर्ष, कोर एवं फलकों की संख्या को लिखकर एक संबंध बनाया गया है, शेष आकृतियों के संबंधित भागों की संख्या लिखकर उनमें संबंध स्थापित कीजिए।

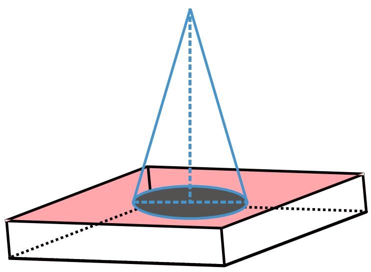
सारणी 16.1

क्र.	आकृति नाम एवं आकृति	शीर्ष (V)	कोर (E)	फलक (F)	V-E+F
1.	घनाभ 	8	12	6	8−12+6=2
2.	घन 				
3.	चतुष्फलक 				
4.	पिरामिड 				
5.	प्रिज्म 				

इस सारणी को पूर्ण करने के पश्चात आप पायेंगे कि प्रत्येक बहुफलक (चार या चार से अधिक फलकों से बनी आकृति) के लिए V-E+F का मान सदैव 2 प्राप्त होता है। इस संबंध को यूलर ने स्थापित किया था। अतः उन्हीं के नाम पर इसे **यूलर संबंध** कहते हैं।

क्रियाकलाप 10.

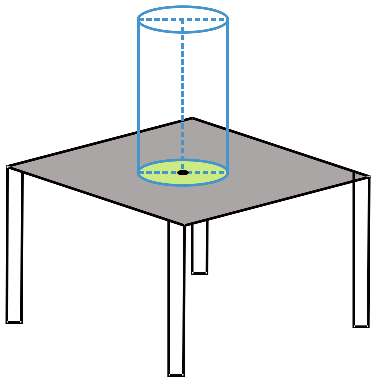
किसी माप का एक घनाभ बनाइये और उसके ऊपरी फलक पर घनाभ के चौड़ाई के आकार से कम त्रिज्या का शंकु बनाइये। आपका चित्र, चित्र 16.13 के अनुसार है जिसमें एक घनाभ तथा शंकु दिखाई देता है।



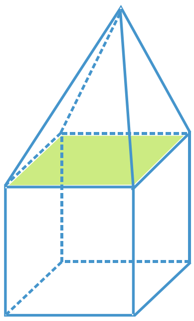
चित्र 16.13

क्रियाकलाप 11.

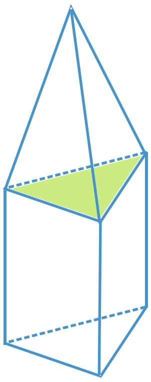
नीचे दिए गये प्रत्येक चित्र में एक से अधिक आकृतियाँ सम्मिलित हैं। प्रत्येक चित्र की आकृतियों को पहचान कर उनके नाम लिखिए।



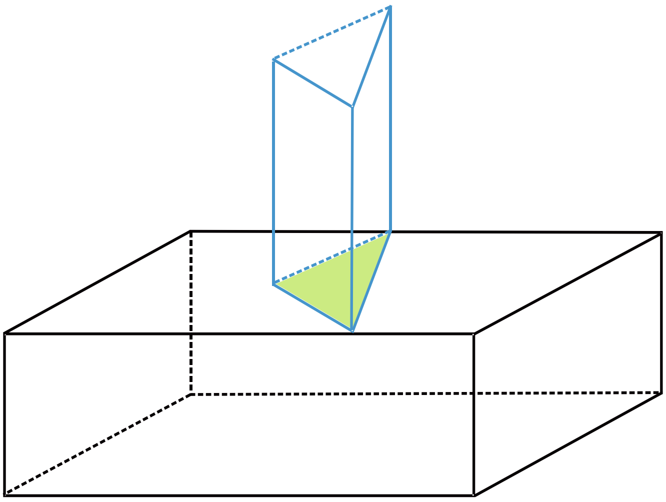
(a) बेलन एवं टेबल



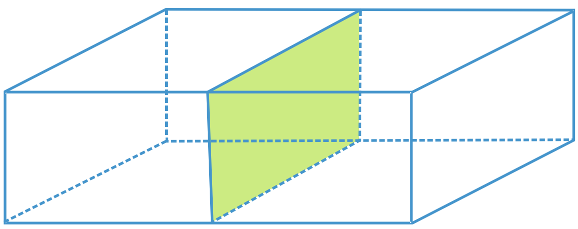
(b) ----------------



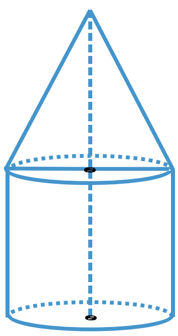
(c) ----------------



(d) ----------------



(e) ----------------

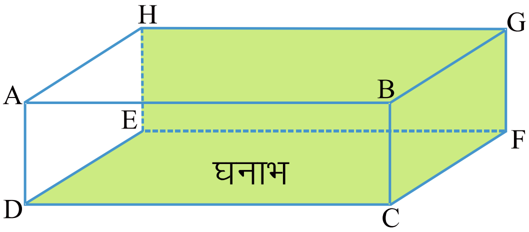


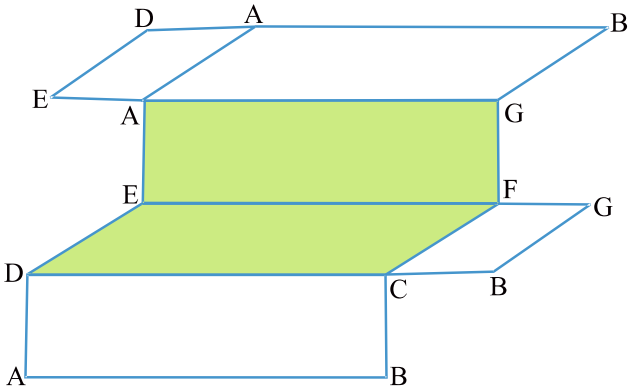
(f) ----------------

चित्र 16.14

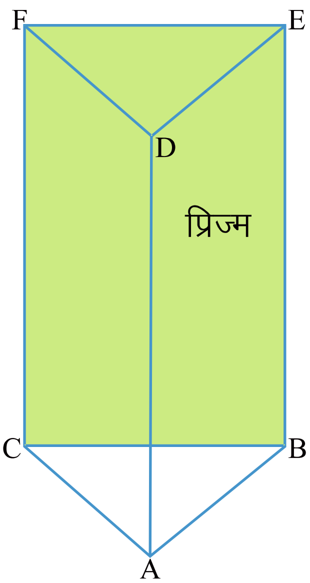
मॉडल बनाने हेतु सहायक आकृतियाँ

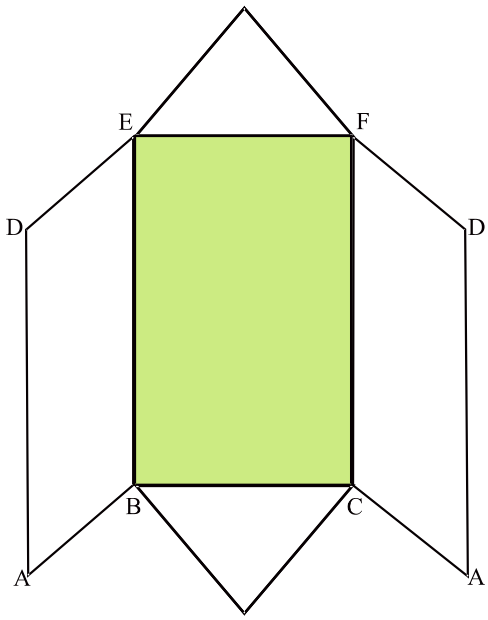
निम्न आकृतियों के फलकों को अलग करके दिखाया गया है। इनकी सहायता से आप कागज के टुकड़े काटकर उस आकृति का मॉडल बना सकते हैं।



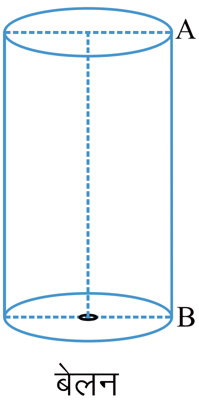


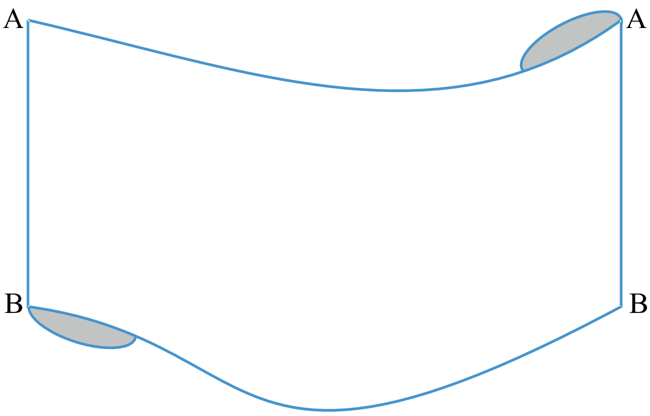
चित्र 16.15



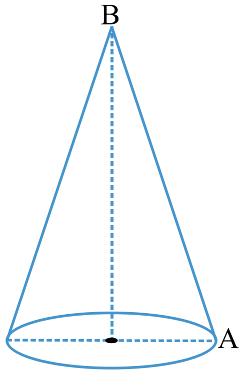


चित्र 16.16

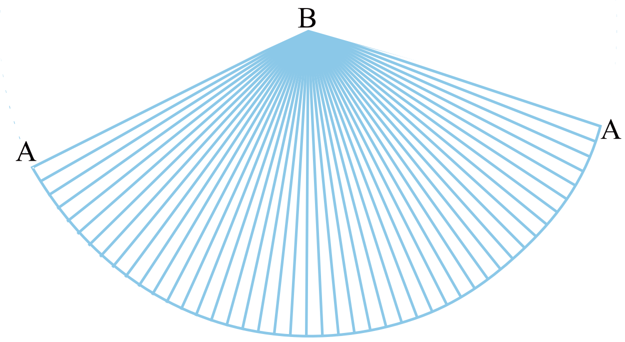




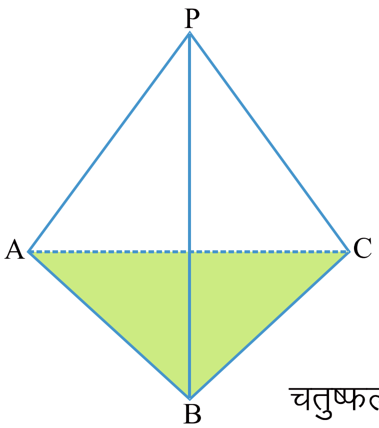
चित्र 16.17



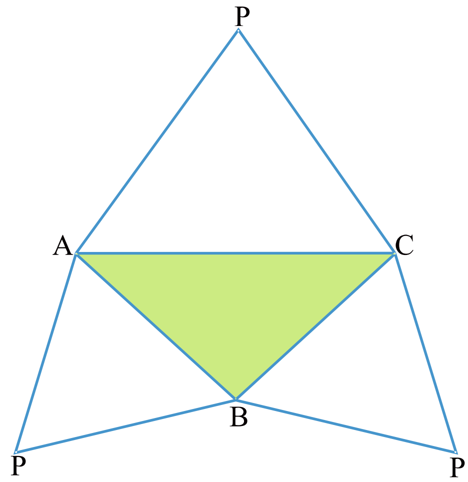
शंकु



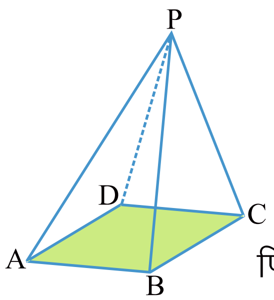
चित्र 16.18



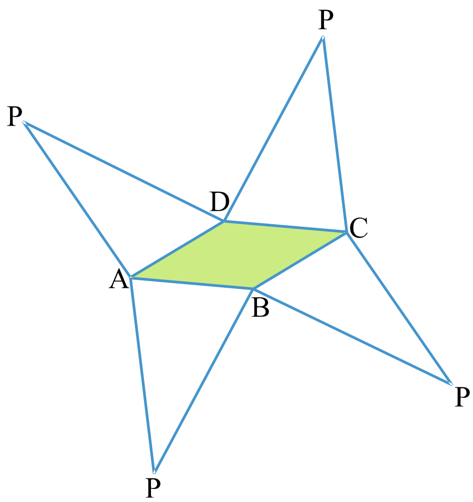
चतुष्फलक



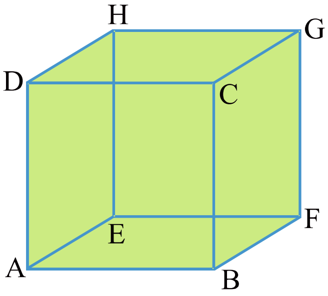
चित्र 16.19



पिरामिड

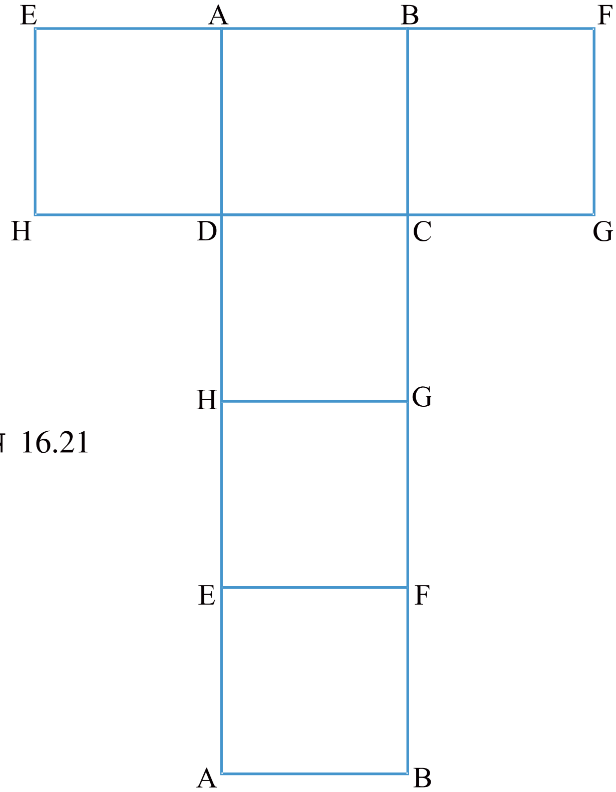


चित्र 16.20



घन

चित्र 16.21



टीप – घन को घनाभ के फलकों की भांति तथा घनाभ को घन के फलकों की भांति अलग किया जा सकता है।

प्रश्नावली 16

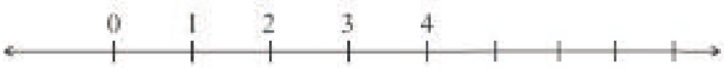
1. 3 सेमी वर्ग की सहायता से एक घन बनाइये।
2. 5 सेमी लम्बाई के एक बेलन की रचना कीजिए।
3. अपनी कॉपी में 5 सेमी दूरी पर दो त्रिभुज एक त्रिभुजाकार गत्ते के टुकड़े की सहायता से बनाइए और इनकी सहायता से त्रिभुजीय प्रिज्म की रचना कीजिए।
4. अपनी कॉपी में चतुष्फलक की रचना कीजिए।
5. एक बहुफलक में चार फलक तथा चार शीर्ष हों तो क्या आप बता सकते हैं कि उसमें कितनी कोर होंगी?

अध्याय–17

संख्याओं का खेल

PLAYING WITH NUMBERS

हमने संख्याओं के बारे में काफी कुछ सीखा है। हमने बड़ी से बड़ी संख्याओं को लिखना सीखा है, हमने यह भी सीखा कि गिनने के लिए जिन संख्याओं का उपयोग किया जाता है उन्हें प्राकृत संख्या कहते हैं। प्राकृत संख्या के समूह में अगर हम शून्य जोड दें तो पूर्ण संख्याओं का समूह प्राप्त होता हैं। पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के सभी गुण मौज़ूद होते हैं। शून्य सबसे छोटी पूर्ण संख्या हैं। पूर्ण संख्याओं को 0, 1, 2, 3..... से लिखते हैं तथा पूर्ण संख्याओं (Whole Number) के समूह को W संकेत द्वारा बताते हैं। पूर्ण संख्याओं को समूह में इस प्रकार प्रदर्शित करते हैं – W = {0, 1, 2, 3 ....} पूर्ण संख्याओं का संख्या रेखा पर प्रदर्शन इस प्रकार किया जा सकता है।



चित्र 17.1

आईए पूर्ण संख्याओं पर आधारित कुछ प्रश्नों को हल करें –

प्र.1. क्या आप सबसे बड़ी पूर्ण संख्या को बता सकते हैं? ....

प्र.2 सबसे छोटी पूर्ण वर्ग विषम संख्या कौनसी है?....................................

प्र.3 2, 5, 7 व 9 अंकों से चार अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

———————————————————————————

प्र.4 2, 4, 6, 8 अंकों का उपयोग करके सबसे बड़ी व सबसे छोटी संख्याएँ बनाइए।

प्र.5 पाँच अंकों की सबसे छोटी व चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या का अन्तर बताईये।

प्र.6 3,7,9 को अंकों के रूप में उपयोग करके सबसे बड़ी तीन अंकों की संख्या कौनसी बन सकती है और सबसे छोटी कौनसी।

(i) लता कहती है कि ऊपर प्राप्त, सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या को जोड़ दें तो योगफल 11 से भाज्य होगा। क्या आप इससे सहमत हैं? जाँच करके देखिए।

(ii) फातिमा ने कहा यह तो सिर्फ दो अंकों की संख्या के लिए ही सही है? फातिमा की बात की भी जाँच कीजिए।

(iii) रमेश ने कहा जोड़ का तो पता नहीं किन्तु कोई भी 3 अंकों की संख्या तथा उसको उलट कर लिखने से प्राप्त संख्या में यदि बड़ी संख्या से छोटी संख्या घटा दें तो शेषफल 9 से भाज्य होगा और 11 से भी होगा। क्या यह बात सही है?

(iv) ज्योति ने कहा तीन अंकों वाली संख्या ही नहीं, तुम कुछ अंक सोचो तथा उनसे बनने वाली

सबसे बड़ी संख्या से सबसे छोटी संख्या को घटाओ। यह हमेशा 9 से भाज्य होगी।

आइए एक खेल खेलें –

आप एक संख्या सोच लीजिए और उसके अंकों के योगफल को संख्या में से घटा दीजिए।

क्या यह 9 से विभाजित होगा? ऐसा क्यों होता है? कारण पता लगाइए।

माना कि आपने 7324 सोचा है, तब

कथनानुसार $7324 - (7 + 3 + 2 + 4)$

$= 7324 - 16$

$= 7308$

जो कि 9 से विभाज्य है(क्योंकि इस संख्या के अंकों का योगफल 9 से विभाजित होता है)।

इसी प्रकार से आप भी अपने दोस्तों के साथ गणितीय खेल, खेल सकते हैं।

पूर्ण संख्याओं का योग

1. आइए, दो पूर्ण संख्याओं को जोड़कर देखें –

$18 + 12 = 30$ (पूर्ण संख्या)

$22 + 19 = 41$ (पूर्ण संख्या)

$24 + 68 = 92$ (पूर्ण संख्या)

यहाँ 30, 41, 92 भी पूर्ण संख्याएँ हैं।

हम देखते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योगफल भी पूर्ण संख्या है। क्या ऐसा हमेशा होगा?

आप भी कुछ और पूर्ण संख्याओं का जोड़ करके देखिए।

सोचिए, क्या कभी ऐसा होगा कि जोड़ पूर्ण संख्या न हो?

आप देखेंगे कि दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव एक पूर्ण संख्या होती है।

यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हैं तो उनका योग c भी एक पूर्ण संख्या ही प्राप्त होती है। अर्थात् $a + b = c$, इस नियम को संवरक नियम कहते है।

2. आइए, फिर से दो पूर्ण संख्याओं को जोड़ते हैं

$25 + 43 = 68$ (पूर्ण संख्या)

अब इन संख्याओं का क्रम बदल कर जोड़िये –

$43 + 25 = 68$ (पूर्ण संख्या)

क्या दोनों योगफल समान हैं?

एक बार फिर दो संख्याओं को जोड़ें

$10487 + 368 = 10855$ (पूर्ण संख्या)

अब इनका क्रम बदलकर फिर जोड़ें

$368 + 10487 = 10855$ (पूर्ण संख्या)

क्या इनके योगफल में अन्तर है?

इस प्रकार $25 + 43 = 43 + 25 = 68$

एवं $10487 + 368 = 368 + 10487 = 10855$

अतः दो पूर्ण संख्याओं का योग एवं उनका क्रम बदलकर जोड़ने पर योगफल समान होता है।

यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हो तो उनका योग $(a + b)$ व उनका क्रम बदलकर योग $(b + a)$ करने पर योगफल समान होता है।

अर्थात् $\mathbf{a + b = b + a}$ इसे हम योग का **क्रम विनिमेय नियम** कहते हैं।

3. आइये 0 में किसी पूर्ण संख्या को जोड़ें–

क्या संख्या के मान में परिवर्तन आता है? किसी पूर्ण संख्या a में 0 जोड़ने या 0 में कोई पूर्ण संख्या a जोड़ने पर दोनों स्थितियों में मान समान रहता है।

अर्थात् $\mathbf{a + 0 = 0 + a = a}$ शून्य के इस विशेष गुण के कारण ही **शून्य को योग का तत्समक** कहते हैं।

4. अब हम तीन पूर्ण संख्याओं का योग करके देखते हैं। जैसे 17+ 29 +44 इस योगफल को दो तरीके से ज्ञात कर सकते हैं। हम पहली दो संख्याओं 17 व 29 का योग करके उनमें तीसरी संख्या 44 को जोड़ते हैं।

$(17 + 29) + 44 = 46 + 44 = 90$

अब हम अन्तिम दो पूर्ण संख्याएँ 29 व 44 का योग करके उसमें पहली संख्या को जोड़ते हैं।

$17 + (29 + 44) = 17 + 73 = 90$

दोनों स्थितियों में क्या योग समान है?

अतः $(17 + 29) + 44 = 17 + (29 + 44)$

अतः यदि a, b, c तीन पूर्ण संख्यायें हैं, तो

$\mathbf{a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)}$ यह **योग का साहचार्य नियम** कहलाता है।

यही क्रिया चार या चार से अधिक संख्याएँ लेकर कीजिए और बताइये कि क्या उनका योग भी समान आयेगा?

पूर्ण संख्याओं के घटाने के नियम

1. <u>दो संख्याओं के घटाने के नियम</u>

$15 - 8 = 7$ (पूर्ण संख्या)

$25 - 14 = 11$ (पूर्ण संख्या)

$18 - 18 = 0$ (पूर्ण संख्या)

$16 - 23 =$ क्या यह पूर्ण संख्या होगी?

क्या दो पूर्ण संख्याओं को घटाने से सदैव पूर्ण संख्या प्राप्त हुई? यदि नहीं तो क्यों?

हाँ, यदि बड़ी पूर्ण संख्या में से छोटी पूर्ण संख्या को घटाते है या दो समान संख्याओं को आपस में घटाते है तो हमें पूर्ण संख्या प्राप्त होती है लेकिन छोटी पूर्ण संख्या में से बड़ी पूर्ण संख्या घटाते समय पूर्ण संख्या प्राप्त नहीं होती है।

यदि a और b दो पूर्ण संख्याएँ हैं और $a > b$ अथवा $a = b$ हो तो $a - b = c$ एक **पूर्ण संख्या** होगी। और यदि $a < b$ हो, तो $a - b$ एक पूर्ण संख्या नहीं होगी।

2. अब तीन पूर्ण संख्याओं 25, 8, 6 घटाने की क्रिया करके देखते हैं। इसे दो प्रकार से घटाया जा सकता है। आओ घटाकर देखें।

$(25 - 8) - 6$	$25 - (8 - 6)$
$= 17 - 6$	$= 25 - 2$
$= 11$	$= 23$

क्या दोनों स्थितियों में मान समान है?

ऐसी कुछ और संख्या लेकर हल कीजिए। इससे क्या निष्कर्ष निकलता है? यही कि **घटाते समय संख्याओं का क्रम कोष्ठक द्वारा नहीं बदला जा सकता है।**

3. आइए, एक पूर्ण संख्या में से शून्य को घटाकर देखते हैं।

$5 - 0 = 5,\ 18 - 0 = 18$

आप और पूर्ण संख्याओं में से शून्य को घटाकर देखिए। क्या वही संख्या प्राप्त होती है?

अतः **यदि a कोई पूर्ण संख्या है तो $a - 0 = a$**

अतः **किसी पूर्ण संख्या में से शून्य को घटाने पर वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती हैं।**

4. अब $15 - 15 = 0,\ 23 - 23 = 0$

यही क्रिया अन्य पूर्ण संख्या लेकर कीजिए। क्या कभी 0 के अतिरिक्त कोई संख्या प्राप्त हुई? **किसी पूर्ण संख्या में से उसी पूर्ण संख्या को घटाने पर हमें शून्य प्राप्त होता है।**

अर्थात् **यदि a कोई पूर्ण संख्या है तो $a - a = 0$**

पूर्ण संख्याओं का गुणा

1. आइए, दो पूर्ण संख्याओं को गुणा करके देखते हैं।

$18 \times 8 = 144,\quad 29 \times 12 = 348$

$41 \times 7 = 287,\quad 86 \times 4 = 344$

हम देखते है कि यहाँ 144, 348, 287, 344 सभी पूर्ण संख्याएँ हैं। दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी पूर्ण संख्या होती है। क्या सदैव ऐसा होता है?

आप भी दो पूर्ण संख्याओं का गुणा करके देखिए।

क्या कभी कोई गुणनफल पूर्ण संख्या नहीं प्राप्त हुई?

अतः हम कह सकते है कि पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हों तो इनका गुणनफल c भी एक पूर्ण संख्या होगी।
अर्थात् $\mathbf{a \times b = c}$ यह गुणा के लिए **संवरक नियम** है।

2. आओ दो पूर्ण संख्या 5 व 8 लें।

इनके गुणा करने से आपको क्या मान प्राप्त हुआ?

$5 \times 8 = 40$

अब इनको क्रम बदल कर गुणा करें।

$8 \times 5 = 40$

क्या दोनों गुणनफल में कोई अन्तर है?
कुछ और पूर्ण संख्याएँ लेकर इनका गुणा कीजिए।
इनका क्रम बदल कर गुणा कीजिए।
क्या कहीं ऐसा भी हुआ कि गुणनफल में कोई फर्क आया?

दो पूर्ण संख्याओं का गुणा एवं उनके क्रम बदलकर गुणा करने पर मान हमेशा समान रहता है।

यदि a एवं b दो पूर्ण संख्या हों तो इनका गुणनफल $a \times b$ तथा इनका क्रम बदलकर गुणा $b \times a$ समान होगा। अर्थात् $\mathbf{a \times b = b \times a}$ इसे गुणन के लिए क्रमविनिमेय नियम कहते हैं।

3. अब तीन पूर्ण संख्याएँ 4, 5, 6 लेकर इनको गुणा करें।
इस गुणा को निम्न दो प्रकार से किया जा सकता है।

$4 \times 5 \times 6$	$= (4 \times 5) \times 6$	$= 4 \times (5 \times 6)$
	$= 20 \times 6$	$= 4 \times 30$
	$= 120$	$= 120$

क्या दोनों स्थितियों में मान समान आया? यदि हाँ तो कुछ और पूर्ण संख्याएँ लेकर इनका गुणा दोनों तरह से कीजिए।

क्या हर स्थिति में मान बराबर आया?

इसी प्रकार 4 संख्याएँ लेकर भी गुणा कीजिए।

तीन या अधिक संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा किया जाए तो गुणनफल का मान सदैव समान रहता है।

अर्थात् a, b और c तीन पूर्ण संख्या हैं तो $\mathbf{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$ यही गुणा के लिए **साहचर्य नियम** है।

4. अब, एक पूर्ण संख्या को 0 से गुणा करके देखते हैं।
$8 \times 0 = 0,\quad 19 \times 0 = 0,\quad 0 \times 15 = 0$
$29 \times 0 = 0,\quad 45 \times 0 = 0,\quad 48 \times 0 = 0$

इस प्रकार आप भी किसी पूर्ण संख्या को 0 से गुणा करके देखें क्या सदैव शून्य ही प्राप्त होता है?

अर्थात् **किसी भी पूर्ण संख्या को 0 से गुणा करने पर गुणनफल शून्य प्राप्त होगा। यदि a कोई पूर्ण संख्या है, तो $\mathbf{a \times 0 = 0}$**

5. इसी प्रकार किसी पूर्ण संख्या को 1 से गुणा करके देखो। गुणनफल क्या प्राप्त हुआ?
यदि किसी पूर्ण संख्या को 1 से गुणा किया जाए तो हमें वहीं संख्या प्राप्त होती है।

यदि a कोई पूर्ण संख्या है तो $\mathbf{a \times 1 = a}$, इस विशेष गुण के कारण ही एक को **गुणन तत्समक** कहते हैं।

6. नीचे लिखी संख्याओं का गुणा करके देखिए–

यह गुणा दो प्रकार से कर सकते हैं।

$$5\ (8 + 4)$$

$= 5(8 + 4)$	$= 5(8 + 4)$
$= 5(12)$	$= 5 \times 8 + 5 \times 4$
$= 60$	$= 40 + 20$
	$= 60$

क्या दोनों ही स्थितियों में बराबर मान प्राप्त हुआ?

इसी प्रकार :

$$5(8 - 4)$$

$= 5 \times (8 - 4)$	$= 5\ (8 - 4)$
$= 5 \times 4$	$= 5 \times 8 - 5 \times 4$
$= 20$	$= 40 - 20$
	$= 20$

अतः यदि a,b,c पूर्ण संख्याएँ हों तो $a(b \pm c) = a \times b \pm a \times c$ इसे **गुणा का योग/अंतर पर वितरण नियम** कहते हैं।

ऐसे ही कोई भी तीन संख्याएँ लेकर दोनों प्रकार से हल करके देखिए कि क्या दोनों स्थितियों में बराबर मान प्राप्त होता है।

पूर्ण संख्याओं का विभाजन

1. हम जानते है कि भाग की क्रिया, गुणन क्रिया का प्रतिलोम है। आइए देखें कैसे?

$40 \div 4 = 10 \quad \Rightarrow \quad 10 \times 4 = 40$

$21 \div 3 = 7 \quad \Rightarrow \quad 7 \times 3 = 21$

आइए, भाग संक्रिया के कुछ और प्रश्नों को हल करके देखें।

$20 \div 5 = 4$ और शेषफल 0

$25 \div 4 = 6$ और शेषफल 1

पूर्ण संख्याओं में भाग की क्रिया से प्राप्त मान सदैव पूर्ण संख्या नहीं होती है, अर्थात् सदैव शेष 0 प्राप्त नहीं होता हैं। अतः हम कह सकते है कि **किसी पूर्ण संख्या में दूसरी पूर्ण संख्या का भाग देने पर सदैव पूर्ण संख्या प्राप्त नहीं होती है।**

2. हम जानते है कि

$15 \div 15 = 1 \qquad 28 \div 28 = 1 \qquad 49 \div 49 = 1$

अतः किसी भी पूर्ण संख्या में उसी संख्या का भाग देने पर (शून्य को छोड़कर) भागफल सदैव 1 प्राप्त होता है।

अर्थात् **यदि a कोई पूर्ण संख्या है (शून्य को छोड़कर) तब $\mathbf{a \div a = 1}$**

अब $15 \div 1 = 15$ $28 \div 1 = 28$

$40 \div 1 = 40$

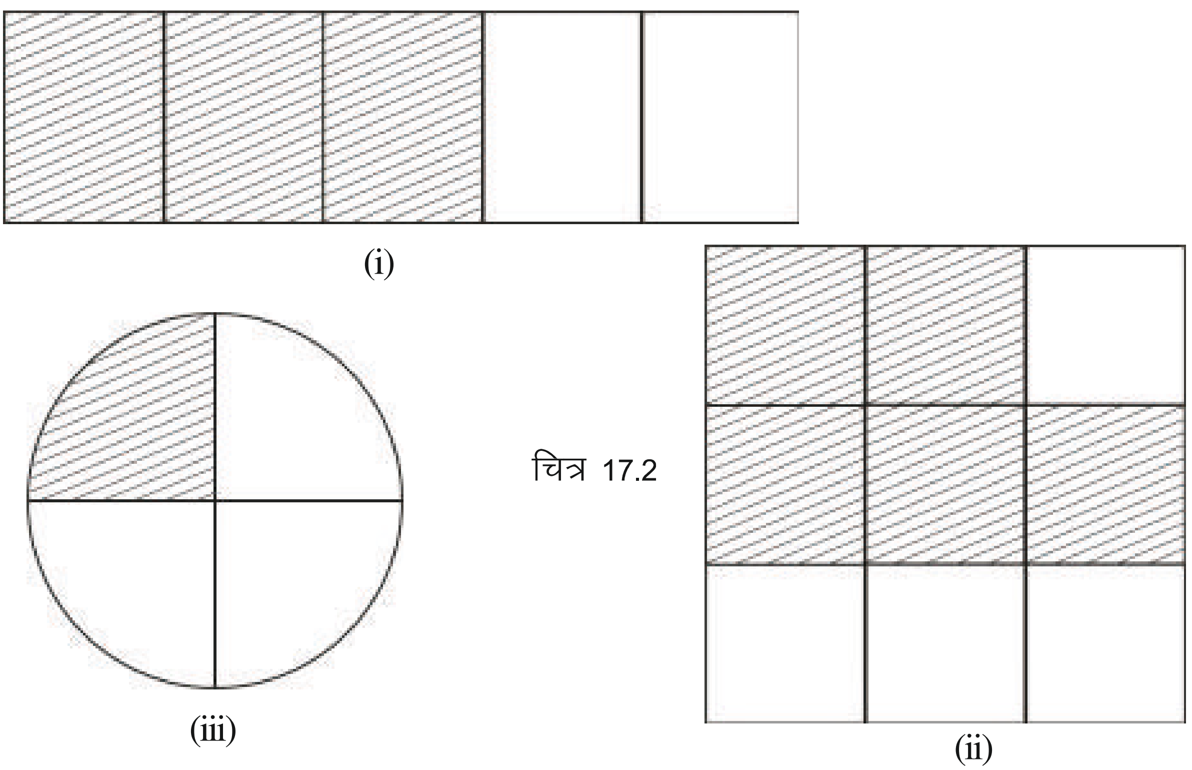
किसी पूर्ण संख्या को एक से विभाजित करने पर भागफल सदैव वही संख्या प्राप्त होती है। अर्थात् **यदि a कोई पूर्ण संख्या है तब $a \div 1 = a$**

भिन्न संख्या

आइए, हम 21 में 4 का भाग करके देखते हैं। 21 में 4 के भाग को $\frac{21}{4}$ लिखते हैं और ऐसी संख्या भिन्न कहलाती है।

भिन्न संख्याएँ– वे संख्याएँ है जिनमें अंश और हर दोनों होते है।

नीचे कुछ चित्र दिए गए है जो यह इंगित करते हैं कि एक इकाई में कितने हिस्से किए गए एवं उनमें से कितने हिस्से (रेखांकित) लिए गए हैं।

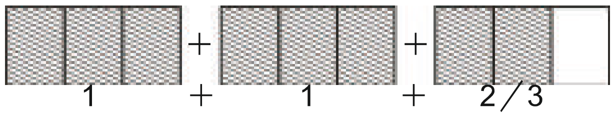


चित्र 17.2

ऊपर दिए गए चित्रों में रेखाकिंत व रिक्त भाग को भिन्नों के रूप में लिखिए –

	रेखांकित भाग	कुल भाग	भिन्न
(i)	3	5	$\frac{3}{5}$
(ii)	----------------	----------------	----------------
(iii)	----------------	----------------	----------------

ये सभी उचित भिन्न हैं। उचित भिन्न वे भिन्न होती हैं जिनमें अंश का मान हर के मान से छोटा होता है तथा वे भिन्न जिनमें अंश का मान हर के मान से बड़ा होता है। उन्हें अनुचित (विषम) भिन्न कहते हैं। इन भिन्नों में कई पूर्ण इकाईयाँ हो सकती है। अनुचित भिन्न में कितनी पूर्ण व कितनी अपूर्ण इकाइयाँ हैं इसको प्रदर्शित करने के लिए मिश्र भिन्न का उपयोग करते हैं। जैसे $\frac{8}{3}$ को चित्रानुसार इस प्रकार प्रकट कर सकते हैं।



चित्र 17.3

अर्थात् इसमें तीन इकाईयों के तीन समान भाग करके उसमें से दो इकाइयाँ पूरी तथा एक इकाई के तीन में से दो हिस्से लेना है।

मिश्र भिन्न को हम विभाजन के नियम के आधार पर भी लिख सकते हैं जैसे $\frac{78}{37}$ में 78 भाज्य व 37 भाजक है।

37) 78 (2
74
4 शेषफल

तब $\frac{78}{37}$ को मिश्र भिन्न के रूप में $2\frac{4}{37}$ लिख सकते हैं।

जब भिन्नों के अंश समान हो तो हर के बड़ा होने पर भिन्न का मान छोटा होता जाता है। जैसे : $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$.... एवं जब भिन्नों के हर समान हो तो जिस भिन्न का अंश बड़ा हो वह भिन्न बड़ा होगा। जैसे $\frac{1}{8} < \frac{2}{8} < \frac{3}{8} < \frac{4}{8} < \frac{5}{8} < \frac{6}{8} < \frac{7}{8}$

प्रश्नावली 17.1

प्र.1. निम्न में से उचित एवं अनुचित भिन्नों को छांटिए –

(i) $\frac{16}{5}$ (ii) $\frac{12}{13}$ (iii) $\frac{78}{41}$ (iv) $\frac{6}{7}$

प्र.2. निम्न भिन्नों को चित्रों में प्रदर्शित कीजिए –

(i) $\frac{6}{5}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{7}{11}$ (iv) $\frac{4}{15}$

प्र.3. बताइए निम्न भिन्नों में कितनी पूर्ण इकाईयाँ हैं? साथ ही इन्हें मिश्र भिन्न के रूप में भी लिखिए।

(i) $\frac{14}{9}$ (ii) $\frac{89}{12}$ (iii) $\frac{119}{18}$ (iv) $\frac{267}{61}$

प्र.4. भिन्नों को बढ़ते क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{8}{9}, \frac{6}{9}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{8}{9}, \frac{7}{9}$

भिन्नों को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करना

हम पूर्ण संख्याओं की भांति भिन्नों को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कर सकते हैं।

भिन्नात्मक संख्याओं $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}$ एवं $\frac{13}{9}$ को संख्या रेखा पर नीचे लिखे तरीके से दर्शाया गया है।

चित्र 17.3

ऊपर संख्या रेखा में प्रदर्शित भिन्नों $\frac{4}{3}$ व $\frac{13}{9}$ पास–पास हैं परन्तु इनके बीच भी अनेक भिन्न संख्याएँ हो सकती है जैसे : $\frac{25}{18}, \frac{37}{27}, \frac{51}{36}$ इत्यादि।

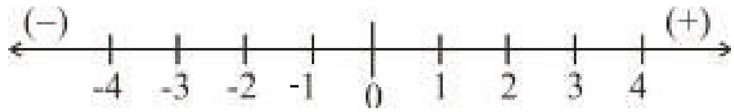
पूर्णांक (Integer)

पूर्ण संख्याओं को घटाते समय हमें ऋणात्मक संख्याओं की आवश्यकता होती है और यदि पूर्ण संख्याओं और ऋणात्मक संख्याओं के समूह को मिला दिया जाए तो हमें पूर्णांकों का समूह मिलता है। पूर्णांकों में धनात्मक तथा ऋणात्मक संख्याओं के साथ शून्य भी होता हैं। पूर्णांक संख्याओं के समूह को I से व्यक्त करते हैं जैसे –

$I = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\ldots\}$

पूर्णांकों को संख्या रेखा पर दर्शाना

रेखा पर एक बिन्दु शून्य मान कर उसके दाईं ओर धनात्मक एवं बाईं ओर ऋणात्मक संख्याएँ लेते हैं और इसमें न तो सबसे बड़ी कोई संख्या होती है और न सबसे छोटी।



चित्र 17.4

परिमेय संख्या–

परिमेय संख्याएँ– वे संख्याएँ होती हैं जिन्हें $\frac{p}{q}$ जहाँ p तथा q पूर्णांक है परन्तु $(q \neq 0)$ के रूप में लिखा जा सकता है। ये संख्याएँ धनात्मक भी हो सकती हैं और ऋणात्मक भी।

सभी संख्याएँ $\frac{4}{-5}, \frac{6}{4}, \frac{-13}{4}, \frac{8}{1}, \frac{-9}{-1}, \frac{0}{-7}, ---$ परिमेय संख्याएँ हैं।

सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं तथा सभी पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ है। हम परिमेय संख्याओं की तुलना कर सकते है। साथ ही परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। परिमेय संख्याओं को मानक रूप में परिवर्तन किया जा सकता है जैसे $\frac{16}{20}$ का मानक रूप $\frac{4}{5}$ होता है।

प्रश्नावली 17.2

प्र.1. निम्न भिन्नात्मक संख्याओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{5}$ (iii) $\frac{7}{8}$

प्र.2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को पूर्णांकों के रूप में लिखिए।

(i) $\frac{8}{1}$ (ii) $\frac{-12}{1}$ (iii) $\frac{20}{1}$

(iv) $\frac{-39}{1}$ (v) $\frac{59}{1}$

प्र.3. नीचे दी हुई संख्याओं के युग्म में से बड़ी संख्या बताइए।

(क) $\frac{5}{9}$ और 0 (ख) $\frac{-6}{7}$ और 0

(ग) $\frac{-5}{3}$ और $\frac{17}{-10}$ (घ) $\frac{6}{-5}$ और $\frac{-13}{-8}$

प्र.4. संख्या $\frac{4}{9}$ के अंश में क्या जोड़े कि यह $\frac{2}{3}$ बन जाए।

प्र.5. संख्या $\frac{5}{6}$ के हर में क्या घटाया जाए कि संख्या 1 प्राप्त हो।

प्र.6. किसी भिन्न का अंश उसके हर से 2 अधिक है यदि भिन्न का अंश 5 हो, तो भिन्न क्या होगी।

क्रियाकलाप 1.

0, 4, 7 अंकों का उपयोग कर तीन अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं? सारणी में निम्नानुसार लिखिए –

सारणी 1

क्र.सं.	संख्या	स्थानीय मान में प्रसारित रूप	क्या संख्या तीन अंकों की हैं?
1.	047	000 + 40 + 7	नहीं
2.	407	400 + 00 + 7	हाँ
3.	------		----------------
4.	------	----------------	----------------
5.	------	----------------	----------------
6.	------	----------------	----------------

अवलोकन 1. तीन अंकों से बनी संख्याएँ कौन–कौन सी हैं?

2. 047 तीन अंकों की संख्या क्यों नहीं है?

किसी भी पूर्णांक संख्या के पूर्व 0 (शून्य) का कोई मान नहीं होता है। अतः 047 = 47 जो दो अंकों की संख्या है।

क्रियाकलाप 2.

सारणी को पूर्ण कीजिए –

क्र.सं.	a, b, c के मान	$100 \times a + 10 \times b + c$	संख्या
1.	a = 9, b = 2, c = 8	$100 \times 9 + 10 \times 2 + 8$	900 + 20 + 8 = 928
2.	a = 3, b = 0, c = 4	....	......................= 304
3.	a = 0, b = 7, c = 5	....	....
4.	a = .., b = .., c = ..	....	....
5.	a = .., b = .., c = ..	....	....

अभ्यास 1

1. कोई भी तीन अंकों को उपयोग कर उनसे तीन अंकों की कितनी संख्याएँ बना सकते हैं? उन्हें बढ़ते क्रम में लिखिए।
2. निम्न संख्याओं को 100 a + 10b + c के रूप में व्यक्त कीजिए –

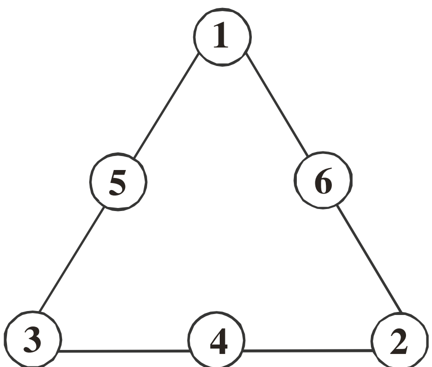
   (i) 376 (ii) 850 (iii) 69 (iv) 207

कुछ गणितीय खेल –

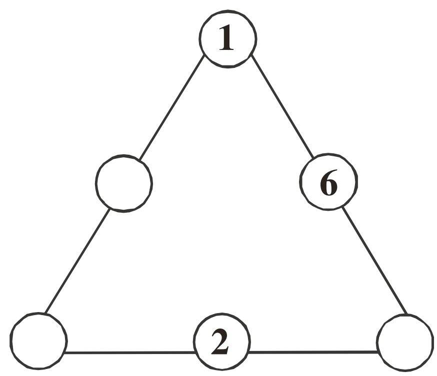
क्रियाकलाप 3.

जादूई त्रिभुज (Magic Triangle)

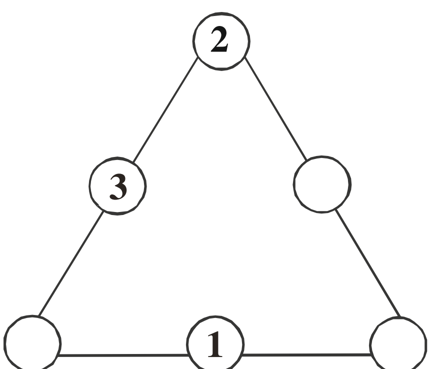
दिये गये त्रिभुज में 1, 2, 3, 4, 5, 6 तक संख्याओं को इस प्रकार भरिए जिससे इसके प्रत्येक भुजा की संख्याओं का योग समान हो –



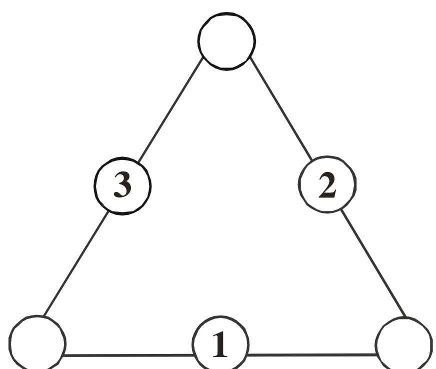
योगफल – 9



योगफल – 10



योगफल – 11



योगफल – 12

इन त्रिभुजों में आप देख सकते हैं कि 1, 2, 3, 4, 5, 6 संख्या से एक ही त्रिभुज में विभिन्न तरीकों से व्यवस्थित करने पर योगफल समान प्राप्त होता है।

इसी प्रकार आप भी क्रम से कोई भी छः संख्याओं से अलग–अलग समूह बनाकर समान योगफल प्राप्त कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 4.

दिये गये क्रम (श्रेणी) को पूर्ण कीजिए –

(i) 1, 2, 3, __, __, __, __, 8

(ii) 3, 5, 7, __, __, 13, __

(iii) 26, 23, 20, __, __, __, 8, __

(iv) 7, 12, 18, __, __, 42, __, __, 75

(v) 1, 4, 9, __, 25, __, __, 64, __

क्रियाकलाप 5.

निम्न क्रम को जारी रखते हुए रिक्त स्थानों (बॉक्स) की पूर्ति कीजिए –

$$1\frac{1}{2}\times 3 = 1\frac{1}{2}+3$$

$$1\frac{1}{3}\times 4 = 1\frac{1}{3}+\square$$

$$1\frac{1}{\square}\times 5 = \square+5$$

$$\square\times\square = 1\frac{1}{5}+\square$$

इन श्रेणियों को पूरा करने के पश्चात् आप स्वयं कोई भी दो श्रेणी बनाइये।

पहेली –

बिना कुछ पूछे संख्या का अनुमान लगाना –

भारती अपनी मित्र जयंती को तीन अंकों की कोई ऐसी संख्या सोचने को कहती है, जिसके प्रथम और अंतिम अंक बराबर न हों। फिर उस संख्या के अंकों के क्रम को उलटकर दूसरी संख्या बनाने को कहती है। उसके बाद प्राप्त संख्याओं में से बड़ी संख्या में छोटी संख्या को घटाने को कहती है। इस प्रकार प्राप्त अंतर के अंकों के क्रम को पुनः उल्टे क्रम में रखकर एक अन्य संख्या बनाकर उसे अंतर से जोड़ने को कहती है। इतना सब कहने के बाद भारती अपनी मित्र जयंती को कहती है कि इतना सब करने के बाद तुम्हारे पास अंतिम योगफल 1089 आता है। इससे जंयती आश्चर्य में पड़ गई कि बिना कुछ बताये भारती को यह कैसे पता चला कि अंतिम योगफल 1089 है।

आइये, इस समस्या को हल करके देखते हैं –

माना कि जयंती के द्वारा सोची गई संख्या – 102 है।

तब 102 का उल्टा क्रम $= 201$

कथनानुसार

$$\begin{array}{r} 201 \\ -\ 102 \\ \hline 099 \end{array} \quad \text{(अन्तर)}$$

अब अंतर का उल्टा क्रम = 990

उनका योग

$$\begin{array}{r} 099 \\ +\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$

इस प्रकार आप भी अपने साथियों के साथ ऐसा खेल खेल सकते हैं।

क्रियाकलाप 6.

पहेली को निर्देशानुसार भरिये –

बाँयें से दाँये –

A - छः के वर्ग का पाँच गुना

D - दस के वर्ग से एक कम

E - नौ के वर्ग से दस अधिक

F - आठ सैकड़ा से चार कम

G - नौ का घन

A	B			C
D			E	
		F		
	G			

ऊपर से नीचे –

A - चौदह का वर्ग

B - क्रमशः दो अंक

C - छः का घन

E - तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या

F - सबसे छोटी दो क्रमागत अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के वर्ग का दुगना।

पहेली –

कक्षा 8 वीं के सभी छात्र–छात्राएँ अपनी उम्र बता रहे थे उनमें से अंजु एवं राजू ने अपनी उम्र बताने से मना कर दिया। तब कक्षा की छात्रा सुनीता बोली कि ठीक है तुम अपनी उम्र मत बताओ, लेकिन मेरे सवालों के जवाब दो तो मैं तुम दोनों की उम्र बता सकती हूँ।

इस पर अंजु एवं राजू तैयार हो गए।

अब सुनीता ने अंजु को कुछ ऐसा करने को कहा – अंजु, आप अपनी उम्र को दुगुना करके उसमें पाँच जोड़ दो और प्राप्त संख्या को 50 से गुणा कर दो। इसके बाद प्राप्त संख्या में राजू की आयु जोड़ दो, फिर उसमें एक वर्ष के दिनों की संख्या (365) जोड़ दो। उसके बाद इस योगफल में से 615 घटा दो।

अब बताओं कि तुम्हें कौनसी संख्या प्राप्त हुई।

इतना सब करने के बाद अंजु और राजू ने अपना उत्तर बताया। उसी उत्तर से ही सुनीता ने

अंजु और राजू की उम्र बता दी।

अब अंजु और राजू आश्चर्य में पड़ गए कि उन्होंने तो केवल अपने मन ही मन अपनी उम्र का हिसाब किया था फिर भी सुनीता को पता कैसे चला?

अब अंजु–राजू को सुनीता के उस तरीके को जानने की बड़ी उत्सुकता हुई। उनके पूछने पर राहुल और विवेक ने बताया –

माना कि अंजु तुम्हारी आयु 14 वर्ष है

उसके दुगुने में 5 जोड़ने पर $= 14 \times 2 + 5$

$= 28 + 5 = 33$

अब प्राप्त संख्या को 50 से गुणा करने पर $= 33 \times 50 = 1650$

अब इसमें राजू की उम्र (माना कि 13 वर्ष है) तथा वर्ष के दिनों की संख्या इसमें जोड़ने पर

$= 1650 + 13 + 365 = 2028$

अब इसमें 615 घटाने पर $= \dfrac{-615}{1413}$

प्राप्त उत्तर 1413 में अंतिम दो अंक (इकाई व दहाई अंक से बनी संख्या) राजू की आयु तथा शुरू के दो अंक अंजु की आयु हैं।

इस प्रकार का खेल आप अपने दोस्तों के साथ खेल कर देखिए।

क्रियाकलाप 7.

जादुई वर्ग (Magic Square)

दिये गये जादुई वर्ग में 1 से 16 तक की संख्याओं का प्रयोग करते हुए रिक्त स्थानों को इस प्रकार भरिए कि आड़ा, खड़ा, तिरछा सभी तरह से जोड़ने पर योगफल 34 प्राप्त हो।

16			13
	10		
9		7	12
	15		1

34 योगफल

इस प्रकार आप भी क्रमशः 16 संख्याओं को लेकर कोई जादुई वर्ग बनाकर देखिए।

पहेली –

तीन अंकों की कोई भी एक संख्या लीजिए और उसे पुनः उसी क्रम में एक बार और लिखकर उसे छः अंकों की संख्या बना लीजिए। अब प्राप्त संख्या में क्रमशः 7, 11 और 13 से विभाजित कीजिए। क्या आपको उत्तर वही संख्या प्राप्त हुई जो आपने शुरू में ली थी? ऐसा क्यों हुआ कारण खोजिए?

प्रश्नावली – 17.3

1. 3,0,5 अंकों के उपयोग से कुल कितनी संख्या बनाई जा सकती है? इनमें से दो अंकों एवं तीन अंकों से बनी संख्याओं को छाँटिए।
2. दिये गये प्रश्नों को हल कीजिए –

(A) $37 \times 3 =$ ---------------
$37 \times 6 =$ ---------------
$37 \times 9 =$ ---------------
$37 \times 12 =$ ---------------

(B) $12345679 \times 9 =$ ---------------
$12345679 \times 18 =$ ---------------
$12345679 \times 27 =$ ---------------
$12345679 \times 36 =$ ---------------

----

3. दिये गये क्रम को पूर्ण कीजिए –
(a) 2, 5, 10, 17, __, __, 50, __, 82, __
(b) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, __, 21, __, 55, __,
(c) 125, 120, 114, 107, __, __, __, 69, __
(d) 20, 15, 11, __, __, 5
4. दिये गये संबंध पर ध्यान दीजिए –
$043 = 0^1 + 4^2 + 3^3 = 0 + 16 + 27 = 043$
$135 = 1^1 + 3^2 + 5^3 = 1 + 9 + 125 = 135$
$2427 = 2^1 + 4^2 + 2^3 + 7^4 = 2 + 16 + 8 + 2401 = 2427$
इसी प्रकार निम्न को हल कीजिए –
063, 175, 518, 1306
5. 1 से 9 तक के अंकों को क्रम से लेकर व चिन्हों का उपयोग करते हुए विभिन्न प्रकार से 100 प्राप्त होंगे? करके देखिए –
6. दिये गये वर्ग में A, B, C, ... J का मान, योग करते हुए ज्ञात कीजिए –

					योग
	57	49	30	A	B
	32	C	30	27	114
	28	D	26	29	E
	13	15	17	F	71
	37	35	G	H	120
योग	I	136	128	130	J

7. विजय ने एक संख्या में 5 का गुणा करके उसमें 5 घटा दिया तथा उसके बाद प्राप्त संख्या में 5 का भाग दे दिया। अब आप बताइये विजय को कौनसी संख्या प्राप्त हुई। क्या प्राप्त

संख्या ली गई संख्या से 1 कम हैं? ऐसा क्यों हुआ?

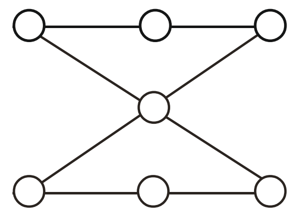
8. जरीना तीन अंकों की संख्या 258 को लेकर उसे छः अंकों की 258258 बनायी तथा इस संख्या को तीन अभाज्य संख्याओं 7, 11 और 13 से क्रमशः विभाजित किया। बताइये जरीना को भागफल कौनसी संख्या प्राप्त हुई। क्या यह उसके द्वारा ली गई प्रारम्भिक संख्या है? ऐसा क्यों हुआ?

9. सिमंस का मकान क्रमांक 57 है। उसके दोगुने में 5 जोड़ने के बाद उसे 50 से गुणा करके उसमें अपने दोस्त कैलाश का आयु जोड़ 15 वर्ष जोड़ दिया और फिर उसमें वर्ष के दिनों की संख्या (365) जोड़कर उसमें 615 घटा दिया? इन संक्रियाओं के बाद प्राप्त उत्तर क्या 5715 है? क्या उत्तर में सिमंस का मकान क्रमांक एवं कैलाश की उम्र है? ऐसा क्यों हुआ?

10. संख्या 2 को पाँच बार लेकर उसमें चिन्हों $+, -, \times$ व $\div$ में से एक से अधिक चिन्हों का (आवश्यकता होने पर एक से अधिक बार) उचित प्रयोग करके 3 एवं 7 संख्या प्राप्त कीजिए। इसी प्रकार अन्य अंकों को भी प्राप्त करने का प्रयास कीजिए।

11. यहाँ 7 अभाज्य संख्याएँ दी गई हैं, इन संख्याओं को दी गयी आकृति में इस प्रकार स्थान दीजिए कि इसकी भुजाओं का योगफल 41 आ जाए।

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23



विभाज्यता की जाँच

कोई एक संख्या किसी दूसरी संख्या को पूरी तरह विभाजित करती है या नहीं, इस प्रश्न का उत्तर पता लगाने के लिए हम भाग की क्रिया करते हैं। लेकिन क्या आप जानते हैं कि कुछ ऐसे सरल नियम भी हैं जिनकी मदद से हम बिना भाग की क्रिया किए पता लगा सकते हैं कि कोई संख्या किसी निश्चित संख्या से पूरी तरह विभाजित होगी या नहीं। आइए ऐसे कुछ नियम देखें। (इस पाठ में आगे 'पूरी तरह विभाजित' के स्थान पर हम 'विभाजित' ही लिखेंगे। विभाज्यता का अर्थ भी पूरी तरह विभाजित होने के संदर्भ में लें।)

1. 2 से विभाज्यता – यदि किसी संख्या की इकाई का अंक 2 से विभाजित होता है तो वह संख्या 2 से विभाजित होगी। ऊपर लिखी बात को दूसरे शब्दों में ऐसे भी कहा जा सकता है कि –

   ''यदि किसी संख्या की इकाई का अंक 2, 4, 6, 8 या 0 हो तो वह संख्या 2 से विभाजित होगी।

   अर्थात् 612, 298, 520 आदि संख्याएँ 2 से विभाजित होंगी जबकि 231, 369, 5127 आदि संख्याएँ 2 से विभाजित नहीं होंगी।

2. **3 से विभाज्यता** – यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाजित होता है तो वह संख्या 3 से विभाजित होगी। संख्या 5142 के अंकों का योग 5 + 1 + 4 + 2 = 12 है। यह योग 12, संख्या 3 से विभाजित होता है इसलिए संख्या 5142, संख्या 3 से विभाजित होगी।

3. **5 से विभाज्यता** – जिन संख्याओं की इकाई के स्थान पर अंक 0 या 5 हो वे 5 से विभाजित होती हैं।

   985, 270, 665 सभी 5 से विभाज्य हैं और 827, 453, 509 की इकाई के स्थान पर 0 या 5 नहीं हैं, ये संख्याएँ 5 से विभाजित नहीं होंगी।

4. **7 से विभाज्यता** – किसी संख्या की इकाई के अंक को दोगुना कर शेष अंकों से बनी संख्या से घटाइए तथा अब प्राप्त संख्या पर फिर से यही प्रक्रिया तब तक दोहराइए जब तक एक या दो अंकों की संख्या प्राप्त न हो। इस प्रकार प्राप्त संख्या 7 से विभाजित हो तो वह संख्या भी 7 से विभाजित होगी।

   उदाहरण के लिए 2457 की इकाई का अंक 7 है। 7 का दोगुना = 14

   245 – 14 = 231

   231 की इकाई का अंक 1 है। 1 का दोगुना = 2

   23 – 2 = 21

   21 संख्या 7 से विभाज्य है इसलिए 2457 भी 7 से विभाजित होगी।

5. **11 से विभाज्यता** – इकाई से शुरू कर संख्या के विषम स्थानों के अंकों का योग निकालिए। इसी प्रकार संख्या के सम स्थानों के अंकों का योग निकालिए। यदि इन दोनों योगों का अंतर 0 अथवा 11 गुणज हो तो वह संख्या 11 से विभाजित होगी।

   जैसे – संख्या 934461 के विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग 1 + 4 + 3 = 8

   सम स्थानों पर स्थित अंकों का योग 6 + 4 + 9 = 19

   दोनों योगों का अंतर 19 – 8 = 11

   अतः संख्या 934461, संख्या 11 से विभाज्य है।

6. **4 से विभाज्यता** – यदि किसी संख्या के इकाई व दहाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित होती है तो वह संख्या भी 4 से विभाजित होगी। यदि इकाई, दहाई पर 0 हो तो भी वह संख्या 4 से विभाजित होगी।

जैसे – 3436, 5812, 7096 आदि 4 से विभाज्य है और 3858, 7627 आदि 4 से विभाज्य नहीं हैं।

7. **6 से विभाज्यता** – यदि कोई संख्या 2 से तथा 3 से अलग–अलग विभाजित होती हो तो वह संख्या 6 से भी विभाजित होगी।

जैसे – 456, 2 से विभाज्य है। (इकाई का अंक 6 है।)

456, 3 से विभाज्य है। (अंकों का योग 15 है।)

अतः 456, 6 से भी विभाज्य है।

8. **8 से विभाज्यता** – यदि किसी संख्या के इकाई, दहाई और सैकड़ा के अंकों वाली संख्या 8 से विभाज्य हो तो वह संख्या भी 8 से विभाज्य होगी।

यदि संख्या के इकाई, दहाई और सैकड़ा तीनों स्थानों पर 0 हो तब भी वह संख्या 8 से विभाज्य होगी।

जैसे – 93816 के इकाई, दहाई व सैकड़ा के अंकों से बनी संख्या 816, 8 से विभाजित होती है, इसलिए 93816 भी 8 से विभाज्य है। इसी प्रकार 56713, 8 से विभाज्य नहीं है।

9. **9 से विभाज्यता** – किसी संख्या के 9 से विभाजित होने का नियम 3 से विभाज्यता के नियम जैसा ही है।

यदि संख्या के अंकों का योग 9 से विभाजित होता हो तो वह संख्या 9 से विभाजित होगी।

जैसे – 23436 के अंकों का योग

$2 + 3 + 4 + 3 + 6 = 18$

संख्या 18, 9 से विभाजित होती है, इसलिए 23436 भी 9 से विभाज्य है।

10. **10 से विभाज्यता** – किसी संख्या की इकाई के स्थान पर 0 हो तो वह संख्या 10 से विभाजित होगी।

उदाहरण के लिए 93410 की इकाई के स्थान पर 0 है इसलिए 93410, 10 से विभाज्य है। वहीं 30857 की इकाई के स्थान पर 0 नहीं है, इसलिए 30857, 10 से विभाज्य नहीं है।

प्रश्नावली – 17.4

1. जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित संख्याएँ 2 से विभाजित होती हैं –

   (i) 252 (ii) 457 (iii) 436 (iv) 3509 (v) 94241

2. 3 से विभाज्यता की जाँच कीजिए –

   (i) 324 (ii) 2500 (iii) 20325 (iv) 83812 (v) 24033

3. कौन–कौन सी संख्याएँ 5 से विभाजित होती हैं –

   (i) 932 (ii) 815 (iii) 6570 (iv) 45864 (v) 77129

4. दी गई कौन–कौन सी संख्याएँ 7 से विभाजित होती हैं –

   (i) 560 (ii) 791 (iii) 5623 (iv) 7007

हमने सीखा

1. दो पूर्ण संख्याओं का योगफल एक पूर्ण संख्या होती है।
2. दो पूर्ण संख्याओं का योग एवं उनका क्रम बदल कर योग करने पर योगफल समान होगा।
3. किसी पूर्ण संख्या में शून्य जोड़ने या शून्य में कोई पूर्ण संख्या जोड़ने पर मान पूर्ण संख्या ही रहेगा।
4. यदि a, b और c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं तो $(a+b) + c = a + (b+c)$
5. दो पूर्ण संख्याओं a और b हो तो $a>b$ तथा $a=b$ स्थिति में घटाने पर एक पूर्ण संख्या होगी।
6. यदि a कोई पूर्ण संख्या हो तो $a - 0 = a$
7. यदि a कोई पूर्ण संख्या हो तो $a - a = 0$
8. दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी एक पूर्ण संख्या होगा–

   $a \times b = c$

   यदि a व b दो पूर्ण संख्या है तो उनका गुणनफल c भी एक पूर्ण संख्या होगा।
9. दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल एवं उनका क्रम बदलकर गुणा करने पर गुणनफल समान रहेगा।

   $a \times b = b \times a$
10. तीन पूर्ण संख्याओं का विभिन्न स्थितियों में गुणनफल समान होता है। $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
11. यदि a कोई पूर्ण संख्या हो एवं उसे शून्य से गुणा करें तो गुणनफल शून्य होगा $a \times 0 = 0$
12. यदि a कोई पूर्ण संख्या हो एवं उसे 1 से गुणा करें तो गुणनफल $a \times 1 = a$ होगा।

AD7F22

अध्याय–18
परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएं
(OPERATIONS ON RATIONAL NUMBERS)

आप जान चुके है कि ऐसी सभी संख्याएँ जो $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखी जा सकती है, परिमेय संख्याएं कहलाती हैं जिसमें p और q पूर्णांक है एवं $q \neq 0$ है। छठवीं कक्षा में भिन्न पढ़ते समय आपने धनात्मक भिन्न संख्याओं को जोड़ना, घटाना, गुणा करना एवं भाग करना सीखा है। आइए इन्हीं संक्रियाओं को और विस्तार से समझे।

परिमेय संख्याओं का योग (ADDITION OF RATIONAL NUMBERS)

एक तरबूज बेचने वाले ने एक तरबूज के 10 समान भाग किए। सुजीत ने उसमें से 2 भाग लिए, उमा ने 3 भाग लिए तथा आकांक्षा ने 3 भाग लिए तो तरबूज वाले के कुल कितने भाग बिक गए।

चित्र – 18.1

यहाँ कुल 10 भागों में से सुजीत ने लिए 2 भाग $= \frac{2}{10}$

कुल 10 भागों में से उमा ने लिए 3 भाग $= \frac{3}{10}$

आकांक्षा ने लिए 3 भाग $= \frac{3}{10}$

अतः सुजीत, उमा एवं आकांक्षा द्वारा लिए गए कुल भाग $= \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10}$

$= \frac{2+3+3}{10} = \frac{8}{10}$

X	X	X
X	X	X
X	X	X
0	0	0
0	0	

चित्र – 18.2

तरबूज बेचने वाले के कुल 10 भागों में से 8 भाग या $\frac{8}{10}$ भाग तरबूज बिक गया।

आइए, दो परिमेय व्यंजकों के योग को एक चित्र की सहायता से समझे।

उदाहरण 1. $\frac{3}{5}$ में $\frac{1}{3}$ जोड़िए।

एक आयत लेकर उसके $\frac{3}{5}$ भाग दर्शाने के लिए चार

आड़ी रेखाएँ खींचकर आयत को पाँच समान भागों में विभाजित किया और इन समान पाँच भागों में तीन भागों को X के चिन्ह से चिन्हित किया। पुनः $\frac{1}{3}$ के लिए आयत में दो खड़ी रेखाएँ खींचकर आयत को तीन समान भागों में बाँटा। इन तीन समान भागों में से एक भाग को 0 के चिन्ह से चिन्हित किया। अब आयत कुल 15 भागों में बँट चुका है। इसमें X लगे भागों के साथ 0 लगे भागों को जोड़िए।

कुल X लगे भाग + कुल 0 लगे भाग = 9 + 5 = 14

15 भागों में 14 भाग = $\frac{14}{15}$

तथा $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}=\frac{9+5}{15}=\frac{14}{15}$

उसी प्रकार $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}$ के लिए X लगे भागों की संख्या में से 0 लगे भागों की संख्या घटाइए या 9–5= 4 भाग तथा कुल भागों की संख्या 15 हैं–

अतः $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{9-5}{15}=\frac{4}{15}$

इसी प्रकार चित्र बनाकर निम्नलिखित जोड़ एंव घटाना के प्रश्नों को हल कीजिए तथा सरलतम रूप में लिखिए–

(i) $\frac{3}{7}+\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{3}{7}-\frac{1}{4}$ (iv) $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$

(v) $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$ (vi) $\frac{1}{4}-\frac{2}{3}$

आइए, आपके द्वारा हल किए गए प्रश्नों के उत्तरों पर विचार करें

उत्तर (i) - इस प्रश्न को हल करते समय आपने आयत में छः आड़ी रेखाऐं खींचकर सात समान भागों में बांटा है तथा उन सात भागों में से तीन भागों को × के चिन्ह से चिन्हित किया है। पुनः आयत में तीन खड़ी रेखा खींचकर चार समान भागों में बांटा है तथा चार भागों में से 1 भाग को ✓ के चिन्ह से चिन्हित किया है। इस प्रकार आयत कुल 28 समान भागों में बंट गया और 28 भागों में × के चिन्ह लगे हुए 12 खाने हैं। तथा ✓ के निशान लगे 7 खाने हैं।

अतः $\frac{3}{7}$ एवं $\frac{1}{4}$ का योगफल के लिए 28 खानों में से 12 + 7 = 19 खाने होंगे या $\frac{3}{7}+\frac{1}{4}=\frac{12}{28}+\frac{7}{28}=\frac{19}{28}$ होगा।

उसी प्रकार $\frac{3}{7}-\frac{1}{4}$ के लिए $\frac{12}{28}-\frac{7}{28}$ भाग या $\frac{5}{28}$ भाग होगा।

उत्तर (v) इस प्रश्न को हल करने के लिए आपने आयत को आड़ी या खड़ी रेखा खींचकर 6 भागों में बांटा एवं 6 भागों में से 5 भागों को आपने × से चिन्हित किया अब पुनः आयत को पूर्वानुसार तीन समान भागों में बांटा और इन तीन भागों से 2 भाग को ✓ के चिन्ह से चिन्हित किया। अब आयत कुल 18 भागों में बंट गया। इसमें × लगाए हुए 15 खाने एवं ✓ लगे हुए 12 खाने हैं। इस प्रकार कुल × एवं ✓ लगे खानों की संख्या $= 15 + 12 = 27$ अतः $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{15}{28}+\frac{12}{28}=\frac{27}{28}$

इसका सरलतम रूप $\frac{3}{2}$ होगा।

इन प्रश्नों को हल करते हुए फातिमा ने राजू से कहा कि पिछले साल हम भिन्नों को जोड़ने या घटाने के लिए उन्हें समहर बनाते थे। योगफल का हर दोनों भिन्न संख्याओं के हरों के गुणनफल के बराबर होता था। इस विधि में भी योगफल का हर दोनों परिमेय संख्याओं के हरों के गुणनफल के समान होता है। राजू ने कहा कि पिछले पाठ में हमने पढ़ा है कि परिमेय संख्याओं को $\frac{p}{q}$ या $\frac{r}{s}$ के रूप में लिखा जा सकता है। जहाँ p, q, r एवं s पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ एवं $s \neq 0$

क्या इन संख्याओं को जोड़ने या घटाने के लिए समहर विधि का उपयोग किया जा सकता है? फातिमा ने कहा, 'चलो हल करके दखते हैं'

$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$ समहर बनाने के लिए $\frac{p}{q}$ के अंश एवं हर को s से गुणा करेगे तथा $\frac{r}{s}$ के अंश एवं हर को q से गुणा करेंगे।

$$\frac{p}{q}\times\frac{s}{s}+\frac{r}{s}\times\frac{q}{q}=\frac{ps}{qs}+\frac{rq}{sq}=\frac{ps+rq}{qs}$$

समतुल्य भिन्न बनाकर भी छोटे हर वाली भिन्नों को हम जोड़ सकते हैं। जैसे : $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$

$\frac{5}{6}$ की समतुल्य भिन्न $\Rightarrow \frac{5}{6},\frac{10}{12},\frac{15}{18},\frac{20}{24},\frac{25}{30}$ आदि

$\frac{3}{8}$ की समतुल्य भिन्न $\Rightarrow \frac{3}{8},\frac{6}{16},\frac{9}{24},\frac{12}{32}$ आदि

अतः दी गई भिन्नों की समान हर वाली समतुल्य भिन्न –

$\frac{5}{6}$ का $\frac{20}{24}$ एवं $\frac{3}{8}$ का $\frac{9}{24}$ अतः $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=\frac{20}{24}+\frac{9}{24}$

$=\frac{20+9}{24} \quad =\frac{29}{24}$

आप भी इसी प्रकार निम्न परिमेय संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

(1) $\frac{m}{n}+\frac{r}{\ell}$ (2) $\frac{a}{b}+\frac{q}{n}$ (3) $\frac{s}{t}+\frac{c}{d}$

समहर बनाकर $\frac{3}{5}+\frac{-4}{7}$ परिमेय संख्याओं को जोड़िए।

यहाँ हर 5 एवं 7 है, अतः समहर बनाने के लिए पहली परिमेय संख्या के अंश एवं हर में 7 का तथा दूसरी परिमेय संख्या के अंश एवं हर में 5 का गुणा करेंगे–

अतः $\frac{3}{5}=\frac{3\times7}{5\times7}=\frac{21}{35}$ एवं $\frac{-4}{7}=\frac{-4\times5}{7\times5}=\frac{-20}{35}$

$\therefore \quad \frac{3}{5}+\frac{-4}{7}=\frac{21}{35}+\frac{-20}{35}=\frac{21-20}{35}=\frac{1}{35}$

कभी–कभी समहर बनाकर प्रश्न को हल करते समय हर में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड आ जाते हैं।

क्या आप $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$ का मान प्राप्त कर सकते हैं?

राधा प्रश्न को हल करने लगी – $\frac{5}{6}\times\frac{8}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{6}{6}$

परन्तु राधा का यह तरीका फातिमा को पसन्द नहीं आया। उसने कहा चूंकि दोनों संख्याओं के हर में 2 एक गुणनखण्ड के रूप में है इसलिए समहर बनाने के लिए अंश और हर को 2 से गुणा करने की जरूरत नहीं है अर्थात् $\frac{5}{6}$ के अंश एवं हर को $\frac{4}{4}$ से गुणा कर तथा $\frac{3}{8}$ के अंश एवं हर को $\frac{3}{3}$ से गुणा करेंगे।

$\frac{5}{6}\times\frac{4}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{3}$

$\frac{20}{24}+\frac{9}{24}=\frac{20+9}{24}=\frac{29}{24}$

इस प्रकार से भी दो परिमेय संख्याओं के सम हर बनाये जा सकते हैं।

राधा ने कहा इसका मतलब $\frac{3}{2\times5}+\frac{5}{2\times7}$ को सम हर करने पर हर $2\times5\times7$ होगा और यही हरों का ल.स. भी है।

क्रियाकलाप 1.

हरों का ल.स. निकालकर परिमेय संख्याओं को जोड़ने एवं घटाने की प्रक्रिया को नीचे क्रियाकलाप में दिए गए निर्देश के अनुसार हल कीजिए:–

सारणी – 1

सं. क्र.	प्रथम परिमेय संख्या	द्वितीय परिमेय संख्या	हरों का ल. स.व.	$\dfrac{\dfrac{\text{प्रथम परिमेय संख्या का अंश} \times \text{ल.स.व.}}{\text{प्रथम परिमेय संख्या का हर}} + \dfrac{\text{द्वितीय परिमेय संख्या का अंश} \times \text{ल.स.व.}}{\text{द्वितीय परिमेय संख्या का हर}}}{\text{हरों का ल.स.व.}}$	परिणाम
1.	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{12}$	60	$\dfrac{4\times\frac{60}{15}+7\times\frac{60}{12}}{60}=\dfrac{4\times4+7\times5}{60}=\dfrac{16+35}{60}$	$\frac{51}{60}$ या $\frac{17}{20}$
2.	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	–	–	–
3.	$\frac{-7}{3}$	$\frac{11}{12}$	–	–	–
4.	$\frac{-15}{8}$	$\frac{13}{12}$	–	–	–
5.	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{21}$	–	–	–

योग संक्रिया के गुणधर्म

दो परिमेय संख्याओं को जोड़ने से प्राप्त योगफल कुछ निश्चित नियमों का पालन करते हैं।

आइए, इसे निम्न उदाहरणों से देखते हैं। उदाहरणों में रिक्त स्थानों को स्वयं भरकर जांच कीजिए–

क्रियाकलाप 2

1. संवरक गुण (Closure Property)

सारणी – 2

क्र.सं.	परिमेय संख्याएँ	योग	योग के चरण	योगफल	परिमेय संख्या है या नहीं
1	$\frac{5}{7}$ एवं $\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}+\frac{4}{7}$	$\frac{5+4}{7}$	$\frac{9}{7}$	हां
2	3 एवं $-\frac{6}{5}$	$\frac{3}{1}+\frac{-6}{5}$	$\frac{3\times5+(-6)\times1}{5}$	$\frac{9}{5}$	हां
3	$-\frac{5}{13}$ एवं $\frac{5}{13}$	–	–	–	–
4	$\frac{1}{8}$ एवं $\frac{7}{8}$	–	–	–	–

तालिका से स्पष्ट है कि **दो परिमेय संख्याओं का योगफल सदैव एक परिमेय संख्या होती है। इसे योग का संवरक नियम** कहते हैं। आप ऐसी ही कोई दो परिमेय संख्या लेकर उन्हें जोड़कर देखें कि योगफल परिमेय संख्या है या नहीं।

2. क्रम विनिमेय नियम (Commutative law)

माना दो परिमेय संख्याएँ $\frac{-5}{6}$ एवं $\frac{3}{4}$ हैं तब

$$-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{-5\times2+3\times3}{12}=\frac{-10+9}{12}=-\frac{1}{12}$$

तथा $\frac{3}{4}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{3}{4}+\frac{(-5)}{6}=\frac{3\times3+(-5)\times2}{12}=\frac{9+(-10)}{12}=\frac{-1}{12}$

अत: $\frac{-5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\left(\frac{-5}{6}\right)$

निम्न तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

सारणी – 3

क्र.	परिमेय संख्याएँ	परिमेय संख्याओं का योगफल	क्रम बदलने पर परिमेय संख्याओं का योगफल	क्या दोनों स्थितियों में मान समान आता है
1	$\frac{1}{8}$ एवं $\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1+7}{8}=\frac{8}{8}$	$\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7+1}{8}=\frac{8}{8}$	हां
2	$\frac{-3}{8}$ एवं $\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{8}+\frac{5}{16}=$------	$\frac{5}{16}+\left(\frac{-3}{8}\right)=$--------	-----
3	$-\frac{7}{15}$ एवं $-\frac{8}{25}$	$-\frac{7}{15}+\frac{-8}{25}=$------	$-\frac{8}{25}+\frac{-7}{15}=$--------	-----
4	$\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$	$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=$------	$\frac{r}{s}+\frac{p}{q}=$----------	-----

उपरोक्त तालिका में हम पाते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को जोड़ने से तथा उनके क्रम को बदल कर जोड़ने से दोनों ही स्थितियों में प्राप्त योगफल का मान बराबर रहता है।

क्रम बदल कर परिमेय संख्याओं को जोड़ने से भी उनका योगफल समान आता है इसे परिमेय संख्याओं के योग का क्रम विनिमेय नियम कहते हैं।

अत: $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दो परिमेय संख्याएँ हों तो $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{r}{s}+\frac{p}{q}$ होगा।

यदि $\frac{3}{4}+\frac{-5}{8}=x+\frac{3}{4}$ हो तो x का मान बताइए?

3. साहचर्य नियम (Associative Law)

माना तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{4}{5},\frac{2}{7}$ एवं $-\frac{3}{8}$ है। इनका योगफल दो प्रकार से किया जा सकता है।

प्रथम तरीका : $\frac{4}{5}+\left(\frac{2}{7}+\frac{-3}{8}\right)=\frac{4}{5}+\left(\frac{2\times8-3\times7}{56}\right)$

$$=\frac{4}{5}+\left(\frac{16-21}{56}\right)=\frac{4}{5}-\frac{5}{56}$$

$$= \frac{4\times56-5\times5}{280} = \frac{224-25}{280} = \frac{199}{280}$$

द्वितीय तरीका : $\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{7}\right)+\frac{-3}{8} = \left(\frac{4\times7+2\times5}{35}\right)+\left(\frac{-3}{8}\right) = \left(\frac{28+10}{35}\right)-\left(\frac{3}{8}\right)$

$$= \frac{38}{35}-\frac{3}{8}$$

$$= \frac{38\times8-3\times35}{280} \quad = \frac{304-105}{280}$$

$$= \frac{199}{280}$$

यहाँ $\frac{4}{5}+\left(\frac{2}{7}+\frac{-3}{8}\right) = \left(\frac{4}{5}+\frac{2}{7}\right)+\frac{-3}{8}$

इस प्रकार तीन परिमेय संख्याओं का योग करते समय पहले प्रथम दो संख्याओं के योग में तीसरी संख्या को जोड़ें तब वही मान प्राप्त होगा जो द्वितीय एवं तृतीय परिमेय संख्या के योग में प्रथम संख्या को जोड़ने पर प्राप्त होता है। इसे **परिमेय संख्याओं के योग का साहचर्य नियम** कहते हैं।

क्रियाकलाप 3

निम्न का मान ज्ञात कीजिए–

(1) $\frac{1}{11}+\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{12}\right)$ तथा $\left(\frac{1}{11}+\frac{5}{6}\right)+\frac{7}{12}$

(2) $\frac{3}{4}+\left(\frac{-5}{3}+\frac{4}{5}\right)$ तथा $\left(\frac{3}{4}+\frac{-5}{3}\right)+\frac{4}{5}$

(3) $\frac{-2}{3}+\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\right)$ तथा $\left(\frac{-2}{3}+\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{4}$

क्या दोनों स्थितियों में मान समान आते हैं?

उपरोक्त क्रियाकलाप में हम पाते हैं कि दोनों स्थितियों में योगफल समान आता है अतः हम कह सकते है कि परिमेय संख्या योग संक्रिया पर साहचर्य नियम का पालन करती है।

4. परिमेय संख्याओं के साथ शून्य का योग

आप जानते हैं कि पूर्णांक में शून्य को जोड़ने पर संख्या का मान नहीं बदलता। आइए परिमेय संख्याओं में शून्य जोड़कर देखें–

जैसे $\frac{3}{5}+0 = \frac{3}{5}+\frac{0}{5} = \frac{3+0}{5} = \frac{3}{5}$

इसी प्रकार $0+\frac{-4}{9}=\frac{-4}{9}$

क्या शून्य के अलावा कोई ऐसी परिमेय संख्या बता सकते हैं जिसको किसी परिमेय संख्या में जोड़ने पर उस संख्या का मान न बदले?

इस प्रकार आप जानते हैं कि शून्य के अलावा कोई भी परिमेय संख्या ऐसी नहीं है जिसे किसी अन्य परिमेय संख्या में जोड़ने पर मान नहीं बदलता। शून्य के इसी गुण के कारण ही इसे **योगात्मक तत्समक** कहते हैं।

यदि $\frac{p}{q}$ कोई परिमेय संख्या हो, तो $\frac{p}{q}+0=\frac{p}{q}$

5. योज्य प्रतिलोम (Additive Inverse)

$\frac{11}{15}$ और $\frac{-11}{15}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं–

इनका योगफल $\frac{11}{15}+\left(\frac{-11}{15}\right)=\frac{11-11}{15}=0$

नीचे दी गई दो समान परिमेय संख्यायें जिनमें से एक धनात्मक है तथा दूसरी ऋणात्मक है, उन परिमेय संख्याओं का योगफल बताइये।

(i) $\frac{-13}{36}+\frac{13}{36}=-----$

(ii) $\frac{+289}{295}+\frac{-289}{295}=-----$

प्रत्येक परिमेय संख्या के लिए एक परिमेय संख्या अवश्य होती है जिसे दी गई परिमेय संख्याओं में जोड़ने से योगफल शून्य (योगात्मक तत्समक) प्राप्त होता है। वह दी गई परिमेय संख्या का **योज्य प्रतिलोम** कहलाती हैं।

जैसे, $\frac{3}{5}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-3}{5}$ है।

$\frac{-17}{19}$ का योज्य प्रतिलोम $+\frac{17}{19}$ है।

इस प्रकार, किसी संख्या का योज्य प्रतिलोम निकालने के लिए दी गई संख्या मे कोई ऐसी

संख्या जोड़ी जावे जिससे योगफल शून्य या योगात्मक तत्समक प्राप्त हो। जैसे यदि $-\frac{5}{7}+x=0$ तो $x=\frac{5}{7}$, अतः $-\frac{5}{7}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{5}{7}$ है।

प्रश्नावली 18.1

1. निम्नांकित परिमेय संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{3}{2}, \frac{13}{17}$ (ii) $\frac{-7}{9}, \frac{-3}{4}$ (iii) $\frac{3}{4}, \frac{-2}{5}$

2. क्रम विनिमेय नियम से रिक्त स्थानों को भरिए :–

(i) $\frac{-5}{9}+\frac{4}{7}=\frac{4}{7}+\ldots\ldots\ldots$ (ii) $\frac{-11}{29}+\frac{6}{31}=\ldots\ldots+\ldots\ldots$

(iii) $\frac{-15}{7}+\ldots\ldots=\frac{13}{9}+\ldots\ldots$ (iv) $\frac{5}{6}+\left(-\frac{7}{9}\right)=-\frac{7}{9}+---$

3. दिखाइए कि $\left(\frac{-2}{5}+\frac{4}{9}\right)+\frac{-3}{4}=\frac{-2}{5}+\left(\frac{4}{9}+\frac{-3}{4}\right)$

इसमें किस नियम का प्रयोग किया गया है।

4. सरल कीजिए –

(i) $\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\frac{-6}{11}$ (ii) $\frac{-1}{6}+\frac{-2}{3}+\frac{-1}{3}$

(iii) $\frac{5}{14}+\frac{2}{-7}+\frac{-3}{2}$

5. $\frac{-7}{12}$ में क्या जोड़े कि योगफल 0 प्राप्त होता है?

6. रिक्त स्थानों को भरिए :–

(i) $\frac{-5}{7}$ का योज्य प्रतिलोम = –––––

(ii) $\frac{4}{17}+\frac{-4}{17}=\ldots\ldots$

(iii) $0+\frac{39}{51}=\ldots\ldots$

(iv) $\frac{42}{17}$ का योज्य प्रतिलोम = –––––

7. निम्नलिखित प्रत्येक सवाल किसी न किसी नियम से सम्बन्धित है उस नियम को दिए गए रिक्त स्थानों में लिखिए–

(i) $\frac{13}{15}+\frac{4}{8}=\frac{4}{8}+\frac{13}{15}$ (..........................)

(ii) $\frac{2}{19}+\left(\frac{-3}{17}+\frac{4}{13}\right)=\left(\frac{2}{19}+\frac{-3}{17}\right)+\frac{4}{13}$ (..........................)

(iii) $\frac{P}{q}+0=\frac{P}{q}$ (..........................)

(iv) $\frac{-r}{S}+\frac{r}{S}=0$ (..........................)

8. आप कुछ परिमेय संख्याएं सोचिए, उन संख्याओं पर योग हेतु क्रम विनिमेय नियम एवं साहचर्य नियम की पुष्टि कीजिए।

परिमेय संख्याओं को घटाना (Subtraction of Rational Numbers)

कक्षा छठवी में एक भिन्न संख्या से दूसरी भिन्न संख्या को घटाने के लिए आपने हरों को समान बनाकर हल प्राप्त किया था। वास्तव में घटाने की क्रिया जोड़ने की विपरीत क्रिया है। किसी संख्या में से दूसरी संख्या को घटाने का अर्थ है, पहली संख्या में दूसरी संख्या के योज्य प्रतिलोम को जोड़ना। आइए, इसे निम्न उदाहरणों द्वारा समझे –

उदाहरण 2. $\frac{3}{8}$ में से $\frac{1}{4}$ को घटाइए।

अतः $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3\times1-1\times2}{8}=\frac{3-2}{8}=\frac{1}{8}$ (4 व 8 का ल.स. 8 है)

दी गई संख्या में $\frac{1}{4}$ के योज्य प्रतिलोम $-\frac{1}{4}$ को जोड़ने पर हमे निम्नानुसार प्राप्त होता है।

अतः $\frac{3}{8}+\left(\frac{-1}{4}\right)=\frac{3}{8}+\frac{(-1)}{4}=\frac{3\times1+(-1)\times2}{8}$

$$=\frac{3-2}{8}=\frac{1}{8}$$

इस प्रकार, दोनों मान बराबर प्राप्त होते हैं।

अब आप $\frac{7}{19}$ में से $\frac{11}{13}$ को घटाइए तथा $\frac{7}{19}$ में से $\frac{11}{13}$ के योज्य प्रतिलोम को जोड़कर अपने उत्तर की जांच कीजिए।

संख्या रेखा द्वारा भी परिमेय संख्याओं को घटाया जा सकता है, आइए देखें–

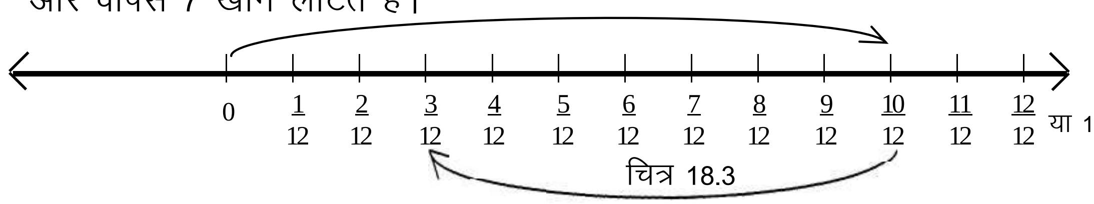
उदाहरण 3. $\frac{5}{6}$ में से $\frac{7}{12}$ को घटाइए।

हल : यहाँ पर दोनों परिमेय संख्याओं के हर समान नहीं है अतः हल करने से पूर्व उन्हें समान हर में बदलना होगा।

$\frac{5}{6} = \frac{5\times 2}{6\times 2} = \frac{10}{12}$ ($\therefore$ 6 व 12 का ल.स. = 12)

$\frac{7}{12} = \frac{7\times 1}{12\times 1} = \frac{7}{12}$

संख्या रेखा में एक इकाई के 12 भागों में बांटते हैं। पहले $\frac{10}{12}$ को दर्शाने के लिए शून्य के दायीं ओर 10 खाने चलते हैं। चूंकि $\frac{7}{12}$ को घटाना है, अतः 10 वें खाने में बायीं ओर वापस 7 खाने लौटते हैं।



चित्र 18.3

और $\frac{3}{12}$ पर पहुँचते हैं। इस प्रकार $\frac{5}{6}$ में से $\frac{7}{12}$ घटाने पर $\frac{3}{12}$ प्राप्त होगा।

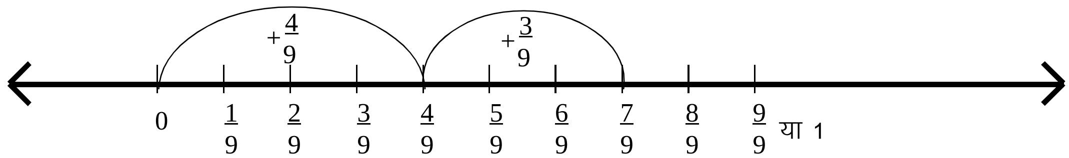
$$\frac{5}{6} - \frac{7}{12} = \frac{10}{12} - \frac{7}{12}$$
$$= \frac{10-7}{12}$$
$$= \frac{3}{12}$$
$$= \frac{1}{4}$$

उदाहरण 4. $\frac{4}{9}$ में से $\frac{-3}{9}$ को घटाइए।

हलः चूंकि किसी परिमेय संख्या को घटाने का तात्पर्य उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ना है, अतः $\frac{-3}{9}$ को घटाने का अर्थ है कि $\frac{-3}{9}$ के योज्य प्रतिलोम $\frac{3}{9}$ को जोड़ना।

$$\frac{4}{9} - \left(\frac{-3}{9}\right) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4+3}{9} = \frac{7}{9}$$

संख्या रेखा में 0 से 1 के बीच के भाग को 9 बराबर भागों में बांटते हैं। संख्या रेखा पर दर्शाने हेतु पहले शून्य के दायीं ओर 4 खाने चलते हैं तथा पुनः 3 खाने उसी दिशा में आगे



चित्र 18.4

चलते हैं। इस प्रकार 7 वें खाने में पहुँचते हैं जो के बराबर है।

अतः $\frac{4}{9}-\left(\frac{-3}{9}\right)=\frac{7}{9}$

उदाहरण 5. $\frac{5}{9}$ में क्या जोड़े कि योगफल $\frac{2}{3}$ हो।

हल : माना $\frac{5}{9}$ में $\frac{p}{q}$ जोड़ने पर योगफल $\frac{2}{3}$ प्राप्त होता है।

$$\frac{5}{9}+\frac{p}{q}=\frac{2}{3}$$

दोनों ओर $\frac{5}{9}$ का योज्य प्रतिलोम $-\frac{5}{9}$ जोड़ने पर

$$\frac{5}{9}+\frac{p}{q}+\left(\frac{-5}{9}\right)=\frac{2}{3}+\left(\frac{-5}{9}\right)$$

या $\frac{p}{q}=\frac{2}{3}+\left(\frac{-5}{9}\right)$

या $\frac{p}{q}=\frac{2\times3}{3\times3}+\left(\frac{-5\times1}{9\times1}\right)$ (3 एवं 9 का ल.स. 9 है।)

या $\frac{p}{q}=\frac{6}{9}+\left(\frac{-5}{9}\right)$

या $\frac{p}{q}=\frac{6-5}{9}$

या $\frac{p}{q}=\frac{1}{9}$

अतः $\frac{5}{9}$ में $\frac{1}{9}$ जोड़ने से $\frac{2}{3}$ प्राप्त होगा।

उदाहरण 6. $\frac{11}{13}$ में क्या घटाएं कि हमें $\frac{5}{26}$ प्राप्त हो।

हल : माना $\frac{11}{13}$ में से $\frac{p}{q}$ घटाने पर हमें $\frac{5}{26}$ प्राप्त होती है।

$$\frac{11}{13}-\frac{p}{q}=\frac{5}{26}$$

दोनों ओर $\frac{11}{13}$ का योज्य प्रतिलोम जोड़ने पर

या $$\frac{11}{13}-\frac{p}{q}+\left(-\frac{11}{13}\right)=\frac{5}{26}+\left(-\frac{11}{13}\right)$$

या $$-\frac{p}{q}=\frac{5}{26}+\left(\frac{-11}{13}\right)$$

या $$-\frac{p}{q}=\frac{5\times1}{26}+\left(\frac{-11\times2}{13\times2}\right)$$ (13 एवं 26 का ल.स. 26 है)

या $$-\frac{p}{q}=\frac{5}{26}+\left(\frac{-22}{26}\right)$$

या $$-\frac{p}{q}=\frac{5-22}{26}$$

या $$-\frac{p}{q}=\frac{-17}{26}$$

या $$\frac{p}{q}=\frac{17}{26}$$ (दोनों ओर –1 से गुणा करने पर)

या $\frac{11}{13}$ में से $\frac{17}{26}$ घटाने पर $\frac{5}{26}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 7. $\frac{1}{4}+\frac{-5}{9}-\left(\frac{-7}{12}\right)$ को सरल कीजिए।

हल : यहाँ पर हमें तीन परिमेय संख्याएँ दी गई है जिसमें जोड़ना एवं घटाना क्रिया एक साथ दी गई है। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए सभी परिमेय संख्याओं को समान हर वाली परिमेय संख्याओं में बदलते हैं।

$$\frac{1}{4}=\frac{1\times9}{4\times9}=\frac{9}{36}$$ (यहाँ 4, 9 एवं 12 का ल.स. 36 है।)

$$\frac{-5}{9}=\frac{-5\times4}{9\times4}=\frac{-20}{36}$$

$$\frac{-7}{12}=\frac{-7\times3}{12\times3}=\frac{-21}{36}$$

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{-5}{9}\right)-\left(\frac{-7}{12}\right)=\frac{9}{36}+\frac{-20}{36}-\left(\frac{-21}{36}\right)$$

$$=\frac{9-20+21}{36}$$

$$=\frac{30-20}{36}$$

$$=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

परिमेय संख्याओं में घटाना संक्रिया के गुण

1. **संवरक का नियम :** परिमेय संख्याओं के योग क्रिया के गुणों को हम जान चुके है। परिमेय ~~संख्याओं के लिए~~ घटाना संक्रिया में कुछ गुण लागू होते है। आइए, निम्न उदाहरण को देखें

$\frac{11}{21}$ में से $\frac{25}{36}$ को घटाइए।

यहाँ $\frac{11}{21}-\frac{25}{36}=\frac{11\times12-25\times7}{252}=\frac{132-175}{252}$ (यहां 21 एवं 36 का ल स व 252 है)

$=\frac{-43}{252}$ जो कि एक परिमेय संख्या है।

यहाँ $\frac{11}{21},\frac{25}{36}$ एवं $\frac{-43}{252}$ तीनों परिमेय सख्या है। अतः घटाना संक्रिया के लिए परिमेय संख्याएँ संवरक नियम का पालन करती हैं। आप कुछ परिमेय संख्याएँ लेकर इस नियम की जांच कीजिए।

2. **परिमेय संख्याओं में से शून्य को घटाना :** यदि किसी परिमेय संख्या में से शून्य को घटाएँ तो परिमेय संख्या का मान नहीं बदलता है।

जैसे $\frac{-21}{45}-0=\frac{-21}{45}$ और $\frac{5}{17}-0=\frac{5}{17}$

$$\frac{P}{Q}-0=\frac{P}{Q}$$

3. **क्रम विनिमेय नियम :**

अब आप निम्न का मान बताइए –

(i) $\frac{5}{12}-\frac{6}{13}$ तथा (ii) $\frac{6}{13}-\frac{5}{12}$

यहाँ $\frac{5}{12}-\frac{6}{13}$ $=\frac{5\times13}{12\times13}-\frac{6\times12}{13\times12}$

$=\frac{65}{156}-\frac{72}{156}$ (यहां 12 एवं 13 का ल.स. 156 है।)

$=\frac{65-72}{156}$

$=\frac{-7}{156}$

तथा $\frac{6}{13}-\frac{5}{12}$ $=\frac{6\times12}{13\times12}-\frac{5\times13}{12\times13}$

$=\frac{72}{156}-\frac{65}{156}$

$=\frac{72-65}{156}$

$=\frac{7}{156}$

क्या $\frac{-7}{156}, \frac{7}{156}$ के बराबर हैं, नहीं बराबर नहीं है।

अतः $\frac{5}{12}-\frac{6}{13}\neq\frac{6}{13}-\frac{5}{12}$

अतः घटाना संक्रिया में क्रम विनिमेय नियम लागू नहीं होता है।

प्रश्नावली 18.2

प्रश्न 1. दी गई पहली परिमेय संख्या में से दूसरी परिमेय संख्या को घटाइए।

(i) $\frac{3}{4}$ में से $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{4}$ में से $\frac{-1}{8}$

(iii) $\frac{-5}{12}$ में से $\frac{13}{24}$ (iv) $\frac{-8}{13}$ में से $\frac{-7}{13}$

प्रश्न 2 हल कीजिए

(i) $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}-\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{1}{5}-\frac{3}{7}+\frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{12}+\frac{3}{5}-6$

प्रश्न 3 $\frac{3}{8}$ में क्या जोड़े कि योगफल $\frac{11}{12}$ हो जाये।

प्रश्न 4 $\frac{13}{25}$ में क्या घटाए कि हमें $\frac{19}{25}$ प्राप्त हो जावे।

प्रश्न 5 सत्य/असत्य लिखिए तथा असत्य कथनों को सही करके लिखिए।

(i) $-\frac{3}{5}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{5}{3}$ है।

(ii) $\frac{4}{5}-\frac{7}{9}=\frac{7}{9}-\frac{4}{5}$

(iii) 0 को किसी संख्या में से घटाने पर मान अपरिवर्तित रहता है।

(iv) किसी परिमेय संख्या को घटाने का अर्थ है उस परिमेय संख्या के योज्य प्रतिलोम को जोड़ना।

परिमेय संख्याओं का गुणा (Multiplication of Rational Numbers)

दो भिन्न संख्याओं का गुणा करते समय आपने यह देखा कि अंश का अंश के साथ तथा हर का हर के साथ गुणा होता है। परिमेय संख्याएँ भी चूंकि अंश एवं हर से मिल कर बनी होती है इसलिए परिमेय संख्याओं का गुणा भी उसी प्रकार से होता हैं। आइए परिमेय संख्याओं का गुणा कुछ उदाहरणों के द्वारा समझें–

4R677H

उदाहरण 8. $\frac{3}{4}$ एवं $\frac{7}{16}$ का आपस में गुणा कर मान लिखिए।

हल : $\frac{3}{4}\times\frac{7}{16}=\frac{3\times7}{4\times16}=\frac{21}{64}$

उदाहरण 9. $\frac{-5}{7}$ एवं $\frac{13}{17}$ का आपस में गुणा कर मान लिखिए।

हल : $\frac{-5}{7}\times\frac{13}{17}=\frac{-5\times13}{7\times17}=\frac{-65}{119}$

उदाहरण 10. $\frac{-9}{11}$ एवं $\frac{22}{27}$ का आपस में गुणा कर मान लिखिए।

हल : $\frac{-9}{11}\times\frac{22}{27}=\frac{9\times22}{11\times27}$

$=\frac{-1\times2}{1\times3}=\frac{-2}{3}$

ऊपर के उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो परिमेय संख्याओं का आपस में गुणा करने के लिए उनके अंश को अंश से एवं हर को हर से गुणा करते हैं तथा प्राप्त गुणनफल सरलतम रूप में लिखते हैं।

यदि $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दो परिमेय संख्याएँ हो तो $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{p\times r}{q\times s}$

उदाहरण 11. निम्न परिमेय संख्याओं का परस्पर गुणा कीजिए $\frac{2}{3},\frac{-6}{7},\frac{8}{15}$

हल: $\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\times\frac{8}{15}=\frac{2\times-6\times8}{3\times7\times15}=\frac{-32}{105}$

दो से अधिक परिमेय संख्याओं के गुणनफल ज्ञात करने के लिए भी सभी परिमेय संख्याओं के अंशों का अंशों के साथ और हरों का हरों के साथ गुणा किया गया है।

यदि $\frac{p}{q},\frac{r}{s},\frac{u}{v}$ तथा $\frac{w}{z}$ आदि परिमेय संख्याओं का गुणा किया जाए तो $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}\times\frac{u}{v}\times\frac{w}{z}=\frac{p\times r\times u\times w}{q\times s\times v\times z}$

परिमेय संख्याओं में गुणा के कुछ गुण

क्रियाकलाप 4.

नीचे दी गई तालिका में दिए गए निर्देशों के अनुसार खाली स्थानों में भरिए–

सारणी 4

क्र.सं.	परिमेय संख्याएँ	परिमेय संख्याओं का गुणा	गुणनफल	क्रम बदल कर गुणा करने पर	गुणन फल	प्राप्त संख्या परिमेय संख्या है या नहीं है।
1.	$\frac{11}{15},\frac{1}{4}$	$\frac{11}{15}\times\frac{1}{4}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{1}{4}\times\frac{11}{15}$	$\frac{11}{60}$	हाँ
2.	$\frac{-5}{8},\frac{-7}{4}$	$\frac{-5}{8}\times\frac{-7}{4}$	....	....		
3.	$\frac{-19}{12},\frac{5}{13}$	$\frac{-19}{12}\times\frac{5}{13}$	....	....		
4.	$\frac{4}{9},\frac{-18}{5}$	....	....	....		
5.	$\frac{31}{-6},\frac{24}{7}$	....	....	....		

उपरोक्त क्रियाकलाप से आप पाते हैं कि परिमेय संख्याओं का आपस में गुणा करने **गुणा की संक्रिया के लिए परिमेय संख्या संवरक नियम का पालन करती है।**

तालिका से हम पाते है कि क्रम बदलने से गुणनफल अप्रभावित है। अतः परिमेय संख्याओं का गुण क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है।

अतः यदि दो परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ हो तो $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{r}{s}\times\frac{p}{q}$

आप कोई भी दो परिमेय संख्याएँ सोचिए और जाँच कीजिए कि वे गुणा के लिए क्रम विनिमेय नियम का पालन करते हैं अथवा नहीं।

वितरण नियम (Distributive Property)

पूर्णांक संख्याएँ वितरण नियम का पालन करती हैं। क्या परिमेय संख्याओं पर भी यह नियम लागू होता है? आइए कुछ उदाहरणों से देखे :–

उदाहरण 12. $\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{7}\right)$ सरल कीजिए।

हल: <u>**प्रथम तरीका**</u> : $\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{5}\left(\frac{3\times7+1\times4}{28}\right)$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{21+4}{28}\right)$$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{25}{28}\right) \quad =\frac{5}{14}$$

इसे निम्न तरीके से भी हल कर सकते हैं–

<u>**दूसरा तरीका**</u> : $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{2\times3}{5\times4}+\frac{2\times1}{5\times7}$

$$=\frac{6}{20}+\frac{2}{35}$$

$$=\frac{6\times7+2\times4}{140}=\frac{42+8}{140}=\frac{50}{140}=\frac{5}{14}$$

तरीका 1 एवं 2 के हल से स्पष्ट है कि $\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{7}$

ऐसी ही कोई तीन परिमेय संख्याएँ सोचें और जाँच करें कि क्या उन पर वितरण का नियम लागू होता है।

अतः यदि $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ एवं $\frac{u}{v}$ तीन परिमेय संख्याएँ हों, तो

$$\frac{p}{q}\left(\frac{r}{s}+\frac{u}{v}\right)=\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}+\frac{p}{q}\times\frac{u}{v}$$

यह परिमेय संख्याओं के लिए वितरण नियम है।

उदाहरण 13. यदि परिमेय संख्याएँ x, y एवं z हो तो सत्यापित कीजिए।

$$x \times (y+z) = x \times y + x \times z$$

जहाँ $x=\frac{-5}{8}, y=\frac{7}{9}, \neq=\frac{11}{12}$

बांया पक्ष $= x \times (y+z)$

$=\frac{-5}{8}\times\left(\frac{7}{9}+\frac{11}{12}\right)$ {x,y,z का मान रखने पर}

$=\frac{-5}{8}\times\left(\frac{7\times4+11\times3}{36}\right)$

$=\frac{-5}{8}\times\left(\frac{28+33}{36}\right)=\frac{-5}{8}\times\left(\frac{61}{36}\right)=\frac{-305}{288}$

दायां पक्ष $= x \times y + x \times z$

$=\frac{-5}{8}\times\frac{7}{9}+\left(\frac{-5}{8}\right)\times\frac{11}{12}$

$=\frac{-35}{72}+\frac{55}{96}$

दायां पक्ष $=\frac{-35\times4-55\times3}{288}=\frac{-140-165}{288}=\frac{-305}{288}$

स्पष्ट है कि –

बायां पक्ष = दायां पक्ष

परिमेय संख्या में शून्य का गुणा (Multiplication of Rational Numbers with zero)

शून्य एक परिमेय संख्या है। इसे आप कई प्रकार से लिख सकते हैं जैसे $\frac{0}{1}, \frac{0}{-27}, \frac{0}{q}$ जहाँ q कोई पूर्णांक है परन्तु $q \neq 0$, आइए, शून्य का किसी परिमेय संख्या के साथ गुणा करें–

$$\frac{-27}{84} \times 0 = \frac{-27}{84} \times \frac{0}{q} = \frac{0}{84q} = 0$$

इस प्रकार किसी परिमेय संख्या को शून्य के साथ गुणा करने पर गुणनफल शून्य प्राप्त होता है।

गुणन तत्समक (Multiplicative Identity)

क्या कोई ऐसी परिमेय संख्या आप सोच सकते है जिसे किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ में गुणा करने पर गुणनफल $\frac{p}{q}$ के बराबर होता है?

राधा ने फातिमा से कहा "यह तो हम जानते है कि किसी भी संख्या को 1 से गुणा किया जाए तो उस संख्या का मान नहीं बदलता और चूंकि संख्या 1 परिमेय संख्या भी है जिसे $\frac{1}{1}, \frac{-2}{-2}$, या $\frac{57}{57}$ .... इत्यादि के रूपों में भी लिखा जा सकता है। अतः 1 ही वह परिमेय संख्या होगी जिसका गुणा $\frac{p}{q}$ (जहाँ $q \neq 0$) के साथ करने पर गुणनफल भी $\frac{p}{q}$ होगी।

यहाँ 1 को गुणन तत्समक कहते है।

गुणन प्रतिलोम (Multiplicative Inverse)

$\frac{1}{3} \times \boxed{} = 1$, में खाली बाक्स में कौनसी परिमेय संख्या रखी जाये जिसका $\frac{1}{3}$ के साथ गुणा करने पर गुणनफल 1 प्राप्त हो। आपका उत्तर $\frac{3}{1}$ होगा।

क्रियाकलाप 5.

नीचे कुछ प्रश्न दिए गए हैं। उनमें खाली बाक्सों में उचित संख्या भरिए –

(i) $\frac{1}{7} \times \boxed{} = 1$ (ii) $\boxed{} \times \frac{1}{7} = 1$

(iii) $\frac{1}{13} \times \boxed{} = 1$ (iv) $\boxed{} \times \frac{1}{13} = 1$

(v) $\frac{7}{13} \times \boxed{} = 1$ (*vi*) $\frac{13}{7} \times \boxed{} = 1$

ऊपर आप देख रहे हैं कि दो ऐसे परिमेय संख्याओं का गुणा किया जा रहा है जिनके गुणनफल 1 (गुणन तत्समक) के बराबर है। आप भी कुछ ऐसे ही परिमेय संख्याओं का जोड़ा नीचे बॉक्सों में लिखिए जिसका गुणनफल 1 (गुणन तत्समक) के बराबर हो।

(1) $\boxed{\text{---------}} \times \boxed{\text{---------}} = 1$ (2) $\boxed{\text{---------}} \times \boxed{\text{---------}} = 1$

(3) $\boxed{\text{---------}} \times \boxed{\text{---------}} = 1$ (4) $\boxed{\text{---------}} \times \boxed{\text{---------}} = 1$

ऊपर खाली बाक्सों में परिमेय संख्याओं को लिखते हुए राजू सोच रहा था कि योगात्मक तत्समक प्राप्त करने के लिए हमें किसी संख्या में उसी संख्या के योगात्मक प्रतिलोम को जोड़ना पड़ता था तो क्या उसी प्रकार गुणन तत्समक किसी संख्या को उसी संख्या के गुणात्मक प्रतिलोम से गुणा करने से प्राप्त होता है? यदि ऐसा है तो ऊपर दी गई सभी गुणज संख्याएँ एक दूसरे की गुणन प्रतिलोम होगी।

"अतः जब दो संख्याओं का गुणनफल इकाई के बराबर हो तो दोनों संख्याएँ एक दूसरे की गुणन प्रतिलोम (Multiplicative Inverse) कहलाती हैं।"

आइए देखे कि गुणन प्रतिलोम कैसे निकालते हैं?

उदाहरण 14. $\frac{p}{q}$ का गुणन प्रतिलोम क्या होगा?

हल : माना कि $\frac{p}{q}$ का गुणन प्रतिलोम x है

$\frac{p}{q} \times x = 1$ या $px = q$

या $x = \frac{q}{p}$

इस प्रकार $\frac{p}{q}$ का गुणन प्रतिलोम $\frac{q}{p}$ हैं। अर्थात् **किसी संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम उस संख्या के अंश को हर और हर को अंश से बदलकर प्राप्त कर सकते हैं।** आइए उदाहरण देखे–

(1) $\frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1$ (2) $\frac{-27}{53} \times \frac{53}{-27} = 1$

(3) $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$ या $\frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = 1$

अतः $\frac{b}{a}$ को $\frac{a}{b}$ का **गुणन प्रतिलोम** या **व्युत्क्रम** कहते हैं तथा $\frac{a}{b}$ को $\frac{b}{a}$ का गुणन प्रतिलोम या व्युत्क्रम कहते हैं।

निम्नांकित का गुणात्मक प्रतिलोम या व्युत्क्रम लिखिए –

$\frac{-4}{9}, \frac{2}{-7}, \frac{8}{15}, \frac{c}{d}, 4, -5$

क्या प्रत्येक परिमेय संख्या का गुणन प्रतिलोम होता है?

शून्य (0) का गुणन प्रतिलोम क्या होगा? सोचिए।

शून्य (0) का गुणन प्रतिलोम नहीं हो सकता, क्योंकि किसी भी परिमेय संख्या का शून्य के साथ गुणा करने पर एक नहीं प्राप्त होता। अतः **शून्य का कोई गुणन प्रतिलोम** नहीं है।

प्रश्नावली 18.3

प्र.1 नीचे दिए मानों को लेकर $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \times \frac{p}{q}$ की सत्यता की जांच कीजिए।

(i) $\frac{p}{q} = \frac{-3}{7}, \frac{r}{s} = \frac{11}{15}$ (ii) $\frac{p}{q} = 2, \frac{r}{s} = \frac{13}{17}$

(iii) $\frac{p}{q} = \frac{-105}{13}, \frac{r}{s} = \frac{-5}{8}$ (iv) $\frac{p}{q} = \frac{-16}{3}, \frac{r}{s} = 0$

प्र.2 नीचे दिए गए मानों को लेकर $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ की सत्यता की जाँच कीजिए।

(i) $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{5}{7}, z = \frac{-7}{4}$ (ii) $x = \frac{3}{2}, y = \frac{-8}{5}, z = \frac{17}{6}$

(iii) $x = 1, y = \frac{9}{5}, z = 0$

प्र.3 क्रम विनिमेय नियम द्वारा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) $\frac{2}{3} \times 4 = 4 \times .....$ (ii) $\frac{11}{19} \times ..... = \frac{1}{2} \times .....$

(iii) $..... \times \frac{7}{9} = ... \times \frac{-3}{17}$

प्र.4 रिक्त स्थान की पूर्ति साहचर्य नियम से कीजिए–

(i) $\frac{1}{2} \times \left(\frac{17}{6} \times \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{17}{6}\right) \times ......$ (ii) $-\frac{1}{8} \times \left(\frac{-2}{5} \times \frac{1}{4}\right) = (..... \times .....) \times \frac{1}{4}$

(iii) $\frac{4}{7} \times \left(\frac{-25}{3} \times \frac{1}{5}\right) = (..... \times .....) \times .....$

प्र.5 नीचे कुछ प्रश्न दिए गए हैं जो किसी न किसी नियम से सम्बन्धित है। उन नियम को उनके आगे रिक्त स्थान में भरिए –

नियम

(i) $\frac{7}{12} \times \left(\frac{1}{9} + \frac{5}{3}\right) = \frac{7}{12} \times \frac{1}{9} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{3}$ ____________

(ii) $\frac{5}{7} \times \left(\frac{25}{3} + \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{7} \times \frac{25}{3} + \frac{5}{7} \times \frac{4}{3}$ ____________

(iii) $\frac{8}{11} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \frac{8}{11}$ ____________

(iv) $\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = 1$ ____________

(v) $\frac{-3}{12} \times 1 = 1 \times \left(\frac{-3}{12}\right) = \frac{-3}{12}$ ____________

प्र.6 निम्न के व्युत्क्रम लिखिए –

(i) 4 (ii) $\frac{-17}{5}$ (iii) $\frac{-6}{29}$ (iv) $\frac{p}{q}$

प्र.7 सत्य/असत्य लिखिए–

(i) किसी परिमेय संख्या एवं उसके व्युत्क्रम का गुणनफल एक होता हैं

(ii) यदि x का व्युत्क्रम y है तो y का व्युत्क्रम $1/x$ होगा।

(iii) एक घनात्मक परिमेय संख्या का गुणन प्रतिलोम ऋणात्मक परिमेय संख्या होती है।

(iv) शून्य किसी भी संख्या का गुणन प्रतिलोम नहीं है।

परिमेय संख्याओं का भाग (Division of Rational Numbers)

राधा और फातिमा गुणन प्रतिलोम निकालने का खेल खेल रहे थे। दोनों एक दूसरे को किसी संख्या का गुणन प्रतिलोम लिखने के लिए दे रहे थे। तभी राधा को इन गुणात्मक प्रतिलोम के प्रश्नों में कुछ नई बात नजर आई। उसने फातिमा से कहा ''देखो इन सभी उदाहरणों में एक नई बात नजर आ रही है कि किसी संख्या का उसके गुणन प्रतिलोम से गुणा वास्तव में उस संख्या का उसी संख्या में भाग देने के समान है।

जैसे, $4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 4 \div 4$

$2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 2 \div 2$

4RF395

फातिमा ने कहा इसका मतलब यह हुआ कि **किसी संख्या का भाग देना उस संख्या के गुणन प्रतिलोम से गुणा करने के समान हैं।** जैसे–

$3 \div 4 = 3 \times$ (4 का गुणन प्रतिलोम)

$= 3 \times \frac{1}{4}$

क्रियाकलाप 6.

गुणन प्रतिलोम से भाग की प्रक्रिया को गुणा की प्रक्रिया के रुप में लिखना।

(i) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{1}$

(ii) $\frac{4}{3} \div \frac{3}{4} =$

(iii) $\frac{7}{9} \div \frac{8}{7} =$

(iv) $\frac{a}{x} \div \frac{b}{y} =$

(v) $\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} =$

उपरोक्त के आधार पर आप कह सकते है कि यदि $\frac{x}{y}$ में $\frac{a}{b}$ से भाग देना है तो इसे $\frac{x}{y} \times (\frac{a}{b}$ का गुणन प्रतिलोम) के रूप में लिखकर हल किया जा सकता है।

$\frac{x}{y} \div \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \times$ ($\frac{a}{b}$ का गुणात्मक प्रतिलोम)

$= \frac{x}{y} \times \frac{b}{a}$

उदाहरण 15. निम्न को हल कीजिए।

(i) $2 \div \frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{-5}{4} \div \frac{15}{14}$ (iii) $\frac{23}{12} \div \frac{46}{36}$

हल (i) $2 \div \frac{-2}{3} = 2 \times \left(\frac{-2}{3} \text{ का गुणन प्रतिलोम}\right)$

$= 2 \times \frac{3}{-2} \quad = -3$

(ii) $\frac{-5}{4} \div \frac{15}{14}$

$= \frac{-5}{4} \times \frac{14}{15} \quad = \frac{-7}{6}$

(iii) $\frac{23}{12} \div \frac{46}{36} \quad = \frac{23}{12} \times \frac{36}{46} \quad = \frac{3}{2}$

उदाहरण 16. दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल–21 है यदि इनमें से एक संख्या $\frac{3}{10}$ हो तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना दूसरी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ है

प्रश्नानुसार, $\frac{3}{10} \times \frac{p}{q} = -21$

$\frac{3}{10}$ का गुणन प्रतिलोम अर्थात् $\frac{10}{3}$ से दोनों पक्षों को गुणा करने पर –

$$\frac{3}{10} \times \frac{p}{q} \times \frac{10}{3} = -21 \times \frac{10}{3}$$

या $\frac{p}{q} = \frac{-210}{3}$

या $\frac{p}{q} = -70$

अतः दूसरी संख्या –70 होगी।

प्रश्नावली 18.4

प्र.1 भाग दीजिए –

(i) $\frac{1}{6}$ को $\frac{3}{4}$ से (ii) $\frac{-8}{11}$ को $\frac{5}{9}$ से (iii) –9 को $\frac{4}{7}$ से

(iv) $\frac{-102}{38}$ को $\frac{-17}{19}$ से (v) $\frac{6}{15}$ को $\frac{8}{-35}$ से (vi) $\frac{-60}{9}$ को –10 से

प्र.2 सरल कीजिए

(i) $\frac{4}{5} \div (-1)$ (ii) $\frac{95}{16} \div \frac{8}{19}$ (iii) $\left(\frac{-7}{8}\right) \div \left(\frac{-2}{15}\right)$

(iv) $\frac{21}{5} \div \frac{7}{-5}$ (v) $\frac{-6}{7} \div (-15)$ (vi) $-7 \div (-5)$

प्र.3 दो संख्याओं का गुणनफल 12 है। यदि इनमें से एक संख्या $\frac{3}{5}$ हो तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

प्र.4 $\frac{-9}{5}$ को किस परिमेय संख्या से गुणा करें कि गुणनफल –11 प्राप्त हो।

प्र.5 $\frac{-28}{39}$ को किस परिमेय संख्या से गुणा करें कि गुणनफल $\frac{3}{7}$ का गुणात्मक प्रतिलोम प्राप्त हो।

प्र.6 एक पाठशाला के कुल विद्यार्थियों में से $\frac{5}{9}$ बालक हैं। यदि वहां कुल विद्यार्थी 540 हों तो बालिकाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

कितनी सारी संख्याएँ ?

परिमेय संख्याओं के क्रम सम्बन्धी प्रश्नों को हल करते हुए फातिमा ने कार्तिक से कहा कि जिस तरह दो पूर्णांकों जैसे –15 और –8 के बीच हम –14, –13, –12, –11, –10, –9 लिख सकते हैं, उसी प्रकार क्या दो परिमेय संख्याओं के बीच भी परिमेय संख्याएँ लिखी जा सकती है।

कार्तिक ने कहा कि जरूर लिख सकते हैं। बहुत ज्यादा लिख सकते हैं।

फातिमा ने कहा– हाँ, $\frac{-15}{1}$ और $\frac{-8}{1}$ के बीच सारी पूर्णांक संख्याएँ तो है ही परन्तु $\frac{-15}{1}$ और $\frac{-14}{1}$ के ठीक बीच $\frac{-29}{2}$ भी है। कार्तिक ने कहा अभी तो और भी बहुत है। फातिमा बोली हाँ, गिननी मुश्किल होंगी, इतनी हैं।

क्या आप फातिमा और कार्तिक की बात से सहमत हैं? क्या फातिमा का कहना कि इतनी अधिक है कि गिनी नहीं जा सकती, सही है? राधा बोली ऐसा कैसे हो सकता है? $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच तो कोई भिन्न नहीं है?

क्या आप सोच सकते हैं कि $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच कौन–कौन सी भिन्न हैं?

कार्तिक ने कहा, आइए देखें –

$$\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{2}=\frac{4}{10}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{2}=\frac{6}{10}$$

दोनों के बीच $\frac{5}{10}$ है।

रमेश और मीना एक साथ बोले कि

$$\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{3}=\frac{6}{15}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{3}=\frac{9}{15}$$

अब तो $\frac{7}{15},\frac{8}{15}$ दोनों इनके बीच है। इस प्रकार सभी भिन्न संख्या परिमेय संख्या हैं अतः दो परिमेय संख्याओं के बीच में परिमेय संख्याएँ हो सकती हैं।

अब आप इन दोनों $\frac{2}{5},\frac{3}{5}$ के बीच कम से कम 20 परिमेय संख्याएँ ढूंढिए।

आखिर कितनी संख्याएँ हैं $\frac{5}{7}$ और $\frac{6}{7}$ के बीच

अनु ने एक विशेषता देखी कि दो परिमेय संख्याएँ जिनके हर समान हो तथा अंश क्रमागत पूर्णांक हो जैसे : $\frac{5}{7}$ और $\frac{6}{7}$ को $\frac{2}{2}$ से गुणा करने पर $\frac{10}{14}$ और $\frac{12}{14}$ के बीच $\frac{11}{14}$ मिली।

इन्हें $\frac{3}{3}$ से गुणा करने पर $\frac{15}{21}$ और $\frac{18}{21}$ के बीच $\frac{16}{21}, \frac{17}{21}$ दो संख्याएँ और मिली।

दोनों को $\frac{5}{5}$ से गुणा करने पर $\frac{25}{35}$ और $\frac{30}{35}$ के बीच 4 नई संख्याएँ और पता चलीं।

अनु बोली– अगर मैं $\frac{17}{17}$ से गुणा करूँगी तो दोनों के बीच 16 नई संख्याएँ पता चलेंगी।

क्या आप अनु की बात से सहमत हैं?

ऊपर दिए गए उदाहरणों को देखें तो $\frac{5}{7}$ और $\frac{6}{7}$ के बीच बहुत सी संख्याएँ हम ढूंढ पाए हैं। क्या आप सोच सकते हैं कि इन दोनों के बीच कितनी संख्याएँ हो सकती हैं?

क्रियाकलाप–7

1. $\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{3}$ के बीच 25 संख्याएँ बताइए।
2. क्या आप ऐसी दो अलग–अलग संख्याएँ ढूंढ सकते हैं जिनके बीच कोई संख्या न हो?

इन्हें भी देखें–

17. $\frac{-4}{3}$ व $\frac{3}{4}$ के बीच दस परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल दी गई परिमेय संख्याओं के हर समान नहीं है।

इनके हर बराबर करते हैं $\frac{-4}{3} = \frac{-4}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{-16}{12}$

और $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$

अब $\frac{-16}{12}$ एवं $\frac{9}{12}$ सम हर वाली परिमेय संख्याएँ हैं। इनके अंश –16 व 9 के बीच का अंतर 25 है अतः उनके मध्य 24 परिमेय संख्याएँ होंगी–

$$\frac{-15}{12}, \frac{-14}{12}, \frac{-13}{12} \ldots\ldots\ldots \frac{-2}{12}, \frac{-1}{12}, \frac{0}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{12} \ldots\ldots\ldots \frac{7}{12}, \frac{8}{12}$$

उपरोक्त में से कोई भी दस परिमेय संख्याएॅ लिख सकते हैं।

यदि आपको $-\frac{4}{3}$ व $\frac{4}{3}$ के बीच 25 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करनी हो तो आप क्या करेंगे ?

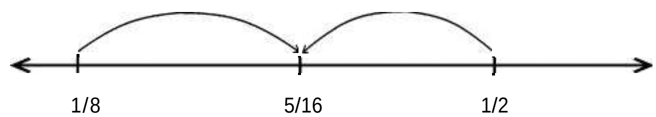
एक और तरीका –

उदाहरण 18. $\frac{1}{8}$ एवं $\frac{1}{2}$ के मध्य पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल दोनों में से $\frac{1}{2}$ बड़ी है और $\frac{1}{8}$ छोटी है। अब दोनों संख्याओं को जोड़कर 2 से भाग दें तो जो संख्या मिलेगी इन दोनों के बीच की होगी।

$\frac{1}{8}$ व $\frac{1}{2}$ के मध्य पहली परिमेय संख्या $= \dfrac{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1\times1}{8\times1}+\frac{1\times4}{2\times4}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+4}{8}\right) = \frac{5}{16}$



चित्र–18.5

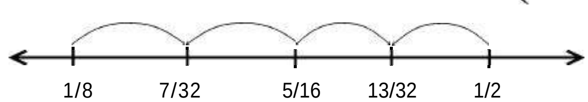
जैसे चित्र में दिखाया गया है, यह ठीक $\frac{1}{8}$ और $\frac{1}{2}$ के बीचों–बीच है।

अब शेष परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए क्रमशः $\frac{1}{8}$ व $\frac{5}{16}$ के तथा $\frac{5}{16}$ व $\frac{1}{2}$ के मध्य दो परिमेय संख्याओं को ज्ञात करते हैं।

$\frac{1}{8}$ व $\frac{5}{16}$ के मध्य परिमेय संख्या

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{16}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1\times2}{8\times2}+\frac{5\times1}{16\times1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2+5}{16}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{16}\right) = \frac{7}{32}$

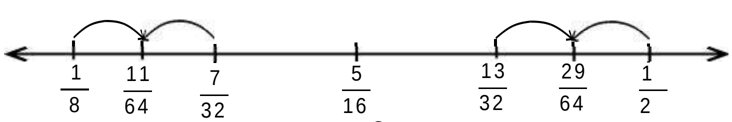
तथा $\frac{5}{16}$ व $\frac{1}{2}$ के मध्य परिमेय संख्या $= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\times1}{16}+\frac{1\times8}{2\times8}\right)$



$= \frac{1}{2}\left(\frac{5+8}{16}\right) = \frac{13}{32}$

चित्र–18.6

अब $\frac{1}{8}$ व $\frac{7}{32}$ के मध्य परिमेय संख्या $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{32}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1\times4}{8\times4}+\frac{7\times1}{32\times1}\right)$



$= \frac{1}{2}\left(\frac{4+7}{32}\right) = \frac{11}{64}$

चित्र–18.7

तथा $\frac{13}{32}$ व $\frac{1}{2}$ के मध्य परिमेय संख्या $= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{32}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{13\times1}{32\times1}+\frac{1\times16}{2\times16}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{32}+\frac{16}{32}\right) = \frac{29}{64}$

अतः $\frac{1}{8}$ व $\frac{1}{2}$ के मध्य पाँच परिमेय संख्याएँ निम्नलिखित हैः–

$$\frac{11}{64}, \frac{7}{32}, \frac{5}{16}, \frac{13}{32}, \frac{29}{64}$$

रजनी ने कहा– इसका तो यह अर्थ हुआ कि किन्हीं भी दो परिमेय संख्याओं के बीच कम से कम एक और परिमेय संख्या ढूंढ़ सकते हैं। राहुल ने कहा – यही नहीं, ऐसे ही करते जाएं तो जितनी चाहो उतनी संख्याएँ बीच में ढूंढ़ लो।

आप इसके बारे में क्या सोचते हैं ? आपस में चर्चा करके निष्कर्ष निकालिए।

उदाहरण 19. $\frac{-7}{3}$ एवं $\frac{5}{8}$ के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{-7}{3}$ व $\frac{5}{8}$ के मध्य परिमेय संख्या

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-7}{3}+\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-7\times 8}{3\times 8}+\frac{5\times 3}{8\times 3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-56+15}{24}\right)=\frac{-41}{48}$$

$\frac{-7}{3}$ व $\frac{-41}{48}$ के मध्य परिमेय संख्या

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-7}{3}+\frac{-41}{48}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-7\times 16}{3\times 16}+\frac{-41\times 1}{48\times 1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-112+(-41)}{48}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-153}{48}\right)=\frac{-153}{96}$$

तथा $\frac{-41}{48}$ व $\frac{5}{8}$ के मध्य परिमेय संख्या

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-41}{48}+\frac{5}{8}\right) \qquad =\frac{1}{2}\left(\frac{-41\times 1}{48\times 1}+\frac{5\times 6}{8\times 6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-41+30}{48}\right)$$

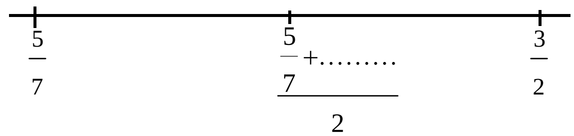
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{11}{48}\right)=\frac{-11}{96}$$

अतः $\frac{-7}{3}$ व $\frac{5}{8}$ के मध्य $\frac{-153}{96}, \frac{-41}{48}, \frac{-11}{96}$ तीन परिमेय संख्याएँ हैं।

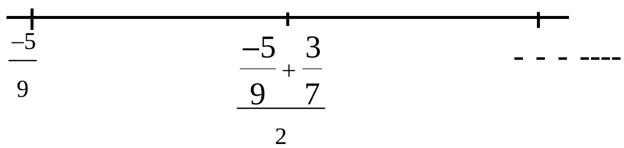
प्रश्नावली 18.5

1. नीचे दिए गए चित्र मे रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए ।

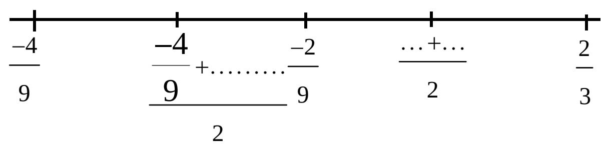
i)



ii)



iii)



2. किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ लिखी जा सकती है? समझा कर लिखिए।

3. संख्याओं $\frac{1}{3}$ एवं $\frac{1}{2}$ के बीच पांच और परिमेय संख्या लिखिए।

4. संख्याओं $\frac{1}{3}$ एवं $\frac{-2}{7}$ के मध्य चार परिमेय संख्याएँ लिखिए।

5. संख्याओं $\frac{-1}{6}$ एवं $\frac{3}{4}$ के मध्य छः परिमेय संख्याएँ लिखिए।

6. सत्य या असत्य लिखिए –

   i) संख्या $\frac{1}{10}$ संख्याओं $\frac{-1}{2}$ एवं $\frac{3}{5}$ के मध्य में स्थित है।

   ii) संख्याएँ $\frac{4}{5}$ एवं $\frac{6}{5}$ के मध्य कोई परिमेय संख्याएँ नहीं होगी।

   iii) संख्याएँ 3 एवं 7 के मध्य केवल तीन परिमेय संख्याएँ होंगी।

7. कुछ और सवाल बनाइए जिनमें परिमेय संख्याओं के बीच की संख्याएँ ढूंढ़नी हों। यह सवाल साथियों को करने दीजिए।

8. इस अध्याय में आपने परिमेय संख्याओं के बारे में क्या सीखा, अपने शब्दों में लिखें।

हमने सीखा

1. यदि x और y परिमेय संख्याएँ हैं तो (i) $x + y$ भी एक परिमेय संख्या होगी। (ii) $x \times y$ भी एक परिमेय संख्या होगी। (iii) $x - y$ भी एक परिमेय संख्या होगी। (iv) $x \div y$ भी एक परिमेय संख्या होगी। (यदि y शून्य के बराबर न हो।)
2. यदि x और y दो परिमेय संख्याएँ हों तो
   $x + y = y + x$
   $x \times y = y \times x$
   $x - y \neq y - x$ ($x = y$ को छोड़कर)
   $x \div y \neq y \div x$ ($x = y$ को छोड़कर तथा $x \neq 0, y \neq 0$)
3. यदि x, y और z तीन परिमेय संख्याएँ हों तो
   $(x + y) + z = x + (y + z)$
   $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
4. यदि x, y और z तीन परिमेय संख्याएँ हों तो
   $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
   $x \times (y - z) = x \times y - x \times z$
5. एक परिमेय संख्या x के लिए निम्न कथन सत्य हैं –
   (i) $x + 0 = 0 + x = x$ (ii) $x - 0 = x$
   (iii) $x \times 0 = 0 \times x = 0$ (iv) $x \times 1 = 1 \times x = x$
   (v) $x \div 1 = x$
6. यदि $x = \frac{p}{q}$ एक शून्येत्तर परिमेय संख्या है तो x का गुणन प्रतिलोम $\frac{1}{x} = \frac{q}{p}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।
7. दो परिमेय संख्याओं का योग करने के लिए उन्हें समान हर वाली संख्याओं में बदलकर जोड़ते हैं।
8. किसी परिमेय संख्या में दूसरी परिमेय संख्या का भाग वास्तव में पहली परिमेय संख्या से दूसरे परिमेय संख्या के गुणन प्रतिलोम के गुणनफल के बराबर होता है।

   $\frac{x}{y} \div \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \times (\frac{a}{b}$ का गुणात्मक प्रतिलोम) $= \frac{x}{y} \times \frac{b}{a}$

   या

   भाज्य ÷ भाजक = भाज्य × (भाजक का गुणात्मक प्रतिलोम)
9. दी गई दो परिमेय संख्याओं के बीच अनगिनत परिमेय संख्याएँ होती हैं।
10. दो समान हर वाली परिमेय संख्याओं के बीच में उनके अंशों के अंतर की संख्या से 1 कम परिमेय संख्या आसानी से प्राप्त की जा सकती है।

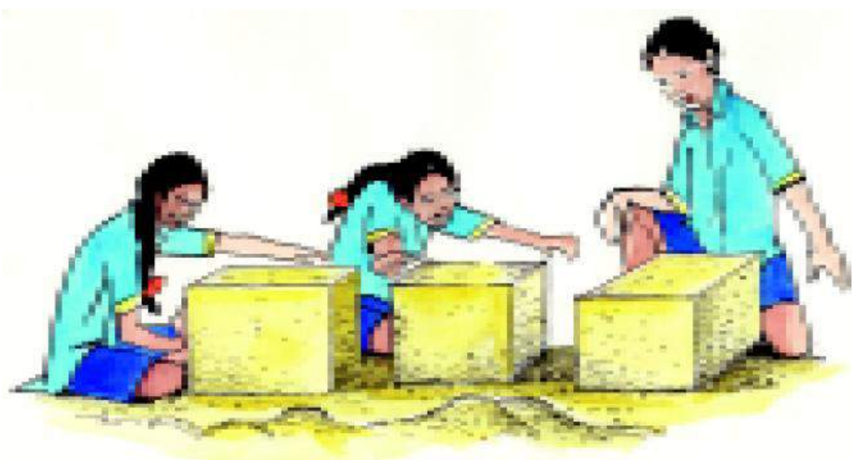
अध्याय–19
क्षेत्रमिति–2
MENSURATION

4RXUCF

भूमिका

शाला के सामने रेत पड़ी हुई थी। बच्चे उस पर खेल रहे थे। आशु भी अपने मित्रों के साथ रेत के पास पहुँची और उसने अपने मित्रों से कहा, ''चलो हम सब एक–एक घमेला रेत लेकर कुछ बनाते है।'' रहीम ने कहा, ''ठीक है, परन्तु ये घर वगैरह मुझे बनाना नहीं आता, चलो हम सभी रेत से एक–एक चौकोर चबूतरा बनाएँ।''

सभी ने एक–एक घमेला रेत लिया और चबूतरा बनाने लग गए। थोड़ी देर में ही सबके चबूतरे बन गए। परन्तु सभी के चबूतरे अलग–अलग माप के थे। अनु ने पूछा, ऐसा क्यों? हमने तो रेत समान माप की ली थी तो फिर चबूतरे अलग–अलग माप के क्यों बने? रहीम ने ध्यान से सभी चबूतरों को देखा और फिर बोला, एक बात तो मुझे समझ में आ रही है कि जो चबूतरे ज़मीन में ज्यादा जगह घेर रहे हैं उनकी ऊँचाई कम है तथा प्रत्येक चबूतरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का रेत के माप से कोई ना कोई सम्बन्ध है। तभी आशु ने कहा, ''हमने पिछली कक्षाओं में पढ़ा है कि आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई होती है अतः हमने जो रेत ली थी उस रेत का आयतन तो बराबर है परन्तु उस रेत द्वारा बनाए गए चबूतरों की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बदल रही है। चलो, हम अपने–अपने चबूतरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई मापकर देखें।''



चित्र 19.1

सभी ने अपने चबूतरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का माप लिया और लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई के सूत्र से आयतन निकाल कर देखा तथा पाया कि सभी चबूतरों का आयतन समान हैं।

इसके बाद तीनों ने अपने–अपने रेत को नया आकार दे दिया। क्या उनके द्वारा बनाए गए नए आकारों का आयतन भी वही है जो चबूतरों का था? यदि आयतन वही है तो क्यों? अपनी कॉपी में लिखिए।

क्या धारिता ही आयतन है?

ऊपर बच्चों ने घमेला में भरे हुए रेत का आयतन उसी रेत का चबूतरा बनाकर ज्ञात कर लिया। घमेला में जितनी रेत समा सकती है, वह घमेला की धारिता है। उसी प्रकार किसी बाल्टी में जितना पानी या किसी कमरे में जितनी हवा समा सकती है, वह क्रमशः उस बाल्टी और कमरे की धारिता है। इस प्रकार किसी खाली स्थान में जितने आयतन का पदार्थ समा सकता है वह उस खाली स्थान की धारिता कहलाती है। आप जिस गिलास से पानी पीते हैं तथा जिस बाल्टी में पानी भरकर नहाते हैं, क्या उसकी धारिता बता सकते हैं? नहीं बता सकते क्योंकि धारिता बताने के लिए आपको यह जानना होगा कि उस गिलास या बाल्टी में कितनी आयतन का पानी समा सकता है।

धारिता क्या है इसे तो आप समझ ही चुके हैं, परन्तु किसी वस्तु का आयतन क्या है, इसे अपने अनुभव के आधार पर आप कैसे समझाएंगे? सोचकर अपनी कॉपी में लिखिए तथा अपने साथियों के उत्तरों की जाँचकर यह पता लगाइए कि आपकी सोच और उनकी सोच में क्या समानता या अंतर है।

क्षेत्रफल के बारे में आपने कक्षा छठवीं में पढ़ा है कि यह किसी आकृति द्वारा किसी तल पर घेरी गई जगह की माप है। उसी प्रकार आयतन भी किसी वस्तु द्वारा घेरे गये स्थान की माप है। आइए सोचें कि किसी वस्तु का आयतन या इसके द्वारा घेरे गये स्थान की माप कैसे प्राप्त करते हैं।

घनाभ (Cuboid)

आयतन ज्ञात करने के लिए उस वस्तु के आकार को जानना जरूरी है। आइए सबसे पहले उस आकार की विशेषताओं को जानें जिसका आयतन ज्ञात करना है। अपने आसपास की कुछ वस्तुओं को देखें जैसे कॉपी, किताब, माचिस का डिब्बा, चॉक का डिब्बा, ईंट। इन सभी वस्तुओं के आकार में आप क्या विशेषता देखते हैं?

इन सभी आकारों में विशेषता यह है कि इनकी प्रत्येक सतह आयताकार है तथा प्रत्येक सतह और उसके ठीक सामने वाली सतह का क्षेत्रफल समान है। इस तरह के आकार वाली वस्तु को घनाभ कहते हैं।

चित्र–19.2

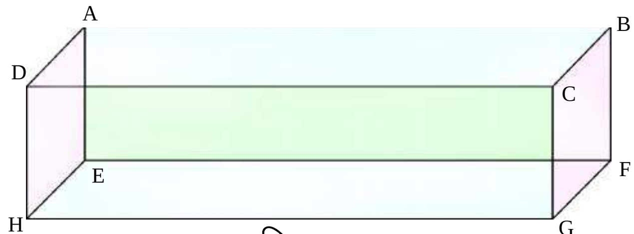
क्रियाकलाप–1

आप अपने आसपास पाए जाने वाली कोई पाँच घनाभ के आकार वाली वस्तुओं की सूची बनाइए व यह जांच कीजिये कि इन वस्तुओं के आमने–सामने की सतहों का क्षेत्रफल समान है अथवा नहीं तथा यह भी जाँच कीजिए कि किसी घनाभ की प्रत्येक संलग्न कोरें एक–दूसरे के साथ 90° का कोण बनाती हैं अथवा नहीं?

चूँकि घनाभ की प्रत्येक संलग्न कोरें 90° का कोण बनाती हैं, अतः इसकी प्रत्येक सतह आयताकार होगी इसलिए घनाभ को **आयताकार ठोस** भी कहते हैं।

अपनी किसी कॉपी या पुस्तक को लीजिए जो निम्न चित्रानुसार दिखती हैः–

चित्र –19.3



चित्र–19.4

आपके हाथ की वस्तु घनाभाकार है। इस वस्तु के कई बिन्दुओं पर तीन–तीन कोरें मिल रही हैं। उनकी संख्या लिखिए।

ऊपर चित्र में जैसा आप देख रहे हैं कि A, B, C, D, E, F, G, H घनाभ पर 8 बिन्दु हैं इन बिन्दुओं को घनाभ का शीर्ष कहते हैं। प्रत्येक बिन्दु पर तीन कोरें मिल रही हैं।

आपके पास उपलब्ध घनाभाकार वस्तु की कुल सतहों को गिनिए तथा लिखिए।

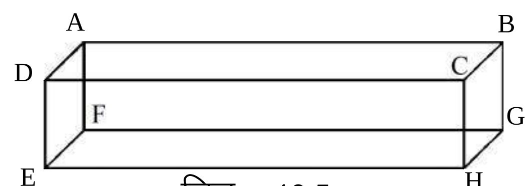
आपने अनुभव किया होगा कि घनाभ की कुल 6 सतहें हैं। जैसे ABCD तथा इसके सामने वाली सतह EFGH, इसी प्रकार सतह AEFB व उसके सामने की सतह DCGH तथा इसी प्रकार AEHD तथा इसके सामने की सतह BFGC । इस प्रकार किसी घनाभ की कुल छः सतहें होती हैं और इन सतहों को घनाभ की फलक कहते हैं।

इसी प्रकार AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, DH, AE, BF, CG कुल 12 कोर (किनारे) हैं।

क्रियाकलाप–2

आपकी गणित की किताब की सभी कोरों को मापिए उनके मापों को लिखिए और नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:–

1. क्या सभी कोरें अलग–अलग माप की हैं?
2. कितनी कोरें एक ही माप की हैं?
3. कितने तरह की माप की कोरें प्राप्त हुई हैं?



चित्र –19.5

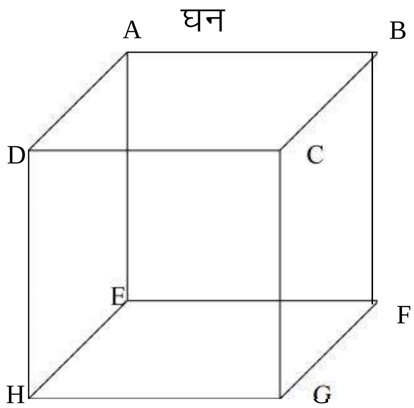
चित्र 19.5 में आप देख रहे हैं कि DC = AB = FG= EH तथा AD=FE=GH=BC उसी प्रकार AF = BG=ED=HC इत्यादि। प्रत्येक घनाभ की चार–चार कोरें आपस में समान होती हैं तथा इनमें से किसी एक कोर को लम्बाई, दूसरे को चौड़ाई तथा तीसरे को ऊँचाई मान सकते हैं।

घनाभ की लंबाई AB, चौड़ाई AD और ऊँचाई AF है। इनकी माप अलग–अलग है परन्तु घनाभ की लंबाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई बराबर हो तो वह ठोस कैसा होगा? क्या आपने कभी इस आकार का ठोस देखा है?

घन (Cube)

चित्र 19.6 को ध्यान से देखिए। इसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई को मापिए।

इनकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई में क्या समानता है? इस प्रकार की आकृति को क्या कहेंगे।



चित्र–19.6

"वह आयताकार ठोस जिसकी लंबाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई बराबर हो, घन कहलाती है।"

जिन घनाभों की लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई ज्ञात हो, उनका आयतन ज्ञात किया जा सकता है।

यदि घनाभ की लंबाई, चौड़ाई व ऊँचाई ज्ञात हो तो

घनाभ का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई

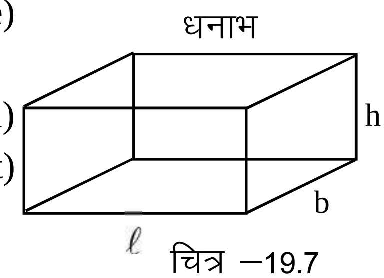
या $V = \ell \times b \times h$ [चित्र 20.7 में]

V – घनाभ का आयतन (Volume)

ℓ – घनाभ की लंबाई (Length)

b – घनाभ की चौड़ाई (Breadth)

h – घनाभ की ऊँचाई है (Height)



चित्र –19.7

हमने पिछली कक्षा में पढ़ा है कि

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई होता है और

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई होता है,

तो इसे हम ऐसे भी लिख सकते हैं–

घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

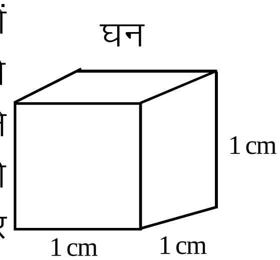
घन में लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई आपस में बराबर होती है, अतः $\ell = b = h$

घन का आयतन = भुजा × भुजा × भुजा = $(\text{भुजा})^3 = S^3$

$\boxed{V = S^3}$ (S = Side)

आयतन का मात्रक

जिस प्रकार लम्बाई का मानक मात्रक मीटर है, क्षेत्रफल का मानक मात्रक वर्ग मीटर या मीटर^2 है, उसी प्रकार आयतन के लिए भी एक मानक मात्रक की आवश्यकता होगी। क्योंकि यदि प्रत्येक व्यक्ति धारिता या आयतन को मापने के लिए अलग–अलग मात्रकों का प्रयोग करेंगे तो उसका मान भिन्न–भिन्न आयेगा। जैसे कोई टंकी छोटी बाल्टी से 50 बार में भर जाती है तो छोटी बाल्टी को मात्रक मानने पर टंकी का आयतन 50 मात्रक या 50 बाल्टी होगा। किंतु यदि वही टंकी बड़ी बाल्टी से 10 बार में भर जाती है तो बड़ी बाल्टी को मात्रक मानने पर टंकी का आयतन 10 मात्रक या 10 बाल्टी होगा।



चित्र 19.8

अतः आयतन के लिए ऐसे मानक मात्रक की आवश्यकता है जिसका मान सभी स्थानों पर एक समान हो।

आयतन का मात्रक 1 घन सेमी है, जो 1 सेमी लम्बे, 1 सेमी चौड़े और 1 सेमी ऊँचे घन के आयतन के बराबर होता है। उसे 1 सेमी^{3} भी लिखते हैं।

इसी प्रकार आयतन का मात्रक घनमीटर भी है जो 1 मीटर लम्बे, 1 मीटर चौड़े और 1 मीटर ऊँचे घन के आयतन के बराबर होता है। इसे 1मीटर^3 भी लिखते हैं। यही आयतन का मानक मात्रक है।

मीटर^3 एवं सेमी^{3} में सम्बंध

1 मीटर^3 = 1 मीटर x 1 मीटर x 1 मीटर

= 100 सेमी x 100 सेमी x 100 सेमी

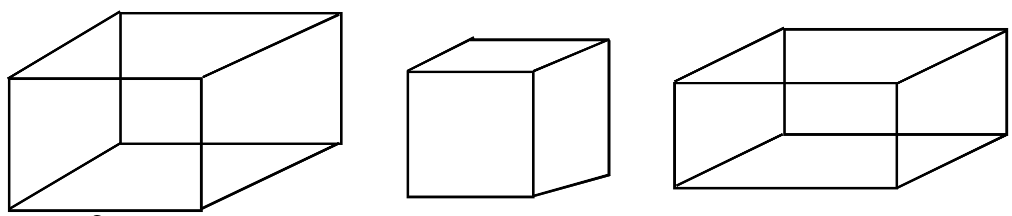
= 100 x 100 x 100 सेमी^{3}

= 1000000 सेमी^{3}

= 10^6 सेमी^{3}

क्रियाकलाप–3

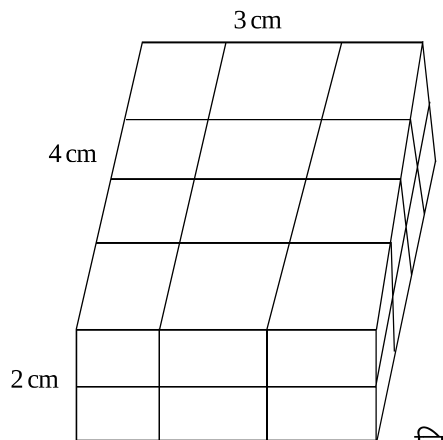
नीचे दिए गए धनाभ की कोरों को माप कर आयतन ज्ञात कीजिए।



चित्र–19.9

उदाहरण 1. एक घनाभ की लम्बाई 4 सेमी, चौड़ाई 3 सेमी एवं ऊँचाई 2 सेमी है तो घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया है– घनाभ की लम्बाई (ℓ)= 4 सेमी, चौड़ाई (b) = 3 सेमी, ऊँचाई (h) = 2 सेमी



यहां 1 सेमी^{3} आयतन वाले घनों की दो परतें हैं। प्रत्येक परत में 12 घन हैं। इस प्रकार कुल घनों की संख्या 24 है। इसलिए घनाभ का आयतन = 24 सेमी^{3} है।

चित्र–19.10

y घनाभ का आयतन $V = \ell \times b \times h$

$= 4 \times 3 \times 2$ सेमी^{3} = 24 सेमी^{3} या घन सेमी

उदाहरण 2. घन की एक भुजा 5 सेमी है। उस घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है – घन की एक भुजा की लंबाई (S) = 5 सेमी

y घन का आयतन $V = S^3$

$= (5)^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ सेमी^{3}

उदाहरण 3. किसी घन की एक भुजा 6 सेमी है। उसमें 2 सेमी लंबाई के कितने घन काटे जा सकते हैं?

हल दिया है घन की एक भुजा S= 6 सेमी

तो घन का आयतन = (भुजा)^3

= $(6)^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ सेमी^{3}

काटे जाने वाले घन की एक भुजा = 2 सेमी

∴ घन का आयतन = (भुजा)^3 = $(2)^3$ = $2 \times 2 \times 2$ = 8 सेमी^{3}

अतः काटे जाने वाले घनों की संख्या= $\dfrac{\text{बड़े घन का आयतन}}{\text{काटे जाने वाले घन का आयतन}}$

$= \dfrac{\overset{27}{\cancel{216}} \text{ सेमी}^3}{\underset{1}{\cancel{8}} \text{ सेमी}^3}$

= 27

अर्थात् वांछित घनों की संख्या 27 है।

उदाहरण 4. एक घनाभ आकार के लकड़ी के टुकड़े का आयतन 36 सेमी^{3} है। यदि उसकी लम्बाई 4 सेमी एवं चौड़ाई 3 सेमी हो, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, घनाभ आकार के टुकड़े का आयतन = 36 सेमी^{3}

लम्बाई = 4 सेमी

चौड़ाई = 3 सेमी

घनाभाकार टुकड़े का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

∴ ऊँचाई = $\dfrac{\text{घनाभाकार टुकड़े का आयतन}}{\text{लम्बाई × चौड़ाई}}$

$= \dfrac{36}{4 \times 3}$ = 3 सेमी.

अतः उसकी ऊँचाई 3 सेमी है।

घनाभाकार वस्तुओं की लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई ज्ञात करने के लिए निम्नांकित सूत्र का प्रयोग करते हैं।

1. लम्बाई = $\dfrac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$	चूंकि $v = l \times b \times h$ $l = \dfrac{v}{b \times h}$
2. चौड़ाई = $\dfrac{\text{[illegible]}}{\text{लम्बाई X ऊँचाई}}$	$b = \dfrac{v}{l \times h}$
3. ऊँचाई = $\dfrac{\text{[illegible]}}{\text{चौडाई X लम्बाई}}$	$h = \dfrac{v}{l \times b}$

उदाहरण 5. एक घनाभ की लंबाई 1 मीटर, चौड़ाई 50 सेमी और ऊँचाई 20 सेमी है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल यहां लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई के अलग–अलग मात्रक हैं। प्रश्न हल करने के पूर्व इनके मात्रकों को समान करना आवश्यक है।

दिया है घनाभ की लंबाई = 1 मीटर = 100 सेमी

चौड़ाई = 50 सेमी

ऊँचाई = 20 सेमी

y घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

= 100 × 50 × 20 = 100000 सेमी^{3} = 10^5 सेमी^{3}

उदाहरण 6. यदि घन के प्रत्येक कोर को चौगुना कर दिया जाय तो घन का आयतन कितना गुना हो जायेगा?

हल माना कि पहले घन की कोर = S

तो पहले घन का आयतन = S^3

कोर चार गुनी करने पर, दूसरे घन की कोर = 4 × S = 4S

तो दूसरे घन का आयतन = (भुजा)^3

= $(4S)^3$

= $4S \times 4S \times 4S$

= $64\ S^3$

y $\dfrac{\text{दूसरे घन का आयतन}}{\text{पहले घन का आयतन}} = \dfrac{64S^3}{S^3}$

$= \dfrac{64}{1}$

$= 64$

अतः दूसरे घन का आयतन पहले घन से 64 गुना हो जायेगा।

प्रश्नावली 19.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :–

(i) किसी घनाभ में कुल ....फलक होती हैं।

(ii) घनाभ की लंबाई = $\dfrac{\text{घनाभ का आयतन}}{\text{चौड़ाई} \times \text{........}}$

(iii) 1 घन मीटर = ... घन सेमी

2. पानी की एक टंकी 3 मी. लम्बी, 2 मी. चौड़ी और 1 मीटर गहरी है। उसमें कितना लीटर पानी आयेगा? यदि 1 घन मीटर = 1000 लीटर।

3. चाय के एक डिब्बे की लम्बाई 10 सेमी, चौड़ाई 7 सेमी और ऊँचाई 4 सेमी हो तो डिब्बे का आयतन ज्ञात कीजिए।

4. चॉक की एक छोटी पेटी की लम्बाई 15 सेमी, चौड़ाई 10 सेमी और ऊँचाई 8 सेमी हो तो उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

4S7QE3

5. घनाभाकार आकृति के निम्नलिखित माप से आयतन ज्ञात कीजिए :–

क्र.सं.	लम्बाई	चौड़ाई	ऊँचाई
(i)	10 सेमी	5 सेमी	3 सेमी
(ii)	15 सेमी	6 सेमी	4 सेमी
(iii)	8 मी	4 मीटर	2 मीटर
(iv)	5 मीटर	3 मीटर	1.5 मीटर
(v)	40 मिमी	35 मिमी	25 मिमी
(vi)	50 मिमी	40 मिमी	20 मिमी
(vii)	60 मिमी	5 सेमी	4 सेमी
(viii)	12 सेमी	70 मिमी	20 मिमी
(ix)	1 मीटर	25 सेमी	150 मिमी
(x)	3 सेमी	15 मिमी	25 मिमी

6. एक घनाभाकार लकड़ी का आयतन 480 घन सेमी. है। यदि उसकी लम्बाई 10 सेमी चौड़ाई 6 सेमी हो तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

7. एक घनाकार टुकड़े की एक भुजा 25 सेमी है। उसमें 5 सेमी लम्बाई के कितने घनाकार टुकड़े काटे जा सकते हैं।

8. एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 5 मी., 4.5 मी. एवं 3 मीटर है। इसमें भरी हुई हवा का आयतन ज्ञात कीजिए।

9. डीजल की एक आयताकार टंकी 2 मी. लम्बी, 2 मीटर चौड़ी और 40 सेमी गहरी है। इसमें कितने लीटर डीजल आ सकता है

10. तैरने का एक तालाब 25 मी. लम्बा, 13 मी. चौड़ा है। इसमें 325 घन मीटर पानी छोड़ा गया। इसमें पानी कितना ऊँचा चढ़ जायेगा।

11. किसी आयताकार कमरे की लम्बाई 20 फीट चौड़ाई 18 फीट एवं ऊँचाई 12 फीट है तो उसमें भरी हवा का आयतन कितना होगा?

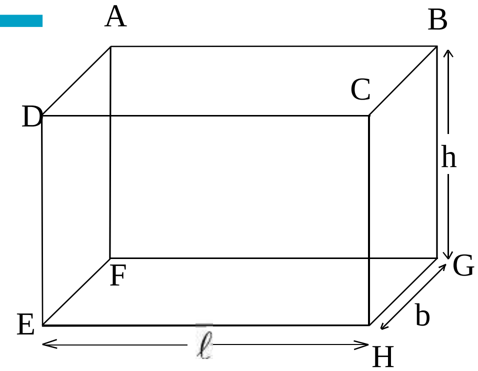
12. एक घनाकार पासे का किनारा 1.2 सेमी है तो उसका आयतन ज्ञात कीजिये।

13. एक बावड़ी 8 मी. लम्बी, 6 मी. चौड़ी और 9 मीटर गहरी है। उसमें 6 मीटर ऊँचाई तक पानी भरा है तो बावड़ी की धारिता और उसमें भरे पानी का आयतन ज्ञात कीजिये।

14. एक हौज 5 मीटर लम्बा, 4 मीटर चौड़ा और 3 मीटर गहरा है तो हौज की धारिता ज्ञात कीजिए। यदि उस हौज में पानी भरा हो तो पानी का आयतन कितना होगा।

15. एक ईंट की लम्बाई 20 सेमी, चौड़ाई 10 सेमी तथा ऊँचाई 6 सेमी है तो 60 मीटर लम्बा, 0.25 मीटर चौड़ी और 2 मीटर ऊँची दीवार बनाने में कितनी ईंटें लगेंगी।

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल



चित्र–19.11

पूर्व में हमने देखा है कि घनाभ में 6 आयताकार फलक होते हैं। इन छः फलकों में सम्मुख फलकों के तीन जोड़े बनते हैं। सम्मुख फलकों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं। पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इन्हीं गुणों का प्रयोग करते हैं।

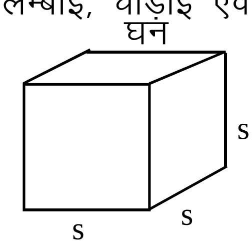
यदि घनाभ की लम्बाई ℓ, चौड़ाई b, और ऊँचाई h है, तो

1. ऊपर और नीचे के आधार के फलकों
   (ABCD एवं EFGH) का क्षेत्रफल= $\ell \times b + \ell \times b$
   $= \ell b + \ell b = 2\ell b$
2. दायीं ओर एवं बायीं ओर के फलकों $= b \times h + b \times h$
   (BCHG एवं AFED) का क्षेत्रफल $= bh + bh = 2bh$
3. सामने एवं पीछे वाले फलकों $= h \times \ell + h \times \ell$
   (CDEH व ABGF) का क्षेत्रफल $= h\ell + h\ell = 2h\ell$

अतः घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाभ की सभी 6 फलकों के क्षेत्रफलों का योग
$= 2\ell b + 2bh + 2h\ell$
$= 2(\ell b + bh + h\ell)$

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + h\ell)$ किन्तु हम जानते हैं कि घन एक विशेष प्रकार का घनाभ है जिसमें लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई बराबर होती है अर्थात् $\ell = b = h$



चित्र–19.12

अतः घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(S.S + S.S + S.S)$
$= 2.3S^2$
$= 6S^2$

उदाहरण 7. उस घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 9 सेमी., चौड़ाई 6 सेमी और ऊँचाई 2 सेमी है।

हल: दिया गया है कि घनाभ की लंबाई (ℓ) = 9 सेमी

चौड़ाई (b) = 6 सेमी

ऊँचाई (h) = 2 सेमी

∴ घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b+bh+h\ell)$

$= 2(9\times 6 + 6\times 2 + 2\times 9)$

$= 2(54+12+18) = 2(84) = 168$ सेमी^{2}

उदाहरण 8. एक घन की कोर की लम्बाई 5.5 सेमी है। घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया है कि घन की कोर (S) = 5.5 सेमी

∴ घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6.S^2 = 6(5.5)^2 = 6(5.5\times 5.5)$

$= 6(30.25) = 181.50$ सेमी^{2}

उदाहरण 9. एक चॉक के डिब्बे की लम्बाई 10 सेमी., चौड़ाई 7 सेमी एवं ऊँचाई 6 सेमी है। गत्ते की सीट की मोटाई पर ध्यान न देते हुये चॉक के डिब्बे बनाने में प्रयुक्त गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: चूंकि चॉक का डिब्बा घनाभाकार होता है इसलिए डिब्बा बनाने में प्रयुक्त गत्ते का क्षेत्रफल घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर होगा।

हल दिया गया है कि डिब्बे की घनाभ की लंबाई (ℓ) = 10 सेमी

चौड़ाई (b) = 7 सेमी

ऊँचाई (h) = 6 सेमी

∴ प्रयुक्त गत्ते का क्षेत्रफल = घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(\ell b+bh+h\ell)$

$= 2(10\times7+7\times6+6\times10)$

$= 2(70+42+60) = 2(172) = 344$ सेमी^{2}

प्रश्नावली 19.2

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :–
   (i) 3 सेमी. लम्बी भुजा वाले घन का सम्पूर्ण पृष्ठ = ... सेमी^{2}
   (ii) घनाभ के सम्मुख फलकों का क्षेत्रफल .... होते हैं।
   (iii) घनाभ जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान हो, वह .... कहलाता है।
2. उस घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी लंबाई, चौड़ाई व ऊँचाई क्रमशः 6.5 सेमी., 4.5 सेमी एवं 2 सेमी है।
3. एक घनाभ की लंबाई 15 फुट, चौड़ाई 12 फुट एवं ऊँचाई 9 फुट है। उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. उस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 0.5 मीटर, चौड़ाई 25 सेमी और ऊँचाई 15 सेमी है।
5. 3.4 सेमी लम्बी कोर वाले घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. उस घन के कोर की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिसका संपूर्ण पृष्ठ 216 सेमी^{2} है।

7. एक कमरे के दीवारों, फर्श एवं छत पर सीमेंट का पलस्तर कराया जाना है। यदि कमरे की लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमशः 4.5 मीटर, 3 मीटर एवं 3.5 मीटर हो तो पलस्तर किये जाने वाले स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. एक तेल का घनाभकार डिब्बा 30 सेमी, 40 सेमी, 50 सेमी माप का है। टिन की चादर का मूल्य यदि 10 रू. प्रति वर्ग मीटर है तो ऐसे 20 डिब्बों को बनाने में लगी टिन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

4SGLFQ

9. दो घनों की कोरें क्रमशः 8 सेमी व 4 सेमी हैं। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. आयताकार ठोस जिसमें लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई (तीन विमायें) होती हैं, घनाभ कहलाता है।
2. घनाभ में 6 आयताकार फलक, 12 कोरें और 8 शीर्ष होते हैं।
3. जिस घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर हो उसे घन कहते हैं।
4. घनाभ का आयतन ज्ञात करने के लिये उसकी लम्बाई ℓ, चौड़ाई b एवं ऊँचाई h का आपस में गुणा करते हैं, अर्थात $\boxed{V = \ell bh}$
5. घन का आयतन $\boxed{V = S^3}$ (जहां S घन का कोर या भुजा है)
6. आयतन का मात्रक घन इकाई है जो 1 इकाई लम्बे, 1 इकाई चौड़े और 1 इकाई ऊँचे घन के आयतन के बराबर होता है।
7. घनाभ के सभी आयताकार फलकों के क्षेत्रफल के योगफल का उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कहते हैं तथा घनाभ का $\boxed{\text{संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्र} = 2(\ell b + bh + h\ell)}$
8. $\boxed{\text{घन का सम्पूर्ण पृष्ठ} = 6S^2}$
9. 1 मीटर^3 = 10^6 सेमी^{3}

उत्तरमाला
ANSWER SHEET

उत्तरमाला 1.1

1. (i) पूर्ण वर्ग नही है (ii) पूर्ण वर्ग है (iii) पूर्ण वर्ग है (iv) पूर्ण वर्ग है (v) पूर्ण वर्ग नही है।
3. (i) सम (ii) विषम (iii) विषम (iv) विषम (v) सम (vi) सम (vii) सम (viii) सम (ix) विषम ।

उत्तरमाला 1.2

1. (i) पूर्ण घन है (ii) पूर्ण घन नहीं है (iii) पूर्ण घन है (iv) पूर्ण घन है (v) पूर्ण घन नहीं है (vi) पूर्ण घन नहीं है
2. 2 3. 13 4. 11 5. (ii) 10, (v) 484, (vi) 169

उत्तरमाला 1.3

1. (i) 19 (ii) 20 (iii) 28 (iv) 32 (v) 48 (vi) 84
2. 16

उत्तरमाला 1.4

1. (i) 23 (ii) 37 (iii) 32 (vi) 76 (v) 30 (vi) 89 (vii) 225 (viii) 603
2. 43 पंक्ति या स्तम्भ
3. 38 मीटर लम्बाई या चौड़ाई

उत्तरमाला 1.5

1. (i) 2.7 (ii) 4.1 (iii) 3.05
2. (i) 95 (ii) 2.24 (iii) 2.64

उत्तरमाला 1.6

(i) 5 (ii) 7 (iii) 11 (vi) 13 (v) 21 (vi) 55 (vii) 17 (viii) 35

उत्तरमाला 2.1

1. (a) -125 (b) -1024 (c) 64 (d) 729
2. (a) 5^6 (b) $-(15)^{26}$ (c) $-(12)^2$ (d) $-(p)^7$

उत्तरमाला 2.2

1. (a) $\frac{1}{343}$ (b) $\frac{16}{25}$ (c) -3125 (d) $\frac{16}{9}$
2. (a) $-\left(\frac{5}{7}\right)^2$ (b) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ (c) $\left(\frac{3}{2}\right)^6$
4. (a) सत्य (b) सत्य (c) असत्य (d) असत्य

उत्तरमाला 3.2

1. AF = 2 सेमी 2. 2.5 सेमी 3. 1.2 सेमी

उत्तरमाला 4.1

1. (i) $6x^2 + 25x + 14$ (ii) $6x^2 + 17x - 45$ (iii) $105x^2 - 104x + 12$

   (iv) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{72}{5}xy - 6y^2$ (v) $7x^2 + 34xy - 5y^2$

2. (i) $9x^2 + 10xy + 3y^2$ (ii) $3x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{8}$ (iii) $3x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 5y^3$

   (iv) $a^2 + 2ab + b^2$

उत्तरमाला 4.2

1. (i) $-3xy$ (ii) $3xy$ (iii) $+xy^2$ (iv) $-4a^3b$

   (v) $-4a^2b^2c^2$

2. (i) $x^2 - 3x + 2$ (ii) $-a^2b+2a+3$ (iii) $-3a^3+4a$ (iv) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

   (v) $a+b+c$

उत्तरमाला 4.3

1. (i) $8x^4-4x^3+15x^2-3x-15$ (ii) $12m^5-9m^3-6m^2+8m+16$

   (iii) $9m^4-m^3-16m^2-4m+16$ (iv) $12y^4-8y^3-6y^2+4$

2. (i) से (v) तक शेषफल शून्य प्राप्त होता है। अतः भाजक, भाज्य का एक गुणनखण्ड है।

3. (i) भागफल $= x^2 + 3x + 6$, शेष $= 10$

   (ii) भागफल $= x^2 - 2x + 6$ शेष $= -42$

   (iii) भागफल $= 2x^3 - 4x^2 + x + 5$, शेष $= -21$

   (iv) भागफल $= 2x^2 - 2x + 3$, शेष $= 12$

4. (i) भागफल $= m - 1$, शेष $= 5$

   (ii) भागफल $= a^2 - 4a + 9$, शेष $= -16$

   (iii) भागफल $= 3x^2 + 4x - 3$, शेष $= +6$

   (iv) भागफल $= 2x + 3$, शेष $= -x + 3$

उत्तरमाला 5.1

1. (i) दीर्घ चाप (ii) लघु चाप (iii) $\angle ADB, \angle ACB$ (iv) लघु चाप $\overset{\frown}{AB}$

   (v) चाप CDA (vi) लघु चाप $\overset{\frown}{CD}$ (vii) $\angle ADB, \angle ADC, \angle BDC$

उत्तरमाला 5.2

(i) $\angle A = 45^\circ$ (ii) $x = y = 33^\circ$ (iii) $p = 40^\circ$ (iv) $m = 72^\circ, n = 57^\circ$

(v) $u = 93^\circ, v = 87^\circ$

उत्तरमाला 5.3

1. न्यूनकोण
2. अधिककोण
3. 180°

उत्तरमाला 5.4

1. $\angle PRQ = 90^\circ, \angle QPR = 50^\circ$
2. $\angle PYQ = \angle PXQ = 80^\circ$
3. $\angle P = 90^\circ, \angle Q = \angle R = 45^\circ$
4. $\angle BDC = 50^\circ$
5. $\angle PTR = \angle PSR = 50^\circ$

उत्तरमाला 5.5

1. (a) $x = 130^\circ$ (b) $x = 124^\circ$ (c) $x = y = 37^\circ$
2. (i) $x = y = 52^\circ$ (ii) $x = 150^\circ, y = 75^\circ$
3. $\angle COD = 70^\circ$
4. PQ = 3.2 सेमी
5. (i) $x = 90^\circ, y = 115^\circ$ (ii) $x = 115^\circ, y = 65^\circ$

उत्तरमाला 5.6

1. BM = 3.5 सेमी, AB = 7 सेमी,
2. $x = 90^\circ, y = 50^\circ$ 3.PM = MQ = 4 सेमी,
4. (i) समद्विभाजित (ii) लम्ब

उत्तरमाला 6.1

1. 72	2. 60	3. 8	4. 30 कि.ग्रा.
5. 67	6. 5	7. 3	8. 5
9. $x = 8$			

उत्तरमाला 6.3

1. $\frac{1}{4}$	2. $\frac{1}{4}$	3. $\frac{1}{5}$	4. $\frac{1}{3}$
5. $\frac{1}{2}$	6. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$		

उत्तरमाला 7.1

1 (i) अनुक्रमानुपात विचरण है $\frac{1}{3}$ (ii) अनुक्रमानुपात विचरण है $\frac{1}{1}$

(iii) अनुक्रमानुपात विचरण नहीं है। (iv) अनुक्रमानुपात विचरण नहीं है।

2. 100, 3, 250, 6 (3) $\frac{1}{7}$ (4) 1000 किमी.

5.

x	4	24	28	36	44	52
y	10	60	70	90	110	130

6.

समय (मिनटों में)	3	4	7	25	155
तय की गई दूरी (किमी. में)	36	48	84	300	1860

7. (i), (ii), (iii), (iv), (v)

8. 60 टिकट 9. 180 किमी. 10. 216 रुपये 11. 50 मिनट 12. 5 घण्टे

13. 2000 रु. 14. 29 दिन 15. 252 मीटर 16. 7.30 रुपये

17. 1.925 सेमी. 18. $4\frac{4}{15}$ मिनट या 256 सेकेण्ड 19. 18 शब्द प्रति मिनट

20. 34 मजदूर 21. 15.75 क्विंटल

22. (i) (b) (ii) (a) (iii) (d) (iv) (c)

उत्तरमाला 7.2

1.

x	8	6	4	72	36
y	9	12	18	10	2

2.

चाल (किमी / घण्टा में)	4	8	16	32	64
चाल (मिनटों में)	80	40	20	10	5

3. 10 दिन 4. 81 दिन 5. 45 किमी / घण्टा 6. 10 घोड़े

7. 45 दिन 8. 175 सैनिक 9. 10 दिन 10. 15 दिन

11. (iii), (iv), (v) 12. 80 ग्राम 13. 800 लीटर

उत्तरमाला 8.1

1. (i) 1, 5, t, 5t, t^2, $5t^2$ (ii) 1, 7, x, y, $7x$, $7y$, $7xy$

(iii) 1, 2, 7, 14, ℓ, ℓ^2, m, 2ℓ, $2\ell^2$, 2m, 7ℓ, $7\ell^2$, 7m, 14ℓ, $14\ell^2$, 14m, ℓm, 2ℓm, 7ℓm, 14ℓm, ℓ^2m, $2\ell^2$m, $7\ell^2$m, $14\ell^2$m

(iv) 1, 3, 13, 39, ℓ, 3ℓ, 13ℓ, 39ℓ, m, 3m, 13m, 39m, n, 3n, 13n, 39n, ℓm, 3ℓm, 13ℓm, 39ℓm, ℓn, 3ℓn, 13ℓn, 39ℓn, mn, 3mn, 13mn, 39mn, ℓmn, 3ℓmn, 13ℓmn, 39ℓmn

2. (i) म.स. = S (ii) म.स. =3 (iii) म.स. = 2a (iv) म.स. = m

3. (i) $6m\ell$ (ii) 4bc (iii) xy (iv) $7x$

(v) $11pq^2r$ (vi) x (vii) 1

उत्तरमाला 8.2

1. (a) x^2 (b) $5a^2$ (c) 2c (d) $16x$, $9z$
   (e) $6b^2$, 4bc, 5a.
2. (a) $2a(2x + 3ay)$ (b) $a(a^4y + b^3)$ (c) $q^2(pr - 2t)$
   (d) $-5\ell m(m + 2\ell n)$ (e) $5(m + n)(m - n)$
3. (a) $2(x + 3y)(xy+2)$ (b) $(m - 2n)(5mn + 12)$
   (c) $(3x + 4)(2x^2 + 3y)$ (d) $(5x^2 + 4y)(3x^2 + 2y^2)$
   (e) $(x + 3)(x + 8)$ (f) $(x - 4)(3x - 5)$
   (g) $(\ell - m)(2m + 3)$
4. (a) $x - 3y^2x$ (b) $-51x^3 + 153x^2$
   (c) $6a^3 - 8a^4$ (d) $9m^2 - 9mn$
   (e) $9t^3 - 63t^5$

उत्तरमाला 9.1

(1) (i) $4a^2 + 12a + 9$ (ii) $\frac{4}{25}m^2 + \frac{3}{5}m + \frac{9}{16}$

(2) (i) $x^2 - 10x + 25$ (ii) $\frac{9}{4}x^2 - \frac{12}{5}xy + \frac{16}{25}y^2$

(iii) $4a^2$ J $2a + \frac{1}{4}$ (iv) x^4 J $2x^2y^2 + y^4$

(3) (i) $16x^2$ J 25 (ii) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$

(iii) b^4 J a^4 (iv) x^6 J y^6

(4) (i) $4a^2 + 20a + 25$ (ii) $\frac{4}{9}m^4 + \frac{10}{9}m^2n^2 + \frac{25}{36}n^4$

(iii) $64x^6$ J $80x^3y^3 + 25y^6$

(5) (i) 1681 (ii) 4761 (iii) 9801 (iv) 6561

(6) (i) 9975 (ii) 8096 (iii) 249991

(7) (i) 50 (ii) 31 (iii) -13 (iv) 13

(8) $9x^2$ J $30xy + 25y^2$

(9) $\frac{x^2}{9} + \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{16}$

उत्तरमाला—9.2

1. (a) $(2x + 5)(2x + 5)$ (b) $(5a + 7b)(5a + 7b)$
   (c) $(3x + 1)(3x + 1)$ (d) $(1 + 9a)(1 + 9a)$
   (e) $(p + \frac{1}{2})(p + \frac{1}{2})$ (f) $(6a + 11b)(6a + 11b)$
2. (a) $(a - 5b)(a - 5b)$ (b) $(4x - 13)(4x - 13)$
   (c) $(11x - 4y)(11x - 4y)$ (d) $(x - 15)(x - 15)$
   (e) $(6a - 1)(6a - 1)$
3. (a) $(5a + 7b)(5a - 7b)$ (b) $(3x + 11y)(3x - 11y)$
   (c) $(8a + 1)(8a - 1)$ (d) $(1 + 4b)(1 - 4b)$
   (e) $(\frac{4}{5}m + \frac{2}{3}n)(\frac{4}{5}m - \frac{2}{3}n)$
4. (a) $(x + 4y + 7)(x + 4y - 7)$ (b) $(10 + 2a + 3b)(10 - 2a - 3b)$
   (c) $(2x + 5y + 6)(2x + 5y - 6)$ (d) $(7x - 5y)(5y - x)$
   (e) $(xy + 4)(xy - 4)$
5. (a) $(x - 5y)$ (b) 3, x (c) 7, 7 (d) $(a + b - 2)$
6. $X^2 - 10x + 25$ वर्गमीटर 7. 5 मूर्तियाँ
8. (X-5) मीटर 9. 2 फीट, 3 फीट

उत्तरमाला—10

1. (अ) आयत (ब) आयत (स) 60^0 (द) 28 सेमी
2. (i) वर्ग (ii) समलम्ब (iii) 6 (iv) (n-2)
4. 1080^0
5. 120^0, 60^0, 60^0 6. 80^0, 80^0, 100^0, 100^0
7. 18 सेमी, 24 सेमी

उत्तरमाला—10.1

1. 50^o 2. 95^o 3. 72^o, 108^o, 72^o, 108^o
4. 60^o, 90^o, 120^o 5. 36^o, 72^o, 108^o, 144^o 6. 80^o, 100^o, 80^o, 100^o

उत्तरमाला 12.1

(1) $x = 3$ (2) $x = 1$ (3) $m = 2$ (4) $x = \frac{3}{2}$

(5) y = 4 (6) y = 2 (7) k = –2 (8) $x = 3$
(9) $x = -0.5$

उत्तरमाला 12.2

(1) 14, 28 (2) 10, 30 (3) 5 सेमी, 2 सेमी (4) 62

(5) 34 (6) $\frac{5}{7}$ (7) 14 वर्ष, 10 वर्ष (8) 36 वर्ष, 12 वर्ष

उत्तरमाला 13.1

1. (i) 410 रु. (ii) 1986 रु. (iii) 1040 रु.
2. (i) 8427 रु. (ii) 2916 रु. (iii) 6480 रु.
3. 5948.80 रु.
4. 9261 रु.

उत्तरमाला 13.2

1. 81 रु. 2. 27783 रु. 3. 12 रु. 4. 405 रु.

उत्तरमाला 13.3

1. (i) 7986 रु., 1986 रु. (ii) 1764 रु., 164 रु. (iii) 11241.25, 2741.25 रु.
   (iv) 23152.50 रु., 3152.50 रु.

2. 729 रु. 3. 5000 रु. 4. 15% 5. 10% 6. 46.08 रु.

उत्तरमाला 13.4

1. 1820 रु. 2. 1200 रु. 3. 1444 रु. 4. 340 रु.

5. 12000 रु. 6. 937.50 रु. 7. 5400 रु. 8. 13200 रु.

उत्तरमाला 14.1

1. (i) 150 वर्ग सेमी. (ii) 720 वर्ग सेमी. (iii) 1800 वर्ग सेमी.

2. 185.5 वर्ग सेमी., 3. 15 सेमी., 4. 20 मी.

उत्तरमाला 14.2

(1) 42 cm^2 (2) 18.75 cm^2 (3) 8 cm (4) 4500 dm^2

उत्तरमाला 14.3

(1) 120 वर्ग सेमी (2) 30 वर्ग सेमी (3) 168 वर्ग सेमी (4) 40.8 वर्ग सेमी

(5) 12 सेमी, 18 सेमी

उत्तरमाला 14.4

(1) 156 वर्ग सेमी (2) 149 वर्ग मी. (3) 530 वर्ग मी., 2782.50 रु.

उत्तरमाला 14.5

(1) 198 वर्ग सेमी (2) 188.57 वर्ग सेमी (3) 2794 वर्ग सेमी

उत्तरमाला 15.1

1. (i) वृत्ताकार (ii) $\pi r^2 h$ (iii) 1078 सेमी^{3}
2. 20790 घन सेमी.
3. (i) 6336 सेमी^{3} (ii) 123.20 सेमी^{3} (iii) 6600 मीटर^3
4. 4 : 1
5. 86.24 मीटर^3
6. 138.6 सेमी^{3}

उत्तरमाला 15.2

1. (i) वक्रपृष्ठ = 1056 सेमी^{2}, सम्पूर्ण पृष्ठ = 1364 सेमी^{2}
   (ii) वक्रपृष्ठ = 1320 मीटर^2, सम्पूर्ण पृष्ठ = 1948.57 मीटर^2
   (iii) वक्रपृष्ठ = 2310 सेमी^{2}, सम्पूर्ण पृष्ठ = 3003 सेमी^{2}
   (iv) वक्रपृष्ठ = 8800 सेमी^{2}, सम्पूर्ण पृष्ठ = 10032 सेमी^{2}
2. 5280 सेमी^{2}
3. 69.14 सेमी^{2}
4. 3850 घन मीटर, 3300 रुपये
5. 264 वर्ग मीटर
6. 50 सेमी

उत्तरमाला 16

(5) 6

उत्तरमाला 17.1

1. (ii) $\frac{12}{13}$, (iv) $\frac{6}{7}$

3. (i) 1, $1\frac{5}{9}$ (ii) 7, $7\frac{5}{12}$ (iii) 6, $6\frac{11}{18}$ (iv) 4, $4\frac{23}{61}$

4. (i) $\frac{2}{5}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{3}$ (ii) $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$

उत्तरमाला 17.2

2. (i) 8 (ii) –12 (iii) 20 (iv) –39 (v) 59

3. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) 0 (iii) $-\frac{5}{3}$ (iv) $\frac{-13}{-8}$

4. 2
5. 1
6. $\frac{5}{3}$

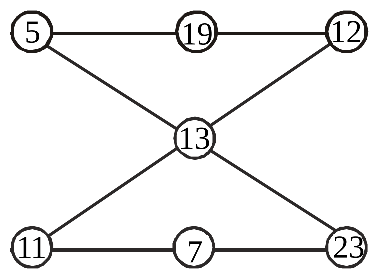
उत्तरमाला 17.3

1. 10, दो अंकीय संख्या 30, 50, 35, 53, तीन अंकीय संख्या 305, 350, 503, 530
2. (A) 111, 222, 333, ..., ... इत्यादि

   (B) 111111111, 222222222, ... इत्यादि
3. (a) 26, 37, 65, 101 (b) 13, 34, 89 (c) 99, 90, 80, 57 (d) 8, 6
4. $0^1 + 6^2 + 3^3 = 0 + 36 + 27 = 63$ इत्यादि।
5. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 = 100$
6. A = 25, B = 161, C = 25, D = 12, E = 95, F = 26

   G = 25, H = 23, I = 167, J = 561

10. (i) $2 + 2 - 2 + 2/2 = 3$ (ii) $22 \div 2 - 2 - 2 = 7$

11. 

उत्तरमाला 17.4

1. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं (v) नहीं
2. (i) विभाज्य है (ii) विभाज्य नहीं है (iii) विभाज्य है

   (iv) विभाज्य नहीं है (v) विभाज्य है
3. 1. (i) 932 (iii) 6570
4. (i) 560 (ii) 791 (iv) 7007

उत्तरमाला 18.1

1. (i) $2\frac{9}{34}$ (ii) $1\frac{19}{36}$ (iii) $\frac{7}{20}$
2. (i) $\frac{-5}{9}$ (ii) $\frac{6}{31}+\frac{-11}{29}$ (iii) $\frac{13}{9}, \frac{-15}{7}$
3. साहचर्य नियम
4. (i) $\frac{227}{693}$ (ii) $-1\frac{1}{6}$ (iii) $-2\frac{1}{7}$
5. $\frac{23}{12}$ 6. 1
7. (i) $\frac{5}{7}$ (ii) 0 (iii) $\frac{39}{51}$ (iv) $\frac{-42}{17}$
8. (1) क्रम विनिमेय नियम (ii) साहचर्य नियम (iii) योज्य तत्समक (iv) योज्य प्रतिलोम

उत्तरमाला 18.2

1. (i) $-\frac{1}{20}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $-\frac{23}{24}$ (4) $-\frac{1}{13}$

2. (i) 0 (ii) $\frac{19}{70}$ (iii) $-5\frac{29}{60}$

3. $\frac{13}{24}$ 4. $\frac{-6}{25}$ 5. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य

उत्तरमाला 18.3

3. (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{11}{19}$ (iii) $\frac{-3}{17}, \frac{7}{9}$

4. (i) $\frac{2}{9}$ (ii) $\frac{-1}{8} \times \frac{-2}{5}$ (iii) $\left(\frac{4}{7} \times \frac{-25}{3}\right) \times \frac{1}{5}$

5. (i) वितरण नियम (ii) वितरण नियम (iii) क्रम विनिमेय (iv) गुणात्मक प्रतिलोम (v) गुणन तत्समक

6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $-\frac{5}{17}$ (iii) $-\frac{29}{6}$ (4) $\frac{q}{p}$

7. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य

उत्तरमाला 18.4

1. (i) $\frac{2}{9}$ (ii) $\frac{-72}{55}$ (iii) $\frac{-63}{4}$ (iv) 3 (v) $-\frac{7}{4}$ (vi) $+\frac{2}{3}$

2. (i) $-\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1805}{128}$ (iii) $\frac{105}{16}$ (iv) -3 (v) $\frac{2}{35}$ (iv) $\frac{7}{5}$

3. 20 4. $\frac{55}{9}$ 5. $-\frac{13}{4}$

उत्तरमाला 18.5

1. (i) $\frac{3}{2}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{-2}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{2}{3}$

3. $\frac{17}{48}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{11}{24}, \frac{23}{48}$

4. $\frac{-35}{168}, \frac{-11}{84}, \frac{1}{42}, \frac{5}{28}, \frac{19}{56}$

5. $-\frac{5}{96}, \frac{1}{16}, \frac{7}{24}, \frac{25}{48}, \frac{61}{96}$

6. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य

उत्तरमाला 19.1

1. (i) 6 (ii) ऊँचाई (iii) 10^6
2. 6000 लीटर 3. 280 घन सेमी 4. 1200 घन सेमी
5. (i) 150 घन सेमी (ii) 360 घन सेमी (iii) 64 घन मीटर (iv) 22.5 घन मीटर (v) 35 घन सेमी (vi) 40 घन सेमी (vii) 120 घन सेमी (viii) 168 घन सेमी (ix) 37500 घन सेमी (x) 11.25 घन सेमी
6. 8 सेमी 7. 125 टुकड़े 8. 67.5 मीटर^3 9. 1600 लीटर
10. 1 मीटर 11. 4320 घन फीट 12. 1.728 घन सेमी
13. 432 घन मीटर (धारिता) 288 घन मीटर (पानी का आयतन)
14. 60 घन मी., 60000 लीटर 15. 25000 ईंटें

उत्तरमाला 19.2

1. (i) 54 (ii) बराबर (iii) घन
2. 102.5 सेमी^{2} 3. 846 फुट^2 4. 4750 सेमी^{2} 5. 69.36 सेमी^{2}
6. 6 सेमी 7. 79.50 सेमी^{2} 8. 188 रु. 9. 4:1