अध्याय – 1

परिमेय संख्याएँ

(RATIONAL NUMBERS)

1.1 भूमिका

गणित में प्रायः हमें साधारण समीकरण दिखाई देते हैं। समीकरणों में अज्ञात व चर की राशि संख्याओं के अलग–अलग समूहों में ज्ञात होती है।

उदाहरण स्वरूप सोचिए समीकरण $x + 5 = 8$ में x के किस मान से समीकरण संतुष्ट होगा?

$$\therefore x = 8 - 5$$

यहां समीकरण के लिए हल $x = 3$ है जो कि एक प्राकृत संख्या है।

ज़रा सोचिए क्या सभी समीकरणों के लिए हल प्राकृत संख्याओं के समूह में मिल सकते हैं?

सोचिए समीकरण $x + 10 = 10$ का हल क्या होगा?

यहां समीकरण का हल $x = 0$ है। x का यह मान एक पूर्ण संख्या है, यदि हम केवल प्राकृत संख्याओं तक सीमित रहते तो इस समीकरण को हल नहीं किया जा सकता।

आइए अब एक और समीकरण $x + 15 = 7$ के लिए x का मान निकालें–

क्या समीकरण $x + 15 = 7$ जैसे समीकरणों का हल पूर्ण संख्याओं (जो कि शून्य से शुरू होकर सारी धनात्मक संख्याऐं है) में मिलता है?

यहां $x = -8$, क्या x का यह मान एक पूर्ण संख्या है? नहीं यह एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

कुछ और समीकरणों के बारे में विचार करते हैं जैसे–

(i) $4x = 5$ (ii) $5x + 8 = 0$

क्या आपको इन समीकरणों के लिए x का मान पूर्णांकों के समूह में मिलता है? हल करके देखिए।

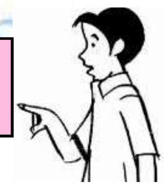
समीकरण (i) में $x = \frac{5}{4}$ (ii) में $x = \frac{-8}{5}$ रखकर देखिए। यहां समीकरण को हल करने के लिए हमें परिमेय संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है। हम पिछली कक्षाओं में परिमेय संख्याओं, भिन्नों व अन्य संख्याओं पर मूल संक्रियाओं को पढ़ चुके हैं यहां हम उन संख्याओं के कुछ गुणधर्म खोजने पर संक्रियाओं का प्रयास करेंगे।

1.2 संख्याओं के गुण–धर्म

1.2.1 संवृत या संवरक नियम : (Closure law)

एक बार पुनः संक्षेप में पूर्ण संख्याओं और पूर्णांक संख्याओं के गुण–धर्म की चर्चा करते हैं।

8, 15 और 23 किस समूह की संख्याएं हैं?



(i) पूर्ण संख्याएं (Whole Numbers)

अ. योग (Addition) : 8 + 15 = 23

14 + 7 = ... क्या यह एक पूर्ण संख्या है।

अतः पूर्ण संख्याएं योग के अन्तर्गत संवृत है। अर्थात् किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं a तथा b के लिए $a + b$ सदैव एक पूर्ण संख्या है।

ब. व्यवकलन : (Subtraction)

$6 - 4 = 2$ $3 - 7 =$ ....

$4 - 5 = -1$ $7 - 3 =$ ....

सोचिए कि –1, –4 किस संख्या समूह का हिस्सा हैं?

अतः पूर्ण संख्या व्यवकलन के अन्तर्गत संवृत नहीं है। क्योंकि हर बार हमें पूर्ण संख्या प्राप्त नहीं होती है।

स. गुणन (Multiplication) : $0 \times 4 = 0$, एक पूर्ण संख्या है।

$3 \times 5 = 15$ $2 \times 4 =$ ....

अतः पूर्ण संख्या गुणन के अन्तर्गत संवृत है। व्यापक रूप में यदि दो पूर्ण संख्याएं a तथा b हो तो ab भी एक पूर्ण संख्या है।

द. भाग (Division) : $4 \div 5 = \frac{4}{5}$ यह एक पूर्ण संख्या नहीं है। $2 \div 4 =$ ....

अतः पूर्ण संख्याएं भाग के अन्तर्गत संवृत नहीं है। $4 \div 2 =$ ....

स्वयं करके देखिए

– अलग–अलग पूर्ण संख्याऐं लेकर चारों संक्रियाओं के लिए संवृत गुण की पुष्टि कीजिए।

– प्राकृत संख्याओं के लिए सभी चार संक्रियाओं के अंतगृत संवृत गुण की जांच कीजिए।

(ii) पूर्णांक (Integer) :

अ. योग: $-8+5=-3$ $\qquad$ $8+7 \;=$ ....

$-7+(-4)=-11$ $\qquad$ $(-9)+2=$ ....

अतः पूर्णांक योग के अन्तर्गत संवृत हैं।

व्यापक रूप में किन्हीं दो पूर्णांकों a और b के लिए $a+b$ एक पूर्णांक है।

ब. व्यवकलन : $12-7=5$ एक पूर्णांक है। $\qquad$ $(-9)-2=$ ....

$7-12=-5$ एक पूर्णांक है। $\qquad$ $-4-5=$ ....

अतः पूर्णांक व्यवकलन के अन्तर्गत संवृत है। व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a-b$ एक पूर्णांक है।

स. गुणन : $5\times18=90$ एक पूर्णांक है। $\qquad$ $-5\times-4=$ ....

$-8\times5=-40$ एक पूर्णांक है। $\qquad$ $3\times7=$ ....

अतः पूर्णांक गुणन के लिए संवृत है।

व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a\ b$ भी एक पूर्णांक है।

द. भाग : $4\div5=\frac{4}{5}$ यह एक पूर्णांक नहीं है। अतः पूर्णांक भाग के अन्तर्गत संवृत नहीं है।

सोचिए– 5 परिमेय संख्याओं के समूह का एक सदस्य क्यों है?

(iii) परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers) :

जैसा कि हम जानते हैं कि ऐसी संख्या जो $\frac{p}{q}$ के रूप में हो या व्यक्त की जा सके, परिमेय संख्याएँ कहलाती है। जहां p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है। जैसे $0, -5, \frac{3}{5}, \frac{-7}{12}$ आदि। क्योंकि संख्याऐं 0,–5, 7 आदि को p/q के रूप में लिखा जा सकता है इसलिए ये भी परिमेय संख्याएँ है।

आइए परिमेय संख्याओं में संवृत गुणधर्म को जाँचें–

$\frac{-2\times2}{3\times2}=\frac{-4}{6}$ यह तुल्य भिन्न है।

अ. योग : $\frac{-2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{-4+5}{6}=\frac{1}{6}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\frac{-4}{5} + \left(\frac{-3}{10}\right) = \frac{-8+(-3)}{10} = \frac{-11}{10}$$ एक परिमेय संख्या है।

अतः स्पष्ट है कि परिमेय संख्या योग के अन्तर्गत संवृत है।

अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a तथा b के लिए $a+b$ भी एक परिमेय संख्या है।

ब. व्यवकलन : $\frac{8}{3} - \frac{5}{6} = \frac{16-5}{6} = \frac{11}{6}$ एक परिमेय संख्या है।

$\frac{-7}{8} - \frac{5}{4} = \frac{-7-10}{8} = \frac{-17}{8}$ एक परिमेय संख्या है।

$\frac{5}{2} - \left(\frac{-7}{8}\right) =$ .... (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

इस प्रकार हम पाते हैं कि परिमेय संख्याएं व्यवकलन के अन्तर्गत संवृत है। अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a तथा b के लिए $a-b$ भी एक परिमेय संख्या है।

स. गुणनः $\frac{-4}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{-32}{15}$ एक परिमेय संख्या है।

$\frac{-8}{7} \times \frac{-2}{5} = \frac{16}{35}$ एक परिमेय संख्या है।

क्या $\frac{-2}{3} \times \frac{-3}{5} =$ .... (क्या इनका भी हल एक परिमेय संख्या है?)

स्पष्ट है कि परिमेय संख्याएँ गुणन के अन्तर्गत संवृत है। अर्थात् दो परिमेय संख्याएँ a तथा b के लिए $a \times b$ भी एक परिमेय संख्या है।

द. भागः $\frac{-5}{4} \div \frac{5}{3} = \frac{-5}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{-15}{20}$ एक परिमेय संख्या है।

क्या $\frac{15}{7} \div \frac{2}{5} =$ ....?

(क्या इनका हल एक परिमेय संख्या है?)

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = ?$ $\frac{1}{2}$ में $\frac{1}{2}$ कितनी बार = 1 बार।
या $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = 1$

अतः स्पष्ट है कि परिमेय संख्याएँ भाग के अन्तर्गत संवृत है। अर्थात् दो परिमेय

संख्याएँ a तथा b के लिए $a \div b$ भी एक परिमेय संख्या है। लकिन हम जानते हैं कि किसी भी परिमेय संख्या a के लिए $a \div 0$ परिभाषित नहीं है। अतः परिमेय संख्याएँ भाग के अन्तर्गत संवृत नहीं है। तथापि यदि हम शून्य को शामिल नहीं करें तो शेष सभी परिमेय संख्याओं का समूह भाग के अन्तर्गत संवृत है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों को हाँ/नहीं से भरें–

संख्याएँ	अन्तर्गत संवृत है।			
	योग के	व्यवकलन के	गुणन के	भाग के
परिमेय संख्याएँ	हाँ	....	....	....
पूर्णांक संख्याएँ	....	....	हाँ	....
पूर्ण संख्याएँ	....		....	नहीं
प्राकृत संख्याएँ	....	नहीं	....	....

1.2.2 क्रम विनिमेयता (Commutative law)

(i) पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers)

अ. योग :

$5 + 7 = 12$ $\quad$ $3 + 8 = 11$ $\quad$ $0 + 6 =$ ....

$7 + 5 = 12$ $\quad$ $8 + 3 = 11$ $\quad$ $6 + 0 =$ ....

अतः दो पूर्ण संख्याओं के लिए योग का क्रमविनिमेय नियम सत्य है। व्यापक रूप में, यदि दो पूर्ण संख्याएँ a तथा b के लिए $a + b = b + a$ सत्य है।

ब. व्यवकलनः $8 - 2 = 6$ $\quad$ $4 - 6 =$ ....

$2 - 8 = -6$ $\quad$ $6 - 5 =$ ....

$\Rightarrow 8 - 2 \neq 2 - 8$ अतः दो पूर्ण संख्याओं के लिए व्यवकलन का क्रमविनिमेय नियम सत्य नहीं है। अर्थात् दो पूर्ण संख्या a तथा b के लिए $a - b \neq b - a$ होता है।

स. गुणा– $5 \times 3 =$ .... $\quad$ $4 \times 6 =$ ....

$3 \times 5 = 15$ $\quad$ $6 \times 4 = 24$

अतः दो पूर्ण संख्याओं के लिए गुणन का क्रमविनिमय नियम सत्य है।

$0 \times 5 =$ .... व $5 \times 0 =$ .... क्या यह क्रमविनिमेय नियम का पालन करते हैं?

अर्थात् दो पूर्ण संख्याएं a तथा b के लिए $a \times b = b \times a$ गुणा का क्रमविनिमय नियम सत्य है।

क्या $\frac{4}{5} = \frac{5}{4}$?

द. भागः $4 \div 5 = \frac{4}{5}$ तथा $5 \div 4 = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow 4 \div 5 \neq 5 \div 4$

अतः दो पूर्ण संख्याओं के लिए भाग का क्रम विनिमेय नियम सत्य नहीं है। अर्थात् दो पूर्ण संख्याएँ a तथा b के लिए $a \div b \neq b \div a$ होता है।

(ii) पूर्णांक

अ. क्या $(-5) + (+4) = (+4) + (-5)$

योगः $(-5) + (+4) = -1$

पुनः $(+4) + (-5) = -1$

अतः $(-5) + (+4) = (+4) + (-5)$

क्या यह समान है?

(i) $(5) + (-4) =$ ....

$(-4) + (5) =$ ....

(ii) $(-3) + (-7) =$ ....

$(-7) + (-3) =$ ....

अतः दो पूर्णांक संख्याओं के लिए योग का क्रमविनिमेय नियम सत्य है। अर्थात् दो पूर्णांक संख्याएँ a तथा b के लिए $a + b = b + a$ सत्य है।

ब. व्यवकलन :

पूर्णांकों के घटाव के लिए सोचते हैं। कोई भी दो पूर्णांक लीजिए व उन्हें घटाइए–

$(-8) - (+3) = -11$

पुनः $(3) - (-8) = 11$

(i) $(7) - (-3) =$ ....

$(-3) - (7) =$ ....

अतः दो पूर्णांक संख्याओं के लिए व्यवकलन का क्रमविनिमेय नियम सत्य नहीं है। अर्थात् दो पूर्णांक संख्याएँ a तथा b के लिए $a - b \neq b - a$ होता है।

स. गुणन : $(-4) \times (+5) = -20$ $8 \times (-2) =$ ......

पुनः क्रम बदल कर $(5) \times (-4) = -20$ $(-2) \times 8 =$ .....

अतः $(-4) \times (+5) = (+5) \times (-4)$

अतः दो पूर्णांक संख्याओं के लिए गुणन का क्रम विनिमेय नियम सत्य है। अर्थात् दो पूर्णांक संख्याएँ a तथा b के लिए $a \times b = b \times a$ सत्य है।

द. **भाग :** $(-5) \div (+2) = \frac{-5}{+2} = -\frac{5}{2}$

$(+2) \div (-5) = \frac{(+2)}{-5} = -\frac{2}{5}$

$6 \div 2 = ...$

$2 \div 6 = ...$

$(-3) \div 1 = ...$

$1 \div (-3) = ...$

अतः $-5 \div 2 \neq 2 \div (-5)$

अतः दो पूर्णांक संख्याओं के लिए भाग का क्रम विनिमेय नियम सत्य नहीं है। अर्थात् दो पूर्णांक संख्याएँ a तथा b के लिए $a \div b \neq b \div a$ होता है।

(iii) परिमेय संख्याएँ

अ. **योग** : $\frac{-5}{4} + \frac{7}{8} =$

$\frac{-10+7}{8} = \frac{-3}{8}$

$\frac{7}{8} + \left(\frac{-5}{4}\right) =$

$= \frac{7 + (-10)}{8} = \frac{-3}{8}$

अतः $\frac{-5}{4} + \frac{7}{8} = \frac{7}{8} + \left(\frac{-5}{4}\right)$

पुनः एक अन्य उदाहरण लेते हैं:–

$$\left(\frac{-5}{8}\right) + \left(\frac{-13}{6}\right) = \frac{-15+(-52)}{24} = \frac{-15-52}{24} = \frac{-67}{24}$$

अब $\left(\frac{-13}{6}\right)+\left(\frac{-5}{8}\right)=\frac{-52+(-15)}{24}=\frac{-52-15}{24}=\frac{-67}{24}$

अत' $\frac{-5}{8} + \frac{-13}{6} = \frac{-13}{6} + \frac{-5}{8}$

अतः स्पष्ट है कि दो परिमेय संख्याओं के लिए योग का क्रम विनिमेय नियम सत्य है। अर्थात् दो परिमेय संख्याएँ a तथा b के लिए $a + b = b + a$ सत्य है।

ब. **व्यवकलन :** $\frac{5}{4} - \left(\frac{-7}{16}\right) = \frac{20-(-7)}{16} = \frac{20+7}{16} = \frac{27}{16}$

क्रम बदलने पर $\frac{-7}{16} - \frac{5}{4} = \frac{-7-20}{16} = \frac{-27}{16}$

अतः $\frac{5}{4} - \left(\frac{-7}{16}\right) \neq \frac{-7}{16} - \frac{5}{4}$

अतः परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन क्रम विनिमेय नहीं है।

स. गुणन : $\frac{-6}{5} \times \frac{-3}{7} = \frac{18}{35}$ $\frac{-4}{9} \times \frac{5}{6} = ...$

क्रम बदलने पर $\frac{-3}{7} \times \frac{-6}{5} = \frac{18}{35}$ $\frac{5}{6} \times \frac{-4}{9} = ...$

अतः $\frac{-6}{5} \times \frac{-3}{7} = \frac{-3}{7} \times \frac{-6}{5}$ क्या $\frac{-4}{9} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{-4}{9}$?

अतः परिमेय संख्याओं के लिए गुणा का क्रम विनिमेय नियम सत्य है। अर्थात् दो परिमेय संख्याएं a तथा b के लिए $a \times b = b \times a$ सत्य है।

द. भाग : $\frac{-4}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{-4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{-28}{15}$

$\frac{3}{7} \div \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{3}{7} \times \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{-15}{28}$

अतः $\frac{-4}{5} \div \frac{3}{7} \neq \frac{3}{7} \div \left(\frac{-4}{5}\right)$

क्या $\frac{5}{7} \div \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \div \frac{5}{7}$ है? हल करके देखिए।

अतः परिमेय संख्याओं के लिए भाग का क्रम विनिमेय नियम सत्य नहीं है। अर्थात् दो परिमेय संख्याएँ a तथा b के लिए $a \div b \neq b \div a$ होता है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित सारणी को क्रमविनिमेयता नियम के लिए पूरा कीजिए–

संख्याएँ	योग के	व्यवकलन के	गुणन के	भाग के
परिमेय संख्याएँ	हाँ			
पूर्णांक		नहीं		
पूर्ण संख्याएँ				
प्राकृत संख्याएँ				

सारणी से देखकर बताओ किन संक्रियाओं में क्रम विनिमेयता नियम लागू होता है?

1.2.3 साहचर्यता या सहचारिता (Associative law)

(i) पूर्ण संख्याएँ

अ. योग :

$(5+4)+6=9+......=.......$ साहचर्यता बदलने पर $5+(4+6)=5+(......)=........$

अतः $(5+4)+6=5+(4+6)$

अतः तीन पूर्ण संख्याओं के लिए योग का साहचर्यता सत्य है। अर्थात् तीन पूर्ण संख्याएँ a, b तथा c के लिए $(a+b)+c=a+(b+c)$ सत्य है।

ब. व्यवकलन : क्या $(7-8)-5=7-(8-5)$

$(7-8)-5=(-1)-5=.........$

$7-(8-5)=7-3=4$

अतः $(7-8)-5 \neq 7-(8-5)$

अतः तीन पूर्ण संख्याओं के लिए व्यवकलन की साहचर्यता सत्य नहीं है। अर्थात् तीन पूर्ण संख्याएँ a, b तथा c के लिए $(a-b)-c \neq a-(b-c)$ होता है।

स. गुणन :

क्या $(5\times4)\times6=5\times(4\times6)$

$(5\times4)\times6=(.....)\times6=........$ और $5\times(4\times6)=5\times(24)=.......$

अतः $(5\times4)\times6=5\times(4\times6)$

इसी प्रकार क्या $5\times(4\times0)=(5\times4)\times0$?

अतः तीन पूर्ण संख्याओं के लिए गुणन की साहचर्यता सत्य है।

a, b तथा c के लिए $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ होता है।

द. **भागः**

क्या $(4 \div 5) \div 8 = 4 \div (5 \div 8)$

$$(4 \div 5) \div 8 = \frac{4}{5} \div 8 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

साहचर्यता बदलने पर :–

$$4 \div (5 \div 8) = 4 \div \left(\frac{5}{8}\right) = 4 \times \frac{8}{5} = \frac{32}{5}$$

अतः $(4 \div 5) \div 8 \neq 4 \div (5 \div 8)$

इसे भी जाचिऐं क्या $12 \div (4 \div 2) = (12 \div 4) \div 2$ ......?

अतः तीन पूर्ण संख्याओं के लिए भाग साहचर्य नहीं है। पूर्ण संख्याएँ a, b तथा c के लिए $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ होता है।

(iii) पूर्णांक :

तीन पूर्णांक $(-5), +4$ व (-2) के लिए

(**नोटः**– धन पूर्णांकां के लिए धन चिह्न लगाना सदैव आवश्यक नहीं परन्तु ऋण पूर्णांकों के लिए आवश्यक है)

अ. **योग :**

$(-5 + 4) + (-2) = -1 + (-2) = -3$

$-5 + \{4 + (-2)\} = -5 + 2 = -3$

अतः $(-5 + 4) + (-2) = -5 + \{4 + (-2)\}$

अतः तीन पूर्णांक संख्याओं के लिए योग का साहचर्यता सत्य है। अर्थात् तीन पूर्णांक संख्याएं a, b तथा c के लिए $(a + b) + c = a + (b + c)$ योग साहचर्य नियम लागू है।

ब. **व्यवकलन :** पुनः पूर्णांक –5, +4 व –2 के घटाव के लिए

$(-5 - 4) - (-6) = -9 + 6 = -3$

$-5 - \{4 - (-6)\} = -5 - \{4 + 6\} = -5 - 10 = -15$

अतः $(-5 - 4) - (-6) \neq -5 - \{4 - (-6)\}$

अतः तीन पूर्णांक संख्याओं के लिए व्यवकलन का साहचर्यता सत्य नहीं है। अर्थात् तीन पूर्णांक संख्याएँ a, b तथा c के लिए $(a - b) - c \neq a - (b - c)$ व्यवकलन साहचर्य नियम लागू नहीं है।

स. गुणन :

$\{5 \times (-4)\} \times (-2) = -20 \times (-2) = 40$

$5 \times \{-4 \times (-2)\} = 5 \times \{8\} = 40$

अतः $\{5 \times (-4)\} \times (-2) = 5 \times \{-4 \times (-2)\}$

अतः तीन पूर्णांक संख्याओं के लिए गुणन का साहचर्यता सत्य है। अर्थात् तीन पूर्णांक संख्याएँ a, b तथा c के लिए, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ गुणन साहचर्य नियम लागू हैं।

द. भाग :

$(-5 \div 2) \div (-3)$

$= \frac{-5}{2} \times \frac{1}{-3} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$

$-5 \div \{2 \div (-3)\}$

$= -5 \div \left\{\frac{2}{-3}\right\} = -5 \times \frac{-3}{2} = \frac{15}{2}$

$\Rightarrow \quad (-5 \div 2) \div (-3) \neq -5 \div \{2 \div (-3)\}$

अतः तीन पूर्णांक संख्याओं के लिए भाग का साहचर्यता सत्य नहीं है। अर्थात् तीन पूर्णांक संख्याएँ a, b तथा c के लिए $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ भाग का साहचर्य नियम लागू नहीं है।

(iii) परिमेय संख्याएँ:

अ. योग :

$$\left(\frac{-5}{4} + \frac{3}{8}\right) + \frac{-7}{6} = \left(\frac{-10+3}{8}\right) + \frac{-7}{6} = \frac{-7}{8} + \frac{-7}{6} = \frac{-21+(-28)}{24} = \frac{-49}{24}$$

$$\frac{-5}{4} + \left(\frac{3}{8} + \frac{-7}{6}\right) = \frac{-5}{4} + \left(\frac{9-28}{24}\right) = \frac{-5}{4} + \frac{-19}{24} = \frac{-30-19}{24} = \frac{-49}{24}$$

अतः $\left[\frac{-5}{4} + \frac{3}{8}\right] + \frac{-7}{6} = \frac{-5}{4} + \left[\frac{3}{8} + \frac{-7}{6}\right]$

क्या $\frac{-1}{3}+\left[\frac{2}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\left(\frac{-1}{3}\right)+\frac{2}{5}\right]+\left(\frac{-1}{2}\right)$? करके देखिए।

अतः तीन परिमेय संख्याओं के लिए योग का साहचर्यता सत्य है। अर्थात् तीन परिमेय संख्याएँ a, b तथा c के लिए $(a+b)+c=a+(b+c)$ योग का साहचर्य नियम लागू है।

ब. व्यवकलनः

क्या $\left(\frac{-3}{8}-\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{-2}{6}\right) = \frac{-3}{8}-\left(\frac{5}{4}-\frac{-2}{6}\right)$

$$= \left(\frac{-3-10}{8}\right)-\left(\frac{-2}{6}\right) \qquad = \frac{-3}{8}-\left(\frac{15+4}{12}\right)$$

$$= \frac{-13}{8}-\frac{-2}{6} \qquad = \frac{-3}{8}-\frac{19}{12}$$

$$= \frac{-39-(-8)}{24} \qquad = \frac{-9-38}{24}$$

$$= \frac{-31}{24} \qquad = \frac{-47}{24}$$

अतः $\left(\frac{-3}{8}-\frac{5}{4}\right)-\frac{-2}{6} \neq \frac{-3}{8}-\left(\frac{5}{4}-\frac{-5}{6}\right)$

अतः परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन की साहचर्यता सत्य नहीं है। अर्थात् तीन परिमेय संख्याएँ a, b तथा c के लिए $(a-b)-c \neq a-(b-c)$ व्यवकलन का साहचर्य नियम लागू नहीं होता है।

स. गुणन : आइए, हम गुणन के लिए साहचर्यता की जाँच करते हैं।

$$\left(\frac{-5}{8}\times\frac{7}{6}\right)\times\frac{-2}{5} \qquad \frac{-5}{8}\times\left(\frac{7}{6}\times\frac{-2}{5}\right)$$

$$= \frac{-35}{48}\times\frac{-2}{5} \qquad = \frac{-5}{8}\times\frac{-14}{30}$$

$$= \frac{70}{240} \qquad = \frac{70}{240}$$

अतः $\left(\frac{-5}{8}\times\frac{7}{6}\right)\times\frac{-2}{5} = \frac{-5}{8}\times\left(\frac{7}{6}\times\frac{-2}{5}\right)$

क्या $\left(\frac{10}{7}\times\frac{-5}{14}\right)\times\frac{3}{14} = \frac{10}{7}\times\left(\frac{-5}{14}\times\frac{3}{14}\right)$ है?

अतः हम पाते हैं कि परिमेय संख्याओं के लिए गुणन का साहचर्यता सत्य है। तीन परिमेय संख्याएँ a, b तथा c के लिए $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$ गुणन का साहचर्य लागू होता हैं।

द. भाग :

$$\left(\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{-5}{8}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\right)\div\frac{-5}{8}$$
$$=\frac{4}{6}\times\frac{8}{-5}=\frac{32}{-30}=\frac{-32}{30}$$

$$\frac{1}{2}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{-5}{8}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\div\left(\frac{3}{4}\times\frac{8}{-5}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\div\frac{24}{-20}=\frac{1}{2}\times\frac{-20}{24}=\frac{-20}{48}$$

अतः $\left(\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{-5}{8}\neq\frac{1}{2}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{-5}{8}\right)$

अतः परिमेय संख्याओं के लिए भाग साहचर्यता नहीं है। अतः परिमेय संख्याएँ a, b तथा c के लिए $(a\div b)\div c \neq a\div(b\div c)$ भाग का साहचर्य नियम लागू नहीं है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा करें ((✓) लगाएं)

संख्याएँ	साहचर्य नियम के लिए सत्य है।			
	योग के	व्यवकलन के	गुणन के	भाग के
परिमेय संख्याएँ				
पूर्ण संख्याएँ				
पूर्णांक				
प्राकृत संख्याएँ				

1.2.4 शून्य (0) की भूमिका

निम्नलिखित पर विचार कीजिए:

$5 + 0 = 0 + 5 = 5$ (शून्य का पूर्ण संख्या में जोड़)

$-5 + 0 = 0 + -5 = -5$ (शून्य का पूर्णांक में जोड़)

$\frac{-5}{4} + 0 = 0 + \frac{-5}{4} = \frac{-5}{4}$ (शून्य को परिमेय संख्या में जोड़)

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि किसी पूर्ण संख्या, पूर्णांक तथा परिमेय संख्या में जब शून्य जोड़ा जाता है तो योगफल फिर से वही संख्या प्राप्त होती है।

व्यापक रूप से,

$a + 0 = 0 + a = a$ $a =$ पूर्ण संख्या

$b + 0 = 0 + b = b$ $b =$ पूर्णांक

$c + 0 = 0 + c = c$ $c =$ परिमेय संख्या

इस प्रकार उपर्युक्त सभी संख्याओं के योग के लिए शून्य एक **योज्य तत्समक** कहलाता है।

1.2.5 एक (1) की भूमिका

$8 \times 1 = 1 \times 8 = 8$ (पूर्ण संख्या का 1 के साथ गुणा)

$-2 \times 1 = 1 \times (-2) = -2$ (पूर्णांक × 1 ....)

$\frac{-3}{5} \times 1 = 1 \times \frac{-3}{5} = \frac{-3}{5}$ (परिमेय × 1 ....)

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि किसी पूर्ण संख्या, पूर्णांक तथा परिमेय संख्या में जब 1 से गुणा किया जाता है तो गुणनफल फिर से वही संख्या प्राप्त होती है, इस प्रकार 1 एक **गुणात्मक तत्समक है।**

1.2.6 योज्य प्रतिलोम (Additive inverse) :

पूर्णांकों को अध्ययन करते समय आपने पूर्णांकों के ऋणात्मक पाए हैं। 1 का ऋणात्मक क्या है? यह –1 है, क्योंकि $1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$ है। अतः (–1) का ऋणात्मक क्या होगा? यह 1 होगा।

इसी प्रकार $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$

$$\frac{3}{2} + \left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{3}{2} = 0$$

उपर के उदाहरणों में दोनों संख्याओं का योग शून्य है। जब दो संख्याओं का योग शून्य हो तो वे दोनों संख्याएं एक दूसरे की **योज्य प्रतिलोम** होती है जैसे उपर के उदाहरण में 1 का योज्य प्रतिलोम –1 तथा –1 का योज्य प्रतिलोम 1 है।

आप बताइए : 2 का योज्य प्रतिलोम क्या है?
–5 का योज्य प्रतिलोम क्या है?

व्यापक रूप से

किसी भी परिमेय संख्या $\frac{c}{d}$ के लिए– $\frac{c}{d} + \left(\frac{-c}{d}\right) = \left(\frac{-c}{d}\right) + \frac{c}{d} = 0$

प्राप्त होता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $\frac{c}{d}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-c}{d}$ तथा $\frac{-c}{d}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{c}{d}$ है।

1.2.7 व्युत्क्रम अथवा गुणात्मक प्रतिलोम (Multiplicative inverse) :

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें:

(i) $2 \times \frac{1}{2} = 1$ (ii) $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ (iii) $\frac{-5}{2} \times \frac{2}{-5} = 1$

उपर्युक्त उदाहरणों में प्रत्येक का गुणनफल 1 है। जब दो संख्याओं का गुणनफल 1 हो तो वे दोनों संख्याएं एक दूसरे की व्युत्क्रम कहलाती है जैसे 2 का व्युत्क्रम $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{2}$ का व्युत्क्रम 2 है। इसी प्रकार $\frac{-5}{2}$ का व्युत्क्रम $\frac{2}{-5}$ है।

क्या आप बता सकते हैं कि शून्य का व्युत्क्रम क्या है? क्या कोई ऐसी संख्या है, जिसे शून्य से गुणा करने पर 1 प्राप्त हो जाए? अतः शून्य का कोई व्युत्क्रम नहीं है।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ दूसरी परिमेय संख्या $\frac{b}{a}$ का व्युत्क्रम अथवा गुणात्मक प्रतिलोम कहलाती है, क्योंकि $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$ है।

1.2.8 परिमेय संख्याओं के लिए गुणन की योग पर वितरण:

निम्नलिखित पर विचार करें:—

$$\frac{-2}{5} \times \left\{\frac{2}{7}+\frac{5}{14}\right\}$$

$$= \frac{-2}{5} \times \left\{\frac{4+5}{14}\right\}$$

$$= \frac{-2}{5} \times \frac{9}{14}$$

$$= \frac{-18}{70}$$

इसे इस तरह से भी समझे।

$$\frac{-2}{5} \times \left\{\frac{2}{7}+\frac{5}{14}\right\}$$

$$= \left(\frac{-2}{5}\times\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{-2}{5}\times\frac{5}{14}\right)$$

$$= \frac{-4}{35} + \frac{-10}{70}$$

$$= \frac{-8+(-10)}{70} = \frac{-18}{70}$$

अतः $\frac{-2}{5} \times \left\{\frac{2}{7}+\frac{5}{14}\right\} = \left(\frac{-2}{5}\times\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{-2}{5}\times\frac{5}{14}\right)$

इस उदाहरण में गुणन की व्यवकलन पर वितरण को समझिए।

सीधे तरीके से

$$\frac{-4}{5} \times \left\{\frac{2}{9}-\frac{7}{18}\right\}$$

$$= \frac{-4}{5} \times \left\{\frac{4-7}{18}\right\}$$

$$= \frac{-4}{5} \times \frac{-3}{18}$$

$$= \frac{12}{90}$$

वितरण नियम से

पुनः $\frac{-4}{5} \times \left\{\frac{2}{9}-\frac{7}{18}\right\}$

$$= \left(\frac{-4}{5}\times\frac{2}{9}\right) - \left(\frac{-4}{5}\times\frac{7}{18}\right)$$

$$= \frac{-8}{45} - \frac{-28}{90}$$

$$= \frac{-16+28}{90} = \frac{12}{90}$$

अतः $\frac{-4}{5} \times \left\{\frac{2}{9}-\frac{7}{18}\right\} = \left(\frac{-4}{5}\times\frac{2}{9}\right) - \left(\frac{-4}{5}\times\frac{7}{18}\right)$

अतः उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि परिमेय संख्याओं के लिए योग एवं व्यवकलन पर गुणन की वितरकता (वितरण) सत्य है।

सभी परिमेय संख्याओं a, b और c के लिए

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

स्वयं करके देखिए

वितरण नियम (वितरकता) के उपयोग से निम्नलिखित का मान ज्ञात करें:

(i) $\left(\frac{5}{4} \times \frac{-2}{8}\right) + \left(\frac{5}{4} \times \frac{-3}{5}\right)$ (ii) $\left(\frac{5}{8} \times \frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{-7}{6}\right)$

उदाहरण–1. मान ज्ञात करें $\frac{5}{12} + \frac{-3}{8} + \frac{-7}{16} + \frac{25}{12}$

हल : $\frac{5}{12} + \frac{-3}{8} + \frac{-7}{16} + \frac{25}{12}$

$= \frac{-3}{8} + \frac{-7}{16} + \frac{5}{12} + \frac{25}{12}$ (क्रम विनिमेयता के उपयोग से)

$= \left[\frac{-3}{8} + \frac{-7}{16}\right] + \left[\frac{5}{12} + \frac{25}{12}\right]$

$= \left[\frac{5+25}{12}\right] + \left[\frac{-6+(-7)}{16}\right]$

$= \frac{30}{12} + \frac{-13}{16} = \frac{120-39}{48} = \frac{\overset{27}{\cancel{81}}}{\underset{16}{\cancel{48}}} = \frac{27}{16}$

उदाहरण–2. हल करें– $\frac{-4}{5} \times \frac{16}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{16}{7}$

हल : हमें प्राप्त है,

$$\frac{-4}{5} \times \frac{16}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{16}{7}$$

$$= \frac{16}{7}\left(\frac{-4}{5}+\frac{-3}{5}\right) \qquad \text{बंटन नियम से}$$

$$= \frac{16}{7}\left(\frac{-4+(-3)}{15}\right) = \frac{16}{7} \times \frac{-7}{15}$$

$$= \frac{-16}{15}$$

उदाहरण–3. निम्नलिखित के योज्य प्रतिलोम लिखिए:

(i) $\frac{-9}{13}$ (ii) $\frac{12}{25}$

हल : (i) $\frac{-9}{13}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{9}{13}$ है क्योंकि $\frac{-9}{13} + \frac{9}{13} = \frac{-9+9}{13} = \frac{0}{13} = 0$

(ii) $\frac{12}{25}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-12}{25}$ है क्योंकि $\frac{12}{25} + \frac{-12}{25} = \frac{12-12}{25} = \frac{0}{25} = 0$

उदाहरण–4. हल कीजिए $\frac{2}{7} \times \frac{-3}{5} - \frac{1}{12} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$

हल : $\frac{2}{7} \times \frac{-3}{5} - \frac{1}{12} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$

$$= \frac{2}{7} \times \frac{-3}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{-3}{5}\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\right) - \frac{1}{12} \qquad \text{(वितरण नियम से)}$$

$$= \frac{-3}{5}\left(\frac{2+4}{7}\right) - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{-3}{5} \times \frac{6}{7} - \frac{1}{12} = \frac{-18}{35} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{-216-35}{420} = \frac{-251}{420}$$

प्रश्नावली – 1.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक के योज्य प्रतिलोम लिखिए:

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{25}{9}$ (iii) -16 (iv) $\frac{-15}{8}$

(v) 0 (vi) $\frac{-5}{-7}$ (vii) $\frac{13}{-5}$ (viii) $\frac{-2}{15}$

2. निम्नलिखित सारणी के खाली स्थान को भरिए:

संख्या	-13	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{-7}$	$\frac{-5}{-8}$	-1
गुणन प्रतिलोम	$\frac{1}{-13}$	.....	.....	.....	.....

3. उचित गुण धर्मों के उपयोग से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{4}{3} + \frac{3}{5} + \frac{-2}{3} + \frac{-11}{5}$

(ii) $\frac{2}{5} \times \left(-\frac{3}{7}\right) - \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{14} \times \frac{2}{5}$

4. $\frac{5}{18}$ को $\frac{-7}{72}$ के व्युत्क्रम से गुणा कीजिए।

5. $\frac{-1}{3} \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{-1}{3}\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{3}\times\frac{1}{4}\right)$ के रूप में कौन–सा गुणधर्म है। बताइए।

6. क्या $-1\frac{1}{8}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{8}{9}$ है? कारण सहित उत्तर दीजिए।

7. क्या $3\frac{1}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम 0.3 है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

8. निम्नलिखित को वितरण नियम की सहायता से हल कीजिए।

(i) $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\}$ (ii) $\frac{5}{6} \times \left(\frac{-2}{5} + \frac{3}{10}\right)$

9. निम्नलिखित कॉलम "अ" को कॉलम "ब" के उचित नियम से मिलाएं–

	कॉलम "अ" उदाहरण	कॉलम "ब" नियम
(i)	$\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)$	(a) योज्य तत्समक
(ii)	$\frac{5}{6}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}$	(b) गुणात्मक तत्समक
(iii)	$\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{10}=\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\right)$	(c) गुणा का साहचर्य नियम
(iv)	$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$	(d) योज्य प्रतिलोम
(v)	$\left(5\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}=5\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)$	(e) वितरण नियम
(vi)	$\frac{-5}{4}+0=\frac{-5}{4}$	(f) संवरक नियम
(vii)	$\frac{-8}{3}\times 1=\frac{-8}{3}$	(g) गुणात्मक प्रतिलोम
(viii)	$\frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}\right)$	(h) योग का साहचर्य नियम
(ix)	$\frac{5}{3}\times\frac{3}{5}=1$	(i) गुणा का क्रम विनिमय नियम
(x)	$\frac{-7}{4}+\frac{7}{4}=0$	(j) योग का क्रम विनिमय नियम

हमने सीखा

1. संख्याओं के परिवार में पहला प्राकृत संख्याएं (1, 2, 3, 4, 5 .....) है। प्राकृत संख्या के परिवार में शून्य (0) शामिल होने पर पूर्ण संख्याओं (0,1,2,3,4 .....) का परिवार बनता है तथा पूर्ण संख्याओं के परिवार में ऋणात्मक संख्याओं (–1, –2, –3...) के जुड़ने पर पूर्णांक बनता है। पूर्णांकों के समूह में भिन्न संख्याओं को जोड़ने पर परिमेय संख्याएं बनती हैं।

2. **संवृत** है।

3. परिमेय संख्याओं के लिए योग और गुणन की संक्रियाएँ– (i) क्रमविनिमेय है (ii) साहचर्य है।

4. परिमेय संख्याओं के लिए **परिमेय संख्या शून्य** योज्य तत्समक है।

5. परिमेय संख्याओं के लिए **परिमेय संख्या एक** गुणात्मक तत्समक है।

6. परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का योज्य प्रतिलोम $-\frac{a}{b}$ है और विलोमतः भी सत्य है।

7. यदि $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$ तो परिमये संख्या $\frac{a}{b}$ का व्युत्क्रम अथवा गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{c}{d}$ है।

8. परिमेय संख्याओं की वितरकता (वितरण नियम) :

   परिमेय संख्याएँ a, b और c के लिए $a\,(b+c)=ab+ac$ और $a\,(b-c)=ab-ac$ है।

9. गणितीय संक्रियाओं में गुणधर्मों का उपयोग करना।

एक चर वाले रैखिक समीकरण
(Linear Equation in one variable)

2.1 भूमिका

पलक और खुशबू बीजीय व्यंजकों एवं समीकरणों पर आधारित सवालों को हल कर रही हैं आइए उनकी मदद करें–

समता
$2x - 7 = 11$
चर
समीकरण

$2x - 7 \rightarrow$ बायाँ पक्ष
$11 \rightarrow$ बायाँ पक्ष

(i) $x + 3$ व्यंजक में $x = 1, 2, 3$ रख मान निकालिए

(ii) $5 + 7 =$ ....

(iii) $3 +$ .... $= 12$

(iv) $4 + x = 9$ यहाँ x का मान क्या होगा?

(v) $2x = 4$

आपने ऊपर दिए गए प्रश्नों को हल करते हुए देखा कि इनमें "=" चिह्न का प्रयोग किया गया है जिसका अर्थ है इसमें दायाँ पक्ष व बायाँ पक्ष बराबर है। इन्हें समीकरण कहते हैं,

कुछ रैखिक व्यंजक नीचे दिए गए हैं।

$x + 3$ से क्या आप x का मान निकाल सकते हैं?

$$3x,\ 3x + 1,\ 12x + 5,\ \frac{5}{4}\ (x - 4)$$

सोचिए ये रैखिक व्यंजक क्यों हैं?

ये रैखिक व्यंजक नहीं हैं

$$x^2 + 3,\ y + y^2,\ 1 + x + x^2$$

(ध्यान दीजिए यहाँ चर की अधिकतम घात 1 से अधिक है)

इस अध्याय में हम एक चरवाले रैखिक समीकरणों के बारे में पढ़ेंगे। इनमें एक चरवाले रैखिक व्यंजकों का प्रयोग होता है। बीजीय समीकरण वास्तव में चरों पर एक शर्त वाली समता होती है। आइए, चरों को कुछ शर्तों से जोड़कर समीकरण बनाएँ।

$3x$, $3x + 1$ रैखिक व्यंजक है जबकि $3x = 6$ व $3x + 1 = 4$ रैखिक समीकरण

(i) एक संख्या के 5 गुने में 10 जोड़ने पर 30 मिलता है।

यदि मान लीजिए वह संख्या x है तो

उस संख्या का 5 गुना होगा $= 5 \times x = 5x$

अब इसमें 10 जोड़ते हैं $5x + 10$

शर्तानुसार यह 30 के बराबर हुआ

अतः $5x + 10 = 30$ (यह बन गया एक चरवाला रैखिक समीकरण)

(ii) किसी संख्या में से 2 घटाकर यदि 4 से गुणा करें तो 12 मिलता है।

यदि मान लीजिए कि वह संख्या x है तो

संख्या में से 2 घटाने पर $x - 2$ हुआ।

अब हमें प्राप्त $(x - 2)$ को 4 से गुणा करना है।

$$4 \times (x - 2) \quad = \quad 4\,(x - 2)$$

शर्तानुसार जो कि 12 के बराबर है

अतः $4\,(x - 2) = 12$ यह एक समीकरण हुआ।

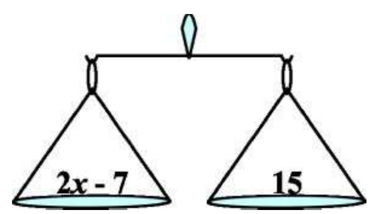
स्वयं करके देखिए

समीकरण बनाइए–

1. किसी संख्या का 4 गुणा 40 है।
2. किसी संख्या का दोगुना उस संख्या के 5 गुने से 21 कम है।
3. रमेश की वर्तमान आयु उसकी 5 वर्ष पहले की आयु की दोगुनी है।

आइए अब हम दिए गए समीकरणों का हल करना सीखें।

समीकरण के दोनों पक्ष तुला (तराजू) के दो संतुलित पलड़ों के समान हैं। यदि दोनों पक्षों में समान गणितीय संक्रियाएँ की जाएँ तो भी समीकरण संतुलित ही रहता है। हाँ, ऐसा करने से उसका स्वरूप अवश्य बदल जाएगा।



$2x - 7 = 15$ (दोनों पलड़ों में 7 जोड़ने पर)

$2x - 7 + 7 = 15 + 7$

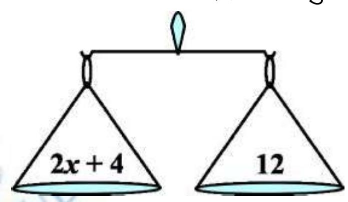
$2x = 22$ तराजू संतुलित रहेगा

$$\frac{2x}{2} = \frac{22}{2} \quad \text{(दोनों पक्षों में 2 का भाग देने पर)}$$

$x = 11$ हल

2.2 समीकरण को हल करना, जिनके एक पक्ष में बीजीय व्यंजक एवं दूसरे पक्ष में केवल चर हो–

हमने पिछली कक्षाओं में भी ऐसे समीकरणों का हल प्राप्त किया है। आइए, हम कुछ उदाहरणों द्वारा उन्हें पुनः समझें।



उदाहरण–1. हल ज्ञात कीजिए–

$2x + 4 = 12$

हल : चरण–1 दोनों पक्षों में से 4 घटाने पर

$2x + 4 - 4 = 12 - 4$ (संतुलन नहीं बिगड़ा)

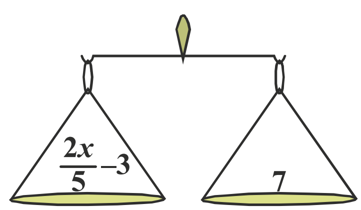
या $2x = 8$

चरण–2 दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

$x = 4$

उत्तर को जाँचने के लिए आप हल को पुनः समीकरण में रख "=" समता देख सकते हैं।



$2x + 4 = 12$ (x का मान 2 रखने पर)

$2 \times 4 + 4 = 12$

$8 + 4 = 12$

$12 = 12$ अतः हल सही है।

उदाहरण–2. हल ज्ञात कीजिए–

$$\frac{2x}{5} - 3 = 7$$

हल : $\frac{2x}{5} - 3 = 7$ या $\frac{2x}{5} - 3 + 3 = 7 + 3$ (दोनों पक्ष में 3 जोड़ने पर)

या $\frac{2x}{5} = 10$ संतुलन नहीं बिगड़ा

या $\frac{2x}{5} \times 5 = 10 \times 5$ (दोनों पक्ष में 5 से गुणा करने पर)

या $2x = 50$ संतुलन नहीं बिगड़ा

या $\frac{2x}{2} = \frac{50}{2}$ (दोनों पक्ष में 2 से भाग देने पर)

$x = 25$

सीधे पक्षांतरण से

दिया गया है।

$\frac{2x}{5} - 3 = 7$

या $\frac{2x}{5} = 7 + 3$ (– 3 का पक्षांतरण करने पर + 3 हुआ)

या $\frac{2x}{5} = 10$

या $2x = 10 \times 5$

या $2x = 50$

या $x = \frac{50}{2}$

$x = 25$

ध्यान दीजिए यहां 5 का पक्षांतरण में चिह्न नहीं बदला। गुणा या भाग द्वारा जुड़े हुए चर या अचर का पक्षांतरण करने पर वे क्रमशः भाग या गुणा में बदल जाते है किन्तु उनका चिह्न नहीं बदलता।

व्यवहारतः हम समीकरणों के हल में पक्षांतरण विधि का प्रयोग करते हैं पक्षांतरण विधि समीकरण को हल करने की संक्षिप्त विधि है। आगे हम पक्षांतरण विधि का उपयोग करेंगे।

उदाहरण–3. हल ज्ञात कीजिए

$$x + \frac{x}{4} = 20$$

हल : $x + \frac{x}{4} = 20$

या $x \times 1 + x \times \frac{1}{4} = 20$ $\left(\because x = x \times 1,\ \frac{x}{4} = x \times \frac{1}{4}\right)$

या $x\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 20$ (x सार्व लेने पर)

या $x\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right) = 20$

या $x\left(\frac{4+1}{4}\right) = 20$

या $x \times \frac{5}{4} = 20$

या $\frac{5x}{4} = 20$

या $5x = 20 \times 4$

या $x = \frac{20 \times 4}{5}$

या $x = 4 \times 4$

$x = 16$

स्वयं करके देखिए

हल कीजिए–

(i) $5x + 4 = 9$

(ii) $\frac{5}{2} + 2x = \frac{15}{4}$

(iii) एक व्यक्ति के पास सिक्कों की चौथाई संख्या से 2 कम संख्या में नोट है। यदि नोटों की संख्या 19 है तो सिक्कों की संख्या क्या होगी?

(Hint- सिक्कों की संख्या x मान हल करें)

प्रश्नावली–2.1

निम्नलिखित समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए–

1. $3(x-3) = 15$
2. $\frac{x}{2} - 7 = 15$
3. $\frac{-2x}{7} + 2 = 8$
4. $7 - 3x = 18$
5. $18 = 40 - 3x$
6. $\frac{25}{6} - 9y = 11$
7. $2.4 = \frac{x}{2.5} - 1$
8. $3x + 10 = 1$
9. $2\left(x + \frac{11}{4}\right) = 13$
10. $\frac{x}{3} + \left(\frac{-14}{3}\right) = \frac{3}{7}$

2.3 अनुप्रयोग

समीकरण के द्वारा हम तार्किक एवं दैनिक जीवन पर आधारित गणितीय समस्याओं का हल प्राप्त करते हैं। आइए कुछ उदाहरणों द्वारा इसे समझें।

उदाहरण–4. दो संख्याओं का योग 15 है। यदि एक संख्या दूसरी से 5 अधिक है तो दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम हम दिए गए कथन से समीकरण बनाते हैं, इसके लिए अज्ञात को चर मानते हुए शुरू करते हैं।

माना कि छोटी अज्ञात संख्या x है।

प्रश्नानुसार,

बड़ी अज्ञात संख्या = छोटी अज्ञात संख्या से 5 अधिक

$= x + 5$

पुनः $\because$ दोनों संख्या का योग = 15

$\therefore x + (x + 5) = 15$

या $x + x + 5 = 15$

या $2x + 5 = 15$

या $2x = 15 - 5$

या $2x = 10$

या $x = \frac{10}{2}$

या $x = 5$

$\therefore$ संख्याएँ $x = 5$ एवं $x + 5 = 5 + 5 = 10$

अर्थात संख्याएँ 5 एवं 10 हैं।

उदाहरण–5. $\frac{-8}{3}$ के दोगुने से 1 अधिक में से क्या घटाएँ कि $\frac{2}{7}$ मिले?

हल : $\frac{-8}{3}$ के दो गुने से 1 अधिक $= 2\left(\frac{-8}{3}\right)+1$

माना कि $2\left(\frac{-8}{3}\right) + 1$ में से x घटाने पर $\frac{2}{7}$ प्राप्त होता है, तो

समीकरण,

$$2\left(\frac{-8}{3}\right) + 1 - x = \frac{2}{7}$$

या $\frac{-16}{3} + \frac{1}{1} - x = \frac{2}{7}$

या $\frac{-16+3}{3} - x = \frac{2}{7}$

या $\frac{-13}{3} - x = \frac{2}{7}$

या $-x = \frac{2}{7} + \frac{13}{3}$

या $-x = \frac{6+91}{21} = \frac{97}{21}$

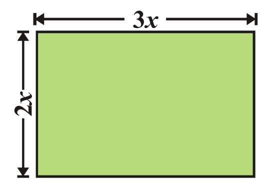
या $-x = \frac{97}{21}$

या $\quad (-x)\ (-1) = \frac{97}{21} \times (-1)$

$\therefore \quad x = \frac{-97}{21}$

उदाहरण–6. एक आयत की लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात 3:2 है और उसकी परिमिति 30 मी. हो तो, उसकी लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि आयत की लम्बाई $3x$ है तो उसकी चौड़ाई $2x$ होगी।



आयत की परिमिति = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$30 = 2\,(3x + 2x)$

या $\quad 30 = 2 \times 5x$

या $\quad 30 = 10x$ $\qquad$ (दोनों पक्षों के सभी पदों का पक्षांतरण

या $\quad 10x = 30$ $\qquad$ करने पर कोई चिह्न परिवर्तन क्यों नहीं हुआ?)

या $\quad x = \frac{30}{10} = 3$ $\qquad \therefore$ ल.$= 3x = 3 \times 3 = 9$ मी., चौ.$= 2x = 2 \times 3 = 6$ मी.

उदाहरण–7. जूली की माँ की वर्तमान उम्र जूली की वर्तमान उम्र के तिगुने से 1 वर्ष कम है, यदि 5 वर्ष पहले उनके उम्रों का योग 29 वर्ष था तो उनकी वर्तमान उम्र क्या होगी ?

हल : माना कि जूली की वर्तमान उम्र x है।

	जूली	**माँ**	**योग**
वर्तमान आयु	x	$3x - 1$	
5 वर्ष पूर्व आयु	$x - 5$	$3x - 1 - 5$ $= 3x - 6$	$x - 5$ $\underline{+\,3x - 6}$ $4x - 11$

पाँच वर्ष पूर्व जूली व उसकी माँ की आयु का योग 29 था।

पाँच वर्ष पूर्व आयु का योग 29 वर्ष दिया है।

प्रश्नानुसार,

$(x - 5) + (3x - 6) = 29$

या $\quad x - 5 + 3x - 6 = 29$

या $4x - 11 = 29$

या $4x = 29 + 11$

या $4x = 40$

या $x = \frac{40}{4}$

या $x = 10$

अतः जूली की वर्तमान उम्र $x = 10$ वर्ष

अतः जूली की माँ की वर्तमान उम्र $= 3x - 1 = 3 \times 10 - 1 = 30 - 1 = 29$ वर्ष

उदाहरण–8. बंटी के पास 2 रुपये के एवं सोनू के पास 5 रुपये के कुछ सिक्के हैं, यदि बंटी के पास सिक्को की संख्या सोनू के पास के सिक्कों की संख्या के तिगुने से दो कम है और उनके पास के सभी सिक्कों का कुल मूल्य 51 रुपये हैं तो प्रत्येक के पास कितनी राशियाँ हैं।

हल : माना कि सोनू के पास x सिक्के हैं

$\because$ सोनू के पास 5 रुपये के सिक्के हैं

$\therefore$ सोनू के पास कुल राशि $= 5x$

प्रश्नानुसार,

बंटी के पास कुल सिक्के $= 3x - 2$

बंटी के पास कुल राशि $= 2 \times (3x - 2)$ ($\because$ बंटी के पास 2 रुपये के सिक्के हैं)

अब प्रश्नानुसार,

सोनू के पास राशि + बंटी के पास राशि $= 51$

या $5x + 2\,(3x - 2) = 51$

या $5x + 6x - 4 = 51$

या $11x = 51 + 4$

या $11x = 55$

या $x = \frac{55}{11}$

$\therefore$ $x = 5$

$\therefore$ सोनू के पास राशि $= 5x = 5 \times 5 = 25$ रु.

बंटी के पास राशि $= 2\,(3x - 2) = 2 \times (3 \times 5 - 2) = 2\,(15 - 2) = 2 \times 13 = 26$ रु.

उदाहरण–9. तीन क्रमागत विषम संख्याओं का योग 93 है तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि सबसे छोटी विषम संख्या x है

अन्य दोनों लगातार विषम संख्याएँ क्रमशः $(x + 2)$ एवं $(x + 4)$ हैं।

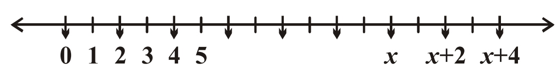
($\because$ दो लगातार विषम संख्याओं का अंतर 2 होता है)

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$x + (x + 2) + (x + 4) = 93$

या $x + x + 2 + x + 4 = 93$

या $3x + 6 = 93$



या $3x = 93 - 6$

या $3x = 87$

या $x = \dfrac{87}{3}$

$\therefore$ $x = 29$

$\therefore$ विषम संख्याएँ $x = 29$

$x + 2 = 29 + 2 = 31$

$x + 4 = 29 + 4 = 33$

प्रश्नावली – 2.2

1. यदि किसी संख्या के आधे में से $\frac{1}{4}$ घटाया जाय तो $\frac{1}{8}$ प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।
2. यदि किसी आयत की लम्बाई और चौड़ाई का अंतर 5 मी. हो और परिमिति 110 मी. हो तो लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात करें।
3. चीनी के मूल्य में 25 प्रतिशत की वृद्धि होने पर अब 1 किग्रा. चीनी का मूल्य 32 रु. है तो प्रारम्भ में चीनी का मूल्य प्रति किग्रा. क्या था?

4. दो विभिन्न मूल्य वाली 35 कलमों का कुल मूल्य 60 रु. है। यदि 1 सस्ती कलम का मूल्य 1.50 रु. एवं 1 महँगी कलम का मूल्य 2 रु. है तो कितनी महँगी कलमें खरीदी गईं?

5. एक त्रिभुज के तीनों कोण 2 : 3 : 5 के अनुपात में हैं तो उनके तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

6. बिल्लू के पास 1 रु., 2 रु. एवं 5रु. के कुल 160 सिक्के हैं जिनका कुल मूल्य 300 रु. है। यदि 2 रु. के सिक्कों की संख्या 5 रु. के सिक्कों की संख्या की तिगुनी हो तो उसके पास प्रत्येक प्रकार के कितने सिक्के हैं?

7. पिता ने अपने तीन संतानों के बीच अपनी संपत्ति का बँटवारा 1 : 2 : 3 के अनुपात में करता है और अपने लिए 100000 रु. रखता है। यदि उसकी कुल संपत्ति 2.5 लाख रु. की हो तो प्रत्येक संतान को हिस्से के रूप में क्या मिला?

8. 11 के लगातार तीन गुणजों का योग 231 है तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

9. संकुल संसाधन केन्द्र म.वि. फरना में आयोजित बाल मेले में प्रत्येक विजेता छात्र को 2 कलम एवं विजेता को छोड़कर शेष सभी प्रतिभागियों को 1 कलम दिया गया। यदि 100 छात्रों के बीच 120 कलम दिए गए तो विजेताओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

10. रवि के पिता की वर्तमान उम्र रवि के वर्तमान उम्र के तिगुने से 5 वर्ष अधिक है। 5 वर्ष बाद उनकी उम्रों का योग 47 वर्ष होगा। दोनों की वर्तमान उम्र ज्ञात कीजिए।

2.4 समीकरण हल करना जब दोनों ही पक्षों में चर उपस्थित हो

समीकरण एक समिका होती है जिसके दोनों पक्षों में चर उपस्थित हो सकते हैं। ऐसे समीकरण का हल हम निम्नलिखित उदाहरणों में देखेंगे।

उदाहरण–10. हल कीजिए–

$$2x + 3 = x + 8$$

हल : $2x + 3 = x + 8$

$\boxed{2x + 3 - x = x + 8 - x \qquad \text{(दोनों पक्षों से } x \text{ घटाने पर)}}$

या $2x + 3 - x = 8$ — सीधे पक्षांतरण द्वारा भी कर सकते हैं।

या $x + 3 = 8$

या $x = 8 - 3$

$\therefore\ x = 5$

दोनों पक्षों में चर रहने पर चर को एक पक्ष करने के लिए उसका पक्षांतरण करते हैं। इसके लिए उन चरों या चरों से युक्त पदों को उन्हीं तरीकों से पक्षांतरण करते हैं जैसे संख्याओं का करते हैं। जैसे– यदि $2x = x + 1$ तो $2x - x = 1$

उदाहरण–11. हल ज्ञात कीजिए–

$$5x - \frac{7}{2} = 14 - \frac{3}{2}x$$

हल : $5x - \frac{7}{2} = 14 - \frac{3x}{2}$

या $5x + \frac{3x}{2} = 14 + \frac{7}{2}$

या $\frac{5x}{1} + \frac{3x}{2} = \frac{14}{1} + \frac{7}{2}$

या $\frac{5x \times 2 + 3x}{2} = \frac{14 \times 2 + 7}{2}$

या $\frac{10x + 3x}{2} = \frac{28 + 7}{2}$

या $\frac{13x}{2} = \frac{35}{2}$

या $13x = \frac{35}{2} \times 2$

या $13x = 35$

$\therefore$ $x = \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13}$

2.5 समीकरण को सरल रूप में बदलकर हल करना

उपर्युक्त दो उदाहरणों में आपने देखा कि कठिन दिखनेवाले समीकरण भी कुछ चरण की संक्रिया के बाद सरल रैखिक समीकरण के रूप में आ जाते हैं, जिन्हें हल किया जा सकता

है। वज्र गुणन द्वारा सरल करने पर कुछ परिमेय रूपवाले समीकरण, सरल समीकरण के रूप में आ जाते हैं।

दिया गया है,

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3}$$

आप सोचिए, यदि दोनों पक्षों में हर को विलुप्त करना हो तो आप क्या करेंगे।

$$\left(\frac{x+1}{2}\right) \times 2 \times 3 = \left(\frac{x-1}{3}\right) \times 2 \times 3$$

या $\quad (x+1)\ 3 = (x-1)\ 2 \qquad$ (दोनों पक्षों को 2×3 से गुणा करने पर)

दोनों पक्षों से हर विलुप्त हो गया $\qquad$ समीकरण संतुलित रहा।

अब यदि आप वज्र गुणन से L.H.S. अतः बायें पक्ष के हर को सीधे, दायें पक्ष के अंश से गुणा करें, वह इसी प्रकार दायें पक्ष के हर को बायें पक्ष के अंश से–

$$\frac{(x+1)}{2} = \frac{(x-1)}{3}$$ तो भी आपको समान रूप ही प्राप्त होता।

तो तिर्यक् गुणन के बाद,

$$3 \times (x + 1) = 2\ (x - 1)$$

इस तथ्य के अलावा अन्य गणितीय संक्रिया का भी उपयोग समीकरण को सरल करने में करते हैं। अब निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा कठिन समीकरण को सरल करके उनका हल करते हैं।

उदाहरण–12. हल ज्ञात कीजिए–

$$\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$$

हल :

$$\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$$

या

$$\frac{6x+1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{x-3}{6}$$

या $\frac{6x+1+3}{3} = \frac{x-3}{6}$

या $\frac{6x+4}{3} = \frac{x-3}{6}$

या $6\,(6x + 4) = 3\,(x - 3)$ (तिर्यक् गुणा करने पर)

या $36x + 24 = 3x - 9$

या $36x - 3x = -9 - 24$

या $33x = -33$

या $x = \frac{-33}{33}$

$\therefore$ $x = -1$

उदाहरण–13. हल ज्ञात कीजिए–

$$\frac{x+1}{2x+3} = \frac{3}{8}$$

हल : $\frac{x+1}{2x+3} = \frac{3}{8}$

या $(x + 1) \times 8 = 3 \times (2x + 3)$ (तिर्यक् गुणा से)

या $8x + 8 = 6x + 9$

या $8x - 6x = 9 - 8$

या $2x = 1$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}$

उदाहरण–14. किसी आयत की आसन्न भुजाएँ 4 : 3 के अनुपात में है। यदि प्रत्येक 5 मी. से बढ़ जाए तो उनका अनुपात 5 : 4 हो जाता है तो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि आयत की आसन्न भुजाएँ $4x$ एवं $3x$ हैं।

प्रत्येक में 5 मी. की वृद्धि होने पर भुजाएँ $4x + 5$ एवं $3x + 5$ होगी।

प्रश्नानुसार,

$$\frac{4x+5}{3x+5} = \frac{5}{4}$$

या $\quad 4\,(4x+5) = 5\,(3x+5)$ (तिर्यक् गुणा करने पर)

या $\quad 16x + 20 = 15x + 25$

या $\quad 16x - 15x = 25 - 20$

$\therefore \quad x = 5$

$\therefore$ आसन्न भुजाएँ, $4x = 4 \times 5 = 20$ मी.

$3x = 3 \times 5 = 15$ मी.

प्रश्नावली – 2.3

निम्नलिखित समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए–

1. $\dfrac{7-6x}{9x} = \dfrac{1}{15}$

2. $\dfrac{z}{4} = \dfrac{z+15}{9}$

3. $x^2 - (x-2)^2 = 32$

4. $(x+4)^2 - (x-5)^2 = 9$

5. $(y+3)\,(y-3) - y\,(y+5) = 6$

6. $\dfrac{5x-4}{6} = 4x+1-\dfrac{3x+10}{2}$

7. $\dfrac{4y+1}{3} + \dfrac{2y-1}{2} - \dfrac{3y-7}{5} = \dfrac{47}{10}$

8. $\dfrac{0.3+0.7x}{x} = 0.95$

9. $\dfrac{15(2-x)-5(x+6)}{1-3x} = 6$

10. दो अंकों की संख्या का दहाई अंक, इकाई अंक का तिगुना है। यदि अंक बदल दिए जाएँ तो प्राप्त संख्या मूल संख्या से 36 कम हो जाती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

11. एक नाव धारा की दिशा में एक घाट से दूसरे घाट तक जाने में 9 घंटे लगाती है। धारा की विपरीत दिशा में यही दूरी 10 घंटे में पूरा करती है। यदि धारा की चाल 1 किमी./प्रति घंटा हो तो शांत जल में नाव की चाल एवं दोनों घाटों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

अध्याय – 3

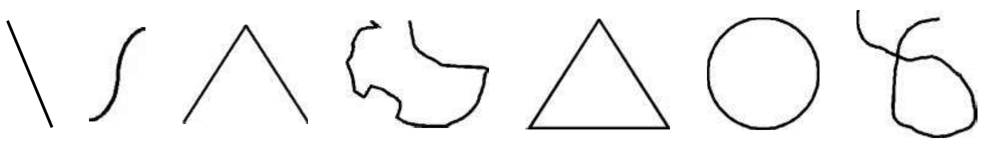
ज्यामितीय आकृतियों की समझ

(UNDERSTANDING OF GEOMETRICAL SHAPES)

बहुभुज (Polygon)

3.1 भूमिका

पिछली कक्षा में हमने रेखाओं के बारे में सीखा है। आइए, हम अपने नोट बुक के पेपर पर पेंसिल रखें तथा बिना उसे उठाए रेखा खींचने की गतिविधि करें। आप भी बिना पेंसिल उठाए अधिक से अधिक तरह की आकृतियाँ बनाइए। आपके द्वारा रेखा खींचने से बनी आकृतियाँ निम्न प्रकार की हो सकती हैं:

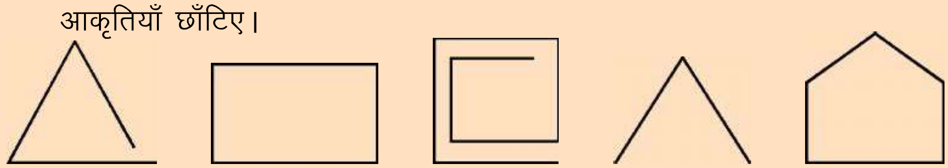


1 2 3 4 5 6 7

उपर की आकृतियों को ध्यान से देखिए। सोचिए ऊपर की आकृतियों के अलावे आपने जो अन्य आकृतियाँ बनाई हैं, उनमें से कौन–कौनसी सरल हैं? आकृति 7 को छोड़कर बाकी सभी आकृतियाँ सरल हैं क्योंकि ये कहीं भी स्वयं को नहीं काटती हैं। आकृति 5 एवं 6 सरल बंद आकृतियाँ हैं। आकृति 1, 2, 3 एवं 4 बंद आकृतियाँ नहीं हैं परन्तु सभी सरल आकृतियाँ है?

स्वयं करके देखिए

1. नीचे रेखाखंडों से बनी कुछ सरल आकृतियाँ दी गई हैं, इनमें से बंद तथा खुली आकृतियाँ छाँटिए।



....

2. पाँच–पाँच सरल खुली व सरल बंद आकृतियाँ बनाइए। पाँच–पाँच खुली व बंद ऐसी आकृतियाँ बनाइए जो सरल न हों।

गतिविधि

कक्षा के सभी बच्चे छोटे–छोटे समूहों में बैठ जायेंगे। सभी समूह के पास एक ही माप की बाँस की कुछ कमाचियाँ एवं साइकिल के वॉल–ट्यूब के कुछ टुकड़े रहेंगे। शिक्षक सभी बच्चों को निर्देशित करेंगे कि वे बाँस की कमाचियों एवं वॉल ट्यूब की सहायता से विविध बंद आकृतियाँ बनाइए। तब बच्चे अपने–अपने समूह में बाँस की कमाचियों एवं वॉल–ट्यूब की सहायता से बंद आकृतियाँ बनाना शुरू कर देंगे। शिक्षक बीच–बीच में बच्चों को निर्देशित भी करते रहेंगे कि वे नई आकृतियाँ बनाते समय हर बार कमाचियों की संख्या एक–एक करके बढ़ाते जाने की सोचें। हर बार दो कमाचियों को जोड़ने के लिए वॉल–ट्यूब का इस्तेमाल करेंगे। जब समूह कुछ आकृतियाँ बनाने का प्रयास कर लेंगे तब शिक्षक निम्न प्रकार की तालिका सभी समूहों को बनाने को देंगे।

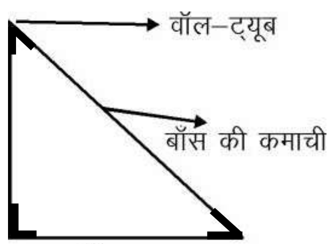
क्र.सं.	बनी आकृति का रेखाचित्र	आकृति में लगी कुल कमाचियों की संख्या	आकृति में लगी कुल वॉल– ट्यूबों की संख्या	आकृति का संभावित ज्यामितीय नाम

समूह बारी–बारी से अपने द्वारा बनाई गईं आकृतियों को प्रदर्शित करते हुए उसमें लगे कुल सामान का विवरण प्रस्तुत करेंगे। कितनी कमाचियाँ लगीं? कितने वालट्यूब लगे?

3.2.1 बहुभुज (Polygon) :

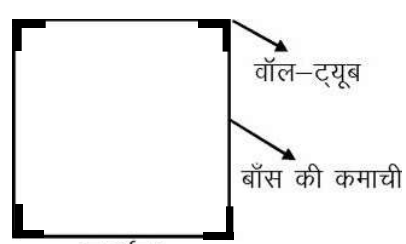
रेखाखंडों की सहायता से बनी सरल एवं बंद आकृतियाँ बहुभुज कहलाती हैं। ऊपर की गतिविधि में आपके द्वारा बनाई गई सभी बंद आकृतियाँ बहुभुज के उदाहरण हैं। आकृतियों को बनाने में जितनी कमाचियों का इस्तेमाल किया गया है उतनी ही उस बहुभुज की भुजाएँ होंगी। जितने वॉल–ट्यूब का इस्तेमाल किया गया है वो उस बहुभुज के शीर्ष हैं।

भुजाएँ–3
शीर्ष–3



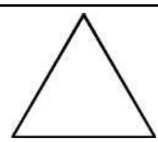
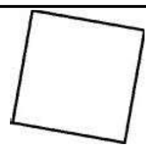
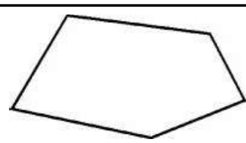
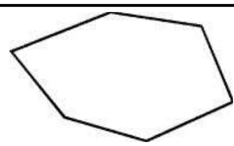
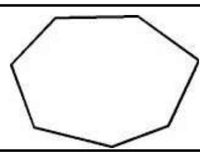
त्रिभुज

भुजाएँ–4
शीर्ष–4



चतुर्भुज

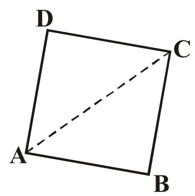
यहाँ हमने देखा कि तीन कमाचियों एवं तीन वॉल–ट्यूबों से बनी बंद आकृति त्रिभुज है, इसमें तीन भुजाएँ व तीन शीर्ष हैं। इसी तरह चार कमाचियों एवं चार वॉल–ट्यूबों से बनी बंद आकृति चतुर्भुज है। बहुभुज का नामकरण हम उसकी भुजा या उसके शीर्षों की संख्या के आधार पर ही करते हैं।

आकृति का नमूना	आकृति में भुजा या शीर्षों की संख्या	आकृति का नाम
	03	त्रिभुज
	04	चतुर्भुज
	05	पंचभुज
	06	षड्भुज
	07	सप्तभुज

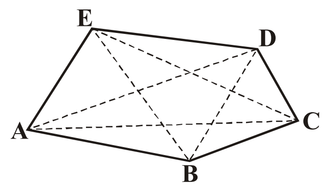
इसी प्रकार आठ भुजाओंवाले बहुभुज को अष्टभुज, नौ भुजाओंवाले बहुभुज को नवभुज तथा दस भुजाओंवाले बहुभुज को दसभुज कहेंगे। यानी n भुजाओंवाले बहुभुज को n–भुज कहेंगे। सोचिए सरल बंद आकृति में भुजा व शीर्ष की संख्या में क्या संबंध है?

3.2.2 बहुभुज का विकर्ण

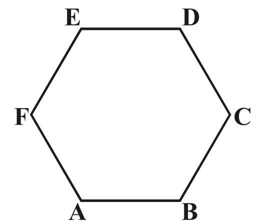
नीचे बनी बहुभुज की आकृतियों को ध्यान से देखिए तथा उसमें उनके किन्हीं दो शीर्षों को जो आसन्न नहीं हों यानी ठीक बगल के नहीं हों, को स्केल की सहायता से मिलाइए। चतुर्भुज ABCD में A शीर्ष को C शीर्ष से जोड़ सकते हैं, B और D से वह पहले जुड़ा है। इसी तरह B छोर को D से जोड़ सकते हैं। यानी चतुर्भुज में ऐसी दो नई रेखाएँ खींच सकते हैं।



1



2



3

दूसरी आकृति पंचभुज है, राखी कहती है, इस आकृति में 5 नई रेखाखण्ड खींच सकते हैं और षट्भुज में 9, क्या आप राखी से सहमत हैं? खींचकर देखिए।

बहुभुज में उसके किसी दो शीर्षों (आसन्न शीर्षों को छोड़कर) को मिलानेवाला यह रेखाखंड उस बहुभुज का विकर्ण कहलाता है।

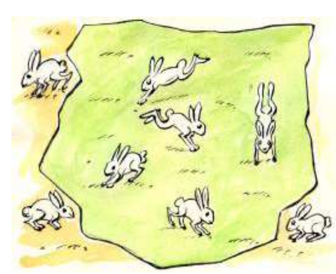
पता कीजिए कि सप्तभुज और अष्टभुज में कितने–कितने विकर्ण खींच सकते हैं और तालिका में भरिए।

उपर बने बहुभुज में शीर्षों तथा खींचे गए विकर्णों के नाम लिखिए।

आकृति–1	शीर्ष :–	.... , ... , ... , ...
चतुर्भुज	विकर्ण :–	.........., ...
आकृति–2	शीर्ष :–	.... , ... , ... , ... , ...
पंचभुज	विकर्ण :–	.... , ... , ... , ... , ...
आकृति–3	शीर्ष :–	.... , ... , ... , ... , ...
षट्भुज	विकर्ण :–	.... , ... , ... , ... , ...

सोचें क्या एक त्रिभुज में विकर्ण खींचे जा सकते हैं?

3.2.3 बहुभुज का अभ्यंतर एवं बहिर्भाग (Interior and exterior of a Polygon)



बगल के चित्र को ध्यान से देखिए, इसमें एक खेत और कुछ खरगोश हैं। कई खरगोश चतुर्भुजाकार खेत के अंदर तथा कई बाहर हैं।

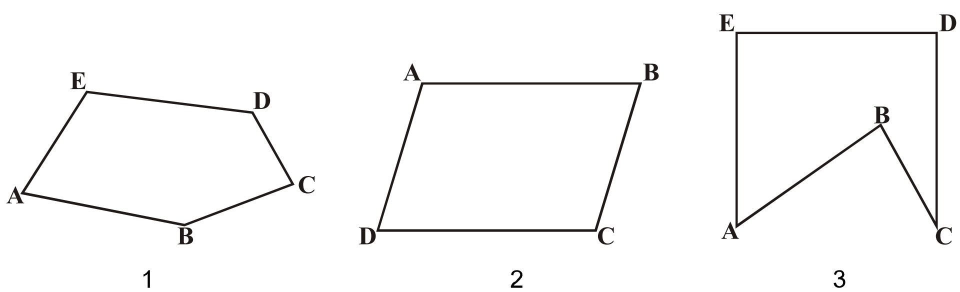
चतुर्भुज के अंदर का भाग इसका अभ्यंतर तथा बाहर का भाग बहिर्भाग कहलाता है। इस प्रकार इस चतुर्भुजाकार खेत के बहिर्भाग में तीन तथा अभ्यंतर भाग में चार खरगोश

हैं। इसी प्रकार हर बंद आकृति के अंदर का हिस्सा उसका अभ्यंतर है और बाहर का हिस्सा बहिर्भाग कहलाता है। पाँच बंद आकृतियाँ बनाकर उनके बहिर्भाग के कुछ हिस्से में हरा और अभ्यंतर में पीला रंग करें। सोचें! क्या अभ्यंतर एवं बहिर्भाग किसी बंद आकृति में ही बताना संभव है?

बहुभुज के कुछ प्रकार

उत्तल एवं अवतल बहुभुज

नीचे तीन बहुभुज दिए गए हैं, इनमें क्रम संख्या 3 पर अंकित बहुभुज अभी तक बना अन्य बहुभुजों से अलग हैं। क्या आप बता सकते हैं कि यह अलग क्यों हैं?



यदि ऊपर के तीनों बहुभुजों में हम विकर्ण खींचें तो तीसरे बहुभुज का एक विकर्ण जो शीर्ष A एवं B को मिलाता है बहुभुज के बाहर होगा। यह एक अवतल बहुभुज का उदाहरण है। बाकी सब बहुभुज उत्तल बहुभुज हैं। तीन ऐसे अवतल बहुभुज और बनाइए तथा इनमें उन विकर्णों को पहचानिए जो पूरे के पूरे अथवा उसका कुछ भाग बहुभुज के बाहर हो।

3.2.4 सम एवं विषम बहुभुज

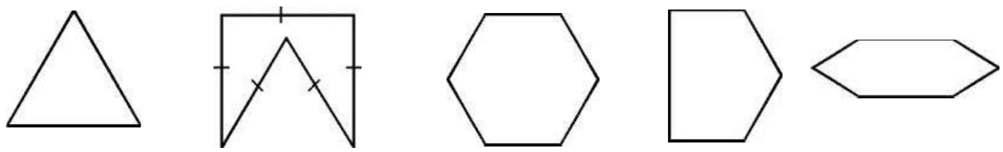
जब बहुभुज में सभी भुजाएँ एवं सभी अंतःकोण समान माप के हों, तो वह सम बहुभुज कहलाता है। वर्ग एवं समबाहु त्रिभुज समबहुभुज के उदाहरण हैं। समबहुभुज में सभी भुजाएँ एवं सभी अन्तःकोण समान माप के होते हैं।

सोचिए

– क्या आयत, समकोण त्रिभुज एवं समचतुर्भुज समबहुभुज हैं?

– क्या समबाहु त्रिभुज के अतिरिक्त कोई और त्रिभुज भी समबहुभुज का उदाहरण हो सकता है? क्या कोई अवतल बहुभुज समबहुभुज हो सकता है? कारण भी सोचिए।

जो बहुभुज समबहुभुज नहीं हैं वे सब विषम बहुभुज हैं।

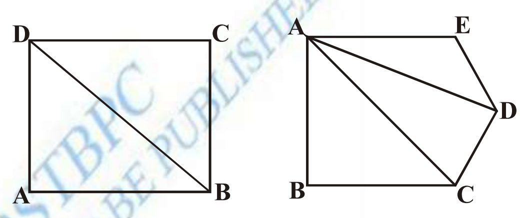


नीचे के चित्र में बनावट के आधार पर सम एवं विषम बहुभुज की पहचान कीजिए।

....

3.2.5 बहुभुज के अन्तःकोणों की मापों का योग

त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज आदि बहुभुज के उदाहरण हैं।



हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों की माप 180^0 होती है। इसकी सहायता से हम चतुर्भुज एवं पंचभुज के अन्तःकोणों की माप ज्ञात करेंगे। इसके लिए इनके किसी एक शीर्ष से आसन्न शीर्षों को छोड़ते हुए शेष शीर्षों को मिलायेंगे तथा बहुभुज को त्रिभुजों में बाँटेंगे। चतुर्भुज ABCD में ABD और BCD दो त्रिभुज हैं। इनके कोणों का योग चतुर्भुज के चारों शीर्षों के अंतःकोणों का योग है। याने अंतःकोणों का योग 2 x दो समकोण है। अतः अंतःकोणों का योग 4 समकोण है। इसी तरह ABCDE में 3 त्रिभुज हैं यानी इसके अंतःकोणों का योग 6 समकोण है। फिर बहुभुज में जितने त्रिभुज बनेंगे, उस बहुभुज के अन्तःकोणों का योग 180^0 का उतना गुणा होगा। यानी चतुर्भुज ABCD के अन्तःकोणों का योग 4 समकोण है और पंचभुज ABCDE में यह योग 6 समकोण है।

इस प्रकार षट्भुज एवं सप्तभुज में क्रमशः 4 एवं 5 त्रिभुज बनेंगे इसलिए इनके अन्तःकोणों का योग क्रमशः 720^0 एवं 900^0 होगा। क्या आप इससे सहमत हैं? बनाकर देखिए।

आइए सोचें कि क्या हम बहुभुज के अन्तःकोणों के योग की माप को ज्ञात करने के लिए कोई पैर्टन बना सकते हैं क्या? इसके लिए अभी तक इकट्ठे किए गए आँकड़ों को तालिका में भरिए :

बहुभुज का नाम	भुजाओं की संख्या	बहुभुज में बननेवाले त्रिभुजों की संख्या	अंतःकोण की माप	अन्तःकोण ज्ञात करने का पैटर्न	बहुभुज के अन्तःकोणों का योग
त्रिभुज	3	$1=(3-2)$	2 समकोण	$(3-2)\times180^0$	180^o
चतुर्भुज	4	$2=(4-2)$	4 समकोण	$(4-2)\times180^0$	360^o
पंचभुज	5	$3=(5-2)$	6 समकोण	$(5-2)\times180^0$	540^o
षट्भुज	6	$4=(6-2)$	8 समकोण	$(6-2)\times180^0$	720^o
सप्तभुज	7	$5=(7-2)$	10 समकोण	$(7-2)\times180^0$	900^o
n भुज	n	$n-2$	$2\,(n\text{-}2)$ समकोण	$(n-2)\times180^0$	$(n-2)\times180^o$

इस प्रकार बहुभुज की भुजा की संख्या ज्ञात रहने पर हम उसके सभी अन्तःकोणों की मापों का योग आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। n भुजाओंवाले बहुभुज के अंतःकोणों की मापों का योग $2\,(n-2)$ समकोण है।

उदाहरण–1. एक बहुभुज की भुजाओं की कुल संख्या 9 हो तो असके अन्तःकोणों की मापों का योग क्या होगा?

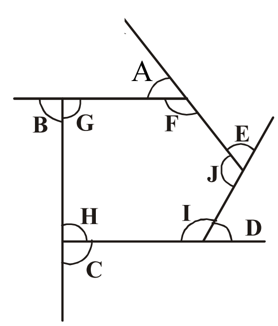
हल : बहुभुज की भुजाओं की संख्या = 9

अर्थात् $n = 9$,

इस बहुभुज के अन्तःकोणों की माप $2\,(9-2)$ समकोण यानी 14 समकोण

$= 14 \times 90^o = 1260^o$

3.2.6 बहुभुज के बाह्य कोणों की मापों का योग



दायीं ओर बने पंचभुज के चित्र को ध्यान से देखिए इसमें ABCD एवं E से इसके बाह्य कोणों को दिखाया गया है। FGHIJ इसके पाँच अंतःकोण हैं। हमें इन बाह्य कोणों की मापों का योग ज्ञात करना है।

हमें पता है कि पंचभुज के अन्तःकोणों की माप का योग $2(5-2)$ समकोण = 6 समकोण होता है।

कोण F + कोण G + कोण H + कोण I + कोण J = 6 समकोण

रचना से,

हम देख सकते हैं कि अन्तःकोण F + बाह्य कोण A = 180^0 (दोनों एक ही सरल रेखा पर के कोण हैं)

उसी प्रकार अन्तःकोण G + बाह्य कोण B = 180^0 = 2 समकोण

अन्तःकोण H + बाह्य कोण C = 180^0 = 2 समकोण

अन्तःकोण I + बाह्य कोण D = 180^0 = 2 समकोण

अन्तःकोण J + बाह्य कोण E = 180^0 = 2 समकोण

तथा अन्तः कोण F + बाह्य कोण A = 180^0 = 2 समकोण

इन सभी कोणों का योग करने पर

अन्तःकोण F + बाह्य कोण A + अन्तःकोण G + बाह्य कोण B + अन्तःकोण H + बाह्य कोण C + अन्तःकोण I + बाह्य कोण D + अन्तःकोण J + बाह्य कोण E

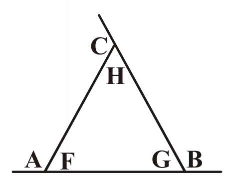
$= 180^0 + 180^0 + 180^0 + 180^0 + 180^0 =$ 10 समकोण

इस प्रकार, अन्तःकोण (F + G + H + I + J)+बाह्य कोण (A + B + C + D + E) = 900^0 = 10 समकोण

अतः, बाह्य कोण (A + B + C + D + E) = 900^0 − अन्तःकोण (F + G + H + I + J)

बाह्य कोण (A + B + C + D + E) = $900^0 - 540^0 = 360^0$ = 4 समकोण

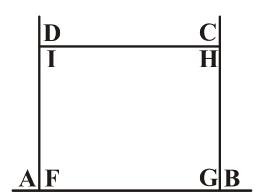
यानी पंचभुज के बाह्यकोणों की मापों का योग 360^0 है। इसी प्रकार एक त्रिभुज व चतुर्भुज को लें $\angle A + \angle F + \angle B + \angle G + \angle C + \angle H =$ 6 समकोण



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle F + \angle G + \angle H =$ 6 समकोण

$\angle A + \angle B + \angle C +$ 2 समकोण = 6 समकोण

अतः $\angle A + \angle B + \angle C =$ 4 समकोण



$\angle A + \angle F + \angle B + \angle G + \angle C + \angle H + \angle D + \angle I =$ 8 समकोण

या $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle F + \angle G + \angle H + \angle I =$ 8 समकोण

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D =$ 4 समकोण

क्योंकि

$\angle F + \angle G + \angle H + \angle I =$ 4 समकोण

इन बहुभुजों के सभी बाह्य कोणों का जोड़ 4 समकोण है। वास्तव में सभी वाह्य कोणों को मिलाकर एक बिन्दु के गिर्द एक पूरा चक्कर लग जाता है, तभी बहुभुज के बाह्य कोणों का योग 4 समकोण ही आता है। यानी एक बंद आकृति का पूरा चक्कर उसके बाह्य कोणों का जोड़ होता है, अतः कितनी भी भुजाएँ हों बाह्य कोण का योग 4 समकोण ही होगा।

उसी प्रकार किसी बहुभुज के सभी बाह्य कोणों की मापों का योग ज्ञात करने हेतु हमें उस बहुभुज का पूरा एक चक्कर लगाना पड़ता है। किसी भी उत्तल बंद आकृति का पूरा चक्कर लगा कर हम 360^0 का कोण बनाते हैं।

समबहुभुज के सभी बाह्य कोण भी समान माप के होते हैं। क्या आप सहमत हैं?

आइए बाह्य कोणों की मापों के योग पर आधारित कुछ प्रश्नों को हल करें :

उदाहरण–2 एक पंचभुज के पाँच बाह्य कोणों में से चार कोण क्रमशः 75^0, 55^0, 80^0 एवं 60^0 हैं उसका पाँचवा बाह्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल : पंचभुज के बाह्य कोणों की मापों का योग 360^0 होता है।

पंचभुज के चार कोण क्रमशः 75^0, 55^0, 80^0 एवं 60^0 हैं।

इसलिए पाँचवाँ कोण $= 360^0 - (75^0 + 55^0 + 80^0 + 60^0)$

$= 360^0 - 270^0$

$= 90^0$

उदाहरण–3 एक समबहुभुज का एक बाह्य कोण 60^0 है, तो उस बहुभुज की कितनी भुजाएँ हैं?

हल : बहुभुज के बाह्य कोणों की मापों का योग 360^0 होता है।

चूँकि समबहुभुज का प्रत्येक बाह्य कोण समान माप का होता है।

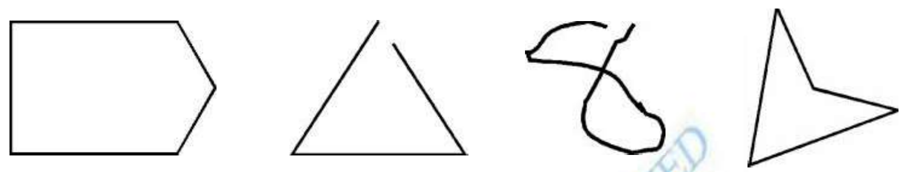
इसलिए भुजाओं की संख्या $= \dfrac{360}{60} = 6$

अभीष्ट बहुभुज एक षट्भुज है।

प्रश्नावली 3.1

1. सरल एवं बंद आकृति क्या होती हैं? उदाहरण देते हुए उनके प्रमुख गुणों को समझाइए।

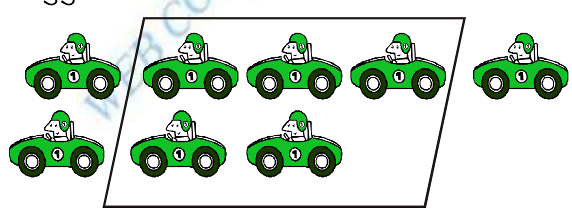
2. निम्न आकृतियों में से पहचान करें की कौन–सी सरल हैं, कौन सी बंद हैं व सरल हैं, कौन सी खुली हैं, कौन–सी उत्तल एवं कौन–सी अवतल आकृति हैं?



3. नीचे दिए गए बहुभुज का नाम लिखिए तथा उसके सभी संभावित विकर्ण खींचिए :

विकर्णों की संख्या कितनी है?

4. नीचे के चित्र में कुछ कारें खड़ी हैं। बीच में चौकोर आकार का मैदान है। बताइए कि कितनी कार बहुभुज मैदान के अभ्यंतर भाग में हैं? कितनी बहिर्भाग में हैं?



5. नीचे के दो कॉलम में से एक में बहुभुज का नाम तथा दूसरे में उसके अंतः कोणों के भुजाओं की मापों का योग दिया गया है। बहुभुज के नाम को उनके अंतः कोणों के मापों के योग से मिलान कीजिए।

त्रिभुज	पंचभुज	सप्तभुज	नवभुज	षट्भुज
900°	1260°	180°	720°	540°

6. एक बहुभुज के अन्तःकोणों के मापों का योग 540^0 है उसमें कितनी भुजाएँ हैं? बताइए।
7. एक समबहुभुज की आठ भुजाएँ हैं,उसके प्रत्येक बाह्यकोणों की माप ज्ञात कीजिए। प्रत्येक अंतःकोण कितने माप का होगा?

3.3.1 चतुर्भुज (Quadrilateral)

आइए नीचे बने खानों में विभिन्न आकार के चार भुजावाले उत्तल बहुभुज बनाएँ।

ऊपर के खानों में बनाई गई बहुभुज आकृतियों को ध्यान से देखिए, उनमें क्या समानताएँ हैं?

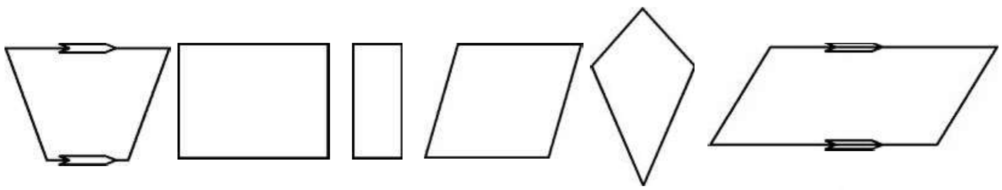
– ये सभी आकृतियाँ चार भुजाओं से बनी हैं।
– इन सभी आकृतियों में चार शीर्ष हैं।
– इन सभी आकृतियों में चार कोण हैं।

स्वयं करके देखिए

1. चतुर्भुज के और क्या–क्या गुण आप बता सकते हैं?
   (जैसे बाह्य कोणों के माप का जोड़............)
2. एक चतुर्भुज का दूसरा, तीसरा तथा चौथा अन्तःकोण, पहले अन्तःकोण का क्रमशः दोगुना, तिगुना तथा चौगुना है तो चारों अन्तःकोणों की माप बताइए।
   संकेत
   माना कि चतुर्भुज का पहला कोण x है, तब दूसरा कोण $=2x$
   तीसरा कोण $=3x$
   तथा चौथा कोण $=4x$
3. ऐसे 3 और सवाल बनाइए और दोस्तों को हल करने को दीजिए।

3.4 चतुर्भुज के प्रकार (Kind of Quadrilateral)

नीचे दिए चतुर्भुजों को देखिए। ये सब अलग–अलग प्रकार के हैं।



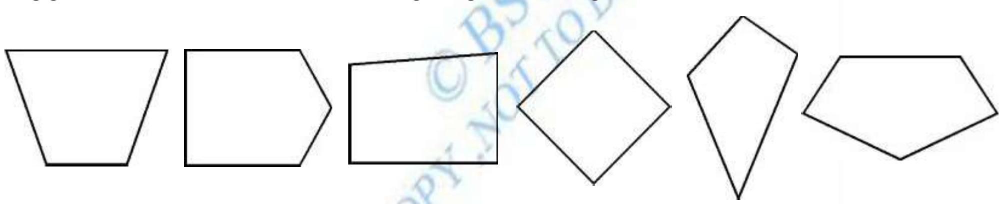
1 2 3 4 5 6

सामान्य चतुर्भुज के गुणों के अलावा इन सबमें कुछ अतिरिक्त गुण हैं।

3.4.1 समलंब (Trapezium)

आकृति 1 में सम्मुख भुजाओं के दो युग्मों से एक युग्म समान्तर है। ऐसा चतुर्भुज समलंब चतुर्भुज कहलाता है। चित्र 1 में समांतर सम्मुख भुजाओं को तीर से दिखाया गया है।

नीचे बने चित्रों में पहचान कीजिए कि, कौन समलंब चतुर्भुज है और कौन नहीं? जो चतुर्भुज समलंब है उसके समांतर सम्मुख भुजाओं के युग्म को तीर के निशान से दिखाइए।



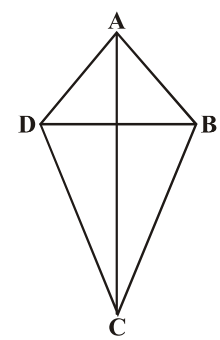
1 2 3 4 5 6

....

कुछ करें

1. आप अपने तथा अपने मित्रों के ज्यामितीय बक्से से चार सेटस्क्वेयर लीजिए तथा इनके उपयोग से विभिन्न तरह के समलंब प्राप्त कीजिए तथा उसकी आकृति अपने नोटबुक में अंकित कीजिए।
2. एक ऐसी समलंब की आकृति बनाइए जिसमें उसके दोनों असमान्तर भुजाएँ समान लम्बाई की हों। आपके द्वारा बनाई गई यह आकृति समद्विबाहु समलंब कहलायेगा।

3.4.2 पतंग (Kite)



बसंत ऋतु में आपने लोगों को आसमान में पंतग उड़ाते हुए देखा होगा। हालाँकि दिखने में ये पतंगें अलग–अलग होती हैं किन्तु इनमें से अधिकांश एक निश्चित आकृति की होती हैं। पतंग की आकृति भी एक विशेष प्रकार का चतुर्भुज होती है। आइए इसके कुछ गुणों को देखें।

– चतुर्भुज के समान गुणों के अलावा इसमें आसन्न भुजाओं के दो ऐसे युग्म (जोड़े) होते हैं जिनमें शामिल दोनों रेखाओं की लम्बाई समान होती हैं। बगल में बने पतंग ABCD को घ्यान से देखिए यहाँ आसन्न भुजाओं का पहला युग्म AD = AB तथा दूसरा युग्म BC = DC

– पतंग के दोनों विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

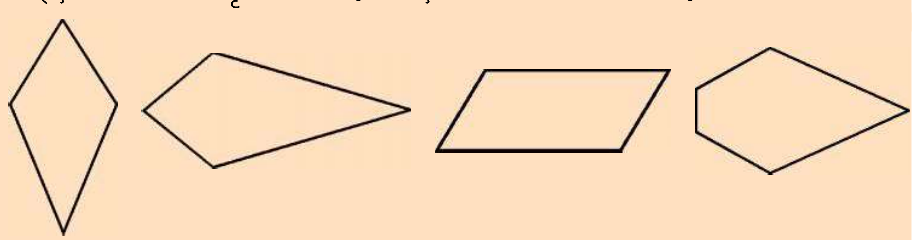
– पतंग का एक विकर्ण उस पर बने दोनों कोणों का समद्विभाजक भी है।

– पतंग का एक विकर्ण सममिति अक्ष भी है अर्थात् पतंग एक सममित आकृति होती है। दी गई आकृति में सममित अक्ष कौन–सा है? कारण भी बताइए।

– पतंग में सम्मुख कोणों के दो युग्मों में एक बराबर होते हैं। दी गई आकृति में कौन–सा युग्म बराबर है?

कुछ करें

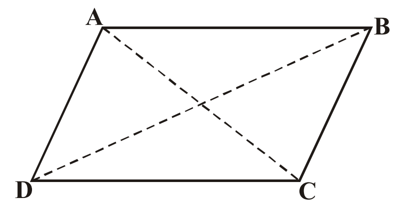
1. आइए नीचे बनी आकृतियों में पहचानिए कि कौन–कौन पतंग हैं?



इनमें आसन्न भुजाओं के इनके शीर्षो का नाम लिखते हुए युग्म व बराबर कोणों का युग्म भी पहचानिए व सममित अक्ष खींचिए।

2. क्या कोई समलम्ब चतुर्भुज पतंग भी हो सकता है? कारण सहित समझाइए।
3. एक पंतग की दो असमान आसन्न भुजाएँ क्रमशः 7 सेमी और 5 सेमी हैं, उसकी परिमिति क्या होगी ?

3.4.3 समांतर चतुर्भुज (Parallelogram)



बगल के चित्र को ध्यान से देखिए। इसमें चतुर्भुज के आमने–सामने की भुजाएँ यानी सम्मुख भुजाओं के दोनों जोड़े समांतर है। ऐसा चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज कहलाता है।

- ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।
- यहाँ सम्मुख भुजा का एक युग्म AB और CD तथा दूसरा युग्म AD और BC आपस में समांतर हैं।
- समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं। कोण A = कोण C तथा कोण D = कोण B, क्या आप समान्तर रेखाएँ व उन पर खींची गई तिर्यक् रेखा के आधार पर इसे दिखा सकते हैं?
- समांतर चतुर्भुज में आमने सामने की भुजाएँ समान होती हैं, अर्थात् AB = CD, क्या आप इसे त्रिभुज की सर्वांगसमता उपयोग करके दिखा सकते हैं?
- समांतर चतुर्भुज में आसन्न कोण संपूरक होते है अर्थात् कोण A + कोण B = 180^0, कोण B + कोण C = 180^0

  कोण C + कोण D = 180^0 एवं कोण D + कोण A = 180^0

  क्या आप इसे साबित कर सकते हैं?
- समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

  आपस में और शिक्षक से चर्चा कर यह सब दिखाने का प्रयास कीजिए।

उदाहरण–4. एक समांतर चतुर्भुज का एक कोण 110^0 हो तो उसके शेष कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज में आसन्न कोण संपूरक होते हैं।

प्रश्नानुसार, पहला आसन्न कोण 110^0 है

तब दूसरा आसन्न कोण = $180^0 - 110^0 = 70^0$

पुनः हम यह भी जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

अतः समांतर चतुर्भुज का तीसरा एवं चौथा कोण क्रमशः 110^0 एवं 70^0 होगा।

इस प्रकार समांतर चतुर्भुज के चारो कोण क्रमशः 110^0, 70^0,110^0 एवं 70^0 होगा।

उदाहरण–5. एक समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ क्रमशः 8 सेमी एवं 6 सेमी हैं। उसकी परिमिति क्या होगी ?

हल : हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज में आमने–सामने की भुजाएँ समान लम्बाई की होती हैं।

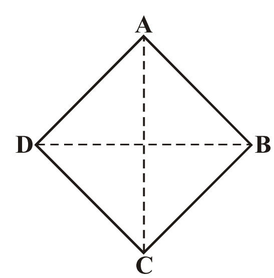
अतः दो आसन्न भुजाएँ यदि 8 सेमी एवं 6 सेमी हों तो समांतर चतुर्भुज की शेष दोनों भुजाएँ क्रमशः 8 सेमी एवं 6 सेमी होंगी।

इसलिए समांतर चतुर्भुज की परिमिति = 8 सेमी + 6 सेमी + 8 सेमी + 6 सेमी = 28 सेमी।

3.4.4 समचतुर्भुज (Rhombus)

ऐसा चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ समान लम्बाई की हों, वह समचतुर्भुज कहलाता है।

– ABCD एक समचतुर्भुज है।



– समचतुर्भुज के सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं। अर्थात् कोण A = कोण C तथा कोण D = कोण B, सोचिए कैसे?

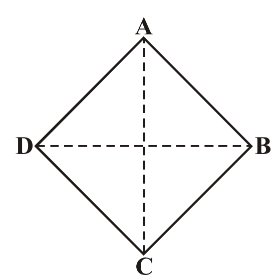
– इसमें सम्मुख भुजा का एक युग्म AB और CD तथा दूसरा युग्म AD और BC आपस में समांतर होगा। कैसे?

– त्रिभुजों की सर्वांगसमता के आधार पर बताइए कि समचतुर्भुज में आसन्न कोण संपूरक होते हैं? अर्थात् कोण A + कोण B = 180^0 , कोण B + कोण C = 180^0

कोण C + कोण D = 180^0 एवं कोण D + कोण A = 180^0

– समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

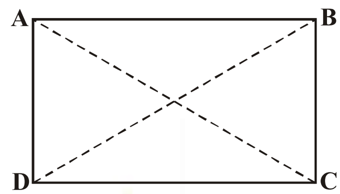
उदाहरण–6 बगल की आकृति में ABCD एक समचतुर्भुज है। इसका एक विकर्ण 10 सेमी तथा एक भुजा 13 सेमी हैं तो उसका दूसरा विकर्ण क्या होगा?



हल : हम जानते हैं कि समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं तथा समचतुर्भज को चार बराबर समकोण त्रिभुजों में बाँटते हैं। यदि हम एक समकोण त्रिभुज को लें तो उसका विकर्ण 13 सेमी तथा समकोण बनानेवाली दो भुजाओं में से एक भुजा 5 सेमी लम्बाई की होगी। इस

प्रकार समकोण बनानेवाली दूसरी भुजा की लम्बाई = 12 सेमी (सोचिए कैसे?)
इस प्रकार दूसरा विकर्ण $2 \times 12 = 24$ सेमी होगा।

3.4.5 आयत (Rectangle)



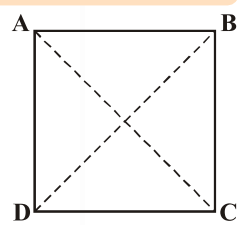
ऐसा चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हों तथा प्रत्येक अन्तःकोण समकोण हो, आयत कहलाता है।

- ABCD एक आयत है।
- आयत की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं अर्थात् AB = CD तथा BC = DA
- आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है। अर्थात् कोण A = ∠B = ∠C = ∠D = 90^0
- आयत के विकर्ण समान लम्बाई के होते हैं। AC = BD
- आयत के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

कुछ करें

1. एक आयत की लम्बाई 4 सेमी तथा चौड़ाई 3 सेमी है, उसके दोनों विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
2. बताइए एक समांतर चतुर्भुज कब आयत होगा ?

3.4.6 वर्ग (Square)



ऐसा चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों तथा प्रत्येक अन्तःकोण समकोण हो, वर्ग कहलाता है।

- ABCD एक वर्ग है।
- वर्ग की चारों भुजाएॅ समान होती है अर्थात् AB = CD = BC = DA
- .... A = ∠B = ∠C = ∠D = 90^0
- वर्ग के विकर्ण समान लम्बाई के होते हैं। AC = BD
- वर्ग के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

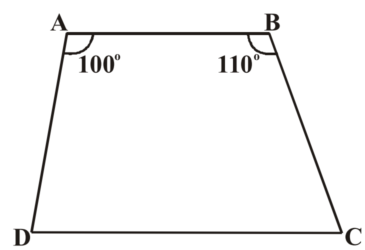
कुछ करें

सोंचिए और बताइए

1. क्या सभी वर्ग एक आयत है, यदि हाँ तो कैसे?
2. क्या सभी वर्ग एक समचतुर्भुज है, यदि हाँ तो कैसे?
3. क्या सभी वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है, यदि हाँ तो कैसे?

प्रश्नावली 3.2

1. समलंब ABCD में कोण A = 100^0 तथा कोण B = 110^0 हैं तब शेष दोनों दोनों कोणों की माप क्या होगी?



2. एक समांतर चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ 3 : 2 के अनुपात में हैं यदि पहली आसन्न भुजा 6 सेमी हो तब उस समांतर चतुर्भुज की परिमिति क्या होगी ?
3. समांतर चतुर्भुज का एक कोण 120^0 है, तो उसके बाकी तीनों कोणों की माप कया होगी?
4. एक समचर्तुभुज के विकर्णों की लम्बाई 6 मीटर एवं 8 मीटर है तो उसके प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
5. एक आयत और समांतर चतुर्भुज में क्या समानता और क्या अंतर हैं? लिखिए।

अध्याय – 4

आँकड़ों का प्रबंधन

(DATA MANAGEMENT)

4.1 सूचनाओं की खोज में

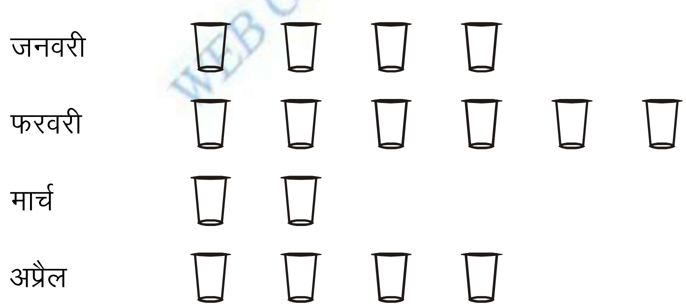
हम अपने आसपास प्रायः समाचार पत्रों, पत्रिकाओं और दूरदर्शन पर कई तरह के आँकड़े, तालिकाएँ व आलेख देखते हैं। ये चीजें हमें कुछ जानकारियाँ देते हैं। आप भी अपने आसपास से सूचनाएँ एकत्रित कर अध्ययन कर सकते हैं। आँकड़े एकत्रित करने के पहले हमें यह जानना होगा कि हम क्या अध्ययन करना चाहते हैं जैसे आप जानना चाहते हैं कि आपकी कक्षा के साथियों का औसत वजन क्या है? इसे जानने के लिए कक्षा के साथियों के वजन का आँकड़ा एकत्रित करना पड़ेगा।

आँकड़े क्या बताते हैं? इसे सुस्पष्ट करने के लिए आलेखीय रूप से (graphically) दर्शाते हैं। पिछली कक्षा में विभिन्न प्रकार के आलेख आपने पढ़ा हैं, आइए उन्हें फिर से देखें–

1. **चित्रालेख (Pictograph)**

संकेतों का प्रयोग करते हुए, आँकड़ों का चित्रीय निरूपण:

 = एक संकेत 1000 ग्लासों के उत्पादन को बताता है

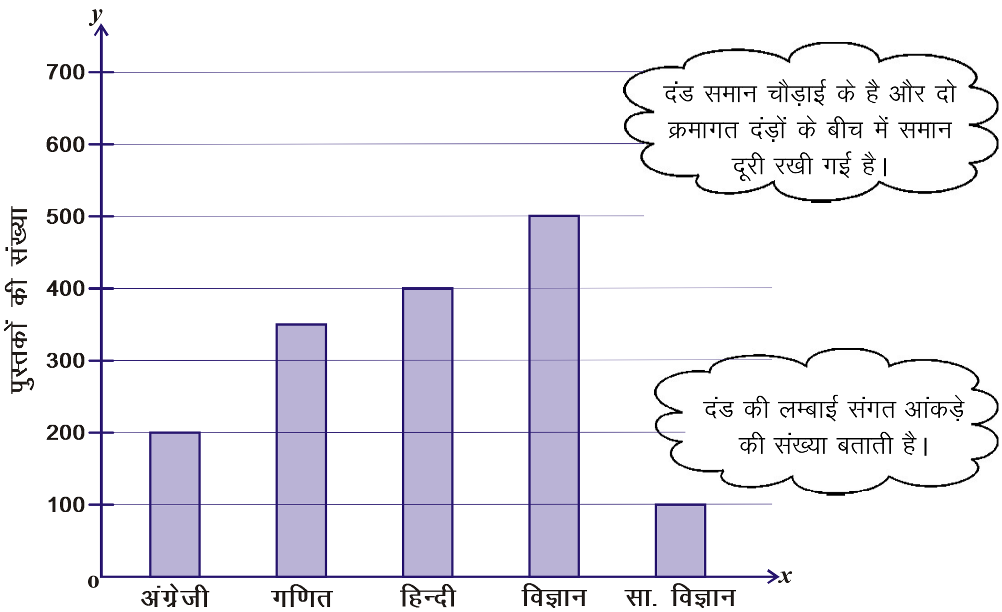


अ. मार्च के महीने में कितने ग्लासों का उत्पादन हुआ?

ब. किन दो महीनों में बराबर उत्पादन हुआ?

2. दंड आलेख (Bar-graphs)

दंड आलेख में प्रत्येक दंड की चौड़ाई समान होती है तथा वे एक–दूसरे से समान दूरी पर होते हैं। दंड की लंबाई (ऊँचाई) पैमाना के अनुसार दिए गए आँकड़े के संगत होती है, इसे हम संगत आंकड़ों के समानुपातिक भी कह सकते हैं।



अ. सबसे अधिक किस विषय की पुस्तकें हैं और वह कितनी है?

ब. सबसे कम किस विषय की पुस्तकें हैं और वह कितनी है?

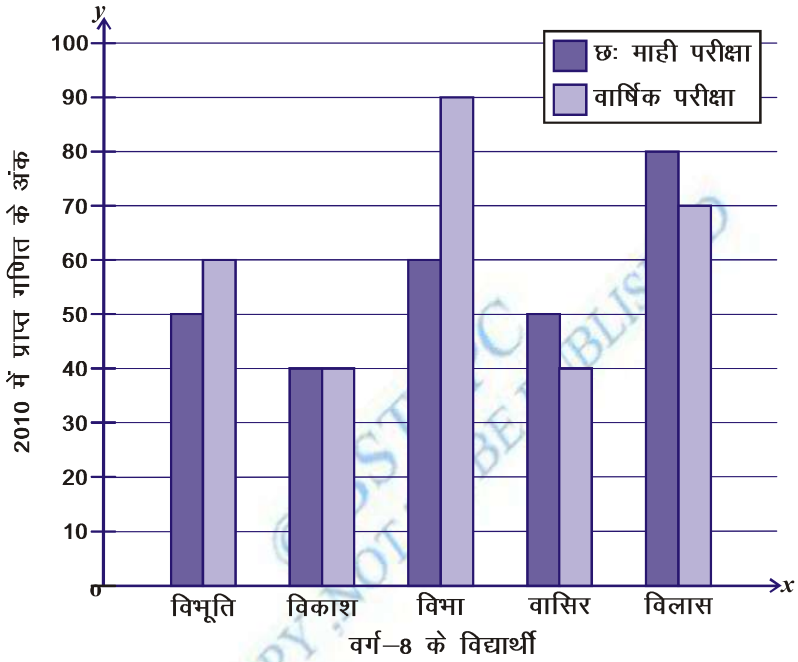
स. पुस्तकालय में कुल कितनी पुस्तकें हैं?

द. इस दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई है?

य. किन दो विषयों की पुस्तकों की संख्या का अन्तर सबसे कम है?

3. **दोहरे दंड आलेख (Double Bar Graphs)**

जब हमें आँकड़ों के दो समूहों की तुलना करने की आवश्यकता होती है तो दोहरे दंड आलेख (Double Bar Graphs) खींचते हैं।



दंडों को देखकर अब आप निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए–

अ. किस विद्यार्थी का प्रदर्शन छःमाही और वार्षिक में समान रहा?

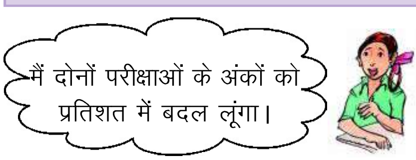
ब. किस विद्यार्थी का प्रदर्शन छःमाही की तुलना में वार्षिक में सबसे अच्छा रहा?

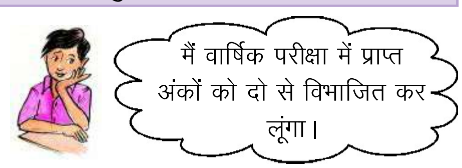
स. कितने विद्यार्थियों ने वार्षिक परीक्षा में 50 से अधिक अंक प्राप्त किए?

द. इस दोहरे दंड आलेख से क्या सूचना दी गई है?

य. छःमाही के अंकों का औसत क्या है? क्या यह वार्षिक परीक्षा के औसत अंक से कम है।

यहाँ छः माही व वार्षिक परीक्षा के पूर्ण अंकों को 100 माना गया। सोचिए यदि छः माही परीक्षा 50 अंकों की व वार्षिक 100 अंकों की हो तो आप तुलना कैसे करेंगे?





स्वयं करके देखिए

दी गई सूचनाओं को दर्शाने के लिए अलग–अलग आलेख खींचिए।

1.

वर्ष	2007	2008	2009	2010	2011
पुस्तकालय के लिए खरीदे गए पुस्तक	190	160	180	150	200

2.

गांव का नाम	बड़ी पहाड़ी	आशा नगर	मंसूर नगर
पुरूषों की संख्या	2000	1500	1900
स्त्रियों की संख्या	1800	1500	2000

3.

विषय	हिन्दी	अंग्रेजी	गणित	विज्ञान	सामाजिक विज्ञान
हेमू द्वारा प्राप्त अंक	50	40	80	70	48

4. 8 सर्वश्रेष्ठ क्रिकेट टीमों द्वारा ODI में जीतने का प्रतिशत

टीम	चैंपियन ट्राफी से वर्ल्ड कप 2006 तक	2007 में पिछले 10 ODI
दक्षिण अफ्रीका	75%	78%
ऑस्ट्रेलिया	61%	40%
श्रीलंका	54%	38%
न्यूजीलैण्ड	47%	50%
इंग्लैण्ड	46%	50%
पाकिस्तान	45%	44%
वेस्टइंडीज	44%	30%
भारत	43%	56%

4.2 आँकड़ों का संगठन (Organising Data)

आइए, एक कक्षा में हुई गणित की परीक्षा का परिणाम देखें:

28, 28, 28, 8, 10, 38, 28, 28, 15, 1,
28, 29, 18, 20, 36, 36, 10, 28, 15, 8

इस उदाहरण में प्रत्येक संख्या एक अवलोकन (Observation) है। इस प्रकार एकत्रित अवलोकनों के समूह को **यथा प्राप्त आँकड़े (Raw data)** कहते हैं। अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिए हमें यथा प्राप्त–आँकड़ों को क्रमबद्ध (आरोही या अवरोही) रूप में व्यवस्थित करने की आवश्यकता होती है। यथा,

38, 36, 36, 29, 28, 28, 28, 28, 28, 28,

28, 20, 18, 15, 15, 10, 10, 8, 8, 1

यहाँ अधिकतम प्राप्तांक और न्यूनतम प्राप्तांक का अन्तर कितना है?

यह अंतर 38 – 1 = 37 है। यही अंतर (37) उपरोक्त आँकड़ों का परिसर (Range) है। परिसर के कम या अधिक होने पर हमें आंकड़ों के फैलाव का पता चलता है।

कौन प्राप्तांक सबसे अधिक बार प्राप्त किया गया और कौनसा प्राप्तांक सबसे कम बार प्राप्त किया गया?

इसके लिए मिलान–चिह्नों (Tally Marks) का प्रयोग करते हुए, निम्न सारणी बनाते हैं–

सारणी – 4.1

<table>
<tr><th>प्राप्तांक</th><th>मिलान–चिह्न</th><th>कुल बार</th></tr>
<tr><td>38</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>36</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>29</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>28</td><td><s>||||</s> ||</td><td>7</td></tr>
<tr><td>20</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>18</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>15</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>योग</td><td>20</td></tr>
</table>

प्रत्येक प्राप्तांक के सामने लिखी मिलान चिह्नों की संख्या से हमें उस प्राप्तांक को प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या का पता चलता है। यह संख्या उस प्राप्तांक की बारम्बारता (Frequency) कहलाती है। किसी प्रविष्टि की बारम्बारता वह संख्या है, जितनी बार वह प्रविष्टि आँकड़ों में आती है।

सारणी–4.1 में प्राप्तांक 28 की बारम्बारता 7 है तथा प्राप्तांक 10 की बारम्बारता 2 है। उपरोक्त रूप से बनाई गई सारणी **बारम्बारता बंटन सारणी (Frequency Distribution Table)** कहलाती है। इससे पता चलता है कि एक प्रविष्ट कितनी बार आई है।

सारणी–4.1 की सूचनाओं को अपनी कॉपी पर दंड आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

4.3 आँकड़ों का वर्गीकरण (Classification of Data)

कभी–कभी हमें ऐसे आँकड़ें प्राप्त होते हैं जिनमें विविधता आधिक होती है, जैसे– किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों पर विचार कीजिए–

11,	13,	7,	8,	5,	17,	20,	3,	14,	11,
8,	1,	13,	8,	10,	18,	14,	5,	4,	13,
4,	9,	12,	11,	12,	16,	20,	13,	18,	12

यदि हम प्रत्येक प्रेक्षण (प्राप्तांक) के लिए एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाएं, तो वह बहुत लंबी होगी। अतः हम सुविधा के लिए प्रेक्षणों के कुछ समूह या वर्ग बनाते हैं, जैसे 0–4, 4–8, 8–12 इत्यादि तथा प्रत्येक समूह या वर्ग में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या के आधार पर एक बारम्बारता बंटन (Frequency Distribution) प्राप्त करते हैं। इस प्रकार उपरोक्त आँकड़ों के लिए, वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी निम्नवत हो सकती है:

सारणी – 4.2

वर्ग अन्तराल	मिलान चिह्न	बारम्बारता
0 – 4	||	2
4 – 8	~~||||~~	5
8 – 12	~~||||~~ |||	8
12 – 16	~~||||~~ ||||	9
16 – 20	||||	4
20 – 24	||	2
	कुल	**30**

उपरोक्त सारणी में 30 छात्रों के प्राप्तांक को पांच वर्गों (0–4, 4–8 इत्यादि) में विभाजित करके सभी प्रेक्षणों (Observations) को सम्मिलित कर लिया गया है। इसमें प्रत्येक समूह को **वर्ग अन्तराल** (Class Interval) तथा संक्षेप में एक वर्ग (Class) भी कहते हैं।

जब आंकड़ों को इस रूप में लिखा जाता है, तब वे **वर्गीकृत आंकड़े** (Grouped Data) कहे जाते हैं तथा इस प्रकार प्राप्त बंटन को **वर्गीकृत बारम्बारता बंटन** (Grouped Frequency Distribution) कहते हैं। इससे अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है, जैसे;

1. 7 विद्यार्थियों ने 0 और 8 के बीच अंक प्राप्त किए हैं।
2. अधिकांश विद्यार्थियों ने 8 और 16 के बीच अंक प्राप्त किए हैं।
3. 20 अंकों की परीक्षा में 6 विद्यार्थियों ने 16 से 20 अंक प्राप्त किए हैं।
4. इन आंकड़ों का बहुलक वर्ग 12–16 है।

ध्यान दीजिए की प्रेक्षण 4 दोनों ही वर्गों 0–4 और 4–8 में सम्मिलित है। इसी प्रकार प्रेक्षण 8, 12, 16, 20 दो–दो वर्गों में सम्मिलित है। परन्तु कोई भी प्रेक्षण एक साथ दोनों वर्गों में शामिल नहीं हो सकता। इससे बचने के लिए हम यह परिपाटी अपनाते हैं, उभयनिष्ठ प्रेक्षण उच्चतर वर्ग में सम्मिलित करते हैं। अर्थात् प्रेक्षण 4 वर्ग अन्तराल 4–8 में सम्मिलित है (0 – 4 में नहीं) इसी प्रकार 8 वर्ग अन्तराल 8–12 में सम्मिलित है (4–8 में नहीं)।

यहां प्रत्येक वर्ग को निश्चित करने के लिए दो संख्याएँ हैं, जैसे वर्ग अन्तराल 4–8 में 4 और 8 वर्ग सीमाएँ हैं, जिसमें 4 वर्ग की **निम्न वर्ग सीमा** (Lower Class Limit) तथा 8 वर्ग की **उच्च वर्ग सीमा** (Upper Class Limit) कहलाती है। क्या आप वर्ग अन्तराल 16–20 में उच्च वर्ग सीमा तथा निम्न वर्ग सीमा बता सकते हैं?

किसी भी वर्ग अंतराल की दोनों सीमाओं के अन्तर को **वर्ग माप** (Class Size) **या वर्ग चौड़ाई** (Class Width) कहते हैं। यहां वर्ग अन्तराल 4–8 का वर्ग साईज 4 है। वर्ग अंतराल 8–12 और 12–16 का वर्ग साइज क्या है?

स्वयं करके देखिए

नीचे दिए गए बारम्बारता बंटन सारणी का अध्ययन कीजिए और उनके नीचे दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

वर्ग अंतराल (रुपयों में दैनिक आय)	बारम्बारता (श्रमिकों की संख्या)
75 – 100	45
100 – 125	25
125 – 150	55
150 – 175	125
175 – 200	140
200 – 225	55
225 – 250	35
250 – 275	50
275 – 300	20
योग	**550**

1. (i) वर्ग अंतरालों की माप क्या है?
   (ii) वर्ग अन्तराल 225 – 250 की उच्च सीमा क्या है?
   (iii) किस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक है?
   (iv) किन दो वर्गों की बारम्बारता समान है।

2. कक्षा–8 के 32 छात्रों की वार्षिक बचत (रुपयों) में इस प्रकार है:

   38, 42, 40, 35, 72, 59, 80, 84, 73, 65, 38, 60, 58, 38, 54, 71, 83, 45, 38, 80, 27, 57, 61, 41, 76, 40, 39, 50, 44, 77, 53, 49

   (i) वर्ग अन्तराल 30–40 (40 सम्मिलित नहीं) आदि लेकर एक बारम्बारता सारणी बनाइए।
   (ii) वर्ग अन्तराल 20–30 की वर्ग सीमाएँ क्या हैं?
   (iii) वर्ग अन्तराल का वर्ग साइज क्या हैं?

4.3.1 आयत चित्र – आँकड़ों का आलेखीय निरूपण (Histogram - Graphical Representation of Data)

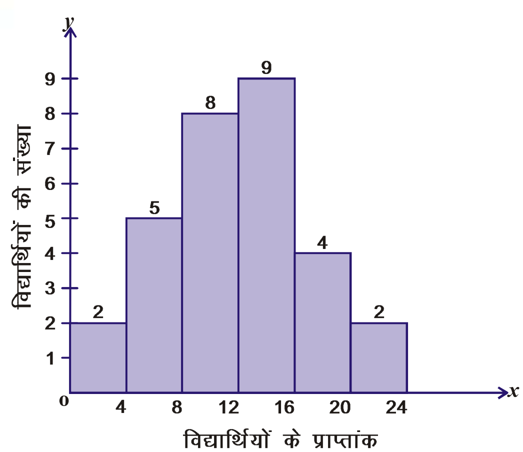
आइए, 30 विद्यार्थियों द्वारा गणित टेस्ट में प्राप्त किए अंकों के वर्गीकृत बारम्बारता बंटन पर विचार करें (सारणी–4.3)

सारणी – 4.3

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
0 – 4	2
4 – 8	5
8 – 12	8
12 – 16	9
16 – 20	4
20 – 24	2
योग	30

आकृति–4.1 में उपरोक्त बारम्बारता बंटन सारणी को आलेख के रूप में दिखाया गया है।

क्या यह आलेख उन दंड आलेखों से अलग है, जो आपने कक्षा–7 में खींचे थे? स्पष्टतः यहां दंडों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं है, क्योंकि वर्ग–अंतरालों के बीच में काई रिक्तता नहीं है। दूसरे क्षैतिज अक्ष पर वर्ग अंतरालों (प्रेक्षणों के समूहों) को दिखाया गया है तथा दंड की लम्बाई वर्ग अंतराल की बारम्बारता दर्शाती है। आँकड़ों का इस प्रकार आलेखीय निरूपण एक आयत चित्र (Histogram) कहलाता है। अर्थात् आयत चित्र एक ऊर्ध्वाधर दण्ड आलेख होता है, जिसमें विभिनन दण्डों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं होता। आइए, एक और आयत चित्र देखें।



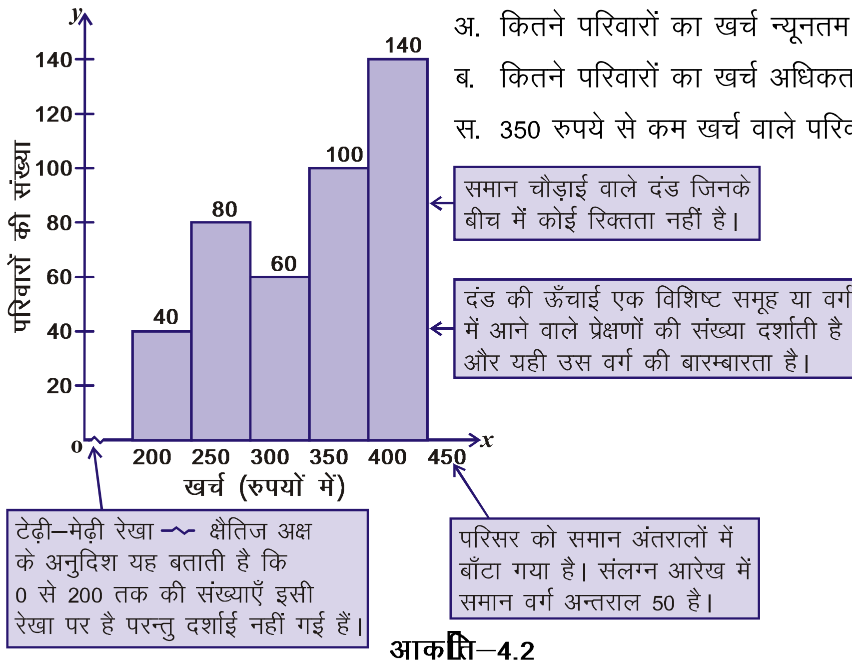
आकृति–4.

इस आयत चित्र के दंडों से हम बता सकते हैं कि–

अ. कितने परिवारों का खर्च न्यूनतम है?

ब. कितने परिवारों का खर्च अधिकतम है?

स. 350 रुपये से कम खर्च वाले परिवार कितने हैं?



आकृति–4.2

स्वयं करके देखिए

आयत चित्र (आकृति–4.3) को देखिए और नीचे लिखे प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

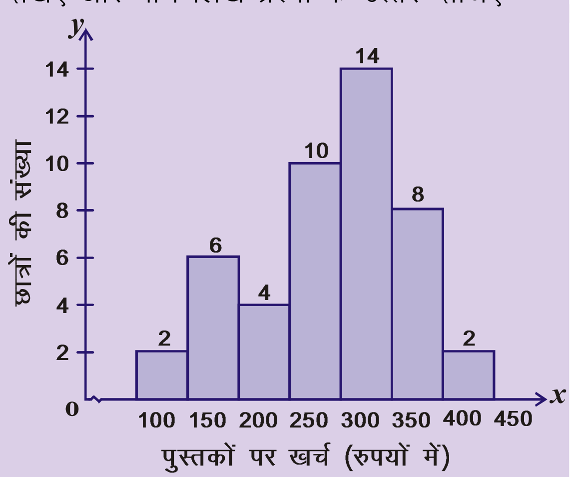
अ. इस आयत चित्र द्वारा क्या सूचना दी जा रही है?

ब. किस वर्ग में अधिकतम छात्र है?

स. कितने छात्रों का खर्च 300 या उससे अधिक है?

द. वर्ग साईज क्या है?

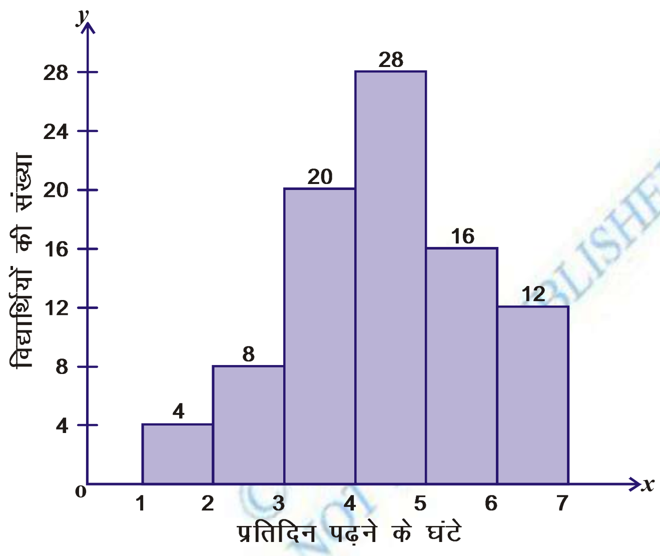
य. क्या इस आरेख से 100 रुपये से कम खर्च वाले छात्र की संख्या पता चलता है?



आकृति – 4.3

प्रश्नावली – 4.1

1. अवकाश के दिनों में कक्षा–8 के विद्यार्थियों द्वारा प्रतिदिन पढ़ने के समय (घटों में), दिए हुए आलेख में दर्शाए गए हैं:



निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

अ. अधिकतम विद्यार्थियों ने कितने घंटों तक पढ़ा?

ब. 5 घंटों से कम समय तक कितने विद्यार्थियों ने पढ़ा?

स. कुल कितने विद्यार्थियों ने अवकाश के दिनों में भी पढ़ा?

द. किस वर्ग अन्तराल की बारम्बारता अधिकतम है?

2. अपनी कक्षा के सभी छात्रों के जूते या चप्पलों के माप एकत्रित कीजिए। उन्हें निम्न तालिका में भर कर एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

जूतों की माप	मिलान चिह्न	बारम्बारता
5 नम्बर		
6 नम्बर		
7 नम्बर		
8 नम्बर		

3. ककड़िया गाँव के 27 मकानों के एक माह का बिजली बिल रुपयों में निम्नलिखित हैः
324, 700, 617, 400, 356, 365, 435, 548, 780, 570, 312, 584, 506, 736, 378, 685, 630, 674, 754, 776, 596, 745, 763, 422, 580, 565, 570
वर्ग अन्तराल 300–400 आदि लेकर एक बारम्बारता सारणी बनाइए।

4. प्रश्न–3 में दिए आँकड़ों से प्राप्त सारणी के लिए एक आयत चित्र बनाइए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–
   (i) किस समूह में बिजली उपभोक्ता की संख्या सबसे अधिक है।
   (ii) कितने बिजली उपभोक्ता 500 रुपये या उससे अधिक बिल जमा करते हैं।
   (iii) कितने उपभोक्ता 400 रुपये से कम का बिल जमा करते हैं?
   (iv) वर्ग अन्तराल 400–500 की उच्च सीमा एवं निम्न सीमा क्या है?
   (v) आलेख में कितने वर्ग अन्तराल है?

5. राजू अपने घर के कपड़ों को रंगों के आधार पर अलग करके इस प्रकार अंकित करता है– उजला (W) लाल (R) काला (B) पीला (Y) अन्य रंग (O)। बनाई गई सूची निम्न रूप में हैः–
R R O W R B Y R B W W O O R B Y Y O W R
B Y Y B R R O W W R W O O R Y W B Y
मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए। इसे प्रदर्शित करने के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

6. अपनी कक्षा के छात्रों से यह जानकारी प्राप्त कीजिए कि वह घर पर पिछले दिन कितने समय पढ़े। इन आँकड़ों को निम्न वर्गीकृत बारम्बारता सारणी भरिए।

समय (मिनट में)	**मिलान चिह्न**	**बारम्बारता**
0 – 30		
30 – 60		
60 – 90		
90 – 120		
120 – 150		
180 – 210		
210 – 240		

उपरोक्त आँकड़ों का एक आयत चित्र बनाइए।

7. निम्नलिखित में से किस प्रकार के आँकड़ों को दर्शाने के लिए आप एक आयत चित्र का प्रयोग करेंगे?

अ. घर के विभिन्न अनाजों की मात्रा

ब. किसी विद्यालय के सभी विद्यार्थियों की ऊँचाई

स. 5 कंपनियों द्वारा निर्मित टेलीविजनों की संख्या

द. एक व्यस्त चौराहे पर प्रातः 8.00 बजे से दोपहर 2 बजे तक गुजरने वाली वाहनों की संख्या।

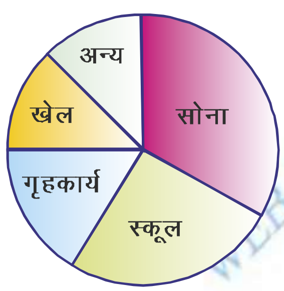
य. आपके वर्ग के सभी छात्रों का घर से विद्यालय की दूरी। (मीटर में)

प्रत्येक के लिए कारण भी दीजिए।

4.4 वृत्त आलेख (Pie Chart)

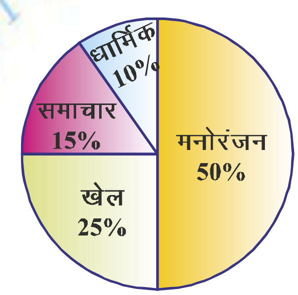
नीचे वृत्तीय रूप में निरूपित आंकड़े हैं, उन्हें ध्यान से देखें :

एक दिन में एक बच्चे द्वारा विभिन्न कार्यों में व्यतीत किया गया समय



आकृति–4.5 (i)

टी.वी. पर विभिन्न कार्यक्रमों को देखने वालों की संख्या



आकृति–4.5 (ii)

क्या आप बता सकते हैं कि

(i) किस कार्य में बच्चे का सबसे अधिक समय व्यतीत होता है।

(ii) किस कार्यक्रम को देखने वालों की संख्या सबसे कम।

आपने उपरोक्त प्रश्नों का हल कैसे ढूंढ़ा?

आप जानते हैं कि किसी वृत्त के केन्द्र पर बने कोणों का योग 360° होता है। आकृति 4.5 (i) में सोने का क्षेत्र केन्द्र पर सबसे बड़ा कोण बना रहा है जबकि आकृति 4.5 (ii) में धार्मिक कार्यक्रम का क्षेत्र केन्द्र पर सबसे छोटा कोण बना रहा है। यहां सम्पूर्ण वृत्त को त्रिज्यखंडों

(Sectors) में विभाजित किया गया है। प्रत्येक त्रिज्या खंड का आकार (Size) उसके द्वारा निरूपित सूचना के समानुपाती होता है। इस प्रकार के निरूपण **वृत्त आलेख** (Circle Graphs) या **पाई चार्ट** (Pie Chart) कहलाते हैं।

4.4.1 पाई चार्टों का खींचना

आकृति–4.5 (i) निम्न आंकड़ों का वृत्तीय रूप में निरूपण हैं :

एक दिन में एक बच्चे द्वारा व्यतीत किया गया समय

कार्य	**सोना**	**स्कूल**	**गृहकार्य**	**खेल**	**अन्य**
समय घंटे में	8	6	4	3	3

आइए इन आंकड़ों को एक पाई चार्ट में निरूपित करने के चरणों को समझें:

चरण–1. सबसे पहले सभी प्रेक्षणों का योग करते हैं।

यहां 8 + 6 + 4 + 3 + 3 = 24 है।

सोचिए यदि प्रेक्षणों की कुल इकाई 24 हैं तो आप 24 में से $8 = \frac{8}{24}$ को किस तरह से वृत्त में निरूपित कर सकते हैं?

चरण–2. प्रत्येक प्रेक्षण (सूचना) को निरूपित करने वाले वृत्त का भाग (सम्पूर्ण का भाग) ज्ञात करते हैं।

जैसे– स्कूल के समय का सम्पूर्ण में भाग (Part)

$$= \frac{\text{स्कूल के घंटों की संख्या}}{\text{सम्पूर्ण दिन}} = \frac{6 \text{ घंटे}}{24 \text{ घंटे}} = \frac{1}{4}$$

अतः स्कूल के घंटों को पूरे वृत्त के $\frac{1}{4}$ वें भाग में खींचा जायेगा।

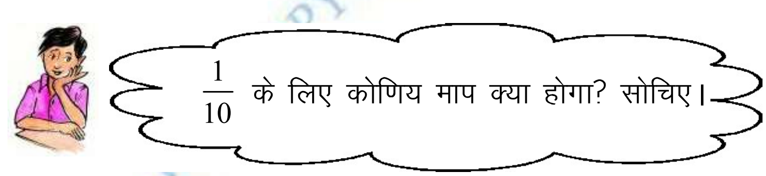
क्या आप अन्य कार्यों के भाग ज्ञात कर सकते हैं? सभी क्रियाकलापों की भिन्नों (भागों) को जोड़िए। क्या आपको योग एक प्राप्त होता है?

वृत्त के $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... आदि हिस्से करना तो सरल है। सोचिए $\frac{1}{6}$ या $\frac{1}{10}$ आदि हिस्से करने हो तो क्या तरीका काम में लिया जा सकता है?

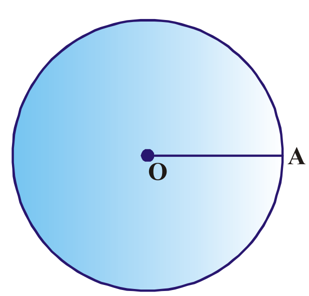
चरण–3. सम्पूर्ण केन्द्रीय कोण (360°) का प्रत्येक कार्य के लिए कोणिय माप ज्ञात करते हैं। जैसा कि सारणी में दिखाया गया है।

सारणी – 4.4

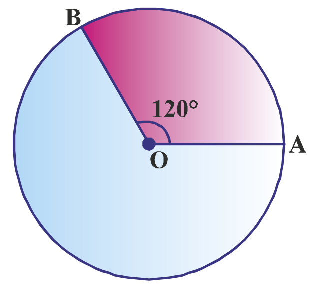
कार्य	कार्य के घंटे	सम्पूर्ण का भाग	360° का भाग
सोना	8	$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$	360° का $\frac{1}{3}=120°$
स्कूल	6	$\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$	360° का $\frac{1}{4}=90°$
गृहकार्य	4	$\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$	360° का $\frac{1}{6}=60°$
खेल	3	$\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$	360° का $\frac{1}{8}=45°$
अन्य	3	$\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$	360° का $\frac{1}{8}=45°$



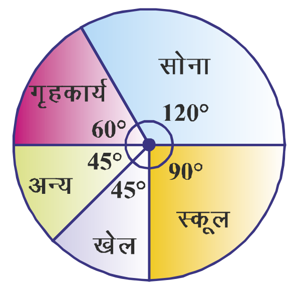
चरण–4. किसी सुविधाजनक त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसका केन्द्र (O) और एक त्रिज्या (O A) अंकित कीजिए।



चरण–5. सोने के घंटे के त्रिज्या खंड का कोण 120° है। चाँद का प्रयोग करके $\angle AOB = 120°$ खींचिए।



चरण–6. बचे हुए त्रिज्याखंडों के कोणों को इसी प्रकार चाँद से अंकित कीजिए। सम्पूर्ण वृत्त विभिन्न त्रिज्याखंडों में बंट जायेगा।

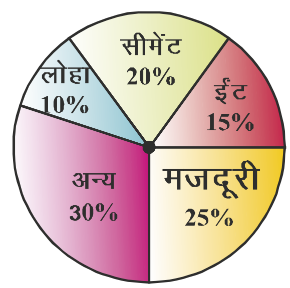


उदाहरण–1. संलग्न पाई चार्ट (आकृति–4.7) एक मकान के बनाने में विभिन्न मदों में खर्च को दर्शाता है।

(i) किस मद में व्यय सबसे अधिक है?

(ii) किन दो मदों का व्यय कुल व्यय का आधा है?

(iii) यदि ईंट का खर्च 30,000 रुपये हैं तो लोहे पर खर्च क्या है?



आकृति 4.7

हल : (i) अन्य मद का व्यय सबसे अधिक है।

(ii) सीमेंट और अन्य का व्यय कुल व्यय का आधा है।

(iii) $\because$ 15% निरूपित करता है 30000 रु.

$\therefore$ 1% निरूपित करेगा $\dfrac{30000}{15}$

अतः 10% निरुपित करेगा $\dfrac{\overset{2000}{\cancel{30000}}}{\cancel{15}} \times 10 = 20000$ रु.

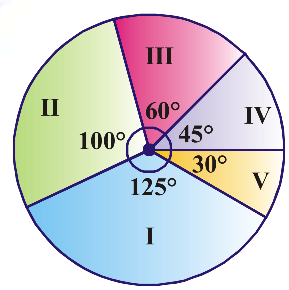
उदाहरण–2. एक विशेष दिन एक विद्यालय में छात्रों की उपस्थिति निम्न प्रकार है :

वर्ग	I	II	III	IV	V
छात्रों की संख्या	75	60	36	27	18

इन आँकड़ों के लिए एक पाई चार्ट खींचिए

हल : हम प्रत्येक त्रिज्यखंड का केन्द्रिय कोण ज्ञात करते हैं। यहां कुल छात्र 216 है। इससे हमें निम्न सारणी प्राप्त होती है।

वर्ग	छात्रों की संख्या	केन्द्रीय कोण
I	75	$\left(\frac{75}{216}\times 360^\circ\right)=125^\circ$
II	60	$\left(\frac{60}{216}\times 360^\circ\right)=100^\circ$
III	36	$\left(\frac{36}{216}\times 360^\circ\right)=60^\circ$
IV	27	$\left(\frac{27}{216}\times 360^\circ\right)=45^\circ$
V	18	$\left(\frac{18}{216}\times 360^\circ\right)=30^\circ$



आकृति 4.8

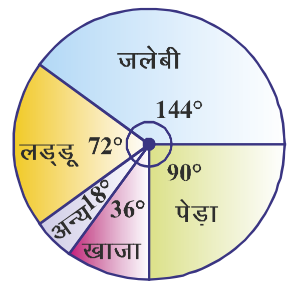
उदाहरण–3. किसी विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा पसंद किए जाने वाली मिठाईयां नीचे दी गई।

मिठाई	जलेबी	लड्डू	पेडा	खाजा	अन्य
विद्यार्थियों का प्रतिशत	40%	20%	25%	10%	5%

इन आंकड़ों को एक पाई चार्ट के रूप में निरूपित करें।

हल : यहाँ कुल प्रतिशत = 100 है। इससे निम्न सारणी प्राप्त होती है :

मिठाई	विद्यार्थियों का प्रतिशत	केन्द्रीय कोण
जलेबी	40%	$\frac{40}{100} \times 360° = 144°$
लड्डू	20%	$\frac{20}{100} \times 360° = 72°$
पेडा	25%	$\frac{25}{100} \times 360° = 90°$
खाजा	10%	$\frac{10}{100} \times 360° = 36°$
अन्य	5%	$\frac{5}{100} \times 360° = 18°$



स्वयं करके देखिए

1. नीचे दिए आंकड़ों के लिए एक पाई चार्ट खींचिए:

   एक बच्चे द्वारा एक रविवार में व्यतीत किया गया समय इस प्रकार है:

टेलीविजन देखना	–	3 घंटे
साथियों के साथ खेलना	–	2 घंटे
गृह कार्य	–	6 घंटे
अन्य कार्य	–	3 घंटे
सोना	–	8 घंटे
सफाई	–	2 घंटे

2. अपने पाँच साथियों के परिवार में सदस्यों की संख्या को लिखें और उसे पाई चार्ट द्वारा दर्शाएं।

3. अपने परिवार के एक माह का कुल आय पता करें तथा विभिन्न मदों पर खर्च की एक तालिका बनाएँ और उसे पाई चार्ट द्वारा दर्शाएँ।

प्रश्नावली – 4.2

1. किसी विद्यार्थी के छोटी सी पुस्तकालय में विभिन्न विषयों की पुस्तकें नीचे दी गई है। इन आंकड़ों को एक पाई चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

विषय	विज्ञान	गणित	अंग्रेजी	हिन्दी	सा. अध्ययन	योग
पुस्तकें	40	12	9	7	4	72

2. एक परिवार की मासिक आय 12000 रु. है। परिवार की मासिक खर्च निम्नानुसार है, दिए गये आंकड़ों से पाई चार्ट बनाइए।

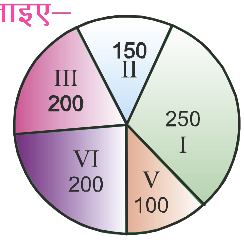
मद	मकान किराया	भोजन	शिक्षा	मनोरंजन	स्वास्थ्य
खर्च (रु. में)	1500	6000	2000	1000	1500

3. विभूति द्वारा गणित की छः माहों की मासिक जांच परीक्षा के प्राप्तांक निम्नानुसार है–

महीनों के नाम	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर
प्राप्तांक 100 में	40	45	65	35	55	60

उपरोक्त आंकड़ों से पाई चार्ट बनाइए।

4. एक विद्यालय के कक्षा I से V तक के 900 विद्यार्थियों की संख्या लेखाचित्रानुसार है। लेखाचित्र की सहायता से बताइए–



(i) कक्षा–I में कुल कितने विद्यार्थी हैं?

(ii) सबसे कम विद्यार्थी किस कक्षा में है?

(iii) कक्षा–III से कक्षा–V तक कुल कितने विद्यार्थी हैं?

4.5 संयोग और प्रायिकता (Chance & Probability)

कभी–कभी ऐसा होता है कि पिछले कई दिनों से आपके घर पीने का पानी सुबह 6 से 7.30 बजे तक आता है पर जब आप किसी दिन देर से 7 बजे उठकर पानी भरने को जाते हैं तो वह जल्द ही बंद हो जाता है।

प्रत्येक व्यक्ति जानना चाहता है कि एक विशेष रेलगाड़ी सही समय से चलती है परन्तु जिस दिन आप सही समय पर पहुँचते हैं, उसी दिन वह देरी से आती है।

आपको उपरोक्त प्रकार की अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है जहाँ आप संयोग (chance) का सहारा लेकर कार्य करना चाहते हैं परन्तु वह उस प्रकार से नहीं होता जैसा आप चाहते हैं। क्या आप ऐसे कुछ और उदाहरण दे सकते हैं?

जब कोई व्यक्ति लॉटरी की टिकट खरीदता है तो उसके जीतने व हारने का संयोग बराबर नहीं होता, अतः जीतने की संभावना बहुत कम व हारने की संभावना बहुत अधिक होती है, परन्तु यहाँ हम कुछ ऐसे प्रयोगों की बात करेंगे जिनके परिणामों के घटित होने का संयोग बराबर है।

कोई परिणाम प्राप्त करना

विक्की और बबलू पासे से खेल रहे थे, तभी विक्की ने बबलू से कहा कि पासे में छः सबसे कम बार आता है। आप क्या सोचते हैं? क्या ऐसा ही होता है?.....

यह जानने के लिए कि क्या 6 अन्य अंकों 1, 2, 3, 4, 5 से वास्तव में कम आता है अथवा नहीं। विक्की और बबुल ने 25–25 बार पासे को फेंके और अंकों की एक बारम्बारता सारणी बनाई।

बबलु द्वारा 25 बार फेंके पासे के लिए सारणी :

1	~~|||~~ ||
2	~~			~~	
3		
4				
5					
6					

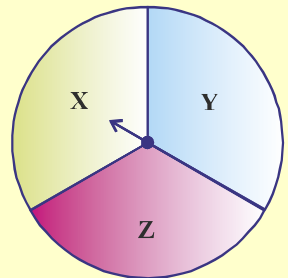
आप भी पासा लेकर देखें कि 25 बार फैंकने पर आपको प्राप्त अंकों की सारणी कैसी बनती है?

अतः यह जरूरी नहीं है कि कोई अंक कम आये अथवा ज्यादा। पासे पर किसी भी अंक के आने की संभावना बराबर है।

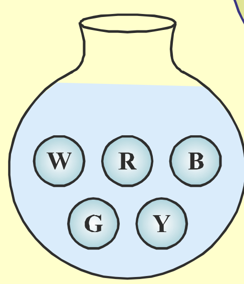
इस प्रकार का प्रयोग एक यादृच्छ या यादृच्छिक प्रयोग (random experiement) कहलाता है। 1, 2, 3, 4, 5 व 6 इस प्रयोग के छः परिणाम है।

स्वयं करके देखिए

1. यदि आप एक मोटर साईकिल चलाना प्रारम्भ करें, तो संभव परिणाम क्या है?
2. जब एक पासे (die) को फेंका जाता है, तो संभव छह परिणाम क्या हैं?
3. जब आप पहिए को घुमाएंगे, तो संभावित परिणाम क्या होंगे (आकृति–)? इनकी सूची बनाइए। (यहां परिणाम का अर्थ है कि वह त्रिज्यखंड जहां पर सूचक (pointer) घुमाने पर रूकेगा।)



4. आपके पास एक थैला है और उसमें भिन्न–भिन्न रंगों की पाँच एक जैसी गेंदें हैं (आकृति–)। आप बिना देखें इसमें से एक गेंद निकालते हैं। प्राप्त होने वाले परिणामों को लिखिए।



सम संभावित परिणाम (Equally Likely Outcomes)

अपनी कक्षा के बच्चों को 3–4 की टोलियों में बांटकर प्रत्येक टोली को एक सिक्का दे दीजिए। कहिए कि वे सिक्के को कई बार उछालें और हर बार नोट करें कि चित आया या पट। प्रत्येक टोली इन आंकड़ों को तालिका 1 में बताए अनुसार दो कॉलम में दर्ज कर सकती है।

चित आने पर गोला (◯) और पट आने पर चकोर (□) का निशान लगाया जा सकता है। 15 बार सिक्का उछालने के बाद आप यह देखें कि कौन–सा निशान ज्यादा लंबे समय तक दोहराया जा रहा है। मसलन, क्या लगातार 6 बार चित आया? या, कितना बार एक के चित पट बाद आए? प्रत्येक टोली अपनी–अपनी सबसे लम्बी श्रृंखला को पहचानकर लिखें।

मसलन, क्या दो पट के बाद एक चित अथवा दो चित के बाद एक पट आता है, या क्या चित और पट लगातार एक के बाद एक आते हैं? या क्या ऐसा कोई पैटर्न है ही नहीं? अब उनसे 15 से कहीं ज्यादा बार सिक्का उछालकर प्रत्येक 10

उछाल के बाद अपने परिणामों को दर्ज करने को कहिए। अब सबसे लम्बी शृंखला कौन सी है? अब क्या कोई पैटर्न है?

आइए अपनी परिणाम शीट (तालिका) को देखें, जहाँ हम उछालों की संख्या में वृद्धि करते जा रहे हैं:

उछालों की संख्या	मिलान चिह्न (H)	चितों की संख्या	मिलान चिह्न (T)	पटों की संख्या
40	卌 卌 卌 卌 ||	22	卌 卌 卌 |||	18
50	卌 卌 卌 卌 |||	23	卌 卌 卌 卌 卌 ||	27
60	.....	28	.....	32
70	.....	33	.....	37
80	.....	38	.....	42
90	.....	44	.....	46

ध्यान दीजिए कि जब आप उछालों की संख्या अधिकाधिक बढ़ाते जाते हैं, तब चितों की संख्या और पटों की संख्या परस्पर अधिकाधिक निकट आते जाते हैं।

ऐसा ही एक पासे के साथ भी हो सकता है, जब उसे एक बड़ी संख्या में फेंका जाता है। छह परिणामों में से प्रत्येक की संख्या परस्पर लगभग बराबर हो जाती है।

ऐसी स्थिति में, हम कह सकते हैं कि प्रयोग के विभिन्न परिणाम **सम संभावित** या **समप्रायिक** (equally likely) है। इसका अर्थ यह है कि सभी में से प्रत्येक परिणाम के आने का संयोग (chance) एक ही है।

संयोग को प्रायिकता से जोड़ना

जब हम एक सिक्का उछालते हैं तो यहाँ चित प्राप्त करने की संभावना 2 परिणामों (चित और पट) में से 1 है अर्थात् $\frac{1}{2}$ है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता (Probability) = $\frac{1}{2}$ है। एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? यहाँ दोनों ही परिणाम समप्रायिक (equally likely) है।

अब यदि आप एक पासे को फेंके, तो परिणाम क्या प्राप्त होंगे? स्पष्ट है; 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई एक, यहाँ छह समप्रायिक परिणाम है। इसमें 3 प्राप्त करने की प्रायिकता होगी–

$$\frac{1}{6}\begin{array}{l}\longleftarrow \text{तीन देने वाले परिणामों की संख्या}\\ \longleftarrow \text{समप्रायिक परिणामों की संख्या}\end{array}$$

2 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? संख्या 7 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी?

घटनाओं के रूप में परिणाम– प्रत्येक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम के संग्रह से एक घटना बनती है। उदाहरणार्थ एक सिक्के को उछालने के प्रयोग में एक चित प्राप्त करना एक घटना है तथा पट प्राप्त करना भी एक घटना है। एक पासे को फेंकने की स्थिति में परिणामों 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक परिणाम प्राप्त करना एक घटना है।

एक सम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

यह है : $$\frac{3}{6}\begin{array}{l}\longleftarrow \text{उन परिणामों की संख्या जो घटना बनाते हैं (जो कि 2, 4 व 6)}\\ \longleftarrow \text{समप्रायिक परिणामों की संख्या}\end{array}$$

उदाहरण : एक थैले में 5 काली गेंदें और 2 लाल गेंदें हैं। (ये गेंदें रंग के अलावा सभी प्रकार से समान है)। थैले के अंदर से बिना देखे एक गेंद निकाली जाती है। एक लाल गेंद प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है? क्या यह एक काली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता से अधिक है या कम?

हल : यहाँ घटना के कुल $5 + 2 = 7$ परिणाम हैं। लाल गेंद प्राप्त करने के लिए 2 परिणाम हैं। (क्यों?)

अतः, लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{2}{7}$ है।

इसी प्रकार, काली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{5}{7}$ है। (क्यों?)

अतः, लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता काली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता से कम है।

प्रश्नावली – 4.3

1. दो सिक्कों को एक साथ–साथ उछाला जाता है। एक सिक्के के चित आने की क्या प्रायिकता है।
2. एक थैले में 6 सफेद, 11 लाल और 7 पीले रंग की गेंद हैं। उस थैले में से एक पीले गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

3. अच्छी तरह से फेटी हुई 52 ताशों की एक गड्डी में से 1 इक्का प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी?

4. जब एक पासे को फेंका जाता है तब निम्नलिखित प्रत्येक घटना से प्राप्त होने वाले प्रायिकताएँ को लिखिए :

   (i) (a) एक अभाज्य संख्या (b) एक अभाज्य संख्या नहीं

   (ii) (a) 4 से बड़ी एक संख्या (b) 4 से बड़ी संख्या नहीं

   (iii) एक सम संख्या

5. 12 अलग–अलग पर्चियों पर 1 से 12 तक संख्याएँ लिखी हुई है (एक पर्ची पर एक संख्या) उन्हें एक डब्बे में रखकर अच्छी तरह मिला दिया जाता है। डब्बे के अन्दर से बिना देखे एक पर्ची निकाली जाती है। निम्नलिखित की प्रायिकता क्या होगी–

   (i) संख्या 5 प्राप्त करना (ii) संख्या 13 प्राप्त करना

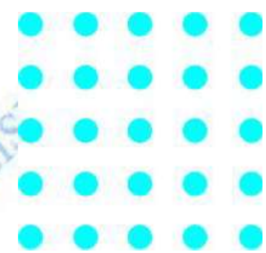
   (iii) संख्या 1 से 12 में कोई एक प्राप्त करना।

अध्याय – 5

वर्ग और वर्गमूल

(SQUARE AND SQUARE ROOT)

5.1 भूमिका



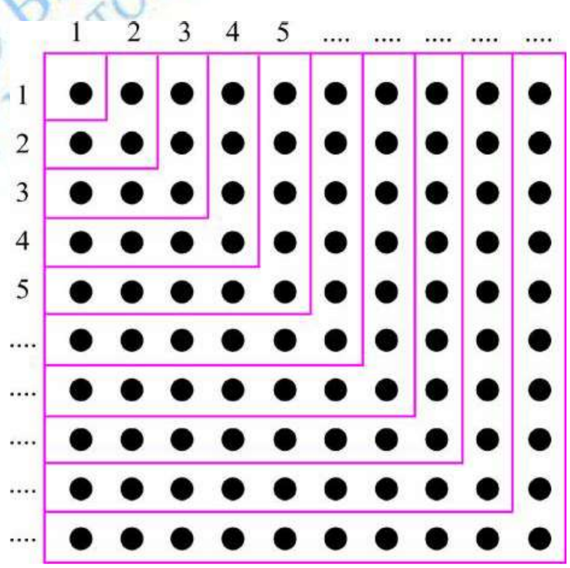
दिए गए चित्र के प्रत्येक पंक्ति (आड़ी) एवं स्तम्भ (खड़ी) में बिन्दुओं की संख्या समान हैं। इनमें से प्रत्येक में 5–5 बिन्दुएँ हैं, इस जमावट में बिन्दुओं की कुल संख्या कितनी होगी? ....

आपको इस प्रकार बिन्दु के जाल द्वारा बनी आकृति कैसी लग रही है? ....

हाँ यह वर्ग के समान है?

आइए, जियो–बोर्ड पर रबरबैंड की सहायता से वर्गाकार आकृतियाँ बनायें।

सामने जियो–बोर्ड (Geo-board) दिया गया है इसमें समान दूरी पर पिन लगी होती है।



रबड़ बैंड की सहायता से प्रत्येक पंक्ति तथा स्तम्भ में समान संख्या में दो–दो, तीन–तीन, चार–चार, आदि बिन्दु लेकर कुछ वर्गाकार पैटर्न (प्रतिरूप) बनाइए तथा दी गई तालिका को भरिए।

वर्ग संख्या को हम $a \times a = a^2$ के रूप में भी व्यक्त करते हैं।

सारणी 5.1

क्रमांक	प्रत्येक पंक्ति या स्तम्भ में बिन्दुओं की संख्या	वर्गाकार पैटर्न के अन्दर बिन्दुओं की कुल संख्या
1.	5	25
2.	2	....
3.	3	9
4.	4	....
5.	....	....
6.	....	....

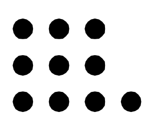
अंतिम स्तम्भ में आयी सभी संख्याएँ ऐसी हैं जो एक संख्या को उसी से गुणा करके प्राप्त की गई है। $25 = 5 \times 5,\ 4 = 2 \times 2$ ये सभी संख्याएँ $1, 4, 9, 16, 25$..... पूर्ण वर्ग संख्याएँ (Perfect Square Number) कहलाती है। आप भी 5 अन्य पूर्ण वर्ग संख्याएं लिखिए ....

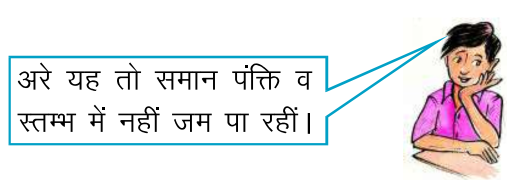
यह संख्याएँ तो हमने स्वयं पूर्ण वर्ग संख्याओं के रूप में बनाई हैं किन्तु यदि हमें कोई संख्या दी जाए तो हम कैसे पता करेंगे कि वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है अथवा नहीं? सोचिए।

5.2 पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

आप 9 बिन्दुओं को तीन–तीन बिन्दुओं की तीन पंक्तियों में जमा सकते हैं, इसी प्रकार 16 बिन्दुओं को चार–चार की चार पंक्तियों में जमा सकते हैं, क्रमशः 9 व 16 बिन्दु लेकर जमाकर देखे। इसी प्रकार क्या आप 10, 11, 12 बिन्दु इस तरह जमा सकते हैं कि कुल पंक्तियों की संख्या और प्रत्येक पंक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर हो। सोचिए?

आपने ठीक निकाला हम इन संख्याओं को समान खड़ी व आड़ी पंक्तियों में नहीं जमा सकते।





आपने जियो बोर्ड में पैटर्न से जाना था कि वे संख्याएँ जो समान पंक्ति व स्तम्भ के रूप में जमाई जा सकती है वह पूर्ण वर्ग संख्याएँ होती हैं।

10, 11, 12 बिन्दु होने पर तो हम इस प्रकार जमा कर देखने का प्रयास कर सकते हैं किन्तु यदि संख्या 109, 784 हो या और भी बड़ी हो तो इस तरह बिन्दुओं को जमा कर जाँचना कठिन हो सकता है।

पूर्ण वर्ग संख्या पहचानने के लिए एक और तरीका है, **अभाज्य गुणनखण्ड विधि।**

आपने अभाज्य गुणनखण्ड के बारे में पढ़ रखा है आइए पहले उसका स्मरण करें।

आप जानते हैं कि किसी भी संख्या का अभाज्य गुणनखण्ड किया जा सकता है।

अर्थात् ऐसे गुणनखण्ड जिन्हें और छोटे भागों में विभाजित नहीं किया जा सके जैसे–

सोचिए क्या 1 अभाज्य संख्या है? अपने दोस्तों से इस पर चर्चा कीजिए।

2	12
2	6
3	3
	1

$12 = 2 \times 2 \times 3$

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

स्वयं करके देखिए

1. 16 व 20 के अभाज्य गुणनखण्ड
2. 64 व 72 के अभाज्य गुणनखण्ड

16 व 64 के तथा 20 व 72 के अभाज्य गुणनखण्डों को देखकर बताइए कि उनमें क्या अन्तर हैं? ....

आओ इस अन्तर को जानें।

5.2.1 अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

पूर्ण वर्ग संख्या में पंक्तियों की संख्या और पंक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर है। जैसे पूर्ण वर्ग संख्या $36 = \underline{6 \times 6} = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$, $25 = \underline{5 \times 5}$, $49 = \underline{7 \times 7}$ इत्यादि। दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों में आपको क्या पैटर्न मिल रहा है?

जिस भी संख्या में इस तरह के गुणनखण्डों के जोड़े पूरे–पूरे बन जाएं वहीं पूर्ण वर्ग संख्या होगी। इसी तरह आपने देखा होगा कि 16 व 64 के अभाज्य गुणनखण्डों में आपको अभाज्य संख्याओं के जोड़े मिले होंगे, पर 20 व 72 में सभी गुणनखण्ड जोड़े में नहीं मिले।

5.2.3 अभाज्य गुणनखण्डन विधि (Prime Factorisation Method)

इस विधि में दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड करके जोड़े बनाते हैं। जिन संख्याओं में सभी अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन जाते हैं, वे पूर्ण वर्ग संख्या होंगी।

उदाहरण–1. क्या 256 एक पूर्ण वर्ग या अपूर्ण वर्ग है?

हल : $256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$

$= 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2$

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

हम देखते हैं कि 256 के सभी अभाज्य गुणनखंडों को ऊपर दर्शाए अनुसार जोड़े बन सकते हैं $\therefore$ 256 एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

यह $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ का वर्ग है।

उदाहरण–2. क्या 200 एक पूर्ण वर्ग है।

हल : $200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$= 2^2 \times 2 \times 5^2$

2	200
2	100
2	50
5	25
	5

यदि हम 200 के अभाज्य गुणनखंडों को युगलों अथवा वर्गों में समूहित करें तो हम यह पाते हैं कि हमारे पास एक गुणनखंड 2 बाकी बच जाता है। अतः 200 परिपूर्ण वर्ग नहीं है।

स्वयं करके देखिए

1. क्या निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं?

   (i) 400 (ii) 600

2. दी गई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ ज्ञात करें।

   (i) 20 और 30 (ii) 50 और 60

3. आगे दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

सारणी – 5.2

क्र.सं.	संख्या	अभाज्य गुणनखण्ड	क्या सभी समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन रहे है।	पूर्ण वर्ग है या नहीं
1.	36	$\underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$	हाँ	पूर्ण वर्ग हैं
2.	32	$\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 2$	नहीं	नहीं
3.	16			
4.	39			
5.	40			
6.	49			
7.	56			
8.	64			

5.3 वर्ग संख्याओं के गुणधर्म

निम्नलिखित सारणी का अध्ययन करें:

संख्या	संख्या का वर्ग
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

संख्या	संख्या का वर्ग
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

I उपर्युक्त सारणी से वर्ग संख्याओं के इकाई के अंकों को देखें। क्या आपने कोई पैटर्न देखा?

II हम पाते हैं कि प्रत्येक वर्ग संख्या में इकाई का अंक 0, 1, 4, 5, 6 और 9 हैं, किन्तु किसी भी वर्ग संख्या के इकाई के स्थान पर 2, 3, 7 और 8 नहीं है। क्या 12,22, 32, 23, 33, 78 आदि संख्याएं पूर्ण वर्ग हैं? हाँ अथवा नहीं कारण सहित बताइये। अतः हम कह सकते हैं कि जिस संख्या के इकाई के स्थान पर 2, 3, 7 और 8 है वह संख्या कभी भी पूर्ण वर्ग नहीं हो सकतीं।

200, 111, 54, 56, 89 में से कौन सी पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं? अतः हम कह सकते हैं कि कुछ संख्याएँ जिनके इकाई के स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6, 9 होता है पूर्ण वर्ग संख्याएँ हो सकती हैं।

पीछे की सारणी से खोजिए। सम संख्याओं तथा विषम संख्याओं के वर्ग में आपको कोई पैटर्न मिलता है। ——————————————————————————

——————————————————————————

हाँ, आपने ठीक ढूँढ़ा। सम संख्याओं के वर्ग सम व विषम संख्याओं के वर्ग विषम संख्या ही मिलते हैं। सोचिए इसका कारण क्या है? ——————————————————

——————————————————————————

स्वयं करके देखिए

1. निम्न संख्याओं में से बिना अभाज्य गुणनखण्ड किये बताएँ कि कौन–सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ हो ही नहीं सकती।

   (i) 522 (ii) 237 (iii) 23 (iv) 100 (v) 58

2. चार अंकों की पाँच संख्याएँ अपने से लिखिए। किन संख्याओं के बारे में आप दावे के साथ कह सकते हैं कि ये पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हैं?

3. रिक्त स्थान को भरें।

   (i) सम संख्या का वर्ग .... संख्या होते हैं।

   (ii) विषम संख्या का वर्ग .... संख्या होते हैं।

4. निम्नलिखित में से किन संख्याओं के वर्ग विषम/सम संख्या होंगे। क्यों?

   (i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980

5.3.1 निम्न सारणी को देखिए।

संख्याएँ	वर्ग
1	1
9	81
11	121
19	361
21	441

स्वयं करके देखिए

निम्न में से कौन–सी संख्या के इकाई के स्थान पर 1 होगा?

(i) 23^2 (ii) 27^2 (iii) 22^2

(iv) 61^2 (v) 39^2

सारणी से स्पष्ट है कि जिस संख्या का इकाई का अंक 1 या 9 आता है उस संख्या के वर्ग का इकाई का अंक भी 1 ही होता है।

5.3.2 निम्न वर्ग सारणी को देखिए।

संख्याएँ	वर्ग
4	16
6	36
14	196
16	256

स्वयं करके देखिए

निम्न में से किस संख्या के इकाई के स्थान पर 6 होगा?

(i) 29^2 (ii) 19^2 (iii) 24^2

(iv) 36^2 (v) 34^2 (vi) 26^2

सारणी से स्पष्ट है कि जिस संख्या का इकाई का अंक 4 या 6 है उस संख्या के वर्ग का इकाई का अंक 6 होता है।

क्या आप इस प्रकार के कुछ और नियम, सारणी में लिखी गई संख्याओं एवं उनके वर्गों के अवलोकन से ज्ञात कर सकते हैं। ....

5.3.3 निम्नलिखित वर्ग सारणी पर विचार कीजिए

मेरे पास 1 शून्य है।

संख्याएँ	वर्ग
10^2	100
20^2	400
30^2	900
100^2	10000
200^2	40000
400^2	160000

मेरे पास दो शून्य हैं।

मेरे पास दो शून्य हैं।

मेरे पास चार शून्य हैं।

स्वयं दहाई की अन्य संख्याएँ लेकर उनके वर्ग निकालें। क्या उनके वर्गों में भी आपको दो शून्य मिलते हैं? ....

सोचिए यदि किसी संख्या में तीन शून्य हो तो उसके वर्गों में कितने शून्य होंगे?

स्वयं करके देखिए

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग में शून्य की संख्या क्या होगी?

   (i) 50 (ii) 400 (iii) 5000

5.4 कुछ रोचक प्रतिरूप (Some Interesting Pattern)

5.4.1 निम्नलिखित दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के अन्तर को देखिए।

$2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$	$2 + 1$	$=$	3
$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$	$3 + 2$	$=$	5
$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$	$4 + 3$	$=$	7
$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$	$5 + 4$	$=$	9

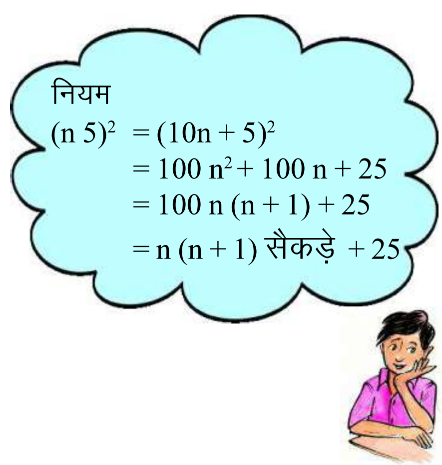
....

उक्त पैटर्न से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

उक्त संबंधों के आधार पर क्या आप बता सकते हैं कि

$8^2 - 7^2$	$=$	------------------------	$25^2 - 24^2$	$=$	------------------------
$9^2 - 8^2$	$=$	------------------------	$225^2 - 224^2$	$=$	------------------------
$12^2 - 11^2$	$=$	------------------------	$50^2 - 49^2$	$=$	------------------------
$15^2 - 14^2$	$=$	------------------------			

ये उत्तर आपने किस आधार पर ज्ञात किए।



5.4.2 निम्नलिखित प्रतिरूपों का प्रेक्षण करें

$15^2 = 1 \times 2$ (सैकड़े) $+ 5^2 = 225$

$25^2 = 2 \times 3$ (सैकड़े) $+ 5^2 = 625$

$35^2 = 3 \times 4$ (सैकड़े) $+ 5^2 = 1225$

$45^2 =$ ....

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग निकाले।

(i) 75 (ii) 105 (iii) 85 (iv) 95

5.4.3 निम्न पर विचार कीजिए :

1 (एक विषम संख्या)	=	1	=	1^2
1 + 3 (पहली दो विषम संख्याओं का योग)	=	4	=	2^2
1 + 3 + 5 (पहली तीन विषम संख्याओं का योग)	=	9	=	3^2
1 + 3 + 5 + 7 (.........)	=	16	=	4^2
1 + 3 + 5 + 7 + 9 (..........)	=	25	=	5^2
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 (.........)	=	36	=	6^2

अतः हम कह सकते हैं कि पहली n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 है।

उदाहरण–3. 1 से 51 तक की विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

> 1 से 51 के बीच कितनी विषम संख्याएँ है। आप अंतिम संख्या लें जैसे यहाँ 51 को 2 से भाग करें
>
> $\frac{51}{2}$ = 25 पूरा + 1 शेषफल
>
> अतः = 26 विषम संख्याएँ

हल : 1+3+5+............51

यहाँ = n = 26

अतः 1 से लगातार विषम संख्याओं के n पदों का योगफल = n^2

इसलिए $1 + 3 + 5 + ... + 51 = (26)^2 = 676$

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात करें

(i) $1 + 3 + ... + 23$ (ii) $1 + 3 + 5 + ... + 65$

अब ज़रा सोचिए यदि आप 676 में से क्रमागत विषम संख्याएँ घटायेंगे तो क्या होगा?

26 क्रमागत विषम संख्या यानि 1 से 51 तक घटाने पर आपको शून्य प्राप्त होगा। क्या इस पैटर्न का उपयोग आप पूर्ण संख्याओं को ज्ञात करने में कर सकते हैं।

9–1 = 8; 8–3 = 5; 5–5 = 0; अतः 9 पूर्ण वर्ग संख्या है।

जबकि 14–1 = 13; 13–3 = 10; 10–5 = 5; 5–7 = –2 अतः 14 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

5.4.4 पाइथोगोरस त्रिक

नीचे दिए गए प्रतिरूप को समझिए–

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

अतः $3^2 + 4^2 = 5^2$

इसी प्रकार $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$

अतः $8^2 + 15^2 = 17^2$

संख्या (3, 4, 5) एवं (8, 15, 17) आदि के समूह को पाइथोगोरस त्रिक कहते है। ऐसी संख्याएं जिनमें दो संख्याओं के वर्ग का जोड़ तीसरी वर्ग संख्या के बराबर हो, पाइथोगोरस त्रिक कहलाते हैं। आप अन्य संख्याओं के वर्गों को लेकर जोड़ें और देखें क्या यह सभी संख्याओं में होता है।

> $1^2 + 2^2$
> $= 1 + 4 = 5$
> क्या 5 वर्ग संख्या है

स्वयं करके देखिए

नीचे दी गई संख्याओं में से कौन–कौन सी पाइथोगोरस त्रिक है।

(i) (6,8,10) (ii) (3,8,9) (iii) (5,12,13)

5.4.5 निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों का अवलोकन कीजिए।

1^2	=	1
11^2	=	1 2 1
111^2	=	1 2 3 2 1
1111^2	=	1 2 3 4 3 2 1
11111^2	=	....
111111^2	=	....

संख्याओं 121, 12321, 1234321, 123454321 आदि के कुछ अतिरिक्त रोचक गुण है। इस प्रकार की सभी संख्याओं के अंकों का योग एक पूर्ण वर्ग होता है। जैसे :–

$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$

$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25 = 5^2$

....

स्वयं करके देखिए

प्रतिरूप के प्रयोग से निम्न संख्याओं की वर्ग संख्याएँ लिखिए–

(i) 11111 (ii) 11111111 (iii) 1111

5.4.6 अन्य रोचक प्रतिरूप

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$666667^2 =$ ....

$666666667^2 =$ ....

क्रमागत वर्ग संख्याओं को आप निम्न तरह से बना सकते हैं जैसे–

$20^2 = 400$

$21^2 = 20^2 + 20 + 21 = 441$

अब सोचो अगर आपको 32 का वर्ग इस विधि से निकालना हो तो

$30^2 = 900$

$31^2 = 30^2 + 30 + 31 = 961$

$32^2 = 31^2 + 31 + 32 = 1024$

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग ज्ञात कीजिए।

   (i) 42 (ii) 46 (iii) 58 (iv) 98

   (v) 94 (vi) 45

2. निम्नलिखित का वर्ग निकालें

   (i) 25 (ii) 55 (iii) 95 (iv) 105 (v) 115

3. निम्नलिखित संख्याओं में से कौन–सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग है? जाँच कीजिए।

   (i) 256 (ii) 360 (iii) 324 (iv) 400

4. निम्नलिखित संख्याओं में से कौन–कौन पूर्ण वर्ग है?

   13, 16, 17, 48, 49, 64, 72, 343, 373758

5. निम्नलिखित में कौन सम संख्या के वर्ग हैं?

   169, 196, 256, 1296, 6561

6. निम्नलिखित संख्याओं में से कौन–सी पूर्ण वर्ग हैं?

400, 4000, 330550, 12345600000

7. कोष्ठक में सही संख्या लिखें :

(a) $24^2 - 23^2 = \boxed{}$ (b) $102^2 - 101^2 = \boxed{}$

(c) $501^2 - 500^2 = \boxed{}$ (d) $400^2 - 399^2 = \boxed{}$

8. निम्नलिखित में कौन–सा त्रिक पाइथागोरस त्रिक है?

(1, 2, 3), (3, 4, 5), (6, 8, 10), (1, 1, 1), (2, 2, 3,), (15, 36, 39)

9. निम्नलिखित प्रतिरूप का प्रेक्षण करके छुटी हुई संख्याओं को ज्ञात करें :

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + \boxed{.....}^2 + \boxed{.....}^2 = 21^2$

$5^2 + 6^2 + \boxed{.....}^2 = 31^2$

$6^2 + 7^2 + \boxed{.......} = \boxed{......}$

10. विषम संख्याओं के क्रमिक घटाव की क्रिया द्वारा निम्नलिखित संख्याओं की जाँच करें कि कौन–सी संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है?

(i) 81 (ii) 121 (iii) 144 (iv) 36

11. निम्नलिखित संख्याओं में से किन–किन संख्या का वर्ग विषम संख्या होगा?

(i) 531 (ii) 5436 (iii) 3249 (iv) 82004

12. योग संक्रिया किये बिना योगफल ज्ञात कीजिए :

(i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11

(ii) 1 + 3 + 5 + ... + 51

(iii) 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 101

(iv) 7 + 9 + 11 + 13 + ... + 21

13. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई के अंक क्या होंगे?

(i) 25 (ii) 64 (iii) 272

(iv) 799 (v) 5423 (vi) 2467

(vii) 5438 (viii) 99880 (ix) 43546

14. **निम्नलिखित संख्याएँ स्पष्ट रूप से पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हैं, इसका कारण दीजिए।**

(i) 1052	(ii) 23457	(iii) 54328	(iv) 325473
(v) 25000	(vi) 743522	(vii) 543000	(viii) 56430

5.5 भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करना (Division Method)

जब संख्याएँ बड़ी होती हैं तब अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना कठिन हो जाता है। एक अन्य तरीके से भी हम वर्गमूल निकाल सकते हैं। जिसे दीर्घ विभाजन विधि कहते हैं। जिससे बड़ी संख्याओं का वर्गमूल निकाला जाता है। इसके लिए हमें वर्गमूल में अंकों की संख्या को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

निम्नलिखित सारणी को देखें :

संख्या (वर्गमूल)	वर्ग संख्या	
1	$1^2 = 1$	जो 1 अंक की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
3	$3^2 = 9$	जो 1 अंक की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।
4	$4^2 = 16$	जो 2 अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
9	$9^2 = 81$	जो 2 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।
10	$10^2 = 100$	जो 3 अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
31	$31^2 = 961$	जो 3 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।
32	$32^2 = 1024$	जो 4 अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
99	$99^2 = 9801$	जो 4 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।

उपर्युक्त सारणी का अवलोकन करने से पता चलता है कि यदि एक पूर्ण वर्ग संख्या 1 या 2 अंकों की है तब इसका वर्गमूल 1 अंक की होगी और यदि पूर्ण वर्ग संख्या 3 या 4 अंकों की है तब इसका वर्गमूल 2 अंकों का होगा। क्या आप 5 या 6 अंकों वाली पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या बता सकते हैं?

स्वयं करके देखिए

क्या हम कह सकते हैं कि एक पूर्ण वर्ग संख्या में यदि n अंक है तो उसके वर्गमूल में $\frac{n}{2}$ अंक होंगे जब $n =$ सम हों या $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ अंक होंगे जब $n =$ विषम हों?

निम्न विधि किसी संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करने में उपयोगी होगी।

576 का वर्गमूल दीर्घ विभाजन विधि द्वारा ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चरणों पर विचार करें।

क्या आप इस संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या का अनुमान लगा सकते हैं?

चरण 1 : इकाई स्थान से प्रारंभ करते हुए प्रत्येक युग्म पर बार लगाएँ। यदि अंकों की संख्या विषम है तब बाएँ तरफ एक अंक पर बार लगाएँ। जैसे : $\overline{5}\,\overline{76}$ इस प्रकार लिखते हैं।

चरण 2 : वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जिसका वर्ग सबसे बाईं तरफ के बार के नीचे लिखी संख्या के बराबर या कम हो ($2^2 < 5 < 3^2$) सबसे बाईं बार के नीचे भाज्य (यहाँ 5) के साथ भाजक और भागफल के रूप में इस संख्या को लें। भाग करें और शेषफल ज्ञात करें (इस स्थिति में शेषफल 1 है।)

$$\begin{array}{c|l} & \quad 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ & -4 \\ \hline & \quad 1 \end{array}$$

चरण 3 : अगली बार के नीचे की संख्या को शेषफल के दाएँ लिखें (अर्थात् इस स्थिति में 76 हैं।) अतः अगली भाज्य 176 होगी।

$$\begin{array}{c|l} & \quad 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ & -4 \\ \hline & \ 176 \end{array}$$

चरण 4 : भाजक के साथ भाजक के बराबर जोड़ें (अथवा भाजक को दुगुना करें।) और इसे इसके दाएँ में खाली स्थान के साथ लिखें।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ 2 & -4 \\ \hline 4\_ & \ 176 \end{array}$$

चरण 5 : रिक्त स्थान को भरने के लिए सबसे बड़े संभावित अंक का अनुमान लगाएँ जो कि भागफल में नया अंक होगा और नये भाजक को नये भागफल से गुणा करने पर गुणनफल भाज्य के बराबर या भाज्य से कम होगी।

इस स्थिति में $43 \times 3 = 129$

चूंकि $44 \times 4 = 176$ अतः शेषफल प्राप्त करने के लिए एक नया अंक 4 चुनते हैं।

$$\begin{array}{r|r} & 24 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ 2 & -\ 4\ \ \ \\ \hline 44 & 176 \\ 4 & 176 \\ \hline & 0 \end{array}$$

चरण 6 : क्योंकि शेषफल शून्य है और दी गई संख्या में कोई अंक शेष नहीं है। अतः $\sqrt{576} = 24$

उदाहरण–4. अब 7056 को हल करें :

चरण 1 : इकाई स्थान से प्रारंभ करते हुए प्रत्येक युग्म के ऊपर बार लगाएँ (जैसे $\overline{70}\ \overline{56}$ इस प्रकार लिखते हैं।)

चरण 2 : एक सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जो सबसे बाईं तरफ के बार के नीचे लिखी संख्या से कम या बराबर हो ($8^2 < 70 < 9^2$) इस संख्या को भाजक और सबसे बाईं ओर बार के नीचे संख्या को भाज्य के रूप में लें। भाग दे और शेषफल (इस स्थिति में 6 है।) ज्ञात करें।

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ & -64 \\ \hline & 6 \end{array}$$

चरण 3 : अगली बार के नीचे की संख्या को शेषफल के दाएँ लिखें। (इस स्थिति में 56 है।) अतः नया भाज्य 656 होगी।

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ & -64 \\ \hline & 6\ 56 \end{array}$$

चरण 4 : भाजक के साथ भाजक के बराबर जोड़ें (अथवा भाजक को दुगुना करें) और इसे इसके दाएँ में खाली स्थान के साथ लिखें।

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ 8 & -64 \\ \hline 16 & 656 \end{array}$$

चरण 5 : रिक्त स्थान को भरने के लिए सबसे बड़े संभावित अंक का अनुमान लगाएँ जो अंक भागफल में नया होगा। इस प्रकार नया अंक जब भागफल से गुणा होता है तब गुणनफल भाज्य के बराबर या छोटा होगा। इस स्थिति में हम देखते हैं कि $164 \times 4 = 656$ अतः भागफल में नया अंक 4 है।

शेषफल ज्ञात करें।

$$\begin{array}{r|l} & 84 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ 8 & -64 \\ \hline 164 & 656 \\ 4 & -656 \\ \hline & 0 \end{array}$$

नोट : यदि इसके बाद भी शेष बचे और संख्या के बार के नीचे की संख्या उतारनी पड़े तो भाजक के इकाई अंक को भाजक में जोड़कर चरण 5 का नियम लगाते हैं। यह क्रिया

तब तक चलती है जब तक की शेषफल शून्य न हो जाए। यह नियम पूर्ण वर्ग संख्या के लिए है।

चूँकि शेषफल शून्य है और कोई बार नहीं है अतः $\sqrt{7056}=84$ है।

5.6 संख्या का अनुमान

उपर्युक्त पूर्ण वर्ग संख्या 576 और 7056 के वर्ग में अंकों की संख्या ज्ञात करने के लिए बार का उपयोग करते हैं।

$\sqrt{\overline{5}\,\overline{76}}=24$ और $\sqrt{\overline{70}\,\overline{56}}=84$

इन दोनों संख्याओं 576 और 7056 में बार की संख्या 2 है और उनके वर्गमूल में अंकों की संख्या 2 है।

क्या आप 25600 के वर्गमूल में अंकों की संख्या बता सकते हैं? बार लगाने पर हम $\overline{2}\,\overline{56}\,\overline{00}$ में 3 बार प्राप्त करते हैं। अतः 25600 का वर्गमूल 3 अंक का होगा।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित संख्याओं के बिना गणना किये वर्गमूल में अंकों की कुल संख्या ज्ञात करें।

(i) 19600 (ii) 6400000000 (iii) 4401604

उदाहरण–1. वह छोटी–सी–छोटी संख्या ज्ञात करें जिसे 16180 में से घटाने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

हल : सबसे पहले दीर्घ विभाजन विधि से ज्ञात करने का प्रयास करते हैं। इस प्रकार हमें 51 शेषफल प्राप्त होता है। यह दर्शाता है कि 127^2, 16180 से 51 कम है। अर्थात् यदि हम 16180 में से 51 घटा देते हैं तो हमें एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त होती है। अतः वांछित पूर्ण वर्ग संख्या $=16180-51=16129$ है तथा $\sqrt{16129}=127$

	127
1	$\overline{1}\,\overline{61}\,\overline{80}$
1	– 1
22	0 6 1
2	4 4
247	1780
7	– 1729
	051

उदाहरण–2. वह छोटी–सी–छोटी संख्या ज्ञात करें जिसे 7609 में जोड़ने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

हल :

$$\begin{array}{r|l} & \quad 8\ 7 \\ \hline 8 & \quad \overline{76}\,\overline{09} \\ 8 & -\ 64 \\ \hline 167 & \quad 1209 \\ 7 & -\ 1169 \\ \hline & \quad\ \ 040 \end{array}$$

स्पष्ट है कि $87^2 < 7609 < 88^2$

वह संख्या जिसे 7609 में जोड़ने से पूर्ण वर्ग बनेगा वह है–

$88^2 - 7609 = 7744 - 7609 = 135$

अतः अभीष्ट संख्या = 135

अतः पूर्ण वर्ग संख्या = 7609 + 135 = 7744

अब 7744 का वर्गमूल निकालेंगे :

$$\begin{array}{r|l} & \quad 8\ 8 \\ \hline 8 & \quad \overline{77}\,\overline{44} \\ 8 & -\ 64 \\ \hline 168 & \quad 1344 \\ 8 & -\ 1344 \\ \hline & \qquad\ 0 \end{array}$$

$\therefore \sqrt{7744} = 88$

उदाहरण–3. पाँच अंकों की वह बड़ी–से–बड़ी संख्या ज्ञात करें जो कि पूर्ण वर्ग है। संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

हल : पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 99999 है, जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

अब हम छोटी–से–छोटी संख्या ज्ञात करते हैं जिसे 99999 में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए।

इसलिए हम 99999 का वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

	3 1 6
3	$\overline{9}\,\overline{99}\,\overline{99}$
3	– 9
6 1	099
1	– 61
626	3899
6	– 3756
	0143

स्पष्ट है कि $316^2 < 99999$

अन्तर है $= 143$

अतः अभीष्ट संख्या $= 99999 - 143 = 99856$

साथ ही $= \sqrt{99856} = 316$

उदाहरण–4. एक वर्गाकार खेत में घास लगाने का खर्च 15 रु. प्रति वर्गमीटर की दर से 1837500 रु. है। इस खेत के चारों ओर तार लगाने का खर्च 60 रु. प्रतिमीटर की दर से कितना होगा?

हल : घास लगाने का खर्च $= 1837500$ रु.

खेत का क्षेत्रफल $= \dfrac{1837500}{15}$ वर्ग मीटर

$= 122500$ वर्गमीटर

अतः वर्गाकार खेत की भुजा $= \sqrt{122500}$ वर्गमीटर

$= 350$ मीटर

खेत का परिमाप $= 4 \times$ भुजा

$= 4 \times 350 = 1400$ मीटर

अतः तार लगाने का खर्च $= 60 \times 1400$ रु.

$= 84000$ रु.

उदाहरण–5. $\dfrac{144}{256}$ का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल : $\dfrac{144}{256}$ का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम–

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad 12 \\ \hline
1 & \overline{1}\ \overline{4\,4} \\
1 & -1 \\ \hline
2\,2 & 0\,4\,4 \\
2 & -\ \ 4\,4 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}
\qquad \text{और} \qquad
\begin{array}{r|l}
 & \quad 16 \\ \hline
1 & \overline{1}\ \overline{5\,6} \\
1 & -1 \\ \hline
2\,6 & 1\,5\,6 \\
6 & -1\,5\,6 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$\therefore \sqrt{144} = 12$ $\qquad$ $\therefore \sqrt{256} = 16$

$$\text{अब} = \sqrt{\frac{144}{256}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{256}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

भिन्न संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए अंश और हर का वर्गमूल अलग–अलग ज्ञात करते हैं, फिर प्राप्त वर्गमूल को संगत $\dfrac{\text{अंश}}{\text{हर}}$ के रूप में लिखते हैं।

5.7 दशमलव का वर्गमूल

अभी तक हमने पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल ही निकाले हैं पर हम अन्य संख्याओं जैसे दशमलव संख्याओं के वर्गमूल भी निकाल सकते हैं।

निम्नलिखित उदाहरणों को समझें :

उदाहरण–1. 150.0625 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल :

$$\begin{array}{r|l}
 & \ 12.25 \\ \hline
1 & \overline{1}\,\overline{50}.\overline{06}\,\overline{25} \\
1 & -\ 1 \\ \hline
2\,2 & \ 050 \\
2 & -\ 44 \\ \hline
242 & \ 606 \\
2 & -\ 484 \\ \hline
2445 & \ 12225 \\
5 & -\ 12225 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

दशमलव वाली संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम पूर्णांक भाग का जोड़ा दाएँ से बाएँ की ओर लगाते हैं और फिर दशमलव वाली संख्या के अंकों का जोड़ा बाएँ से दाएँ की ओर लगाते हैं।

$\therefore \sqrt{150.0625} = 12.25$

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल दीर्घ विभाजन विधि से ज्ञात करें।

   (i) 625 (ii) 900 (iii) 1444 (iv) 3249 (v) 5776

   (vi) 10404 (vii) 19600

2. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के वर्गमूल में अंकों की संख्या बिना गणना के ज्ञात करें।

   (i) 81 (ii) 121 (iii) 256 (iv) 4489 (v) 361

   (vi) 27225 (vii) 390625

3. निम्नलिखित भिन्नों का वर्गमूल ज्ञात करें।

   (i) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ (ii) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ (iii) $\sqrt{\frac{36}{121}}$ (iv) $\sqrt{\frac{196}{225}}$ (v) $\sqrt{\frac{54}{486}}$

   (vi) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$ (vii) $\sqrt{\frac{80}{405}}$

4. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करें।

   (i) 2.25 (ii) 6.76 (iii) 156.25 (iv) 9.8596

   (v) 31.36 (vi) 1.0816 (vii) 0.2916

5. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में सबसे छोटी से छोटी संख्या क्या घटाई जाए कि पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

   (i) 90 (ii) 7581 (iii) 1989 (iv) 3250

   (v) 402 (vi) 825 (vii) 4000 (viii) 2509

6. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में न्यूनतम संख्या क्या जोड़ा जाए कि वह एक पूर्ण संख्या बन जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

   (i) 130 (ii) 8400 (iii) 6203 (iv) 6412

   (v) 525 (vi) 1750 (vii) 252 (viii) 1825

7. छः अंकों की वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करें जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या है। संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

8. चार अंकों की वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करिए जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या है। प्राप्त वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करिए।

9. छः अंकों की वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करें जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या हो। इस प्रकार से प्राप्त वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करिए।

10. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 60025 मी0^2 है। एक आदमी साइकिल से 5 मी. प्रति सेकेंड की चाल से मैदान के चारों ओर चलता है तो कितने समय में वह प्रारंभिक बिन्दु पर आ जाएगा।

हमने सीखा

1. किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर जो गुणनफल प्राप्त होता है, उस गुणनफल को वर्ग संख्या कहते हैं, अर्थात् माना कि n कोई संख्या है, इस संख्या को n संख्या से गुणा करने पर गुणनफल यदि m प्राप्त होता है तो m को वर्ग संख्या कहते हैं।

   यानि $n \times n = m$ अर्थात् $m = n^2$

2. किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडों को ऐसे समान गुणनखंडों के युगलों अथवा वर्गों में समूहित कर पहचान करते हैं कि दी गई संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है अथवा नहीं।

3. वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।

4. एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल होते हैं।

   धनात्मक वर्गमूल को संकेत $\sqrt{\ }$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

   उदाहरणार्थ, $4^2 = 16$, $\sqrt{16} = 4$ है।

अध्याय – 7

ज्यामितीय आकृतियों की रचना

(CONSTRUCTION OF GEOMETRICAL SHAPES)

7.1 भूमिका

आप विभिन्न त्रिभुजों की रचना करना जानते हैं। आप यह भी जानते हैं कि त्रिभुज की तीन भुजाओं और तीन कोणों में से कोई भी तीन अवयव लेकर अद्वितीय त्रिभुज नहीं बनाया जा सकता है। अद्वितीय त्रिभुज के लिए नीचे दी गई स्थितियां आवश्यक है।

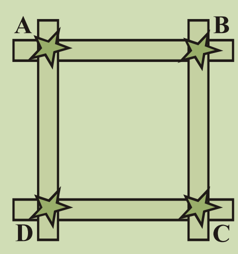
1. त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई दिया हो।
2. त्रिभुज की दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया हो।
3. त्रिभुज का दो कोण एवं उनके अन्तर्गत की भुजा दिया हो।
4. त्रिभुज का एक कोण समकोण तथा उसका कर्ण एवं कोई एक भुजा दी हो।

सोचिए क्या त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात होने पर एक अद्वितीय त्रिभुज बनाया जा सकता है। अपने उत्तर का कारण भी दीजिए?

इसी प्रकार एक चतुर्भुज की रचना के लिए हमें कम से कम **कितने मापों की जानकारी हो जिससे कि हमें चार अद्वितीय बिन्दु प्राप्त हो जाये।** चतुर्भुजों के गुण घर्म को सीखने के क्रम में हमने जाना कि चतुर्भुज में चार भुजाएॅ, चार कोण एवं दो विकर्ण होते हैं। अतः चतुर्भुज के अन्तर्गत कुल दस माप होते हैं। आइए, देखें कि इन दस मापों में से कम से कम कितने मापों की सहायता से हमें चतुर्भुज की रचना हेतु चार अद्वितीय बिन्दु प्राप्त हो जाये।

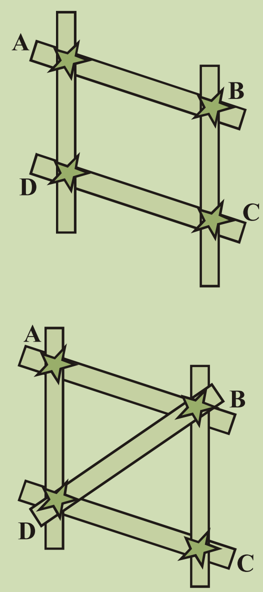
स्वयं करके देखिए

विद्यालय में रखे गणित–किट से पाँच स्केल लीजिए तथा स्क्रू की सहायता से उनमें से चार स्केलों को चित्रानुसार आपस में जोड़िए। इस प्रकार आप एक चतुर्भुज प्राप्त करते हैं। इस चतुर्भुज की रचना हमने चार भुजाओं की लम्बाई ज्ञात रहने पर की है।



आइए अब देखे कि क्या यह रचना अद्वितीय है। इसकी जांच के लिए चार स्केल की सहायता से बने चतुर्भुज को B और D बिन्दु

की तरफ से हल्का दबाइए आप पायेंगे कि भुजाओं की लम्बाई में परिवर्तन नहीं होने के वावजूद भी एक अलग तरह का चतुर्भुज बना है। इससे पता चलता हें कि केवल चार भुजाओं की लम्बाई पता रहने पर हम चतुर्भुज निर्माण हेतु आवश्यक चार अद्वितीय बिन्दु प्राप्त नहीं कर सकते हैं। अब पाँचवें स्केल को स्क्रू की सहायता इस प्रकार जोड़िए कि उसका एक सिरा B बिन्दु पर तो दूसरा सिरा D बिन्दु पर रहे। इस प्रकार चार भुजाओं की लम्बाई के अलावा एक विकर्ण की लम्बाई भी हमें पता हो जाती है। अब इस चतुर्भुज को पुनः सिरा B एवं सिरा D की तरफ से दबाइए। इस बार आकृति की स्थिति में कोई परिवर्तन नहीं आता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि बनी आकृति अद्वितीय है। यहाँ चतुर्भुज के 10 अवयवों में से मात्र 5 अवयवों (चार भुजाओं एवं एक विकर्ण) की सहायता से ही चतुर्भुज का निर्माण हुआ है। सोचिए क्या किसी भी पाँच मापों की सहायता से हम अद्वितीय चतुर्भुज की रचना कर सकते हैं।



7.2 एक चतुर्भुज की रचना

आइए विभिन्न परिस्थितियों में पाँच मापों की सहायता से हम अद्वितीय चतुर्भुज की रचना करें:

1. जब चारों भुजाएँ एवं एक विकर्ण दिया हो।
2. जब तीन भुजाएँ एवं दोनों विकर्ण दिया हो।
3. जब तीन भुजाएँ एवं और उनके बीच का दो कोण दिया हो।
4. जब तीन कोण और उनके बीच की दो भुजाएँ दी गई हो।
5. जब कुछ विशेष परिस्थितियाँ दी गई हों।

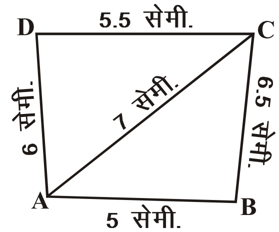
आइए, बारी–बारी से उपर दिये गये परिस्थिति के अनुसार चतुर्भुजों की रचना करें।

7.2.1 चतुर्भुज की रचना जब चारों भुजाएँ और एक विकर्ण की लम्बाई दी हो

उदाहरण–1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी., BC = 6.5 सेमी, CD = 5.5 सेमी., AD = 6 सेमी. तथा एक विकर्ण AC = 7 सेमी. है।

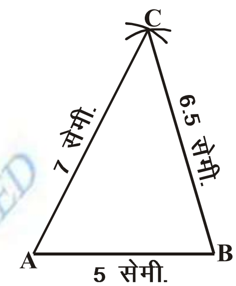
हल : सबसे पहले हम चतुर्भुज ABCD की कच्ची आकृति बना लेंगे जिसमें विकर्ण AC भी

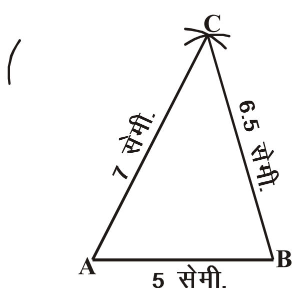
अंकित करेंगे। कच्ची आकृति पर सभी मापों को अंकित कर देंगे। कच्ची आकृति को देखने से पता चलता है कि हमें सबसे पहले त्रिभुज ABC की रचना करनी होगी, फिर त्रिभुज ACD की रचना की जायेगी। इस प्रकार हमें चतुर्भुज हेतु आवश्यक चार अद्वितीय बिन्दु प्राप्त हो जायेंगे। आइए चरणवार रचना करें :



रचना के चरण

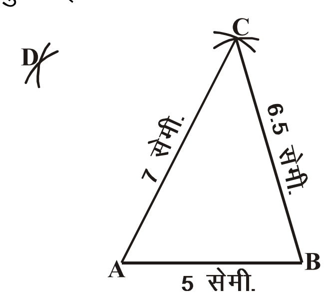
1. भुजा भुजा भुजा अभिगृहित का उपयोग करते हुए त्रिभुज ABC की रचना कीजिए। सबसे पहले AB = 5 सेमी. का रेखाखंड खीचिए। फिर A एवं B को केन्द्र मानते हुए क्रमशः AC = 7 सेमी. एवं BC = 6.5 सेमी. के त्रिज्या का चाप इस प्रकार खींचिए कि दोनों चाप एक दूसरे को काटे। इस प्रकार हमें AB के अलावा तीसरा बिन्दु C भी प्राप्त होगा।



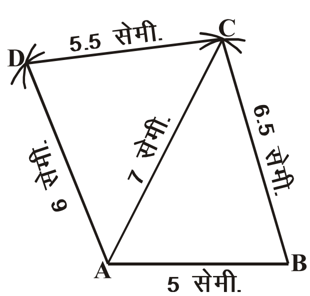


2. A को केन्द्र मानकर AD= 6 सेमी. त्रिज्या का एक चाप खींचेंगे। बिन्दु D इसी चाप पर कहीं स्थित होगा।

3. पुनः CD= 5.5 सेमी.. त्रिज्या का एक चाप खींचेंगे। बिन्दु D इसी चाप पर कहीं स्थित होगा।



4. चूँकि बिन्दु D ऊपर के दोनों चापों पर स्थित है अर्थात बिन्दु D दोनों चापों के प्रतिच्छेदन बिन्दु पर स्थित होगा। प्रतिच्छेदन बिन्दु पर D का अंकन करेंगे तथा उसे बिन्दु A और C से मिलायेंगे। इस प्रकार प्राप्त चतुर्भुज, ABCD एक अभीष्ट चतुर्भुज है।



प्रत्येक चतुर्भुज दो त्रिभुज से मिलकर बनता है। प्रथम चरण के एक त्रिभुज व दूसरे चरण में दूसरा त्रिभुज ऊपर वाली रचना में सबसे पहले हमने त्रिभुज ABC बनाया जिसके लिए भुजा–भुजा–भुजा नियम से रचना की उसके बाद दूसरे चरण में ACD त्रिभुज बनाया और उसके लिए भुजा–भुजा–भुजा नियम से रचना की अन्त में चारों शीर्षों ABCD को मिलाकर चतुर्भुज ABCD की रचना की।

स्वयं करके देखिए

सोचिए, करके देखिए तथा अपने मित्रों से चर्चा कीजिए कि–

1. क्या हम पहले विकर्ण AC खींचकर उसके बाद चतुर्भुज निर्माण हेतु आवश्यक दो अन्य बिन्दु B और D प्राप्त कर सकते हैं?
2. क्या ACD त्रिभुज पहले खींचकर फिर अभीष्ट त्रिभुज ABCD प्राप्त कर सकते हैं?
3. क्या हम AB भुजा के अतिरिक्त किसी भी भुजा को पहले खींचकर चतुर्भुज के लिए प्रथम दो बिन्दु प्राप्त करते हुए शेष दो बिन्दु और प्राप्त कर सकते हैं?
4. ऊपर प्राप्त जानकारी के आधार पर क्या आप 3.5 सेमी. भुजा एवं 5 सेमी. विकर्ण वाला एक समचतुर्भुज खींच सकते हैं?
5. ऊपर प्राप्त जानकारी के आधार पर क्या आप 5 सेमी. तथा 6 सेमी. आसन्न भुजाओं एवं 6.5 सेमी. विकर्ण वाला एक समांतर चतुर्भुज खींच सकते हैं?

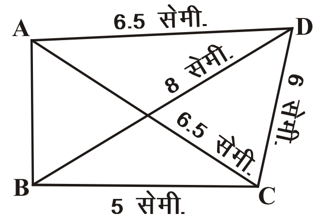
प्रश्नावली 7.1

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4 सेमी.., BC = 6 सेमी.., CD = 2.6 सेमी.., AD = 2.3 सेमी.. और एक विकर्ण AC = 4 सेमी.. हो।
2. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 3.8 सेमी.., QR = 2.6 सेमी.., RS = 5 सेमी.., PS = 5.5 सेमी.. और एक विकर्ण PR = 5 सेमी.. हो।
3. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4.5 सेमी.., BC = 5.5 सेमी.., CD = 4 सेमी.., AD = 6 सेमी.. और एक विकर्ण AC = 7 सेमी.. हो।
4. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 6 सेमी.., QR = 7.5 सेमी.., RS = 6 सेमी.., PS = 7.5 सेमी.. और एक विकर्ण PR = 8 सेमी. हो। बनी चतुर्भुज की आकृति को देखकर बताईए कि यह कौन–सा चतुर्भुज है।
5. एक समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4.5 सेमी. और एक विकर्ण AC = 7 सेमी. हो।

7.2.2 चतुर्भुज की रचना जब तीन भुजाएँ और दोनों विकर्णों की लम्बाई दी हो

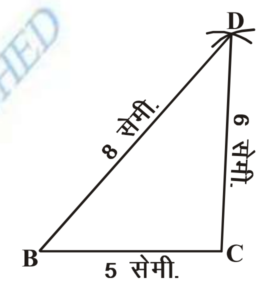
उदाहरण–1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें BC= 5 सेमी., AD= 6.5 सेमी.

CD= 6 सेमी., एक विकर्ण AC= 6.5 सेमी. तथा दूसरा विकर्ण BD= 8 सेमी. है।

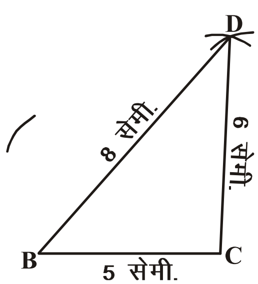


हल : सबसे पहले हम चतुर्भुज ABCD की कच्ची आकृति बना लेंगे जिसमें दोनों विकर्ण AC एवं BD भी अंकित करेंगे। कच्ची आकृति पर सभी मापों को अंकित कर देंगे। कच्ची आकृति को देखने से पता चलता है कि हमें सबसे पहले त्रिभुज BCD की रचना करनी होगी, फिर त्रिभुज ABD की रचना की जायेगी। इस प्रकार हमें चतुर्भुज हेतु आवश्यक चार अद्वितीय बिन्दु प्राप्त हो जायेंगे। आइए चरणवार रचना करें :

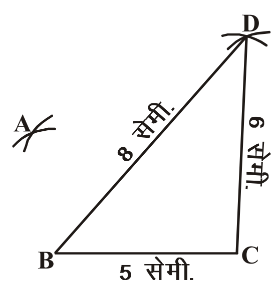
रचना के चरण



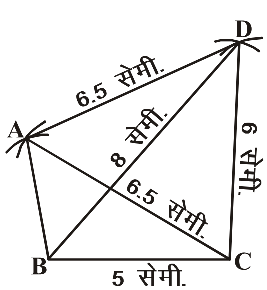
1. भुजा भुजा भुजा अभिगृहित का उपयोग करते हुए त्रिभुज BCD की रचना कीजिए। सबसे पहले BC = 5 सेमी. का रेखाखंड खीचिए। फिर B एवं C को केन्द्र मानते हुए क्रमशः BD = 8 सेमी. एवं CD = 6 सेमी. के त्रिज्या का चाप इस प्रकार खीचिए कि दोनों चाप एक दूसरे को काटे। इस प्रकार हमें BC के अलावा तीसरा बिन्दु D भी प्राप्त होगा। B व C को D से मिलाइए।



2. D को केन्द्र मानकर DA = 6.5 सेमी. त्रिज्या का एक चाप खींचेंगे। बिन्दु A इसी चाप पर कहीं स्थित होगा।



3. पुनः C को केन्द्र मानकर AC = 6.5 सेमी. त्रिज्या का एक चाप खींचेंगे। बिन्दु A इसी चाप पर कहीं स्थित होगा।



4. चूँकि बिन्दु A ऊपर के दोनों चापों पर स्थित है अर्थात बिन्दु A दोनों चापों के प्रतिच्छेदन बिन्दु पर स्थित होगा। प्रतिच्छेदन बिन्दु पर A का अंकन करेंगे तथा उसे बिन्दु B और D से मिलायेंगे। इस प्रकार प्राप्त चतुर्भुज, ABCD एक अभिष्ट चतुर्भुज है।

स्वयं करके देखिए

- उपर की रचना में चतुर्भुज बनाने के लिए आपने किन दो त्रिभुजों का निर्माण किया तथा प्रत्येक के लिए कौन से नियम से रचना की।

सोचिए तथा अपने मित्रों से चर्चा कीजिए कि–

1. क्या हम पहले विकर्ण BD खींचकर उसके बाद चतुर्भुज निर्माण हेतु आवश्यक दो अन्य बिन्दु A और C प्राप्त कर सकते हैं?
2. क्या हम ACD त्रिभुज पहले खींचकर फिर अभिष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त कर सकते हैं?
3. क्या हम AD भुजा को पहले खींचकर चतुर्भुज के लिए प्रथम दो बिन्दु प्राप्त करते हुए शेष दो बिन्दु और प्राप्त कर सकते हैं?
4. ऊपर प्राप्त जानकारी के आधार पर क्या आप 4.5 सेमी. भुजा एवं 5 सेमी. एवं 6 सेमी. विकर्ण वाला एक समचतुर्भुज खींच सकते हैं?

प्रश्नावली 7.2

1 एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें BC = 4.5 सेमी., CD = 5 सेमी., AD = 5.5 सेमी., तथा AC = 5.5 सेमी. और BD = 7 सेमी. हो।

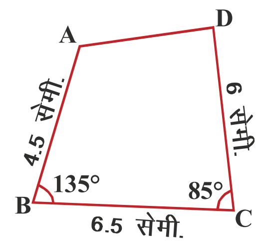
2 एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें QR = 4.5 सेमी., RS = 5 सेमी., PS = 5.5 सेमी. और एक विकर्ण PR = 5.5 सेमी. तथा दूसरा विकर्ण QS= 7 सेमी. हो।

3 एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 6 सेमी., QR = 7.5 सेमी., RS = 6 सेमी., एक विकर्ण PS = 7.5 सेमी. और दूसरा विकर्ण PR = 8 सेमी. हो।

4 एक समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें एक विकर्ण AC = 7 सेमी. तथा दूसरा विकर्ण BD = 8 सेमी. हो।

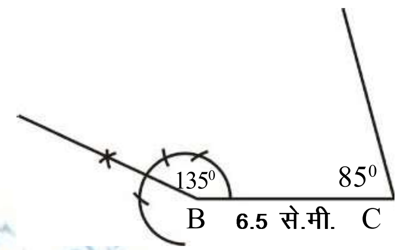
5. एक समचतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ= 5 सेमी. और विकर्ण क्रमशः 6 व 8 हों।

7.2.3 चतुर्भुज की रचना करना जब तीन भुजाएँ और दो अंतर्गत कोणों की माप दी हो



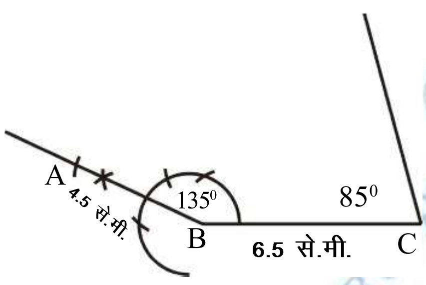
उदाहरण–3. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB= 4.5 सेमी., BC= 6.5 सेमी., CD = 6 सेमी., तथा उनके दो अन्तर्गत कोण B = 135^0 तथा C= 85^0 हैं।

हल : सबसे पहले हम चतुर्भुज ABCD की कच्ची आकृति बना लेंगे जिसमें दोनों कोण B एवं C को भी अंकित करेंगे। कच्ची आकृति पर सभी मापों को अंकित कर देंगे। कच्ची आकृति को देखने से पता चलता है कि हमें BC भुजा खींचने के बाद उस पर कोण B एवं C की रचना करनी होगी फिर कोण बनाने वाली भुजाओं पर दी गई लम्बाई का चाप खींचते हुए चतुर्भुज निर्माण हेतु आवश्यक अन्य दो बिन्दु प्राप्त करना होगा। आईए अब चरणवार रचना करें :

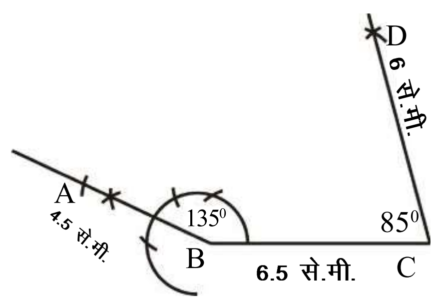


रचना के चरण

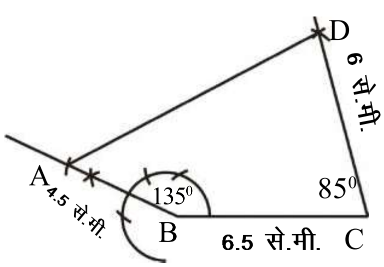
1. सबसे पहले BC= 6.5 सेमी. लम्बाई का एक रेखाखंड खीचिए। फिर B एवं C को केन्द्र मानते हुए क्रमश: 135^0 एवं 85^0 का कोण बनाइए।



2. B को केन्द्र मानकर BA= 4.5 सेमी. त्रिज्या का एक चाप खींचेंगे जो 135^0 का कोण बनाने वाली रेखा को जिस बिन्दु पर काटेगी वह A बिन्दु होगा।



3. C को केन्द्र मानकर CD=6 सेमी. त्रिज्या का एक चाप खींचेंगे जो 85^0 का कोण बनाने वाली रेखा को जिस बिन्दु पर काटेगी वह D बिन्दु होगा।



4. बिन्दु D और A को मिलाईए। इस प्रकार प्राप्त चतुर्भुज, ABCD एक अभिष्ट चतुर्भुज है।

4.5 से.मी.

स्वयं करके देखिए

ऊपर की रचना में चतुर्भुज बनाने के लिए आपने किन दो त्रिभुजों का निर्माण किया तथा प्रत्येक के लिए कौन से नियम से रचना की।

सोचिए तथा अपने मित्रों से चर्चा कीजिए कि–

1. क्या हम AB भुजा को पहले खींचकर चतुर्भुज के लिए प्रथम दो बिन्दु प्राप्त करते हुए शेष दो बिन्दु और प्राप्त कर सकते हैं?
2. ऊपर प्राप्त जानकारी के आधार पर क्या आप 4.5 सेमी. भुजा एवं 135^0 एवं 45^0 आसन्न कोण वाला एक समचतुर्भुज खींच सकते हैं?

प्रश्नावली 7.3

1 एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें BC = 4.5 सेमी., CD = 5 सेमी., AD = 5.5 सेमी., तथा कोण C = 120^0 और कोण D = 90^0 हो।

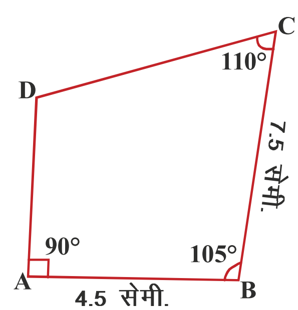
2 एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 5 सेमी., RS = 6 सेमी., PS = 5.5 सेमी. तथा कोण P = 90^0 और कोण S = 135^0 हो।

3 एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 6 सेमी., QR = 7.5 सेमी., RS = 6 सेमी., तथा कोण P = 120^0 और कोण Q = 60^0 हो। आकृति से बना चतुर्भुज कैसा होगा।

4 एक समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 7.5 सेमी. तथा कोण C = 110^0 और कोण D = 70^0 हो।

7.2.4 चतुर्भुज की रचना करना जब तीन कोण और उनके बीच की दो भुजाएँ दी गई हो।

उदाहरण–4. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें कोण A= 90^0 कोण B= 105^0 तथा कोण C= 110^0 अन्तर्गत भुजा AB= 4.5 सेमी., BC= 7.5 सेमी. हैं।

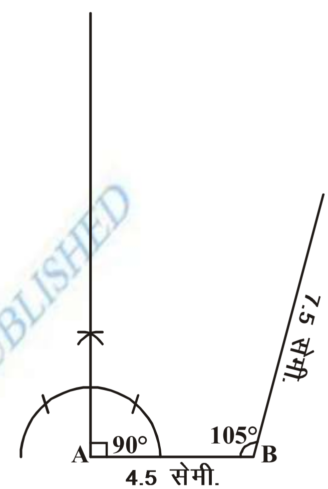


हल : सबसे पहले हम चतुर्भुज ABCD की कच्ची आकृति बना लेंगे जिसमें तीनों कोण A, B एवं C को भी अंकित करेंगे। कच्ची आकृति पर सभी मापों को अंकित कर देंगे। कच्ची आकृति को देखने से पता चलता है कि हमें AB भुजा खींचने के बाद उस पर

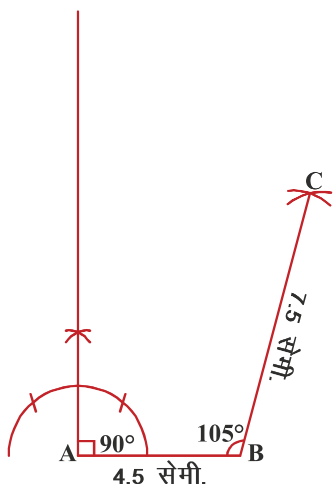
4.5 से.मी.

कोण A एवं B की रचना करनी होगी फिर कोण बनाने वाली भुजाओं पर BC भुजा की दी गई लम्बाई का चाप खींचते हुए चतुर्भुज निर्माण हेतु आवश्यक तीसरा बिन्दु प्राप्त करना होगा। फिर तीसरे बिन्दु C पर कोण C की रचना करनी होगी तथा कोण बनाने वाली भुजा कोण A की भुजा से जहाँ मिलेगी वही चतुर्भुज निर्माण हेतु आवश्यक चौथा बिन्दु होगा। आइए अब चरणवार रचना करें :

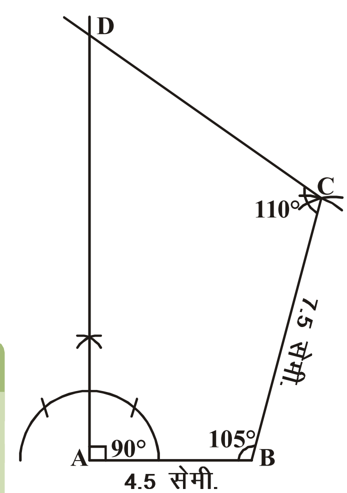
रचना के चरण



1. सबसे पहले AB= 4.5 सेमी. लम्बाई का एक रेखाखंड खीचिए। फिर A एवं B को केन्द्र मानते हुए क्रमशः 90^0 एवं 105^0 का कोण बनाइए।



2. B को केन्द्र मानकर BC= 7.5 सेमी. त्रिज्या का एक चाप खींचेंगे जो 105^0 का कोण बनाने वाली रेखा पर जिस बिन्दु पर काटेगा वह C बिन्दु होगा।



3. C को केन्द्र मानकर 110^0 का कोण बनायेंगे जो A कोण बनाने वाली रेखा को जिस बिन्दु पर काटेगी वह D बिन्दु होगा। इस प्रकार प्राप्त चतुर्भुज, ABCD एक अभिष्ट चतुर्भुज है।

प्रयास कीजिए

ऊपर की रचना में चतुर्भुज बनाने के लिए आपने किन दो त्रिभुजों का निर्माण किया तथा प्रत्येक के लिए कौन से नियम से रचना की।

स्वयं करके देखिए

सोचिए तथा अपने मित्रों से चर्चा कीजिए कि–

1. क्या हम BC भुजा को पहले खींचकर चतुर्भुज के लिए प्रथम दो बिन्दु प्राप्त करते हुए शेष दो बिन्दु और प्राप्त कर सकते हैं?
2. ऊपर प्राप्त जानकारी के आधार पर क्या आप 6.5 सेमी. एवं 7.5 सेमी. भुजा एवं एक कोण 135^0 वाला एक समांतर चतुर्भुज खींच सकते हैं?

प्रश्नावली 7.4

1 एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें BC = 3.5 सेमी., CD = 6.5 सेमी., तथा कोण $B = 75^0$, कोण $C = 105^0$ और कोण $D = 120^0$ हो।

2 एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 5.5 सेमी.., QR = 3.7 सेमी.., तथा कोण $P = 90^0$,कोण $Q = 105^0$ और कोण $R = 90^0$ हो।

3 एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 3.5 सेमी.., BC = 6.5 सेमी.., तथा कोण $A = 60^0$, कोण $B = 105^0$ और कोण $D = 75^0$ हो। (कोण $C = 360^0 – 60^0 – 105^0 – 75^0$)

4 एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 7.5 सेमी. तथा BC = 6.5 सेमी.. और कोण $C = 110^0$ और कोण $D = 70^0$ हो।

7.2.5 कुछ विशिष्ट परिस्थितियों में चतुर्भुज की रचना।

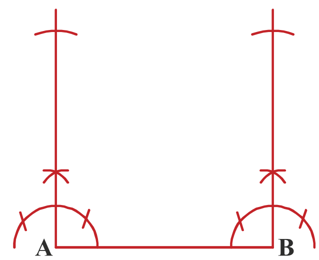
ऊपर चतुर्भज की रचना के लिए हमने पाँच मापों का प्रयोग किया है। आइए अब हम उन विशिष्ट स्थितियों पर चर्चा करें जिसमें हम पाँच से भी कम मापों की जानकारी रखते हुए भी चतुर्भुजों की रचना कर सकते हैं।

उदाहरण–5. 6 सेमी. भुजा वाले वर्ग की रचना कीजिए।

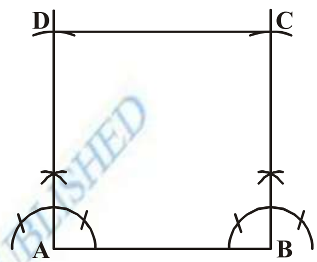
उदाहरण को देखने से लगता है कि इसमें एक ही माप दिया है, परन्तु यदि हमें वर्ग की विशेषताओं को याद करें तो हमें पता चलता है कि एक भुजा की माप ज्ञात रहने पर चारो भुजाओं की लम्बाई ज्ञात हो जाती है तथा हमें यह भी पता रहता है कि वर्ग के चारो कोणों की माप समान यानि 90^0 होती है। आईए वर्ग की रचना करें।

चरण–1. 6 सेमी. लम्बाई की एक सरल रेखा खींचते है।तथा इस भुजा को कोई भी नाम दे सकते है। इस प्रकार हमें वर्ग निर्माण के लिए आवश्यक प्रथम दो बिन्दु प्राप्त हो जाते हैं।

चरण–2. खींची गई सरल रेखा पर स्थित दोनों बिन्दुओं पर हम 90° का कोण बनाते हैं। कोण बनाने वाली इन्हीं दोनों रेखाओं पर वर्ग की रचना हेतु आवश्यक तीसरा एवं चौथा बिन्दु प्राप्त होगा।



चरण–3. अब A और B को केन्द्र मानते हुए 6 सेमी. का एक–एक चाप खींचते हैं। चाप को क्रमशः C एवं D बिन्दु का नाम देते हैं। फिर C और D बिन्दु को स्केल की सहायता से मिलाते हैं। इस प्रकार हमें अभिष्ट वर्ग ABCD प्राप्त होता है।



इस प्रकार हम देखते हैं कि कुछ विशिष्ट माप वाले चतुर्भुजों यथाः वर्ग, आयत, समचतुर्भुज एवं समांतर चतुर्भुज आदि की रचना पाँच से कम माप ज्ञात रहने के वावजूद भी कर सकते हैं। रचना में पाँच कम दिये गये मापों के आधार पर उनके कुछ विशिष्ट गुणों के कारण ही रचना हेतु अन्य माप हमें स्वंय ही प्राप्त हो जाते हैं।

स्वयं करके देखिए

1. सोंचिए क्या आप एक आयत की रचना केवल उसकी लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात रहने पर कर सकते हैं। यदि हाँ तो और कौन–कौन से माप आप रचना के पूर्व पता लगायेंगे।
2. यदि आपको एक समचतुर्भुज की रचना करनी है तथा आपको दो विकर्णों की लम्बाई ज्ञात है। रचना हेतु आप समचतुर्भुज के किस विशिष्ट गुण का उपयोग करेंगे और क्यों करेंगे?

प्रश्नावली–7.5

1 एक वर्ग ABCD की रचना कीजिए जिसमें BC = 3.5 सेमी.. है।

2 एक आयत PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 7.5 सेमी.., QR = 5.5 सेमी.. हो।

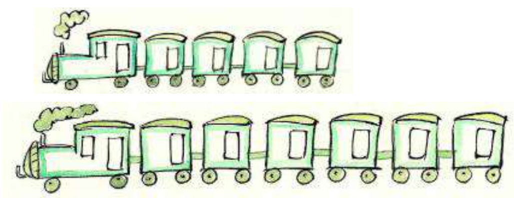
3 एक समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 3.5 सेमी.. तथा कोण A = 60^0 हो।

4. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 6.5 सेमी.. तथा BC = 5.5 सेमी.. और कोण C = 110^0 हो।

अध्याय – 8

राशियों की तुलना

(COMPARISON OF QUANTITIES)



8.1 भूमिका

हम जानते हैं कि अनुपात का अर्थ है दो मात्राओं की तुलना करना।

मान लीजिए दो रेलगाड़ियाँ हैं जिनकी लम्बाई क्रमशः 80 मीटर व 160 मीटर है। तो पहली रेलगाड़ी की लम्बाई का दूसरी रेलगाड़ी की लम्बाई से अनुपात = 80 : 160 है।

यह तुलना भिन्नों की सहायता से $\frac{80}{160} = \frac{1}{2}$ या 1 : 2 के रूप में भी कर सकते हैं।

अतः पहली रेलगाड़ी की लम्बाई, दूसरी की आधी है।

इस प्रकार दूसरी रेलगाड़ी की लम्बाई, पहली की कितने गुना होगी?...................

इसे इस प्रकार भी समझ सकते हैं।

दूसरी रेलगाड़ी की लम्बाई : पहली रेलगाड़ी की लम्बाई

160 : 80 या $\frac{160}{80} = \frac{2}{1}$ अतः 2 : 1

अतः दूसरी रेलगाड़ी की लम्बाई पहली रेलगाड़ी की दुगुनी है।

आप सोचिए कि $a : b$ व $b : a$ किस स्थिति में समान होंगे?

यहाँ पर हम देखते हैं कि 1 : 2 और 2 : 1 दोनों समान अनुपात नहीं है। उसी प्रकार

$a : b$ और $b : a$ दो अनुपात है क्योंकि $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$

यह तुलना हम प्रतिशत के उपयोग से भी कर सकते हैं।

$$\frac{\text{पहली रेलगाड़ी की लम्बाई}}{\text{दूसरी रेलगाड़ी की लम्बाई}} = \frac{80}{160} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{50}{50} = \frac{50}{100} = 50\%$$

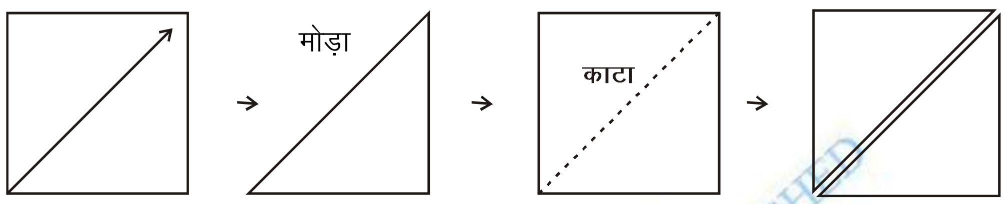
(हर को 100 बनाया गया है)

पहली रेलगाड़ी की लम्बाई दूसरी की 50% है।

गतिविधि

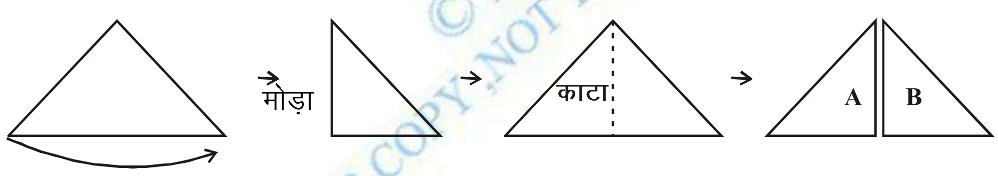
आओ बबलू और नेहा की अनुपातों के सवालों को हल करने में मदद करें।

बबलू ने एक वर्गाकार कागज लिया और उसके एक कोने को दूसरी तरफ के कोने से मिलाया और फिर मोड़ से काट दिया



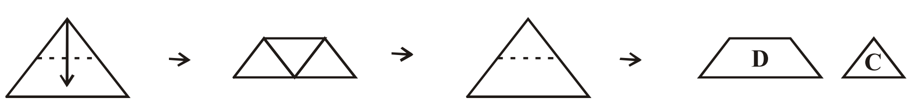
आप बताइये इस प्रकार बने एक त्रिभुज व शुरूआत में लिये गये वर्गाकार पेज के क्षेत्रफलों में क्या अनुपात है?

अब नेहा ने ऊपर कटे हुए एक त्रिभुज को लेकर नीचे दिए गए चित्रानुसार काटा और बने त्रिभुजों पर A व B अंकित किया।

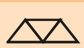


इस प्रकार बने त्रिभुज A के क्षेत्रफल व प्रारम्भिक त्रिभुज के क्षेत्रफल में क्या अनुपात होगा?

बबलू ने A व B में से एक त्रिभुज को लेकर इस तरह से मोड़ा–



क्या आप C व D के क्षेत्रफलों के बीच अनुपात बता सकते हो?



इस चित्र से तो लग रहा है कि C जैसी तीन त्रिभुजाकार आकृति D में है? सोचिए क्या यह सही है?

अपने अनुपातों को जांचने के लिए आप वर्गाकार कागज लेकर इस गतिविधि को करके देख सकते हैं।

स्थिति– I A की C से तुलना करने पर

$$A, C \text{ का } 4 \text{ गुना है अतः } A : C = 4 : 1$$

स्थिति– II C की A से तुलना करने पर

$$C, A \text{ का चौथाई } \left(\frac{1}{4}\right) \text{ है अतः } C : A$$

$$\frac{1}{4} : 1$$

$$\frac{1}{4} \times 4 : 1 \times 4 \text{ (दोनों पदों में 4 से गुणा करने पर)}$$

$$1 : 4$$

आपने देखा कि $A : C \neq C : A$

स्वयं करके देखिए

नीचे कुछ राशियों के उदाहरण दिए गए हैं। बताइए उनमें से किन–किन राशियों के अनुपात आप निकाल सकते हैं?

1. 200 मीटर व 15 सैकण्ड
2. 15 किमी. व 7000 मी.
3. 170 सेमी. व 165 सेमी.
4. 500 रु. व 250 व्यक्ति

सामान्य रूप में अनुपात $a : b$ को $\frac{a}{b}$ के रूप में लिख कर भी व्यक्त करते हैं।

अनुपात के इस रूप का उपयोग आपने दर निकालने में भी किया था–

उदाहरण–1. 15 पेनों की कीमत 120 है तो 24 पेनों की कीमत कितनी होगी।

हल : हम जानते हैं कि–

15 पेनों की कीमत है = 120 रु.

तब 1 पेन की कीमत होगी = $\frac{120}{15}$ रु.

इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं 8 रु. प्रति पेन

दर, अनुपात का वह रूप है जिसमें असमान राशियों की तुलना की जाती है।

अब प्रति पेन की कीमत द्वारा हम 24 पेनों की कीमत आसानी से निकाल सकते हैं।

$24 \times 8 = 192$ रु.

उदाहरण–2. प्रवीण किसी परीक्षा में 294 अंक प्राप्त करता है, जबकि उसकी बहन गुंजन उसी परीक्षा में 372 अंक लाती है। यदि प्रवीण को परीक्षा में 49 प्रतिशत अंक प्राप्त होता है तो निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

अ. परीक्षा में प्रवीण के अंकों का उसकी बहन गुंजन के अंकों से अनुपात

ब. गुंजन के द्वारा प्राप्त अंकों का प्रतिशत में मान?

स. किसके अंक प्रतिशत में अधिक है और कितने अधिक है?

हल : अ. प्रवीण द्वारा परीक्षा में प्राप्त अंक का गुंजन द्वारा परीक्षा में प्राप्त अंकों से अनुपात

$= 294 : 372$ अथवा, $\frac{294}{372} = \frac{294 \div 6}{372 \div 6} = \frac{49}{62}$

(अनुपात का सरल रूप संख्याओं का म.स. निकालकर)

$\frac{49}{62}$ को $49 : 62$ के रूप में लिखा जाता है और 62 की तुलना में 49 पढ़ा जाता है।

ब. सबसे पहले हम परीक्षा के पूर्णांक का पता लगाऐंगे।

मान लीजिए परीक्षा का पूर्णांक x है,

दिया गया है – प्रवीण को परीक्षा में 49 प्रतिशत अंक मिले

इसलिए x का $49\% = 294$

या, $x \times \frac{49}{100} = 294$

या, $x \times 49 = 294 \times 100$

या, $x = \frac{294 \times 100}{49} = 600$

अतः परीक्षा का पूर्णांक $= 600$

ऐकिक नियम द्वारा

49% अंक बराबर है $= 294$

तो 1% अंक बराबर होगा $= \dfrac{\overset{\overset{6}{\cancel{42}}}{\cancel{294}}}{\underset{\cancel{7}}{\cancel{49}}} = 6$

$1\% = 6$ अंक

अतः परीक्षा के 100% अंक होगें $= 1\% \times 100 = 6 \times 100$

$100\% = 600$

चूंकि गुंजन 600 अंकों में 372 अंक प्राप्त करती है

गुंजन के प्राप्तांक प्रतिशत में $\dfrac{372 \times 100}{600} = 62\%$ प्राप्त करती है।

गुंजन द्वारा प्रतिशत में प्राप्त अंक $= 62\%$

गुंजन द्वारा परीक्षा में 62% अंक लाया गया है जबकि प्रवीण द्वारा परीक्षा में 49% अंक लाया गया है।

गुंजन द्वारा प्रतिशत में प्राप्त अधिक अंक $= 62\% - 49\% = 13\%$

अतः गुंजन ने प्रवीण से 13% अधिक अंक प्राप्त किए है।

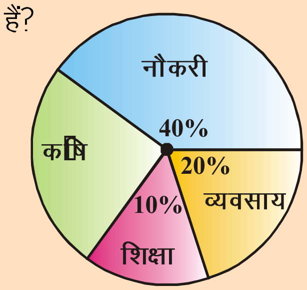
स्वयं करके देखिए

किसी गांव में रहने वाले 150 युवा लोगों में से 40% युवा लोग नौकरी में, 20% व्यवसाय में, 15% शिक्षा प्राप्ति में एवं शेष कृषि कार्य में लगे हैं। तो बताइए–

अ. कितने प्रतिशत युवा लोग कृषि कार्य में लगे हैं?

ब. नौकरी करने वाले युवा और शिक्षा प्राप्त करने वाले युवा लोगों का अनुपात क्या है?

स. किस–किस कार्य में सबसे अधिक युवा लोग और सबसे कम युवा लोग लगे हैं?



प्रश्नावली – 8.1

1. **सरल अनुपात ज्ञात कीजिए–**

    अ. 14 मीटर का 7 मीटर 35 सेमी. से

    ब. 3 रु. का 80 पै. से

    स. 150 किग्रा. का 210 किग्रा. से

    द. 2 घंटे का 50 मिनट से

2. **निम्नलिखित अनुपातों को प्रतिशत में परिवर्तित कीजिए–**

    अ. 3 : 25 ब. 16 : 25 स. 3 : 16

3. 60 विद्यार्थियों में से 40 प्रतिशत विद्यार्थियों को विज्ञान विषय रूचिकर लगता है तो उन विद्यार्थियों की संख्या बताइये जिन्हें विज्ञान विषय में कम रूचि है।

4. किसी परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिए एक परीक्षार्थी को पूर्णांक के 33 प्रतिशत अंक प्राप्त करने हैं, उसे 225 अंक मिले जो कि 33 प्रतिशत से 6 अंक कम थे। बताइए परीक्षा में पूर्णांक क्या था?

5. रहीम अपना निवास स्थान 8 बजे सुबह छोड़ देता है और उसी दिन शाम 4 बजे अपने घर लौट आता है, तो 24 घंटे का कितना प्रतिशत वह अपने निवास–स्थान पर व्यतीत करता है?

6. पहली संख्या, दूसरी संख्या से 20% अधिक है तो दूसरी संख्या पहली संख्या से कितना प्रतिशत कम है?

8.2 प्रतिशत के अनुप्रयोग

ग्राहकों को आकर्षित करने के लिए अथवा सामान की बिक्री में वृद्धि करने के लिए दुकानदार द्वारा ग्राहकों को कुछ छूट (बट्टा) दिया जाता है, जिसमें हम प्रतिशत का प्रयोग करते हैं।

किसी संस्था अथवा बैंक द्वारा निवेश या जमा की गई राशि पर लाभांश अथवा साधारण ब्याज या चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करने में भी प्रतिशत का प्रयोग हम करते हैं।

उदाहरण–3. रवि ने एक पुरानी टेलीविजन 3000 रु. में खरीदा। उसने 700 रु. उसकी मरम्मत पर, 50 रु. टेम्पो भाड़ा पर खर्च कर उसे अपने दुकान पर लाया और ग्राहक को 4500 रु. में बेच दिया। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

कभी–कभी जब एक वस्तु खरीदी जाती है तो खरीदते समय अथवा बेचने से पहले कुछ अतिरिक्त धन भी खर्च किया जाता है। यह खर्च जैसे कि मरम्मत पर, श्रमिकों पर परिवहन पर खर्च की गई राशि इत्यादि हो सकती है। ये सभी होने वाले खर्च उपरी खर्च कहलाते हैं। उपरी खर्च जोड़कर किसी वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात किया जाता है।

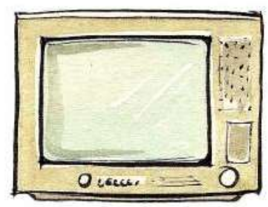
हल : टेलीविजन का क्रयमूल्य (CP) = खरीद मूल्य + उपरी खर्च

= 3000 रु. + (750 रु. + 50 रु.)

= 3000 रु. + 750 रु.

= 3750 रु.

विक्रय मूल्य (SP) = 4500 रु.



चूँकि विक्रय मूल्य > क्रयमूल्य

इसीलिए लाभ = 4500 रु. – 3750 रु. = 750 रु.

इस प्रकार 3750 रु. पर उसे 750 रु. का लाभ हुआ।

यदि क्रय मूल्य 1 होता तब लाभ होता = $\frac{750}{3750}$ रु.

अतः 100 रु. पर उसे कितना लाभ होगा?

100 रु. पर लाभ = $\frac{750}{3750} \times 100 = 20\%$

स्वयं करके देखिए

1. नीरज ने एक रेफ्रिजरेटर 9000 रु. में खरीदा। कुछ समय काम में लेकर व उसके रख रखाव/मरम्मत पर 500 रु. खर्च कर नीरज ने उसे 9000 रु. में बेच दिया। उसका लाभ/हानि प्रतिशत बताइए।
2. ऊपर के प्रश्न से हानि प्रतिशत के लिए सूत्र बनाइए।

उदाहरण–4. अमित दो कुर्सियां 550 रु. प्रति कुर्सी की दर से बेचता है। इनमें से एक पर 10 प्रतिशत का लाभ एवं दूसरे पर 20 प्रतिशत की हानि होती है। कुल लाभ या हानि ज्ञात कीजिए। प्रत्येक कुर्सी का क्रयमूल्य भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है एक कुर्सी 10 प्रतिशत लाभ से बेचा जाता है। इसका अर्थ है कि यदि क्रय मूल्य 100 रु. है तो विक्रय मूल्य 110 रु. है।

ऐकिक नियम का उपयोग कर

जब 110 रु. विक्रय मूल्य हो तो क्रय मूल्य 100 रु. है।

जब विक्रय मूल्य 1 रू हो तो कय मूल्य होगा $= \dfrac{100}{110}$ रु.

जब 550 रु. विक्रय मूल्य है तो क्रयमूल्य $= \dfrac{100}{110} \times 550$ रु. = 500 रु. होगा

दूसरी कुर्सी को 20 प्रतिशत की हानि से बेचा जाता है। इसका अर्थ है–

यदि क्रय मूल्य 100 रु. है तो विक्रय मूल्य 80 रु. है।

जब विक्रय मूल्य 80 रु. है तो क्रय मूल्य 100 रु. है।

इसलिए जब विक्रय मूल्य 550 रु. है तो क्रय मूल्य $= \left(\dfrac{100}{80} \times 550\right)$

= 687.50 रु.

क्या आप बता सकते हैं कि कुल मिलाकर लाभ हुआ अथवा हानि?

यह जानने के लिए हमें संयुक्त रूप से क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य ज्ञात करने की आवश्यकता है।

कुल क्रय मूल्य = (500 + 687.50) रु. = 1187.50 रु.

कुल विक्रय मूल्य = 550 रु. + 550 रु. = 1100 रु.

चूंकि कुल क्रय मूल्य > कुल विक्रय मूल्य

इसलिए (1187.50 – 1100) रु. अर्थात् 87.50 रु. की हानि हुई।

अतः 1187.50 (क्रय मूल्य) पर हानि हुई = 87.50

अब प्रतिशत हानि आप निकालिए

8.3 बट्टा (Discount) ज्ञात करना

दुकानदार द्वारा जिस मूल्य पर वस्तु खरीदी जाती है वह उसके लिए क्रय मूल्य और जिस पर बेची जाती है वह विक्रय मूल्य कहलाता है। कई बार दुकानदार वस्तुओं पर मूल्य अंकित कर देते हैं, और ग्राहकों को आकर्षित करने के लिए उस अंकित मूल्य पर छूट देते हैं। जिससे सामान की बिक्री में वृद्धि हो।

उदाहरण के लिए एक दुकानदार एक कम्प्यूटर 15000 रु. में खरीदता है और 3000 रु. बढ़ाकर (15000 + 3000) रु. = 18000 रु. उस कम्प्यूटर का अंकित मूल्य रखता है। ग्राहकों के लिए वह कम्प्यूटर के अंकित मूल्य पर 2000 रूपये की छूट देता है। अतः कम्प्यूटर का अंकित मूल्य 18000 रु. तथा विक्रय मूल्य 1600 रु. है।

जब दुकानदार अपनी किसी वस्तु को अंकित मूल्य से कम मूल्य पर बेचता है तो अंकित मूल्य और विक्रय मूल्य के अन्तर को बट्टा या छूट कहा जाता है।

अतः बट्टा अथवा छुट = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

आजकल बाजारों में Discount Sale की दुकानें लगी रहती है। याद रहे बट्टा (Discount) सदैव अंकित मूल्य पर ही दी जाती है।

उदाहरण–5. एक शर्ट (Shirt) का अंकित मूल्य 450 रु. है और दुकानदार उसे 300 रु. में देता है। आप बताइए कि इस शर्ट पर बट्टा और बट्टा प्रतिशत कितना है?

हल : बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

= 450 रु. – 300 रु.

= 150 रु.

चूंकि बट्टा अंकित मूल्य पर है इसलिए हमें अंकित मूल्य को आधार मानना पड़ेगा।

चूंकि 450 रु. अंकित मूल्य पर 150 रु. बट्टा है

इसलिए 1 रू. अंकित मूल्य का $\frac{150}{450}$ रूपया बट्टा है।

इसलिए 100 रु. अंकित मूल्य पर बट्टा होगा।

बट्टा $= \frac{150}{450} \times 100 = 33\frac{1}{3}\%$

यदि बट्टा प्रतिशत दिया हुआ है तो आप बट्टा भी ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण–6. एक सोफा का अंकित मूल्य 16,000 रु. है। सेल में 25 प्रतिशत बट्टे की घोषणा की जाती है। इस सोफा पर बट्टे की राशि क्या है और इसका विक्रय मूल्य क्या है?

हल : दिया हुआ अंकित मूल्य है = 16000 रु.

25 प्रतिशत बट्टे का अर्थ है कि 100 रु. अंकित मूल्य पर 25 रु. बट्टा है।

इसलिए जब अंकित मूल्य 16000 रु. है तो बट्टा $= \left(\frac{25}{100} \times 16000\right)$ रु.

$= 4000$

अतः सोफा पर बट्टा (Discount) की राशि 4000 रु. है।

सोफा का विक्रय मूल्य = (16000 − 4000) रु.

= 12000 रु.

स्वयं करके देखिए

1. एक दुकानदार अपने सभी सामानों पर 30 प्रतिशत बट्टा देता है। निम्नलिखित में से प्रत्येक का विक्रय मूल्य क्या होगा?
   - अ. 220 रु. अंकित मूल्य वाली एक पोशाक
   - ब. 1250 रु. अंकित मूल्य वाली एक जोड़ी जूते
   - स. 650 रु. अंकित मूल्य वाली एक बैग
2. एक स्कूटर 8 प्रतिशत बट्टे पर 27,600 रु. में बेची जाती है। स्कूटर का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

8.4 बिक्री कर / Value Added Tax (वैट)

बिक्री कर सरकार द्वारा वसूला जाता है। यह कर किसी वस्तु की खरीद पर दुकानदार द्वारा लिया जाता है व सरकार को दिया जाता है। यह हमेशा वस्तु के विक्रय मूल्य पर लगता है। आजकल वस्तु के मूल्य में कर Value Added Tax (VAT) के नाम से जुड़ता है।

उदाहरण–7. एक साइकिल का मूल्य 2200 रु. तथा साइकिल के पम्प का मूल्य 300 रु. है। बताइए किशोर को बिक्रीकर सहित कुल कितना भुगतान साइकिल और साइकिल के पम्प के लिए करना होगा जबकि बिक्रीकर की दर 5 प्रतिशत देय है।

हल : साइकिल का मूल्य = 2200 रु.

साइकिल पम्प का मूल्य = 300 रु.

दोनों का कूल मूल्य = 2200 रु. + 300 रु.

= 2500 रु.

दोनों पर समान बिक्रीकर है, अतः मूल्यों का योग किया गया है।

बिक्री कर = 5 प्रतिशत

कुल बिक्री कर $= 2500 \times \frac{5}{100} = 125$ रु.

$\therefore$ कुल भुगतान = (2500 + 125) रु.

= 2625 रु.

उदाहरण–8. शबनम ने एक कूलर 4 प्रतिशत कर सहित 6500 रु. में खरीदा। वैट जुड़ने से पहले कूलर का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : कूलर के मूल्य में वैट (VAT) भी शामिल है।

अतः 4 प्रतिशत वैट का अर्थ है कि यदि वैट रहित मूल्य 100 रु. है तो वैट सहित मूल्य 104 रु. है।

अब यदि वैट सहित मूल्य 104 रु. है तो वास्तविक मूल्य 100 रु. है।

अतः जब कर सहित मूल्य 6500 रु. है तो वास्तविक मूल्य $= \left(\frac{100}{104} \times 6500\right)$ रु.

= 6250 रु.

प्रश्नावली – 8.2

1. रोहित एक पुराना अलमीरा 6700 रुपये में खरीदकर उस पर 300 रु. उसके मरम्मत में खर्च करता है उसके बाद उसे वह 7500 रु. में बेच देता है। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

2. **प्रत्येक के लिए x, y, z का मान ज्ञात करें।**

क्र.सं.	खरीद मूल्य	उपरी व्यय (रु. में)	क्रय मू. (रु. में)	वि.मू. (रु. में)	लाभ (रु. में)	हानि (रु. में)	लाभ%	हानि%
i.	1500 रु.	320 रु.	x	y	280	-	z	-
ii.	240 रु.	20 रु.	x	y	-	z		10%
iii.	500 रु.	x	575 रु.	y	125	-	z	-
iv.	9000 रु.	200 रु.	x	7200	-	y	-	z
v	x	50 रु.	500 रु.	y	z	-	20%	-

3. एक बिजली के पंखे को 510 रु. में बेचने पर एक दुकानदान को 15 प्रतिशत की हानि उठानी पड़ती है, बताइए दुकानदार ने पंखा कितने में खरीदा? यदि वह पंखे को 630 रु. में बेचे तो उसे कितने प्रतिशत लाभ या हानि होगी?

4. मुकेश स्पोर्ट्स की दुकान से एक फुटबॉल गेंद 20 प्रतिशत के बट्टे पर 192 रु. में खरीदता है तो फुटबाल गेंद का अंकित मूल्य क्या है?

5. एक दुकानदार एक जोड़ी जूते पर 1250 रु. मूल्य अंकित करके ग्राहक को खरीदने पर 20 प्रतिशत की छुट देता है। छुट देने के बाद भी दुकानदार को 25 प्रतिशत का लाभ प्राप्त होता है, तो जूते का क्रय मूल्य क्या है?

6. सोहन द्वारा एक डिपार्टमेंटल स्टोर से खरीदी गई सामग्री का बिल निम्नानुसार है। बिल की कुल राशि ज्ञात कीजिए।

क्र.सं.	सामग्री का नाम	सामान का मूल्य	बिक्रीकर	बिक्रीकर (रुपये में)
1.	टी शर्ट	250/–	4%	
2.	क्रॉकरी	300/–	10%	
3.	घी 1 किग्रा.	260/–	5%	
4.	मूंग दाल 1 किग्रा.	60/–	2%	

7. राखी को 250 रु. मूल्य की खेल सामग्री तथा 220 रु. मूल्य के चमड़े का बैग क्रमशः 6 प्रतिशत और 12 प्रतिशत बिक्रीकर देकर खरीदना पड़ा हो, तो बतलाइए उसने कुल कितने रुपये चुकाए?

8.5 चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

पिछली कक्षा में हम ऐकिक नियम द्वारा साधारण ब्याज (S.I.) ज्ञात करना सीख चुके हैं। आइए, निम्न उदाहरण द्वारा इसे पुनः दोहराएं–

उदाहरण–9. 2000 रु. पर 3 वर्ष का 10 प्रतिशत वार्षिक दर से ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : 100 रु. पर 1 वर्ष का ब्याज = 10 रु.

अर्थात् 1 रु. पर 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{10}{100}$ रु.

अर्थात् 2000 रु. पर 1 वर्ष का ब्याज = $2000 \times \frac{10}{100}$ रु.

अर्थात् 2000 रु. पर 3 वर्ष का ब्याज $= 2000 \times \frac{10}{100} \times 3$ रु. $= 600$ रु.

यहां हम देखते हैं कि 2000 रु. का 3 वर्ष का 10 प्रतिशत वार्षिक दर से ब्याज ज्ञात करने के लिए मूलधन (2000 रु.) को समय (3 वर्ष) तथा दर $\left(10\% = \frac{10}{100}\right)$ से गुणा किया जाता है। इससे यह परिणाम निकलता है कि–

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$$

अब यदि ब्याज (Interest) को I, मूलधन (Principal) को P, समय (Time) को T तथा दर (Rate of Interest) को R% वार्षिक से व्यक्त करें तो

$$I = \frac{P \times R \times T}{100}$$

इसी प्रकार मिश्रधन (Amount) को A से प्रदर्शित करें तो

$$A = P + I$$

स्वंय करके देखिए

अभिषेक द्वारा महाजन से 4000 रु., 10 प्रतिशत वार्षिक की दर से 3 वर्ष के लिए लिया गया है। साधारण ब्याज सहित मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

परन्तु सामान्यतः बैंक, पोस्ट ऑफिस, इंश्योरेन्स कम्पनी या अन्य संस्थानों द्वारा लिया जाने वाला अथवा भुगतान किया जाना ब्याज साधारण ब्याज नहीं होता है। इन संस्थाओं द्वारा ब्याज का परिकलन पिछले वर्ष की राशि जिसमें पिछले वर्ष का ब्याज संयोजित होता है पर किया जाता है। इस प्रकार से किए गए ब्याज परिकलन के तरीके को चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) कहा जाता है।

एक किसान दीनु अपने नजदीक के क्षेत्रीय ग्रामीण बैंक से उन्नत किस्म के बीज खरीदने हेतु 2000 रु. एक वर्ष के लिए 10 प्रतिशत वार्षिक दर पर कर्ज लेता है। दीनु को 1 वर्ष बाद कितनी राशि लौटानी होगी?

एक वर्ष बाद ब्याज की राशि $= \frac{2000 \times 10 \times 1}{100} = 200$ रु.

एक वर्ष बाद बैंक को लौटायी जाने वाली राशि = 2000 रु. + 200 रु. = 2200 रु.

परन्तु फसल की उपज नहीं होने के कारण दीनु कर्ज नहीं लौटा पाता और बैंक जाकर राशि को लौटाने के लिए एक वर्ष का समय और मांगता है। अतः दुसरे वर्ष के लिए मूलधन 2200 रु. हो जायेगा।

अब दूसरे वर्ष के अन्त में दीनू को निम्न राशि का भुगतान करना होगा–

दूसरे वर्ष का मूलधन = 2200 रु.

2200 रु. पर अगले एक वर्ष का ब्याज = = $\frac{2200 \times 10 \times 1}{100} = 220$ रु.

दूसरे वर्ष के अंत में देय राशि = (2200 + 220) रु. = 2420 रु.

अतः 2 वर्ष बाद दीनू को 2420 रु. लौटाने होंगे।

आपने देखा कि दूसरे वर्ष का ब्याज 220 रु. है जो पहले वर्ष के ब्याज 200 रु. से 20 अधिक है। ब्याज की यह अधिक राशि, दूसरे वर्ष के अधिक मूलधन के कारण है। इस तरह से ब्याज के संयोजन को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

स्वयं करके देखिए

क्रमांक	मूलधन	दर	पहले वर्ष		दूसरा वर्ष		तीसरा वर्ष	
			ब्याज	मिश्रधन	ब्याज	मिश्रधन	ब्याज	मिश्रधन
1.	10,000	10%	1000	11000	1100	12100	1210	13310
2.	50,000	5%						
3.	30,000	10%						

उदाहरण–10. अनुराधा ने किसी संस्था में 5 प्रतिशत वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 8000 रु. 3 वर्षों के लिए जमा किया। निश्चित अवधि के बाद उसको मिलने वाला चक्रवृद्धि ब्याज एवं मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल : पहले वर्ष के लिए मूलधन (P) = 8000 रु.; दर (R) = 5%; समय (T) = 1 वर्ष

पहले वर्ष का ब्याज $= \frac{P \times R \times T}{100} = \frac{8000 \times 5 \times 1}{100} = 400$ रु.

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

= 8000 रु. + 400 रु. = 8400 रु.

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन ही दूसरे वर्ष के लिए मूलधन होता है।

अतः दूसरे वर्ष के लिए मूलधन $P = 8400$ रु.; दर $R = 5\%$; समय $T = 1$ वर्ष

अतः दूसरे वर्ष का ब्याज $= \dfrac{P \times R \times T}{100} = \dfrac{8400 \times 5 \times 1}{100} =$ 420 रु.

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

= (8400 + 420) रु. = 8820 रु.

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन ही तीसरे वर्ष के लिए मूलधन होता है।

अतः तीसरे वर्ष के लिए मूलधन $P = 8820$ रु.; दर $R = 5\%$; समय $T = 1$ वर्ष

अतः तीसरे वर्ष का ब्याज $= \dfrac{P \times R \times T}{100} = \dfrac{8820 \times 5 \times 1}{100} =$ 441 रु.

$\therefore$ चक्रवृद्धि ब्याज = पहले वर्ष का ब्याज + दूसरे वर्ष का ब्याज + तीसरे वर्ष का ब्याज

= 400 रु. + 420 रु. + 441 रु. = 1261 रु.

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज = (8000 + 1261) रु. = 9261 रु.

अतः स्पष्ट है कि चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के लिए प्रत्येक वर्ष ब्याज की गणना करनी पड़ती है।

स्वयं करके देखिए

1. अरूणा ने अपने कम्प्यूटर सेन्टर हेतु दो कम्प्यूटरों के लिए 60,000 रुपये, 10 प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर लिए। बताइये अरूणा को 3 वर्ष बाद कुल कितनी रकम लौटानी होगी?
2. 10,000 रुपये का 10 प्रतिशत की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज सहित मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

8.5.1 चक्रवृद्धि ब्याज के लिए सूत्र का निर्धारण

एक दिन दिनकर ने अपने अध्यापक से पूछा, ''क्या चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की कोई सरल विधि है?''

अध्यापक ने कहा, ''चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की एक संक्षिप्त विधि है। आइए इसे ज्ञात करने का प्रयास करते हैं।

माना कि $R\%$ वार्षिक ब्याज की दर से मूलधन P_1 पर ब्याज वार्षिक संयोजित होता

है। मान लिया कि $P_1 = 500$ रु. और $R = 6\%$ तथा समयावधि 2 वर्ष है।

दो वर्ष के पश्चात् मिश्रधन तथा चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करना है।

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन की गणना **यहाँ $T = 1$**

पहले वर्ष का ब्याज $= \dfrac{500 \times 6 \times 1}{100}$ अथवा $SI_1 = \dfrac{P_1 \times R \times 1}{100}$ रु. $= \dfrac{P_1 R}{100}$

अतः पहले पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन = मूलधन (P_1) + ब्याज (SI_1)

$500 + \dfrac{500 \times 6 \times 1}{100}$ रु. अथवा $A_1 = P_1 + SI_1 = P_1 + \dfrac{P_1 R}{100}$ सार्व लेने पर

$\Rightarrow$ मिश्रधन $A_1 = 500\left(1 + \dfrac{6}{100}\right)$ रु. $= P_1\left(1 + \dfrac{R}{100}\right) = P_2$

पहले वर्ष का मिश्रधन $A_1 =$ दूसरे वर्ष का मूलधन $= P_2$

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन की गणना:

दूसरे वर्ष का ब्याज $= \left[500\left(1 + \dfrac{6}{100}\right)\right] \times \dfrac{6 \times 1}{100}$ रु. अथवा $SI_2 = \dfrac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= \dfrac{500 \times 6}{100}\left(1 + \dfrac{6}{100}\right)$ रु.

$P_1\left(1 + \dfrac{R}{100}\right) \times \dfrac{R}{100}$ सार्व लेने पर

$= \dfrac{P_1 R}{100}\left(1 + \dfrac{R}{100}\right)$

इस प्रकार दूसरे वर्ष का मिश्रधन होगा– $A_2 = P_2 + SI_2$

$= 500\left(1 + \dfrac{6}{100}\right) + \dfrac{500 \times 6}{100}\left(1 + \dfrac{6}{100}\right)$ रु.

$= 500\left(1 + \dfrac{6}{100}\right)\left[1 + \dfrac{6}{100}\right]$ रु

$= 500\left(1 + \dfrac{6}{100}\right)^2$ रु. $= P_3$.

$= P_1\left(1 + \dfrac{R}{100}\right) + \dfrac{P_1 R}{100}\left(1 + \dfrac{R}{100}\right)$

$= P_1\left(1 + \dfrac{R}{100}\right)\left[1 + \dfrac{R}{100}\right]$ सार्व लेने पर

$= P_1\left(1 + \dfrac{R}{100}\right)^2 = P_3$

इसी प्रकार आगे बढ़ते हुए n वर्ष के अंत में मिश्रधन

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n \text{ होगी}$$

अथवा हम कह सकते हैं कि

$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ जहां $P =$ मूलधन, $R =$ वार्षिक दर $A =$ मिश्रधन एवं $n =$ वर्ष के संकेत को प्रदर्शित करता है।

यदि आपको चक्रवृद्धि ब्याज (C.I) ज्ञात करना हो तो हम जानते हैं कि

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

$$C.I = A - P$$

$$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P$$

$$C.I = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$$

अतः चक्रवृद्धि ब्याज से संबंधित मिश्रधन व ब्याज को सीधे निकालने के लिए हम इन सूत्रों का उपयोग कर सकते हैं।

उदाहरण–11. 6000 रुपए का 3 वर्ष के लिए 10 प्रतिशत वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि चक्रवृद्धि ब्याज = मूलधन $\left[\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}} - 1\right]$

$$\text{या, } C.I = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$$

यहाँ मूलधन $= 6000$ रु.

समय $= 3$ वर्ष

दर $= 10\%$ वार्षिक

$$\therefore \; C.I = 6000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= 6000\left[\left(\frac{110}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= 6000\left[\frac{1331}{1000}-\frac{1}{1}\right]$$

$$= 6000 \times \left[\frac{1331-1000}{1000}\right] = 6000 \times \frac{331}{1000} = 1986 \text{ रु.}$$

$\therefore$ चक्रवृद्धि ब्याज = 1986 रु.

8.5.2 चक्रवृद्धि ब्याज की समयावधि

उपरोक्त उदाहरणों में चक्रवृद्धि ब्याज की गणना वार्षिक आधार पर की गई है किन्तु यह आवश्यक नहीं है कि सदैव चक्रवृद्धि ब्याज की गणना वर्षवार की जाए।

आइए, हम देखते हैं कि यदि ब्याज का वार्षिक अथवा अर्द्धवार्षिक संयोजन किया जाय तो 100 रु. के ब्याज में कितना परिवर्तन होगा?

$P = 100$ रु. और 10% वार्षिक दर पर ब्याज का वार्षिक संयोजन समय अवधि 1 वर्ष है	$P = 100$ रु. और 10% वार्षिक दर पर ब्याज का अर्द्धवार्षिक संयोजन समय अवधि 1 वर्ष
$I = \frac{100 \times 10 \times 1}{100} = 10$	$I_1 = \frac{100 \times \boxed{10 \times \frac{1}{2}}}{100} = 5$ रु. पहले 6 महिने का ब्याज
$A = 100$ रु. $+ 10$ रु.	$A = 100$ रु. $+ 5$ रु. $= 105$ रु.
$= 110$ रु.	अब अगले छह महीने के लिए $P = 105$ रु.
	अतः $I_2 = \frac{105 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100}$ रु. $= 5.25$ रु.

और $A = 105$ रु. $+ 5.25$ रु. $= 110.25$ रु.

चूंकि ब्याज संयोजन अर्द्धवार्षिक है $\quad P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^{T}$

1 वर्ष में 6 माह 2 बार आता है अतः $\quad T$ को दूगना कर देते हैं।

वह दर चूंकि वार्षिक होती है अर्द्धवार्षिक होने पर उसे आधा कर देते हैं।

$$= 100\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{2}$$

$$= 100 \times \left(\frac{21}{20} \times \frac{21}{20}\right)$$

$$= 110.25$$

ऊपर हमने देखा कि यदि ब्याज अर्द्धवार्षिक संयोजित होता है तो हम ब्याज की गणना दो बार करते हैं। इसलिए समय अवधि दुगुना हो जाती है और दर आधी कर दी जाती है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित में ब्याज संयोजन के लिए समय अवधि एवं दर ज्ञात कीजिए–

1. 2 वर्षों के लिए 10 प्रतिशत वार्षिक दर पर उधार ली गई एक राशि पर ब्याज अर्द्धवार्षिक संयोजित किया जाता है।
2. $1\frac{1}{2}$ वर्षों के लिए 6 प्रतिशत वार्षिक दर पर उधार ली गई एक राशि पर ब्याज अर्द्धवार्षिक संयोजित किया जाता है।

उदाहरण–12. उर्मिला ने 2000 रु. 20 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से उधार लिए। यदि ब्याज की गणना प्रति छः माही की जाती हो तो $1\frac{1}{2}$ वर्ष बाद उसे कितनी रकम चुकानी होगी? ब्याज की राशि भी बताइए?

हल : प्रश्नानुसार मूलधन $(P) = 2000$ रु.

दर $(R) = 20$ प्रतिशत वार्षिक = 10 प्रतिशत अर्द्धवार्षिक या छः माही

समय $(n) = 1\frac{1}{2}$ वर्ष = 3 छमाही

चक्रवृद्धि ब्याज से मिश्रधन A $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$= 2000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3$

$= 2000 \times \left(1+\frac{1}{10}\right)^3$

$= 2000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^3 = 2000 \times \frac{1331}{1000}$

= 2662 रु.

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

= (2662 – 2000) रु.

= 662 रु.

उदाहरण–13. 3200 रु. पर 12 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार मूलधन (P) = 3200 रु.

दर (R) = 12%

समय (T) = 2 वर्ष

साधारण ब्याज $= \frac{P \times R \times T}{100}$

$= \frac{3200 \times 12 \times 2}{100}$

= 768 रु.

चक्रवृद्धि ब्याज $= P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$

$= 3200\left[\left(1+\frac{12}{100}\right)^2 - 1\right]$

$= 3200\left[\left(\frac{112}{100}\right)^2 - \frac{1}{1}\right]$

ब्याज का अन्तर = चक्रवृद्धि ब्याज–सा. ब्याज

= (814.08 – 768) रु. = 46.08 रु.

$$= 3200\left[\frac{12544-10000}{10000}\right]$$

$$= 3200 \times \frac{2544}{10000} = 814.08 \text{ रु.}$$

8.5.3 चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र के अनुप्रयोग

अभी तक हमने चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र का प्रयोग करके किसी धन की निर्धारित अवधि के बीच में वृद्धि पर विचार किया है। परन्तु कुछ ऐसी स्थितियां भी है जहां पर इसके सूत्र का उपयोग करके जनसंख्या में वृद्धि अथवा कमी (ह्ास) एवं किसी वस्तु के मूल्य में वृद्धि या कमी पर विचार किया जाएगा।

जनसंख्या–वृद्धि की दर से हमें पता चल सकता है कि किसी विशेष वर्ष के अंत में देश में जनसंख्या कितनी हो जाएगी। इसके लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाएगा–

यदि वर्तमान जनसंख्या = P, जनसंख्या–वृद्धि की वार्षिक दर = r% और n वर्ष के अंत में जनसंख्या = Q, हो तो

$$Q = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

यदि जनसंख्या में वृद्धि के स्थान पर ह्रास हो, तो उपर्युक्त सूत्र ही प्रयोग में लाया जाएगा, केवल दर के स्थान पर r को ऋणात्मक लेना होगा। अतः जनसंख्या–ह्रास की स्थिति में–

$$Q = P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$$ सूत्र का प्रयोग करेंगे।

ठीक इसी प्रकार किसी वस्तु के मूल्य में वृद्धि या कमी परिकलित करने के लिए जनसंख्या वृद्धि या ह्रास के सूत्र के समान ही सूत्र उपयोग में लाया जाएगा।

आइए कुछ उदाहरण लें:

उदाहरण–14. एक गांव की जनसंख्या प्रतिवर्ष 10 प्रतिशत बढ़ जाती है। यदि इस समय उसकी जनसंख्या 8000 है तो 3 वर्ष पश्चात् उसकी जनसंख्या क्या हो जाएगी।

हल : सूत्र के द्वारा हम जानते हैं कि

$$n \text{ वर्षों के बाद जनसंख्या} = \text{आज की जनसंख्या} \times \left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^n$$

$$\therefore \text{ 3 वर्षों के बाद जनसंख्या} = 8000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3$$

$$= 8000 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$$

$$= 10648$$

अन्य तरीके से भी हम इसका हल निकाल सकते हैं।

1 वर्ष के पश्चात् गांव की जनसंख्या में वृद्धि $= 8000$ का 10%

$$= 8000 \times \frac{10}{100} = 800$$

अतः 1 वर्ष के बाद गांव की जनसंख्या $= 8000 + 800 = 8800$

दूसरे वर्ष के पश्चात् गांव की जनसंख्या में वृद्धि $= 8800$ का 10%

$$= 8800 \times \frac{10}{100} = 880$$

अतः दूसरे वर्ष के बाद गांव की जनसंख्या $= 8800 + 880 = 9680$

फिर तीसरे वर्ष के पश्चात् गांव की जनसंख्या में वृद्धि $= 9680$ का 10%

$$= 9680 \times \frac{10}{100} = 968$$

अतः तीसरे वर्ष के बाद गांव की जनसंख्या $= 9680 + 968 = 10648$

उदाहरण–15. एक मोटरसाइकिल 55000 में खरीदा गया। 8 प्रतिशत वार्षिक दर से इसके मूल्य का अवमूल्यन हो गया। 2 वर्ष के बाद मोटरसाइकिल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : अवमूल्यन का अर्थ है वस्तु के मूल्य में कमी होना।

सूत्र का उपयोगः 2 वर्ष के बाद मोटरसाईकिल का मूल्य $= 55000\left(1-\frac{8}{100}\right)^2$ रु.

$$= 55000 \times \frac{92}{100} \times \frac{92}{100}$$

$$= 46552 \text{ रु.}$$

स्वयं कीजिए

संगीता ने एक मोबाईल सेट 12000 रु. में खरीदी। 1 वर्ष बाद उस मोबाईल सेट के मूल्य में 5 प्रतिशत का अवमूल्यन हो गया। एक वर्ष पश्चात् मोबाईल सेट का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली – 8.3

1. सुधीर ने एक कोट 4500 रु. मूल्य के खरीदे। उसे बिक्रीकर के 6 प्रतिशत अतिरिक्त देने पड़े तो बताइए कि सुधीर ने कोट खरीदने में कुल कितने रुपए लगाए।
2. एक दुकानदार ने अपनी दुकान से 3 महीने की बिक्री के बाद 4500 रु. वैट के रूप में जमा किया। यदि वैट की दर 4 प्रतिशत हो तो यह बताइए कि उसने कितनी मूल राशि का सामान बेचा।
3. रजिया ने एक दवा विक्रेता के यहां से 625 रु. अंकित मूल्य की दवाई खरीदी और उस पर 12 रु. 50 पैसे अतिरिक्त कर दिया। बताइए कि अतिरिक्त कर की दर प्रतिशत क्या थी?
4. मिश्रधन ज्ञात कीजिए जब ब्याज की गणना प्रतिवर्ष की जाती है–

   अ. 7500 रु. पर 2 वर्ष के लिए 6 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

   ब. 25000 रु. पर 3 वर्ष के लिए 8 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।
5. **चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए**–

   अ. 6000 रु. पर 3 वर्ष के लिए 10 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

   ब. 4000 रु. पर 2 वर्ष के लिए 5 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।
6. वह धन ज्ञात कीजिए जो 8 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष में 7290 रु. हो जाता है।
7. कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 4000 रु. 2 वर्ष में 5290 रु. हो जाता है।

8. स्वाति एक जमीन का टुकड़ा खरीदने हेतु बैंक से 40960 रु. कर्ज ली। यदि बैंक $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक दर $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए कर्ज देती है और ब्याज का संयोजन अर्द्धवार्षिक होता है तो स्वाति को कितनी राशि देनी पड़ेगी और उनके द्वारा भुगतान किया गया ब्याज की राशि भी ज्ञात कीजिए।

9. रवि ने 32,000 रु. बैंक में जमा किया। उस बैंक द्वारा जमा की गई राशि पर ब्याज का संयोजन तिमाही घोषित हो और ब्याज की दर 5 प्रतिशत वार्षिक हो तो रवि को 6 महीने बाद कितनी राशि प्राप्त होगी।

10. 5 प्रतिशत वार्षिक दर से बढ़ते हुए वर्ष 2005 के अंत में एक शहर की जनसंख्या 44,100 हो गई। बताइए वर्ष 2003 में इस शहर की जनसंख्या कितनी थी।

11. एक जनित्र (Generator) का वर्तमान मूल्य 42000 रु. है। यदि उसका अवमूल्यन 5% वार्षिक हो तो 2 वर्ष बाद उस जनित्र का मूल्य क्या होगा?

अध्याय - 9

बीजीय व्यंजक

(ALGEBRAIC EXPRESSION)

9.1 भूमिका

$2y$-3, x+2, 3z, 8x^2, 2ab-3, आदि सरल बीजीय व्यंजकों के उदाहरण हैं। ये व्यंजक चर एवं अचर से बने हैं। जैसे व्यंजक 2a- 3 है को 2a में 3 घटाकर बनाया गया है। इस व्यंजक में दो पद 2a एवं –3 हैं। स्पष्टतः a का गुणांक 2 है। आइए नीचे दी तालिका को पूरा करें–

व्यंजक	चर	पद	पदों की संख्या	चर के गुणांक
$x + 3$	x	x, 3	द्विपद	x का गुणांक = 1
$2y$				y का गुणांक =
$5 - 2z$				z का गुणांक =
$5x + y$				x का गुणांक = y का गुणांक =
$t^2 + 2t + 3$				t^2 का गुणांक = t का अचर गुणांक =

जैसा कि आपने ऊपर दी गई तालिका में देखा कि पदों को जोड़कर अथवा घटाकर अलग–अलग पदों के व्यंजक बनाए जा सकते हैं। पद स्वयं भी गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में बनाए जा सकते हैं। जैसे व्यंजक 2a- 3 में पद 2a को 2 × a गुणनखण्डों 2 एवं a के गुणनफल के रूप में रखा जा सकता है। पद 3 केवल एक गुणनखण्ड 3 से बना है। (यहाँ हम 1 को नहीं लेते चूँकि वह सभी संख्याओं का सार्वगुणनखण्ड है।)

किसी पद का संख्यात्मक गुणनखण्ड उसका गुणांक कहलाता है।

अब जरा $2x^2y$ और $5yx^2$ के गुणनखण्ड कीजिए। क्या आपको इनमें बीजीय गुणनखण्ड समान मिलते हैं?

$2 \times x \times x \times y$ और $5 \times y \times x \times x$ में बीजीय गुणनखण्ड समान हैं। अतः ये समपदीय हैं। ऐसे समस्त पद जिनमें बीजांक/चरांकवाला भाग समान होता है, सजातीय पद या समपद कहलाते हैं।

स्वयं करके देखिए

निम्न में समान पदों को पहचानिए और लिखिए।

1.	$-3x,\ 3x$	2.	$2xy,\ -3yx$	3.	$x^2y,\ 6x^2y$
4.	$x^2y,\ xy^2$	5.	$xy,\ x^2y^2$	6.	$\frac{x}{3},\ 2x$
7.	$x,\ \frac{1}{x}$				

बीजीय व्यंजकों का योग एवं व्यवकलन

हमने बीजीय व्यंजक की गणितीय संक्रियाओं (+, –, ×) का अभ्यास पिछली कक्षाओं में भी किया है। आइए, दो व्यंजकों को एक साथ लिखकर जोड़ते हैं। जैसे–

(i) $2x$ एवं $3x$ को जोड़िए।

हल : $2x + 3x = (2 + 3)\,x$ ($\because$ पद समान है अतः गुणांक जुड़ जाएँगें)

$= 5x$

(ii) $2x$ एवं $3y$ को जोड़िए।

हल : $2x + 3y$

$\because$ यहाँ पद समान नहीं है। अतः दोनों पदों को जोड़ा नहीं जा सकता है।

(iii) $x^2 + 2x + 3$ एवं $2x + 5$ को जोड़िए।

हल : $(x^2 + 2x + 3) + (2x + 5)$

$= x^2 + 2x + 2x + 3 + 5$ (पुनः व्यवस्थित करने पर)

$= x^2 + (2 + 2)\,x + 8$

$= x^2 + 4x + 8$

इसी प्रकार व्यंजकों को घटाने में हम देखते हैं कि घटाने की संक्रिया वस्तुतः योज्य प्रतिलोम जोड़ने की संक्रिया के समान है। घटाने की क्रिया में भी समान पदों की पहचान करते हैं। जैसे–

(i) $5x$ में $2x$ घटाइए

हल : $5x - 2x = 5x + (-2x)$
$= [5 + (-2)]x$
$= (5-2)\,x$
$= 3x$

(ii) $5x$ में $7x$ घटाइए।

हल : $5x - 7x = (5-7)\,x$
$= -2x$

(iii) $4xy$ में $3x^2y$ घटाइए।

हल : $\because$ यहाँ पद समान नहीं है। अतः गुणाकों को जोड़ा–घटाया नहीं जा सकता है।
$4xy - 3x^2y$

प्रश्नावली – 9.1

1. **जोड़िए–**
   (a) $xy,\ 3xy$ (b) $x^2 + 3x,\ 2x + 9$ (c) $x^2,\ y^2$
   (d) $7x,\ -8x$ (e) $8a,\ -2a,\ 7a,\ 2b$ (f) $8x,\ -2x,\ -6x$
   (g) $2.3x,\ 1.7x$ (h) $\frac{2}{3}x,\ \frac{1}{3}x,\ -x$

2. **पहले व्यंजक में से दूसरे को घटाइए–**
   (a) $22x,\ 10x$ (b) $17xy,\ 19xy$ (c) $a^2 + 1,\ -2a$
   (d) $8x,\ -8x$ (e) $7xy,\ 7xy$ (f) $7.3x,\ 1.3x$
   (g) $-6x + y + 4z - 8,\quad -2y + x - 5z + 8$ (h) $\frac{x}{2} - \frac{x}{4},\ \frac{x}{3}$

3. **सरल कीजिए–**
   (a) $2x - 3y - 7x + 2x - y + 2$ (b) $5y^3 - 3y^2 + 2y - 1 + 2y^2 + 6y - 5$
   (c) $6a - 3b + c - 6a + 3b + 7c$ (d) $8x^2 + 5xy + 3y^2 + 3x^2 + 2xy - 6y^2$

4. यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ $x+1, x+2$ एवं $x+3$ हैं तो इसकी परिमिति क्या होगी?

5. यदि किसी वर्ग की एक भुजा $x-7$ है तो उसकी परिमिति ज्ञात कीजिए।

6. रहीम की उम्र $x-6$ वर्ष और महेश की उम्र y वर्ष है, दोनों की उम्र का योग और अंतर क्या होगा?

7. किसी आयत की दो आसन्न भुजाएँ क्रमशः $x^2 + 2x + 1$ एवं $x^2 - 2x + 1$ हैं तो आयत की परिमिति क्या होगी?

8. किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ क्रमशः x^2, y^2 हैं। यदि परिमिति $x^2 + y^2 + z^2$ हो तो त्रिभुज की तीसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

9.2 व्यंजक के घात

एक व्यंजक $2x^2 + 9x - 7$ पर विचार करते हैं।

– व्यंजक में चर x है।

– व्यंजक में तीन पद $2x^2, 9x$ और -7 है।

– तीनों पदों में चरों के घात क्रमशः 2, 1 एवं 0 (क्यों ? $x^0 = 1$ जब $x \neq 0$) है।

– व्यंजक में स्थित चर का महत्तम घात ही व्यंजक का **घात** कहलाता है। स्पष्टतः दिए गए व्यंजक का घात 2 है। 2 घातवाले व्यंजक को द्विघात व्यंजक कहते हैं। 1 घातवाला व्यंजक रैखिक व्यंजक कहलाता है।

स्वयं करके देखिए

व्यंजक	व्यंजक में महत्तम घातवाला पद	महत्तम घात	व्यंजक का घात
$7x^3 - 8x + 13$	$7x^3$	3	3
$9x - 4$			
-7			
$13x^6$			

ऐसे भी व्यंजक होते हैं जिनके एक पद में एक से अधिक चर होते हैं। जैसे $7x^2y - 2xy + 8$ क्या $7x^2y$ में चर की महत्तम घात तीन है? आइए, देखें–

$7x^2y$ में चरों के घातों का योग x की घात 2 एवं y की घात 1 है।

अतः $2 + 1 = 3$ है।

$2xy$ में चरों के घातों का योग $= 1 + 1 = 2$

8 में चरों के घातों का योग $= 0$

स्पष्टतः $7x^2y$ का घात महत्तम है अतः व्यंजक का घात 3 होगा।

9.3 बहुपद (Polynomial)

हमने विभिन्न व्यंजकों के बारे में सीखा। हमने यह भी जाना कि किसी व्यंजक में पद होते हैं और व्यंजक का अपना घात भी होता है। व्यंजक की पदों की संख्या एवं घात कुछ भी हो सकते हैं। किन्तु बहुपद विशेष शर्तवाले व्यंजक होते हैं। **यदि किसी व्यंजक में पदों की संख्या निश्चित हो व पदों की घात एक पूर्ण संख्या हो, बहुपद कहलाता है।** बहुपद में पदों की संख्या एक या एक से अधिक कुछ भी हो सकता है पर वह निश्चित होता है। इससे स्पष्ट होता है कि प्रत्येक बहुपद एक व्यंजक है किन्तु प्रत्येक व्यंजक बहुपद नहीं है। जैसे $2x^2 + 9x - 17$ एक बहुपद और व्यंजक भी है, किन्तु $\frac{1}{2x^2+9x-17}$ एक व्यंजक है, बहुपद नहीं है।

स्वयं करके देखिए

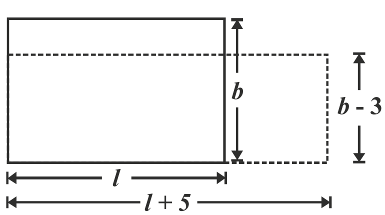
निम्नलिखित व्यंजकों में से बहुपद को अलग कीजिए।

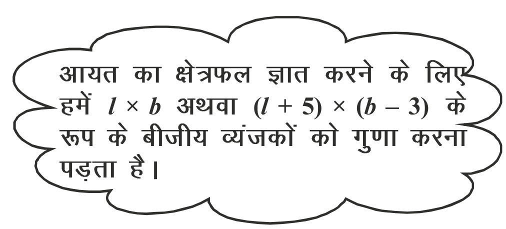
$x^2 - 9,\ 2x^{-7} - 23x + 2,\ 5,\ 7x^{\frac{1}{6}},\ \sqrt{3}x + y,\ \frac{1}{x^2 - y},\ -2x^2y^2,\ \frac{1}{2}x^2z^2$

9.4 बीजीय व्यंजकों का गुणा

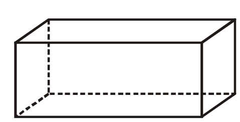
(i) क्या आप ऐसी परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें दो बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ता हो?

बबली उठकर कहती है। "हम आयत के क्षेत्रफल के बारे में सोच सकते हैं।" आयत का क्षेत्रफल $l \times b$, हैं जिसमें l लंबाई है और b चौड़ाई है। यदि आयत की लंबाई 5 इकाई बढ़ा दी जाए, अर्थात् $(l + 5)$ कर दी जाए और चौड़ाई 3 इकाई कम कर दी जाए अर्थात् $(b - 3)$ कर दी जाए तो आयत का क्षेत्रफल $(l + 5) \times (b - 3)$ होगा।





(ii) क्या आप आयतन के बारे में सोच सकते हैं? (एक आयताकार बक्से का आयतन उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणनफल से प्राप्त होता है।)



(iii) सरिता कहती है कि जब हम वस्तुएँ खरीदते हैं तो हमें गुणा करना पड़ता है। उदाहरणार्थ यदि प्रति दर्जन केलों का मूल्य p रुपये है और स्कूल पिकनिक के लिए दर्जन केलों की आवश्यकता है, तो हमें $(p \times z)$ रुपयों का भुगतान करना पड़ेगा।

मान लीजिए, प्रति दर्जन केलों का मूल्य 2 रुपये कम होता और पिकनिक के लिए 4 दर्जन कम केलों की आवश्यकता होती तो, प्रति दर्जन केलों का मूल्य $(p - 2)$ रुपये होता और $(z - 4)$ दर्जन केलों की आवश्यकता होती। इसलिए, हमें $(p - 2) \times (z - 4)$ रुपयों का भुगतान करना पड़ता है। आइए, व्यंजकों के गुणनफल को समझें–

9.4.1 दो एकपदी का गुणनफल

(i) $2 \times 3 = 3 + 3 = 6$ हम जानते हैं

इसी प्रकार

(ii) $2 \times x = x + x = 2x$

इसी प्रकार

(iii) $2 \times 3x = 3x + 3x = 6x$

कुछ अन्य उदाहरणों के द्वारा इसे समझिए–

(iv) $2x \times y = 2 \times x \times y = 2 \times y \times x = 2xy = 2yx$

(v) $2x \times 3y = 2 \times x \times 3 \times y = 2 \times 3 \times x \times y = 6xy$

(vi) $2x \times x = 2 \times x \times x = 2x^2$ (घात के नियम से) $[x \times x = x^{1+1} = x^2]$

(vii) $2x^2y \times -3xy^2 = 2 \times x \times x \times y \times (-3) \times x \times y \times y$

$= 2 \times (-3) \times x \times x \times x \times y \times y \times y$

$= -6x^3y^3$ (घात के नियम से)

उपर्युक्त सभी उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि $2 \times -3 = -6$

गुणनफल का गुणांक = प्रथम एकपदी का गुणांक × द्वितीय एकपदी का गुणांक और बीजीय गुणन = प्रथम एकपदी का बीजीय गुणनखंड × द्वितीय एकपदी का बीजीय गुणनखंड

$$x^2 y \times xy^2 = x^3y^3$$

$$2x^2y \times -3xy^2 = -6x^3y^3$$

हम यह भी पाते हैं कि दो एकपदी का गुणनफल सदैव एकपदी ही होता है।

9.4.2 तीन या अधिक एकपदी का गुणनफल

नीचे कुछ उदाहरण दिए गए हैं:

(i) $3x \times 7y \times 5z = (3x \times 7y) \times 5z = 21xy \times 5z = 105\, xyz$

(ii) $2x^2y \times 3y^2z \times (-5z^2x) = (2x^2y \times 3y^2z) \times (-5z^2x)$
$= 6x^2y^3z \times (-5z^2x)$
$= -30\, x^3y^3z^3$

यहाँ हमने पहले दो एकपदी का गुणा करके एक, एकपदी प्राप्त किया फिर इस नए एकपदी में तीसरे एकपदी से गुणा कर गुणनफल एकपदी प्राप्त किया है। इसे हम निम्नलिखित तरीके से भी हल कर सकते हैं।

(ii) $2x^2y \times 3y^2z \times (-5z^2x) = (2 \times 3 \times (-5)) \times x^2 \times x \times y \times y^2 \times z \times z^2$
$= -\,30\, x^3y^3z^3$

इसी प्रकार तीन से अधिक एक पदी का गुणनफल भी एकपदी ही प्राप्त होता है।

प्रश्नावली – 9.2

1. **गुणनफल ज्ञात कीजिए–**

(a) $8x \times (-2)$ (b) $-3x \times -3x^2y$

(c) $6mn \times 7np$ (d) $4p^3 \times 3p^3$

(e) $x^2y \times xyz$ (f) $2.5x \times 4x$

(g) $2.5x \times 2.5y$ (h) $\frac{1}{2}x \times \frac{1}{2}y$

(i) $\frac{1}{2}xy \times 2xy$ (j) $2x \times 2x^2 \times 2x^3$

(k) $-\,3x^2y \times (-6) \times 7xy$

2. किसी आयत की आसन्न भुजाएँ क्रमशः $6p^2q^2$ एवं $2pq$ हैं तो आयत का क्षेत्रफल क्या होगा?

3. यदि किसी वर्ग की भुजा $\sqrt{2}x^2y^2$ है तो वर्ग का क्षेत्रफल क्या होगा?

4. किसी त्रिभुज का आधार $7xyz$ एवं संगत शीर्षलंब $2x$ है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा?

5. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि उसकी भुजा $3x^2$ है।

6. उस घन का आयतन क्या होगा जिसकी कोर $6a$ हो?

7. यदि एक कलम का मूल्य x^2y हो तो y^2x कलम का मूल्य क्या होगा?

8. यदि कोई व्यक्ति $\frac{x^2}{2}$ km/h की चाल से चल रहा हो तो 2 घंटे में वह कितनी दूरी तय कर लेगा?

9.4.3 एकपद का द्विपद से गुणाः

आइए इसे समझने के लिए एक, एकपदी $2x$ एवं एक द्विपदी $2x + y$ का गुणा करते हैं। चूँकि व्यंजक संख्याओं को निरूपित करते हैं, अतः संख्याओं के गुणों का पालन व्यंजक भी करते हैं।

हम जानते हैं कि–

$12\times105 = 12(100 + 5) = 12\times100+12\times5 = 1200+60 = 1260$ (वितरण नियम से)

उसी प्रकार

$$2x \times (2x + y) = 2x \times 2x + 2x \times y = 4x^2 + 2xy$$

$$(3x + 7) \times (-3x^2) = (3x) \times (-3x^2) + 7 \times (-3x^2) = -9x^3 - 21x^2$$

इसी प्रकार वितरण नियम के सहायता से हम एकपदी से द्विपदी के प्रत्येक पद में गुणा करते हैं और गुणनफल को उनके चिह्नों के साथ संयोजित करते हैं। एकपदी से त्रिपदी या अन्य बहुपदी व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात करने के लिए इसी मौलिक कार्यविधि का उपयोग करते हैं, जैसे–

$$7x \times (2x^2 - 3xy + 11) = 7x \times 2x^2 + 7x \times (-3xy) + 7x \times 11$$
$$= 14x^3 - 21x^2y + 77x$$

स्वयं करके देखिए

गुणनफल ज्ञात कीजिए–

(i) $a \times (a^3 - a^2 - a + 1)$ (ii) $(a + b + c) \times 3a^2$

(iii) $2a \times (x + y + z)$ (iv) $(2a^2 + 3bc - c^2) \times 2abc$

9.4.4 द्विपद का द्विपद से गुणा

$2x$ को पहले $(2y+x)$ से गुणा करेंगे फिर y का $(2y+x)$ से गुणा कर दोनों को जोड़ लेंगे।

जिस प्रकार हमने एकपदी का द्विपदी से गुणा किया। आइए, अब हम द्विपदी का द्विपदी से गुणा करें।

सोचिए आप $(2x + y)(2y + x)$ को कैसे हल करेंगे? आइए समझें।

$(2x + y)(2y + x) = 2x(2y + x) + y(2y + x)$ (वितरण नियम से)

$= (\underline{2x \times 2y} + \underline{2x \times x}) + (\underline{y \times 2y} + \underline{y \times x})$ (पुनः वितरण नियम से)

$= (4xy + 2x^2) + (2y^2 + xy)$

$= 4xy + 2x^2 + 2y^2 + xy$

$= 2x^2 + 2y^2 + 4xy + xy$

$= 2x^2 + 2y^2 + 5xy$

नोटः– बहुपद से बहुपद के गुणा में हमें समान पदों को ढूँढ़कर संयुक्त कर लेना चाहिए।

9.4.5 द्विपद का त्रिपद से गुणा

हमने सीखा है कि एकपदी में एकपदी से गुणा करना और वितरण नियम की सहायता से द्विपदी से द्विपदी का गुणा करना। हमने द्विपद और द्विपद के गुणा में देखा कि द्विपद के प्रत्येक पद से द्विपद के प्रत्येक पद में गुणा होता है और इसके लिए वितरण नियम का उपयोग किया जाता है। द्विपद का त्रिपद के गुणन में भी इसी कार्यविधि का उपयोग किया जाता है, जैसे–

द्विपद का त्रिपद के गुणन में भी वितरण नियम का उपयोग किया जाता है।

$(2x - y) \times (x + y + z) = 2x \times (x + y + z) - y \times (x + y + z)$

$= 2x^2 + 2xy + 2xz - xy - y^2 - yz$

$= 2x^2 - y^2 + 2xy - xy + 2xz - yz$

$= 2x^2 - y^2 + xy + 2xz - yz$

इसी प्रकार हम वितरण नियम का उपयोग कर व्यंजकों का गुणा कर सकते हैं।

साधित प्रश्न

दिए गए व्यंजकों का गुणा कीजिए–

1. $(3x + 7)$ और $(2x - 3)$ का
2. $(z - 3)$ और $(6z - 5)$ का

3. $(a+b)(a-b)$ 4. $(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

5. $(x+y+z)(x-y+z)$

हल–1 $(3x+7)\times(2x-3)$ $= 3x(2x-3)+7(2x-3)$

$= 3x\times 2x - 3x\times 3 + 7\times 2x - 7\times 3$

$= 6x^2 - 9x + 14x - 21$

$= 6x^2 + 5x - 21$ (समान पद संयुक्त करने पर)

हल–2 $(z-3)\times(6z-5)$ $= z(6z-5) - 3(6z-5)$

$= 6z^2 - 5z - 18z + 15$

$= 6z^2 - 23z + 15$

हल–3 $(a+b)(a-b)$ $= a(a-b) + b(a-b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

हल–4 $(a-b)\times(a^2-2ab+b^2)$ $= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2)$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

नोटः– व्यंजक को उनके मानक रूप में लिखने के लिए चरों के घात अवरोही क्रम में लिखे जाते हैं।

हल–5 $(x+y+z)(x-y+z)$ $= x(x-y+z) + y(x-y+z) + z(x-y+z)$

$= x^2 - xy + xz + xy - y^2 + yz + xz - yz + z^2$

$= x^2 - y^2 + z^2 - xy + xy + yz - yz + xz + xz$

$= x^2 - y^2 + z^2 + 2xz$

6. सरल करें–

$(x+y)(x-2y+z) - (x-y)z$

हल–6 $(x+y)(x-2y+z)-(x-y)z$ $= x(x-2y+z) + y(x-2y+z) - (x-y)z$

$= x^2 - 2xy + xz - xy - 2y^2 + yz - xz + yz$

$= x^2 - 2y^2 - 2xy + xy + xz - xz + yz + yz$

$= x^2 - 2y^2 - xy + 2yz$

7. किसी घन की एक भुजा $(x+y)$ इकाई है तो उसका आयतन क्या होगा?

हल–7 घन की भुजा $= (x + y)$ इकाई

घन का आयतन = भुजा × भुजा × भुजा

घन का आयतन $= (x + y) \times (x + y) \times (x + y)$ घन इकाई

$= (x + y) \times \{(x + y) \times (x + y)\}$ घन इकाई

$= (x + y) \times \{x(x + y) + y(x + y)\}$ घन इकाई

$= (x + y) \times \{x^2 + xy + xy + y^2\}$ घन इकाई

$= (x + y)\{x^2 + 2xy + y^2\}$ घन इकाई

$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$ घन इकाई

$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$ घन इकाई

$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$ घन इकाई

$= (x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2)$ घन इकाई

प्रश्नावली – 9.3

1. **दिए गए बीजीय व्यंजकों का गुणा कीजिए–**

(a) $(4a - 5b) \times (2a - 6b)$ (b) $(1.5x - 0.5y) \times (1.5x + 0.5y)$

(c) $\left(\frac{1}{2}pq - \frac{3}{2}q\right) \times (pq - q)$ (d) $(a + b) \times (3x - y)$

(e) $(a^2b^2 - c^2d^2) \times (a^2b^2 + c^2d^2)$ (f) $(2a + 2b + c)(a + b - c^2)$

2. **सरल कीजिए–**

(a) $(a - b)(a + b) - (a + b)(a + b)$

(b) $(a^2 - b)(a - b^2) + (a - b)^2$

(c) $(2.3x - 1.7y)(2.3x + 1.7y + 5) - 5.29x^2 + 2.89y^2$

(d) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

(e) $(x + y + z) \times (x + y + z)$

(f) $(a - b)(b - c) + (b - c)(c - a) + (c - a)(a - b)$

3. किसी त्रिभुज का आधार एवं संगत शीर्षलंब क्रमशः $(x + y)^2$ एवं $(x - y)^2$ हैं तो उसका क्षेत्रफल क्या होगा?

4. आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से $(x + y)$ इकाई अधिक है। यदि चौड़ाई z इकाई हो तो आयत की लम्बाई व क्षेत्रफल के लिए व्यंजक लिखिए।

5. यदि किसी लड़की ने $(x+y)$ रु. प्रति किलो की दर से $(m+n)$ किलोग्राम आलू एवं y रुपये प्रति किलोग्राम की दर से $(m - n)$ किलो टमाटर खरीदे तो उसके कुल कितनी राशि देनी होगी?

6. पिता की उम्र उसके पुत्र की उम्र के $(m+n)$ गुणा है। यदि पुत्र की उम्र $(x^2 - y^2)$ वर्ष हो तो पिता की उम्र के लिए व्यंजक लिखिए।

9.5 बीजीय व्यंजक के मान

हमने देखा की चर एवं अचर की सहायता से व्यंजक बनते हैं। चर किसी संख्या को निरूपित करता है। चर विभिन्न संख्याओं के मान ले सकता है। चर के इस विभिन्न मानों के लिए चर से बने व्यंजक भी प्रभावित होते हैं। आइए, एक व्यंजक $2x + 5$ पर विचार करें।

व्यंजक $= 2x + 5$

व्यंजक में चर x है

$x = 0, 1, 2, 3.....$ आदि रखने पर क्रमशः

बीजीय व्यंजक के मान $= 2 \times 0 + 5 = 5$ जब $x = 0$

बीजीय व्यंजक के मान $= 2 \times 1 + 5 = 7$ जब $x = 1$

बीजीय व्यंजक के मान $= 2 \times 2 + 5 = 9$ जब $x = 2$

बीजीय व्यंजक के मान $= 2 \times 3 + 5 = 11$ जब $x = 3$

इस प्रकार हम पाते हैं कि चरों के मान व्यंजक के मान को प्रभावित करते हैं।

स्वयं करके देखिए

चर $x = 0, -1$ एवं 1 के निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात करें–

(i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $2x^2 - 3x$ (iii) $7x - 5$

(iv) $\frac{x^2}{2} - 1$ (v) $(x - a)(x - b)$

9.6 सर्वसमिका (Identity)

हमने समीकरण के हल करते समय समिका को देखा है। इसमें दो व्यंजक '=' (बराबर) चिह्न द्वारा अलग रखते हैं। आइए, एक समिका $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$ पर विचार करें। इसमें चर x के कुछ मानों के लिए L.H.S. एवं R.H.S. का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 0$ के लिए

समिका के L.H.S. का मान $= (0 + 1)(0 + 2) = 1 \times 2 = 2$

एवं R.H.S. का मान $= 0^2 + 3 \times 0 + 2 = 0 + 0 + 2 = 2$

यहाँ L.H.S. का मान = R.H.S. का मान $= 2$

अब $x = -5$ के लिए

समिका के L.H.S.का मान $= (-5 + 1)(-5 + 2) = (-4)(-3) = 12$

एवं R.H.S.का मान $= (-5)^2 + 3(-5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$

यहाँ भी L.H.S. का मान = R.H.S. का मान $= 12$

अब $x = 10$ के लिए देखते हैं

समिका के L.H.S. का मान $= (10 + 1)(10 + 2) = 11 \times 12 = 132$

एवं R.H.S. का मान $= (10)^2 + 3 \times 10 + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

यहाँ भी L.H.S. का मान = R.H.S. का मान $= 132$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में आप क्या पाते हैं? निश्चित ही प्रत्येक स्थिति में समिका के दोनों पक्ष समान आते हैं। **ऐसी समिका जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है, सर्वसमिका कहलाती है।** हमने सीखा है कि समीकरण चर के केवल कुछ मानों के लिए सत्य होते हैं। अतः सर्वसमिका एवं समीकरण में अंतर स्पष्ट होता है। एक समिका $x + 3 = 5$ लेते हैं एवं x के विभिन्न मानों के लिए समिका की जाँच करते हैं–

$x = 0$

तो समिका के L.H.S. का मान $= 0 + 3 = 3$

R.H.S. का मान $= 5$

यहाँ L.H.S. का मान $\neq$ R.H.S.का मान

$x = 1$ के लिए

L.H.S. का मान$= 1 + 3 = 4$

R.H.S. का मान $= 5$

यहाँ भी L.H.S. का मान ≠ R.H.S.का मान

$x = 2$ के लिए L.H.S. $= 2 + 3 = 5 =$ R.H.S.

$x = 3$ के लिए L.H.S. $= 3 + 3 = 6 \neq$ R.H.S.

इस प्रकार हम पाते हैं कि $x + 3 = 5$ एक सर्वसमिका नहीं है क्योंकि यह चर के सभी मानों के लिए सत्य नहीं है। यहाँ $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$ एक सर्वसमिका है क्योंकि यह चर के सभी मानों के लिए सत्य है।

स्वयं करके देखिए

जाँच कर पता कीजिए कि कौन सर्वसमिका है?

(i) $(x - 3)(x + 3) \;\; x^2 - 9$ (ii) $x^2 + 9 = 9x + x^2$

(iii) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 6a$ (iv) $3(x - y) = 3x - 3y$

9.7 मानक सर्वसमिकाएँ

हम कुछ ऐसी सर्वसमिकाओं पर चर्चा करेंगे जो गणित में व्यापक रूप से उपयोग आती है। इनके व्यापक प्रयोग के कारण ही ये मानक सर्वसमिकाएँ कही जाती हैं।

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

यहाँ L.H.S. $= (a + b)^2$

$= (a + b)(a + b)$

$= a(a + b) + b(a + b)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$=$ R.H.S.

अर्थात् $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$\because$ यह सर्वसमिका L.H.S. में दिए गए व्यंजकों के वास्तविक गुणनफल से प्राप्त है अतः a एवं b के किसी भी मान के लिए L.H.S. = R.H.S. होगा।

II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

यहाँ L.H.S. $= (a - b)^2$

$= (a - b)(a - b)$

$= a(a - b) - b(a - b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 =$ R.H.S.

$\therefore$ $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

III. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

यहाँ L.H.S. $= (a - b)(a + b)$

$= a(a + b) - b(a + b)$

$= a^2 + ab - ab - b^2$

$= a^2 - b^2 =$ R.H.S.

अतः $\mathbf{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2}$

इन तीनों सर्वसमिकाओं के अलावा एक अन्य प्रमुख सर्वसमिका है जिसका प्रयोग हम विभिन्न गणितीय समस्याओं के समाधान के रूप में करते हैं।

IV. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

यहाँ L.H.S. $= (x + a)(x + b)$ $= x(x + b) + a(x + b)$

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$ ($\because$ $(a + b)x = ax + bx$)

$\mathbf{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$

9.8 सर्वसमिकाओं का उपयोग

सर्वसमिकाओं का उपयोग कर हम व्यंजकों, संख्याओं के गुणा का एक सरल एवं वैकल्पिक विधि प्राप्त करेंगे।

उदाहरण–1. सर्वसमिका (I) का उपयोग करते हुए

(i) $(3x^2 + 2)^2$ (ii) $(49)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : (i) $(3x^2 + 2)^2$

यहाँ यदि $a = 3x^2$, $b = 2$ मान ले तो

$(3x^2 + 2)^2 = (3x^2)^2 + 2 \times (3x^2)(2) + 2^2$ (सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से)

$= 9x^4 + 12x^2 + 4$

हल : (ii) $(49)^2 = (40 + 9)^2$

$= (40)^2 + 2 \times 40 \times 9 + 9^2$ (I) से

$= 1600 + 720 + 81 = 2401$

सरल समस्याओं के समाधान में भले ही यह विधि थोड़ी जटिल लगती हो किन्तु कठिन व्यंजकों के लिए यह बेहद सुविधाजनक हो सकती है।

उदाहरण–2. सर्वसमिका (II) का उपयोग करते हुए

(i) $(3p-7q)^2$ (ii) $(49)^2$ को ज्ञात कीजिए–

हल : (i) $(3p-7q)^2 = (3p)^2 - 2 \times 3p \times 7q + (7q)^2$ (II) से

$= 9p^2 - 42pq + 49q^2$

हल : (ii) $(49)^2 = (50-1)^2$

$= (50)^2 - 2 \times 50 \times 1 + (1)^2$ (II) से

$= 2500 - 100 + 1$

$= 2400 + 1 = 2401$

उपर्युक्त उदाहरणों में आपने देखा कि सर्वसमिका (I) एवं (II) के उपयोग से $(49)^2$ ज्ञात किया गया है। क्या आप $(3p-7q)^2$ सर्वसमिका (I) की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं? $(3x^2+2)$ को भी सर्वसमिका (II) की सहायता से ज्ञात कीजिए।

उदाहरण–3. सर्वसमिका (III) की सहायता से निम्न व्यंजकों का मान ज्ञात कीजिए–

(i) $(7x-3y)(7x+3y)$ (ii) $95^2 - 5^2$ (iii) 996×1004

हल : (i) $(7x-3y)(7x+3y) = (7x)^2 - (3y)^2$ (III) से

$= 49x^2 - 9y^2$

हल : (ii) $95^2 - 5^2 = (95-5)(95+5)$ (III) से

$= 90 \times 100$

$= 9000$

हल : (iii) $996 \times 1004 = (1000-4)(1000+4)$

$= (1000)^2 - 4^2$ (III) से

$= 1000000 - 16 = 999984$

उदाहरण–4. सर्वसमिका $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ का उपयोग करते हुए निम्न को हल करें–

(i) 101×102 (ii) 45×54

हल : (i) 101×102
$$= (100 + 1)(100 + 2)$$
$$= (100)^2 + (1 + 2) \times 100 + 1 \times 2$$
$$= 100 \times 100 + 3 \times 100 + 1 \times 2$$
$$= 10000 + 300 + 2$$
$$= 10302$$

हल : (ii) 45×54
$$= (50 - 5)(50 + 4)$$
$$= 50^2 + (-5 + 4) \times 50 + (-5) \times 4$$
$$= 50 \times 50 + (-1) \times 50 + (-5) \times 4$$
$$= 2500 + (-50) - 20$$
$$= 2500 - 50 - 20$$
$$= 2500 - 70 = 2430$$

प्रश्नावली – 9.4

1. उचित सर्वसमिकाओं का उपयोग कर दिए गए व्यंजकों का गुणनफल प्राप्त कीजिए–

(a) $(5x + 7y)^2$ (b) $\left(a + \frac{a}{2}\right)^2$ (c) $(1.5x + 2.5y)^2$

(d) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ (e) $(0.4a - 0.5b)(0.4a - 0.5b)$

(f) $\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right)$ (g) $(y^2 - y)(y^2 - y)$

(h) $(pqr - 3)(pqr + 3)$ (i) $(2x + 3)(2x - 5)$

(j) $(3.5x - y)(3.5x - y)$ (k) $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2$

(l) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2$ (m) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

2. **सरल कीजिए–**

(a) $(x^2 + y^2)^2$ (b) $(3a - 5b)^2 - (3a + 5b)^2$

(c) $(xyz + xy)^2 - 2x^2y^2z$ (d) $\left(\frac{2x}{5} - \frac{3y}{4}\right)\left(\frac{2x}{5} + \frac{3y}{4}\right)$

(e) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(2a - \frac{3}{a}\right)^2$ (f) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

3. **सर्वसमिकाओं के उपयोग से निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए–**

(a) 81^2 (b) $(999)^2$ (c) $(52)^2$

(d) $(498)^2$ (e) $(5.5)^2$ (f) 191×209

(g) 10.5×9.5 (h) $(101)^2 - (99)^2$ (i) $(1.5)^2 - (0.5)^2$

4. **सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का उपयोग कर निम्नलिखित का गुणनफल एवं मान ज्ञात कीजिए–**

(a) $(x + 3y)(x + 5y)$ (b) $(3x + 7)(3x + 5)$

(c) $(x - 5)(x + 4)$ (d) $(2x - 7)(2x - 9)$

(e) 52×53 (f) 3.1×3.2

हमने सीखा

1. व्यंजक, चर एवं अचरों का अर्थपूर्ण संयोजन होता है जिसमें चर का चर या अचर के साथ गुणा, जोड़–घटा और भाग करके प्राप्त करते हैं।

2. व्यंजक में पदों को + या – चिह्न द्वारा अलग रहते हैं।

3. चर के मान से व्यंजक का मान प्राप्त किया जाता है। चर के अलग–अलग मानों के लिए व्यंजक के अलग–अलग मान प्राप्त किए जा सकते हैं।

4. सर्वसमिका : ऐसी समिका जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है, सर्वसमिका कहलाती है।

5. समीकरण : ऐसी समिका जो चर के कुछ मानों के लिए सत्य होती है, समीकरण कहलाती है।

अध्याय - 10

घातांक और घात

(EXPONENT AND POWER)

10.1 भूमिका

हम जानते हैं कि किसी संख्या को बार–बार उसी संख्या से गुणा करने पर, गुणनफल को सूक्ष्म रूप से घातांकीय रूप (Exponential form) में व्यक्त कर सकते हैं।

जैसे– $10 \times 10 \times 10 = 10^3$ यहाँ 10 आधार (base) और 3 उसका घातांक या घात (Exponent or Power) है। 10^3 को ''10 की घात 3'' पढ़ते हैं।

इस प्रकार	10^5	=	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	=	100000
	10^3	=	$10 \times 10 \times 10$	=	....
	10^1	=	10	=	....

स्वयं करके देखिए

घातांकीय रूप में लिखिए

(1) $2 \times 2 \times 2 =$

(2) $(-5) \times (-5) =$ ......

(3) $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} =$ ....

(4) $a \times a \times a \times$ .... m बार =

ऊपर 10 के लिए दिए गए पैटर्न से आप क्या यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी धनात्मक पूर्णांक संख्या की घात जैसे–जैसे घटती है उसका मान भी घटता जाता है।

आप अपने से कुछ धनात्मक संख्याएँ लेकर देखिए, क्या सभी धनात्मक संख्याओं में आपको यही पैटर्न मिलता है।

3^2	$= 3 \times 3$	$= 9$
3^1	$= 3$	$= 3$
3^0	$= 1$	
3^{-1}	$= ?$	

यहाँ घातांक ऋणात्मक पूर्णांक है।

आपने ऊपर संख्याओं पर घात के पैटर्न से देखा कि घात के कम होने पर मान भी कम हो रहा है। क्या आप 10^{-1} व 3^{-1} का मान बता सकते है?

आइए, हम इसे निकालना सीखें।

10.2 घातांक, जब ऋणात्मक पूर्णांक हो

आप जानते हैं कि

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

$10^2 = 10 \times 10 = \dfrac{1000}{10} = \dfrac{10^3}{10}$

$10^1 = 10 = \dfrac{100}{10} = \dfrac{10^2}{10}$

$10^0 = 1 = \dfrac{10}{10} = \dfrac{10^1}{10}$

$10^{-1} = ?$

यहाँ हम देखते हैं कि $10^2 = 100$ जो कि 10^2 से एक बड़ी घात 10^3 का दसवाँ $\left(\dfrac{1}{10}\right)$ भाग है।

स्पष्ट है, यहाँ जब 10 की घातांक में से 1 कम किया जाता है तब उसका मान पूर्व मान का $\dfrac{1}{10}$ वाँ भाग हो रहा है।

ऊपर के पैटर्न को आगे बढ़ाते हैं।

$10^{-1} = 1 \div 10 = \dfrac{1}{10}$

$10^{-2} = \dfrac{1}{10} \div 10 = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2}$

$10^{-3} = \dfrac{1}{100} \div 10 = \dfrac{1}{100} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{1000} = \dfrac{1}{10^3}$

अब 10^{-4} का मान कितना होगा? ....

निम्नलिखित को समझें,

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$5^2 = 5 \times 5 = 25 = \dfrac{125}{5}$

$5^1 = 5 = \frac{25}{5}$

$5^0 = 1 = \frac{5}{5}$

ऊपर के पैटर्न को आगे बढ़ाने पर,

$5^{-1} = 1 \div 5 = 1\times\frac{1}{5}$

$5^{-2} = \frac{1}{5} \div 5 = \frac{1}{5\times 5} = \frac{1}{5^2}$

$5^{-3} = \frac{1}{5^2} \div 5 = \frac{1}{5\times 5\times 5} = \frac{1}{5^3}$

जिस प्रकार 10^n की घातों में से 1 कम होने पर मान पूर्व का $\frac{1}{10}$ वाँ हो जाता है। उसी प्रकार 5^n की घातों में से 1 कम होने पर मान पूर्व का कितना कम हो रहा है?

इसी आधार पर 3^{-1}, 3^{-2} के मान निकालिए।

जैसा कि हमने पूर्व में देखा कि धनात्मक संख्याओं की घात जैसे–जैसे कम होती है उनका मान भी कम होता जाता है–

$5^3 = 125,\quad 5^2 = 25,\quad 5^1 = 5,\quad 5^0 = 1$

$5^{-1} = \frac{1}{5},\quad 5^{-2} = \frac{1}{25},\quad 5^{-3} = \frac{1}{125}$

स्वयं करके देखिए

सोचिए और बताइए क्या धनात्मक संख्या की किसी भी घात के लिए उसका मान 0 अथवा ऋणात्मक हो सकता है? स्वयं से अलग–अलग धनात्मक संख्याएँ लेकर अगल–अलग घातों के लिए करके देखिए।

आपने संख्याओं पर ऋणात्मक घात के पैटर्न में यह देखा कि $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$, $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

क्या 10^2 को भी $10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$ रूप में लिखा जा सकता है?

ऊपर 10^{-2} का मान रख कर देखो–

$$10^2 = \frac{1}{1/10^2} = \frac{1}{1} \times 10^2 = 10^2$$

इसी प्रकार $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ या $3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$

$5^{-3} = \frac{1}{5^3}$ या $5^3 = \frac{1}{5^{-3}}$

अतः घातीय संख्याओं में हर को अंश के स्थान पर ले जाने पर मान वही रहता है। उनके घात के चिह्न बदल जाते हैं।

$\frac{1}{a^2} = a^{-2}$ या $\frac{1}{a^{-2}} = a^2$

साधारणतया हम कह सकते हैं कि किसी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, जहाँ m एक धनात्मक परिमेय संख्या है। a^{-m}, a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

स्वयं करके देखिए

गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए

(i)	a^n	(ii)	a^{-n}	(iii)	2^{-3}	(iv)	10^{-4}
(v)	5^{-2}	(vi)	3^2	(vii)	8^{16}	(viii)	7^m

आपने अब यह तो करके देख ही लिया है कि किसी धनात्मक पूर्णांक की घात जब घटाई जाती है तो उसका मान भी घटता जाता है। आइए अब जरा इसे ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए करके समझें–

$$
\begin{aligned}
(-3)^4 &= -3 \times -3 \times -3 \times -3 \\
&= 9 \times 9 \\
&= 81 \\
(-3)^3 &= -3 \times -3 \ \ -3 \\
&= 9 \times -3 \\
&= -27 \\
(-3)^2 &= -3 \times -3 = 9
\end{aligned}
$$

$-3 \times -3 = ?$ को ऐसे भी समझिए।

$-3 \times 2 = -6$

+3

$-3 \times 1 = -3$

+3

$-3 \times 0 = 0$

+3

$-3 \times -1 = 3$

इस पैटर्न को आप आगे बढ़ाइए।

क्या आप ऋणात्मक पूर्णांक पर घात होने पर उनके मान के लिए कोई नियम बना सकते हैं?

(स्पष्ट है कि जब ऋणात्मक पूर्णांक की घात विषम होती हैं तो हमें मान ऋणात्मक प्राप्त होता है, और जब घात सम हो तो मान धनात्मक प्राप्त होता है।)

स्वयं करके देखिए

मान निकालिए।

(i) $(-1)^5$ (ii) $(-1)^2$

(iii) $(-1)^4$ (iv) $(-5)^3$

10.3 घातांक के नियम

पिछले वर्ग में हम सीख चुके हैं कि $a^m \times a^n = a^{m+n}$ जहाँ a शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n पूर्ण संख्या है।

क्या यह नियम ऋणात्मक घातांक रहने पर भी सत्य है? निम्न उदाहरणों को देखिए–

(i) $2^{-5} \times 2^{-3}$ लेने पर

हम जानते हैं कि $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5}$ और $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$

$2^{-5} \times 2^{-3} = \dfrac{1}{2^5} \times \dfrac{1}{2^3}$ [$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ से]

$= \dfrac{1}{2^5 \times 2^3} = \dfrac{1}{2^{5+3}} = \dfrac{1}{2^8} = 2^{-8}$ $(-5) + (-3) = -8$

(ii) $3^{-2} \times 3^4$ को सरल कीजिए।

$3^{-2} \times 3^4 = \dfrac{1}{3^2} \times 3^4 = \dfrac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$

इसे इस प्रकार भी हल कर सकते हैं–

$3^{-2} \times 3^4 = 3^{(-2)+4} = 3^2$ $(-2) + 4 = 2$

(iii) $(-a)^{-5} \times (-a)^2$ को लिखिए।

$$(-a)^{-5} \times (-a)^2 = \frac{1}{(-a)^5} \times (-a)^2 \qquad = \frac{(-a)^2}{(-a)^5}$$

$$= (-a)^{2-5} \qquad = (-a)^{-3} \quad -5+2=-3$$

ऊपर के उदाहरणों से स्पष्ट है कि $a^m \times a^n = a^{m+n}$ का नियम तब भी सत्य है जब घातांक ऋणात्मक हो।

स्वयं करके देखिए

सरल कीजिए

(i)	$2^{-3} \times 2^{-2}$	(ii)	$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$	(iii)	$q^2 \times q^{-8}$
(iv)	$5^2 \times 5^{-3} \times 5^4$	(v)	$3^4 \div 3^6$	(vi)	$7^{-4} \times 7^4$

इसी प्रकार आप निम्न घातांकों के नियमों को सत्यापित कर सकते हैं, जहाँ a और b शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं और m, n कोई पूर्णांक संख्याएँ हैं।

(i) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(iv) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

आप इन नियमों को धनात्मक घातांक में भी सीख चुके हैं।

आइए, उपर्युक्त घातांकों के नियमों का उपयोग करते हुए हम कुछ उदाहरणों को हल करते हैं।

उदाहरण–1. मान ज्ञात कीजिए

(i) $7^5 \div 7^3$ (ii) $a^3 \div a^7$ (iii) $(2^3)^2$

(iv) 2^{-3} (v) $\dfrac{1}{3^{-2}}$

$(a^m \div a^n = a^{m-n})$

हल : (i) $7^5 \div 7^3 = 7^{5-3} = 7^2 = 49$

(ii) $a^3 \div a^7 = a^{3-7} = a^{-4} = \dfrac{1}{a^4}$

(iii) $(2^3)^2 = 2^{3\times2} = 2^6 = 64$

(iv) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(v) $\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$

उदाहरण–2. 8^{-2} को आधार 2 और घात के रूप में लिखिए।

हल : $(8)^{-2} = (2 \times 2 \times 2)^{-2}$
$= (2^3)^{-2}$
$= 2^{3\times(-2)}$
$= 2^{-6}$

उदाहरण–3. सरल कीजिए

(i) $(2)^5 \times (2)^{-6}$ (ii) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ (iii) $2^3 \div 2^{-4}$

हल : (i) $(2)^5 \times (2)^{-6} = 2^{5+(-6)} = 2^{5-6} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(ii) $(-5)^4 \times (-5)^{-6} = (-5)^{4+(-6)} = (-5)^{-2} = \frac{1}{-5^2}$

(iii) $2^3 \div 2^{-4} = 2^{3-(-4)} = 2^{3+4} = 2^7$

उदाहरण–4. सरल कीजिए और उत्तर घातांक के रूप में लिखिए।

(i) $(-2)^{-3} \times (4)^{-3} \times (-5)^{-3}$ (ii) $\frac{1}{4} \times (3)^{-2}$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iv) $(3^{-1} \times 5^{-1}) \div 4^{-1}$ (v) $(3^6 \div 3^7)^4 \times 3^{-5}$

हल : (i) $(-2)^{-3} \times (4)^{-3} \times (-5)^{-3} = [(-2) \times (4) \times (-5)]^{-3}$

$= (40)^{-3} = \frac{1}{40^3}$

(ii) $\frac{1}{4} \times (3)^{-2} = \frac{1}{2^2} \times 3^{-2} = 2^{-2} \times 3^{-2}$

$= (2 \times 3)^{-2}$

$= 6^{-2} = \frac{1}{6^2}$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \frac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times \cancel{3}^4 \times \frac{5^4}{\cancel{3}^4} = 1 \times 5^4 = 5^4$

(iv) $(3^{-1} \times 5^{-1}) \div 4^{-1} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{15}\right) \div \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{15} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{15}$

(v) $(3^6 \div 3^7)^4 \times 3^{-5} = (3^{6-7})^4 \times 3^{-5}$

$= (3^{-1})^4 \times 3^{-5}$

$= (3)^{-4} \times 2^{-5}$

$= (3)^{-4\ -5}$

$= (3)^{-9}$

आप जानते हैं कि ऋणात्मक पूर्णांक संख्या की घात सम होने पर उसका मान धनात्मक होता है।

उदाहरण–5. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ का मान ज्ञात कीजिए–

हल : $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$

$\because \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{4^{-2}} = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{4^2}}$

$= \frac{4^2}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

अतः $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

उदाहरण–6. सरल कीजिए –

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ (ii) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\}\div\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iii) $\left(4^{-1}+8^{-1}\right)\div\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ (iv) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}\times\left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

हम जानते हैं

$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$

हल : (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{1}\right)^{3}+\left(\frac{3}{1}\right)^{2}+\left(\frac{4}{1}\right)^{2}$

$=2^3+3^2+4^2$

$=8+9+16=33$

(ii) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\}\div\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left\{\left(\frac{3}{1}\right)^{2}-\left(\frac{2}{1}\right)^{3}\right\}\div\left(\frac{4}{1}\right)^{2}$

$=(3^2-2^3)\div 4^2$

$=(9-8)\div 16$

$=\frac{1}{16}$

(iii) $\left(4^{-1}+8^{-1}\right)\div\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\div\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{2+1}{8}\right)\div\frac{3}{2}$

$=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{8}_{4}}\times\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}}=\frac{1}{4}$

(iv) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}\times\left(\frac{8}{5}\right)^{-5}=\left(\frac{8}{5}\right)^{2}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{5}$

$=\frac{8^2\times 5^5}{5^2\times 8^5}=\frac{5^5}{5^2}\times\frac{8^2}{8^5}$

$=5^3\times 8^{-3}=\frac{5^3}{8^3}=\frac{125}{512}$

एक और तरीका

$\left(\frac{8}{5}\right)^{2}\times\left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

$a^m\times a^n=a^{m+n}$

$=\left(\frac{8}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{8}\right)^{3}$

$=\frac{125}{512}$

उदाहरण–7. यदि $(-2)^{x+1} \times (-2)^3 = (-2)^5$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(-2)^{x+1} \times (-2)^3 = (-2)^5$

$\Rightarrow (-2)^{x+1+3} = (-2)^5$

$\Rightarrow (-2)^{x+4} = (-2)^5$

चूँकि दोनों ओर के घातों की आधार समान है, अतः उनके घातांक समान होंगे।

अतः $x + 4 = 5 \Rightarrow x = 5 - 4 = 1$

अब जरा सोचिए यदि आधार किसी अन्य संख्या की जगह 1 या –1 हो तो

चूँकि $1^0 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^4 = 1^{-2} = ... = 1$

या $(1)^n = 1$ असीमित n के लिए होगा

इसी तरह $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^{-2} = ... = 1$

व $(-1)^1 = (-1)^3 = (-1)^5 = ... = -1$

अतः आधार 1 या –1 से भिन्न होने पर ही घातांक समान होंगे।

अतः $x^n = x^m$

अगर $x \neq 1, -1$ तो $n = m$

प्रश्नावली – 10.1

1. **मान ज्ञात कीजिए–**

(i) 2^{-3} (ii) 4^{-3} (iii) $(-3)^{-4}$ (iv) $(-2)^{-3}$

2. **मान ज्ञात कीजिए–**

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ (ii) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$ (iii) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-5}$ (iv) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

3. **मान ज्ञात कीजिए–**

(i) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{2}$ (ii) $\left(\frac{5}{6}\right)^{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{-4}$

(iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ (iv) $\left(\frac{9}{8}\right)^{-3} \times \left(\frac{9}{8}\right)^{2}$

4. सरल कीजिए–

(i) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{0}$ (ii) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{-2}{5}\right)^{2}$

(iii) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}$

5. मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right\}^{2}$ (ii) $\left[\left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^{2}\right\}^{-2}\right]^{-1}$

(iii) $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right\}^{2}$

6. सरल कीजिए और उत्तर को धनात्मक घातांक के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $(-3)^5 \div (-3)^9$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^{2}$ (iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{4}$

(iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$ (v) $2^{-3} \times (7)^{-3}$

7. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. मान ज्ञात कीजिए–

(i) $(5^{-1} + 3^{-1} + 2^{-1})^0$ (ii) $(4^0 + 8^{-1}) \times 2^3$

(iii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-3}$

9. मान ज्ञात कीजिए–

(i) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \div 6^{-1}$ (ii) $\frac{16^{-1} \times 5^3}{2^{-4}}$

10. x का मान ज्ञात कीजिए जब–

(i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x}$ (ii) $7^{x} \div 7^{-3} = 7^{5}$

(iii) $(4)^{2x+1} \div 16 = 64$

11. सरल कीजिए–

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

12. सरल कीजिए–

$$\frac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 5 \times t^{-8}} \quad (t \neq 0)$$

10.3 दशमलव संख्या पद्धति

$.4 = \frac{4}{10}$

$.03 = \frac{3}{100}$

आप संख्याओं को उनके विस्तारित रूप में लिखना जानते हैं–

$56832 = 5 \times 10000 + 6 \times 1000 + 8 \times 100 \times 3 \times 10 + 2 \times 1$

या $56832 = 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

आप भी 525, 1025, 666 को विस्तारित रूप में लिखिए।

क्या आप 2349.43 को विस्तारित रूप में व्यक्त कर सकते हैं? सोचिए।

हम जानते हैं कि–

$$2349.43 = 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 9 \times 1 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$$

$$= 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2}$$

आप 2463.04 और 3504.249 को घातांकों का उपयोग करते हुए विस्तारित रूप में लिखिए।

12.4 छोटी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग कर मानक रूप में व्यक्त करना।

जब किसी संख्या को 1.0 एवं 9.9 या इसके बीच की एक दशमलव संख्या और 10 की घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो संख्या के इस रूप को मानक रूप (Standard form) कहते हैं। उदाहरण के लिए $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$

इसी प्रकार बहुत छोटी संख्याओं जैसे लाल रक्त कोशिकाओं का औसत व्यास = 0.000007 *m* या कम्प्यूटर चिप के एक तार का व्यास = 0.000003 *m* जैसी छोटी संख्याओं को मानक रूप में कैसे व्यक्त करेंगे? सोचिए।

हम जानते हैं कि–

$$0.000007 = \frac{7}{1000000}$$

$0.\underbrace{000007}_{123456}$ में दशमलव छह स्थान दाईं तरफ खिसक गया है।

$$= \frac{7}{10^6}$$

$$= 7 \times \frac{1}{10^6}$$

$$= 7 \times 10^{-6}$$

इसी प्रकार एक कागज की मोटाई 0.0016 cm. है तो मानक रूप में

संख्या $0.0016 = \frac{1.6}{1000}$ (तीन दशमलव दाईं तरफ)

$= 1.6 \times 10^{-3}$ cm.

स्वयं करके देखिए

निम्न संख्याओं को मानक रूप में लिखिए–

(i)	0.000003	(ii)	0.00034	(iii)	0.0000364
(iv)	8620000	(v)	1,500,000,000		

10.4.1 बहुत बड़ी संख्याओं और बहुत छोटी संख्याओं की तुलना

पृथ्वी का द्रव्यमान 5.97×10^{24} किलोग्राम और चन्द्रमा का द्रव्यमान 7.35×10^{22} किलोग्राम है तो पृथ्वी का द्रव्यमान कितना किलोग्राम अधिक है?

10^{22} सार्व लेने पर

घटाने पर, 5.97×10^{24} Kg. – 7.35×10^{22} Kg.

$= 5.97 \times 100 \times 10^{22}$ Kg. – 7.35×10^{22} Kg.

$= 10^{22} (597 - 7.35)$ Kg.

$= 10^{22} \times 589.65$ Kg. पृथ्वी का द्रव्यमान अधिक है।

इसी प्रकार सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 1.496×10^{11} m और पृथ्वी और चन्द्रमा के बीच की दूरी 3.84×10^{8} m है, तो दोनों दूरियों का अन्तर

$= (1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^{8})$ m.

$= (1.496 \times 10^{3} \times 10^{8} - 3.84 \times 10^{8})$ m.

$= (1.496 \times 1000 - 3.84)\ 10^{8}$ m.

$= (1496 - 3.84)\ 10^{8}$ m.

$= 1492.16 \times 10^{8}$ m.

अतः जब हम मानक रूप में लिखी संख्याओं को घटाते हैं, तब हम इन्हें 10 की समान घात में बदलते हैं।

छोटी (सूक्ष्म) संख्याओं की तुलना–

लाल रक्त कोशिकाओं का आकार $= 0.000007$ m $= 7 \times 10^{-6}$ m.

पौधों की कोशिकाओं का आकार $= 0.00001275 = 1.275 \times 10^{-5}$m.

दोनों का अन्तर $= (1.275 \times 10^{-5} - 7 \times 10^{-6})$ m.

$= (1.275 \times 10^{-5} - 7 \times 10^{-1} \times 10^{-5})$ m.

$= (1.275 - .7) \times 10^{-5}$ m.

$= 0.575 \times 10^{-5}$ m.

$= 5.75 \times 10^{-6}$ m.

इसे भाग द्वारा तुलना करने पर,

$$\frac{\text{पौधों की कोशिकाओं का आकार}}{\text{लाल रक्त कोशिकाओं का आकार}} = \frac{1.275\times10^{-5}}{7\times10^{-6}}$$

$$= \frac{1.275\times10^{-5-(-6)}}{7} = \frac{1.275\times10^{1}}{7}$$

$$= \frac{12.75}{7} \cong 2$$ (लगभग 2 से कम)

बड़ी संख्याओं की भाग द्वारा तुलना करने पर, सूर्य का व्यास 1.4 × 10^9m और पृथ्वी का व्यास 1.2756 ×10^7 m है। इनके व्यासों की तुलना करते हैं।

$$\frac{\text{सूर्य का व्यास}}{\text{पृथ्वी का व्यास}} = \frac{1.4\times10^9}{1.2756\times10^7}$$

$$= \frac{1.4\times10^{9-7}}{1.2756} = \frac{1.4\times10^2}{1.2756}$$

$$= \frac{1.4\times100}{1.2756}$$ जो कि लगभग 100 गुणा है।

उदाहरण–8. मानक रूप में बदलिए–

(i) 0.000003 (ii) 0.000,003,54

हल : (i) 0.000003 $= 3 \times 10^{-6}$

(ii) 0.00000354 $= 3.54 \times 10^{-6}$

मानक रूप में लिखने के लिए उसे 1 या 1 से बड़ी तथा 10 से छोटी संख्या में लिखा जाता है।

उदाहरण–9. निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में बदलिए–

(i) 2.43×10^6 (ii) 9.3×10^{-4} (iii) 5×10^{-5}

हल : (i) $2.43 \times 10^6 = 2.43 \times 1{,}000{,}000 = 2430000$

(ii) $9.3 \times 10^{-4} = \frac{9.3}{10^4} = \frac{9.3}{10000} = 0.00093$

(iii) $5 \times 10^{-5} = \frac{5}{10^5} = \frac{5}{100000} = 0.00005$

प्रश्नावली – 10.2

1. निम्न संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) 0.000000004 (ii) 0.00000000032

(iii) 0.000000000397 (iv) 776000000000

(v) 806000000000 (vi) 4603500000

2. **निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए–**

(i) 7.1×10^{-7} (ii) 3.02×10^{-5} (iii) 5×10^{-9}

(iv) 1×10^{9} (v) 2.0001×10^{10} (vi) 3.46129×10^{6}

3. **निम्न कथनों की संख्याओं को मानक रूप में बदलकर कथन लिखिए–**

(i) मनुष्य के बाल की मोटाई की व्यास लगभग 0.0002 cm होती है।

(ii) पौधों की कोशिकाओं की माप 0.00001275 m है।

(iii) जीवाणु की माप 0.0000005 m है।

(iv) एक इलेक्ट्रॉन का आवेश 0.000,000,000,000,000,000,16 कुलंब होता है।

(v) माईक्रॉन $\frac{1}{1000000}$ मी. के बराबर होता है।

4. एक के ऊपर एक करके दस शीशे रखे गए हैं, जिनमें प्रत्येक की मोटाई 10 mm तथा प्रत्येक दो शीशों के बीच कागज की एक शीट है, जिनमें प्रत्येक की मोटाई 0.07 mm है। इसकी कुल मोटाई को मानक रूप में लिखिए।

हमने सीखा

1. ऋणात्मक घातांकोंवाली संख्याएँ निम्न नियमों का पालन करती हैं।

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$ (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(e) $a^0 = 1$ (f) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. ऋणात्मक घातांकों में

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{तथा} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

3. ऋणात्मक घातांकों का उपयोग बहुत छोटी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करने में होता है।

अध्याय - 11

सीधा और प्रतिलोम समानुपात

(DIRECT AND INVERSE PROPORTION)

11.1 भूमिका

आओ हम दो अलग–अलग स्थितियों पर चर्चा करें।

पहली स्थिति

राहुल की मम्मी 2 कप चाय बनाने के लिए 200 मिली. दूध, 300 मिली. पानी, चीनी व चाय की पत्ती काम में लेती है। अब यदि उन्हें चार कप चाय बनानी हो तो वे कितना दूध व पानी काम में लेंगी?

इसी प्रकार आपने सुना होगा, जैसे–जैसे जनसंख्या में वृद्धि हो रही है हमारे प्राकृतिक संसाधनों जैसे वन, जल, खाद्य पदार्थों के वितरण पर दबाव बढ़ता जा रहा है।

जैसे जनसंख्या बढ़ने पर खाद्य पदार्थों की ज्यादा पैदावर करनी होगी।

ऊपर दी गई स्थितियों पर विचार करें तो हम पाते हैं कि दो राशियाँ किस प्रकार एक दूसरे पर निर्भर हैं। किसी एक का मान बदलने पर दूसरे का मान भी बदल जाता है।

आप भी इसी तरह के और उदाहरण अपने आस–पास से दीजिए।

अब जरा इन उदाहरणों पर विचार कीजिए–

दूसरी स्थिति

एक मजदूर एक हौज को पाँच दिन में बनाता है तो दो मजदूर उसी हौज को कितने दिन में बनायेंगे?

एक गाड़ी 40 किमी./घंटा की चाल से 60 किमी. चलती है। यदि गाड़ी की चाल 60 किमी./घंटा होती तो उसे उतनी ही दूरी तय करने में कितना वक्त लगता?

आप यदि ऊपर दी गई दोनों स्थितियों को देखेंगे तो पायेंगे; एक राशि के परिवर्तन से दूसरी राशि में परिवर्तन हो रहा है।

क्या आप पहली स्थिति व दूसरी स्थिति में कोई अंतर बता सकते हैं?

सीधा समानुपात (Direct Proportion)

आइए, पहली स्थिति को थोड़ा समझने का प्रयास करें। यदि 1 किग्रा. चीनी का मूल्य 27 रु. है तो 3 किग्रा. चीनी का मूल्य क्या होगा? 81 रु.

इसी प्रकार यदि आपको 5 किग्रा. चीनी व 10 किग्रा. चीनी का मूल्य पूछा जाये तो आप इसे ज्ञात कर सकते हैं।

अब जरा इस स्थिति को समझने का प्रयास करें।

रमेश की मोटर साइकिल 1 लीटर पेट्रोल में 60 किलोमीटर चलती है;

पेट्रोल (लीटर)	1	3	4	6	7	9	10	---	12
तय की गई दूरी (km.)	60	180	---	360				660	720

ऊपर दिए गये उदाहरण में आपने देखा कि जैसे जैसे पेट्रोल की मात्रा बढ़ती है, तय की गई दूरी भी बढ़ती जाती है।

साथ ही यदि आप राशियों को अनुपात के रूप में देखेंगे – तो आप पायेंगे कि यहाँ दो राशियाँ हैं एक पेट्रोल (लीटर) में व दूसरा दूरी (किलोमीटर)

अब यदि पेट्रोल x_1 व x_2 लिया जाये तो आप इसे अनुपात के रूप में इस प्रकार लिखेंगे।

$x_1 : x_2$ या $\frac{x_1}{x_2}$

आप ऊपर की सारणी से अलग–अलग पेट्रोल की मात्रा लेकर उनका अनुपात निकालें, जैसे–

पैट्रोल $x_1 = 1$ लीटर

पेट्रोल $x_2 = 4$ लीटर

तब $x_1 : x_2 = 1 : 4$

इसी प्रकार यदि x_1 व x_2 के सापेक्ष तय की गई दूरी को y_1 व y_2 से दर्शायें तो उनका अनुपात होगा $y_1 : y_2$

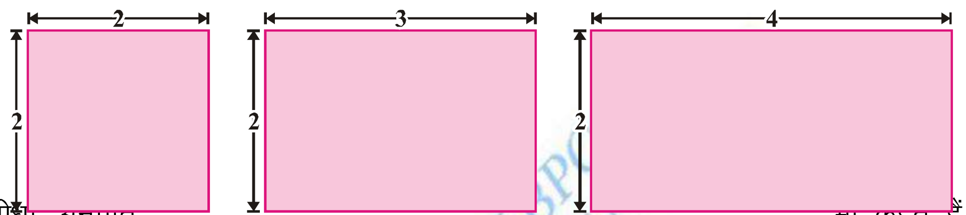
$x_1 = 1$ लीटर में तय की दूरी $\quad y_1 = 60$

$x_2 = 4$ लीटर में तय की दूरी $y_2 = 240$

तब $y_1 : y_2 = 60 : 240$

या $\frac{\cancel{60}}{\cancel{240}} = \frac{1}{4}$

आप पायेंगे कि $x_1 : x_2 :: y_1 : y_2$ एक जैसे अनुपात में होंगे। इसे हम समानुपात अथवा सीधा अनुपात ... मा कहते हैं।



(i) (ii) (iii)

यहाँ x_1 व y_2 ... बाह्य पद व x_2 व y_1 आंतरिक पद कहलाते हैं।

आप ऊपर दी गई सारणी से x_1 व x_2 के अलग-अलग मान लेकर उनके संगत y_1 व y_2 के मान लें व उनके अनुपातों की तुलना करें।

$\frac{x_1}{x_2}$ संगत

$\frac{y_1}{y_2}$

यहाँ आपने देखा $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ ($\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ वज्र गुणन करने पर)

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$; $x_1 y_2 = x_2 y_1$ ($\therefore$ आंतरिक पदों का गुणनफल = बाह्य पदों का गुणनफल))

x व y के अलग–अलग मानों को इनमें रखकर देखें–

अतः आप पायेंगे कि इनमें राशियों का बढ़ना अथवा घटना एक निश्चित अनुपात में ही हो रहा है।

यदि यह एक समान अनुपात में न हो तो वे राशियाँ समानुपातिक नहीं होंगी।

नीचे दी गई स्थितियों में बताइये कौन–सी राशियाँ समानुपातिक हैं?

उदाहरण–1. यदि आयत की चौड़ाई को हर बार 2 सेमी. मान लिया जाये व लम्बाई क्रमशः 2, 3, 4..... ली जाये तब–

आयत की चर भुजा (S)	(S_1) 2	(S_2) 3	(S_3)	(S_4) 5	(S_5)	(S_6) 7
क्षेत्रफल सेमी.^{2} A = (2×S)	(A_1) 4	(A_2) 6	(A_3) 8	(A_4)	(A_5) 12	(A_6) ....
अनुपात A/S	$\frac{4}{2} = 2$	....	....	....	....	....

आप S और A के बारे में क्या पाते हैं? क्या इनमें एक समान अनुपात में वृद्धि हो रही है? क्या $\frac{A}{S}$ हर बार समान ही रहता है?

उपर्युक्त सारणी में, आप यह भी देख सकते हैं कि–

$S_1 : S_2 = A_1 : A_2$ क्योंकि

$S_1 : S_2 = 1 : 2$

$A_1 : A_2 = \cancel{2} : \cancel{4} = 1 : 2$

जाँच कीजिए कि क्या $S_2 : S_3 = A_2 : A_3$ तथा $S_3 : S_4 = A_3 : A_4$

क्या हर बार सरल अनुपात समान प्राप्त हुए

अब जरा इस संबंध को देखिए।

उदाहरण–2. आप अपने लिए नीचे दी गई सारणी को भरिए।

	पाँच साल पहले	वर्तमान आयु	पाँच साल बाद की आयु
आप की आयु (S)	20		
माँ की आयु (M)	40		
M / S	40/20		

आप क्या देखते हैं? क्या S व M में साथ–साथ (वृद्धि) या कमी होती है? क्या $\frac{S}{M}$ प्रत्येक बार वही है? नहीं। आप इस क्रियाकलाप को अपने अन्य मित्रों के साथ दोहरा सकते हैं तथा अपने द्वारा एकत्रित किए गए आँकड़ों को लिख सकते हैं।

इस प्रकार आपने देखा कि यह आवश्यक नहीं कि साथ–साथ बढ़ने वाले चर सदैव समानुपाती ही हों। उदाहरणार्थ –

– किसी पौधे की प्रारम्भिक वृद्धि जिस दर से होती है, यह आवश्यक नहीं कि बाद में भी वह उसी अनुपात में हो।

– व्यक्तियों के भार और लम्बाई में परिवर्तन किसी ज्ञात अनुपात में नहीं होते हैं।

स्वयं करके देखिए

1. निम्नलिखित सारणियों को देखिए तथा ज्ञात कीजिए कि क्या x और y समानुपाती हैं?

(i)	x	18	16	14	12	10	8	6
	y	32	30	28	26	24	22	20
(ii)	x	15	12	9	6	3		
	y	20	16	12	8	4		
(iii)	x	1	4	6	13	15	a	
	y	4	16	24	52	60	$4a$	

2. वास्तविक मूल्य 1000 रु. पर एक व्यापारी अलग–अलग दरों पर लाभ लेकर उस वस्तु को बेचे तो दर व लाभ के बीच अनुपात ज्ञात कीजिए।

$S_2 = \frac{6 \times 2}{4} = 3$

दर (R)	5%	10%	15%	20%	25%
लाभ (P)					

क्या यह समानुपाती है।

आइए, अब कुछ उदाहरण हल करें, जहाँ हम सीधे अनुपात की अवधारणा का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण–1. यदि एक परिवार का 1 सदस्य औसतन $\frac{1}{2}$ किग्रा. चीनी का उपयोग करता है तब यदि परिवार में क्रमशः 4 व 6 सदस्य हों तो चीनी की मात्रा क्या होगी? सारणी बनाकर हल कीजिए।

हल : मान लीजिए कि सदस्यों की संख्या को (M) से व उपयोग की जाने वाली चीनी की मात्रा को (S) से दर्शाते हैं तब सारणी कुछ इस प्रकार बनेगी–

सीधे समानुपात के गुणधर्म से

$x_1 : x_2 :: y_1 : y_2$

$10 : 120 :: 18 : y_2$

बाह्य पदों का गुणनफल = आंतरिक पदों का गुणनफल

$10 \times y_2 = 120 \times 18$

$y_2 = \frac{120 \times 18}{10} = 216$

M	1	4	6
S	½	S_2	S_3

जैसे–जैसे सदस्यों की संख्या में वृद्धि होती है उसके साथ उपयोग की जाने वाली चीनी की मात्रा में भी उसी अनुपात में वृद्धि होगी। अतः यह समानुपात की स्थिति है।

अतः हम $\frac{S_1}{S_2} = \frac{M_1}{M_2}$ जो कि $\frac{S_1}{M_1} = \frac{S_2}{M_2}$ के रूप में भी लिखा जाता है का उपयोग कर सकते हैं।

(i) यहाँ $S_1 = \frac{1}{2}$, $M_1 = 1$ है और $M_2 = 4$, $S_2 = ?$

अतः $= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{S_2}{4}$

$$= \frac{1}{2} = \frac{S_2}{4}$$

$S_2 = \frac{1 \times 4}{2}$;

$$\frac{5}{7.5} = \frac{\cancel{50}^{2}}{\cancel{75}_{3}}$$

$S_2 = \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}} = 2$ kg.

(ii) $M_3 = 6$ है तो $S_3 = ?$

$$\frac{S_1}{M_1} = \frac{S_3}{M_3}$$

आप $\frac{S_1}{M_1}$ की जगह $\frac{S_2}{M_2}$ को भी काम में ले सकते हैं।

$\frac{2}{3} \times \cancel{30}^{10}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{S_3}{6}$$

$$\frac{S_2}{M_2} = \frac{S_3}{M_3}$$

$$S_3 = 6 \times \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{4} = \frac{S_3}{6}$$

$$S_3 = 3$$

उदाहरण–2. 10 मीटर के पेड़ की छाया सुबह के समय 18 मीटर है तब इसी समय 120 मीटर ऊँचे टॉवर की छाया कितनी होगी।

हल : मान लीजिए ऊँचाई को x मीटर व उनकी छाया को y मीटर मान लेते हैं तब

वास्तविक ऊँचाई (x)	10	120
छाया मीटर (y)	18	y_2

यह तो स्पष्ट है कि वस्तु जितनी बड़ी होगी उसकी छाया भी समयानुसार बड़ी ही होगी।

अतः वस्तु की वास्तविक ऊँचाई व छाया के बीच संबंध सीधा आनुपातिक ही होगा।

अतः $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ से						
$\frac{10}{18} = \frac{120}{y_2}$						

$$10 \times y_2 = 18 \times 120$$

$$y_2 = \frac{18 \times 120}{10} = 216$$

उदाहरण–3. निम्न तालिका में a तथा b का मान ज्ञात कीजिए। यदि $\frac{x}{y}$ = एक स्थिरांक है।

x	5	a	4
y	7.5	30	b

हल : दिया गया है कि a व b अनुक्रमानुपाती राशियाँ हैं।

अतः $\frac{x}{y} = k$ एक स्थिरांक होगा

x, y के मान रखने पर

$$\left(\frac{x_1}{y_1} = k\right)$$

अ त : $k = \frac{2}{3}$

त ब $\frac{2}{3} = \frac{a}{30}$

या

$$\frac{2}{3} = \frac{a}{30}$$

$= a$

$a = 20$

इ सी प्रकार $k = \frac{2}{3}$

को $\frac{4}{b}$ के बराबर रखने पर

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{b}$$

$$b = \cancel{4} \times \frac{3}{\cancel{2}} = 6$$

उदाहरण–4. यदि 8 सिक्कों का भार 720 ग्राम हो, तो ऐकिक विधि द्वारा निम्न का ज्ञात कीजिए :

(i) 5 सिक्कों (ii) 12 सिक्कों

(iii) 20 सिक्कों (iv) 100 सिक्कों

उदाहरणार्थ— यदि मानचित्र पर 1 सेमी. वास्तविक दूरी 10 किमी. को निरूपित करता है (अर्थात् 1 सेमी. : 10 किमी. या किमी. को सेमी. में बदलने पर 1 सेमी. : 100000 सेमी.) तो उसी मानचित्र पर 2 सेमी. वास्तविक दूरी 20 किमी. निरूपित करेगा।

हल : 8 सिक्कों का भार = 720 ग्राम

तब 1 सिक्के का भार = $\frac{720}{8}$ या 90 ग्राम

अब जब 1 सिक्के का भार 90 ग्राम

तो 5 सिक्कों का भार होगा $= 90$ ग्राम $\times 5 = 450$ ग्राम

व 12 सिक्कों का भार $= 90$ ग्राम $\times 12 = 1080$ ग्राम

20 सिक्कों का भार $= 90$ ग्राम $\times 20 = 1800$ ग्राम

100 सिक्कों का भार $= 90$ ग्राम $\times 100 = 9000$ ग्राम

सिक्कों की संख्या तथा भारों की तालिका बनाने पर :

सिक्कों की संख्या (x)	8	1	5	12	20	100
भार (ग्राम में) (y)	720	90	450	1080	1800	9000
अनुपात	1 : 90	1 : 90	1 : 90	1 : 90	1 : 90	1 : 90

अतः आपने देखा कि जब राशियों में संबंध सीधा समानुपातिक होता है तो वहाँ हम ऐकिक नियम (दर) का उपयोग भी कर सकते हैं।

उदाहरण–5. एक बस 45 किमी./घंटा की एक समान चाल से चल रही है।

(i) वह 30 मिनट में कितनी दूरी तय करेगी?

(ii) 135 किमी. की दूरी तय करने में बस को कितना समय लगेगा?

हल : चूँकि बस की चाल को हमने एक समान माना है। अतः तय की गई दूरी व समय में संबंध समानुपातिक होगा–

मान लीजिए कि 30 मिनट में तय की गई दूरी (किमी. में) x है तथा 135 किमी. की दूरी तय करने में लगा समय (मिनटों में) y है।

1 घंटा = 60 मिनट

तय की गई दूरी (किमी.)	45	x	135
लिया गया समय (मिनट)	60	30	y

हमें प्राप्त है :

$$\frac{45}{60} = \frac{x}{30} \quad \text{या} \quad x = \frac{45 \times \cancel{30}}{\cancel{60}_{2}} = 22\frac{1}{2}$$

अतः 30 मिनट में तय की गई दूरी = $22\frac{1}{2}$ किमी.

(ii) साथ ही

$\frac{45}{60} = \frac{135}{y}$ या

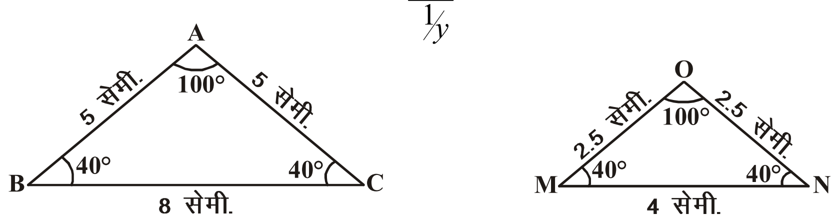
$$y = \frac{\cancel{135}^{3} \times 60}{\cancel{45}}$$

$y = 180$ मिनट

या 3 घंटे

समानुपात का उपयोग आप कई अन्य महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं को करने के लिए भी करते हैं, जैसे– समरूपता व मानचित्रों को दर्शाने में–

$$\frac{x}{1/y}$$



ऊपर दिए गए त्रिभुजों के संगत कोण बराबर व संगत भुजाएँ समानुपाती हैं, जैसे–

$$\frac{AB}{MO} = \frac{5}{2.5} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{AC}{ON} = \frac{5}{2.5} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{BC}{MN} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$$

अतः प्रत्येक भुजा 2 : 1 के अनुपात में ही है।

इसी प्रकार मानचित्रों के निरूपण में भी पैमाना में दो बिन्दु की दूरी और वास्तविक क्षेत्र पर दोनों बिन्दुओं की दुरी का अनुपात होता है।

प्रश्नावली 11.1

1. निम्नलिखित तालिका में x तथा y समानुपाती (अनुक्रमानुपाती) हैं या नहीं? ज्ञात कीजिए।

(i)	x	3	6	15	20	30
	y	12	24	45	60	120
(ii)	x	1	3	9	20	
	y	1.5	4.5	13.5	30	

2. टाइपिंग की परीक्षा पास करने के लिए कम से कम 30 शब्द प्रति मिनट टाइप करने होते हैं। एक परीक्षार्थी को पास होने के लिए आधे घंटे में कम से कम कितने शब्द टाइप करने होंगे।

3. मुकुंद के पास एक सड़क का मानचित्र है जिसके पैमाने में 1 सेमी. की दूरी 15

किमी. निरूपित करती है। गाँधी नगर से ज़ाकिर हुसैन सर्कल तक जाने वाली सड़क यदि 75 किमी. है तो मानचित्र में उसे कितने सेमी. से निरूपित किया गया होगा?

4. यदि 25 मीटर कपड़े का मूल्य 337.50 रुपये हो तो,

(i) उसी प्रकार के 60 मीटर कपड़े का मूल्य क्या होगा?

(ii) 1620 रु. में इस तरह का कितनी लम्बाई का कपड़ा खरीदा जा सकता है।

5. मकान क ` एक मॉडल में उसकी ऊँचाई 5 सेमी. व क्रमशः लम्बाई व चौड़ाई 12 व 8 सेमी. है। यदि वास्तविक परिस्थिति में उसकी ऊँचाई 2 5 फुट हो तो मॉडल में काम लिया गया पैमाना बताइए तथा वास्तविक लम्बाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

अ ब1

$x : \frac{1}{y} = \frac{x}{\frac{1}{y}} = xy = 240 = k$

6. मान लीजिए 2 किग्रा. दाल में 7×10^5 क्रिस्टल हैं। तब दी गई दालों की मात्रा में कितने क्रिस्टल होंगे?

(i) 8 किग्रा. (ii) 5 किग्रा.

7. एक मानचित्र का पैमाना 1 : 25 000000 दिया है। दो नगरों की मानचित्र में दूरी 3 सेमी. है। तो वास्तविकता में उनके बीच कितनी दूरी होगी?

8. यदि एक स्कूटर 3 लीटर पेट्रोल में 96 किमी. चलता है, तो 320 किमी. चलने के लिए

इसे कितने पेट्रोल की आवश्यकता होगी?

11.2 व्युत्क्रमानुपाती विचरण (Inverse Proportional Variation)

दैनिक जीवन में हम कुछ स्थानों पर यह देखते हैं कि एक राशि के बढ़ने से दूसरी राशि एक स्थिर अनुपात में घटने लगती है अथवा पहली राशि के घटने से दूसरी राशि एक स्थिर अनुपात में बढ़ने लगती है। इस प्रकार के आनुपातिक संबंधों को **व्युत्क्रमानुपात** कहते हैं।

आइए, एक उदाहरण देखें–

एक सड़क पर मिट्टी डालने के काम को पूरा करने के लिए आवश्यक मजदूरों और दिनों की संख्या नीचे सारणी में दी हुई है–

मजदूरों की संख्या (x)	5	10	15	20	30
दिनों की संख्या (y)	60	30	20	15	10

ऊपर सारणी में मजदूरों की संख्या (x) है तथा दिनों की संख्या (y) है क्या आप प्रत्येक x के लिए दिए गए y के मध्य कोई संबंध प्राप्त कर सकते हैं? यह xy के प्रत्येक मान के लिए स्थिर है।

उदाहरण को देखकर हेमंत सोच रहा था कि मजदूरों की संख्या दुगुनी होने पर दिनों की संख्या आधी हो गई तथा आगे मजदूरों की संख्या तीन गुनी हो जाने पर दिनों की संख्या $\frac{1}{3}$ गुनी हो गई। उसी प्रकार मजदूरों की संख्या यदि 10 गुनी कर दी जाए तो दिनों की संख्या $\frac{1}{10}$ गुनी हो जायेगी। यदि x और y के मानों को गुणा किया जाए तो एक स्थिरांक प्राप्त होगा।

जिस प्रकार अनुक्रमानुपाती संबंध में $\frac{x}{y}$ या $x : y$

स्थिरांक होता है, उसी प्रकार यहाँ $x \times y$ या या xy = एक स्थिरांक होता है जो कि अनुक्रमानुपात का व्युत्क्रम है, इसलिए हम इसे व्युत्क्रमानुपात कहते हैं।

क्या आप हेमंत से सहमत हैं? यहाँ हम पाते हैं कि मजदूरों की संख्या जिस अनुपात में बढ़ती है, ठीक उसके उल्टे या विपरीत अनुपात में दिनों की संख्या घटती है और जिस अनुपात में मजदूरों की संख्या घटती है, ठीक उसके उल्टे या विपरीत अनुपात में दिनों की संख्या बढ़ती है। ऐसे अनुपात को विलोम अनुपात या **व्युत्क्रमानुपात** कहते हैं। जैसे उपर्युक्त उदाहरण में मजदूरों की संख्या और दिनों की संख्या में व्युत्क्रमानुपात है।

अर्थात् दोनों राशियों में विचरण **व्युत्क्रम अनुपात** में है।

नीचे दी गई स्थिति को समझिए :

एक यात्री गाड़ी 12 किमी./घण्टा की चाल से चलकर कोई दूरी 4 घण्टे मे तय करती है। बताइए–

1. चाल बढ़ाकर 24 किमी./घण्टा कर देने से उस दूरी को पार करने में कितना समय लगेगा?

2. चाल बढ़ाकर 36 किमी./घण्टा कर देने से उस दूरी को पार करने में कितना समय लगेगा?

साथ ही निम्नांकित सारणी को भी पूर्ण करें–

चाल (किमी./घण्टा में) क्रमशः बढ़ाने पर	12	24	36	48
समय (घण्टे में)	4	.....	.....	.....
चाल × समय = दूरी	48	48	48	48

निष्कर्ष:– चाल बढ़ाने पर समय .... लगता है।

चाल (किमी./घण्टा में) क्रमशः कम करने पर	48	32	16	6
समय (घण्टे में)	1	.....	.....	.....
चाल × समय = दूरी	48	.....	.....	.....

निष्कर्ष:– चाल .... होने पर समय अधिक लगता है।

आप भी दैनिक जीवन से संबंधित ऐसे पाँच उदाहरण लिखिए, जो परस्पर व्युत्क्रम अनुपात में हों।

आइए, एक और उदाहरण देखें : प्रतिदिन 16 पृष्ठ पढ़ने पर एक पुस्तक 15 दिनों में पूर्णतः पढ़ी जा सकती है। यदि प्रतिदिन 8 पृष्ठ पढ़ें, तो पुस्तक को पूर्णतः पढ़ने में कितने दिन लगेंगे? यदि 12, 15 तथा 24 पृष्ठ प्रतिदिन पढ़ें तो पुस्तक को कितने दिनों में पढ़ा जा सकता है।

यदि प्रतिदिन पढ़े गए पृष्ठों की संख्या x तथा पढ़ने में लगे संगत दिनों की संख्या y से व्यक्त करें, तो हल करने से प्राप्त उत्तरों को निम्नानुसार सारिणी में लिखा जा सकता है–

पृष्ठों की संख्या (x)	16	8	12	15	24
दिनों की संख्या (y)	15	30	20	16	10

यहाँ $\frac{1}{y} = \frac{1}{15}$ या $\frac{1}{30}$ या $\frac{1}{20}$ या $\frac{1}{16}$ या $\frac{1}{10}$

$$x : \frac{1}{y} = \frac{x}{1/y} = \frac{16}{1/15} = \frac{8}{1/30} = \frac{12}{1/20} = \frac{15}{1/16} = \frac{24}{1/10}$$

मानक रूप में $x \times y$	16×15 $= 240$	8×30 $= 240$	12×20 $= 240$	15×16 $= 240$	24×10 $= 240$

(माना)

यहाँ पृष्ठों की संख्या, दिनों की संख्या के व्युत्क्रम अनुपात में है। चूँकि पृष्ठों की संख्या के प्रत्येक मान के लिए आवश्यक दिनों की संख्या के मध्य व्युत्क्रम अनुपाती संबंध हर जगह एक स्थिर मान देता है। इसलिए पृष्ठों की संख्या के सभी दिनों की संख्याओं के संगत मानों के व्युत्क्रम अनुपाती है। दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि पृष्ठों की संख्या x और संगत दिनों की संख्या y का गुणनफल एक नियत राशि है अर्थात् $xy = k$

अब यदि xy के एक से अधिक मान k के बराबर हैं तो वे आपस में भी बराबर होंगे

$x_1y_1 = x_2y_2$

निष्कर्ष : हम पाते हैं कि **''जब दो चर राशियों में परस्पर इस प्रकार का संबंध हो कि उनमें से एक राशि का मान बढ़ाने से दूसरी राशि का मान कम हो या पहली राशि का मान कम करने से दूसरी राशि का मान बढ़ता है तथा प्रत्येक स्थिति में दोनों राशियों का गुणनफल नियत रहे, तो उनके बीच के संबंध को व्युत्क्रमानुपाती विचरण कहते हैं।''**

गणितीय रूप में, यदि x और y व्युत्क्रमानुपाती विचरण में हों तो $xy = k$

यदि x के दो मान x_1 एवं x_2 के लिए y के दो संगत मान y_1 एवं y_2 हों तो $x_1y_1 = x_2y_2$

स्वयं करके देखिए

नीचे दी गई किन सारिणियों में x और y व्युत्क्रमानुपाती विचरण में है–

(i)

x	6	2	3	18
y	3	9	6	1

(ii)

x	40	20	16	10	2.5
y	2	4	5	8	32

(iii)

x	10	5	2	4
y	3	6	15	8

(iv)

x	9	10	12	15
y	5	4.5	3.75	3

यदि x और y व्युत्क्रमानुपात में विचरण करते हैं, तो निम्नांकित सारिणी में आवश्यकतानुसार रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(i)	x	9	18	20	......	30
	y	4	......	......	1.5	......

(ii)	x	16	8	......	......
	y	3	......	12	24

(iii)	x	20	50	25	......
	y	......	4	......	5

आइए, व्युत्क्रमानुपाती विचरण के कुछ उदाहरणों को देखें–

उदाहरण–6. 12 मजदूर एक दीवार को 10 दिन में बना सकते हैं। उसी दीवार को 20 मजदूर कितने दिनों में बना लेंगे?

हल : चूँकि मजदूरों की संख्या बढ़ाने से काम पूरा होने में कम समय लगेगा, अतः यहाँ व्युत्क्रमानुपाती विचरण की स्थिति है।

माना कि 20 मजदूर उस दीवार को y दिनों में बना लेंगे। तो सारणी इस प्रकार होगी–

मजदूरों की संख्या (x)	12	20
दिनों की संख्या (y)	10	y

व्युत्क्रमानुपाती विचरण में–

$x_1 y_1 = x_2 y_2$

12×1

$\frac{12 \times}{20}$

$6 =$

अर्थात्

उदाहरण–7. सामग्री है। यदि छात्रावास में 10 नों में समाप्त हो जाएगी?

हल : 100 छा ा $= 200 + 100$ $= 300$ चूँकि खा ामग्री कम समय में समाप्त हो जाएगी, अतः यहाँ व्युत्क्रमानुपाती संबंध है।

माना कि खाद्य सामग्री y दिनों में समाप्त हो जाएगी तो सारणी इस प्रकार होगी

छात्रों की संख्या (x) 200 300

अध्याय – 12

ठोस आकारों का चित्रण

(MAPPING OF SOLID SHAPES)

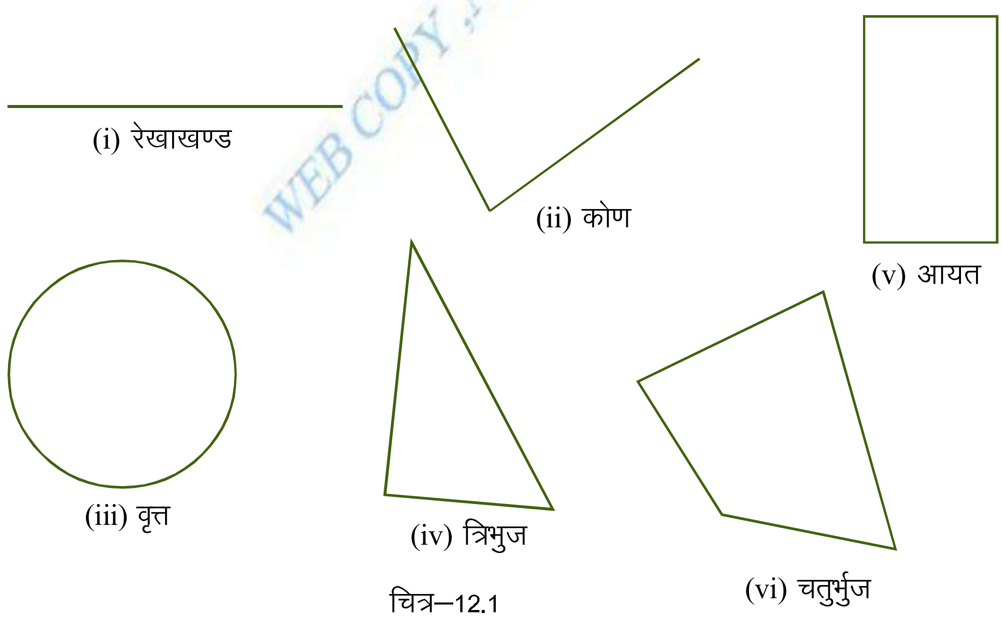
12.1 भूमिका

आप समतल और ठोस आकारों के बारे में जानते हैं। समतल आकारों में लम्बाई और चौड़ाई जैसे दो माप होते हैं जबकि ठोस आकारों में लम्बाई, चौड़ाई के साथ ही साथ ऊँचाई जैसा माप भी होता है इसी कारण इसे त्रिविमीय आकार भी कहते हैं।

त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुज एवं वृत्त जैसी आकृतियाँ सभी किसी तल में आसानी से बनाई जा सकती हैं।

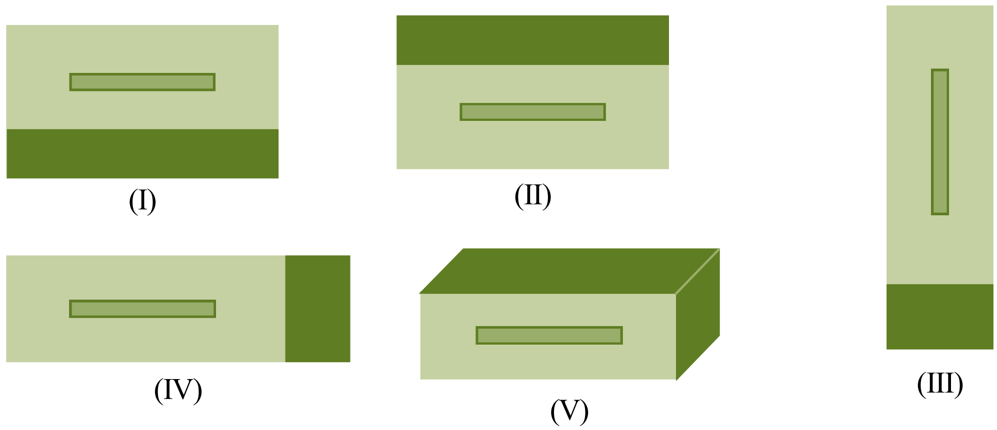
आइए करके देखें

आप निम्न आकृतियों से पूर्व परिचित हैं। आप इनकी रचना करना भी जानते हैं–



चित्र–12.1

क्या आप ईंट, डिब्बा जैसी वस्तुओं को कागज पर बना सकते हैं? कुछ छात्र/ छात्राओं ने ईंट की आकृति कुछ इस प्रकार बनाईं–



चित्र–12.2

क्या यह सब ठीक दिखते हैं? ये सभी वैसे दिख रही हैं जैसी ईंटें दिखती हैं?

ये सभी आकृतियाँ एक दूसरे से भिन्न हैं।

क्या आप बता सकते हैं कि ये अलग–अलग क्यों हैं?

ईंट, बॉक्स को जब आप कागज के तल पर बनाते हैं

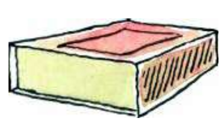
तब आपको कुछ बातों का ध्यान रखना पड़ता है।

सोचिए द्विविमीय व त्रिविमीय आकृतियों को कागज के तल पर बनाना अलग–अलग क्यों है?

क्रियाकलाप

इस बात को समझने के लिए माचिस का खाली डिब्बा लीजिए। माचिस को जलानेवाली (बारूद) सतह पर खड़ा कीजिए। माचिस कैसी दिखती है?

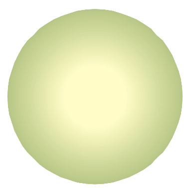
अब इसे इसकी बड़ी सतह पर रखिए।

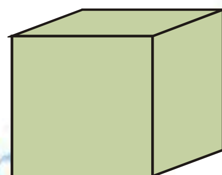

यह स्पष्ट है कि माचिस अब कुछ अलग तरह की दिख रही है। इस चित्र को भी देखिए। इसमें सबसे छोटी सतह पर डिब्बी को खड़ा किया गया है। तीनों चित्र माचिस के हैं किन्तु अलग–अलग स्थिति के हैं।

ईंटें अथवा अपना टिफिन बॉक्स लेकर उन्हें माचिस के चित्रों के आधार पर रखकर देखिए। क्या आप हर चित्र के लिए यह कर पाए।

अब जरा सोचिए– क्या किसी गोले अथवा घन को अलग–अलग स्थितियों में रखने पर कोई अंतर आता है? ....

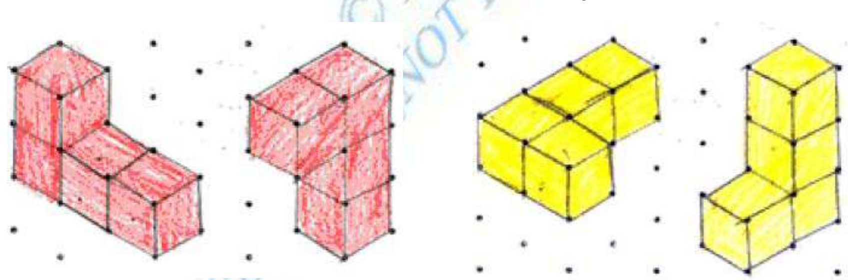


गोला

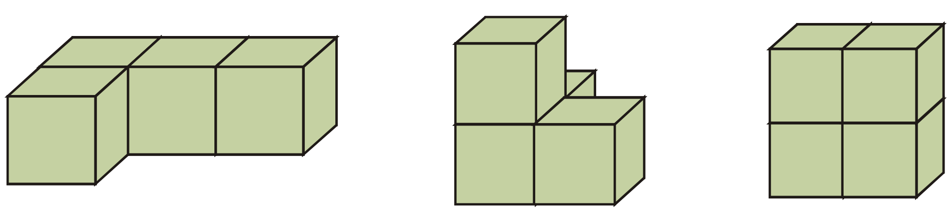


घन

ऐसा क्यों होता है? आपने ठीक सोचा– गोला एक तलीय आकृति है व घन के सभी छः तल सर्वांगसम है। यहाँ चार घन को जोड़कर एक आकृति बनाई गई है।



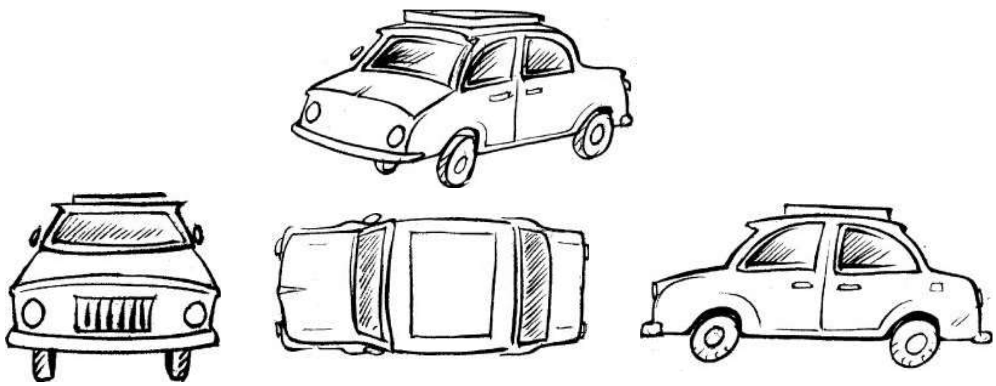
आइए, इसे विभिन्न तलों पर रखकर देखें यह कैसी–कैसी दिखाई देती है। इस प्रकार बनी आकृतियों को हम सुविधा के लिए समदूरस्थ समबाहु ग्राफ पेपर पर बना सकते हैं। इस प्रकार ये अलग–अलग चित्र बनते हैं। आप भी चार घन लेकर उसे अलग–अलग तरीकों से जोड़कर विभिन्न तलों पर रखकर देखिए। आपको ये कितने अलग–अलग तरह से दिखते हैं।



12.2 3D आकारों के दृश्य

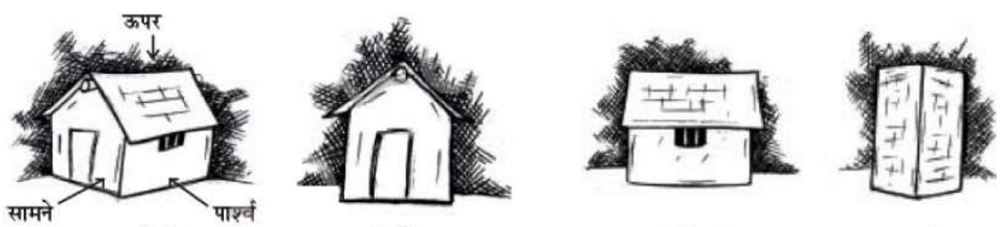
अलग–अलग तलों पर रखने पर त्रिविमीय आकृतियाँ अलग–अलग दिखाई दे सकती हैं। इसी प्रकार त्रिविमीय वस्तुएँ विभिन्न स्थानों से भिन्न–भिन्न रूप में दिखाई दे सकती हैं। इसलिए इनको विभिन्न परिप्रक्ष्यों (दृष्टियों) से खींचा जा सकता है। उदाहरणार्थ

नीचे एक कार दिखाई गई है जिसे एक ही तल पर अलग–अलग तरफ से देखने पर निम्न तरह से दिखाई देती है–



सामने ऊपर पार्श्व

इसी प्रकार झोंपड़ी के निम्नलिखित दृश्य हो सकते हैं–

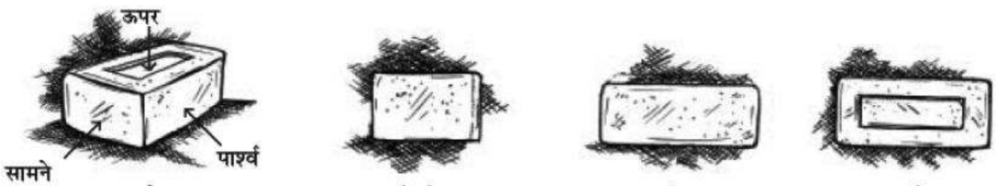


एक झोंपड़ी सामने से दृश्य पार्श्व दृश्य ऊपर से दृश्य

इसी प्रकार एक गिलास के निम्नलिखित दृश्य हो सकते हैं :

एक गिलास पार्श्व दृश्य ऊपर से दृश्य

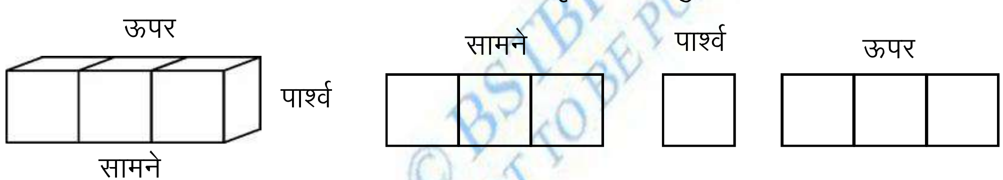
एक गिलास का ऊपर से दृश्य संकेंद्रीय वृत्तों का एक युग्म क्यों है? यदि इसे अलग दिशा से देखा जाए, तो क्या पार्श्व दृश्य कुछ और प्रकार का प्रतीत होगा? इसके बारे में सोचिए। अब एक ईंट के विभिन्न दृश्यों को देखिए।

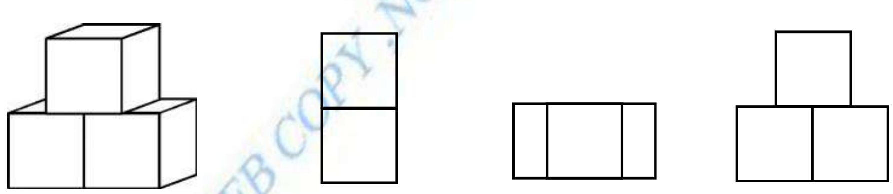


एक ईंट　　सामने से दृश्य　　पार्श्व दृश्य　　ऊपर से दृश्य

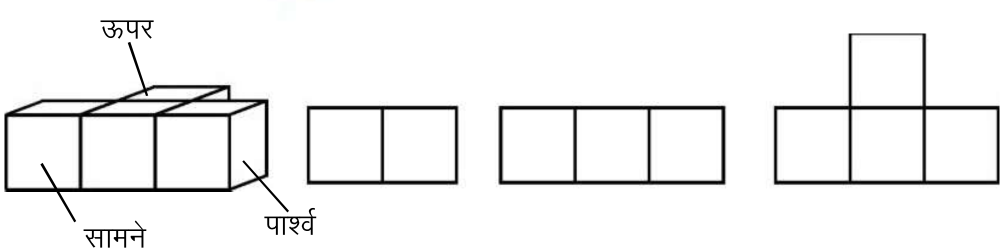
हम घनों को जोड़कर बनाई गई आकृतियों के भी विभिन्न दृश्य प्राप्त कर सकते हैं।

नीचे किसी आकार का सामने, पार्श्व व ऊपर का दृश्य दिया हुआ है–





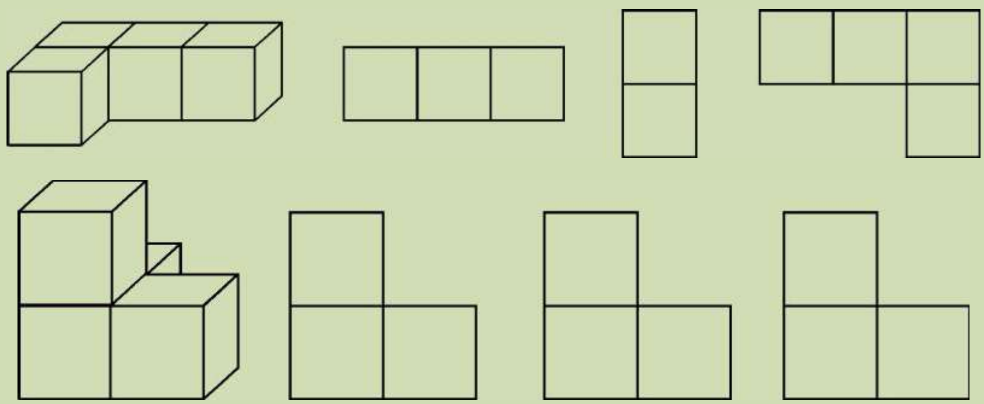
तीन घनों का ठोस आकार　　पार्श्व दृश्य　　ऊपर से दृश्य　　सामने से दृश्य



चार घनों से बना ठोस　　पार्श्व दृश्य　　सामने से दृश्य　　ऊपर से दृश्य

स्वयं करके देखिए

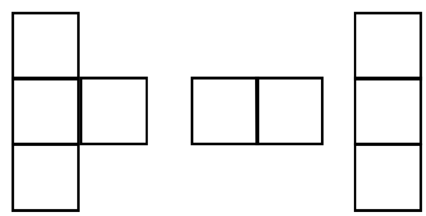
1. दिए हुए प्रत्येक ठोस के लिए ऊपर से दृश्य, सामने से दृश्य और पार्श्व दृश्य की पहचान कीजिए:



2. **इसे भी कीजिए**

अपने आसपास की विभिन्न वस्तुओं को विभिन्न स्थितियों से देखिए। अपने मित्रों के साथ उनके विभिन्न दृश्यों की चर्चा कीजिए।

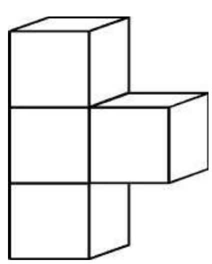
आप आकार को देखकर उसका सामने, ऊपर व पार्श्व का दृश्य बता सकते हैं। पर क्या आप इन दृश्यों से आकार बता पायेंगे?



सामने ऊपर पार्श्व

गोलू ने इन दृश्यों को कुछ इस तरह से जोड़ा–

ऊपर



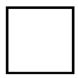
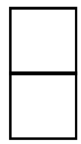
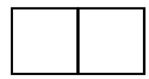
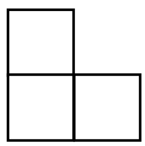
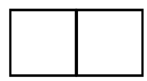
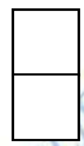
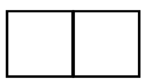
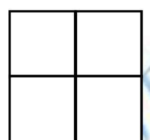
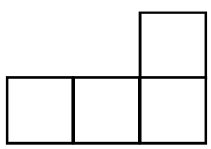
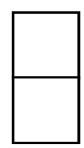
पार्श्व

सामने

अरे, यह तो चार घनों से मिलकर बनी आकृति है।

क्या गोलू ने सही आकार बनाया ———————————————————————

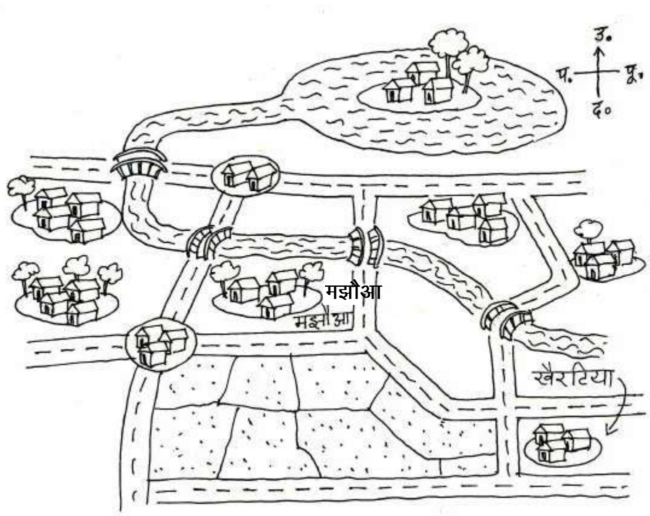
आप भी इसी तरह नीचे दिए गए दृश्यों से आकार बनाइए?

	सामने के दृश्य	ऊपर के दृश्य	पार्श्व दृश्य	आकार
(1)				
(2)				
(3)				
(4)				

छुटकी की यात्रा

खैरटिया नाम के एक गाँव में छुटकी रहती है। उसकी मौसी कुछ दिनों से उसके गाँव आई हुई है। छुटकी को अपनी मौसी को लेकर अपनी नानी के गांव बउहरवा जाना है। पर पहले उसे अपने मामा के गाँव टिकुलिया जाकर उनको एक संदेश देना है। वापस खैरटिया आते समय उसकी मौसी अपनी सहेली मीना से मिलना चाहती है। मीना देवानटोला गाँव में रहती है। छुटकी को टिकुलिया और बउहरवा का रास्ता पता नहीं है। उसे बउहरवा से देवानटोला जाने का रास्ता भी नहीं पता है। बस उसे इतना याद है कि नानी के गाँव तक कोई सड़क जाती है। वहाँ नाव से जाना पड़ता है। चूँकि बउहरवा गाँव बड़े तालाब के एक टापू पर है। नानी के घर तक नाव से जाने में बड़ा मजा आता है।

छुटकी ने अपने पिताजी से इन गाँवों के रास्ते पूछे। उसके पिताजी ने ये नक्शा बनाया और उसे टिकुलिया, बउहरवा और देवानटोला पहुँचने के रास्ते समझाए। देवानटोला से वापस खैरटिया पहुँचने का रास्ता भी समझाया।



खैरटिया के उत्तर में जानेवाली सड़क लो और सीधे चलते जाओ। करीब पौन घंटा चलने पर सिकरहना नदी मिलेगी। उस पर एक पुल है। पुल पार करने के बाद सड़क थोड़ा मुड़ेगी। सड़क के पूर्व में एक गाँव है। बँसवरिया। बँसवरिया से उसी सड़क पर आगे चलना। करीब डेढ़ घंटे बाद एक और सड़क मिलेगी जो पूर्व से पश्चिम की ओर जाती है। इस सड़क पर पश्चिम की ओर मुड़ जाना। आधे घंटे बाद सड़क के दक्षिण एक गाँव आएगा। यही टिकुलिया है। मामाजी को संदेश देकर थोड़ी देर आराम कर लेना। टिकुलिया से आगे पश्चिम की ओर जानेवाली सड़क पर चलना तो करीब एक घंटे बाद धूमनगर आएगा। इसे पार करके और पश्चिम में जाओगे तो एक और पुल मिलेगा। यह पुल भी उसी सिकरहना नदी पर बना है। पुल से पहले ही सड़क के उत्तर में नीचे उतरना। वहाँ तुम्हें नाव मिलेगी। मल्लाह से कहना तुम्हें बउहरवा जाना है। वह तुम से पाँच रुपए लेगा। करीब एक घंटे में तुम लोग बउहरवा पहुँच जाओगे।

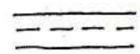
नानी के घर पर कुछ दिन रुक जाना। फिर वहाँ से नाव लेकर वापस आकर पुल पर उतर जाना। पुल तक पहुँचोगे तो पुल के पश्चिम में सुगाँव पड़ेगा। पर उस तरफ मत जाना। धूमनगर से दक्षिण की ओर चलना तो आधे घंटे पर एक और पुल आएगा। पुल पार करने के आधे घंटे बाद पहाड़पुर गाँव मिलेगा। पहाड़पुर से पश्चिम की ओर एक घंटा और चलोगे तो सड़क के उत्तर में देवानटोला गाँव मिलेगा। यहीं तुम्हारी मौसी की सहेली मीना रहती है। उसके यहाँ कुछ देर रुककर वापस घर के लिए निकल पड़ना।

देवानटोला से खैरटिया वापस आने के लिए देवानटोला से पूर्व की ओर चलना। रास्ते में पहाड़पुर आएगा। पहाड़पुर से और पूर्व में चलना। आधे घंटे बाद सड़क के उत्तर में मझौआ

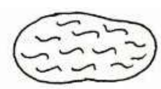
नाम का गाँव मिलेगा। मझौआ से करीब आधे घंटे पूर्व में और चलोगी तो एक और सड़क मिलेगी। सड़क के उस पार पूर्व में एक बरगद का पेड़ दिखाई देगा। इस सड़क पर दक्षिण की ओर मुड़ जाना। करीब एक घंटा और चलोगी तो एक चौराहा मिलेगा। बस चौराहे पर ही तुम खैरटिया पहचान लोगी।

छुटकी के पिताजी ने–

नक्शे पर गाँव ऐसे बनाए 

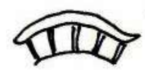
सड़क ऐसी बनाई 

नदी ऐसी बनाई 

तालाब ऐसा बनाया 

खेत ऐसे बनाए 

बरगद का पेड़ ऐसा बनाया 

पुल ऐसे बनाया है 

उन्हें पढ़ना–लिखना नहीं आता था तो उन्होंने गाँव के नाम नहीं लिखे।

स्वयं करके देखिए

(1) छुटकी के पिताजी के निर्देश पढ़कर क्या आप सभी गाँवों के नाम नक्शे पर लिख सकते हो? खैरटिया नक्शे पर लिखा है। बाकी गाँव के नाम हैं– बँसवरिया, टिकुलिया, धूमनगर, बउहरवा, सुगाँव, पहाड़पुर, देवानटोला, मझौआ। नदी का नाम भी नक्शे पर लिखिए।

(2) छुटकी के पिताजी ने नक्शे पर कई चीजें बनाई हैं पर कई छूट भी गई हैं। आप इन्हें नक्शे में जोड़िए।

– टिकुलिया से धूमनगर जानेवाली सड़क के दक्षिण में दो खेत।

– धूमनगर से पहाड़पुर जानेवाली सड़क के पश्चिम में एक कुआँ।

(3) खैरटिया की किस दिशा में बँसवरिया है? ——————————

(4) धूमनगर की किस दिशा में टिकुलिया है? ———————————

(5) मझौआ की किस दिशा में पहाड़पुर है? ———————————

(6) बन्ने खाँ को पहाड़पुर से टिकुलिया जाना है। आप उसे जाने का रास्ता समझाइए।

———————————————————————————————————

———————————————————————————————————

———————————————————————————————————

(7) छुटकी और उसकी मौसी को टिकुलिया पहुँचने में कितनी देर लगेगी?

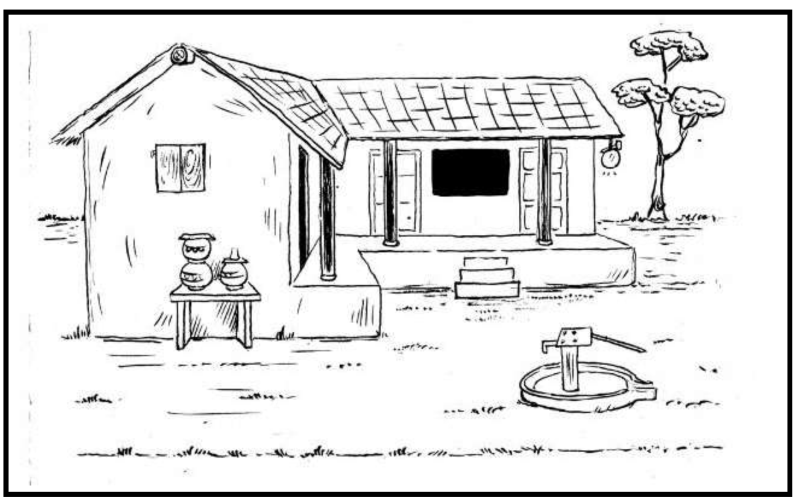
(8) टिकुलिया से बउहरवा पहुँचने में कितनी देर लगेगी? ———————————

(9) अपने गाँव का चित्रण कीजिए। घर, जंगल, नदी, खेत, सड़क आदि के लिए, आप अपनी संकेतावली बना सकते हैं। चित्र बनाते समय दिशा का ध्यान रखना मत भूलिएगा।

पैमाना

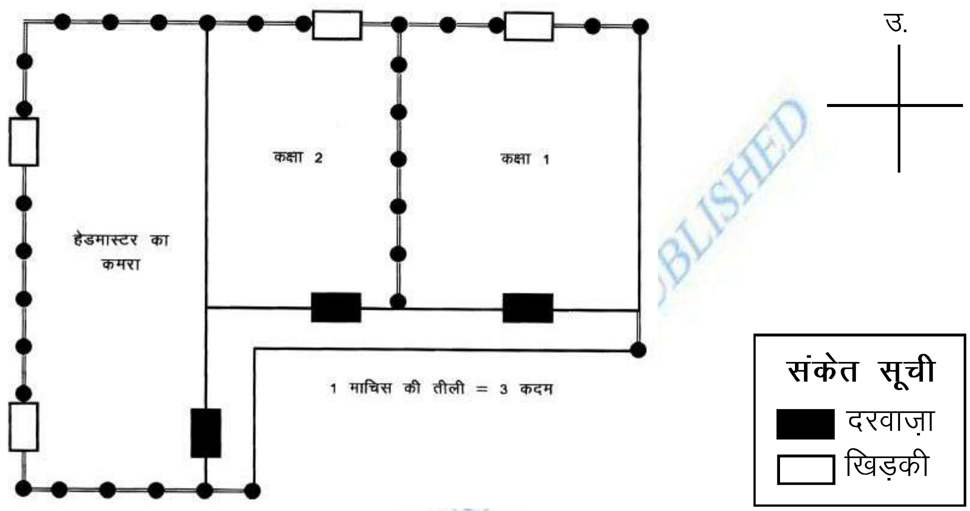
नक्शे बनाते समय हम इस बात का ध्यान रखते हैं कि कौन सी जगह कितनी बड़ी है। यहाँ हम समझने की कोशिश करेंगे कि हम ऐसा कैसे करते हैं।

गीता ने अपने स्कूल का चित्र बनाया है–



बाहर से एक स्कूल ऐसे दिखता है। इसमें एक बरामदा, दो कक्षाएँ और एक हेडमास्टर का कमरा है।

एक दिन गीता ने अपने स्कूल का नक्शा बनाया। नक्शा बनाते समय उसने इस बात का ध्यान रखा कि कौन सा कमरा कितना लम्बा है। कमरों की लम्बाई नापने के लिए गीता ने बहुत सारी माचिस की तीलियाँ इकट्ठी कर लीं। फिर तीनों कमरों को कदमों से चलकर नापा। दीवार जितने कदम लम्बी थी, उतनी तीलियाँ, उसने सीध में जमाकर रखीं। इस तरह उसने सभी कमरों की दीवारें बनाईं। ऐसे–



गीता से उसकी शिक्षिका ने पूछा, ''तुमने नक्शा बनाते समय पैमाना क्यों लिया?''

गीता बोली, ''नक्शा हमें किसी जगह का सटीक चित्रण देता है। इससे नक्शे को पढ़कर हम यह समझ सकते हैं कि वास्तव में वह जगह कितनी बड़ी है। एक बड़ी जगह की लम्बाई और चौड़ाई को पेपर में सटीकता से दिखाने के लिए मैंने एक तीली बराबर तीन कदम का पैमाना लेकर नक्शा बनाया।

स्वयं करके देखिए

(1) नक्शा देखकर वाक्य पूरे कीजिए–

कक्षा 1 ―――――――― कदम लम्बी और ―――――――― कदम चौड़ी है।

कक्षा 2 ―――――――― कदम लम्बी है और ―――――――― कदम चौड़ी है।

हेडमास्टर का कमरा ―――――――― कदम लम्बा है और ―――――――― कदम चौड़ा है।

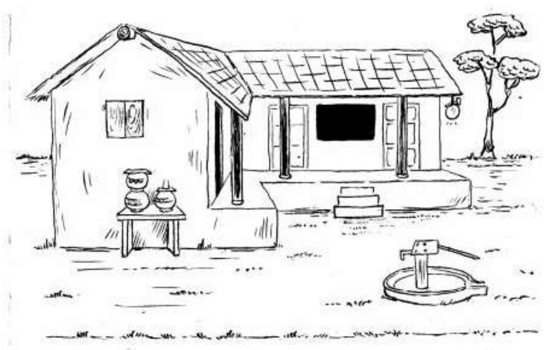
बरामदा ―――――――― कदम चौड़ा है।

(2) (अ) स्कूल की कक्षाओं के कमरों के दरवाजे किस दिशा में खुलते हैं? ————————

(ब) हेडमास्टर के कमरे की खिड़कियाँ किस दिशा में खुलती हैं? ————————

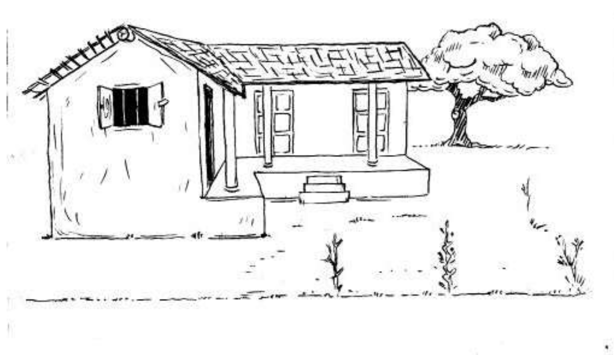
(3) अब आप अपने स्कूल का नक्शा बनाइए। नक्शा बनाते समय पैमाना और संकेत सूची बनाना ना भूलिएगा।

नक्शे और चित्रों में अन्तर



गीता ने अपने स्कूल का चित्र भी बनाया और नक्शा भी बनाया। दोनों एक ही जगह को दर्शा रहे हैं, पर दोनों में अंतर है। आइए नक्शे और चित्रों के बीच के अंतर को समझें–

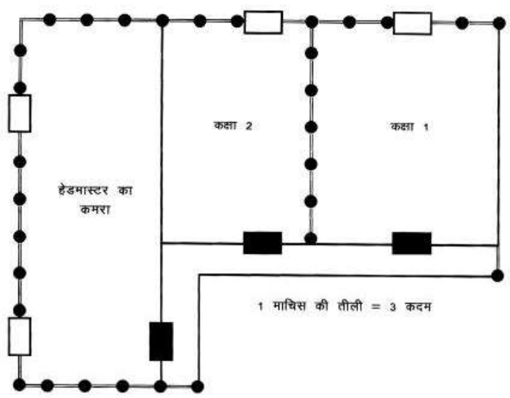
1. **बनाने वाले का नज़रिया**– यह ज़रूरी नहीं है कि जिस तरह से गीता ने अपने स्कूल का चित्र बनाया है, उसी तरह से उसके साथ पढ़नेवाली सहेली भी उसे दर्शाए। गीता ने अपने चित्र में स्कूल के बाहर टँगी, घंटी, बोर्ड, हैंडपम्प, मटके बनाए। उसने स्कूल की खिड़की के पल्ले बंद दर्शाए।



चित्र में क्या–क्या दर्शाया जाता है और उसे कैसे दर्शाया जाता है, यह चित्र को बनानेवाले पर निर्भर करेगा, उसके नजरिए पर निर्भर करेगा। गीता की सहेली को घंटी, हैंडपम्प, मटका आदि दर्शाना इतना महत्वपूर्ण नहीं लगा इसलिए उसने नहीं दर्शाया। **पर नक्शे में बनाने वाले के नजरिए की वजह से अंतर नहीं आता।** चाहे मैं नक्शा बनाऊँ या मेरी सहेली, दोनों के नक्शों को एक जैसा दिखना चाहिए। नक्शा बनाते समय, मनमाने अंतरों की अनुमति नहीं दी जाती है। पर यह जरूर है कि अलग–अलग लोग, अलग संकेतों का प्रयोग कर सकते हैं और अलग–अलग पैमाने के अनुसार नक्शे बना सकते हैं।

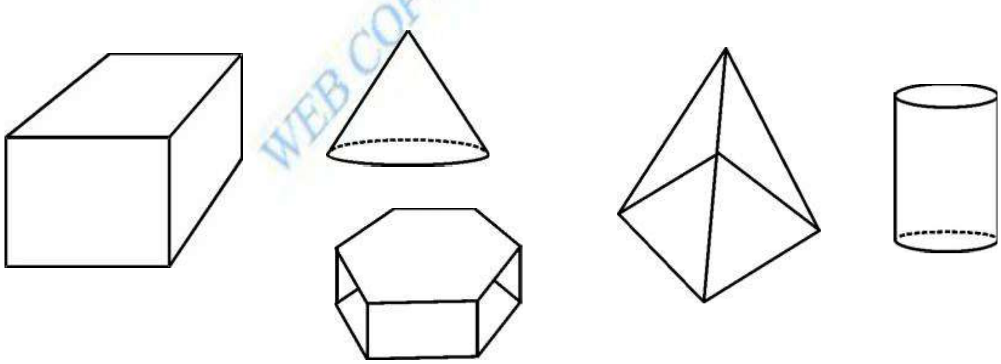
2. **नक्शा किसी पैमाने के आधार पर बना होता है।** गीता ने स्कूल के नक्शे में 1 माचिस की तीली = 3 कदम पैमाना लिया। अक्सर जिले अथवा गाँव, कस्बों के नक्शे में 1 सेमी. = ... किलोमीटर पैमाना लिया जाता है। पैमाना हमें यह बताता है कि नक्शे में दिखाई गई दूरी वास्तविक रूप में कितनी है। जितनी बड़ी जगह को हमें पेपर पर दिखाना होगा, उतनी ज़्यादा लम्बाई को एक इकाई, जैसे 1 सेंटीमीटर दर्शाएगी।

3. **जब गीता ने अपने स्कूल का चित्र बनाया तो जगह को ऐसे दर्शाया जैसे कि उसे वास्तविक रूप में दिखती थी। पर जब गीता ने अपने स्कूल का नक्शा बनाया तो इमारत नहीं बनाई पर स्कूल की जमीन का तल दर्शाया और दरवाजे, खिड़कियाँ दर्शाने के लिए उसने कुछ संकेतों का इस्तेमाल किया।**

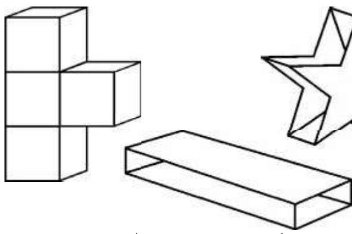


12.3 फलक, किनारे और शीर्ष

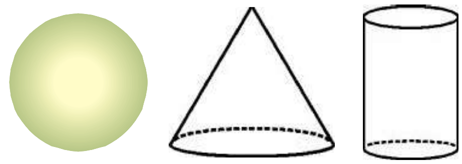
नीचे कुछ त्रिविमीय आकृतियाँ दी गई हैं, इनके शीर्ष, फलक और किनारों को पहचानिए।



उपर्युक्त ठोसों में से प्रत्येक ठोस बहुभुजीय क्षेत्रों से मिलकर बना है, जो उसके **फलक** कहलाते हैं। ये फलक जहाँ मिलते हैं किनारा कहलाते हैं, जो एक रेखाखंड होता है। किनारे जहाँ मिलते हैं, शीर्ष कहलाते हैं, जो एक बिन्दु होता है। ऐसे ठोस फलकों को बहुफलक या बहुफलकी कहते हैं?



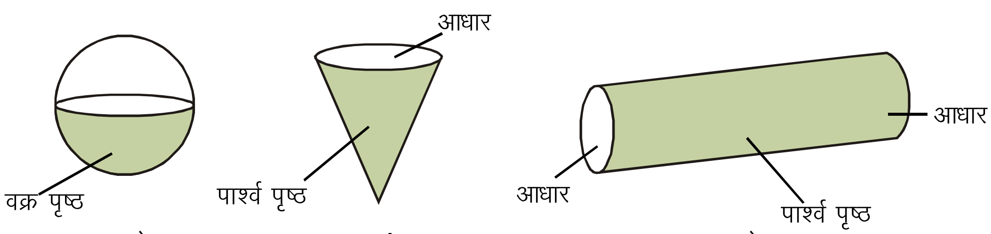
ये बहुफलक हैं।



ये बहुफलक नहीं हैं।

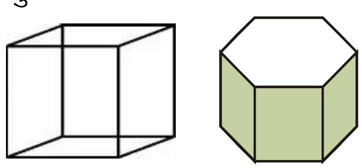
बहुफलक उन ठोसों से किस प्रकार अलग है जो बहुफलकीय नहीं है? सोचिए।

आपने ठीक सोचा? बहुफलकीय, बहुभुजावाले क्षेत्रों से मिलकर बने होते हैं। नीचे अबहुफलकीय आकृतियाँ दी गई हैं जिनसे आप परिचित हैं। क्या ये सरल रेखा से बनी हैं।

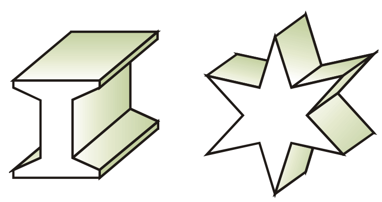


गोला शंकु बेलन

उत्तल बहुफलक : आपको उत्तल बहुभुज की अवधारणा के बारे में याद होगा। उत्तल बहुफलक की अवधारणा भी उसी प्रकार की है।

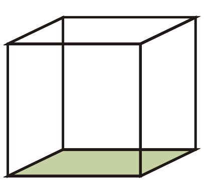


ये उत्तल बहुफलक हैं।

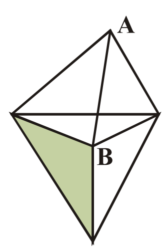


ये उत्तल बहुफलक नहीं हैं।

सम बहुफलक : एक बहुफलक तब सम बहुफलक कहलाता है जब उसके सभी फलक सर्वांगसम सम बहुभुजों से बने हों तथा प्रत्येक शीर्ष पर मिलनेवाले फलकों की संख्या समान हो।

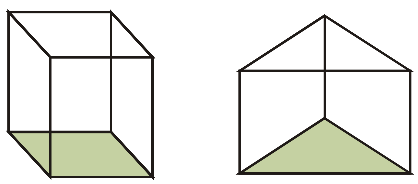


यह एक सम बहुफलक है। इसके सभी फलक सर्वांगसम समबहुभुज हैं। फलकों की समान संख्याओं से शीर्ष बनते हैं।

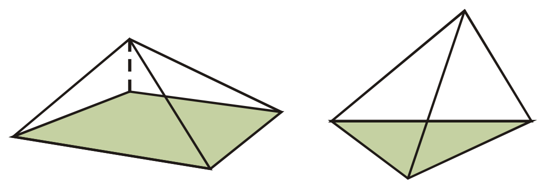


यह एक सम बहुफलक नहीं है। सभी फलक सर्वांगसम नहीं हैं व शीर्ष फलकों की समान संख्याओं से नहीं बनते हैं। A पर 3 फलक मिलते हैं, परंतु B पर 4 फलक मिलते हैं।

हमारे आस–पास बहुफलक परिवार में मिलनेवाले दो महत्त्वपूर्ण सदस्य प्रिज्म और पिरामिड हैं।



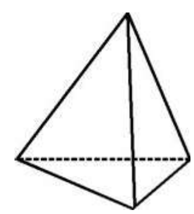
ये प्रिज्म हैं।



ये पिरामिड हैं।

हम कहते हैं कि एक बहुफलक प्रिज्म होता है, जब उसका आधार और ऊपरी सिरा सर्वांगसम बहुभुज हों तथा उसके अन्य फलक, अर्थात् पार्श्व फलक समांतर चतुर्भुजों के आकार के हों।

इसके दूसरी ओर, एक पिरामिड वह बहुफलक होता है जिसका आधार (कितनी भी भुजाओंवाला) एक बहुभुज होता है तथा इसके पार्श्व फलक एक शीर्षवाले त्रिभुज होते हैं (यदि आप एक बहुभुज के सभी कोनों या शीर्षों को एक ऐसे बिंदु से मिला दें जो उसके तल में न हो, तो आपको पिरामिड का एक मॉडल प्राप्त हो जाएगा।) करके देखिए।



स्वयं करके देखिए

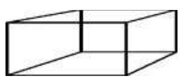
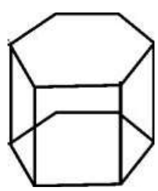
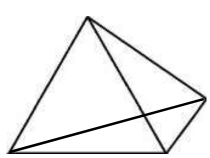
निम्नलिखित बहुफलकों के लिए फलकों, किनारों और शीर्षों की संख्याओं को सारणीबद्ध कीजिए : (यहाँ V शीर्षों की संख्या, F फलकों की संख्या तथा E किनारों की संख्या प्रदर्शित करता है।)

ठोस	F	V	E	F+V	E+2
घनाभ					
त्रिभुजाकार पिरामिड					
त्रिभुजाकार प्रिज्म					
वर्ग आधारवाला पिरामिड					
वर्ग आधारवाला प्रिज्म					

आप अंतिम दो स्तंभों से क्या निष्कर्ष निकालते हैं? क्या प्रत्येक स्थिति में आप $F+V = E+2$, अर्थात् $F+V - E = 2$ प्राप्त करते हैं? यह सबंध ऑयलर सूत्र कहलाता है। वास्तव में, यह सूत्र प्रत्येक बहुफलक के लिए सत्य है।

प्रश्नावली 12.1

1. सारणी को पूरा कीजिए–

आकार	फलकों की संख्या (F)	शीर्ष की संख्या (V)	किनारों की संख्या (E)	बहुफलक है या नहीं? (F+V-E=2)
				
				
				

2. आयलर सूत्र का प्रयोग करते हुए, अज्ञात संख्या को ज्ञात कीजिए।

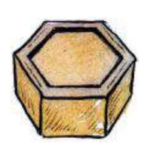
फलक	5	18	?
शीर्ष	?	10	7
किनारे	9	?	14

3. (i) प्रिज्म और बेलन किस प्रकार एक जैसे हैं?

   (ii) पिरामिड और शंकु किस प्रकार एक जैसे हैं?

4. क्या किसी बहुफलक के 15 फलक, 10 किनारे और 20 शीर्ष हो सकते हैं? कारण दीजिए।

5. दी हुई वस्तुओं के सामने दृश्य, पार्श्व दृश्य और ऊपर से दृश्य खींचिए।



अध्याय - 13

क्षेत्रमिति

(MENSURATION)

13.1 भूमिका

आप जानते हैं कि बन्द समतल आकृति की सीमाओं की कुल दूरी, उसका परिमाप कहलाती है और आकृति द्वारा घिरा हुआ क्षेत्र को उसका क्षेत्रफल कहलाता है। हम त्रिभुज, आयत एवं वृत्त आदि समतल आकृतियों की परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात करना सीख चुके हैं।

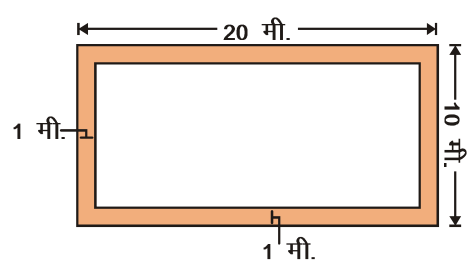
इस अध्याय में हम विभिन्न प्रकारों चतुर्भुज के क्षेत्रफल एवं परिमाप से संबंधित समस्याएँ हल करेंगे, साथ ही घन, घनाभ और बेलन जैसे ठोस के पृष्ठ क्षेत्रफल एवं आयतन के संबंध में भी जानकारी हासिल करेंगे।

आइए, इस समस्या को हल करें।

एक घर के आगे बने आयताकार बगीचे की लम्बाई 20 मीटर और चौड़ाई 10 मीटर है।

1. इस बगीचे के चारों ओर तार घेरना है। तार की लम्बाई क्या होगी? स्पष्ट है कि तार की लम्बाई ज्ञात करने के लिए हमें इस बगीचे का परिमाप निकालने की आवश्यकता होगी जो 60 मीटर है (जाँच कर पता लगाइए)
2. बगीचा कितनी भूमि में फैला है। इसकी जानकारी हासिल करने के लिए हमें उसका क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता है, जो 200 वर्ग मीटर होगा (कैसे?)
3. इस बगीचे के अन्दर चारों ओर से 1 मीटर क्यारियों के लिए जगह है तो बताइए क्यारियों द्वारा बगीचे में घेरा क्षेत्रफल कितना है?

आप आरेखीय आकृति में देखते हैं कि दो आयत बने हैं। अतः क्यारियों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए बाहरी आयत के क्षेत्रफल में से भीतरी आयत के क्षेत्रफल को घटाना होगा। क्या आप बता सकते हैं कि भीतरी आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई कितनी होगी?

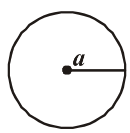
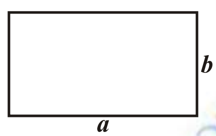
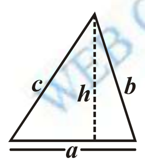
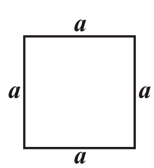
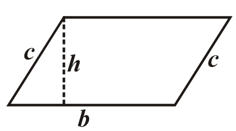


यहाँ भीतरी आयत की लम्बाई = (20 मी. − 2×1 मी.) अर्थात् (20 मी. − 2 मी.) = 18 मी.
भीतरी आयत की चौड़ाई = (10 मी. − 2×1 मी.) अर्थात् (10 मी. − 2 मी.) = 8 मी. है। (सोचिए क्यों?)

अतः रास्ते का क्षेत्रफल = बाहरी आयत का क्षेत्रफल − भीतरी आयत का क्षेत्रफल
= (20 मीटर × 10 मीटर) − (18 मीटर × 8 मीटर)

200 वर्ग मीटर– 144 वर्ग मीटर = 56 वर्ग मीटर होगा।
अतः क्यारियाँ 56 वर्ग मीटर में लगी है।

पूर्व में आप इन ज्यामितीय आकारों के बारे में पढ़ चुके हैं, इस आधार पर विभिन्न आकारों को उनके संगत क्षेत्रफलों से मिलाइए।

बन्द समतलीय आकृतियाँ	**आकृति का नाम**	**क्षेत्रफल**
	वृत्त	$\frac{1}{2}\times a\times h$ वर्ग इकाई
	आयत	$a\times a$ वर्ग इकाई
	त्रिभुज	$a\times b$ वर्ग इकाई
	वर्ग	$b\times \text{h}$ वर्ग इकाई
	समांतर चतुर्भुज	πa^2 वर्ग इकाई

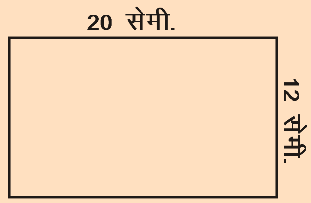
– दी गई आकृतियों के लिए परिमाप का सूत्र भी लिखिए।

स्वयं करके देखिए

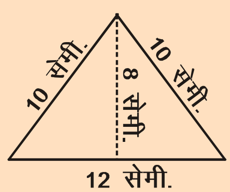
1. निम्न ज्यामितीय आकृतियों का उनके क्षेत्रफलों से मिलान कीजिए–

(a) 

(i) 48 सेमी.^{2}

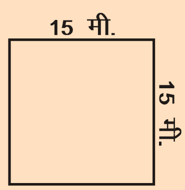
(b) 

(ii) 616 सेमी.^{2}

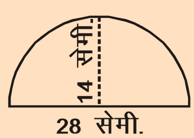
(c) 

(iii) 240 सेमी.^{2}

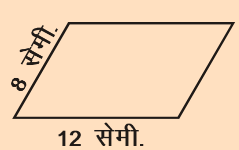
2. निम्नलिखित का मिलान उसके परिमाप से कीजिए।

(a) 

(i) 72 सेमी.

(b) 

(ii) 40 सेमी.

(c) 

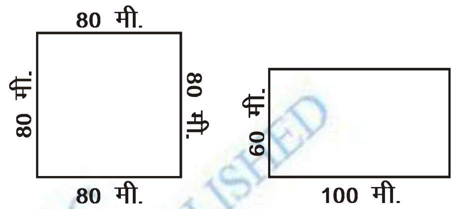
(iii) 60 सेमी.

नोटः–

1. परिमाप/परिसीमा/परिमिति/ परिधि का अर्थ होता है घेरे की कुल लम्बाई।
2. क्षेत्रफल (Area) को A से दिखाया/दर्शाया जाता है।

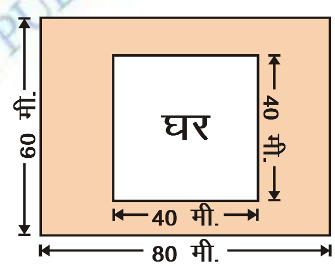
प्रश्नावली – 13.1

1. बगल की आकृतियों में एक आयताकार और एक वर्गाकार खेल के मैदान के माप दिए हुए हैं। यदि इनके परिमाप समान हैं तो किस मैदान का क्षेत्रफल अधिक होगा?

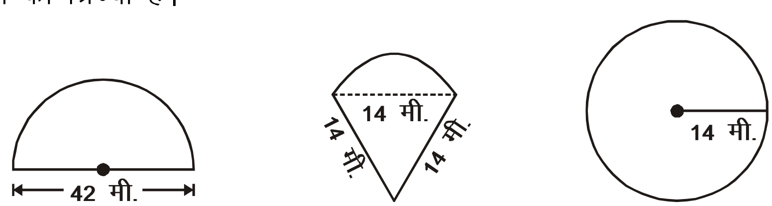


(a) (b)

2. विमला के पास एक आयताकार प्लॉट है (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) वह प्लॉट के बीच में एक वर्गाकार घर बनाना चाहती है। घर के चारों ओर फुलवारी लगवानी है। उसे फुलवारी लगाने में 40 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से कितने रुपये खर्च करने होंगे?



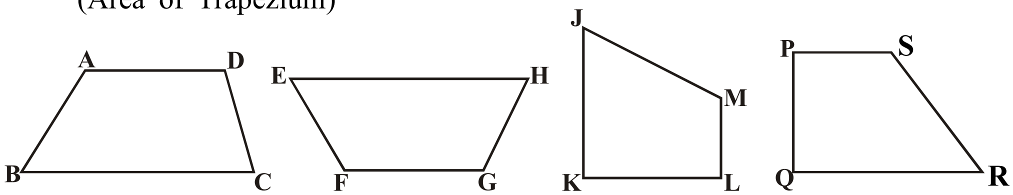
3. अमरेश अपने घर के आँगन में ईंट बिछवाना चाहता है। यदि आँगन की लम्बाई 20 मीटर और चौड़ाई 15 मीटर हो तथा एक ईंट की लम्बाई 25 सेमी. और 80 सेमी. हो तो उस आँगन में कितनी ईंटें लगेंगी? (कच्चा चित्र बना हल करें)
4. एक त्रिभुजाकार खेत का क्षेत्रफल 600 वर्ग मीटर तथा ऊँचाई 60 मीटर है तो उस खेत का आधार ज्ञात करें।
5. एक धावक को कम से कम दूरी तय करने के लिए निम्न में से किस आकृति पर चक्कर लगाना चाहिए? आप जानते हैं कि सम्पूर्ण वृत्त की परिधि का सूत्र $c = 2\pi r$ जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।



(a) (b) (c)

13.2 समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल
(Area of Trapezium)

याद कीजिए ऐसे चतुर्भुज जिनके दोनों जोड़े आपस में समांतर हो क्या कहलाते हैं?



(a) (b) (c) (d)

उपर्युक्त चारों आकृति को ध्यान से देखिए और पता लगाइए कि चारों आकृतियों में क्या समानता है। क्या सभी चतुर्भुजों की आमने–सामने की भुजाएँ समांतर हैं? आपने ठीक निकाला उपर दिए गए चतुर्भुजों में भुजाओं के जोड़े में से एक जोड़ा समांतर व एक असमांतर है ऐसे चतुर्भुज समलम्ब चतुर्भुज कहलाते हैं।

असलम का खेत समलम्ब चतुर्भुजाकार है जिसमें $PQ \parallel RS$ है। RZ खेत को कितने भागों में बाँट रहा है? स्पष्ट है कि RZ खेत को दो भागों में बाँट रहा है, एक भाग RZQS आयताकार एवं दूसरा भाग RZP त्रिभुजाकार है। यदि $PQ = 18$ मी. एवं $RS = 8$ मी. एवं $QS = 12$ मी. है तो

$$\Delta PZR \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times h \times PZ = \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{6}{\cancel{12}} \times 10 = 60 \text{ मी.}^2$$

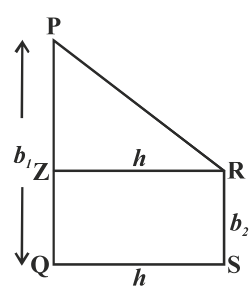
एवं आयत RZQS का क्षेत्रफल $= h \times ZQ = 12 \times 8 = 96$ मी.^{2}

अतः असलम के खेत का कुल क्षेत्रफल कितना हुआ?

असलम के खेत का कुल क्षेत्रफल = ΔPZR का क्षेत्रफल + ΔRZQS का क्षेत्रफल

= 60 वर्ग मीटर + 96 वर्ग मीटर

= 156 वर्गमीटर



इस प्रकार समलम्ब चतुर्भुज PQSR का क्षेत्रफल

= ΔPZR का क्षेत्रफल + आयत ZQSR का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times ZR \times PZ + \quad QS \times QZ$$

$$= \frac{1}{2} \times h \times PZ + h \times QZ \qquad (ZR = QS = h)$$

$$= h\left(\frac{1}{2}\, PZ + QZ\right) \qquad \text{(ल.स.प. लेने पर)}$$

$$= h\left(\frac{PZ+2QZ}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{PZ+QZ+QZ}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right) \text{ या } \frac{1}{2}\times h\times(b_1+b_2) \qquad [PZ+QZ=b_1]$$

$= \frac{1}{2} \times$ ऊँचाई $\times$ समान्तर भुजाओं का योग

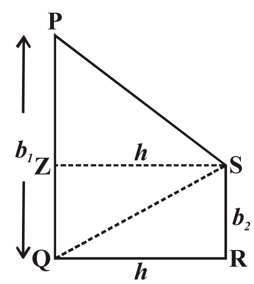
क्या उपर्युक्त सूत्र में मान रखने पर भी असलम के खेत का क्षेत्रफल 156 वर्ग मीटर आएगा? मान रखकर देखिए।

एक और तरीका देखिए

समलम्ब चतुर्भुज PQSR का क्षेत्रफल

$= \Delta PQS$ का क्षेत्रफल $+ \Delta SRQ$ का क्षेत्रफल

[Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई]



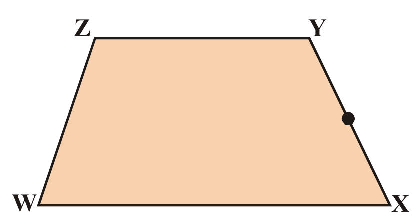
$$= \frac{1}{2} \times b_1 \times h + \frac{1}{2} \times h \times b_2$$

$$= \frac{1}{2}\, h\,(b_1 + b_2)$$

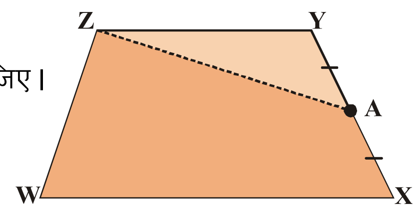
अर्थात् $\frac{1}{2} \times$ ऊँचाई $\times$ समान्तर भुजाओं का योग।

गतिविधि

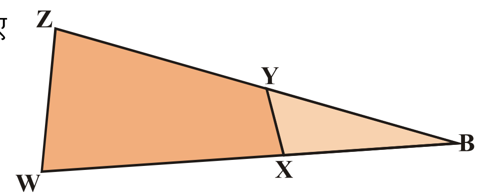
1. एक समलम्ब चतुर्भुज लीजिए एवं इसे नामांकित कीजिए।



2. भुजा XY को मोड़कर इसका मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए एवं इसे A नामांकित कीजिए।



3. कैंची से Z को A से मिलाते हुए काटिए एवं AY को AX के साथ रखिए।



4. इस प्रकार बड़े त्रिभुज के आधार की लम्बाई क्या है?
5. इस त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए यदि इसकी ऊँचाई h इकाई है।
6. क्या इस त्रिभुज का क्षेत्रफल एवं समलम्ब चतुर्भुज (WZYX) का क्षेत्रफल समान है।

इस प्रकार समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें समान्तर भुजाओं की लम्बाई और इन दो भुजाओं के बीच लम्बवत् दूरी की आवश्यकता है। समान्तर भुजाओं की लम्बाइयों का योग और इनके बीच की लम्बवत् दूरी के गुणनफल के आधे के बराबर क्षेत्रफल होता है।

उदाहरण–1. एक समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ क्रमशः 12 मीटर और 8 मीटर हैं तथा उनके बीच की दूरी 3 मीटर है तो समलम्ब का क्षेत्रफल क्या होगा।

हल : हम जानते हैं कि समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times h\,(b_1 + b_2)$

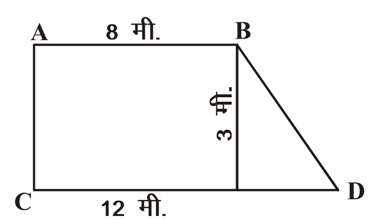
दिया हुआ है–

$\therefore \frac{1}{2} \times$ 3 मीटर (12 मीटर + 8 मीटर)

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times$ 3 मीटर $\times\ \cancel{20}^{10}$ मीटर

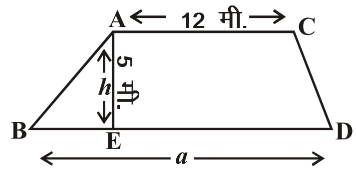
$= 3 \times 10$ वर्ग मीटर

= 30 वर्ग मीटर



उदाहरण–2. एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 105 वर्ग मीटर है तथा समानान्तर भुजाओं में से एक की लम्बाई 12 मीटर है तथा ऊँचाई 5 मीटर है तो दूसरी भुजा की लम्बाई क्या होगी?

हल : दिया हुआ है।



$A = 105$ वर्ग मी.

$h = 5$ मी.

एक समानान्तर भुजा की लम्बाई $AC = 12$ मी.

अन्य समान्तर भुजा को हम a मान लेते हैं।

अतः समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times h\,(a+b)$ से

$$105 \text{ वर्ग मी.} = \frac{1}{2} \times 5 \text{ मी.} (a + 12 \text{ मी.})$$

$$105 \text{ वर्ग मी.} = \frac{1}{2} (5a \text{ मी.} + 60 \text{ वर्ग मी.})$$

$$210 \text{ वर्ग मी.} = 5a \text{ मी.} + 60 \text{ वर्ग मी.}$$

$$210 \text{ वर्ग मी.} - 60 \text{ वर्ग मीटर} = 5a \text{ मीटर}$$

$$150 \text{ वर्ग मी.} = 5a \text{ मी.}$$

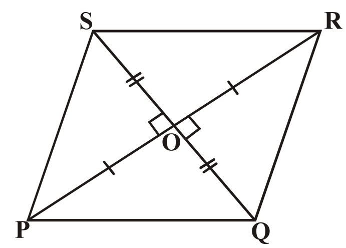
$$\frac{{}^{30}\cancel{150 \text{ वर्ग मीटर}}}{\cancel{5} \text{ मीटर}} = a$$

अतः दूसरी समानान्तर भुजा की लम्बाई 30 मी. है।

13.3 समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of Rhombus)

अभी तक आपने देखा कि अलग–अलग चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमने पूर्व में ज्ञात आकृतियों के क्षेत्रफलों को काम में लिया। जैसे त्रिभुज, आयत, वर्ग फिर इनसे ज्ञात समांतर व समलम्ब चतुर्भुज।

आकृति PQRS एक समचतुर्भुज है। इसलिए इसके विकर्ण एक दूसरे के लम्ब समद्विभाजक हैं।



समचतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल =

(ΔPRS का क्षेत्रफल) + (ΔPQR का क्षेत्रफल)

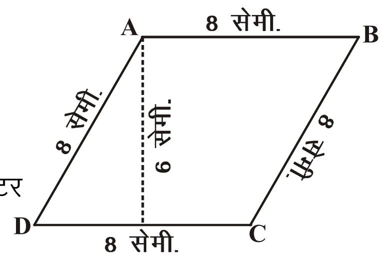
$= \left(\frac{1}{2} \times PR \times OS\right) + \left(\frac{1}{2} \times PR \times OQ\right)$

$= \frac{1}{2}PR \times (OS+OQ)$ (सार्व लेने पर)

$= \frac{1}{2}PR \times SQ$ $\quad (OS + OQ = SQ)$

$= \frac{1}{2}d_1 \times d_2$ जहाँ $PR = d_1$ और $SQ = d_2$ (d = diagonal विकर्ण)

उदाहरण–3. किसी समचतुर्भुज की एक भुजा 8 सेन्टीमीटर और शीर्ष लम्ब 6 सेन्टीमीटर हो तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : हम जानते हैं कि

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × शीर्ष लम्ब

या $A = b \times h$

$A = 8$ सेन्टीमीटर $\times 6$ सेन्टीमीटर

$= 48$ सेन्टीमीटर^2

जब समचतुर्भज के विकर्णों को माप न दिया गया हो व आधार और ऊँचाई ज्ञात हो तो हम समांतर चतुर्भुज के सुत्र के अनुसार चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकाल लेते हैं।

सोचिए निम्न कथनों में से कौन सा सही है। कारण सहित बातइए।

(i) प्रत्येक समलंब चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है। ....

(ii) प्रत्येक समातंर चतुर्भुज एक समलंब चुतर्भुज भी होता है। ....

उदाहरण–4. एक समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 20 सेन्टीमीटर एवं 24 सेन्टीमीटर हों तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हमें मालूम है कि समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल

यानि $A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

$A = \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{10}{\cancel{20}}$ सेमी. $\times$ 24 सेमी.

$= 240$ सेन्टीमीटर^2

स्वयं करके देखिए

समचतुर्भुज	भुजा की लम्बाई	शीर्ष लम्ब	d_1	d_2	क्षेत्रफल	परिमाप
1.	–	–	18 सेमी.	12 सेमी.	....	....
2.	12 सेमी.	9 सेमी.	–	–		

13.4 बहुभुज (Polygon)

सोचिए, क्या आप दो रेखा खण्डों की मदद से कोई बंद आकृति बना सकते हैं?

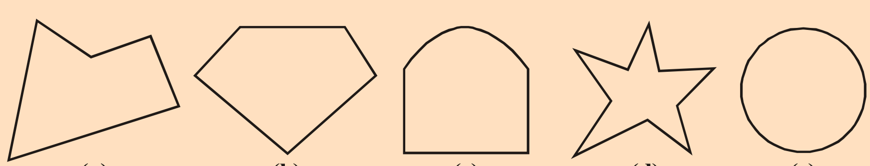
अतः कम से कम तीन रेखाखण्डों की सहायता से ही बंद आकृति बनाई जा सकती है। (यहाँ हम वक्र रेखा से घिरी बंद आकृतियों की बात नहीं कर रहे हैं

इसी प्रकार चार, पाँच रेखाओं द्वारा क्रमशः आप चतुर्भुज, पंचभुज जैसे बंद आकृतियाँ बना सकते हैं।

कोई भी बंद आकृति जो सरल रेखाओं द्वारा बनी हो **बहुभुज** कहलाती है।

स्वयं करके देखिए–

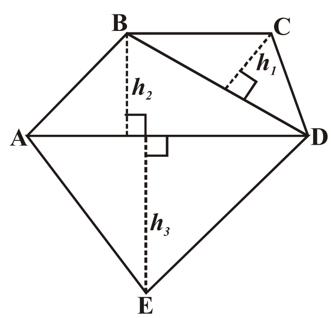
नीचे दी गई आकृतियों में से बहुभुज को छाँटिए–

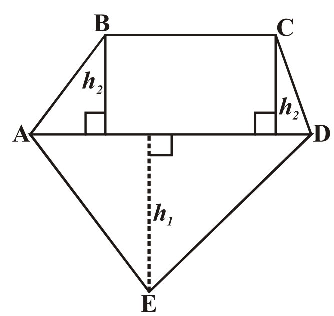


(a) (b) (c) (d) (e)

जिस प्रकार हमने चतुर्भुजों को त्रिभुजों में बाँट कर क्षेत्रफल ज्ञात किया। इसी प्रकार हम अलग–अलग बहुभुजों का क्षेत्रफल चतुर्भुजों व त्रिभुजों की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं।

नीचे दिए गए चित्रों से समझिए।



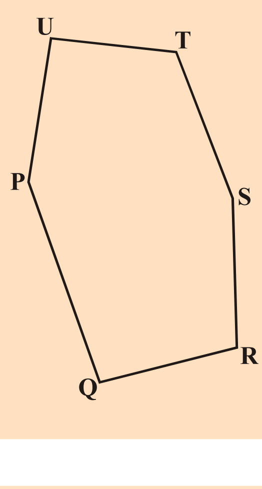


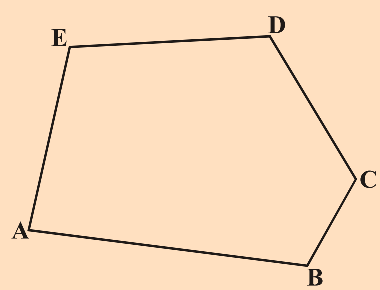
नेहा ने पंचभुज ABCDE को तीन त्रिभुजों में बाँटकर, उसका क्षेत्रफल ज्ञात किया अतः
क्षेत्र. $\Delta ADE +$ क्षेत्र. $\Delta ADB +$
क्षेत्र. $\Delta BDC =$ क्षेत्रफल पंचभुज ABCDE

अशफाक ने पंचभुज ABCDE को तीन त्रिभुजों व एक आयत में बाँटकर, उसका क्षेत्रफल ज्ञात किया। अशफाक के लिए प्रतीक रूप में पंचभुज के क्षेत्रफल के लिए समीकरण लिखिए।

स्वयं करके देखिए

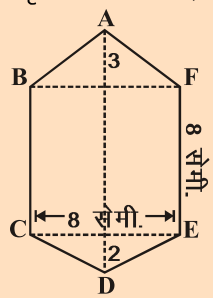
1. निम्नलिखित बहुभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इन्हें त्रिभुजों व चतुर्भुजों में बाँटिए और साथ ही बहुभुज के क्षेत्रफल के लिए समीकरण रूप लिखिए।





2. नीचे आकृतियों में दी गई जानकारियों के आधार पर बहुभुजों का क्षेत्रफल निकालिए।

(A)



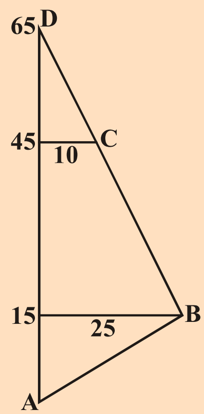
बहुभुज ABCDEF का क्षेत्रफल =

Δ ABF का क्षेत्रफल + ⊔ BCEF का क्षेत्रफल

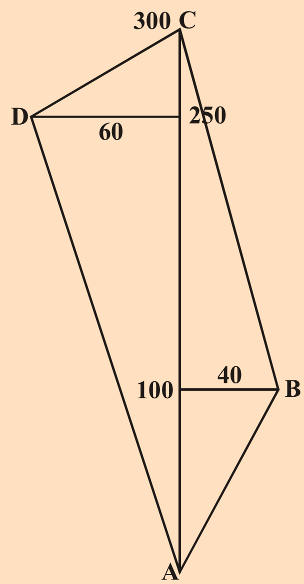
+ Δ CED का क्षेत्रफल

= .... + ... + ...

(B)

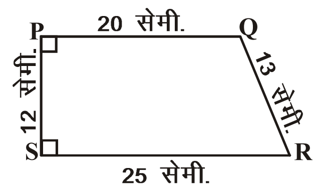


(C)



प्रश्नावली – 13.2

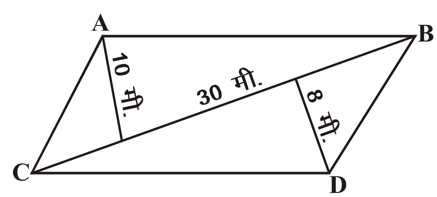
1. एक समलम्ब चतुर्भुज PQRS के $\angle P$ और $\angle S$ समकोण है। इसकी भुजाओं की माप चित्र में दर्शाई गई है, समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



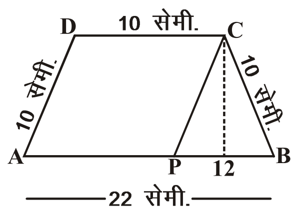
2. एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD में AB, CD का समान्तर है AB = 30 सेमी., BC = 15 सेमी., DC = 44 सेमी., और AD = 13 सेमी.। समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजाएं 52 सेमी. और 27 सेमी. है तथा अन्य दो भुजाएं 25 सेमी. और 30 सेमी. की हैं। समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. किसी समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 200 मी.^{2} है और इसकी ऊँचाई 8 मी. है। यदि समान्तर भुजाओं में एक भुजा दूसरी भुजा से 6 मी. अधिक है तो समान्तर भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
5. किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजाएँ क्रमशः 24 सेमी. और 20 सेमी. हैं तथा दोनों भुजाओं की बीच की दूरी 15 सेमी. है, इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. किसी समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 384 सेमी.^{2} है। यदि समान्तर भुजाओं का अनुपात 3 : 5 हो और दोनों के बीच की लम्बात्मक दूरी 12 सेमी. हो तो प्रत्येक समान्तर भुजाओं की माप ज्ञात कीजिए।
7. ऐसे समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा 10 सेमी. और शीर्ष लम्ब 6 सेमी. हो।
8. एक समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 8 सेमी. है और इसका क्षेत्रफल 11.2 सेमी^{2} है तो इस चतुर्भुज का शीर्ष लम्ब ज्ञात करें।
9. किसी समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 64 सेमी.^{2} है और इसकी परिमाप 64 सेमी. है। समचतुर्भुज का शीर्ष लम्ब ज्ञात कीजिए।
10. एक समचतुर्भुजाकार पार्क की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 72 मीटर तथा शीर्ष लम्ब 18 मीटर है। उस वर्गाकार खेल की मैदान का भुजा क्या होगी जिसका क्षेत्रफल इस समचतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर है?
11. किसी चतुर्भुज का एक विकर्ण 30 मीटर और सम्मुख शीर्षों से डाले गए लम्ब 10 मी. और 8 मी. हैं तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालिए।



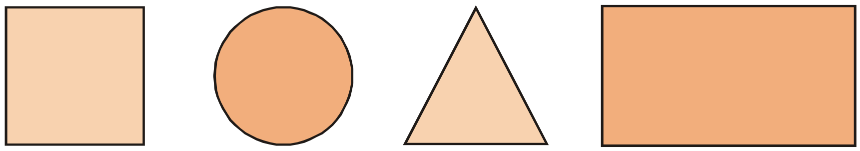
12. निम्न आकृति का क्षेत्रफल तथा शीर्ष लम्ब ज्ञात कीजिए।



13.5 ठोस आकार (Solid Shape)

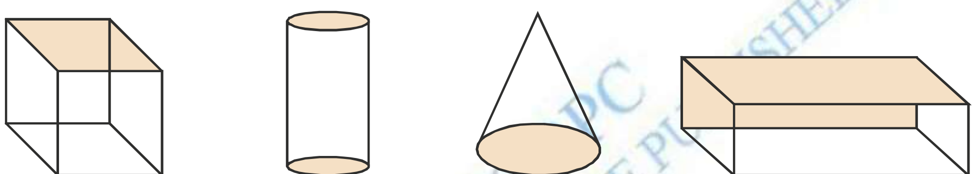
आप द्विविमीय व त्रिविमीय आकृतियों (ठोस) के बारे में थोड़ा जानते हैं। आइए हम अमर और अकबर की मदद करें।

अमर और अकबर के पास कुछ द्विविमीय आकार कटे हुए रखे हैं, इनकी सहायता से इन्हें कुछ त्रिविमीय आकृतियाँ बनानी हैं।



(a) (b) (c) (d)

द्विविमीय आकृतियाँ (Two Dimensional Shapes)



(i) (ii) (iii) (iv)

त्रिविमीय आकृतियाँ (Three Dimensional Shapes)

1. आकृति (i) को बनाने के लिए आप किस द्विविमीय आकार को काम में लेंगे?

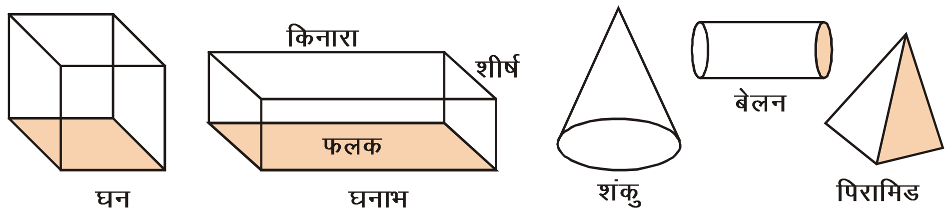
   क्या आप बता सकते हैं कि ऐसे कितने आकारों की सहायता से (i) को बनाया जा सकता है?

   इसी प्रकार आकृति (ii), (iii) व (iv) के लिए बताइए

	लिए जानेवाले द्विविमीय आकार	**अलग–अलग आकारों की संख्या**
आकृति (ii) के लिए		
आकृति (iii) के लिए		
आकृति (iv) के लिए		

इस प्रकार आपने कुछ त्रिविमीय आकृतियों को द्विविमीय आकारों की मदद से बनाया।

आपने ऊपर दी गई आकृतियाँ बनाते समय देखा होगा कि कुछ आकारों में दो या दो से अधिक सर्वांगसम फलक हैं। उनके नाम दीजिए। ऐसा कौन सा ठोस है जिसके सभी फलक सर्वांगसम हैं।



हाँ, आपने ठीक सोचा घन के सभी फलक वर्गाकार और समान होते हैं।

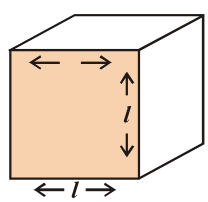
आप यह भी जानते हैं कि सर्वांगसम फलक क्षेत्रफल में समान होते हैं। तब क्या हम घन के एक फलक यानी वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात होने पर घन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

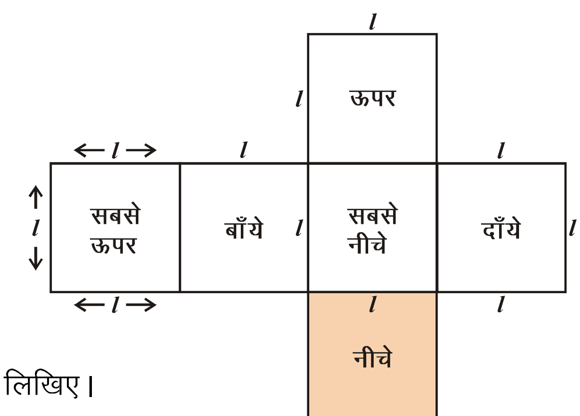
आइए, इसे समझें–

13.5.1 घन का क्षेत्रफल (Area of Cube)

दीपक एक घनाकार डिब्बे को रंग कर रहा है तो उसे उस घन के सभी फलकों को रँगना होगा। आइए, यह जानें कि उसे कुल कितने क्षेत्र को रँगना होगा?

डिब्बे को खोलने पर वह जाल के रूप में निम्न तरह से दिखेगा।





प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल लिखिए।

क्या सभी फलकों का क्षेत्रफल समान है?

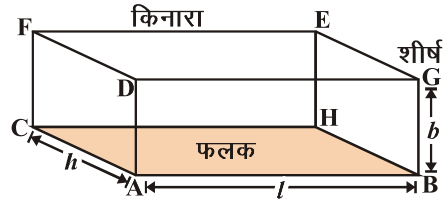
चूँकि एक पृष्ठ का क्षेत्रफल $= l$ इकाई $\times\, l$ इकाई $= l^2$ वर्ग इकाई

अतः छह पृष्ठों का क्षेत्रफल $= 6 \times l^2$ वर्ग इकाई

$= 6\, l^2$ या $6 \times$ (भुजा)^2

शिक्षक निर्देश :– शिक्षक घनाकार डब्बा लेकर घन की अवधारणा स्पष्ट करेंगे एवं उनके अंगों की जानकारी देंगे तथा सूत्र स्थापित में उपयोग करेंगे।

13.5.2 घनाभ का क्षेत्रफल (Area of Cuboid)



घनाभाकार आकृति को टूथपेस्ट, साबुन के डिब्बे या ईंट से आसानी से समझा जा सकता है।

मान लीजिए आप एक घनाभाकार डिब्बा लेकर उसे खोलकर समतल पर फैला देते हैं।

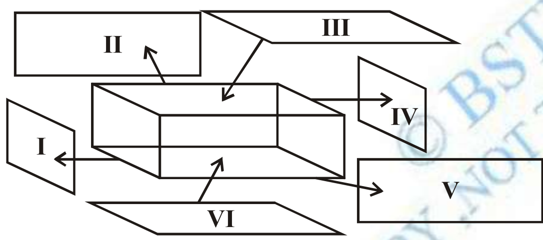
घनाभ के कुल पृष्ठ क्षेत्रफल

मान लीजिए कि घनाभ की लंबाई $= l$ इकाई,

चौड़ाई $= b$ इकाई

ऊँचाई $= h$ इकाई

घनाभाकार डिब्बा



सभी छह फलक आयताकार हैं और सम्मुख फलक सर्वांगसम हैं। इसलिए घनाभ में सर्वांगसम फलकों के तीन युग्म होते हैं।

तथा

$\therefore$ घनाभ के कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = आयत I क्षेत्रफल + आयत II क्षेत्रफल + आयत III क्षेत्रफल + आयत IV क्षेत्रफल + आयत V क्षेत्रफल + आयत VI क्षेत्रफल

$= hb + lh + bl + hb + lh + bl$

$= 2\,hb + 2lh + 2bl$

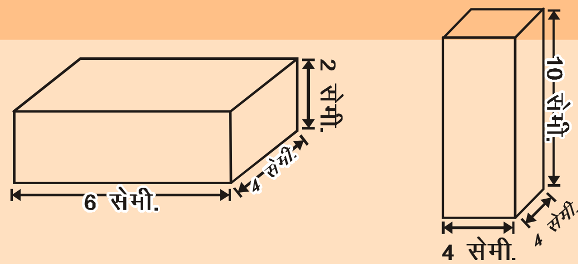
$= 2\,(hb + lh + bl)$

अर्थात् घनाभ का क्रम पृष्ठ क्षेत्रफल = 2 (लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊँचाई × लम्बाई)

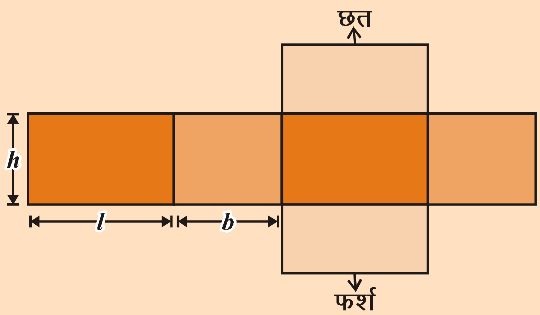
शिक्षक निर्देश :– शिक्षक घनाभाकार डब्बा लेकर घन की अवधारणा स्पष्ट करेंगे एवं उनके अंगों की जानकारी देंगे तथा सूत्र स्थापित के लिए उपयोग करेंगे।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित घनाभों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

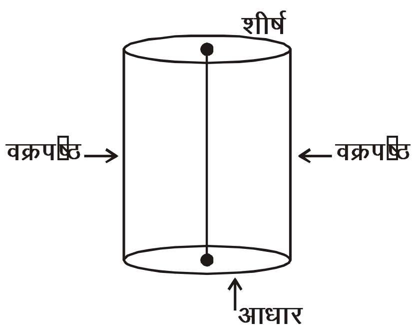


घनाभ की दीवारें [तल और शीर्ष के अतिरिक्त फलक] कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल बनाती हैं। उदाहरणतः जिस घनाभाकार कमरे में आप बैठे हुए हैं उस कमरे की चारदीवारों का कुल क्षेत्रफल $2(h \times l + b \times h)$ अथवा $2h(l + b)$ द्वारा प्राप्त किया जाता है।



13.5.3 बेलन (Cylinder)

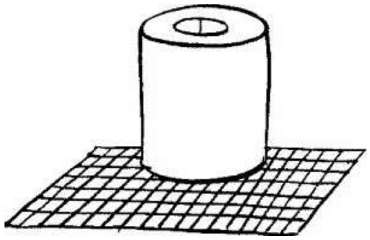
आपने घर में टिन या स्टील का बेलनाकार डिब्बा जरूर देखा होगा। आइए, ऐसी आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।



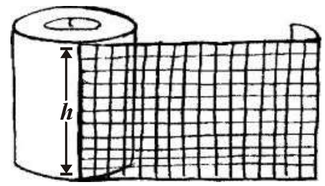
बेलन में एक वक्रपृष्ठ और दो वृत्ताकार सतह जो कि सर्वांगसम हैं।

आइए, कुछ और जानकारी प्राप्त करते हैं।

1. एक बेलनाकार डिब्बे के आधार को पेपर पर रखकर उसके चारों ओर पेंसिल से दाग लगाकर उस भाग को काट लेते हैं। पुनः एक दूसरा पेपर लेते हैं जिसकी चौड़ाई बेलनाकार डिब्बे की ऊँचाई के बराबर हो। इस पेपर को डिब्बे के चारों ओर लपेट देते हैं जो बेलनाकार आकृति में परिवर्तित हो जाता है।

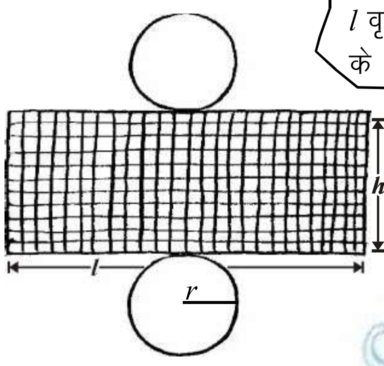


(i)

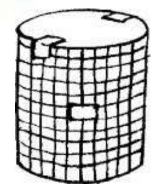


(ii)

क्या आयताकार भाग की लम्बाई l वृत्ताकार भाग की परिधि $2\pi r$ के बराबर है।



(iii)

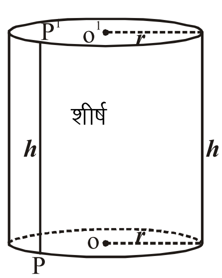


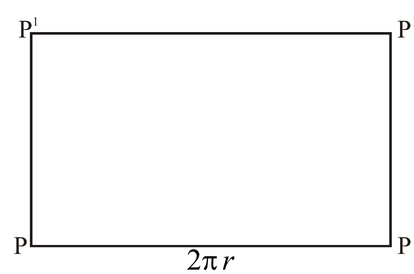
(iv)

इस पेपर को खोलने पर यह आयताकार बन जाता है।

बेलनाकार डिब्बे में कुल तीन पृष्ठ हैं जिनमें से दो पृष्ठ वृत्ताकार (आधार व शीर्ष) तथा तीसरा पृष्ठ वक्राकार भाग है। आधार और शीर्ष दोनों वृत्तीय पृष्ठों का क्षेत्रफल बराबर होगा। यदि वृत्तीय पृष्ठों की त्रिज्या r हो तो प्रत्येक वृत्तीय पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ होगा।

अब प्रश्न उठता है कि तीसरे पृष्ठ अर्थात् वक्राकार भाग का क्षेत्रफल कैसे प्राप्त किया जाए? चर्चा कीजिए।





प्राप्त आयताकार पट्टी की लम्बाई, वक्राकार भाग की परिधि के बराबर होगी एवं चौड़ाई

वक्राकार भाग की ऊँचाई के बराबर होगी। साथ ही आयताकार पट्टी एवं वक्राकार भाग के क्षेत्रफल भी बराबर होंगे।

चूँकि वक्राकार भाग की त्रिज्या r है, इसलिए उसकी परिधि $= 2\pi r$

अब यदि वक्राकार भाग की (डिब्बे की) ऊँचाई h हो, तो

वक्राकार भाग का क्षेत्रफल = आयताकार पट्टी का क्षेत्रफल

= पट्टी की लम्बाई × चौड़ाई

= वक्राकार भाग की परिधि × ऊँचाई

$= 2\pi r \times h = 2\pi rh$

बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$
(Curved area of Cylinder)

अतः बेलनाकार डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्राकार भाग का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल + शीर्ष का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(r+h)$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r+h)$
(Total Surface area of Cylinder)

नोटः– जब तक कोई निर्देश न हो तब तक π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

उदाहरण–5. एक घनाभाकार पत्थर की लम्बाई 5 मीटर, चौड़ाई 4 मीटर तथा मोटाई (ऊँचाई) 3 मीटर है तो उसका कुल क्षेत्रफल निकालिए।

हल : यहाँ घनाभ की लंबाई $l = 5$ मी., चौड़ाई $b = 4$ मी. और मोटाई (ऊँचाई) $h = 3$ मीटर हैं।

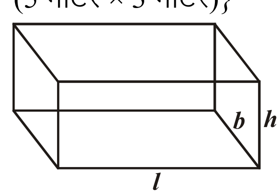
घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$

$\therefore$ = 2 {(5 मीटर × 4 मीटर) + (4 मीटर × 3 मीटर) + (5 मीटर × 3 मीटर)}

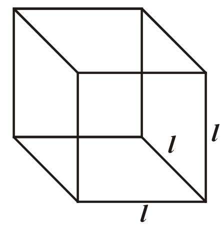
= 2 (20 मीटर + 12 मीटर +15 मीटर)

= 2 × 47 वर्ग मीटर

= 94 वर्ग मीटर



उदाहरण–6. एक घन की एक भुजा 5 सेंटीमीटर है तो इस घन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



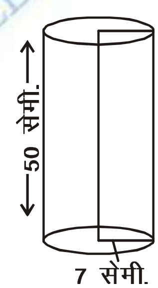
हल : यहाँ l (भुजा) = 5 सेन्टीमीटर है

अतः सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 6l^2$

$= (6 \times 5 \times 5)$

= 150 वर्ग सेमी

उदाहरण–7. एक बेलनाकार ठोस लोहे की लम्बाई 50 सेंटीमीटर है तथा आधार की त्रिज्या 7 सेंटीमीटर है तो इस बेलनाकार ठोस के (i) वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल एवं (ii) सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



जहां $\pi = \frac{22}{7}$

हल : (i) बेलन का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7}$ सेमी. × 50 सेमी.

= 44 सेमी. × 50 सेमी.

= 2200 वर्ग सेन्टीमीटर

(ii) बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(r + h)$

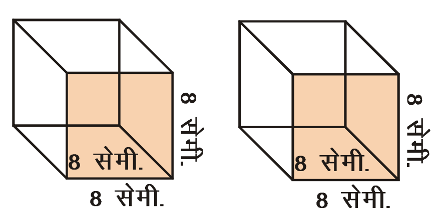
$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7}\ (7 + 50)$ वर्ग सेमी.

= 44 सेमी. × 57 सेमी.

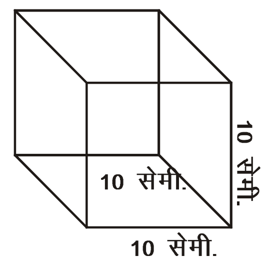
= 2508 वर्ग सेमी.

प्रश्नावली – 13.3

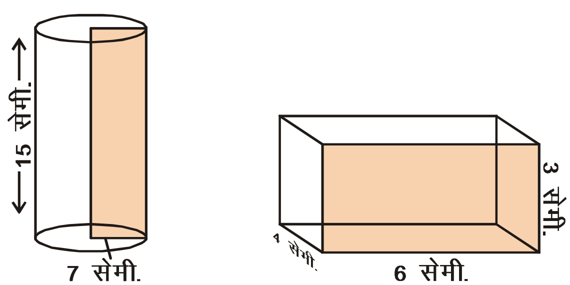
1. दिए गए दोनों घनों को जोड़कर एक घनाभ बनाया गया, तो घनाभ के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



2. एक घन की एक भुजा 12 सेन्टीमीटर है तो घन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक घनाभाकार पिंड की लम्बाई 15 सेमी., चौड़ाई 14 सेमी. एवं ऊँचाई 13 सेमी. है, पिंड का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. ऐसे घनाभाकार पिंड की भुजा ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 2400 वर्ग मीटर है।
5. एक घनाभाकार साबुन की लम्बाई 6 सेमी., चौड़ाई 5 सेमी. एवं सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल 148 वर्ग सेमी. है तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
6. एक घनाकार लकड़ी के टुकड़े की एक किनारे की लम्बाई 10 सेमी. है। उसमें से 3 सेमी. × 2 सेमी. × 1 सेमी. आकार का घनाभ एक कोने से काटकर निकाल दिया गया तो शेष क्षेत्रफल कितना होगा?

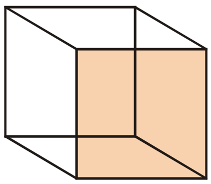


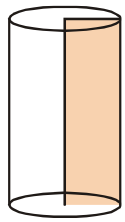
7. एक बेलन की ऊँचाई 25 सेमी. है और आधार का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी है तो बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करें?
8. एक बेलनाकार लकड़ी की लम्बाई 50 सेमी. है तथा आधार की त्रिज्या 14 सेमी. है। इसके सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
9. यदि आपको इन आकृतियों को कागज से पूरा–पूरा ढँकना हो तो कम से कम कितने कागज की आवश्यकता होगी?



10. एक भवन में 20 बेलनाकार खंभे लगे हैं जिसकी ऊँचाई 4 मीटर है तथा त्रिज्या 14 सेमी. है। 4 रुपये प्रति वर्गमीटर की दर से वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल में रँगाई करने का खर्च ज्ञात कीजिए।

13.6 घन, घनाभ और बेलन का आयतन (Volume of cube, cuboid and cylinder)





कोई त्रिविमीय वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह उसका आयतन (Volume) कहलाता है। परिवेश में पायी जाने वाले वस्तुओं के आयतन की तुलना कीजिए। स्पष्ट है कि किसी कमरे में रखी हुई संदूक के तुलना में कमरे का आयतन अधिक होगा। एक डिब्बा में रखा हुआ साबुन की तुलना में डिब्बा का आयतन अधिक होगा।

हमें मालूम है कि हम किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं। यहाँ हम ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का प्रयोग करते हैं।

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम क्षेत्र को वर्ग इकाइयों में बाँटते हैं और आयतन ज्ञात करने के लिए ठोस को घन इकाइयों में बाँटने की आवश्यकता है।

इस प्रकार किसी ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए हम उसमें घन इकाईयों को गिनते हैं।

1 घन सेमी. = 1 सेमी. × 1 सेमी. × 1 घन सेमी. = 1 सेमी³ जिसे हम 1 घन सेमी. भी पढ़ते हैं।

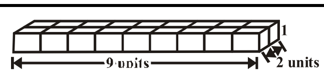
1 घन मीटर = 1 मीटर × 1 मीटर × 1 मीटर = 1 मीटर³

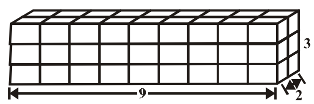
1 घन मिलीमीटर = 1 मिली मीटर × 1 मिली मीटर × 1 मिली मीटर = 1 मिमी.³

आइए, अब हम घनाभ, घन और बेलन का आयतन ज्ञात करने का तरीका समझें। प्रत्येक ठोस पर बारी–बारी से चर्चा करेंगे।

13.6.1 घनाभ (Cuboid)

समान आकारवाले (प्रत्येक घन की लंबाई समान) 1 सेमी. लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई के घन लीजिए। एक घनाभ बनाने के लिए उहें व्यवस्थित कीजिए। आप इन्हें अनेक रूपों में व्यवस्थित कर सकते हैं। निम्नलिखित सारणी पर विचार कीजिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

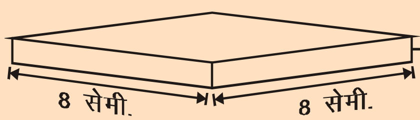
घनाभ	लंबाई	चौड़ाई	ऊँचाई	$l \times b \times h = V$
	9	2	1	$9 \times 2 \times 1 = 18$

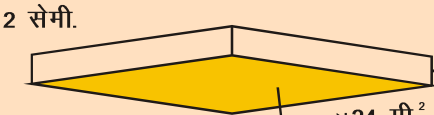
	....	....	....	....

अगर आप प्रत्येक आकृति में घनों की संख्या को गिनेंगे तो उनका मान आपको $l \times b \times h$ अतः ल. × चौ × ऊँ. ही प्राप्त होगा। जैसा कि आप जानते हैं आयतन वस्तु द्वारा घेरी गई जगह का मान होता हे। अब यदि ऊपर चित्र में दिए गए घनाभ खाली होते तो उनमें घनों की संख्या के बराबर समान भरा जा सकता जो उस घन का आयतन भी है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित घनाभों का आयतन ज्ञात कीजिए :





2. निम्नलिखित घनों का आयतन ज्ञात कीजिए :

   (i) 4 सेमी. भुजावाला (ii) 1.5 मी. भुजावाला

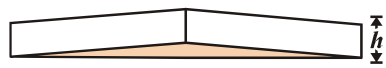
13.6.2 घन

घन, घनाभ का एक अनोखा (विशेष) उदाहरण है जिसमें $l = b = h$ अतः घन का आयतन $= l \times l \times l = l^3$

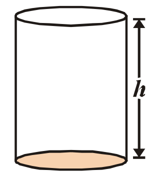
स्वयं करके देखिए

1. समान आकारवाले 64 घनों को जितने रूपों में आप व्यवस्थित कर सकते हैं उतने रूपों में व्यवस्थित करते हुए घनाभ बनाइए। प्रत्येक रूप का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या समान आयतनवाली ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल समान होता है?
2. एक कंपनी बिस्कुट बेचती है। बिस्कुटों को पैक करने के लिए घनाभाकार डिब्बों का उपयोग किया जा रहा है। डिब्बा $A \rightarrow$ 3 सेमी. × 8 सेमी. × 20 सेमी., डिब्बा $B \rightarrow$ 4 सेमी. × 12 सेमी. × 10 सेमी. डिब्बे का कौन सा आकार कंपनी के लिए आर्थिक दृष्टि से लाभदायक रहेगा और क्यों? क्या आप ऐसे किसी और आकार (विमाएँ) के डिब्बे का सुझाव दे सकते हैं जिसका आयतन इनके समान हो परन्तु इनकी तुलना में आर्थिक दृष्टि से अधिक लाभदायक हो।

13.6.3 बेलन (Cylinder)

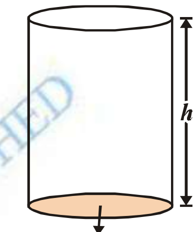


घनाभ



बेलन

हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और ऊँचाई का गुणनफल ज्ञात करते हुए ज्ञात किया जा सकता है। क्या इसी प्रकार हम बेलन का आयतन ज्ञात कर सकते हैं?



आधार का क्षेत्रफल $(= \pi r^2)$

घनाभ की तरह बेलन में भी एक आधार और शीर्ष होता है जो एक दूसरे के सर्वांगसम और समांतर होते हैं। घनाभ की तरह इसका वक्रपृष्ठ आधार पर लंब होता है।

इसलिए घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= l \times b \times h = lbh$

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

उदाहरण–8. एक घनाभ का आयतन 60 घनमीटर है और आधार का क्षेत्रफल 20 वर्ग मीटर है तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए)

हल : यहाँ आयतन = 60 घन मीटर

और आधार का क्षेत्रफल = 20 वर्ग मीटर दिया हुआ है।

$$\text{अर्थात् ऊँचाई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{आधार का क्षेत्रफल}} = \frac{\overset{3}{\cancel{60}}\ \text{घनमीटर}}{\cancel{20}\ \text{वर्गमीटर}} = 3\ \text{मीटर}$$

उदाहरण–9. एक घनाभाकार गोदाम है जिसकी माप 40 मी. × 30 मी. × 20 मी. है। इसके अन्दर 3 मी. × 2 मी. × 1 मी. के कितने डिब्बे रखे जा सकते हैं?

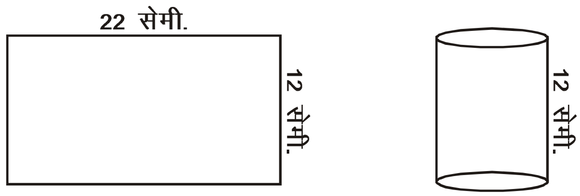
हल : गोदाम के भीतर रखे जानेवाले डिब्बों की संख्या $= \dfrac{\text{गोदाम का आयतन}}{\text{एक डिब्बा के आयतन}}$

$$= \frac{40\ \text{मी.} \times \overset{10}{\cancel{30}}\ \text{मी.} \times \overset{10}{\cancel{20}}\ \text{मी.}}{\cancel{3}\ \text{मी.} \times \cancel{2}\ \text{मी.} \times 1\ \text{मी.}}$$

= 4,000 डिब्बे

अर्थात् गोदाम में 4,000 डिब्बे रखे जा सकते हैं।

उदाहरण–10. कागज का एक आयताकार टुकड़ा 22 सेमी. लम्बा, 12 सेमी. चौड़ा है, लम्बाई के अनुदिश कागज को गोल करके एक बेलन बनाया जाए तो बेलन का आयतन कितना होगा? ज्ञात कीजिए।



हल : बेलन के आधार की परिधि = $2\pi r$ तथा ऊँचाई $= h = 12$ सेमी. होगा

$\because\ 2\pi r = 22$ सेमी.

$$22 \text{ सेमी.} = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$22 \times 7 = 2 \times 22 \times r$$

$$\frac{\cancel{22} \times 7}{2 \times \cancel{22}} = r$$

$$r = \frac{7}{2} \text{ सेमी.}$$

आयतन = $\pi r^2 h$

$$\frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}} \times \left(\frac{\cancel{7}}{\cancel{2}} \text{ सेमी.}\right) \times \left(\frac{7}{\cancel{2}} \text{ सेमी.}\right) \times \overset{6}{\cancel{12}}$$

$= 11 \times 42 = 462$ घन सेमी.

प्रश्नावली 13.4

1. अ. एक घन में कितने सतहें होती हैं?

   ब. किसी घनाभ में किनारों की कुल संख्या कितनी है?

स. घन और घनाभ के सतहों में क्या अन्तर है?

द. घन में कितने शीर्ष होते हैं।

2. नीचे घनाभ के किनारों की लम्बाइयां दी हुई हैं, उनके–

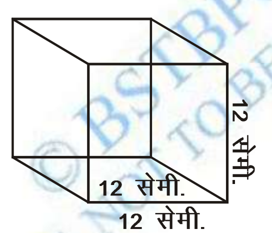
अ. कुलपृष्ठ का क्षेत्रफल एवं ब. आयतन निकालिए।

(i) 10 मी., 5 मी., 6 मी. (ii) 17 सेमी., 12 सेमी., 10 सेमी.

3. 5 सेमी. किनारेवाले एक घन से 1 सेमी. किनारेवाले कितने घन काटे जा सकते हैं?

4. एक घनाभ का आयतन 576 घन मीटर है और आधार वर्गाकार है जिसकी एक भुजा 6 मीटर है तो घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5. 12 सेमी. किनारेवाले दो घन बराबर से जोड़ दिए जाएँ तो नए घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



6. एक लड़का 2 लीटर दूध खरीदने गया। दुकानदार ने उसे एक आयताकार आधार वाले बरतन से जो 20 सेमी. लम्बा, 15 सेमी. चौड़ा और 5 सेमी. गहरा था एक बार मापकर दे दिया। बताइए उस लड़के को कितना कम या अधिक दूध मिला। (यदि 1 लीटर = 1000 घन सेमी.)

7. एक तालाब की लम्बाई 20 मीटर, चौड़ाई 12 मीटर और गहराई 8 मीटर है तथा एक दूसरे तालाब की लम्बाई और चौड़ाई 20 मीटर के बराबर है तथा गहराई पहले तालाब के बराबर है। किस तालाब में अधिक पानी अँटेगा?

8. एक खाली डिब्बा जिसमें साबुन रखा जाना है, डिब्बों की लम्बाई 0.40 मीटर, चौड़ाई 0.25 मीटर तथा ऊँचाई 0.25 मीटर है। साबुन 5 सेमी. × 4 सेमी. × 2 सेमी. साइज का है। डिब्बा में कितने साबुन रखे जा सकते हैं?

9. 30 मीटर लम्बा, 20 सेमी. चौड़ा तथा 4 मीटर ऊँची दीवार बनवानी है? यदि एक ईंट की लम्बाई 25 सेमी., चौड़ाई 12.5 सेमी. तथा ऊँचाई 7.5 सेमी. हो तो उस दीवार के बनवाने में कितने ईंटे लगेंगी। (सीमेंट व बालू का आयतन नगण्य माना गया है।)

10. एक कमरे की लम्बाई 15 मीटर, चौड़ाई 10 मीटर तथा ऊँचाई 8 मीटर है। उस घर में कितनी हवा भरेगा?

हमने सीखा

1. घन का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 6l^2$ या $6 \times$ (भुजा)^2
2. घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\ \{l.b + b.h + l.h\}$

   $= 2 \times$ (लम्बाई $\times$ चौड़ाई $+$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $+$ लम्बाई $\times$ ऊँचाई)
3. बेलन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$
4. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r\ (r + h)$

अध्याय – 14

गुणनखंडन

(FACTORIZATION)

14.1 भूमिका

आपने गुणनखण्ड के बारे में पढ़ा है। आइए, गुणनखण्ड पर आधारित कुछ प्रश्नों को करें।

नीचे तालिका में कुछ संख्याओं के सभी गुणनखण्ड दिए गए हैं। शेष संख्याओं के सभी गुणनखण्ड रिक्त स्थानों में भरिए।

सारणी

संख्या	सभी गुणनखण्ड	संख्या	सभी गुणनखण्ड
1	1	18	....
2	1, 2	21	1, 3, 7, 21
3	....	27	....
4	....	28	....
5	....	29	1, 29
6	1, 2, 3, 6	30	....
7	....		

सारणी से ऐसी संख्याएँ लिखिए जिनके केवल दो गुणनखण्ड है।

....

क्या आप बता सकते हैं ऐसी संख्याओं को क्या कहते हैं?

....

अब दो से अधिक गुणनखण्डवाली संख्याओं को यहाँ लिखिए ....
ये सभी भाज्य संख्याएँ हैं।

सोचिए क्या 2 के अलावा कोई और सम संख्या अभाज्य हो सकती है?

क्या सभी संख्याएँ अभाज्य गुणनखण्ड के रूप में लिखी जा सकती हैं? सोचिए। अलग–अलग संख्याएँ लेकर उनके अभाज्य गुणनखण्ड करके देखिए।

....

क्या संख्याओं की तरह ही बीजीय व्यंजकों के भी गुणनखण्ड किए जा सकते हैं? आइए, इसे समझें।

14.2 बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड (Factorization of Algebraic Expression)

$3x^2$y एक व्यंजक है। आपने देखा है कि व्यंजक के पद गुणनखण्डों के गुणनफल होते हैं। यहाँ $3x^2y = 3 \times x \times x \times y$ है। इसके आगे गुणनखण्ड नहीं किए जा सकते, अतः दिया गया गुणनखण्ड $3x^2$y का अभाज्य गुणनखण्ड है। बीजगणितीय संदर्भ में इसे 'अखंडनीय' गुणनखण्ड कहते हैं।

$3x^2$y का एक गुणनखण्ड निम्नलिखित है–

$3x^2y = 3 \times x^2 \times y$

क्या यह गुणनखण्ड $3x^2$y का अखण्डनीय गुणनखण्ड है? स्पष्टतः 3 का अभाज्य गुणनखण्ड 3 है। वास्तव में 1 प्रत्येक पद का गुणनखण्ड है, परन्तु विशेष परिस्थितियों में जब आवश्यक हो तब ही इसे लिखा जाता है। x^2 को $x \times x$ के गुणनखण्ड रूप में लिखा जा सकता है अतः $3 \times x^2 \times y$ अखण्डनीय गुणनखण्ड नहीं है।

इसे भी समझें

$25 = 25 \times 1$

क्या यह 25 का अखण्डनीय रूप है? इसे अखण्डनीय रूप में लिखिए?

....

$12 = 2 \times 6$

क्या यह अखण्डनीय रूप है? क्यों नहीं?

एक अन्य व्यंजक $2y^2$ (y+1) पर विचार करें। क्या इसे इसके अखण्डनीय गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है? सोचिए।

$2y^2 (y+1) = 2 \times y \times y (y + 1)$

स्वयं करके देखिए

क्र.सं.	पद / व्यंजक	अखण्डनीय गुणनखण्ड
1.	$5xyz$	$5 \times x \times y \times z$
2.	$9y^2$	....
3.	$16xy^2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times x \times y \times y$
4.	$13xyz$	....
5.	$12x\,(y + 1)$	....

ऊपर दिए हुए उदाहरणों से आपको यह तो स्पष्ट हो ही गया होगा कि जब हम किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड करते हैं, तो हम उसे गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। ये गुणनखण्ड संख्याएँ, चर या बीजीय व्यंजक हो सकते हैं। किसी भी संख्या अथवा व्यंजक को ऐसे टुकड़ों में बाँटना जिसके गुणन से वह बनी है (अथवा जिसका पूरा–पूरा भाग उस संख्या अथवा व्यंजक में जाए) करने की प्रक्रिया गुणनखण्डन होती है। व्यंजक $5xyz$, $3xy^2$, $5x\,(y+2)$ जैसे व्यंजक पहले से ही गुणनखण्ड के रूप में है जैसे $5xyz = 5 \times x \times y \times z$

अब जरा $3x + 6$, $2x + 4$, $x^2 + 2x$ जैसे व्यंजकों पर विचार कीजिए। $3x + 6$ किन संख्याओं व व्यंजकों के गुणन से बना है? आइए ऐसे ही कुछ व्यंजकों के गुणनखण्ड करने के तरीके निकालें।

14.3 सार्व (उभयनिष्ठ) गुणनखण्ड द्वारा गुणनखण्डन (Factorization by Common Factor)

ऊपर दिए व्यंजक $3x + 6$ पर विचार कीजिए। इसमें दो पद $3x$ एवं 6 हैं। दोनों पदों को उनके अभाज्य गुणनखण्ड के गुणनफल के रूप में लिखते हैं।

$3x \quad = 3 \times x$

$6 \quad = 2 \times 3$

अतः $3x + 6 \quad = (\underline{3 \times x}) + (\underline{2 \times 3})$

ध्यान दें, यहाँ गुणनखण्ड 3 दोनों पदों में उभयनिष्ठ हैं, इसे सार्व गुणनखण्ड या उभयनिष्ठ गुणनखण्ड कहते हैं।

वितरण नियम से हम जानते हैं कि–

$a \times b + a \times c \quad = a\,(b + c)$

अतः $3 \times x + 2 \times 3 \quad = 3\,(x + 2)$

अतः $3x + 6 \quad = 3 \times x + 2 \times 3$

$= 3\,(x + 2)$

इस प्रकार व्यंजक $3x + 6$ वही है जो $3 \times (x + 2)$ हैं; अब हम इसके गुणनखण्ड पढ़ सकते हैं। अतः 3 और $(x + 2)$ व्यंजक के अभाज्य (अखंडनीय) गुणनखण्ड है।

3 $(x + 2)$ को उनके गुणनखण्डों से भाग करके देखें, क्या भाग पूरा–पूरा जाता है?

आइए, अब $6a^2b - 9ab$ के गुणनखण्ड करते हैं। इसके लिए पहले दोनों पदों के गुणनखण्ड करें।

$6a^2b \quad = 2 \times 3 \times a \times a \times b$

$9ab \quad = 3 \times 3 \times a \times b$

स्पष्टतः, दोनों पदों में 3, a व b उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। अतः

$$\begin{aligned}6a^2b - 9ab &= (2 \times 3 \times a \times a \times b) - (3 \times 3 \times a \times b) \\ &= (2 \times 3ab \times a) - (3 \times 3ab) \\ &= 3ab\,(2 \times a - 3) \qquad \text{(3ab सार्व लेने पर)} \\ &= 3ab\,(2a - 3)\end{aligned}$$

एक व्यंजक गुणनफल के रूप में एकपदी होता है।

यही वांछित गुणनखण्ड रूप है।

हमने दो पदोंवाले व्यंजक का गुणनखण्डन किया इसी प्रकार दो से अधिक पदोंवाले व्यंजकों का गुणनखण्डन भी किया जा सकता है। जैसे–

$15a^4 - 20a^3 + 5a^2$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

यह तीन पदीय (त्रिपदीय) व्यंजक है पहले हम प्रत्येक पद का द्विपद की भाँति अभाज्य गुणनखण्ड निकालते हैं :–

$15a^4 = 3 \times 5 \times a \times a \times a \times a$
$20a^3 = ...$
$5a^2 = ...$

हल : $15a^4 - 20a^3 + 5a^2 = (3 \times \underline{5} \times \underline{a} \times \underline{a} \times a \times a) - (2 \times 2 \times \underline{5} \times \underline{a} \times \underline{a} \times a) + (\underline{5} \times \underline{a} \times \underline{a})$

ध्यान दीजिए यहाँ $5 \times a \times a$ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। अतः सार्व को बंटन नियम के अनुसार बाहर लेते हैं।

$$= 5 \times a \times a\,(3 \times a \times a - 2 \times 2 \times a + 1)$$
$$= 5a^2\,(3a^2 - 4a + 1)$$

स्वयं करके देखिए (गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए)

(i)	$11xy + 22$	(ii)	$p + pq - pqr$	(iii)	$13x^2 - 2by^2$
(iv)	$4p^2q^2r^2 + 2pqr$	(v)	$7x^2y - 8y$		

14.4 पदों के पुनः समूहन द्वारा गुणनखण्डन (Factorization by Regrouping of termeqs)

व्यंजकों का गुणनखण्डन करते समय हमें कई बार ऐसे व्यंजक मिल जाते हैं, जिनके सभी पदों में कोई भी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (1 को छोड़कर) नहीं होता। पर पदों के कुछ युग्मों में उभयनिष्ठ होते हैं, जैसे– $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ में दिखता है, आइए, इसे समझें।

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ में क्या आपको कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड मिलता है? ....

पर जब हम इसे अलग तरह से व्यवस्थित (पुनः समूहन) करते हैं, जैसे :–

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + bx^2 + ay^2 + by^2$ (पुनः समूहन)

तब इसके प्रथम दो पदों में x^2 व अंतिम दो पदों में y^2 उभयनिष्ठ हो जाता है।

$= x^2 (a + b) + y^2 (a + b)$

$= (a + b) (x^2 + y^2)$ (अभीष्ट गुणनखण्ड)

इस तरह व्यंजकों को पुनः व्यवस्थित कर उसका गुणनखण्ड प्राप्त किया जा सकता है। यही पुनः समूहन द्वारा गुणनखण्डन है। पुनः समूहन एक से अधिक विधियों द्वारा किया जा सकता है। किन्तु परिणाम अपरिवर्तित रहता है। क्रम बदल सकते हैं किन्तु आप जानते हैं कि गुणन क्रिया में क्रम बदलने से परिणाम नहीं बदलते। इस व्यंजक का एक और विधि से भी पुनः समूहन कर गुणनखण्डन किया जा सकता है। जैसे :–

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ (पुनः समूहन)

$= a (x^2 + y^2) + b (x^2 + y^2)$ (उभयनिष्ठ लेने पर)

$= (x^2 + y^2) (a + b)$

इस प्रकार पुनः समूहन द्वारा गुणनखण्डन में हम निम्न चरण में कार्य करते हैं।

चरण–1 जाँच करते हैं कि व्यंजक के सभी पदों में कोई सार्व गुणनखण्ड है कि नहीं।

चरण–2 सभी पदों में सार्व गुणनखण्ड नहीं होने पर ऐसे पदों की पहचान करते हैं जिनमें सार्व गुणनखण्ड हो, फिर उन पदों को समूह में व्यवस्थित करते हैं।

चरण–3 प्रत्येक समूह का गुणनखण्डन करते हैं।

चरण–4 समूहों के सार्व गुणनखण्ड की पहचान कर अलग कर वितरण नियम से संयोजित करते हैं।

इसे भी समझिए –

$9\,ab + 6b^2 + ba + 2b$ (पुनः समूहन करने पर)

$3b\,(3a + 2b) + 1\,(3a + 2b)$ (1 सबके लिए सार्व होता है)

$(3b+1)\,(3a+2b)$

जैसे $ab + ac + db + dc$ का गुणनखण्डन कीजिए।

चरण–1 यहाँ चारों पदों में कोई सार्वगुणनखण्ड नहीं है।

चरण–2 व्यंजक के पद $(ab + ac)$ का एक समूह बनाते हैं।

$\because$ $(ab + ac)$ में a सार्व गुणनखण्ड है। उसी प्रकार $(db + dc)$ का एक समूह बनाते हैं (क्यों?)

चरण–3 अब दोनों समूहों का गुणनखण्डन करते हैं।

$$ab + ac + db + dc = (ab + ac) + (db + dc)$$
$$= a (b + c) + d (b + c)$$

चरण–4 अब दोनों समूहों के सार्व गुणनखण्ड $(b + c)$ को वितरण नियम से संयोजित करते हैं।

$a (b + c) + d (b + c) = (b + c) (a + d)$

अर्थात् $ab + ac + db + dc = (b + c) (a + d)$

उपर्युक्त व्यंजक का एक अन्य विधि से समूहन कर गुणनखण्डन कीजिए।

प्रश्नावली – 14.1

1. दिए गए पदों में सार्व (उभयनिष्ठ) गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए–

(a) $9y, 27$ (b) $5x, 25x$ (c) $7ab, -14ab$

(d) $-16x^2y^2, -x^2y^2z^2$ (e) $17x, 102y$ (f) $11xyz, 100z$

(g) a^2bc, ab^2c, abc^2 (h) $2x, 3y, 5z$

(i) $20x^2y^2, 30y^2z^2, 40z^2x^2$ (j) $2x (a + b) (b + c), x (a + b)$

2. दिए गए उदाहरण के आधार पर खाली जगह को भरिए–

क्र.सं.	पद	अलग किया गया गुणनखण्ड	शेष गुणनखण्ड
i.	$12x^2y$	$3x$	$4xy$
ii.	$15ab$	-3	....
iii.	$-20xy$	$-2xy$	....
iv.	$40x^2y^2$	....	-20
v.	$-27abc$	....	$-3ab$

3. **निम्नलिखित का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए–**

(a)	$12x^2 - 15y^2 - 24x^2z^2$	(b)	$-6a^2 + 36a - 24ab$
(c)	$3a^2 + ab + 9a + 3b$	(d)	$6ab - 4b + 6 - 9a$
(e)	$ab^2 + a^2b + ac + bc$	(f)	$a^2bc + b^2ca + c^2ab + a + b + c$
(g)	$a(b - c) + d(c - b)$	(h)	$3y(y + 3) + 6y(3y + 9)$
(i)	$a^3 - 3a^2 + a - 3$	(j)	$ab^2 - bc^2 - ab + c^2$
(k)	$xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)$		

14.5 सर्वसमिकाओं के प्रयोग से गुणनखण्डन

आप $(a + b)^2$ व इसके वृहत रूप $(a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b)$ के बारे में पढ़ चुके हैं, अतः जब व्यंजक पूर्ण वर्ग हो, तो मानक सर्वसमिका के प्रयोग से उसका गुणनखण्डन किया जा सकता है।

आइए, मानक सर्वसमिकाओं के प्रयोग से व्यंजकों (पूर्ण वर्ग) का गुणनखण्डन करते हैं।

(i) $9x^2 + 12xy + 4y^2$ (ii) $4p^2q^2 - 8pqr + 4r^2$

(iii) $x^4 + 25y^4 - 10x^2y^2$

हल : (i) यहाँ $9x^2 + 12xy + 4y^2$ को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2y + (2y)^2$$
$$a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$
$$= (3x + 2y)^2 \quad (\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2)$$
$$= (3x + 2y)(3x + 2y)$$

यहाँ $a = 3x$ व $b = 2y$ है

उपर्युक्त उदाहरण में हमने व्यंजक को $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में बदला जिससे हमें गुणनखण्ड प्राप्त हुआ। इसी प्रकार अन्य व्यंजकों को मानक रूप में बदलकर उसका गुणनखण्ड करते हैं।

(ii) $4p^2q^2 - 8pqr + 4r^2$

$$= 4(p^2q^2 - 2pqr + r^2)$$
$$= 4[(pq)^2 - 2(pq)r + (r)^2]$$
$$= 4(pq - r)^2 \quad \text{(क्यों?)} \; [a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$$
$$= 4(pq - r)(pq - r)$$

दिए गए उदाहरण में सार्व गुणनखण्ड को अलग करने से मानक रूप प्राप्त होता है।

(iii) $x^2 + 25y^2 - 10xy \quad = x^2 - 10xy + 25y^2$

$= (x)^2 - 2 \times x \times 5y + (5y)^2$

$= (x - 5y)^2$

$= (x - 5y)(x - 5y)$

इस प्रकार ऐसे व्यंजक जो पूर्ण वर्ग होते हैं का गुणनखण्डन मानक सर्वसमिका के आधार पर किया जा सकता है।

14.6 दो वर्गों के अंतर के रूप में दिए गए व्यंजक का गुणनखण्डन

हम जानते हैं : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

इस रूप में दिए गए व्यंजकों को उपर्युक्त मानक सर्वसमिका के रूप में बदलकर उसका गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते हैं। दिये गए उदाहरणों द्वारा इसे समझने का प्रयास करते हैं।

निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखण्डन कीजिए–

(i) $16x^2 - 9y^2$ (ii) $x^4 - y^2$

(iii) $(p + q)^2 - (r - s)^2$ (iv) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$ (v) $5^2 – 4^2$

(i) $16x^2 = (4x)^2, \quad 9y^2 = (3y)^2$

$\therefore 16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2$

$= (4x - 3y)(4x + 3y)$

$\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

(ii) $x^4 - y^2 = (x^2)^2 - (y)^2$

$= (x^2 - y)(x^2 + y)$

(iii) $(p + q)^2 - (r - s)^2 \quad = \{(p + q) - (r - s)\} \{(p + q) + (r - s)\}$

$= \{p + q - r + s\} \{p + q + r - s\}$

$= (p + q - r + s)(p + q + r - s)$

(ii) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz \quad = (x)^2 - (y^2 + z^2 - 2yz)$

$= (x)^2 - (y - z)^2$ $\boxed{(a–b)^2 \text{से}}$

$= \{x - (y - z)\} \{x + (y - z)\}$

$= (x - y + z)(x + y - z)$

14.7 सर्वसमिका $x^2 + (a + \mathrm{b})\, x + a\mathrm{b} = (x + \mathrm{a})\, (x + \mathrm{b})$ पर आधारित व्यंजकों का गुणनखण्डन

व्यंजक $x^2 + 8x + 15$ पर विचार कीजिए। क्या आप पहले दिए किसी तरीके से इसके गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते हैं? हम पाते हैं कि इसका गुणनखण्ड मानक सर्वसमिकाओं से नहीं ज्ञात किया जा सकता है क्योंकि यह पूर्ण वर्ग नहीं है? यह पूर्ण वर्गों के अंतर के रूप में भी नहीं है। आइए दिए गए व्यंजक $x^2 + 8x + 15$ के गुणनखण्ड का तरीका समझें।

सर्वसमिका $x^2 + (a + \mathrm{b})\, x + a\mathrm{b}$ द्वारा व्यंजक $x^2 + 8x + 15$ के गुणनखण्डन का तरीका

उदाहरण–1. $x^2 + 8x + 15$

हल : यदि हम $x^2 + 8x + 15$ की तुलना सर्वसमिका $x^2 + (a + \mathrm{b})\, x + a\mathrm{b}$ से करें तो हम पाएँगे कि $a\mathrm{b} = 15$ एवं $a + \mathrm{b} = 8$ है।

इसका मतलब है कि अचर पद 15 के ऐसे दो गुणनखण्ड हों जिनका गुणनफल 15 हो और $a + \mathrm{b}$ का योगफल x के गुणांक के बराबर यानी 8 हो।

आप a व b के अलग–अलग मान सोचिए जिनका योगफल 8 हो और जिन्हें गुणा करने पर आपको 15 मिलता हो। आइए $\mathrm{a} = 4, \mathrm{b} = 4$ इनका योगफल $4 + 4 = 8$ है। इनका गुणनफल $4 \times 4 = 16$ है जो कि ऊपर दी गई गुणनफल की शर्त को पूरा नहीं करता।

अब यदि $a = 1$ तो $\mathrm{b} = 15$

$\therefore a \times \mathrm{b} = 15$

किन्तु $a + \mathrm{b} = 1 + 15 = 16$ अतः a व b के उपर्युक्त मान भी दोनों शर्तों को पूरा नहीं करते।

अब यदि $a = 3$ व $\mathrm{b} = 5$ लें।

$\therefore\ a \times \mathrm{b} = 15$ एवं $a + \mathrm{b} = 3 + 5 = 8$

अतः $a = 3, \mathrm{b} = 5$ सही विकल्प है

$\therefore$ गुणनखण्ड $(x + a) = (x + 3)$

एवं $(x + \mathrm{b}) = (x + 5)$

$$\therefore\ x^2 + 8x + 15 = x^2 + (3 + 5)\, x + 3 \times 5$$

$$\because \left[\mathrm{x}^2 + (\mathrm{a} + \mathrm{b})\ \mathrm{x} + \mathrm{ab} = (\mathrm{x} + \mathrm{a})\ (\mathrm{x} + \mathrm{b})\right]$$

$$= (x + 3)\ (x + 5)$$

अतः व्यापक रूप से $x^2 + \mathrm{m}x + \mathrm{n}$ रूपवाले व्यंजकों का गुणनखण्डन करने के लिए हम निम्न चरण अपनाते हैं।

चरण–1.	व्यंजक के पदों को उनके घातों के घटते क्रम में रखेंगे।
चरण–2.	अचर पद n के ऐसे दो गुणनखण्ड a एवं b इस प्रकार लेंगे कि– $a \times b = n$ एवं $a + b = m$
चरण–3.	मध्य पद को वितरण नियम से तोड़ेंगे/ अर्थात् $mx = (a + b)\, x = ax + bx$
चरण–4	व्यंजक के पुनः समूहन कर गुणनखंडन करेंगे।

जैसे $x^2 + mx + n$
$$
\begin{aligned}
&= x^2 + (a + b)\, x + ab\\
&= x^2 + ax + bx + ab\\
&= (x^2 + ax) + (bx + ab)\\
&= x\,(x + a) + b\,(x + a)\\
&= (x + a)\,(x + b)
\end{aligned}
$$

कुछ उदाहरणों से हम इसे समझने का प्रयास कीजिए।

निम्नलिखित का गुणनखण्डन कीजिए

(i) $x^2 + 21x + 80$ (ii) $y^2 - 15y + 56$

हल : (i)
$$
\begin{aligned}
x^2 + 21x + 80 &= x^2 + (16 + 5)\, x + 16 \times 5\\
&= x^2 + 16x + 5x + 16 \times 5\\
&= (x^2 + 16x) + (5x + 16 \times 5)\\
&= x\,(x + 16) + 5\,(x + 16)\\
&= (x + 16)\,(x + 5)
\end{aligned}
$$

हल : (ii)
$$
\begin{aligned}
y^2 - 15y + 56 &= y^2 + (-7 + (-8))\, y + (-7)\,(-8)\\
&= y^2 - 7y - 8y + (-7)\,(-8)\\
&= y\,(y - 7) - 8\,(y + (-7))\\
&= y\,(y - 7) - 8\,(y - 7)\\
&= (y - 7)\,(y - 8)
\end{aligned}
$$

आपने देखा कि $x^2 + mx + n$ की तरह के व्यंजक का गुणनखण्डन सर्वसमिका के प्रयोग से कैसे किया गया। $ax^2 + bx + c$ की तरह से व्यंजकों का गुणनखण्डन करना हम आगे की कक्षाओं में सीखेंगे।

प्रश्नावली – 14.2

1. निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए–

(a)	$1 + 2x + x^2$	(b)	$a^2b^2 - 6abc + 9c^2$
(c)	$1 - (a - b)^2$	(d)	$16\,(a - b)^2 - 9\,(a + b)^2$
(e)	$(x + y)^2 - 10\,(x + y) + 25$	(f)	$(a + b)^2 - 4ab$
(g)	$4x^2 - y^2 + 4y - 4$	(h)	$9x^2 - \dfrac{n^2}{4}$
(i)	$a^2 + a + 4 + 3a$	(j)	$x^2 + 6x + 8$
(k)	$y^2 - 13y + 30$	(l)	$x^2 + 9x - 22$

2. निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखण्ड कीजिए–

(a)	$x^2 - 6x - 135$	(b)	$8\,(x + y)^3 - 50\,(x + y)$
(c)	$4x^2 + 9y^2 + 12xy - 1$	(d)	$75 - x^2 + 10x$
(e)	$12a^2 - 27$	(f)	$ax^2 - bx^2 + by^2 - ay^2$

3. निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखण्डन कीजिए–

(a) $16x^4 - 81y^4$ (b) $x^4 - 1$ (c) $x^4 - (x - y)^4$

(d) $9x^2 - 4y^2 - 3x + 2y$ (e) $(x + y)^3 + 4\,(x + y)^2 + 4x + 4y$

14.8 बीजीय व्यंजकों का विभाजन (Division of Algebraic Expression)

अभी तक हमने बीजीय व्यंजकों की संक्रियाओं में जोड़ना, घटाना, गुणा करना एवं गुणनखंडन समझा। यहाँ हम बीजीय व्यंजकों को भाग करना समझेंगे।

आपने सीखा है कि भाग, गुणन की विपरीत क्रिया है।

यदि $2 \times 3 = 6$ तो $6 \div 2 = 3$

या $6 \div 3 = 2$

इस गुणधर्म का उपयोग हम बीजीय व्यंजकों के भागों में भी करते हैं, जैसे–

यदि $2x \times 3x = 6x^2$ तो $6x^2 \div 2x = 3x$

या $6x^2 \div 3x = 2x$

इसे ऐसे भी समझिए

$$\frac{6x^2}{2x} = \frac{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{x} \times x}{\cancel{2} \times \cancel{x}} = 3x$$

बीजीय व्यंजकों के भाग को समझने के लिए एकपदी का एकपदी से विभाजन पर विचार करते हैं।

14.8.1 एकपदी का एक अन्य एकपदी से भाग

$6x^2y$ को $2x$ से भाग कीजिए

हमें $6x^2y \div 2x$ ज्ञात करना है, अर्थात् $\frac{6x^2y}{2x}$ ज्ञात करना है।

हम $6x^2y$ एवं $2x$ का अखण्डनीय गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं।

$6x^2y \quad = 2 \times 3 \times x \times x \times y$ एवं

$2x \quad = 2 \times x$

अतः $\frac{6x^2y}{2x} = \frac{2 \times 3 \times x \times x \times y}{2 \times x} = \frac{(2 \times x)(3 \times x \times y)}{2 \times x}$

हम पाते हैं कि अंश एवं हर में सार्व गुणनखण्ड $(2 \times x)$ है जिसे उसी विधि से हटा देते हैं जैसे हम संख्याओं के विभाजन में करते हैं।

अतः $\frac{6x^2y}{2x} = \frac{(2 \times x)(3 \times x \times y)}{(2 \times x)} = 3 \times x \times y = 3xy$

इसे हम निम्न तरीके से भी हल करते हैं–

$$\frac{6x^2y}{2x} = \frac{2 \times 3 \times x \times x \times y}{2 \times x} = 3 \times x \times y = 3xy$$

(घातांक के नियम से $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$)

उदाहरण–2.

निम्नलिखित को हल कीजिए–

$-12a^4b^5 \div (-3a^2b^2)$

हल : $-12a^4b^5 \div (-3a^2b^2) = \frac{-12a^4b^5}{-3a^2b^2}$

$$= \frac{-2\times 2\times 3\times a\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times b\times b}{-3\times a\times a\times b\times b}$$

$$= \frac{-2\times 2\times 3\times a\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times b\times b}{-1\times 3\times a\times a\times b\times b}$$

$$= \frac{-2\times 2\times a\times a\times b\times b\times b}{-1}$$

$$= \frac{-4a^2b^3}{(-1)}$$

(अंश एवं हर में (–1) से गुणा करने से) $= \frac{-4a^2b^3}{(-1)} \times \frac{(-1)}{(-1)}$

$$= \frac{4a^2b^3}{1} = 4a^2b^3$$

स्वयं करके देखिए

भाग दीजिए–

(i) $18a^2b^2 \div 18$ (ii) $9x^2y \div x^2y$

(iii) $-8xy \div 2y$ (iv) $2ab \div 3$

14.8.2 एक बहुपद का एकपदी से भाग

एक त्रिपद $4x^3 - 6x^2 + 2x$ में एकपदी $2x$ से भाग करते हैं।

दिया गया है

$4x^3 - 6x^2 + 2x \div 2x$ $= \frac{4x^3 - 6x^2 + 2x}{2x}$

सभी पदों का गुणनखण्डन करने पर $\frac{2\times 2\times x\times x\times x - 2\times 3\times x\times x + 2\times x}{2\times x}$

$$= \frac{(2\times x)\times(2\times x\times x) - (2\times x)(3\times x) + (2\times x)\times 1}{2\times x}$$

$$= \frac{(2\times x)\{(2\times x\times x)-(3\times x)+1\}}{(2\times x)} = \frac{2x\left(2x^2-3x+1\right)}{2x}$$

अंश एवं हर से सार्व गुणनखण्ड हटाने पर

$$\frac{4x^3-6x^2+2x}{2x} = 2x^2-3x+1$$

(अभीष्ट भागफल)

आइए, एक अन्य विधि से इसे करें–

$$\frac{4x^3-6x^2+2x}{2x} = \frac{4x^3}{2x}-\frac{6x^2}{2x}+\frac{2x}{2x}$$

व्यंजक के प्रत्येक पद में भाजक से भाग देने पर

$$= 2x^2 - 3x + 1$$

(अभीष्ट भागफल)

इस प्रकार हमने पाया कि किसी बहुपद में भाग करने के लिए उसका गुणनखण्डन कर एक पदीय बनाते हैं, फिर भाज्य बहुपद एवं भाजक के सार्वगुणनखण्ड को उचित विधि से हटाकर भाग की क्रिया पूरी करते हैं। हमने यह भी पाया कि बहुपद में एक पदी से भाग करना उस बहुपद के प्रत्येक पद में उस एक पदी से भाग करने के बराबर होता है।

अब ज़रा सोचिए यदि उपर्युक्त उदाहरण में व्यंजक का एक पद 3 होता तो क्या हम $2x$ से उस बहुपद में पूरा–पूरा भाग कर पाते?

एक अन्य उदाहरण द्वारा इसे समझते हैं–

$(3x^3 - 5x^2 + 12x) \div 6x$

$$\frac{3x^3-5x^2+12x}{6x} = \frac{3x\times x^2-3x\times\frac{5x}{3}+3x\times 4}{3x\times 2}$$

$$= \frac{3x\left(x^2-\frac{5x}{3}+4\right)}{3x\times 2}$$

$$= \frac{x^2-\frac{5x}{3}+4}{2}$$

क्या $5x^2$ को $3x\times\frac{5x}{3}$ के रूप में रखने पर कोई अंतर पड़ा?

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{3} \div 2 + \frac{4}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{3} \times \frac{1}{2} + 2$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6} + 2$$

दूसरी विधि से,

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 12x}{6x} = \frac{3x^3}{6x} - \frac{5x^2}{6x} + \frac{12x}{6x}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6} + 2$$

स्वयं करके देखिए

भाग दीजिए–

(i) $24(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 9abc$ (ii) $(4x^2 - 12xy + 6y^2) \div 2xy$

(iii) $(x^2 - 2x - 1) \div 2$

14.8.3 बहुपद का बहुपद से भाग

हमने ऊपर देखा है कि भाग करते समय बहुपद को एकपदीय बनाकर एकपदी से भाग करते हैं या एकपदी से बहुपद के प्रत्येक पद में भाग करते हैं। बहुपद से बहुपद में भाग करते समय भी हम इस तथ्य का ध्यान रखते हैं। यहाँ ध्यान देनेवाली बात यह है कि एक से अधिक पदवाले व्यंजकों को भी एक पद के रूप में लिखा जा सकता है। गुणनखण्डन करने पर वे एकपदी व्यंजक बन जाते हैं। आइए इस तथ्य का प्रयोग कर बहुपद से बहुपद का भाग करें।

जैसे $x^2 + 2x$ को $x + 2$ से भाग दीजिए।

हल : दिया गया है,

$$(x^2 + 2x) \div (x + 2) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+2)}$$

अंश व हर में सार्व गुणनखण्ड $x+2$ है। हम जानते हैं कि किसी भी संख्या में उसी संख्या का भाग देने पर भागफल 1 होता है अतः $\frac{(x+2)}{(x+2)} = 1$

$$= x \times 1$$

$$= x$$

उदाहरण–3. $4x^2 - 12xy + 9y^2 \div (4x^2 - 9y^2)$

हल : दिया गया है,

$$\frac{4x^2 - 12xy + 9y^2}{4x^2 - 9y^2} = \frac{(2x)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2}{(2x)^2 - (3y)^2}$$

$$= \frac{(2x-3y)^2}{(2x-3y)(2x+3y)}$$ (सर्वसमिका $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ के प्रयोग से)

$$= \frac{(2x-3y)(2x-3y)}{(2x-3y)(2x+3y)}$$

$$= \frac{2x-3y}{2x+3y}$$ (सार्वगुणनखण्ड को काटने से)

प्रश्नावली – 14.3

1. निम्नलिखित का भाग कीजिए–

(a) $-2x^2yz$ का $4xyz$ से

(b) $-\frac{1}{2}xy$ का $\frac{x}{2}$ से

(c) $(3x^2)^5$ का $(9x^2)^3$ से

(d) $(7x^5)^2 \times (3y^5)^5$ का $27y^3$ से

(e) $8x^6y^6$ का $-4x^4y^6$ से

2. दिए गए बहुपद को एकपदी से भाग कीजिए–

(a) $(5m^3 - 30m^2) \div 5m$ (b) $(12x^4 - 6x^2) \div (-3x^2)$

(c) $(5x^2 - 15x) \div (x - 3)$ (d) $(6x^4 + 9x^3 - 12x^2) \div 3x^2$

3. भाग कीजिए–

(a) $(a^2 + 8a + 16) \div (a + 4)$ (b) $\{(a + b)^2 - 4ab\} \div (a - b)^2$

(c) $(a^4 - b^4) \div (a^2 - ab)$ (d) $(x^4 - 81) \div (x^2 + 9)$

(e) $(121x^2 + 16y^2 - 88xy) \div (4y - 11x)$

(f) $(x^2 - x - 30) \div (x - 6)$ (g) $\{p^2 - p + \frac{1}{4}\} \div \{p - \frac{1}{2}\}$

(h) $(x^2 - 5xy + 6y^2) \div (x - 2y)$ (i) $(27x^3 + 3x^2 - 2x + 8) \div (3x - 2)$

14.9 बीजीय प्रश्नों के हल में की जानेवाली सामान्य त्रुटियाँ

बीजीय प्रश्नों जैसे– बहुपदों के जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग में कुछ त्रुटियाँ सामान्यतः हो जाती है, आइए इन्हें जानकर दूर करें।

त्रुटि–1 कक्षा में एक छात्र ने 2 में x जोड़कर योगफल $2x$ प्राप्त किया तथा दूसरे ने $2+x$ प्राप्त किया। किसका उत्तर सही है?

हमें पता है कि असमान पद को आपस में नहीं जोड़ा जाता।

समान पदों को छाँटिए 2x, y, 5z, 31x, 5y ....

$2x + 31x = ?$ $2 + x = ?$

इसलिए इनका योगफल $2x$ नहीं होगा। उसका सही हल होगा $2 + x$ या $x+2$

त्रुटि–2 रुबी को $2x + x + 7x$ का हल $9x$ प्राप्त हुआ। क्या यह सही है?

क्या आप रुबी के हल में की गई गलती बता सकते हैं? ....

सामान्य परिस्थिति में x का गुणांक 1 होने पर उसे नहीं लिखा जाता है यदि आप $2x + 1x + 7x$ को जोड़ें तो उसका सही हल क्या होगा?

त्रुटि–3 सोनम ने $x = -5$ के लिए बहुपद $7x$ का मान निम्न प्रक्रिया से प्राप्त किया।

$7x = 7 - 5 = 2$

क्या यह प्रक्रिया सही है?

$7x$ का अर्थ है $7 \times x$ यहाँ x के मान में 7 से गुणा किया जाना चाहिए किन्तु कोष्ठक का प्रयोग नहीं होने से यह घटाने का निर्देश देता है, यदि हम घटाव चिह्न के साथ कोष्ठक का प्रयोग करें सोनम का सही हल $7 \times (-5) = ?$

त्रुटि–4 यास्मीन एवं जूली ने बीजीय व्यंजकों का गुणा निम्नलिखित प्रकारों से किया।

	यास्मीन	**जूली**
(i)	$2(x-1) = 2x - 1$	$2(x-1) = 2x-2$

ऊपर $2(x-1)$ के हल में से किसका हल सही है? कारण सहित बताइए।

____

____

हाँ, आपने सही सोचा जूली का हल सही है।

	यास्मीन	**जूली**
(ii)	$(3x)^2 = 9x^2$	$(3x)^2 = 3x^2$

ऊपर दिए गए हलों में किसका तरीका सही है। और क्यों?

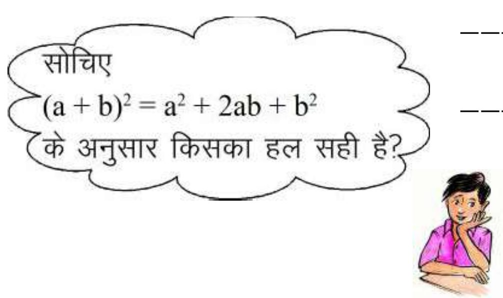
____

जूली ने कोष्ठक के सभी चर एवं अचर का वर्ग नहीं किया है अतः हल गलत है।

	यास्मीन	**जूली**
(iii)	$(3x-2)\ (x+1) = 3x^2 - 2$	$(3x-2)\ (x+1) = 3x^2 + x - 2$

यास्मीन ने पहले व्यंजक के प्रत्येक पद से दूसरे व्यंजक के प्रत्येक पद में गुणा नहीं किया है अतः यास्मीन का हल गलत है।

(iv)	$(2x+3)^2 = (4x+9)$	$(2x+3)^2 = (4x^2 + 12x + 9)$



____

____

त्रुटि–5 संतोष एवं अमरकांत ने व्यंजकों का भाग निम्नलिखित प्रकार से किया।

संतोष

$$\frac{2x+5}{5} = 2x+1$$

अमरकांत

$$\frac{2x+5}{5} = \frac{2x}{5}+5$$

आप जानते हैं भाग में $\frac{8}{2}=4$ जब हम $\frac{8}{2}=4\,;\,8=8$ वज्र गुणन करते हैं, तब हमें बराबर के दोनों ओर समान मान प्राप्त होता है।

अतः

$\frac{2x+5}{5} = 2x+1$ में $2x + 5 = 5\ (2x + 1)$ को हल कीजिए।

इसी प्रकार

$\frac{2x+5}{5} = \frac{2x}{5}+1$ में

$2x + 5 = 5\left(\frac{2x}{5}+5\right)$ को हल कीजिए।

त्रुटि–6 रिंकू ने x में x से गुणा करके $2x$ प्राप्त किया, क्या उसका गुणनफल सही है?

व्याख्या– रिंकू का गुणनफल गलत है यहाँ घातांक का नियम कार्य करेगा और समान चरों के बीच गुणा होने पर उनके घातांक बदलेंगे। अतः

$x \times x = x^1 \times x^1 = x^{1+1} = x^2$

त्रुटि–7 पदों के गुणन में समान्यतः गुणनफल के चिह्नों से ध्यान हट जाता है जिससे कई अशुद्धियाँ हो जाती हैं?

व्याख्या– पदों के गुणन में चिह्न निर्धारण हेतु निम्न नियम का उपयोग कीजिए।

(i) (+ पद) × (+ पद) = + पद

(ii) (+ पद) × (– पद) = – पद

(iii) (– पद) × (+ पद) = – पद

(iv) (– पद) × (– पद) = + पद

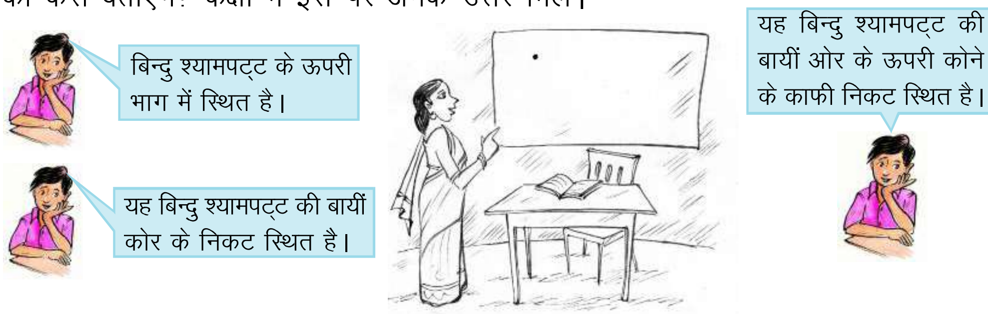
अध्याय - 15

आलेखों से परिचय

(INTRODUCTION WITH GRAPHS)

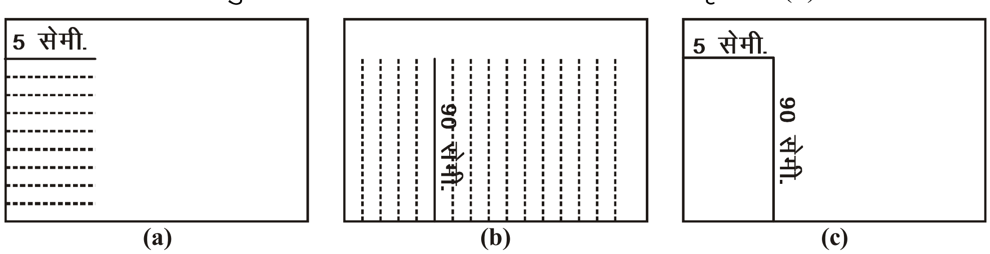
15.1 भूमिका

अध्यापिका श्यामपट्ट पर एक बिन्दु लगा देती है (आकृति–1) फिर वह विद्यार्थियों से पूछती है कि श्यामपट्ट पर अंकित बिन्दु N को आप कैसे बताएँगे? आप भी सोचिए, आप बिन्दु को कैसे बताएँगे? कक्षा में इस पर अनेक उत्तर मिले।



आकृति–1

क्या ऊपर दिए गए कथनों में से किसी भी कथन के आधार पर आप बिन्दु की ठीक–ठीक स्थिति बता सकते हैं? स्पष्ट है कि उत्तर ''नहीं'' है। परन्तु यदि आप यह कहें कि बिन्दु श्यामपट्ट की बायीं ओर से लगभग 5 सेमी. दूर है तो इससे आपको बिन्दु की स्थिति का आभास तो हो जाता है फिर भी ठीक–ठाक स्थिति का पता नहीं चलता। सोचिए क्यों? (आकृति–2 (a)) आप कह सकते हैं कि श्यामपट्ट की नीचली कोर से 90 सेमी. की दूरी पर है। क्या अब हम बिन्दु की सही–सही स्थिति बता सकते हैं? आकृति–2(b)



आकृति–2

ऊपर की आकृतियों से स्पष्ट है कि हम श्यापमट्ट की बायीं कोर और सबसे नीचेवाली कोर से उक्त बिन्दु की स्थिति नियत कर सकते हैं।

सोचिए क्या आप उक्त दो जानकारियों–

1. बिन्दु बोर्ड के बायीं और से 5 सेमी. है।
2. बिन्दु बोर्ड की नीचली कोर से 90 सेमी. ऊपर है।

से बोर्ड पर दो अलग–अलग बिन्दु अंकित कर सकते हैं?

दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि किसी समतल पर बिन्दु की स्थिति ज्ञात करने के लिए दो स्वतंत्र सूचनाओं का होना आवश्यक होता है।

15.2 निर्देशांक

एक कक्षा में प्रत्येक विद्यार्थी की मेज को एक वर्ग के रूप में निरूपित करते हुए आकृति–3 बनाई गई है, जिसमें कुछ छात्रों के नाम, अक्षर से दर्शाए गए हैं।

9									
8			P			A			
7					N				
6			T		S				
5		K		M					
4					B				
3	E			R		Q			
2			G						
1					D				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

आकृति–3

अब हम M छात्र की मेज को ढूँढ़ते हैं। इसके लिए हमें दो संख्याएँ चाहिए।

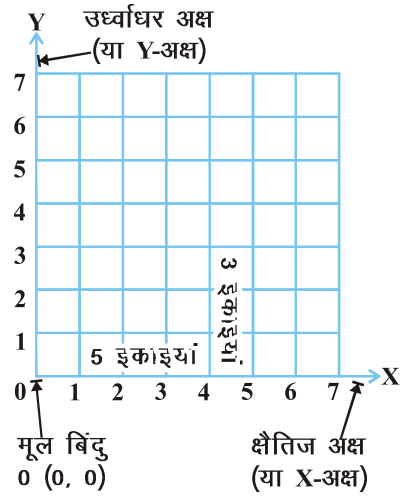
आप सोचिए कि अगर आपको M की स्थिति बतानी हो तो आप कैसे बताएँगे?

आकृति–3 में M चौथे सीट (स्तम्भ) और पाँचवें पंक्ति में है। तो M की स्थिति को (4, 5) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ पहली संख्या स्तम्भ संख्या को प्रकट करती है और दूसरी संख्या पंक्ति संख्या को प्रकट करती है। आप शेष विद्यार्थियों के बैठने की स्थिति लिखिए। उदाहरण के लिए G छात्र की स्थति – G (3, 2) लिखिए।

आकृति–4 पर ध्यान दीजिए कि बिन्दु (5, 3) जिसकी दूरी बाएँ किनारें से 5 इकाई और निचले किनारे से 3 ऊपर इकाई है, वर्गांकित काजग पर किस प्रकार अंकित किया गया है।

कहा जाता है कि महान फ्रांसीसी गणितज्ञ रेने दकार्ते (Rene Descartes) ने बिस्तर पर लेटे–लेटे एक चींटी को छत के कोने के पास चलते हुए देखा और उसने एक तल में एक बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करने से संबंधित समस्या का हल ढूँढ़ निकाला। इस पद्धति को दकार्ते के सम्मान में कार्तीय पद्धति भी कहा जाता है।

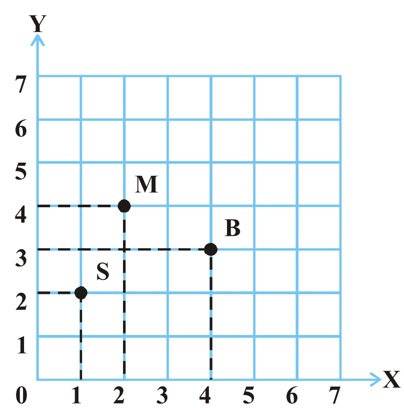
वर्गांकित कागज या आलेख कागज पर हम X - अक्ष और Y - अक्ष सुविधा के अनुसार दर्शाते हैं और जहाँ दोनों अक्ष एक दूसरे को काटती हैं, उसे मूल बिन्दु (Origin) कहा जाता है और इसे 0 से प्रकट किया जाता है। संख्या 5, बिन्दु का x - निर्देशांक तथा संख्या 3, y- निर्देशांक कहलाता है, तथा (5, 3) बिंदु के निर्देशांक है। इस प्रकार समतल पर बिन्दु की स्थिति को संख्या युग्म द्वारा दर्शाया जाता है। सुविधा के लिए क्षैतिज अक्ष पर आनेवाली संख्या को पहले तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष पर आनेवाली संख्या को बाद में लिखते हैं।



आकृति–4

उदाहरण–1. नीचे दी गई आकृति–5 को देखकर निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए;

1. बिन्दु M के x निर्देशांक और y निर्देशांक क्रमशः .... और .... है। अतः बिन्दु M के निर्देशांक (..............) है।
2. बिन्दु B के x निर्देशांक और y निर्देशांक क्रमशः .... और .... है। अतः B के निर्देशांक (..............) है।
3. बिन्दु S के x निर्देशांक .... है और y निर्देशांक .... है, तो S के निर्देशांक (..............) है।



आकृति–5

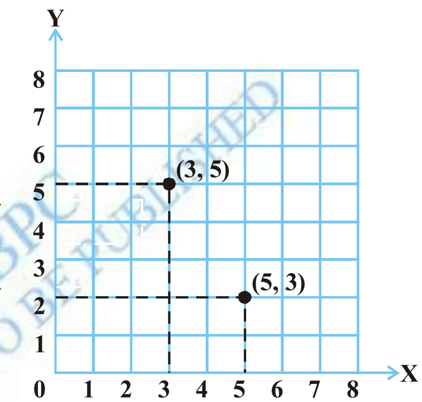
हल : (i) क्योंकि Y अक्ष से बिन्दु M की दूरी 2 एकक है, इसलिए बिन्दु M का x निर्देशांक 2 होगा। X अक्ष से बिन्दु M की दूरी 4 एकक है, इसलिए बिन्दु M का y निर्देशांक 4 होगा। अतः बिन्दु M के निर्देशांक (2, 4) है।

(ii) बिन्दु B के निर्देशांक क्रमशः 4 और 3 है। अतः B के निर्देशांक (4, 3) है।

(iii) बिन्दु S के x निर्देशांक 1 है और y निर्देशांक 2 है, तो S के निर्देशांक (1, 2) है।

उदाहरण–2. एक आलेख में बिन्दु (5, 3) अंकित कीजिए। क्या यह वही बिन्दु है, जो (3, 5) दर्शाता है।

हल : सबसे पहले वर्गीकृत कागज पर X अक्ष और Y अक्ष दर्शाते हैं। अब मूल बिन्दु (0, 0) से शुरू करके 5 एकक दाईं ओर चलकर फिर 3 एकक ऊपर की ओर चलते हैं, तो बिन्दु (5, 3) प्राप्त होता है। आकृति–6 से स्पष्ट है कि बिन्दु (5, 3) और बिन्दु (3, 5) अलग–अलग बिन्दु है।



आकृति–6

उदाहरण–3. आकृति–7 देखकर निम्न बिन्दुओं की स्थिति के लिए उपयुक्त अक्षर चुनिए–

(i) (2, 1) (ii) (1, 2) (iii) (0, 4) (iv) (4,0)

तथा निम्न बिन्दु के निर्देशांक लिखिए– (v) A (vi) B (vii) K

हल : (i) (2, 1) है बिन्दु R

(ii) (1, 2) है बिन्दु Q

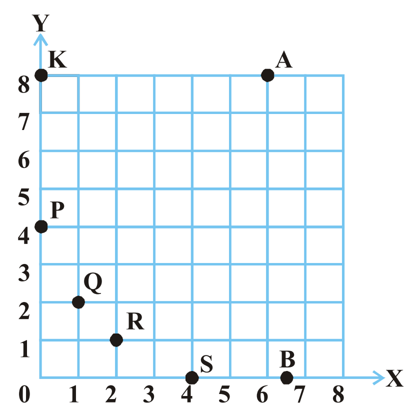
(iii) (0, 4) है बिन्दु P

(iv) (4, 0) है बिन्दु S

(v) बिन्दु A के निर्देशांक है (6, 8)

(vi) बिन्दु B के निर्देशांक है (6.5, 0)

(vii) बिन्दु K के निर्देशांक है (0, 8)

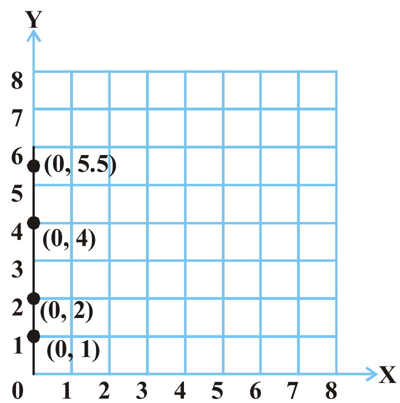


आकृति–7

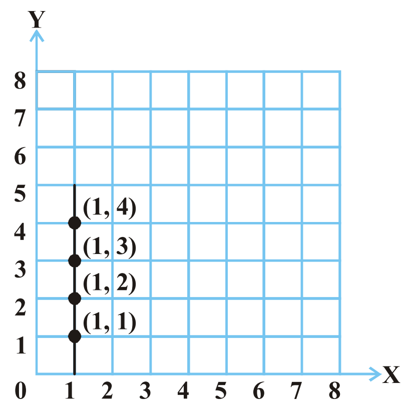
उदाहरण–4. ग्राफ पेपर पर निम्न बिन्दुओं को दर्शाइए–

(i)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 4)	(0, 5.5)
(ii)	P (1, 1)	Q (1,2)	R (1, 3)	S (1, 4)
(iii)	A (1, 4)	B (2, 4)	C(3, 4)	D (4, 4)
(iv)	E (6, 1)	F (5, 2)	G (4, 3)	H (3, 4)

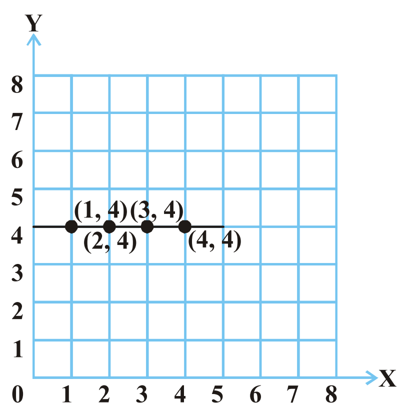
क्या ये बिन्दु एक ही सरल रेखा पर है?



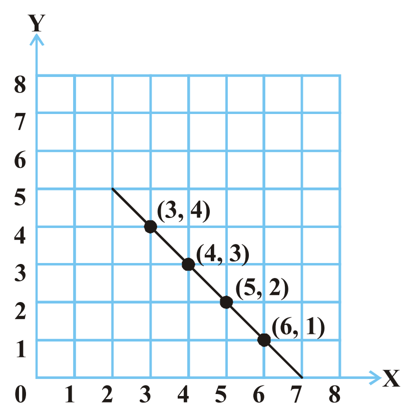
यहाँ सभी बिन्दु एक ही रेखा, Y अक्ष पर है।



यहाँ सभी बिन्दु एक ही रेखा PS पर स्थित है।



यहाँ सभी बिन्दु एक ही रेखा AD पर स्थिति है। यह X अक्ष के समांतर है।



यहाँ सभी बिन्दु एक ही रेखा HE पर स्थित है।

ऊपर के उदाहरणों में अंकित बिन्दुओं को मिलाने पर प्राप्त आलेख एक सरल रेखा प्राप्त होती है। ऐसे आलेखों को रैखिक आलेख कहते हैं।

15.3 आरेख के अनुप्रयोग (Application of Graph)

आपने सीधे एवं प्रतिलोम अनुपात अध्याय में सीखा था कि एक राशि दूसरी राशि को प्रभावित करती है। चीनी की अधिक खपत, चीनी पर खर्च को प्रभावित करती है। बिजली का बिल उपयोग की गई बिजली की मात्रा पर निर्भर करती है। हम कहते हैं कि बिजली की मात्रा एक स्वतंत्र चर है जबकि बिजली का बिल एक आश्रित चर है। ऐसी राशियों के संबंध को हम आलेख द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं। आगे हम भुजा–परिमाप ग्राफ, समय–दूरी ग्राफ आदि विभिन्न स्थितियों को आलेख से दर्शाएँगे।

वर्ग की भुजा एवं परिमाप के मध्य आलेख

आप वर्ग के क्षेत्रफल एवं परिमाप के बारे में जानते हैं। बताइए–

यदि वर्ग की भुजा 5 सेमी. हो तो

उसका परिमाप क्या होगा?

इसी प्रकार यदि वर्ग की भुजा a इकाई हो तो उसका परिमाप (P) = 4a इकाई होगा

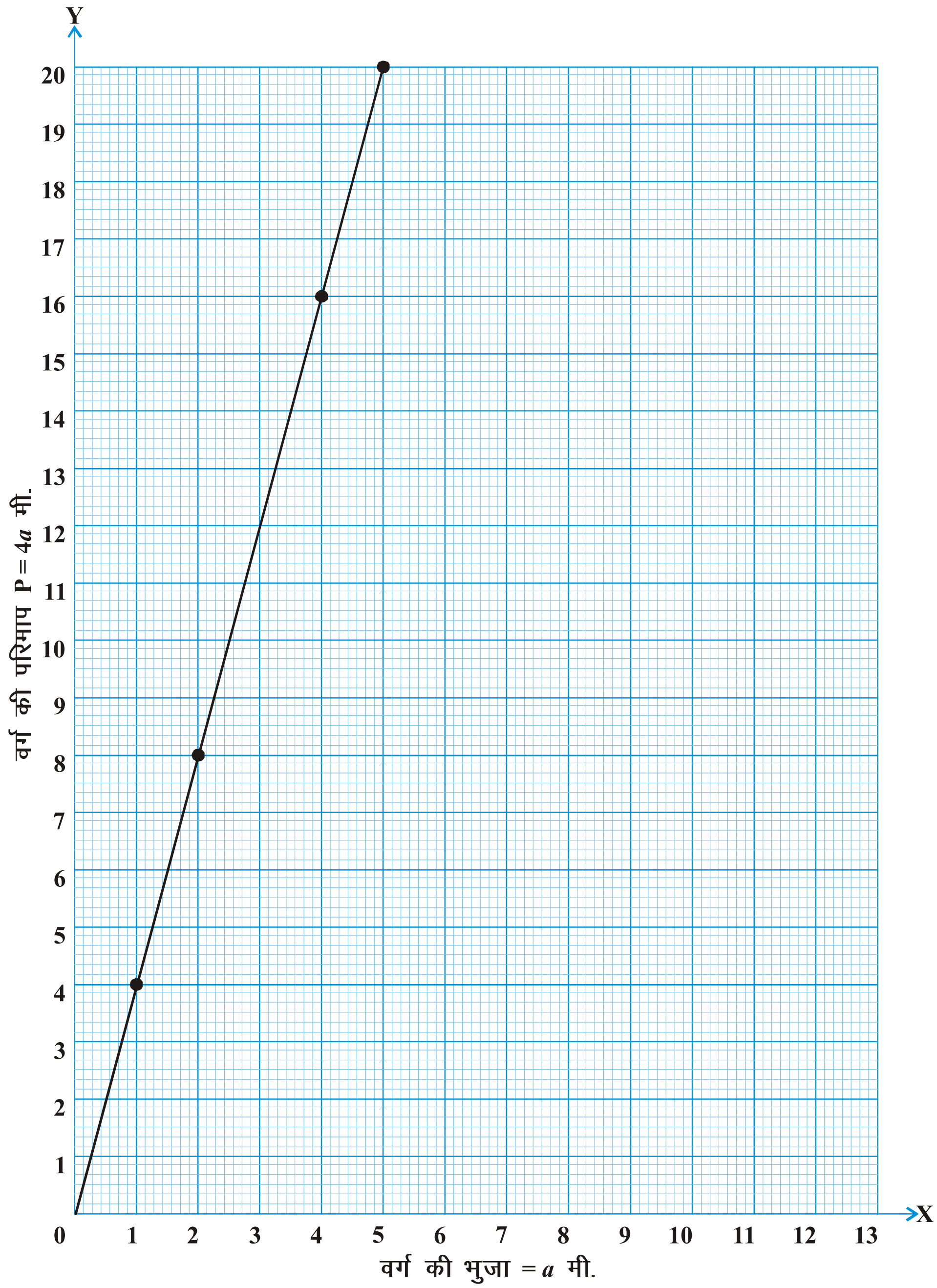
अर्थात् $P = 4a$

अब a के विभिन्न मानों के लिए P का संगत मान निम्न तालिका में भरिए–

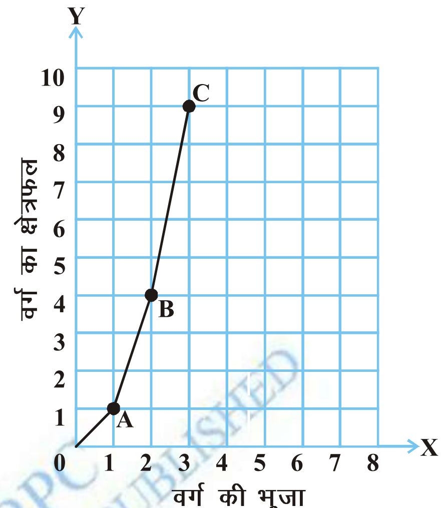
a	0	1	2	3	4	5
$P = 4a$	0	4	8	....	16	....

अब ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं 0 (0, 0), A (1, 4), B (2, 8), C (3, 12), D (4, 16) और E (5, 20) को निम्न रूप से दर्शाया जा सकता है–

इसी प्रकार आप समबाहु त्रिभुज के लिए परिमाप व क्षेत्रफल के लिए अलग–अलग तालिका बना ग्राफ खींचिए।


Y
X
वर्ग की परिमाप P = 4a मी.
वर्ग की भुजा = a मी.
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

उदाहरण–5. वर्ग की भुजा एवं क्षेत्रफल के मध्य आरेख खीचें। इसमें दर्शाए कि भुजा 3 इकाई रहने पर क्षेत्रफल क्या होगा?



हल : हम जानते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा^{2}

या $A = x^2$

अतः x के विभिन्न मानों के संगत A का मान निम्न प्रकार होगा–

$x = 0 \Rightarrow A = O^2 = 0$

$x = 1 \Rightarrow A = 1^2 = 1$

$x = 2 \Rightarrow A = 2^2 = 4$

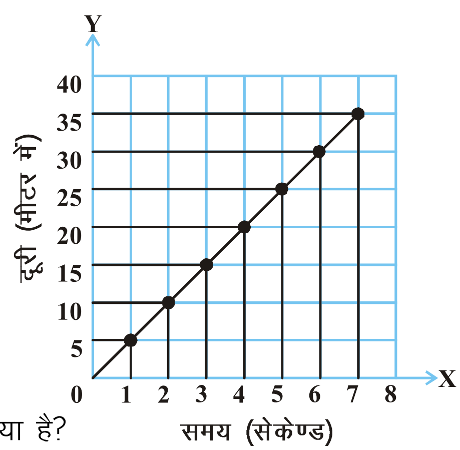
$x = 3 \Rightarrow A = 3^2 = 9$

अतः 0 (0, 0), A (1, 1), B (2, 4), C (3, 9) बिन्दुओं को आरेख पर दर्शाते हैं–

अतः भुजा 3 इकाई रहने पर क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई है।

15.4 आरेख को पढ़ना (Readings of Graph)

अब तक हमने वर्ग की भुजा एवं परिमाप, वर्ग की भुजा एवं क्षेत्रफल के मध्य आरेख खींचा। इसी प्रकार संख्याओं के गुणज (जैसे 3 के गुणज = 3, 6, 9, 12, ...), समय तथा साधारण ब्याज आदि के मध्य आप आरेख खींच सकते हैं। अब हम देखें कि दिए गए आरेख को कैसे पढ़ सकते हैं? निम्न उदाहरणों को देखिए–



उदाहरण–6. आरेख को ध्यानपूर्वक देखिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

1. 2 सेकेण्ड में तय की गई दूरी क्या है?
2. 6 सेकेण्ड में तय की गई दूरी क्या है?
3. 20 मी. जाने में लगा समय कितना है?
4. वाहन की चाल प्रति सेकेण्ड क्या है?

हल : आरेख से स्पष्ट है कि–

1. जब समय = 2 सेकेण्ड तब दूरी = 10 मीटर
2. जब समय = 6 सेकेण्ड तब दूरी = 30 मीटर
3. जब दूरी = 20 मीटर तब समय = 4 सेकेण्ड
4. चाल $= \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{20}{4} =$ 5 मीटर प्रति सेकेण्ड

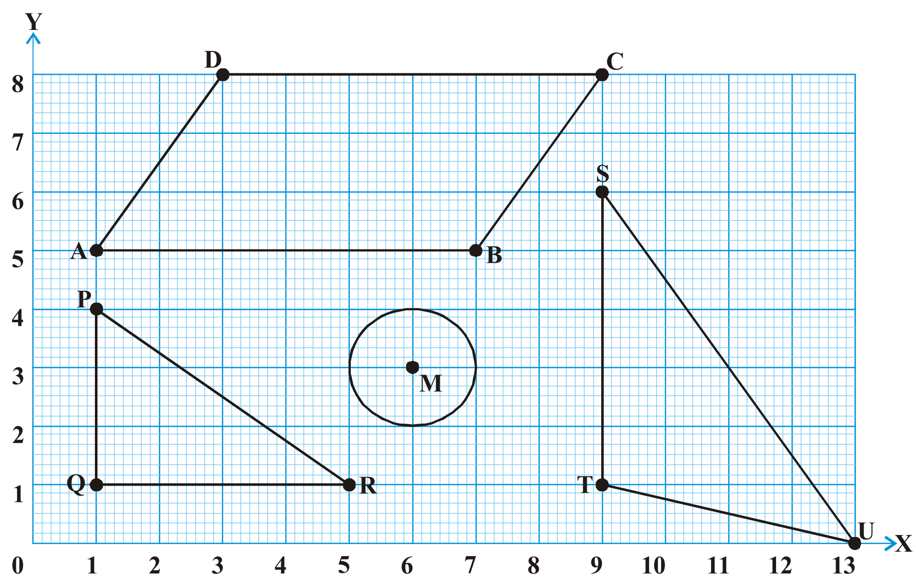
प्रश्नावली – 15.1

1. निम्न बिन्दुओं को ग्राफ में प्रदर्शित कीजिए–

(i) A (5, 3) (ii) B (3, 5) (iii) C (4, 5)

(iv) D (0, 5) (v) E (5, 0) (vi) F (2, 3)

2. अपनी ग्राफ कॉपी में निम्नलिखित चित्रों को बनाकर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए–



(i) समांतर चतुर्भुज ABCD के शीर्षों के निर्देशांक लिखिए तथा भुजा AB तथा DC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(ii) Δ PQR के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए तथा PQ एवं QR भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(iii) वृत्त के केन्द्र M के निर्देशांक ज्ञात कर वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।

(iv) Δ STU के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

3. **निम्न तालिका अनुसार समय और साधारण ब्याज के मध्य आरेख खींचिए।**

समय	1 वर्ष	2 वर्ष	3 वर्ष	4 वर्ष
सा. ब्याज	60 रु.	120 रु.	180 रु.	240 रु.

4. एक रेलगाड़ी 80 किमी. प्रति घण्टे की नियम चाल से चल रही है। विभिन्न समयों में तय की गई संगत दूरी के मध्य आरेख खींचिए।

5. **सत्य या असत्य लिखिए–**

(i) किसी बिन्दु की स्थिति को संख्या युग्म द्वारा दर्शाया जाता है।

(ii) संख्या युग्म को बिन्दु का निर्देशांक कहते हैं।

(iii) X अक्ष पर y के निर्देशांक शून्य तथा Y अक्ष पर x के निर्देशांक शून्य होते हैं।

(iv) मूल बिन्दु का निर्देशांक (1, 1) होता है।

हमने सीखा

1. किसी बिन्दु की स्थिति को संख्या युग्म द्वारा दर्शाया जाता है।
2. जहाँ X और Y अक्ष एक दूसरे को काटती है, उसे मूल बिन्दु (origin) कहा जाता है।
3. सुविधा के लिए क्षैतिज अक्ष पर आनेवाली संख्या को पहले तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष पर आनेवाली संख्या को बाद में लिखते हैं।
4. X अक्ष पर y के निर्देशांक शून्य तथा Y अक्ष पर x के निर्देशांक शून्य होते हैं।
5. जब निर्देशांक के बिन्दुओं को मिलाने पर सरल रेखा प्राप्त हो तो रैखिक आलेख कहलाते हैं। इसमें दोनों चरों में अनुक्रमानुपाती संबंध होता है।

गणित

आठवीं कक्षा के लिए गणित की पाठ्य-पुस्तक

(राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार, द्वारा विकसित)
बिहार स्टेट टेक्स्टबुक पब्लिशिंग कॉरपोरेशन लिमिटेड

निदेशक (प्राथमिक शिक्षा), शिक्षा विभाग, बिहार सरकार द्वारा स्वीकृत।

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार, पटना के सौजन्य से सम्पूर्ण बिहार राज्य के निमित्त।

सर्व शिक्षा अभियान कार्यक्रम के अन्तर्गत
पाठ्य-पुस्तकों का निःशुल्क वितरण।
क्रय-विक्रय दण्डनीय अपराध।

सर्व शिक्षा अभियान : 2013-14 - 16,68,659

बिहार स्टेट टेक्स्टबुक पब्लिशिंग कॉरपोरेशन लिमिटेड, पाठ्य-पुस्तक भवन, बुद्धमार्ग, पटना - 800 001 द्वारा प्रकाशित तथा पटना ऑफसेट प्रेस, नया टोला, पटना - 4 द्वारा एच. पी. सी. के 70 जी. एस. एम. क्रीम वोभ टेक्स्ट पेपर (वाटर मार्क) तथा एच. पी. सी. के 130 जी. एस. एम. ह्वाइट (वाटर मार्क) आवरण पेपर पर कुल 7,81,226 प्रतियाँ 18 × 24 सेमी. साईज में मुद्रित।

प्राक्कथन

शिक्षा विभाग, बिहार सरकार के निर्णयानुसार अप्रैल, 2009 से प्रथम चरण में राज्य के कक्षा IX हेतु नए पाठ्यक्रम को लागू किया गया। इस क्रम में शैक्षिक सत्र 2010-11 के लिए वर्ग I, III, VI एवं X की सभी भाषायी एवं गैर भाषायी पाठ्य-पुस्तकें नए पाठ्यक्रम के अनुरूप लागू की गयीं। इस नए पाठ्यक्रम के आलोक में एन०सी०ई०आर०टी०, नई दिल्ली द्वारा विकसित वर्ग X की गणित एवं विज्ञान तथा एस0सी0ई0आर0टी0, बिहार, पटना द्वारा विकसित वर्ग I, III, VI एवं X की सभी अन्य भाषायी एवं गैर भाषायी पुस्तकें बिहार राज्य पाठ्य-पुस्तक निगम द्वारा आवरण चित्रण कर मुद्रित की गयीं। इस सिलसिले की कड़ी को आगे बढ़ाते हुए शैक्षिक सत्र 2011-12 के लिए वर्ग- II, IV एवं VII तथा शैक्षिक सत्र 2012-13 के लिए वर्ग V एवं VIII की नई पाठ्य-पुस्तकें बिहार राज्य के छात्र/छात्राओं के लिए उपलब्ध करायी गयीं। साथ-ही-साथ वर्ग I से VIII तक की पुस्तकों का नया परिमार्जित रूप भी शैक्षिक सत्र 2013-14 के लिए एस०सी०ई०आर०टी०, बिहार, पटना के सौजन्य से प्रस्तुत किया जा रहा है।

बिहार राज्य में विद्यालयीय शिक्षा के गुणवत्तापूर्ण शिक्षा के लिए माननीय मुख्यमंत्री, बिहार, श्री नीतीश कुमार, शिक्षा मंत्री, श्री पी०के० शाही एवं शिक्षा विभाग के प्रधान सचिव, श्री अमरजीत सिन्हा के मार्ग दर्शन के प्रति हम हृदय से कृतज्ञ हैं।

एन०सी०ई०आर०टी०, नई दिल्ली तथ एस०सी०ई०आर०टी०, बिहार, पटना के निदेशक के भी हम आभारी हैं जिन्होंने अपना सहयोग प्रदान किया।

बिहार राज्य पाठ्य-पुस्तक प्रकाशन निगम छात्रों, अभिभावकों, शिक्षकों, शिक्षाविदों की टिप्पणियों एवं सुझावों का सदैव स्वागत करेगा, जिससे बिहार राज्य को देश के शिक्षा जगत में उच्चतम स्थान दिलाने में हमारा प्रयास सहायक सिद्ध हो सके।

जे०के०पी० सिंह, भा०रे०का०से०
प्रबन्ध निदेशक
बिहार राज्य पाठ्य-पुस्तक प्रकाशन निगम लि०

दिशा बोध–सह–पाठ्यपुस्तक विकास समन्वय समिति

- **श्री राहुल सिंह**, राज्य परियोजना निदेशक, बिहार शिक्षा परियोजना परिषद्, पटना
- **श्री रामशरणागत सिंह**, संयुक्त निदेशक, शिक्षा विभाग, बिहार सरकार

  विशेष कार्य पदाधिकारी, बी.एस.टी.बी.पी.सी.,पटना
- **श्री अमित कुमार**, सहायक निदेशक, प्राथमिक शिक्षा निदेशालय, बिहार सरकार
- **डॉ. श्वेता सांडिल्य**, शिक्षा विशेषज्ञ, यूनिसेफ, पटना
- **श्री हसन वारिस**, निदेशक, एस.सी.ई.आर.टी., पटना
- **श्री मधुसूदन पासवान**, कार्यक्रम पदाधिकारी, बिहार शिक्षा परियोजना परिषद्, पटना
- **डॉ. एस.ए. मुईन**, विभागाध्यक्ष एस.सी.ई.आर.टी., पटना
- **डॉ. ज्ञानदेव मणि त्रिपाठी**, प्राचार्य मैत्रेय कॉलेज ऑफ एजुकेशन एण्ड मैनेजमेंट, हाजीपुर
- **डा॰ उदय उज्जवल**, अपर कार्यक्रम पदाधिकारी, बिहार शिक्षा परियोजना परिषद्, पटना

पाठ्यपुस्तक विकास समिति

- **डॉ. हृदयकांत दीवान**, विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर, राजस्थान
- **डॉ. अनिल कुमार तेवतिया**, वरिष्ठ व्याख्याता, एससीईआरटी, दिल्ली
- **डॉ. सत्यवीर सिंह**, शिक्षा निदेशालय, दिल्ली

लेखक सदस्य

- **इन्दरमोहन सिंह छाबड़ा**, विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर, राजस्थान
- **श्री मनोज कुमार झा**, शिक्षक, राजकीय आदर्श विपिन मध्य विद्यालय, बेतिया
- **श्री दिलीप कुमार**, शिक्षक, मध्य विद्यालय ककड़िया, नूरसराय नालंदा
- **श्री मृत्युंजय कुमार ओझा**, शिक्षक, उत्क्रमित मध्य विद्यालय पैगा बड़हरा, भोजपुर
- **श्री राजेन्द्र शर्मा**, शिक्षक, वर्धा मध्य विद्यालय, गया
- **श्री नागेन्द्र पंडित**, शिक्षक, मध्य विद्यालय उत्तलीबारा, टनकुप्पा, गया
- **श्री सिद्धेश्वर ठाकुर**, शिक्षक, मध्य विद्यालय मैगरा, डुमरिया, गया
- **श्री गोविन्द प्रसाद**, शिक्षक, उत्क्रमित मध्य विद्यालय, पैगा, बड़हरा, भोजपुर
- **श्री नवीन कुमार**, शिक्षक, मध्य विद्यालय मेहन्दिया बाजार, कलेर, अरवल

समन्वयक

श्री स्नेहाशीष दास, व्याख्याता एस.सी.ई.आर.टी., पटना
श्री राधेरमण प्रसाद, व्याख्याता एस.सी.ई.आर.टी., पटना

समीक्षक

डॉ. ललित कुमार, पटना ट्रेनिंग कॉलेज, पटना विश्वविद्यालय, पटना
रिज़वान रिजवी, शिक्षक रा. उच्च माध्यमिक विद्यालय, शास्त्रीनगर, पटना

चित्रांकन एवं पृष्ठ सज्जा

श्री प्रशांत सोनी एवं एस. एम. इकराम, शाकिर अहमद, इसरार अहमद विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर (राजस्थान)

आभार : यूनिसेफ, बिहार

आमुख

बिहार के ग्रामीण क्षेत्र के संदर्भ को ध्यान में रखते हुए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005 के आधार पर बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2008 का निर्माण किया गया है। पाठ्यचर्याओं का मार्गदर्शक सिद्धान्त है ''बच्चों के ज्ञान को विद्यालय के बाहरी जीवन से जोड़ना तथा यह सुनिश्चित करना कि पढ़ाई रटन्त प्रणाली से मुक्त हो।'' राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 एवं बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2008 पर आधारित गणित के पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकों में इस बुनियादी बात पर अमल करने का प्रयास है कि बच्चे खुद अपने ज्ञान को गढ़ सकें और ''करके सीखने'' के आधार पर अवधारणाओं को आत्मसात् कर सकें। आशा है यह प्रयास हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति 1986 में वर्णित बाल केन्द्रित शिक्षा के लिए बल प्रदान करेगा तथा इस नीति का पक्ष मजबूत करते हुए 'सीखना बिना बोझ के' की प्रक्रिया को गति प्रदान करेगा।

बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2008 के आलोक में उच्च प्राथमिक स्तर की कक्षा–6 एवं 7 की गणित की पाठ्यपुस्तकों का विकास पहले ही किया जा चुका है। सभी स्तरों पर गणित की विभिन्न अवधारणाओं को स्पष्ट करने हेतु दैनिक जीवन से संबंधित गतिविधियों को पाठ्यपुस्तकों में समाविष्ट किया गया था।

उच्च प्राथमिक शिक्षा के अंतिम सोपान के लिए विकसित प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक के पाठ भी गतिविधि–आधारित हैं जिनमें कक्षा–7 तक की सभी अवधारणाओं का पुनरावलोकन करते हुए कक्षा–8 की अवधारणाओं को कक्षा–9 के लिए निर्धारित पाठ्यक्रम से जोड़कर विकसित किया गया है। गणित की प्रकृति तर्क–आधारित है। अतः गतिविधि आधारित शिक्षण से बच्चे स्वयं खोजी बनकर अपनी तार्किक शक्ति का विकास कर पायेंगे, परन्तु इसमें शिक्षको के सहयोग की महती आवश्यकता है। शिक्षक विद्यार्थियों को अवधारणाओं के स्पष्टीकरण हेतु गतिविधियों में शामिल कराकर तथा उनको सहयोग देकर उनके ज्ञान में सतत संवर्धन करेंगे। साथ ही पुस्तक के मूल उद्देश्य को समझकर स्थान, समय आदि से मुक्त रखें तो बच्चे पाठ्यपुस्तक में दी गई अवधारणाओं को स्पष्ट करते हुए नए ज्ञान का सृजन कर सकेंगे। शिक्षण और सतत एवं व्यापक मूल्यांकन की विधियां भी इस बात को तय करेंगी कि प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक बच्चों की विद्यालयी जीवन को मानसिक दबाव तथा नीरसता की जगह खुशी का अनुभव कराने में प्रभावी सिद्ध होगी। बोझ की समस्या से निपटने में प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक सोच–विचार, छोटे–छोटे समूहों में बातचीत एवं तर्क तथा हाथ से की जाने वाली दैनिक जीवन से संबंधित कम खर्चीली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक के विकास हेतु राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् पटना ने विभिन्न स्तर के शिक्षकों की विभिन्न कार्यशालाएं आयोजित की जिनमें राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् पटना, यूनिसेफ बिहार, विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर राजस्थान, एकलव्य भोपाल एवं अन्य महत्त्वपूर्ण प्रकाशनों से प्रकाशित संदर्भ एवं पाठ्यपुस्तकों का अध्ययन कर राज्य के प्रारंभिक स्तर के शिक्षक समूह द्वारा पुस्तक की पाण्डुलिपि तैयार की गई। इस पाण्डुलिपि को राज्य एवं राज्य के बाहर से आये विद्वानों, विषय–विशेषज्ञों तथा शिक्षाविदों द्वारा समीक्षोपरांत पुस्तक का परिष्कृत रूप प्रस्तुत है। परिषद् उन सभी विद्वत्जनों का आभारी है जिन्होंने पाठ्य–पुस्तक के विकास में किसी–न–किसी रूप में अपना महत्वपूर्ण योगदान दिया है।राज्य एवं राज्य के बाहर के शिक्षकों एवं अन्य विद्वत्जनों द्वारा प्राप्त सुझावों के आलोक में पुस्तक को संशोधित एवं परिवर्द्धित किया गया है। परिषद् को आगे भी आपके बहुमूल्य सुझावों की अपेक्षा है। प्राप्त सुझावों के प्रति आभार व्यक्त करते हुए आगे भी परिषद् सजग होकर आपके सुझावों के आलोक में पुस्तक को परिष्कृत करने का प्रयास करेगा।

हसन वारिस

निदेशक

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्
बिहार (पटना)

विषय – सूची